



سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۴



دفترچه سؤال

تسلط بر نیم سال اول



تسلط بر نیم سال دوم



جمعه

۱۴۰۳/۱۲/۰۳



ماز

گروه آزمایشی علوم تجربی - پایه دوازدهم
آزمون های شبیه ساز امتحانات نهایی ماز - مرحله ۵

مدت پاسخگویی: ۱۴۰ دقیقه

تعداد صفحه: ۹

ردیف	درس	تعداد صفحه	زمان پاسخگویی
۱	فارسی	۳	۳۰ دقیقه
۲	عربی، زبان قرآن	۲	۳۰ دقیقه
۳	ریاضی	۲	۴۰ دقیقه
۴	زیست شناسی	۲	۴۰ دقیقه

برای شباهت حداکثری به امتحانات نهایی، صفحه آرای، فونت و حتی اندازه متن در تمامی آزمون های تشریحی ماز، کاملاً یکسان با استاندارد امتحانات نهایی در نظر گرفته می شود.

حق چاپ و تکثیر سؤالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز «گروه ماز» مجاز می باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می شود.

به دلیل عدم رضایت تیم ماز، هرگونه استفاده غیرقانونی از دفترچه سؤالات و پاسخنامه ماز برای تمامی اشخاص، شرعاً حرام است.

دروس اختصاصی

زیست‌شناسی ۳

فصل ۴، ۵ و ۶
(گفتار ۱: فتوسنتز: تبدیل انرژی نور
به انرژی شیمیایی)
صفحه ۴۷ تا ۸۱

ریاضی ۳

فصل ۳ و فصل ۴
صفحه ۴۹ تا ۱۰۰

دروس عمومی

عربی ۳

درس‌های ۲ و ۳
صفحه ۱۷ تا ۴۸

فارسی ۳

فصل ۳ (از ابتدای درس ۷ تا پایان
فصل)، فصل ۴ و فصل ۵
صفحه‌های ۵۴ تا ۹۹

استراتژی و هدف‌گذاری در آزمون‌های شبیه‌ساز نهایی ماز

اهداف کوتاه مدت:

- رسیدن به بودجه‌بندی آزمون بعد
- یادگیری تشریحی خواندن و تشریحی نوشتن

اهداف میان مدت:

- پیشروی و تسلط بر ۵۰ درصد مباحث نیمسال اول تا آذرماه
- پیشروی و تسلط کامل بر نیمسال اول تا بهمن ماه
- پیشروی و تسلط بر ۵۰ درصد مباحث نیمسال دوم تا ایام نوروز
- پیشروی و تسلط کامل بر نیمسال دوم در اردیبهشت ماه
- تجربه شبیه‌ساز کامل امتحان نهایی در روز قبل از هر امتحان خردادماه

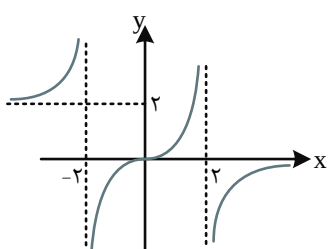
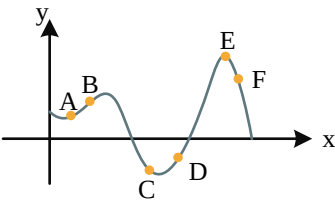
اهداف بلندمدت:

- تبدیل به یک دانش‌آموز حرفه‌ای در امتحان تشریحی و ۲۰ گرفتن
- تسلط بر نحوه تشریحی‌نوشتن در حد یک مصحح آموزش و پرورش
- تمام اشتباهات احتمالی در امتحان نهایی رو قبل از امتحان نهایی تجربه کنید.



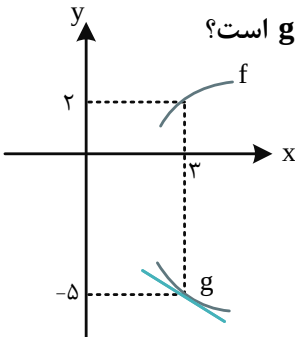
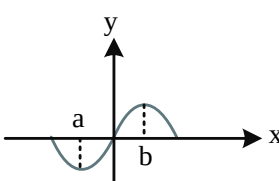
به نام خدا

سؤالات آزمون نهایی درس: ریاضی ۳	تعداد صفحه: ۲	رشته:	علوم تجربی	ساعت شروع:
دوره دوم متوسطه - دوازدهم	تاریخ آزمون:	نام و نام خانوادگی:	مدت زمان: ۴۰ دقیقه	

