



ویژه
کنکوری‌های
۱۴۰۳

۱۴۰۳/۰۲/۲۰

آزمون
پانزدهم
حضوری

دفترچه شماره ۱



سال تحصیلی
۱۴۰۲-۱۴۰۳

هندسه	آمار و احتمال و ریاضیات گسسته	حسابان و ریاضیات پایه
کل هندسه دوازدهم هندسه (۳) صفحه ۹ تا ۸۶	کل ریاضیات گسسته دوازدهم صفحه ۸۴ تا ۸۴	کل حسابان دوازدهم حسابان (۲) صفحه ۱ تا ۱۴۴

آزمون آزمایشی خیلی سبز

گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی

نام و نام خانوادگی: شماره داوطلبی:

عنوان مواد امتحانی آزمون، تعداد، شماره سؤالات و مدت پاسخ‌گویی

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخ‌گویی	ملاحظات
۱	ریاضیات	۴۰	۱	۴۰	۷۵ دقیقه	۴۰ سؤال ۷۵ دقیقه

اساتید، مشاوران و دانش‌آموزان گرامی:

نظرات، پیشنهادات، انتقادات و بازخوردهای خود نسبت به سؤالات این آزمون را می‌توانید از طریق آیدی @Kheilisabz_edit در همه پیام‌رسان‌ها با ما به اشتراک بگذارید.

Azmoon.kheilisabz.com

حسابان (۲): صفحه‌های ۱ تا ۱۴۴

۱- نمودار تابع $f(x) = 2x - \frac{1}{x}$ را سه واحد به راست و دو واحد به بالا انتقال می‌دهیم و در نهایت نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم. نمودار حاصل، خط $y = -2x - 3$ را در نقطه‌ای با کدام طول قطع می‌کند؟

(۱) -۱ (۲) -۲ (۳) ۱ (۴) ۲

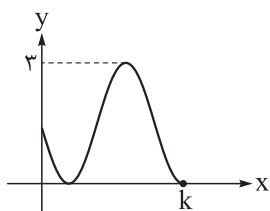
۲- چندجمله‌ای $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$ بر $x - 1$ و $x + 2$ بخش پذیر است. باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x + 2a) + f(x + 2b)$ بر $x - 2$ کدام است؟

(۱) ۱۶ (۲) ۱۸ (۳) ۱۲ (۴) ۱۱

۳- قرینه نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} (x-1)^3 & x \geq 0 \\ -1 + \sqrt[3]{-x} & x < 0 \end{cases}$ نسبت به محور y ها را دو واحد به راست و یک واحد به پایین انتقال

می‌دهیم. فاصله نقاط برخورد نمودار تابع جدید با محور x ها از یکدیگر چه قدر است؟

(۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲

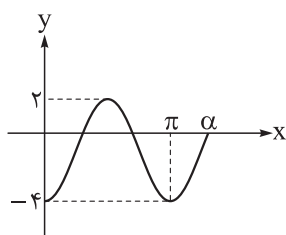


۴- نمودار تابع $f(x) = a + b \sin ax. \cos ax$ در بازه $[0, k]$ به صورت مقابل است. مقدار $f(2k)$ کدام است؟

(۱) ۲ (۲) ۱/۵ (۳) ۲/۵ (۴) ۱

۵- مجموع جواب‌های معادله $\sin x + \cos x = \frac{1}{2 \sin x}$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند برابر کوچک‌ترین جواب آن در این بازه است؟

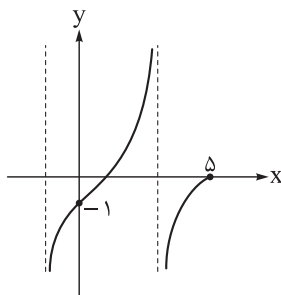
(۱) ۱۵ (۲) ۲۴ (۳) ۲۸ (۴) ۹



۶- نمودار تابع $f(x) = c + a \cos bx$ به صورت مقابل است. حاصل $\tan 2\alpha$ کدام است؟

(۱) $-2\sqrt{2}$ (۲) $2\sqrt{2}$ (۳) ۳ (۴) -۳

محل انجام محاسبات



۷- قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a \tan(bx - \frac{\pi}{6})$ به صورت مقابل است. حاصل $\cos(10b - \frac{\pi}{12})$ کدام است؟

$$\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$\frac{-\sqrt{3}}{2} \quad (4)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (1)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (3)$$

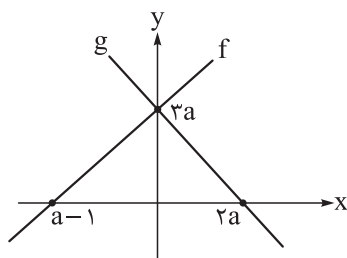
۸- تابع $f(x) = x^2 - 5x + 4$ مفروض است. اگر $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{(f+g)(x)} = -\infty$ باشد، تابع g کدام می تواند باشد؟

$$x^2 - 2x + 1 \quad (4)$$

$$x^2 + 3x - 4 \quad (3)$$

$$x^2 - 1 \quad (2)$$

$$x^2 - x \quad (1)$$



۹- نمودار توابع f و g به صورت مقابل است. اگر $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(f+3g^{-1})(x)}{f \circ g(x)} = \frac{-4}{9}$ باشد، مقدار a کدام است؟

$$\frac{2}{9} \quad (2)$$

$$\frac{2}{3} \quad (4)$$

$$\frac{4}{9} \quad (1)$$

$$\frac{1}{3} \quad (3)$$

۱۰- نمودار تابع $f(x) = \frac{4 - b \cos 2x}{a + \sin x}$ در مجاورت $x = 0$ به صورت مقابل است.



اگر $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+b}{x^2+4x+4} = +\infty$ باشد، عدد صحیح قابل قبول برای b کدام است؟

$$5 \quad (4)$$

$$4 \quad (3)$$

$$3 \quad (2)$$

$$2 \quad (1)$$

۱۱- اگر $A(2, a)$ تنها نقطه برخورد مجانب های تابع $y = f(x)$ و $A'(b, -3)$ نقطه برخورد مجانب های تابع $y = 2 - 3f(\frac{x}{3})$ باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

$$\frac{19}{3} \quad (4)$$

$$\frac{17}{3} \quad (3)$$

$$\frac{14}{3} \quad (2)$$

$$\frac{11}{3} \quad (1)$$

۱۲- با فرض $f(x) = \sqrt{x}(3x^2 + 5)$ ، حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^2(1-h) - f^2(1+2h)}{h}$ کدام است؟

$$72 \quad (4)$$

$$360 \quad (3)$$

$$-48 \quad (2)$$

$$-480 \quad (1)$$

محل انجام محاسبات

۱۳- اگر $f(x) = x^2 - 3|x|$ و $g(x) = x^3 + 2|x|$ باشد، حاصل مشتق تابع fog' در $x = -1$ چند برابر مشتق تابع gof' در $x = 1$ است؟

(۱) ۵

(۲) -۱

(۳) ۳

(۴) -۲

۱۴- نمودار تابع $f(x) = x^2 + a(x-b)$ در نقطه $x = 2$ بر نمودار تابع مشتق خود مماس است. مقدار $f(a)$ کدام است؟

(۱) ۱۰

(۲) ۸

(۳) ۱۲

(۴) ۴

۱۵- آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x) = x\sqrt{x-4}$ در بازه $[4, 8]$ ، چند برابر آهنگ تغییر لحظه‌ای آن در $x = 8$ است؟

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) $\frac{3}{2}$

(۴) $\frac{4}{3}$

۱۶- تابع $f(x) = x^2 - 2|x-1|$ در بازه $(a, +\infty)$ اکیداً یکنواست. حداقل مقدار a کدام است؟

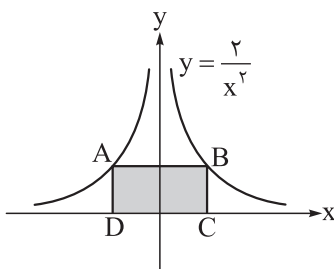
(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) -۱

(۴) -۲

۱۷- در شکل زیر، محیط مستطیل ABCD مینیمم است. مساحت این مستطیل چه قدر است؟



(۱) $\sqrt[3]{2}$

(۲) $\sqrt[3]{4}$

(۳) $2\sqrt[3]{2}$

(۴) $2\sqrt[3]{4}$

۱۸- یکی از نقاط اکسترمم نسبی تابع $f(x) = x^3 + ax^2 + 9x + b$ بر خط $x = -1$ و نقطه اکسترمم نسبی دیگر بر

خط $y = -1$ واقع است. نقطه عطف این تابع، بر کدام خط زیر قرار دارد؟

(۱) $y = x - 2$

(۲) $y = x - 1$

(۳) $y = x - 3$

(۴) $y = x - 4$

محل انجام محاسبات

ریاضیات گسسته: صفحه‌های ۱ تا ۸۴

 ۱۹- برای سه عدد حقیقی x, y, z ، درستی چه تعداد از گزاره‌های زیر را نمی‌توان به روش بازگشتی اثبات کرد؟

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2 \quad (\text{الف})$$

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx \quad (\text{ب})$$

$$x^2 + y^2 + 2 \geq (x+1)(y+1) \quad (\text{پ})$$

$$x^2 + xz + z^2 \geq 0 \quad (\text{ت})$$

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

 ۲۰- عدد a کوچک‌ترین عدد سه‌رقمی است که باقی‌مانده تقسیم آن بر اعداد ۷ و ۸ به ترتیب ۵ و ۷ است. مجموع ارقام عدد a کدام است؟

(۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ۱۰

۲۱- کدام گزینه صحیح نیست؟

 (۱) عدد $11^{51} - 12^{51} - 23^{51}$ بر عدد ۱۳۲ بخش‌پذیر است.

 (۲) اعداد ۳ و $9 \times (7 + 2^{11})$ به پیمانه عدد ۲۳ همنهشت‌اند.

 (۳) اگر رقم یکان دو عدد $3a - 5$ و $4a - 7$ یکسان باشند، رقم یکان عدد $9a + 6$ قطعاً برابر ۴ است.

 (۴) معادله سیاله خطی $7x + 5y = 11$ در اعداد طبیعی دارای جواب است.

 ۲۲- در گراف G با مجموعه رأس‌های $V(G) = \{a, b, c, d, e, f\}$ داریم:

$$N_G(a) = \{b, c, d\} \quad N_G(b) = \{a, c\} \quad N_G(c) = \{a, b\}$$

$$N_G(d) = \{a, f\} \quad N_G(e) = \{ \} \quad N_G(f) = \{d\}$$

در این گراف چند مسیر با طول طبیعی وجود دارد؟

(۱) ۱۴ (۲) ۱۵ (۳) ۱۶ (۴) ۱۷

 ۲۳- در گراف k - منتظم از مرتبه ۵، k کم‌ترین مقدار طبیعی ممکن را دارد. مکمل این گراف دارای چند دور به طول فرد است؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۱۰ (۴) ۱۱

 ۲۴- چه تعداد از اعضای مجموعه $A = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ می‌توانند عدد احاطه‌گری یک گراف ۲-منتظم از مرتبه ۱۲ باشند؟

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

محل انجام محاسبات

۲۵- تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + \sqrt{x_2} + x_3 + x_4 = 3$ کدام است؟

- ۱۸ (۱) ۱۹ (۲) ۲۰ (۳) ۲۱ (۴)

۲۶- اعضای مجموعه $A = \{1, 5, 9, \dots, 85\}$ به شکل یک تصاعد عددی مرتب شده‌اند. یک زیرمجموعه با حداقل چند عضو از این مجموعه بنویسیم که در آن مجموع لااقل ۲ عضو برابر ۹۰ باشد؟

- ۱۱ (۱) ۱۲ (۲) ۱۳ (۳) ۱۴ (۴)

۲۷- چند تابع پوша از مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4\}$ به مجموعه B' می‌توان نوشت، که در آن $B' \subseteq A$ باشد؟

- ۲۵۶ (۱) ۱۵۰ (۲) ۱۲۰ (۳) ۷۵ (۴)

۲۸- به ازای چند عدد سه‌رقمی a ، معادله سیاله خطی $ax + 84y = 97$ دارای جواب صحیح است؟

- ۲۵۸ (۱) ۳۶۷ (۲) ۵۴۳ (۳) ۵۳۳ (۴)

هندسه (۳): صفحه‌های ۹ تا ۸۶

۲۹- کانون‌های یک بیضی نقاط $(1, 3)$ و $(1, -5)$ هستند. اگر طول قطر کوچک این بیضی ۶ باشد، خروج از مرکز آن کدام است؟

- ۰/۸ (۱) ۰/۶ (۲) ۰/۵ (۳) ۰/۴ (۴)

۳۰- اگر $A = \begin{bmatrix} x & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ، آن‌گاه به ازای کدام مقدار x ، مجموع درایه‌های قطر اصلی

ماتریس A با مجموع درایه‌های ستون سوم آن برابر است؟

- ۱ (۱) -۱ (۲) ۲ (۳) -۲ (۴)

۳۱- اگر $A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ و $A^3 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ، آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس A کدام است؟

- ۲ (۱) -۲ (۲) -۳ (۳) ۳ (۴)

۳۲- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ ، آن‌گاه حاصل $||A|A|$ کدام است؟

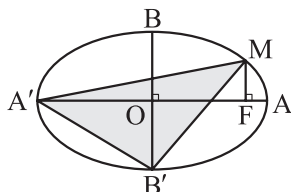
- ۱۶ (۱) ۲۵۶ (۲) ۶۴ (۳) ۱۲۹۶ (۴)

محل انجام محاسبات

۳۳- دو نقطه متمایز A و B خارج خط l و به فاصله یکسان از آن، در صفحه قرار دارند. چند نقطه روی خط l و به فاصله یکسان از A و B می‌توان یافت؟

(۱) صفر یا یک (۲) صفر، یک یا بی شمار (۳) صفر، یک یا دو (۴) یک یا بی شمار

۳۴- در بیضی زیر، طول قطر کوچک و بزرگ به ترتیب ۶ و ۱۰ است. مساحت مثلث $MA'B'$ کدام است؟



۳۵- کانون سهمی $y^2 = 2x - 4y$ و نقاط برخورد آن با محور y ها، رأس‌های یک مثلث‌اند. مساحت این مثلث کدام است؟

$$3 \text{ (f)} \qquad 2 \text{ (g)} \qquad 1/5 \text{ (h)} \qquad 1 \text{ (i)}$$

۳۶- مجموع مقادیر m که به ازای آن‌ها خط $y = mx$ بر دایره $x^2 + y^2 - 10x - 10y + 49 = 0$ مماس باشد، کدام است؟

$$\frac{25}{10} (f) \qquad \frac{25}{12} (r) \qquad \frac{25}{20} (r) \qquad \frac{25}{24} (l)$$

۳۷- طول مرکز دایره‌ای به شعاع $3\sqrt{2}$ ، گذرا از نقطه $(8, 0)$ و مماس خارج بر دایره به معادله $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$ کدام می‌تواند باشد؟

γ (f) f (v) e (v) d (l)

۳۸- فاصله نقطه $A(a, a+3, 4)$ از صفحه $P: x=2$ برابر ۵ است. کمترین فاصله A تا مبدأ مختصات کدام است؟

۱۳ (۴) ۱۲ (۳) ۶ (۲) ۵ (۱)

۳۹- اگر $\vec{a} = (1, -3, 4)$ ، $\vec{b} = (3, -4, 2)$ ، $\vec{c} = (-1, 1, 4)$ و تصویر قائم a بر امتداد $\vec{b} + \vec{c}$ بردار $p\vec{i} + q\vec{j} + r\vec{k}$ باشد، حاصل $p + q + r$ کدام است؟

$$\mathfrak{r} \frac{\mathfrak{f}}{\mathfrak{y}} (\mathfrak{f} \qquad \mathfrak{r} \frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{y}} (\mathfrak{r} \qquad \mathfrak{r} \frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{y}} (\mathfrak{r} \qquad \mathfrak{r} \frac{1}{\mathfrak{y}} ($$

۴۰- اگر $\vec{a} = \vec{i} \times (\vec{i} \times \vec{j}) - 3\vec{j} \times (\vec{j} \times \vec{k}) + 2\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{i})$ ، آن گاه کسینوس زاویه‌ای که بردار $\vec{a}$ با جهت مثبت محور z ‌ها می‌سازد، کدام است؟

$$\frac{-3}{\sqrt{14}} (f) \qquad \frac{3}{\sqrt{14}} (f) \qquad \frac{-1}{\sqrt{14}} (f) \qquad \frac{1}{\sqrt{14}} (f)$$

محل انجام محاسبات

دوستان عزیز خیلی سبز، سلام؛

فایل پاسخ‌نامه این آزمون را که شامل درس‌نامه، نکات کنکوری، پاسخ تشریحی و ... است، ساعت ۱۴ امروز از صفحه شخصی خودتان در سایت آزمون خیلی سبز دریافت کنید.

همچنین شما می‌توانید همین امشب کارنامه اولیه آزمونتان را در صفحه شخصی خود مشاهده بفرمایید.

برای دسترسی به صفحه شخصی خود وارد سایت آزمون خیلی سبز به آدرس: azmoon.kheilisabz.com شوید و کدی را که توسط مدرسه و یا نمایندگی‌های آزمون‌های خیلی سبز به شما داده شده، در محل مشخص شده در سایت ثبت بفرمایید.



ویژه
کنکوری‌های
۱۴۰۳

۱۴۰۳/۰۲/۲۰

آزمون
پانزدهم
حضور

دترچه شماره ۲



سال تحصیلی
۱۴۰۲-۱۴۰۳

شیمی	فیزیک
کل شیمی دوازدهم شیمی (۳) صفحه ۱ تا ۱۳۳	کل فیزیک دوازدهم فیزیک (۳) صفحه ۱ تا ۱۵۷

آزمون آزمایشی خیلی سبز

گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی

• نام و نام خانوادگی: • شماره داوطلبی:

عنوان مواد امتحانی آزمون. تعداد. شماره سؤالات و مدت پاسخ‌گویی

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخ‌گویی	ملاحظات
۱	فیزیک	۳۵	۴۱	۷۵	۴۵ دقیقه	۶۵ سؤال
۲	شیمی	۳۰	۷۶	۱۰۵	۳۵ دقیقه	۸۰ دقیقه

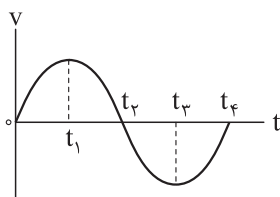
اساتید، مشاوران و دانش‌آموزان گرامی؛

نظرات، پیشنهادات، انتقادات و بازخوردهای خود نسبت به سؤالات این آزمون را می‌توانید از طریق آیدی @Kheilisabz_edit در همه پیام‌رسان‌ها با ما به اشتراک بگذارید.

Azmoon.kheilisabz.com

فیزیک (۳): صفحه‌های ۱ تا ۱۵۷

۴۱- نمودار سرعت - زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است، چه تعداد از موارد زیر، درباره این متحرک درست است؟



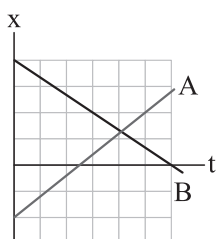
۱ (۴)

۲ (۳)

۳ (۲)

۴ (۱)

۴۲- نمودار مکان - زمان دو متحرک A و B که در راستای محور x حرکت می‌کنند، به شکل زیر است. از مبدأ زمان، تا لحظه‌ای که دو متحرک به هم می‌رسند، اندازه جابه‌جایی متحرک A، چند برابر اندازه جابه‌جایی متحرک B است؟



۴ (۱)

۵ (۲)

۷ (۳)

۶ (۴)

۴۳- خودرویی پشت چراغ قرمز ایستاده است. با سبزشدن چراغ، خودرو با شتاب ثابت $۱/۸ \text{ m/s}^2$ شروع به حرکت می‌کند. در همین لحظه، کامیونی با سرعت ثابت ۵۴ km/h از آن سبقت می‌گیرد. تا قبل از رسیدن خودرو به کامیون، بیشینه فاصله آن‌ها از هم چند متر است؟

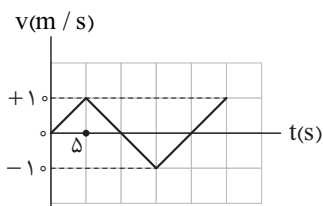
۲۵۰ (۴)

۱۲۵ (۳)

۶۲/۵ (۲)

۳۱/۲۵ (۱)

۴۴- نمودار سرعت - زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. اگر متحرک در مبدأ زمان، در مکان $x = -۱۰ \text{ m}$ قرار داشته باشد، در چه لحظه‌ای بر حسب ثانیه، برای سومین مرتبه از مکان $x = ۶ \text{ m}$ عبور می‌کند؟



۱۶ (۱)

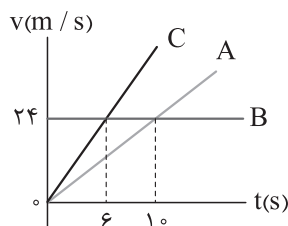
۱۷ (۲)

۲۳ (۳)

۲۴ (۴)

محل انجام محاسبات

۴۵- نمودار سرعت - زمان سه متحرک A، B و C که در راستای محور x حرکت می‌کنند، به شکل مقابل است. در لحظه‌ای که تندی متحرک A از تندی متحرک B، 6 m/s بیشتر است، فاصله دو متحرک A و C برابر با چند متر است؟ (در مبدأ زمان هر سه متحرک در یک مکان قرار دارند.)



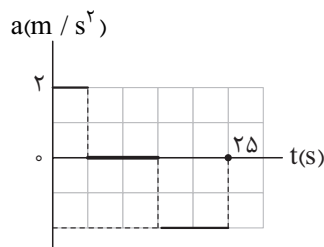
(۲) ۹۰

(۱) ۴۵

(۴) ۲۵۰

(۳) ۱۲۵

۴۶- نمودار شتاب - زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، در بازه زمانی صفر تا 25 s به شکل مقابل است. اگر سرعت متحرک در مبدأ زمان برابر با $\vec{v}_0 = (-5 \text{ m/s})\hat{i}$ باشد، در مدتی که متحرک به صورت تندشونده، در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند، تندی متوسط آن چند متر بر ثانیه است؟



(۲) ۵

(۱) ۲/۵

(۴) ۱۵

(۳) ۷/۵

۴۷- در شرایط خلأ، گلوله A از ارتفاع h نسبت به سطح زمین و 3 s بعد، گلوله B از ارتفاع $\frac{h}{4}$ نسبت به سطح زمین رها می‌شوند. اگر دو گلوله هم‌زمان به سطح زمین برسند، h برابر با چند متر است؟ ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

(۲) ۸۰

(۱) ۴۵

(۴) ۱۸۰

(۳) ۱۲۵

۴۸- در یک مسیر مستقیم، خودرویی به جرم 1200 kg با سرعت ثابت 90 km/h در حال حرکت است. در یک لحظه، راننده خودرو مانعی را مقابل خود می‌بیند و ترمز می‌کند. پس از این لحظه، خودرو با طی مسافت 90 m می‌ایستد. اگر زمان واکنش راننده 0.6 s باشد، اندازه نیروی اصطکاک وارد بر خودرو در حین ترمز، چند کیلونیوتون است؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$)

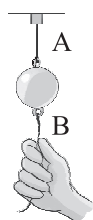
(۲) ۵۰

(۱) ۵

(۴) $\frac{250}{3}$ (۳) $\frac{25}{3}$

محل انجام محاسبات

۴۹- در شکل (۱)، مقوایی روی لیوان و یک سکه روی مقوا قرار دارد. در شکل (۲) گوی سنگینی توسط نخ A از سقف آویزان شده و نخ B به پایین گوی بسته شده است. کدام یک از موارد زیر درباره این دو شکل درست است؟



شکل (۱) شکل (۲)

الف) در شکل (۱)، اگر مقوا را سریع بکشیم، سکه همراه مقوا حرکت نمی کند و در لیوان می افتد.

ب) در شکل (۱)، اگر مقوا را به آرامی بکشیم، سکه همراه مقوا حرکت نمی کند و در لیوان می افتد.

پ) در شکل (۲)، اگر نخ B را به صورت ناگهانی بکشیم، نخ A پاره می شود.

ت) در شکل (۲)، اگر نخ B را به آرامی بکشیم، نخ A پاره می شود.

(۴) ب و ت

(۳) ب و پ

(۲) الف و ت

(۱) الف و پ

۵۰- دو گوی هم اندازه A و B که جرم گوی A دو برابر جرم گوی B است، از بالای برجی به طور هم زمان رها می شوند. با فرض این که نیروی مقاومت هوا در طی حرکت دو گوی ثابت و یکسان باشد، به ترتیب از راست به چپ، اندازه شتاب و تندی برخورد با سطح زمین کدام گوی بیشتر است؟

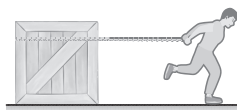
(۴) A, B

(۳) B, A

(۲) B, B

(۱) A, A

۵۱- در شکل زیر، کارگری یک جعبه به جرم 80 kg را توسط طنابی افقی با نیروی ثابت 240 N می کشد و جعبه با شتاب 5 m/s^2 شروع به حرکت می کند. وزنه ای به جرم چند کیلوگرم به محتویات جعبه اضافه شود، تا پس از آن، اندازه سرعت جعبه تغییری نکند؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$)



(۲) ۱۶

(۱) ۱۲

(۴) ۱۶۰

(۳) ۱۲۰

۵۲- وزنه ای به جرم 4 kg به انتهای فنری با ثابت 400 N/m متصل شده و فنر از سقف یک آسانسور آویزان شده است. در حالتی که آسانسور با شتاب رو به پایین 3 m/s^2 حرکت می کند، طول فنر به L_1 و در حالتی که آسانسور با شتابی به بزرگی 2 m/s^2 به صورت کندشونده به سمت پایین حرکت می کند، طول فنر به L_2 می رسد. $L_1 - L_2$ چند سانتی متر است؟

(۴) $-1/25$

(۳) -5

(۲) $1/25$

(۱) 5

محل انجام محاسبات

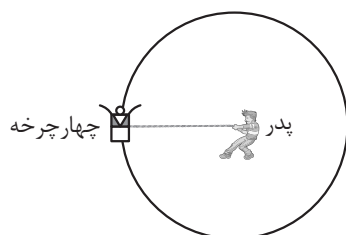
۵۳- اگر جرم ماهواره‌ای 250 kg باشد، وزن آن در ارتفاع 3600 کیلومتری از سطح زمین، چند نیوتون است؟ (ثابت گرانش عمومی را برابر $10^{-11} \text{ N.m}^2 / \text{kg}^2$ ، $\frac{2}{3} \times 10^{24} \text{ kg}$ و شعاع آن را برابر 6400 km در نظر بگیرید.)

- (۱) ۱۰۰ (۲) ۱۰۰۰ (۳) $129/6$ (۴) ۱۲۹۶

۵۴- جسمی به جرم 250 g که با سرعت 16 m/s در جهت محور x در حال حرکت است، به مانعی برخورد کرده و با تندی 4 m/s در جهت مخالف برمی‌گردد. اگر زمان تماس جسم با مانع 0.08 s باشد، نیروی خالص متوسط وارد بر جسم در این مدت، بر حسب نیوتون، کدام است؟

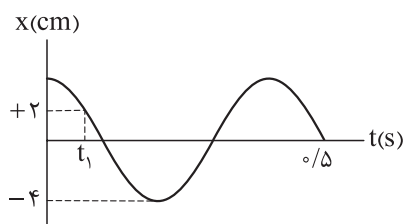
- (۱) $37/5 \vec{i}$ (۲) $-37/5 \vec{i}$ (۳) $62/5 \vec{i}$ (۴) $-62/5 \vec{i}$

۵۵- در شکل زیر، پدری فرزند 20 کیلوگرمی خود را در یک چهار چرخه 5 کیلوگرمی قرار داده و توسط یک طناب 2 متری، چهار چرخه را روی سطح افقی بدون اصطکاک، به گونه‌ای می‌کشد تا چهار چرخه روی محیط دایره‌ای، با تندی ثابت حرکت کند. اگر نیروی کشش طناب 80 N باشد، چهار چرخه در هر دقیقه چند مرتبه محیط دایره را طی می‌کند؟ ($\pi^2 = 10$)



- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲

۵۶- نمودار مکان - زمان نوسانگر هماهنگ ساده‌ای که در راستای محور x نوسان می‌کند، به شکل زیر است. شتاب نوسانگر در لحظه t_1 ، در SI کدام است؟ ($\pi^2 = 10$)



- (۱) $3/2 \vec{i}$ (۲) $-3/2 \vec{i}$ (۳) $5 \vec{i}$ (۴) $-5 \vec{i}$

۵۷- جسمی به جرم 750 g به فنری افقی با ثابت 6 N/cm متصل است. فنر به اندازه 9 cm فشرده و سپس رها می‌شود و جسم روی سطح افقی بدون اصطکاک شروع به نوسان می‌کند. وقتی تندی جسم به $1/6 \text{ m/s}$ می‌رسد، انرژی پتانسیل کشسانی آن چند ژول است؟

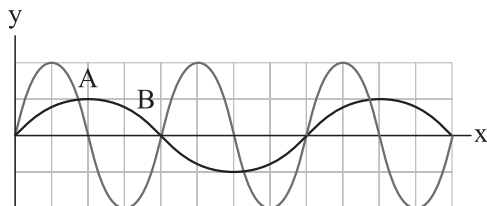
- (۱) $24/3$ (۲) $2/43$ (۳) $14/7$ (۴) $1/47$

محل انجام محاسبات

۵۸- سیمی با چگالی $7/8 \text{ g/cm}^3$ و سطح مقطع 5 mm^2 بین دو نقطه با نیروی 156 N کشیده شده است. تندی انتشار موج عرضی در این سیم چند متر بر ثانیه است؟

- (۱) ۲۰ (۲) ۲۰۰ (۳) ۴۰ (۴) ۴۰۰

۵۹- نمودار جابه‌جایی - مکان دو موج صوتی A و B که به صورت جداگانه در یک محیط منتشر شده‌اند، به شکل روبه‌رو است. کدام‌یک از موارد زیر درباره این دو موج درست است؟



(الف) تندی انتشار موج A، ۲ برابر تندی انتشار موج B است.

(ب) بیشینه تندی ذرات محیط در موج A، ۴ برابر بیشینه

تندی ذرات محیط در موج B است.

(پ) توان متوسط موج A، ۴ برابر توان متوسط موج B است.

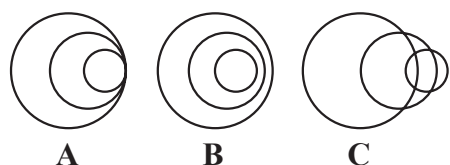
(ت) بیشینه شتاب ذرات محیط در موج A، ۸ برابر بیشینه شتاب ذرات محیط در موج B است.

- (۱) الف و ت (۲) الف و پ (۳) ب و پ (۴) ب و ت

۶۰- تراز شدت صوت حاصل از یک منبع صوتی در فاصله‌های d_1 و d_2 از آن، به ترتیب 72 dB و 82 dB است. با

چشم‌پوشی از اتلاف انرژی، $\frac{d_2}{d_1}$ برابر کدام است؟

- (۱) ۱۰۰ (۲) $\frac{1}{100}$ (۳) $\sqrt{10}$ (۴) $\frac{\sqrt{10}}{10}$



۶۱- جبهه‌های موج متوالی حاصل از سه چشمه موج A، B و C به شکل

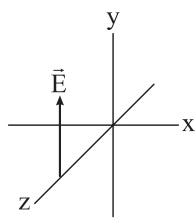
مقابل است. اگر تندی این چشمه‌ها به ترتیب v_A ، v_B ، v_C و تندی

انتشار موج در محیط v باشد، کدام مقایسه درست است؟

- (۱) $v_B > v_A > v_C > v$ (۲) $v_C > v_A > v_B > v$

- (۳) $v_B > v_A = v > v_C$ (۴) $v_C > v_A = v > v_B$

۶۲- شکل زیر میدان الکتریکی یک موج الکترومغناطیسی سینوسی را در نقطه‌ای معین و دور از چشمه، در یک لحظه نشان می‌دهد. موج انرژی را در خلاف جهت محور Z انتقال می‌دهد. میدان مغناطیسی موج در این نقطه و این لحظه، در چه جهتی است؟



(۱) +x

(۲) -x

(۳) +y

(۴) -y

محل انجام محاسبات

۶۳- کدام یک از عبارات‌های زیر درست است؟

- (۱) برای اندازه‌گیری تندی شارش خون در رگ‌ها، از مکان‌یابی پژواکی امواج الکترومغناطیسی به همراه اثر دوپلر استفاده می‌شود.
- (۲) برای تشخیص یک جسم به روش مکان‌یابی پژواکی، اندازه جسم باید در حدود طول موج موج به کاررفته یا بزرگ‌تر از آن باشد.
- (۳) در آب‌های کم‌عمق، با افزایش عمق آب، تندی انتشار امواج روی سطح آب کاهش می‌یابد.
- (۴) هنگام رخ دادن پدیده سراب، با نزدیک شدن پرتو خورشید به سطح زمین، تندی انتشار آن کاهش می‌یابد.

۶۴- شخص بین دو صخره قائم ایستاده و فاصله او از صخره دورتر 320 m است. شخص فریاد می‌زند و اولین پژواک صدای خود را پس از $1/6\text{ s}$ و صدای پژواک دوم را $4/8\text{ s}$ بعد از پژواک اول می‌شنود. به ترتیب، تندی صوت در هوا چند متر بر ثانیه و فاصله بین دو صخره چند متر است؟

- | | |
|----------------|----------------|
| (۱) $320, 576$ | (۲) $320, 720$ |
| (۳) $400, 576$ | (۴) $400, 270$ |

۶۵- پرتوی نور مرکبی شامل دو پرتوی قرمز و آبی با زاویه تابش 45° از هوا بر سطح تیغه تختی از کوارتز می‌تابد. اگر زاویه بین دو پرتوی شکست 7° و ضریب شکست کوارتز برای نور آبی $\sqrt{2}$ باشد، ضریب شکست کوارتز برای نور قرمز کدام است؟ ($\sin 37^\circ = 0/6$ و $\sin 23^\circ = 0/4$)

- | | |
|---------------------------|---------------------------|
| (۱) ۲ | (۲) $\frac{4}{3}$ |
| (۳) $\frac{5\sqrt{2}}{6}$ | (۴) $\frac{5\sqrt{2}}{4}$ |

۶۶- در آزمایش ینگ، با ایجاد تغییرهای «الف» و «ب» به صورت جداگانه، پهنای هر نوار تاریک و روشن به ترتیب از راست به چپ چگونه تغییر می‌کند؟

الف) استفاده از نور تک‌فام سبز به جای نور تک‌فام زرد

ب) انجام آزمایش در آب به جای انجام آزمایش در هوا

- (۱) افزایش می‌یابد، کاهش می‌یابد.
- (۲) افزایش می‌یابد، افزایش می‌یابد.
- (۳) کاهش می‌یابد، افزایش می‌یابد.
- (۴) کاهش می‌یابد، کاهش می‌یابد.

محل انجام محاسبات

۶۷- تار دو انتها بسته‌ای به طول 60 cm نوسان می‌کند و در طول آن ۵ گره تشکیل شده است. اگر تندی انتشار موج عرضی در تار 240 m/s و تندی صوت در هوا 320 m/s باشد، به ترتیب، طول موج امواج صوتی گسیلی در این حالت چند سانتی‌متر و بسامد اصلی تار چند هرتز است؟

- | | |
|---------------|----------------|
| (۱) $200, 40$ | (۲) $200, 160$ |
| (۳) $800, 40$ | (۴) $800, 160$ |

۶۸- کدام یک از موارد زیر جزء نارسایی‌های مدل اتمی بور است؟

(۱) تبیین پایداری اتمی هیدروژن

(۲) محاسبه انرژی یونش اتم‌های هیدروژن گونه

(۳) محاسبه طول موج‌های طیف خطی اتم‌های هیدروژن گونه

(۴) توضیح دلیل تفاوت شدت خط‌های طیف گسیلی هیدروژن

۶۹- اگر شدت تابشی متوسط خورشید در سطح زمین برابر 300 W/m^2 باشد، در هر دقیقه به ناحیه‌ای به مساحت 80 cm^2 از سطح زمین، چند فوتون می‌رسد؟ ($c = 3 \times 10^8\text{ m/s}$ ، $h = 6 \times 10^{-34}\text{ J.s}$ و طول موج متوسط فوتون‌های تابیده از خورشید را 600 nm در نظر بگیرید.)

- | | |
|--------------------------|--------------------------|
| (۱) $1/6 \times 10^{20}$ | (۲) $1/6 \times 10^{21}$ |
| (۳) $4/8 \times 10^{20}$ | (۴) $4/8 \times 10^{21}$ |

۷۰- تابش فرابنفش با طول موج 248 nm بر سطح تیغه‌ای فلزی با تابع کار $3/2\text{ eV}$ می‌تابد. بیشینه تندی فوتوالکترون‌های جدا شده از سطح فلز چند متر بر ثانیه است؟ ($hc = 1240\text{ eV.nm}$ ، جرم الکترون $9 \times 10^{-28}\text{ g}$ و بار الکتریکی آن $1/6 \times 10^{-19}\text{ C}$ است.)

- | | |
|---------------------|---------------------|
| (۱) 8×10^5 | (۲) 2×10^5 |
| (۳) 8×10^4 | (۴) 2×10^4 |

محل انجام محاسبات

۷۱- اگر R ثابت ریدبرگ، h ثابت پلانک و c تندی نور در خلأ باشد، یکای حاصل کدام یک از موارد زیر در SI، ژول است؟

$$\frac{1}{hcR} \quad (۲) \quad hcR \quad (۱)$$

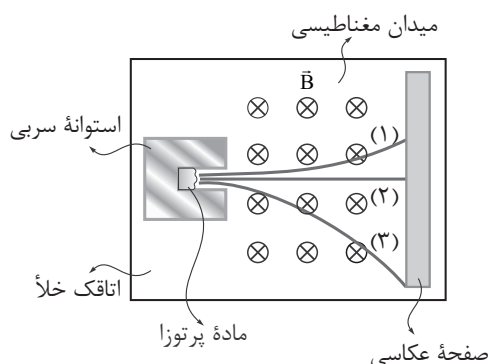
$$\frac{R}{hc} \quad (۴) \quad \frac{hc}{R} \quad (۳)$$

۷۲- گستره طول موج‌های رشته پاشن ($n' = 3$) چند برابر گستره طول موج‌های رشته بالمر ($n' = 2$) است؟

$$\frac{112}{405} \quad (۲) \quad \frac{405}{112} \quad (۱)$$

$$\frac{7}{20} \quad (۴) \quad \frac{20}{7} \quad (۳)$$

۷۳- مسیر حرکت پرتوهای آلفا، بتا (الکترون) و گامای گسیل شده از یک ماده پرتوزا در میدان مغناطیسی یکنواختی به شکل زیر است. کدام یک از عبارات‌های زیر درباره این پرتوها درست است؟



الف) مسیر (۱)، مربوط به ذره‌ای است که در آشکارسازهای دود به کار می‌رود.

ب) مسیر (۳)، مربوط به ذره‌ای است که بیشتر از دو ذره دیگر در سرب نفوذ می‌کند.

پ) مسیر (۲)، مربوط به ذره‌ای است که گسیل آن، متداول‌ترین نوع واپاشی است.

ت) مسیر (۱)، مربوط به ذره‌ای است که گسیل آن در هسته‌های سنگین رخ می‌دهد.

(۱) الف و ب (۲) الف و ت

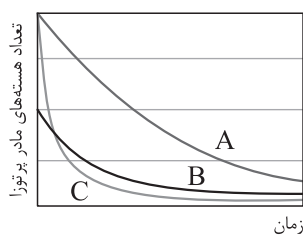
(۳) ب و پ (۴) پ و ت

۷۴- سرب $^{207}_{82}\text{Pb}$ هسته پایداری است که می‌تواند طی دو فرایند جداگانه، از واپاشی α یا واپاشی β^- حاصل شود. اختلاف تعداد نوترون‌های هسته مادر، در این دو فرایند، کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۷

محل انجام محاسبات

۷۵- نمودار تغییرات تعداد هسته‌های مادر پرتوزای سه نمونه A، B و C بر حسب زمان، به شکل زیر است. کدام مورد درباره مقایسه نیمه عمر (T) این سه نمونه درست است؟



$$T_B > T_C > T_A \quad (۱)$$

$$T_A > T_C > T_B \quad (۲)$$

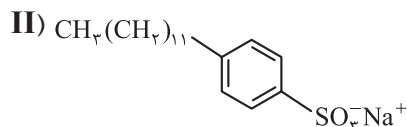
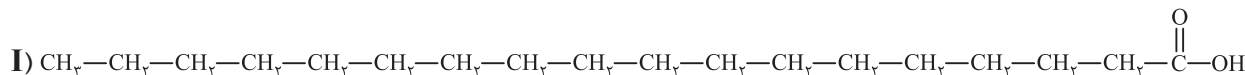
$$T_C > T_B > T_A \quad (۳)$$

$$T_A > T_B > T_C \quad (۴)$$

محل انجام محاسبات

شیمی (۳): صفحه‌های ۱ تا ۱۲۳

۷۶- با توجه به ساختار ترکیب‌های داده شده، کدام مطلب نادرست است؟ ($\text{Na} = 23, \text{O} = 16, \text{C} = 12, \text{H} = 1: \text{g.mol}^{-1}$)



۱) نیروی بین مولکولی غالب در ترکیب (I)، نیروی وان دروالسی است و مخلوط آن با آب و صابون، باعث ایجاد مخلوطی ناهمگن و پایدار می‌شود.

(۲) نیست حرم فلز به حرم اکسنده‌تر بن نافلز در ترکیب (II)، به تقریب برابر با ۴۸/۰ است.

(۳) ترکیب (II) از خانواده پاک‌کننده‌های غیرصابونی است که حتی در آب سخت نیز با آلاینده‌ها واکنش می‌دهد.

(۴) از واکنش ترکیب (I) با پیتاسیم هیدروکسید، می‌توان صابونی مایع با فرمول $C_{18}H_{38}O_2K$ تولید کرد.

۷۷- درستی یا نادرستی مطالب زیر، به ترتیب کدام است؟

- سدیم کلرید مانند اوره، دارای مولکول‌های قطبی است و در آب حل می‌شود.
- آب گل‌آلود، نمونه‌ای از کلوئیدها است و ذرات سازنده آن با گذشت زمان ته‌نشین می‌شود.
- در واکنش صابون‌های جامد با کلسیم کلرید، رسوبی تولید می‌شود که شمار اتم‌ها در فرمول شیمیایی آن، دو برابر شمار اتم‌ها در صابون اولیه است.
- شمار پیوندهای دوگانه در هر مولکول روغن زیتون ($C_{57}H_{104}O_6$)، سه برابر شمار گروه‌های هیدروکسیل در مولکول اتیلن گلیکول است.

(۲) نادرست - نادرست - نادرست - درست

(۱) درست - نادرست - نادرست - درست - درست

(۴) نادرست - درست - درست - نادرست

(۳) درست - درست - درست - درست

۷۸- چند مورد از مطالب زیر دربارهٔ واکنش $1/0$ مول فلز روی با 250 میلی‌لیتر محلول $8/0$ مولار نیتریک اسید در دمای 25°C ، درست است؟

- pH اولیهٔ محلول اسید، ۱/۰ است.
- با افزودن آب و رساندن حجم محلول به یک لیتر، سرعت تولید گاز افزایش می‌یابد.
- در این واکنش، یون نیتрат اکسایش یافته و کاهنده است.
- اگر به جای محلول نیتربک اسید، از محلول نیترواسید با دما و غلظت یکسان استفاده شود، سرعت واکنش کاهش می‌یابد.

५८५

3 (3)

2 (2)

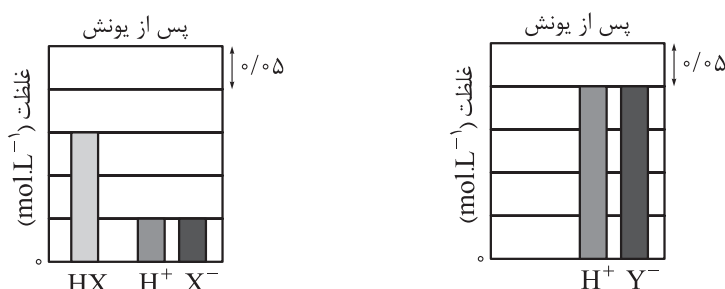
11

محل انجام محاسبات

۷۹- تفاوت غلظت مولی یون هیدرونیوم در محلول‌هایی با $\text{pH} = 0$ و $\text{pH} = 1$ ، چند برابر تفاوت غلظت مولی یون هیدرونیوم در محلول‌های با $\text{pH} = 1$ و $\text{pH} = 2$ است؟

- (۱) ۱ (۲) ۱۰ (۳) ۹۰ (۴) ۱۰۰

۸۰- با توجه به شکل‌های زیر، که محلول دو اسید HX و HY پس از یونش را نشان می‌دهد، کدام موارد زیر درست است؟ (حجم، دما و غلظت دو اسید یکسان است و جرم مولی HY را برابر 181 g.mol^{-1} در نظر بگیرید.)



(الف) درصد یونش و ثابت یونش اسید HX به ترتیب برابر ۲۵ درصد و $1/67 \times 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$ است.

(ب) اگر حجم محلول HY ، ۲۰۰ میلی‌لیتر باشد، pH محلول و جرم آغازین HY در آن به ترتیب برابر ۰/۷ و ۷/۲۴ گرم است.

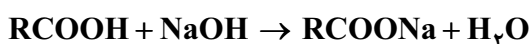
(پ) اگر HX ، نخستین عضو خانواده کربوکسیلیک اسیدها باشد، HY می‌تواند پرکاربردترین اسید آلی در زندگی روزانه باشد.

(ت) یک لیتر HY نسبت به یک لیتر HX ، می‌تواند مقدار سدیم هیدروکسید یک مولار بیشتری را خنثی کند.

- (۱) الف - ب (۲) ب - ت (۳) پ - ت (۴) الف - ب - ت

۸۱- ۴ لیتر محلول سدیم هیدروکسید با $\text{pH} = 13/1$ با ۱۲۸ گرم از یک اسید چرب (با زنجیر هیدروکربنی سیرشده)، مطابق معادله کلی زیر واکنش می‌دهد. مجموع شمار اتم‌ها در فرمول شیمیایی اسید چرب مورد نظر کدام است؟

($\text{O} = 16, \text{C} = 12, \text{H} = 1; \text{g.mol}^{-1}$)



- (۱) ۴۴ (۲) ۴۷ (۳) ۵۰ (۴) ۵۳

۸۲- کدام موارد از مطالب زیر، درست است؟

(الف) در دمای یکسان، رسانایی الکتریکی محلول ۰/۵ مولار استون در آب، بیشتر از محلول ۰/۵ مولار آمونیاک ($\alpha = 0/2$) است.

(ب) انحلال شکر در آب مانند انحلال ید در هگزان، انحلال مولکولی است و هر دو محلول غیرالکترولیت محسوب می‌شوند.

