

گزینه دو



مؤسسه آموزشی فرهنگی

داوطلبان آزمون سراسری سال ۱۴۰۱

سال تحصیلی ۰۱ - ۰۰

آزمون آزمایشی ۳۰ اردیبهشت ۱۴۰۱

آزمون اختصاصی ۱

گروه آزمایشی علوم ریاضی

ویژه داوطلبان آزمون سراسری ۱۴۰۱ (گروه آزمایشی علوم ریاضی)

مواد امتحانی	تعداد پرسش	از شماره	تا شماره	وقت پیشنهادی
ریاضیات	۵۰	۱۰۱	۱۵۰	۸۰ دقیقه

مرحله ۱۵

دفترچه شماره ۲



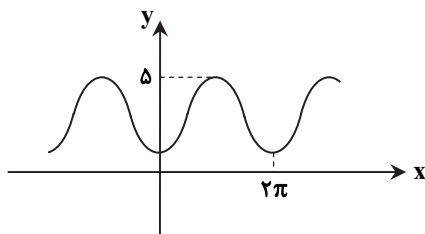
همچنین، شما می توانید با اسکن تصویر روبه رو به وسیله گوشی هوشمند و یا تبلت خود، پاسخ تشریحی درس های عمومی و اختصاصی را مشاهده نمایید.

داوطلب گرامی، جهت استفاده از خدمات طلایی خود مانند کارنامه های هوشمند بعد از آزمون ارزشیابی، سنجش های مستمر، پیش آزمون های آنلاین، بانک سؤال گزینه دو، رفع اشکال هوشمند، جزوه های کمک آموزشی، آرشیو آزمون های گزینه دو و ...، با استفاده از شماره داوطلبی (به عنوان نام کاربری) و کد ملی خود (به عنوان رمز عبور) وارد وبسایت گزینه دو به آدرس gozine2.ir شوید. در صورتی که اینترنتی ثبت نام کرده اید، رمز عبور شما همان رمزی است که خودتان انتخاب نموده اید.

۱۰۱- اگر $A(-2, 3)$ روی نمودار تابع $g(x) = -2f(3-x)$ باشد و $B(a, b)$ نقطه متناظر با A روی نمودار تابع $h(x) = 1 + f(\frac{x}{2} - 1)$ باشد، مقدار ab کدام است؟

- (۱) -۶ (۲) $-\frac{15}{2}$ (۳) $\frac{15}{2}$ (۴) ۶

۱۰۲- شکل زیر بخشی از نمودار تابع $f(x) = a - b\sin(\frac{3\pi}{2} - bx)$ را نمایش می‌دهد. مقدار $f(\frac{2\pi b}{a})$ کدام است؟



- (۱) $\frac{5}{2}$
(۲) ۴
(۳) ۳
(۴) $\frac{7}{2}$

۱۰۳- جواب کلی معادله مثلثاتی $\sin x(\sin x - \cos x) = \cos x(\sin x + \cos x)$ در کدام گزینه آمده است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- (۱) $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$ (۲) $x = k\pi - \frac{\pi}{4}$ (۳) $x = \frac{k\pi}{4} - \frac{\pi}{8}$ (۴) $x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$

۱۰۴- اگر $A(0, 4)$ یک نقطه اکسترمم نسبی تابع $f(x) = (x - \alpha)^2(x - \beta)$ باشد، مقدار β کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) -۲

۱۰۵- نقاط A و B به ترتیب با طول ۱ و ۴ روی نمودار تابع $f(x) = x + \frac{4}{\sqrt{x}}$ مفروضند. خط مماس در نقطه‌ای به طول α روی منحنی با خط

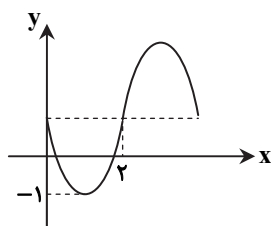
گذرنده از A و B موازی است. مقدار α کدام است؟

- (۱) $\sqrt[3]{9}$ (۲) $3\sqrt[3]{3}$ (۳) $\sqrt[3]{3}$ (۴) $2\sqrt[3]{3}$

۱۰۶- نمودار تابع $y = \sqrt{4-2x}$ را نسبت به خط $x = 2$ قرینه کرده و سپس k واحد به چپ انتقال می‌دهیم تا شکل حاصل نمودار اولیه را روی محور عرض‌ها قطع کند. مقدار k کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ۴

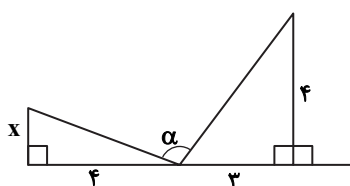
۱۰۷- قسمتی از نمودار تابع $f(x) = 1 + a\sin b\pi x \cos b\pi x$ به صورت روبه‌رو است. حاصل ab کدام است؟



- (۱) -۱
(۲) -۲
(۳) -۳
(۴) -۴

۱۰۸- در شکل زیر اگر $\tan \alpha = -\frac{3}{2}$ ، مقدار x کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{9}$
(۲) $\frac{2}{3}$
(۳) $\frac{2}{9}$
(۴) $\frac{1}{3}$



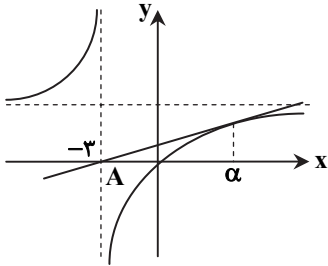
۱۰۹- با فرض $f(x) = \frac{4-x[x]}{x^2-3x+2}$ کدام حد زیر درست است؟ ($[]$ نماد جزء صحیح است).

- (۱) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$ (۲) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$ (۳) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$ (۴) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$

۱۱۰- اگر $f(x) = \frac{|2x-3|}{2x-[-x]}$ مقدار $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+2h) - f(1)}{h}$ کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

- (۱) $-\frac{16}{9}$ (۲) $-\frac{8}{9}$ (۳) $-\frac{4}{9}$ (۴) $\frac{16}{9}$

۱۱۱- نمودار تابع $y = \frac{2x}{x+3}$ و خط مماس بر آن در شکل روبه‌رو رسم شده است. مقدار α کدام است؟



(۱) ۲

(۲) ۲/۵

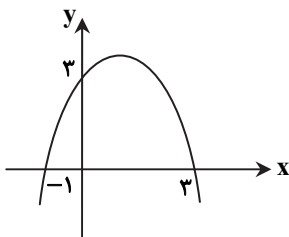
(۳) ۳

(۴) ۴

۱۱۲- تابع $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 6}{x - 2}$ در بازه $(-2, a)$ اکیداً نزولی است. حداکثر مقدار a کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶

۱۱۳- نمودار تابع درجه دوم $f(x)$ به صورت روبه‌رو است. مشتق دوم $y = f(1 - \frac{2}{x})$ به ازای $x = -1$ کدام است؟



(۱) -۳۲

(۲) ۱۸

(۳) ۱۶

(۴) -۲۴

۱۱۴- در تابع هموگرافیک $f(x) = \frac{ax+b}{x+d}$ ، نقطه $A(2, 3)$ نقطه برخورد مجانب‌های تابع است. اگر $f(0) = 0$ ، یکنوایی و تقعر تابع f در همسایگی $x = -1$ به کدام صورت است؟

- (۱) صعودی و تقعر روبه‌بالا (۲) صعودی و تقعر روبه‌پایین
(۳) نزولی و تقعر روبه‌بالا (۴) نزولی و تقعر روبه‌پایین

۱۱۵- مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی $2\sin^2 2x = (\sin x + \cos x)^2$ در بازه $(0, 2\pi)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{73\pi}{12}$ (۲) $\frac{13\pi}{2}$ (۳) 7π (۴) $\frac{33\pi}{6}$

۱۱۶- اگر $f'(x) = \frac{5}{x^2}$ و $g(x) = \sqrt{4x+1}$ به‌طوری که $(f \circ g)'(\alpha) = \frac{5}{4}$ ، مقدار α کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{3}{8}$

۱۱۷- اگر $f(x) = \frac{3x}{x-1}$ باشد، به ازای کدام مقدار a تابع $y = f(a - f(x))$ مجانب قائم ندارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۱۸- نقاط عطف و ماکزیمم نسبی تابع $f(x) = x^4 - 6x^2$ سه رأس یک مثلث‌اند. مساحت این مثلث چقدر است؟

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲

هندسه

هندسه ۳: کل کتاب

۱۱۹- اگر $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ با تعریف $a_{ij} = \begin{cases} 2i - j & i \geq j \\ j + i & i < j \end{cases}$ باشد، مجموع درایه‌های ماتریس A کدام است؟

- (۱) ۲۴ (۲) ۲۸ (۳) ۳۰ (۴) ۳۲

۱۲۰- اگر $A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$ باشد، حاصل A^{1401} کدام است؟

- (۱) A (۲) I (۳) $-A$ (۴) $\bar{O}$

۱۲۱- نقاط B و C مفروض‌اند. چند نقطه در صفحه وجود دارد که فاصله آن‌ها از وسط BC برابر $\frac{1}{2}BC$ و فاصله آن‌ها از پاره خط BC یا امتداد آن برابر $\frac{1}{4}BC$ باشد؟

- (۱) ۴ (۲) ۲ (۳) هیچ (۴) بی‌شمار

۱۲۲- خط $y = m + x$ و دایره $x^2 + y^2 + 2x = 7$ متقاطع‌اند. حدود m کدام است؟

- (۱) $3 < m < 5$ (۲) $-2 < m < 3$ (۳) $-3 < m < 5$ (۴) $2 < m < 3$

۱۲۳- وجه‌های یک مکعب مستطیل صفحاتی به معادلات $x=2$ ، $x=1$ ، $y=-2$ ، $y=3$ ، $z=4$ و $z=-1$ هستند. کدام نقطه، رأس مکعب مستطیل نیست؟

- (۱) $(1, -2, 4)$ (۲) $(2, 3, -1)$ (۳) $(2, -2, -1)$ (۴) $(1, 3, -4)$

۱۲۴- ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ یک ماتریس وارون‌پذیر است. در این صورت عبارت $A^2 - (a+d)A$ برابر کدام است؟

- (۱) $|A|I$ (۲) $|A|A$ (۳) $-|A|I$ (۴) $\bar{O}$

۱۲۵- اگر $A^2 = \bar{O}$ باشد، حاصل $(A+I)^{-1} + (A-I)^{-1}$ کدام است؟

- (۱) $2A$ (۲) $2I$ (۳) $-2A$ (۴) $-2I$

۱۲۶- اگر حاصل دترمینان $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$ برابر صفر باشد، حاصل abc با کدام برابر است؟ ($a, b, c \neq 0$)

- (۱) $a+b+c$ (۲) $a^3+b^3+c^3$ (۳) $\frac{1}{3}(a+b+c)$ (۴) $\frac{1}{3}(a^3+b^3+c^3)$

۱۲۷- نقاط $A(-1, 3)$ ، $B(3, 3)$ ، $C(3, -1)$ و $D(-1, -1)$ رؤس یک چهارضلعی‌اند. معادله دایره محیطی چهارضلعی $ABCD$ کدام است؟

- (۱) $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 8$ (۲) $x^2 + y^2 - 4x - 4y = 8$ (۳) $x^2 + y^2 - 4x - 4y = 6$ (۴) $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 6$

۱۲۸- اگر A تصویر نقطه $M(m, -2, 2)$ روی صفحه xz و B تصویر نقطه M روی صفحه yz باشد، مینیمم طول AB کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۲۹- ماتریسی 3×3 است به طوری که $A^3 + 2I = \bar{O}$ ، حاصل $||-2|A||A||A||$ کدام است؟

- (۱) 2^{18} (۲) 2^{22} (۳) 2^{20} (۴) 2^{24}

۱۳۰- در یک بیضی، فاصله رأس کانونی تا رأس ناکانونی با فاصله یک کانون تا دورترین رأس به آن، برابر است. خروج از مرکز این بیضی کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{5}}{4}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

۱۳۱- در سهمی به معادله $x^2 + 2x = a^2y + b$ ، پرتوی منطبق بر محور y ها بر بدنه داخلی تابیده و پرتو بازتابش منطبق بر محور x ها، انعکاس یافته است. $a+b$ کدام می‌تواند باشد؟

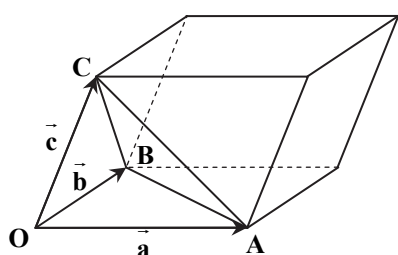
- (۱) $2\sqrt{2}$ (۲) ۴ (۳) $\sqrt{2}$ (۴) ۲

۱۳۲- a ، b و c سه بردارند به طوری که $\bar{a} + \bar{b} + 2\bar{c} = \bar{O}$. اگر $|\bar{a}| = 4$ و $|\bar{b}| = 2$ باشد، حاصل $\bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{b} \cdot \bar{c} + \bar{c} \cdot \bar{a}$ کدام است؟

- (۱) -۵ (۲) ۴ (۳) -۱۰ (۴) ۱۲

۱۳۳- بر بردارهای $\bar{a}(1, 2, 3)$ ، $\bar{b}(2, 2, 4)$ و $\bar{c}(6, 3, 3)$ یک متوازی‌السطوح ساخته‌ایم. در این شکل، حجم $OABC$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴



۱۳۴- a و b دو بردار یکه‌اند، به‌طوری که بردارهای $3\vec{a} + 4\vec{b}$ و $4\vec{b} - 3\vec{a}$ هم‌اندازه‌اند. مقدار $|\vec{a} + \vec{b}|$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) ۴ (۴) $2\sqrt{2}$

ریاضیات گسسته

ریاضیات گسسته: کل کتاب

۱۳۵- گل‌فروشی ۸ نوع گل و از هر نوع به تعداد انبوه شاخه گل یکسان دارد. به چند طریق می‌توان ۶ شاخه گل از او خرید؟

- (۱) ۱۲۸۷ (۲) ۱۸۲۷ (۳) ۱۷۱۶ (۴) ۱۶۱۷

۱۳۶- کدام یک از گزاره‌های زیر، مثال نقض دارد؟

- (۱) حاصل ضرب هر عدد گویای ناصفر در هر عدد گنگ، عددی گنگ است.
(۲) مکعب هر عدد حقیقی بزرگ‌تر از ۱، از مربع آن عدد بزرگ‌تر است.
(۳) هر عدد طبیعی فرد که در تقسیم بر ۸ باقی‌مانده ۱ داشته باشد، مربع کامل است.
(۴) مربع هر عدد زوج، مضرب ۴ است.

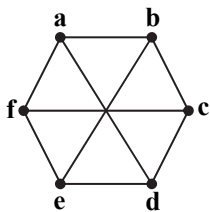
۱۳۷- اگر دو عدد طبیعی a و b نسبت به هم اول بوده و داشته باشیم $a \mid 5b + 9a$ ، آنگاه تعداد مقادیر قابل قبول برای a کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۳۸- اگر معادله سیاله $48x + by = 84$ از مجموعه اعداد صحیح دارای جواب باشد، آنگاه b کدام گزینه نمی‌تواند باشد؟

- (۱) ۸ (۲) ۷ (۳) ۶ (۴) ۵

۱۳۹- در گراف شکل روبه‌رو، چند دور به طول ۵ موجود است؟



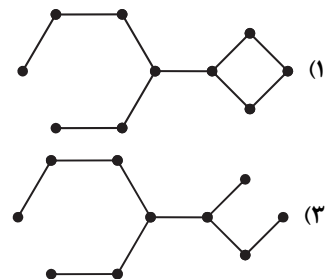
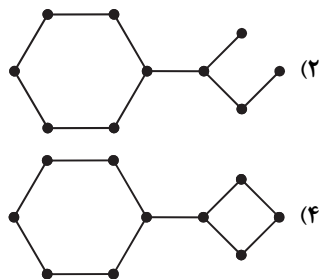
(۱) صفر

(۲) ۳

(۳) ۶

(۴) ۱۲

۱۴۰- عدد احاطه‌گری کدام گراف از بقیه کوچک‌تر است؟



۱۴۱- چند مربع لاتین 4×4 با درایه‌های شکل روبه‌رو وجود دارد؟

۲			۴
	۲	۴	
	۳	۲	

(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) ۴

۱۴۲- در یک تقسیم، مقسوم ۱۴۰۰ و خارج‌قسمت ۱۲ است. اگر باقی‌مانده مضرب ۸ باشد، چند مقدار طبیعی برای مقسوم‌علیه یافت می‌شود؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۱۴۳- عدد پنج‌رقمی $\overline{a68b2}$ مضرب ۱۱ بوده و باقی‌مانده‌اش بر ۹ برابر ۷ است. مقدار $\frac{a}{b}$ کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۷ (۴) ۶

۱۴۴- مجموع ارقام عدد طبیعی m که در هر دو رابطه $73 \equiv 11 \pmod{m}$ و $m + 2 \equiv 4m - 2 \pmod{11}$ صدق می‌کند، کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۷ (۳) ۱۷ (۴) ۱۳

۱۴۵- در گرافی از مرتبه ۷ و اندازه ۱۷، اگر داشته باشیم $\Delta = 5$ ، آنگاه مقدار δ کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۴ (۳) ۳ (۴) ۲

۱۴۶- چند عدد دورقمی وجود دارد که شامل رقم ۴ بوده یا مضرب ۷ باشند؟

- (۱) ۳۱ (۲) ۲۹ (۳) ۲۸ (۴) ۲۷

۱۴۷- از میان مجموعه اعداد طبیعی یک رقمی حداقل چند عدد انتخاب کنیم تا مطمئن باشیم در بین آن‌ها دو عدد متمایز a و b وجود دارند که در رابطه $a | b$ صدق می‌کنند؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

۱۴۸- چند عدد طبیعی مانند a در هر دو تساوی $(a, 120) = 15$ و $[a, 70] = 210$ صدق می‌کنند؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۴۹- چند گراف ساده با مجموعه رئوس $\{a, b, c, d, e, f, g\}$ می‌توان ساخت به طوری که در آن‌ها $q = 2$ و $\Delta = 1$ باشد؟

- (۱) ۲۱ (۲) ۳۵ (۳) ۶۳ (۴) ۱۰۵

۱۵۰- با حروف a, a, b, b, b, c, d چند کلمه هفت حرفی بدون توجه به معنی می‌توان ساخت به طوری که در هر یک از آن‌ها هیچ دو حرف b کنار هم نباشند؟

- (۱) ۹۶ (۲) ۱۰۸ (۳) ۱۲۰ (۴) ۱۲۸

گزینه دو



مؤسسه آموزشی فرهنگی

داوطلبان آزمون سراسری سال ۱۴۰۱

سال تحصیلی ۰۱ - ۰۰

آزمون آزمایشی ۳۰ اردیبهشت ۱۴۰۱

آزمون اختصاصی ۲

گروه آزمایشی علوم ریاضی

ویژه داوطلبان آزمون سراسری ۱۴۰۱ (گروه آزمایشی علوم ریاضی)

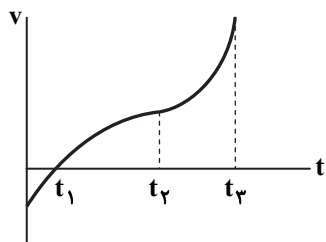
مواد امتحانی	تعداد پرسش	از شماره	تا شماره	وقت پیشنهادی
فیزیک	۴۰	۱۵۱	۱۹۰	۵۰ دقیقه
شیمی	۳۰	۱۹۱	۲۲۰	۳۰ دقیقه
تعداد کل پرسش ها: ۷۰		مدت پاسخ گویی: ۸۰ دقیقه		



همچنین، شما می توانید با اسکن تصویر روبه رو به وسیله گوشی هوشمند و یا تبلت خود، پاسخ تشریحی درس های عمومی و اختصاصی را مشاهده نمایید.

داوطلب گرامی، جهت استفاده از خدمات طلایی خود مانند کارنامه های هوشمند بعد از آزمون ارزشیابی، سنجش های مستمر، پیش آزمون های آنلاین، بانک سؤال گزینه دو، رفع اشکال هوشمند، جزوه های کمک آموزشی، آرشیو آزمون های گزینه دو و ...، با استفاده از شماره داوطلبی (به عنوان نام کاربری) و کد ملی خود (به عنوان رمز عبور) وارد وبسایت گزینه دو به آدرس gozine2.ir شوید. در صورتی که اینترنتی ثبت نام کرده اید، رمز عبور شما همان رمزی است که خودتان انتخاب نموده اید.

۱۵۱- نمودار سرعت- زمان جسمی که روی خط راست حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. در بازه زمانی صفر تا t_3 ، سرعت و شتاب حرکت جسم به ترتیب از راست به چپ، چند بار تغییر جهت داده‌اند؟

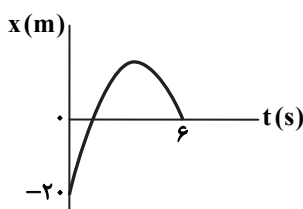


- (۱) یک بار - یک بار
(۲) تغییر جهت ندارد - یک بار
(۳) یک بار - تغییر جهت ندارد
(۴) یک بار - دو بار

۱۵۲- اگر معادله حرکت جسمی بر روی خط راست در SI به صورت $x = 2t^2 - 16t + 5$ باشد، تندی متوسط در ۶ ثانیه اول حرکت چند متر بر ثانیه است؟

- (۱) $\frac{20}{3}$ (۲) $\frac{16}{3}$ (۳) ۸ (۴) ۴

۱۵۳- نمودار مکان- زمان جسمی که روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. اگر تندی متوسط در ۶ ثانیه اول حرکت $2/5$ برابر بزرگی سرعت متوسط در این مدت باشد، بیشترین فاصله جسم از مبدأ مختصات در این مدت چند متر است؟

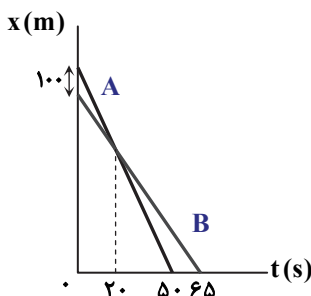


- (۱) ۱۵
(۲) ۲۰
(۳) ۳۵
(۴) ۵۰

۱۵۴- در یک حرکت با شتاب ثابت بر روی خط راست در مدت معینی که سرعت متحرک ۶ متر بر ثانیه افزایش می‌یابد، سرعت متوسط ۱۵ متر بر ثانیه است. اگر جرم جسم ۵ کیلوگرم باشد، کار کل انجام شده روی جسم در این مدت چند ژول است؟

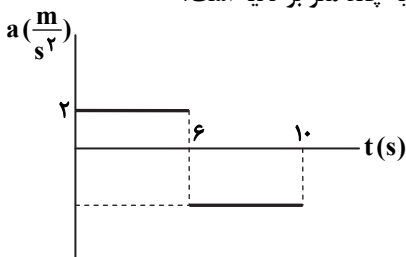
- (۱) ۲۲۵ (۲) ۴۵۰ (۳) ۹۰۰ (۴) ۱۱۲۵

۱۵۵- شکل روبه‌رو نمودار مکان- زمان دو متحرک که بر روی خط راست حرکت می‌کنند را نشان می‌دهد. متحرک A در ابتدا در چند متری مبدأ بوده است؟



- (۱) ۳۰۰
(۲) ۴۵۰
(۳) ۶۵۰
(۴) ۷۵۰

۱۵۶- نمودار شتاب- زمان جسمی که روی خط راست با سرعت اولیه $5 \frac{m}{s}$ حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. اگر بزرگی شتاب متوسط در ۵ ثانیه اول حرکت برابر بزرگی شتاب متوسط در ۵ ثانیه دوم باشد، سرعت متوسط در کل ۱۰ ثانیه چند متر بر ثانیه است؟



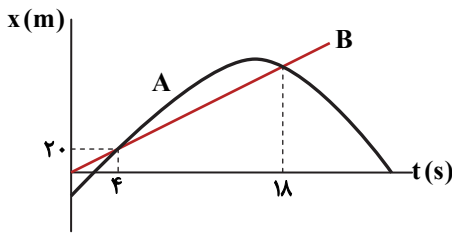
- (۱) ۱۲
(۲) ۱۱
(۳) ۸
(۴) ۵

۱۵۷- از داخل یک بالگرد ساکن در ارتفاع h گلوله‌ای رها می‌شود و هم‌زمان بالگرد با شتاب ۵ متر بر مجذور ثانیه به‌طور افقی به حرکت درمی‌آید. اگر در لحظه‌ای که گلوله به زمین می‌رسد، فاصله گلوله از بالگرد $100\sqrt{5}$ متر باشد، ارتفاع h چند متر است؟ (از مقاومت هوا صرف نظر شود و $g = 10 \frac{m}{s^2}$)

- (۱) ۴۰۰ (۲) ۳۷۵ (۳) ۲۲۵ (۴) ۲۰۰

۱۵۸- متحرک A با شتاب ثابت و متحرک B به طور یکنواخت روی محور x حرکت می کنند و نمودار مکان- زمان آنها مطابق شکل زیر است. اگر

سرعت متحرک A در لحظه $t = 4s$ برابر $12 \frac{m}{s}$ باشد، سرعت متوسط آن در مدتی که در جهت محور x حرکت می کند، چند متر بر ثانیه است؟



(۱) ۱۶

(۲) ۱۴

(۳) ۸

(۴) ۴

۱۵۹- گلوله ای از ارتفاع ۱۸۰ متری سطح زمین رها می شود. اگر مدت رسیدن به زمین به سه قسمت مساوی تقسیم شود، در آخرین قسمت زمان

(یک سوم پایانی)، تندی متوسط چند متر بر ثانیه است؟ (از مقاومت هوا صرف نظر شود و $g = 10 \frac{m}{s^2}$)

(۱) ۳۰

(۲) ۴۰

(۳) ۵۰

(۴) ۶۰

۱۶۰- چتربازی از هواپیما بیرون می پرد و قبل از باز کردن چتر به تندی حدی می رسد. سپس چتر خود را باز می کند و مجدداً پس از مدتی به تندی

حدی می رسد. کدام گزینه در مورد دو حالتی که چتر باز به تندی حدی می رسد، درست است؟

(۱) در هر دو حالت، تندی حدی یکسان است.

(۲) نیروی مقاومت هوا در حالت اول بیشتر از حالت دوم است.

(۳) نیروی مقاومت هوا در حالت دوم بیشتر از حالت اول است.

(۴) در هر دو حالت، نیروی مقاومت هوا یکسان است.

۱۶۱- وقتی جسمی به جرم m از فنی آویزان می شود، در حالت تعادل طول فنر ۵ سانتی متر بیشتر از طول طبیعی است. حال اگر روی سطح

افقی این فنر به جسمی با جرم ۲m بسته شده و فنر به طور افقی ۲ سانتی متر کشیده شود، جسم ساکن باقی می ماند. کدام گزینه در مورد

ضریب اصطکاک بین سطح افقی با جسم درست است؟

(۱) $\mu_k \leq 0.1$

(۲) $\mu_s \geq 0.8$

(۳) $\mu_s \geq 0.4$

(۴) $\mu_s \geq 0.2$

۱۶۲- جرم m از سطح زمین توسط نیروی F از حال سکون رو به بالا کشیده می شود. در ارتفاع h نیروی F قطع شده و سپس جسم حداکثر تا ارتفاع ۴h از

سطح زمین بالا می رود. اگر نیروی مقاومت هوا در تمام مسیر تقریباً ثابت و $\frac{1}{3}$ برابر وزن جسم باشد، بزرگی نیروی F چند برابر وزن جسم است؟

(۱) $\frac{19}{3}$

(۲) $\frac{16}{3}$

(۳) ۵

(۴) ۴

۱۶۳- گلوله کوچکی به طور یکنواخت در مسیر دایره ای شکلی به شعاع ۴۰ سانتی متر در هر دقیقه ۲۰ دور می چرخد. شتاب حرکت گلوله چند

متر بر مربع ثانیه است؟ ($\pi^2 = 10$)

(۱) $\frac{16}{9}$

(۲) $\frac{4\pi}{15}$

(۳) $\frac{64}{25}$

(۴) $\frac{4\pi}{30}$

۱۶۴- مطابق شکل، جسمی به جرم ۴kg تحت تأثیر نیروی قائم $F = 10t$ (در SI) به مدت ۱۰ ثانیه قرار می گیرد. نیروی خالص متوسط وارد بر

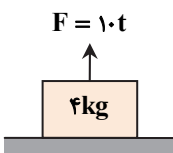
جسم در این مدت چند نیوتون است؟ ($g = 10 \frac{N}{kg}$)

(۱) ۵۰

(۲) ۳۰

(۳) ۱۸

(۴) ۱۰



۱۶۵- دو سیاره به جرم های m و ۴m در فاصله d از هم قرار دارند. اگر سفینه ای بین دو سیاره در فاصله x از سیاره ۴m قرار گیرد، نیروی

گرانشی وارد بر آن از طرف دو سیاره صفر خواهد بود. x کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2}d$

(۲) $\frac{2}{3}d$

(۳) $\frac{3}{4}d$

(۴) $\frac{4}{5}d$

۱۶۶- اتومبیلی به جرم یک تن، پیچی افقی به شعاع ۹۰ متر را با تندی ۹ متر بر ثانیه دور می زند. اگر ضریب اصطکاک ایستایی بین لاستیک ها و

سطح جاده ۰/۲۵ باشد، نیروی اصطکاک ایستایی جانبی وارد بر اتومبیل چند نیوتون است؟ ($g = 10 \frac{N}{kg}$)

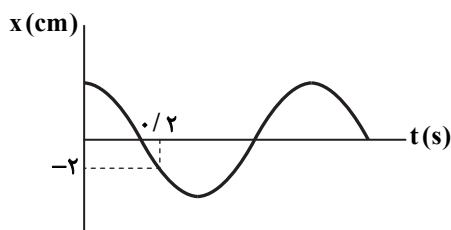
(۱) $\frac{2500}{9}$

(۲) ۹۰۰

(۳) ۲۵۰۰

(۴) ۳۶۰۰

۱۶۷- شکل روبه‌رو، نمودار مکان- زمان جسمی را نشان می‌دهد که بر روی پاره‌خطی به طول ۸ سانتی‌متر حرکت هماهنگ ساده می‌دهد. معادله حرکت نوسانی این جسم در SI کدام است؟



(۱) $x = 0.4 \cos 3.0 \pi t$

(۲) $x = 0.8 \cos 1.0 \pi t$

(۳) $x = 0.4 \cos \frac{1.0 \pi}{3} t$

(۴) $x = 0.4 \cos 12 \pi t$

۱۶۸- یک جرم متصل به فنر روی سطح افقی بدون اصطکاک با معادله $x = 0.4 \cos \omega t$ (در SI) نوسان می‌کند. اگر در لحظه‌ای که انرژی جنبشی جسم برابر انرژی پتانسیل آن است، تندی جسم $2\sqrt{5}$ متر بر ثانیه باشد، بسامد نوسان چند هرتز است؟ ($\pi = \sqrt{10}$)

(۱) $\frac{10}{3}$ (۲) 0.3 (۳) $\frac{5}{2}$ (۴) 5π

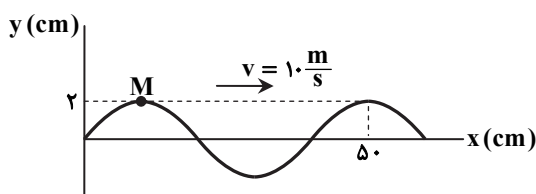
۱۶۹- آونگ ساده‌ای با دامنه کم نوسان می‌کند. در لحظه‌ای که فاصله گلوله آونگ از مرکز نوسان ۲ سانتی‌متر می‌شود، بزرگی شتاب آن $\frac{1}{4}$ متر بر

مربع ثانیه است. اگر طول نخ آونگ ۵ سانتی‌متر کاهش یابد، دوره نوسان گلوله چند ثانیه خواهد شد؟ ($g = 10 \frac{N}{kg}$)

(۱) $\pi\sqrt{0.3}$ (۲) $\frac{\sqrt{0.3}}{\pi}$ (۳) $\pi\sqrt{3}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{\pi}$

۱۷۰- نمودار جابه‌جایی- مکان یک موج مکانیکی عرضی که با سرعت ۱۰ متر بر ثانیه در جهت محور x منتشر می‌شود در لحظه $t = 0$ مطابق

شکل روبه‌رو است. تندی متوسط ذره M در بازه زمانی $t = 0$ تا $t = \frac{4}{3.0}$ s چند متر بر ثانیه است؟



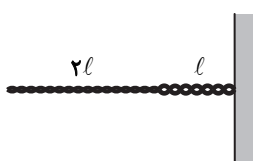
(۱) $1/8$

(۲) ۲

(۳) $2/25$

(۴) ۴

۱۷۱- در شکل روبه‌رو، موجی سینوسی از ابتدای طناب نازک به سمت راست منتشر شده و وارد طناب ضخیم می‌شود. اگر قطر مقطع طناب ضخیم ۲ برابر قطر مقطع طناب نازک، طول آن نصف طول طناب نازک و جنس دو طناب یکسان باشد، طول موج و دوره موج در طناب ضخیم به ترتیب چند برابر طناب نازک است؟



(۱) ۲ و $\frac{1}{2}$

(۲) $\sqrt{2}$ و $\frac{1}{2}$

(۳) ۱ و ۲

(۴) $\frac{1}{2}$ و ۱

۱۷۲- نمودار میدان الکتریکی یک موج الکترومغناطیسی بر حسب مکان در یک لحظه مطابق شکل زیر است. اگر در نقطه A در این لحظه جهت میدان مغناطیسی درون‌سو باشد، اندازه میدان الکتریکی در نقطه A



(۱) ثابت است.

(۲) در حال افزایش است.

(۳) در حال کاهش است.

(۴) ابتدا کاهش سپس افزایش می‌یابد.

۱۷۳- شخصی در فاصله معینی از یک منبع صوت ایستاده است. در محلی که شخص قرار دارد طول موج صوت حاصل از منبع، $1/5$ برابر طول موج در سمت دیگر منبع است. در این صورت بسامد صوتی که شخص می‌شنود:

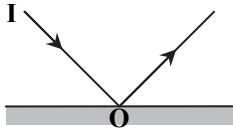
- (۱) بیشتر از بسامد صوت منبع است. (۲) کمتر از بسامد صوت منبع است. (۳) برابر بسامد صوت منبع است. (۴) بسته به مورد، هر سه ممکن است.

۱۷۴- در مکانی که تراز شدت صوت ۲۰ دسی بل است، از صفحه‌ای به مساحت ۵۰ سانتی متر مربع عمود بر راستای انتشار صوت، در مدت ۵ دقیقه

چند میلی ژول انرژی صوتی می‌گذرد؟ $(I_0 = 10^{-12} \frac{W}{m^2})$

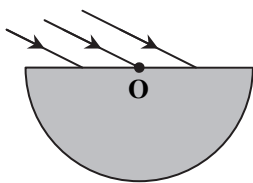
- (۱) $1/5 \times 10^{-7}$ (۲) 3×10^{-7} (۳) $1/5 \times 10^{-10}$ (۴) 3×10^{-10}

۱۷۵- مطابق شکل، پرتو تابش I به سطح آینه تختی در نقطه O تابیده و بازتاب می‌کند. اگر آینه حول نقطه O به اندازه ۱۵ درجه در جهت ساعت گرد دوران کند و سپس پرتو تابش I نیز به اندازه ۱۰ درجه در جهت ساعت گرد حول O دوران کند، پرتو بازتاب نسبت به حالت اولیه چند درجه و در چه جهتی دوران خواهد کرد؟



- (۱) ۲۰ درجه ساعت گرد
(۲) ۴۰ درجه ساعت گرد
(۳) ۵ درجه پادساعت گرد
(۴) ۱۰ درجه پادساعت گرد

۱۷۶- در شکل روبه‌رو سه پرتو موازی از هوا به تیغه شفاف نیم‌دایره‌ای شکلی می‌تابند. این پرتوها پس از خروج از تیغه



- (۱) موازی با هم و موازی پرتوهای ورودی خارج می‌شوند.
(۲) موازی با هم ولی با انحراف نسبت به پرتوهای ورودی خارج می‌شوند.
(۳) به هم نزدیک می‌شوند.
(۴) از هم دور می‌شوند.

۱۷۷- جسم کدری به ابعاد $2m \times 2/5m$ در هوا مقابل منبع موج الکترومغناطیسی با بسامد ۲۰۰ مگاهرتز قرار دارد. این موج در محدوده

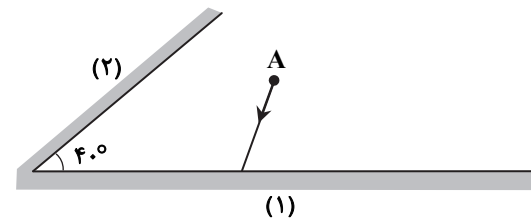
..... است و در پشت جسم کدر $(c = 3 \times 10^8 \frac{m}{s})$

- (۱) امواج فروسرخ - دریافت نمی‌شود
(۲) امواج رادیویی - دریافت می‌شود
(۳) امواج میکروموج - دریافت نمی‌شود
(۴) امواج فروسرخ - دریافت می‌شود

۱۷۸- پرتوی نوری مرکب از نورهای قرمز و آبی به‌طور مایل یک بار از هوا به محیط شفاف و بار دوم از محیط شفاف به هوا می‌تابد و در هر دو حالت با ورود به محیط دوم به پرتو قرمز و آبی تجزیه می‌شود. در آزمایش اول زاویه شکست پرتوی و در آزمایش دوم انحراف پرتوی بیشتر است.

- (۱) آبی - آبی (۲) قرمز - آبی (۳) قرمز - قرمز (۴) آبی - قرمز

۱۷۹- مطابق شکل، از منبع نور A پرتویی با زاویه تابش ۲۰ درجه به آینه (۱) تابیده و بازتاب آن به آینه (۲) می‌تابد و بازتاب آن مجدداً به آینه (۱) می‌تابد. پرتو بازتاب دوم از آینه (۱) چه زاویه‌ای با سطح این آینه می‌سازد؟ (آینه‌ها به‌اندازه کافی بلند هستند.)



- (۱) ۶۰ درجه
(۲) ۵۰ درجه
(۳) ۴۰ درجه
(۴) ۳۰ درجه

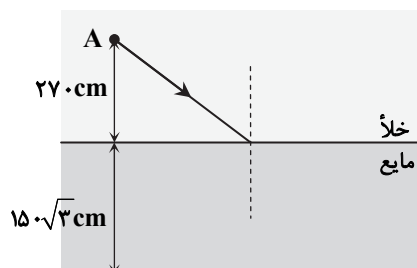
۱۸۰- در یک تار دو سر بسته به جرم ۳ گرم با نیروی کشش ۴۰ نیوتون، موج ایستاده‌ای ایجاد شده است. اگر در طول تار ۴ گره ایجاد شده و طول

موج ۵۰ سانتی متر باشد، تندی انتشار موج عرضی در تار و بسامد اصلی تار کدام است؟

- (۱) 200 Hz و $100 \frac{m}{s}$ (۲) $200\sqrt{3} \frac{m}{s}$ و $50\sqrt{3} \text{ Hz}$ (۳) $100 \frac{m}{s}$ و 200 Hz (۴) $100\sqrt{3} \frac{m}{s}$ و $50\sqrt{3} \text{ Hz}$

۱۸۱- مطابق شکل روبه‌رو، پرتو نوری در خلأ از نقطه A به‌طور مایل به سطح مایعی می‌تابد. قسمتی از پرتو وارد مایع شده و قسمتی بازتاب می‌کند. اگر پرتو با ورود به مایع ۲۳ درجه منحرف شده باشد و پرتو بازتاب زاویه ۹۷ درجه با پرتو شکست بسازد، کل مدت سیر نور

از A تا انتهای مایع چند نانوثانیه است؟ $(c = 3 \times 10^8 \frac{m}{s}$ و $\sin 37^\circ = 0/6$)



- (۱) ۳۳ (۲) ۳۱
(۳) ۲۸ (۴) ۲۵

۱۸۲- اگر یک لامپ در مدت ۵ دقیقه و ۲۰ ثانیه تعداد 6×10^{22} فوتون با طول موج ۶۲۰ نانومتر تابش کند، توان تابشی آن چند وات است؟

($hc = 1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}$ و $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$)

(۴) ۵۰

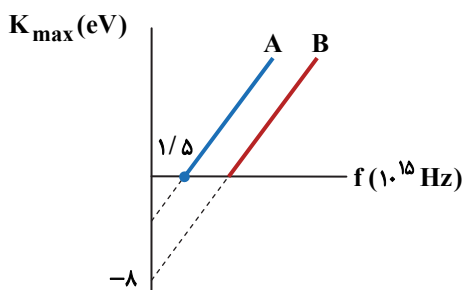
(۳) ۶۰

(۲) ۱۰۰

(۱) ۱۲۰

۱۸۳- نمودارهای روبه‌رو مربوط به اثر فوتوالکتریک در مورد دو فلز A و B است. اگر پرتویی با طول موج ۱۲۰ نانومتر بر دو فلز بتابد، اختلاف

بیشینه انرژی جنبشی الکترون‌های خروجی از دو فلز کدام خواهد شد؟ ($h = 4/1 \times 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{s}$ و $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$)



(۱) $K_{\max A} - K_{\max B} = 1/85 \text{ eV}$

(۲) $K_{\max B} - K_{\max A} = 1/85 \text{ eV}$

(۳) $K_{\max A} - K_{\max B} = 2/25 \text{ eV}$

(۴) $K_{\max B} - K_{\max A} = 2/25 \text{ eV}$

۱۸۴- در رشته لیمان ($n' = 1$) هیدروژن اتمی، طول موج فوتون خط دوم از طول موج خط سوم است. ($R = 0.1 \text{ nm}^{-1}$)

(۱) $\frac{70}{12}$ نانومتر بیشتر (۲) $\frac{125}{6}$ نانومتر کمتر (۳) $\frac{125}{6}$ نانومتر بیشتر (۴) $\frac{900}{8}$ نانومتر کمتر

۱۸۵- در یک دستگاه لیزر فوتون‌ها حاصل از گسیل بوده و هستند.

(۱) خودبه‌خودی - هم‌بسامد و هم‌انرژی

(۲) القایی - هم‌انرژی ولی با جهت‌های متفاوت

(۳) خودبه‌خودی - هم‌بسامد و هم‌فاز

(۴) القایی - هم‌انرژی و هم‌فاز

۱۸۶- اگر الکترون اتم هیدروژن یک فوتون با طول موج λ جذب کند می‌تواند از مدار n_1 به مدار $n_1 + 2$ برود و با انجام این گذار، شعاع مدار

آن ۹ برابر می‌شود. λ تقریباً چند نانومتر است؟ ($E_R = 13/6 \text{ eV}$ و $hc = 1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}$)

(۴) ۱۰۳

(۳) ۱۲۱

(۲) ۶۵۰

(۱) ۱۸۷۱

۱۸۷- هسته نپتونیم واپاشی آلفا انجام می‌دهد. عدد اتمی نپتونیم است.

(۱) نصف عدد جرمی آن است. (۲) کمتر از نصف عدد جرمی آن است.

(۳) بیشتر از نصف عدد جرمی آن است. (۴) برابر با عدد جرمی آن است.

۱۸۸- اگر نیمه‌عمر یک ماده پرتوزا ۸۰ روز و تعداد هسته‌های موجود در نمونه اولیه ($t = 0$) برابر N_0 باشد، تعداد هسته‌هایی که در مدت

(روز $t_1 = 240$) تا (روز $t_2 = 400$) واپاشی می‌کند، چند عدد است؟

(۴) $\frac{N_0}{32}$

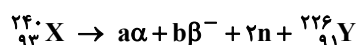
(۳) $\frac{3N_0}{32}$

(۲) $\frac{N_0}{8}$

(۱) $\frac{3N_0}{8}$

۱۸۹- اگر در واکنش هسته‌ای زیر، هسته X پس از واپاشی تعدادی ذره آلفا، بتای منفی و ۲ نوترون تبدیل به هسته Y شود، به ترتیب از راست به

چپ a و b چه اعدادی هستند؟



(۴) ۴ و ۳

(۳) ۵ و ۴

(۲) ۳ و ۴

(۱) ۲ و ۳

۱۹۰- در مورد واکنش شکافت اورانیم چند مورد از جملات زیر درست است؟

(الف) با توجه به نیمه‌عمر بسیار طولانی اورانیم، شکافت بسیار کند صورت می‌گیرد.

(ب) واکنش شکافت منشأ تولید انرژی در ستارگان مانند خورشید است.

(پ) شکافت در اورانیم ۲۳۵ صورت نمی‌گیرد، ولی در اورانیم ۲۳۸ احتمال تحقق آن زیاد است.

(ت) جرم محصولات شکافت از جرم اورانیم اولیه به‌علاوه نوترون، کمتر است.

(ث) واکنش زنجیری به‌طور طبیعی در یک معدن اورانیم نمی‌تواند اتفاق بیفتد.

(۴) ۴

(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) ۱

۱۹۱- چند مورد از مطالب زیر، درست است؟

(الف) برای سوختن کامل ۱/۵ مول اتیلن گلیکول در شرایط استاندارد، به تقریب به ۴۲۰ لیتر هوا نیاز است.

(ب) مولکول‌های اوره همانند مولکول‌های اتانول، با آب پیوندهای هیدروژنی برقرار می‌کنند.

(پ) شمار جفت الکترون‌های ناپیوندی در مونومر سازنده تفلون، ۳ برابر شمار جفت الکترون‌های ناپیوندی در مولکول اوره است.

(ت) شمار اتم‌های هیدروژن در فرمول شیمیایی وازلین، نصف شمار اتم‌های هیدروژن در فرمول شیمیایی روغن زیتون است.

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۹۲- در دو ظرف جداگانه، ۲۸/۴ گرم اسید چرب $C_{17}H_{35}COOH$ را با مقدار کافی از محلول‌های پتاسیم هیدروکسید و سدیم هیدروکسید واکنش می‌دهیم. جرم صابون مایع تولیدشده برحسب گرم و جرم مولی صابون جامد تولیدشده برحسب گرم بر مول، به ترتیب از راست به

چپ کدام است؟ ($H = 1, C = 12, O = 16, Na = 23, K = 39: g \cdot mol^{-1}$)

(۱) ۳۲/۲، ۳۰۶ (۲) ۳۰/۶، ۳۲۲ (۳) ۳۲/۲، ۳۲۲ (۴) ۳۰/۶، ۳۰۶

۱۹۳- کدام موارد از مطالب زیر، درست است؟

(الف) یک مول باریم اکسید در آب، سه مول یون تولید می‌کند.

(ب) محلول ۰/۰۲ مولار HNO_3 با درجه یونش ۰/۰۸، رسانایی الکتریکی کمتری نسبت به محلول ۰/۰۰۱ مولار HCl دارد.

(پ) مدل آرنیوس تنها برای محلول‌های آبی کاربرد دارد؛ از این رو گاز کربن دی‌اکسید را نمی‌توان اسید آرنیوس در نظر گرفت.

(ت) اگر در محلول ۱ مولار HA بر اثر حل شدن ۱۰۰۰ مولکول HA ، ۲۴ یون تولید شود، ثابت یونش این اسید به تقریب $10^{-4} \times 1/44$ است.

(۱) الف و ب (۲) ب و پ (۳) پ و ت (۴) الف و ت

۱۹۴- با انحلال چند گرم هیدروفلوئوریک اسید با درجه یونش ۰/۰۲۴ در آب و تهیه محلولی به حجم یک لیتر، غلظت یون فلئورید به

۳۸۰ ppm می‌رسد؟ (چگالی محلول را با چگالی آب یکسان در نظر بگیرید.) ($H = 1, F = 19: g \cdot mol^{-1}$)

(۱) ۸/۳ (۲) ۱۲/۳ (۳) ۱۶/۷ (۴) ۱۹/۷

۱۹۵- چند مورد از مطالب زیر، درست است؟

(الف) در یک واکنش تعادلی، مقدار اولیه واکنش‌دهنده‌ها بر مقدار ثابت تعادل مؤثر است.

(ب) تفاوت سرعت واکنش محلول‌های اسیدی با یک فلز معین در دما و غلظت یکسان اسیدها، تابع انحلال‌پذیری اسید است.

(پ) در سامانه تعادلی هیدروسیانیک اسید، غلظت گونه‌های موجود در محلول با هم برابر است.

(ت) غلظت مولی یون استات در محلول ۱ مولار استیک اسید، کمتر از غلظت مولی یون هیدرونیوم در محلول ۱ مولار فورمیک اسید است.

(۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

۱۹۶- در دو لیتر محلول اسید HA که دارای $\alpha = 0.1$ و $K_a = 2/5 \times 10^{-5}$ است، چند گرم از آن حل شده است؟

($HA = 20: g \cdot mol^{-1}$)

(۱) ۵ (۲) ۱۰ (۳) ۱۵ (۴) ۲۰

۱۹۷- در یک بشر، ۱۰۰ میلی‌لیتر محلول نیتریک اسید با $pH = 6$ وجود دارد. اگر به این بشر، ۱ میلی‌لیتر محلول هیدروکلریک اسید ۴ مولار

اضافه کنیم، pH محلول جدید به تقریب کدام است؟

(۱) ۰/۶ (۲) ۱/۴ (۳) ۲/۶ (۴) ۳/۴

۱۹۸- m میلی‌گرم دی‌نیتروژن پنتوکسید به آب خالص اضافه کرده و حجم محلول را به ۱۵۰۰ میلی‌لیتر می‌رسانیم. اگر به این محلول،

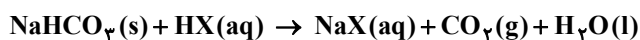
۱۲۰ میلی‌گرم سدیم هیدروکسید اضافه شود و pH محلول به ۱۰ برسد، m کدام است؟ ($H = 1, N = 14, O = 16, Na = 23: g \cdot mol^{-1}$)

(۱) ۱۵۳/۹ (۲) ۱۵/۳۹ (۳) ۳۰۷/۸ (۴) ۳۰/۷۸

۱۹۹- محلول اسیدهای ضعیف HA و HX به ترتیب با درصد یونش ۲۴ و ۵ و با pH برابر در دو ظرف جداگانه موجود است. اگر غلظت محلول

HA ، ۰/۰۰۵ مولار باشد، pH محلول اسیدها کدام است و ۱۰۰ میلی‌لیتر از محلول اسید HX با چند میلی‌گرم جوش شیرین به‌طور کامل

واکنش می‌دهد؟ ($H = 1, C = 12, O = 16, Na = 23: g \cdot mol^{-1}$)



(۱) ۲۰۶/۱، ۲/۹ (۲) ۲۰۱/۶، ۲/۹ (۳) ۲۰۶/۱، ۳/۲ (۴) ۲۰۱/۶، ۳/۲

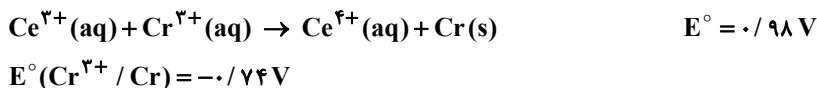
۲۰۰- یک تیغه از جنس فلز روی را درون محلول مس (II) نیترات قرار می‌دهیم. اگر ۸۰ درصد از رسوب تولیدشده بر تیغه بنشینند و نیم مول

الکترون میان اکسند و کاهنده، ردوبدل شود، ($Cu = 64, Zn = 65: g \cdot mol^{-1}$)

(۱) ۳/۴۵ گرم به جرم تیغه افزوده می‌شود. (۲) ۶/۹ گرم به جرم تیغه افزوده می‌شود.

(۳) ۳/۴۵ گرم از جرم تیغه کاسته می‌شود. (۴) ۶/۹ گرم از جرم تیغه کاسته می‌شود.

۲۰۱- با توجه به واکنش اکسایش- کاهش زیر که به طور طبیعی انجام می شود، کدام گزینه نادرست است؟



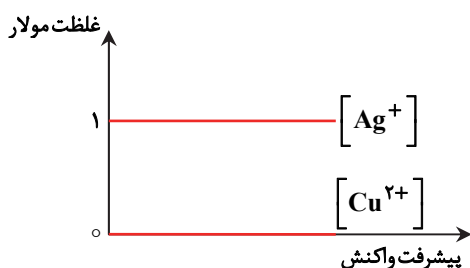
(۱) مجموع ضرایب مواد در معادله موازنه شده واکنش برابر با ۸ است.

(۲) پتانسیل کاهشی استاندارد نیم سلول $(\text{Ce}^{4+} / \text{Ce}^{3+})$ برابر با -1.27 V است.

(۳) قدرت اکسندگی $\text{Ce}^{4+}(\text{aq})$ از $\text{Cr}^{3+}(\text{aq})$ کمتر است.

(۴) گونه اکسنده در واکنش، دارای ۳ الکترون با $I = 2$ است.

۲۰۲- نمودار روبه رو را به کدام مورد می توان نسبت داد؟



(۱) سلول گالوانی استاندارد مس- نقره

(۲) آبکاری قاشق مسی با الکترولیت نقره نیترات و آند نقره ای

(۳) وارد کردن تیغه نقره ای به محلول مس (II) سولفات

(۴) آبکاری قاشق نقره ای با الکترولیت مس (II) سولفات و آند مسی

۲۰۳- چند مورد از مطالب زیر، درست است؟

(الف) عدد اکسایش فلز واسطه در $\text{VO}_2(\text{NH}_4)_3$ برابر با ۳+ است.

(ب) در واکنش $\text{Cl}_2 + \text{NaOH} \rightarrow \text{NaCl} + \text{NaClO}_3 + \text{H}_2\text{O}$ ، نوع گونه کاهنده و اکسنده، متفاوت است.

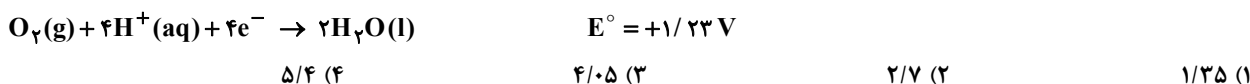
(پ) بازدهی سلول سوختی هیدروژن- اکسیژن، $\frac{1}{3}$ بازدهی موتور درون سوز است.

(ت) مجموع ضرایب مواد در معادله واکنش کلی سلول سوختی متان- اکسیژن برابر با ۶ است.

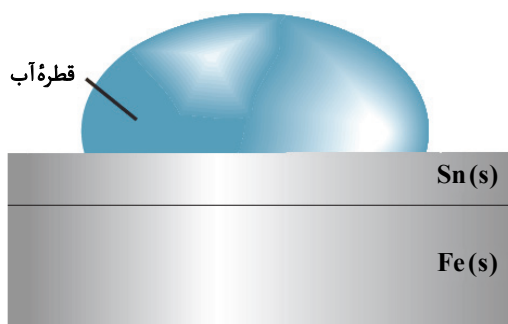
(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۲۰۴- در یک سلول سوختی با ولتاژ 0.615 V ، ولت، $4/8$ گرم گاز اکسیژن با مقدار کافی گاز هیدروژن، واکنش می دهد. جرم آب تولید شده در این

سلول برحسب گرم کدام است؟ ($H = 1, O = 16 : g \cdot mol^{-1}$)



۲۰۵- شکل زیر، بخشی از یک ورقه آهنی را نشان می دهد که با لایه نازکی از قلع پوشیده شده است. چند مورد از مطالب داده شده درست است؟



■ به این نوع آهن، حلبی یا آهن سفید گفته می شود.

■ در اثر ایجاد خراش در سطح این نوع آهن، قلع نقش کاتد را ایفا کرده و کاهش می یابد.

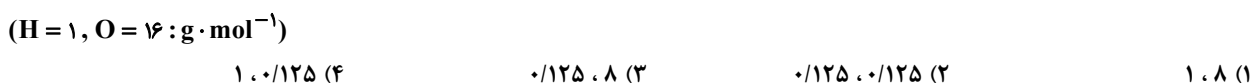
■ از این نوع آهن، نمی توان برای ساخت ظروف بسته بندی مواد غذایی استفاده کرد.

■ آب در فرایند خراش دیدن این نوع آهن، نقش واکنش دهنده و اکسنده را دارد.

(۱) صفر (۲) ۱

(۳) ۲ (۴) ۳

۲۰۶- در فرایند برقکافت آب، به ازای تولید ۱ گرم گاز در آند، چند گرم گاز در کاتد تولید می شود و چند مول الکترون مبادله می شود؟



۲۰۷- اگر در فرایند هال، 6750 کیلوگرم آلومینیم تولید شود، با الکترون های مبادله شده برای تولید آن، چند کیلوگرم فلز منیزیم از برقکافت

منیزیم کلرید مذاب می توان تهیه کرد؟ ($Al = 27, Mg = 24 : g \cdot mol^{-1}$)

(۱) ۳۰۰۰ (۲) ۶۰۰۰ (۳) ۹۰۰۰ (۴) ۱۲۰۰۰

۲۰۸- کدام گزینه درست است؟

- (۱) سیلیس یک جامد کووالانسی است و بیش از ۹۰ درصد پوسته جامد زمین را تشکیل می‌دهد.
- (۲) در بین مواد « SiF_4 ، NH_4NO_3 ، SiC ، BaO ، NCl_3 »، سه ماده مولکولی وجود دارد.
- (۳) گرافن یک گونه شیمیایی دوبعدی و مانند الماس، شفاف است.
- (۴) در ساختار سیلیس، تنها پیوندهای $\text{Si}-\text{Si}$ و $\text{Si}-\text{O}$ وجود دارد.

۲۰۹- نسبت شمار کاتیون به شمار آنیون در کلسیم سیلیکات، چند برابر شمار اتم‌ها در آمونیوم استات است؟

- (۱) $\frac{2}{5}$ (۲) $\frac{1}{5}$ (۳) $\frac{1}{6}$ (۴) $\frac{1}{12}$

۲۱۰- چند مورد از مطالب زیر، درست است؟

- (الف) اگر محلول سدیم کلرید در مدار الکتریکی قرار گیرد، یون‌هایی با شعاع کوچک‌تر به‌سوی قطب منفی پیش می‌روند.
- (ب) جامدهای یونی، دارای ذره‌های باردارند و به همین دلیل، رسانای جریان برق هستند.
- (پ) وارد کردن ضربه به جامدهای یونی، می‌تواند باعث غلبه نیروی دافعه بر جاذبه در یک راستای معین شود.
- (ت) همه ترکیب‌هایی یونی، نقطه ذوب بالایی دارند و در آب حل می‌شوند.

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۲۱۱- اگر شعاع یون کلسیم برابر با 99 pm و $1/375$ برابر شعاع یون M^{2+} باشد، نسبت بار به شعاع یون M^{2+} برحسب cm^{-1} کدام است؟

- (۱) $1/39 \times 10^8$ (۲) $1/39 \times 10^9$ (۳) $2/78 \times 10^9$ (۴) $2/78 \times 10^8$

۲۱۲- اگر دریای الکترونی یک قطعه کلسیم دارای $1/505 \times 10^{25}$ الکترون باشد، حجم این قطعه به تقریب چند سانتی‌متر مکعب است؟ (چگالی

کلسیم را $5 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ و جرم مولی آن را $40 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ در نظر بگیرید.)

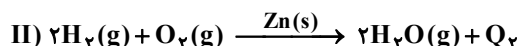
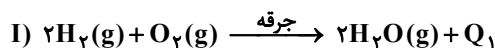
- (۱) ۳۳۳ (۲) ۶۶۶ (۳) ۳۳۳۰ (۴) ۶۶۶۰

۲۱۳- کدام موارد از مطالب زیر، درست است؟

- (الف) در محلولی از نمک وانادیم که به رنگ سبز است، یون وانادیم تنها می‌تواند نقش اکسنده را داشته باشد.
- (ب) انرژی پرتوهای بازتاب شده از محلول حاوی VO_3^- ، بیشتر از انرژی پرتوهای بازتاب شده از محلول مس (II) سولفات است.
- (پ) فولاد زنگ‌زن از نظر مقاومت در برابر سایش، با تیتانیوم تفاوت چندانی ندارد.
- (ت) آهن (III) اکسید به جز طول موج‌های حدود 650 تا 700 نانومتر، دیگر طول موج‌های ناحیه مرئی را جذب می‌کند.

- (۱) الف و پ (۲) ب و پ (۳) پ و ت (۴) الف، ب و ت

۲۱۴- با توجه به دو واکنش زیر، چند مورد از مطالب داده شده درست است؟



(الف) مقدار عددی Q_1 بزرگ‌تر از Q_2 است.

(ب) انرژی فعال‌سازی واکنش (II) کمتر از واکنش (I) است.

(پ) به‌جای پودر روی در واکنش (II)، می‌توان از توری پلاتینی نیز استفاده کرد.

(ت) به‌ازای مصرف مقدار یکسانی از واکنش‌دهنده‌ها، شمار مولکول‌های آب تولیدشده در پایان واکنش (II) بیشتر از (I) است.

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۲۱۵- در یک شهر، سالانه ۱ میلیون خودرو رفت و آمد می‌کنند و هر خودرو به‌طور میانگین، ۱۰,۰۰۰ کیلومتر مسافت را می‌پیماید. اگر به‌ازای

پیمودن یک کیلومتر مسافت، در نبود مبدل کاتالیستی، $5/99$ گرم و در حضور مبدل کاتالیستی، $0/39$ گرم کربن مونوکسید از خودرو وارد

هواکره شود، با نصب مبدل کاتالیستی در یک دوره ۱۰ ساله، از ورود چند مولکول کربن مونوکسید به هواکره جلوگیری خواهد شد؟

($C = 12$, $O = 16$: $\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$)

- (۱) $1/204 \times 10^{33}$ (۲) $1/204 \times 10^{34}$ (۳) $2/408 \times 10^{33}$ (۴) $2/408 \times 10^{34}$

۲۱۶- درصد پیشرفت واکنش تعادلی گازی: $A + B \rightleftharpoons 2C$, $K = 81$ که با ۱ مول از هریک از واکنش‌دهنده‌ها در ظرفی به حجم یک لیتر

آغاز شده است، به تقریب کدام است؟

- (۱) ۱۹ (۲) ۴۰/۵ (۳) ۸۱/۸ (۴) ۹۰

۲۱۷- افزایش دما و کاهش حجم در سامانه $2NO_2(g) \rightleftharpoons N_2O_4(g)$ ، باعث پررنگ شدن مخلوطی تعادلی می‌شود؛ بنابراین

- (۱) افزایش دما و کاهش حجم، هر دو باعث جابه‌جایی تعادل در جهت برگشت می‌شوند.
 - (۲) افزایش دما باعث جابه‌جایی تعادل در جهت برگشت و کاهش حجم باعث افزایش غلظت NO_2 می‌شود.
 - (۳) افزایش دما باعث افزایش سرعت واکنش در جهت برگشت و کاهش حجم باعث کاهش سرعت در جهت رفت می‌شود.
 - (۴) افزایش دما باعث افزایش غلظت همه مواد و کاهش حجم باعث جابه‌جایی تعادل در جهت برگشت می‌شود.
- ۲۱۸- مقدار عددی ثابت تعادل برای فرایند هابر در دماهای ۳۰۰، ۴۰۰، ۸۰۰ و ۱۰۰۰ کلوین به‌صورت نامنظم در زیر آورده شده است. ثابت تعادل مربوط به دمای ۴۰۰ کلوین کدام است؟

$$K_1 = 3/9 \times 10^{-2}, \quad K_2 = 2/6 \times 10^{-8}, \quad K_3 = 2/3 \times 10^{-3}, \quad K_4 = 3/9 \times 10^{-4}$$

(۱) K_1 (۲) K_2 (۳) K_3 (۴) K_4

۲۱۹- چند مورد از مطالب زیر، درست است؟

- الف) همه مواد آلی دارای گروه‌های عاملی هستند و با تغییر گروه‌های عاملی آن‌ها، می‌توان یک ماده جدید تهیه کرد.
- ب) در واحد تکرار شونده پلی‌اتیلن ترفتالات، ۱۰ اتم کربن وجود دارد.
- پ) از واکنش گاز اتن با هیدروژن کلرید، ماده‌ای به‌دست می‌آید که در افشانه بی‌حس‌کننده موضعی به‌کار می‌رود.
- ت) از تقطیر نفت خام، می‌توان موادی مانند پارازایلن، بنزن و ترفتالیک اسید را به‌دست آورد.

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۲۲۰- اگر ۲۰۰ گرم پارازایلن که درصد ناخالصی در آن برابر با ۴۷ است، با مقدار کافی پتاسیم پرمنگنات واکنش دهد، چند گرم ترفتالیک اسید به‌دست می‌آید و چند مول الکترون مبادله می‌شود؟ (بازده واکنش را ۳۰ درصد در نظر بگیرید و تنها فراورده کربن‌دار واکنش، ترفتالیک اسید است.)

$$(H = 1, C = 12, O = 16 : g \cdot mol^{-1})$$

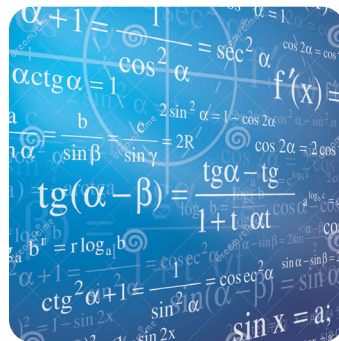
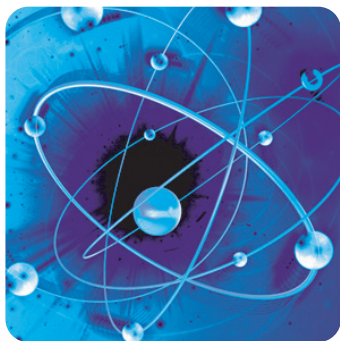
(۱) ۳/۶ ، ۴۴/۲ (۲) ۳/۶ ، ۴۹/۸ (۳) ۳/۲ ، ۴۹/۸ (۴) ۳/۲ ، ۴۴/۲

دفترچه پاسخ‌های تشریحی

آزمون آزمایشی ۳۰ اردیبهشت ۱۴۰۱ (مرحله ۱۵)

ویژه داوطلبان آزمون سراسری سال ۱۴۰۱

گروه آزمایشی علوم ریاضی



ریاضیات

۱۰۱- پاسخ: گزینه ۱ ▲ مشخصات سؤال: * ساده * صفحه ۱۰ حسابان ۲

وقتی $A(-2, 3)$ روی نمودار تابع $g(x) = -2f(3-x)$ قرار گرفته است یعنی:

$$g(-2) = 3 \Rightarrow 3 = -2f(5) \Rightarrow f(5) = -\frac{3}{2}$$

یعنی $M(5, -\frac{3}{2})$ روی نمودار f است، پس برای یافتن نقطه متناظر روی نمودار $h(x)$ داریم:

$$\frac{x}{2} - 1 = 5 \Rightarrow x = 12 \Rightarrow h(12) = 1 + f(\frac{12}{2} - 1) \Rightarrow h(12) = 1 + f(5) = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$$

بنابراین نقطه B به صورت $(12, -\frac{1}{2})$ است، در نتیجه:

$$\begin{cases} a = 12 \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow ab = -6$$

۱۰۲- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: * ساده * صفحه ۲۷ حسابان ۲

نکته: توابع $y = a\sin bx + c$ و $y = a\cos bx + c$ دارای مقدار ماکسیمم $|a| + c$ ، مقدار مینیمم $-|a| + c$ و دوره تناوب $\frac{2\pi}{|b|}$ هستند.

ابتدا تابع را ساده می‌کنیم. با توجه به اینکه $\sin(\frac{3\pi}{2} - x) = -\cos x$ ، پس:

$$f(x) = a + b\cos bx$$

طبق نمودار، دوره تناوب تابع برابر 2π است:

$$T = 2\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = 2\pi \Rightarrow |b| = 1 \Rightarrow b = \pm 1 \quad (*)$$

با توجه به اینکه در $x = 0$ ، کمترین مقدار تابع است، پس داریم:

$$\begin{cases} \min = a - |b| \\ \min = f(0) = a + b\cos 0 = a + b \end{cases} \Rightarrow a - |b| = a + b \Rightarrow b < 0 \xrightarrow{(*)} b = -1$$

$$\max = a + |b| = 5 \Rightarrow a + 1 = 5 \Rightarrow a = 4$$

حال با این فرض مقدار a را به کمک ماکسیمم تابع به دست می‌آوریم:

حال مقدار خواسته شده را به دست می‌آوریم:

$$f(\frac{2\pi b}{a}) = f(\frac{-2\pi}{4}) = f(-\frac{\pi}{2}) = 4 - \cos \frac{\pi}{2} = 4$$

۱۰۳- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: * ساده * صفحه ۴۲ حسابان ۲

$$\text{نکته: } \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x, \quad \sin 2x = 2\sin x \cos x$$

$$\text{نکته: } \tan x = \tan \alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha \quad (k \in \mathbb{Z})$$

معادله را ساده می‌کنیم:

$$\sin x (\sin x - \cos x) = \cos x (\sin x + \cos x) \Rightarrow \sin^2 x - \sin x \cos x = \sin x \cos x + \cos^2 x$$

$$\Rightarrow \sin^2 x - \cos^2 x = 2\sin x \cos x \Rightarrow -\cos 2x = \sin 2x \Rightarrow \tan 2x = -1 \Rightarrow \tan 2x = \tan(-\frac{\pi}{4})$$

$$\Rightarrow 2x = k\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

۱۰۴- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: * متوسط * صفحه ۱۲۳ حسابان ۲

نکته: اگر $A(\alpha, \beta)$ اکسترمم نسبی تابع مشتق پذیر f باشد، آنگاه $f'(\alpha) = 0$ و $f(\alpha) = \beta$.

مطابق نکته می‌توان نوشت:

$$f'(x) = 2(x - \alpha)(x - \beta) + (x - \alpha)^2 \Rightarrow f'(x) = (x - \alpha)(2x - 2\beta + x - \alpha) \Rightarrow f'(x) = (x - \alpha)(3x - \alpha - 2\beta)$$

$$f'(\alpha) = 0 \Rightarrow (-\alpha)(-\alpha - 2\beta) = 0 \Rightarrow \alpha + 2\beta = 0 \Rightarrow \alpha = -2\beta \quad (*)$$

از طرفی $f(\alpha) = 4$ ، پس:

$$-\alpha^2 \beta = 4 \xrightarrow{(*)} -(-2\beta)^2 \beta = 4 \Rightarrow -4\beta^3 = 4 \Rightarrow \beta^3 = -1 \Rightarrow \beta = -1$$

۱۰۵- پاسخ: گزینه ۱ ▲ مشخصات سؤال: * متوسط * صفحه ۷۷ حسابان ۲

نکته: شیب خط مماس بر تابع f در نقطه $x = \alpha$ روی نمودار برابر $f'(\alpha)$ است.

$$m_{AB} = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{6 - 5}{3} = \frac{1}{3}$$

نقاط A و B با طول های ۱ و ۴ روی نمودار f است. شیب پاره خط AB را به دست می آوریم:

چون پاره خط AB با خط مماس موازی است، پس شیب خط مماس در $x = \alpha$ با $\frac{1}{3}$ برابر است و برای شیب خط مماس، مشتق تابع f در

$x = \alpha$ را به دست می آوریم:

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{2x\sqrt{x}}$$

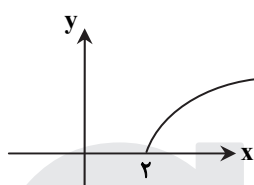
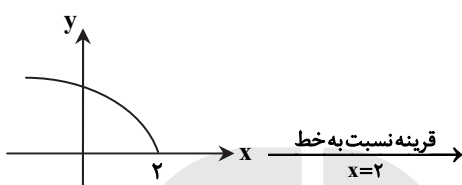
$$f'(\alpha) = \frac{1}{3} \Rightarrow 1 - \frac{4}{2\alpha\sqrt{\alpha}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{2}{\alpha\sqrt{\alpha}} \Rightarrow \alpha\sqrt{\alpha} = 3 \Rightarrow \alpha^3 = 9 \Rightarrow \alpha = \sqrt[3]{9}$$

▲ مشخصات سؤال: * متوسط * صفحه ۳ حسابان ۲

۱۰۶- پاسخ: گزینه ۴

نکته: برای رسم نمودار $y = f(x+k)$ ، اگر $k > 0$ ، کافی است نمودار تابع $f(x)$ را k واحد در جهت افقی به سمت چپ انتقال دهیم و برای $k < 0$ ، این انتقال به اندازه $|k|$ واحد به سمت راست انجام می شود.

ابتدا نمودار تابع $y = \sqrt{4-2x}$ را رسم می کنیم و سپس نمودار آن را نسبت به خط $x=2$ قرینه می کنیم:



ضابطه این تابع به صورت $y = \sqrt{2x-4}$ است.

نمودار f را k واحد به چپ انتقال می دهیم تا نمودار اصلی را روی محور عرض ها قطع کند، یعنی $x=0$ باید ریشه معادله زیر باشد:

$$\sqrt{2(x+k)-4} = \sqrt{4-2x} \xrightarrow{x=0} \sqrt{2k-4} = \sqrt{4} \Rightarrow 2k-4=4 \Rightarrow k=4$$

▲ مشخصات سؤال: * متوسط * صفحه ۲۷ حسابان ۲

۱۰۷- پاسخ: گزینه ۱

نکته: توابع $y = a\sin bx + c$ و $y = a\cos bx + c$ دارای مقدار ماکسیمم $|a| + c$ ، مقدار مینیمم $-|a| + c$ و دوره تناوب $\frac{2\pi}{|b|}$ هستند.

$$\text{نکته: } \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$$

$$f(x) = 1 + a\sin b\pi x \cos b\pi x = 1 + \frac{a}{2} \sin 2b\pi x$$

ابتدا تابع f را ساده می کنیم:

با توجه به آنکه تابع در همسایگی راست $x=0$ نزولی اکید است، پس $ab < 0$. فرض می کنیم $b > 0$ و $a < 0$. مطابق نمودار مینیمم تابع ۱- است، پس:

$$\min = 1 - \frac{|a|}{2} = -1 \Rightarrow 1 + \frac{a}{2} = -1 \Rightarrow a = -4$$

$$\frac{2\pi}{|2b\pi|} = \frac{1}{b} \Rightarrow b = \frac{1}{4}$$

از طرفی مطابق نمودار، نصف دوره تناوب ۲ است، پس دوره تناوب برابر ۴ است:

$$ab = -1$$

بنابراین:

دقت کنید که اگر $b < 0$ و $a > 0$ فرض می کردیم، نتیجه یکسان است.

▲ مشخصات سؤال: * متوسط * صفحه ۴۲ حسابان ۲

۱۰۸- پاسخ: گزینه ۳

نکته ۱: اگر $\alpha + \beta = \pi$ آنگاه: $\tan \alpha = -\tan \beta$

$$\text{نکته ۲: } \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\tan \beta = \frac{4}{3}, \quad \tan \theta = \frac{x}{4}$$

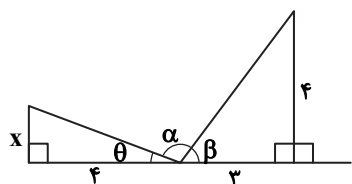
در شکل روبه رو می توان نوشت:

با توجه به آنکه $(\theta + \beta) + \alpha = \pi$ ، پس مطابق نکته $\tan(\theta + \beta) = -\tan \alpha$ ، یعنی

$$\tan(\theta + \beta) = \frac{3}{4}$$

حال با توجه به نکته ۲ داریم:

$$\frac{\tan \theta + \tan \beta}{1 - \tan \theta \tan \beta} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{\frac{x}{4} + \frac{4}{3}}{1 - \frac{x}{3}} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{x + \frac{16}{3}}{3 - x} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{4}{3}x = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{1}{4}$$



نکته: اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L > 0$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ و تابع g در همسایگی محذوفی از $x = a$ منفی باشد، آنگاه:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$$

برای تشخیص گزینه درست حد چپ و حد راست تابع را در $x = 2$ به دست می آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{4 - (x \times 2)}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-2(x-2)}{(x-2)(x-1)} = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{4 - (x \times 1)}{(x-2)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{4-x}{(x-2)(x-1)} = -\infty$$

با توجه به گزینه ها، گزینه ۲ پاسخ است.

نکته: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+ah) - f(x)}{h} = af'(x)$

ابتدا با توجه به آنکه $h \rightarrow 0^-$ ، پس $1 \rightarrow (1+2h)^-$ ، پس مطابق نکته داریم:

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+2h) - f(1)}{h} = 2f'_-(1)$$

دقت داریم که تابع در $x = 1$ از چپ پیوسته است. حال در همسایگی چپ $x = 1$ ، مشتق تابع f را به دست می آوریم:

$$x \rightarrow 1^- : f(x) = \frac{3-2x}{2x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{-2(2x+1) - 2(3-2x)}{(2x+1)^2}$$

$$f'_-(1) = -\frac{8}{9} \Rightarrow 2f'_-(1) = -\frac{16}{9}$$

نکته: شیب خط مماس بر تابع f در نقطه $x = \alpha$ روی نمودار برابر $f'(\alpha)$ است.

با توجه به نمودار، نقطه A دارای مختصات $(-3, 0)$ است. اگر نقطه B با طول α روی نمودار f را در نظر بگیریم، مختصات آن به صورت

$$\left(\alpha, \frac{2\alpha}{\alpha+3}\right) \text{ است. در این حالت شیب خط گذرنده از نقاط } A \text{ و } B \text{ با مشتق تابع در نقطه } x = \alpha \text{ برابر است، زیرا خط بر نمودار تابع مماس است.}$$

$$m_{AB} = f'(\alpha) \Rightarrow \frac{\frac{2\alpha}{\alpha+3}}{\alpha+3} = \frac{6}{(\alpha+3)^2} \Rightarrow \frac{2\alpha}{(\alpha+3)^2} = \frac{6}{(\alpha+3)^2} \Rightarrow \alpha = 3$$

نکته: فرض کنیم تابع f بر بازه $[a, b]$ پیوسته و بر بازه (a, b) مشتق پذیر باشد:

الف) اگر به ازای هر x در بازه (a, b) ، $f'(x) > 0$ ، آنگاه f بر $[a, b]$ اکیداً صعودی است.

الف) اگر به ازای هر x در بازه (a, b) ، $f'(x) < 0$ ، آنگاه f بر $[a, b]$ اکیداً نزولی است.

ابتدا مشتق تابع را به دست آورده و آن را در نقاط بحرانی تعیین علامت می کنیم:

$$f'(x) = \frac{(2x+3)(x-2) - (x^2+3x+6)}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x-12}{(x-2)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{(x-6)(x+2)}{(x-2)^2}$$

x		-2		2		6	
f'	+	0	-		-	0	+
f	↗		↘		↘		↗

چون $x = 2$ مجانب قائم تابع است، تابع در بازه های $(-2, 2)$ و $(2, 6)$ نزولی اکید است؛ بنابراین حداکثر مقدار a برابر ۲ است.

نکته ۱: اگر $x = \alpha$ و $x = \beta$ صفرهای یک عبارت درجه دوم باشد، معادله آن به صورت زیر است:

$$y = k(x - \alpha)(x - \beta)$$

$$\text{نکته ۲: } (f(u))' = u'f'(u)$$

$$\text{نکته ۳: } (f \cdot g)' = f' \cdot g + g' \cdot f$$

نکته ۴: مشتق دوم عبارت $y = f(x)$ را با $y'' = f''(x)$ نمایش می دهند و برای محاسبه آن از $y' = f'(x)$ مشتق می گیرند.

با توجه به نکته ۱، ابتدا ضابطه تابع f را به دست می آوریم:

$$f(x) = k(x+1)(x-3) \xrightarrow{\text{تابع از نقطه } (0, 3) \text{ می گذرد}} 3 = k(1)(-3) \Rightarrow k = -1 \Rightarrow f(x) = -(x+1)(x-3) = -x^2 + 2x + 3$$

راه حل اول:

ضابطه تابع را به صورت مربع کامل نوشته و $y = f(1 - \frac{2}{x})$ را به دست می آوریم:

$$f(x) = -(x-1)^2 + 4 \Rightarrow y = f(1 - \frac{2}{x}) = -(1 - \frac{2}{x} - 1)^2 + 4 \Rightarrow y = 4 - \frac{4}{x^2}$$

حال مشتق دوم تابع را در $x = -1$ به دست می آوریم:

$$\begin{cases} y' = \frac{8}{x^3} \\ y'' = \frac{-24}{x^4} \end{cases} \Rightarrow y''(-1) = -24$$

راه حل دوم:

از تابع داده شده دو بار مشتق می گیریم:

$$y = f(1 - \frac{2}{x}) \Rightarrow y' = \frac{2}{x^2} f'(1 - \frac{2}{x}) \Rightarrow y'' = -\frac{4}{x^3} f'(1 - \frac{2}{x}) + \frac{4}{x^4} f''(1 - \frac{2}{x})$$

حال مقدار $x = -1$ را جای گذاری می کنیم:

$$y''(-1) = 4f'(-3) + 4f''(-3)$$

حال به کمک ضابطه تابع f ، مقادیر $f'(-3)$ و $f''(-3)$ را به دست می آوریم:

$$\begin{cases} f'(x) = -2x + 2 \Rightarrow f'(-3) = -6 + 2 = -4 \\ f''(x) = -2 \Rightarrow f''(-3) = -2 \end{cases} \Rightarrow y''(-1) = -16 - 8 = -24$$

▲ مشخصات سؤال: * دشوار * صفحه های ۱۲۱، ۱۲۹ و ۱۴۱ حسابان ۲

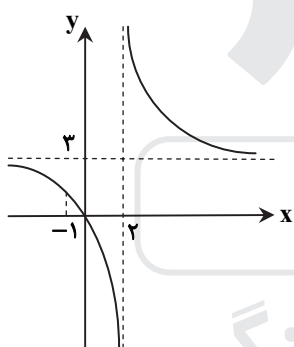
۱۱۴- پاسخ: گزینه ۴

نقطه $A(2, 3)$ محل برخورد مجانب های تابع است، یعنی $x = 2$ مجانب قائم و $y = 3$ مجانب افقی تابع است.

مجاانب قائم: $x = 2 \Rightarrow 2 + d = 0 \Rightarrow d = -2$

مجاانب افقی: $y = 3 \Rightarrow a = 3$

طبق فرض: $f(0) = 0 \Rightarrow b = 0$



$$f(x) = \frac{3x}{x-2}$$

حال به کمک ضابطه تابع f ، آن را رسم می کنیم:

مطابق نمودار، تابع در همسایگی $x = -1$ نزولی اکید با تقعر رو به پایین است.

▲ مشخصات سؤال: * دشوار * صفحه ۳۷ حسابان ۲

۱۱۵- پاسخ: گزینه ۲

نکته: $\sin^2 x = 2 \sin x \cos x$, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

نکته: $\sin x = \sin \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases}$

ابتدا معادله را ساده می کنیم:

$$2 \sin^2 x = \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x \Rightarrow 2 \sin^2 x = 1 + \sin 2x$$

اگر فرض کنیم $\sin 2x = A$ ، می توان نوشت:

$$2A^2 - A - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \Rightarrow \sin 2x = 1 \Rightarrow 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4} \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ A = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sin 2x = -\frac{1}{2} = \sin(-\frac{\pi}{6}) \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{12} \\ 2x = 2k\pi + \frac{7\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi + \frac{7\pi}{12} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

حال مجموع جواب ها در بازه $(0, 2\pi)$ برابر است با:

$$\frac{\pi}{4} + \pi + \frac{\pi}{4} + \pi - \frac{\pi}{12} + 2\pi - \frac{\pi}{12} + \frac{7\pi}{12} + \pi + \frac{7\pi}{12} = 5\pi + \frac{3\pi}{2} = \frac{13\pi}{2}$$

نکته: $(fog)'(x) = g'(x) \cdot f'(g(x))$

$$g'(\alpha) \cdot f'(g(\alpha)) = \frac{5}{4}$$

با توجه به آنکه $(fog)'(\alpha) = \frac{5}{4}$ پس:

$$\begin{cases} g(\alpha) = \sqrt{4\alpha+1} \\ f'(x) = \frac{5}{x^2} \end{cases} \Rightarrow f'(g(\alpha)) = \frac{5}{(\sqrt{4\alpha+1})^2} = \frac{5}{4\alpha+1}$$

از طرفی $g'(x) = \frac{2}{\sqrt{4x+1}}$ حال می توان نوشت:

$$\frac{2}{\sqrt{4\alpha+1}} \times \frac{5}{4\alpha+1} = \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{10}{(\sqrt{4\alpha+1})^3} = \frac{5}{4} \Rightarrow (\sqrt{4\alpha+1})^3 = 8 \Rightarrow \sqrt{4\alpha+1} = 2 \Rightarrow 4\alpha+1=4 \Rightarrow \alpha = \frac{3}{4}$$

نکته: خط $x = a$ را مجانب قائم تابع $f(x)$ گویند، هرگاه حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$

$$y = \frac{3(a-f(x))}{a-f(x)-1} = \frac{3a - \frac{9x}{x-1}}{a-1 - \frac{3x}{x-1}} = \frac{(3a-9)x - 3a}{(a-4)x - a + 1}$$

ابتدا ضابطه $y = f(a-f(x))$ را تشکیل می دهیم:

برای آنکه تابع مجانب قائم نداشته باشد یا باید مخرج فاقد ریشه باشد که تابع به یک تابع خطی تبدیل شود و یا صورت و مخرج ریشه مشترک داشته باشند و تابع به یک تابع ثابت ساده شود که اگر $a = 4$ در این حالت به یک تابع خطی تبدیل می شود و فاقد مجانب قائم است. دقت کنید که حالت دوم هرگز اتفاق نمی افتد.

نکته: فرض کنید تابع f در $x = c$ پیوسته است. در این صورت نقطه $(c, f(c))$ نقطه عطف تابع f است، هرگاه دو شرط زیر برقرار باشند:(الف) نمودار f در نقطه $(c, f(c))$ خط مماس داشته باشد.(ب) جهت تغير f در نقطه $(c, f(c))$ تغییر کند.نکته: فرض کنیم تابع f در بازه ای مانند $I, I \subseteq D_f$ پیوسته باشد و c یک نقطه بحرانی تابع f باشد، هرگاه f بر این بازه به جز احتمالاً در نقطه c مشتق پذیر باشد، در این صورت:(الف) اگر به ازای تمام مقادیر x در بازه ای مانند (a, c) و به ازای تمام مقادیر x در بازه ای مانند (c, b) ، $f'(x) > 0$ و $f'(x) < 0$ ، آنگاه $f(c)$ یک ماکسیمم نسبی است.(ب) اگر به ازای تمام مقادیر x در بازه ای مانند (a, c) و به ازای تمام مقادیر x در بازه ای مانند (c, b) ، $f'(x) < 0$ و $f'(x) > 0$ ، آنگاه $f(c)$ یک مینیمم نسبی است.(ج) اگر f' در نقطه c تغییر علامت ندهد، به طوری که f در هر دو طرف c مثبت یا در هر دو طرف آن منفی باشد، آنگاه $f(c)$ نه مینیمم نسبی و نه ماکزیمم نسبی است.ابتدا f' و f'' را به دست آورده و نقاط اکسترمم نسبی و عطف تابع را مشخص می کنیم:

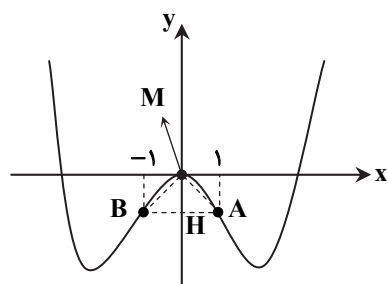
$$f'(x) = 4x^3 - 12x = 4x(x^2 - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

x	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$
f'	$-$	$+$	$-$
f	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

max

$$f''(x) = 12x^2 - 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases} \quad \text{طول نقاط عطف}$$

x	-1	1
f''	$+$	$-$
f	$\cup$	$\cap$

پس نقاط عطف به صورت $A(1, -5)$ و $B(-1, -5)$ و ماکزیمم نسبی به صورت $M(0, 0)$ است. نمودار تابع f را به کمک اطلاعات به دست آمده رسم می کنیم و داریم:

$$S_{\triangle AMB} = \frac{1}{2} \times MH \times AB = \frac{1}{2} \times 5 \times 2 = 5$$



▲ مشخصات سؤال: ساده * صفحه ۱۰ هندسه ۳

۱۱۹- پاسخ: گزینه ۳

نکته: درایه a_{ij} را درایه عمومی ماتریس A می‌نامیم که $1 \leq i \leq m$ و $1 \leq j \leq n$ تغییر می‌کنند. همه درایه‌های ماتریس A را می‌توان توسط درایه عمومی نشان داد و برای اختصار می‌نویسیم $A = [a_{ij}]$.
طبق نکته ماتریس A را با استفاده از درایه عمومی داده شده می‌نویسیم:

$$a_{ij} = \begin{cases} 2i - j & i \geq j \\ j + i & i < j \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 5 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{مجموع درایه‌ها} = 8 + 10 + 12 = 30$$

▲ مشخصات سؤال: ساده * صفحه ۲۰ هندسه ۳

۱۲۰- پاسخ: گزینه ۱

$$A^n = A^{n-1} \times A = A^{n-2} \times A^2 = \dots$$

نکته: ماتریس همانی، ماتریسی است قطری که درایه‌های خارج قطر اصلی آن همگی صفر هستند. ماتریس همانی مرتبه n را با I_n نمایش می‌دهیم.

$$I^n = I$$

$$AI = IA = A$$

توان‌های ماتریس A را حساب می‌کنیم تا به A^{1401} برسیم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -I$$

$$A^4 = -I \Rightarrow A^{1400} = (A^4)^{350} = (-I)^{350} = I \Rightarrow A^{1401} = A$$

▲ مشخصات سؤال: ساده * صفحه ۳۸ هندسه ۳

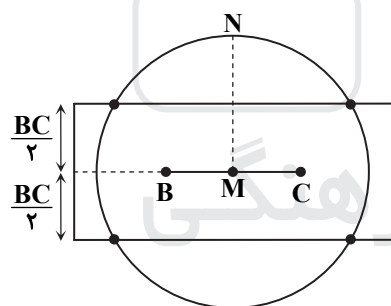
۱۲۱- پاسخ: گزینه ۱

نکته: مکان هندسی نقاطی از صفحه که از نقطه ثابت O در صفحه به فاصله ثابت R باشند، دایره‌ای است به مرکز نقطه ثابت O و شعاع R .

نکته: مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط d به فاصله r باشند، دو خط راست موازی خط d در دو طرف آن و به فاصله r از آن هستند.

مکان هندسی نقاطی از صفحه که فاصله آن‌ها از وسط BC برابر $2BC$ باشد،

دایره‌ای است به مرکز وسط BC و شعاع $2BC$.



مکان هندسی نقاطی از صفحه که فاصله آن‌ها از BC برابر $\frac{1}{4}BC$ باشد، مطابق

شکل دو خط موازی BC اند به فاصله $\frac{1}{4}BC$ از آن.

مطابق شکل $MN = 2BC$ و در نتیجه دایره با دو خط مذکور در ۴ نقطه مشترک‌اند.

▲ مشخصات سؤال: ساده * صفحه ۴۵ هندسه ۳

۱۲۲- پاسخ: گزینه ۳

نکته: معادله استاندارد دایره به مرکز $O(\alpha, \beta)$ و شعاع R به صورت $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$ است.

ابتدا معادله دایره را به فرم استاندارد در می‌آوریم:

$$x^2 + y^2 + 2x = 7 \Rightarrow (x + 1)^2 - 1 + y^2 = 7 \Rightarrow (x + 1)^2 + y^2 = 8$$

مرکز دایره نقطه $(-1, 0)$ و شعاع دایره $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ است.

برای اینکه خط و دایره متقاطع باشند، باید فاصله مرکز دایره از خط، از شعاع دایره کمتر باشد:

$$OH < R \Rightarrow \frac{|1-m|}{\sqrt{2}} < 2\sqrt{2} \Rightarrow |1-m| < 4 \Rightarrow -3 < m < 5$$

▲ مشخصات سؤال: ساده * صفحه ۶۸ هندسه ۳

۱۲۳- پاسخ: گزینه ۴

هر رأس مکعب مستطیل، نقطه مشترک سه صفحه است و مؤلفه‌های آن باید هریک از صفحات داده شده باشند.

نقاط $(4, -2, 1)$ ، $(-1, 2, 3)$ ، $(-2, 2, 1)$ رؤس این مکعب مستطیل‌اند، اما نقطه $(-4, 3, 1)$ رأس آن نیست.

نکته: دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ برابر است با: $\det(A) = |A| = ad - bc$

نکته: وارون ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ با شرط $ad - bc \neq 0$ ، برابر است با: $A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

نکته: $A \times (B \pm C) = A \times B \pm A \times C$

نکته: ماتریس همانی، ماتریسی است قطری که درایه‌های خارج قطر اصلی آن همگی صفر هستند. ماتریس همانی مرتبه n را با I_n نمایش می‌دهیم.

نکته: $AI = IA = A$

نکته: در جمع و تفریق دو ماتریس هم‌مرتبه، درایه‌های متناظر را با هم جمع یا از هم کم می‌کنیم.

نکته: $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

ابتدا از رابطه ماتریس وارون داریم:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = |A| A^{-1} \quad (*)$$

اکنون عبارت خواسته شده در صورت سؤال را ساده می‌کنیم و داریم:

$$A^T - (a+d)A = A(A - (a+d)I) = A \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a+d & 0 \\ 0 & a+d \end{bmatrix} \right) = A \begin{bmatrix} -d & b \\ c & -a \end{bmatrix} \stackrel{(*)}{=} A(-|A|A^{-1}) = -|A|AA^{-1} = -|A|I$$

نکته: روابط جبری و اتحادها برای ماتریس‌ها صادق است.

$$AB = I \Rightarrow \begin{cases} A = B^{-1} \\ B = A^{-1} \end{cases} \quad (A \text{ و } B \text{ وارون یکدیگرند.})$$

از رابطه داده شده در صورت سؤال و با استفاده از نکات داریم:

$$A^T = \bar{O} \Rightarrow A^T - I^T = -I^T \Rightarrow (A - I)(A + I) = -I \Rightarrow \begin{cases} (A - I)^{-1} = -(A + I) = -A - I \\ (A + I)^{-1} = -(A - I) = -A + I \end{cases}$$

بنابراین:

$$(A + I)^{-1} + (A - I)^{-1} = -2A$$

نکته: دترمینان ماتریس‌های 3×3 را با بسط دادن برحسب هر سطر یا هر ستون دلخواه آن می‌توان به‌دست آورد. به‌عنوان نمونه دترمینان ماتریس زیر با بسط برحسب سطر اول برابر است با:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = a_{11}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow |A| = a_{11} \times \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

دترمینان داده شده را برحسب سطر اول بسط می‌دهیم، داریم:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow a(cb - a^2) - b(b^2 - ac) + c(ab - c^2) = 0$$

$$\Rightarrow abc - a^3 + abc - b^3 + abc - c^3 = 0 \Rightarrow 3abc - (a^3 + b^3 + c^3) = 0 \Rightarrow 3abc = a^3 + b^3 + c^3$$

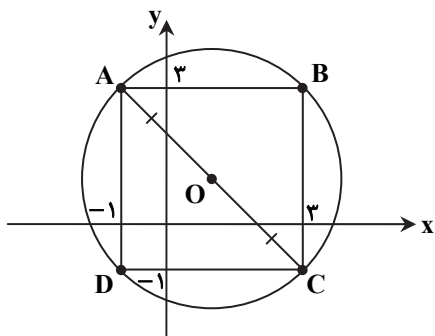
$$\Rightarrow abc = \frac{1}{3}(a^3 + b^3 + c^3)$$

بنابراین گزینه ۴ پاسخ است.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحه ۴۰ هندسه ۳

۱۲۷- پاسخ: گزینه ۴

نکته: معادله استاندارد دایره به مرکز $O(\alpha, \beta)$ و شعاع R به صورت $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$ است.
نقاط A, B, C و D چهار رأس یک مربع اند. مرکز دایره محیطی این مربع، وسط قطر AC و شعاع این دایره، نصف قطر مربع است:



$$O = \frac{A+C}{2} = (1, 1) \text{ مرکز دایره}$$

$$R = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = (2\sqrt{2})^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 2y = 6$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحه ۶۶ هندسه ۳

۱۲۸- پاسخ: گزینه ۲

نکته: فاصله دو نقطه $A(x_1, y_1, z_1)$ و $B(x_2, y_2, z_2)$ از رابطه زیر به دست می آید:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

تصویر نقطه $M(x, y, z)$ روی صفحه xz ، نقطه $(x, 0, z)$ است.

تصویر نقطه $M(x, y, z)$ روی صفحه yz ، نقطه $(0, y, z)$ است.

$$M(m, -2, 2) \Rightarrow \begin{cases} \text{تصویر روی } xz: A(m, 0, 2) \\ \text{تصویر روی } yz: A(0, -2, 2) \end{cases} \Rightarrow |AB| = \sqrt{m^2 + 4}$$

مینیمم این عبارت، هنگامی است که $m = 0$ باشد، پس داریم:

$$|AB| = \sqrt{4} = 2$$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * صفحه ۳۱ هندسه ۳

۱۲۹- پاسخ: گزینه ۲

$$|kA_{n \times n}| = k^n |A_{n \times n}| \text{ نکته:}$$

$$|A^n| = |A|^n \text{ نکته:}$$

ابتدا از رابطه داده شده داریم:

$$A^3 + 2I = \overline{O} \Rightarrow A^3 = -2I \Rightarrow |A^3| = |-2I| \Rightarrow |A|^3 = (-2)^3 |I| \Rightarrow |A|^3 = -8 \Rightarrow |A| = -2 \quad (*)$$

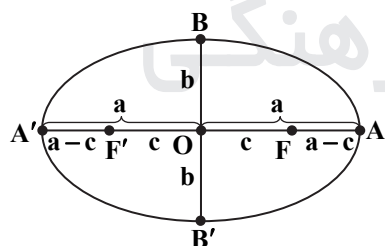
اکنون حاصل خواسته شده را با توجه به (*) و نکات می یابیم:

$$\left| \begin{matrix} -2 & A & A \\ -2 & A & A \\ -2 & A & A \end{matrix} \right| = \left| \begin{matrix} 4A & A & A \\ 4A & A & A \\ 4A & A & A \end{matrix} \right| = \left| \begin{matrix} 4A & A & A \\ -2A & A & A \\ -2A & A & A \end{matrix} \right| = \left| \begin{matrix} 4A & A & A \\ -2A & A & A \\ (-2A)^3 & A & A \end{matrix} \right| = 2^{22}$$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * صفحه های ۴۸ و ۴۹ هندسه ۳

۱۳۰- پاسخ: گزینه ۳

نکته: در بیضی به مرکز O مطابق شکل داریم:



$$AA' = 2a \text{ (قطر بزرگ)}$$

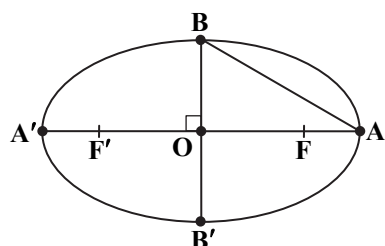
$$BB' = 2b \text{ (قطر کوچک)}$$

$$FF' = 2c \text{ اندازه فاصله کانونی}$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$\frac{c}{a} = \text{خروج از مرکز بیضی}$$

مطابق شکل روبه رو و اطلاعات مسئله داریم:



$$AB = FA'$$

$$\sqrt{OA^2 + OB^2} = OF + OA'$$

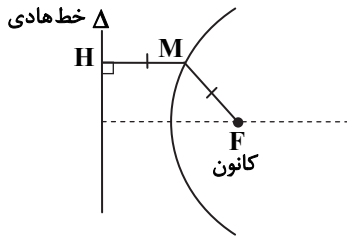
$$\Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = c + a \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2 + a^2 + 2ac$$

$$\xrightarrow{b^2 = a^2 - c^2} a^2 + a^2 - c^2 = c^2 + a^2 + 2ac \Rightarrow a^2 = 2c^2 + 2ac$$

طرفین این معادله را بر a^2 تقسیم می کنیم:

$$1 = 2\left(\frac{c}{a}\right)^2 + 2\left(\frac{c}{a}\right) \Rightarrow 2\left(\frac{c}{a}\right)^2 + 2\left(\frac{c}{a}\right) - 1 = 0 \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$$

دقت کنید که خروج از مرکز نمی تواند مقدار منفی باشد.



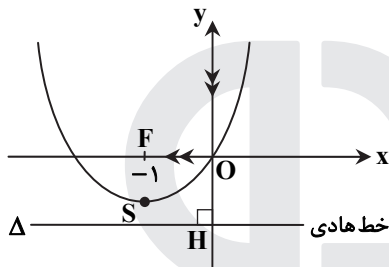
نکته: سهمی، مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از یک خط ثابت در آن صفحه (خط هادی) و از یک نقطه ثابت غیرواقع بر آن خط در آن صفحه (کانون)، به یک فاصله باشند.

$$MF = MH$$

نکته: در هر سهمی با پارامتر a ($a > 0$) اجزای سهمی به شرح زیر است:

شکل	دهانه سهمی	محور سهمی (تقارن)	خط هادی	کانون	رأس	معادله سهمی
	رو به راست	خط $y = k$	$x = h - a$	$(h + a, k)$	(h, k)	$(y - k)^2 = 4a(x - h)$
	رو به چپ	خط $y = k$	$x = h + a$	$(h - a, k)$	(h, k)	$(y - k)^2 = -4a(x - h)$
	رو به بالا	خط $x = h$	$y = k - a$	$(h, k + a)$	(h, k)	$(x - h)^2 = 4a(y - k)$
	رو به پایین	خط $x = h$	$y = k + a$	$(h, k - a)$	(h, k)	$(x - h)^2 = -4a(y - k)$

نکته: بر طبق ویژگی بازتابندگی سهمی هر پرتو نوری موازی با محور سهمی به بدنه داخلی سهمی بتابد، بازتاب آن از کانون سهمی خواهد گذشت. با توجه به نکات و توضیحات سؤال، باید مطابق شکل سهمی از مبداء مختصات بگذرد:



$$x^2 + 2x = a^2 y + b \Rightarrow 0 + 0 = 0 + b \Rightarrow b = 0$$

$$x^2 + 2x = a^2 y \Rightarrow (x+1)^2 = a^2 y + 1 \Rightarrow (x+1)^2 = a^2 \left(y + \frac{1}{a^2}\right) \Rightarrow F(-1, 0)$$

بر طبق تعریف سهمی $OF = OH$ پس $OH = 1$ و OH دو برابر فاصله کانونی است.

$$\text{فاصله کانونی سهمی} = \frac{a^2}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow a^2 = 2 \Rightarrow a = \sqrt{2}, -\sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} a+b = \sqrt{2} \\ a+b = -\sqrt{2} \end{cases}$$

بنابراین گزینه ۳ می‌تواند پاسخ باشد.

۱۳۲- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * صفحه‌های ۷۷ و ۷۸ هندسه ۳

نکته: اتحادهای جبری برای بردارها نیز صادق است.

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 \quad \text{نکته: برای بردار غیر صفر } \vec{a} \text{ داریم:}$$

$$|\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = 2, \vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = -\vec{c}$$

دو طرف این تساوی را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = (-\vec{c}) \cdot (-\vec{c}) \Rightarrow |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}) = |\vec{c}|^2 \Rightarrow 16 + 4 + 0 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}) = 0$$

$$\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a} = \frac{-20}{2} = -10$$

۱۳۳- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * صفحه ۸۳ هندسه ۳

نکته: حجم متوازی‌السطوح بناشده بر سه بردار $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$

$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ و $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ برابر است با حاصل ضرب مختلط این ۳ بردار:

$$V = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})| = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

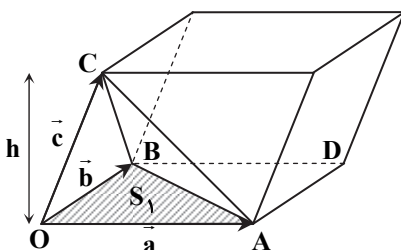
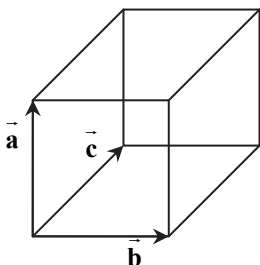
OABC یک هرم است با مساحت قاعده S_1 و طول ارتفاع h . حجم این هرم از رابطه

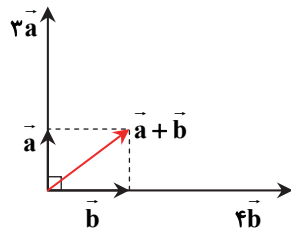
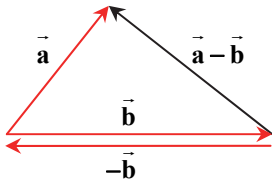
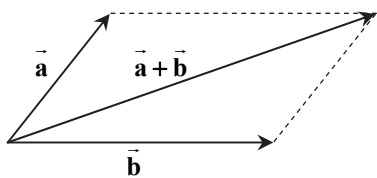
$$V_{OABC} = \frac{1}{3} S_1 \cdot h = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} S_{OADB} \cdot h = \frac{1}{6} V_m \quad \text{زیر به دست می‌آید:}$$

V_m حجم متوازی‌السطوح بناشده بر $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ است.

$$V = \frac{1}{6} |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})| = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 6 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \times 2 \times 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \times 2 \times 3 \times (-1 + 6 - 3) = 2$$

بنابراین گزینه ۲ پاسخ است.





۱۳۴- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحه ۶۹ هندسه ۳

نکته (جمع بردارها به روش متوازی الاضلاع): در این روش جمع دو بردار برابر قطر متوازی الاضلاع است که آن دو بردار دو ضلع مجاور آن باشند.

نکته (تفاضل دو بردار به روش متوازی الاضلاع): در این روش بردار اول را با قرینه بردار دوم به روش متوازی الاضلاع جمع می کنیم:

که قطر دیگر متوازی الاضلاع حاصل می شود.

طبق فرض سؤال $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{b} - \vec{a}|$ و از آنجا که $3\vec{a} + 4\vec{b}$ و $4\vec{b} - 3\vec{a}$ قطره های متوازی الاضلاع بنا شده بر بردارهای $3\vec{a}$ و $4\vec{b}$ می باشند، چون این دو قطر هم اندازه اند، پس متوازی الاضلاع به مستطیل تبدیل می شود و $3\vec{a}$ و $4\vec{b}$ بر هم عمود می باشند. پس:

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

۱۳۵- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: ساده * صفحه های ۶۰ و ۶۱ ریاضیات گسسته

نکته: تعداد جایگشت هایی n تایی از میان k نوع شیء به طوری که لازم نباشد از همه انواع اشیاء در جایگشت استفاده شود (به دلخواه انتخاب شوند)، برابر است با:

$$\binom{n+k-1}{k-1}$$

به کمک اطلاعات مسئله و با توجه به نکته، واضح است که $k=8$ و $n=6$ ، پس تعداد روش ها برابر است با: $\binom{6+8-1}{8-1} = \binom{13}{7} = 1716$

۱۳۶- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: ساده * صفحه های ۲ و ۳ ریاضیات گسسته

نکته ۱: مثال نقض، مثالی است که برای رد یک حکم کلی به کار می رود.

نکته ۲: از انواع استدلال در ریاضیات می توان به اثبات مستقیم (استدلال به کمک حقایق پذیرفته شده قبلی) و اثبات غیرمستقیم (برهان خلف) اشاره کرد.

با دقت در گزینه ها، به وضوح مشخص است که گزینه ۳ مثال نقض دارد؛ زیرا باقی مانده عدد ۱۷ بر ۸ برابر ۱ است؛ اما مربع کامل نیست، پس با توجه به نکته ۱، عدد ۱۷ مثال نقض گزینه ۳ است.

اما با توجه به نکته ۲ و متن کتاب درسی می فهمیم که گزینه های ۲ و ۴ به روش اثبات مستقیم و گزینه ۱ به روش برهان خلف قابل اثبات هستند. اثبات گزینه ۱ در متن کتاب درسی آمده است، اما در مورد گزینه های ۲ و ۴، استدلال به شرح ذیل است:

$$\begin{aligned} \text{گزینه ۲: } a > 1 &\xrightarrow{\times a^2} a^3 > a^2 \quad \checkmark \\ \text{مضرب ۴: } a = 2k; k \in \mathbb{Z} &\Rightarrow a^2 = 4k^2 \quad \checkmark \end{aligned}$$

بنابراین گزینه ۳ پاسخ است.

۱۳۷- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: ساده * صفحه های ۹، ۱۱ و ۱۳ ریاضیات گسسته

نکته ۱: $a|b$ اگر و فقط اگر عدد صحیح b بر عدد صحیح a بخش پذیر باشد.

$$\text{نکته ۲: } a|b \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} a|mb$$

$$\text{نکته ۳: } a|b, a|c \Rightarrow a|b \pm c$$

نکته ۴: می نویسیم $(a, b) = 1$ و می خوانیم a و b نسبت به هم اول اند، هرگاه a و b هیچ مقسوم علیه مشترکی به جز یک نداشته باشند.

نکته ۵: اگر p عددی اول و a عددی طبیعی باشد، داریم: $a|p \Rightarrow a=1$ یا $a=p$

با توجه به نکات، داریم:

$$\left. \begin{aligned} a|a &\xrightarrow{\times 9} a|9a \\ a|a &\xrightarrow{\times 5} a|5a \end{aligned} \right\} \xrightarrow{(-)} a|4a \quad \begin{aligned} \text{نکته ۲: } a|9a \\ \text{نکته ۳: } a|5a \end{aligned}$$

از این رابطه و با توجه به نکته ۱ واضح است که $5b$ بر a بخش پذیر است، اما چون $(a, b) = 1$ است، پس با توجه به نکته ۴، b بر a

بخش پذیر نیست بنابراین باید 5 بر a بخش پذیر باشد و این یعنی: $a=5$ یا $a=1$

بنابراین برای a دو مقدار یافت می شود و گزینه ۲ پاسخ است.

نکته: معادله سیاله $ax + by = c$ در مجموعه اعداد صحیح دارای جواب است، اگر و فقط اگر $(a, b) | c$.
با توجه به نکته، داریم:

$$48x + by = 84 \Rightarrow (48, b) | 84$$

اینک با چک کردن گزینه‌ها، خواهیم داشت:

$$1 \text{ گزینه } b = 8 \Rightarrow (48, 8) | 84 \Rightarrow 8 | 84 \quad \times$$

$$2 \text{ گزینه } b = 7 \Rightarrow (48, 7) | 84 \Rightarrow 7 | 84 \quad \checkmark$$

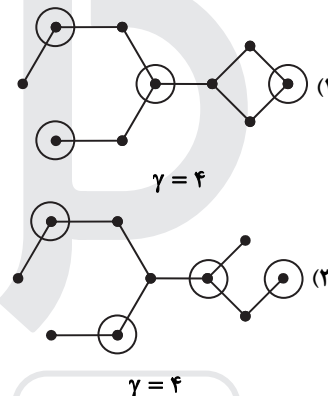
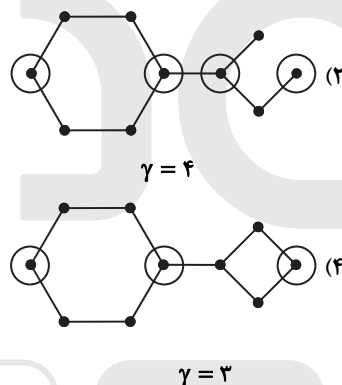
$$3 \text{ گزینه } b = 6 \Rightarrow (48, 6) | 84 \Rightarrow 6 | 84 \quad \checkmark$$

$$4 \text{ گزینه } b = 5 \Rightarrow (48, 5) | 84 \Rightarrow 5 | 84 \quad \checkmark$$

بنابراین در بین گزینه‌ها فقط ۸ نمی‌تواند جای b قرار گیرد و گزینه ۱ پاسخ است.

نکته: دنباله $v_1 v_2 v_3 \dots v_n v_{n+1}$ به‌ازای $(n \geq 3)$ از رئوس دوبه‌دو متمایز که در آن هر رأس با رأس بعدی مجاور است را یک دور به طول n می‌نامیم.
با توجه به نکته و مطابق شکل گراف واضح است که این امکان وجود ندارد که با شروع از یک رأس، ۵ یال را طی کرده و به رأس اولیه برگردیم، پس این گراف اصلاً دور به طول ۵ ندارد و گزینه ۱ پاسخ است.

نکته: در بین همه مجموعه‌های احاطه‌گر گراف G ، مجموعه یا مجموعه‌هایی را که کمترین تعداد عضو را دارند، مجموعه احاطه‌گر مینیمم نامیده و تعداد اعضای آن‌ها را با γ نمایش داده و عدد احاطه‌گری می‌گوییم.
با توجه به نکته، عدد احاطه‌گری هریک از گراف‌ها را تعیین کرده و در شکل نشان می‌دهیم:



به‌وضوح گزینه ۴ پاسخ است.

نکته: یک جدول مربعی از اعداد ۱ تا n به شکل مربع که سطرها و ستون‌های آن با اعداد ۱ تا n پر شده باشد و در هیچ سطر یا ستونی عددی تکراری وجود نداشته باشد را یک «مربع لاتین $n \times n$ » می‌نامیم و به هریک از اعداد درون خانه‌های مربع لاتین، درایه‌های مربع می‌گوییم.
با توجه به نکته، مربع لاتین مذکور فقط به یک حالت و به‌صورت روبه‌رو تکمیل می‌شود:

۲	۱	۳	۴
۱	۲	۴	۳
۴	۳	۲	۱
۳	۴	۱	۲

بنابراین گزینه ۲ پاسخ است.

نکته: اگر a عددی صحیح و b عددی طبیعی باشند، اعداد صحیح و یکتای q و r موجودند به‌طوری که $a = bq + r$ ، که مطابق با قضیه تقسیم در اعداد صحیح، a را مقسوم، b را مقسوم‌علیه، q را خارج‌قسمت و r را باقی‌مانده می‌نامیم و داریم: $0 \leq r < b$.
با توجه به نکته و با استفاده از اطلاعات مسئله، داریم:

$$1400 = 12b + r \Rightarrow r = 1400 - 12b$$

$$0 \leq r < b \Rightarrow 0 \leq 1400 - 12b < b \Rightarrow \begin{cases} b \geq 108 \\ b \leq 116 \end{cases} \Rightarrow 108 \leq b \leq 116 \Rightarrow b = \{108, 109, 110, \dots, 115, 116\}$$

از طرفی واضح است که در عبارت $r = 1400 - 12b$ عدد r مضرب ۸ است و عدد ۱۲ نیز عامل ۴ دارد، پس اگر b زوج باشد عدد $12b$ نیز مضرب ۸ بوده و r مضرب ۸ خواهد شد، پس مقادیر قابل قبول برای b اعداد زوج مجموعه اخیر، یعنی $\{108, 110, 112, 114, 116\}$ خواهند بود که ۵ مقدار هستند و گزینه ۳ پاسخ است.

۱۴۳- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحه‌های ۲۲ و ۲۳ ریاضیات گسسته

نکته ۱: برای یافتن باقی‌مانده تقسیم هر عدد بر ۱۱، ارقام عدد را از سمت راست یک در میان مثبت و منفی قرار داده و با هم جمع جبری کرده و باقی‌مانده عدد حاصل را بر ۱۱ به‌دست می‌آوریم.
نکته ۲: باقی‌مانده تقسیم هر عدد بر ۹ برابر است با باقی‌مانده تقسیم مجموع ارقام آن عدد بر ۹.
با توجه به نکته ۱، داریم:

$$\overline{a68b2} \equiv 0 \Rightarrow 2-b+8-6+a \equiv 0 \Rightarrow a-b \equiv -4 \equiv 7 \Rightarrow a-b=7 \quad \text{یا} \quad a-b=-4$$

با توجه به نکته ۲، داریم:

$$\overline{a68b2} \equiv 7 \Rightarrow a+6+8+b+2 \equiv 7 \Rightarrow a+b+7 \equiv 7 \Rightarrow a+b \equiv 0 \equiv 9 \equiv 18 \Rightarrow a+b=9 \quad \text{یا} \quad a+b=18$$

از روابط بالا، ۴ دسته معادله دو معادله دو مجهول حاصل می‌شود که فقط دستگاه زیر به جواب قابل قبول منجر می‌شود:

$$\begin{cases} a-b=7 \\ a+b=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=8 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{8}{1} = 8$$

بنابراین گزینه ۱ پاسخ است.

۱۴۴- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحه‌های ۱۹، ۲۱، ۲۲، ۲۴ و ۲۵ ریاضیات گسسته

$$(a, b \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}, m > 1) \quad a \equiv b \Leftrightarrow m | a-b$$

نکته ۲: $a | b$ اگر و فقط اگر a مقسوم‌علیه b باشد.

نکته ۳: به طرفین همنهشتی می‌توان مضاربی از پیمانه را اضافه کرد یا کم کرد.

$$ac \equiv bc, (c, m) = 1 \Rightarrow a \equiv b$$

$$a \equiv b \Rightarrow a = mk + b$$

با توجه به نکات ۱ و ۲ داریم:

$$171 \equiv 73 \Rightarrow m | 171-73 \Rightarrow m | 98 \Rightarrow m = \{2, 7, 14, 49, 98\}$$

با توجه به نکات ۳ تا ۵ داریم:

$$m+2 \equiv 4m-2 \Rightarrow 3m \equiv 4 \equiv 15 \xrightarrow{+3} m \equiv 5 \Rightarrow m = 11k+5$$

و از بین اعداد مجموعه m ، فقط عدد ۴۹ به فرم $11k+5$ است و با جای‌گذاری $k=4$ به‌دست می‌آید، پس $m=49$ و مجموع ارقامش $4+9=13$ است.

بنابراین گزینه ۴ پاسخ است.

۱۴۵- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحه‌های ۳۵، ۳۷ و ۳۹ ریاضیات گسسته

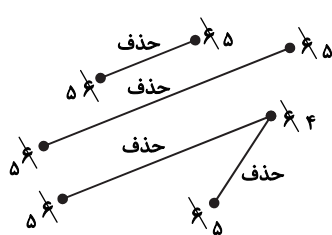
نکته ۱: تعداد رئوس گراف G را مرتبه گراف و تعداد یال‌های آن را اندازه گراف می‌گوییم.

نکته ۲: بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین درجه در بین درجات رئوس یک گراف را به ترتیب با Δ و δ نمایش می‌دهند.

$$\text{نکته ۳: در گراف کامل } K_n \text{ که همه یال‌های ممکن را دارد تعداد یال‌ها برابر با } \frac{n(n-1)}{2} \text{ بوده و داریم } \delta = \Delta = n-1.$$

با توجه به نکات، اگر فرض کنیم گراف مذکور، گراف کامل مرتبه ۷ باشد، آنگاه داریم:

$$k_v : q = \frac{7 \times 6}{2} = 21, \quad \delta = \Delta = 7-1 = 6$$



اما گراف مدنظر ما، ۱۷ یال دارد و این یعنی ۴ یال کمتر از گراف کامل مرتبه ۷ دارد و از طرفی در آن $\Delta = 5$ است، پس ۴ یال بایستی به‌گونه‌ای برداشته شوند که از همه رئوس گراف K_7 حداقل یک درجه کاسته شود و این مهم اتفاق نمی‌افتد مگر اینکه یال‌ها را به فرم روبه‌رو، برداریم:

همان‌گونه که مشاهده می‌کنید پس از حذف ۴ یال، داریم:

$$\Delta = 5, \quad \delta = 4$$

بنابراین گزینه ۲ پاسخ است.

نکته: تعداد اعضای مجموعه $A \cup B$ را با $|A \cup B|$ نمایش داده و عبارت است از:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

اگر مجموعه A را مجموعه اعداد دورقمی شامل ۴ و مجموعه B را مجموعه اعداد دورقمی مضرب ۷ در نظر بگیریم، با توجه به نکته، خواهیم داشت:

$$A = \{14, 24, 34, \dots, 94, 40, 41, 42, 43, 45, \dots, 49\} : |A| = 18$$

$$B = \{14, 21, 28, \dots, 98\} : |B| = \left[\frac{99}{7} \right] - \left[\frac{9}{7} \right] = 14 - 1 = 13$$

$$A \cap B = \{14, 42, 49, 84\} : |A \cap B| = 4 \xrightarrow{\text{نکته}} |A \cup B| = 18 + 13 - 4 = 27$$

نکته ۱: اگر m کبوتر و n لانه داشته باشیم و $m > n$ و همه کبوترها درون لانه‌ها قرار بگیرند، طبق اصل لانه‌کبوتری حداقل یک لانه وجود خواهد داشت که در آن حداقل ۲ کبوتر جای می‌گیرد.

نکته ۲: در حل مسائل اصل لانه کبوتری همواره بدترین حالت را در نظر گرفته و در نهایت برای رسیدن به پاسخ مسئله، یک واحد به بدترین حالت اضافه می‌کنیم تا شرایط مسئله، محقق گردد.

با توجه به نکات، اگر در بدترین حالت اعضای مجموعه $\{5, 6, 7, 8, 9\}$ را انتخاب کنیم، هیچ دو عضوی در رابطه $a | b$ صدق نمی‌کند، اما با اضافه کردن یک عضو از مجموعه اعداد باقی‌مانده $\{1, 2, 3, 4\}$ ، حداقل دو عضو وجود خواهند داشت که در رابطه $a | b$ صدق کنند: زیرا:

$$1 | b ; b \in \{5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$2 | 6 ; 2 | 8$$

$$3 | 6 ; 3 | 9$$

$$4 | 8$$

بنابراین با انتخاب حداقل ۶ عضو، شرایط مسئله محقق می‌شود و گزینه ۳ پاسخ است.

نکته ۱: عدد طبیعی d را بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد a و b نامیده و می‌نویسیم $(a, b) = d$ هرگاه:

$$1) d | a, d | b \quad 2) \forall m \in \mathbb{N} ; m | a, m | b \Rightarrow m \leq d$$

نکته ۲: عدد طبیعی c را کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد a و b نامیده و می‌نویسیم $[a, b] = c$ هرگاه:

$$1) a | c, b | c \quad 2) \forall m \in \mathbb{N} ; a | m, b | m \Rightarrow m \geq c$$

با توجه به نکته ۱، داریم:

$$(a, 120) = 15 \Rightarrow (a, 2^3 \times 3 \times 5) = 3 \times 5$$

واضح است که اولاً a باید عامل‌های ۳ و ۵ را داشته باشد، ثانیاً عامل ۲ نداشته باشد، پس عدد a مضرب فردی از ۱۵ خواهد بود.

با توجه به نکته ۲، داریم:

$$[a, 70] = 210 \Rightarrow [a, 2 \times 5 \times 7] = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \Rightarrow [2 \times 5 \times k, 2 \times 5 \times 7] = 2 \times 3 \times 5 \times 7$$

فرد

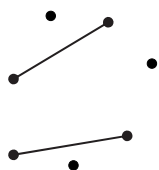
واضح است که عدد فرد k فقط می‌تواند ۱ یا ۷ باشد که در این صورت برای a نیز دو مقدار طبیعی $15 \times 1 = 15$ و $15 \times 7 = 105$ به دست می‌آید.

بنابراین گزینه ۲ پاسخ است.

نکته ۱: تعداد یال‌های هر گراف را «اندازه گراف» نامیده و با q نمایش می‌دهیم.

نکته ۲: بزرگ‌ترین عدد در بین درجات رئوس گراف G را با Δ نمایش داده و ماکزیمم درجه گراف می‌نامیم.

با توجه به نکات و اطلاعات مسئله برای اینکه در این گراف ۲ یالی، ماکزیمم درجه ۱ باشد بایستی شکل گراف به صورت زیر باشد:



بدیهی است که برای ساختن این دو یال، نیازمند ۴ رأس از گراف

هستیم، پس به تعداد $\binom{7}{4}$ حالت می‌توانیم ۴ رأس را از میان ۷ رأس

گراف انتخاب کرده و بین آن‌ها دو یال مطابق شکل رسم کنیم.

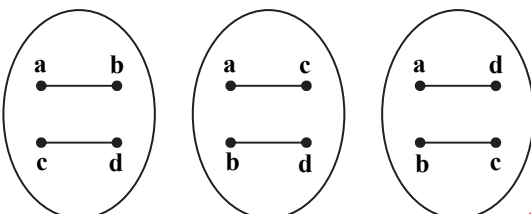
از طرفی هریک از این ۴ رأس، با اتصال به هریک از سه رأس دیگر

می‌توانند یالی تشکیل دهند تا دو رأس باقی‌مانده نیز تبدیل به یک یال

شوند، پس ۳ حالت نیز طرز قرارگیری ۲ یال بین ۴ رأس است.

بنابراین به تعداد $\binom{7}{4} \times 3 = 105$ گراف با شرایط مسئله می‌توان ساخت

و گزینه ۴ پاسخ است.



▲ مشخصات سؤال: دشوار * صفحه‌های ۵۶ تا ۵۸ ریاضیات گسسته

۱۵۰- پاسخ: گزینه ۳

نکته: تعداد جایگشت‌های n شیء به‌طوری که در بین آن‌ها r_1 شیء یکسان از نوع اول، r_2 شیء یکسان از نوع دوم و... و r_k شیء یکسان از نوع k ام موجود باشد، برابر است با:

$$\frac{n!}{r_1! \times r_2! \times \dots \times r_k!}$$

برای اینکه هیچ دو حرف b کنار هم نباشند، ابتدا حروف d, c, a, a را در یک ردیف کنار هم می‌چینیم که با توجه به نکته، تعداد حالات، برابر است با:

$$\frac{4!}{2!} = 12 \quad (1)$$

به ساختار زیر دقت کنید:

$$\bigcirc a \bigcirc a \bigcirc c \bigcirc d \bigcirc$$

اینک بین ۴ حرف d, c, a, a و ابتدا و انتهای آن‌ها می‌توانیم حروف b را قرار دهیم به‌طوری که هیچ‌گاه کنار هم نباشند. بدین منظور از بین این ۵ جایگاه، ۳ جایگاه برای قرار دادن b ها انتخاب می‌کنیم:

$$\binom{5}{3} = 10 \quad (2)$$

و در نهایت از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم:

$$12 \times 10 = 120 = \text{تعداد کل روش‌ها}$$

بنابراین گزینه ۳ پاسخ است.

فیزیک

▲ مشخصات سؤال: ساده * صفحه‌های ۹ و ۱۱ فیزیک ۳

۱۵۱- پاسخ: گزینه ۳

جهت (علامت) سرعت یک بار در لحظه t_1 تغییر می‌کند، ولی جهت شتاب تغییر نمی‌کند و همواره شتاب مثبت است (شیب خط مماس بر نمودار $v-t$). البته در لحظه t_2 شتاب صفر می‌شود.

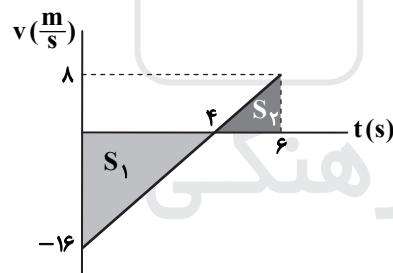
▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحه ۱۷ فیزیک ۳

۱۵۲- پاسخ: گزینه ۱

با توجه به معادله حرکت درجه ۲ که مربوط به حرکت شتاب ثابت است، می‌توان گفت:

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 = 2t^2 - 16t + 5 \Rightarrow \frac{1}{2}a = 2 \Rightarrow a = 4 \frac{m}{s^2}, \quad v_0 = -16 \frac{m}{s}$$

لحظه توقف و تغییر جهت را به‌دست می‌آوریم:



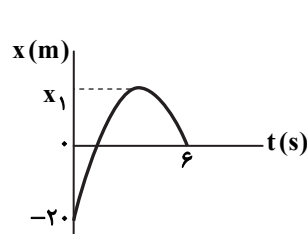
$$v = at + v_0 \Rightarrow 0 = 4t - 16 \Rightarrow t = 4s$$

$$S_1 = \frac{-16 \times 4}{2} = -32m, \quad S_2 = \frac{8 \times 2}{2} = 8m$$

$$\ell = |S_1| + |S_2| = 40m \Rightarrow s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{40}{6} = \frac{20}{3} \frac{m}{s}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحه ۳ فیزیک ۳

۱۵۳- پاسخ: گزینه ۲



$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t}, \quad v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$s_{av} = 2/5 v_{av} \Rightarrow \frac{2x_1 + 20}{6} = 2/5 \times \frac{20}{6} \Rightarrow 2x_1 + 20 = 50 \Rightarrow x_1 = 15m$$

پس بیشترین فاصله از مبدأ، در همان لحظه صفر بوده که جسم در ۲۰ متری پشت مبدأ است.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحه ۱۸ فیزیک ۳

۱۵۴- پاسخ: گزینه ۲

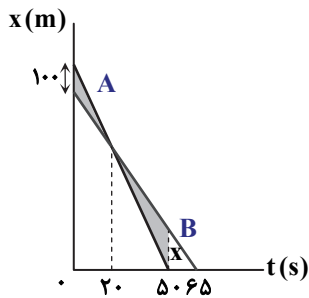
$$\text{شتاب ثابت: } v_{av} = \frac{v_1 + v_2}{2} = 15 \Rightarrow v_1 + v_2 = 30 \frac{m}{s}$$

$$\Delta v = v_2 - v_1 = 6 \frac{m}{s}$$

$$W_t = \Delta K = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2}m \times (v_2 - v_1)(v_2 + v_1) = \frac{1}{2} \times 5 \times 6 \times 30 = 450J$$

راه حل اول:

از تشابه دو مثلث رنگی داریم:



$$\frac{x}{100} = \frac{30}{20} \Rightarrow x = 150$$

اکنون با استفاده از قضیه تالس می توان گفت:

$$\frac{x}{x_{0B}} = \frac{65-20}{65} \Rightarrow \frac{150}{x_{0B}} = \frac{15}{65} \Rightarrow x_{0B} = 650 \text{ m}$$

$$x_{0A} = 650 + 100 = 750 \text{ m}$$

راه حل دوم:

حرکت هر دو متحرک یکنواخت (سرعت ثابت) است، پس:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \begin{cases} v_A = \frac{0 - x_{0A}}{20} = -\frac{x_{0A}}{20} \\ v_B = \frac{0 - x_{0B}}{65} = -\frac{x_{0B}}{65} = -\frac{(x_{0A} - 100)}{65} \end{cases}$$

$$t = 20 \text{ s} : x_A = x_B \xrightarrow{x = vt + x_0} -\frac{x_{0A}}{20} \times 20 + x_{0A} = -\frac{(x_{0A} - 100)}{65} \times 20 + (x_{0A} - 100) \Rightarrow \frac{30}{50} x_{0A} = (x_{0A} - 100) \times \frac{45}{65}$$

$$\Rightarrow x_{0A} = 750 \text{ m}$$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * صفحه های ۱۷ و ۲۱ فیزیک ۳

۱۵۶- پاسخ: گزینه ۲

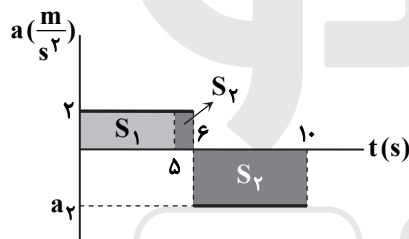
راه حل اول:

سطح بین نمودار شتاب- زمان با محور زمان برابر تغییرات سرعت (Δv) است.

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow a_{av}(0, \Delta s) = \frac{S_1}{\Delta} , a_{av}(\Delta s, 10s) = \frac{S_2}{\Delta}$$

$$a_{av}(0, \Delta) = -a_{av}(\Delta s, 10s) \Rightarrow S_1 = -S_2$$

$$\Rightarrow 2 \times 5 = -(2 \times 1 + 4a_2) \Rightarrow 12 = -4a_2 \Rightarrow a_2 = -3 \frac{m}{s^2}$$



$$v = at + v_0 \Rightarrow \begin{cases} v(6s) = 2 \times 6 + 5 = 17 \frac{m}{s} \\ v(10s) = -3 \times 4 + 17 = 5 \frac{m}{s} \end{cases}$$

هم در بازه $(0, 6s)$ و هم در بازه $(6s, 10s)$ حرکت شتاب ثابت بوده و سرعت متوسط برابر $v_{av} = \frac{5 + 17}{2} = 11 \frac{m}{s}$ است؛ پس سرعت

متوسط در کل این مدت نیز همان $11 \frac{m}{s}$ خواهد بود. همچنین می توان نوشت:

$$\Delta x = \frac{v_1 + v_2}{2} \Delta t \Rightarrow \begin{cases} \Delta x_1(0, 6s) = \frac{v_0 + v_6}{2} \times 6 = \frac{5 + 17}{2} \times 6 = 66 \text{ m} \\ \Delta x_2(6s, 10s) = \frac{v_6 + v_{10}}{2} \times 4 = \frac{17 + 5}{2} \times 4 = 44 \text{ m} \end{cases}$$

$$v_{av} = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{\Delta t} = \frac{66 + 44}{10} = 11 \frac{m}{s}$$

راه حل دوم:

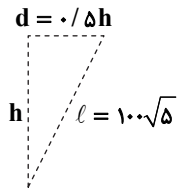
$$6s \text{ تا } 0 : a_{av} = a = 2 \frac{m}{s^2} , v = at + v_0 \Rightarrow v(\Delta s) = 2 \times 5 + 5 = 15 \frac{m}{s} , v(6s) = 2 \times 6 + 5 = 17 \frac{m}{s}$$

$$10s \text{ تا } 6s : v = a_2 t + v(6s) \Rightarrow v(10s) = 4a_2 + 17$$

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} , |a_{av}(0, \Delta s)| = |a_{av}(\Delta s, 10s)| \Rightarrow 2 = \left| \frac{4a_2 + 17 - 15}{5} \right| \xrightarrow{\text{با توجه به شکل } a_2 < -2} a_2 = -3 \frac{m}{s^2} \Rightarrow v(10s) = 5 \frac{m}{s}$$

ادامه حل مطابق راه حل اول است.

اگر جهت مثبت را رو به پایین بگیریم داریم:



$$\left. \begin{aligned} \Delta y &= \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow h = \frac{1}{2} \times 10t^2 \\ \Delta x &= \frac{1}{2}at^2 + v_0t \Rightarrow d = \frac{1}{2} \times 5t^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{d}{h} = \frac{\frac{1}{2} \times 5t^2}{\frac{1}{2} \times 10t^2} \Rightarrow d = 0.5h$$

$$l = \sqrt{h^2 + d^2} \Rightarrow 100\sqrt{5} = \sqrt{h^2 + 0.25h^2} \Rightarrow 50000 = \frac{5}{4}h^2 \Rightarrow h^2 = 40000 \Rightarrow h = 200m$$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * صفحه‌های ۱۳ و ۱۷ فیزیک ۳

۱۵۸- پاسخ: گزینه ۳

$$v_B = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{20}{4} = 5 \frac{m}{s}$$

$$4s \leq t \leq 18s : \Delta x_A = \Delta x_B \Rightarrow \left(\frac{v_A(4s) + v_A(18s)}{2} \right) \times t = v_B \times t \Rightarrow \frac{12 + v_A(18s)}{2} = 5 \Rightarrow v_A(18s) = -2 \frac{m}{s}$$

$$a_A = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{-2 - 12}{18 - 4} = -1 \frac{m}{s^2}$$

$$v_A = a_A t + v_{0A} \Rightarrow 12 = -1 \times 4 + v_{0A} \Rightarrow v_{0A} = 16 \frac{m}{s}$$

$$v_{av} = \frac{16 + 0}{2} = 8 \frac{m}{s}$$

متحرک A با شتاب ثابت در جهت محور X حرکت می‌کند و سپس سرعت آن صفر شده و برمی‌گردد، پس:

▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحه ۲۲ فیزیک ۳

۱۵۹- پاسخ: گزینه ۳

اگر جهت مثبت را رو به پایین بگیریم داریم:

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow 180 = \frac{1}{2} \times 10 \times t^2 \Rightarrow t = 6s$$

یک‌سوم پایانی بازه (۴s, ۶s) است.

$$v = gt \Rightarrow \begin{cases} v(4s) = 10 \times 4 = 40 \frac{m}{s} \\ v(6s) = 10 \times 6 = 60 \frac{m}{s} \end{cases}$$

$$v_{av} = \frac{v(4s) + v(6s)}{2} = \frac{40 + 60}{2} = 50 \frac{m}{s}$$

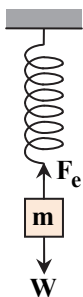
▲ مشخصات سؤال: ساده * صفحه‌های ۳۶ و ۵۷ فیزیک ۳ (پرسش ۷)

۱۶۰- پاسخ: گزینه ۴

در حالت بدون چتر، تندی حدی بیشتر است، ولی در هر دو حالت حدی اندازه نیروی مقاومت هوا یکسان و برابر وزن چتر باز است.

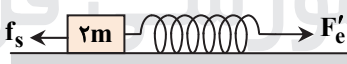
▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحه‌های ۴۱ و ۴۳ فیزیک ۳

۱۶۱- پاسخ: گزینه ۱



$$F_e = k\Delta l = W$$

$$k \times 0.5 = mg \quad (*)$$



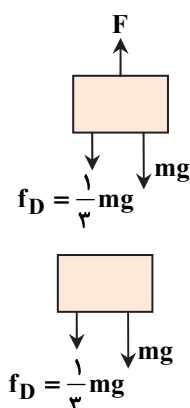
$$F_e' = k \times 0.2 = f_s \leq \mu_s \times 2mg$$

$$\xrightarrow{(*)} k \times 0.2 \leq \mu_s \times 2(k \times 0.5)$$

$$\Rightarrow \mu_s \geq \frac{0.2}{1} = 0.2$$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * صفحه ۳۷ فیزیک ۳

۱۶۲- پاسخ: گزینه ۲



$$F - \frac{4}{3}mg = ma_1 \Rightarrow F = m(a_1 + \frac{4}{3}g)$$

$$v^2 - 0 = 2a_1 \times h \quad (I)$$

با قطع نیروی F داریم:

$$-\frac{4}{3}mg = ma_2 \Rightarrow a_2 = -\frac{4}{3}g$$

$$0 - v^2 = 2a_2 \times (fh - h) \Rightarrow 0 - v^2 = -\frac{4}{3}g \times fh \quad (II)$$

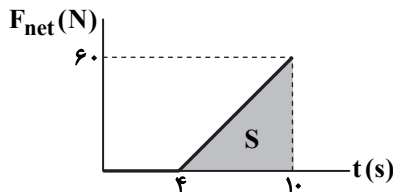
$$(II), (I) \Rightarrow \frac{4}{3}g \times fh = 2a_1 h \Rightarrow a_1 = \frac{4}{3}g \Rightarrow F = \frac{16}{3}mg$$

$$t = nT \Rightarrow 60 = 20 \cdot T \Rightarrow T = 3 \text{ s}$$

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi \times 0.4}{3} = \frac{0.8\pi}{3} \text{ m/s}$$

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{0.64\pi^2}{9 \times 0.4} = \frac{16}{9} \text{ m/s}^2$$

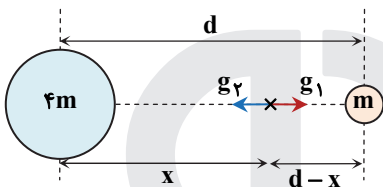
تا لحظه $t = 4 \text{ s}$ که نیروی F برابر با 40 نیوتون می‌شود ($mg = 40 \text{ N}$)، جسم حرکت نکرده و پس از آن با شتاب متغیر رو به بالا حرکت می‌کند. نمودار نیروی خالص وارد بر جسم در این مدت بر حسب زمان به صورت زیر است.



$$F_{\text{net}} = 10t - 40 \quad (t \geq 4 \text{ s})$$

$$S = \Delta p = \frac{6 \times 60}{2} = 180 \text{ N} \cdot \text{s}$$

$$F_{\text{av}} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{180}{10} = 18 \text{ N}$$



$$\frac{G \times m}{(d-x)^2} = \frac{G \times 4m}{x^2} \Rightarrow \frac{1}{d-x} = \frac{2}{x} \Rightarrow 2d - 2x = x \Rightarrow 2d = 3x$$

$$\Rightarrow x = \frac{2}{3}d$$

$$f_s = \frac{mv^2}{r} = \frac{1000 \times (9)^2}{90} = \frac{1000 \times 9}{10} = 900 \text{ N}$$

$$A = \frac{\ell}{2} = \frac{0.8}{2} = 0.4 \text{ m}$$

$$x = 0.4 \cos \omega t \Rightarrow -0.4 = 0.4 \cos(\omega \times 0.2) \Rightarrow \cos \frac{\omega}{5} = -1$$

$$\Rightarrow \cos \frac{\omega}{5} = -1 \xrightarrow{\text{اولین بار}} \frac{\omega}{5} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \omega = \frac{10\pi}{3} \text{ rad/s}$$

$$x = 0.4 \cos \frac{10\pi}{3} t$$

$$\left. \begin{array}{l} E = K + U \\ K = U \end{array} \right\} \Rightarrow E = 2K \Rightarrow \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 = 2 \times \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow A \omega = \sqrt{2} v$$

$$\Rightarrow 0.4 \times 2\pi f = \sqrt{2} \times 2\sqrt{5} = 2\sqrt{10} \Rightarrow f = \frac{2\sqrt{10}}{0.8\pi} = \frac{5}{\pi} \text{ Hz}$$

در یک حرکت هماهنگ ساده بین شتاب و مکان نوسانگر رابطه $a = -\omega^2 x$ برقرار است؛ مثلاً در سامانه جرم-فنر می‌توان نوشت:

$$F = -kx \Rightarrow ma = -kx \Rightarrow a = -\frac{k}{m}x = -\omega^2 x$$

$$\frac{1}{4} = \omega^2 \times \frac{2}{100} \Rightarrow \omega^2 = \frac{100}{8} = \frac{g}{\ell} \Rightarrow \ell = 0.8 \text{ m}$$

$$\Rightarrow \ell' = 0.8 - 0.5 = 0.3 \text{ m}$$

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{\ell'}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{0.3}{10}} = \pi \sqrt{0.6} \text{ s}$$

$$\frac{\lambda}{4} = 0.5 \Rightarrow \lambda = 0.4 \text{ m}$$

$$\lambda = vT \Rightarrow 0.4 = 10 \cdot T \Rightarrow T = 0.04 \text{ s}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0.04} = 50\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}} \Rightarrow y_M = 0.02 \cos 50\pi t$$

$$y_M\left(\frac{4}{300} \text{ s}\right) = 0.02 \cos \frac{50\pi \times 4}{300} = 0.02 \cos \frac{2\pi}{3} = -0.01 \text{ m}$$

ذره M در این مدت بدون تغییر جهت (چرا؟) از $+0.02 \text{ m}$ به -0.01 m می‌رود؛ پس:

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{|-0.01 - 0.02|}{\frac{4}{300}} = \frac{0.03}{\frac{4}{300}} = \frac{9}{4} = 2.25 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

راه حل دوم:

در حرکت هماهنگ ساده هریک از جابه‌جایی‌های

روبه‌رو (رفت یا برگشت) $\frac{T}{12}$ طول می‌کشد، در نتیجه:

$$\Delta t = \frac{4}{300} \text{ s} = \frac{1}{3} \times \frac{4}{100} = \frac{T}{3} = 4 \times \frac{T}{12}$$

پس ذره M در این مدت از $+A$ به $-\frac{A}{2}$ می‌رود، یعنی $\ell = 2 + 1 = 3 \text{ cm}$ می‌شود. (ادامه حل مطابق راه حل اول است).

▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحه‌های ۷۳ و ۸۶ فیزیک ۳ (مسئله ۱۷)

۱۷۱- پاسخ: گزینه ۴

بسامد و دوره موج از ویژگی‌های منبع موج است و با تغییر محیط عوض نمی‌شود. ($T_2 = T_1$)

$$\left. \begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{F}{\rho A}} \\ F_2 &= F_1, \quad A_2 = 4A_1, \quad \rho_2 = \rho_1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{A_1}{A_2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{v_2 T_2}{v_1 T_1} = \frac{1}{2}$$

▲ مشخصات سؤال: ساده * صفحه‌های ۷۴ و ۷۵ فیزیک ۳

۱۷۲- پاسخ: گزینه ۲

با توجه به جهت میدان الکتریکی (رو به بالا) و میدان مغناطیسی (درون سو) و استفاده از قاعده دست راست، جهت انتشار موج به سمت چپ است؛ پس در این لحظه میدان الکتریکی در نقطه A در حال افزایش است.

▲ مشخصات سؤال: ساده * صفحه ۸۲ فیزیک ۳

۱۷۳- پاسخ: گزینه ۲

وقتی در محل شنونده طول موج صوت بیشتر از سمت دیگر است (۱/۵ برابر)، بدان معنی است که منبع در حال دور شدن از شنونده است، به این ترتیب بسامد صوت شنیده شده کمتر از بسامد صوت خواهد بود.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحه ۸۰ فیزیک ۳

۱۷۴- پاسخ: گزینه ۱

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0} \Rightarrow 20 = 10 \log \frac{I}{I_0} \Rightarrow \log \frac{I}{I_0} = 2 \Rightarrow \frac{I}{I_0} = 10^2 = 100 \Rightarrow I = 10^{-10} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

$$I = \frac{P_{av}}{\Delta t} = \frac{E}{A \Delta t} \Rightarrow E = I A \Delta t = 10^{-10} \times 50 \times 10^{-4} \times 300 = 1/5 \times 10^{-10} \text{ J} = 1/5 \times 10^{-7} \text{ mJ}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحه ۹۱ فیزیک ۳

۱۷۵- پاسخ: گزینه ۱

$i + i = 2i$: مجموع زوایای تابش و بازتابش اول

$i + 15^\circ - 10^\circ = i + 5^\circ$: زاویه تابش جدید

$(i + 5^\circ) + (i + 5^\circ) = 2i + 10^\circ$: مجموع زوایای تابش و بازتابش جدید

(ساعت گرد) $x = 20^\circ \Rightarrow x = 20^\circ$: با توجه به شکل

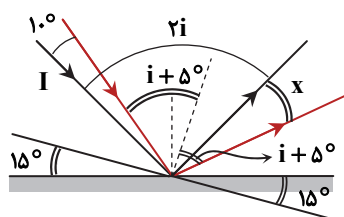
نکته: اگر آینه به اندازه θ بچرخد، پرتو بازتاب در همان جهت به اندازه 2θ

می‌چرخد. همچنین اگر پرتوی تابش به اندازه α دوران کند، پرتوی بازتاب در خلاف

جهت آن به اندازه α دوران می‌کند. (سعی کنید خودتان نشان دهید).

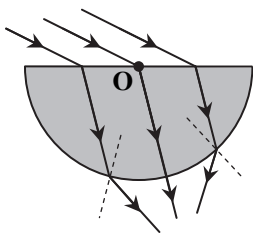
با توجه به این نکته داریم:

ساعت گرد $20^\circ = 2 \times 15^\circ - 10^\circ = 20^\circ$ زاویه دوران پرتو بازتاب



۱۷۶- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحه ۹۸ فیزیک ۳



پرتوها پس از ورود به تیغه شفاف موازی با هم شکسته شده به خط عمود نزدیک می شوند و هنگام خروج از تیغه شکسته شده از خط عمود دور می شوند، ولی پرتویی که از مرکز نیم دایره می آید بدون شکست از تیغه خارج می شود (چرا؟)؛ در نتیجه پرتوها به هم نزدیک می شوند.

۱۷۷- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحه های ۷۶ و ۱۰۲ فیزیک ۳

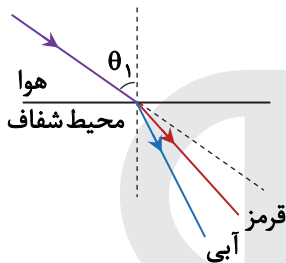
$$\lambda = \frac{c}{f} \Rightarrow \lambda = \frac{3 \times 10^8}{2 \times 10^8} = 1.5 \text{ m} \Rightarrow \text{در محدوده امواج رادیویی است.}$$

چون ابعاد جسم در حدود طول موج است، موج در برخورد به لبه های جسم پراشیده شده و در پشت جسم کدر دریافت می شود.

۱۷۸- پاسخ: گزینه ۲

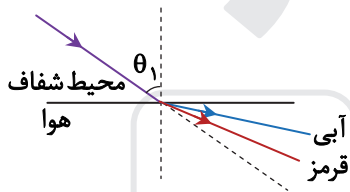
▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحه های ۹۸ و ۱۰۰ فیزیک ۳

ضریب شکست خلأ (هوا) برای تمام نورها یکسان و برابر ۱ و ضریب شکست سایر محیط ها عموماً برای طول موج های کوتاه تر، بیشتر است. در آزمایش اول چون ضریب شکست محیط شفاف برای قرمز کمتر است، زاویه شکست آن بیشتر خواهد بود، ولی چون پرتوها به خط عمود نزدیک می شوند، انحراف آبی بیشتر است.



$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \xrightarrow{n_2 \text{ قرمز} < n_2 \text{ آبی}} \sin \theta_2 \text{ قرمز} > \sin \theta_2 \text{ آبی} \Rightarrow \theta_2 \text{ قرمز} > \theta_2 \text{ آبی}$$

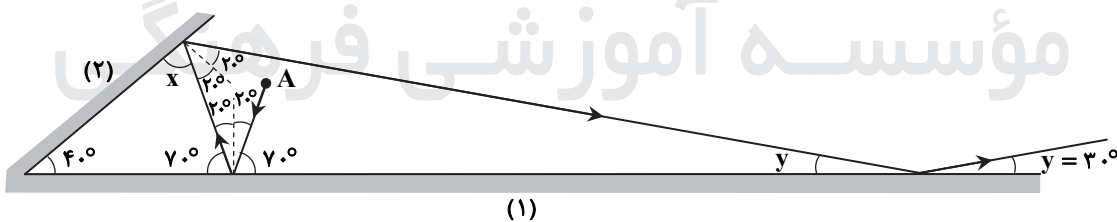
در آزمایش دوم با استدلال مشابه زاویه شکست برای آبی بیشتر است و چون پرتوها از خط عمود دور می شوند انحراف آبی بیشتر است.



$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \xrightarrow{n_2 \text{ قرمز} > n_2 \text{ آبی}} \sin \theta_2 \text{ قرمز} < \sin \theta_2 \text{ آبی} \Rightarrow \theta_2 \text{ قرمز} < \theta_2 \text{ آبی}$$

۱۷۹- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحه ۹۱ فیزیک ۳



$$x = 180^\circ - (40^\circ + 70^\circ) = 70^\circ$$

$$i' = 90^\circ - x = 20^\circ$$

$$x + (2 \times 20^\circ) + 40^\circ + y = 180^\circ \Rightarrow y = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$$

۱۸۰- پاسخ: گزینه ۳

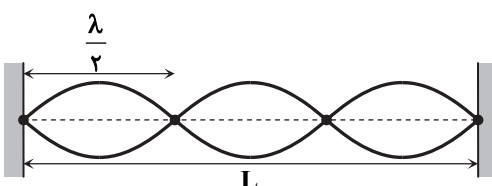
▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحه ۱۰۷ فیزیک ۳

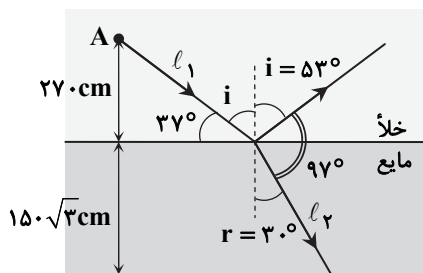
$n = 3 \Rightarrow 1 - \text{تعداد گره} = \text{تعداد شکم}$: تار دو سر بسته

$$\lambda = \frac{2L}{n} \Rightarrow 50 = \frac{2L}{3} \Rightarrow L = 75 \text{ cm}$$

$$v = \sqrt{\frac{FL}{m}} = \sqrt{\frac{40 \times 0.75}{3 \times 10^{-3}}} = 100 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$f = \frac{nv}{2L} \Rightarrow f_1 = \frac{1 \times 100}{2 \times 0.75} = \frac{200}{3} \text{ Hz}$$





▲ مشخصات سؤال: دشوار * صفحه‌های ۹۶ و ۹۸ فیزیک ۳

۱۸۱- پاسخ: گزینه ۲

$$i + r + 97^\circ = 180^\circ \Rightarrow \begin{cases} i + r = 83^\circ \\ i - r = 23^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i = 53^\circ \\ r = 30^\circ \end{cases}$$

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{c}{v} \Rightarrow \frac{\sin 53^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{0.8}{v_{\text{مایع}}} = \frac{3 \times 10^8}{v_{\text{مایع}}} \Rightarrow v_{\text{مایع}} = \frac{15}{8} \times 10^8 \text{ m/s}$$

$$\sin 37^\circ = \frac{6}{10} = \frac{27}{\ell_1} \Rightarrow \ell_1 = 45 \text{ cm} = 4/5 \text{ m (مسافت طی شده در خلأ)}$$

$$d = vt \Rightarrow 4/5 = 3 \times 10^8 \times t_1 \Rightarrow t_1 = 15 \times 10^{-9} \text{ s}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{\ell_2} \Rightarrow \ell_2 = 30 \text{ cm} = 3 \text{ m} \Rightarrow 3 = \frac{15}{8} \times 10^8 \times t_2 \Rightarrow t_2 = 16 \times 10^{-9} \text{ s}$$

$$t_{\text{کل}} = t_1 + t_2 = 31 \times 10^{-9} \text{ s} = 31 \text{ ns}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحه ۱۱۹ فیزیک ۳

۱۸۲- پاسخ: گزینه ۳

$$E = nhf = n \times \frac{hc}{\lambda} = 6 \times 10^{22} \times \frac{1240}{620} = 12 \times 10^{22} \text{ eV}$$

$$E = 12 \times 10^{22} \times 1/6 \times 10^{-19} = 12 \times 10^3 \text{ J}$$

$$p = \frac{E}{\Delta t} = \frac{12 \times 10^3}{320} = 6 \text{ W}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحه ۱۱۸ فیزیک ۳

۱۸۳- پاسخ: گزینه ۱

$$K_{\text{max}} = hf - W_0 \Rightarrow K_{\text{maxA}} - K_{\text{maxB}} = (hf - W_{0A}) - (hf - W_{0B}) = W_{0B} - W_{0A} = W_{0B} - hf_{0A}$$

$$= 8 - 4/1 \times 10^{-15} \times 1/5 \times 10^{15} = 8 - (4/1 \times 1/5) = 1/85 \text{ eV}$$

البته با توجه به گزینه‌ها نیازی نیست کنترل کنیم آیا الکترون‌ها از دو فلز خارج می‌شوند یا نه، ولی می‌توانیم برای اطمینان (غیرضروری) این موضوع را بررسی کنیم:

$$hf = \frac{hc}{\lambda} = \frac{4/1 \times 10^{-15} \times 3 \times 10^8}{120 \times 10^{-9}} = \frac{1230}{120} = 10/25 \text{ eV} > W_{0A}, W_{0B}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحه‌های ۱۲۳ و ۱۲۴ فیزیک ۳

۱۸۴- پاسخ: گزینه ۱

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \Rightarrow \begin{cases} \text{خط ۳ لیمان: } \frac{1}{\lambda_1} = \frac{1}{100} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{16} \right) = \frac{15}{1600} \Rightarrow \lambda_1 = \frac{1600}{15} \text{ nm} \\ \text{خط ۲ لیمان: } \frac{1}{\lambda_1} = \frac{1}{100} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{9} \right) = \frac{8}{900} \Rightarrow \lambda_1 = \frac{900}{8} \text{ nm} \end{cases}$$

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \frac{900}{8} - \frac{1600}{15} = 100 \left(\frac{9}{8} - \frac{16}{15} \right) = 100 \times \frac{135 - 128}{120} \Rightarrow \lambda_2 - \lambda_1 = \frac{70}{12} \text{ nm}$$

▲ مشخصات سؤال: ساده * صفحه‌های ۱۳۲ و ۱۳۳ فیزیک ۳

۱۸۵- پاسخ: گزینه ۴

در لیزر فوتون‌ها حاصل از گسیل القایی بوده و هم‌انرژی (هم‌بسامد)، هم‌جهت و هم‌فاز (همگام) هستند.

▲ مشخصات سؤال: دشوار * صفحه‌های ۱۲۷ تا ۱۲۹ فیزیک ۳

۱۸۶- پاسخ: گزینه ۴

$$r_n = n^2 a_0 \Rightarrow 9 = \left(\frac{n_1 + 2}{n_1} \right)^2 \Rightarrow n_1 = 1, n_2 = 3$$

انرژی فوتون جذب‌شده برابر اختلاف انرژی دو تراز است:

$$E_n = \frac{-E_R}{n^2} \Rightarrow \frac{hc}{\lambda} = E_3 - E_1 = -E_R \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{1^2} \right) = \frac{8}{9} E_R$$

$$\frac{hc}{\lambda} = \frac{8}{9} E_R \Rightarrow \lambda = \frac{9hc}{8E_R} = \frac{9 \times 1240}{8 \times 13/6} = \frac{9 \times 155}{13/6} = \frac{1395}{13/6} \approx 103 \text{ nm}$$

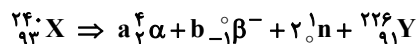
نکته: در مرحله آخر ساده‌سازی‌ها نیازی به محاسبه دقیق نیست و روشن است که جواب به ۱۰۰ nm بسیار نزدیک است.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحه‌های ۱۴۰ و ۱۴۲ فیزیک ۳

۱۸۷- پاسخ: گزینه ۲

واپاشی آلفا در هسته‌های سنگین رخ می‌دهد. از طرفی در هسته‌های سنگین تعداد نوترون‌ها بیشتر از تعداد پروتون‌ها است، یعنی عدد جرمی بیش از دو برابر عدد اتمی و عدد اتمی کمتر از نصف عدد جرمی است.

$$\left. \begin{aligned} t_1 = 240 = 3T_1 \Rightarrow N_1 = \frac{N_0}{3} = \frac{N_0}{8} \\ t_2 = 400 = 5T_2 \Rightarrow N_2 = \frac{N_0}{5} = \frac{N_0}{32} \end{aligned} \right\} \Rightarrow N_1 - N_2 = \frac{3N_0}{32}$$



$$240 = 4a + 2 + 226 \Rightarrow a = 3$$

$$93 = 2a - b + 91 \Rightarrow 93 = 2 \times 3 - b + 91 \Rightarrow b = 4$$

جملات «الف»، «ب» و «پ» نادرست و جملات «ت» و «ث» درست هستند.

الف) موضوع نیمه عمر ارتباطی به فرایند شکافت ندارد. نیمه عمر مربوط به واپاشی طبیعی است که خودبه خود انجام می شود در حالی که شکافت یک فرایند مصنوعی است که با شلیک نوترون به هسته اورانیوم انجام می شود.

ب) منشأ تولید انرژی در خورشید، واکنش همجوشی (گداخت) است.

پ) اورانیوم ۲۳۵ شکافت پذیر و اورانیوم ۲۳۸ عملاً شکافت ناپذیر است.

شیمی

همه عبارات‌های داده شده درست هستند.

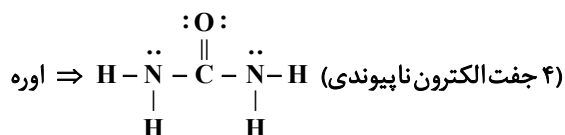
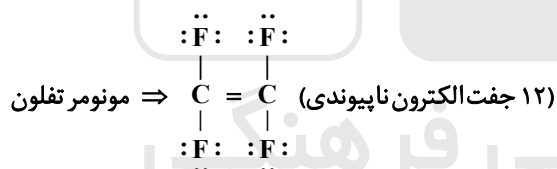
الف) فرمول مولکولی اتیلن گلیکول، $\text{C}_2\text{H}_6\text{O}_2$ است.



$$1/5 \text{ mol C}_2\text{H}_6\text{O}_2 \times \frac{5 \text{ mol O}_2}{2 \text{ mol C}_2\text{H}_6\text{O}_2} \times \frac{22.4 \text{ L O}_2}{1 \text{ mol O}_2} \times \frac{100 \text{ L هوا}}{20 \text{ L O}_2} = 420 \text{ L هوا}$$

ب) در ساختار اوره، پیوند $\text{N}-\text{H}$ و در ساختار اتانول، پیوند $\text{O}-\text{H}$ وجود دارد؛ بنابراین هر دو می توانند با مولکول های آب پیوند هیدروژنی برقرار کنند.

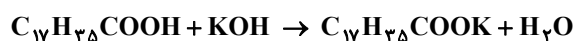
(پ)



ت) فرمول شیمیایی وازلین و روغن زیتون به ترتیب $\text{C}_{25}\text{H}_{52}$ و $\text{C}_{57}\text{H}_{114}\text{O}_6$ است:

$$\frac{52}{114} = \frac{1}{2}$$

در واکنش اسید چرب با KOH ، صابون مایع تولید می شود:

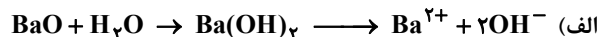


$$28/4 \text{ g C}_{17}\text{H}_{35}\text{COOH} \times \frac{1 \text{ mol C}_{17}\text{H}_{35}\text{COOH}}{284 \text{ g C}_{17}\text{H}_{35}\text{COOH}} \times \frac{1 \text{ mol C}_{17}\text{H}_{35}\text{COOK}}{1 \text{ mol C}_{17}\text{H}_{35}\text{COOH}} \times \frac{322 \text{ g C}_{17}\text{H}_{35}\text{COOK}}{1 \text{ mol C}_{17}\text{H}_{35}\text{COOK}} = 32/2 \text{ g C}_{17}\text{H}_{35}\text{COOK}$$

در واکنش اسید چرب $\text{C}_{17}\text{H}_{35}\text{COOH}$ با NaOH ، صابون جامد $\text{C}_{17}\text{H}_{35}\text{COONa}$ به دست می آید که جرم مولی آن، $306 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ است.

۱۹۳- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحه‌های ۱۵ تا ۲۳ شیمی ۳

عبارت‌های «الف» و «ت» درست هستند.



ب) در محلول ۰/۰۲ مولار HNO_3 با درجه یونش ۰/۰۸:

$$\text{غلظت یون‌ها} = M\alpha + M\alpha = 2 \times 0.02 \times 0.08 = 0.0032 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

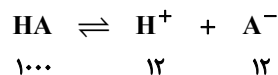
در محلول ۰/۰۱ مولار HCl :

$$\text{غلظت یون‌ها} = 2 \times 0.01 = 0.02 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

بنابراین رسانایی الکتریکی محلول HNO_3 بیشتر است.

پ) گاز کربن دی‌اکسید با حل شدن در آب، غلظت یون هیدرونیوم را افزایش می‌دهد؛ بنابراین می‌توان آن را اسید آرنیوس در نظر گرفت.

ت)



$$\alpha = \frac{12}{100} \Rightarrow K_a = M\alpha^2 = 1 \times (0.12)^2 = 1/44 \times 10^{-4}$$

۱۹۴- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحه‌های ۱۷ تا ۱۹ شیمی ۳

$$\text{ppm} = \frac{\text{mg}(\text{F}^-)}{\text{حجم محلول (L)}} \Rightarrow 380 = \frac{\text{mg F}^-}{1\text{L}} \Rightarrow \text{mg F}^- = 380$$

$$380 \times 10^{-3} \text{ g F}^- \times \frac{1 \text{ mol F}^-}{19 \text{ g F}^-} = 0.02 \text{ mol F}^-$$

$$\alpha = \frac{\text{مول F}^-}{\text{مول HF}} \Rightarrow 2/4 \times 10^{-2} = \frac{0.02 \text{ mol}}{x} \Rightarrow x = \frac{2}{2/4} = \frac{5}{6} \Rightarrow \text{جرم HF} = \frac{5}{6} \text{ mol} \times \frac{20 \text{ g}}{1 \text{ mol}} = 16.7 \text{ g}$$

۱۹۵- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحه‌های ۲۱ تا ۲۴ شیمی ۳

فقط عبارت «ت» درست است.

الف) تنها دما بر ثابت تعادل مؤثر است.

ب) تفاوت سرعت واکنش محلول‌های اسیدی با یک فلز معین، به قدرت اسید وابسته است، به‌طوری که در دما و غلظت یکسان از محلول‌ها، هرچه قدرت اسید بیشتر باشد، غلظت یون هیدرونیوم در محلول آن و در نتیجه سرعت واکنش بیشتر خواهد بود.

پ) در سامانه‌های تعادلی، غلظت گونه‌های موجود در محلول ثابت است، نه لزوماً برابر! (در محلول HCN ، غلظت مولی HCN با H^+ و CN^- برابر نیست).

ت) قدرت اسیدی استیک اسید کمتر از فورمیک اسید است؛ بنابراین در غلظت یکسان، کمتر یونیده شده و غلظت یون‌ها در محلول آن کمتر است.

۱۹۶- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحه‌های ۱۸ تا ۲۳ شیمی ۳

با توجه به اینکه ثابت یونش اسید HA عددی کوچکی است، می‌توان نوشت:

$$K_a = M\alpha^2 \Rightarrow 25 \times 10^{-6} = M \times (0.1)^2 \Rightarrow M = 25 \times 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$\text{جرم HA} = 25 \times 10^{-2} \frac{\text{mol}}{\text{L}} \times 2\text{L} \times \frac{20 \text{ g HA}}{1 \text{ mol HA}} = 10 \text{ g HA}$$

۱۹۷- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحه‌های ۲۵ تا ۲۸ شیمی ۳

$$\text{HCl از H}^+ \text{ مول} = 4 \frac{\text{mol}}{\text{L}} \times 10^{-3} \text{ L} = 4 \times 10^{-3} \text{ mol H}^+$$

از طرفی در محلول نیتریک اسید، خواهیم داشت:

$$[\text{H}^+] = 10^{-\text{pH}} = 10^{-6} \frac{\text{mol}}{\text{L}} \Rightarrow \text{H}^+ \text{ مول} = 10^{-6} \frac{\text{mol}}{\text{L}} \times 10^{-1} \text{ L} = 10^{-7} \text{ mol H}^+$$

با چشم‌پوشی از مول‌های H^+ درون بشر، می‌توان نوشت:

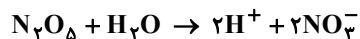
$$[\text{H}^+]_{\text{نهایی}} = \frac{4 \times 10^{-3} \text{ mol}}{0.1 \text{ L}} = 0.04 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$\text{pH} = -\log(4 \times 10^{-2}) = 2 - 2 \log 2 = 1/4$$

$$\text{mol OH}^- = 120 \times 10^{-3} \text{ g NaOH} \times \frac{1 \text{ mol NaOH}}{40 \text{ g NaOH}} = 3 \times 10^{-3} \text{ mol OH}^-$$

$$\text{pH}_{\text{نهایی}} = 10 \Rightarrow [\text{H}^+] = 10^{-10} \Rightarrow [\text{OH}^-]_{\text{نهایی}} = 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$[\text{OH}^-]_{\text{نهایی}} = 10^{-4} = \frac{\text{مول OH}^- - \text{مول H}^+}{1/5 \text{ L}} \Rightarrow 0/15 \times 10^{-3} = 3 \times 10^{-3} - \text{مول H}^+ \Rightarrow \text{مول H}^+ = 2/85 \times 10^{-3} \text{ mol}$$



$$2/85 \times 10^{-3} \text{ mol H}^+ \times \frac{1 \text{ mol N}_2\text{O}_5}{2 \text{ mol H}^+} \times \frac{108 \text{ g N}_2\text{O}_5}{1 \text{ mol N}_2\text{O}_5} \times \frac{10^3 \text{ mg}}{1 \text{ g}} = 153/9 \text{ mg N}_2\text{O}_5$$

$$[\text{H}^+] = M\alpha = \frac{5}{100} \times \frac{24}{100} = 12 \times 10^{-4}$$

$$\text{pH} = -\log [\text{H}^+] = 4 - \log 12 = 4 - (\log 2 + \log 3) = 4 - ((2 \times 0/3) + 0/5) = 2/9$$

برای قسمت دوم سؤال، ابتدا باید غلظت محلول HX را حساب کنیم. با توجه به اینکه pH محلول‌ها برابر است، می‌توان نوشت:

$$[\text{H}^+](\text{HA}) = [\text{H}^+](\text{HX}) \Rightarrow M(\text{HA})\alpha(\text{HA}) = M(\text{HX})\alpha(\text{HX}) \Rightarrow 0/005 \times \frac{24}{100} = M(\text{HX}) \times \frac{5}{100}$$

$$\Rightarrow M(\text{HX}) = 0/24 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

با توجه به معادله واکنش خواهیم داشت:

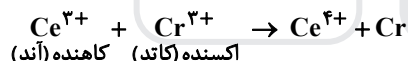
$$\frac{100}{1000} \text{ L HX(aq)} \times \frac{0/24 \text{ mol HX}}{1 \text{ L HX(aq)}} \times \frac{1 \text{ mol NaHCO}_3}{1 \text{ mol HX}} \times \frac{84 \text{ g NaHCO}_3}{1 \text{ mol NaHCO}_3} \times \frac{1000 \text{ mg}}{1 \text{ g}} = 201/6 \text{ mg NaHCO}_3$$



به‌ازای مبادله ۲ مول الکترون و مصرف ۱ مول Zn (۶۵ g)، ۵۱/۲ گرم مس ($\frac{80}{100} \times 64 = 51/2$) بر تیغه می‌نشیند، یعنی ۱۳/۸ g از جرم

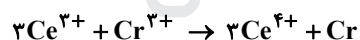
تیغه کاسته می‌شود.

$$0/5 \text{ mol e}^- \times \frac{13/8 \text{ g جرم کاهش}}{2 \text{ mol e}^-} = 3/45 \text{ g جرم کاهش}$$



$$E^\circ = E^\circ(\text{کاتد}) - E^\circ(\text{آند}) \Rightarrow 0/98 = -0/74 - E^\circ(\text{Ce}^{4+}/\text{Ce}^{3+}) \Rightarrow E^\circ(\text{Ce}^{4+}/\text{Ce}^{3+}) = -1/72 \text{ V}$$

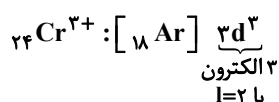
بررسی سایر گزینه‌ها:



(۱) معادله موازنه شده واکنش به صورت زیر است:

(۳) در این واکنش، Cr^{3+} کاهش یافته است؛ بنابراین قدرت اکسندگی آن از Ce^{4+} بیشتر است.

(۴) Cr^{3+} گونه اکسنده است:



در آبکاری قاشق مسی با نقره، هر دو نیم‌واکنش آندی و کاتدی مربوط به نقره هستند و غلظت Ag^+ طی فرایند آبکاری ثابت است. از طرفی

با توجه به اینکه در محلول الکترولیت، یون Cu^{2+} وجود ندارد، غلظت آن همواره برابر صفر است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

(۱) در سلول گالوانی مس-نقره، مس آند و نقره کاتد است و با گذشت زمان غلظت Cu^{2+} افزایش و غلظت Ag^+ کاهش می‌یابد.

(۳) با توجه به اینکه قدرت کاهندگی نقره از مس کمتر است، با وارد کردن تیغه نقره به محلول مس (II) سولفات واکنش انجام نمی‌شود و

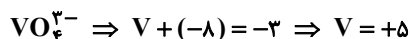
غلظت Cu^{2+} همواره برابر مقدار اولیه (مقداری بیشتر از صفر) و غلظت Ag^+ برابر با صفر است.

(۴) در آبکاری قاشق نقره‌ای با مس، غلظت Cu^{2+} ثابت و غلظت Ag^+ برابر با صفر است.

۲۰۳- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحه‌های ۵۰ تا ۵۳ شیمی ۳

تنها عبارت «ت» درست است. معادله واکنش کلی سلول سوختی متان به صورت $\text{CH}_4 + 2\text{O}_2 \rightarrow \text{CO}_2 + 2\text{H}_2\text{O}$ است. بررسی عبارت‌های نادرست: (الف)



(ب) در واکنش داده شده، گونه اکسند و کاهنده، Cl_2 است.

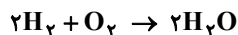
(پ) بازدهی سلول سوختی هیدروژن، بیشتر از موتور درون سوز است!

▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحه‌های ۵۰ تا ۵۲ شیمی ۳

۲۰۴- پاسخ: گزینه ۲

$$\frac{\text{ولتاژ عملی}}{\text{ولتاژ نظری}} \times 100 = \frac{0.615}{1/23} \times 100 = 50$$

واکنش انجام شده به صورت زیر است:



$$\frac{4}{8} \text{g O}_2 \times \frac{1 \text{ mol O}_2}{32 \text{ g O}_2} \times \frac{2 \text{ mol H}_2\text{O}}{1 \text{ mol O}_2} \times \frac{18 \text{ g H}_2\text{O}}{1 \text{ mol H}_2\text{O}} \times \frac{50}{100} = 2.7 \text{ g H}_2\text{O}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحه ۵۹ شیمی ۳

۲۰۵- پاسخ: گزینه ۱

همه عبارت‌های داده شده، نادرست هستند.

■ شکل داده شده مربوط به حلیی است. آهن سفید، نام دیگر آهن گالوانیزه می‌باشد.

■ در صورت خراش دیدن حلیی، قلع نقش کاتد را دارد، اما نیم‌واکنش کاهش مربوط به مولکول‌های اکسیژن است (فلزها کاهش نمی‌یابند).

■ از حلیی می‌توان برای ساخت ظروف بسته‌بندی مواد غذایی استفاده کرد.

■ آب، نقش الکترولیت و واکنش‌دهنده را دارد و نقش کاهندگی یا اکسندگی ندارد. (O_2 ، گونه اکسند است).

▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحه ۵۴ شیمی ۳

۲۰۶- پاسخ: گزینه ۲

در برقکافت آب، گاز هیدروژن در کاتد و گاز اکسیژن در آنود تولید می‌شود:



راه حل اول:

$$1 \text{ g O}_2 \times \frac{1 \text{ mol O}_2}{32 \text{ g O}_2} \times \frac{2 \text{ mol H}_2}{1 \text{ mol O}_2} \times \frac{2 \text{ g H}_2}{1 \text{ mol H}_2} = 0.125 \text{ g H}_2$$

$$1 \text{ g O}_2 \times \frac{1 \text{ mol O}_2}{32 \text{ g O}_2} \times \frac{4 \text{ mol } e^-}{1 \text{ mol O}_2} = 0.125 \text{ mol } e^-$$

راه حل دوم:

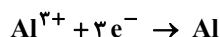
$$\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{\text{مول}}{\text{مول} \times \text{ضریب}}$$

$$\frac{1}{1 \times 32} = \frac{x}{2 \times 2} = \frac{y}{4 \times 1} \Rightarrow \begin{cases} x = 0.125 \text{ g H}_2 \\ y = 0.125 \text{ mol } e^- \end{cases}$$

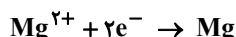
▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحه‌های ۵۶ و ۶۱ شیمی ۳

۲۰۷- پاسخ: گزینه ۳

برای تولید ۱ مول Al در فرایند هال، ۳ مول الکترون مبادله می‌شود.



در برقکافت منیزیم کلرید مذاب، Mg^{2+} به Mg تبدیل می‌شود:



$$6750 \text{ kg Al} \times \frac{1000 \text{ g Al}}{1 \text{ kg Al}} \times \frac{1 \text{ mol Al}}{27 \text{ g Al}} \times \frac{3 \text{ mol } e^-}{1 \text{ mol Al}} \times \frac{1 \text{ mol Mg}}{2 \text{ mol } e^-} \times \frac{24 \text{ g Mg}}{1 \text{ mol Mg}} \times \frac{1 \text{ kg Mg}}{1000 \text{ g Mg}} = 9000 \text{ kg Mg}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحه‌های ۶۸ تا ۷۲ شیمی ۳

۲۰۸- پاسخ: گزینه ۳

بررسی گزینه‌های نادرست:

(۱) ترکیب‌های گوناگون Si و O ، بیش از ۹۰ درصد پوسته جامد زمین را تشکیل می‌دهند و نه فقط SiO_2 !

(۲) در بین مواد داده شده، فقط دو ماده SiF_4 و NCl_3 ، جزء مواد مولکولی هستند.

(۴) در ساختار سیلیس، تنها پیوندهای Si-O وجود دارد.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{شمار کاتیون} = 2 \\ \text{شمار آنیون} = 6 \end{array} \Rightarrow \frac{\text{شمار کاتیون}}{\text{شمار آنیون}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{r(\text{Ca}^{2+})}{r(\text{M}^{2+})} = \frac{1}{3} \Rightarrow r(\text{M}^{2+}) = \frac{99}{1/375} = 72 \text{ pm}$$

$$\text{NH}_4^+ \text{CH}_3\text{COO}^- \Rightarrow \text{NH}_4\text{C}_2\text{H}_3\text{O}_2 \Rightarrow \text{شمار اتمها} = 12$$

عبارت‌های «الف» و «پ» درست هستند.

بررسی عبارت‌های نادرست:

(ب) جامدهای یونی، رسانای برق نیستند، زیرا در حالت جامد، یون‌ها نمی‌توانند آزادانه جابه‌جا شوند.

(ت) بیشتر ترکیب‌های یونی (نه همه آن‌ها) در آب حل می‌شوند.

$$\frac{r(\text{Ca}^{2+})}{r(\text{M}^{2+})} = \frac{1}{375} \Rightarrow r(\text{M}^{2+}) = \frac{99}{1/375} = 72 \text{ pm}$$

$$72 \text{ pm} \times \frac{10^{-12} \text{ m}}{1 \text{ pm}} \times \frac{100 \text{ cm}}{1 \text{ m}} = 7.2 \times 10^{-9} \text{ cm}$$

$$\frac{\text{بار } \text{M}^{2+}}{\text{شمار } \text{M}^{2+}} = \frac{2}{7.2 \times 10^{-9}} = \frac{1.0}{36} = 2.78 \times 10^8 \text{ cm}^{-1}$$



در دریای الکترونی کلسیم، به‌ازای هر کاتیون کلسیم، دو الکترون وجود دارد:

$$1/50.5 \times 10^{25} e^- \times \frac{1 \text{ atom Ca}}{2e^-} \times \frac{1 \text{ mol Ca}}{6.02 \times 10^{23} \text{ atom Ca}} \times \frac{40 \text{ g Ca}}{1 \text{ mol Ca}} \times \frac{1 \text{ cm}^3 \text{ Ca}}{1/5 \text{ g Ca}} = 333 \text{ cm}^3$$

عبارت‌های «پ» و «ت» درست است.

بررسی عبارت‌های نادرست:

(الف) وانادیم تنها در حالتی که دارای عدد اکسایش +۵ است، در نقش اکسند، ظاهر می‌شود و فقط می‌تواند کاهش یابد. (محللول نمک

 V^{3+} به رنگ سبز است، در حالی که بالاترین عدد اکسایش وانادیم، +۵ است.)(ب) محللول حاوی VO_3^- به رنگ زرد است، در حالی که محللول مس (II) سولفات، آبی‌رنگ است و انرژی پرتوی آبی بیشتر از زرد است.

عبارت‌های «ب» و «پ» درست هستند.

بررسی عبارت‌های نادرست:

(الف) مقدار ΔH واکنش در هر دو حالت، برابر ($Q_1 = Q_2$) است.

(ت) با توجه به برابر بودن مقدار واکنش‌دهنده‌ها در دو واکنش، مقدار فرآورده نهایی تولیدشده در آن‌ها یکسان است.

با نصب مبدل به‌ازای ۱ کیلومتر، از ورود ۵/۶ g کربن مونوکسید به هواکره جلوگیری می‌شود.

$$5/99 - 0/39 = 5/6 \text{ g CO}$$

$$10 \text{ سال} \times \frac{10^6 \text{ خودرو}}{1 \text{ سال}} \times \frac{10^4 \text{ km}}{100 \text{ خودرو}} = 10^{11} \text{ km}$$

$$10^{11} \text{ km} \times \frac{5/6 \text{ g CO}}{1 \text{ km}} \times \frac{1 \text{ mol CO}}{28 \text{ g CO}} \times \frac{6.02 \times 10^{23} \text{ مولکول}}{1 \text{ mol CO}} = 1/204 \times 10^{34} \text{ مولکول}$$



مول اولیه: ۱ ۱ ۰

تغییر مول: -x -x +2x

مول تعادلی: ۱-x ۱-x 2x

$$81 = \frac{4x^2}{(1-x)^2} \Rightarrow 9 = \frac{2x}{1-x} \Rightarrow 9 - 9x = 2x \Rightarrow 11x = 9 \Rightarrow x = \frac{9}{11}$$

$$\text{درصد پیشرفت واکنش} = \frac{x}{1} \times 100 = \frac{9}{11} \times 100 = 81/8$$

۲۱۷- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحه‌های ۱۰۴ تا ۱۰۶ شیمی ۳

چون واکنش گرماده است، افزایش دما باعث جابه‌جایی در جهت برگشت می‌شود و کاهش حجم (افزایش فشار)، باعث جابه‌جایی تعادل در جهت رفت می‌شود، اما کاهش حجم باعث افزایش غلظت کلیه مواد گازی شکل می‌شود؛ بنابراین غلظت NO_2 زیاد شده و شدت رنگ افزایش می‌یابد.

۲۱۸- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحه‌های ۱۰۶ و ۱۰۷ شیمی ۳

با توجه به اینکه فرایند هابر، گرماده است $(\text{N}_2 + 3\text{H}_2 \rightleftharpoons 2\text{NH}_3 + \text{Q})$ ، با افزایش دما، مقدار عددی K کاهش می‌یابد؛ بنابراین:

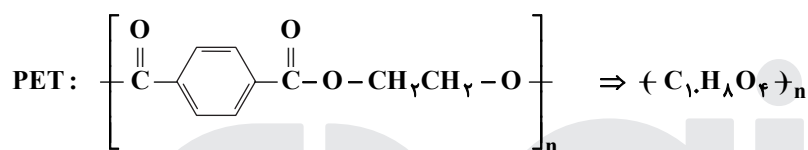
دما (برحسب کلوین)	K
۳۰۰	$(K_2) \quad 2/6 \times 10^8$
۴۰۰	$(K_4) \quad 3/9 \times 10^4$
۸۰۰	$(K_1) \quad 3/9 \times 10^{-2}$
۱۰۰۰	$(K_3) \quad 2/3 \times 10^{-3}$

۲۱۹- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحه‌های ۱۱۱ تا ۱۱۵ شیمی ۳

عبارت‌های «ب» و «پ» درست هستند.

(ب)



(پ) از واکنش گاز اتن با هیدروژن کلرید، کلرو اتان به دست می‌آید که در افشانه بی‌حس‌کننده موضعی به کار می‌رود.

بررسی عبارت‌های نادرست:

(الف) اغلب مواد آلی دارای گروه‌های عاملی هستند نه همه آن‌ها! به عنوان نمونه، آلکان‌ها گروه عاملی ندارند.

(ت) ترفتالیک اسید در نفت خام وجود ندارد.

۲۲۰- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: دشوار * صفحه ۱۱۵ شیمی ۳



$$200 \text{ g C}_8\text{H}_{10} \times \frac{53 \text{ g C}_8\text{H}_{10}}{100 \text{ g C}_8\text{H}_{10}} \times \frac{1 \text{ mol C}_8\text{H}_{10}}{106 \text{ g C}_8\text{H}_{10}} \times \frac{1 \text{ mol C}_8\text{H}_6\text{O}_4}{1 \text{ mol C}_8\text{H}_{10}} \times \frac{166 \text{ g C}_8\text{H}_6\text{O}_4}{1 \text{ mol C}_8\text{H}_6\text{O}_4} \times \frac{30}{100} = 49/8 \text{ g C}_8\text{H}_6\text{O}_4$$

$$49/8 \text{ g C}_8\text{H}_6\text{O}_4 \times \frac{1 \text{ mol C}_8\text{H}_6\text{O}_4}{166 \text{ g C}_8\text{H}_6\text{O}_4} \times \frac{12 \text{ mol e}^-}{1 \text{ mol C}_8\text{H}_6\text{O}_4} = 3/6 \text{ mol e}^-$$