



کد کنترل

121

A

پنجشنبه

۱۴۰۳/۰۱/۱۶



آزمون الکترونیکی کنکوری های ریاضی - مرحله ۱۵

آزمون اختصاصی - دفترچه ۱

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سوال	از شماره	تا شماره	زمان پاسخ گویی
۱	ریاضیات	۴۰	۱	۴۰	۷۰ دقیقه

حق چاپ و تکثیر سوالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز «گروه ماز» مجاز می باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می شود.

به دلیل عدم رضایت تیم ماز، هر گونه استفاده غیر قانونی از این آزمون منجر به پیگرد قانونی خواهد بود. گروه ماز برای تمامی اشخاص، شرعاً حرام است.



SanjeshCloud

www.SanjeshCloud.ir



۱- اگر $f(x)$ تابعی پیوسته و $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{f(x)} - 2}{2x^2 - 3x + 1} = \frac{1}{4}$ باشد، مشتق تابع $y = f(\frac{2}{x}) - f^2(x^2 - 3)$ به ازای $x = 2$ چه عددی است؟

(۱) $-31/5$ (۲) $-32/5$ (۳) $-16/5$ (۴) $-15/5$

۲- اگر $f(x) = x + 2\sqrt{x}$ و $g(x) = (\sqrt{x+1} - 1)^2$ باشد، مقدار $g'(f(6)) \times f'(6)$ چه عددی است؟

(۱) ۱ (۲) -۱ (۳) $\frac{1}{6}$ (۴) ۶

۳- اگر $g'(x) = \frac{-1}{x}$ و $g \circ f(x) = x + 4\sqrt{x}$ باشد، مشتق تابع $y = \frac{f'(x)}{f(x)}$ به ازای $x = 4$ چه عددی است؟

(۱) $\frac{1}{12}$ (۲) $\frac{1}{8}$ (۳) $-\frac{1}{8}$ (۴) $-\frac{1}{12}$

۴- کدام خط بر نمودار تابع $f(x) = x|x^2 - x|$ مماس است؟

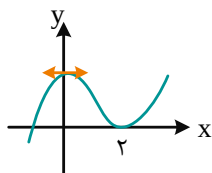
(۱) $y = \frac{2}{3}$ (۲) $y = \frac{4}{27}$ (۳) $y = \frac{2}{27}$ (۴) $y = \frac{2}{9}$

۵- اگر $f(x) = 2x + \sqrt{x}$ باشد، آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازه $[1, 4]$ با آهنگ تغییر لحظه‌ای f^{-1} در $x = 3$ چقدر اختلاف دارد؟

(۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{27}{20}$ (۳) $\frac{29}{15}$ (۴) $\frac{17}{25}$

۶- نمودار تابع $f(x) = (x-a)^2 \times (x-b)$ به شکل مقابل است. مجموع مختصات نقطه عطف تابع کدام است؟

(۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۳ (۴) ۶



۷- هرگاه بیشترین مقدار تابع $f(x) = x + a\sqrt{2a-x}$ برابر ۱۲ باشد، مقدار a کدام است؟

(۱) ۴ (۲) ۸ (۳) ۱۲ (۴) ۱۶

۸- تابع $f(x) = (x+2a)^2(x-a)$ فقط در بازه $(-4, 0)$ نزولی اکید است. مقدار a کدام است؟

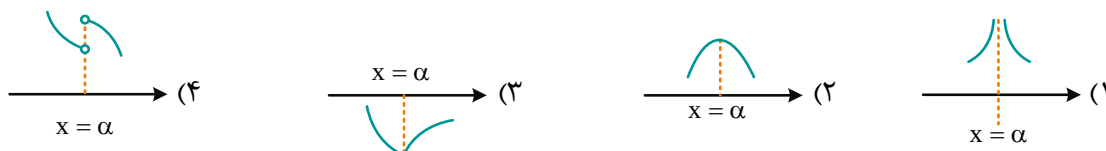
(۱) -۲ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) -۴

محل انجام محاسبات

۹- $x=2$ طول نقطه عطف تابع $f(x)=\sqrt[3]{x}(a-x)$ می باشد. مقدار $f'(2a)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{7}{3}$ (۲) $\sqrt[3]{4}$ (۳) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ (۴) -3

۱۰- f تابعی پیوسته می باشد. در گزینه ها نمودار f' در همسایگی $x=\alpha$ رسم شده است. در کدام گزینه، α طول نقطه عطف نمی باشد؟



۱۱- نمودار تابع $f(x)=\frac{2x-1}{x+3}$ را نسبت به محور y ها قرینه کرده و سپس ۲ واحد به راست و ۳ واحد به پایین انتقال می دهیم تا تابع $g(x)$ به دست آید. تعداد اعضای صحیح دامنه تابع $y=\sqrt{1+2g(x-1)}$ کدام است؟

- (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۱۴ (۴) ۱۵

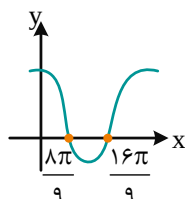
۱۲- اگر $f(x)=2x-\sqrt{2-x}$ باشد، مجموعه جواب نامعادله $f^{-1}(\frac{x}{2}) < f^{-1}(2x-1)$ کدام است؟

- (۱) $(\frac{2}{3}, +\infty)$ (۲) $(\frac{2}{3}, \frac{5}{2}]$ (۳) $[\frac{5}{2}, 8]$ (۴) $(-\infty, 8]$

۱۳- باقی مانده تقسیم چندجمله ای $f(x)$ بر x^2-5x+6 و x^2-3x+2 به ترتیب برابر $2x+1$ و $2-3x$ است. باقی مانده تقسیم $f(x)$ بر x^2-4x+3 کدام است؟

- (۱) $4x-5$ (۲) $5x-6$ (۳) $2x+1$ (۴) $3x-2$

۱۴- قسمتی از نمودار تابع $y=2b+a\cos(bx)$ به صورت مقابل است. دوره تناوب این تابع چند برابر a است؟



- (۱) $\frac{4\pi}{3}$ (۲) $\frac{8\pi}{3}$ (۳) $\frac{8\pi}{9}$ (۴) $\frac{4\pi}{9}$

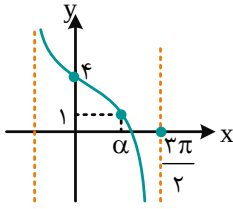
۱۵- اگر $\alpha-\frac{\pi}{3}$ و $\alpha+\frac{\pi}{3}$ دو عضو از مجموعه جواب معادله مثلثاتی $\sin^3 x = \sin x - \frac{1}{4}\cos^2 x$ باشند، مقدار α کدام می تواند باشد؟

- (۱) $\frac{5\pi}{6}$ (۲) $\frac{2\pi}{3}$ (۳) $\frac{\pi}{6}$ (۴) $\frac{7\pi}{6}$

محل انجام محاسبات



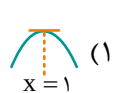
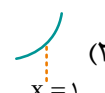
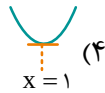
۱۶- نمودار تابع $f(x) = a - 2 \tan(bx - \frac{\pi}{4})$ در یک دوره تناوب به صورت مقابل است. حاصل $\tan \alpha$ کدام است؟



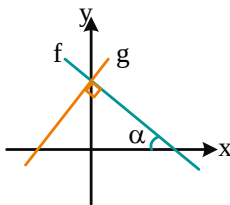
(۲) $\frac{3}{4}$
(۴) $\frac{4}{3}$

(۱) $-\frac{3}{4}$
(۳) $-\frac{4}{3}$

۱۷- اگر $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x - [2x]}{f(x) + 2x + 1} = -\infty$ باشد، نمودار $f(x)$ در مجاورت $x = 1$ چگونه می تواند باشد؟



۱۸- نمودار توابع خطی f و g به صورت مقابل است. اگر $\cos 2\alpha = 0$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(f - g^{-1})(x)}{(f^{-1} - 2g)(x)}$ کدام است؟



(۲) $-\frac{3}{8}$
(۴) $-\frac{3}{4}$

(۱) $\frac{3}{8}$
(۳) $\frac{3}{4}$

۱۹- اگر $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(-1)^{[x]}}{f(x)} = +\infty$ باشد، ضابطه $f(x)$ کدام می تواند باشد؟

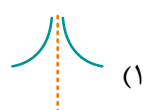
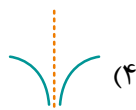
(۴) $-(x-1)^2$

(۳) $(x-1)^2$

(۲) $x-1$

(۱) $1-x$

۲۰- تابع $f(x) = \frac{1}{x^3 - 12x + a}$ فقط ۲ مجانب قائم دارد. نمودار تابع $f(x)$ در اطراف مجانب قائم خود، کدام نمی تواند باشد؟



۲۱- اگر A ماتریسی 3×3 و $A = \frac{1}{3}I$ باشد، $|2A|$ باشد، آن گاه مقدار مثبت $|(9A)^{-1}|$ کدام است؟

(۴) 3^{-9}

(۳) 3^{-3}

(۲) 3^{-6}

(۱) 3^{-4}

محل انجام محاسبات

۲۲- به ازای چند مقدار m ، دستگاه معادلات خطی $\begin{cases} (m-1)x - 2y = m+2 \\ 6x - my = 3m \end{cases}$ جواب ندارد؟

۲ (۲)

۱ (۱)

۴ (۴) هیچ مقدار قابل قبولی برای m به دست نمی آید.

۳ (۳)

۲۳- اگر A ماتریس مربعی هم مرتبه با I و $A^2 - 5A + I = 0$ باشد، وارون ماتریس $A + 2I$ به صورت $mA + nI$ است. مقدار $15m + 3n$ کدام است؟

۱۳ (۴)

۱۲ (۳)

۱۱ (۲)

۱۰ (۱)

۲۴- پاره خط AB به طول ۲۰ واحد، در یک صفحه مفروض است. حداکثر چند خط مانند d در این صفحه وجود دارد که فاصله نقاط A و B از آن به ترتیب ۱۲ و ۱۵ واحد باشد؟

۲ (۲)

۱ (۱)

۴ (۴) چنین خطی در صفحه وجود ندارد.

۳ (۳)

۲۵- دایره C گذرنده از نقطه $A(3, 8)$ با دایره $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ و وتر مشترکی می سازد که بر خط $x - 3y = 4$ منطبق است. مساحت دایره C کدام است؟

۶۴π (۴)

۴۸π (۳)

۳۲π (۲)

۱۶π (۱)

۲۶- در یک بیضی، فاصله هر کانون تا رأس ناکانونی آن، برابر ۵ و فاصله کانون ها ۶ است خط L را عمود بر محور کانونی و به فاصله ۱ واحد از مرکز بیضی رسم می کنیم تا بیضی را در نقاط M و N قطع کند، طول MN کدام است؟

۳ / ۸√۳ (۴)

۱ / ۶√۳ (۳)

۱ / ۷√۶ (۲)

۳ / ۲√۶ (۱)

۲۷- در سهمی $y^2 + 8x = 2y + 15$ اگر سطح داخلی سهمی را نقره اندود کنیم و لامپی را در نقطه $(1, -1)$ قرار دهیم، پرتوهای بازتابش چگونه خواهند بود؟

۲ موازی و رو به پایین خواهند بود.

۱ موازی رو به بالا خواهند بود.

۴ در نقطه ای با طول منفی همگرا می شوند.

۳ غیرموازی و واگرا هستند.

۲۸- اگر نقاط $A(0, 1, 3)$ ، $B(-1, 2, 4)$ و $C(1, 5, -1)$ سه رأس متوازی الاضلاع $ABCD$ باشند، بردار تصویر ضلع $\overrightarrow{DA}$ روی ضلع $\overrightarrow{DC}$ کدام است؟

$-\frac{1}{3}(\vec{i} - \vec{j} - \vec{k})$ (۴)

$\frac{2}{3}(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$ (۳)

$\frac{3}{5}(\vec{i} - \vec{j} - \vec{k})$ (۲)

$\frac{4}{3}(-\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$ (۱)

۲۹- زاویه بین بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ منفرجه و $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 4$ است. اگر $|(3\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + 2\vec{b})| = 14$ باشد، مربع اندازه تفاصل دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ کدام است؟ ($\sqrt{3} = 1/7$)

۱۲ / ۴ (۴)

۲۳ / ۸ (۳)

۱۰ / ۲ (۲)

۳۰ / ۶ (۱)

محل انجام محاسبات

۳۰- اگر مساحت مثلثی که روی بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ساخته می شود برابر ۱۰ باشد، مساحت متوازی الاضلاعی که روی بردارهای $\vec{a} + \vec{b}$ و $\vec{a} + \vec{b}$ ساخته می شود، کدام است؟

- ۴۰ (۱) ۲۰ (۲) ۳۲ (۳) ۱۶ (۴)

۳۱- اگر x و y دو عدد حقیقی مثبت و متمایز باشند، آن گاه کمترین مقدار صحیح ممکن برای عبارت $A = (\frac{2x}{y} + 2)(\frac{2y}{x} + 2)$ کدام است؟

- ۱۹ (۱) ۲۰ (۲) ۲۵ (۳) ۲۶ (۴)

۳۲- به ازای چند عدد طبیعی سه رقمی n ، رابطه $3^n + 1$ برقرار است؟

- ۱۱۲ (۱) ۱۱۳ (۲) ۱۲۳ (۳) ۱۲۴ (۴)

۳۳- باقی مانده تقسیم عدد $A = \frac{10!}{0!} + \frac{10!}{1!} + \frac{10!}{2!} + \dots + \frac{10!}{10!}$ بر ۷ کدام است؟

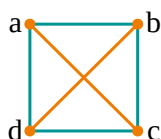
- ۲ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴)

۳۴- اگر باقی مانده تقسیم عدد $\overline{4a3b}$ بر ۱۱ برابر ۱ باشد، حداکثر باقی مانده تقسیم عدد $\overline{2a3b}$ بر ۹ کدام است؟

- ۳ (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴)

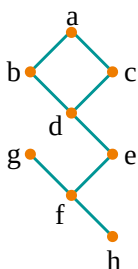
۳۵- یک گراف ۳- منتظم از مرتبه ۶ که دارای دورهایی به طول ۳ است، چند دور به طول ۵ دارد؟

- صفر (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴)



۳۶- گراف G در شکل مقابل، چند زیرگراف ۱- منتظم دارد؟

- ۹ (۱) ۸ (۲) ۷ (۳) ۶ (۴)



۳۷- گراف شکل مقابل، چند مجموعه احاطه گر مینیمال غیر مینیمم دارد؟

- ۲ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴)

محل انجام محاسبات

۳۸- معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4^2 = 12$ چند جواب طبیعی دارد؟

۱۶۵ (۴)

۱۳۲ (۳)

۶۷ (۲)

۴۵ (۱)

۳۹- می خواهیم برای تدریس دبیران ریاضیات گسسته، حسابان، شیمی و زبان انگلیسی در چهار جلسه برای کلاس های A، B، C و D از پایه دوازدهم ریاضی یک دبیرستان، برنامه ریزی کنیم، به گونه ای که هر دبیر در هر کلاس دقیقاً یک جلسه تدریس کند. اگر برنامه دبیر ریاضیات گسسته و برنامه کلاس A برای هر چهار جلسه مشخص باشد، این برنامه ریزی به چند طریق امکان پذیر است؟

۱۸ (۴)

۱۲ (۳)

۶ (۲)

۳ (۱)

۴۰- چند عدد طبیعی دو رقمی وجود دارد که نه بر ۴ بخش پذیر باشد و نه در ارقام آن، رقم ۴ وجود داشته باشد؟

۵۸ (۴)

۵۶ (۳)

۵۴ (۲)

۵۲ (۱)



کد کنترل

122

A

پنجشنبه

۱۴۰۳/۰۱/۱۶



آزمون الکترونیکی کنکوری های ریاضی - مرحله ۱۵

آزمون اختصاصی - دفترچه ۲

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سوال	از شماره	تا شماره	زمان پاسخ گویی	ملاحظات
۱	فیزیک	۳۵	۴۱	۷۵	۴۵ دقیقه	۶۵ سوال ۷۵ دقیقه
۲	شیمی	۳۰	۷۶	۱۰۵	۳۰ دقیقه	

حق چاپ و تکثیر سوالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز «گروه ماز» مجاز می باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می شود.

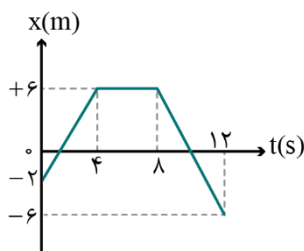
به دلیل عدم رضایت تیم ماز، هرگونه استفاده غیرقانونی از محتوای این آزمون، نامۀ ماز برای تمامی اشخاص، شرعاً حرام است.



SanjeshCloud

www.SanjeshCloud.ir

۴۱- نمودار مکان - زمان متحرکی که بر روی محور x حرکت می کند، مطابق شکل است. شتاب متوسط متحرک در بازه زمانی $t_1 = 2s$ تا $t_2 = 10s$ ، چند $\frac{m}{s^2}$ می باشد؟



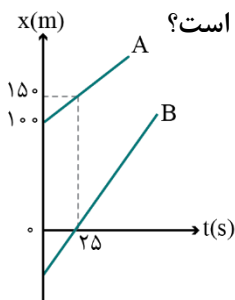
(۲) $-\frac{5}{8}$

(۱) $\frac{1}{8}$

(۴) $\frac{5}{8}$

(۳) $-\frac{1}{8}$

۴۲- نمودار مکان - زمان دو متحرک A و B که بر مسیر مستقیم حرکت می کنند، مطابق شکل می باشد. اگر در دو لحظه t_1 و t_2 ($t_2 > t_1$)، فاصله دو متحرک از هم ۴۰ متر باشد و $\frac{t_2}{t_1} = \frac{3}{2}$ باشد، تندی متحرک B، چند متر بر ثانیه است؟



(۱) ۴

(۲) ۸

(۳) ۳

(۴) ۶

۴۳- هواپیمایی با تندی $80 \frac{m}{s}$ بر روی باند فرودگاه می نشیند و با شتاب ثابت پس از مدتی متوقف می شود. اگر هواپیما $\frac{1}{16}$ آخر مسیر فرود بر روی باند را در مدت زمان ۴s طی کند، طول مسیر حرکت هواپیما بر روی باند پرواز چند متر بوده است؟

(۴) ۹۶۰

(۳) ۳۲۰

(۲) ۱۲۸۰

(۱) ۶۴۰

۴۴- متحرکی از حال سکون با شتاب ثابت $4 \frac{m}{s^2}$ بر روی مسیر مستقیمی شروع به حرکت می کند و پس از مدت t ثانیه، با سرعت ثابت به مدت ۱۰ ثانیه به حرکت خود ادامه می دهد در نهایت با شتاب به بزرگی $2 \frac{m}{s^2}$ متوقف می شود. اگر کل مسافت طی شده در این مدت ۱۰۴ متر باشد، تندی متوسط متحرک تا لحظه ای که ۲۵ درصد از کل مسیر را طی کرده برابر چند متر بر ثانیه است؟

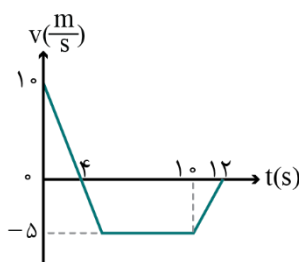
(۴) $\frac{52}{17}$

(۳) $\frac{104}{17}$

(۲) $\frac{13}{2}$

(۱) $\frac{104}{9}$

۴۵- نمودار سرعت - زمان متحرکی که در مبدأ زمان از مبدأ محور می گذرد، مطابق شکل زیر می باشد. در کل زمان حرکت، چند ثانیه فاصله متحرک از مبدأ محور کمتر یا مساوی $8/75$ متر است؟



(۱) $4/75$

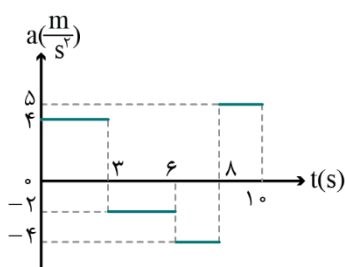
(۲) $3/25$

(۳) $2/75$

(۴) $3/75$

محل انجام محاسبات

۴۶- نمودار شتاب زمان متحرکی که روی محور x ها حرکت می کند، مطابق شکل زیر است. اگر جابه جایی متحرک در کل حرکت $15m$ در جهت محور x ها باشد، کدام عبارت صحیح است؟



(۴) فقط د

(۳) الف و د

(۲) ج و د

(۱) الف، ج، د

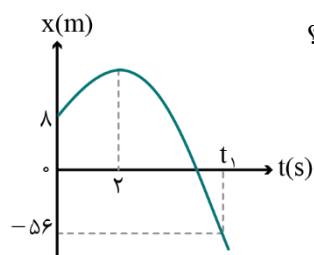
الف: تندی اولیه متحرک $4 \frac{m}{s}$ و در جهت محور x می باشد.

ب: مدت زمان حرکت تندشونده متحرک $1/4$ ثانیه بیشتر از زمان حرکت کندشونده است.

ج: سرعت متوسط در 6 ثانیه اول حرکت $3/5 \frac{m}{s}$ می باشد.

د: متحرک 3 بار در مدت زمان حرکت تغییر جهت می دهد.

۴۷- نمودار مکان - زمان متحرکی که با شتاب ثابت حرکت می کند، مطابق شکل زیر می باشد. اگر اندازه شیب خط مماس بر منحنی



در لحظه t_1 ، برابر $24 \frac{m}{s}$ باشد، تندی متوسط متحرک در 12 ثانیه اول حرکت چند $\frac{m}{s}$ می باشد؟

(۲) $13/6$

(۱) ۶

(۴) $52/3$

(۳) ۴

۴۸- اتومبیل A در جهت محور x با تندی ثابت $8 \frac{m}{s}$ در لحظه $t=0$ از مبدأ محور عبور می کند و پس از 10 ثانیه حرکتش با شتاب

ثابت $1 \frac{m}{s^2}$ کند می شود. اتومبیل B نیز در لحظه $t=4s$ با تندی اولیه $2 \frac{m}{s}$ در جهت محور x از مبدأ محور عبور می کند و

حرکتش با شتاب ثابت $3 \frac{m}{s^2}$ تند می شود و پس از 3 ثانیه با تندی ثابت به حرکت خود ادامه می دهد. در لحظه ای که دو متحرک

در حرکت می باشند و فاصله دو اتومبیل به 14 متر می رسد، اختلاف تندی اتومبیل ها چند متر بر ثانیه است؟

(۴) ۶

(۳) ۵

(۲) ۴

(۱) ۳

۴۹- جسمی روی سطح افق در حال سکون قرار دارد. نیروی افقی F بر آن وارد می شود و به تدریج افزایش می یابد. وقتی اندازه

نیروی F به $25N$ می رسد، جسم در آستانه حرکت قرار می گیرد. زمانی که F به اندازه $30N$ می رسد، شتاب جسم $2 \frac{m}{s^2}$ و به

ازای $F=40N$ شتاب جسم $3 \frac{m}{s^2}$ می شود. جرم جسم چند کیلوگرم و $\frac{\mu_s}{\mu_k}$ کدام است؟ ($g=10 \frac{N}{kg}$ و μ_s و μ_k به ترتیب

ضرایب اصطکاک ایستایی و جنبشی هستند)

(۴) ۵، $1/25$

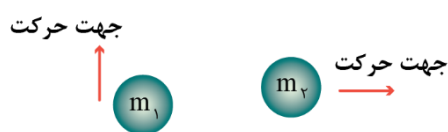
(۳) ۵، $2/5$

(۲) 10 ، $2/5$

(۱) 10 ، $1/25$

محل انجام محاسبات

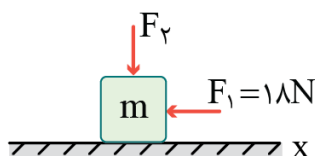
۵۰- مطابق شکل دو گلوله به جرم $m_1 = 2\text{kg}$ و $m_2 = 3\text{kg}$ به ترتیب یکی در راستای قائم به طرف بالا و دیگری در راستای افق پرتاب می شوند. اگر نیروی مقاومت هوا (f_D) وارد بر دو گلوله، هم اندازه و همچنین اندازه نیروی خالص وارد بر دو گلوله با هم برابر باشد، اندازه نیروی f_D چند نیوتون است؟ ($g = 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}}$)



- (۱) ۵
(۲) ۱۲/۵
(۳) ۱۰
(۴) ۲۵

۵۱- مطابق شکل جسمی به جرم $m = 1\text{kg}$ را روی یک سطح افقی پرتاب می کنیم. در لحظه ای که سرعت جسم به $30 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ در جهت محور x می رسد، نیروهای قائم و افقی F_1 و F_2 به جسم وارد می شوند. اگر اندازه نیرویی که سطح افقی به جسم وارد می کند 20N باشد، اختلاف زمانی دو لحظه ای که اندازه تکانه جسم به 15 واحد SI می رسد، چند ثانیه است؟

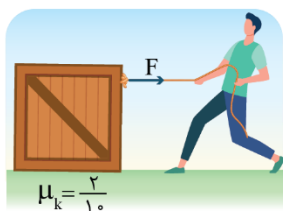
$$(g = 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}}, \mu_s = \frac{4}{5}, \mu_k = \frac{3}{4})$$



- (۱) ۲/۵
(۲) ۳/۵
(۳) ۲
(۴) ۳

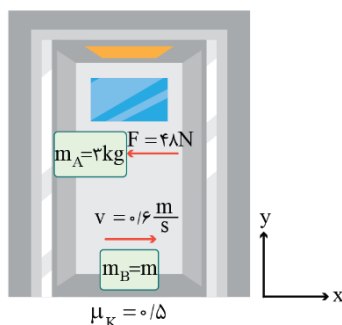
۵۲- در شکل زیر شخصی نیروی ثابت و افقی F را به صندوقی به جرم 150kg وارد می کند و صندوق با شتاب $2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ حرکت می کند. چند کیلوگرم از محتویات درون صندوق کم کنیم تا با همین نیروی افقی F ، اندازه شتاب حرکت صندوق 40% درصد افزایش یابد؟

$$(g = 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}})$$



- (۱) ۱۲۵
(۲) ۹۰
(۳) ۶۰
(۴) ۲۵

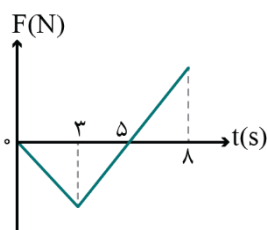
۵۳- مطابق شکل مقابل جسم A به جرم 3kg توسط نیروی افقی F به دیواره آسانسوری که با شتاب ثابت در راستای قائم در حرکت است فشرده شده است و جسم نسبت به دیواره آسانسور ساکن است. نیرویی که دیواره آسانسور به جسم A وارد می کند با جهت مثبت محور y زاویه 53° درجه می سازد. در این حالت اگر جسم B به جرم m با تندی $0.6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ بر روی کف آسانسور رد راستای x پرتاب شود، پس از طی مسافت چند سانتی متر متوقف می شود؟ ($\sin 53^\circ = 0.8, g = 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}}$)



- (۱) ۳/۶
(۲) ۳
(۳) ۴/۵
(۴) ۴/۸

محل انجام محاسبات

۵۴- نمودار نیروی خالص وارد بر جسمی بر حسب زمان به شکل زیر است. اگر اندازه نیروی خالص متوسط وارد بر جسم در ۳s اول برابر با ۶N باشد، اندازه نیروی خالص متوسط وارد بر جسم در ۶ ثانیه اول، چند نیوتون است؟



(۱) ۴/۵

(۲) ۹

(۳) ۵/۶

(۴) ۲/۵

۵۵- اگر چگالی سیاره A، ۲ برابر چگالی زمین و شعاع آن $\frac{1}{8}$ شعاع زمین باشد، در چه ارتفاعی بر حسب کیلومتر از سطح زمین شتاب گرانش برابر با شتاب گرانش در سطح سیاره A می باشد؟ (شعاع زمین = ۶۴۰۰ km)

(۱) ۳۲۰۰

(۲) ۶۴۰۰

(۳) ۱۹۲۰۰

(۴) ۱۲۸۰۰

۵۶- چه تعداد از عبارت های زیر در مورد حرکت هماهنگ ساده الزاماً صحیح می باشد؟

الف: هنگامی که نوسانگر به صورت تندشونده حرکت می کند، شتاب نوسانگر به سمت مرکز نوسان می باشد.

ب: مسافت طی شده در هر بازه زمانی دلخواه $\Delta t = \frac{T}{4}$ ، برابر با دامنه نوسان می باشد.

ج: اگر مکان ذره منفی باشد و نیروی وارد بر آن مثبت باشد، حرکت کندشونده می باشد.

د: هنگامی که اندازه شتاب نوسانگر رو به افزایش است، انرژی پتانسیل نوسانگر بیشتر از انرژی جنبشی آن می باشد.

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) ۴

۵۷- معادله حرکت هماهنگ ساده یک نوسانگر در SI به صورت $x = 0.2 \cos(10t)$ است. در لحظه ای که انرژی جنبشی نوسانگر ۲۵ درصد از انرژی پتانسیل آن بیشتر است، تندی نوسانگر چند سانتی متر بر ثانیه می باشد؟

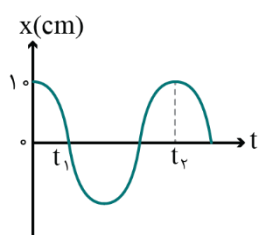
(۱) $\frac{20}{3}\sqrt{5}$

(۲) $20 \cdot \frac{\sqrt{5}}{3}$

(۳) $\frac{40}{3}$

(۴) $\frac{400}{3}$

۵۸- نمودار مکان - زمان آونگ ساده ای که با دامنه کم نوسان می کند، مطابق شکل زیر است. اگر شتاب متوسط نوسانگر در بازه زمانی t_1 تا t_2 ، $\frac{m}{6\pi}$ باشد، طول آونگ چند سانتی متر است؟ $(g = \pi^2 \frac{m}{s^2})$



(۱) $\frac{1}{9}$

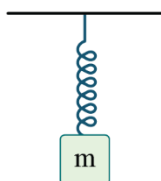
(۲) $\frac{100}{9}$

(۳) $\frac{1}{18}$

(۴) $\frac{50}{9}$

محل انجام محاسبات

۵۹- مطابق شکل زیر، به انتهای فنر با ثابت $50 \frac{N}{m}$ ، جسمی به جرم $m = 50g$ آویزان است و مجموعه در حال تعادل می باشد. جسم را به آرامی $10cm$ از این حالت به سمت پایین می کشیم و در لحظه $t=0$ رها می کنیم. نیروی کشش فنر در لحظه $t=0/6s$ چند نیوتون می باشد؟ ($\pi^2 \approx 10, g = 10 \frac{N}{kg}$)



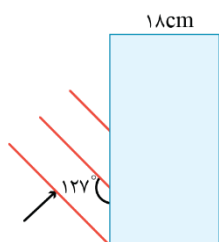
(۱) ۲/۵

(۲) ۴/۵

(۳) ۵/۵

(۴) صفر

۶۰- مطابق شکل زیر جبهه های موج نوری از هوا وارد محیط شفاف می شود و می شکند. اگر این موج در مدت زمان $0/96ns$ از محیط شفاف خارج شود، ضریب شکست محیط شفاف کدام است؟ ($c = 3 \times 10^8 \frac{m}{s}$ و $\sin 37^\circ = 0/6$)



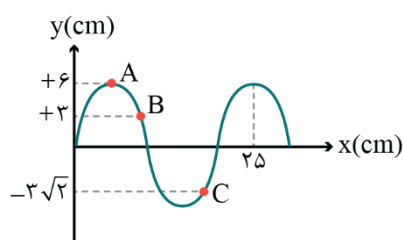
(۱) $\frac{4}{3}$

(۲) $1/6\sqrt{2}$

(۳) $0/8\sqrt{2}$

(۴) $1/6$

۶۱- شکل زیر یک نقش موج عرضی را در لحظه $t=0$ نشان می دهد که در ریسمانی با چگالی خطی $5 \frac{g}{cm}$ و نیروی کشش $200N$ در حال انتشار است. چند مورد از عبارات زیر الزاماً صحیح است؟



الف: در لحظه $t=0$ ، شتاب ذره A برابر $\vec{j} \left(\frac{m}{s^2} \right) -2400\pi^2$ است.

ب: در لحظه $t = \frac{1}{800}s$ ، تندی ذره C برابر $12\pi \left(\frac{m}{s} \right)$ می باشد.

ج: مسافت طی شده ذره B در مدت زمان $0/05s$ ، برابر $120cm$ می باشد.

د: انرژی جنبشی ذره C در لحظات $t=0$ و $t = \frac{1}{400}s$ با هم برابر است.

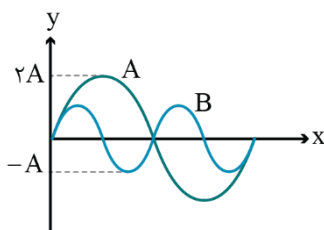
(۴) ۴

(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) ۱

۶۲- نمودار جابه جایی - مکان دو موج صوتی A و B که در دو محیط متفاوت منتشر می شوند، مطابق شکل زیر است. اگر تندی انتشار موج صوتی A دو برابر موج B باشد، در این صورت اختلاف تراز شدت صوت که به گوش شنونده ای که در فاصله یکسان از چشمه های موج A و B قرار دارد می رسد، برابر با چند دسی بل است؟ ($\log 2 = 0/3$)



(۱) ۶

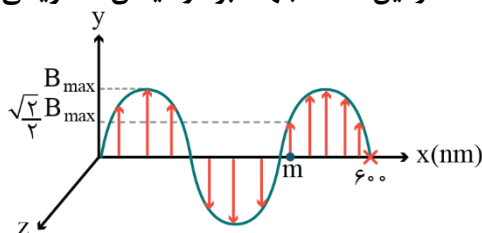
(۲) ۳

(۳) صفر

(۴) ۱۲

محل انجام محاسبات

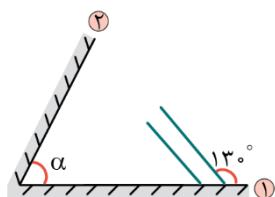
۶۳- شکل زیر، تصویر میدان مغناطیسی یک موج الکترومغناطیسی را در لحظه $t=0$ نشان می دهد که در امتداد محور y نوسان می کند. اگر در این لحظه، بزرگی میدان مغناطیسی در نقطه m در حال کاهش باشد، در این نقطه، جهت بردار میدان الکتریکی



در لحظه $t = \frac{1}{3} \times 10^{-15} \text{ s}$ و نحوه تغییرات آن کدام است؟ $(c = 3 \times 10^8 \frac{\text{km}}{\text{s}})$

- (۱) $+Z$ و در حال افزایش
- (۲) $+Z$ و در حال کاهش
- (۳) $-Z$ و در حال افزایش
- (۴) $-Z$ و در حال کاهش

۶۴- مطابق شکل زیر جبهه های موج تخت ابتدا به آینه (۱) و پس از بازتاب به آینه (۲) می تابند. اگر زاویه جبهه موج بازتاب شده از آینه (۲) با سطح آینه ۳۵ درجه باشد، زاویه بین دو آینه چند درجه است؟



- (۱) ۹۵
- (۲) ۷۵
- (۳) ۸۵
- (۴) ۸۰

۶۵- الکترون اتم هیدروژنی در تراز $n=5$ قرار دارد. فرض کنید فقط گذارهای $\Delta n=1$ مجاز باشند. در این صورت اختلاف بسامد

پرانرژی ترین فوتون و کم انرژی ترین فوتون گسیلی تقریباً چند تراهرتز است؟ $(h = 4 \times 10^{-15} \text{ eV.s}, E_R = 13/6 \text{ eV})$

- (۱) ۷۱۵
- (۲) ۲۰۵۰
- (۳) ۲۴۹۰
- (۴) ۲۴۷۲/۵

۶۶- اختلاف کوتاه ترین و بلندترین طول موج در هر رشته را، گستره طول موج های آن رشته می نامند. گستره طول موج رشته پاشن

$(n'=3)$ چند برابر گستره طول موج رشته لیمان $(n'=1)$ است؟

- (۱) $\frac{7}{243}$
- (۲) $\frac{9}{2}$
- (۳) $\frac{243}{7}$
- (۴) $\frac{2}{9}$

۶۷- حداقل بسامد فوتون تابش شده به یک فلز برای رخ دادن پدیده فوتوالکتریک 750 THz می باشد. کدام یک از طول موج های

داده شده در جدول زیر می توانند باعث ایجاد پدیده فوتوالکتریک شوند؟ $(h = 4 \times 10^{-15} \text{ eV.s}, c = 3 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}})$

A	B	C	D
$\lambda = 300 \text{ nm}$	$\lambda = 0.6 \mu\text{m}$	$\lambda = 600 \text{ nm}$	$\lambda = 8000 \text{ pm}$

- (۱) D و C
- (۲) D و B
- (۳) B و C
- (۴) A و D

۶۸- چند مورد از عبارات زیر در مورد نیروی هسته ای صحیح می باشد؟

الف: بین دو پروتون از نوع دافعه و بین پروتون و نوترون از نوع جاذبه می باشد.

ب: نوعی نیروی جاذبه کوتاه برد می باشد که باعث پایداری هسته می شود.

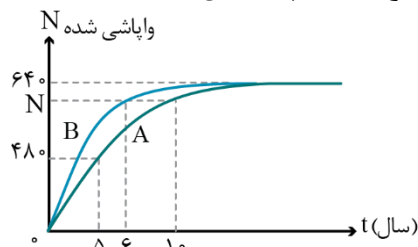
ج: یک پروتون می تواند به تمامی پروتون های دیگر هسته، نیروی هسته ای وارد نماید.

- (۱) ۱
- (۲) ۲
- (۳) ۳
- (۴) صفر

محل انجام محاسبات

- ۶۹- یک هسته پرتوزا در یک واپاشی طبیعی، m ذره آلفا، دو ذره پوزیترون و سه نوترون گسیل می کند. اگر بار الکتریکی هسته دختر نسبت به هسته مادر $12/8 \times 10^{-19} \text{ C}$ تغییر کند، m کدام است؟ ($e = 1/6 \times 10^{-19} \text{ C}$)
- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۱

- ۷۰- نمودار تعداد هسته های واپاشی شده دو ماده پرتوزا A و B مطابق شکل است. نیمه عمر ماده B چند سال است؟

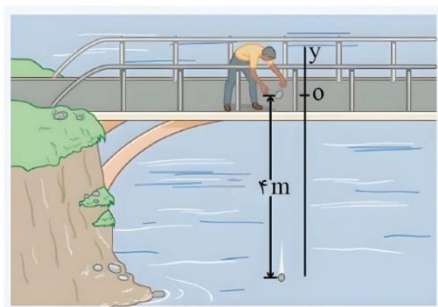


- (۱) ۰/۵
(۲) ۱/۵
(۳) ۲/۵
(۴) ۳/۵

- ۷۱- گلوله A در لحظه $t=0$ از ارتفاع ۲۷۰ متری رها می شود. یک ثانیه بعد، گلوله B را از همان نقطه رها می کنیم و ۲ ثانیه پس از گلوله B، گلوله C را از همان نقطه رها می کنیم. در لحظه ای که فاصله گلوله A تا B برابر فاصله گلوله B تا C است، گلوله B در ارتفاع چند متری از سطح زمین قرار دارد؟

- (۱) ۱۶۱/۲۵ (۲) ۲۶۱/۲۵ (۳) ۲۳۸/۷۵ (۴) ۲۲۵

- ۷۲- مطابق شکل، شخصی از روی پلی به ارتفاع ۴m، سنگ کوچکی به جرم ۲۵۰ گرم را رها می کند. تکانه سنگ در لحظه ورود به



آب چند واحد SI است؟ ($g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ و مقاومت هوا ناچیز است).

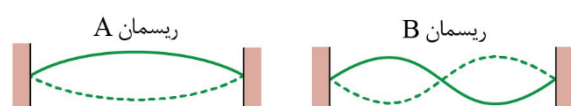
- (۱) $\sqrt{5} \vec{j}$
(۲) $-\sqrt{5} \vec{j}$
(۳) $4\sqrt{5} \vec{j}$
(۴) $-4\sqrt{5} \vec{j}$

- ۷۳- ماهواره ای در مدار هم گام با زمین در حال چرخش به دور کره زمین است. فاصله این ماهواره تا مرکز زمین تقریباً چند کیلومتر

است؟ ($G = 6 \times 10^{-11} \frac{\text{N.m}^2}{\text{kg}^2}$, $M_e = 6 \times 10^{24} \text{ kg}$)

- (۱) ۴۰۰۰۰ (۲) ۴۰۰۰ (۳) ۲۰۰۰۰ (۴) ۲۰۰۰

- ۷۴- ریسمان های A و B، طول و چگالی خطی جرمی یکسانی دارند، ولی ریسمان B تحت کشش کمتری نسبت به ریسمان A قرار دارد. شکل زیر وضعیت را نشان می دهد که در آن نقش های موج ایستاده در دو ریسمان وجود دارند. اگر بسامد تشدید دو ریسمان در شکل های نشان داده شده برابر باشد، نیروی کشش ریسمان A چند برابر نیروی کشش ریسمان B است؟



- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۸ (۴) ۱۶

محل انجام محاسبات

۷۵- هرگاه بر سطح فلزی نوری با طول موج 310nm بتابد، بیشینه انرژی جنبشی فوتوالکترون های گسیل شده حدود $J \times 10^{-19}$ $2/4$ است. کدام یک از عبارت های زیر صحیح است؟ ($hc = 1240\text{eV.nm}$)

الف: طول موج آستانه فلز برابر 496nm است.

ب: نور قرمز می تواند باعث رخ دادن فوتوالکتریک در این فلز شود.

ج: اگر نوری با طول موج 465nm به این فلز بتابد، بیشینه انرژی جنبشی فوتوالکترون ها برابر 1eV می شود.

د: نور بنفش می تواند باعث رخ دادن فوتوالکتریک در این فلز شود.

(۴) (ج) و (د)

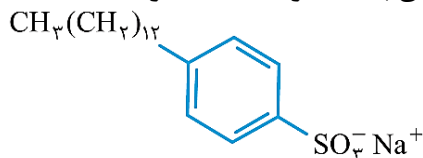
(۳) (ب) و (ج)

(۲) (الف) و (د)

(۱) (الف) و (ب)

محل انجام محاسبات

۷۶- چند مورد از مطالب زیر در مورد پاک کننده‌ای با ساختار داده شده درست هستند؟



آ: اگر کاتیون Na^+ در این پاک کننده را با کاتیون Mg^{2+} جایگزین کنیم، ترکیب حاصل در آب نامحلول است.
ب: نسبت شمار اتم‌ها به شمار عنصرها در ساختار این ماده، بیشتر از تعداد اتم‌های H در پارازیلین است.
پ: مشابه سفیدکننده‌ها، این پاک کننده با آلاینده‌های موجود در محیط واکنش خواهد داد.
ت: گروه SO_3^- موجود در این پاک کننده، سبب پخش شدن چربی‌ها در آب می‌شود.

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۷۷- غلظت مولی محلولی از استیک اسید، با غلظت کاتیون در محلول $106 ppm$ سدیم کربنات با چگالی $1 g \cdot mL^{-1}$ برابر است. غلظت مولی مولکول‌های استیک اسید یونیده نشده در این محلول، ۴ برابر غلظت مولی یون استات است. ثابت یونش اسید در این محلول آبی کدام بوده و مقدار pH این محلول چقدر خواهد بود؟

($Na = 23$ و $O = 16$ و $N = 14$ و $C = 12$ و $H = 1 : g \cdot mol^{-1}$)

(۱) $3/7 - 2 \times 10^{-5}$ (۲) $3/4 - 2 \times 10^{-4}$ (۳) $3/7 - 10^{-4}$ (۴) $3/4 - 10^{-4}$

۷۸- اگر در دما و غلظت یکسان، رسانایی الکتریکی محلول اسید HB از محلول اسید HA بیشتر باشد، کدام یک از عبارت‌های زیر نادرست است؟

- (۱) درصد یونش اسید HA ، همانند ثابت یونش آن، از درصد یونش و ثابت یونش اسید HB کمتر است.
- (۲) در شرایط یکسان، سرعت واکنش یک قطعه فلزی منیزیمی با محلولی از اسید HB بیشتر است.
- (۳) اگر A و B هر دو هالوژن باشند، عدد اتمی A همواره از عدد اتمی B بزرگ‌تر است.
- (۴) غلظت مولی یون هیدروکسید در محلول HA از محلول HB بیشتر است.

۷۹- با افزودن ۴۵۰ میلی لیتر آب مقطر به ۵۰ میلی لیتر از محلول نیتریک اسید، pH نهایی محلول ۲ برابر حالت اولیه می‌شود. برای خنثی شدن کامل نیم لیتر از محلول غلیظ اولیه نیتریک اسید، چند میلی لیتر محلول $2/24$ درصد جرمی پتاسیم هیدروکسید نیاز است؟ (چگالی محلول سود را $1 g \cdot mL^{-1}$ در نظر بگیرید. ($H = 1$ و $O = 16$ و $K = 39$)

(۱) $187/5$ (۲) ۲۵۰ (۳) $62/5$ (۴) ۱۲۵

۸۰- کدام موارد از عبارت‌های داده شده درست هستند؟

- آ: اوره، اتیلن گلیکول و نقره کلرید، از جمله موادی هستند که برخلاف یک نمونه روغن زیتون، در آب حل می‌شوند.
- ب: وبا یک بیماری واگیردار بوده و مؤثرترین راه پیشگیری از آن، استفاده از واکسن مناسب برای این بیماری است.
- پ: صابون مراغه، افزودنی شیمیایی نداشته و بخاطر خاصیت بازی مناسب، برای شستن موی چرب استفاده می‌شود.
- ت: از گرم کردن روغن زیتون، روغن نارگیل و یا پیه در حضور محلول سود، پاک کننده‌های صابونی جامد تولید می‌شوند.

(۱) آ و ب (۲) ب و پ (۳) پ و ت (۴) آ و ت

۸۱- کدام یک از مطالب زیر نادرست است؟

- (۱) گاز تولید شده در واکنش مخلوط پودر آلومینیم و سود با آب را می‌توان از واکنش آهن با هیدروکلریک اسید نیز تهیه کرد.
- (۲) کلئیدها انواعی از مخلوط‌های ناهمگن هستند که از ذرات ریز ماده تشکیل شده و مسیر حرکت نور در آن‌ها مشخص است.
- (۳) مواد بازی از جمله محلول سود، به پوست بدن آسیب زده و همانند صابون، در سطح آن احساس لیزی ایجاد می‌کنند.
- (۴) رسانایی الکتریکی محلول مولار هیدروفلوئوریک اسید نسبت به محلول نیم مولار پتاسیم هیدروکسید کمتر است.

محل انجام محاسبات

۸۲- در شرایطی که حجم مولی گازها برابر $25 L \cdot mol^{-1}$ است، $7/5$ لیتر گاز NO_2 را در واکنش موازنه نشده زیر شرکت داده و فراورده‌ی حاصل را در مقداری آب به طور کامل حل می‌کنیم. اگر حجم محلول حاصل را با استفاده از آب خالص به ۱۵ لیتر برسانیم، pH این محلول آبی چقدر می‌شود؟
 $NO_2(g) + O_2(g) \rightarrow N_2O_5(s)$
 (۱) $2/7$ (۲) $2/3$ (۳) $1/7$ (۴) $1/3$

۸۳- اگر ۶ لیتر محلول هیدروکلریک اسید با $pH = 0/7$ ، ۳ لیتر محلول هیدرویدیک اسید با غلظت $0/1$ مول بر لیتر و یک لیتر محلول سود با $pH = 13/7$ را با هم مخلوط کنیم، محلولی بدست می‌آید که مقدار pH آن برابر با بوده و پس از ریختن آن بر روی مقداری خاک خنثی، گل‌های ادریسی در آن نمونه از خاک به رنگ خواهند رویید.
 (۱) ۱ - آبی (۲) $1/3$ - آبی (۳) $0/7$ - قرمز (۴) $1/7$ - قرمز

۸۴- چه تعداد از عبارات‌های داده شده درست هستند؟

آ: غلظت یون OH^- در اسید ترشح شده از دیواره معده، در مقایسه با غلظت این یون در آب گازدار کمتر است.
 ب: پنتانویک اسید پس از انحلال در آب، آنیونی را ایجاد می‌کند که ۵ جفت الکترون ناپیوندی در ساختار خود دارد.
 پ: گوگرد تری‌اکسید، یک اسید آرنیوس با مولکول‌های ناقطبی بوده و کاغذ pH در محلول آن به رنگ آبی درمی‌آید.
 ت: باران‌های معمولی شامل مقداری نیتریک اسید بوده و غلظت یون هیدرونیوم در آن‌ها کمتر از باران‌های اسیدی است.
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۸۵- یک محلول همگن ۴ لیتری از منیزیم کلرید را به دو نیم تقسیم می‌کنیم. اگر نیم اول این محلول با ۲۷۸ گرم از پاک‌کننده‌ای با فرمول شیمیایی $C_{15}H_{31}COONa$ به طور کامل واکنش بدهد، پس از تبخیر آب از نیم دیگر آن و برقکافت نمک باقیمانده، چند گرم فلز منیزیم تولید شده و در مدار خارجی این سلول، چند الکترون مبادله می‌شود؟

($Mg = 24$ و $O = 16$ و $C = 12$ و $H = 1 : g \cdot mol^{-1}$)

(۱) $24 - 1/204 \times 10^{24}$ (۲) $12 - 1/204 \times 10^{24}$
 (۳) $24 - 6/02 \times 10^{23}$ (۴) $12 - 6/02 \times 10^{23}$

۸۶- چند مورد از مطالب زیر درباره‌ی سلول گالوانی $Cu - Ag$ ، درست‌اند؟ ($Cu = 64 g \cdot mol^{-1}$)

آ: برخلاف سلول گالوانی روی-مس، الکتروود مس قطب مثبت سلول مورد نظر را تشکیل می‌دهد.
 ب: جهت حرکت الکترون‌ها در مدار بیرونی با جهت حرکت آنیون‌ها از دیواره متخلخل هم‌سو است.
 پ: پس از انجام واکنش در این سلول، از جرم تیغه مس کاسته شده و به جرم تیغه نقره افزوده می‌شود.
 ت: در این سلول، انرژی شیمیایی واکنش اکسایش-کاهش انجام شده به انرژی الکتریکی تبدیل می‌شود.
 ث: بر اثر مصرف $3/2$ گرم فلز مس، $10^{22} \times 3/01$ الکترون در مدار خارجی سلول مورد نظر جابه‌جا خواهد شد.
 (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۸۷- مقدار نیروی الکتروموتوری سلول‌های آلومینیم-هیدروژن، آلومینیم-روی و آهن-هیدروژن، به ترتیب برابر با $1/66$ ، $0/9$ و $0/44$ ولت است. نیروی الکتروموتوری سلول روی-آهن برابر با چند ولت بوده از بین کاتیون‌های فلزی حاصل از عناصر آهن و آلومینیم، کدام یون اکسندتر است؟

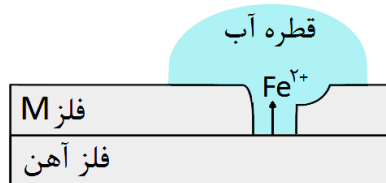
(۱) $Al^{3+} - 0/54$ (۲) $Fe^{2+} - 0/54$ (۳) $Al^{3+} - 0/32$ (۴) $Fe^{2+} - 0/32$

۸۸- کدام یک از مطالب زیر نادرست است؟

(۱) در واکنش میان فلز روی با گاز اکسیژن، هر اتم از گونه کاهنده ۲ الکترون با $l = 0$ از دست می‌دهد.
 (۲) علامت E° فلزهایی که کاهنده‌تر از H_2 هستند، در سری الکتروشیمیایی با نماد منفی مشخص می‌شود.
 (۳) در واکنش یک تیغه فلزی از جنس مس با محلولی از روی سولفات، فراورده‌هایی با پایداری بیشتر تولید می‌شوند.
 (۴) در سلول گالوانی روی-نقره، آنیون‌ها از خلال دیواره متخلخل به سمت محلول موجود در نیم‌سلول روی حرکت می‌کنند.

