



پایه دوازدهم تجربی

آزمون های شبیه ساز امتحانات نهایی ماز



مرور و تسلط بر نیم سال اول



دفعه سه سوال

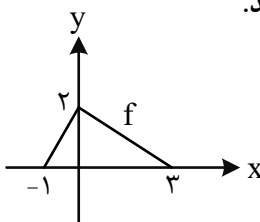
چهارشنبه ۱۰ تیر ماه ۱۴۰۵

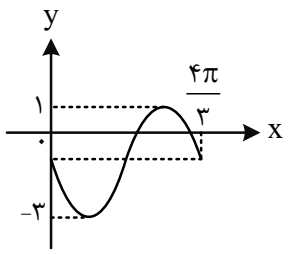
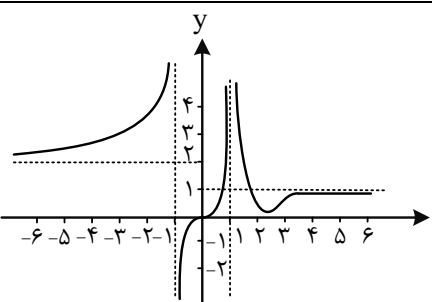
فصل ۱ تا ۳ و فصل ۴ (تا پایان درس اول) (صفحه های ۱ تا ۷۶)

بودجه آزمون

ردیف	درس	تعداد صفحه	زمان پاسخگویی
۱	ریاضی (۳)	۳	۱۲۰ دقیقه

برای شباهت حداکثری به امتحانات نهایی، صفحه آرایی، فونت و حتی اندازه متن در تمامی آزمون های تشریحی ماز، کاملاً یکسان با استاندارد امتحانات نهایی در نظر گرفته می شود.

سؤالات آزمون شبیه ساز نهایی درس: ریاضی ۳		پایه: دوازدهم		رشته: علوم تجربی		تاریخ آزمون: ۱۴۰۵/۰۴/۱۰	
تعداد صفحه: ۳		مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه		ساعت شروع:		نام و نام خانوادگی:	
آزمون شبیه ساز امتحان نهایی				گروه آموزشی ماز			
ردیف		سؤالات (پاسخ برگ دارد) - استفاده از ماشین حساب ساده مجاز است.					
نمره							
۱		درستی یا نادرستی عبارت های زیر را مشخص کنید. الف) دامنه تابع با ضابطه $y = -kf(\frac{x}{p})$ همان دامنه تابع $y = -kf(x)$ می باشد. ب) اگر $2\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$، آن گاه $\sin \alpha > \tan \alpha$ است. پ) مجموعه $\{3\} - (\frac{5}{p}, 4)$ یک همسایگی محذوف ۳ می باشد.					
۲		جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید. الف) اگر $f(x) = 3 + \sqrt{2x-1}$ باشد، مقدار $(f \circ f^{-1})(5)$ برابر با است. ب) اگر $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ و α زاویه ای حاده باشد، حاصل $\sin 2\alpha$ برابر با است. پ) حاصل $\lim_{x \rightarrow +} \frac{[x]}{x}$ برابر است.					
۳		ابتدا نمودار تابع داده شده را رسم کنید، سپس تعیین کنید تابع در چه بازه ای (هایی) اکیداً صعودی و در چه بازه ای (هایی) اکیداً نزولی است. $y = \begin{cases} (x-2)^3 & x \geq 1 \\ -2 & 0 \leq x < 1 \\ x+1 & x < 0 \end{cases}$					
۴		اگر $f(x) = \frac{1}{x-1}$ و $g = \{(1,4), (2,1), (3,-1)\}$، آن گاه تابع $f \circ g$ را به دست آورید.					
۵		اگر $f(x) = 2x - 5$ و $g(x) = x^2 - 3x + 8$ باشد، معادله $(f \circ g)(x) = 7$ را تشکیل داده و آن را حل کنید.					
۶		توابع $f(x) = \frac{1}{x^2}$ و $g(x) = \sqrt{4-x^2}$ مفروض اند. دامنه تابع $f \circ g$ را با استفاده از تعریف به دست آورید.					
۷		با توجه به نمودار تابع $y = f(x)$ در شکل زیر، نمودار تابع $y = -f(1 - \frac{x}{p})$ را رسم کنید. 					
۸		تابع $g(x) = x^2 - 2x + 3$ مفروض است. الف) نشان دهید تابع g، یک به یک نیست. ب) با محدود کردن دامنه تابع g، تابعی وارون پذیر به نام f بسازید و وارون آن را به دست آورید.					
۹		دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y = 2\sin(3x) - 1$ را به دست آورید.					
		صفحه ۱ از ۳					

سؤالات آزمون شبیه‌ساز نهایی درس: ریاضی ۳		پایه: دوازدهم		رشته: علوم تجربی		تاریخ آزمون: ۱۴۰۵/۰۴/۱۰			
تعداد صفحه: ۳		مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه		ساعت شروع:		نام و نام خانوادگی:			
آزمون شبیه‌ساز امتحان نهایی				گروه آموزشی ماز					
ردیف		سؤالات (پاسخ‌برگ دارد) - استفاده از ماشین حساب ساده مجاز است.						نمره	
۱۰		شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع با ضابطه $y = a \sin(bx) + c$ است. با توجه به نمودار، ضابطه آن را مشخص کنید.							
									
