



ویژه  
کنکوری‌های  
۱۴۰۲

۱۴۰۲/۰۲/۲۹

آزمون  
هفدهم  
آنلاین

دفترچه شماره ۱



سال تحصیلی  
۱۴۰۱-۱۴۰۲

## آزمون آزمایشی خلیس‌سبز

گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی

شماره داوطلبی:

نام و نام خانوادگی:

عنوان مواد امتحانی آزمون، تعداد، شماره سؤالات و مدت پاسخ‌گویی

| ردیف | مواد امتحانی | تعداد سؤال | از شماره | تا شماره | مدت پاسخ‌گویی | ملاحظات             |
|------|--------------|------------|----------|----------|---------------|---------------------|
| ۱    | ریاضیات      | ۴۰         | ۱        | ۴۰       | ۷۰ دقیقه      | ۴۰ سؤال<br>۷۰ دقیقه |

جامع دوازدهم؛ با تأکید بر بررسی متن، تمرین‌ها، فعالیت‌ها و شکل‌های کتاب درسی دوازدهم

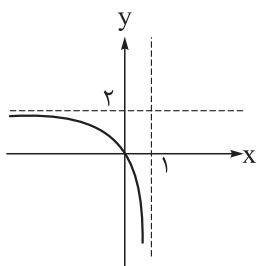
داوطلب گرامی، در این آزمون، حذفیات کنکور ۱۴۰۲ (حذفیات کرونا) در تمام دروس مربوطه، اعمال شده است.

[Azmoon.kheilisabz.com](http://Azmoon.kheilisabz.com)

حسابان دوازدهم و پایه مرتبط: حسابان (۲): صفحه‌های ۱ تا ۱۴۴

۱- نقطه  $A(2, 3)$  روی نمودار تابع  $y = f\left(\frac{x}{3}\right)$  و نقطه  $A'(a, b)$  متناظر با آن روی نمودار تابع  $y = 1 + 3f(x)$  است.  $a + b$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{2}{3}$  (۲)  $\frac{5}{3}$  (۳) ۱۴ (۴) ۱۱

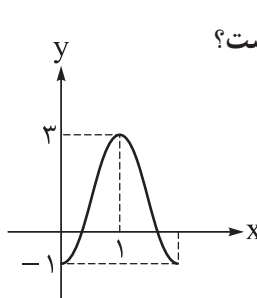


۲- قسمتی از نمودار تابع هموگرافیک  $f$  به صورت مقابل است. نمودار تابع  $\frac{1}{f}$  را در راستای افقی ۲ واحد به سمت راست انتقال داده و سپس نمودار حاصل را نسبت به محور  $x$  ها قرینه کرده و ۳ واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم. نمودار نهایی، محور  $x$  ها را در نقطه‌ای با کدام طول قطع می‌کند؟

- (۱)  $-\frac{15}{7}$  (۲)  $\frac{13}{7}$  (۳)  $-\frac{13}{7}$  (۴)  $\frac{15}{7}$

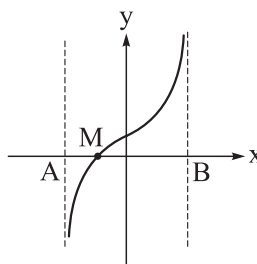
۳- نقطه  $A(-1, 2)$  نقطه عطف تابع  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$  است. باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای  $f(ax + b)$  بر  $x + 1$  کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴



۴- قسمتی از نمودار تابع  $f(x) = c + a \cos bx$  به صورت مقابل است. حاصل  $|a|b|$  کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) -۴ (۳) -۲ (۴) ۲



۵- نمودار تابع  $f(x) = 1 + \tan(ax)$  در یک دوره تناوب به صورت مقابل است. نقطه  $M$ ، فاصله بین دو مجانب رسم‌شده را به چه نسبتی تقسیم می‌کند؟

- (۱) ۴ به ۱ (۲) ۸ به ۳ (۳) ۳ به ۱ (۴) ۵ به ۲

۶- تابع  $f(x) = 2 + 2 \cos x + \sin 2x$  مفروض است. کم‌ترین فاصله بین دو جواب معادله  $f'(x) = 2$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{\pi}{6}$  (۲)  $\frac{\pi}{3}$  (۳)  $\frac{2\pi}{3}$  (۴)  $\pi$

محل انجام محاسبات

۷- اگر  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - \sqrt{ax^2 + 3x - 1}}{2 + |x|} = -4$  باشد، حاصل  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax + \sqrt{x}}{2x - 1}$  کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳)  $\frac{3}{2}$  (۴)  $\frac{5}{2}$

۸- چندجمله‌ای  $f(x)$  در نقطه  $x = 2$  دارای یک نقطه ماکزیمم نسبی روی محور  $x$ ها است. نمودار تابع  $y = \frac{3 - 2[x]}{f(x)}$  در مجاورت  $x = 2$  چگونه است؟



۹- اگر  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{bx - a}{a \cos x + 4} = +\infty$  باشد، حداقل مقدار صحیح  $b$  کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) -۱

۱۰- اگر  $A(a, 2)$  تنها نقطه برخورد مجانب‌های تابع  $f(x) = \frac{bx^2 + 3}{2x^2 + bx + c}$  باشد، مقدار  $f(-a)$  چه قدر است؟

- (۱)  $\frac{7}{8}$  (۲)  $\frac{7}{4}$  (۳)  $\frac{5}{8}$  (۴)  $\frac{5}{4}$

۱۱- اگر  $f(x) = x\sqrt{\frac{2x - [x]}{x - 2}}$  باشد، حاصل  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$  کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) صفر

۱۲- فرض کنید  $f(4) = 1$  و  $f'(x) = 2\sqrt{x}$  باشد، حاصل مشتق دوم تابع  $g(x) = (f \circ f)(x)$  در نقطه  $x = 4$  چه قدر است؟

- (۱) ۹ (۲) ۱۲ (۳) ۱۵ (۴) ۱۷

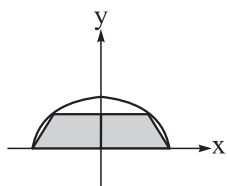
۱۳- آهنگ متوسط تغییر تابع  $f(x) = \sin^2 x - \cos^2 x$  در بازه  $[-\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}]$  چند برابر آهنگ لحظه‌ای تغییر آن در نقطه

$x = \frac{5\pi}{12}$  است؟

- (۱)  $\frac{3}{2\pi}$  (۲)  $\frac{3}{\pi}$  (۳)  $\frac{6}{5\pi}$  (۴)  $\frac{3}{5\pi}$

محل انجام محاسبات

۱۴- مطابق شکل دوزنقه‌ای درون نمودار  $f(x) = \sqrt{6 - |x|}$  محاط شده است. حداکثر مقدار مساحت این دوزنقه چه قدر است؟



۱۶ (۱)

۲۴ (۲)

۱۸ (۳)

۱۲ (۴)

۱۵- تابع  $f(x) = \frac{ax+b}{\sqrt{x}}$  در نقطه  $A(1, 2)$  مینیمم نسبی دارد. مقدار  $f(a)$  کدام است؟

۱ (۴)  $\frac{3\sqrt{2}}{2}$  (۳) ۲ (۲)  $\sqrt{2}$  (۱)

۱۶- تابع  $f(x) = x^2 |2x - 3|$  مفروض است. در بازه  $(a, b)$  تابع  $f$  صعودی و دارای تقعر رو به پایین است. حداکثر  $b - a$  کدام است؟

$\frac{1}{2}$  (۴) ۱ (۳)  $\frac{3}{2}$  (۲) ۲ (۱)

۱۷- نمودار تابع  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + a$  از ناحیه چهارم عبور نمی‌کند. حداقل مقدار عرض نقطه ماکزیمم نسبی  $f$  چه قدر است؟

۳۶ (۴) ۳۲ (۳) ۲۷ (۲) ۲۴ (۱)

ریاضیات گسسته و آمار و احتمال: ریاضیات گسسته: صفحه‌های ۱ تا ۸۴

۱۸- اگر  $a$  و  $b$  عددهای حقیقی و مثبت باشند، برای اثبات نامساوی  $\frac{a+b+1}{3} \geq \sqrt{b(a+1)}$  به کدام رابطه بدیهی می‌رسیم؟

$(a+1)^2 + (b-1)^2 \geq 0$  (۲)  $(a-1)^2 + (b-1)^2 \geq 0$  (۱)

$(a-b+1)^2 \geq 0$  (۴)  $(a-b-1)^2 \geq 0$  (۳)

۱۹- مجموع باقی‌مانده و خارج قسمت تقسیم عدد طبیعی  $a$  بر ۲۲ برابر ۱۷ است. اگر باقی‌مانده  $a$  بر ۴۲ برابر ۳۸ باشد،

مجموع ارقام بزرگ‌ترین مقدار  $a$  کدام است؟

۱۵ (۴) ۱۴ (۳) ۱۳ (۲) ۱۲ (۱)

۲۰- باقی‌مانده  $3^{25}$  بر ۱۴۰ کدام است؟

۹ (۴) ۷ (۳) ۳ (۲) ۱ (۱)

محل انجام محاسبات

۲۱- مجموع ارقام بزرگ‌ترین عدد چهاررقمی به صورت  $abba$  که بر ۶۶ بخش پذیر باشد کدام است؟

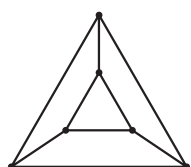
- (۱) ۱۸ (۲) ۳۰ (۳) ۲۷ (۴) ۲۴

۲۲- معادله  $32x + 57y = 1120$  چند جواب در مجموعه اعداد طبیعی دارد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

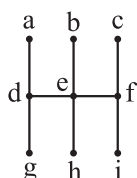
۲۳- در گرافی ناهمبند از مرتبه ۹ اگر  $\Delta = 4$  و  $\delta = 2$  باشد، حداکثر تعداد یال‌ها کدام است؟

- (۱) ۱۳ (۲) ۱۴ (۳) ۱۵ (۴) ۱۶



۲۴- اگر  $n$  تعداد دورهای به طول ۵ گراف مقابل باشد حاصل  $\left\lfloor \frac{n+1}{\gamma(G)} \right\rfloor$  کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴



۲۵- گراف مقابل چند مجموعه احاطه‌گر مینیمال غیرمینیمم دارد؟

- (۱) ۳ (۲) ۷ (۳) ۱۱ (۴) ۱۵

|   |   |  |   |
|---|---|--|---|
| ۱ | ۲ |  |   |
| ۳ |   |  |   |
|   |   |  |   |
|   |   |  | ۴ |

۲۶- مربع لاتین روبه‌رو، به چند طریق قابل تکمیل است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۲۷- نامعادله  $x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 9$  چند جواب صحیح نامنفی دارد؟

- (۱) ۹۴ (۲) ۹۱ (۳) ۹۲ (۴) ۸۱

۲۸- چند عدد طبیعی  $1 \leq n \leq 300$  وجود دارد که بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک  $n$  و ۳۰ بزرگ‌تر از یک باشد؟

- (۱) ۲۰۰ (۲) ۲۱۰ (۳) ۲۲۰ (۴) ۲۴۰

۲۹- حداکثر چند عدد از مجموعه  $\{10, 11, 12, \dots, 31\}$  می‌توانیم انتخاب کنیم به طوری که تفاضل هیچ دو عدد انتخابی، برابر ۱۵ نشود؟

- (۱) ۱۵ (۲) ۱۶ (۳) ۱۷ (۴) ۱۸

محل انجام محاسبات

هندسه: هندسه (۳): صفحه‌های ۹ تا ۸۶

۳۰- در یک دستگاه معادلات خطی،  $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$  ماتریس ضرایب و  $\begin{bmatrix} 11 \\ 8 \end{bmatrix}$ ، ماتریس مقادیر معلوم است. مجموع جواب‌های این دستگاه کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۳۱- اگر  $A = \begin{bmatrix} y & z & y \\ 2 & 0 & 4z \\ 0 & z & 0 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} y & -1 & x \\ 0 & 0 & -x \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ، آن‌گاه دترمینان ماتریس اسکالر  $AB$  کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۸ (۳) -۱ (۴) ۸

۳۲- اگر  $y = \begin{vmatrix} bc & ab & ac \\ ab & ac & bc \\ ac & bc & ab \end{vmatrix}$ ، در صورتی که  $y$  عددی غیرصفر باشد، حاصل  $\frac{x}{y}$  کدام است؟

- (۱) ۱ (۲)  $abc$  (۳) -۱ (۴)  $-abc$

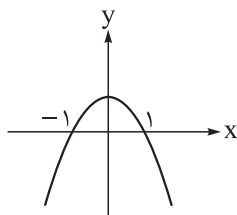
۳۳- فاصله بین مرکزهای دو دایره به شعاع‌های ۲ و ۸ برابر با ۵ است. مکان هندسی مرکز دایره‌هایی که با این دو دایره مماس داخل‌اند، یک منحنی است؛ طول بلندترین وتر در این منحنی کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۱۲ (۳) ۶ (۴) ۸

۳۴- دایره  $C(W, R)$  با معادله  $x^2 + y^2 - 4x = K$ ، خط  $x + y = 1$  را در دو نقطه  $A$  و  $B$  قطع می‌کند، به طوری که  $\angle A\hat{W}B = 90^\circ$ . حاصل  $\frac{K}{R}$  کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) -۳ (۳) ۱ (۴) -۱

۳۵- کانون سهمی رسم‌شده، مبدأ مختصات است. معادله خط هادی سهمی کدام است؟



$$y = 2 \quad (1)$$

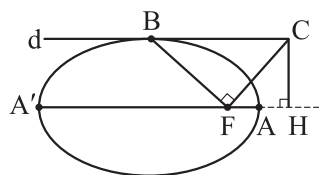
$$y = 1/5 \quad (2)$$

$$y = 1 \quad (3)$$

$$y = 0/5 \quad (4)$$

محل انجام محاسبات

۳۶- مطابق شکل، خط  $d$  در یکی از رأس‌های یک بیضی با کانون  $F$  بر آن مماس است و نقطه  $C$  روی  $d$  چنان واقع است که  $\angle BFC = 90^\circ$ . اگر  $H$  پای عمود وارد از  $C$  بر امتداد محور کانونی بیضی باشد و  $FH = 3AF$ ، آن‌گاه خروج از مرکز بیضی کدام است؟



$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} \quad (2) \\ & \frac{\sqrt{3}}{3} \quad (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \quad (1) \\ & \frac{\sqrt{5}}{5} \quad (3) \end{aligned}$$

۳۷- دو نقطه  $A = (2, -6, -1)$  و  $B = (5, 0, 2)$  را در نظر بگیرید. اگر  $M$  نقطه‌ای در فضا باشد، به طوری که  $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{MB}$  آن‌گاه فاصله  $M$  از مبدأ مختصات کدام است؟

$$\begin{aligned} & 4 \quad (1) \quad 5 \quad (2) \quad 6 \quad (3) \quad 7 \quad (4) \end{aligned}$$

۳۸- زاویه بین دو بردار  $\vec{a} = (6, 6, -3)$  و  $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$  برابر با  $\theta$  است. اگر بردار  $\vec{a}' = (\alpha, \beta, \gamma)$ ، تصویر قائم  $\vec{a}$  بر امتداد  $\vec{b}$  باشد، حاصل  $\frac{\alpha + \beta + \gamma}{\cos \theta}$  کدام است؟

$$\begin{aligned} & -15 \quad (1) \quad 15 \quad (2) \quad -7/5 \quad (3) \quad 7/5 \quad (4) \end{aligned}$$

۳۹- اگر  $x^2 + 4y^2 + z^2 = 2$ ، آن‌گاه کم‌ترین مقدار  $4x + 6y - 5z$  کدام است؟

$$\begin{aligned} & 10 \quad (1) \quad 10\sqrt{2} \quad (2) \quad -10\sqrt{2} \quad (3) \quad -10 \quad (4) \end{aligned}$$

۴۰- دو بردار  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  به ترتیب با طول‌های ۵ و ۲، با هم زاویه منفجره می‌سازند. اگر اندازه حاصل ضرب خارجی این دو بردار ۸ باشد، حاصل  $|\vec{a} \times (\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{b})| + |\vec{a} \cdot (\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{b})|$  کدام است؟

$$\begin{aligned} & 28 \quad (1) \quad 30 \quad (2) \quad 32 \quad (3) \quad 34 \quad (4) \end{aligned}$$

محل انجام محاسبات



ویژه  
کنکوری‌های  
۱۴۰۲

۱۴۰۲/۰۲/۲۹

آزمون  
هفدهم  
آنلاین

دفترچه شماره ۲



تجربی | ریاضی | انسانی

سال تحصیلی  
۱۴۰۱-۱۴۰۲

## آزمون آزمایشی خیلی سبز

گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی

شماره داوطلبی:

نام و نام خانوادگی:

عنوان مواد امتحانی آزمون، تعداد، شماره سؤالات و مدت پاسخ‌گویی

| ردیف | مواد امتحانی | تعداد سؤال | از شماره | تا شماره | مدت پاسخ‌گویی | ملاحظات  |
|------|--------------|------------|----------|----------|---------------|----------|
| ۱    | فیزیک        | ۳۵         | ۴۱       | ۷۵       | ۴۵ دقیقه      | ۶۵ سؤال  |
| ۲    | شیمی         | ۳۰         | ۷۶       | ۱۰۵      | ۳۰ دقیقه      | ۷۵ دقیقه |

جامع دوازدهم: با تأکید بر بررسی متن، تمرین‌ها، فعالیت‌ها و شکل‌های کتاب درسی دوازدهم

داوطلب گرامی، در این آزمون، حذفیات کنکور ۱۴۰۲ (حذفیات کرونا) در تمام دروس مربوطه، اعمال شده است.

[Azmoon.kheilisabz.com](http://Azmoon.kheilisabz.com)

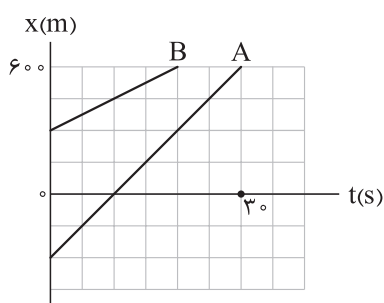
داوطلب گرامی، در این آزمون، در درس فیزیک، زوج درس نداریم و تمام سؤال‌ها از مباحث فیزیک دوازدهم طرح شده است؛ بنابراین پاسخگویی به تمام سؤالات این درس اجباری است.

فیزیک دوازدهم: فیزیک (۳): صفحه‌های ۱ تا ۱۵۶

۴۱- متحرکی که با سرعت ثابت روی محور  $x$  حرکت می‌کند، در لحظه  $t_1 = 5 \text{ s}$  از مکان  $x_1 = 6 \text{ m}$  و در لحظه  $t_2 = 20 \text{ s}$  از مکان  $x_2 = 36 \text{ m}$  عبور می‌کند. به ترتیب، بردار مکان متحرک در مبدأ زمان بر حسب متر و لحظه تغییر جهت بردار مکان متحرک بر حسب ثانیه، کدام است؟

- (۱)  $2, 4\hat{i}$  (۲)  $4, 4\hat{i}$  (۳)  $2, -4\hat{i}$  (۴)  $4, -4\hat{i}$

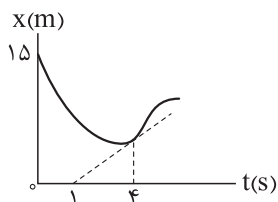
۴۲- نمودار مکان - زمان دو متحرک  $A$  و  $B$  که روی محور  $x$  با سرعت ثابت حرکت می‌کنند، مطابق شکل زیر است. در



چه مکانی بر حسب متر، دو متحرک به هم می‌رسند؟

- (۱) ۷۵۰  
(۲) ۹۰۰  
(۳) ۹۷۵  
(۴) ۱۰۵۰

۴۳- نمودار مکان - زمان متحرکی که روی محور  $x$  حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. اگر اندازه سرعت متوسط متحرک در ۴ ثانیه اول، ۳ برابر تندی آن در لحظه  $t = 4 \text{ s}$  باشد، بردار جابه‌جایی متحرک در ۴ ثانیه اول، بر حسب متر

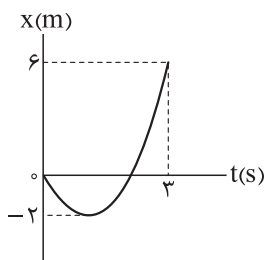


کدام است؟

- (۱)  $-9\hat{i}$  (۲)  $-6\hat{i}$  (۳)  $-3\hat{i}$  (۴)  $-12\hat{i}$

۴۴- نمودار مکان - زمان متحرکی که در راستای محور  $x$  با شتاب ثابت حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. سرعت

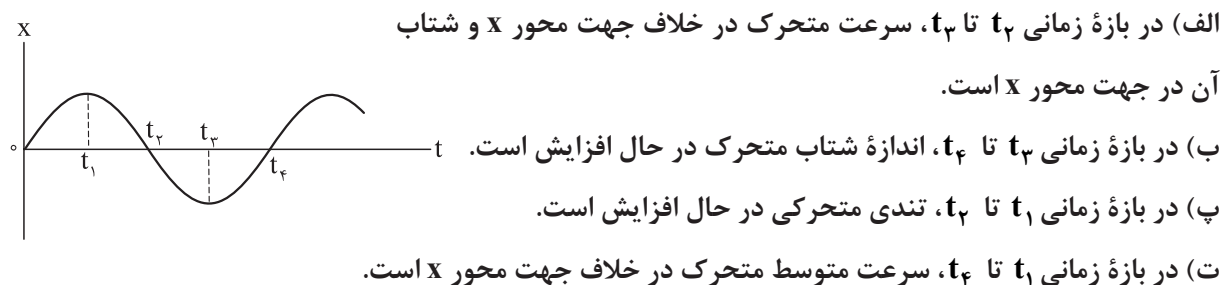
این متحرک در لحظه  $t = 3 \text{ s}$  چند متر بر ثانیه است؟



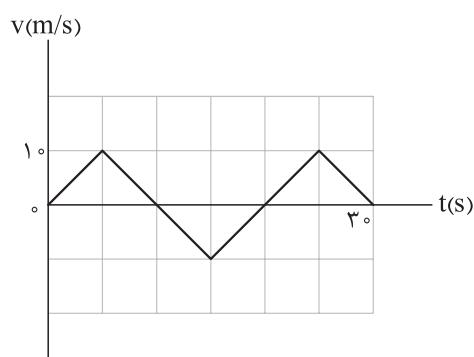
- (۱) ۳  
(۲) ۶  
(۳) ۴  
(۴) ۸

محل انجام محاسبات

۴۵- نمودار مکان - زمان متحرکی که در راستای محور  $x$  حرکت می کند، مطابق شکل زیر است. کدام یک از عبارتهای زیر درباره این متحرک درست است؟



- (۱) الف، پ و ت  
(۲) الف و ت  
(۳) ب و پ  
(۴) ب و ت



۴۶- نمودار سرعت - زمان متحرکی که در راستای محور  $x$  حرکت می کند، مطابق شکل مقابل است. اگر در مبدأ زمان متحرک در مکان  $x_0 = -10 \text{ m}$  قرار داشته باشد، در کدام لحظه بر حسب ثانیه، متحرک برای سومین مرتبه از مکان  $x = 6 \text{ m}$  عبور می کند؟

- (۱) ۱۶  
(۲) ۲۲  
(۳) ۲۴  
(۴) ۲۶

۴۷- خودرویی پشت چراغ قرمز ایستاده است. با سبز شدن چراغ، خودرو با شتاب ثابت  $2 \text{ m/s}^2$  شروع به حرکت می کند. در همین لحظه، کامیونی با سرعت ثابت  $36 \text{ km/h}$  از آن سبقت می گیرد. در فاصله چند متری از چراغ راهنمایی، خودرو به کامیون می رسد؟

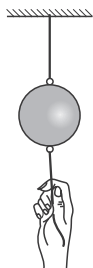
- (۱) ۲۵  
(۲) ۵۰  
(۳) ۱۰۰  
(۴) ۲۰۰

۴۸- در شرایط خلأ، گلوله  $A$  از ارتفاع  $h$  نسبت به سطح زمین رها شده و  $3 \text{ s}$  بعد، گلوله  $B$  از ارتفاع  $\frac{h}{4}$  نسبت به سطح زمین رها می شود. اگر دو گلوله هم زمان به سطح زمین برسند،  $h$  چند متر است؟ ( $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ )

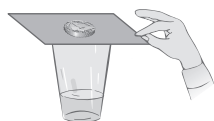
- (۱)  $172/4$   
(۲)  $176/4$   
(۳)  $230/1$   
(۴)  $240/1$

محل انجام محاسبات

۴۹- در شکل (۱)، مقوایی روی لیوان و سکه‌ای روی مقوا قرار دارد و در شکل (۲) یک گوی توسط نخ به نقطه‌ای بسته شده و نخ دیگری به پایین آن متصل است. کدام یک از عبارات‌های زیر درباره این دو شکل درست است؟



شکل (۲)



شکل (۱)

(الف) در شکل (۱) حرکت سریع مقوا، سبب افتادن سکه در لیوان می‌شود.

(ب) در شکل (۱) حرکت آهسته مقوا، سبب افتادن سکه در لیوان می‌شود.

(پ) در شکل (۲) اگر نخ پایین گوی را به طور ناگهانی بکشیم، نخ بالای گوی پاره می‌شود.

(ت) در شکل (۲) اگر نخ پایین گوی را به آرامی بکشیم، نخ بالای گوی پاره می‌شود.

(۴) ب و ت

(۳) ب و پ

(۲) الف و ت

(۱) الف و پ

۵۰- دو گوی هم‌اندازه  $A$  و  $B$  به جرم‌های  $m_A$  و  $m_B$  که  $m_B > m_A$  است، از ارتفاع یکسانی نسبت به سطح زمین رها می‌شوند. با فرض این که نیروی مقاومت هوای وارد بر دو گوی در طی حرکت آن‌ها ثابت و یکسان باشد، کدام مورد درباره مقایسه اندازه شتاب دو گوی ( $a$ ) و تندی آن‌ها در لحظه برخورد به زمین (۷) درست است؟

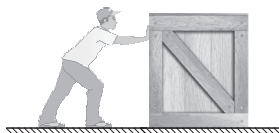
$$v_B > v_A, a_A > a_B \quad (۲)$$

$$v_A > v_B, a_A > a_B \quad (۱)$$

$$v_B > v_A, a_B > a_A \quad (۴)$$

$$v_A > v_B, a_B > a_A \quad (۳)$$

۵۱- در شکل زیر، وقتی شخص به جعبه‌ای به جرم  $۸۰ \text{ kg}$  نیروی افقی به اندازه  $۳۰۰ \text{ N}$  وارد می‌کند، جعبه در آستانه حرکت قرار می‌گیرد. پس از شروع حرکت جعبه، اگر شخص نیروی افقی  $۲۰۰$  نیوتون به آن وارد کند، با شتابی به بزرگی  $۲۵ \text{ m/s}^2$  به صورت تندشونده به حرکت خود ادامه می‌دهد. ضریب اصطکاک ایستایی بین جعبه و سطح چند برابر ضریب اصطکاک جنبشی بین آن‌هاست؟ ( $g = ۱۰ \text{ N/kg}$ )



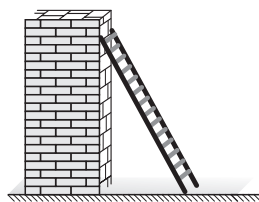
$$\frac{۶}{۵} \quad (۲)$$

$$\frac{۳}{۲} \quad (۴)$$

$$\frac{۵}{۳} \quad (۱)$$

$$\frac{۱۵}{۱۱} \quad (۳)$$

۵۲- در شکل زیر، نردبانی به دیوار قائم بدون اصطکاک تکیه داده شده و در آستانه سر خوردن است. اگر ضریب اصطکاک ایستایی بین سطح افقی و پای نردبان برابر  $۰/۷۵$  باشد، اندازه نیروی که سطح افقی به نردبان وارد می‌کند، چند برابر اندازه نیروی است که دیوار قائم به نردبان وارد می‌کند؟



$$\frac{۴}{۵} \quad (۲)$$

$$\frac{۵}{۴} \quad (۴)$$

$$\frac{۳}{۵} \quad (۱)$$

$$\frac{۵}{۳} \quad (۳)$$

محل انجام محاسبات

۵۳- وزنه‌ای به جرم  $2 \text{ kg}$ ، توسط فنری با ثابت  $2 \text{ N/cm}$  از سقف یک آسانسور آویزان است. وقتی آسانسور با شتاب ثابتی به بزرگی  $2 \text{ m/s}^2$  رو به پایین شروع به حرکت می‌کند، طول فنر به  $L_1$  می‌رسد و وقتی آسانسور با شتاب ثابتی به بزرگی  $3 \text{ m/s}^2$  رو به بالا شروع به حرکت می‌کند، طول فنر به  $L_2$  می‌رسد.  $L_1 - L_2$  برحسب سانتی‌متر کدام است؟ ( $g = 10 \text{ N/kg}$ )

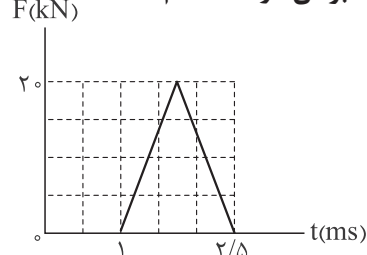
۱ (۴)

۵ (۳)

۱ (۲)

۵ (۱)

۵۴- نمودار اندازه نیروی خالص وارد بر جسمی برحسب زمان مطابق شکل زیر است. در بازه زمانی  $t_1 = 1 \text{ ms}$  تا  $t_2 = 2/5 \text{ ms}$ ، به ترتیب اندازه تغییر تکانه جسم و اندازه نیروی خالص متوسط وارد بر آن در SI کدام است؟



۱۰، ۲۵ (۱)

۱۰۴، ۲۵ (۲)

۱۰، ۱۵ (۳)

۱۰۴، ۱۵ (۴)

۵۵- اگر جرم ماهواره‌ای  $250 \text{ kg}$  باشد، وزن آن در ارتفاع  $3600 \text{ km}$  از سطح زمین چند نیوتون است؟ ( $G = \frac{2}{3} \times 10^{-11} \frac{\text{N.m}^2}{\text{kg}^2}$ ، شعاع کره زمین  $6400 \text{ km}$  و جرم آن  $6 \times 10^{24} \text{ kg}$  است.)

 ۱/۲ × ۱۰<sup>۳</sup> (۴)

 ۱/۲ × ۱۰<sup>۲</sup> (۳)

 ۱۰<sup>۳</sup> (۲)

 ۱۰<sup>۲</sup> (۱)

۵۶- خودرویی به جرم  $1200 \text{ kg}$  روی سطحی افقی، در یک میدان به شعاع  $40 \text{ m}$  با تندی ثابت  $36 \text{ km/h}$  در حال دورزدن است. به ترتیب از راست به چپ دوره حرکت خودرو چند ثانیه و اندازه نیروی مرکزگرای وارد بر آن چند نیوتون است؟

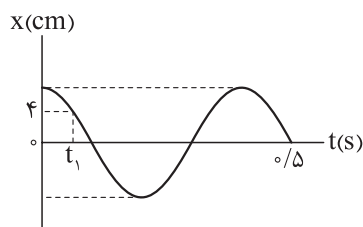
 ۳ × ۱۰<sup>۲</sup>،  $8\pi$  (۲)

 ۳ × ۱۰<sup>۳</sup>،  $8\pi$  (۱)

 ۳ × ۱۰<sup>۲</sup>،  $4\pi$  (۴)

 ۳ × ۱۰<sup>۳</sup>،  $4\pi$  (۳)

۵۷- نمودار مکان - زمان نوسانگر هماهنگ ساده‌ای مطابق شکل زیر است. بردار شتاب این نوسانگر در لحظه  $t_1$  برحسب متر بر مربع ثانیه کدام است؟ ( $\pi^2 = 10$ )


 ۱۰  $\vec{i}$  (۱)

 -۱۰  $\vec{i}$  (۲)

 ۶/۴  $\vec{i}$  (۳)

 -۶/۴  $\vec{i}$  (۴)

محل انجام محاسبات

۵۸- جسمی به جرم  $1\text{ kg}$  به فنری افقی با ثابت  $6\text{ N/cm}$  متصل است. فنر از وضعیت تعادل به اندازه  $9\text{ cm}$  فشرده و سپس رها می‌شود و جسم روی سطح افقی بدون اصطکاکی شروع به نوسان می‌کند. در لحظه‌ای که تندی جسم  $1/6\text{ m/s}$  است، انرژی پتانسیل کشسانی نوسانگر چند ژول است؟

- ۲۴/۳ (۱)      ۲/۴۳ (۲)      ۱۱/۵ (۳)      ۱/۱۵ (۴)

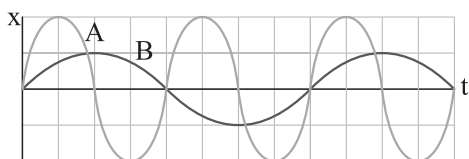
۵۹- فنری به جرم  $300\text{ g}$  و طول  $1/5\text{ m}$  با نیروی  $1/8\text{ N}$  کشیده شده است. انتهای آزاد فنر با بسامد چند هرتز به نوسان درآید تا در طول فنر، موجی عرضی با طول موج  $30\text{ cm}$  ایجاد شود؟

- ۰/۹ (۱)      ۹ (۲)      ۱ (۳)      ۱۰ (۴)

۶۰- در کدام مورد، طول موج امواج رادیویی اشاره‌شده، از راست به چپ افزایش می‌یابد؟

- ELF, AM, FM (۱)      ELF, FM, AM (۲)  
AM, FM, ELF (۳)      FM, AM, ELF (۴)

۶۱- نمودار جابه‌جایی - زمان چشمه‌های دو موج صوتی A و B که در یک محیط منتشر می‌شوند، مطابق شکل زیر است. در یک فاصله معین از چشمه‌ها شدت صوت A چند برابر شدت صوت B است؟ (دو چشمه در یک مکان قرار دارند).

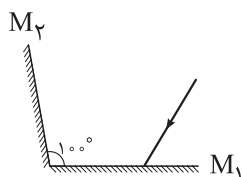


- ۱۶ (۱)      ۱/۱۶ (۲)  
۴ (۳)      ۱/۴ (۴)

۶۲- یک دستگاه صوتی، صدایی با تراز شدت  $\beta_1 = 90\text{ dB}$  و دستگاه صوتی دیگری، صدایی با تراز شدت  $\beta_2 = 95\text{ dB}$  ایجاد می‌کند. اگر شدت صوت مربوط به این دو تراز به ترتیب  $I_1$  و  $I_2$  باشد، نسبت  $\frac{I_1}{I_2}$  کدام است؟

- $\sqrt{10}$  (۱)       $\frac{\sqrt{10}}{10}$  (۲)      ۱۰ (۳)       $\frac{1}{10}$  (۴)

۶۳- در شکل زیر، پرتو نوری با زاویه تابش  $40^\circ$  به آینه تخت  $M_1$  می‌تابد. زاویه بازتاب پرتو نور از آینه تخت  $M_2$  چند درجه است؟



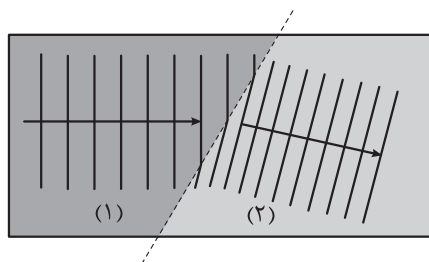
- ۳۰ (۱)      ۴۰ (۲)      ۵۰ (۳)      ۶۰ (۴)

۶۴- کم‌ترین فاصله بین یک شخص و دیوار بلند روبه‌روی او چند متر باشد تا شخص پژواک صدای خود را از صدای اصلی تمیز دهد؟ (تندی صوت در هوا  $340\text{ m/s}$  است).

- ۸/۵ (۱)      ۱۷ (۲)      ۳۴ (۳)      ۶۸ (۴)

محل انجام محاسبات

۶۵- شکل زیر، جبهه‌های موج ایجادشده بر سطح آب درون تشت موجی را در دو ناحیه عمیق و کم عمق نشان می‌دهد. کدام مورد درباره مقایسه تندی انتشار امواج سطحی آب (۷) و عمق آب (h) در دو ناحیه (۱) و (۲) درست است؟ (خط چین رسم شده مرز دو ناحیه را نشان می‌دهد.)



$$h_1 > h_2, v_1 > v_2 \quad (۱)$$

$$h_2 > h_1, v_1 > v_2 \quad (۲)$$

$$h_1 > h_2, v_2 > v_1 \quad (۳)$$

$$h_2 > h_1, v_2 > v_1 \quad (۴)$$

۶۶- باریکه نوری متشکل از دو پرتو قرمز و آبی، از هوا و با زاویه تابش  $53^\circ$  بر سطح تیغه تختی از کوارتز می‌تابد. به ترتیب، زاویه شکست کدام پرتوهای بیشتر است و اختلاف زاویه شکست دو پرتو چند درجه است؟  $\sin 53^\circ = 0.8$  و ضریب شکست تیغه برای پرتوهای آبی و قرمز به ترتیب  $\frac{8}{5}$  و  $\frac{4}{3}$  است.

$$(۱) \text{ آبی}, 7^\circ \quad (۲) \text{ آبی}, 8^\circ \quad (۳) \text{ قرمز}, 7^\circ \quad (۴) \text{ قرمز}, 8^\circ$$

۶۷- چگالی خطی جرم یک تار  $5 \text{ g/m}$  و طول آن  $75 \text{ cm}$  است. اگر نیروی کشش تار از  $288 \text{ N}$  به  $162 \text{ N}$  برسد، بسامد اصلی تار چند هرتز و چگونه تغییر می‌کند؟

$$(۱) 20^\circ, \text{ کاهش می‌یابد.} \quad (۲) 20^\circ, \text{ افزایش می‌یابد.} \quad (۳) 40^\circ, \text{ کاهش می‌یابد.} \quad (۴) 40^\circ, \text{ افزایش می‌یابد.}$$

۶۸- مدل اتمی بور برای اتم هیدروژن در کدام یک از موارد زیر، ناموفق است؟

- (۱) تبیین پایداری اتم  
(۲) تبیین طیف گسیلی و جذبی  
(۳) محاسبه انرژی یونش  
(۴) توضیح تفاوت شدت خط‌های طیف گسیلی

۶۹- شدت تابشی خورشید در سطح زمین  $300 \text{ W/m}^2$  است. اگر طول موج نور خورشید به طور متوسط  $600 \text{ nm}$  باشد، در هر دقیقه چند فوتون به سطحی به مساحت  $5 \text{ m}^2$  می‌رسد؟  $(h = 6.6 \times 10^{-34} \text{ J.s}$  و  $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s})$

$$(۱) 3 \times 10^{22} \quad (۲) 3 \times 10^{23} \quad (۳) 6 \times 10^{22} \quad (۴) 6 \times 10^{23}$$

۷۰- نوری با طول موج  $250 \text{ nm}$  به سطحی از جنس روی با تابع کار  $4/35 \text{ eV}$  می‌تابد. بیشینه تندی فوتوالکترون‌های خارج شده از سطح روی چند متر بر ثانیه است؟  $(h = 4 \times 10^{-15} \text{ eV.s}$ ،  $e = 1/6 \times 10^{-19} \text{ C}$ ،  $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$  و جرم الکترون  $9 \times 10^{-31} \text{ kg}$  است.)

$$(۱) 4 \times 10^5 \quad (۲) 4 \times 10^6 \quad (۳) 2\sqrt{2} \times 10^5 \quad (۴) 2\sqrt{2} \times 10^6$$

محل انجام محاسبات

۷۱- در طیف اتمی هیدروژن، گستره طول موج‌های رشته لیمان ( $n' = 1$ ) چند میکرومتر است؟ ( $R = 0.01 \text{ (nm)}^{-1}$ )

- (۱)  $\frac{1}{3}$  (۲)  $\frac{1}{3}$  (۳)  $\frac{2}{15}$  (۴)  $\frac{4}{3}$

۷۲- الکترون اتم هیدروژنی در تراز  $n = 5$  قرار دارد. با در نظر گرفتن تمام گذارهای ممکن، اگر این اتم به حالت پایه برود، امکان گسیل چند نوع فوتون با انرژی‌های متفاوت وجود دارد؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۲۵ (۳) ۴ (۴) ۱۶

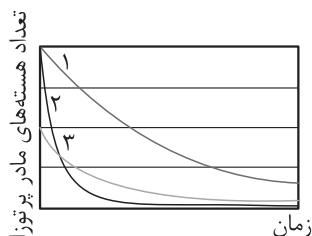
۷۳- کدام یک از عبارات‌های زیر نادرست است؟

- (۱) واپاشی  $\alpha$  در هسته‌های سنگین صورت می‌گیرد.  
 (۲) یکی از کاربردهای واپاشی  $\alpha$  در آشکارسازهای دود است.  
 (۳) واپاشی  $\beta$ ، متداول‌ترین نوع واپاشی در هسته‌هاست.  
 (۴) اغلب هسته‌ها بلافاصله پس از واپاشی  $\alpha$  یا  $\beta$ ، به حالت پایه می‌رسند.

۷۴- در فرایندهای واپاشی «الف» و «ب»، تعداد نوترون‌های هسته مادر به ترتیب از راست به چپ کدام است؟

- الف)  $\frac{A}{Z}X \rightarrow \frac{207}{82}\text{Pb} + \alpha$  (الف)      ب)  $\frac{A}{Z}X \rightarrow \frac{207}{82}\text{Pb} + \beta^-$  (ب)
- (۱) ۱۲۶، ۱۲۴ (۲) ۱۲۳، ۱۲۷ (۳) ۱۲۳، ۱۲۴ (۴) ۱۲۶، ۱۲۷

۷۵- نمودار تغییرات تعداد هسته‌های مادر پرتوزای سه نمونه (۱)، (۲) و (۳) برحسب زمان به شکل زیر است. کدام مقایسه درباره نیمه عمر این سه نمونه (T) درست است؟



- (۱)  $T_2 > T_1 > T_3$   
 (۲)  $T_1 > T_2 > T_3$   
 (۳)  $T_2 > T_3 > T_1$   
 (۴)  $T_1 > T_3 > T_2$

داوطلب گرامی، در این آزمون، در درس شیمی، زوج درس نداریم و همه سؤال‌ها از کتاب شیمی دوازدهم طرح شده است و پاسخگویی به تمام سؤالات این درس اجباری است.

شیمی دوازدهم: شیمی (۳): صفحه‌های ۱ تا ۱۲۱

۷۶- در کدام ستون جدول زیر، ویژگی بیان شده درباره یکی از مخلوط‌ها، نادرست است و این مخلوط از کدام نوع است؟

|                    | ۱       | ۲         | ۳               | ۴                  |
|--------------------|---------|-----------|-----------------|--------------------|
| ویژگی<br>نوع مخلوط | پخش نور | همگن بودن | ته‌نشینی ذره‌ها | ذره‌های سازنده     |
| محلول              | نمی‌کند | همگن      | نمی‌شوند        | یون‌ها و مولکول‌ها |
| کلوئید             | می‌کند  | ناهمگن    | می‌شوند         | توده‌های مولکولی   |
| سوسپانسیون         | می‌کند  | ناهمگن    | می‌شوند         | ذره‌های ریز ماده   |

(۲) ستون ۲، کلوئید

(۱) ستون ۱، سوسپانسیون

(۴) ستون ۴، سوسپانسیون

(۳) ستون ۳، کلوئید

۷۷- درستی یا نادرستی مطالب زیر، به ترتیب کدام است؟

- عدد اکسایش اکسیژن در  $\text{HOF}$  و  $\text{OF}_2$  یکسان است.
- سلول‌های سوختی برخلاف باتری‌ها، انرژی شیمیایی را ذخیره نمی‌کنند.
- نقطه ذوب مخلوط سدیم کلرید و کلسیم کلرید، پایین‌تر از نقطه ذوب سدیم کلرید است.
- پتانسیل کاهش اغلب فلزها همانند پتانسیل کاهش اکسیژن، منفی است.