آزمون شبیه‌ساز امتحان نهایی گروه آموزشی ماز				
ردیف	سؤالات (پاسخبرگ دارد)	نمره		
۱	درستی یا نادرستی عبارات‌های زیر را مشخص کنید. الف) اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ و $L < 0$ باشد، آن‌گاه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$ است. ب) حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x - [x]}{ x }$ برابر $-\infty$ است. ج) اگر $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 2$ باشد، آن‌گاه شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه‌ای به طول ۱، برابر ۲ است. د) اگر $f(x) = \sqrt{2x+1}$ باشد، آن‌گاه $f''(4) = -\frac{2}{27}$ است.	۲		
۲	هر یک از جمله‌های زیر را با عبارت یا عدد مناسب کامل کنید. الف) اگر بازه $(1+x, 3x)$ یک همسایگی عدد ۳ باشد، حدود x بازه است. ب) حد تابع $f(x) = \frac{3 + \frac{2}{x}}{\frac{2}{x^2} - 1}$ وقتی $x \rightarrow -\infty$ برابر است. ج) اگر $f(0) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = -1$ باشد، آنگاه $f'(0)$ برابر است. د) اگر $f(x) = x^2 - 2x + 3$ و $g(x) = -x + 1$ باشد، آن‌گاه حاصل $(fog)'(1)$ برابر است.	۲		
۳	چند جمله‌ای $f(x) = x^3 + mx^2 + nx - 2$ بر $(x-2)$ بخش‌پذیر است. اگر باقی‌مانده تقسیم آن بر $(x+1)$ برابر ۳ باشد، مقادیر m و n را به دست آورید.	۱		
۴	با توجه به نمودار تابع f، حاصل حدهای زیر را بیابید. الف) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) =$ ب) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) =$ ج) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{f(x)} =$ د) $\lim_{x \rightarrow -\infty} fof =$ 	۱		
۵	حدود زیر را محاسبه کنید. الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1}$ ب) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x + \cos x}{1 - \cos x}$ ج) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + \sqrt{x^2 + x}}{x + \sqrt{4x^2 + 1}}$	۲.۷۵		
۶	با توجه به نمودار f، نقاط خواسته شده را بیابید. الف) نقطه یا نقاطی که مشتق تابع در آن برابر صفر است. ب) نقطه یا نقاطی که مشتق تابع در آن مقداری منفی است. ج) نقطه یا نقاطی که مقدار تابع در آن منفی و مشتق تابع در آن مثبت است. 	۱		



به نام خدا

سؤالات آزمون نهایی درس: ریاضی ۳		تعداد صفحه: ۲	رشته:	علوم تجربی	ساعت شروع:
دوره دوم متوسطه - دوازدهم		تاریخ آزمون:	۱۴۰۳/۱۲/۰۳	نام و نام خانوادگی:	مدت زمان: ۴۰ دقیقه
آزمون شبیه ساز امتحان نهایی					
گروه آموزشی ماز					
ردیف	سؤالات (پاسخبرگ دارد)	نمره			
۷	با توجه به نمودارهای توابع f و g ، حاصل $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f^2(x)g(x) + 5f^2(x)}{x-3}$ چند برابر $g'(3)$ است؟ 	۱			
۸	معادله نیم مماس چپ تابع $f(x) = (x-3)[x]$ را در نقطه‌ای به طول $x=3$ واقع بر منحنی بنویسید.	۱.۲۵			
۹	نشان دهید خط $x=1$ مماس قائم بر منحنی $f(x) = \sqrt{x-1}$ است.	۲			
۱۰	مشتق توابع داده شده را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست) الف) $f(x) = \sqrt{2x+2}(x^2-3x)^3$ ب) $g(x) = \sqrt{\frac{x^2-3x}{5x}}$	۲			
۱۱	اگر $f(x) = \sqrt{x+1} - 1$ و $g(x) = \sqrt{x+1} + 1$ باشد، حاصل $f'g + g'f$ را در $x=1$ به دست آورید.	۰.۷۵			
۱۲	اگر تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 - x & ; x \geq 1 \\ ax - a & ; x < 1 \end{cases}$ در نقطه $x=1$ مشتق پذیر باشد، مقدار a را به دست آورید.	۱.۲۵			
۱۳	اگر نمودار تابع $f(x)$ به صورت زیر باشد، نمودار $f'(x)$ را رسم کنید. 	۱			
۱۴	معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t) = t^2 - 2t$ بر حسب متر داده شده است. در چه زمانی سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط متحرک در بازه زمانی $[0, 3]$ با هم برابرند.	۱			
	موفق باشید.	۲۰			



به نام خدا

آزمون شبیه ساز نهایی درس: ریاضی ۳	تعداد صفحه: ۵	رشته: علوم تجربی	ساعت شروع:
نام و نام خانوادگی:	دوره دوم متوسطه – دوازدهم	تاریخ آزمون: ۱۴۰۳/۱۲/۰۳	مدت زمان: ۴۰ دقیقه
ردیف	پاسخبرگ		
نمره			
پاسخ های خود را در محل های تعیین شده به صورت دقیق، خوش خط و مرتب در این برگه وارد کنید.			

۱	الف) ب) ج) د)	۲
۲	الف) ب) ج) د)	۲
۳		۱
۴	الف) ب) ج) د)	۱



به نام خدا

آزمون شبیه‌ساز نهایی درس: ریاضی ۳	تعداد صفحه: ۵	رشته: علوم تجربی	ساعت شروع:
نام و نام خانوادگی:	دوره دوم متوسطه – دوازدهم	تاریخ آزمون: ۱۴۰۳/۱۲/۰۳	مدت زمان: ۴۰ دقیقه
ردیف	پاسخبرگ		
	نمره		
پاسخ‌های خود را در محل‌های تعیین شده به صورت دقیق، خوش خط و مرتب در این برگه وارد کنید.			

۵	(الف)	۲.۷۵
	(ب)	
	(ج)	
۶	(الف)	۱
	(ب)	
	(ج)	



SanjeshCloud

www.SanjeshCloud.ir



به نام خدا

آزمون شبیه ساز نهایی درس: ریاضی ۳	تعداد صفحه: ۵ آزمون وی ای پی رشته: علوم تجربی	ساعت شروع:
نام و نام خانوادگی:	دوره دوم متوسطه - دوازدهم تاریخ آزمون: ۱۴۰۳/۱۲/۰۳	مدت زمان: ۴۰ دقیقه
ردیف	پاسخبرگ	نمره
پاسخهای خود را در محل های تعیین شده به صورت دقیق، خوش خط و مرتب در این برگه وارد کنید.		

