

آزمون آزمایشی ۲۵ اردیبهشت ۱۴۰۵

گروه آزمایشی علوم ریاضی

ویژه داوطلبان آزمون سراسری ۱۴۰۵

A

دفترچه شماره ۱

وقت پیشنهادی

۷۰ دقیقه

تا شماره

۴۰

از شماره

۱

تعداد پرسش

۴۰

مواد امتحانی

ریاضیات

مدت پاسخ‌گویی: ۷۰ دقیقه

تعداد کل پرسش‌ها: ۴۰

دفترچه پاسخ تشریحی



داوطلب گرامی، جهت استفاده از خدمات اختصاصی خود مانند کارنامه هوشمند بعد از آزمون، بانک سؤال گزینۀ دو، آزمونک‌ها، رفع اشکال هوشمند و ... با استفاده از نام کاربری و رمز عبور وارد سایت gozine2.ir شوید. در ثبت نام اینترنتی نام کاربری کد ملی شماست و رمز عبور توسط خودتان تعیین شده است. در ثبت نام انفرادی و مدرسه‌ای، نام کاربری و رمز عبور خود را از مدرسه یا نمایندگی شهر خود دریافت نمایید.

پاسخ تشریحی تصویری

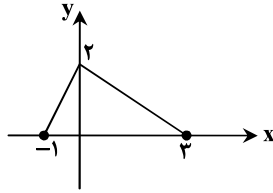


۱- چند جمله ای $P(x) = x^3 + ax^2 + bx - 4$ بر $x + 2$ و $x - 1$ بخش پذیر است. باقی مانده تقسیم $P(x)$ بر $P''(x)$ کدام است؟

- (۱) -۳ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) -۲

۲- نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت مقابل است. اگر دامنه و برد تابع $g(x) = 2f(ax+b) + 3$ یکسان باشد، مقدار $a-b$ کدام است؟

($a > 0$)



(۱) ۵

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) ۴

۳- تابع $f(x) = 2 + \sqrt{4-x}$ مفروض است. مجموعه جواب نامعادله $f(f(x)) - f(x) \leq 0$ شامل چند عدد صحیح است؟

- (۱) ۵ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۴- تابع $f(x) = 2x^2 - 12x + 1$ مفروض است. به ازای چند مقدار طبیعی a تابع $y = f(\frac{a-2x}{3})$ روی بازه $[-2, +\infty)$ اکیداً صعودی است؟

- (۱) ۵ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۵- ماکزیمم تابع $y = 2a - b \cos(\frac{a\pi}{b}x)$ سه برابر مینیمم آن است. دوره تناوب تابع چقدر است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) ۲ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ۴

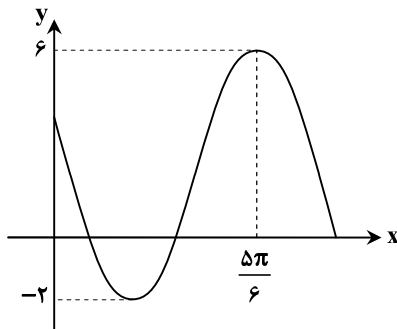
۶- اگر $\tan \alpha = \frac{1}{3}$ و $\tan(\alpha - \beta) = -\frac{1}{2}$ باشد، مقدار $\tan \beta$ کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) -۳

۷- اگر $x = \frac{\pi}{3}$ یک جواب معادله $\tan^2 x = 1 + \frac{k}{\cos x}$ باشد، مجموع سایر ریشه های معادله در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

- (۱) $\frac{5\pi}{3}$ (۲) $\frac{8\pi}{3}$ (۳) 3π (۴) $\frac{7\pi}{3}$

۸- قسمتی از نمودار تابع $f(x) = c + \frac{a}{b} \sin(ax - \frac{\pi}{6})$ به صورت مقابل است. حاصل $a-b$ کدام است؟



(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۲/۵

(۴) ۱/۵

محل انجام محاسبات:

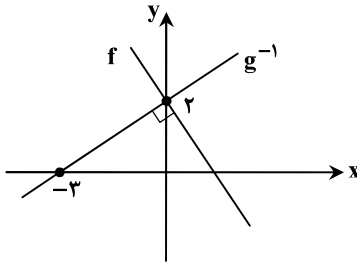
۹- اگر $f(x) = \frac{3x-2}{2-x}$ باشد، فاصله نقطه برخورد مجانب‌های تابع $y = (f \circ f)\left(\frac{2}{x}\right)$ از مبدأ مختصات چقدر است؟

- (۱) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ (۲) $\frac{5\sqrt{2}}{3}$ (۳) $\frac{3\sqrt{2}}{5}$ (۴) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

۱۰- اگر $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax}{\sqrt{9x^2+1}} = \frac{2}{3}$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 + ax})$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) -۱ (۴) -۲

۱۱- نمودار توابع f و g^{-1} به صورت مقابل است. حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|f(x)|}{f(2x) - g(x)}$ کدام است؟



(۱) $-\frac{1}{3}$

(۲) $\frac{1}{3}$

(۳) ۳

(۴) -۳

۱۲- اگر $\lim_{x \rightarrow n} \frac{f(x)}{x^2 + (1+m)x + m} = -\infty$ باشد، ضابطه f کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) $mx + n$ (۲) $mx - n$ (۳) $nx + m$ (۴) $nx - m$

۱۳- خطی که محورهای مختصات را در نقاط A و B قطع می‌کند در $x = 2$ در ناحیه چهارم بر نمودار تابع پیوسته f مماس است. اگر

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f^2(x) - 9}{x^2 - 4} = \frac{3}{2}$ باشد، طول پاره خط AB کدام است؟

- (۱) $5\sqrt{2}$ (۲) $3\sqrt{2}$ (۳) $4\sqrt{2}$ (۴) $\sqrt{2}$

۱۴- اگر $f(2x-1) = xg\left(\frac{3}{x}\right)$ و $g'(3) = \frac{4}{3}$ باشد، مقدار $f''(1)$ کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) ۶ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۵- خط گذرنده از نقاط $A(-1, -4)$ و $B(0, -1)$ بر منحنی $f(x) = 2\sqrt{ax-2}$ مماس است. مقدار a کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۶- اگر $f(x) = \cos 2x \sin 3x$ و $g(x) = \sin x \cos x \cos 3x$ باشد، حاصل $f'\left(\frac{\pi}{15}\right) + 2g'\left(\frac{\pi}{15}\right)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{5}{2}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) $-\frac{5}{2}$ (۴) $-\frac{3}{2}$

۱۷- تابع $f(x) = \sqrt{x+a} + \frac{b}{\sqrt{x}}$ در نقطه $A(1, \frac{5}{2})$ اکسترمم نسبی دارد. اگر a عددی مثبت باشد، مقدار b کدام است؟

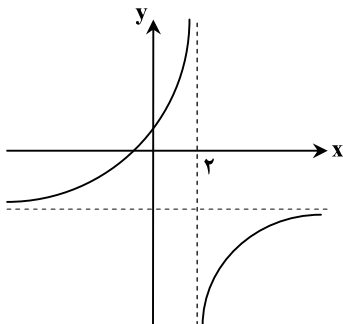
- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) $\frac{3}{2}$

محل انجام محاسبات:

۱۸- اگر $A(3, 2)$ نقطه عطف تابع $f(x) = \frac{ax+b}{x^2}$ باشد، عرض نقطه اکسترمم نسبی آن کدام است؟

- (۱) $1/75$ (۲) 2 (۳) $2/25$ (۴) $2/5$

۱۹- نمودار تابع هموگرافیک $f(x) = x + a + \frac{ax^2 + 2}{x + b}$ به صورت مقابل است. شیب خط مماس بر f در نقطه‌ای به طول صفر چقدر است؟

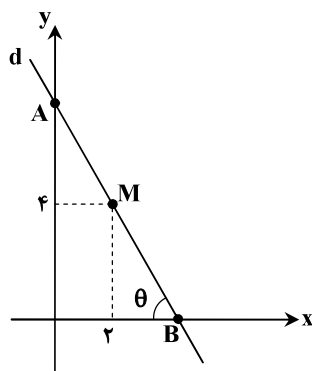


(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{1}{2}$

۲۰- در شکل مقابل، خط d همواره از نقطه $M(2, 4)$ عبور می‌کند. اگر طول پاره خط AB مینیمم باشد، مقدار $\tan \theta$ کدام است؟



(۱) ۱

(۲) $\sqrt[3]{3}$ (۳) $\sqrt[3]{4}$ (۴) $\sqrt[3]{2}$

۲۱- نقاط $A(10, 1)$ و $A'(-2, 1)$ دو سر قطر بزرگ بیضی هستند. اگر خروج از مرکز بیضی $e = \frac{1}{\sqrt{2}}$ باشد، طول قطر کوچک بیضی کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۱۰ (۳) $4\sqrt{2}$ (۴) $6\sqrt{2}$

۲۲- یک اشعه نورانی در امتداد خط $x = 3$ و اشعه دیگری در امتداد خط $x = -5$ از داخل سهمی به معادله $x^2 - 2x + 4y = 3$ بر آن تابیده می‌شوند. فاصله نقطه تلاقی بازتاب این دو اشعه، از مبدأ مختصات کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

محل انجام محاسبات:

۲۳- اگر $19 = x^2 + 4y^2 + 9z^2$ باشد، بیشترین مقدار $3x - 10y - 6z$ کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{38}$ (۲) $\sqrt{38}$ (۳) $2\sqrt{19}$ (۴) $19\sqrt{2}$

۲۴- اگر وارون ماتریس ضرایب دستگاه $\begin{cases} ax + by = m \\ cx + dy = -2 \end{cases}$ برابر $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ و $y = 10$ باشد، مقدار x کدام است؟

- (۱) -6 (۲) 4 (۳) 6 (۴) -4

۲۵- از نقطه $M(3, 1)$ خارج دایره $x^2 + y^2 = 7$ دو مماس بر دایره رسم می‌کنیم. فاصله دو نقطه تماس چقدر است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{210}}{5}$ (۲) $2\sqrt{70}$ (۳) $3\sqrt{70}$ (۴) $\frac{3\sqrt{210}}{2}$

۲۶- اگر $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 3 & K & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ و $|3A| = 108$ باشد، حاصل ضرب درایه‌های وارون ماتریس $B = \begin{bmatrix} K-13 & K-14 \\ K-16 & K-14 \end{bmatrix}$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{2}{3}$ (۲) $-\frac{2}{81}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{2}{81}$

۲۷- اگر $A_{3 \times 3}$ یک ماتریس و $A^2 = 4A$ باشد، مجموع درایه‌های ماتریس $(A - 2I)^6$ برابر کدام است؟

- (۱) 192 (۲) 48 (۳) 198 (۴) 54

۲۸- اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار غیرصفر و ناهم‌راستا باشند، زاویه بین بردار $\vec{b}$ و بردار $\vec{a} - \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b}$ کدام است؟

- (۱) 45° (۲) 90° (۳) 180° (۴) صفر

۲۹- نقاط $A(2, 2, m)$ ، $B(m, 2, 2)$ و $C(2, m, 2)$ رئوس مثلث ABC هستند. اگر مساحت مثلث ABC برابر $8\sqrt{3}$ باشد، مقدار m کدام است؟

- (۱) -2 و -4 (۲) 2 و 4 (۳) -2 و 6 (۴) 2 و -6

۳۰- برای دو ماتریس مربعی و هم‌مرتبه A و B اگر $A^2 = A$ ، $B^2 = B$ و $(A+B)(A-B) = A-B$ باشد، حاصل $(A+B-AB)^2$ کدام است؟

- (۱) $A+B$ (۲) $A-B$ (۳) $A+B-AB$ (۴) $A+B+AB$

محدوده: ریاضیات گسسته: کل کتاب (ص ۸۴ تا ۸۴)

۳۱- در کیسه‌ای ۸ مهره سفید، ۶ مهره سیاه و ۴ مهره سبز وجود دارد. دست‌کم چند مهره از کیسه خارج کنیم تا مطمئن باشیم حداقل ۴ مهره سفید یا ۳ مهره سیاه یا ۲ مهره سبز خارج شده است؟

- (۱) 8 (۲) 6 (۳) 7 (۴) 9

۳۲- معادله $\frac{2}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{3}$ در مجموعه اعداد صحیح چند جواب دارد؟

- (۱) 6 (۲) 7 (۳) 8 (۴) 4

محل انجام محاسبات:

۳۳- بزرگ‌ترین عدد طبیعی که در تقسیم بر ۱۴۷، باقی‌مانده‌اش از سه برابر مربع خارج قسمت دو واحد کمتر باشد، مضرب کدام عدد است؟

[illegible]

۳۴- مجموع ارقام بزرگ‌ترین عدد سه‌رقمی n که به‌ازای آن معادله سیاله $45x + 75y = 4n - 3$ جواب دارد، کدام است؟

۲۶ (۴) ۲۴ (۳) ۱۸ (۲) ۱۹ (۱)

۳۵- در گراف G از مرتبه p ، همسایگی بسته هر رأس دارای p عضو است. اگر $\Delta(G) + \chi(G) = \chi(G) + q(G)$ باشد، گراف G چند مسیر به طول ۱ دارد؟ ($p > 2$)

λ (f) 2λ (3) γ (2) 21 (1)

۳۶- گراف G ، ۱۱- منتظم مرتبه ۱۴ است. گراف $\bar{G}$ حداکثر چند دور می تواند داشته باشد؟

$$\begin{array}{ccccccc} \gamma & (f) & & \delta & (3) & & f & (2) & & 3 & (1) \end{array}$$

۳۷- درجهٔ رأس‌های گراف G به‌صورت ۲، ۲، ۲، ۲، ۲، ۶ است که در آن رئوس با درجهٔ ماکزیمم، مجاور نیستند. عدد احاطه‌گری و تعداد ۷- مجموعه‌های این گراف به‌ترتیب از راست به چپ کدام است؟

۱۳, ۲ (۴) ۱۲, ۲ (۳) ۱۳, ۱ (۲) ۱۲, ۱ (۱)

۳۸- با ارقام ۵، ۵، ۵، ۳، ۲، ۲، ۶ چند عدد هفت رقمی فرد کوچک تر از ۴۰۰۰۰۰ می توان نوشت؟

12. (F) 11. (3) 10. (2) 14. (1)

۳۹- چند عضو از مجموعه $S = \{۸۰, ۸۱, ۸۲, \dots, ۲۰۰\}$ نسبت به ۱۲ اول هستند؟

57 (F) 56 (3) 39 (2) 40 (1)

۴۰- اگر عبارت $x^3 + 4x^2 - x - 4$ بر 7 بخش پذیر باشد، آنگاه x به چند کلاس هم‌نهشتی به پیمانه 7 می‌تواند تعلق داشته باشد؟

$$\begin{array}{ccccccc} \mathfrak{z}(\mathfrak{f}) & & \mathfrak{d}(\mathfrak{z}) & & \mathfrak{z}(\mathfrak{z}) & & \mathfrak{f}(\mathfrak{f}) \end{array}$$

محل انجام محاسبات:

اسامی هیأت علمی آزمون های ویژه داوطلبان کنکور ۱۴۰۵ گروه علوم ریاضی

مدیر گروه	عنوان درس	مسئول درس	طراحان	دستیار مسئول درس
سید امیر محمد سید شاکری	حسابان و ریاضی پایه	علی افضل زاده	حسین شفیعی زاده- ایمان اردستانی	عباس سعیدی- وحید جعفری
	هندسه	سعید اکبرزاده	سید محسن میراسلامی- فرهاد فرزانی- سعید اکبرزاده	هادی کاظم نژاد
	ریاضیات گسسته	سعید اکبرزاده	علیرضا شریف خطیبی- سعید اکبرزاده- امیدرضا پورحسینی	فرهاد فرزانی
محمد حسین کشانی	فیزیک	منصور داودوندی	علی نعیمی- بهمن شاهمرادی- احمد رضوانی منصور داودوندی- جمال خم خاجی	ساناز دریگوندی
	شیمی	شهرام شاه پرویزی	ماشاءالله سلیمانی- بهنام ابراهیم پور- مهرداد ملاصالحی- سید صمد صفوی حسین شرانلو- رضا بخشیان- محمدرضا پورجاوید- یاسر راش	حنانه شریف خطیبی

معاون تولید محتوا: علی الفتی

مدیر واحد آموزش تخصصی: محمدرضا محمد هاشمی

خزینہ دو



مؤسسہ آموزشی فرهنگی

آزمون آزمایشی ۲۵ اردیبهشت ۱۴۰۵

گروه آزمایشی علوم ریاضی

ویژه داوطلبان آزمون سراسری ۱۴۰۵

A

دفترچه شماره ۲

وقت پیشنهادی	تا شماره	از شماره	تعداد پرسش	مواد امتحانی
۴۵ دقیقه	۷۵	۴۱	۳۵	فیزیک
۳۰ دقیقه	۱۰۵	۷۶	۳۰	شیمی
مدت پاسخ‌گویی: ۷۵ دقیقه		تعداد کل پرسش‌ها: ۶۵		

دفترچه پاسخ تشریحی

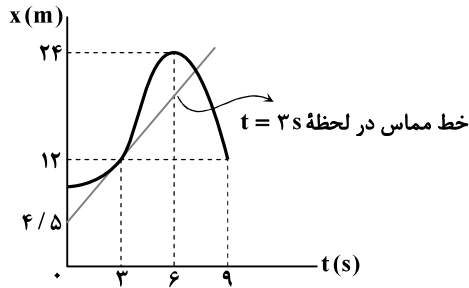


داوطلب گرامی، جهت استفاده از خدمات اختصاصی خود مانند کارنامه هوشمند بعد از آزمون، بانک سؤال گزینه دو، آزمونک‌ها، رفع اشکال هوشمند و ... با استفاده از نام کاربری و رمز عبور وارد سایت gozine2.ir شوید. در ثبت نام اینترنتی نام کاربری کد ملی شماست و رمز عبور توسط خودتان تعیین شده است. در ثبت نام انفرادی و مدرسه‌ای، نام کاربری و رمز عبور خود را از مدرسه یا نمایندگی شهر خود دریافت نمایید.

پاسخ تشریحی تصویری



۴۱- نمودار مکان- زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. در بازه زمانی $t_1 = 0$ تا $t_2 = 9s$ ، چند بار تندی متحرک به $\frac{2}{5} \frac{m}{s}$ می‌رسد؟ (نمودار در بازه زمانی $t = 3s$ تا $t = 9s$ متقارن است).



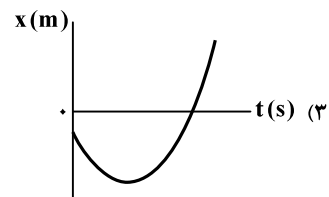
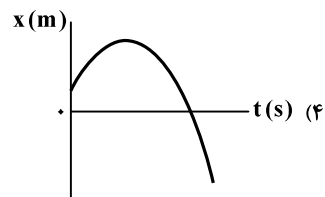
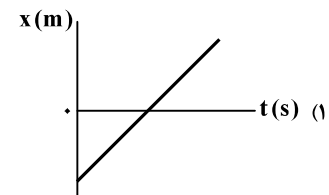
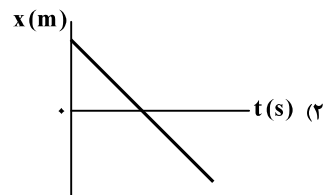
(۱) صفر

(۲) ۱

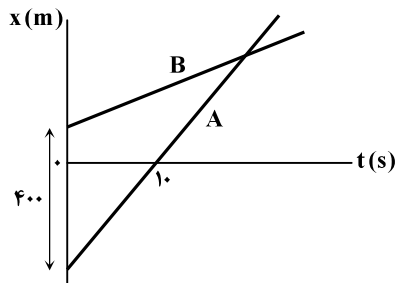
(۳) ۲

(۴) ۳

۴۲- کدام گزینه، نمودار مکان- زمان متحرکی را نشان می‌دهد که سرعت اولیه آن در خلاف جهت محور x و شتاب آن ثابت و در جهت محور x است؟



۴۳- شکل زیر، نمودار مکان- زمان دو متحرک A و B را نشان می‌دهد که روی خط راست حرکت می‌کنند. اگر دو متحرک در لحظه $t = 20s$ و در مکان $x = 300m$ از کنار یکدیگر عبور کنند، تندی متحرک B چند متر بر ثانیه است؟



(۱) ۵

(۲) ۱۰

(۳) ۱۵

(۴) ۲۰

۴۴- متحرکی با شتاب ثابت، در جهت منفی محور x در حرکت است. اگر اندازه جابه‌جایی و مسافت طی شده در ۲ ثانیه سوم حرکت آن به ترتیب $4m$ و $5m$ باشد، تندی متحرک در مبدأ زمان چند متر بر ثانیه است؟

(۴) $22/5$

(۳) ۱۸

(۲) ۹

(۱) $4/5$

۴۵- هواپیمایی در لحظه $t = 0$ با تندی $288 \frac{km}{h}$ روی باند می‌نشیند و پس از پیمودن مسافت $1600m$ متوقف می‌شود. اگر مسافت طی شده در بازه زمانی $t_2 - t_1 = 1s$ برابر با $76/5m$ باشد، لحظه t_1 بر حسب ثانیه کدام است؟

(۴) $1/5$ (۳) $1/25$ (۲) $0/5$ (۱) $0/25$

محل انجام محاسبات:

۴۶- دو جسم را از ارتفاع h با اختلاف زمانی $1s$ رها می‌کنیم. اگر بیشترین فاصله آن‌ها در حال سقوط به $11m$ برسد، ارتفاع h چند متر است؟

$$(g = 10 \frac{m}{s^2} \text{ و مقاومت هوا ناچیز است.})$$

$$12/8 \quad (4)$$

$$12/4 \quad (3)$$

$$12 \quad (2)$$

$$11/5 \quad (1)$$

۴۷- بر جسم ساکنی به جرم $2kg$ ، به‌طور هم‌زمان سه نیروی $\vec{F}_1 = 20\vec{j}$ ، $\vec{F}_2 = 20\vec{i} - 30\vec{j}$ و $\vec{F}_3$ به مدت $4s$ وارد می‌شوند. اگر پس از این مدت نیروهای وارد بر جسم متوازن شوند، جسم با سرعت $\vec{v} = -20\vec{i}$ به حرکت خود ادامه می‌دهد. بزرگی نیروی $\vec{F}_3$ چند نیوتون است؟ (تمام کمیت‌ها در SI اند.)