(۱) نادرست - درست - نادرست - نادرست

(۲) درست - درست - درست - نادرست

(۳) نادرست - درست - درست - نادرست

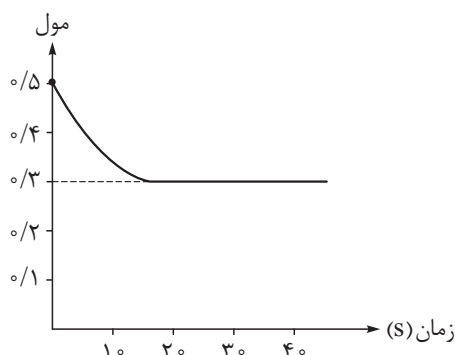
(۴) نادرست - درست - درست - درست

۷۸- کدام مولکول قطبی است، ساختاری خطی دارد و نسبت شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی به پیوندی در آن کم‌تر است؟

(۱) کربونیل سولفید (۲) اوزون (۳) گوگرد تری‌اکسید (۴) هیدروژن سیانید

محل انجام محاسبات

۷۹- واکنش تعادلی:  $2A(g) \rightleftharpoons B(g) + 3C(g)$ ، با وارد کردن ۵/۰ مول A به یک ظرف ۲ لیتری آغاز می‌شود. با توجه به نمودار زیر که تغییر شمار مول‌های A را در واکنش نشان می‌دهد، مقدار ثابت تعادل واکنش کدام است؟



- (۱)  $3 \times 10^{-2}$   
 (۲)  $7/5 \times 10^{-2}$   
 (۳)  $3 \times 10^{-3}$   
 (۴)  $7/5 \times 10^{-3}$

۸۰- در واکنش تبدیل پارازایلین به ترفتالیک اسید در حضور محلول غلیظ پتاسیم پرمنگنات ( $KMnO_4$ )، مجموع تغییر عدد اکسایش اتم‌های کربن، چند برابر مقدار تغییر عدد اکسایش هر اتم منگنز است؟

- (۱) ۲  
 (۲) ۳  
 (۳) ۴  
 (۴) ۶

۸۱- کدام مطلب درباره یخ، درست است؟

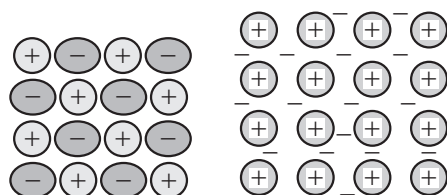
- (۱) نوع جاذبه میان مولکول‌های  $H_2O$  در آن، با نوع جاذبه میان لایه‌های گرافیت یکسان است.  
 (۲) در رأس حلقه‌های شش‌گوشه در ساختار آن، اتم هیدروژن وجود دارد.  
 (۳) هرچند جزء جامدهای مولکولی به حساب می‌آید، اما همانند جامدهای کووالانسی سخت و دیرگداز است.  
 (۴) برخلاف گرافن، ساختاری سه‌بعدی دارد و همانند آن شفاف است.

۸۲- ۱۲ گرم از اسید ضعیف HX و ۸ گرم از اسید ضعیف HY، به طور جداگانه در مقدار مشخصی آب حل شده و حجم هر دو محلول به یک لیتر رسانده می‌شود. اگر pH دو محلول برابر و درجه یونش HX دو برابر درجه یونش HY باشد، نسبت جرم مولی HX به HY کدام است؟

- (۱) ۱/۵  
 (۲) ۲  
 (۳) ۳  
 (۴) ۴

محل انجام محاسبات

۸۳- با توجه به شکل‌های داده شده، چند مورد از مطالب زیر درست است؟



شکل (۲)

شکل (۱)

• شکل (۱) الگوی ساده‌ای از شبکه بلوری فلزها را نشان می‌دهد.

• ساختار ذره‌ای موادی مانند  $\text{MgO(s)}$  و  $\text{HI(s)}$ ، با شکل (۲)

همخوانی دارد.

• بر اثر ضربه چکش، شبکه بلوری شکل (۲) برخلاف شکل (۱)،

در هم فرو ریخته و می‌شکند.

• موادی با ساختار ذره‌ای مشابه این دو شکل، در حالت جامد رسانای خوب جریان برق هستند.

۳ (۲)

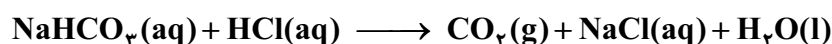
۲ (۱)

۱ (۴)

۴ (۳)

۸۴- اگر از واکنش  $25^\circ\text{C}$  میلی لیتر محلول هیدروکلریک اسید با مقدار کافی سدیم هیدروژن کربنات،  $56$  میلی لیتر گاز

کربن دی اکسید در شرایط STP تولید شود، pH اولیه محلول اسید کدام است؟



۱ / ۳ (۲)

۱ (۱)

۲ (۴)

۱ / ۷ (۳)

۸۵- چند مورد از مطالب زیر درباره فرایند هال، درست است؟

• در این فرایند، الکترودی که به قطب منفی متصل است، نقش واکنش دهنده را نیز دارد.

• آند این سلول، نافلزی است که در جدول دوره‌ای با دو شبه فلز هم گروه است.

• در معادله کلی این فرایند، مجموع ضرایب استوکیومتری مواد پس از موازنه برابر ۱۱ است.

• در این فرایند، فلزی تولید می‌شود که نسبت به فلزهای هم دوره خود کاهنده تر است.

• یکی از فراورده‌های واکنش، اکسیدی است که می‌توان آن را اسید آرنیوس در نظر گرفت.

۲ (۲)

۱ (۱)

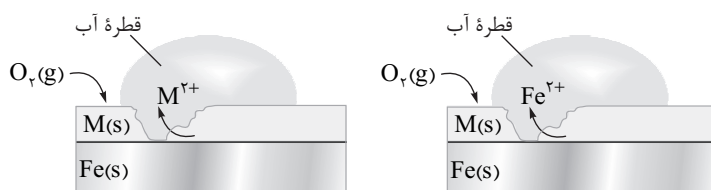
۴ (۴)

۳ (۳)

محل انجام محاسبات

۸۶- با توجه به شکل‌های مقابل، کدام

گزینه درست است؟



شکل (۱)

شکل (۲)

(۱) شکل (۲) می‌تواند مربوط به آهن سفید یا گالوانیزه باشد و نیم‌واکنش کاتدی در آن به صورت  $\text{Fe}^{2+} + 2e^- \rightarrow \text{Fe}$  است.

(۲) از شکل (۲)، می‌توان در ساخت قوطی‌های کنسرو و روغن نباتی استفاده کرد.

(۳) نیم‌واکنش کاهش در هر دو شکل یکسان بوده و مجموع ضرایب گونه‌ها در معادله موازنه‌شده این نیم‌واکنش برابر با ۱۱ است.

(۴) در شکل (۲)، فلز M می‌تواند فلزهایی مانند قلع و منیزیم باشد.

۸۷- با توجه به جدول زیر که مربوط به دو عنصر در دوره سوم جدول تناوبی است، فرمول ترکیب حاصل از این دو

عنصر کدام است؟

| عنصر | شعاع اتم (pm) | شعاع یون (pm) | نسبت مقدار بار به شعاع یون |
|------|---------------|---------------|----------------------------|
| A    | ۱۰۲           | ۱۸۴           | $1/09 \times 10^{-2}$      |
| B    | ۱۴۳           | ۵۶            | $5/36 \times 10^{-2}$      |

AB (۲)

$\text{A}_2\text{B}_3$  (۱)

$\text{BA}_2$  (۴)

$\text{B}_2\text{A}_3$  (۳)

۸۸- چند مورد از مطالب زیر درباره سیلیسیم کربید، نادرست است؟ ( $\text{Si} = 28, \text{C} = 12: \text{g. mol}^{-1}$ )

- یک ساینده گران قیمت است که در تهیه سنباده به کار می‌رود.
- سختی آن از الماس کم‌تر و از سیلیسیم بیشتر است.
- در هر گرم از آن،  $1/505 \times 10^{22}$  اتم شبه‌فلز وجود دارد.
- برای توصیف آن نمی‌توان از واژه‌های شیمیایی رایجی مانند نیروهای بین مولکولی و فرمول مولکولی استفاده کرد.

۳ (۲)

۴ (۱)

۲ (۴)

۱ (۳)

محل انجام محاسبات

۸۹- با توجه به واکنش‌های داده شده، چند مورد از مطالب زیر درست‌اند؟ ( $H = 1, C = 12, O = 16: g. mol^{-1}$ )

I) اتانول  $A \xrightarrow{X}$  + گاز اتن

D  $\longrightarrow$  محلول آبی ورقیق پتاسیم پرمنگنات + گاز اتن II)

III) افشانه بی‌حس‌کننده موضعی  $E \longrightarrow$  + گاز اتن

• ماده D، یک دی‌الکل است و جرم مولی آن، ۱۶ گرم بیشتر از جرم مولی فراورده واکنش (I) است.

• ماده X، می‌تواند یک اسید قوی دوپروتون‌دار باشد که در باران اسیدی نیز وجود دارد.

• در نقشه پتانسیل الکتروستاتیکی ماده A، اتم مرکزی به رنگ سرخ است.

• ماده E، اسید آرنیوس به حساب می‌آید و pH محلول ۱ مولار آن برابر صفر است.

• در واکنش (II)، مجموع عدد اکسایش اتم‌های کربن، ۲ واحد افزایش می‌یابد.

(۱) ۵ (۲) ۳

(۳) ۴ (۴) ۲

| ترکیب        | ثابت یونش ( $K_a$ )   |
|--------------|-----------------------|
| $C_6H_5COOH$ | $6/5 \times 10^{-5}$  |
| $HNO_2$      | $4/5 \times 10^{-4}$  |
| $HOBr$       | $2 \times 10^{-9}$    |
| $HCN$        | $4/9 \times 10^{-10}$ |

۹۰- با توجه به جدول مقابل که ثابت یونش چند اسید را نشان می‌دهد،

کدام مطلب نادرست است؟

(۱) در دما و غلظت یکسان، pH محلول هیدروسیانیک اسید نسبت

به pH سایر محلول‌ها بیشتر است.

(۲) pH محلول ۲ / ۰ مولار HOBr برابر با ۷ / ۴ است.

(۳) در دما و غلظت یکسان، رسانایی الکتریکی محلول نیترئو اسید از رسانایی الکتریکی محلول بنزوئیک اسید بیشتر است.

(۴) در دمای اتاق، غلظت یون هیدروکسید در محلول ۱ / ۰ مولار هیدروسیانیک اسید برابر با  $7 \times 10^{-8}$  مولار است.

۹۱- در دو ظرف جداگانه، محلول‌هایی به حجم ۱۰ لیتر از هیدروکلریک اسید (ظرف I) و پتاسیم هیدروکسید (ظرف II) را وارد

می‌کنیم. برای خنثی شدن محلول ظرف (I) از سدیم هیدروکسید و برای خنثی شدن ظرف (II) از هیدروژن برمید استفاده می‌کنیم.

اگر pH محلول بازی اولیه برابر ۱۳ و نسبت جرم مصرفی HBr به NaOH برابر ۲۵ / ۲ باشد، pH اولیه محلول اسیدی

چه قدر بوده است؟ (از تغییر حجم در اثر اضافه کردن مواد صرف نظر کنید؛  $Br = 80, Na = 23, O = 16, H = 1: g. mol^{-1}$ )

(۱) ۰ / ۷ (۲) ۱

(۳) ۱ / ۷ (۴) ۲

محل انجام محاسبات

۹۲- اگر  $emf$  سلولی که در آن واکنش  $X + 2Ag^+ \longrightarrow X^{2+} + 2Ag$  انجام می‌شود، برابر  $1/56$  ولت و  $emf$  سلولی که در آن واکنش  $B + Cu^{2+} \longrightarrow B^{2+} + Cu$  انجام می‌شود، برابر  $1/53$  ولت باشد، کدام موارد از مطالب زیر درست است؟

$E^\circ(Cu^{2+}/Cu) = +0/34 V$ ,  $E^\circ(Ag^+/Ag) = +0/8 V$

الف) قدرت کاهندگی فلز B از فلز X بیشتر است.

ب) در واکنش  $1/0$  مول فلز X با مقدار کافی محلول نقره نیترات،  $6/02 \times 10^{21}$  الکترون میان اکسنده و کاهنده مبادله می‌شود.

پ) در کاتد سلول گالوانی B - Cu، با گذشت زمان، شدت رنگ محلول الکترولیت کاهش می‌یابد.

ت) اگر قطعه‌ای از فلز X را در محلولی از یون‌های  $B^{2+}$  قرار دهیم، یک واکنش الکتروشیمیایی انجام می‌شود.

(۱) الف - ب (۲) پ - ب (۳) الف - پ (۴) ب - ت

۹۳- چه تعداد از مقایسه‌های زیر برای ترکیب‌های سدیم اکسید (A)، منیزیم فلئورید (E) و کلسیم سولفید (D)، درست است؟

• آنتالپی فروپاشی شبکه بلور:  $D > E > A$

• چگالی بار کاتیون سازنده:  $E > D > A$

• شعاع آنیون سازنده:  $D > A > E$

• نسبت شمار کاتیون به آنیون:  $A > D > E$

(۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

۹۴- با توجه به پاک‌کننده‌های داده‌شده، کدام مطلب نادرست است؟

| پاک‌کننده | فرمول پاک‌کننده                                         |
|-----------|---------------------------------------------------------|
| A         | HCl                                                     |
| B         | $\underbrace{C_{17}H_{35}}_a - \underbrace{COO^-K^+}_b$ |
| C         | NaOH                                                    |
| D         | $C_{12}H_{25} - C_6H_5 - SO_3^-Na^+$                    |

(۱) پاک‌کننده D غیرصابونی است و خاصیت پاک‌کنندگی خود را در آب سخت حفظ می‌کند.

(۲) برای بازکردن لوله فاضلابی که با اسیدهای چرب مسدود شده است، باید از پاک‌کننده C استفاده کرد.

(۳) B یک پاک‌کننده صابونی مایع است و بخش a در آن، آب‌گریز است.

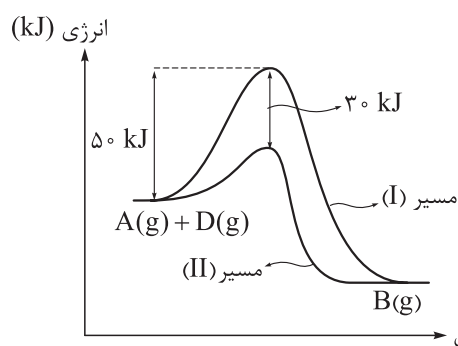
(۴) پاک‌کننده A جزء پاک‌کننده‌های خورنده است و واکنش آن با پاک‌کننده C، از نوع اکسایش - کاهش است.

محل انجام محاسبات

۹۵- درصد یونش یک باز ضعیف (BOH) در محلولی از آن با  $\text{pH} = 10/3$  برابر ۲ است. غلظت مولی یون هیدروکسید در این محلول، چند برابر غلظت مولی یون هیدرونیوم است و در  $500$  میلی لیتر از این محلول، چند میلی مول باز حل شده است؟

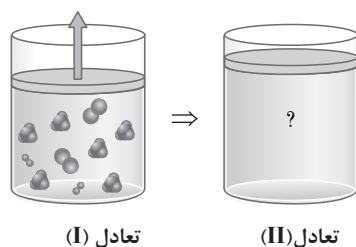
- (۱)  $4 \times 10^{-6} / 5$  (۲)  $4 \times 10^{-8}$  (۳)  $4 \times 10^{-6}$  (۴)  $4 \times 10^{-8} / 5$

۹۶- با توجه به نمودار زیر که مربوط به پیشرفت واکنش تعادلی  $\text{A(g)} + \text{D(g)} \rightleftharpoons \text{B(g)}$  در غیاب و حضور کاتالیزگر است، کدام مطلب درست است؟



- (۱) به ازای مقدار معینی از واکنش دهنده‌ها، گرمای مبادله شده در مسیر (I) کم‌تر از گرمای مبادله شده در مسیر (II) است.  
(۲) با افزایش دما، مقدار ثابت تعادل واکنش افزایش می‌یابد.  
(۳) تفاوت انرژی فعال‌سازی واکنش در غیاب و حضور کاتالیزگر برابر با  $20 \text{ kJ}$  است.

(۴) مجموع آنتالپی پیوندها در مواد واکنش دهنده، کم‌تر از مجموع آنتالپی پیوندها در فراورده است.



۹۷- شکل مقابل مربوط به واکنش تعادلی تولید آمونیاک به روش هابر در سیلندری با پیستون روان در دمای ثابت است. اگر مطابق شکل، پیستون به سمت بیرون کشیده شود، چند مورد از مطالب زیر درست است؟

- تعادل در جهت رفت جابه‌جا می‌شود و درصد مولی گاز قطبی افزایش می‌یابد.
- غلظت مولی گازهای نیتروژن و هیدروژن در تعادل (II) بیشتر از تعادل (I) است.
- با این تغییر، شمار مولکول‌های آمونیاک در تعادل کاهش می‌یابد.
- با جابه‌جایی تعادل، شمار مولکول‌های نیتروژن در تعادل افزایش و مقدار ثابت تعادل واکنش، کاهش می‌یابد.

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

محل انجام محاسبات

۹۸- کدام مورد، جزء شباهت‌های سلول برقکافت منیزیم کلرید مذاب و سلول برقکافت آب است؟

- (۱) شمار الکترون‌های مبادله شده
- (۲) تولید گاز دواتمی در قطب مثبت سلول
- (۳) نسبت مولی فراورده‌های تولیدشده
- (۴) گستره دمایی مایع بودن واکنش دهنده‌ها

۹۹- با توجه به جدول داده شده که مواد مؤثر موجود در سه نمونه ضداسید را نشان می‌دهد، کدام مطلب نادرست است؟

( $H = 1, O = 16, Al = 27 : g. mol^{-1}$ )

| شماره ضداسید | ۱                   | ۲                    | ۳         |
|--------------|---------------------|----------------------|-----------|
| ماده مؤثر    | $Al(OH)_3, NaHCO_3$ | $Al(OH)_3, Mg(OH)_2$ | $NaHCO_3$ |

- (۱) ماده اصلی موجود در شیر منیزی، در ضداسید (۲) وجود دارد.
  - (۲) نام ماده مؤثر موجود در ضداسید (۳)، جوش شیرین است.
  - (۳) نمونه‌ای از ضداسید (۲) که حاوی  $0.07\%$  مول  $Mg(OH)_2$  و  $0.03\%$  مول  $Al(OH)_3$  است، می‌تواند  $0.23\%$  مول اسید معده را خنثی کند.
  - (۴) اگر  $8/10\%$  درصد جرمی ضداسید (۱)، آلومینیم باشد، درصد جرمی  $NaHCO_3$  در این ضداسید برابر با  $8/86\%$  است.
- ۱۰۰- چند مورد از مطالب زیر، درباره مقایسه سلول‌های گالوانی «روی - مس» و «مس - نقره» درست است؟
- جهت حرکت آنیون‌ها از دیواره متخلخل در سلول گالوانی « $Cu - Ag$ » به سمت نیم‌سلول نقره و در سلول گالوانی « $Zn - Cu$ » به سمت نیم‌سلول روی است.
  - با گذشت زمان و انجام شدن واکنش، جرم تیغه مس در هر دو سلول گالوانی افزایش می‌یابد.
  - به ازای مصرف ۱ مول از گونه کاهنده در واکنش کلی هر سلول، تغییر غلظت مولی گونه اکسندۀ در هر دو سلول به یک اندازه است.
  - جهت حرکت الکترون‌ها در سلول « $Cu - Ag$ »، از الکتروود مس به الکتروود نقره و در سلول « $Zn - Cu$ »، از الکتروود روی به الکتروود مس است.

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

محل انجام محاسبات

۱۰۱- برای آبکاری یک جسم آهنی به جرم ۲۵ گرم از فلز نقره استفاده می شود. در این فرایند، جسم آهنی نقش ..... را ایفا می کند و اگر ۰/۰۴ مول الکترون در سلول مبادله شود، جرم آن ..... درصد افزایش می یابد. ( $\text{Fe} = ۵۶$  و  $\text{Ag} = ۱۰۸ : \text{g.mol}^{-1}$ )

(۱) کاتد - ۸ / ۹۶

(۲) قطب مثبت - ۱۷ / ۲۸

(۳) قطب منفی - ۱۷ / ۲۸

(۴) آند - ۸ / ۹۶

۱۰۲- یون سیلیکات از نظر شمار اتم های اکسیژن در فرمول شیمیایی، عدد اکسایش اتم مرکزی و نسبت شمار جفت الکترون های پیوندی به ناپیوندی، به ترتیب مشابه کدام یون ها است؟

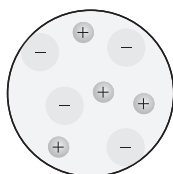
(۱) فسفات - سولفات - کربنات

(۲) سولفات - کربنات - فسفات

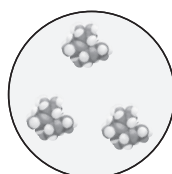
(۳) سولفات - نیترات - فسفات

(۴) فسفات - کربنات - نیترات

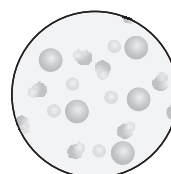
۱۰۳- با توجه به شکل های داده شده، کدام موارد از مطالب زیر درست اند؟ (مولکول های آب نشان داده نشده اند.)



(I)



(II)



(III)

الف) با افزایش غلظت محلول (II)، می توان رسانایی الکتریکی آن را به محلول (I) نزدیک کرد.

ب) محلول (III) می تواند محلول ۱ مولار هر یک از هیدروکسیدها باشد.

پ) محلول (I) می تواند حاوی یک الکترولیت قوی مانند نمک خوراکی باشد.

ت) نوع رسانایی الکتریکی محلول (I)، با نوع رسانایی الکتریکی آلوتوپ پایدارتر کربن متفاوت است.

(۱) الف - ب - ت

(۲) پ - ت

(۳) ب - پ - ت

(۴) الف - پ

۱۰۴- اگر در سلول گالوانی منیزیم - نقره، پس از گذشت مدت زمان معین، اختلاف جرم تیغه های آند و کاتد به ۴۸ گرم برسد، در این مدت چند الکترون در سلول مبادله شده است؟ (جرم اولیه الکترودها را برابر در نظر بگیرید،

( $\text{Mg} = ۲۴, \text{Ag} = ۱۰۸ : \text{g.mol}^{-1}$ )

 (۱)  $۱/۵۰۵ \times ۱۰^{۲۴}$ 

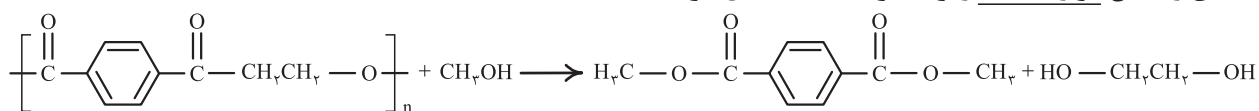
 (۲)  $۹/۰۳ \times ۱۰^{۲۳}$ 

 (۳)  $۱/۸۰۶ \times ۱۰^{۲۴}$ 

 (۴)  $۲/۴۰۸ \times ۱۰^{۲۳}$ 

محل انجام محاسبات

۱۰۵- در شرایط مناسب، ۳۰۰ مول گاز هیدروژن با مقدار کافی کربن مونوکسید واکنش می دهد. اگر بازده واکنش ۷۵ درصد باشد، طی این فرایند چند کیلوگرم متانول تولید خواهد شد و با این مقدار متانول، چند کیلوگرم PET را می توان مطابق واکنش موازنه نشده زیر به مواد مفید تبدیل کرد؟ ( $H = 1, C = 12, O = 16 : g. mol^{-1}$ )



۸ / ۱،۳ / ۶ (۲)

۱۰ / ۸،۴ / ۸ (۱)

۸ / ۱،۴ / ۸ (۴)

۱۰ / ۸،۳ / ۶ (۳)

محل انجام محاسبات



## آزمون آزمایشی خیلی سبز

| نام درس                       | طراحان به ترتیب حروف الفبا                                                                                                                       |
|-------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| حسابان                        | حسین شفیع زاده - مهرداد کیوان                                                                                                                    |
| ریاضیات گسسته و آمار و احتمال | مصطفی دیداری - علیرضا شریف خطیبی - عطا صادقی - سروش موئینی                                                                                       |
| هندسه                         | امیرحسین ابومحبوب - محمد رضا حسینی فرد - کیوان صارمی - حمید گلزاری - محسن میراسلامی                                                              |
| فیزیک                         | محمد باغبان - محسن توانا - علیرضا جباری - مجید ساکی - رضا سزمیدانی - نوید شاهی - علیرضا عبداللہی - حمید فدائی فرد - فرزاد نامی                   |
| شیمی                          | فرشید ابراهیمی - مجتبی ابراهیمی - مهدی براتی - پیمان خواجوی مجد - حسن رحمتی کوکندہ - ہالہ طاہری پور - رضا فولادپور - میلاد قاسمی - محدثہ ملک پور |

| نام درس                       | مستقل درس                     | گزینشگر                       | مؤلف پاسخ نامه                             | کارشناسان علمی - محتوایی<br>به ترتیب حروف الفبا | ویراستاران<br>به ترتیب حروف الفبا                                           |
|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|--------------------------------------------|-------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------|
| حسابان                        | حسین شفیع زاده - مهرداد کیوان | حسین شفیع زاده - مهرداد کیوان | مصطفی دیداری                               | علی شہرایی - حمید گلزاری                        | عادل حسینی - عاطفہ خان محمدی - شقایق راہبریان - محمدحسین رحیمی              |
| ریاضیات گسسته و آمار و احتمال | علیرضا شریف خطیبی             | مصطفی دیداری                  | مصطفی دیداری                               | سروش موئینی                                     | عاطفہ خان محمدی - محمدحسین رحیمی - محمدجواد نوری - مریم نظری                |
| هندسه                         | حمید گلزاری                   | حمید گلزاری                   | حمید گلزاری                                | محسن میراسلامی                                  | زہرا جالینوسی - محمدحسین رحیمی - ندا صالح پور - محمدجواد نوری               |
| فیزیک                         | رضا سزمیدانی                  | نوید شاهی                     | محمد باغبان - محمدجواد سورچی - علیرضا گونه | علیرضا جباری - علیرضا عبداللہی                  | مہدی بابائی - نرجس تیمناک - محمدرضا فضلی - احسان محمدی - امیر محمودی انزایی |
| شیمی                          | یاسر عبداللہی                 | یاسر عبداللہی                 | محدثہ ملک پور                              | حسین ایروانی                                    | یاسر راش - احسان رحیمی - ہومن زندی                                          |

مدیر آزمون: مہدی ہاشمی  
سرپرست محتوایی: فاطمہ آقاچانیپور



حسابان دوازدهم و پایه مرتبط: حسابان (۲): صفحه‌های ۱ تا ۱۴۴

## تست و پاسخ ۱

نقطه  $A(2, 3)$  روی نمودار تابع  $y = f(\frac{x}{3})$  و نقطه  $A'(a, b)$  متناظر با آن روی نمودار تابع  $y = 1 + 3f(x)$  است.  $a + b$  کدام است؟

نقطه در تابع صدق می‌کند.

نقطه در تابع صدق می‌کند.

$$11 \quad (4)$$

$$14 \quad (3)$$

$$\frac{5}{3} \quad (2)$$

$$\frac{2}{3} \quad (1)$$

## پاسخ: گزینه ۴

**خود حل کنی بهتره** اگر نقطه‌ای روی تابعی باشد، مختصات آن در ضابطه تابع صدق می‌کند؛ یعنی  $y$  و  $x$  نقطه را می‌توانیم به جای  $y$  و  $x$  تابع قرار دهیم.

### درس نامه به دست آوردن نقطه متناظر در تابع تبدیل یافته

فرض کنیم نقطه  $(x_0, y_0)$  روی نمودار تابع  $f$  باشد؛ یعنی  $f(x_0) = y_0$ . می‌خواهیم ببینیم این نقطه روی نمودار تابع  $y = af(bx + c) + d$  به کدام نقطه متناظر  $(A')$  تبدیل می‌شود. برای این منظور به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$(1) \quad bx + c = x_0 \quad \text{قرار می‌دهیم؛ پس} \quad x = \frac{x_0 - c}{b} \quad \text{می‌شود.}$$

$$(2) \quad \text{با قراردادن } x \text{ در تابع تبدیل یافته، داریم:} \quad y = af(x_0) + d = ay_0 + d$$

$$\text{یعنی نقطه } A \text{ به نقطه } A'(\frac{x_0 - c}{b}, ay_0 + d) \text{ تبدیل می‌شود.}$$

مثلاً برای این که ببینیم  $(2, -1)$  روی نمودار تابع  $f$  به کدام نقطه روی نمودار تابع  $y = -2f(1-2x) + 3$  تبدیل می‌شود، داریم:

$$\left. \begin{aligned} 1-2x &= 2 \Rightarrow -2x = 1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \\ y &= -2f(2) + 3 = -2(-1) + 3 = 5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow A'(-\frac{1}{2}, 5)$$

برای انجام عملیات برعکس نیز اگر نقطه  $A$  روی تابع  $y = af(bx + c) + d$  باشد (مثل این سؤال) با جای گذاری، به رابطه  $f(k) = t$  می‌رسیم؛ پس  $(k, t)$  نقطه متناظر روی  $f$  است.

### پاسخ تشریحی روش اول:

گام اول: نقطه  $A(2, 3)$  روی تابع  $y = f(\frac{x}{3})$  است، پس با جای گذاری مختصات در آن صدق می‌کند؛

$$\text{یعنی} \quad 3 = f(\frac{2}{3}) \quad \text{یا} \quad 3 = f(1) \quad \text{یا} \quad (1, 3) \in f.$$

گام دوم: نقطه  $A'(a, b)$  متناظر نقطه  $(1, 3)$  روی نمودار  $y = 1 + 3f(x)$  است، پس اگر  $x = a$  قرار دهیم  $y = b$  می‌شود؛ یعنی:

$$1 + 3f(a) = b \Rightarrow f(a) = \frac{b-1}{3} \Rightarrow (a, \frac{b-1}{3}) \in f$$

گام سوم: با مساوی قراردادن دو نقطه داریم:

$$\begin{cases} a = 1 \\ \frac{b-1}{3} = 3 \Rightarrow b-1 = 9 \Rightarrow b = 10 \end{cases}$$

$$a + b = 1 + 10 = 11$$

گام چهارم:

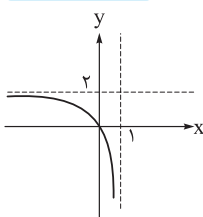
روش دوم:

$f(1) = 3$  برای این که ببینیم این نقطه به کدام نقطه روی تابع  $y = 1 + 3f(x)$  تبدیل می‌شود کافی است عرض نقطه (یعنی ۳) را ۳ برابر کرده و با یک جمع کنیم؛ پس این نقطه به نقطه  $(1, 10)$  تبدیل می‌شود، یعنی  $a = 1$  و  $b = 10$ .



## تست و پاسخ ۲

$$x \rightarrow x - 2$$



قسمتی از نمودار تابع هموگرافیک  $f$  به صورت مقابل است. نمودار تابع  $\frac{1}{f}$  را در راستای افقی ۲ واحد به سمت

راست انتقال داده و سپس نمودار حاصل را نسبت به محور  $x$  ها قرینه کرده و ۳ واحد به سمت پایین انتقال

می‌دهیم. نمودار نهایی، محور  $x$  ها را در نقطه‌ای با کدام طول قطع می‌کند؟

$$f(x) - 3$$

$$\frac{13}{7} \quad (2)$$

$$\frac{15}{7} \quad (4)$$

$$-f(x)$$

$$-\frac{15}{7} \quad (1)$$

$$-\frac{13}{7} \quad (3)$$

## پاسخ: گزینه ۴

**مشاوره** سؤال بسیار مهمی است؛ این‌که یک تابع داریم و روی آن تغییراتی را اعمال می‌کنیم تا تابع جدیدی به دست آید. از بحث انتقال، قرینه‌کردن و انقباض و انبساط معمولاً یک سؤال در کنکور می‌آید که مشابه این سؤال است.

**خودت حل کنی بهتره** در توابع هموگرافیک  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ، ریشهٔ مخرج همان مجانب قائم و  $y = \frac{a}{c}$  مجانب افقی است.

**درس‌نامه** تابع هموگرافیک  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$  (در یک نگاه:  $ad - bc \neq 0, c \neq 0$ )

نکات

۱

$$f'(x) = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}$$

$$cx + d = 0 \Rightarrow x = -\frac{d}{c}$$

$$y = \frac{a}{c}$$

۲ تابع یک مجانب قائم دارد که ریشهٔ مخرج است:

۳ تابع یک مجانب افقی دارد که نسبت ضرایب  $x$  صورت به مخرج است:

۴ نمودار تابع به یکی از دو صورت زیر است:

| شرط           | نمودار | وضعیت یکنوایی    | وضعیت تقعر (نقطهٔ عطف ندارد).      |
|---------------|--------|------------------|------------------------------------|
| $ad - bc > 0$ |        | در هر شاخه صعودی | ابتدا رو به بالا و بعد رو به پایین |
| $ad - bc < 0$ |        | در هر شاخه نزولی | ابتدا رو به پایین و بعد رو به بالا |

۵  $f^{-1}(x) = \frac{-dx + b}{cx - a}$  (برای وارون کردن جای  $a, d$  را عوض کرده و آن‌ها را قرینه می‌کنیم).

۶ اگر  $c = 0$ ، تابع هموگرافیک نبوده و تبدیل به تابع خطی می‌شود.

۷ اگر  $ad - bc = 0$  باشد، صورت و مخرج ساده شده و تابع تبدیل به تابع ثابت می‌گردد.

۸ اگر بازه شامل مجانب قائم باشد، تابع در آن بازه غیریکنواست.

**پاسخ تشریحی** گام اول: ضابطهٔ تابع هموگرافیک را به صورت  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$  در نظر می‌گیریم.

گام دوم:  $x = 1$  مجانب قائم یا همان ریشهٔ مخرج است؛ پس  $c(1) + d = 0$  یا  $d = -c$ .



گام سوم: مجانب افقی  $y = 2$  یا همان نسبت ضرایب  $x$  است، پس  $\frac{a}{c} = 2$  و در نتیجه  $a = 2c$ .

گام چهارم: تابع از مبدأ عبور می کند، پس  $f(0) = 0$  یا  $\frac{b}{d} = 0$ ؛ در نتیجه  $b = 0$ .

گام پنجم: با جای گذاری  $d$  و  $a$  بر حسب  $c$  داریم:

$$f(x) = \frac{2cx}{cx - c} = \frac{2cx}{c(x-1)} = \frac{2x}{x-1}$$

گام ششم: ضابطه تابع  $\frac{1}{f} = \frac{x-1}{2x}$  به صورت  $\frac{1}{f(x)} = \frac{x-1}{2x}$  می شود که با تبدیل  $x \rightarrow x-2$  دو واحد به راست می رود:

$$y_1 = \frac{x-2-1}{2(x-2)} = \frac{x-3}{2x-4}$$

گام هفتم: اگر کل تابع را منفی کنیم، نمودار آن نسبت به محور  $x$ ها قرینه می شود؛ یعنی:

$$y_2 = -\frac{x-3}{2x-4}$$

گام هشتم: اگر از ضابطه پایانی سه واحد کم کنیم؛ یعنی  $y_3 = -\frac{x-3}{2x-4} - 3$ ، تابع نهایی به دست می آید.

گام نهم:

$$y = 0 \Rightarrow -\frac{x-3}{2x-4} - 3 = 0 \Rightarrow \frac{x-3}{2x-4} = -3 \Rightarrow x-3 = -6x+12 \Rightarrow 7x=15 \Rightarrow x=\frac{15}{7}$$

۳

## تست و پاسخ

نقطه  $A(-1, 2)$  نقطه عطف تابع  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$  است. باقی مانده تقسیم چندجمله ای  $f(ax+b)$  بر  $x+1$  کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

## پاسخ: گزینه ۳

**خودت حل کنی بهتره** اگر  $A(a, b)$  نقطه عطف تابع چندجمله ای باشد،  $f(a) = b$  و  $f'(a) = 0$ .

### درس نامه •• نقطه عطف

نقطه  $x_0$  نقطه عطف تابع  $f$  است هرگاه:

(۱)  $x_0 \in D_f$  (تعریف شده باشد).

(۲)  $f$  در  $x_0$  پیوسته باشد.

(۳) جهت تغییر تغییر کند. (علامت  $f''$  تغییر کند).

(۴) خط مماس واحد داشته باشد. (نقطه ناپیوسته یا گوشه نباشد، ولی مماس قائم می تواند داشته باشد).

روش تغییر نقاط در تابع هایی که مشتق دوم دارند:

(۱)  $f''(x)$  را محاسبه کرده و مساوی صفر قرار می دهیم.

(۲) جواب های  $f''(x) = 0$  را به دست آورده و  $f''$  را تعیین علامت می کنیم.

(۳) اگر  $f''$  در هر ریشه ای تغییر علامت بدهد، آن ریشه نقطه عطف است.

**نکته** اگر  $x = x_0$  ریشه ساده  $f''$  باشد، قطعاً تغییر علامت می دهد؛ پس نقطه عطف است.

**نکته** اگر تابع در  $x = x_0$  نقطه عطف و مشتق دوم داشته باشد (مثل چندجمله ای ها، کسری ها و رادیکالی ها):  $f''(x_0) = 0$

**نکته** تابع درجه سوم  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  فقط یک نقطه عطف دارد که از رابطه  $x = -\frac{b}{3a}$  به دست می آید.

### درس نامه •• به دست آوردن باقی مانده تقسیم چندجمله ای $f(x)$ بر $ax+b$ :

(۱) ریشه مقسوم علیه را به دست می آوریم:

$$ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

(۲) ریشه را در  $f$  قرار می دهیم تا باقی مانده که یک عدد است، به دست آید؛ پس:

$$R = f\left(-\frac{b}{a}\right)$$



## پاسخ تشریحی

$$(-1)^3 + a(-1)^2 + b(-1) + 1 = 2 \Rightarrow a - b = 2$$

گام اول: مختصات نقطه  $A(-1, 2)$  در تابع صدق می‌کند:

گام دوم: طول نقطه عطف (یعنی  $x = -1$ ) مشتق دوم تابع را صفر می‌کند:

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \Rightarrow f''(x) = 6x + 2a \xrightarrow{x=-1} -6 + 2a = 0 \Rightarrow a = 3 \xrightarrow{\text{گام اول}} b = 1$$

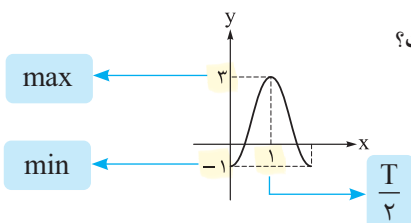
گام سوم: با جای گذاری  $b$  و  $a$  باید باقی‌مانده تقسیم  $f(3x+1)$  را بر  $x+1$  به دست آوریم؛ پس ریشه مقسوم‌علیه (یعنی  $x = -1$ ) را در مقسوم

$$\text{قرار می‌دهیم: } f(3(-1)+1) = f(-2) = (-2)^3 + 3(-2)^2 + 1(-2) + 1 = -8 + 12 - 2 + 1 = 3$$

قرار می‌دهیم:

## تست و پاسخ ۴

قسمتی از نمودار تابع  $f(x) = c + a \cos bx$  به صورت مقابل است. حاصل  $\frac{1}{\pi} a |b|$  کدام است؟



$$-4 \quad (2)$$

$$4 \quad (1)$$

$$2 \quad (4)$$

$$-2 \quad (3)$$

## پاسخ: گزینه ۳

**مشاوره** از مثلثات دوازدهم معمولاً دو سؤال در کنکور می‌آید؛ یکی معادله و دیگری نمودار مثلثاتی! معمولاً یک نمودار و یک ضابطه

که در آن چندتا مجهول وجود دارد، داده می‌شود و شما باید باتوجه به  $\max$ ،  $\min$ ،  $T$  و نقاط داده‌شده آن‌ها را پیدا کنید. حواستان به علامت ضرب ایب عددی باشد.

## درس نامه

بررسی مقدار  $\max$ ،  $\min$  و دوره تناوب تابع‌های

$$\begin{cases} y = a \sin(bx) + c \\ y = a \cos(bx) + c \end{cases}$$

قدر مطلق ضرب

$$\max = |a| + c \quad (\text{بالاترین عرض})$$

$$\min = -|a| + c \quad (\text{پایین‌ترین عرض})$$

$$T = \frac{2\pi}{|b|} \quad (\text{دوره تناوب})$$

عدد ثابت

بررسی شروع نمودارهای کسینوسی از محور  $y$ ‌ها:

| ضابطه                | شرط     | شروع نمودار از محور $y$ ‌ها | وضعیت | توضیح                                                                           |
|----------------------|---------|-----------------------------|-------|---------------------------------------------------------------------------------|
| $y = a \cos(bx) + d$ | $a > 0$ |                             | نزولی | اگر $a$ مثبت باشد، شروع نمودار از محور $y$ ‌ها نزولی است. (علامت $b$ مهم نیست.) |
|                      | $a < 0$ |                             | صعودی | اگر $a$ منفی باشد، شروع نمودار از محور $y$ ‌ها صعودی است. (علامت $b$ مهم نیست.) |

## پاسخ تشریحی

گام اول: بالاترین عرض نمودار برابر ۳ و پایین‌ترین عرض برابر -۱ است؛ پس:

$$\begin{cases} \max = 3 \Rightarrow |a| + c = 3 \\ \min = -1 \Rightarrow -|a| + c = -1 \end{cases} \Rightarrow 2c = 2 \Rightarrow c = 1 \Rightarrow |a| = 2 \Rightarrow a = \pm 2$$

گام دوم: شروع نمودار کسینوسی به صورت صعودی است، پس روی نمودار اصلی کسینوس قرینه‌سازی صورت گرفته؛ پس  $a < 0$  بوده و

$a = -2$  قابل قبول است.



$$T = \frac{2\pi}{|b|} = 2 \Rightarrow |b| = \pi$$

گام سوم: نصف دوره تناوب برابر ۱ است؛ پس  $T = 2$  است:

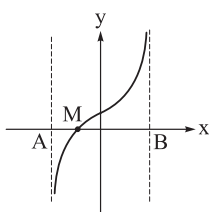
$$\frac{1}{\pi} a |b| = \frac{1}{\pi} \times (-2) \times \pi = -2$$

گام چهارم:

## تست و پاسخ ۵

نمودار تابع  $f(x) = 1 + \tan(ax)$  در یک دوره تناوب به صورت مقابل است. نقطه  $M$ ، فاصله بین

دو مجانب رسم شده را به چه نسبتی تقسیم می کند؟



$$\frac{MB}{AM} = ?$$

(۲) ۸ به ۳

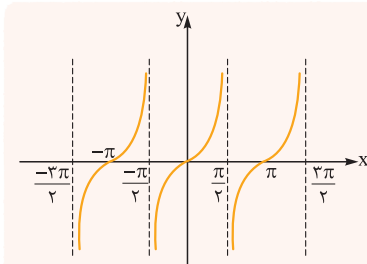
(۱) ۴ به ۱

(۴) ۵ به ۲

(۳) ۳ به ۱

## پاسخ: گزینه ۳

**خودت حل کنی بهتره** تأثیری در پاسخ تست ندارد؛ پس می توانید  $a = 1$  قرار دهید.



## درس نامه • بررسی تابع تانژانت

نمودار تابع  $y = \tan x$  به صورت مقابل است.

باتوجه به نمودار نکات زیر به دست می آید:

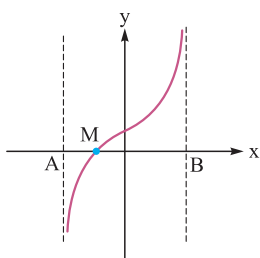
(۱) تابع در بازه های  $(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$ ,  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ,  $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$  و ... اکیداً صعودی است.

(۲) دوره تناوب تابع  $T = \pi$  است.

(۳)  $y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ ، از طرفی ریشه های معادله  $\cos x = 0$  به صورت  $x = \frac{(2k+1)\pi}{2}$  است. این خطوط عمودی، همان مجانب های قائم

نمودار تابع در نمودار بالا هستند. تابع در فاصله بین دو مجانب قائم، اکیداً صعودی است.

(۴) اگر بازه شامل مجانب قائم باشد، تابع در آن بازه یکنوا نیست.



**پاسخ تشریحی** گام اول: برای رسم نمودار تابع  $y = 1 + \tan ax$  از روی  $y = 1 + \tan x$ ، کافی

است طول نقاط را بر  $a$  تقسیم کنیم؛ بنابراین طول پاره خط  $AM$  و  $MB$  نیز بر  $a$  تقسیم می شود،

اما نسبت  $\frac{AM}{MB}$  در دو نمودار تغییر نمی کند، بنابراین می توانیم  $a = 1$  در نظر بگیریم.