۷	۱
۸	۱.۲۵
۹	۲



به نام خدا

آزمون شبیه ساز نهایی درس: ریاضی ۳	تعداد صفحه: ۵	رشته: علوم تجربی	ساعت شروع:
نام و نام خانوادگی:	دوره دوم متوسطه – دوازدهم	تاریخ آزمون: ۱۴۰۳/۱۲/۰۳	مدت زمان: ۴۰ دقیقه
ردیف	پاسخبرگ		
نمره			
پاسخ های خود را در محل های تعیین شده به صورت دقیق، خوش خط و مرتب در این برگه وارد کنید.			

۱۰	(الف)	۲
۱۱	(ب)	۰.۷۵
۱۲		۱.۲۵



SanjeshCloud

www.SanjeshCloud.ir



به نام خدا

آزمون شبیه‌ساز نهایی درس: ریاضی ۳	تعداد صفحه: ۵	رشته: علوم تجربی	ساعت شروع:
نام و نام خانوادگی:	دوره دوم متوسطه – دوازدهم	تاریخ آزمون: ۱۴۰۳/۱۲/۰۳	مدت زمان: ۴۰ دقیقه
ردیف	پاسخبرگ		
نمره			
پاسخ‌های خود را در محل‌های تعیین شده به صورت دقیق، خوش خط و مرتب در این برگه وارد کنید.			

۱۳		۱
۱۴		۱
	موفق باشید.	۲۰



سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۴



دفترچه پاسخ

تسلط بر نیم سال اول



تسلط بر نیم سال دوم



جمعه

۱۴۰۳/۱۲/۰۳



ماز

گروه آزمایشی علوم تجربی - پایه دوازدهم
آزمون های شبیه ساز امتحانات نهایی ماز - مرحله ۵

درس	مسئول درس	ویراستاری
فارسی	حسن وسگری - فاطمه عباسی - علیرضا جعفری	حمزه نوری - فاطمه حمیدی
عربی، زبان قرآن	هاله کریمی - محمدعلی تابانفر	کیارش پور مهدی - مریم آقاییاری
ریاضی	محدثه شیخعلی - سیدجواد نظری	حمیدرضا ولی پور - نرجس تیمناک
زیست شناسی	مهدی جمالی	فرناز بزرگی - یاسین دانایی علی محمدزاده

برای شباهت حداکثری به امتحانات نهایی، صفحه آرایی، فونت و حتی اندازه متن در تمامی آزمون های تشریحی ماز، کاملاً یکسان با استاندارد امتحانات نهایی در نظر گرفته می شود.

حق چاپ و تکثیر سؤالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز «گروه ماز» مجاز می باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می شود.

به دلیل عدم رضایت تیم ماز، هرگونه استفاده غیرقانونی از دفترچه سؤالات و پاسخنامه ماز برای تمامی اشخاص، شرعاً حرام است.

راهنمای پاسخنامه برای بچه‌های مازی!

مصحح شو:



پاسخ دقیق سؤال این‌جا میاد و اسمش روشه: «مصحح شو»، می‌خواد شما رو به یه مصحح حرفه‌ای و دقیق تبدیل کنه که بدونین موقع ارزیابی جواب‌هاتون باید حواستون به چی باشه تا توی آزمون‌های بعدی دقیق‌تر عمل کنین. اگه جواب یه سؤال رو بشه به شکل‌های مختلف بیان کرد، اون هم، این‌جا بهتون گفتیم.

بررسی دقیق‌تر:



اگه پاسخ کوتاه به سؤال کافی نباشه تا ببینین چطوری باید به جواب برسین، توی این بخش با بررسی دقیق‌تر جواب، سؤال رو براتون توضیح دادیم.

نقشه نهایی:



امتحان نهایی قوانین و قواعد خاص خودش رو داره؛ شما باید بدونین تیپ‌های رایج سؤال‌های امتحان نهایی چیه و باید چطوری بهش جواب بدین. این کادر، مشاوره حرفه‌ای ماست به شما تا فوت و فن‌های امتحان نهایی رو یاد بگیرین.

۲۰ شو:



توی «۲۰ شو»، مبحث هر سؤال رو براتون مرور یا جمع‌بندی کردیم؛ «۲۰ شو» و درسنامه‌هاش دقیقاً فاصله بین نمره خوب و نمره ۲۰ رو براتون پر می‌کنه.

نکته طلایی:



با وجود «۲۰ شو»، که کلی درسنامه مفصل داره، باز هم اگه نکته مهم و مفیدی بود، توی این کادر براتون آوردیم.



راهنمای تصحیح آزمون نهایی درس: ریاضی ۳		رشته:	علوم تجربی
دوره دوم متوسطه - دوازدهم	تاریخ آزمون:	۱۴۰۳/۱۲/۰۳	مدت زمان: ۴۰ دقیقه
آزمون شبیه‌ساز امتحان نهایی		گروه آموزشی ماز	
ردیف	راهنمای تصحیح		
نمره			
	مصحح شو: (الف) نادرست. (۰/۵) (ب) نادرست. (۰/۵) (ج) درست. (۰/۵) (د) نادرست. (۰/۵) بررسی دقیق‌تر: (الف) نادرست است. این گزاره زمانی درست است که مقادیر $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a مثبت باشد. ۲۰شو قضیه: فرض کنیم $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \neq 0$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$، در این صورت: (الف) اگر $L > 0$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a مثبت باشد، آن‌گاه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ (ب) اگر $L > 0$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a منفی باشد، آن‌گاه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$ (پ) اگر $L < 0$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a مثبت باشد، آن‌گاه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$ (ت) اگر $L < 0$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a منفی باشد، آن‌گاه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ (ب) نادرست است.		
۲	$\begin{cases} [x] = [0^-] = -1 \\ x = -x \end{cases}$ می‌دانیم زمانی که $x \rightarrow 0^-$، داریم: $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x - [x]}{ x } = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x - (-1)}{-x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x+1}{-x} = \frac{(0^-)+1}{-(0^-)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$ محاسبه حد توابع شامل قدرمطلق و جزء صحیح وقتی به جزء صحیح و یا قدرمطلق برخورد کنیم، باید جزء صحیح را تعیین مقدار و قدرمطلق را تعیین علامت کنیم، دو مثال ببینید: $\bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{[x]}{\sin x} = \frac{[0^-]}{0^-} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$ $\bullet \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{[x]-3}{x-3} = \frac{[3^-]-3}{3^- - 3} = \frac{2-3}{0^- - 3} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$ (ج) درست است، میثای دلبش رو برونی ۲۰ شو رو دریاب! ۲۰شو شیب خط مماس بر منحنی تابع f در نقطه $A(a, f(a))$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم: $A \text{ شیب خط مماس بر منحنی در نقطه } = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ به شرط آن‌که این حد موجود و متناهی باشد.		

