

دفترچه شماره ۲

آزمون جامع ۱

جمعه ۱۴۰۱/۰۳/۲۰



آزمون‌های سراسر کاج

گزینه درست را انتخاب کنید.

سال تحصیلی ۱۴۰۱-۱۴۰۰

آزمون اختصاصی

پایه دوازدهم ریاضی

دوره دوم متوسطه

نام و نام خانوادگی:	شماره داوطلبی:
تعداد سؤالاتی که باید پاسخ دهید: ۵۰	مدت پاسخگویی: ۷۵ دقیقه

عناوین مواد امتحانی آزمون اختصاصی گروه آزمایشی علوم ریاضی، تعداد سؤالات و مدت پاسخگویی

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	وضعیت پاسخگویی	شماره سؤال		مدت پاسخگویی
				از	تا	
۱	ریاضیات	۵۰	اجباری	۱۰۱	۱۵۰	۷۵ دقیقه



SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir



ریاضیات

۱۰۱- اگر n عدد طبیعی و بازه $(\frac{11n-5}{n}, n^2+9n)$ شامل عدد ۱۰ باشد، n چند مقدار می تواند باشد؟

- (۱) ۳ (۲) ۵ (۳) هیچ مقدار (۴) بی شمار

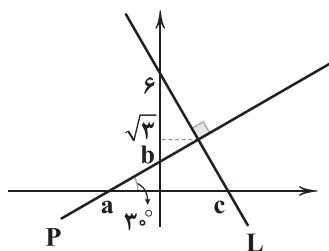
۱۰۲- با توجه به شکل زیر $2a + \sqrt{3}b - c$ برابر کدام گزینه است؟

(۱) -۴

(۲) $\sqrt{3} - 6$

(۳) $\sqrt{3} - 4$

(۴) -۵



۱۰۳- اگر $\sqrt{8\sqrt{2}} = 32^A$ و $\sqrt[3]{9\sqrt{27}} = 27^B$ باشد، حاصل $\frac{1}{A} + \frac{1}{B}$ کدام است؟

(۴) $\frac{39}{7}$

(۳) $\frac{36}{7}$

(۲) $\frac{32}{7}$

(۱) $\frac{27}{7}$

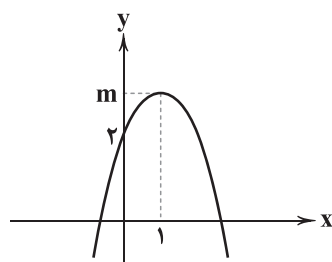
۱۰۴- اگر نمودار سهمی $y = -2x^2 + ax + b$ به صورت زیر باشد، حاصل $2a + b - m$ کدام است؟

(۱) ۵

(۲) ۸

(۳) ۴

(۴) ۶



۱۰۵- تابع $f(x) = x^2 - 1$ در بازه (a, b) پایین تر از $g(x) = |x+1|$ قرار دارد. حداکثر مقدار $b-a$ کدام است؟

(۴) ۴

(۳) $\frac{2}{5}$

(۲) ۳

(۱) ۲

۱۰۶- از تقاطع خطوط $y = 6 - x$ ، $y = 2x$ و $y = \frac{x}{3}$ مثلی به وجود می آید. مساحت قسمتی از مثلث که بالای نیمساز ربع اول قرار دارد، کدام است؟

(۴) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

(۳) $3\sqrt{2}$

(۲) $\frac{3}{5}$

(۱) ۳

۱۰۷- فاصله نقطه برخورد وارون تابع $f(x) = \sqrt{x+2} - 3$ و تابع $g(x) = 7x + 27$ تا مبدأ مختصات کدام است؟

(۴) $\sqrt{3722}$

(۳) $\sqrt{13}$

(۲) $\sqrt{17}$

(۱) $\sqrt{3869}$

۱۰۸- اگر $f(x) = x^2 + 2x + 5$ و $g(x) = 2x + 1$ باشد. مجموع معکوس های ریشه های معادله $(fog)(x) - (gof)(x) = x^2 + 3$ کدام است؟

(۴) ریشه حقیقی ندارد.

(۳) $\frac{2}{3}$

(۲) $\frac{5}{3}$

(۱) $-\frac{5}{3}$

محل انجام محاسبات



۱۰۹- اگر $f(x) = \log_p x$ ، ریشه معادله $(f^{-1} \circ f)(x) = (f \circ f^{-1})(x) - 4 - x^2$ کدام است؟

- (۱) $1 + \sqrt{5}$ (۲) $3 + \sqrt{10}$ (۳) $2 - \sqrt{8}$ (۴) $1 - \sqrt{5}$

۱۱۰- در تابع $y = 2^{x+|x|}$ نمودار تابع را سه واحد به طرف راست و سپس ۸ واحد به طرف پایین منتقل می‌کنیم. طول نقطه برخورد تابع جدید با محور x ها کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) $3/5$ (۴) $4/5$

۱۱۱- اگر $\tan 2^\circ = k$ باشد، مقدار $\frac{\sin 25^\circ + 3 \cos 11^\circ}{2 \sin 20^\circ + \cos 38^\circ}$ برابر کدام گزینه است؟

- (۱) $\frac{1+3k}{2k-1}$ (۲) $\frac{1+3k}{2k+1}$ (۳) $\frac{-k+3}{2k+1}$ (۴) $\frac{k-3}{2k-1}$

۱۱۲- حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x} - \sqrt{x+2} - 2}{x^2 - 4}$ برابر کدام گزینه است؟

