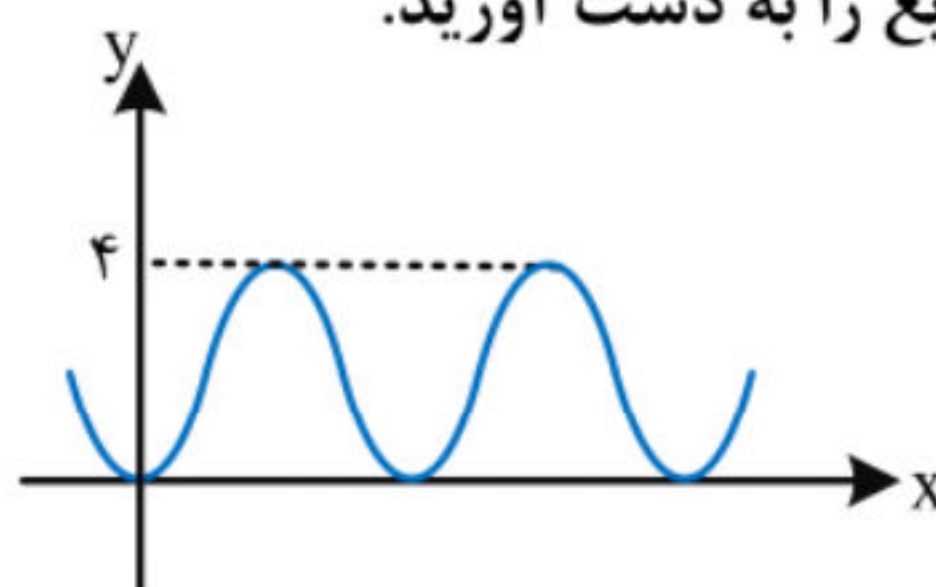
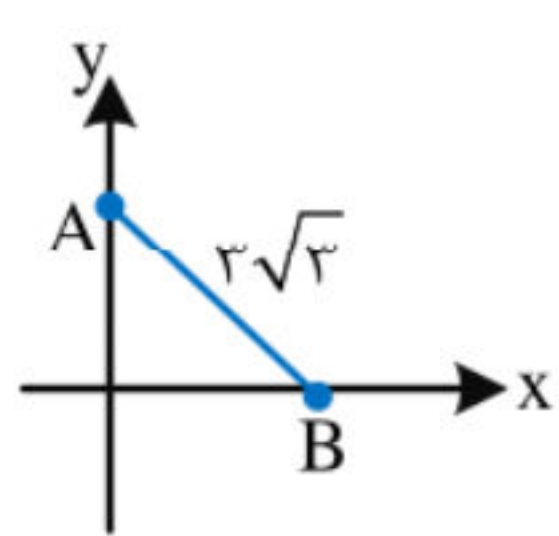
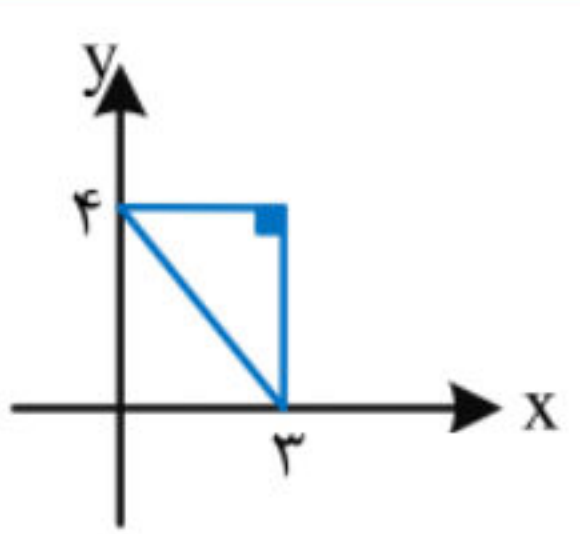


آزمون شبیه‌ساز نهایی درس: ریاضی ۳		ساعت شروع:		تاریخ امتحان: خردادماه ۱۴۰۳		مدت امتحان: ۱۳۵ دقیقه	
نام و نام خانوادگی:		رشته: علوم تجربی		پایه دوازدهم دوره متوسطه		تعداد صفحات: ۲ صفحه	
آزمون شبیه‌ساز امتحان نهایی				گروه آموزشی ماز			
ردیف		سؤالات (پاسخ‌برگ دارد)		[استفاده از ماشین حساب ساده مجاز می‌باشد]			
نمره							
۱	درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. الف) دوره تناوب $f(x) = 4 - 2\cos \frac{\pi}{3}x$ با بیشترین مقدار آن برابر است. ب) طول نقطه بحرانی تابع $f(x) = 4 - x x $ برابر $x=0$ است. ج) شعاع دایره $x^2 + 4x + y^2 = 0$ برابر ۴ است.						
۲	در جاهای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید. الف) باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x) = x^n - 4x + 1$ بر $x - 1$ برابر است. ب) خروج از مرکز بیضی با قطر بزرگ ۱۸ و قطر کوچک ۱۲ برابر است. ج) اگر $f(x) = 4x + 2\sqrt{x}$ ، آن‌گاه $f^{-1}(2)$ برابر است.						
۳	اگر $f(x) = x + \sqrt{4 - x}$ و $g(x) = 2 + \sqrt{x + 2}$ دامنه تابع $f \circ g$ را به کمک تعریف یافته و مقدار $f \circ g^{-1}(3)$ را به دست آورید.						
۴	اگر $A(2, 3)$ روی نمودار $y = f(2x)$ باشد، نقطه متناظر با آن روی نمودار $y = 3 + f(\frac{x}{2})$ را به دست آورید.						
۵	شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a - 2b \cos \frac{\pi}{b}x$ است. a و b را یافته و دوره تناوب تابع را به دست آورید. 						
۶	معادله مثلثاتی $\sin 2x + \sin x - 2\cos x = 1$ را حل کنید.						
۷	هر یک از حدود زیر را به دست آورید. الف) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x^2 + 4} - x}{x^2 - 4}$ ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2 - 6x - 1} - 2x$ ج) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}^+} \frac{6 - 2x}{4\cos^2 x - 3}$						
۸	اگر $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{a + x(-1)^{[x]}}{x^2 - 4x} = -\infty$ ، حدود a را به دست آورید.						
۹	به کمک تعریف مشتق، مقدار مشتق $y = x + \frac{4}{x}$ را در $x = 1$ به دست آورید.						
ادامه سؤالات در صفحه بعد							



آزمون شبیه‌ساز نهایی درس: ریاضی ۳		ساعت شروع:	تاریخ امتحان: خردادماه ۱۴۰۳	مدت امتحان: ۱۳۵ دقیقه
نام و نام خانوادگی:		رشته: علوم تجربی	پایه دوازدهم دوره متوسطه	تعداد صفحات: ۲ صفحه
آزمون شبیه‌ساز امتحان نهایی		گروه آموزشی ماز		
ردیف	سؤالات (پاسخ‌برگ دارد)	[استفاده از ماشین حساب ساده مجاز می‌باشد]		
		نمره		

۱۰	مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست).	۱
	الف) $f(x) = \sqrt{x^2 + x} - \frac{1}{x}$	
	ب) $g(x) = x\sqrt{\frac{x}{x+4}}$	
۱۱	اگر خط $y = 2x - 1$ مماس بر نمودار $y = f(x)$ در $x = 1$ باشد، مشتق $y = (x+3)f(\frac{1}{x})$ در $x = 1$ چه عددی است؟	۱/۵
۱۲	آهنگ تغییر متوسط $y = x + \sqrt{2x+1}$ در بازه $[0, 4]$ با آهنگ تغییر لحظه‌ای در کدام نقطه برابر است؟	۱
۱۳	اگر $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2$ با دامنه $[-2, 2]$ داده شده باشد، $\min$ مطلق و $\max$ مطلق تابع را مشخص کنید.	۰/۷۵
۱۴	اکستریم نسبی تابع $f(x) = (x-\alpha)^2(x-\beta)$ نقطه $A(1, -4)$ است، مقدار α و β را به دست آورید.	۱/۲۵
۱۵	پاره خط AB با طول $3\sqrt{3}$ مطابق شکل را حول محور عرض‌ها دوران می‌دهیم. بیشترین حجم مخروط به دست آمده چه عددی است؟	۱
		
۱۶	از دوران شکل مقابل حول محور y ها شکلی با کدام حجم به دست می‌آید؟	۱/۵
		
۱۷	دو دایره $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$ و $(x+1)^2 + (y-2)^2 = m$ مماس خارج هستند. مقدار m چه عددی است؟	۱/۵
۱۸	دو ظرف یکسان داریم. در ظرف A ، ۴ مهره سفید و ۶ مهره قرمز و در ظرف B ، ۳ مهره سفید و ۳ مهره قرمز داریم. از هر ظرف یک مهره خارج می‌کنیم. به کدام احتمال، مهره‌ها همرنگ نیستند؟	۲
۲۰	موفق باشید.	