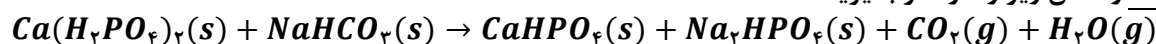
محل انجام محاسبات

۸۹- کدام یک از عبارت‌های داده شده در مورد شکل زیر، به یقین درست است؟



- (۱) از مجاورت مقدار کافی از فلز M با نیتریک اسید، مقداری گاز هیدروژن آزاد می‌شود.
 (۲) برای جلوگیری از خوردگی لوله‌های ساخته شده از منیزیم، می‌توان از فلز M بهره برد.
 (۳) در سری الکتروشیمیایی، فلز M در جایگاه پایین‌تری نسبت به آهن قرار داشته و E° آن منفی‌تر است.
 (۴) در سلول گالوانی حاصل از فلز M و فلز روی، فلز M قطب مثبت سلول را تشکیل داده و به جرم این فلز افزوده می‌شود.

۹۰- معادله موازنه نشده واکنش زیر را در نظر بگیرید:



اگر در این واکنش، ۶۸ گرم $CaHPO_4$ تشکیل شده باشد، چند گرم $NaHCO_3$ با خلوص ۹۶٪ مصرف شده و گاز کربن دی‌اکسید تولید شده در این فرایند، به ازای تولید چند گرم فلز آلومینیم در فرایند هال، بدست می‌آید؟

($H = 1$ و $C = 12$ و $O = 16$ و $Na = 23$ و $Al = 27$ و $P = 31$ و $Ca = 40$: $g \cdot mol^{-1}$)

(۴) ۸۷/۵ - ۳۶

(۳) ۸۷/۵ - ۵۴

(۲) ۸۰/۶۴ - ۳۶

(۱) ۸۰/۶۴ - ۵۴

- ۹۱- در سلول گالوانی آلومینیم-روی، در هر ثانیه $10^{21} \times 24/08$ الکترون از مدار خارجی عبور می‌کند. اگر در نیم‌سلول کاتدی، ۷۰٪ از اتم‌های تولید شده در نیم‌واکنش کاهش بر روی سطح کاتد رسوب کنند، پس از گذشت ۳۰ دقیقه از شروع واکنش، چند گرم به جرم تیغه کاتدی افزوده می‌شود؟ ($Zn = 65$ و $Al = 27$: $g \cdot mol^{-1}$)

(۴) ۱۴۲۶

(۳) ۱۶۳۸

(۲) ۲۳۴۰

(۱) ۳۳۴۲

- ۹۲- با کارکرد سلول، جرم تیغه در سلول مورد نظر، همانند تیغه در سلول گالوانی آلومینیم-مس، به تدریج پیدا می‌کند.

(۲) مربوط به فرایند هال، آندی، آلومینیم، کاهش

(۱) مربوط به آبکاری، کاتدی، آلومینیم، افزایش

(۴) گالوانی منیزیم-نقره، آندی، مس، افزایش

(۳) سوختی هیدروژن-اکسیژن، آندی، مس، کاهش

۹۳- کدام یک از مطالب زیر نادرست است؟

- (۱) برای کاهش دمای ذوب سدیم کلرید خالص، از نمکی که در تهیه بسته‌های گرمازا نیز کاربرد دارد، استفاده می‌شود.
 (۲) در برقکافت آب، نیم‌واکنش $2H_2O(l) \rightarrow O_2(g) + 4H^+(aq) + 4e^-$ در سطح الکترود با بار مثبت انجام می‌شود.
 (۳) اگر در سلول الکترولیتی مربوط به آبکاری با نقره، جنس تیغه آندی از نقره باشد، غلظت یون نقره در محلول ثابت می‌ماند.
 (۴) عنصر تولید شده در آند سلول برقکافت سدیم کلرید مذاب، نسبت به سایر عناصر هم‌تناوب خود شعاع اتمی بزرگ‌تری دارد.

۹۴- کدام موارد از عبارت‌های داده شده نادرست هستند؟

- آ: تیغه سازنده آند سلول نورالکتروشیمیایی مربوط به تهیه گاز H_2 از آب، همانند گرافیت، نوعی جامد کووالانسی است.
 ب: در ساختار بلور یخ، هر مولکول H_2O توسط ۴ پیوند هیدروژنی در ارتباط با ۴ مولکول H_2O دیگر قرار می‌گیرد.
 پ: در گوگرد دی‌اکسید، همانند کربونیل سولفید، هسته هر سه اتم سازنده بر روی یک خط راست قرار می‌گیرد.
 ت: با انحلال $NaCl$ در آب، یون‌هایی از محلول با شعاع بزرگ‌تر، توسط اتم O مولکول‌های آب احاطه می‌شوند.

(۴) آ و ت

(۳) پ و ت

(۲) ب و پ

(۱) آ و ب

محل انجام محاسبات

۹۵- گازهای نیتروژن و اکسیژن، در شرایط مناسب با یکدیگر واکنش داده و گاز NO را تولید می کنند. اگر تفاوت جرم دو گاز در آغاز واکنش برابر 0.5 گرم باشد، چند گرم فراورده طی این فرایند تشکیل شده و بر اثر مخلوط کردن این مقدار گاز NO با چند مول بخار پنتین، مخلوطی ایجاد می شود که درصد جرمی ترکیب ناقطبی در آن برابر با 85% است؟
($N = 14$ و $O = 16 : g.mol^{-1}$)

- (۱) $0.625 - 7/5$ (۲) $0.875 - 7/5$ (۳) $0.575 - 12/5$ (۴) $0.525 - 12/5$

۹۶- کدام یک از مقایسه های زیر، در رابطه با نمونه هایی از سیلیس و کربن دی اکسید به صورت نادرست انجام شده است؟

- (۱) دمای ذوب: $CO_2 >$ سیلیس (۲) درصد جرمی اکسیژن: $CO_2 <$ سیلیس
(۳) عدد اکسایش اتم اکسیژن: $CO_2 =$ سیلیس (۴) مقدار انحلال پذیری در آب: $CO_2 >$ سیلیس

۹۷- کدام مطلب، نادرست است؟ ($O = 16$ و $C = 12$ و $H = 1 : g.mol^{-1}$)

- (۱) برخلاف چگالی، پایداری یک نمونه از گرافیت در مقایسه با الماس بیشتر است.
(۲) درصد جرمی اکسیژن در اسید چربی با 30 اتم هیدروژن و زنجیر هیدروکربنی سیر شده، تقریباً برابر $13/2\%$ است.
(۳) نسبت شمار پیوندهای $C = C$ به شمار پیوندهای $C - C$ در ساختار گرافیت، نصف مقدار این نسبت در بنزن است.
(۴) در نقشه پتانسیل الکترواستاتیکی کربونیل سولفید، بار جزئی منفی فقط بر روی اتمی با بیشترین شعاع اتمی قرار دارد.

۹۸- کدام یک از مطالب زیر درست است؟

- (۱) آنتالپی فروپاشی شبکه بلور منیزیم کلرید، کمتر از آنتالپی فروپاشی شبکه سدیم سولفید است.
(۲) تفاوت شعاع یون فسفید و یون آلومینیم، در مقایسه با تفاوت شعاع یون کلرید و یون سدیم بیشتر است.
(۳) نسبت میان شمار جفت الکترون ناپیوندی به پیوندی در یون سیلیکات، مشابه مقدار این نسبت در SO_3 است.
(۴) در فرایند تولید نیم مول گالیم فلئورید از عناصر سازنده آن، $1/806 \times 10^{24}$ الکترون بین گونه ها مبادله می شود.

۹۹- با دادن مقداری گرما به 500 گرم از یک نمونه آب، دمای آن به اندازه $90^\circ C$ افزایش می یابد. اگر همین مقدار گرما، صرف فروپاشی شبکه بلور منیزیم اکسید شود، چه تعداد یون گازی طی این فرایند حاصل می شود؟ (گرمای ویژه آب را برابر $4J.g^{-1}.^\circ C^{-1}$ در نظر گرفته و آنتالپی فروپاشی شبکه بلور منیزیم اکسید را برابر با 3600 کیلوژول بر مول در نظر بگیرید.)

- (۱) $3/01 \times 10^{23}$ (۲) $6/02 \times 10^{23}$ (۳) $3/01 \times 10^{22}$ (۴) $6/02 \times 10^{22}$

۱۰۰- کدام یک از مطالب زیر نادرست است؟

- (۱) در واکنش حذف هیدروکربن های نسوخته در مبدل کاتالیستی، عدد اکسایش اتم های کربن کمتر از 4 واحد افزایش می یابد.
(۲) در واکنش گرماگیر، سطح انرژی ذره بوجود آمده در قله نمودار انرژی-پیشرفت، به سطح انرژی فراورده ها نزدیک تر است.
(۳) همانند اوزون، با تاریک شدن هوا از غلظت گاز NO_2 که دلیل اصلی رنگ قهوه ای هوای آلوده است، کمتر می شود.
(۴) از طیف سنجی فروسرخ می توان برای شناسایی برخی مولکول ها در فضای بین ستاره ای و برخی گازها استفاده کرد.

۱۰۱- کدام موارد از عبارتهای داده شده درست هستند؟

- آ: تغییر غلظت واکنش دهنده ها در دمای ثابت، بر میزان پیشرفت واکنش تعادلی بی تاثیر است.
ب: با ریختن مقداری براده آهن در ظرف واکنش فرایند هابر، زمان مورد نیاز برای برقراری تعادل کاهش می یابد.
پ: ثابت تعادل واکنش تولید آمونیاک در دمای $300K$ و فشار 250 اتمسفر، نسبت به شرایط بهینه فرایند هابر کمتر است.
ت: افزایش دما در تعادل $2NO_2(g) \rightleftharpoons N_2O_4(g)$ ، همانند افزودن گاز N_2O_4 به سامانه، رنگ مخلوط را پررنگ می کند.

- (۱) آ و پ (۲) آ و ت (۳) ب و پ (۴) ب و ت

محل انجام محاسبات

۱۰۲- واکنش تعادلی $2X(g) + Y(g) \rightleftharpoons 2Z(g)$ ، در یک ظرف ۲ لیتری و با حضور ۵ مول از هر کدام از واکنش دهنده‌ها شروع می‌شود تا به تعادل برسد. اگر در لحظه تعادل غلظت $Z(g)$ ، برابر با مجموع غلظت واکنش دهنده‌های باقیمانده باشد، ثابت تعادل این واکنش چقدر است؟

- (۱) $\frac{22}{3} L \cdot mol^{-1}$ (۲) $\frac{3}{22} mol \cdot L^{-1}$ (۳) $\frac{16}{3} L \cdot mol^{-1}$ (۴) $\frac{8}{9} L \cdot mol^{-1}$

۱۰۳- چند مورد از مطالب زیر درباره مبدل‌های کاتالیستی، درست هستند؟

آ: نسبت $\frac{E_a}{|\Delta H|}$ در واکنش تبدیل NO به N_2 از مقدار این نسبت برای تبدیل CO به CO_2 بیشتر است.

ب: مبدل کاتالیستی برای مدت کوتاهی کار کرده و پس از مدتی کارایی آن کاهش یافته و دیگر قابل استفاده نیست.

پ: پلاتین یک فلز نجیب است که به صورت توده‌هایی با قطر کمتر از ۱۱ نانومتر در مبدل‌های کاتالیستی استفاده می‌شود.

ت: در واکنش انجام شده در محفظه دوم از مبدل کاتالیستی موجود در خودروهای دیزلی، گاز آمونیاک نقش کاهنده دارد.

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

۱۰۴- مخلوطی از گاز CO و بخار آب را در یک ظرف ۵ لیتری گرما می‌دهیم تا تعادل $CO(g) + H_2O(g) \rightleftharpoons CO_2(g) + H_2(g)$ برقرار شود. اگر در مخلوط اولیه، درصد حجمی گازها با هم برابر بوده و در حالت تعادل، ۲۲ گرم اکسید اسیدی وجود داشته باشد، درصد جرمی بخار آب در حالت تعادل به‌طور تقریبی کدام است؟ (ثابت تعادل واکنش را $10^{-2} \times 6/25$ در نظر بگیرید.) ($O = 16$ و $C = 12$ و $H = 1 : g \cdot mol^{-1}$)

- (۱) ۲۶/۱ (۲) ۲۸/۲ (۳) ۳۱/۳ (۴) ۳۴/۶

۱۰۵- یک نمونه از اتانول، در شرایط مناسب با گاز اکسیژن واکنش داده و ضمن اکسید شدن، استیک اسید به همراه آب را تولید می‌کند. به ازای تولید ۹۰ گرم استیک اسید، چند الکترون در واکنش مورد نظر بین گونه‌ها مبادله می‌شود و این مقدار از اسید

تولید شده، با چند گرم ۱-بوتانول واکنش می‌دهد؟ ($O = 16$ و $C = 12$ و $H = 1 : g \cdot mol^{-1}$)

- (۱) $74 - 1/806 \times 10^{24}$ (۲) $111 - 1/806 \times 10^{24}$ (۳) $74 - 3/612 \times 10^{24}$ (۴) $111 - 3/612 \times 10^{24}$

محل انجام محاسبات

بوجه بندی آزمون مرحله ۴ دوازدهم ریاضی

جامع شبیه ساز کنکور سراسری
□□□□□□□□

۲۳ فروردین

گسسته

هندسه

حسابان

آمار و احتمال

دوازدهم

پایه

دوازدهم

پایه

دوازدهم +
پایه مرتبط

آزمون جامع شبیه ساز کنکور (۱)

شیمی

فیزیک

پایه

دوازدهم

پایه

دوازدهم

آزمون جامع شبیه ساز کنکور (۱)



گروه آموزشی ماز



SanjeshCloud

www.SanjeshCloud.ir



کد کنترل

121

A

پنجشنبه

۱۴۰۳/۰۱/۱۶



پاسخنامه آزمون الکترونیکی کنکوری‌های ریاضی - مرحله ۱۵

درس	مسئول درس	طراحان	ویراستاران
ریاضیات	محدثه شیخعلی	حسین شفیع‌زاده - مهرداد کیوان - سوگند روشنی امیرحسین ابومحبوب	مهرداد اسپیدکار - حمیدرضا ولی‌پور رضا قانع
فیزیک	سجاد صادقی‌زاده	محسن ایرانی - سجاد صادقی‌زاده	نرجس تیمناک - پویا هدایتی‌گودرزی امیرمخانی - امیرهوشنگ کیانی علیرضا ملک‌حسینی
شیمی	فرشاد هادیان‌فرد	فرشاد هادیان‌فرد - علی ترابی مهسا بایمانی‌نژاد	فرهنگ امیری - سجاد سیف‌اللهی عالیه میرزایی - سعیده محبی
مدیر آزمون: رسول خنجری			

حق چاپ و تکثیر سوالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز «گروه ماز» مجاز می‌باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می‌شود.

به دلیل عدم رضایت تیم ماز، هرگونه استفاده غیرقانونی از دفترچه سئالات، پاسخنامه ماز برای تمامی اشخاص، شرعاً حرام است.

در کنکور سراسری هر سال بیش از یک میلیون نفر شرکت کرده و برای به دست آوردن صندلی دانشگاه‌های برتر با هم رقابت می‌کنند.

یکی از وظایف کنکور، متمایز کردن این افراد از هم می‌باشد. متمایز کردن به این معناست که کنکور باید طوری طراحی شود که تا جای ممکن، دو نفر از داوطلبان رتبه یکسانی کسب نکنند. همین ماجرا باعث می‌شود که طراحان کنکور سراسری مجبور شوند هر سال سؤالات خود را از سال گذشته سخت‌تر طراحی کنند. به همین دلیل هست که هر سال شاهد نوآوری‌های جدیدی در کنکور هستیم.

یکی از ویژگی‌های ثابت کنکور در سالیان اخیر، سخت شدن یک دفعه‌ای بعضی درس‌هاست. به این معنی که در هر سال به صورت تصادفی، تعدادی از دروس سخت‌تر از حد معمول طراحی می‌شوند.

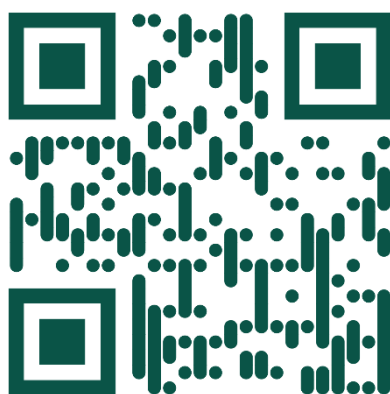
ما در آزمون‌های ماز نیز تا کنکور همین کار را خواهیم کرد و روند طراحی سؤالات ما دقیقاً به همین صورت خواهد بود. در هر آزمون به صورت تصادفی چند درس سخت‌تر از حد معمول طراحی خواهند شد تا بتوانیم شما را به چالش بکشیم و کنکور را دقیق‌تر از هر جای دیگری، برای شما شبیه‌سازی کنیم.

در این آزمون درس **شیمی** سخت‌تر طراحی شد.



دوست مازی من، سلام!

برای اینکه ما نظرت رو در رابطه با آزمون بدونیم نیاز هست که در نظرسنجی شرکت کنی.
برای شرکت در نظرسنجی فقط کافیه روی لینک زیر بزنی یا QR کد زیر رو اسکن کنی تا صفحه
نظرسنجی برات باز بشه!
ممنون که نظرت رو به ما میگی و بهمون برای بهتر شدن آزمون ها کمک می کنی (:



<https://B2n.ir/a87229>

مازی ها؛ میدونین که جلوی هر سوال ما براتون ویژگی و آدرس اون سوال رو میذاریم، حالا
واسه اینکه کامل یادش بگیرید میخوام براتون بگم که چجوری اینا رو براتون چیدیم:

(سطح سوال - سبک سوال - آدرس سوال)

آسان - متوسط - سخت مفهومی - مساله و ... مثلاً: ۱۱۰۱ یعنی فصل ۱ پایه یازدهم آدرس سوال

- ۱- اگر $f(x)$ تابعی پیوسته و $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{f(x)} - 2}{2x^2 - 3x + 1} = \frac{1}{4}$ باشد، مشتق تابع $y = f(\frac{1}{x}) - f^2(x^2 - 3)$ به ازای $x = 2$ چه عددی است؟
- (۱) $-31/5$ (۲) $-32/5$ (۳) $-16/5$ (۴) $-15/5$

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۲۰۴)

پاسخ: گزینه ۲

در باب حد:

اگر حاصل $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ برابر عدد مشخص و حقیقی k باشد، در این صورت:

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(a)}{0} = k$$

چون حاصل حد، عدد مشخص k می‌شود، پس حد باید مبهم $(\frac{0}{0})$ شود، در نتیجه صورت کسر یعنی $f(a)$ هم صفر می‌شود. (۰ حدی)

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{g(a)} = k \neq 0$$

چون حاصل حد، عدد مشخص k می‌شود، پس حد باید مبهم $(\frac{0}{0})$ شود، در نتیجه مخرج کسر یعنی $g(a)$ هم صفر می‌شود. (۰ حدی)

پاسخ تشریحی:

با توجه به این که در حد داده شده، مخرج کسر، صفر می‌شود و حاصل حد برابر $\frac{1}{4}$ است، پس صورت کسر نیز باید صفر شود. یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{f(x)} - 2}{2x^2 - 3x + 1} = \frac{1}{4} \Rightarrow f(1) = 4 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{f(x)} - 2}{(x-1)(2x-1)} \times \frac{\sqrt{f(x)} + 2}{\sqrt{f(x)} + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 4}{(x-1)(2x-1)(\sqrt{f(x)} + 2)} = \frac{1}{4} f'(1) = \frac{1}{4} \Rightarrow f'(1) = 1$$

حال مشتق تابع $y = f(\frac{1}{x}) - f^2(x^2 - 3)$ را در $x = 2$ محاسبه می‌کنیم. ببینید:

$$y = f(\frac{1}{x}) - f^2(x^2 - 3) \Rightarrow y' = -\frac{1}{x^2} f'(\frac{1}{x}) - 2 \times 2x \times f(x^2 - 3) \times f'(x^2 - 3) \xrightarrow{x=2} y' = -\frac{1}{4} f'(1) - 8 f(1) f'(1)$$

$$y' = -\frac{1}{4} - 8 \times 4 \times 1 = -32/5$$

پس جواب برابر است با:

گروه آموزشی ماز

- ۲- اگر $f(x) = x + 2\sqrt{x}$ و $g(x) = (\sqrt{x+1} - 1)^2$ باشد، مقدار $g'(f(6)) \times f'(6)$ چه عددی است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) $\frac{1}{6}$ (۴) ۶

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۲۰۴)

پاسخ: گزینه ۱

مشتق ترکیب توابع:

$y = f(u) \Rightarrow y' = u' \times f'(u)$ تابعی بر حسب x و مشتق‌پذیر است.

$y = f \circ g(x) \Rightarrow y' = g'(x) \times f'(g(x))$ شرط مشتق‌پذیری دو تابع رعایت شود.

$y = g \circ f(x) \Rightarrow y' = f'(x) \times g'(f(x))$ شرط مشتق‌پذیری دو تابع رعایت شود.

پاسخ تشریحی:

توابع $f(x)$ و $g(x)$ معکوس یکدیگر هستند. ببینید:

$$f(x) = x + 2\sqrt{x} \Rightarrow y = \sqrt{x} + 2\sqrt{x} + 1 - 1 \Rightarrow y = (\sqrt{x} + 1)^2 - 1 \Rightarrow (\sqrt{x} + 1) = \sqrt{y+1} \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{y+1} - 1 \Rightarrow x = (\sqrt{y+1} - 1)^2$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = (\sqrt{x+1} - 1)^2 = g(x)$$

حاصل $g'(f(x)) \times f'(x)$ همان مشتق تابع $g \circ f(x)$ در $x = 6$ می باشد. از آن جایی که توابع $f(x)$ و $g(x)$ معکوس یکدیگر هستند، بنابراین ترکیب دو تابع، همان $y = x$ می شود.

$$g \circ f(x) = x \xrightarrow{\text{مشتق}} f'(x) \times g'(f(x)) = 1 \Rightarrow f'(6) \times g'(f(6)) = 1$$

گروه آموزشی ماز

۳- اگر $g'(x) = \frac{-1}{x}$ و $g \circ f(x) = x + 4\sqrt{x}$ باشد، مشتق تابع $y = \frac{f'(x)}{f(x)}$ به ازای $x = 4$ چه عددی است؟

(۴) $-\frac{1}{12}$

(۳) $-\frac{1}{8}$

(۲) $\frac{1}{8}$

(۱) $\frac{1}{12}$

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۲۰۴)

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ تشریحی:

مشتق تابع $g \circ f(x)$ را محاسبه می کنیم. ببینید:

$$g \circ f(x) = x + 4\sqrt{x} \Rightarrow f'(x) \times g'(f(x)) = 1 + \frac{2}{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) \times \frac{-1}{f(x)} = 1 + \frac{2}{\sqrt{x}} \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = -\left(1 + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)$$

مشتق تابع $y = \frac{f'(x)}{f(x)}$ را محاسبه می کنیم:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\left(1 + \frac{2}{\sqrt{x}}\right) \Rightarrow \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)' = -\left(0 + \frac{0 \times \sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \times 2}{\sqrt{x}^2}\right) = \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{x} \xrightarrow{x=4 \text{ را جایگزین می کنیم}} \frac{\frac{1}{\sqrt{4}}}{4} = \frac{1}{8}$$

گروه آموزشی ماز

۴- کدام خط بر نمودار تابع $f(x) = x|x^2 - x|$ مماس است؟

(۴) $y = \frac{2}{9}$

(۳) $y = \frac{2}{27}$

(۲) $y = \frac{4}{27}$

(۱) $y = \frac{2}{3}$

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۲۰۴)

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ تشریحی:

خطوط مماس داده شده در گزینه ها همگی افقی هستند. شیب خطوط افقی، ۰ است، بنابراین باید به دنبال عرض نقاطی باشیم که در آن نقاط، مشتق صفر می شود.

$$y = \begin{cases} x(x^2 - x) & x \leq 0 \cup x \geq 1 \\ -x(x^2 - x) & 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \Rightarrow y' = \begin{cases} 3x^2 - 2x & x \leq 0 \cup x \geq 1 \\ -(3x^2 - 2x) & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

مشتق تابع را برابر صفر قرار می دهیم. ببینید:

$$y' = 0 \Rightarrow 3x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(3x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$y(x=0) = 0 \quad y\left(x=\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} \times \left|\frac{4}{9} - \frac{2}{3}\right| = \frac{4}{27}$$

مقدار تابع را در $x=0$ و $x=\frac{2}{3}$ حساب می کنیم. ببینید:

پس خطوط $y=0$ و $y=\frac{4}{27}$ بر نمودار تابع مماس می باشند. دقت کنید در هر دو حالت ($0 \leq x \leq 1$) یا ($x \geq 1 \cup x \leq 0$) ریشه های مشتق تغییر نمی کند، پس

خطوط $y=0$ و $y=\frac{4}{27}$ در هر حالت، بر نمودار تابع مماس است.

گروه آموزشی ماز

۵- اگر $f(x) = 2x + \sqrt{x}$ باشد، آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازه $[1, 4]$ با آهنگ تغییر لحظه ای f^{-1} در $x=3$ چقدر اختلاف دارد؟

(۴) $\frac{17}{25}$

(۳) $\frac{29}{15}$

(۲) $\frac{27}{20}$

(۱) $\frac{3}{4}$

مشتق تابع معکوس:

$$\left. \begin{array}{l} f(\alpha) = \beta \\ f^{-1}(\beta) = \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow (f^{-1})'(\beta) = \frac{1}{f'(\alpha)}$$

اگر $f^{-1}(x)$ معکوس تابع $f(x)$ باشد، آن گاه:

پاسخ شریعی:

ابتدا آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x)$ را محاسبه می کنیم. ببینید:

$$\text{آهنگ تغییر متوسط تابع } f \text{ در بازه } [1, 4] = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{10 - 3}{3} = \frac{7}{3}$$

$$f^{-1}(3) = 1 \Rightarrow (f^{-1})'(3) = \frac{1}{f'(1)}$$

حال آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع $f^{-1}(x)$ را در $x = 3$ محاسبه می کنیم. پس:

درستی این موضوع را نشان می دهیم:

$$y = f \circ f^{-1}(x) = x \Rightarrow y' = (f^{-1})'(x) \times f'(f^{-1}(x)) = 1 \Rightarrow (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

$$\Rightarrow (f^{-1})'(3) = \frac{1}{f'(f^{-1}(3))} \Rightarrow (f^{-1})'(3) = \frac{1}{f'(1)}$$

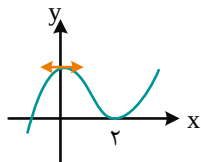
$$f'(x) = 2 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(1) = \frac{5}{2} \Rightarrow x = 3 \text{ در } f^{-1} \text{ آهنگ تغییر لحظه‌ای } (f^{-1})'(3) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{2}{5}$$

بنابراین:

$$\text{جواب} = \frac{7}{3} - \frac{2}{5} = \frac{35 - 6}{15} = \frac{29}{15}$$

پس جواب برابر است با:

گروه آموزشی ماز



۶- نمودار تابع $f(x) = (x-a)^2 \times (x-b)$ به شکل مقابل است. مجموع مختصات نقطه عطف تابع کدام است؟

- ۱) ۲
- ۲) ۴
- ۳) ۳
- ۴) ۶

نقطه عطف:

نقطه $(c, f(c))$ را نقطه عطف تابع $f(x)$ می گوئیم هرگاه:

۱) تابع در این نقطه پیوسته باشد.

۲) در این نقطه بتوان خط مماس بر تابع رسم کرد. (خط مماس از تابع می گذرد).

۳) جهت تعقر در این نقطه عوض شود.

عطف نیست. زیرا نمی توان در این نقطه یک خط بر منحنی مماس رسم کرد.



$x = a$

عطف است.



$x = a$

عطف نیست. زیرا تابع در این نقطه پیوسته نیست.



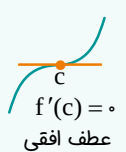
$x = a$

عطف نیست. زیرا تعقر تابع در این نقطه عوض نشده است.



$x = a$

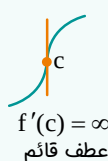
انواع نقطه عطف:



$f'(c) = 0$
عطف افقی



$f'(c) \neq 0$
عطف مایل



$f'(c) = \infty$
عطف قائم

مشتق دوم در نقطه عطف یا صفر است و یا وجود ندارد. برای به دست آوردن نقطه عطف، مشتق دوم را تعیین علامت می کنیم. اگر علامت مشتق دوم در نقطه‌ای عوض شود، آن نقطه عطف است در صورتی که شرایط نقطه عطف در آن نقطه رعایت شود.

پاسخ شریعی:

نمودار تابع در $x=2$ بر محور x مماس است. پس $f'(2) = f'(2) = 0$ می باشد، یعنی $a=2$ است. از طرفی $f'(0) = 0$ است. بنابراین:

$$f(x) = (x-2)^2(x-b) \Rightarrow f'(x) = 2(x-2)(x-b) + 1(x-2)^2 \Rightarrow f'(0) = 4b + 4 = 0 \Rightarrow b = -1$$

$$f(x) = (x-2)^2 \times (x+1) \Rightarrow f(x) = (x^2 - 4x + 4)(x+1) \Rightarrow f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$$

بنابراین مشتق دوم تابع را محاسبه و برابر صفر قرار می دهیم تا نقطه عطف بدست آید.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x \Rightarrow f''(x) = 6x - 6 \Rightarrow \begin{array}{c|c} f''(x) & + \\ \hline & - \end{array} \quad \Rightarrow \begin{array}{c|c} \text{عطف} & \\ \hline f(1) & \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c|c} & \\ \hline & \end{array}$$

بنابراین مجموع مختصات نقطه عطف برابر $1+2$ یعنی 3 می باشد.

گروه آموزشی ماز

۷- هرگاه بیشترین مقدار تابع $f(x) = x + a\sqrt{2a-x}$ برابر 12 باشد، مقدار a کدام است؟

۱۶ (۴)

۱۲ (۳)

۸ (۲)

۴ (۱)

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۲۰۵)

پاسخ: گزینه ۱

پاسخ شریعی:

دامنه تابع بازه $(-\infty, 2a]$ می باشد. نقاط بحرانی تابع را به دست آورده و به کمک آن، a را پیدا می کنیم. ببینید:

$$f'(x) = 1 + a \times \frac{-1}{2\sqrt{2a-x}} = 1 - \frac{a}{2\sqrt{2a-x}} = \frac{2\sqrt{2a-x} - a}{2\sqrt{2a-x}} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2\sqrt{2a-x} - a = 0 \Rightarrow \sqrt{2a-x} = \frac{a}{2} \xrightarrow{a>0} x = 2a - \frac{a^2}{4} \\ \sqrt{2a-x} = 0 \Rightarrow x = 2a \end{cases}$$

مقدار تابع را در $x = 2a - \frac{a^2}{4}$ و $x = 2a$ محاسبه می کنیم. ببینید:

$$f(2a) = 2a + a\sqrt{2a-2a} = 2a$$

$$f(2a - \frac{a^2}{4}) = 2a - \frac{a^2}{4} + a\sqrt{2a - (2a - \frac{a^2}{4})} = 2a - \frac{a^2}{4} + a \times \frac{a}{2} = 2a + \frac{a^2}{4} \Rightarrow \text{max مطلق}$$

بیشترین مقدار تابع $2a + \frac{a^2}{4}$ می باشد که طبق گفته سوال 12 می باشد. پس:

$$2a + \frac{a^2}{4} = 12 \Rightarrow a^2 + 8a = 48 \Rightarrow a^2 + 8a - 48 = 0 \Rightarrow (a+12)(a-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -12 \text{ غ قق} \\ a = 4 \text{ ق ق} \end{cases}$$

گروه آموزشی ماز

۸- تابع $f(x) = (x+2a)^2(x-a)$ فقط در بازه $(-4, 0)$ نزولی اکید است. مقدار a کدام است؟

-۴ (۴)

۴ (۳)

۲ (۲)

-۲ (۱)

(آسان - محاسباتی - ۱۲۰۵)

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ شریعی:

از تابع مشتق می گیریم. ببینید:

$$f'(x) = 2(x+2a)(x-a) + (x+2a)^2 \Rightarrow f'(x) = (x+2a)(2x-2a+x+2a) \Rightarrow f'(x) = (x+2a) \times 3x$$

مشتق تابع را تعیین علامت می کنیم:

$$\begin{array}{c|c|c} x & -2a & 0 \\ \hline f'(x) = (x+2a) \times 3x & + & - \end{array}$$

تابع در بازه $(-4, 0)$ اکیداً نزولی می باشد، پس $-2a = -4$ و $a = 2$ است. دقت کنید تابع $f(x)$ فقط در این بازه نزولی اکید است، پس $a = 2$ قابل قبول می باشد.

گروه آموزشی ماز

۹- $x=2$ طول نقطه عطف تابع $f(x) = \sqrt[3]{x}(a-x)$ می باشد. مقدار $f'(2a)$ کدام است؟

-۳ (۴)

$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ (۳)

$\sqrt[3]{4}$ (۲)

$\frac{7}{3}$ (۱)



از تابع ۲ بار مشتق می‌گیریم تا نقطه عطف تابع به دست آید. پس:

$$f(x) = ax^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{4}{3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{a}{3}x^{-\frac{2}{3}} - \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow f''(x) = \frac{-2a}{9}x^{-\frac{5}{3}} - \frac{4}{9}x^{-\frac{2}{3}} \Rightarrow f''(x) = -\frac{2}{9}(ax^{-\frac{5}{3}} + 2x^{-\frac{2}{3}})$$

$$\Rightarrow f''(x) = -\frac{2}{9}\left(\frac{a}{x^{\frac{5}{3}}} + \frac{2}{x^{\frac{2}{3}}}\right) \Rightarrow f''(x) = -\frac{2}{9}\left(\frac{a+2x}{x^{\frac{5}{3}}}\right)$$

چون $x=2$ طول نقطه عطف است. باید $f''(2)=0$ باشد. چرا؟

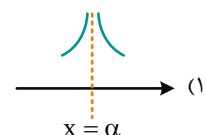
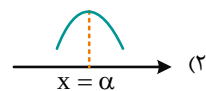
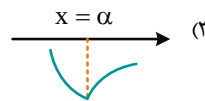
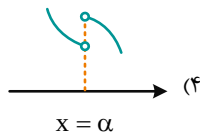
$$f''(2)=0 \Rightarrow a+2 \times 2=0 \Rightarrow a=-4$$

حال $f'(2a)$ یعنی $f'(-8)$ را محاسبه می‌کنیم. ببینید:

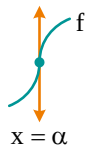
$$f'(x) = -\frac{4}{3}\left(\frac{1}{x^{\frac{5}{3}}} + \sqrt{x}\right) \Rightarrow f'(-8) = -\frac{4}{3}\left(\frac{1}{(-8)^{\frac{5}{3}}} - 2\right) = -\frac{4}{3} \times \frac{-7}{4} = \frac{7}{3}$$

گروه آموزشی ماز

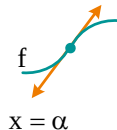
۱۰- f تابعی پیوسته می‌باشد. در گزینه‌ها نمودار f' در همسایگی $x=\alpha$ رسم شده است. در کدام گزینه، α طول نقطه عطف نمی‌باشد؟



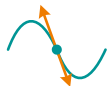
۱ در گزینه اول، طول عطف قائم است:



۲ در گزینه دوم، طول عطف مایل است:



۳ در گزینه سوم، طول عطف است:



۴ در گزینه چهارم، نمی‌تواند طول نقطه عطف باشد (نقطه زاویه‌دار است) زیرا تابع $f'(x)$ در همسایگی راست و چپ α روند نزولی دارد. پس مشتق تابع $f'(x)$ یعنی همان $f''(x)$ در α تغییر علامت نمی‌دهد و می‌دانیم در نقطه عطف باید، $f''(x)$ تغییر علامت بدهد، پس α در گزینه ۴ نمی‌تواند نقطه عطف باشد.

گروه آموزشی ماز

۱۱- نمودار تابع $f(x) = \frac{2x-1}{x+3}$ را نسبت به محور y ها قرینه کرده و سپس ۲ واحد به راست و ۳ واحد به پایین انتقال می‌دهیم تا تابع $g(x)$ به دست آید.

تعداد اعضای صحیح دامنه تابع $y = \sqrt{1+2g(x-1)}$ کدام است؟

۱۵ (۴)

۱۴ (۳)

۸ (۲)

۷ (۱)



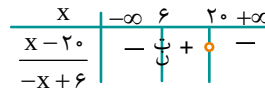
برای این که نمودار تابع را نسبت به محور y ، قرینه کنیم باید در ضابطه تابع به جای x ، $-x$ را قرار دهیم و در مرحله بعد در ضابطه جدید به جای x ، $x-2$ قرار می دهیم و در آخر، ضابطه تابع را منهای ۳ کنیم. ببینید:

$$y = \frac{2x-1}{x+3} \xrightarrow{x \rightarrow -x} y = \frac{2(-x)-1}{(-x)+3} \Rightarrow y = \frac{-2x-1}{-x+3} \xrightarrow{x \rightarrow x-2} y = \frac{-2(x-2)-1}{-(x-2)+3} \Rightarrow y = \frac{-2x+3}{-x+5}$$

$$\xrightarrow{3 \text{ واحد به پایین}} y = \frac{-2x+3}{-x+5} - 3 \Rightarrow y = \frac{-2x+3+3x-15}{-x+5} \Rightarrow g(x) = \frac{x-12}{-x+5} \Rightarrow g(x-1) = \frac{(x-1)-12}{-(x-1)+5} \Rightarrow g(x-1) = \frac{x-13}{-x+6}$$

حال به محاسبه دامنه تابع $y = \sqrt{1+2g(x-1)}$ می پردازیم. ببینید:

$$1+2g(x-1) \geq 0 \Rightarrow 1+2 \times \frac{x-13}{-x+6} \geq 0 \Rightarrow \frac{-x+6+2x-26}{-x+6} \geq 0 \Rightarrow \frac{x-20}{-x+6} \geq 0$$



بنابراین دامنه تابع بازه $[6, 20]$ می باشد که در آن ۱۴ عدد صحیح وجود دارد.

گروه آموزشی ماز

۱۲- اگر $f(x) = 2x - \sqrt{2-x}$ باشد، مجموعه جواب نامعادله $f^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) < f^{-1}(2x-1)$ کدام است؟

(۴) $(-\infty, 8]$

(۳) $\left[\frac{5}{2}, 8\right]$

(۲) $\left(\frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right]$

(۱) $\left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$



تابع اکیدا یکنوا:

$$f(x_2) < f(x_1) \Leftrightarrow x_2 > x_1 \Rightarrow f \text{ اکیدا نزولی} \quad f(x_2) > f(x_1) \Leftrightarrow x_2 > x_1 \Rightarrow f \text{ اکیدا صعودی}$$



دامنه تابع $f(x)$ برابر بازه $(-\infty, 2]$ می باشد. از تابع مشتق می گیریم. ببینید:

$$f(x) = 2x - \sqrt{2-x} \Rightarrow f'(x) = 2 + \frac{1}{2\sqrt{2-x}} > 0 \Rightarrow f(x) \text{ اکیدا صعودی می باشد.}$$

بنابراین برد تابع، بازه $(-\infty, 4]$ می باشد. از طرفی دامنه تابع $f^{-1}(x)$ نیز همان بازه $(-\infty, 4]$ است. بنابراین:

$$D_{f^{-1}} = (-\infty, 4] \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} \leq 4 \Rightarrow x \leq 8 \\ 2x-1 \leq 4 \Rightarrow x \leq \frac{5}{2} \end{cases}$$

بنابراین:

$$f^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) < f^{-1}(2x-1) \Rightarrow \frac{x}{2} < 2x-1 \Rightarrow x < 4x-2 \Rightarrow 3x > 2 \Rightarrow x > \frac{2}{3}$$

پس مجموعه جواب نامعادله برابر است با:

$$x \leq 8 \cap x \leq \frac{5}{2} \cap x > \frac{2}{3} \Rightarrow \left(\frac{2}{3}, \frac{5}{2}\right]$$

گروه آموزشی ماز

۱۳- باقی مانده تقسیم چندجمله ای $f(x)$ بر $x^2 - 5x + 6$ و $x^2 - 3x + 2$ به ترتیب برابر $2x+1$ و $2-3x$ است. باقی مانده تقسیم $f(x)$ بر $x^2 - 4x + 3$ کدام است؟

(۴) $3x-2$

(۳) $2x+1$

(۲) $5x-6$

(۱) $4x-5$

تقسیم دو چندجمله‌ای بر هم:

اگر در تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر چندجمله‌ای $g(x)$ ، خارج قسمت برابر $q(x)$ باشد، آن‌گاه:

$$\begin{array}{r} f(x) \\ \vdots \\ \hline g(x) \end{array} \bigg| \begin{array}{r} g(x) \\ \vdots \\ \hline q(x) \end{array} \Rightarrow f(x) = g(x) \times q(x) + r(x)$$

باید درجه باقی‌مانده $(r(x))$ از درجه مقسوم علیه $(g(x))$ کمتر باشد.



$$\begin{array}{r} f(x) \\ \vdots \\ 2x+1 \end{array} \bigg| \begin{array}{r} x^2 - 5x + 6 \\ \hline q_1(x) \end{array} \Rightarrow f(x) = (x^2 - 5x + 6) \times q_1(x) + 2x + 1$$

$$\begin{array}{r} f(x) \\ \vdots \\ 2-3x \end{array} \bigg| \begin{array}{r} x^2 - 3x + 2 \\ \hline q_2(x) \end{array} \Rightarrow f(x) = (x^2 - 3x + 2) \times q_2(x) + 2 - 3x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(3) = 7 \\ f(1) = -1 \end{cases}$$

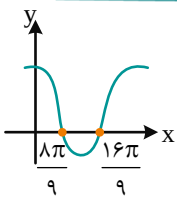
باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $x^2 - 4x + 3$ را برابر $ax + b$ در نظر می‌گیریم. (زیرا باید درجه باقی‌مانده از درجه مقسوم علیه کمتر باشد) پس:

$$\begin{array}{r} f(x) \\ \vdots \\ ax+b \end{array} \bigg| \begin{array}{r} x^2 - 4x + 3 \\ \hline q(x) \end{array} \Rightarrow f(x) = (x^2 - 4x + 3) \times q(x) + ax + b \Rightarrow \begin{cases} f(1) = a + b = -1 \\ f(3) = 3a + b = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -5 \end{cases}$$

پس باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $x^2 - 4x + 3$ برابر $4x - 5$ می‌باشد.

گروه آموزشی ماز

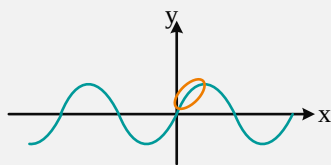
۱۴- قسمتی از نمودار تابع $y = 2b + a \cos(bx)$ به صورت مقابل است. دوره تناوب این تابع چند برابر a است؟



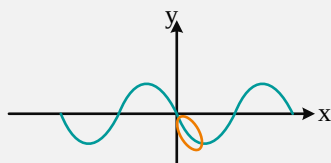
(۲) $\frac{8\pi}{3}$
(۴) $\frac{4\pi}{9}$

(۱) $\frac{4\pi}{3}$
(۳) $\frac{8\pi}{9}$

نکته‌ای در توابع مثلثاتی:

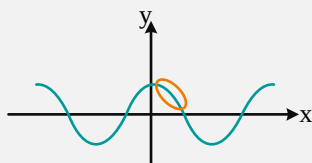


a و b هم‌علامت هستند. در سمت راست $x = 0$ تابع صعودی می‌باشد.

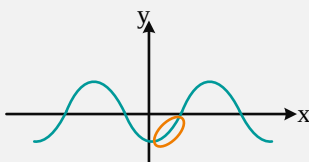


a و b غیرهم‌علامت هستند. در سمت راست $x = 0$ تابع نزولی می‌باشد.

جابه‌جایی روی محور x وجود ندارد.

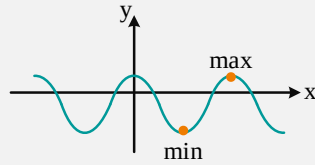


$a > 0$ (علامت b تاثیر ندارد). در سمت راست $x = 0$ تابع نزولی می‌باشد.

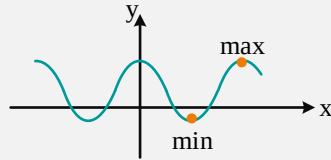


$a < 0$ (علامت b تاثیر ندارد). در سمت راست $x = 0$ تابع صعودی می‌باشد.

در هر نمودار $y = a \sin(bx) + c$ یا $y = a \cos(bx) + c$ می توان گفت:



نقطه $\max$ به محور x نزدیکتر از نقطه $\min$ است. $c < 0 \Rightarrow$



نقطه $\min$ به محور x نزدیکتر از نقطه $\max$ است. $c > 0 \Rightarrow$

پاسخ تشریحی:

$$\frac{\frac{8\pi}{9} + \frac{16\pi}{9}}{2} = \frac{4\pi}{3}$$

طبق درسنامه و با توجه به نمودار a و b هر دو مثبت هستند. وسط $\frac{16\pi}{9}$ و $\frac{8\pi}{9}$ تابع به $\min$ خود می رسد.

$$\frac{4\pi}{3}b = \pi \Rightarrow b = \frac{3}{4}$$

اگر $\frac{4\pi}{3}$ را به جای x در تابع قرار دهیم تابع $\min$ می شود. پس:

بنابراین ضابطه تابع به صورت $y = \frac{3}{2} + a \cos(\frac{3}{4}x)$ است. در $x = \frac{8\pi}{9}$ مقدار تابع صفر می شود. پس:

$$y = \frac{3}{2} + a \cos(\frac{3}{4} \times \frac{8\pi}{9}) = 0 \Rightarrow \frac{3}{2} + a \cos \frac{2\pi}{3} = 0 \Rightarrow \frac{3}{2} - \frac{a}{2} = 0 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\frac{3}{4}} = \frac{8\pi}{3}$$

بنابراین جواب برابر $\frac{8\pi}{3}$ یعنی $\frac{8\pi}{9}$ است.

گروه آموزشی ماز

۱۵- اگر $\alpha - \frac{\pi}{3}$ و $\alpha + \frac{\pi}{3}$ دو عضو از مجموعه جواب معادله مثلثاتی $\sin^3 x = \sin x - \frac{1}{4} \cos^2 x$ باشند، مقدار α کدام می تواند باشد؟

$\frac{7\pi}{6}$ (۴)

$\frac{\pi}{6}$ (۳)

$\frac{2\pi}{3}$ (۲)

$\frac{5\pi}{6}$ (۱)

(سخت - مفهومی / محاسباتی - ۱۴۰۲)

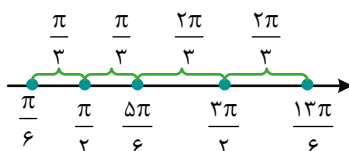
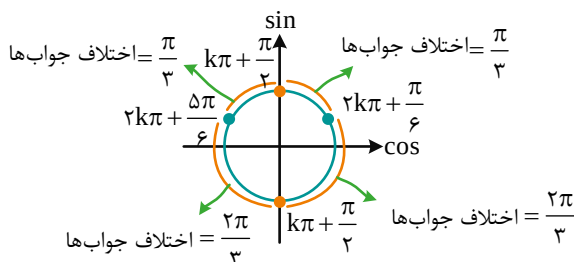
پاسخ: گزینه ۴

پاسخ تشریحی:

$\alpha + \frac{\pi}{3}$ و $\alpha - \frac{\pi}{3}$ دو جواب معادله هستند که اختلاف آن ها $\frac{2\pi}{3}$ و میانگین آن ها α است.

$$\sin^3 x - \sin x = -\frac{1}{4} \cos^2 x \Rightarrow \sin x (\underbrace{\sin^2 x - 1}_{-\cos^2 x}) = -\frac{1}{4} \cos^2 x \Rightarrow \sin x \cos^2 x = \frac{1}{4} \cos^2 x \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \sin x = \frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

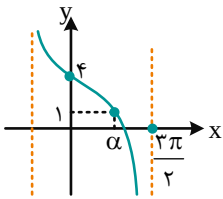
جواب ها را روی دایره مثلثاتی نشان می دهیم. ببینید:



تعدادی از جواب های معادله را به دست می آوریم. ببینید:

با توجه به محور فوق α می تواند وسط $\frac{5\pi}{6}$ و $\frac{3\pi}{2}$ یا وسط $\frac{3\pi}{2}$ و $\frac{13\pi}{6}$ باشد، پس α می تواند $\frac{7\pi}{6}$ یا $\frac{11\pi}{6}$ باشد که $\frac{7\pi}{6}$ در گزینه ها موجود است. دقت کنید α مقادیر دیگری نیز می تواند داشته باشد که در گزینه ها دیده نمی شود.