حد بالا را (در صورت وجود) مشتق تابع f در نقطه $A(a, f(a))$ می نامند و با $f'(a)$ نمایش می دهند، یعنی:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

(د) نادرست است.

$$f(x) = \sqrt{2x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x+1}} = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$$

$$f''(x) = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{2x+1}}}{(\sqrt{2x+1})^2} = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{2x+1}}}{2x+1} \xrightarrow{x=4} f''(4) = \frac{-\frac{1}{\sqrt{9}}}{9} = \frac{-\frac{1}{3}}{9} = -\frac{1}{27}$$

۲۰ شو

$$f(x) \xrightarrow{\text{مشتق}} f'(x) \xrightarrow{\text{مشتق}} f''(x)$$

مشتق مرتبه دوم یعنی دو بار مشتق بگیر:

مثال: اگر $f(x) = 5x^3 - 4x^2 - 3x$ مقدار $f''(-1)$ را به دست آورید.

$$f(x) = 5x^3 - 4x^2 - 3x \xrightarrow{\text{مشتق}} f'(x) = 15x^2 - 8x - 3 \xrightarrow{\text{مشتق}} f''(x) = 30x - 8$$

$$\xrightarrow{x=-1} f''(-1) = 30(-1) - 8 = -30 - 8 = -38$$

مصحح شو:

الف) (۱, ۲) (۰/۵) ب) -۳ (۰/۵) ج) -۱ (۰/۵) د) ۲ (۰/۵)

بررسی دقیق تر:

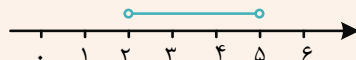
الف) (۱, ۲) (صفحه ۵۳)

بازه $(1+x, 3x)$ یک همسایگی عدد ۳ می باشد، بنابراین عدد ۳ متعلق به این بازه است، به عبارت دیگر:

$$1+x < 3 < 3x \Rightarrow \begin{cases} 1+x < 3 \Rightarrow x < 2 \\ 3 < 3x \Rightarrow x > 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} 1 < x < 2 \Rightarrow x \in (1, 2)$$

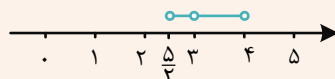
همسایگی ها

همسایگی: هر بازه باز شامل عدد حقیقی x_0 را یک همسایگی x_0 می نامیم، به عبارت دیگر، اگر $x_0 \in (a, b)$ ، آن گاه بازه (a, b) یک همسایگی x_0 می باشد.



مثال: بازه $(2, 5)$ یک همسایگی ۳ است.

همسایگی محذوف: اگر بازه (a, b) یک همسایگی عدد حقیقی x_0 باشد، آن گاه مجموعه $(a, b) - \{x_0\}$ یک همسایگی محذوف x_0 نامیده می شود.



مثال: مجموعه $(\frac{5}{4}, 4) - \{3\}$ یک همسایگی محذوف ۳ می باشد.

همسایگی چپ و راست: اگر Γ عددی مثبت باشد، آن گاه $(x_0, x_0 + \Gamma)$ یک همسایگی راست x_0 نامیده می شود، همچنین $(x_0 - \Gamma, x_0)$ را یک همسایگی چپ x_0 می نامیم.



مثال: بازه $(3, 4)$ یک همسایگی راست ۳ و بازه $(\frac{3}{4}, 3)$ یک همسایگی چپ ۳ است.

ب) (-۳) (مطابق با تمرین ۴ قسمت «ت» صفحه ۶۴)



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 + \frac{2}{x}}{\frac{2}{x^2} - 1} = \frac{3 + \frac{2}{-\infty}}{\frac{2}{+\infty} - 1} = \frac{3 + 0}{0 - 1} = \frac{3}{-1} = -3$$

ج) (-1) (مطابق با مثال صفحه ۷۳)

$$f'(\cdot) = \lim_{x \rightarrow \cdot} \frac{f(x) - f(\cdot)}{x - \cdot} \stackrel{f(\cdot) = \cdot}{=} \lim_{x \rightarrow \cdot} \frac{f(x)}{x} = -1$$

به کمک تعریف مشتق، داریم:

تعریف دیگری از مشتق

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

د) ۲ (مطابق با مثال صفحه ۸۸)

$$(f \circ g)'(1) = g'(1)f'(g(1))$$

$$g(x) = -x + 1 \Rightarrow \begin{cases} g(1) = -1 + 1 = 0 \\ g'(x) = -1 \xrightarrow{x=1} g'(1) = -1 \end{cases}$$

$$f(x) = x^2 - 2x + 3 \Rightarrow f'(x) = 2x - 2 \xrightarrow{x=0} f'(0) = -2$$

$$(f \circ g)'(1) = g'(1)f'(g(1)) = (-1)f'(0) = (-1)(-2) = 2$$

مشتق تابع مرکب

اگر f و g دو تابع مشتق پذیر باشند، در این صورت تابع مرکب $f \circ g$ و $g \circ f$ مشتق پذیر هستند و داریم:

- $(f \circ g)'(x) = g'(x)f'(g(x))$
- $(g \circ f)'(x) = f'(x)g'(f(x))$

مصحح شو:

(مطابق با کار در کلاس صفحه ۵۱)

می دانیم که چندجمله ای $f(x) = x^3 + mx^2 + nx - 2$ بر $(x - 2)$ بخش پذیر است، بنابراین $f(2) = 0$ است:

$$f(x) = x^3 + mx^2 + nx - 2 \xrightarrow{f(2)=0} 8 + 4m + 2n - 2 = 0 \Rightarrow 4m + 2n = -6$$

$$\xrightarrow{\div 2} \underbrace{2m + n = -3}_{(0/25)} \quad (A)$$

از طرفی باقی مانده تقسیم چندجمله ای $f(x)$ بر $(x + 1)$ برابر ۳ است، لذا $f(-1) = 3$ می باشد، پس:

$$f(x) = x^3 + mx^2 + nx - 2 \xrightarrow{f(-1)=3} -1 + m - n - 2 = 3 \Rightarrow \underbrace{m - n = 6}_{(0/25)} \quad (B)$$

$$\begin{cases} 2m + n = -3 \\ m - n = 6 \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} \begin{cases} m = 1 & (0/25) \\ n = -5 & (0/25) \end{cases}$$

حال به کمک روابط (A) و (B) داریم:

بخش پذیری و قضیه تقسیم

در تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر دو جمله‌ای درجه اول $(ax + b)$ ، باقی‌مانده تقسیم برابر $f(-\frac{b}{a})$ است، در نتیجه اگر $f(-\frac{b}{a}) = 0$ باشد، به این معنی است که $f(x)$ بر $(ax + b)$ بخش پذیر است.

مصحح شو:

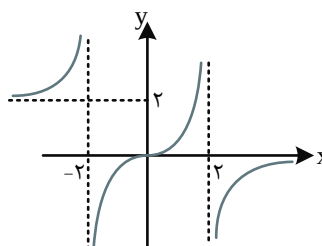
(مطابق با تمرین ۳ صفحه ۶۴) با توجه به نمودار تابع f ، داریم:

الف) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$ (۰/۲۵)

ب) $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \text{وجود ندارد}$ (۰/۲۵)

ج) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)} = \frac{1}{-\infty} = 0$ (۰/۲۵)

د) $\left\{ \begin{array}{l} x \rightarrow -\infty : f(x) \rightarrow 2^+ \\ x \rightarrow 2^+ : f(x) = -\infty \end{array} \right. \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} (f \circ f)(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$ (۰/۲۵)



۴

مصحح شو:

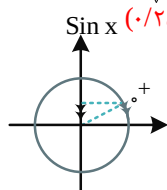
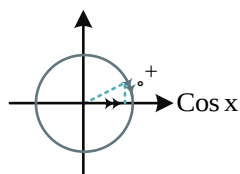
$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1} = \frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{0}$

الف) (مطابق با تمرین ۳ صفحه ۵۷)

حال برای رفع ابهام، صورت و مخرج را یک بار در مزدوج عبارت صورت و یک بار در قسمت چاق عبارت مخرج، ضرب می‌کنیم:

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1} \times \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} \times \frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}$

$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1+1+1}{1+1} = \frac{3}{2}$



آزمون وی ای بی $x \rightarrow 0^+ : \cos x \rightarrow 1^-$ $x \rightarrow 0^+ : \sin x \rightarrow 0^+$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x + \cos x}{1 - \cos x} = \frac{0+1}{1-1^-} = \frac{1}{0^+} = +\infty$ (۰/۲۵)

۵

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x^{\frac{1}{2}} + x}}{x + \sqrt{\sqrt[3]{x} + 1}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\overbrace{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\right)}}^{(\cdot/\sqrt[3]{x})}}{\underbrace{x + \sqrt{x^{\frac{1}{2}} \left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\right)}}_{(\cdot/\sqrt[3]{x})}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x^{\frac{1}{2}}}}{x + \sqrt{\sqrt[3]{x}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{\frac{\sqrt[3]{x} + |x|}{x + \sqrt[3]{|x|}}}_{(\cdot/\sqrt[3]{x})} \xrightarrow[|x|=x]{x \rightarrow +\infty} \underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x} + x}{x + \sqrt[3]{x}}}_{(\cdot/\sqrt[3]{x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}}}_{(\cdot/\sqrt[3]{x})} = \frac{1}{1} \end{aligned}$$
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x^2 + x}}{x + \sqrt[4]{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{\frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x^2}}{x + \sqrt[4]{x^2}}}_{(\cdot/\sqrt[4]{x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{\frac{\sqrt[3]{x} + |x|}{x + \sqrt[4]{x}}}_{(\cdot/\sqrt[4]{x})}$$

$$\xrightarrow[\substack{x \rightarrow +\infty \\ |x|=x}]{\quad} \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{\frac{\sqrt[3]{x} + x}{x + \sqrt[4]{x}}}_{(\cdot/\sqrt[4]{x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{\frac{x}{\sqrt[4]{x}}}_{(\cdot/\sqrt[4]{x})} = \frac{x}{\sqrt[4]{x}}$$
$$\begin{cases} (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b \\ (\sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b})(\sqrt[n]{a} \mp \sqrt[n]{ab} + \sqrt[n]{b^n}) = a \pm b \end{cases}$$

