

گزینه دو



داوطلبان آزمون سراسری (تیر ۱۴۰۲)

سال تحصیلی ۱۴۰۲ - ۱۴۰۱

آزمون آزمایشی ۲۹ اردیبهشت ۱۴۰۲

آزمون اختصاصی ۱

گروه آزمایشی علوم ریاضی

ویژه داوطلبان آزمون سراسری تیر ماه ۱۴۰۲ (گروه آزمایشی علوم ریاضی)

| مواد امتحانی | تعداد پرسش | از شماره | تا شماره | وقت پیشنهادی |
|--------------|------------|----------|----------|--------------|
| ریاضیات      | ۴۰         | ۱        | ۴۰       | ۷۰ دقیقه     |

مرحله ۱۵

دفترچه شماره ۱



همچنین، شما می توانید با اسکن تصویر روبه رو به وسیله گوشی هوشمند و یا تبلت خود، پاسخ تشریحی آزمون را مشاهده نمایید.

داوطلب گرامی، جهت استفاده از خدمات طلایی خود مانند کارنامه های هوشمند بعد از آزمون ارزشیابی، آزمونک ها، پیش آزمون های آنلاین، بانک سؤال گزینه دو، رفع اشکال هوشمند، جزوه های کمک آموزشی، آرشیو آزمون های گزینه دو و ...، با استفاده از شماره داوطلبی (به عنوان نام کاربری) و کد ملی خود (به عنوان رمز عبور) وارد وبسایت گزینه دو به آدرس [gozine2.ir](http://gozine2.ir) شوید. در صورتی که اینترنتی ثبت نام کرده اید، رمز عبور شما همان رمزی است که خودتان انتخاب نموده اید.

۱- فرض کنید  $f(x) = x^3 - ax^2 + 2$  باشد؛ به ازای کدام مقدار  $a$  چندجمله‌ای  $(f \circ f)(x)$  بر  $x - a$  بخش پذیر است؟

- (۱)  $\frac{5}{2}$  (۲) ۲ (۳)  $\frac{3}{2}$  (۴) ۴

۲- اگر نقطه  $A(-2, -1)$  روی نمودار  $y = f(2+x) + \alpha$  و  $A'(\beta, 4)$  متناظر با نقطه  $A$  روی نمودار  $y = f(2x+1)$  باشد، مقدار  $\alpha + \beta$  کدام است؟

- (۱)  $-\frac{11}{2}$  (۲)  $\frac{11}{2}$  (۳)  $\frac{5}{2}$  (۴)  $-\frac{5}{2}$

۳- جواب کلی معادله  $2 + \cos x \cos 2x = 4 \cos^2 x$  کدام است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

- (۱)  $\frac{k\pi}{4}$  (۲)  $k\pi + \frac{\pi}{4}$  (۳)  $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$  (۴)  $k\pi - \frac{\pi}{4}$

۴- حاصل  $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{2-2x-2x^2}{x^3+2x^2-4x-8}$  کدام است؟

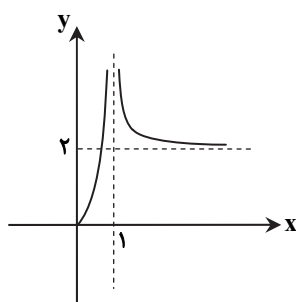
- (۱)  $-\frac{1}{4}$  (۲) صفر (۳)  $-\infty$  (۴)  $+\infty$

۵- اگر  $f(x) = \frac{2x^2-1}{x^2-4}$ ، فاصله نقاط تلاقی مجانب‌های  $y = f(\frac{1}{x})$  تا یکدیگر کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳)  $\frac{1}{2}$  (۴) ۴

۶- بخشی از نمودار تابع  $f(x) = \frac{4x^2}{ax^2+bx+c}$  به صورت روبه‌رو است. حاصل  $a-b$  کدام است؟

- (۱) -۶ (۲) -۳ (۳) ۳ (۴) ۶



۷- تابع  $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & x \geq 2 \\ (x+2)[-x] & x < 2 \end{cases}$  در  $x=2$  مشتق پذیر است. حاصل  $a+b$  کدام است؟ ( $[ ]$  نماد جزء صحیح است.)

- (۱) -۹ (۲) -۶ (۳) -۴ (۴) -۸

۸- اگر  $f(x) = (x^3 - x) \sin \pi x$ ، مقدار  $f''(1)$  کدام است؟

- (۱)  $2\pi$  (۲)  $-2\pi$  (۳)  $-4\pi$  (۴) صفر

۹- اگر  $f(x) = [2x]x^2 - 1$ ، اختلاف مشتق راست تابع  $f$  در  $x=1$  از مشتق چپ آن در  $x=-1$  چقدر است؟ ( $[ ]$  نماد جزء صحیح است.)

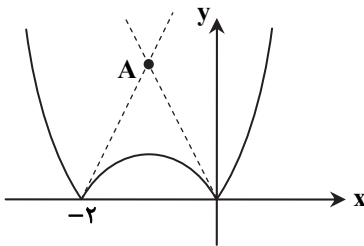
- (۱) صفر (۲) ۲ (۳) ۸ (۴) ۴

محل انجام محاسبات

۱۰- در کدام بازه جهت تقعر تابع  $f(x) = \frac{4}{x^2 + 3}$  رو به پایین و تابع اکیداً صعودی است؟

- (۱)  $(-\infty, 0)$  (۲)  $(-1, 0)$  (۳)  $(-1, 1)$  (۴)  $(0, 1)$

۱۱- نیم‌مماس‌های رسم‌شده در تابع  $y = |x^2 + 2x|$  مطابق شکل زیر یکدیگر را در نقطه A قطع کرده‌اند. عرض نقطه A کدام است؟



- (۱)  $\frac{5}{2}$   
(۲) ۲  
(۳)  $\frac{7}{2}$   
(۴) ۴

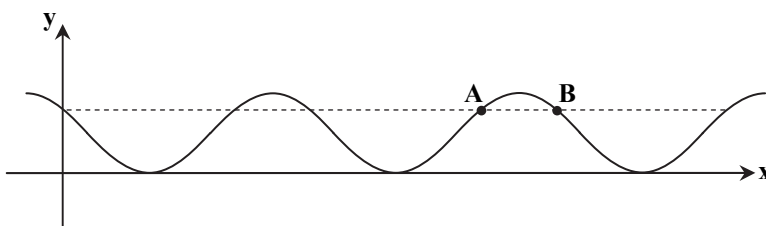
۱۲- کوچک‌ترین جواب مثبت معادله  $\frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} = \tan 2x$ ، کدام است؟

- (۱)  $\frac{\pi}{8}$  (۲)  $\frac{\pi}{12}$  (۳)  $\frac{3\pi}{8}$  (۴)  $\frac{5\pi}{12}$

۱۳- اگر  $\tan(25^\circ - \alpha) = \frac{1}{3}$ ، مقدار  $\tan(80^\circ - \alpha)$  کدام است؟

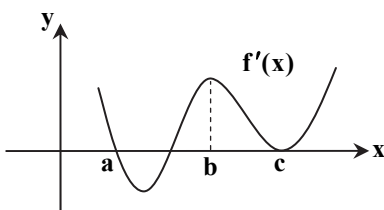
- (۱) ۵ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۴- قسمتی از نمودار  $y = \cos(x + \frac{\pi}{3}) + 1$  در شکل زیر آمده است. طول AB کدام است؟



- (۱)  $\frac{\pi}{3}$   
(۲)  $\frac{2\pi}{3}$   
(۳)  $\frac{\pi}{6}$   
(۴)  $\frac{\pi}{2}$

۱۵- نمودار مشتق تابع f به صورت روبه‌رو است. نقاطی با طول a، b و c برای تابع f به ترتیب از راست به چپ طول چه نقاطی است؟



- (۱) بحرانی، ماکزیمم نسبی، مینیمم نسبی  
(۲) ماکزیمم نسبی، عطف، عطف  
(۳) بحرانی، ماکزیمم نسبی، عطف  
(۴) مینیمم نسبی، عطف، بحرانی

۱۶- به‌ازای کدام مقدار a، طول نقطه عطف تابع  $y = (x - a)\sqrt[3]{x}$  برابر ۲ است؟

- (۱) -۶ (۲) ۶ (۳) -۴ (۴) ۴

محل انجام محاسبات

۱۷- نمودار تابع  $f(x) = \frac{3x+4}{2x-a}$  در مجاورت مجانب افقی خود به صورت زیر است. بزرگ‌ترین عدد صحیح قابل قبول برای  $a$  کدام است؟

- (۱) ۳  
(۲) -۳  
(۳) ۴  
(۴) -۲



۱۸- خط  $y = m$  نمودار تابع  $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 10$  را در ناحیه اول در دو نقطه قطع می‌کند. حدود  $m$  کدام است؟

- (۱)  $1 < m < 10$  (۲)  $3 < m < 10$  (۳)  $3 < m < 30$  (۴)  $10 < m < 30$

## هندسه

هندسه ۳: کل کتاب

۱۹- ماتریس  $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$  به صورت  $a_{ij} = \begin{cases} 1 & i > j \\ 0 & i = j \\ -2 & i < j \end{cases}$  مفروض است. در این صورت حاصل  $|A|$  کدام است؟

- (۱) ۱۶ (۲) ۳۲ (۳) ۲۴ (۴) ۶۴

۲۰- اگر  $(A+I)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ، مجموع درایه‌های ماتریس  $(A-I)^{-1}$  کدام است؟

- (۱)  $-\frac{8}{7}$  (۲)  $\frac{6}{7}$  (۳)  $-\frac{5}{7}$  (۴)  $\frac{4}{7}$

۲۱- دو دایره  $C(O, 2)$  و  $C'(O, 4)$  مفروض هستند. مکان هندسی مرکز بزرگ‌ترین دایره‌هایی که بر هر دو دایره  $C$  و  $C'$  مماس باشند، کدام است؟

- (۱)  $C''(O, 1)$  (۲)  $C''(O, 2)$  (۳)  $C''(O, \frac{3}{2})$  (۴)  $C''(O, 3)$

۲۲- به ازای چه مقادیری از  $m$  دو دایره  $x^2 + y^2 - 10x + 2y - 10 = 0$  و  $x^2 + y^2 - 4x - 6y + m = 0$  فقط یک مماس مشترک دارند؟

- (۱) ۱۲ و ۱۰۸ (۲) ۸ و -۱۲ (۳) ۸ و -۱۱۲ (۴) ۴ و -۸

۲۳- شعاع دایره‌ای که از نقاط  $A(5, 0)$  و  $B(1, 0)$  گذشته و مرکز آن روی نیمساز ناحیه اول و سوم باشد، کدام است؟

- (۱)  $\sqrt{11}$  (۲)  $\sqrt{13}$  (۳)  $\sqrt{14}$  (۴)  $\sqrt{17}$

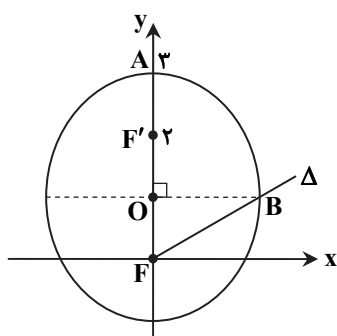
۲۴- در شکل روبه‌رو، معادله خط  $\Delta$  کدام است؟ ( $O$  مرکز بیضی است.)

(۱)  $y = x$

(۲)  $y = \sqrt{3}x$

(۳)  $y = 2x$

(۴)  $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$



محل انجام محاسبات

۲۵- دو اشعه نورانی به موازات محور  $y$ ها بر بدنه داخلی سهمی  $x^2 - 2x + 4y = 11$  می تابند. پرتوهای بازتابش در کدام نقطه متقاطع اند؟

- (۱)  $(1, 2)$  (۲)  $(1, 1)$  (۳)  $(3, 2)$  (۴)  $(1, 3)$

۲۶- برای دو بردار  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$ ، اگر  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2|\vec{a}| = |\vec{b}| = 4$ ، حاصل  $\sqrt{7}|\vec{a} + \vec{b}| + \sqrt{3}|\vec{a} - \vec{b}|$  کدام است؟

- (۱) ۱۸ (۲) ۲۰ (۳) ۲۲ (۴) ۲۶

۲۷- اگر  $A = \begin{bmatrix} |A| & 0 & -1 \\ 3 & 2|A| & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$  باشد، مجموع درایه های ماتریس  $A$  کدام می تواند باشد؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۷

۲۸- دایره  $(O, R)$  و خط  $D$  مماس بر دایره مفروض اند. اگر دایره هایی مماس بر خط  $D$  و دایره  $C$  را در نظر بگیریم مکان هندسی مرکز این دایره ها، کدام است؟

- (۱) دایره (۲) سهمی (۳) بیضی (۴) خط یا سهمی

۲۹- چهار نقطه  $A(0, 1, 3)$ ،  $B(2, 0, 0)$ ،  $C(4, 2, m)$  و  $D(0, 2, 3)$  روی یک صفحه قرار دارند. مقدار  $m$  کدام است؟

- (۱) -۳ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) -۲

## ریاضیات گسسته

ریاضیات گسسته: کل کتاب

۳۰- معادله سیاله  $17x + 7y = 90$  در مجموعه اعداد طبیعی چند جواب دارد؟

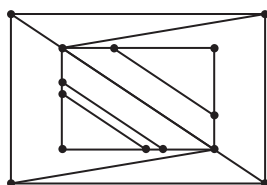
- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

۳۱- حاصل جمع مرتبه و اندازه در یک گراف کامل  $p$  رأسی ۳۶ است. این گراف چند دور به طول ۳ دارد؟

- (۱) ۵۶ (۲) ۴۸ (۳) ۲۴ (۴) ۳۲

۳۲- عدد احاطه گری گراف روبه رو چقدر است؟

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۳ (۴) ۴



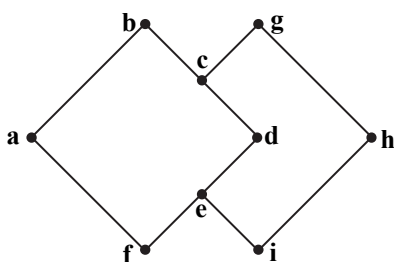
۳۳- کدام مجموعه برای گراف روبه رو احاطه گر مینیمال محسوب نمی شود؟

- (۱)  $\{a, i, c\}$

- (۲)  $\{d, a, i, g\}$

- (۳)  $\{b, h, f, d\}$

- (۴)  $\{f, c, h, i\}$



محل انجام محاسبات

|                                                                                                                                               |                      |              |  |  |   |  |  |  |   |                                                                                                                                                     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------|--------------|--|--|---|--|--|--|---|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|--|
| ۳۴- چند مربع لاتین به شکل                                                                                                                     | وجود دارد که با مربع | متعامد باشد؟ |  |  |   |  |  |  |   |                                                                                                                                                     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |
| <table border="1"> <tr><td>۲</td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td>۲</td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td>۲</td></tr> </table> | ۲                    |              |  |  | ۲ |  |  |  | ۲ | <table border="1"> <tr><td>۲</td><td>۱</td><td>۳</td></tr> <tr><td>۱</td><td>۳</td><td>۲</td></tr> <tr><td>۳</td><td>۲</td><td>۱</td></tr> </table> | ۲ | ۱ | ۳ | ۱ | ۳ | ۲ | ۳ | ۲ | ۱ |  |
| ۲                                                                                                                                             |                      |              |  |  |   |  |  |  |   |                                                                                                                                                     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |
|                                                                                                                                               | ۲                    |              |  |  |   |  |  |  |   |                                                                                                                                                     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |
|                                                                                                                                               |                      | ۲            |  |  |   |  |  |  |   |                                                                                                                                                     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |
| ۲                                                                                                                                             | ۱                    | ۳            |  |  |   |  |  |  |   |                                                                                                                                                     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |
| ۱                                                                                                                                             | ۳                    | ۲            |  |  |   |  |  |  |   |                                                                                                                                                     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |
| ۳                                                                                                                                             | ۲                    | ۱            |  |  |   |  |  |  |   |                                                                                                                                                     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۳۵- چند عدد چهاررقمی با ارقام ۱, ۲, ۳, ۴, ۵ می توان نوشت که در آن ها هریک از ارقام ۱, ۳, ۵ حداقل یک مرتبه ظاهر شوند؟

(۱) ۷۴ (۲) ۹۰ (۳) ۸۴ (۴) ۷۰

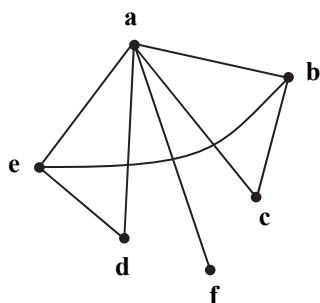
۳۶- در تقسیم عدد طبیعی  $a$  بر عدد طبیعی  $b$ ، خارج قسمت نصف مقسوم علیه و باقی مانده ۴ واحد از مقسوم علیه کمتر است. اگر  $5a - b$  رقم وسط  $a$  چقدر است؟

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۶ (۴) صفر

۳۷- اگر  $a$  اولین رقم سمت راست عدد  $77^{1399} + 33^{1399}$  باشد، باقی مانده تقسیم عدد  $(a+7)^{101}$  بر ۴۳ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۳۷ (۳) ۳۳ (۴) ۱۳

۳۸- برای گراف  $G$  که شکل آن به صورت روبه رو است، چند زیرگراف وجود دارد به طوری که  $\Delta = 4$  و  $N[f] = \{f\}$  باشد؟



(۱) ۶

(۲) ۸

(۳) ۱۲

(۴) ۱۶

۳۹- تعداد جواب های صحیح و مثبت معادله  $\frac{20}{x_4} = x_1^3 + x_2 + x_3 + x_4$  کدام است؟

(۱) ۳۳ (۲) ۲۷ (۳) ۱۷ (۴) ۱۶

۴۰- حداقل چند عدد طبیعی انتخاب کنیم تا مطمئن باشیم که سه عدد از آن ها هم در تقسیم بر ۶ و هم در تقسیم بر ۵ باقی مانده یکسان دارند؟

(۱) ۳۰ (۲) ۶۰ (۳) ۳۱ (۴) ۶۱

محل انجام محاسبات

# کلاس مشاوره

## بعد از آزمون سریع بیا سر کلاس

با حضور مشاوران با تجربه

### بعد از آزمون قراره کلی نکته مشاوره ای یاد بگیری

- تا روند تحصیلت صعودی باشه
- تا به مرحله بعدی بهتر فکر کنی
- تا روز به روز برای رسیدن به هدفت با انگیزه بیشتر تلاش کنی
- تا با نکات فنی که توسط مشاوره ارائه می شود دقیق تر در مسیر خودت حرکت کنی

### ما در مؤسسه گزینه دو در کنار سنجش و ارزشیابی با کلاس مشاوره کنار شما هستیم.

- تحلیل نتایج آزمون
- ارائه نکات مشاوره ای برای آزمون مرحله بعد تا روز کنکور سراسری
- حضور دبیران متناسب با مباحث مهم و پرچالش هر درس
- حضور نفرات برتر آزمون های سراسری و انتقال تجربه ها
- بررسی تمام مسائل مشاوره ای مربوط به شما داوطلبان



گزینه دو، راهی نو



تا آخرین باهائیم

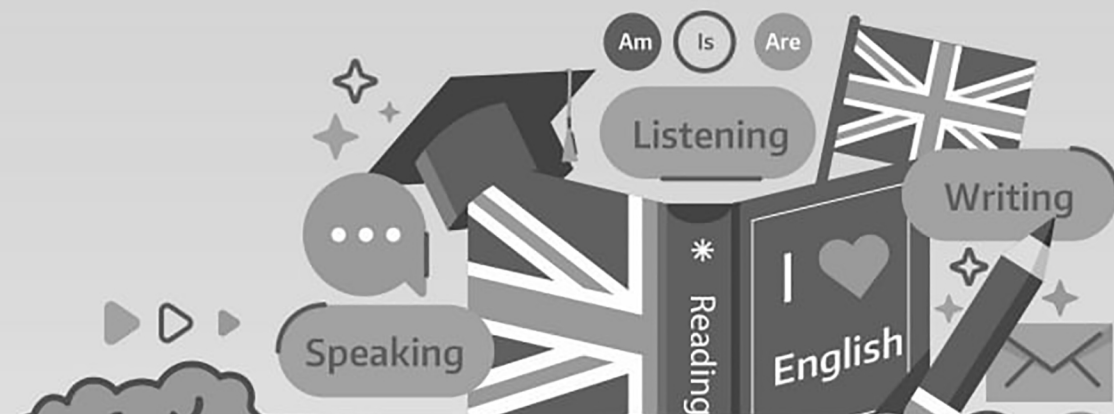
آپارات

اشتراک بدهید

aparat.com/gozine2/live



پس بعد از اعلام نتایج هر آزمون  
(حدوداً ساعت ۱۹) سریع بیا سر کلاس



# آمادگی برای کنکور گروه زبان خارجی (انگلیسی)

## با آزمون های آزمایشی گزینه دو

۵ آزمون جامع در خرداد و تیر ۱۴۰۲

سوالات با تعداد، تنوع و درجه سختی مشابه کنکور

برگزاری آنلاین و حضوری (با هماهنگی نمایندگی)