آزمون شبیه ساز نهایی درس: ریاضی ۳	ساعت شروع:	تاریخ امتحان: خرداد ماه ۱۴۰۳	مدت امتحان: ۱۳۵ دقیقه
نام و نام خانوادگی:	رشته: علوم تجربی	پایه دوازدهم دوره متوسطه	تعداد صفحات: ۱۸ صفحه
آزمون شبیه ساز امتحان نهایی		گروه آموزشی ماز	
ردیف	پاسخ نامه	نمره	
۱	 مصحح شو! (الف) درست (۰/۲۵) (ب) درست (۰/۲۵) (ج) نادرست (۰/۲۵) $f(x) = 4 - 2 \cos \frac{\pi}{3} x \Rightarrow T = 6, \max = 6$ $x \geq 0: f(x) = 4 - x^2 \Rightarrow f'(x) = -2x \quad f'_+(\cdot) = 0 \Rightarrow f'(\cdot) = 0$ $x < 0: f(x) = 4 + x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x \quad f'_-(\cdot) = 0$ $x = 0$ طول نقطه بحرانی است. $(x+2)^2 + y^2 = 4 \Rightarrow R = 2$  یکسری نکات رو باهم مرور کنیم: نکته ۱: در توابع مثلثاتی $y = a \sin(bx + d) + c$ و $y = a \cos(bx + d) + c$ داریم: $\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{\max - \min}{2} \\ c = \frac{\max + \min}{2} \end{cases}$ مقدار $\max = a + c$ مقدار ثابت $+ \cos \text{ یا } \sin$: بیشترین مقدار مقدار $\min = - a + c$ مقدار ثابت $+ \cos \text{ یا } \sin$: کمترین مقدار دوره تناوب $= \frac{2\pi}{ \text{ضریب } x } \Rightarrow T = \frac{2\pi}{ b }$ نکته ۲: در تابع مثلثاتی $y = a \tan(bx) + c$ دوره تناوب برابر است با: $T = \frac{\pi}{ \text{ضریب } x } \Rightarrow T = \frac{\pi}{ b }$ نکته ۳: اگر تابع $f(x)$ در بازه $[a, b]$ تعریف شده باشد، نقاط بحرانی تابع f عبارتند از: نقاط ابتدا و انتهای بازه نقاطی که مشتق تابع در آن‌ها برابر صفر است. نقاطی که تابع در آن‌ها مشتق ناپذیر است. مثال: نقاط بحرانی تابع $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ را در صورت وجود به دست آورید. ابتدا دامنه تابع f را پیدا می‌کنیم: $4 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 4 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2$ می‌دانیم که نقاط ابتدا و انتهای بازه تعریف تابع، جزء نقاط بحرانی‌اند پس $x = -2$ و $x = 2$ بحرانی‌اند. از طرفی می‌دانیم در نقاطی که مشتق تابع برابر صفر باشد، آن نقاط نیز جزء نقاط بحرانی‌اند، لذا: $f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{4 - x^2}} = 0 \Rightarrow -2x = 0 \Rightarrow x = 0$ بنابراین نقاط بحرانی تابع f عبارتند از: $x = -2$ و $x = +2$، $x = 0$. نکته ۴: معادله دایره: $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$ معادله استاندارد دایره (α, β) مرکز دایره R شعاع دایره	۰/۷۵	



معادله گسترده دایره: $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

شعاع دایره $R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$ و مرکز دایره $\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$

توجه: ضریب x^2 و y^2 یکسان و برابر یک است.

مثال: مرکز و شعاع دایره $2x^2 + 2y^2 + 4x - 8y + 2 = 0$ را به دست آورید.

ابتدا ضریب x^2 و y^2 باید برابر یک باشد.

$$2x^2 + 2y^2 + 4x - 8y + 2 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$$

مرکز دایره $\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) = \left(-\frac{2}{2}, -\frac{(-4)}{2}\right) = (-1, 2)$

شعاع دایره $R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 16 - 4} = 2$$

۰/۷۵

مصحح شو!

الف) -2 (۰/۲۵)

$$r = f(1) = 1 - 4 + 1 = -2 \Rightarrow r = -2$$

ب) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ (۰/۲۵)

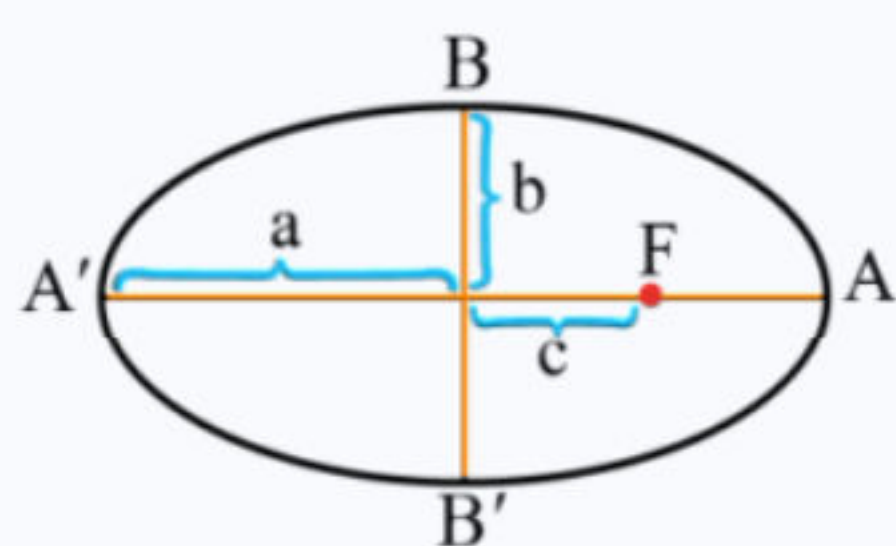
$$\begin{cases} 2a = 18 \\ 2b = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 9 \\ b = 6 \end{cases} \Rightarrow c = \sqrt{81 - 36} = \sqrt{45}$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{45}}{9} = \frac{3\sqrt{5}}{9} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

ج) $\frac{1}{4}$ (۰/۲۵)

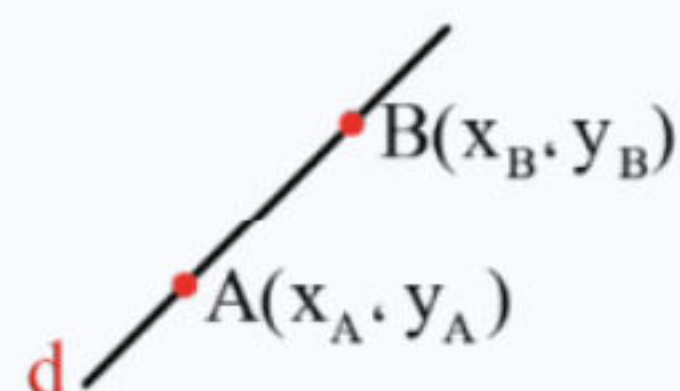
$$f(x) = 4x + 2\sqrt{x} \Rightarrow f^{-1}(2) = \alpha \Rightarrow f(\alpha) = 2$$

$$4\alpha + 2\sqrt{\alpha} = 2 \Rightarrow 2\alpha + \sqrt{\alpha} - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{\alpha} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{4} \\ \sqrt{\alpha} = -1 \text{ غ قق} \end{cases}$$



$$e = \frac{c}{a} \Rightarrow e^2 = \frac{c^2}{a^2} = 1 - \frac{b^2}{a^2} \Rightarrow \frac{b^2}{a^2} = 1 - e^2 \Rightarrow \frac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2}$$

نکته: تابع $f(x) = ax + b$ ، تابعی خطی با شیب a و عرض از مبدأ b است.



$$d \text{ شیب خط} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

حالا یادآوری کنیم...

نکته: در یک بیضی خروج از مرکز برابر است با:



نکته: اگر f تابعی وارون پذیر باشد، در این صورت داریم:

$$f(a) = b \Rightarrow f^{-1}(b) = a$$

مثال: در تابع $f(x) = \sqrt{x+3}$ ، حاصل $f^{-1}(3)$ را به دست آورید.

فرض می کنیم که $f^{-1}(3) = \alpha$ باشد در این صورت به جای حل این معادله، معادله $f(\alpha) = 3$ را حل می کنیم، پس:

$$f(\alpha) = 3 \Rightarrow \sqrt{\alpha+3} = 3 \Rightarrow \alpha+3 = 9 \Rightarrow \alpha = 6$$

پس $f^{-1}(3) = 6$ است.

نکته: برای به دست آوردن ضابطه تابع وارون یک تابع یک به یک مانند f ، در معادله $y = f(x)$ در صورت امکان x را بر حسب y محاسبه می کنیم سپس با تبدیل y به x ، $f^{-1}(x)$ را به دست می آوریم.