- (۱) $\frac{7}{8}$ (۲) $\frac{17}{8}$ (۳) $\frac{15}{16}$ (۴) $\frac{11}{64}$

۱۱۳- اگر در تابع صعودی اکید و پیوسته $f(x)$ ، $(0, 1) \in f$ و $1 < |x-2| - 2\sqrt{2} < f(8)^{|x-2|}$ ، محدوده x کدام است؟

- (۱) $(-1, \frac{5}{2})$ (۲) $(\frac{1}{2}, \frac{7}{2})$ (۳) $(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ (۴) $(\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$

۱۱۴- تابع درجه دوم $f(x) = a(x+1)^2 + bx - k$ در نقطه‌ای به طول ۴- بر محور x ها مماس است. در صورتی که تابع $g(x) = 2x^2 + f(x)$ روی $\mathbb{R}$ اکیدا نزولی باشد، $(f+g)(1)$ کدام است؟

- (۱) ۹۸ (۲) ۸۹ (۳) -۹۸ (۴) -۸۹

۱۱۵- دوره تناوب تابع $f(x) = (1 - \sin 3x)(1 + \sin 3x) + \cos 6x$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{4}$ (۲) $\frac{\pi}{6}$ (۳) $\frac{\pi}{3}$ (۴) $\frac{\pi}{2}$

۱۱۶- مجموعه جواب معادله $\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} + 5$ کدام است؟

- (۱) $k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ (۲) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۳) $\frac{k\pi}{3}$ (۴) $\frac{2k\pi}{3}$

۱۱۷- مقدار $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{[-x] + 2/5}{4x + [2x^2] - 15}$ کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

- (۱) $+\infty$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $-\infty$ (۴) $-\frac{1}{2}$

۱۱۸- فاصله خطوط مجانب‌های افقی تابع $f(x) = \frac{3^{2x-1} - 3^{1-2x}}{9^x + 9^{-x}}$ چقدر است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{3}^\circ$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{8}{3}$

محل انجام محاسبات



۱۱۹- در صورتی که $f'(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$ و $g(x) = f(\tan x)$ باشد، $g''(\frac{\pi}{4})$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۲ (۴) ۱

۱۲۰- اگر f تابعی پیوسته و $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)+2}{x^2+x-2} = 6$ ، عرض از مبدأ خط مماس بر تابع $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ در نقطه‌ای به طول ۱ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۱۲۱- در تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 1 \\ -x^3 & x < 1 \end{cases}$ نقطه $A(1, 1)$ چه نوع نقطه‌ای است؟

- (۱) بحرانی و می‌نیمم نسبی (۲) بحرانی و مشتق صفر
(۳) بحرانی و عدم وجود مشتق (۴) بحرانی و ماکزیمم نسبی

۱۲۲- معادله $\frac{\log x}{27} = 2x^3 - 5x^2 + 4x$ چند ریشه دارد؟

- (۱) صفر (۲) یک (۳) دو (۴) سه

۱۲۳- اگر $(p \wedge \sim r) \Rightarrow (\sim p \vee q)$ نادرست باشد، آنگاه ارزش p و q و r به ترتیب کدام است؟

- (۱) درست، نادرست، نادرست (۲) نادرست، نادرست، درست (۳) نادرست، درست، درست (۴) درست، نادرست، درست

۱۲۴- اگر $A = \{2, 4\}$ ، $B = \{1, 5\}$ ، $C = \{3, 5\}$ باشد آنگاه مجموعه $\{(2, 1), (2, 5), (2, 3), (4, 3), (4, 1), (4, 5)\}$ کدام است؟

- (۱) $A \cup (B \cap C)$ (۲) $A \times (B \cap C)$ (۳) $A \cap (B \cup C)$ (۴) $A \times (B \cup C)$

۱۲۵- تعداد اعداد ۷ رقمی که مجموع ارقام آن ۱۰ و فقط از اعداد ۱، ۲، ۳ استفاده شود، چقدر است؟

- (۱) ۵۵ (۲) ۶۶ (۳) ۷۷ (۴) ۸۸

۱۲۶- اگر A و B دو پیشامد و $P(A') = 0/3$ و $P(B) = 0/4$ و $P(A \cap B') = 0/5$ باشد آنگاه $P(B|A \cup B')$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{5}$ (۳) $\frac{3}{5}$ (۴) $\frac{2}{5}$

۱۲۷- کیفی شامل ۵ توپ است، ولی نمی‌دانیم چه تعداد از آن‌ها سفید است. دو توپ به طور تصادفی از کیف خارج می‌کنیم و سفید هستند،

احتمال این‌که هر ۵ تا توپ سفید باشد، چقدر است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{5}$

۱۲۸- میانگین و انحراف معیار ۱۰۰ داده به ترتیب ۴۰ و ۱۰ است، اگر اشتباهاً دو داده ۳۰ و ۷۰ به جای ۳ و ۲۷ وارد شده باشد، انحراف معیار صحیح کدام است؟

- (۱) $10/21$ (۲) $10/24$ (۳) $10/29$ (۴) $10/27$

۱۲۹- میانگین و میانه، ده داده مرتب شده y ، 70 ، 67 ، 42 ، x ، 34 ، 29 ، 26 ، 22 ، 10 به ترتیب ۴۲ و ۳۵ است. مقدار $\frac{y}{x}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{9}{4}$ (۲) $\frac{7}{2}$ (۳) $\frac{7}{3}$ (۴) $\frac{8}{3}$

محل انجام محاسبات



۱۳۰- اگر $9x + 5y = [(627, 429), 154]$ آن گاه کوچک ترین عدد مثبت $x + y$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ۹

