



پایه دوازدهم تجربی

آزمون های شبیه ساز امتحانات نهایی ماز



مرور و تسلط بر نیم سال دوم



دفترچه سؤال

جمعه ۱۲ تیر ماه ۱۴۰۵

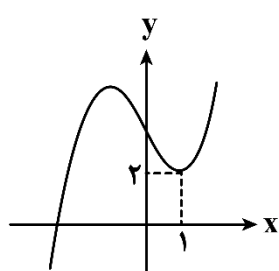
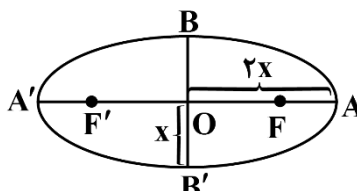
فصل ۴ (درس ۲ و ۳) تا پایان فصل ۷ (صفحه های ۷۷ تا ۱۴۸)

بودجه آزمون

ردیف	درس	تعداد صفحه	زمان پاسخگویی
۱	ریاضی (۳)	۲	۱۲۰ دقیقه

برای شباهت حداکثری به امتحانات نهایی، صفحه آرایی، فونت و حتی اندازه متن در تمامی آزمون های تشریحی ماز، کاملاً یکسان با استاندارد امتحانات نهایی در نظر گرفته می شود.

سؤالات آزمون شبیه‌ساز نهایی درس: ریاضی ۳		پایه: دوازدهم		رشته: علوم تجربی		تاریخ آزمون: ۱۴۰۵/۰۴/۱۲		
تعداد صفحه: ۲		مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه		ساعت شروع:		نام و نام خانوادگی:		
آزمون شبیه‌ساز امتحان نهایی				گروه آموزشی ماز				
ردیف		سؤالات (پاسخ‌برگ دارد) - استفاده از ماشین حساب ساده مجاز است.						نمره
		درستی یا نادرستی عبارات‌های زیر را مشخص کنید.						
۱		الف) اگر $f'(1)=5$ و $g'(1)=-2$ ، در این صورت $(2f-3g)'(1)$ برابر با ۱۲ است. ب) اگر $f'(c)$ وجود نداشته باشد، آن‌گاه $x=c$ یک نقطهٔ اکسترمم نسبی نیست. پ) هر چه مقدار خروج از مرکز بیضی به صفر نزدیک‌تر شود، شکل بیضی به دایره نزدیک‌تر می‌شود. ت) اگر A و B دو پیشامد مستقل باشد، آن‌گاه همواره رابطهٔ $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ برقرار است.						۱
۲		جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید. الف) اگر $f(x)=x-2x^3$ باشد، مقدار $f''(1)$ برابر است. ب) نقطه‌ای به طول $x=2$ نقطه تابع $f(x)=[x]$ است. پ) صفحه‌ای هر دو تکه بالایی و پایینی یک سطح مخروطی را قطع می‌کند و شامل محور آن نیست، در این صورت فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی، یک است. ت) مقدار m در دایرهٔ $x^2+y^2-my=3$ در صورتی‌که مرکز دایره $(0,1)$ باشد، برابر است.						۱
۳		$f(x)=\begin{cases} 3x^2+[x] & x>1 \\ 6x-2 & x\leq 1 \end{cases}$ را با استفاده از تعریف مشتق در نقطه‌ای به طول ۱ بررسی کنید. ([] علامت جزء صحیح است.)						۱/۲۵
۴		نشان دهید تابع $f(x)=\sqrt[3]{x}$ ، در نقطهٔ $x=0$ دارای مماس قائم است.						۱/۲۵
۵		مشتق توابع زیر را به‌دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.) الف) $f(x)=(2x^3+\sqrt[3]{x}-1)^4$ ب) $g(x)=(x^3-5x)(\sqrt{x^2+1})$ پ) $h(x)=\sqrt{\frac{2x-x^2}{3x+5}}$						۲/۷۵
۶		اگر $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ و $g(-1)=g'(-1)=\frac{1}{4}$ ، مشتق $(f \circ g)(x)$ را به ازای $x=-1$ به‌دست آورید.						۱
۷		معادلهٔ حرکت متحرکی به‌صورت $f(t)=t^2-3t+12$ بر حسب متر در بازهٔ زمانی $[1,6]$ داده شده است. الف) سرعت متوسط متحرک را در بازهٔ $[1,6]$ به‌دست آورید. ب) سرعت لحظه‌ای متحرک را در لحظهٔ $t=2$ به‌دست آورید.						۱
۸		$f(x)=\frac{x}{1+x^2}$ تابع $[a,b]$ اکیداً صعودی است. بیش‌ترین مقدار $b-a$ را محاسبه کنید.						۱/۵
		صفحه ۱ از ۲						

سؤالات آزمون شبیه‌ساز نهایی درس: ریاضی ۳		پایه: دوازدهم		رشته: علوم تجربی		تاریخ آزمون: ۱۴۰۵/۰۴/۱۲		
تعداد صفحه: ۲		مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه		ساعت شروع:		نام و نام خانوادگی:		
آزمون شبیه‌ساز امتحان نهایی				گروه آموزشی ماز				
ردیف		سؤالات (پاسخ‌برگ دارد) - استفاده از ماشین حساب ساده مجاز است.						
نمره								
۹	نمودار تابع $f(x)=x^3+ax+b$ به صورت مقابل است. مقادیر a و b را بیابید.						۱	
								
۱۰	مقادیر اکسترمم‌های مطلق تابع $f(x)=\frac{-2}{3}x^3-x^2+4x+1$ را در بازه $[-3, 2]$ به دست آورید.						۱/۵	
۱۱	یک مستطیل در یک نیم‌دایره محاط شده است. اگر شعاع دایره ۲ سانتی‌متر باشد، طول و عرض مستطیل را طوری به دست آورید که مساحت آن بیشترین مقدار ممکن باشد.						۱/۵	
۱۲	خروج از مرکز بیضی مقابل را به دست آورید.						۱	
								
۱۳	در نقطه $A(-1, 0)$ روی دایره $(x-1)^2+(y-4)^2=20$ مماسی بر آن رسم کرده‌ایم. معادله این خط مماس را به دست آورید.						۱/۲۵	
۱۴	وضعیت دو دایره $C:x^2+y^2-2x+2y+1=0$ و $C':(x+3)^2+(y-2)^2=4$ را نسبت به هم مشخص کنید.						۱/۵	
۱۵	در یک مدرسه دوره دوم متوسطه، نصف دانش‌آموزان پایه دهم، یک سوم آن‌ها پایه یازدهم و یک ششم آن‌ها پایه دوازدهم هستند. اگر رشته ورزشی ۳۰ درصد از دانش‌آموزان پایه دهم، ۲۵ درصد از دانش‌آموزان پایه یازدهم و ۲۰ درصد از دانش‌آموزان پایه دوازدهم، فوتبال باشد و یک نفر به تصادف از دانش‌آموزان این مدرسه انتخاب شود. با چه احتمالی رشته ورزشی فرد موردنظر فوتبال است؟						۱/۵	
	موفق باشید.						۲۰	
	صفحه ۲ از ۲							



پایه دوازدهم تجربی

آزمون‌های شبیه‌ساز امتحانات نهایی ماز



مرور و تسلط بر نیم‌سال دوم



جمعه ۱۲ تیر ماه ۱۴۰۵

پاسخبرگ ریاضی (۳)

برای شباهت حداکثری به امتحانات نهایی، صفحه‌آرایی، فونت و حتی اندازه متن در تمامی آزمون‌های تشریحی ماز، کاملاً یکسان با استاندارد امتحانات نهایی در نظر گرفته می‌شود.

نام و نام خانوادگی:	تعداد صفحه: ۴	رشته: علوم تجربی	ساعت شروع:
نام و نام خانوادگی:	پایه دوازدهم	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	تاریخ آزمون: ۱۴۰۵/۰۴/۱۲
آزمون شبیه ساز امتحان نهایی		گروه آموزشی ماز	

ردیف	پاسخ برگ	نمره
۱	الف) ب) پ) ت)	۱
۲	الف) ب) پ) ت)	۱
۳		۱/۲۵
۴		۱/۲۵
۵	الف) ب) پ)	۲/۷۵

آزمون شبیه ساز نهایی درس: ریاضی ۳	تعداد صفحه: ۴	رشته: علوم تجربی	ساعت شروع:
نام و نام خانوادگی:	پایه دوازدهم	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	تاریخ آزمون: ۱۴۰۵/۰۴/۱۲
آزمون شبیه ساز امتحان نهایی		گروه آموزشی ماز	

ردیف	پاسخ برگ	نمره
۶		۱
۷	الف) ب)	۱
۸		۱/۵
۹		۱

ساعت شروع:	رشته: علوم تجربی	تعداد صفحه: ۴	آزمون شبیه ساز نهایی درس: ریاضی ۳
تاریخ آزمون: ۱۴۰۵/۰۴/۱۲	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	پایه دوازدهم	نام و نام خانوادگی:
گروه آموزشی ماز		آزمون شبیه ساز امتحان نهایی	

ردیف	پاسخ برگ	نمره
۱۰		۱/۵
۱۱		۱/۵
۱۲		۱
۱۳		۱/۲۵

ساعت شروع:	رشته: علوم تجربی	تعداد صفحه: ۴	آزمون شبیه ساز نهایی درس: ریاضی ۳
تاریخ آزمون: ۱۴۰۵/۰۴/۱۲	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	پایه دوازدهم	نام و نام خانوادگی:
گروه آموزشی ماز		آزمون شبیه ساز امتحان نهایی	

ردیف	پاسخ برگ	نمره
۱۴		۱/۵
۱۵		۱/۵
	موفق باشید.	۲۰



پایه دوازدهم تجربی

آزمون های شبیه ساز امتحانات نهایی ماز



مرور و تسلط بر نیم سال دوم



دفترچه پاسخ

جمعه ۱۲ تیر ماه ۱۴۰۵

فصل ۴ (درس ۲ و ۳) تا پایان فصل ۷ (صفحه های ۷۷ تا ۱۴۸)

بودجه آزمون

ویراستاران

طراحان

درس

ارسلان حسنونند - نرجس تیمناک
حمیدرضا ولی پور

محدثه شیخعلی - سید جواد نظری

ریاضی (۳)

حق چاپ و تکثیر سؤالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز «گروه ماز» مجاز می باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می شود.

مصَحَّح شو:



پاسخ دقیق سؤال این جا میاد و اسمش روشه: «مصَحَّح شو»، می خواد شما رو به یه مصحح حرفه‌ای و دقیق تبدیل کنه که بدونین موقع ارزیابی جواب‌هاتون باید حواستون به چی باشه تا توی آزمون‌های بعدی دقیق‌تر عمل کنین. اگه جواب یه سؤال رو بشه به شکل‌های مختلف بیان کرد، اون هم، این جا بهتون گفتیم.

بررسی دقیق‌تر:



اگه پاسخ کوتاه به سؤال کافی نباشه تا بینین چطوری باید به جواب برسین، توی این بخش با بررسی دقیق‌تر جواب، سؤال رو براتون توضیح دادیم.

نقشه نهایی:



امتحان نهایی قوانین و قواعد خاص خودش رو داره؛ شما باید بدونین تیپ‌های رایج سؤال‌های امتحان نهایی چیه و باید چطوری بهش جواب بدین. این کادر، مشاوره حرفه‌ای ماست به شما تا فوت و فن‌های امتحان نهایی رو یاد بگیرین.

۲۰ شو:



توی «۲۰ شو»، مبحث هر سؤال رو براتون مرور یا جمع‌بندی کردیم؛ «۲۰ شو» و درسنامه‌هاش دقیقاً فاصله بین نمره خوب و نمره ۲۰ رو براتون پر می‌کنه.

نکته طلایی:



با وجود «۲۰ شو»، که کلی درسنامه مفصل داره، باز هم اگه نکته مهم و مفیدی بود، توی این کادر براتون آوردیم.

تیم اجرایی و تولید آزمون

محدثه عربگری

زهره صفری

محدثه شیخ‌علی

یگانه پوراابراهیم

مرضیه بنیانی

ساره محمدعلی‌نسب

سرپرست آزمون: ارمغان قریب

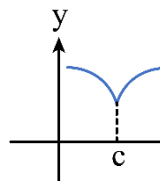
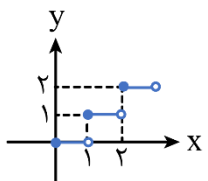
یک تیم با بیش از ۵۰۰ نفر در حال کار هستن تا آزمون‌های ماز با حداکثر کیفیت حاضر بشن و به شما کمک کنن و مسیر موفقیت رو براتون ساده‌تر کنن. همیشه از نظرات و کامنت‌های خوب‌تون انرژی می‌گیریم. مرسی که همراهمون هستین.

دکتر رسول خنجری

برای دیدن پاسخ نامه ویدئویی آزمون شبیه ساز نهایی QR Code
را اسکن کنید یا روی لینک زیر ضربه بزنید.

پاسخنامه ویدئویی آزمون شبیه ساز نهایی



راهنمای تصحیح آزمون نهایی درس: ریاضی ۳		رشته: علوم تجربی
دوره دوم متوسطه - دوازدهم	تاریخ آزمون: ۱۴۰۵/۰۴/۱۲	ساعت شروع:
آزمون شبیه‌ساز امتحان نهایی	گروه آموزشی ماز	مدت زمان: ۱۲۰ دقیقه
ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۱	مصّحّح شو الف) نادرست (۰/۲۵) (صفحه ۹۲) پ) درست (۰/۲۵) (صفحه ۱۳۱) ب) نادرست (۰/۲۵) (صفحه ۱۰۶) ت) نادرست (۰/۲۵) (صفحه ۱۴۴) بررسی دقیق‌تر: الف) $(2f - 3g)'(1) = 2f'(1) - 3g'(1) = 2(5) - 3(-2) = 10 + 6 = 16$ ب) مثال نقض: x یا $f(x) = x$ در نقطه $x = 0$. ت) چون A و B مستقل هستند، پس: بنابراین: $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B)$ 	۱
۲	مصّحّح شو الف) ۱۲- (۰/۲۵) (صفحه ۹۲) پ) هذلولی (۰/۲۵) (صفحه ۱۲۷) ب) اکستریم نسبی (ماکزیمم نسبی) (۰/۲۵) (صفحه ۱۰۵) ت) ۲ (۰/۲۵) (صفحه ۱۳۴) بررسی دقیق‌تر: الف) $f(x) = x - 2x^3 \Rightarrow f'(x) = 1 - 6x^2 \Rightarrow f''(x) = -12x \Rightarrow f''(1) = -12$ ب) $x = 2$ اکستریم نسبی (ماکزیمم نسبی) است. ت) معادله دایره را به صورت استاندارد می‌نویسیم: $x^2 + y^2 - my = 3 \Rightarrow x^2 + (y - \frac{m}{2})^2 = 3 + \frac{m^2}{4}$ برای آن که (۰، ۱) مرکز دایره باشد، باید: $\frac{m}{2} = 1 \Rightarrow m = 2$ 	۲

مشتق مرتبه دوم

$$f(x) \xrightarrow{\text{مشتق}} f'(x) \xrightarrow{\text{مشتق}} f''(x)$$

مشتق مرتبه دوم یعنی دو بار مشتق بگیر:

یه نمونه باحال

اگر $f(x) = 5x^3 - 4x^2 - 3x$ ، مقدار $f''(-1)$ را به دست آورید.

$$f(x) = 5x^3 - 4x^2 - 3x \longrightarrow f'(x) = 15x^2 - 8x - 3 \longrightarrow f''(x) = 30x - 8$$

$$\xrightarrow{x=-1} f''(-1) = 30(-1) - 8 = -30 - 8 = -38$$

اکسترم نسبی

برای پیدا کردن نقاط اکسترم نسبی یک تابع پیوسته به روش زیر عمل می‌کنیم:

- ۱) دامنه تابع را به دست می‌آوریم.
 - ۲) نقاط بحرانی تابع را پیدا می‌کنیم.
 - ۳) جدول تغییرات را رسم کرده و سپس مشتق تابع را تعیین علامت می‌کنیم.
 - ۴) حال برای تشخیص ماکزیمم یا مینیمم بودن نقاط بحرانی داریم:
- اگر علامت f' در آن نقطه از چپ به راست از مثبت به منفی تغییر کند، آن نقطه، نقطه ماکزیمم نسبی است.
- اگر علامت f' در آن نقطه از چپ به راست از منفی به مثبت تغییر کند، آن نقطه، نقطه مینیمم نسبی است.
- اگر f' در آن نقطه تغییر علامت ندهد، با این روش نمی‌توان درباره ماکزیمم یا مینیمم نسبی بودن آن نقطه اظهار نظر کرد.
- توجه:** هر نقطه اکسترم نسبی، یک نقطه بحرانی است. اما هر نقطه بحرانی لزوماً نقطه اکسترم نسبی نیست.

یه نمونه باحال دیگر

در تابع $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 10$ ، ابتدا نقاط بحرانی تابع را به دست آورید و سپس با رسم جدول تغییرات تابع، نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی آن را در صورت وجود مشخص کنید.

$$D_f = \mathbb{R}$$

برای پیدا کردن نقاط بحرانی تابع f ، مشتق آن را به دست آورده و آن را برابر صفر قرار می‌دهیم، یعنی باید معادله $f'(x) = 0$ را حل کنیم:

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} x=1 \\ x=-3 \end{cases}$$

بنابراین $x=1$ و $x=-3$ نقاط بحرانی تابع f می‌باشند، حال با رسم جدول تغییرات، مشتق را تعیین علامت می‌کنیم:

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$
f'	+	-	+	
f		↗	↘	↗
		max نسبی	min نسبی	

$$\Rightarrow \begin{cases} x=-3 \longrightarrow \text{طول max نسبی} \\ x=1 \longrightarrow \text{طول min نسبی} \end{cases}$$

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 10 \Rightarrow \begin{cases} x=-3 \rightarrow f(-3) = 17 \Rightarrow A(-3, 17) \rightarrow \text{نسبی max} \\ x=1 \rightarrow f(1) = -15 \Rightarrow B(1, -15) \rightarrow \text{نسبی min} \end{cases}$$

با فرض این‌که تابع $y = f(x)$ مشتق‌پذیر باشد، اگر نقطه (a, b) ، نقطه اکسترم نسبی تابع f باشد، در این صورت:

$$f'(a) = 0$$

$$f(a) = b$$

	مصحح شو روش اول: برای آن که تابع $f(x)$ در $x=1$ مشتق پذیر باشد، باید در این نقطه پیوسته بوده و مشتق چپ و راست برابر باشند. $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ $\Rightarrow f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 6(1) - 2 = 4, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3 + 1 = 4$ پس کافیت: $f'_+(1) = f'_-(1)$	
۱/۲۵	$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x^2 + 1 - 4}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3(x-1)(x+1)}{x-1} = 6 \quad (0/25)$ $f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{6x - 2 - 4}{x - 1} = 6 \quad (0/25)$ چون تساوی برقرار است، پس $f(x)$ در $x=1$ مشتق پذیر است. $(0/25)$ روش دوم: $f'_+(1) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{3(1+h)^2 + [1+h] - 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{4(3h+6)}{h} = 6 \quad (0/25)$ $f'_-(1) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{6(1+h) - 2 - 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{6h}{h} = 6 \quad (0/25)$ بنابراین چون $f'_-(1) = f'_+(1)$، تابع در $x=1$ مشتق پذیر است. $(0/25)$ (صفحه ۸۰) سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۴ دقیقه	۳
۱/۲۵	مصحح شو تابع $f(x)$ در $x=0$ پیوسته است. $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 \quad (0/25)$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \infty \quad (0/25)$ بنابراین تابع $f(x)$ در $x=0$ مماس قائم دارد. $(0/25)$ (صفحه ۹۱) سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۴ دقیقه	۴
۲/۷۵	مصحح شو (الف) $f(x) = (2x^3 + \sqrt[3]{x} - 1)^4$ $\Rightarrow f'(x) = 4(2x^3 + \sqrt[3]{x} - 1)^3 \left(6x^2 + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \right)$ (ب) $g(x) = (x^3 - 5x)(\sqrt{x^2 + 1})$	۵

$$\Rightarrow g'(x) = (\underbrace{3x^2}_{(0/25)} - \underbrace{5}_{(0/25)}) (\underbrace{\sqrt{x^2+1}}_{(0/25)}) + (\underbrace{-\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}_{(0/25)}) (\underbrace{x^3-5x}_{(0/25)})$$

$$h(x) = \sqrt{\frac{2x-x^2}{3x+5}}$$

$$\Rightarrow h'(x) = \underbrace{\frac{1}{2} \left[\frac{(2-2x)(3x+5) - (3)(2x-x^2)}{(3x+5)^2} \right]}_{(0/5)} \underbrace{\left(\frac{2x-x^2}{3x+5} \right)^{-\frac{1}{2}}}_{(0/25)}$$

(پ)

(صفحه ۹۲)

سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۶ دقیقه

قواعد مشتق گیری

- $y = c; c \in \mathbb{R} \rightarrow y' = 0$
- $y = ax + b \rightarrow y' = a$
- $y = \sqrt[n]{x^m} \rightarrow y' = \frac{m}{n\sqrt[n]{x^{n-m}}}$
- $y = ((f(x))^n \rightarrow y' = nf'(x)(f(x))^{n-1}$
- $y = f(x) \pm g(x) \rightarrow y' = f'(x) \pm g'(x)$
- $y = f(x) \times g(x) \rightarrow y' = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$
- $y = \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow y' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}, (g(x) \neq 0)$
- $y = \sqrt[n]{(f(x))^m} \rightarrow y' = \frac{mf'(x)}{n\sqrt[n]{(f(x))^{n-m}}}$

مسیر تمرینی:

مشابه این سوال، در سوال ۱۰ امتحان نهایی خردادماه ۱۴۰۴ مطرح شده بود.

مصطح شو

با توجه به مشتق ترکیب توابع داریم: $(fog)'(x) = g'(x)f'(g(x))$

$$\Rightarrow (fog)'(-1) = g'(-1)f'(g(-1)) \xrightarrow{g(-1)=\frac{1}{2}} g'(-1)f'\left(\frac{1}{2}\right) \quad (0/25)$$

بنابراین چون $g'(-1) = \frac{1}{2}$ کافیست $f'\left(\frac{1}{2}\right)$ را حساب کنیم:

$$f(x) = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}(-2x)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \quad (0/25)$$

$$\Rightarrow f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}(-1)\left(\frac{3}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{-1}{\sqrt{3}} \quad (0/25)$$

$$(fog)'(-1) = g'(-1)f'\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{-1}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{6} \quad (0/25)$$

پس:

(صفحه ۸۸)

سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۵ دقیقه

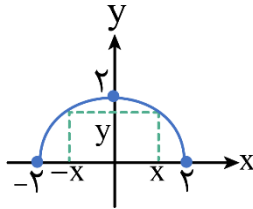
	مشتق تابع مرکب اگر f و g دو تابع مشتق‌پذیر باشند، در این صورت تابع مرکب $f \circ g$ و $g \circ f$ مشتق‌پذیر هستند و داریم: $(f \circ g)'(x) = g'(x)f'(g(x))$ $(g \circ f)'(x) = f'(f(x))g'(x)$										
۱	مصّحّح شو (الف) $\text{سرعت متوسط متحرک در بازه } [1, 6] = \frac{f(6) - f(1)}{6 - 1} = \frac{f(6) - f(1)}{5} \quad (0/25)$ حال چون $f(t) = t^2 - 3t + 12$، پس: $f(1) = 10$، $f(6) = 30$ بنابراین: $\text{سرعت متوسط متحرک در بازه } [1, 6] = \frac{f(6) - f(1)}{5} = \frac{30 - 10}{5} = 4 \quad (0/25)$ (ب) روش اول: $f'(2) = \text{سرعت لحظه‌ای متحرک در } t = 2$ $f'(2) = \lim_{t \rightarrow 2} \frac{f(t) - f(2)}{t - 2} = \lim_{t \rightarrow 2} \frac{t^2 - 3t + 12 - 10}{t - 2} = \lim_{t \rightarrow 2} \frac{(t-2)(t-1)}{t-2} = 1 \quad (0/25)$ روش دوم: $f'(t) = 2t - 3 \Rightarrow f'(2) = 2(2) - 3 = 1 \quad (0/25)$ (صفحه ۱۰۰) آهنگ تغییر متوسط و لحظه‌ای تابع (الف) آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازه $[a, b]$ برابر است با: $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ (ب) آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f در $x = a$ برابر است با: $f'(a)$	۷									
۱/۵	مصّحّح شو مشتق تابع را برای به دست آوردن بازه اکیدا صعودی، تعیین علامت می‌کنیم: $f(x) = \frac{x}{1+x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{(1)(1+x^2) - (2x)(x)}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \quad (0/25)$ $\Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases} \quad (0/25)$ (رسم جدول $(0/5)$) <table border="1"> <tr> <td>x</td> <td>-1</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>$f'(x)$</td> <td>$-$</td> <td>$+$</td> </tr> <tr> <td>$f(x)$</td> <td>$\searrow$</td> <td>$\nearrow$</td> </tr> </table> بنابراین تابع در بازه $[-1, 1]$ اکیدا صعودی بوده و $b - a = 2$ (صفحه ۱۱۲) (۰/۲۵)	x	-1	1	$f'(x)$	$-$	$+$	$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	۸
x	-1	1									
$f'(x)$	$-$	$+$									
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$									

	مسیر تمرینی:  مشابه این سوال، در سوال ۱۱ امتحان نهایی خردادماه ۱۴۰۲ مطرح شده بود.	
۹	مصحح شو  با توجه به نمودار داده شده، تابع از نقطه (۱, ۲) عبور می کند، پس: $f(1) = 2 \Rightarrow f(1) = 1 + a + b = 2 \Rightarrow a + b = 1 \quad (I) \quad (0/25)$ از طرفی شیب خط مماس بر نمودار تابع در نقطه $x = 1$ برابر صفر است (مماس افقی) بنابراین: $f'(1) = 0 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + a \Rightarrow f'(1) = 3 + a = 0 \Rightarrow a = -3 \quad (II) \quad (0/25)$ حال با جای گذاری (II) در (I) داریم: $b = 4$ (صفحه ۱۱۲) $(0/25)$ سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۴ دقیقه 	
۱۰	مصحح شو  ابتدا نقاط بحرانی را تعیین می کنیم: $x = -3$ نقطه ابتدایی بازه و $x = 2$ نقطه انتهایی بازه و ریشه های $f'(x) = 0$ که یعنی: $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 - x^2 + 4x + 1$ $\Rightarrow f'(x) = -2x^2 - 2x + 4 \xrightarrow{a+b+c=0} f'(x) = (x-1)(-2x-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \quad (0/25) \\ x = -2 \quad (0/25) \end{cases}$ بنابراین برای یافتن اکسترمم های مطلق، مقادیر $f(-2), f(1), f(-3), f(2)$ را با هم مقایسه می کنیم: $\begin{cases} f(2) = -\frac{2}{3}(8) - 4 + 8 + 1 = \frac{-16+15}{3} = -\frac{1}{3} \quad (0/25) \\ f(-3) = -\frac{2}{3}(-27) - 9 - 12 + 1 = 18 - 20 = -2 \quad (0/25) \\ f(1) = -\frac{2}{3} - 1 + 4 + 1 = \frac{-2+12}{3} = \frac{10}{3} \Rightarrow \frac{10}{3} = \text{مقدار ماکزیمم مطلق} \quad (0/25) \\ f(-2) = -\frac{2}{3}(-8) - 4 - 8 + 1 = \frac{16-33}{3} = -\frac{17}{3} \Rightarrow -\frac{17}{3} = \text{مقدار مینیمم مطلق} \quad (0/25) \end{cases}$ (صفحه ۱۱۲) سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۶ دقیقه  مسیر تمرینی:  مشابه این سوال، در سوال ۱۳ امتحان نهایی شهریورماه ۱۴۰۴ مطرح شده بود.	

مصّحّح شو

روش اول: معادله نیم‌دایره به شعاع ۲ و مرکز مبدأ به شکل روبه‌رو، $y = \sqrt{4 - x^2}$ است. (۰/۲۵)

مساحت مستطیل همیشه. $S = 2xy = 2x\sqrt{4 - x^2} = S(x)$ (۰/۲۵)



برای رسیدن به ماکزیمم آن باید $S' = 0$ باشد:

$$S'(x) = 2\sqrt{4 - x^2} + (2x)(4 - x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x) = 0$$

$$\Rightarrow S'(x) = \frac{2(4 - x^2) - 2x^2}{\sqrt{4 - x^2}} = 0 \Rightarrow 8 - 2x^2 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2} \quad (۰/۲۵)$$

بنابراین طول و عرض مستطیل میشن: $2x = 2\sqrt{2}$, $y = \sqrt{4 - 2} = \sqrt{2}$ (۰/۲۵)

روش دوم: مجموع $4 - x^2$ و x^2 ثابت است، پس حاصل ضرب $(x^2)^{\frac{1}{2}}(4 - x^2)^{\frac{1}{2}}$ وقتی max است که با هم برابر باشند،

یعنی $x^2 = 4 - x^2$ که یعنی $x = \sqrt{2}$ و در نتیجه: $y = \sqrt{2}$. پس طول و عرض میشن: $2\sqrt{2}, \sqrt{2}$ (صفحه ۱۲۰) (۰/۵)

سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۶ دقیقه

راهنمای مصحح:

قسمت اول استدلال در روش دوم، ۵/۵ نمره بارم دارد.

حل مسائل بهینه‌سازی

برای حل مسائل بهینه‌سازی:

- ۱) ابتدا رابطه کمیتی که قرار است بهینه شود (مینیم یا ماکزیمم شود) را به دست می‌آوریم.
- ۲) رابطه به دست آمده را به کمک روابط موجود در مسئله به یک رابطه تک متغیره تبدیل می‌کنیم.
- ۳) سپس از رابطه تک متغیره به دست آمده مشتق گرفته و برابر صفر قرار می‌دهیم و ریشه مشتق را به دست می‌آوریم.
- ۴) حال به کمک ریشه مشتق، کمیتی که قرار است بهینه شود را پیدا می‌کنیم.

مسیر تمرینی:

مشابه این سوال، در سوال ۱۵ امتحان نهایی خردادماه ۱۴۰۴ مطرح شده بود.

مصّحّح شو

با توجه به شکل بیضی، $\begin{cases} b = OB' = x & (۰/۲۵) \\ a = OA = 2x & (۰/۲۵) \end{cases}$ ، بنابراین با توجه به رابطه $b^2 + c^2 = a^2$ داریم:

$$c^2 = a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) = x(3x) = 3x^2 \Rightarrow c = \sqrt{3}x \quad (۰/۲۵)$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}x}{2x} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (۰/۲۵)$$

در نتیجه:

(صفحه ۱۳۲)

سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۳ دقیقه

خروج از مرکز بیضی

۱) مقدار $\frac{c}{a}$ را خروج از مرکز بیضی می نامیم و معمولاً آن را با حرف e نمایش می دهیم.

۲) همواره خروج از مرکز بیضی بین ۰ و ۱ است. $(0 < e < 1)$

۳) هرچه نسبت $e = \frac{c}{a}$ بزرگتر و به ۱ نزدیکتر باشد، شکل بیضی کشیده تر می شود و به عبارتی شکل بیضی به پاره خط نزدیکتر می شود.

۴) هرچه نسبت $e = \frac{c}{a}$ کوچکتر و به صفر نزدیکتر باشد، شکل بیضی به شکل دایره نزدیکتر خواهد بود.

مثال:

اگر در یک بیضی داشته باشیم $a = 5$ و $b = 3$ ، در این صورت اندازه فاصله کانونی این بیضی را محاسبه کنید.

$$\begin{cases} a = 5 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 25 = 9 + c^2 \Rightarrow c^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow c = \sqrt{16} = 4$$

$$FF' = 2c = 8$$

می دانیم که فاصله کانونی برابر ۲c است، پس:

مصّحّ شو

می دانیم شعاع دایره بر خط مماس بر دایره در نقطه تماس عمود است، بنابراین اگر d خط مماس و OA شعاع واصل بین مرکز و نقطه A باشد:

(حاصل ضرب شیب دو خط عمود همیشه -1) $OA \perp d \Rightarrow m_{OA} \times m_d = -1$ (۰/۲۵)

با توجه به معادله دایره، $O(1, 4)$ مرکز دایره است: (۰/۲۵) $m_{OA} = \frac{4-0}{1-(-1)} = 2$ (۰/۲۵)

پس $m_d = -\frac{1}{2}$ و چون $A(-1, 0)$ نقطه ای روی خط d است، معادله خط همیشه:

(۰/۲۵)

$$y - 0 = \left(-\frac{1}{2}\right)(x + 1) \Rightarrow y = \frac{-x}{2} - \frac{1}{2}$$

(صفحه ۱۳۹)

سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۵ دقیقه

مسیر تمرینی:

مشابه این سوال، در سوال ۱۶ امتحان نهایی خردادماه ۱۴۰۱ مطرح شده بود.

مصّحّ شو

(صفحه ۱۴۲)

ابتدا معادله دو دایره را استاندارد کرده و مختصات مرکزها و طول شعاعها رو به دست میاریم:

$$C: x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1 = 0 \Rightarrow C: (x-1)^2 + (y+1)^2 = 1+1-1=1$$

بنابراین $O(1, -1)$ و $R = 1$. (۰/۲۵) (۰/۲۵)

۱/۲۵

۱۳

۱/۵

۱۴

$$C': (x+3)^2 + (y-2)^2 = 4 \Rightarrow R' = 2, O'(-3, 2)$$

(۰/۲۵) (۰/۲۵)

حال با محاسبه طول خط‌المركزين OO' و مقایسه آن با $R + R'$ و $|R - R'|$ داریم:

$$OO' = \sqrt{(1-(-3))^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{16+9} = 5 \quad (۰/۲۵)$$

حال چون $R + R' < OO'$ ، دو دایره متخارج هستند. (۰/۲۵)

دقت کنید چون $R + R' < OO'$ شده و مشخص شد که دو دایره متخارج هستند دیگر نیازی به محاسبه $|R - R'|$ نشد.

سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۵ دقیقه

حالا نوبت به بررسی وضعیت دایره رسید...

اگر $O(\alpha, \beta)$ مختصات مرکز یک دایره و r شعاع آن دایره باشد معادله استاندارد دایره برابر است با:

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$$

مثال: اگر معادله دایره به صورت $(x+1)^2 + y^2 = 4$ باشد، مطلوبست:

$$(x+1)^2 + (y-0)^2 = 2^2 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 0 \\ r = 2 \end{cases} \Rightarrow O(-1, 0)$$

(الف) مختصات مرکز دایره و اندازه شعاع دایره:

(ب) مختصات نقاط تقاطع دایره با محور X ها و محور Y ها:

برای پیدا کردن مختصات تقاطع دایره با محور X ها، باید در معادله دایره، $y = 0$ قرار دهیم که در این صورت:

$$(x+1)^2 + y^2 = 4 \xrightarrow{y=0} (x+1)^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} x+1=2 \rightarrow x=1 \\ x+1=-2 \rightarrow x=-3 \end{cases}$$

در نتیجه نقاط $(1, 0)$ و $(-3, 0)$ محل تقاطع دایره با محور X ها هستند.

و برای پیدا کردن مختصات تقاطع دایره با محور Y ها، باید در معادله دایره، $x = 0$ را قرار دهیم:

$$(x+1)^2 + y^2 = 4 \xrightarrow{x=0} 1 + y^2 = 4 \Rightarrow y^2 = 3 \Rightarrow \begin{cases} y = \sqrt{3} \\ y = -\sqrt{3} \end{cases}$$

پس نقاط $(0, \sqrt{3})$ و $(0, -\sqrt{3})$ ، محل تقاطع دایره با محور Y ها هستند.

مسیر تمرینی:

مشابه این سوال، در سوال ۱۴ امتحان نهایی خردادماه ۱۴۰۲ مطرح شده بود.

مصطح شو

(صفحه ۱۴۸)

فرض کنیم این مدرسه کلاً n دانش‌آموز داشته باشد. طبق فرض سوال، $\frac{n}{4}$ دانش‌آموز پایه دهم، $\frac{n}{3}$ دانش‌آموز پایه یازدهم

و $\frac{n}{6}$ دانش‌آموز پایه دوازدهم داریم:

A_1 = پیشامد انتخاب پایه دهمی

A_2 = پیشامد انتخاب پایه یازدهمی

	$A_3 =$ پیشامد انتخاب پایه دوازدهمی از قانون احتمال کل استفاده می کنیم: $P(F) = P(A_1)P(F A_1) + P(A_2)P(F A_2) + P(A_3)P(F A_3)$ (۰/۲۵) رشته ورزشی فرد انتخابی فوتبال باشد $= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{10}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{3}{20} + \frac{1}{12} + \frac{1}{30} = \frac{9+5+2}{60} = \frac{16}{60} = \frac{4}{15}$ (۰/۵) سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۵ دقیقه راهنمای مصحح: استفاده از نمودار درختی به تناسب نمره دارد. مسیر تمرینی: مشابه این سوال، در سوال ۱۸ امتحان نهایی خردادماه ۱۴۰۴ مطرح شده بود.	
۲۰	موفق باشید.	