مثال: ضابطه وارون تابع $f(x) = \frac{-8x+3}{2}$ را به دست آورید:

$$f(x) = \frac{-8x+3}{2} \Rightarrow y = \frac{-8x+3}{2}$$

$$\Rightarrow 2y = -8x+3 \Rightarrow 2y-3 = -8x \Rightarrow x = \frac{2y-3}{-8}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(y) = \frac{2y-3}{-8} \xrightarrow{x \leftrightarrow y} f^{-1}(x) = \frac{2x-3}{-8}$$

نکته: برای این که نشان دهیم دو تابع وارون پذیر f و g وارون یکدیگرند، باید ثابت کنیم که ترکیب دو تابع f و g ، تابع همانی است به عبارت دیگر باید ثابت کنیم که:

$$\begin{cases} (f \circ g)(x) = x \\ (g \circ f)(x) = x \end{cases}$$

مثال: نشان دهید که توابع $f(x) = 3x-4$ و $g(x) = \frac{x+4}{3}$ وارون یکدیگرند.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 3g(x) - 4 = 3\left(\frac{x+4}{3}\right) - 4 = x \quad (x \in D_g)$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{f(x)+4}{3} = \frac{(3x-4)+4}{3} = x \quad (x \in D_f)$$

بنابراین دو تابع f و g وارون یکدیگرند.

۱/۵

مصصح شو!

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} \quad (۰/۲۵)$$

$$D_f = (-\infty, 4] \quad (۰/۲۵), \quad D_g = [-2, +\infty) \quad (۰/۲۵)$$

$$g(x) \in D_f \Rightarrow 2 + \sqrt{x+2} \leq 4 \Rightarrow \sqrt{x+2} \leq 2 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2 \quad (۰/۲۵)$$

$$D_{f \circ g} = D_g \cap [-2, 2] \Rightarrow [-2, 2] = D_{f \circ g} \quad (۰/۲۵)$$

$$f \circ g^{-1}(3) = \alpha \Rightarrow g^{-1}(3) = \beta \Rightarrow g(\beta) = 3 \Rightarrow \beta = -1$$

$$f \circ g^{-1}(3) = f(-1) = \alpha \Rightarrow \alpha = -1 + \sqrt{5} \quad (۰/۲۵)$$

تابع ترکیب:

اگر f و g دو تابع باشند، $f \circ g$ را ترکیب $f(g(x))$ می گوئیم، یعنی در $f(x)$ به جای x ها، تابع $g(x)$ را جایگذاری می کنیم. به همین ترتیب:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

$$(f \circ f)(x) = f(f(x))$$



	مثال: اگر $f(x) = x^2 - 2$ و $g(x) = 2x + 1$ باشند، ضابطه تابع $(g \circ f)(x)$ را به دست آورید. $(g \circ f)(x) = g(f(x))$، پس در تابع $g(x)$ به جای x ها، تابع $f(x) = x^2 - 2$ را جایگذاری و ساده می کنیم. $g(f(x)) = 2f(x) + 1 = 2(x^2 - 2) + 1 = 2x^2 - 3$ نکته: $D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$ $D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$ مثال: اگر $f(x) = \sqrt{x-1}$ و $g(x) = 2x^2 - 1$ باشد، دامنه تابع $f \circ g$ را با استفاده از تعریف به دست آورید. $\begin{cases} D_f = [1, +\infty) \\ D_g = \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 - 1 \in [1, +\infty)\}$ $\Rightarrow D_{f \circ g} = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$	
۴	مصصح شو! $A(2, 3) \in f(2x) \Rightarrow f(4) = 3 \quad (0/25)$ $y = 3 + f\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow \frac{x}{2} = 4 \Rightarrow x = 8$ نقطه متناظر $(0/25) \quad M \begin{vmatrix} 8 \\ 6 \end{vmatrix}$	۵
۵	مصصح شو! $\max = 4 \Rightarrow a + 2b = 4$ $\min = 0 \Rightarrow a - 2b = 0 \Rightarrow a = 2b \quad (0/25)$ $f(0) = 0 \Rightarrow a - 2b = 0 \Rightarrow a = 2b \quad (0/25)$ پس $a, b > 0 \Rightarrow \begin{cases} a + 2b = 4 \\ a - 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 2, b = 1 \quad (0/25)$ $f(x) = 2 - 2\cos \pi x \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\pi} = 2 \quad (0/25)$ توابع مثلثاتی: نکته ۱: در توابع مثلثاتی $y = a \sin(bx + d) + c$ و $y = a \cos(bx + d) + c$ داریم: $\begin{cases} \max = a + c \\ \min = - a + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{\max - \min}{2} \\ c = \frac{\max + \min}{2} \end{cases}$ مقدار ثابت $+ \text{ضریب} \sin$ یا $\cos$: بیشترین مقدار مقدار ثابت $- \text{ضریب} \sin$ یا $\cos$: کمترین مقدار دوره تناوب $= \frac{2\pi}{ \text{ضریب} } \Rightarrow T = \frac{2\pi}{ b }$ نکته ۲: در تابع مثلثاتی $y = a \tan(bx) + c$ دوره تناوب برابر است با: $T = \frac{\pi}{ \text{ضریب} } \Rightarrow T = \frac{\pi}{ b }$	

مثال: دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم توابع زیر را به دست آورید:

$$\bullet y = -3 \cos 2\pi x + 1 \Rightarrow \begin{cases} T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1 \\ \max = |a| + c = |-3| + 1 = 3 + 1 = 4 \\ \min = -|a| + c = -|-3| + 1 = -3 + 1 = -2 \end{cases}$$

$$\bullet y = \sqrt{3} - \cos \frac{\pi}{2} x \Rightarrow \begin{cases} T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4 \\ \max = |a| + c = |-1| + \sqrt{3} = 1 + \sqrt{3} \\ \min = -|a| + c = -|-1| + \sqrt{3} = -1 + \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\bullet y = 1 - 2 \sin \left(-\frac{\pi}{3} x \right) \Rightarrow \begin{cases} T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\left| -\frac{\pi}{3} \right|} = 6 \\ \max = |a| + c = |-2| + 1 = 2 + 1 = 3 \\ \min = -|a| + c = -|-2| + 1 = -2 + 1 = -1 \end{cases}$$

مثال: معادله یک تابع سینوسی $y = a \sin(bx) + c$ را بنویسید که برد آن $[-4, 4]$ و دوره تناوب اصلی آن ۲ است.
می‌دانیم که دوره تناوب اصلی تابع برابر ۲ است پس:

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = 2 \Rightarrow |b| = \frac{2\pi}{2} = \pi \Rightarrow b = \pm \pi$$

از طرفی نیز برد تابع برابر $[-4, 4]$ است یعنی:

$$\begin{cases} \max = |a| + c = 4 \\ \min = -|a| + c = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |a| + c = 4 \\ -|a| + c = -4 \end{cases} \xrightarrow{(+)} 2c = 0 \Rightarrow c = 0 \xrightarrow{|a|+c=4} |a| = 4 \Rightarrow a = \pm 4$$

حال:

$$\begin{cases} a = \pm 4 \\ b = \pm \pi \end{cases} \Rightarrow y = \pm 4 \sin(\pm \pi x) \Rightarrow \begin{cases} y = 4 \sin(\pi x) \\ y = 4 \sin(-\pi x) \end{cases}$$

$$\sin 2x + \sin x - 2 \cos x = 1 \Rightarrow 2 \sin x \cos x + \sin x - (1 + 2 \cos x) = 0$$

$$\sin x (2 \cos x + 1) - (1 + 2 \cos x) = 0 \quad (./ 2\Delta)$$

$$\underbrace{(2 \cos x + 1)(\sin x - 1)}_{(./ 2\Delta)} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \quad k \in \mathbb{Z} (./ 2\Delta) \\ \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \quad k \in \mathbb{Z} (./ 2\Delta) \end{cases}$$

مصحح شو!

معادلات مثلثاتی:

معادلات مثلثاتی به فرم $\sin f(x) = \sin g(x)$:

$$\sin f(x) = \sin g(x) \Rightarrow \begin{cases} f(x) = 2k\pi + g(x) \\ f(x) = 2k\pi + \pi - g(x) \end{cases}$$

حالت‌های خاص معادلات سینوسی:

معادله	جواب کلی
$\sin x = 0$	$x = k\pi$
$\sin x = 1$	$x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$
$\sin x = -1$	$x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$

مثال: معادله مثلثاتی $\sin 2x = \sin x$ را حل کنید.

$$\begin{cases} 2x = 2k\pi + x \\ 2x = 2k\pi + \pi - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

مثال: معادله مثلثاتی $\cos 2\alpha - \sin \alpha + 1 = 1$ را حل کرده و جواب‌های کلی آن را بنویسید.

می‌دانیم که $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$ است، پس:

$$(1 - 2\sin^2 \alpha) - \sin \alpha + 1 = 1 \Rightarrow 2\sin^2 \alpha + \sin \alpha - 1 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{حل معادله}} \begin{cases} \sin \alpha = -1 \Rightarrow \alpha = 2k\pi - \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \\ \sin \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin \alpha = \sin \frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2k\pi + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z} \\ \alpha = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{cases}$$

مثال: معادله مثلثاتی $\sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{4}$ را حل کنید.