گام دوم: در تابع  $y = 1 + \tan x$  دو مجانب قائم  $x = \frac{\pi}{2}$  و  $x = -\frac{\pi}{2}$  (ریشه های مخرج در  $\tan x$ ) هستند.

$$y_M = 0 \Rightarrow 1 + \tan x = 0 \Rightarrow \tan x = -1 \xrightarrow{-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}} x = -\frac{\pi}{4}$$

گام سوم:

$$AM = \frac{-\pi}{4} - (-\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{4}, \quad MB = \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{4}) = \frac{3\pi}{4}$$

گام چهارم:

$$\frac{BM}{AM} = \frac{\frac{3\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}} = 3$$

گام پنجم: (به نسبت ۳ به ۱ تقسیم می کند).

## تست و پاسخ ۶

تابع  $f(x) = 2 + 2 \cos x + \sin 2x$  مفروض است. کم ترین فاصله بین دو جواب معادله  $f'(x) = 2$  کدام است؟

(۴)  $\pi$

(۳)  $\frac{2\pi}{3}$

(۲)  $\frac{\pi}{3}$

(۱)  $\frac{\pi}{6}$

## پاسخ: گزینه ۱



**پاسخ تشریحی** گام اول: جوابها را در یک دوره تناوب مثلاً بازه  $[0, 2\pi]$  به دست می آوریم. از تابع مشتق می گیریم و مساوی ۲ قرار می دهیم:

$$f'(x) = -2\sin x + 2\cos 2x = 2 \xrightarrow{\div 2} -\sin x + \cos 2x = 1$$

گام دوم: برای این که نسبتها همنام شوند، رابطه  $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$  را به جای  $\cos 2x$  قرار می دهیم:

$$-\sin x + 1 - 2\sin^2 x = 1 \Rightarrow 2\sin^2 x + \sin x = 0 \Rightarrow \sin x (2\sin x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} x = 0, \pi, 2\pi \\ 2\sin x + 1 = 0 \Rightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} x = \pi + \frac{\pi}{6}, 2\pi - \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

گام سوم: نزدیکترین جوابها دو عدد  $\pi$  و  $\pi + \frac{\pi}{6}$  (با فاصله  $\frac{\pi}{6}$ ) یا  $2\pi$  و  $2\pi - \frac{\pi}{6}$  (با همان فاصله  $\frac{\pi}{6}$ ) هستند.

### تست و پاسخ ۷

اگر  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - \sqrt{ax^2 + 3x - 1}}{2 + |x|} = -4$  باشد، حاصل  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax + \sqrt{x}}{2x - 1}$  کدام است؟

$$\frac{5}{2} (4)$$

$$\frac{3}{2} (3)$$

$$2 (2)$$

$$1 (1)$$

### پاسخ: گزینه ۲

**مشاوره** حد و پیوستگی از مباحث بسیار مهم کنکور است که حداقل سه سؤال در کنکور دارد. حد  $\frac{0}{0}$  که معمولاً با هویتال رفع بهام می شود، حد در بی نهایت (مثل این سؤال) که از هم ارزی پرتوان استفاده می کنیم یا حد بی نهایت (عدد). از پیوستگی سال یازدهم هم که یک سؤال می آید که معمولاً تعیین مجهولات  $a, b$  با توجه به پیوستگی تابع در نقطه ای خاص است.

**خودت حل کنی بهتره** در  $x \rightarrow +\infty$  یا  $x \rightarrow -\infty$  از هم ارزی پرتوان استفاده می کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + \sqrt{ax}}{-x} = -2 - \sqrt{a} = -4 \Rightarrow a = 4$$

**پاسخ تشریحی** گام اول: در بی نهایت از هم ارزی پرتوان استفاده می کنیم:

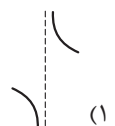
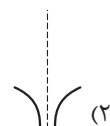
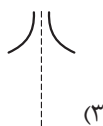
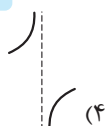
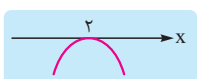
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - \sqrt{ax^2 + 3x - 1}}{2 + |x|} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - \sqrt{ax^2}}{|x|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - \sqrt{a}|x|}{|x|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + \sqrt{ax}}{-x} \\ &= \frac{(2 + \sqrt{a})(x)}{-x} = -(2 + \sqrt{a}) = -4 \Rightarrow 2 + \sqrt{a} = 4 \Rightarrow \sqrt{a} = 2 \Rightarrow a = 4 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax + \sqrt{x}}{2x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax}{2x} = \frac{a}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

گام دوم:

### تست و پاسخ ۸

چند جمله ای  $f(x)$  در نقطه  $x = 2$  دارای یک نقطه ماکزیمم نسبی روی محور  $x$ ها است. نمودار تابع  $y = \frac{3 - 2[x]}{f(x)}$  در مجاورت  $x = 2$  چگونه است؟



### پاسخ: گزینه ۱



**خودت حل کنی بهتره** اگر  $x \rightarrow 2^+$  میل کند،  $f(x) \rightarrow 0^-$ .

## درس نامه •• حد بی نهایت

اگر در بررسی حد، حد صورت عدد غیر صفر و حد مخرج صفر شود (° حدی یعنی به ° نزدیک شود)، حاصل حد بی نهایت می شود؛ یعنی  $\frac{\text{عدد}}{\text{صفر}} = \pm \infty$ .

برای به دست آوردن نوع بی نهایت باید علامت صفر مخرج را تعیین کنیم. در بررسی این حدود یکی از حالت های زیر به وجود می آید:

$$\frac{\oplus}{\ominus} = -\infty \quad \frac{\ominus}{\ominus} = +\infty \quad \frac{\ominus}{\oplus} = -\infty \quad \frac{\oplus}{\oplus} = +\infty$$

**نکته** برای تعیین علامت صفر مخرج از روش های زیر استفاده می کنیم:

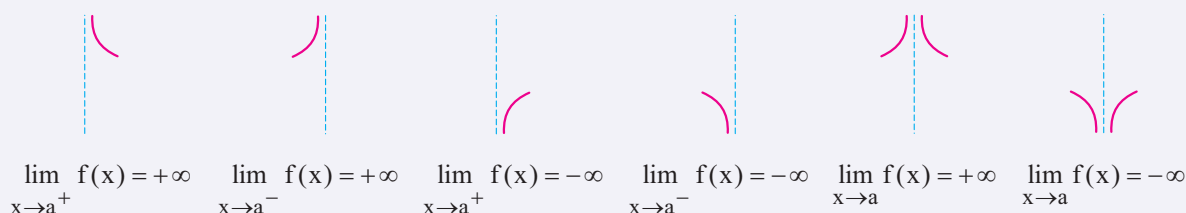
(۱) عدد گذاری در نزدیکی حد داده شده

(۲) تعیین علامت مخرج

(۳) استفاده از دایره مثلثاتی در حدود مثلثاتی

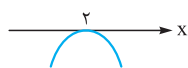
(۴) استفاده از نمودار (مثل این سؤال)

**نکته** اگر حاصل حد در نزدیکی نقطه  $a$ ، بی نهایت شود، نمودار تابع به صورت های زیر ممکن است باشد:



**پاسخ تشریحی** **گام اول:** چند جمله ای  $f$  در همسایگی  $x=2$  دارای ماکزیمم نسبی روی محور  $x$  ها است؛ بنابراین نمودار آن در اطراف

$x=2$  به صورت زیر می تواند باشد:



$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3-2[x]}{f(x)} = \frac{3-2(2)}{0^-} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

↓  
نمودار زیر محور  $x$  ها

گام دوم:

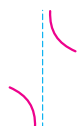
$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3-2[x]}{f(x)} = \frac{3-2(1)}{0^-} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

↓  
نمودار زیر محور  $x$  ها

گام سوم:

**گام چهارم:** در سمت راست  $x=2$  تابع به  $+\infty$  و در سمت چپ  $x=2$  تابع به  $-\infty$  میل می کند؛ پس نمودار تابع داده شده در اطراف  $x=2$

به صورت زیر است:





## تست و پاسخ ۹

کمترین مقدار صحیح  $b$  چه قدر باشد تا حاصل حد داده شده بتواند  $+\infty$  شود؟

اگر  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{bx - a}{a \cos x + 4} = +\infty$  باشد، حداقل مقدار صحیح  $b$  کدام است؟

- (۱) ۱  
(۲) ۲  
(۳) ۳  
(۴) -۱

## پاسخ: گزینه ۲

**مشاوره** این سؤال مشابه سؤال کنکور ۱۴۰۱ دی تجربی است. احتمال طرح آن در کنکور ریاضی زیاد است!

**خودت حل کنی بهتره**  $x = \pi$  ریشهٔ مخرج است. علامت صفر مخرج را به دست بیاورید و ببینید علامت صورت چگونه باشد.

**پاسخ تشریحی** گام اول: مخرج به ازای  $x = \pi$  باید صفر شود تا حاصل حد بی نهایت شود؛ پس:  $a \cos \pi + 4 = 0 \Rightarrow -a + 4 = 0 \Rightarrow a = 4$

گام دوم: اگر  $x \rightarrow \pi$ ، آن گاه  $\cos x$  به  $-1$  نزدیک می شود، اما چون همواره  $-1 \leq \cos x$  است، پس  $\cos x \rightarrow (-1)^+$ ؛ بنابراین:

$$4(-1)^+ + 4 = (-4)^+ + 4 = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{bx - a}{a \cos x + 4} = \frac{b\pi - 4}{0^+} = +\infty \Rightarrow b\pi - 4 > 0$$

گام سوم:

$$b\pi - 4 > 0 \Rightarrow b > \frac{4}{\pi} \Rightarrow b = 2 \text{ کمترین مقدار صحیح } b$$

**حواستون باشه**  $\frac{4}{\pi} \approx \frac{4}{3.14}$  مقداری بین یک و دو می شود.

## تست و پاسخ ۱۰

یک مجانب قائم  $x = a$   
و یک مجانب افقی  $y = 2$   
داریم.

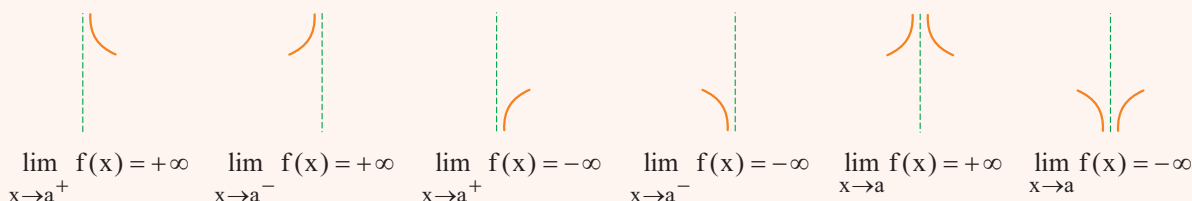
اگر  $A(a, 2)$  تنها نقطه برخورد مجانب های تابع  $f(x) = \frac{bx^2 + 3}{2x^2 + bx + c}$  باشد، مقدار  $f(-a)$  چه قدر است؟

- (۱)  $\frac{7}{8}$   
(۲)  $\frac{7}{4}$   
(۳)  $\frac{5}{8}$   
(۴)  $\frac{5}{4}$

## پاسخ: گزینه ۱

**مشاوره** سؤال بسیار مهم که در این سال های اخیر بارها در کنکور آمده است. حتماً آن را تحلیل کنید.

**درس نامه** •• مجانب های قائم تابع



در این صورت به خط  $x = a$  مجانب قائم تابع می گوئیم.

## نکات

- برای به دست آوردن معادلات مجانب‌های قائم ابتدا تابع را ساده می‌کنیم.
- ریشه‌های مخرج که ریشه‌های صورت نباشند، مجانب‌های قائم هستند. (البته به شرطی که حداقل در یک طرف آن دامنه داشته باشیم).
- اگر ریشه مخرج، ریشه صورت هم باشد، باید رفع ابهام کنیم. اگر بعد از رفع ابهام حاصل  $\infty$  شود، آن ریشه، مجانب قائم است و در غیر این صورت خیر.
- به دست آوردن مجانب‌های افقی: اگر  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$  یا  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$ ، خط  $y = b$  را مجانب افقی تابع می‌گوییم.
- برای به دست آوردن معادلات مجانب‌های افقی یک بار  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و بار دیگر  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  (در صورت متفاوت بودن) را حساب می‌کنیم. اگر حاصل عدد حقیقی  $b$  شود،  $y = b$  مجانب افقی است. یک تابع حداکثر دو مجانب افقی دارد.
- در تابع  $f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots}$  (صورت و مخرج هم‌درجه هستند)، خط  $y = \frac{a_n}{b_n}$  مجانب افقی تابع است.

**پاسخ تشریحی** گام اول:  $A(a, 2)$  نقطه برخورد مجانب‌های افقی و قائم است؛ پس  $x = a$  (ریشه مخرج) مجانب قائم و  $y = 2$  مجانب افقی است.  
گام دوم: مجانب افقی همان نسبت ضرایب  $x^2$  در صورت و مخرج کسر است؛ پس:

$$y = \frac{b}{a} = 2 \Rightarrow b = 4$$

$$f(x) = \frac{4x^2 + 3}{2x^2 + 4x + c}$$

گام سوم: با جای گذاری  $b$  در ضابطه تابع داریم:

گام چهارم: تابع فقط یک مجانب قائم دارد، پس مخرج فقط یک ریشه دارد (دقت کنید که چون صورت ریشه ندارد و امکان این که مخرج دو ریشه داشته و یکی از عوامل با صورت ساده شود وجود ندارد)، بنابراین مخرج باید به صورت مربع کامل باشد؛ پس:

$$\Delta_{\text{مخرج}} = 0 \Rightarrow 16 - 4(2)(c) = 0 \Rightarrow c = 2$$

گام پنجم:

$$f(x) = \frac{4x^2 + 3}{2x^2 + 4x + 2} = \frac{4x^2 + 3}{2(x^2 + 2x + 1)} = \frac{4x^2 + 3}{2(x+1)^2} \Rightarrow x+1=0 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow a=-1$$

$$f(-a) = f(1) = \frac{y}{x}$$

## تست و پاسخ ۱۱

$$f'_+(1)$$

اگر  $f(x) = x \sqrt{\frac{2x - [x]}{x - 2}}$  باشد، حاصل  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$  کدام است؟

۱) -۲

۲) ۲

۳) ۴

۴) ۰

## پاسخ: گزینه ۱

**مشاوره** اگر هنوز روی فرمول‌های مشتق اشکال دارید، اولین کار برطرف کردن آن است. از بحث مشتق معمولاً دو سؤال در کنکور می‌آید که یکی مربوط به فرمول‌های مشتق است. البته حواستان باشد اطلاعات داده شده یا خواسته شده معمولاً در قالب حد بیان می‌شود که مرتبط با تعریف مشتق است.

**خودت حل کنی بهتره** حد داده شده همان  $f'_+(1)$  است. در همسایگی راست  $x = 1$ ، داریم:  $[x] = 1$ .



# پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیالی سبز

ریاضیات

درس نامه

| مثال                                                                                                                                                                              | توضیح فارسی                                                                                      | مشتق تابع                                                                  | تابع                                     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------|
| $y = 5 \Rightarrow y' = 0$                                                                                                                                                        | مشتق عدد ثابت صفر است.                                                                           | $y' = 0$                                                                   | $y = c$                                  |
| $y = 3x \Rightarrow y' = 3$                                                                                                                                                       | مشتق $ax$ همان ضریب $x$ می شود.                                                                  | $y' = a$                                                                   | $y = ax$                                 |
| $y = 3x^5 \Rightarrow y' = 15x^4$                                                                                                                                                 | —                                                                                                | $y' = nax^{n-1}$                                                           | $y = ax^n$                               |
| —                                                                                                                                                                                 | —                                                                                                | $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$                                                 | $y = \sqrt{x}$                           |
| —                                                                                                                                                                                 | —                                                                                                | $y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$                                            | $y = \sqrt[3]{x}$                        |
| —                                                                                                                                                                                 | —                                                                                                | $y' = -\frac{1}{x^2}$                                                      | $y = \frac{1}{x}$                        |
| $y = x^3 + \sqrt{x} - \frac{1}{x}$<br>$\Rightarrow y' = 3x^2 + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}$                                                                               | در جمع یا تفریق عبارت ها، تک تک مشتق می گیریم.                                                   | $y' = f' \pm g'$                                                           | $y = f \pm g$                            |
| $y = 5\sqrt{x} \Rightarrow y' = 5 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{5}{2\sqrt{x}}$                                                                                               | در ضرب عدد در تابع، عدد را قرار داده و از $f$ مشتق می گیریم.                                     | $y' = af'$                                                                 | $y = af$                                 |
| $y = (x^2 + 5)\sqrt{x}$<br>$\Rightarrow y' = 2x\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}(x^2 + 5)$                                                                                           | $y' = (\text{اولی}) (\text{مشتق دومی}) + (\text{دومی}) (\text{مشتق اولی})$                       | $y' = f'g + g'f$                                                           | $y = fg$                                 |
| $y = \frac{\frac{2}{x} - 1}{x^2 + x}$<br>$\Rightarrow y' = \frac{(\frac{-2}{x^2})(x^2 + x) - (2x + 1)(\frac{2}{x} - 1)}{(x^2 + x)^2}$                                             | $y' = \frac{(\text{صورت})(\text{مشتق مخرج}) - (\text{مخرج})(\text{مشتق صورت})}{(\text{مخرج})^2}$ | $y' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$                                               | $y = \frac{f}{g}$                        |
| $y = (x^2 + x)^5 \Rightarrow y' = 5(x^2 + x)^4(2x + 1)$<br>$\quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow$<br>$\quad \quad \quad n \quad u \quad u'$ | $u$ یک عبارت بر حسب $x$ است.                                                                     | $y' = nu^{n-1}u'$                                                          | $y = u^n$                                |
| $y = \sqrt[3]{4x+5} \Rightarrow y' = \frac{4}{3\sqrt[3]{(4x+5)^2}}$                                                                                                               | —                                                                                                | $y' = \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$<br>$= \frac{1}{n}u^{\frac{1}{n}-1}u'$ | $y = \sqrt[n]{u}$<br>$= u^{\frac{1}{n}}$ |
| $y = \frac{4}{x+5} \Rightarrow y' = \frac{-4}{(x+5)^2}$                                                                                                                           | —                                                                                                | $y' = \frac{-u'}{u^2}$                                                     | $y = \frac{1}{u}$                        |

رشته ریاضی

آزمون هفدهم آنلاین



## پاسخ تشریحی

**گام اول:** حد داده شده همان مشتق راست تابع در  $x=1$  است. از طرفی چون تابع  $y=[x]$  در نقطه  $x=1$  پیوستگی راست دارد، می توانیم از فرمول های مشتق استفاده کنیم. در همسایگی راست  $x=1$  داریم:

**گام دوم:**

$$f(x) = x^2 \sqrt{\frac{2x-1}{x-2}} \Rightarrow f'(x) = 2x \sqrt{\frac{2x-1}{x-2}} + x^2 \left( \frac{-4-(-1)}{(x-2)^2} \right) \frac{1}{\sqrt{\frac{2x-1}{x-2}}}$$

$$\left( \frac{2x-1}{x-2} \right)' = \frac{-4-(-1)}{(x-2)^2}$$

دقت دارید که طبق فرمول مشتق تابع هموگرافیک:

$$f'_+(1) = 2 \sqrt{\frac{1}{-1}} + (1) \frac{-3}{\sqrt{\frac{1}{(-1)^2}}} = -1-1 = -2$$

**گام سوم:**

## تست و پاسخ ۱۲

فرض کنید  $f(4)=1$  و  $f'(x)=2\sqrt{x}$  باشد، حاصل مشتق دوم تابع  $g(x)=(f \circ f)(x)$  در نقطه  $x=4$  چه قدر است؟

- ۱) ۹  
۲) ۱۲  
۳) ۱۵  
۴) ۱۷

مشتق دوم تابع مرکب  $f(f(x))$

## پاسخ: گزینه ۴

### درس نامه •• مشتق تابع مرکب

مشتق تابع  $f(x)$  همان  $f'(x)$  می شود، اما برای مشتق گیری از  $f(u)$  که  $u$  یک عبارت بر حسب  $x$  است، داریم:

مشتق عبارت درون

$$(f(u))' = u' \times f'(u)$$

مشتق تابع مرکب

مثلاً:

$$(f(x^2+1))' = 2x \times f'(x^2+1)$$

**پاسخ تشریحی** **گام اول:** از فرمول مشتق تابع مرکب داریم:

$$g(x) = f(f(x)) \Rightarrow g'(x) = f'(x) f'(f(x)) = 2\sqrt{x} f'(f(x))$$

**گام دوم:**  $f(x)$  را در ضابطه  $f'$  جای گذاری می کنیم تا  $f'(f(x))$  به دست آید:

$$g'(x) = 2\sqrt{x} \times 2\sqrt{f(x)} = 4\sqrt{xf(x)}$$

**گام سوم:** دوباره مشتق می گیریم:

$$g''(x) = 4 \times \frac{f(x) + xf'(x)}{2\sqrt{xf(x)}}$$

$$x=4 \Rightarrow g''(4) = 4 \times \frac{f(4) + 4f'(4)}{2\sqrt{4 \times f(4)}} = 2 \times \frac{1+4(2)}{\sqrt{4 \times 1}} = 17$$

## تست و پاسخ ۱۳

آهنگ متوسط تغییر تابع  $f(x) = \sin^2 x - \cos^2 x$  در بازه  $[-\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}]$  چند برابر آهنگ لحظه ای تغییر آن در نقطه  $x = \frac{5\pi}{12}$  است؟

$$f'(\frac{5\pi}{12})$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\frac{3}{\pi}$$

$$\frac{3}{5\pi}$$

$$\frac{3}{2\pi}$$

$$\frac{6}{5\pi}$$

## پاسخ: گزینه ۳



**مشاوره** آهنگ متوسط و لحظه‌ای از جمله مباحث ساده کنکور است که اتفاقاً طراحان کنکور نیز علاقه زیادی به آن دارند. همین درس‌نامه برای یادگیری کافی است. سؤال کنکور نیز یکی مشابه به همین سؤال است، البته اگر بیاید!

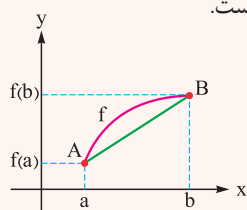
## درس‌نامه •• آهنگ تغییر متوسط و لحظه‌ای

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

آهنگ تغییر متوسط تابع  $f$  در بازه  $[a, b]$  برابر است با:

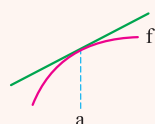
یعنی  $a$  و  $b$  را در تابع قرار داده تا  $f(b)$  و  $f(a)$  به دست آید. آهنگ متوسط همان تغییرات  $y$  به تغییرات  $x$  است.

تعبیر هندسی: شیب پاره خط  $AB =$  آهنگ تغییر متوسط تابع  $f$  در بازه  $[a, b]$



آهنگ تغییر در لحظه  $a$  (یا نقطه  $a$ ) همان  $f'(a)$  است.

تعبیر هندسی: آهنگ تغییر در نقطه  $a$  همان شیب خط مماس بر تابع  $f$  در نقطه‌ای با طول  $a$  است.



**پاسخ تشریحی** گام اول: آهنگ متوسط تغییر را در بازه  $[-\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}]$  به دست می‌آوریم. دقت کنید که  $\sin^2 x - \cos^2 x = -\cos 2x$ ؛ پس:

$$f(x) = -\cos 2x$$

$$x = -\frac{\pi}{6} \Rightarrow f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$x = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\cos\frac{4\pi}{3} = -\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{f\left(\frac{2\pi}{3}\right) - f\left(-\frac{\pi}{6}\right)}{\frac{2\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)}{\frac{5\pi}{6}} = \frac{1}{\frac{5\pi}{6}} = \frac{6}{5\pi}$$

گام دوم: آهنگ لحظه‌ای در نقطه  $x = \frac{5\pi}{12}$  همان  $f'\left(\frac{5\pi}{12}\right)$  است؛ پس:

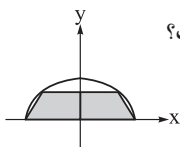
$$f'(x) = 2\sin 2x \Rightarrow f'\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 2 \times \sin \frac{5\pi}{6} = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

$$\frac{\text{آهنگ متوسط}}{\text{آهنگ لحظه‌ای}} = \frac{\frac{6}{5\pi}}{1} = \frac{6}{5\pi}$$

گام سوم:

## تست و پاسخ ۱۴

مطابق شکل دوزنقه‌ای درون نمودار  $f(x) = \sqrt{6-x}$  محاط شده است. حداکثر مقدار مساحت این دوزنقه چه قدر است؟



۲۴ (۲)

۱۶ (۱)

۱۲ (۴)

۱۸ (۳)

## پاسخ: گزینه ۱

**مشاوره** از سؤال بهینه‌سازی نترسید. اگر بتوانید ضابطه‌ی تابعی (مساحت یا حجم یا فاصله یا ...) که قرار است بهینه شود را بنویسید، کار تمام است فقط یک مشتق‌گیری می‌خواهد!

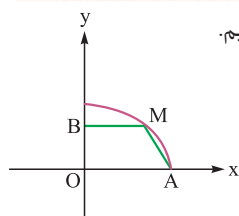
**خودت حل کنی بهتره** نقطه  $M(x, \sqrt{6-x})$  را روی نمودار سمت راست در نظر گرفته، مساحت دوزنقه را بر حسب  $x$  بنویسید. بعد مشتق مساوی صفر و تمام!



## درس نامه •• بهینه سازی (به دست آوردن بیشترین یا کمترین مقدار یک کمیت)

- (۱) تابعی که قرار است ماکزیمم یا مینیمم شود را می نویسیم.
- (۲) تابعی به دست آمده معمولاً دومتغیره است. از رابطه داده شده در مسئله یا قضایای هندسی (مثل فیثاغورس، تالس و ...) ارتباطی بین دو متغیر پیدا می کنیم.
- (۳) یکی از متغیرها را بر حسب دیگری پیدا کرده و در تابع اولیه جای گذاری می کنیم.
- (۴) مشتق گرفته و مساوی صفر قرار می دهیم. جواب به دست آمده معمولاً عددی است که به ازای آن بیشترین (یا کمترین) مقدار خواسته شده به دست می آید.

**پاسخ تشریحی** گام اول: کافی است بیشترین مقدار مساحت دوزنقه مقابل را به دست آورده و آن را دو برابر کنیم.



گام دوم: نقطه M به مختصات  $(x, \sqrt{6-x})$  را روی تابع در نظر می گیریم؛ از طرفی  $x_A = 6$ ؛ پس داریم:

$$f(x) = \text{مساحت دوزنقه قائم الزاویه} = \frac{(OA + BM)OB}{2} = \frac{(6+x)\sqrt{6-x}}{2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}((1)\sqrt{6-x} + (6+x) \times \frac{-1}{2\sqrt{6-x}}) = 0 \Rightarrow \frac{2(6-x) - 6 - x}{2\sqrt{6-x}} = 0 \Rightarrow 6 - 3x = 0 \Rightarrow x = 2$$

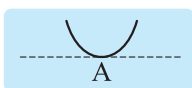
گام سوم:

$$x = 2 \Rightarrow f(2) = \frac{8\sqrt{4}}{2} = 8 \text{ (بیشترین مساحت OBMA)}$$

گام چهارم:

گام پنجم: بیشترین مساحت دوزنقه داده شده در شکل  $2 \times 8 = 16$  می شود.

## تست و پاسخ ۱۵



تابع  $f(x) = \frac{ax+b}{\sqrt{x}}$  در نقطه  $A(1,2)$  مینیمم نسبی دارد. مقدار  $f(a)$  کدام است؟

۱ (۴)

$\frac{3\sqrt{2}}{2}$  (۳)

۲ (۲)

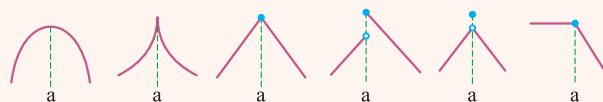
$\sqrt{2}$  (۱)

## پاسخ: گزینه ۲

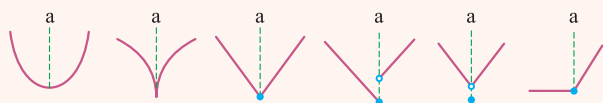
**خودت حل کنی بهتره** اگر  $(a, b)$  نقطه مینیمم نسبی تابع مشتق پذیر  $f$  باشد،  $f'(a) = 0$  و  $f(a) = b$ .

## درس نامه •• نقاط اکسترمم نسبی

• تابع  $f$  در نقطه  $x = a$  ماکزیمم نسبی دارد؛ هرگاه عرض آن از نقاط همسایه اش بیشتر (یا مساوی) باشد، مثلاً تمام نقاط  $x = a$  در نمودارهای روبه رو ماکزیمم نسبی هستند:



• تابع  $f$  در  $x = a$  مینیمم نسبی دارد؛ هرگاه عرض آن از نقاط همسایه اش کمتر (یا مساوی) باشد، مثلاً تمام نقاط  $x = a$  در نمودارهای روبه رو مینیمم نسبی هستند:





## نکات ۱

اگر تابع در بازه  $(a, b)$  ثابت باشد (خط افقی)، تمام نقاط هم ماکزیمم نسبی و هم مینیمم نسبی هستند.

## ۲

نقاط ابتدا یا انتهای بازه یا دامنه، اکسترمم نسبی به حساب نمی‌آیند، چون تابع در همسایگی آن‌ها تعریف نشده است.

## ۳

تابع در نقاط اکسترمم نسبی ممکن است مشتق داشته باشد یا نداشته باشد، اما اگر مشتق داشته باشد حتماً صفر است؛ پس در نقاط اکسترمم نسبی مشتق صفر است یا وجود ندارد؛ این یعنی تمام نقاط اکسترمم نسبی، بحرانی هستند.

## ۴

برای به دست آوردن نقاط اکسترمم نسبی در تابع‌های مشتق‌پذیر:

(۱)  $f'(x)$  را محاسبه کرده و برابر صفر قرار می‌دهیم.

(۲) ریشه‌های مشتق و نقاطی که  $f'$  وجود ندارد را به دست می‌آوریم (نقاط بحرانی).

(۳)  $f'$  را تعیین علامت می‌کنیم. اگر در  $x = a$  مشتق تغییر علامت بدهد،  $x = a$  اکسترمم نسبی است و در غیر این صورت خیر.

(۴) اگر  $f'$  از مثبت به منفی تغییر علامت بدهد،  $x = a$  ماکزیمم نسبی و اگر  $f'$  از منفی به مثبت تغییر علامت بدهد،  $x = a$  مینیمم نسبی تابع  $f$  است.

| x  | a               |
|----|-----------------|
| f' | +   -           |
| f  | ↗ max ↘<br>نسبی |

| x  | a               |
|----|-----------------|
| f' | -   +           |
| f  | ↘ min ↗<br>نسبی |

## ۵

اگر  $x = a$  ریشه ساده (یا مرتبه فرد)  $f'$  باشد، حتماً در این نقطه تغییر علامت می‌دهد (در نتیجه  $a$  اکسترمم نسبی  $f$  می‌شود)، ولی اگر  $x = a$  ریشه مضاعف (یا مرتبه زوج)  $f'$  باشد، مشتق در این نقطه تغییر علامت نداده و  $a$  نقطه اکسترمم نخواهد بود.

دو ویژگی مهم نقاط اکسترمم نسبی:

اگر تابع  $f$  در نقطه  $(\alpha, \beta)$  مشتق‌پذیر بوده (مثل تابع‌های چندجمله‌ای، گویا و مثلثاتی) و دارای اکسترمم نسبی باشد:

(۱)  $f(\alpha) = \beta$  (یعنی نقطه در تابع صدق می‌کند). (۲)  $f'(\alpha) = 0$  (یعنی  $\alpha$  ریشه مشتق است).

## پاسخ تشریحی

گام اول: مختصات نقطه  $(1, 2)$  در تابع صدق می‌کند، یعنی  $f(1) = 2$ ؛ پس:

$$\frac{a+b}{\sqrt{1}} = 2 \Rightarrow a+b=2$$

$$f'(1) = 0$$

گام دوم: تابع در  $x=1$  مشتق‌پذیر است؛ پس چون در این نقطه مینیمم نسبی دارد:

$$f'(x) = \frac{a\sqrt{x} - (ax+b) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}^2} \Rightarrow f'(1) = 0 \Rightarrow a - \frac{a+b}{2} = 0 \Rightarrow \frac{2a - a - b}{2} = 0 \Rightarrow a - b = 0 \Rightarrow a = b$$

گام سوم: با جای گذاری  $a+a=2$ ، پس  $a=1$  و  $b=1$  به دست می‌آید.

$$f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}} \Rightarrow f(1) = \frac{2}{1} = 2$$

گام چهارم:

## تست و پاسخ ۱۶

$$f'(x) > 0$$

تابع  $f(x) = x^2 |2x-3|$  مفروض است. در بازه  $(a, b)$  تابع  $f$  صعودی و دارای تقعر رو به پایین است. حداکثر  $b-a$  کدام است؟

$$f''(x) < 0$$

$$\frac{3}{2} \quad (2)$$

$$2 \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \quad (4)$$

$$1 \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۴



## درس نامه •• تغییر یکنوایی و تقعر

**نکته** وضعیت صعودی یا نزولی بودن تابع را از تغییر علامت  $f'$  به دست می آوریم.

**نکته** وضعیت تقعر تابع را از تغییر علامت  $f''$  به دست می آوریم.

| حالت اول          | حالت دوم           | حالت سوم          | حالت چهارم         |
|-------------------|--------------------|-------------------|--------------------|
| $f'$              | +                  | +                 | +                  |
| (صعودی)           | (صعودی)            | (نزولی)           | (نزولی)            |
| $f''$             | +                  | -                 | +                  |
| (تقعر رو به بالا) | (تقعر رو به پایین) | (تقعر رو به بالا) | (تقعر رو به پایین) |
| مثال نموداری      |                    |                   |                    |

**پاسخ تشریحی** گام اول: قدرمطلق را برداشته و تابع را به صورت دوضابطه ای می نویسیم:

$$f(x) = \begin{cases} x^2(2x-3) & x \geq \frac{3}{2} \\ -x^2(2x-3) & x < \frac{3}{2} \end{cases} = \begin{cases} 2x^3 - 3x^2 & x \geq \frac{3}{2} \\ -2x^3 + 3x^2 & x < \frac{3}{2} \end{cases}$$

**گام دوم:** نقاط بحرانی تابع را به دست می آوریم. دقت کنید که  $x = \frac{3}{2}$  ریشه ساده داخل قدرمطلق بوده و پشت آن نیز عامل صفرکننده قرار ندارد؛ پس  $x = \frac{3}{2}$  بحرانی است. برای به دست آوردن سایر نقاط بحرانی مشتق را برابر صفر قرار می دهیم:

$$f'(x) = \begin{cases} 6x^2 - 6x & x > \frac{3}{2} \\ -6x^2 + 6x & x < \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x(6x - 6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \times \\ x = 1 \times \end{cases} \\ -6x^2 + 6x = 0 \Rightarrow x(-6x + 6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \checkmark \\ x = 1 \checkmark \end{cases} \end{cases}$$

|      |           |     |     |               |           |
|------|-----------|-----|-----|---------------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $0$ | $1$ | $\frac{3}{2}$ | $+\infty$ |
| $f'$ |           | -   | +   | -             | +         |

**گام سوم:** مشتق را تعیین علامت می کنیم:

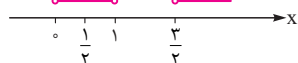
**گام چهارم:** مشتق دوم را به دست می آوریم:

$$f''(x) = \begin{cases} 12x - 6 & x > \frac{3}{2} \\ -12x + 6 & x < \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{به ازای } x > \frac{3}{2} \text{ عبارت } 12x - 6 \text{ همواره مثبت است.} \\ -12x + 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

|       |               |               |
|-------|---------------|---------------|
| $x$   | $\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{2}$ |
| $f''$ | +             | -             |



گام پنجم: باید بازه‌ای را به دست آوریم که  $f'(x) > 0$ ، ولی  $f''(x) < 0$  باشد.



$$((-\infty, 1) \cup (\frac{3}{2}, +\infty)) \cap (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) = (\frac{1}{2}, 1) = (a, b)$$

پس حداکثر مقدار  $b - a$  برابر  $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$  است.

## تست و پاسخ ۱۷

نمودار تابع  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + a$  از ناحیه چهارم عبور نمی‌کند. حداقل مقدار عرض نقطه ماکزیمم نسبی  $f$  چه قدر است؟

کمترین مقدار  $y$   
نقطه Max نسبی

۲۴ (۱)

۲۷ (۲)

۳۲ (۳)

۳۶ (۴)

## پاسخ: گزینه ۳

**مشاوره** از کاربرد مشتق معمولاً دو سؤال در کنکور می‌آید که نمودار پای ثابت آن است. در بین نمودارها، نمودار تابع‌های درجه سوم و هموگر افیک مهم‌تر از بقیه هستند!

**خودت حل کنی بهتره** نمودار تابع را رسم کرده و ببینید عرض نقطه min نسبی کجا باید باشد تا نمودار از ناحیه چهارم عبور نکند.

**پاسخ تشریحی** گام اول: نقاط اکسترمم تابع را به دست می‌آوریم:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 0 \xrightarrow{\div 3} x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

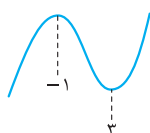
|      |         |         |
|------|---------|---------|
| $x$  | -1      | 3       |
| $f'$ | +       | -       |
| $f$  | ↗ max ↘ | ↘ min ↗ |

$$x = -1 \Rightarrow f(-1) = -1 - 3 + 9 + a = 5 + a$$

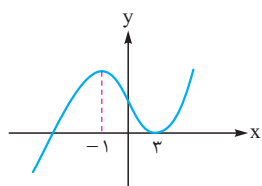
گام دوم: عرض نقطه max نسبی:

$$x = 3 \Rightarrow f(3) = 27 - 27 - 27 + a = a - 27$$

عرض نقطه min نسبی:



گام سوم: نمودار تابع به صورت مقابل می‌شود:



گام چهارم: برای این که تابع از ناحیه چهارم عبور نکند، عرض نقطه  $x = 3$  نباید منفی باشد؛ به زبان دیگر نمودار تابع باید به صورت مقابل باشد:

$$a - 27 \geq 0 \Rightarrow a \geq 27$$

گام پنجم: حداقل مقدار  $a$  برابر ۲۷ است؛ پس حداقل مقدار  $5 + a$  یا همان عرض نقطه max نسبی برابر  $32 = 5 + 27$  می‌شود.



ریاضیات گسسته و آمار و احتمال: ریاضیات گسسته: صفحه‌های ۱ تا ۸۴

## تست و پاسخ ۱۸

اگر  $a$  و  $b$  عددهای حقیقی و مثبت باشند، برای اثبات نامساوی  $\frac{a+b+1}{2} \geq \sqrt{b(a+1)}$  به کدام رابطه بدیهی می‌رسیم؟

(۱)  $(a-1)^2 + (b-1)^2 \geq 0$  (۲)  $(a+1)^2 + (b-1)^2 \geq 0$  (۳)  $(a-b-1)^2 \geq 0$  (۴)  $(a-b+1)^2 \geq 0$

## پاسخ: گزینه ۴

**مشاوره** در کنکورهای نظام جدید (از سال ۹۸ به بعد) تا به حال سؤالی از درس اول نظریه اعداد در کنکور نیامده است. به یاد داشته باشید که موضوع اثبات بازگشتی (چیزی شبیه این سؤال) مهم‌تر از سایر موضوعات این درس است، چون از آن در کنکورهای سابق چندین بار سؤال آمده است.

**خودت حل کنی بهتره** رابطه داده شده را به صورت توان دوم یک عبارت (یا مجموع چندتا توان دوم) بنویسید.

**پاسخ تشریحی** سعی می‌کنیم با استفاده از اعمال دوطرفه، حکم داده شده را به یک رابطه بدیهی برسانیم:

$$\frac{a+b+1}{2} \geq \sqrt{b(a+1)} \xrightarrow{\times 2} a+b+1 \geq 2\sqrt{b(a+1)} \xrightarrow{a, b > 0} (a+b+1)^2 \geq 4b(a+1)$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + 1 + 2ab + 2a + 2b \geq 4ab + 4b \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab + 2a - 2b + 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b+1)^2 \geq 0 \quad \text{همواره درست}$$

## تست و پاسخ ۱۹

مجموع باقی‌مانده و خارج قسمت تقسیم عدد طبیعی  $a$  بر ۲۲ برابر ۱۷ است. اگر باقی‌مانده  $a$  بر ۴۲ برابر ۳۸ باشد، مجموع ارقام بزرگ‌ترین مقدار

$a$  کدام است؟

۱۵ (۴)

۱۴ (۳)

۱۳ (۲)

۱۲ (۱)

## پاسخ: گزینه ۳

**مشاوره** سؤال بسیار مهم مشابه سال ۱۴۰۰. احتمال طرح چنین سؤالی در کنکور ۱۴۰۲ زیاد است.

**خودت حل کنی بهتره** قضیه تقسیم را بنویسید و بعد خارج قسمت را دو حالت کنید، طوری که باقی‌مانده  $a$  بر ۴۲ به دست آید.

**درس نامه ۱۱۱** . قضیه تقسیم

$$\begin{array}{l} \text{مقسوم‌علیه} \rightarrow b \\ \text{مقسوم} \leftarrow a \quad \left| \begin{array}{l} b \\ q \end{array} \right. \\ \text{خارج قسمت} \rightarrow q \\ \text{باقی‌مانده} \leftarrow r \end{array}$$

$$a = bq + r$$

$$0 \leq r < b \quad \text{شرط باقی‌مانده}$$

**تذکر** هر بار که قضیه تقسیم را می‌نویسید، شرط باقی‌مانده را نیز حتماً به همراه آن بنویسید.

**نکته** خارج قسمت تقسیم  $a$  بر  $b$  برابر است با:  $q = \left[ \frac{a}{b} \right]$ .



## درس نامه •• تبدیل مقسوم علیه به مضارب آن

برای تبدیل مقسوم علیه به مضارب آن، خارج قسمت را افراز مناسب می کنیم؛ مثلاً فرض کنید باقی مانده  $a$  بر  $7$  برابر  $1$  باشد؛ پس  $a = 7q + 1$ . برای این که باقی مانده  $a$  بر  $14$  پیدا کنیم (به جای این که دو طرف را در  $2$  ضرب کنیم)، دو حالت برای  $q$  در نظر می گیریم:

$$q = 2k \text{ (زوج)} \Rightarrow a = 7(2k) + 1 = 14k + 1$$

$$q = 2k + 1 \text{ (فرد)} \Rightarrow a = 7(2k + 1) + 1 = 14k + 8$$

پس باقی مانده  $a$  بر  $14$  برابر  $1$  یا  $8$  است.

$$q = 3k \Rightarrow a = 7(3k) + 1 = 21k + 1$$

یا اگر باقی مانده  $a$  را بر  $21$  بخواهیم، برای  $q$  سه حالت در نظر می گیریم:

$$q = 3k + 1 \Rightarrow a = 7(3k + 1) + 1 = 21k + 8$$

$$q = 3k + 2 \Rightarrow a = 7(3k + 2) + 1 = 21k + 15$$

پس باقی مانده  $a$  بر  $21$  برابر  $1$ ،  $8$  یا  $15$  می تواند باشد.

## پاسخ تشریحی

گام اول: عدد  $a$  بر  $22$  تقسیم شده است، پس  $a = 22q + r$  که شرط باقی مانده نیز  $0 \leq r < 22$  است.

