



پایه دوازدهم تجربی

آزمون های شبیه ساز امتحانات نهایی ماز



شبیه ساز امتحان نهایی



دفعه سؤال

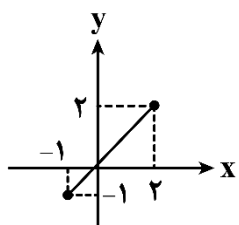
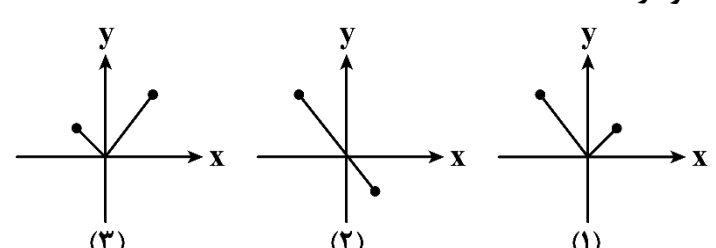
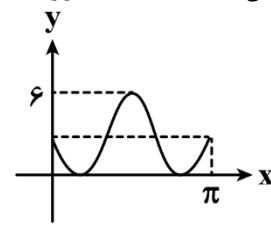
چهارشنبه ۲۴ تیرماه ۱۴۰۵

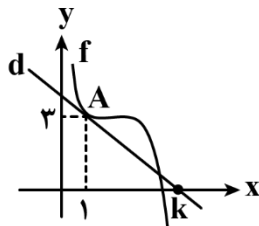
جامع کل کتاب

بودجه آزمون

ردیف	درس	تعداد صفحه	زمان پاسخگویی
۱	ریاضی (۳)	۳	۱۲۰ دقیقه

برای شباهت حداکثری به امتحانات نهایی، صفحه آرای، فونت و حتی اندازه متن در تمامی آزمون های تشریحی ماز، کاملاً یکسان با استاندارد امتحانات نهایی در نظر گرفته می شود.

سؤالات آزمون شبیه‌ساز نهایی درس: ریاضی ۳		پایه: دوازدهم		رشته: علوم تجربی		تاریخ آزمون: ۱۴۰۵/۰۴/۲۴	
تعداد صفحه: ۳		مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه		ساعت شروع:		نام و نام خانوادگی:	
آزمون شبیه‌ساز امتحان نهایی				گروه آموزشی ماز			
ردیف		سؤالات (پاسخ‌برگ دارد) - استفاده از ماشین حساب ساده مجاز است.					
۱		درستی یا نادرستی عبارات‌های زیر را مشخص کنید. الف) تابع $y = x^2 x$ در بازه $(-\infty, 0]$ نزولی است. ب) هر نقطه اکسترمم نسبی تابع، یک نقطه بحرانی آن است. پ) اگر صفحه‌ای سطح مخروطی را هم در قسمت بالایی و هم در قسمت پایینی قطع کند، شکل حاصل همواره هذلولی است.					
۲		جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید. الف) شکل حاصل از دوران یک مثلث قائم‌الزاویه، حول یکی از اضلاع قائمه آن، است. ب) اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند، آن‌گاه $A \cap B$ برابر است. پ) اگر $f(x) = 2 + \sqrt{3x+1}$ باشد، مقدار $f \circ f^{-1}(3)$ برابر است.					
۳		نمودار تابع f به صورت زیر است:  نمودار توابع: الف) $f(-x)$ ب) $f(x)$ را از بین نمودارهای زیر انتخاب کنید و سپس شماره مربوط به آن را در پاسخ‌برگ بنویسید. (یک نمودار اضافه است). 					
۴		اگر $f(x) = x^2 - 5x + 6$ و $g(x) = 3x + 1$ ، معادله $(f \circ g)(x) = 2$ را تشکیل داده و سپس آن را حل کنید.					
۵		ضابطه تابع وارون تابع $f(x) = 4 + \sqrt{2-x}$ را به دست آورید.					
۶		قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a \sin(bx) + c$ به صورت زیر است. مقادیر a، b و c را با فرض $b > 0$ به دست آورید. 					
		صفحه ۱ از ۳					

سؤالات آزمون شبیه‌ساز نهایی درس: ریاضی ۳		پایه: دوازدهم		رشته: علوم تجربی		تاریخ آزمون: ۱۴۰۵/۰۴/۲۴	
تعداد صفحه: ۳		مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه		ساعت شروع:		نام و نام خانوادگی:	
آزمون شبیه‌ساز امتحان نهایی				گروه آموزشی ماز			
ردیف		سؤالات (پاسخ‌برگ دارد) - استفاده از ماشین حساب ساده مجاز است.					
۷		با فرض $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ ، مقدار $\cos(2\alpha)$ را بیابید.					
۸		معادله $\cos x + \cos(2x) = 0$ را حل کنید.					
۹		حاصل حدهای زیر را بیابید. الف) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - \sqrt{x+2}}{x^2 - 4}$ ب) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x}{(x+3)^2}$ پ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x^3 + 2}{2x^2 + x^3 - 1}$					
۱۰		در شکل زیر، خط d در نقطه $A(1, 3)$ بر نمودار تابع f مماس است. اگر $f'(1) = \frac{-1}{2}$ باشد، مقدار k را بیابید. 					
۱۱		مشتق توابع داده شده را به دست آورید. (ساده کردن لازم نیست) الف) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{3x-2}$ ب) $g(x) = (x^2-1)\sqrt[3]{3x+1}$					
۱۲		به کمک تعریف مشتق، مشتق‌پذیری تابع $f(x) = \sqrt[3]{x}$ را در $x=0$ بررسی کنید.					
۱۳		اگر $f(2)=1$ و $f'(2)=3$ و $g'(1)=-2$ ، آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع $g \circ f$ را در $x=2$ به دست آورید.					
۱۴		الف) مقادیر a و b را طوری بیابید که نقطه $A(1, -2)$ یک نقطه اکسترمم نسبی تابع $f(x) = 2x^3 + ax^2 + b$ باشد. ب) بزرگ‌ترین بازه‌ای را بیابید که تابع f در آن بازه اکیداً نزولی باشد.					
۱۵		طول و عرض مستطیلی با بیشترین مساحت را تعیین کنید که دو رأس آن روی محور x ها و دو رأس دیگرش بالای محور x ها و روی سهمی به معادله $y = 9 - x^2$ باشند.					
۱۶		خروج از مرکز یک بیضی $\frac{3}{5}$ و طول قطر کوچک آن ۸ واحد است. فاصله کانونی بیضی را بیابید.					
		صفحه ۲ از ۳					

سؤالات آزمون شبیه‌ساز نهایی درس: ریاضی ۳		پایه: دوازدهم		رشته: علوم تجربی		تاریخ آزمون: ۱۴۰۵/۰۴/۲۴				
تعداد صفحه: ۳		مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه		ساعت شروع:		نام و نام خانوادگی:				
آزمون شبیه‌ساز امتحان نهایی				گروه آموزشی ماز						
ردیف		سؤالات (پاسخ‌برگ دارد) - استفاده از ماشین حساب ساده مجاز است.						نمره		
۱۷		شعاع دایره‌ای را بیابید که مرکز آن (۲,۱) و با دایرهٔ $x^2 + y^2 + 2x + 6y = -1$ مماس بیرون باشد.							۱	
۱۸		فرض کنید جمعیت یک کشور متشکل از ۶۰ درصد زن و ۴۰ درصد مرد باشد و شیوع یک نوع بیماری خاص در این دو گروه، به ترتیب ۴ درصد و ۵ درصد باشد. اگر فردی به تصادف از این جامعه انتخاب شود، با چه احتمالی به بیماری موردنظر مبتلا است؟							۱/۲۵	
		موفق باشید.							۲۰	
		صفحه ۳ از ۳								



پایه دوازدهم تجربی

آزمون‌های شبیه‌ساز امتحانات نهایی ماز



شبیه‌ساز امتحان نهایی



چهارشنبه ۲۴ تیرماه ۱۴۰۵

پاسخبرگ ریاضی (۳)

برای شباهت حداکثری به امتحانات نهایی، صفحه‌آرایی، فونت و حتی اندازه متن در تمامی آزمون‌های تشریحی ماز، کاملاً یکسان با استاندارد امتحانات نهایی در نظر گرفته می‌شود.

مازی‌های عزیز

برای شرکت در آزمون تشریحی به این نکات دقت کنید:

از ساعت ۸ تا ۱۱

توی آزمون شرکت کنید و پاسخ برگرتون رو داخل پنل بارگذاری کنید تا تیم مصححان ماز برگه‌تون رو بررسی کنن.

◀ با توجه به استقبال خیلی زیاد دانش آموزها، برگه‌های شما به ترتیب الویت بارگذاری؛ توسط **مصححان انسانی** (و نه هوش مصنوعی) تصحیح می‌شن. به همین خاطر، با اینکه تیم ما با تمام توان مشغول تصحیح برگه‌هاست، ممکنه به **خاطر محدودیت ظرفیت**، نتونیم همه برگه‌ها رو بررسی کنیم. اگر تصحیح برگه‌تون کمی طول کشید یا برگه‌تون در اولویت تصحیح قرار نگرفت، نگران نباشید؛ راهنمای کامل مصحح داخل پاسخنامه قرار گرفته و می‌تونید دقیقاً مثل معیارهای امتحان نهایی، برگه‌تون رو خودتون بررسی و تصحیح کنید.

اولویت تصحیح با دانش آموزهایی هست که زودتر پاسخ برگشون رو بارگذاری کنن.

رأس ساعت ۱۱ این موارد داخل پنل براتون فعال می‌شه:

- ◀ پاسخنامه کامل آزمون + راهنمای مصحح
- ◀ جزوه آموزش تشریحی نویسی (قلق‌های نمره‌گرفتن)
- ◀ جزوه دوپینگ فوری شب امتحان
- ◀ پاسخ ویدیویی و تحلیل آزمون توسط اساتید ماز (لینک تحلیل داخل پاسخنامه)



آزمون شبیه ساز نهایی درس: ریاضی ۳	تعداد صفحه: ۵	رشته: علوم تجربی	ساعت شروع:
نام و نام خانوادگی:	پایه دوازدهم	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	تاریخ آزمون: ۱۴۰۵/۰۴/۲۴
آزمون شبیه ساز امتحان نهایی		گروه آموزشی ماز	

ردیف	پاسخ برگ	نمره
۱	الف) ب) پ)	۰/۷۵
۲	الف) ب) پ)	۰/۷۵
۳	الف) ب)	۰/۵
۴		۱/۲۵
۵		۰/۷۵
۶		۱/۵

آزمون شبیه ساز نهایی درس: ریاضی ۳	تعداد صفحه: ۵	رشته: علوم تجربی	ساعت شروع:
نام و نام خانوادگی:	پایه دوازدهم	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	تاریخ آزمون: ۱۴۰۵/۰۴/۲۴
آزمون شبیه ساز امتحان نهایی		گروه آموزشی ماز	

ردیف	پاسخ برگ	نمره
۷		۰/۵
۸		۱
۹	الف) ب) پ)	۲

آزمون شبیه ساز نهایی درس: ریاضی ۳	تعداد صفحه: ۵	رشته: علوم تجربی	ساعت شروع:
نام و نام خانوادگی:	پایه دوازدهم	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	تاریخ آزمون: ۱۴۰۵/۰۴/۲۴
آزمون شبیه ساز امتحان نهایی		گروه آموزشی ماز	

ردیف	پاسخ برگ	نمره
۱۰		۱
۱۱	الف) ب)	۲
۱۲		۱
۱۳		۱

ردیف	پاسخ برگ	نمره
------	----------	------

	(الف)	
١/٥	(ب)	١٤
١/٢٥		١٥
١		١٦
١		١٧

ساعت شروع:	رشته: علوم تجربی	تعداد صفحه: ۵	آزمون شبیه ساز نهایی درس: ریاضی ۳
تاریخ آزمون: ۱۴۰۵/۰۴/۲۴	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	پایه دوازدهم	نام و نام خانوادگی:
گروه آموزشی ماز		آزمون شبیه ساز امتحان نهایی	

ردیف	پاسخ برگ	نمره
۱۸		۱/۲۵
	موفق باشید.	۲۰



پایه دوازدهم تجربی

آزمون های شبیه ساز امتحانات نهایی ماز



شبیه ساز امتحان نهایی



دفترچه پاسخ

چهارشنبه ۲۴ تیرماه ۱۴۰۵

جامع کل کتاب

بودجه آزمون

ویراستاران

طراحان

درس

ارسلان حسنونند - نرجس تیمناک
حمیدرضا ولی پور

حسین شفیع زاده - مهرداد کیوان
مهدی عزیزی

ریاضی (۳)

حق چاپ و تکثیر سؤالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز «گروه ماز» مجاز می باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می شود.

مصَحَّح شو:



پاسخ دقیق سؤال این جا میاد و اسمش روشه: «مصَحَّح شو»، می خواد شما رو به یه مصحح حرفه‌ای و دقیق تبدیل کنه که بدونین موقع ارزیابی جواب‌هاتون باید حواستون به چی باشه تا توی آزمون‌های بعدی دقیق‌تر عمل کنین. اگه جواب یه سؤال رو بشه به شکل‌های مختلف بیان کرد، اون هم، این جا بهتون گفتیم.

بررسی دقیق‌تر:



اگه پاسخ کوتاه به سؤال کافی نباشه تا بینین چطوری باید به جواب برسین، توی این بخش با بررسی دقیق‌تر جواب، سؤال رو براتون توضیح دادیم.

نقشه نهایی:



امتحان نهایی قوانین و قواعد خاص خودش رو داره؛ شما باید بدونین تیپ‌های رایج سؤال‌های امتحان نهایی چیه و باید چطوری بهش جواب بدین. این کادر، مشاوره حرفه‌ای ماست به شما تا فوت و فن‌های امتحان نهایی رو یاد بگیرین.

۲۰ شو:



توی «۲۰ شو»، مبحث هر سؤال رو براتون مرور یا جمع‌بندی کردیم؛ «۲۰ شو» و درسنامه‌هاش دقیقاً فاصله بین نمره خوب و نمره ۲۰ رو براتون پر می‌کنه.

نکته طلایی:



با وجود «۲۰ شو»، که کلی درسنامه مفصل داره، باز هم اگه نکته مهم و مفیدی بود، توی این کادر براتون آوردیم.

تیم اجرایی و تولید آزمون

محدثه عربگری

زهرة صفری

محدثه شیخ علی

یگانه پوراابراهیم

مرضیه بنیانی

ساره محمدعلی نسب

سرپرست آزمون: ارمان قریب

یک تیم با بیش از ۵۰۰ نفر در حال کار هستن تا آزمون‌های ماز با حداکثر کیفیت حاضر بشن و به شما کمک کنن و مسیر موفقیت رو براتون ساده‌تر کنن. همیشه از نظرات و کامنت‌های خوبتون انرژی می‌گیریم. مرسی که همراهمون هستین.

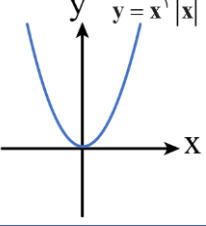
دکتر رسول خنجری

@konkurbanks / @Tahlilazemoon

برای دیدن پاسخ نامه ویدئویی آزمون شبیه ساز نهایی QR Code
را اسکن کنید یا روی لینک زیر ضربه بزنید.

پاسخنامه ویدئویی آزمون شبیه ساز نهایی



راهنمای تصحیح آزمون نهایی درس: ریاضی ۳		رشته: علوم تجربی
دوره دوم متوسطه - دوازدهم	تاریخ آزمون: ۱۴۰۵/۰۴/۲۴	ساعت شروع:
آزمون شبیه‌ساز امتحان نهایی	گروه آموزشی ماز	
ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۱	مصحح شو  الف) درست (۰/۲۵) (صفحه ۱۰) ب) درست (۰/۲۵) (صفحه ۱۰۶) پ) نادرست (۰/۲۵) (صفحه ۱۲۷) سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۲ دقیقه  بررسی دقیق‌تر:  الف) 	۰/۷۵
۲	مصحح شو  الف) مخروط (۰/۲۵) (صفحه ۱۲۳) ب) تهی (۰/۲۵) (صفحه ۱۴۴) پ) ۳ (۰/۲۵) (صفحه ۲۵) سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۳ دقیقه  یادگیری بیش‌تر  ۱) دامنۀ تابع f^{-1} همان برد تابع f می‌باشد. به همین ترتیب برد تابع f^{-1}، همان دامنۀ تابع f است. ۲) قرار نیست همهٔ تابع‌ها در کل دامنۀ‌شان وارون‌پذیر باشند اما حالت‌هایی وجود دارند که با محدود کردن دامنۀ شرط وارون‌پذیری را ایجاد می‌کنیم. ۳) هیچ تابع چندجمله‌ای از درجه ۲ روی $\mathbb{R}$ یک‌به‌یک نیست. اما اگر نمودار f را به یکی از بازه‌های $[-\infty, \frac{-b}{2a}]$ یا $[\frac{-b}{2a}, +\infty)$ یا هر زیرمجموعه‌ای از این دو بازه محدود کنیم، تابعی یک‌به‌یک خواهیم داشت. ۴) ترکیب تابع f با معکوسش یعنی f^{-1} به صورت زیر است: $f \circ f^{-1}(x) = f(f^{-1}(x)) = x \quad ; \quad x \in D_{f^{-1}}$ $f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = x \quad ; \quad x \in D_f$ تذکر: $f^{-1} \neq \frac{1}{f}$ دقت کنید علامت -1 در بالای f به معنای معکوس شدن کسری نیست.	۰/۷۵
۳	مصحح شو  الف) (۲) (۰/۲۵) ب) (۳) (۰/۲۵) (صفحه ۱۷ و ۱۹) سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۲ دقیقه  بررسی دقیق‌تر:  $f(-x)$ یعنی قرینه نمودار $y = f(x)$ نسبت به محور y ها $f(x)$ یعنی قسمت‌هایی از نمودار $y = f(x)$ را که زیرمحور x هاست نسبت به محور x ها قرینه کنیم.	۰/۵

۱/۲۵	مصحح شو $\text{fog}(x) = (3x+1)^2 - 5(3x+1) + 6 \quad (0/25)$ $= 9x^2 + 6x + 1 - 15x - 5 + 6 = 9x^2 - 9x + 2 \quad (0/5)$ $\text{fog}(x) = 2 \Rightarrow 9x^2 - 9x + 2 = 2 \Rightarrow 9x(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases} \quad (0/5)$ (صفحه ۲۲) سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۳ دقیقه ترکیب توابع اگر f و g دو تابع باشند، fog را ترکیب $f(g(x))$ می‌گوییم، یعنی در $f(x)$ به جای x ها، تابع $g(x)$ را جایگذاری می‌کنیم. به همین ترتیب: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ $(f \circ f)(x) = f(f(x))$	۴
۰/۷۵	مصحح شو $y = 4 + \sqrt{2-x} \Rightarrow y-4 = \sqrt{2-x}$ $\Rightarrow (y-4)^2 = 2-x \Rightarrow x = 2 - (y-4)^2 \quad (0/25)$ $\Rightarrow f^{-1}(x) = 2 - (x-4)^2 = -x^2 + 8x - 14 \quad (0/25)$ (صفحه ۲۹) سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۳ دقیقه	۵
۱/۵	مصحح شو $\begin{cases} \max = c + a = 6 \\ \min = c - a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 3 \\ a = 3 \end{cases} \xrightarrow{a < 0} a = -3$ $T = \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{ b } \Rightarrow b = 3 \Rightarrow b = 3$ (صفحه ۳۵) سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۴ دقیقه	۶

توابع مثلثاتی:

در توابع مثلثاتی $y = a \sin(bx + d) + c$ و $y = a \cos(bx + d) + c$ داریم:

$$\begin{cases} |a| = \frac{\max - \min}{2} \\ c = \frac{\max + \min}{2} \end{cases}$$

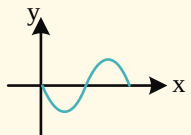
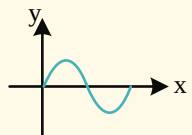
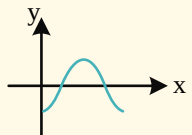
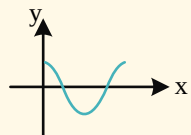
$\Rightarrow \max = |a| + c$ مقدار ثابت + ضرب $\sin$ یا $\cos$: بیشترین مقدار
 $\Rightarrow \min = -|a| + c$ مقدار ثابت + ضرب $\sin$ یا $\cos$: کمترین مقدار

$$\text{دوره تناوب} = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|b|}$$

در تابع مثلثاتی $y = a \tan(bx) + c$ دوره تناوب برابر است با:

$$T = \frac{\pi}{|b|} \Rightarrow T = \frac{\pi}{|b|}$$

فرم کلی توابع مثلثاتی $y = a \sin(bx)$ و $y = a \cos(bx)$:

$y = a \sin(bx)$		$y = a \cos(bx)$	
$ab < 0$	$ab > 0$	$a < 0$	$a > 0$
			

مسیر تمرینی:

مشابه این سوال، در سوال ۶ امتحان نهایی خردادماه ۱۴۰۴ مطرح شده بود.

مصّحح شو

$$\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2 \alpha = 1 - 2\left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{18}{25} = \frac{7}{25} \quad (0/25)$$

(صفحه ۴۸)

سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۳ دقیقه

روابط مثلثاتی مهم

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \\ \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \end{cases}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

۰/۵

۷

$$* 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}; \cos \alpha \neq 0$$

$$* 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}; \sin \alpha \neq 0$$

$$* \tan \alpha \times \cot \alpha = 1; \alpha \neq \frac{k\pi}{2}$$

$$* \sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$* \cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\xrightarrow{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1} \begin{cases} \cos(2\alpha) = 2 \cos^2 \alpha - 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2} \\ \cos(2\alpha) = 1 - 2 \sin^2 \alpha \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2} \end{cases}$$

مسیر تمرینی: 

مشابه این سوال، در سوال ۷ امتحان نهایی خردادماه ۱۴۰۴ مطرح شده بود.

مصطح شو 

$$\cos x + 2 \cos^2 x - 1 = 0 \Rightarrow (2 \cos x - 1)(\cos x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi & (0/25) \\ \cos x = -1 \Rightarrow x = \pi + 2k\pi & (0/25) \end{cases}$$

(صفحه ۴۸)

سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۳ دقیقه معادلات مثلثاتی ۱) معادلات مثلثاتی به فرم $\sin f(x) = \sin g(x)$:

$$\sin f(x) = \sin g(x) \Rightarrow \begin{cases} f(x) = 2k\pi + g(x) \\ f(x) = 2k\pi + \pi - g(x) \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

حالت‌های خاص معادلات سینوسی:

معادله	جواب کلی
$\sin x = 0$	$x = k\pi$
$\sin x = 1$	$x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$
$\sin x = -1$	$x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$

۱

۸

۲) معادلات مثلثاتی به فرم $\cos f(x) = \cos g(x)$:

$$\cos f(x) = \cos g(x) \Rightarrow \begin{cases} f(x) = 2k\pi + g(x) \\ f(x) = 2k\pi - g(x) \end{cases}$$

حالت‌های خاص معادلات کسینوسی:

معادله	جواب کلی
$\cos x = 0$	$x = k\pi + \frac{\pi}{2}$
$\cos x = 1$	$x = 2k\pi$
$\cos x = -1$	$x = (2k+1)\pi$

مصحح شو

الف) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - \sqrt{x+2}}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2 - \sqrt{x+2})(2 + \sqrt{x+2})}{(x-2)(x+2)(2 + \sqrt{x+2})} \quad (0/25)$

$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - x - 2}{(x-2) \times 16} = \frac{-1}{16} \quad (0/25)$
(0/5)

(صفحه ۵۷)

ب) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x}{(x+3)^2} = \frac{-3}{0^+} = -\infty \quad (0/25)$
(0/25)

(صفحه ۵۷)

پ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x^3 + 2}{2x^2 + x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^3}{x^3} = -1 \quad (0/25)$
(0/25)

(صفحه ۶۴)

سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۵ دقیقه

الف) محاسبه حد توابع شامل قدرمطلق و جزء صحیح

وقتی به جزء صحیح و یا قدرمطلق برخورد می‌کنیم، باید جزء صحیح را تعیین مقدار و قدرمطلق را تعیین علامت کنیم:

* $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{[x]}{\sin x} = \frac{[0^-]}{0^-} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$

* $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{[x] - 3}{x - 3} = \frac{[3^-] - 3}{3^- - 3} = \frac{2 - 3}{0^-} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$

$$* \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2}{|x-3|} = \frac{2}{|3^{\pm} - 3|} = \frac{2}{0^{+}} = +\infty$$

$$* \lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{3})} \frac{[x]}{|3x+1|} = \frac{\left[-\frac{1}{3}\right]}{\left|3(-\frac{1}{3})^{\pm} + 1\right|} = \frac{-1}{0^{+}} = -\infty$$

ب) محاسبه حد بی‌نهایت در توابع کسری

در محاسبه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ ، اگر حد تابع صورت کسر عددی مخالف صفر و حد تابع مخرج کسر برابر صفر باشد، در این صورت، حاصل حد، نامتناهی ($+\infty$ یا $-\infty$) خواهد بود.

توجه: برای تعیین علامت ∞ ، باید به علامت صورت و علامت مخرج کسر توجه کنیم:

$\frac{+ \text{ عدد}}{0^{+}} = +\infty$	$\frac{- \text{ عدد}}{0^{-}} = +\infty$	$\frac{+ \text{ عدد}}{0^{-}} = -\infty$	$\frac{- \text{ عدد}}{0^{+}} = -\infty$
---	---	---	---

یه نمونه باحال

حدود زیر را محاسبه کنید.

$$1) \lim_{x \rightarrow 5^{-}} \frac{2x}{x-5} = \frac{2 \times 5}{5^{-} - 5} = \frac{10}{0^{-}} = -\infty$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{4x+1}{(2x+1)^2} = \frac{4(-\frac{1}{2})+1}{\left(2(-\frac{1}{2})^{\pm} + 1\right)^2} = \frac{-2+1}{((-1)^{\pm} + 1)^2} = \frac{-1}{0^{+}} = -\infty$$

پ) رفع ابهام صفر- صفر در توابع کسری

در محاسبه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ ، اگر حد هر دو تابع f و g در $x = a$ برابر صفر باشد به حالت مبهم $\frac{0}{0}$ خواهیم رسید و باید آن حد را به کمک اتحادها، گویا کردن و ... رفع ابهام کنیم.

در نوعی از سوالات این حالت، صورت یا مخرج کسر (و یا گاهی هر دو) شامل عبارت‌های رادیکالی است که برای رفع ابهام از آن ابتدا باید صورت و مخرج کسر را در عبارت رادیکالی مناسب ضرب کنیم تا بتوانیم با استفاده از اتحاد مزدوج (و یا گاهی چاق و لاغر) عامل صفرکننده را شناسایی کرده و آن را از صورت و مخرج کسر حذف کنیم.

یادآوری:

$$\begin{cases} (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b \\ (\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} \mp \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}) = a \pm b \end{cases}$$

مصحح شو

روش اول:

شیب خط مماس برابر $-\frac{1}{2}$ است. (۰/۲۵)

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2} \quad (0/25) \quad \text{معادله خط مماس}$$

$$y = 0 \Rightarrow -\frac{k}{2} + \frac{7}{2} = 0 \Rightarrow k = 7 \quad (0/25)$$

$$m = f'(1) = \frac{-1}{2} \Rightarrow \frac{0-3}{k-1} = \frac{-1}{2} \Rightarrow k = 7 \quad (0/25)$$

روش دوم:

(صفحه ۷۶)


 سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۳ دقیقه

 شیب خط مماس

شیب خط مماس بر منحنی تابع f در نقطه $A(a, f(a))$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\text{شیب خط مماس بر منحنی در نقطه } A = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

به شرط آنکه این حد موجود و متناهی باشد.

حد بالا را (در صورت وجود) مشتق تابع f در نقطه $A(a, f(a))$ می‌نامند و با $f'(a)$ نمایش می‌دهند، یعنی:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

 مصحح شو

$$\text{الف) } f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} (3x-2) - 3\sqrt{x}}{(3x-2)^2} \quad (0/25) \quad (0/25) \quad (0/25) \quad (0/25)$$

$$\text{ب) } g'(x) = (2x) \left(\sqrt[3]{3x+1} \right) + \frac{3}{3\sqrt[3]{(3x+1)^2}} (x^2-1) \quad (0/25) \quad (0/25) \quad (0/25) \quad (0/25)$$

(صفحه ۹۲)


 سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۵ دقیقه

 قواعد مشتق‌گیری

- $y = c; c \in \mathbb{R} \rightarrow y' = 0$
- $y = f(x) \pm g(x) \rightarrow y' = f'(x) \pm g'(x)$
- $y = ax + b \rightarrow y' = a$
- $y = f(x) \times g(x) \rightarrow y' = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$
- $y = \sqrt[n]{x^m} \rightarrow y' = \frac{m}{n\sqrt[n]{x^{n-m}}}$

	• $y = \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow y' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}, (g(x) \neq 0)$ • $y = (f(x))^n \rightarrow y' = nf'(x)(f(x))^{n-1}$ • $y = \sqrt[n]{(f(x))^m} \rightarrow y' = \frac{mf'(x)}{n\sqrt[n]{(f(x))^{n-m}}}$	
۱	مصحح شو $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty \quad (0/25)$ چون $f'(0)$ متناهی نیست پس مشتق ناپذیر است. $(0/25)$ (صفحه ۸۰) سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۳ دقیقه تعریف مشتق $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ مشتق‌پذیری تابع f را در $x = a$ مشتق‌پذیر گوئیم، هرگاه: ۱) تابع f در $x = a$ پیوسته باشد، یعنی: $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$ ۲) مشتق چپ و مشتق راست تابع f در $x = a$ موجود (متناهی) و با هم برابر باشند، یعنی: $f'_+(a) = f'_-(a)$	۱۲
۱	مصحح شو $(g \circ f)'(2) = f'(2) \cdot g'(f(2)) = f'(2) \cdot g'(1) = 3 \times (-2) = -6 \quad (0/25)$ (صفحه ۸۷ و ۹۵)	۱۳
۱/۵	مصحح شو الف) $f'(x) = 6x^2 + 2ax$ $\begin{cases} f(1) = -2 \quad (0/25) \\ f'(1) = 0 \quad (0/25) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 + a + b = -2 \\ 6 + 2a = 0 \Rightarrow a = -3 \quad (0/25) \end{cases} \Rightarrow b = -1 \quad (0/25)$ ب) $f'(x) = 6x^2 - 6x$ $6x^2 - 6x < 0 \Rightarrow 0 < x < 1 \quad (0/25)$ در بازه $(0, 1)$ اکیداً نزولی است. $(0/25)$	۱۴

(صفحه ۱۱۲)

سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۵ دقیقه

اکسترمم نسبی

برای پیدا کردن نقاط اکسترمم نسبی یک تابع پیوسته به روش زیر عمل می‌کنیم:

- ۱) دامنه تابع را به دست می‌آوریم.
 - ۲) نقاط بحرانی تابع را پیدا می‌کنیم.
 - ۳) جدول تغییرات را رسم کرده و سپس مشتق تابع را تعیین علامت می‌کنیم.
 - ۴) حال برای تشخیص ماکزیمم یا مینیمم بودن نقاط بحرانی داریم:
- اگر علامت f' در آن نقطه از مثبت به منفی تغییر کند، آن نقطه، نقطه ماکزیمم نسبی است.
- اگر علامت f' در آن نقطه از منفی به مثبت تغییر کند، آن نقطه، نقطه مینیمم نسبی است.
- اگر f' در آن نقطه تغییر علامت ندهد، با این روش نمی‌توان درباره ماکزیمم و یا مینیمم نسبی بودن آن نقطه اظهار نظر کرد.
- توجه:** هر نقطه اکسترمم نسبی، یک نقطه بحرانی است. اما هر نقطه بحرانی لزوماً نقطه اکسترمم نسبی نیست.

یه نمونه باحال

در تابع $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 10$ ، ابتدا نقاط بحرانی تابع را به دست آورید و سپس با رسم جدول تغییرات تابع، نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی آن را در صورت وجود مشخص کنید.

$$D_f = \mathbb{R}$$

برای پیدا کردن نقاط بحرانی تابع f ، مشتق آن را به دست آورده و برابر صفر قرار می‌دهیم، یعنی باید معادله $f'(x) = 0$ را حل کنیم:

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$$

بنابراین $x = -3$ و $x = 1$ نقاط بحرانی تابع f می‌باشند، حال با رسم جدول تغییرات، مشتق را تعیین علامت می‌کنیم:

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$
f'		+	-	+
f		$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$
		max نسبی	min نسبی	

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -3 \rightarrow \text{طول max نسبی} \\ x = 1 \rightarrow \text{طول min نسبی} \end{cases}$$

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 10 \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \rightarrow f(-3) = 17 \Rightarrow A(-3, 17) \rightarrow \text{نسبی max} \\ x = 1 \rightarrow f(1) = -15 \Rightarrow B(1, -15) \rightarrow \text{نسبی min} \end{cases}$$

با فرض این‌که تابع $y = f(x)$ مشتق‌پذیر باشد، اگر نقطه (a, b) ، نقطه اکسترمم نسبی تابع f باشد، در این صورت:

$$f'(a) = 0$$

$$f(a) = b$$

مصطح شو

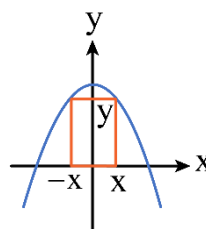
۱/۲۵

$$S = 2xy = 2x(9 - x^2) = 18x - 2x^3 \quad (0/25)$$

$$S'(x) = 18 - 6x^2 \quad (0/25)$$

$$S'(x) = 0 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \sqrt{3} \quad (0/25)$$

$$\text{عرض} = 2x = 2\sqrt{3} \quad (0/25)$$



۱۵

	(صفحه ۱۲۰) سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۵ دقیقه حل مسائل بهینه‌سازی برای حل مسائل بهینه‌سازی: ۱) ابتدا رابطه کمیتی که قرار است بهینه شود (مینیم یا ماکزیم شود) را به دست می‌آوریم. ۲) رابطه به دست آمده را به کمک روابط موجود در مسئله به یک رابطه تک متغیره تبدیل می‌کنیم. ۳) سپس از رابطه تک متغیره به دست آمده مشتق گرفته و برابر صفر قرار می‌دهیم و ریشه مشتق را به دست می‌آوریم. ۴) حال به کمک ریشه مشتق، کمیتی که قرار است بهینه شود را پیدا می‌کنیم.	
۱۶	(صفحه ۱۳۲) مصحح شو $\begin{cases} e = \frac{3}{5} = \frac{c}{a} \Rightarrow a = \frac{5}{3}c & (۰/۲۵) \\ 2b = 8 \Rightarrow b = 4 & (۰/۲۵) \end{cases}$ $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow \left(\frac{5}{3}c\right)^2 = 16 + c^2$ $\Rightarrow \frac{25}{9}c^2 - c^2 = 16 \Rightarrow \frac{16}{9}c^2 = 16 \Rightarrow c = 3$ $2c = 6 = 2c \text{ فاصله کانونی} & (۰/۲۵)$ سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۴ دقیقه خروج از مرکز بیضی ۱) مقدار $\frac{c}{a}$ را خروج از مرکز بیضی می‌نامیم و معمولاً آن را با حرف e نمایش می‌دهیم. ۲) همواره خروج از مرکز بیضی بین ۰ و ۱ است. $(0 < e < 1)$ ۳) هرچه نسبت $e = \frac{c}{a}$ بزرگ‌تر و به ۱ نزدیک‌تر باشد، شکل بیضی کشیده‌تر می‌شود و به عبارتی شکل بیضی به پاره‌خط نزدیک‌تر می‌شود. ۴) هرچه نسبت $e = \frac{c}{a}$ کوچک‌تر و به صفر نزدیک‌تر باشد، شکل بیضی به شکل دایره نزدیک‌تر خواهد بود.	
۱۷	مصحح شو روش اول: $x^2 + y^2 + 2x + 6y + 1 = 0$ $\begin{cases} O_1 = (-1, -3) & (۰/۲۵) \\ R_1 = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 36 - 4} = 3 & (۰/۲۵) \end{cases}$ $O_2 = (2, 1)$ $O_1O_2 = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 & (۰/۲۵)$	

	$O_1 O_2 = R_1 + R_2 \Rightarrow 5 = 3 + R_2 \Rightarrow R_2 = 2 \quad (0/25)$ $x^2 + y^2 + 2x + 6y + 1 = 0$ $(x+1)^2 + (y+3)^2 = 9$ $\begin{cases} O_1 = (-1, -3) \quad (0/25) \\ R_1 = 3 \quad (0/25) \end{cases}$ ادامه راه حل مانند روش اول: $(0/5)$ (صفحه ۱۴۲) سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۴ دقیقه مسیر تمرینی: مشابه این سوال، در سوال ۱۷ امتحان نهایی خردادماه ۱۴۰۴ مطرح شده بود.	
۱/۲۵	$\begin{matrix} \swarrow & \searrow \\ \frac{60}{100} \text{ زن} & \rightarrow \frac{4}{100} \text{ شیوع بیماری} \quad (0/25) \\ \frac{40}{100} \text{ مرد} & \rightarrow \frac{5}{100} \text{ شیوع بیماری} \quad (0/25) \end{matrix}$ $P(A) = \frac{60}{100} \times \frac{4}{100} + \frac{40}{100} \times \frac{5}{100} = \frac{440}{10000} = \left(\frac{4}{4} \% \right) \text{ یا } \frac{11}{250} \quad (0/25)$ $P(A) = P(B_1).P(A B_1) + P(B_2).P(A B_2) \quad (0/5)$ $= \frac{60}{100} \times \frac{4}{100} + \frac{40}{100} \times \frac{5}{100} = \frac{440}{10000} = \left(\frac{4}{4} \% \right) \text{ یا } \frac{11}{250} \quad (0/25)$ روش دوم: (صفحه ۱۴۸)	۱۸
۲۰	موفق باشید.	



دوپیند فوری شب امتحان



ریاضی دوازدهم تجربی

فهرست

فصل ۱: تابع ۱

فصل ۲: مثلثات ۸

فصل ۳: حد بی‌نهایت و حد در بی‌نهایت ۱۴

فصل ۴: مشتق ۱۷

فصل ۵: کاربرد مشتق ۲۳

فصل ۶: هندسه ۲۷

فصل ۷: احتمال ۳۴



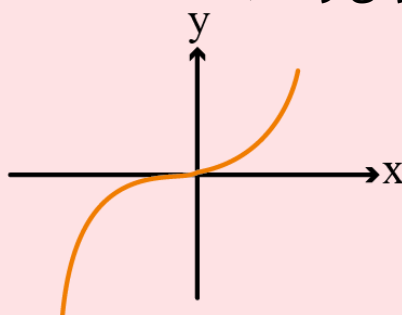
فصل اول: تابع

یکنوایی توابع:

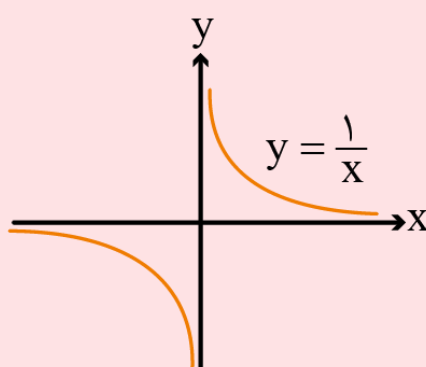
اگر تابع f اکیداً یکنوا (اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی) باشد آن گاه یک به یک است اما برعکس آن درست نیست.



تابع $y = x^3$ تابعی اکیداً صعودی و یک به یک است.



تابع $y = \frac{1}{x}$ تابعی یک به یک است اما اکیداً یکنوا نیست.



در مورد یکنوایی توابع:

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$	صعودی
$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$	نزولی
$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$	اکیداً صعودی
$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$	اکیداً نزولی

تابع ثابت در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی است.



نکته طلایی

اگر در بازه‌ای $f'(x) \geq 0$ باشد:

۱- اگر $f'(x)$ در یک یا چند نقطه از این بازه برابر با صفر باشد، تابع f در این بازه اکیداً صعودی است.

۲- اگر $f'(x)$ در قسمتی از این بازه برابر با صفر باشد، تابع f صعودی است.

مثال

در تابع $f(x) = x^3$ مشتق تابع $f'(x) = 3x^2 \geq 0$ است و چون فقط در $x = 0$ مشتق برابر با صفر است، بنابراین تابع $f(x)$ اکیداً صعودی است.

نکته طلایی

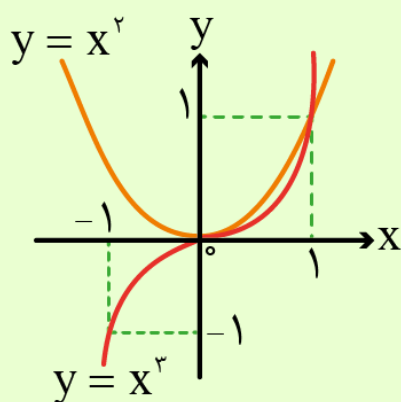
اگر در بازه‌ای $f'(x) \leq 0$ باشد:

۱- اگر $f'(x)$ در یک یا چند نقطه از این بازه برابر با صفر باشد، تابع f در این بازه اکیداً نزولی است.

۲- اگر $f'(x)$ در قسمتی از این بازه برابر با صفر باشد، تابع f نزولی است.

نکته طلایی

در مقایسه توابع $y = x^2$ و $y = x^3$ داریم:



- در بازه $(0, 1)$: نمودار $y = x^2$ بالاتر از نمودار $y = x^3$ قرار دارد.
- در بازه $(-\infty, 0)$: نمودار $y = x^2$ بالاتر از نمودار $y = x^3$ قرار دارد.
- در بازه $(1, +\infty)$: نمودار $y = x^3$ بالاتر از نمودار $y = x^2$ قرار دارد.



◀ هر آنچه باید در مورد خواص و ویژگی‌های تبدیل و انتقال نمودارها بدانید!

نمودار جدید ($a, k > 0$)	توضیحات و نحوه رسم
$f(x + a)$	نمودار تابع f را به اندازه a واحد در راستای محور x ها به سمت چپ منتقل می‌کنیم.
$f(x - a)$	نمودار تابع f را به اندازه a واحد در راستای محور x ها به سمت راست منتقل می‌کنیم.
$f(x) + a$	نمودار تابع f را به اندازه a واحد در راستای محور y ها به سمت بالا منتقل می‌کنیم.
$f(x) - a$	نمودار تابع f را به اندازه a واحد در راستای محور y ها به سمت پایین منتقل می‌کنیم.
$f(-x)$	نمودار تابع f را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم.
$-f(x)$	نمودار تابع f را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم.
$-f(-x)$	نمودار تابع f را ابتدا نسبت به محور x ها و سپس نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم (قرینه نسبت به مبدأ)
$f(kx)$	نمودار تابع f را در راستای محور x ها با ضریب $\frac{1}{k}$ منقبض (فشرده) می‌کنیم. $k > 1$
$f(kx)$	نمودار تابع f را در راستای محور x ها با ضریب $\frac{1}{k}$ منبسط (کشیده) می‌کنیم. $0 < k < 1$
$kf(x)$	نمودار تابع f را در راستای محور y ها با ضریب k منبسط (کشیده) می‌کنیم. $k > 1$
$kf(x)$	نمودار تابع f را در راستای محور y ها با ضریب k منقبض (فشرده) می‌کنیم. $0 < k < 1$
$ f(x) $	ابتدا نمودار تابع f را رسم کرده و سپس هر آن‌چه زیر محور x ها قرار دارد را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم.
$f(x)$	ابتدا نمودار تابع f را رسم کرده و سپس هر آن‌چه سمت چپ محور y ها قرار دارد را حذف کرده و به جای آن نمودار سمت راست محور y ها را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم.
$ y = f(x)$	ابتدا نمودار $y = f(x)$ را رسم کرده و سپس هر آن‌چه زیر محور x ها قرار دارد را حذف کرده و نمودار بالای محور x ها را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم.



نکته طلایی

در فرایند رسم تابع $y = af(bx + c) + d$ ، از روی تابع $f(x)$ ، ترتیب مراحل به صورت زیر است:

- | | |
|-----------------------------|--------------------------|
| (۱) تأثیر عدد ثابت: c | } الف) تأثیرات روی دامنه |
| (۲) تأثیر ضریب x : b | |
| (۱) تأثیر ضریب $f(0)$: a | } ب) تأثیرات روی برد |
| (۲) تأثیر عدد ثابت: d | |

نکته طلایی

در تابع $y = af(bx + c) + d$ ، تأثیر a و d روی برد تابع و تأثیر c و b روی دامنه تابع است.

نکته طلایی

اگر دامنه تابع $y = f(x)$ برابر $[m, n]$ باشد دامنه تابع $g(x) = af(bx + c) + d$ برابر است با:

$$y = f(x) \xrightarrow{\text{دامنه}} m \leq x \leq n \xrightarrow[\text{پیدا می کنیم.}]{\text{محدوده ورودی } f \text{ را}} m \leq x \leq n$$

↓
ورودی

$$\xrightarrow[\text{ثابتی دارد.}]{\text{ورودی } f \text{ محدوده}} m \leq bx + c \leq n \Rightarrow \text{محاسبه محدوده } x \text{ که همان دامنه } g \text{ است.}$$

مثال

اگر دامنه تابع $y = 2f\left(\frac{x}{2} - 4\right) + 3$ برابر $[-2, 6]$ باشد، دامنه تابع $g(x) = -3f(2x + 1)$ را به دست آورید.

پاسخ:

دامنه: $-2 \leq x < 6$

محدوده ورودی f را محاسبه می کنیم:

$$\begin{aligned} -1 &\leq \frac{x}{2} < 3 \Rightarrow -5 \leq \frac{x}{2} - 4 < -1 \Rightarrow -5 \leq f \text{ ورودی } f < -1 \\ \Rightarrow -5 &\leq 2x + 1 < -1 \Rightarrow -6 \leq 2x < -2 \Rightarrow -3 \leq x < -1 \\ \Rightarrow D_g &= [-3, -1) \end{aligned}$$



نکته طلایی

$$n \in \mathbb{Z} \Rightarrow n \leq x < n+1 \Rightarrow [x] = n$$

$$[x] > n \Rightarrow x \geq n+1 \quad [x] < n \Rightarrow x < n$$

$$[x] \geq n \Rightarrow x \geq n \quad [x] \leq n \Rightarrow x < n+1$$

مثال

$$[x] \geq -2 \Rightarrow x \geq -2$$

$$[x] < 4 \Rightarrow x < 4$$

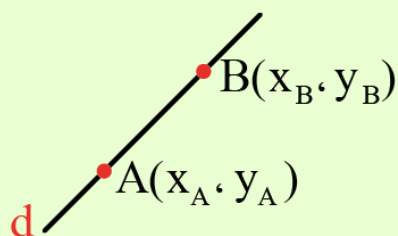
$$[x] \leq 4 \Rightarrow x < 5$$

$$-1 < [x] \leq 3 \Rightarrow 0 \leq x < 4$$

$$-1 \leq [x] < 3 \Rightarrow -1 \leq x < 3$$

نکته طلایی

تابع $f(x) = ax + b$ ، تابعی خطی با شیب a و عرض از مبدأ b است.



$$d \text{ شیب خط} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

تابع وارون

$$f(a) = b \Rightarrow f^{-1}(b) = a$$

مثال

در تابع $f(x) = \sqrt{x+3}$ ، حاصل $f^{-1}(3)$ را به دست آورید.

پاسخ:

فرض می‌کنیم که $f^{-1}(3) = \alpha$ باشد در این صورت به جای حل این معادله، معادله $f(\alpha) = 3$ را حل می‌کنیم، پس:

$$f(\alpha) = 3 \Rightarrow \sqrt{\alpha+3} = 3 \Rightarrow \alpha+3 = 9 \Rightarrow \alpha = 6$$

پس $f^{-1}(3) = 6$ است.

نکته طلایی

برای به دست آوردن ضابطه تابع وارون یک تابع یک به یک مانند f ، در معادله $y = f(x)$ در صورت امکان x را بر حسب y محاسبه می‌کنیم سپس با تبدیل y به x ، $f^{-1}(x)$ را به دست می‌آوریم.



ضابطه وارون تابع $f(x) = \frac{-8x+3}{2}$ را به دست آورید.

پاسخ:

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{-8x+3}{2} &\Rightarrow y = \frac{-8x+3}{2} \\ \Rightarrow 2y = -8x+3 &\Rightarrow 2y-3 = -8x \Rightarrow x = \frac{2y-3}{-8} \\ \Rightarrow f^{-1}(y) = \frac{2y-3}{-8} &\xrightarrow{x \leftrightarrow y} f^{-1}(x) = \frac{2x-3}{-8} \end{aligned}$$



برای اینکه نشان دهیم دو تابع وارون پذیر f و g وارون یکدیگرند، باید ثابت کنیم که ترکیب دو تابع f و g ، تابع همانی است به عبارت دیگر باید ثابت کنیم که:

$$\begin{cases} (f \circ g)(x) = x \\ (g \circ f)(x) = x \end{cases}$$



نشان دهید که توابع $f(x) = 3x - 4$ و $g(x) = \frac{x+4}{3}$ وارون یکدیگرند.

پاسخ:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 3g(x) - 4 = 3\left(\frac{x+4}{3}\right) - 4 = x \quad (x \in D_g)$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{f(x)+4}{3} = \frac{(3x-4)+4}{3} = x \quad (x \in D_f)$$

بنابراین دو تابع f و g وارون یکدیگرند.

◀ ترکیب توابع:

اگر f و g دو تابع باشند، $f \circ g$ را ترکیب $f(g(x))$ می گوئیم، یعنی در $f(x)$ به جای x ها، تابع $g(x)$ را جایگذاری می کنیم. به همین ترتیب:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

$$(f \circ f)(x) = f(f(x))$$



مثال



اگر $f(x) = x^2 - 2$ و $g(x) = 2x + 1$ باشند، ضابطه تابع $(g \circ f)(x)$ را به دست آورید.

پاسخ:

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$ ، پس در تابع $g(x)$ به جای x ها، تابع $f(x) = x^2 - 2$ را جایگذاری و ساده می کنیم.

$$g(f(x)) = 2f(x) + 1 = 2(x^2 - 2) + 1 = 2x^2 - 3$$

جمع بندی سریع



$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

مثال



اگر $f(x) = \sqrt{x-1}$ و $g(x) = 2x^2 - 1$ باشد، دامنه تابع $f \circ g$ را با استفاده از تعریف به دست آورید.

پاسخ:

$$\begin{cases} D_f = [1, +\infty) \\ D_g = \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\Rightarrow D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 - 1 \in [1, +\infty)\}$$

$$\Rightarrow D_{f \circ g} = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$



فصل دوم: مثلثات

◀ معادلات مثلثاتی:

معادلات مثلثاتی به فرم $\sin f(x) = \sin g(x)$:

$$\sin f(x) = \sin g(x) \Rightarrow \begin{cases} f(x) = 2k\pi + g(x) \\ f(x) = 2k\pi + \pi - g(x) \end{cases}$$

حالت‌های خاص معادلات سینوسی:

معادله	جواب کلی
$\sin x = 0$	$x = k\pi$
$\sin x = 1$	$x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$
$\sin x = -1$	$x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$



معادله مثلثاتی $\sin 2x = \sin x$ را حل کنید.

پاسخ:

$$\begin{cases} 2x = 2k\pi + x \\ 2x = 2k\pi + \pi - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



معادله مثلثاتی $\cos 2\alpha - \sin \alpha + 1 = 1$ را حل کرده و جواب‌های کلی آن را بنویسید.

پاسخ:

می‌دانیم که $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$ است، پس:

$$(1 - 2\sin^2 \alpha) - \sin \alpha + 1 = 1 \Rightarrow 2\sin^2 \alpha + \sin \alpha - 1 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{حل معادله}} \begin{cases} \sin \alpha = -1 \Rightarrow \alpha = 2k\pi - \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \sin \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin \alpha = \sin \frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2k\pi + \frac{\pi}{6}, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \alpha = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{cases}$$



معادله مثلثاتی $\sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{4}$ را حل کنید.

پاسخ:

ابتدا طرفین معادله را در ۲ ضرب کرده و سپس به کمک رابطه $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ داریم:

$$2 \sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \\ 2x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z} \\ x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

معادلات مثلثاتی به فرم $\cos f(x) = \cos g(x)$:

$$\cos f(x) = \cos g(x) \Rightarrow \begin{cases} f(x) = 2k\pi + g(x) \\ f(x) = 2k\pi - g(x) \end{cases}$$

حالت‌های خاص معادلات کسینوسی:

معادله	جواب کلی
$\cos x = 0$	$x = k\pi + \frac{\pi}{2}$
$\cos x = 1$	$x = 2k\pi$
$\cos x = -1$	$x = (2k+1)\pi$



معادله مثلثاتی $\cos x(2 \cos x - 9) = 5$ را حل کنید.

پاسخ:

$$2 \cos^2 x - 9 \cos x - 5 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{حل معادله}} \begin{cases} \cos x = 5 \xrightarrow{-1 \leq \cos x \leq 1} \text{غقق} \\ \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \cos \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \\ x = 2k\pi - \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{cases}$$



روابط مثلثاتی زاویه‌های دو برابر کمان:

- $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$
- $\begin{cases} \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = (\cos \alpha - \sin \alpha)(\cos \alpha + \sin \alpha) \\ \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 \xrightarrow{\text{نتیجه}} \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \\ \cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \xrightarrow{\text{نتیجه}} \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \end{cases}$



مقدار عددی $\sin 15^\circ$ را محاسبه کنید.

پاسخ:

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \Rightarrow \sin \alpha = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}}$$

می‌دانیم $\sin 15^\circ$ مثبت است پس:

$$\sin 15^\circ = \sqrt{\frac{1 - \cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$$

به‌عنوان تمرین $\sin 22/5^\circ$ رو خودتون به‌دست بیارین!



مقدار عددی $\cos 22/5^\circ$ را محاسبه کنید.

پاسخ:

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}}$$

می‌دانیم $\cos 22/5^\circ$ مثبت است پس:

$$\cos 22/5^\circ = \sqrt{\frac{1 + \cos 45^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

- $\sin 2x = \begin{cases} 2 \sin x \cos x \\ \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} \end{cases}$
- $\cos 2x = \begin{cases} \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x \\ 2 \cos^2 x - 1 \Rightarrow 1 + \cos 2x = 2 \cos^2 x \\ 1 - 2 \sin^2 x \Rightarrow 1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x \\ \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} \end{cases}$



$$\bullet \tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

◀ دوره تناوب توابع:

دوره تناوب توابع زیر را به خاطر بسپارید:

$$\begin{cases} y = a \sin^n(bx + c) + d \\ y = a \cos^n(bx + c) + d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T = \frac{2\pi}{|b|} & n \text{ فرد باشد} \\ T = \frac{\pi}{|b|} & n \text{ زوج باشد} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = a \tan^n(bx + c) + d \\ y = a \cot^n(bx + c) + d \end{cases} \xrightarrow{n \text{ چه زوج باشد و چه فرد}} T = \frac{\pi}{|b|}$$

$$\begin{cases} y = |a \sin(bx + c)| \\ y = |a \cos(bx + c)| \end{cases} \Rightarrow T = \frac{\pi}{|b|}$$



$$y = \sin 2x \Rightarrow T = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$y = \cos^2 4x \Rightarrow T = \frac{\pi}{4}$$

$$y = |\sin 3x| \Rightarrow T = \frac{\pi}{3}$$

$$y = 2 \sin 2x \cos 2x \Rightarrow y = \sin 4x \Rightarrow T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

نکته طلایی

نکته ۱: در توابع مثلثاتی $y = a \sin(bx + d) + c$ و $y = a \cos(bx + d) + c$ داریم:

$\max = |a| + c \Rightarrow$ مقدار ثابت + |ضریب sin یا cos|: بیشترین مقدار

$\min = -|a| + c \Rightarrow$ مقدار ثابت + |ضریب sin یا cos|: کمترین مقدار

$$\Rightarrow \begin{cases} |a| = \frac{\max - \min}{2} \\ c = \frac{\max + \min}{2} \end{cases}$$

$$\text{دوره تناوب} = \frac{2\pi}{|\text{ضریب } x|} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|b|}$$

نکته ۲: در تابع مثلثاتی $y = a \tan(bx) + c$ دوره تناوب برابر است با:

$$T = \frac{\pi}{|\text{ضریب } x|} \Rightarrow T = \frac{\pi}{|b|}$$



مثال

دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم توابع زیر را به دست آورید.

الف) $y = -3 \cos 2\pi x + 1$

ب) $y = \sqrt{3} - \cos \frac{\pi}{2} x$

پ) $y = 1 - 2 \sin(-\frac{\pi}{3} x)$

پاسخ:

$$\text{الف) } y = -3 \cos 2\pi x + 1 \Rightarrow \begin{cases} T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|2\pi|} = 1 \\ \max = |a| + c = |-3| + 1 = 3 + 1 = 4 \\ \min = -|a| + c = -|-3| + 1 = -3 + 1 = -2 \end{cases}$$

$$\text{ب) } y = \sqrt{3} - \cos \frac{\pi}{2} x \Rightarrow \begin{cases} T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|\frac{\pi}{2}|} = 4 \\ \max = |a| + c = |-1| + \sqrt{3} = 1 + \sqrt{3} \\ \min = -|a| + c = -|-1| + \sqrt{3} = -1 + \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\text{پ) } y = 1 - 2 \sin(-\frac{\pi}{3} x) \Rightarrow \begin{cases} T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|-\frac{\pi}{3}|} = 6 \\ \max = |a| + c = |-2| + 1 = 2 + 1 = 3 \\ \min = -|a| + c = -|-2| + 1 = -2 + 1 = -1 \end{cases}$$

مثال

معادله یک تابع سینوسی $y = a \sin(bx) + c$ را بنویسید که برد آن $[-4, 4]$ و دوره تناوب اصلی آن ۲ است.

پاسخ:

می‌دانیم که دوره تناوب اصلی تابع برابر ۲ است پس:

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = 2 \Rightarrow |b| = \frac{2\pi}{2} = \pi \Rightarrow b = \pm \pi$$

از طرفی نیز برد تابع برابر $[-4, 4]$ است یعنی:

$$\begin{cases} \max = |a| + c = 4 \\ \min = -|a| + c = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |a| + c = 4 \\ -|a| + c = -4 \end{cases} \xrightarrow{(+)} 2c = 0$$

$$\Rightarrow c = 0 \xrightarrow{|a|+c=4} |a| = 4 \Rightarrow a = \pm 4$$



حال:

$$\begin{cases} a = \pm 4 \\ b = \pm \pi \Rightarrow y = \pm 4 \sin(\pm \pi x) \Rightarrow \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 4 \sin(\pi x) \\ y = -4 \sin(-\pi x) \\ y = 4 \sin(-\pi x) \\ y = -4 \sin(\pi x) \end{cases}$$



فصل سوم: حد بی نهایت و حد در بی نهایت

رفع ابهام:

در محاسبه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ اگر حد هر دو تابع f و g در $x = a$ برابر صفر باشد به حالت مبهم $\frac{0}{0}$ خواهیم رسید و باید آن حد را به کمک عواملی نظیر اتحادها، گویا کردن و ... رفع ابهام کنیم.

در نوعی از سؤالات این حالت، صورت یا مخرج کسر (و یا گاهی هر دو) شامل عبارتهای رادیکالی است که برای رفع ابهام از آن ابتدا باید صورت و مخرج کسر را در عبارت رادیکالی مناسب ضرب کنیم تا بتوانیم با استفاده از اتحاد مزدوج (و یا گاهی چاق و لاغر) عامل صفر کننده را شناسایی کرده و آن را از صورت و مخرج کسر حذف کنیم.

یادآوری:

$$\begin{cases} (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b \\ (\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} \mp \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}) = a \pm b \end{cases}$$



حد توابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - \sqrt{x+1}}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 3}$

پ) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x+1}}{x^2 + 3x + 2}$

پاسخ:

الف) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - \sqrt{x+1}} = \frac{0}{0}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - \sqrt{x+1}} & \times \frac{2 + \sqrt{x+1}}{2 + \sqrt{x+1}} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^2 - 9)(2 + \sqrt{x+1})}{(2)^2 - (\sqrt{x+1})^2} \\ & = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^2 - 9)(2 + \sqrt{x+1})}{4 - (x+1)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+3)(x-3)(2 + \sqrt{x+1})}{-(x-3)} \\ & = \lim_{x \rightarrow 3} \left(-(x+3)(2 + \sqrt{x+1}) \right) = -6 \times 4 = -24 \end{aligned}$$

ب) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(2x-1)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-2}{2x-1} = \frac{1}{5}$



$$\begin{aligned} \text{پ) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x+1}}{x^2 + 3x + 2} &= \frac{0}{0} \\ \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x+1}}{x^2 + 3x + 2} &\times \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x+1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\cancel{x+1}}{(\cancel{x+1})(x+2)(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x+1})} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{(x+2)(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x+1})} = \frac{1}{1 \times (3)} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

نکته طلایی

در محاسبه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ اگر حد تابع صورت کسر عددی مخالف صفر و حد تابع مخرج کسر برابر صفر باشد در این صورت حاصل حد، نامتناهی ($+\infty$ یا $-\infty$) خواهد بود.

توجه:

برای تعیین علامت ∞ باید به علامت صورت و علامت مخرج کسر توجه کنیم.

$$\frac{+ \text{ عدد}}{+} = +\infty$$

$$\frac{- \text{ عدد}}{-} = +\infty$$

$$\frac{+ \text{ عدد}}{-} = -\infty$$

$$\frac{- \text{ عدد}}{+} = -\infty$$

مثال

حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{2x}{x-5}$

ب) $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{4x+1}{(2x+1)^2}$

پ) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1-\cos x}$

پاسخ:

الف) $\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{2x}{x-5} = \frac{2 \times 5}{5^- - 5} = \frac{10}{0^-} = -\infty$

ب) $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{4x+1}{(2x+1)^2} = \frac{4(-\frac{1}{2})+1}{(2(-\frac{1}{2})+1)^2} = \frac{-2+1}{(-1+1)^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$

پ) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1-\cos x} = \frac{1}{1-1^-} = \frac{1}{0^+} = +\infty$



توجه:

وقتی به جزء صحیح و یا قدر مطلق برخورد می کنیم، باید جزء صحیح را تعیین مقدار و قدر مطلق را تعیین علامت کنیم.

$$۱) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{[x]}{\sin x} = \frac{[0^-]}{0^-} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{[x] - 3}{x - 3} = \frac{[3^-] - 3}{3^- - 3} = \frac{2 - 3}{0^-} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

$$۳) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2}{|x - 3|} = \frac{2}{|3 - 3|} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

$$۴) \lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{3})} \frac{[x]}{|3x + 1|} = \frac{[-\frac{1}{3}]}{|3(-\frac{1}{3}) + 1|} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

در محاسبه $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax^n + bx^{n-1} + \dots}{a'x^m + b'x^{m-1} + \dots}$; $(m, n \in \mathbb{N})$ حد عبارت صورت و مخرج

کسر به سمت $+\infty$ یا $-\infty$ میل می کند که در این صورت با حالت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ مواجه خواهیم بود که برای رفع ابهام از آن در صورت و مخرج کسر، جمله با بیشترین توان را نگه داشته و مابقی جملات را حذف می کنیم، سپس با توجه به جدول زیر حاصل حد را محاسبه می کنیم:

نوع	حاصل حد
درجه عبارت صورت از درجه عبارت مخرج بیشتر باشد.	$+\infty$ یا $-\infty$
درجه عبارت صورت با درجه عبارت مخرج برابر باشد.	$\frac{a}{a'}$
درجه عبارت صورت از درجه عبارت مخرج کمتر باشد.	صفر



حد توابع زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 5x + 1}{6x^3 - 11x^2 - 3}$

ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x^7 + 5x^2}{2x^3 + 9}$

پاسخ:

الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 5x + 1}{6x^3 - 11x^2 - 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{6x^3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x^7 + 5x^2}{2x^3 + 9} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x^7}{2x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^4)$
 $= -2(-\infty)^4 = -2(+\infty) = -\infty$



فصل چهارم: مشتق

مشتق:

مشتق تابع $f(x)$ در $x = a$:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

با انتخاب $x - a = h$ داریم:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

مثال

اگر $f(x) = 1 - 2x^2$ باشد، $f'(-1)$ را با استفاده از تعریف مشتق به دست آورید.

پاسخ:

$$\begin{aligned} f'(-1) &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 - 2x^2 + 1}{x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(1 - x)(1 + x)}{x + 1} = 4 \end{aligned}$$

مثال

با استفاده از تعریف، مشتق تابع $f(x) = \sqrt{x} + 1$ را در نقطه $x = 1$ محاسبه کنید.

پاسخ:

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x} + 1) - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} \times \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

مثال

با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع $f(x) = \sqrt{x - 1}$ را در نقطه‌ای به طول $x = 5$ به دست آورید.

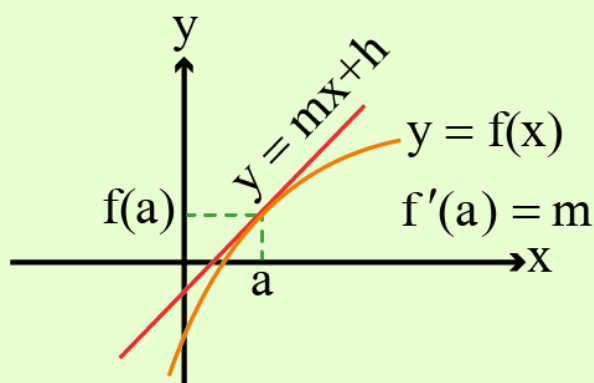
پاسخ:

$$\begin{aligned} f'(5) &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x - 1} - 2}{x - 5} \times \frac{\sqrt{x - 1} + 2}{\sqrt{x - 1} + 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x - 5}{(x - 5)(\sqrt{x - 1} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{\sqrt{x - 1} + 2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$



نکته طلابی

شیب خط مماس بر نمودار تابع $y = f(x)$ در $x = a$ همان $f'(a)$ است. مختصات نقطه تماس هم در تابع و هم در معادله خط مماس صدق می‌کند.



مثال

با استفاده از تعریف مشتق، معادله خط مماس بر نمودار تابع $f(x) = x^2 + 2x + 3$ را در نقطه‌ای به طول $x = 1$ به دست آورید.

پاسخ:

$$m = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 3)}{x - 1} = 4$$

$$y - 6 = 4(x - 1) \Rightarrow y = 4x + 2$$

قواعد مشتق‌گیری:

- $y = c, c \in \mathbb{R} \Rightarrow y' = 0$
- $y = ax + b \Rightarrow y' = a$
- $y = kf(x) \Rightarrow y' = kf'(x)$
- $y = \sqrt[n]{x^m} \Rightarrow y' = \frac{m}{n\sqrt[n]{x^{n-m}}}$
- $y = f(x) \pm g(x) \Rightarrow y' = f'(x) \pm g'(x)$
- $f(x) \times g(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$
- $y = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow y' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}, (g(x) \neq 0)$
- $y = (f(x))^n \Rightarrow y' = nf'(x)(f(x))^{n-1}$
- $y = \sqrt[n]{(f(x))^m} \Rightarrow y' = \frac{mf'(x)}{n\sqrt[n]{(f(x))^{n-m}}}$
- $y = (f \circ g)(x) = f(g(x)) \Rightarrow y' = g'(x)f'(g(x))$

مشتق مرتبه دوم: یعنی دو بار مشتق بگیر

$$f(x) \xrightarrow{\text{مشتق اول}} f'(x) \xrightarrow{\text{مشتق دوم}} f''(x)$$



نکته طلابی

چندتا مشتق مهم کتاب:

$$\bullet y = \sqrt{x} \Rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\bullet y = \sqrt[3]{x} \Rightarrow y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$\bullet y = \frac{1}{x} \Rightarrow y' = \frac{-1}{x^2}$$

حالا بریم چندتا مثال باهم ببینیم...

مثال

مشتق تابع‌های زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)

الف) $y = \frac{9x-2}{\sqrt{x}}$

ب) $y = \frac{1}{x}(2\sqrt{x}-1)^4$

پ) $y = \left(\frac{x^2}{3x-1}\right)^5$

ت) $y = (\sqrt{3x+2})(x^3+1)$

ث) $y = (x^2+1)^3(5x-1)$

ج) $y = \left(\frac{-3x+1}{x^2+5}\right)^8$

پاسخ:

الف) $y = \frac{9x-2}{\sqrt{x}} \Rightarrow y' = \frac{9\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}(9x-2)}{(\sqrt{x})^2}$

ب) $y = \frac{1}{x}(2\sqrt{x}-1)^4 \Rightarrow y' = \frac{-1}{x^2}(2\sqrt{x}-1)^4 + 4(2\sqrt{x}-1)^3\left(\frac{2}{2\sqrt{x}} - 0\right)\left(\frac{1}{x}\right)$

پ) $y = \left(\frac{x^2}{3x-1}\right)^5 \Rightarrow y' = 5\left(\frac{x^2}{3x-1}\right)^4 \left(\frac{2x(3x-1) - 3x^2}{(3x-1)^2}\right)$

ت) $y = (\sqrt{3x+2})(x^3+1) \Rightarrow y' = \left(\frac{3}{2\sqrt{3x+2}}\right)(x^3+1) + 3x^2(\sqrt{3x+2})$

ث) $y = (x^2+1)^3(5x-1) \Rightarrow y' = 3(2x)(x^2+1)^2(5x-1) + 5(x^2+1)^3$

ج) $y = \left(\frac{-3x+1}{x^2+5}\right)^8 \Rightarrow y' = 8\left(\frac{-3x+1}{x^2+5}\right)^7 \times \left(\frac{-3(x^2+5) - 2x(-3x+1)}{(x^2+5)^2}\right)$

مثال

اگر $f(x) = 5x^3 - 4x^2 - 3x$ ، مقدار $f''(-1)$ را به دست آورید.

پاسخ:

$f(x) = 5x^3 - 4x^2 - 3x \xrightarrow{\text{مشتق اول}} f'(x) = 15x^2 - 8x - 3$

$\xrightarrow{\text{مشتق دوم}} f''(x) = 30x - 8$

$\xrightarrow{x=-1} f''(-1) = 30(-1) - 8 = -30 - 8 = -38$



مثال

اگر $f'(1) = 3$ و $g'(1) = 5$ مطلوب است محاسبه موارد زیر:
پاسخ:

$$(f + g)'(1) = f'(1) + g'(1) = 3 + 5 = 8$$

$$(3f + 2g)'(1) = 3f'(1) + 2g'(1) = 3(3) + 2(5) = 9 + 10 = 19$$

مثال

اگر توابع f و g مشتق پذیر باشند و $f(2) = 3$ ، $f'(2) = 5$ ، $g(2) = 8$ و $g'(2) = -6$ باشد، حاصل $(fg)'(2)$ را به دست آورید.
پاسخ:

$$(fg)'(2) = f'(2)g(2) + g'(2)f(2) = (5)(8) + (-6)(3) = 40 - 18 = 22$$

مشتق پذیری:

تابع f را در نقطه $x = a$ مشتق پذیر گوئیم، هرگاه:
۱- تابع f در $x = a$ پیوسته باشد، یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$$

۲- مشتق چپ و مشتق راست تابع f در $x = a$ موجود (متناهی) و باهم برابر باشند، یعنی:

$$f'_+(a) = f'_-(a)$$

مثال

مشتق پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & x \geq -1 \\ 2x + 6 & x < -1 \end{cases}$ را در $x = -1$ بررسی کنید.

پاسخ:

اول پیوستگی تابع f را در $x = -1$ بررسی می کنیم.

$$\begin{cases} f(-1) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} x^2 + 3 = 4 \\ \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} 2x + 6 = 4 \end{cases}$$

تابع f در $x = -1$ پیوسته است حال باید ببینیم که مشتق چپ و راست تابع در $x = -1$ باهم برابرند یا خیر.

$$\begin{cases} f'_+(x) = 2x \Rightarrow f'_+(-1) = -2 \\ f'_-(x) = 2 \Rightarrow f'_-(-1) = 2 \end{cases} \Rightarrow f'_+(-1) \neq f'_-(-1)$$

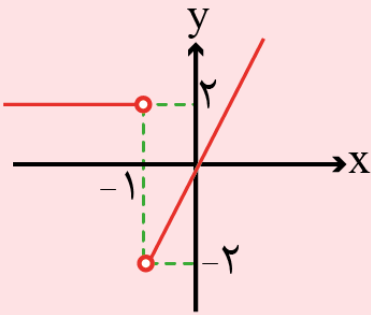
پس تابع f در $x = -1$ ، پیوسته ولی مشتق ناپذیر است.



حالا اگه تو این سؤال از ما ضابطه تابع مشتق رو بخوان چی؟

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & x \geq -1 \\ 2x + 6 & x < -1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x & x > -1 \quad (*) \\ 2 & x < -1 \end{cases}$$

آقا! چرا توی قسمت (*) علامت مساوی رو نداشتیم؟ گفتیم که تابع f توی $x = -1$ مشتق پذیر نیست پس $x = -1$ نمی‌تونه توی دامنه تابع مشتق حضور داشته باشه. حالا بیاین نمودار تابع مشتق رو هم رسم کنیم:



به کمک تعریف مشتق، مشتق پذیری تابع $f(x) = |x^2 - 4|$ را در $x = -2$ بررسی کنید.

پاسخ:

اول از همه باید پیوستگی تابع f رو در $x = -2$ بررسی کنیم (خودت بررسی کن). در مرحله بعد باید برابری مشتق چپ و راست رو توی $x = -2$ بررسی کنیم:

$$\left\{ \begin{aligned} f'_+(-2) &= \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{|x^2 - 4| - 0}{x + 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{-(x^2 - 4)}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{-(x - 2)(x + 2)}{x + 2} = +4 \\ f'_-(-2) &= \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{|x^2 - 4| - 0}{x + 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{(x^2 - 4)}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{(x + 2)(x - 2)}{x + 2} = -4 \end{aligned} \right.$$

$$\Rightarrow f'_+(-2) \neq f'_-(-2) \Rightarrow f'(-2) \text{ موجود نیست}$$

بنابراین تابع f در $x = -2$ مشتق ناپذیر است.



اگر u تابعی بر حسب x و $y = f(u)$ باشد آن گاه:

$$y' = u'f'(u)$$

$$y = f^n(u) \Rightarrow y' = nf^{n-1}(u) \times u'f'(u)$$



مثال



$$y = f(\sqrt{x} + 4x^2) \Rightarrow y' = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + 8x\right)f'(\sqrt{x} + 4x^2)$$

$$y = f^3(3x^4) \Rightarrow y' = 3f^2(3x^4)(12x^3)f'(3x^4)$$

آهنگ تغییر:

آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازه $[a, b]$ برابر است با:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

مثال



آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x) = \sqrt{x+2}$ را وقتی متغیر از $x_1 = 2$ به $x_2 = 7$ تغییر می‌کند به دست آورید.

پاسخ:

$$f \text{ آهنگ تغییر متوسط تابع } = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(7) - f(2)}{7 - 2} = \frac{\sqrt{9} - \sqrt{4}}{5} = \frac{1}{5}$$

نکته طلابی



آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f در نقطه $x = a$ برابر است با: $f'(a)$

مثال



معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t) = t^2 - t + 10$ بر حسب متر در بازه $[0, 5]$ t بر حسب ثانیه) داده شده است. در کدام لحظه سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازه زمانی $[0, 5]$ باهم برابرند؟

پاسخ:

$$\text{سرعت متوسط در بازه } [0, 5] = \frac{f(5) - f(0)}{5 - 0} = \frac{(25 - 5 + 10) - (10)}{5} = \frac{20}{5} = 4$$

$$f'(t) = \text{سرعت لحظه‌ای در لحظه } x = t = 2t - 1$$

می‌خواهیم که سرعت لحظه‌ای در لحظه t با سرعت متوسط در بازه $[0, 5]$ باهم برابر باشند، پس:

$$2t - 1 = 4 \Rightarrow 2t = 5 \Rightarrow t = \frac{5}{2}$$



فصل پنجم: کاربرد مشتق

◀ نقاط بحرانی:

- اگر تابع $f(x)$ در بازه $[a, b]$ تعریف شده باشد، نقاط بحرانی تابع f عبارتند از:
- نقاط ابتدا و انتهای بازه
- نقاطی که مشتق تابع در آن‌ها برابر صفر است.
- نقاطی که تابع در آن‌ها مشتق ناپذیر است.



نقاط بحرانی تابع $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ را در صورت وجود به دست آورید.

پاسخ:

ابتدا دامنه تابع f را پیدا می‌کنیم:

$$4 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 4 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2$$

می‌دانیم که نقاط ابتدا و انتهای بازه تعریف تابع، جزء نقاط بحرانی‌اند پس $x = -2$ و $x = 2$ بحرانی‌اند.

از طرفی می‌دانیم در نقاطی که مشتق تابع برابر صفر باشد، آن نقاط نیز جزء نقاط بحرانی‌اند، لذا:

$$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} = 0 \Rightarrow -2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

بنابراین نقاط بحرانی تابع f عبارتند از: $x = -2$ و $x = +2$ ، $x = 0$

◀ اکسترم نسبی:

برای پیدا کردن نقاط اکسترم نسبی یک **تابع پیوسته** به روش زیر عمل می‌کنیم:

- ۱- دامنه تابع را به دست می‌آوریم.
 - ۲- نقاط بحرانی تابع را پیدا می‌کنیم.
 - ۳- جدول تغییرات را رسم کرده و سپس مشتق تابع را تعیین علامت می‌کنیم.
 - ۴- حال برای تشخیص ماکزیمم یا مینیمم بودن نقاط بحرانی داریم:
- اگر علامت f' در آن نقطه از مثبت به منفی تغییر کند، آن نقطه، نقطه ماکزیمم نسبی است.
 - اگر علامت f' در آن نقطه از منفی به مثبت تغییر کند، آن نقطه، نقطه مینیمم نسبی است.
 - اگر f' در آن نقطه تغییر علامت ندهد، با این روش نمی‌توان درباره ماکزیمم و یا مینیمم نسبی بودن آن نقطه اظهار نظر کرد.

توجه: هر نقطه اکسترم نسبی، یک نقطه بحرانی است. اما هر نقطه بحرانی لزوماً نقطه اکسترم نسبی نیست.



مثال

در تابع $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 10$ ، ابتدا نقاط بحرانی تابع را به دست آورید و سپس با رسم جدول تغییرات تابع، نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی آن را در صورت وجود مشخص کنید.

پاسخ:

$$D_f = \mathbb{R}$$

برای پیدا کردن نقاط بحرانی تابع f ، مشتق آن را به دست آورده و آن را برابر صفر قرار می دهیم، یعنی باید معادله $f'(x) = 0$ را حل کنیم:

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$$

بنابراین $x = -3$ و $x = 1$ نقاط بحرانی تابع f می باشند، حال با رسم جدول تغییرات، مشتق را تعیین علامت می کنیم:

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$
f'	$+$	$-$	$+$	
f		$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

$\begin{matrix} \text{max} \\ \text{نسبی} \end{matrix}$
 $\begin{matrix} \text{min} \\ \text{نسبی} \end{matrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -3 \Rightarrow \text{طول max نسبی} \\ x = 1 \Rightarrow \text{طول min نسبی} \end{cases}$$

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 10$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -3 \Rightarrow f(-3) = 17 \Rightarrow A(-3, 17) \Rightarrow \text{max نسبی} \\ x = 1 \Rightarrow f(1) = -15 \Rightarrow B(1, -15) \Rightarrow \text{min نسبی} \end{cases}$$

نکته طلایی

با فرض اینکه تابع $y = f(x)$ مشتق پذیر باشد، اگر نقطه (a, b) ، نقطه اکسترمم نسبی تابع f باشد در این صورت:

$$\begin{cases} f'(a) = 0 \\ f(a) = b \end{cases}$$

مثال

اگر نقطه $(2, 1)$ نقطه اکسترمم نسبی تابع $f(x) = x^3 + bx^2 + d$ باشد، مقادیر b و d را به دست آورید.

پاسخ:

چون نقطه $(2, 1)$ ، نقطه اکسترمم نسبی تابع f است پس اولاً $f(2) = 1$ و ثانیاً $f'(2) = 0$ است:

$$f(2) = 1 \Rightarrow 8 + 4b + d = 1 \Rightarrow 4b + d = -7$$

$$f'(2) = 0 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2bx \xrightarrow{f'(2)=0} 12 + 4b = 0$$

$$\Rightarrow b = -3 \xrightarrow{4b+d=-7} d = 5$$



◀ اکسترمم مطلق:

برای پیدا کردن نقاط اکسترمم مطلق تابع f به روش زیر عمل می‌کنیم:

- ۱- نقاط بحرانی تابع را پیدا می‌کنیم.

- ۲- مقدار تابع را به ازای نقاط بحرانی به دست می‌آوریم.

- ۳- از بین مقادیر به دست آمده در مرحله ۲، بیشترین مقدار را به عنوان ماکزیمم مطلق و کمترین مقدار را به عنوان مینیمم مطلق تابع f معرفی می‌کنیم.

توجه:

در بعضی از سؤالات، از روش رسم نمودار نیز می‌توان برای تعیین اکسترمم‌های تابع کمک گرفت.



اکسترمم‌های مطلق تابع $f(x) = x^3 - 3x + 7$ را در بازه $[-1, 3]$ در صورت وجود تعیین کنید.

پاسخ:

ابتدا نقاط بحرانی تابع f را در بازه $[-1, 3]$ پیدا می‌کنیم:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

پس $x = -1$ و $x = 3$ (نقاط ابتدا و انتهای بازه) و $x = 1$ ، نقاط بحرانی تابع f می‌باشند. حال باید مقدار تابع f را به ازای نقاط بحرانی به دست بیاوریم:

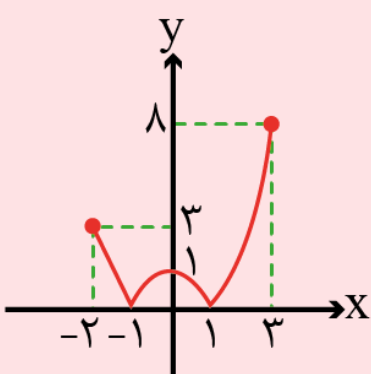
$$f(x) = x^3 - 3x + 7 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow f(1) = 1 - 3 + 7 = 5 \Rightarrow \text{min مطلق} \\ x = -1 \Rightarrow f(-1) = -1 + 3 + 7 = 9 \\ x = 3 \Rightarrow f(3) = 27 - 9 + 7 = 25 \Rightarrow \text{max مطلق} \end{cases}$$



نمودار تابع $f(x) = |x^2 - 1|$ را در بازه $[-2, 3]$ رسم کرده و با توجه به آن نقاط اکسترمم مطلق و نسبی را تعیین کنید.

پاسخ:

با توجه به نمودار زیر:



نقطه مینیمم مطلق } نقطه $(-1, 0)$
نقطه مینیمم نسبی

نقطه $(0, 1)$: نقطه ماکزیمم نسبی

نقطه مینیمم مطلق } نقطه $(1, 0)$
نقطه مینیمم نسبی

نقطه $(3, 8)$: نقطه ماکزیمم مطلق



◀ حل مسائل بهینه‌سازی:

- ۱- ابتدا رابطه کمیتی که قرار است بهینه شود (مینیمم یا ماکزیمم شود) را به دست می‌آوریم.
- ۲- رابطه به دست آمده را به کمک روابط موجود در مسئله به یک رابطه تک متغیره تبدیل کنیم.
- ۳- سپس از رابطه تک متغیره به دست آمده مشتق گرفته و برابر صفر قرار می‌دهیم و ریشه مشتق را به دست می‌آوریم.
- ۴- حال به کمک ریشه مشتق، کمیتی که قرار است بهینه شود را پیدا می‌کنیم.



دو عدد حقیقی بیابید که تفاضل آن‌ها ۱۰ باشد و حاصل ضربشان کمترین مقدار ممکن گردد.

پاسخ:

۱- کمیتی که قرار است بهینه شود، حاصل ضرب دو عدد حقیقی است یعنی قرار است $p = xy$ کمترین باشد.

۲- باتوجه به مسئله می‌دانیم که تفاضل دو عدد حقیقی برابر ۱۰ است یعنی $y - x = 10$ است حال باید رابطه به دست آمده در مرحله قبل را تک‌متغیره کنیم:

$$\begin{cases} p = xy \\ y - x = 10 \Rightarrow y = 10 + x \end{cases} \Rightarrow p = x(10 + x) = x^2 + 10x$$

حال از رابطه تک‌متغیره $p = x^2 + 10x$ مشتق گرفته و برابر صفر قرار می‌دهیم و ریشه

مشتق را به دست می‌آوریم: $p' = 0 \Rightarrow 2x + 10 = 0 \Rightarrow x = -5 \xrightarrow{y=10+x} y = 5$



می‌خواهیم یک قوطی فلزی استوانه‌ای شکل در باز بسازیم که گنجایش آن 27π مترمکعب باشد. ارتفاع قوطی چقدر باشد تا مقدار فلز به کاررفته در تولید آن مینیمم شود؟

پاسخ:

می‌خواهیم که فلز لازم برای ساخت قوطی کمترین مقدار ممکن باشد. از طرفی می‌دانیم که قوطی در باز است پس فقط برای سطح جانبی قوطی و سطح قاعده آن قرار است که از فلز استفاده کنیم. بنابراین رابطه‌ای که قرار است بهینه شود برابر است با:

$$S = \underbrace{\pi r^2}_{\text{سطح قاعده}} + \underbrace{2\pi rh}_{\text{سطح جانبی}} \quad (*)$$

از طرفی طبق اطلاعات مسئله می‌دانیم که حجم قوطی برابر 27π مترمکعب است یعنی:

$$V = \pi r^2 h = 27\pi \Rightarrow r^2 h = 27$$

حال باید به کمک $r^2 h = 27$ ، رابطه (*) را به صورت تک‌متغیره تبدیل کرده و از آن مشتق گرفته و نهایتاً برابر صفر قرار دهیم:

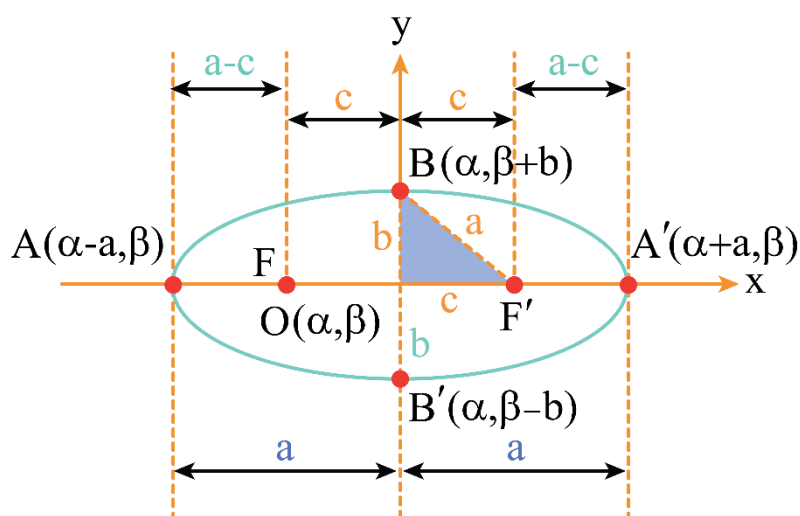
$$\begin{cases} S = \pi r^2 + 2\pi rh \\ r^2 h = 27 \Rightarrow h = \frac{27}{r^2} \end{cases} \Rightarrow S(r) = \pi r^2 + 2\pi r \left(\frac{27}{r^2} \right) = \pi r^2 + \frac{54\pi}{r}$$

$$\Rightarrow S'(r) = 2\pi r - \frac{54\pi}{r^2} = 0 \Rightarrow 2\pi r^3 = 54\pi \Rightarrow r = 3 \xrightarrow{h=\frac{27}{r^2}} h = 3$$



فصل ششم: هندسه

بیضی:



$$\begin{cases} OA = OA' = a \\ OB = OB' = b \\ OF = OF' = c \end{cases} \quad \begin{cases} AA' = 2a \text{ (قطر بزرگ (قطر کانونی))} \\ BB' = 2b \text{ (قطر کوچک (قطر ناکانونی))} \\ FF' = 2c \text{ (فاصله کانونی)} \end{cases}$$

$$BF' = BF = B'F = B'F' = a$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \text{ (با توجه به مثلث قائم الزاویه } OBF' \text{)}$$

$$\text{فاصله یک کانون تا دورترین رأس} = a + c$$

$$\text{فاصله یک کانون تا نزدیکترین رأس} = a - c$$

نکته طلایی

خروج از مرکز بیضی:

۱- مقدار $\frac{c}{a}$ را خروج از مرکز بیضی می‌نامیم و معمولاً آن را با حرف e نمایش می‌دهیم.

۲- همواره خروج از مرکز بیضی بین ۰ و ۱ است. ($0 < e < 1$)

۳- هرچه نسبت $e = \frac{c}{a}$ بزرگ‌تر و به ۱ نزدیک‌تر باشد شکل بیضی کشیده‌تر می‌شود و به عبارتی شکل بیضی به پاره‌خط نزدیک‌تر می‌شود.

۴- هرچه نسبت $e = \frac{c}{a}$ کوچک‌تر و به صفر نزدیک‌تر باشد شکل بیضی به شکل دایره نزدیک‌تر خواهد بود.



مثال

اگر در یک بیضی داشته باشیم $a = 5$ و $b = 3$ ، در این صورت اندازه فاصله کانونی این بیضی را محاسبه کنید.

پاسخ:

$$\begin{cases} a = 5 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 25 = 9 + c^2 \Rightarrow c^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow c = \sqrt{16} = 4$$

می‌دانیم که فاصله کانونی برابر $2c$ است پس:

$$FF' = 2c = 8$$

مثال

در یک بیضی افقی طول قطر بزرگ ۸ و طول قطر کوچک ۶ واحد است. فاصله کانونی بیضی را به دست آورید.

پاسخ:

$$\begin{cases} \text{طول قطر بزرگ} = 2a = 8 \Rightarrow a = 4 \\ \text{طول قطر کوچک} = 2b = 6 \Rightarrow b = 3 \end{cases}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 16 = 9 + c^2 \Rightarrow c^2 = 7 \Rightarrow c = \sqrt{7}$$

$$\text{فاصله کانونی} = FF' = 2c = 2\sqrt{7}$$

حال در این مثال اگر مرکز بیضی افقی با مختصات $(\underbrace{4}_{\alpha}, \underbrace{5}_{\beta})$ باشد مختصات

دو سر قطر بزرگ و مختصات دو سر قطر کوچک را به دست آورید.

$$\text{مختصات دو سر قطر بزرگ: } \begin{cases} A'(\alpha + a, \beta) = A'(4 + 4, 5) = A'(8, 5) \\ A(\alpha - a, \beta) = A(4 - 4, 5) = A(0, 5) \end{cases}$$

$$\text{مختصات دو سر قطر کوچک: } \begin{cases} B(\alpha, \beta + b) = B(4, 5 + 3) = B(4, 8) \\ B'(\alpha, \beta - b) = B'(4, 5 - 3) = B'(4, 2) \end{cases}$$

مثال

خروج از مرکز یک بیضی افقی $\frac{4}{5}$ ، مرکز آن $(-4, -1)$ و طول قطر کوچک این بیضی ۶ واحد است. مطلوبست محاسبه:

(الف) طول قطر کانونی و فاصله کانونی

(ب) مختصات نقاط دو سر قطر بزرگ بیضی

پاسخ:

(الف)

$$2b = 6 \Rightarrow b = 3$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} \xrightarrow{c^2 = a^2 - b^2} \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{a^2 - 9}{a^2} = \frac{16}{25}$$

$$\Rightarrow 16a^2 = 25a^2 - 225$$

$$\Rightarrow 9a^2 = 225 \Rightarrow a^2 = \frac{225}{9} = 25 \Rightarrow a = 5 \xrightarrow{e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}} \frac{c}{5} = \frac{4}{5} \Rightarrow c = 4$$



$۱۰ = 2a = \text{قطر بزرگ} = \text{قطر کانونی}$
 $۸ = 2c = \text{فاصله کانونی}$

(ب)

$$(-4, -1) \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -4 \\ \beta = -1 \end{cases}$$

مختصات مرکز بیضی

$$A'(\alpha + a, \beta) = A'(-4 + 5, -1) = A'(1, -1)$$

$$A(\alpha - a, \beta) = A(-4 - 5, -1) = A(-9, -1)$$

◀ دایره:

اگر $O(\alpha, \beta)$ مختصات مرکز یک دایره و r شعاع آن دایره باشد معادله استاندارد دایره برابر است با:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$$



اگر معادله دایره به صورت $(x + 1)^2 + y^2 = 4$ باشد مطلوبست:

الف) مختصات مرکز دایره و اندازه شعاع دایره

ب) مختصات نقاط تقاطع دایره با محور x ها و محور y ها

پاسخ:
الف)

$$(x + 1)^2 + (y - 0)^2 = (2)^2 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 0 \\ r = 2 \end{cases} \Rightarrow O(-1, 0)$$

ب) برای پیدا کردن مختصات تقاطع دایره با محور x ها، باید در معادله دایره، $y = 0$ قرار دهیم که در این صورت:

$$(x + 1)^2 + y^2 = 4 \xrightarrow{y=0} (x + 1)^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} x + 1 = 2 \Rightarrow x = 1 \\ x + 1 = -2 \Rightarrow x = -3 \end{cases}$$

در نتیجه نقاط $(1, 0)$ و $(-3, 0)$ محل تقاطع دایره با محور x ها هستند.
و برای پیدا کردن مختصات تقاطع دایره با محور y ها، باید در معادله دایره، $x = 0$ را قرار دهیم:

$$(x + 1)^2 + y^2 = 4 \xrightarrow{x=0} 1 + y^2 = 4 \Rightarrow y^2 = 3 \Rightarrow \begin{cases} y = \sqrt{3} \\ y = -\sqrt{3} \end{cases}$$

پس نقاط $(0, \sqrt{3})$ و $(0, -\sqrt{3})$ ، محل تقاطع دایره با محور y ها هستند.



اگر $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ معادله گسترده یک دایره باشد، داریم:

$$\text{مختصات مرکز دایره: } O\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$$

$$\text{شعاع دایره: } r = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$$



معادله گسترده دایره‌ای به صورت $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0$ می‌باشد. مرکز و شعاع دایره را بنویسید.

پاسخ:

$$O(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}) \Rightarrow O(-\frac{-6}{2}, -\frac{2}{2}) \Rightarrow O(3, -1)$$

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} \Rightarrow r = \frac{1}{2} \sqrt{(-6)^2 + (2)^2 - 4(6)}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{36 + 4 - 24} = \frac{1}{2} \sqrt{16} = 2$$

در مثال فوق، معادله دایره را به صورت استاندارد بنویسید.

پاسخ:

$$\begin{cases} O(3, -1) \\ r = 2 \end{cases} \Rightarrow (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2 \Rightarrow (x - 3)^2 + (y - (-1))^2 = 4$$

$$\Rightarrow (x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 4$$

◀ اوضاع نسبی خط و دایره:

برای مشخص کردن وضعیت یک خط نسبت به یک دایره قبل از هر چیز، ابتدا فاصله مرکز دایره از خط موردنظر را پیدا می‌کنیم (OH) حال با توجه به اندازه OH و اندازه شعاع دایره، داریم:

خط l ، با دایره متقاطع است.	خط l ، بر دایره مماس است.	خط l ، دایره را قطع نمی‌کند.
$OH < r$	$OH = r$	$OH > r$

یادآوری:

خط مماس بر دایره، در نقطه تماس، بر شعاع دایره عمود است. فاصله نقطه $A(x_0, y_0)$ از خط $ax + by + c = 0$ برابر است با:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



مثال

وضعیت خط $x + y = 1$ را نسبت به دایره $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 1 = 0$ مشخص نمایید.

پاسخ:

ابتدا مختصات مرکز دایره را به دست می آوریم:

$$O(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}) \Rightarrow O(-\frac{2}{2}, -\frac{2}{2}) \Rightarrow O(-1, -1)$$

حال فاصله مرکز دایره را از خط به معادله $x + y - 1 = 0$ به دست می آوریم:

$$OH = \frac{|(1 \times -1) + (1 \times -1) - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|-3|}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow OH = \frac{3\sqrt{2}}{2} \approx 2.1$$

شعاع دایره را به دست آورده و آن را با اندازه OH مقایسه می کنیم:

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 4 - (-4)} = \frac{\sqrt{12}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \approx 1.7$$

چون $\frac{3\sqrt{2}}{2} > \sqrt{3}$ است پس $OH > r$ است در نتیجه خط $x + y = 1$ دایره را قطع نمی کند.

مثال

معادله دایره ای بنویسید که مرکز آن $(0, 3)$ و بر خط $3x - 4y = 3$ مماس باشد.

پاسخ:

برای نوشتن معادله یک دایره به دو چیز نیاز داریم: ۱- مختصات مرکز دایره ۲- شعاع دایره می دانیم که خط به معادله $3x - 4y - 3 = 0$ بر دایره مماس است در نتیجه فاصله مرکز دایره تا این خط برابر شعاع دایره است پس:

$$\text{شعاع دایره} = r = OH = \frac{|(3 \times 0) - (4 \times 3) - 3|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|-15|}{\sqrt{25}} = \frac{15}{5} = 3$$

$$\begin{cases} O(0, 3) \\ r = 3 \end{cases} \Rightarrow (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2 \Rightarrow (x - 0)^2 + (y - 3)^2 = 3^2$$

$$\Rightarrow x^2 + (y - 3)^2 = 9$$

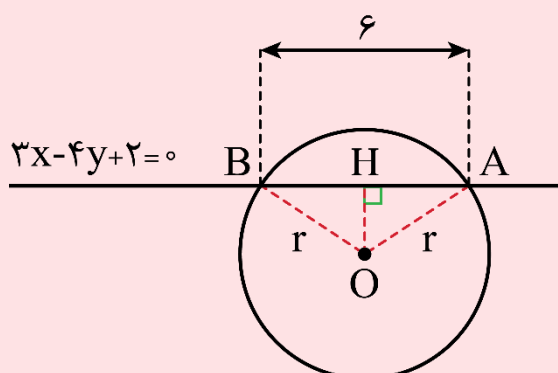


مثال

مرکز دایره‌ای، نقطه $O(2, -3)$ است. این دایره روی خط $3x - 4y + 2 = 0$ وترى به طول ۶ جدا می‌کند. معادله دایره را بنویسید.

پاسخ:

ابتدا شکلی رسم کرده و اطلاعات مسئله را روی آن پیاده می‌کنیم:



حال فاصله مرکز دایره را از خط $3x - 4y + 2 = 0$ به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} O(2, -3) \\ 3x - 4y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow OH = \frac{|(3 \times 2) - (4 \times -3) + 2|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{20}{\sqrt{25}} = \frac{20}{5} = 4$$

می‌دانیم که دو مثلث OHA و OHB ، هم‌نهشت هستند پس $AH = BH = \frac{AB}{2} = 3$

حال در مثلث قائم‌الزاویه OHA داریم:

$$(OA)^2 = (OH)^2 + (AH)^2 \Rightarrow OA = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5 \Rightarrow OA = r = 5$$

در نتیجه معادله دایره موردنظر برابر است با:

$$\begin{cases} O(2, -3) \\ r = 5 \end{cases} \Rightarrow (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2 \Rightarrow (x - 2)^2 + (y - (-3))^2 = 5^2$$

$$\Rightarrow (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25$$

◀ اوضاع نسبی دو دایره:

دو دایره $C(O, r)$ و $C'(O', r')$ را در نظر بگیرید؛ اگر اندازه پاره‌خطی که مرکزهای دو دایره را به هم وصل می‌کند (خط‌المركزین) برابر d باشد، داریم:

$d > r + r'$	$d = r + r'$	$ r - r' < d < r + r'$	$d = r - r' $	$d < r - r' $
دو دایره بیرون هم (متخارج)	دو دایره مماس بیرون	دو دایره متقاطع	دو دایره مماس درون	دو دایره متداخل



توجه شود که اگر $d = 0$ باشد دو دایره هم مرکز خواهند بود.

برای تشخیص وضعیت دو دایره $C(O, r)$ و $C'(O', r')$ ؛ مراحل زیر را طی می کنیم:

۱- ابتدا مختصات مرکز و اندازه شعاع هر دو دایره را به دست می آوریم.

۲- سپس طول خط المרכזین دو دایره $d = |OO'|$ را نیز به دست می آوریم.

۳- در نهایت $(r + r')$ و $|r - r'|$ را نیز محاسبه کرده و آن ها را با اندازه $d = |OO'|$ مقایسه می کنیم.



معادله دایره ای را بنویسید که مرکز آن $(-1, -1)$ و با دایره $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 3$ مماس درون باشد.

پاسخ:

برای نوشتن معادله یک دایره به دو پارامتر احتیاج داریم: ۱- مختصات مرکز دایره و ۲- شعاع دایره

از طرفی می دانیم که اگر دو دایره مماس درون باشند $d = |r - r'|$ است پس:

$$C': x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} O' = (-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}) \Rightarrow O(2, 3) \\ r' = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{2}\sqrt{16 + 36 - 4(-3)} = \frac{\sqrt{64}}{2} = \frac{8}{2} = 4 \end{cases}$$

حال طول خط المרכזین دو دایره را نیز محاسبه می کنیم:

$$\begin{cases} O(-1, -1) \\ O'(2, 3) \end{cases} \quad d = OO' = \sqrt{(-1-2)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

باید $d = |r - r'|$ باشد، پس:

$$5 = |r - 4| \Rightarrow \begin{cases} r - 4 = 5 \Rightarrow r = 9 \quad \checkmark \\ r - 4 = -5 \Rightarrow r = -1 \quad \text{غلق} \end{cases}$$

بنابراین شعاع دایره موردنظر برابر $r = 9$ و مرکز آن $O(-1, -1)$ است:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2 \Rightarrow (x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 81$$



فصل هفتم: احتمال

◀ قانون احتمال کل:

افراز:

فرض کنیم A_1 و A_2 و ... و A_n زیرمجموعه‌هایی ناتهی از مجموعه S باشند، به گونه‌ای که اجتماع همه آن‌ها برابر S ، و اشتراک هر دو تای آن‌ها برابر $\emptyset$ باشد، در این صورت می‌گوییم این مجموعه‌ها یک افراز روی S درست کرده‌اند. به عبارتی داریم:



$$1) A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = S \quad \left(\bigcup_{i=1}^n A_i = S \right)$$

$$A_1 \cap A_2 = \emptyset, A_1 \cap A_3 = \emptyset$$

$$2) \dots, A_{n-1} \cap A_n = \emptyset \quad \left(A_i \cap A_j = \emptyset, 1 \leq i, j \leq n, i \neq j \right)$$



کشور ایران به ۳۱ استان افراز شده است.



اگر A مجموعه اعداد طبیعی اول و B مجموعه اعداد طبیعی مرکب و $C = \{1\}$ باشند، در این صورت A ، B و C یک افراز روی مجموعه اعداد طبیعی هستند.
(سؤال امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۲)



مجموعه اعداد گویا و مجموعه اعداد اصم (گنگ) یک افراز روی مجموعه اعداد حقیقی تشکیل می‌دهند.



حال اگر فرض کنیم در حالت کلی $A_1, A_2, \dots, A_n$ پیشامدهایی باشند که بر روی فضای نمونه‌ای S یک افراز تشکیل داده باشند و B یک پیشامد دلخواه باشد، رابطه زیر حاصل خواهد شد که به آن **قانون احتمال کل** می‌گوییم:

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)$$



اگر احتمال انتقال نوعی بیماری خاص به نوزاد پسر 0.8 و نوزاد دختر 0.3 باشد و خانواده‌ای قصد بچه‌دار شدن داشته باشد، به چه احتمالی نوزاد آن‌ها به بیماری مذکور مبتلا خواهد شد؟

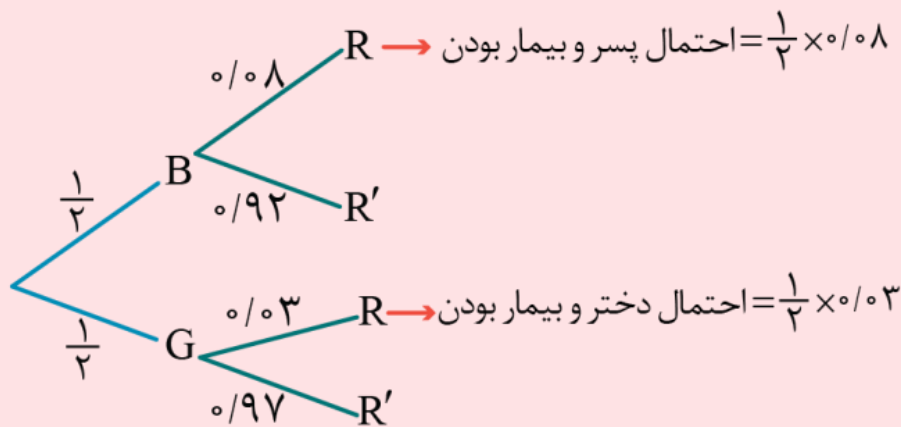
پاسخ:

$$P(\text{دختر بودن} | \text{بیمار بودن}) = P(\text{دختر بودن}) + P(\text{پسر بودن} | \text{بیمار بودن}) \cdot P(\text{پسر بودن})$$

و اگر پیشامد پسربودن را با B و دختربودن را با G و بیماربودن را با R نمایش دهیم داریم:

$$P(R) = P(B)P(R|B) + P(G)P(R|G) = \frac{1}{2} \times \frac{8}{10} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{10} = \frac{11}{20}$$

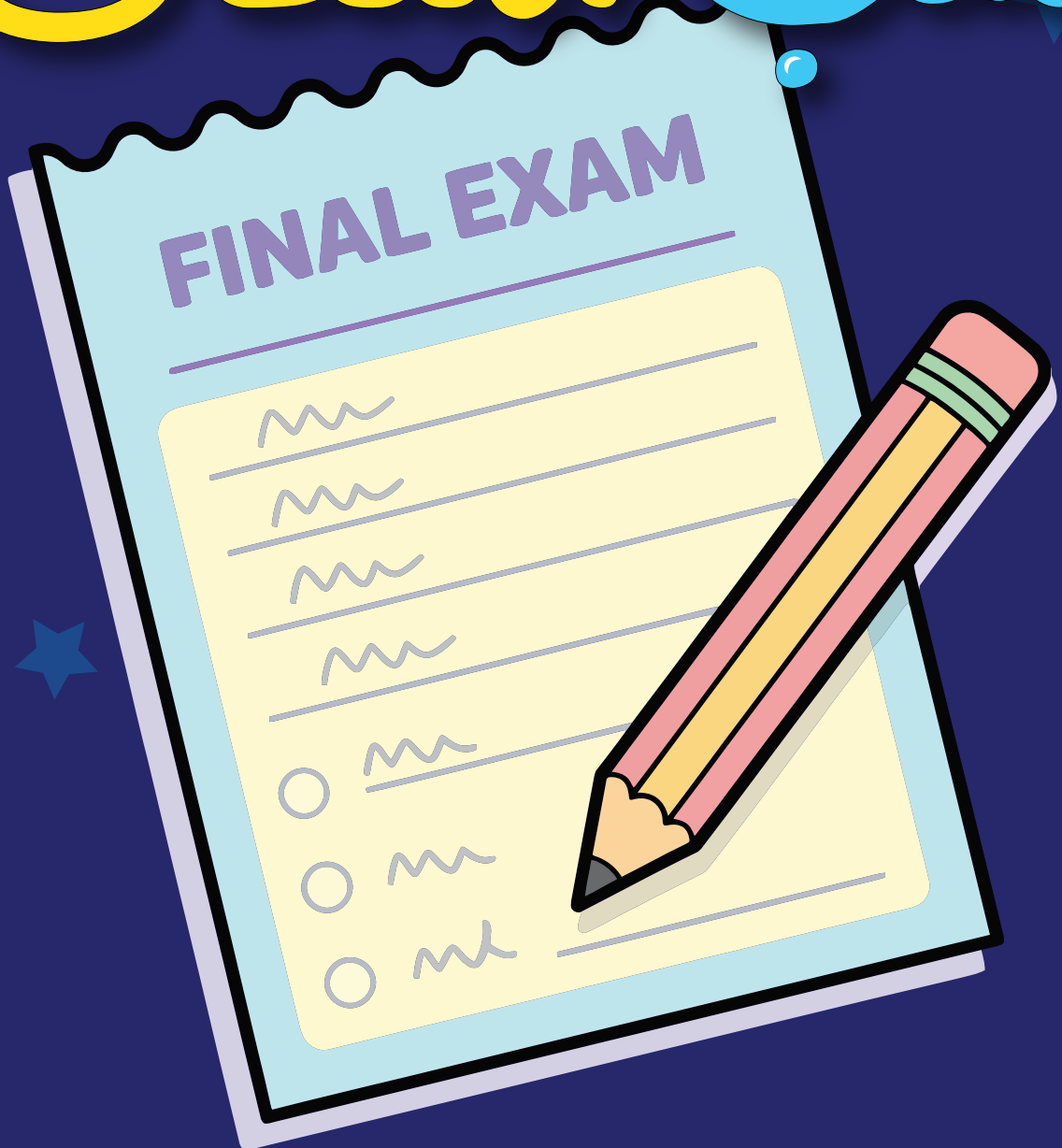
برای حل این مثال می‌توان از نمودار درختی نیز استفاده کرد. به نمودار درختی زیر دقت کنید و علت نوشتن هر عدد و راه‌حل ارائه‌شده را شرح دهید.



$$\Rightarrow \text{احتمال بیمار بودن} = \frac{1}{2} \times 0.8 + \frac{1}{2} \times 0.3$$



تشریحی نویسی شب امتحان



ریاضی دوازدهم تجربی



تشریحی نویسی

نکات مهم امتحانات تشریحی درس ریاضی دوازدهم

درس ریاضی برای بسیاری از دانش‌آموزان، درسی چالشی و گاهی دلهره‌آور به نظر می‌رسد؛ اما حقیقت این است که ریاضی، برخلاف تصور رایج، درسی قابل‌پیش‌بینی، قانون‌مند و قابل‌اعتماد است.

اگر مسیر مطالعه آن را درست انتخاب کنید، می‌تواند یکی از نمره‌سازترین و مطمئن‌ترین درس‌های امتحان نهایی و کنکور باشد.

دانش‌آموزانی که یاد می‌گیرند ریاضی را گام‌به‌گام و با منطق درست بخوانند، معمولاً نه تنها در امتحان نهایی به نمره ۲۰ می‌رسند، بلکه در کنکور نیز به راحتی از صدها داوطلب جلو می‌افتند؛ چراکه اکثر دانش‌آموزان این درس را با ترس و عجله مطالعه می‌کنند، نه با برنامه و فهم اصولی.

هدف از راهنمای تشریحی نویسی، ارائه یک مسیر روشن، عملی و استاندارد برای رسیدن به نمره کامل در امتحان نهایی است.

بخش اول: سبک و ساختار امتحان

اولین قدم برای گرفتن نمره کامل، آشنایی دقیق با ساختار آزمون است.

امتحان نهایی معمولاً در یک برگه پشت و رو برگزار می‌شود و شامل ۱۷ الی ۱۸ سؤال به ترتیب شامل موارد زیر است:

سوالات درست - نادرست

درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.

الف) اگر $f'(1) = 5$ و $g'(1) = -2$ ، در این صورت $(2f - 3g)'(1)$ برابر با ۱۲ است.

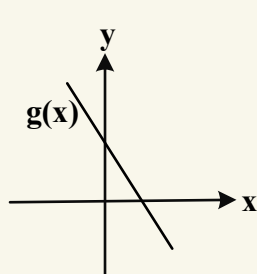
سوالات کامل کردنی (جای خالی)

جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید.

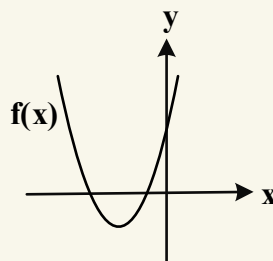
الف) اگر $f(x) = x - 2x^3$ باشد، مقدار $f''(1)$ برابر است.

سوالات جورکردنی

نمودار توابع f و g به صورت زیر است:

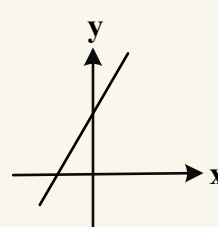
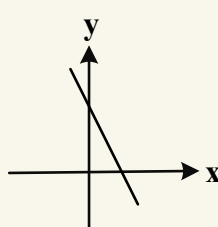
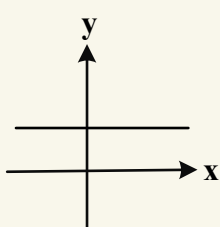
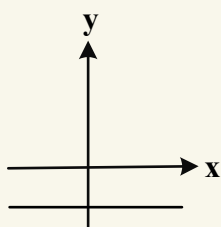


(ب)



(الف)

نمودار مشتق هر کدام از توابع f و g را از بین نمودارهای زیر انتخاب کنید، سپس شماره مربوط به آن را در پاسخ‌برگ بنویسید.
(دو نمودار اضافه است.)





سوالات تشریحی

دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y = 2\sin(3x) - 1$ را به دست آورید.

میانگین زمان پاسخ‌گویی برای هر سؤال حدود ۵ تا ۶ دقیقه است، بنابراین شناخت الگوی سؤال‌ها کمک می‌کند بتوانی مدیریت زمان را دقیق‌تر انجام دهی.

بارمبندی ریاضی (۳)، پایه دوازدهم سال تحصیلی ۱۴۰۴-۱۴۰۵

فصل	نوبت دوم خرداد، شهریور و دی‌ماه
فصل ۱	۳
فصل ۲	۳
فصل ۳	۲
فصل ۴	۵
فصل ۵	۳
فصل ۶	۲/۵
فصل ۷	۱/۵

بخش دوم: آموزش پاسخ‌نویسی درست و اصولی در امتحان نهایی

در امتحان نهایی، فقط دانستن و حل سوال کافی نیست؛ بلکه نحوه نوشتن پاسخ‌ها، نظم ذهنی، و دقت در انتقال دانسته‌ها به پاسخ‌برگ امتحانی به همان اندازه اهمیت دارد.

گاهی دانش‌آموز مفهوم سوال را درک می‌کند و پاسخ صحیح را نیز می‌داند ولی به دلیل خط ناخوانا، حذف مراحل حل یا ننوشتن فرمول‌ها، بخشی از نمره را از دست می‌دهد.

در این بخش، اصول طلایی پاسخ‌نویسی را مرور می‌کنیم تا برگه امتحانت مثل پاسخ‌برگ یک دانش‌آموز حرفه‌ای بدرخشد.

۱-۲ صورت سؤال را دقیق بخوان.

همیشه قبل از نوشتن، یک‌بار با دقت صورت سؤال را بخوان. در ریاضی، هر کلمه در سؤال معنا دارد؛ گاهی یک واژه کوچک مثل «حداقل»، «بیشترین»، یا «در نقطه خاص» مسیر حل را تغییر می‌دهد. برای سؤالات چندبخشی، دور شماره هر قسمت خط بکش و مطمئن شو هیچ بخش را جا نمی‌اندازی. خواندن دقیق صورت سوال، اولین قدم برای درست نوشتن است.

۲-۲ از روش‌های تستی در پاسخ تشریحی استفاده نکن.

یکی از اشتباهات رایج این است که دانش‌آموز سعی می‌کند سؤال تشریحی را با روش تستی حل کند. در امتحان نهایی، مصحح به دنبال دیدن مراحل و منطق توست، نه فقط جواب نهایی. روش‌های تستی معمولاً کوتاه و بدون توضیح‌اند و در تصحیح تشریحی نمره‌ای به این روش‌ها تعلق نمی‌گیرد.

۳-۲ در سؤالاتی که نیاز به نوشتن فرمول یا رابطه خاصی دارند، حتماً آنها را در پاسخ‌برگ بنویس.

در بسیاری از سؤالات، بخشی از نمره مخصوص نوشتن فرمول یا رابطه خاصی است. در تصحیح رسمی، به این مرحله گاهی تا نیم نمره تعلق می‌گیرد.

**۲-۴ از بدخطی و ریزنویسی پرهیز کن.**

مرتب‌نویسی یعنی احترام به تلاش خودت. ریزنویسی یا اعداد فشرده باعث می‌شود مصحح نتواند مراحل را به‌درستی دنبال کند.

۲-۵ پاسخ را ابتدا در برگه چرک‌نویس حل کن.

نوشتن مستقیم روی برگه اصلی خطرناک است، چون ممکن است در پایان متوجه اشتباه شوی که باعث کثیفی و خط خوردگی بیش از حد پاسخ‌برگ می‌شود. بنابراین بهترین راهکار این است که ابتدا پاسخ احتمالی را در چرک‌نویس بنویسی و وقتی مطمئن شدی مسیر حل درست است، پاسخ را با خط خوش در پاسخ‌برگ بنویس. در انتهای حل هر سوال، پاسخ نهایی را در یک کادر قرار بده یا با خودکار پرنرنگ‌تر مشخص کن تا بهتر دیده شود.

۲-۶ مدیریت زمان را جدی بگیر.

سؤال‌ها را یک‌بار سریع مرور کن و تشخیص بده کدام راحت‌تر است. از سؤال‌های ساده‌تر شروع کن تا اعتمادبه‌نفس پیدا کنی و کنار سؤال‌های دشوار علامت‌گذاری کن و بعد از اینکه همه سؤال‌های ساده را حل کردی به آن‌ها برگرد.

توجه داشته باشید که در ریاضی، اگر ۱۵ دقیقه را روی یک سؤال سخت وقت بگذاری، ممکن است دو سؤال ساده‌تر را از دست بدهی.

یاد بگیر زمان را بین سوالات تقسیم کنی، نه اینکه با اضطراب دنبال سؤال‌ها بدوی.

۲-۷ خوش‌خط و استاندارد بنویس.

لزومی ندارد خط زیبا باشد، فقط باید خوانا و منظم باشد. به عنوان مثال اعداد منفی را واضح بنویس، توان‌ها را بالاتر قرار بده، و از نمادهای درست استفاده کن.

بخش سوم: جمع‌بندی اشتباهات رایج که باید از آن‌ها پرهیز کنیم.

۱. مراحل حل را به صورت کامل بنویسید و هیچ مرحله‌ای را جا نیندازید (جامپ نکنید) چرا که در اکثر مواقع، به مسیر حل نمره تعلق می‌گیرد و نه جواب نهایی!
۲. اگر سوالی نیاز به نوشتن فرمول دارد، حتماً فرمول را در پاسخنامه وارد کنید.
۳. سعی کنید که با تمرین زیاد، اشتباهات محاسباتی خود را کاهش دهید. جابه‌جایی یک علامت منفی با مثبت، کل مسیر حل و حتی جواب نهایی را تغییر می‌دهد.
۴. اگر سوالی نیاز به رسم شکل، جدول و یا نمودار داشته باشد، حتماً آن را با دقت و وسواس کامل در پاسخ‌برگ وارد کنید.
۵. جواب نهایی را داخل کادر قرار دهید و یا زیر آن خط بکشید.

در نهایت یادتان باشد که در امتحانات تشریحی (برخلاف آزمون تستی)، فقط پاسخ درست ملاک نیست بلکه به مسیر حل و نحوه رسیدن به جواب، نمره تعلق می‌گیرد. امتحان تشریحی یعنی شما باید استدلال، فرمول، مراحل حل و نتیجه‌گیری را به روشنی بنویسید.

با آرزوی موفقیت

گروه ریاضی ماز



امتحانات نهایی آموزش و پرورش

فرورداد ماه ۱۴۰۳

فرورداد ماه ۱۴۰۴

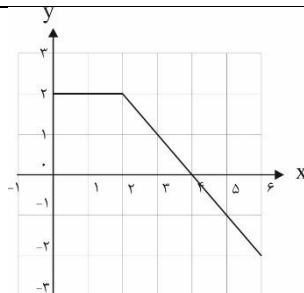
@konkurbanks / @Tahlilazemoon

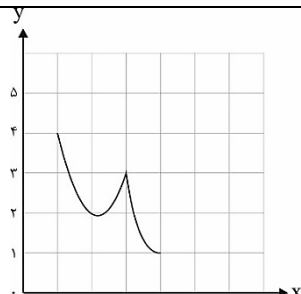
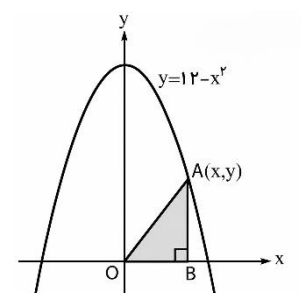


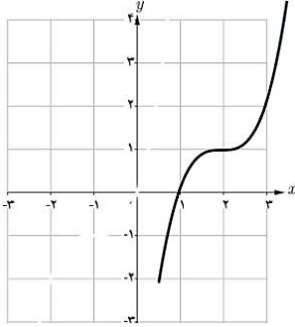
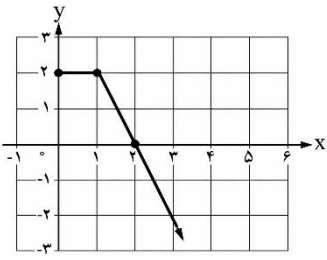
فرورداد ماه ۱۴۰۳



SanjeshCloud
بنده • تلگرام •
www.SanjeshCloud.ir

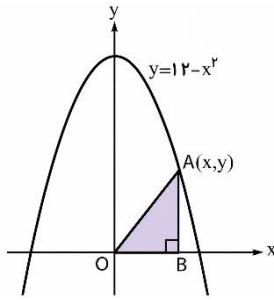
سؤالات آزمون نهایی درس: ریاضی ۳		پایه: دوازدهم		رشته: علوم تجربی		تاریخ آزمون: ۱۴۰۳/۰۳/۱۳	
تعداد صفحه: ۲		مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه		ساعت شروع: ۷:۳۰ به وقت تهران		نام و نام خانوادگی:	
دانش آموزان روزانه، بزرگسالان، آموزش از راه دور، ایثارگران، داوطلبان آزاد و متقاضیان ایجاد و یا ترمیم سابقه تحصیلی				مرکز ارزشیابی و تضمین کیفیت نظام آموزش و پرورش			
(داخل و خارج از کشور) - خرداد ۱۴۰۳							
«سالروز ارتحال رهبر کبیر انقلاب اسلامی ایران و شهدای پانزده خرداد تسلیت باد»							
ردیف		سؤالات (پاسخ نامه دارد) - استفاده از ماشین حساب ساده (دارای چهار عمل اصلی) مجاز است.					
نمره							
۱		۰.۷۵					
		درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. الف) هر نقطه اکسترمم نسبی تابع، یک نقطه بحرانی آن است. ب) تابع $f(x) = \sqrt[3]{x}$ در $x=0$ مشتق پذیر است. ج) در تابع $f(x) = 4 + \sqrt{x-1}$ دامنه تابع $y = (f^{-1} \circ f)(x)$ برابر $[1, +\infty)$ است.					
۲		۰.۷۵					
		جاهای خالی را با عبارت یا عدد مناسب کامل کنید. الف) تابع $g(x) = x^2 - 4x + 5$ در بازه $(-\infty, a]$ اکیداً نزولی است. حداکثر مقدار a برابر است. ب) مقدار عددی عبارت $\sin 15^\circ \cos 15^\circ$ برابر است. ج) اگر صفحه P در یکی از موقعیت‌ها با مولد سطح مخروطی موازی باشد و از رأس آن عبور نکند، شکل حاصل است.					
۳		۰.۵					
		به کمک انتقال نمودار تابع $y = x^3$ نمودار تابع $f(x) = (x-2)^3 + 1$ را رسم کنید.					
۴		۰.۷۵					
		 در شکل روبرو نمودار تابع f رسم شده است. الف) نمودار تابع g با ضابطه $g(x) = f(2x)$ را رسم کنید. ب) مقدار $g \circ f(0)$ را به دست آورید.					
۵		۱.۲۵					
		تابع $f(x) = \sqrt{x+4} - 1$ را در نظر بگیرید. دامنه و ضابطه تابع وارون آن را بیابید.					
۶		۱.۵					
		اگر بیش‌ترین و کم‌ترین مقدار تابع $y = a \sin(8x) + c$ به ترتیب ۹ و ۳ باشد. الف) مقادیر $ a $ و c را بیابید. ب) دوره تناوب تابع را به دست آورید.					
۷		۱.۲۵					
		جواب‌های معادله $\cos(2x) = \frac{1}{4}$ را در بازه $(0, \pi)$ به دست آورید.					
۸		۲					
		حدود زیر را محاسبه کنید. (نماد $[]$ علامت جزء صحیح است). الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$ ب) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{(x-5)^4}$ ج) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3-[x]}{x-3}$ د) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-6x^3 + 7x - 9}{2x^3 - 4x^2 + x}$					
۹		۱					
		اگر نمودار تابع f از نقطه $A(2, 4)$ بگذرد و $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = 3$ باشد، معادله خط مماس بر نمودار f را در نقطه A به دست آورید.					
۱۰		۱.۲۵					
		با استفاده از تعریف مشتق، شیب نیم مماس چپ تابع $f(x) = x^2 - 4 $ را در $x = 2$ بیابید.					

سؤالات آزمون نهایی درس: ریاضی ۳		پایه: دوازدهم		رشته: علوم تجربی		تاریخ آزمون: ۱۴۰۳/۰۳/۱۳	
تعداد صفحه: ۲		مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه		ساعت شروع: ۷:۳۰ به وقت تهران		نام و نام خانوادگی:	
دانش آموزان روزانه، بزرگسالان، آموزش از راه دور، اینترگران، داوطلبان آزاد و متقاضیان ایجاد و یا ترمیم سابقه تحصیلی				مرکز ارزشیابی و تضمین کیفیت نظام آموزش و پرورش			
(داخل و خارج از کشور) - خرداد ۱۴۰۳							
«سالروز ارتحال رهبر کبیر انقلاب اسلامی ایران و شهدای پانزده خرداد تسلیت باد»							
ردیف		سؤالات (پاسخ نامه دارد) - استفاده از ماشین حساب ساده (دارای چهار عمل اصلی) مجاز است.					
نمره							
۱۱		مشتق تابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست).					
۱.۲۵		$f(x) = (x-6)^3 + \frac{5x+3}{\sqrt{2x-1}}$					
۱۲		تابع $f(x) = x^2 - x$ را در نظر بگیرید. الف) آهنگ تغییر متوسط تابع f را در بازه $[0, 2]$ به دست آورید. ب) حدود x را چنان بیابید که آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f از آهنگ تغییر متوسط آن، در بازه $[0, 2]$ بزرگ تر باشد.					
۱		در نمودار تابع مقابل، <u>طول نقاط</u> ماکزیمم نسبی، مینیمم نسبی، ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق را بیابید. 					
۱۴		مطابق شکل زیر، نقطه A در ناحیه اول دستگاه مختصات روی منحنی $y = 12 - x^2$ قرار دارد. با استفاده از جدول تغییرات، مختصات نقطه A را چنان بیابید که مساحت مثلث قائم الزویه OAB بیش ترین مقدار ممکن را داشته باشد. 					
۱۵		در یک بیضی فاصله کانونی با طول قطر کوچک آن برابر است. خروج از مرکز بیضی را بیابید.					
۱.۲۵							
۱۶		اگر مرکز دایره $x^2 + y^2 + ax - 4y - 4 = 0$ ، نقطه $O(1, 2)$ باشد. الف) مقدار a را بیابید. ب) شعاع دایره را محاسبه کنید.					
۱							
۱۷		سه ظرف یکسان داریم. در اولین ظرف ۱۵ مهره قرار دارد که ۳ تای آن ها قرمز است. در ظرف دوم هیچ مهره قرمزی وجود ندارد و در ظرف سوم ۱۲ مهره داریم که ۶ تای آن ها قرمز است. با چشم بسته یک ظرف را انتخاب کرده و یک مهره از آن خارج می کنیم. با چه احتمالی این مهره قرمز است.					
۱.۵							

راهنمای نمره گذاری آزمون نهایی درس: ریاضی ۳		پایه: دوازدهم	رشته: علوم تجربی	تاریخ آزمون: ۱۴۰۳/۰۳/۱۳
تعداد صفحه: ۵		مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه		ساعت شروع: ۷:۳۰ به وقت تهران
دانش آموزان روزانه، بزرگسالان، آموزش از راه دور، اینترگران، داوطلبان آزاد و متقاضیان ایجاد و یا ترمیم سابقه تحصیلی		مرکز ارزشیابی و تضمین کیفیت نظام آموزش و پرورش		
ردیف		راهنمای تصحیح		
۱	الف) درست (۰/۲۵) (صفحه ۱۰۶) ب) نادرست (۰/۲۵) (صفحه ۸۰) ج) درست (۰/۲۵) (صفحه ۲۵)	۰/۷۵		
۲	الف) ۲ (۰/۲۵) (صفحه ۱۰) ب) $\frac{1}{4}$ (۰/۲۵) (صفحه ۴۳) ج) سهمی (۰/۲۵) (صفحه ۱۲۷)	۰/۷۵		
۳	(صفحه ۵)			
۴	الف) (۰/۵)			
۵	ب) $g(f(0)) = g(2) = 0$ (۰/۲۵)	$y = \sqrt{x+4} - 1 \Rightarrow y+1 = \sqrt{x+4} \Rightarrow (y+1)^2 = x+4 \Rightarrow (y+1)^2 - 4 = x$ $\Rightarrow f^{-1}(x) = (x+1)^2 - 4$ (۰/۷۵) $D_{f^{-1}} = R_f = [-1, +\infty)$ (۰/۵)		
۶	روش اول: روش دوم:	$ a = \frac{\text{Max} - \text{Min}}{2} = \frac{9-3}{2} = 3$ (۰/۵) $c = \frac{\text{Max} + \text{Min}}{2} = \frac{9+3}{2} = 6$ (۰/۵) $\begin{cases} a + c = 9 & (۰/۲۵) \\ - a + c = 3 & (۰/۲۵) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 6 & (۰/۲۵) \\ a = 3 & (۰/۲۵) \end{cases}$		

راهنمای نمره گذاری آزمون نهایی درس: ریاضی ۳		پایه: دوازدهم	رشته: علوم تجربی	تاریخ آزمون: ۱۴۰۳/۰۳/۱۳
تعداد صفحه: ۵		مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه		ساعت شروع: ۷:۳۰ به وقت تهران
دانش آموزان روزانه، بزرگسالان، آموزش از راه دور، اینترگران، داوطلبان آزاد و متقاضیان ایجاد و یا ترمیم سابقه تحصیلی		مرکز ارزشیابی و تضمین کیفیت نظام آموزش و پرورش		
ردیف		راهنمای تصحیح		
		(ب) $T = \frac{2\pi}{ b } = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4} \quad (۰/۵)$		
		(صفحه ۴۱)		
	۷	روش اول: $\cos 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \quad (۰/۲۵) \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \left(x = k\pi \pm \frac{\pi}{6} \right) \quad (۰/۵)$ $\xrightarrow{x \in (0, \pi)} x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \quad (۰/۵)$		
		روش دوم:		
		$\cos 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \quad (۱/۲۵)$		
		(صفحه ۴۶)		
	۸	(الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)} = 2 \quad (۰/۵)$		
		(صفحه ۵۷)		
	۲	(ب) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{(x-5)^4} = \frac{1}{0^+} = +\infty \quad (۰/۵)$		
		(صفحه ۵۷)		
		(ج) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3-[x]}{x-3} = \frac{1}{0^-} = -\infty \quad (۰/۵)$		
		(صفحه ۶۴)		
		(د) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-6x^3 + 7x - 9}{2x^3 - 4x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-6x^3}{2x^3} = -3 \quad (۰/۵)$		
	۹	روش اول: فرض کنیم $y = ax + b$ ، خط مماس بر منحنی f در نقطه $(2, 4)$ واقع بر آن باشد: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 3 \Rightarrow f'(2) = 3 \quad (۰/۲۵) \Rightarrow a = 3 \quad (۰/۲۵)$ $y = 3x + b \xrightarrow{(2, 4)} b = -2 \quad (۰/۲۵) \Rightarrow y = 3x - 2 \quad (۰/۲۵)$		

راهنمای نمره گذاری آزمون نهایی درس: ریاضی ۳		پایه: دوازدهم	رشته: علوم تجربی	تاریخ آزمون: ۱۴۰۳/۰۳/۱۳
تعداد صفحه: ۵	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	ساعت شروع: ۷:۳۰ به وقت تهران		
دانش آموزان روزانه، بزرگسالان، آموزش از راه دور، اینترگران، داوطلبان آزاد و متقاضیان ایجاد و یا ترمیم سابقه تحصیلی		مرکز ارزشیابی و تضمین کیفیت نظام آموزش و پرورش		
داخل و خارج از کشور) - خرداد ۱۴۰۳				
ردیف	راهنمای تصحیح	نمره		
	روش دوم: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 3 \Rightarrow f'(2) = 3 \text{ (۰/۲۵)} \Rightarrow m = 3 \text{ (۰/۲۵)}$ $y - y_0 = m(x - x_0) \xrightarrow{(2,4)} y - 4 = 3(x - 2) \text{ (۰/۵)}$ (صفحه ۷۶)			
۱۰	روش اول: $f'_-(2) \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{ x^2 - 4 - 0}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x^2 - 4)}{x - 2}$ $= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = -4 \text{ (۰/۲۵)}$ $f'_-(2) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{ (2+h)^2 - 4 - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{ h^2 + 4h }{h}$ $= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-(h^2 + 4h)}{h} = -4 \text{ (۰/۲۵)}$ روش دوم: (صفحه ۷۹)	۱/۲۵		
۱۱	$f'(x) = \underbrace{3(x-6)^2}_{(۰/۲۵)} + \frac{\overbrace{5(\sqrt{2x-1})}^{(۰/۲۵)} - \overbrace{\frac{2}{2\sqrt{2x-1}}(5x+3)}^{(۰/۲۵)}}{\underbrace{(\sqrt{2x-1})^2}_{(۰/۲۵)}} \text{ (۰/۲۵)}$ (صفحه ۸۸)	۱/۲۵		

راهنمای نمره‌گذاری آزمون نهایی درس: ریاضی ۳		پایه: دوازدهم	رشته: علوم تجربی	تاریخ آزمون: ۱۴۰۳/۰۳/۱۳												
تعداد صفحه: ۵		مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه		ساعت شروع: ۷:۳۰ به وقت تهران												
دانش آموزان روزانه، بزرگسالان، آموزش از راه دور، اینترگران، داوطلبان آزاد و متقاضیان ایجاد و یا ترمیم سابقه تحصیلی		مرکز ارزشیابی و تضمین کیفیت نظام آموزش و پرورش														
(داخل و خارج از کشور) - خرداد ۱۴۰۳																
ردیف	راهنمای تصحیح															
نمره																
۱۲	الف) $\frac{f(2)-f(0)}{2-0} = \frac{2-0}{2} = 1$ (۰/۲۵) ب) $f'(x) = 2x-1 \Rightarrow 2x-1 > 1 \Rightarrow x > 1$ (۰/۲۵) (صفحه ۱۰۰) توجه: (اگر دانش‌آموزی جواب به‌دست آمده در قسمت (ب) را با بازه $[0, 2]$ اشتراک گرفت نمره کامل داده شود).															
۱۳	۲ = طول مینیمم نسبی ۳ = طول ماکزیمم نسبی ۴ = طول مینیمم مطلق ۱ = طول ماکزیمم مطلق (صفحه ۱۱۰)															
۱۴	(صفحه ۱۲۰) $S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2}xy = \frac{1}{2}x(12-x^2) = 6x - \frac{1}{2}x^3$ (۰/۲۵) $\Rightarrow S'(x) = 6 - \frac{3}{2}x^2$ (۰/۲۵) $6 - \frac{3}{2}x^2 = 0$ (۰/۲۵) $\xrightarrow{x>0} x = 2$ (۰/۲۵) $\Rightarrow y = 12 - 4 = 8$ (۰/۲۵) <table><tr><td>x</td><td>0</td><td>2</td><td>$\sqrt{12}$</td></tr><tr><td>S'(x)</td><td></td><td>+</td><td>-</td></tr><tr><td>S(x)</td><td></td><td>↗</td><td>↘</td></tr></table> (۰/۲۵) 				x	0	2	$\sqrt{12}$	S'(x)		+	-	S(x)		↗	↘
x	0	2	$\sqrt{12}$													
S'(x)		+	-													
S(x)		↗	↘													
۱۵	اگر FF' را فاصله کانونی و BB' را قطر کوچک بیضی در نظر بگیریم، داریم: $FF' = BB' \Rightarrow 2c = 2b \Rightarrow c = b$ (۰/۵) $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = c^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 2c^2 \Rightarrow e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (۰/۲۵) (صفحه ۱۳۲)															
۱۶	الف) $-\frac{a}{2} = 1$ (۰/۲۵) $\Rightarrow a = -2$ (۰/۲۵) ب) $r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2} - 4c = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 16 + 16}$ (۰/۲۵) $\Rightarrow r = 3$ (۰/۲۵) (صفحه ۱۳۷)															

راهنمای نمره گذاری آزمون نهایی درس: ریاضی ۳		پایه: دوازدهم	رشته: علوم تجربی	تاریخ آزمون: ۱۴۰۳/۰۳/۱۳
تعداد صفحه: ۵	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	ساعت شروع: ۷:۳۰ به وقت تهران		
دانش آموزان روزانه، بزرگسالان، آموزش از راه دور، اینترگران، داوطلبان آزاد و متقاضیان ایجاد و یا ترمیم سابقه تحصیلی		مرکز ارزشیابی و تضمین کیفیت نظام آموزش و پرورش		
		(داخل و خارج از کشور) - خرداد ۱۴۰۳		
ردیف	راهنمای تصحیح			نمره
۱۷	$P = \underbrace{\left(\frac{1}{3} \times \frac{3}{15}\right)}_{(0/25)} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} \times 0\right)}_{(0/25)} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} \times \frac{6}{12}\right)}_{(0/25)} = \frac{7}{30} \quad (0/25)$ (صفحه ۱۴۷) توجه: (به روش نمودار درختی نیز نمره تعلق گیرد.)			۱/۵
	مجموع نمرات			۲۰

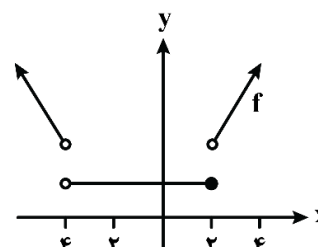
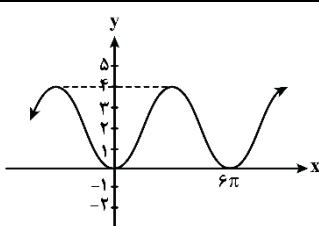
@konkurbanks / @Tahlilazemoon

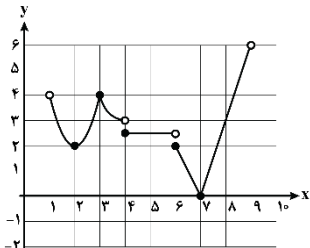
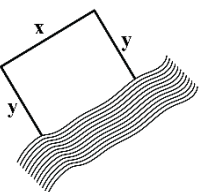


فردا د ماه ۱۴



SanjeshCloud
بنده • تگرام
www.SanjeshCloud.ir

سؤالات آزمون نهایی درس: ریاضی ۳		پایه: دوازدهم		رشته: علوم تجربی		تاریخ آزمون: ۱۴۰۴/۰۳/۱۱											
تعداد صفحه: ۲		مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه		ساعت شروع: ۷:۳۰ به وقت تهران		نام و نام خانوادگی:											
دانش آموزان روزانه، بزرگسالان، آموزش از راه دور، ایثارگران، داوطلبان آزاد و متقاضیان ایجاد و یا ترمیم سابقه تحصیلی				مرکز ارزشیابی و تضمین کیفیت نظام آموزش و پرورش													
(داخل و خارج از کشور) - خرداد ۱۴۰۴																	
ردیف		سؤالات (پاسخ برگ دارد) - استفاده از ماشین حساب ساده مجاز است.															
۱		درستی یا نادرستی عبارت های زیر را مشخص کنید. الف) دو پیشامد A و B از هم مستقل هستند، هرگاه $A \cap B = \emptyset$. ب) هرچه خروج از مرکز بیضی کوچک تر و به صفر نزدیک تر باشد، شکل بیضی به شکل دایره نزدیک تر است. پ) نمودار تابع $y = 3f(x)$ با انبساط نمودار $y = f(x)$ در امتداد محور y ها به دست می آید.															
۲		جاهای خالی را با عبارت های مناسب پر کنید. الف) شکل حاصل از دوران یک مثلث قائم الزاویه حول یکی از اضلاع قائمه آن است. ب) نقطه به طول c از دامنه تابع f که در آن $f'(c) = 0$ یا $f'(c)$ موجود نباشد را یک نقطه می نامیم.															
۳		با توجه به نمودار تابع f، در جدول زیر برای هر یک از قسمت های ستون «A» قسمت صحیح از ستون «B» را انتخاب کنید. (یکی از قسمت های ستون «B» اضافه است.)  <table><thead><tr><th>B</th><th>A</th></tr></thead><tbody><tr><td>(۱) $(-\infty, -4)$</td><td>الف) تابع در این بازه اکیداً صعودی است.</td></tr><tr><td>(۲) $(2, +\infty)$</td><td>ب) تابع در این بازه اکیداً نزولی است.</td></tr><tr><td>(۳) $(-1, +\infty)$</td><td>پ) تابع در این بازه ثابت است.</td></tr><tr><td>(۴) $(-4, 2]$</td><td></td></tr></tbody></table>						B	A	(۱) $(-\infty, -4)$	الف) تابع در این بازه اکیداً صعودی است.	(۲) $(2, +\infty)$	ب) تابع در این بازه اکیداً نزولی است.	(۳) $(-1, +\infty)$	پ) تابع در این بازه ثابت است.	(۴) $(-4, 2]$	
B	A																
(۱) $(-\infty, -4)$	الف) تابع در این بازه اکیداً صعودی است.																
(۲) $(2, +\infty)$	ب) تابع در این بازه اکیداً نزولی است.																
(۳) $(-1, +\infty)$	پ) تابع در این بازه ثابت است.																
(۴) $(-4, 2]$																	
۴		اگر $f(x) = 3\sqrt{x} + 2$ و $f(g(x)) = 3x^2 - 4$ ، آنگاه ضابطه تابع g(x) را به دست آورید.															
۵		اگر $f(x) = \sqrt{x-2}$ باشد، آنگاه: الف) دامنه تابع f^{-1} of را به دست آورید. ب) مقدار $f^{-1}(5)$ را محاسبه کنید.															
۶		نمودار زیر مربوط به تابعی با ضابطه $f(x) = a \sin(bx) + 2$ یا $f(x) = a \cos(bx) + 2$ است. با دقت در شکل نمودار و محاسبه مقادیر a و b، ضابطه مربوط به این تابع را به دست آورید. 															
۷		معادله مثلثاتی $\sin x \cdot \cos x = \frac{\sqrt{2}}{4}$ را حل کنید و جواب های کلی آن را بنویسید.															
۸		حدود زیر را محاسبه کنید ([] نماد جزء صحیح است). الف) $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$ ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^5 + 4}{x^3 + x^5}$ پ) $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{[x]-4}{4-x}$															
۹		مشتق تابع $f(x) = x^2 + 1$ را در $x=2$ با استفاده از تعریف مشتق به دست آورید.															
		صفحه ۱ از ۲															

سؤالات آزمون نهایی درس: ریاضی ۳		پایه: دوازدهم	رشته: علوم تجربی	تاریخ آزمون: ۱۴۰۴/۰۳/۱۱
تعداد صفحه: ۲	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	ساعت شروع: ۷:۳۰ به وقت تهران	نام و نام خانوادگی:	
دانش آموزان روزانه، بزرگسالان، آموزش از راه دور، اینترگران، داوطلبان آزاد و متقاضیان ایجاد و یا ترمیم سابقه تحصیلی		مرکز ارزشیابی و تضمین کیفیت نظام آموزش و پرورش		
سؤالات (پاسخ برگ دارد) - استفاده از ماشین حساب ساده مجاز است.		ردیف	نمره	
۱۰	مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست).			
۰/۷۵	الف) $f(x) = (x^3 + 6x)\sqrt[3]{x}$			
۱	ب) $g(x) = \frac{2x+3}{5x^2+4}$			
۱۱	اگر $g'(2) = 3$ ، $g(2) = 5$ و $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5} = 4$ باشد، آنگاه مشتق تابع $h(x) = (f \circ g)(x)$ را در $x = 2$ به دست آورید.			
۱۲	نمودار تابع f در زیر رسم شده است. الف) تابع f در چند نقطه از دامنه اش مشتق ناپذیر است؟ ب) آیا تابع f روی بازه $[4, 6]$ مشتق پذیر است؟ چرا؟			
۰/۲۵				
۰/۵	تابع $f(x) = 7\sqrt{x} + 50$ قد متوسط کودکان را برحسب سانتی متر تا حدود ۶۰ ماهگی نشان می دهد، که در آن x مدت زمان پس از تولد (برحسب ماه) است. آهنگ لحظه ای تغییر قد کودک را در ۲۵ ماهگی به دست آورید.			
۱۳	تابع $f(x) = x^3 - 12x + 4$ را در نظر بگیرید. الف) بزرگ ترین بازه از $\mathbb{R}$ که تابع f در آن نزولی اکید است را به دست آورید. ب) طول نقطه ماکزیمم نسبی تابع f را مشخص کنید.			
۰/۲۵	می خواهیم مطابق شکل مقابل، سه ضلع یک محوطه به شکل مستطیل را در کنار رودخانه نرده کشی کنیم. اگر تنها هزینه ۱۰۰ متر نرده را در اختیار داشته باشیم، به کمک جدول تغییرات، بیشترین مساحت ممکن برای این مستطیل را محاسبه کنید.			
۱/۵				
۱۴	کانون های یک بیضی نقاط $(1, 3)$ و $(1, -5)$ است. اگر اندازه نصف قطر بزرگ آن برابر ۵ باشد، اندازه قطر کوچک بیضی را به دست آورید.			
۱۵	معادله دایره ای را بنویسید که مرکز آن نقطه $(1, -2)$ بوده و بر خط $4x - 3y = 25$ مماس باشد.			
۱۶	دو جعبه یکسان داریم. درون یکی از آن ها ۱۰ لامپ قرار دارد که ۴ تا از آن ها معیوب است و درون جعبه دیگر ۲۰ لامپ قرار دارد که ۵ تا از آن ها معیوب اند. به تصادف جعبه ای انتخاب کرده و یک لامپ از آن به تصادف بیرون می آوریم. چقدر احتمال دارد لامپ انتخابی سالم باشد؟			
۱۷	موفق باشید			
۱۸	صفحه ۲ از ۲			

راهنمای نمره‌گذاری آزمون نهایی درس: ریاضی ۳		پایه: دوازدهم	رشته: علوم تجربی	تاریخ آزمون: ۱۴۰۴/۰۳/۱۱
تعداد صفحه: ۹		مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه		ساعت شروع: ۷:۳۰ به وقت تهران
دانش‌آموزان روزانه، بزرگسالان، آموزش از راه دور، اینترگران، داوطلبان آزاد و متقاضیان ایجاد و یا ترمیم سابقه تحصیلی		مرکز ارزشیابی و تضمین کیفیت نظام آموزش و پرورش		
(داخل و خارج از کشور) - خرداد ۱۴۰۴				
ردیف	راهنمای نمره‌گذاری			
نمره				
همکار محترم، از زحمات شما سپاسگزاریم. لطفاً به موارد زیر دقت فرمائید:				
(۱) تأکید می‌شود که ملاک نمره‌گذاری، راهنمای نمره‌گذاری است و از اعمال سلیقه خودداری شود.				
(۲) معمولاً رسیدن به جواب نهایی سؤال در چند مرحله انجام می‌شود، در صورتی که دانش‌آموز در مراحل ابتدایی اشتباه کرده باشد، اما با توجه به آن اشتباه بقیه موارد را درست انجام داده باشد، فقط نمره آن اشتباه کسر شود و به بقیه مراحل درست، نمره داده شود.				
(۳) این راهنمای نمره‌گذاری، در ساعات اولیه بعد از برگزاری امتحان به صورت غیرقابل استناد منتشر می‌شود و پس از بررسی نهایی به صورت رسمی و قابل استناد منتشر می‌شود. لطفاً دقت فرمایید که نمره‌گذاری شما بر طبق راهنمای نهایی و قابل استناد باشد.				
۱	الف) نادرست (۰/۲۵) صفحه ۱۴۴	ب) درست (۰/۲۵) صفحه ۱۳۱	پ) درست (۰/۲۵) صفحه ۱۹	۰/۷۵
۲	الف) مخروط (۰/۲۵) صفحه ۱۲۳	ب) بحرانی (۰/۲۵) صفحه ۱۰۶		۰/۵
۳	الف) ۲ یا $(۲, +\infty)$ (۰/۲۵)	ب) ۱ یا $(-\infty, -۴)$ (۰/۲۵)	پ) ۴ یا $[-۴, ۲]$ (۰/۲۵) صفحه ۱۰	۰/۷۵
۴	$f(g(x)) = \underbrace{3\sqrt{g(x)} + 2}_{(۰/۲۵)}$ $\underbrace{3x^2 - 4}_{(۰/۲۵)} = \underbrace{3\sqrt{g(x)} + 2}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow \underbrace{\sqrt{g(x)}}_{(۰/۲۵)} = x^2 - 2 \Rightarrow \underbrace{g(x)}_{(۰/۲۵)} = (x^2 - 2)^2, x \geq \sqrt{2}$ توجه: به روش‌های درست دیگر به تناسب نمره داده شود. صفحه ۲۲			
۵	الف) روش اول: $D_{f^{-1} \circ f} = D_f = \underbrace{[2, +\infty)}_{(۰/۲۵)}$ روش دوم: $D_{f^{-1} \circ f} = \underbrace{\left\{x \in D_f \mid f(x) \in D_{f^{-1}}\right\}}_{(۰/۲۵)} = \underbrace{\left\{x \in D_f \mid f(x) \in R_f\right\}}_{(۰/۲۵)} = D_f = [2, +\infty) \quad (۰/۲۵)$ توجه: در صورتی که دانش‌آموز فقط به بازه $[2, +\infty)$ اشاره کند، نمره کامل و به نوشتن بازه به صورت $(2, +\infty)$، (۰/۲۵) نمره تعلق گیرد. ب) روش اول: $\underbrace{f^{-1}(x)}_{(۰/۲۵)} = x^2 + 2 \Rightarrow f^{-1}(5) = 27 \quad (۰/۲۵)$ روش دوم: $f^{-1}(5) = x \Rightarrow f(x) = 5 \Rightarrow \sqrt{x-2} = 5 \quad (۰/۲۵) \Rightarrow x = 27 \quad (۰/۲۵)$ صفحات ۲۵ و ۲۹			

راهنمای نمره گذاری آزمون نهایی درس: ریاضی ۳		پایه: دوازدهم	رشته: علوم تجربی	تاریخ آزمون: ۱۴۰۴/۰۳/۱۱
تعداد صفحه: ۹	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	ساعت شروع: ۷:۳۰ به وقت تهران		
دانش آموزان روزانه، بزرگسالان، آموزش از راه دور، ایثارگران، داوطلبان آزاد و متقاضیان ایجاد و یا ترمیم سابقه تحصیلی		مرکز ارزشیابی و تضمین کیفیت نظام آموزش و پرورش		
(داخل و خارج از کشور) - خرداد ۱۴۰۴				
ردیف	راهنمای نمره گذاری			نمره
۶	روش اول:			
	$\underbrace{ a + 2 = 4}_{(0/25)} \Rightarrow a = 2 \xrightarrow{a < 0} a = -2 (0/25)$			
	$\underbrace{T = \frac{2\pi}{ b } = 6\pi}_{(0/25)} \Rightarrow b = \pm \frac{1}{3} (0/25)$			
	$f(x) = -2\cos\left(\frac{x}{3}\right) + 2 (0/25)$			
	تشخیص این که تابع کسینوسی است: (۰/۲۵)			
	روش دوم:			
۱/۵	$\underbrace{ a = \frac{4-0}{2} = 2}_{(0/25)} \xrightarrow{a < 0} a = -2 (0/25)$			
	$\underbrace{T = \frac{2\pi}{ b } = 6\pi}_{(0/25)} \Rightarrow b = \pm \frac{1}{3} (0/25)$			
	$f(x) = -2\cos\left(\frac{x}{3}\right) + 2 (0/25)$			
	تشخیص این که تابع کسینوسی است: (۰/۲۵)			
	روش سوم:			
	با توجه به نمودار، تابع f کسینوسی است (۰/۲۵)			
	$f(0) = 0 \Rightarrow a \cos(0) + 2 = 0 \Rightarrow a = -2$ ۰/۲۵			
	$f(6x) = 0 \Rightarrow \underbrace{-2\cos(6\pi b) + 2}_{0/25} = 0 \Rightarrow 6\pi b = 2k\pi \Rightarrow b = \frac{k}{3} \quad k \in \mathbb{Z} \xrightarrow{T=6\pi} b = \pm \frac{1}{3} (0/25)$ ۰/۲۵			
	توجه ۱: در صورتی که دانش آموز هریک از موارد $ b = \frac{1}{3}$ یا $b = \frac{1}{3}$ یا $b = -\frac{1}{3}$ را نوشته باشد، نمره (۰/۲۵) تعلق گیرد.			
	توجه ۲: در صورتی که دانش آموز ضابطه تابع را به صورت $f(x) = -2\cos\left(-\frac{x}{3}\right) + 2$ بنویسد، (۰/۲۵) نمره تعلق گیرد.			
	صفحات ۴۰ و ۴۱			

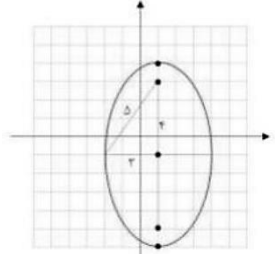
تاریخ آزمون: ۱۴۰۴/۰۳/۱۱	رشته: علوم تجربی	پایه: دوازدهم	راهنمای نمره گذاری آزمون نهایی درس: ریاضی ۳	
ساعت شروع: ۷:۳۰ به وقت تهران			مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	تعداد صفحه: ۹
مرکز ارزشیابی و تضمین کیفیت نظام آموزش و پرورش		دانش آموزان روزانه، بزرگسالان، آموزش از راه دور، اینترگران، داوطلبان آزاد و متقاضیان ایجاد و یا ترمیم سابقه تحصیلی (داخل و خارج از کشور) - خرداد ۱۴۰۴		
نمره	راهنمای نمره گذاری			ردیف
۱/۵	روش اول: $2 \sin x \cdot \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin(2x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin(2x) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$ $\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} & (0/25) \\ 2x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{4} & (0/25) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{8} & (0/25) \\ x = \frac{(2k+1)\pi}{2} - \frac{\pi}{8} & (0/25) \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$ روش دوم: $\frac{1}{2} \sin(2x) = \frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \sin(2x) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow$ $\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} & (0/25) \\ 2x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{4} & (0/25) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{8} & (0/25) \\ x = \frac{(2k+1)\pi}{2} - \frac{\pi}{8} & (0/25) \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$ توجه: اگر دسته دوم جواب در هر دو روش به صورت $x = k\pi + \frac{3\pi}{8}$ نوشته شده باشد، نمره تعلق می گیرد. صفحه ۴۷			۷
۰/۷۵	الف) روش اول: $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2} \times \frac{\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4}{\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(x-8)(\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4)}{\underbrace{x-8}_{(0/25)}} = \lim_{x \rightarrow 8} (\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4) = 12 \quad (0/25)$ روش دوم: $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\overbrace{(\sqrt[3]{x}-2)(\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4)}^{(0/5)}}{\sqrt[3]{x}-2} = \lim_{x \rightarrow 8} (\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4) = 12 \quad (0/25)$ $\sqrt[3]{x} = t \Rightarrow x = t^3 \quad (0/25)$			۸

راهنمای نمره‌گذاری آزمون نهایی درس: ریاضی ۳ تعداد صفحه: ۹ مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه ساعت شروع: ۷:۳۰ به وقت تهران تاریخ آزمون: ۱۴۰۴/۰۳/۱۱ مرکز ارزشیابی و تضمین کیفیت نظام آموزش و پرورش (داخل و خارج از کشور) - خرداد ۱۴۰۴	پایه: دوازدهم رشته: علوم تجربی	روش سوم: $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2} = \lim_{t \rightarrow 2} \frac{t^3-8}{t-2} = \lim_{t \rightarrow 2} \frac{(t-2)(t^2+2t+4)}{t-2} = 12$ صفحه ۵۲ (ب) روش اول: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^5+4}{x^3+x^5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^5}{x^5} = 2 \quad (0/25)$ روش دوم: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^5+4}{x^3+x^5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5 \left(2 + \frac{4}{x^5}\right)}{x^5 \left(\frac{1}{x^2} + 1\right)} = 2$ صفحه ۶۴ $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{[x]-4}{4-x} = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{-1}{4-x} = -\infty$ توجه: اگر دانش‌آموز جواب را تنها $-\infty$ نوشته بود، نمره کامل و اگر $+\infty$ نوشته بود (۰/۲۵) نمره تعلق گیرد. صفحه ۵۷
۱	روش اول: $f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+1-5}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = 4 \quad (0/25)$ روش دوم: $f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4+4h+h^2+1-5}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(4+h)}{h} = 4 \quad (0/25)$	۹

راهنمای نمره‌گذاری آزمون نهایی درس: ریاضی ۳		پایه: دوازدهم	رشته: علوم تجربی	تاریخ آزمون: ۱۴۰۴/۰۳/۱۱
تعداد صفحه: ۹	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	ساعت شروع: ۷:۳۰ به وقت تهران		
دانش‌آموزان روزانه، بزرگسالان، آموزش از راه دور، اینترگران، داوطلبان آزاد و متقاضیان ایجاد و یا ترمیم سابقه تحصیلی		مرکز ارزشیابی و تضمین کیفیت نظام آموزش و پرورش		
(داخل و خارج از کشور) - خرداد ۱۴۰۴				
ردیف	راهنمای نمره‌گذاری			نمره
	روش سوم: $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 + 1 - x^2 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h} = 2x$ $\Rightarrow f'(2) = 2 \times 2 = 4$			صفحه ۷۳
۱۰	الف) $f'(x) = \underbrace{(3x^2 + 6)}_{(0/25)} \underbrace{(\sqrt[3]{x})}_{(0/25)} + \underbrace{\left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)}_{(0/25)} (x^3 + 6x)$ تذکر: با توجه به اینکه دانش‌آموز ممکن است فرجه ۳ را توان در نظر بگیرد، به روش زیر نمره تعلق گیرد: $f'(x) = \underbrace{3(x^3 + 6x)^2}_{(0/25)} \underbrace{(3x^2 + 6)}_{(0/25)} \underbrace{\sqrt{x}}_{(0/25)} + \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}}_{(0/25)} \underbrace{(x^3 + 6x)^3}_{(0/25)}$ ب) $g'(x) = \frac{\underbrace{(2)(5x^2 + 4)}_{(0/25)} - \underbrace{(10x)(2x + 3)}_{(0/25)}}{\underbrace{(5x^2 + 4)^2}_{(0/25)}}$			صفحه ۹۲
۱۱	$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5} = f'(5) = 4 \quad (0/25)$ $h'(2) = g'(2)f'(g(2)) = \underbrace{3}_{(0/25)} \times \underbrace{f'(5)}_{(0/25)} = 12 \quad (0/25)$			صفحه ۸۷
۱۲	الف) ۴ نقطه (۰/۲۵) صفحه ۸۲ ب) خیر (۰/۲۵) زیرا در $x = 6$ مشتق چپ (پیوستگی چپ) ندارد. (۰/۲۵) صفحه ۸۹			
۱۳	$f'(x) = \frac{v}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(25) = \frac{v}{10}$			صفحه ۹۶

راهنمای نمره‌گذاری آزمون نهایی درس: ریاضی ۳			پایه: دوازدهم		رشته: علوم تجربی		تاریخ آزمون: ۱۴۰۴/۰۳/۱۱										
تعداد صفحه: ۹		مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه		ساعت شروع: ۷:۳۰ به وقت تهران													
دانش‌آموزان روزانه، بزرگسالان، آموزش از راه دور، ایثارگران، داوطلبان آزاد و متقاضیان ایجاد و یا ترمیم سابقه تحصیلی (داخل و خارج از کشور) - خرداد ۱۴۰۴				مرکز ارزشیابی و تضمین کیفیت نظام آموزش و پرورش													
ردیف		راهنمای نمره‌گذاری						نمره									
روش اول: الف) $[-۲, ۲]$ (۰/۲۵) $\underbrace{f'(x) = 3x^2 - 12 = 0 \Rightarrow x = \pm 2}_{(۰/۲۵)}$ <table><tr><td>x</td><td>-۲</td><td>۲</td></tr><tr><td>f'</td><td>+</td><td>-</td></tr><tr><td>f</td><td></td><td></td></tr></table> رسم جدول (۰/۲۵) ب) با توجه به جدول تغییرات، طول ماکزیمم نسبی: $x = -۲$ (۰/۲۵) روش دوم: الف: $f'(x) = 3x^2 - 12 \leq 0 \Rightarrow x \leq 2 \Rightarrow -۲ \leq x \leq 2$ (۰/۵) ب) با توجه به قسمت الف، طول ماکزیمم نسبی: $x = -۲$ (۰/۲۵) روش سوم: الف: $f'(x) = 3x^2 - 12$ (۰/۲۵) با توجه به نمودار تابع مشتق، مقدار مشتق در بازه $[-۲, ۲]$ نامثبت است، پس تابع نزولی اکید است. (۰/۲۵) رسم نمودار (۰/۵) ب: با توجه به نمودار تابع مشتق، $x = -۲$ طول ماکسیمم نسبی است. (۰/۲۵) توجه: اگر جواب قسمت الف به صورت هریک از بازه‌های $(-۲, ۲]$ یا $[-۲, ۲)$ یا $(-۲, ۲)$ هم نوشته شده باشد، نمره تعلق گیرد. صفحه ۱۱۲									x	-۲	۲	f'	+	-	f		
x	-۲	۲															
f'	+	-															
f																	

راهنمای نمره‌گذاری آزمون نهایی درس: ریاضی ۳		پایه: دوازدهم	رشته: علوم تجربی	تاریخ آزمون: ۱۴۰۴/۰۳/۱۱																					
تعداد صفحه: ۹		مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه		ساعت شروع: ۷:۳۰ به وقت تهران																					
دانش آموزان روزانه، بزرگسالان، آموزش از راه دور، ایثارگران، داوطلبان آزاد و متقاضیان ایجاد و یا ترمیم سابقه تحصیلی		مرکز ارزشیابی و تضمین کیفیت نظام آموزش و پرورش																							
(داخل و خارج از کشور) - خرداد ۱۴۰۴																									
ردیف	راهنمای نمره‌گذاری																								
۱۵	$x + 2y = 100 \Rightarrow x = 100 - 2y$$S = x.y = (100 - 2y)y = 100y - 2y^2 \quad (\cdot/25)$$S'(y) = 100 - 4y = 0 \Rightarrow y = 25 \quad (\cdot/25)$$S_{\max} = 50 \times 25 = 1250 \quad (\cdot/25)$ $x + 2y = 100 \Rightarrow 2y = 100 - x \Rightarrow y = \frac{100 - x}{2}$$S = xy = x \left(\frac{100 - x}{2} \right) = \frac{100x - x^2}{2} \quad (\cdot/25)$$S'(x) = \frac{100 - 2x}{2} = 0 \Rightarrow 2x = 100 \Rightarrow x = 50 \quad (\cdot/25)$$S_{\max} = 50 \times 25 = 1250 \quad (\cdot/25)$ رسم جدول (۰/۲۵) روش دوم: <table><tr><td>y</td><td>۰</td><td>۲۵</td><td>۵۰</td></tr><tr><td>S'</td><td>+</td><td>-</td><td></td></tr><tr><td>S</td><td></td><td>↗</td><td>↘</td></tr></table> <table><tr><td>x</td><td></td><td>۵۰</td></tr><tr><td>S'</td><td>+</td><td>-</td></tr><tr><td>S</td><td>↗</td><td>↘</td></tr></table>				y	۰	۲۵	۵۰	S'	+	-		S		↗	↘	x		۵۰	S'	+	-	S	↗	↘
	y	۰	۲۵	۵۰																					
S'	+	-																							
S		↗	↘																						
x		۵۰																							
S'	+	-																							
S	↗	↘																							
۱۶	روش اول: $\begin{cases} 2c = 3 - (-5) = 8 \Rightarrow c = 4 \\ a = 5 \end{cases} \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 25 = b^2 + 16 \Rightarrow b = 3 \Rightarrow 2b = 6 \quad (\cdot/25)$ روش دوم: $2c = FF' = \sqrt{(1-1)^2 + (3+5)^2} = 8 \Rightarrow c = 4 \quad (\cdot/25)$$a = 5 \Rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{9} = 3 \Rightarrow 2b = 6 \quad (\cdot/25)$ روش سوم: با توجه به شکل، $c = 4$ (۰/۲۵) و $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b^2 = 9 \Rightarrow b = 3 \Rightarrow 2b = 6 \quad (\cdot/25)$																								

تاریخ آزمون: ۱۴۰۴/۰۳/۱۱	رشته: علوم تجربی	پایه: دوازدهم	راهنمای نمره گذاری آزمون نهایی درس: ریاضی ۳	
ساعت شروع: ۷:۳۰ به وقت تهران			مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	تعداد صفحه: ۹
مرکز ارزشیابی و تضمین کیفیت نظام آموزش و پرورش		دانش آموزان روزانه، بزرگسالان، آموزش از راه دور، اینترگران، داوطلبان آزاد و متقاضیان ایجاد و یا ترمیم سابقه تحصیلی (داخل و خارج از کشور) - خرداد ۱۴۰۴		
نمره	راهنمای نمره گذاری			ردیف
				صفحه ۱۳۲
۱	$r = \frac{ 4+6-25 }{\sqrt{16+9}} = 3 \quad (۰/۲۵)$ $\underbrace{(x-1)^2}_{۰/۲۵} + \underbrace{(y+2)^2}_{۰/۲۵} = 9 \quad (۰/۲۵)$			روش اول:
	$\begin{cases} 4x - 3y = 25 \\ 4y + 3x = -5 \end{cases} \quad (۰/۲۵)$ $25x = 85 \Rightarrow x = \frac{17}{5} = 3\frac{2}{5}, y = -3/5 \Rightarrow A(3\frac{2}{5}, -3/5) \quad (۰/۲۵)$ $r = OA = \sqrt{(2/5)^2 + (-1/5)^2} = \frac{3}{5} \Rightarrow \underbrace{(x-1)^2}_{۰/۲۵} + \underbrace{(y+2)^2}_{۰/۲۵} = 9 \quad (۰/۲۵)$			روش دوم:
	$r = \frac{ 4+6-25 }{\sqrt{16+9}} = 3 \quad (۰/۲۵)$ $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ $O(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}) = (1, -2) \Rightarrow \underbrace{a = -2}_{۰/۲۵}, \underbrace{b = 4}_{۰/۲۵}$ $r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = 3 \Rightarrow \sqrt{4 + 16 - 4c} = 6 \Rightarrow 20 - 4c = 36 \Rightarrow c = -4 \quad (۰/۲۵)$ $\Rightarrow x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$			روش سوم:
				صفحه ۱۴۲

راهنمای نمره‌گذاری آزمون نهایی درس: ریاضی ۳		پایه: دوازدهم	رشته: علوم تجربی	تاریخ آزمون: ۱۴۰۴/۰۳/۱۱
تعداد صفحه: ۹		مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه		
دانش‌آموزان روزانه، بزرگسالان، آموزش از راه دور، اینترگران، داوطلبان آزاد و متقاضیان ایجاد و یا ترمیم سابقه تحصیلی (داخل و خارج از کشور) - خرداد ۱۴۰۴		مرکز ارزشیابی و تضمین کیفیت نظام آموزش و پرورش		
ردیف	راهنمای نمره‌گذاری			
		نمره		
۱۸		روش اول: اگر پیشامد سالم بودن را A و جعبه اول را B_1 و جعبه دوم را B_2 در نظر بگیریم، آن‌گاه داریم: $P(A) = P(B_1)P(A B_1) + P(B_2)P(A B_2)$ $P(A) = \frac{1}{2} \times \frac{6}{10} + \frac{1}{2} \times \frac{15}{20} = \frac{6}{20} + \frac{15}{40} = \frac{27}{40} = 0.675 \quad (0.25)$ توجه: اگر دانش‌آموز فقط فرمول قانون احتمال کل را بنویسد و ادامه راه‌حل را ننویسد، نمره تعلق گیرد. روش دوم:		
		۱/۲۵ ۱/۲ ۶/۱۰ ۴/۱۰ ۱/۲ ۱۵/۲۰ ۵/۲۰		
		توجه: اگر دانش‌آموز فقط نمودار درختی فوق را به‌طور کامل رسم کند و ادامه راه‌حل را ننویسد، نمره تعلق گیرد. روش سوم:		
		$P(A') = \frac{1}{2} \times \frac{4}{10} + \frac{1}{2} \times \frac{5}{20} = \frac{4}{20} + \frac{5}{40} = \frac{13}{40} \quad (0.25)$ $P(A) = 1 - \frac{13}{40} = \frac{27}{40} = 0.675 \quad (0.25)$		
صفحه ۱۴۸				
جمع نمره		موفق باشید		
۲۰				