$$20\sqrt{10} \quad (4)$$

$$10\sqrt{10} \quad (3)$$

$$5\sqrt{10} \quad (2)$$

$$10\sqrt{5} \quad (1)$$

۴۸- فنری با ثابت $5 \frac{N}{cm}$ و طول عادی $50cm$ از یک سر به سقف آسانسوری متصل است. به سر دیگر آن وزنه‌ای به جرم $5kg$ آویزان می‌کنیم. درحالی‌که آسانسور رو به بالا می‌رود، طول فنر به $58cm$ می‌رسد. در این حالت، تندی آسانسور در هر ثانیه چگونه تغییر می‌کند؟ ($g = 10 \frac{m}{s^2}$)

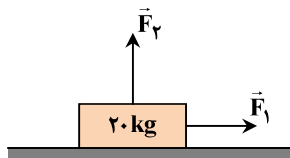
$$5 \frac{m}{s} \text{ افزایش می‌یابد.} \quad (4)$$

$$5 \frac{m}{s} \text{ کاهش می‌یابد.} \quad (3)$$

$$2 \frac{m}{s} \text{ افزایش می‌یابد.} \quad (2)$$

$$2 \frac{m}{s} \text{ کاهش می‌یابد.} \quad (1)$$

۴۹- مطابق شکل، دو نیروی هم‌اندازه $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ بر جسمی به جرم $20kg$ وارد می‌شود و جسم در آستانه لغزش روی سطح افقی است. حال اگر اندازه نیروی $\vec{F}_1$ را $10N$ افزایش و اندازه نیروی $\vec{F}_2$ را $20N$ کاهش دهیم، جسم با شتاب ثابت $0/4 \frac{m}{s^2}$ شروع به حرکت می‌کند. ضریب اصطکاک بین جسم با سطح کدام است؟ ($g = 10 \frac{m}{s^2}$ و $\mu_s = \mu_k$)



$$0/1 \quad (1)$$

$$0/15 \quad (2)$$

$$0/2 \quad (3)$$

$$0/25 \quad (4)$$

۵۰- توبی به جرم $400g$ به‌طور قائم به زمین می‌خورد و در همان راستا برمی‌گردد. اگر انرژی جنبشی توب در لحظه برخورد و در هنگام بازگشت به ترتیب $125J$ و $80J$ و مدت تماس توب با سطح زمین $0/2s$ باشد، اندازه نیروی خالص متوسط وارد بر توب از لحظه برخورد به سطح زمین تا هنگام بازگشت چند نیوتون است؟

$$90 \quad (4)$$

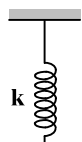
$$60 \quad (3)$$

$$10 \quad (2)$$

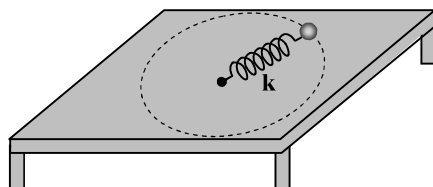
$$8 \quad (1)$$

۵۱- گلوله‌ای به جرم m مطابق شکل «الف» از فنری با ثابت k آویزان است. همین سامانه جرم- فنر را مطابق شکل «ب» روی سطح افقی بدون اصطکاک قرار داده و جرم روی مسیر دایره‌ای می‌چرخد، به‌طوری‌که طول فنر در هر دو حالت «الف» و «ب»، $40cm$ است. دوره حرکت

$$\text{دایره‌ای در شکل «ب» چند ثانیه است؟ } (g = 10 \frac{m}{s^2})$$



(الف)



(ب)

$$0/1\pi \quad (1)$$

$$0/2\pi \quad (2)$$

$$0/4\pi \quad (3)$$

$$0/8\pi \quad (4)$$

محل انجام محاسبات:

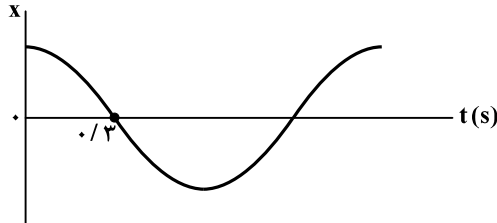
۵۲- یک ماهواره از سطح زمین به مداری مشخص حول کره زمین برده می شود و در آن مدار به دور زمین می چرخد. اگر در این جابه جایی، وزن

ماهواره ۳۶ درصد تغییر کند، تندی ماهواره در مدارش چند $\frac{\text{km}}{\text{s}}$ است؟ $R_e = 6400 \text{ km}$ و $GM_e = 3/92 \times 10^{14} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}}$

- (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹

۵۳- نمودار مکان - زمان یک نوسانگر جرم - فنر مطابق شکل به صورت سینوسی است. اگر تندی نوسانگر در لحظه $t = 0/3 \text{ s}$ برابر $20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ باشد،

بزرگی شتاب نوسانگر در لحظه $t = 0/8 \text{ s}$ چند متر بر مربع ثانیه است؟



- (۱) 3π
(۲) $\frac{50\pi}{3}$
(۳) $\frac{100\pi}{3}$
(۴) 6π

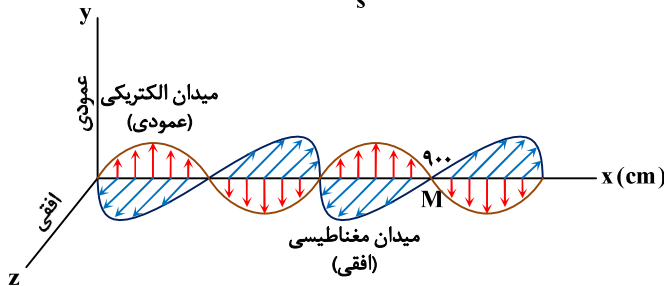
۵۴- جسمی به جرم m به انتهای فنری با ثابت ۲۰۰ نیوتون بر متر بسته شده و روی سطح افقی بدون اصطکاک بر روی پاره خطی به طول ۸

سانتی متر نوسان می کند. در لحظه ای که تندی نوسانگر $\frac{1}{4}$ برابر تندی بیشینه است، انرژی پتانسیل نوسانگر چند ژول است؟

- (۱) $0/12$ (۲) $0/15$ (۳) $0/04$ (۴) $0/01$

۵۵- شکل مقابل تصویر یک موج الکترومغناطیسی را در لحظه $t = 0$ نشان می دهد که در خلأ در حال انتشار است. در چه لحظه ای بر حسب

نانو ثانیه برای اولین بار میدان الکتریکی نقطه M به مقدار بیشینه خود در جهت $-y$ می رسد؟ $(c = 3 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}})$



- (۱) $2/5$
(۲) 5
(۳) 15
(۴) 35

۵۶- تندی موج عرضی در یک سیم فولادی کشیده $160 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ است. اگر سیم را از ابزاری عبور دهیم تا بدون تغییر جرم، قطر مقطع آن $\frac{1}{4}$ برابر

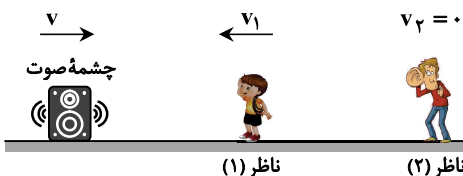
شود و سپس سیم را با همان نیروی کشش قبل بکشیم، تندی موج در آن چند متر بر ثانیه می شود؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۴۰ (۳) ۶۴۰ (۴) ۲۵۶۰

۵۷- در شکل مقابل، ناظر (۱) و چشمه صوت در جهت نشان داده شده در حرکت اند و ناظر (۲) ساکن است. اگر طول موجی که از روی گوش

ناظرهای (۱) و (۲) عبور می کنند به ترتیب λ_1 و λ_2 و بسامدهایی که می شنوند f_1 و f_2 باشد، کدام گزینه درست است؟ (وقتی که

چشمه ساکن است، طول موج صوت در محیط برابر λ_0 است.)



- (۱) $\lambda_1 = \lambda_2 < \lambda_0$ و $f_1 > f_2$
(۲) $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_0$ و $f_1 = f_2$
(۳) $\lambda_1 = \lambda_2 > \lambda_0$ و $f_1 > f_2$
(۴) $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_0$ و $f_1 < f_2$

محل انجام محاسبات:

۵۸- یک چشمه صوتی و یک ناظر در فاصله‌ای از هم قرار دارند و ناظر صدای چشمه را می‌شنود. اگر بسامد و دامنه صوت چشمه را هر یک، ۴ برابر کنیم

و ناظر هم فاصله خود را از چشمه $\frac{1}{4}$ برابر کند، تراز شدت صوتی که به ناظر می‌رسد، چند دسی‌بل افزایش می‌یابد؟ ($\log 2 = 0.3$)

- (۱) ۴ (۲) ۱۶ (۳) ۳۲ (۴) ۳۶

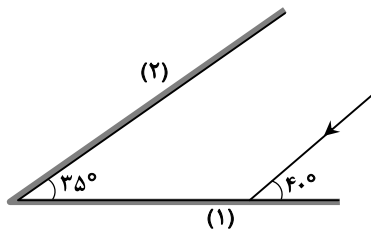
۵۹- وال عنبر از امواج فراصوت با بسامد ۱۰۰ kHz برای مکان‌یابی استفاده می‌کند. اگر طول موج آن ۱/۵ cm باشد، زمان رفت و برگشت موج

گسیل‌شده توسط وال برای مانعی که در فاصله ۳۰۰ متری از آن قرار دارد، چند ثانیه است؟

- (۱) ۰/۱ (۲) ۰/۲ (۳) ۰/۴ (۴) ۰/۶

۶۰- مطابق شکل زیر، پرتو نوری به آینه (۱) می‌تابد و پس از بازتاب به آینه (۲) می‌رسد و در ادامه مسیرش برای بار دوم از آینه (۲) بازتاب

می‌شود. زاویه بازتاب پرتو از آینه (۲) در دومین بازتاب از این آینه چند درجه است؟



(۱) ۶۰

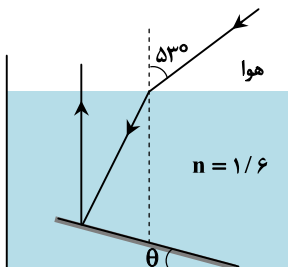
(۲) ۵۵

(۳) ۵۰

(۴) ۴۰

۶۱- در شکل مقابل، پرتو نوری از هوا وارد محیط شفاف با ضریب شکست $n = 1/6$ شده و پس از بازتاب از روی آینه تخت، دوباره وارد هوا

می‌شود. زاویه θ چند درجه است؟ ($\sin 53^\circ = 0.8$)



(۱) ۱۵

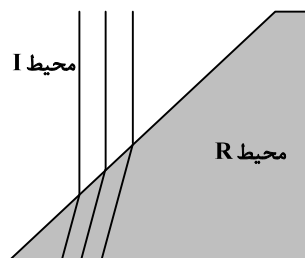
(۲) ۲۲/۵

(۳) ۳۰

(۴) ۳۷

۶۲- شکل زیر جبهه‌های موج تختی را نشان می‌دهد که بر مرز محیط‌های R و I فرود آمده‌اند. کدام مقایسه درباره تندی انتشار موج (۷) و

بسامد آن (f) در این دو محیط درست است؟



(۱) $v_I > v_R$, $f_I > f_R$

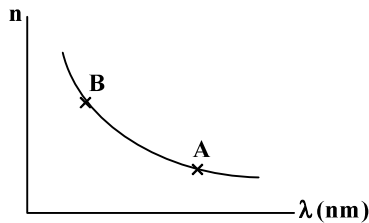
(۲) $v_I < v_R$, $f_I < f_R$

(۳) $v_I > v_R$, $f_R = f_I$

(۴) $v_I < v_R$, $f_R = f_I$

محل انجام محاسبات:

۶۳- نمودار تغییرات ضریب شکست در طیف مرئی نور بر حسب طول موج برای شیشه معمولی مطابق شکل است. اگر پرتوهای نور A و B با زاویه تابش یکسان (θ_i) از هوا وارد شیشه شوند، کدام گزینه مقایسه درستی را بین زاویه‌های شکست پرتوهای A و B (θ_{rA} و θ_{rB}) و زاویه تابش آن‌ها نشان می‌دهد؟



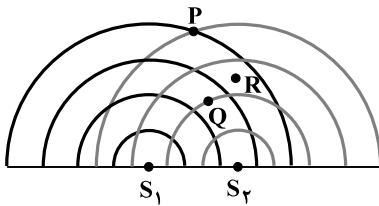
$$\theta_i < \theta_{rA} < \theta_{rB} \quad (1)$$

$$\theta_i < \theta_{rB} < \theta_{rA} \quad (2)$$

$$\theta_{rB} < \theta_{rA} < \theta_i \quad (3)$$

$$\theta_{rA} < \theta_{rB} < \theta_i \quad (4)$$

۶۴- دو چشمه نقطه‌ای S_1 و S_2 به طور هم‌زمان با بسامد یکسان و همگام با یکدیگر در یک تشت موج نوسان می‌کنند و جبهه‌های موجی را مطابق شکل به وجود می‌آورند. در نقاط P، Q و R به ترتیب از راست به چپ چه نوع تداخلی رخ می‌دهد؟



(۱) سازنده - سازنده - ویرانگر

(۲) سازنده - ویرانگر - سازنده

(۳) ویرانگر - سازنده - ویرانگر

(۴) ویرانگر - ویرانگر - سازنده

۶۵- هنگامی که در یک تار دوسریسته ۴ گره تشکیل می‌شود، طول موج صوت منتشر شده در هوا ۲۵ سانتی‌متر است. بسامد اصلی تار چند هرتز

است؟ (تندی صوت در هوا $330 \frac{m}{s}$ است.)

$$486 \quad (4)$$

$$440 \quad (3)$$

$$330 \quad (2)$$

$$264 \quad (1)$$

۶۶- شدت تابش متوسط خورشید در سطح زمین $300 \frac{W}{m^2}$ است. اگر طول موج متوسط فوتون‌ها را $550 nm$ در نظر بگیریم، در مدت ۱۰ دقیقه

چند فوتون با طول موج $550 nm$ به هر مترمربع از سطح زمین می‌رسد؟ ($h = 6.6 \times 10^{-34} J \cdot s$ و $c = 3 \times 10^8 \frac{m}{s}$)

$$1.22 \quad (4)$$

$$5 \times 10^{21} \quad (3)$$

$$1.24 \quad (2)$$

$$5 \times 10^{23} \quad (1)$$

۶۷- در یک آزمایش، هنگامی که نور با بسامد f_1 بر سطح یک فلز می‌تابد، پدیده فوتوالکتریک رخ می‌دهد. در آزمایش دیگر، نور با بسامد f_2 بر سطح همان فلز می‌تابد و بیشینه انرژی جنبشی فوتوالکترئون‌ها نسبت به آزمایش قبلی، $1/5$ برابر می‌شود. اگر f_2 دو برابر بسامد قطع فلز

باشد، نسبت $\frac{f_2}{f_1}$ کدام است؟

$$1/8 \quad (4)$$

$$1/5 \quad (3)$$

$$1/25 \quad (2)$$

$$1/2 \quad (1)$$

۶۸- در اتم هیدروژن، بسامد چندمین خط رشته پاشن ($n' = 3$) برابر $2/5 \times 10^{14} Hz$ است؟ ($c = 3 \times 10^8 \frac{m}{s}$ و $R = 0.1 (nm)^{-1}$)

$$\text{چهارمین} \quad (4)$$

$$\text{سومین} \quad (3)$$

$$\text{دومین} \quad (2)$$

$$\text{اولین} \quad (1)$$

۶۹- براساس مدل اتمی بور در اتم هیدروژن، با افزایش شماره مدار (n)، اختلاف شعاع مدارهای مانای متوالی و اختلاف ترازهای انرژی متوالی می‌یابد.

(۲) افزایش - افزایش

(۱) کاهش - کاهش

(۴) افزایش - کاهش

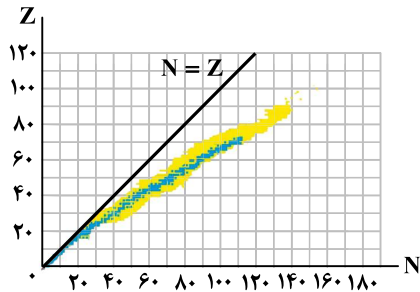
(۳) کاهش - افزایش

محل انجام محاسبات:

۷۰- الکترون اتم هیدروژن در چهارمین حالت برانگیخته قرار دارد. با در نظر گرفتن تمام گذارهای ممکن، انرژی پرنرژی ترین فوتونی که می تواند گسیل شود، چند ریذبرگ است؟

(۱) $\frac{15}{16}$ (۲) $\frac{24}{25}$ (۳) $\frac{9}{40}$ (۴) $\frac{7}{144}$

۷۱- شکل زیر، نمودار عدد اتمی (Z) بر حسب عدد نوترونی (N) را برای عنصرهای مختلف نشان می دهد. با توجه به نمودار، کدام گزینه درست است؟



(۱) تمام هسته های پایدار روی محور $N = Z$ قرار دارند.

(۲) ایزوتوپ های مختلف یک عنصر روی خط موازی با محور N قرار دارد.

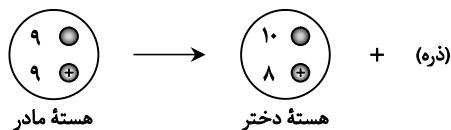
(۳) عناصری که روی خط موازی با محور Z هستند، عدد جرمی یکسانی دارند.

(۴) عناصر موجود روی خط عمود بر محور $N = Z$ ، عدد نوترونی برابر دارند.

۷۲- از کدام واپاشی هسته ای در آشکارساز دود استفاده می شود؟

(۱) آلفا (۲) بتای منفی (۳) بتای مثبت (۴) گاما

۷۳- شکل روبه رو، واپاشی فلوئور ۱۸ را نشان می دهد. نام ذره گسیل شده کدام است؟



(۱) گاما

(۲) آلفا

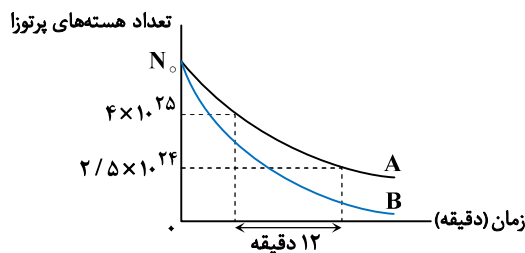
(۳) الکترون

(۴) پوزیترون

۷۴- در مدت ۵ ساعت، ۲۵ گرم از یک ماده رادیواکتیو دچار واپاشی می شود و در مدت ۵ ساعت بعدی، ۲۰ گرم دیگر از ماده دچار واپاشی می شود. جرم اولیه ماده رادیواکتیو چند گرم بوده است؟

(۱) ۱۰۰ (۲) ۱۲۵ (۳) ۱۵۰ (۴) ۱۷۵

۷۵- شکل داده شده، نمودار واپاشی هسته های دو ماده پرتوزای A و B است. نیمه عمر ماده B (بر حسب دقیقه) کدام گزینه می تواند باشد؟



(۱) ۲ / ۵

(۲) ۳

(۳) ۴ / ۵

(۴) ۶

۷۶- در کدام گزینه هر سه ویژگی بیان شده برای مخلوط نام برده شده درست است؟

(۱) شربت معده: سوسپانسیون - ناپایدار - همگن

(۲) سس مایونز: کلوئید - پایدار - همگن

(۳) نوشابه: محلول - پایدار - ناهمگن

(۴) شیر: کلوئید - پایدار - ناهمگن

محل انجام محاسبات:

۷۷- چه تعداد از موارد زیر باعث کاهش قدرت پاک کنندگی صابون می شوند؟

- افزودن مقداری کلسیم کلرید به آب
- استفاده از پارچه پلی استری به جای پارچه نخی
- افزودن سدیم فسفات به آب
- استفاده از آنزیم
- افزایش دما

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۷۸- برای از بین بردن گرفتگی لوله از مخلوطی شامل سودسوز آور و گرد آلومینیم استفاده کرده ایم. کدام موارد زیر درباره آن درست است؟

- (الف) گرفتگی لوله از نوع چربی بوده و بر اثر برهم کنش با محلول حاصل از لوله بازکن به کار رفته از بین می رود.
- (ب) تولید یک گاز دو اتمی در فرایند به کارگیری این لوله بازکن گرفتگی ها را برطرف می کند.
- (پ) پایداری فراورده های حاصل از واکنش این لوله بازکن با آب بیشتر از واکنش دهنده هاست.
- (ت) از این لوله بازکن برای از بین بردن هر نوع گرفتگی در لوله های صنعتی و آب راه ها می توان استفاده کرد.

۱ «الف» و «ت» ۲ «ب» و «پ» ۳ «ب» و «ت» ۴ «الف» و «پ»

۷۹- از آبکافت ۱۰۰/۴۴ گرم نوعی استر طبیعی سنگین به فرمول $C_{25}H_{43}O_6$ با بازدهی ۷۵ درصد چند گرم الکل سه عاملی به دست می آید؟

۱) ۷/۳۶ ۲) ۷/۸۲ ۳) ۸/۲۸ ۴) ۶/۹۰

۸۰- در محلول ۰/۱ مولار HA از هر ۴۰ مولکول HA حل شده ۲ یون تولید می شود. pH این محلول کدام است؟

۱) ۲/۳ ۲) ۲/۶ ۳) ۳/۳ ۴) ۳/۶

۸۱- در دمای اتاق، pH محلول ۰/۸ مولار هیدروفلوئوریک اسید و pH محلول ۰/۸ مولار آمونیاک ۸/۷ اختلاف دارد. اگر درجه یونش HF

در محلول برابر ۰/۰۵ باشد، ثابت یونش آمونیاک در این شرایط به تقریب، چند مولار است؟ ($\log 5 = 0.7$)

۱) $1/25 \times 10^{-5}$ ۲) 4×10^{-6} ۳) $1/6 \times 10^{-5}$ ۴) 8×10^{-4}

۸۲- ۲۰۰ mL محلول KOH با $pH = 13.1$ توسط چند گرم N_2O_5 خنثی می شود؟ ($\log 2 = 0.3$ ، $N = 14, O = 16$: $g \cdot mol^{-1}$)

۱) ۱/۰۸ ۲) ۱/۳۵ ۳) ۲/۱۶ ۴) ۲/۷

۸۳- برای افزایش قدرت پاک کنندگی صابون ها کدام دو نمک مناسب هستند؟

۱) $CaCl_2$ و Na_3PO_4 ۲) $NaHCO_3$ و Na_3PO_4 ۳) $CaCl_2$ و $NaHCO_3$ ۴) $MgCl_2$ و NH_4Cl

۸۴- کدام مطلب درست است؟

- (الف) اغلب فلزها در واکنش با محلول اسیدها، سبک ترین گاز دو اتمی و نمک یا همان ترکیب یونی دوتایی را تولید می کنند.
- (ب) هرچه قدرت کاهندگی گونه ای بیشتر باشد، قدرت اکسندگی گونه مرتبط با آن کمتر است.
- (پ) مقایسه قدرت کاهندگی سه فلز به صورت: $Al > Zn > Ag$ است.
- (ت) با قرار دادن تیغه هایی از جنس Fe و Al ، Au در محلول آبی رنگ مس (II) سولفات از شدت رنگ محلول کاسته می شود.