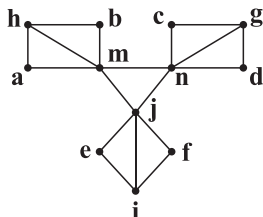
۱۳۱- اگر باقی مانده تقسیم عدد a بر ۳، ۴ و ۵ به ترتیب برابر ۲، ۳ و ۴ باشد آن گاه باقی مانده تقسیم عدد a بر ۳۰ کدام است؟

- (۱) ۲۵ (۲) ۲۷ (۳) ۲۹ (۴) ۲۸

۱۳۲- چند عدد پنج رقمی به صورت $a22b6$ بر عدد ۳۶ بخش پذیر است؟

- (۱) ۵ (۲) ۴ (۳) ۲ (۴) ۳

۱۳۳- کدام گزینه در مورد گراف زیر نادرست است؟



(۱) عدد احاطه گری گراف ۳ است.

(۲) گراف دارای هشت ۷- مجموعه است.

(۳) مجموعه $\{a, b, c, d, e, f\}$ یک مجموعه احاطه گر مینیمال است.

(۴) مجموعه $\{h, g, i, j\}$ یک مجموعه احاطه گر مینیمال است ولی مینیمم نیست.

۱۳۴- معادله $x_1 + x_2 + x_3 = 10$ با شرط های $x_1 > 2$, $x_2 \leq 4$, چند جواب صحیح و نامنفی دارد؟

- (۱) ۲۴ (۲) ۲۸ (۳) ۳۰ (۴) ۳۶

۱۳۵- ۵ نقطه را درون یک بیضی افقی با خروج از مرکز $\frac{\sqrt{3}}{4}$ و قطر بزرگ ۴ واحد قرار می دهیم. حداقل دو نقطه وجود دارد که فاصله آن ها کم تر از

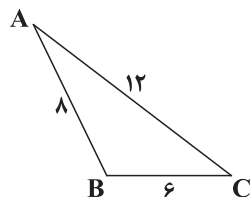
..... است.

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{3}$ (۳) ۲ (۴) $\sqrt{5}$

۱۳۶- ۵ مسافر به چند طریق می توانند در ۳ ایستگاه پیاده شوند به طوری که لااقل در یکی از ایستگاه ها کسی پیاده نشود؟

- (۱) ۱۵۰ (۲) ۲۴۳ (۳) ۹۳ (۴) ۱۰۵

۱۳۷- در مثلث شکل زیر، نیمسازهای زوایای خارجی A و C یک دیگر را در نقطه O قطع می کنند. اگر نقطه H پای ارتفاع وارد بر ضلع AC در



مثلث OAC باشد، طول AH کدام است؟

- (۱) $4/5$ (۲) $5/5$ (۳) ۴ (۴) ۵

۱۳۸- در مثلث ABC به اضلاع $AB = 2$, $BC = 3$, $AC = 4$ از نقطه M وسط ضلع AB خطی به موازات ضلع AC رسم می کنیم تا ضلع BC را

در نقطه N قطع کند. فاصله M تا محل تلاقی امتداد MN با نیمساز زاویه C ، چقدر است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) $2/5$ (۴) $1/5$

محل انجام محاسبات



۱۳۹- از اتصال متوالی وسطهای اضلاع یک دوزنقه غیرمستطیل، چهارضلعی پدید می‌آید که اندازه دو ضلع آن ۸ و ۱۲ و یک زاویه آن 150° است.

مساحت دوزنقه کدام است؟

۷۲ (۴)

۳۶ (۳)

۹۶ (۲)

۴۸ (۱)

۱۴۰- قاعده یک منشور چهار پهلوی قائم به ارتفاع ۲۰، یک لوزی به ضلع ۸ و زاویه 120° است. اگر مساحت سطح مقطع منشور با صفحه عمود بر

دو قاعده با بیشترین مساحت را S_1 و مساحت سطح مقطع منشور با صفحه‌ای به موازات دو قاعده را S_2 بگیریم، نسبت $\frac{S_1}{S_2}$ کدام است؟

۴ (۴)

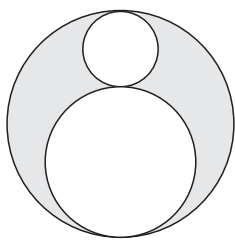
۳ (۳)

۲ (۲)

۵ (۱)

۱۴۱- مطابق شکل دو دایره مماس برون به شعاع‌های R و R' با دایره‌ای به شعاع ۲۵ مماس داخل‌اند. اگر اندازه مماس مشترک خارجی دو دایره

مماس برون برابر ۲۴ باشد، نسبت مقدار مساحت قسمت هاشورخورده به مقدار مجموع محیط‌های سه دایره، کدام است؟



۱/۴۴ (۱)

۳/۲۲ (۲)

۲/۸۸ (۳)

۴/۱۱ (۴)

۱۴۲- در مثلثی به اضلاع $AB=25$ و $AC=26$ و $BC=3$ ، نیمساز داخلی زاویه A ، نیمساز خارجی زاویه C را در نقطه P قطع می‌کند. فاصله P

تا ضلع AB کدام است؟

۲/۵ (۴)

۱/۵ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۱۴۳- در دوزنقه متساوی‌الساقین $ABCD$ با قاعده‌های $CD=24$ و $AB=24$ و ارتفاع ۵، قاعده AB یکبار با تجانسی به مرکز O و نسبت $\frac{3}{4}$ و بار

دیگر با تجانس به مرکز O' و نسبت $\frac{3}{4}$ روی قاعده CD تصویر شده است. اندازه OO' کدام است؟