ساعت برگزاری مناسب برای داوطلبان تمام گروه های آزمایشی

(امکان شرکت داوطلبان سایر گروه های آزمایشی در آزمون در همان روز و در ساعتی متفاوت)

کارنامه فردی و گزارش گروهی بلافاصله پس از آزمون

امکان ثبت نام اینترنتی در **gozine2.ir** و نمایندگی های گزینه دو در سراسر کشور

## تاریخ آزمون های آزمایشی ویژه گروه زبان خارجی (انگلیسی)

| مرحله | تاریخ برگزاری | محدوده بندی           |
|-------|---------------|-----------------------|
| ۱     | ۱۴۰۲/۰۳/۲۶    | جامع مطابق کنکور ۱۴۰۲ |
| ۲     | ۱۴۰۲/۰۳/۳۰    | جامع مطابق کنکور ۱۴۰۲ |
| ۳     | ۱۴۰۲/۰۴/۰۲    | جامع مطابق کنکور ۱۴۰۲ |
| ۴     | ۱۴۰۲/۰۴/۰۶    | جامع مطابق کنکور ۱۴۰۲ |
| ۵     | ۱۴۰۲/۰۴/۰۹    | جامع مطابق کنکور ۱۴۰۲ |

اطلاع از شرایط ویژه ثبت نام در نمایندگی گزینه دو

گزینه دو



مؤسسه آموزشی فرهنگی

داوطلبان آزمون سراسری (تیر ۱۴۰۲)

سال تحصیلی ۱۴۰۱-۱۴۰۲

آزمون آزمایشی ۲۹ اردیبهشت ۱۴۰۲

آزمون اختصاصی ۲

گروه آزمایشی علوم ریاضی

| مواد امتحانی         | تعداد پرسش | از شماره                | تا شماره | وقت پیشنهادی |
|----------------------|------------|-------------------------|----------|--------------|
| فیزیک                | ۳۵         | ۴۱                      | ۷۵       | ۴۵ دقیقه     |
| شیمی                 | ۳۰         | ۷۶                      | ۱۰۵      | ۳۰ دقیقه     |
| تعداد کل پرسش ها: ۶۵ |            | مدت پاسخ گویی: ۷۵ دقیقه |          |              |

ویژه داوطلبان آزمون سراسری تیر ماه ۱۴۰۲ (گروه آزمایشی علوم ریاضی)

مرحله ۱۵

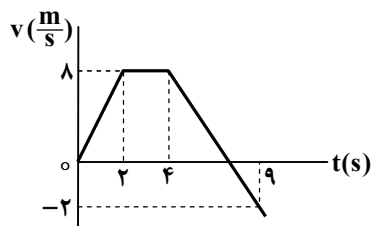
دفترچه شماره ۲



همچنین، شما می توانید با اسکن تصویر روبه رو به وسیله گوشی هوشمند و یا تبلت خود، پاسخ تشریحی آزمون را مشاهده نمایید.

داوطلب گرامی، جهت استفاده از خدمات طلایی خود مانند کارنامه های هوشمند بعد از آزمون ارزشیابی، آزمونک ها، پیش آزمون های آنلاین، بانک سؤال گزینه دو، رفع اشکال هوشمند، جزوه های کمک آموزشی، آرشیو آزمون های گزینه دو و ...، با استفاده از شماره داوطلبی (به عنوان نام کاربری) و کد ملی خود (به عنوان رمز عبور) وارد وبسایت گزینه دو به آدرس [gozine2.ir](http://gozine2.ir) شوید. در صورتی که اینترنتی ثبت نام کرده اید، رمز عبور شما همان رمزی است که خودتان انتخاب نموده اید.

۴۱- نمودار سرعت- زمان متحرکی که روی محور  $x$  از مکان  $x_0 = -36\text{m}$  شروع به حرکت می‌کند، مطابق شکل روبه‌رو است. پس از چند ثانیه متحرک برای اولین بار از مبدأ مکان می‌گذرد؟



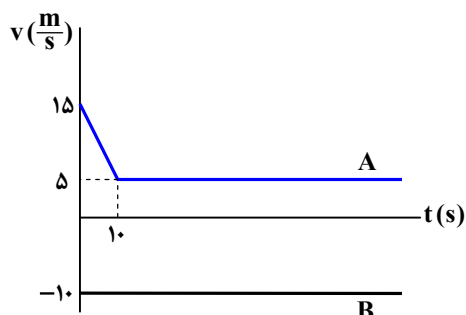
(۱) ۲

(۲) ۶

(۳) ۸

(۴) ۱۰

۴۲- دو متحرک A و B در  $t=0$  از مکان‌های  $x_{0A} = 100\text{m}$  و  $x_{0B} = 600\text{m}$  عبور می‌کنند و نمودار سرعت- زمان آن‌ها به شکل روبه‌رو است. این دو متحرک در چه مکانی به هم می‌رسند؟

(۱)  $x = 280\text{m}$ (۲)  $x = 250\text{m}$ (۳)  $x = 300\text{m}$ (۴)  $x = 340\text{m}$ 

۴۳- اتومبیلی که در یک مسیر مستقیم در حرکت است، با شتاب ثابت  $a$  ترمز می‌کند و در مدت ۴ ثانیه با طی کردن مسافت ۶۰ متر متوقف می‌شود. یک ثانیه قبل از آنکه اتومبیل متوقف شود اندازه سرعت آن چند متر بر ثانیه است؟

(۴) ۱۵

(۳)  $\frac{15}{2}$ 

(۲) ۵

(۱) ۱۰

۴۴- متحرکی روی محور  $x$ ها از حال سکون با شتاب ثابت، مسافت ۱۲۰۰ متر را طی می‌کند. اگر ۴۳۲ متر آخرش را در مدت ۸ ثانیه طی کند، تندی متحرک در لحظه‌ای که از نقطه شروع حرکت ۶۰۰ متر فاصله گرفته، چند متر بر ثانیه است؟

(۴) ۲۵

(۳)  $30\sqrt{3}$ 

(۲) ۳۰

(۱)  $30\sqrt{2}$ 

۴۵- متحرکی بر یک مسیر دایره‌ای با تندی ثابت  $20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  حرکت می‌کند. اگر متحرک در مدت ۱۰ ثانیه ربع دایره را طی کند، اندازه شتاب متوسط آن در این مدت چند متر بر مربع ثانیه است؟

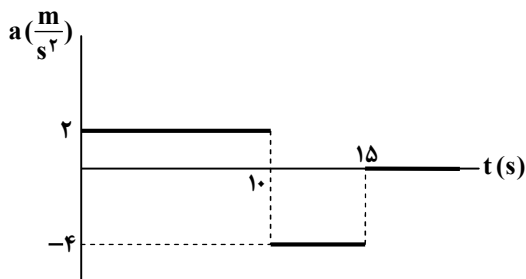
(۴) ۴

(۳)  $2\sqrt{2}$ 

(۲) ۲

(۱)  $\sqrt{2}$ 

۴۶- متحرکی روی خط راست حرکت می‌کند و نمودار شتاب- زمان آن به شکل روبه‌رو است. اگر در مدت  $t=0$  تا  $t=12\text{s}$  سرعت متوسط آن برابر



$15 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  باشد، سرعت متحرک در  $t=0$  چند متر بر ثانیه بوده است؟

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) ۴

محل انجام محاسبات

۴۷- سنگی را از بالای برجی رها می‌کنیم. هنگامی که سنگ به  $11/25$  متر پایین‌تر از محل رها شدن می‌رسد، سنگ دیگری را از بالای همان برج و از همان نقطه رها می‌کنیم. چند ثانیه پس از رها شدن سنگ اول، فاصله میان آن‌ها،  $48/75$  m می‌شود؟ ( $g = 10 \frac{m}{s^2}$  و از مقاومت هوا صرف‌نظر می‌شود).

- (۱)  $2/5$  (۲)  $3/5$  (۳) ۴ (۴) ۵

۴۸- از بالای یک برج گلوله کوچکی را رها می‌نماییم و گلوله با تندی  $55$  متر بر ثانیه به زمین می‌رسد. تندی گلوله  $2$  ثانیه قبل از رسیدن به زمین، چند برابر تندی آن  $2$  ثانیه بعد از رها شدن است؟ (از مقاومت هوا چشم‌پوشی کنید و  $g = 10 \frac{m}{s^2}$ )

- (۱)  $\frac{17}{4}$  (۲) ۲ (۳)  $\frac{7}{4}$  (۴) ۴

۴۹- یک ورزشکار مطابق شکل خود را از طنابی که به سقف سالن ورزش آویخته شده است، بالا می‌کشد. کدام نیرو ورزشکار را بالا می‌برد؟



(۱) نیرویی که دست او بر طناب وارد می‌کند.

(۲) نیرویی که سقف اتاق بر طناب وارد می‌کند.

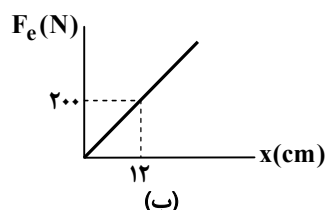
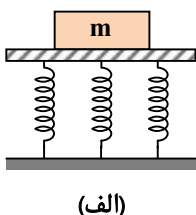
(۳) نیرویی که طناب بر دست او وارد می‌کند.

(۴) نیرویی که سقف اتاق بر طناب و دست او وارد می‌کند.

۵۰- اگر تا ارتفاع  $h$  از سطح زمین بالا برویم شدت میدان گرانش زمین  $19$  درصد کاهش می‌یابد. نسبت  $\frac{h}{R_e}$  چقدر است؟ ( $R_e$  شعاع زمین است).

- (۱)  $\frac{9}{10}$  (۲)  $\frac{10}{9}$  (۳)  $\frac{1}{9}$  (۴)  $\frac{1}{10}$

۵۱- در شکل «الف» سه فنر کاملاً مشابه زیر صفحه‌ای فلزی به جرم  $2$  kg قرار دارند و وزنه‌ای به جرم  $m$  روی صفحه قرار گرفته و ساکن است. (سنگینی وزنه و کفه به طور یکنواخت روی فنرها توزیع می‌شود). اگر  $30$  کیلوگرم وزنه روی وزنه اول اضافه کنیم، صفحه فلزی چند سانتی‌متر پایین می‌رود؟ (نمودار شکل «ب» نمودار نیروی فنر بر حسب تغییر طول مربوط به هریک از فنرها است). ( $g = 10 \frac{N}{kg}$ )



(۱) ۳

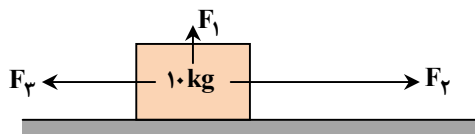
(۲) ۶

(۳) ۱۲

(۴) ۱۸

محل انجام محاسبات

۵۲- در شکل روبه‌رو، اگر  $F_1 = 20\text{ N}$ ،  $F_2 = 100\text{ N}$  و  $F_3 = 60\text{ N}$  باشد، وزنه ساکن باقی می‌ماند. در حالتی که  $F_1 = 20\text{ N}$  رو به پایین و به‌صورت عمود بر وزنه وارد شود و  $F_2 = 60\text{ N}$  و  $F_3 = 100\text{ N}$  باشد، بزرگی نیرویی که سطح تکیه‌گاه بر وزنه وارد می‌کند، چند نیوتون خواهد بود؟  $(g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2})$



(۱)  $60\sqrt{10}$

(۲)  $40\sqrt{10}$

(۳)  $60\sqrt{5}$

(۴)  $40\sqrt{5}$

۵۳- وقتی وزنه‌ای به جرم  $m$  توسط یک فنر از سقف اتاق آویخته می‌شود، در حالتی که وزنه ساکن است، طول فنر ۶۵ سانتی‌متر می‌شود. اگر به‌وسیله همین فنر، همان وزنه را با شتاب ثابت  $\frac{2}{3} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$  به‌صورت تندشونده بالا ببریم، طول فنر ۶۷ سانتی‌متر خواهد شد. اگر همین وزنه را روی

سطح افقی با ضریب اصطکاک جنبشی  $\mu_k = 0/3$ ، به‌وسیله همین فنر با شتاب ثابت  $\frac{2}{3} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$  به‌صورت تندشونده حرکت دهیم، طول فنر چند

سانتی‌متر می‌شود؟  $(g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2})$

(۴) ۶۴

(۳) ۶۲

(۲) ۶۰

(۱) ۵۸

۵۴- دو ماهواره A و B به دور زمین می‌گردند. اگر جرم ماهواره A سه برابر جرم ماهواره B و شتاب مرکزگرای ماهواره A شش برابر شتاب مرکزگرای ماهواره B باشد، انرژی جنبشی ماهواره A چند برابر انرژی جنبشی ماهواره B است؟

(۴)  $6\sqrt{3}$

(۳) ۹

(۲) ۱۸

(۱)  $3\sqrt{6}$

۵۵- وزنه‌ای به جرم ۲۰۰ g به انتهای فنری به ثابت  $2000 \frac{\text{N}}{\text{m}}$  بسته شده و با دامنه ۵ cm روی سطح افقی با اصطکاک ناچیز در حال نوسان است.

در لحظه‌ای که تندی وزنه  $2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  است، انرژی پتانسیل کشسانی فنر چند ژول است؟

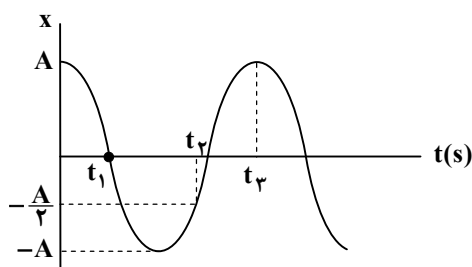
(۴)  $2/5$

(۳)  $0/8$

(۲)  $1/6$

(۱)  $2/1$

۵۶- نمودار مکان- زمان یک حرکت هماهنگ ساده به‌شکل زیر است. اندازه سرعت متوسط متحرک در بازه زمانی  $t_1$  تا  $t_2$  چند برابر اندازه سرعت متوسط آن در بازه زمانی  $t_1$  تا  $t_3$  است؟



(۱)  $0/5$

(۲)  $0/6$

(۳)  $0/9$

(۴)  $0/8$

محل انجام محاسبات

۵۷- یک آونگ ساده در سطح زمین در مدت ۲۰ ثانیه، ۳۰ نوسان کامل انجام می‌دهد. اگر این آونگ را به اندازه  $\frac{1}{9} R_e$  از سطح زمین بالا ببریم، در

مدت ۴۰ ثانیه چند نوسان انجام می‌دهد؟ ( $R_e$  شعاع کره زمین است.)

۵۴ (۴)

۳۳ (۳)

۲۷ (۲)

۶۶ (۱)

۵۸- وزنه‌ای به جرم ۸۰۰ گرم به انتهای یک فنر با ثابت  $400 \frac{N}{m}$  بسته شده و روی یک سطح افقی بدون اصطکاک نوسان می‌کند. اگر طول فنر در

حین نوسان وزنه، حداکثر به ۸۰ cm و حداقل به ۷۰ cm برسد، بیشینه اندازه شتاب وزنه چند متر بر مربع ثانیه است؟

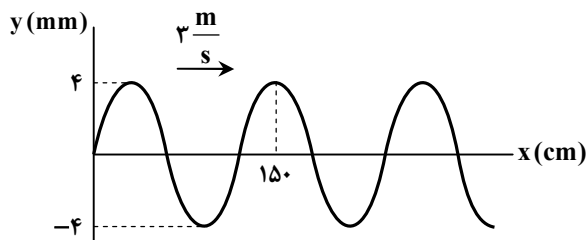
۵۰ (۴)

۲۵ (۳)

۲۰ (۲)

۱۰ (۱)

۵۹- یک موج عرضی سینوسی در یک تار منتشر می‌شود و نمودار جابه‌جایی - مکان آن در لحظه  $t = 0$  به شکل زیر است. نقطه  $x = 240 \text{ cm}$  در کدام یک از زمان‌های زیر در وضعیت  $4 \text{ mm} -$  (پایین وضع تعادل خودش) قرار می‌گیرد؟



$t = 0 / 7 \text{ s}$  (۱)

$t = 0 / 5 \text{ s}$  (۲)

$t = 0 / 6 \text{ s}$  (۳)

$t = 0 / 8 \text{ s}$  (۴)

۶۰- یک موج الکترومغناطیسی در فضا در حال انتشار است. در لحظه  $t_1$  در نقطه A، جهت میدان الکتریکی موج به سمت راست و بزرگی آن نصف

مقدار بیشینه آن و در حال افزایش است. اگر جهت انتشار موج رو به پایین باشد، پس از مدت  $\Delta t = \frac{T}{4}$  جهت میدان مغناطیسی موج به کدام

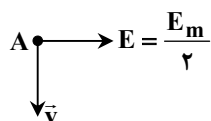
سمت است؟ ( $T$  دوره تناوب موج الکترومغناطیسی است.)

چپ (۱)

برون سو (۲)

بالا (۳)

درون سو (۴)



۶۱- یک موج طولی در یک فنر منتشر می‌شود و در یک لحظه نمودار جابه‌جایی - مکان مربوط به این موج به شکل زیر است. در این لحظه،

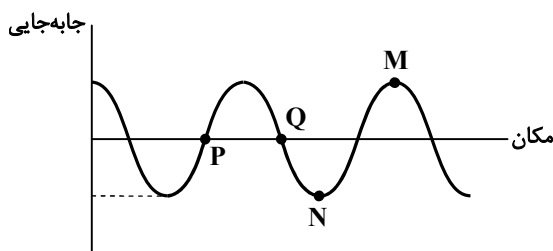
کدام یک از گزینه‌های زیر درست است؟

(۱) ممکن است P و Q هر دو در حداکثر فشردگی (جمع‌شدگی) باشند.

(۲) در یکی از نقاط P و Q بیشترین جمع‌شدگی و در دیگری بیشترین کشیدگی ایجاد شده است.

(۳) در یکی از نقاط M و N بیشترین کشیدگی و در دیگری بیشترین فشردگی (جمع‌شدگی) ایجاد شده است.

(۴) ممکن است نقاط M و N هر دو در حداکثر کشیدگی باشند.



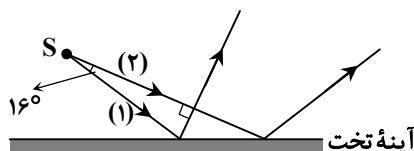
محل انجام محاسبات

۶۲- قطر دهانه یک میکروفن سهموی ۴۰ سانتی متر است و صوت پس از بازتاب روی گیرنده‌ای دایره‌ای به قطر ۲ cm متمرکز می‌شود. به وسیله این

$$(I_o = 10^{-12} \frac{W}{m^2}, \log 2 = 0.3) \text{ ، یابد؟ چند دسی بل افزایش می‌یابد؟}$$

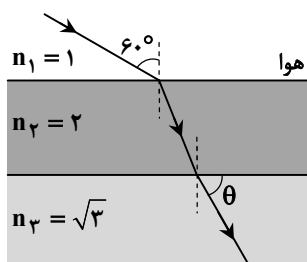
(۱) ۶۳ (۲) ۴۶ (۳) ۳۳ (۴) ۲۶

۶۳- مطابق شکل دو پرتوی نور (۱) و (۲) از منبع نور نقطه‌ای S که با هم زاویه ۱۶ درجه می‌سازند به سطح آینه تخت تابیده و بازتاب می‌کنند. اگر پرتو بازتاب مربوط به پرتوی (۱) عمود بر پرتوی تابش (۲) باشد، زاویه تابش پرتوی (۲) به سطح آینه چند درجه است؟



(۱) ۳۲  
(۲) ۳۷  
(۳) ۵۳  
(۴) ۵۴

۶۴- در شکل روبه‌رو، پرتوی نور تابشی توسط دو شیشه تخت شکسته می‌شود. زاویه  $\theta$  چند درجه است؟

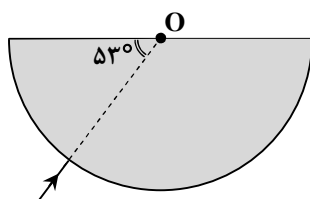


(۱) ۳۰  
(۲) ۶۰  
(۳) ۴۵

(۴) قابل محاسبه نیست.

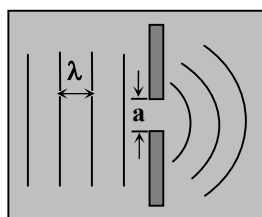
۶۵- مطابق شکل، پرتوی نوری در راستای مرکز یک تیغه نیم‌دایره‌ای (نقطه O) به ضریب شکست  $\frac{4}{3}$  می‌تابد. پرتو هنگام خروج از تیغه، چند درجه

از مسیر اولیه خود منحرف می‌شود؟ ( $\sin 37^\circ = 0.6$ )



(۱) ۱۶  
(۲) ۱۸  
(۳) ۲۳  
(۴) ۳۷

۶۶- مطابق شکل، شکافی به قطر a را درون ظرف آبی قرار داده‌ایم و موج تختی با طول موج  $\lambda$  پس از عبور از آن، دچار پراش شده است. با چه تعداد از فعالیت‌های ذکر شده، می‌توان خمیدگی جبهه‌های موج عبوری را بیشتر کرد؟



الف) همین آزمایش را در هوا انجام دهیم.

ب) از موجی با طول موج کوتاه‌تر استفاده کنیم.

پ) قطر شکاف (a) را افزایش و به‌طور هم‌زمان طول موج ( $\lambda$ ) را کاهش دهیم.

ت) این آزمایش را در محیطی که تندی انتشار موج در آن بیشتر است، انجام دهیم.

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

محل انجام محاسبات

۶۷- اگر بسامد اصلی یک تار دو انتها بسته ۱۷۰ هرتز و تندی انتشار صوت در هوا  $340 \frac{m}{s}$  باشد. در حالی که ۴ گره در تار ایجاد می‌شود، طول موج صوت منتشر شده در هوا چند متر است؟

- (۱)  $\frac{2}{3}$  (۲)  $\frac{3}{4}$  (۳)  $\frac{1}{3}$  (۴)  $\frac{1}{2}$

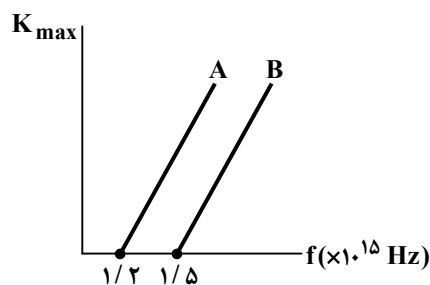
۶۸- فوتونی با انرژی ۵ الکترون‌ولت در چه محدوده‌ای از طیف امواج الکترومغناطیسی قرار دارد؟ ( $hc = 1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}$ )

- (۱) مرئی (۲) فرابنفش (۳) فروسرخ (۴) میکروموج

۶۹- اگر در آزمایش فوتوالکتریک با فلز A، از پرتویی با طول موج ۱۰۰ نانومتر و برای فلز B از پرتویی با طول موج ۱۲۰ نانومتر استفاده کنیم، انرژی جنبشی بیشینه برای الکترون‌های خروجی از هر دوی آن‌ها برابر ۴ الکترون‌ولت می‌شود. اگر پرتویی با طول موج ۱۸۰ نانومتر بر هر دو فلز بتابد، الکترون‌ها از کدام فلز خارج می‌شوند؟ ( $hc = 1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}$ )

- (۱) فقط A (۲) A و B (۳) فقط B (۴) هیچ‌کدام

۷۰- اگر پرتویی با طول موج ۱۵۰ نانومتر بر دو فلز A و B بتابد، بیشینه تندی الکترون‌های خارج‌شده از فلز A تقریباً چند برابر بیشینه تندی الکترون‌های خارج‌شده از فلز B خواهد بود؟ ( $h = 4/14 \times 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{s}$  ,  $c = 3 \times 10^8 \frac{m}{s}$ )



(۱) ۰/۷

(۲) ۰/۹

(۳) ۱/۳

(۴) ۱/۶

۷۱- اگر الکترون اتم هیدروژن از مدار  $n_1 = 6$  به مدار  $n_2 = 3$  برود، فوتونی با طول موج  $\lambda_1$  گسیل می‌کند. اگر الکترون این اتم، با جذب یک فوتون با طول موج  $\lambda_2$  از مدار  $n_1 = 2$  به مدار  $n_2 = 3$  برود، چند برابر  $\lambda_1$  است؟

- (۱)  $\frac{25}{3}$  (۲)  $\frac{5}{3}$  (۳)  $\frac{25}{9}$  (۴)  $\frac{9}{5}$

۷۲- بنا بر مدل اتمی بور، انرژی فوتون جذب شده برای گذار الکترون از اولین حالت برانگیخته به سومین حالت برانگیخته اتم هیدروژن چند الکترون‌ولت است؟ ( $E_R = 13/6 \text{ eV}$ )

- (۱) ۱/۸۹ (۲) ۲/۵۵ (۳) ۱۰/۲ (۴) ۱۲/۰۹

۷۳- کدام گزینه نادرست است؟

- (۱) هسته‌ها در واکنش‌های شیمیایی برانگیخته نمی‌شوند.
- (۲) یک هسته برانگیخته می‌تواند با تابش فرابنفش به حالت پایه برسد.
- (۳) جرم یک هسته همواره از مجموع جرم نوکلئون‌های سازنده آن کمتر است.
- (۴) در هسته‌های سبک و پایدار، تعداد نوترون‌های هسته تقریباً با تعداد پروتون‌های آن برابر است.

محل انجام محاسبات

۷۴- نمونه‌ای از یک ماده پرتوزا در  $t = 0$  شامل  $N_0$  هسته و ۱۲۰ روز بعد از آن شامل  $10^{25}$  هسته و ۱۶۰ روز بعد از  $t = 0$  شامل  $2/5 \times 10^{24}$  هسته است. تعداد هسته پرتوزای اولیه در  $t = 0$  ( $N_0$ ) کدام است؟

- (۱)  $1/6 \times 10^{25}$  (۲)  $1/28 \times 10^{27}$  (۳)  $8 \times 10^{25}$  (۴)  $6/4 \times 10^{26}$

۷۵- در مورد واکنش گداخت هسته‌ای (هم‌جوشی) کدام درست است؟

- (۱) در واکنش گداخت دوتریم (D) با تریتم (T)، هسته هلیوم همراه با ۳ نوترون تولید می‌شود.  
(۲) برای انجام این واکنش، لازم است هسته‌های کم‌جرم اولیه با انرژی جنبشی زیاد به یکدیگر برخورد کنند.  
(۳) جرم محصولات فرایند، بیشتر از جرم هسته‌های اولیه است.  
(۴) در نیروگاه‌های تولید برق معمولاً از این واکنش استفاده می‌شود.

۳۰'

شیمی

زمان پیشنهادی

شیمی ۳: کل کتاب

۷۶- چند مورد از مطالب زیر، درباره ترکیب‌های داده شده، درست است؟



- در دمای یکسان، قدرت اسیدی ترکیب A از استیک اسید بیشتر است.
  - انحلال پذیری ماده B در هگزان بیشتر از انحلال پذیری آن در آب است.
  - از ترکیب A می‌توان برای تهیه صابونی جامد با فرمول شیمیایی  $\text{C}_7\text{H}_{15}\text{COONa}$  استفاده کرد.
  - از واکنش ۳ مول B با ۱ مول الکل سه‌عاملی  $\text{C}_3\text{H}_8\text{O}_3$ ، می‌توان ۱ مول استر سنگین با فرمول  $\text{C}_{54}\text{H}_{110}\text{O}_6$  به‌دست آورد.
- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۷۷- چند مورد از مطالب زیر درباره نمک خوراکی، نادرست است؟

- در حالت مذاب و محلول، رسانای جریان برق است.
  - عدد کوئوردیناسیون یون‌ها در آن یکسان و برابر ۶ است.
  - آنتالپی فروپاشی شبکه بلور آن بیشتر از پتاسیم برمید است.
  - آرایش الکترونی هر دو یون سازنده آن مانند گاز نجیب آرگون است.
- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

۷۸- چند مورد از مطالب زیر، درست است؟

- مبدل‌های کاتالیستی در واقع توری‌هایی از جنس سرامیک هستند که سطح آن‌ها با فلزهای پلاتین، پالادیم و رودیم پوشانده شده است.
- در گازهای خروجی از آگزوز خودروها در هنگام روشن و گرم شدن خودرو با وجود مبدل کاتالیستی، گازهای CO، NO و  $\text{C}_x\text{H}_y$  مشاهده می‌شود.

- گازهای هیدروژن و اکسیژن در دمای اتاق و در حضور پلاتین به‌سرعت با یکدیگر واکنش می‌دهند و آب تشکیل می‌شود.
- با استفاده از کاتالیزگر، می‌توان واکنش‌ها را در دماهای پایین‌تر و با سرعت مناسب انجام داد.

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۷۹- در محلول اسید HA، مجموع غلظت مولی یون‌های حاصل از یونش دو برابر غلظت تعادلی HA است، بنابراین.....

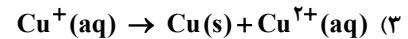
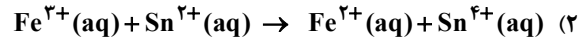
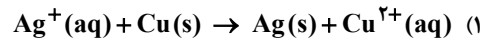
- (۱) درجه یونش اسید برابر ۵/۰ است.  
(۲) ثابت یونش اسید برابر یک است.  
(۳) اسید HA، از دسته اسیدهای قوی به حساب می‌آید.  
(۴) ثابت یونش اسید دو برابر غلظت  $\text{A}^-$  است.

محل انجام محاسبات

۸۰- اگر در دمای  $25^{\circ}\text{C}$ ،  $\text{pH}$  محلولی از سود برابر ۱۳ باشد، غلظت مولار یون هیدروکسید در این محلول چند برابر غلظت مولار یون هیدروکسید در آب خالص است؟

- (۱)  $10^{-6}$  (۲)  $10^{-6}$  (۳)  $10^{-5}$  (۴)  $10^{-5}$

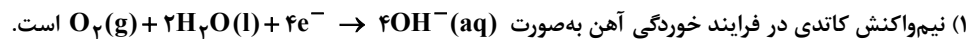
۸۱- براساس معادله موازنه شده، در کدام واکنش تعداد الکترون کمتری مبادله می شود؟



۸۲- عدد اکسایش نیتروژن در آمونیوم سولفات، با عدد اکسایش کربن در کدام ترکیب برابر است؟

- (۱) متان (۲) اتان (۳) اتن (۴) اتین

۸۳- کدام عبارت نادرست است؟



(۲) اگر در سطح آهن گالوانیزه خراش عمیق ایجاد شود، در سطح کاتد، آهن کاهش می یابد.

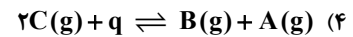
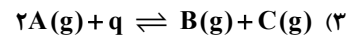
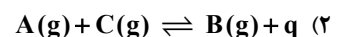
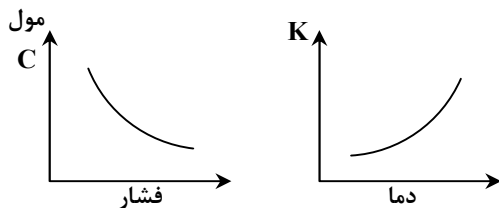
(۳) اگر در سطح حلبی خراش عمیق ایجاد شود، آهن در آند اکسید می گردد.

(۴) سرعت خوردگی آهن در محیط اسیدی نسبت به محیط خنثی بیشتر است.

۸۴- در فرایند  $2\text{A}(\text{g}) \rightleftharpoons \text{B}(\text{g}) + \text{C}(\text{g})$ ، ۸۰ درصد مقدار A تا لحظه برقراری تعادل به B و C تبدیل می گردد. ثابت تعادل این واکنش کدام است؟

- (۱) ۱۶ (۲) ۸ (۳) ۴ (۴) ۲

۸۵- نمودارهای روبه رو مربوط به کدام واکنش است؟



۸۶-  $\text{pH}$  محلولی از هیدروفلوئوریک اسید برابر با  $2/7$  است. اگر ثابت یونش این اسید برابر با  $10^{-5}$  باشد، در  $250$  میلی لیتر از این محلول به تقریب چند گرم هیدروژن فلئورید حل شده است؟ ( $\log 2 = 0/3$ ,  $F = 19: \text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$ ,  $H = 1$ )

- (۱) ۲ (۲)  $2/5$  (۳) ۵ (۴)  $3/5$

۸۷- کدام عبارت نادرست است؟

(۱) در سلول گالوانی Zn-Cu، الکترون ها در مدار بیرونی به سوی الکتروود مس حرکت می کنند.

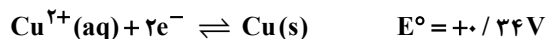
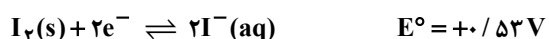
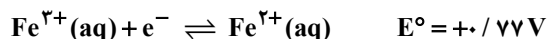
(۲) در سلول گالوانی SHE-Ag، با گذشت زمان جرم تیغه آندی کاهش می یابد.

(۳) در سلول گالوانی Mg-Fe، آنیون ها از طریق دیواره متخلخل به ظرف آند انتقال می یابند.

(۴) در سلول گالوانی SHE-Cu، به مرور جرم تیغه مسی افزایش می یابد.

محل انجام محاسبات

۸۸- با توجه به نیم واکنش های زیر، کدام عبارت نادرست است؟

(۱) یون های  $\text{Fe}^{3+}$  و  $\text{I}^{-}$  با یکدیگر واکنش می دهند. (۲) قدرت اکسندگی  $\text{Fe}^{2+}$  نسبت به  $\text{I}_2$  بیشتر است.(۳) فلز Cu در محلول آهن (III) کلرید حل می شود. (۴) قدرت کاهندگی Cu نسبت به  $\text{Fe}^{2+}$  بیشتر است.۸۹- تعادل  $\text{A}(\text{g}) \rightleftharpoons \text{B}(\text{g})$ ، با ۲ مول B و ۰/۵ مول A در سامانه ای یک لیتری برقرار است. اگر در دمای ثابت، ۱ مول B به سامانه افزوده شود، در تعادل جدید، غلظت مولی B چند برابر A خواهد بود؟

(۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۳ (۴) ۲

۹۰- چند مورد از مطالب زیر درست است؟ ( $C = 12, O = 16, S = 32; \text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$ )

■ اختلاف جرم بخش آب دوست در یک پاک کننده صابونی و غیرصابونی سدیم دار به ازای یک مول از هر کدام، ۳۲ گرم است.

■ لکه های سفیدی که پس از شستن لباس با صابون روی آن برجای می ماند، مربوط به صابون اضافی است که مصرف نشده است.

■ در ساختار یک پاک کننده غیرصابونی که شامل یک حلقه بنزنی است، حداقل ۴ پیوند دوگانه وجود دارد.

■ واکنش مخلوط سدیم هیدروکسید و پودر آلومینیم با آب، گرماده است و در آن، گاز اکسیژن تولید می شود.

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۹۱- در سلول گالوانی Al-Fe، حجم محلول در هر دو نیم سلول ۰/۱ لیتر و ثابت است. اگر غلظت کاتیون فلزی محلول در ظرف آند

۰/۰۴ مولار تغییر کند، تغییر جرم تیغه کاتدی چند گرم خواهد بود؟ ( $\text{Al} = 27, \text{Fe} = 56; \text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$ )

(۱) ۰/۰۵۶ (۲) ۰/۱۱۲ (۳) ۰/۲۲۴ (۴) ۰/۳۳۶

۹۲- در فرایند تولید PET، ..... که از اکسایش ..... توسط ..... حاصل می شود، به عنوان یکی از مونومرها استفاده می شود.

(۱) ترفتالیک اسید- پارازایلن- محلول رقیق پتاسیم پرمنگنات

(۲) پارازایلن- ترفتالیک اسید- محلول غلیظ پتاسیم پرمنگنات

(۳) اتن- اتیلن گلیکول- محلول غلیظ پتاسیم پرمنگنات

(۴) اتیلن گلیکول- اتن- محلول رقیق پتاسیم پرمنگنات

۹۳- چند مورد از مطالب زیر، درست است؟

■ سرخ قام بودن خاک رس را می توان به وجود آهن (III) اکسید در آن نسبت داد.

■ رفتار فیزیکی مواد مولکولی به نوع و قدرت نیروهای بین مولکولی آن ها بستگی دارد.

■ مقاومت کششی گرافن حدود دو برابر فولاد است.

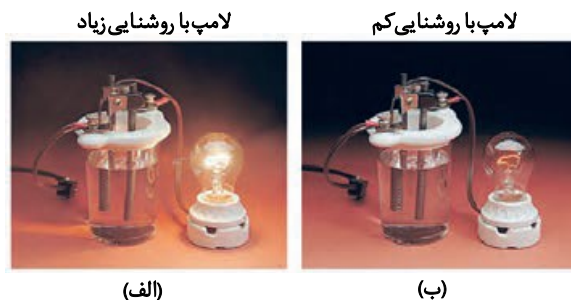
■ سیلیسیم یک جامد کووالانسی با ساختار سه بعدی است.

■ مدل دریای الکترونی برای توجیه همه رفتارهای فیزیکی فلزها به کار می رود.

(۱) ۵ (۲) ۴ (۳) ۳ (۴) ۲

محل انجام محاسبات

۹۴- با توجه به شکل‌های زیر، کدام عبارت درست است؟



لامپ با روشنایی زیاد

لامپ با روشنایی کم

(الف)

(ب)

(۱) محلول‌های (الف) و (ب) به ترتیب می‌توانند محلول‌های ۱ مولار سدیم کلرید و ۵/۰ مولار شکر در آب باشند.

(۲) اگر هر دو محلول مربوط به اسید HA در دمای مشخص باشد،  $K_a$  اسید در محلول (الف) بزرگ‌تر است.

(۳) اگر هر دو محلول بازی باشند، pH محلول (الف) بیشتر است.

(۴) غلظت حل‌شونده در محلول (الف) قطعاً بیشتر از محلول (ب) است.

۹۵- pH ۲۰۰ میلی‌لیتر محلول ۰/۱ مولار هیدروکلریک اسید، کدام است و ۱۰۰ میلی‌لیتر از این محلول، با چند گرم جوش شیرین به طور کامل واکنش می‌دهد؟ (در اثر انجام واکنش، سدیم کلرید، آب و گاز کربن دی‌اکسید تولید می‌شود.)

( $H=1, C=12, O=16, Na=23: g \cdot mol^{-1}$ )

(۴) ۱/۶۸

(۳) ۱/۷، ۰/۸۴

(۲) ۰/۸۴، ۱

(۱) ۱/۷، ۱/۶۸

۹۶- کدام موارد از مطالب زیر، درست است؟ ( $Mg = 24 g \cdot mol^{-1}$ )

(الف) پایداری و همگن بودن، از ویژگی‌های مشترک کلئیدها و محلول‌ها است.

(ب) قدرت پاک‌کنندگی صابون در آب چشمه بیشتر از آب دریا است.

(پ) با افزودن ۰/۲ مول صابون سدیم به یک لیتر آب سخت که غلظت یون منیزیم در آن ۳۶۰۰ ppm است، همه یون‌های منیزیم مصرف می‌شود.

(ت) در دمای معین، صابون آنزیم‌دار، لکه چربی را از روی پارچه نخی بهتر از پارچه پلی‌استر پاک می‌کند.

(۴) پ و ت

(۳) الف و ب

(۲) ب و ت

(۱) الف و پ

۹۷- به ۱۰۰ mL محلول نیتریک اسید با  $pH=1$ ، چند گرم ۷۰ درصد جرمی  $HNO_3$  اضافه کنیم تا محلولی با  $pH=0/3$  به‌دست

آید؟ (از تغییر حجم صرف‌نظر شود،  $HNO_3 = 63 g \cdot mol^{-1}$ )

(۴) ۳/۶

(۳) ۲/۵۲

(۲) ۱/۷۶

(۱) ۰/۰۴

۹۸- چند مورد از مطالب زیر درست است؟

■ اتم‌های کربن در مولکول اتین مانند اتم کربن در کربن دی‌اکسید، بار جزئی مثبت دارند.

■ در مولکول کربن تتراکلرید برخلاف مولکول متان، تراکم بار الکتریکی منفی در مرکز مولکول است.

■ در نقشه پتانسیل الکتروستاتیکی مولکول آمونیاک و مولکول گوگرد تری‌اکسید، اتم مرکزی قرمز رنگ است.

■ در مولکول فرمالدهید ( $CH_2O$ ) مانند مولکول کربونیل سولفید، اتم اکسیژن بار جزئی منفی دارد.

(۴) ۴

(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) ۱

۹۹- ماده A از یک نوع اتم ساخته شده است، دمای ذوب بالایی دارد، سخت است و در حالت جامد جریان برق را از خود عبور می‌دهد. چه تعداد از

مواد زیر را می‌توان A در نظر گرفت؟

(ث) سیلیسیم

(ت) سیلیس

(پ) الماس

(ب) تیتانیم

(الف) گرافیت

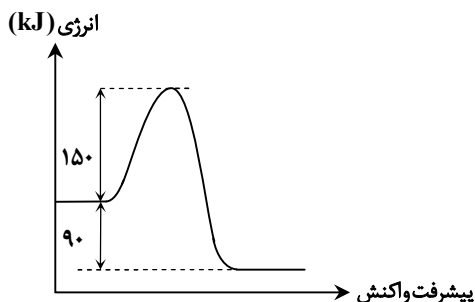
(۴) ۳

(۳) ۲

(۲) ۱

(۱) صفر

محل انجام محاسبات



۱۰۰- نمودار زیر مربوط به یک واکنش در غیاب کاتالیزگر است. اگر با استفاده از کاتالیزگر، انرژی فعال سازی واکنش ۳۰ درصد کاهش یابد،  $\Delta H$  واکنش، ..... و اختلاف سطح انرژی فراورده با بالاترین نقطه نمودار به ..... کیلوژول کاهش می یابد.

(۱) به ۶۳ کیلوژول می رسد، ۱۹۵

(۲) به ۶۳ کیلوژول می رسد، ۱۶۸

(۳) تغییر نمی کند، ۱۹۵

(۴) تغییر نمی کند، ۱۶۸

۱۰۱- کدام گزینه نادرست است؟

(۱) از کلرو اتان در افشانه بی حس کننده موضعی استفاده می شود.

(۲) اتانول یک ضد عفونی کننده است که می توان آن را از واکنش اتیلن با آب تهیه کرد.

(۳) اتیل استات دارای ۲ اتم کربن با عدد اکسایش ۳- است و به عنوان حلال چسب کاربرد دارد.

(۴) تهیه آلدهید و کتون از الکل ها امکان پذیر نیست، ولی می توان از الکل ها، کربوکسیلیک اسید تهیه کرد.

۱۰۲- در آبکاری یک جسم آهنی به جرم ۴ گرم با نقره و الکترولیت نقره نیترات، پس از عبور  $12/04 \times 10^{21}$  الکترون از مدار، جرم جسم چند درصد افزایش خواهد یافت؟ ( $\text{Fe} = 56$ ,  $\text{Ag} = 108 : \text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$ )

۵۴ (۴)

۴۶ (۳)

۲۱/۶ (۲)

۱۴ (۱)

۱۰۳- کدام گزینه در ارتباط با برقکافت سدیم کلرید مذاب، نادرست است؟

(۱) این فرایند در یک سلول الکترولیتی و با استفاده از جریان برق انجام می شود.

(۲) در این فرایند به ازای تولید دو مول فلز سدیم، یک مول گاز کلر تولید می شود.

(۳) طی این فرایند، اطراف الکتروود آند حباب هایی مربوط به گاز کلر مشاهده می شود.

(۴) در نتیجه فرایند کاهش یون های سدیم در الکتروود مثبت سلول، فلز سدیم تولید می شود.

۱۰۴- اگر در شرایط استاندارد، ۵۶ لیتر گاز هیدروژن را با مقدار کافی اکسیژن وارد محفظه سلول سوختی کنیم، ..... گرم آب در ..... تولید می شود. ( $\text{H} = 1$ ,  $\text{O} = 16 : \text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$ )

۴۵ (۴)، قطب مثبت

۳۶ (۳)، کاتد

۳۶ (۲)، آند

۴۵ (۱)، قطب منفی

۱۰۵- چند مورد از مطالب زیر نادرست است؟

■ در ساختار یخ، اتم های هیدروژن در رأس حلقه های شش ضلعی قرار دارند.

■ در فناوری تولید انرژی الکتریکی از پرتوهای خورشیدی، شارهای که توربین را به حرکت درمی آورد، یک شار یونی است.

■ هیدروژن فلئورید توانایی برقراری پیوند هیدروژنی با مولکول های خود را دارد و مانند سدیم کلرید، می تواند در گستره دمایی حدود  $500^\circ\text{C}$  به حالت مایع باقی بماند.

■  $\text{SiC(s)}$  یک جامد کووالانسی است و برخلاف  $\text{C}_6\text{H}_{14(l)}$ ،  $\text{Cl}_2(g)$  و  $\text{KBr(s)}$ ، نمی توان برای آن از واژه هایی مانند فرمول مولکولی استفاده کرد.

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

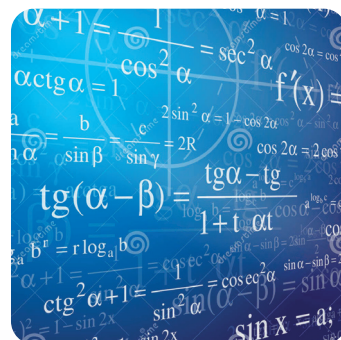
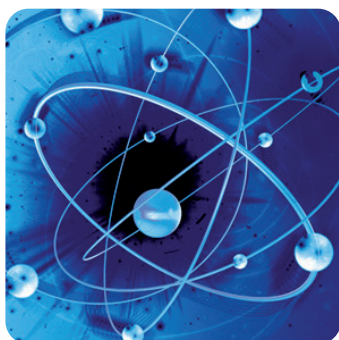
محل انجام محاسبات

# دفترچه پاسخ‌های تشریحی

## آزمون آزمایشی ۲۹ اردیبهشت ۱۴۰۲ (مرحله ۱۵)

ویژه داوطلبان آزمون سراسری (تیر ۱۴۰۲)

گروه آزمایشی علوم ریاضی



## تذکرات مهم ↓

➤ آزمون آزمایشی مرحله ۱۶ گزینه دو، در روز جمعه ۲۶ خرداد ۱۴۰۲ برگزار می گردد.

➤ داوطلب گرامی، جهت استفاده از خدمات طلایی خود مانند کارنامه های هوشمند بعد از آزمون، آزمونک ها، پیش آزمون های آنلاین، بانک سؤال گزینه دو، رفع اشکال هوشمند، جزوه های کمک آموزشی، آرشیو آزمون های گزینه دو و ... ، با استفاده از شماره داوطلبی (به عنوان نام کاربری) و کد ملی خود (به عنوان رمز عبور) وارد وب سایت گزینه دو به آدرس [www.gozine2.ir](http://www.gozine2.ir) شوید.

➤➤ در صورتی که اینترنتی ثبت نام کرده اید، رمز عبور شما همان رمزی است که خودتان انتخاب نموده اید.

➤ کارنامه های آزمون آزمایشی مرحله ۱۵ به صورت کامل، با فاصله زمانی کوتاهی پس از آزمون مطابق اطلاعیه اعلام شده، بر روی پایگاه اینترنتی گزینه دو به آدرس [www.gozine2.ir](http://www.gozine2.ir) قرار می گیرد. در صورت بروز اشکال در دریافت کارنامه، موضوع را از طریق نمایندگی شهر خود پیگیری نمایید.



داوطلب گرامی، شما می توانید با اسکن تصویر بالا به وسیله گوشی هوشمند و یا تبلت خود، به صفحه اینستاگرام مؤسسه گزینه دو وارد شوید.

[gozine2.ir](https://www.instagram.com/gozine2.ir)

## ریاضیات

۱- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: ساده \* فصل ۱، درس ۲ حسابان ۲

نکته: اگر  $f$  و  $g$  دو تابع باشند، ترکیب  $f$  با  $g$  را با  $fg$  نمایش می‌دهیم و آن را به صورت روبه‌رو تعریف می‌کنیم:

$$(fg)(x) = f(g(x)) ; D_{fg} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

نکته: باقیمانده تقسیم چندجمله‌ای  $f(x)$  بر  $ax + b$  عبارت است از:  $f(-\frac{b}{a})$

با توجه به نکته برای آنکه چندجمله‌ای  $(f \circ f)(x)$  بر  $x - a$  بخش‌پذیر باشد، باید  $(f \circ f)(a) = 0$  باشد، پس داریم:

$$f(a) = a^3 - a^2 + 2 = 2 \Rightarrow (f \circ f)(a) = f(f(a)) = f(2) = 10 - 4a$$

باید این مقدار برابر صفر باشد، پس:

$$10 - 4a = 0 \Rightarrow a = \frac{5}{2}$$

۲- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط \* فصل ۱، درس ۱ حسابان ۲

راه‌حل اول: ابتدا متناظر طول نقطه  $A$  روی نمودار  $f(x)$  و سپس روی نمودار  $f(2x+1)$  را به دست می‌آوریم تا مقدار  $\beta$  به دست آید:

$$f(2x+1) + \alpha \xrightarrow{\text{واحد به سمت راست}} f(x) + \alpha \xrightarrow{\alpha \text{ واحد به سمت پایین}} f(x) \xrightarrow{1 \text{ واحد به سمت چپ}} f(x+1)$$

$$\xrightarrow{\text{انقباض افقی با ضریب } \frac{1}{2}} f(2x+1)$$

پس طول نقطه  $A$  روی  $A'$  به صورت زیر است:

$$-2 \rightarrow -2+2 \rightarrow 0 \rightarrow 1 \rightarrow 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

بنابراین  $\beta = -\frac{1}{2}$ . نقطه  $A'$  روی نمودار است، پس در آن صدق می‌کند، یعنی:

$$f(2 \times (-\frac{1}{2}) + 1) = 4 \Rightarrow f(0) = 4 (*)$$

از طرفی نقطه  $A(-2, -1)$  نیز در  $y = f(2x+1) + \alpha$  صدق می‌کند:

$$f(2(-2) + 1) + \alpha = -1 \Rightarrow f(-3) = -1 - \alpha \xrightarrow{(*)} -1 - \alpha = 4 \Rightarrow \alpha = -5$$

$$\alpha + \beta = -5 - \frac{1}{2} = -\frac{11}{2}$$

راه‌حل دوم: نقطه  $A(-2, -1)$  روی نمودار  $y = f(2x+1) + \alpha$  قرار گرفته، پس:  $-1 = f(0) + \alpha \Rightarrow f(0) = -1 - \alpha$

از طرفی  $A'(\beta, 4)$  روی نمودار  $y = f(2x+1)$  است، پس:  $4 = f(2\beta+1)$

از معادلات به دست آمده داریم:

$$\begin{cases} 2\beta + 1 = 0 \\ -1 - \alpha = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = -\frac{1}{2} \\ \alpha = -5 \end{cases}$$

بنابراین:

$$\alpha + \beta = -\frac{11}{2}$$

▲ مشخصات سؤال: ساده \* فصل ۲، درس ۲ حسابان ۲

۳- پاسخ: گزینه ۳

$$\text{نکته: } \cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

ابتدا معادله را ساده می‌کنیم:

$$2 + \cos x \cos 2x = 4\cos^2 x \Rightarrow \cos x \cos 2x = 2(2\cos^2 x - 1)$$

$$\Rightarrow \cos x \cos 2x = 2\cos 2x \Rightarrow \cos x \cos 2x - 2\cos 2x = 0 \Rightarrow \cos 2x (\cos x - 2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 2 \text{ غلط} \\ \cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{2 - 3x - 2x^2}{x^3 + 2x^2 - 4x - 8} = \frac{0}{0}$$

یعنی عامل  $(x + 2)$  هم در صورت و هم در مخرج کسر وجود دارد، پس به تجزیه صورت و مخرج کسر می پردازیم:

$$2 - 3x - 2x^2 = -(2x^2 + 3x - 2) = -(x + 2)(2x - 1)$$

$$x^3 + 2x^2 - 4x - 8 = x^2(x + 2) - 4(x + 2) = (x + 2)(x^2 - 4)$$

بنابراین داریم:

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{-(x+2)(2x-1)}{(x+2)(x^2-4)} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{-(2x-1)}{(x^2-4)} = -\infty$$

نکته: خط  $x = a$  را مجانب قائم نمودار تابع  $f(x)$  گویند هرگاه حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$

نکته: خط  $y = L$  را مجانب افقی نمودار  $y = f(x)$  می نامیم به شرطی که حداقل یکی از دو شرط  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$  و

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$
 برقرار باشد.

ابتدا تابع  $f(\frac{1}{x})$  را مشخص می کنیم:

$$f(\frac{1}{x}) = \frac{\frac{2}{x^2} - 1}{\frac{1}{x^2} - 4} = \frac{2 - x^2}{1 - 4x^2} \Rightarrow f(\frac{1}{x}) = \frac{x^2 - 2}{4x^2 - 1}$$

حال مجانب های تابع را به دست می آوریم:

$$4x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(\frac{1}{x}) = \frac{1}{4} \Rightarrow y = \frac{1}{4}$$

پس نقاط تلاقی مجانب ها نقاط  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$  و  $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$  است که فاصله آن ها از یکدیگر ۱ واحد است.

نکته: خط  $x = a$  را مجانب قائم نمودار تابع  $f(x)$  گویند هرگاه حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$

نکته: خط  $y = L$  را مجانب افقی نمودار  $y = f(x)$  می نامیم به شرطی که حداقل یکی از دو شرط  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$  و

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$
 برقرار باشد.

مجانب افقی تابع خط  $y = 2$  است، پس:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x^2}{ax^2} = 2 \Rightarrow \frac{4}{a} = 2 \Rightarrow a = 2$$

خط  $x = 1$  مجانب قائم است به طوری که در دو طرف آن، حد تابع برابر  $+\infty$  است. پس  $x = 1$  ریشه مضاعف مخرج است:

$$ax^2 + bx + c = 2x^2 + bx + c = 2(x-1)^2 \Rightarrow \begin{cases} b = -4 \\ c = 2 \end{cases}$$

بنابراین:

$$a - b = 6$$

نکته: اگر تابع  $f$  در  $x = a$  مشتق پذیر باشد، آنگاه  $f$  در  $a$  پیوسته است.

مطابق نکته تابع  $f$  باید در  $x = 2$  پیوسته و  $f'_-(2) = f'_+(2)$  باشد.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2) \Rightarrow 4 + 2a + b = -8 \Rightarrow 2a + b = -12 \quad (*)$$

در یک همسایگی  $x = 2$  داریم:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + a & x \geq 2 \\ -2 & x < 2 \end{cases}$$

$$f'_-(2) = f'_+(2) \Rightarrow -2 = 4 + a \Rightarrow a = -6 \xrightarrow{(*)} b = 0$$

بنابراین:

$$a + b = -6$$

ابتدا از عبارت داده شده دو بار مشتق می گیریم:

$$f(x) = (x^3 - x) \sin \pi x \Rightarrow f'(x) = (3x^2 - 1) \sin \pi x + \pi \cos \pi x \cdot (x^3 - x)$$

$$f''(x) = 6x \sin \pi x + \pi \cos \pi x \cdot (3x^2 - 1) - \pi^2 \sin \pi x \cdot (x^3 - x) + (3x^2 - 1) \pi \cos \pi x$$

بنابراین:

$$f''(1) = 0 + \pi(-1)(2) - 0 + (2)\pi(-1) = -2\pi - 2\pi = -4\pi$$

نکته: مشتق راست و مشتق چپ تابع  $f$  در  $x = a$  را با  $f'_+(a)$  و  $f'_-(a)$  نمایش می دهیم و آن ها را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$f'_+(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$f'_-(a) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

با توجه به نکته داریم:

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2(x^2 - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} 2(x + 1) = 4$$

$$f'_-(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{-3(x^2 - 1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} -3(x - 1) = 6$$

بنابراین اختلاف این دو مقدار برابر ۲ است.

نکته: فرض کنیم تابع  $f$  بر بازه  $[a, b]$  پیوسته و بر بازه  $(a, b)$  مشتق پذیر باشد، در این صورت:

(الف) اگر به ازای هر  $x$  در بازه  $(a, b)$ ،  $f'(x) > 0$ ، آنگاه تابع  $f$  بر  $[a, b]$  صعودی اکید است.

(ب) اگر به ازای هر  $x$  در بازه  $(a, b)$ ،  $f'(x) < 0$ ، آنگاه تابع  $f$  بر  $[a, b]$  نزولی اکید است.

(ج) اگر به ازای هر  $x$  در بازه  $(a, b)$ ،  $f'(x) = 0$ ، آنگاه تابع  $f$  بر  $[a, b]$  یک تابع ثابت است.

نکته: فرض کنیم  $f''(x)$  به ازای هر نقطه  $x$  از بازه باز  $I$  موجود باشد، در این صورت:

(الف) اگر به ازای هر  $x$  از  $I$ ،  $f''(x) > 0$ ، آنگاه نمودار  $f$  روی بازه  $I$  تقعر روبه بالا دارد.

(ب) اگر به ازای هر  $x$  از  $I$ ،  $f''(x) < 0$ ، آنگاه نمودار  $f$  روی بازه  $I$  تقعر روبه پایین دارد.

(ج) اگر به ازای هر  $x$  از  $I$ ،  $f''(x) = 0$ ، آزمون بی نتیجه است.

برای آنکه جهت تقعر تابع رو به پایین و تابع اکیدا صعودی باشد کافی است بازه ای که در آن  $f' > 0$  و  $f'' < 0$  است را مشخص کنیم:

$$f'(x) = \frac{-8x}{(x^2 + 3)^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{-8(x^2 + 3)^2 - 4x(x^2 + 3)(-8x)}{(x^2 + 3)^4} = \frac{32x^2 - 8x^2 - 24}{(x^2 + 3)^3} = \frac{24(x^2 - 1)}{(x^2 + 3)^3}$$

| x   | -1 | 0 | 1 |
|-----|----|---|---|
| f'  | +  | + | - |
| f'' | +  | - | + |

در بازه  $(-1, 0)$ ،  $f' > 0$  و  $f'' < 0$  است. بنابراین گزینه ۲ پاسخ است.

۱۱- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: دشوار \* فصل ۴، درس ۲ حسابان ۲

نکته: مشتق راست و مشتق چپ تابع  $f$  در  $x = a$  را با  $f'_+(a)$  و  $f'_-(a)$  نمایش می‌دهیم و آن‌ها را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f'_+(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad f'_-(a) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

کافی است معادله نیم‌مماس راست تابع را در  $x = -2$  و معادله نیم‌مماس چپ تابع را در  $x = 0$  به دست آوریم.

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x^2 - 2x - 0}{x} = -2$$

ضابطه تابع در محدوده  $-2 < x < 0$  به صورت  $y = -x^2 - 2x$  است، پس:

$$f'_+(-2) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{-x^2 - 2x - 0}{x + 2} = 2$$

نیم‌مماس از نقطه  $(0, 0)$  عبور می‌کند، پس معادله آن به صورت  $y = -2x$  است:

نیم‌مماس از نقطه  $(-2, 0)$  عبور می‌کند، پس معادله آن به صورت  $y = 2x + 4$  است.

حال کافی است عرض نقطه تقاطع این دو نیم‌مماس را به دست آوریم:

$$\begin{cases} y = -2x \\ y = 2x + 4 \end{cases} \Rightarrow -2x = 2x + 4 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow y = 2$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط \* فصل ۲، درس ۲ حسابان ۲

۱۲- پاسخ: گزینه ۲

راه حل اول:

نکته: جواب‌های کلی معادله  $\sin x = \sin \alpha$  به صورت  $x = 2k\pi + \alpha$  و  $x = 2k\pi + \pi - \alpha$  می‌باشند که  $k \in \mathbb{Z}$ .

ابتدا معادله را تا حد امکان ساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{\sin x}{\cos x} &= \frac{\sin 2x}{\cos 2x} \Rightarrow \frac{\cos x - \sin x}{\cos x} = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} \Rightarrow \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} - \frac{\sin 2x}{\cos 2x - \sin 2x} = 0 \\ \Rightarrow \frac{(\cos x - \sin x)^2 - \sin 2x}{\cos 2x - \sin 2x} &= 0 \Rightarrow \cos^2 x - 2\cos x \sin x + \sin^2 x - \sin 2x = 0 \Rightarrow 1 - \sin 2x - \sin 2x = 0 \\ \Rightarrow 2\sin 2x &= 1 \Rightarrow \sin 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ 2x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6} \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases} \end{aligned}$$

کوچک‌ترین جواب مثبت  $\rightarrow 2x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{\pi}{12}$

راه حل دوم:

$$\begin{aligned} \text{نکته: } \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) &= \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} \\ \text{نکته: } \tan x &= \tan \alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

طبق نکات داریم:

$$\begin{aligned} \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} &= \tan 2x \Rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \tan 2x \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{4} - x \Rightarrow 3x = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{12} \\ \xrightarrow{k=0} x &= \frac{\pi}{12} \quad \text{کوچک‌ترین ریشه مثبت} \end{aligned}$$

تذکر: البته باید دقت شود که برای تعریف شدن دو طرف معادله باید ریشه‌های  $x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$  از مجموعه جواب فوق حذف شود.