گام دوم: مجموع باقی مانده و خارج قسمت برابر  $17$  است؛ پس  $r + q = 17$ ، در نتیجه:

$$r = 17 - q$$

گام سوم: با جای گذاری  $r$  در رابطه تقسیم داریم:

$$a = 22q + 17 - q = 21q + 17$$

گام چهارم: برای این که باقی مانده  $a$  بر  $42$  را به دست آوریم دو حالت برای  $q$  در نظر می گیریم:

$$q = 2k \Rightarrow a = 21(2k) + 17 = 42k + 17 \text{ (زوج)}$$

$$q = 2k + 1 \Rightarrow a = 21(2k + 1) + 17 = 42k + 38 \text{ (فرد)}$$

گام پنجم: باقی مانده  $a$  بر  $42$  برابر  $38$  است، پس  $q$  باید فرد باشد. بزرگ ترین مقدار  $q$  با توجه به رابطه  $r + q = 17$  برابر با  $17$  می تواند باشد:

$$q_{\max} = 17 \Rightarrow a_{\max} = 21(17) + 17 = 17 \times 22 = 374 \Rightarrow \text{مجموع ارقام} = 14$$

## تست و پاسخ ۲۰

باقی مانده  $3^{25}$  بر  $140$  کدام است؟

۹ (۴)

۷ (۳)

۳ (۲)

۱ (۱)

## پاسخ: گزینه ۲

**مشاوره** سؤال بسیار مهم و پای ثابت همه کنکور ها! به دست آوردن باقی مانده با استفاده از همنهشتی!

دقت کنید اگر پیمانه بزرگ باشد (مثل سؤال کنکور دی ۱۴۰۱) آن را به حاصل ضرب دو عدد نسبت به هم اول، تجزیه کنید.

## درس نامه •• به دست آوردن باقی مانده اعداد توان دار

(۱) اگر  $a$  عددی بزرگ باشد، همنهشت آن به پیمانه  $m$  که کوچک تر از آن است (منفی یا مثبت مهم نیست) را قرار می دهیم.

(۲) توانی از  $a$  پیدا می کنیم که همنهشت  $1$  یا  $-1$  به پیمانه  $m$  باشد (اگر نشد سعی می کنیم توانی از  $a$  که همنهشت عدد کوچکی به پیمانه  $m$  باشد، پیدا کنیم).

(۳) با توان رساندن دو طرف و ضرب دو طرف در اعداد مناسب  $a^n$  را می سازیم.

قضیه فرما: اگر  $p$  اول باشد،  $a/p$ ، آن گاه  $a^{p-1} \equiv 1$ .

اگر پیمانه اول باشد، با قضیه فرما هم می توانیم رابطه همنهشتی اولیه بنویسیم.



## تغییر پیمانه در همنهشتی

(۱) اگر دو عدد به پیمانه  $m$  همنهشت باشند، به پیمانه مقسوم‌علیه‌های  $m$  نیز همنهشت هستند؛ مثلاً اگر  $a \equiv b$ ، آن‌گاه  $a \equiv b$  و  $a \equiv b$  نیز برقرار است.

(۲) اگر دو عدد به پیمانه  $m$  و  $n$  همنهشت باشند، به پیمانه  $km$  نیز همنهشت هستند؛ مثلاً اگر  $a \equiv b$  و  $a \equiv b$ ، آن‌گاه  $a \equiv b$ .

**تذکر** در استفاده از نکته دوم دو طرف همنهشتی باید یکسان باشند.

(۳) اگر پیمانه عددی بزرگ و غیراول باشد، می‌توانیم آن را به ضرب دو عدد (که نسبت به هم اول‌اند) بشکنیم. باقی‌مانده را به هر دو عدد به دست آوریم. سمت راست هر دو همنهشتی را یکسان کرده و از ویژگی ۲ استفاده کنیم. (مثل این سؤال)

**پاسخ تشریحی** گام اول: عدد  $140$  را به ضرب دو عدد که نسبت به هم اول‌اند تجزیه می‌کنیم.  $140 = 5 \times 28$

گام دوم: باقی‌مانده  $3^{25}$  را بر دو عدد  $5$  و  $28$  به دست می‌آوریم:

$$3^2 \equiv -1 \xrightarrow{\text{توان } 12} 3^{24} \equiv 1 \xrightarrow{\times 3} 3^{25} \equiv 3$$

$$3^3 \equiv -1 \xrightarrow{\text{توان } 8} 3^{24} \equiv 1 \xrightarrow{\times 3} 3^{25} \equiv 3$$

گام سوم:  $[5, 28] = 140$ ، پس  $3^{25} \equiv 3$ .

## تست و پاسخ ۲۱

مجموع ارقام بزرگ‌ترین عدد چهاررقمی به صورت  $abba$  که بر  $66$  بخش‌پذیر باشد کدام است؟

۲۴ (۴)

۲۷ (۳)

۳۰ (۲)

۱۸ (۱)

## پاسخ: گزینه ۲

**مشاوره** کاربردهای همنهشتی شامل به دست آوردن باقی‌مانده بر اعداد خاص، تقویم‌نگاری، معادله همنهشتی و معادله سیاله است که معمولاً یک سؤال از آن‌ها در کنکور می‌آید.

**درس‌نامه** قواعد بخش‌پذیری مهم عدد  $a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$

| پیمانه              | قاعده                                                            | توضیح فارسی                                                                             |
|---------------------|------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------|
| ۳ یا ۹              | $a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0 \equiv a_0 + a_1 + \dots + a_n$       | هر عدد به پیمانه ۳ یا ۹، همنهشت مجموع ارقام خودش است.                                   |
| ۵ یا ۱۰ یا ۲        | $a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0 \equiv a_0$                           | هر عدد، همنهشت رقم یکان خود به پیمانه ۵ یا ۱۰ یا ۲ است.                                 |
| ۴ یا ۲۰ یا ۲۵ یا ۵۰ | $a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0 \equiv a_1 a_0$                       | هر عدد همنهشت دو رقم آخر (یکان و دهگان) خود به پیمانه ۴ یا ۲۰ یا ۲۵ یا ۵۰ است.          |
| ۱۱                  | $a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0 \equiv a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots$ | ارقام را از سمت راست یکی‌درمیان $-$ و $+$ می‌گذاریم. هر عدد به پیمانه ۱۱ همنهشت آن است. |



**نکته** اگر  $a \equiv b^m$  و  $n | m$ ، آن گاه  $a \equiv b^n$  (به جای پیمانه می‌توانیم مقسوم علیه‌های آن را قرار دهیم).

### پاسخ تشریحی

گام اول: عدد داده شده بر ۶۶ بخش پذیر است؛ پس بر ۲، ۳ و ۱۱ بخش پذیر است.

$$\overline{abba} \equiv_2^2 \Rightarrow a \text{ زوج}$$

گام دوم:

$$\overline{abba} \equiv_3^3 \Rightarrow a + b + b + a \equiv_3^3 \Rightarrow 2a + 2b \equiv_3^3 \xrightarrow{\div 2} a + b \equiv_3^3$$

$$\overline{abba} \equiv_{11}^{11} \Rightarrow a - b + b - a \equiv_{11}^{11} + 0 \equiv_{11}^{11} \Rightarrow \text{همواره برقرار}$$

گام سوم: چون بزرگ‌ترین عدد به صورت  $\overline{abba}$  را می‌خواهیم،  $a = 8$  در نظر می‌گیریم، پس  $8 + b \equiv_3^3$ .

گام چهارم: بزرگ‌ترین عدد یک‌رقمی  $b$  که در رابطه بالا صدق کند  $b = 7$  است.

گام پنجم: بزرگ‌ترین عدد به صورت ۸۷۷۸ است که مجموع ارقام آن برابر ۳۰ است.

### تست و پاسخ ۲۲

معادله  $32x + 57y = 1120$  چند جواب در مجموعه اعداد طبیعی دارد؟

$x$  و  $y$  هر دو عدد طبیعی باشند.

۱ (۲

۱) صفر

۳ (۴

۲) ۳

### پاسخ: گزینه ۱

**خود حل کنی بهتره** دو طرف را به پیمانه ضریب کوچک‌تر یعنی ۳۲ ببرید.

**درس نامه** •• معادله سیاله خطی  $ax + by = c$

جواب معادله یعنی  $x$ ،  $y$  که در معادله  $ax + by = c$  صدق کنند.

شرط داشتن جواب:  $c | (a, b)$  (یعنی ب.م.م ضرایب، عدد ثابت  $c$  را عاد کند).

روش‌های حل: الف) همنهشتی ب) استفاده از فرمول

$$ax + by \equiv_c^a \Rightarrow by \equiv_c^a$$

روش همنهشتی: ۱) دو طرف را به پیمانه ضریب کوچک‌تر (علامت مهم نیست) مثلاً  $a$  می‌بریم:

۲) معادله همنهشتی را حل کرده و  $y$  را پیدا می‌کنیم.

۳) با قراردادن  $y$  در معادله،  $x$  را پیدا می‌کنیم.

**پاسخ تشریحی** گام اول: دو طرف را به پیمانه ۳۲ می‌بریم:

$$32x + 57y \equiv_{1120}^{32} \Rightarrow 57y \equiv_{1120}^{32} \xrightarrow{\frac{57 \equiv 25}{1120 \equiv 0}} 25y \equiv_{1120}^{32} \xrightarrow{\div 25} y \equiv_{(25, 32)=1}^{32}$$

$$y = 32k \xrightarrow{\text{جای گذاری}} 32x + 57(32k) = 1120 \xrightarrow{\div 32} x + 57k = 35 \Rightarrow x = 35 - 57k$$

گام دوم:

گام چهارم: جواب به صورت  $\begin{cases} x = 35 - 57k \\ y = 32k \end{cases}$  است، اما به ازای هر عدد صحیحی که به جای  $k$  قرار دهیم جواب طبیعی به دست نمی‌آید

پس معادله جواب طبیعی ندارد.



۲۳

تست و پاسخ

در گرافی ناهمبند از مرتبه ۹ اگر  $\Delta = 4$  و  $\delta = 2$  باشد، حداکثر تعداد یال‌ها کدام است؟

۱۶ (۴)

۱۵ (۳)

۱۴ (۲)

۱۳ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

**مشاوره** از گراف معمولاً دو سؤال در کنکور می‌آید. این سؤال مهم مشابه کنکور دی ۱۴۰۱ است که احتمال طرح آن در کنکور ۱۴۰۲ نیز زیاد است. خواستان باشد برای به دست آوردن حداکثر یال‌ها، درجه‌ها را در بزرگ‌ترین حالت بنویسید و تعداد رأس‌های فرد نیز زوج باشد.

**درس‌نامه ۱.۱** شرایط درجه رأس‌های گراف

(۱) تعداد اعداد برابر تعداد رأس‌ها یا مرتبه گراف است.

(۲) مجموع درجات برابر با  $2q$  است.

(۳) تعداد رأس‌های فرد (رأس‌های با درجه فرد)، عددی زوج است.

(۴) تعداد رأس‌های زوج (رأس‌های با درجه زوج) از نظر زوج و فردی مثل مرتبه گراف است.

(۵)  $\Delta \leq p-1$

(۶) اگر  $k$  رأس از درجه  $p-1$  (رأس فول یا رأسی که به همه وصل است) داشته باشیم،  $\delta \geq k$  باید باشد.

(۷) در بین درجه‌ها حتماً عدد تکراری وجود دارد.

**درس‌نامه ۲.۲** به دست آوردن حداقل و حداکثر تعداد یال‌ها از روی درجه‌ها

می‌دانیم گرافی رأس‌هایی از درجه مینیمم ( $\delta$ ) و ماکزیمم ( $\Delta$ ) دارد.

(۱) برای این‌که بیشترین تعداد یال‌ها را به دست آوریم، یک رأس از درجه  $\delta$  و بقیه را از درجه  $\Delta$  قرار دهیم.

(۲) برای این‌که کمترین تعداد یال‌ها را به دست آوریم، یک رأس از درجه  $\Delta$  و بقیه را از درجه  $\delta$  قرار می‌دهیم.

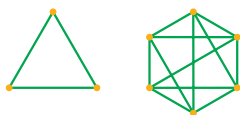
**تذکر مهم:** در هر دو حالت دقت کنید که تعداد رأس‌های فرد، باید زوج باشد (مثلاً در حالت اول اگر این اتفاق نیفتاد، یکی از درجه‌های  $\Delta$

را به  $\Delta-1$  تغییر دهید) و سپس از قضیه  $\sum \deg(v_i) = 2q$  استفاده کنید.

**پاسخ تشریحی**

**گام اول:**  $\Delta = 4$  و  $\delta = 2$  است. برای این‌که گراف ناهمبند و دارای بیشترین تعداد یال باشد، ۶ رأس از درجه ۴ و ۳ رأس

از درجه ۲ در نظر می‌گیریم (نمودار گراف مثلاً به صورت مقابل است).



$$q_{\max} = 15 \Rightarrow 2q = 6 \times 4 + 3 \times 2 \Rightarrow 2q = 30 \Rightarrow q_{\max} = 15$$

گام دوم:

۲۴

تست و پاسخ

اگر  $n$  تعداد دورهای به طول ۵ گراف مقابل باشد حاصل  $\left\lfloor \frac{n+1}{\gamma(G)} \right\rfloor$  کدام است؟

عدد احاطه‌گری گراف

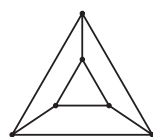
۲ (۲)

۴ (۴)

۱ (۱)

۳ (۳)

پاسخ: گزینه ۴





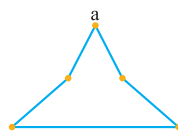
**مشاوره** از بحث احاطه‌گری معمولاً یک سؤال در کنکور می‌آید که تجربه این چندساله نشان داده که ساده است. از آن غافل نشوید.

**خودت حل کنی بهتره** برای شمارش تعداد دورها، یک دور به طول ۵ به دست آورده و از تقارن شکل استفاده کنید.

**درس نامه** •• نمادهای مهم فصل گراف

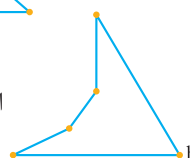
| نماد        | مفهوم                    | نماد                    | مفهوم                                                                               |
|-------------|--------------------------|-------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| $V(G)$      | مجموعه رأس‌های گراف      | $\lceil x \rceil$       | سقف $x$                                                                             |
| $E(G)$      | مجموعه یال‌های گراف      | $G^C$ یا $\bar{G}$      | گراف مکمل $G$                                                                       |
| $p$         | مرتبه گراف               | $\gamma(G)$             | عدد احاطه‌گری گراف $G$                                                              |
| $q$         | اندازه گراف              | $P_n$                   | مسیر $n$ رأسی                                                                       |
| $\deg_G(v)$ | درجه رأس $v$ در گراف $G$ | $C_n$                   | دور $n$ رأسی                                                                        |
| $\Delta$    | ماکزیمم درجه             | $\sum_{i=1}^p \deg v_i$ | مجموع درجات                                                                         |
| $\delta$    | مینیمم درجه              | $(a, b)$                |  |
| $N_G(a)$    | همسایگی باز رأس $a$      | $N_G[a]$                | همسایگی بسته رأس $a$                                                                |

است. با در نظر گرفتن رأس  $a$  و چرخاندن این دور ۳ دور به



**پاسخ تشریحی** **گام اول:** یک دور به طول ۵ به صورت طول ۵ به این صورت به دست می‌آید.

است که با در نظر گرفتن رأس  $b$  و چرخاندن این دور ۳ دور به طول ۵ به این

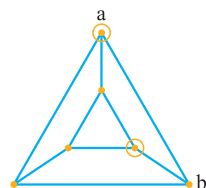


**گام دوم:** دور به طول ۵ دیگر به صورت

صورت نیز به دست می‌آید. گراف، دور به طول ۵ دیگری ندارد، پس در کل ۶ دور به طول ۵ داریم. ( $n = 6$ )

**گام سوم:** طبق رابطه کران پایین عدد احاطه‌گری داریم:  $\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{6}{3+1} \right\rceil = 2$

از طرفی دو رأس مقابل کل رأس‌ها را احاطه می‌کند، پس  $\gamma \leq 2$ ، در نتیجه  $\gamma = 2$ .



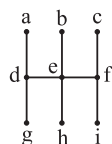
$$\left\lceil \frac{n+1}{\gamma(G)} \right\rceil = \left\lceil \frac{6+1}{2} \right\rceil = 4$$

**گام چهارم:**



## تست و پاسخ ۲۵

گراف مقابل چند مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال غیر مینیمم دارد؟



۷ (۲)

۳ (۱)

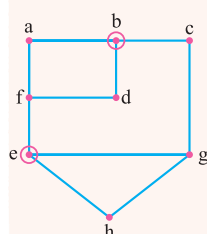
۱۵ (۴)

۱۱ (۳)

## پاسخ: گزینه ۲

**مشاوره** به تفاوت تعریف‌های احاطه‌گر مینیمال و مینیمم دقت کنید. هر احاطه‌گر مینیمم، حتماً مینیمال هست، ولی برعکس آن درست نیست.

### درس‌نامه ۱. مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم



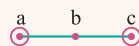
مجموعهٔ احاطه‌گری که کم‌ترین تعداد رأس را در بین همهٔ مجموعه‌های احاطه‌گر دارد، مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم می‌گوییم؛ مثلاً در گراف مقابل رأسی وجود ندارد که به همهٔ رأس‌های دیگر متصل باشد؛ پس مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم حداقل دو عضو دارد، اما مجموعهٔ  $\{e, b\}$  کل رأس‌ها را احاطه می‌کند؛ پس این مجموعه احاطه‌گر مینیمم است.

عدد احاطه‌گری گراف: تعداد عضوهای مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم را عدد احاطه‌گری گراف گفته و با نماد  $\gamma(G)$  نمایش می‌دهیم؛ مثلاً در گراف بالا  $\gamma(G) = 2$  است.

### درس‌نامه ۲. مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال

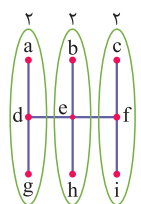
مجموعهٔ احاطه‌گری که هیچ رأس آن قابل حذف کردن نباشد (هر رأس که حذف کنیم مجموعه دیگر احاطه‌گر نباشد). را مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال می‌گوییم.

مثلاً در گراف زیر، مجموعهٔ  $\{a, c\}$  یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال است. (اگر  $a$  را حذف کنیم، خودش احاطه نمی‌شود و اگر  $c$  را حذف کنیم، نیز همین‌طور.)



دقت کنید که مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم در این گراف  $\{b\}$  بوده و  $\gamma = 1$  است.

## پاسخ تشریحی



**گام اول:** برای این که رأس‌های  $a, g$  احاطه شوند یا باید رأس  $d$  را انتخاب کنیم یا این که هر دوی  $a, g$  را در مجموعهٔ احاطه‌گر انتخاب کنیم؛ پس هر کدام از دایره‌ها ۲ حالت دارند که در مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال انتخاب شوند: یا رأس میانی یا دو رأس درجه‌یک.

**گام دوم:**  $2 \times 2 \times 2 = 8$  مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال وجود دارد، اما مجموعهٔ  $\{d, e, f\}$  احاطه‌گر مینیمم است. پس ۷ مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال غیر مینیمم داریم.

**حواستون باشه** مثلاً مجموعهٔ  $\{a, g, f, b, h\}$  احاطه‌گر مینیمال است، چون هیچ رأسی از آن قابل حذف کردن نیست و با حذف هر رأس مجموعه دیگر احاطه‌گر نیست. دقت دارید که این مجموعه مینیمم نیست.



۲۶

تست و پاسخ

مربع لاتین روبه‌رو، به چند طریق قابل تکمیل است؟

|   |   |  |   |
|---|---|--|---|
| ۱ | ۲ |  |   |
| ۳ |   |  |   |
|   |   |  |   |
|   |   |  | ۴ |

در هر سطر و هر ستون اعداد ۱ تا ۴ نوشته شده باشد.

۲ (۲)

۱ (۱)

۴ (۴)

۳ (۳)

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ تشریحی گام اول: ابتدا خانه‌هایی که به صورت یکتا تعیین می‌شوند را به دست می‌آوریم:

|   |   |  |   |
|---|---|--|---|
| ۱ | ۲ |  |   |
| ۳ |   |  |   |
|   |   |  |   |
|   |   |  | ۴ |

 $\Rightarrow$ 

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| ۱ | ۲ | ۴ | ۳ |
| ۳ |   |   |   |
| ۴ |   |   |   |
| ۲ |   |   | ۴ |

گام دوم: خانه‌های باقی‌مانده هیچ‌کدام به صورت منحصر به فرد تعیین نمی‌شود، پس مجبوریم یکی از خانه‌ها (مثلاً خانه رنگی) را حالت‌بندی کنیم:

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| ۱ | ۲ | ۴ | ۳ |
| ۳ |   |   | ۲ |
| ۴ |   |   |   |
| ۲ |   |   | ۴ |

 $\xrightarrow{\text{تکمیل}}$ 

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| ۱ | ۲ | ۴ | ۳ |
| ۳ | ۴ | ۱ | ۲ |
| ۴ | ۳ | ۲ | ۱ |
| ۲ | ۱ | ۳ | ۴ |

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| ۱ | ۲ | ۴ | ۳ |
| ۳ |   |   | ۱ |
| ۴ |   |   |   |
| ۲ |   |   | ۴ |

 $\xrightarrow{\text{تکمیل}}$ 

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| ۱ | ۲ | ۴ | ۳ |
| ۳ | ۴ | ۲ | ۱ |
| ۴ |   |   | ۲ |
| ۲ |   |   | ۴ |

$\Rightarrow$  به دو صورت می‌تواند تکمیل شود

پس در کل به سه حالت می‌توانیم مربع لاتین داده‌شده را پر کنیم.

۲۷

تست و پاسخ

نامعادله  $x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 9$  چند جواب صحیح نامنفی دارد؟

۹۱ (۲)

۹۴ (۱)

۸۱ (۴)

۹۲ (۳)

پاسخ: گزینه ۱

متغیرها صفر می‌توانند باشند.

**مشاوره** معادله سیاله خطی و اصل لانه‌کبوتری، از سایر موضوعات فصل سوم گسسته مهم‌تر است که معمولاً از آن‌ها سؤال می‌آید. به‌خصوص بحث معادله سیاله خطی که تیپ‌های مشخص دارد که با حل تست‌های سال‌های قبل می‌توانید روی آن‌ها مسلط بشوید.

**خودت حل کنی بهتره** اصل نامعادله را با اضافه کردن متغیر  $x_4$  تبدیل به معادله کنید.



درس نامه •• تعداد جواب‌های صحیح نامنفی معادله سیاله خطی

| معادله                                                                               | تعداد جواب‌های صحیح نامنفی | تعبیر                                                                                              |
|--------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$<br>k تا متغیر                                          | $\binom{n+k-1}{k-1}$       | توزیع n شیء یکسان بین k نفر<br>انتخاب n شاخه گل از بین k نوع                                       |
| $\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_k = n \\ x_1 \geq a \end{cases}$                | $\binom{n+k-1-a}{k-1}$     | اگر متغیری شرط بزرگ‌تر یا مساوی (حداقلی) داشته باشد،<br>آن را از n کم می‌کنیم.                     |
| $\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_k = n \\ x_i \geq 1, i=1,2,\dots,n \end{cases}$ | $\binom{n-1}{k-1}$         | جواب‌های طبیعی معادله                                                                              |
| $x_1 + x_2 + \dots + x_k \leq n$                                                     | $\binom{n+k}{k}$           | متغیر نامنفی $x_{k+1}$ را اضافه می‌کنیم تا معادله<br>$x_1 + x_2 + \dots + x_{k+1} = n$ به دست آید. |

**نکته** اگر متغیری دارای ضریب، توان، رادیکال بوده یا این‌که در مخرج باشد باید آن را حالت‌بندی کنیم تا معادله به صورت استاندارد و سیاله خطی با ضرایب واحد دربیاید.

**پاسخ تشریحی** گام اول: معادله را با اضافه کردن متغیر نامنفی  $x_4$  تبدیل به معادله می‌کنیم:

$$x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 9$$

گام دوم: متغیر  $x_2$  دارای ضریب است، پس آن را حالت‌بندی می‌کنیم:

$$x_2 = 0 \Rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 9 \xrightarrow[k=3]{n=9} \text{تعداد جواب‌ها} = \binom{11}{2} = 55$$

$$x_2 = 1 \Rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 6 \xrightarrow[k=3]{n=6} \text{تعداد جواب‌ها} = \binom{8}{2} = 28$$

$$x_2 = 2 \Rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 3 \xrightarrow[k=3]{n=3} \text{تعداد جواب‌ها} = \binom{5}{2} = 10$$

$$x_2 = 3 \Rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 0 \Rightarrow (0, 0, 0) \text{ فقط یک جواب}$$

گام سوم: نامعادله در کل دارای  $55 + 28 + 10 + 1 = 94$  جواب صحیح نامنفی است.

۲۸

تست و پاسخ

چند عدد طبیعی  $1 \leq n \leq 300$  وجود دارد که بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک n و 30 بزرگ‌تر از یک باشد؟

n بر حداقل یکی از اعداد ۲ یا ۳ یا ۵ بخش‌پذیر باشد

۲۱۰ (۲)

۲۰۰ (۱)

۲۴۰ (۴)

۲۲۰ (۳)

**پاسخ: گزینه ۳**

خود حل کنی بهتره | AUBUC | را به دست آورید که A و B و C به ترتیب اعداد بخش‌پذیر ۲ و ۳ و ۵ هستند.



**پاسخ تشریحی** گام اول:  $3^0 = 2 \times 3 \times 5$ ، پس اگر عدد  $n$  بر حداقل یکی از اعداد ۲ یا ۳ یا ۵ بخش پذیر باشد، ب.م.م آن با  $3^0$  بزرگ تر از یک می شود.

گام دوم: تعریف می کنیم: اعداد بخش پذیر بر  $C = 5$  و اعداد بخش پذیر بر  $B = 3$  و اعداد بخش پذیر بر  $A = 2$ .

گام سوم: طبق اصل شمول برای سه مجموعه داریم:

بر ۲ و ۳ بخش پذیر (یعنی بر ۶)

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

$$= \left[ \frac{300}{2} \right] + \left[ \frac{300}{3} \right] + \left[ \frac{300}{5} \right] - \left[ \frac{300}{6} \right] - \left[ \frac{300}{10} \right] - \left[ \frac{300}{15} \right] + \left[ \frac{300}{30} \right]$$

$$= 150 + 100 + 60 - 50 - 30 - 20 + 10 = 220$$

**حواستون باشه** اگر مسئله نه بر ۲ و نه بر ۳ و نه بر ۵ را خواسته بود باید عدد ۲۲۰ را از کل کم می کردیم؛ یعنی:

$$|\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}| = |S| - |A \cup B \cup C| = 300 - 220 = 80$$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$   
 نه بر ۲ و نه بر ۳ و نه بر ۵

### تست و پاسخ ۲۹

حداکثر چند عدد از مجموعه  $\{10, 11, 12, \dots, 31\}$  می توانیم انتخاب کنیم به طوری که تفاضل هیچ دو عدد انتخابی، برابر ۱۵ نشود؟

آن تعدادی که اگر یکی بیشتر از آن برداریم قطعاً تفاضل دو عدد، ۱۵ بشود.

۱۶ (۲)

۱۵ (۱)

۱۸ (۴)

۱۷ (۳)

### پاسخ: گزینه ۱

**مشاوره** سؤال بسیار مهم مشابه تمرین کتاب که بارها و بارها در کنکور آمده است حتی در دی ۱۴۰۱.

درس نامه را به دقت مطالعه کنید تا روی این تیپ مسلط شوید!

### درس نامه •• روش جفت سازی در حل مسئله های اصل لانه کبوتری

در برخی از مسئله های اصل لانه کبوتری باید اثبات کنیم که اگر حداقل فلان تعداد انتخاب کنیم دو عدد با ویژگی مورد نظر (مثلاً جمع خاص) در بین اعداد وجود دارد. روش این جوری است که اعداد را دوتا دوتا که همان ویژگی را دارند دسته بندی می کنیم؛ البته ممکن است برخی اعداد جفتی نداشته باشند و تک عضوی باقی بمانند که هر کدام از آن ها را یک دسته در نظر می گیریم. اگر یکی بیشتر از تعداد دسته ها (لانه ها) برداریم، مطمئن هستیم که دو عدد با همان ویژگی در بین اعداد انتخابی وجود دارد.

**پاسخ تشریحی** گام اول: اعداد را دوتا دوتا جوری دسته بندی می کنیم که تفاضل آن ها برابر ۱۵ شود، البته برخی اعداد ممکن است تک عضوی باقی بمانند.

$\{10, 25\}, \{11, 26\}, \{12, 27\}, \{13, 28\}, \{14, 29\}, \{15, 30\}, \{16, 31\}$

$\{17\} \{18\} \{19\} \{20\} \{21\} \{22\} \{23\} \{24\}$

گام دوم: ۱۵ دسته (لانه) داریم، پس اگر ۱۶ تا انتخاب کنیم (طبق اصل لانه کبوتری) مطمئن هستیم از یکی از مجموعه ها هر دو انتخاب شده که تفاضل آن ها برابر ۱۵ می شود، ولی با حداکثر ۱۵ تا نمی توانیم مطمئن باشیم. این یعنی می توانیم حداکثر ۱۵ عدد انتخاب کنیم به طوری که تفاضل هیچ دوتایی از آن ها برابر ۱۵ نشود.



هندسه: هندسه (۳): صفحه‌های ۹ تا ۸۶

## تست و پاسخ ۳۰

در یک دستگاه معادلات خطی،  $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$  ماتریس ضرایب و  $\begin{bmatrix} 11 \\ 8 \end{bmatrix}$  ماتریس مقادیر معلوم است. مجموع جواب‌های این دستگاه کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

## پاسخ: گزینه ۲

### درس نامه

(۱) در دستگاه  $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ ، ماتریس  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}$  را ماتریس ضرایب، ماتریس  $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  را ماتریس مجهولات و ماتریس

$B = \begin{bmatrix} c \\ c' \end{bmatrix}$  را ماتریس مقادیر معلوم می‌نامیم. این دستگاه را می‌توان به صورت معادله ماتریسی  $AX = B$  در نظر گرفت که در این صورت،

داریم:  $X = A^{-1}B$

(۲) اگر  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}$ ، آن‌گاه با شرط  $ab' - a'b \neq 0$ ، ماتریس  $A$  وارون پذیر است و داریم:

$$A^{-1} = \frac{1}{ab' - a'b} \begin{bmatrix} b' & -b \\ -a' & a \end{bmatrix}$$

پاسخ تشریحی راه حل اول: داریم  $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 11 \\ 8 \end{bmatrix}$  پس:

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{10 - 12} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 \\ 8 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$x + y = 1 + 2 = 3$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 5x + 3y = 11 \\ 4x + 2y = 8 \end{cases} \xrightarrow{\times(-\frac{3}{2})} \begin{cases} 5x + 3y = 11 \\ -6x - 3y = -12 \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

$$-x = -1 \Rightarrow x = 1$$

$$5 + 3y = 11 \Rightarrow y = 2$$

$$x + y = 1 + 2 = 3$$

پس  $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$  بنابراین:

راه حل دوم: داریم  $AX = B$  پس:

با جمع کردن طرفین معادله‌های (۱) و (۲)، داریم:

و با قراردادن  $x = 1$  در معادله (۱) داریم:

پس:

## تست و پاسخ ۳۱

اگر  $A = \begin{bmatrix} y & z & y \\ 2 & 0 & 4z \\ 0 & z & 0 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} y & -1 & x \\ 0 & 0 & -x \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ، آن‌گاه دترمینان ماتریس اسکالر  $AB$  کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۸ (۳) -۱ (۴) ۸

## پاسخ: گزینه ۲

**مشاوره** تعریف ماتریس‌های قطری و اسکالر را خوب بدانید که در کنکورهای سال‌های اخیر، چند بار مورد پرسش قرار گرفته است.

**خودت حل کنی بهتره** با استفاده از تعریف ماتریس اسکالر، مقادیر مجهول را به دست آورید.

### درس نامه

(۱) اگر تمام درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی یک ماتریس مربعی صفر باشند، آن ماتریس را **قطری** می‌نامیم؛ حالا اگر در یک ماتریس قطری، تمام درایه‌های واقع بر قطر اصلی با هم برابر باشند، آن ماتریس را **اسکالر** می‌نامیم.

(۲) دترمینان هر ماتریس قطری، برابر است با حاصل ضرب درایه‌های واقع بر قطر اصلی آن.



**پاسخ تشریحی** گام اول (پیدا کردن ماتریس AB):

با توجه به ماتریس‌های A و B، داریم:

$$C = AB = \begin{bmatrix} y & z & y \\ 2 & 0 & 4z \\ 0 & z & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y & -1 & x \\ 0 & 0 & -x \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y^2 - y & 0 & xy - xz + y \\ 2y - 4z & -2 + 4z & 2x + 4z \\ 0 & 0 & -xz \end{bmatrix}$$

گام دوم (پیدا کردن مقادیر مجهول):

$$c_{21} = 0 \Rightarrow 2y - 4z = 0 \Rightarrow y = 2z$$

$$c_{33} = 0 \Rightarrow 2x + 4z = 0 \Rightarrow x = -2z$$

$$c_{13} = 0 \Rightarrow xy - xz + y = 0 \Rightarrow -4z^2 + 2z^2 + 2z = 0 \Rightarrow 2z(-z + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} z = 0 \quad \times \\ z = 1 \quad \checkmark \end{cases}$$

مقدار  $z = 0$  را نمی‌پذیریم، چون در این صورت  $c_{22} = -2$  و  $c_{33} = 0$  و ماتریس C اسکالر نخواهد بود.

گام سوم (محاسبه خواسته سؤال):

به ازای  $z = 1$  داریم  $c_{22} = -2 + 4(1) = 2$ ، پس با توجه به این که ماتریس C اسکالر است، هر سه درایه واقع بر قطر اصلی C برابر با 2 و سایر درایه‌های آن صفر هستند:

$$C = AB = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow |AB| = 2 \times 2 \times 2 = 8$$



**تست و پاسخ**

اگر  $x = \begin{vmatrix} bc & a^2 & a^2 \\ b^2 & ac & b^2 \\ c^2 & c^2 & ab \end{vmatrix}$  و  $y = \begin{vmatrix} bc & ab & ac \\ ab & ac & bc \\ ac & bc & ab \end{vmatrix}$ ، در صورتی که y عددی غیر صفر باشد، حاصل  $\frac{x}{y}$  کدام است؟

(1) 1      (2) abc      (3) -1      (4) -abc

**پاسخ: گزینه 1**

**مشاوره** در حل این سؤال، از یکی از ویژگی‌های دترمینان که در تمرین‌های کتاب درسی به آن اشاره شده است، استفاده می‌کنیم. استفاده از این ویژگی تا الان در کنکورهای نظام جدید مورد پرسش قرار نگرفته، پس باید هر سال منتظر سوالاتی از آن باشیم.

**خودت حل کنی بهتره** سطر اول، دوم و سوم دترمینان y را به ترتیب در b، a و c ضرب کنید.

**درس نامه**

اگر یک سطر یا یک ستون ماتریس را در عدد حقیقی  $\lambda$  ضرب کنیم، دترمینان آن در  $\lambda$  ضرب می‌شود، مثلاً:

$$\begin{vmatrix} \lambda a & \lambda b & \lambda c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

بعضی‌ها این ویژگی را این‌طور حفظ می‌کنند که می‌توانیم عددی را از یک سطر یا ستون دترمینان فاکتور بگیریم و از دترمینان خارج کنیم.

**پاسخ تشریحی**

گام اول: سطر اول، دوم و سوم دترمینانی را که برابر y است، به ترتیب در b، a و c ضرب می‌کنیم، داریم:

$$y = \frac{1}{abc} \begin{vmatrix} abc & a^2b & a^2c \\ ab^2 & abc & b^2c \\ ac^2 & bc^2 & abc \end{vmatrix}$$



گام دوم:

در دترمینان گام اول از ستون‌های اول، دوم و سوم به ترتیب  $a$ ،  $b$  و  $c$  را فاکتور می‌گیریم:

$$y = \frac{1}{abc} (abc) \begin{vmatrix} bc & a^2 & a^2 \\ b^2 & ac & b^2 \\ c^2 & c^2 & ab \end{vmatrix} = \frac{abc}{abc} \cdot x = x$$

## تست و پاسخ ۳۳

فاصله بین مرکزهای دو دایره به شعاع‌های ۲ و ۸ برابر ۵ است. مکان هندسی مرکز دایره‌هایی که با این دو دایره مماس داخل‌اند، یک منحنی است؛ طول بلندترین وتر در این منحنی کدام است؟

۸ (۴)

۶ (۳)

۱۲ (۲)

۴ (۱)

## پاسخ: گزینه ۲

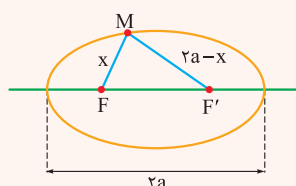
**مشاوره** با یک سؤال زیاده ترکیبی از دو مبحث «دایره» و «بیضی» است مواجه هستیم. در این تیپ سؤال‌ها، هیچ وقت رسم شکل را فراموش نکنید.

**خودت حل کنی بهتره** اگر  $C(O, r)$  بر  $C_1$  و  $C_2$  مماس داخل باشد، حاصل  $OO_1 + OO_2$  چه قدر می‌شود؟

## درس نامه

(۱) برای تعیین وضعیت دو دایره  $(O_1, r_1)$  و  $(O_2, r_2)$ ، طول پاره خط  $O_1O_2$  را با مقادیر  $r_1 + r_2$  و  $|r_1 - r_2|$  مقایسه کنید:

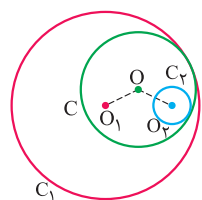
| شرط                                | شکل | وضعیت                                                                              |
|------------------------------------|-----|------------------------------------------------------------------------------------|
| $O_1O_2 > r_1 + r_2$               |     | متخارج                                                                             |
| $O_1O_2 = r_1 + r_2$               |     | مماس خارج                                                                          |
| $ r_1 - r_2  < O_1O_2 < r_1 + r_2$ |     | متقاطع                                                                             |
| $O_1O_2 =  r_1 - r_2 $             |     | مماس داخل                                                                          |
| $O_1O_2 <  r_1 - r_2 $             |     | متداخل<br>در این حالت اگر $O_2$ بر $O_1$ منطبق باشد، دو دایره را هم مرکز می‌نامیم. |



(۲) مکان هندسی نقاطی که مجموع فاصله‌های آن‌ها از دو نقطه ثابت  $F$  و  $F'$  برابر با مقدار ثابت  $2a$  است، یک بیضی است که  $F$  و  $F'$  کانون‌های آن هستند و طول بلندترین قطر آن برابر  $2a$  است.



**پاسخ تشریحی** گام اول (رسم شکل مناسب):



دو دایره  $C_1(O_1, 8)$  و  $C_2(O_2, 2)$  را داریم که طبق فرض  $O_1O_2 = 5$ ؛ پس  $O_1O_2 < |r_1 - r_2|$  یعنی دو دایره متداخل اند. از طرفی دایره  $C(O, r)$  یکی از دایره‌هایی است که با  $C_1$  و  $C_2$  مماس داخل است.

**گام دوم** (پیدا کردن مکان هندسی O و خواسته سؤال):

دایره  $C(O, r)$  با دایره  $C_1$  مماس داخل است، با توجه به این که  $r_1 > r$  داریم:

↓  
8

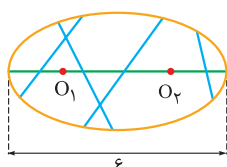
دایره  $C(O, r)$  با دایره  $C_2$  مماس داخل است، با توجه به این که  $r > r_2$  داریم:

↓  
2

حالا اگر طرفین دو معادله (1) و (2) را با هم جمع کنیم، داریم  $OO_1 + OO_2 = 6$ ، یعنی مجموع فاصله‌های نقطه متغیر O، از دو نقطه ثابت  $O_1$  و  $O_2$ ، برابر با مقدار ثابت  $2a = 6$  است، یعنی O روی یک بیضی با کانون‌های  $O_1$  و  $O_2$  و طول قطر بزرگ  $2a = 6$  واقع است. در هر بیضی، قطر بزرگ، بزرگ‌ترین وتر هم هست.

$$OO_1 = 8 - r \quad (1)$$

$$OO_2 = r - 2 \quad (2)$$



## تست و پاسخ ۳۴

دایره  $C(W, R)$  با معادله  $x^2 + y^2 - 4x = K$ ، خط  $x + y = 1$  را در دو نقطه A و B قطع می‌کند به طوری که  $\hat{AWB} = 90^\circ$ . حاصل  $\frac{K}{R}$  کدام است؟

۳ (۱)  
-۳ (۲)  
۱ (۳)  
-۱ (۴)

**پاسخ: گزینه ۲**

**مشاوره** «وضعیت خط با دایره» یکی از مهم‌ترین تیپ‌های سؤال از قسمت دایره در فصل مقاطع مخروطی است که قبلاً بارها از آن در کنکور سؤال داشته‌ایم و باید به خوبی روی آن مسلط باشید.

**خودت حل کنی بهتره** مثلث WAB قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است.

## درس‌نامه

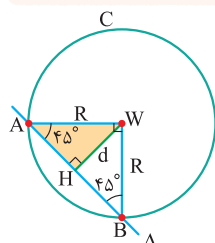
(۱) اگر  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$  معادله یک دایره باشد، مختصات مرکز آن به صورت  $W(\frac{-a}{2}, \frac{-b}{2})$  و شعاع آن برابر با  $R = \sqrt{(\frac{a}{2})^2 + (\frac{b}{2})^2 - c}$  است.

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

(۲) فاصله نقطه  $(x_0, y_0)$  از خط به معادله  $ax + by + c = 0$  برابر است با:

(۳) در مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین، زاویه‌های حاده برابرند با  $45^\circ$ .

**پاسخ تشریحی** گام اول (رسم شکل فرضی و تحلیل سؤال):



همان‌طور که می‌بینید، مثلث WAB قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین است، پس زاویه‌های حاده آن  $45^\circ$  هستند، پس اگر فاصله نقطه W از خط  $\Delta: x + y - 1 = 0$  برابر d باشد، در مثلث قائم‌الزاویه HAW داریم:

$$\sin 45^\circ = \frac{d}{R}$$

**گام دوم** (محاسبه d و R):

مختصات مرکز دایره  $x^2 + y^2 - 4x - K = 0$  به صورت  $W(2, 0)$  است که فاصله آن از خط  $\Delta: x + y - 1 = 0$  برابر است با:

$$d = \frac{|2 + 0 - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

و همان‌طور که در گام اول گفتیم  $\sin 45^\circ = \frac{d}{R}$ ؛ پس:  $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{R} \Rightarrow R = 1$



گام سوم (محاسبه K و خواسته سؤال):

شعاع دایره  $x^2 + y^2 - 4x - K = 0$  برابر است با  $R = \sqrt{(-2)^2 + 0 - (-K)} = \sqrt{4 + K}$ ؛ پس با توجه به گام دوم، داریم:

$$R = 1 \Rightarrow \sqrt{4 + K} = 1 \Rightarrow 4 + K = 1 \Rightarrow K = -3$$

$$\frac{K}{R} = \frac{-3}{1} = -3$$

بنابراین:

## تست و پاسخ ۳۵

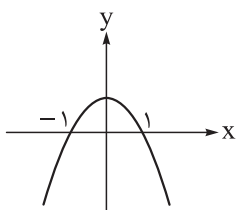
کانون سهمی رسم شده، مبدأ مختصات است. معادله خط هادی سهمی کدام است؟

$$y = 1/5 \quad (2)$$

$$y = 2 \quad (1)$$

$$y = 0/5 \quad (4)$$

$$y = 1 \quad (3)$$



## پاسخ: گزینه ۳

**مشاوره** این سؤال را از چند راه می توان حل کرد، اما بهترین راه، استفاده از خاصیت وتر کانونی در سهمی است که هرچند در کتاب

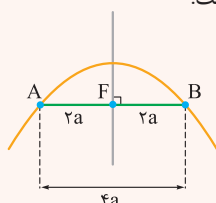
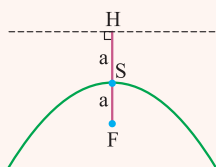
به طور مستقیم به آن اشاره نشده، اما چند بار در کنکور سؤال داشته که آخرین آن ها در کنکور دی ۱۴۰۱ بود.

**خودت حل کنی بهتره** وتری که نقاط تقاطع این سهمی با محور X ها را به هم وصل می کند، وتر کانونی آن است.

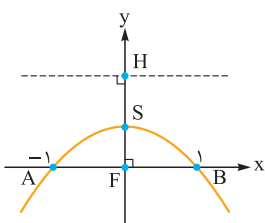
## درس نامه

(۱) در هر سهمی، فاصله کانون تا رأس را **فاصله کانونی** نامیده و با  $a$  نشان می دهیم که در این صورت فاصله رأس تا خط هادی هم برابر با  $a$  است.

(۲) وتری از سهمی که در کانون آن بر محور تقارن عمود است، **وتر کانونی** نامیده می شود و طول آن برابر با  $4a$  است.