۱) «ب» و «پ» ۲) «الف» و «ت» ۳) «الف» و «ب» ۴) «پ» و «ت»

۸۵- در واکنش زیر، پس از موازنه نسبت مجموع ضرایب واکنش دهنده ها به مجموع ضرایب فراورده ها برابر با بوده و به ترتیب نقش اکسنده و کاهنده را دارند.



۱) PbO_2 ، Pb ۲) PbO_2 ، Pb ۳) Pb ، PbO_2 ۴) Pb ، PbO_2 ، ۱/۵

۸۶- در یک سلول سوختی گاز متان در آند اکسایش کامل می یابد و با بازده ۸۰٪ کار می کند. اگر ۴۰۰ گرم گاز متان در این سلول مصرف شود

به تقریب چند الکترون از مدار خارجی این سلول عبور می کند؟ ($H = 1, C = 12$: $g \cdot mol^{-1}$)

۱) $2/40 \times 10^{25}$ ۲) $9/63 \times 10^{25}$ ۳) $4/81 \times 10^{25}$ ۴) $1/44 \times 10^{25}$

محل انجام محاسبات:

۸۷- چند مورد از مطالب زیر در مورد برقکافت آب نادرست است؟

- برای جلوگیری از وقوع واکنش‌های ناخواسته میان آب و الکترودها می‌توان جنس الکترودها را از گرافیت انتخاب کرد.
 - حجم گاز آزاد شده در کاتد، دو برابر حجم گاز آزاد شده در آنود است.
 - برای افزایش رسانایی الکتریکی آب خالص باید مقدار زیادی نمک به آن افزود.
 - افزودن شناساگر به اطراف الکترودها سبب می‌شود که رنگ بازی شناساگر دیده شود.
 - به‌ازای اکسایش دو مول آب در آنود، ۴ مول الکترون تولید می‌شود.
- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۸۸- در کدام یک از موارد زیر، عدد اکسایش دو عنصری که زیر آن‌ها خط کشیده شده است، یکسان نیست؟

(الف) BrF_3 ، HBrO_3

(ب) $\text{Na}_2\text{S}_2\text{O}_3$ ، SO_3

(پ) $\text{Na}_2\text{S}_2\text{O}_8$ ، $\text{K}_2\text{Cr}_2\text{O}_7$

(ت) NO_3^- ، NH_4^+

(۱) «الف» و «پ» (۲) «الف» و «ت» (۳) «ب» و «پ» (۴) «ب» و «ت»

۸۹- در واکنش فلز Al با محلول CuSO_4 به‌ازای مبادله 0.06 مول الکترون، 0.42 گرم به جرم تیغه Al افزوده شده است، چند درصد از فلز

مس آزاد شده بر روی تیغه فلز قرار گرفته است؟ ($\text{Al} = 27, \text{Cu} = 64: \text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$)

(۱) ۲۰ (۲) ۳۰ (۳) ۵۰ (۴) ۷۰

۹۰- در سلول نور-الکتروشیمیایی عنوان شده در کتاب درسی:

(۱) واکنش‌دهنده‌ها SiO_2 و H_2O است.

(۲) Si کاهنده و H_2O اکسنده است.

(۳) هدف اصلی از به‌کارگیری آن تولید انرژی الکتریکی است.

(۴) emf سلول ناچیز اما بازده و سرعت آن بالا است.

۹۱- در نوعی خاک رس درصد جرمی SiO_2 برابر a و درصد جرمی H_2O برابر 20 است، چنانچه همه آب موجود در خاک رس جدا شود، درصد

جرمی SiO_2 به چه میزان افزایش می‌یابد؟

(۱) 10% (۲) 20% (۳) $2a/20\%$ (۴) $20a/20\%$

۹۲- توصیف ارائه شده در کدام گزینه با فرمول شیمیایی یا نام ماه پیشنهادی همخوانی دارد؟

(۱) این ماده در حالت مایع رسانای جریان برق است: CHCl_3

(۲) این ماده در حالت جامد شکننده است: نیتینول

(۳) این ماده دیرگداز و سخت است: گرافیت

(۴) این ماده رسانای گرما است: Pb

۹۳- در نقشه پتانسیل الکتروستاتیکی ترکیب آروماتیک C_6X_6 با ساختار زیر، اتم‌های X سرخ‌رنگ هستند. چند مورد از مطالب زیر درست

است؟

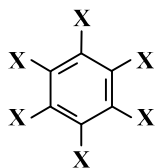
■ اتم X می‌تواند نافلزی از گروه ۱۶ جدول تناوبی باشد.

■ این ترکیب همانند بنزن در میدان الکتریکی جهت‌گیری نمی‌کند.

■ عدد اکسایش اتم کربن در این ترکیب برابر «+۱» است.

■ نیمی از پیوندهای اشتراکی در این ساختار، قطبی است.

(۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱



۹۴- چه تعداد از موارد زیر در مقایسه الماس و گرافیت درست است؟

■ هر اتم کربن در ساختار این دو ماده ۴ پیوند کووالانسی با ۴ اتم دیگر تشکیل داده است.

■ هر دو از دسته مواد کووالانسی هستند و نقطه ذوب و سختی بالایی دارند.

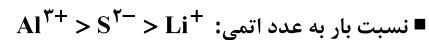
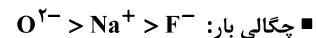
■ تعداد اتم‌ها در نمونه‌های با جرم یکسان از این دو ماده برابر است.

■ شمار اتم‌های کربن در حجم‌های برابری از این دو ماده یکسان است.

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

محل انجام محاسبات:

۹۵- چند مورد از مقایسه‌های زیر به درستی انجام شده است؟



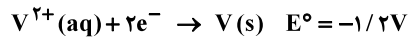
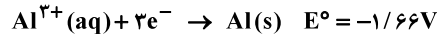
۱ (۴)

۲ (۳)

۳ (۲)

۴ (۱)

۹۶- با توجه به نیم‌واکنش‌های داده‌شده کدام یک از مطالب بیان‌شده درست است؟



(الف) VO^{2+} در مقایسه با Zn^{2+} از قدرت اکسندگی بیشتری برخوردار است.

(ب) فلز روی توانایی تبدیل $V^{2+}(aq)$ به فلز وانادیم را ندارد.

(پ) تبدیل VO^{2+} به V^{3+} در حضور گرد روی همراه با تغییر رنگ محلول از بنفش به سبز است.

(ت) با افزودن ۲/۱۶ گرم گرد آلومینیم به ۳۰۰ میلی‌لیتر محلول ۰/۲ مولار $VO^{2+}(aq)$ تمام کاتیون‌های وانادیم به فلز وانادیم تبدیل می‌شوند.

۴ «ب» و «پ»

۳ «الف»، «ب» و «ت»

۲ «پ» و «ت»

۱ «الف» و «ب»

۹۷- با توجه به ویژگی‌های زیر، پاسخ درست سؤال‌های ۱ و ۲ به ترتیب در کدام گزینه آورده شده‌اند؟

ویژگی: شکل‌پذیری، رسانایی الکتریکی، تنوع عدد اکسایش، داشتن جلا

سؤال ۱: کدام ویژگی‌های ذکرشده را با الگوی دریای الکترونی فلزها نمی‌توان توجیه کرد؟

سؤال ۲: چند مورد از ویژگی‌های ذکرشده توصیفی از رفتار فیزیکی فلزها است؟

(۲) رسانایی الکتریکی و داشتن جلا- ۲

(۱) شکل‌پذیری و تنوع عدد اکسایش- ۲

(۴) داشتن جلا و تنوع عدد اکسایش- ۳

(۳) تنوع عدد اکسایش- ۳

۹۸- کدام عبارت نادرست است؟

(۱) مواد رنگی بخشی از نور سفید تابیده شده را جذب و باقی‌مانده آن را عبور می‌دهند یا بازتاب می‌کنند.

(۲) سازنده اصلی یک ماده رنگی که به آن رنگ می‌بخشد رنگ‌دانه نام دارد.

(۳) Fe_2O_3 و TiO_2 از جمله رنگ‌دانه‌های معدنی و دوده از جمله رنگ‌دانه‌های آلی است.

(۴) رنگ‌هایی که برای پوشش سطح استفاده می‌شوند، نوعی کلئید هستند که لایه نازکی روی سطح ایجاد می‌کنند.

۹۹- درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر در کدام گزینه به ترتیب از راست به چپ مشخص شده است؟

(الف) واکنش حذف آلانده کربن مونوکسید در مبدل کاتالیستی، گرماده است.

(ب) هر سه واکنش مربوط به حذف آلانده‌های خارج شده از اگزوز خودروها از نوع اکسایش- کاهش هستند.

(پ) از تجزیه هر لیتر آلانده نیتروژن‌دار در مبدل کاتالیستی، یک لیتر گاز تولید می‌شود.

(۱) نادرست- نادرست- درست (۲) نادرست- درست- نادرست (۳) درست- درست- درست (۴) درست- درست- نادرست

۱۰۰- در یک واکنش گرماده میزان مبادله انرژی ۱۲۰ kJ است و اختلاف سطح انرژی فرآورده‌های با قله نمودار انرژی- پیشرفت ۲۲۰ kJ است.

چنانچه با استفاده از کاتالیزگر این اختلاف به ۱۵۰ kJ برسد، کاتالیزگر چند درصد از انرژی فعال‌سازی واکنش در جهت رفت را کاهش می‌دهد؟

۴ (۷۰٪)

۳ (۵۰٪)

۲ (۳۰٪)

۱ (۲۵٪)

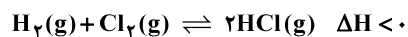
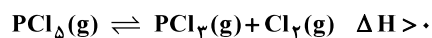
محل انجام محاسبات:

۱۰۱- در یک آزمایش مقدار مشخصی از گاز آمونیاک را وارد ظرفی می‌کنیم تا تعادل گازی $2\text{NH}_3 \rightleftharpoons \text{N}_2 + 3\text{H}_2$ برقرار شود. اگر در حالت تعادل 0.4 مول گاز نیتروژن در ظرف موجود باشد و آمونیاک موجود در ظرف (در حالت تعادل) بتواند 4 لیتر نیتروژنیک اسید با غلظت 2×10^{-2} مولار را به‌طور کامل خنثی کند، حجم ظرف انجام واکنش تعادلی به‌تقریب چند لیتر بوده است؟ (ثابت تعادل واکنش را

$24 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ در نظر بگیرید و $(H = 1, N = 14 : \text{g} \cdot \text{mol}^{-1})$)

(۱) $1/3$ (۲) $1/7$ (۳) $2/9$ (۴) $8/3$

۱۰۲- در چند مورد از واکنش‌های زیر، افزایش دما باعث جابه‌جایی تعادل در جهت رفت شده و کاهش فشار تعادل را در جهت برگشت جابه‌جا می‌کند؟



(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۱۰۳- اگر واکنش تولید ترفتالیک اسید از پارازایلن و پتاسیم پرمنگنات با بازدهی 70% درصد انجام شود، جرم فراورده حاصل به‌ازای مبادله

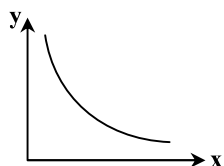
$7/224 \times 10^{22}$ الکترون چند گرم خواهد بود؟ $(H = 1, C = 12, O = 16 : \text{g} \cdot \text{mol}^{-1})$

(۱) $1/162$ (۲) $4/648$ (۳) $2/324$ (۴) $9/486$

۱۰۴- کدام یک از تغییرات زیر در تعادل گرماده $2\text{SO}_2(\text{g}) + \text{O}_2(\text{g}) \rightleftharpoons 2\text{SO}_3(\text{g})$ باعث افزایش ثابت تعادل واکنش می‌شود؟

(۱) کاهش دما (۲) افزایش غلظت SO_2 (۳) افزایش غلظت SO_2 (۴) افزایش دما

۱۰۵- چند مورد از عبارت‌های زیر به‌درستی نمودار داده‌شده را در مورد فرایند هابر تکمیل می‌کنند؟



■ فشار x ، درصد مولی $y = \text{NH}_3$

■ فشار x ، ثابت تعادل y

■ دما x ، درصد مولی $y = \text{NH}_3$

■ دما x ، ثابت تعادل y

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

محل انجام محاسبات:

اسامی هیأت علمی آزمون های ویژه داوطلبان کنکور ۱۴۰۵ گروه علوم ریاضی

مدیر گروه	عنوان درس	مسئول درس	طراحان	دستیار مسئول درس
سید امیر محمد سید شاگری	حسابان و ریاضی پایه	علی افضل زاده	حسین شفیع زاده- ایمان اردستانی	عباس سعیدی- وحید جعفری
	هندسه	سعید اکبرزاده	سید محسن میراسلامی- فرهاد فرزادی- سعید اکبرزاده	هادی کاظم نژاد
	ریاضیات گسسته	سعید اکبرزاده	علیرضا شریف خطیبی- سعید اکبرزاده- امیدرضا پورحسینی	فرهاد فرزادی
محمد حسین کشانی	فیزیک	منصور داودوندی	علی نعیمی- بهمن شاهمرادی- احمد رضوانی منصور داودوندی- جمال خم خاجی	ساناز دریگوندی
	شیمی	شهرام شاه پرویزی	ماشاءالله سلیمانی- بهنام ابراهیم پور- مهرداد ملاصالحی- سید صمد صفوی حسین شرانلو- رضا بخشیان- محمدرضا پورجاوید- یاسر راش	حنانه شریف خطیبی

معاون تولید محتوا: علی الفتی

مدیر واحد آموزش تخصصی: محمدرضا محمد هاشمی

دفترچه پاسخ تشریحی

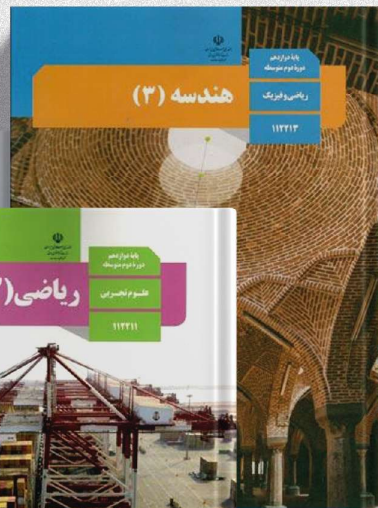
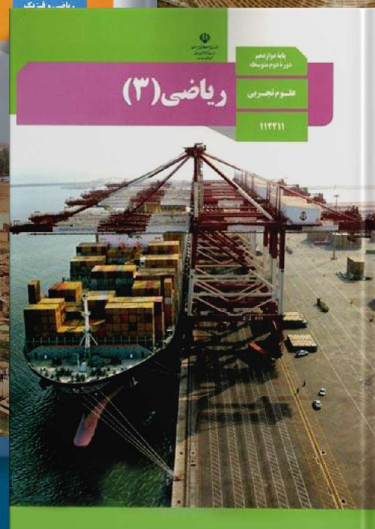
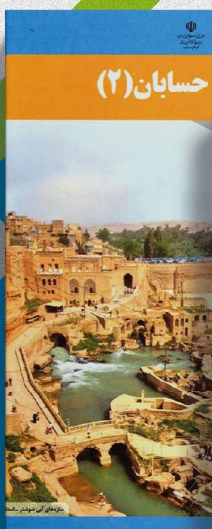
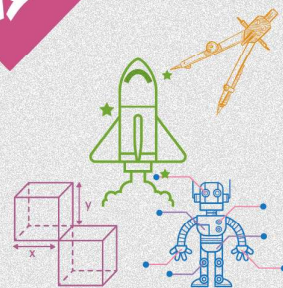
گروه آزمایشی علوم ریاضی

آزمون آزمایشی ۲۵ اردیبهشت ۱۴۰۵

ویژه داوطلبان آزمون سراسری ۱۴۰۵

پایه
دوازدهم

مرحله
۱۶



۱۴۰۴-۱۴۰۵

تذکرات مهم

➡ آزمون آزمایشی مرحله ۱۷ گزینه دو، در روز جمعه ۸ خرداد ۱۴۰۵ برگزار می گردد.

➡ داوطلب گرامی، جهت استفاده از خدمات طلایی خود مانند کارنامه های هوشمند بعد از آزمون، آزمونک ها، بانک سؤال گزینه دو، رفع اشکال هوشمند، آرشیو آزمون های گزینه دو و ...، با استفاده از شماره داوطلبی (به عنوان نام کاربری) و کد ملی خود (به عنوان رمز عبور) وارد وبسایت گزینه دو به آدرس www.gozine2.ir شوید.

➡ در صورتی که اینترنتی ثبت نام کرده اید، رمز عبور شما همان رمزی است که خودتان انتخاب نموده اید.

➡ کارنامه های آزمون آزمایشی مرحله ۱۶ به صورت کامل، با فاصله زمانی کوتاهی پس از آزمون مطابق اطلاعیه اعلام شده، بر روی پایگاه اینترنتی گزینه دو به آدرس www.gozine2.ir قرار می گیرد. در صورت بروز اشکال در دریافت کارنامه، موضوع را از طریق نمایندگی شهر خود پیگیری نمایید.



داوطلب گرامی، شما می توانید با اسکن تصویر بالا به وسیله گوشی هوشمند و یا تبلت خود، به صفحه اینستاگرام مؤسسه گزینه دو وارد شوید.

[gozine2.ir](https://www.instagram.com/gozine2.ir)

● معاون تولید محتوا: علی الفتی

● مدیر واحد آموزش تخصصی: محمدرضا محمدهاشمی

کارشناسان		طراحان		گروه ریاضی	
سید مهدی عابدی	سید علی موسوی راد	حسین شفیق زاده	ایمان اردستانی	مستوفی دروس: علی افضل زاده دستیاران: عباس سعیدی - وحید جعفری	حسابان و ریاضی پایه
علی صادقی	مانی خداپنده	سید محسن میراسلامی	فرهاد فرزانی	مستوفی دروس: سعید اکبرزاده دستیار: هادی کاظم نژاد	هندسه
حسین خواجوند	مانی خداپنده	علیرضا شریف خطیبی	سعید اکبرزاده	مستوفی دروس: سعید اکبرزاده دستیار: فرهاد فرزانی	ریاضیات گسسته
پوپک مقدم		مهرداد کیوان	علی افضل زاده	مستوفی دروس: ایمان اردستانی دستیاران: وحید جعفری - مهدی پوررضایی	ریاضی تجربی
امیرحسین حریری	ایمان حسین زاده	وحید رباعی	علی افضل زاده	مستوفی دروس: حسین افسری دستیاران: مهدی پوررضایی - عباس مالکی	ریاضی انسانی
کارشناسان		طراحان		گروه علوم	
بتول خواجه پور	علی حاجی محمدزاده	محمد بازوگی	امیر کبری راد	مستوفی دروس: امیر کبری راد دستیار: پارسا کامکار	زیست شناسی
مهدیار مسعودی نیا		علی پناهی شایق	علیرضا اکبرپور	مستوفی دروس: منصور داودوندی دستیار: ساناز دریکوندی	فیزیک
مریم گلی حسن لو		بهرام میرحبیبی	پهمن شاهمرادی	مستوفی دروس: شهرام شاه پرویزی دستیار: حنا شریف خطیبی	شیمی
مرتضی قدیانی	حسین ایمانی پور	منصور کهن دل	منصور داودوندی	مستوفی دروس: شکبیا کریمی دستیار: شکیبا کریمی	زمین شناسی
فرزانه صاعدی	حسن علیمحمدی	علی نعیمی	پهمن شاهمرادی		
روزبه اسحاقیان	فرزانه صاعدی	احمد رضوانی	منصور داودوندی		
		جمال خم خاجی			
		ماشاءالله سلیمانی			
		مهداد ملاصالحی			
		حسین شرانو			
		محمدرضا پورجوادید			
		بهنام ابراهیم پور			
		سید صمد صفوی			
		رضا بخشیان			
		یاسر راش			
		حسن علیمحمدی			
		عباس روزبهانی			
		فرزانه رجایی			
		فرزانه صاعدی			
کارشناسان		طراحان		گروه انسانی	
محمدصادق حسام زاده	محمدصدرا حسینی	ابوالفضل قاضی	محمد رضا لمسه چی	مستوفی دروس: محمدرضا پیرو دستیار: حسنا محمدی - سپهر سالارکیا	علوم و فنون ادبی
مهتاب شیرازی	هستی ناصح	آریتا بیدقی	طاهره موسی زاده	مستوفی دروس: الهام رضایی دستیار: فاطمه صفری	جامعه شناسی
علی شکری	فاطمه یاری	علیرضا مختاری	امیرمهدی اسفندی	مستوفی دروس: سیده ضحی سکاکی دستیار: ثنا کاشیان	روان شناسی
مهتاب شیرازی	فاطمه نظری	محمود حسن پور	سید ضحی سکاکی	مستوفی دروس: پویا رضاداد	زبان عربی
مهتاب شیرازی	صبا پهلوان	سید ضحی سکاکی	اسرافیل قربانیپور	مستوفی دروس: سیده ساره زاهدی	تاریخ
مهتاب شیرازی	محمدصدرا حسینی	حمید جوهری مجد	پدرام علیمرادی	مستوفی دروس: الناز گنج کار دستیار: الهه ریاحی نسب	جغرافیا
مهتاب شیرازی	محمدصدرا حسینی	پویا رضاداد	عرفان جالیزی	مستوفی دروس: سعید رحیمیان دستیاران: محمدحسین خدام - فراز مختاری نژاد	فلسفه و منطق
مهتاب شیرازی	محمدصدرا حسینی	شهرام امامی	بهرز یحیی	مستوفی دروس: امیر محمدیگی دستیار: محمدرضا مبارکی	اقتصاد
مهتاب شیرازی	محمدصدرا حسینی	نگار مروتی	مریم قلی پور		
مهتاب شیرازی	محمدصدرا حسینی	حمید سودیان طهرانی	بهرز یحیی		
مهتاب شیرازی	محمدصدرا حسینی	سعید رحیمیان	بهرز یحیی		
مهتاب شیرازی	محمدصدرا حسینی	فرهاد قاسمی نژاد	بهرز یحیی		
مهتاب شیرازی	محمدصدرا حسینی	حسین خاکساری	بهرز یحیی		
مهتاب شیرازی	محمدصدرا حسینی	میترا چینی ساز	بهرز یحیی		
مهتاب شیرازی	محمدصدرا حسینی	محمد رضا مبارکی	بهرز یحیی		
مهتاب شیرازی	محمدصدرا حسینی	یش بدری	بهرز یحیی		

گروه ریاضی
معاون تولید محتوا: علی الفتیگروه علوم
معاون تولید محتوا: علی الفتیگروه انسانی
معاون تولید محتوا: علی الفتی

ریاضیات



۱- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۲ (فصل ۱، درس ۲)

خوبه اینو بدونی



- باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر دوجمله‌ای درجه اول $ax + b$ برابر است با $r = f\left(\frac{-b}{a}\right)$.