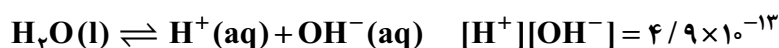
(پ) نوع رسانایی الکتریکی آلوتروپ پایدارتر کربن، با نوع رسانایی محلول آبی نمک خوراکی متفاوت است.

(ت) جابه‌جایی یون‌ها در سدیم کلرید مذاب باعث می‌شود که این ماده مانند محلول آبی سدیم نیترات، رسانای جریان برق باشد.

- (۱) الف - ب (۲) ب - پ (۳) پ - ب - ت (۴) الف - پ - ت

محل انجام محاسبات

۸۳- با توجه به معادله یونش آب در دمای 90°C ، کدام گزینه نادرست است؟



- (۱) غلظت یون هیدروکسید آب خالص در این دما، برابر $7 \times 10^{-7} \text{ mol.L}^{-1}$ است.
 (۲) pH آب خالص در این دما، $8/5$ و واحد کوچکتر از pH آب خالص در دمای اتاق است.
 (۳) $[\text{H}_3\text{O}^+]$ آب خالص در دمای 90°C ، 7 برابر غلظت این یون در آب خالص با دمای 25°C است.
 (۴) یونش آب، فرایندی گرماگیر است و با افزایش دما، غلظت یون هیدرونیوم در آب افزایش یافته و محیط اندکی اسیدی می‌شود.

۸۴- 250 میلی‌لیتر محلول باریم هیدروکسید با 100 میلی‌لیتر محلول $2/0$ مولار سولفوریک اسید به طور کامل واکنش داده‌است. pH محلول اولیه باز کدام است و طی این واکنش چند گرم رسوب تولید می‌شود؟ ($\text{Ba} = 137, \text{S} = 32, \text{O} = 16 : \text{g.mol}^{-1}$)
 (معادله واکنش موازنه نشده است.)
 $\text{Ba}(\text{OH})_2(\text{aq}) + \text{H}_2\text{SO}_4(\text{aq}) \rightarrow \text{BaSO}_4(\text{s}) + \text{H}_2\text{O}(\text{l})$

۱) $4/66, 12/9$ ۲) $13/2, 66/4$ ۳) $9/32, 12/9$ ۴) $2/13, 32/9$

۸۵- چند مورد از مطالب زیر، درست است؟

- در واکنش فلز روی با محلول مس (II) سولفات، با گذشت زمان از غلظت یون‌های Cu^{2+} و SO_4^{2-} کاسته شده و شدت رنگ آبی محلول کم می‌شود.
- در گذشته برای عکاسی از نور خیره‌کننده سوختن منیزیم استفاده می‌شد که در آن فلز منیزیم و گاز اکسیژن به ترتیب کاهنده و اکسنده واکنش هستند.
- با وارد کردن میله‌ای از جنس آلیاژ آلومینیم و آهن، درون محلولی که حاوی یون‌های Cu^{2+} ، Ag^+ و Zn^{2+} است، در مجموع احتمال انجام چهار واکنش وجود دارد.
- اگر در سلول گالوانی حاصل از اتصال نیم‌سلول فلز M به نیم‌سلول SHE، pH نیم‌سلول SHE افزایش یابد، E° نیم‌سلول M عددی منفی است.

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۸۶- با توجه به نیم‌واکنش‌های داده‌شده و پتانسیل کاهشی استاندارد آن‌ها، کدام گزینه درست است؟

نیم واکنش	$E^{\circ}(\text{V})$
$\text{Fe}^{2+}(\text{aq}) + 2\text{e}^- \rightarrow \text{Fe}(\text{s})$	$-0/44$
$\text{Cu}^{2+}(\text{aq}) + \text{e}^- \rightarrow \text{Cu}^+(\text{aq})$	$+0/15$
$\text{Fe}^{3+}(\text{aq}) + \text{e}^- \rightarrow \text{Fe}^{2+}(\text{aq})$	$+0/77$
$\text{Cu}^{2+}(\text{aq}) + 2\text{e}^- \rightarrow \text{Cu}(\text{s})$	$+0/34$
$\text{Cu}^+(\text{aq}) + \text{e}^- \rightarrow \text{Cu}(\text{s})$	$+0/52$

- (۱) واکنش $3\text{Fe}^{2+}(\text{aq}) \rightarrow \text{Fe}(\text{s}) + 2\text{Fe}^{3+}(\text{aq})$ به طور طبیعی انجام می‌شود.
 (۲) فلز آهن به عنوان کاهنده می‌تواند Cu^{2+} را کاهش دهد ولی توانایی کاهش Cu^+ را ندارد.
 (۳) فلز آهن نسبت به فلز مس، کاهنده‌تر و کاتیون‌های آهن نسبت به کاتیون‌های مس، اکسنده‌تر هستند.
 (۴) E° واکنش $2\text{Cu}^+(\text{aq}) \rightarrow \text{Cu}^{2+}(\text{aq}) + \text{Cu}(\text{s})$ برابر $+0/37$ ولت است.

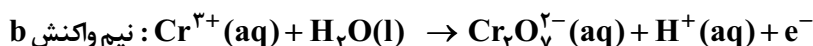
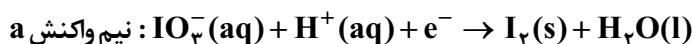
محل انجام محاسبات

۸۷- چند مورد از مطالب زیر، درست است؟

- تفاوت عدد اکسایش اتم اکسیژن در مولکول‌های اکسیژن دی‌فلوئورید و هیدروژن پراکسید برابر ۳ است.
- تفاوت مجموع عدد اکسایش اتم‌های کربن در مولکول اتیل استات، با مجموع عدد اکسایش اتم‌های کربن در مولکول بوتانویک اسید، برابر ۱+ است.
- در سوختن کامل متان، عدد اکسایش کربن از کم‌ترین مقدار خود به بیشترین مقدار خود می‌رسد.
- محلول ترکیبی از وانادیم با فرمول NH_4VO_3 ، به رنگ زرد دیده می‌شود.

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۸۸- پس از موازنه نیم‌واکنش‌های داده‌شده، کدام مطلب نادرست است؟



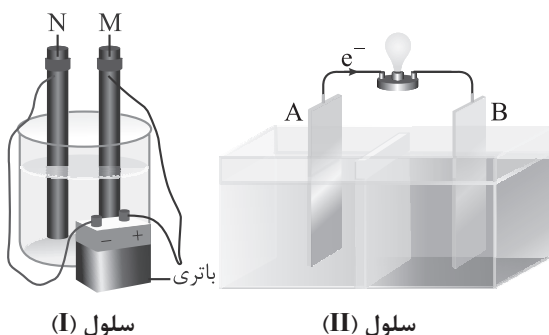
- (۱) a، نیم‌واکنش کاهش بوده و با افزایش pH محیط همراه است.
- (۲) مجموع ضرایب همه گونه‌های شرکت‌کننده در نیم‌واکنش a، برابر ۳۰ است.
- (۳) تفاوت ضریب الکترون در این نیم‌واکنش‌ها، دو برابر ضریب Cr^{3+} است.
- (۴) b، نیم‌واکنش اکسایش است و با انجام آن، عدد اکسایش هر اتم کروم، ۳ واحد افزایش می‌یابد.

۸۹- با توجه به شکل زیر، اگر در اثر خراش جسم مورد نظر در هوای مرطوب، فلز دچار خوردگی شود،



- (۱) آهن - پتانسیل کاهش استاندارد آهن بیشتر از M است.
- (۲) M - آهن قطب منفی سلول گالوانی تشکیل شده است.
- (۳) آهن - فلز M در نقش کاتد عمل کرده و کاهش می‌یابد.
- (۴) M - پتانسیل کاهش استاندارد فلز M منفی است.

۹۰- با توجه به شکل‌های زیر که دو نوع سلول الکتروشیمیایی را نشان می‌دهند، چند مورد از مطالب داده‌شده درست‌اند؟



سلول (I)

سلول (II)

۱ (۵) ۲ (۴) ۳ (۳) ۴ (۲)

- در سلول (I) برخلاف سلول (II)، می‌توان یک واکنش شیمیایی را در خلاف جهت طبیعی پیش راند.
- الکتروود N در سلول (I) همانند الکتروود A در سلول (II)، نقش آند را دارد.
- در هر دو سلول، نیم‌واکنش کاهش در کاتد انجام می‌شود.
- در هر دو سلول، جهت حرکت الکترون‌ها در مدار بیرونی از قطب منفی به مثبت است.
- در سلول (I) برخلاف سلول (II)، یون‌های موجود در الکترولیت به سمت الکتروودهای با بار ناهمنام حرکت می‌کنند.

محل انجام محاسبات

۹۱- در یک سلول الکترولیتی در آند، نیم واکنش اکسایش یون های کلرید و در کاتد، نیم واکنش کاهش مولکول های آب انجام می شود. در این سلول به ازای عبور یک مول الکترون، در مجموع چند گرم گاز تولید می شود؟ ($\text{Cl} = 35.5, \text{O} = 16, \text{H} = 1: \text{g.mol}^{-1}$)

۳۶ / ۵ (۱) ۳۷ / ۵ (۲) ۵۱ / ۵ (۳) ۸۷ (۴)

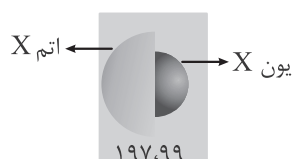
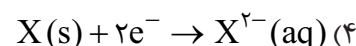
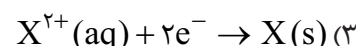
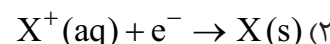
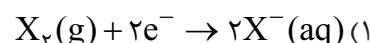
۹۲- نمونه ای به جرم ۴۵ گرم از سنگ معدن آلومینیم که دارای آلومینیم اکسید و مقداری ناخالصی است را ذوب کرده و به کمک فرایند هال به آلومینیم تبدیل می کنیم. اگر طی این فرایند، ۱۱ گرم گاز تولید شده باشد، درصد جرمی آلومینیم در سنگ معدن اولیه کدام است؟ (در ناخالصی ها فلز آلومینیم وجود ندارد.) ($\text{Al} = 27, \text{O} = 16, \text{C} = 12: \text{g.mol}^{-1}$)

۱۰ (۱) ۱۵ (۲) ۲۰ (۳) ۳۰ (۴)

۹۳- چند مورد از مطالب زیر، درباره کلروفرم درست است؟ ($\text{Cl} = 35.5, \text{C} = 12, \text{H} = 1: \text{g.mol}^{-1}$)

- مولکولی قطبی بوده و در دمای اتاق، مایع است.
 - تفاوت جرم مولی آن با کلرواتان، برابر ۵۵ گرم است.
 - همه اتم های متصل به اتم مرکزی آن، دارای بار جزئی منفی (δ^-) هستند.
 - با جایگزینی اتم (های) هیدروژن آن با اتم کلر، مولکولی حاصل می شود که در میدان الکتریکی جهت گیری نمی کند.
- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۹۴- شکل زیر مربوط به مقایسه شعاع اتم عنصر X، با یون پایدار آن است. اگر نسبت قدر مطلق بار به شعاع یون پایدار این عنصر، برابر با $2/02 \times 10^{-2}$ باشد، نیم واکنش کاهش عنصر X به کدام صورت نوشته می شود؟

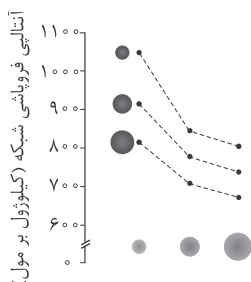


۹۵- درستی یا نادرستی کدام گزینه با دیگر گزینه ها متفاوت است؟

- (۱) نقطه ذوب و جوش فلز مس، از نقطه ذوب و جوش سدیم کلرید بیشتر است، اما تفاوت نقطه ذوب و جوش در سدیم کلرید، بیشتر از مس می باشد.
- (۲) $\text{Na}(\text{s})$ همانند $\text{NaCl}(\text{s})$ رسانای جریان برق است، اما برخلاف آن، بر اثر عبور جریان برق در حالت مذاب، تجزیه نمی شود.
- (۳) اگر آنتالپی فروپاشی شبکه بلور MgX بیشتر از MgY باشد، شعاع یون X^{2-} از شعاع یون Y^- به یقین کوچک تر است.
- (۴) ترکیبی که باعث سرخ فام شدن خاک رس می شود، نوعی رنگدانه معدنی است که طول موج های نزدیک و کوتاه تر از 700 nm را بازتاب کرده یا از خود عبور می دهد.

محل انجام محاسبات

۹۶- با توجه به نمودار زیر که مربوط به آنتالپی فروپاشی شبکه بلور ترکیب‌های حاصل از سه فلز قلیایی و سه هالوژن اول جدول دوره‌ای است، چند مورد از مطالب داده‌شده، نادرست است؟



• در بین هالیدهای فلزهای قلیایی، تنها آنتالپی فروپاشی شبکه بلور لیتیم فلوئورید بالاتر از $1000 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ است.

• در تشکیل ۵/۰ مول سدیم برمید از یون‌های گازی سازنده، حدود ۳۷۵ کیلوژول گرما آزاد می‌شود.

• تفاوت آنتالپی فروپاشی شبکه بلور ترکیب‌های پتاسیم برمید و سدیم کلرید، کم‌تر از این تفاوت برای ترکیب‌های سدیم برمید و پتاسیم کلرید است.

• مجموع شعاع یون‌های لیتیم و کلرید، کم‌تر از مجموع شعاع یون‌های سدیم و فلوئورید است.

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۹۷- در ستون (I) جدول زیر، گزاره‌هایی درست و علمی آورده شده‌اند. در چه تعداد از ردیف‌های جدول، گزاره آورده‌شده در ستون (II)، دلیل درستی برای عبارت مربوط در ستون (I) محسوب می‌شود؟

ردیف	I	II
	گزاره علمی	دلیل
۱	ترکیب‌های یونی خنثی هستند.	شمار کاتیون‌ها و آنیون‌ها در هر واحد فرمولی از ترکیب‌های یونی برابر است.
۲	سختی الماس از گرافیت بیشتر است.	میانگین آنتالپی پیوند کربن - کربن در الماس بیشتر از گرافیت است.
۳	نقطه ذوب سیلیس از کربن دی‌اکسید بیشتر است.	نیروهای بین مولکولی سیلیس قوی‌تر از کربن دی‌اکسید هستند.
۴	مولکول گوگرد تری‌اکسید، در میدان الکتریکی جهت‌گیری نمی‌کند.	تراکم بار الکتریکی بر روی اتم‌های سازنده گوگرد تری‌اکسید یکسان است.

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۹۸- کدام مطلب درست است؟

(۱) از مدل دریای الکترونی برای توجیه برخی رفتارهای فیزیکی و شیمیایی فلزها استفاده می‌شود.

(۲) همه الکترون‌های اتم‌های یک فلز، در به وجود آمدن دریای الکترونی مشارکت دارند.

(۳) مجموع عدد کوئوردیناسیون یون‌های Na^+ و Cl^- در شبکه بلور سدیم کلرید، برابر ۶ است.

(۴) در شرایط یکسان و در جرم برابر از تیتانیم و فولاد، حجم فولاد کم‌تر است.

محل انجام محاسبات

۹۹- کدام موارد از مطالب زیر، در ارتباط با مبدل کاتالیستی خودروهای بنزینی و واکنش‌های انجام‌شده درون آن درست است؟

الف) با نصب این مبدل، ترتیب درصد تغییرات جرم آلاینده‌ها به صورت $\text{NO} < \text{C}_x\text{H}_y < \text{CO}$ خواهد بود.

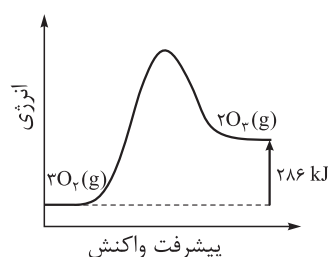
ب) واکنش‌های انجام‌شده در این نوع مبدل، گرماده هستند.

پ) در روزهای زمستانی، کارایی این مبدل‌ها کاهش می‌یابد.

ت) در سطح سرامیک‌های درون مبدل کاتالیستی، توده‌هایی فلزی با قطر ۲ تا ۱۰ میکومتر مشاهده می‌شود.

(۱) ب - پ (۲) الف - ت (۳) الف - پ (۴) ب - ت

۱۰۰- با توجه به نمودار داده‌شده، درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر به ترتیب کدام است؟



• انرژی فعال‌سازی از آنتالپی واکنش بزرگ‌تر است.

• آنتالپی (محتوای انرژی) فراورده‌ها از واکنش دهنده‌ها کم‌تر است.

• مجموع آنتالپی پیوندها در واکنش دهنده‌ها بزرگ‌تر از فراورده‌ها است.

• اگر این واکنش درون سیلندر با پیستون روان به تعادل برسد، با کاهش

فشار در دمای ثابت، شمار مول‌های اوزون افزایش می‌یابد.

(۱) درست - نادرست - درست - نادرست

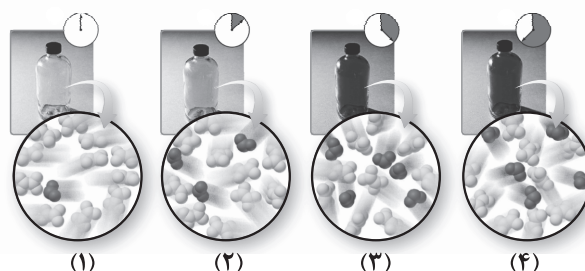
(۲) نادرست - نادرست - نادرست - درست

(۳) درست - نادرست - درست - درست

(۴) نادرست - درست - درست - نادرست

۱۰۱- با توجه به شکل‌های زیر که پیشرفت واکنش تبدیل گاز N_2O_4 به گاز NO_2 را نشان می‌دهد، کدام گزینه نادرست

است؟ (هر ذره معادل ۸/۰ مول و حجم ظرف ۲ لیتر و تعداد ذره‌های N_2O_4 در ظرف اولیه برابر ۱۱ است.)



(۱) در شکل (۲)، سرعت تولید گاز N_2O_4 بیشتر از شکل (۱) است.

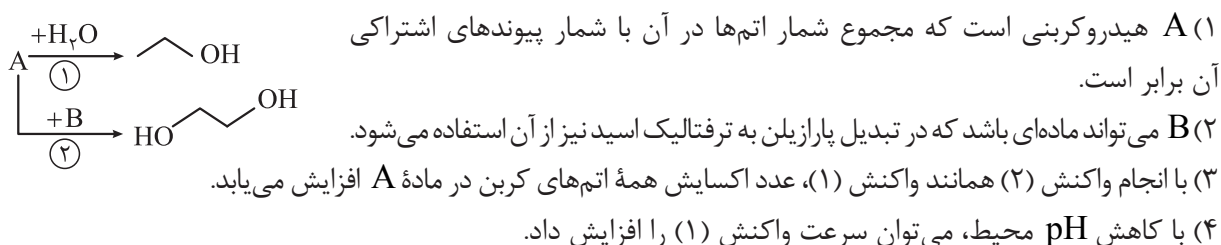
(۲) ثابت تعادل این واکنش به تقریب برابر با $1/1 \text{ mol.L}^{-1}$ است.

(۳) تعادل زمانی برقرار شده است که واکنش به میزان تقریباً ۱۸ درصد پیشرفت کرده است.

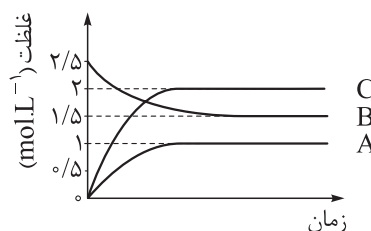
(۴) اگر ظرف (۴) را درون یخچال قرار دهیم، شدت رنگ قهوه‌ای درون ظرف افزایش می‌یابد.

محل انجام محاسبات

۱۰۲- با توجه به شکل زیر که تبدیل برخی مواد آلی به یکدیگر را نشان می‌دهد، کدام گزینه نادرست است؟



۱۰۳- با توجه به نمودار زیر که مربوط به یک تعادل گازی بوده و در آن درصد مولی C با کاهش دما، کاهش می‌یابد، کدام موارد درست‌اند؟ (حجم ظرف واکنش، ۲ لیتر است.)



(الف) واکنش با افزایش فشار در جهت رفت جابه‌جا می‌شود.

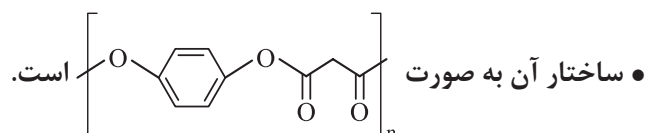
(ب) مجموع شمار مول‌های تعادلی مواد در ظرف واکنش، برابر با ۴/۵ مول است.

(پ) روند تغییر ثابت تعادل آن با دما، مشابه این روند در واکنش تعادلی تجزیه گاز SO_3 به گاز SO_2 است.

(ت) با کاهش حجم ظرف، غلظت مولی A و B افزایش می‌یابد.

(۱) الف - ب (۲) پ - ت (۳) الف - پ (۴) ب - ت

۱۰۴- چند مورد از مطالب زیر درباره پلی اتیلن ترفتالات (PET)، درست است؟



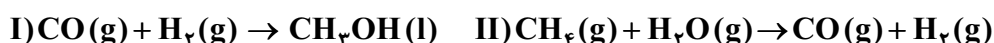
• ماندگاری زیادی دارد و در طبیعت به کندی تجزیه می‌شود.

• امروزه سالانه حدود ۴۰۰ میلیون تن از این ماده، در جهان تولید می‌شود.

• قابل بازیافت است و می‌تواند در شرایط مناسب با متانول واکنش داده و به مواد مفیدی تبدیل شود.

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۰۵- کدام مطلب درباره واکنش‌های داده‌شده، نادرست است؟ (معادله واکنش‌ها موازنه شوند.)



(۱) مجموع ضرایب فراورده‌ها در واکنش (II)، دو برابر ضریب گاز هیدروژن واکنش (I) است.

(۲) به ازای شمار الکترون‌های مبادله‌شده یکسان، جرم گاز هیدروژن مصرف‌شده در واکنش (I)، با جرم گاز هیدروژن تولیدشده در واکنش (II) برابر است.

(۳) تغییر عدد اکسایش کربن در واکنش (I)، با میزان تغییر عدد اکسایش این عنصر در واکنش (II) برابر است.

(۴) یکی دیگر از راه‌های تولید فراورده واکنش (I)، واکنش هیدروکربن موجود در واکنش (II) با گاز اکسیژن در حضور کاتالیزگر است.

محل انجام محاسبات

دوستان عزیز خیلی سبز، سلام؛
فایل پاسخنامه این آزمون را که شامل درسنامه، نکات کنکوری، پاسخ تشریحی و ... است، ساعت ۱۴ امروز از
صفحه شخصی خودتان در سایت آزمون خیلی سبز دریافت کنید.
همچنین شما می‌توانید همین امشب کارنامه اولیه آزمونتان را در صفحه شخصی خود مشاهده بفرمایید.
برای دسترسی به صفحه شخصی خود وارد سایت آزمون خیلی سبز به آدرس: azmoon.kheilisabz.com شوید
و کدی را که توسط مدرسه و یا نمایندگی‌های آزمون‌های خیلی سبز به شما داده شده، در محل مشخص شده در
سایت ثبت بفرمایید.



ویژه
کنکوری های
۱۴۰۳

۱۴۰۳/۰۲/۲۰

دفترچه
پاسخ
آزمون پانزدهم
حضور

علوم ریاضی و فنی



سال تحصیلی
۱۴۰۲ - ۱۴۰۳

آزمون آزمایشی خیلی سبز

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا
حسابان	حسین شفیع زاده - مهرداد کیوان
ریاضیات گسسته و آمار و احتمال	علیرضا شریف خطیبی - عطا صادقی - حمید گلزاری - سروش موئینی
هندسه	محمد رضا حسینی فرد - فرزاد زمانی نژاد - محمد طاهر شعاعی - حمید گلزاری - کیوان صارمی - حسین نادری
فیزیک	محمد باغبان - علیرضا جباری - مهرداد ژاله - مجید ساکی - رضا سبزمیدانی - محمد جواد سورچی - نوید شاهی - علیرضا عبدالهی - علیرضا گونه - حامد نبی منصور
شیمی	مهدی براتی - مبینا شرافتی پور - پارسا فراهانی - رضا فولادپور - یاسر عبداللهی

نام درس	مسئول درس	گزینشگر	مؤلف پاسخ نامه	کارشناسان علمی	ویراستاران به ترتیب حروف الفبا
حسابان	حسین شفیع زاده - مهرداد کیوان	حسین شفیع زاده - مهرداد کیوان	عاطفه خان محمدی	محمد سجاد نقیه - سجاد داوطلب	ماهان فنی فر - علیرضا کاظمی بقا - ابوالفضل ناصری
ریاضیات گسسته و آمار و احتمال	حمید گلزاری	حمید گلزاری	مسعود شفیعی	مسعود شفیعی	ماهان فنی فر - علیرضا کاظمی بقا - ابوالفضل ناصری
هندسه	حمید گلزاری	حمید گلزاری	زهرا جالینوسی	مسعود شفیعی	ماهان فنی فر - علیرضا کاظمی بقا - ابوالفضل ناصری
فیزیک	رضا سبزمیدانی	نوید شاهی	محمد باغبان - علیرضا جباری - محمد جواد سورچی	علیرضا جباری	محمد احمد بیکی - مهدی بابائی - ماهان فنی فر - امیر محمودی انزابی
شیمی	یاسر عبداللهی	یاسر عبداللهی	فاطمه صیقلی	محمد مرادی	حمید ذبحی - سید علی حسین زاده - مهسا خاکی - وحید فارسیان

سرپرست محتوایی: فاطمه آقاجانپور

Azmoon.kheilisabz.com



حسابان (۲): صفحه‌های ۱ تا ۱۴۴

تست و پاسخ ۱

نمودار تابع $f(x) = 2x - \frac{1}{x}$ را سه واحد به راست و دو واحد به بالا انتقال می‌دهیم و در نهایت نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم. نمودار حاصل، خط $y = -2x - 3$ را در نقطه‌ای با کدام طول قطع می‌کند؟

$$g(x) \rightarrow g(-x)$$

۲ (۴)

۱ (۳)

-۲ (۲)

-۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

درس نامه •• انتقال، قرینه‌یابی، انبساط و انقباض

نمودار چه می‌شود؟	نماد ریاضی	اتفاقی که برای ضابطه می‌افتد
a واحد راست	$f(x-a)$	جای x ها، $x-a$ می‌گذاریم.
a واحد چپ	$f(x+a)$	جای x ها، $x+a$ می‌گذاریم.
b واحد بالا	$f(x)+b$	b تا به ضابطه اضافه می‌کنیم.
b واحد پایین	$f(x)-b$	b تا از ضابطه کم می‌کنیم.
نسبت به محور x ها	$-f(x)$	جای y ، $-y$ می‌گذاریم.
نسبت به محور y ها	$f(-x)$	جای x ها، $-x$ می‌گذاریم.
نسبت به مبدأ	$-f(-x)$	هر دو کار بالا با هم!
نسبت به خط $x=k$	$f(2k-x)$	جای x ها، $2k-x$ می‌گذاریم.
نسبت به خط $y=k$	$2k-f(x)$	جای y ها، $2k-y$ می‌گذاریم.
انبساط با ضریب ۲	$f\left(\frac{x}{2}\right)$	جای x ها، $\frac{x}{2}$ می‌گذاریم.
انقباض با ضریب $\frac{1}{2}$	$f(2x)$	جای x ها، $2x$ می‌گذاریم.
انبساط با ضریب ۲	$2f(x)$	کل ضابطه ضربدر ۲ می‌شود.
انقباض با ضریب $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}f(x)$	کل ضابطه ضربدر $\frac{1}{2}$ می‌شود.

گام اول: ابتدا نمودار تابع f را ۳ واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم: $g_1(x) = f(x-3)$

گام دوم: حالا تابع $g_1(x)$ به دست آمده را ۲ واحد به بالا انتقال می‌دهیم: $g_2(x) = g_1(x) + 2 = f(x-3) + 2$

گام سوم: $g_2(x)$ به دست آمده را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم تا نمودار نهایی به دست آید. $g_3(x) = g_2(-x) = f(-x-3) + 2$

گام چهارم: ضابطه تابع f را در $g_3(x)$ به دست آمده، جای‌گذاری می‌کنیم.

$$g_3(x) = 2(-x-3) - \frac{1}{-x-3} + 2 = -2x - 6 + \frac{1}{x+3} + 2 = -2x - 4 + \frac{1}{x+3}$$

گام پنجم: حالا باید ببینیم $g_3(x)$ با چه طولی، نمودار تابع $y = -2x - 3$ را قطع می‌کند. پس باید معادله زیر را حل کنیم.

$$g_3(x) = y \Rightarrow -2x - 4 + \frac{1}{x+3} = -2x - 3 \Rightarrow \frac{1}{x+3} = 1 \Rightarrow x+3=1 \Rightarrow x=-2$$

تست و پاسخ ۲

چند جمله‌ای $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$ بر $x-1$ و $x+2$ بخش پذیر است. باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x+2a) + f(x+2b)$ بر $x-2$

کدام است؟

$$\begin{cases} f(1) = 0 \\ f(-2) = 0 \end{cases}$$

۱۱ (۴)

۱۲ (۳)

۱۸ (۲)

۱۶ (۱)

پاسخ: گزینه ۴





خود حل کنی بهتره چند جمله‌ای $f(x)$ بر $x-1$ و $x+2$ بخش پذیر است، یعنی باقی مانده برابر با صفر است. به کمک این a و b را پیدا کنید.

درس نامه • تقسیم چندجمله‌ای‌ها

- (۱) برای به دست آوردن باقی مانده تقسیم عبارت $P(x)$ بر چندجمله‌ای درجه اول $x-a$ ، ابتدا ریشه مقسوم علیه را به دست می آوریم ($x=a$) و سپس این ریشه را در $P(x)$ جای گذاری می کنیم تا باقی مانده به دست آید.
- (۲) اگر مقسوم علیه از درجه دوم باشد، باقی مانده از درجه اول و به صورت کلی $ax+b$ است.

پاسخ تشریحی

گام اول: چندجمله‌ای $f(x)$ بر $x-1$ بخش پذیر است، پس:

$$x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow R=f(1)=0 \xrightarrow{f(x)=x^3+ax^2+bx+1} 1+a+b+1=0 \Rightarrow a+b=-2 \quad (I)$$

گام دوم: از طرفی چندجمله‌ای $f(x)$ بر $x+2$ نیز بخش پذیر است، پس:

$$x+2=0 \Rightarrow x=-2 \Rightarrow R=f(-2)=0 \Rightarrow -8+4a-2b+1=0 \Rightarrow 4a-2b=7 \quad (II)$$

گام سوم: از (I) و (II)، دستگاه تشکیل می دهیم و a و b را می یابیم.

$$\begin{cases} a+b=-2 \\ 4a-2b=7 \end{cases} \Rightarrow 6a=3 \Rightarrow a=\frac{1}{2}, b=-\frac{5}{2}$$

گام چهارم: پس $f(x)=x^3+\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{2}x+1$ است.

حالا باقی مانده چندجمله‌ای $f(x+2a)+f(x+2b)=f(x+1)+f(x-5)$ بر $x-2$ را می یابیم.

$$x-2=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow R=f(2+1)+f(2-5)=f(3)+f(-3)=27+\frac{9}{2}-\frac{15}{2}+1-27+\frac{9}{2}-\frac{15}{2}+1=11$$

۳

تست و پاسخ

قرینه نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} (x-1)^3 & x \geq 0 \\ -1+\sqrt[3]{-x} & x < 0 \end{cases}$ نسبت به محور y ها را دو واحد به راست و یک واحد به پایین انتقال می دهیم. فاصله نقاط برخورد نمودار تابع جدید با محور x ها از یکدیگر چه قدر است؟

۱۲ (۴)

۱۰ (۳)

۸ (۲)

۶ (۱)

۳

پاسخ: گزینه

خود حل کنی بهتره به کمک درس نامه سؤال ۱، ضابطه تابع جدید را پیدا کنید و ریشه های آن را بیابید.

پاسخ تشریحی گام اول: ابتدا قرینه نمودار تابع f را نسبت به محور y ها به دست می آوریم:

$$g_1(x)=f(-x)=\begin{cases} (-x-1)^3 & -x \geq 0 \\ -1+\sqrt[3]{-(-x)} & -x < 0 \end{cases} = \begin{cases} (-x-1)^3 & x \leq 0 \\ -1+\sqrt[3]{x} & x > 0 \end{cases}$$

گام دوم: حالا اگر نمودار تابع به دست آمده را ۲ واحد به سمت راست و یک واحد به پایین انتقال دهیم، ضابطه تابع جدید به دست می آید:

$$g_2(x)=-1+g_1(x-2)=\begin{cases} (-(-x-2)-1)^3-1 & x-2 \leq 0 \\ -1+\sqrt[3]{x-2}-1 & x-2 > 0 \end{cases} = \begin{cases} (-x+1)^3-1 & x \leq 2 \\ \sqrt[3]{x-2}-2 & x > 2 \end{cases}$$

گام سوم: محل برخورد نمودار $g_2(x)$ را با محور x ها پیدا می کنیم:

$$1) x \leq 2: (-x+1)^3-1=0 \Rightarrow (-x+1)^3=1 \Rightarrow -x+1=1 \Rightarrow x=0 \quad \checkmark$$

$$2) x > 2: \sqrt[3]{x-2}-2=0 \Rightarrow \sqrt[3]{x-2}=2 \Rightarrow x-2=8 \Rightarrow x=10 \quad \checkmark$$

بنابراین فاصله مد نظر، برابر با ۱۰ است.

۴

تست و پاسخ

نمودار تابع $f(x)=a+b \sin ax \cdot \cos ax$ در بازه $[0, k]$ به صورت مقابل است. مقدار $f(2k)$ کدام است؟

۱/۵ (۲)

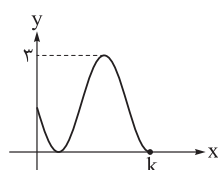
۲ (۱)

۱ (۴)

۲/۵ (۳)

۲

پاسخ: گزینه





مشاوره از نمودارهای مثلثاتی هر سال در کنکور سؤال می‌آید. به دقت سؤالات با تیپ‌های مختلف را بررسی کنید.

خودت حل کنی بهتره به کمک اتحاد مثلثاتی $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ ، ضابطه تابع $f(x)$ را ساده‌تر کنید و با توجه به مقدار $f(0)$ و روند نمودار پس از محور y علامت a و b را تعیین کنید.

درس نامه ۱. به دست آوردن ضرایب مجهول در توابع به فرم $y = a \sin(bx) + c$ یا $y = a \cos(bx) + c$

گام	چیکار می‌کنیم؟	توضیح
۱	ساده کردن	اگر ضابطه ساده می‌شد، حتماً ساده می‌کنیم. مثلاً جای $\sin(\frac{\pi}{4} - x)$ می‌نویسیم $\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x$.
۲	دوره تناوب	اگر از روی شکل دوره تناوب معلوم بود، $\frac{2\pi}{ b }$ را با آن برابر قرار می‌دهیم تا b به دست آید.
۳	min و max	اگر مقدار min و max روی نمودار معلوم بود، از معادلات $\max = a + c$ و $\min = - a + c$ مقدار $ a $ و c را حساب می‌کنیم.
۴	نقطه کمکی	اگر مختصات نقطه‌ای از نمودار معلوم بود، آن را در ضابطه جای گذاری می‌کنیم تا یک معادله به ما بدهد.
۵	علامت a و b	برای تعیین علامت a و b از جدول‌های زیر استفاده می‌کنیم.

۲. بررسی شروع نمودارهای کسینوسی از محور y ‌ها

ضابطه	شرط	نمودار با شروع از محور	شروع نمودار از محور y ‌ها	توضیح
$y = a \cos(bx) + c$	$a > 0$		نزولی	علامت b مهم نیست.
	$a < 0$		صعودی	

۳. بررسی شروع نمودارهای سینوسی از محور y ‌ها

ضابطه	شرط	شروع نمودار از محور y ‌ها	وضعیت	توضیح
$y = a \sin(bx) + d$	$ab > 0$		صعودی	اگر a و b هم‌علامت باشند، شروع نمودار از محور y ‌ها صعودی است.
	$ab < 0$		نزولی	اگر a و b غیر هم‌علامت باشند، شروع نمودار از محور y ‌ها نزولی است.

پاسخ تشریحی گام اول: ابتدا به کمک اتحاد مثلثاتی $\sin 2\alpha$ ، تابع f را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$f(x) = a + b \sin ax \cos ax = a + \frac{b}{2} \sin 2ax$$

گام دوم: به ازای $x = 0$ ، مقدار تابع $f(0) = a$ است که با توجه به نمودار، مقداری مثبت است، پس $a > 0$ است. از طرفی شروع نمودار به صورت نزولی است پس حاصل ضرب ضریب x ($2a$) و ضریب $\sin(\frac{b}{2})$ باید منفی باشد:

$$\frac{b}{2} \times 2a < 0 \xrightarrow{a > 0} b < 0$$



گام سوم: با توجه به نمودار، حداکثر مقدار تابع f برابر با ۳ است، یعنی داریم:

$$a + \left| \frac{b}{\sqrt{2}} \right| = 3 \xrightarrow{\text{از گام دوم } b < 0} a - \frac{b}{\sqrt{2}} = 3 \quad (I)$$

گام چهارم: همچنین با توجه به نمودار، حداقل مقدار تابع f برابر با صفر است، یعنی:

$$a - \left| \frac{b}{\sqrt{2}} \right| = 0 \xrightarrow{\text{از گام دوم } b < 0} a + \frac{b}{\sqrt{2}} = 0 \quad (II)$$

$$\begin{cases} a - \frac{b}{\sqrt{2}} = 3 \\ a + \frac{b}{\sqrt{2}} = 0 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{2}}{2}, b = -\sqrt{2}$$

گام پنجم: از (I) و (II) داریم:

گام ششم: به ازای $x = k$ داریم:

$$f(k) = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(\sqrt{2}k) = 0 \Rightarrow \sin \sqrt{2}k = 1 \Rightarrow \sqrt{2}k = 2m\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow k = \frac{2m}{\sqrt{2}}\pi + \frac{\pi}{2}, m \in \mathbb{Z}$$

چون k ، دومین $\min$ تابع را می‌دهد، $k = \frac{5\pi}{6}$ است، پس داریم:

$$f(\sqrt{2}k) = f\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(\sqrt{2} \times \frac{5\pi}{3}\right) = 1/5$$

تست و پاسخ ۵

مجموع جواب‌های معادله $\sin x + \cos x = \frac{1}{\sqrt{2} \sin x}$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند برابر کوچک‌ترین جواب آن در این بازه است؟

۹ (۴)

۲۸ (۳)

۲۴ (۲)

۱۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

خودت حل کنی بهتره طرفین وسطین کنید و از اتحادهای ۲ برابر کمان کمک بگیرید.

درس نامه فرمول دسته‌جواب‌ها برای حل معادلات مثلثاتی

$$1) \sin x = \sin \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = (2k+1)\pi - \alpha \end{cases}$$

$$2) \cos x = \cos \alpha \Rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha$$

$$3) \begin{cases} \tan x = \tan \alpha \\ \cot x = \cot \alpha \end{cases} \Rightarrow x = k\pi + \alpha$$

نکته برای حل معادله $\cos \square = \sin \bigcirc$ ، ابتدا سینوس را به صورت $\sin \bigcirc = \cos(\frac{\pi}{2} - \bigcirc)$ می‌نویسیم تا نسبت‌ها همنام شوند. سپس از دسته‌جواب‌های معادله کسینوسی استفاده می‌کنیم.

پاسخ تشریحی

گام اول: با فرض این که $\sin x \neq 0$ ، دو طرف معادله را در $2 \sin x$ ضرب می‌کنیم:

$$\sin x + \cos x = \frac{1}{\sqrt{2} \sin x} \xrightarrow{\times 2 \sin x} 2 \sin^2 x + 2 \sin x \cos x = 1$$

$$\Rightarrow 2 \sin x \cos x = 1 - 2 \sin^2 x \xrightarrow{\text{فرمول‌های دو برابر کمان}} \sin 2x = \cos 2x$$

گام دوم: حالا طرفین را بر $\sin 2x$ تقسیم می‌کنیم:

$$\cot 2x = 1 \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{k}{2}\pi + \frac{\pi}{8}, k \in \mathbb{Z}$$

گام سوم: مقادیر x ای که در بازه $[0, 2\pi]$ قرار دارند، پیدا می‌کنیم:

$$x = \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{8}$$

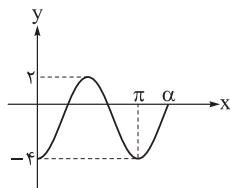
حواسمان هست که به ازای هیچ‌یک از جواب‌های به‌دست‌آمده، مخرج کسر $(\sin x)$ برابر با صفر نمی‌باشد، پس همگی قابل قبول‌اند.

گام چهارم: نسبت خواسته‌شده برابر می‌شود با:

$$\frac{\text{مجموع جواب‌ها}}{\text{کوچک‌ترین جواب}} = \frac{\frac{\pi}{8} + \frac{5\pi}{8} + \frac{9\pi}{8} + \frac{13\pi}{8}}{\frac{\pi}{8}} = \frac{28\pi}{\pi} = 28$$



تست و پاسخ ۶



نمودار تابع $f(x) = c + a \cos bx$ به صورت مقابل است. حاصل $\tan 2\alpha$ کدام است؟

- (۲) $2\sqrt{2}$
(۴) -3

- (۱) $-2\sqrt{2}$
(۳) 3

پاسخ: گزینه ۱

پاسخ تشریحی گام اول: از آن جایی که نمودار تابع به صورت صعودی شروع شده است، ضریب $\cos$ منفی است، یعنی $a < 0$.

گام دوم: مقدار $\max$ و $\min$ تابع از روی نمودار مشخص است، داریم:

$$\begin{aligned} \min: c + a &= -4 \\ \max: c - a &= 2 \end{aligned} \Rightarrow c = -1, a = -3$$

$$T = \pi = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = 2$$

گام سوم: با توجه به نمودار، دوره تناوب این تابع برابر با π است:

بنابراین $f(x) = -1 - 3 \cos 2x$ است.

گام چهارم: مقدار تابع به ازای $x = \alpha$ برابر با صفر است:

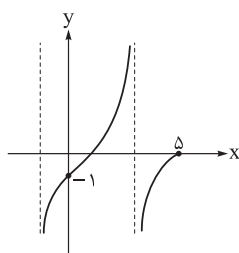
$$f(\alpha) = -1 - 3 \cos 2\alpha = 0 \Rightarrow \cos 2\alpha = \frac{-1}{3}$$

گام پنجم: با توجه به اتحاد مثلثاتی، مقدار $\tan 2\alpha$ را می‌یابیم:

$$1 + \tan^2 2\alpha = \frac{1}{\cos^2 2\alpha} \Rightarrow 1 + \tan^2 2\alpha = \frac{1}{\left(\frac{-1}{3}\right)^2} = 9 \Rightarrow \tan^2 2\alpha = 8 \Rightarrow \tan 2\alpha = \pm 2\sqrt{2}$$

با توجه به نمودار داده شده، $\frac{3\pi}{4} < \alpha < \pi$ است. بنابراین $2\pi < 2\alpha < 3\pi$ می‌شود و از آن جایی که مقدار $\cos 2\alpha$ عددی منفی است، پس 2α در ناحیه دوم دایره مثلثاتی قرار دارد و در این ناحیه، مقدار $\tan$ منفی است، پس $\tan 2\alpha = -2\sqrt{2}$ می‌شود.

تست و پاسخ ۷



قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a \tan(bx - \frac{\pi}{6})$ به صورت مقابل است. حاصل $\cos(10b - \frac{\pi}{12})$ کدام است؟

- (۲) $\frac{1}{2}$
(۴) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

- (۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
(۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

پاسخ: گزینه ۱

خودت حل کنی بهتره به کمک نقطه $(0, -1)$ ، مقدار a را تعیین کنید و به کمک صعودی بودن در بازه‌های هر دوره، علامت b را تعیین کنید.

پاسخ تشریحی گام اول: از روی نمودار، $f(0) = -1$ است پس:

$$f(0) = a \tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -1 \Rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{3}a = -1 \Rightarrow a = \sqrt{3}$$

گام دوم: از طرفی تابع f صعودی است (به جز نقاط ناپیوستگی)، پس $ab > 0$ می‌شود و چون $a = \sqrt{3} > 0$ است، $b > 0$ می‌باشد.

گام سوم: $f(\delta) = 0$ است، داریم:

$$f(\delta) = a \tan\left(\delta b - \frac{\pi}{6}\right) = 0 \Rightarrow \delta b - \frac{\pi}{6} = k\pi \Rightarrow \delta b = k\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow b = \frac{k}{\delta}\pi + \frac{\pi}{6\delta}, k \in \mathbb{Z}$$

از آن جایی که $x = \delta$ ، دومین x ی است که در آن مقدار تابع برابر با صفر می‌شود، پس $k = 1$ خواهد بود:

$$b = \frac{\pi}{\delta} + \frac{\pi}{6\delta} = \frac{7\pi}{6\delta}$$

گام چهارم: حالا حاصل $\cos(10b - \frac{\pi}{12})$ را می‌یابیم:

$$\cos\left(10 \times \frac{7\pi}{6\delta} - \frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{28\pi}{\delta} - \frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{27\pi}{\delta}\right) = \cos\left(\frac{9\pi}{4}\right) = \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



نکته از گام سوم، $\Delta b = k\pi + \frac{\pi}{6}$ به دست آمد. بنابراین $\frac{\pi}{3} + 2k\pi = b \cdot 1$ می شود.

در نتیجه $\cos(1 \cdot b - \frac{\pi}{12}) = \cos(2k\pi + \frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ به دست می آید. می توانستید بدون به دست آوردن مقدار b هم، حاصل عبارت خواسته شده را محاسبه کنید.

تست و پاسخ ۸

تابع $f(x) = x^2 - 5x + 4$ مفروض است. اگر $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{(f+g)(x)} = -\infty$ باشد، تابع g کدام می تواند باشد؟

$$x^2 - 2x + 1 \quad (4)$$

$$x^2 + 3x - 4 \quad (3)$$

$$x^2 - 1 \quad (2)$$

$$x^2 - x \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۳

خود حل کنی بهتره از گزینه ها متوجه می شویم که $g(x)$ چند جمله ای درجه دوم است.

درس نامه •• حد بی نهایت

اگر در بررسی حد، حد صورت عدد غیر صفر و حد مخرج صفر شود (° حدی یعنی به ° نزدیک شود)، حاصل حد بی نهایت می شود؛ یعنی $\frac{\text{عدد}}{\text{صفر}} = \pm \infty$. برای به دست آوردن نوع بی نهایت باید علامت صفر مخرج را تعیین کنیم. در بررسی این حدود یکی از حالت های زیر به وجود می آید:

$$\frac{\oplus}{\ominus} = -\infty \quad \frac{\ominus}{\ominus} = +\infty \quad \frac{\ominus}{\oplus} = -\infty \quad \frac{\oplus}{\oplus} = +\infty$$

نکته برای تعیین علامت صفر مخرج از روش های زیر استفاده می کنیم:

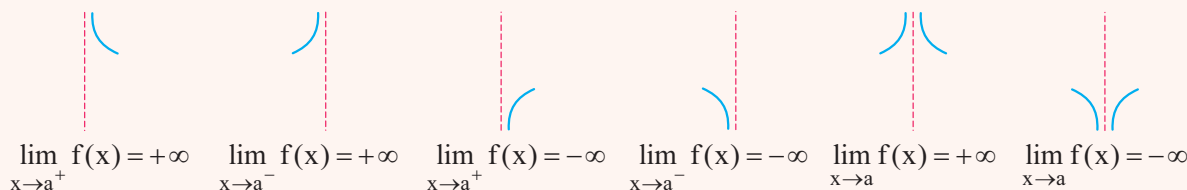
(۱) عددگذاری در نزدیکی حد داده شده

(۲) تعیین علامت مخرج

(۳) استفاده از دایره مثلثاتی در حدود مثلثاتی

(۴) استفاده از نمودار

نکته اگر حاصل حد در نزدیکی نقطه a ، بی نهایت شود، نمودار تابع به صورت های زیر ممکن است باشد:



پاسخ تشریحی گام اول: با توجه به این که حاصل حد منفی بی نهایت شده، نتیجه می گیریم که مخرج کسر به ازای $x=1$ برابر با صفر است:

$$(f+g)(1) = 0 \Rightarrow f(1) + g(1) = 0 \Rightarrow \frac{f(x)=x^2-5x+4}{f(1)=0} \rightarrow g(1) = 0$$

گام دوم: حالا با توجه به گزینه ها، $g(x)$ یک تابع درجه دوم است که در آن ضریب x^2 برابر با ۱ است و $x=1$ یکی از ریشه های آن می باشد. پس $g(x)$ را به فرم مقابل در نظر می گیریم:

$$g(x) = (x-1)(x-a)$$

گام سوم: مخرج کسر در حد به صورت زیر نوشته می شود:

$$f(x) + g(x) = (x-1)(x-4) + (x-1)(x-a) = (x-1)(2x-a-4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{(x-1)(2x-a-4)} = -\infty$$

گام چهارم: پس حد به صورت روبه رو می شود:

به ازای $x \rightarrow 1^-$ ، عبارت $x-1 \rightarrow 0^-$ است و صورت کسر نیز عددی مثبت است. پس باید عبارت $2x-a-4$ به ازای $x=1$ ، مثبت است:

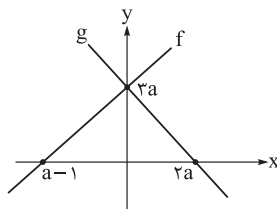
$$2-a-4 > 0 \Rightarrow a < -2$$

گام پنجم: با توجه به گام دوم و چهارم از بین گزینه ها، عبارت $x^2 + 3x - 4 = (x-1)(x+4)$ می تواند تابع g باشد.



تست و پاسخ ۹

نمودار توابع f و g به صورت مقابل است. اگر $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(f + 3g^{-1})(x)}{\text{fog}(x)} = \frac{-4}{9}$ باشد، مقدار a کدام است؟



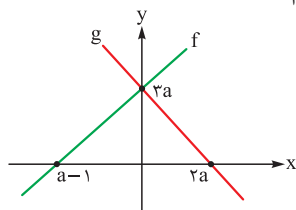
$$\begin{aligned} \frac{2}{9} & (2) \\ \frac{2}{3} & (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{4}{9} & (1) \\ \frac{1}{3} & (3) \end{aligned}$$

پاسخ: گزینه ۴

خودت حل کنی بهتره به کمک نمودار داده شده، ضابطه توابع خطی f و g را به دست بیاورید.

پاسخ تشریحی گام اول: ابتدا ضابطه هر یک از توابع خطی f و g را با توجه به شکل، به دست می آوریم:



$$\begin{cases} g(x) = -\frac{3}{2}x + 3a \\ f(x) = \frac{3a}{-(a-1)}x + 3a \end{cases}$$

گام دوم: از آنجایی که f و g دو تابع خطی هستند و حد در $x \rightarrow -\infty$ داده شده است و عبارت های $f + 3g^{-1}$ و fog نیز خطی هستند، حاصل حد به شیب های f و g بستگی دارد. پس می توانیم حاصل حد را به صورت زیر بنویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f + 3g^{-1}}{\text{fog}} = \frac{m_f + 3m_{g^{-1}}}{m_f \times m_g} = \frac{\frac{3a}{-a+1} + 3(-\frac{2}{3})}{\frac{3a}{-a+1} \times (-\frac{3}{2})} = \frac{\frac{3a}{-a+1} - 2}{-\frac{9a}{2(-a+1)}} = \frac{\frac{3a - 2(-a+1)}{-a+1}}{-\frac{9a}{2(-a+1)}} = \frac{5a - 2}{-9a} = \frac{-4}{9}$$

$$\frac{3a - 2(-a+1)}{-a+1} = \frac{3a + 2a - 2}{-a+1} = \frac{5a - 2}{-a+1} = \frac{-4}{9} \Rightarrow 5a - 2 = -4(-a+1) \Rightarrow 5a - 2 = 4a - 4 \Rightarrow a = \frac{2}{3}$$

تست و پاسخ ۱۰

نمودار تابع $f(x) = \frac{4 - b \cos 2x}{a + \sin x}$ در مجاورت $x = 0$ به صورت مقابل است. اگر $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+b}{x^2+4x+4} = +\infty$ باشد،

عدد صحیح قابل قبول برای b کدام است؟



$$5 \quad (4)$$

$$4 \quad (3)$$

$$3 \quad (2)$$

$$2 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره سؤال بسیار مهم که در سال های اخیر بارها در کنکور آمده است. حتماً آن را تحلیل کنید.

درس نامه ••• مجانب های قائم تابع

- برای به دست آوردن معادلات مجانب های قائم ابتدا تابع را ساده می کنیم.
- ریشه های مخرج که ریشه های صورت نباشند، معادلات مجانب های قائم هستند. (البته به شرطی که تابع لااقل در یک همسایگی یک طرفه آن نقطه تعریف شده باشد).
- اگر ریشه مخرج، ریشه صورت هم باشد، باید رفع ابهام کنیم. اگر بعد از رفع ابهام حاصل حد ∞ شود، آن ریشه مجانب قائم است و در غیر این صورت خیر.

به دست آوردن مجانب های افقی

اگر $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$ یا $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$ ، خط $y = b$ را مجانب افقی تابع می گوئیم.



برای به دست آوردن معادلات مجانب‌های افقی یک بار $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و بار دیگر $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ را حساب می‌کنیم. اگر حاصل عدد حقیقی b شود، $y = b$ مجانب افقی است. یک تابع حداکثر دو مجانب افقی دارد.

نکته در تابع $f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots}$ (صورت و مخرج هم‌درجه هستند)، خط $y = \frac{a_n}{b_n}$ مجانب افقی تابع است.

پاسخ تشریحی گام اول: از آن جایی که تابع $f(x) = \frac{4 - b \cos 2x}{a + \sin x}$ ، در مجاورت $x = 0$ به صورت $\frac{0}{0}$ است، نتیجه می‌گیریم که $x = 0$ ریشه مخرج است:

$$a + \sin x = 0 \xrightarrow{x=0} a = 0$$

گام دوم: از طرفی وقتی $x \rightarrow 0^+$ ، تابع f به سمت مثبت بی‌نهایت میل می‌کند، یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4 - b \cos 2x}{\sin x} = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4 - b}{0^+} = +\infty \Rightarrow 4 - b > 0 \Rightarrow b < 4$$

گام سوم: حالا از حد دومی که داده شده، استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + b}{x^2 + 4x + 4} = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + b}{(x + 2)^2} = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + b}{0^+} = +\infty \Rightarrow -2 + b > 0 \Rightarrow b > 2$$

گام چهارم: پس $2 < b < 4$ است و فقط عدد صحیح $b = 3$ در این بازه قرار دارد.

تست و پاسخ ۱۱

اگر $A(2, a)$ تنها نقطه برخورد مجانب‌های تابع $y = f(x)$ و $A'(b, -3)$ نقطه برخورد مجانب‌های تابع $y = 2 - 3f(\frac{x}{3})$ باشد، مقدار $a + b$ کدام است؟

$$\frac{19}{3} \quad (4)$$

$$\frac{17}{3} \quad (3)$$

$$\frac{14}{3} \quad (2)$$

$$\frac{11}{3} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ تشریحی گام اول: در تابع $y = 2 - 3f(\frac{x}{3})$ ، x ها نسبت به تابع $y = f(x)$ ، با ضریب ۳ منبسط شده‌اند. بنابراین اگر $x = 2$ مجانب قائم تابع $y = f(x)$ باشد، مجانب قائم تابع $y = 2 - 3f(\frac{x}{3})$ برابر با $x = 4$ خواهد بود. پس $b = 4$ به دست می‌آید.

گام دوم: مجانب افقی تابع $y = f(x)$ برابر با $y = a$ است که در تبدیل این نمودار به نمودار $y = 2 - 3f(\frac{x}{3})$ ، مجانب افقی به $y = 2 - 3a$ تبدیل می‌شود. پس داریم:

$$2 - 3a = -3 \Rightarrow -3a = -5 \Rightarrow a = \frac{5}{3}$$

گام سوم: مقدار $a + b = \frac{5}{3} + 4 = \frac{17}{3}$ به دست می‌آید.

تست و پاسخ ۱۲

با فرض $f(x) = \sqrt{x}(3x^2 + 5)$ ، حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^2(1-h) - f^2(1+2h)}{h}$ کدام است؟

$$72 \quad (4)$$

$$360 \quad (3)$$

$$-48 \quad (2)$$

$$-480 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۱

خودت حل کنی بهتره برای به دست آوردن مقدار حد، از قاعده هوپیتال استفاده کنید.

درس نامه قضیه هوپیتال

فرض کنید $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ در حالت مبهم $\frac{0}{0}$ باشد. حاصل حد $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ را به دست می‌آوریم. اگر حاصل آن L باشد، حاصل حد اصلی هم L است.



پاسخ تشریحی گام اول: برای این که حاصل حد را محاسبه کنیم، از قاعده هوییتال استفاده می کنیم. بنابراین ابتدا مشتق تابع f را به دست می آوریم:

$$f(x) = \sqrt{x}(3x^2 + 5) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}(3x^2 + 5) + \sqrt{x}(6x) \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{2}(8) + 6 = 10, f(1) = 1(3 + 5) = 8$$

گام دوم: حالا حاصل حد را به دست می آوریم:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^2(1-h) - f^2(1+2h)}{h} \stackrel{HOP}{=} \frac{2f(1-h)(-f'(1-h)) - 2f(1+2h)(2f'(1+2h))}{1} =$$

$$-2f(1)f'(1) - 4f(1)f'(1) = -6f(1)f'(1) = -6 \times 8 \times 10 = -480$$

از گام اول

تست و پاسخ ۱۳

اگر $f(x) = x^2 - 3|x|$ و $g(x) = x^3 + 2|x|$ باشد، حاصل مشتق تابع $f \circ g$ در $x = -1$ چند برابر مشتق تابع $g \circ f$ در $x = 1$ است؟

- ۵ (۱)
۳ (۳)
-۱ (۲)
-۲ (۴)

پاسخ: گزینه ۳

مشاوره در به دست آوردن حد و مشتق توابعی که دارای قدر مطلق و جزء صحیح هستند، ابتدا تکلیف قدر مطلق و جزء صحیح را مشخص کنید.

درس نامه

مشتق تابع مرکب: اگر $g(x)$ در $x = a$ تابع $f(x)$ در $x = g(a)$ مشتق پذیر باشد، آن گاه $y = f(g(x))$ در $x = a$ مشتق پذیر است و داریم:

$$y = f(g(x)) \Rightarrow y' = g'(x) \cdot f'(g(x))$$

$$y = f(u) \Rightarrow y' = u' \cdot f'(u)$$

نکته در عبارت هایی به صورت $y = f(u)$ که در آن u تابعی بر حسب x است، داریم:

پاسخ تشریحی گام اول: مشتق توابع f, g را به دست می آوریم:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x & x \geq 0 \\ x^2 + 3x & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x - 3 & x > 0 \\ 2x + 3 & x < 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x^3 + 2x & x \geq 0 \\ x^3 - 2x & x < 0 \end{cases} \Rightarrow g'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 2 & x > 0 \\ 3x^2 - 2 & x < 0 \end{cases}$$

گام دوم: مشتق تابع $f \circ g$ را در $x = -1$ محاسبه می کنیم:

گام سوم: حالا مشتق تابع $g \circ f$ را در $x = 1$ محاسبه می کنیم:

نسبت خواسته شده برابر با $\frac{6}{3} = 2$ است.

تست و پاسخ ۱۴

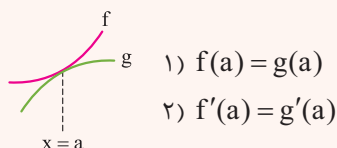
نمودار تابع $f(x) = x^2 + a(x-b)$ در نقطه $x = 2$ بر نمودار تابع مشتق خود مماس است. مقدار $f(a)$ کدام است؟

- ۱۰ (۱)
۱۲ (۳)
۸ (۲)
۴ (۴)

پاسخ: گزینه ۱



درس نامه ● شرط مماس بودن دو منحنی بر هم: دو منحنی f و g در $x = a$ بر هم مماس هستند، هرگاه داشته باشیم:



نکته مهم اگر در تشکیل معادله $f(x) = g(x)$ ، به معادله درجه دوم رسیدید، به جای تشکیل $g'(x) = f'(x)$ ، Δ ی معادله $f(x) = g(x)$ را برابر با صفر قرار دهید!

پاسخ تشریحی گام اول: ابتدا مشتق تابع f را به دست می آوریم:

$$f(x) = x^2 + a(x - b) \Rightarrow f'(x) = 2x + a$$

گام دوم: تابع f بر تابع f' در نقطه $x = 2$ مماس است. پس معادله $f = f'$ در $x = 2$ ، ریشه مضاعف خواهد داشت:

$$x^2 + a(x - b) = 2x + a \Rightarrow x^2 + (a - 2)x - ab - a = 0 \quad (*)$$

$$\Rightarrow x = \frac{-B}{2A} = 2 = \frac{-(a-2)}{2} \Rightarrow -4 = a - 2 \Rightarrow a = -2$$

گام سوم: حالا $a = -2$ را در $(*)$ جای گذاری می کنیم و به جای x مقدار ۲ را قرار می دهیم تا b به دست آید:

$$4 + 2 \times (-4) + 2b + 2 = 0 \Rightarrow b = 1$$

گام چهارم: پس $f(x) = x^2 - 2(x - 1)$ است. حاصل $f(a) = f(-2)$ برابر است با: $f(a) = f(-2) = 4 - 2(-3) = 4 + 6 = 10$

$$\begin{cases} f(a) = f'(a) \\ f'(a) = f''(a) \end{cases}$$

نکته اگر تابع f در نقطه $x = a$ بر نمودار مشتق خود مماس باشد، دو شرط برقرار است:

از این شرطها نیز می توانستید در حل این سؤال استفاده کنید.

تست و پاسخ ۱۵

آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x) = x\sqrt{x-4}$ ، در بازه $[4, 8]$ ، چند برابر آهنگ تغییر لحظه ای آن در $x = 8$ است؟

۲ (۲)

۱ (۱)

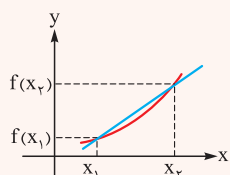
$\frac{4}{3}$ (۴)

$\frac{3}{2}$ (۳)

پاسخ: گزینه ۱

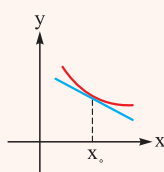
درس نامه ● آهنگ تغییرات

در ریاضی، آهنگ تغییر تابع f ، نسبت تغییرات عرض تابع به طول تابع است:



$$\text{آهنگ تغییر متوسط} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

در بحث آهنگ تغییر لحظه ای، می خواهیم نسبت تغییرات را در یک لحظه به دست آوریم و برای این کار، کافی است که مشتق تابع را در آن لحظه محاسبه کنیم:



$$\text{آهنگ تغییر لحظه ای} = f'(x_0)$$



پاسخ تشریحی گام اول: ابتدا آهنگ تغییر متوسط تابع را در بازه $[4, 8]$ می‌یابیم:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(8) - f(4)}{8 - 4} = \frac{8\sqrt{8-4} - 4\sqrt{4-4}}{4} = \frac{16}{4} = 4$$

گام دوم: آهنگ تغییر لحظه‌ای در $x = 8$ برابر است با:

$$f'(8) = ? \Rightarrow f(x) = x\sqrt{x-4} \Rightarrow f'(x) = \sqrt{x-4} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x-4}}$$

$$\Rightarrow f'(8) = 2 + \frac{8}{2 \times 2} = 4$$

بنابراین نسبت خواسته شده برابر با ۱ می‌شود.

تست و پاسخ ۱۶

تابع $f(x) = x^2 - 2|x-1|$ در بازه $(a, +\infty)$ اکیداً یکنواست. حداقل مقدار a کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) -۱ (۳) -۲ (۴)

پاسخ: گزینه ۳

خودت حل کنی بهتره تابع f را به صورت دو ضابطه‌ای بنویسید و سپس مشتق آن را پیدا کنید.

درس نامه •• تعیین یکنوایی تابع

وضعیت صعودی یا نزولی بودن تابع f را از تعیین علامت f' به دست می‌آوریم:

$f' > 0$	اکیداً صعودی
$f' \geq 0$	صعودی
$f' < 0$	اکیداً نزولی
$f' \leq 0$	نزولی

نکته ۱ وقتی $f' \geq 0$ یا $f' \leq 0$ باشد و تعداد نقاطی که $f' = 0$ محدود (متناهی) باشد، تابع اکیداً یکنوا خواهد بود.

۲ اگر تابع دارای مجانب قائم باشد، در این صورت تابع نه صعودی و نه نزولی (غیریکنوا) به حساب می‌آید.

پاسخ تشریحی گام اول: تابع f را بازنویسی می‌کنیم و مشتق آن را محاسبه می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 2 & x \geq 1 \\ x^2 + 2x - 2 & x < 1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x - 2 & x > 1 \\ 2x + 2 & x < 1 \end{cases}$$

گام دوم: از جدول تعیین علامت عبارت f' استفاده می‌کنیم تا یکنوایی تابع f را مشخص کنیم. با توجه به ریشه‌های تابع f' داریم:

x	-۱	۱
f'	-	+
f	↘	↗

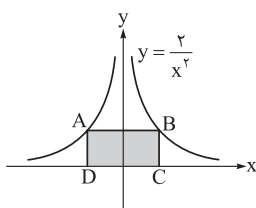
بنابراین f در بازه $(-1, +\infty)$ اکیداً صعودی است. در نتیجه حداقل مقدار a برابر با -۱ می‌شود.

تست و پاسخ ۱۷

در شکل زیر، محیط مستطیل ABCD مینیمم است. مساحت این مستطیل چه قدر است؟

- ۱ (۱) $\sqrt{2}$ ۲ (۲) $\sqrt{4}$ ۳ (۳) $2\sqrt{2}$ ۴ (۴) $2\sqrt{4}$

پاسخ: گزینه ۴



درس نامه •• بهینه‌سازی (به دست آوردن بیشترین و یا کمترین مقدار یک کمیت)

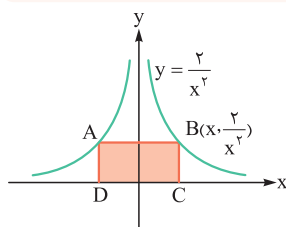
۱ تابعی را که قرار است max یا min شود، می‌نویسیم.

۲) تابع به دست آمده، معمولاً دو متغیره است. از رابطه داده شده در مسئله یا قضیه های هندسی (مثل فیثاغورس و تالس و ...) ارتباطی بین دو متغیر پیدا می کنیم.

۳) یکی از متغیرها را بر حسب دیگری پیدا کرده و در تابع اولیه جای گذاری می کنیم.

۴) از تابع به دست آمده، مشتق می گیریم و مساوی با صفر قرار می دهیم. جواب به دست آمده معمولاً عددی است که به ازای آن، بیشترین (یا کمترین) مقدار خواسته شده، به دست می آید.

پاسخ تشریحی گام اول: مختصات نقطه B به صورت $(x, \frac{2}{x})$ است.



$$P = 4x + \frac{4}{x^2}$$

با توجه به این نقطه، محیط مستطیل ABCD برابر است با:

گام دوم: برای این که محیط مستطیل مقدار min خود را داشته باشد، از P مشتق گرفته و برابر با صفر قرار می دهیم تا x_{min} به دست آید:

$$P' = 4 - \frac{8}{x^3} = 0 \Rightarrow \frac{8}{x^3} = 4 \Rightarrow x^3 = 2 \Rightarrow x_{min} = \sqrt[3]{2}$$

$$S_{min} = 2x_{min} \times \frac{2}{x_{min}^2} = \frac{4}{x_{min}} = \frac{4}{\sqrt[3]{2}} = \frac{4\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2}} = 2\sqrt[3]{4}$$

گام سوم: مساحت مستطیل به ازای x_{min} برابر است با:

تست و پاسخ ۱۸

یکی از نقاط اکسترمم نسبی تابع $f(x) = x^3 + ax^2 + 9x + b$ بر خط $x = -1$ و نقطه اکسترمم نسبی دیگر بر خط $y = -1$ واقع است. نقطه عطف این تابع، بر کدام خط زیر قرار دارد؟

$$f''(x_0) = 0$$

$$y = x - 4 \quad (4)$$

$$y = x - 3 \quad (3)$$

$$y = x - 1 \quad (2)$$

$$y = x - 2 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۲

درس نامه •• نقطه عطف

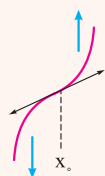
نقطه $x = x_0$ ، نقطه عطف تابع f است، هرگاه:

(۱) $x_0 \in D_f$ باشد.

(۲) تابع f در x_0 پیوسته باشد.

(۳) جهت تغییر تابع f تغییر کند (علامت f'' تغییر کند).

(۴) خط مماس واحد داشته باشد، یعنی نقطه ناپیوسته یا گوشه نباشد، ولی مماس قائم می تواند داشته باشد.



پاسخ تشریحی گام اول: ابتدا مشتق تابع f را به دست می آوریم:

$$f(x) = x^3 + ax^2 + 9x + b \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2ax + 9$$

گام دوم: یکی از نقاط اکسترمم نسبی روی خط $x = -1$ قرار دارد، یعنی $f'(-1) = 0$ می شود:

$$f'(-1) = 3 - 2a + 9 = 0 \Rightarrow 2a = 12 \Rightarrow a = 6 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 12x + 9 = 3(x^2 + 4x + 3) = 3(x+1)(x+3)$$

می بینیم که نقطه اکسترمم نسبی دیگر، $x = -3$ است که با توجه به صورت سؤال $f(-3) = -1$ است:

$$f(-3) = -27 + 9a - 27 + b = -1 \Rightarrow -54 + 54 + b = -1 \Rightarrow b = -1$$

گام سوم: پس $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x - 1$ است. نقطه عطف تابع را به کمک مشتق دوم می یابیم:

$$f'(x) = 3x^2 + 12x + 9 \Rightarrow f''(x) = 6x + 12 = 0 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow f(-2) = -8 + 24 - 18 - 1 = -3$$

پس مختصات نقطه عطف به صورت $(-2, -3)$ است که با توجه به گزینه ها، روی خط $y = x - 1$ قرار دارد.



ریاضیات گسسته: صفحه‌های ۱ تا ۸۴

تست و پاسخ ۱۹

برای سه عدد حقیقی x, y, z ، درستی چه تعداد از گزاره‌های زیر را نمی‌توان به روش بازگشتی اثبات کرد؟

الف) $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ (ب) $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$

پ) $x^2 + y^2 + 2 \geq (x+1)(y+1)$ (ت) $x^2 + xz + z^2 \geq 0$

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره هنوز از درس ۱ فصل نظریه اعداد، قسمت اثبات به کمک گزاره‌های هم‌ارز (اثبات بازگشتی) در کنکور سؤال طرح نشده، اما لازم است به مفاهیم آن مسلط باشیم چون احتمال طرح سؤال از آن در آینده وجود دارد.

درس نامه •• اثبات به کمک گزاره‌های هم‌ارز (اثبات بازگشتی)

در اثبات به روش گزاره‌های هم‌ارز، در هر مرحله به جای اثبات گزاره، گزاره‌ای هم‌ارزش با آن را می‌نویسیم و این کار را آن قدر ادامه می‌دهیم

تا به گزاره‌ای برسیم که درستی آن واضح (بدیهی) است؛ به عنوان مثال برای اثبات درستی گزاره $\frac{x^2 + y^2}{2} \geq xy$ داریم:

$$\frac{x^2 + y^2}{2} \geq xy \Leftrightarrow \frac{x^2 + y^2}{x^2} \geq \frac{2xy}{x^2} \Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x - y)^2 \geq 0$$

می‌دانیم مربع هر عدد حقیقی نامنفی است، پس ارزش گزاره آخر درست است. حالا چون همه گزاره‌ها هم‌ارزش‌اند و ارزش گزاره آخر درست

است، پس ارزش مابقی گزاره‌ها هم درست می‌شود، بنابراین نامساوی $\frac{x^2 + y^2}{2} \geq xy$ هم ارزش درست دارد.

پاسخ تشریحی هر مورد را بررسی می‌کنیم:

الف) این نامساوی را نمی‌توانیم به روش بازگشتی اثبات کنیم، چون نادرست است! به عنوان مثال نقض، با جای گذاری $x = 1$ و $y = -1$ داریم:

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{1}{-1} + \frac{-1}{1} = -2$$

که واضح است $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ نیست!

ب) طرفین را در ۲ ضرب کرده و همه جملات را به سمت چپ می‌بریم:

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz \Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 \geq 2xy + 2xz + 2yz \Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2xz - 2yz \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2 - 2xy) + (x^2 + z^2 - 2xz) + (y^2 + z^2 - 2yz) \geq 0 \Leftrightarrow (x - y)^2 + (x - z)^2 + (y - z)^2 \geq 0$$

می‌دانیم مربع هر عدد حقیقی نامنفی است، پس $(x - y)^2$ ، $(x - z)^2$ و $(y - z)^2$ همگی نامنفی‌اند، بنابراین مجموع آن‌ها هم نامنفی می‌شود

که با توجه به آن درستی نامساوی به روش بازگشتی اثبات می‌شود.

$$x^2 + y^2 + 2 \geq (x+1)(y+1) \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2 \geq xy + x + y + 1$$

پ) ابتدا دقت کنید که:

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2 - xy - x - y - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - xy - x - y + 1 \geq 0$$

همه جملات را به طرف چپ می‌بریم:

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 - 2xy - 2x - 2y + 2 \geq 0$$

طرفین را در ۲ ضرب می‌کنیم:

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2 - 2xy) + (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) \geq 0 \Leftrightarrow (x - y)^2 + (x - 1)^2 + (y - 1)^2 \geq 0$$

حالا مشابه مورد «ب» داریم:

بنابراین، این نامساوی هم به روش بازگشتی اثبات شد.

$$x^2 + xz + z^2 \geq 0 \xrightarrow{\times 2} 2x^2 + 2xz + 2z^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x^2 + 2xz + z^2) + x^2 + z^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x + z)^2 + x^2 + z^2 \geq 0$$

و در آخر، درستی این نامساوی هم به روش بازگشتی اثبات شد.

بنابراین فقط گزاره «الف» را نمی‌توان به روش بازگشتی اثبات کرد.



تست و پاسخ ۲۰

عدد a کوچک ترین عدد سهرقمی است که باقی مانده تقسیم آن بر اعداد ۷ و ۸ به ترتیب ۵ و ۷ است. مجموع ارقام عدد a کدام است؟

۱۰ (۴)

۸ (۳)

۶ (۲)

۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

مشاوره در حالت کلی، اگر سؤال اطلاعاتی در مورد یک یا چندتا تقسیم رو به ما داده باشه (مثلاً بگه باقی مانده a به b می شه r) و در مورد خارج قسمت هیچ حرفی نزده باشه، بهتره که تقسیم رو به صورت همنهشتی بنویسیم.

خودت حل کنی بهتره کافیه تقسیم های گفته شده را به صورت همنهشتی بنویسید و از قانون ک.م.م پیمانه ها استفاده کنید.

$$\begin{matrix} b \\ a \equiv r \end{matrix}$$

نکات ۱) اگر باقی مانده تقسیم a به b برابر r باشد، می توانیم بنویسیم:

$$\begin{cases} m \\ a \equiv b \\ n \end{cases} \Rightarrow a \equiv b \pmod{[m,n]}$$

۲) قانون ک.م.م پیمانه ها:

پاسخ تشریحی **گام اول:** باقی مانده تقسیم عدد a بر اعداد ۷ و ۸ به ترتیب برابر ۵ و ۷ است، پس می توانیم بنویسیم: $a \equiv 5 \pmod{7}$ باقی مانده a به ۷ برابر ۵

$a \equiv 7 \pmod{8}$ باقی مانده a به ۸ برابر ۷

$$\begin{cases} -7 & -7 \\ a \equiv 5 \equiv -2 \equiv -9 \\ -8 & -8 \\ a \equiv 7 \equiv -1 \equiv -9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7 \\ a \equiv -9 \\ 8 \end{cases} \Rightarrow a \equiv -9 \pmod{[7,8]} \xRightarrow{56} a \equiv -9 \pmod{56} \Rightarrow a = 56t - 9$$

گام دوم: باید کاری کنیم تا سمت راست دو رابطه همنهشتی برابر شود:

گام سوم: حالا با استفاده از قانون ک.م.م پیمانه ها داریم:

گام چهارم: کوچک ترین عدد سهرقمی a را می خواهیم. واضح است که به ازای $t=2$ ، کوچک ترین عدد سهرقمی a حاصل می شود:

$$a = 56t - 9 \xrightarrow{t=2} a = 56 \times 2 - 9 = 103$$

که جمع ارقام این عدد برابر $4 = 3 + 0 + 1$ است.

تست و پاسخ ۲۱

کدام گزینه صحیح نیست؟

(۱) عدد $11^{51} - 12^{51} - 13^{51}$ بر عدد ۱۳۲ بخش پذیر است.

(۲) اعداد ۳ و $9 \times (7 + 2^{11})$ به پیمانه عدد ۲۳ همنهشت اند.

(۳) اگر رقم یکان دو عدد $5 - 3a$ و $7 - 4a$ یکسان باشند، رقم یکان عدد $6 + 9a$ قطعاً برابر ۴ است.

(۴) معادله سیاله خطی $11 = 5y + 7x$ در اعداد طبیعی دارای جواب است.

پاسخ: گزینه ۲

$$a^n + b^n \equiv (a+b)^n \pmod{ab}$$

نکات ۱) قانون نیوتون:

۲) دو عدد a و b ، رقم یکان یکسانی دارند، اگر و تنها اگر $a \equiv b \pmod{10}$ باشد.

$$(a, b) | c$$

۳) شرط جواب داشتن معادله سیاله خطی $ax + by = c$ این است که:



پاسخ تشریحی گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) با توجه به قانون نیوتون داریم: $11^{51} + 12^{51} \equiv (11+12)^{51} \Rightarrow 11^{51} + 12^{51} \equiv 23^{51} \Rightarrow 132 \mid 23^{51} - 11^{51} - 12^{51}$
بنابراین عدد $11^{51} - 12^{51} - 132$ بر 132 بخش پذیر است.

۲) اول باقی‌مانده تقسیم عدد $(2^{11} + 7) \times 9$ بر 23 را پیدا می‌کنیم. می‌دانیم که $2^{11} = 2048$ است، پس:

$$\begin{array}{r} 2048 \quad | \quad 23 \\ -184 \quad \quad \quad 89 \\ \hline 208 \\ -207 \\ \hline 1 \end{array} \Rightarrow 2048 \equiv 1 \Rightarrow 2^{11} \equiv 1$$

حالا داریم: $2^{11} \equiv 1 \xrightarrow{+7} 2^{11} + 7 \equiv 8 \xrightarrow{\times 9} (2^{11} + 7) \times 9 \equiv 72$

از طرفی باقی‌مانده تقسیم 72 بر 23 برابر 3 است ($72 = 3 \times 23 + 3$)، پس:
بنابراین اعداد 3 و $(2^{11} + 7) \times 9$ به پیمانه عدد 23 همنهشت هستند و این گزینه هم درست است.

۳) دو عدد $4a - 7$ و $3a - 5$ رقم یکسان دارند، پس:

$$4a - 7 \equiv 3a - 5 \xrightarrow{-(3a)} a - 7 \equiv -5 \xrightarrow{+7} a \equiv 2$$

حالا رقم یکسان عدد $9a + 6$ را پیدا می‌کنیم:

$$a \equiv 2 \xrightarrow{\times 9} 9a \equiv 18 \xrightarrow{+6} 9a + 6 \equiv 24 \xrightarrow{14 \equiv 4} 9a + 6 \equiv 4$$

بنابراین رقم یکسان $9a + 6$ برابر 4 است و این گزینه درست است.

۴) در معادله سیاله خطی $7x + 5y = 11$ داریم:

$$\begin{array}{ccc} 7x + 5y = 11 & \downarrow & \downarrow \\ a & b & c \end{array}$$

بنابراین این معادله جواب دارد. اما! هواستون باشه یهو فکر نکنین این گزینه درسته که گول خوردین! بپه‌ها معادله $7x + 5y = 11$ جواب داره، اما جواب صحیح! مثلاً $x = +3$ و $y = -2$ یکی از جواب‌های این معادله هست ولی جواب صحیفه نه طبیعی! این معادله جواب طبیعی نداره چون آله جواب طبیعی داشته باشه،

$$\begin{cases} x \geq 1 \Rightarrow 7x \geq 7 \\ y \geq 1 \Rightarrow 5y \geq 5 \end{cases} \xrightarrow{+} 7x + 5y \geq 12$$

x و y باید طبیعی باشند، یعنی باید $x \geq 1$ و $y \geq 1$ باشه که در این صورت داریم:

پس به ازای x و y طبیعی، مقدار $7x + 5y$ حداقل برابر 12 میشه، بنابراین معادله $7x + 5y = 11$ جواب طبیعی نداره و این گزینه نادرست می‌شه!

تست و پاسخ ۲۲

در گراف G با مجموعه رأس‌های $V(G) = \{a, b, c, d, e, f\}$ داریم:

$$N_G(a) = \{b, c, d\} \quad N_G(b) = \{a, c\} \quad N_G(c) = \{a, b\}$$

$$N_G(d) = \{a, f\} \quad N_G(e) = \{ \} \quad N_G(f) = \{d\}$$

در این گراف چند مسیر با طول طبیعی وجود دارد؟

۱۷ (۴)

۱۶ (۳)

۱۵ (۲)

۱۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

مشاوره در بسیاری از سؤالات کنکور در بخش گراف، ما باید با توجه به اطلاعات داده‌شده، اول شکل گراف را رسم کنیم و بعد به سراغ خواسته سؤال برویم؛ برای همین لازم است که تمرین کافی برای رسم گراف‌ها داشته باشید.

خودت حل کنی بهتره اول با توجه به داده‌های سؤال، شکل گراف را رسم کنید و بعد، تعداد مسیرها را بشمارید.

درس نامه •• مجموعه همسایگی یک رأس: در هر گراف مثل G ، برای هر رأس مانند v ، مجموعه همسایگی باز رئوس را با نماد $N_G(v)$ نمایش می‌دهیم که این مجموعه، شامل رئوسی از گراف است که رأس v به آن‌ها متصل است.

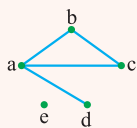


حالا اگر به همین مجموعه، خود رأس v را اضافه کنیم، مجموعه همسایگی بسته رأس v حاصل می شود که آن را با نماد $N_G[v]$ نمایش می دهیم. برای مثال در گراف روبه رو داریم:

$$N_G(a) = \{b, c, d\}$$

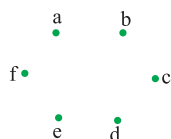
$$N_G[b] = \{a, b, c\}$$

$$N_G(e) = \{\}$$

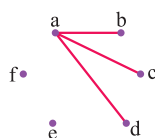


نکته اگر مجموعه همسایگی باز یک رأس تهی باشد، آن رأس، رأس ایزوله (تنها) است، مثل رأس e در گراف بالا.

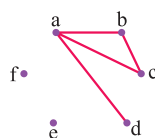
پاسخ تشریحی گام اول: مجموعه رئوس گراف به صورت $V(G) = \{a, b, c, d, e, f\}$ است.



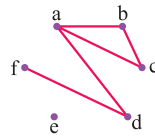
گام دوم: مجموعه همسایگی باز رأس a شامل رئوس b, c, d و e است، پس رأس a به این سه رأس وصل است:



گام سوم: مجموعه همسایگی باز رأس b شامل رئوس a, c و e است، پس رأس b به این دو رأس وصل است:



گام چهارم: با ادامه همین روند، شکل گراف به صورت مقابل می شود:



گام پنجم: حالا مسیرهای به طول طبیعی در این گراف را می شماریم:

۵ تا $\Rightarrow ab / bc / ac / ad / df$: مسیرهای به طول ۱

۶ تا $\Rightarrow abc / acb / bac / bad / cad / adf$: مسیرهای به طول ۲

۴ تا $\Rightarrow fdab / fdac / dabc / dacb$: مسیرهای به طول ۳

۲ تا $\Rightarrow fdabc / fdacb$: مسیرهای به طول ۴

(در این گراف مسیری با طول بیشتر از ۴ نداریم.)

بنابراین تعداد کل مسیرهای به طول طبیعی در این گراف برابر $5 + 6 + 4 + 2 = 17$ تا است.

تست و پاسخ ۳۳

در گراف k - منتظم از مرتبه ۵، k کم ترین مقدار طبیعی ممکن را دارد. مکمل این گراف دارای چند دور به طول فرد است؟

۱۱ (۴)

۱۰ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره در کنکورهای سراسری نظام جدید، شاید بتوان گفت راحت ترین سوالات گراف، مربوط به گراف های منتظم بوده اند.

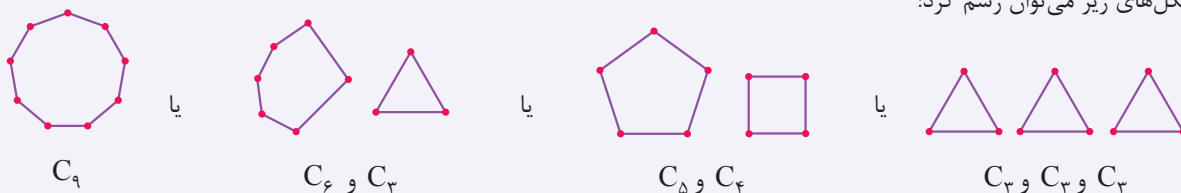
درس نامه گراف منتظم: اگر در گراف G درجه همه رئوس برابر r باشد، یک گراف r - منتظم از مرتبه p داریم.

نکات ۱) در گراف های r - منتظم از مرتبه p ، اگر اندازه گراف برابر q باشد، داریم: $rp = 2q$

۲) هیچ گراف فرد منتظمی از مرتبه فرد وجود ندارد.



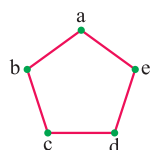
۲۳) گراف‌های ۲ - منتظم از مرتبه p ، از اجتماع تعدادی گراف به شکل C_n به وجود می‌آیند، برای مثال گراف ۲- منتظم مرتبه ۹ را به شکل‌های زیر می‌توان رسم کرد:



پاسخ تشریحی

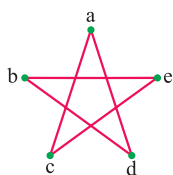
گام اول: گفتیم گراف فرد منتظم مرتبه فرد نداریم. در این جا مرتبه گراف برابر ۵ (یعنی فرد) است، پس k باید زوج باشد. حالا کم‌ترین مقدار طبیعی ممکن برای k را می‌خواهیم (یعنی کم‌ترین مقدار طبیعی ممکن برای یک عدد زوج) که برابر ۲ است، پس گراف ما یک گراف ۲- منتظم از مرتبه ۵ است.

گام دوم: شکل این گراف را فقط به صورت مقابل (به شکل C_5) می‌توانیم رسم کنیم:



(G)

گام سوم: حالا شکل مکمل گراف G به صورت مقابل است که با توجه به آن، در این گراف فقط یک دور به طول ۵ (دور acebda) داریم، پس جواب برابر ۱ می‌شود.



($\bar{G}$)

تست و پاسخ ۲۴

چه تعداد از اعضای مجموعه $A = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ می‌توانند عدد احاطه‌گری یک گراف ۲- منتظم از مرتبه ۱۲ باشند؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

خود حل کنی بهتره با توجه به درس‌نامه سؤال قبل، کافی است شکل‌های متفاوت برای گراف ۲- منتظم از مرتبه ۱۲ را رسم کنید و در هر کدام، عدد احاطه‌گری را محاسبه کنید.

نکته عدد احاطه‌گری گراف‌های به شکل C_n برابر $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ است.

پاسخ تشریحی گام اول: شکل‌های متفاوت گراف ۲- منتظم از مرتبه ۱۲ به صورت زیر است:

شکل	عدد احاطه‌گری
C_{12}	$\left\lfloor \frac{12}{3} \right\rfloor = 4$ $4(C_{12})$

شکل	عدد احاطه‌گری
 C_9 C_3	$\left\lfloor \frac{9}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3}{3} \right\rfloor = 3 + 1 = 4$ $\gamma(C_9)$ $\gamma(C_3)$
 C_8 C_4	$\left\lfloor \frac{8}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{4}{3} \right\rfloor = 3 + 2 = 5$ $\gamma(C_8)$ $\gamma(C_4)$
 C_7 C_5	$\left\lfloor \frac{7}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{5}{3} \right\rfloor = 3 + 2 = 5$ $\gamma(C_7)$ $\gamma(C_5)$
 C_6 C_6	$\left\lfloor \frac{6}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{6}{3} \right\rfloor = 2 + 2 = 4$ $\gamma(C_6)$ $\gamma(C_6)$
 C_4 C_4 C_4	$\left\lfloor \frac{4}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{4}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{4}{3} \right\rfloor = 2 + 2 + 2 = 6$ $\gamma(C_4)$ $\gamma(C_4)$ $\gamma(C_4)$
 C_3 C_6 C_3	$\left\lfloor \frac{3}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{6}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3}{3} \right\rfloor = 1 + 2 + 1 = 4$ $\gamma(C_3)$ $\gamma(C_6)$ $\gamma(C_3)$
 C_3 C_5 C_4	$\left\lfloor \frac{3}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{5}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{4}{3} \right\rfloor = 1 + 2 + 2 = 5$ $\gamma(C_3)$ $\gamma(C_5)$ $\gamma(C_4)$
 C_3 C_3 C_3 C_3	$\left\lfloor \frac{3}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3}{3} \right\rfloor = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$ $\gamma(C_3)$ $\gamma(C_3)$ $\gamma(C_3)$ $\gamma(C_3)$

گام دوم: حالا با توجه به جدول بالا، عدد احاطه‌گری گراف ۲-منتظم از مرتبه ۱۲ می‌تواند برابر ۴، ۵ یا ۶، یعنی برابر سه مقدار از اعضای مجموعه A باشد.

تست و پاسخ ۲۵

تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + \sqrt{x_2} + x_3 + x_4 = 3$ کدام است؟

۲۱ (۴)

۲۰ (۳)

۱۹ (۲)

۱۸ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

خودت حل کنی بهتره! کافیست بر حسب مقدار $\sqrt{x_2}$ حالت‌بندی کنید.



درس نامه •• تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $X_1 + X_2 + \dots + X_k = n$ برابر است با: $\binom{n+k-1}{k-1}$

پاسخ تشریحی **روش اول:** گام اول: در این معادله، مقادیر X_1, X_2, X_3 و X_4 صحیح است و جواب معادله هم برابر یک عدد صحیح (یعنی ۳) شده، پس مقدار $\sqrt{X_2}$ هم باید صحیح باشد.

گام دوم: X_2 صحیح و نامنفی است و دیدیم که $\sqrt{X_2}$ هم باید صحیح باشد، پس می‌تواند برابر صفر، ۱، ۲، ۳ یا ... باشد، اما دقت کنید به ازای $\sqrt{X_2} > 3$ ، مقادیر X_1, X_2, X_3 و X_4 دیگر صحیح و نامنفی نیستند (مثلاً اگر $\sqrt{X_2} = 4$ باشد، معادله به صورت $X_1 + 4 + X_3 + X_4 = 3$ یا به عبارت دیگر به صورت $X_1 + X_3 + X_4 = -1$ می‌شود که غیرممکن است)، پس $\sqrt{X_2}$ می‌تواند برابر صفر، ۱، ۲ یا ۳ باشد.

گام سوم: بر حسب مقدار $\sqrt{X_2}$ حالت‌بندی می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \sqrt{X_2} = 0 &\Rightarrow X_2 = 0 \xrightarrow{X_1 + \sqrt{X_2} + X_3 + X_4 = 3} X_1 + 0 + X_3 + X_4 = 3 \Rightarrow X_1 + X_3 + X_4 = 3 \\ &\Rightarrow \begin{cases} k=3 \\ n=3 \end{cases} \xrightarrow{\text{تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی}} \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{3+3-1}{3-1} = \binom{5}{2} = 10 \\ \sqrt{X_2} = 1 &\Rightarrow X_2 = 1 \xrightarrow{X_1 + \sqrt{X_2} + X_3 + X_4 = 3} X_1 + 1 + X_3 + X_4 = 3 \Rightarrow X_1 + X_3 + X_4 = 2 \\ &\Rightarrow \begin{cases} k=3 \\ n=2 \end{cases} \Rightarrow \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{4}{2} = 6 \\ \sqrt{X_2} = 2 &\Rightarrow X_2 = 4 \xrightarrow{X_1 + \sqrt{X_2} + X_3 + X_4 = 3} X_1 + 2 + X_3 + X_4 = 3 \Rightarrow X_1 + X_3 + X_4 = 1 \\ &\Rightarrow \begin{cases} k=3 \\ n=1 \end{cases} \Rightarrow \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{3}{2} = 3 \\ \sqrt{X_2} = 3 &\Rightarrow X_2 = 9 \xrightarrow{X_1 + \sqrt{X_2} + X_3 + X_4 = 3} X_1 + 3 + X_3 + X_4 = 3 \Rightarrow X_1 + X_3 + X_4 = 0 \\ &\Rightarrow \begin{cases} k=3 \\ n=0 \end{cases} \Rightarrow \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{2}{2} = 1 \end{aligned}$$

گام چهارم: بنابراین تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی این معادله برابر $10 + 6 + 3 + 1 = 20$ تا می‌شود.

روش دوم: همان‌طور که در روش اول گفتیم، $\sqrt{X_2}$ باید برابر مقداری صحیح و نامنفی، مثلاً برابر t باشد. حالا از تغییر متغیر $\sqrt{X_2} = t$ استفاده می‌کنیم. دقت کنید که به ازای هر مقدار صحیح و نامنفی t ، دقیقاً یک مقدار صحیح و نامنفی برای X_2 به دست می‌آید (برای مثال اگر $t = 2$ باشد، $X_2 = 4$ می‌شود)، پس تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $X_1 + \sqrt{X_2} + X_3 + X_4 = 3$ با تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $X_1 + t + X_3 + X_4 = 3$ برابر است:

$$X_1 + t + X_3 + X_4 = 3 \Rightarrow \begin{cases} k=4 \\ n=3 \end{cases} \xrightarrow{\text{تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی}} \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{6}{3} = 20$$

بنابراین جواب برابر ۲۰ می‌شود.

تست و پاسخ ۲۶

اعضای مجموعه $A = \{1, 5, 9, \dots, 85\}$ به شکل یک تصاعد عددی مرتب شده‌اند. یک زیرمجموعه با حداقل چند عضو از این مجموعه بنویسیم که در آن مجموع لااقل ۲ عضو برابر ۹۰ باشد؟

۱۴ (۴)

۱۳ (۳)

۱۲ (۲)

۱۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۳





خودت حل کنی بهتره کافیه اعداد را طوری دسته‌بندی کنید که جمع اعضای هر دسته برابر ۹۰ شود، بعد با استفاده از اصل لانه کبوتری به جواب می‌رسید.

نکته اگر اعضای مجموعه A ، تشکیل تصاعدی عددی (دنباله‌ای حسابی) با قدرنسبت d دهند، به طوری که آخرین جمله برابر a و اولین جمله برابر b باشد، تعداد اعضای مجموعه A برابر است با:

$$n = \frac{a-b}{d} + 1$$

برای مثال:

$$A = \{7, 12, 17, 22, \dots, 97\}$$

$\xrightarrow{+5} \quad \xrightarrow{+5} \quad \xrightarrow{+5}$

$$\xrightarrow{\text{تعداد اعضا}} n = \frac{97-7}{5} + 1 = 19$$

پاسخ تشریحی **گام اول:** اعداد را دوتا دوتا طوری دسته‌بندی می‌کنیم که جمع اعضای هر دسته برابر ۹۰ شود: (دقت کنید

۵, ۸۵

۹, ۸۱

۱۳, ۷۷

⋮

۴۱, ۴۹

۴۵

۱

که جمع دو عدد ۱ و ۴۵ با هیچ عدد دیگری برابر ۹۰ نمی‌شود، بنابراین مجبور هستیم هر کدام از این دو عدد را در یک مجموعه تک‌عضوی تنها قرار دهیم.)

گام دوم: اعداد کوچک‌تر دسته‌های دوتایی (یعنی ۵ و ۹ و ۱۳ و ... و ۴۱) تشکیل دنباله‌ای حسابی با قدرنسبت ۴، آخرین جمله ۴۱ و اولین جمله ۵ می‌دهند، پس تعداد دسته‌های دوتایی برابر است با:

$$\frac{41-5}{4} + 1 = 10$$

به علاوه دو دسته تک‌عضوی هم داریم، پس تعداد کل دسته‌ها ۱۲ تا می‌شود.

گام سوم: حالا اگر از یکی از دسته‌های دو‌عضوی، هر دو عضو آن را انتخاب کنیم، دو عدد داریم به طوری که جمعشان ۹۰ می‌شود. تعداد دسته‌ها ۱۲ است، پس بدترین حالت این است که از هر دسته دقیقاً یک عضو (یعنی جمعاً ۱۲ عضو) انتخاب کنیم (مثلاً اگر ۱۲ عضو ۵ و ۹ و ۱۳ و ... و ۴۱ و ۴۵ و ۱ را انتخاب کنیم، هیچ دو عضوی وجود ندارد که جمعشان ۹۰ شود!)، بنابراین با انتخاب ۱۲ عضو، ممکن است. به هدفمان نرسیم؛ ولی اگر ۱۳ عضو انتخاب کنیم، طبع اصل لانه کبوتری، دسته‌ای وجود دارد که هر دو عضو آن انتخاب شده و به هدفمان می‌رسیم؛ بنابراین باید یک زیرمجموعه با حداقل ۱۳ عضو از اعضای A انتخاب کنیم تا مطمئن باشیم در بین آن‌ها حداقل دو عضو وجود دارد به طوری مجموع آن دو عضو برابر ۹۰ شود.

تست و پاسخ ۲۷

چند تابع پوша از مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4\}$ به مجموعه B' می‌توان نوشت، که در آن $B' \subseteq A$ باشد؟

۱۵۰ (۲)

۲۵۶ (۱)

۷۵ (۴)

۱۲۰ (۳)

پاسخ: گزینه ۱



درس نامه • تابع f از مجموعه A به مجموعه B را پوشا گوئیم هرگاه برد f برابر B باشد.

- نکات** ۱) تعداد توابع پوشا از یک مجموعه n عضوی به یک مجموعه n عضوی برابر است با: ۱
 ۲) تعداد توابع پوشا از یک مجموعه n عضوی به یک مجموعه n عضوی برابر است با: $2^n - 1$
 ۳) تعداد توابع پوشا از یک مجموعه n عضوی به یک مجموعه n عضوی برابر است با: $3^n - 3 \times 2^n + 3$
 ۴) تعداد توابع پوشا از یک مجموعه n عضوی به یک مجموعه n عضوی برابر است با: $n!$

پاسخ تشریحی

گام اول: $B' \subseteq A$ است، پس چند حالت داریم:

حالت اول: B' برابر خود A باشد (یا به عبارت دیگر، B' زیرمجموعه ۴ عضوی A باشد که یک حالت برای انتخاب B' داریم) که برای شمارش تعداد توابع پوشا از A به B' ، باید تعداد توابع پوشا از یک مجموعه ۴ عضوی به یک مجموعه ۴ عضوی را بشماریم که طبق نکته ۴ برابر $4! = 24$ تا است.

حالت دوم: B' زیرمجموعه ۳ عضوی A باشد که در ابتدا، برای انتخاب B' ، $\binom{4}{3} = 4$ حالت داریم. برای مثال فرض کنید $B' = \{1, 2, 4\}$. حالا باید تعداد توابع پوشا از مجموعه چهار عضوی A به مجموعه سه عضوی B' را بشماریم که طبق نکته ۳ برابر است با: $3^4 - 3 \times 2^4 + 3 = 36$

پس در این حالت، $36 \times 4 = 144$ تابع داریم.

حالت سوم: B' زیرمجموعه ۲ عضوی A باشد که در ابتدا، برای انتخاب B' ، $\binom{4}{2} = 6$ حالت داریم. برای مثال فرض کنید $B' = \{1, 3\}$. حالا باید تعداد توابع پوشا از مجموعه چهار عضوی A به مجموعه دو عضوی B' را بشماریم که طبق نکته ۲ برابر است با: $2^4 - 2 = 14$

پس در این حالت، $14 \times 6 = 84$ تابع داریم.

حالت چهارم: B' زیرمجموعه تک عضوی A باشد که در ابتدا، برای انتخاب B' ، $\binom{4}{1} = 4$ حالت داریم. برای مثال فرض کنید $B' = \{2\}$. حالا باید تعداد توابع پوشا از مجموعه چهار عضوی A به مجموعه تک عضوی B' را بشماریم که طبق نکته ۱ برابر با یک است، پس در این حالت، $4 \times 4 = 16$ تابع داریم (دقت کنید که B' نمی تواند زیرمجموعه تهی باشد، چون در این صورت هیچ تابعی از A به B' تعریف نمی شود).

گام دوم: بنابراین، تعداد توابع پوشا از A به B' برابر است با: $24 + 144 + 84 + 16 = 256$

تست و پاسخ ۲۸

به ازای چند عدد سه رقمی a ، معادله سیاله خطی $ax + 84y = 97$ دارای جواب صحیح است؟

- ۱) ۲۵۸ ۲) ۳۶۷ ۳) ۵۴۳ ۴) ۵۳۳

پاسخ: گزینه ۱

خودت حل کنی بهتره باید تعداد اعداد سه رقمی a را بشمارید به طوری که a عامل ۲، ۳ و ۷ نداشته باشد.

نکات ۱) اصل شمول: $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

۲) اصل عدم شمول: $n(A' \cap B' \cap C') = n(S) - n(A \cup B \cup C)$

۳) تعداد اعداد مضرب k در بین اعداد ۱ تا n برابر است با: $\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$

برای مثال تعداد اعداد مضرب ۷ در مجموعه $A = \{1, 2, 3, \dots, 120\}$ برابر است با: $\left\lfloor \frac{120}{7} \right\rfloor = [17/1] = 17$

دقت کنید! اگر تعداد اعداد مضرب ۷ در مجموعه $B = \{52, 53, 54, \dots, 120\}$ را بخواهیم باید به این صورت عمل کنیم که اول، تعداد اعداد مضرب

۷ در بین اعداد ۱ تا ۱۲۰ را پیدا کنیم، بعد تعداد اعداد مضرب ۷ در بین اعداد ۱ تا ۵۱ را از آن کم کنیم: $\left\lfloor \frac{120}{7} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{51}{7} \right\rfloor = 17 - 7 = 10$



پاسخ تشریحی

گام اول: برای این که معادله سیاله خطی $ax + 84y = 97$ دارای جواب صحیح باشد، باید $97 | (a, 84)$. حالا دقت کنید ۹۷ عددی اول است، پس مقسوم علیه های مثبت آن فقط خودش و ۱ اند، پس برای این که $97 | (a, 84)$ ، یا باید $(a, 84) = 97$ باشد یا $(a, 84) = 1$ باشد. از طرفی واضح است که $(a, 84) = 97$ غیرممکن است، چون ۸۴ نسبت به ۹۷ اول است، پس باید $(a, 84) = 1$ باشد.

گام دوم: دیدیم که باید a و ۸۴ نسبت به هم اول باشند، یعنی a نباید هیچ عامل مشترکی با $84 = 2^2 \times 3 \times 7$ داشته باشد؛ به عبارت دیگر a باید فاقد عوامل اول ۲، ۳ و ۷ باشد.

گام سوم: مجموعه های A ، B و C را به صورت زیر تعریف می کنیم:

A : اعداد سه رقمی مضرب ۲ B : اعداد سه رقمی مضرب ۳ C : اعداد سه رقمی مضرب ۷

گام چهارم: می خواهیم a عامل ۲، ۳ و ۷ نداشته باشد، یعنی $n(A' \cap B' \cap C')$ را می خواهیم که برابر است با:

$$\begin{aligned} n(A' \cap B' \cap C') &= n(S) - n(A \cup B \cup C) \\ &= n(S) - (n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)) \quad * \end{aligned}$$

گام پنجم: حالا داریم: $n(S) = 999 - 100 + 1 = 900$: تعداد اعداد سه رقمی

$$n(A) = \left[\frac{999}{2} \right] - \left[\frac{99}{2} \right] = 499 - 49 = 450$$

تعداد اعداد سه رقمی مضرب ۲:

$$n(B) = \left[\frac{999}{3} \right] - \left[\frac{99}{3} \right] = 333 - 33 = 300$$

تعداد اعداد سه رقمی مضرب ۳:

$$n(C) = \left[\frac{999}{7} \right] - \left[\frac{99}{7} \right] = 142 - 14 = 128$$

تعداد اعداد سه رقمی مضرب ۷:

$$n(A \cap B) = \left[\frac{999}{6} \right] - \left[\frac{99}{6} \right] = 166 - 16 = 150$$

تعداد اعداد سه رقمی مضرب ۲ و ۳ یعنی مضرب ۶:

$$n(A \cap C) = \left[\frac{999}{14} \right] - \left[\frac{99}{14} \right] = 71 - 7 = 64$$

تعداد اعداد سه رقمی مضرب ۲ و ۷ یعنی مضرب ۱۴:

$$n(B \cap C) = \left[\frac{999}{21} \right] - \left[\frac{99}{21} \right] = 47 - 4 = 43$$

تعداد اعداد سه رقمی مضرب ۳ و ۷ یعنی مضرب ۲۱:

$$n(A \cap B \cap C) = \left[\frac{999}{42} \right] - \left[\frac{99}{42} \right] = 23 - 2 = 21$$

تعداد اعداد سه رقمی مضرب ۲، ۳ و ۷ یعنی مضرب ۴۲:

گام ششم: حالا با جای گذاری مقادیر به دست آمده در * جواب حاصل می شود:

$$\Rightarrow n(A' \cap B' \cap C') = 900 - (450 + 300 + 128 - 150 - 64 - 43 + 21) = 258$$



هندسه (۳): صفحه‌های ۹ تا ۸۶

تست و پاسخ ۲۹

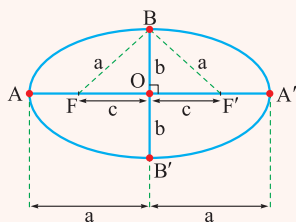
کانون‌های یک بیضی نقاط $(1, 3)$ و $(1, -5)$ هستند. اگر طول قطر کوچک این بیضی ۶ باشد، خروج از مرکز آن کدام است؟

- ۰/۸ (۱) ۰/۶ (۲) ۰/۵ (۳) ۰/۴ (۴)

پاسخ: گزینه ۱

درس نامه...

(۱) در بیضی زیر، F و F' کانون‌های بیضی و O مرکز آن هستند. $AA' = 2a$ قطر بزرگ، $BB' = 2b$ قطر کوچک و $FF' = 2c$ فاصله کانونی نامیده می‌شود؛ هم‌چنین با استفاده از قضیه فیثاغورس در مثلث BOF می‌توان نتیجه گرفت:



$$a^2 = b^2 + c^2$$

(۲) میزان کشیدگی بیضی به وسیله پارامتری به نام خروج از مرکز (e) سنجیده می‌شود و مقدار آن برابر است با:

$$e = \frac{c}{a}$$

خروج از مرکز بیضی همیشه عددی بین صفر و یک است.

پاسخ تشریحی گام اول (محاسبه فاصله کانونی): مختصات کانون‌های بیضی به صورت $F(1, 3)$ و $F'(1, -5)$ هستند؛ پس فاصله کانونی برابر است با:

$$FF' = \sqrt{(1-1)^2 + (3-(-5))^2} = 8 = 2c \Rightarrow c = 4$$

گام دوم (محاسبه a): طبق فرض مسئله، طول قطر کوچک بیضی برابر $2b = 6$ است و از گام (۱) فاصله کانونی بیضی را $2c = 8$ به دست آوردیم، در نتیجه می‌توانیم از رابطه مورد (۱) درس نامه، a را محاسبه کنیم:

$$\left. \begin{array}{l} 2c = 8 \Rightarrow c = 4 \\ 2b = 6 \Rightarrow b = 3 \end{array} \right\} \xrightarrow{a^2 = b^2 + c^2} a = 5$$

گام سوم (محاسبه خروج از مرکز بیضی): با داشتن مقادیر a و c ، خروج از مرکز با استفاده از رابطه مورد (۲) درس نامه به دست می‌آید:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} = 0.8$$

تست و پاسخ ۳۰

اگر $A = \begin{bmatrix} x & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ، آن‌گاه به ازای کدام مقدار x ، مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس A با مجموع درایه‌های ستون سوم آن برابر است؟

- ۱ (۱) -۱ (۲) ۲ (۳) -۲ (۴)

پاسخ: گزینه ۳

مشاوره این مدل سؤال‌ها را بارها در کنکور دیده‌ایم. راه حل سختی هم ندارد. فقط کافی است در محاسبات دقت کنید. حواستان باشد لازم نیست همه درایه‌های ماتریس A را حساب کنید.



درس نامه ●● برای پیدا کردن درایه سطر i ام و ستون j ام ماتریس حاصل ضرب $A \times B$ ، کافی است سطر i ام ماتریس A را در ستون j ام ماتریس B ضرب کنیم.

پاسخ تشریحی درایه های مورد نیاز از ماتریس A یعنی درایه های روی قطر اصلی و ستون سوم را به دست می آوریم:

$$A = \begin{bmatrix} x & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x+2 & 2x+2 & 3x+1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-1 & 2x+2 & 3 \\ 2 & -2 & -2 \\ 3 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

ابتدا حاصل ضرب این دو ماتریس را محاسبه می کنیم.

حالا باید مجموع درایه های قطر اصلی را با مجموع درایه های ستون سوم برابر قرار دهیم:

$$(x-1) + 3 + (-2) = (2x+2) + (-2) + (-2) \Rightarrow x = 2x - 2 \Rightarrow x = 2$$

تست و پاسخ ۳۱

اگر $A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ و $A^3 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ، آن گاه مجموع درایه های ماتریس A کدام است؟

۳ (۴)

-۳ (۳)

-۲ (۲)

۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

خود حل کنی بهتره وارون ماتریس A^2 را پیدا کن و از رابطه $A^3(A^2)^{-1}$ ، ماتریس A را به دست بیاور.

درس نامه ●● اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ باشد، آن گاه وارون ماتریس A به صورت زیر است:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} ; |A| = ad - bc$$

نکته ماتریس A وارون پذیر است اگر و تنها اگر، $|A| \neq 0$.

پاسخ تشریحی گام اول: ابتدا وارون ماتریس A^2 را به دست می آوریم:

$$(A^2)^{-1} = \frac{1}{2 \times 1 - 1 \times 1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

گام دوم: حالا از رابطه $A = A^3(A^2)^{-1}$ ، ماتریس A را محاسبه می کنیم:

$$A = A^3(A^2)^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

پس مجموع درایه های ماتریس A برابر ۳ است.

تست و پاسخ ۳۲

اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ ، آن گاه حاصل $|A| \cdot A$ کدام است؟

۱۲۹۶ (۴)

۶۴ (۳)

۲۵۶ (۲)

۱۶ (۱)

پاسخ: گزینه ۲





مشاوره این گونه سوالات از سوالات ساده بحث درمیان هستند و نباید آن‌ها را از دست بدهید. دقت کنید که با $|A|$ باید مانند یک عدد ثابت برخورد کنید.

درس نامه

- (۱) در محاسبه دترمینان های 3×3 برای صرفه جویی در وقت، بهتر است ماتریس را حول سطر یا ستونی که بیشترین صفر را دارد بسط دهیم.
(۲) اگر A یک ماتریس $n \times n$ و k عددی ثابت باشد، داریم: $|kA| = k^n |A|$ ؛ مثلاً اگر A یک ماتریس 3×3 باشد، داریم:

$$|4A| = 4^3 |A|$$

پاسخ تشریحی گام اول (محاسبه دترمینان A): برای محاسبه دترمینان A ، بسط را حول سطر اول انجام می دهیم:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - (-1) \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 0 = 4$$

$0 \cdot 1 = -1$ $4 + 1 = 5$

گام دوم (محاسبه خواسته سوال): طبق مورد (۲) درس نامه، با توجه به این که $|A| = 4$ و ماتریس A یک ماتریس مربعی 3×3 است، داریم:

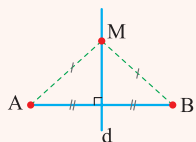
$$||A|A| = |A|^3 |A| = 4^4 = 256$$

تست و پاسخ ۳۳

- دو نقطه متمایز A و B خارج خط ℓ و به فاصله یکسان از آن، در صفحه قرار دارند. چند نقطه روی خط ℓ و به فاصله یکسان از A و B می توان یافت؟
- (۱) صفر یا یک (۲) صفر، یک یا بی شمار
(۳) صفر، یک یا دو (۴) یک یا بی شمار

پاسخ: گزینه ۴

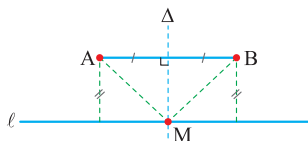
درس نامه نقاطی که از دو نقطه ثابت A و B به یک فاصله باشند، روی عمودمنصف پاره خط AB قرار دارند.



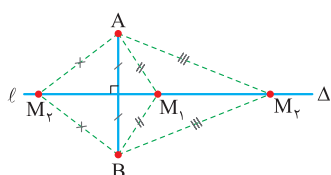
$$AB \text{ عمودمنصف } d \Leftrightarrow AM = MB$$

پاسخ تشریحی بسته به وضعیت A و B با خط ℓ ، سه حالت امکان پذیر است:

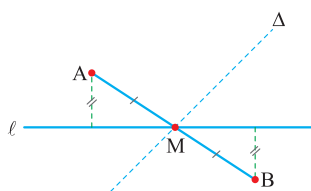
حالت اول: A و B در یک طرف خط ℓ باشند، چون سوال گفته فاصله A و B از ℓ یکسان است؛ پس مطابق شکل زیر پاره خط AB موازی با خط ℓ است و نقاطی که از A و B به یک فاصله اند روی عمودمنصف AB یعنی خط Δ قرار دارند، بنابراین نقطه مورد نظر محل برخورد خط ℓ و خط Δ است (نقطه M).



$$MA = MB$$



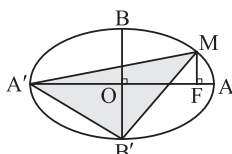
حالت دوم: A و B در دو طرف خط d باشند و عمودمنصف AB بر ℓ منطبق باشد؛ چون فاصله A و B از ℓ یکسان است، پس اگر A و B در دو طرف ℓ باشند، ℓ می تواند همانند شکل مقابل بر عمودمنصف AB منطبق شود که در این حالت تمام نقاط روی خط ℓ به فاصله یکسان از A و B قرار دارند و بی شمار جواب داریم.



حالت سوم: A و B در دو طرف خط l باشد و عمودمنصف AB بر l منطبق نباشد؛ مطابق شکل روبه‌رو A و B می‌توانند در دو طرف l و به فاصله یکسان از آن باشند، ولی عمودمنصف AB بر l منطبق نباشد، در این‌جا هم محل برخورد عمودمنصف AB (Δ) با خط l یک نقطه است و مسئله یک جواب دارد (نقطه M).

تست و پاسخ ۳۴

در بیضی زیر، طول قطر کوچک و بزرگ به ترتیب ۶ و ۱۰ است. مساحت مثلث $MA'B'$ کدام است؟



۲۰ (۲)

۱۵ (۱)

۱۸ (۴)

۱۶ (۳)

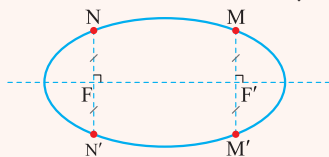
پاسخ: گزینه ۴

مشاوره با یک سؤال ترکیبی از بیضی، تشابه و مساحت مثلث طرفیم.

خودت حل کنی بهتره نقطه برخورد MB' با AA' را E می‌نامیم. مساحت مثلث $MA'B'$ از جمع مساحت مثلث‌های MEA' و $A'B'E$ به دست می‌آید.

درس‌نامه •• وتر کانونی بیضی

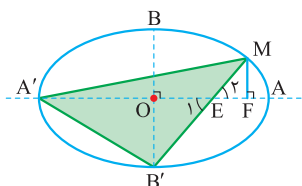
وتری از بیضی که در کانون بر محور کانونی آن عمود است را وتر کانونی می‌نامیم که طول آن برابر است با:



$$MM' = NN' = \frac{2b^2}{a}$$

پاسخ تشریحی گام اول (استراتژی حل سؤال): نقطه تلاقی MB' و AA' را در شکل E می‌نامیم. برای محاسبه مساحت مثلث $A'MB'$

باید مساحت مثلث‌های $MA'E$ و $A'B'E$ را به دست آوریم، یعنی:



$$S_{\Delta MA'B'} = S_{\Delta MA'E} + S_{\Delta A'B'E}$$

$$\frac{1}{2} MF \times A'E + \frac{1}{2} OB' \times A'E = \frac{1}{2} A'E (MF + OB') (*)$$

$OB' = b = 3$ برابر با نصف طول قطر کوچک بیضی است؛ پس

$$MF = \frac{b^2}{a} = \frac{3^2}{5} = \frac{9}{5}$$

MF هم طبق مورد (۲) درس‌نامه برابر با نصف وتر کانونی بیضی است و حاصل آن برابر است با:

کافی است طول $A'E$ را محاسبه کنیم تا خواسته سؤال را به دست آوریم.

گام دوم (محاسبه طول $A'E$): دو مثلث MEF و OEB' بنا بر تساوی دو زاویه $\hat{E}_1 = \hat{E}_2$ (متقابل به رأس) و $\hat{O} = \hat{F} = 90^\circ$ متشابه‌اند و

$$\frac{OE}{EF} = \frac{OB'}{MF} = \frac{b}{\frac{b^2}{a}} = \frac{a}{b} = \frac{5}{3}$$

نسبت تشابه آن‌ها برابر است با:

$$\frac{OE}{OE + EF} = \frac{5}{5 + 3} \Rightarrow \frac{OE}{OF} = \frac{5}{8} \quad (1)$$

از $\frac{OE}{EF} = \frac{5}{3}$ با استفاده از خاصیت ترکیب در مخرج، نتیجه می‌شود:

$$OF = c \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = 5^2 - 3^2 = 4^2 \Rightarrow OF = 4$$

حال طبق مورد (۱) درس‌نامه طول OF برابر است با:

$$\frac{OE}{4} = \frac{5}{8} \Rightarrow OE = \frac{5}{2}$$

با جای گذاری OF در رابطه (۱) داریم:



گام سوم (محاسبه خواسته سؤال): با توجه به (*) مساحت مثلث $MA'B'$ برابر است با:

$$S_{MA'B'} = \frac{1}{2} A'E(MF + OB') = \frac{1}{2} (A'O + OE)(MF + OB') = \frac{1}{2} \left(5 + \frac{5}{2}\right) \left(\frac{9}{5} + 3\right) = \frac{1}{2} \times \frac{15}{2} \times \frac{24}{5} = 18$$

تست و پاسخ ۳۵

کانون سهمی $y^2 = 2x - 4y$ و نقاط برخورد آن با محور y ها، رأس‌های یک مثلث‌اند. مساحت این مثلث کدام است؟

۳ (۴)

۲ (۳)

۱/۵ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

مشاوره رایج‌ترین تیپ سؤالات سهمی در کنکور شبیه به این سؤال است. یعنی معادله گسترده یک سهمی را به شما می‌دهند و اطلاعاتی در مورد آن می‌خواهند که در اکثر این سؤالات باید ابتدا معادله گسترده را به معادله استاندارد تبدیل کنید.

خودت حل کنی بهتره معادله گسترده را به استاندارد تبدیل کنید.

درس نامه

(۱) برای تبدیل معادله گسترده به استاندارد، از اتحادها $x^2 \pm ax = \left(x \pm \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$ استفاده می‌کنیم تا یک سمت معادله، یک مربع کامل ایجاد کنیم.

(۲) برای پیدا کردن مختصات کانون، با داشتن مختصات رأس سهمی $\left(S \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \end{vmatrix}\right)$ و فاصله کانونی سهمی (a) از حالت‌های زیر استفاده می‌کنیم:

از رأس، a واحد به سمت بالا می‌رویم: $F \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta + a \end{vmatrix}$		سهمی قائم با دهانه به سمت بالا	از رأس، a واحد به راست می‌رویم: $F \begin{vmatrix} \alpha + a \\ \beta \end{vmatrix}$		سهمی افقی با دهانه به سمت راست
از رأس، a واحد به سمت پایین می‌رویم: $F \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta - a \end{vmatrix}$		سهمی قائم با دهانه به سمت پایین	از رأس، a واحد به چپ می‌رویم: $F \begin{vmatrix} \alpha - a \\ \beta \end{vmatrix}$		سهمی افقی با دهانه به سمت چپ

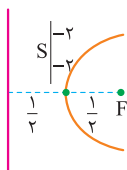
پاسخ تشریحی گام اول (استانداردسازی معادله گسترده سهمی): برای استاندارد کردن معادله $y^2 = 2x - 4y$ از اتحادهای مورد (۱) درس نامه

استفاده می‌کنیم:

$$y^2 + 4y = 2x \Rightarrow (y+2)^2 - 4 = 2x \Rightarrow (y+2)^2 = 2(x+2) \Rightarrow S(-2, -2), 4a=2 \Rightarrow a=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

گام دوم (محاسبه مختصات کانون): با توجه به معادله $(y+2)^2 = 2(x+2)$ ، سهمی افقی و دهانه آن رو به راست است؛ پس شکل فرضی

سهمی به صورت زیر است:



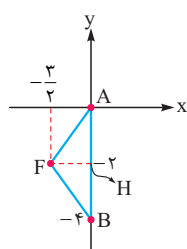
پس طبق مورد (۲) درس نامه برای یافتن مختصات کانون سهمی، از رأس سهمی به اندازه $\frac{1}{p}$ به راست می‌رویم:

$$S \begin{vmatrix} -2 \\ -2 \end{vmatrix} \Rightarrow F \begin{vmatrix} -2 + \frac{1}{2} \\ -2 \end{vmatrix} \Rightarrow F \begin{vmatrix} -\frac{3}{2} \\ -2 \end{vmatrix}$$

گام سوم (محاسبه نقاط برخورد با محور yها): برای محاسبه نقاط برخورد سهمی با محور yها کافی است در معادله سهمی مقدار $x = 0$ را جای گذاری کنیم:

$$(y+2)^2 = 2(x+2) \xrightarrow{x=0} (y+2)^2 = 4$$

$$\Rightarrow y+2 = \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ y=-4 \end{cases}$$



گام چهارم (محاسبه خواسته سؤال):

نقاط $F \begin{vmatrix} -\frac{3}{2} \\ -2 \end{vmatrix}$ و $A \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$ را در دستگاه مختصات نشان می‌دهیم:

در نتیجه قاعده مثلث AFB، AB به طول ۴ و ارتفاع آن FH به طول $\frac{3}{2}$ است؛ پس مساحت این مثلث برابر است با:

$$S_{\triangle AFB} = \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{3}{2} = 3$$

تست و پاسخ ۳۶

مجموع مقادیر m که به ازای آن‌ها خط $y = mx$ بر دایره $x^2 + y^2 - 10x - 10y + 49 = 0$ مماس باشد، کدام است؟

$$\frac{25}{10} (4)$$

$$\frac{25}{12} (3)$$

$$\frac{25}{20} (2)$$

$$\frac{25}{24} (1)$$

پاسخ: گزینه ۳

خودت حل کنی بهتره فاصله مرکز دایره از خط مماس بر دایره، برابر شعاع آن است.

درس نامه

(۱) اگر $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ معادله یک دایره باشد، مرکز این دایره نقطه $O(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$ و شعاع آن

$$r = \sqrt{(-\frac{a}{2})^2 + (-\frac{b}{2})^2 - c} = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 - c}$$

(۲) فاصله نقطه (x_0, y_0) از خط به معادله $ax + by + c = 0$ برابر با $d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ است.

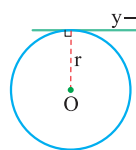
(۳) اگر از معادله $ax^2 + bx + c = 0$ دو جواب حقیقی برای x به دست آید، مجموع این دو جواب برابر است با $-\frac{b}{a}$.

پاسخ تشریحی گام اول (محاسبه مرکز و شعاع دایره): طبق مورد (۱) درس نامه، مرکز و شعاع را از معادله دایره داده شده به دست می‌آوریم:

$$x^2 + y^2 - 10x - 10y + 49 = 0 \Rightarrow \begin{cases} O(-(-\frac{10}{2}), -(-\frac{10}{2})) \Rightarrow O(5, 5) \\ r = \sqrt{5^2 + 5^2 - 49} = 1 \end{cases}$$



گام دوم (محاسبه خواسته سؤال): سؤال گفته خط $y - mx = 0$ بر دایره مماس باشد، یعنی مطابق شکل زیر فاصله مرکز دایره از این خط برابر شعاع دایره باشد. حالا طبق مورد (۲) درس نامه، فاصله نقطه $O(5, 5)$ از خط $y - mx = 0$ را برابر r قرار می دهیم، تا مقدار m به دست آید:



$$\frac{|5 - 5m|}{\sqrt{1+m^2}} = r \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} |5 - 5m| = \sqrt{1+m^2} \cdot r$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} 5^2(1-m)^2 = 1+m^2 \Rightarrow 25 + 25m^2 - 50m = 1+m^2 \Rightarrow 24m^2 - 50m + 24 = 0$$

مجموع ریشه های معادله درجه دوم $24m^2 - 50m + 24 = 0$ برابر است با:

$$\frac{-(-50)}{24} = \frac{50}{24} = \frac{25}{12}$$

تست و پاسخ ۳۷

طول مرکز دایره ای به شعاع $3\sqrt{2}$ ، گذرا از نقطه $(8, 0)$ و مماس خارج بر دایره به معادله $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$ کدام می تواند باشد؟

۷ (۴)

۴ (۳)

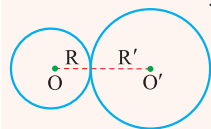
۶ (۲)

۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

خودت حل کنی بهتره فاصله مرکز دایره از نقطه ای روی دایره = فاصله مرکز دایره از خط مماس بر دایره = شعاع دایره

درس نامه دایره ای به مرکز O و شعاع R به دایره ای به مرکز O' و شعاع R' مماس خارج است اگر و تنها اگر:



$$OO' = R + R'$$

پاسخ تشریحی گام اول (فاصله مرکز دایره اول از نقطه A): فرض می کنیم مرکز دایره اول $O(\alpha, \beta)$ و شعاع آن $R = 3\sqrt{2}$ باشد. اگر این دایره گذرا از نقطه $A(8, 0)$ باشد، یعنی فاصله مرکز دایره از نقطه A برابر شعاع دایره است؛ پس:

$$OA = \sqrt{(\alpha - 8)^2 + (\beta - 0)^2} = 3\sqrt{2} \Rightarrow (\alpha - 8)^2 + \beta^2 = 18 \quad (1)$$

گام دوم (شرط مماس خارج بودن دو دایره): طبق درس نامه، دو دایره زمانی مماس خارج اند که طول خط المרכזین آن ها برابر مجموع شعاع ها باشد؛ پس شعاع و مرکز دو دایره را محاسبه می کنیم:

$$\begin{cases} C_1: O(\alpha, \beta), R = 3\sqrt{2} \\ C_2: x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0 \Rightarrow O'(1, -1), R' = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\text{شرط مماس خارج بودن} \Rightarrow OO' = R + R': \sqrt{(\alpha - 1)^2 + (\beta + 1)^2} = 3\sqrt{2} + \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} (\alpha - 1)^2 + (\beta + 1)^2 = 32 \quad (2)$$

گام سوم (محاسبه رابطه بین α و β و خواسته سؤال): دو طرف تساوی های (۱) و (۲) را از هم کم می کنیم تا رابطه ای بین α و β به دست آوریم:

$$\alpha^2 + 1 - 2\alpha + \beta^2 + 1 + 2\beta - \alpha^2 - 64 + 16\alpha - \beta^2 = 32 - 18 \Rightarrow 14\alpha + 2\beta = 76 \Rightarrow \beta = 38 - 7\alpha \quad (3)$$

حالا اگر رابطه (۳) را در معادله (۱) جای گذاری کنیم، معادله ای بر حسب α به دست می آید که با حل این معادله طول مرکز دایره C_1 به دست می آید:

$$\xrightarrow{(1),(3)} (\alpha - 8)^2 + (38 - 7\alpha)^2 = 18$$

با قراردادن $\alpha = 5$ در معادله بالا، تساوی برقرار می شود؛ پس ۱ درست است.

تست و پاسخ ۳۸

فاصله نقطه $A(a, a + 3, 4)$ از صفحه $P: x = 2$ برابر ۵ است. کم ترین فاصله A تا مبدأ مختصات کدام است؟

۱۳ (۴)

۱۲ (۳)

۶ (۲)

۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۱



درس نامه

- (۱) صفحه‌ای به معادله $x = a$ موازی با صفحه yz یا به بیان دیگر عمود بر محور x هاست.
 (۲) فاصله نقطه $A(\alpha, \beta, \gamma)$ از صفحه $x = a$ برابر $|a - \alpha|$ ، از صفحه $y = b$ برابر $|b - \beta|$ و از صفحه $z = c$ برابر $|c - \gamma|$ است.
 (۳) فاصله نقطه $A(x, y, z)$ از مبدأ مختصات در دستگاه سه‌بعدی برابر است با:

$$AO = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

پاسخ تشریحی طبق مورد (۲) درس نامه، فاصله نقطه $A(a, a+3, 4)$ از صفحه $x=2$ برابر است با: $|2-a| = 5 \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ a = 7 \end{cases}$

برای a دو مقدار به دست آمد، پس باید مختصات نقطه A را به ازای هر دو مقدار a محاسبه کرده و فاصله A تا مرکز مختصات را به دست آوریم:

$$a = -3 \Rightarrow A(-3, 0, 4) \Rightarrow AO = \sqrt{(-3)^2 + 0^2 + 4^2} = 5$$

$$a = 7 \Rightarrow A(7, 10, 4) \Rightarrow AO = \sqrt{7^2 + 10^2 + 4^2} = \sqrt{165}$$

از آن جا که $5 < \sqrt{165}$ ، پاسخ مد نظر سؤال ۵ است.

تست و پاسخ ۳۹

اگر $\vec{a} = (1, -3, 4)$ ، $\vec{b} = (3, -4, 2)$ ، $\vec{c} = (-1, 1, 4)$ و تصویر قائم a بر امتداد $\vec{b} + \vec{c}$ بردار $p\vec{i} + q\vec{j} + r\vec{k}$ باشد، حاصل $p + q + r$ کدام است؟

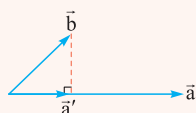
$$\begin{aligned} & 3\frac{2}{3} \quad (2) \\ & 3\frac{4}{3} \quad (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 3\frac{1}{3} \quad (1) \\ & 3\frac{3}{3} \quad (3) \end{aligned}$$

پاسخ: گزینه ۴

مشاوره یکی از کاربردهای ضرب داخلی به دست آوردن تصویر قائم یک بردار بر امتداد بردار دیگر است که فرمول آن را حتماً باید بلد باشید، چون بسیار مورد علاقه طراحان کنکور و آزمون هاست.

درس نامه اگر $\vec{a}'$ تصویر قائم بردار $\vec{b}$ بر امتداد بردار $\vec{a}$ باشد، آن گاه بردار $\vec{a}'$ برابر است با:



$$\vec{a}' = \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \right) \vec{a}$$

$$\vec{b} + \vec{c} = (3, -4, 2) + (-1, 1, 4) = (2, -3, 6)$$

پاسخ تشریحی گام اول: محاسبه بردار $\vec{b} + \vec{c}$

گام دوم: محاسبه تصویر قائم $\vec{a}$ بر امتداد $\vec{b} + \vec{c}$: طبق درس نامه، اگر a' برابر بردار تصویر a بر امتداد بردار $b + c$ باشد، آن گاه $\vec{a}'$ برابر است با:

$$\vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c})}{|\vec{b} + \vec{c}|^2} (\vec{b} + \vec{c}) = \frac{(1, -3, 4) \cdot (2, -3, 6)}{2^2 + (-3)^2 + 6^2} (2, -3, 6) = \frac{2 + 9 + 24}{49} (2, -3, 6) = \frac{35}{49} (2, -3, 6) = \left(\frac{10}{7}, -\frac{15}{7}, \frac{30}{7} \right)$$

گام سوم: محاسبه خواسته سؤال:

اگر $a' = \left(\frac{10}{7}, -\frac{15}{7}, \frac{30}{7} \right)$ ، آن گاه برحسب بردارهای یک‌به‌یک به شکل زیر است:

$$\vec{a}' = \left(\frac{10}{7}, -\frac{15}{7}, \frac{30}{7} \right) = \frac{10}{7} \vec{i} + \left(-\frac{15}{7} \right) \vec{j} + \left(\frac{30}{7} \right) \vec{k} = p\vec{i} + q\vec{j} + r\vec{k} \Rightarrow \begin{cases} p = \frac{10}{7} \\ q = -\frac{15}{7} \\ r = \frac{30}{7} \end{cases} \Rightarrow p + q + r = \frac{25}{7} = 3\frac{4}{7}$$



تست و پاسخ ۴۰

اگر $\vec{a} = \vec{i} \times (\vec{i} \times \vec{j}) - 3\vec{j} \times (\vec{j} \times \vec{k}) + 2\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{i})$ ، آن گاه کسینوس زاویه‌ای که بردار $\vec{a}$ با جهت مثبت محور z می‌سازد، کدام است؟

$$\frac{-3}{\sqrt{14}} \quad (۴)$$

$$\frac{3}{\sqrt{14}} \quad (۳)$$

$$\frac{-1}{\sqrt{14}} \quad (۲)$$

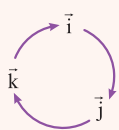
$$\frac{1}{\sqrt{14}} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۳

مشاوره یکی از مهم‌ترین کاربردهای ضرب داخلی، محاسبه زاویه بین دو بردار با معلوم بودن مؤلفه‌های آن‌ها است که هم کتاب درسی به آن پرداخته هم کنکورهای گذشته.

درس نامه

(۱) برای محاسبه ضرب خارجی بین بردارهای $\vec{i}$ ، $\vec{j}$ ، $\vec{k}$ ، شکل زیر را به خاطر بسپارید: در این شکل، ضرب خارجی در جهت بردارها مثبت و خلاف جهت بردارها منفی است، مثلاً:



$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$$

$$\vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}$$

$$\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$$

$$\vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$$

$$\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$

$$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}$$

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{0}, \vec{j} \times \vec{j} = \vec{0}, \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$$

(۲) ضرب خارجی یک بردار در خودش همواره برابر صفر است، مثلاً:

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|}$$

(۳) اگر θ زاویه بین دو بردار $\vec{u}$ و $\vec{v}$ باشد، آن گاه $\cos \theta$ برابر است با:

پاسخ تشریحی گام اول (ساده‌سازی بردار $\vec{a}$): ابتدا بردار $\vec{a}$ را ساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \vec{i} \times (\vec{i} \times \vec{j}) - 3\vec{j} \times (\vec{j} \times \vec{k}) + 2\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{i}) \\ &= \underbrace{\vec{i} \times \vec{k}}_{-\vec{j}} - 3 \underbrace{\vec{j} \times \vec{i}}_{-\vec{k}} + 2 \underbrace{\vec{k} \times \vec{j}}_{-\vec{i}} = -\vec{j} + 3\vec{k} - 2\vec{i} \Rightarrow \vec{a}(-2, -1, 3) \end{aligned}$$

گام دوم (محاسبه خواسته سؤال): اگر بردار $\vec{a}$ با جهت مثبت محور z زاویه θ بسازد، θ در واقع همان زاویه بین بردار $\vec{a}$ و بردار $\vec{k}$ خواهد بود؛ در نتیجه طبق مورد (۳) درس‌نامه داریم:

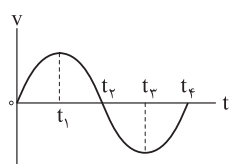
$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{k}}{|\vec{a}| |\vec{k}|} = \frac{(-2, -1, 3) \cdot (0, 0, 1)}{\sqrt{((-2)^2 + (-1)^2 + 3^2)} \sqrt{(0^2 + 0^2 + 1^2)}} = \frac{3}{\sqrt{14}}$$



فیزیک (۳): صفحه‌های ۱ تا ۱۵۷

تست و پاسخ (۴۱)

نمودار سرعت - زمان متحرکی که در راستای محور X حرکت می‌کند، به شکل زیر است، چه تعداد از موارد زیر، درباره این متحرک درست است؟



(الف) در بازه زمانی t_1 تا t_2 ، شتاب متوسط متحرک در خلاف جهت محور X است.

(ب) در بازه زمانی صفر تا t_3 ، سرعت متوسط متحرک در خلاف جهت محور X است.

(پ) در بازه زمانی t_2 تا t_3 ، اندازه شتاب متحرک در حال کاهش است.

(ت) در بازه زمانی t_1 تا t_4 ، تندی متحرک در حال افزایش است.

۱ (۴)

۲ (۳)

۳ (۲)

۴ (۱)

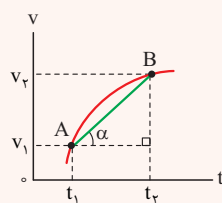
پاسخ: گزینه ۴

مشاوره یکی از مهم‌ترین مطالب درس حرکت‌شناسی، ویژگی‌های نمودار سرعت - زمان است؛ این ویژگی‌ها را به خوبی یاد بگیرید.

نمودار سرعت - زمان، به‌عنوان پل ارتباطی بین نمودارهای مکان - زمان و شتاب - زمان است. ویژگی‌های این سه نمودار را در ذهن خود تفکیک کنید تا آن‌ها را با هم اشتباه نگیرید.

درس‌نامه

(۱) شتاب متوسط بین دو لحظه، برابر شیب خطی است که نمودار سرعت - زمان را در آن دو لحظه، قطع می‌کند.



$$\tan \alpha = a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

(m/s) شتاب متوسط
(m/s²) تغییر سرعت
(s) بازه زمانی

v_2 = سرعت در لحظه t_2

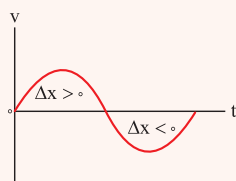
v_1 = سرعت در لحظه t_1

(۲) سرعت متوسط در حرکت روی محور X از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

(m) جابه‌جایی
(m/s) سرعت متوسط
(s) بازه زمانی

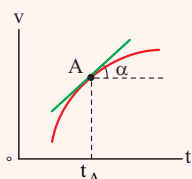
مساحت سطح محدود بین نمودار سرعت - زمان و محور زمان در هر بازه زمانی، برابر با جابه‌جایی (تغییر مکان) در آن بازه است.



$\Delta x > 0$ ← مساحت‌های بالای محور t

$\Delta x < 0$ ← مساحت‌های زیر محور t

(۳) شتاب در هر لحظه دلخواه برابر با شیب خط مماس بر نمودار سرعت - زمان در آن لحظه است.



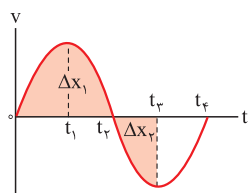
$$a_A = \tan \alpha$$

(۴) تندی متحرک در هر لحظه، برابر با اندازه سرعت در آن لحظه است.

پاسخ تشریحی موارد «الف» تا «ت» را بررسی می‌کنیم:

الف) نادرست. شتاب متوسط متحرک در بازه زمانی t_1 تا t_4 برابر با صفر است.

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0 - 0}{t_4 - t_1} = 0$$



ب) نادرست. در بازه زمانی t_1 تا t_3 ، جابه‌جایی متحرک که برابر با سطح زیر نمودار $v-t$ است مثبت بوده و سرعت متحرک، در جهت محور x است.

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 \xrightarrow{\Delta x_1 > 0, \Delta x_2 < 0, |\Delta x_1| > |\Delta x_2|} \Delta x > 0$$

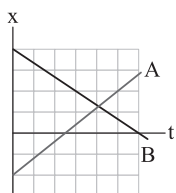
$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta x > 0, \Delta t > 0} v_{av} > 0$$

پ) درست. در بازه زمانی t_1 تا t_3 ، شتاب متحرک منفی است؛ اما اندازه آن مثبت بوده و در حال کاهش است.

ت) نادرست. در بازه زمانی t_1 تا t_3 ، تندی متحرک (اندازه سرعت متحرک) در حال کاهش است و به صفر می‌رسد.

تست و پاسخ ۴۲

نمودار مکان - زمان دو متحرک A و B که در راستای محور x حرکت می‌کنند، به شکل زیر است. از مبدأ زمان، تا لحظه‌ای که دو متحرک به هم می‌رسند، اندازه جابه‌جایی متحرک A ، چند برابر اندازه جابه‌جایی متحرک B است؟



$$\frac{5}{4} (2)$$

$$\frac{4}{3} (1)$$

$$\frac{6}{5} (4)$$

$$\frac{7}{6} (3)$$

پاسخ: گزینه ۴

مشاوره این تست بر اساس یکی از تمرین‌های فصل ۱ کتاب درسی فیزیک ۳ طرح شده است. تمرین‌ها و پرسش‌های کتاب درسی را جدی بگیرید.

درس نامه •• حرکت یکنواخت روی خط راست (سرعت ثابت)

در این نوع حرکت، اندازه و جهت سرعت متحرک در طول مسیر ثابت است. معادله مکان - زمان در حرکت با سرعت ثابت به صورت زیر است:

$$x = vt + x_0$$

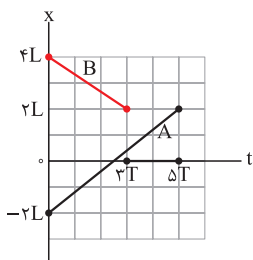
$$v = \text{سرعت (m/s)}$$

$$x_0 = \text{مکان اولیه یا مبدأ حرکت (m)}$$

$$x = \text{مکان متحرک در لحظه } t \text{ (m)}$$

نمودار مکان - زمان در حرکت با سرعت ثابت به صورت یک خط شیب‌دار است و شیب آن، سرعت متحرک را نشان می‌دهد.

پاسخ تشریحی گام اول: سرعت هر یک از دو متحرک A و B و معادله مکان - زمان آن‌ها را به دست می‌آوریم. برای این منظور طول هر واحد روی محور x را برابر با L و فاصله زمانی هر واحد روی محور زمان را برابر با T در نظر می‌گیریم:



$$v_A = \frac{\Delta x_A}{\Delta t_A} = \frac{4L}{5T} \Rightarrow x_A = v_A t + x_{0A} \Rightarrow x_A = \frac{4L}{5T} t - 2L$$

$$v_B = \frac{\Delta x_B}{\Delta t_B} = \frac{-2L}{3T} \Rightarrow x_B = v_B t + x_{0B} \Rightarrow x_B = -\frac{2L}{3T} t + 4L$$

گام دوم: معادله مکان - زمان این دو متحرک را برابر با هم قرار می‌دهیم تا لحظه به هم رسیدن و مکان به هم رسیدن آن‌ها را به دست آوریم:

$$x_A = x_B \Rightarrow \frac{4L}{5T} t - 2L = -\frac{2L}{3T} t + 4L \Rightarrow \frac{4L}{5T} t + \frac{2L}{3T} t = 6L \Rightarrow \frac{22}{15} \frac{t}{T} = 6 \Rightarrow t = \frac{90}{22} T \Rightarrow t = \frac{45}{11} T$$

$$x_A = \frac{4L}{5T} t - 2L \xrightarrow{t = \frac{45}{11} T} x_A = \frac{4L}{5T} \times \frac{45}{11} T - 2L = \frac{36}{11} L - 2L$$

$$\xrightarrow{x_A = x_B} x_B = x_A = \frac{14}{11} L$$



گام سوم: جابه‌جایی هر دو متحرک را تا لحظه به هم رسیدن، به دست آورده و نسبت آن‌ها را پیدا می‌کنیم:

$$\Delta x_A = x_A - x_{0A} = \frac{14}{11}L - (-2L) = \frac{14}{11}L + \frac{22}{11}L = \frac{36}{11}L$$

$$\Delta x_B = x_B - x_{0B} = \frac{14}{11}L - 4L = \frac{14}{11}L - \frac{44}{11}L = -\frac{30}{11}L$$

$$\frac{|\Delta x_A|}{|\Delta x_B|} = \frac{\frac{36}{11}L}{\frac{30}{11}L} = \frac{36}{30} = \frac{6}{5}$$

تست و پاسخ ۴۳

خودرویی پشت چراغ قرمز ایستاده است. با سبزشدن چراغ، خودرو با شتاب ثابت $1/8 \text{ m/s}^2$ شروع به حرکت می‌کند. در همین لحظه، کامیونی با سرعت ثابت 54 km/h از آن سبقت می‌گیرد. تا قبل از رسیدن خودرو به کامیون، بیشینه فاصله آن‌ها از هم چند متر است؟

$$62/5 \text{ (۲)}$$

$$31/25 \text{ (۱)}$$

$$250 \text{ (۴)}$$

$$125 \text{ (۳)}$$

پاسخ: گزینه ۲

خودت حل کنی بهتره لحظه‌ای را که سرعت خودرو با سرعت کامیون برابر می‌شود، به دست آورید. سپس مکان هر دو متحرک را در این لحظه حساب کنید. فاصله بین آن دو در این لحظه، بیشترین مقدار ممکن را دارد.

درس نامه ● معادله‌های مکان - زمان و سرعت - زمان در حرکت با شتاب ثابت روی محور X:

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$$

$$v = at + v_0$$

$$a = \text{شتاب (m/s}^2\text{)}$$

$$x = \text{مکان متحرک در لحظه (m)}$$

$$v_0 = \text{سرعت اولیه (m/s)}$$

$$t = \text{زمان (s)}$$

$$v = \text{سرعت در لحظه (m/s)}$$

$$x_0 = \text{مکان اولیه (m)}$$

پاسخ تشریحی گام اول: بیشترین فاصله خودرو تا کامیون، در لحظه‌ای است که سرعت خودرو با سرعت کامیون برابر می‌شود. این لحظه را به دست می‌آوریم:

$$v_A = 54 \text{ km/h} = \frac{54}{3/6} = 15 \text{ m/s}$$

$$v_B = at + v_0 \xrightarrow{a=1/8 \text{ m/s}^2, v_0=0} v_B = 1/8t$$

$$v_A = v_B \Rightarrow 15 = 1/8t \Rightarrow t = \frac{15}{1/8} \text{ s}$$

گام دوم: مکان کامیون و مکان خودرو در لحظه فوق را حساب می‌کنیم تا بیشینه فاصله آن‌ها از یکدیگر به دست آید:

$$x_A = v_A t + x_0 \xrightarrow{v_A=15 \text{ m/s}, t=\frac{15}{1/8} \text{ s}, x_0=0} x_A = 15 \times \frac{15}{1/8} = 15 \times \frac{25}{3} = 125 \text{ m}$$

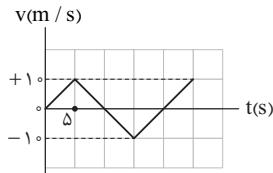
$$x_B = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \xrightarrow{a=1/8 \text{ m/s}^2, v_0=0, t=\frac{15}{1/8} \text{ s}, x_0=0} x_B = \frac{1}{2} \times 1/8 \times \left(\frac{15}{1/8}\right)^2 = \frac{225}{3/6} = 62/5 \text{ m}$$

$$x_A - x_B = 125 - 62/5 = 62/5 \text{ m}$$



تست و پاسخ ۴۴

نمودار سرعت - زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می کند، به شکل زیر است. اگر متحرک در مبدأ زمان، در مکان $x_0 = -10\text{m}$ قرار داشته باشد، در چه لحظه ای بر حسب ثانیه، برای سومین مرتبه از مکان $x = 6\text{m}$ عبور می کند؟



۱۶ (۱)

۱۷ (۲)

۲۳ (۳)

۲۴ (۴)

پاسخ: گزینه ۴

مشاوره این تست بر اساس یکی از پرسش های دوره ای فصل ۱ کتاب فیزیک ۳ طرح شده است. پرسش های کتاب درسی را به دقت مطالعه کنید.

خودت حل کنی بهتره با استفاده از نمودار سرعت - زمان داده شده، نمودار مکان - زمان متحرک را رسم کنید تا معلوم شود لحظه مورد نظر در کدام بازه زمانی قرار دارد. سپس با محاسبه شتاب و استفاده از معادله جابه جایی - زمان، لحظه مورد نظر را به دست آورید.

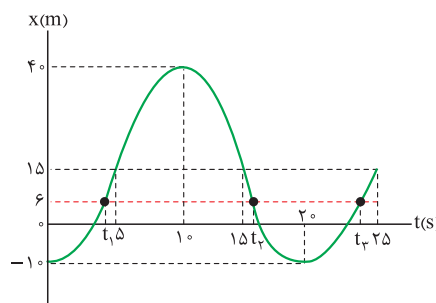
درس نامه

- (۱) یک حرکت کلی، ممکن است از دو یا چند مرحله حرکت با شتاب ثابت تشکیل شده باشد. ما می توانیم از معادلات و ویژگی های حرکت با شتاب ثابت، در هر یک از این مراحل استفاده کنیم. در این صورت مکان متحرک در پایان هر مرحله، به عنوان مکان اولیه برای مرحله بعدی حرکت است.
- (۲) در حرکت با شتاب ثابت، نمودار مکان - زمان به صورت قسمتی از یک سهمی است.



پاسخ تشریحی گام اول: می دانیم مساحت سطح محدود بین نمودار سرعت - زمان و محور زمان در هر بازه زمانی، برابر با جابه جایی در آن بازه زمانی است. با توجه به این نکته و با استفاده از نمودار سرعت - زمان داده شده، نمودار مکان - زمان متحرک را رسم می کنیم.

$\Delta t(s)$	$\Delta x(m)$
۰ تا ۵	$\frac{5 \times 10}{2} = 25$
۵ تا ۱۰	$\frac{5 \times 10}{2} = 25$
۱۰ تا ۱۵	$\frac{5(-10)}{2} = -25$
۱۵ تا ۲۰	$\frac{5(-10)}{2} = -25$
۲۰ تا ۲۵	$\frac{5 \times 10}{2} = 25$



متحرک در لحظه های t_1 ، t_2 و t_3 از مکان $x = 6\text{m}$ می گذرد.

لحظه t_3 مربوط به سومین مرتبه ای است که از مکان $x = 6\text{m}$ می گذرد.

گام دوم: شتاب حرکت را در بازه زمانی ۲۰ S تا ۲۵ S به دست می آوریم:

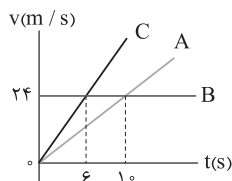
شتاب در بازه زمانی ۲۰ S تا t_3 نیز همین مقدار است.

گام سوم: در بازه زمانی ۲۰ S تا t_3 متحرک باید جابه جایی ۱۶ m را داشته باشد تا از مکان $x = -10\text{m}$ به مکان $x = +6\text{m}$ برسد. معادله جابه جایی در این بازه زمانی را می نویسیم و مقدار t_3 را به دست می آوریم:

$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t \xrightarrow[t=t_3-20, v_0=0]{\Delta x=16\text{m}, a=2\text{m/s}^2} 16 = \frac{1}{2} \times 2(t_3 - 20)^2 \Rightarrow 16 = (t_3 - 20)^2$$

$$\Rightarrow t_3 - 20 = \pm 4 \Rightarrow \begin{cases} t_3 = 24\text{s} \text{ ق ق } (20\text{s} < t_3 < 25\text{s}) \\ t_3 = 16\text{s} \text{ غ ق } \end{cases}$$

تست و پاسخ ۴۵



نمودار سرعت - زمان سه متحرک A، B و C که در راستای محور x حرکت می کنند، به شکل مقابل است. در لحظه ای که تندی متحرک A از تندی متحرک B، 6 m/s بیشتر است، فاصله دو متحرک A و C برابر با چند متر است؟ (در مبدأ زمان هر سه متحرک در یک مکان قرار دارند.)

- (۱) ۴۵
(۲) ۹۰
(۳) ۱۲۵
(۴) ۲۵۰

پاسخ: گزینه ۳

خودت حل کنی بهتره ابتدا لحظه ای را به دست آورید که در آن، تندی متحرک A از تندی متحرک B، 6 m/s بیشتر است، سپس تندی های دو متحرک A و C را در این لحظه حساب کنید، در پایان نیز با استفاده از مساحت سطح زیر نمودار $v-t$ فاصله دو متحرک A و C را پیدا کنید.

درس نامه

- نمودار سرعت - زمان در حرکت با سرعت ثابت، به صورت یک خط افقی، موازی با محور زمان است.
- نمودار سرعت - زمان در حرکت با شتاب ثابت، به صورت یک خط شیب دار است که شیب این خط، شتاب حرکت و نقطه شروع آن روی محور v ، سرعت اولیه (v_0) را نشان می دهد.

پاسخ تشریحی گام اول: ابتدا تعیین می کنیم که در چه لحظه ای، تندی متحرک A از تندی متحرک B، 6 m/s بیشتر است. برای این منظور، شتاب متحرک A را به دست آورده و معادله سرعت - زمان آن را می نویسیم:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow a_A = \frac{24 - 0}{10 - 0} = 2.4 \text{ m/s}^2$$

$$v = at + v_0 \xrightarrow{a_A = 2.4 \text{ m/s}^2, v_0 = 0} v_A = 2.4t$$

$$v_A - v_B = 6 \xrightarrow{v_A = 2.4t, v_B = 24 \text{ m/s}} 2.4t - 24 = 6 \Rightarrow 2.4t = 30 \Rightarrow t = \frac{30}{2.4} = 12.5 \text{ s}$$

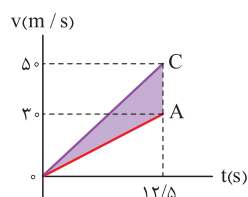
گام دوم: تندی هر یک از دو متحرک A و C را در لحظه $t = 12.5 \text{ s}$ به دست می آوریم:

$$v_A = 2.4t \xrightarrow{t = 12.5 \text{ s}} v_A = 2.4 \times 12.5 = 30 \text{ m/s}$$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow a_C = \frac{24 - 0}{6 - 0} = 4 \text{ m/s}^2$$

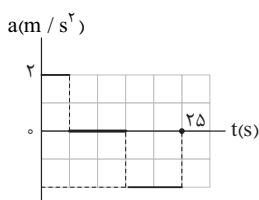
$$v = at + v_0 \xrightarrow{a_C = 4 \text{ m/s}^2, v_0 = 0, t = 12.5 \text{ s}} v_C = 4 \times 12.5 = 50 \text{ m/s}$$

گام سوم: با استفاده از مساحت سطح زیر نمودار سرعت - زمان، فاصله بین دو متحرک A و C را در لحظه $t = 12.5 \text{ s}$ به دست می آوریم:



$$\Delta x_C - \Delta x_A = \frac{(v_C - v_A)12.5}{2} \Rightarrow \Delta x_C - \Delta x_A = \frac{(50 - 30)12.5}{2} = 125 \text{ m}$$

تست و پاسخ ۴۶



نمودار شتاب - زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می کند، در بازه زمانی صفر تا 2.5 s به شکل مقابل است. اگر سرعت متحرک در مبدأ زمان برابر با $\vec{v}_0 = (-5 \text{ m/s})\vec{i}$ باشد، در مدتی که متحرک به صورت تندشونده، در خلاف جهت محور x حرکت می کند، تندی متوسط آن چند متر بر ثانیه است؟

- (۱) $2/5$
(۲) ۵
(۳) $7/5$
(۴) ۱۵

پاسخ: گزینه ۳



مشاوره این تست بر اساس یکی از تمرین‌های متن کتاب درسی فیزیک ۳ و با تغییراتی در آن، طرح شده است. تعدادی از تست‌های کنکور شما نیز از تمرین‌ها و پرسش‌های کتاب درسی، برداشت می‌شوند.

خودت حل کنی بهتره ابتدا نمودار سرعت - زمان این متحرک را در بازه زمانی ۰ تا ۲۵ s رسم کنید. سپس در قسمتی از نمودار که زیر محور t قرار می‌گیرد و در حال دورشدن از محور t است، تندی متوسط را به دست آورید.

درس نامه

(۱) در حرکت با شتاب ثابت، نمودار شتاب - زمان، به صورت یک خط افقی است و مساحت سطح زیر این نمودار در هر بازه زمانی، تغییر سرعت متحرک در آن بازه زمانی را نشان می‌دهد.

(۲) اگر در یک بازه زمانی، حرکت متحرک روی خط راست و بدون تغییر جهت باشد، تندی متوسط متحرک با اندازه سرعت متوسط آن، برابر خواهد بود.

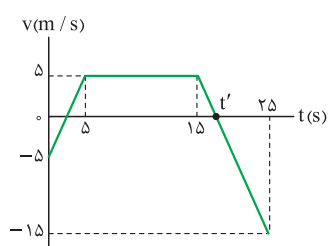
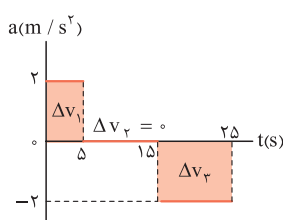
(۳) در حرکت با شتاب ثابت:

$$v_{av} = \text{سرعت متوسط بین دو لحظه } t_1 \text{ تا } t_2 \text{ (m/s)}$$

$$v_1 = \text{سرعت در لحظه } t_1 \text{ (m/s)}$$

$$v_2 = \text{سرعت در لحظه } t_2 \text{ (m/s)}$$

$$v_{av} = \frac{v_1 + v_2}{2}$$



پاسخ تشریحی گام اول: با استفاده از مساحت سطح زیر نمودار شتاب - زمان در هر بازه زمانی، تغییرات سرعت را به دست آورده و با استفاده از آن، نمودار سرعت - زمان متحرک را رسم می‌کنیم:

$$\Delta v_1 = 2 \times 5 = 10 \text{ m/s}$$

$$\Delta v_2 = 0$$

$$\Delta v_3 = -2(25 - 15) = -20 \text{ m/s}$$

$$\Delta v_1 = v_1 - v_0 \Rightarrow 10 = v_1 - (-5) \Rightarrow v_1 = 5 \text{ m/s}$$

$$\Delta v_2 = v_2 - v_1 \Rightarrow 0 = v_2 - 5 \Rightarrow v_2 = 5 \text{ m/s}$$

$$\Delta v_3 = v_3 - v_2 \Rightarrow -20 = v_3 - 5 \Rightarrow v_3 = -15 \text{ m/s}$$

گام دوم: در بازه زمانی t' تا $t = 25$ s، سرعت متحرک، منفی است یعنی در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند و حرکت آن تندشونده است. سرعت متوسط در این بازه زمانی را به دست می‌آوریم:

$$v_{av} = \frac{v_{t'} + v_3}{2} \xrightarrow{v_{t'}=0, v_3=-15 \text{ m/s}} v_{av} = \frac{0 + (-15)}{2} = -7.5 \text{ m/s}$$

$$|v_{av}| = 7.5 \text{ m/s}$$

تندی متوسط با اندازه سرعت متوسط، برابر است.

تست و پاسخ ۴۷

در شرایط خلأ، گلوله A از ارتفاع h نسبت به سطح زمین و ۳ s بعد، گلوله B از ارتفاع $\frac{h}{4}$ نسبت به سطح زمین رها می‌شوند. اگر دو گلوله هم‌زمان به سطح زمین برسند، h برابر با چند متر است؟ ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

۱۸۰ (۴)

۱۲۵ (۳)

۸۰ (۲)

۴۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

مشاوره این تست، دقیقاً یکی از پرسش‌های آخر فصل یک، از کتاب درسی فیزیک ۳ رشته ریاضی است.

خودت حل کنی بهتره با استفاده از رابطه مستقل از زمان، نسبت سرعت گلوله A به سرعت گلوله B را در لحظه رسیدن به زمین به دست آورید. سپس با استفاده از معادله سرعت - زمان گلوله‌ها، زمان سقوط آن‌ها را محاسبه کنید و در پایان، ارتفاع سقوط گلوله A یعنی h را به دست آورید.





درس نامه

- (۱) معادله‌های حرکت سقوط آزاد و بدون سرعت اولیه (جهت مثبت رو به پایین فرض شده است):
- $$v^2 = 2gh$$
- $$v = gt$$
- $$h = \frac{1}{2}gt^2$$
- h = ارتفاع سقوط (m) v = سرعت (m/s)
- t = زمان سقوط (s) g = اندازه شتاب گرانش در سطح زمین = 10 m/s^2
- (۲) اگر دو متحرک با اختلاف زمانی Δt حرکت خود را شروع کنند، در صورتی که زمان را برای اولی t در نظر بگیریم، برای دومی که حرکت خود را دیرتر شروع کرده، زمان به صورت $t' = t - \Delta t$ خواهد بود.

پاسخ تشریحی

گام اول: رابطه مستقل از زمان را برای سرعت هر دو گلوله نوشته و نسبت سرعت‌های آن‌ها در لحظه برخورد به زمین را به دست می‌آوریم:

$$\frac{v_A^2}{v_B^2} = \frac{2gh_A}{2gh_B} \xrightarrow{h_A=h, h_B=\frac{h}{4}} \frac{v_A^2}{v_B^2} = \frac{h}{\frac{h}{4}} = 4 \Rightarrow \frac{v_A}{v_B} = 2$$

گام دوم: معادله سرعت - زمان را برای هر دو گلوله می‌نویسیم تا زمان سقوط گلوله A را حساب کنیم. اگر زمان سقوط گلوله A را t فرض کنیم، زمان سقوط گلوله B، $t - 3$ خواهد بود.

$$v = gt \Rightarrow \frac{v_A}{v_B} = \frac{gt_A}{gt_B} \xrightarrow{t_A=t, \frac{v_A}{v_B}=2} \frac{2}{1} = \frac{t}{t-3} \Rightarrow 2t-6=t \Rightarrow t=6 \text{ s}$$

گام سوم: ارتفاع سقوط گلوله A را پیدا می‌کنیم:

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \xrightarrow{g=10 \text{ m/s}^2, t=6 \text{ s}} h = \frac{1}{2} \times 10 \times 6^2 = 5 \times 36 = 180 \text{ m}$$

تست و پاسخ ۴۸

در یک مسیر مستقیم، خودرویی به جرم 1200 kg با سرعت ثابت 90 km/h در حال حرکت است. در یک لحظه، راننده خودرو مانعی را مقابل خود می‌بیند و ترمز می‌کند. پس از این لحظه، خودرو با طی مسافت 90 m می‌ایستد. اگر زمان واکنش راننده 0.6 s باشد، اندازه نیروی اصطکاک وارد بر خودرو در حین ترمز، چند کیلو نیوتون است؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$)

$$\frac{250}{3} \text{ (۴)}$$

$$\frac{25}{3} \text{ (۳)}$$

$$50 \text{ (۲)}$$

$$5 \text{ (۱)}$$

پاسخ: گزینه ۱

مشاوره این تست با توجه به یکی از پرسش‌های دوره‌ای آخر فصل ۲ کتاب درسی فیزیک ۳ رشته ریاضی مطرح شده است. همواره در چنین تست‌هایی که مطالب حرکت‌شناسی با قانون دوم نیوتون ترکیب می‌شوند، حلقه رابطه بین این دو مطلب، کمیت شتاب است.

خود حل کنی بهتره ابتدا مسافتی را که خودرو، در زمان واکنش راننده طی می‌کند حساب کنید و آن را از 90 m کم کنید تا مسافت ترمز به دست آید. سپس با استفاده از رابطه مستقل از زمان برای سرعت خودرو، شتاب آن را پیدا کنید. در پایان نیز با به کار بردن قانون دوم نیوتون، اندازه نیروی اصطکاک را به دست آورید.

درس نامه

(۱) رابطه مستقل از زمان برای سرعت متحرک در حرکت با شتاب ثابت:

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x$$

شتاب (m/s^2) سرعت (m/s)

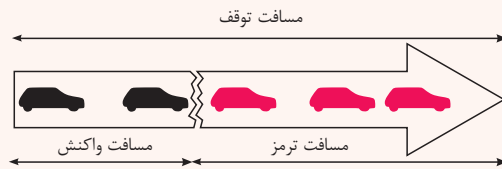
جابجایی (m) سرعت اولیه (m/s)

(۲) رابطه قانون دوم نیوتون:

$$\vec{F}_{\text{net}} = m\vec{a}$$

جرم (kg) شتاب (m/s^2)

نیروی خالص (N)



۳) کل مسافت توقف، دو قسمت دارد؛ مسافت واکنش (مسافتی که خودرو از لحظه دیدن مانع تا لحظه ترمز گرفتن طی می کند) و مسافت ترمز (مسافتی که خودرو از لحظه ترمز گرفتن تا توقف کامل طی می کند).

اگر در متن سؤال، به زمان واکنش راننده اشاره شود، در حل سؤال باید مسافت واکنش را در نظر بگیریم.

پاسخ تشریحی

گام اول: سرعت اولیه خودرو را بر حسب m/s به دست می آوریم:

$$v_0 = 90 \text{ km/h} = \frac{90}{3.6} = 25 \text{ m/s}$$

در مدت زمان واکنش، خودرو با سرعت ثابت به حرکت خود ادامه می دهد. مسافت واکنش را به صورت زیر محاسبه می کنیم:

$$\Delta x_1 = v_0 \Delta t_1 \quad \frac{v_0 = 25 \text{ m/s}}{\Delta t_1 = 0.6 \text{ s}} \rightarrow \Delta x_1 = 25 \times 0.6 = 15 \text{ m}$$

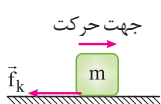
گام دوم: حرکت دو مرحله دارد. مرحله اول با سرعت ثابت و مرحله دوم با شتاب ثابت و کندشونده است.



$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 \Rightarrow 90 = 15 + \Delta x_2 \Rightarrow \Delta x_2 = 90 - 15 = 75 \text{ m}$$

شتاب حرکت در مرحله کندشونده را به دست می آوریم:

$$v^2 - v_0^2 = 2a \Delta x_2 \quad \frac{v=0, \Delta x_2=75 \text{ m}}{v_0=25 \text{ m/s}} \rightarrow 0 - 25^2 = 2a(75) \Rightarrow a = -\frac{25 \times 25}{150} = -\frac{25}{6} \text{ m/s}^2$$



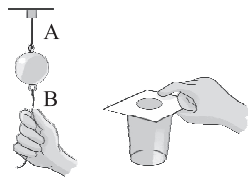
گام سوم: قانون دوم نیوتون را در مرحله کندشونده می نویسیم و اندازه نیروی اصطکاک را پیدا می کنیم. پس از

ترمز گرفتن، نیروی محرک وجود ندارد.

$$\vec{F}_{\text{net}} = m\vec{a} \Rightarrow -f_k = ma \quad \frac{m=1200 \text{ kg}}{a=-\frac{25}{6} \text{ m/s}^2} \rightarrow -f_k = 1200 \left(-\frac{25}{6}\right) \Rightarrow f_k = 5000 \text{ N} = 5 \text{ kN}$$

تست و پاسخ ۴۹

در شکل (۱)، مقوایی روی لیوان و یک سکه روی مقوا قرار دارد. در شکل (۲) گوی سنگینی توسط نخ A از سقف آویزان شده و نخ B به پایین گوی بسته شده است. کدام یک از موارد زیر درباره این دو شکل درست است؟



شکل (۱) شکل (۲)

- الف) در شکل (۱)، اگر مقوا را سریع بکشیم، سکه همراه مقوا حرکت نمی کند و در لیوان می افتد.
ب) در شکل (۱)، اگر مقوا را به آرامی بکشیم، سکه همراه مقوا حرکت نمی کند و در لیوان می افتد.
پ) در شکل (۲)، اگر نخ B را به صورت ناگهانی بکشیم، نخ A پاره می شود.
ت) در شکل (۲)، اگر نخ B را به آرامی بکشیم، نخ A پاره می شود.

(۲) الف و ت

(۴) ب و ت

(۱) الف و پ

(۳) ب و پ

پاسخ: گزینه ۲

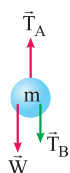
مشاوره این تست بر اساس یکی از پرسش های متن فصل ۲ کتاب درسی فیزیک ۳ طرح شده است. اگر کتاب درسی و پرسش ها و مثال های آن را کنار بگذارید، بعداً پشیمان می شوید.

درس نامه

قانون اول نیوتون: یک جسم حالت سکون یا حرکت با سرعت ثابت خود را حفظ می کند، مگر آن که نیروی خالص غیر صفری به آن وارد شود. یعنی وقتی نیروهای وارد بر جسم متوازن باشند، اگر جسم ساکن باشد، همچنان ساکن می ماند و اگر در حال حرکت باشد، سرعتش تغییر نمی کند. به این تمایل اجسام که می خواهند وضعیت حرکت خود را حفظ کنند، لختی گفته می شود. هرچه تغییر سرعت، ناگهانی تر باشد، لختی قابل ملاحظه تر است.



پاسخ تشریحی گام اول: در شکل (۱) اگر مقوا را سریع بکشیم، سکه به علت لختی‌ای که دارد، می‌خواهد در جای خود بماند؛ پس وقتی زیر آن خالی می‌شود، درون لیوان می‌افتد. یعنی مورد «الف» درست و مورد «ب» نادرست است.



گام دوم: در شکل (۲) اگر نیروی ناگهانی T_B بیشتر از تحمل نخ باشد، لختی گوی سبب می‌شود تا قبل از آن که اثر T_B به بالای گوی برسد، نخ پایین پاره شود. (نادرستی «پ») اما اگر نخ B را به آرامی بکشیم، در حالت تعادل داریم:

$$T_A - T_B - W = 0 \Rightarrow T_A = T_B + W \Rightarrow T_A > T_B$$

بنابراین ابتدا نخ A پاره می‌شود. (درستی «ت»)

تست و پاسخ ۵۰

دو گوی هم‌اندازه A و B که جرم گوی A دو برابر جرم گوی B است، از بالای برجی به‌طور هم‌زمان رها می‌شوند. با فرض این که نیروی مقاومت هوا در طی حرکت دو گوی ثابت و یکسان باشد، به‌ترتیب از راست به چپ، اندازه شتاب و تندی برخورد با سطح زمین کدام گوی بیشتر است؟

A, B (۴)

B, A (۳)

B, B (۲)

A, A (۱)

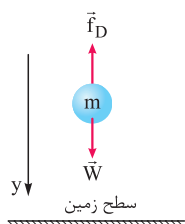
پاسخ: گزینه ۱

مشاوره این تست، یکی از مثال‌های حل‌شده کتاب درسی فیزیک ۳ در فصل ۲ است.

خودت حل‌کنی بهتره ابتدا با استفاده از قانون دوم نیوتون، شتاب سقوط هر جسم را برحسب جرم آن به دست آورید. سپس مقایسه کنید که شتاب کدامیک بیشتر است. برای مقایسه تندی برخورد آن‌ها با سطح زمین هم، رابطه سرعت - جابه‌جایی (مستقل از زمان) را به کار ببرید.

درس‌نامه •• نیروی مقاومت شاره

وقتی جسمی درون یک شاره قرار دارد و نسبت به آن حرکت می‌کند، از طرف شاره، نیرویی در خلاف جهت حرکت جسم، به آن وارد می‌شود که آن را با $\vec{f}_D$ نشان می‌دهند و نیروی مقاومت شاره می‌نامند. مثلاً جسمی که در هوا سقوط می‌کند، نیروی $\vec{f}_D$ رو به بالا بر آن اثر می‌کند.



پاسخ تشریحی گام اول: بر این گوی‌ها، دو نیروی وزن و مقاومت هوا وارد می‌شود. طبق قانون دوم نیوتون، نیروی خالص وارد بر هر گوی، برابر با حاصل ضرب جرم در شتاب آن است. نیروی مقاومت هوا با $\vec{f}_D$ و وزن را با $\vec{W}$ نشان می‌دهیم و برای بررسی ساده‌تر حرکت گوی‌ها، جهت مثبت محور y را به طرف پایین انتخاب می‌کنیم:

$$F_{\text{net}} = ma \Rightarrow W - f_D = ma \Rightarrow mg - f_D = ma \Rightarrow a = \frac{mg - f_D}{m} \Rightarrow a = g - \frac{f_D}{m}$$

$$m_A = 2m_B \Rightarrow a_A > a_B$$

یعنی با در نظر گرفتن مقاومت هوا، هر چه m بیشتر باشد، شتاب حرکت بیشتر است.

$$v^2 - v_0^2 = 2a \Delta y \xrightarrow[v_0=0]{\Delta y=h} v^2 - 0 = 2ah \Rightarrow v = \sqrt{2ah}$$

گام دوم: طبق رابطه سرعت - جابه‌جایی می‌توانیم بنویسیم:

$$a_A > a_B \Rightarrow v_A > v_B$$

یعنی هر گلوله که شتاب بیشتری دارد، سرعت برخورد آن به سطح زمین نیز بیشتر است.

تست و پاسخ ۵۱

در شکل زیر، کارگری یک جعبه به جرم 80 kg را توسط طنابی افقی با نیروی ثابت 240 N می‌کشد و جعبه با شتاب 5 m/s^2 شروع به حرکت می‌کند. وزنه‌ای به جرم چند کیلوگرم به محتویات جعبه اضافه شود، تا پس از آن، اندازه سرعت جعبه تغییری نکند؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$)



۱۶ (۲)

۱۲ (۱)

۱۶۰ (۴)

۱۲۰ (۳)

پاسخ: گزینه ۲



خودت حل کنی بهتره ابتدا با نوشتن قانون دوم نیوتون، نیروی اصطکاک بین جسم و سطح در حالت اول و ضریب اصطکاک سطح را به دست آورید. سپس نیروی اصطکاک و نیروی عمودی سطح در حالت دوم را حساب کنید. در پایان نیز با توجه به نیروی عمودی سطح در حالت دوم، جرم اضافه شده به محتویات جعبه را محاسبه کنید.

درس نامه

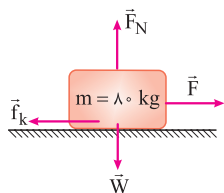
نیروی اصطکاک جنبشی ($\vec{f}_k$) نیروی اصطکاکی است که هنگام لغزش جسم، موازی با سطح و در خلاف جهت لغزش بر جسم اثر می کند. اندازه این نیرو از رابطه زیر به دست می آید:

اندازه نیروی عمودی سطح (N) اندازه نیروی اصطکاک جنبشی (N)

$$f_k = \mu_k \times F_N$$

ضریب اصطکاک جنبشی

پاسخ تشریحی گام اول: نیروهای وارد بر جسم را رسم می کنیم و قانون دوم نیوتون را در راستای قائم می نویسیم:



$$(F_{\text{net}})_y = 0 \Rightarrow F_N - W = 0 \Rightarrow F_N = mg = 80 \times 10 = 800 \text{ N}$$

گام دوم: قانون دوم نیوتون را در راستای افقی می نویسیم تا نیروی اصطکاک و ضریب اصطکاک جنبشی بین جسم و سطح را به دست آوریم:

$$(F_{\text{net}})_x = ma_x \Rightarrow F - f_k = ma_x \xrightarrow{F=240\text{ N}, m=80\text{ kg}, a_x=0.5\text{ m/s}^2} 240 - f_k = 80 \times 0.5 \Rightarrow f_k = 200 \text{ N}$$

$$f_k = \mu_k \times F_N \xrightarrow{f_k=200\text{ N}, F_N=800\text{ N}} 200 = \mu_k \times 800 \Rightarrow \mu_k = \frac{1}{4}$$

گام سوم: نیروی عمودی سطح در حالت دوم را حساب می کنیم. در این حالت شتاب حرکت به صفر می رسد:

$$(F_{\text{net}})_x = 0 \Rightarrow F - f'_k = 0 \Rightarrow f'_k = F = 240 \text{ N}$$

$$f'_k = \mu_k F'_N \xrightarrow{f'_k=240\text{ N}, \mu_k=\frac{1}{4}} 240 = \frac{1}{4} \times F'_N \Rightarrow F'_N = 960 \text{ N}$$

گام چهارم: جرم اضافه شده به محتویات جعبه را به دست می آوریم:

$$F'_N = (m + m')g \xrightarrow{F'_N=960\text{ N}, m=80\text{ kg}, g=10\text{ N/kg}} 960 = (80 + m')10 \Rightarrow 96 = 80 + m' \Rightarrow m' = 16 \text{ kg}$$

تست و پاسخ ۵۲

وزنه ای به جرم 4 kg به انتهای فنری با ثابت 400 N/m متصل شده و فنر از سقف یک آسانسور آویزان شده است. در حالتی که آسانسور با شتاب رو به پایین 3 m/s^2 حرکت می کند، طول فنر به L_1 و در حالتی که آسانسور با شتابی به بزرگی 2 m/s^2 به صورت کندشونده به سمت پایین حرکت می کند، طول فنر به L_2 می رسد. $L_1 - L_2$ چند سانتی متر است؟

$$1/25 \text{ (۲)}$$

$$5 \text{ (۱)}$$

$$-1/25 \text{ (۴)}$$

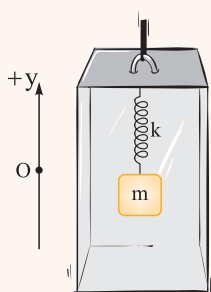
$$-5 \text{ (۳)}$$

پاسخ: گزینه ۳

خودت حل کنی بهتره طول آزاد فنر را L_0 در نظر بگیریم. سپس قانون دوم نیوتون را برای جسم متصل به فنر درون آسانسور در دو حالت بنویسیم تا ΔL را در هر حالت به دست آوریم. اختلاف ΔL_1 و ΔL_2 همان $L_1 - L_2$ است.

درس نامه: فنری را در نظر بگیرید که طول آزاد آن L_0 و ثابت آن k است. اگر این فنر را از یک سر به سقف یک آسانسور بیاویزیم و وزنه‌ای به جرم m را به انتهای دیگر آن متصل کنیم، در شرایط مختلف حرکت وقتی طول فنر به L می‌رسد با استفاده از قانون دوم نیوتون می‌توان نوشت:

$$F_{\text{net}} = ma \Rightarrow F_e - mg = ma \Rightarrow F_e = m(g + a) \Rightarrow k(L - L_0) = m(g + a)$$



k = ثابت فنر (N/m)

L_0 = طول آزاد فنر (m)

L = طول ثانویه فنر (m)

m = جرم وزنه (kg)

g = شتاب گرانش (m/s^2)

a = شتاب حرکت آسانسور (m/s^2)

اگر شتاب حرکت آسانسور رو به بالا باشد، $a > 0$ و اگر رو به پایین باشد، $a < 0$ است.

پاسخ تشریحی گام اول: وقتی آسانسور شتاب رو به پایین 3 m/s^2 را دارد، می‌توان نوشت:

$$k(L - L_0) = m(g + a) \xrightarrow{g=10 \text{ m/s}^2, a=-3 \text{ m/s}^2} 400(L_1 - L_0) = 4(10 - 3) \Rightarrow (L_1 - L_0) = 0.07 \text{ m}$$

گام دوم: وقتی آسانسور به صورت کندشونده به سمت پایین حرکت می‌کند، سرعت آن منفی است اما شتاب حرکت آن مثبت است ($a > 0$). بنابراین در حالت دوم می‌توان نوشت:

$$k(L - L_0) = m(g + a) \xrightarrow{g=10 \text{ m/s}^2, a=2 \text{ m/s}^2} 400(L_2 - L_0) = 4(10 + 2) \Rightarrow (L_2 - L_0) = 0.12 \text{ m}$$

گام سوم: با توجه به تغییر طول فنر در حالت‌های اول و دوم، داریم:

$$L_1 - L_2 = (L_1 - L_0) - (L_2 - L_0) = 0.07 - 0.12 = -0.05 \text{ m} = -5 \text{ cm}$$

تست و پاسخ ۵۳

اگر جرم ماهواره‌ای 250 kg باشد، وزن آن در ارتفاع 3600 کیلومتری از سطح زمین، چند نیوتون است؟ (ثابت گرانش عمومی را برابر $\frac{2}{3} \times 10^{-11} \text{ N.m}^2/\text{kg}^2$ ، جرم کره زمین را برابر $6 \times 10^{24} \text{ kg}$ و شعاع آن را برابر 6400 km در نظر بگیرید).

فاصله از مرکز زمین
 $r = R_e + h = 6400 + 3600 = 10^4 \text{ km}$

1000 (۲)

1296 (۴)

100 (۱)

$129/6$ (۳)

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ تشریحی طبق قانون گرانش عمومی، نیروی گرانش زمین بر جسم (وزن جسم) را حساب می‌کنیم:

$$F = \frac{Gm_1m_2}{r^2} = \frac{GM_em}{(R_e + h)^2} \xrightarrow{G=\frac{2}{3} \times 10^{-11} \text{ N.m}^2/\text{kg}^2, M_e=6 \times 10^{24} \text{ kg}, m=250 \text{ kg}, R_e=6400 \text{ km}, h=3600 \text{ km}} F = \frac{\frac{2}{3} \times 10^{-11} \times 6 \times 10^{24} \times 250}{((6400 + 3600) \times 10^3)^2} = \frac{10^{17}}{10^{14}} = 10^3 = 1000 \text{ N}$$

تست و پاسخ ۵۴

جسمی به جرم 250 g که با سرعت 16 m/s در جهت محور x در حال حرکت است، به مانعی برخورد کرده و با تندی 4 m/s در جهت مخالف برمی‌گردد. اگر زمان تماس جسم با مانع 0.8 s باشد، نیروی خالص متوسط وارد بر جسم در این مدت، بر حسب نیوتون، کدام است؟

$\vec{v}_2 = -4(\text{m/s})\vec{i}$

$-37/5\vec{i}$ (۲)

$-62/5\vec{i}$ (۴)

$37/5\vec{i}$ (۱)

$62/5\vec{i}$ (۳)

پاسخ: گزینه ۴



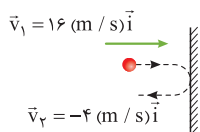
درس نامه •• تکانه و قانون دوم نیوتون

نیروی خالص متوسط وارد بر جسم برابر است با نسبت تغییر تکانه جسم به مدت زمان تغییر تکانه و طبق رابطه زیر به دست می آید:

$$\vec{F}_{av} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}$$

نکته طبق رابطه بالا درمی یابیم که، بردار نیروی خالص متوسط با بردار تغییر تکانه جسم هم جهت است.

پاسخ تشریحی گام اول: مقدار و جهت تغییر تکانه جسم را حساب می کنیم. با توجه به شکل زیر داریم:



$$\vec{p} = m\vec{v} \Rightarrow \Delta \vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$

$$\frac{m=250g=0.25kg}{\vec{v}_1=16(m/s)\vec{i}, \vec{v}_2=-4(m/s)\vec{i}} \rightarrow \Delta \vec{p} = 0.25(-4\vec{i} - 16\vec{i}) = -5\left(\frac{kg \cdot m}{s}\right)\vec{i}$$

گام دوم: بردار نیروی خالص متوسط را به دست می آوریم:

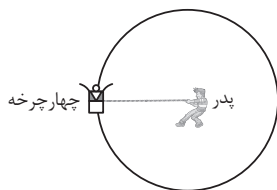
$$\vec{F}_{av} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \frac{-5(kg \cdot m/s)\vec{i}}{\Delta t=0.1s} \rightarrow \vec{F}_{av} = \frac{-5}{0.1}(N)\vec{i} = -50(N)\vec{i}$$

تست و پاسخ ۵۵

مجموع جرم آن ها برابر است با:

$$m = 20 + 5 = 25 \text{ kg}$$

شعاع دایره: $r = 2 \text{ m}$



در شکل زیر، پدری فرزند ۲۰ کیلوگرمی خود را در یک چهار چرخه ۵ کیلوگرمی قرار داده و توسط یک طناب ۲ متری، چهار چرخه را روی سطح افقی بدون اصطکاک، به گونه ای می کشد تا چهار چرخه روی محیط دایره ای، با تندی ثابت حرکت کند. اگر نیروی کشش طناب ۸۰ N باشد، چهار چرخه در هر دقیقه چند مرتبه محیط دایره را طی می کند؟ ($\pi^2 = 10$)

نیروی کشش طناب، همان نیروی مرکزگرا است.

۶ (۲)
۱۲ (۴)

۵ (۱)
۱۰ (۳)

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ تشریحی گام اول: دوره تناوب حرکت دایره ای را حساب می کنیم. طبق رابطه نیروی مرکزگرا داریم:

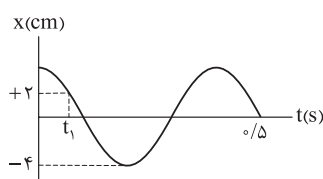
$$F_C = \frac{mv^2}{r} \xrightarrow{v = \frac{2\pi r}{T}} F_C = \frac{4\pi^2 mr}{T^2} \xrightarrow{F_C=80N, \pi^2=10, m=25kg, r=2m} 80 = \frac{4 \times 10 \times 25 \times 2}{T^2} \Rightarrow T^2 = 25 \Rightarrow T = 5 \text{ s}$$

گام دوم: تعداد دور در مدت یک دقیقه را حساب می کنیم:

$$T = \frac{t}{n} \xrightarrow{T=5s, t=60s} 5 = \frac{60}{n} \Rightarrow n = \frac{60}{5} = 12$$

تست و پاسخ ۵۶

نمودار مکان - زمان نوسانگر هماهنگ ساده ای که در راستای محور x نوسان می کند، به شکل زیر است. شتاب نوسانگر در لحظه t_1 ، در SI کدام است؟ ($\pi^2 = 10$)



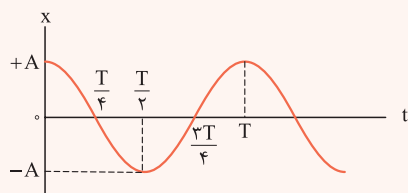
۳ / ۲ i (۱)
-۳ / ۲ i (۲)
۵ i (۳)
-۵ i (۴)

پاسخ: گزینه ۴



درس نامه

در نمودار مکان - زمان حرکت هماهنگ ساده مطابق شکل زیر، داریم:



A: دامنه

T: دوره تناوب

شتاب نوسانگر هماهنگ ساده در هر مکان، از رابطه زیر محاسبه می شود:

ω : بسامد زاویه ای (rad/s)

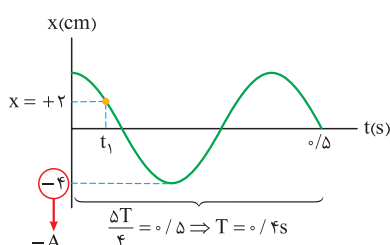
مکان نوسانگر (m) شتاب (m/s^2)

$$a = -\omega^2 x \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

پاسخ تشریحی

گام اول: با توجه به نمودار مکان - زمان نوسانگر، دوره تناوب و مکان

نوسانگر در لحظه t_1 را به دست می آوریم:



$$\begin{cases} T = 0.4 \text{ s} \\ x_{t_1} = 2 \text{ cm} = 0.02 \text{ m} \end{cases}$$

گام دوم: شتاب نوسانگر در لحظه t_1 را طبق رابطه زیر حساب می کنیم:

$$\vec{a} = -\omega^2 \vec{x} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0.4} = \Delta\pi \text{ (rad/s)} \quad \vec{x} = 0.02 \text{ (m)} \hat{i}, \pi^2 = 10$$

$$a = -(\Delta\pi)^2 \times 0.02 \hat{i} = -(25 \times 10) \times 0.02 \hat{i} = -5 \text{ (m/s}^2\text{)} \hat{i}$$

تست و پاسخ ۵۷

دامنه نوسان برابر است با: $A = 9 \text{ cm}$

جسمی به جرم 750 g به فنری افقی با ثابت 6 N/cm متصل است. فنر به اندازه 9 cm فشرده و سپس رها می شود و جسم روی سطح

افقی بدون اصطکاک شروع به نوسان می کند. وقتی تندی جسم به $1/6 \text{ m/s}$ می رسد، انرژی پتانسیل کشسانی آن چند ژول است؟

$$k = 6 \frac{\text{N}}{\text{cm}} = 600 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$2/43 \text{ (2)}$$

$$24/3 \text{ (1)}$$

$$1/47 \text{ (4)}$$

$$14/7 \text{ (3)}$$

پاسخ: گزینه ۴

درس نامه

در حرکت هماهنگ ساده، انرژی مکانیکی (E) برابر است با مجموع انرژی جنبشی (K) و انرژی پتانسیل (U). انرژی مکانیکی در حرکت

هماهنگ ساده نوسانگر جرم - فنر از رابطه زیر به دست می آید:

$$E = \frac{1}{2} k A^2$$

ثابت فنر ($\frac{\text{N}}{\text{m}}$)
انرژی مکانیکی (J)
دامنه (m)

گام اول: انرژی مکانیکی نوسانگر جرم - فنر را با داشتن دامنه نوسان و ثابت فنر حساب می کنیم:

$$E = \frac{1}{2} k A^2 \quad \frac{k=600 \text{ N/m}}{A=9 \text{ cm}=0.09 \text{ m}} \rightarrow E = \frac{1}{2} \times 600 \times (0.09)^2 = 2.43 \text{ J}$$

1×10^{-4}





گام دوم: انرژی جنبشی نوسانگر را حساب می‌کنیم:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \xrightarrow[m=75 \times 10^{-3} \text{ kg}]{v=1/6 \text{ m/s}} K = \frac{1}{2} \times 0.075 \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 = 0.00104 \text{ J}$$

گام سوم: انرژی پتانسیل نوسانگر را با داشتن انرژی مکانیکی و انرژی جنبشی به دست می‌آوریم:

$$E = K + U \xrightarrow[E=2/43 \text{ J}]{K=0.00104 \text{ J}} 2/43 = 0.00104 + U \Rightarrow U = 0.00104 \text{ J}$$

تست و پاسخ ۵۸

سیم با چگالی $7/8 \text{ g/cm}^3$ و سطح مقطع 5 mm^2 بین دو نقطه با نیروی 156 N کشیده شده است. تندی انتشار موج عرضی در این سیم چند متر بر ثانیه است؟

۴۰۰ (۴)

۴۰ (۳)

۲۰۰ (۲)

۲۰ (۱)

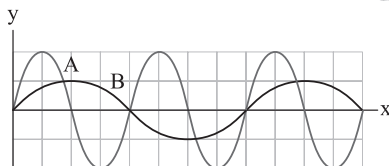
پاسخ: گزینه ۲

مشاوره اگر فرمولای کمکی تندی انتشار موج در ریسمان رو بلد نیستی، همین الان پرو در نسخه کتاب خیلی سبز بفون و یادش بگیر چون خیلی مهمه!

پاسخ تشریحی طبق رابطه زیر، تندی انتشار موج عرضی در سیم را حساب می‌کنیم:

$$v = \sqrt{\frac{F}{\rho A}} \xrightarrow[A=5 \times 10^{-6} \text{ m}^2]{F=156 \text{ N}, \rho=7800 \text{ kg/m}^3} v = \sqrt{\frac{156}{7800 \times 5 \times 10^{-6}}} = \sqrt{\frac{156}{39}} \times 10^4 = 200 \text{ m/s}$$

تست و پاسخ ۵۹



نمودار جابه‌جایی - مکان دو موج صوتی A و B که به صورت جداگانه در یک محیط منتشر شده‌اند، به شکل روبه‌رو است. کدام‌یک از موارد زیر درباره این دو موج درست است؟

الف) تندی انتشار موج A، ۲ برابر تندی انتشار موج B است.

ب) بیشینه تندی ذرات محیط در موج A، ۴ برابر بیشینه تندی ذرات محیط در موج B است.

پ) توان متوسط موج A، ۴ برابر توان متوسط موج B است.

چون محیط یکسان است پس تندی انتشار دو موج موتی نیز یکسان است.

همان بیشینه تندی نوسانگر یعنی A است.

ت) بیشینه شتاب ذرات محیط در موج A، ۸ برابر بیشینه شتاب ذرات محیط در موج B است.

همان بیشینه شتاب نوسانگر یعنی A است.

الف و پ

(۱) الف و ت

ب و ت

(۳) ب و پ

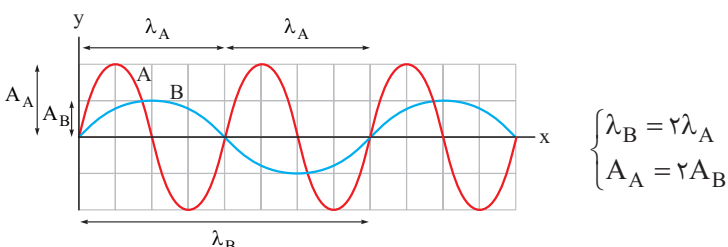
پاسخ: گزینه ۲

مشاوره این سؤال از تمرین کتاب طرح شده و باهاش کلی مطلب می‌تونی یادگیری. آگه توی آزمون بوش جواب نداری فدای سرت ولی خواهشاً

از تحلیلش نگذر!

پاسخ تشریحی ابتدا با توجه به نمودار جابه‌جایی - مکان دو موج A و B، دامنه (A) و طول موج (λ) دو موج A و B را با هم مقایسه

می‌کنیم. به شکل زیر توجه کنید:





حالا هر کدام از عبارت‌ها را با توجه به نکته مربوط به آن، بررسی می‌کنیم:

عبارت «الف»:

نکته تندی انتشار موج، تنها وابسته به محیط انتشار موج و ویژگی‌های آن محیط است. پس هنگامی که محیط انتشار دو موج صوتی یکسان باشد، تندی انتشار امواج یکسان است.

با توجه به نکته بالا، تندی انتشار دو موج صوتی A و B با هم برابر است؛ در نتیجه عبارت «الف» نادرست است.
عبارت «ب»:

نکته بیشینه تندی نوسانگر از رابطه $v_{\max} = A\omega$ به دست می‌آید.

با توجه به نکته بالا، برای مقایسه بیشینه تندی ذرات محیط (بیشینه تندی نوسانگر) در دو موج A و B باید دامنه و بسامد زاویه‌ای (ω) آن‌ها را مقایسه کنیم. با توجه به نمودار جابه‌جایی - مکان، دامنه موج A دو برابر دامنه موج B است و ضمناً برابری تندی انتشار دو موج A و B و این که طول موج B دو برابر طول موج A است، طبق رابطه $\lambda = \frac{v}{f}$ نشان می‌دهد که بسامد موج A دو برابر بسامد موج B است، بنابراین داریم:

$$\frac{v_{\max A}}{v_{\max B}} = \frac{A_A}{A_B} \times \frac{\omega_A}{\omega_B} \xrightarrow[\frac{\omega_A = f_A = 2}{\omega_B = f_B}]{\frac{A_A = 2}{A_B}} \frac{v_{\max A}}{v_{\max B}} = 2 \times 2 = 4$$

بنابراین عبارت «ب» درست است.

عبارت «پ»:

نکته رابطه مقایسه‌ای توان متوسط دو موج به صورت زیر است:

$$\frac{(P_{av})_2}{(P_{av})_1} = \left(\frac{A_2}{A_1} \times \frac{f_2}{f_1}\right)^2$$

با توجه به نکته بالا، توان متوسط دو موج A و B را با هم مقایسه می‌کنیم:

$$\frac{(P_{av})_A}{(P_{av})_B} = \left(\frac{A_A}{A_B} \times \frac{f_A}{f_B}\right)^2 \xrightarrow[\frac{f_A = 2}{f_B}]{\frac{A_A = 2}{A_B}} \frac{P_A}{P_B} = (2 \times 2)^2 = 16$$

بنابراین عبارت «پ» نادرست است.

عبارت «ت»:

نکته بیشینه شتاب نوسانگر از رابطه $a_{\max} = A\omega^2$ به دست می‌آید.

طبق نکته بالا برای مقایسه بیشینه شتاب ذرات محیط (بیشینه شتاب نوسانگر) در دو موج A و B داریم:

$$\frac{a_{\max A}}{a_{\max B}} = \frac{A_A}{A_B} \times \left(\frac{\omega_A}{\omega_B}\right)^2 \xrightarrow[\frac{\omega_A = f_A = 2}{\omega_B = f_B}]{\frac{A_A = 2}{A_B}} \frac{a_{\max A}}{a_{\max B}} = 2 \times (2)^2 = 8$$

بنابراین عبارت «ت» درست است.

در نتیجه عبارت‌های «ب» و «ت» درست هستند.

تست و پاسخ ۶۰

تراز شدت صوت حاصل از یک منبع صوتی در فاصله‌های d_1 و d_2 از آن، به ترتیب ۷۲dB و ۸۲dB است. با چشم‌پوشی از اتلاف انرژی، $\frac{d_2}{d_1}$ برابر کدام است؟

$$\frac{\sqrt{10}}{10} \quad (۴)$$

$$\sqrt{10} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{100} \quad (۲)$$

$$100 \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۴

نکته با صرف نظر از اتلاف انرژی، رابطه اختلاف تراز شدت صوت ناشی از یک منبع صوتی معین در فاصله‌های d_1 و d_2 به صورت زیر است:

$$\beta_2 - \beta_1 = 10 \log \frac{I_2}{I_1} = 10 \log \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 \Rightarrow \beta_2 - \beta_1 = 20 \log \frac{d_1}{d_2}$$



پاسخ تشریحی طبق نکته صفحه قبل داریم:

$$\beta_2 - \beta_1 = 20 \log \frac{d_1}{d_2} \xrightarrow{\beta_1 = 72 \text{ dB}, \beta_2 = 82 \text{ dB}} \underbrace{82 - 72}_{10} = 20 \log \frac{d_1}{d_2}$$

$$\Rightarrow \log \frac{d_1}{d_2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{d_1}{d_2} = 10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10} \Rightarrow \frac{d_2}{d_1} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

تست و پاسخ ۶۱



جبهه‌های موج متوالی حاصل از سه چشمه موج A، B و C به شکل مقابل است. اگر تندی این چشمه‌ها به ترتیب v_C ، v_B ، v_A و تندی انتشار موج در محیط v باشد، کدام مقایسه درست است؟

$$v_C > v_A > v_B > v \quad (2)$$

$$v_B > v_A > v_C > v \quad (1)$$

$$v_C > v_A = v > v_B \quad (4)$$

$$v_B > v_A = v > v_C \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۴

مشاوره این موضوع هنوز بکر موند و توی کنکور نیومده ولی منتظر اومدنش باش!

نکته برای یک چشمه موج در حال حرکت، وقتی جبهه‌های موج با هم برخورد نداشته باشند، تندی حرکت چشمه از تندی انتشار موج در محیط کمتر است. وقتی جبهه‌های موج در محل چشمه بر هم مماس باشند، تندی حرکت چشمه و تندی انتشار موج در محیط با هم برابر است و وقتی جبهه‌های موج همدیگر را قطع کرده باشند و در بیشتر از یک نقطه به هم برخورد کنند، تندی حرکت چشمه از تندی انتشار موج در محیط بیشتر است. به شکل‌های زیر دقت کنید:

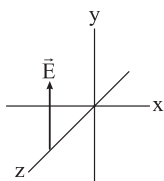


$$v_B < v_A = v < v_C$$

پاسخ تشریحی با توجه به نکته بالا داریم:

تست و پاسخ ۶۲

شکل زیر میدان الکتریکی یک موج الکترومغناطیسی سینوسی را در نقطه‌ای معین و دور از چشمه، در یک لحظه نشان می‌دهد. موج انرژی را در خلاف جهت محور z انتقال می‌دهد. میدان مغناطیسی موج در این نقطه و این لحظه، در چه جهتی است؟



$$+x \quad (1)$$

$$-x \quad (2)$$

$$+y \quad (3)$$

$$-y \quad (4)$$

پاسخ: گزینه ۱

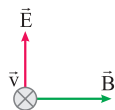
مشاوره این مبحث از اون قسمتای کتاب درسی هست که بر خلاف ظاهر کوچکش، زیاده توی کنکور اومده.

درس نامه ..

تعیین جهت انتشار موج الکترومغناطیسی به کمک قاعده دست راست:

اگر چهار انگشت دست راست در جهت میدان الکتریکی ($\vec{E}$) باشد، به طوری که میدان مغناطیسی ($\vec{B}$) از کف دست خارج شود، انگشت شست جهت انتشار موج الکترومغناطیسی را نشان می‌دهد.

پاسخ تشریحی: طبق قاعده دست راست، اگر چهار انگشت دست راست در جهت میدان الکتریکی ($\vec{E}$) رو به بالا باشد و انگشت شست در جهت انتشار موج ($\vec{v}$) به صورت درون سو ($\otimes$) باشد، کف دست (جهت میدان مغناطیسی ($\vec{B}$)) به سمت راست (در جهت محور X) خواهد بود. مطابق شکل مقابل داریم:



تست و پاسخ ۶۳

کدام یک از عبارات‌های زیر درست است؟

- (۱) برای اندازه‌گیری تندی شارش خون در رگ‌ها، از مکان‌یابی پژواکی امواج الکترومغناطیسی به همراه اثر دوپلر استفاده می‌شود.
- (۲) برای تشخیص یک جسم به روش مکان‌یابی پژواکی، اندازه جسم باید در حدود طول موج موج به کاررفته یا بزرگ‌تر از آن باشد.
- (۳) در آب‌های کم‌عمق، با افزایش عمق آب، تندی انتشار امواج روی سطح آب کاهش می‌یابد.
- (۴) هنگام رخ دادن پدیده سراب، با نزدیک شدن پرتو خورشید به سطح زمین، تندی انتشار آن کاهش می‌یابد.

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره: یک نکته این‌طور سوال توی فیزیک نمیدار. اتفاقاً مفهبات نوسان و موج مورد علاقه طراحان کنکور و نهایی بوده و هست. در ضمن هواسا به توضیحات درسی زیر شکل‌ها و نوشته‌های هاشیه در کتاب درسی باشه.

پاسخ تشریحی: طبق متن کتاب درسی به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

- (۱) نادرست است؛ زیرا برای اندازه‌گیری تندی شارش خون در رگ‌ها، از مکان‌یابی پژواکی امواج صوتی که نوعی موج مکانیکی هستند، به همراه اثر دوپلر استفاده می‌شود.
- (۲) درست است.
- (۳) نادرست است؛ زیرا با افزایش عمق آب در آب‌های کم‌عمق، تندی انتشار امواج روی سطح آب افزایش می‌یابد.
- (۴) نادرست است؛ زیرا با نزدیک‌تر شدن پرتوها به سطح زمین به خاطر کم‌تر شدن چگالی و ضریب شکست هوا، تندی انتشار موج الکترومغناطیسی افزایش می‌یابد.

تست و پاسخ ۶۴

شخص بین دو صخره قائم ایستاده و فاصله او از صخره دورتر ۳۲۰ m است. شخص فریاد می‌زند و اولین پژواک صدای خود را پس از ۱/۶ s و صدای پژواک دوم را ۰/۴ s بعد از پژواک اول می‌شنود. به ترتیب، تندی صوت در هوا چند متر بر ثانیه و فاصله بین دو صخره چند متر است؟

یعنی صدای پژواک دوم را
 $\Delta t_2 = 1/6 + 0/4 = 2s$
 پس از صوت اصلی می‌شنود.

$$720, 320(2)$$

$$576, 320(1)$$

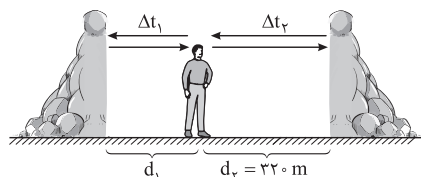
$$270, 400(4)$$

$$576, 400(3)$$

پاسخ: گزینه ۱

مشاوره: این تیپ سوال توی کنکور و نهایی زیاد اومده بعید نیست باز میار!

پاسخ تشریحی: گام اول: تندی صوت در هوا را محاسبه می‌کنیم. مطابق شکل زیر داریم:



$$v_{\text{صوت}} = \frac{\ell_2}{\Delta t_2} \xrightarrow{\ell_2 = 2d_2, \Delta t_2 = 1/6 + 0/4 = 2s} v_{\text{صوت}} = \frac{2 \times 320}{2} = 320 \text{ m/s}$$

گام دوم: فاصله شخص از صخره نزدیک را حساب می‌کنیم:

$$v_{\text{صوت}} = \frac{\ell_1}{\Delta t_1} \xrightarrow{v_{\text{صوت}} = 320 \text{ m/s}, \ell_1 = 2d_1, \Delta t_1 = 1/6 s} 320 = \frac{2d_1}{1/6} \Rightarrow d_1 = 0/8 \times 320 = 256 \text{ m}$$



$$d = d_1 + d_2 = 256 + 320 = 576 \text{ m}$$

گام سوم: فاصله دو صخره از یکدیگر $(d_1 + d_2)$ را حساب می‌کنیم:

تست و پاسخ ۶۵

پرتوی نور مرکبی شامل دو پرتوی قرمز و آبی با زاویه تابش 45° از هوا بر سطح تیغه تختی از کوارتز می‌تابد. اگر زاویه بین دو پرتوی شکست 7° و ضریب شکست کوارتز برای نور آبی $\sqrt{2}$ باشد، ضریب شکست کوارتز برای نور قرمز کدام است؟ $(\sin 37^\circ = 0/6$ و $\sin 23^\circ = 0/4)$

$$\frac{5\sqrt{2}}{4} \quad (4)$$

$$\frac{5\sqrt{2}}{6} \quad (3)$$

$$\frac{4}{3} \quad (2)$$

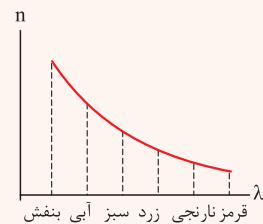
$$2 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۳

مشاوره می‌توانیم بگوییم، بحث شکست موج تقریباً پای ثابت سوالات کنکور است و در حل این سؤال‌ها باید به دو نکته توجه کنید، اول این‌که خط عمود بر سطح جدایی دو محیط را رسم کنید. نکته دوم، رسم شکل دقیق، احتمال خطا را کاهش می‌دهد.

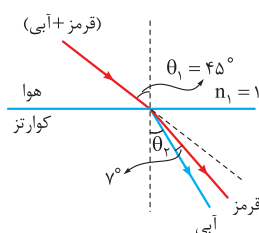
خودت حل کنی بهتره ابتدا شکل پرتوهای آبی و قرمز را پس از شکست در محیط جدید (کوارتز) رسم کنید، سپس زاویه شکست پرتو آبی را به دست آورید. با توجه به این‌که زاویه بین پرتوهای آبی و قرمز پس از شکسته شدن 7° است، زاویه شکست پرتو قرمز را به دست آورید و در نهایت دوباره با قانون شکست اسنل $(n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2)$ ضریب شکست پرتو قرمز را به دست آورید.

درس نامه ضریب شکست همه محیط‌های شفاف به جز خلأ به طول موج نور بستگی دارد و هر چه قدر طول موج نور بلندتر باشد، ضریب شکست محیط برای آن نور کوچک‌تر است. شکل مقابل این رابطه را نشان می‌دهد.



بنابراین اگر نوری از ترکیب دو رنگ متفاوت تشکیل شده باشد و از هوا وارد یک محیط شفاف شود، پرتوی نوری که طول موج بلندتری دارد، ضریب شکست آن کمتر است و کمتر منحرف می‌شود.

پاسخ تشریحی گام اول: شکل زیر، وضعیت شکست نورهای قرمز و آبی را در محیط شفاف (کوارتز) نشان می‌دهد. بسامد نور آبی بیشتر است و بیشتر منحرف می‌شود.



گام دوم: ضریب شکست کوارتز برای پرتو آبی $\sqrt{2}$ است. با توجه به قانون شکست اسنل، زاویه شکست پرتو آبی (θ_2) را به دست می‌آوریم:

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \Rightarrow 1 \times \sin 45^\circ = \sqrt{2} \sin \theta_2 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \sin \theta_2 \Rightarrow \sin \theta_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta_2 = 30^\circ$$

گام سوم: زاویه‌ای که پرتو قرمز با خط عمود بر سطح جدایی دو محیط می‌سازد، 37° است $(\theta_3 = \theta_2 + 7^\circ = 37^\circ)$. به کمک قانون شکست اسنل برای پرتو قرمز داریم:

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_3 \Rightarrow 1 \times \sin 45^\circ = n_2 \sin 37^\circ \Rightarrow 1 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 0/6 n_2 \Rightarrow n_2 = \frac{\sqrt{2}}{1/2} = \frac{5\sqrt{2}}{6}$$

تست و پاسخ ۶۶

در آزمایش یانگ، با ایجاد تغییرهای «الف» و «ب» به صورت جداگانه، پهنای هر نوار تاریک و روشن به ترتیب از راست به چپ چگونه تغییر می کند؟

الف) استفاده از نور تک فام سبز به جای نور تک فام زرد

ب) انجام آزمایش در آب به جای انجام آزمایش در هوا

(۱) افزایش می یابد، کاهش می یابد.

(۲) افزایش می یابد، افزایش می یابد.

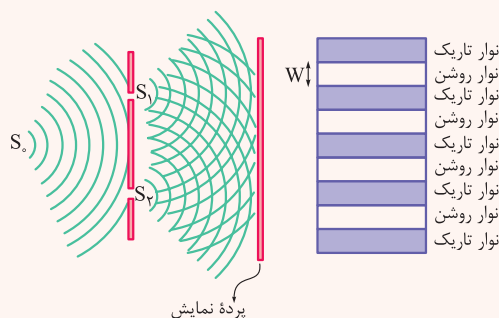
(۳) کاهش می یابد، افزایش می یابد.

(۴) کاهش می یابد، کاهش می یابد.

پاسخ: گزینه ۴

خودت حل کنی بهتره پهنای نوارها در آزمایش یانگ با طول موج نور متناسب است، طول موج نور در هر دو حالت را با حالت عادی قبل از آن مقایسه کنید تا بتوانید به پاسخ صحیح برسید.

درس نامه شکل زیر، طرحی از آزمایش یانگ را نمایش می دهد. در این آزمایش از یک چشمه نور (S_0) به عنوان منبع نور استفاده شده و در جلوی آن یک پرده با دو شکاف قرار می گیرد و هر یک از این شکافها مانند یک چشمه نور هستند (نکته قابل توجه این است که هر دو چشمه نور هم بسامد هستند). اگر در مقابل این دو چشمه یک پرده قرار دهیم، نوارهای روشن و تاریکی بر روی پرده دیده می شود که این نوارهای روشن و تاریک به ترتیب بیانگر تداخل سازنده و تداخل ویرانگر امواج چشمه های S_1 و S_2 هستند.



پهنای نوارهای تاریک و روشن (W) تقریباً با هم برابر و با طول موج چشمه های نور S_1 و S_2 متناسب است.

پاسخ تشریحی

گام اول: طول موج نور سبز کوچک تر از طول موج نور زرد است، بنابراین پهنای نوار کاهش می یابد.

گام دوم: اگر محیط آزمایش را از هوا به آب تغییر دهیم، تندی انتشار و طول موج نور کاهش می یابد. بنابراین، پهنای نوار کاهش می یابد.

تست و پاسخ ۶۷

تار دو انتها بسته ای به طول ۶۰ cm نوسان می کند و در طول آن ۵ گره تشکیل شده است. اگر تندی انتشار موج عرضی در تار 240 m/s و

تندی صوت در هوا 320 m/s باشد، به ترتیب، طول موج امواج صوتی گسیلی در این حالت چند سانتی متر و بسامد اصلی تار چند هرتز است؟

۸۰۰، ۱۶۰ (۴)

۸۰۰، ۴۰ (۳)

۲۰۰، ۱۶۰ (۲)

۲۰۰، ۴۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

مشاوره موج ایستاده و تشدید در تار (ریسمان)، جزء مباحثی است که ویژه دانش آموزان رشته ریاضی است و تقریباً پای ثابت سوالات کنکور بوده و مبحثی ساده است. به هیچ عنوان این مبحث را حذف نکنید. حتی اگر قرار هست سوالات کنکور را مبحثی بزنید، سوالات این بخش را می توانید در سبد سوالات گلچین خود قرار دهید.

خودت حل کنی بهتره

بسامد اصلی تار را از رابطه $f_1 = \frac{v}{2L}$ به دست آورید، سپس با توجه به تعداد گره ها، شماره هماهنگ را مشخص کنید (تعداد گره ها به اندازه یک واحد از شماره هماهنگ بیشتر است). حال با به دست آوردن بسامد ایجاد شده می توانید طول موج صوتی که در هوا منتشر شده است را محاسبه کنید.



درس نامه ●● اگر تار ی بین دو نقطه ثابت توسط نیروی F کشیده شده باشد، تار در یک سری از بسامدها دچار تشدید می شود و امواج ایستاده تشکیل می شود.

در مکان هایی از تار که ثابت باشد، گره تشکیل می شود. در جدول زیر هماهنگ های اول تا چهارم برای یک تار به همراه ویژگی های مشخص شده است.

همانگ	شکل تار	تعداد شکم	تعداد گره	طول موج	بسامد
اول		۱	۲	$\lambda_1 = \frac{2L}{1}$	$f_1 = \frac{v}{2L}$
دوم		۲	۳	$\lambda_2 = \frac{2L}{2}$	$f_2 = \frac{2v}{2L}$
سوم		۳	۴	$\lambda_3 = \frac{2L}{3}$	$f_3 = \frac{3v}{2L}$
چهارم		۴	۵	$\lambda_4 = \frac{2L}{4}$	$f_4 = \frac{4v}{2L}$
n ام		n	$n+1$	$\lambda_n = \frac{2L}{n}$	$f_n = \frac{nv}{2L}$

نکته تعداد شکم ها با شماره همانگ برابر است و تعداد گره ها ۱ واحد بیشتر از شماره همانگ است.

پاسخ تشریحی گام اول: بسامد اصلی تار از رابطه $f_1 = \frac{v}{2L}$ به دست می آید:

$$f_1 = \frac{v}{2L} = \frac{240}{2(0/6)} = 200 \text{ Hz}$$

گام دوم: تعداد گره های تشکیل شده در طول تار ۵ است. بنابراین، شماره همانگ بسامد تشدید $n = 4$ است. بسامد ایجاد شده در این حالت را به دست می آوریم:

$$f_n = nf_1 \Rightarrow f_4 = 4f_1 \xrightarrow{f_1=200\text{Hz}} f_4 = 4 \times 200 = 800 \text{ Hz}$$

گام سوم: بسامد ایجاد شده توسط تار دو انتهای بسته به عنوان چشمه صوت در هوا منتشر می شود، حال طول موج صوت منتشر شده در این حالت را به دست می آوریم:

$$\lambda_{\text{هوا}} = \frac{v_{\text{هوا}}}{f} \Rightarrow \lambda_{\text{هوا}} = \frac{320}{800} = 0/4 \text{ m} = 40 \text{ cm}$$

تست و پاسخ ۶۸

کدام یک از موارد زیر جزء نارسایی های مدل اتمی بور است؟

- (۱) تبیین پایداری اتمی هیدروژن
- (۲) محاسبه انرژی یونش اتم های هیدروژن گونه
- (۳) محاسبه طول موج های طیف خطی اتم های هیدروژن گونه
- (۴) توضیح دلیل تفاوت شدت خط های طیف گسیلی هیدروژن

پاسخ: گزینه ۴

مشاوره در مباحث فیزیک اتمی و فیزیک هسته ای، حجم مطالب حفظی بیشتر می شود. این مطالب کاملاً منطبق بر کتاب درسی بوده و جز، سؤال های ساده محسوب می شوند که علاوه بر بالابر دن در صد شما، می توانند وقت شما را ذخیره کنند.



درس نامه

ویژگی‌های مثبت مدل اتمی بور:

- (۱) پایداری اتم را توضیح داد.
 - (۲) طیف گسیلی و جذبی گاز هیدروژن را توجیه کرد.
 - (۳) انرژی یونش اتم هیدروژن را محاسبه کرد.
- نارسایی‌های مدل اتمی بور:

- (۱) تنها برای اتم‌های هیدروژن گونه کاربرد دارد.
- (۲) نمی‌تواند دلیل متفاوت بودن شدت خط‌های طیف گسیلی را توضیح دهد.

پاسخ تشریحی با توجه به متن درس‌نامه، نارسایی دوم مدل اتمی بور، همان (۴) است.

تست و پاسخ ۶۹

اگر شدت تابشی متوسط خورشید در سطح زمین برابر 300 W/m^2 باشد، در هر دقیقه به ناحیه‌ای به مساحت 80 cm^2 از سطح زمین، چند فوتون می‌رسد؟ $h = 6.6 \times 10^{-34} \text{ J.s}$ ، $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ و طول موج متوسط فوتون‌های تابیده از خورشید را 600 nm در نظر بگیرید.

$$(1) 1/6 \times 10^{20} \quad (2) 1/6 \times 10^{21} \quad (3) 4/8 \times 10^{20} \quad (4) 4/8 \times 10^{21}$$

پاسخ: گزینه ۳

خودت حل کنی بهتره به کمک رابطه $I = \frac{P_{av}}{A}$ ، توان متوسط تابیده شده به سطحی که 80 cm^2 است را به دست آورید. سپس با رابطه

$E = P.t$ ، انرژی تابیده شده در مدت زمان 1 min را محاسبه کنید. از طرفی انرژی هر فوتون از رابطه $E = \frac{hc}{\lambda}$ به دست می‌آید، بنابراین انرژی کل به انرژی یک فوتون را به دست آورید، که همان تعداد فوتون است.

درس نامه مقدار انرژی‌ای که در واحد زمان به واحد سطح می‌رسد، شدت تابش گفته می‌شود و از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$I = \frac{E}{At} = \frac{P}{A}$$

طبق نظریهٔ اینشتین دربارهٔ فوتون، انرژی هر فوتون متناسب با بسامد نور است و یک کمیت کوانتومی است که از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda}$$

پاسخ تشریحی گام اول: توان متوسط تابش خورشید به ناحیه‌ای به مساحت $A = 80 \text{ cm}^2$ از سطح زمین را به کمک رابطه $I = \frac{P_{av}}{A}$

به دست می‌آوریم:

$$P_{av} = IA = (300 \frac{\text{W}}{\text{m}^2})(80 \times 10^{-4} \text{ m}^2) = 2/4 \text{ W}$$

گام دوم: انرژی تابش شده در مدت زمان 1 min را طبق رابطه $E = P_{av}t$ به دست می‌آوریم.

گام سوم: تعداد فوتون‌های تابش شده را از نسبت انرژی به دست آمده به انرژی یک فوتون به دست می‌آوریم:

$$n = \frac{E_{\text{کل}}}{E_{\text{فوتون}}} = \frac{E_{\text{کل}}}{\frac{hc}{\lambda}} = \frac{144}{\frac{6.6 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{600 \times 10^{-9}}} = \frac{144}{3 \times 10^{-19}} = 4/8 \times 10^{20}$$

تست و پاسخ ۷۰

تابش فرابنفش با طول موج 248 nm بر سطح تیغه‌ای فلزی با تابع کار $3/2 \text{ eV}$ می‌تابد. بیشینهٔ تندی فوتوالکترون‌های جدا شده از سطح فلز چند متر بر ثانیه است؟ $hc = 1240 \text{ eV.nm}$ ، جرم الکترون $9 \times 10^{-31} \text{ kg}$ و بار الکتریکی آن $1/6 \times 10^{-19} \text{ C}$ است.

$$(1) 8 \times 10^5 \quad (2) 2 \times 10^5 \quad (3) 8 \times 10^4 \quad (4) 2 \times 10^4$$

پاسخ: گزینه ۱



مشاوره اگر رشته‌شمار ریاضی و فیزیک است؛ توجه کنید که مباحث ویژه رشته ریاضی حدود ۱۵ درصد تست هار ا به خود اختصاص می‌دهند.

خودت حل کنی بهتره به کمک رابطه $K_{\max} = hf - W_0$ ، بیشینه انرژی جنبشی فوتوالکترون را به دست آورید (مواستون باشه بعرض

به ژول تبدیل کنید، هر الکترون ولت، معادل $۱/۶ \times ۱۰^{-۱۹}$ ژول هست) سپس با رابطه $K_{\max} = \frac{1}{2}mv_{\max}^2$ ، بیشینه تندی به دست می‌آید.

پاسخ تشریحی گام اول: به کمک رابطه $K_{\max} = hf - W_0$ ، بیشینه انرژی جنبشی فوتوالکترون جدا شده از سطح فلز را به دست می‌آوریم:

$$K_{\max} = hf - W_0 = \frac{hc}{\lambda} - W_0 = \frac{۱۲۴۰}{۲۴۸} - ۳/۲ = ۱/۸ \text{ eV}$$

هر ۱ eV معادل با $۱/۶ \times ۱۰^{-۱۹}$ J است. بنابراین بیشینه انرژی جنبشی بر حسب ژول برابر است با:

$$K_{\max} = ۱/۸ \times ۱/۶ \times ۱۰^{-۱۹} \text{ J}$$

گام دوم: به کمک رابطه $K_{\max} = \frac{1}{2}mv_{\max}^2$ ، بیشینه تندی فوتوالکترون جدا شده از سطح فلز را به دست می‌آوریم:

$$K_{\max} = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 \Rightarrow ۱/۸ \times ۱/۶ \times ۱۰^{-۱۹} = \frac{1}{2} \times ۹ \times ۱۰^{-۳۱} \times v_{\max}^2 \Rightarrow v_{\max}^2 = \frac{۲ \times ۱/۸ \times ۱/۶ \times ۱۰^{-۱۹}}{۹ \times ۱۰^{-۳۱}} = ۰/۶۴ \times ۱۰^{۱۲}$$

$$\Rightarrow v_{\max} = ۸ \times ۱۰^۵ \text{ m/s}$$

تست و پاسخ ۷۱

اگر R ثابت ریدبرگ، h ثابت پلانک و c تندی نور در خلأ باشد، یکای حاصل کدام یک از موارد زیر در SI، ژول است؟

$$\frac{R}{hc} \quad (۴)$$

$$\frac{hc}{R} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{hcR} \quad (۲)$$

$$hcR \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۱

خودت حل کنی بهتره از رابطه انرژی فوتون $E = \frac{hc}{\lambda}$ ، یکای کمیت hc را مشخص کنید، سپس از معادله ریدبرگ که در آن ثابت

ریدبرگ (R) تقریباً برابر $۰/۰۱ \text{ (nm)}^{-۱}$ است، یکای R مشخص می‌شود، حال به کمک این دو، یکای ژول را بر حسب آن‌ها تعیین کنید.

پاسخ تشریحی گام اول: اینشتین در نظریه فوتوالکتریکی خود نشان داد که انرژی هر فوتون از رابطه $E = \frac{hc}{\lambda}$ به دست می‌آید. بنابراین

یکای hc در SI معادل است با:

$$[E] = \frac{[hc]}{[\lambda]} \Rightarrow J = \frac{[hc]}{m} \Rightarrow [hc] = J.m$$

گام دوم: R ثابت ریدبرگ، تقریباً برابر با $۰/۰۱ \text{ (nm)}^{-۱}$ است. بنابراین یکای آن در SI معادل است با:

$$R = ۰/۰۱ \text{ (nm)}^{-۱} \Rightarrow [R] = \frac{1}{m}$$

گام سوم: خواسته سؤال یکای ژول است که با حاصل ضرب hc در R به دست می‌آید.

$$[hc] \times [R] = J.m \times \frac{1}{m} = J$$

تست و پاسخ ۷۲

گستره طول موج‌های رشته پاشن ($n' = ۳$) چند برابر گستره طول موج‌های رشته بالمر ($n' = ۲$) است؟

$$\frac{۷}{۲۰} \quad (۴)$$

$$\frac{۲۰}{۷} \quad (۳)$$

$$\frac{۱۱۲}{۴۰۵} \quad (۲)$$

$$\frac{۴۰۵}{۱۱۲} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۱

خودت حل کنی بهتره با استفاده از رابطه‌های $\frac{1}{\lambda_{\max}} = R \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{(n'+1)^2} \right)$ و $\frac{1}{\lambda_{\min}} = R \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{\infty^2} \right)$ محدوده طول موج‌های

هر دو رشته پاشن و بالمر را بر حسب R به دست آورید و در نهایت نسبت آن‌ها را محاسبه کنید.

درس نامه

اگر در یک رشته، دو تراز متوالی را در نظر بگیریم، انرژی فوتون تابش شده در کمترین حالت خود قرار دارد و طول موج گسیل شده، بلندترین مقدار خود را دارد.

$$\frac{1}{\lambda_{\max}} = R \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{(n'+1)^2} \right)$$

اگر در یک رشته، فاصله دو تراز از هم تا حد ممکن زیاد باشد، انرژی فوتون تابش شده به بیشترین مقدار خود می‌رسد و در نتیجه طول موج گسیل شده به کمترین مقدار خود می‌رسد.

$$\frac{1}{\lambda_{\min}} = R \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{\infty^2} \right) = \frac{R}{n'^2}$$

پاسخ تشریحی گام اول: گستره طول موج‌های رشته پاشن ($n' = 3$) را به دست می‌آوریم:

$$\frac{1}{\lambda_{\max}} = R \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} \right) = R \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{16} \right) = \frac{7R}{144} \Rightarrow \lambda_{\max} = \frac{144}{7R}$$

$$\frac{1}{\lambda_{\min}} = R \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{\infty^2} \right) = R \left(\frac{1}{9} - 0 \right) = \frac{R}{9} \Rightarrow \lambda_{\min} = \frac{9}{R}$$

$$\text{گستره طول موج‌های رشته پاشن} = \lambda_{\max} - \lambda_{\min} = \frac{144}{7R} - \frac{9}{R} = \frac{81}{7R}$$

گام دوم: گستره طول موج‌های رشته بالمر ($n' = 2$) را به دست می‌آوریم:

$$\frac{1}{\lambda_{\max}} = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right) = R \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9} \right) = \frac{5R}{36} \Rightarrow \lambda_{\max} = \frac{36}{5R}$$

$$\frac{1}{\lambda_{\min}} = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{\infty^2} \right) = R \left(\frac{1}{4} - 0 \right) = \frac{R}{4} \Rightarrow \lambda_{\min} = \frac{4}{R}$$

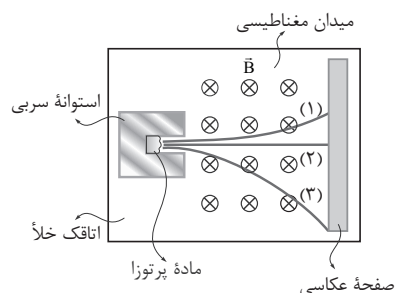
$$\text{گستره طول موج‌های رشته بالمر} = \lambda_{\max} - \lambda_{\min} = \frac{36}{5R} - \frac{4}{R} = \frac{16}{5R}$$

گام سوم: نسبت گستره طول موج‌های رشته پاشن به رشته بالمر را به دست می‌آوریم:

$$\frac{\text{گستره طول موج‌های رشته پاشن}}{\text{گستره طول موج‌های رشته بالمر}} = \frac{\frac{81}{7R}}{\frac{16}{5R}} = \frac{81 \times 5}{7 \times 16} = \frac{405}{112}$$

تست و پاسخ

مسیر حرکت پرتوهای آلفا، بتا (الکترون) و گامای گسیل شده از یک ماده پرتوزا در میدان مغناطیسی یکنواختی به شکل زیر است. کدام یک از عبارت‌های زیر درباره این پرتوها درست است؟



الف) مسیر (۱)، مربوط به ذره‌ای است که در آشکارسازهای دود به کار می‌رود.

ب) مسیر (۳)، مربوط به ذره‌ای است که بیشتر از دو ذره دیگر در سرب نفوذ می‌کند.

پ) مسیر (۲)، مربوط به ذره‌ای است که گسیل آن، متداول‌ترین نوع واپاشی است.

ت) مسیر (۱)، مربوط به ذره‌ای است که گسیل آن در هسته‌های سنگین رخ می‌دهد.

الف و ب (۱) الف و ت (۲) الف و پ (۳) ب و ت (۴)

پاسخ: گزینه ۲

خودت حل کنی بهتره به کمک قاعده دست راست که جهت نیروی وارد بر ذرات باردار متحرک در یک میدان مغناطیسی را نشان می‌دهد، علامت ذرات باردار را تشخیص داده و هر یک از پرتوهای α ، β و γ را مشخص کنید تا بتوانید گزینه درست را براساس ویژگی آن‌ها انتخاب کنید.



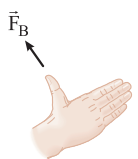
درس نامه ..

واپاشی هسته مواد پرتوزا در طبیعت به سه صورت زیر است که همراه با ویژگی‌های آن‌ها بیان شده است.

- هسته‌های سنگین با تابش ذره α خود را سبک‌تر می‌کنند.
- ذره α (۱)
 - بُرد کوتاهی دارند.
 - بسیار خطرناک و مخرب هستند.
 - استفاده در آشکارسازهای دود

(۲) ذره β : متداول‌ترین نوع واپاشی است و ممکن است به صورت الکترون یا پوزیترون باشد.

- بیشترین میزان نفوذپذیری را نسبت به α و β دارد.
- پرتو γ (۳) بدون بار است.



پاسخ تشریحی گام اول: به کمک قاعده دست راست، علامت بار پرتو (۱) را تشخیص می‌دهیم. پرتو (۱) به سمت

بالا منحرف شده است و مطابق شکل مقابل جهت نیروی مغناطیسی هم به سمت بالا هست. بنابراین بار پرتو (۱) مثبت است و مربوط به ذره α است.

از ذرات α در آشکارسازهای دود استفاده می‌شود و این واپاشی در هسته‌های سنگین صورت می‌گیرد. (درستی الف و ت).

گام دوم: مسیر (۲) مربوط به پرتو گاما (۳) است، چون در مسیر مستقیم و بدون انحراف از یک میدان مغناطیسی عبور کرده است که این موضوع نشان‌دهنده بدون بار بودن آن است.

میزان نفوذپذیری پرتو γ از ذرات α و β بیشتر است. (نادرستی ب).

گام سوم: طبیعتاً مسیر (۳) مربوط به ذره β (الکترون) است، اما برای تشخیص آن هم مانند گام اول به کمک قاعده دست راست متوجه خواهیم شد مسیر حرکت مربوط به ذره‌ای با بار منفی است.

واپاشی ذره β ، متداول‌ترین نوع واپاشی است. (نادرستی پ)

تست و پاسخ ۷۴

سرب $^{207}_{82}\text{Pb}$ هسته پایدار است که می‌تواند طی دو فرایند جداگانه، از واپاشی α یا واپاشی β^- حاصل شود. اختلاف تعداد نوترون‌های هسته مادر، در این دو فرایند، کدام است؟

- ۱ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۷ (۴)

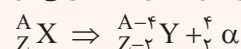
پاسخ: گزینه ۱

خودت حل کنی بهتره معادله واکنش را یک بار برای هسته مادری که محصولات آن ذره β^- و $^{207}_{82}\text{Pb}$ هستند، بنویسید و تعداد

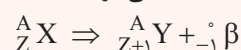
نوترون‌های هسته مادر آن را به دست آورید و بار دیگر معادله واکنش را برای هسته مادری که محصولات آن ذره α و $^{207}_{82}\text{Pb}$ هستند، بنویسید و تعداد نوترون‌های هسته مادر آن را هم مشخص کنید و در نهایت اختلاف تعداد نوترون‌ها را محاسبه کنید.

درس نامه ..

ذره α از جنس هسته اتم هلیوم است. در اثر واپاشی یک ماده پرتوزا، به ازای یک ذره α ، ۲ واحد از عدد اتمی و ۴ واحد از عدد جرمی آن کاسته می‌شود، معادله واپاشی آن به صورت مقابل است:

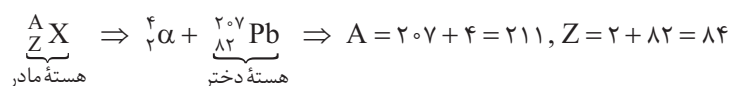


ذره β^- از جنس الکترون است. در اثر واپاشی یک ماده پرتوزا، به ازای یک ذره β^- ، ۱ واحد به عدد اتمی هسته اضافه می‌شود، اما عدد جرمی آن تغییر نمی‌کند، معادله واپاشی آن به صورت مقابل است:



پاسخ تشریحی گام اول: در حالت اول، سرب ($^{207}_{82}\text{Pb}$) به عنوان هسته دختر از واپاشی ذره α به وجود آمده است، بنابراین معادله واکنش

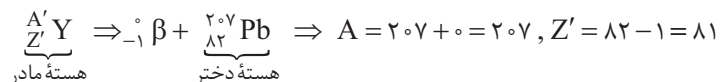
آن به صورت مقابل است.



تعداد نوترون‌های هسته مادر را در این حالت به کمک رابطه $A = Z + N$ به دست می‌آوریم:

$$A = Z + N \Rightarrow 211 = 84 + N \Rightarrow N = 127$$

گام دوم: در حالت دوم، سرب (${}^{207}_{82}\text{Pb}$) به عنوان هسته دختر از واپاشی ذره β^- به وجود آمده است، بنابراین معادله واکنش آن به صورت زیر است.



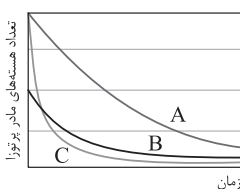
$$A' = Z' + N' \Rightarrow 207 = 81 + N' \Rightarrow N' = 126$$

تعداد نوترون‌های هسته مادر را در این حالت نیز به دست می‌آوریم:

گام سوم: تعداد نوترون‌های هسته مادر در حالت اول ۱۲۷ و در حالت دوم ۱۲۶ است، بنابراین اختلاف تعداد نوترون‌ها برابر ۱ است.

تست و پاسخ ۷۵

نمودار تغییرات تعداد هسته‌های مادر پرتوهای سه نمونه A، B و C برحسب زمان، به شکل زیر است. کدام مورد درباره مقایسه نیمه‌عمر (T)



$$T_A > T_C > T_B \quad (2)$$

$$T_A > T_B > T_C \quad (4)$$

این سه نمونه درست است؟

$$T_B > T_C > T_A \quad (1)$$

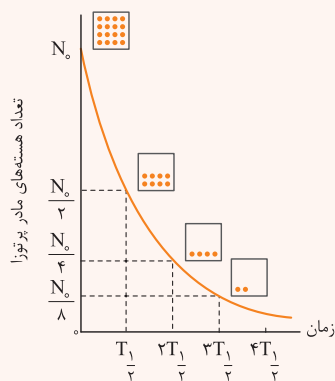
$$T_C > T_B > T_A \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۴

خودت حل کنی بهتره کافی است مدت زمانی که تعداد هسته‌های اولیه هر یک از نمونه‌ها به نصف رسیده است را مشخص کنید و با هم

مقایسه کنید.

درس نامه

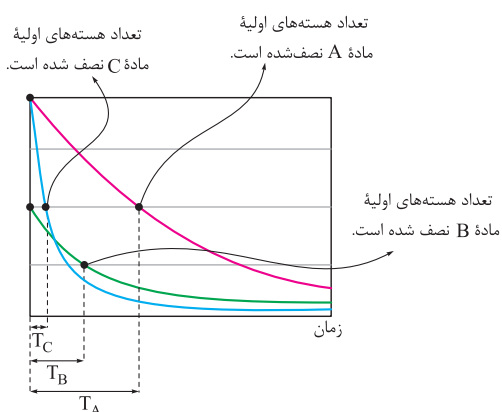


به مدت زمانی که طول می‌کشد تا تعداد هسته‌های مادر یک ماده پرتوزا نصف شوند، نیمه‌عمر گفته می‌شود که آن را با T یا $T_{1/2}$ نمایش می‌دهیم. شکل مقابل تعداد هسته‌های فعال یک ماده پرتوزا را برحسب زمان نشان می‌دهد که به صورت یک تابع نمایی است.

$$T_A > T_B > T_C$$

همان‌طور که در شکل مشخص شده است، نیمه‌عمر ماده A از B و B از C بزرگ‌تر است.

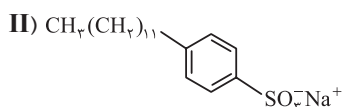
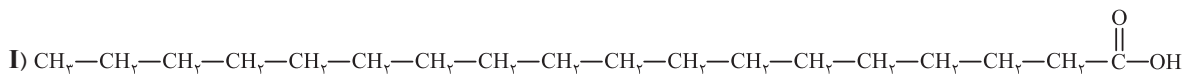
پاسخ تشریحی



شیمی دوازدهم: صفحه های ۱ تا ۱۲۳

تست و پاسخ ۷۶

با توجه به ساختار ترکیب‌های داده‌شده، کدام مطلب نادرست است؟ ($\text{Na} = 23, \text{O} = 16, \text{C} = 12, \text{H} = 1 : \text{g.mol}^{-1}$)



۱) نیروی بین مولکولی غالب در ترکیب (I)، نیروی وان دروالسی است و مخلوط آن با آب و صابون، باعث ایجاد مخلوطی ناهمگن و پایدار می‌شود.

(۲) نسبت جرم فلز به جرم اکسنده‌ترین نافلز در ترکیب (II)، به تقریب برابر با ۴۸/۰ است.

(۳) ترکیب (II) از خانواده پاک‌کننده‌های غیرصابونی است که حتی در آب سخت نیز با آلاینده‌ها واکنش می‌دهد.

(۴) از واکنش ترکیب (I) با یتاسیم هیدروکسید، می‌توان صابونی، مایع با فرمول $C_{18}H_{38}O_2K$ تولید کرد.

پاسخ: گزینہ ۳

پاسخ تشریحی بررسی گزینه‌ها:

نیروی بین مولکولی غالب در اسیدهای چرب به دلیل وجود شمار زیادی اتم کربن، از نوع نیروی وان دروالسی است. مخلوط آب، صابون و اسید چرب موجب ایجاد نوعی کلئید می‌شود، می‌دانیم کلئیدها مخلوط‌های ناهمگن اما پایدارند.

نکته اگرچه اسیدهای چرب در ساختارشان هم بخش قطبی و هم بخش ناقطبی دارند، اما به دلیل داشتن زنجیر هیدروکربنی و غلبه بخش ناقطبی بر بخش قطبی، این مولکول‌ها در مجموع، ناقطبی به حساب می‌آیند.

۲) اکسنده‌ترین نافلزها به ترتیب فلوئور و اکسیژن هستند؛ بنابراین اکسنده‌ترین نافلز موجود در پاک‌کنندهٔ غیرصابونی (ترکیب II)، اکسیژن است. نسبت جرم فلز سدیم به مجموع جرم هر سه اتم اکسیژن موجود در ترکیب (II) به صورت زیر محاسبه می‌شود:

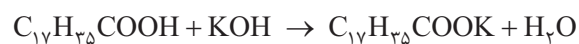
$$\frac{\text{جرم Na}}{\text{جرم O}} = \frac{1 \times 23}{3 \times 16} = 0.48$$

پاک‌کننده‌های غیرصابونی در آب سخت با یون‌های Ca^{2+} و Mg^{2+} واکنش نداده و رسوب نیز ایجاد نمی‌کنند. انجام واکنش با یون‌های Ca^{2+} و Mg^{2+} و تولید رسوب در آب‌های سخت، مختص پاک‌کننده‌های صابونی است.

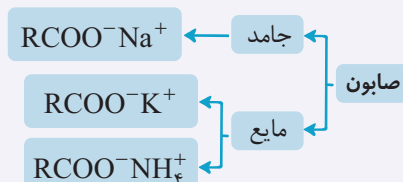
نکته واکنش با آلاینده‌ها، مختص پاک‌کننده‌های خورنده است؛ نه پاک‌کننده‌های صابونی و غیرصابونی!

عملکرد پاک کننده‌ها ← برهم کنش بین ذره‌ها ← غیرخورنده ← صابونی
 ← برهم کنش بین ذره‌ها و واکنش با آلاینده‌ها ← خورنده
 ← غیرصابونی

🌱 در صورت واکنش یک اسید چرب با پتاسیم هیدروکسید، می‌توان صابون مایع تولید کرد. معادله واکنش انجام‌شده به صورت زیر است:



نکته



تست و پاسخ ۷۷

درستی یا نادرستی مطالب زیر، به ترتیب کدام است؟

- سدیم کلرید مانند اوره، دارای مولکول‌های قطبی است و در آب حل می‌شود. NaCl
- آب گل‌آلود، نمونه‌ای از کلوئیدها است و ذرات سازنده آن با گذشت زمان ته‌نشین می‌شود. $\text{CO(NH}_2)_2$
- در واکنش صابون‌های جامد با کلسیم کلرید، رسوبی تولید می‌شود که شمار اتم‌ها در فرمول شیمیایی آن، دو برابر شمار اتم‌ها در صابون اولیه است. RCOONa $(\text{RCOO})_2\text{Ca}$
- شمار پیوندهای دوگانه در هر مولکول روغن زیتون ($\text{C}_{57}\text{H}_{104}\text{O}_6$)، سه برابر شمار گروه‌های هیدروکسیل در مولکول اتیلن گلیکول است.
 - (۱) درست - نادرست - نادرست - درست
 - (۲) نادرست - نادرست - نادرست - درست
 - (۳) درست - درست - درست - درست
 - (۴) نادرست - درست - درست - نادرست

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ تشریحی

عبارت‌های اول تا سوم، نادرست و عبارت چهارم درست است.

بررسی موارد:

مورد اول: امیدوارم توی دام نیفتاده باشی! سدیم کلرید همانند اوره در آب حل می‌شود، اما توجه کنید که سدیم کلرید یک ترکیب یونی است نه مولکولی!

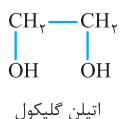
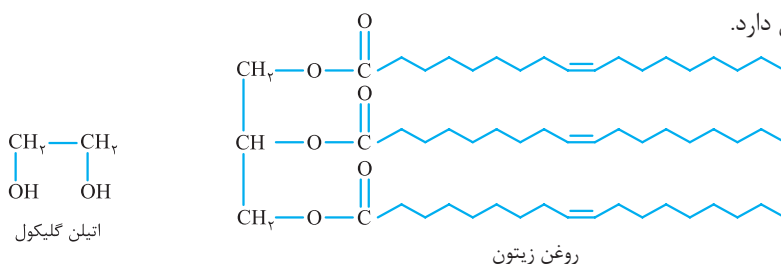
دام تستی به کار بردن واژه مولکول و یا ویژگی ترکیبات مولکولی برای ترکیبات یونی، یکی از مشهورترین دام‌های آموزشی تست‌هاست، حواستو جمع کن!

مورد دوم: آب گل‌آلود نوعی سوسپانسیون است و ته‌نشین شدن ذرات آن گواهی بر این ادعا است، چراکه سوسپانسیون‌ها جزء مخلوط‌های ناپایدارند و ذره‌های سازنده آن‌ها پس از گذشت زمان ته‌نشین می‌شوند، اما کلوئیدها علی‌رغم ناهمگن بودن، مخلوط‌هایی پایدار هستند و ذرات سازنده آن‌ها ته‌نشین نمی‌شوند. مورد سوم: مطابق معادله زیر شمار اتم‌های رسوب تولید شده دو برابر شمار اتم‌های صابون اولیه نیست! (شمار اتم‌های گروه R را X در نظر می‌گیریم).

$$2\text{RCOONa(aq)} + \text{CaCl}_2\text{(aq)} \rightarrow (\text{RCOO})_2\text{Ca(s)} + 2\text{NaCl(aq)}$$

$$x+4 \quad \quad \quad [(x+2)\times 2]+1=2x+7$$

مورد چهارم: روغن زیتون ($\text{C}_{57}\text{H}_{104}\text{O}_6$) یک استر سه‌عاملی است؛ بنابراین ۳ پیوند دوگانه C=O دارد. از طرفی، اسیدهای چرب سازنده آن ($\text{C}_{18}\text{H}_{34}\text{O}_2$) سیر نشده‌اند و یک پیوند دوگانه C=C دارند؛ پس روغن زیتون در مجموع ۶ پیوند دوگانه دارد. اتیلن گلیکول ($\text{C}_2\text{H}_6\text{O}_2$) نیز یک دی‌الکل است و دو گروه عاملی هیدروکسیل دارد.



تکنیک

فقط با بررسی عبارت‌های اول و دوم که عبارت‌های ساده‌ای محسوب می‌شوند، می‌توان به پاسخ تست رسید.

تست و پاسخ ۷۸

- چند مورد از مطالب زیر درباره واکنش ۱/۱ مول فلز روی با ۲۵۰ میلی‌لیتر محلول ۸/۰ مولار نیتریک اسید در دمای 25°C ، درست است؟
 - pH اولیه محلول اسید، ۱/۰ است. HNO_3 (اسید قوی)
 - با افزودن آب و رساندن حجم محلول به یک لیتر، سرعت تولید گاز افزایش می‌یابد.
 - در این واکنش، یون نیترات اکسایش یافته و کاهنده است. HNO_2 (اسید ضعیف)
 - اگر به جای محلول نیتریک اسید، از محلول نیترواسید با دما و غلظت یکسان استفاده شود، سرعت واکنش کاهش می‌یابد.

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۲



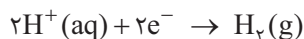
پاسخ تشریحی عبارت‌های اول و چهارم درست‌اند.

• نیتریک اسید یک اسید قوی تک‌پروتون‌دار است؛ پس غلظت یون H^+ در محلول با غلظت اولیه اسید برابر است:

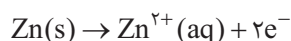
$$[H^+] = [HNO_3] = 0.8 \text{ mol.L}^{-1}$$

$$pH = -\log[H^+] = -\log 0.8 = -(\log 8 - \log 10) = -(\log 2^3 - 1) = -3 \log 2 + 1 = -3(0.3) + 1 = 0.1$$

• با افزودن آب به محلول، غلظت اسید کاهش یافته و در نتیجه سرعت واکنش کاهش می‌یابد، نه افزایش!



• در واکنش فلزها با محلول نیتریک اسید، یون H^+ کاهش یافته و فلز اکسایش می‌یابد:



یون نیترات در این واکنش، ناظر یا تماشاچی است.

• نیترو اسید (HNO_3)، یک اسید ضعیف است؛ بنابراین در دما و غلظت یکسان، غلظت یون هیدرونیوم در محلول آن نسبت به محلول نیتریک

اسید، کمتر است، به همین دلیل سرعت واکنش کاهش می‌یابد.

تست و پاسخ ۷۹

تفاوت غلظت مولی یون هیدرونیوم در محلول‌هایی با $pH = 1$ و $pH = 0$ ، چند برابر تفاوت غلظت مولی یون هیدرونیوم در محلول‌های با

$pH = 2$ و $pH = 1$ است؟

۱۰۰ (۴)

۹۰ (۳)

۱۰ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ تشریحی با استفاده از مقادیر pH داده‌شده، غلظت یون هیدرونیوم در هر محلول را محاسبه می‌کنیم:

$$[H^+] = 10^{-pH}$$

$$pH = 0 \Rightarrow [H^+] = 1 \text{ mol.L}^{-1}$$

$$pH = 1 \Rightarrow [H^+] = 0.1 \text{ mol.L}^{-1}$$

$$pH = 2 \Rightarrow [H^+] = 0.01 \text{ mol.L}^{-1}$$

$$\left. \begin{array}{l} pH = 0 \\ pH = 1 \end{array} \right\} \rightarrow 1 - 0.1 = 0.9 \text{ mol.L}^{-1}$$

$$\left. \begin{array}{l} pH = 1 \\ pH = 2 \end{array} \right\} \rightarrow 0.1 - 0.01 = 0.09 \text{ mol.L}^{-1}$$

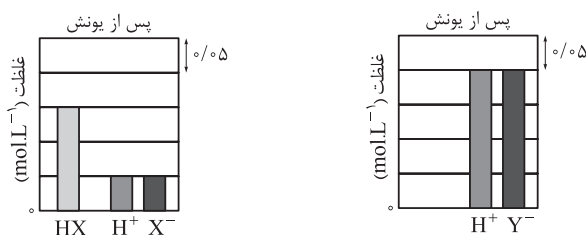
$$\Rightarrow \frac{0.9}{0.09} = 10$$

تفاضل مقادیر به‌دست‌آمده را حساب می‌کنیم:

تست و پاسخ ۸۰

با توجه به شکل‌های زیر، که محلول دو اسید HX و HY پس از یونش را نشان می‌دهد، کدام موارد زیر درست است؟ (حجم، دما و غلظت

دو اسید یکسان است و جرم مولی HY را برابر 181 g.mol^{-1} در نظر بگیرید.)



(الف) درصد یونش و ثابت یونش اسید HX به ترتیب برابر ۲۵ درصد و $1.67 \times 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$ است.

(ب) اگر حجم محلول HY ، ۲۰۰ میلی‌لیتر باشد، pH محلول و جرم آغازین HY در آن به ترتیب برابر ۰/۷ و ۷/۲۴ گرم است.

(پ) اگر HX ، نخستین عضو خانواده کربوکسیلیک اسیدها باشد، HY می‌تواند پرکاربردترین اسید آلی در زندگی روزانه باشد.

(ت) یک لیتر HY نسبت به یک لیتر HX ، می‌تواند مقدار سدیم هیدروکسید یک مولار بیشتری را خنثی کند.

(۴) الف - ب - ت

(۳) پ - ت

(۲) ب - ت

(۱) الف - ب

پاسخ: گزینه ۱



پاسخ تشریحی عبارت‌های «الف» و «ب» درست‌اند.

(الف)



غلظت اولیه: 4×10^{-5} ° °

غلظت نهایی: 3×10^{-5} °/° °/°

$$\text{درصد یونش} = \frac{[H^+]}{M_{HX}} \times 100 = \frac{10^{-5}}{4 \times 10^{-5}} \times 100 = \frac{100}{4} = 25\%$$

$$\text{ثابت یونش} = \frac{[H^+] \times [X^-]}{[HX]_{\text{تعادلی}}} = \frac{10^{-5} \times 10^{-5}}{3 \times 10^{-5}} = 1/67 \times 10^{-2}$$



غلظت اولیه: 4×10^{-5} ° °

غلظت نهایی: ° 4×10^{-5} 4×10^{-5}

$$pH = -\log[H^+] = -\log 2 \times 10^{-1} = 0.7 \checkmark$$

$$n = M \times V_{\text{محلول}} \Rightarrow (4 \times 10^{-5}) \times 200 \times 10^{-3} = 4 \times 10^{-2} \text{ mol}$$

$$\text{جرم} = 4 \times 10^{-2} \times 181 = 7.24 \text{ g}$$

(پ) با توجه به نمودارها، HX اسید ضعیف و HY اسید قوی است. پرکاربردترین اسید آلی در زندگی روزانه، استیک اسید یا همان سرکه است که یک اسید ضعیف است و نمی‌تواند HY باشد.

(ت) با توجه به غلظت یکسان هر دو اسید، یک لیتر از هر دو محلول اسیدی در واکنش با باز، مقدار یکسانی سدیم هیدروکسید را خنثی می‌کنند.

$$n a_a \cdot M_a \cdot V_a = n_b \cdot M_b \cdot V_b$$

برای هر دو اسید، یکسان است.

تست و پاسخ ۸۱

۴ لیتر محلول سدیم هیدروکسید با $pH = 13/1$ با ۱۲۸ گرم از یک اسید چرب (با زنجیر هیدروکربنی سیرشده)، مطابق معادله کلی زیر واکنش می‌دهد. مجموع شمار اتم‌ها در فرمول شیمیایی اسید چرب مورد نظر کدام است؟ ($O = 16, C = 12, H = 1: g.mol^{-1}$)



۵۳ (۴)

۵۰ (۳)

۴۷ (۲)

۴۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ تشریحی گام اول: ابتدا غلظت محلول سدیم هیدروکسید را محاسبه می‌کنیم:

$$[H^+] = 10^{-pH} = 10^{-13/1} = 10^{-14+0/9} = 10^{-14} \times (10^{0/3})^3 = 8 \times 10^{-14} \text{ mol.L}^{-1}$$

گام دوم: توجه کنید ما غلظت OH^- را نیاز داریم، نه H^+ ؛ بنابراین طبق رابطه مقابل غلظت OH^- را محاسبه می‌کنیم: $[H^+] \times [OH^-] = 10^{-14}$

$$8 \times 10^{-14} \times [OH^-] = 10^{-14} \Rightarrow [OH^-] = \frac{1}{8} \text{ mol.L}^{-1} \Rightarrow [OH^-] = [NaOH] = \frac{1}{8} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$NaOH \text{ مول} = \frac{1}{8} \text{ mol.L}^{-1} \times 4 \text{ L} = 0.5 \text{ mol}$$

گام سوم: حالا مقدار مول NaOH را محاسبه می‌کنیم:

گام چهارم: فرمول مولکولی اسیدهای چرب سیرشده، $C_n H_{2n+1} COOH$ است که با این حساب، جرم مولی آن‌ها از رابطه $(12n) + (2n+1) + (12 + (16 \times 2) + 1) = 14n + 46$ به دست می‌آید.

گام پنجم: طبق معادله موازنه‌شده، مقدار مول مصرفی اسید چرب و سدیم هیدروکسید با هم برابر است؛ یعنی در این واکنش ۰/۵ مول اسید چرب مصرف شده است که: $256 \text{ g.mol}^{-1} = \text{جرم مولی} \Rightarrow 128 = 0.5 \times \text{جرم مولی اسید چرب} \Rightarrow \text{جرم} = 0.5 \times \text{جرم مولی}$

گام ششم: معادله دارای مجهول را مساوی جرم مولی قرار داده و به صورت روبه‌رو محاسبه می‌کنیم: $256 = 14n + 46 \Rightarrow n = 15$

گام هفتم: فرمول مولکولی اسید چرب به صورت $C_{15} H_{31} COOH$ است و مجموع شمار اتم‌ها در ساختار آن برابر $15 + 35 = 50$ می‌باشد.



تست و پاسخ ۸۲

کدام موارد از مطالب زیر، درست است؟

- (الف) در دمای یکسان، رسانایی الکتریکی محلول ۵/۰ مولار استون در آب، بیشتر از محلول ۵/۰ مولار آمونیاک (۲/۰ α) است.
 (ب) انحلال شکر در آب مانند انحلال ید در هگزان، انحلال مولکولی است و هر دو محلول غیرالکترولیت محسوب می‌شوند.
 (پ) نوع رسانایی الکتریکی آلوتروپ پایدارتر کربن، با نوع رسانایی محلول آبی نمک خوراکی متفاوت است.
 (ت) جابه‌جایی یون‌ها در سدیم کلرید مذاب باعث می‌شود که این ماده مانند محلول آبی سدیم نیترات، رسانای جریان برق باشد.
- (۱) الف - ب (۲) ب - پ (۳) ب - پ - ت (۴) الف - پ - ت

گرافیت

پاسخ: گزینه ۳

درس نامه



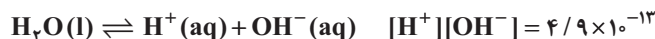
پاسخ تشریحی عبارت‌های «ب»، «پ» و «ت» درست‌اند.

بررسی موارد:

(الف) انحلال استون در آب کاملاً به صورت مولکولی است و محلول آن در آب خاصیت رسانایی الکتریکی ندارد؛ در حالی که آمونیاک در آب به طور عمده به صورت مولکولی و اندکی به صورت یونی حل می‌شود و محلول آن رسانای جریان برق است.
 (ب) انحلال برخی مواد در آب مولکولی و برخی دیگر، یونی است. انحلال شکر در آب و انحلال ید در هگزان هر دو در دسته انحلال مولکولی قرار می‌گیرند و محلول نارسا ایجاد می‌کنند.
 (پ) گرافیت، رسانای الکترونی و محلول آبی NaCl، رسانای یونی است.
 (ت) ترکیبات یونی به شکل مذاب یا محلول، رسانای جریان برق هستند؛ زیرا در این دو حالت یون‌ها امکان جابه‌جایی دارند.

تست و پاسخ ۸۳

با توجه به معادله یونش آب در دمای ۹۰°C، کدام گزینه نادرست است؟

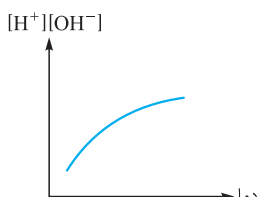


- (۱) غلظت یون هیدروکسید آب خالص در این دما، برابر $7 \times 10^{-7} \text{ mol.L}^{-1}$ است.
 (۲) pH آب خالص در این دما، ۸/۵ و واحد کوچک‌تر از pH آب خالص در دمای اتاق است.
 (۳) $[\text{H}_3\text{O}^+]$ آب خالص در دمای ۹۰°C، ۷ برابر غلظت این یون در آب خالص با دمای ۲۵°C است.
 (۴) یونش آب، فرایندی گرماگیر است و با افزایش دما، غلظت یون هیدرونیوم در آب افزایش یافته و محیط اندکی اسیدی می‌شود.

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ تشریحی

می‌دانیم که در دمای ۲۵°C، حاصل $[\text{H}^+][\text{OH}^-]$ برابر 10^{-14} است. با توجه به این که با افزایش دما، این مقدار بیشتر شده است ($4/9 \times 10^{-13}$)، نتیجه می‌گیریم که با افزایش دما تعادل در جهت رفت جابه‌جا شده و یونش آب گرماگیر است.





بررسی گزینه‌ها:

۱) غلظت یون‌های هیدرونیوم و هیدروکسید در آب خالص با هم برابر است:

$$[H^+][OH^-] = 4.9 \times 10^{-14} \Rightarrow [H^+] = [OH^-] = 7 \times 10^{-7} \text{ mol.L}^{-1}$$

۲) می‌دانیم pH، طبق رابطه زیر محاسبه می‌شود:

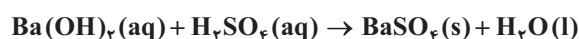
$$\left. \begin{aligned} \text{pH} = -\log[H^+] &\Rightarrow \text{pH} = -\log[7 \times 10^{-7}] = 7 - \underbrace{\log 7}_{0.85} = 6.15 \\ \text{pH} = -\log[H^+] &\Rightarrow \text{pH} = -\log[10^{-7}] = 7 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 7 - 6.15 = 0.85$$

۳) همان‌طور که محاسبه کردیم، غلظت H_3O^+ در دمای 9°C ، برابر 7×10^{-7} مولار و در دمای 25°C ، برابر 10^{-7} مولار است؛ بنابراین غلظت این یون در دمای 9°C ، ۷ برابر غلظت این یون در دمای 25°C است.

۴) با افزایش دما، تعادل در جهت رفت پیش می‌رود و K افزایش می‌یابد؛ اما به دلیل برابری ضریب مولی H^+ و OH^- ، غلظت هر دو یون به یک اندازه افزایش می‌یابد و آب، خنثی باقی می‌ماند.

تست و پاسخ ۸۴

۲۵۰ میلی‌لیتر محلول باریم هیدروکسید با ۱۰۰ میلی‌لیتر محلول ۰/۲ مولار سولفوریک اسید به طور کامل واکنش داده است. pH محلول اولیه باز کدام است و طی این واکنش چند گرم رسوب تولید می‌شود؟ ($\text{Ba} = 137, \text{S} = 32, \text{O} = 16 : \text{g.mol}^{-1}$)



(معادله واکنش موازنه نشده است.)

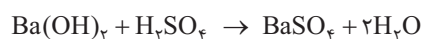
$$4/66, 13/2(2)$$

$$4/66, 12/9(1)$$

$$9/32, 13/2(4)$$

$$9/32, 12/9(3)$$

پاسخ: گزینه ۲



پاسخ تشریحی گام اول: ابتدا معادله واکنش را موازنه می‌کنیم:

گام دوم: غلظت محلول باریم هیدروکسید را حساب می‌کنیم:

روش اول: استفاده از کسر تبدیل:

$$\text{Ba(OH)}_2 \text{ مول} = 100 \text{ mL H}_2\text{SO}_4 \times \frac{1 \text{ L}}{1000 \text{ mL}} \times \frac{0.2 \text{ mol H}_2\text{SO}_4}{1 \text{ L H}_2\text{SO}_4} \times \frac{1 \text{ mol Ba(OH)}_2}{1 \text{ mol H}_2\text{SO}_4} = 0.2 \text{ mol Ba(OH)}_2$$

$$[\text{Ba(OH)}_2] = \frac{0.2 \text{ mol}}{25 \text{ L}} = 0.008 \text{ mol.L}^{-1}$$

روش دوم: استفاده از کسر تناسب:

$$\frac{\left(\frac{\text{mol}}{\text{L}}\right) \times (\text{L})}{\text{Ba(OH)}_2} = \frac{\left(\frac{\text{mol}}{\text{L}}\right) \times (\text{L})}{\text{H}_2\text{SO}_4} \Rightarrow \frac{\text{غلظت مولی} \times \text{حجم محلول}}{\text{غلظت مولی} \times \text{حجم محلول}} = \frac{0.2 \times 100}{1 \times 25} = \frac{0.2 \times 1}{1 \times 25} \Rightarrow \text{غلظت مولی} = 0.008 \text{ mol.L}^{-1}$$

گام سوم: pH محلول باریم هیدروکسید را به دست می‌آوریم:

$$[\text{OH}^-] = 2[\text{Ba(OH)}_2] = 0.016 \text{ mol.L}^{-1} \text{ و } [\text{H}^+][\text{OH}^-] = 10^{-14}$$

$$[\text{H}^+] = \frac{10^{-14}}{0.016} = \frac{1}{16} \times 10^{-12} \Rightarrow \text{pH} = -\log[\text{H}^+] = 12 + \log 16 = 12 + 4 \log 2 = 12 + 4(0.3) = 13.2$$

گام چهارم: جرم رسوب تولیدشده را حساب می‌کنیم:

$$250 \text{ mL Ba(OH)}_2 \times \frac{1 \text{ L}}{1000 \text{ mL}} \times \frac{0.008 \text{ mol Ba(OH)}_2}{1 \text{ L Ba(OH)}_2} \times \frac{1 \text{ mol BaSO}_4}{1 \text{ mol Ba(OH)}_2} \times \frac{233 \text{ g BaSO}_4}{1 \text{ mol BaSO}_4} = 4.66 \text{ g BaSO}_4$$



تست و پاسخ ۸۵

چند مورد از مطالب زیر، درست است؟

• در واکنش فلز روی با محلول مس (II) سولفات، با گذشت زمان از غلظت یون های Cu^{2+} و SO_4^{2-} کاسته شده و شدت رنگ آبی محلول کم می شود.
• در گذشته برای عکاسی از نور خیره کننده سوختن منیزیم استفاده می شد که در آن فلز منیزیم و گاز اکسیژن به ترتیب کاهنده و اکسنده واکنش هستند.

• با وارد کردن میله ای از جنس آلیاژ آلومینیم و آهن، درون محلولی که حاوی یون های Cu^{2+} ، Ag^+ و Zn^{2+} است، در مجموع احتمال انجام

چهار واکنش وجود دارد. یعنی نیم واکنش $2\text{H}^+ + 2\text{e}^- \rightarrow \text{H}_2$ انجام شود.

• اگر در سلول گالوانی حاصل از اتصال نیم سلول فلز M به نیم سلول SHE، pH نیم سلول SHE افزایش یابد، E° نیم سلول M عددی منفی است.

۱ (۴)

۲ (۳)

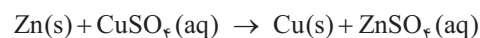
۳ (۲)

۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ تشریحی موارد دوم و چهارم درست اند.

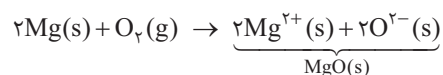
مورد اول: معادله واکنش را نوشته و بررسی می کنیم:



• یون SO_4^{2-} در این واکنش یون ناظر یا تماشاگر است که غلظت آن تغییری نخواهد کرد.

• یون Cu^{2+} در طی واکنش از حالت محلول (aq) خارج شده و به شکل رسوب جامد Cu(s) درمی آید؛ بنابراین غلظت یون Cu^{2+} کاهش یافته و از شدت رنگ آبی محلول کاسته می شود.

مورد دوم: در گذشته از نور سفید خیره کننده سوختن منیزیم برای عکاسی استفاده می شد. معادله واکنش به صورت زیر است:



مطابق واکنش بالا، فلز منیزیم اکسایش یافته (کاهنده) و به یون Mg^{2+} تبدیل شده است و اتم اکسیژن کاهش یافته و به یون O^{2-} تبدیل شده است.

نکته هرگاه در یک واکنش، عدد اکسایش یک گونه منفی تر (کوچک تر) شود، آن گونه با گرفتن الکترون کاهش یافته و در نقش اکسنده خواهد بود و برعکس.

مورد سوم: برای بررسی این گزینه باید ترتیب گونه ها در جدول پتانسیل کاهش استاندارد را بلد باشیم:

$\text{Ag}^+ \rightarrow \text{Ag}$	↑ کاهنده قوی تر
$\text{Cu}^{2+} \rightarrow \text{Cu}$	
$\text{Fe}^{2+} \rightarrow \text{Fe}$	
$\text{Zn}^{2+} \rightarrow \text{Zn}$	
$\text{Al}^{3+} \rightarrow \text{Al}$	
	↓ اکسنده قوی تر

احتمال انجام پنج واکنش زیر وجود دارد.

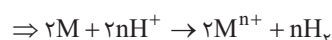
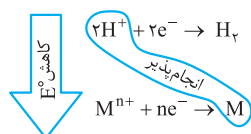
(۱) Ag^+ و Fe (۲) Cu^{2+} و Fe (۳) Ag^+ و Al (۴) Cu^{2+} و Al (۵) Zn^{2+} و Al

نکته هر وقت خواستید با استفاده از جدول پتانسیل کاهش استاندارد، امکان یا عدم امکان وقوع یک واکنش را بررسی کنید، بدانید که راست پایین با چپ بالا واکنش می ده!

مورد چهارم: وقتی pH نیم سلول SHE افزایش می یابد یعنی غلظت یون H^+ کاهش یافته است.

پس فلز M باید کاهنده تر باشد تا با کاهش دادن H^+ و تبدیل آن به H_2 ، باعث افزایش pH شود؛ بنابراین

E° نیم سلول M باید عددی منفی باشد.



تست و پاسخ ۸۶

با توجه به نیم‌واکنش‌های داده‌شده و پتانسیل کاهش استاندارد آن‌ها، کدام گزینه درست است؟

نیم واکنش	$E^{\circ} (V)$
$Fe^{2+}(aq) + 2e^{-} \rightarrow Fe(s)$	-0.44
$Cu^{2+}(aq) + e^{-} \rightarrow Cu^{+}(aq)$	$+0.15$
$Fe^{3+}(aq) + e^{-} \rightarrow Fe^{2+}(aq)$	$+0.77$
$Cu^{2+}(aq) + 2e^{-} \rightarrow Cu(s)$	$+0.34$
$Cu^{+}(aq) + e^{-} \rightarrow Cu(s)$	$+0.52$

(۱) واکنش $3Fe^{2+}(aq) \rightarrow Fe(s) + 2Fe^{3+}(aq)$ به طور طبیعی انجام می‌شود.

(۲) فلز آهن به عنوان کاهنده می‌تواند Cu^{2+} را کاهش دهد ولی توانایی کاهش Cu^{+} را ندارد.

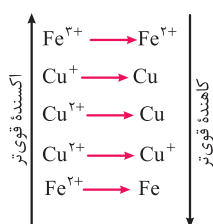
(۳) فلز آهن نسبت به فلز مس، کاهنده‌تر و کاتیون‌های آهن نسبت به کاتیون‌های مس، اکسندتر هستند.

(۴) E° واکنش $2Cu^{+}(aq) \rightarrow Cu^{2+}(aq) + Cu(s)$ برابر $+0.37$ و ولت است.

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ تشریحی

پتانسیل کاهش استاندارد نیم‌واکنش‌ها را به ترتیب از مثبت به منفی (از بالا به پایین) می‌نویسیم:



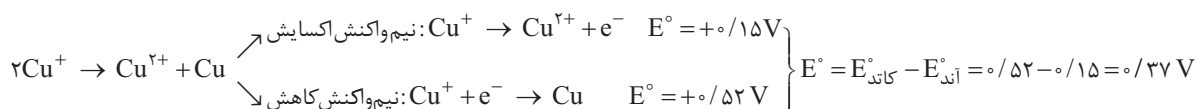
(۱) واکنش Fe با Fe^{3+} (معکوس صورت سؤال) رخ خواهد داد، نه واکنش صورت سؤال!

نکته در جدول پتانسیل کاهش، گونه راست پایین با گونه چپ بالا واکنش می‌دهد!

(۲) فلز آهن توانایی کاهش هر ۳ یون Cu^{2+} ، Cu^{+} و Fe^{3+} را دارد.

(۳) با توجه به سری الکتروشیمیایی نشان داده شده، قدرت کاهندگی فلز آهن از دیگر کاهنده‌ها (مثل فلز مس) بیشتر است. از بین کاتیون‌های آهن، کاتیون Fe^{3+} نسبت به Cu^{2+} و Cu^{+} اکسندتر است، اما Fe^{2+} نسبت به کاتیون‌های مس (Cu^{2+} و Cu^{+}) قدرت اکسندگی کم‌تری دارد.

(۴)



تست و پاسخ ۸۷

چند مورد از مطالب زیر، درست است؟

- تفاوت عدد اکسایش اتم اکسیژن در مولکول‌های اکسیژن دی‌فلوئورید و هیدروژن پراکسید برابر ۳ است.
- تفاوت مجموع عدد اکسایش اتم‌های کربن در مولکول اتیل استات، با مجموع عدد اکسایش اتم‌های کربن در مولکول بوتانوئیک اسید، برابر ۱+ است.



• در سوختن کامل متان، عدد اکسایش کربن از کم‌ترین مقدار خود به بیشترین مقدار خود می‌رسد.

• محلول ترکیبی از وانادیم با فرمول NH_4VO_3 ، به رنگ زرد دیده می‌شود.

+۴

-۴

۲ (۲)

۴ (۴)

۱ (۱)

۳ (۳)

پاسخ: گزینه ۳



درس نامه...

● برای تعیین سریع‌تر عدد اکسایش می‌توان از قواعد زیر استفاده کرد:

ردیف	قاعده	مثال	توضیحات
۱	عدد اکسایش عناصرها در حالت آزاد برابر صفر است.	عدد اکسایش سدیم در (Na) و عدد اکسایش اتم‌های هیدروژن در H_2 برابر با صفر است.	در اوزون، مجموع عدد اکسایش اتم‌ها برابر با صفر است، در حالی که عدد اکسایش اتم‌های اکسیژن با هم متفاوت است. $6-5=+1$ $6-6=0$ $6-7=-1$
۲	عدد اکسایش عناصر در یون‌های تک‌اتمی برابر با بار یون است.	عدد اکسایش آهن در یون Fe^{2+} برابر با +۲ و عدد اکسایش کلر در یون Cl^- برابر با -۱ است.	
۳	عدد اکسایش فلزهای قلیایی (گروه ۱)، فلزهای قلیایی‌خاکی (گروه ۲) و فلزهای گروه ۱۳ در ترکیب‌های مختلف به ترتیب برابر با +۱، +۲ و +۳ است.	عدد اکسایش Na در NaCl برابر +۱ و عدد اکسایش Ca در $CaCO_3$ برابر +۲ و عدد اکسایش Al در Na_3AlF_6 برابر +۳ است.	به طور کلی، عدد اکسایش فلزها در ترکیب‌های یونی، برابر با بار یون آن‌ها است؛ به طور مثال عدد اکسایش آهن در $Fe_3(SO_4)_3$ برابر +۳ است.
۴	عدد اکسایش فلوئور (F) در ترکیب با بقیه عناصر، همیشه برابر -۱ است.	عدد اکسایش F در CaF_2 ، HOF، Na_3AlF_6 و ... برابر -۱ است.	عدد اکسایش فلوئور در حالت آزاد (F_2) برابر صفر است.
۵	عدد اکسایش هیدروژن در ترکیب با نافلزها و ترکیب‌های آلی، +۱ و در ترکیب با فلزها، -۱ است.	عدد اکسایش هیدروژن در HCl ، CH_4 و H_2O ، +۱ و در NaH و CaH_2 ، -۱ است.	
۶	عدد اکسایش اکسیژن در بیشتر ترکیب‌هایش برابر -۲ است.	عدد اکسایش اکسیژن در H_2SO_4 ، Na_2O ، H_2O و NO_3^- ، -۲ است.	برخی از مواردی که عدد اکسایش اکسیژن -۲ نیست: ● عدد اکسایش O در HOF برابر صفر است. ● عدد اکسایش O در OF_2 برابر +۲ و در O_2F_2 برابر +۱ است. ● عدد اکسایش اکسیژن در H_2O_2 برابر با -۱ است.
۷	جمع جبری عددهای اکسایش اتم‌ها در یک ترکیب خنثی برابر با صفر و در یک یون چنداتمی برابر با بار یون است.	$H_2SO_4 : 2H + S + 4O = 0$ $PO_4^{3-} : P + 4O = -3$	با توجه به این قاعده و تشکیل معادله، می‌توان عدد اکسایش عنصری که روش تعیین عدد اکسایش آن در قواعد گفته‌شده، موجود نبود را مشخص کرد. $H_2SO_4 : 2(+1) + S + 4(-2) = 0 \Rightarrow S = +6$ $PO_4^{3-} : P + 4(-2) = -3 \Rightarrow P = +5$

عدد اکسایش یک عنصر می‌تواند در ترکیب‌های مختلف متفاوت باشد. اغلب نافلزها و همچنین فلزهای واسطه، عددهای اکسایش مختلفی را در ترکیب‌های گوناگون خود دارند.





بهتر است دامنه تغییرات عدد اکسایش برخی عناصر را بلد باشیم:

شماره گروه	۱	۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷
پایین ترین عدد اکسایش	۰	۰	۰	-۴	-۳	-۲	-۱
بالا ترین عدد اکسایش	+۱	+۲	+۳	+۴	+۵	+۶	+۷

به طور کلی، در همه فلزها پایین ترین عدد اکسایش برابر با صفر است (در حالت آزاد) و برای عنصرهای گروه ۱۴ تا ۱۷ (به جز اکسیژن و فلوئور)، پایین ترین و بالاترین عدد اکسایش از رابطه های زیر به دست می آید:

۱۸- شماره گروه = پایین ترین عدد اکسایش

یکان شماره گروه - ۱۰ = شماره گروه = بالاترین عدد اکسایش

● در مورد دامنه تغییرات عدد اکسایش، استثناهایی هم وجود دارد:

(الف) دامنه تغییرات عدد اکسایش اکسیژن از -۲ تا +۲ است.

(ب) عدد اکسایش فلوئور به حالت عنصر آزاد (F_2) برابر صفر و در همه ترکیب های خود برابر -۱ است.

برخی فلزهای واسطه هم عددهای اکسایش متنوعی دارند. بالاترین عدد اکسایش وانادیم ($_{23}V$)، کروم ($_{24}Cr$)، منگنز ($_{25}Mn$)، آهن ($_{26}Fe$) و مس ($_{29}Cu$) به ترتیب برابر با ۵، ۶، ۷، ۸ و ۲ است.

فلز واسطه	وانادیم ($_{23}V$)	کروم ($_{24}Cr$)	منگنز ($_{25}Mn$)	آهن ($_{26}Fe$)	مس ($_{29}Cu$)
بالاترین عدد اکسایش	+۵	+۶	+۷	+۳	+۲

در نام ترکیب های دارای فلزهای واسطه، عدد رومی نشان دهنده عدد اکسایش آن فلز است. البته به شرطی مجاز به استفاده از اعداد رومی در نام گذاری هستیم که آن فلز واسطه، عددهای اکسایش متفاوتی داشته باشد.

MnO_2 : منگنز (IV) اکسید

MnO : منگنز (II) اکسید

فلزهای قلیایی و قلیایی خاکی، آلومینیم، فلوئور، اسکاندیم، روی و نقره، در ترکیب های مختلف فقط یک نوع عدد اکسایش دارند.

عنصر	فلزهای قلیایی (گروه ۱)	قلیایی خاکی (گروه ۲)	آلومینیم ($_{13}Al$)	فلوئور ($_9F$)	اسکاندیم ($_{21}Sc$)	روی ($_{30}Zn$)	نقره ($_{47}Ag$)
تنها عدد اکسایش در ترکیب ها	+۱	+۲	+۳	-۱	+۳	+۲	+۱

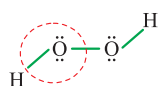
پاسخ تشریحی عبارت های اول، سوم و چهارم درست اند.

بررسی عبارت ها:

عبارت اول: با رسم ساختار لوویس بررسی می کنیم:



$$6-4=+2$$



$$6-7=-1$$

تفاوت -۱ و +۲ ← ۳ واحد است.

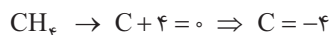
عبارت دوم:

نکات ۱) اسیدها و استرهای هم کربن با زنجیر هیدروکربنی سیر شده، فرمول مولکولی یکسان اما فرمول ساختاری متفاوتی دارند؛ بنابراین ایزومر یکدیگر محسوب می شوند.

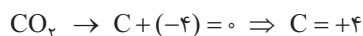
۲) برای محاسبه مجموع عدد اکسایش اتم های یک عنصر در یک ترکیب، نیاز به رسم ساختار نیست. ← با استفاده از عددهای اکسایش معروف و جمع جبری عدد اکسایش اتم ها در یک گونه، سؤال را حل می کنیم.

ایزومر یکدیگرند و مجموع عدد اکسایش اتم های کربن در آن ها برابر است. $\Rightarrow$ $\left. \begin{array}{l} \text{اتیل استات} = C_4H_8O_2 \\ \text{بوتانوئیک اسید} = C_4H_8O_2 \end{array} \right\}$

عبارت سوم: در فرایند سوختن کامل متان، گاز CO_2 تولید می شود:



عدد اکسایش کربن در متان، از کم ترین مقدار خود -4 به بیشترین مقدار خود، $+4$ می رسد.

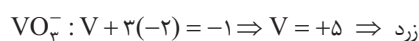


عبارت چهارم:

طبق رمز [ب ساز]، رنگ یون های وانادیم به صورت زیر است:

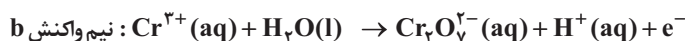
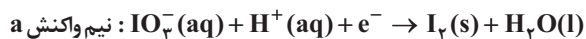
محل	V^{5+}	V^{4+}	V^{3+}	V^{2+}
رنگ	زرد	آبی	سبز	بنفش

با توجه به بار کاتیون سازنده نمک (آمونیم: NH_4^+)، بار آنیون سازنده ترکیب NH_4VO_3 باید برابر (-1) باشد:



تست و پاسخ ۸۸

پس از موازنه نیم واکنش های داده شده، کدام مطلب نادرست است؟



۱) a، نیم واکنش کاهش بوده و با افزایش pH محیط همراه است.

۲) مجموع ضرایب همه گونه های شرکت کننده در نیم واکنش a، برابر ۳۰ است.

۳) تفاوت ضرایب الکترون در این نیم واکنش ها، دو برابر ضریب Cr^{3+} است.

۴) b، نیم واکنش اکسایش است و با انجام آن، عدد اکسایش هر اتم کروم، ۳ واحد افزایش می یابد.

پاسخ: گزینه ۲



برای موازنه نیم واکنش a می توان از همان روش مرسوم موازنه (روش وارسی!) استفاده کرد و براساس اتم ید، در دو طرف ضریب گذاری کرد و



بررسی گزینه ها:

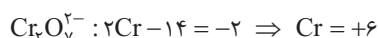
۱) در نیم واکنش a، H^+ مصرف شده و pH محیط افزایش می یابد. هم چنین e^- مصرف شده، پس نوعی نیم واکنش کاهش است.

۲) مجموع ضرایب همه گونه های شرکت کننده در نیم واکنش a، ۳۱ است.

۳) تفاوت ضرایب الکترون برابر $4 = 6 - 10$ است و ضریب Cr^{3+} در نیم واکنش ها برابر ۲ است.

۴) در نیم واکنش b، e^- تولید شده است؛ بنابراین این نیم واکنش از نوع اکسایش است. هم چنین عدد اکسایش هر اتم کروم از $+3$ به $+6$

تبدیل شده است.



تست و پاسخ ۸۹

با توجه به شکل زیر، اگر در اثر خراش جسم مورد نظر در هوای مرطوب، فلز دچار خوردگی شود،



- (۱) آهن - پتانسیل کاهشی استاندارد آهن بیشتر از M است.
- (۲) M - آهن قطب منفی سلول گالوانی تشکیل شده است.
- (۳) آهن - فلز M در نقش کاتد عمل کرده و کاهش می‌یابد.
- (۴) M - پتانسیل کاهشی استاندارد فلز M منفی است.

پاسخ: گزینه ۲

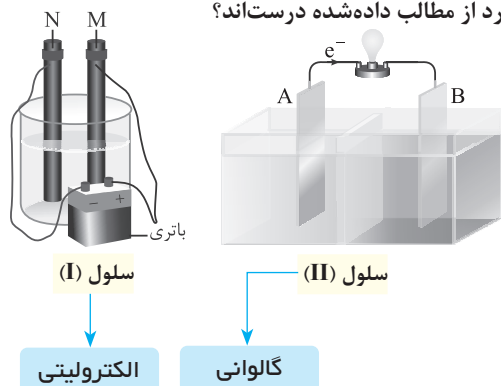
پاسخ تشریحی: اگر در شکل داده شده، فلز M دچار خوردگی شود، نتیجه می‌گیریم که این فلز نسبت به آهن کاهنده‌تر بوده و E° آن کوچک‌تر (منفی‌تر) است.

می‌دانیم که E° فلز آهن منفی است (در سری الکتروشیمیایی، پایین‌تر از هیدروژن قرار دارد)؛ پس E° فلز M هم منفی خواهد بود. بررسی سایر گزینه‌ها:

- (۱) فلزی دچار خوردگی می‌شود که E° آن کوچک‌تر باشد؛ پس در این‌جا پتانسیل کاهشی استاندارد آهن باید کم‌تر از M باشد.
- (۲) اگر فلز M دچار خوردگی شود، در نقش آند و قطب منفی سلول گالوانی خواهد بود.
- (۳) اگر فلز آهن خورده شود، فلز آهن در نقش آند و فلز M در نقش کاتد خواهد بود؛ اما دقت کنید که فلزها کاهش نمی‌یابند، در این‌جا نیم‌واکنش کاهش مربوط به اکسیژن هوا می‌باشد که بر روی سطح فلز M (کاتد) انجام می‌شود.

تست و پاسخ ۹۰

با توجه به شکل‌های زیر که دو نوع سلول الکتروشیمیایی را نشان می‌دهند، چند مورد از مطالب داده شده درست‌اند؟



- در سلول (I) برخلاف سلول (II)، می‌توان یک واکنش شیمیایی را در خلاف جهت طبیعی پیش راند.
- الکتروود N در سلول (I) همانند الکتروود A در سلول (II)، نقش آند را دارد.
- در هر دو سلول، نیم‌واکنش کاهش در کاتد انجام می‌شود.
- در هر دو سلول، جهت حرکت الکترون‌ها در مدار بیرونی از قطب منفی به مثبت است.
- در سلول (I) برخلاف سلول (II)، یون‌های موجود در الکترولیت به سمت الکتروودهای با بار ناهمنام حرکت می‌کنند.

۲ (۴)

۳ (۳)

۴ (۲)

۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ تشریحی: عبارت‌های اول، سوم و پنجم درست‌اند.

سلول (I) یک سلول الکترولیتی و سلول (II)، یک سلول گالوانی است.

نکته

سلول الکترولیتی	سلول گالوانی	
انرژی الکتریکی به انرژی شیمیایی تبدیل می‌شود.	انرژی شیمیایی به انرژی الکتریکی تبدیل می‌شود.	تفاوت‌ها
با اعمال یک ولتاژ بیرونی، یک واکنش اکسایش - کاهش دلخواه انجام می‌شود.	یک واکنش شیمیایی در جهت طبیعی پیش می‌رود.	
دو الکتروود درون یک الکترولیت قرار گرفته‌اند (الکترولیت، یک محلول یونی با یک ترکیب یونی مذاب است).	دارای دو الکترولیت است که توسط دیواره‌ای متخلخل از هم جدا شده‌اند. (الکترولیت‌ها حاوی کاتیون‌هایی از جنس الکتروودها هستند).	



سلول گالوانی	سلول الکترولیتی
آند، قطب منفی و کاتد، قطب مثبت است.	آند، قطب مثبت و کاتد، قطب منفی است.
معمولاً الکترودهای آند و کاتد در واکنش شرکت می کنند.	معمولاً الکترودهای آند و کاتد بی اثرند و در واکنش شرکت نمی کنند.
اکسایش در آند و در کاهش در کاتد انجام می شود.	
جهت حرکت الکترون ها در مدار بیرونی از آند به کاتد است.	
کاتیون ها به سمت کاتد و آنیون ها به سمت آند مهاجرت می کنند.	

بررسی عبارت ها:

- در سلول های الکترولیتی با اعمال یک ولتاژ بیرونی، می توان یک واکنش شیمیایی را در خلاف جهت طبیعی پیش برد.
- در سلول های الکترولیتی، قطب منفی کاتد است و در سلول های گالوانی، آند قطب منفی است.
- در سلول های الکترولیتی همانند سلول گالوانی، نیم واکنش کاهش در کاتد و نیم واکنش اکسایش در آند انجام می شود.
- در هر دو سلول گالوانی و الکترولیتی، جهت حرکت الکترون ها در مدار بیرونی از آند به سمت کاتد است، اما قطب مثبت و منفی در این دو سلول با هم فرق می کند؛ پس باید گفت در سلول گالوانی، جهت حرکت الکترون ها در مدار بیرونی از قطب منفی به مثبت و در سلول الکترولیتی، از قطب مثبت به منفی است.
- در سلول های الکترولیتی، یون های موجود در الکترولیت به سوی الکترودهای با بار نامنم و در سلول های گالوانی یون های موجود در الکترولیت به سوی الکترودهای با بار همنام حرکت می کنند. (همواره کاتیون ها به سمت کاتد و آنیون ها به سمت آند)

تست و پاسخ ۹۱



در یک سلول الکترولیتی در آند، نیم واکنش اکسایش یون های کلرید و در کاتد، نیم واکنش



کاهش مولکول های آب انجام می شود. در این سلول به ازای عبور یک مول الکترون، در

مجموع چند گرم گاز تولید می شود؟ ($\text{Cl} = 35.5, \text{O} = 16, \text{H} = 1; \text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$)

۸۷ (۴)

۵۱ (۳)

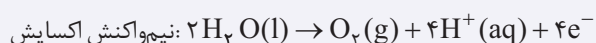
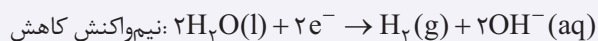
۳۷ (۲)

۳۶ (۱)

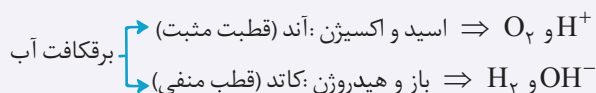
پاسخ: گزینه ۱

خودت حل کنی بهتره اول هر دو نیم واکنش را بنویس و موازنه کن، بعد به ازای شمار الکترون مبادله شده، جرم گازهای تولید شده رو حساب کن!

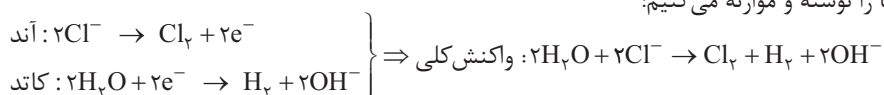
نکته مولکول های آب هم می توانند کاهش و هم می توانند اکسایش یابند:



پس یاد تون باشه از کاهش مولکول های آب، گاز هیدروژن و یون هیدروکسید (OH^-) و از اکسایش مولکول های آب، گاز اکسیژن و یون هیدروژن (H^+) پدید می آید. برای این که راحت تر یاد تون بمونه، می تونید این هوری بگید که در آند، اکسیژن و اسید تولید می شه! همه «الف» دارن!



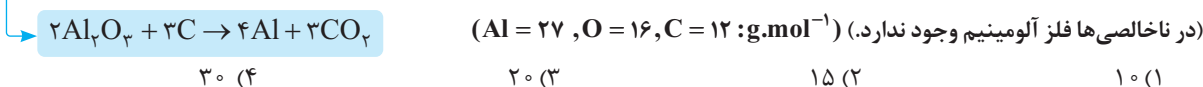
پاسخ تشریحی گام اول: نیم واکنش ها را نوشته و موازنه می کنیم:



گام دوم: با توجه به ضرایب استوکیومتری واکنش کلی و شمار الکترون های عبوری، مقدار گاز تولیدی را محاسبه می کنیم:
به ازای ۲ مول الکترون، ۱ مول Cl_2 به جرم ۷۱ گرم و ۱ مول H_2 به جرم ۲ گرم تولید می شود، یعنی به ازای ۲ مول الکترون در مجموع $71 + 2 = 73$ گرم گاز تولید می شود؛ بنابراین مجموع جرم گازهای تولید شده به ازای ۱ مول الکترون، برابر با $36.5 = \frac{73}{2}$ گرم خواهد بود.

تست و پاسخ ۹۲

نمونه‌ای به جرم ۴۵ گرم از سنگ معدن آلومینیم که دارای ناخالصی است را ذوب کرده و به کمک فرایند هال به آلومینیم تبدیل می‌کنیم. اگر طی این فرایند، ۱۱ گرم گاز تولید شده باشد، درصد جرمی آلومینیم در سنگ معدن اولیه کدام است؟



پاسخ: گزینه ۳

پاسخ تشریحی گام اول: معادله واکنش کلی فرایند هال را می‌نویسیم:

$$۲\text{Al}_2\text{O}_3(\text{s}) + ۳\text{C}(\text{s}) \rightarrow ۴\text{Al}(\text{l}) + ۳\text{CO}_2(\text{g})$$

گام دوم: به کمک جرم گاز CO_2 ، درصد جرمی آلومینیم در سنگ معدن را حساب می‌کنیم:

روش اول: استفاده از کسر تبدیل:

$$۱۱ \text{ g CO}_2 \times \frac{۱ \text{ mol CO}_2}{۴۴ \text{ g CO}_2} \times \frac{۴ \text{ mol Al}}{۳ \text{ mol CO}_2} \times \frac{۲۷ \text{ g Al}}{۱ \text{ mol Al}} = ۹ \text{ g Al}$$

روش دوم: استفاده از کسر تناسب:

$$\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} \Rightarrow \frac{x}{۴ \times ۲۷} = \frac{۱۱}{۳ \times ۴۴} \Rightarrow x = ۹ \text{ g Al}$$

$$\text{Al درصد جرمی} = \frac{\text{جرم Al}}{\text{جرم سنگ معدن}} \times ۱۰۰ = \frac{۹}{۴۵} \times ۱۰۰ = ۲۰\%$$

تست و پاسخ ۹۳

چند مورد از مطالب زیر، دربارهٔ کلروفرم درست است؟ ($\text{Cl} = ۳۵/۵, \text{C} = ۱۲, \text{H} = ۱ : \text{g.mol}^{-1}$)



- مولکولی قطبی بوده و در دمای اتاق، مایع است.
- تفاوت جرم مولی آن با کلرواتان، برابر ۵۵ گرم است.
- همهٔ اتم‌های متصل به اتم مرکزی آن، دارای بار جزئی منفی (δ^-) هستند.
- با جایگزینی اتم (های) هیدروژن آن با اتم کلر، مولکولی حاصل می‌شود که در میدان الکتریکی جهت‌گیری نمی‌کند.

۲ (۲)

۱ (۱)

۴ (۴)

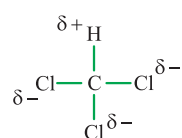
۳ (۳)

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ تشریحی به جز عبارت سوم، بقیهٔ عبارت‌ها درست‌اند.

- کلروفرم (CHCl_3) مولکولی قطبی بوده (همهٔ اتم‌های متصل به اتم مرکزی آن یکسان نیستند) و در دمای اتاق، مایع است؛ باریکهٔ مایع آن در کتاب درسی نشان داده شده است.
- فرمول مولکولی کلرواتان، به صورت $\text{C}_2\text{H}_5\text{Cl}$ است.

$$\text{CHCl}_3 - \text{C}_2\text{H}_5\text{Cl} = ۲\text{Cl} - \text{C} - ۴\text{H} = ۷۱ - ۱۲ - ۴ = ۵۵ \text{ g}$$



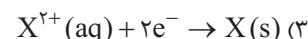
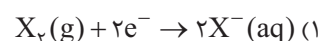
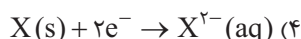
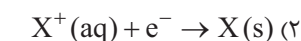
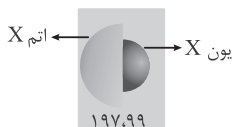
- مقایسهٔ خلعت نافلزی عنصرهای کربن، هیدروژن و کلر به صورت $\text{Cl} > \text{C} > \text{H}$ است؛ بنابراین اتم‌های کلر دارای بار جزئی منفی (δ^-) هستند اما اتم هیدروژن، دارای بار جزئی مثبت (δ^+) می‌باشد.

- با جایگزینی اتم هیدروژن کلروفرم با کلر، CCl_4 تشکیل می‌شود که مولکول ناقطبی است و در میدان الکتریکی جهت‌گیری نمی‌کند.



تست و پاسخ ۹۴

شکل زیر مربوط به مقایسه شعاع اتم عنصر X، با یون پایدار آن است. اگر نسبت قدرمطلق بار به شعاع یون پایدار این عنصر، برابر با $2/02 \times 10^{-2}$ باشد، نیم‌واکنش کاهش عنصر X به کدام صورت نوشته می‌شود؟

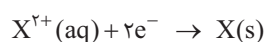


پاسخ: گزینه ۳

پاسخ تشریحی با توجه به شکل، شعاع اتم X پس از تبدیل شدن به یون، کاهش یافته است؛ بنابراین با یک اتم فلزی مواجه هستیم که الکترون(های) خود را از دست داده و به کاتیون تبدیل شده است. طبق گفته صورت سؤال داریم:

$$\frac{\text{قدرمطلق بار}}{\text{شعاع یون}} = 2/02 \times 10^{-2} \Rightarrow \text{بار} = 2/02 \times 10^{-2} \times 99 \Rightarrow \text{بار} = 2 \Rightarrow X^{2+}$$

بنابراین نیم‌واکنش کاهش عنصر X به صورت مقابل نوشته می‌شود:



تست و پاسخ ۹۵

درستی یا نادرستی کدام گزینه با دیگر گزینه‌ها متفاوت است؟

(۱) نقطه ذوب و جوش فلز مس، از نقطه ذوب و جوش سدیم کلرید بیشتر است، اما تفاوت نقطه ذوب و جوش در سدیم کلرید، بیشتر از مس می‌باشد.

(۲) $Na(s)$ همانند $NaCl(s)$ رسانای جریان برق است، اما برخلاف آن، بر اثر عبور جریان برق در حالت مذاب، تجزیه نمی‌شود.

(۳) اگر آنتالپی فروپاشی شبکه بلور MgX بیشتر از MgY باشد، شعاع یون X^{2-} از شعاع یون Y^- به یقین کوچک‌تر است.

(۴) ترکیبی که باعث سرخ‌فام شدن خاک رس می‌شود، نوعی رنگدانه معدنی است که طول موج‌های نزدیک و کوتاه‌تر از 700 nm را بازتاب کرده یا از خود عبور می‌دهد.



پاسخ: گزینه ۴

پاسخ تشریحی (۴)، برخلاف سایر گزینه‌ها، درست است.

بررسی گزینه‌ها:

(۱) نقطه ذوب و جوش و تفاوت آن‌ها در مس (Cu) از سدیم کلرید بیشتر است.

(۲) ترکیب‌های یونی در حالت جامد، رسانای جریان برق نیستند، اما در حالت مذاب و محلول خاصیت رسانایی دارند.

(۳) به دلیل تفاوت بار یون‌های X^{2-} و Y^- نمی‌توان در خصوص رابطه موجود میان شعاع یون‌ها به یقین اظهار نظر کرد.

(۴) ترکیبی که باعث و سرخ‌فام شدن خاک رس می‌شود، آهن (III) اکسید یا Fe_2O_3 است که به دلیل رنگ سرخ خود، طول موج‌های نزدیک به 700 nm را بازتاب کرده یا از خود عبور می‌دهد.

تست و پاسخ ۹۶

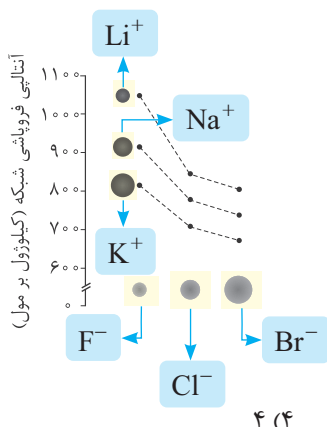
با توجه به نمودار زیر که مربوط به آنتالپی فروپاشی شبکه بلور ترکیب‌های حاصل از سه فلز قلیایی و سه هالوژن اول جدول دوره‌ای است، چند مورد از مطالب داده شده، نادرست است؟

• در بین هالیدهای فلزهای قلیایی، تنها آنتالپی فروپاشی شبکه بلور لیتیم فلوئورید بالاتر از $1000 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ است.

• در تشکیل $5/0$ مول سدیم برمید از یون‌های گازی سازنده، حدود 375 کیلوژول گرما آزاد می‌شود.

• تفاوت آنتالپی فروپاشی شبکه بلور ترکیب‌های پتاسیم برمید و سدیم کلرید، کم‌تر از این تفاوت برای ترکیب‌های سدیم برمید و پتاسیم کلرید است.

• مجموع شعاع یون‌های لیتیم و کلرید، کم‌تر از مجموع شعاع یون‌های سدیم و فلوئورید است.



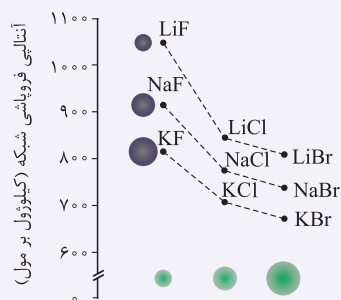
۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۲



نکته آنتالپی فروپاشی شبکه بلور، با بار یون‌ها رابطه مستقیم و با شعاع آن‌ها رابطه عکس دارد. نمودار آنتالپی فروپاشی شبکه بلور هالیدهای فلزهای قلیایی به صورت مقابل است:

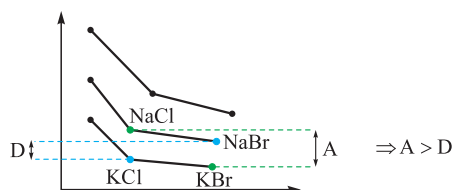
پاسخ تشریحی عبارت‌های سوم و چهارم نادرست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

● در بین هالیدهای فلزهای قلیایی، LiF بیشترین آنتالپی فروپاشی شبکه را دارد و با توجه به نمودار، تنها ترکیبی است که آنتالپی فروپاشی شبکه آن بیشتر از $1000 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ است.

● آنتالپی فروپاشی شبکه بلور سدیم برمید (NaBr) حدود $750 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ است؛ بنابراین در تشکیل 5° مول از آن، $375 = \frac{750}{2}$ کیلوژول گرما آزاد می‌شود.

● روی نمودار، ترکیبات گفته‌شده را پیدا می‌کنیم:



مطابق نمودار مشخص است که تفاوت آنتالپی فروپاشی NaBr و KCl از تفاوت آنتالپی فروپاشی NaCl و KBr کم‌تر است.

● با توجه به برابری بار یون‌ها در هر دو ترکیب و بیشتر بودن آنتالپی فروپاشی ترکیب NaF نسبت به LiCl ، مجموع شعاع یون‌های سازنده NaF از LiCl کم‌تر است.

ثابت $\rightarrow \frac{\text{بار یون}}{\text{شعاع یون}} = \text{آنتالپی فروپاشی شبکه}$

تست و پاسخ ۹۷

در ستون (I) جدول زیر، گزاره‌هایی درست و علمی آورده شده‌اند. در چه تعداد از ردیف‌های جدول، گزاره آورده‌شده در ستون (II)، دلیل درستی برای عبارت مربوط در ستون (I) محسوب می‌شود؟

ردیف	I گزاره علمی	II دلیل
۱	ترکیب‌های یونی خنثی هستند.	شمار کاتیون‌ها و آنیون‌ها در هر واحد فرمولی از ترکیب‌های یونی برابر است.
۲	سختی الماس از گرافیت بیشتر است.	میانگین آنتالپی پیوند کربن - کربن در الماس بیشتر از گرافیت است.
۳	نقطه ذوب سیلیس از کربن دی‌اکسید بیشتر است.	نیروهای بین مولکولی سیلیس قوی‌تر از کربن دی‌اکسید هستند.
۴	مولکول گوگرد تری‌اکسید، در میدان الکتریکی جهت‌گیری نمی‌کند.	تراکم بار الکتریکی بر روی اتم‌های سازنده گوگرد تری‌اکسید یکسان است.

(۴) صفر

(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) ۱

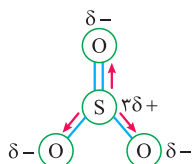
پاسخ: گزینه ۴



پاسخ تشریحی تمام موارد نادرست‌اند.

بررسی ردیف‌ها:

- ردیف (۱): دلیل خنثی بودن ترکیبات یونی، برابر بودن مجموع بار کاتیون‌ها و آنیون‌ها در آن‌ها است نه تعداد آن‌ها! در برخی ترکیبات یونی مانند Al_2O_3 ، شمار کاتیون‌ها و آنیون‌ها در واحد فرمولی برابر نیست.
- ردیف (۲): دلیل سختی بیشتر الماس، شبکه واحد و غول‌آسای سه‌بعدی آن است. گرافیت ساختار دوبعدی و لایه‌ای دارد و لایه‌ها روی هم می‌لغزند و این ویژگی باعث می‌شود سخت و مقاوم نباشد.
- ردیف (۳): امیدوارم توی دایم نیفتاده باشی! برای جامدهای کووالانسی استفاده از واژه‌های مولکول، نیروی بین مولکولی، فرمول مولکولی و ... شرعاً و قانوناً فرام است.



- ردیف (۴): در مولکول گوگرد تری‌اکسید (SO_3)، خاصیت نافلزلی اتم‌های O از S بیشتر است و تراکم بار الکتریکی روی اتم‌های سازنده آن یکسان نیست. (دقت داشته باشید که بار الکتریکی δ^+ روی اتم گوگرد ۳ برابر بار الکتریکی δ^- روی هر یک از اتم‌های اکسیژن است.) دلیل ناقطبی بودن این مولکول، توزیع متقارن بار الکتریکی پیرامون اتم مرکزی می‌باشد.

تست و پاسخ ۹۸

کدام مطلب درست است؟

- از مدل دریای الکترونی برای توجیه برخی رفتارهای فیزیکی و شیمیایی فلزها استفاده می‌شود.
- همه الکترون‌های اتم‌های یک فلز، در به وجود آمدن دریای الکترونی مشارکت دارند.
- مجموع عدد کوئوردیناسیون یون‌های Na^+ و Cl^- در شبکه بلور سدیم کلرید، برابر ۶ است.
- در شرایط یکسان و در جرم برابر از تیتانیوم و فولاد، حجم فولاد کم‌تر است.

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ تشریحی مطابق جدول صفحه ۸۷ کتاب درسی، چگالی فولاد از تیتانیوم بیشتر است؛ یعنی در جرم یکسان حجم فولاد کم‌تر است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

- (۱) از مدل دریای الکترونی برای توجیه برخی رفتارهای فیزیکی فلزها استفاده می‌شود.

دام تستی در جمله بالا به ۲ مورد توجه ویژه داشته باشید: (۱) دریای الکترونی صرفاً رفتارهای فیزیکی را توجیه می‌کند، نه رفتارهای شیمیایی! (۲) تنها برخی رفتارهای فیزیکی را توجیه می‌کند، نه همه را!

- (۲) تنها الکترون‌های ظرفیت یک اتم در تشکیل دریای الکترونی نقش دارند، نه همه الکترون‌ها!
- (۳) مجموع عدد کوئوردیناسیون یون‌های Na^+ و Cl^- در شبکه بلوری سدیم کلرید برابر $12 = 6 + 6$ است، نه ۶!

تست و پاسخ ۹۹

کدام موارد از مطالب زیر، در ارتباط با مبدل کاتالیستی خودروهای بنزینی و واکنش‌های انجام‌شده درون آن، درست است؟

- (الف) با نصب این مبدل، ترتیب درصد تغییرات جرم آلاینده‌ها به صورت $NO < C_xH_y < CO$ خواهد بود.
- (ب) واکنش‌های انجام‌شده در این نوع مبدل، گرماده هستند.
- (پ) در روزهای زمستانی، کارایی این مبدل‌ها کاهش می‌یابد.
- (ت) در سطح سرامیک‌های درون مبدل کاتالیستی، توده‌هایی فلزی با قطر ۲ تا ۱۰ میکرومتر مشاهده می‌شود.

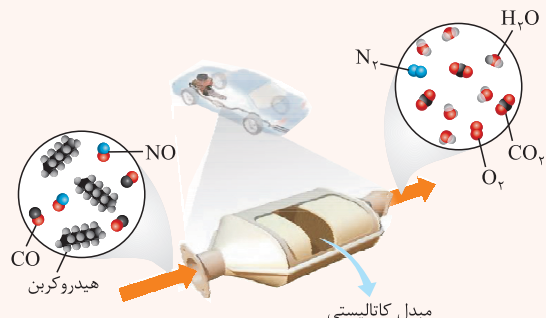
- (۱) ب - پ (۲) الف - ت (۳) الف - پ (۴) ب - ت

پاسخ: گزینه ۱

مشاوره برای زدن تست‌های حفظیات، مطالب کتاب درسی رو خیلی خوب بخونید و از هیچ نکته کوچیکی هم ساده نگذرید! مثل یکاها و واحدها!

درس نامه •• مبدل کاتالیستی خودروهای بنزینی

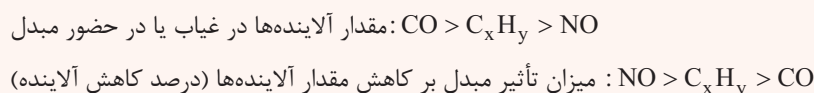
این مبدل‌ها، توری‌هایی از جنس سرامیک هستند که سطح آن‌ها با فلزهای پلاتین (Pt)، پالادیم (Pd) و رودیوم (Rh) پوشانده شده است. این فلزها نقش کاتالیزگر را دارند. در این مبدل‌ها واکنش‌های زیر انجام می‌شود:



- ۱) CO در این واکنش اکسایش می‌یابد. $2CO(g) + O_2(g) \rightarrow 2CO_2(g)$ ، $\Delta H < 0$
 - ۲) $C_xH_y + (x + \frac{y}{4})O_2(g) \rightarrow xCO_2(g) + \frac{y}{2}H_2O(g)$ ، $\Delta H < 0$: واکنش حذف هیدروکربن‌های نسوخته (سوختن)
 - ۳) $2NO(g) \rightarrow N_2(g) + O_2(g)$ ، $\Delta H < 0$: واکنش حذف گاز نیتروژن مونوکسید (تجزیه)
- ۱) هر سه واکنش انجام شده در مبدل کاتالیستی خودروهای بنزینی، از نوع اکسایش - کاهش بوده و گرماده هستند.

توجه واکنش‌های حذف CO و NO ، انرژی فعال‌سازی بالایی دارند و در دماهای پایین انجام نمی‌شوند یا بسیار کند هستند، اما در دمای بالا و با استفاده از کاتالیزگر می‌توانند با سرعت بالاتری انجام شوند.

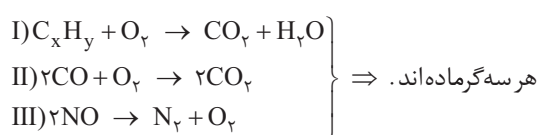
- ۲) از یک طرف مبدل، آلاینده‌های CO ، C_xH_y و NO وارد شده و از طرف دیگر گازهای CO_2 ، H_2O ، N_2 و O_2 خارج می‌شوند.
- ۳) هرچند مبدل کاتالیستی برای مدت طولانی کار می‌کند، اما پس از مدت معینی کارایی آن کاهش می‌یابد و دیگر قابل استفاده نیست.
- ۴) برای افزایش کارایی مبدل کاتالیستی، گاهی سرامیک را به شکل مش (دانه‌های) ریز درمی‌آورند و کاتالیزگرها را روی سطح آن می‌نشانند؛ زیرا سطح تماس مش‌ها از توری بیشتر است.
- ۵) در سطح سرامیک‌های درون مبدل کاتالیستی، توده‌های فلزی با قطر ۲ تا ۱۰ نانومتر وجود دارند.
- ۶) با وجود مبدل کاتالیستی، در هنگام روشن و گرم شدن خودرو، به‌ویژه در روزهای سرد زمستان، باز هم سر و کله آلاینده‌ها در گازهای خروجی پیدا می‌شود، زیرا این مبدل‌ها در دماهای پایین، کارایی خود را از دست می‌دهند.
- ۷) با توجه به جدول صفحه ۱۰۱ کتاب درسی، ترتیب مقدار آلاینده‌ها در غیاب و در حضور مبدل و میزان تأثیر مبدل بر کاهش مقدار آلاینده‌ها به صورت زیر است:



پاسخ تشریحی موارد «ب» و «پ» درست‌اند.

بررسی موارد:

الف) با توجه به نکات مطرح شده در درس نامه، مقایسه درصد تغییرات (کاهش) آلاینده‌های خروجی به صورت $NO > C_xH_y > CO$ است.



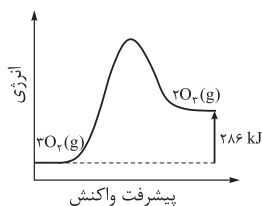
پ) در روزهای سرد زمستان، مبدل‌های کاتالیستی کارایی پایین دارند.

ت) مطابق مطالب کتاب درسی، قطر این توده‌ها ۲ تا ۱۰ نانومتر است، نه پیکومتر!



تست و پاسخ ۱۰۰

با توجه به نمودار داده شده، درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر به ترتیب کدام است؟



- انرژی فعال‌سازی از آنتالپی واکنش بزرگ‌تر است.
- آنتالپی (محتوای انرژی) فراورده‌ها از واکنش دهنده‌ها کم‌تر است.
- مجموع آنتالپی پیوندها در واکنش دهنده‌ها بزرگ‌تر از فراورده‌ها است.
- اگر این واکنش درون سیلندر با پیستون روان به تعادل برسد، با کاهش فشار در دمای ثابت، شمار مول‌های اوزون افزایش می‌یابد.

(۱) درست - نادرست - نادرست - نادرست - درست

(۲) درست - نادرست - درست - نادرست - درست

(۳) درست - نادرست - درست - درست - نادرست

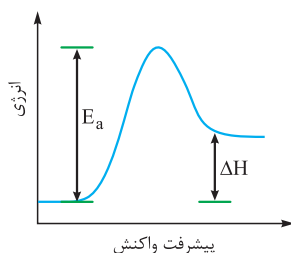
(۴) درست - نادرست - درست - درست - نادرست

پاسخ: گزینه ۱

عبارت‌های اول و سوم درست و عبارت‌های دوم و چهارم نادرست است.

بررسی عبارت‌ها:

- انرژی فعال‌سازی واکنش (تفاوت سطح انرژی واکنش دهنده‌ها و قله نمودار) از آنتالپی واکنش (تفاوت سطح انرژی واکنش دهنده و فراورده‌ها) بزرگ‌تر است.

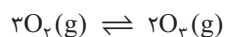


- واکنش گرماگیر است و در آن، آنتالپی فراورده‌ها از واکنش دهنده‌ها بالاتر است.

- با توجه به رابطه محاسبه ΔH واکنش به کمک آنتالپی‌های پیوند، در واکنش‌های گرماگیر، مجموع آنتالپی پیوندها در مواد واکنش دهنده از مواد فراورده بیشتر است.

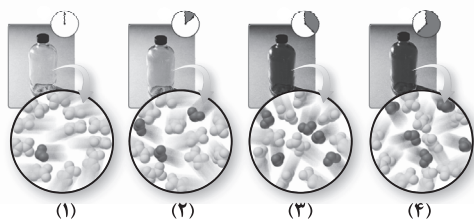
$$\Delta H(\text{واکنش}) = [\text{مجموع آنتالپی پیوندها در مواد واکنش دهنده}] - [\text{مجموع آنتالپی پیوندها در مواد فراورده}]$$

- با کاهش فشار، تعادل به سمت تعداد مول‌های گازی بیشتر، یعنی در جهت برگشت و کاهش تعداد مول‌های اوزون جابه‌جا می‌شود.



تست و پاسخ ۱۰۱

با توجه به شکل‌های زیر که پیشرفت واکنش تبدیل گاز N_2O_4 به گاز NO_2 را نشان می‌دهد، کدام گزینه نادرست است؟ (هر ذره معادل ۸ / مول و حجم ظرف ۲ لیتر و تعداد ذره‌های N_2O_4 در ظرف اولیه برابر ۱۱ است.)



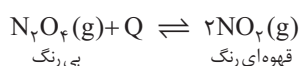
(۱) در شکل (۲)، سرعت تولید گاز N_2O_4 بیشتر از شکل (۱) است.

(۲) ثابت تعادل این واکنش به تقریب برابر با $1/1 \text{ mol.L}^{-1}$ است.

(۳) تعادل زمانی برقرار شده است که واکنش به میزان تقریباً ۱۸ درصد پیشرفت کرده است.

(۴) اگر ظرف (۴) را درون یخچال قرار دهیم، شدت رنگ قهوه‌ای درون ظرف افزایش می‌یابد.

پاسخ: گزینه ۴



پاسخ تشریحی واکنش تبدیل گاز N_2O_4 به گاز NO_2 به صورت روبه‌رو است:

با کاهش دما، طبق اصل لوشاتلیه واکنش در جهت برگشت جابه‌جا شده، غلظت N_2O_4 افزایش و شدت رنگ قهوه‌ای درون ظرف کاهش می‌یابد. بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) سرعت تولید گاز N_2O_4 همان سرعت واکنش برگشت است. از آن‌جا که غلظت NO_2 در شکل (۲) بیشتر از شکل (۱) است، سرعت واکنش برگشت در شکل (۲) بیشتر از شکل (۱) خواهد بود.

۲) با توجه به شکل‌های داده‌شده، غلظت N_2O_4 در ظرف‌های (۳) و (۴) تغییر نکرده است؛ پس در هر دو ظرف، تعادل برقرار است. ما در حالت تعادل، ۵ ذره NO_2 و ۹ ذره N_2O_4 در ظرف ۲ لیتری داریم، از آن‌جا که هر ذره معادل ۰/۸ مول است، خواهیم داشت:

$$K = \frac{[\text{NO}_2]^2}{[\text{N}_2\text{O}_4]} = \frac{\left(\frac{5 \times 0.8}{2}\right)^2}{\frac{9 \times 0.8}{2}} = \frac{(2)^2}{3.6} = 1/1 \text{ mol.L}^{-1}$$

۳) با توجه به شکل‌های داده‌شده، در ابتدای واکنش، ۱۱ ذره شامل $8/8 = 11 \times 0.8$ مول N_2O_4 داشته‌ایم که بعد از تعادل به ۹ ذره، شامل $7/2 = 9 \times 0.8$ مول رسیده است، یعنی در طول واکنش $1/6 = 8/8 - 7/2$ مول از واکنش‌دهنده مصرف شده است؛ بنابراین خواهیم داشت:

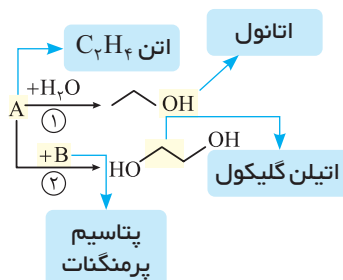
$$\text{درصد پیشرفت واکنش} = \frac{\text{تعداد مول‌های مصرف‌شده واکنش‌دهنده}}{\text{تعداد مول‌های اولیه واکنش‌دهنده}} \times 100 = \frac{1/6}{8/8} \times 100 = 12.5\%$$

تکنیک

حتماً تا الان خیلی خوب متوجه شده‌اید که برای زدن یک تست نباید گزینه‌ها و یا موارد آن رو به ترتیب قرار داده شده در سؤال چک کنید. خیلی از مواقع، طراح محاسبات سنگین و پیچیده‌ای رو در گزینه‌ها قرار می‌ده که جواب هم نیستند، بلکه شما باید توی گزینه‌های ساده به دنبال جواب باشید؛ پس با زیرکی، همیشه اول سراغ گزینه‌ها و گزاره‌هایی برید که محاسبات ندارند و از حفظیات مطرح شده‌اند.

تست و پاسخ ۱۰۲

با توجه به شکل زیر که تبدیل برخی مواد آلی به یکدیگر را نشان می‌دهد، کدام گزینه نادرست است؟



۱) A هیدروکربنی است که مجموع شمار اتم‌ها در آن با شمار پیوندهای اشتراکی آن برابر است.

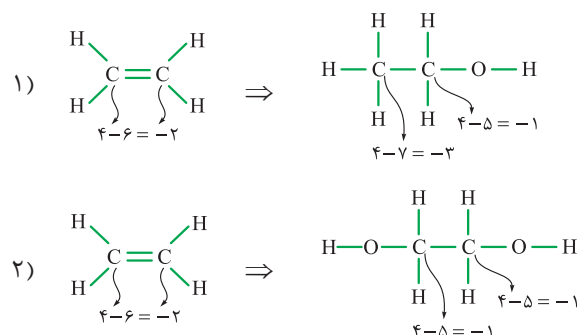
۲) B می‌تواند ماده‌ای باشد که در تبدیل پارازیلن به ترفتالیک اسید نیز از آن استفاده می‌شود.

۳) با انجام واکنش (۲) همانند واکنش (۱)، عدد اکسایش همه اتم‌های کربن در ماده A افزایش می‌یابد.

۴) با کاهش pH محیط، می‌توان سرعت واکنش (۱) را افزایش داد.

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ تشریحی از واکنش اتن با آب، اتانول به دست می‌آید؛ پس A همان گاز اتن (C_2H_4) است. از طرفی، گاز اتن در حضور اکسنده، به اتیلن گلیکول تبدیل می‌شود؛ پس B می‌تواند اکسنده‌ای مانند پتاسیم پرمنگنات باشد.





همان طور که می بینید در واکنش (۱) برخلاف واکنش (۲)، عدد اکسایش برخی از اتم های کربن کاهش می یابد.

بررسی سایر گزینه ها:

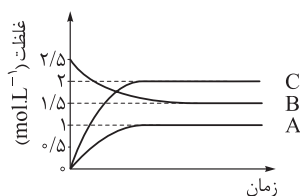
۱) مجموع شمار اتم ها در C_2H_4 ، مانند شمار پیوندهای اشتراکی آن برابر ۶ است.

۲) همان پتاسیم پرمنگنات است که در تبدیل پارازیلین به ترفتالیک اسید از محلول غلیظ آن به عنوان اکسنده استفاده می شود.

۳) همان طور که می دانید، کاتالیزگر واکنش اتن با آب، H_2SO_4 است؛ پس با افزایش غلظت اسید و در نتیجه کاهش pH، می توان سرعت واکنش را افزایش داد.

تست و پاسخ ۱۰۳

با توجه به نمودار زیر که مربوط به یک تعادل گازی بوده و در آن درصد مولی C با کاهش دما، کاهش می یابد، کدام موارد درست اند؟ (حجم ظرف واکنش، ۲ لیتر است.)



الف) واکنش با افزایش فشار در جهت جابه جا می شود.

ب) مجموع شمار مول های تعادلی مواد در ظرف واکنش، برابر با ۴/۵ مول است.

پ) روند تغییر ثابت تعادل آن بادما، مشابه این روند در واکنش تعادلی تجزیه گاز SO_3 به گاز SO_2 است.

ت) با کاهش حجم ظرف، غلظت مولی A و B افزایش می یابد.

۴) ب - ت

۳) الف - پ

۲) پ - ت

۱) الف - ب

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ تشریحی موارد «پ» و «ت» درست اند.

بررسی تمام موارد:

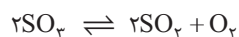
الف) ابتدا واکنش را می نویسیم: تا رسیدن به تعادل، غلظت B و A، یک واحد و غلظت C، دو واحد تغییر کرده است؛ بنابراین ضرایب B و A برابر و نصف ضریب C است.



با افزایش فشار، واکنش در جهت تولید مول گازی کم تر پیش می رود، بنابراین واکنش در جهت برگشت انجام می شود.

ب) روی نمودار، غلظت تعادلی همه مواد داده شده است. مجموع این غلظت های تعادلی، $4/5 \text{ mol.L}^{-1}$ می باشد؛ با توجه به حجم ظرف که ۲ لیتر است، مجموع مول تعادلی مواد برابر ۹ مول خواهد بود.

پ) واکنش داده شده در این سؤال، گرماگیر است؛ زیرا با کاهش دما در جهت برگشت جابه جا شده و درصد مولی C کاهش یافته است. واکنش تجزیه گوگرد تری اکسید به گازهای گوگرد دی اکسید و اکسیژن نیز گرماگیر است.

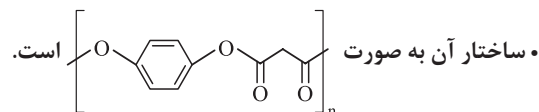


نکته در واکنش های تعادلی گرماگیر، با افزایش دما، ثابت تعادل افزایش می یابد و در واکنش های تعادلی گرماده، با افزایش دما، ثابت تعادل کاهش می یابد.

ت) با کاهش حجم (افزایش فشار)، غلظت مولی همه مواد گازی افزایش می یابد.

تست و پاسخ ۱۰۴

چند مورد از مطالب زیر درباره پلی اتیلن ترفتالات (PET)، درست است؟



• ماندگاری زیادی دارد و در طبیعت به کندی تجزیه می شود.

• امروزه سالانه حدود ۴۰۰ میلیون تن از این ماده، در جهان تولید می شود.

• قابل بازیافت است و می تواند در شرایط مناسب با متانول واکنش داده و به مواد مفیدی تبدیل شود.

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

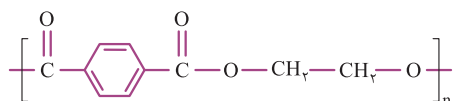


پاسخ تشریحی عبارت‌های دوم و چهارم درست‌اند.

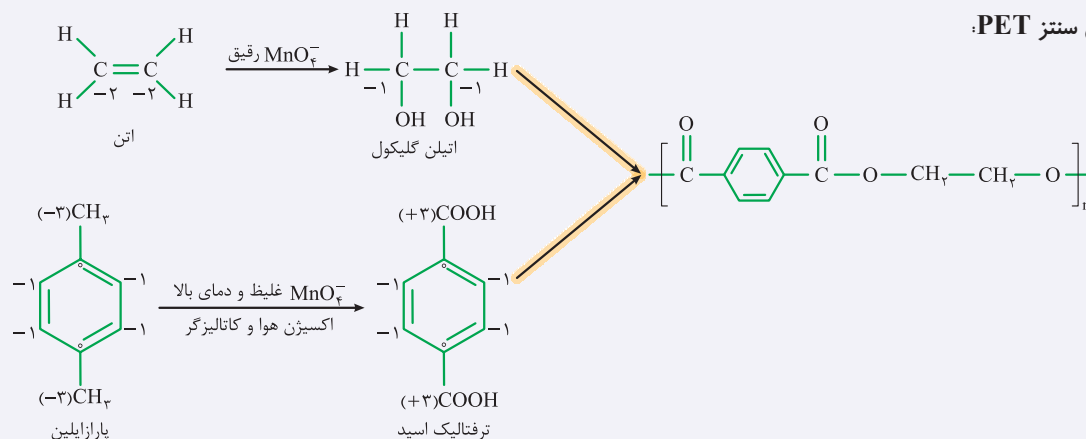
بررسی عبارت‌های نادرست:

عبارت اول: الکل و اسید سازنده PET به ترتیب اتیلن گلیکول و ترفتالیک اسید هستند؛ پس ساختار PET به صورت زیر است:

عدم اکسایش اتم‌های کربن، روی ساختار مشخص شده است.



نکته مراحل سنتز PET:



تولید PET از اتیلن گلیکول و ترفتالیک اسید نوعی واکنش پلیمری شدن است. (دقت داشته باشید واکنش تهیه پلی استرها، اکسایش - کاهش نیست.)

عبارت سوم: امروز سالانه حدود ۴۰۰ میلیون تن از انواع پلاستیک‌ها (نه فقط PET) در جهان تولید می‌شود.

(۱) پلاستیک‌ها محصول خلأیت و نوآوری بشر بوده و به طور کلی دارای ویژگی‌های زیر هستند:

(الف) سبک هستند (چگالی کمی دارند).

(ب) هوا به هیچ وجه در آن‌ها نفوذ نمی‌کند. (غیرقابل نفوذ به وسیله هوا)

(پ) ضد آب هستند. (آب در آن‌ها نفوذ نمی‌کند).

(ت) ارزان هستند.

(ث) در برابر خوردگی مقاوم هستند.

(۲) به دلیل ویژگی‌های خاص و مهمی که پلاستیک‌ها دارند، این مواد کاربردهای وسیعی در زندگی پیدا کرده‌اند. امروزه سالانه ۴۰۰ میلیون تن از آن‌ها در سرتاسر جهان تولید می‌شود.

(۳) به طور معمول زیست تخریب نپذیرند و برای مدت طولانی در طبیعت باقی می‌مانند.

تست و پاسخ ۱۰۵

کدام مطلب درباره واکنش‌های داده شده، نادرست است؟ (معادله واکنش‌ها موازنه شوند).



(۱) مجموع ضرایب فراورده‌ها در واکنش (II)، دو برابر ضریب گاز هیدروژن واکنش (I) است.

(۲) به ازای شمار الکترون‌های مبادله شده یکسان، جرم گاز هیدروژن مصرف شده در واکنش (I)، با جرم گاز هیدروژن تولید شده در واکنش (II) برابر است.

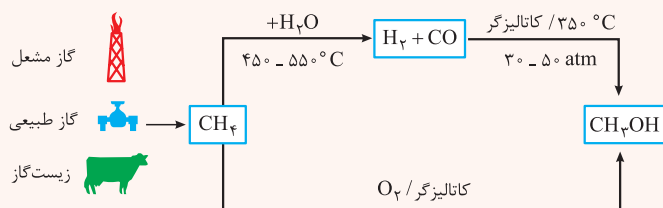
(۳) تغییر عدد اکسایش کربن در واکنش (I)، با میزان تغییر عدد اکسایش این عنصر در واکنش (II) برابر است.

(۴) یکی دیگر از راه‌های تولید فراورده واکنش (I)، واکنش هیدروکربن موجود در واکنش (II) با گاز اکسیژن در حضور کاتالیزگر است.

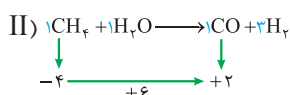
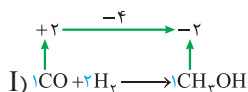
پاسخ: گزینه ۳



درس نامه دو روش تولید متانول در شکل زیر آمده است:



پاسخ تشریحی عدد اکسایش اتم‌های کربن را در دو معادله حساب می‌کنیم.



بنابراین میزان تغییر عدد اکسایش عنصر کربن در واکنش (I)، ۴ واحد و در واکنش (II)، ۶ واحد است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) مجموع ضرایب فراورده‌ها در واکنش (II)، برابر ۴ و ضریب گاز هیدروژن در واکنش (I)، برابر ۲ است.

۲)

(I) واکنش: $x \text{ mole}^- \times \frac{2 \text{ mol H}_2}{4 \text{ mole}^-} = 0.5 x \text{ mol H}_2$

(II) واکنش: $x \text{ mole}^- \times \frac{2 \text{ mol H}_2}{6 \text{ mole}^-} = 0.33 x \text{ mol H}_2$

۴) مطابق نمودار روش‌های تولید متانول، یکی از روش‌های تولید آن، واکنش گاز متان و O_2 در حضور کاتالیزگر است.