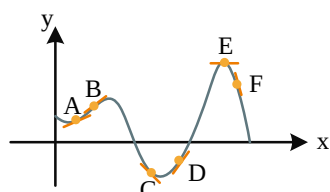
$\frac{+\text{dxc}}{+} = +\infty$	$\frac{-\text{dxc}}{-} = +\infty$	$\frac{+\text{dxc}}{-} = -\infty$	$\frac{-\text{dxc}}{+} = -\infty$
-----------------------------------	-----------------------------------	-----------------------------------	-----------------------------------

۳) محاسبه حد توابع کسری در بی‌نهایت

در محاسبه $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax^n + bx^{n-1} + \dots}{a'x^m + b'x^{m-1} + \dots}$; $(m, n \in \mathbb{N})$ ، حد عبارت صورت و مخرج کسر به سمت $+\infty$ یا $-\infty$ میل می‌کند که در این صورت با حالت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ مواجه خواهیم بود که برای رفع ابهام از آن در صورت و مخرج کسر، جمله با بیشترین توان را نگه داشته و مابقی جملات را حذف می‌کنیم. سپس با توجه به جدول زیر حاصل حد را محاسبه می‌کنیم:

نوع	حاصل حد
درجه عبارت صورت از درجه عبارت مخرج بیشتر باشد.	$+\infty$ یا $-\infty$
درجه عبارت صورت با درجه عبارت مخرج برابر باشد.	$\frac{a}{a'}$
درجه عبارت صورت از درجه عبارت مخرج کمتر باشد.	صفر

مصحح شو:



(مطابق با تمرین ۵ صفحه ۷۶) با توجه به نمودار تابع f ، داریم:

الف) نقطه‌ای که مشتق تابع در آن برابر صفر است: نقطه $E (0, 25)$

ب) نقاطی که مشتق تابع در آن مقداری منفی است: نقطه $C (0, 25)$ ، نقطه $F (0, 25)$

ج) نقطه‌ای که مقدار تابع در آن منفی و مشتق تابع در آن مثبت است: نقطه $D (0, 25)$

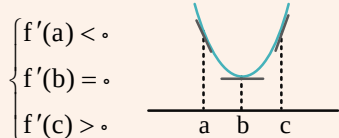
خط مماس

در بعضی از سوالات از ما می‌خواهند که شیب خط مماس بر نمودار تابع در چند نقطه را با هم مقایسه کنیم و یا اینکه درباره علامت مشتق در یک نقطه سوالاتی مطرح می‌شود که برای پاسخ دادن به این سوالات توجه به موارد زیر می‌تواند کمک‌کننده باشد:

- در بازه‌هایی که تابع f صعودی است، شیب خط مماس بر نمودار تابع مثبت است، پس در آن بازه $f' > 0$ است.

- در بازه‌هایی که تابع f نزولی است، شیب خط مماس بر نمودار تابع منفی است، پس در آن بازه $f' < 0$ است.

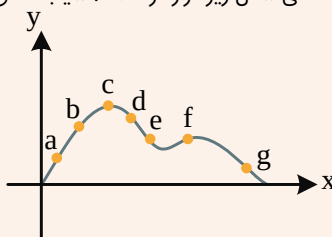
- در نقاطی از تابع f که شیب خط مماس بر نمودار تابع صفر است (مماس افقی است)، $f' = 0$ است.



یه مثال ببینیم:

یادتون باشه که: $f'(x_0) =$ مشتق تابع f در $x_0 =$ شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه‌ای به طول $x = x_0$

مثال: نقاط a, b, c, d, e, f, g روی منحنی شکل زیر قرار گرفته‌اند. شیب خطوط مماس بر منحنی در این نقاط را با هم مقایسه کنید.



$$m_a, m_b, m_f > 0 \Rightarrow m_a > m_b > m_f$$

$$m_c = 0$$

$$m_d, m_e, m_g < 0 \Rightarrow m_g > m_e > m_d$$

$$\Rightarrow m_a > m_b > m_f > m_c > m_g > m_e > m_d$$

مصحح شو:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f''(x)g(x) + \Delta f''(x)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f''(x)(g(x) + \Delta)}{x - 3} \stackrel{g(3) = -5}{=} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f''(x)(g(x) - g(3))}{x - 3}$$

(۰/۲۵) (۰/۲۵)

(صفحه ۷۳)

۷

$$= \lim_{x \rightarrow 3} f'(x) \times \lim_{x \rightarrow 3} \frac{g(x) - g(3)}{x - 3} = f'(3) \times g'(3) = \underbrace{4g'(3)}_{(0/25)}$$

مصحح شو:

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = f(3) = 0$$

(0/25)

(صفحه ۷۹)، تابع $f(x) = (x - 3)[x]$ در $x = 3$ پیوسته است، زیرا:

حال شیب نیم‌ماس چپ در $x = 3$ را به دست می‌آوریم:

$$f'_-(3) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{(x - 3)[x] - 0}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} [x] = \underbrace{[3^-]}_{(0/25)} = 2$$

با توجه به اینکه $f(3) = 0$ است، بنابراین معادله نیم‌ماس چپ به صورت زیر خواهد بود:

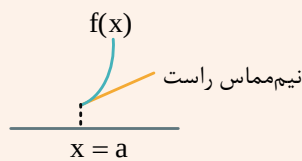
$$y - y_0 = m(x - x_0) \xrightarrow[m=f'_-(3)=2]{(3,0) \in f} y - 0 = 2(x - 3) \text{ یا } y = 2x - 6$$