▲ مشخصات سؤال: متوسط \* فصل ۲، درس ۲ حسابان ۲

۱۳- پاسخ: گزینه ۲

$$\text{نکته: } \tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\tan(80^\circ - \alpha) = \tan(45^\circ + (35^\circ - \alpha)) = \frac{\tan 45^\circ + \tan(35^\circ - \alpha)}{1 - \tan 45^\circ \tan(35^\circ - \alpha)} \xrightarrow{\text{طبق فرض}} \frac{1 + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}} = 2$$

راه حل اول: می‌توان نوشت:

راه حل دوم: در ابتدا قرار می‌دهیم  $35^\circ - \alpha = 45^\circ - (10^\circ + \alpha)$ ، پس:

$$\tan(35^\circ - \alpha) = \frac{1}{3} \Rightarrow \tan(45^\circ - (10^\circ + \alpha)) = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1 - \tan(10^\circ + \alpha)}{1 + \tan(10^\circ + \alpha)} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow 3 - 3\tan(10^\circ + \alpha) = 1 + \tan(10^\circ + \alpha) \Rightarrow \tan(10^\circ + \alpha) = \frac{1}{4}$$

$$\tan(80^\circ - \alpha) = \tan(90^\circ - (10^\circ + \alpha)) = \cot(10^\circ + \alpha) = \frac{1}{\tan(10^\circ + \alpha)} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$$

بنابراین داریم:

نکته: جواب‌های کلی معادله  $\cos x = \cos \alpha$  به صورت  $x = 2k\pi \pm \alpha$  می‌باشند که  $k \in \mathbb{Z}$ .  
مطابق نمودار داده‌شده، امتداد پاره خط AB محور yها را در نقطه تقاطع نمودار با محور yها قطع کرده است. ابتدا معادله خطی که از AB می‌گذرد را می‌یابیم:

$$y = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 1 \xrightarrow{x=0} y = \frac{3}{2}$$

برای پیدا کردن طول نقاط A و B کافی است معادله تقاطع منحنی و خط را حل کنیم:

$$1 + \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2} \Rightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad x = 2\pi, 4\pi, 6\pi, \dots \\ x + \frac{\pi}{3} = 2k\pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{2\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad x = \frac{4\pi}{3}, \frac{10\pi}{3}, \frac{16\pi}{3}, \dots \end{cases}$$

بعد از  $x = 0$ ، A و B سومین و چهارمین نقطه برخورد مثبت هستند.

$$AB = 4\pi - \frac{10\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \quad \text{پس } x_A = \frac{10\pi}{3} \text{ و } x_B = 4\pi \text{، بنابراین:}$$

f در هر سه نقطه پیوسته و مشتق پذیر است، پس تک تک نقاط را بررسی می‌کنیم.

| x  | a     |
|----|-------|
| f' | +   - |
| f  | ↗   ↘ |

نقطه a:  $f'(a) = 0$  در همسایگی a نزولی اکید است به طوری که  $f'$  در a تغییر علامت می‌دهد. پس a نقطه بحرانی و مطابق جدول، ماکزیمم نسبی است.

| x   | b     |
|-----|-------|
| f'  | +   + |
| f'' | +   - |
| f   | ∪   ∩ |

نقطه b:  $f'(b) > 0$  و  $f'$  قبل b اکیداً صعودی و  $f'$  بعد b اکیداً نزولی است، پس b طول نقطه عطف است.

| x   | c     |
|-----|-------|
| f'  | +   + |
| f'' | -   + |

نقطه c:  $f'(c) = 0$  و  $f'$  در همسایگی c مثبت است اما  $f'$  قبل c اکیداً نزولی و بعد از آن اکیداً صعودی است، پس c نقطه عطف است.

بنابراین گزینه ۲ پاسخ است.

نکته: فرض کنیم تابع f در نقطه  $x = c$  پیوسته است. در این صورت نقطه  $(c, f(c))$  نقطه عطف تابع است، هرگاه دو شرط زیر برقرار باشند:  
الف) نمودار f در نقطه  $(c, f(c))$  خط مماس داشته باشد. (ب) جهت تفرع f در نقطه  $(c, f(c))$  تغییر کند.  
در نقطه عطف علامت  $y''$  عوض می‌شود، پس دوبار از y مشتق می‌گیریم:

$$y = (x-a)\sqrt[3]{x} = x^{\frac{4}{3}} - ax^{\frac{1}{3}}$$

$$y' = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} - \frac{a}{3}x^{-\frac{2}{3}} \Rightarrow y'' = \frac{4}{9}x^{-\frac{2}{3}} + \frac{2a}{9}x^{-\frac{5}{3}} \Rightarrow y'' = \frac{4}{9\sqrt[3]{x^2}} + \frac{2a}{9x\sqrt[3]{x^2}} = \frac{4x+2a}{9x\sqrt[3]{x^2}}$$

$$y'' = 0 \Rightarrow x = -\frac{a}{2} = 2 \Rightarrow a = -4$$

ابتدا مجانب افقی تابع را به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x+4}{2x-a} = \frac{3}{2}$$

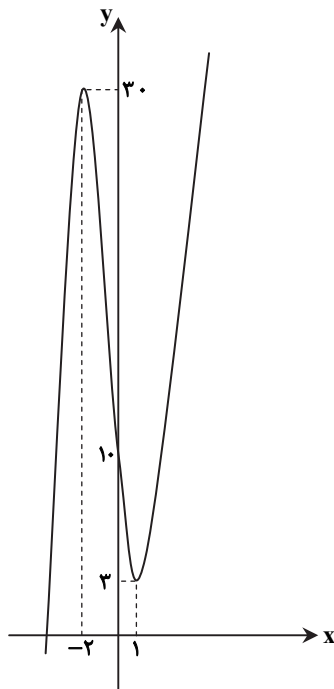
با توجه به نمودار داده‌شده، تابع f زمانی که  $x \rightarrow +\infty$  می‌رود، پایین خط  $y = \frac{3}{2}$  (مجانب افقی) قرار دارد، پس داریم:

$$x \rightarrow +\infty : \quad \frac{3x+4}{2x-a} < \frac{3}{2} \xrightarrow{2x-a>0} 6x+8 < 6x-3a \Rightarrow -3a > 8 \Rightarrow a < -\frac{8}{3}$$

همچنین وقتی  $x \rightarrow -\infty$ ، تابع f بالای خط  $y = \frac{3}{2}$  (مجانب افقی) قرار دارد:

$$x \rightarrow -\infty : \quad \frac{3x+4}{2x-a} > \frac{3}{2} \xrightarrow{2x-a<0} 2(3x+4) < 3(2x-a) \Rightarrow 6x+8 < 6x-3a \Rightarrow -3a > 8 \Rightarrow a < -\frac{8}{3}$$

پس محدوده a به صورت  $a < -\frac{8}{3}$  است و بزرگ‌ترین عدد صحیح قابل قبول برای a عدد -۳ می‌باشد.



۱۸- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: دشوار \* فصل ۵، درس ۳ حسابان ۲

ابتدا نمودار تابع را با توجه به جدول تعیین علامت  $f'$  و  $f''$  به صورت تقریبی رسم می‌کنیم:

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x^2 + x - 2), \quad f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$f''(x) = 12x + 6, \quad f''(x) = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

| x     | $-\infty$ | -2 | $-\frac{1}{2}$ | 1 | $+\infty$ |
|-------|-----------|----|----------------|---|-----------|
| $f'$  |           | +  | -              | - | +         |
| $f''$ |           | ∩  | ∪              | + | +         |
| f     |           | ↗  | ↘              | ↘ | ↗         |

با توجه به جدول تغییرات، نمودار تقریبی به صورت روبه‌رو است. پس برای آنکه خط  $y = m$ ، نمودار تابع را در دو نقطه در ناحیه اول (با طول مثبت) قطع کند کافی است:

$$3 < m < 10$$

۱۹- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط \* فصل ۱، درس ۲ هندسه ۳

نکته:  $|A^n| = |A|^n$  و  $|kA_{n \times n}| = k^n |A_{n \times n}|$  ( $k \in \mathbb{R}$ )

نکته: اگر  $A$  ماتریس مربعی از مرتبه ۳ باشد، در این صورت دترمینان ماتریس  $A$  را با نماد  $\det(A) = |A|$  نمایش می‌دهیم و داریم:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & i > j \\ 0 & i = j \\ -2 & i < j \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ابتدا ماتریس  $A$  را به دست می‌آوریم:

$$|A| = -(-2) \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \times 2 - 2 \times 1 = 2$$

حال دترمینان ماتریس  $A$  را محاسبه می‌کنیم:

$$|A|A^2 = |2A^2| = 2^3 |A^2| = 2^3 |A|^2 = 8 \times 2^2 = 32$$

بنابراین داریم:

۲۰- پاسخ: گزینه ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط \* فصل ۱، درس‌های ۱ و ۲ هندسه ۳

نکته ۱: وارون وارون هر ماتریس، با خود ماتریس، برابر است:  $(A^{-1})^{-1} = A$

نکته ۲: وارون ماتریس  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  را با  $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$  نمایش داده و عبارتست از:

$$\text{نکته ۳: } I_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ابتدا با توجه به نکته ۱، ماتریس  $A + I$  را به دست می‌آوریم:  $(A + I)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A + I = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

$$A + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

و با توجه به نکته ۳، ماتریس  $A$  به دست می‌آید:

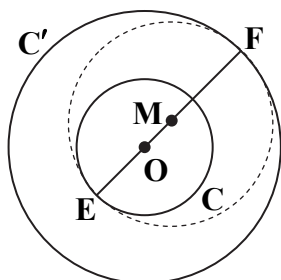
اینک با توجه به نکات ۱ و ۳، ماتریس  $A - I$  را تشکیل داده و وارون آن را به دست می‌آوریم:

$$(A - I)^{-1} = \left( \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{-12-1} \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{13} & \frac{1}{13} \\ \frac{1}{13} & \frac{4}{13} \end{bmatrix}$$

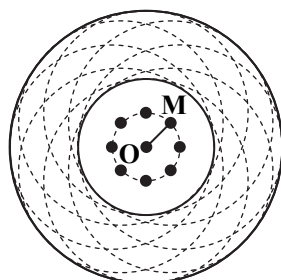
$$\frac{1}{13}(-2-1-1-4) = -\frac{8}{13}$$

و مجموع درایه‌های این ماتریس برابر است با:

نکته: بزرگ‌ترین دایره‌هایی که بر دو دایره هم‌مرکز C و C' مماس باشند، دایره‌هایی هستند که بر این دایره‌ها مماس داخل باشند. مطابق نکته، مرکز یکی از این دایره‌ها را نقطه M در نظر می‌گیریم: (شکل ۱)



شکل (۱)



شکل (۲)

$$EF = OE + OF = 2 + 4 = 6$$

مطابق شکل (۲)، مراکز این دایره‌ها، روی دایره‌ای به مرکز O و شعاع OM قرار می‌گیرند:

$$OM = ME - OE = \frac{6}{2} - 2 = 3 - 2 = 1$$

پس مکان هندسی نقطه M دایره‌ای به مرکز O و شعاع ۱ است. بنابراین گزینه ۱ پاسخ است.

نکته ۱: دو دایره مماس داخل، فقط یک مماس مشترک دارند.

نکته ۲: دو دایره C(O, R) و C'(O', R') مماس داخل‌اند، اگر و فقط اگر  $OO' = |R - R'|$

نکته ۳: در معادله گسترده دایره به فرم  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$  مختصات مرکز و اندازه شعاع، عبارتند از:

$$O\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right), R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$$

با توجه به نکته ۱، دو دایره مماس داخل‌اند، پس با توجه به نکته ۲ و ۳، داریم:

$$x^2 + y^2 - 10x + 2y - 10 = 0: O(5, -1), R = \frac{1}{2}\sqrt{100 + 4 + 40} = 6$$

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y + m = 0: O'(2, 3), R' = \frac{1}{2}\sqrt{16 + 36 - 4m} = \frac{1}{2}\sqrt{52 - 4m} = \frac{1}{2}\sqrt{4(13 - m)} = \sqrt{13 - m}$$

$$OO' = \sqrt{(5-2)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{9+16} = 5$$

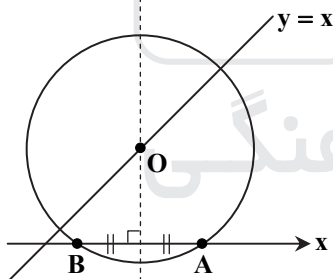
$$OO' = |R - R'| \Rightarrow 5 = |6 - \sqrt{13 - m}|$$

$$1) 6 - \sqrt{13 - m} = 5 \Rightarrow \sqrt{13 - m} = 1 \Rightarrow 13 - m = 1 \Rightarrow m = 12 \quad \checkmark$$

$$2) 6 - \sqrt{13 - m} = -5 \Rightarrow \sqrt{13 - m} = 11 \Rightarrow 13 - m = 121 \Rightarrow m = -108 \quad \checkmark$$

نکته: عمودمنصف هر وتر از دایره، از مرکز آن دایره می‌گذرد.

نقاط A و B روی محور xها قرار دارند. باید عمودمنصف AB را با خط  $y = x$  قطع دهیم، با توجه به شکل داریم:



$$A(5, 0), B(1, 0) \Rightarrow \text{معادله عمودمنصف AB: } x = 3 \xrightarrow{y=x} y = 3 \\ \Rightarrow \text{مرکز دایره: } O(3, 3)$$

حال با توجه به مختصات مرکز دایره، شعاع آن را محاسبه می‌کنیم:

$$R = OA = OB = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

مطابق شکل، فاصله کانونی برابر با ۲ است، پس:

$$FF' = 2c = 2 \Rightarrow c = 1$$

$$O = \frac{F + F'}{2} = (0, 1)$$

$$OA = a = 3 - 1 = 2 \Rightarrow a = 2$$

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}$$

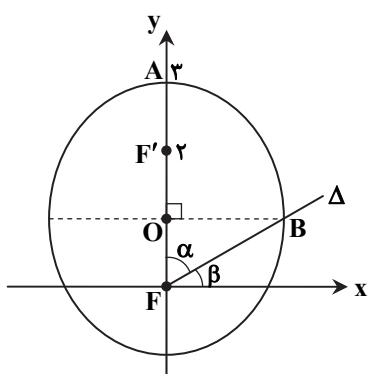
حال باید زاویه  $\alpha$  و سپس زاویه  $\beta$  را به دست آوریم تا بتوانیم شیب خط  $\Delta$  را محاسبه کنیم:

$$\tan \alpha = \frac{OB}{OF} = \frac{b}{c} = \sqrt{3} \Rightarrow \hat{\alpha} = 60^\circ$$

$$\hat{\beta} = 90^\circ - \hat{\alpha} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

$$\Delta \text{ معادله خط: } y = (\tan \beta)x \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$$

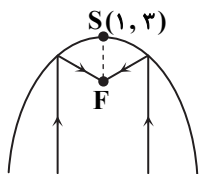
بنابراین:



۲۵- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط \* فصل ۲، درس ۳ هندسه ۳

نکته: بر طبق خاصیت بازتابندگی در سهمی‌ها، پرتوهای که به موازات محور تقارن یک سهمی بر بدنه داخلی آن بتابند، انعکاس آن‌ها از کانون سهمی می‌گذرند.  
ابتدا معادله سهمی را به صورت استاندارد نوشته و مختصات رأس و فاصله کانونی و سپس مختصات کانون را با توجه به نوع سهمی به دست می‌آوریم:



$$\begin{aligned} x^2 - 2x + 4y - 11 &= 0 \Rightarrow (x-1)^2 - 1 + 4y - 11 = 0 \\ \Rightarrow (x-1)^2 &= -4y + 12 \Rightarrow (x-1)^2 = -4(y-3) \\ \Rightarrow S(1, 3), a &= 1 \end{aligned}$$

سهمی قائم روبه پایین است.

کانون:  $F(1, 3-1) \Rightarrow F(1, 2)$

▲ مشخصات سؤال: متوسط \* فصل ۳، درس ۲ هندسه ۳

۲۶- پاسخ: گزینه ۲

نکته: برای دو بردار  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  داریم:

$$\begin{aligned} |\vec{a} + \vec{b}|^2 &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} \\ |\vec{a} - \vec{b}|^2 &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} \end{aligned}$$

از مفروضات سؤال داریم:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2|\vec{a}| = |\vec{b}| = 4 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 4, |\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 4$$

حال با استفاده از نکته فوق،  $|\vec{a} + \vec{b}|$  و  $|\vec{a} - \vec{b}|$  را محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{aligned} |\vec{a} + \vec{b}|^2 &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 + 16 + 2 \times 4 = 28 \Rightarrow |\vec{a} + \vec{b}| = 2\sqrt{7} \\ |\vec{a} - \vec{b}|^2 &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 + 16 - 2 \times 4 = 12 \Rightarrow |\vec{a} - \vec{b}| = 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

خواسته سؤال برابر است با:

$$\sqrt{7}|\vec{a} + \vec{b}| + \sqrt{3}|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{7} \times 2\sqrt{7} + \sqrt{3} \times 2\sqrt{3} = 14 + 6 = 20$$

▲ مشخصات سؤال: دشوار \* فصل ۱، درس ۲ هندسه ۳

۲۷- پاسخ: گزینه ۳

نکته: برای محاسبه دترمینان ماتریس  $A_{3 \times 3}$  می‌توان از بسط دادن نسبت به هر سطر یا ستون استفاده کرد. به عنوان مثال، دترمینان ماتریس زیر با بسط نسبت به سطر اول برابر است با:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = a_{11}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

تذکر: سعی می‌کنیم بسط دترمینان را نسبت به سطر یا ستونی انجام دهیم که درایه‌های صفر بیشتری دارد.

$$A = \begin{bmatrix} |A| & 0 & -1 \\ 3 & 2|A| & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} |A| & 0 & -1 \\ 3 & 2|A| & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

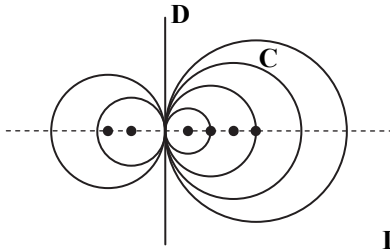
$$\Rightarrow |A| = |A|(6|A| - 2) - (6 + 2|A|) = 6|A|^2 - 4|A| - 6$$

$$\Rightarrow 6|A|^2 - 5|A| - 6 = 0 \Rightarrow (3|A| + 2)(2|A| - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} |A| = -\frac{2}{3} \\ |A| = \frac{3}{2} \end{cases}$$

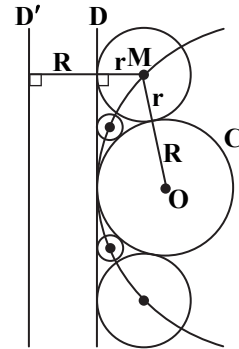
$$\begin{cases} -2 + 7 = 5 \\ \frac{9}{2} + 7 = \frac{23}{2} \end{cases} \Rightarrow 3|A| - 1 + 3 + 1 - 1 + 2 + 3 = 3|A| + 7 = \begin{cases} 5 \\ \frac{23}{2} \end{cases}$$

دو حالت زیر را می توان در نظر گرفت:

حالت اول: دایره ها در نقطه تماس C و D، مماس بر آنها باشند. در این صورت مرکز دایره ها روی یک خط می باشند.



حالت دوم: دایره ها در نقاطی غیر از تماس C و D بر خط D مماس و بر دایره C مماس خارج باشند. در این حالت اگر خط D را به اندازه R، به موازات D عقب ببریم، فاصله M (مرکز دایره ها) از D' با فاصله O از M برابر می شود (r + R) و لذا، مکان M یک سهمی با کانون O و خط هادی D' می باشد.



نکته ۱: سه بردار  $\vec{a}$ ،  $\vec{b}$  و  $\vec{c}$  بر یک صفحه واقع اند، اگر و فقط اگر  $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$

نکته ۲: مختصات بردار  $\vec{AB}$  با ابتدای  $A(x_1, y_1, z_1)$  و انتهای  $B(x_2, y_2, z_2)$ ، به صورت زیر است:

$$\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

نکته ۳: برای دو بردار  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$  و  $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ ، ضرب خارجی دو بردار به صورت زیر تعریف می شود:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

نکته ۴: اندازه ضرب داخلی دو بردار  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$  و  $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$  برابر است با:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

با توجه به نکته ۱ برای آنکه چهار نقطه A، B، C و D بر یک صفحه واقع باشند، باید داشته باشیم:

$$\vec{AC} \cdot (\vec{AB} \times \vec{AD}) = 0 \quad , \quad \vec{AB} = (2, -1, -3) \quad , \quad \vec{AD} = (0, 1, 0)$$

$$\vec{AB} \times \vec{AD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}(0 - (-3)) - \vec{j}(0 - 0) + \vec{k}(2 - 0) = 3\vec{i} + 2\vec{k} = (3, 0, 2)$$

$$\vec{AC} \cdot (\vec{AB} \times \vec{AD}) = 4 \times 3 + 0 + 2(m - 3) = 0 \Rightarrow 12 + 2m - 6 = 0 \Rightarrow 2m = -6 \Rightarrow m = -3$$

معادله سیاله را با تبدیل به معادله همزهشتی حل می کنیم:

$$17x + 7y = 90 \Rightarrow 17x \equiv 90 \Rightarrow (17 - 2 \times 7)x \equiv 90 - 7 \times 13 \Rightarrow 3x \equiv -1 \Rightarrow 3x \equiv 6 \xrightarrow{(3, 7)=1} x \equiv 2 \Rightarrow x = 7k + 2$$

$$\Rightarrow 17(7k + 2) + 7y = 90 \Rightarrow 17 \times 7k + 34 + 7y = 90 \Rightarrow 17 \times 7k + 7y = 56 \xrightarrow{\div 7} 17k + y = 8 \Rightarrow y = 8 - 17k$$

فقط به ازای  $k = 0$ ، x و y اعداد طبیعی می باشند.  $\begin{cases} x = 2 \\ y = 8 \end{cases}$  ( $k = 0 \Rightarrow$ )

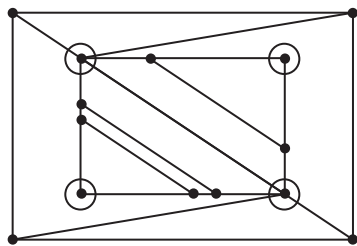
نکته ۱: در هر گراف کامل p رأسی تعداد یال ها برابر است با:  $q = \binom{p}{2} = \frac{p(p-1)}{2}$

نکته ۲: تعداد دوره های به طول m در گراف کامل K<sub>p</sub> برابر است با:  $\binom{p}{m} \frac{(m-1)!}{2}$

مطابق فرض و نکته ۱ داریم:  $p + q = 36 \Rightarrow p + \frac{p(p-1)}{2} = 36 \Rightarrow p^2 + p - 72 = 0 \Rightarrow (p+9)(p-8) = 0 \Rightarrow p = 8$

مطابق نکته ۲، تعداد دوره های به طول ۳ در گراف کامل ۸ رأسی برابر است با:

$$\binom{8}{3} \times \frac{2!}{2} = \binom{8}{3} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 56$$



▲ مشخصات سؤال: متوسط \* فصل ۲، درس ۲ ریاضیات گسسته

۳۲- پاسخ: گزینه ۴

نکته: در بین مجموعه‌های احاطه‌گر گراف  $G$ ، مجموعه یا مجموعه‌هایی که کمترین تعداد عضو را دارا باشند، مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمم نامیده و تعداد اعضای آن‌ها نیز عدد احاطه‌گری نامیده می‌شود و با  $\gamma(G)$  نشان داده می‌شود.

نکته: عدد  $\left\lceil \frac{n}{\Delta + 1} \right\rceil$  که در آن  $n$  تعداد رأس‌های گراف  $G$  و  $\Delta$  ماکزیمم درجه در گراف  $G$  است، برای  $\gamma(G)$  کران پایین محسوب می‌شود، یعنی  $\gamma(G)$  نمی‌تواند کمتر از آن باشد.

طبق نکات داریم:  $n = 14, \Delta = 5 \Rightarrow \gamma(G) \geq \left\lceil \frac{14}{5+1} \right\rceil \Rightarrow \gamma(G) \geq 3$

توجه کنید که گراف با ۳ رأس احاطه نمی‌شود.

از طرفی رأس‌های مشخص شده برای گراف  $G$ ، احاطه‌گر مینیمم محسوب می‌شوند، پس  $\gamma(G) = 4$  است.

▲ مشخصات سؤال: متوسط \* فصل ۲، درس ۲ ریاضیات گسسته

۳۳- پاسخ: گزینه ۴

نکته: مجموعه‌های احاطه‌گری که با حذف هریک از رأس‌های دیگر احاطه‌گر نباشد، مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمال نامیده می‌شود.

گزینه‌های ۱، ۲ و ۳ همگی مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمال هستند، اما مجموعه  $\{f, c, h, i\}$  مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمال نیست، زیرا با حذف رأس  $i$  باز هم مجموعه باقی‌مانده احاطه‌گر است.

▲ مشخصات سؤال: متوسط \* فصل ۳، درس ۱ ریاضیات گسسته

۳۴- پاسخ: گزینه ۳

نکته: اگر  $A$  و  $B$  دو مربع لاتین هم‌مرتبه باشند به طوری که از کنار هم قرار دادن درایه‌های نظیر این دو مربع، مربع جدیدی از همان مرتبه حاصل شود و اعداد ۲ رقمی ساخته شده «یکان از  $A$  و دهگان از  $B$ » تکراری نباشند، آنگاه  $A$  و  $B$  دو مربع لاتین متعامدند. با توجه به نکته، دو مربع لاتین  $A$  زیر را می‌توان در نظر گرفت که با مربع لاتین  $B$  متعامد باشند:

|   |   |   |   |   |   |    |    |    |
|---|---|---|---|---|---|----|----|----|
|   |   |   | B |   |   |    |    |    |
| A |   |   | ۲ | ۱ | ۳ |    |    |    |
| ۲ | ۱ | ۳ | ۱ | ۳ | ۲ | ۲۲ | ۱۱ | ۳۳ |
| ۳ | ۲ | ۱ | ۳ | ۲ | ۱ | ۳۱ | ۲۳ | ۱۲ |
| ۱ | ۳ | ۲ |   |   |   | ۱۳ | ۳۲ | ۲۱ |

A و B متعامدند

|   |   |   |   |   |   |    |    |    |
|---|---|---|---|---|---|----|----|----|
|   |   |   | B |   |   |    |    |    |
| A |   |   | ۲ | ۱ | ۳ |    |    |    |
| ۲ | ۳ | ۱ | ۱ | ۳ | ۲ | ۲۲ | ۳۱ | ۱۳ |
| ۱ | ۲ | ۳ | ۳ | ۲ | ۱ | ۱۱ | ۲۳ | ۳۲ |
| ۳ | ۱ | ۲ |   |   |   | ۳۳ | ۱۲ | ۲۱ |

A و B متعامدند

▲ مشخصات سؤال: متوسط \* فصل ۳، درس ۲ ریاضیات گسسته

۳۵- پاسخ: گزینه ۳

نکته: اصل شمول و عدم شمول برای ۳ مجموعه  $A$ ،  $B$  و  $C$  به صورت زیر است:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

$$|\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}| = |S| - |A \cup B \cup C|$$

کل اعداد چهاررقمی که می‌توانیم بسازیم طبق اصل ضرب به صورت زیر است:

$$|S| = 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$$

A را اعداد چهاررقمی فاقد ۱ می‌گیریم:

$$|A| = 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256$$

B را اعداد چهاررقمی فاقد ۳ می‌گیریم:

$$|B| = 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256$$

C را اعداد چهاررقمی فاقد ۵ می‌گیریم:

$$|C| = 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256$$

$A \cap B$  اعداد چهاررقمی فاقد ۱ و ۳ است:

$$|A \cap B| = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$$

به طریق مشابه:  $|A \cap C| = |B \cap C| = 81$

$$|A \cap B \cap C| = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$$

$$|A \cup B \cup C| = 256 + 256 + 256 - 81 - 81 - 81 + 16 = 541$$

خواسته سؤال  $|\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}|$  است که طبق نکته فوق داریم:

$$|\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}| = |S| - |A \cup B \cup C| = 625 - 541 = 84$$

نکته:  $a|b \Leftrightarrow na|nb \ (n \neq 0)$ نکته:  $a|b \wedge a|c \Rightarrow a|b \pm c$ 

نکته (قضیه تقسیم): اگر  $a$  عددی صحیح و  $b$  عددی طبیعی باشد در این صورت، اعداد صحیح و منحصر به فرد مانند  $q$  و  $r$  یافت می شوند به قسمی که  $a = bq + r$  و  $0 \leq r < b$ .

ابتدا با توجه به فرض سؤال داریم:

$$a = bq + b - 4 \Rightarrow a + 4 = b(q + 1) \Rightarrow b|a + 4$$

$$\begin{cases} b|a+4 \xrightarrow{\times 5} b|5a+20 \\ b|5a-2 \end{cases} \xrightarrow{-} b|22 \xrightarrow{b \in \mathbb{N}} b \in \{1, 2, 11, 22\}$$

خارج قسمت نصف مقسوم علیه است و چون عددی صحیح می باشد، مقادیر  $b = 22$  و  $b = 2$  قابل قبول است، اما طبق شرط  $0 \leq r < b$  در قضیه تقسیم، تنها  $b = 22$  قابل قبول است.

$$b = 22 \Rightarrow q = \frac{1}{22}a = \frac{1}{22} \times 22 = 1$$

$$a = 22 \times 1 + (22 - 4) = 20$$

نکته ۱: برای محاسبه رقم یکان یک عدد کافیست آن عدد را در همنهشتی به پیمانه ۱۰ ببریم و باقی مانده تقسیم آن عدد بر ۱۰ را حساب کنیم.

نکته ۲: اگر باقی مانده تقسیم عدد صحیح  $a$  بر عدد طبیعی  $b$  برابر  $r$  باشد، داریم:  $a \equiv r \pmod{b}$  و برعکس.

نکته ۳ (ویژگی های همنهشتی):

(۱) طرفین همنهشتی را می توان در عددی صحیح ضرب کرد.

(۲) طرفین همنهشتی را می توان به توان عددی طبیعی رساند.

(۳) به طرفین همنهشتی می توان مضاربی از پیمانه را اضافه یا کم کرد.

با توجه به نکات، ابتدا رقم یکان عدد  $33^{1399} + 77^{1399}$  را حساب می کنیم:

$$\left. \begin{aligned} 3^2 &\equiv -1 \Rightarrow (3^2)^{699} \times 3 \equiv -1 \times 3 \equiv -3 \equiv 7 \Rightarrow 3^{1399} \equiv 7 \\ 7^2 &\equiv -1 \Rightarrow (7^2)^{699} \times 7 \equiv -1 \times 7 \equiv -7 \equiv 3 \Rightarrow 7^{1399} \equiv 3 \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow 33^{1399} + 77^{1399} \equiv 3^{1399} + 7^{1399} \equiv 7 + 3 \equiv 10 \equiv 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow a + 7 = 0 + 7 = 7$$

حال با توجه به نکات، باقی مانده تقسیم  $7^{101}$  بر ۴۳ را می یابیم:

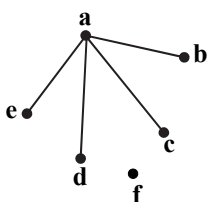
$$7^2 \equiv 49 - 43 \equiv 6 \xrightarrow{\times 7} 7^3 \equiv 42 \Rightarrow 7^4 \equiv 42 - 43 \equiv -1$$

$$\Rightarrow 7^{101} \equiv (7^4)^{25} \times 7 \equiv (-1)^{25} \times 7 \equiv -7 \equiv -6 \equiv -6 + 43 \equiv 37$$

نکته: فرض کنیم  $v \in V(G)$ ، به مجموعه رأس هایی از گراف  $G$  که به رأس  $v$  متصل هستند «همسایگی باز رأس  $v$ » می گوئیم و با  $N_G(v)$  نمایش می دهیم. اضافه کردن خود رأس  $v$  به  $N_G(v)$  «همسایگی بسته رأس  $v$ » را می دهد که با  $N_G[v]$  نمایش می دهیم.

نکته: بزرگ ترین عدد در بین درجات رئوس گراف  $G$  را با  $\Delta(G)$  و کوچک ترین آن ها را  $\delta(G)$  نمایش می دهیم.

نکته: یک زیرگراف از گراف  $G$ ، گرافی است که مجموعه رئوس زیرمجموعه ای از مجموعه رئوس گراف  $G$  و مجموعه یال های آن زیرمجموعه ای از مجموعه یال های  $G$  باشد.

چون قرار است  $\Delta = 4$  و رأس  $f$  تنها باشد، پس باید شکل زیرگراف به صورت روبه رو باشد:

حال از بین یال های  $bc$  و  $eb$  و  $ed$  هر کدام می توانند در زیرگراف ظاهر شوند یا ظاهر نشوند، یعنی هر کدام ۲ حالت دارند، پس تعداد زیرگراف ها برابر است با:

$$2 \times 2 \times 2 = 8$$

نکته ۱: در شمارش تعداد جواب‌های معادلات به فرم  $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_k = n$  اگر متغیری ضریب یا توان غیر از یک داشت، بایستی ابتدا با عددگذاری مناسب به جای آن متغیر، آن را حذف کرده و معادله را به فرم استاندارد درآوریم.

نکته ۲: تعداد جواب‌های صحیح و مثبت (طبیعی) معادله  $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_k = n$  برابر است با:

$$\binom{n-1}{k-1}$$

با توجه به نکته ۱ و معادله  $x_1^3 + x_2 + x_3 + x_4 = \frac{20}{x_4}$  بایستی به جای  $x_1$  و  $x_4$  عدد طبیعی مناسب قرار دهیم، پس داریم:

$$x_4 = 1: x_1^3 + x_2 + x_3 + 1 = 20 \Rightarrow x_1^3 + x_2 + x_3 = 19 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1: x_2 + x_3 = 18 \xrightarrow{\text{نکته ۲}} \binom{17}{2-1} = \binom{17}{1} = 17 \\ x_1 = 2: x_2 + x_3 = 11 \xrightarrow{\text{نکته ۲}} \binom{11-1}{2-1} = \binom{10}{1} = 10 \end{cases}$$

بدیهی است که  $x_1$  بزرگ‌تر از ۲ نمی‌تواند باشد؛ زیرا طرف راست معادله، منفی خواهد شد.

$$x_4 = 2: x_1^3 + x_2 + x_3 + 2 = 10 \Rightarrow x_1^3 + x_2 + x_3 = 8 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1: x_2 + x_3 = 7 \xrightarrow{\text{نکته ۲}} \binom{7-1}{2-1} = \binom{6}{1} = 6 \\ x_1 = 2: x_2 + x_3 = 0 \quad \times \end{cases}$$

جواب طبیعی نداریم  $\times$

$$x_4 = 4: x_1^3 + x_2 + x_3 + 4 = 5 \Rightarrow x_1^3 + x_2 + x_3 = 1 \Rightarrow x_1 = 1: x_2 + x_3 = 0 \quad \times$$

جواب طبیعی نداریم  $\times$

و همان‌طور که مشاهده کردید مقادیر  $x_1$  و  $x_4$  اعدادی بیش از آنچه قرار دادیم، قابل جای‌گذاری نیستند، زیرا دیگر برای معادله، جواب طبیعی به دست نخواهد آمد.

$$17 + 10 + 6 = 33$$

در نتیجه تعداد جواب‌های این معادله، برابر است با:

▲ مشخصات سؤال: دشوار \* فصل ۳، درس ۲ ریاضیات گسسته

۴۰- پاسخ: گزینه ۴

نکته (اصل لانه کبوتری): اگر  $m$  کبوتر  $n$  لانه را اشغال کنند و تعداد کبوترها بیشتر از تعداد لانه‌ها باشند ( $m > n$ )، آنگاه طبق اصل لانه کبوتری حداقل یک لانه وجود خواهد داشت که دست‌کم ۲ یا بیشتر از ۲ کبوتر در آن قرار می‌گیرند.

نکته: حداقل تعداد کل کبوترها برای اینکه حداقل در یکی از  $k$  لانه حداقل  $n$  کبوتر قرار بگیرد برابر است با:  $(n-1) \times k + 1 = m$

می‌دانیم اعدادی که هم بر ۵ و هم بر ۶ باقی‌مانده یکسان دارند، در تقسیم بر ۳۰ باقی‌مانده یکسان دارند. همچنین اعداد صحیح در تقسیم بر ۳۰ دارای ۳۰ باقی‌مانده مختلف از ۰ تا ۲۹ هستند. بنابراین اگر بخواهیم مطمئن شویم سه عدد هم باقی‌مانده بر ۳۰ داریم، حداقل تعداد اعدادی که باید انتخاب کنیم طبق اصل لانه کبوتر به صورت زیر است:

$$11 = 30 \times 2 + 1 = 61 \Rightarrow \text{حداقل کبوترها} = 30 = \text{لانه‌ها}$$

## فیزیک

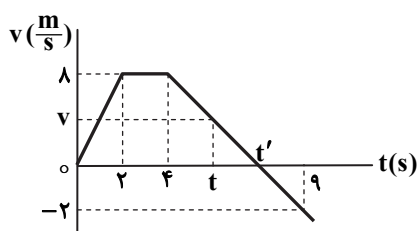
▲ مشخصات سؤال: متوسط \* فیزیک ۳ (فصل ۱)

۴۱- پاسخ: گزینه ۲

$$\Delta x = x - x_0 = 0 - (-36) = 36 \text{ m}$$

هنگام عبور متحرک از مبدأ مختصات،  $x = 0$  است و در نتیجه داریم:

پس زمانی که جابه‌جایی متحرک (سطح زیر نمودار سرعت - زمان) برای اولین بار ۳۶ متر شود، متحرک برای اولین بار از مبدأ مکان می‌گذرد.



$$a_{av}(f_s, t_s) = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{-2-2}{9-4} = -2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$a_{av}(f_s, t') = -2 = \frac{0-2}{t'-4} \Rightarrow t' = 8 \text{ s}$$

$$\Delta x_{(0,8\text{s})} = S = \frac{2+2}{2} \times 8 = 40 \text{ m}$$

$$40 - 36 = 4 \text{ m}$$

با توجه به اینکه  $\Delta x$  باید برابر ۳۶ متر باشد، داریم:

$$\frac{v}{8-t} = 2 \Rightarrow v = 2(8-t)$$

$$S' = \frac{(8-t) \times v}{2} = 4 \text{ m}$$

$$\frac{(8-t) \times 2(8-t)}{2} = 4 \Rightarrow 8-t = \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} t = 6 \text{ s} \\ t = 10 \text{ s (غلق باشد)} \end{cases}$$

در لحظه  $t = 6 \text{ s}$  متحرک برای اولین بار از مبدأ مکان می‌گذرد.



اینکه دو متحرک A و B به هم برسند؛ یعنی  $x_A = x_B$  ضمناً مساحت ناحیه محصور بین منحنی سرعت- زمان و محور زمان برابر جابه جایی است.

$$x_A = S_A + 100, \quad x_B = -S_B + 600$$

در ۱۰ ثانیه نخست نمی توانند به هم برسند (چرا؟) پس زمان به هم رسیدن آنها بعد از  $t = 10s$  است.

$$\begin{cases} S_A = \frac{15+5}{2} \times 10 + (t-10) \times 5 = 5t + 50 \\ S_B = 10t \end{cases}$$

$$x_A = x_B \Rightarrow 5t + 50 + 100 = -10t + 600 \Rightarrow 15t = 450 \Rightarrow t = 30s \Rightarrow x_A = x_B = 5 \times 30 + 150 = 300m$$

$$\Delta x = \frac{v+v_0}{2} \cdot \Delta t \Rightarrow 60 = \frac{0+v_0}{2} \times 4 \Rightarrow v_0 = 30 \frac{m}{s} \Rightarrow a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0-30}{4} = -7.5 \frac{m}{s^2}$$

$$v = (-7.5) \times 3 + 30 = 7.5 \frac{m}{s}$$

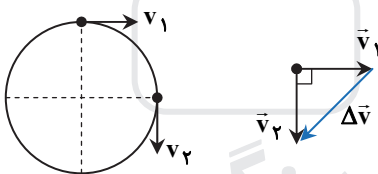
اگر کل مسیر ۱۲۰۰ متر را در مدت  $t$  ثانیه طی کرده باشد، مسافت  $1200 - 432 = 768m$  را در مدت  $(t-8s)$  طی کرده است. بنابراین معادله مکان- زمان را برای این دو مسیر می نویسیم:

$$v_0 = 0 \quad \begin{matrix} \text{A} & \xrightarrow{768m, (t-8s)} & \text{B} & \xrightarrow{432m, 8s} & \text{C} \\ & \underbrace{\hspace{10em}} & & & \\ & 1200m, t & & & \end{matrix}$$

$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow \begin{cases} 1200 = \frac{1}{2}at^2 \\ 768 = \frac{1}{2}a(t-8)^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{1200}{768} = \frac{t^2}{(t-8)^2} \Rightarrow \frac{400}{256} = \frac{t^2}{(t-8)^2} \Rightarrow \frac{20}{16} = \frac{t}{t-8}$$

$$\Rightarrow t = 40s, \quad a = 1/5 \frac{m}{s^2}, \quad v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \Rightarrow v^2 - 0 = 2 \times 1/5 \times 600 \Rightarrow v^2 = 1800 \Rightarrow v = 30\sqrt{2} \frac{m}{s}$$

بردار سرعت لحظه ای بر مسیر حرکت مماس است.



$$|\vec{a}_{av}| = \frac{|\Delta \vec{v}|}{\Delta t} = \frac{20\sqrt{2}}{10} = 2\sqrt{2} \frac{m}{s^2}$$

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{12} \Rightarrow v_{av} = \frac{(\frac{v_0+v_0+20}{2} \times 10) + (\frac{v_0+20+v_0+12}{2} \times 2)}{12} \Rightarrow 15 = v_0 + 11 \Rightarrow v_0 = 4 \frac{m}{s}$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta x &= \frac{v_0+v_{10}}{2} \times 10 + \frac{v_{10}+v_{12}}{2} \times 2 \\ v_{10} &= v_0 + 10 \times 2 = v_0 + 20 \\ v_{12} &= v_{10} + 2 \times (-4) = v_0 + 12 \end{aligned} \right\}$$

مبدأ مکان را محل شدن سنگ ها در نظر می گیریم. ( $y_0 = 0$ ). بنابراین:

$$y_1 = -\frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow -11/25 = -5t^2 \Rightarrow t = 1/5s$$

یعنی سنگ دوم ۱/۵ ثانیه پس از شروع حرکت سنگ اول، رها شده است و معادله حرکت آن به صورت  $y_2 = -\frac{1}{2}g(t-1/5)^2$  خواهد بود.

$$y_2 - y_1 = 48/75 \Rightarrow -\frac{1}{2}g(t-1/5)^2 - (-\frac{1}{2}gt^2) = 48/75$$

$$\Rightarrow -5(t^2 - 3t + 2/25) + 5t^2 = 48/75 \Rightarrow 15t - 11/25 = 48/75 \Rightarrow t = 4s$$

۴۸- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: ساده \* فیزیک ۳ (فصل ۱)

دو ثانیه قبل از رسیدن به زمین یعنی  $3/5$  ثانیه بعد از رها شدن  $\Rightarrow$  مدت کل سقوط  $t = 5/5 \text{ s}$   $\Rightarrow 1 \cdot t = 55 \Rightarrow v = gt$

$$\begin{cases} v_1 = 10 \times 2 = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ v_2 = 10 \times 3/5 = 35 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{cases} \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \frac{35}{20} = \frac{7}{4}$$

۴۹- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط \* فیزیک ۳ (فصل ۲)

باید نیرویی را پیدا کنیم که بر بدن ورزشکار رو به بالا وارد می شود. گزینه های ۱ و ۲ اصلاً بر بدن ورزشکار وارد نمی شوند. گزینه ۴ هم نادرست است، زیرا سقف اتاق هیچ نیرویی بر دست ورزشکار وارد نمی کند.

۵۰- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط \* فیزیک ۳ (فصل ۲)

$$g_h = g - \frac{19}{100}g = \frac{81}{100}g$$

$$\frac{g_h}{g} = \left(\frac{R_e}{R_e + h}\right)^2 \Rightarrow \frac{81}{100} = \left(\frac{R_e}{R_e + h}\right)^2$$

$$\frac{R_e}{R_e + h} = \frac{9}{10} \Rightarrow \frac{h}{R_e} = \frac{1}{9}$$

۵۱- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط \* فیزیک ۳ (فصل ۲)

با توجه به نمودار خطی  $(F_e - x)$  که مبدأگذر هم هست، داریم:

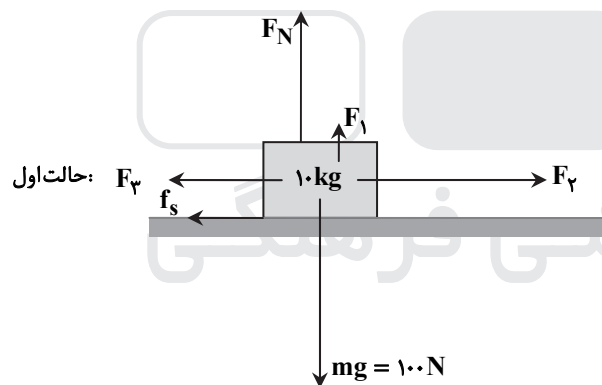
$$k = \frac{F_e}{x}$$

در این جا نمی دانیم مقدار اولیه نیروی هر فنر چقدر بوده است اما می دانیم که نیروی هر فنر ۱۰۰ نیوتون (یک سوم ۳۰۰ نیوتون) اضافه می شود.

$$k = \frac{200}{0.12} = \frac{100}{0.06} \Rightarrow \text{تغییر طول هر فنر} = 0.06 \text{ m} = 6 \text{ cm}$$

۵۲- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: دشوار \* فیزیک ۳ (فصل ۲)



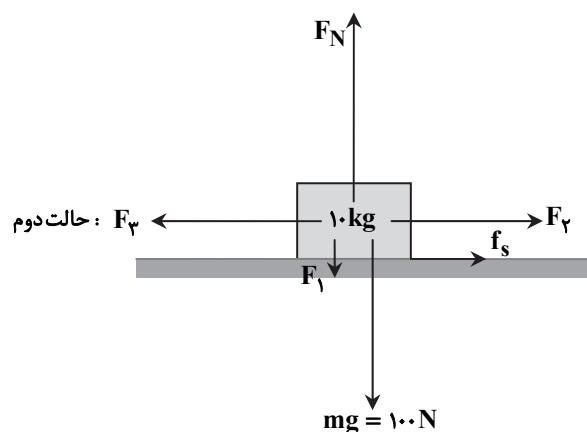
$$(F_{\text{net}})_y = 0 \Rightarrow F_1 + F_N - mg = 0 \Rightarrow 20 + F_N - 100 = 0$$

$$\Rightarrow F_N = 80 \text{ N}$$

$$(F_{\text{net}})_x = 0 \Rightarrow F_2 - F_3 - f_s = 0 \Rightarrow 100 - 60 - f_s = 0$$

$$\Rightarrow f_s = 40 \text{ N}$$

$$f_s \leq \mu_s F_N \Rightarrow \frac{40}{80} \leq \mu_s \Rightarrow 0.5 \leq \mu_s$$



$$(F_{\text{net}})_y = 0 \Rightarrow F_N - 20 - 100 = 0 \Rightarrow F_N = 120 \text{ N}$$

$$(F_{\text{net}})_x = 0 \Rightarrow 100 - 60 - f_s = 0 \Rightarrow f_s = 40 \text{ N}$$

سؤال: آیا  $f_s$  می تواند ۴۰ N باشد؟

پاسخ: بله، می تواند؛ چون:

$$40 < 120 \mu_s \quad (\mu_s \geq 0.5)$$

$$R = \sqrt{f_s^2 + F_N^2} = \sqrt{40^2 + 120^2} = 40\sqrt{1+3^2} = 40\sqrt{10} \text{ N}$$

$$F_1 - mg = 0 \Rightarrow F_1 = mg \Rightarrow kx_1 = 10m$$

$$\text{حالت دوم: } F_2 - mg = ma \Rightarrow F_2 = mg + ma \Rightarrow kx_2 = 12m$$

$$\text{حالت سوم: } F_2 - mg\mu_k = ma \Rightarrow F_2 = mg\mu_k + ma \Rightarrow kx_2 = 5m$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} k(x_2 - x_1) &= 2m \\ k(x_1 - x_2) &= 5m \end{aligned} \right\} \Rightarrow x_1 - x_2 = \frac{5}{2}(x_2 - x_1) \Rightarrow 65 - l_2 = \frac{5}{2} \times (67 - 65) \Rightarrow l_2 = 6 \text{ cm}$$

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{v^2}{r} \\ v &= \sqrt{\frac{GM_e}{r}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = \frac{GM_e}{r^2}$$

$$a_A = 6a_B \Rightarrow r_B^2 = 6r_A^2 \Rightarrow \frac{r_B}{r_A} = \sqrt{6}$$

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \frac{GM_em}{r} \Rightarrow \frac{K_A}{K_B} = \frac{m_A}{m_B} \times \frac{r_B}{r_A} = 3\sqrt{6}$$

$$\left. \begin{aligned} E &= \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2} \times 2 \dots \times \left(\frac{5}{100}\right)^2 = 2/5 \text{ J} \\ K &= \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \times 0.2 \times 2^2 = 0.4 \text{ J} \end{aligned} \right\} \Rightarrow U + K = E \Rightarrow U + 0.4 = 2/5 \Rightarrow U = 2/15 \text{ J}$$

$$\left. \begin{aligned} t_2 \text{ تا } t_1: \left. \begin{aligned} \Delta x &= A - 0 = A \\ \Delta t &= \frac{3T}{4} \end{aligned} \right\} \Rightarrow v_{av(t_1, t_2)} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{A}{\frac{3T}{4}} = \frac{4A}{3T} \\ t_2 \text{ تا } t_1: \left. \begin{aligned} \Delta x &= -\frac{A}{2} - 0 = -\frac{A}{2} \\ \Delta t &= \frac{5T}{12} \end{aligned} \right\} \Rightarrow v_{av(t_1, t_2)} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{-\frac{A}{2}}{\frac{5T}{12}} = \frac{-6A}{5T} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{v_{av(t_1, t_2)}}{v_{av(t_1, t_2)}} = \frac{\frac{4A}{3T}}{\frac{-6A}{5T}} = \frac{6}{5} = 0.9$$

$$\text{توضیح محاسبه } \Delta t = \frac{5T}{12}$$

$$x(t_1) = 0 \Rightarrow \cos(\omega t_1) = 0 \Rightarrow \omega t_1 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

$$x(t_2) = -\frac{A}{2} \Rightarrow \cos(\omega t_2) = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos \omega t_2 = \cos(\pi \pm \frac{\pi}{3}) \Rightarrow \left. \begin{aligned} \omega t_2 &= \frac{2\pi}{3} \text{ قق} \\ \omega t_2 &= \frac{4\pi}{3} \text{ rad} \end{aligned} \right\}$$

$$\omega t_2 - \omega t_1 = \frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow \frac{2\pi}{T} \cdot \Delta t = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow \Delta t = (t_2 - t_1) = \frac{5T}{12}$$

$$\left. \begin{aligned} T &= 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \\ g &= \frac{GM_e}{r^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{g_1}{g_2}} = \sqrt{\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \frac{r_2}{r_1} \quad \text{رابطه (۱)}$$

$$N = \frac{\Delta t}{T} \Rightarrow \frac{N_2}{N_1} = \frac{T_1}{T_2} \times \frac{\Delta t_2}{\Delta t_1} \xrightarrow{\text{رابطه (۱)}} \frac{N_2}{N_1} = \frac{r_1}{r_2} \times \frac{\Delta t_2}{\Delta t_1} \Rightarrow \frac{N_2}{30} = \frac{R_e}{R_e + \frac{1}{9}R_e} \times \frac{40}{20}$$

$$\Rightarrow \frac{N_2}{30} = \frac{9}{10} \times 2 \Rightarrow N_2 = 54$$

۵۸- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط \* فیزیک ۳ (فصل ۳)

وزنه روی پاره خطی به طول ۱۰ cm نوسان می کند؛ بنابراین دامنه نوسان آن ۵ cm است:

$$A = \frac{L_{\max} - L_{\min}}{2} = \frac{10 - 5}{2} = 5 \text{ cm}$$

بیشینه اندازه شتاب وزنه در هریک از دو انتهای مسیر اتفاق می افتد:

$$a = \frac{F}{m} \Rightarrow |a_{\max}| = \frac{|F_{\max}|}{m} = \frac{kA}{m} = \frac{400 \times 5 \times 10^{-2}}{0.1} = 200 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

تذکر:

$$|a_{\max}| = \frac{kA}{m} = \omega^2 A$$

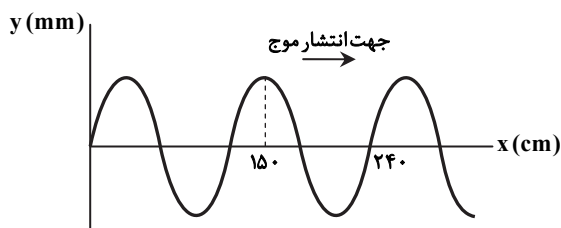
۵۹- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط \* فیزیک ۳ (فصل ۳)

$$\frac{\Delta \lambda}{\lambda} = 15\% \Rightarrow \lambda = 12 \text{ cm}$$

$$\lambda = v \cdot T \Rightarrow 12 = 3 \cdot T \Rightarrow T = \frac{12}{3} = 4 \text{ s}$$

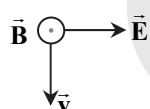
نقطه  $x = 24 \text{ cm}$  در  $t = 0$  در وضعیت صفر است و به طرف پایین می رود.



$$x = -4 \text{ mm} = -A \text{ در } \frac{T}{4}, \frac{5T}{4}, \frac{9T}{4}, \dots \Rightarrow t = 1 \text{ s}, 5 \text{ s}, 9 \text{ s}, \dots$$

۶۰- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط \* فیزیک ۳ (فصل ۳)



در مدت  $\Delta t = \frac{T}{4}$ ، بزرگی میدان الکتریکی موج افزایش و سپس کاهش می یابد، ولی همچنان به سمت راست است. با توجه به قاعده دست راست، جهت میدان مغناطیسی همانند لحظه  $t_1$ ، برون سو خواهد بود.

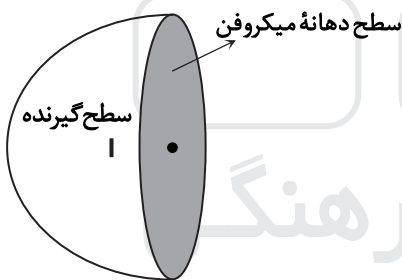
۶۱- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط \* فیزیک ۳ (فصل ۳)

۶۲- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: دشوار \* فیزیک ۳ (فصل ۳)

میکروفرن سهموی انرژی ورودی به دهانه میکروفرن را در یک سطح کوچک جمع می کند و شدت صوت به این ترتیب زیاد می شود:

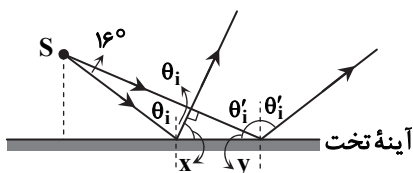


$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{A_1}{A_2} \Rightarrow \frac{I_2}{I_1} = \frac{\pi \times (20)^2}{\pi \times (1)^2} = 400$$

$$\beta_2 - \beta_1 = 10 \log \frac{I_2}{I_1} = 10 \log 400 = 10 (\log 100 + \log 4) = 10 (2 + 0.6) = 26 \text{ dB}$$

۶۳- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط \* فیزیک ۳ (فصل ۴)



$$2\theta_i = 90 - 16 \Rightarrow \theta_i = 37^\circ$$

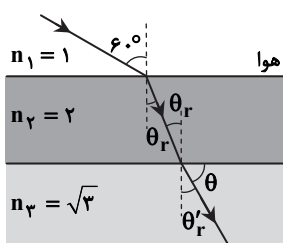
$$x + \theta_i = 90^\circ \Rightarrow 37^\circ + x = 90^\circ \Rightarrow x = 53^\circ$$

$$x + y + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow 53^\circ + y + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow y = 37^\circ$$

$$\theta'_i = 90^\circ - y = 90^\circ - 37^\circ = 53^\circ$$

۶۴- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط \* فیزیک ۳ (فصل ۴)



$$\left. \begin{aligned} \sin 60^\circ \times n_1 &= \sin \theta_r \times n_2 \\ \sin \theta_r \times n_2 &= \sin \theta'_r \times n_3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sin 60^\circ \times n_1 = \sin \theta'_r \times n_3$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \times 1 = \sin \theta'_r \times \sqrt{3} \Rightarrow \sin \theta'_r = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta'_r = 30^\circ$$

$$\Rightarrow \theta = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$

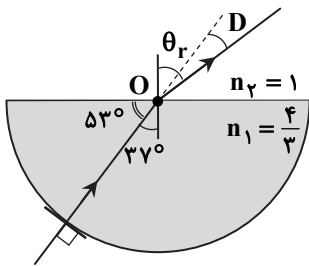
۶۵- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط \* فیزیک ۳ (فصل ۴)

چون پرتو در راستای شعاع نیم‌دایره بوده، عمود بر سطح تیغه تابیده و بدون شکست وارد تیغه می‌شود، اما از نقطه O همراه با شکست خارج می‌شود:

$$\frac{\sin 37^\circ}{\sin \theta_r} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4} \Rightarrow \sin \theta_r = 0.75 \Rightarrow \theta_r = 48.6^\circ$$

$$D = \theta_r - \theta_i = 48.6^\circ - 37^\circ = 11.6^\circ$$



۶۶- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: دشوار \* فیزیک ۳ (فصل ۴)

خمیدگی بیشتر جبهه‌های موج یعنی بارزتر شدن پراش و شرط این اتفاق بلندتر شدن طول موج نسبت به اندازه شکاف است؛ بنابراین عبارتهای «الف» و «ت» درست هستند.

$$\frac{\lambda_{\text{آب}}}{\lambda_{\text{هوا}}} = \frac{n_{\text{آب}}}{n_{\text{هوا}}} > 1 \Rightarrow \lambda_{\text{آب}} > \lambda_{\text{هوا}}$$

(الف) اگر همین آزمایش را در هوا انجام دهیم، طول موج بلندتر خواهد شد؛ زیرا:

(ب) با ثابت ماندن شکاف، اگر طول موج را کاهش دهیم، پراش ضعیف‌تر رخ می‌دهد.

(پ) با افزایش قطر شکاف (a) و از طرف دیگر با کاهش طول موج (λ)، نسبت  $\frac{a}{\lambda}$  بزرگ‌تر می‌شود که سبب ضعیف شدن پراش خواهد بود.

(ت) در محیطی که تندی انتشار موج بیشتر است، طول موج بزرگ‌تر است و با افزایش طول موج پراش بارزتری رخ خواهد داد.

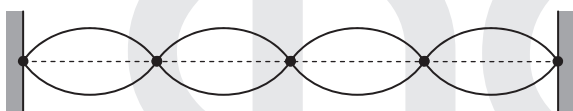
$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \xrightarrow{v_2 > v_1} \lambda_2 > \lambda_1$$

۶۷- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: ساده \* فیزیک ۳ (فصل ۴)

همانگ سوم  $\Rightarrow$  تار دو سر بسته با ۴ گره و ۳ شکم

$$f_3 = 3f_1 = 3 \times 170 = 510 \text{ Hz}$$



$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{340}{3 \times 170} = \frac{2}{3} \text{ m}$$

بسامد صوت منتشر شده در هوا با بسامد ارتعاش تار برابر است:

▲ مشخصات سؤال: متوسط \* فیزیک ۳ (فصل ۵)

۶۸- پاسخ: گزینه ۲

$$E = \frac{hc}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{1240}{E} = \frac{1240}{5} = 248 \text{ nm}$$

می‌دانیم که طول موج نور مرئی در بازه ۳۸۰ nm تا ۷۵۰ nm است، بنابراین، این طول موج مربوط به امواج فرابنفش است.

▲ مشخصات سؤال: دشوار \* فیزیک ۳ (فصل ۵)

۶۹- پاسخ: گزینه ۳

$$K_{\max} = hf - W_o = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda_o} \Rightarrow \begin{cases} 4 = \frac{1200}{100} - \frac{1200}{\lambda_{oA}} \Rightarrow \lambda_{oA} = 150 \text{ nm} \\ 4 = \frac{1200}{120} - \frac{1200}{\lambda_{oB}} \Rightarrow \lambda_{oB} = 200 \text{ nm} \end{cases}$$

شرط خروج الکترون‌ها از فلز این است که طول موج پرتوی مورد استفاده از طول موج آستانه کمتر یا مساوی آن باشد ( $\lambda \leq \lambda_o$ ):

الکترون‌ها از B خارج می‌شوند.  $180 < 200 \Rightarrow$

الکترون‌ها از A خارج نمی‌شوند.  $180 > 150 \Rightarrow$

▲ مشخصات سؤال: دشوار \* فیزیک ۳ (فصل ۵)

۷۰- پاسخ: گزینه ۳

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \times 10^8}{150 \times 10^{-9}} = \frac{300 \times 10^{15}}{150} = 2 \times 10^{15} \text{ Hz}$$

$$K_{\max} = hf - W_o = h(f - f_o)$$

$$\frac{K_{\max A}}{K_{\max B}} = \frac{f - f_{oA}}{f - f_{oB}} = \frac{2 - 1/2}{2 - 1/5} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow \frac{v_{\max A}}{v_{\max B}} = \sqrt{\frac{K_{\max A}}{K_{\max B}}} = \frac{\sqrt{1/3}}{\sqrt{1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

دقت کنید که نادرستی گزینه‌های ۱ و ۲ مسلم است، زیرا این کسر از ۱ بیشتر است. بین گزینه‌های ۳ و ۴ درستی تقریبی گزینه ۳ چندان مشکل نیست:

$$\frac{2\sqrt{10}}{5} \Rightarrow \frac{\text{مقدار با دقت}}{\text{مقدار تقریبی}} = \frac{1/2649}{2 \times 3 / 1} = \frac{6/2}{5} = 1/24 \Rightarrow \text{نزدیک به گزینه ۳ است.}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط \* فیزیک ۳ (فصل ۵)

۷۱- پاسخ: گزینه ۲

$$\frac{1}{\lambda} = R \left( \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{\lambda_1} = R \left( \frac{1}{9} - \frac{1}{36} \right) = \frac{R}{12} \\ \frac{1}{\lambda_2} = R \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{9} \right) = \frac{5}{36} R \end{cases} \Rightarrow \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\frac{R}{12}}{\frac{5}{36} R} = \frac{3}{5}$$

▲ مشخصات سؤال: ساده \* فیزیک ۳ (فصل های ۴ و ۵)

۷۲- پاسخ: گزینه ۲

اولین حالت برانگیخته،  $n = 2$  و سومین حالت برانگیخته  $n = 4$  است.

$$hf = E_f - E_p = \frac{-E_R}{16} - \frac{-E_R}{4} = \frac{3E_R}{16} = \frac{3 \times 13/6}{16} = 2/55 \text{ eV}$$

▲ مشخصات سؤال: ساده \* فیزیک ۳ (فصل های ۴ و ۶)

۷۳- پاسخ: گزینه ۲

یک هسته برانگیخته با تابش پرتوهای گاما می تواند به حالت پایه برسد.

▲ مشخصات سؤال: دشوار \* فیزیک ۳ (فصل ۶)

۷۴- پاسخ: گزینه ۴

$$\frac{N(160)}{N(120)} = \frac{2/5 \times 10^{24}}{10^{25}} = \frac{1}{5} = \left( \frac{1}{2} \right)^t \Rightarrow \text{«روز } t = 120 \text{» تا «روز } t = 160 \text{»}$$

$$40 = 2T_{1/2} \Rightarrow T_{1/2} = 20 \text{ روز}$$

$$n = \frac{120}{20} = 6 \Rightarrow \frac{N(20)}{N_0} = \left( \frac{1}{2} \right)^6 \Rightarrow N(120) = \frac{1}{64} \times N_0$$

$$10^{25} = \frac{1}{64} N_0 \Rightarrow N_0 = 6/4 \times 10^{26}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط \* فیزیک ۳ (فصل ۶)

۷۵- پاسخ: گزینه ۲



■ در واکنش گداخت دوتریم با تریتیم، ۱ نوترون تولید می شود:

■ در واکنش گداخت، مجموع جرم محصولات فرایند از مجموع جرم هسته های اولیه کمتر است و این کاستی جرم به انرژی تبدیل شده است.

## شیمی

▲ مشخصات سؤال: متوسط \* فصل ۱ شیمی ۳

۷۶- پاسخ: گزینه ۱

فقط عبارت دوم درست است.

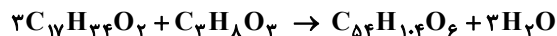
ساختار A، مولکول یک اسید آلی با زنجیر کربنی کوچک را نشان می دهد (پروپانویک اسید) و ساختار B مربوط به مولکول یک اسید آلی با زنجیر کربنی بزرگ (اسید چرب) است. ترکیب B در مجموع ناطبی است و در هگزان حل می شود.

بررسی عبارت های نادرست:

عبارت اول: با افزایش شمار اتم های کربن در کربوکسیلیک اسیدها، قدرت اسیدی (ثابت یونش) آن ها کاهش می یابد.

عبارت سوم: از اسیدهای چرب (برای مثال ترکیب B) می توان برای تهیه صابون جامد استفاده کرد. زنجیر کربنی ترکیب A کوچک است و نمک سدیم آن، صابون به حساب نمی آید.

عبارت چهارم: فرمول ترکیب B به صورت  $C_{17}H_{34}O_2$  است؛ بنابراین خواهیم داشت:



▲ مشخصات سؤال: متوسط \* فصل ۳ شیمی ۳

۷۷- پاسخ: گزینه ۲

عبارت های اول تا سوم، درست هستند، در مورد گزینه ۴ دقت کنید که  $Na^+$  آرایش  $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6$  و  $Cl^-$  آرایش  $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6$  دارد.

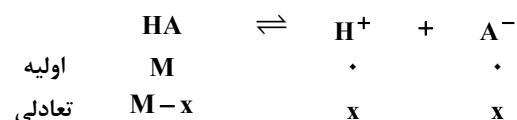
▲ مشخصات سؤال: ساده \* فصل ۴ شیمی ۳

۷۸- پاسخ: گزینه ۴

همه عبارت های داده شده درست هستند.

▲ مشخصات سؤال: متوسط \* فصل ۱ شیمی ۳

۷۹- پاسخ: گزینه ۱



$$2x = 2(M - x) \Rightarrow 4x = 2M \Rightarrow x = \frac{M}{2}$$

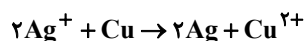
$$\alpha = \frac{x}{M} = \frac{1}{2}$$

$$K_a = \frac{x \times x}{M - x} = \frac{x \times x}{2x - x} = x = [A^-]$$

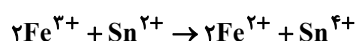
$$pH = 13 \Rightarrow [H^+] = 10^{-13} \Rightarrow [OH^-] = 0.1$$

$$\frac{[OH^-]_{\text{سود}}}{[OH^-]_{\text{آب}}} = \frac{10^{-1}}{10^{-7}} = 10^6$$

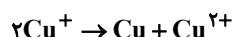
ابتدا معادله واکنش‌ها را موازنه می‌کنیم، سپس یکی از اجزای اکسایش یا کاهش یافته را انتخاب و تغییرات عدد اکسایش آن را ( $\Delta n$ ) در تعداد آن ضرب کنیم:



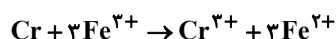
$$\Delta n(Ag) \times Ag \text{ تعداد} = 1 \times 2 = 2e^-$$



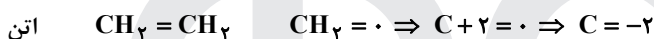
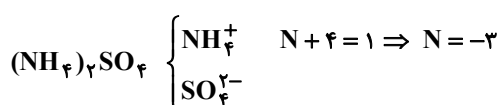
$$\Delta n(Fe^{3+}) \times Fe^{3+} \text{ تعداد} = 1 \times 2 = 2e^-$$



$$\Delta n(Cu) \times Cu \text{ تعداد} = 1 \times 1 = 1e^-$$



$$\Delta n(Cr) \times Cr \text{ تعداد} = 3 \times 1 = 3e^-$$



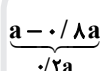
با ایجاد خراش در سطح آهن گالوانیزه، آهن در نقش کاتد سالم می‌ماند و وارد واکنش نمی‌شود. در این فرایند، مولکول‌های اکسیژن در سطح آهن، کاهش می‌یابند.



مقدار اولیه



مقدار تعادلی



$$K = \frac{0.4a \times 0.4a}{(0.7a)^2} = 4$$

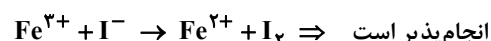
چون با افزایش دما  $K$  زیاد شده است، واکنش گرماگیر بوده است و چون با افزایش فشار، مول  $C$  کم شده است، گزینه ۱ درست است زیرا با افزایش فشار، واکنش به سمت تعداد مول‌های گازی کمتر یعنی به سمت چپ رفته و از مول  $C$  کاسته می‌شود.

$$[H_3O^+] = 10^{-pH} \Rightarrow [H_3O^+] = 10^{-2.7} = 2 \times 10^{-3} \text{ mol} \cdot L^{-1}$$

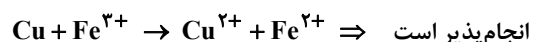
$$[H_3O^+] \approx \sqrt{K_a \cdot M} \Rightarrow M \approx \frac{(2 \times 10^{-3})^2}{10^{-5}} = 0.4 \text{ mol} \cdot L^{-1}$$

$$m = 0.4 \text{ mol} \cdot L^{-1} \times 0.25 \text{ L} \times 20 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1} = 2 \text{ g}$$

در سلول گالوانی  $SHE - Ag$ ، نیم‌سلول  $SHE$ ، آند بوده و در جرم تیغه آن ( $Pt$ ) تغییری ایجاد نمی‌شود.



گزینه ۱:



گزینه ۳:



گزینه ۴:

در دمای ثابت با توجه به مقدار داده شده برای A و B،  $K = 4$  است، بنابراین با تغییر غلظت یا فشار، همواره  $K = \frac{[B]}{[A]} = 4$  و غلظت B چهار برابر A خواهد بود.

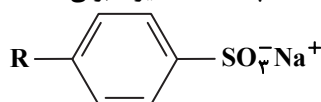
۹۰- پاسخ: گزینه ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط \* فصل ۱ شیمی ۳

همه عبارت‌های داده شده، نادرست هستند.

پاک‌کننده صابونی



پاک‌کننده غیرصابونی



$\text{جرم C} - \text{جرم SO} = \text{جرم CO}_3^- - \text{جرم SO}_3^-$ : اختلاف جرم بخش‌های آب‌دوست به ازای ۱ مول

لکه‌های سفید برجای‌مانده روی لباس، مربوط به رسوب صابون با یون‌های کلسیم و منیزیم است.

در ساختار پاک‌کننده غیرصابونی، در بخش آب‌دوست، پیوند دوگانه وجود ندارد؛ بنابراین حداقل ۳ پیوند دوگانه (مربوط به حلقه بنزن) در ساختار این نوع پاک‌کننده‌ها وجود دارد.

در واکنش گفته شده، گاز هیدروژن تولید می‌شود و نه اکسیژن!

۹۱- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار \* فصل ۲ شیمی ۳

با توجه به اینکه Al آند و Fe کاتد است، واکنش کلی به صورت زیر است:



$$\frac{0.1 \times 0.04}{2} = \frac{x}{3 \times 56} \Rightarrow x = 0.336 \text{ g Fe}$$

۹۲- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط \* فصل ۴ شیمی ۳

در فرایند تولید PET، اتیلن گلیکول از اکسایش اتن توسط محلول رقیق پتاسیم پرمنگنات و ترفتالیک اسید، از اکسایش پارازیلن توسط محلول غلیظ پتاسیم پرمنگنات حاصل می‌شود.

۹۳- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط \* فصل ۳ شیمی ۳

عبارت‌های اول، دوم و چهارم درست هستند.

بررسی عبارت‌های نادرست:

عبارت سوم: مقاومت کششی گرافن، حدود ۱۰۰ برابر فولاد است.

عبارت پنجم: مدل دریای الکترونی برای توجیه برخی رفتارهای فیزیکی فلزها به کار می‌رود.

۹۴- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط \* فصل ۱ شیمی ۳

با توجه به اینکه رسانایی محلول (الف) بیشتر است، می‌توان نتیجه گرفت  $[\text{OH}^-]$  در این محلول بیشتر است. هرچه غلظت یون هیدروکسید در یک محلول بازی بیشتر باشد، pH محلول بیشتر است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

(۱) محلول شکر در آب، رسانای جریان برق نیست.

(۲)  $K_a$  یک اسید فقط به دما بستگی دارد.

(۴) رسانایی نمی‌تواند مبنای مقایسه غلظت کلی باشد و تنها می‌توان غلظت یون‌ها را مقایسه نمود.

↑ رسانایی  $\Rightarrow$  ↑ غلظت یون‌ها

۹۵- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط \* فصل ۱ شیمی ۳

$$[\text{H}^+] = [\text{HCl}] = 0.1 = 10^{-1} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \Rightarrow \text{pH} = -\log[\text{H}^+] = 1$$

معادله واکنش انجام شده به صورت زیر است:



۲۰۰ میلی‌لیتر محلول ۰/۱ مولار هیدروکلریک اسید شامل ۰/۰۲ مول HCl است؛ بنابراین در ۱۰۰ میلی‌لیتر از این محلول، ۰/۰۱ مول

HCl وجود دارد که با ۰/۰۱ مول جوش شیرین واکنش می‌دهد:

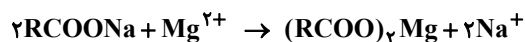
$$\text{جرم NaHCO}_3 = 0.01 \times 84 = 0.84 \text{ g}$$

عبارت‌های (ب) و (ت) درست هستند.

بررسی عبارت‌های نادرست:

الف) کلوئیدها برخلاف محلول‌ها، جزء مخلوط‌های ناهمگن هستند.

پ)



$$\text{Mg}^{2+} \text{ مول} = \frac{3600 \times 10^{-3} \text{ g}}{1 \text{ L}} \times 1 \text{ L} \times \frac{1 \text{ mol}}{24 \text{ g}} = 0.15 \text{ mol}$$

$$0.2 \text{ mol صابون} \times \frac{1 \text{ mol Mg}^{2+}}{2 \text{ mol صابون}} = 0.1 \text{ mol Mg}^{2+}$$

۰/۲ مول صابون با ۰/۱ مول  $\text{Mg}^{2+}$  واکنش می‌دهد؛ بنابراین در این فرایند، ۰/۵ - ۰/۱ = ۰/۱۵ مول یون منیزیم باقی می‌ماند.

۹۷- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار \* فصل ۱ شیمی ۳

$$\text{pH} = 1 \Rightarrow [\text{H}^+] = 0.1$$

$$\text{HNO}_3 \text{ مول اولیه} = 0.1 \times 0.1 = 0.01$$

$$\text{pH} = 0.3 \Rightarrow [\text{H}^+] = 10^{-0.3} = \frac{1}{10^{0.3}} = \frac{1}{2} = 0.5 \Rightarrow \text{مول نهایی} = 0.5 \times 0.1 = 0.05$$

$$\text{مول اضافه شده} = 0.05 - 0.01 = 0.04$$

$$0.04 \text{ mol HNO}_3 \times \frac{63 \text{ g HNO}_3}{1 \text{ mol HNO}_3} \times \frac{100 \text{ g محلول}}{70 \text{ g HNO}_3} = 3.6 \text{ g محلول}$$

۹۸- پاسخ: گزینه ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط \* فصل ۳ شیمی ۳

فقط عبارت چهارم درست است.

بررسی عبارت‌های نادرست:

عبارت اول: در مولکول اتین که یک مولکول ناقطبی است، تراکم بار الکتریکی منفی روی اتم‌های کربن است، در حالی که در مولکول ناقطبی کربن دی‌اکسید، تراکم بار الکتریکی منفی روی اتم‌های اکسیژن است.

عبارت دوم: در مولکول کربن تتراکلرید برخلاف مولکول متان، تراکم بار الکتریکی منفی روی اتم‌های اطراف اتم مرکزی مولکول است.

عبارت سوم: در مولکول آمونیاک، تراکم بار الکتریکی منفی روی اتم مرکزی است و در نقشه پتانسیل الکتروستاتیکی اتم مرکزی قرمز رنگ خواهد بود، ولی در مولکول گوگرد تری‌اکسید، تراکم بار الکتریکی منفی بر روی اتم‌های کناری است.

۹۹- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط \* فصل ۳ شیمی ۳

تیتانیوم (فلز) و سیلیسیم (شبه‌فلز)، نقطه ذوب بالایی داشته، سخت هستند، از یک نوع اتم ساخته شده‌اند و در حالت جامد جریان برق را از خود عبور می‌دهند. (سیلیسیم نیمه‌رسانا است.)

■ گرافیت، نرم است.

■ الماس، رسانای جریان برق نیست.

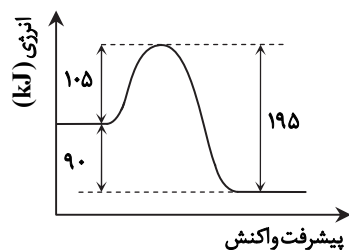
■ سیلیس ( $\text{SiO}_2$ )، از دو نوع اتم ساخته شده است.

۱۰۰- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط \* فصل ۴ شیمی ۳

کاتالیزگر تغییری در  $\Delta H$  واکنش ایجاد نمی‌کند و فاصله سطح انرژی واکنش‌دهنده‌ها و

فرآورده‌ها را تا قله انرژی، به یک اندازه کاهش می‌دهد؛ بنابراین فاصله سطح انرژی فرآورده‌ها

تا قله، به ۱۹۵ کیلوژول می‌رسد.



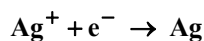
$$E_a \text{ در حضور کاتالیزگر} = 150 - 45 = 105 \text{ kJ} \Rightarrow E_a \text{ میزان کاهش} = 150 \times 0.3 = 45 \text{ kJ}$$

۱۰۱- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط \* فصل ۴ شیمی ۳

از الکل‌ها می‌توان آلدهید، کتون، آمین و کربوکسیلیک اسید تهیه کرد.



بررسی گزینه ۳: ساختار اتیل استات به صورت  $\text{CH}_3 - \text{C}(=\text{O}) - \text{O} - \text{CH}_2 - \text{CH}_3$  است که کربن‌های گروه متیل آن دارای عدد اکسایش ۳- هستند.



$$\text{میزان افزایش جرم جسم} = \frac{12}{0.4} \times 10^{21} \text{e}^- \times \frac{1 \text{ mol e}^-}{6.02 \times 10^{23} \text{e}^-} \times \frac{1 \text{ mol Ag}}{1 \text{ mol e}^-} \times \frac{108 \text{ g Ag}}{1 \text{ mol Ag}} = 2.16 \text{ g Ag}$$

$$\text{درصد افزایش جرم} = \frac{\text{میزان افزایش جرم}}{\text{جرم اولیه}} \times 100 = \frac{2.16}{4} \times 100 = 54$$

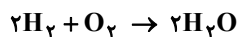
▲ مشخصات سؤال: ساده \* فصل ۲ شیمی ۳

۱۰۳- پاسخ: گزینه ۴

فلز سدیم در نتیجه فرایند کاهش یون‌های سدیم در الکترودی که به قطب منفی مولد متصل است و نقش کاتد و قطب منفی سلول را دارد، تولید می‌شود.

▲ مشخصات سؤال: متوسط \* فصل ۲ شیمی ۳

۱۰۴- پاسخ: گزینه ۴



$$56 \text{ L H}_2 \times \frac{1 \text{ mol H}_2}{22.4 \text{ L H}_2} \times \frac{2 \text{ mol H}_2\text{O}}{2 \text{ mol H}_2} \times \frac{18 \text{ g H}_2\text{O}}{1 \text{ mol H}_2\text{O}} = 45 \text{ g H}_2\text{O}$$

آب در کاتد (قطب مثبت) تولید می‌شود.

▲ مشخصات سؤال: متوسط \* فصل ۳ شیمی ۳

۱۰۵- پاسخ: گزینه ۴

همه عبارت‌های داده‌شده، نادرست هستند.

- در ساختار یخ، اتم‌های اکسیژن در رأس حلقه‌های شش‌ضلعی قرار دارند.
- شاره‌ای که توربین را به حرکت در می‌آورد، بخار آب و یک ماده مولکولی است.
- هیدروژن فلوئورید یک ماده مولکولی است و گستره دمایی مایع بودن آن، نمی‌تواند به اندازه مواد یونی باشد.
- KBr یک ترکیب یونی است و مانند SiC، نمی‌توان برای آن از واژه‌هایی مانند فرمول مولکولی استفاده کرد.