گروه آموزشی ماز



۱۶- نمودار تابع $f(x) = a - 2 \tan(bx - \frac{\pi}{4})$ در یک دوره تناوب به صورت مقابل است. حاصل $\tan \alpha$ کدام است؟

(۲) $\frac{3}{4}$
(۴) $\frac{4}{3}$

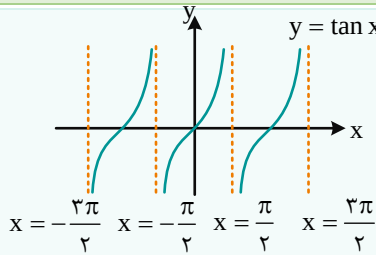
(۱) $-\frac{3}{4}$
(۳) $-\frac{4}{3}$

(سخت - مفهومی / محاسباتی - ۱۴۰۲)

پاسخ: گزینه ۱

نمودار تابع $y = \tan x$

$y = \frac{\sin x}{\cos x}$ مجانب قائم $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$



پاسخ تشریحی:

با توجه به نمودار تابع، $f(0) = 4$ می باشد. بنابراین:

$f(0) = a - 2 \tan(-\frac{\pi}{4}) = 4 \Rightarrow a + 2 = 4 \Rightarrow a = 2$

با توجه به اینکه $x = \frac{3\pi}{2}$ مجانب قائم است. پس:

$f(x) = 2 - 2 \tan(bx - \frac{\pi}{4}) \Rightarrow f(x) = 2 - 2 \frac{\sin(bx - \frac{\pi}{4})}{\cos(bx - \frac{\pi}{4})}$

$x = \frac{3\pi}{2}$ مخرج تابع $f(x)$ را صفر می کند $\Rightarrow \cos(bx - \frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0 \Rightarrow \frac{3\pi}{2}b - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{3\pi}{2}b = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow b = \frac{1}{2}$

چرا $bx - \frac{\pi}{4}$ را برابر $\frac{3\pi}{2}$ نگذاشتیم؟

بنابراین ضابطه تابع $f(x)$ به صورت $f(x) = 2 - 2 \tan(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{4})$ می باشد. پس:

$f(\alpha) = 2 - 2 \tan(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}) = 1 \Rightarrow 2 \tan(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}) = 1 \Rightarrow \tan(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$

$\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}$ را برابر β می نامیم. ببینید:

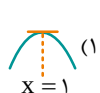
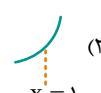
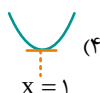
$\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4} = \beta \Rightarrow \alpha - \frac{\pi}{2} = 2\beta \Rightarrow \tan 2\beta = \frac{2 \tan \beta}{1 - \tan^2 \beta} \Rightarrow \tan 2\beta = \frac{2 \times \frac{1}{2}}{1 - (\frac{1}{2})^2} = \frac{4}{3}$

$\tan 2\beta = \tan(\alpha - \frac{\pi}{2}) = \frac{4}{3} \Rightarrow -\cot \alpha = \frac{4}{3} \Rightarrow \tan \alpha = -\frac{3}{4}$

پس:

گروه آموزشی ماز

۱۷- اگر $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x - [2x]}{f(x) + 2x + 1} = -\infty$ باشد، نمودار $f(x)$ در مجاورت $x = 1$ چگونه می تواند باشد؟





$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x - [2x]}{f(x) + 2x + 1} = \frac{1^- - 1}{\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) + 3^-} = \frac{0^-}{\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) + 3^-} = -\infty$$

به شرطی حاصل حد، برابر $-\infty$ می شود که مخرج در $x=1$ ، برابر صفر و ریشه مضاعف داشته باشد. مثلاً مخرج به صورت زیر باشد:

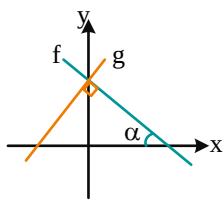
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x - [2x]}{f(x) + 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x - 1}{f(x) + 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x - 1}{(x - 1)^2} = -\infty$$

پس مخرج کسر موجود در حد، یعنی $f(x) + 2x + 1$ می تواند برابر $(x - 1)^2$ ، $(x - 1)^4$ و عبارت هایی مشابه باشد. بنابراین:

$$f(x) + 2x + 1 = (x - 1)^2 \Rightarrow f(x) = x^2 - 4x$$

چون $f'(1) = -2$ می باشد، پس تابع $f(x)$ در $x=1$ روند نزولی دارد و گزینه ۳ صحیح است.

گروه آموزشی ماز



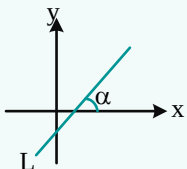
۱۸- نمودار توابع خطی f و g به صورت مقابل است. اگر $\cos 2\alpha = 0/28$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(f - g^{-1})(x)}{(f^{-1} - 2g)(x)}$ کدام است؟

$$\begin{aligned} &-\frac{3}{8} \quad (2) \\ &-\frac{3}{4} \quad (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\frac{3}{8} \quad (1) \\ &\frac{3}{4} \quad (3) \end{aligned}$$

رابطه مثلثاتی 2α بر حسب $\tan \alpha$:

$$\cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}, \sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}, \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$



شیب خط: شیب یک خط برابر $\tan$ زاویه ای است که آن خط با جهت مثبت محور x ها می سازد.

$$L \text{ شیب خط} = \tan \alpha$$



شیب خطوط f و g را محاسبه می کنیم. ببینید:

$$\cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} \Rightarrow \tan^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} \Rightarrow \tan^2 \alpha = \frac{1 - 0/28}{1 + 0/28} \Rightarrow \tan^2 \alpha = \frac{9}{16} \xrightarrow{\alpha \text{ حاده است}} \tan \alpha = \frac{3}{4}$$

شیب خط f برابر $-\frac{3}{4}$ و شیب خط g برابر $\frac{4}{3}$ است. چرا؟

پس ضابطه تابع $f(x)$ و $g(x)$ به صورت مقابل است. بنابراین:

$$f(x) = -\frac{3}{4}x + k \Rightarrow f^{-1}(x) = -\frac{4}{3}x + \frac{4}{3}k$$

$$g(x) = \frac{4}{3}x + k \Rightarrow g^{-1}(x) = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}k$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(f - g^{-1})(x)}{(f^{-1} - 2g)(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(-\frac{4}{3}x + k) - (\frac{3}{4}x - \frac{3}{4}k)}{(-\frac{4}{3}x + \frac{4}{3}k) - 2(\frac{4}{3}x + k)} \xrightarrow{\text{پرتوان}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{3}{4}x}{-4x} = \frac{3}{8}$$

حال به محاسبه حد می پردازیم:

گروه آموزشی ماز

۱۹- اگر $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(-1)^{[x]}}{f(x)} = +\infty$ باشد، ضابطه $f(x)$ کدام می تواند باشد؟

(۴) $-(x-1)^2$

(۳) $(x-1)^2$

(۲) $x-1$

(۱) $1-x$

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۲۰۳)

پاسخ: گزینه ۱

پاسخ تشریحی:

حدهای راست و چپ را در $x=1$ به طور جداگانه حساب می کنیم. ببینید:

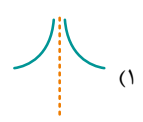
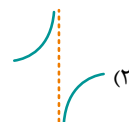
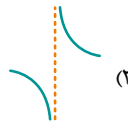
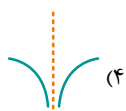
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(-1)^{[x]}}{f(x)} = \frac{(-1)^{[1^-]}}{\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)} = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(-1)^{[x]}}{f(x)} = \frac{(-1)^{[1^+]}}{\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)} = \frac{-1}{\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)} = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0^-$$

بنابراین فقط گزینه ۱ شرایط فوق را دارد.

گروه آموزشی ماز

۲۰- تابع $f(x) = \frac{1}{x^3 - 12x + a}$ فقط ۲ مجانب قائم دارد. نمودار تابع $f(x)$ در اطراف مجانب قائم خود، کدام نمی تواند باشد؟



(سخت - مفهومی / محاسباتی - ۱۲۰۳)

پاسخ: گزینه ۲

مجانب قائم:

برای به دست آوردن مجانب قائم تابع $f(x)$ ، ریشه های مخرج کسر را به دست می آوریم به شرطی که ریشه صورت کسر نباشد، همچنین حداقل در یک همسایگی مجانب قائم تعریف شود. اگر $x=k$ مجانب قائم تابع $f(x)$ باشد، برای تعیین وضعیت رفتار تابع $f(x)$ در همسایگی مجانب قائم، حاصل $\lim_{x \rightarrow k^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow k^-} f(x)$ را به دست می آوریم.

پاسخ تشریحی:

چون تابع دو مجانب قائم دارد، پس مخرج یک ریشه ساده (مرتبه ۱) و یک ریشه مضاعف (مرتبه ۲) دارد، یعنی مخرج باید به فرم زیر تجزیه شود:

$$f(x) = x^3 - 12x + a = (x-b)^2 \left(x + \frac{a}{b^2}\right)$$

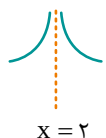
$$\Rightarrow x^3 - 12x + a = (x^2 - 2bx + b^2) \left(x + \frac{a}{b^2}\right) \Rightarrow x^3 - 12x + a = x^3 + \left(\frac{a}{b^2} - 2b\right)x^2 + \left(b^2 - \frac{2a}{b}\right)x + a$$

باید دو طرف یکسان باشند. پس:

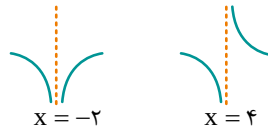
$$\frac{a}{b^2} - 2b = 0 \Rightarrow a = 2b^3$$

$$b^2 - \frac{2a}{b} = -12 \Rightarrow b^2 - 2a = -12b \xrightarrow{a=2b^3} b^2 - 4b^3 = -12b \Rightarrow -3b^3 = -12b \Rightarrow \begin{cases} b=0 \rightarrow \text{غ قق} \\ b=2 \rightarrow a=16 \\ b=-2 \rightarrow a=-16 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{اگر } a=16 \text{ و } b=2 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{(x-2)^2(x+4)}$$



باشد. $a = -16$ و $b = -2$ اگر $f(x) = \frac{1}{(x+2)^2(x-4)}$



پس تابع در اطراف مجانب قائم خود نمی تواند شکلی شبیه گزینه ۲ داشته باشد.

گروه آموزشی ماز

۲۱- اگر A ماتریسی 3×3 و $A = \frac{1}{3}I$ باشد، $|A|$ آن گاه مقدار مثبت $|9A|^{-1}$ کدام است؟

۳^{-۹} (۴)

۳^{-۳} (۳)

۳^{-۶} (۲)

۳^{-۴} (۱)

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۳



ویژگی های دترمینان ماتریس:

اگر A و B دو ماتریس مربعی از مرتبه n باشند، آن گاه:

۱) $|kA| = k^n |A| \quad k \in \mathbb{R}$

۲) $|A \times B| = |A| \times |B|$

۳) $|A^n| = |A|^n$

۴) $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

۵) $|I| = 1$ ماتریس همانی است



$$|3A|A = \frac{1}{3}I \Rightarrow ||3A|A| = \left| \frac{1}{3}I \right| \Rightarrow |3A| \times |A| = \left(\frac{1}{3} \right)^3 \Rightarrow 3^9 \times |A|^3 \times |A| = 3^{-3}$$

$$|A|^4 = 3^{-12} \Rightarrow |A| = \pm (3^{-3}) \Rightarrow |A| = \pm \frac{1}{27}$$

بنابراین دترمینان ماتریس $(9A)^{-1}$ برابر است با:

$$|(9A)^{-1}| = \frac{1}{|9A|} = \frac{1}{9^3 |A|} = 3^{-6} \times \frac{1}{\frac{1}{27}} \Rightarrow |(9A)^{-1}| = 3^{-3}$$

گروه آموزشی ماز

۲۲- به ازای چند مقدار m دستگاه معادلات خطی $\begin{cases} (m-1)x - 2y = m+2 \\ x - my = 3m \end{cases}$ جواب ندارد؟

۲ (۲)

۱ (۱)

هیچ مقدار قابل قبولی برای m به دست نمی آید. (۴)

۳ (۳)

(متوسط - محاسباتی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۱



بحث در مورد جواب های دستگاه معادلات خطی:

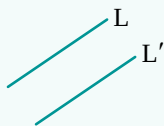
هر کدام از معادلات داده شده در دستگاه معادلات خطی، معادله یک خط هستند. تعداد نقاط برخورد ۲ خط، تعداد جواب های معادله را نشان می دهد. پس ۳ وضعیت

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \text{ برای این ۲ خط وجود دارد:}$$

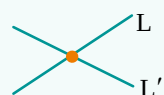
(۱) دو خط موازی و غیرمنطبق هستند، یعنی معادله جواب ندارد.

(۲) دو خط متقاطع هستند، یعنی معادله یک جواب دارد.

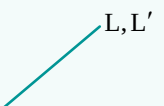
(۳) دو خط موازی و منطبق هستند، یعنی معادله بی شمار جواب دارد.



$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$$



$$\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$$



$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

پاسخ تشریحی:

باید دو خط موازی و غیرمنطبق باشند تا دستگاه معادلات خطی جواب نداشته باشد. پس:

$$\frac{m-1}{6} = \frac{-2}{-m} \neq \frac{m+2}{3m} \Rightarrow \frac{m-1}{6} = \frac{-2}{-m} \Rightarrow m^2 - m = 12 \Rightarrow m^2 - m - 12 = 0 \Rightarrow (m-4)(m+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m=4 \\ m=-3 \end{cases}$$

معادله ۱

با جایگذاری هر دو مقدار m در معادله، خواهیم داشت:

$$m=4 \rightarrow \frac{3}{6} = \frac{-2}{-4} \neq \frac{6}{12} \Rightarrow \text{غقیق (در این حالت معادله بی‌شمار جواب دارد.)}$$

$$m=-3 \rightarrow \frac{-4}{6} = \frac{-2}{3} \neq \frac{-1}{-9} \Rightarrow \text{غقیق}$$

گروه آموزشی ماز

۲۳- اگر A ماتریس مربعی هم‌مرتبه با I و $A^2 - 5A + I = 0$ باشد، وارون ماتریس $A + 2I$ به صورت $mA + nI$ است. مقدار $15m + 30n$ کدام است؟

۱۳ (۴)

۱۲ (۳)

۱۱ (۲)

۱۰ (۱)

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۴



ماتریس‌های تعویض‌پذیر:

اگر برای ضرب دو ماتریس خاصیت جابه‌جایی برقرار شود، می‌گوییم دو ماتریس تعویض‌پذیر هستند.

$A \times B = B \times A \Rightarrow$ A و B دو ماتریس تعویض‌پذیرند.

بنابراین هر ماتریس مربعی مانند A با ماتریس همانی هم‌مرتبه‌اش تعویض‌پذیر است و هر ماتریس معکوس‌پذیر مانند A ، با ماتریس معکوسش تعویض‌پذیر است.

$$A \times I = I \times A = A$$

$$A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I$$

پاسخ تشریحی:

$$A^2 - 5A + I = 0 \xrightarrow{(A+2I)(A-7I)=A^2-5A-14I} A^2 - 5A + I - 15I = -15I \Rightarrow \underbrace{A^2 - 5A - 14I}_{(A+2I)(A-7I)} = -15I$$

ضرب دو ماتریس $A + 2I$ و $A - 7I$ برابر ماتریس همانی I می‌باشد، پس این دو ماتریس معکوس هم هستند $\Rightarrow (A + 2I) \times \frac{1}{15}(A - 7I) = I$

$$(A + 2I)^{-1} = -\frac{1}{15}(A - 7I) \Rightarrow (A + 2I)^{-1} = -\frac{1}{15}A + \frac{7}{15}I \Rightarrow \begin{cases} m = -\frac{1}{15} \\ n = \frac{7}{15} \end{cases} \Rightarrow 15m + 30n = 15 \times \left(-\frac{1}{15}\right) + 30 \times \frac{7}{15} = -1 + 14 = 13$$

گروه آموزشی ماز

۲۴- پاره خط AB به طول ۲۰ واحد، در یک صفحه مفروض است. حداکثر چند خط مانند d در این صفحه وجود دارد که فاصله نقاط A و B از آن به ترتیب

۱۲ و ۱۵ واحد باشد؟

۴) چنین خطی در صفحه وجود ندارد.

۴ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۲۰۲)

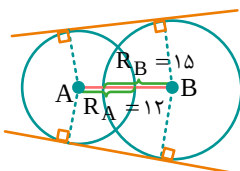
پاسخ: گزینه ۲



پاسخ تشریحی:

می‌دانیم مکان هندسی نقاطی در صفحه که از نقطه A به فاصله ۱۲ هستند، دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۱۲ و از نقطه B به فاصله ۱۵ باشند، دایره‌ای به مرکز B و شعاع ۱۵ است.

با توجه به این که دو دایره متقاطع هستند $(R_B - R_A < AB < R_B + R_A)$ می‌توان ۲ خط بر دو دایره مماس رسم کرد به طوری که فاصله نقاط A و B از این ۲ خط به ترتیب برابر ۱۲ و ۱۵ باشد، پس حداکثر ۲ خط در صفحه وجود دارد.



۲۵- دایره C گذرنده از نقطه A(۳, ۸) با دایره $C': x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ وتر مشترکی می سازد که بر خط $x - 3y = 4$ منطبق است. مساحت دایره C کدام است؟

۶۴π (۴)

۴۸π (۳)

۳۲π (۲)

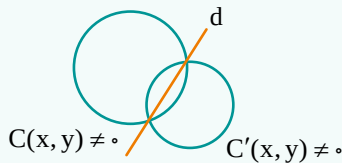
۱۶π (۱)

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۲۰۲)

پاسخ: گزینه ۲

وتر مشترک دو دایره متقاطع:

برای به دست آوردن وتر مشترک دو دایره متقاطع، کافی است معادله دو دایره را از هم کم کنیم، البته به شرطی که ضریب x^2 و y^2 در معادله هر دو دایره یکسان باشد. (بهتر است ۱ باشد.)



$$d: C(x, y) - C'(x, y) = 0$$

پاسخ تشریحی:

معادله دایره C را به صورت $C: x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ می نویسیم. به دنبال محاسبه a و b هستیم. ابتدا معادله وتر مشترک دو دایره را به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} C: x^2 + y^2 + ax + by + c &= 0 \\ C': x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \text{وتر مشترک: } (a+2)x + (b-4)y + (c-1) = 0$$

چون وتر مشترک بر خط $x - 3y = 4$ منطبق است. پس:

$$\frac{a+2}{1} = \frac{b-4}{-3} = \frac{c-1}{-4} = t \Rightarrow \begin{cases} a = t-2 \\ b = -3t+4 \\ c = -4t+1 \end{cases}$$

a و b و c را برحسب t به دست آورده ایم. با جای گذاری در معادله دایره C داریم:

$$C: x^2 + y^2 + (t-2)x + (-3t+4)y + (-4t+1) = 0 \xrightarrow{\text{دایره C از } A(3, 8) \text{ می گذرد}} 3^2 + 8^2 + (t-2) \times 3 + (-3t+4) \times 8 + (-4t+1) = 0$$

$$9 + 64 + 3t - 6 - 24t + 32 - 4t + 1 = 0 \Rightarrow -25t + 100 = 0 \Rightarrow t = 4 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -8 \\ c = -15 \end{cases} \Rightarrow C: x^2 + y^2 + 2x - 8y - 15 = 0$$

$$R = \frac{1}{4} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{4} \sqrt{2^2 + (-8)^2 - 4(-15)} = \frac{1}{4} \sqrt{4 + 64 + 60} = \frac{1}{4} \sqrt{128} = 4\sqrt{2} \Rightarrow S = \pi R^2 = \pi \times (4\sqrt{2})^2 = 32\pi$$

گروه آموزشی ماز

۲۶- در یک بیضی، فاصله هر کانون تا رأس ناکانونی آن، برابر ۵ و فاصله کانون ها ۶ است خط L را عمود بر محور کانونی و به فاصله ۱ واحد از مرکز بیضی رسم می کنیم تا بیضی را در نقاط M و N قطع کند، طول MN کدام است؟

۳/۸√۳ (۴)

۱/۶√۳ (۳)

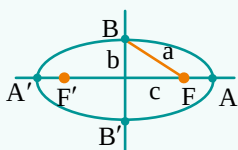
۱/۷√۶ (۲)

۳/۲√۶ (۱)

(سخت - مفهومی / محاسباتی - ۱۲۰۲)

پاسخ: گزینه ۱

بیضی:



$$\left. \begin{aligned} \text{فاصله کانونی} &= F'F = 2c \\ \text{قطر کوچک} &= B'B = 2b \\ \text{قطر بزرگ} &= AA' = 2a \end{aligned} \right\} \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

$a - c$ = فاصله کانون تا نزدیکترین رأس کانونی

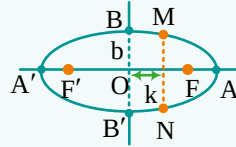
$a + c$ = فاصله کانون تا دورترین رأس کانونی

a = فاصله کانون تا هر رأس ناکانونی

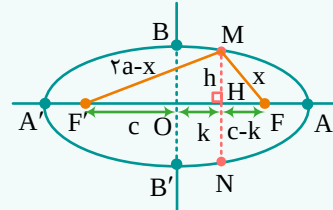
پند مهم در بیضی:

اگر خطی به فاصله k از مرکز بیضی و عمود بر قطر بزرگ (موازی قطر کوچک) رسم شود تا بیضی را در نقاط M و N قطع کند، در این صورت، طول پاره خط MN با ۳ بار استفاده از قضیه فیثاغورس به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$MN = \frac{2b}{a} \sqrt{a^2 - k^2}$$



برای اثبات از M به F و F' وصل می‌کنیم. بنابراین:



$$1) \triangle MHF: h^2 = x^2 - (c-k)^2 \Rightarrow x^2 - (c-k)^2 = (2a-x)^2 - (c+k)^2$$

$$2) \triangle MF'H: h^2 = (2a-x)^2 - (c+k)^2$$

$$\Rightarrow (2a-x)^2 - x^2 = (c+k)^2 - (c-k)^2 \Rightarrow 4a^2 - 4ax + x^2 - x^2 = c^2 + 2ck + k^2 - c^2 + 2ck - k^2 \Rightarrow 4a^2 - 4ax = 4ck \Rightarrow \frac{a^2 - ck}{a} = x$$

با جای‌گذاری x در رابطه ۱ خواهیم داشت:

$$h^2 = \left(\frac{a^2 - ck}{a}\right)^2 - (c-k)^2 \Rightarrow h^2 = a^2 + \frac{c^2 k^2}{a^2} - 2ck - c^2 + 2ck - k^2 \Rightarrow h^2 = a^2 - \frac{c^2}{b^2} + \frac{c^2 k^2}{a^2} - k^2 \Rightarrow h^2 = b^2 + k^2 \left(\frac{c^2}{a^2} - 1\right)$$

$$h^2 = b^2 + k^2 \times \left(-\frac{b^2}{a^2}\right) \Rightarrow h^2 = b^2 \left(1 - \frac{k^2}{a^2}\right) \Rightarrow h^2 = b^2 \times \left(\frac{a^2 - k^2}{a^2}\right) \Rightarrow h^2 = \frac{b^2}{a^2} (a^2 - k^2) \Rightarrow MN = 2h = \frac{2b}{a} \sqrt{a^2 - k^2}$$

پاسخ شریعی

$a = 5$: فاصله کانون تا رأس ناکانونی $c = 6 \Rightarrow c = 3$ فاصله کانونی

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 5^2 = b^2 + 3^2 \Rightarrow b = 4$$

$$MN = \frac{2b}{a} \sqrt{a^2 - k^2} = \frac{2(4)}{5} \sqrt{5^2 - 1^2} = \frac{8}{5} \times 2\sqrt{6} = \frac{16\sqrt{6}}{5}$$

گروه آموزشی ماز

۲۷- در سهمی $y^2 + 8x = 2y + 15$ اگر سطح داخلی سهمی را نقره‌اندود کنیم و لامپی را در نقطه $(1, -1)$ قرار دهیم، پرتوهای بازتابش چگونه خواهند بود؟

- (۱) موازی رو به بالا خواهند بود.
(۲) موازی و رو به پایین خواهند بود.
(۳) غیرموازی و واگرا هستند.
(۴) در نقطه‌ای با طول منفی همگرا می‌شوند.

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۲۰۲)

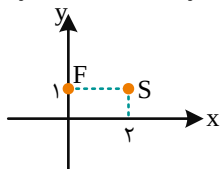
پاسخ: گزینه ۴

پاسخ شریعی

ابتدا معادله سهمی را به صورت استاندارد نوشته و مختصات کانون را به دست می‌آوریم:

$$y^2 - 2y = -8x + 15 \Rightarrow y^2 - 2y + 1 = -8x + 16 \Rightarrow (y-1)^2 = -8(x-2) \Rightarrow S(2, 1), 4a = 8 \Rightarrow a = 2$$

سهمی افقی بوده و دهانه آن به سمت چپ باز می‌شود. پس مختصات کانون $F(0, 1)$ است.



در نتیجه چون لامپ، در راستای افقی و عقب‌تر از کانون است، پرتوهای بازتابش در نقطه‌ای با طول منفی همگرا می‌شوند. پس گزینه ۴ صحیح است.

گروه آموزشی ماز

۲۸- اگر نقاط $A(0, 1, 3)$ ، $B(-1, 2, 4)$ و $C(1, 5, -1)$ سه رأس متوازی‌الاضلاع $ABCD$ باشند، بردار تصویر ضلع $\vec{DA}$ روی ضلع $\vec{DC}$ کدام است؟

$$-\frac{1}{3}(\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}) \quad (4)$$

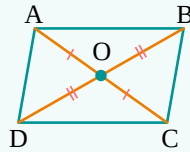
$$\frac{2}{3}(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) \quad (3)$$

$$\frac{3}{5}(\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}) \quad (2)$$

$$\frac{4}{3}(-\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) \quad (1)$$

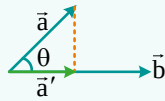
خاصیت قطر هادر متوازی الاضلاع:

$$\left. \begin{aligned} \frac{A+C}{2} &= O \\ \frac{B+D}{2} &= O \end{aligned} \right\} \Rightarrow A+C=B+D$$



تصویر قائم بردار روی امتداد بردار $\vec{b}$:

$$\vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b}$$



پاسخ تشریحی:

مختصات رأس D را به دست می آوریم:

$$x_A + x_C = x_B + x_D \Rightarrow 0 + 1 = -1 + x_D \Rightarrow x_D = 2$$

$$y_A + y_C = y_B + y_D \Rightarrow 1 + 5 = 2 + y_D \Rightarrow y_D = 4 \Rightarrow \vec{D} = (2, 4, -2)$$

$$z_A + z_C = z_B + z_D \Rightarrow 3 - 1 = 4 + z_D \Rightarrow z_D = -2$$

مختصات بردارهای $\vec{DA}$ و $\vec{DC}$ را به دست می آوریم:

$$\vec{DA} = (-2, -3, 5)$$

$$\vec{DC} = (-1, 1, 1)$$

پس تصویر بردار $\vec{DA}$ روی بردار $\vec{DC}$ به صورت زیر است:

$$\vec{DC} \text{ روی } \vec{DA} \text{ تصویر قائم} = \frac{\vec{DA} \cdot \vec{DC}}{|\vec{DC}|^2} \vec{DC} = \frac{2 - 3 + 5}{3} (-1, 1, 1) = \frac{4}{3} (-\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$$

گروه آموزشی ماز

۲۹- زاویه بین بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ منفرجه و $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 4$ است. اگر $|(3\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + 2\vec{b})| = 14$ باشد، مربع اندازه تفاسل دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ کدام است؟

$$(\sqrt{3} = 1/7)$$

$$12/4 (4)$$

$$23/8 (3)$$

$$10/2 (2)$$

$$30/6 (1)$$

پاسخ تشریحی:

$$|(3\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + 2\vec{b})| = 14 \Rightarrow |3\vec{a} \times \vec{a} + 6\vec{a} \times \vec{b} - \vec{b} \times \vec{a} - 2\vec{b} \times \vec{b}| = 14 \Rightarrow |7\vec{a} \times \vec{b}| = 14 \Rightarrow 7|\vec{a} \times \vec{b}| = 14$$

$$\Rightarrow |\vec{a} \times \vec{b}| = 2 \Rightarrow |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta = 2 \Rightarrow 1 \times 4 \times \sin\theta = 2 \Rightarrow \sin\theta = \frac{1}{2} \xrightarrow[\cos\theta < 0]{\theta > 90^\circ \text{ است، پس}} \cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

حال به محاسبه $|\vec{a} - \vec{b}|^2$ می پردازیم. ببینید:

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \Rightarrow |\vec{a} - \vec{b}|^2 = 1^2 + 4^2 - 2 \times 1 \times 4 \times -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow |\vec{a} - \vec{b}|^2 = 1 + 16 + 4\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow |\vec{a} - \vec{b}|^2 = 17 + 4\sqrt{3} \Rightarrow |\vec{a} - \vec{b}|^2 = 17 + 4(1/7) = 23/8$$

گروه آموزشی ماز

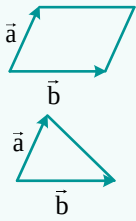
۳۰- اگر مساحت مثلثی که روی بردارهای $\vec{a} - 2\vec{b}$ و $2\vec{a} + \vec{b}$ ساخته می شود برابر ۱۰ باشد، مساحت متوازی الاضلاعی که روی بردارهای $\vec{a} + 2\vec{b}$ و $3\vec{a} + \vec{b}$ ساخته می شود، کدام است؟

$$16 (4)$$

$$32 (3)$$

$$20 (2)$$

$$40 (1)$$



$$S = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

$$S = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$$

کاربردهای ضرب خارجی بردارها:

(۱) مساحت متوازی الاضلاعی که روی بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ساخته می‌شود، برابر است با:

(۲) مساحت مثلثی که روی بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ساخته می‌شود، برابر است با:

پاسخ تشریحی:

$$S_{\text{مثلث}} = \frac{1}{2} |(\vec{a} - 2\vec{b}) \times (2\vec{a} + \vec{b})| = \frac{1}{2} |2\vec{a} \times \vec{a} + \vec{a} \times \vec{b} - 4\vec{b} \times \vec{a} - 2\vec{b} \times \vec{b}| = 10 \Rightarrow \frac{1}{2} |5\vec{a} \times \vec{b}| = 10 \Rightarrow |\vec{a} \times \vec{b}| = 4$$

بنابراین مساحت متوازی الاضلاع ساخته شده توسط بردارهای $3\vec{a} + \vec{b}$ و $3\vec{a} + 2\vec{b}$ برابر است با:

$$S = |(3\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} + 2\vec{b})| = |3\vec{a} \times \vec{a} + 6\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{a} + 2\vec{b} \times \vec{b}| \Rightarrow S = 8|\vec{a} \times \vec{b}| = 8 \times 4 = 32$$

گروه آموزشی ماز

۳۱- اگر x و y دو عدد حقیقی مثبت و متمایز باشند، آن‌گاه کمترین مقدار صحیح ممکن برای عبارت $A = (\frac{3x}{y} + 2)(\frac{2y}{x} + 2)$ کدام است؟

۲۶ (۴)

۲۵ (۳)

۲۰ (۲)

۱۹ (۱)



پاسخ تشریحی:

عبارت A را ساده می‌کنیم. ببینید:

$$A = (\frac{3x}{y} + 2)(\frac{2y}{x} + 2) = 6 + \frac{6x}{y} + \frac{6y}{x} + 4 \Rightarrow A = 10 + 6(\frac{x}{y} + \frac{y}{x})$$

با اثبات بازگشتی می‌توان نشان داد که به ازای دو عدد حقیقی مثبت x و y عبارت $\frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ همواره بزرگ‌تر یا مساوی ۲ است. ببینید:

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2 \xrightarrow{\times xy} x^2 + y^2 \geq 2xy \Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x - y)^2 \geq 0$$

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2 \xrightarrow{\times 6} 6(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}) \geq 12 \xrightarrow{+10} 10 + 6(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}) \geq 22 \Rightarrow A \geq 22$$

پس:

بنابراین $A \geq 22$ است، اما حالت تساوی، تنها به ازای تساوی x و y حاصل می‌شود و چون x و y دو عدد متمایز هستند، پس $A > 22$ و کمترین مقدار صحیح برای این عبارت برابر ۲۳ است.

گروه آموزشی ماز

۳۲- به ازای چند عدد طبیعی سه رقمی n ، رابطه $41 | 3^n + 1$ برقرار است؟

۱۲۴ (۴)

۱۲۳ (۳)

۱۱۳ (۲)

۱۱۲ (۱)



پاسخ تشریحی:

از هم‌نهشتی استفاده می‌کنیم. ببینید:

$$41 | 3^n + 1 \Rightarrow 3^n + 1 \equiv 0 \Rightarrow 3^n \equiv -1$$

بنابراین کافی است توان‌هایی از عدد ۳ پیدا کنیم که عدد 3^n به پیمانه ۴۱، هم‌نهشت با ۱- باشند.

$$3^4 = 81 = 2 \times 41 - 1 \Rightarrow 3^4 \equiv -1 \xrightarrow[2]{\text{طرف به توان } (2k-1)} (3^4)^{2k-1} \equiv (-1)^{2k-1} \Rightarrow 3^{8k-4} \equiv -1 \Rightarrow n = 8k - 4 \quad k \in \mathbb{N}$$

تعداد اعداد طبیعی k را محاسبه می‌کنیم:

$$100 \leq n \leq 999 \Rightarrow 100 \leq 8k - 4 \leq 999 \Rightarrow 104 \leq 8k \leq 1003 \xrightarrow{k \in \mathbb{N}} 13 \leq k \leq 125$$

$$\Rightarrow n = 113 = (125 - 13) + 1 = 113$$

تعداد اعداد طبیعی ۳ رقمی n

گروه آموزشی ماز

۳۳- باقی‌مانده تقسیم عدد $A = \frac{10!}{0!} + \frac{10!}{1!} + \frac{10!}{2!} + \dots + \frac{10!}{10!}$ بر ۷ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

(آسان - محاسباتی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۱



اعداد $\frac{10!}{0!}, \frac{10!}{1!}, \dots, \frac{10!}{10!}$ همگی دارای عامل اول ۷ هستند، پس بر ۷ بخش‌پذیر بوده و باقی‌مانده تقسیم آن‌ها بر ۷ برابر ۰ است. برای چهار عدد دیگر داریم:

$$\frac{10!}{7!} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \equiv 6$$

$$\frac{10!}{8!} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \equiv 6$$

$$\frac{10!}{9!} = 10 \equiv 3$$

$$\frac{10!}{10!} = 1 \equiv 1$$

$$A = \frac{10!}{0!} + \frac{10!}{1!} + \frac{10!}{2!} + \dots + \frac{10!}{10!} \equiv 0 + 0 + \dots + 0 + 6 + 6 + 3 + 1 \equiv 16 \equiv 2$$

بنابراین:

گروه آموزشی ماز

۳۴- اگر باقی‌مانده تقسیم عدد $\overline{4a3b}$ بر ۱۱ برابر ۱ باشد، حداکثر باقی‌مانده تقسیم عدد $\overline{2a3b}$ بر ۹ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

(متوسط - محاسباتی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۳

باقی‌مانده تقسیم عدد طبیعی A بر ۱۱:

$$A = \overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_1 a_0} \Rightarrow a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots \equiv A$$

باقی‌مانده تقسیم عدد طبیعی A بر ۹:

$$A = \overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_1 a_0} \Rightarrow a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots \equiv A$$



$$\overline{4a3b} \equiv 11 - b + 3 - a + 4 \equiv 8 - (a + b) \equiv 1 \Rightarrow a + b \equiv 7 \Rightarrow \begin{cases} a + b = 7 \\ a + b = 18 \end{cases}$$

حال باقی‌مانده تقسیم عدد $\overline{2a3b}$ بر ۹ را محاسبه می‌کنیم:

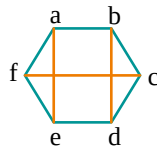
$$\overline{2a3b} \equiv 2 + a + 3 + b \equiv 5 + (a + b) \Rightarrow \begin{cases} \text{اگر } a + b = 7 \Rightarrow \overline{2a3b} \equiv 5 + 7 \equiv 3 \\ \text{اگر } a + b = 18 \Rightarrow \overline{2a3b} \equiv 5 + 18 \equiv 5 \end{cases}$$

بنابراین حداکثر باقی‌مانده تقسیم عدد $\overline{2a3b}$ بر ۹ برابر ۵ است.

گروه آموزشی ماز

۳۵- یک گراف ۳-منتظم از مرتبه ۶ که دارای دوره‌هایی به طول ۳ است، چند دور به طول ۵ دارد؟

- (۱) صفر (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۶



نمودار گرافی ۳- منتظم از مرتبه ۶ که دارای دورهایی به طول ۳ باشد، به صورت زیر است:

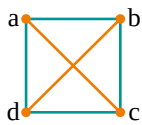
در این گراف با حذف هر یک از رئوس، دوری به طول ۵ وجود دارد که عبارتاند از:

abcdea, bafedb, aedcfa, bdefcb, aefcba, bdcfab

بنابراین ۶ دور به طول ۵ در این گراف وجود دارد.

گروه آموزشی ماز

۳۶- گراف G در شکل مقابل، چند زیرگراف ۱- منتظم دارد؟

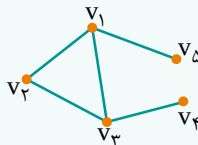


- ۹ (۱)
- ۸ (۲)
- ۷ (۳)
- ۶ (۴)

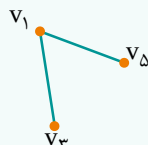


زیرگراف:

یک زیرگراف از گراف G، گرافی است که مجموعه رئوس آن زیرمجموعه‌ای از مجموعه رئوس گراف G و مجموعه یال‌های آن، زیرمجموعه‌ای از مجموعه یال‌های G باشد.



گراف G



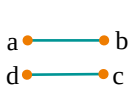
یک زیرگراف از گراف G



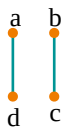
می‌دانیم گراف فرد منتظم از مرتبه فرد وجود ندارد، پس زیرگراف‌های موردنظر یا از مرتبه ۲ یا از مرتبه ۴ هستند.

زیرگراف‌های ۱- منتظم از مرتبه ۲: هر کدام از یال‌های گراف G، یک زیرگراف ۱- منتظم از مرتبه ۲ را نشان می‌دهد. چون گراف G، دارای ۶ یال است، پس ۶ زیرگراف ۱- منتظم از مرتبه ۲ دارد.

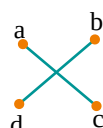
زیرگراف‌های ۱- منتظم از مرتبه ۴: زیرگراف‌های ۱- منتظم از مرتبه ۴، شامل دو یال غیرمجاور گراف (دو یالی که رأس مشترک ندارند) هستند.



G_۱



G_۲

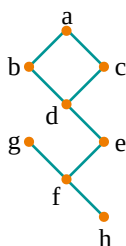


G_۳

بنابراین در مجموع، گراف G دارای ۹ زیرگراف ۱- منتظم است.

گروه آموزشی ماز

۳۷- گراف شکل مقابل، چند مجموعه احاطه گر مینیمال غیر مینیمم دارد؟



- ۲ (۱)
- ۳ (۲)
- ۴ (۳)
- ۵ (۴)



با توجه به این که $\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{P}{\Delta+1} \right\rceil$ می‌باشد، پس حداقل ۲ رأس برای احاطه‌گری لازم است اما گراف، با دو رأس احاطه نمی‌شود و حداقل ۳ رأس، برای احاطه‌گری لازم است، پس عدد احاطه‌گری این گراف، ۳ می‌باشد. $(\gamma(G) = 3)$
بنابراین مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمال غیرمینیمم این گراف حداقل باید دارای ۴ عضو باشند.

$\{a, e, g, h\}, \{a, d, g, h\}, \{b, d, g, h\}, \{c, d, g, h\}, \{b, c, e, g, h\}$

گروه آموزشی ماز

۳۸- معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$ چند جواب طبیعی دارد؟

۱۶۵ (۴)

۱۳۲ (۳)

۶۷ (۲)

۴۵ (۱)



چند نکته از ترکیبیات:

(۱) تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_k = n$ برابر است با: $\binom{n+k-1}{k-1}$

(۲) تعداد جواب‌های طبیعی معادله $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_k = n$ برابر است با: $\binom{n-1}{k-1}$



برای پیدا کردن جواب‌های طبیعی معادله فوق، به جای متغیر x_4 که دارای ۲ است، مقادیر طبیعی مناسب را قرار داده و تعداد جواب‌های طبیعی را در هر حالت پیدا می‌کنیم.

$$x_4 = 1 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 11 \Rightarrow \text{تعداد جواب‌های طبیعی} = \binom{11-1}{3-1} = \binom{10}{2} = 45$$

$$x_4 = 2 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 8 \Rightarrow \text{تعداد جواب‌های طبیعی} = \binom{8-1}{3-1} = \binom{7}{2} = 21$$

$$x_4 = 3 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 3 \Rightarrow \text{تعداد جواب‌های طبیعی} = \binom{3-1}{3-1} = \binom{2}{2} = 1$$

$$45 + 21 + 1 = 67$$

بنابراین تعداد جواب‌های طبیعی این معادله برابر است با:

گروه آموزشی ماز

۳۹- می‌خواهیم برای تدریس دبیران ریاضیات گسسته، حسابان، شیمی و زبان انگلیسی در چهار جلسه برای کلاس‌های A، B، C و D از پایه دوازدهم ریاضی یک دبیرستان، برنامه‌ریزی کنیم، به گونه‌ای که هر دبیر در هر کلاس دقیقاً یک جلسه تدریس کند. اگر برنامه دبیر ریاضیات گسسته و برنامه کلاس A برای هر چهار جلسه مشخص باشد، این برنامه‌ریزی به چند طریق امکان‌پذیر است؟

۱۸ (۴)

۱۲ (۳)

۶ (۲)

۳ (۱)



فرض کنید دبیران ریاضیات گسسته، حسابان، شیمی و زبان انگلیسی را به ترتیب با شماره‌های ۱ تا ۴ مشخص کنیم و برنامه‌های کلاس A و دبیر ریاضیات گسسته مطابق مربع لاتین زیر باشد:

جلسه ۱ جلسه ۲ جلسه ۳ جلسه ۴

کلاس A	۱	۲	۳	۴
کلاس B		۱		
کلاس C			۱	
کلاس D				۱



در این صورت سطر دوم مربع لاتین، به یکی از سه روش زیر قابل پر کردن است:

۲	۱	۴	۳
---	---	---	---

۳	۱	۴	۲
---	---	---	---

۴	۱	۲	۳
---	---	---	---

در صورت انتخاب هر کدام از این حالت‌ها، مربع لاتین موردنظر به دو شیوه متمایز، تکمیل می‌شود. مثلاً با انتخاب حالت سمت چپ داریم:

	جلسه ۱	جلسه ۲	جلسه ۳	جلسه ۴
کلاس A	۱	۲	۳	۴
کلاس B	۲	۱	۴	۳
کلاس C	۳	۴	۱	۲
کلاس D	۴	۳	۲	۱

	جلسه ۱	جلسه ۲	جلسه ۳	جلسه ۴
کلاس A	۱	۲	۳	۴
کلاس B	۲	۱	۴	۳
کلاس C	۴	۳	۱	۲
کلاس D	۳	۴	۲	۱

بنابراین طبق اصل ضرب، برنامه‌ریزی این کار به $6 = 3 \times 2$ طریق، امکان‌پذیر است.

گروه آموزشی ماز

۴۰- چند عدد طبیعی دو رقمی وجود دارد که نه بر ۴ بخش‌پذیر باشد و نه در ارقام آن، رقم ۴ وجود داشته باشد؟

۵۸ (۴)

۵۶ (۳)

۵۴ (۲)

۵۲ (۱)

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۲۰۳)

پاسخ: گزینه ۳



پاسخ تشریحی:

فرض کنید $S = \{1, 11, 12, \dots, 99\}$ و A و B زیرمجموعه‌هایی از S باشند که اعضای آن‌ها به ترتیب بر ۴ بخش‌پذیر بوده و در ارقام آن‌ها، ۴ وجود داشته باشد.

$$|A| = \left[\frac{99}{4} \right] - \left[\frac{9}{4} \right] = 24 - 2 = 22$$

$$|B| = 90 - \frac{9}{4} \times \frac{8}{10} = 90 - 18 = 72$$

تعداد ارقام به جز ۴، ۰

$$A \cap B = \{24, 40, 44, 48, 64, 84\} \Rightarrow |A \cap B| = 6$$

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 22 + 72 - 6 = 88$$

جواب سوال همان مجموعه $\bar{A} \cap \bar{B}$ است. بنابراین داریم:

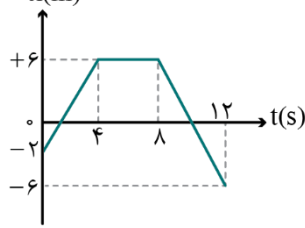
$$|\bar{A} \cap \bar{B}| = |S| - |A \cup B| = 90 - 88 = 2$$

گروه آموزشی ماز





۴۱- نمودار مکان - زمان متحرکی که بر روی محور x حرکت می کند، مطابق شکل است. شتاب متوسط متحرک در بازه زمانی $t_1 = 2s$ تا $t_2 = 10s$ ، چند $\frac{m}{s^2}$ می باشد؟



$$-\frac{5}{8} \quad (2)$$

$$\frac{5}{8} \quad (4)$$

می باشد؟

$$\frac{1}{8} \quad (1)$$

$$-\frac{1}{8} \quad (3)$$

(آسان - نموداری - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۲



نمودار مکان-زمان



در مورد نمودار مکان - زمان نکات مهم زیر را باید در نظر بگیریم:

۱- سرعت متوسط برابر است با شیب خط واصل دو نقطه از نمودار مکان - زمان:

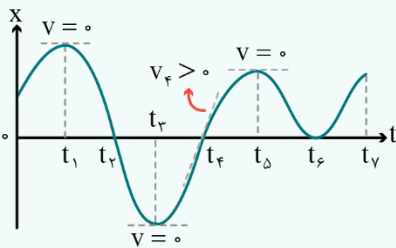
$$\vec{v}_{av} = \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t}$$

۲- سرعت لحظه ای برابر است با شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان در لحظه موردنظر:

لحظه ای $v =$ شیب خط مماس

۳- هر جا که نمودار مکان - زمان محور زمان را قطع کند، بردار مکان تغییر علامت می دهد.

۴- هر جا نمودار مکان - زمان صعودی باشد ($v > 0$)، متحرک در جهت محور حرکت می کند، هر جا نزولی باشد ($v < 0$)، متحرک در خلاف جهت محور حرکت می کند. توجه: در حرکت با سرعت ثابت، نمودار مکان - زمان خطی (تابع درجه اول نسبت به زمان) می باشد و در حرکت با شتاب ثابت، نمودار به صورت سهمی می باشد.

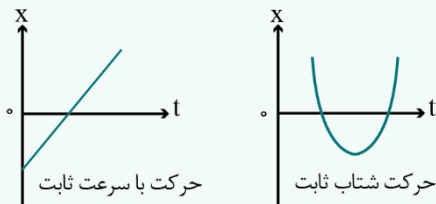


مثال:

لحظات تغییر جهت بردار مکان: t_2, t_4, t_6

بازه های حرکت در جهت محور X: $(0, t_1)$ و (t_3, t_5) و (t_6, t_7)

بازه های حرکت در خلاف جهت محور X: (t_1, t_3) و (t_5, t_6)



پاسخ تشریحی:

شتاب متوسط متحرک از رابطه $a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ به دست می آید:

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\Delta v = v_{10s} - v_{2s}}{\Delta t = 10s - 2s} \rightarrow a_{av} = \frac{v_{10s} - v_{2s}}{10 - 2} = \frac{v_{10s} - v_{2s}}{8} \quad (I)$$

متحرک در بازه زمانی ۰ تا ۴s با سرعت ثابت حرکت می کند، پس سرعت در لحظه $t = 2s$ همان سرعت متوسط در بازه زمانی ۰ تا ۴s می باشد و همچنین سرعت در لحظه $t = 10s$ نیز با سرعت متوسط در بازه زمانی ۸s تا ۱۲s برابر می باشد. پس داریم:

$$\bullet \rightarrow 4s: v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x = \lambda m}{\Delta t = 4s} \rightarrow v_{av} = +2 \frac{m}{s} \xrightarrow{v_{av} = v_{2s}} v_{2s} = +2 \frac{m}{s}$$

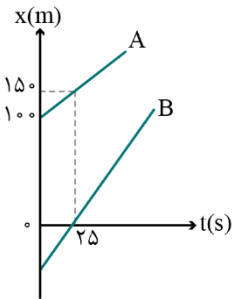
$$\bullet \rightarrow 12s: v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x = -12m}{\Delta t = 4s} \rightarrow v_{av} = -3 \frac{m}{s} \xrightarrow{v_{av} = v_{10s}} v_{10s} = -3 \frac{m}{s}$$

با توجه به رابطه I و سرعت های به دست آمده در لحظات ۲s و ۱۰s داریم:

$$a_{av} = \frac{v_{10s} - v_{2s}}{8} = \frac{-3 - (+2)}{8} = -\frac{5}{8} \frac{m}{s^2}$$



۴۲- نمودار مکان - زمان دو متحرک A و B که بر مسیر مستقیم حرکت می کنند، مطابق شکل می باشد. اگر در دو لحظه t_1 و t_2 ($t_2 > t_1$)، فاصله دو متحرک



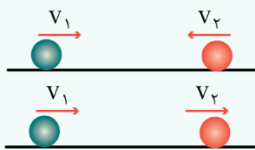
از هم ۴۰ متر باشد و $\frac{t_2}{t_1} = \frac{3}{2}$ باشد، تندی متحرک B، چند متر بر ثانیه است؟

- (۱) ۴
(۲) ۸
(۳) ۳
(۴) ۶

(سخت - محاسباتی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۱

سرعت نسبی



$$v_{\text{نسبی}} = |v_1| + |v_2|$$

۱- اگر دو متحرک خلاف جهت هم حرکت کنند:

$$v_{\text{نسبی}} = |v_1 - v_2|$$

۲- اگر دو متحرک همجهت حرکت کنند:

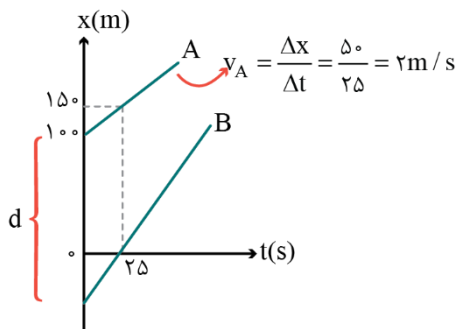
گام اول:

ابتدا تندی نسبی دو متحرک را به دست می آوریم. توجه کنید که چون دو متحرک همجهت حرکت می کنند، تندی نسبی دو متحرک به صورت زیر حساب می شود:

$$v_B > v_A$$

$$v_{\text{نسبی}} = v_B - v_A$$

و همچنین می توان v_A را از شیب نمودار $x-t$ به دست آورد



$$\Rightarrow v_{\text{نسبی}} = v_B - 2$$

گام دوم:

در لحظه t_1 ، برای اولین بار فاصله دو متحرک ۴۰ متر می شود. در این مدت نسبی Δx دو متحرک برابر است با:

$$\Delta x_{\text{نسبی}} = d - 40$$

و در لحظه t_2 ، برای دومین بار فاصله دو متحرک از هم ۴۰ متر می شود. در این مدت نسبی Δx دو متحرک برابر است با:

$$\Delta x_{\text{نسبی}} = d + 40$$

با توجه به رابطه $\Delta x_{\text{نسبی}} = v_{\text{نسبی}} \Delta t$ ، می توان نوشت:

$$\rightarrow t_1: \Delta x_{\text{نسبی}} = d - 40 = v_{\text{نسبی}} \Delta t \xrightarrow{v_{\text{نسبی}} = v_B - 2} d - 40 = (v_B - 2)t_1 \quad (I)$$

$$\rightarrow t_2: \Delta x_{\text{نسبی}} = d + 40 = v_{\text{نسبی}} \Delta t \xrightarrow{v_{\text{نسبی}} = v_B - 2} d + 40 = (v_B - 2)t_2 \quad (II)$$

$$\xrightarrow{(I), (II)} \frac{d + 40}{d - 40} = \frac{(v_B - 2)t_2}{(v_B - 2)t_1} \xrightarrow{\frac{t_2}{t_1} = \frac{3}{2}} \frac{d + 40}{d - 40} = \frac{3}{2} \Rightarrow 2d - 120 = 3d + 80 \Rightarrow d = 200 \text{ m}$$

گام سوم:

فاصله اولیه دو متحرک $d = 200 \text{ m}$ می باشد، پس مکان اولیه متحرک B، $x_B = -100 \text{ m}$ می باشد.