(0/25)

نیم‌ماس‌های چپ و راست

• مشتق راست تابع $f(x)$ در نقطه $x = a$:

اگر تابع $f(x)$ در نقطه‌ای به طول $x = a$ از راست پیوسته و مشتق‌پذیر باشد، در این صورت مشتق راست تابع f در این نقطه، همان شیب نیم‌خطی است که در سمت راست $x = a$ بر نمودار تابع f مماس می‌شود که به این نیم‌خط، اصطلاحاً نیم‌ماس راست می‌گوییم.



$$\begin{cases} f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ f'_+(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \end{cases}$$

$$x = a \text{ در شیب نیم‌ماس راست} = f'_+(a)$$



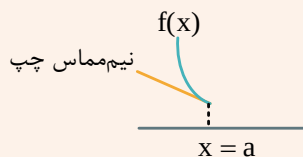
شرط لازم برای وجود مشتق راست در نقطه $x = a$ ، این است که تابع f در این نقطه از راست پیوسته باشد، به عبارت دیگر، اگر تابع f در نقطه $x = a$ پیوستگی راست نداشته باشد، آن‌گاه در این نقطه مشتق راست تعریف نمی‌شود.



$$\text{معادله نیم‌ماس راست در نقطه } x = a \text{ برابر است با: } y - f(a) = f'_+(a)(x - a)$$

• مشتق چپ تابع $f(x)$ در نقطه $x = a$:

اگر تابع $f(x)$ در نقطه‌ای به طول $x = a$ از چپ پیوسته و مشتق‌پذیر باشد، در این صورت مشتق چپ تابع f در این نقطه، همان شیب نیم‌خطی است که در سمت چپ $x = a$ بر نمودار تابع f مماس می‌شود که به این نیم‌خط، اصطلاحاً نیم‌ماس چپ می‌گوییم.



$$\begin{cases} f'_-(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ f'_-(a) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \end{cases}$$

$$x = a \text{ در شیب نیم‌ماس چپ} = f'_-(a)$$

نکته

شرط لازم برای وجود مشتق چپ در نقطه $x = a$ ، این است که تابع f در این نقطه از چپ پیوسته باشد، به عبارت دیگر، اگر تابع f در نقطه $x = a$ پیوستگی چپ نداشته باشد، آن گاه در این نقطه مشتق چپ تعریف نمی شود.

نکته

معادله نیم مماس چپ در نقطه $x = a$ برابر است با: $y - f(a) = f'_-(a)(x - a)$

مصحح شو:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = 0 \quad (0/25)$$

تابع $f(x) = \sqrt{x-1}$ در $x = 1$ پیوسته است، چرا که:

حال مشتق های چپ و راست تابع f را در $x = 1$ به دست می آوریم:

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x-1} - 0}{x - 1} \xrightarrow{|x-1|=x-1} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1} \times \sqrt{x-1}} \quad (0/25)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\sqrt{x-1}} = \frac{1}{0^+} = +\infty \quad (0/25)$$

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x-1} - 0}{x - 1} \xrightarrow{|x-1|=-(x-1)} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{1-x}}{-\sqrt{1-x} \times \sqrt{1-x}} \quad (0/25)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-1}{\sqrt{1-x}} = \frac{-1}{0^+} = -\infty \quad (0/25)$$

چون تابع f در $x = 1$ پیوسته است و در این نقطه، مشتق چپ و راست نامتناهی دارد، بنابراین خط $x = 1$ مماس قائم بر منحنی تابع f است. $(0/25)$

مماس قائم

اگر تابع f در $x = a$ پیوسته باشد و در این نقطه مشتق چپ و راست نامتناهی داشته باشد، در این صورت خط $x = a$ را «مماس قائم» بر منحنی f در نقطه $(a, f(a))$ می نامیم. بدیهی است $f'(a)$ در این حالت وجود ندارد.

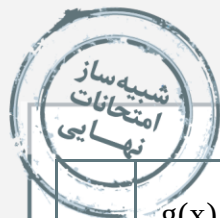
مصحح شو:

(مطابق با تمرین ۱۴ صفحه ۹۲)

$$f(x) = \sqrt{3x+2}(x^2-3x)^3$$

(الف)

$$f'(x) = \underbrace{\left(\frac{3}{2\sqrt{3x+2}} \right)}_{(0/25)} (x^2-3x)^3 + \underbrace{3(2x-3)(x^2-3x)^2}_{(0/25)} \underbrace{(\sqrt{3x+2})}_{(0/25)} \quad (0/25)$$



$$g(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 3x}{\Delta x}}$$

(ب)

$$g'(x) = \frac{\frac{(\cdot/25)}{(2x-3)(\Delta x)} - \frac{(\cdot/25)}{\Delta x} \frac{(\cdot/25)}{(x^2-3x)}}{\frac{(\cdot/25)}{2\sqrt{\frac{x^2-3x}{\Delta x}}}}$$

قواعد مشتق‌گیری

- $y = c; c \in \mathbb{R} \rightarrow y' = 0$
- $y = ax + b \rightarrow y' = a$
- $y = \sqrt[n]{x^m} \rightarrow y' = \frac{m}{n\sqrt[n]{x^{n-m}}}$
- $y = (f(x))^n \rightarrow y' = nf'(x)(f(x))^{n-1}$
- $y = f(x) \pm g(x) \rightarrow y' = f'(x) \pm g'(x)$
- $y = f(x) \times g(x) \rightarrow y' = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$
- $y = \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow y' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}, (g(x) \neq 0)$
- $y = \sqrt[n]{(f(x))^m} \rightarrow y' = \frac{mf'(x)}{n\sqrt[n]{(f(x))^{n-m}}}$