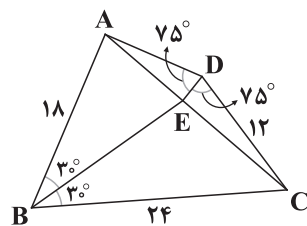
۹ (۴)

۱۱ (۳)

۱۰ (۲)

۱۲ (۱)

۱۴۴- در شکل زیر، اختلاف مربع اندازه ضلع AC و مساحت چهارضلعی $ABCD$ ، کدام است؟



۱۰۸√۳ (۱)

۱۹۸ (۲)

۱۰۵√۳ (۳)

۱۹۵ (۴)

۱۴۵- نقاط $A(3, 2)$ ، $B(-1, 2)$ و $C(3, 4)$ مفروض‌اند. به ازای چه مقادیری از m نقطه $m(0, m)$ درون دایره محیطی مثلث ABC قرار دارند؟

 $m \in [-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$ (۴) $m \in (-\sqrt{5}, \sqrt{5})$ (۳) $m \in (1, 5)$ (۲) $m \in [1, 5]$ (۱)

محل انجام محاسبات



۱۴۶- مساحت دایره‌ای که همزمان بر دو دایره $x^2 + y^2 - 6x + \frac{27}{4} = 0$ و $x^2 + y^2 = \frac{9}{4}$ و مماس مشترک خارجی آن‌ها مماس باشد کدام است؟

$$\frac{3\pi}{64} \quad (۴)$$

$$\frac{5\pi}{16} \quad (۳)$$

$$\frac{3\pi}{8} \quad (۲)$$

$$\frac{9\pi}{64} \quad (۱)$$

۱۴۷- از معادله ماتریس $\begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 12 & -24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ حاصل $\begin{vmatrix} 30x+10y & 60x-22 \\ 500x-y & 12 \end{vmatrix}$ کدام است؟

$$24 \quad (۴)$$

$$-12 \quad (۳)$$

$$-144 \quad (۲)$$

$$144 \quad (۱)$$

۱۴۸- اگر $\tan(2\alpha) = -2$ باشد، حاصل دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} 4(\sin\alpha + \cos\alpha) & 0 & 2\cos\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ 5\sin\alpha & 0 & 4(\sin\alpha - \cos\alpha) \end{bmatrix}$ کدام است؟

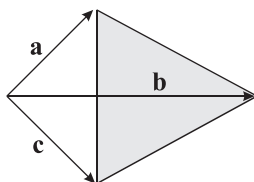
$$-\sin(2\alpha) \quad (۴)$$

$$\sin(2\alpha) \quad (۳)$$

$$\cos(2\alpha) \quad (۲)$$

$$-\cos(2\alpha) \quad (۱)$$

۱۴۹- سه بردار $a = (0, 1, 1)$ ، $b = (4, 5, -3)$ و $c = (2, 5, 1)$ مطابق شکل زیر مفروض‌اند. مساحت مثلث رنگی کدام است؟



$$10 \quad (۱)$$

$$8\sqrt{2} \quad (۲)$$

$$6\sqrt{3} \quad (۳)$$

$$4\sqrt{6} \quad (۴)$$

۱۵۰- طول هر یک از دو بردار a و b برابر 10 واحد و مساحت لوزی که توسط این دو بردار تولید می‌شود 80 واحد مربع است. حاصل ضرب داخلی a

و b با مقدار مثبت کدام است؟

$$60 \quad (۴)$$

$$50 \quad (۳)$$

$$40 \quad (۲)$$

$$30 \quad (۱)$$

دفترچه شماره ۳

آزمون جامع ۱

جمعه ۱۴۰۱/۰۳/۲۰



آزمون‌های سراسر کاج

گزینه درستی را انتخاب کنید.

سال تحصیلی ۱۴۰۱-۱۴۰۰

آزمون اختصاصی

پایه دوازدهم ریاضی

دوره دوم متوسطه

نام و نام خانوادگی:	شماره داوطلبی:
تعداد سؤالاتی که باید پاسخ دهید: ۷۰	مدت پاسخگویی: ۸۰ دقیقه

عناوین مواد امتحانی آزمون اختصاصی گروه آزمایشی علوم ریاضی، تعداد سؤالات و مدت پاسخگویی

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	وضعیت پاسخگویی	شماره سؤال		مدت پاسخگویی
				از	تا	
۱	فیزیک	۴۰	اجباری	۱۵۱	۱۹۰	۵۰ دقیقه
۲	شیمی	۳۰	اجباری	۱۹۱	۲۲۰	۳۰ دقیقه

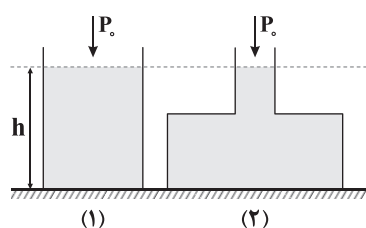


۱۵۱- از آلیاژی، یک پوسته کروی با شعاع داخلی r و شعاع خارجی R ساخته ایم. اگر ابعاد این کره را سه برابر کنیم، جرم آن چند برابر می شود؟

- (۱) $\frac{1}{27}$ (۲) ۲۷ (۳) ۹ (۴) $\frac{1}{9}$

۱۵۲- در شکل زیر، دو ظرف را از آب پر کرده ایم که نیروی وارد بر کف هر دو آن ها برابر است. اگر به هر دو ظرف، به یک اندازه آب اضافه کنیم،