۱۱		مقدار عبارت $2 \sin x \cos^3 x - \cos x \sin x$ را به ازای $x = 7/5^\circ$ به دست آورید.							
۱۲		معادله مثلثاتی $\cos 2x - \cos x + 1 = 0$ را حل کنید و جواب‌های کلی آن را بنویسید.							
۱۳		اگر باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $p(x) = 2x^3 + mx - 1$ بر $x + 2$ برابر با -1 باشد، مقدار m را به دست آورید.							
۱۴		حاصل حدهای زیر را به دست آورید.							
		الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^3 - 1}$							
		ب) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x-3} - 1}{4x - x^2}$							
		پ) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-2}{ \sin x }$							
		ت) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}{2 - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}}$							
۱۵		نمودار تابع f به شکل مقابل است. حدود خواسته شده را بنویسید.							
									
		الف) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$							
		ب) $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x)$							
		پ) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$							
		ت) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$							
		صفحه ۲ از ۳							

سؤالات آزمون شبیه‌ساز نهایی درس: ریاضی ۳		پایه: دوازدهم		رشته: علوم تجربی		تاریخ آزمون: ۱۴۰۵/۰۴/۱۰	
تعداد صفحه: ۳		مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه		ساعت شروع:		نام و نام خانوادگی:	
آزمون شبیه‌ساز امتحان نهایی				گروه آموزشی ماز			
ردیف		سؤالات (پاسخ‌برگ دارد) - استفاده از ماشین حساب ساده مجاز است.					
نمره							
۱۶		با توجه به نمودار داده شده، گزینه مناسب را انتخاب کنید. الف) در کدام نقطه مماس افقی بر نمودار رسم می‌شود؟ B (۱) E (۲) ب) شیب خط مماس در نقطه F چه علامتی دارد؟ (۱) مثبت (۲) منفی پ) شیب خط مماس بر نمودار، در نقطه D نسبت به نقطه B چگونه است؟ (۱) بیش‌تر (۲) کم‌تر					
۱۷		در شکل زیر، خط d بر نمودار تابع f در نقطه $A(2, 5)$ مماس است. اگر $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2) - f(2+h)}{h} = -2$، آن‌گاه معادله خط d و عرض نقطه B را به‌دست آورید.					
۱۸		با استفاده از تعریف مشتق، معادله خط مماس بر منحنی تابع $f(x) = \sqrt{x-2}$ را در نقطه $x=3$ به‌دست آورید.					
۲۰		موفق باشید.					
		صفحه ۳ از ۳					



پایه دوازدهم تجربی

آزمون‌های شبیه‌ساز امتحانات نهایی ماز



مرور و تسلط بر نیم سال اول



چهارشنبه ۱۰ تیر ماه ۱۴۰۵

پاسخبرگ ریاضی (۳)

برای شباهت حداکثری به امتحانات نهایی، صفحه‌آرایی، فونت و حتی اندازه متن در تمامی آزمون‌های تشریحی ماز، کاملاً یکسان با استاندارد امتحانات نهایی در نظر گرفته می‌شود.

آزمون شبیه‌ساز نهایی درس: ریاضی ۳	تعداد صفحه: ۵	رشته: علوم تجربی	ساعت شروع:
نام و نام خانوادگی:	پایه دوازدهم	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	تاریخ آزمون: ۱۴۰۵/۰۴/۱۰
آزمون شبیه‌ساز امتحان نهایی			
گروه آموزشی ماز			

ردیف	پاسخ‌برگ	نمره
۱	الف) ب) پ)	۰/۷۵
۲	الف) ب) پ)	۰/۷۵
۳		۱/۲۵
۴		۰/۷۵
۵		۱
۶		۱/۲۵

ساعت شروع:	رشته: علوم تجربی	تعداد صفحه: ۵	آزمون شبیه ساز نهایی درس: ریاضی ۳
تاریخ آزمون: ۱۴۰۵/۰۴/۱۰	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	پایه دوازدهم	نام و نام خانوادگی:
گروه آموزشی ماز		آزمون شبیه ساز امتحان نهایی	

ردیف	پاسخ برگ	نمره
۷		۱
۸	(الف) (ب)	۱/۲۵
۹		۰/۷۵
۱۰		۱/۵

آزمون شبیه ساز نهایی درس: ریاضی ۳	تعداد صفحه: ۵	رشته: علوم تجربی	ساعت شروع:
نام و نام خانوادگی:	پایه دوازدهم	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	تاریخ آزمون: ۱۴۰۵/۰۴/۱۰
آزمون شبیه ساز امتحان نهایی			
گروه آموزشی ماز			

ردیف	پاسخ برگ	نمره
۱۱		۰/۷۵
۱۲		۱/۵
۱۳		۰/۷۵
۱۴	(الف)	۰/۵
	(ب)	۰/۷۵
	(پ)	۰/۵
	(ت)	۰/۷۵