ابتدا طرفین معادله را در ۲ ضرب کرده و سپس به کمک رابطه $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ داریم:

$$\begin{aligned} 2\sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} &\Rightarrow \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin 2x = \sin \frac{\pi}{3} \\ \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \\ 2x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{3} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z} \\ x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{aligned}$$

نکته: معادلات مثلثاتی به فرم $\cos f(x) = \cos g(x)$:

$$\cos f(x) = \cos g(x) \Rightarrow \begin{cases} f(x) = 2k\pi + g(x) \\ f(x) = 2k\pi - g(x) \end{cases}$$

حالت‌های خاص معادلات کسینوسی:

معادله	جواب کلی
$\cos x = 0$	$x = k\pi + \frac{\pi}{2}$
$\cos x = 1$	$x = 2k\pi$
$\cos x = -1$	$x = (2k+1)\pi$

مثال: معادله مثلثاتی $\cos x (2\cos x - 9) = 5$ را حل کنید.

$$\begin{aligned} 2\cos^2 x - 9\cos x - 5 = 0 &\xrightarrow{\text{حل معادله}} \begin{cases} \cos x = 5 \xrightarrow{-1 \leq \cos x \leq 1} \text{غ ق ق} \\ \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \cos \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \\ x = 2k\pi - \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$



$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x^2+4}-x}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+4-x^3}{(x-2)(x+2)(\sqrt[3]{(x^2+4)^2}+x^2+x\sqrt[3]{x^2+4})} \quad (0/25)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(-x^2-x-2)}{(x-2) \times 4 \times 12} = \frac{-4-2-2}{48} = -\frac{1}{6} \quad (0/25)$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2-6x-1}-2x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2-6x-1-4x^2}{\sqrt{4x^2-6x-1}+2x} \quad (0/25)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-6x-1}{2x+\sqrt{4x^2-6x-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-6x}{4x} = -\frac{3}{2} \quad (0/25)$$

$$\text{ج) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}^+} \frac{6-2x}{4\cos^2 x - 3}, \quad x > \frac{\pi}{6} \Rightarrow \cos x < \cos \frac{\pi}{6} \Rightarrow \cos^2 x < \frac{3}{4} \Rightarrow 4\cos^2 x - 3 < 0 \quad (0/25)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}^+} \frac{6-2x}{4\cos^2 x - 3} = \frac{6-\frac{\pi}{3}}{0^-} = -\infty \quad (0/25)$$



در محاسبه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ اگر حد هر دو تابع f و g در $x=a$ برابر صفر باشد به حالت مبهم $\frac{0}{0}$ خواهیم رسید و باید آن حد را به کمک عواملی نظیر اتحادها، گویا کردن و ... رفع ابهام کنیم.

در نوعی از سؤالات این حالت، صورت یا مخرج کسر (و یا گاهی هر دو) شامل عبارت‌های رادیکالی است که برای رفع ابهام از آن ابتدا باید صورت و مخرج کسر را در عبارت رادیکالی مناسب ضرب کنیم تا بتوانیم با استفاده از اتحاد مزدوج (و یا گاهی چاق و لاغر) عامل صفر کننده را شناسایی کرده و آن را از صورت و مخرج کسر حذف کنیم.

یادآوری:

$$\begin{cases} (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b \\ (\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} \mp \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}) = a \pm b \end{cases}$$

مثال: حد توابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

$$1) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{2-\sqrt{x+1}} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{2-\sqrt{x+1}} \times \frac{2+\sqrt{x+1}}{2+\sqrt{x+1}} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^2-9)(2+\sqrt{x+1})}{(2)^2-(\sqrt{x+1})^2} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^2-9)(2+\sqrt{x+1})}{4-(x+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+3)(x-3)(2+\sqrt{x+1})}{-(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \left(-(x+3)(2+\sqrt{x+1}) \right) = -6 \times 4 = -24$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-5x+6}{2x^2-7x+3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(2x-1)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-2}{2x-1} = \frac{1}{5}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x+1}}{x^2+3x+2} = \frac{0}{0}$$



$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x} + 1}{x^2 + 3x + 2} \times \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{(x+1)(x+2)(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{(x+2)(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1)} = \frac{1}{1 \times (3)} = \frac{1}{3}$$

نکته: در محاسبه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ اگر حد تابع صورت کسر عددی مخالف صفر و حد تابع مخرج کسر برابر صفر باشد در این صورت حاصل حد، نامتناهی ($+\infty$ یا $-\infty$) خواهد بود.

توجه: برای تعیین علامت ∞ باید به علامت صورت و علامت مخرج کسر توجه کنیم.

$\frac{+ \text{ عدد}}{+} = +\infty$	$\frac{- \text{ عدد}}{-} = +\infty$	$\frac{+ \text{ عدد}}{-} = -\infty$	$\frac{- \text{ عدد}}{+} = -\infty$
-------------------------------------	-------------------------------------	-------------------------------------	-------------------------------------

مثال: حدود زیر را محاسبه کنید.

$$۱) \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{2x}{x-5} = \frac{2 \times 5}{5^- - 5} = \frac{10}{-} = -\infty$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{4x+1}{(2x+1)^2} = \frac{4\left(-\frac{1}{2}\right)+1}{\left(2\left(-\frac{1}{2}\right)+1\right)^2} = \frac{-2+1}{(-1+1)^2} = \frac{-1}{+} = -\infty$$

$$۳) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1-\cos x} = \frac{1}{1-1^+} = \frac{1}{-} = +\infty$$

توجه: وقتی به جزء صحیح و یا قدر مطلق برخورد می‌کنیم، باید جزء صحیح را تعیین مقدار و قدر مطلق را تعیین علامت کنیم.

$$۱) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{[x]}{\sin x} = \frac{\left[-\right]}{-} = \frac{-1}{-} = +\infty$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{[x]-3}{x-3} = \frac{\left[3^-\right]-3}{3^- - 3} = \frac{2-3}{-} = \frac{-1}{-} = +\infty$$

$$۳) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2}{|x-3|} = \frac{2}{|3-3|} = \frac{2}{+} = +\infty$$

$$۴) \lim_{x \rightarrow \left(-\frac{1}{3}\right)} \frac{[x]}{|3x+1|} = \frac{\left[-\frac{1}{3}\right]}{\left|3\left(-\frac{1}{3}\right)+1\right|} = \frac{-1}{+} = -\infty$$

در محاسبه $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax^n + bx^{n-1} + \dots}{a'x^m + b'x^{m-1} + \dots}$; $(m, n \in \mathbb{N})$ حد عبارت صورت و مخرج کسر به سمت $+\infty$ یا $-\infty$ میل می‌کند که در این صورت

با حالت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ مواجه خواهیم بود که برای رفع ابهام از آن در صورت و مخرج کسر، جمله با بیش‌ترین توان را نگه داشته و مابقی جملات را حذف می‌کنیم، سپس با توجه به جدول زیر حاصل حد را محاسبه می‌کنیم:

نوع	حاصل حد
درجه عبارت صورت از درجه عبارت مخرج بیش‌تر باشد.	$+\infty$ یا $-\infty$
درجه عبارت صورت با درجه عبارت مخرج برابر باشد.	$\frac{a}{a'}$
درجه عبارت صورت از درجه عبارت مخرج کم‌تر باشد.	صفر



	مثال: حد توابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 5x + 1}{6x^3 - 11x^2 - 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{6x^3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x^5 + 5x^2}{2x^3 + 9} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x^5}{2x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^2) = -2(-\infty)^2 = -2(+\infty) = -\infty$	
۵/۰	مصاحبه شو! $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{a + 4 \times (-1)}{x(x-4)} = \frac{a-4}{\underbrace{\quad}_{(-\infty)}} = -\infty \Rightarrow a > 4 \quad (0/25)$	۸
۱	مصاحبه شو! f در x=1 پیوسته است و $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + \frac{4}{x}) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + \frac{4}{x} - 5}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 5x + 4}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-4)}{x(x-1)} = -3 \quad (0/25) \Rightarrow f'(1) = -3$ تعریف مشتق: مشتق تابع f(x) در x=a: $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ با انتخاب x-a=h داریم: $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ مثال ۱: اگر f(x) = 1 - 2x^2 باشد، f'(-1) را با استفاده از تعریف مشتق به دست آورید. $f'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 - 2x^2 + 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(1-x)(1+x)}{x+1} = 4$ مثال ۲: با استفاده از تعریف، مشتق تابع f(x) = sqrt(x) + 1 را در نقطه x=1 محاسبه کنید. $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x} + 1) - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} \times \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1}$ $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{1}{2}$ مثال ۳: با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع f(x) = sqrt(x-1) را در نقطه‌ای به طول x=5 به دست آورید. $f'(5) = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x - 5} \times \frac{\sqrt{x-1} + 2}{\sqrt{x-1} + 2}$ $= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x - 5}{(x - 5)(\sqrt{x-1} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{\sqrt{x-1} + 2} = \frac{1}{4}$	۹

$$\text{الف) } f'(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{2x^2+x}} + \frac{1}{x^2}$$

$$\text{ب) } g'(x) = \sqrt{\frac{x}{x+4}} + x \cdot \frac{(x+4)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\frac{x}{x+4}}}$$

قواعد مشتق گیری:
نکته ۱: قواعد مشتق گیری:

- $y = c, c \in \mathbb{R} \longrightarrow y' = 0$
- $y = ax + b \longrightarrow y' = a$
- $y = kf(x) \longrightarrow y' = kf'(x)$
- $y = \sqrt[n]{x^m} \longrightarrow y' = \frac{m}{n\sqrt[n]{x^{n-m}}}$
- $y = f(x) \pm g(x) \longrightarrow y' = f'(x) \pm g'(x)$
- $y = f(x) \times g(x) \longrightarrow y' = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$
- $y = \frac{f(x)}{g(x)} \longrightarrow y' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}, (g(x) \neq 0)$
- $y = (f(x))^n \longrightarrow y' = nf'(x)(f(x))^{n-1}$
- $y = \sqrt[n]{(f(x))^m} \longrightarrow y' = \frac{mf'(x)}{n\sqrt[n]{(f(x))^{n-m}}}$
- $y = (f \circ g)(x) = f(g(x)) \longrightarrow y' = g'(x)f'(g(x))$

نکته ۲: مشتق مرتبه دوم: یعنی دو بار مشتق بگیر:

$$f(x) \xrightarrow{\text{مشتق اول}} f'(x) \xrightarrow{\text{مشتق دوم}} f''(x)$$

نکته ۳: چندتا مشتق مهم کتاب:

- $y = \sqrt{x} \longrightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- $y = \sqrt[3]{x} \longrightarrow y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$
- $y = \frac{1}{x} \longrightarrow y' = -\frac{1}{x^2}$

حالا بریم چندتا مثال باهم ببینیم ...
مثال: مشتق تابع های زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)

$$y = \frac{9x-2}{\sqrt{x}} \longrightarrow y' = \frac{9\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}(9x-2)}{(\sqrt{x})^2}$$

$$y = \frac{1}{x}(2\sqrt{x}-1)^4 \longrightarrow y' = -\frac{1}{x^2}(2\sqrt{x}-1)^4 + 4(2\sqrt{x}-1)^3\left(\frac{2}{2\sqrt{x}} - 0\right)\left(\frac{1}{x}\right)$$



$$\begin{aligned} \bullet y &= \left(\frac{x^2}{3x-1} \right)^5 \longrightarrow y' = 5 \left(\frac{x^2}{3x-1} \right)^4 \left(\frac{2x(3x-1) - 3x^2}{(3x-1)^2} \right) \\ \bullet y &= (\sqrt{3x+2})(x^2+1) \longrightarrow y' = \left(\frac{3}{2\sqrt{3x+2}} \right)(x^2+1) + 2x^2(\sqrt{3x+2}) \\ \bullet y &= (x^2+1)^3(5x-1) \longrightarrow y' = 3(2x)(x^2+1)^2(5x-1) + 5(x^2+1)^3 \\ \bullet y &= \left(\frac{-3x+1}{x^2+5} \right)^4 \longrightarrow y' = 4 \left(\frac{-3x+1}{x^2+5} \right)^3 \times \left(\frac{-3(x^2+5) - 2x(-3x+1)}{(x^2+5)^2} \right) \end{aligned}$$

مثال: اگر $f(x) = 5x^3 - 4x^2 - 3x$ مقدار $f''(-1)$ را به دست آورید.

$$\begin{aligned} f(x) &= 5x^3 - 4x^2 - 3x \xrightarrow{\text{مشتق اول}} f'(x) = 15x^2 - 8x - 3 \xrightarrow{\text{مشتق دوم}} f''(x) = 30x - 8 \\ \xrightarrow{x=-1} f''(-1) &= 30(-1) - 8 = -30 - 8 = -38 \end{aligned}$$

مثال: اگر $f'(1) = 3$ و $g'(1) = 5$ مطلوب است محاسبه موارد زیر:

$$(f+g)'(1) = f'(1) + g'(1) = 3 + 5 = 8$$

$$(3f+2g)'(1) = 3f'(1) + 2g'(1) = 3(3) + 2(5) = 9 + 10 = 19$$

مثال: اگر توابع f و g مشتق پذیر باشند و $f(2) = 3$ ، $f'(2) = 5$ ، $g(2) = 8$ و $g'(2) = -6$ باشد، حاصل $(fg)'(2)$ را به دست آورید.

$$(fg)'(2) = f'(2)g(2) + g'(2)f(2) = (5)(8) + (-6)(3) = 40 - 18 = 22$$

۱/۵

$$f(1) = 1 \quad (./25)$$

$$f'(1) = 2 \quad (./25)$$

$$y' = f\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right)(x+3) \quad (./25)$$

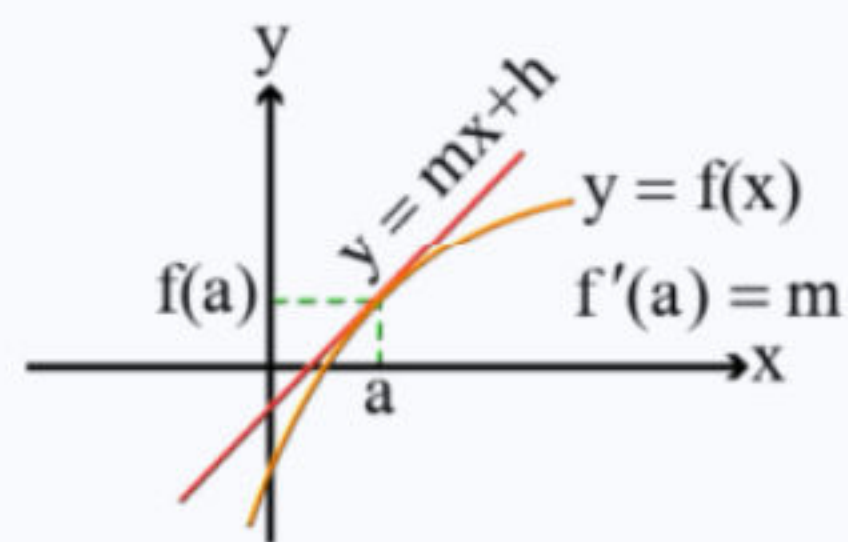
$$y'(1) = \underbrace{f(1) - 4f'(1)}_{(./25)} = 1 - 8 = -7 \quad (./5)$$

مصمم شو!

۱۱

شیب خط مماس بر نمودار تابع:

شیب خط مماس بر نمودار تابع $y = f(x)$ در $x = a$ همان $f'(a)$ است. مختصات نقطه تماس هم در تابع و هم در معادله خط مماس صدق می کند.



مثال: با استفاده از تعریف مشتق، معادله خط مماس بر نمودار تابع $f(x) = x^2 + 2x + 3$ را در نقطه ای به طول $x = 1$ به دست آورید.

$$m = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+3)}{x-1} = 4$$

$$y - 6 = 4(x - 1) \Rightarrow y = 4x + 2$$

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(4) - f(0)}{4} = \frac{(4+3) - (1)}{4} = \frac{3}{2} \quad (0/25)$$

$$f'(x) = 1 + \frac{2}{2\sqrt{2x+1}} \quad (0/25) \Rightarrow f'(\alpha) = \frac{3}{2} \quad (0/25)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\alpha+1}} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2\alpha+1=4 \Rightarrow \alpha = \frac{3}{2} \quad (0/25)$$

آهنگ تغییر متوسط و لحظه‌ای تابع:

نکته: آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازه $[a, b]$ برابر است با:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

مثال: آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x) = \sqrt{x+2}$ را وقتی متغیر از $x_1 = 2$ به $x_2 = 7$ تغییر می‌کند به دست آورید.

$$\text{آهنگ تغییر متوسط تابع } f = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(7) - f(2)}{7 - 2} = \frac{\sqrt{9} - \sqrt{4}}{5} = \frac{1}{5}$$

نکته: آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f در نقطه $x = a$ برابر است با: $f'(a)$

مثال: معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t) = t^2 - t + 10$ بر حسب متر در بازه $[0, 5]$ (بر حسب ثانیه) داده شده است. در کدام لحظه سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازه زمانی $[0, 5]$ باهم برابرند؟

$$\text{سرعت متوسط در بازه } [0, 5] = \frac{f(5) - f(0)}{5 - 0} = \frac{(25 - 5 + 10) - (10)}{5} = \frac{20}{5} = 4$$

$$\text{سرعت لحظه‌ای در لحظه } x = t = f'(t) = 2t - 1$$

می‌خواهیم که سرعت لحظه‌ای در لحظه t با سرعت متوسط در بازه $[0, 5]$ باهم برابر باشند، پس:

$$2t - 1 = 4 \Rightarrow 2t = 5 \Rightarrow t = \frac{5}{2}$$

ابتدا نقاط بحرانی و مقدار تابع در نقاط بحرانی را به دست می‌آوریم.

$$\begin{cases} f(-2) = 16 + 32 + 16 = 64 \\ f(2) = 16 - 32 + 16 = 0 \end{cases} \quad (0/25)$$

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x = 4x(x^2 - 3x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \\ x = 1 \rightarrow f(1) = 1 \\ x = 2 \rightarrow f(2) = 0 \end{cases} \quad (0/25)$$

نقاط بحرانی $\{-2, 1, 2, 0\}$

$$\begin{aligned} \max &= 64 \text{ مطلق} \\ \min &= 0 \text{ مطلق} \end{aligned} \quad (0/25)$$

اکسترمم مطلق تابع:

برای پیدا کردن نقاط اکسترمم مطلق تابع f به روش زیر عمل می‌کنیم:

(۱) نقاط بحرانی تابع را پیدا می‌کنیم.