اندازه نیرو و فشار در کف ظرف در این حالت، F' و P' می شود. رابطه داده شده در کدام گزینه درست است؟



(۱) $\frac{P'_2}{P'_1} > 1$ و $\frac{F'_2}{F'_1} < 1$

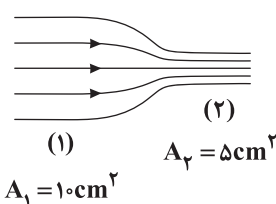
(۲) $\frac{P'_2}{P'_1} > 1$ و $\frac{F'_2}{F'_1} > 1$

(۳) $\frac{P'_2}{P'_1} = 1$ و $\frac{F'_2}{F'_1} = 1$

(۴) $\frac{P'_2}{P'_1} = 1$ و $\frac{F'_2}{F'_1} > 1$

۱۵۳- در لوله ای به شکل زیر، آب به صورت لایه ای و پایا جریان دارد. اگر در هر دقیقه، ۳۰۰ لیتر آب از مقطع (۱) عبور کند، از مقطع (۲)، در هر

دقیقه چند لیتر آب و با چه تندی بر حسب متر بر ثانیه عبور می کند؟ (به ترتیب از راست به چپ)



(۱) ۳۰۰ - ۱۰

(۲) ۳۰۰ - ۰/۱

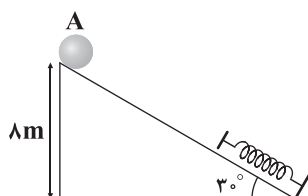
(۳) ۱۵۰ - ۱۰

(۴) ۱۵۰ - ۰/۱

۱۵۴- مطابق شکل زیر، گلوله ای به جرم ۲ kg از نقطه A رها می شود و به فنر در پایین سطح شیب دار برخورد می کند و برای لحظه ای متوقف

می شود. اگر بیشترین انرژی پتانسیل کشسانی فنر برابر با ۱۵۵ ژول باشد، طول فنر در این حالت چند سانتی متر است؟ ($g = 10 \frac{N}{kg}$ و از

نیروهای اتلافی صرف نظر کنید.)



(۱) ۲۵

(۲) ۵۰

(۳) ۷۵

(۴) ۸۵

محل انجام محاسبات



۱۵۵- موتور اتومبیلی، نیروی پیشرانی به بزرگی 12 kN تولید می‌کند. اگر این اتومبیل یک تنی از حال سکون شروع به حرکت در یک جاده افقی کند،

پس از طی 100 متر، تندی آن به $30 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ می‌رسد. کار نیروی اصطکاک در مقابل حرکت این اتومبیل در این جابه‌جایی چند کیلوژول بوده است؟

- (۱) 750 (۲) -750 (۳) 450 (۴) -450

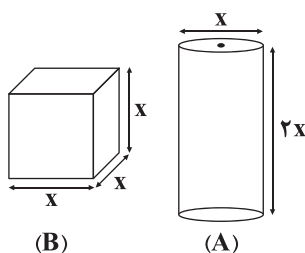
۱۵۶- لوله‌ای به قطر 4 cm و طول 40 cm داریم. آب با سرعت متوسط $5 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$ از یک‌سوی این لوله وارد و از طرف دیگر آن خارج می‌شود. در

صورتی که دمای آب ورودی به لوله 95°C و دمای آب خروجی از لوله 85°C باشد، آهنگ انتقال گرما به لوله چند ژول بر ثانیه است؟

$$(c_{\text{آب}} = 4/2 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot ^\circ \text{C}}, \rho_{\text{آب}} = 1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}, \pi \approx 3)$$

- (۱) 20160 (۲) 4032 (۳) 504 (۴) 2520

۱۵۷- به دو جسم هم‌جنس و توپر A و B به یک اندازه گرما می‌دهیم. تغییر ارتفاع جسم B چند برابر تغییر شعاع جسم A خواهد بود؟ ($\pi \approx 3$)



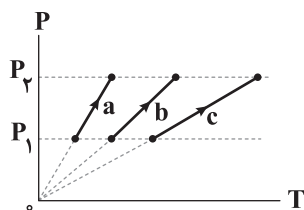
(۱) $\frac{3}{4}$

(۲) $\frac{4}{3}$

(۳) 4

(۴) 3

۱۵۸- مقدار معینی از یک گاز کامل، فرایندهای جداگانه a، b و c را انجام داده است، کار انجام‌شده روی گاز در کدام فرایند بیشتر است؟



(۱) a

(۲) b

(۳) c

(۴) کار انجام‌شده روی گاز در هر سه فرایند، یکسان است.

۱۵۹- بازده یک ماشین گرمایی، ۲۵ درصد است. اگر در این ماشین در یک چرخه 1200 ژول گرما از منبع دما بالا دریافت کند، چند ژول گرما به

منبع دما پایین خواهد داد؟

- (۱) 300 (۲) 600 (۳) 900 (۴) 1000

۱۶۰- مطابق شکل‌های زیر، جسم A بر روی آب، شناور است و جسم B درون روغن، غوطه‌ور شده است. اگر جرم دو جسم با هم برابر باشد و چگالی

آب، ۲۵ درصد بیشتر از چگالی روغن باشد، نیروی شناوری واردشده بر جسم A چند برابر نیروی شناوری واردشده بر جسم B است؟