جوابش اینه



باقی مانده تقسیم $P(x)$ بر $x + 2$ و $x - 1$ برابر صفر است؛ بنابراین:

$$\begin{cases} P(-2) = 0 \Rightarrow -8 + 4a - 2b - 4 = 0 \Rightarrow 2a - b = 6 \\ P(1) = 0 \Rightarrow 1 + a + b - 4 = 0 \Rightarrow a + b = 3 \end{cases} \Rightarrow a = 3, b = 0$$

با توجه به مقادیر a و b به دست آمده $P''(x)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$P(x) = x^3 + 3x^2 - 4 \Rightarrow P'(x) = 3x^2 + 6x \Rightarrow P''(x) = 6x + 6$$

اکنون به محاسبه باقی مانده $P(x)$ بر $P''(x)$ می‌پردازیم.

$$\begin{cases} P''(x) = 0 \Rightarrow 6x + 6 = 0 \Rightarrow x = -1 \\ R = P(-1) = -1 + 3 - 4 = -2 \end{cases}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۱، درس ۱)

۲- پاسخ: گزینه ۱

خوبه اینو بدونی



- برد $y = f(x)$ با برد تابع $y = f(ax + b)$ و دامنه $y = f(x)$ با دامنه تابع $y = af(x) + b$ یکسان است.

جوابش اینه



مطابق نمودار داده شده دامنه f بازه $[-1, 3]$ و برد f بازه $[0, 2]$ است.

اکنون به محاسبه برد تابع g می‌پردازیم:

$$0 \leq f(x) \leq 2 \Rightarrow 3 \leq 2f(x) + 3 \leq 7 \Rightarrow R_g = [3, 7]$$

سپس به محاسبه دامنه تابع g می‌پردازیم:

$$D_f = [-1, 3] \Rightarrow -1 \leq ax + b \leq 3 \xrightarrow{a > 0} \frac{-1-b}{a} \leq x \leq \frac{3-b}{a} \Rightarrow D_g = \left[\frac{-1-b}{a}, \frac{3-b}{a} \right]$$

دامنه و برد تابع g یکسان است؛ بنابراین:

$$D_g = R_g \Rightarrow \begin{cases} \frac{-1-b}{a} = 3 \\ \frac{3-b}{a} = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a + b = -1 \\ 4a + b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \end{cases} \Rightarrow a - b = 5$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۱، درس ۲)

۳- پاسخ: گزینه ۴

خوبه اینو بدونی



- اگر f تابعی اکیداً نزولی بوده و $f(a) \leq f(b)$ باشد، آنگاه می‌توان نتیجه گرفت: $a \geq b$



می‌دانیم تابع f اکیداً نزولی با دامنه $(-\infty, 4]$ است. بنابراین:

$$f(f(x)) \leq f(x) \Rightarrow f(x) \geq x \Rightarrow 2 + \sqrt{4-x} \geq x \Rightarrow \sqrt{4-x} \geq x-2 \Rightarrow \begin{cases} 4-x \geq x^2 - 4x + 4 \\ \text{یا} \\ x-2 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - 3x \leq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 3 \\ \text{یا} \\ x \leq 2 \end{cases} \xrightarrow{U} x \leq 3$$

از طرفی با توجه به دامنه $f \circ f$ داریم:

$$f(x) \in D_f \Rightarrow 2 + \sqrt{4-x} \leq 4 \Rightarrow \sqrt{4-x} \leq 2 \Rightarrow 4-x \leq 4 \Rightarrow x \geq 0$$

پس جواب نامعادله $f \circ f(x) - f(x) \leq 0$ به صورت $0 \leq x \leq 3$ است که شامل چهار عدد صحیح ۰، ۱، ۲ و ۳ است.

۴- پاسخ: گزینه ۱ **▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۱، درس ۲)**



- تابع f را در یک مجموعه، اکیداً صعودی می‌گوییم، اگر برای هر دو مقدار a و b در این مجموعه که $a < b$ ، آنگاه: $f(a) < f(b)$ - در فاصله‌ای که یک تابع اکیداً صعودی است، با حرکت روی نمودار (از چپ به راست)، همواره روبه بالا خواهیم رفت.



طول رأس سهمی f برابر $x = 3$ است. پس تابع f که یک سهمی روبه بالا می‌باشد، در محدوده $x \geq 3$ اکیداً صعودی است.

طول رأس سهمی $y = f\left(\frac{a-2x}{3}\right)$ را به دست می‌آوریم.

$$\frac{a-2x}{3} = 3 \Rightarrow 9 = a-2x \Rightarrow x = \frac{a-9}{2}$$

تابع $y = f\left(\frac{a-2x}{3}\right)$ نیز یک سهمی روبه بالا است؛ پس برای آنکه این سهمی، روی بازه $[-2, +\infty)$ اکیداً صعودی باشد، می‌بایست رأس سهمی کوچک‌تر از -2 باشد:

$$x = \frac{a-9}{2}$$

$$\frac{a-9}{2} \leq -2 \Rightarrow a-9 \leq -4 \Rightarrow a \leq 5$$

پس a دارای ۵ جواب طبیعی ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ است.

۵- پاسخ: گزینه ۲ **▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۲ (فصل ۲، درس ۱)**



- ماکزیمم، مینیمم و دوره تناوب $y = c + a \cos(bx)$ به ترتیب برابر $c + |a|$ ، $c - |a|$ و $\frac{2\pi}{|b|}$ است.



با توجه به اینکه ماکزیمم تابع، سه برابر مینیمم آن است، داریم:

$$\max = 3 \times \min \Rightarrow 2a + |b| = 3 \times (2a - |b|) \Rightarrow 4a = 4|b| \Rightarrow a = |b|$$

بنابراین دوره تناوب این تابع برابر است با:

$$T = \frac{2\pi}{\left| \frac{a\pi}{b} \right|} = \frac{2|b|}{|a|} = 2$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۲، درس ۲)

۶- پاسخ: گزینه ۲



- رابطه تانژانت تفاضل دو زاویه به صورت زیر است:

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

- رابطه تانژانت دو برابر زاویه به صورت زیر است:

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

ابتدا با توجه به رابطه تانژانت دو برابر زاویه، مقدار $\tan 2\alpha$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2}{3}$$

اکنون با استفاده از فرمول تانژانت تفاضل زوایا و سپس به کمک تغییر متغیر، مقدار $\tan \beta$ را پیدا می‌کنیم:

$$\tan(2\alpha - \beta) = \frac{\tan 2\alpha - \tan \beta}{1 + \tan 2\alpha \tan \beta} \xrightarrow{\tan \beta = t} -\frac{1}{2} = \frac{\frac{2}{3} - t}{1 + \frac{2}{3}t} \Rightarrow -\frac{1}{2} = \frac{3 - 4t}{4 + 3t} \Rightarrow 6 - 8t = -4 - 3t \Rightarrow 5t = 10$$

$$\Rightarrow t = 2 \Rightarrow \tan \beta = 2$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۲، درس ۲)

۷- پاسخ: گزینه ۲

- جواب‌های کلی معادله $\cos x = \cos \alpha$ به صورت $x = 2k\pi \pm \alpha$ می‌باشد که در آن $k \in \mathbb{Z}$.می‌دانیم $x = \frac{\pi}{3}$ یک جواب معادله مثلثاتی داده شده است، پس در آن صدق می‌کند:

$$x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \tan^2 \frac{\pi}{3} = 1 + \frac{k}{\cos \frac{\pi}{3}} \Rightarrow 3 = 1 + \frac{k}{\frac{1}{2}} \Rightarrow 3 = 1 + 2k \Rightarrow k = 1$$

پس معادله داده شده به صورت $\tan^2 x = 1 + \frac{1}{\cos x}$ است و برای حل آن، داریم:

$$\tan^2 x = 1 + \frac{1}{\cos x} \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = 1 + \frac{1}{\cos x} \xrightarrow{\times \cos^2 x} 1 - \cos^2 x = \cos^2 x + \cos x \Rightarrow 2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow (2 \cos x - 1)(\cos x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \xrightarrow{0 \leq x < 2\pi} x = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \\ \cos x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi + \pi \xrightarrow{0 \leq x < 2\pi} x = \pi \end{cases}$$

بنابراین مجموع دو جواب دیگر معادله در بازه $[0, 2\pi]$ برابر است با:

$$\pi + \frac{5\pi}{3} = \frac{8\pi}{3}$$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۲ (فصل ۲، درس ۱)

۸- پاسخ: گزینه ۳



- توابع $y = a \sin bx + c$ و $y = a \cos bx + c$ دارای مقدار ماکزیمم $|a| + c$ و مقدار مینیمم $-|a| + c$ و دوره تناوب $\frac{2\pi}{|b|}$ است.



در $x = 0$ تابع f نزولی است. پس $\frac{a}{b} \times a < 0$ و در نتیجه $b < 0$. با توجه به نمودار تابع، ماکزیمم تابع برابر ۶ و مینیمم آن برابر ۲- است. پس:

$$\begin{cases} \max = 6 \Rightarrow c + \frac{a}{b} = 6 \\ \min = -2 \Rightarrow c - \frac{a}{b} = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 2 \\ \frac{a}{b} = 4 \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{b} = \pm 4$$

با توجه به نمودار، مقدار $f(0)$ مثبت است:

$$f(0) > 0 \Rightarrow c + \frac{a}{b} \sin(-\frac{\pi}{6}) > 0 \Rightarrow 2 + \frac{a}{b} \times -\frac{1}{2} > 0 \Rightarrow \frac{a}{b} < 4$$

بنابراین فقط مقدار $\frac{a}{b} = -4$ قابل قبول است. ضمناً نمودار تابع از نقطه $(\frac{5\pi}{6}, 6)$ می‌گذرد، پس:

$$\begin{aligned} f(\frac{5\pi}{6}) = 6 &\Rightarrow 2 - 4 \sin(\frac{5\pi}{6}a - \frac{\pi}{6}) = 6 \Rightarrow \sin(\frac{5\pi}{6}a - \frac{\pi}{6}) = -1 \Rightarrow \frac{5\pi}{6}a - \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{2} \\ \Rightarrow \frac{5\pi}{6}a &= \frac{10\pi}{6} \Rightarrow a = 2 \xrightarrow{a=-4b} b = -\frac{1}{4} \Rightarrow a - b = 2/5 \end{aligned}$$

▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۲ (فصل ۳، درس ۲)

۹- پاسخ: گزینه ۲



- خط $x = a$ را مجانب قائم نمودار تابع $f(x)$ گویند هرگاه حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد.

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$

- خط $y = L$ را مجانب افقی نمودار $y = f(x)$ می‌نامیم به شرطی که حداقل یکی از دو شرط $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ برقرار باشد.



برای محاسبهٔ مجانب افقی تابع، مقدار حد تابع را در بی‌نهایت محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f\left(\frac{2}{x}\right) = f\left(\frac{2}{0}\right) = f(-1) = -\frac{5}{3}$$

برای محاسبهٔ مجانب قائم، تابع می‌بایست نقطه‌ای به طول a را پیدا کنیم که در آن حد تابع نامتناهی است.

$$\lim_{x \rightarrow a} f\left(\frac{2}{x}\right) = \infty \Rightarrow f\left(\frac{2}{a}\right) = 2 \Rightarrow \frac{\frac{6}{a} - 2}{2 - \frac{2}{a}} = 2 \Rightarrow \frac{6 - 2a}{2a - 2} = 2 \Rightarrow 2a - 2 = 3 - a \Rightarrow a = \frac{5}{3}$$

پس خطوط $x = \frac{5}{3}$ و $y = -\frac{5}{3}$ مجانب‌های تابع بوده و نقطهٔ $A(\frac{5}{3}, -\frac{5}{3})$ نقطه برخورد آن‌هاست. فاصلهٔ مبدأ مختصات از این نقطه برابر

است با:

$$OA = \sqrt{\frac{25}{9} + \frac{25}{9}} = \frac{5}{3} \sqrt{2}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۳، درس ۲)

۱۰- پاسخ: گزینه ۱



- حد هر چند جمله‌ای به صورت $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ در $\pm\infty$ برابر حد جمله‌ای از آن است که دارای بزرگ‌ترین درجه است یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_n x^n$$



ابتدا با توجه به مقدار حد داده شده، حاصل a را پیدا می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax}{\sqrt{4x^2 + 1}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax}{|3x|} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{-a}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow a = -2$$

بنابراین با کمک گرفتن از ضرب عبارت رادیکالی در مزدوج، حاصل حد خواسته شده را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 + ax}) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 - 2x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x - \sqrt{x^2 - 2x})(x + \sqrt{x^2 - 2x})}{x + \sqrt{x^2 - 2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x^2 + 2x}{x + |x|} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{2x} = 1 \end{aligned}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۳، درس ۲)

۱۱- پاسخ: گزینه ۱



- حد هر چند جمله‌ای به صورت $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ در $\pm\infty$ برابر حد جمله‌ای از آن است که دارای بزرگ‌ترین درجه است یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_n x^n$$



مطابق نمودار، دو تابع f و g^{-1} توابعی خطی هستند، اکنون معادلات f و g^{-1} را به دست می‌آوریم:

$$\left. \begin{matrix} (0, 2) \\ (-3, 0) \end{matrix} \right\} \Rightarrow g^{-1}(x) = \frac{2}{3}x + 2 \Rightarrow f(x) = -\frac{3}{2}x + 2$$

ضمناً ضابطه تابع g که وارون g^{-1} است را پیدا می‌کنیم:

$$g^{-1}(x) = \frac{2}{3}x + 2 \Rightarrow g(x) = \frac{3}{2}x - 3$$

بنابراین حاصل حد خواسته شده برابر است با:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|f(x)|}{f(2x) - g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left| -\frac{3}{2}x + 2 \right|}{-3x + 2 - \frac{3}{2}x + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3}{2}x}{-\frac{9}{2}x} = -\frac{1}{3}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۳، درس ۱)

۱۲- پاسخ: گزینه ۱



- اگر $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$ آنگاه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ و برعکس.
- اگر $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$ آنگاه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ و برعکس.



با توجه به اینکه حد راست و چپ وقتی $x \rightarrow n$ برابر $-\infty$ است، پس مخرج در $x = n$ ریشه مضاعف دارد و چون عدد -1 مخرج کسر را به ازای هر m برابر صفر می‌کند، بنابراین $x = -1$ ریشه مخرج است، پس مخرج به صورت $(x+1)^2$ بوده و m برابر یک است. پس باید صورت کسر یعنی $f(x)$ در همسایگی محذوف -1 منفی باشد، با توجه به اینکه $m = 1$ و $n = -1$ فقط گزینه ۱ این ویژگی را دارد.

گزینه ۱: $x-1$	گزینه ۲: $x+1$
$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -2$	$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0$
گزینه ۳: $-x+1$	گزینه ۴: $-x-1$
$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 2$	$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0$

۱۳- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۴، درس ۱)



$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

- مشتق تابع f در $x = a$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

- شیب خط مماس بر نمودار تابع در یک نقطه، برابر با مشتق آن تابع در نقطه مورد نظر است.



حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f^2(x) - 9}{x^2 - 4}$ موجود و متناهی است، پس با توجه به اینکه حد مخرج کسر برابر صفر است، حد صورت کسر نیز باید برابر صفر باشد.

$$\lim_{x \rightarrow 2} (f^2(x) - 9) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f^2(x) = 9 \Rightarrow f^2(2) = 9 \Rightarrow f(2) = \pm 3$$

نقطه تماس در ناحیه چهارم است، پس $f(2) < 0$ و $f(2) = -3$ قابل قبول است.

اکنون با توجه به حد داده شده، داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f^2(x) - 9}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(f(x) - 3)(f(x) + 3)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) + 3}{x-2} \times \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 3}{x+2} = f'(2) \times \left(-\frac{6}{4}\right) = -\frac{3}{2} f'(2) = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow f'(2) = -1$$

شیب خط مماس برابر $f'(2)$ است؛ اکنون معادله خط مماس را نوشته و نقاط A و B را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases} f(2) = -3 \\ m = f'(2) = -1 \end{cases} \Rightarrow \text{معادله خط مماس: } y = -x - 1$$

$$\text{نقاط برخورد با محورها: } \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = -1 & A(0, -1) \\ y = 0 \Rightarrow x = -1 & B(-1, 0) \end{cases} \quad AB \text{ فاصله} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

۱۴- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۴، درس ۲)



- اگر u تابعی از x باشد، آنگاه: $(f(u))' = u' \cdot f'(u)$



از دو طرف تساوی داده شده، دو بار مشتق می‌گیریم:

$$f(2x-1) = xg\left(\frac{3}{x}\right) \Rightarrow 2f'(2x-1) = g\left(\frac{3}{x}\right) - \frac{3}{x}g'\left(\frac{3}{x}\right) \Rightarrow 4f''(2x-1) = -\frac{3}{x^2}g'\left(\frac{3}{x}\right) + \frac{3}{x^2}g''\left(\frac{3}{x}\right) + \frac{9}{x^3}g''\left(\frac{3}{x}\right) = \frac{9}{x^3}g''\left(\frac{3}{x}\right)$$

با جای گذاری $x = 1$ در تساوی به دست آمده، مقدار خواسته شده را می‌یابیم:

$$x = 1 \Rightarrow 4f''(1) = 9g''(3) \Rightarrow f''(1) = 9 \times \frac{4}{3} \Rightarrow f''(1) = 2$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۴، درس ۲)

۱۵- پاسخ: گزینه ۳



معادله خط گذرنده از A و B را می نویسیم:

$$m_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-4 - (-1)}{-1 - 0} = 3$$

$$AB \text{ معادله: } y - (-1) = 3(x - 0) \Rightarrow y = 3x - 1$$

خط و منحنی را تقاطع می دهیم و شرط مماس بودن یعنی ریشه مضاعف داشتن را می نویسیم:

$$2\sqrt{ax-2} = 3x-1 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 4ax-8 = 9x^2-6x+1 \Rightarrow 9x^2-2(3+2a)x+9=0$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow 4(3+2a)^2 - 4 \times 9 = 0 \Rightarrow (3+2a)^2 = 9 \Rightarrow 3+2a = \pm 3 \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \checkmark \\ a = -6 \times \end{cases}$$

توجه کنید جواب $a = -6$ غیر قابل قبول است؛ زیرا در این صورت معادله $2\sqrt{-6x-2} = 3x-1$ جواب ندارد.



شیب خط گذرنده از دو نقطه A و B برابر ۳ است، پس مشتق تابع در نقطه تماس برابر ۳ می باشد. همچنین معادله خط گذرنده از دو نقطه A و B به صورت $y = 3x - 1$ بوده و می دانیم تابع f با خط مماس در نقطه تماس مشترک است، پس اگر طول نقطه تماس را x_0 در نظر بگیریم، دو معادله زیر برقرار است:

$$\left. \begin{aligned} f'(x_0) = 3 &\Rightarrow 2 \frac{a}{2\sqrt{ax_0-2}} = 3 \Rightarrow \sqrt{ax_0-2} = \frac{a}{3} \\ f(x_0) = 3x_0 - 1 &\Rightarrow 2\sqrt{ax_0-2} = 3x_0 - 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{2a}{3} = 3x_0 - 1 \Rightarrow x_0 = \frac{2a+3}{9} \Rightarrow \sqrt{\frac{2a^2+3a}{9} - 2} = \frac{a}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{2a^2+3a-18}{9} = \frac{a^2}{9} \Rightarrow a^2+3a-18=0 \Rightarrow a=3 \text{ یا } -6 \text{ غق ق ۶- یا ۳}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۴، درس ۲)

۱۶- پاسخ: گزینه ۱



- اگر توابع f و g در $x = a$ مشتق پذیر باشند، آنگاه توابع kf ($k \in \mathbb{R}$) و $f \pm g$ ، نیز در $x = a$ مشتق پذیرند و داریم:

- $(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$
- $(kf)'(a) = kf'(a)$

- توابع $f(x) = \sin x$ و $g(x) = \cos x$ مشتق پذیر هستند و داریم:

$$f'(x) = \cos x \quad \text{و} \quad g'(x) = -\sin x$$

$$y = f(u) \Rightarrow y' = u'f'(u)$$

- اگر f تابعی بر حسب u و u تابعی از x باشد:



مقدار خواسته شده، همان مشتق تابع $f + 2g$ ، در نقطه ای به طول $\frac{\pi}{15}$ است، پس ابتدا $f + 2g$ را محاسبه و ساده می کنیم:

$$(f + 2g)(x) = f(x) + 2g(x) = \cos 2x \sin 3x + 2 \sin x \cos x \cos 3x = \cos 2x \sin 3x + \sin 2x \cos 3x = \sin(2x + 3x) = \sin 5x$$

بنابراین مشتق این تابع برابر است با:

$$(f' + 2g')(x) = 5 \cos 5x \Rightarrow (f' + 2g')\left(\frac{\pi}{15}\right) = 5 \cos \frac{\pi}{3} = 5 \times \frac{1}{2}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۵، درس ۱)

۱۷- پاسخ: گزینه ۱



- اگر تابع f در نقطه ای به طول c ماکزیمم یا مینیمم نسبی داشته باشد و $f'(c) = 0$ باشد، آنگاه $f'(c) = 0$ به عبارت دیگر، هر نقطه اکسترمم نسبی تابع، یک نقطه بحرانی آن است.



تابع f از نقطه $(1, \frac{5}{2})$ گذشته و این نقطه، نقطه بحرانی آن است، پس دو شرط $f(1) = \frac{5}{2}$ و $f'(1) = 0$ را بررسی می‌کنیم:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+a}} + \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}} \times b}{x}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{شرط اول: } f'(1) = 0 &\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{1+a}} - \frac{b}{2} = 0 \Rightarrow \sqrt{1+a} = \frac{1}{b} \\ \text{شرط دوم: } f(1) = \frac{5}{2} &\Rightarrow \sqrt{1+a} + b = \frac{5}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{1}{b} + b = \frac{5}{2} \Rightarrow 2b^2 - 5b + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} b=2 \Rightarrow a=-\frac{3}{4} \times \\ b=\frac{1}{2} \Rightarrow a=3 \checkmark \end{cases}$$

توجه کنید که طبق فرض، $a > 0$ است.