تندی متحرک B را می توان با استفاده از رابطه $v_B = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ در بازه صفر تا ۲۵s به دست آورد:

$$v_B = \frac{\Delta x}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta x=100]{\Delta t=25} v_B = \frac{100}{25} = 4 \frac{m}{s}$$

گروه آموزشی ماز

۴۳- هواپیما با تندی $80 \frac{m}{s}$ بر روی باند فرودگاه می نشیند و با شتاب ثابت پس از مدتی متوقف می شود. اگر هواپیما $\frac{1}{16}$ آخر مسیر فرود بر روی باند را

در مدت زمان ۴s طی کند، طول مسیر حرکت هواپیما بر روی باند پرواز چند متر بوده است؟

۹۶۰ (۴)

۳۲۰ (۳)

۱۲۸۰ (۲)

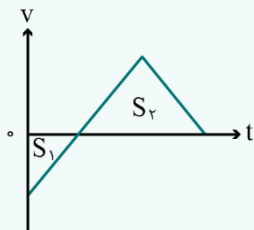
۶۴۰ (۱)

(آسان - محاسباتی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۱



نمودار سرعت-زمان



با استفاده از نمودار سرعت - زمان می توانیم جابه جایی و مسافت طی شده را به دست آوریم:

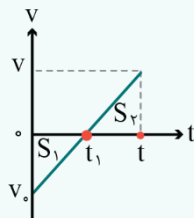
۱- برای پیدا کردن جابه جایی باید مساحت نمودار سرعت - زمان را در بالای محور منهای مساحت زیر محور کنیم:

$$\Delta x = S_r - S_1$$

۲- برای به دست آوردن مسافت باید مساحت بالای محور را با مساحت زیر محور جمع کنیم:

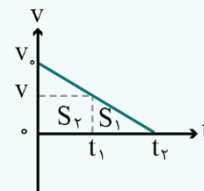
$$L = S_1 + S_r$$

توجه: در سؤالات حرکت شناسی و نمودارهای این بخش استفاده از تشابه مثلث ها بسیار پرکاربرد می باشد. مثلاً در نمودارهای سرعت - زمان می توانیم تشابه را برای مثلث ها به کار ببریم:



$$\text{نسبت تشابه مثلث ها} = \frac{v}{v_0} = \frac{t - t_1}{t_1}$$

$$\text{نسبت مساحت ها} = \frac{S_r}{S_1} = \left(\frac{v}{v_0}\right)^2 = \left(\frac{t - t_1}{t_1}\right)^2$$



$$\text{نسبت تشابه مثلث ها} = \frac{v}{v_0} = \frac{t_2 - t_1}{t_2}$$

$$\text{نسبت مساحت مثلث ها} = \frac{S_1}{S_1 + S_r} = \left(\frac{v}{v_0}\right)^2 = \left(\frac{t_2 - t_1}{t_2}\right)^2$$

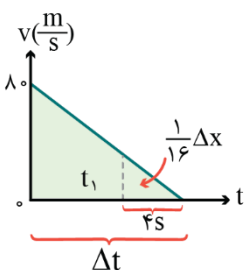
نکته:



بسیاری از سؤالات با رسم نمودار سرعت - زمان به راحتی حل می شوند.

پاسخ تشریحی:

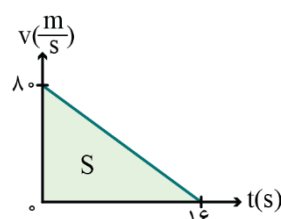
۱- نمودار $v-t$ هواپیما را رسم می کنیم که با توجه به حرکت شتاب ثابت هواپیما و کندشونده بودن به صورت نمودار خطی زیر می باشد. اگر کل مسافت طی شده هواپیما تا توقف را Δx در نظر بگیریم، مساحت مثلث کوچک در نمودار $\frac{1}{16} \Delta x$ خواهد بود.



۲- نسبت مساحت مثلث ها شورخورده و مثلث کوچک را می نویسیم:

$$\frac{\Delta x}{\frac{1}{16} \Delta x} = \left(\frac{\Delta t}{\frac{1}{16} \Delta t}\right)^2 \Rightarrow 16 = \left(\frac{\Delta t}{\frac{1}{16} \Delta t}\right)^2 \Rightarrow \Delta t = 16s$$

۳- پس کل زمان حرکت هواپیما برابر ۱۶s می باشد و کل مسافت طی شده نیز مساحت زیر نمودار می باشد.



$$S = \frac{80 \times 16}{2} = 640m$$

گروه آموزشی ماز



۴۴- متحرکی از حال سکون با شتاب ثابت $\frac{4}{5} \frac{m}{s^2}$ بر روی مسیر مستقیمی شروع به حرکت می کند و پس از مدت t ثانیه، با سرعت ثابت به مدت 10 ثانیه به حرکت خود ادامه می دهد در نهایت با شتاب به بزرگی $\frac{2}{5} \frac{m}{s^2}$ متوقف می شود. اگر کل مسافت طی شده در این مدت 104 متر باشد، تندی متوسط متحرک تا لحظه ای که 25 درصد از کل مسیر را طی کرده برابر چند متر بر ثانیه است؟

$$\frac{52}{17} \quad (4)$$

$$\frac{104}{17} \quad (3)$$

$$\frac{13}{2} \quad (2)$$

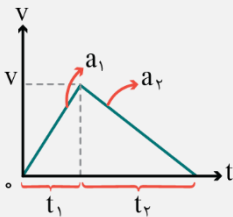
$$\frac{104}{9} \quad (1)$$

(متوسط - محاسباتی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۳

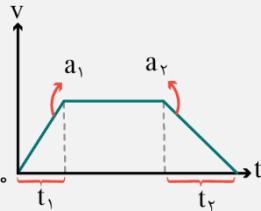
نکته:

در حالتی خاص از سؤالات حرکت شتاب ثابت، متحرک از حال سکون با شتاب a_1 شروع به حرکت می کند و پس از گذشت t_1 ثانیه، با شتاب a_2 حرکتش کند می شود و متوقف می شود. با توجه به نمودار سرعت - زمان این نوع حرکت می توانیم بنویسیم:



$$\frac{|a_1|}{|a_2|} = \frac{t_2}{t_1}$$

دقت کنید که اگر در بخش میانی حرکت، حرکت به صورت سرعت ثابت باشد، باز هم رابطه فوق در بخش حرکت تندشونده و کندشونده برقرار است:

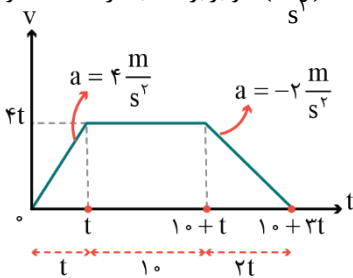


$$\frac{|a_1|}{|a_2|} = \frac{t_2}{t_1}$$

گام اول:

۱- ابتدا نمودار $v-t$ متحرک را رسم می کنیم. به این نکته دقت کنیم که چون اندازه شتاب مرحله تندشونده حرکت $(\frac{4}{5} \frac{m}{s^2})$ دو برابر شتاب مرحله کندشونده حرکت می باشد، پس مدت زمان حرکت تندشونده، نصف مدت زمان حرکت کندشونده خواهد بود.

۲- مساحت زیر نمودار $v-t$ با مسافت طی شده که 104 متر می باشد برابر است، پس داریم:



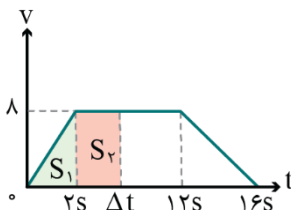
$$S = \frac{(10+3t+10)t}{2} = 104 \Rightarrow 3t^2 + 20t - 52 = 0$$

در معادله درجه دوم به دست آمده، $\Delta = b^2 - 4ac = (20)^2 - 4(3)(-52) = 1024 > 0$ ، پس برای به دست آوردن t داریم:

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \rightarrow t = \frac{-20 \pm (32)}{6} \rightarrow \begin{cases} t = -\frac{26}{3} \text{ (غیر قابل قبول)} \\ t = 2 \text{ (✓)} \end{cases}$$

گام دوم:

با توجه به اینکه $t = 2s$ می باشد، پس تندی متحرک پس از 2 ثانیه به $\frac{8}{5} \frac{m}{s}$ می رسد. نمودار $v-t$ به صورت زیر می شود و برای به دست آوردن خواسته سؤال، می توانیم بنویسیم:



$$s_{av} = \frac{L}{\Delta t} \quad L = \frac{1}{4}(104) = 26 \rightarrow s_{av} = \frac{26}{\Delta t}$$

$$26 = S_1 + S_2$$

متحرک در 2 ثانیه اول حرکت به اندازه $S_1 = 8m$ جابه جا می شود و $18m$ باقی مانده را با تندی ثابت $\frac{8}{5} \frac{m}{s}$ در مدت $(\Delta t - 2)$ طی می کند پس داریم:

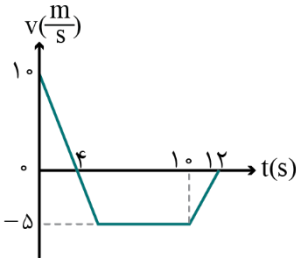
$$S_2 = 18 = 8(\Delta t - 2) \Rightarrow \Delta t - 2 = 2/25 \Rightarrow \Delta t = 4/25s$$

تندی متوسط حرکت در بازه زمانی خواسته شده برابر است با:

$$s_{av} = \frac{L}{\Delta t} \xrightarrow{L=26, \Delta t=4/25} s_{av} = \frac{26}{4/25} = \frac{104}{17} \left(\frac{m}{s}\right)$$

گروه آموزشی ماز

۴۵- نمودار سرعت - زمان متحرکی که در مبدأ زمان از مبدأ محور می‌گذرد، مطابق شکل زیر می‌باشد. در کل زمان حرکت، چند ثانیه فاصله متحرک از مبدأ محور کمتر یا مساوی ۸/۷۵ متر است؟



- (۱) ۴/۷۵
(۲) ۳/۲۵
(۳) ۲/۷۵
(۴) ۳/۷۵

(سخت - نموداری - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۱

حرکت با شتاب ثابت

معادله مکان - زمان در حرکت راست با شتاب ثابت به صورت زیر است:

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$$

$x \leftarrow$ مکان متحرک در لحظه t (m)

a : شتاب متحرک $\left(\frac{m}{s^2}\right)$

v_0 : سرعت اولیه متحرک $\left(\frac{m}{s}\right)$

$x_0 \leftarrow$ مکان اولیه متحرک (m)

معادله مکان - زمان در حرکت با سرعت ثابت به صورت زیر است:

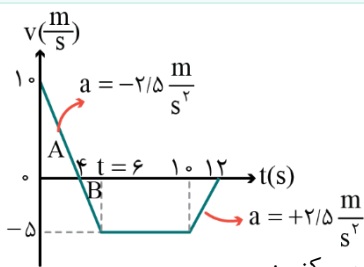
$$x = vt + x_0$$

$x \leftarrow$ مکان متحرک در لحظه t (m)

v : سرعت متحرک $\left(\frac{m}{s}\right)$

$x_0 \leftarrow$ مکان اولیه متحرک

گام اول:

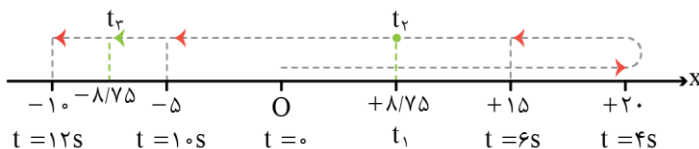


ابتدا با توجه به نمودار $v-t$ و تشابه دو مثلث A و B، لحظه t را به دست می‌آوریم:

$$\frac{10}{5} = \frac{4}{t-4} \Rightarrow t = 6s$$

گام دوم:

برای درک بهتر مسئله، مسیر حرکت متحرک را در بازه‌های زمانی مختلف که نوع حرکت متحرک عوض می‌شود رسم کنیم:



در بازه‌های زمانی: (۱) صفر تا t_1 (۲) t_1 تا t_2 (۳) t_2 تا t_3 ، فاصله متحرک از مبدأ مکان کمتر از ۸/۷۵ متر می‌باشد.

محاسبه t_1 : در بازه صفر تا t_1 متحرک با شتاب ثابت $a = -2/5 \frac{m}{s^2}$ و $v_1 = 10 \frac{m}{s}$ حرکت می کند پس داریم:

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_1t \xrightarrow[a=8/75]{a=-2/5, v_1=10} 8/75 = -1/25t_1^2 + 10t_1 \Rightarrow 35 = -5t_1^2 + 40t_1 \Rightarrow t_1^2 - 8t_1 + 7 = 0$$

$$\Rightarrow (t_1 - 1)(t_1 - 7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 1s \checkmark \\ t_1 = 7s \times \end{cases}$$

محاسبه t_2 : متحرک در بازه $6s$ تا t_2 با تندی ثابت $5 \frac{m}{s}$ حرکت کرده است. پس داریم:

$$x = vt + x_1 \xrightarrow[x=8/75]{v=-5 \frac{m}{s}, x_1=15} 8/75 = -5(t_2 - 6) + 15 \Rightarrow -5t_2 + 30 = -6/25 \Rightarrow t_2 = \frac{-36/25}{-5} = 7/25s$$

محاسبه t_3 : متحرک در بازه $10s$ تا t_3 با شتاب ثابت $2/5 \frac{m}{s^2}$ و سرعت اولیه $-5 \frac{m}{s}$ حرکت می کند. داریم: $(\Delta t = t_3 - 10)$

$$x = \frac{1}{2}a(\Delta t)^2 + v_1(\Delta t) + x_1 \xrightarrow[a=8/75]{a=+2/5, v_1=-5, x_1=-5} -8/75 = 1/25\Delta t^2 - 5\Delta t - 5$$

$$\Rightarrow 5\Delta t^2 - 20\Delta t + 15 = 0 \Rightarrow \Delta t^2 - 4\Delta t + 3 = 0 \Rightarrow (\Delta t - 1)(\Delta t - 3) = 0$$

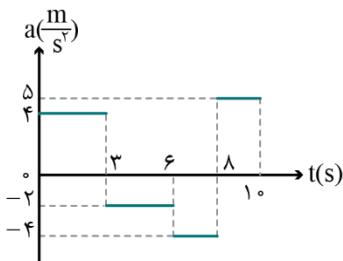
$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta t = 1 \Rightarrow t_3 - 10 = 1 \rightarrow t_3 = 11s \checkmark \\ \Delta t = 3 \Rightarrow t_3 - 10 = 3 \rightarrow t_3 = 13s \times \end{cases}$$

پس در مجموع متحرک در بازه های زمانی $(0, 1s)$ و $(7/25s, 10s)$ و $(10s, 11s)$ فاصله کمتر از $8/75$ متر با مبدأ محور دارد.

$$\text{مدت زمان کل} = 1s + 2/75s + 1s = 4/75s$$

گروه آموزشی ماز

۴۶- نمودار شتاب زمان متحرکی که روی محور x ها حرکت می کند، مطابق شکل زیر است. اگر جابه جایی متحرک در کل حرکت $15m$ در جهت محور x ها باشد، کدام عبارت صحیح است؟



(۴) فقط د

(۳) الف و د

(۲) ج و د

(۱) الف، ج، د

الف: تندی اولیه متحرک $4 \frac{m}{s}$ و در جهت محور x می باشد.

ب: مدت زمان حرکت تندشونده متحرک $1/4$ ثانیه بیشتر از زمان حرکت کندشونده است.

ج: سرعت متوسط در 6 ثانیه اول حرکت $3/5 \frac{m}{s}$ می باشد.

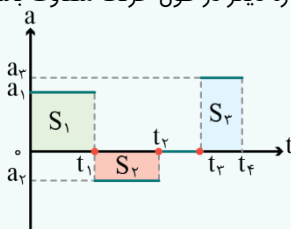
د: متحرک 3 بار در مدت زمان حرکت تغییر جهت می دهد.

(سخت - نموداری - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۲

نمودار شتاب-زمان

در حرکت با شتاب ثابت، نمودار شتاب - زمان خطی موازی محور زمان می باشد. اگر شتاب ثابت حرکت در هر بازه زمانی با بازه دیگر در طول حرکت متفاوت باشد، نمودار به شکل مقابل (پله ای) خواهد بود و مساحت زیر نمودار در هر بخش، با تغییرات سرعت در آن بازه زمانی برابر است:



$$\Delta v = +S_1 - S_2 + S_3$$

در بازه t_2 تا t_4 شتاب صفر است.

گام اول:

فرض کنیم که سرعت اولیه متحرک برابر v باشد پس در بازه های زمانی داده شده در نمودار داریم:

$$0 \rightarrow 3s : v \xrightarrow{\Delta t=3} v_{rs} = v + 12$$

$$3s \rightarrow 6s : v + 12 \xrightarrow{\Delta t=3s} v_{fs} = v + 6$$

$$6s \rightarrow 8s : v + 6 \xrightarrow{\Delta t=2s} v_{ls} = v - 2$$

$$8s \rightarrow 10s : v - 2 \xrightarrow{\Delta t=2s} v_{1s} = v + 8$$

گام دوم:

می توانیم در هر بازه زمانی جابه جایی متحرک را با روابط شتاب ثابت (در اینجا از مستقل از شتاب استفاده کرده ایم) به دست آوریم:

$$0 \rightarrow 3s : \Delta x_1 = \frac{v + v_{rs}}{2} \Delta t \Rightarrow \Delta x_1 = \frac{v + v + 12}{2} \times 3 = 3v + 18$$

$$3s \rightarrow 6s : \Delta x_2 = \frac{v_{rs} + v_{fs}}{2} \Delta t \Rightarrow \Delta x_2 = \frac{v + 12 + v + 6}{2} \times 3 = 3v + 27$$

$$6s \rightarrow 8s : \Delta x_3 = \frac{v_{fs} + v_{ls}}{2} \Delta t \Rightarrow \Delta x_3 = \frac{v + 6 + v - 2}{2} \times 2 = 2v + 4$$

$$8s \rightarrow 10s : \Delta x_4 = \frac{v_{ls} + v_{1s}}{2} \Delta t \Rightarrow \Delta x_4 = \frac{v - 2 + v + 8}{2} \times 2 = 2v + 6$$

مجموع جابه جایی هر بازه زمانی، برابر جابه جایی کل می باشد. پس در نتیجه داریم:

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 + \Delta x_4 \Rightarrow 15 = 10v + 55 \Rightarrow 10v = -40 \Rightarrow v = -4 \frac{m}{s} \quad (\text{رد عبارت «الف»})$$

گام سوم:

اکنون می توانیم نمودار سرعت - زمان متحرک را رسم کنیم:

$$(0, 1s), (3s, 6/5s), (8, 9/2s)$$

بازه زمانی کندشونده:

- در مجموع ۵/۷ ثانیه حرکت کندشونده می باشد.

$$(1s, 3s), (6/5s, 8s), (9/2s, 10s)$$

بازه زمانی تندشونده:

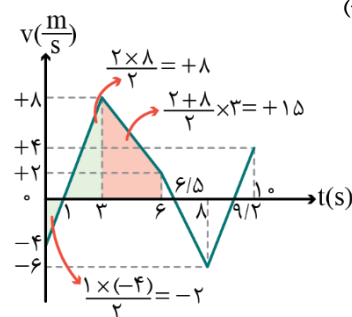
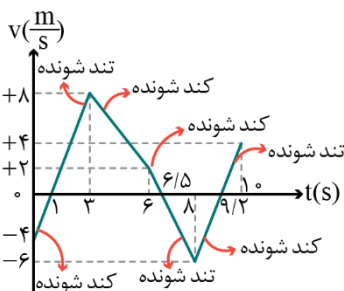
- در مجموع ۴/۳ ثانیه حرکت تندشونده می باشد.

می بینیم که مدت زمان حرکت کندشونده ۱/۴ ثانیه بیشتر از مدت زمان حرکت تندشونده می باشد. (رد عبارت «ب»)

متحرک در لحظات $t_1 = 1s$ ، $t_2 = 6/5s$ و $t_3 = 9/2s$ تغییر جهت داده است. (درستی عبارت «د»)

با توجه به نمودار $v-t$ ، جابه جایی متحرک در ۶ ثانیه اول حرکت برابر ۲۱ متر می باشد،

$$\text{پس } v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{21}{6} = 3.5 \frac{m}{s} \quad (\text{درستی عبارت «ج»})$$



گروه آموزشی ماز

۴۷- نمودار مکان - زمان متحرکی که با شتاب ثابت حرکت می کند، مطابق شکل زیر می باشد. اگر اندازه شیب خط مماس بر منحنی در لحظه t_1 برابر $24 \frac{m}{s}$

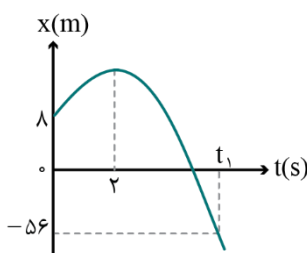
باشد، تندی متوسط متحرک در ۱۲ ثانیه اول حرکت چند $\frac{m}{s}$ می باشد؟

$$6 \quad (1)$$

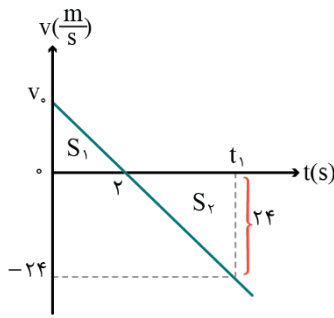
$$\frac{13}{6} \quad (2)$$

$$4 \quad (3)$$

$$\frac{52}{3} \quad (4)$$



با توجه به نمودار مکان - زمان متحرک، نمودار سرعت - زمان را رسم می کنیم.



گام دوم:

جابه جایی متحرک در بازه زمانی $t = 0$ تا t_1 برابر $-64m$ می باشد. در نمودار سرعت - زمان جابه جایی با مساحت زیر نمودار برابر است، پس داریم:

$$S_1 - S_2 = -64 \rightarrow \frac{v_0 \times 2}{2} - \frac{(t_1 - 2) \times 24}{2} = -64$$

$$\Rightarrow v_0 - 12(t_1 - 2) = -64 \quad (1)$$

همچنین از تشابه دو مثلث با مساحت های S_1 و S_2 داریم:

$$\frac{v_0}{24} = \frac{2}{(t_1 - 2)} \rightarrow v_0 = \frac{48}{(t_1 - 2)} \quad (2)$$

گام سوم:

از رابطه (۲)، سرعت اولیه (v_0) را در معادله (۱) قرار می دهیم:

$$\frac{48}{(t_1 - 2)} - 12(t_1 - 2) = -64 \Rightarrow 48 - 12(t_1 - 2)^2 = -64(t_1 - 2) \Rightarrow 2(t_1 - 2)^2 - 16(t_1 - 2) - 12 = 0$$

با استفاده از تغییر متغیر $(t_1 - 2) = A$ معادله را ساده تر می کنیم:

$$(t_1 - 2) = A \rightarrow 2A^2 - 16A - 12 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \rightarrow \Delta = (-16)^2 - 4(2)(-12) = 256 + 96 = 352 \Rightarrow A = \frac{16 \pm \sqrt{352}}{(2 \times 2)} = \frac{16 \pm 20}{4}$$

$$\rightarrow \begin{cases} A = 6 \rightarrow t_1 - 2 = 6 \rightarrow t_1 = 8s \checkmark \\ A = -\frac{2}{3} \rightarrow t_1 - 2 = -\frac{2}{3} \rightarrow t_1 = \frac{4}{3}s \times \end{cases}$$

با به دست آمدن t_1 می توان v_0 را نیز به دست آورد:

$$v_0 = \frac{48}{t_1 - 2} \xrightarrow{t_1 = 8} v_0 = \frac{48}{8 - 2} = 8 \frac{m}{s}$$

$$a = -4 \frac{m}{s^2}$$

و همچنین شتاب حرکت نیز برابر با شیب نمودار سرعت زمان می باشد:

گام سوم:

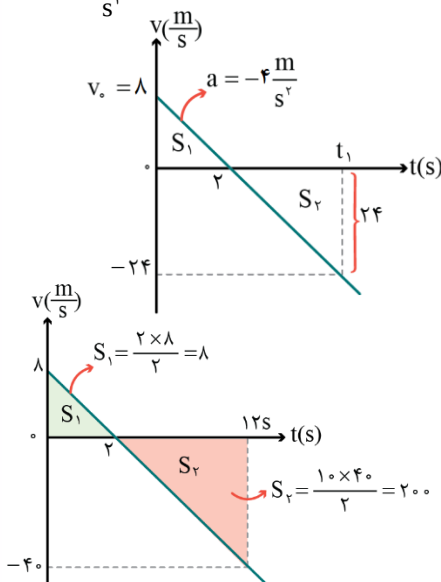
معادله $v - t$ (سرعت - زمان) متحرک به صورت مقابل می باشد:

$$v = at + v_0 \xrightarrow{a = -4, v_0 = 8} v = -4t + 8$$

برای به دست آوردن تندی متوسط متحرک در بازه زمانی $0s$ تا $12s$ با استفاده از نمودار $v - t$ داریم:

$$t = 12s \Rightarrow v = -4 \times 12 + 8 = -40 \frac{m}{s}, \quad L = |S_1| + |S_2| = 8 + 200 = 208m$$

$$\Rightarrow s_{av} = \frac{L}{\Delta t} = \frac{208m}{\Delta t = 12s} \rightarrow s_{av} = \frac{208}{12} = \frac{52}{3}$$



۴۸- اتومبیل A در جهت محور x با تندی ثابت $8 \frac{m}{s}$ در لحظه $t=0$ از مبدأ محور عبور می کند و پس از ۱۰ ثانیه حرکتش با شتاب ثابت $1 \frac{m}{s^2}$ کند می شود. اتومبیل B نیز در لحظه $t=4s$ با تندی اولیه $2 \frac{m}{s}$ در جهت محور x از مبدأ محور عبور می کند و حرکتش با شتاب ثابت $3 \frac{m}{s^2}$ تند می شود و پس از ۳ ثانیه با تندی ثابت به حرکت خود ادامه می دهد. در لحظه ای که دو متحرک در حرکت می باشند و فاصله دو اتومبیل به ۱۴ متر می رسد، اختلاف تندی اتومبیل ها چند متر بر ثانیه است؟

۴) ۶

۳) ۵

۲) ۴

۱) ۳

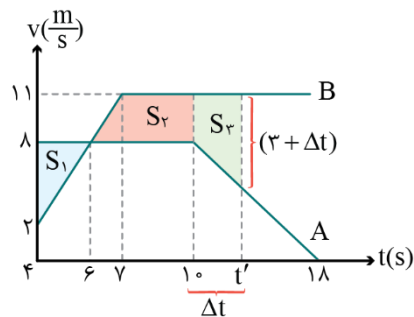
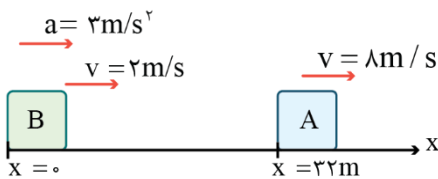
(سخت - محاسباتی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۴



گام اول:

با توجه به اینکه اتومبیل B با اختلاف زمانی ۴ ثانیه ای نسبت به اتومبیل A حرکت می کند، برای راحتی کار، می توانیم حرکت دو اتومبیل را پس از لحظه $t=4s$ بررسی کنیم و توجه کنیم که در مدت این ۴ ثانیه، متحرک A با تندی ثابت به اندازه $\Delta x = v\Delta t = 8 \times 4 = 32m$ حرکت کرده و از مبدأ محور دور شده است. پس از لحظه $t=4s$ به بعد که متحرک B نیز در حرکت می باشد، حرکت را بررسی کنیم. وضعیت قرارگیری دو اتومبیل در لحظه $t=4s$ به صورت زیر می باشد.



نمودار سرعت - زمان دو متحرک را از لحظه $t=4s$ به بعد رسم کنیم:

$$S_1 = \frac{2 \times 6}{2} = 6$$

$$S_2 = \frac{4+3}{2} \times 3 = 10.5$$

$$S_3 = \frac{(3+3+\Delta t)}{2} \times \Delta t = \frac{(6+\Delta t)}{2} \Delta t$$

دقت کنید که در لحظه $t=4s$ متحرک A، ۳۲ متر جلوتر از متحرک B می باشد. تا لحظه $t=6s$ این فاصله به ۳۸ متر افزایش می یابد و پس از این لحظه فاصله دو متحرک به مرور کاهش می یابد و در لحظه t' به ۱۴ متر می رسد. پس با توجه به مساحت های حساب شده داریم:

$$(32 + S_1) - (S_2 + S_3) = 14 \Rightarrow \frac{S_1=6, S_2=10.5}{S_3=\frac{(6+\Delta t)}{2} \Delta t} \Rightarrow 38 - 10.5 - \left(\frac{(6+\Delta t)}{2} \Delta t \right) = 14 \Rightarrow \frac{(6+\Delta t)}{2} \Delta t = 13/5$$

$$\Rightarrow 6\Delta t + \Delta t^2 = 27 \Rightarrow \begin{cases} \Delta t = 3s \checkmark \rightarrow t' = 13s \\ \Delta t = -9s \times \end{cases}$$

گام سوم:

با توجه به اینکه شتاب حرکت اتومبیل A از لحظه $10s$ به بعد، $(-1 \frac{m}{s^2})$ می باشد، پس داریم:

$$a_A = -1 = \frac{\Delta v}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t=3s} \Delta v = -3 \frac{m}{s} \Rightarrow v_A(t=13s) = 5 \frac{m}{s}$$

گام چهارم:

در لحظه $t'=13s$ ، تندی متحرک A برابر $5 \frac{m}{s}$ و تندی متحرک B برابر $11 \frac{m}{s}$ می باشد پس:

$$v_B - v_A = 11 - 5 = 6 \frac{m}{s}$$

گروه آموزشی ماز



۴۹- جسمی روی سطح افق در حال سکون قرار دارد. نیروی افقی F بر آن وارد می شود و به تدریج افزایش می یابد. وقتی اندازه نیروی F به ۲۵ N می رسد، جسم در آستانه حرکت قرار می گیرد. زمانی که F به اندازه ۳۰ N می رسد، شتاب جسم $\frac{m}{s^2}$ و به ازای $F = ۴۰\text{ N}$ شتاب جسم $\frac{m}{s^2}$ می شود. جرم جسم

چند کیلوگرم و $\frac{\mu_s}{\mu_k}$ کدام است؟ ($g = ۱۰ \frac{\text{N}}{\text{kg}}$ و μ_s و μ_k به ترتیب ضرایب اصطکاک ایستایی و جنبشی هستند)

(۴) ۱/۲۵، ۵

(۳) ۲/۵، ۵

(۲) ۲/۵، ۱۰

(۱) ۱/۲۵، ۱۰

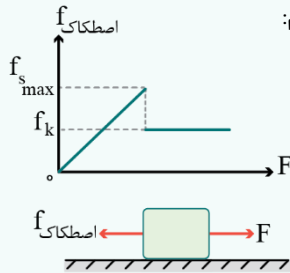
(متوسط - محاسباتی - ۱۲۰۲)

پاسخ: گزینه ۲

نیروی اصطکاک

نیروی اصطکاک وارد بر جسم به دو دسته تقسیم می شود: ۱- اصطکاک ایستایی ۲- اصطکاک جنبشی

اگر به جسم نیروی F که از صفر افزایش پیدا می کند وارد شود، نیروی اصطکاک وارد بر جسم مطابق نمودار مقابل می باشد که داریم:

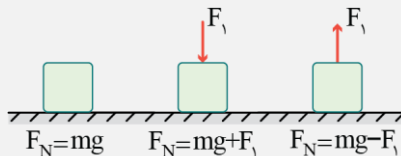


$$f_{s_{\max}} = \mu_s F_N$$

$$f_k = \mu_k F_N$$

نکته:

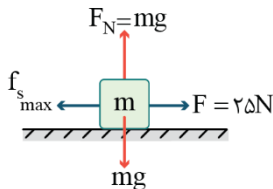
۱- دقت شود که F_N نیروی عمودی سطح می باشد که در شرایط متفاوت تغییر می کند.



۲- اصطکاک ایستایی فقط در حالت $f_{s_{\max}}$ (آستانه حرکت) رابطه مشخص دارد و در بقیه موارد با توجه به شرط تعادل مشخص می شود.

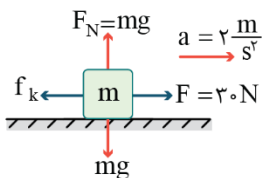
پاسخ شریقی:

در حالتی که به جسم نیروی $F = ۲۵\text{ N}$ وارد می شود، جسم در آستانه حرکت می باشد، پس داریم:

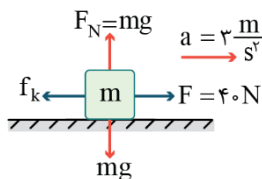


$$F_{\text{net}} = 0 \Rightarrow F - f_{s_{\max}} = 0 \Rightarrow F = f_{s_{\max}} = \mu_s F_N = \mu_s mg \quad (\text{I})$$

در حالت هایی که $F = ۳۰\text{ N}$ و $F = ۴۰\text{ N}$ می باشد جسم با شتاب ثابت حرکت می کند. پس داریم:



$$F_{\text{net}} = ma \Rightarrow F - f_k = ma \Rightarrow 30 - f_k = 3m \quad (\text{II})$$



$$F_{\text{net}} = ma \Rightarrow F - f_k = ma \Rightarrow 40 - f_k = 3m \quad (\text{III})$$

$$\xrightarrow{(\text{II}), (\text{III})} \begin{cases} 30 - f_k = 3m \\ 40 - f_k = 3m \end{cases} \Rightarrow m = 10\text{ kg}, f_k = 10\text{ N} \xrightarrow{f_k = \mu_k mg} 10 = \mu_k \times 100 \Rightarrow \mu_k = \frac{1}{10}$$

همچنین اکنون می توان از معادله (I)، μ_s را به دست آورد:

$$F = f_{s_{\max}} = \mu_s mg \xrightarrow{F=25\text{ N}, m=10\text{ kg}} 25 = \mu_s \times 100 \Rightarrow \mu_s = 0.25$$

خواسته سؤال را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{\mu_s}{\mu_k} = \frac{0.25}{0.1} = 2.5$$

گروه آموزشی ماز

۵۰- مطابق شکل دو گلوله به جرم $m_1 = 2\text{kg}$ و $m_2 = 2\text{kg}$ به ترتیب یکی در راستای قائم به طرف بالا و دیگری در راستای افق پرتاب می شوند. اگر نیروی مقاومت هوا (f_D) وارد بر دو گلوله، هم اندازه و همچنین اندازه نیروی خالص وارد بر دو گلوله با هم برابر باشد، اندازه نیروی f_D چند نیوتون است؟

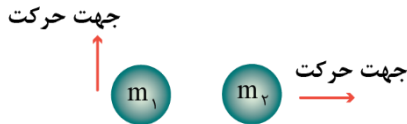
$$(g = 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}})$$

۵ (۱)

۱۲/۵ (۲)

۱۰ (۳)

۲۵ (۴)

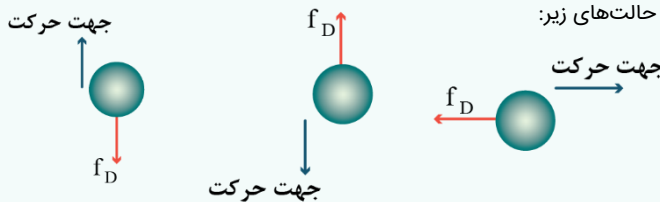


(متوسط - مفهومی و محاسباتی - ۱۲۰۲)

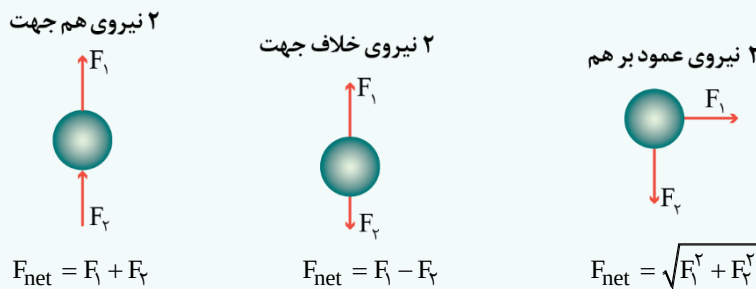
پاسخ: گزینه ۲

نیروی مقاومت شاره

۱- نیروی مقاومت شاره (f_D) همواره در خلاف جهت حرکت جسم می باشد مثلاً در حالت های زیر:

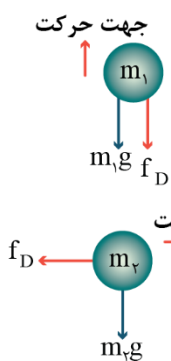


۲- برابند نیروهای وارد بر جسم (F_{net}) در سه حالت زیر به دست می آید:

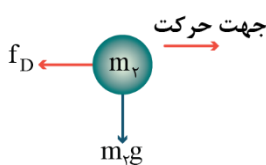


گام اول:

ابتدا نیروهای وارد بر دو گلوله را رسم می کنیم:



$$F_{net} = m_1g + f_D \xrightarrow{g=10 \frac{\text{N}}{\text{kg}}} F_{net} = 20 + f_D \quad (I)$$



$$F_{net} = \sqrt{f_D^2 + (m_2g)^2} \xrightarrow{g=10 \frac{\text{N}}{\text{kg}}} F_{net} = \sqrt{f_D^2 + 400} \quad (II)$$

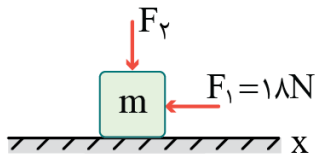
گام دوم:

معادله های (I) و (II) را با هم برابر قرار می دهیم:

$$\begin{aligned} (I), (II) \rightarrow 20 + f_D &= \sqrt{f_D^2 + 400} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 400 + f_D^2 + 40f_D = f_D^2 + 400 \\ \Rightarrow 40f_D &= 0 \Rightarrow f_D = 12.5\text{N} \end{aligned}$$

گروه آموزشی ماز

- ۵۱- مطابق شکل جسمی به جرم $m = 1 \text{ kg}$ را روی یک سطح افقی پرتاب می کنیم از در لحظه ای که سرعت جسم به $30 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ در جهت محور x می رسد، نیروهای قائم و افقی F_1 و F_2 به جسم وارد می شوند و اگر اندازه نیرویی که سطح افقی به جسم وارد می کند 20 N می شود، اختلاف زمانی دو لحظه ای که اندازه تکانه جسم به 15 واحد SI می رسد، چند ثانیه است؟ ($g = 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}}$, $\mu_s = \frac{4}{5}$, $\mu_k = \frac{3}{4}$)



(۱) ۲/۵

(۲) ۳/۵

(۳) ۲

(۴) ۳

(سخت - محاسباتی - ۱۴۰۲)

پاسخ: گزینه ۴

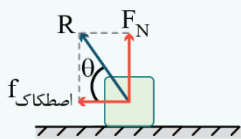
نیروی سطح

سطح یا تکیه گاهی که جسم روی آن ساکن یا در حال حرکت باشد دو نیرو به جسم وارد می کند:

۱- نیروی عمودی سطح

۲- نیروی اصطکاک

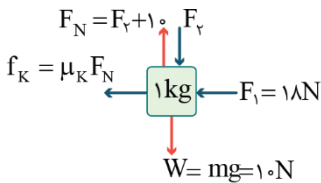
که این دو نیرو بر هم عمود می باشد و به برابری این دو نیرو، نیروی سطح یا تکیه گاه می گویند و با R نشان می دهند:



$$R = \sqrt{F_N^2 + (f_{\text{اصطکاک}})^2}, \quad \tan \theta = \frac{F_N}{f_{\text{اصطکاک}}}$$

گام اول:

ابتدا نیروهای وارد بر جسم را رسم کرده و نیروی F_2 را با توجه به نیرویی که سطح افقی به جسم وارد می کند، به دست می آوریم:



نیرویی که سطح به جسم وارد می کند از رابطه $R = \sqrt{F_N^2 + f_k^2}$ به دست می آید، پس می توان نوشت:

$$R = \sqrt{F_N^2 + f_k^2} \Rightarrow R = 20 \text{ N}, F_N = F_2 + 10 \Rightarrow 20 = \sqrt{(F_2 + 10)^2 + \left(\frac{3}{4}(F_2 + 10)\right)^2} \Rightarrow 20 = (F_2 + 10) \sqrt{1 + \frac{9}{16}}$$

$$\Rightarrow 20 = \frac{5}{4}(F_2 + 10) \Rightarrow F_2 + 10 = 16 \Rightarrow F_2 = 6 \text{ N}, F_N = 16 \text{ N}$$

گام دوم:

شتاب حرکت جسم را با استفاده از قانون دوم نیوتون به دست می آوریم:

$$F_{\text{net}} = ma \Rightarrow -F_1 - f_k = ma \Rightarrow -18 - \left(\frac{3}{4} \times 16\right) = 1 \times a \Rightarrow a = -3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

گام سوم:

تکانه جسم اگر 15 واحد SI باشد، پس یعنی تبدی جسم برابر $15 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ می باشد:

$$p = mv \xrightarrow{p=15, m=1} 15 = 1 \times v \Rightarrow v = 15 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

با توجه به شتاب جسم می توان نوشت:

$$v = at + v_0 \xrightarrow{a=-3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, v_0=30 \frac{\text{m}}{\text{s}}} v = -3 \cdot t + 30$$

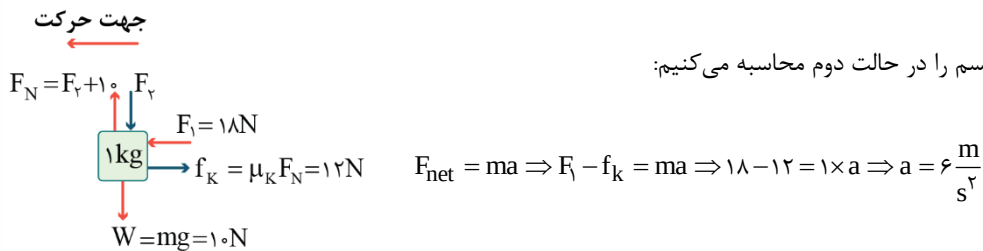
اگر سرعت جسم را $15 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ قرار دهیم، داریم:

$$15 = -3 \cdot t + 30 \Rightarrow t = 5 \text{ s}$$

پس بار اول در لحظه $t = 0 / 5s$ تکانه جسم 15 واحد SI می شود. دقت شود که جسم در لحظه $t = 1s$ متوقف می شود ولی از آنجا که نیروی افقی F_1 پس از توقف نیز به جسم وارد می شود و همچنین $F_1 > f_{s_{max}} = (\mu_s F_N) = (\frac{4}{5} \times 16) = 12 / 8N$ می باشد، پس جسم در خلاف جهت اولیه دوباره شروع به حرکت می کند که باید شتاب جدید حرکت را به دست آوریم، زیرا جهت اصطکاک عوض شده است.

گام چهارم:

با استفاده از قانون دوم نیوتون شتاب حرکت جسم را در حالت دوم محاسبه می کنیم:



✓ جسم با شتاب $6 \frac{m}{s^2}$ پس از گذشت $2 / 5s$ از لحظه توقف دوباره به تندی $15 \frac{m}{s}$ می رسد و اندازه تکانه آن 15 واحد SI می شود:

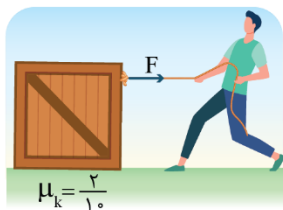
$$v = 15 \frac{m}{s} = 6t \Rightarrow 15 = 6t \Rightarrow t = 2 / 5s$$

توجه کنید که جسم ابتدا به مدت یک ثانیه در جهت محور X حرکت و سپس تغییر جهت داد و $2 / 5s$ پس از تغییر جهت دوباره به تندی $15 \frac{m}{s}$ رسید. پس نتیجه می گیریم که بار اول در لحظه $t_1 = 0 / 5s$ و سپس در لحظه $t_2 = 3 / 5s$ ، تکانه جسم به 15 واحد SI رسیده است.

$$\Delta t = 3 / 5 - 0 / 5 = 3s$$

گروه آموزشی ماز

۵۲- در شکل روبرو شخصی نیروی ثابت و افقی F را به صندوقی به جرم $150kg$ وارد می کند و صندوق با شتاب $2 \frac{m}{s^2}$ حرکت می کند. چند کیلوگرم از محتویات



درون صندوق کم کنیم تا با همین نیروی افقی F ، اندازه شتاب حرکت صندوق 40% درصد افزایش یابد؟ $(g = 10 \frac{N}{kg})$

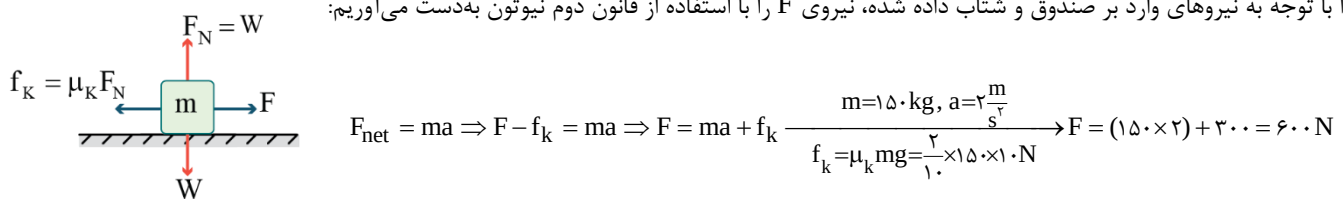
- (۱) ۱۲۵
(۲) ۹۰
(۳) ۶۰
(۴) ۲۵

(متوسط - محاسباتی - ۱۴۰۲)

پاسخ: گزینه ۴

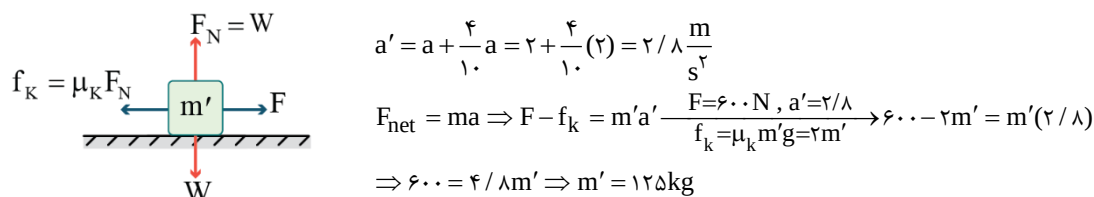
گام اول:

ابتدا با توجه به نیروهای وارد بر صندوق و شتاب داده شده، نیروی F را با استفاده از قانون دوم نیوتون به دست می آوریم:



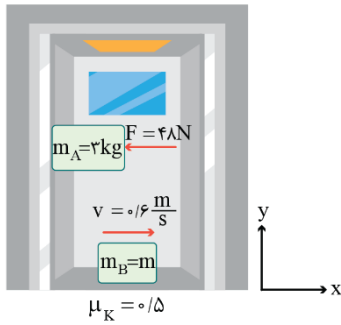
گام دوم:

در حالت جدید جرم صندوق تغییر می کند و شتاب نیز 40% درصد افزایش می یابد و می توانیم قانون دوم نیوتون را دوباره پس از رسم نیروهای وارد بر جسم بنویسیم:



جرم جسم از $150kg$ به $125kg$ کاهش یافته است و $25kg$ کاهش یافته است.

گروه آموزشی ماز



۵۳- مطابق شکل مقابل جسم A به جرم 2 kg توسط نیروی افقی F به دیواره آسانسوری که با شتاب ثابت در راستای قائم در حرکت است فشرده شده است و جسم نسبت به دیواره آسانسور ساکن است. نیرویی که دیواره آسانسور به جسم A وارد می کند با جهت مثبت محور y زاویه 53° درجه می سازد. در این حالت اگر جسم B به جرم m با تندی $\frac{6}{5}\text{ m/s}$ بر روی کف آسانسور در راستای x پرتاب شود، پس از طی مسافت

چند سانتی متر متوقف می شود؟ $(\sin 53^\circ = 0.8, g = 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}})$

۳ (۲)

۳/۶ (۱)

۴/۸ (۴)

۴/۵ (۳)

(سخت - مفهومی و محاسباتی - ۱۴۰۲)

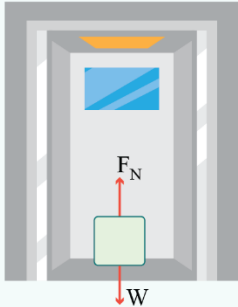
پاسخ: گزینه ۲



آسانسور



۱- در شکل زیر، نیروهای وارد بر جسمی که بر کف آسانسور قرار گرفته را نشان می دهد که به F_N نیروی عمودی تکیه گاه یا وزن ظاهری می گویند.



۲- هنگامی که شتاب حرکت آسانسور به سمت بالا باشد داریم:

$$F_{\text{net}} = ma \rightarrow F_N - W = ma \rightarrow F_N = W + ma$$

۳- هنگامی که شتاب حرکت آسانسور به سمت پایین باشد داریم:

$$F_{\text{net}} = ma \rightarrow W - F_N = ma \rightarrow F_N = W - ma$$

پس بطور کلی می توان گفت که:

$$F_N = W \pm ma$$

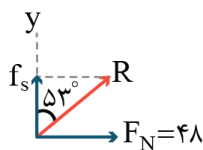
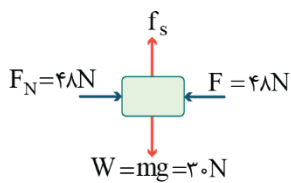
(-) شتاب به سمت پایین

(+) شتاب به سمت بالا

۴- به طور کلی در پرتاب جسم روی سطح، باید ابتدا شتاب جسم را با قانون دوم نیوتون به دست آوریم و سپس با استفاده از رابطه مستقل از زمان می توان مسافت طی شده جسم تا لحظه توقف را به دست آورد.

گام اول:

با توجه به اینکه آسانسور به صورت شتابدار حرکت می کند، ابتدا باید با استفاده از قانون دوم نیوتون برای جسم A شتاب حرکت آسانسور را به دست آوریم نیروهای وارد بر جسم A را مشخص می کنیم:



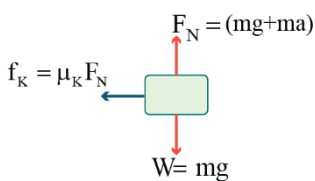
$$\tan 53^\circ = \frac{f_s}{F_N} = \frac{f_s}{48} \Rightarrow f_s = 36\text{ N}$$

$$(F_{\text{net}} = ma \rightarrow f_s - W = ma \Rightarrow 36 - 30 = 3a \Rightarrow 6 = 3a \Rightarrow a = +2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}) \text{ (شتاب به سمت بالا می باشد)}$$

گام دوم:

اکنون به سراغ جسم B می رویم قانون دوم نیوتون را اعمال می کنیم، فقط توجه داشته باشید که نیروی عمودی تکیه گاه وارد بر جسم B (F_N) به دلیل حرکت شتابدار آسانسور (شتاب به سمت بالا) به صورت $F_N = mg + ma$ می باشد:

جهت حرکت



$$F_{\text{net}} = ma' \rightarrow -f_k = ma' \Rightarrow -\mu_k F_N = ma' \Rightarrow -\frac{1}{2}(mg + ma) = ma'$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}(g + a) = a'$$

شتاب حرکت جسم B روی سطح افقی $\frac{m}{s^2}$ می باشد.

$$\frac{g = 10 \cdot \frac{m}{s^2}}{a = 2 \cdot \frac{m}{s^2}} \rightarrow -\frac{1}{2} (12) = a' \rightarrow a' = -6 \frac{m}{s^2}$$

گام سوم:

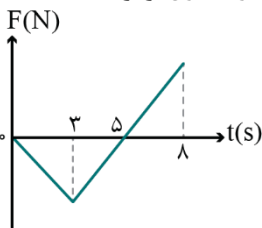
با استفاده از شتاب به دست آمده $(a' = -6 \frac{m}{s^2})$ و رابطه مستقل از زمان برای جسم B می توانیم مسافت توقف جسم را به دست آوریم:

$$v_2^2 - v_1^2 = 2a'\Delta x \xrightarrow{v_2=0, v_1=0.6 \frac{m}{s}} 0 - (0.6)^2 = 2(-6)\Delta x \Rightarrow -\frac{36}{100} = -12\Delta x \Rightarrow \Delta x = \frac{3}{100} m = 3 cm$$

گروه آموزشی ماز

۵۴- نمودار نیروی خالص وارد بر جسمی بر حسب زمان به شکل زیر است. اگر اندازه نیروی خالص متوسط وارد بر جسم در ۳s اول برابر با ۶N باشد، اندازه نیروی خالص متوسط وارد بر جسم در ۶ ثانیه اول، چند نیوتون است؟

- (۱) ۴/۵
(۲) ۹
(۳) ۵/۶
(۴) ۲/۵



(آسان - نموداری - ۱۲۰۲)

پاسخ: گزینه ۱

تغییرات تکانه و نمودار نیروی خالص-زمان

در نمودار نیروی خالص - زمان یک جسم، مساحت زیر نمودار برابر با تغییرات تکانه جسم (Δp) می باشد. دقت شود که علامت مساحت در این موارد مهم است. مثلاً در نمودار روبه رو داریم:

$$\Delta p = S_2 - S_1$$

گام اول:

نیروی خالص متوسط وارد بر جسمی از رابطه $F_{av} = \frac{\Delta p}{\Delta t}$ به دست می آید که Δp تغییرات تکانه جسم می باشد که با استفاده از مساحت محصور نمودار نیرو - زمان داده شده مشخص می شود.

اندازه نیروی خالص متوسط در ۳ ثانیه اول برابر ۶N می باشد، یعنی:

(مساحت مثلث هاشورخورده ۱۸ می باشد)

$$F_{av} = \frac{\Delta p}{\Delta t} \Rightarrow 6 = \frac{\Delta p}{3} \Rightarrow \Delta p = 18 \frac{kg \cdot m}{s}$$

$$\text{مساحت مثلث هاشورخورده} = \frac{3 \times F_1}{2} = 18 \Rightarrow F_1 = 12 N$$

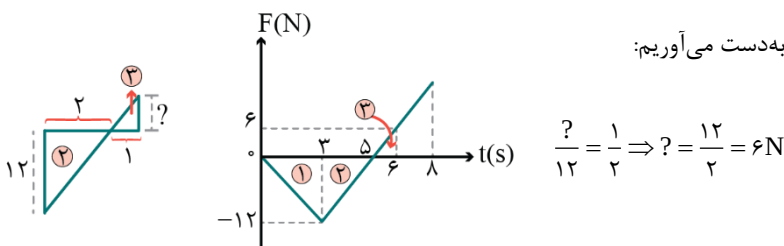
گام دوم:

برای به دست آوردن نیروی خالص متوسط در ۶ ثانیه اول می نویسیم:

$$F_{av} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{\Delta p}{6}$$

Δp : مساحت زیر نمودار از لحظه ۰ تا ۶s

با استفاده از تشابه مثلث های (۲) و (۳)، نیرو در لحظه ۶ ثانیه را به دست می آوریم:



$$\Delta p = S_r - (S_1 + S_r) = \left(\frac{1 \times 6}{2} \right) - \left(\frac{5 \times 12}{2} \right) = -27 \frac{\text{kg.m}}{\text{s}}$$

$$F_{av} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{-27}{6} = -4.5 \text{ N} \xrightarrow{\text{اندازه}} F_{net} = 4.5 \text{ N}$$

گروه آموزشی ماز

۵۵- اگر چگالی سیاره A، ۲ برابر چگالی زمین و شعاع آن $\frac{1}{8}$ شعاع زمین باشد، در چه ارتفاعی بر حسب کیلومتر از سطح زمین شتاب گرانش برابر با شتاب گرانش در سطح سیاره A می باشد؟ (شعاع زمین = ۶۴۰۰ km)

۱۲۸۰۰ (۴)

۱۹۲۰۰ (۳)

۶۴۰۰ (۲)

۳۲۰۰ (۱)

(متوسط - محاسباتی - ۱۲۰۲)

پاسخ: گزینه ۲



شتاب گرانش



به طور کلی شتاب گرانش در ارتفاع h از سطح سیاره ای به جرم m و شعاع R از رابطه زیر به دست می آید:

$$g_h = \frac{Gm}{(R+h)^2}$$

m: جرم سیاره

G: ثابت جهانی گرانش

h: ارتفاع از سطح سیاره

R: شعاع سیاره

پاسخ شریعی

شتاب گرانش در ارتفاع h از سطح زمین (سیاره ۱) باید با شتاب گرانش در سطح سیاره دیگر (سیاره ۲) برابر باشد.

$$\begin{cases} \text{شتاب گرانش در ارتفاع } h \text{ از سطح زمین} = \frac{Gm_1}{(R_1+h)^2} \\ \text{شتاب گرانش در سطح سیاره ۲} = \frac{Gm_2}{R_2^2} \end{cases} \Rightarrow \frac{m_1}{(R_1+h)^2} = \frac{m_2}{R_2^2} \xrightarrow{m=\rho V} \frac{\rho_1 V_1}{(R_1+h)^2} = \frac{\rho_2 V_2}{R_2^2}$$

$$\xrightarrow{V=\frac{4}{3}\pi R^3} \frac{\rho_1 \times \frac{4}{3}\pi R_1^3}{(R_1+h)^2} = \frac{\rho_2 \times \frac{4}{3}\pi R_2^3}{R_2^2} \xrightarrow{\rho_2=2\rho_1, R_2=\frac{1}{8}R_1} \frac{R_1^3}{(R_1+h)^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{R_1}{R_1+h} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 2R_1 = R_1 + h \Rightarrow R_1 = h$$

پس در ارتفاع h از سطح زمین که با شعاع زمین برابر می باشد، شتاب گرانش با شتاب گرانش سیاره مورد نظر در سؤال برابر است.

$$h = R_e = 6400 \text{ km}$$

گروه آموزشی ماز

۵۶- چه تعداد از عبارات زیر در مورد حرکت هماهنگ ساده الزاماً صحیح می باشد؟

الف: هنگامی که نوسانگر به صورت تندشونده حرکت می کند، شتاب نوسانگر به سمت مرکز نوسان می باشد.

ب: مسافت طی شده در هر بازه زمانی دلخواه $\Delta t = \frac{T}{4}$ ، برابر با دامنه نوسان می باشد.

ج: اگر مکان ذره منفی باشد و نیروی وارد بر آن مثبت باشد، حرکت کندشونده می باشد.

د: هنگامی که اندازه شتاب نوسانگر رو به افزایش است، انرژی پتانسیل نوسانگر بیشتر از انرژی جنبشی آن می باشد.

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

(آسان - مفهومی - ۱۲۰۳)

پاسخ: گزینه ۱



چند نکته مهم و پرتکرار درباره حرکت هماهنگ ساده



۱- هرگاه نوسانگر به سمت مرکز نوسان حرکت کند ← حرکت تندشونده

۲- هرگاه نوسانگر از مرکز نوسان دور شود ← حرکت کندشونده

۳- شتاب و مکان نوسانگر همواره مختلف‌الجهت هستند و $a = -\omega^2 x$

۴- جهت شتاب و نیروی وارد بر نوسانگر همواره به سمت مرکز نوسان می باشند.

۵- در هر دوره نوسان، نوسانگر مسافتی به اندازه ۴A طی می کند.



SanjeshCloud

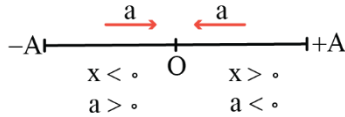
www.SanjeshCloud.ir

- ۶- انرژی جنبشی و پتانسیل نوسانگر در نقطه‌ای خاص از مسیر (بدون ضرر نداره $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} A$) با هم برابر می‌شود.
- ۷- تندی بیشینه نوسانگر در مرکز نوسان و شتاب بیشینه نوسانگر در نقاط بازگشت رخ می‌دهد.

$$v_{\max} = A\omega, \quad a_{\max} = A\omega^2$$

بررسی موارد

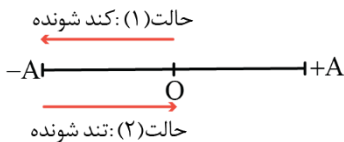
الف: در حرکت هماهنگ ساده، هرگاه نوسانگر به سمت مرکز نوسان حرکت کند، حرکت آن تندشونده می‌باشد. جهت بردار شتاب نوسانگر همواره با جهت بردار مکان نوسانگر مخالف است پس در نتیجه همواره جهت بردار شتاب به سمت مرکز نوسان است. (✓)



ب: در هر بازه زمانی دلخواه $\frac{T}{4}$ الزاماً مسافت طی شده با دامنه (A) برابر نیست. در شکل زیر یک حالت متفاوت را که بازه زمانی $\frac{T}{4}$ می‌باشد ولی مسافت (L) به اندازه A نمی‌باشد را می‌بینیم: (✗)

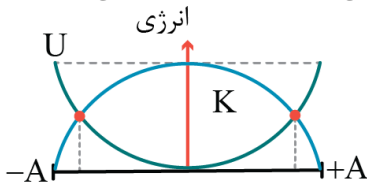


ج: نیروی خالص وارد بر نوسانگر (همانند شتاب) همواره با مکان نوسانگر مختلف‌العلامت می‌باشد. با توجه به اینکه مکان نوسانگر در عبارت منفی ذکر شده است پس نیروی وارد بر نوسانگر حتماً مثبت می‌باشد و با توجه به شکل زیر دو حالت را برای حرکت نوسانگر می‌توان در نظر گرفت:



پس الزامی ندارد که حتماً حرکت نوسانگر کندشونده باشد. (✗)

د: بیشترین اندازه شتاب نوسانگر در نقاط بازگشت می‌باشد، پس هرگاه نوسانگر به سمت نقاط بازگشت حرکت کند، اندازه شتاب آن افزایش می‌یابد. در این حالت الزاماً حرکت نوسانگر کندشونده می‌باشد و انرژی جنبشی آن کاهش می‌یابد و به انرژی پتانسیل آن افزوده می‌شود. با توجه به نمودار انرژی - مکان نوسانگر، در حرکت نوسانگر به سمت نقاط بازگشت، تا لحظه‌ای برابر شدن انرژی جنبشی با پتانسیل، انرژی جنبشی بیشتر از انرژی پتانسیل می‌باشد و پس از آن انرژی پتانسیل بیشتر می‌باشد. (✗)



گروه آموزشی ماز

۵۷- معادله حرکت هماهنگ ساده یک نوسانگر در SI به صورت $x = 0.2 \cos(10t)$ است. در لحظه‌ای که انرژی جنبشی نوسانگر ۲۵ درصد از انرژی پتانسیل آن بیشتر است، تندی نوسانگر چند سانتی‌متر بر ثانیه می‌باشد؟

$$\frac{400}{3} \quad (4)$$

$$\frac{40}{3} \quad (3)$$

$$\frac{200\sqrt{5}}{3} \quad (2)$$

$$\frac{20}{3}\sqrt{5} \quad (1)$$

(متوسط - محاسباتی - ۱۴۰۳)

پاسخ: گزینه ۲

انرژی در حرکت هماهنگ ساده

انرژی مکانیکی نوسانگر هماهنگ ساده در کل مسیر نوسان ثابت می‌باشد که همواره با جمع انرژی جنبشی (K) و انرژی پتانسیل (U) نوسانگر برابر می‌باشد:

$$E = K + U$$

نکته:

۱- انرژی جنبشی بیشینه ($K_{\max}$) و انرژی پتانسیل بیشینه ($U_{\max}$) با انرژی مکانیکی (E) برابر می‌باشند:

$$E = K_{\max} = U_{\max}$$

۲- انرژی جنبشی بیشینه از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$K_{\max} = \frac{1}{2} m v_{\max}^2 \xrightarrow{v_{\max} = A\omega} K_{\max} = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2$$

۳- بین انرژی جنبشی در هر لحظه و انرژی مکانیکی نوسانگر رابطه زیر برقرار است:

$$\frac{K}{E} = \frac{K}{U + K} = \left(\frac{v}{v_{\max}} \right)^2$$

پاسخ سریعی:

انرژی مکانیکی (E) نوسانگر در هر لحظه برابر است با:

$$E = K + U$$

و همچنین اندازه آن با $K_{\max}$ برابر است:

$$E = K_{\max} = \frac{1}{2} m v_{\max}^2 = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2$$

پس می توان نتیجه گرفت که:

$$E = K + U = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2$$

با توجه به اینکه انرژی جنبشی نوسانگر در هر لحظه از رابطه $K = \frac{1}{2} m v^2$ به دست می آید، پس داریم:

$$\frac{K}{E} = \frac{K}{K + U} = \frac{K = \frac{1}{2} m v^2}{K + U = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2} \rightarrow \frac{K}{K + U} = \left(\frac{v}{v_{\max}} \right)^2 \quad (I)$$

معادله مکان - زمان نوسانگر در SI به صورت $x = 0.2 \cos(10t)$ می باشد؛ یعنی $A = 0.2 \text{ m}$ و $\omega = 10 \left(\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)$ پس برای $v_{\max} = A\omega$ داریم:

$$v_{\max} = A\omega = \frac{2}{10} \times 10 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

همچنین در لحظه موردنظر انرژی جنبشی (K) نوسانگر ۲۵ درصد بیشتر از انرژی پتانسیل (U) آن می باشد، یعنی:

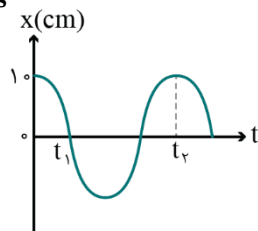
$$K = \frac{5}{4} U \Rightarrow U = \frac{4}{5} K \quad (II)$$

با جایگذاری عبارت (II) در معادله (I) داریم:

$$\frac{K}{K + \frac{4}{5} K} = \left(\frac{v}{v_{\max}} \right)^2 \xrightarrow{v_{\max} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}} \frac{5}{9} = \left(\frac{v}{2} \right)^2 \Rightarrow \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{v}{2} \Rightarrow v = \frac{2}{3} \sqrt{5} \frac{\text{m}}{\text{s}} = \frac{200}{3} \sqrt{5} \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

گروه آموزشی ماز

۵۸- نمودار مکان - زمان آونگ ساده ای که با دامنه کم نوسان می کند، مطابق شکل زیر است. اگر شتاب متوسط نوسانگر در بازه زمانی t_1 تا t_2 ، $\frac{m}{s} \cdot \frac{\pi}{6}$ باشد، طول آونگ چند سانتی متر است؟ $(g = \pi^2 \left(\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right))$



$$\begin{aligned} \frac{100}{9} & \quad (2) \\ \frac{50}{9} & \quad (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{9} & \quad (1) \\ \frac{1}{18} & \quad (3) \end{aligned}$$

(متوسط - نموداری - ۱۴۰۳)

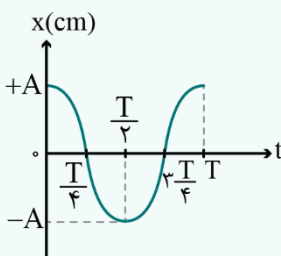
پاسخ: گزینه ۲



نمودار مکان-زمان نوسانگر هماهنگ ساده



نمودار مکان - زمان نوسانگر هماهنگ ساده به شکل زیر است:





نکته:

در آونگ ساده به طول L به روابط زیر نیازمندیم:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{L}}$$

گام اول:

شتاب متوسط از رابطه $a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ به دست می آید:

$$a_{av} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

در لحظه t_1 ، نوسانگر در مرکز نوسان قرار دارد، پس دارای تندی بیشینه می باشد ($v_{max} = A\omega$) توجه کنید که در لحظه t_1 ، جهت حرکت نوسانگر در خلاف جهت محور x می باشد و همچنین در لحظه t_2 چون نوسانگر در نقطه بازگشت قرار دارد پس تندی آن صفر می باشد.

اگر دوره نوسان را (T) در نظر بگیریم با توجه به نمودار مکان - زمان نوسانگر، $t_1 = \frac{T}{4}$ و $t_2 = \frac{4T}{4} = T$ می باشد. پس برای Δt داریم:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = T - \frac{T}{4} = \frac{3T}{4}$$

اکنون با جایگذاری در رابطه شتاب متوسط داریم:

$$a_{av} = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t = t_2 - t_1} = \frac{v_2 = 0, v_1 = -A\omega}{\Delta t = \frac{3T}{4}} \rightarrow a_{av} = \frac{0 - (-A\omega)}{\frac{3T}{4}} = + \frac{A\omega}{\frac{3T}{4}} = \frac{4}{3} \frac{A\omega}{T}$$

$$\frac{\omega = \frac{2\pi}{T}}{A = \frac{1}{10}m} \rightarrow a_{av} = \frac{4}{3} \times \frac{1}{10} \times \frac{2\pi}{T^2} \xrightarrow{a_{av} = 0.6\pi} \frac{8\pi}{3 \cdot T^2} = \frac{6}{10} \pi \Rightarrow T^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow T = \frac{2}{3}s$$

گام دوم:

با توجه به اینکه دوره تناوب آونگ ساده از رابطه $T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$ به دست می آید، بنابراین:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \xrightarrow{\frac{T=2}{3}s}} \frac{2}{3} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{\pi^2}} \Rightarrow L = \frac{1}{9}m = \frac{10}{9}cm$$

گروه آموزشی ماز

۵۹- مطابق شکل مقابل، به انتهای فنر با ثابت $50 \frac{N}{m}$ ، جسمی به جرم $m = 50g$ آویزان است و مجموعه در حال تعادل می باشد. جسم را به آرامی $10cm$ از

این حالت به سمت پایین می کشیم و در لحظه $t = 0$ رها می کنیم. نیروی کشش فنر در لحظه $t = 0.6s$ چند نیوتون می باشد؟ ($\pi^2 \approx 10, g = 10 \frac{N}{kg}$)



- (۱) $2/5$
- (۲) $4/5$
- (۳) $5/5$
- (۴) صفر

(متوسط - محاسباتی - ۱۲۰۳)

پاسخ: گزینه ۳



نکته:

۱- در سیستم نوسانی جرم - فنر، بسامد زاویه ای از رابطه $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ به دست می آید که k (ثابت فنر) و m (جرم وزنه متصل به فنر) می باشد.

۲- معادله حرکت (مکان - زمان) حرکت نوسان هماهنگ ساده از رابطه $x = A \cos(\omega t)$ به دست می آید.

پاسخ تشریحی:

ابتدا توجه کنید که وقتی که جسم به تعادل رسید اگر $10cm$ وزنه را پایین بکشیم و رها کنیم یعنی جسم با دامنه $10cm$ نوسان هماهنگ ساده در راستای قائم انجام می دهد.

گام اول:

ابتدا بسامد زاویه‌ای (ω) نوسان را پیدا کنیم و سپس معادله مکان - زمان نوسانگر را بنویسیم:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad k = \frac{\Delta \cdot N}{\Delta \cdot g} \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{\Delta \cdot N}{\Delta \cdot g \cdot m}} = \sqrt{1000} = 10\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

معادله مکان - زمان نوسانگر به صورت $y = A \cos(\omega t)$ می‌باشد: ($A = 10 \text{ cm} = 0.1 \text{ m}$, $\omega = 10\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$)

$$y = 0.1 \cos(10\pi t)$$

گام دوم:

با توجه به زمان‌های داده شده، مکان نوسانگر را به دست می‌آوریم:

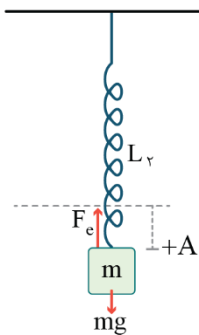
$$t_1 = \frac{6}{10} \text{ s} \Rightarrow x = 0.1 \cos(10\pi(\frac{6}{10})) = +0.1 \text{ m}$$

جسم در مکان $(+A)$ می‌باشد.

گام سوم:

اندازه نیروی خالص وارد بر نوسانگر در مکان $y = +A$ بیشینه است و برابر است با:

$$F_{\text{max}} = mA\omega^2 \Rightarrow F_{\text{max}} = \Delta \times 10^{-3} \times 0.1 \times (10\pi)^2 = 0.5\pi^2 \text{ N} \approx \Delta \text{ N}$$



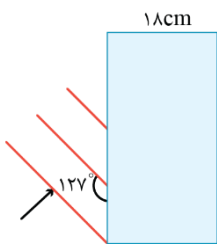
این نیرو برایند نیروی وزن و نیروی کشش فنر است، بنابراین داریم:

$$F_e - mg = \Delta \Rightarrow F_e - \Delta \times 10^{-3} \times 10 = \Delta \Rightarrow F_e = 5/5 \text{ N}$$

گروه آموزشی ماز

۶۰- مطابق شکل زیر جبهه‌های موج نوری از هوا وارد محیط شفاف می‌شود و می‌شکند. اگر این موج در مدت زمان 0.96 ns از محیط شفاف خارج شود،

ضریب شکست محیط شفاف کدام است؟ ($c = 3 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ و $\sin 37^\circ = 0.6$)



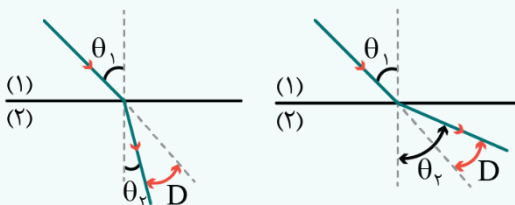
- (۱) $\frac{4}{3}$
- (۲) $\frac{1}{6\sqrt{2}}$
- (۳) $\frac{0.18\sqrt{2}}{1}$
- (۴) $\frac{1}{6}$

(متوسط - محاسباتی - ۱۳۰۳)

پاسخ: گزینه ۳

شکست موج

اگر پرتو نوری از محیط (۱) به محیط (۲) به صورت مایل وارد شود روابط زیر از قانون عمومی شکست و روابط اسنل به دست می‌آید و مسیر پرتو موج نیز یکی از دو حالت روبه‌رو خواهد بود:



$$\frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{n_1}{n_2}$$

زاویه تابش: θ_1

زاویه شکست: θ_2

زاویه انحراف: $D = |\theta_2 - \theta_1|$

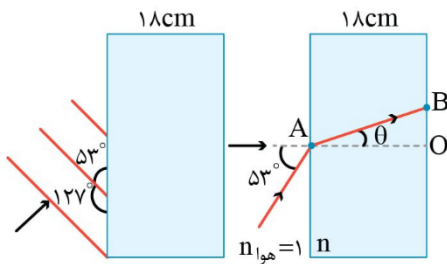
نکته:

- ۱- پرتو موج، اگر به محیطی وارد شود که تندی آن کاهش یابد به خط عمود نزدیک می‌شود و بلعکس.
- ۲- زاویه‌ای که جبهه موج تابش و شکست با سطح جدایش دو محیط می‌سازد، همان زاویه تابش و شکست می‌باشند.

زاویه‌ای که جبهه موج با سطح تیغه شیشه‌ای می‌سازد، همان زاویه تابش می‌باشد که پرتو موج با خط عمود بر سطح جدایش هوا و تیغه شیشه‌ای می‌سازد و برای راحتی کار به جای جبهه موج از پرتو موج استفاده می‌کنیم و همچنین برای به دست آوردن خواسته سؤال، به طول مسیر پرتو در تیغه شیشه‌ای نیازمندیم

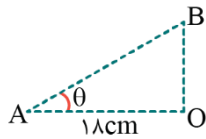
چون زمان طی شده در تیغه از رابطه $\Delta t = \frac{L_{AB}}{v}$ به دست می‌آید.

با توجه به رابطه اسنل برای تندی‌ها در محیط داریم:



$$\frac{v}{c} = \frac{\sin \theta}{\sin 53^\circ} \Rightarrow \frac{\sin 53^\circ = 0.8}{c = 3 \times 10^8 \frac{m}{s}} \rightarrow v = \frac{10}{18} \times 3 \times 10^8 \sin \theta = \frac{5}{3} \times 10^8 \sin \theta$$

طول مسیر AB (L_{AB}) را بر حسب زاویه θ به دست می‌آوریم، به همین منظور با توجه به مثلث روبرو داریم:



$$\cos \theta = \frac{18}{L_{AB}} \Rightarrow L_{AB} = \left(\frac{18}{\cos \theta} \right) \text{cm} = \frac{18}{\cos \theta} \times 10^{-2} \text{m}$$

طبق رابطه $\Delta t = \frac{L_{AB}}{v}$ داریم:

$$\Delta t = \frac{L_{AB}}{v} = \frac{\frac{18}{\cos \theta} \times 10^{-2}}{\frac{5}{3} \times 10^8 \sin \theta} \rightarrow \Delta t = \frac{18 \times 10^{-2}}{\frac{5}{3} \times 10^8 \sin \theta \cos \theta} = 0.96 \times 10^{-9}$$

$$\Rightarrow \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin 2\theta = 1 \Rightarrow \theta = 45^\circ$$

طبق رابطه اسنل داریم:

$$\frac{\sin 53^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{n}{n_{\text{هوا}}} \Rightarrow \frac{\frac{4}{5}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{n}{1} \Rightarrow n = 0.8\sqrt{2}$$

گروه آموزشی ماز

۶۱- شکل زیر یک نقش موج عرضی را در لحظه $t=0$ نشان می‌دهد که در ریسمانی با چگالی خطی $5 \frac{g}{cm}$ و نیروی کشش $200N$ در حال انتشار است. چند

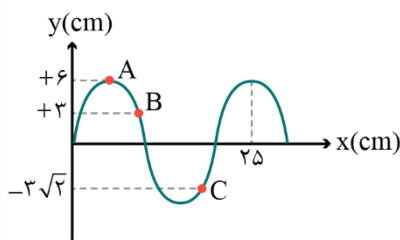
مورد از عبارت‌های زیر الزاماً صحیح است؟

الف: در لحظه $t=0$ ، شتاب ذره A برابر $\vec{j} \left(\frac{m}{s^2} \right) - 2400\pi^2$ است.

ب: در لحظه $t = \frac{1}{800} s$ ، تندی ذره C برابر $12\pi \left(\frac{m}{s} \right)$ می‌باشد.

ج: مسافت طی شده ذره B در مدت زمان $0.05 s$ ، برابر $120 cm$ می‌باشد.

د: انرژی جنبشی ذره C در لحظات $t=0$ و $t = \frac{1}{400} s$ با هم برابر است.



۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

(متوسط - نموداری - ۱۴۰۳)

پاسخ: گزینه ۳

نقش موج

در نمودار نقش موج، باید بتوانیم طول موج (λ) را تشخیص دهیم و همچنین جهت حرکت هر ذره خاص از محیط را تعیین کنیم. به چند نکته زیر دقت کنید:

۱- تندی انتشار موج در ریسمان کشیده شده با نیروی F و چگالی خطی μ ، تندی انتشار از رابطه زیر به دست می‌آید:

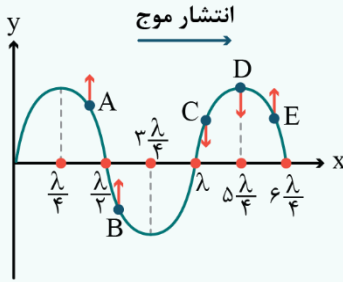
$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

۲- هر ذره از محیط، سعی بر این دارد که به وضعیت ذره‌های قبل از خود برسد. می‌توان گفت هر ذره به ذره‌هایی که خلاف جهت حرکت موج می‌باشند می‌نگرد.

۳- رابطه بین v (تندی انتشار)، λ (طول موج) و T (دوره) به صورت زیر است:

$$\lambda = Tv \rightarrow T = \frac{\lambda}{v}$$

به نمودار نقش موج مقابل و جهت حرکت ذرات مشخص شده و همچنین مکان ها بر حسب λ دقت کنید:



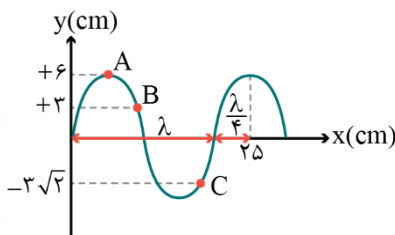
پاسخ تشریحی:

تندی انتشار موج در ریسمان را به دست می آوریم:

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{F}{\frac{m}{L}}} \rightarrow v = \sqrt{\frac{200}{0.5}} = \sqrt{400} = 20 \frac{m}{s}$$

برای بررسی عبارات داده شده نیازمند به دست آوردن دوره (T) برای موج می باشیم که از رابطه $T = \frac{\lambda}{v}$ به دست می آید.

با توجه به نمودار نقش موج داریم:



$$\lambda + \frac{\lambda}{4} = \frac{5}{4}\lambda = 25 \text{ cm} \Rightarrow \lambda = 20 \text{ cm} = 0.2 \text{ m}$$

$$\Rightarrow T = \frac{\lambda}{v} = \frac{0.2}{20} = \frac{1}{100} \text{ s} \xrightarrow{\omega = \frac{2\pi}{T}} \omega = 200\pi \left(\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)$$

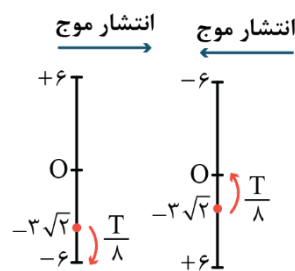
بررسی موارد:

اکنون به بررسی عبارات داده شده می پردازیم:

الف: در لحظه $t = 0$ ذره A در مکان A+ قرار دارد، پس دارای شتاب بیشینه می باشد. دقت کنید که مکان ذره A مثبت است، پس شتاب آن منفی می باشد.

$$a_{\max} = -A\omega^2 (\vec{j}) \xrightarrow{A=0.06 \text{ m}, \omega=200\pi} a_{\max} = -\frac{6}{100} (200\pi)^2 (\vec{j}) = -2400\pi^2 (\vec{j}) \quad (\checkmark)$$

ب: لحظه $t = \frac{1}{100} \text{ s}$ معادل با $\frac{T}{\lambda}$ می باشد، پس ذره C پس از گذشت زمان $\frac{T}{\lambda}$ ، با توجه به انتشار موج یکی از دو مکان زیر را خواهد داشت:



پس می بینیم که اگر موج در خلاف جهت محور انتشار یابد ذره C پس از گذشت زمان $\frac{T}{\lambda}$ در مرکز نوسان قرار

می گیرد و تندی آن بیشینه $(v_{\max} = A\omega = \frac{6}{100} \times 200\pi = 12\pi \frac{\text{m}}{\text{s}})$ می شود و اگر در جهت محور انتشار یابد

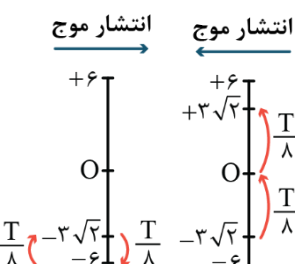
تندی آن صفر می شود پس عبارت «ب» الزاماً صحیح نیست. (*)

ج: در مدت زمان $\Delta t = 0.5 \text{ s}$ تمام ذرات روی ریسمان 5 نوسان $(n = \frac{\Delta t}{T} = \frac{0.5}{0.1} = 5)$ انجام می دهند. در هر دوره نوسانی کامل، هر ذره مسافتی به اندازه

$L = 4A$ را طی می کند، پس در مدت زمان داده شده داریم:

$$L = 5(4A) = 20A \xrightarrow{A=0.06 \text{ m}} L = 1.2 \text{ m} = 120 \text{ cm} \quad (\checkmark)$$

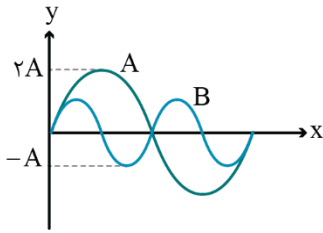
د: در لحظه $t = \frac{1}{400} \text{ s}$ معادل با $\frac{T}{4}$ می باشد ذره C با توجه به جهت انتشار موج دو حالت زیر را خواهد داشت:



در هر دو حالت فاصله نوسانگر از مرکز نوسان یکسان است و با توجه به نمودار انرژی جنبشی - مکان نوسانگر

در هر دو حالت انرژی جنبشی آن یکسان است و با انرژی جنبشی نوسانگر در لحظه $t = 0$ برابر می باشد. (*)

۶۲- نمودار جابه جایی - مکان دو موج صوتی A و B که در دو محیط متفاوت منتشر می شوند، مطابق شکل زیر است. اگر تندی انتشار موج صوتی A دو برابر موج B باشد، در این صورت اختلاف تراز شدت صوت که به گوش شنونده ای که در فاصله یکسان از چشمه های موج A و B قرار دارد می رسد، برابر با چند دسی بل است؟ ($\log 2 = 0.3$)



- (۱) ۶
(۲) ۳
(۳) صفر
(۴) ۱۲

(متوسط - نموداری - ۱۴۰۳)

پاسخ: گزینه ۱

تراز شدت صوت

اختلاف تراز شدت صوت موج صوتی A و B که توسط شنونده ای دریافت می شود به صورت زیر می باشد:

$$\beta_A - \beta_B = 10 \log \left(\frac{I_A}{I_B} \right)$$

توجه: شدت صوت (I) با مربع بسامد (f^2) و مربع دامنه (A^2) رابطه مستقیم و با مربع فاصله از چشمه (r^2) رابطه عکس دارد. پس می توان برای نسبت نوشت:

$$\frac{I_A}{I_B} = \left(\frac{A_A}{A_B} \right)^2 \left(\frac{f_A}{f_B} \right)^2 \left(\frac{r_B}{r_A} \right)^2$$

گام اول:

برای به دست آوردن اختلاف تراز شدت صوت دریافتی شنونده از دو منبع A و B داریم:

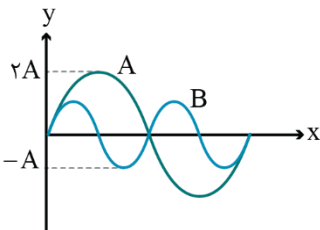
$$\beta_A - \beta_B = 10 \log \frac{I_A}{I_B} \quad (I)$$

گام دوم:

توجه کنید که برای نسبت $\frac{I_A}{I_B}$ نیز داریم:

$$\frac{I_A}{I_B} = \left(\frac{A_A}{A_B} \right)^2 \left(\frac{f_A}{f_B} \right)^2 \left(\frac{r_B}{r_A} \right)^2$$

همچنین با توجه به نمودار جابه جایی - مکان داده شده برای دو موج صوتی داریم:



$$\frac{A_A}{A_B} = \frac{2A}{A} = 2 \quad (II)$$

$$\lambda_A = 2\lambda_B \xrightarrow{\lambda = \frac{v}{f}} \frac{v_A}{v_A = 2v_B} = 2 \frac{v_B}{f_B} \xrightarrow{v_A = 2v_B} \frac{1}{f_A} = \frac{1}{f_B} \Rightarrow \frac{f_A}{f_B} = 1 \quad (III)$$

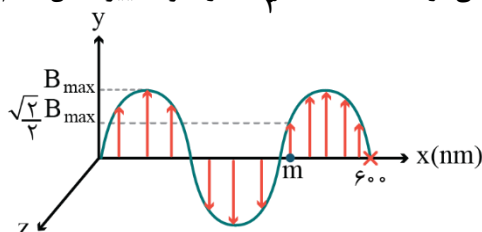
گام سوم:

با توجه به روابط (I) و (II) و (III) و اینکه $r_A = r_B$ داریم:

$$\beta_A - \beta_B = 10 \log \left(\left(\frac{A_A}{A_B} \right)^2 \left(\frac{f_A}{f_B} \right)^2 \left(\frac{r_B}{r_A} \right)^2 \right) = 10 \log ((2)^2 (1)^2 (1)^2) = 10 \log 2^2 = 20 \log 2 = 6 \text{ dB}$$

گروه آموزشی ماز

۶۳- شکل زیر، تصویر میدان مغناطیسی یک موج الکترومغناطیسی را در لحظه $t = 0$ نشان می دهد که در امتداد محور y نوسان می کند. اگر در این لحظه، بزرگی میدان مغناطیسی در نقطه m در حال کاهش باشد، جهت بردار میدان الکتریکی در لحظه $t = \frac{1}{3} \times 10^{-15} \text{ s}$ و نحوه تغییرات آن کدام



است؟ ($c = 3 \times 10^8 \frac{\text{km}}{\text{s}}$)

- (۱) +z و در حال افزایش
(۲) +z و در حال کاهش
(۳) -z و در حال افزایش
(۴) -z و در حال کاهش

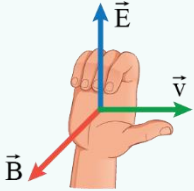
امواج الکترومغناطیسی

امواج الکترومغناطیسی از میدان‌های عمود بر هم الکتریکی (E) و مغناطیسی (B) ایجاد می‌شوند که این دو میدان خود بر جهت انتشار موج (v) عمود هستند. چند نکته مهم در مورد امواج الکترومغناطیسی:

۱- تندی انتشار تمامی امواج الکترومغناطیسی در خلأ یکسان است و از رابطه $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ به دست می‌آید.

۲- میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی به صورت هم‌فاز با هم تغییر می‌کنند.

۳- جهت انتشار موج الکترومغناطیسی (v) با استفاده از قاعده دست راست به دست می‌آید:



گام اول:

با توجه به نمودار میدان مغناطیسی، ابتدا طول موج (λ) و سپس دوره (T) را به دست می‌آوریم:

$$\frac{3\lambda}{2} = 600 \text{ nm} \Rightarrow \lambda = 400 \text{ nm} = 4 \times 10^{-7} \text{ m}$$

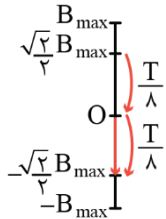
$$T = \frac{\lambda}{c} = \frac{4 \times 10^{-7}}{3 \times 10^8} = \frac{4}{3} \times 10^{-15} \text{ s}$$

گام دوم:

بازه زمانی $t = 0$ تا $t = \frac{1}{3} \times 10^{-15} \text{ s}$ معادل است با $\frac{T}{4}$ چون:

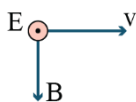
$$\frac{\Delta t}{T} = \frac{\frac{1}{3} \times 10^{-15}}{\frac{4}{3} \times 10^{-15}} = \frac{1}{4}$$

با توجه به اینکه اندازه میدان مغناطیسی کاهش می‌یابد پس موج در جهت محور X منتشر می‌شود و میدان مغناطیسی در نقطه m پس از گذشت $\frac{T}{4}$ دوره به صورت زیر خواهد بود:



پس از لحظه $t = \frac{1}{3} \times 10^{-15} \text{ s}$ ، میدان مغناطیسی به تدریج به سمت $-B_{\text{max}}$ می‌رود و اندازه آن افزایش می‌یابد، بنابراین اندازه میدان الکتریکی نیز که هم‌فاز با میدان مغناطیسی تغییر می‌کند، در حال افزایش خواهد بود.

برای به دست آوردن میدان الکتریکی در لحظه $\frac{T}{4}$ با استفاده از قاعده دست راست داریم:

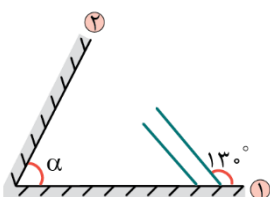


میدان الکتریکی به صورت برون‌سو (در جهت محور Z) می‌باشد.

گروه آموزشی ماز

۶۴- مطابق شکل زیر جبهه‌های موج تخت ابتدا به آینه (۱) و پس از بازتاب به آینه (۲) می‌تابند. اگر زاویه جبهه موج بازتاب شده از آینه (۲) با سطح آینه ۳۵ درجه باشد، زاویه بین دو آینه چند درجه است؟

- ۹۵ (۱)
- ۷۵ (۲)
- ۸۵ (۳)
- ۸۰ (۴)



(آسان - مفهومی و محاسباتی - ۱۲۰۳)

پاسخ: گزینه ۳

نکته:

در سؤالات بازتاب امواج نوری از آینه به چند نکته توجه کنیم:

۱- همواره زاویه تابش و بازتاب با هم برابر هستند.

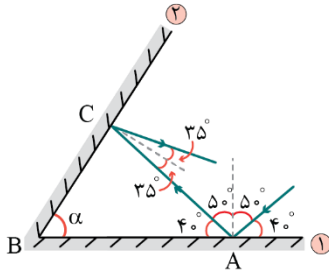
۲- زاویه جبهه موج نوری با سطح آینه همان زاویه تابش (بازتاب) می باشد.

پاسخ تشریحی:

زاویه جبهه موج تابش با سطح آینه (۱) $(180^\circ - 130^\circ = 50^\circ)$ همان زاویه تابش و زاویه جبهه موج بازتاب از سطح آینه (۲) همان زاویه بازتاب خواهد بود. پس می توانیم شکل داده شده را به صورت مقابل به وسیله پرتوهای موج رسم کنیم:

در مثلث ABC مجموع زوایای داخلی 180° می باشد، پس می توان نوشت:

$$\alpha + 40^\circ + 55^\circ = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 85^\circ$$



گروه آموزشی ماز

۶۵- الکترون اتم هیدروژنی در تراز $n=5$ قرار دارد. فرض کنید فقط گذارهای $\Delta n=1$ مجاز باشند. در این صورت اختلاف بسامد پیرانرژی ترین فوتون و

کم انرژی ترین فوتون گسیلی تقریباً چند تراهرتز است؟ ($E_R = 13/6 \text{ eV}$, $h = 4 \times 10^{-15} \text{ eV.s}$)

۲۴۷۲/۵ (۴)

۲۴۹۰ (۳)

۲۰۵۰ (۲)

۷۱۵ (۱)

(آسان - محاسباتی - ۱۲۰۴)

پاسخ: گزینه ۴

مدل اتمی بور

بور مدل اتمی خود را بر اصول و مفروضات زیر مطرح کرد:

۱- مدارها و انرژی های الکترون در هر اتم کوانتیده اند؛ یعنی فقط مدارها و انرژی های گسسته معینی مجاز هستند. طبق مدل اتمی بور شعاع مدار دو اتم هیدروژن و

انرژی الکترون در هر مدار از روابط زیر قابل محاسبه هستند:

$$r_n = a \cdot n^2$$

شعاع مدارهای الکترون برای اتم هیدروژن

$$E_n = \frac{-13/6}{n^2}$$

ترازهای انرژی الکترون در اتم هیدروژن

n : شماره مدار الکترون دور هسته

$$a = 5/29 \times 10^{-11} \text{ m}$$

۲- وقتی الکترون در یکی از مدارهای مجاز است، هیچ نوع تابش الکترومغناطیسی گسیل نمی شود، از این رو گفته می شود الکترون در مدار مانا یا حالت مانا قرار دارد.

۳- الکترون می تواند از یک حالت مانا به یک حالت مانای دیگر برود. هنگام گذار الکترون از یک حالت مانا با انرژی بیشتر E_U به یک حالت مانا با انرژی کمتر E_L ، یک فوتون تابش می شود. در این صورت انرژی فوتون تابش شده برابر اختلاف انرژی بین دو مدار اولیه و مدار نهایی است. یعنی:

$$E_U - E_L = hf$$

نکته: با توجه به مدل بور انرژی الکترون در لایه های مختلف اتم هیدروژن به صورت شکل زیر است:

$$\begin{aligned} n = \infty & E_\infty = 0 \\ n = 5 & E_5 = -0.54 \text{ eV} \\ n = 4 & E_4 = -0.85 \text{ eV} \\ n = 3 & E_3 = -1.51 \text{ eV} \\ n = 2 & E_2 = -3.4 \text{ eV} \\ n = 1 & E_1 = -13.6 \text{ eV} \end{aligned}$$

توجه مهم: برای جواب دادن به تست ها با سرعت بالا، حفظ بودن اعداد فوق بسیار کمک کننده خواهد بود.

مثلاً اگر الکترون از مدار $n=4$ به مدار $n=1$ بیاید، یک فوتون تابش می کند که انرژی آن (hf) به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\begin{aligned} E_4 &= -0.85 \text{ eV} \\ E_1 &= -13.6 \text{ eV} \end{aligned}$$

فوتون

$$\text{انرژی فوتون آزاد شده} = hf = E_U - E_L = -0.85 - (-13.6) = 12.75 \text{ eV}$$

$$n=5 \quad \text{---} \quad -0.54 \text{ eV}$$

$$n=4 \quad \text{---} \quad -0.85 \text{ eV}$$

$$n=3 \quad \text{---} \quad -1.51 \text{ eV}$$

$$n=2 \quad \text{---} \quad -3.4 \text{ eV}$$

$$n=1 \quad \text{---} \quad -13.6 \text{ eV}$$

با توجه به شکل مقابل که انرژی در ترازهای اتم هیدروژن را نشان می دهد، می توان نوشت:

$$n_U = 2 \rightarrow n_L = 1 \quad \text{پرانرژی ترین فوتون}$$

$$n_U = 5 \rightarrow n_L = 4 \quad \text{کم انرژی ترین فوتون}$$

انرژی گسیل شده فوتون ها (ΔE) را به دست می آوریم. دقت کنید که h (ثابت پلانک) را بر حسب (eV.s) بنویسیم:

$$\Delta E = hf_{\max} \rightarrow E_2 - E_1 = hf_{\max} \quad \frac{E_2 = -3.4 \text{ eV}, E_1 = -13.6 \text{ eV}}{h = 4 \times 10^{-15} \text{ eV.s}} \rightarrow$$

$$-3.4 - (-13.6) = 4 \times 10^{-15} f_{\max} \rightarrow f_{\max} = \frac{10.2}{4 \times 10^{-15}} = 2.55 \times 10^{15} \text{ Hz} = 2.55 \text{ THz}$$

$$\Delta E = hf_{\min} \rightarrow E_5 - E_4 = hf_{\min} \quad \frac{E_5 = -0.54 \text{ eV}, E_4 = -0.85 \text{ eV}}{h = 4 \times 10^{-15} \text{ eV.s}} \rightarrow$$

$$(-0.54) - (-0.85) = 4 \times 10^{-15} f_{\min} \rightarrow f_{\min} = \frac{0.31}{4 \times 10^{-15}} = 7.75 \times 10^{14} \text{ Hz} = 0.775 \text{ THz}$$

اختلاف بسامدهای به دست آمده برابر است با:

$$\Delta f = f_{\max} - f_{\min} = 2.55 \times 10^{15} - 7.75 \times 10^{14} = 1.775 \times 10^{15} \text{ Hz}$$

گروه آموزشی ماز

۶۶- اختلاف کوتاه ترین و بلندترین طول موج در هر رشته را، گستره طول موج های آن رشته می نامند. گستره طول موج رشته پاشن ($n'=3$) چند برابر گستره طول موج رشته لیمان ($n'=1$) است؟

$$\frac{2}{9} \quad (4)$$

$$\frac{243}{7} \quad (3)$$

$$\frac{9}{2} \quad (2)$$

$$\frac{7}{243} \quad (1)$$

(متوسط - محاسباتی - ۱۲۰۴)

معادله ریذبرگ

ریذبرگ با بررسی بیشتر در طیف اتم هیدروژن، رابطه زیر را برای طول موج های مختلف اتم هیدروژن ارائه کرد:

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (n > n')$$

$$R: \text{ثابت ریذبرگ} = 1.097 \times 10^7 \text{ (nm)}^{-1}$$

در جدول زیر سری های مربوط به طول موج های اتم هیدروژن نوشته شده است:

نام طیف	تاریخ کشف	مقدار n'	رابطه ریذبرگ مربوط به رشته	مقدارهای n	ناحیه طیف
لیمان	۱۹۰۶-۱۹۱۴	۱	$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2} \right)$	۲, ۳, ۴, ...	فرابنفش
بالمر	۱۸۸۵	۲	$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right)$	۳, ۴, ۵, ...	فرابنفش و مرئی
پاشن	۱۹۰۸	۳	$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2} \right)$	۴, ۵, ۶, ...	فروسرخ
براکت	۱۹۲۲	۴	$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{n^2} \right)$	۵, ۶, ۷, ...	فروسرخ
پفوند	۱۹۲۴	۵	$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{n^2} \right)$	۶, ۷, ۸, ...	فروسرخ

نکته:

۱- در رشته بالمر به ازای $3 \leq n \leq 6$ طول موج در گستره مرئی می باشد و به ازای $n \geq 7$ طول موج در گستره فرابنفش قرار دارد.

۲- برای به دست آوردن $\lambda_{\min}$ و $\lambda_{\max}$ در هر رشته می توان نوشت:

$$n = \infty \rightarrow n' : \frac{1}{\lambda_{\min}} = R \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right) \rightarrow \lambda_{\min} = \frac{n'^2}{R}$$

$$n = n' + 1 \rightarrow n' : \frac{1}{\lambda_{\max}} = R \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{(n'+1)^2} \right)$$

گام اول:

ابتدا بلندترین و کوتاه ترین طول موج رشته پاشن را به دست می آوریم:

$$\lambda_{\max} : n = 4 \rightarrow n' = 3$$

$$\frac{1}{\lambda_{\max}} = R \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{16} \right) = R \left(\frac{7}{144} \right) \Rightarrow \lambda_{\max} = \frac{16 \times 9}{7R}$$

$$\lambda_{\min} : n = \infty \rightarrow n' = 3$$

$$\frac{1}{\lambda_{\min}} = R \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{\infty^2} \right) = R \left(\frac{1}{9} \right) \Rightarrow \lambda_{\min} = \frac{9}{R}$$

$$\text{گستره طول موج رشته پاشن} = \lambda_{\max} - \lambda_{\min} = \frac{16 \times 9}{7R} - \frac{9}{R} = \frac{81}{7R} \quad (1)$$

گام دوم:

بلندترین و کوتاه ترین طول موج رشته لیمان را به دست می آوریم:

$$\lambda_{\max} : n = 2 \rightarrow n' = 1$$

$$\frac{1}{\lambda_{\max}} = R \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4} \right) \Rightarrow \lambda_{\max} = \frac{4}{3R}$$

$$\lambda_{\min} : n = \infty \rightarrow n' = 1$$

$$\frac{1}{\lambda_{\min}} = R \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{\infty^2} \right) \Rightarrow \lambda_{\min} = \frac{1}{R}$$

$$\text{گستره طول موج رشته لیمان} = \lambda_{\max} - \lambda_{\min} = \frac{4}{3R} - \frac{1}{R} = \frac{1}{3R} \quad (2)$$

گام سوم:

نسبت گستره طول موج ها را از روابط (۱) و (۲) به دست می آوریم:

$$\frac{\text{گستره طول موج رشته پاشن}}{\text{گستره طول موج رشته لیمان}} = \frac{\frac{81}{7R}}{\frac{1}{3R}} = \frac{3 \times 81}{7} = \frac{243}{7}$$

گروه آموزشی ماز

۶۷- حداقل بسامد فوتون تابش شده به یک فلز برای رخ دادن پدیده فوتوالکتریک 750 THz می باشد. کدام یک از طول موج های داده شده در جدول زیر

می توانند باعث ایجاد پدیده فوتوالکتریک شوند؟ ($c = 3 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $h = 4 \times 10^{-15} \text{ eV.s}$)

A	B	C	D
$\lambda = 300 \text{ nm}$	$\lambda = 0.6 \mu\text{m}$	$\lambda = 600 \text{ nm}$	$\lambda = 8000 \text{ pm}$

A و D (۴)

B و C (۳)

D و B (۲)

D و C (۱)

(آسان - محاسباتی - ۱۲۰۴)

پاسخ: گزینه ۴

فتوالکتریک

وقتی نوری با بسامد مناسب به سطحی فلزی بتابد و الکترون‌هایی از سطح فلز گسیل شوند، به این پدیده فیزیکی فوتوالکتریک می‌گوییم و به الکترون‌های جدا شده از فلز، فوتوالکترن می‌گوییم.



شرط لازم برای ایجاد پدیده فوتوالکتریک:

در صورتی که بسامد فوتون‌های نور مورد استفاده از بسامد آستانه (f_0) بزرگ‌تر باشد، پدیده فوتوالکتریک رخ می‌دهد، پس می‌توان نوشت:

$$f > f_0 \rightarrow \frac{f}{\lambda} > \frac{f_0}{\lambda_0} \rightarrow \lambda < \lambda_0$$

یعنی اگر طول موج نور مورد استفاده از طول موج آستانه (λ_0) کمتر باشد، پدیده فوتوالکتریک رخ می‌دهد.

گام اول:

با توجه به رابطه $\lambda = \frac{c}{f}$ ، طول موج متناظر با بسامد آستانه را به دست می‌آوریم:

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8 \text{ m/s}}{7.5 \times 10^{14} \text{ s}^{-1}} = 4 \times 10^{-7} \text{ m} = 400 \text{ nm}$$

گام دوم:

موج‌های تابش شده به سطح فلز با طول موج کمتر از ۴۰۰ nm می‌توانند پدیده فوتوالکتریک را ایجاد نمایند:

A: $300 \text{ nm} < 400 \text{ nm}$ ✓

C: $600 \text{ nm} > 400 \text{ nm}$ ✗

B: $0.6 \mu\text{m} = 600 \text{ nm} > 400 \text{ nm}$ ✗

D: $8000 \text{ pm} = 8 \text{ nm} < 400 \text{ nm}$ ✓

گروه آموزشی ماز

۶۸- چند مورد از عبارات زیر در مورد نیروی هسته‌ای صحیح می‌باشد؟

الف: بین دو پروتون از نوع دافعه و بین پروتون و نوترون از نوع جاذبه می‌باشد.

ب: نوعی نیروی جاذبه کوتاه‌برد می‌باشد که در پایداری هسته نقش دارد.

ج: یک پروتون می‌تواند به تمامی پروتون‌های دیگر هسته، نیروی هسته‌ای وارد نماید.

۴) صفر

۳) ۳

۲) ۲

۱) ۱

(آسان - مفهومی و خطبه خط کتاب درسی - ۱۲۰۴)

پاسخ: گزینه ۱

نیروهای درون هسته

۱- **گرانشی:** جاذبه ← ویژگی‌ها: بین همه نوکلئون‌ها، اندازه ناچیز

۲- **الکترواستاتیکی:** دافعه ← ویژگی‌ها: بین همه پروتون‌ها، اندازه قوی، بلندبرد

۳- **هسته‌ای:** جاذبه ← ویژگی‌ها: بین نوکلئون‌های مجاور، اندازه خیلی قوی، کوتاه‌برد

نیروهای داخل هسته و نوع آن‌ها

نکات مهم:

۱- نیروی هسته‌ای کوتاه‌برد است و تنها در فاصله کوچک‌تر از ابعاد هسته اثر می‌کند.

۲- نیروی هسته‌ای مستقل از بار الکتریکی است یعنی نیروی رابیشی یکسانی بین دو پروتون، دو نوترون و یک پروتون وجود دارد.

۳- برای پایداری هسته، باید نیروی دافعه الکترواستاتیکی بین پروتون‌ها با نیروی جاذبه بین نوکلئون‌ها که ناشی از نیروی هسته‌ای و گرانشی است، برابر باشد.

بررسی موارد:

الف: نیروی هسته‌ای مستقل از بار الکتریکی است، یعنی نیروی رابیشی یکسانی بین دو پروتون، دو نوترون یا یک پروتون و یک نوترون وجود دارد.

(✗)

ب: (✓)

ج: هر پروتون تنها به نوکلئون‌های مجاورش نیروی هسته‌ای وارد می‌کند. پروتون‌ها می‌توانند به پروتون‌های غیرمجاور نیروی الکترواستاتیکی وارد نمایند. (✗)

۶۹- یک هسته پرتوزا در یک واپاشی طبیعی، m ذره آلفا، دو ذره پوزیترون و سه نوترون گسیل می کند. اگر بار الکتریکی هسته دختر نسبت به هسته مادر

$12/8 \times 10^{-19} \text{ C}$ تغییر کند، m کدام است؟ ($e = 1/6 \times 10^{-19} \text{ C}$)

۱ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

(متوسط - محاسباتی - ۱۴۰۴)

پاسخ: گزینه ۲

واپاشی

واپاشی آلفا (α):

۱- این واپاشی در هسته های سنگین روی می دهد.

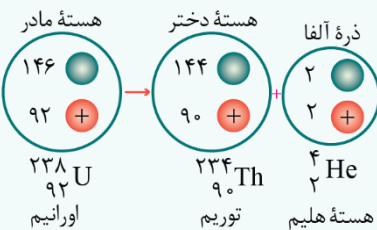
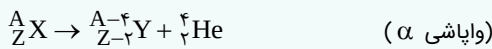
۲- پرتوهای α ، ذرات باردار مثبت از جنس هسته اتم هلیم (${}^4_2\text{He}$) هستند و از دو پروتون و دو نوترون تشکیل شده اند.

۳- بُرد پرتوهای α کوتاه است (حدود ۱ تا ۲ سانتی متر) و در هنگام عبور از هوا یا لایه ای نازک از مواد جذب می شوند.

۴- قدرت نفوذ ذره α در ورقه نازک سُربی کمترین مقدار نسبت به سایر ذرات در واپاشی ها می باشد.

۵- ذره α اگر از راه دهان به دستگاه گوارش یا تنفس وارد شود، به بدن زیان می رساند.

معادله واپاشی α به شکل زیر است:



واپاشی β^- :

۱- این واپاشی متداول ترین نوع واپاشی در هسته ها است.

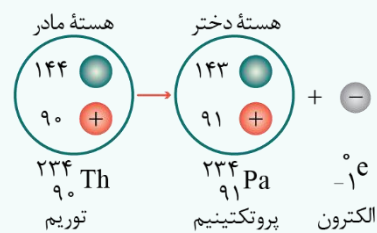
۲- پرتوهای β^- در واقع همان الکترون ها هستند.

۳- پرتوهای β^- مسافت خیلی بیشتری را نسبت به پرتوهای α در سُرب نفوذ می کنند.

۴- الکترون های گسیل شده در این واپاشی، در هسته مادر وجود ندارد و همچنین یکی از الکترون های مدار اتم نیست، این الکترون وقتی بوجود می آید که نوترونی

درون هسته به پروتون و الکترون تبدیل شود.

معادله این واپاشی به صورت زیر است:



واپاشی β^+ :

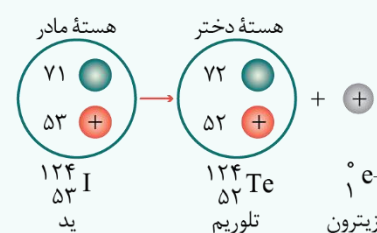
۱- در این واپاشی ذره گسیل شده توسط هسته، جرم یکسانی با الکترون دارد ولی به جای بار $-e$ دارای بار الکتریکی $+e$ است. به این الکترون مثبت پوزیترون

می گویند و با نماد β^+ یا e^+ نمایش داده می شود.

۲- مسافتی که پرتوهای β^+ در سُرب نفوذ می کنند، مانند β^- در حدود $(0/1 \text{ mm})$ است.

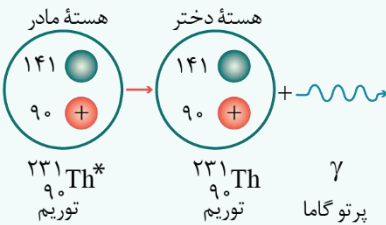
۳- هنگام واپاشی β^+ یکی از پروتون های درون هسته به یک نوترون و یک پوزیترون تبدیل می شود.

معادله این واپاشی به صورت زیر می باشد:



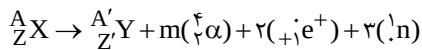
واپاشی γ :

- ۱- اغلب هسته ها پس از واپاشی آلفا یا بتا، در حالت برانگیخته قرار می گیرند و با گسیل پرتو گاما به حالت پایه می رسند.
 - ۲- پرتوهای گاما از جنس امواج الکترومغناطیسی هستند و دارای بار الکتریکی و جرم نمی باشند و از فوتون های پرانرژی تشکیل شده اند.
 - ۳- پرتوهای گاما بیشترین نفوذ را دارند و می توانند از ورقه سربی به ضخامت قابل ملاحظه ای ($\approx 10 \text{ mm}$) عبور کنند.
- معادله واپاشی به صورت زیر است:



گام اول:

ابتدا معادله واپاشی هسته مادر (${}_Z^AX$) را و تبدیل به هسته دختر (${}_Z^{A'}Y$) را می نویسیم:



عدد اتمی هسته مادر (${}_Z^AX$) با مجموع عدد اتمی هسته دختر و ذرات واپاشی شده برابر است:

$$Z = Z' + 2m + 2 + r(0) \Rightarrow Z' = Z - (2m + 2) \Rightarrow \text{تعداد پروتون های هسته دختر، به اندازه } (2m + 2) \text{ کاهش می یابد}$$

گام دوم:

اگر تغییرات بار هسته دختر (${}_Z^{A'}Y$) را با Δq نشان دهیم، داریم:

$$\Delta q = ne$$

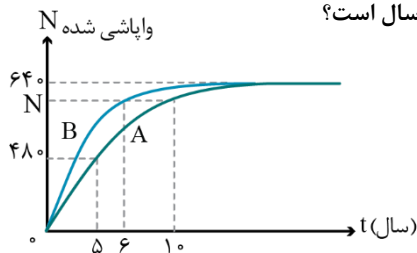
که در این رابطه n تغییرات تعداد پروتون های هسته دختر نسبت به مادر است که برابر $(2m + 2)$ می باشد، پس می توان نوشت:

$$\Delta q = ne = \frac{12/8 \times 10^{-19}}{e = 1/6 \times 10^{-19}} = 12/8 \times 10^{-19} = (2m + 2) \times 1/6 \times 10^{-19}$$

$$\Rightarrow 8 = 2m + 2 \Rightarrow m = 3$$

گروه آموزشی ماز

۷۰- نمودار تعداد هسته های واپاشی شده دو ماده پرتوزا A و B مطابق شکل است. نیمه عمر ماده B چند سال است؟



- ۱) ۵/۰
- ۲) ۱/۵
- ۳) ۲/۵
- ۴) ۳/۵

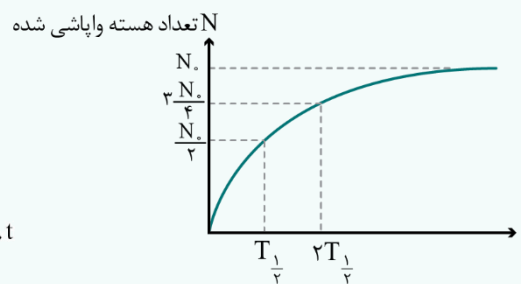
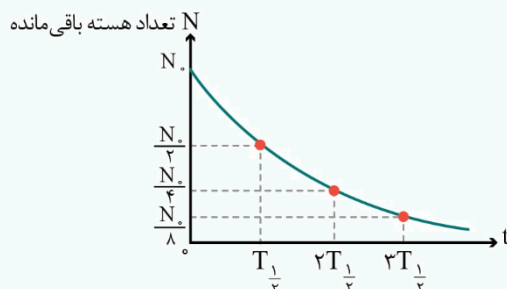
(متوسط - نموداری - ۱۴۰۴)

پاسخ: گزینه ۲

نیمه عمر پرتوزایی

تعریف: نیمه عمر ($T_{1/2}$) مدت زمانی است که طی آن نیمی از هسته های پرتوزا واپاشیده می شوند.

توجه: نیمه عمر هسته های پرتوزای مختلف، متفاوت است و به نوع هسته وابسته است و ممکن است از چند روز تا چند میلیارد سال متفاوت باشد. دو نمودار مهم در این بخش به صورت مقابل داریم:



می توان تعداد هسته های باقی مانده (N) را از رابطه مقابل به دست آورد:

$$N = \frac{N_0}{2^{\frac{t}{T}}}$$

گام اول:

مطابق نمودار داده شده تعداد کل هسته ها برای هر دو ماده A و B برابر ۶۴۰ می باشد و همچنین تعداد هسته های واپاشی شده ماده A پس از ۵ روز ۴۸۰ می باشد. پس تعداد هسته باقی مانده پس از ۵ روز برابر می شود با:

$$N_{A \text{ باقی مانده}} = N_0 - N_{\text{واپاشی شده}} = 640 - 480 = 160$$

گام دوم:

برای محاسبه نیمه عمر ماده A می توان نوشت:

$$N_{A \text{ باقی مانده}} = \frac{N_0}{2^{\frac{t}{T}}} \Rightarrow 160 = \frac{640}{2^{\frac{5}{T}}} \Rightarrow 2^{\frac{5}{T}} = 4 \Rightarrow \frac{5}{T} = 2 \Rightarrow T = 2.5 \text{ سال}$$

گام سوم:

پس از گذشت ۱۰ سال، تعداد هسته های باقی مانده ماده A برابر می شود با:

$$N_{A \text{ باقی مانده}} = \frac{N_0}{2^{\frac{t}{T}}} \Rightarrow N_{\text{باقی مانده}} = \frac{640}{2^{\frac{10}{2.5}}} = \frac{640}{16} = 40$$

توجه شود که هسته های باقی مانده ماده A در ۱۰ سال با هسته های باقی مانده ماده B در ۶ سال برابر است.

گام چهارم:

برای ماده B در ۶ سال می توان نوشت:

$$N_{B \text{ باقی مانده}} = \frac{N_0}{2^{\frac{t}{T}}} \Rightarrow \frac{N_{B \text{ باقی مانده}}}{N_0} = \frac{1}{2^{\frac{6}{T}}} \Rightarrow \frac{40}{640} = \frac{1}{2^{\frac{6}{T}}} \Rightarrow 2^{\frac{6}{T}} = 16 \Rightarrow \frac{6}{T} = 4 \Rightarrow T = 1.5 \text{ سال}$$

گروه آموزشی ماز

۷۱- گلوله A در لحظه $t=0$ از ارتفاع ۲۷۰ متری رها می شود. یک ثانیه بعد، گلوله B را از همان نقطه رها می کنیم و ۲ ثانیه پس از گلوله B، گلوله C را از همان نقطه رها می کنیم. در لحظه ای که فاصله گلوله A تا B برابر فاصله گلوله B تا C است، گلوله B در ارتفاع چند متری از سطح زمین قرار دارد؟

۲۲۵ (۴)

۲۳۸/۷۵ (۳)

۲۶۱/۲۵ (۲)

۱۶۱/۲۵ (۱)

(سخت - محاسباتی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۳

گام اول:

معادله حرکت گلوله ها را می نویسیم:

$$y_A = -\frac{1}{2}gt^2 + y_0 = -5t^2 + 270$$

$$y_B = -\frac{1}{2}g(t-1)^2 + y_0 = -5(t-1)^2 + 270 = -5t^2 + 10t + 265$$

$$y_C = -\frac{1}{2}g(t-3)^2 + y_0 = -5(t-3)^2 + 270 = -5t^2 + 30t + 225$$

بنابراین فاصله گلوله ها از هم برابر است با:

$$\text{فاصله A تا B: } d_1 = |y_B - y_A| = |-5t^2 + 10t + 265 - (-5t^2 + 270)|$$

$$\rightarrow d_1 = |10t - 5| = 10t - 5$$

$$\text{فاصله B تا C: } d_2 = |y_C - y_B| = |-5t^2 + 30t + 225 - (-5t^2 + 10t + 265)|$$

$$\rightarrow d_2 = |20t - 40| = 20t - 40$$

$$d_1 = d_2 \rightarrow 10t - 5 = 20t - 40 \rightarrow 10t = 35 \rightarrow t = 3.5 \text{ s}$$



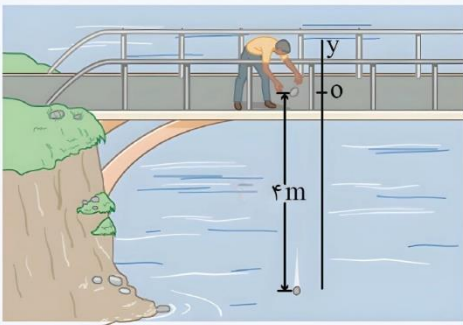
گام دوم:

مکان گلوله B در لحظه $t = 3/5$ برابر است با:

$$y_B = -5t^2 + 10t + 265 = -5(3/5)^2 + 10(3/5) + 265$$

$$\rightarrow y_B = -61/25 + 35 + 265 = 238/5 \text{ m}$$

گروه آموزشی ماز



۷۲- مطابق شکل، شخصی از روی پلی به ارتفاع ۴m، سنگ کوچکی به جرم ۲۵۰ گرم را رها می کند.

تکانه سنگ در لحظه ورود به آب چند واحد SI است؟ ($g = 10 \frac{m}{s^2}$ و مقاومت هوا ناچیز است).

(۱) $\sqrt{5} \vec{j}$

(۲) $-\sqrt{5} \vec{j}$

(۳) $4\sqrt{5} \vec{j}$

(۴) $-4\sqrt{5} \vec{j}$

(متوسط - محاسباتی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۲

گام اول:

سرعت گلوله هنگام برخورد به آب برابر است با:

$$v^2 - v_0^2 = -2g\Delta y \Rightarrow v^2 - 0 = -2 \times 10 \times (-4)$$

$$\Rightarrow v^2 = 80 \Rightarrow v = 4\sqrt{5} \frac{m}{s} \xrightarrow{\text{سرعت به سمت پایین}} \vec{v} = -4\sqrt{5} \vec{j} \left(\frac{m}{s} \right)$$

گام دوم:

تکانه برابر است با:

$$\vec{p} = m\vec{v} = 0.25 \times (-4\sqrt{5} \vec{j}) = -\sqrt{5} \vec{j} \left(\frac{kg \cdot m}{s} \right)$$

گروه آموزشی ماز

۷۳- ماهواره ای در مدار هم گام با زمین در حال چرخش به دور کره زمین است. فاصله این ماهواره تا مرکز زمین تقریباً چند کیلومتر است؟

$$(G \approx 6 \times 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2}, M_e = 6 \times 10^{24} kg)$$

(۴) ۲۰۰۰

(۳) ۲۰۰۰۰

(۲) ۴۰۰۰

(۱) ۴۰۰۰۰

(سخت - محاسباتی - ۱۲۰۲)

پاسخ: گزینه ۱

پاسخ تشریحی:

دوره تناوب این ماهواره برابر دوره تناوب زمین (۲۴ ساعت) است.

$$\begin{cases} g = G \frac{M_e}{r^2} \rightarrow a_C = G \frac{M_e}{r^2} \rightarrow r \times \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 = G \frac{M_e}{r^2} \\ a_C = g \end{cases}$$

$$\rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{GM_e} \approx \frac{4 \cdot r^3}{GM_e}$$

$$\frac{T=2\pi h=2\pi \times 360 \times 10^{-6}}{M_e=6 \times 10^{-24} \text{ kg}} \rightarrow (2\pi \times 360 \times 10^{-6})^2 = \frac{4 \times 10^{-3}}{6 \times 10^{-11} \times 6 \times 10^{-24}}$$

$$\rightarrow r^3 = 12^2 \times 36^3 \times 10^{16} = 1440 \times 36^3 \times 10^{15}$$

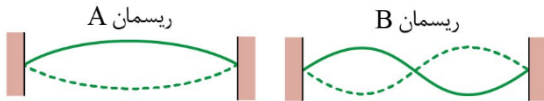
$$\rightarrow r = \sqrt[3]{1440 \times 36 \times 10^{15}} = 11 \times 36 \times 10^{15} = 4 \times 10^7$$

$$\approx 11 \quad \approx 400$$

$$\rightarrow r \approx 40000 \text{ km}$$

گروه آموزشی ماز

۷۴- ریسمان‌های A و B، طول و چگالی خطی جرمی یکسانی دارند، ولی ریسمان B تحت کشش کمتری نسبت به ریسمان A قرار دارد. شکل زیر وضعیت را نشان می‌دهد که در آن نقش‌های موج ایستاده در دو ریسمان وجود دارند. اگر بسامد تشدید دو ریسمان در شکل‌های نشان داده شده برابر باشد، نیروی کشش ریسمان A چند برابر نیروی کشش ریسمان B است؟



۴ (۲)

۲ (۱)

۱۶ (۴)

۸ (۳)

(آسان - مفهومی و محاسباتی - ۱۲۰۴)

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ شریعی

در شکل نشان داده شده، هماهنگ اول ریسمان A و هماهنگ دوم ریسمان B نواخته شده است که بسامد آن‌ها برابر است.

$$f_A = f_B \rightarrow \frac{v_A}{2L} = \frac{v_B}{2L} \rightarrow v_A = v_B$$

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \rightarrow \frac{v_A}{v_B} = \sqrt{\frac{F_A}{F_B}} \rightarrow 2 = \sqrt{\frac{F_A}{F_B}} \rightarrow \frac{F_A}{F_B} = 4$$

گروه آموزشی ماز

۷۵- هرگاه بر سطح فلزی نوری با طول موج ۳۱۰nm بتابد، بیشینه انرژی جنبشی فوتوالکترون‌های گسیل شده حدود $2/4 \times 10^{-19} \text{ J}$ است. کدام یک از عبارت‌های زیر صحیح است؟ ($hc = 1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}$)

الف: طول موج آستانه فلز برابر ۴۹۶nm است.

ب: نور قرمز می‌تواند باعث رخ دادن فوتوالکتریک در این فلز شود.

ج: اگر نوری با طول موج ۴۶۵nm به این فلز بتابد، بیشینه انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها برابر ۱eV می‌شود.

د: نور بنفش می‌تواند باعث رخ دادن فوتوالکتریک در این فلز شود.

(۴) (ج) و (د)

(۳) (ب) و (ج)

(۲) (الف) و (د)

(۱) (الف) و (ب)

(متوسط - مفهومی و محاسباتی - ۱۲۰۵)

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ شریعی

با تابش فوتونی با طول موج ۳۱۰nm داریم:

$$K_{\max} = hf - W = \frac{hc}{\lambda} - W$$

$$\rightarrow \frac{2/4 \times 10^{-19}}{1/6 \times 10^{-19}} = \frac{1240}{310} - W \rightarrow 1/5 = 4 - W \rightarrow W = 2/5 \text{ eV}$$

بررسی موارد

الف: طول موج قطع برابر است با:

$$W = \frac{hc}{\lambda} \rightarrow \lambda = \frac{hc}{W} = \frac{1240}{2/5} = 496 \text{ nm} \quad (\checkmark)$$

ب: طول موج نور قرمز بیشتر از ۴۹۶nm است و نمی‌تواند باعث ایجاد فوتوالکتریک شود. (✗)

ج: اگر نوری با طول موج ۴۶۵nm به فلز بتابد، داریم:

$$K_{\max} = \frac{hc}{\lambda} - W \rightarrow K_{\max} = \frac{1240}{465} - 2/5$$



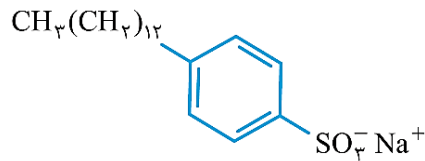
$$\rightarrow K_{\max} = \frac{8}{3} - \frac{5}{2} = \frac{1}{6} \text{ eV } (\times)$$

د: طول موج نور بنفش کمتر از ۴۹۶nm است و می تواند باعث رخ دادن فوتوالکتریک شود. (✓)

گروه آموزشی ماز



۷۶- چند مورد از مطالب زیر در مورد پاک کننده‌ای با ساختار داده شده درست هستند؟



آ: اگر کاتیون Na^+ در این پاک کننده را با کاتیون Mg^{2+} جایگزین کنیم، ترکیب حاصل در آب نامحلول است.
ب: نسبت شمار اتم‌ها به شمار عنصرها در ساختار این ماده، بیشتر از تعداد اتم‌های H در پارازیلین است.
پ: مشابه سفیدکننده‌ها، این پاک کننده با آلاینده‌های موجود در محیط واکنش خواهد داد.
ت: گروه SO_3^- موجود در این پاک کننده، سبب پخش شدن چربی‌ها در آب می‌شود.

۴ (۴)

۳ (۳)

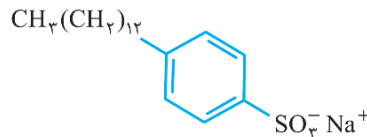
۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط - مفهومی - ۱۲۰۱)

پاسخ تشریحی:

ساختار داده شده، به صورت زیر است:

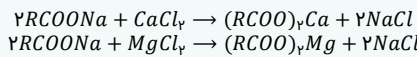


این تصویر، یک پاک کننده غیرصابونی را نشان می‌دهد. در رابطه با این ماده، عبارت‌های (ب) و (ت) درست است.

بررسی موارد:

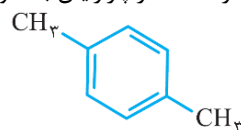
آ: پاک کننده نشان داده شده یک پاک کننده غیرصابونی است که علاوه بر آب معمولی، در آب سخت هم خاصیت پاک کنندگی خود را حفظ می‌کند. در واقع نمک کلسیم و یا منیزیم این ترکیب نیز همانند نمک سدیم آن در آب محلول است و برخلاف صابون‌ها، به حالت رسوب در نمی‌آید.

به آب‌هایی مانند آب دریا که حاوی مقادیر زیادی از یون‌های کلسیم و منیزیم هستند، آب سخت گفته می‌شود. صابون‌های جامد و مایع هر دو با این یون‌ها تشکیل رسوب می‌دهند که به صورت لکه‌های سفید پس از شستن لباس با صابون روی آن‌ها باقی می‌ماند. برای مثال واکنش صابون‌های جامد با یون‌های Ca^{2+} و Mg^{2+} به صورت زیر است:



پاک کننده‌های غیرصابونی، یک بخش آب‌گریز (گروه هیدروکربنی) و یک بخش آب‌دوست (گروه SO_3^-) دارند. گروه SO_3^- که انتهای باردار قسمت آنیونی پاک کننده را تشکیل می‌دهد، باعث حل شدن پاک کننده در آب می‌شود. از طرف دیگر، این گروه برخلاف گروه CO_2^- در صابون‌ها، با یون‌های Ca^{2+} و Mg^{2+} موجود در آب سخت رسوب نمی‌دهد و در نتیجه پاک کننده‌های غیرصابونی در آب سخت نیز قدرت پاک کنندگی خود را حفظ می‌کنند.

ب: فرمول شیمیایی این ترکیب $\text{C}_{19}\text{H}_{31}\text{SO}_3\text{Na}$ بوده و نسبت شمار اتم‌ها به شمار عنصرها در آن برابر $\frac{55}{11} = 5$ است. از طرفی فرمول پارازیلین به صورت C_8H_{17} بوده و در هر مولکول از این ماده ۱۰ اتم هیدروژن وجود دارد. ساختار پارازیلین به صورت زیر است:



پ: پاک کننده‌های غیرصابونی، برخلاف سفیدکننده‌ها و پاک کننده‌های خورنده (مانند سود سوزآور و محلول هیدروکلریک اسید)، با آلاینده‌های موجود در محیط وارد واکنش شیمیایی نمی‌شوند.

پاک کننده‌های صابونی و غیرصابونی، با مولکول‌ها و ذرات سازنده آلودگی‌ها وارد واکنش شیمیایی نشده و فقط براساس برهم‌کنش‌های بین ذره‌ای، سبب پاک شدن آلودگی‌ها می‌شوند. گروه دیگری از پاک کننده‌ها نیز وجود دارند که با ذرات سازنده آلودگی‌ها وارد واکنش شیمیایی شده و در کنار برهم‌کنش‌های بین ذره‌ای، از این طریق نیز سبب پاک شدن آلودگی‌ها می‌شوند. به این دسته از انواع شوینده‌ها، به اصطلاح پاک کننده‌های خورنده گفته می‌شود. در واقع، پاک کننده‌های خورنده، گروهی از پاک کننده‌ها هستند که بر مبنای واکنش میان اسیدها و بازها عمل می‌کنند. در هنگام استفاده از این مواد، شوینده موردنظر با آلودگی‌ها وارد واکنش شده و آن‌ها را به مواد محلول در آب تبدیل می‌کند. شوینده‌های خورنده را بر مبنای کاربرد آن‌ها، می‌توان به دو دسته اسیدی و بازی تقسیم‌بندی کرد. سفیدکننده‌ها، جوهر نمک و محلول سود، انواعی از پاک کننده‌های خورنده هستند.

ت: گروه SO_3^- آب‌دوست بوده و بخش هیدروکربنی این پاک کننده آب‌گریز است؛ در نتیجه این گروه (گروه SO_3^-) باعث پخش شدن چربی‌ها که به زنجیر هیدروکربنی این پاک کننده چسبیده‌اند، در آب می‌شود.

۷۷- غلظت مولی محلولی از استیک اسید، با غلظت کاتیون در محلول 106 ppm سدیم کربنات با چگالی 1 g.mL^{-1} برابر است. غلظت مولی مولکولهای استیک اسید یونیده نشده در این محلول، ۴ برابر غلظت مولی یون استات است. ثابت یونش اسید در این محلول آبی کدام بوده و مقدار pH این محلول چقدر خواهد بود؟

($Na = 23$ و $O = 16$ و $N = 14$ و $C = 12$ و $H = 1$: g.mol^{-1})

$$3/4 - 10^{-4} \quad (4)$$

$$3/7 - 10^{-4} \quad (3)$$

$$3/4 - 2 \times 10^{-4} \quad (2)$$

$$3/7 - 2 \times 10^{-5} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۴ (سخت - مساله - ۱۲۰۱)

پاسخ تشریحی

در قدم اول، باید غلظت محلول سدیم کربنات (Na_2CO_3) را محاسبه کنیم. در این رابطه، داریم:

$$\text{غلظت مولی} = \frac{\text{چگالی} \times \text{ppm}}{\text{جرم مولی}} = \frac{106 \times 1}{1000 \times 106} = 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$$

در محلول سدیم کربنات، غلظت مولی کاتیون ۲ برابر غلظت مولی کلی نمک است. بر این اساس، داریم:

$$[Na^+] = 2 \times [Na_2CO_3] \Rightarrow [Na^+] = 2 \times 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$$

اسیدها و بازهای گوناگون، به هنگام انحلال در آب، به مقدار متفاوتی یونش پیدا می کنند. برای مقایسه کمی میزان یونیده شدن انواع اسیدها و بازها، می توان از درجه یونش استفاده کرد. درجه یونش یک ماده، عبارت از نسبت تعداد مولکولهای یونیده شده از یک ماده به تعداد کل مولکولهای حل شده از آن ماده است. غلظت مولی مولکولهای استیک اسید یونیده نشده در این محلول، ۴ برابر غلظت مولی یون استات موجود در آن است. بر این اساس، درجه یونش اسید مورد نظر را بدست می آوریم:

$$\text{درجه یونش} = \frac{\text{شمار مولکولهای یونیده شده}}{\text{شمار مولکولهای یونیده شده} + \text{شمار مولکولهای حل شده در محلول}} = \frac{x}{4x + x} = \frac{x}{5x} = 0.2$$

در مرحله بعد، با توجه به غلظت و درجه یونش اسید مورد نظر، مقدار ثابت یونش را محاسبه می کنیم.

$$K_a = \frac{\alpha^2 \times M}{1 - \alpha} = \frac{(0.2)^2 \times (2 \times 10^{-3})}{1 - 0.2} = 10^{-4}$$

توجه داریم که غلظت یون هیدروژن و یا یون استات در محلول مورد نظر برابر با 4×10^{-4} مول بر لیتر و غلظت اسید یونیده نشده در این محلول نیز برابر با $10^{-4} \times 16$ مول بر لیتر است. بر این اساس، pH محلول مورد نظر را محاسبه می کنیم:

$$pH = -\log[H^+] = -\log(4 \times 10^{-4}) = 3/4$$

گروه آموزشی ماز

۷۸- اگر در دما و غلظت یکسان، رسانایی الکتریکی محلول اسید HB از محلول اسید HA بیشتر باشد، کدام یک از عبارتهای زیر نادرست است؟

- (۱) درصد یونش اسید HA ، همانند ثابت یونش آن، از درصد یونش و ثابت یونش اسید HB کمتر است.
- (۲) در شرایط یکسان، سرعت واکنش یک قطعه فلزی منیزیمی با محلولی از اسید HB بیشتر است.
- (۳) اگر A و B هر دو هالوژن باشند، عدد اتمی A همواره از عدد اتمی B بزرگتر است.
- (۴) غلظت مولی یون هیدروکسید در محلول HA از محلول HB بیشتر است.

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط - مفهومی - ۱۲۰۱)

پاسخ تشریحی

از آنجا که در دما و غلظت یکسان، رسانایی الکتریکی محلول اسید HB از محلول اسید HA بیشتر است، بنابراین میزان یونش و در نتیجه قدرت اسیدی HB از HA بیشتر است. توجه داریم که رسانایی الکتریکی محلول اسیدها با غلظت یون هیدرونیوم در این محلولها رابطه مستقیم دارد.

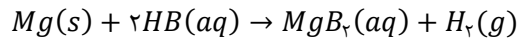
از ثابت یونش اسیدها، به عنوان معیار مناسبی برای مقایسه قدرت اسیدهای مختلف استفاده می شود. در واقع، هر چه قدر که مقدار K_a برای یک ماده اسیدی بزرگتر باشد، آن اسید به هنگام انحلال در آب، به مقدار بیشتری یونیده شده و چون طی این فرایند مقدار بیشتری یون هیدرونیوم وارد محلول می شود، آن ماده قدرت اسیدی بالاتری دارد. توجه داریم که مقدار ثابت یونش برای اسیدهای مختلف، مانند هر ثابت تعادل دیگری، فقط به دما بستگی دارد و غلظت اسید مورد نظر در مقدار آن تأثیری ندارد.

بررسی گزینه ها:

اسید HB از اسید HA اسید قوی تر است، در نتیجه درجه یونش و درصد یونش اسید HB از اسید HA بیشتر خواهد بود. توجه داریم که در شرایط یکسان، اسیدی که درجه یونش بیشتری داشته باشد، ثابت یونش بزرگتری هم خواهد داشت.

۲

از آن جا که در محلول اسید HB غلظت یون هیدرونیوم (H^+) بیشتر است؛ پس می توان گفت در شرایط یکسان، قطعه منیزیم سریع تر در محلول این اسید واکنش می دهد. معادله واکنش انجام شده به صورت زیر است:



در شرایط یکسان، هر چه غلظت یون هیدرونیوم در محلول آبی اسید بیشتر باشد، سرعت واکنش آن محلول با فلز منیزیم بیشتر خواهد بود.

اغلب فلزها، با محلول های اسیدی واکنش داده و گاز هیدروژن آزاد می کنند. طی این فرایند، اتم های فلزی الکترون از دست داده و به صورت کاتیون های فلزی وارد محلول می شوند. به عنوان مثال، فلز سدیم براساس معادله $2Na(s) + 2HCl(aq) \rightarrow 2NaCl(aq) + H_2(g)$ با محلول هیدروکلریک اسید واکنش می دهد. توجه داریم که فلزهای طلا، پلاتین، جیوه، نقره و مس، بخاطر قدرت کاهندگی بسیار کم خود با یون هیدروژن موجود در محلول های اسیدی واکنش نمی دهند و گاز هیدروژن تولید نمی کنند.

۳

در بین هالیدهای هیدروژن، مواد HBr ، HCl و HI اسید قوی و HF اسید ضعیف است. بنابراین اگر A و B هر دو هالوژن باشند، A فلوئور و B یکی از سه هالوژن کلر، برم یا ید بوده و در نتیجه عدد اتمی A از عدد اتمی B کوچک تر خواهد بود.

۴

از آنجا که غلظت مولی یون هیدرونیوم در محلول آبی HA کمتر از محلول آبی HB است، غلظت مولی یون هیدروکسید در آن از غلظت مولی این یون در محلول آبی HB بیشتر خواهد بود.

گروه آموزشی ماز

۷۹- با افزودن ۴۵۰ میلی لیتر آب مقطر به ۵۰ میلی لیتر از محلول نیتریک اسید، pH نهایی محلول ۲ برابر حالت اولیه می شود. برای خنثی شدن کامل نیم لیتر از محلول غلیظ اولیه نیتریک اسید، چند میلی لیتر محلول ۲/۲۴ درصد جرمی پتاسیم هیدروکسید نیاز است؟

(چگالی محلول سود را $1g.mL^{-1}$ در نظر بگیرید. $H = 1$ و $O = 16$ و $K = 39$)

۱۲۵ (۴)

۶۲/۵ (۳)

۲۵۰ (۲)

۱۸۷/۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۴ (سخت - مساله - ۱۳۰۱)



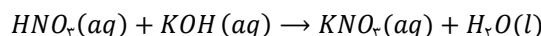
نیتریک اسید، یک اسید قوی با درجه یونش بزرگ بوده و با تغییر غلظت محلول، درجه یونش آن دچار تغییر نمی شود. با افزایش حجم محلول اسیدی از ۵۰ میلی لیتر به ۵۰۰ = ۴۵۰ + ۵۰ میلی لیتر، حجم محلول ۱۰ برابر شده و غلظت اسید موجود در این محلول (معادل با غلظت یون هیدروژن موجود در محلول) نیز ۰/۱ برابر شده است، پس می توان گفت طی این فرایند مقدار pH محلول به اندازه یک واحد تغییر کرده است. طبق فرض سوال، مقدار pH محلول مورد نظر طی این فرایند دو برابر شده است. بر این اساس، داریم:

$$\frac{pH_r}{pH_1} = 2 \Rightarrow \frac{pH_1 + 1}{pH_1} = 2 \Rightarrow pH_1 = 1 \Rightarrow pH_r = 2$$

بنابراین داریم:

$$[H^+]_1 = 10^{-pH_1} = 10^{-1} mol.L^{-1}$$

معادله واکنش انجام شده به صورت زیر است:



نیتریک اسید، یک اسید قوی است، در نتیجه غلظت مولی اولیه اسید برابر خواهد بود با:

$$[HNO_3]_1 = \frac{[H^+]_1}{\alpha \times n} = \frac{10^{-1}}{1 \times 1} = 10^{-1} mol.L^{-1}$$

قبل از محاسبه حجم محلول پتاسیم هیدروکسید مورد نیاز، باید غلظت مولی این محلول را حساب کنیم:

$$غلظت\ مولی\ محلول\ پتاسیم\ هیدروکسید = \frac{10 \cdot ad}{M} = \frac{10 \times 2/24 \times 1}{56} = 0/4 mol.L^{-1}$$

طی این فرایند، ۵۰۰ میلی لیتر محلول اسیدی مصرف شده است. در نهایت، حجم محلول پتاسیم هیدروکسید را بر مبنای میلی لیتر بدست می آوریم:

$$M_1 \times n_1 \times V_1 = M_2 \times n_2 \times V_2 \Rightarrow 10^{-1} \times 1 \times 500 = 0/4 \times 1 \times V_2 \Rightarrow V_2 = \frac{10^{-1} \times 500}{0/4} = 125 mL$$

محلول نیتریک اسید محلول پتاسیم هیدروکسید

گروه آموزشی ماز

۸۰- کدام موارد از عبارتهای داده شده درست هستند؟

- آ: اوره، اتیلن گلیکول و نقره کلرید، از جمله موادی هستند که برخلاف یک نمونه روغن زیتون، در آب حل می شوند.
 ب: وبا یک بیماری واگیردار بوده و مؤثرترین راه پیشگیری از آن، استفاده از واکسن مناسب برای این بیماری است.
 پ: صابون مراغه، افزودنی شیمیایی نداشته و بخاطر خاصیت بازی مناسب، برای شستن موی چرب استفاده می شود.
 ت: از گرم کردن روغن زیتون، روغن نارگیل و یا پیه در حضور محلول سود، پاک کننده های صابونی جامد تولید می شوند.

(۴) آ و ت

(۳) پ و ت

(۲) ب و پ

(۱) آ و ب

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط - مفهومی و حفظی - ۱۲۰)

پاسخ تشریحی:

عبارتهای (پ) و (ت) درست هستند.

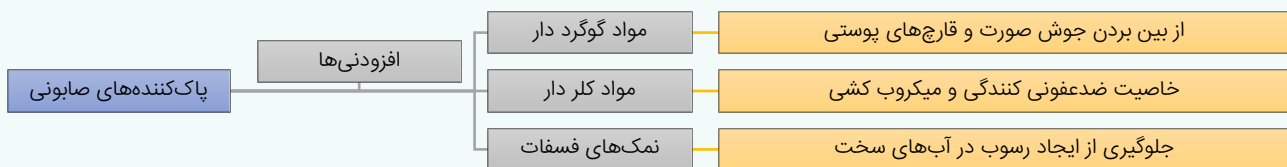
بررسی موارد:

آ: در ساختار روغن زیتون، بخش ناقطبی (زنجیره های هیدروکربنی) بر بخش قطبی (بخشی از مولکول که حاوی گروه های عاملی استری است) غلبه دارد، در نتیجه روغن زیتون برخلاف مولکول های قطبی اوره و اتیلن گلیکول در آب نامحلول است. توجه داریم که نقره کلرید، همانند باریم سولفات و منیزیم هیدروکسید، یک ترکیب یونی نامحلول در آب است.

ب: وبا یک بیماری واگیردار است که به دلیل آلوده شدن آب و نبود بهداشت شایع می شود. این بیماری در طول تاریخ بارها در جهان همه گیر شده و جان میلیون ها انسان را گرفته است. این بیماری، ریشه کن نشده و هنوز هم می تواند برای هر جامعه تهدید کننده باشد. ساده ترین و مؤثرترین راه پیشگیری از این بیماری، رعایت بهداشت فردی و همگانی است.

پ: صابون طبیعی یا همان صابون مراغه، با بیش از ۱۵۰ سال قدمت، معروف ترین صابون سنتی ایران است. برای تهیه این نوع صابون طبیعی، پیه (چربی) گوسفند و سود سوزآور (سدیم هیدروکسید یا $NaOH$) را در دیگ های بزرگ با آب برای چندین ساعت می جوشانند و پس از قالب گیری، آن ها را در آفتاب خشک می کنند. این صابون ها فاقد افزودنی های شیمیایی مختلف هستند و به دلیل خاصیت بازی ($pH > 7$) مناسبی که دارند، از آن ها برای شست و شوی موهای چرب استفاده می شود.

نمودار زیر، نقش افزودنی های مختلف را در پاک کننده های صابونی نشان می دهد:



ت: صابون ها را بر اثر گرما دادن روغن های گیاهی یا جانوری مانند روغن زیتون، روغن نارگیل، دنبه و پیه گوسفند در حضور سدیم هیدروکسید تهیه می کنند. به این فرایند، اصطلاحاً واکنش صابونی شدن گفته می شود. اسیدهای چرب نیز به طریق مشابه با محلول سدیم هیدروکسید واکنش داده و سبب تولید پاک کننده های صابونی و مولکول های آب می شوند.

گروه آموزشی ماز

۸۱- کدام یک از مطالب زیر نادرست است؟

- (۱) گاز تولید شده در واکنش مخلوط پودر آلومینیم و سود با آب را می توان از واکنش آهن با هیدروکلریک اسید نیز تهیه کرد.
 (۲) کلئویدها انواعی از مخلوط های ناهمگن هستند که از ذرات ریز ماده تشکیل شده و مسیر حرکت نور در آن ها مشخص است.
 (۳) مواد بازی از جمله محلول سود، به پوست بدن آسیب زده و همانند صابون، در سطح آن احساس لیزی ایجاد می کنند.
 (۴) رسانایی الکتریکی محلول مولار هیدروفلئوئوریک اسید نسبت به محلول نیم مولار پتاسیم هیدروکسید کمتر است.



جدول زیر، ویژگی های کلئیدها را نشان می دهد:

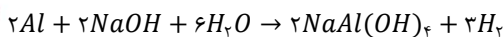
ویژگی	مخلوط ناهمگن (سوسپانسیون)	کلئید	مخلوط همگن (محلول)
عبور نور	نور را پخش می کند.	نور را پخش می کند.	نور را عبور می دهد.
همگن بودن	ناهمگن است.	ناهمگن است.	همگن است.
پایداری	ناپایدار است.	پایدار است.	پایدار است.
نوع ذره	ذره ها و قطعات مجزا	مولکول های بزرگ یا توده های مولکولی	یون ها و مولکول ها
مثال ها	سالاد - مخلوط آب و روغن - شربت معده	مخلوط آب و صابون و روغن - سرامیک ها انواع رنگ ها - چسب ها - شیر - ژله - مایونز	محلول آب نمک - محلول مس (II) سولفات در آب

با توجه به جدول بالا، کلئیدها از مولکول های بزرگ و یا توده های مولکولی با اندازه متفاوت تشکیل شده اند. توجه داریم که ذره های موجود در کلئید درشت تر از محلول و کوچک تر از سوسپانسیون هستند و به همین دلیل، کلئیدها نور را پخش می کنند.

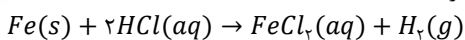
رنگ های پوششی نوعی کلئید هستند. کلئیدها مخلوط هایی از دو یا چند ماده به حساب می آیند که در برخی از ویژگی های خود، به محلول ها شباهت دارند و در برخی از ویژگی های خود، با محلول ها تفاوت داشته و به مخلوط های ناهمگن شبیه هستند. ذره های سازنده کلئیدها عموماً به صورت مولکول های بزرگ و یا توده های مولکولی هستند که اندازه آن ها بزرگ تر از اندازه حل شونده های موجود در محلول های همگن است. سطح ذرات موجود در ساختار کلئیدها باردار بوده و به همین خاطر، این مواد با ماندن در یک موقعیت ثابت ته نشین نمی شوند.



معادله انجام شده به صورت زیر است:



در این واکنش شیمیایی گاز هیدروژن به عنوان یکی از فراورده ها تولید می شود. توجه داریم که این واکنش، از جمله واکنش های گرماده به شمار می رود. در واکنش آهن با هیدروکلریک اسید نیز گاز هیدروژن تولید می شود. معادله این واکنش به صورت زیر است:



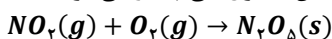
توجه داریم که در این واکنش، هر اتم آهن ۲ درجه اکسید شده و به یون Fe^{2+} تبدیل می شود.

مواد بازی از جمله محلول سود و یا محلول پتاس، به پوست بدن آسیب می رسانند. این مواد، با چربی های روی پوست واکنش داده و موادی شبیه به صابون تولید می کنند، پس می توان گفت این مواد نیز همانند صابون، در سطح پوست احساس لیزی ایجاد می کنند.

چون هیدروفلوئوریک اسید، یک اسید خیلی ضعیف بوده و بر اثر یونش آن مقدار بسیار کمی یون در محلول ایجاد می شود، پس می توان گفت مجموع غلظت مولی یون ها در محلول یک مولار هیدروفلوئوریک اسید در مقایسه با محلول نیم مولار پتاسیم هیدروکسید کمتر بوده و بر این اساس، رسانایی الکتریکی محلول یک مولار هیدروفلوئوریک اسید نیز در مقایسه با محلول نیم مولار پتاسیم هیدروکسید کمتر است. توجه داریم که مجموع غلظت مولی یون های پتاسیم و هیدروکسید در محلول نیم مولار پتاسیم هیدروکسید، برابر با ۱ مول بر لیتر می شود.

گروه آموزشی ماز

۸۲- در شرایطی که حجم مولی گازها برابر $25 L \cdot mol^{-1}$ است، ۷/۵ لیتر گاز NO_2 را در واکنش موازنه نشده زیر شرکت داده و فراورده ی حاصل را در مقداری آب به طور کامل حل می کنیم. اگر حجم محلول حاصل را با استفاده از آب خالص به ۱۵ لیتر برسانیم، pH این محلول آبی چقدر می شود؟



۱/۳ (۴)

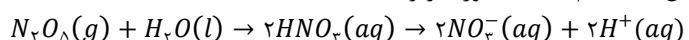
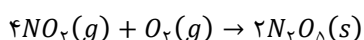
۱/۷ (۳)

۲/۳ (۲)

۲/۷ (۱)



معادله واکنش های انجام شده به صورت زیر است:



با استفاده از روش هم ارضی واکنش ها، می توان گفت به ازای مصرف ۴ مول گاز NO_2 در واکنش اول، ۴ مول یون هیدروژن در محلول نهایی تولید می شود. بر این اساس، غلظت یون هیدروژن را در محلول محاسبه می کنیم.

$$? mol H^+ = 7/5 L NO_2 \times \frac{1 mol NO_2}{25 L NO_2} \times \frac{4 mol H^+}{4 mol NO_2} = 0/3 mol$$

$$[H^+] = \frac{\text{مول } H^+}{\text{لیتر محلول}} = \frac{0.3 \text{ mol}}{15 \text{ L}} = 0.02 \text{ mol.L}^{-1}$$

در مرحله بعد، pH این محلول آبی حاصل از این فرایند را محاسبه می‌کنیم.

$$pH = -\log[H^+] = -\log(2 \times 10^{-2}) = 2 - 0.3 = 1.7$$

گروه آموزشی ماز

۸۳- اگر ۶ لیتر محلول هیدروکلریک اسید با $pH = 0.7$ ، ۳ لیتر محلول هیدرویدیک اسید با غلظت ۰/۱ مول بر لیتر و یک لیتر محلول سود با $pH = 13.7$ را با هم مخلوط کنیم، محلولی بدست می‌آید که مقدار pH آن برابر با بوده و پس از ریختن آن بر روی مقداری خاک خنثی، گل‌های ادریسی در آن نمونه از خاک به رنگ خواهند روید.

(۴) ۱/۷ - قرمز

(۳) ۰/۷ - قرمز

(۲) ۱/۳ - آبی

(۱) ۱ - آبی

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط - مساله - ۱۲۰۱)



در قدم اول، غلظت مولی محلول هیدروکلریک اسید را محاسبه می‌کنیم.

$$[H^+] = 10^{-pH} = 10^{-0.7} = 2 \times 10^{-1} = 0.2 \text{ mol.L}^{-1}$$

در قدم بعد، غلظت محلول سود استفاده شده در این فرایند را محاسبه می‌کنیم.

$$[OH^-] = 10^{pH-14} = 10^{13.7-14} = 10^{-0.3} = 5 \times 10^{-1} = 0.5 \text{ mol.L}^{-1}$$

با توجه به فرض سوال، ۶ لیتر محلول هیدروکلریک اسید با $pH = 0.7$ (محلولی که غلظت یون هیدروژن در آن برابر با ۰/۲ مول بر لیتر بوده و با توجه به حجم خود، مجموعاً محتوی ۱/۲ مول یون هیدروژن است)، ۳ لیتر محلول هیدرویدیک اسید با غلظت ۰/۱ مول بر لیتر (محلولی که غلظت یون هیدروژن در آن برابر با ۰/۱ مول بر لیتر بوده و با توجه به حجم خود، مجموعاً محتوی ۰/۳ مول یون هیدروژن است) و یک لیتر محلول سود با $pH = 13.7$ (محلولی که غلظت یون هیدروکسید در آن برابر با ۰/۵ مول بر لیتر بوده و با توجه به حجم خود، مجموعاً محتوی ۰/۵ مول یون هیدروکسید است) را با هم مخلوط کرده‌ایم. به عبارت دیگر، می‌توان گفت حجم محلول نهایی برابر با ۱۰ لیتر بوده و مجموعاً ۱/۵ مول یون هیدروژن (مجموع مقدار یون هیدروژن موجود در ۲ محلول اسیدی) به همراه ۰/۵ مول یون هیدروکسید وارد این محلول شده است. از ۱/۵ مول یون هیدروژن وارد شده به محلول، ۰/۵ مول از آن توسط یون هیدروکسید خنثی شده و ۱ مول از آن در محلول باقی می‌ماند. بر این اساس، ابتدا غلظت مولی یون هیدروژن را محاسبه کرده و در مرحله بعد، مقدار pH محلول نهایی را بدست می‌آوریم.

$$[H^+] = \frac{1 \text{ mol } H^+}{10 \text{ L}} = 0.1 \text{ mol.L}^{-1}$$

$$pH = -\log[H^+] = -\log(0.1) = 1$$

با توجه به محاسبات بالا، طی این فرایند ۱۰ لیتر محلول اسیدی با $pH = 1$ بدست آمده است. اگر این محلول اسیدی را بر روی نمونه‌ای از خاک خنثی بریزیم، گل‌های ادریسی در آن نمونه از خاک به رنگ آبی می‌رویند.

گروه آموزشی ماز

۸۴- چه تعداد از عبارات‌های داده شده درست هستند؟

- آ: غلظت یون OH^- در اسید ترشح شده از دیواره معده، در مقایسه با غلظت این یون در آب گازدار کمتر است.
ب: پنتانوئیک اسید پس از انحلال در آب، آنیونی را ایجاد می‌کند که ۵ جفت الکترون ناپیوندی در ساختار خود دارد.
پ: گوگرد تری‌اکسید، یک اسید آرنیوس با مولکول‌های ناقطبی بوده و کاغذ pH در محلول آن به رنگ آبی درمی‌آید.
ت: باران‌های معمولی شامل مقداری نیتریک اسید بوده و غلظت یون هیدرونیوم در آن‌ها کمتر از باران‌های اسیدی است.

(۴) ۴

(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) ۱

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط - مفهومی - ۱۲۰۱)



عبارات‌های (آ) و (ب) درست هستند.



آ: خاصیت اسیدی یک محلول، با غلظت یون‌های هیدروکسید موجود در آن رابطه وارونه دارد. چون خاصیت اسیدی آب گازدار کمتر از اسید معده است، غلظت یون هیدروکسید در اسید ترشح شده از دیواره معده، در مقایسه با غلظت این یون در آب گازدار کمتر است.

ب: کربوکسیلیک اسیدها، از جمله اسیدهای ضعیف بوده و به طور جزئی در محلول خود یونش پیدا می کنند. ساختار مولکولی کربوکسیلیک اسیدها و آنیون حاصل از یونش آن ها (یون کربوکسیلات) به صورت زیر است:



همانطور که مشخص است، در ساختار آنیون حاصل از کربوکسیلیک اسیدها، ۵ جفت الکترون ناپیوندی وجود دارد.

پ: مولکول ناقطبی گوگرد تری اکسید با حل شدن در آب، یون هیدرونیوم تولید می کند؛ بنابراین یک اسید آرنیوس به شمار رفته و کاغذ pH در محلول آن به رنگ قرمز (سرخ) درمی آید. در این رابطه، داریم:

محیط اسیدی	محیط بازی	کاغذ pH
رنگ قرمز	رنگ آبی	گل ادریسی
رنگ آبی	رنگ قرمز	

توجه داریم که تغییر رنگ کاغذ pH ، معیاری برای تشخیص اسیدی یا بازی بودن محلول ها است. در واقع می توان با رنگی که این کاغذ درون یک محلول به خود می گیرد، مقدار pH تقریبی آن محلول را تعیین کرد.

ت: باران های معمولی شامل مقداری کربنیک اسید (H_2CO_3) بوده و غلظت یون هیدرونیوم در آن ها کمتر از باران های اسیدی است. در نقطه مقابل، باران های اسیدی شامل سولفوریک اسید و نیتریک اسید می شوند.

در مناطق صنعتی، مقداری از گازهای گوگرد تری اکسید و اکسیدهای نیتروژن در آب باران حل شده و سولفوریک اسید و نیتریک اسید در این آب ها تولید می شوند. به خاطر وجود این مواد، آب باران در مناطق صنعتی خاصیت اسیدی پیدا کرده و pH آن کمتر از ۷ است. در نقطه مقابل، در آب باران های معمولی نیز مقداری گاز کربن دی اکسید حل شده و کربنیک اسید را به وجود می آورد. به خاطر وجود این ماده، آب باران های معمولی نیز خاصیت اسیدی پیدا می کند اما میزان اسیدی بودن آن از میزان اسیدی بودن باران های اسیدی کمتر خواهد بود.

گروه آموزشی ماز

۸۵- یک محلول همگن ۴ لیتری از منیزیم کلرید را به دو نیم تقسیم می کنیم. اگر نیم اول این محلول با ۲۷۸ گرم از پاک کننده ای با فرمول شیمیایی $C_{15}H_{31}COONa$ به طور کامل واکنش بدهد، پس از تبخیر آب از نیم دیگر آن و برقکافت نمک باقیمانده، چند گرم فلز منیزیم تولید شده و در مدار خارجی این سلول، چند الکترون مبادله می شود؟

($Mg = 24$ و $O = 16$ و $C = 12$ و $H = 1$: $g \cdot mol^{-1}$)

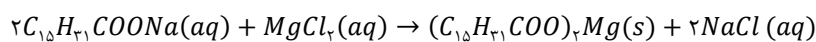
$$\begin{aligned} 1/20.4 \times 10^{24} - 12 \quad (2) \\ 6/0.2 \times 10^{23} - 12 \quad (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1/20.4 \times 10^{24} - 24 \quad (1) \\ 6/0.2 \times 10^{23} - 24 \quad (3) \end{aligned}$$

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط - مساله - ۱۲۰۲)



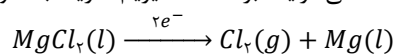
هر ۲ مول از صابون های مختلف، با یک مول یون منیزیم و یا کلسیم واکنش داده و به مواد رسوبی (مواد نامحلول در آب) تبدیل می شود. فرمول شیمیایی صابون به صورت $C_{15}H_{31}COONa$ بوده و جرم مولی آن برابر با ۲۷۸ گرم بر مول است. واکنش انجام شده بین صابون مورد نظر و محلول منیزیم کلرید ($MgCl_2$) به صورت زیر است.



با توجه به معادله واکنش، مقدار منیزیم کلرید مصرف شده را محاسبه می کنیم.

$$? \text{ mol } MgCl_2 = 278 \text{ g صابون} \times \frac{1 \text{ mol صابون}}{278 \text{ g صابون}} \times \frac{1 \text{ mol } MgCl_2}{2 \text{ mol صابون}} = 0.5 \text{ mol}$$

در یک نیمه از محلول مورد نظر، نیم مول منیزیم کلرید وجود داشته که با صابون واکنش داده است، پس می توان گفت در نیم دیگر این محلول نیز نیم مول منیزیم کلرید وجود خواهد داشت. معادله واکنش انجام شده طی فرایند برقکافت منیزیم کلرید، به صورت زیر است:



با توجه به معادله این واکنش، داریم:

$$? \text{ g } Mg = 0.5 \text{ mol } MgCl_2 \times \frac{1 \text{ mol } Mg}{1 \text{ mol } MgCl_2} \times \frac{24 \text{ g } Mg}{1 \text{ mol } Mg} = 12 \text{ g}$$

$$? e^- = 0.5 \text{ mol } MgCl_2 \times \frac{2 \text{ mol } e^-}{1 \text{ mol } MgCl_2} \times \frac{6/0.2 \times 10^{23} e^-}{1 \text{ mol } e^-} = 6/0.2 \times 10^{23} e^-$$

بعد از سدیم، یون‌های منیزیم فراوان‌ترین کاتیون‌های موجود در آب دریا هستند. به همین خاطر، آب دریا یکی از منابع مورد استفاده برای استخراج فلز منیزیم به حساب می‌آید. برای این منظور، پس از انتقال آب دریا به کارخانه، منیزیم موجود در آن را در قالب ماده جامد و نامحلول منیزیم هیدروکسید رسوب داده و از سایر یون‌های موجود در آب جدا می‌کنند. در مرحله بعد، با اضافه کردن هیدروکلریک اسید به رسوب منیزیم هیدروکسید، آن را به منیزیم کلرید تبدیل کرده و پس از آن، آب موجود در محلول را تبخیر می‌کنند تا منیزیم کلرید جامد به دست بیاید. در مرحله بعد، منیزیم کلرید حاصل را ذوب کرده و به کمک جریان الکتریکی آن را برق‌کافت می‌کنند. فلز منیزیم ماده ارزشمندی است که از آن برای تهیه آلیاژها و شربت معده استفاده می‌شود.

گروه آموزشی ماز

۸۶- چند مورد از مطالب زیر درباره سلول گالوانی $Cu - Ag$ ، درست‌اند؟ ($Cu = 64 \text{ g. mol}^{-1}$)

آ: برخلاف سلول گالوانی روی-مس، الکتروود مس قطب مثبت سلول مورد نظر را تشکیل می‌دهد.

ب: جهت حرکت الکترون‌ها در مدار بیرونی با جهت حرکت آنیون‌ها از دیواره متخلخل هم‌سو است.

پ: پس از انجام واکنش در این سلول، از جرم تیغه مس کاسته شده و به جرم تیغه نقره افزوده می‌شود.

ت: در این سلول، انرژی شیمیایی واکنش اکسایش-کاهش انجام شده به انرژی الکتریکی تبدیل می‌شود.

ث: بر اثر مصرف $3/2$ گرم فلز مس، $3/01 \times 10^{22}$ الکترون در مدار خارجی سلول مورد نظر جابه‌جا خواهد شد.

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

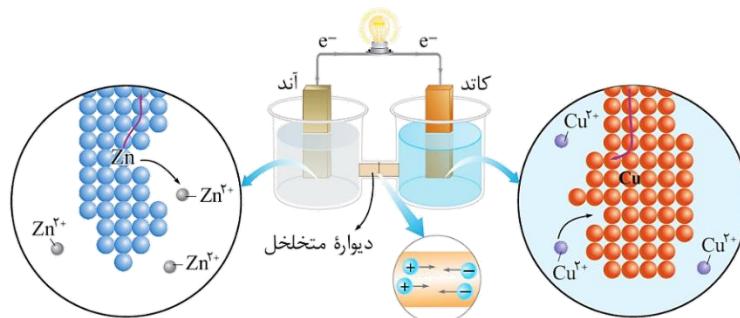
پاسخ: گزینه ۱ (متوسط - مفهومی - ۱۲۰۲)

پاسخ تشریحی:

عبارت‌های (پ) و (ت) درست هستند.

بررسی موارد:

آ: روی در مقایسه با مس و مس نیز در مقایسه با فلز نقره پتانسیل کاهش منفی‌تری دارد. در سلول گالوانی روی-مس، الکتروود مس کاتد و معادل با قطب مثبت سلول بوده و در سلول گالوانی مس-نقره، الکتروود مس در نقش آند بوده و قطب منفی سلول را تشکیل می‌دهد. تصویر زیر، نمایی از سلول گالوانی روی-مس را نشان می‌دهد:



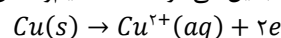
ب: حرکت الکترون‌ها در مدار بیرونی و حرکت کاتیون‌ها از دیواره متخلخل از سمت آند (الکتروود مس) به سمت کاتد (الکتروود نقره) است. در این سلول، آنیون‌ها از خلال دیواره متخلخل به سمت نیم‌سلول آندی حرکت می‌کنند.

پ: پس از انجام واکنش در این سلول، بخشی از اتم‌های مس موجود در تیغه مس به صورت یون $Cu^{2+}(aq)$ درمی‌آیند؛ بنابراین جرم تیغه مس کاسته می‌شود. از سوی دیگر، بخشی از یون‌های $Ag^{+}(aq)$ موجود در نیم‌سلول کاتدی به اتم نقره کاهش پیدا کرده و بر روی تیغه نقره می‌نشینند؛ در نتیجه جرم تیغه نقره افزایش پیدا می‌کند.

ت: در این سلول مشابه همه سلول‌های گالوانی، بخشی از انرژی شیمیایی واکنش اکسایش-کاهش به انرژی الکتریکی تبدیل می‌شود.

به کمک سلول‌های گالوانی، می‌توان انرژی شیمیایی ذخیره شده در فلزهای مختلف را به انرژی الکتریکی تبدیل کرد. واکنش‌های انجام شده در این سلول‌ها با کاهش سطح انرژی واکنش‌دهنده‌ها همراه بوده و فراورده‌های تولید شده در این سلول‌ها پایداری بیشتری نسبت به واکنش‌دهنده‌های مصرف شده در آن‌ها دارند. باتری لیمویی، نوع ساده‌ای از یک سلول گالوانی است که با فرو بردن یک تیغه از جنس فلز مس و یک تیغه از جنس فلز روی در یک لیمو ساخته می‌شود. به کمک این نوع باتری می‌توان یک لامپ LED را روشن کرد.

ث: در این سلول اتم Cu با از دست دادن ۲ الکترون به Cu^{2+} تبدیل می‌شود. معادله نیم‌واکنش انجام شده به صورت زیر است:



بنابراین داریم:

$$? \text{ شمار } e^{-} = 3/2 \text{ g Cu} \times \frac{1 \text{ mol Cu}}{64 \text{ g Cu}} \times \frac{2 \text{ mol } e^{-}}{1 \text{ mol Cu}} \times \frac{6/02 \times 10^{23} e^{-}}{1 \text{ mol } e^{-}} = 6/02 \times 10^{22} e^{-}$$

گروه آموزشی ماز

۸۷- مقدار نیروی الکتروموتوری سلولهای آلومینیم-هیدروژن، آلومینیم-روی و آهن-هیدروژن، به ترتیب برابر با ۱/۶۶، ۰/۹ و ۰/۴۴ ولت است. نیروی الکتروموتوری سلول روی-آهن برابر با چند ولت بوده از بین کاتیونهای فلزی حاصل از عناصر آهن و آلومینیم، کدام یون اکسندۀ تر است؟
 $Al^{3+} - ۰/۵۴$ (۱) $Fe^{2+} - ۰/۵۴$ (۲) $Al^{3+} - ۰/۳۲$ (۳) $Fe^{2+} - ۰/۳۲$ (۴)

پاسخ: گزینه ۴ (آسان - مفهومی - ۱۲۰۲)



جدول زیر نمایی از سری الکتروشیمیایی را نشان می‌دهد:

نیم‌واکنش کاهش			$E^{\circ} (V)$
ولتاژ	گونه کاهنده	الکترون	گونه اکسندۀ
+۱/۵۰	Au(s)	$\rightarrow +3e^{-}$	$Au^{3+}(aq)$
+۱/۲۰	Pt(s)	$\rightarrow +2e^{-}$	$Pt^{2+}(aq)$
+۰/۸۰	Ag(s)	$\rightarrow +e^{-}$	$Ag^{+}(aq)$
+۰/۳۴	Cu(s)	$\rightarrow +2e^{-}$	$Cu^{2+}(aq)$
۰/۰۰	$H_2(g)$	$\rightarrow +2e^{-}$	$2H^{+}(aq)$
-۰/۴۴	Fe(s)	$\rightarrow +2e^{-}$	$Fe^{2+}(aq)$
-۰/۷۶	Zn(s)	$\rightarrow +2e^{-}$	$Zn^{2+}(aq)$
-۱/۱۸	Mn(s)	$\rightarrow +2e^{-}$	$Mn^{2+}(aq)$
-۱/۶۶	Al(s)	$\rightarrow +3e^{-}$	$Al^{3+}(aq)$
-۲/۳۷	Mg(s)	$\rightarrow +2e^{-}$	$Mg^{2+}(aq)$

در سری الکتروشیمیایی، نیم‌واکنشی که E° منفی‌تری دارد، در موقعیت پایین‌تری قرار خواهد گرفت و گونه اکسندۀ شرکت‌کننده در این نیم‌واکنش، تمایل کم‌تری برای به دست آوردن الکترون (اکسندگی) و گونه کاهندۀ شرکت‌کننده در آن نیز تمایل بیشتری به از دست دادن الکترون (کاهندگی) خواهد داشت. نیروی الکتروموتوری در یک سلول گالوانی، حداکثر اختلاف پتانسیلی است که یک سلول می‌تواند به وجود بیاورد. مقدار این اختلاف پتانسیل را با emf نشان می‌دهند. برای پیدا کردن مقدار emf یک سلول گالوانی، ابتدا آند و کاتد سلول گالوانی موردنظر را پیدا کرده و پس از آن E° آند (الکترودی که E° کوچک‌تری دارد) را از E° کاتد (الکترودی که E° بزرگ‌تری دارد) کم می‌کنیم. رابطه استفاده شده به صورت زیر است:

$$emf = E^{\circ}(\text{کاتد}) - E^{\circ}(\text{آند}) = E^{\circ}(\text{بزرگ‌تر}) - E^{\circ}(\text{کوچک‌تر})$$

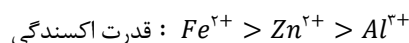
با توجه به رابطه بالا، مقدار پتانسیل کاهش استاندارد هر فلز را محاسبه می‌کنیم:

۱) مقدار emf سلول آلومینیم-هیدروژن برابر با ۱/۶۶ ولت بوده و می‌دانیم که آلومینیم در مقایسه با هیدروژن E° کوچک‌تری دارد. از طرفی، می‌دانیم که E° هیدروژن برابر با صفر است، پس مقدار E° آلومینیم برابر با ۱/۶۶- ولت می‌شود.

۲) مقدار emf سلول آهن-هیدروژن برابر با ۰/۴۴ ولت بوده و می‌دانیم که فلز آهن در مقایسه با هیدروژن E° کوچک‌تری دارد. از طرفی، می‌دانیم که مقدار E° هیدروژن نیز برابر با صفر ولت است، پس مقدار E° فلز آهن برابر با ۰/۴۴- ولت می‌شود.

۳) مقدار emf سلول آلومینیم-روی برابر با ۰/۹ ولت بوده و می‌دانیم که آلومینیم در مقایسه با روی نیز مقدار E° کوچک‌تری دارد. از طرفی، بدست آوردیم که E° آلومینیم برابر با ۱/۶۶- ولت است، پس مقدار E° روی برابر با ۰/۷۶- ولت می‌شود.

از بین فلزهای آهن، آلومینیم و روی، فلز آهن دارای بالاترین مقدار E° است، پس می‌توان گفت کاتیون حاصل از این فلز در مقایسه با کاتیون حاصل از عناصر روی و آلومینیم تمایل بیشتری به گرفتن الکترون (قدرت اکسندگی) دارد. مقایسه قدرت اکسندگی این یون‌ها به صورت زیر است:



چون آهن در مقایسه با روی E° بالاتری دارد، در سلول روی-آهن، فلز آهن در نقش کاتد و فلز روی در نقش آند خواهد بود. مقدار E° این فلزها را بدست آوردیم، پس بر این اساس مقدار emf سلول گالوانی روی-آهن را محاسبه می‌کنیم.

$$emf = E^{\circ}(\text{کاتد}) - E^{\circ}(\text{آند}) = (-۰/۴۴) - (-۰/۷۶) = ۰/۳۲ \text{ ولت}$$

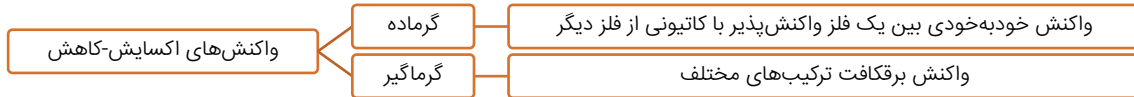
گروه آموزشی ماز

۸۸- کدام یک از مطالب زیر نادرست است؟

- ۱) در واکنش میان فلز روی با گاز اکسیژن، هر اتم از گونه کاهنده ۲ الکترون با $l = ۰$ از دست می‌دهد.
- ۲) علامت E° فلزهایی که کاهنده‌تر از H_2 هستند، در سری الکتروشیمیایی با نماد منفی مشخص می‌شود.
- ۳) در واکنش یک تیغه فلزی از جنس مس با محلولی از روی سولفات، فرآورده‌هایی با پایداری بیشتر تولید می‌شوند.
- ۴) در سلول گالوانی روی-نقره، آنیون‌ها از خلال دیواره متخلخل به سمت محلول موجود در نیم‌سلول روی حرکت می‌کنند.



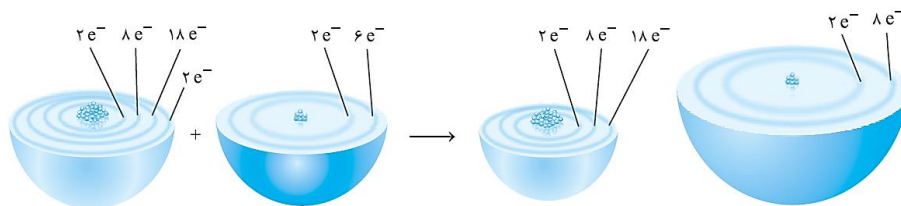
واکنش‌های اکسایش-کاهش را با توجه به مدل مبادله گرما در آن‌ها در دو دسته زیر می‌توان قرار داد:



معادله واکنش تیغه مس و محلول روی سولفات، در صورت انجام شدن، به صورت $Cu(s) + ZnSO_4(aq) \rightarrow CuSO_4(aq) + Zn(s)$ است. چون فلز مس در مقایسه با فلز روی واکنش‌پذیری کمتر و مقدار E° (پتانسیل کاهش استاندارد) بزرگ‌تری دارد، این واکنش گرماگیر به صورت طبیعی انجام نشده و اتم‌های مس توسط یون‌های روی اکسایش پیدا نمی‌کنند.



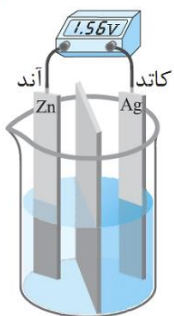
۱ واکنش میان فلز روی و گاز اکسیژن به صورت زیر است:



گونه کاهنده، گونه‌ای است که اکسایش یافته و سبب کاهش سایر گونه‌های شرکت‌کننده در واکنش می‌شود. در این واکنش، فلز روی کاهنده است. هر اتم روی دو الکترون از زیرلایه $4s$ از دست داده و به یون روی تبدیل می‌شود.

۲ هر فلزی که کاهنده‌تر از هیدروژن باشد (در مقایسه با هیدروژن تمایل بیشتری به اکسید شدن (از دست دادن الکترون) داشته باشد)، در سری الکتروشیمیایی در موقعیت پایین‌تری در مقایسه با هیدروژن قرار می‌گیرد. پتانسیل کاهش استاندارد فلزهایی که در سری الکتروشیمیایی در مقایسه با هیدروژن در موقعیت پایین‌تری قرار دارند، منفی است. در نقطه مقابل، فلزهایی که در مقایسه با هیدروژن قدرت کاهندگی کمتری دارند (طلا، پلاتین، نقره و مس)، در سری الکتروشیمیایی در مقایسه با هیدروژن در موقعیت بالاتری قرار داشته و پتانسیل کاهش آن‌ها نیز بزرگ‌تر از صفر است. در سری الکتروشیمیایی، نیم‌واکنش‌ها به شکل کاهش نوشته شده‌اند و این پیشنهاد آیوپاک، برای هماهنگی در همه منابع علمی معتبر به کار گرفته می‌شود. در هر نیم‌واکنش، گونه کاهنده در سمت راست و گونه اکسنده در سمت چپ نوشته می‌شود.

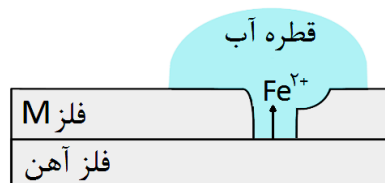
۴ تصویر مقابل، نمایی از سلول گالوانی روی-نقره را نشان می‌دهد:



در سلول گالوانی مورد نظر، تیغه نقره در نقش کاتد (قطب مثبت) و تیغه‌ی روی در نقش آند (قطب منفی) است. با کارکرد این سلول، آنیون‌های موجود در محلول الکترولیت به سمت تیغه آند (تیغه روی) حرکت می‌کنند؛ درحالی که الکترون‌های موجود در مدار خارجی، به سمت کاتد (تیغه نقره) جاری می‌شوند. در این سلول گالوانی، به مرور زمان جرم تیغه کاتدی (تیغه نقره) افزایش یافته و جرم تیغه آندی (تیغه روی) کاهش پیدا می‌کند. الکترون‌های موجود در مدار خارجی این سلول نیز به تدریج به سمت تیغه نقره جاری می‌شوند.

گروه آموزشی ماز

۸۹- کدام یک از عبارت‌های داده شده در مورد شکل زیر، به یقین درست است؟



- از مجاورت مقدار کافی از فلز M با نیتریک اسید، مقداری گاز هیدروژن آزاد می‌شود.
- برای جلوگیری از خوردگی لوله‌های ساخته شده از منیزیم، می‌توان از فلز M بهره برد.
- در سری الکتروشیمیایی، فلز M در جایگاه پایین‌تری نسبت به آهن قرار داشته و E° آن منفی‌تر است.
- در سلول گالوانی حاصل از فلز M و فلز روی، فلز M قطب مثبت سلول را تشکیل داده و به جرم این فلز افزوده می‌شود.



با توجه به شکل داده شده در صورت سوال، بعد از خراش قطعه فلزی یون آهن (Fe^{2+}) وارد قطره آب شده است. این یعنی بعد از ایجاد خراش، فلز آهن در نقش آند بوده و خورده می شود و فلز M نقش کاتد را ایفا می کند؛ در نتیجه می توان گفت که قدرت کاهندگی آهن، بیشتر از فلز M بوده و آهن در سری الکتروشیمیایی در مکان پایین تری نسبت به فلز M جای دارد. از طرفی، می دانیم که فلز روی در مقایسه با آهن در سری الکتروشیمیایی در موقعیت پایین تری قرار گرفته است. در این رابطه داریم:

سری الکتروشیمیایی
فلز M
آهن
روی

در سلول گالوانی، فلزی با قدرت کاهندگی بیشتر، نقش آند را دارد؛ در نتیجه در سلول گالوانی متشکل از دو فلز روی و M ، آهن نقش آند را داشته و قطب منفی سلول را تشکیل می دهد. همچنین فلز M ، نقش کاتد را داشته و قطب مثبت سلول را تشکیل می دهد. می دانیم که در سلول های گالوانی متشکل از دو الکتروده متفاوت، به تدریج از جرم آند کاسته و به جرم کاتد افزوده می شود.



۱ می دانیم که واکنش پذیری (قدرت کاهندگی) فلز M از آهن کمتر است. در سری الکتروشیمیایی، فلز M می تواند فلزی بالاتر از هیدروژن (مثل نقره، مس و ...) باشد یا می تواند فلزی پایین تر از هیدروژن باشد به طوریکه که واکنش پذیری کمتری نسبت به آهن دارد (مثل قلع). می دانیم که فلزهای پایین تر از هیدروژن با محلول اسیدها واکنش داده و گاز هیدروژن آزاد می کنند. همچنین فلزهای بالاتر از هیدروژن (فلزهایی با $E^{\circ} > 0$) در سری الکتروشیمیایی توانایی واکنش با محلول اسیدها را ندارند.

۲ واکنش پذیری فلز منیزیم، بیشتر از آهن است؛ در نتیجه فلز M هیچگاه نمی تواند از فلز منیزیم در مقابل خوردگی محافظت کند. فلزی می تواند از منیزیم در برابر خوردگی محافظت کند که قدرت کاهندگی بیشتری نسبت به آن داشته باشد. برای مثال، لیتیم فلزی با بیشترین قدرت کاهندگی است و از آن می توان برای جلوگیری از خوردگی سایر فلزها استفاده کرد.

۳ فلز آهن کاهنده قوی تری نسبت به فلز M بوده؛ در نتیجه پتانسیل کاهش استاندارد آن منفی تر از M است و در سری الکتروشیمیایی در جایگاه پایین تری نسبت به فلز M جای دارد.

گروه آموزشی ماز

۹۰ - معادله موازنه نشده واکنش زیر را در نظر بگیرید:



اگر در این واکنش، ۶۸ گرم $CaHPO_4$ تشکیل شده باشد، چند گرم $NaHCO_3$ با خلوص ۹۶٪ مصرف شده و گاز کربن دی اکسید تولید شده در این فرایند، به ازای تولید چند گرم فلز آلومینیم در فرایند هال، بدست می آید؟



۳۶ - ۸۷/۵ (۴)

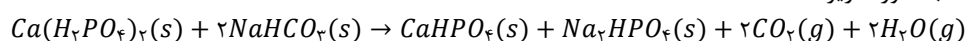
۵۴ - ۸۷/۵ (۳)

۳۶ - ۸۰/۶۴ (۲)

۵۴ - ۸۰/۶۴ (۱)



معادله واکنش انجام شده، به صورت زیر است:



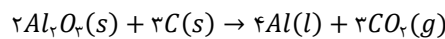
معادله واکنش فوق، از جمله معادله واکنش هایی است که در کنکورهای سال ۱۴۰۲ از آن سوال استوکیومتری طراحی شده است. با توجه به معادله واکنش داده شده، جرم سدیم هیدروژن کربنات (جوش شیرین) مصرف شده را محاسبه می کنیم:

$$\begin{aligned} \text{ناخالص } 96 \text{ g NaHCO}_3 &= \frac{100 \text{ g NaHCO}_3}{96 \text{ g NaHCO}_3} \times \frac{184 \text{ g NaHCO}_3}{1 \text{ mol NaHCO}_3} \times \frac{2 \text{ mol NaHCO}_3}{1 \text{ mol CaHPO}_4} \times \frac{1 \text{ mol CaHPO}_4}{136 \text{ g CaHPO}_4} \times 68 \text{ g CaHPO}_4 \\ &= 87/5 \text{ g} \end{aligned}$$

در قدم بعد، مقدار گاز کربن دی اکسید تولید شده در این واکنش را محاسبه می کنیم:

$$? \text{ mol } CO_2 = 68 \text{ g } CaHPO_4 \times \frac{1 \text{ mol } CaHPO_4}{136 \text{ g } CaHPO_4} \times \frac{2 \text{ mol } CO_2}{1 \text{ mol } CaHPO_4} = 1 \text{ mol}$$

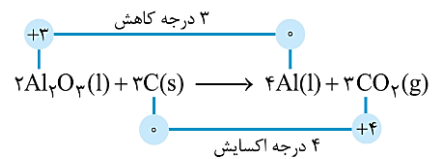
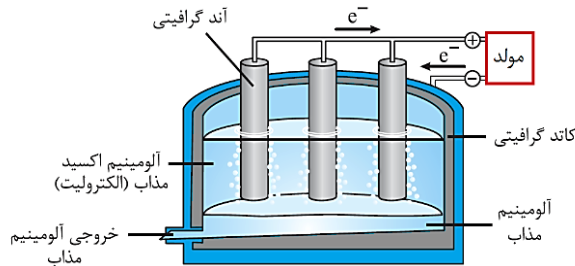
معادله واکنش انجام شده در فرایند هال به صورت زیر است:



بر این اساس، داریم:

$$? \text{ g } Al = 1 \text{ mol } CO_2 \times \frac{4 \text{ mol } Al}{3 \text{ mol } CO_2} \times \frac{27 \text{ g } Al}{1 \text{ mol } Al} = 36 \text{ g}$$

فرایند هال به علت مصرف مقدار زیادی انرژی الکتریکی، هزینه بالایی دارد. به همین دلیل بازیافت فلز آلومینیم اهمیت زیادی دارد؛ زیرا با بازیافت آلومینیم می توان ضمن افزایش عمر این منبع تجدیدناپذیر، هزینه تولید این فلز ارزشمند را کاهش داد. تصویر زیر، سلول الکترولیتی مورد استفاده برای انجام فرایند هال را نشان می دهد:



گروه آموزشی ماز

۹۱- در سلول گالوانی آلومینیم-روی، در هر ثانیه $10^{21} \times 24/08$ الکترون از مدار خارجی عبور می کند. اگر در نیم سلول کاتدی، ۷۰٪ از اتم های تولید شده در نیم واکنش کاهش بر روی سطح کاتد رسوب کنند، پس از گذشت ۳۰ دقیقه از شروع واکنش، چند گرم به جرم تیغه کاتدی افزوده می شود؟

$$(Zn = 65 \text{ و } Al = 27 : g \cdot mol^{-1})$$

۱۴۲۶ (۴)

۱۶۳۸ (۳)

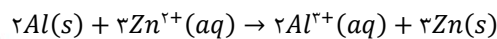
۲۳۴۰ (۲)

۳۳۴۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط - مساله - ۱۲۰۲)



واکنش انجام شده در این سلول به صورت زیر است:



در این واکنش شیمیایی به ازای تولید هر مول Zn ، مقدار ۲ مول الکترون بین گونه های کاهنده و اکسند مبادله شده است. طبق فرض سوال، در هر ثانیه تعداد $10^{21} \times 24/08$ الکترون (معادل با $0/04$ مول الکترون) از سیم (مدار خارجی) عبور می کند؛ در نتیجه در مدت زمان ۳۰ دقیقه (۱۸۰۰ ثانیه)، ۷۲ مول الکترون از آند به کاتد جریان داشته است. یون های Zn^{2+} با تبدیل شدن به اتم های Zn بر روی کاتد رسوب می کنند. اگر فرض کنیم کل (۱۰۰ درصد) این یون ها کاهش پیدا کنند، تغییر جرم تیغه کاتدی برابر است با:

$$? \text{ g } Zn = 72 \text{ mol } e \times \frac{1 \text{ mol } Zn}{2 \text{ mol } e} \times \frac{65 \text{ g } Zn}{1 \text{ mol } Zn} = 2340 \text{ g}$$

اگر کل یون های روی به اتم روی تبدیل شوند و بر روی کاتد رسوب کنند، ۲۳۴۰ گرم به جرم تیغه کاتدی افزوده می شود؛ ولی طبق فرض سوال ۷۰ درصد از یون ها با تبدیل شدن به اتم روی بر روی کاتد رسوب کرده اند؛ در نتیجه ۱۶۳۸ گرم ($2340 \times \frac{70}{100}$) رسوب بر روی تیغه کاتدی ایجاد شده است.

گروه آموزشی ماز

۹۲- با کارکرد سلول، جرم تیغه در سلول مورد نظر، همانند تیغه در سلول گالوانی آلومینیم-مس، به تدریج پیدا می کند.

(۲) مربوط به فرایند هال، آندی، آلومینیم، کاهش
(۴) گالوانی منیزیم-نقره، آندی، مس، افزایش

(۱) مربوط به آبکاری، کاتدی، آلومینیم، افزایش
(۳) سوختی هیدروژن-اکسیژن، آندی، مس، کاهش

پاسخ: گزینه ۲ (آسان - مفهومی - ۱۲۰۲)



همانطور که می دانیم، فلز آلومینیم در مقایسه با فلز مس، پتانسیل کاهشی منفی تری دارد. در سلول گالوانی آلومینیم-مس، تیغه آلومینیم در نقش آند بوده و به مرور زمان از جرم آن کاسته می شود. در این سلول، تیغه مس در نقش کاتد بوده و جرم آن به مرور زمان افزایش پیدا می کند. در سلول مربوط به فرایند

هال نیز تیغه‌های گرافیتی آندی در واکنش کلی سلول شرکت کرده و به مرور زمان جرم آن‌ها کاهش پیدا می‌کند. توجه داریم که در این سلول، جرم کاتد(بدنه گرافیتی ظرف) به مرور زمان دچار تغییر نمی‌شود.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱ در سلول مربوط به آبکاری اجسام مختلف، جرم تیغه آندی کاهش یافته و جرم تیغه کاتدی افزایش پیدا می‌کند.

۳ در سلول سوختی هیدروژن-اکسیژن، جرم تیغه‌های آندی و کاتدی ثابت بوده و در طول زمان دچار تغییر نمی‌شود.

سلول سوختی، نوعی سلول گالوانی است که توسط شیمی‌دان‌ها و برای گذر از تنگنای تولید انرژی و کاهش آلودگی محیط زیست پیشنهاد می‌شود. این سلول‌ها ردپای گاز کربن دی‌اکسید را کاهش می‌دهند. رایج‌ترین سلول سوختی، سلول هیدروژن-اکسیژن است که در آن گاز هیدروژن به آرامی و تحت یک شرایط کنترل شده با گاز اکسیژن وارد واکنش شده و اکسید می‌شود. طی این فرایند، بخش زیادی از انرژی شیمیایی ذخیره شده در مولکول‌های هیدروژن به انرژی الکتریکی تبدیل می‌شود.

۴ در سلول گالوانی منیزیم-نقره، تیغه منیزیم در نقش آند بوده و به مرور زمان جرم آن کاهش پیدا می‌کند.

گروه آموزشی ماز

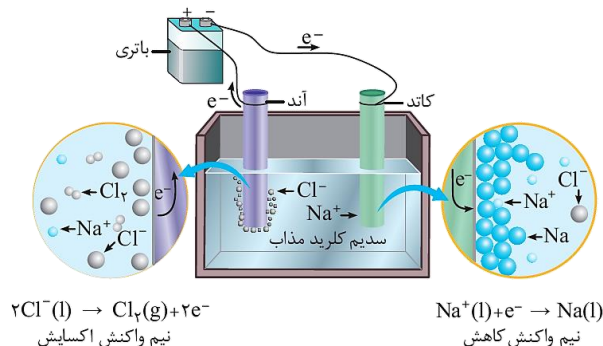
۹۳- کدام یک از مطالب زیر نادرست است؟

- ۱) برای کاهش دمای ذوب سدیم کلرید خالص، از نمکی که در تهیه بسته‌های گرمایا نیز کاربرد دارد، استفاده می‌شود.
- ۲) در برقکافت آب، نیم‌واکنش $2H_2O(l) \rightarrow O_2(g) + 4H^+(aq) + 4e^-$ در سطح الکترود با بار مثبت انجام می‌شود.
- ۳) اگر در سلول الکترولیتی مربوط به آبکاری با نقره، جنس تیغه آندی از نقره باشد، غلظت یون نقره در محلول ثابت می‌ماند.
- ۴) عنصر تولید شده در آند سلول برقکافت سدیم کلرید مذاب، نسبت به سایر عناصر هم‌تناوب خود شعاع اتمی بزرگ‌تری دارد.

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط - مفهومی - ۱۲۰۲)

پاسخ تشریحی:

واکنش شیمیایی انجام شده در سلول مربوط به برقکافت سدیم کلرید مذاب، همانند واکنش انجام شده در سایر سلول‌های الکترولیتی، در خلاف جهت طبیعی به پیش رانده می‌شود. در آند سلول مربوط به برقکافت سدیم کلرید مذاب، گاز کلر تولید شده و در سمت کاتد این سلول نیز فلز سدیم تولید می‌شود. تصویر زیر، نمایی از این سلول را نشان می‌دهد:

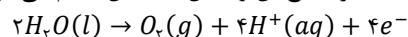


از آنجا که در هر تناوب با حرکت از چپ به راست، شعاع اتمی عناصر کاهش پیدا می‌کند، می‌توان گفت عنصر کلر بعد از آرگون، در مقایسه با سایر عناصر هم‌تناوب خود شعاع کوچک‌تری دارد.

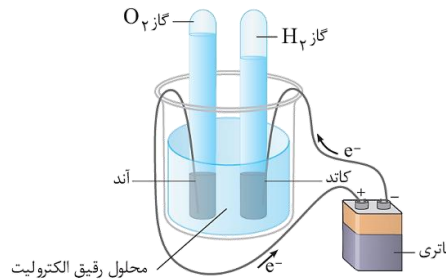
بررسی سایر گزینه‌ها:

۱ سدیم کلرید خالص در $801^\circ C$ ذوب می‌شود و پس از آن، در سلول برقکافت به عناصر سازنده خود تبدیل می‌شود. افزودن مقداری کلسیم کلرید ($CaCl_2$) به این ماده، دمای ذوب آن را تا حدود $587^\circ C$ پایین می‌آورد. با انجام این کار، انرژی کمتری برای ذوب سدیم کلرید صرف می‌شود. با صرف انرژی کمتر، سوخت‌های فسیلی کمتری مصرف می‌شود؛ در نتیجه ردپای کربن دی‌اکسید در محیط کاهش می‌یابد. توجه داریم که انحلال کلسیم کلرید در آب گرماده است و از آن برای تهیه بسته‌های گرمایا ورزشکاران استفاده می‌شود.

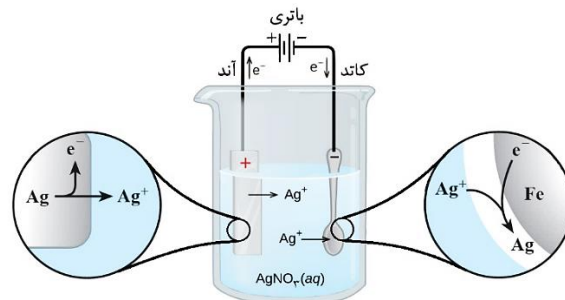
۲ در سلول برقکافت آب، الکترود با بار مثبت آند است که در سطح آن واکنش اکسایش انجام می‌شود:



تصویر زیر، نمایی از سلول برقکافت آب را نشان می‌دهد:



اگر در سلول الکترولیتی مربوط به آبکاری اجسام فلزی با فلز نقره، جنس تیغه‌ی آندی از نقره باشد، به ازای کاهش هر یون نقره در محل کاتد، یک اتم نقره در سمت آند اکسایش پیدا می‌کند و به همین خاطر، غلظت یون نقره در محلول موجود در این سلول ثابت می‌ماند. تصویر زیر، سلول مورد استفاده برای آبکاری یک قاشق فلزی با نقره را نشان می‌دهد.



گروه آموزشی ماز

۹۴- کدام موارد از عبارت‌های داده شده نادرست هستند؟

- آ: تیغه سازنده آند سلول نورالکتروشیمیایی مربوط به تهیه گاز H_2 از آب، همانند گرافیت، نوعی جامد کووالانسی است.
 ب: در ساختار بلور یخ، هر مولکول H_2O توسط ۴ پیوند هیدروژنی در ارتباط با ۴ مولکول H_2O دیگر قرار می‌گیرد.
 پ: در گوگرد دی‌اکسید، همانند کربنیل سولفید، هسته هر سه اتم سازنده بر روی یک خط راست قرار می‌گیرد.
 ت: با انحلال $NaCl$ در آب، یون‌هایی از محلول با شعاع بزرگ‌تر، توسط اتم O مولکول‌های آب احاطه می‌شوند.
- (۱) آ و ب (۲) ب و پ (۳) پ و ت (۴) آ و ت

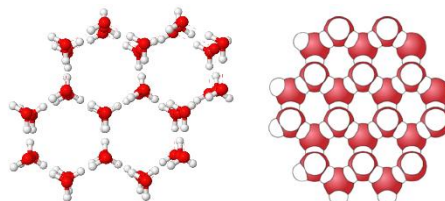
پاسخ: گزینه ۳ (متوسط - مفهومی - ۱۲۰۳)

پاسخ تشریفی

عبارت‌های (پ) و (ت) درست هستند.

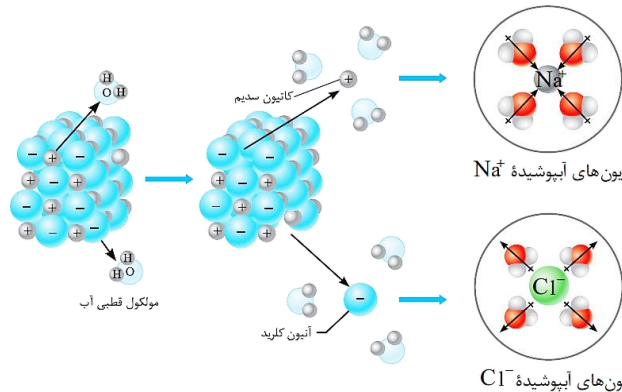
بررسی موارد

آ: در سلول نورالکتروشیمیایی استفاده شده به منظور تهیه گاز هیدروژن از آب، تیغه آندی با استفاده از سیلیسیم ساخته می‌شود. این تیغه به مرور زمان دچار اکسایش شده و به سیلیس تبدیل می‌شود. سیلیسیم و سیلیس، هر دو همانند گرافیت، از جامدهای کووالانسی هستند.
 ب: در بلور یخ، هر مولکول آب دو اتم هیدروژن و یک اتم اکسیژن دارد. هر اتم اکسیژن به ۲ اتم هیدروژن از مولکول‌های دیگر و هر اتم هیدروژن به یک اتم اکسیژن از مولکول دیگر با پیوند هیدروژنی متصل است. با توجه به توضیحات داده شده، در بلور یخ هر مولکول آب با ۴ پیوند هیدروژنی در ارتباط با ۴ مولکول آب دیگر قرار می‌گیرد. تصویر زیر نمایی از بلور یخ را نشان می‌دهد:



پ: در ساختار گوگرد دی‌اکسید، به علت وجود جفت الکترون ناپیوندی بر روی اتم گوگرد (اتم مرکزی)، هسته اتم‌ها بر روی یک خط راست قرار نمی‌گیرند و به همین خاطر است که گشتاور دو قطبی این مولکول بیشتر از صفر می‌شود. در نقطه مقابل، در ساختار کربنیل سولفید (SCO)، هسته هر سه اتم سازنده بر روی یک خط راست قرار گرفته و به همین خاطر، می‌توان گفت این مولکول ساختار خطی دارد.

ت: سدیم کلرید یک ترکیب یونی با بلورهای مکعبی است که در آن یونهای Na^+ و Cl^- با آرایشی منظم در سه بعد جای گرفته‌اند. هنگامی که بلور کوچکی از این ماده جامد در آب وارد می‌شود، مولکول‌های قطبی آب از سرهای مخالف به یون‌های بیرونی بلور نزدیک شده و نیروی جاذبه‌ای میان آن‌ها برقرار می‌شود. به این صورت که مولکول‌های آب از سمت اتم اکسیژن (سر منفی مولکول آب) به کاتیون‌ها و از سمت اتم‌های هیدروژن (سر مثبت مولکول آب) به آنیون‌ها نزدیک می‌شوند. تصویر زیر، فرایند انحلال سدیم کلرید در آب را نشان می‌دهد:



توجه داریم که در این محلول، سر مثبت (اتم هیدروژن) از مولکول‌های آب در مجاورت با یون‌های کلرید (یون‌هایی که شعاع بزرگ‌تری دارند) قرار گرفته است.

گروه آموزشی ماز

۹۵- گازهای نیتروژن و اکسیژن، در شرایط مناسب با یکدیگر واکنش داده و گاز NO را تولید می‌کنند. اگر تفاوت جرم دو گاز در آغاز واکنش برابر 0.5 گرم باشد، چند گرم فراورده طی این فرایند تشکیل شده و بر اثر مخلوط کردن این مقدار گاز NO با چند مول بخار پنتین، مخلوطی ایجاد می‌شود که درصد جرمی ترکیب ناقطبی در آن برابر با 85% است؟

$$(N = 14 \text{ و } O = 16 : g.mol^{-1})$$

$$0.525 - 12.5 \quad (4)$$

$$0.575 - 12.5 \quad (3)$$

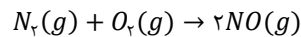
$$0.875 - 7.5 \quad (2)$$

$$0.625 - 7.5 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۱ (سخت - مساله - ۱۳۰۳)

پاسخ تشریحی

معادله واکنش انجام شده به صورت زیر است:



در این واکنش شیمیایی، به ازای مصرف یک مول گاز اکسیژن (معادل با 32 گرم اکسیژن) و یک مول گاز نیتروژن (معادل با 28 گرم گاز نیتروژن)، 2 مول گاز نیتروژن مونوکسید به عنوان فراورده تولید می‌شود. بر این اساس، می‌توان گفت به ازای 4 گرم تفاوت در جرم واکنش‌دهنده‌های مصرف شده، 2 مول فراورده در این واکنش تولید می‌شود. با توجه به توضیحات داده شده، داریم:

$$? g NO = 0.5 g \text{ تفاوت جرم واکنش‌دهنده‌ها} \times \frac{2 \text{ mol } NO}{4 g \text{ تفاوت جرم واکنش‌دهنده‌ها}} \times \frac{30 g NO}{1 \text{ mol } NO} = 7.5 g$$

پنتین، عضوی از خانواده آلکین‌ها با فرمول شیمیایی C_5H_8 است. می‌خواهیم با افزودن مقداری پنتین به 7.5 گرم گاز نیتروژن مونوکسید، مخلوطی بدست بیاوریم که درصد جرمی گاز ناقطبی (بخار پنتین) در آن برابر با 85% درصد باشد. جرم پنتین اضافه شده به این مخلوط را برابر با x گرم در نظر می‌گیریم. بر این اساس، داریم:

$$\text{درصد جرمی پنتین} = \frac{\text{جرم پنتین}}{\text{جرم مخلوط}} \times 100 \Rightarrow 85 = \frac{x}{x + 7.5} \times 100 \Rightarrow x = 42.5 g$$

در قدم بعد، شمار مول‌های بخار پنتین را محاسبه می‌کنیم:

$$? \text{ mol } C_5H_8 = 42.5 g C_5H_8 \times \frac{1 \text{ mol } C_5H_8}{68 g C_5H_8} = 0.625 \text{ mol}$$

گروه آموزشی ماز

۹۶- کدام یک از مقایسه‌های زیر، در رابطه با نمونه‌هایی از سیلیس و کربن دی‌اکسید به صورت نادرست انجام شده است؟

(۲) درصد جرمی اکسیژن: $CO_2 < \text{سیلیس}$

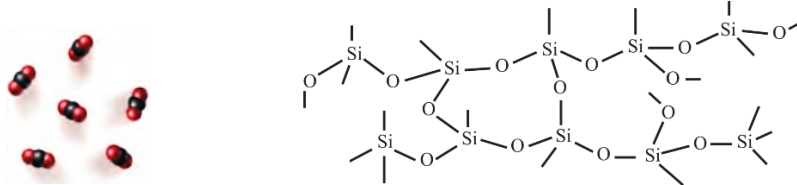
(۱) دمای ذوب: $CO_2 > \text{سیلیس}$

(۴) مقدار انحلال‌پذیری در آب: $CO_2 > \text{سیلیس}$

(۳) عدد اکسایش اتم اکسیژن: $CO_2 = \text{سیلیس}$



سیلیس یا سیلیسیم دی اکسید (SiO_2)، فراوان ترین اکسید موجود در پوسته جامد زمین بوده و از کنار هم قرار گرفتن اتم های سیلیسیم و اکسیژن تشکیل شده است. سیلیس بر خلاف کربن دی اکسید، نوعی جامد کووالانسی است و در ساختار این ماده، اتم های سیلیسیم و اکسیژن با پیوندهای اشتراکی $Si-O-Si$ به یکدیگر متصل شده اند. ساختار سیلیس و کربن دی اکسید (CO_2) تفاوت های آشکاری با یکدیگر دارند. به همین علت، خواص این دو ماده نیز متفاوت از یکدیگر خواهد بود. ساختار این دو ماده به صورت زیر است:



اغلب اکسیدهای نافلزگی گازی از جمله گاز کربن دی اکسید با آب واکنش می دهند و محلول های اسیدی را ایجاد می کنند، پس می توان گفت این مواد انحلال پذیری بالایی در آب دارند. توجه داریم که سیلیس (SiO_2)، برخلاف کربن دی اکسید (CO_2) در آب نامحلول است.



۱ سیلیس، یک جامد کووالانسی است. برای ذوب کردن و یا خرد کردن سیلیس و سایر جامدهای کووالانسی، باید بر پیوندهای اشتراکی بین اتم های موجود در این مواد غلبه کنیم. بر این اساس، جامدهای کووالانسی دیرگداز بوده و علاوه بر سختی زیاد، نقطه ذوب بالایی دارند. در نقطه ی مقابل، گاز کربن دی اکسید یک ماده ی مولکولی است. همانطور که می دانیم، برای ذوب کردن مواد مولکولی، باید بر نیروهای ضعیف بین مولکولی در آن ها غلبه کنیم. به همین دلیل، چنین موادی نقطه ذوب پایینی دارند.

۲ هر مول سیلیس (SiO_2)، همانند هر مول کربن دی اکسید (CO_2)، دارای دو مول اتم اکسیژن در ساختار خود است. با توجه به اینکه عنصر سیلیسیم در خانه ی پایینی عنصر کربن در جدول تناوبی واقع شده است، جرم اتمی بیشتری نسبت به جرم اتمی عنصر کربن دارد. بنابراین سیلیس نسبت به کربن دی اکسید، جرم مولی بیشتری خواهد داشت. از آنجا که شمار اتم های اکسیژن در یک مول از این دو ماده با یکدیگر برابر است اما سیلیس جرم مولی بالاتری دارد، نتیجه می گیریم درصد جرمی عنصر اکسیژن در کربن دی اکسید (ماده ای که جرم مولی پایین تری دارد)، بیشتر خواهد بود.

۳ اتم اکسیژن در بلور سیلیس و یا مولکول کربن دی اکسید، توسط دو جفت الکترون پیوندی به اتم های دیگر متصل شده است که در مقایسه با این عنصر، خاصیت نافلزگی کمتری دارند. بر این اساس، می توان گفت عدد اکسایش اتم اکسیژن در بلور سیلیس و مولکول کربن دی اکسید، برابر با ۲- است.

گروه آموزشی ماز

۹۷- کدام مطلب، نادرست است؟ ($H = 1$ و $C = 12$ و $O = 16$ $g \cdot mol^{-1}$)

- ۱) برخلاف چگالی، پایداری یک نمونه از گرافیت در مقایسه با الماس بیشتر است.
- ۲) درصد جرمی اکسیژن در اسید چربی با ۳۰ اتم هیدروژن و زنجیر هیدروکربنی سیر شده، تقریباً برابر ۱۳/۲٪ است.
- ۳) نسبت شمار پیوندهای $C=C$ به شمار پیوندهای $C-C$ در ساختار گرافیت، نصف مقدار این نسبت در بنزن است.
- ۴) در نقشه پتانسیل الکترواستاتیکی کربونیل سولفید، بار جزئی منفی فقط بر روی اتمی با بیشترین شعاع اتمی قرار دارد.



ساختار لوویس کربونیل سولفید (CSO) به صورت زیر است:



نقشه پتانسیل الکترواستاتیکی کربونیل سولفید نیز به صورت زیر است:



در این مولکول، ترتیب شعاع اتم ها به صورت $O > C > S$ بوده و بار جزئی منفی (δ^-) غالب، بر روی اتم اکسیژن با خاصیت نافلزگی بیشتر قرار دارد.

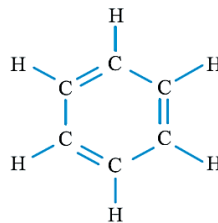
گرافیت، از صفحات دوبرخی تشکیل شده که از هم فاصله دارند، در نتیجه چگالی آن از الماس که در آن هر اتم کربن با ۴ اتم کناری خود پیوند کووالانسی دارد، کمتر است. از طرف دیگر، گرافیت آلوتروپ پایدارتر کربن است. در جدول زیر مهمترین ویژگی‌های الماس و گرافیت آمده است:

آلوتروپ	الماس	گرافیت
نوع جامد	کووالانسی سه بعدی	کووالانسی دو بعدی
ویژگی ظاهری	شفاف	تیره
سختی یا نرمی	بسیار سخت	نسبتاً نرم
نقطه ذوب	بالا	بالا
رسانایی الکتریکی در حالت جامد	ندارد	دارد
رسانایی گرمایی در حالت جامد	دارد	ندارد
چگالی	بیشتر	کمتر
پایداری	ناپایدارتر	پایدارتر
قدرمطلق آنتالپی سوختن	بیشتر	کمتر

فرمول عمومی اسیدهای چرب با زنجیر هیدروکربنی سیر شده به صورت $C_nH_{2n}O_2$ است. اگر تعداد اتم‌های هیدروژن یک اسید چرب برابر با ۳۰ عدد باشد، فرمول شیمیایی این اسید به صورت $C_{15}H_{30}O_2$ بوده و درصد جرمی اکسیژن در آن برابر خواهد بود با:

$$\text{درصد} = \frac{\text{جرم اکسیژن}}{\text{جرم اسیدچرب}} \times 100 = \frac{(2 \times 16) \times 100}{(15 \times 12) + (30 \times 1) + (2 \times 16)} = \frac{3200}{242} \approx 13.2\%$$

نسبت شمار پیوندهای $C = C$ به پیوندهای $C - C$ در ساختار گرافیت و بنزن به ترتیب برابر $1/5$ و $1/3$ است. ساختار مولکولی بنزن به عنوان سرگروه خانواده ترکیب‌های آروماتیک به صورت زیر است:



گروه آموزشی ماز

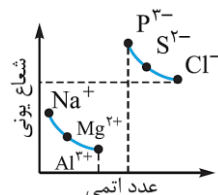
۹۸- کدام یک از مطالب زیر درست است؟

- ۱) آنتالپی فروپاشی شبکه بلور منیزیم کلرید، کمتر از آنتالپی فروپاشی شبکه سدیم سولفید است.
- ۲) تفاوت شعاع یون فسفید و یون آلومینیم، در مقایسه با تفاوت شعاع یون کلرید و یون سدیم بیشتر است.
- ۳) نسبت میان شمار جفت الکترون ناپیوندی به پیوندی در یون سیلیکات، مشابه مقدار این نسبت در SO_3 است.
- ۴) در فرایند تولید نیم مول گالیم فلئورید از عناصر سازنده آن، $1/806 \times 10^{24}$ الکترون بین گونه‌ها مبادله می‌شود.

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط - مفهومی - ۱۲۰۳)

پاسخ تشریحی:

از میان آنیون‌های موجود در یک دوره، با افزایش بار یون‌ها، شعاع آن‌ها بیشتر می‌شود. به عنوان مثال، مقایسه شعاع آنیون‌های موجود در تناوب دوم به صورت $F^- > O^{2-} > N^{3-}$ است. از میان کاتیون‌های موجود در یک دوره، با افزایش بار یون‌ها، شعاع آن‌ها کاهش پیدا می‌کند. به عنوان مثال، مقایسه کاتیون‌های موجود در تناوب سوم به صورت $Al^{3+} > Mg^{2+} > Na^+$ است. البته، توجه داریم که شمار لایه‌های الکترونی موجود در آنیون‌های یک دوره، یکی بیشتر از شمار لایه‌های الکترونی کاتیون‌های موجود در آن دوره است و به همین خاطر، شعاع آنیون‌های موجود در هر دوره به طور کلی بیشتر از کاتیون‌های موجود در آن دوره است. نمودار زیر، روند تغییر شعاع یون‌ها در تناوب سوم را نشان می‌دهد:



با توجه به نمودار بالا، شعاع یون P^{3-} از شعاع یون Cl^{-} بیشتر است. از جهتی یون Al^{3+} نیز در مقایسه با یون Na^{+} شعاع یونی کوچک‌تری دارد، پس تفاوت شعاع یون فسفید و یون آلومینیم، در مقایسه با تفاوت شعاع یون کلرید و یون سدیم بیشتر است.

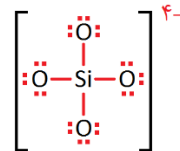
بررسی سایر گزینه‌ها:

۱

به انرژی لازم برای فروپاشی شبکه بلوری یک مول جامد یونی در فشار ثابت و تبدیل آن به یون‌های گازی مجزا، آنتالپی فروپاشی شبکه گفته می‌شود. مقدار آنتالپی فروپاشی شبکه هر ترکیب یونی در مقیاس کیلوژول بر مول گزارش می‌شود. در بلور منیزیم کلرید ($MgCl_2$)، همانند بلور سدیم سولفید (Na_2S)، مجموع قدرمطلق بارهای الکتریکی یون‌ها با هم برابر و معادل ۳ است؛ پس برای مقایسه آنتالپی فروپاشی این دو ترکیب، باید شعاع یونی ذرات سازنده آن‌ها را با هم مقایسه کنیم. از میان آنیون‌های حاصل از عناصر موجود در یک تناوب، با افزایش عدد اتمی، شعاع یونی کاهش پیدا می‌کند. به طریق مشابه، از میان کاتیون‌های حاصل از عناصر موجود در یک تناوب نیز با افزایش عدد اتمی، شعاع یونی کاهش پیدا می‌کند. بر این اساس، می‌توان گفت یون کلرید در مقایسه با یون سولفید شعاع کوچک‌تری داشته و یون منیزیم نیز در مقایسه با یون سدیم شعاع کوچک‌تری دارد. بر این اساس، می‌توان گفت آنتالپی فروپاشی شبکه منیزیم کلرید، بیشتر از آنتالپی فروپاشی شبکه سدیم سولفید است.

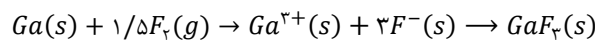
۳

نسبت میان شمار جفت الکترون‌های ناپیوندی به شمار جفت الکترون‌های پیوندی در یون سیلیکات با فرمول شیمیایی SiO_4^{4-} ، برابر با ۳ است. توجه داریم که مقدار این نسبت در SO_3 برابر با ۲ می‌شود. ساختار یون سیلیکات به صورت زیر است:



۴

گالیم، یک عنصر فلزی از تناوب چهارم و گروه شماره ۱۳ جدول دوره‌ای بوده و در واکنش با عناصر نافلزی، ۳ الکترون از دست می‌دهد. معادله واکنش انجام‌شده به صورت زیر است:



با توجه به معادله بالا، به ازای تولید هر مول گالیم فلئوئورید، ۳ مول الکترون مبادله می‌شود. از آن‌جا که هر مول الکترون معادل $1.6 \times 10^{23} \times 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ الکترون است، مقدار الکترون مبادله‌شده را به ازای تولید نیم مول گالیم فلئوئورید محاسبه می‌کنیم:

$$? e = \frac{3 \text{ mol } e}{1 \text{ mol } GaF_3} \times \frac{1.6 \times 10^{23} e}{1 \text{ mol } e} = 9.6 \times 10^{23} e$$

بر این اساس، به ازای تولید نیم مول گالیم فلئوئورید، 9.6×10^{23} الکترون بین گونه‌ها مبادله می‌شود.

گروه آموزشی ماز

۹۹- با دادن مقداری گرما به ۵۰۰ گرم از یک نمونه آب، دمای آن به اندازه 90°C افزایش می‌یابد. اگر همین مقدار گرما، صرف فروپاشی شبکه بلور منیزیم اکسید شود، چه تعداد یون گازی طی این فرایند حاصل می‌شود؟ (گرمای ویژه آب را برابر $4 \text{ J} \cdot \text{g}^{-1} \cdot ^{\circ}\text{C}^{-1}$ در نظر گرفته و آنتالپی فروپاشی شبکه بلور منیزیم اکسید را برابر با ۳۶۰۰ کیلوژول بر مول در نظر بگیرید.)

$$6/0.2 \times 10^{23} \quad (4)$$

$$3/0.1 \times 10^{23} \quad (3)$$

$$6/0.2 \times 10^{23} \quad (2)$$

$$3/0.1 \times 10^{23} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۴ (آسان - مساله - ۱۲۰۳)

پاسخ تشریفی

ابتدا گرمای داده شده به نمونه آب را محاسبه می‌کنیم:

$$Q = mc\Delta\theta \Rightarrow Q = 500 \times 4 \times 90 \Rightarrow Q = 180000 \text{ J} \Rightarrow Q = 180 \text{ kJ}$$

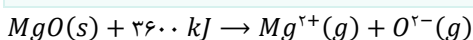
ظرفیت گرمایی (C) یک جسم، به مقدار جرم (m) آن جسم وابسته است. دانشمندان برای از بین بردن این وابستگی، مفهوم ظرفیت گرمایی ویژه یا همان گرمای ویژه (c) را معرفی کردند. ظرفیت گرمایی ویژه یک ماده، معادل با مقدار گرمای لازم برای افزایش دمای یک گرم از آن ماده به اندازه یک درجه سانتی گراد است. مقدار گرمای ویژه مواد مختلف را با نماد c نشان می‌دهند. از رابطه زیر، برای بررسی میزان تغییر دمای یک جسم ($\Delta\theta$) با ظرفیت گرمایی ویژه c و جرم m گرم بر حسب میزان گرمای مبادله شده توسط آن جسم (Q) استفاده می‌شود:

$$Q = m \cdot c \cdot \Delta\theta \Rightarrow \Delta\theta = \frac{Q}{m \cdot c}$$

توجه داریم که گرمای ویژه (c) یک جسم را می‌توان معادل با ظرفیت گرمایی (C) یک گرم از آن ماده در نظر گرفت. با توجه به توضیحات داده شده، رابطه میان ظرفیت گرمایی (C) و گرمای ویژه (c) یک نمونه از ماده به جرم m گرم، به صورت مقابل است:

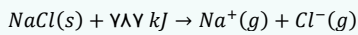
$$C = m \cdot c$$

معادله فروپاشی شبکه بلوری منیزیم اکسید (MgO)، به صورت مقابل است:



انرژی لازم برای تبدیل یک مول جامد یونی به یون‌های گازی سازنده آن در فشار ثابت، آنتالپی فروپاشی شبکه بلور ترکیب یونی را نشان می‌دهد. در این فرایند، به شبکه بلور انرژی داده می‌شود؛ در نتیجه این فرایند واکنشی گرماگیر ($\Delta H > 0$) است، یعنی سطح انرژی فرآورده‌های تولید شده در آن (یون‌های گازی)، بیشتر از سطح

انرژی واکنش دهنده مصرف شده (جامد یونی) بوده و پایداری آن، کمتر از واکنش دهنده است. برای مثال، واکنش مربوط به فروپاشی شبکه بلور سدیم کلرید به صورت زیر است:



همانطور که گفتیم، در این واکنش یون‌های گازی، انرژی بیشتری (پایداری کمتری) نسبت به جامد یونی دارند.

به ازای فروپاشی بلور یک مول منیزیم اکسید با استفاده از ۳۶۰۰ کیلوژول انرژی، مقدار ۲ مول یون گازی حاصل می‌شود. بر این اساس، می‌توان شمار یون‌های گازی تولید شده به ازای دادن ۱۸۰ کیلوژول گرما به این ماده را به صورت زیر محاسبه کرد:

$$\text{یون} = \frac{6/0.2 \times 10^{23}}{1 \text{ mol یون}} \times \frac{2 \text{ mol یون}}{1 \text{ mol MgO}} \times \frac{1 \text{ mol MgO}}{3600 \text{ kJ گرما}} \times 180 \text{ kJ گرما} = 6/0.2 \times 10^{23} \text{ یون}$$

با توجه به محاسبات بالا، شمار یون‌های گازی تولید شده برابر با $6/0.2 \times 10^{23}$ عدد است.

گروه آموزشی ماز

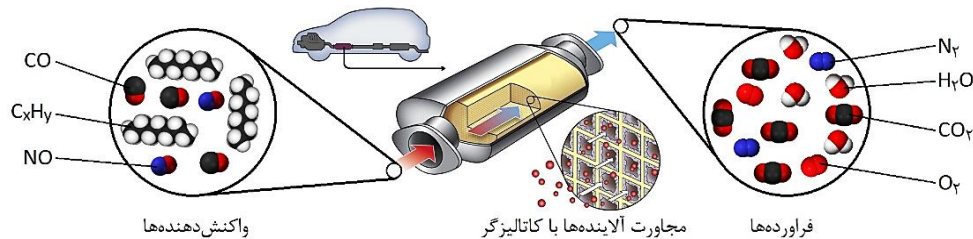
۱۰۰- کدام یک از مطالب زیر نادرست است؟

- (۱) در واکنش حذف هیدروکربن‌های نسوخته در مبدل کاتالیستی، عدد اکسایش اتم‌های کربن کمتر از ۴ واحد افزایش می‌یابد.
- (۲) در واکنش گرماگیر، سطح انرژی ذره بوجود آمده در قله نمودار انرژی-پیشرفت، به سطح انرژی فرآورده‌ها نزدیک‌تر است.
- (۳) همانند اوزون، با تاریک شدن هوا از غلظت گاز NO_2 که دلیل اصلی رنگ قهوه ای هوای آلوده است، کمتر می‌شود.
- (۴) از طیف‌سنجی فروسرخ می‌توان برای شناسایی برخی مولکول‌ها در فضای بین ستاره‌ای و برخی گازها استفاده کرد.

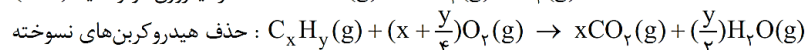
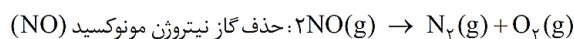
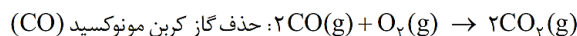
پاسخ: گزینه ۱ (متوسط - مفهومی - ۱۲۰۴)



گازهای کربن مونوکسید، نیتروژن مونوکسید و هیدروکربن‌های نسوخته (C_xH_y)، از جمله آلاینده‌های تولیدشده در موتور خودروها هستند که باعث آلودگی هوا کرده می‌شوند. با استفاده از مبدل‌های کاتالیستی، می‌توان مقدار این آلاینده‌ها را به طور قابل توجهی کاهش داد. تصویر زیر، کارکرد مبدل‌های کاتالیستی در خودروهای غیردیزلی را نشان می‌دهد:



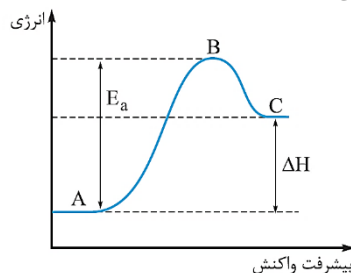
واکنش‌های انجام شده در این کاتالیزورها به صورت زیر است:



در واکنش حذف هیدروکربن‌های نسوخته، ترکیبی با فرمول C_xH_y مصرف شده و گاز کربن دی‌اکسید تولید می‌شود. ترکیب C_xH_y ، نوعی هیدروکربن بوده و میانگین عدد اکسایش اتم‌های کربن در آن حتماً منفی است درحالی که در ساختار گاز کربن دی‌اکسید، عدد اکسایش اتم کربن برابر با +۴ است. در واقع، طی این فرایند عدد اکسایش اتم‌های کربن موجود در ماده اولیه، از یک عدد منفی به +۴ رسیده است، پس می‌توان گفت عدد اکسایش اتم‌های کربن بیش از ۴ واحد افزایش یافته است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

تصویر زیر نمودار انرژی-پیشرفت یک واکنش شیمیایی گرماگیر (مثل واکنش تبدیل گاز اکسیژن به گاز اوزون) را نشان می‌دهد:



سطح انرژی فرآورده‌های این واکنش از سطح انرژی واکنش‌دهنده‌های آن بالاتر بوده و برای آغازشدن آن، باید مقداری انرژی به واکنش‌دهنده‌ها داده شود. در واکنش‌های گرماگیر، ذرات شرکت‌کننده در واکنش مقداری انرژی جذب کرده و سطح انرژی آن‌ها افزایش پیدا می‌کند. مقایسه سطح انرژی گونه‌های مختلف در این واکنش‌ها به صورت مقابل است:

واکنش‌دهنده‌ها > فرآورده‌ها > گونه‌ی موجود در قله‌ی نمودار : انرژی سطح

گاز NO_2 ، اکسید قهوه‌ای رنگ نیتروژن بوده و عامل اصلی رنگ قهوه‌ای هوای آلوده است. با تاریک شدن هوا و کاهش تردد خودروها، تولید گاز NO_2 و همچنین گاز اوزون کمتر شده و در نتیجه غلظت این گازهای آلاینده در هواکره کاهش می‌یابد.

با ورود خودروها به خیابان، گاز NO تولیدشده در موتور خودروها وارد هواکره شده و به همین خاطر، غلظت این گاز در هواکره در حدود ساعت ۷ صبح به بیشترین مقدار خود می‌رسد. با گذشت زمان، گاز NO موجود در هوا با گاز اکسیژن واکنش داده و گاز NO_2 را تولید می‌کند. با انجام‌شدن این واکنش، غلظت گاز NO در هوا کاهش یافته و غلظت گاز NO_2 افزایش پیدا می‌کند؛ تا جایی که غلظت این گاز در حوالی ساعت ۹ صبح به بیشترین مقدار خود می‌رسد. گاز NO_2 تولیدشده هم عمر زیادی نکرده و با شرکت در واکنش $NO_2(g) + O_2(g) \rightarrow NO(g) + O_3(g)$ ، موجب تولید گاز اوزون و افزایش غلظت آن در هواکره می‌شود. غلظت گاز اوزون تولیدشده در این فرایند، در حوالی ساعت ۱۰ صبح به حداکثر مقدار خود می‌رسد.

از طیف سنجی فروسرخ می‌توان برای شناسایی برخی مولکول‌ها در فضای بین ستاره‌ای و برخی آلاینده‌ها در هواکره مانند گازهای NO ، CO و NO_2 استفاده کرد.

گروه آموزشی ماز

۱۰۱- کدام موارد از عبارت‌های داده شده درست هستند؟

آ: تغییر غلظت واکنش‌دهنده‌ها در دمای ثابت، بر میزان پیشرفت واکنش تعادلی بی‌تاثیر است.

ب: با ریختن مقداری براده آهن در ظرف واکنش فرایند هابر، زمان مورد نیاز برای برقراری تعادل کاهش می‌یابد.

پ: ثابت تعادل واکنش تولید آمونیاک در دمای $300K$ و فشار 250 اتمسفر، نسبت به شرایط بهینه فرایند هابر کمتر است.

ت: افزایش دما در تعادل $2NO_2(g) \rightleftharpoons N_2O_4(g)$ ، همانند افزودن گاز N_2O_4 به سامانه، رنگ مخلوط را پررنگ می‌کند.

(۴) ب و ت

(۳) ب و پ

(۲) آ و ت

(۱) آ و پ

پاسخ: گزینه ۴ (سخت - مفهومی - ۱۲۰۴)

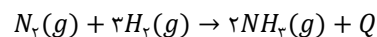
پاسخ تشریفی

عبارت‌های (ب) و (ت) درست هستند.

بررسی موارد

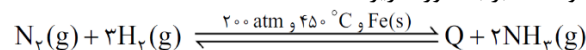
آ: در دمای ثابت، مقدار ثابت تعادل واکنش‌ها با ایجاد هر تغییری ثابت باقی می‌ماند، اما تغییر غلظت واکنش‌دهنده‌ها موجب جابه‌جایی تعادل شده و در نتیجه بر میزان پیشرفت واکنش تعادلی تاثیرگذار است.

ب: معادله واکنش مورد نظر به صورت زیر است:



آهن، یکی از کاتالیزگرهای مورد استفاده برای انجام شدن این واکنش است. با قرار دادن این فلز در ظرف واکنش، سرعت واکنش‌های رفت و برگشت به طور هم‌زمان افزایش پیدا کرده و سامانه سریع‌تر به تعادل می‌رسد، اما باید توجه داشته باشیم که کاتالیزگر تاثیری در درصد پیشرفت واکنش ندارد و فقط زمان رسیدن به تعادل را کوتاه‌تر می‌کند.

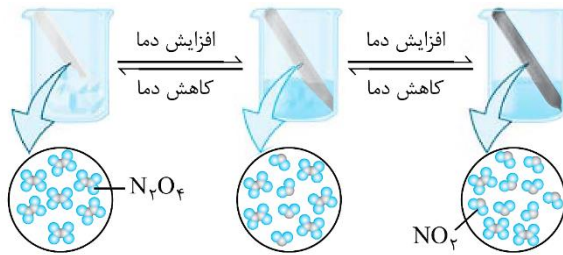
پ: واکنش کلی مربوط به فرایند هابر، گرماده بوده و با کاهش دما، در جهت رفت جابه‌جا می‌شود. بر این اساس، می‌توان گفت ثابت تعادل این واکنش در دمای 300 کلوین (معادل با دمای 27 درجه سانتی‌گراد)، بیشتر از ثابت تعادل آن در دمای 450 درجه سانتی‌گراد (شرایط بهینه برای انجام فرایند هابر) است. در واقع، آقای فریتس هابر واکنش میان گازهای نیتروژن و هیدروژن را بارها و بارها در شرایط گوناگون انجام داد تا سرانجام موفق به یافتن شرایط بهینه انجام‌شدن این واکنش شد. واکنش انجام‌شده توسط هابر به صورت زیر است:



همانطور که مشخص است، شرایط بهینه برای انجام شدن این فرایند، شامل دمای $450^\circ C$ (معادل با 723 کلوین)، فشار 200 atm و فلز آهن به عنوان کاتالیزگر مناسب می‌شود. در چنین شرایطی، 28 درصد مولی از مخلوط واکنش را آمونیاک تشکیل می‌دهد.

ت: با افزودن گاز N_2O_4 به سامانه تعادلی $2NO_2(g) \rightleftharpoons N_2O_4(g) + Q$ ، واکنش در جهت برگشت (در جهتی که منجر به مصرف گاز N_2O_4 می‌شود) به پیش رانده می‌شود. با انجام شدن واکنش برگشت، غلظت گاز قهوه‌ای رنگ NO_2 به تدریج افزایش یافته و رنگ مخلوط مورد نظر تیره‌تر می‌شود. با افزایش دمای مخلوط واکنش نیز تعادل در جهت مصرف گرما (در جهت برگشت) جابه‌جا شده و غلظت گاز NO_2 به تدریج افزایش یافته و رنگ مخلوط مورد نظر تیره‌تر می‌شود.

تصویر زیر، نمایی از فرایند انجام شدن این واکنش را نشان می‌دهد:



گروه آموزشی ماز

۱۰۲- واکنش تعادلی $2X(g) + Y(g) \rightleftharpoons 2Z(g)$ ، در یک ظرف ۲ لیتری و با حضور ۵ مول از هر کدام از واکنش‌دهنده‌ها شروع می‌شود تا به تعادل برسد. اگر در لحظه تعادل غلظت $Z(g)$ ، برابر با مجموع غلظت واکنش‌دهنده‌های باقیمانده باشد، ثابت تعادل این واکنش چقدر است؟

- (۱) $\frac{32}{3} L \cdot mol^{-1}$ (۲) $\frac{2}{33} mol \cdot L^{-1}$ (۳) $\frac{16}{3} L \cdot mol^{-1}$ (۴) $\frac{8}{9} L \cdot mol^{-1}$

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط - مساله - ۱۲۰۴)



توجه داریم که ثابت تعادل واکنش فرضی $aA(aq) + bB(g) + cC(s) \rightleftharpoons dD(l) + eE(aq)$ ، به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$K = \frac{[E]^e}{[A]^a \cdot [B]^b}$$

حالت فیزیکی همه مواد شرکت‌کننده در واکنش مورد نظر گاز است؛ بنابراین ثابت تعادل واکنش داده شده به صورت $\frac{[Z]^2}{[Y] \cdot [X]^2}$ محاسبه می‌شود. اگر فرض کنیم از ابتدای واکنش تا زمان برقراری تعادل x مول از گونه Y مصرف شده است، در طول این بازه زمانی مقدار $2x$ مول از عنصر X نیز مصرف شده و مقدار $2x$ مول از Z نیز تولید شده است. مقدار اولیه واکنش‌دهنده‌ها برابر با ۵ مول بوده و حجم ظرف واکنش نیز برابر با ۲ لیتر است. بنابراین غلظت مولی گونه‌های $X(g)$ ، $Y(g)$ و $Z(g)$ به ترتیب برابر با $\frac{5-2x}{2}$ ، $\frac{5-x}{2}$ و $\frac{2x}{2}$ خواهد شد.

بر این اساس، داریم:

$$\frac{5-2x}{2} + \frac{5-x}{2} = \frac{2x}{2} \Rightarrow x = 2$$

بنابراین غلظت تعادلی گونه‌های $X(g)$ ، $Y(g)$ و $Z(g)$ به ترتیب برابر با $\frac{1}{5}$ ، $\frac{1}{10}$ و $\frac{2}{5}$ مول بر لیتر است. در نهایت ثابت تعادل را محاسبه می‌کنیم:

$$K = \frac{[Z]^2}{[Y] \cdot [X]^2} = \frac{(\frac{2}{5})^2}{(\frac{1}{10}) \cdot (\frac{1}{5})^2} = \frac{32}{3} L \cdot mol^{-1}$$

با توجه به محاسبات انجام شده، ثابت تعادل این واکنش برابر با $\frac{32}{3}$ لیتر بر مول می‌شود.

یکای ثابت تعادل برای واکنش‌های مختلف، متفاوت از یکدیگر است و به تفاوت میان شمار مول‌های گازی و محلول موجود در دو طرف واکنش بستگی دارد. در این رابطه، داریم:

تعداد مول‌های گازی و محلول در سمت چپ واکنش - تعداد مول‌های گازی و محلول در سمت راست واکنش = Δn

یکای $K = (mol \cdot L^{-1})^{\Delta n}$

با توجه به توضیحات داده شده، یکای ثابت تعادل واکنش $3H_2(g) + N_2(g) \rightleftharpoons 2NH_3(g)$ ، معادل با $L^2 \cdot mol^{-2}$ است. این در حالی است که یکای ثابت تعادل واکنش $CaCO_3(s) \rightleftharpoons CaO(s) + CO_2(g)$ معادل با $mol \cdot L^{-1}$ می‌شود.

گروه آموزشی ماز

۱۰۳- چند مورد از مطالب زیر درباره مبدل‌های کاتالیستی، درست هستند؟

آ: نسبت $\frac{E_a}{|\Delta H|}$ در واکنش تبدیل NO به N_2 از مقدار این نسبت برای تبدیل CO به CO_2 بیشتر است.

ب: مبدل کاتالیستی برای مدت کوتاهی کار کرده و پس از مدتی کارایی آن کاهش یافته و دیگر قابل استفاده نیست.

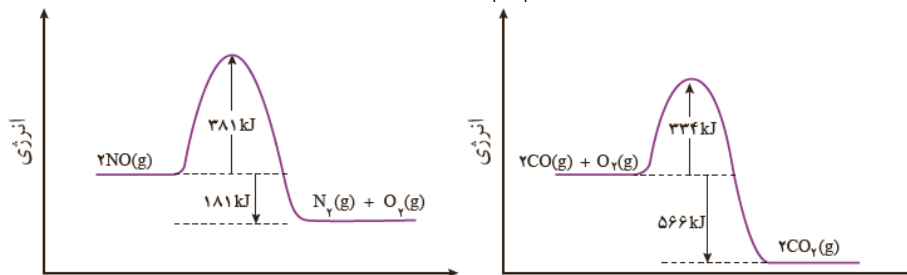
پ: پلاتین یک فلز نجیب است که به صورت توده‌هایی با قطر کمتر از ۱۱ نانومتر در مبدل‌های کاتالیستی استفاده می‌شود.

ت: در واکنش انجام شده در محفظه دوم از مبدل کاتالیستی موجود در خودروهای دیزلی، گاز آمونیاک نقش کاهنده دارد.

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

عبارت‌های (آ)، (پ) و (ت) درست هستند.

آ: با توجه به نمودارهای زیر، مقدار انرژی فعال‌سازی (E_a) واکنش تبدیل گاز NO به N_2 بزرگ‌تر و مقدار قدرمطلق آنتالپی این واکنش نیز نسبت به واکنش تبدیل CO به CO_2 کوچک‌تر است. بر این اساس، می‌توان گفت نسبت $\frac{E_a}{|\Delta H|}$ برای تبدیل NO به N_2 بزرگتر خواهد بود. در رابطه با این دو واکنش داریم:

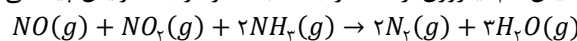


دقت کنید که مقایسه مقدار انرژی فعال‌سازی این دو واکنش، از جمله مواردی است که تا به حال در کنکور سراسری از آن سوال طرح شده است!!
ب: مبدل‌های کاتالیستی برای مدت طولانی کار می‌کنند اما پس از مدت معینی، مواد موجود در آن‌ها با برخی از آلاینده‌های موجود در سوخت‌ها واکنش داده و طی این فرایند، کارایی آن‌ها کاهش یافته و دیگر قابل استفاده نیستند.

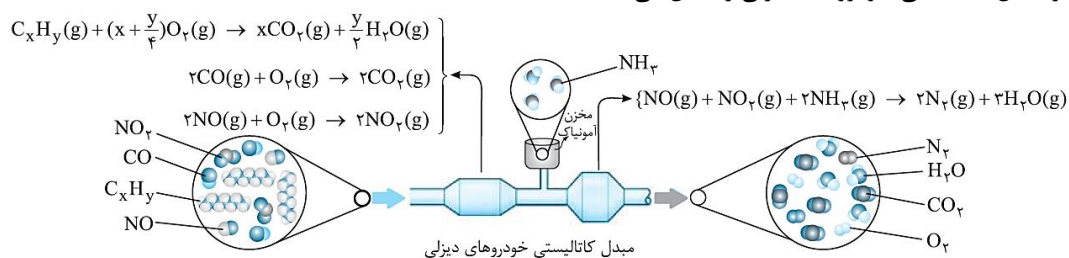
کارایی مبدل‌های کاتالیستی، به نوع کاتالیزگرهای موجود در آن‌ها و شرایط استفاده از کاتالیزگرها بستگی دارد. به عنوان مثال، این مبدل‌ها را می‌توان به شکل یک قطعه سرامیکی ساخت که به شکل توری درآمده و فلزهای رودیم، پالادیم و پلاتین بر روی آن‌ها نشانداده شده است. در نقطه مقابل، سرامیک موجود در این مبدل‌ها را می‌توان به شکل مش (دانه)‌های ریز درآورده و کاتالیزگرهای فلزی را بر روی سطح دانه‌ها پخش کرد. بدیهی است که در حالت دوم (ساختن سرامیک به صورت مش)، سطح تماس کاتالیزگرها با گازهای آلاینده افزایش پیدا کرده و مقدار بیشتری از گازهای آلاینده توسط مبدل کاتالیستی حذف می‌شوند و در نتیجه کارایی مبدل افزایش پیدا می‌کند.

پ: پلاتین (Pt)، همانند طلا یک فلز نجیب است که حتی در محیط‌های اسیدی هم اکسایش نمی‌یابد. این فلز به همراه فلزهای رودیم (Rh) و پالادیم (Pd) در سطح سرامیک‌های درون مبدل کاتالیستی به صورت توده‌هایی با قطر ۲ تا ۱۰ نانومتر استفاده می‌شود.

ت: در مبدل کاتالیستی به کار رفته در خودروهای دیزلی، با ورود آمونیاک و انجام واکنش زیر، آلاینده‌های NO و NO_2 به گاز N_2 تبدیل شده و تا حدود زیادی از ورود این دو اکسید نیتروژن به هواکره جلوگیری می‌شود. توجه داریم که این واکنش، یک واکنش اکسایش-کاهش است و آمونیاک در آن نقش کاهنده را ایفا می‌کند. در این واکنش، عدد اکسایش اتم نیتروژن از ۳- در NH_3 به صفر در N_2 افزایش پیدا می‌کند.



تصویر زیر، نمایی از مبدل کاتالیستی خودروهای دیزلی را نشان می‌دهد:



گروه آموزشی ماز

۱۰۴- مخلوطی از گاز CO و بخار آب را در یک ظرف ۵ لیتری گرما می‌دهیم تا تعادل $CO(g) + H_2O(g) \rightleftharpoons CO_2(g) + H_2(g)$ برقرار شود. اگر در مخلوط اولیه، درصد حجمی گازها با هم برابر بوده و در حالت تعادل، ۲۲ گرم اکسید اسیدی وجود داشته باشد، درصد جرمی بخار آب در حالت تعادل به‌طور تقریبی کدام است؟ (ثابت تعادل واکنش را $10^{-2} \times 6/25$ در نظر بگیرید.)

($O = 16$ و $C = 12$ و $H = 1$: $g \cdot mol^{-1}$)

۳۴/۶ (۴)

۳۱/۳ (۳)

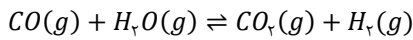
۲۸/۲ (۲)

۲۶/۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ (سخت - مساله - ۱۲۰۴)

پاسخ تشریحی

از آن جا که درصد حجمی گازهای CO و H_2O در مخلوط اولیه با هم برابر است، پس تعداد مول اولیه این دو گاز را برابر n در نظر می گیریم. بنابراین داریم:



n n $\cdot$ $\cdot$ در آغاز واکنش:

$n-x$ $n-x$ x x در لحظه تعادل:

در حالت تعادل، $\frac{22}{44} = 0.5$ مول اکسید اسیدی CO_2 در تعادل وجود دارد. مقدار گاز هیدروژن تولید شده نیز با مقدار گاز کربن دی اکسید تولید شده برابر است. بنابراین داریم:

$$K = \frac{[CO_2][H_2]}{[CO][H_2O]} = \frac{n_{CO_2} \times n_{H_2}}{n_{CO} \times n_{H_2O}} = \frac{(0.5)^2}{(n-0.5)^2} = 6/25 \times 10^{-2}$$

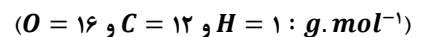
$$\Rightarrow (n-0.5)^2 = \frac{25 \times 10^{-2}}{6/25 \times 10^{-2}} = 4 \rightarrow n-0.5 = 2 \rightarrow n = 2.5 \text{ mol}$$

بنابراین در حالت تعادل، 0.5 مول از هر یک از گازهای CO_2 و H_2 و 2 مول از هر یک از گازهای CO و H_2O وجود دارد و درصد جرمی بخار آب در تعادل برابر خواهد بود با:

$$\text{درصد جرمی بخار آب} = \frac{(2 \times 18)}{(2 \times 18) + (2 \times 28) + (0.5 \times 44) + (0.5 \times 2)} \times 100 = \frac{3600}{36 + 56 + 22 + 1} \approx 31/3 \text{ درصد}$$

گروه آموزشی ماز

۱۰۵- یک نمونه از اتانول، در شرایط مناسب با گاز اکسیژن واکنش داده و ضمن اکسید شدن، استیک اسید به همراه آب را تولید می کند. به ازای تولید ۹۰ گرم استیک اسید، چند الکترون در واکنش مورد نظر بین گونه ها مبادله می شود و این مقدار از اسید تولید شده، با چند گرم ۱-بوتانول واکنش می دهد؟



$$111 - 1/806 \times 10^{24} \quad (2)$$

$$74 - 1/806 \times 10^{24} \quad (1)$$

$$111 - 3/612 \times 10^{24} \quad (4)$$

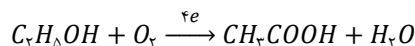
$$74 - 3/612 \times 10^{24} \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط - مساله - ۱۲۰۴)

پاسخ تشریحی

طبق فرض سوال، اتانول در شرایط مناسب با گاز اکسیژن واکنش داده و ضمن اکسید شدن، استیک اسید به همراه آب را تولید می کند.

معادله واکنش انجام شده در این فرایند به صورت زیر است:



در این واکنش، عدد اکسایش یک کربن در مولکول اتانول از ۱- به ۳+ در مولکول استیک اسید رسیده و دو اتم اکسیژن نیز کاهش یافته و عدد اکسایش آن ها از صفر به ۲- رسیده است، پس می توان گفت در این واکنش ۴ الکترون مبادله شده است. بر این اساس، داریم:

$$? e^- = 90 \text{ g } CH_3COOH \times \frac{1 \text{ mol } CH_3COOH}{60 \text{ g } CH_3COOH} \times \frac{4 \text{ mol } e^-}{1 \text{ mol } CH_3COOH} \times \frac{6/02 \times 10^{23} e^-}{1 \text{ mol } e^-} = 3/612 \times 10^{24} e^-$$

هر مول استیک اسید، با یک مول ۱-بوتانول (C_4H_9OH) واکنش داده و بوتیل اتانوات را ایجاد می کند. بر این اساس، داریم:

$$? \text{ g } C_4H_9OH = 90 \text{ g } CH_3COOH \times \frac{1 \text{ mol } CH_3COOH}{60 \text{ g } CH_3COOH} \times \frac{1 \text{ mol } C_4H_9OH}{1 \text{ mol } CH_3COOH} \times \frac{74 \text{ g } C_4H_9OH}{1 \text{ mol } C_4H_9OH} = 111 \text{ g}$$

گروه آموزشی ماز

چرا مارکوپولو؟

- ✓ تنها کتاب موجود در ایران که شامل سوالات شبیه ساز نهایی و پیش بینی کنکور ۱۴۰۳ است.
- ✓ تنها کتاب موجود در ایران که تخمین رتبه شما را براساس کنکور و نمره نهایی انجام می دهد.
- ✓ تنها کتاب موجود در ایران که پاسخنامه فوق تشریحی به علاوه کادر آموزشی و جدول جمع بندی دارد.
- ✓ تنها کتاب موجود در ایران که شامل سوالات نهایی ۱۴۰۲ و راهنمای تصحیح مصححان آموزش و پرورش است.

بیشترین کیفیت + مناسب ترین قیمت



برای اطلاعات بیشتر کلیک کنید

۵ راهکار برای کاهش استرس و اضطراب در زمان جمع‌بندی کنکور

با نزدیک شدن به زمان کنکور استرس و اضطراب دانش‌آموزان زیاد می‌شود، به صورت کلی این استرس طبیعی است. زحمات‌های چند سال شما قرار است در یک آزمون خلاصه شود و نمی‌توان گفت که این استرس طبیعی نیست. فقط باید مراقب باشید که این استرس نزدیک زمان کنکور مانع جمع‌بندی و تست‌زنی و کاهش ساعت مطالعه شما نشود.

علائم اضطراب:

یک سری علائم مربوط به شرایط بدنی ما می‌شود. مانند: سرگیجه، مشکل در خوابیدن و بیدار شدن، ناخن جویدن، درد معده، سردرد و...
یک سری علائم مربوط به روحیه می‌شود. مانند: بی‌حوصلگی، تنبلی کردن و عدم اجرای برنامه، احساس خستگی و خواب‌آلودگی و...

علل استرس و اضطراب در ایام جمع‌بندی:

۱. عدم آمادگی کامل برای کنکور
 ۲. فراموشی مطالب
 ۳. نداشتن یک برنامه‌ریزی دقیق برای جمع‌بندی دروس
 ۴. توقع گرفتن یک نتیجه خوب و دل‌خواه
 ۵. تحت فشار خانواده و مسائل مربوط به خانواده
 ۶. تعداد سوالات غلط و نزده زیاد
- و...

چگونه استرس خودمان را کاهش دهیم؟

۱. محیط مطالعه خود را سر و سامانی دهید!

گاهی اوقات دانش‌آموزان به محیط مطالعه‌شان توجهی ندارند و از تأثیرات آن بی‌خبرند. مکانی را که شما برای مطالعه در نظر می‌گیرید باید ساده و مرتب باشد. زمانی که جلوی دیدتان شلوغ باشد تمرکزتان روی مطالعه کاهش پیدا می‌کند و در نهایت سرعت مطالعه‌تان کاهش پیدا می‌کند.

۲. یک برنامه دقیق داشته باشید.

برای خودتان یک برنامه دقیق از مباحثی که قرار است جمع‌بندی کنید. لیست کارهایی که قرار است انجام بدهید در بیاورید.

در این برنامه ساعت خواب و بیداری خودتان را مشخص کنید. بهتر است ساعت خوابتان را نزدیک کنکور تغییر ندهید و طبق یک روتین پیش بروید.

کنار کارهایی که در لیست نوشته‌اید تیک بزنید تا اعتماد بنفستان حفظ شود و انگیزه بگیرید برای روزهای پایانی. در برنامه‌ریزی خودتان سعی کنید از آزمون‌های جمع‌بندی سال‌های گذشته ماز و امسال بهره‌گیری کنید تا بتوانید تمام مباحث را مرور کنید و نگران فراموشی آن‌ها نباشید. در نهایت بعد از این آزمون‌ها به سراغ کنکورهای سال‌های اخیر بروید.

۳. ورزش کنید.

اول صبح قبل از اینکه به پای برنامه درسی بروید بهتر است کمی ورزش کنید. ورزش باعث ترشح هورمون دوپامین در بدن می‌شود و باعث می‌شود استرستان کاهش پیدا کند.

۴. تغذیه مناسبی داشته باشید.

در این ایام بهتر است از خوردن شیرینی‌جات و خوراکی‌هایی که مواد افزودنی دارند خودداری کنید. بهترین تغذیه در این ایام خوردن میوه‌جات و مغزهای بادام، گردو، پسته و... است. حتماً بطری آب در کنار خودتان قرار دهید تا مصرف آب را فراموش نکنید.

مصرف قهوه و کافئین را به به حد اقل برسانید یا کلاً مصرف نکنید. چرا که خود کافئین باعث ایجاد استرس و اضطراب می‌شود.

۵. مصرف تلفن همراه را به حد اقل برسانید!

سعی کنید خودتان را از حواشی پیرامون کنکور دور کنید. از مقایسه خودتان با دیگران خودداری کنید. در این بازه تمام تمرکزتان را بر روی دروس بگذارید تا در