(۱) 1

(۲) $\frac{5}{4}$

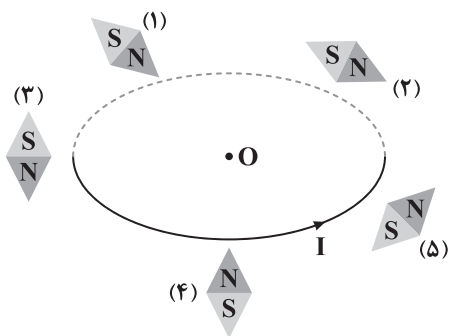
(۳) $\frac{6}{5}$

(۴) $\frac{4}{5}$

محل انجام محاسبات



۱۶۱- در شکل زیر که یک حلقهٔ رسانای حامل جریان را نشان می‌دهد، در کدام موقعیت‌ها وضعیت عقربهٔ مغناطیسی درست است؟



(۱) و (۳)

(۲) و (۴)

(۳)، (۲) و (۴)

(۴)، (۱) و (۲)

۱۶۲- یک سیم‌لولهٔ آرمانی به طول 80 cm و دارای 1000 حلقه داریم. اگر مساحت هر حلقهٔ این سیم‌لوله برابر با 20 cm^2 باشد، چه جریانی برحسب

آمپر از این سیم‌لوله بگذرد تا انرژی ذخیره‌شده در آن 6 mJ گردد؟ $(\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{\text{T.m}}{\text{A}}, \pi = 3)$

(۴) ۲

(۳) ۴

(۲) ۱

(۱) ۵/۰

۱۶۳- یک قاب رسانای مسطح دایره‌ای شکل به شعاع 30 سانتی‌متر که شامل 10 دور حلقه است، در یک میدان مغناطیسی یکنواخت به

بزرگی 250 G طوری قرار دارد که محور آن بر خطوط میدان مغناطیسی، عمود است. این قاب حول محور خود در چند دقیقه، 600 دور بزند

تا بیشینهٔ نیرو محرکه القایی متوسط در دو سر آن $5/4\text{ V}$ گردد؟ $(\pi^2 = 10)$

(۴) $\frac{50}{6}$

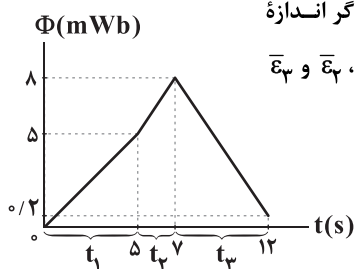
(۳) ۱۰

(۲) $\frac{5}{6}$

(۱) ۶۰

۱۶۴- نمودار تغییرات شار مغناطیسی عبوری از یک حلقهٔ رسانا برحسب زمان، مطابق شکل مقابل است. اگر اندازهٔ

نیروهای محرکه القایی متوسط در این حلقه در بازه‌های زمانی t_1 ، t_2 و t_3 به ترتیب برابر با $\bar{\epsilon}_1$ ، $\bar{\epsilon}_2$ و $\bar{\epsilon}_3$ باشد، آن‌گاه کدام گزینه درست است؟

(۲) $\bar{\epsilon}_3 > \bar{\epsilon}_2 > \bar{\epsilon}_1$ (۱) $\bar{\epsilon}_2 > \bar{\epsilon}_3 > \bar{\epsilon}_1$ (۴) $\bar{\epsilon}_3 > \bar{\epsilon}_1 > \bar{\epsilon}_2$ (۳) $\bar{\epsilon}_2 > \bar{\epsilon}_1 > \bar{\epsilon}_3$

۱۶۵- دو بار الکتریکی نقطه‌ای مشابه q روی محور x در مکان‌های $-a$ و $+a$ قرار دارند. بار الکتریکی نقطه‌ای q' را از مرکز مختصات در جهت

محور مثبت y تا بی‌نهایت جابه‌جا می‌کنیم. بزرگی نیروی الکتریکی وارد بر آن از طرف دو بار دیگر چگونه تغییر می‌کند؟

(۲) پیوسته افزایش می‌یابد.

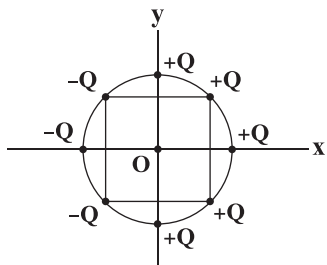
(۱) ابتدا کاهش، سپس افزایش می‌یابد.

(۴) پیوسته کاهش می‌یابد.

(۳) ابتدا افزایش، سپس کاهش می‌یابد.

۱۶۶- مطابق شکل زیر، هشت بار الکتریکی نقطه‌ای، روی نقاطی از محیط یک دایره به شعاع a قرار دارند. بزرگی و جهت برایاند میدان‌های

الکتریکی حاصل از تمام بارها در نقطهٔ O در کدام گزینه به درستی آمده‌اند؟

(۲) $(\leftarrow) - \frac{k|Q|}{a^2} (2 + 2\sqrt{2})$ (۱) $(\rightarrow) - \frac{k|Q|}{a^2} 2\sqrt{2}$ (۴) $(\leftarrow) - \frac{k|Q|}{a^2} 2\sqrt{2}$ (۳) $(\rightarrow) - \frac{k|Q|}{a^2} (2 + 2\sqrt{2})$

محل انجام محاسبات



۱۶۷- ابعاد صفحات یک خازن تخت برابر با $20\text{cm} \times 20\text{cm}$ و فاصله بین صفحات آن 3mm است. اگر بخواهیم خازن دیگری با ظرفیت مساوی با ظرفیت این خازن اما با صفحاتی به ابعاد $10\text{cm} \times 10\text{cm}$ بسازیم، فاصله بین صفحات آن چند میلی متر باید باشد؟ (بین صفحات هر دو خازن، هوا است.)