۱۸- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۵، درس ۲)



- برای اینکه $(c, f(c))$ یک نقطه عطف منحنی باشد، یا باید $f''(c)$ وجود نداشته باشد و یا اگر وجود دارد باید داشته باشیم $f''(c) = 0$.



در نقطه عطف، مشتق مرتبه دوم تابع برابر صفر است. همچنین تابع از نقطه $A(3, 2)$ می‌گذرد، پس دو شرط $f(3) = 2$ و $f''(3) = 0$ را بررسی می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{ax+b}{x^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2}$$

$$f'(x) = -\frac{a}{x^2} - \frac{2b}{x^3} \Rightarrow f''(x) = \frac{2a}{x^3} + \frac{6b}{x^4} \Rightarrow f''(x) = \frac{2ax+6b}{x^4}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{شرط اول: } f''(3) = 0 &\Rightarrow 6a+6b=0 \Rightarrow a=-b \\ \text{شرط دوم: } f(3) = 2 &\Rightarrow \frac{3a+b}{9} = 2 \Rightarrow 3a+b=18 \end{aligned} \right\} \Rightarrow b=-9, a=9$$

اکنون، به کمک تابع مشتق، طول و عرض نقطه اکسترمم نسبی را پیدا می‌کنیم:

$$f'(x) = \frac{-9x+18}{x^3} = 0 \Rightarrow x=2 \text{ طول اکسترمم نسبی}$$

$$f(2) = \frac{2a+b}{4} = \frac{9}{4} = 2.25 \text{ عرض اکسترمم نسبی}$$

۱۹- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۵، درس ۳)



- تابع $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ را که در آن $c \neq 0$ و $\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}$ است «تابع هموگرافیک» می‌نامیم.



خط $x=2$ مجانب قائم تابع و در نتیجه ریشه مخرج کسر است، پس $b=-2$. اکنون ضابطه f را به صورت یک کسر می‌نویسیم:

$$f(x) = x + a + \frac{ax^2+2}{x-2} = \frac{x^2+ax^2+ax-2x-2a+2}{x-2} = \frac{(1+a)x^2+(a-2)x+(-2a+2)}{x-2}$$

$$a=-1 \Rightarrow f(x) = \frac{-3x+4}{x-2}$$

ضریب x^2 در صورت باید صفر باشد، پس $a=-1$ داریم:

اکنون شیب خط مماس در $x=0$ را با مشتق‌گیری از f پیدا می‌کنیم:

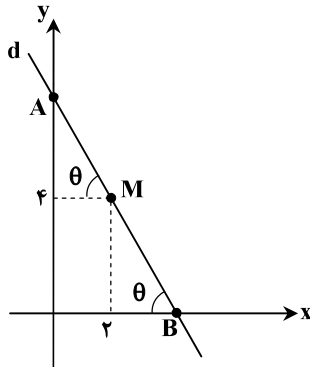
$$f'(x) = \frac{2}{(x-2)^2} \Rightarrow f'(0) = \frac{1}{2}$$



- در مسائل بهینه‌سازی برای ماکزیمم یا مینیمم کردن یک عبارت، ابتدا تابع آن عبارت را برحسب یکی از متغیرهای مسئله می‌نویسیم و سپس با استفاده از مشتق‌گیری و پیدا کردن نقاط بحرانی، پاسخ مناسب مسئله را به دست می‌آوریم.



با توجه به شکل و تعریف نسبت‌های مثلثاتی، سعی می‌کنیم تابع طول پاره خط AB را برحسب θ بنویسیم:



$$\begin{cases} \sin \theta = \frac{4}{MB} \Rightarrow MB = \frac{4}{\sin \theta} \\ \cos \theta = \frac{2}{AM} \Rightarrow AM = \frac{2}{\cos \theta} \end{cases} \Rightarrow AB = \frac{2}{\cos \theta} + \frac{4}{\sin \theta}$$

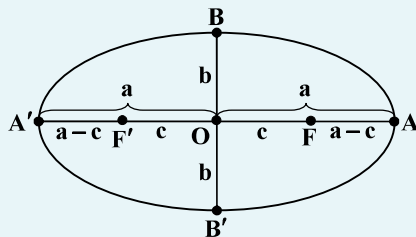
حال از تابع به دست آمده مشتق می‌گیریم و آن را برابر صفر می‌گذاریم تا نقطه بحرانی و اکسترمم تابع به دست آید:

$$(AB)' = \frac{2 \sin \theta}{\cos^2 \theta} - \frac{4 \cos \theta}{\sin^2 \theta}$$

$$(AB)' = 0 \Rightarrow \frac{2 \sin \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{4 \cos \theta}{\sin^2 \theta} \Rightarrow \sin^3 \theta = 2 \cos^3 \theta \Rightarrow \tan^3 \theta = 2 \Rightarrow \tan \theta = \sqrt[3]{2}$$



- در بیضی شکل زیر داریم:



- ۱) $AA' = 2a$ = طول قطر بزرگ
- ۲) $BB' = 2b$ = طول قطر کوچک
- ۳) $FF' = 2c$ = فاصله کانونی
- ۴) $a^2 = b^2 + c^2$

- خروج از مرکز هر بیضی با طول قطر بزرگ $2a$ و اندازه فاصله کانونی $2c$ برابر $\frac{c}{a}$ است.



فاصله نقاط $A(10, 1)$ و $A'(-2, 1)$ برابر $2a$ است و چون عرض این نقاط یکسان است، داریم:

$$AA' = 2a = 10 - (-2) = 12 \Rightarrow a = 6$$

$$\frac{c}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow c = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$$

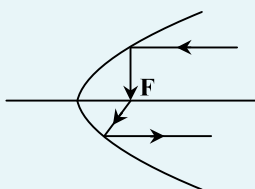
$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 36 = b^2 + 18 \Rightarrow b^2 = 18 \Rightarrow b = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$\text{قطر کوچک} = 2b = 2 \times 3\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$



- معادله سهمی افقی یا قائم با رأس $S(h, k)$ به صورت زیر است.

معادله سهمی	کانون	خط هادی	محور سهمی	دهانه سهمی
$(y-k)^2 = 4a(x-h)$	$(a+h, k)$	$x = -a+h$	خط $y = k$	روبه راست
$(y-k)^2 = -4a(x-h)$	$(-a+h, k)$	$x = a+h$	خط $y = k$	روبه چپ
$(x-h)^2 = 4a(y-k)$	$(h, a+k)$	$y = -a+k$	خط $x = h$	روبه بالا
$(x-h)^2 = -4a(y-k)$	$(h, -a+k)$	$y = a+k$	خط $x = h$	روبه پایین



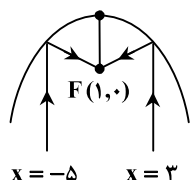
- ویژگی بازتابندگی سهمی: یکی از ویژگی‌های مهم سهمی این است که هر شعاع نوری که از کانون آن به بدنه سهمی بتابد، بازتاب آن موازی با محور سهمی باز خواهد گشت و برعکس، هر شعاع نوری که موازی با محور سهمی به بدنه سهمی بتابد، بازتاب آن از کانون سهمی خواهد گذشت.



ابتدا معادله سهمی را به صورت متعارف نوشته و کانون سهمی را تعیین می‌کنیم.

$$x^2 - 2x + 4y = 3 \Rightarrow (x-1)^2 - 1 + 4y = 3 \Rightarrow (x-1)^2 = -4y + 4 \Rightarrow (x-1)^2 = -4(y-1)$$

سهمی قائم روبه پایین است، پس:



$$F(1,0) : \text{کانون} \Rightarrow a=1 \Rightarrow 4a=4, S(1,1) : \text{رأس سهمی}$$

$$x = -5 \quad x = 3$$

هر پرتویی که موازی محور سهمی، به بدنه داخلی سهمی بتابد، بازتابش آن از کانون سهمی می‌گذرد؛ بنابراین نقطه تلاقی پرتوهای بازتابش، کانون سهمی است و باید فاصله کانون سهمی تا مبدأ مختصات را بیابیم.

$$F(1,0) \Rightarrow OF = 1$$



$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| |\vec{b}|$$

- (نامساوی کسینوس شوارتز) برای دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ داریم:

- منظور از $|\vec{a} \cdot \vec{b}|$ قدرمطلق مقدار $\vec{a} \cdot \vec{b}$ است.



بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\vec{a} = (x, 2y, 3z), \vec{b} = (3, -5, -2)$$

طبق نامساوی کسینوس شوارتز، داریم:

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| |\vec{b}| \Rightarrow |3x - 10y - 6z| \leq \sqrt{x^2 + 4y^2 + 9z^2} \times \sqrt{9 + 25 + 4} \Rightarrow |3x - 10y - 6z| \leq \sqrt{19} \times \sqrt{38}$$

$$\Rightarrow |3x - 10y - 6z| \leq \sqrt{19} \times \sqrt{2 \times 19} \Rightarrow |3x - 10y - 6z| \leq 19\sqrt{2}$$

بنابراین، بیشترین مقدار $3x - 10y - 6z$ برابر $19\sqrt{2}$ است.



- در حالت کلی اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب و $B = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$ ماتریس مقادیر معلوم و $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ماتریس مجهولات دستگاه دو معادله و دو مجهول $\begin{cases} ax + by = e_1 \\ cx + dy = e_2 \end{cases}$ باشند، در این صورت دستگاه مذکور به شکل معادله ماتریسی $AX = B$ نوشته شده و در صورتی که ماتریس A وارون پذیر باشد یا $|A| \neq 0$ با ضرب A^{-1} از چپ در معادله فوق می توان مجهولات را به صورت زیر به دست آورد:

$$AX = B \Rightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}B \Rightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B \Rightarrow IX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B$$


دستگاه معادلات را به صورت ماتریسی نوشته و داریم:

$$\begin{cases} ax + by = m \\ cx + dy = -2 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_X = \underbrace{\begin{bmatrix} m \\ -2 \end{bmatrix}}_B, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2m \\ 4m - 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2m \\ 4m - 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = -2m \\ y = 4m - 2 \end{cases}$$

چون $y = 10$ است، در نتیجه: $4m - 2 = 10 \Rightarrow m = 3$

بنابراین:

$$x = -2m = -2(3) = -6$$



- (معادله دایره): اگر $O'(\alpha, \beta)$ مرکز دایره با شعاع r باشد، معادله دایره به صورت زیر است:

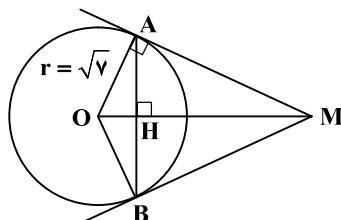
$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$$



مختصات مرکز و شعاع دایره به صورت زیر است:

$$x^2 + y^2 = 7 \Rightarrow \text{مرکز: } O(0,0), \text{ شعاع: } r = \sqrt{7}$$

فاصله مرکز دایره تا نقطه $M(3,1)$ را یافته و طبق شکل مقابل، داریم:



$$OM = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

$$OAM: OA^2 + AM^2 = OM^2 \Rightarrow (\sqrt{7})^2 + AM^2 = (\sqrt{10})^2$$

$$\Rightarrow 7 + AM^2 = 10 \Rightarrow AM^2 = 3 \Rightarrow AM = \sqrt{3}$$

از روابط طولی در مثلث قائم الزاویه OAM استفاده می کنیم.

$$OA \cdot AM = AH \cdot OM \Rightarrow \sqrt{7} \times \sqrt{3} = AH \times \sqrt{10} \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{210}}{10}$$

$$AB = 2AH = 2 \times \frac{\sqrt{210}}{10} = \frac{\sqrt{210}}{5}$$



- (دستور ساروس برای محاسبه دترمینان ماتریس‌های 3×3): در این روش که فقط برای ماتریس‌های 3×3 قابل استفاده است. دو ستون اول و دوم ماتریس را در کنارش می‌نویسیم و $|A|$ برابر است با مجموع حاصل ضرب‌های درایه‌های واقع بر قطر اصلی و دو قطر موازی آن (مطابق شکل)، منهای مجموع حاصل ضرب‌های درایه‌های واقع بر قطر فرعی A و دو قطر موازی با آن به صورت زیر:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{vmatrix}$$

$$|A| = (aei + bfg + cdh) - (ceg + afh + bdi)$$

$$|kA_{n \times n}| = k^n |A_{n \times n}|$$

- برای ماتریس مربعی و وارون‌پذیر A و عدد حقیقی k . داریم:

- اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ، در این صورت وارون ماتریس A یعنی A^{-1} از تساوی زیر به دست می‌آید:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$



طبق دستور ساروس، دترمینان A برابر است با:

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 0 & -1 & 4 & 0 \\ 3 & K & 2 & 3 & K \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow |A| = (0 + 0 - 3) - (-K + 8 + 0) = K - 11$$

و در نتیجه از فرض $|3A| = 108$ ، داریم:

$$3^3 |A| = 108 \Rightarrow 27 |A| = 108 \Rightarrow |A| = 4 \Rightarrow K - 11 = 4 \Rightarrow K = 15$$

حال وارون ماتریس B را می‌یابیم:

$$B = \begin{bmatrix} K-13 & K-14 \\ K-16 & K-14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15-13 & 15-14 \\ 15-16 & 15-14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|B| = 2 + 1 = 3 \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$\text{حاصل ضرب درایه‌ها} = \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{3}\right) \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = -\frac{2}{81}$$



- توان‌های ماتریس مربعی A به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$A^2 = A \cdot A, A^3 = A \cdot A^2 = A^2 \cdot A, A^4 = A \cdot A^3 = A^3 \cdot A^2 = A^3 \cdot A, A^{n+1} = A \cdot A^n = A^n \cdot A$$

- ماتریس‌های تعویض‌پذیر: اگر A و B ماتریس‌های مربعی هم‌مرتبه باشند به طوری که $A \times B = B \times A$ ، در این صورت ماتریس‌های A و B را ماتریس‌های تعویض‌پذیر می‌گویند.

- اگر A و B دو ماتریس مربعی هم‌مرتبه و تعویض‌پذیر باشند، آنگاه اتحادها در مورد آن‌ها برقرار است. مانند:

$$(AB)^n = A^n \cdot B^n$$

$$(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$$

$$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$$

$$(A \pm B)^3 = A^3 \pm 3A^2B + 3AB^2 \pm B^3$$



چون A و I تعویض پذیرند، به کمک اتحادها حاصل $(A - 2I)^2$ را به دست می آوریم:

$$(A - 2I)^2 = A^2 - 4A + 4I = 4A - 4A + 4I = 4I \Rightarrow (A - 2I)^2 = 4I$$

حال طرفین تساوی بالا را به توان ۳ می رسانیم.

$$(A - 2I)^6 = (4I)^3 = 64I^3 = 64I = \begin{bmatrix} 64 & 0 & 0 \\ 0 & 64 & 0 \\ 0 & 0 & 64 \end{bmatrix}$$

$$\text{مجموع درایه ها} = 3 \times 64 = 192$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۳ (فصل ۳، درس ۲)

۲۸- پاسخ: گزینه ۲

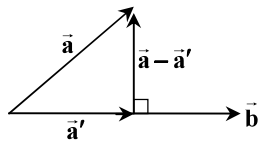


$$\vec{a}' = r\vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b}$$

- بردار تصویر قائم $\vec{a}$ بر امتداد بردار $\vec{b}$ به صورت زیر به دست می آید:



بردار $\vec{a}'$ تصویر بردار $\vec{a}$ بر بردار $\vec{b}$ است که از رابطه زیر به دست می آید:



$$\vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b}$$

$\vec{a} - \vec{a}' = \vec{a} - \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b}$ برداری است که مطابق شکل، همواره بر بردار $\vec{b}$ عمود است. پس زاویه بین $\vec{b}$ و $\vec{a} - \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b}$ همواره 90° است.



ضرب داخلی دو بردار $\vec{b}$ و $\vec{a} - \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b}$ را می یابیم.

$$\left(\vec{a} - \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b}\right) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} - \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} - \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} |\vec{b}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

چون ضرب داخلی دو بردار برابر صفر شده، پس دو بردار بر هم عمودند.

▲ مشخصات سؤال: دشوار * هندسه ۳ (فصل ۳، درس ۲)

۲۹- پاسخ: گزینه ۳



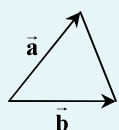
$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

- طول هر بردار مانند $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ در $\mathbb{R}^3$ از رابطه زیر به دست می آید.

- فرض کنیم $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ و $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ دو بردار باشند. ضرب خارجی $\vec{a} \times \vec{b}$ نمایش می دهیم به صورت زیر تعریف می شود:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

- مساحت مثلثی که توسط دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ساخته می شود برابر است با:



$$S = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$$



بردارهای $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ را تشکیل می‌دهیم.

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (m, 2, 2) - (2, 2, m) = (m-2, 0, 2-m)$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (2, m, 2) - (2, 2, m) = (0, m-2, 2-m)$$

بردار $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ را محاسبه می‌کنیم.

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ m-2 & 0 & 2-m \\ 0 & m-2 & 2-m \end{vmatrix} = \vec{i}((m-2)(2-m) - 0) - \vec{j}((m-2)(2-m) - 0) + \vec{k}((m-2)^2 - 0)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (m-2)^2 \cdot \vec{i} + (m-2)^2 \cdot \vec{j} + (m-2)^2 \cdot \vec{k} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = ((m-2)^2, (m-2)^2, (m-2)^2)$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{(m-2)^4 + (m-2)^4 + (m-2)^4} = \sqrt{3(m-2)^4} = (m-2)^2 \sqrt{3}$$

مساحت مثلث ABC برابر است با:

$$S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = 8\sqrt{3} \Rightarrow |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = 16\sqrt{3} \Rightarrow (m-2)^2 \sqrt{3} = 16\sqrt{3} \Rightarrow (m-2)^2 = 16 \Rightarrow m-2 = \pm 4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = -2 \\ m = 6 \end{cases}$$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * هندسه ۳ (فصل ۱، درس ۱)

۳۰- پاسخ: گزینه ۳



- ماتریس‌های تعویض پذیر: اگر A و B ماتریس‌های مربعی هم مرتبه باشند به طوری که $A \times B = B \times A$ ، در این صورت ماتریس‌های A و B را ماتریس‌های تعویض پذیر می‌گویند.

- اگر A و B دو ماتریس مربعی هم مرتبه و تعویض پذیر باشند، آنگاه اتحادها در مورد آن‌ها برقرار است. مانند:

$$(AB)^n = A^n \cdot B^n$$

$$(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$$

$$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$$

$$(A \pm B)^3 = A^3 \pm 3A^2B + 3AB^2 \pm B^3$$



با توجه به اینکه $A^2 = A$ و $B^2 = B$ است. از رابطه سوم، داریم:

$$(A+B)(A-B) = A-B \Rightarrow A^2 - AB + BA - B^2 = A-B$$

$$\Rightarrow A - AB + BA - B = A - B \Rightarrow -AB + BA = 0 \Rightarrow AB = BA$$

پس A و B تعویض پذیرند و در مورد آن‌ها اتحادها برقرارند، بنابراین خواسته سؤال برابر است با:

$$(A+B-AB)^2 = A^2 + B^2 + A^2B^2 + 2AB - 2A^2B - 2AB^2 = A + B + AB + 2AB - 2AB - 2AB$$

$$\Rightarrow (A+B-AB)^2 = A + B - AB$$

▲ مشخصات سؤال: ساده * ریاضیات گسسته (فصل ۳، درس ۲)

۳۱- پاسخ: گزینه ۳



در بدترین حالت، اگر ۳ مهره سفید، ۲ مهره سیاه و یک مهره سبز خارج شود، مطلوب سؤال به دست نمی‌آید.

$$3 + 2 + 1 = 6$$

حال یک مهره دیگر خارج می‌کنیم، اگر سفید باشد، حداقل ۴ مهره سفید، اگر سیاه باشد، حداقل ۳ مهره سیاه و اگر سبز باشد، حداقل ۲ مهره سبز خواهیم داشت، پس:

$$6 + 1 = 7 = \text{حداقل تعداد مهره‌ها}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (فصل ۱، درس ۱)

۳۲- پاسخ: گزینه ۲



طرفین معادله را در $3xy$ ضرب می کنیم:

$$\frac{2}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{3} \xrightarrow{\times 3xy} 6x + 6 = xy \Rightarrow xy - 6x = 6 \Rightarrow x(y - 6) = 6$$

با توجه به اینکه حاصل ضرب دو عدد صحیح x و $y - 6$ برابر ۶ شده است، حالات زیر را داریم:

$$\begin{aligned} ۱) \begin{cases} x=1 \\ y-6=6 \Rightarrow y=12 \end{cases} & ۲) \begin{cases} x=2 \\ y-6=3 \Rightarrow y=9 \end{cases} & ۳) \begin{cases} x=3 \\ y-6=2 \Rightarrow y=8 \end{cases} & ۴) \begin{cases} x=6 \\ y-6=1 \Rightarrow y=7 \end{cases} \\ ۵) \begin{cases} x=-1 \\ y-6=-6 \Rightarrow y=0 \end{cases} & ۶) \begin{cases} x=-2 \\ y-6=-3 \Rightarrow y=3 \end{cases} & ۷) \begin{cases} x=-3 \\ y-6=-2 \Rightarrow y=4 \end{cases} & ۸) \begin{cases} x=-6 \\ y-6=-1 \Rightarrow y=5 \end{cases} \end{aligned}$$

با توجه به اینکه مخرج کسر نباید صفر باشد، پس $y \neq 0$ و حالت (۵) غیرقابل قبول است و معادله دارای ۷ جواب صحیح است.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (فصل ۱، درس ۲)

۳۳- پاسخ: گزینه ۲



- قضیه تقسیم: اگر a عددی صحیح و b عددی طبیعی باشد در این صورت، اعدادی صحیح و منحصر به فرد مانند q و r یافت می شوند به قسمی که $a = bq + r$ و $0 \leq r < b$.