(۲) مقدار تابع را به ازای نقاط بحرانی به دست می‌آوریم.

(۳) از بین مقادیر به دست آمده در مرحله ۲، بیش‌ترین مقدار را به عنوان ماکزیمم مطلق و کم‌ترین مقدار را به عنوان مینیمم مطلق تابع f معرفی می‌کنیم.

توجه: در بعضی از سؤالات، از روش رسم نمودار نیز می‌توان برای تعیین اکسترمم‌های تابع کمک گرفت.



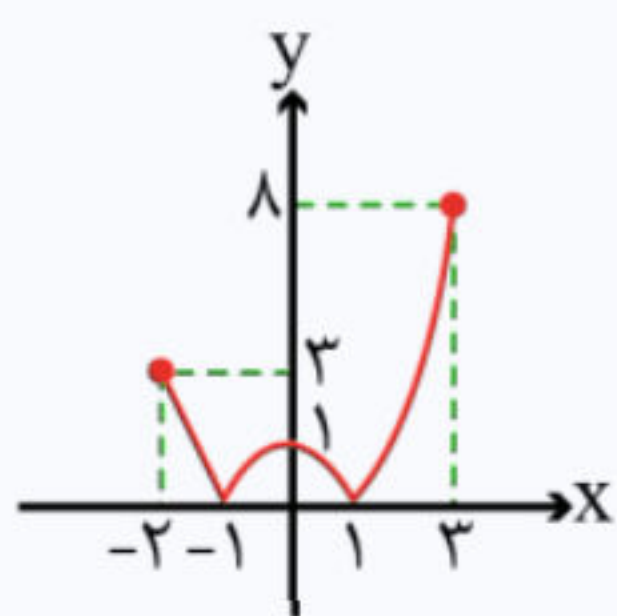
مثال: اکسترم‌های مطلق تابع $f(x) = x^3 - 3x + 7$ را در بازه $[-1, 3]$ در صورت وجود تعیین کنید.
ابتدا نقاط بحرانی تابع f را در بازه $[-1, 3]$ پیدا می‌کنیم:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

پس $x = 3$ و $x = -1$ (نقاط ابتدا و انتهای بازه) و $x = 1$ ، نقاط بحرانی تابع f می‌باشند. حال باید مقدار تابع f را به ازای نقاط بحرانی به دست بیاوریم:

$$f(x) = x^3 - 3x + 7 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \longrightarrow f(1) = 1 - 3 + 7 = 5 \rightarrow \text{min مطلق} \\ x = -1 \longrightarrow f(-1) = -1 + 3 + 7 = 9 \\ x = 3 \longrightarrow f(3) = 27 - 9 + 7 = 25 \rightarrow \text{max مطلق} \end{cases}$$

مثال: نمودار تابع $f(x) = |x^2 - 1|$ را در بازه $[-2, 3]$ رسم کرده و با توجه به آن نقاط اکسترم مطلق و نسبی را تعیین کنید.
باتوجه به نمودار زیر:



نقطه مینیمم مطلق
نقطه $(-1, 0)$
نقطه مینیمم نسبی
نقطه $(0, 1)$: نقطه ماکزیمم نسبی
نقطه مینیمم مطلق
نقطه $(1, 0)$: نقطه مینیمم نسبی
نقطه $(3, 8)$: نقطه ماکزیمم مطلق

۱/۲۵

۱۴

مصحح شو!

$$f(1) = -4 \Rightarrow (1-\alpha)^2(1-\beta) = -4 \quad (./25)$$

$$f'(1) = 0 \Rightarrow f'(x) = 2(x-\alpha)(x-\beta) + (x-\alpha)^2 \Rightarrow (x-\alpha)(3x-2\beta-\alpha) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \alpha \Rightarrow f(\alpha) = 0 \text{ غ ق ق} \\ x = \frac{2\beta + \alpha}{3} \Rightarrow \frac{2\beta + \alpha}{3} = 1 \Rightarrow 2\beta + \alpha = 3 \quad (./25) \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2(\beta - 1) = 1 - \alpha \Rightarrow 1 - \beta = \frac{\alpha - 1}{2} \quad (./25)$$

$$\Rightarrow (\alpha - 1)^2 \left(\frac{\alpha - 1}{2} \right) = -4 \Rightarrow (\alpha - 1)^3 = -8 \quad (./25)$$

$$\alpha - 1 = -2 \Rightarrow \alpha = -1, \beta = 2 \quad (./25)$$

اکسترم نسبی تابع:

برای پیدا کردن نقاط اکسترم نسبی یک **تابع پیوسته** به روش زیر عمل می‌کنیم:

(۱) دامنه تابع را به دست می‌آوریم.

(۲) نقاط بحرانی تابع را پیدا می‌کنیم.

(۳) جدول تغییرات را رسم کرده و سپس مشتق تابع را تعیین علامت می‌کنیم.

(۴) حال برای تشخیص ماکزیمم یا مینیمم بودن نقاط بحرانی داریم:

اگر علامت f' در آن نقطه از مثبت به منفی تغییر کند، آن نقطه، نقطه ماکزیمم نسبی است.

اگر علامت f' در آن نقطه از منفی به مثبت تغییر کند، آن نقطه، نقطه مینیمم نسبی است.

اگر f' در آن نقطه تغییر علامت ندهد، با این روش نمی‌توان درباره ماکزیمم و یا مینیمم نسبی بودن آن نقطه اظهار نظر کرد.

توجه: هر نقطه اکسترم نسبی، یک نقطه بحرانی است. اما هر نقطه بحرانی لزوماً نقطه اکسترم نسبی نیست.

مثال: در تابع $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 10$ ، ابتدا نقاط بحرانی تابع را به دست آورید و سپس با رسم جدول تغییرات تابع، نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی آن را در صورت وجود مشخص کنید.

$$D_f = \mathbb{R}$$

برای پیدا کردن نقاط بحرانی تابع f ، مشتق آن را به دست آورده و آن را برابر صفر قرار می‌دهیم، یعنی باید معادله $f'(x) = 0$ را حل کنیم:

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$$

بنابراین $x = -3$ و $x = 1$ نقاط بحرانی تابع f می‌باشند، حال با رسم جدول تغییرات، مشتق را تعیین علامت می‌کنیم:

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$
f'	+	-	+	
f		↗	↘	↗
		max نسبی	min نسبی	

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -3 \rightarrow \text{طول max نسبی} \\ x = 1 \rightarrow \text{طول min نسبی} \end{cases}$$

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 10 \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \rightarrow f(-3) = 17 \Rightarrow A(-3, 17) \rightarrow \text{نسبی max} \\ x = 1 \rightarrow f(1) = -15 \Rightarrow B(1, -15) \rightarrow \text{نسبی min} \end{cases}$$

نکته: با فرض این که تابع $y = f(x)$ مشتق پذیر باشد، اگر نقطه (a, b) ، نقطه اکسترمم نسبی تابع f باشد در این صورت:

$$f'(a) = 0$$

$$f(a) = b$$

مثال: اگر نقطه $(2, 1)$ نقطه اکسترمم نسبی تابع $f(x) = x^3 + bx^2 + d$ باشد، مقادیر b و d را به دست آورید.

چون نقطه $(2, 1)$ ، نقطه اکسترمم نسبی تابع f است پس اولاً $f(2) = 1$ و ثانیاً $f'(2) = 0$ است:

$$f(2) = 1 \Rightarrow 8 + 4b + d = 1 \Rightarrow 4b + d = -7$$

$$f'(2) = 0 \rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2bx \xrightarrow{f'(2)=0} 12 + 4b = 0 \Rightarrow b = -3 \xrightarrow{4b+d=-7} d = 5$$

۱

مصمم شو!

۱۵

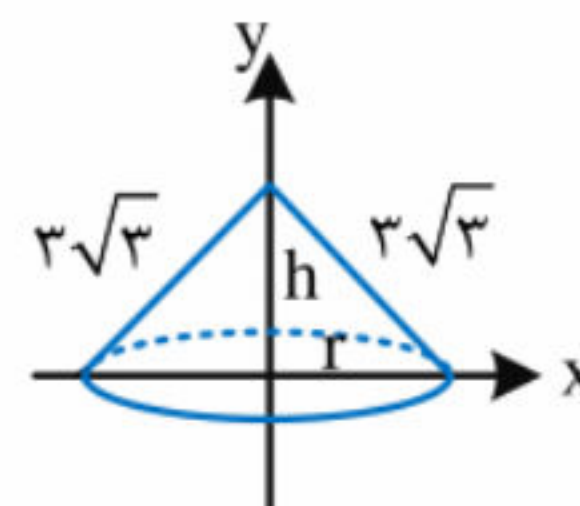
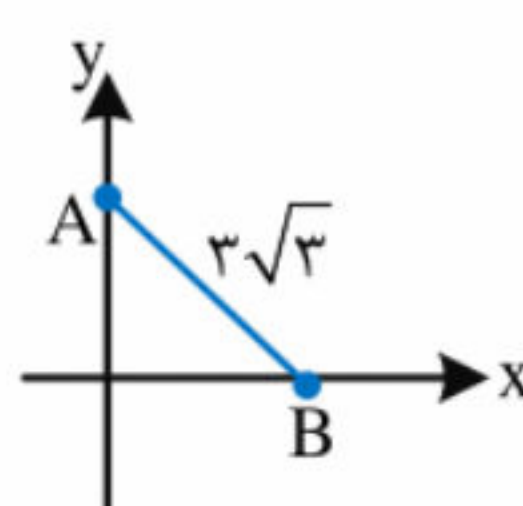
$$r^2 + h^2 = 27 \Rightarrow r^2 = 27 - h^2 \quad (0/25)$$

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 h = \frac{\pi}{3} (27h - h^3) \quad (0/25)$$

$$V' = \frac{\pi}{3} (27 - 3h^2) = 0 \Rightarrow h^2 = \frac{27}{3} \Rightarrow h = 3 \quad (0/25)$$

$$V_{\max} = \frac{\pi}{3} \times 54 = 18\pi \quad (0/25)$$

h	3
V'	+
	max



حل مسائل بهینه سازی:

برای حل مسائل بهینه سازی:

۱) ابتدا رابطه کمیتی که قرار است بهینه شود (مینیمم یا ماکزیمم شود) را به دست می‌آوریم.

۲) رابطه به دست آمده را به کمک روابط موجود در مسئله به یک رابطه تک متغیره تبدیل کنیم.

۳) سپس از رابطه تک متغیره به دست آمده مشتق گرفته و برابر صفر قرار می‌دهیم و ریشه مشتق را به دست می‌آوریم.

۴) حال به کمک ریشه مشتق، کمیتی که قرار است بهینه شود را پیدا می‌کنیم.

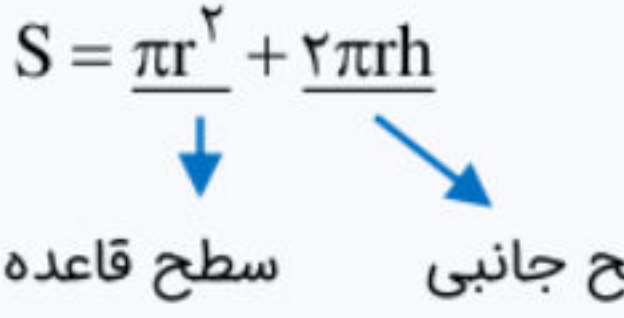
مثال: دو عدد حقیقی بیابید که تفاضل آن‌ها ۱۰ باشد و حاصل ضربشان کمترین مقدار ممکن گردد.

۱) کمیتی که قرار است بهینه شود، حاصل ضرب دو عدد حقیقی است یعنی قرار است $p = xy$ کمترین باشد.

۲) باتوجه به مسئله می‌دانیم که تفاضل دو عدد حقیقی برابر ۱۰ است یعنی $y - x = 10$ است حال باید رابطه به دست آمده در مرحله قبل را تک‌متغیره کنیم:

$$\begin{cases} p = xy \\ y - x = 10 \rightarrow y = 10 + x \end{cases} \Rightarrow p = x(10 + x) = x^2 + 10x$$



	حال از رابطه تک متغیره $p = x^2 + 10x$ مشتق گرفته و برابر صفر قرار می دهیم و ریشه مشتق را به دست می آوریم: $p' = 0 \Rightarrow 2x + 10 = 0 \Rightarrow x = -5 \xrightarrow{y=10+x} y = 5$ مثال: می خواهیم یک قوطی فلزی استوانه ای شکل در باز بسازیم که گنجایش آن 27π مترمکعب باشد. ارتفاع قوطی چقدر باشد تا مقدار فلز به کار رفته در تولید آن مینیمم شود؟ می خواهیم که فلز لازم برای ساخت قوطی کمترین مقدار ممکن باشد. از طرفی می دانیم که قوطی در باز است پس فقط برای سطح جانبی قوطی و سطح قاعده آن قرار است که از فلز استفاده کنیم. بنابراین رابطه ای که قرار است بهینه شود برابر است با: $S = \pi r^2 + 2\pi r h \quad (*)$  از طرفی طبق اطلاعات مسئله می دانیم که حجم قوطی برابر 27π مترمکعب است یعنی: $v = \pi r^2 h = 27\pi \Rightarrow r^2 h = 27$ حال باید به کمک $r^2 h = 27$، رابطه (*) را به صورت تک متغیره تبدیل کرده و از آن مشتق گرفته و نهایتاً برابر صفر قرار دهیم: $\begin{cases} S = \pi r^2 + 2\pi r h \\ r^2 h = 27 \Rightarrow h = \frac{27}{r^2} \Rightarrow S = \pi r^2 + 2\pi r \left(\frac{27}{r^2} \right) = \pi r^2 + \frac{54\pi}{r} \end{cases}$ $\Rightarrow S' = 2\pi r - \frac{54\pi}{r^2} = 0 \Rightarrow 2\pi r^3 = 54\pi \Rightarrow r = 3 \xrightarrow{h=\frac{27}{r^2}} h = 3$	
۱/۵	 مصحح شو! پس از دوران یک استوانه ای پدید می آید که مخروطی از درون آن خارج شده است. استوانه $\begin{cases} h = 4 \\ r = 3 \end{cases} \quad (0/25) \Rightarrow V = \pi r^2 h = 36\pi \quad (0/25)$ مخروط $\begin{cases} r = 3 \\ h = 4 \end{cases} \quad (0/25) \Rightarrow V = \frac{\pi}{3} r^2 h = \frac{\pi}{3} \times 36 = 12\pi \quad (0/25)$ $V = 24\pi \quad (0/5)$ به دست آمده	۱۶
۱/۵	 مصحح شو! $d = R_1 + R_2$ $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 4 \Rightarrow O_1(2, -1), R_1 = 2 \quad (0/5)$ $(x+1)^2 + (y-2)^2 = m \Rightarrow O_2(-1, 2), R_2 = \sqrt{m} \quad (0/5)$ $d = O_1 O_2 = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \Rightarrow 3\sqrt{2} = 2 + \sqrt{m} \Rightarrow \sqrt{m} = 3\sqrt{2} - 2 \Rightarrow m = 22 - 12\sqrt{2} \quad (0/5)$  حالا نوبت به بررسی وضعیت دایره رسید... اگر $O(\alpha, \beta)$ مختصات مرکز یک دایره و r شعاع آن دایره باشد معادله استاندارد دایره برابر است با: $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$ مثال: اگر معادله دایره به صورت $(x+1)^2 + y^2 = 4$ باشد مطلوبست: (الف) مختصات مرکز دایره و اندازه شعاع دایره: $(x+1)^2 + (y-0)^2 = (2)^2 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 0 \\ r = 2 \end{cases} \Rightarrow O(-1, 0)$	۱۷

ب) مختصات نقاط تقاطع دایره با محور X ها و محور Y ها:

برای پیدا کردن مختصات تقاطع دایره با محور X ها، باید در معادله دایره، $y = 0$ قرار دهیم که در این صورت:

$$(x+1)^2 + y^2 = 4 \xrightarrow{y=0} (x+1)^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} x+1=2 \rightarrow x=1 \\ x+1=-2 \rightarrow x=-3 \end{cases}$$

در نتیجه نقاط $(1, 0)$ و $(-3, 0)$ محل تقاطع دایره با محور X ها هستند.

و برای پیدا کردن مختصات تقاطع دایره با محور Y ها، باید در معادله دایره، $x = 0$ را قرار دهیم:

$$(x+1)^2 + y^2 = 4 \xrightarrow{x=0} 1 + y^2 = 4 \Rightarrow y^2 = 3 \Rightarrow \begin{cases} y = \sqrt{3} \\ y = -\sqrt{3} \end{cases}$$

پس نقاط $(0, \sqrt{3})$ و $(0, -\sqrt{3})$ محل تقاطع دایره با محور Y ها هستند.

نکته: اگر $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ معادله گسترده یک دایره باشد، داریم:

$$\text{مختصات مرکز دایره: } O\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$$

$$\text{شعاع دایره: } r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$$

مثال: معادله گسترده دایره‌ای به صورت $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0$ می‌باشد. مرکز و شعاع دایره را بنویسید.

$$O\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) \Rightarrow O\left(-\frac{-6}{2}, -\frac{2}{2}\right) \Rightarrow O(3, -1)$$

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c} \Rightarrow r = \frac{1}{2}\sqrt{(-6)^2 + (2)^2 - 4(6)} = \frac{1}{2}\sqrt{36 + 4 - 24} = \frac{1}{2}\sqrt{16} = 2$$

در مثال فوق، معادله دایره را به صورت استاندارد بنویسید:

$$\begin{cases} O(3, -1) \\ r=2 \end{cases} \Rightarrow (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2 \Rightarrow (x-3)^2 + (y-(-1))^2 = 4 \Rightarrow (x-3)^2 + (y+1)^2 = 4$$

اوضاع نسبی خط و دایره: برای مشخص کردن وضعیت یک خط نسبت به یک دایره قبل از هر چیز، ابتدا فاصله مرکز دایره از خط موردنظر را پیدا می‌کنیم (OH).