آزمون شبیه‌ساز نهایی درس: ریاضی ۳	تعداد صفحه: ۵	رشته: علوم تجربی	ساعت شروع:
نام و نام خانوادگی:	پایه دوازدهم	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	تاریخ آزمون: ۱۴۰۵/۰۴/۱۰
آزمون شبیه‌ساز امتحان نهایی		گروه آموزشی ماز	

ردیف	پاسخ برگ	نمره
۱۵	الف) ب) پ) ت)	۱
۱۶	الف) ب) پ)	۰/۷۵

آزمون شبیه ساز نهایی درس: ریاضی ۳	تعداد صفحه: ۵	رشته: علوم تجربی	ساعت شروع:
نام و نام خانوادگی:	پایه دوازدهم	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	تاریخ آزمون: ۱۴۰۵/۰۴/۱۰
آزمون شبیه ساز امتحان نهایی			
گروه آموزشی ماز			

ردیف	پاسخ برگ	نمره
۱۷		۱
۱۸		۱/۵
	موفق باشید.	۲۰



پایه دوازدهم تجربی

آزمون های شبیه ساز امتحانات نهایی ماز



مرور و تسلط بر نیم سال اول



دفترچه پاسخ

چهارشنبه ۱۰ تیر ماه ۱۴۰۵

فصل ۱ تا ۳ و فصل ۴ (تا پایان درس اول) (صفحه های ۱ تا ۷۶)

بودجه آزمون

ویراستاران

طراحان

درس

ارسلان حسنونند - نرجس تیمناک
حمیدرضا ولی پور

محدثه شیخعلی - سید جواد نظری

ریاضی (۳)

حق چاپ و تکثیر سؤالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز «گروه ماز» مجاز می باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می شود.

مصَحَّح شو:



پاسخ دقیق سؤال این جا میاد و اسمش روشه: «مصَحَّح شو»، می خواد شما رو به یه مصحح حرفه‌ای و دقیق تبدیل کنه که بدونین موقع ارزیابی جواب‌هاتون باید حواستون به چی باشه تا توی آزمون‌های بعدی دقیق‌تر عمل کنین. اگه جواب یه سؤال رو بشه به شکل‌های مختلف بیان کرد، اون هم، این جا بهتون گفتیم.

بررسی دقیق‌تر:



اگه پاسخ کوتاه به سؤال کافی نباشه تا بینین چطوری باید به جواب برسین، توی این بخش با بررسی دقیق‌تر جواب، سؤال رو براتون توضیح دادیم.

نقشه نهایی:



امتحان نهایی قوانین و قواعد خاص خودش رو داره؛ شما باید بدونین تیپ‌های رایج سؤال‌های امتحان نهایی چیه و باید چطوری بهش جواب بدین. این کادر، مشاوره حرفه‌ای ماست به شما تا فوت و فن‌های امتحان نهایی رو یاد بگیرین.

۲۰ شو:



توی «۲۰ شو»، مبحث هر سؤال رو براتون مرور یا جمع‌بندی کردیم؛ «۲۰ شو» و درسنامه‌هاش دقیقاً فاصله بین نمره خوب و نمره ۲۰ رو براتون پر می‌کنه.

نکته طلایی:



با وجود «۲۰ شو»، که کلی درسنامه مفصل داره، باز هم اگه نکته مهم و مفیدی بود، توی این کادر براتون آوردیم.

تیم اجرایی و تولید آزمون

محدثه عربگری

زهره صفری

محدثه شیخ‌علی

یگانه پوراابراهیم

مرضیه بنیانی

ساره محمدعلی‌نسب

سرپرست آزمون: ارمغان قریب

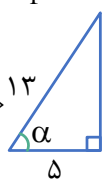
یک تیم با بیش از ۵۰۰ نفر در حال کار هستن تا آزمون‌های ماز با حداکثر کیفیت حاضر بشن و به شما کمک کنن و مسیر موفقیت رو براتون ساده‌تر کنن. همیشه از نظرات و کامنت‌های خوب‌تون انرژی می‌گیریم. مرسی که همراهمون هستین.

دکتر رسول خنجری

برای دیدن پاسخ نامه ویدئویی آزمون شبیه ساز نهایی QR Code
را اسکن کنید یا روی لینک زیر ضربه بزنید.