با توجه به قضیه تقسیم، داریم:

$$a = 147q + \underbrace{(3q^2 - 2)}_r ; 0 \leq r < 147$$

با توجه به شرط $r < 147$ ، داریم:

$$3q^2 - 2 < 147 \Rightarrow 3q^2 < 149 \Rightarrow q^2 < \frac{149}{3} = 49.66 \Rightarrow q \leq 7 \Rightarrow q_{\max} = 7$$

پس بزرگ ترین مقدار a برابر است با:

$$a_{\max} = 147(7) + 3(49) - 2 = 1174 = 2 \times 587$$

بنابراین گزینه ۲ پاسخ است.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (فصل ۱، درس ۳)

۳۴- پاسخ: گزینه ۳



- برای هر عدد طبیعی مانند m و هر دو عدد صحیح مانند a و b ، اگر $m \mid a - b$ ، می گوئیم « a هم نهشت با b است به سنج یا پیمانه m »؛ و می نویسیم $a \equiv b \pmod{m}$. تعریف رابطه هم نهشتی به پیمانه m ، به زبان ریاضی عبارت است از:

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}, a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow m \mid a - b \quad (m \in \mathbb{N})$$

- می توان به دو طرف یا یک طرف یک رابطه هم نهشتی هر مضربی از پیمانه را اضافه یا از آن کم کرد.

$$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow \begin{cases} a + mt \equiv b + mk \\ a - mt \equiv b - mk \end{cases}$$

- اگر بخواهیم دو طرف یک رابطه هم نهشتی را بر عددی تقسیم کنیم، باید پیمانه آن هم نهشتی را بر ب.م.م آن عدد و پیمانه تقسیم کنیم.

$$ac \equiv bc \pmod{m}, (c, m) = d \Rightarrow a \equiv \frac{m}{d} b$$

- شرط لازم و کافی برای آنکه معادله سیاله $ax + by = c$ دارای جواب باشد، آن است که: $(a, b) \mid c$



طبق نکته، معادله $45x + 75y = 4n - 3$ به شرطی جواب دارد که داشته باشیم:

$$(45, 75) | 4n - 3, (45, 75) = (3 \times 15, 5 \times 15) = 15 \Rightarrow 15 | 4n - 3 \Rightarrow 4n \equiv 3 \pmod{15}$$

با حل معادله هم‌نهشتی فوق، n را می‌یابیم:

$$4n \equiv 3 - 15 \Rightarrow 4n \equiv -12 \xrightarrow[(4, 15)=1]{+4} n \equiv -3 \Rightarrow n = 15k - 3$$

چون بزرگ‌ترین عدد سه‌رقمی n را می‌خواهیم، داریم:

$$n \leq 999 \Rightarrow 15k - 3 \leq 999 \Rightarrow 15k \leq 1002 \Rightarrow k \leq \frac{1002}{15} \Rightarrow k \leq 66 \div 8$$

پس بزرگ‌ترین عدد سه‌رقمی n به‌ازای $k = 66$ به‌دست می‌آید:

$$n = 15 \times 66 - 3 = 990 - 3 = 987 \Rightarrow \text{مجموع ارقام} = 9 + 8 + 7 = 24$$

۳۵- پاسخ: گزینه ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (فصل ۲، درس ۱)



- مجموعه همسایه‌های یک رأس: فرض کنیم $v \in V(G)$ ، به مجموعه رأس‌هایی از گراف G که به رأس v متصل هستند، «همسایگی باز رأس v » می‌گوییم و با $N_G(v)$ نمایش می‌دهیم. اضافه کردن خود رأس v به $N_G(v)$ «همسایگی بسته رأس v » را به‌دست می‌دهد که آن را با $N_G[v]$ نمایش می‌دهیم. می‌توان این دو مجموعه را به‌صورت زیر نمایش داد:

$$N_G(v) = \{u \in V(G); uv \in E(G)\}$$

$$N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$$

- گراف کامل: گرافی را که هر رأس آن با تمام رئوس دیگر مجاور باشد، گراف کامل می‌نامیم. گراف کامل n رأسی را با K_n نمایش می‌دهیم. می‌توان گفت K_n یک گراف n رأسی و $n-1$ - منتظم است.

- مسیر: اگر u و v دو رأس از گراف G باشند، یک مسیر از u به v (یک $u-v$ مسیر) در G دنباله‌ای از رئوس دوبه‌دو متمایز در G است که از u شروع و به v ختم می‌شود به‌طوری که هر دو رأس متوالی این دنباله در G مجاور هم باشند. طول یک مسیر برابر است با تعداد یال‌های موجود در آن مسیر (یکی کمتر از تعداد رئوس موجود در آن مسیر). قرارداد می‌کنیم که دنباله متشکل از تنها یک رأس u ، یک مسیر است با طول صفر از رأس u به خودش.

- در هر گراف کامل P رأسی تعداد یال‌ها برابر است با:

$$q = \binom{p}{2} = \frac{p(p-1)}{2}$$



همسایگی بسته هر رأس دارای p عضو است، یعنی هر رأس به تمام رئوس دیگر متصل است. پس گراف کامل است و داریم:

$$q(G) = \binom{p}{2} = \frac{p(p-1)}{2}, \delta(G) = \Delta(G) = p-1$$

$$q(G) + 3 = \Delta(G) + 3\delta(G) \Rightarrow \frac{p(p-1)}{2} + 3 = p-1 + 3(p-1) \Rightarrow \frac{p(p-1)}{2} + 3 = 4p-4$$

$$\xrightarrow{\times 2} p^2 - p + 6 = 8p - 8 \Rightarrow p^2 - 9p + 14 = 0 \Rightarrow (p-7)(p-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} p=2 \\ p=7 \end{cases} \text{ غرق}$$

پس گراف G گراف K_7 است و تعداد مسیرهای به طول ۱ همان تعداد یال‌های گراف است.

$$q = \binom{7}{2} = \frac{7 \times 6}{2} = 21$$



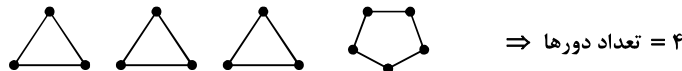
- گراف k -منتظم: گرافی را که درجه تمام رئوس آن با هم مساوی و برابر با عدد k باشند، گراف k -منتظم می‌نامیم.
- مکمل یک گراف: مکمل گرافی مانند G که آن را با G^c یا $\bar{G}$ نمایش می‌دهیم گرافی است که مجموعه رئوس آن همان مجموعه رئوس گراف G است و بین دو رأس از $\bar{G}$ یک یال است اگر و تنها اگر بین همان دو رأس در G یالی وجود نداشته باشد.
- دور: دنباله $v_1 v_2 \dots v_n v_1$ ($n \geq 3$) از رئوس دوبه‌دو متمایز که در آن هر رأس با رأس بعدی مجاور است را یک دور به طول n می‌نامیم.
- اگر G یک گراف با n رأس و u یک رأس آن باشد و $d_G(u)$ و $d_{\bar{G}}(u)$ به ترتیب درجه رأس u در گراف‌های G و $\bar{G}$ باشند، داریم:
 $d_G(u) + d_{\bar{G}}(u) = n - 1$



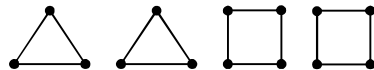
اگر a رأس دلخواهی از گراف G باشد، داریم:

$$\deg_G(a) + \deg_{\bar{G}}(a) = n - 1 \Rightarrow 11 + \deg_{\bar{G}}(a) = 14 - 1 \Rightarrow \deg_{\bar{G}}(a) = 2$$

گراف $\bar{G}$ گراف ۲-منتظم مرتبه ۱۴ است. با توجه به اینکه هر ۳ رأس یک دور به وجود می‌آورد. گراف ۲-منتظم مرتبه ۱۴ در صورتی بیشترین دور را خواهد داشت که به صورت زیر باشد:



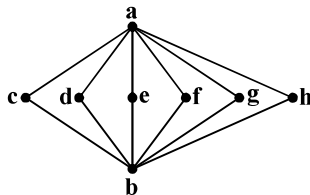
البته توجه کنید که گراف مورد نظر به صورت زیر نیز دارای ۴ دور است.



- در بین تمام مجموعه‌های احاطه‌گر گراف G ، مجموعه یا مجموعه‌های احاطه‌گری که کمترین تعداد عضو را دارند «مجموعه احاطه‌گر مینیمم» و تعداد اعضای چنین مجموعه‌ای را «عدد احاطه‌گری» گراف G می‌نامیم و آن را با $\gamma(G)$ نمایش می‌دهیم.



با توجه به اینکه دو رأس با درجه ۶ مجاور نیستند، شکل گراف به صورت زیر است:



عدد احاطه‌گری این گراف برابر $\gamma = 2$ است. γ -مجموعه‌های گراف به صورت زیر است:
(الف) شامل دو رأس a و b :

$$\gamma = \{a, b\} \text{ مجموعه}$$

(ب) شامل رأس a و یکی از ۶ رأس وسط:

$$\gamma = \{a, -\} \text{ مجموعه}$$

↓
حالت ۶

(ج) شامل رأس b و یکی از ۶ رأس وسط:

$$\gamma = \{b, -\} \text{ مجموعه}$$

↓
حالت ۶

تعداد کل γ -مجموعه‌ها برابر است با:

$$6 + 6 + 1 = 13$$



- قضیه جایگشت باتکرار: اگر n شیء مفروض باشند، به طوری که n_1 تای آنها از نوع اول و یکسان و n_2 تای آنها از نوع دوم و یکسان و ... و n_k تای آنها از نوع k ام و یکسان باشند در این صورت تعداد کل جایگشت های این اشیاء برابر است با:

$$\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \dots \times n_k!}$$



عدد هفت رقمی باید کوچک تر از ۴۰۰۰۰۰۰ باشد، پس اولین رقم سمت چپ باید ۲ یا ۳ باشد. از طرفی رقم یکان باید فرد باشد؛ بنابراین دو حالت زیر را در نظر می گیریم:

(الف) اولین رقم سمت چپ ۲ باشد: سایر ارقام را متمایز فرض کرده و داریم:

$$\frac{2 \quad 6, 2, 3, 5, 5, 5}{1 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 4} = 4 \times 5! \xrightarrow{\text{با در نظر گرفتن ارقام تکراری}} \frac{4 \times 5!}{3!} = \frac{4 \times 5 \times 4 \times 3!}{3!} = 80$$

(ب) اولین رقم سمت چپ ۳ باشد: دوباره سایر ارقام را متمایز فرض کرده و داریم:

$$\frac{3 \quad 6, 2, 2, 5, 5, 5}{1 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 3} = 3 \times 5! \xrightarrow{\text{با در نظر گرفتن ارقام تکراری}} \frac{3 \times 5!}{2! \times 3!} = \frac{3 \times 5 \times 4 \times 3!}{2 \times 1 \times 3!} = 30$$

$$\text{تعداد کل حالات} = 80 + 30 = 110$$



- برای دو مجموعه A و B از مجموعه مرجع S داریم:

$$1) |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$2) |A - B| = |A| - |A \cap B|$$

$$3) |\bar{A} \cap \bar{B}| = |\overline{A \cup B}| = |S| - |A \cup B|$$

- در اعداد طبیعی $n, 1, 2, \dots$ ، تعداد اعداد بخش پذیر بر k برابر $\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$ است.



تجزیه عدد ۱۲ به صورت $12 = 3 \times 2^2$ است؛ بنابراین باید اعدادی از مجموعه $S = \{1, 2, \dots, 200\}$ را بیابیم که نه بر ۲ و نه بر ۳ بخش پذیر باشند.

$$|S| = 200 - 80 + 1 = 121$$

$$A \Rightarrow |A| = \left\lfloor \frac{200}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{79}{2} \right\rfloor = 100 - 39 = 61$$

$$B \Rightarrow |B| = \left\lfloor \frac{200}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{79}{3} \right\rfloor = 66 - 26 = 40$$

$$A \cap B \Rightarrow |A \cap B| = \left\lfloor \frac{200}{6} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{79}{6} \right\rfloor = 33 - 13 = 20$$

خواسته سؤال $|\bar{A} \cap \bar{B}|$ است که داریم:

$$|\bar{A} \cap \bar{B}| = |\overline{A \cup B}| = |S| - |A \cup B| = |S| - |A| - |B| + |A \cap B| = 121 - 61 - 40 + 20 = 40$$



مجموعه اعدادی را که باقی مانده تقسیم آن‌ها بر عدد m مساوی عدد r باشد، با نماد $[r]_m$ نمایش می‌دهیم و به آن کلاس هم‌نهشتی r به پیمانه m می‌گوییم.

$$[r]_m = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv r \pmod{m} \right\} = \{ x \in \mathbb{Z} \mid x = mk + r \}$$



ابتدا عبارت را تجزیه می‌کنیم:

$$x^3 + 4x^2 - x - 4 = x^2(x+4) - (x+4) = (x+4)(x^2-1)$$

حال از آنجایی که عبارت فوق مضرب ۷ است، داریم:

$$(x+4)(x^2-1) \equiv 0 \pmod{7}$$

می‌دانیم باقی‌مانده تقسیم هر عدد صحیح بر ۷ یکی از اعداد مجموعه $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ است، پس حالات زیر را داریم:

$$x=0 \Rightarrow (x+4)(x^2-1) \equiv 4(-1) \equiv -4 \not\equiv 0 \pmod{7}$$

$$x=1 \Rightarrow (x+4)(x^2-1) \equiv 5 \times 0 \equiv 0 \pmod{7} \Rightarrow x \equiv 1 \Rightarrow x \in [1]_7$$

$$x=2 \Rightarrow (x+4)(x^2-1) \equiv 6 \times 3 \equiv 18 - 2 \times 7 \equiv 4 \not\equiv 0 \pmod{7}$$

$$x=3 \Rightarrow (x+4)(x^2-1) \equiv 7 \times 8 \equiv 0 \pmod{7} \Rightarrow x \equiv 3 \Rightarrow x \in [3]_7$$

$$x=4 \Rightarrow (x+4)(x^2-1) \equiv 8 \times 15 \equiv (8-7)(15-2 \times 7) \equiv 1 \not\equiv 0 \pmod{7}$$

$$x=5 \Rightarrow (x+4)(x^2-1) \equiv 9 \times 24 \equiv (9-7)(24-3 \times 7) \equiv 2 \times 3 \equiv 6 \not\equiv 0 \pmod{7}$$

$$x=6 \Rightarrow (x+4)(x^2-1) \equiv 10 \times 35 \equiv 0 \pmod{7} \Rightarrow x \equiv 6 \Rightarrow x \in [6]_7$$

بنابراین x می‌تواند به ۳ کلاس هم‌نهشتی به پیمانه ۷ تعلق داشته باشد.

فیزیک



تندی در لحظه $t = 3s$ برابر است با:

$$v_{t=3s} = \frac{12 - 4/5}{3} = 2/5 \frac{m}{s}$$

از لحظه $t = 0$ تا $t = 3s$ شیب خط مماس در حال افزایش است، پس فقط یک بار تندی متحرک به $2/5 \frac{m}{s}$ می‌رسد. پس از لحظه $t = 3s$ ،

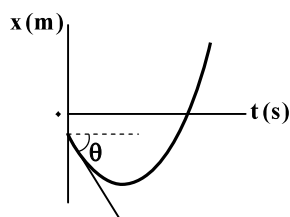
تندی همچنان افزایش یافته ولی پس از مدت کوتاهی تندی کاهش یافته تا در لحظه $t = 6s$ به صفر می‌رسد، پس تا لحظه $t = 6s$ یک بار

دیگر هم تندی متحرک به $2/5 \frac{m}{s}$ می‌رسد. با توجه به تقارن نمودار، در بازه زمانی $t = 6s$ تا $t = 9s$ تندی از صفر تا بیشتر از $2/5 \frac{m}{s}$

افزایش یافته، پس در مجموع ۳ بار تندی متحرک به $2/5 \frac{m}{s}$ می‌رسد.

▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۳ (فصل ۱)

۴۲- پاسخ: گزینه ۳



شیب نمودار مکان- زمان در لحظه $t = 0$ برای گزینه ۳ منفی است؛ در نتیجه سرعت اولیه متحرک در خلاف جهت محور x است و از طرفی گودی منحنی رو به بالا و در نتیجه شتاب متحرک مثبت و در جهت محور x است، پس گزینه ۳ درست است.

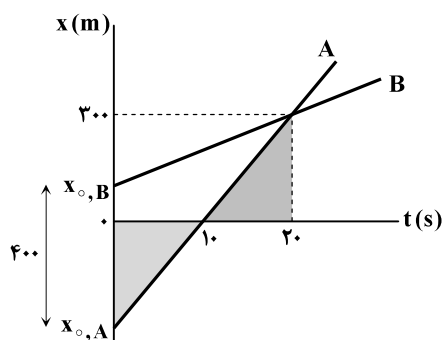
$$v_0 = \tan \theta = \text{شیب خط} < 0$$



گزینه‌های ۱ و ۲: نمودار مکان- زمان متحرک‌های گزینه‌های ۱ و ۲ به صورت یک خط راست است؛ بنابراین حرکت آن‌ها از نوع سرعت ثابت بوده و در نتیجه شتاب حرکتشان صفر است.
گزینه ۴: نمودار گزینه ۴ مربوط به متحرکی است که سرعت اولیه آن در جهت محور x و شتاب حرکت آن در خلاف جهت محور x است.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)

۴۳- پاسخ: گزینه ۲



در ابتدا در نمودار داده شده، نقطه‌ای که دو متحرک از کنار یکدیگر عبور می‌کنند را مشخص می‌کنیم؛ سپس با استفاده از تشابه مثلث‌های رنگ شده در نمودار، داریم:

$$\frac{|x_{0,A}|}{300} = \frac{10-0}{20-10} \Rightarrow \frac{|x_{0,A}|}{300} = \frac{10}{10} = 1$$

$$\Rightarrow |x_{0,A}| = 300 \Rightarrow x_{0,A} = -300 \text{ m}$$

$$x_{0,B} - x_{0,A} = 400 \Rightarrow x_{0,B} - (-300) = 400 \Rightarrow x_{0,B} = 100 \text{ m}$$

شیب نمودار مکان- زمان برای متحرک B را که برابر تندی آن است، به دست می‌آوریم:

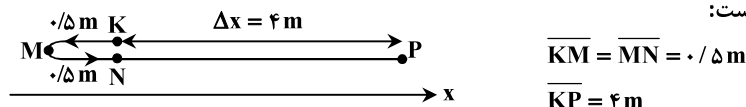
$$v_B = \frac{300 - x_{0,B}}{20 - 0} \Rightarrow v_B = \frac{300 - 100}{20} = \frac{200}{20} = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۳ (فصل ۱)

۴۴- پاسخ: گزینه ۳



با توجه به اینکه اندازه جابه‌جایی و مسافت طی شده در ۲ ثانیه سوم حرکت برابر نیست، می‌توان نتیجه گرفت که متحرک در این مدت تغییر جهت داده است و شکل مسیر حرکت به صورت زیر است:



$$\Delta x = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t \Rightarrow \begin{cases} \text{رابطه (۱)} : MN : 0.5 = \frac{1}{2} a \times t_{MN}^2 \\ \text{رابطه (۲)} : MP : 0.5 + 4 = \frac{1}{2} a \times (2 - t_{MN})^2 \end{cases} \xrightarrow{\text{روابط (۱) و (۲)}} t_{MN} = 0.5 \text{ s}, a = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$v = at + v_0 \Rightarrow \begin{cases} MP : v_P = at + v_0 \Rightarrow v_P = 4 \times (2 - 0.5) + 0 = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ t = 0 \text{ لحظه} \Rightarrow 6 = 4 \times (2 \times 2) + v_0 \Rightarrow v_0 = -18 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow |v_0| = 18 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{cases}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)

۴۵- پاسخ: گزینه ۳



ابتدا شتاب هواپیما را محاسبه می‌کنیم. فرض می‌کنیم هواپیما در جهت مثبت محور x در حرکت است.

$$v_0 = \frac{288}{3/6} = 80 \frac{m}{s}$$

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \Rightarrow 0 - 80^2 = 2a \times 1600 \Rightarrow a = -2 \frac{m}{s^2}$$

$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t \Rightarrow 76/5 = \frac{1}{2}(-2)(t)^2 + 80t \Rightarrow v_1 = 77/5 \frac{m}{s}$$

$v_1 = 77/5 \frac{m}{s}$ تندی هواپیما در لحظه t_1 است؛ بنابراین داریم:

$$v = at + v_0 \Rightarrow 77/5 = -2 \times t_1 + 80 \Rightarrow t_1 = 1/25 s$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)

۴۶- پاسخ: گزینه ۴



$$\begin{cases} y_1 = \frac{1}{2}gt^2 \\ y_2 = \frac{1}{2}g(t-1)^2 \end{cases} \Rightarrow y_1 - y_2 = 11m \Rightarrow \frac{1}{2}gt^2 - \frac{1}{2}g(t-1)^2 = 11 \Rightarrow \frac{1}{2} \times 10 \times (t^2 - t^2 + 2t - 1) = 11 \Rightarrow 10t - 5 = 11$$

$$\Rightarrow 10t = 16 \Rightarrow t = 1/6 s$$

ارتفاع سقوط گلوله‌ها برابر است با:

$$h = \frac{1}{2} \times 10 \times 1/6^2 = 12/8 m$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

۴۷- پاسخ: گزینه ۳



$$v = at + v_0 \Rightarrow -20\vec{i} = a \times 4 + 0 \Rightarrow \vec{a} = -5\vec{i} \left(\frac{m}{s^2}\right)$$

$$\vec{F}_{net} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{F}_{net} = 2 \times (-5\vec{i}) = -10\vec{i} (N)$$

$$\vec{F}_{net} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 \Rightarrow -10\vec{i} = 20\vec{j} + 20\vec{i} - 30\vec{j} + \vec{F}_3 \Rightarrow \vec{F}_3 = -20\vec{i} + 10\vec{j} \Rightarrow |\vec{F}_3| = \sqrt{(-20)^2 + (10)^2} = 10\sqrt{5} N$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

۴۸- پاسخ: گزینه ۱



جهت رو به بالا را مثبت می‌گیریم. بر جرم دو نیروی F_e رو به بالا و mg رو به پایین وارد می‌شود. بنابراین داریم:

$$F_e = kx \Rightarrow F_e = \left(5 \frac{N}{cm}\right) \times (58cm - 50cm) = 40 N$$

$$F_{net} = ma \Rightarrow F_e - mg = ma \Rightarrow 40 - 5 \times 10 = 5a \Rightarrow a = -2 \frac{m}{s^2}$$

چون آسانسور رو به بالا می‌رود ($v > 0$) ولی شتاب منفی است، پس حرکت رو به بالای آسانسور به صورت کندشونده است. به این ترتیب در

هر ثانیه تندی آسانسور $2 \frac{m}{s}$ کاهش می‌یابد.

▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۳ (فصل ۲)

۴۹- پاسخ: گزینه ۱



در حالت اول:

$$F_1 = F_2 = F$$

$$F_{\text{net}} = ma \Rightarrow \begin{cases} \text{در راستای عمودی: } F + F_N - mg = 0 \Rightarrow F_N = mg - F \Rightarrow F_N = 20 \times 10 - F \Rightarrow F_N = 200 - F \\ \text{در راستای افقی: } F - \mu_s F_N = 0 \Rightarrow F - \mu_s (200 - F) = 0 \Rightarrow F - 200\mu_s + \mu_s F = 0 \text{ رابطه (۱)} \end{cases}$$

در حالت دوم:

$$\text{رابطه (۲)} \quad F_{\text{net}} = ma \Rightarrow F + 10 - \mu_k (200 - (F - 20)) = 20 \times 0 / 4 \Rightarrow F - 220\mu_k + \mu_k F + 10 = 8$$

با توجه به روابط (۱) و (۲) و با در نظر گرفتن $\mu_k = \mu_s$ داریم:

$$\begin{cases} F + \mu_s F = 200\mu_s \\ F + \mu_s F = -2 + 220\mu_k \end{cases} \xrightarrow{\mu_s = \mu_k} 200\mu_k = -2 + 220\mu_k \Rightarrow 20\mu_k = 2 \Rightarrow \mu_k = \mu_s = 0.1$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

۵۰- پاسخ: گزینه ۴

ابتدا تندی توپ در لحظه برخورد به زمین (v_1) و در هنگام بازگشت (v_2) را محاسبه می‌کنیم:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow \begin{cases} 125 = \frac{1}{2} \times 0.4 \times v_1^2 \Rightarrow v_1 = 25 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ 80 = \frac{1}{2} \times 0.4 \times v_2^2 \Rightarrow v_2 = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{cases}$$

جهت مثبت را به سمت بالا در نظر می‌گیریم:

$$\vec{p} = m\vec{v} \Rightarrow \begin{cases} \vec{p}_1 = 0.4 \times (-25\vec{j}) = -10\vec{j} \text{ (kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}) \\ \vec{p}_2 = 0.4 \times (+20\vec{j}) = 8\vec{j} \text{ (kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}) \end{cases} \Rightarrow \Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = 8\vec{j} - (-10\vec{j}) = 18\vec{j} \text{ (kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}})$$

$$\vec{F}_{\text{av}} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = \frac{18\vec{j}}{0.2} \Rightarrow \vec{F} = 90\vec{j} \text{ (N)} \Rightarrow F = 90 \text{ N}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

۵۱- پاسخ: گزینه ۳



وقتی طول فنر در هر دو حالت «الف» و «ب» برابر است، می‌توان نتیجه گرفت که نیروی فنر در هر دو شکل مساوی است؛ از طرفی نیروی فنر در شکل «الف» با وزن گلوله برابر است و در شکل «ب» نقش نیروی مرکزگرا را ایفا می‌کند:

$$\begin{cases} F_e = mg \\ F_e = \frac{mv^2}{r} \end{cases} \Rightarrow mg = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{rg} \Rightarrow v = \sqrt{0.4 \times 10} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$T = \frac{2\pi r}{v} \Rightarrow T = \frac{2\pi \times 0.4}{2} = 0.4\pi \text{ s}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

۵۲- پاسخ: گزینه ۲



$$F = G \frac{M_e m}{r^2} \Rightarrow \frac{F_2}{F_1} = \frac{\frac{GM_e m}{r^2}}{\frac{GM_e m}{R_e^2}} \Rightarrow \frac{F_1 - 0.26F_1}{F_1} = \left(\frac{R_e}{r}\right)^2 \Rightarrow 0.74 = \frac{R_e}{r} \Rightarrow r = \frac{R_e}{0.74}$$

$$v = \sqrt{\frac{GM_e}{r}} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM_e}{\frac{R_e}{0.74}}} = \sqrt{\frac{3/92 \times 10^{14}}{\frac{6400 \times 10^3}{0.74}}} = 7000 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 7 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۳)

۵۳- پاسخ: گزینه ۲



$$\frac{T}{4} = 0.3 \Rightarrow T = 1.2 \text{ s} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1.2} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

در لحظه $t = 0.3 \text{ s}$ نوسانگر از وضع تعادل می‌گذرد، بنابراین تندی آن بیشینه است.

$$v_{\max} = A\omega \Rightarrow 2.0 = A \times \frac{2\pi}{1.2} \Rightarrow A = \frac{1.2}{\pi} \text{ m}$$

مکان نوسانگر در لحظه $t = 0.8 \text{ s}$ برابر است با:

$$x = A \cos \omega t = \frac{1.2}{\pi} \cos \frac{2\pi}{1.2} \times 0.8 = \frac{1.2}{\pi} \cos \frac{4\pi}{3} = -\frac{6}{\pi} \text{ m}$$

$$|a| = |\omega^2 x| \Rightarrow |a| = \left(\frac{2\pi}{1.2}\right)^2 \times \frac{6}{\pi} = \frac{50\pi}{3} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۳)

۵۴- پاسخ: گزینه ۲



انرژی مکانیکی نوسانگر برابر است با:

$$E = \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} \times 200 \times (0.04)^2 = 0.16 \text{ J}$$

$$v = \frac{1}{4} A \omega \Rightarrow v^2 = \frac{1}{16} A^2 \omega^2 \xrightarrow{K = \frac{1}{2} m v^2} K = \frac{1}{16} \times \left(\frac{1}{2} m A^2 \omega^2\right) \xrightarrow{E = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2} K = \frac{1}{16} \times 0.16 = 0.01 \text{ J}$$

طبق پایستگی انرژی مکانیکی داریم:

$$E = K + U \Rightarrow 0.16 = 0.01 + U \Rightarrow U = 0.15 \text{ J}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۳)

۵۵- پاسخ: گزینه ۳



$$\frac{2\lambda}{2} = 9 \text{ m} \Rightarrow \lambda = 9 \text{ m}$$

$$\lambda = v \cdot T \Rightarrow 9 = 3 \times 10^8 \times T \Rightarrow T = 3 \times 10^{-8} \text{ s}$$

با قاعده دست راست، موج در جهت $+x$ منتشر می‌شود و زمان لازم برای آنکه میدان الکتریکی نقطه M به مقدار بیشینه در جهت $-y$

برسد، برابر با $\frac{3}{4} T$ است:

$$t = \frac{3}{4} T = \frac{3}{4} \times 3 \times 10^{-8} = 15 \times 10^{-9} \text{ s} = 15 \text{ ns}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۳)

۵۶- پاسخ: گزینه ۳



اگر قطر مقطع $\frac{1}{4}$ برابر شود، سطح مقطع $\frac{1}{16}$ برابر می‌شود.

$$A = \pi r^2 \Rightarrow \frac{A_2}{A_1} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$$

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{F}{\rho A}} \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{A_1}{A_2}} \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{16} = 4 \Rightarrow \frac{v_2}{160} = 4 \Rightarrow v_2 = 640 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۳ (فصل ۳)

۵۷- پاسخ: گزینه ۱



چون هم ناظر (۱) و هم چشمه صوت به سمت هم می آیند، بسامد ناظر (۱) از ناظر (۲) که ساکن است، بیشتر است ولی طول موج که فقط به خاطر حرکت چشمه است، برای هر دو ناظر برابر است و همچنین می دانیم که طول موج در جلوی چشمه از طول موج حالتی که چشمه ساکن است، کوچک تر خواهد بود.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۳)

۵۸- پاسخ: گزینه ۴



می دانیم شدت صوت با عکس مربع فاصله تا ناظر متناسب است. همچنین توان صوتی با مربع دامنه و مربع بسامد موج متناسب است:

$$\frac{I_2}{I_1} = \left(\frac{A_2 f_2 r_1}{A_1 f_1 r_2} \right)^2$$

$$\beta_2 - \beta_1 = 10 \log \frac{I_2}{I_1} = 10 \log \left(\frac{A_2 f_2 r_1}{A_1 f_1 r_2} \right)^2 \Rightarrow \beta_2 - \beta_1 = 10 \log \left(\frac{4 A_1 \times 4 f_1 \times r_1}{A_1 f_1 \frac{r_1}{4}} \right)^2$$

$$\Rightarrow \beta_2 - \beta_1 = 10 \log_2 2^{12} = 120 \log 2 = 120 \times 0.3 = 36 \text{ dB}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۴)

۵۹- پاسخ: گزینه ۳



ابتدا تندی صوت را حساب می کنیم:

$$\lambda = \frac{v}{f} \quad \frac{\lambda = 1/5 \times 10^{-2} \text{ m}}{f = 10^5 \text{ Hz}} \rightarrow 1/5 \times 10^{-2} = \frac{v}{10^5} \Rightarrow v = 1500 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

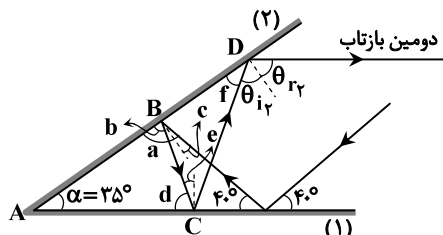
زمان رسیدن موج از وال به مانع برابر است با:

$$\ell = vt \quad \frac{\ell = 300 \text{ m}}{v = 1500 \frac{\text{m}}{\text{s}}} \rightarrow 300 = 1500 t \Rightarrow t = 0.2 \text{ s}$$

پس زمان رفت و برگشت موج ۰/۴ s می شود.

▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۳ (فصل ۴)

۶۰- پاسخ: گزینه ۲



$$a = 180 - (40 + 35) = 105^\circ$$

$$c = a - 90 = 105 - 90 = 15^\circ$$

$$b = 90 - c = 90 - 15 = 75^\circ$$

در مثلث ABC داریم:

$$\alpha + b + d = 180 \Rightarrow 35 + 75 + d = 180 \Rightarrow d = 70^\circ$$

$$e = 90 - d = 90 - 70 = 20^\circ$$

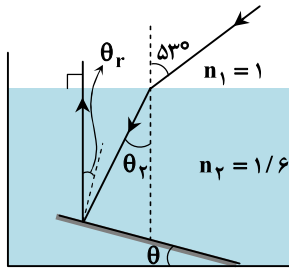
در مثلث ACD داریم:

$$\alpha + d + e + f = 180 \Rightarrow 35 + 70 + 20 + f = 180 \Rightarrow f = 35^\circ$$

$$\theta_{i_r} = 90 - f = 90 - 35 = 55^\circ \Rightarrow \theta_{i_r} = \theta_{i_r} = 55^\circ$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۴)

۶۱- پاسخ: گزینه ۱



زاویه شکست (θ_r) را به کمک قانون اسنل به دست می آوریم:

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_r} \Rightarrow \frac{1/6}{1} = \frac{\sin 30^\circ}{\sin \theta_r} \Rightarrow \sin \theta_r = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta_r = 30^\circ$$

پرتو بازتاب از سطح آینه، بدون انحراف از محیط (۲) وارد هوا شده است، در نتیجه این پرتو به مرز جدایی دو محیط عمود است.

$$\theta_r = 2\theta_r = 30^\circ \Rightarrow \theta_r = 15^\circ \Rightarrow \theta = \theta_r = 15^\circ$$

▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۳ (فصل ۴)

۶۲- پاسخ: گزینه ۳

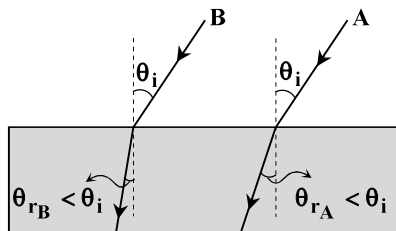


با توجه به اینکه در اثر شکست موج، بسامد تغییر نمی کند، $f_I = f_R$ است. فاصله جبهه های متوالی موج (λ) در محیط I، بیشتر از محیط R است.

$$\lambda = \frac{v}{f} \text{ در می یابیم تندی انتشار موج در محیط I بیشتر از محیط R است } (v_I > v_R).$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۴)

۶۳- پاسخ: گزینه ۳



هنگامی که یک پرتو از هوا (خلأ) وارد محیط شفاف دیگری می شود، به خط عمود بر مرز دو محیط نزدیک تر می شود؛ به عبارتی دیگر، زاویه شکست پرتو کوچک تر از زاویه تابش آن است؛ بنابراین $\theta_{rA}, \theta_{rB} < \theta_i$ هستند.

با توجه به نمودار داده شده، ضریب شکست شیشه برای پرتو A (که طول موج بلندتری دارد)، کوچک تر از ضریب شکست شیشه برای پرتو B است؛ بنابراین پرتو A کمتر از پرتو B منحرف می شود و در نتیجه زاویه شکست آن بزرگ تر است:

$$\theta_{rB} < \theta_{rA} < \theta_i$$

▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۳ (فصل ۴)

۶۴- پاسخ: گزینه ۲



در نقاط P و R، تداخل سازنده رخ می دهد زیرا در یکی، قله های دو موج هم زمان به یکدیگر می رسند و در دیگری، دره های دو موج به طور هم زمان به هم می رسند. در نقطه Q تداخل ویرانگر رخ می دهد، زیرا قله یکی از موج ها به دره موج دیگر رسیده است و اثر یکدیگر را تضعیف می کنند.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۴)

۶۵- پاسخ: گزینه ۳



در حالت اول داریم:

$$f_{\text{صوت در هوا}} = \frac{v}{\lambda} = \frac{330}{\frac{1}{4}} = 4 \times 330 = 1320 \text{ Hz}$$

بسامد صوت منتشر شده در هوا با بسامد ارتعاش تار برابر است:

$$f = f_{\text{صوت در هوا}} = 1320 \text{ Hz}$$

در این حالت، ۴ گره در طول تار تشکیل شده است؛ بنابراین هماهنگ سوم ($n = 3$) تار رخ داده است:

$$f = n f_1 \Rightarrow 1320 = 3 f_1 \Rightarrow f_1 = \frac{1320}{3} = 440 \text{ Hz}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۵)

۶۶- پاسخ: گزینه ۱



شدت تابش از رابطه $I = \frac{E}{At}$ محاسبه می‌شود. همچنین $E = \frac{nhc}{\lambda}$ است؛ پس می‌توان نوشت:

$$I = \frac{nhc}{At\lambda} \xrightarrow{I = 3.0 \times \frac{W}{m^2}, A = 1m^2, t = 600s} 3.0 = \frac{n \times 6.6 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{1 \times 600 \times 550 \times 10^{-9}} \Rightarrow \frac{n \times 3 \times 10^{-27}}{5 \times 10^{-6}} = 3.0 \Rightarrow n = 5 \times 10^{23}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۵)

۶۷- پاسخ: گزینه ۱



$$\begin{cases} K_{max1} = h(f_1 - f_0) \Rightarrow K_{max} = h(f_1 - 0.5f_2) \\ K_{max2} = h(f_2 - f_0) \Rightarrow 1/5 K_{max} = h(f_2 - 0.5f_2) \end{cases} \xrightarrow{\text{تقسیم}} 1/5 = \frac{f_2 - 0.5f_2}{f_1 - 0.5f_2} \Rightarrow 1/5 f_1 - 0.1 f_2 = 0.5 f_2 \Rightarrow 1/5 f_1 = 1/2 f_2 \Rightarrow \frac{f_2}{f_1} = \frac{1/5}{1/2} = \frac{2}{5} = 1/2.5$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۵)

۶۸- پاسخ: گزینه ۳



$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \xrightarrow{f = \frac{c}{\lambda}} f = Rc \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right)$$

- R و c هر دو مقادیر ثابتی هستند؛ بنابراین مقدار ثابت Rc را می‌توان حساب کرد:

$$Rc = \left(\frac{1}{1.0} - \frac{1}{\infty} \right) \times (3 \times 10^8) \frac{m}{s} \xrightarrow{1nm = 10^{-9}m} Rc = \frac{1}{1.2} \times \frac{1}{10^{-9}} \times 3 \times 10^8 \frac{m}{s} \Rightarrow Rc = \frac{3 \times 10^{17}}{10^{-7}} = 3 \times 10^{15} \text{ Hz}$$



$$f = Rc \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \Rightarrow 2/5 \times 10^{15} = 3 \times 10^{15} \times \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \Rightarrow \frac{1}{12} = \frac{1}{9} - \frac{1}{n_2^2} \Rightarrow \frac{1}{n_2^2} = \frac{1}{9} - \frac{1}{12} \Rightarrow \frac{1}{n_2^2} = \frac{1}{36} \Rightarrow n = 6$$

$n = 6$ بیانگر سومین خط رشته پاشن است.

▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۳ (فصل ۵)

۶۹- پاسخ: گزینه ۴

شعاع مدارهای الکترون را به‌ازای $n = 1, 2, 3$ به‌دست می‌آوریم:

$$r_n = a_0 n^2 \Rightarrow r_1 = a_0, r_2 = 4a_0, r_3 = 9a_0$$

$$\begin{cases} r_3 - r_2 = 9a_0 - 4a_0 = 5a_0 \\ r_2 - r_1 = 4a_0 - a_0 = 3a_0 \end{cases}$$

در نتیجه با افزایش شعاع مدار، اختلاف شعاع مدارهای متوالی افزایش می‌یابد.

در مدل اتمی بور، رابطه ترازهای انرژی الکترون در اتم هیدروژن به‌صورت $E_n = \frac{-13.6 \text{ eV}}{n^2}$ است. تراز انرژی الکترون را به‌ازای $n = 1, 2, 3$ می‌نویسیم:

$$E_1 = \frac{-13.6}{1} = -13.6 \text{ eV}, E_2 = \frac{-13.6}{4} = -3.4 \text{ eV}, E_3 = \frac{-13.6}{9} \approx -1.51 \text{ eV}$$

$$\begin{cases} E_3 - E_2 = -1.51 - (-3.4) = 1.89 \text{ eV} \\ E_2 - E_1 = -3.4 - (-13.6) = 10.2 \text{ eV} \end{cases}$$

در نتیجه با افزایش شعاع مدار، اختلاف انرژی الکترون بین ترازهای متوالی کاهش می‌یابد.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۵)

۷۰- پاسخ: گزینه ۲



چهارمین حالت برانگیخته مربوط به $n = 5$ است. هنگامی که الکترون بلندترین جهش (یعنی گذار از $n = 5$ به $n' = 1$) را انجام می‌دهد، پرنرژی‌ترین فوتون گسیل می‌شود:

$$E_{\text{فوتون}} = E_U - E_L \xrightarrow{E_n = \frac{-E_R}{n^2}} E_{\text{فوتون}} = E_R \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{5^2} \right) = E_R \left(1 - \frac{1}{25} \right) = \frac{24}{25} E_R$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۶)

۷۱- پاسخ: گزینه ۲



گزینه ۲ درست است.



گزینه ۱: در هسته‌های پایدار سبک ممکن است نسبت $\frac{N}{Z}$ حدود یک باشد، اما در هسته‌های پایدار سنگین نسبت $\frac{N}{Z}$ حدود $1/5$ است.
گزینه ۳: عناصری که روی خط موازی محور Z هستند، عدد نوترونی برابر اما عدد اتمی مختلف دارند، پس عدد جرمی آن‌ها متفاوت است.
گزینه ۴: عناصر موجود روی خط عمود بر محور $N = Z$ ، عدد جرمی یکسانی دارند، اما عدد نوترونی مختلفی دارند.

▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۳ (فصل ۶)

۷۲- پاسخ: گزینه ۱



از واپاشی آلفا (α) در آشکارسازهای دود و اعلام خطر در منازل و ساختمان‌ها استفاده می‌شود.

▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۳ (فصل ۶)

۷۳- پاسخ: گزینه ۴



در واکنش نشان داده‌شده، یکی از پروتون‌های هسته مادر به یک نوترون و یک پوزیترون تبدیل می‌شود. بنابراین از تعداد پروتون‌های درون هسته، یک واحد کم شده و به تعداد نوترون‌های آن یک واحد اضافه می‌شود و ذره پوزیترون که جایی درون هسته ندارد، به بیرون گسیل می‌شود.

▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۳ (فصل ۶)

۷۴- پاسخ: گزینه ۲



در لحظه $t_1 = 5h$ ، $m_1 = m_0 - 25$ گرم از ماده باقی می‌ماند:

$$m_1 = \frac{m_0}{2^{\frac{t_1}{T}}} \Rightarrow m_0 - 25 = \frac{m_0}{2^{\frac{5}{T}}} \quad (1) \text{ رابطه}$$

در لحظه $t_2 = 10h$ ، $m_2 = m_0 - 45$ گرم از ماده باقی می‌ماند:

$$m_2 = \frac{m_0}{2^{\frac{t_2}{T}}} \Rightarrow m_0 - 45 = \frac{m_0}{2^{\frac{10}{T}}} \quad (2) \text{ رابطه}$$

اگر $2^{\frac{5}{T}}$ را a در نظر بگیریم، $2^{\frac{10}{T}}$ برابر با a^2 می‌شود. دو معادله به‌دست آمده (روابط (۱) و (۲)) را بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{cases} m_0 - 25 = \frac{m_0}{a} \Rightarrow a = \frac{m_0}{m_0 - 25} \\ m_0 - 45 = \frac{m_0}{a^2} \Rightarrow a^2 = \frac{m_0}{m_0 - 45} \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{m_0}{m_0 - 25} \right)^2 = \frac{m_0}{m_0 - 45} \Rightarrow \frac{m_0^2}{m_0^2 - 50m_0 + 625} = \frac{m_0}{m_0 - 45}$$

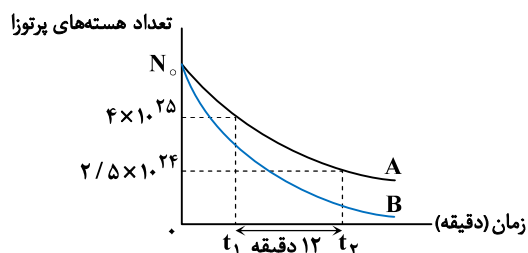
$$\Rightarrow m_0^2 - 50m_0 + 625 = m_0^2 - 45m_0 \Rightarrow 5m_0 = 625 \Rightarrow m_0 = 125g$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۶)

۷۵- پاسخ: گزینه ۱



با نوشتن رابطه $N = \frac{N_0}{\frac{t}{T_1} + 1}$ برای زمان‌های t_1 و t_2 می‌توانیم نیمه‌عمر ماده A را به دست آوریم:



$$N = \frac{N_0}{\frac{t}{T_1} + 1} \Rightarrow \begin{cases} \text{رابطه (۱)} & 4 \times 10^{25} = \frac{N_0}{\frac{t_1}{T_1} + 1} \\ \text{رابطه (۲)} & 2/5 \times 10^{24} = \frac{N_0}{\frac{t_2}{T_1} + 1} \end{cases}$$

رابطه (۱) را بر رابطه (۲) تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{4 \times 10^{25}}{2/5 \times 10^{24}} = \frac{\frac{t_2}{T_1} + 1}{\frac{t_1}{T_1} + 1} \Rightarrow \frac{20}{1} = \frac{\frac{t_2}{T_1} + 1}{\frac{t_1}{T_1} + 1} \Rightarrow 16 = \frac{t_2}{T_1} \Rightarrow \frac{t_2 - t_1}{T_1} = 15 \Rightarrow T_1 = \frac{t_2 - t_1}{15} = \frac{12 \text{ min}}{15} = 0.8 \text{ min}$$

با توجه به اینکه در مدت زمان یکسان، تعداد هسته‌های پرتوزای B بیشتر از هسته‌های پرتوزای A کاهش یافته است، نیمه‌عمر ماده B کوچک‌تر از نیمه‌عمر ماده A یعنی کمتر از ۳ min است؛ بنابراین فقط گزینه ۱ می‌تواند نیمه‌عمر مربوط به ماده پرتوزای B باشد.