**پاسخ تشریحی** همان طور که می بینید، پاره خط  $AB = 2$ ، وتر کانونی سهمی است؛ پس:



$$4a = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

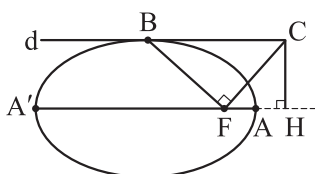
$$FH = 2a = \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow \text{معادله خط هادی: } y = y_H \Rightarrow y = 1$$

بنابراین:

## تست و پاسخ ۳۶

مطابق شکل، خط  $d$  در یکی از رأس های یک بیضی با کانون  $F$  بر آن مماس است و نقطه  $C$  روی  $d$  چنان واقع است که  $\angle BFC = 90^\circ$ . اگر  $H$  پای

عمود وارد از  $C$  بر امتداد محور کانونی بیضی باشد و  $FH = 2AF$ ، آن گاه خروج از مرکز بیضی کدام است؟



$$\frac{1}{3} \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \quad (4)$$

$$\frac{\sqrt{5}}{5} \quad (3)$$

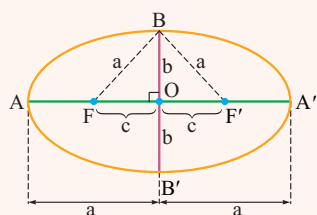
## پاسخ: گزینه ۱



**مشاوره** این سؤال، مشابه یکی از تمرین‌های کتاب درسی است، پس روش حل آن را خوب یاد بگیرید.

**خود حل کنی بهتره** قطر  $BB'$  را رسم کنید و از تشابه استفاده کنید.

## درس نامه



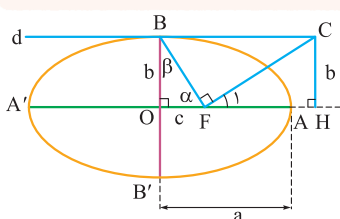
(۱) طول‌های مهم در بیضی را برحسب پارامترهای آن بلد باشید. با توجه به شکل، در مثلث قائم‌الزاویه BOF، داریم:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

(۲) میزان کشیدگی بیضی را با خروج از مرکز آن که به صورت  $e = \frac{c}{a}$  تعریف می‌شود، می‌سنجند.

## پاسخ تشریحی

گام اول (اثبات تشابه BOF و FHC):



قطر  $BB'$  را رسم می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویه BOF داریم:

$$90^\circ + \alpha + \beta = 180^\circ \Rightarrow \beta = 90^\circ - \alpha \quad (*)$$

از طرفی داریم:

$$\widehat{OFA} = 180^\circ \Rightarrow \alpha + 90^\circ + \widehat{F_1} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{F_1} = 90^\circ - \alpha \xrightarrow{(*)} \widehat{F_1} = \beta$$

بنابراین دو مثلث BOF و FHC به حالت تساوی دو زاویه، متشابه‌اند.

گام دوم (محاسبه طول‌های FH و FA برحسب پارامترهای بیضی):

از تشابه دو مثلث BOF و FHC، داریم:

$$\frac{FH}{OB} = \frac{CH}{OF} \Rightarrow \frac{FH}{b} = \frac{c}{c} \Rightarrow FH = \frac{b^2}{c}$$

$$FA = a - c$$

از طرفی با توجه به شکل، داریم:

گام سوم (محاسبه خروج از مرکز بیضی):

سؤال می‌گوید  $FH = 3AF$ ، پس بنا به گام دوم، داریم:

$$\begin{aligned} \frac{b^2}{c} &= 3(a - c) \xrightarrow{b^2 = a^2 - c^2} \frac{a^2 - c^2}{c} = 3(a - c) \Rightarrow \frac{(a - c)(a + c)}{c} = 3(a - c) \Rightarrow \frac{a + c}{c} = 3 \Rightarrow a + c = 3c \Rightarrow a = 2c \\ &\Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

۳۷

## تست و پاسخ

دو نقطه  $A = (2, -6, -1)$  و  $B = (5, 0, 2)$  را در نظر بگیرید. اگر  $M$  نقطه‌ای در فضا باشد، به طوری که  $\overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{MB}$ ، آن‌گاه فاصله  $M$  از مبدأ مختصات کدام است؟

۷ (۴)

۶ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)

## پاسخ: گزینه ۲

گام اول (محاسبه مختصات نقطه  $M$ ):

$$\begin{cases} A = (2, -6, -1) \\ B = (5, 0, 2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overline{AM} = M - A = (x_0 - 2, y_0 + 6, z_0 + 1) \\ \overline{MB} = B - M = (5 - x_0, 0 - y_0, 2 - z_0) \end{cases}$$

در نظر می‌گیریم  $M = (x_0, y_0, z_0)$ ، داریم:



حالا سؤال می گوید  $\overline{AM} = \frac{1}{3}\overline{MB}$ ؛ پس:

$$(x_0 - 2, y_0 + 6, z_0 + 1) = \frac{1}{3}(\delta - x_0, -y_0, 2 - z_0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0 - 2 = \frac{1}{3}(\delta - x_0) \Rightarrow 2x_0 - 4 = \delta - x_0 \Rightarrow x_0 = 3 \\ y_0 + 6 = \frac{1}{3}(-y_0) \Rightarrow 2y_0 + 12 = -y_0 \Rightarrow y_0 = -4 \Rightarrow M = (3, -4, 0) \\ z_0 + 1 = \frac{1}{3}(2 - z_0) \Rightarrow 2z_0 + 2 = 2 - z_0 \Rightarrow z_0 = 0 \end{cases}$$

گام دوم (محاسبه خواسته سؤال):

فاصله نقطه  $M = (x_0, y_0, z_0)$  از نقطه  $O = (0, 0, 0)$  برابر است با:  $OM = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} \Rightarrow OM = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 0^2} = 5$

## تست و پاسخ ۳۸

زاویه بین دو بردار  $\vec{a} = (6, 6, -3)$  و  $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$  برابر با  $\theta$  است. اگر بردار  $\vec{a}' = (\alpha, \beta, \gamma)$ ، تصویر قائم  $\vec{a}$  بر امتداد  $\vec{b}$  باشد، حاصل

$$\frac{\alpha + \beta + \gamma}{\cos \theta} \text{ کدام است؟}$$

۷ / ۵ (۴)

-۷ / ۵ (۳)

۱۵ (۲)

-۱۵ (۱)

## پاسخ: گزینه ۲

**مشاوره** محاسبه زاویه بین دو بردار و تصویر قائم بردارها بر هم، مهم ترین کاربردهای ضرب داخلی هستند، که در این سؤال، این دو موضوع ترکیب شده اند.

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

**درس نامه** ۱ اگر دو بردار  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  با هم زاویه  $\theta$  بسازند، داریم:

$$\vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b}$$

۲ اگر  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  دو بردار باشند، تصویر قائم بردار  $\vec{a}$  بر امتداد بردار  $\vec{b}$  برابر است با:

## پاسخ تشریحی

با توجه به درس نامه، داریم:

$$\vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} \Rightarrow \vec{a}' = \frac{|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta}{|\vec{b}|^2} \vec{b} = \frac{|\vec{a}| \cos \theta}{|\vec{b}|} \vec{b}$$

$$\vec{b} = (1, 2, 2) \rightarrow \vec{a}' = \left( \frac{|\vec{a}| \cos \theta}{|\vec{b}|}, \frac{2|\vec{a}| \cos \theta}{|\vec{b}|}, \frac{2|\vec{a}| \cos \theta}{|\vec{b}|} \right)$$

پس اگر  $\vec{b} = (1, 2, 2)$ ، داریم:

$$\frac{\alpha + \beta + \gamma}{\cos \theta} = \frac{(1 + 2 + 2) \left( \frac{|\vec{a}| \cos \theta}{|\vec{b}|} \right)}{\cos \theta} = \frac{5|\vec{a}|}{|\vec{b}|} = \frac{5|3(2, 2, -1)|}{|(1, 2, 2)|} = \frac{5 \times 3 \sqrt{17}}{\sqrt{9}} = \frac{5 \times 3 \times 3}{3} = 15$$

بنابراین:

## تست و پاسخ ۳۹

اگر  $2 = x^2 + 4y^2 + z^2$ ، آن گاه کم ترین مقدار  $4x + 6y - 5z$  کدام است؟

-۱۰ (۴)

-۱۰√۲ (۳)

۱۰√۲ (۲)

۱۰ (۱)

## پاسخ: گزینه ۴

**مشاوره** این سؤال در مورد نامساوی کُشی- شوارتز است که در کتاب درسی به آن اشاره شده. در این گونه سؤال ها، باید بتوانید دو بردار مناسب پیدا کنید؛ اگر این کار را بلد نیستید، پاسخ این سؤال را حتماً بخوانید.

**خود حل کنی بهتره** از نامساوی کُشی - شوارتز استفاده کنید.

**درس نامه** نامساوی کُشی - شوارتز: اگر  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  دو بردار باشند، آن گاه همواره داریم  $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| |\vec{b}|$ ؛ پس:  $-|\vec{a}| |\vec{b}| \leq \vec{a} \cdot \vec{b} \leq |\vec{a}| |\vec{b}|$



## پاسخ تشریحی

گام اول (تحلیل سؤال): سؤال می گوید  $x^2 + 4y^2 + z^2 = 2$ ، پس می توانیم برداری به شکل  $\vec{a} = (x, 2y, z)$  در نظر بگیریم و بگوییم:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + 4y^2 + z^2} = \sqrt{2}$$

گام دوم (به دست آوردن بردار دوم):

حالا بردار  $\vec{b}$  را طوری در نظر می گیریم که حاصل ضرب داخلی آن با  $\vec{a}$ ، عبارت  $4x + 6y - 5z$  را ایجاد کند، یعنی  $\vec{b} = (4, 3, -5)$ .

گام سوم (استفاده از نامساوی کوشی - شوارتز):

اگر  $\vec{a} = (x, 2y, z)$ ،  $\vec{b} = (4, 3, -5)$ ، آن گاه داریم:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + 4y^2 + z^2} = \sqrt{2}, |\vec{b}| = \sqrt{4^2 + 3^2 + (-5)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}, \vec{a} \cdot \vec{b} = 4x + 6y - 5z$$

و بنا به نامساوی کوشی - شوارتز، داریم:

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| |\vec{b}| \Rightarrow |4x + 6y - 5z| \leq (\sqrt{2})(5\sqrt{2}) \Rightarrow -10 \leq 4x + 6y - 5z \leq 10$$

بنابراین کمترین مقدار  $4x + 6y - 5z$  برابر است با:  $(-10)$ .

## تست و پاسخ ۴۰

دو بردار  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  به ترتیب با طولهای ۵ و ۲، با هم زاویه منفرجه می سازند. اگر اندازه حاصل ضرب خارجی این دو بردار ۸ باشد، حاصل

$$|\vec{a} \times (\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{b})| + |\vec{a} \cdot (\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{b})| \text{ کدام است؟}$$

۳۴ (۴)

۳۲ (۳)

۳۰ (۲)

۲۸ (۱)

## پاسخ: گزینه ۳

خود حل کنی بهتره سینوس و کسینوس زاویه بین دو بردار را به دست آوریم.

## درس نامه

(۱) اگر  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  دو بردار باشند که با هم زاویه  $\theta$  می سازند، آن گاه:

$$\begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta \\ |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta \end{cases} \text{ (الف)}$$

$$\text{ب) } \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2, \vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$$

(۲) اگر  $\vec{a}, \vec{b}$  و  $\vec{c}$  سه بردار و  $r$  و  $s$  دو عدد حقیقی باشند، داریم:

$$\begin{cases} \vec{a} \times (r\vec{b} + s\vec{c}) = r\vec{a} \times \vec{b} + s\vec{a} \times \vec{c} \\ \vec{a} \cdot (r\vec{b} + s\vec{c}) = r\vec{a} \cdot \vec{b} + s\vec{a} \cdot \vec{c} \end{cases}$$

## پاسخ تشریحی

گام اول (ساده کردن خواسته سؤال):

بنا به آنچه که در درس نامه گفتیم اگر زاویه بین دو بردار را  $\theta$  در نظر بگیریم، داریم:

$$A = |\vec{a} \times (\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{b})| + |\vec{a} \cdot (\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{b})| = |-\frac{1}{4}\vec{a} \times \vec{b}| + |\vec{a} \cdot \vec{a} - \frac{1}{4}\vec{a} \cdot \vec{b}|$$

$$\underbrace{\vec{a} \times \vec{a}}_{\vec{0}} - \frac{1}{4}\vec{a} \times \vec{b} \quad \underbrace{\vec{a} \cdot \vec{a} - \frac{1}{4}\vec{a} \cdot \vec{b}}_{|\vec{a}|^2}$$

$$= \frac{1}{4}|\vec{a} \times \vec{b}| + |\vec{a} \cdot \vec{a} - \frac{1}{4}\vec{a} \cdot \vec{b}| \cos \theta = \frac{1}{4} \times 8 + |25 - \frac{1}{4} \times 5 \times 2 \cos \theta| \Rightarrow A = 4 + |25 - 5 \cos \theta|$$

گام دوم (محاسبه کسینوس زاویه بین  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$ ):

با توجه به گام اول، برای محاسبه عبارت مورد نظر سؤال، کافی است کسینوس زاویه بین دو بردار را محاسبه کنیم. داریم:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = 8 \Rightarrow |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta = 8 \Rightarrow 5 \times 2 \sin \theta = 8 \Rightarrow \sin \theta = \frac{4}{5}$$

$$\xrightarrow{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1} \cos \theta = \pm \frac{3}{5} \xrightarrow{\theta \text{ منفرجه}} \cos \theta = -\frac{3}{5}$$

گام سوم (محاسبه خواسته سؤال):

$$A = 4 + |25 - 5 \times (-\frac{3}{5})| = 4 + 28 = 32$$

با توجه به دو گام قبل، داریم:



فیزیک دوازدهم: فیزیک (۳): صفحه‌های ۱ تا ۱۵۶

## تست و پاسخ ۴۱

متحرکی که با سرعت ثابت روی محور  $x$  حرکت می‌کند، در لحظه  $t_1 = 5$  s از مکان  $x_1 = 6$  m و در لحظه  $t_2 = 20$  s از مکان  $x_2 = 36$  m عبور می‌کند. به ترتیب، بردار مکان متحرک در مبدأ زمان بر حسب متر و لحظه تغییر جهت بردار مکان متحرک بر حسب ثانیه، کدام است؟

(۱)  $4\hat{i}$ ، ۲ (۲)  $4\hat{i}$ ، ۴ (۳)  $-4\hat{i}$ ، ۲ (۴)  $-4\hat{i}$ ، ۴

## پاسخ: گزینه ۳

### درس نامه

معادله مکان - زمان متحرکی که با سرعت ثابت روی محور  $x$  حرکت می‌کند، به صورت زیر است:

$$x = vt + x_0$$

$\uparrow$  سرعت متحرک (m/s)  
 $\leftarrow$  مکان اولیه (m)  $\rightarrow$  مکان متحرک (m)  
 $\downarrow$  زمان (s)

ابتدا سرعت و مکان اولیه متحرک را با استفاده از معادله مکان - زمان حرکت با سرعت ثابت، به دست می‌آوریم:

$$x = vt + x_0 \Rightarrow \begin{cases} 6 = v(5) + x_0 \\ 36 = v(20) + x_0 \end{cases} \Rightarrow v = 2 \text{ m/s}, x_0 = -4 \text{ m}$$

مکان متحرک در مبدأ زمان ( $t = 0$  s) همان  $x_0$  است؛ بنابراین بردار مکان متحرک در مبدأ زمان برابر با  $\vec{d} = -4\hat{i}$  است.

$$x = vt + x_0 \xrightarrow{x_0 = -4 \text{ m}} x = 2t - 4$$

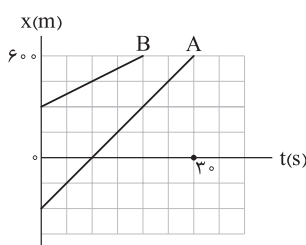
حالا می‌توانیم معادله مکان - زمان متحرک را بنویسیم:

جهت بردار مکان متحرک هنگامی تغییر می‌کند که متحرک از مبدأ مکان ( $x = 0$  m) عبور کند. این لحظه را با استفاده از معادله مکان - زمان آن می‌توانیم به دست آوریم:

$$x = 2t - 4 \xrightarrow{x=0 \text{ m}} 2t - 4 = 0 \Rightarrow t = 2 \text{ s}$$

## تست و پاسخ ۴۲

نمودار مکان - زمان دو متحرک A و B که روی محور  $x$  با سرعت ثابت حرکت می‌کنند، مطابق شکل زیر است. در چه مکانی بر حسب متر، دو متحرک به هم می‌رسند؟



(۱) ۷۵۰

(۲) ۹۰۰

(۳) ۹۷۵

(۴) ۱۰۵۰

## پاسخ: گزینه ۲

**خودت حل کنی بهتره** با توجه به نمودار، سرعت دو متحرک A و B را به دست آورید و با استفاده از آن، معادله مکان - زمان آن‌ها را

بنویسید؛ سپس لحظه‌ای را که دو متحرک A و B به یکدیگر می‌رسند، با توجه به تساوی مکان آن‌ها در این لحظه ( $x_A = x_B$ ) محاسبه کنید و در نهایت مکان آن‌ها را در این لحظه، با کمک معادله مکان - زمان آن‌ها به دست آورید.

با توجه به نمودار، هر قسمت از محور زمان برابر با  $5$  s ( $\frac{30}{6} = 5$ ) و هر قسمت از محور مکان برابر با  $150$  m ( $\frac{600}{4} = 150$ ) است. از

طرفی چون هر دو متحرک با سرعت ثابت حرکت می‌کنند، پس سرعت متوسط هر یک از آن‌ها با سرعتشان در هر لحظه برابر است و داریم:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \begin{cases} v_A = \frac{600 - (-300)}{20 - 0} = 30 \text{ m/s} \\ v_B = \frac{600 - 300}{20 - 0} = 15 \text{ m/s} \end{cases}$$



$$x = vt + x_0 \Rightarrow \begin{cases} x_A = 30t - 300 \\ x_B = 15t + 300 \end{cases}$$

حالا می‌توانیم معادله مکان - زمان آن‌ها را بنویسیم.

هنگامی که دو متحرک به یکدیگر می‌رسند، مکان آن‌ها با هم برابر است؛ بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$x_A = x_B \Rightarrow 30t - 300 = 15t + 300 \Rightarrow 15t = 600 \Rightarrow t = 40s$$

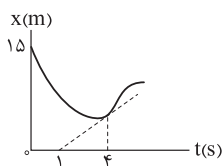
پس دو متحرک در لحظه  $t = 40s$  به یکدیگر می‌رسند. حالا برای به دست آوردن مکان آن‌ها در این لحظه، کافی است از معادله مکان - زمان یکی از آن‌ها (مثلاً A) استفاده کنیم.

$$x_A = 30t - 300 \xrightarrow{t=40s} x_A = 30(40) - 300 \Rightarrow x_A = 900m$$

بنابراین دو متحرک A و B در مکان  $x = 900m$  به یکدیگر می‌رسند.

### تست و پاسخ ۴۳

نمودار مکان - زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. اگر اندازه سرعت متوسط متحرک در ۴ ثانیه اول، ۳ برابر تندی آن در لحظه  $t = 4s$  باشد، بردار جابه‌جایی متحرک در ۴ ثانیه اول، بر حسب متر کدام است؟



(۱)  $-9\vec{i}$

(۲)  $-6\vec{i}$

(۳)  $-3\vec{i}$

(۴)  $-12\vec{i}$

### پاسخ: گزینه ۴

**پاسخ تشریحی:** گام اول: تندی متحرک در لحظه  $t = 4s$  برابر با شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان آن در این لحظه است؛ بنابراین با توجه به اطلاعات داده‌شده می‌توانیم بنویسیم:

$$|v_{av(0s, 4s)}| = 3 \text{ S}(t=4s) \xrightarrow{v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}} \frac{|x_4 - 15|}{4} = 3 \times \frac{x_4 - 0}{4 - 1}$$

$$\Rightarrow |x_4 - 15| = 4x_4 \Rightarrow \begin{cases} x_4 = -5m \text{ غ ق} \\ x_4 = 3m \end{cases}$$

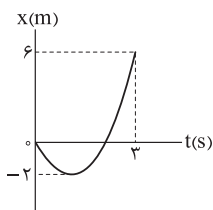
دقت کنید که مکان متحرک در لحظه  $t = 4s$  (یعنی  $x_4$ ) مثبت است، پس  $x_4 = -5m$  غیر قابل قبول است.

**گام دوم:** در آخر جابه‌جایی متحرک در ۴ ثانیه اول را به سادگی به دست می‌آوریم:

$$\Delta x = x_4 - x_0 \xrightarrow{x_0 = 15m} \Delta x = 3 - 15 = -12m \Rightarrow \vec{\Delta x} = -12\vec{i}(m)$$

### تست و پاسخ ۴۴

نمودار مکان - زمان متحرکی که در راستای محور x با شتاب ثابت حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. سرعت این متحرک در لحظه  $t = 3s$  چند متر بر ثانیه است؟



(۱) ۳

(۲) ۶

(۳) ۴

(۴) ۸

### پاسخ: گزینه ۴



## درس نامه

(۱) اگر متحرکی بر روی مسیری مستقیم و با شتاب ثابت حرکت کند، سرعت متوسط آن برابر با میانگین سرعت‌های ابتدایی و انتهایی آن است.

$$v_{av} = \frac{v_1 + v_2}{2}$$

با توجه به رابطه  $v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$  می‌توان نوشت:  $\frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$  که به آن رابطه مستقل از شتاب می‌گوییم.

(۲) معادله مکان - زمان متحرکی که با شتاب ثابت بر روی مسیری مستقیم حرکت می‌کند، به صورت زیر است:

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$$

مکان اولیه (m) متحرک (m) زمان (s) مکان متحرک (m)  
 شتاب متحرک (m/s<sup>2</sup>) سرعت اولیه متحرک (m/s)

**پاسخ تشریحی** چون متحرک با شتاب ثابت حرکت می‌کند، پس نمودار مکان - زمان آن به صورت سهمی است. از طرفی سهمی نسبت به خط قائمی که از رأس آن می‌گذرد، متقارن است؛ بنابراین با توجه به شکل زیر، برای بازه‌های زمانی  $t$  تا  $2t$  و همچنین  $t$  تا  $3$  ثانیه می‌توانیم بنویسیم:

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 \Rightarrow \begin{cases} 2t \text{ تا } t: 0 = \frac{1}{2}a(2t - t)^2 + 0 - 2 \Rightarrow 2 = \frac{1}{2}at^2 & (1) \\ 3t \text{ تا } t: 6 = \frac{1}{2}a(3t - t)^2 + 0 - 2 \Rightarrow 8 = \frac{1}{2}a(3t - t)^2 & (2) \end{cases}$$

حالا با تقسیم رابطه (۲) بر رابطه (۱) داریم:

$$\frac{8}{2} = \frac{\frac{1}{2}a(3t - t)^2}{\frac{1}{2}at^2} \Rightarrow 4 = \frac{(3t - t)^2}{t^2} \xrightarrow{\text{جذر}} 2 = \frac{3t - t}{t} \Rightarrow 3t = 3 \Rightarrow t = 1 \text{ s}$$

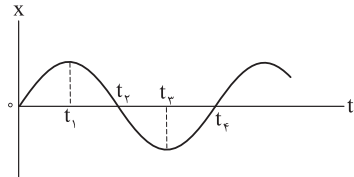
در آخر برای محاسبه سرعت متحرک در لحظه  $t = 3 \text{ s}$  می‌توانیم از رابطه مستقل از شتاب استفاده کنیم.

اگر کمیت‌های مربوط به متحرک در هر لحظه را با زیرنویس لحظه مربوطه نشان دهیم، داریم:

$$\frac{v_3 + v_1}{2} = \frac{x_3 - x_1}{t_3 - t_1} \Rightarrow \frac{v_3 + 0}{2} = \frac{6 - (-2)}{3 - 1} \Rightarrow v_3 = 8 \text{ m/s}$$

## تست و پاسخ ۴۵

نمودار مکان - زمان متحرکی که در راستای محور  $x$  حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. کدام یک از عبارات زیر درباره این متحرک درست است؟



(الف) در بازه زمانی  $t_1$  تا  $t_3$ ، سرعت متحرک در خلاف جهت محور  $x$  و شتاب آن در جهت محور  $x$  است.

(ب) در بازه زمانی  $t_3$  تا  $t_4$ ، اندازه شتاب متحرک در حال افزایش است.

(پ) در بازه زمانی  $t_1$  تا  $t_4$ ، تندی متحرکی در حال افزایش است.

(ت) در بازه زمانی  $t_1$  تا  $t_4$ ، سرعت متوسط متحرک در خلاف جهت محور  $x$  است.

(۴) ب و ت

(۳) ب و پ

(۲) الف و ت

(۱) الف، پ و ت

## پاسخ: گزینه ۱

**پاسخ تشریحی** با توجه به ویژگی‌های نمودار مکان - زمان متحرک، عبارت‌ها را بررسی می‌کنیم:

(الف) شیب مماس بر نمودار مکان - زمان در هر لحظه، بیانگر سرعت متحرک در آن لحظه است. سرعت متحرک در بازه زمانی  $t_1$  تا  $t_3$  در خلاف

جهت محور  $x$  بوده و اندازه آن در حال کاهش است؛ بنابراین حرکت آن در این بازه زمانی کندشونده بوده و شتاب آن در جهت محور  $x$  است. ✓

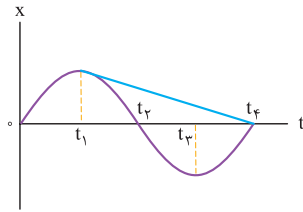
(ب) شتاب متحرک در بازه زمانی  $t_1 < t < t_3$  منفی و در بازه زمانی  $t_3 < t < t_4$  مثبت است؛ بنابراین شتاب متحرک در لحظه  $t_3$  صفر شده و

تغییر جهت می‌دهد. با توجه به این موضوع، شتاب متحرک در لحظه  $t_3$  نیز صفر می‌شود؛ بنابراین اندازه شتاب متحرک در بازه زمانی  $t_1$  تا

$t_4$  در حال کاهش است. ✗



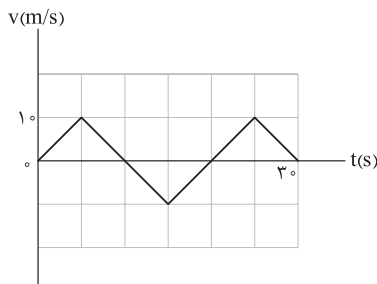
پ) اگر شیب مماس بر نمودار مکان - زمان متحرک را در بازه زمانی  $t_1$  تا  $t_2$  رسم کنیم، مشاهده می‌کنیم که اندازه شیب آن در این بازه زمانی در حال افزایش است؛ بنابراین تندی آن در این بازه زمانی در حال افزایش است. ✓



ت) سرعت متوسط متحرک بین دو لحظه، برابر شیب پاره‌خطی است که نقاط نظیر آن دو لحظه در نمودار مکان - زمان را به یکدیگر وصل می‌کند؛ بنابراین سرعت متوسط متحرک بین این دو لحظه در خلاف جهت محور  $x$  است. ✓

### تست و پاسخ ۴۶

نمودار سرعت - زمان متحرکی که در راستای محور  $x$  حرکت می‌کند، مطابق شکل مقابل است. اگر در مبدأ زمان متحرک در مکان  $x_0 = -10 \text{ m}$  قرار داشته باشد، در کدام لحظه بر حسب ثانیه، متحرک برای سومین مرتبه از مکان  $x = 6 \text{ m}$  عبور می‌کند؟



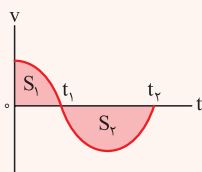
- |        |        |
|--------|--------|
| ۱۶ (۱) | ۲۲ (۲) |
| ۲۴ (۳) | ۲۶ (۴) |

### پاسخ: گزینه ۳

#### درس‌نامه •• محاسبه جابه‌جایی متحرک به کمک نمودار سرعت - زمان ( $v - t$ )

مساحت محصور بین این نمودار و محور  $t$  در هر بازه زمانی بیانگر اندازه جابه‌جایی متحرک در آن بازه زمانی است. اگر نمودار بالای محور  $t$  باشد، جابه‌جایی متحرک، مثبت و اگر نمودار زیر محور  $t$  باشد، جابه‌جایی متحرک، منفی است.

برای مثال در نمودار بالا داریم:

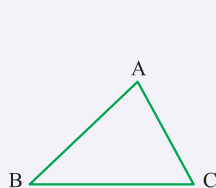


نمودار بالای محور  $t$

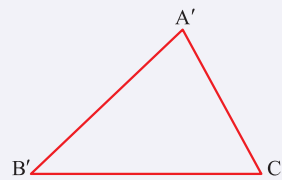
$$\begin{aligned} \Delta x_1 = +S_1 & \Rightarrow \Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 = S_1 - S_2 \\ \Delta x_2 = -S_2 & \end{aligned}$$

نمودار پایین محور  $t$

یادآوری ریاضی اگر دو مثلث  $ABC$  و  $A'B'C'$  با یکدیگر متشابه باشند، آن‌گاه نسبت اضلاع متناظر آن‌ها با یکدیگر برابر است.



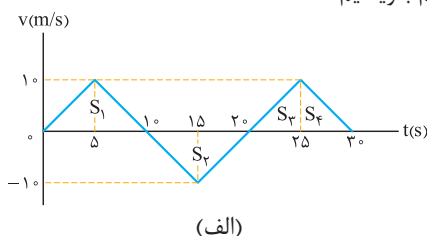
$$\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = k^2$$



$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = k$$

هم‌چنین نسبت مساحت دو مثلث متشابه، برابر با مربع نسبت تشابه آن‌ها است.

پاسخ تشریحی با توجه به نمودار، هر قسمت از محور زمان برابر با  $\Delta s = \left(\frac{30}{6}\right) = 5 \text{ s}$  است. از طرفی می‌دانیم که مساحت محصور بین نمودار سرعت - زمان و محور  $t$  برابر با جابه‌جایی متحرک است؛ پس با توجه به شکل «الف» می‌توانیم بنویسیم:



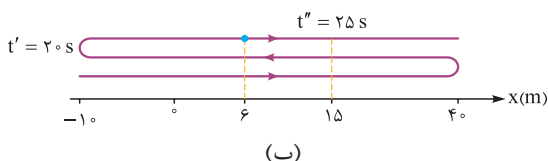
(الف)

$$S_1 = \left| \frac{10 \times 10}{2} \right| = 50 \text{ m}$$

$$S_2 = \frac{(20 - 10) \times 10}{2} = -50 \text{ m}$$

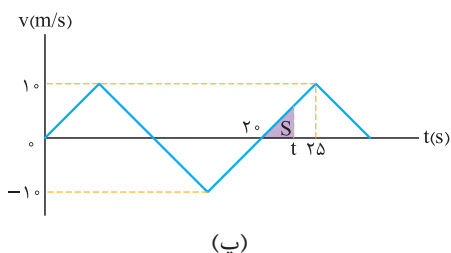
$$S_3 = \left| \frac{(25 - 20) \times 10}{2} \right| = 25 \text{ m}$$

$$S_4 = \left| \frac{(30 - 25) \times 10}{2} \right| = 25 \text{ m}$$



بنابراین حرکت متحرک بر روی محور X به صورت شکل «ب» است.

با توجه به شکل «ب»، متحرک در لحظه‌ای بین  $t' = 20\text{ s}$  تا  $t'' = 25\text{ s}$  برای سومین بار از مکان  $x = 6\text{ m}$  عبور می‌کند. حالا با توجه به شکل «پ» و با استفاده از تشابه مثلث‌ها این لحظه را پیدا می‌کنیم.



$$\frac{S}{S_r} = \left( \frac{t - 20}{25 - 20} \right)^2 \quad \frac{S = \Delta x = 6 - (-10) = 16\text{ m}}{S_r = 25\text{ m}} \rightarrow \frac{16}{25} = \left( \frac{t - 20}{5} \right)^2$$

$$\xrightarrow{\text{جذر}} \frac{4}{5} = \frac{t - 20}{5} \Rightarrow t = 24\text{ s}$$

## تست و پاسخ ۴۷

خودرویی پشت چراغ قرمز ایستاده است. با سبزشدن چراغ، خودرو با شتاب ثابت  $2\text{ m/s}^2$  شروع به حرکت می‌کند. در همین لحظه، کامیونی با سرعت ثابت  $36\text{ km/h}$  از آن سبقت می‌گیرد. در فاصله چند متری از چراغ راهنمایی، خودرو به کامیون می‌رسد؟

(۱) ۲۵      (۲) ۵۰      (۳) ۱۰۰      (۴) ۲۰۰

## پاسخ: گزینه ۳

خودرو با شتاب ثابت  $2\text{ m/s}^2$  و کامیون با سرعت ثابت  $10\text{ m/s}$  ( $36 \div 3.6 = 10$ ) حرکت می‌کنند. معادله مکان - زمان آن‌ها برابر است با:

$$\begin{cases} x_{\text{خودرو}} = \frac{1}{2} a_{\text{خودرو}} t^2 + v_{0,\text{خودرو}} t + x_0 & \xrightarrow{a_{\text{خودرو}} = 2\text{ m/s}^2, v_{0,\text{خودرو}} = 0, x_0 = 0\text{ m}} x_{\text{خودرو}} = t^2 \\ x_{\text{کامیون}} = v_{\text{کامیون}} t + x_0 & \xrightarrow{v_{\text{کامیون}} = 10\text{ m/s}, x_0 = 0\text{ m}} x_{\text{کامیون}} = 10t \end{cases}$$

وقتی که خودرو به کامیون می‌رسد، مکان آن‌ها یکسان می‌شود؛ بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$x_{\text{خودرو}} = x_{\text{کامیون}} \Rightarrow t^2 = 10t \Rightarrow t^2 - 10t = 0 \Rightarrow t_1 = 0\text{ s}, t_2 = 10\text{ s}$$

خودرو پس از ۱۰ ثانیه به کامیون می‌رسد. برای به دست آوردن مکان آن‌ها در این لحظه، کافی است از معادله مکان - زمان خودرو (یا کامیون) استفاده کنیم.

$$x_{\text{خودرو}} = t^2 \xrightarrow{t=10\text{ s}} x_{\text{خودرو}} = 100\text{ m}$$

بنابراین خودرو در فاصله ۱۰۰ متری از چراغ راهنمایی به کامیون می‌رسد.

## تست و پاسخ ۴۸

در شرایط خلأ، گلوله A از ارتفاع h نسبت به سطح زمین رها شده و ۳ s بعد، گلوله B از ارتفاع  $\frac{h}{4}$  نسبت به سطح زمین رها می‌شود. اگر دو گلوله هم‌زمان به سطح زمین برسند، h چند متر است؟ ( $g = 9.8\text{ m/s}^2$ )

(۱) ۱۷۲/۴      (۲) ۱۷۶/۴      (۳) ۲۳۰/۱      (۴) ۲۴۰/۱

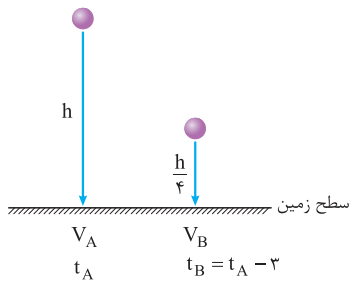
## پاسخ: گزینه ۲

### درس نامه

معادلات حرکت سقوط آزاد بدون سرعت اولیه و با فرض این که جهت رو به بالا را مثبت بگیریم، به صورت زیر است:

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + y_0 \quad v = -gt \quad v^2 = -2g\Delta y$$

**پاسخ تشریحی:** ابتدا نسبت سرعت‌های دو گلوله را در لحظه رسیدن به سطح زمین پیدا می‌کنیم:



$$\Delta y_A = -h \text{ و } \Delta y_B = -\frac{h}{4}$$

$$\frac{v_A^2}{v_B^2} = \frac{-2g(-h)}{-2g(-\frac{h}{4})} = 4 \Rightarrow \frac{v_A}{v_B} = 2$$

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{-gt_A}{-gt_B} \Rightarrow 2 = \frac{t_A}{t_A - 3} \Rightarrow t_A = 6 \text{ s}$$

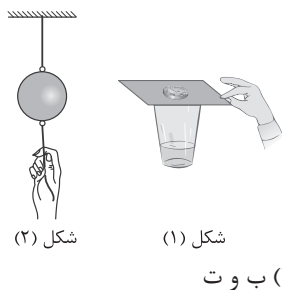
سپس زمان سقوط گلوله A را حساب می‌کنیم:

در انتها، معادله جابه‌جایی را برای گلوله A می‌نویسیم و ارتفاع h را به دست می‌آوریم:

$$\Delta y = -\frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow -h = -\frac{1}{2}gt_A^2 \Rightarrow h = \frac{1}{2} \times 9.8 \times 6^2 = 176.4 \text{ m}$$

## تست و پاسخ ۴۹

در شکل (۱)، مقوایی روی لیوان و سکه‌ای روی مقوا قرار دارد و در شکل (۲) یک گوی توسط نخ به نقطه‌ای بسته شده و نخ دیگری به پایین آن متصل است. کدام یک از عبارات‌های زیر درباره این دو شکل درست است؟



(الف) در شکل (۱) حرکت سریع مقوا، سبب افتادن سکه در لیوان می‌شود.

(ب) در شکل (۱) حرکت آهسته مقوا، سبب افتادن سکه در لیوان می‌شود.

(پ) در شکل (۲) اگر نخ پایین گوی را به طور ناگهانی بکشیم، نخ بالای گوی پاره می‌شود.

(ت) در شکل (۲) اگر نخ پایین گوی را به آرامی بکشیم، نخ بالای گوی پاره می‌شود.

(۱) الف و پ (۲) الف و ت (۳) ب و پ (۴) ب و ت

## پاسخ: گزینه ۲

**پاسخ تشریحی:** در حرکت‌های سریع و ناگهانی، اثر لختی و قانون اول نیوتون واضح‌تر دیده می‌شود.

عبارت‌ها را بررسی می‌کنیم:

(الف) با توجه به قانون اول نیوتون، سکه تمایل دارد وضعیت سکون خود را حفظ کند؛ بنابراین با حرکت سریع مقوا، سکه درون لیوان می‌افتد. ✓

(ب) اگر مقوا به طور آهسته حرکت کند، سکه نیز به همراه مقوا حرکت می‌کند. ✗

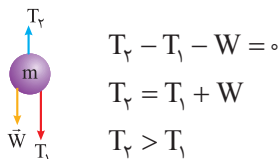
(پ) اگر نخ پایین گوی را به طور ناگهانی بکشیم، نخ پایین گوی پاره می‌شود؛ به عبارتی در این حالت، به علت اثر قابل ملاحظه لختی گوی،

فرصت انتقال نیرو به نخ بالایی در این مدت کوتاه وجود ندارد و نخ پایین گوی پاره می‌شود. ✗

(ت) اگر نخ پایین گوی را به آرامی بکشیم، نخ بالای گوی پاره می‌شود، به عبارتی در این حالت، لختی اثر قابل ملاحظه‌ای ندارد؛ پس فرصت

انتقال نیرو به نخ بالایی وجود دارد و نخ بالای گوی پاره می‌شود. ✓

در این حالت نیروی خالص وارد بر گوی تا قبل از پاره شدن نخ بالا، صفر است.



$$T_2 - T_1 - W = 0$$

$$T_2 = T_1 + W$$

$$T_2 > T_1$$

## تست و پاسخ ۵۰

دو گوی هم‌اندازه A و B به جرم‌های  $m_A$  و  $m_B$  که  $m_B > m_A$  است، از ارتفاع یکسانی نسبت به سطح زمین رها می‌شوند. با فرض این که نیروی مقاومت هوای وارد بر دو گوی در طی حرکت آن‌ها ثابت و یکسان باشد، کدام مورد درباره مقایسه اندازه شتاب دو گوی (a) و تندی آن‌ها در لحظه برخورد به زمین (v) درست است؟

$$v_B > v_A, a_A > a_B \text{ (۲)}$$

$$v_A > v_B, a_A > a_B \text{ (۱)}$$

$$v_B > v_A, a_B > a_A \text{ (۴)}$$

$$v_A > v_B, a_B > a_A \text{ (۳)}$$

## پاسخ: گزینه ۴



**پاسخ تشریحی** وقتی جسمی از ارتفاعی رها می شود و به سمت زمین حرکت می کند، بر آن دو نیروی وزن و مقاومت هوا وارد می شود. شتاب حرکت جسم را با استفاده از قانون دوم نیوتون به دست می آوریم:

$$F_{\text{net}} = ma \Rightarrow mg - F_D = ma \Rightarrow a = g - \frac{F_D}{m} \quad (1)$$

بنابراین هر چه جرم جسم بیشتر باشد، شتاب حرکت آن نیز بیشتر است؛ در نتیجه  $a_B > a_A$  است. برای به دست آوردن تندی جسم در لحظه برخورد به زمین، می توانیم از رابطه مستقل از زمان استفاده کنیم. برای این کار داریم (جهت مثبت محور Y را رو به پایین فرض کردیم):

$$v_f^2 - v_i^2 = 2a\Delta y \xrightarrow{v_i=0} v_f = \sqrt{2a\Delta y}$$

حالا برای مقایسه تندی دو گوی A و B در لحظه برخورد به سطح زمین می توانیم بنویسیم:

$$\frac{v_B}{v_A} = \frac{\sqrt{2a_B\Delta y}}{\sqrt{2a_A\Delta y}} \Rightarrow \frac{v_B}{v_A} = \sqrt{\frac{a_B}{a_A}} \xrightarrow{a_B > a_A} v_B > v_A$$

## تست و پاسخ (۵)

در شکل زیر، وقتی شخص به جعبه ای به جرم  $80 \text{ kg}$  نیرویی افقی به اندازه  $300 \text{ N}$  وارد می کند، جعبه در آستانه حرکت قرار می گیرد. پس از شروع حرکت جعبه، اگر شخص نیروی افقی  $200$  نیوتون به آن وارد کند، با شتابی به بزرگی  $25 \text{ m/s}^2$  به صورت تندشونده به حرکت خود ادامه می دهد. ضریب اصطکاک ایستایی بین جعبه و سطح چند برابر ضریب اصطکاک جنبشی بین آن هاست؟ ( $g = 10 \text{ N/kg}$ )



$$\frac{6}{5} \quad (2)$$

$$\frac{5}{3} \quad (1)$$

$$\frac{15}{11} \quad (3)$$

**پاسخ: گزینه ۱**

## درس نامه

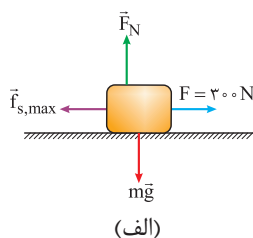
نیروی عمودی تکیه گاه (N)  $\leftarrow f_{s, \text{max}} = \mu_s F_N \rightarrow$  بیشینه نیروی اصطکاک ایستایی (N)  
↓  
ضریب اصطکاک ایستایی بین جسم و سطح

۱) اندازه نیروی اصطکاک در آستانه حرکت یا بیشینه نیروی اصطکاک ایستایی از رابطه مقابل به دست می آید.