مصحح شو:

(صفحه ۸۷) می‌دانیم که $(f \times g)' = f'g + g'f$ است، پس ابتدا $(f \times g)(x)$ را تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x+1} - 1 \\ g(x) = \sqrt{x+1} + 1 \end{cases} \Rightarrow (f \times g)(x) = (\sqrt{x+1} - 1)(\sqrt{x+1} + 1) = (x+1) - 1 = x$$

۰.۷۵

حال باید مشتق تابع $(f \times g)(x)$ را محاسبه کنیم:

$$(f \times g)(x) = x \Rightarrow (f \times g)'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x) = 1$$

$$\xrightarrow{x=1} (f \times g)'(1) = f'(1)g(1) + g'(1)f(1) = 1$$

بنابراین:

مصحح شو:

برای اینکه تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 - x; & x \geq 1 \\ ax - a; & x < 1 \end{cases}$ در $x = 1$ مشتق‌پذیر باشد، ابتدا باید در این نقطه، شرط پیوستگی برقرار باشد:

۱.۲۵

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} x^2 - x = 1 - 1 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} ax - a = a - a = 0 \end{cases}$$

بنابراین تابع f در $x = 1$ پیوسته است. (۰/۲۵)

۱۲

$$\begin{cases} f'_+(x) = 2x - 1 \xrightarrow{x=1} f'_+(1) = 2 - 1 = 1 \quad (0/25) \\ f'_-(x) = a \xrightarrow{x=1} f'_-(1) = a \quad (0/25) \end{cases}$$

از طرفی، باید $f'_+(1) = f'_-(1)$ باشد، به عبارت دیگر:

$$\underbrace{f'_+(1)}_{(0/25)} = \underbrace{f'_-(1)}_{(0/25)} \Rightarrow a = 1$$

روش دوم) به کمک تعریف مشتق:

$$\begin{cases} f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - x) - 0}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} x = 1 \quad (0/25) \\ f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(ax - a) - 0}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} a = a \quad (0/25) \end{cases}$$

$$\underbrace{f'_+(1)}_{(0/25)} = \underbrace{f'_-(1)}_{(0/25)} \Rightarrow a = 1 \quad (0/25)$$

مشتق پذیری

تابع f را در $x = a$ مشتق پذیر گوئیم، هرگاه:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$$

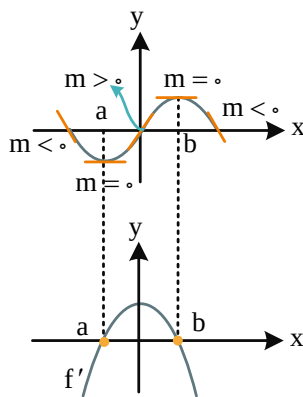
۱) تابع f در $x = a$ پیوسته باشد، یعنی:

۲) مشتق چپ و مشتق راست تابع f در $x = a$ موجود (متناهی) و با هم برابر باشند، یعنی: $f'_+(a) = f'_-(a)$

مصحح شو:

(مرتبط با تمرین ۱۰ صفحه ۹۱)

ابتدا خط‌های مماس را بر چند نقطه از منحنی تابع f رسم می‌کنیم:



(رسم صحیح نمودار، ۱ نمره)

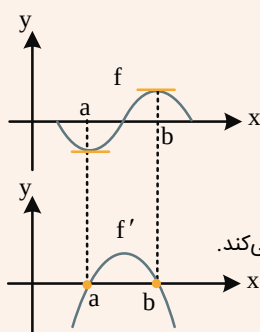
۲۰ شو

زمانی که نمودار تابع f را می‌دهند و نمودار تابع f' را می‌خواهند، توجه به دو نکته زیر ضروری است:

۱) نقاطی که تابع f در آن‌ها مشتق ناپذیر است (که عبارتند از نقاط ناپیوستگی، نقاط گوشه، نقاط عطف عمودی و نقاط بازگشتی) در نمودار تابع f' به صورت ناپیوستگی ظاهر می‌شوند و تابع f' در این نقاط مقدار هم نخواهد داشت.

چند تا نمونه با هم ببینیم...

نمودار f'	نمودار f



۲) در بازه‌هایی که نمودار تابع f ، اکیداً صعودی باشد، نمودار تابع f' در آن فاصله، بالای محور x قرار دارد.

- در بازه‌هایی که نمودار تابع f ، اکیداً نزولی باشد نمودار تابع f' در آن فاصله، پایین محور x قرار دارد.

- در نقاطی که خط مماس بر نمودار تابع f به صورت افقی باشد، نمودار تابع f' در آن نقاط محور x را قطع می‌کند.

مصحح شو:

(مطابق با تمرین ۴ صفحه ۱۰۰) معادله حرکت متحرک به صورت $f(t) = t^2 - 2t$ است، پس:

$$\text{سرعت متوسط در بازه } [0, 3] = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{(9 - 6) - 0}{3} = \frac{3}{3} = 1 \quad (0/25)$$

$$\text{سرعت لحظه‌ای در لحظه } t = f'(t) = 2t - 2 \quad (0/25)$$

۱ می‌خواهیم بدانیم که در چه زمانی سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط متحرک با هم برابرند، پس:

$$2t - 2 = 1 \Rightarrow 2t = 3 \Rightarrow t = \frac{3}{2} \text{ s} \quad (0/25)$$

۱۴

آهنگ تغییر متوسط و لحظه‌ای تابع

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

الف) آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازه $[a, b]$ برابر است با:

ب) آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f در $x = a$ برابر است با: $f'(a)$

۲۰

موفق باشید.