شیمی



▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۳ (فصل ۱)

۷۶- پاسخ: گزینه ۴



گزینه ۴: درست؛ شیر نوعی کلئید و ناهمگن است.



- گزینه ۱: نادرست؛ سوپانسیون مخلوطی ناهمگن است.
گزینه ۲: نادرست؛ کلئید مخلوطی پایدار و ناهمگن است.
گزینه ۳: نادرست؛ نوشابه نوعی محلول و همگن است.

▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۳ (فصل ۱)

۷۷- پاسخ: گزینه ۲



مورد «اول» و «دوم» باعث کاهش قدرت پاک‌کنندگی صابون می‌شود.

مورد «اول»: با افزودن کلسیم کلرید، غلظت یون Ca^{2+} (یون سخت) افزایش می‌یابد و به دلیل تشکیل رسوب با صابون، قدرت شویندگی کاهش می‌یابد.

مورد «دوم»: پارچه پلی‌استری برهم‌کنش قوی‌تری با لکه چربی دارد و جایگزین کردن پارچه پلی‌استری با پارچه نخی سبب کاهش قدرت شویندگی می‌شود.

مورد «سوم»: سدیم فسفات باعث کاهش سختی آب و افزایش قدرت شویندگی صابون می‌شود.

مورد «چهارم» و «پنجم»: هر دو قدرت شویندگی را افزایش می‌دهند.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)

۷۸- پاسخ: گزینه ۲



(ب) درست؛ یکی از فراورده‌های این واکنش $H_2(g)$ است.



(الف) نادرست؛ پاک‌کننده‌های خورنده با گرفتگی‌ها و لکه‌ها واکنش هم می‌دهند.
(پ) درست؛ واکنش مخلوط با آب گرماده است از این رو فراورده‌ها در مقایسه با واکنش‌دهنده‌ها پایدارتر هستند.
(ت) نادرست؛ این نوع لوله‌بازکن فقط برای رفع مسدود شدن لوله‌ها با چربی کاربرد دارد.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)

۷۹- پاسخ: گزینه ۳



همواره از آبکافت استرهای طبیعی سنگین، سه مول اسید چرب و یک مول الکل سه عاملی با فرمول مولکولی $C_{37}H_{75}O_2$ به دست می‌آید.
 $C_{54}H_{93}O_6 \sim C_{37}H_{75}O_2$

$$\frac{100 / 44 \times \frac{75}{100}}{837g} = \frac{?g}{92g} \Rightarrow ? = 8 / 28g$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)

۸۰- پاسخ: گزینه ۲



از یونش هر مولکول HA دو یون تولید می‌شود، پس:

$$\alpha = \frac{1}{40} \Rightarrow [H^+] = M\alpha = \frac{1}{40} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{400}$$

$$pH = -\log \frac{1}{400} = \log 400 = \log 4 + \log 100 = 0 / 6 + 2 = 2 / 6$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)

۸۱- پاسخ: گزینه ۱



تفاوت pH به تفاوت غلظت یون هیدرونیوم مربوط است و از تفاوت pH می‌توان نسبت غلظت یون هیدرونیوم دو محلول را محاسبه کرد:

$$\frac{[H^+]_{HF}}{[H^+]_{NH_3}} = 10^{\Delta pH} = 10^{0.7} = 5 \times 10^0$$

$$[H^+]_{HF} = 0.05 \times 0.8 = 0.04 \text{ mol} \cdot L^{-1}$$

$$[H^+]_{NH_3} = \frac{4 \times 10^{-2}}{5 \times 10^0} = 8 \times 10^{-11} \Rightarrow [OH^-] = \frac{1}{8} \times 10^{-3} \text{ mol} \cdot L^{-1}$$

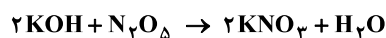
$$K_{NH_3} = \frac{[NH_4^+][OH^-]}{[NH_3]} \approx \frac{[OH^-]^2}{M} = \frac{\frac{1}{64} \times 10^{-6}}{0.08} = 1 / 25 \times 10^{-5} \text{ mol} \cdot L^{-1}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)

۸۲- پاسخ: گزینه ۲



$$pH = 13/1 \Rightarrow pOH = 0/9 \Rightarrow [OH^-] = 10^{-0/9} = \frac{1}{10^{0/9}} = \frac{1}{(10^{1/3})^3} = \frac{1}{10} = 0/125 M \Rightarrow M = 0/125$$



$$\frac{0/2 \times 0/125}{2} = \frac{x}{108} \Rightarrow x = 1/35 g$$



$$\frac{MV \cdot n}{KOH} = \frac{mol \cdot n}{N_2O_5} \Rightarrow 0/125 \times 0/2 \times 1 = x \times 2 \Rightarrow x = 0/125 mol \times \frac{108 g}{1 mol} = 1/35 g$$

▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۳ (فصل ۱)

۸۳- پاسخ: گزینه ۲



Na_3PO_4 با یون‌های موجود در آب سخت واکنش داده و سبب افزایش قدرت پاک‌کنندگی می‌شود. $NaHCO_3$ نیز به دلیل خاصیت بازی قدرت پاک‌کنندگی را افزایش می‌دهد.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۲)

۸۴- پاسخ: گزینه ۱



ب) درست: برای مثال اگر قدرت کاهندگی فلز Al از فلز Cu بیشتر است، پس قدرت اکسندگی Al^{3+} از قدرت اکسندگی Cu^{2+} کمتر است.
پ) درست



الف) نادرست: اغلب فلزها در واکنش با محلول اسیدها، سبک‌ترین گاز دو اتمی یا همان $H_2(g)$ را به همراه یک ترکیب یونی تولید می‌کنند ولی ترکیب یونی لزوماً دوتایی نیست. برای مثال واکنش Zn با H_2SO_4 منجر به تولید $ZnSO_4$ می‌شود که یک ترکیب یونی چندتایی است.
ت) نادرست: قدرت کاهندگی فلز Au از فلز مس کمتر است؛ بنابراین با قرار دادن تیغه طلا درون محلول مس (II) واکنشی رخ نمی‌دهد.

▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۳ (فصل ۲)

۸۵- پاسخ: گزینه ۱



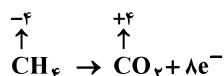
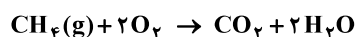
اگر SHE به نیم‌سلولی با پتانسیل منفی‌تر از خودش متصل شود، نقش کاتد داشته و در سطح الکتروود آن نیم واکنش کاهش $(2H^+(aq) + 2e^- \rightarrow H_2(g))$ رخ می‌دهد و اگر با نیم‌سلولی با پتانسیل الکتریکی مثبت‌تر از خودش سلول گالوانی تشکیل دهد، نقش آند را ایفا کرده و در سطح الکتروودش نیم واکنش کاهش $(H_2(g) \rightarrow 2H^+(aq) + 2e^-)$ رخ می‌دهد.

▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۲)

۸۶- پاسخ: گزینه ۲



معادل واکنش اکسایش:

با واکنش هر مولکول CH_4 و تبدیل آن به CO_2 ، ۸ الکترون مبادله می‌شود:

$$xe = 400 g CH_4 \times \frac{1 mol CH_4}{16 g CH_4} \times \frac{8 mole^-}{1 mol CH_4} \times \frac{6/02 \times 10^{23} \text{ الکترون}}{1 mole^-} \times \frac{80}{100} = 9/63 \times 10^{25} \text{ الکترون}$$

۸۷- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۲)



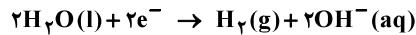
مورد «اول»: درست

مورد «دوم»: درست؛ گاز آزاد شده در کاتد، هیدروژن و گاز آزاد شده در آند، اکسیژن است.

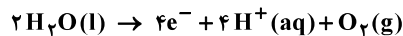


مورد «سوم»: نادرست؛ مقدار نمک افزوده شده به آب باید کم باشد؛ زیرا در صورت غلیظ بودن الکترولیت، امکان وقوع واکنش‌های ناخواسته وجود دارد.

مورد «چهارم»: درست؛ نیم‌واکنش کاتدی در برقکافت آب همراه با تولید یون هیدروکسید است.



مورد «پنجم»: درست



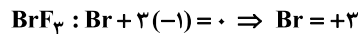
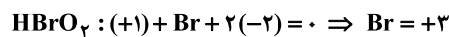
۸۸- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۲)

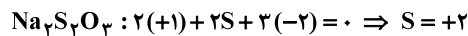
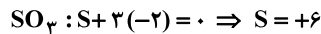


عدد اکسایش اتم‌های مشخص شده در هر ترکیب عبارت‌اند از:

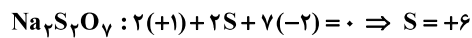
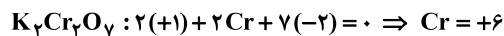
مورد اول:



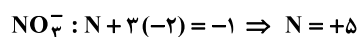
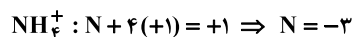
مورد دوم:



مورد سوم:

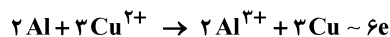


مورد چهارم:



۸۹- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۲)



$$\frac{0/42}{3 \times 64 \times \frac{a}{100} - 2 \times 27} = \frac{0/06}{6} \Rightarrow 1/92a - 54 = 42 \Rightarrow 1/92a = 96 \Rightarrow a = 50\%$$

۹۰- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۲)



گزینه ۲: درست؛ معادله واکنش کلی آن: $Si + 2H_2O \rightarrow SiO_2 + 2H_2$ است که Si کاهنده و H_2O اکسنده است.

نباید سراغ اینا بری

گزینه ۱: نادرست؛ واکنش دهنده ها Si و H_2O هستند.

گزینه ۳: نادرست؛ هدف اصلی از به کارگیری آن تولید گاز هیدروژن است.

گزینه ۴: نادرست؛ emf، بازده و سرعت هر سه کم هستند.

۹۱- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۳)

جوابش اینه

$$\text{درصد جرمی } SiO_2 \text{ در نمونه جدید} = \frac{a}{100 - 20} \times 100 = 1/25 a$$

۹۲- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۲) و شیمی ۳ (فصل ۳)

جوابش اینه

گزینه ۴: درست؛ فلزها رسانای گرما هستند.

نباید سراغ اینا بری

گزینه ۱: نادرست؛ مواد مولکولی در حالت خالص در هیچ یک از سه حالت فیزیکی رسانای جریان برق نیستند.

گزینه ۲: نادرست؛ فلزها شکننده نیستند.

گزینه ۳: نادرست؛ گرافیت نرم است.

۹۳- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۳)

جوابش اینه

مورد «اول»: نادرست؛ نافلز گروه ۱۶ باید با اتم C پیوند دوگانه تشکیل دهد تا به آرایش پایدار هشت تایی برسد.

مورد «دوم»: درست؛ برابند بردارهای قطبیت در این مولکول برابر صفر است و به عبارت دیگر توزیع ابر الکترونی در این مولکول متقارن است.

مورد «سوم»: درست؛ اتم X به دلیل برخورداری از خصلت نافلزی بیشتر در مقایسه با اتم کربن به رنگ سرخ نشان داده شده است، پس عدد اکسایش هر اتم X برابر -۱ و عدد اکسایش هر اتم کربن برابر +۱ است.

مورد «چهارم»: نادرست؛ ۶ پیوند اشتراکی C - X از نوع قطبی و ۹ پیوند اشتراکی از نوع یگانه و دوگانه میان اتمهای کربن - کربن از نوع ناقطبی اند.

۹۴- پاسخ: گزینه ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۳)

جوابش اینه

بررسی عبارت های نادرست:

عبارت «اول»: هر اتم کربن در ساختار این دو ماده ۴ پیوند کووالانسی (در الماس، با ۴ اتم کربن و در گرافیت، با ۳ اتم کربن) تشکیل داده است.

عبارت «دوم»: هر دو از دسته مواد کووالانسی هستند و نقطه ذوب بالایی دارند ولی گرافیت به دلیل داشتن ساختاری لایه ای سخت نیست.

عبارت «چهارم»: شمار اتم های کربن در حجم های برابری از این دو ماده متفاوت است (شمار اتم ها در نمونه الماس بیشتر است، چون چگالی بیشتری دارد).

۹۵- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۳)

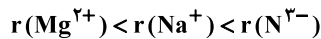
جوابش اینه

عبارت «اول»: نادرست؛ چگالی بار به دو عامل بار و شعاع وابسته است که عامل بار از اهمیت بیشتری برخوردار است و اگر فقط بار الکتریکی

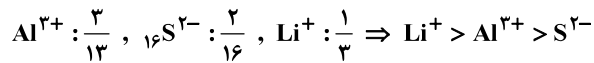
در یون ها برابر باشد، آنگاه به شعاع یونی توجه می کنیم، بنابراین چگالی بار یون O^{2-} به دلیل مقدار بار الکتریکی از چگالی بار یون های F^- و Na^+ بیشتر است.

در مورد مقایسه چگالی بار یون های Na^+ و F^- شعاع کاتیون از آنیون کوچک تر است، پس چگالی بار Na^+ از F^- بیشتر است.

عبارت «دوم» درست؛ در یون های هم الکترون، هرچه تعداد بار مثبت بیشتر باشد، شعاع کوچک تر است؛ زیرا جاذبه هسته بر الکترون ها بیشتر خواهد شد، پس:

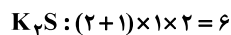
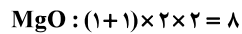
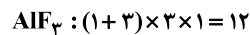


عبارت «سوم» نادرست؛ نسبت تعداد بار به عدد اتمی در یون های ${}^{3+}_{13}\text{Al}$ ، ${}^{2-}_{16}\text{S}$ و ${}^{+}_{3}\text{Li}$ چنین است:



عبارت «چهارم» درست

بار الکتریکی آنیون $\times$ بار الکتریکی کاتیون $\times$ (مجموع زیروند یون ها) : انرژی شبکه بلور



▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۳)

۹۶- پاسخ: گزینه ۳

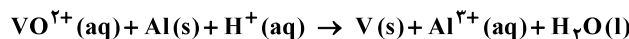


الف) درست

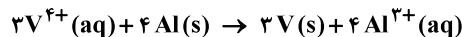
ب) درست؛ قدرت کاهندگی فلز Zn از قدرت کاهندگی فلز V کمتر است.

پ) نادرست؛ عدد اکسایش وانادیم در $\text{VO}^{2+}(\text{aq})$ برابر ۴+ و رنگ آن آبی است.

ت) درست؛ واکنش موازنه شده یون VO^{2+} با فلز Al به صورت زیر است:



و یا می توان واکنش کلی را به صورت خلاصه تر نوشت:



$$\frac{0.300 \text{ L} \times 0.2 \text{ M}}{3} = \frac{? \text{ g}}{4 \times 27 \text{ g}} \Rightarrow ? = 2.16 \text{ g}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۳)

۹۷- پاسخ: گزینه ۳



از الگوی دریای الکترونی برای توجیه برخی از خواص و رفتار فیزیکی فلزها از جمله رسانایی الکتریکی، شکل پذیری، چکش خواری و جلائی فلزی می توان استفاده کرد و این الگو برای توجیه رفتار شیمیایی فلزها مانند واکنش پذیری، تنوع عدد اکسایش استفاده نمی شود.

▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۳ (فصل ۳)

۹۸- پاسخ: گزینه ۳



دوده نیز از جمله رنگ های معدنی است که رنگ سیاه ایجاد می کند.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۴)

۹۹- پاسخ: گزینه ۳



عبارت «اول» درست؛ تبدیل CO ناپایدارتر به CO_2 پایدارتر گرماده است.

عبارت «دوم» درست

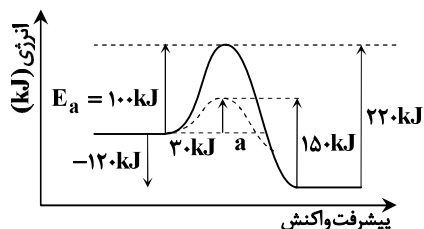
عبارت «سوم» درست



با توجه به معادله موازنه شده مجموع ضرایب مواد گازی در دو سمت معادله برابر است، پس حجم آنها نیز در شرایط یکسان برابر است.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۴)

۱۰۰- پاسخ: گزینه ۴

بدون کاتالیزگر $\Delta H = -120 \Rightarrow -120 = E_a - 220 \Rightarrow E_a = 100 \text{ kJ}$ در حضور کاتالیزگر $-120 = E_a - 150 \Rightarrow E_a = 30 \text{ kJ}$

$$E_a \text{ درصد کاهش} = \frac{70}{100} \times 100 = 70\%$$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۴)

۱۰۱- پاسخ: گزینه ۲



با توجه به اینکه NH_3 یک باز تک ظرفیتی است، هر مول از آن امکان خنثی کردن یک مول HCl را دارد؛ بنابراین با تعیین تعداد مول HNO_3 خنثی شده، می توان تعداد مول NH_3 موجود در حالت تعادل را نیز به دست آورد:

$$\text{تعداد مول HNO}_3 \text{ خنثی شده} = \frac{2/5 \times 10^{-2} \text{ mol HNO}_3}{1 \text{ L محلول}} \times 4 \text{ L محلول} = 0/1 \text{ mol HNO}_3$$

به این ترتیب تعداد مول NH_3 در حالت تعادل برابر با $0/1$ مول خواهد بود. از طرفی با توجه به معادله واکنش به ازای هر مول N_2 ، سه مول H_2 نیز تولید خواهد شد. از آنجا که طبق صورت سؤال $0/4$ مول N_2 تولید شده است، مقدار مول H_2 تولید شده نیز $1/2 = 3 \times 0/4$ مول خواهد بود.

حال با نوشتن معادله ثابت تعادل این واکنش، می توان حجم ظرف (V) را تعیین کرد:

$$K = \frac{[\text{N}_2][\text{H}_2]^3}{[\text{NH}_3]^2} \Rightarrow 24 = \frac{(\frac{0/4}{V})(\frac{1/2}{V})^3}{(\frac{0/1}{V})^2} \Rightarrow 24 = \frac{0/4 \times (1/2)^3 \times 100}{V^2} \Rightarrow V^2 = \frac{0/4 \times 1/8 \times 100}{24} \Rightarrow V^2 = 2/88$$

$$\Rightarrow V \approx 1/697 \Rightarrow V \approx 1/7$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۴)

۱۰۲- پاسخ: گزینه ۱



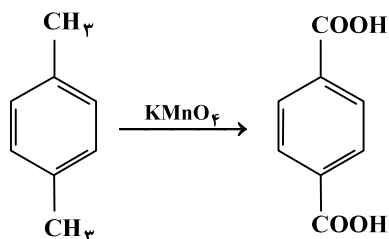
در واکنش های گرماگیر افزایش دما منجر به جابه جایی تعادل در جهت رفت می شود که در این جهت گرمای اضافه شده مصرف خواهد شد؛ بنابراین واکنش های اول و چهارم (که گرماده هستند) چنین شرایطی را ندارند. از طرفی به دلیل جابه جایی تعادل در جهت برگشت با کاهش فشار می توان نتیجه گرفت که تعداد مول های گازی در سمت واکنش دهنده ها بیشتر بوده است که بین دو واکنش باقی مانده هیچ یک چنین شرایطی ندارند.

▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۴)

۱۰۳- پاسخ: گزینه ۱



واکنش انجام شده به صورت زیر است:



عدد اکسایش اتم‌های کربن حلقه بنزنی تغییری نمی‌کند. اما عدد اکسایش دو اتم کربن در گروه‌های CH_3 از -3 به $+3$ در گروه‌های COOH افزایش می‌یابد. به این ترتیب به‌ازای تبدیل یک مول پارازالین به یک مول ترفتالیک اسید در مجموع ۱۲ مول الکترون مبادله می‌شود و جرم محصول تولیدشده در شرایط واکنش برابر است با:

$$\frac{7}{224} \times 10^{22} e^- \times \frac{1 \text{ mole}^-}{6.02 \times 10^{23} e^-} \times \frac{1 \text{ mol C}_8\text{H}_6\text{O}_4}{12 \text{ mole}^-} \times \frac{166 \text{ g C}_8\text{H}_6\text{O}_4}{1 \text{ mol C}_8\text{H}_6\text{O}_4} \times \frac{70 \text{ g C}_8\text{H}_6\text{O}_4}{100 \text{ g C}_8\text{H}_6\text{O}_4} = 1.162 \text{ g C}_8\text{H}_6\text{O}_4$$

عملی نظری

۱۰۴- پاسخ: گزینه ۱ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۴)



از آنجاکه تغییر غلظت باعث تغییر مقدار K نسبت به مقدار اولیه نمی‌شود، پس گزینه‌های ۲ و ۳ پاسخ این سؤال نیستند. با توجه به گرماده بودن تعادل، کاهش دما سبب جابه‌جایی تعادل در جهت رفت می‌شود؛ بنابراین K بزرگ می‌شود.

۱۰۵- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۴)



در فرایند هابر واکنش تعادلی: $\text{N}_2 + 3\text{H}_2 \rightleftharpoons 2\text{NH}_3$ گرما می‌گیرد. افزایش فشار باعث جابه‌جایی تعادل در جهت رفت (تعداد مول گازی کمتر) و افزایش مقدار NH_3 تولیدشده می‌گردد. اما تأثیری بر ثابت تعادل (که فقط با تغییر دما تغییر می‌کند) ندارد؛ بنابراین دو مورد اول نادرست هستند. با افزایش دما واکنش گرماده در جهت برگشت انجام خواهد شد. به این ترتیب مقدار آمونیاک تولیدشده کاهش یافته و مقدار K نیز کاهش می‌یابد. به این ترتیب موارد سوم و چهارم درست خواهند بود. منحنی‌های خواسته شده عبارت‌اند از:

