# پایه دوازدهم تجربی

## آزمون‌های شبیه‌ساز امتحانات نهایی ماز

شبیه‌ساز امتحانات نهایی

Maze Educational Group

# دفترچه سؤال

## پنجشنبه ۱۴ اسفندماه ۱۴۰۴

مرور سه هشتم ابتدایی نیم‌سال دوم +
پیشروی دوهشتم نیم‌سال دوم

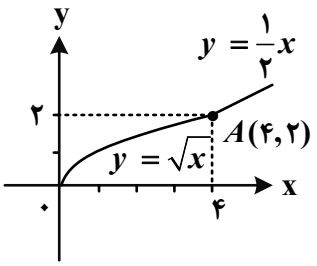
بودجه آزمون: فصل ۴ (درس ۲ و ۳) و فصل ۵ (تا پایان درس ۱): صفحه‌های ۷۷ تا ۱۱۲

| ردیف | درس | تعداد صفحه | زمان پاسخگویی |
|---|---|---|---|
| ۱ | ریاضی (۳) | ۳ | ۱۱۰ دقیقه |

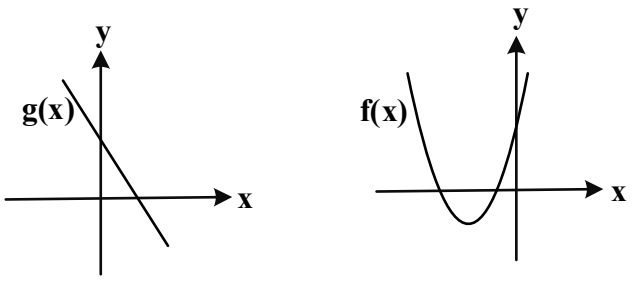
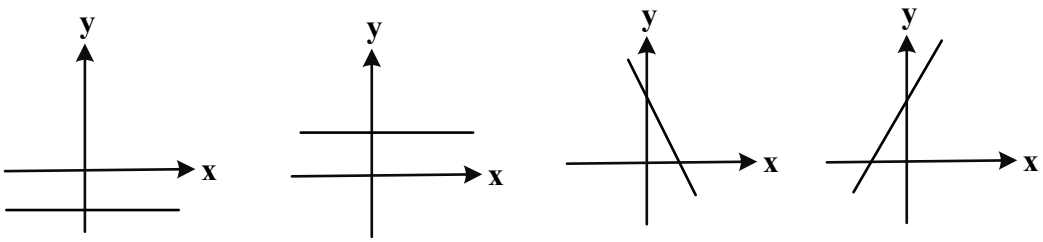
برای شباهت حداکثری به امتحانات نهایی، صفحه‌آرایی، فونت و حتی اندازهٔ متن در تمامی آزمون‌های تشریحی ماز، کاملاً یکسان با استاندارد امتحانات نهایی در نظر گرفته می‌شود.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

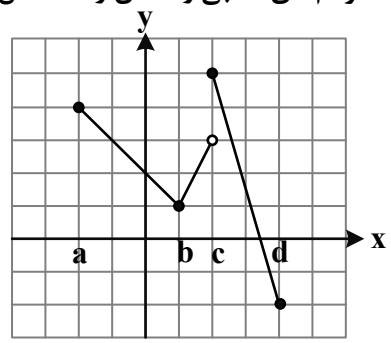
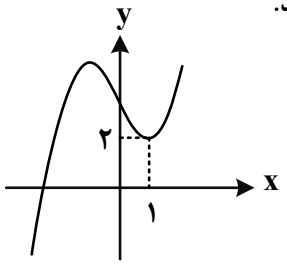
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| سوالات آزمون شبیه‌ساز نهایی درس: ریاضی ۳ | پایه: دوازدهم | رشته: علوم تجربی | تاریخ آزمون: ۱۴۰۴/۱۲/۱۴ | |
| تعداد صفحه: ۳ | مدت آزمون: ۱۱۰ دقیقه | ساعت شروع: | نام و نام‌خانوادگی: | |
| آزمون شبیه‌ساز امتحان نهایی | | گروه آموزشی ماز | | |

| ردیف | سوالات (پاسخ‌برگ دارد) | نمره |
|---|---|---|
| ۱ | **درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.**<br>الف) تابع $y=\begin{cases}2x+1 & x\geq 1\\ 2x-1 & x<1\end{cases}$ در نقطهٔ به طول $x=1$ مشتق‌پذیر است.<br>ب) نقطهٔ $(1,1)$ یک نقطه گوشه‌ای برای تابع $f(x)=\lvert 2-x^2\rvert$ است.<br>پ) تابع $f(x)=5$ دارای بی‌شمار نقطهٔ بحرانی است.<br>ت) اگر $x=c$ طول یک نقطه اکسترمم نسبی تابع $f$ باشد، آن‌گاه $f'(c)=0$ . | ۱ |
| ۲ | **جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید.**<br>الف) خط ..... مماس قائم منحنی تابع $y=\sqrt[3]{x}$ است.<br>ب) اگر $f(x)=2x^3+1$ و $g(x)=\sqrt{x}$ باشند، حاصل $(f+g)'(4)+(f\times g)'(1)$ برابر ..... است.<br>پ) اگر $f(x)=x^3+4x^2-1$ باشد، حاصل $f''(-1)$ برابر ..... است.<br>ت) اگر تابع $y=f(x)$ در بازهٔ $[a,b]$ اکیداً نزولی باشد، علامت مشتق تابع $f$ در این بازه ..... است. | ۱ |
| ۳ | با محاسبهٔ مشتق راست و چپ تابع $f$ در نقطهٔ $A$، نشان دهید که تابع $f$ در نقطهٔ $A$ مشتق‌پذیر نیست.<br>  <br> | ۱/۲۵ |
| ۴ | مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\sqrt{x^2-4x+4}$ را در نقطهٔ $x=2$ با استفاده از تعریف مشتق بررسی کنید. | ۱/۵ |
| | صفحه ۱ از ۳ | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| سوالات آزمون شبیه‌ساز نهایی درس: ریاضی ۳ | پایه: دوازدهم | رشته: علوم تجربی | تاریخ آزمون: ۱۴۰۴/۱۲/۱۴ |
| تعداد صفحه: ۳ | مدت آزمون: ۱۱۰ دقیقه | ساعت شروع: | نام و نام‌خانوادگی: |
| آزمون شبیه‌ساز امتحان نهایی | | گروه آموزشی ماز | |

| ردیف | سوالات (پاسخ‌برگ دارد) | نمره |
|---|---|---|
| ۵ | نمودار توابع $f$ و $g$ به‌صورت زیر است:<br>  <br><br>(الف) (ب)<br>نمودار مشتق هر کدام از توابع $f$ و $g$ را از بین نمودارهای زیر انتخاب کنید، سپس شمارهٔ مربوط به آن را در پاسخ‌برگ بنویسید. (دو نمودار اضافه است.)<br>  <br><br>(۱) (۲) (۳) (۴) | ۱ |
| ۶ | با استفاده از تعریف مشتق نشان دهید اگر $f(x)=\sqrt{x}$ و $x>0$، آن‌گاه $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$. | ۱/۲۵ |
| ۷ | اگر $f(2)=7$ و $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{2x-4}=5$ باشد، مشتق تابع $g(x)=xf(x)$ را در $x=2$ به‌دست آورید. | ۱ |
| ۸ | مشتق تابع‌های زیر را به‌دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)<br>الف) $f(x)=(\sqrt{x}+3x)^7$<br>ب) $g(x)=(5x^3-x)^9(\sqrt{2x+1})$<br>پ) $h(x)=\frac{\sqrt{x+1}}{x^3-6x+1}$ | ۳ |
| ۹ | اگر $f'(1)=3$، $g'(1)=5$ و $f(1)=1$، مقدار مشتق $(f+g)of$ در $x=1$ را به‌دست آورید. | ۱ |
| ۱۰ | تابع $f(x)=7\sqrt{x}+50$ قد متوسط کودکان را برحسب سانتی‌متر تا حدود ۶۰ ماهگی نشان می‌دهد که در آن x مدت زمان پس از تولد (برحسب ماه) است.<br>الف) آهنگ متوسط رشد در بازهٔ $[0,25]$ را به‌دست آورید.<br>ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر قد کودک در ۴۹ ماهگی را به‌دست آورید. | ۱/۲۵ |
| | صفحه ۲ از ۳ | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| سوالات آزمون شبیه‌ساز نهایی درس: ریاضی ۳ | پایه: دوازدهم | رشته: علوم تجربی | تاریخ آزمون: ۱۴۰۴/۱۲/۱۴ |
| تعداد صفحه: ۳ | مدت آزمون: ۱۱۰ دقیقه | ساعت شروع: | نام و نام‌خانوادگی: |
| آزمون شبیه‌ساز امتحان نهایی | | گروه آموزشی ماز | |

| ردیف | سوالات (پاسخ‌برگ دارد) | نمره |
|---|---|---|
| ۱۱ | تابع $f(x)=\frac{۱}{۳}x^{۳}-۴x+۱$ مفروض است. در نقطهٔ $x=a$، آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع کمتر از آهنگ تغییر متوسط آن در بازه $[۰,۳]$است. محدودهٔ $a$ را بیابید. | ۱/۲۵ |
| ۱۲ | با رسم جدول تغییرات نشان دهید که تابع $f(x)=\frac{۱}{۲}x^{۴}+x^{۲}+۱$ در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی است؟ | ۱/۵ |
| ۱۳ | در شکل زیر نمودار مربوط به یک تابع رسم شده است. طول نقاط اکسترمم‌های نسبی و مطلق را مشخص کنید.   | ۱ |
| ۱۴ | نمودار تابع $f(x)=x^{۳}+ax+b$ به‌صورت زیر است. مقادیر a و b را بیابید.   | ۱ |
| ۱۵ | مقادیر اکسترمم‌های مطلق تابع $f(x)=\frac{-۲}{۳}x^{۳}-x^{۲}+۴x+۱$ را در بازهٔ $[-۳,۲]$به‌دست آورید. | ۲ |
| | موفق باشید. | ۲۰ |
| | صفحه ۳ از ۳ | |

# پایه دوازدهم تجربی

## آزمون‌های شبیه‌ساز امتحانات نهایی ماز

شبیه‌ساز امتحانات نهایی

مرور سه هشتم ابتدایی نیم‌سال دوم +
پیشروی دوهشتم نیم‌سال دوم

پنجشنبه ۱۴ اسفندماه ۱۴۰۴

# پاسخبرگ ریاضی (۳)

برای شباهت حداکثری به امتحانات نهایی، صفحه‌آرایی، فونت و حتی اندازهٔ متن در تمامی آزمون‌های تشریحی ماز، کاملاً یکسان با استاندارد امتحانات نهایی در نظر گرفته می‌شود.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

| | | | |
|---|---|---|---|
| آزمون شبیه‌ساز نهایی درس: **ریاضی ۳** | تعداد صفحه: **۴** | رشته: **علوم تجربی** | ساعت شروع: |
| نام و نام‌خانوادگی: | **پایه دوازدهم** | مدت آزمون: **۱۱۰ دقیقه** | تاریخ آزمون: **۱۴۰۴/۱۲/۱۴** |
| **آزمون شبیه‌ساز امتحان نهایی** | | **گروه آموزشی ماز** | |

| ردیف | پاسخ‌برگ | نمره |
|---|---|---|
| ۱ | الف) ..... ب) ..... پ) ..... ت) ..... | ۱ |
| ۲ | الف) ..... ب) ..... پ) ..... ت) ..... | ۱ |
| ۳ | | ۱/۲۵ |
| ۴ | | ۱/۵ |
| ۵ | الف)<br>ب) | ۱ |
| ۶ | | ۱/۲۵ |


SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

| | | | |
|---|---|---|---|
| آزمون شبیه‌ساز نهایی درس: **ریاضی ۳** | تعداد صفحه: **۴** | رشته: **علوم تجربی** | ساعت شروع: |
| نام و نام‌خانوادگی: | **پایه دوازدهم** | مدت آزمون: **۱۱۰ دقیقه** | تاریخ آزمون: **۱۴۰۴/۱۲/۱۴** |
| **آزمون شبیه‌ساز امتحان نهایی** | | **گروه آموزشی ماز** | |

| ردیف | پاسخ‌برگ | نمره |
|---|---|---|
| ۷ | | ۱ |
| ۸ | الف)<br>ب)<br>پ) | ۳ |
| ۹ | | ۱ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| آزمون شبیه‌ساز نهایی درس: **ریاضی ۳** | تعداد صفحه: **۴** | رشته: **علوم تجربی** | ساعت شروع: |
| نام و نام‌خانوادگی: | **پایه دوازدهم** | مدت آزمون: **۱۱۰ دقیقه** | تاریخ آزمون: **۱۴۰۴/۱۲/۱۴** |
| **آزمون شبیه‌ساز امتحان نهایی** | | **گروه آموزشی ماز** | |

| ردیف | پاسخ‌برگ | نمره |
|---|---|---|
| ۱۰ | الف)<br>ب) | ۱/۲۵ |
| ۱۱ | | ۱/۲۵ |
| ۱۲ | | ۱/۵ |
| ۱۳ | | ۱ |


SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

| | | | |
|---|---|---|---|
| آزمون شبیه‌ساز نهایی درس: **ریاضی ۳** | تعداد صفحه: **۴** | رشته: **علوم تجربی** | ساعت شروع: |
| نام و نام‌خانوادگی: | **پایه دوازدهم** | مدت آزمون: **۱۱۰ دقیقه** | تاریخ آزمون: **۱۴۰۴/۱۲/۱۴** |
| **آزمون شبیه‌ساز امتحان نهایی** | | **گروه آموزشی ماز** | |

| ردیف | پاسخ‌برگ | نمره |
|---|---|---|
| ۱۴ | | ۱ |
| ۱۵ | | ۲ |
| | موفق باشید. | ۲۰ |

# پایه دوازدهم تجربی

## آزمون‌های شبیه‌ساز امتحانات نهایی ماز

شبیه‌ساز امتحانات نهایی

Maze Educational Group

# دفترچه پاسخ

پنجشنبه ۱۴ اسفندماه ۱۴۰۴

مرور سه هشتم ابتدایی نیم‌سال دوم + پیشروی دوهشتم نیم‌سال دوم

بودجه آزمون: فصل ۴ (درس ۲ و ۳) و فصل ۵ (تا پایان درس ۱): صفحه‌های ۷۷ تا ۱۱۲

| درس | طراحان | ویراستاران |
| --- | --- | --- |
| ریاضی (۳) | محدثه شیخعلی ـ سیدجواد نظری | ارسلان حسنوند ـ نرجس تیمناک<br>حمیدرضا ولی‌پور |

حق چاپ و تکثیر سؤالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز «گروه ماز» مجاز می‌باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می‌شود.

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

# زودبیست

## مصحّح شو:

پاسخ دقیق سؤال این‌جا میاد و اسمش روشه: «مصحِّح شو»، می‌خواد شما رو به یه مصحح حرفه‌ای و دقیق تبدیل کنه که بدونین موقع ارزیابی جواب‌هاتون باید حواستون به چی باشه تا توی آزمون‌های بعدی دقیق‌تر عمل کنین. اگه جواب یه سؤال رو بشه به شکل‌های مختلف بیان کرد، اون هم، این‌جا بهتون گفتیم.

## بررسی دقیق‌تر:

اگه پاسخ کوتاه به سؤال کافی نباشه تا ببینین چطوری باید به جواب برسین، توی این بخش با بررسی دقیق‌ترِ جواب، سؤال رو براتون توضیح دادیم.

## نقشه نهایی:

امتحان نهایی قوانین و قواعد خاص خودش رو داره؛ شما باید بدونین تیپ‌های رایج سؤال‌های امتحان نهایی چیه و باید چطوری بهش جواب بدین. این کادر، مشاورهٔ حرفه‌ای ماست به شما تا فوت و فن‌های امتحان نهایی رو یاد بگیرین.

## ۲۰ شو:

توی «۲۰ شو»، مبحث هر سؤال رو براتون مرور یا جمع‌بندی کردیم؛ «۲۰ شو» و درسنامه‌هاش دقیقاً فاصلهٔ بین نمرهٔ خوب و نمرهٔ ۲۰ رو براتون پر می‌کنه.

## نکتهٔ طلایی:

با وجود «۲۰ شو»، که کلی درسنامهٔ مفصل داره، باز هم اگه نکتهٔ مهم و مفیدی بود، توی این کادر براتون آوردیم.


**تیم اجرایی و تولید آزمون**

مرضیه بنیانی | یگانه پورابراهیم | محدثه شیخ‌علی | زهره صفری | محدثه عربگری

ساره محمدعلی‌نسب | زینب مرتضوی

**سرپرست آزمون: ارمغان قریب**


یک تیم با بیش از ۵۰۰ نفر در حال کار هستن تا آزمون‌های ماز با حداکثر کیفیت حاضر بشن و به شما کمک کنن و مسیر موفقیت رو براتون ساده‌تر کنن. همیشه از نظرات و کامنت‌های خوب‌تون انرژی می‌گیریم. مرسی که همراهمون هستین.

**دکتر رسول خنجری**

# بسته شبیه‌ساز کنکور
# مارکوپولو منتشر شد!

- **۱۷ دوره کنکور سراسری** از ۹۸ تا ۱۴۰۴؛ آپدیت شده و منطبق با تغییرات کنکور ۱۴۰۵
- **پاسخنامه به سبک ماز**؛ شامل بررسی دقیق گزینه‌ها، نکته‌ها، جداول و کادرهای جمع‌بندی
- **قابلیت تخمین رتبه و تراز کنکور سراسری**؛ براساس نمرات نهایی و درصدهای کنکور
- **آزمون پیش‌بینی** کنکور سراسری ۱۴۰۵ از نگاه طراحان ماز
- **تحلیل پاسخنامهٔ ویدیویی سؤالات کنکور** توسط اساتید ماز
- **بستهٔ جامع آمادگی امتحانات نهایی** خرداد ۱۴۰۵
- بانک کنکور به تفکیک درس به درس و مبحث به مبحث مناسب دوران جمع‌بندی
- بانک کامل سؤالات شیمی و فیزیک کنکور ریاضی مشترک با رشتهٔ تجربی

ثبت سفارش
**از سایت مازمارکت**
**mazemarket.ir**

**اسکن کن!**

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

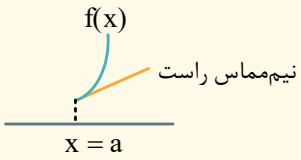
| | | | |
|---|---|---|---|
| راهنمای تصحیح آزمون نهایی درس: **ریاضی ۳** | | رشته: **علوم تجربی** | |
| **دوره دوم متوسطه ـ دوازدهم** | تاریخ آزمون: **۱۴۰۴/۱۲/۱۴** | ساعت شروع: | مدت زمان: **۱۱۰ دقیقه** |
| **آزمون شبیه‌ساز امتحان نهایی** | | **گروه آموزشی ماز** | |

| ردیف | راهنمای تصحیح | نمره |
|---|---|---|
| ۱ | **مصحّح شو**<br>الف) نادرست (۰/۲۵) (صفحه ۹۱) ب) نادرست (۰/۲۵) (صفحه ۱۰۷)<br>پ) درست (۰/۲۵) (صفحه ۱۰۴) ت) نادرست (۰/۲۵) (صفحه ۱۰۸)<br>**بررسی دقیق‌تر:**<br>الف) تابع در $x=۱$ پیوسته نیست.<br>$\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=۳\ ,\ \lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)=۱$<br>ت) ممکن است مشتق تابع در نقطه اکسترمم نسبی موجود نباشد.<br>**سبز بودی یا قرمز؟** بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۳ دقیقه | ۱ |
| ۲ | **مصحّح شو**<br>الف) $x=۰$ (محور yها) (۰/۲۵) (صفحه ۹۱) ب) ۱۰۳/۷۵ (۰/۲۵)(صفحه ۹۲)<br>پ) ۲ (۰/۲۵) (صفحه ۹۲) ت) منفی (۰/۲۵) (صفحه ۱۰۴)<br>**بررسی دقیق‌تر:**<br>الف) $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\sqrt[۳]{x}-۰}{x}=\lim\limits_{x\to ۰}\frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲}}=+\infty$<br>ب) $f(x)=۲x^۳+۱\Rightarrow f'(x)=۶x^۲$<br>$g(x)=\sqrt{x}\Rightarrow g'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}$<br>$(f+g)'(۴)+(f\times g)'(۱)=f'(۴)+g'(۴)+f'(۱)g(۱)+g'(۱)f(۱)=۹۶+\frac{۱}{۴}+۶+\frac{۳}{۲}=۱۰۳/۷۵$<br>پ) $f(x)=x^۳+۴x^۲-۱\Rightarrow f'(x)=۳x^۲+۸x\Rightarrow f''(x)=۶x+۸\Rightarrow f''(-۱)=-۶+۸=۲$<br>**سبز بودی یا قرمز؟** بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۴ دقیقه | ۱ |
| ۳ | **مصحّح شو**<br>$f'_-(۴)=\lim\limits_{x\to ۴^-}\frac{f(x)-f(۴)}{x-۴}=\lim\limits_{x\to ۴^-}\frac{\sqrt{x}-۲}{x-۴}=\lim\limits_{x\to ۴^-}\frac{\cancel{(\sqrt{x}-۲)}}{\cancel{(\sqrt{x}-۲)}(\sqrt{x}+۲)}=\lim\limits_{x\to ۴^-}\frac{۱}{\sqrt{x}+۲}=\frac{۱}{۴}$ (۰/۲۵)<br>(۰/۲۵)<br>$f'_+(۴)=\lim\limits_{x\to ۴^+}\frac{f(x)-f(۴)}{x-۴}=\lim\limits_{x\to ۴^+}\frac{\frac{x}{۲}-۲}{x-۴}=\lim\limits_{x\to ۴^+}\frac{x-۴}{۲(x-۴)}=\frac{۱}{۲}$ (۰/۲۵) (صفحه ۹۱)<br>(۰/۲۵)<br>بنابراین از آن‌جا که $f'_-(۴)\neq f'_+(۴)$ تابع در $x=۴$ مشتق‌پذیر نیست. (۰/۲۵) | ۱/۲۵ |

### نیم‌مماس‌های چپ و راست

- **مشتق راست تابع f(x) در نقطه $x=a$ :**

اگر تابع f(x) در نقطه‌ای به طول $x=a$ از راست پیوسته و مشتق‌پذیر باشد، در این صورت مشتق راست تابع f در این نقطه، همان شیب نیم‌خطی است که از سمت راست $x=a$ بر نمودار تابع f مماس می‌شود که به این نیم‌خط، اصطلاحاً نیم‌مماس راست می‌گوییم.




$$\begin{cases} f'_+(a)=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \\ f'_+(a)=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} \end{cases}$$

$f'_+(a)=$ شیب نیم‌مماس راست در $x=a$

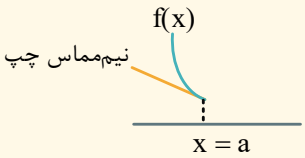
#### نکته طلایی

شرط لازم برای وجود مشتق راست در نقطه $x=a$ ، این است که تابع f در این نقطه از راست پیوسته باشد، به عبارت دیگر، اگر تابع f در نقطه $x=a$ پیوستگی راست نداشته باشد، آن‌گاه در این نقطه مشتق راست تعریف نمی‌شود.

معادله نیم‌مماس راست در نقطه $x=a$ برابر است با: $y-f(a)=f'_+(a)(x-a)$

- **مشتق چپ تابع f(x) در نقطه $x=a$ :**

اگر تابع f(x) در نقطه‌ای به طول $x=a$ از چپ پیوسته و مشتق‌پذیر باشد، در این صورت مشتق چپ تابع f در این نقطه، همان شیب نیم‌خطی است که از سمت چپ $x=a$ بر نمودار تابع f مماس می‌شود که به این نیم‌خط، اصطلاحاً نیم‌مماس چپ می‌گوییم.




$$\begin{cases} f'_-(a)=\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \\ f'_-(a)=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} \end{cases}$$

$f'_-(a)=$ شیب نیم‌مماس چپ در $x=a$

#### نکته طلایی دیگر

شرط لازم برای وجود مشتق چپ در نقطه $x=a$ ، این است که تابع f در این نقطه از چپ پیوسته باشد، به عبارت دیگر، اگر تابع f در نقطه $x=a$ پیوستگی چپ نداشته باشد، آن‌گاه در این نقطه مشتق چپ تعریف نمی‌شود.

معادله نیم‌مماس چپ در نقطه $x=a$ برابر است با: $y-f(a)=f'_-(a)(x-a)$

سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۴ دقیقه

---

### مصحّح شو

ابتدا ضابطه تابع را کمی ساده‌تر می‌کنیم:

$$\sqrt{x^2-4x+4}=\sqrt{(x-2)^2}=|x-2| \Rightarrow \lim_{x\to 2}|x-2|=f(2)=0 \Rightarrow |x-2| \text{ در } x=2 \text{ پیوسته } (0/25)$$

حال با تعریف مشتق، داریم:

$$f'_+(2)=\underbrace{\lim_{x\to 2^+}\frac{|x-2|-0}{x-2}}_{(0/25)}=1 \ (0/25)$$

$$f'_-(2)=\underbrace{\lim_{x\to 2^-}\frac{|x-2|}{x-2}}_{(0/25)}=-1 \ (0/25)$$

بنابراین چون $f'_-(2)\neq f'_+(2)$ ، تابع در $x=2$ مشتق‌پذیر نیست. (۰/۲۵) (صفحه ۹۱)

۴ — ۱/۵

| | | |
|---|---|---|
| | **مشتق‌پذیری**<br>تابع f را در $x=a$ مشتق‌پذیر گوییم، هرگاه:<br>۱) تابع f در $x=a$ پیوسته باشد، یعنی: $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=f(a)$<br>۲) مشتق چپ و مشتق راست تابع f در $x=a$ موجود (متناهی) و با هم برابر باشند، یعنی: $f'_+(a)=f'_-(a)$<br>سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۴ دقیقه | |
| ۵ | **مصحّح شو**<br>الف) $f(x)$ نمودار یک سهمی با معادله $f(x)=ax^2+bx+c$ است که چون دهانهٔ سهمی رو به بالاست، $a>0$ و چون شیب خط مماس بر سهمی در نقطهٔ عرض از مبدأ مثبت است، پس $b>0$ و در نتیجه: $f'(x)=2ax+b$ (۰/۲۵)<br>که چون $a,b>0$، مشتق خطی با شیب و عرض از مبدأ مثبت است، یعنی نمودار (۱) (۰/۲۵)<br>**راهنمای مصحح:**<br>۰/۲۵ نمره برای تحلیل نمودار $f(x)$ و پیدا کردن علامت ضرایب $a,b$ قرار داده شده است.<br>ب) نمودار تابع $g(x)$، یک تابع خطی با ضابطه $g(x)=ax+b$ است که در آن شیب منفی $(a<0)$ و عرض از مبدأ مثبت $(b>0)$ است. (۰/۲۵) پس:<br>$g'(x)=a$ که چون $a<0$، خط افقی، با مقدار منفی است، یعنی نمودار (۴) (۰/۲۵)(صفحه ۹۱)<br>سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۴ دقیقه | ۱ |
| ۶ | **مصحّح شو**<br>$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-x}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$ (۰/۲۵)<br>(۰/۲۵)<br>(صفحه ۸۶)<br>$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\cancel{h}}{\cancel{h}(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ (۰/۲۵)<br>(۰/۲۵) (۰/۲۵)<br>سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۴ دقیقه | ۱/۲۵ |
| ۷ | **مصحّح شو**<br>با فرض $f(2)=7$ داریم: (صفحه ۸۷)<br>$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{2(x-2)}=\overbrace{\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}}^{f'(2)}\times(\dfrac{1}{2})=5\Rightarrow f'(2)=10$ (۰/۲۵)<br>(۰/۲۵)<br>بنابراین با استفاده از قاعده مشتق حاصل‌ضربی داریم:<br>$g'(x)=(xf(x))'=(x)'f(x)+f'(x)(x)=f(x)+xf'(x)$<br>با جای‌گذاری $x=2$ داریم:<br>$g'(2)=f(2)+2f'(2)=7+2(10)=27$ (۰/۲۵)<br>(۰/۲۵)<br>سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۴ دقیقه | ۱ |