نیروی عمودی تکیه گاه (N)  $\leftarrow f_k = \mu_k F_N \rightarrow$  نیروی اصطکاک جنبشی (N)  
↓  
ضریب اصطکاک جنبشی بین جسم و سطح

۲) اگر جسم نسبت به سطحی که با آن در تماس است حرکت کند، نیروی اصطکاک بین جسم و سطح را نیروی اصطکاک جنبشی می گویند و از رابطه مقابل به دست می آید:

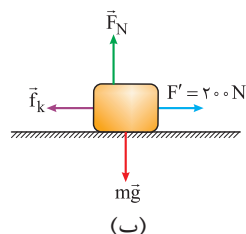
**پاسخ تشریحی** گام اول: در حالت اول، جسم در آستانه حرکت قرار می گیرد، بنابراین نیروی اصطکاک از نوع بیشینه نیروی اصطکاک ایستایی است و با توجه به شکل «الف» و با استفاده از قانون دوم نیوتون می توانیم بنویسیم:



$$F_{\text{net}} = ma \Rightarrow F - f_{s, \text{max}} = 0 \Rightarrow f_{s, \text{max}} = F \Rightarrow \mu_s F_N = F$$

$$\Rightarrow \mu_s mg = F \xrightarrow{F=300 \text{ N}, g=10 \text{ N/kg}, m=80 \text{ kg}} \mu_s \times 80 \times 10 = 300 \Rightarrow \mu_s = \frac{3}{8}$$

گام دوم: در حالت دوم، جسم در حال حرکت است؛ بنابراین نیروی اصطکاک از نوع نیروی اصطکاک جنبشی است و با توجه به شکل «ب» و با استفاده از قانون دوم نیوتون داریم:



$$F'_{\text{net}} = ma' \Rightarrow F' - f_k = ma' \Rightarrow F' - \mu_k F_N = ma'$$

$$\Rightarrow F' - \mu_k mg = ma' \xrightarrow{F'=200 \text{ N}, a'=25 \text{ m/s}^2, m=80 \text{ kg}} 200 - \mu_k \times 80 \times 10 = 80 \times 25$$

$$\Rightarrow \mu_k = \frac{9}{40}$$

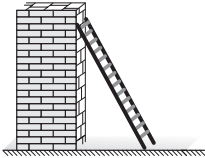


گام سوم: در آخر نسبت ضریب اصطکاک ایستایی بین جسم و سطح ( $\mu_s$ ) بر ضریب اصطکاک جنبشی بین آن‌ها ( $\mu_k$ ) برابر است با:

$$\frac{\mu_s}{\mu_k} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{9}} = \frac{5}{3}$$

### تست و پاسخ ۵۲

در شکل زیر، نردبانی به دیوار قائم بدون اصطکاکی تکیه داده شده و در آستانه سر خوردن است. اگر ضریب اصطکاک ایستایی بین سطح افقی و پای نردبان برابر  $0.75$  باشد، اندازه نیرویی که سطح افقی به نردبان وارد می‌کند، چند برابر اندازه نیرویی است که دیوار قائم به نردبان وارد می‌کند؟



$$\frac{4}{5} \quad (2)$$

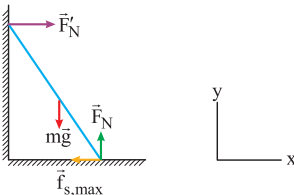
$$\frac{3}{5} \quad (1)$$

$$\frac{5}{4} \quad (4)$$

$$\frac{5}{3} \quad (3)$$

### پاسخ: گزینه ۳

پاسخ تشریحی: گام اول: ابتدا نیروهای وارد بر نردبان را رسم می‌کنیم.



گام دوم: چون نردبان در حالت تعادل قرار دارد، پس نیروی خالص وارد بر آن صفر است؛ بنابراین با استفاده از قانون دوم نیوتون می‌توانیم بنویسیم:

$$F_{net,y} = ma \xrightarrow{a=0} F_N - mg = 0 \Rightarrow F_N = mg$$

$$F_{net,x} = ma \xrightarrow{a=0} F'_N - f_{s,max} = 0 \xrightarrow{f_{s,max} = \mu_s F_N} F'_N = \mu_s F_N \xrightarrow{\mu_s = 0.75 = \frac{3}{4}, F_N = mg} F'_N = \frac{3}{4} mg$$

گام سوم: اندازه نیرویی که سطح افقی به نردبان وارد می‌کند، برابر است با:  $R = \sqrt{F_N^2 + f_{s,max}^2} = \sqrt{(mg)^2 + \left(\frac{3}{4}mg\right)^2} = \frac{5}{4}mg$

گام چهارم: در آخر نسبت اندازه نیرویی که سطح افقی به نردبان وارد می‌کند ( $R$ ) به اندازه نیرویی که دیوار قائم به نردبان وارد می‌کند ( $F'_N$ ) برابر است با:

$$\frac{R}{F'_N} = \frac{\frac{5}{4}mg}{\frac{3}{4}mg} = \frac{5}{3}$$

### تست و پاسخ ۵۳

وزنه‌ای به جرم  $2 \text{ kg}$ ، توسط فنری با ثابت  $2 \text{ N/cm}$  از سقف یک آسانسور آویزان است. وقتی آسانسور با شتاب ثابتی به بزرگی  $2 \text{ m/s}^2$  رو به پایین شروع به حرکت می‌کند، طول فنر به  $L_1$  می‌رسد و وقتی آسانسور با شتاب ثابتی به بزرگی  $3 \text{ m/s}^2$  رو به بالا شروع به حرکت می‌کند، طول فنر به  $L_2$  می‌رسد.  $L_2 - L_1$  بر حسب سانتی‌متر کدام است؟ ( $g = 10 \text{ N/kg}$ )

$$-1 \quad (4)$$

$$-5 \quad (3)$$

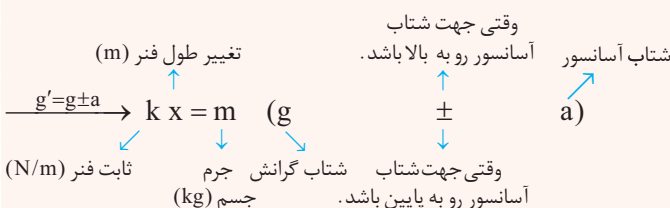
$$1 \quad (2)$$

$$5 \quad (1)$$

### پاسخ: گزینه ۳

#### درس‌نامه

برای محاسبه نیروهای وارد بر جسمی که به فنر آویزان از سقف آسانسور متصل است، داریم:  $F_e = W' \xrightarrow{F_e = kx, W' = mg'} kx = mg'$





پاسخ تشریحی: طبق قانون دوم نیوتون در دو حالت (۱) و (۲) داریم:

حالت ۱:

$$kx_1 = m(g - a_1) = 2(10 - 2)$$

$$\Rightarrow kx_1 = 16 \text{ N}$$

حالت ۲:

$$kx_2 = m(g + a_2) = 2(10 + 3)$$

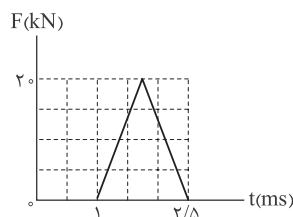
$$\Rightarrow kx_2 = 26 \text{ N}$$

حال با داشتن ثابت فنر،  $L_1 - L_2$  که همان  $x_1 - x_2$  است را به دست می آوریم:

$$kx_1 - kx_2 = 16 - 26 \xrightarrow{k=2 \text{ N/cm}} 2(x_1 - x_2) = -10 \Rightarrow x_1 - x_2 = -5 \text{ cm}$$

## تست و پاسخ ۵۴

نمودار اندازه نیروی خالص وارد بر جسمی بر حسب زمان مطابق شکل زیر است. در بازه زمانی  $t_1 = 1 \text{ ms}$  تا  $t_2 = 2/5 \text{ ms}$ ، به ترتیب اندازه تغییر تکانه جسم و اندازه نیروی خالص متوسط وارد بر آن در SI کدام است؟



۱۰<sup>۴</sup>، ۲۵ (۲)

۱۰، ۲۵ (۱)

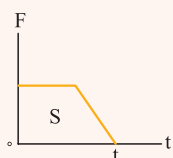
۱۰<sup>۴</sup>، ۱۵ (۴)

۱۰، ۱۵ (۳)

پاسخ: گزینه ۴

## درس نامه

نکته: سطح محصور بین نمودار نیروی خالص بر حسب زمان و محور  $t$  برابر با اندازه تغییر تکانه جسم است.



$$\Delta p_{(0-t)} = S$$

پاسخ تشریحی: گام اول: ابتدا به کمک مساحت محصور بین نمودار  $F-t$  با محور  $t$ ، اندازه تغییر تکانه را به دست می آوریم:

$$\Delta p = S \Rightarrow \Delta p = \frac{((2/5 - 1) \times 10^{-3}) \times (20 \times 10^3)}{2} = 15 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$$

گام دوم: سپس با داشتن  $\Delta p$  و  $\Delta t$ ، اندازه نیروی خالص متوسط را به دست می آوریم:

$$F_{av} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{15 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}}{1/5 \times 10^{-3}} = 10^4 \text{ N}$$

## تست و پاسخ ۵۵

اگر جرم ماهواره ای  $250 \text{ kg}$  باشد، وزن آن در ارتفاع  $3600 \text{ km}$  متری از سطح زمین چند نیوتون است؟  $G = \frac{20}{3} \times 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}$ ، شعاع کره زمین  $6400 \text{ km}$  و جرم آن  $6 \times 10^{24} \text{ kg}$  است.

۱/۲ × ۱۰<sup>۳</sup> (۴)

۱/۲ × ۱۰<sup>۲</sup> (۳)

۱۰<sup>۳</sup> (۲)

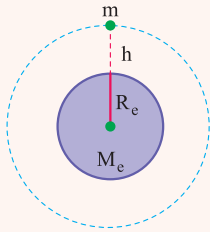
۱۰<sup>۲</sup> (۱)

پاسخ: گزینه ۲



## درس نامه

برای محاسبه اندازه نیروی گرانشی (وزن) در ارتفاع  $h$  از سطح زمین داریم:



$$F = \frac{GM_em}{(R_e + h)^2}$$

$G$ : ثابت گرانش عمومی  $M_e$ : جرم کره زمین  $m$ : جرم جسم  $R_e$ : شعاع کره زمین  $h$ : ارتفاع از سطح زمین

با توجه به رابطه  $F = \frac{GM_em}{(R_e + h)^2}$  اندازه نیروی گرانشی (وزن) را در ارتفاع  $3600$  کیلومتری از سطح زمین به دست می آوریم:

$$F = \frac{GM_em}{(R_e + h)^2} \Rightarrow F = \frac{\frac{2}{3} \times 10^{-11} \times 6 \times 10^{24} \times 250}{((6400 + 3600) \times 10^3)^2} = \frac{10^{17}}{10^{14}} = 10^3 \text{ N}$$

## تست و پاسخ ۵۶

خودرویی به جرم  $1200 \text{ kg}$  روی سطحی افقی، در یک میدان به شعاع  $40 \text{ m}$  با تندی ثابت  $36 \text{ km/h}$  در حال دورزدن است. به ترتیب از راست به چپ دوره حرکت خودرو چند ثانیه و اندازه نیروی مرکزگرای وارد بر آن چند نیوتون است؟

$3 \times 10^3, 4\pi$  (۴)  $3 \times 10^3, 4\pi$  (۳)  $3 \times 10^3, 8\pi$  (۲)  $3 \times 10^3, 8\pi$  (۱)

## پاسخ: گزینه ۱

## درس نامه

برای محاسبه دوره تناوب در حرکت دایره‌ای یکنواخت، داریم:

$$T = \frac{2\pi r}{v}$$

شعاع دایره (m)  $\uparrow$   
دوره تناوب (s)  $\leftarrow$   
تندی دورزدن (m/s)  $\downarrow$

$$F_c = \frac{mv^2}{r}$$

جرم جسم (kg)  $\uparrow$   
اندازه نیروی مرکزگرا (N)  $\downarrow$

برای محاسبه اندازه نیروی مرکزگرا در حرکت دایره‌ای یکنواخت، داریم:

## پاسخ تشریحی

با توجه به رابطه دوره تناوب در حرکت دایره‌ای یکنواخت، می توان نوشت:

$$T = \frac{2\pi r}{v} \xrightarrow{r=40 \text{ m}, v=36 \text{ km/h}=10 \text{ m/s}} T = \frac{2\pi \times 40}{10} = 8\pi \text{ s}$$

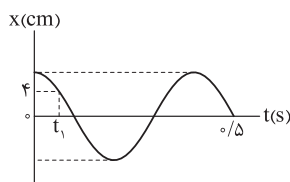
از طرفی به کمک رابطه  $F_c = \frac{mv^2}{r}$ ، اندازه نیروی مرکزگرا را به دست می آوریم:

$$F_c = \frac{mv^2}{r} \xrightarrow{m=1200 \text{ kg}, v=10 \text{ m/s}, r=40 \text{ m}} F_c = \frac{1200 \times (10)^2}{40} = 3 \times 10^3 \text{ N}$$

## تست و پاسخ ۵۷

نمودار مکان - زمان نوسانگر هماهنگ ساده‌ای مطابق شکل زیر است. بردار شتاب این نوسانگر در لحظه  $t_1$  بر حسب متر بر مربع ثانیه کدام

است؟ ( $\pi^2 = 10$ )



$-10 \vec{i}$  (۲)  
 $-6/4 \vec{i}$  (۴)

$10 \vec{i}$  (۱)  
 $6/4 \vec{i}$  (۳)

## پاسخ: گزینه ۲



## پاسخ تشریحی

گام اول: ابتدا به کمک نمودار  $x - t$  نوسانگر هماهنگ ساده، از روی محور  $t$ ، دوره تناوب و پس از آن بسامد زاویه‌ای ( $\omega$ ) را به دست می‌آوریم:

$$\frac{\Delta T}{4} = 0.5 \Rightarrow T = 0.4 \text{ s}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \xrightarrow{T=0.4 \text{ s}} \omega = \frac{2\pi}{0.4} = 5\pi \text{ rad/s}$$

گام دوم: به کمک رابطه  $a = -\omega^2 x$ ، شتاب نوسانگر را در لحظه  $t_1$  به دست می‌آوریم:

$$a = -\omega^2 x \xrightarrow[\substack{\omega=5\pi \text{ rad/s} \\ x=4 \text{ cm}=0.04 \text{ m}}]{\omega=5\pi \text{ rad/s}} a = -25\pi^2 \times 0.04 = -\pi^2 = -10 \text{ m/s}^2$$

$$\Rightarrow \vec{a} = -10 (\text{m/s}^2) \vec{i}$$

## تست و پاسخ ۵۸

جسمی به جرم  $1 \text{ kg}$  به فنری افقی با ثابت  $6 \text{ N/cm}$  متصل است. فنر از وضعیت تعادل به اندازه  $9 \text{ cm}$  فشرده و سپس رها می‌شود و جسم روی سطح افقی بدون اصطکاک شروع به نوسان می‌کند. در لحظه‌ای که تندی جسم  $1/6 \text{ m/s}$  است، انرژی پتانسیل کشسانی نوسانگر چند ژول است؟

$$2/43 \text{ (2)}$$

$$24/3 \text{ (1)}$$

$$1/15 \text{ (4)}$$

$$11/5 \text{ (3)}$$

## پاسخ: گزینه ۴

### درس نامه

برای محاسبه انرژی مکانیکی نوسانگر هماهنگ ساده جرم - فنر به کمک ثابت فنر داریم:

$$\text{دامنه نوسان (m)} \rightarrow E = \frac{1}{2} k A^2 \leftarrow \text{انرژی مکانیکی (J)}$$

↓  
ثابت فنر (N/m)

گام اول: ابتدا انرژی مکانیکی نوسانگر را به دست می‌آوریم:

$$E = \frac{1}{2} k A^2 \xrightarrow[\substack{k=6 \text{ N/cm}=600 \text{ N/m} \\ A=9 \text{ cm}=0.09 \text{ m}}]{k=6 \text{ N/cm}=600 \text{ N/m}} E = \frac{1}{2} \times 600 \times (9 \times 10^{-2})^2 = 2/43 \text{ J}$$

گام دوم: به کمک تندی جسم، انرژی جنبشی آن را به دست می‌آوریم:

$$K = \frac{1}{2} m v^2 \xrightarrow[\substack{m=1 \text{ kg} \\ v=1/6 \text{ m/s}}]{m=1 \text{ kg}} K = \frac{1}{2} \times 1 \times (1/6)^2 = 1/72 \text{ J}$$

گام سوم: با داشتن انرژی مکانیکی و انرژی جنبشی، انرژی پتانسیل کشسانی نوسانگر را به دست می‌آوریم:

$$E = K + U \xrightarrow[\substack{E=2/43 \text{ J} \\ K=1/72 \text{ J}}]{E=2/43 \text{ J}} 2/43 = 1/72 + U$$

$$\Rightarrow U = 2/43 - 1/72 = 1/15 \text{ J}$$

**تکنیک** بدون محاسبات گام دوم و گام سوم نیز می‌توان (۴) را به دست آورد؛ زیرا وقتی جسم، تندی و انرژی جنبشی دارد، حتماً  $U < E$  است.

## تست و پاسخ ۵۹

فنری به جرم  $300 \text{ g}$  و طول  $1/5 \text{ m}$  با نیروی  $1/8 \text{ N}$  کشیده شده است. انتهای آزاد فنر با بسامد چند هرتز به نوسان درآید تا در طول فنر، موجی عرضی با طول موج  $30 \text{ cm}$  ایجاد شود؟

$$10 \text{ (4)}$$

$$1 \text{ (3)}$$

$$9 \text{ (2)}$$

$$0/9 \text{ (1)}$$

## پاسخ: گزینه ۴



**درس نامه** ●● رابطه تندی انتشار موج عرضی در تار یا ریسمان یا فنر تحت کشش

$$v = \frac{\text{تندی انتشار (m/s)}}{\text{طول تار یا فنر (m)}} = \frac{\text{اندازه نیروی کشش (N)}}{\text{جرم تار یا فنر (kg)}} = \frac{\sqrt{\frac{F}{\mu}}}{\sqrt{\frac{FL}{m}}} = \sqrt{\frac{F}{\mu \cdot \frac{L}{m}}} = \sqrt{\frac{F}{\mu \cdot \frac{L}{m}}}$$

چگالی خطی جرم (kg/m)

**پاسخ تشریحی** گام اول: ابتدا تندی انتشار موج عرضی در فنر را به دست می آوریم:

$$v = \sqrt{\frac{FL}{m}} \quad \frac{F=1/8 \text{ N}, L=1/5 \text{ m}}{m=3 \times 10^{-3} \text{ kg}} \rightarrow v = \sqrt{\frac{1/8 \times 1/5}{3 \times 10^{-3}}} = \sqrt{9} = 3 \text{ m/s}$$

**گام دوم:** طبق رابطه  $\lambda = \frac{v}{f}$  بسامد انتهای آزاد فنر (بسامد موج) را به دست می آوریم:

$$\lambda = \frac{v}{f} \quad \frac{\lambda=3 \times 10^{-3} \text{ m}}{v=3 \text{ m/s}} \rightarrow 3 \times 10^{-3} = \frac{3}{f} \Rightarrow f = \frac{3}{3 \times 10^{-3}} = 10^3 \text{ Hz}$$

### تست و پاسخ ۶۰

در کدام مورد، طول موج امواج رادیویی اشاره شده، از راست به چپ افزایش می یابد؟

ELF, FM, AM (۲)

ELF, AM, FM (۱)

FM, AM, ELF (۴)

AM, FM, ELF (۳)

### پاسخ: گزینه ۱

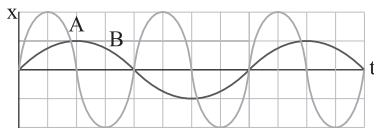
**پاسخ تشریحی** طول موج امواج رادیویی به ترتیب از کم ترین به بیشترین عبارت است از:

$$\lambda_{FM} < \lambda_{AM} < \lambda_{ELF}$$

بنابراین ۱ صحیح است.

### تست و پاسخ ۶۱

نمودار جابه جایی - زمان چشمه های دو موج صوتی A و B که در یک محیط منتشر می شوند، مطابق شکل زیر است. در یک فاصله معین از چشمه ها شدت صوت A چند برابر شدت صوت B است؟ (دو چشمه در یک مکان قرار دارند).



$$\frac{1}{16} \text{ (۲)}$$

$$16 \text{ (۱)}$$

$$\frac{1}{4} \text{ (۴)}$$

$$4 \text{ (۳)}$$

### پاسخ: گزینه ۱

**درس نامه** ●●

**نکته** شدت صوت (I)، با مربع دامنه (A) و مربع بسامد (f) رابطه مستقیم و با مربع فاصله از چشمه صوت (r) رابطه معکوس دارد.

$$I \propto \left( \frac{A^2 f^2}{r^2} \right) \Rightarrow \frac{I_2}{I_1} = \left( \frac{A_2}{A_1} \times \frac{f_2}{f_1} \times \frac{r_1}{r_2} \right)^2$$

**پاسخ تشریحی** گام اول: ابتدا به کمک نمودار جابه جایی - زمان چشمه های دو موج، نسبت بسامد A به بسامد B را به دست می آوریم:

$$T_A = \frac{1}{2} T_B \Rightarrow f_A = 2f_B$$

**گام دوم:** با داشتن نسبت دامنه و بسامد دو موج، شدت صوت A و B را در یک مکان معین مقایسه می کنیم:

$$\frac{I_A}{I_B} = \left( \frac{A_A}{A_B} \times \frac{f_A}{f_B} \right)^2 \quad \frac{A_A=2A_B}{f_A=2f_B} \rightarrow \frac{I_A}{I_B} = (2 \times 2)^2 = 16$$



## تست و پاسخ ۶۲

یک دستگاه صوتی، صدایی با تراز شدت  $\beta_1 = 90 \text{ dB}$  و دستگاه صوتی دیگری، صدایی با تراز شدت  $\beta_2 = 95 \text{ dB}$  ایجاد می کند. اگر شدت صوت مربوط به این دو تراز به ترتیب  $I_1$  و  $I_2$  باشد، نسبت  $\frac{I_1}{I_2}$  کدام است؟

- (۱)  $\sqrt{10}$  (۲)  $\frac{\sqrt{10}}{10}$  (۳)  $10$  (۴)  $\frac{1}{10}$

## پاسخ: گزینه ۲

### درس نامه

$$\beta_2 - \beta_1 = 10 \log \frac{I_2}{I_1}$$

برای محاسبه اختلاف تراز شدت دو صوت ۱ و ۲ داریم:

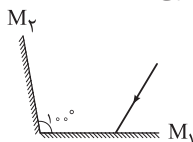
$\beta$ : تراز شدت صوت بر حسب dB  $I$ : شدت صوت بر حسب  $\text{W/m}^2$

پاسخ تشریحی: با توجه به رابطه اختلاف تراز شدت دو صوت می توان نوشت:

$$\begin{aligned} \beta_1 - \beta_2 &= 10 \log \frac{I_1}{I_2} \xrightarrow[\beta_2=95\text{dB}]{\beta_1=90\text{dB}} 90 - 95 = 10 \log \frac{I_1}{I_2} \\ \Rightarrow -5 &= 10 \log \frac{I_1}{I_2} \Rightarrow -\frac{1}{2} = \log \frac{I_1}{I_2} \Rightarrow \frac{I_1}{I_2} = 10^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10} \end{aligned}$$

## تست و پاسخ ۶۳

در شکل زیر، پرتو نوری با زاویه تابش  $40^\circ$  به آینه تخت  $M_1$  می تابد. زاویه بازتاب پرتو نور از آینه تخت  $M_2$  چند درجه است؟



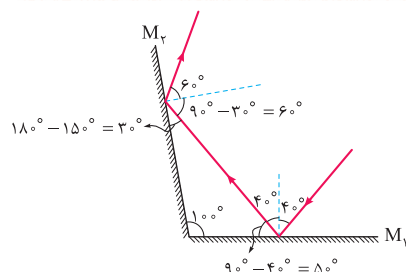
- (۱)  $30^\circ$  (۲)  $40^\circ$  (۳)  $50^\circ$  (۴)  $60^\circ$

## پاسخ: گزینه ۴

### درس نامه

قانون بازتاب عمومی: برای هر نوع مانع و همه انواع موج، همواره زاویه تابش و بازتابش با هم برابرند.

پاسخ تشریحی: با توجه به قانون بازتاب عمومی، داریم:



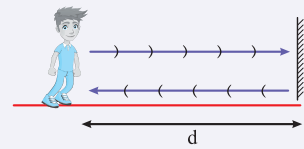
بنابراین زاویه بازتاب از آینه دوم برابر  $60^\circ$  است.

## تست و پاسخ ۶۴

کمترین فاصله بین یک شخص و دیوار بلند روبه روی او چند متر باشد تا شخص پژواک صدای خود را از صدای اصلی تمیز دهد؟ (تندی صوت در هوا  $340 \text{ m/s}$  است.)

- (۱)  $8/5$  (۲)  $17$  (۳)  $34$  (۴)  $68$

## پاسخ: گزینه ۲



**نکته** برای این که شخص بتواند پژواک صدای خود را از صوت اصلی تمیز دهد، حداقل اختلاف زمانی بین دریافت صوت اصلی و صوت بازتابیده باید  $1/10$  ثانیه باشد.

$$\Delta t_{\min} = \frac{2d_{\min}}{v_{\text{صوت}}}$$

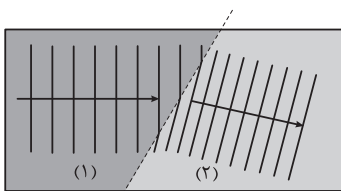
**پاسخ تشریحی** اگر مسافت پیموده شده توسط صوت پژواک یافته  $L$  باشد، داریم:

$$\Delta t = \frac{L}{v_{\text{صوت}}} \xrightarrow{\Delta t = 0.1 \text{ s}, v_{\text{صوت}} = 340 \text{ m/s}} \frac{L}{340} = 0.1 \Rightarrow L = 34 \text{ m} \xrightarrow{L=2d} 2d = 34 \text{ m} \Rightarrow d = 17 \text{ m}$$

بنابراین کمترین فاصله بین شخص و دیوار باید ۱۷ متر باشد.

### تست و پاسخ ۶۵

شکل زیر، جبهه‌های موج ایجادشده بر سطح آب درون تشت موجی را در دو ناحیه عمیق و کم عمق نشان می‌دهد. کدام مورد درباره مقایسه تندی انتشار امواج سطحی آب (۷) و عمق آب (h) در دو ناحیه (۱) و (۲) درست است؟ (خط چین رسم شده مرز دو ناحیه را نشان می‌دهد.)



$$h_1 > h_2, v_1 > v_2 \quad (1)$$

$$h_2 > h_1, v_1 > v_2 \quad (2)$$

$$h_1 > h_2, v_2 > v_1 \quad (3)$$

$$h_2 > h_1, v_2 > v_1 \quad (4)$$

### پاسخ: گزینه ۱

**پاسخ تشریحی** گام اول: با وارد شدن موج از ناحیه (۱) به ناحیه (۲)، طول موج آن کاهش یافته است. از آن جا که چشمه موج تغییری نکرده است، پس بسامد موج ثابت می‌ماند.

$$\lambda_2 < \lambda_1 \xrightarrow{\lambda = \frac{v}{f}, \text{ بسامد ثابت است}} v_2 < v_1$$

گام دوم: با کاهش عمق مایع، تندی انتشار موج در سطح مایع کم‌تر می‌شود؛ پس ناحیه (۲) عمق کم‌تری دارد.  $v_2 < v_1 \Rightarrow h_2 < h_1$

### تست و پاسخ ۶۶

باریکه نوری متشکل از دو پرتو قرمز و آبی، از هوا و با زاویه تابش  $53^\circ$  بر سطح تیغه تختی از کوارتز می‌تابد. به ترتیب، زاویه شکست کدام پرتو بیشتر است و اختلاف زاویه شکست دو پرتو چند درجه است؟  $\sin 53^\circ = 0.8$  و ضریب شکست تیغه برای پرتوهای آبی و قرمز به ترتیب  $\frac{4}{3}$  و  $\frac{3}{2}$  است.

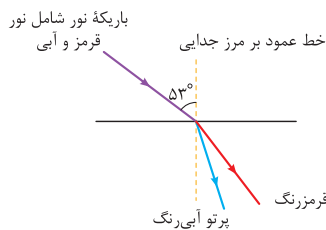
$$8^\circ, \text{ قرمز}, (4)$$

$$7^\circ, \text{ قرمز}, (3)$$

$$8^\circ, \text{ آبی}, (2)$$

$$7^\circ, \text{ آبی}, (1)$$

### پاسخ: گزینه ۲



**پاسخ تشریحی** گام اول: هنگام ورود نور از هوا به یک محیط شفاف، میزان شکست و انحراف پرتو قرمز رنگ کم‌تر از پرتو آبی رنگ است؛ بنابراین، پرتو قرمز رنگ زاویه بزرگ‌تری با خط عمود بر سطح جدایی دو محیط می‌سازد که در شکل مقابل نشان داده شده است.

گام دوم: زاویه شکست را برای پرتوهای قرمز رنگ و آبی رنگ به دست می‌آوریم:

$$\Rightarrow \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2(\text{قرمز})} = \frac{n_2(\text{قرمز})}{n_1} \Rightarrow \text{محاسبه زاویه شکست پرتو قرمز رنگ}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin 53^\circ}{\sin \theta_2(\text{قرمز})} = \frac{3}{2} \Rightarrow \sin \theta_2(\text{قرمز}) = 0.6 \Rightarrow \theta_2(\text{قرمز}) = 37^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2(\text{آبی})} = \frac{n_2(\text{آبی})}{n_1} \Rightarrow \text{محاسبه زاویه شکست پرتو آبی رنگ}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin 53^\circ}{\sin \theta_2(\text{آبی})} = \frac{4}{3} \Rightarrow \sin \theta_2(\text{آبی}) = 0.5 \Rightarrow \theta_2(\text{آبی}) = 30^\circ$$

بنابراین اختلاف زاویه شکست دو پرتو، برابر با  $37^\circ - 30^\circ = 7^\circ$  است.



## تست و پاسخ ۶۷

چگالی خطی جرم یک تار  $5 \text{ g/m}$  و طول آن  $75 \text{ cm}$  است. اگر نیروی کشش تار از  $288 \text{ N}$  به  $162 \text{ N}$  برسد، بسامد اصلی تار چند هرتز و چگونه تغییر می کند؟

- (۱)  $20$ ، کاهش می یابد. (۲)  $20$ ، افزایش می یابد. (۳)  $40$ ، کاهش می یابد. (۴)  $40$ ، افزایش می یابد.

## پاسخ: گزینه ۳

### درس نامه

• تندی انتشار موج عرضی در یک تار یا طناب که تحت تأثیر نیروی کشش  $F$  قرار دارد و چگالی خطی جرم آن  $\mu$  است، از رابطه زیر به دست می آید:

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{FL}{m}} = \sqrt{\frac{F}{\rho A}} \xrightarrow{\text{اگر مقطع طناب دایره ای باشد}} v = \frac{1}{D} \sqrt{\frac{F}{\rho \pi}}$$

$$f_n = \frac{nv}{2L}$$

• بسامد هماهنگ  $n$ ام در موج ایستاده یک ریسمان کشیده، از رابطه مقابل به دست می آید:

• بسامد اصلی مربوط به هماهنگ اول است؛ یعنی  $n = 1$ .

**پاسخ تشریحی** **گام اول:** تندی انتشار موج و سپس بسامد اصلی تار را در حالتی که نیروی کشش تار  $288 \text{ N}$  است، به دست می آوریم.

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{288}{5 \times 10^{-3}}} = \sqrt{\frac{288 \times 2}{10^{-2}}} = \sqrt{\frac{144 \times 4}{10^{-2}}} = 240 \text{ m/s}$$

$$f_1 = \frac{v}{2L} = \frac{240}{2(0.75)} = 160 \text{ Hz}$$

**گام دوم:** تندی انتشار موج و سپس بسامد اصلی تار را در حالتی که نیروی کشش تار  $162 \text{ N}$  است، به دست می آوریم.

$$v' = \sqrt{\frac{F'}{\mu}} = \sqrt{\frac{162}{5 \times 10^{-3}}} = \sqrt{\frac{162 \times 2}{10^{-2}}} = \sqrt{\frac{81 \times 4}{10^{-2}}} = 180 \text{ m/s}$$

$$f'_1 = \frac{v'}{2L} = \frac{180}{2(0.75)} = 120 \text{ Hz}$$

$$\Delta f = f'_1 - f_1 = 120 - 160 = -40 \text{ Hz}$$

**گام سوم:** تغییرات بسامد اصلی را به دست می آوریم.

بنابراین بسامد اصلی،  $40 \text{ Hz}$  کاهش می یابد.

## تست و پاسخ ۶۸

مدل اتمی بور برای اتم هیدروژن در کدام یک از موارد زیر، ناموفق است؟

- (۱) تبیین پایداری اتم (۲) تبیین طیف گسیلی و جذبی  
(۳) محاسبه انرژی یونش (۴) توضیح تفاوت شدت خطهای طیف گسیلی

## پاسخ: گزینه ۴

### درس نامه

مدل بور در توضیح موارد زیر با موفقیت همراه بود:

(۱) پایداری اتم

(۲) طیف گسیلی و جذبی گاز هیدروژن اتمی و اتمهای هیدروژن گونه

(۳) محاسبه انرژی یونش گاز هیدروژن اتمی و اتمهای هیدروژن گونه

نارسایهای مدلی اتمی بور:

(۱) این مدل تنها برای اتمهای هیدروژن گونه کاربرد دارد، زیرا نیرویی که یک الکترون بر الکترون دیگر وارد می کند را در محاسبات لحاظ نکرده است.

(۲) این مدل نمی تواند علت متفاوت بودن شدت خطهای طیف گسیلی را توضیح دهد.

**پاسخ تشریحی** همان طور که در درس نامه بررسی شد، جواب ۴ است.



### تست و پاسخ ۶۹

شدت تابشی خورشید در سطح زمین  $W/m^2$  ۳۰۰ است. اگر طول موج نور خورشید به طور متوسط  $nm$  ۶۰۰ باشد، در هر دقیقه چند فوتون

به سطحی به مساحت  $m^2$  ۵ می‌رسد؟ ( $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$  و  $h = 6.6 \times 10^{-34} \text{ J.s}$ )

$$3 \times 10^{22} \quad (1) \quad 6 \times 10^{22} \quad (2) \quad 3 \times 10^{23} \quad (3) \quad 6 \times 10^{23} \quad (4)$$

### پاسخ: گزینه ۲

**پاسخ تشریحی** گام اول: به کمک رابطه  $I = \frac{E_{\text{کل}}}{At}$  که بیانگر شدت تابش است، انرژی کل تابیده شده به سطح مورد نظر را در مدت زمان  $1 \text{ min}$  به دست می‌آوریم.

$$I = \frac{E_{\text{کل}}}{At} \xrightarrow[t=1 \text{ min}=60 \text{ s}]{A=5 \text{ m}^2} 300 = \frac{E_{\text{کل}}}{5 \times 60} \Rightarrow E_{\text{کل}} = 9 \times 10^4 \text{ J}$$

گام دوم: تعداد فوتون‌های تابیده شده را به دست می‌آوریم.

$$E_{\text{کل}} = nE_{\text{فوتون}} \Rightarrow 9 \times 10^4 = n \times \left( \frac{hc}{\lambda} \right) \\ \Rightarrow 9 \times 10^4 = n \times \frac{(6.6 \times 10^{-34}) \times (3 \times 10^8)}{600 \times 10^{-9}} \Rightarrow n = \frac{9 \times 10^4 \times 600 \times 10^{-9}}{6.6 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8} = 3 \times 10^{22}$$

### تست و پاسخ ۷۰

نوری با طول موج  $nm$  ۲۵۰ به سطحی از جنس روی با تابع کار  $eV$  ۴/۳۵ می‌تابد. بیشینه تندی فوتوالکترون‌های خارج شده از سطح روی

چند متر بر ثانیه است؟ ( $h = 4 \times 10^{-15} \text{ eV.s}$ ،  $e = 1/6 \times 10^{-19} \text{ C}$ ،  $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$  و جرم الکترون  $kg$   $9 \times 10^{-31}$  است.)

$$2\sqrt{2} \times 10^6 \quad (1) \quad 2\sqrt{2} \times 10^5 \quad (2) \quad 4 \times 10^6 \quad (3) \quad 2\sqrt{2} \times 10^6 \quad (4)$$

### پاسخ: گزینه ۱

**پاسخ تشریحی** گام اول: انرژی هر فوتون را به دست می‌آوریم.

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(4 \times 10^{-15})(3 \times 10^8)}{250 \times 10^{-9}} = 4/8 \text{ eV}$$

گام دوم: با استفاده از معادله فوتوالکتریک، بیشینه انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها را به دست می‌آوریم.

$$K_{\text{max}} = hf - W_0 = 4/8 - 4/35 = 0/45 \text{ eV}$$

سیس بیشینه انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها را بر حسب ژول می‌نویسیم:

$$K_{\text{max}} = 0/45 \times 1/6 \times 10^{-19} \text{ J}$$

توجه کنید که هر  $eV$  معادل  $J$   $1/6 \times 10^{-19}$  است.

گام سوم: بیشینه تندی فوتوالکترون‌های خارج شده را محاسبه می‌کنیم.

$$K_{\text{max}} = \frac{1}{2} m v_{\text{max}}^2 \Rightarrow 0/45 \times 1/6 \times 10^{-19} = \frac{1}{2} \times 9 \times 10^{-31} \times v_{\text{max}}^2$$

$$v_{\text{max}}^2 = \frac{0/9 \times 1/6 \times 10^{-19}}{9 \times 10^{-31}} = 16 \times 10^{10} \Rightarrow v_{\text{max}} = 4 \times 10^5 \text{ m/s}$$

### تست و پاسخ ۷۱

در طیف اتمی هیدروژن، گستره طول موج‌های رشته لیمان ( $n' = 1$ ) چند میکرومتر است؟ ( $R = 0/01 \text{ (nm)}^{-1}$ )

$$\frac{1}{30} \quad (1) \quad \frac{1}{3} \quad (2) \quad \frac{2}{15} \quad (3) \quad \frac{4}{3} \quad (4)$$

### پاسخ: گزینه ۱

**پاسخ تشریحی** گام اول: کوتاه‌ترین طول موج رشته لیمان ( $n' = 1$ )، مربوط به  $n = \infty$  است.

$$\frac{1}{\lambda_{\text{min}}} = R \left( \frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right) = R \left( \frac{1}{1} - \frac{1}{\infty^2} \right) = R = 0/01 \Rightarrow \lambda_{\text{min}} = 100 \text{ nm}$$

گام دوم: بلندترین طول موج رشته لیمان ( $n' = 1$ )، مربوط به  $n = 2$  است.

$$\frac{1}{\lambda_{\text{max}}} = R \left( \frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right) = R \left( \frac{1}{1} - \frac{1}{2^2} \right) = \frac{3R}{4} = \frac{3}{400} \Rightarrow \lambda_{\text{max}} = \frac{400}{3} \text{ nm}$$

گام سوم: گستره طول موج‌های رشته لیمان را به دست می‌آوریم.

$$\text{گستره طول موج‌های رشته لیمان} = \lambda_{\text{max}} - \lambda_{\text{min}} = \frac{400}{3} - 100 = \frac{100}{3} \text{ nm} = \frac{1}{30} \mu\text{m}$$



## تست و پاسخ ۷۲

الکترون اتم هیدروژنی در تراز  $n = 5$  قرار دارد. با در نظر گرفتن تمام گذارهای ممکن، اگر این اتم به حالت پایه برود، امکان گسیل چند نوع فوتون با انرژی‌های متفاوت وجود دارد؟

۱۰ (۱)      ۲۵ (۲)      ۴ (۳)      ۱۶ (۴)

## پاسخ: گزینه ۱

**پاسخ تشریحی**

**روش اول:** گام اول: تمام گذارهای مربوط به مدارهای  $n > 1$  به مدار  $n' = 1$  را به دست می‌آوریم.

$$(5 \rightarrow 1)(4 \rightarrow 1)(3 \rightarrow 1)(2 \rightarrow 1)$$

$$(5 \rightarrow 2)(4 \rightarrow 2)(3 \rightarrow 2)$$

$$(5 \rightarrow 3)(4 \rightarrow 3)$$

$$(5 \rightarrow 4)$$

$$\text{گام پنجم: تعداد کل فوتون‌های گسیل‌شده در گام‌های اول تا چهارم را با هم جمع می‌کنیم.}$$

**روش دوم:** در یک اتم هیدروژن که الکترون در تراز  $n$  قرار دارد، برای آن که الکترون به تراز پایه برسد، تعداد کل انواع فوتون‌هایی که می‌توانند

گسیل شوند از رابطه  $\frac{n(n-1)}{2}$  به دست می‌آید، بنابراین داریم:

$$\frac{5(5-1)}{2} = 10$$

$$\text{تعداد کل انواع فوتون‌ها} = 10$$

## تست و پاسخ ۷۳

کدام یک از عبارات‌های زیر نادرست است؟

(۱) واپاشی  $\alpha$  در هسته‌های سنگین صورت می‌گیرد.

(۲) یکی از کاربردهای واپاشی  $\alpha$  در آشکارسازهای دود است.

(۳) واپاشی  $\beta$ ، متداول‌ترین نوع واپاشی در هسته‌هاست.

(۴) اغلب هسته‌ها بلافاصله پس از واپاشی  $\alpha$  یا  $\beta$ ، به حالت پایه می‌رسند.

## پاسخ: گزینه ۴

**درس‌نامه**

زمانی که هسته ناپایدار یا پرتوزا، به صورت طبیعی واپاشی کند، نوع معینی از ذرات یا فوتون‌های پرنرژی آزاد می‌شوند. به این فرایند واپاشی، پرتوزایی طبیعی گفته می‌شود.

پرتوهای  $\alpha$  ← در واپاشی هسته‌های سنگین صورت می‌گیرد و یکی از کاربردهای گسترده آن در آشکارسازهای دود است.

پرتوهای  $\beta$  ← متداول‌ترین نوع واپاشی در هسته‌ها

پرتوهای  $\gamma$  ← اغلب هسته‌ها پس از واپاشی  $\alpha$  یا  $\beta$ ، در حالت برانگیخته قرار می‌گیرند و بعد از گسیل پرتو گاما به حالت پایه می‌رسند.

**پاسخ تشریحی** با توجه به درس‌نامه، (۴) نادرست است.

## تست و پاسخ ۷۴

در فرایندهای واپاشی «الف» و «ب»، تعداد نوترون‌های هسته مادر به ترتیب از راست به چپ کدام است؟



۱۲۶، ۱۲۴ (۱)

۱۲۳، ۱۲۴ (۳)

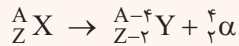
۱۲۳، ۱۲۷ (۲)

۱۲۶، ۱۲۴ (۱)

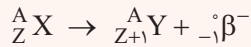
## پاسخ: گزینه ۴



## درس نامه

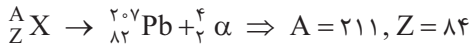


(۱) واپاشی آلفا:

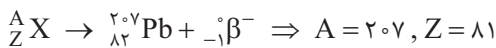


(۲) واپاشی بتای منفی:

**پاسخ تشریحی** گام اول: در واپاشی  $\alpha$ ، ۲ واحد از عدد اتمی و ۴ واحد از عدد جرمی هسته کاسته می شود.



$$\Rightarrow N = A - Z = 211 - 84 = 127$$



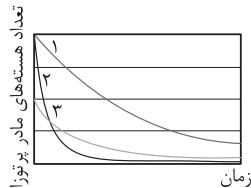
گام دوم: در واپاشی  $\beta^-$ ، ۱ واحد به عدد اتمی هسته اضافه می شود.

$$\Rightarrow N = A - Z = 207 - 81 = 126$$

## تست و پاسخ ۷۵

نمودار تغییرات تعداد هسته های مادر پرتوزای سه نمونه (۱)، (۲) و (۳) بر حسب زمان به شکل زیر است. کدام مقایسه درباره نیمه عمر این سه

نمونه (T) درست است؟



$$T_1 > T_2 > T_3 \quad (۲)$$

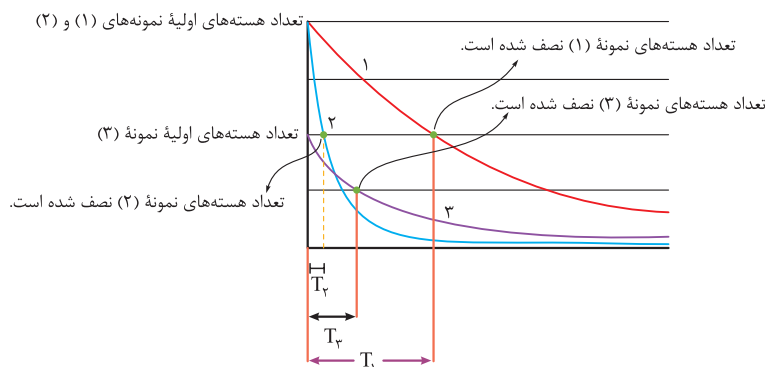
$$T_2 > T_1 > T_3 \quad (۱)$$

$$T_1 > T_3 > T_2 \quad (۴)$$

$$T_2 > T_3 > T_1 \quad (۳)$$

## پاسخ: گزینه ۴

**پاسخ تشریحی** همان طور که می دانیم، به مدت زمانی که طول می کشد تا تعداد هسته های مادر در یک ماده پرتوزا به نصف برسد، نیمه عمر گفته می شود. در شکل زیر، نیمه عمر برای سه نمونه (۱)، (۲) و (۳) مشخص شده است.



$$T_1 > T_3 > T_2$$

بنابراین رابطه بین نیمه عمرهای سه نمونه به صورت مقابل است:



شیمی دوازدهم: شیمی (۳): صفحه‌های ۱ تا ۱۲۱

## تست و پاسخ ۷۶

در کدام ستون جدول زیر، ویژگی بیان شده درباره یکی از مخلوط‌ها، نادرست است و این مخلوط از کدام نوع است؟

|                    | ۱       | ۲         | ۳               | ۴                  |
|--------------------|---------|-----------|-----------------|--------------------|
| ویژگی<br>نوع مخلوط | پخش نور | همگن بودن | ته نشینی ذره‌ها | ذره‌های سازنده     |
| یون‌ها و مولکول‌ها | نمی‌کند | همگن      | نمی‌شوند        | ستون ۱، سوسپانسیون |
| توده‌های مولکولی   | می‌کند  | ناهمگن    | می‌شوند         | ستون ۲، کلئید      |
| ذره‌های ریز ماده   | می‌کند  | ناهمگن    | می‌شوند         | ستون ۳، کلئید      |
|                    |         |           |                 | ستون ۴، سوسپانسیون |

## پاسخ: گزینه ۳

**پاسخ تشریحی:** در ستون ۳، اطلاعات داده شده در مورد کلئیدها نادرست است. کلئیدها پایدارند و برخلاف سوسپانسیون‌ها با گذشت زمان، ذره‌های سازنده آن‌ها ته‌نشین نمی‌شوند. همان‌طور که می‌دانید، هر دو مخلوط کلئید و سوسپانسیون ناهمگن بوده و نور را پخش می‌کنند.