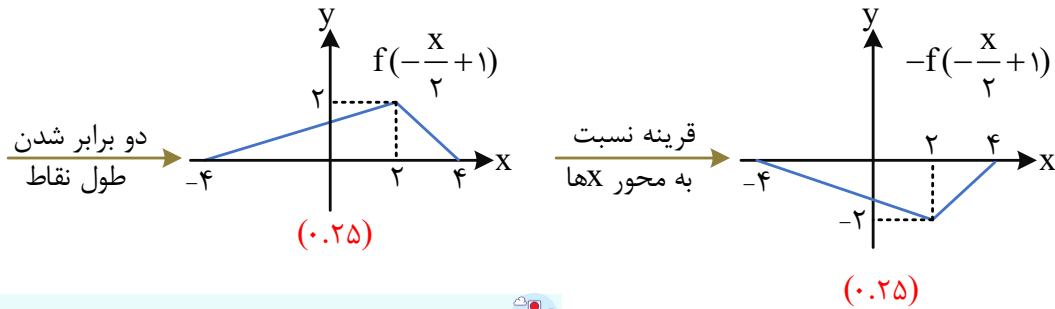
پاسخنامه ویدئویی آزمون شبیه ساز نهایی



راهنمای تصحیح آزمون نهایی درس: ریاضی ۳		رشته: علوم تجربی
دوره دوم متوسطه - دوازدهم	تاریخ آزمون: ۱۴۰۵/۰۴/۱۰	ساعت شروع:
آزمون شبیه‌ساز امتحان نهایی	گروه آموزشی ماز	مدت زمان: ۱۲۰ دقیقه
ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۱	مصّحّح شو الف) نادرست (۰.۲۵) (صفحه ۲۲) ب) درست (۰.۲۵) (صفحه ۴۱) پ) درست (۰.۲۵) (صفحه ۵۳) بررسی دقیق‌تر: ب) $\sin \alpha > \tan \alpha \Rightarrow \sin \alpha - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} > 0 \Rightarrow \sin \alpha (1 - \frac{1}{\cos \alpha}) > 0$ از طرفی در بازه $\frac{3\pi}{2} < \alpha < \pi$، $\sin \alpha$ منفی است، پس باید $1 - \frac{1}{\cos \alpha} < 0$ که یعنی: همیشه نامثبت $\frac{\cos \alpha - 1}{\cos \alpha} < 0$ ↓ $\frac{3\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \cos \alpha > 0$ دقت کنید که $\cos \alpha - 1$ همواره نامثبت است یعنی صفر یا منفی است اما با توجه به بازه داده شده صفر نمی‌شود و منفی است.	۰/۷۵
۲	مصّحّح شو الف) ۵ (۰.۲۵) (صفحه ۲۲) ب) $\frac{120}{169}$ (۰.۲۵) (صفحه ۴۸) پ) صفر (۰.۲۵) (صفحه ۵۷) بررسی دقیق‌تر: الف) $\text{fof}^{-1}(x) = x ; x \in D_{f^{-1}} = R_f$ $\Delta \in R_f \Rightarrow \Delta \in D_{f^{-1}} \Rightarrow \text{fof}^{-1}(\Delta) = \Delta$ ب) $\cos \alpha = \frac{5}{13} \Rightarrow$  $\xrightarrow{\text{فیثاغورس}}$  $\Rightarrow \sin \alpha = \frac{12}{13}$ $\Rightarrow \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2(\frac{12}{13})(\frac{5}{13}) = \frac{120}{169}$ پ) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[x]}{x} = \frac{\text{صفر مطلق}}{\text{صفر حدی}} = 0$ یادگیری بیشتر ۱) دامنه تابع f^{-1} همان برد تابع f می‌باشد. به همین ترتیب برد تابع f^{-1}، همان دامنه تابع f است. ۲) قرار نیست همه تابع‌ها در کل دامنه‌شان وارون‌پذیر باشند اما حالت‌هایی وجود دارند که با محدود کردن دامنه شرط وارون‌پذیری را ایجاد می‌کنیم.	۰/۷۵

	(۳) هیچ تابع چندجمله‌ای از درجه ۲ روی $\mathbb{R}$ یک‌به‌یک نیست. اما اگر نمودار f را به یکی از بازه‌های $(-\infty, \frac{-b}{2a}]$ یا $[\frac{-b}{2a}, +\infty)$ یا هر زیرمجموعه‌ای از این دو بازه محدود کنیم، تابعی یک‌به‌یک خواهیم داشت. (۴) ترکیب تابع f با معکوسش یعنی f^{-1} به صورت زیر است: $f \circ f^{-1}(x) = f(f^{-1}(x)) = x \quad ; \quad x \in D_{f^{-1}}$ $f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = x \quad ; \quad x \in D_f$ تذکر: $f^{-1} \neq \frac{1}{f}$ دقت کنید علامت -1 در بالای f به معنای معکوس شدن کسری نیست.	
۱/۲۵	مصّحّح شو $y = \begin{cases} (x-2)^3 & x \geq 1 \\ -2 & 0 \leq x < 1 \\ x+1 & x < 0 \end{cases} \quad (\text{صفحه } ۱۰)$ بازه‌های اکیداً صعودی: $(0.25) \quad [-1, 0) \cup [1, +\infty)$ بازه اکیداً نزولی: $(0.25) \quad (-\infty, -1]$ سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۴ دقیقه	۳
۰/۷۵	مصّحّح شو برای به دست آوردن تابع $f \circ g$، ابتدا دامنه آن را می‌یابیم: (صفحه ۲۲) $D_f = \mathbb{R} - \{1\}, \quad D_g = \{1, 2, 3\}$ $D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in \{1, 2, 3\} \mid g(x) \neq 1\} = \{1, 3\}$ $\left. \begin{aligned} f \circ g(1) &= f(g(1)) = f(4) = \frac{1}{4-1} = \frac{1}{3} \quad (0.25) \\ f \circ g(3) &= f(g(3)) = f(-1) = \frac{1}{-1-1} = -\frac{1}{2} \quad (0.25) \end{aligned} \right\} \Rightarrow f \circ g = \left\{ \left(1, \frac{1}{3}\right), \left(3, -\frac{1}{2}\right) \right\} \quad (0.25)$ سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۳ دقیقه	۴