| | | |
|---|---|---|
| ۸ | **مصحّح شو**<br>الف) (صفحه ۹۲)<br>$f(x)=(\sqrt{x}+3x)^7 \Rightarrow f'(x)=\underbrace{7}_{(0/25)}\underbrace{(\sqrt{x}+3x)^6}_{(0/25)}\underbrace{(\frac{1}{2\sqrt{x}}+3)}_{(0/5)}$<br>ب)<br>$g(x)=(5x^3-x)^9(\sqrt{2x+1})$<br>$g'(x)=9(5x^3-x)^8\underbrace{(15x^2-1)}_{(0/5)}(\sqrt{2x+1})+\underbrace{(\frac{1}{\sqrt{2x+1}})}_{(0/5)}(5x^3-x)^9$ (۰/۵)<br>پ)<br>$h(x)=\frac{\sqrt{x+1}}{x^3-6x+1} \Rightarrow h'(x)=\frac{\underbrace{(\frac{1}{2\sqrt{x+1}})}_{(0/5)}(x^3-6x+1)-\underbrace{(3x^2-6)}_{(0/25)}(\sqrt{x+1})}{\underbrace{(x^3-6x+1)^2}_{(0/25)}}$<br>**قواعد مشتق‌گیری**<br>• $y=c;c\in\mathbb{R}\to y'=0$<br>• $y=ax+b\to y'=a$<br>• $y=\sqrt[n]{x^m}\to y'=\frac{m}{n\sqrt[n]{x^{n-m}}}$<br>• $y=((f(x))^n\to y'=nf'(x)(f(x))^{n-1}$<br>• $y=f(x)\pm g(x)\to y'=f'(x)\pm g'(x)$<br>• $y=f(x)\times g(x)\to y'=f'(x)g(x)+g'(x)f(x)$<br>• $y=\frac{f(x)}{g(x)}\to y'=\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g^2(x)}$ , $(g(x)\neq 0)$<br>• $y=\sqrt[n]{(f(x))^m}\to y'=\frac{mf'(x)}{n\sqrt[n]{(f(x))^{n-m}}}$<br>**سبز بودی یا قرمز؟** بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۶ دقیقه<br>**مسیر تمرینی:**<br>مشابه این سوال در سوال ۱۰ امتحان نهایی خردادماه ۱۴۰۴ مطرح شده بود. | ۳ |
| ۹ | **مصحّح شو**<br>$((f+g)of)'=f'(x)(f+g)'(f(x))=f'(x)(f'(f(x))+g'(f(x)))$<br>بنابراین با قرار دادن $x=1$ داریم: (صفحه ۸۷)<br>$((f+g)of)'(1)=f'(1)\underbrace{(f'(f(1))+g'(f(1)))}_{(0/25)}=3\underbrace{(f'(1)+g'(1))}_{(0/25)}=3(3+5)=24$ (۰/۵)<br>**سبز بودی یا قرمز؟** بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۵ دقیقه<br>**مسیر تمرینی:**<br>مشابه این سوال در سوال ۱۱ امتحان نهایی خردادماه ۱۴۰۴ مطرح شده بود. | ۱ |
| ۱۰ | **مصحّح شو**<br>الف) (صفحه ۹۶)<br>آهنگ متوسط رشد در $[0,25]=\frac{f(25)-f(0)}{\underbrace{25-0}_{(0/25)}}=\frac{(7(5)+50)-(50)}{25}=\frac{35}{25}=\frac{7}{5}=1/4$ (۰/۲۵)<br>ب) (صفحه ۲۲)<br>$f(x)=7\sqrt{x}+50\Rightarrow f'(x)=\frac{7}{2\sqrt{x}}$ (۰/۵) | ۱/۲۵ |

| | | |
|---|---|---|
| | $x=۴۹$ آهنگ لحظه‌ای تغییر در $=f'(۴۹)=\frac{۷}{۲(۷)}=\frac{۱}{۲}$ (۰/۲۵)<br>**آهنگ تغییر متوسط و لحظه‌ای تابع**<br>**الف)** آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازه $[a,b]$ برابر است با: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$<br>**ب)** آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f در $x=a$ برابر است با: $f'(a)$<br>**سبز بودی یا قرمز؟** بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۵ دقیقه<br>**مسیر تمرینی:**<br>مشابه این سوال در سوال ۱۳ امتحان نهایی خردادماه ۱۴۰۴ مطرح شده بود. | |
| ۱/۲۵ | **مصحّح شو**<br>$f(x)=\frac{۱}{۳}x^۳-۴x+۱\Rightarrow f'(x)=x^۲-۴$ (۰/۲۵) (صفحه ۱۰۰)<br>$x=a$ آهنگ تغییر لحظه‌ای در $=f'(a)=a^۲-۴$ (۰/۲۵)<br>$[۰,۳]$ آهنگ تغییر متوسط در بازه $=\frac{f(۳)-f(۰)}{۳-۰}=\frac{(۹-۱۲+۱)-(۱)}{۳}=-۱$ (۰/۲۵)<br>بنابراین با توجه به فرض سوال، باید $a^۲-۴<-۱$ (۰/۲۵) که یعنی $a^۲<۳$ و در نتیجه: $-\sqrt{۳}<a<\sqrt{۳}$ (۰/۲۵)<br>**سبز بودی یا قرمز؟** بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۵ دقیقه<br>**مسیر تمرینی:**<br>مشابه این سوال در سوال ۱۲ امتحان نهایی خردادماه ۱۴۰۳ مطرح شده بود. | ۱۱ |
| ۱/۵ | **مصحّح شو**<br>$f(x)=\frac{۱}{۲}x^۴+x^۲+۱\Rightarrow f'(x)=۲x^۳+۲x=۲x(x^۲+۱)=۰\Rightarrow x=۰$ (۰/۲۵) (صفحه ۱۱۲)<br>(۰/۲۵)<br>بنابراین با رسم جدول تغییرات، داریم:<br>بنابراین تابع در $(-\infty,۰]$ نزولی (۰/۲۵)<br>در $[۰,+\infty)$ صعودی است. (۰/۲۵)<br>$\begin{array}{c\|c\|c} x & & ۰ \\ \hline f'(x) & - & ۰ & + \\ \hline f(x) & \searrow & \text{نزولی} & \nearrow & \text{صعودی} \end{array}$<br>(۰/۵)<br>**سبز بودی یا قرمز؟** بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۵ دقیقه | ۱۲ |
| ۱ | **مصحّح شو**<br>min: b نسبی (۰/۲۵) max: c نسبی (۰/۲۵) (صفحه ۱۱۰)<br>max: c مطلق (۰/۲۵)<br>min: d مطلق (۰/۲۵)<br>**اکسترمم نسبی**<br>برای پیدا کردن نقاط اکسترمم نسبی یک **تابع پیوسته** به روش زیر عمل می‌کنیم:<br>۱) دامنه تابع را به‌دست می‌آوریم.<br>۲) نقاط بحرانی تابع را پیدا می‌کنیم.<br>۳) جدول تغییرات را رسم کرده و سپس مشتق تابع را تعیین علامت می‌کنیم. | ۱۳ |

۴) حال برای تشخیص ماکزیمم یا مینیمم بودن نقاط بحرانی داریم:

اگر علامت $f'$ در آن نقطه از مثبت به منفی تغییر کند، آن نقطه، نقطه ماکزیمم نسبی است.

اگر علامت $f'$ در آن نقطه از منفی به مثبت تغییر کند، آن نقطه، نقطه مینیمم نسبی است.

اگر $f'$ در آن نقطه تغییر علامت ندهد، با این روش نمی‌توان درباره ماکزیمم و یا مینیمم نسبی بودن آن نقطه اظهارنظر کرد.

**توجه:** هر نقطه اکسترمم نسبی، یک نقطه بحرانی است. اما هر نقطه بحرانی لزوماً نقطه اکسترمم نسبی نیست.

**یه نمونه باحال**

در تابع $f(x)=x^3+3x^2-9x-10$، ابتدا نقاط بحرانی تابع را به‌دست آورید و سپس با رسم جدول تغییرات تابع، نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی آن را در صورت وجود مشخص کنید.

$D_f=\mathbb{R}$

برای پیدا کردن نقاط بحرانی تابع $f$، مشتق آن را به‌دست آورده و آن را برابر صفر قرار می‌دهیم، یعنی باید معادله $f'(x)=0$ را حل کنیم:

$$f'(x)=3x^2+6x-9=0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} x=1 \\ x=-3 \end{cases}$$

بنابراین $x=1$ و $x=-3$ نقاط بحرانی تابع $f$ می‌باشند، حال با رسم جدول تغییرات، مشتق را تعیین علامت می‌کنیم:

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | | ↗ | max نسبی | ↘ | min نسبی | ↗ | |

$$\Rightarrow \begin{cases} x=-3 \longrightarrow \text{طول } max \text{ نسبی} \\ x=1 \longrightarrow \text{طول } min \text{ نسبی} \end{cases}$$

$$f(x)=x^3+3x^2-9x-10 \Rightarrow \begin{cases} x=-3 \to f(-3)=17 \Rightarrow A(-3,17) \to max \text{ نسبی} \\ x=1 \to f(1)=-15 \Rightarrow B(1,-15) \to min \text{ نسبی} \end{cases}$$

با فرض این‌که تابع $y=f(x)$ مشتق‌پذیر باشد، اگر نقطه $(a,b)$، نقطه اکسترمم نسبی تابع $f$ باشد، در این‌صورت:

$f'(a)=0$

$f(a)=b$

سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۲ دقیقه

**مسیر تمرینی:**

مشابه این سوال در سوال ۱۳ امتحان نهایی خردادماه ۱۴۰۳ مطرح شده بود.

---

**مصحّح شو**

با توجه به نمودار رسم شده، $f(1)=2$ (۰/۲۵) پس: (صفحه ۱۱۲) $f(1)=1+a+b=2 \Rightarrow a+b=1\ (*)$

همچنین $x=1$، min نسبی است، پس $f'(1)=0$ و در نتیجه:

$$f(x)=x^3+ax+b \Rightarrow f'(x)=3x^2+a \Rightarrow f'(1)=0 \Rightarrow 3+a=0 \Rightarrow a=-3 \ (0/25)$$

(۰/۲۵)

حال با توجه به معادله $(*)$، $b=4$ (۰/۲۵).

سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۳ دقیقه

۱۴ | ۱

| | | |
|---|---|---|
| ۱۵ | مصحّح شو<br>ابتدا طول نقاط بحرانی را پیدا کرده و با جای‌گذاری آن‌ها در ضابطه $f(x)$، مقادیر به‌دست آمده را مقایسه و اکسترمم‌های مطلق را تعیین می‌کنیم. (صفحه ۱۱۲)<br>$f(x)=-\frac{۲}{۳}x^{۳}-x^{۲}+۴x+۱$<br>$\Rightarrow f'(x)=-۲x^{۲}-۲x+۴=۰ \xrightarrow{a+b+c=۰} f'(۱)=۰\ ,\ f'(-۲)=۰$ (۰/۲۵)<br>(۰/۲۵)<br>پس باید مقادیر $f(۱)$، $f(-۲)$، $f(-۳)$ و $f(۲)$ را مقایسه کنیم:<br>(۰/۲۵) $f(۱)=-\frac{۲}{۳}-۱+۴+۱=\frac{۱۰}{۳}\Rightarrow$ مطلق max (۰/۲۵)<br>(۰/۲۵) $f(-۲)=\frac{۱۶}{۳}-۴-۸+۱=-\frac{۱۷}{۳}\Rightarrow$ مطلق min (۰/۲۵)<br>(۰/۲۵) $f(-۳)=۱۸-۹-۱۲+۱=-۲$<br>(۰/۲۵) $f(۲)=-\frac{۱۶}{۳}-۴+۸+۱=-\frac{۱}{۳}$<br>سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۶ دقیقه | ۲ |
| | موفق باشید. | ۲۰ |