## تست و پاسخ ۷۷

درستی یا نادرستی مطالب زیر، به ترتیب کدام است؟

• عدد اکسایش اکسیژن در  $\text{HOF}$  و  $\text{OF}_2$  یکسان است.

• سلول‌های سوختی برخلاف باتری‌ها، انرژی شیمیایی را ذخیره نمی‌کنند.

• نقطه ذوب مخلوط سدیم کلرید و کلسیم کلرید، پایین‌تر از نقطه ذوب سدیم کلرید است.

• پتانسیل کاهش اغلب فلزها همانند پتانسیل کاهش اکسیژن، منفی است.

منفی

مثبت

(۱) نادرست - درست - نادرست - نادرست

(۲) درست - درست - درست - نادرست

(۳) نادرست - درست - درست - نادرست

(۴) نادرست - درست - درست - درست

## پاسخ: گزینه ۳

**پاسخ تشریحی:** عبارت‌های اول و چهارم نادرست و عبارت‌های دوم و سوم درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

عبارت اول: با توجه به این که عدد اکسایش فلوئور در همه ترکیب‌ها برابر (۱-) است، عدد اکسایش اتم اکسیژن در ترکیب  $\text{HOF}$  برابر صفر و در ترکیب  $\text{OF}_2$  برابر (۲+) خواهد بود.

$$\text{OF}_2: \text{O} + 2(-1) = 0 \Rightarrow \text{O} = +2$$

$$\text{HOF}: +1 + \text{O} + (-1) = 0 \Rightarrow \text{O} = 0$$

عبارت دوم: سلول‌های سوختی همانند باتری‌ها، انرژی شیمیایی را به انرژی الکتریکی تبدیل می‌کنند؛ با این تفاوت که سلول‌های سوختی برخلاف باتری‌ها، انرژی شیمیایی را در خود ذخیره نمی‌کنند.

عبارت سوم: سدیم کلرید خالص در  $801^\circ\text{C}$  ذوب می‌شود. افزودن مقداری کلسیم کلرید به آن، دمای ذوب را تا حدود  $587^\circ\text{C}$  پایین می‌آورد؛ پس می‌توان نتیجه گرفت که نقطه ذوب مخلوط سدیم کلرید و کلسیم کلرید، پایین‌تر از نقطه ذوب سدیم کلرید خالص است.

عبارت چهارم: پتانسیل کاهش اغلب فلزها منفی بوده، اما پتانسیل کاهش اکسیژن، مثبت است؛ به همین علت اکسیژن به عنوان اکسنده، تمایل دارد با گرفتن الکترون از فلزها، آن‌ها را اکسید کند.

۷۸

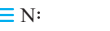
تست و پاسخ

کدام مولکول قطبی است، ساختاری خطی دارد و نسبت شمار جفت الکترون‌های ناپیوندی به پیوندی در آن کم‌تر است؟

- (۱) کربونیل سولفید (SCO) (۲) اوزون ( $O_3$ ) (۳) گوگرد تری اکسید ( $SO_3$ ) (۴) هیدروژن سیانید (HCN)

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ تشریحی

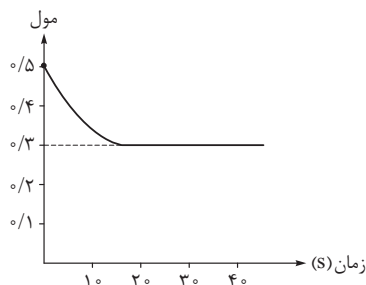
| ویژگی                                        | مولکول                                                                             | کربونیل سولفید (SCO)                                                              | اوزون (O۳)                                                                        | گوگرد تری اکسید (SO۳)                                                             | هیدروژن سیانید (HCN) |
|----------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|----------------------|
| ساختار لوویس                                 |  |  |  |  |                      |
| قطبیت                                        | قطبی                                                                               | قطبی                                                                              | ناقطبی                                                                            | قطبی                                                                              |                      |
| شکل مولکول                                   | خطی                                                                                | خطی                                                                               | خمیده                                                                             | سه ضلعی مسطح                                                                      | خطی                  |
| نسبت شمار جفت الکترون‌های ناپیوندی به پیوندی | $\frac{4}{4} = 1$                                                                  | $\frac{6}{3} = 2$                                                                 | $\frac{4}{4} = 1$                                                                 | $\frac{8}{4} = 2$                                                                 | $\frac{1}{4}$        |

با توجه به جدول فوق، هیدروژن سیانید با فرمول شیمیایی HCN، یک مولکول قطبی با ساختاری خطی است. به علاوه نسبت شمار جفت الکترون‌های ناپیوندی به پیوندی در این ترکیب، کم‌تر از سایر ترکیب‌ها است.

۷۹

تست و پاسخ

واکنش تعادلی:  $2A(g) \rightleftharpoons B(g) + 3C(g)$ ، با وارد کردن ۵ / ۵ مول A به یک ظرف ۲ لیتری آغاز می‌شود. با توجه به نمودار زیر که تغییر شمار مول‌های A را در واکنش نشان می‌دهد، مقدار ثابت تعادل واکنش کدام است؟



(۱)  $3 \times 10^{-2}$

(۲)  $7/5 \times 10^{-2}$

(۳)  $3 \times 10^{-3}$

(۴)  $7/5 \times 10^{-3}$

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ تشریحی

ابتدا غلظت اولیه ماده A را به دست می‌آوریم:

$$A \text{ غلظت اولیه} = \frac{0.5 \text{ mol}}{2 \text{ L}} = 0.25 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

سپس با توجه به شمار مول‌های تعادلی ماده A در نمودار داده‌شده، تغییر غلظت‌ها و غلظت‌های تعادلی مواد را مشخص می‌کنیم:

|             | $2A(g) \rightleftharpoons B(g) + 3C(g)$ |    |     |
|-------------|-----------------------------------------|----|-----|
| غلظت آغازی  | ۰ / ۲۵                                  | ۰  | ۰   |
| تغییر غلظت  | -۲x                                     | +x | +۳x |
| غلظت تعادلی | ۰ / ۲۵ - ۲x                             | +x | +۳x |

$A \text{ غلظت تعادلی ماده} = 0.3 \text{ mol} \Rightarrow [A] = \frac{0.3}{2} = 0.15 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$

$A \text{ غلظت تعادلی ماده} = 0.15 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \Rightarrow 0.25 - 2x = 0.15 \Rightarrow 2x = 0.1 \Rightarrow x = 0.05 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$

$[B] = x = 0.05 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  ،  $[C] = 3x = 0.15 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$



در نهایت، با توجه به رابطه ثابت تعادل و غلظت‌های تعادلی مواد، مقدار ثابت تعادل واکنش مورد نظر را محاسبه می‌کنیم:

$$K = \frac{[B][C]^3}{[A]^2} = \frac{(0/0.5)(0/1.5)^3}{(0/1.5)^2} = 0/0.5 \times 0/1.5 = 7/5 \times 10^{-3}$$

## تست و پاسخ ۸۰

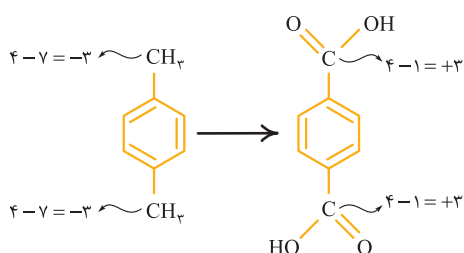
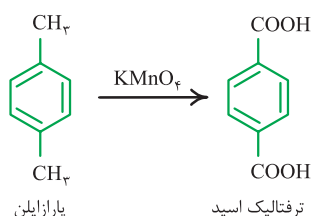
در واکنش تبدیل پارازایلین به ترفتالیک اسید در حضور محلول غلیظ پتاسیم پرمنگنات ( $\text{KMnO}_4$ )، مجموع تغییر عدد اکسایش اتم‌های کربن، چند برابر مقدار تغییر عدد اکسایش هر اتم منگنز است؟

- ۶ (۴)                      ۴ (۳)                      ۳ (۲)                      ۲ (۱)

## پاسخ: گزینه ۳

**پاسخ تشریحی**

واکنش تبدیل پارازایلین به ترفتالیک اسید در حضور محلول گرم و غلیظ پتاسیم پرمنگنات ( $\text{KMnO}_4$ ) به عنوان اکسنده به صورت مقابل است:



$$12 = 2(+6) = \text{مجموع تغییر عدد اکسایش اتم‌های کربن}$$

در این واکنش، یون پرمنگنات ( $\text{MnO}_4^-$ ) به منگنز (IV) اکسید ( $\text{MnO}_2$ ) تبدیل می‌شود؛ پس می‌توان گفت که عدد اکسایش منگنز در این واکنش از ۷ به ۴ می‌رسد؛ یعنی مقدار تغییر عدد اکسایش هر اتم منگنز، ۳ واحد است.

$$\text{MnO}_4^- : \text{Mn} + 4(-2) = -1 \Rightarrow \text{Mn} = +7, \quad \text{MnO}_2 : \text{Mn} + 2(-2) = 0 \Rightarrow \text{Mn} = +4$$

$$3 = 7 - 4 = \text{مقدار تغییر عدد اکسایش هر اتم منگنز}$$

در نهایت، نسبت خواسته‌شده را حساب می‌کنیم:

$$\frac{\text{مجموع تغییر عدد اکسایش اتم‌های کربن}}{\text{مقدار تغییر عدد اکسایش هر اتم منگنز}} = \frac{12}{3} = 4$$

## تست و پاسخ ۸۱

کدام مطلب دربارهٔ یخ، درست است؟

- (۱) نوع جاذبهٔ میان مولکول‌های  $\text{H}_2\text{O}$  در آن، با نوع جاذبهٔ میان لایه‌های گرافیت یکسان است.
- (۲) در رأس حلقه‌های شش گوشه در ساختار آن، اتم هیدروژن وجود دارد.
- (۳) هر چند جزء جامدهای مولکولی به حساب می‌آید، اما همانند جامدهای کووالانسی سخت و دیرگداز است.
- (۴) برخلاف گرافن، ساختاری سه‌بعدی دارد و همانند آن شفاف است.

## پاسخ: گزینه ۴

**پاسخ تشریحی**

مولکول‌های  $\text{H}_2\text{O}$  در ساختار یخ در یک آرایش منظم و سه‌بعدی قرار دارند و یخ در حالت خالص، شفاف است. در صورتی که گرافن، یک گونهٔ شیمیایی دوبعدی، شفاف و انعطاف‌پذیر است.

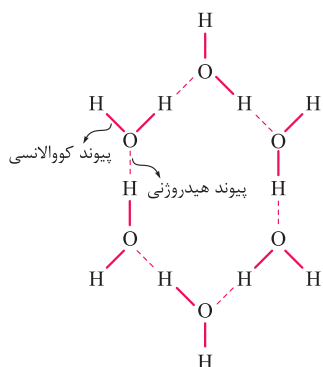


بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) در ساختار یخ، بین هر اتم اکسیژن از یک مولکول  $H_2O$  با دو اتم هیدروژن از دو مولکول دیگر  $H_2O$  پیوند هیدروژنی برقرار است؛ در صورتی که در گرافیت، اتم‌ها به صورت لایه‌لایه آرایش یافته‌اند و بین لایه‌های آن، نیروی ضعیف وان‌دروالسی وجود دارد.

۲) در ساختار یخ، آرایش مولکول‌های آب به گونه‌ای است که در آن، اتم‌های اکسیژن در رأس حلقه‌های شش ضلعی قرار دارند.

۳) یخ، یک جامد مولکولی محسوب می‌شود که برخلاف جامدهای کووالانسی، نقطه ذوب پایینی دارد و زودگداز است.



## تست و پاسخ ۸۲

۱۲ گرم از اسید ضعیف  $HX$  و ۸ گرم از اسید ضعیف  $HY$ ، به طور جداگانه در مقدار مشخصی آب حل شده و حجم هر دو محلول به یک لیتر رسانده می‌شود. اگر  $pH$  دو محلول برابر و درجه یونش  $HX$  دو برابر درجه یونش  $HY$  باشد، نسبت جرم مولی  $HX$  به  $HY$  کدام است؟

۱/۵ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۳)      ۴ (۴)

یعنی غلظت  $H^+$  در دو محلول برابر است.

## پاسخ: گزینه ۳

پاسخ تشریحی: گام اول: با استفاده از رابطه درجه یونش، نسبت غلظت مولی دو اسید را به دست می‌آوریم:

$$pH = -\log[H^+]$$

$$pH_{HX} = pH_{HY} \Rightarrow [H^+]_{HX} = [H^+]_{HY}$$

$$[H^+] = M \cdot \alpha$$

$$[H^+]_{HX} = [H^+]_{HY} \Rightarrow M_{HX} \cdot \alpha_{HX} = M_{HY} \cdot \alpha_{HY}$$

$$\frac{\alpha_{HX} = 2\alpha_{HY}}{\alpha_{HX} = 2\alpha_{HY}} \rightarrow M_{HX} \cdot 2\alpha_{HY} = M_{HY} \cdot \alpha_{HY} \Rightarrow \frac{M_{HY}}{M_{HX}} = 2$$

گام دوم: با جای گذاری جرم و جرم مولی اسیدها در نسبت غلظت مولی دو اسید، نسبت جرم مولی دو اسید مورد نظر را به دست می‌آوریم:

$$\frac{\text{جرم حل شونده}}{\text{جرم محلول بر حسب لیتر (V)}} = \frac{\text{تعداد مول های حل شونده (n)}}{\text{حجم محلول بر حسب لیتر (V)}} = \frac{\text{غلظت مولی (M)}}{\text{جرم محلول بر حسب لیتر (V)}}$$

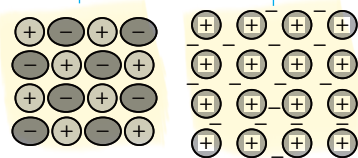
$$\frac{M_{HY}}{M_{HX}} = \frac{\frac{\text{جرم HY}}{\text{جرم مولی HY}}}{\frac{\text{جرم HX}}{\text{جرم مولی HX}}} = \frac{\frac{8}{\text{جرم مولی HY}}}{\frac{12}{\text{جرم مولی HX}}} = \frac{HX \text{ جرم مولی} \times 8}{HY \text{ جرم مولی} \times 12} = 2 \Rightarrow \frac{HX \text{ جرم مولی}}{HY \text{ جرم مولی}} = \frac{3 \times 2}{1 \times 2} = 3$$

## تست و پاسخ ۸۳

با توجه به شکل‌های داده شده، چند مورد از مطالب زیر درست است؟

جامد فلزی

جامد یونی



شکل (۲)

شکل (۱)

۱ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

## پاسخ: گزینه ۱



عبارت‌های اول و سوم درست هستند.

**پاسخ تشریحی** شکل (۱)، آرایش منظمی از کاتیون‌ها را در حالی که در فضای میان آن‌ها، الکترون‌های ظرفیتی آزادانه جابه‌جا می‌شوند، نشان می‌دهد؛ بنابراین این شکل مربوط به شبکه بلوری فلزهاست. شکل (۲)، آرایش منظمی از کاتیون‌ها و آنیون‌ها را نشان می‌دهد؛ بنابراین این شکل مربوط به جامدات یونی است.

بررسی عبارت‌ها:

عبارت اول: طبق توضیحات داده‌شده، کاملاً درست است.

عبارت دوم: ترکیب  $HI(s)$ ، یک ترکیب مولکولی است و با شکل (۲) همخوانی ندارد، ولی ترکیب  $MgO(s)$ ، یک جامد یونی است و در نتیجه با شکل (۲) همخوانی دارد.

عبارت سوم: اگر به یک ترکیب یونی با ساختار شکل (۲)، ضربه‌ای وارد شود، لایه‌های یون‌ها جابه‌جا شده و یون‌های همنام، کنار یکدیگر قرار می‌گیرند؛ در نتیجه نیروی دافعه میان آن‌ها باعث در هم ریختن شبکه بلور شده و بلور می‌شکند؛ در صورتی که با ضربه‌زدن به جامدهای فلزی (شکل (۱))، لایه‌هایی از ذره‌های مثبت یا کاتیون‌ها روی یکدیگر می‌غزند، اما الکترون‌های دریای الکترونی پس از جابه‌جاشدن، دوباره در فضای بین کاتیون‌ها قرار می‌گیرند و چیدمان آن‌ها را در شبکه بلوری فلز حفظ می‌کنند و نمی‌گذارند شبکه بلوری از هم پاشیده شود.

عبارت چهارم: فلزها (شکل (۱))، هم در حالت جامد و هم در حالت مذاب، رسانای جریان برق هستند؛ ولی ترکیب‌های یونی (شکل (۲)) در حالت جامد، رسانای جریان برق نیستند.

## تست و پاسخ ۸۴

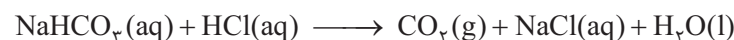
اگر از واکنش  $250$  میلی‌لیتر محلول هیدروکلریک اسید با مقدار کافی سدیم هیدروژن کربنات،  $56$  میلی‌لیتر گاز کربن دی‌اکسید در شرایط STP تولید شود، pH اولیه محلول اسید کدام است؟

$NaHCO_3(aq) + HCl(aq) \longrightarrow CO_2(g) + NaCl(aq) + H_2O(l)$

۱ (۱)      ۱/۳ (۲)      ۱/۷ (۳)      ۲ (۴)

## پاسخ: گزینه ۲

**پاسخ تشریحی** گام اول: ابتدا با توجه به حجم گاز  $CO_2$  تولیدشده و شرایط STP واکنش، شمارمول‌های  $HCl$  اولیه و سپس غلظت مولی محلول آن را به دست می‌آوریم:



$$56 \text{ mL } CO_2 \times \frac{1 \text{ mol } CO_2}{22400 \text{ mL } CO_2} \times \frac{1 \text{ mol } HCl}{1 \text{ mol } CO_2} = 2.5 \times 10^{-3} \text{ mol } HCl$$

$$M_{HCl} = \frac{n_{HCl}}{V_{HCl}} = \frac{2.5 \times 10^{-3} \text{ mol}}{250 \text{ mL} \times \frac{1 \text{ L}}{1000 \text{ mL}}} = 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$$

گام دوم: اسید  $HCl$ ، یک اسید قوی است و غلظت یون‌های هیدرونیوم در محلول آن با غلظت اولیه محلول یکسان است؛ پس pH اولیه محلول این اسید برابر است با:

$$[HCl] = [H^+] = 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$pH = -\log[H^+] = -\log 10^{-2} = 2$$

## تست و پاسخ ۸۵

چند مورد از مطالب زیر درباره فرایند هال، درست است؟

- در این فرایند، الکترودی که به قطب منفی متصل است، نقش واکنش‌دهنده را نیز دارد.
- آند این سلول، نافلزی است که در جدول دوره‌ای با دو شبه‌فلز هم‌گروه است.
- در معادله کلی این فرایند، مجموع ضرایب استوکیومتری مواد پس از موازنه برابر ۱۱ است.
- در این فرایند، فلزی تولید می‌شود که نسبت به فلزهای هم‌دوره خود کاهنده‌تر است.
- یکی از فراورده‌های واکنش، اکسیدی است که می‌توان آن را اسید آرنیوس در نظر گرفت.

Al

Mg و Na

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

## پاسخ: گزینه ۲



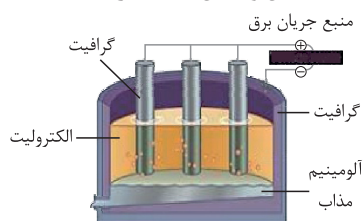
**مشاوره** همه چیز این سؤال مربوط به فرایند هال است اما عبارت‌های آن، با مباحث دیگه‌ای هم ترکیب شده. شما برای کنکور باید آماده سؤالات ترکیبی این مدلی هم باشید!

**پاسخ تشریحی** عبارت‌های دوم و پنجم درست هستند.

بررسی عبارت‌ها:

عبارت اول: در سلول الکترولیتی هال، دیواره‌ها و کف سلول، نقش کاتد دارند و به قطب منفی منبع جریان برق متصل هستند، ولی نقش واکنش دهنده ندارند؛ در صورتی که الکتروگرافیتی آند و الکترولیت مورد استفاده در این سلول که حاوی  $Al_2O_3$  مذاب است، نقش واکنش دهنده دارند.

عبارت دوم: تیغه‌های گرافیتی سلول الکترولیتی هال، نقش آند دارند. همان‌طور که می‌دانیم، گرافیت یکی از آلوتروپ‌های کربن است و عنصر کربن، نافلزی از گروه چهاردهم جدول تناوبی می‌باشد که با دو شبه‌فلز سیلیسیم و ژرمانیم هم‌گروه است.

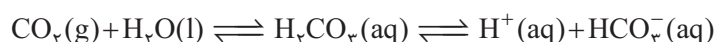


عبارت سوم: معادله موازنه‌شده واکنش فرایند هال به صورت مقابل است:



عبارت چهارم: فلز تولیدشده در فرایند هال، فلز آلومینیم است که نسبت به فلزهای سدیم و منیزیم، قدرت کاهندگی کم‌تری دارد.

عبارت پنجم: یکی از فراورده‌های واکنش، گاز کربن دی‌اکسید است که این اکسید نافلزی به هنگام حل شدن در آب، باعث افزایش غلظت یون‌های هیدرونیوم می‌شود و به همین علت، اسید آرنیوس به شمار می‌رود.



## تست و پاسخ ۸۶

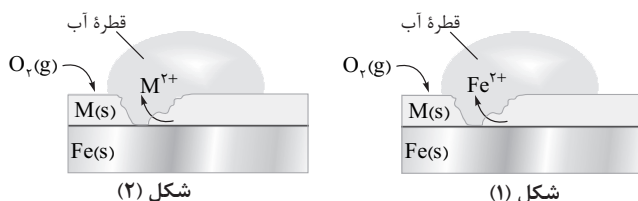
با توجه به شکل‌های مقابل، کدام گزینه درست است؟

(۱) شکل (۲) می‌تواند مربوط به آهن سفید یا گالوانیزه باشد و نیم‌واکنش کاتدی در آن به صورت  $Fe^{2+} + 2e^- \longrightarrow Fe$  است.

(۲) از شکل (۲)، می‌توان در ساخت قوطی‌های کنسرو و روغن نباتی استفاده کرد.

(۳) نیم‌واکنش کاهش در هر دو شکل یکسان بوده و مجموع ضرایب گونه‌ها در معادله موازنه‌شده این نیم‌واکنش برابر با ۱۱ است.

(۴) در شکل (۲)، فلز M می‌تواند فلزهایی مانند قلع و منیزیم باشد.



شکل (۲)

شکل (۱)

## پاسخ: گزینه ۳

**پاسخ تشریحی** شکل (۱)، مربوط به فرایند خوردگی آهن و شکل (۲)، مربوط به فرایند حفاظت کاتدی آهن است. در هر دو شکل، نیم‌واکنش کاهش به صورت  $O_2(g) + 2H_2O(l) + 4e^- \longrightarrow 4OH^-(aq)$  بوده و مجموع ضرایب استوکیومتری گونه‌های شرکت‌کننده در این نیم‌واکنش برابر با  $1 + 2 + 4 + 4 = 11$  است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

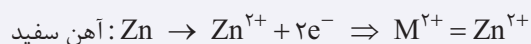
① شکل (۲) می‌تواند مربوط به فرایند حفاظت کاتدی آهن توسط فلز روی باشد که همان آهن گالوانیزه یا آهن سفید است. نیم‌واکنش کاتدی یا کاهش در این سلول به صورت  $O_2(g) + 2H_2O(l) + 4e^- \longrightarrow 4OH^-(aq)$  است.

② اگر شکل (۱) مربوط به حلیی باشد، می‌توان از آن برای ساخت قوطی‌های روغن نباتی و کنسرو استفاده کرد؛ هم‌چنین اگر شکل (۲) مربوط به آهن سفید یا آهن گالوانیزه باشد، از آن می‌توان برای ساخت تانکر آب و کانال کولر استفاده کرد.

④ در شکل (۲) فلز M اکسید شده است، یعنی قدرت کاهندگی فلز M از آهن بیشتر است؛ بنابراین M می‌تواند فلز منیزیم باشد، اما نمی‌تواند فلز قلع باشد، زیرا قدرت کاهندگی فلز قلع از فلز آهن کم‌تر است.



**توجه** نیم‌واکنش‌های اکسایش در آهن سفید و حلی به صورت زیر است:



۸۷

## تست و پاسخ

با توجه به جدول زیر که مربوط به دو عنصر در دوره سوم جدول تناوبی است، فرمول ترکیب حاصل از این دو عنصر کدام است؟

| عنصر | شعاع اتم (pm) | شعاع یون (pm) | نسبت مقدار بار به شعاع یون |
|------|---------------|---------------|----------------------------|
| A    | ۱۰۲           | ۱۸۴           | $1/0.9 \times 10^{-2}$     |
| B    | ۱۴۳           | ۵۶            | $5/36 \times 10^{-2}$      |



## پاسخ: گزینه ۳

**پاسخ تشریحی** از آن‌جا که شعاع یون منفی هر عنصر از شعاع اتمی آن، بزرگ‌تر است، عنصر A یک نافلز است که می‌تواند به آنیون تبدیل شود. هم‌چنین به این علت که شعاع یون مثبت هر عنصر از شعاع اتمی آن، کوچک‌تر است، عنصر B یک فلز است که می‌تواند به کاتیون تبدیل شود؛ حال می‌توان با توجه به نسبت مقدار بار به شعاع یون عناصر A و B، بار یون پایدار آن‌ها را حساب کرد:

$$\frac{\text{مقدار بار آنیون عنصر A}}{\text{شعاع آنیون عنصر A}} = \frac{1/0.9 \times 10^{-2}}{184} \Rightarrow \frac{\text{مقدار بار آنیون عنصر A}}{184} = 1/0.9 \times 10^{-2} \Rightarrow \text{مقدار بار آنیون عنصر A} = 2 \Rightarrow \text{آنیون عنصر A} = \text{A}^{2-}$$

$$\frac{\text{مقدار بار کاتیون عنصر B}}{\text{شعاع کاتیون عنصر B}} = \frac{5/36 \times 10^{-2}}{56} \Rightarrow \frac{\text{مقدار بار کاتیون عنصر B}}{56} = 5/36 \times 10^{-2} \Rightarrow \text{مقدار بار کاتیون عنصر B} = 3 \Rightarrow \text{کاتیون عنصر B} = \text{B}^{3+}$$



بنابراین فرمول ترکیب به‌دست‌آمده از دو عنصر A و B به صورت  $\text{B}_2\text{A}_3$  خواهد بود.

۸۸

## تست و پاسخ

SiC

چند مورد از مطالب زیر درباره سیلیسیم کربید، نادرست است؟ ( $\text{Si} = 28, \text{C} = 12; \text{g. mol}^{-1}$ )

- یک سایندۀ گران قیمت است که در تهیه سنباده به کار می‌رود.
- سختی آن از الماس کم‌تر و از سیلیسیم بیشتر است.
- در هر گرم از آن،  $1/50.5 \times 10^{23}$  اتم شبه‌فلز وجود دارد.
- برای توصیف آن نمی‌توان از واژه‌های شیمیایی رایجی مانند نیروهای بین مولکولی و فرمول مولکولی استفاده کرد.

۲ (۴)

۱ (۳)

۳ (۲)

۴ (۱)

## پاسخ: گزینه ۳

**پاسخ تشریحی** فقط عبارت اول نادرست است.

بررسی عبارت‌ها:

عبارت اول: سیلیسیم کربید (SiC) یک سایندۀ ارزان است که در تهیه سنباده به کار می‌رود.

عبارت دوم: آنتالپی پیوند C — Si از آنتالپی پیوند C — C، کم‌تر و از آنتالپی پیوند Si — Si بیشتر است. از طرفی سه جامد کووالانسی سیلیسیم کربید (SiC)، الماس (C) و سیلیسیم (Si)، ساختار تقریباً مشابهی دارند؛ از این رو می‌توان نتیجه گرفت که سختی سیلیسیم کربید از الماس کم‌تر و از سیلیسیم بیشتر است.

عبارت سوم: در هر واحد از ترکیب سیلیسیم کربید (SiC)، یک اتم از عنصر شبه‌فلز سیلیسیم (Si) وجود دارد؛ بنابراین خواهیم داشت:

$$1 \text{ g SiC} \times \frac{1 \text{ mol SiC}}{40 \text{ g SiC}} \times \frac{1 \text{ mol Si}}{1 \text{ mol SiC}} \times \frac{6/0.2 \times 10^{23} \text{ atom Si}}{1 \text{ mol Si}} = 1/50.5 \times 10^{23} \text{ atom Si}$$

عبارت چهارم: سیلیسیم کربید (SiC)، یک جامد کووالانسی است و مولکول‌های مجزا در آن وجود ندارد؛ بنابراین به کار بردن واژه‌هایی مانند فرمول مولکول، و نیروهای بین مولکول، برای آن نادرست است و به جای فرمول مولکول، می‌توان از فرمول شیمیایی برای آن استفاده کرد.

تست و پاسخ ۸۹

با توجه به واکنش‌های داده‌شده، چند مورد از مطالب زیر درست‌اند؟ ( $H = 1, C = 12, O = 16: g. mol^{-1}$ )



I) گاز اتن + **A**  $\xrightarrow{\text{X}}$  اتانول



افشانه بی حس کننده موضعی + گاز اتن III)  $\longrightarrow$

- ماده D، یک دی‌الکل است و جرم مولی آن، ۱۶ گرم بیشتر از جرم مولی فراورده واکنش (I) است.
- ماده X، می‌تواند یک اسید قوی دپروتون‌دار باشد که در باران اسیدی نیز وجود دارد.
- در نقشه پتانسیل الکتروستاتیکی ماده A، اتم مرکزی به رنگ سرخ است.
- ماده E، اسید آرنیوس به حساب می‌آید و pH محلول ۱ مولار آن برابر صفر است.
- در واکنش (II)، مجموع عدد اکسایش اتم‌های کربن، ۲ واحد افزایش می‌یابد.

2 (4)

۴۳

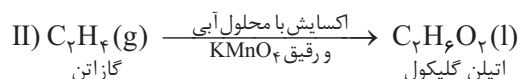
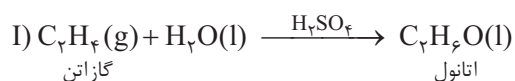
3 (2)

5 ( )

**پاسخ: گزینه**

**پاسخ تشریحی** همه عبارتهای داده شده درست هستند.

معادله موازنه شده واکنش‌های (I)، (II) و (III) به صورت زیر است:

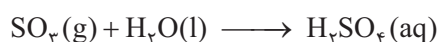
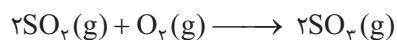


پیر سے عبارت تھا:

عبارت اول: ماده D، اتیلن گلیکول با ساختار  $\text{HO}-\text{CH}_2\text{CH}_2-\text{OH}$  است و دو گروه عاملی هیدروکسیل ( $-\text{OH}$ ) دارد؛ بنابراین این ترکیب، یک دی‌الکل است. از طرفی، اختلاف جرم مولی اتیلن گلیکول با جرم مولی اتانول که فراوردهٔ واکنش (I) است، برابر است با:

$$C_2H_6O_2 \text{ جرم مولی} - C_2H_6O \text{ جرم مولی} = O \text{ جرم مولی} = 16 \text{ g. mol}^{-1}$$

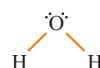
عبارت دوم: ماده X، همان سولفوریک اسید ( $H_2SO_4$ ) است که نوعی اسید قوی دپروتون دار محسوب می شود. این ترکیب بر اثر تبدیل گاز  $SO_3$  به  $SO_3$  و انحلال این گاز در آب باران، تولید می شود و باران اسیدی را به وجود می آورد:



عبارت سوم: ماده A، آب ( $H_2O$ ) است. خاصیت نافلزی اکسیژن از هیدروژن بیشتر است، به همین دلیل تراکم بار منفی روی هسته اتم اکسیژن بیشتر بوده و این اتم مرکزی در نقشه پتانسیل الکتروستاتیکی  $H_2O$ ، به رنگ سرخ است.



نقشہ یتانسیل الکتر وستاتیکی، مولکول آب



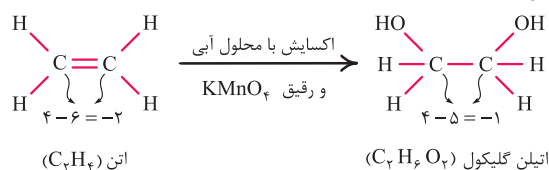
ساختار لوویس مولکول آب



عبارت چهارم: ماده E، گاز هیدروژن کلرید (HCl) است که یک اسید آرنیوس به شمار می آید و داریم:

$$[HCl] = [H^+] = 1 \text{ mol. L}^{-1} \Rightarrow pH = -\log[H^+] = -\log 1 = 0$$

عبارت پنجم: در واکنش تهیه اتیلن گلیکول از گاز اتن (واکنش (II))، عدد اکسایش هر اتم کربن از -۲ به -۱ می رسد، یعنی هر اتم ۱ درجه اکسایش می یابد؛ بنابراین عدد اکسایش اتم های کربن، مجموعاً ۲ واحد افزایش خواهد یافت.



## تست و پاسخ ۹۰

با توجه به جدول مقابل که ثابت یونش چند اسید را نشان می دهد، کدام مطلب نادرست است؟

| ترکیب                              | ثابت یونش (K <sub>a</sub> ) |
|------------------------------------|-----------------------------|
| C <sub>6</sub> H <sub>5</sub> COOH | ۶/۵ × ۱۰ <sup>-۵</sup>      |
| HNO <sub>2</sub>                   | ۴/۵ × ۱۰ <sup>-۴</sup>      |
| HOBr                               | ۲ × ۱۰ <sup>-۹</sup>        |
| HCN                                | ۴/۹ × ۱۰ <sup>-۱۰</sup>     |

(۱) در دما و غلظت یکسان، pH محلول هیدروسیانیک اسید نسبت به pH سایر محلول ها بیشتر است.

(۲) pH محلول ۰/۲ مولار HOBr برابر با ۴/۷ است.

(۳) در دما و غلظت یکسان، رسانایی الکتریکی محلول نیترو اسید از رسانایی الکتریکی محلول بنزوئیک اسید بیشتر است.

(۴) در دمای اتاق، غلظت یون هیدروکسید در محلول ۰/۱ مولار هیدروسیانیک اسید برابر با ۷ × ۱۰<sup>-۸</sup> مولار است.

## پاسخ: گزینه ۴

**پاسخ تشریحی:** با توجه به رابطه ثابت تعادل، ابتدا غلظت یون هیدرونیوم را در محلول ۰/۱ مولار اسید HCN به دست می آوریم و سپس غلظت یون هیدروکسید را در این محلول در دمای اتاق محاسبه می کنیم:

$$K_a = \frac{[H^+]^2}{M - [H^+]} \approx \frac{[H^+]^2}{M}$$

$$4/9 \times 10^{-10} = \frac{[H^+]^2}{0/1} \Rightarrow [H^+]^2 = 49 \times 10^{-12} \Rightarrow [H^+] = 7 \times 10^{-6} \text{ mol. L}^{-1}$$

حالا غلظت یون هیدروکسید را به دست می آوریم:

$$[H^+] \cdot [OH^-] = 10^{-14} \Rightarrow [OH^-] = \frac{10^{-14}}{7 \times 10^{-6}} = \frac{1}{7} \times 10^{-8}$$

بررسی سایر گزینه ها:

① هر چه یک اسید ضعیف تر و ثابت یونش آن کم تر باشد، در شرایط یکسان، کم تر یونیده شده و غلظت یون هیدرونیوم در محلول آن کم تر است. بین اسیدهای داده شده، کم ترین ثابت یونش مربوط به هیدروسیانیک اسید (HCN) است؛ بنابراین در دما و غلظت یکسان، بالاترین pH را دارد.

② با توجه به رابطه ثابت تعادل، ابتدا غلظت یون های هیدرونیوم محلول ۰/۲ مولار اسید HOBr را به دست می آوریم و سپس pH این محلول را محاسبه می کنیم:

$$K_a = \frac{[H^+]^2}{M - [H^+]} \approx \frac{[H^+]^2}{M}$$

$$2 \times 10^{-9} = \frac{[H^+]^2}{0/2} \Rightarrow [H^+]^2 = 4 \times 10^{-9} \Rightarrow [H^+] = 2 \times 10^{-5} \text{ mol. L}^{-1}$$

$$pH = -\log[H^+] = -\log(2 \times 10^{-5}) = 5 - \log 2 = 5 - 0/3 = 4/7$$

③ در دما و غلظت یکسان، هر چه یک اسید قوی تر باشد (K<sub>a</sub> آن بیشتر باشد)، بیشتر یونیده شده و مجموع غلظت یون ها در محلول آن بیشتر بوده و در نتیجه رسانایی الکتریکی محلول آن بیشتر خواهد بود. ثابت یونش نیترو اسید (HNO<sub>2</sub>) بیشتر از ثابت یونش بنزوئیک اسید (C<sub>6</sub>H<sub>5</sub>COOH) است؛ بنابراین رسانایی الکتریکی محلول نیترو اسید از رسانایی الکتریکی محلول بنزوئیک اسید بیشتر خواهد بود.



## تست و پاسخ ۹۱

در دو ظرف جداگانه، محلول‌هایی به حجم ۱۰ لیتر از هیدروکلریک اسید (ظرف I) و پتاسیم هیدروکسید (ظرف II) را وارد می‌کنیم. برای خنثی‌شدن محلول ظرف (I) از سدیم هیدروکسید و برای خنثی‌شدن ظرف (II) از هیدروژن برمید استفاده می‌کنیم. اگر pH محلول بازی اولیه برابر ۱۳ و نسبت جرم مصرفی HBr به NaOH برابر ۲/۰۲۵ باشد، pH اولیه محلول اسیدی چه قدر بوده است؟ (از تغییر حجم در اثر اضافه کردن مواد صرف نظر کنید؛  $\text{Br} = ۸۰, \text{Na} = ۲۳, \text{O} = ۱۶, \text{H} = ۱: \text{g. mol}^{-1}$ )

۰/۷ (۱)      ۱ (۲)      ۱/۷ (۳)      ۲ (۴)

## پاسخ: گزینه ۲

**پاسخ تشریحی:** گام اول: با توجه به رابطه pH، غلظت یون هیدروکسید محلول بازی KOH را به دست می‌آوریم و سپس از طریق آن شمار مول‌های HBr و در نهایت جرم HBr را به دست می‌آوریم:

$$[\text{H}^+] = 10^{-\text{pH}} = 10^{-13} \text{ mol. L}^{-1}$$

$$[\text{H}^+] \cdot [\text{OH}^-] = 10^{-14} \Rightarrow [\text{OH}^-] = \frac{10^{-14}}{10^{-13}} = 10^{-1} \text{ mol. L}^{-1}$$

$$n_a \cdot \underbrace{M_a \cdot V_a}_{\text{شمارمولهای HBr}} = n_b \cdot \underbrace{M_b \cdot V_b}_{\text{شمارمولهای KOH}} \Rightarrow 1 \times M_a \times V_a = 1 \times 10^{-1} \times 10 \Rightarrow \text{HBr های شمارمول} = 1 \text{ mol HBr}$$

$$\text{HBr جرم اسید: } 1 \text{ mol HBr} \times \frac{81 \text{ g HBr}}{1 \text{ mol HBr}} = 81 \text{ g HBr}$$

گام دوم: با توجه به نسبت داده شده در صورت سؤال، جرم NaOH برای خنثی‌شدن محلول HCl و سپس شمار مول‌های آن را به دست می‌آوریم و در نهایت از طریق آن، شمار مول‌های HCl ظرف (I) را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{\text{جرم HBr مصرف شده}}{\text{جرم NaOH مصرف شده}} = \frac{2}{0.25} \Rightarrow \frac{81}{\text{جرم NaOH مصرف شده}} = \frac{2}{0.25} \Rightarrow \text{جرم NaOH مصرف شده} = \frac{81}{2/0.25} = 40 \text{ g}$$

$$40 \text{ g NaOH} \times \frac{1 \text{ mol NaOH}}{40 \text{ g NaOH}} = 1 \text{ mol NaOH}$$

$$n_a \cdot \underbrace{M_a \cdot V_a}_{\text{شمارمولهای HBr}} = n_b \cdot \underbrace{M_b \cdot V_b}_{\text{شمارمولهای KOH}} \Rightarrow 1 \times M_a \times V_a = 1 \times 1 \Rightarrow \text{HCl های شمارمول} = 1 \text{ mol HCl}$$

گام سوم: با توجه به شمار مول‌های HCl، غلظت یون هیدرونیوم حاصل از آن را به دست می‌آوریم و در نهایت، pH محلول HCl اولیه را محاسبه می‌کنیم:

$$1 \text{ mol H}^+ = \text{شمارمولهای یون H}^+ \text{ موجود در آن} = \text{شمارمولهای محلول اسیدی HCl} \Rightarrow \text{اسید HCl، یک اسید قوی است.}$$

$$\text{غلظت یونهای H}^+ = \frac{\text{شمارمولهای H}^+}{\text{حجم ظرف}} = \frac{1}{10} = 10^{-1} \text{ mol. L}^{-1} \Rightarrow \text{pH} = -\log[\text{H}^+] \Rightarrow \text{pH} = -\log 10^{-1} = 1$$

## تست و پاسخ ۹۲

اگر emf سلولی که در آن واکنش  $\text{X} + 2\text{Ag}^+ \longrightarrow \text{X}^{2+} + 2\text{Ag}$  انجام می‌شود، برابر ۱/۵۶ ولت و emf سلولی که در آن واکنش  $\text{B}^{2+} + \text{Cu} \longrightarrow \text{B} + \text{Cu}^{2+}$  انجام می‌شود، برابر ۱/۵۳ ولت باشد، کدام موارد از مطالب زیر درست است؟

(الف) قدرت کاهندگی فلز B از فلز X بیشتر است.  $E^\circ(\text{Cu}^{2+}/\text{Cu}) = +0.34 \text{ V}, E^\circ(\text{Ag}^+/\text{Ag}) = +0.8 \text{ V}$

(ب) در واکنش ۰/۰۱ مول فلز X با مقدار کافی محلول نقره نیترات،  $6.02 \times 10^{21}$  الکترون میان اکسنده و کاهنده مبادله می‌شود.

(پ) در کاتد سلول گالوانی B-Cu، با گذشت زمان، شدت رنگ محلول الکترولیت کاهش می‌یابد.

(ت) اگر قطعه‌ای از فلز X را در محلولی از یون‌های  $\text{B}^{2+}$  قرار دهیم، یک واکنش الکتروشیمیایی انجام می‌شود.

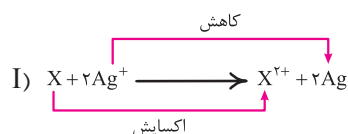
الف - ب (۱)      پ - ب (۲)      الف - پ (۳)      ب - ت (۴)

## پاسخ: گزینه ۳



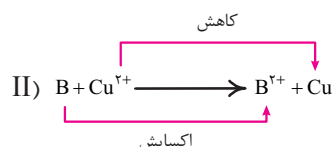
عبارت‌های «الف» و «پ» درست هستند.

پاسخ تشریحی



$$emf_{سلول} = E^{\circ}_{کاتد} - E^{\circ}_{اند} = E^{\circ}(Ag^+ / Ag) - E^{\circ}(X^{2+} / X) \Rightarrow 1/56 = 0/8 - E^{\circ}(X^{2+} / X)$$

$$\Rightarrow E^{\circ}(X^{2+} / X) = -0/76 V$$



$$emf_{سلول} = E^{\circ}_{کاتد} - E^{\circ}_{اند} = E^{\circ}(Cu^{2+} / Cu) - E^{\circ}(B^{2+} / B) \Rightarrow 1/53 = 0/34 - E^{\circ}(B^{2+} / B)$$

$$\Rightarrow E^{\circ}(B^{2+} / B) = -1/19 V$$

بررسی عبارت‌ها:

الف)  $E^{\circ}$  فلز B، کوچک‌تر از  $E^{\circ}$  فلز X است؛ بنابراین در سری الکتروشیمیایی، فلز B پایین‌تر از فلز X قرار داشته و قدرت کاهندگی آن بیشتر است.  
ب) با توجه به معادله موازنه‌شده واکنش  $X(s) + 2AgNO_3(aq) \longrightarrow X(NO_3)_2(aq) + 2Ag(s)$ ، شمار الکترون‌های مبادله‌شده به ازای مصرف ۰/۰۱ مول فلز X برابر است با:

$$0/01 \text{ mol } X \times \frac{2 \text{ mole } e^-}{1 \text{ mol } X} \times \frac{6/02 \times 10^{23} e^-}{1 \text{ mole } e^-} = 1/204 \times 10^{23} e^-$$

پ) در سلول گالوانی (B-Cu)، واکنش  $B(s) + Cu^{2+}(aq) \longrightarrow B^{2+}(aq) + Cu(s)$  انجام می‌شود. در نیم‌سلول کاتدی این سلول، کاتیون  $Cu^{2+}$  کاهش می‌یابد و به فلز Cu تبدیل می‌شود. به همین دلیل با گذشت زمان، از شدت رنگ آبی محلول الکترولیت کاسته خواهد شد.

ت)  $E^{\circ}$  نیم‌سلول B، کوچک‌تر از  $E^{\circ}$  نیم‌سلول X است. در سری الکتروشیمیایی، کاتیون فلز بالاتر می‌تواند با اتم‌های فلز پایین‌تر واکنش دهد؛ بنابراین واکنش  $B^{2+}(aq) + X(s)$  به طور طبیعی انجام نمی‌شود.

## تست و پاسخ ۹۳

چه تعداد از مقایسه‌های زیر برای ترکیب‌های سدیم اکسید (A)، منیزیم فلوئورید (E) و کلسیم سولفید (D)، درست است؟

CaS

MgF<sub>2</sub>

Na<sub>2</sub>O

•  $D > E > A$ : آنتالپی فروپاشی شبکه بلور:

•  $E > D > A$ : چگالی بار کاتیون سازنده:

•  $D > A > E$ : شعاع آنیون سازنده:

•  $A > D > E$ : نسبت شمار کاتیون به آنیون:

۱ (۴)

۲ (۳)

۳ (۲)

۴ (۱)

## پاسخ: گزینه ۱

همه مقایسه‌های داده‌شده، درست هستند.

**درس‌نامه** •• برای مقایسه آنتالپی فروپاشی شبکه ترکیب‌های یونی به صورت زیر عمل می‌کنیم:

۱) هر چه مجموع قدرمطلق بار یک کاتیون و یک آنیون در یک ترکیب یونی بزرگ‌تر باشد،  $\Delta H$  فروپاشی شبکه آن بزرگ‌تر است.

۲) در صورت برابر بودن مجموع قدرمطلق بار یک کاتیون و بار یک آنیون در ترکیب یونی، شعاع یون‌ها را مقایسه می‌کنیم. ترکیبی که دارای شعاع یون‌های کوچک‌تری باشد،  $\Delta H$  فروپاشی بزرگ‌تری دارد.

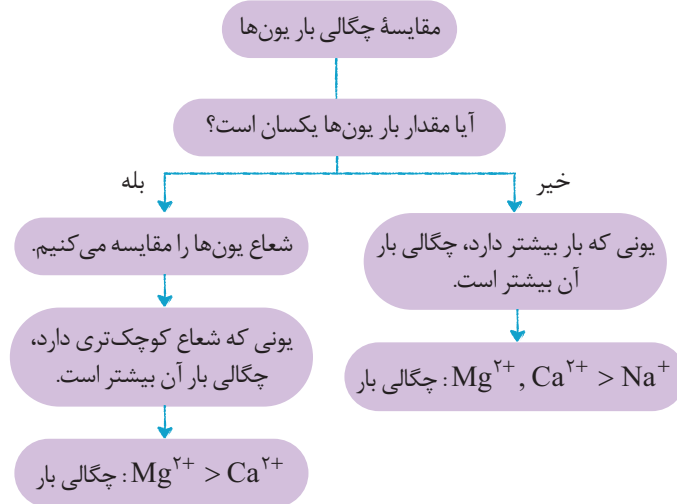


پاسخ تشریحی: مورد اول: مقایسه آنتالپی شبکه بلور ترکیب های یونی  $(A)Na_2O$ ،  $(E)MgF_2$  و  $(D)CaS$  به صورت زیر است:

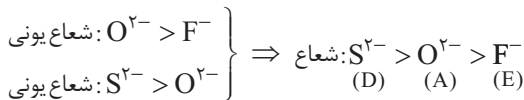


مجموع قدرمطلق بار کاتیون و آنیون در هر دو ترکیب  
مجموع قدرمطلق بار کاتیون و آنیون در هر دو ترکیب  
با هم برابر است، ولی شعاع یونی کاتیون و آنیون در  $(1+2=3)$  و آنیون آن  $(2+2=4)$  بزرگ تر است.  
 $MgF_2$  کوچک تر از شعاع یونی کاتیون و آنیون در  $Na_2O$  است.

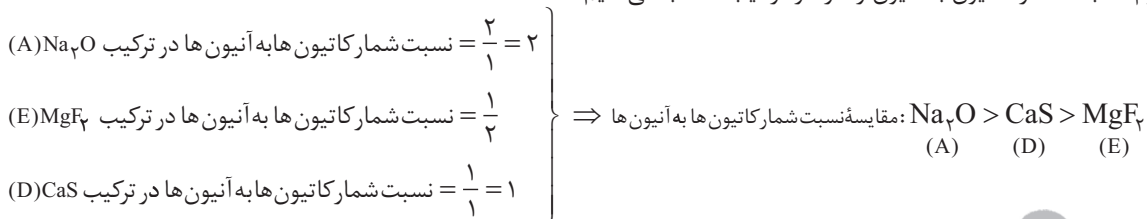
مورد دوم: با توجه به نمودار زیر، مقایسه چگالی بار کاتیون های  $(A)Na^+$  و  $(E)Mg^{2+}$  و  $(D)Ca^{2+}$  به صورت  $Mg^{2+} > Ca^{2+} > Na^+$  یا  $E > D > A$  است.



مورد سوم: آنیون های سازنده ترکیبات داده شده،  $O^{2-}$ ،  $F^-$  و  $S^{2-}$  هستند. آنیون های  $O^{2-}$  و  $F^-$  در یک دوره جدول تناوبی قرار دارند و همان طور که می دانیم، در یون های هم دوره، هر چه بار منفی یون بیشتر باشد، شعاع یون منفی (آنیون) بزرگ تر است؛ بنابراین شعاع آنیون  $O^{2-}$  از شعاع آنیون  $F^-$  بزرگ تر است. آنیون های  $O^{2-}$  و  $S^{2-}$  در یک گروه جدول تناوبی هستند. در یک گروه، شعاع یونی از بالا به پایین، افزایش می یابد، بنابراین شعاع آنیون  $S^{2-}$  از شعاع آنیون  $O^{2-}$  بزرگ تر است.



مورد چهارم: نسبت شمار کاتیون به آنیون را در هر ترکیب حساب می کنیم:



## تست و پاسخ ۹۴

با توجه به پاک کننده های داده شده، کدام مطلب نادرست است؟

(۱) پاک کننده D غیرصابونی است و خاصیت پاک کنندگی خود را در آب سخت حفظ می کند.

(۲) برای باز کردن لوله فاضلابی که با اسیدهای چرب مسدود شده است، باید از پاک کننده C استفاده کرد.

(۳) B یک پاک کننده صابونی مایع است و بخش a در آن، آب گریز است.

(۴) پاک کننده A جزء پاک کننده های خورنده است و واکنش آن با پاک کننده C، از نوع اکسایش - کاهش است.

پاسخ: گزینه ۴

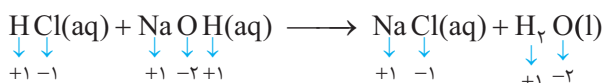
| پاک کننده | فرمول پاک کننده                                         |
|-----------|---------------------------------------------------------|
| A         | HCl                                                     |
| B         | $\underbrace{C_{17}H_{35}}_a - \underbrace{COO^-K^+}_b$ |
| C         | NaOH                                                    |
| D         | $C_{12}H_{25} - C_6H_4 - SO_3^-Na^+$                    |





## پاسخ تشریحی

پاک کننده A یا هیدروکلریک اسید (HCl)، نوعی پاک کننده خورنده محسوب می شود و واکنش آن با پاک کننده C یا سود (NaOH)، یک واکنش خنثی شدن اسید و باز است که از نوع واکنش اکسایش - کاهش نیست، زیرا عدد اکسایش هیچ یک از اتم های شرکت کننده در واکنش تغییری نمی کند.



## تست و پاسخ ۹۵

درصد یونش یک باز ضعیف (BOH) در محلولی از آن با  $\text{pH} = 10/3$  برابر ۲ است. غلظت مولی یون هیدروکسید در این محلول، چند برابر غلظت مولی یون هیدرونیوم است و در  $500$  میلی لیتر از این محلول، چند میلی مول باز حل شده است؟

$$\begin{array}{ll} (1) \quad 5, 4 \times 10^{-6} & (2) \quad 5, 4 \times 10^{-8} \\ (3) \quad 5, 4 \times 10^{-6} & (4) \quad 5, 4 \times 10^{-8} \end{array}$$

## پاسخ: گزینه ۳

### پاسخ تشریحی

گام اول: ابتدا با توجه به رابطه  $\text{pH}$  یک محلول با غلظت یون هیدرونیوم آن، غلظت مولی یون های هیدرونیوم را به دست می آوریم و سپس غلظت مولی یون هیدروکسید را محاسبه می کنیم:

$$\text{pH} = -\log[\text{H}^+] \Rightarrow [\text{H}^+] = 10^{-\text{pH}}$$

$$[\text{H}^+] = 10^{-10/3} = 10^{-11} \times 10^{+0/3} = 5 \times 10^{-11} \text{ mol. L}^{-1}$$

$$[\text{H}^+] \cdot [\text{OH}^-] = 10^{-14}$$

$$\Rightarrow [\text{OH}^-] = \frac{10^{-14}}{5 \times 10^{-11}} = 2 \times 10^{-4} \text{ mol. L}^{-1} \Rightarrow \frac{[\text{OH}^-]}{[\text{H}^+]} = \frac{2 \times 10^{-4}}{5 \times 10^{-11}} = 4 \times 10^6$$

گام دوم: با توجه به رابطه درصد یونش با  $[\text{OH}^-]$  و غلظت مولی اولیه باز داده شده، غلظت مولی اولیه باز BOH را محاسبه می کنیم و در نهایت با توجه به حجم آن، شمار میلی مول های باز حل شده را به دست می آوریم:

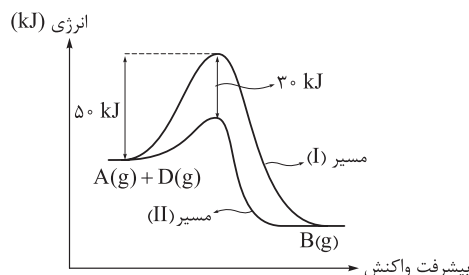
$$\text{درصد یونش} = \frac{[\text{OH}^-]}{[\text{BOH}]_{\text{اولیه}}} \times 100 \Rightarrow \alpha\% = \frac{[\text{OH}^-]}{[\text{BOH}]_{\text{اولیه}}} \times 100$$

$$2 = \frac{2 \times 10^{-4}}{[\text{BOH}]_{\text{اولیه}}} \times 100 \Rightarrow [\text{BOH}]_{\text{اولیه}} = \frac{2 \times 10^{-4}}{2 \times 10^{-2}} = 10^{-2} \text{ mol. L}^{-1}$$

$$500 \text{ mL BOH(aq)} \times \frac{1 \text{ L BOH(aq)}}{1000 \text{ mL BOH(aq)}} \times \frac{10^{-2} \text{ mol BOH}}{1 \text{ L BOH(aq)}} \times \frac{1000 \text{ mmol BOH}}{1 \text{ mol BOH}} = 5 \text{ mmol BOH}$$

## تست و پاسخ ۹۶

با توجه به نمودار زیر که مربوط به پیشرفت واکنش تعادلی  $\text{A(g)} + \text{D(g)} \rightleftharpoons \text{B(g)}$  در غیاب و حضور کاتالیزگر است، کدام مطلب درست است؟



(۱) به ازای مقدار معینی از واکنش دهنده ها، گرمای مبادله شده در مسیر (I) کم تر

از گرمای مبادله شده در مسیر (II) است.

(۲) با افزایش دما، مقدار ثابت تعادل واکنش افزایش می یابد.

(۳) تفاوت انرژی فعال سازی واکنش در غیاب و حضور کاتالیزگر برابر با  $20 \text{ kJ}$  است.

(۴) مجموع آنتالپی پیوندها در مواد واکنش دهنده، کم تر از مجموع آنتالپی پیوندها

در فراورده است.

## پاسخ: گزینه ۴



## پاسخ تشریحی

سطح انرژی فراورده‌ها در واکنش داده‌شده، پایین‌تر از سطح انرژی واکنش‌دهنده‌ها است، پس این واکنش گرماده بوده و  $\Delta H$  آن منفی است؛ بنابراین خواهیم داشت:

$$\Delta H = [\text{مجموع آنتالپی پیوندها در مواد فراورده}] - [\text{مجموع آنتالپی پیوندها در مواد واکنش‌دهنده}]$$

$$\xrightarrow{\Delta H < 0} \text{مجموع آنتالپی پیوندها در مواد فراورده} < \text{مجموع آنتالپی پیوندها در مواد واکنش‌دهنده}$$

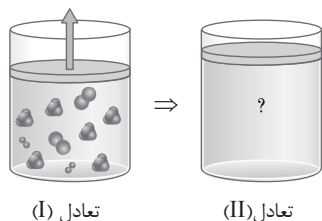
بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) کاتالیزگر روی آنتالپی واکنش ( $\Delta H$ ) بی‌تأثیر است. به عبارت دیگر با حضور و یا بدون حضور کاتالیزگر،  $\Delta H$  یک واکنش در دمای معین، یک عدد ثابت و مشخص است؛ بنابراین به ازای مقدار معینی از واکنش‌دهنده‌ها، گرمای مبادله‌شده در مسیر (I) برابر گرمای مبادله‌شده در مسیر (II) است.

۲) طبق اصل لوشاتلیه، با افزایش دما در سامانه تعادلی  $A(g) + D(g) \rightleftharpoons B(g) + Q$ ، برای جبران بالا رفتن دما، تعادل در جهت مصرف گرما (جهت برگشت) جابه‌جا می‌شود و شمار مول‌های فراورده‌ها، کاهش و شمار مول‌های واکنش‌دهنده‌ها، افزایش می‌یابد؛ بنابراین مقدار ثابت تعادل کاهش می‌یابد.

۳) با توجه به نمودار، تفاوت انرژی فعال‌سازی واکنش در غیاب و حضور کاتالیزگر برابر با ۳۰ kJ است.

## تست و پاسخ ۹۷



شکل مقابل مربوط به واکنش تعادلی تولید آمونیاک به روش هابر در سیلندری با پیستون روان در دمای ثابت است. اگر مطابق شکل، پیستون به سمت بیرون کشیده شود، چند مورد از مطالب زیر درست است؟



- تعادل در جهت رفت جابه‌جا می‌شود و درصد مولی گاز قطبی افزایش می‌یابد.
- غلظت مولی گازهای نیتروژن و هیدروژن در تعادل (II) بیشتر از تعادل (I) است.
- با این تغییر، شمار مولکول‌های آمونیاک در تعادل کاهش می‌یابد.
- با جابه‌جایی تعادل، شمار مولکول‌های نیتروژن در تعادل افزایش و مقدار ثابت تعادل واکنش، کاهش می‌یابد.

۲ (۲)

۱ (۱)

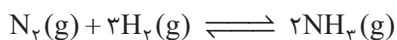
۴ (۴)

۳ (۳)

## پاسخ: گزینه ۱

فقط عبارت سوم درست است.

پاسخ تشریحی: معادله موازنه‌شده تولید آمونیاک به روش هابر به صورت زیر است:



اگر مطابق شکل داده‌شده، پیستون به سمت بیرون کشیده شود، حجم سامانه افزایش و فشار آن کاهش می‌یابد. بررسی عبارت‌ها:

عبارت اول: طبق اصل لوشاتلیه، با کاهش فشار و افزایش حجم سامانه تعادلی داده‌شده، تعادل در جهت برگشت (شمار مول‌های گازی بیشتر) پیش می‌رود؛ در نتیجه از تعداد مول گاز قطبی آمونیاک کاسته شده و درصد مولی این گاز در ظرف کاهش می‌یابد.

عبارت دوم: با افزایش حجم سامانه، بدون توجه به جهت جابه‌جایی تعادل و تغییرات مقدار موجود در تعادل، می‌توان گفت غلظت تمام مواد گازی کاهش می‌یابد.

عبارت سوم: طبق اصل لوشاتلیه، با کاهش فشار، واکنش در جهت افزایش شمار مول‌های گازی یا به عبارت دیگر در جهت برگشت پیش می‌رود؛ بنابراین شمار مولکول‌های گاز آمونیاک در تعادل جدید، کاهش می‌یابد.

عبارت چهارم: با جابه‌جایی تعادل در جهت برگشت، شمار مولکول‌های گازهای هیدروژن و نیتروژن در تعادل جدید افزایش می‌یابد، ولی مقدار ثابت تعادل واکنش مورد نظر تغییری نمی‌کند؛ زیرا دمای سامانه تعادلی ثابت است و مقدار ثابت تعادل فقط با تغییر دما تغییر می‌کند.



## تست و پاسخ ۹۸

کدام مورد، جزء شباهت‌های سلول برقکافت منیزیم کلرید مذاب و سلول برقکافت آب است؟



(۱) شمار الکترون‌های مبادله شده

(۲) تولید گاز دواتمی در قطب مثبت سلول

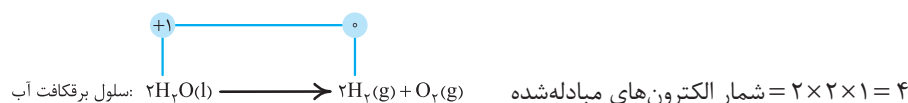
(۳) نسبت مولی فراورده‌های تولیدشده

(۴) گستره دمایی مایع‌بودن واکنش‌دهنده‌ها

## پاسخ: گزینه ۲

پاسخ تشریحی

معادله موازنه‌شده واکنش کلی سلول برقکافت منیزیم کلرید مذاب و سلول برقکافت آب به صورت زیر است:



نیم‌واکنش اکسایش در نیم‌سلول آند و قطب مثبت سلول‌های الکترولیتی اتفاق می‌افتد که این نیم‌واکنش در سلول برقکافت منیزیم کلرید مذاب  $(2Cl(l) \rightarrow Cl_2(g) + 2e^-)$ ، باعث تولید گاز دواتمی  $Cl_2$  و در سلول برقکافت آب  $(2H_2O(l) \rightarrow O_2(g) + 4H^+(aq) + 4e^-)$ ، باعث تولید گاز دواتمی  $O_2$  می‌شود.

بررسی سایر گزینه‌ها:

(۱) شمار الکترون‌های مبادله شده در سلول برقکافت آب، دو برابر سلول برقکافت منیزیم کلرید مذاب است.

(۳) نسبت مولی فراورده‌های تولیدشده در سلول برقکافت منیزیم کلرید مذاب، ۱ به ۱ ولی نسبت مولی فراورده‌های تولیدشده در سلول برقکافت آب، ۲ به ۱ است.

(۴) واکنش‌دهنده سلول برقکافت منیزیم کلرید مذاب  $(MgCl_2)$ ، یک ترکیب یونی و واکنش‌دهنده سلول برقکافت آب  $(H_2O)$ ، یک ترکیب مولکولی است. همان‌طور که می‌دانیم، گستره دمایی مایع‌بودن ترکیبات یونی، بیشتر از ترکیبات مولکولی می‌باشد.

## تست و پاسخ ۹۹

با توجه به جدول داده شده که مواد مؤثر موجود در سه نمونه ضداسید را نشان می‌دهد، کدام مطلب نادرست است؟

(H = ۱, O = ۱۶, Al = ۲۷ : g. mol<sup>-1</sup>)

| شماره ضداسید | ۱                                        | ۲                                         | ۳                  |
|--------------|------------------------------------------|-------------------------------------------|--------------------|
| ماده مؤثر    | Al(OH) <sub>۳</sub> , NaHCO <sub>۳</sub> | Al(OH) <sub>۳</sub> , Mg(OH) <sub>۲</sub> | NaHCO <sub>۳</sub> |

(۱) ماده اصلی موجود در شیر منیزی، در ضداسید (۲) وجود دارد.

(۲) نام ماده مؤثر موجود در ضداسید (۳)، جوش شیرین است.

(۳) نمونه‌ای از ضداسید (۲) که حاوی ۰/۰۷ مول  $Mg(OH)_2$  و ۰/۰۳ مول  $Al(OH)_3$  است، می‌تواند ۲۳٪ مول اسید معده را خنثی کند.

(۴) اگر ۱۰/۸ درصد جرمی ضداسید (۱)، آلومینیم باشد، درصد جرمی  $NaHCO_3$  در این ضداسید برابر با ۸/۸۶ است.

## پاسخ: گزینه ۴

پاسخ تشریحی

درصد جرمی فلز Al در ضداسید (۱) برابر ۱۰/۸ است، یعنی در ۱۰۰ گرم از این ضداسید، ۱۰/۸ گرم فلز Al وجود دارد؛ بنابراین با توجه به اطلاعات گفته شده، می‌توان درصد جرمی  $Al(OH)_3$  را در این ضداسید به دست آورد:

$$10/8 \text{ g Al} \times \frac{1 \text{ mol Al}}{27 \text{ g Al}} \times \frac{1 \text{ mol Al(OH)}_3}{1 \text{ mol Al}} \times \frac{78 \text{ g Al(OH)}_3}{1 \text{ mol Al(OH)}_3} = 31/2 \text{ g Al(OH)}_3$$



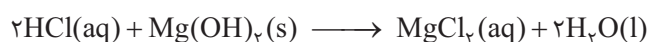
$\text{Al}(\text{OH})_3$  گرم  $31/2$  در  $100$  گرم ضداسید (۱) وجود دارد؛ بنابراین  $68/8 = 31/2 - 100$  گرم  $\text{NaHCO}_3$  در  $100$  گرم از این ضداسید داریم؛ در نتیجه می‌توان گفت که درصد جرمی  $\text{NaHCO}_3$  در این ضداسید برابر  $68/8$  است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) شیر منیزی یکی از رایج‌ترین ضداسیدها است که شامل منیزیم هیدروکسید با فرمول شیمیایی  $\text{Mg}(\text{OH})_2$  است.

۲) ماده مؤثر موجود در ضداسید (۳)، سدیم هیدروژن کربنات ( $\text{NaHCO}_3$ ) یا همان جوش شیرین است.

۳) با توجه به معادله موازنه‌شده واکنش‌های خنثی‌شدن اسید معده ( $\text{HCl}(\text{aq})$ ) با ضداسیدهای  $\text{Mg}(\text{OH})_2$  و  $\text{Al}(\text{OH})_3$ ، خواهیم داشت:



$$0.07 \text{ mol Mg}(\text{OH})_2 \times \frac{2 \text{ mol HCl}}{1 \text{ mol Mg}(\text{OH})_2} = 0.14 \text{ mol HCl}$$



$$0.03 \text{ mol Al}(\text{OH})_3 \times \frac{3 \text{ mol HCl}}{1 \text{ mol Al}(\text{OH})_3} = 0.09 \text{ mol HCl}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع مول‌های اسید معده خنثی‌شده} = 0.14 + 0.09 = 0.23 \text{ mol HCl}$$

### تست و پاسخ ۱۰۰

چند مورد از مطالب زیر، درباره مقایسه سلول‌های گالوانی «روی - مس» و «مس - نقره» درست است؟

• جهت حرکت آنیون‌ها از دیواره متخلخل در سلول گالوانی «Cu - Ag»، به سمت نیم‌سلول نقره و در سلول گالوانی «Zn - Cu»، به سمت نیم‌سلول روی است.

• با گذشت زمان و انجام‌شدن واکنش، جرم تیغه مس در هر دو سلول گالوانی افزایش می‌یابد.

• به ازای مصرف ۱ مول از گونه کاهنده در واکنش کلی هر سلول، تغییر غلظت مولی گونه اکسنده در هر دو سلول به یک اندازه است.

• جهت حرکت الکترون‌ها در سلول «Cu - Ag»، از الکتروود مس به الکتروود نقره و در سلول «Zn - Cu»، از الکتروود روی به الکتروود مس است.

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

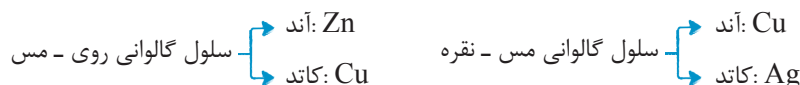
۱ (۱)

### پاسخ: گزینه ۱

فقط عبارت چهارم درست است.

پاسخ تشریحی: مقایسه قدرت کاهندگی فلزهای نقره، مس و روی به صورت  $\text{Zn} > \text{Cu} > \text{Ag}$  است؛ بنابراین در سلول گالوانی روی - مس،

Zn و در سلول گالوانی مس - نقره، Cu آند است.

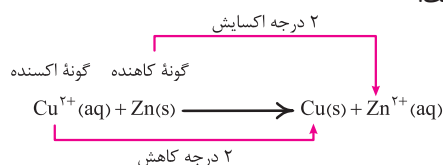


بررسی عبارت‌ها:

عبارت اول: در یک سلول گالوانی، جهت حرکت آنیون‌ها از دیواره متخلخل، از نیم‌سلول کاتد به سمت نیم‌سلول آند است؛ بنابراین جهت حرکت آنیون‌ها از دیواره متخلخل در سلول گالوانی «مس - نقره» به سمت نیم‌سلول مس (آند) و در سلول گالوانی «روی - مس» به سمت نیم‌سلول روی (آند) می‌باشد.

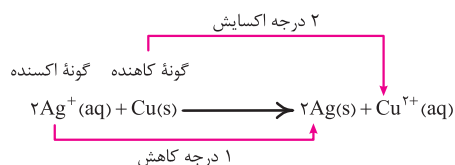
عبارت دوم: در یک سلول گالوانی با گذشت زمان و انجام‌شدن واکنش، جرم تیغه کاتد، افزایش و جرم تیغه آند، کاهش می‌یابد؛ بنابراین با گذشت زمان و انجام‌شدن واکنش، در سلول گالوانی «روی - مس» جرم تیغه مس (کاتد)، افزایش و در سلول گالوانی «مس - نقره» جرم تیغه مس (آند)، کاهش می‌یابد.

عبارت سوم: معادله موازنه‌شده واکنش کلی در سلول گالوانی «روی - مس» به صورت زیر است:





در این واکنش به ازای مصرف یک مول گونه کاهنده (فلز روی)، یک مول گونه اکسند (کاتیون مس) مصرف می شود. معادله موازنه شده واکنش کلی در سلول گالوانی «مس - نقره» به صورت مقابل است:



در این واکنش به ازای مصرف یک مول گونه کاهنده (فلز مس)، دو مول گونه اکسند (کاتیون نقره) مصرف می شود؛ بنابراین به ازای مصرف یک مول از گونه کاهنده در واکنش کلی هر سلول گالوانی، تغییر غلظت مولی گونه اکسند در هر دو سلول به یک اندازه نیست. عبارت چهارم: در یک سلول گالوانی، جهت حرکت الکترون ها در مدار بیرونی، از نیم سلول آند به سمت نیم سلول کاتد است؛ بنابراین جهت حرکت الکترون ها در مدار بیرونی سلول گالوانی «مس - نقره»، از نیم سلول مس (آند) به سمت نیم سلول نقره (کاتد) و در سلول گالوانی «روی - مس»، از نیم سلول روی (آند) به سمت نیم سلول مس (کاتد) است.

## تست و پاسخ (۱۰۱)

برای آبکاری یک جسم آهنی به جرم ۲۵ گرم از فلز نقره استفاده می شود. در این فرایند، جسم آهنی نقش ..... را ایفا می کند و اگر ۰/۰۴ مول الکترون در سلول مبادله شود، جرم آن ..... درصد افزایش می یابد. ( $\text{Fe} = ۵۶$  و  $\text{Ag} = ۱۰۸$  :  $\text{g.mol}^{-1}$ )

(۱) کاتد - ۸/۹۶      (۲) قطب مثبت - ۱۷/۲۸      (۳) قطب منفی - ۱۷/۲۸      (۴) آند - ۸/۹۶

## پاسخ: گزینه ۳

نکته

کاتد (قطب منفی): جسمی که می خواهیم آبکاری شود.

آند (قطب مثبت): فلز X

الکترولیت: محلول نمک فلز X

آبکاری یک جسم با فلز X

**پاسخ تشریحی** در فرایند آبکاری، جسمی را که روکش فلزی روی آن ایجاد می شود، به عنوان کاتد سلول الکترولیتی قرار می دهند، یعنی آن را به قطب منفی باتری وصل می کنند؛ بنابراین هرگاه بخواهیم یک جسم آهنی را با لایه نازکی از فلز نقره بپوشانیم، باید جسم آهنی را کاتد (قطب منفی) و فلز نقره را آند (قطب مثبت) سلول الکترولیتی قرار دهیم.

نیم واکنش کاتدی انجام شده در آبکاری جسم آهنی با نقره به صورت مقابل است:

با عبور یک مول الکترون از مدار، یک مول نقره معادل ۱۰۸ گرم نقره بر سطح جسم آهنی می نشیند. به این ترتیب خواهیم داشت:

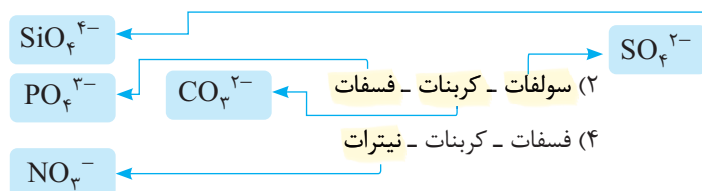
$$\text{افزایش جرم جسم آهنی } ۱۰۸ \text{ g} \times \frac{۰/۰۴ \text{ mole}^-}{۱ \text{ mole}^-} = ۴/۳۲ \text{ g}$$

در نهایت، درصد افزایش جرم جسم آهنی مورد نظر را به دست می آوریم:

$$\text{درصد افزایش جرم جسم آهنی} = \frac{\text{افزایش جرم جسم آهنی}}{\text{جرم اولیه جسم آهنی}} \times ۱۰۰ = \frac{۴/۳۲}{۲۵} \times ۱۰۰ = ۱۷/۲۸\%$$

## تست و پاسخ (۱۰۲)

یون سیلیکات از نظر شمار اتم های اکسیژن در فرمول شیمیایی، عدد اکسایش اتم مرکزی و نسبت شمار جفت الکترون های پیوندی به ناپیوندی، به ترتیب مشابه کدام یون ها است؟



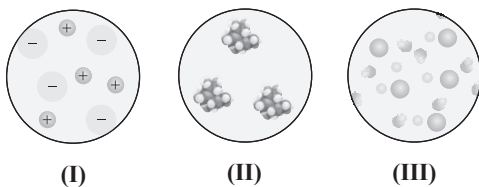
## پاسخ: گزینه ۲

پاسخ تشریحی

| یون   | سیلیکات                                                                                      | فسفات                                                                                     | سولفات                                                                                    | کربنات                                                                                    | نیترات                                                                                    |
|-------|----------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------|
| ویژگی | فرمول شیمیایی                                                                                | ساختر لوویس                                                                               | شمار اتم‌های اکسیژن                                                                       | عدد اکسایش اتم مرکزی                                                                      | نسبت شمار جفت‌الکترون‌های پیوندی به ناپیوندی                                              |
|       | $\text{SiO}_4^{4-}$                                                                          | $\text{PO}_4^{3-}$                                                                        | $\text{SO}_4^{2-}$                                                                        | $\text{CO}_3^{2-}$                                                                        | $\text{NO}_3^-$                                                                           |
|       |                                                                                              |                                                                                           |                                                                                           |                                                                                           |                                                                                           |
|       | ۴                                                                                            | ۴                                                                                         | ۴                                                                                         | ۳                                                                                         | ۳                                                                                         |
|       | $\text{Si} + 4(-2) = -4$<br>$\Rightarrow \text{Si} - 8 = -4$<br>$\Rightarrow \text{Si} = +4$ | $\text{P} + 4(-2) = -3$<br>$\Rightarrow \text{P} - 8 = -3$<br>$\Rightarrow \text{P} = +5$ | $\text{S} + 4(-2) = -2$<br>$\Rightarrow \text{S} - 8 = -2$<br>$\Rightarrow \text{S} = +6$ | $\text{C} + 3(-2) = -2$<br>$\Rightarrow \text{C} - 6 = -2$<br>$\Rightarrow \text{C} = +4$ | $\text{N} + 3(-2) = -1$<br>$\Rightarrow \text{N} - 6 = -1$<br>$\Rightarrow \text{N} = +5$ |
|       | $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$                                                                 | $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$                                                              | $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$                                                              | $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$                                                               | $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$                                                               |

با توجه به جدول فوق، یون سیلیکات ( $\text{SiO}_4^{4-}$ ) از نظر شمار اتم‌های اکسیژن در فرمول شیمیایی (۴)، مشابه یون‌های سولفات ( $\text{SO}_4^{2-}$ ) و فسفات ( $\text{PO}_4^{3-}$ )، از نظر عدد اکسایش اتم مرکزی (+۴)، مشابه یون کربنات ( $\text{CO}_3^{2-}$ ) و از نظر نسبت شمار جفت‌الکترون‌های پیوندی به ناپیوندی ( $\frac{1}{3}$ )، مشابه یون‌های سولفات ( $\text{SO}_4^{2-}$ ) و فسفات ( $\text{PO}_4^{3-}$ ) است.

## تست و پاسخ ۱۰۳



با توجه به شکل‌های داده شده، کدام موارد از مطالب زیر درست‌اند؟  
(مولکول‌های آب نشان داده نشده‌اند.)

الف) با افزایش غلظت محلول (II)، می‌توان رسانایی الکتریکی آن را به محلول (I) نزدیک کرد.

ب) محلول (III) می‌تواند محلول ۱ مولار هر یک از هیدروهالیک اسیدها باشد.

پ) محلول (I) می‌تواند حاوی یک الکترولیت قوی مانند نمک خوراکی باشد.

ت) نوع رسانایی الکتریکی محلول (I)، با نوع رسانایی الکتریکی آلوتوپ پایدارتر کربن متفاوت است.

گرافیت

۲) پ - ت

۴) الف - پ

۱) الف - ب - ت

۳) ب - پ - ت

## پاسخ: گزینه ۲

عبارت‌های «پ» و «ت» درست هستند.

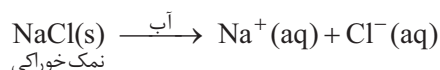
پاسخ تشریحی بررسی عبارت‌ها:

الف) شکل (II) می‌تواند مربوط به یک مادهٔ مولکولی مانند شکر باشد که بر اثر انحلال در آب، یون تولید نمی‌کند؛ بنابراین محلول (II) رسانا نیست و افزایش غلظت محلول آن، تأثیری بر رسانایی آن ندارد، در حالی که محلول آبی I دارای رسانایی الکتریکی بالایی است، زیرا مربوط به یک الکترولیت قوی مانند سدیم کلرید است.



ب) هیدروهاالیک اسیدهای قوی شامل هیدروکلریک اسید (HCl)، هیدروبرمیک اسید (HBr) و هیدرویدیک اسید (HI) هنگام انحلال در آب، به طور کامل تفکیک شده و به یون‌های سازنده خود تبدیل می‌شوند؛ بنابراین پس از فرایند انحلال این اسیدها در آب، مولکول‌های اسید اولیه در محلول باقی نمی‌مانند و فقط یون‌های سازنده محلول اسید مورد نظر مشاهده می‌شود. در محلول شکل (III)، هم یون‌های تفکیک‌شده از ترکیب اولیه و هم مولکول‌های تفکیک‌نشده وجود دارد که با هیدروهاالیک اسیدهای ذکرشده، مطابقت نداشته و فقط می‌تواند مربوط به محلول آبی هیدروفلوئوریک اسید باشد.

پ) محلول آبی سدیم کلرید (NaCl(aq)) (محلول شکل I) حاوی یون‌های  $\text{Na}^+(\text{aq})$  و  $\text{Cl}^-(\text{aq})$  است که به علت انحلال کامل یون‌ها، نوعی الکترولیت قوی محسوب می‌شود.



ت) محلول شکل (I) به علت وجود یون‌های محلول در آب و جابه‌جایی آن‌ها، یک رسانای یونی است. از طرفی آلوتروپ پایدارتر کربن که همان گرافیت است، یک رسانای الکترونی به شمار می‌رود.

### تست و پاسخ ۱۰۴

اگر در سلول گالوانی منیزیم - نقره، پس از گذشت مدت‌زمان معین، اختلاف جرم تیغه‌های آند و کاتد به ۴۸ گرم برسد، در این مدت چند الکترون در سلول مبادله شده است؟ (جرم اولیه الکترودها را برابر در نظر بگیرید،  $\text{Mg} = ۲۴$ ،  $\text{Ag} = ۱۰۸$  : g. mol<sup>-1</sup>)

$$۹ / ۰۳ \times ۱۰^{۲۳} \quad (۲)$$

$$۱ / ۵۰۵ \times ۱۰^{۲۴} \quad (۱)$$

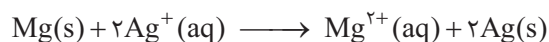
$$۲ / ۴۰۸ \times ۱۰^{۲۳} \quad (۴)$$

$$۱ / ۸۰۶ \times ۱۰^{۲۴} \quad (۳)$$

### پاسخ: گزینه ۲

#### پاسخ تشریحی

$\text{E}^+$  فلز Ag، مثبت و  $\text{E}^-$  فلز Mg، منفی است؛ پس در سلول گالوانی Ag - Mg، فلز Ag نقش کاتد و فلز Mg نقش آند را دارد و معادله موازنه‌شده واکنش انجام‌شده در آن به صورت زیر است:

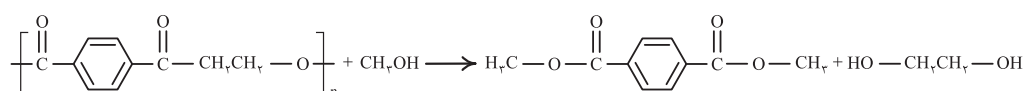


در این واکنش، به ازای مبادله ۲ مول الکترون، یک مول فلز Mg مصرف می‌شود؛ در نتیجه ۲۴ گرم از جرم تیغه آند کم می‌شود، اما ۲ مول یا  $۲۱۶ = ۲ \times ۱۰۸$  گرم فلز Ag تولیدشده، روی تیغه کاتد می‌نشیند؛ پس در نهایت به ازای مبادله ۲ مول الکترون، جرم تیغه آند به اندازه ۲۴ گرم کاهش و جرم تیغه کاتد به اندازه ۲۱۶ گرم افزایش می‌یابد؛ بنابراین به ازای مبادله ۲ مول الکترون، اختلاف جرم تیغه‌های آند و کاتد برابر  $۲۴۰ = ۲۴ + ۲۱۶$  گرم می‌شود؛ پس خواهیم داشت:

$$۴۸ \text{ g} \times \frac{2 \text{ mole}^-}{240 \text{ g}} \times \frac{6 / ۰۲ \times ۱۰^{۲۳} \text{ e}^-}{1 \text{ mole}^-} = ۲ / ۴۰۸ \times ۱۰^{۲۳} \text{ e}^-$$

### تست و پاسخ ۱۰۵

در شرایط مناسب، ۳۰۰ مول گاز هیدروژن با مقدار کافی کربن مونوکسید واکنش می‌دهد. اگر بازده واکنش ۷۵ درصد باشد، طی این فرایند چند کیلوگرم متانول تولید خواهد شد و با این مقدار متانول، چند کیلوگرم PET را می‌توان مطابق واکنش موازنه‌نشده زیر به مواد مفید تبدیل کرد؟ ( $\text{H} = ۱$ ,  $\text{C} = ۱۲$ ,  $\text{O} = ۱۶$  : g. mol<sup>-1</sup>)



$$۸ / ۱، ۳ / ۶ \quad (۲)$$

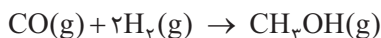
$$۱۰ / ۸، ۴ / ۸ \quad (۱)$$

$$۸ / ۱، ۴ / ۸ \quad (۴)$$

$$۱۰ / ۸، ۳ / ۶ \quad (۳)$$

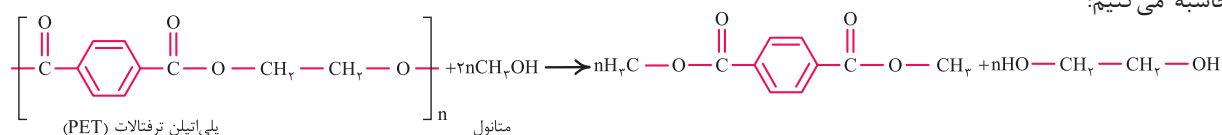
### پاسخ: گزینه ۲

**پاسخ تشریحی** گام اول: با توجه به معادله موازنه شده واکنش زیر، جرم گاز متانول تولیدشده از  $30^\circ$  مول گاز هیدروژن را به دست می آوریم:



$$\underbrace{\frac{\text{مول} \times \frac{\text{بازده درصدی}}{100}}{\text{ضرب} \times 1}}_{H_2} = \frac{\text{جرم}}{\underbrace{\text{جرم مولی} \times \text{ضرب}}_{CH_3OH}} \Rightarrow \frac{300 \times \frac{75}{100}}{2 \times 1} = \frac{x}{1 \times 32} \Rightarrow x = \frac{32 \times \cancel{3} \times \cancel{100} \times 75}{2 \times \cancel{100}} = 3600 \text{ g } CH_3OH = 3.6 \text{ kg } CH_3OH$$

**گام دوم:** با توجه به معادله موازنه‌شده واکنش، جرم پلی اتیلن ترفتالات (PET) مورد نیاز برای واکنش با  $3/6$  کیلوگرم گاز متانول را محاسبه می‌کنیم:



$$\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} \Rightarrow \frac{3/6}{2n \times 32} = \frac{x}{1 \times 192n} \Rightarrow x = \frac{3/6 \times 192n}{32 \times 2n} = 10/8 \text{ kg PET}$$

**توجه** برای موازنه کردن معادله واکنش، می‌توان این طور فرض کرد که ابتدا PET به  $n$  مول ترفتالیک اسید و  $n$  مول اتیلن گلیکول آبکافت می‌شود و چون ترفتالیک اسید، دوعاملی است، هر مول آن با ۲ مول متانول به طور کامل واکنش می‌دهد؛ به همین دلیل ضریب متانول را برابر  $2n$  قرار می‌دهیم.