حال با توجه به اندازه OH و اندازه شعاع دایره، داریم:

خط ℓ با دایره متقاطع است	خط ℓ بر دایره مماس است	خط ℓ دایره را قطع نمی‌کند
$OH < r$	$OH = r$	$OH > r$

یادآوری: خط مماس بر دایره، در نقطه تماس، بر شعاع دایره عمود است.

فاصله نقطه $A(x_0, y_0)$ از خط $ax + by + c = 0$ برابر است با:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

مثال: وضعیت خط $x + y = 1$ را نسبت به دایره $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 1 = 0$ مشخص نمایید.

ابتدا مختصات مرکز دایره را به دست می‌آوریم:

$$O\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) \Rightarrow O\left(-\frac{2}{2}, -\frac{2}{2}\right) \Rightarrow O(-1, -1)$$



حال فاصله مرکز دایره را از خط به معادله $x + y - 1 = 0$ به دست می آوریم:

$$OH = \frac{|(1 \times -1) + (1 \times -1) - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|-3|}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow OH = \frac{3\sqrt{2}}{2} \approx 2.1$$

شعاع دایره را به دست آورده و آن را با اندازه OH مقایسه می کنیم:

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 4 - (-4)} = \frac{\sqrt{12}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \approx 1.7$$

چون $\frac{3\sqrt{2}}{2} > \sqrt{3}$ است پس $OH > r$ است در نتیجه خط $x + y = 1$ دایره را قطع نمی کند.

مثال: معادله دایره ای را بنویسید که مرکز آن $(0, 3)$ و بر خط $3x - 4y = 3$ مماس باشد.

برای نوشتن معادله یک دایره به دو چیز نیاز داریم: (۱) مختصات مرکز دایره (۲) شعاع دایره

می دانیم که خط به معادله $3x - 4y - 3 = 0$ بر دایره مماس است در نتیجه فاصله مرکز دایره تا این خط برابر شعاع دایره است پس:

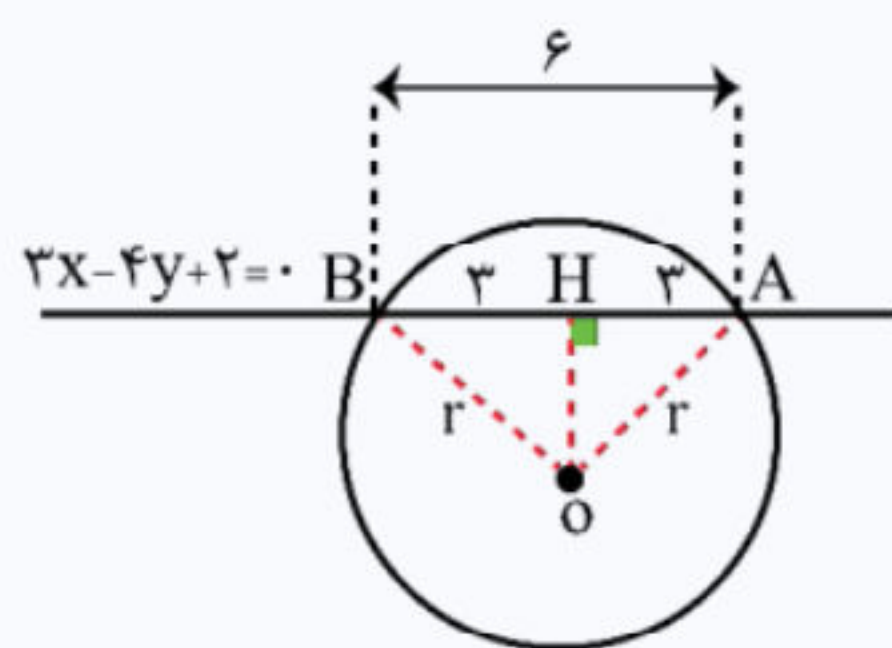
$$\text{شعاع دایره} = r = OH = \frac{|(3 \times 0) - (4 \times 3) - 3|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|-15|}{\sqrt{25}} = \frac{15}{5} = 3$$

$$\begin{cases} O(0, 3) \\ r = 3 \end{cases} \Rightarrow (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2 \Rightarrow (x - 0)^2 + (y - 3)^2 = 3^2 \Rightarrow x^2 + (y - 3)^2 = 9$$

مثال: مرکز دایره ای، نقطه $O(2, -3)$ است. این دایره روی خط $3x - 4y + 2 = 0$ وتری به طول ۶ جدا می کند. معادله دایره را بنویسید.

ابتدا شکلی رسم کرده و اطلاعات مسئله را روی آن پیاده می کنیم:

حال فاصله مرکز دایره را از خط $3x - 4y + 2 = 0$ به دست می آوریم:



$$\begin{cases} O(2, -3) \\ 3x - 4y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow OH = \frac{|(3 \times 2) - (4 \times -3) + 2|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{20}{\sqrt{25}} = \frac{20}{5} = 4$$

می دانیم که دو مثلث OHA و OHB، هم نهشت هستند پس $AH = BH = \frac{AB}{2} = 3$

حال در مثلث قائم الزویه OHA داریم:

$$(OA)^2 = (OH)^2 + (AH)^2 \Rightarrow OA = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5 \Rightarrow OA = r = 5$$

در نتیجه معادله دایره مورد نظر برابر است با:

$$\begin{cases} O(2, -3) \\ r = 5 \end{cases} \Rightarrow (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2 \Rightarrow (x - 2)^2 + (y - (-3))^2 = 5^2 \Rightarrow (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25$$

اوضاع نسبی دو دایره: دو دایره $C(O, r)$ و $C'(O', r')$ را در نظر بگیرید؛ اگر اندازه پاره خطی که مرکزهای دو دایره را به هم وصل می کند (خط الممرکزین)

برابر d باشد، داریم:

$d > r + r'$	$d = r + r'$	$ r - r' < d < r + r'$	$d = r - r' $	$d < r - r' $
دو دایره بیرون هم (متخارج)	دو دایره مماس بیرون	دو دایره متقاطع	دو دایره مماس درون	دو دایره متداخل

توجه شود که اگر $d = 0$ باشد دو دایره هم مرکز خواهند بود.

	برای تشخیص وضعیت دو دایره $C(O, r)$ و $C'(O', r')$؛ مراحل زیر را طی می‌کنیم: (۱) ابتدا مختصات مرکز و اندازه شعاع هر دو دایره را به دست می‌آوریم. (۲) سپس طول خط‌المركزین دو دایره $d = OO'$ را نیز به دست می‌آوریم. (۳) در نهایت $(r + r')$ و $r - r'$ را نیز محاسبه کرده و آن‌ها را با اندازه $d = OO'$ مقایسه می‌کنیم. مثال: معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $(-1, -1)$ و با دایره $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 3$ مماس درون باشد. برای نوشتن معادله یک دایره به دو پارامتر احتیاج داریم: (۱) مختصات مرکز دایره و (۲) شعاع دایره از طرفی می‌دانیم که اگر دو دایره مماس درون باشند $d = r - r'$ است پس: $C': x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} O' = \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) \Rightarrow O'(2, 3) \\ r' = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{2}\sqrt{16 + 36 - 4(-3)} = \frac{\sqrt{64}}{2} = \frac{8}{2} = 4 \end{cases}$ حال فاصله خط‌المركزین دو دایره را نیز محاسبه می‌کنیم: $\begin{cases} O(-1, -1) \\ O'(2, 3) \end{cases} \quad d = OO' = \sqrt{(-1-2)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$ باید $d = r - r'$ باشد، پس: $5 = r - 4 \Rightarrow \begin{cases} r - 4 = 5 \rightarrow r = 9 \quad \checkmark \\ r - 4 = -5 \rightarrow r = -1 \quad \text{غ ق} \end{cases}$ بنابراین شعاع دایره موردنظر برابر $r = 9$ و مرکز آن $O(-1, -1)$ است: $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2 \Rightarrow (x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 81$	
۲	مصمم شو! متمم آن حالتی است که مهره‌ها هم‌رنگ باشند. $P(\text{هم‌رنگ بودن}) = \left(\frac{4}{10} \times \frac{3}{6} + \frac{6}{10} \times \frac{3}{6}\right) = \frac{12+18}{60} = \frac{1}{2} \quad (0/5)$ ظرف اول سفید ظرف دوم سفید ظرف اول قرمز ظرف دوم قرمز $P(\text{هم‌رنگ نبودن}) = \frac{1}{2} \quad (0/5)$	۱۸
۲۰	موفق باشید.	