۱	مصّحّ شو $f(x) = 2x - 5$, $g(x) = x^2 - 3x + 8$ $f \circ g(x) = f(g(x)) = 2g(x) - 5 = 7$ (۰.۲۵) $\Rightarrow 2g(x) = 12 \Rightarrow g(x) = 6 \Rightarrow x^2 - 3x + 8 = 6 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$ (صفحه ۲۲) (۰.۲۵) $\Rightarrow (x-2)(x-1) = 0 \Rightarrow x = 1, x = 2$ (۰.۲۵) (۰.۲۵) سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۴ دقیقه تابع ترکیب اگر f و g دو تابع باشند، $f \circ g$ را ترکیب $f(g(x))$ می‌گوییم، یعنی در $f(x)$ به جای x ها، تابع $g(x)$ را جایگذاری می‌کنیم. به همین ترتیب: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ $(f \circ f)(x) = f(f(x))$ راهنمای مصحح: اگر $g(x)$ مستقیماً در $f(x)$ جایگذاری شده و برابر ۷ قرار داده شده نیز، نمره تعلق می‌گیرد.	۵
۱/۲۵	مصّحّ شو $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $g(x) = \sqrt{4-x^2}$ (صفحه ۲۲) $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$, $D_g : -2 \leq x \leq 2$ $\Rightarrow (0.25) D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{-2 \leq x \leq 2 \mid \sqrt{4-x^2} \neq 0\} = \{-2 \leq x \leq 2 \mid x \neq 2, -2\}$ (۰.۵) (۰.۲۵) $= (-2, 2)$ (۰.۲۵) سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۳ دقیقه بررسی دقیق‌تر: برای محاسبه D_g، باید زیر رادیکال نامنفی و برای D_f باید مخرج ناصفر باشد. $4 - x^2 \geq 0 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2$	۶
۱	مصّحّ شو (صفحه ۲۲) ۱ واحد به چپ قرینه نسبت به محور y ها $f(x)$ $f(x+1)$ $f(-x+1)$ (۰.۲۵) (۰.۲۵)	۷



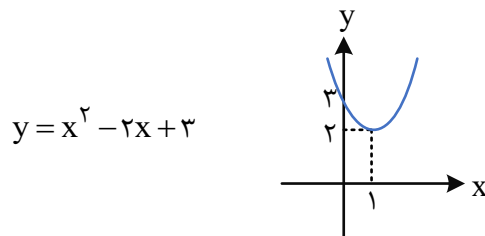
سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۵ دقیقه

نقشه نهایی

اولاً که حتماً همه مراحل انتقال رو یادتون نره بکشید! و ثانیاً یادتون نره، تقدم با انتقال افقی هست و بعد نوبت میرسه به انقباض و انقباض طولی! اگر اول طول نقاط رو دو برابر می‌کردین و بعد ۱ واحد به چپ همه چی خراب می‌شد!

مصحح شو

الف) روش اول: رسم نمودار (صفحه ۲۹)



(۰.۲۵) با توجه به نمودار سهمی، هر خط افقی $y = k$ که $k > 2$ ، نمودار را در دو نقطه قطع می‌کند، پس تابع یک‌به‌یک نیست.

روش دوم: با قرار دادن $x = 0$ و $x = 2$ ، $y = 3$ می‌شود که یعنی به ازای دو x متفاوت y یکسان داریم که این یعنی تابع یک‌به‌یک نیست. (۰.۲۵)

راهنمای مصحح

به مثال نقض‌های متفاوت ولی درست، نمره تعلق می‌گیرد.

۱/۲۵

ب) بر اساس نمودار، این تابع در بازه‌های $(-\infty, 1]$ یا $[1, +\infty)$ و هر زیر مجموعه از این دو بازه یک‌به‌یک است، حال برای یک‌به‌یک کردن $g(x)$ ، باید دامنه آن را به یکی از بازه‌های $(-\infty, 1]$ یا $[1, +\infty)$ محدود کنیم. این کار را برای $(1, +\infty)$ انجام می‌دهیم و برای یافتن $f^{-1}(x)$ ، ابتدا x را تنها می‌کنیم، سپس جای x و y را عوض می‌کنیم: (صفحه ۱۰)

$$f(x) = x^2 - 2x + 3, \quad D_f = [1, +\infty) \quad (۰.۲۵)$$

$$y = x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2 \Rightarrow (x-1)^2 = y-2 \Rightarrow x-1 = \pm\sqrt{y-2}$$

$$\Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{y-2} \quad (۰.۲۵)$$

و برای این که بفهمیم پشت رادیکال باید + یا - باشد، از این که $R_{f^{-1}}(x) = D_f(x)$ استفاده می‌کنیم، در نتیجه: (۰.۲۵)

$$f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x-2} \quad (۰.۲۵); \quad x \geq 2$$

سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۴ دقیقه

نکته طلایی

برای به‌دست آوردن ضابطه تابع وارون یک تابع یک‌به‌یک مانند f ، در معادله $y = f(x)$ در صورت امکان x را برحسب y محاسبه می‌کنیم، سپس با تبدیل y به x و بالعکس، $f^{-1}(x)$ را به‌دست می‌آوریم.

یه نمونه باحال

ضابطه وارون تابع $f(x) = \frac{-8x+3}{2}$ را به‌دست آورید:

$$f(x) = \frac{-8x+3}{2} \Rightarrow y = \frac{-8x+3}{2}$$

$$\Rightarrow 2y = -8x+3 \Rightarrow 2y-3 = -8x \Rightarrow x = \frac{2y-3}{-8} \Rightarrow f^{-1}(y) = \frac{2y-3}{-8} \xrightarrow{x \leftrightarrow y} f^{-1}(x) = \frac{2x-3}{-8}$$

مصّحح شو

$$y = 2 \sin(3x) - 1 \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|3|} = \frac{2\pi}{3} \quad (0.25)$$

(صفحه ۴۱)

$$\max = 2 - 1 = 1 \quad (0.25), \quad \min = -2 - 1 = -3 \quad (0.25)$$

سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۲ دقیقه

توابع مثلثاتی:

در توابع مثلثاتی $y = a \sin(bx + d) + c$ و $y = a \cos(bx + d) + c$ داریم:

$$\begin{aligned} \max &= |a| + c \Rightarrow \begin{cases} |a| = \frac{\max - \min}{2} \\ c = \frac{\max + \min}{2} \end{cases} \\ \min &= -|a| + c \end{aligned}$$

$$\text{دوره تناوب} = \frac{2\pi}{|x \text{ ضریب}|} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|b|}$$

در تابع مثلثاتی $y = a \tan(bx) + c$ دوره تناوب برابر است با:

$$T = \frac{\pi}{|x \text{ ضریب}|} \Rightarrow T = \frac{\pi}{|b|}$$

فرم کلی توابع مثلثاتی $y = a \sin bx$ و $y = a \cos bx$:

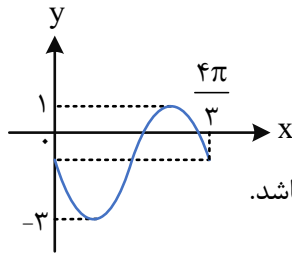
$y = a \sin bx$		$y = a \cos bx$	
$ab < 0$	$ab > 0$	$a < 0$	$a > 0$

۰/۷۵

۹



در ابتدا، چون شیب خط مماس بر تابع در $x = 0$ منفی است (نمودار با شیب منفی محور عرض ها رو قطع کرده): $ab < 0$ (۰.۲۵)



با توجه به نمودار دوره تناوب تابع $T = \frac{4\pi}{3}$ و از طرفی $T = \frac{2\pi}{|b|}$ بنابراین: (صفحه ۴۱)

فرض کنیم $b < 0$ و بنابراین با توجه به $ab < 0$ ، a باید مثبت باشد. $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{4\pi}{3} \Rightarrow |b| = \frac{3}{2}$ (۰.۲۵)

همچنین با توجه به مقادیر $\min$ و $\max$ داریم: $y = a \sin(bx) + c$

$$\Rightarrow \max = a + c, \min = c - a \Rightarrow \begin{cases} c - a = -3 & (0.25) \\ c + a = 1 & (0.25) \end{cases} \Rightarrow c = -1, a = 2$$

بنابراین $y = 2 \sin(-\frac{3}{2}x) - 1$ بوده است. (۰.۲۵)

اگر فرض کرده بودیم $b > 0$ پس $a < 0$ و در نتیجه حاصل برابر با $y = -2 \sin(\frac{3}{2}x) - 1$ می شود.

سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۵ دقیقه



مسیر تمرینی:

مشابه این سوال در سوال ۶ امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۴ مطرح شده بود.



ابتدا سعی می کنیم با فاکتور گرفتن و استفاده از روابط 2α ، عبارت را ساده کنیم: (صفحه ۴۸)

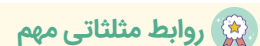
$$2 \sin x \cos^3 x - \cos x \sin x = \sin x \cos x (2 \cos^2 x - 1) \quad (0.25)$$

$$= \frac{1}{2} \sin 2x \cos 2x = \frac{1}{4} \sin 4x \quad (0.25)$$

$$\frac{1}{4} \sin 30^\circ = \frac{1}{8} \quad (0.25)$$

حال با قرار دادن $x = 7/5^\circ$ داریم:

سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۳ دقیقه



روابط مثلثاتی مهم

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \\ \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \end{cases}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

۱/۵

۱۰

۰/۷۵

۱۱

$$* 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}; \cos \alpha \neq 0$$

$$* 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}; \sin \alpha \neq 0$$

$$* \tan \alpha \times \cot \alpha = 1; \alpha \neq \frac{k\pi}{2}$$

$$* \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$* \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \xrightarrow{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1} \begin{cases} \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 \\ \cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \end{cases}$$

مصّحح شو

$$\cos 2x - \cos x + 1 = 0 \Rightarrow 2 \cos^2 x - 1 - \cos x + 1 = 0 \quad (0.25)$$

$$\Rightarrow 2 \cos^2 x - \cos x = 0 \Rightarrow \cos x (2 \cos x - 1) = 0 \quad (0.25) \quad (\text{صفحه } 48)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{2} \quad (0.25) \\ \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (0.25) \end{cases}$$

سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۴ دقیقه

معادلات مثلثاتی

۱) معادلات مثلثاتی به فرم $\sin f(x) = \sin g(x)$:

$$\sin f(x) = \sin g(x) \Rightarrow \begin{cases} f(x) = 2k\pi + g(x) \\ f(x) = 2k\pi + \pi - g(x) \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

حالت‌های خاص معادلات سینوسی:

معادله	جواب کلی
$\sin x = 0$	$x = k\pi$
$\sin x = 1$	$x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$
$\sin x = -1$	$x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$

۲) معادلات مثلثاتی به فرم $\cos f(x) = \cos g(x)$:

$$\cos f(x) = \cos g(x) \Rightarrow \begin{cases} f(x) = 2k\pi + g(x) \\ f(x) = 2k\pi - g(x) \end{cases}$$

حالت‌های خاص معادلات کسینوسی:

معادله	جواب کلی
$\cos x = 0$	$x = k\pi + \frac{\pi}{2}$
$\cos x = 1$	$x = 2k\pi$
$\cos x = -1$	$x = (2k+1)\pi$

۱/۵

۱۲

	مسیر تمرینی: 	
	مشابه این سوال در سوال ۵ امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۲ مطرح شده بود.	
۰/۷۵	مصحح شو  اگر باقی مانده تقسیم $p(x)$ بر $x+2$ برابر ۱- شود یعنی $p(x)$ به ازای ریشه $x+2$ برابر ۱- می شود: (صفحه ۵۷) $x+2=0 \Rightarrow x=-2 \Rightarrow p(-2)=-1 \Rightarrow p(-2)=-16-2m-1=-1 \Rightarrow m=-8 \quad (0.25)$ سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۳ دقیقه  تقسیم چندجمله‌ای بر دوجمله‌ای درجه اول  در تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر دو جمله‌ای درجه اول $(ax+b)$، باقی مانده تقسیم برابر $f(-\frac{b}{a})$ است. نتیجه: اگر $f(-\frac{b}{a})=0$ باشد، به این معنی است که $f(x)$ بر $(ax+b)$ بخش پذیر است. یه نمونه باحال  چندجمله‌ای $f(x)=2x^3+x^2+1$ بر دو جمله‌ای $(x+1)$ بخش پذیر است چرا که $f(-1)=0$ است.	۱۳
۰/۵	مصحح شو  الف) (صفحه ۵۷) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+3x-4}{x^3-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+4)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{5}{3} \quad (0.25)$	
۰/۷۵	ب) (صفحه ۵۷) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x-3}-1}{4x-x^2} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x-3}-1)(\sqrt{x-3}+1)}{x(4-x)(\sqrt{x-3}+1)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{x(x-4)(\sqrt{x-3}+1)} = -\frac{1}{8} \quad (0.25)$	
۰/۵	پ) (صفحه ۶۴) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-2}{ \sin x } = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-2}{\frac{+}{-}} = -\infty \quad (0.25)$	
۰/۷۵	ت) (صفحه ۶۴) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}{2-\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}}{\frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}-1} = \frac{1}{2} \quad (0.25)$ پرتوان: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\frac{5}{6}}}{2x^{\frac{5}{6}}} = \frac{1}{2} \quad (0.25)$ سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۶ دقیقه 	۱۴

الف) محاسبه حد توابع شامل قدرمطلق و جزء صحیح

وقتی به جزء صحیح و یا قدرمطلق برخورد می‌کنیم، باید جزء صحیح را تعیین مقدار و قدرمطلق را تعیین علامت کنیم:

$$* \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{[x]}{\sin x} = \frac{[-]}{0^-} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

$$* \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{[x] - 3}{x - 3} = \frac{[3^-] - 3}{3^- - 3} = \frac{2 - 3}{0^-} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

$$* \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2}{|x - 3|} = \frac{2}{|3^\pm - 3|} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

$$* \lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{3})} \frac{[x]}{|3x + 1|} = \frac{[-\frac{1}{3}]}{|3(-\frac{1}{3})^\pm + 1|} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

ب) محاسبه حد بی‌نهایت در توابع کسری

در محاسبه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ ، اگر حد تابع صورت کسر عددی مخالف صفر و حد تابع مخرج کسر برابر صفر باشد، در این صورت، حاصل حد، نامتناهی ($+\infty$ یا $-\infty$) خواهد بود.

توجه: برای تعیین علامت ∞ ، باید به علامت صورت و علامت مخرج کسر توجه کنیم:

$\frac{+ \text{ عدد}}{0^+} = +\infty$	$\frac{- \text{ عدد}}{0^-} = +\infty$	$\frac{+ \text{ عدد}}{0^-} = -\infty$	$\frac{- \text{ عدد}}{0^+} = -\infty$
---------------------------------------	---------------------------------------	---------------------------------------	---------------------------------------

یه نمونه باحال

حدود زیر را محاسبه کنید.

$$1) \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{2x}{x - 5} = \frac{2 \times 5}{5^- - 5} = \frac{10}{0^-} = -\infty$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{4x + 1}{(2x + 1)^2} = \frac{4(-\frac{1}{2}) + 1}{\left(2(-\frac{1}{2})^\pm + 1\right)^2} = \frac{-2 + 1}{(-1 + 1)^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

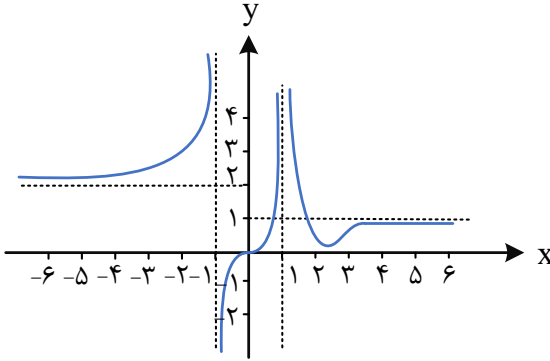
پ) رفع ابهام صفر- صفر در توابع کسری

در محاسبه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ ، اگر حد هر دو تابع f و g در $x = a$ برابر صفر باشد به حالت مبهم $\frac{0}{0}$ خواهیم رسید و باید آن حد را به کمک اتحادها، گویا کردن و ... رفع ابهام کنیم.

در نوعی از سوالات این حالت، صورت یا مخرج کسر (و یا گاهی هر دو) شامل عبارت‌های رادیکالی است که برای رفع ابهام از آن ابتدا باید صورت و مخرج کسر را در عبارت رادیکالی مناسب ضرب کنیم تا بتوانیم با استفاده از اتحاد مزدوج (و یا گاهی چاق و لاغر) عامل صفرکننده را شناسایی کرده و آن را از صورت و مخرج کسر حذف کنیم.

مسیر تمرینی:

مشابه این سوال در سوال ۸ امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۴ مطرح شده بود.

۱	 مصّحّ شو الف) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$ (صفحه ۶۴) (۰.۲۵) ب) $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = -\infty$ (۰.۲۵) پ) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$ (۰.۲۵) ت) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ (۰.۲۵) سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۲ دقیقه
۰/۷۵	مصّحّ شو الف) E (گزینه ۲) (۰.۲۵) ب) مثبت (گزینه ۱) (۰.۲۵) پ) کم تر (گزینه ۲) (۰.۲۵) (صفحه ۷۶) سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۲ دقیقه
۱	مصّحّ شو از آن جا که خط d در نقطه $A(2, 5)$ بر نمودار تابع f مماس است، پس $f(2) = 5$ (صفحه ۷۶) از طرفی: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2) - f(2+h)}{h} = - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = -f'(2) = -2 \Rightarrow f'(2) = 2$ (۰.۲۵) (۰.۲۵) پس شیب خط d برابر ۲ بوده و داریم: (۰.۲۵) $y - 5 = 2(x - 2) \Rightarrow y = 2x + 1$ معادله خط چون B نقطه برخورد خط d و محور y است پس مختصات B همیشه: (۰.۲۵) $x = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow B(0, 1)$ سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۴ دقیقه شیب خط مماس شیب خط مماس بر منحنی تابع f در نقطه $A(a, f(a))$ را به صورت زیر تعریف می کنیم: $\text{شیب خط مماس بر منحنی در نقطه } A = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ به شرط آن که این حد موجود و متناهی باشد. حد بالا را (در صورت وجود) مشتق تابع f در نقطه $A(a, f(a))$ می نامند و با $f'(a)$ نمایش می دهند، یعنی: $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ مسیر تمرینی: مشابه این سوال در سوال ۹ امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۳ مطرح شده بود.


 مصحح شو

برای به دست آوردن معادله خط مماس به شیب و نقطه تماس احتیاج داریم (که شیب خط همیشه مشتق تابع در آن نقطه و نقطه رو هم که سوال طولش رو داده!) پس با جای گذاری $x=3$ در ضابطه تابع، عرض نقطه را هم به دست می آوریم:

(صفحه ۷۶)

$$f(x) = \sqrt{x-2} \Rightarrow f(3) = 1 \quad (0.25)$$

$$f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x-2} - 1)(\sqrt{x-2} + 1)}{(x-3)(\sqrt{x-2} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\cancel{x-3}}{\cancel{(x-3)}(\sqrt{x-2} + 1)} = \frac{1}{2} \quad (0.25)$$

۱/۵

۱۸

پس معادله خط به صورت زیر محاسبه می شود:

$$(0.25) y - 1 = f'(3)(x - 3) \Rightarrow y - 1 = \frac{1}{2}(x - 3) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} + 1 = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \quad (0.25)$$


 سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۴ دقیقه


 تعریف مشتق

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$


 مسیر تمرینی:

مشابه این سوال در سوال ۹ امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۴ مطرح شده بود.

۲۰

موفق باشید.