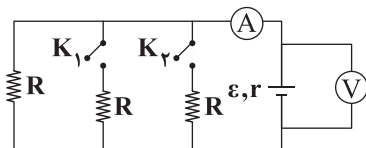
۵ (۴)

۰/۵ (۳)

۷/۵ (۲)

۰/۷۵ (۱)

۱۶۸- در شکل زیر، اگر کلیدهای K_1 و K_2 به ترتیب بسته شوند، عددی که آمپرسنج و ولتسنج نشان می‌دهند، به ترتیب از راست به چپ چگونه تغییر می‌کنند؟ (آمپرسنج و ولتسنج آرمانی هستند.)



(۱) کاهش - کاهش

(۲) افزایش - کاهش

(۳) افزایش - افزایش

(۴) کاهش - افزایش

۱۶۹- هنگامی که دو پیلان یک باتری را به دو سر یک مقاومت 12Ω می‌بندیم، توان خروجی باتری، 108W و هنگامی که دو پیلان همین باتری را به دو سر یک مقاومت 50Ω می‌بندیم، توان خروجی باتری، 50W می‌شود. نیروی محرکه این باتری چند ولت است؟

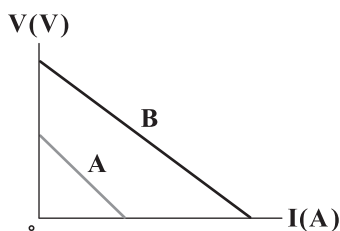
۱۱۴ (۴)

۵۷ (۳)

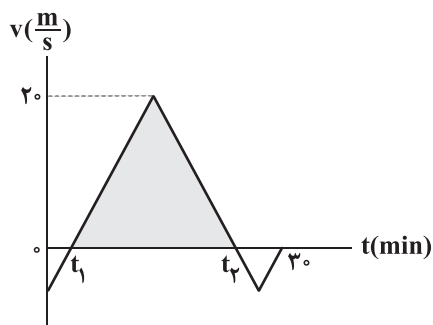
۴۸ (۲)

۲۴ (۱)

۱۷۰- نمودار اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر باتری‌ها A و B بر حسب شدت جریانی که از آن‌ها عبور می‌کند، مطابق شکل زیر است. کدام گزینه در مورد نیروی محرکه این دو باتری و مقاومت درونی آن‌ها درست است؟

(۱) $r_A > r_B$, $\mathcal{E}_A < \mathcal{E}_B$ (۲) $r_A < r_B$, $\mathcal{E}_A > \mathcal{E}_B$ (۳) $r_A < r_B$, $\mathcal{E}_A < \mathcal{E}_B$ (۴) $r_A > r_B$, $\mathcal{E}_A > \mathcal{E}_B$

۱۷۱- نمودار سرعت - زمان جسمی که بر روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. سرعت متوسط این جسم در بازه زمانی که حرکت در جهت محور x بوده، چند متر بر ثانیه است؟



(۱) ۲۰

(۲) ۵

(۳) ۱۰

(۴) نمی‌توان اظهار نظر کرد.

۱۷۲- معادله مکان - زمان جسمی که بر روی محور x حرکت می‌کند، در SI به صورت $t = \sqrt{x-2} + 2$ می‌باشد. نوع حرکت این جسم در بازه زمانی $t_1 = 1\text{s}$ تا $t_2 = 3\text{s}$ چگونه است؟

(۲) کندشونده

(۱) تندشونده

(۴) ابتدا کندشونده و سپس تندشونده

(۳) ابتدا تندشونده و سپس کندشونده

محل انجام محاسبات



۱۷۳- متحرکی با شتاب $-4\vec{i} (\frac{m}{s^2})$ ، روی محور x در حال حرکت است. اگر بردار مکان اولیه این متحرک $\vec{d}_1 = -3\vec{i} (m)$ و بردار سرعت اولیه

آن $4\vec{i} (\frac{m}{s})$ باشد، بردار مکان این متحرک در لحظه $t = 3s$ بر حسب متر در کدام گزینه به درستی آمده است؟

- (۱) $9\vec{i}$ (۲) $-9\vec{i}$ (۳) $3\vec{i}$ (۴) $-3\vec{i}$

۱۷۴- فاصله خروجی شیرآبی از سطح زمین، $80cm$ است و در فاصله‌های زمانی مساوی، قطرات آبی از شیر چکه می‌کنند. در لحظه‌ای که قطره اول به سطح زمین می‌رسد، قطره پنجم از شیر شروع به سقوط می‌کند. در این لحظه فاصله بین دو قطره دوم و چهارم چند متر است؟ (از

مقاومت هوا صرف نظر کنید و $g = 10 \frac{m}{s^2}$)

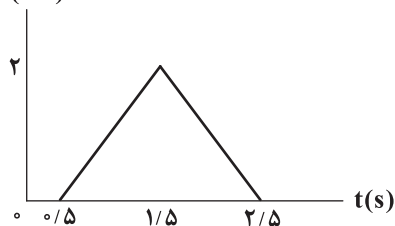
- (۱) $0/2$ (۲) $0/1$ (۳) $0/4$ (۴) $0/3$

۱۷۵- دو شخص به جرم‌های 40 و 50 کیلوگرم با نیروی هم‌اندازه یک‌دیگر را روی سطحی بدون اصطکاک، هل می‌دهند. کدام گزینه می‌تواند جمع اندازه‌های شتاب این دو نفر بر حسب SI باشد؟ (فرض کنید اندازه نیروی $\vec{F}$ ، عددی طبیعی باشد.)

- (۱) $0/85$ (۲) $0/72$ (۳) $0/32$ (۴) $0/3$

۱۷۶- نمودار نیروی خالص وارد بر توپ بیسبال ساکنی که با چوب به آن ضربه زده شده است، مطابق شکل زیر است. تکانه این توپ در

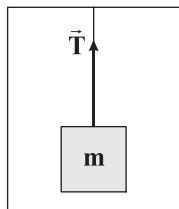
$F(kN)$



لحظه $t = 1/5s$ چند واحد SI است؟

- (۱) 1000
(۲) 2000
(۳) 4000
(۴) 500

۱۷۷- مطابق شکل زیر، آسانسوری در جهت نامعلوم در حال حرکت است. اگر در طی این حرکت، نیروی کشش نخ (T) در حال کاهش باشد، کدام

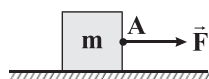


موارد می‌توانند در ارتباط با نوع و جهت حرکت آسانسور درست باشند؟

- (الف) تندشونده رو به بالا
(ب) تندشونده رو به پایین
(ج) کندشونده رو به بالا
(د) کندشونده رو به پایین

- (۱) «الف» و «ج» (۲) «ب» و «ج» (۳) «الف» و «د» (۴) «ب» و «د»

۱۷۸- مطابق شکل زیر، نیروی $\vec{F}$ به بزرگی $60N$ در نقطه A به جسم ساکنی به جرم $10kg$ وارد شده و جسم شروع به حرکت می‌کند. پس از طی مسافتی این نیرو قطع شده و جسم پس از مدتی متوقف می‌شود. اگر مدت زمان حرکت تندشونده، ۲ برابر مدت زمان حرکت کندشونده باشد،



ضریب اصطکاک جنبشی جسم با سطح برابر کدام گزینه است؟ ($g = 10 \frac{N}{kg}$)

- (۱) $0/1$ (۲) $0/8$ (۳) $0/4$ (۴) $0/2$

محل انجام محاسبات



۱۷۹- دو ماهواره A و B با جرم یکسان به دور زمین می‌گردند. اگر اندازه نیروی مرکزگرای وارد بر ماهواره A، ۴ برابر اندازه نیروی مرکزگرای وارد بر ماهواره B باشد، K_A چند برابر K_B است؟

- (۱) ۴ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) ۲ (۴) $\frac{1}{2}$

۱۸۰- شدت صوت حاصل از یک چشمه صوت در یک مکان معین، در فاصله d از چشمه صوت چند میکرووات بر متر مربع باشد تا تراز شدت

صوت آن در آن مکان، ۲۱ دسی بل باشد؟ ($\log 2 = 0.3$)، $I_0 = 10^{-10} \frac{W}{m^2}$ و از جذب انرژی صوتی در محیط صرف نظر کنید).

- (۱) $1/28 \times 10^{-8}$ (۲) $1/28 \times 10^{-2}$ (۳) $2/56 \times 10^{-2}$ (۴) $2/56 \times 10^{-8}$

۱۸۱- یک نوسانگر هماهنگ ساده جرم و فنر، روی سطح افقی بدون اصطکاکی در حال نوسان است. اگر در نقطه بازگشت، ۷۵ درصد جرم وزنه از آن جدا شود، بسامد نوسانات و انرژی مکانیکی نوسانگر

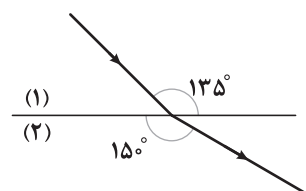
- (۱) ۲۰۰ درصد افزایش می‌یابد. - ثابت می‌ماند. (۲) ۱۰۰ درصد افزایش می‌یابد. - ۱۰۰ درصد افزایش می‌یابد. (۳) ۱۰۰ درصد افزایش می‌یابد. - ثابت می‌ماند. (۴) ۲۰۰ درصد افزایش می‌یابد. - ۱۰۰ درصد افزایش می‌یابد.

۱۸۲- ریسمانی به جرم ۲۰۰g و طول ۲m با نیروی کششی به بزرگی ۴۰N کشیده می‌شود. یک سر ریسمان را با بسامد ۴۰Hz و عمود بر سیم به نوسان در می‌آوریم. موج حاصل در ریسمان در مدت زمان ۲۵ میلی ثانیه، چند سانتی متر در طول ریسمان پیشروی می‌کند؟

- (۱) ۲۵ (۲) ۵۰ (۳) ۱۰۰ (۴) ۲۰۰

۱۸۳- مطابق شکل زیر، یک پرتوی نور تک‌رنگ از محیط شفاف (۱) وارد محیط شفاف (۲) می‌شود. اگر طول موج و بسامد نور در محیط (۱) را به

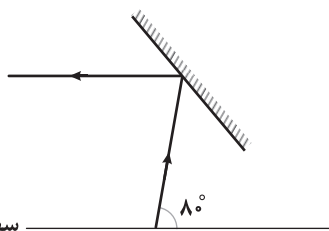
ترتیب با λ_1 و f_1 و طول موج و بسامد نور در محیط (۲) را نیز به ترتیب با λ_2 و f_2 نمایش بدهیم، حاصل عبارت $\frac{f_1}{f_2} \times \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ برابر با کدام



گزینه است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ (۲) $\sqrt{6}$ (۳) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ (۴) ۱

۱۸۴- در شکل زیر، برای آن‌که پرتوی بازتابیده از آینه تخت، موازی با سطح افق باشد، سطح آینه باید چه زاویه‌ای با سطح افق بسازد؟



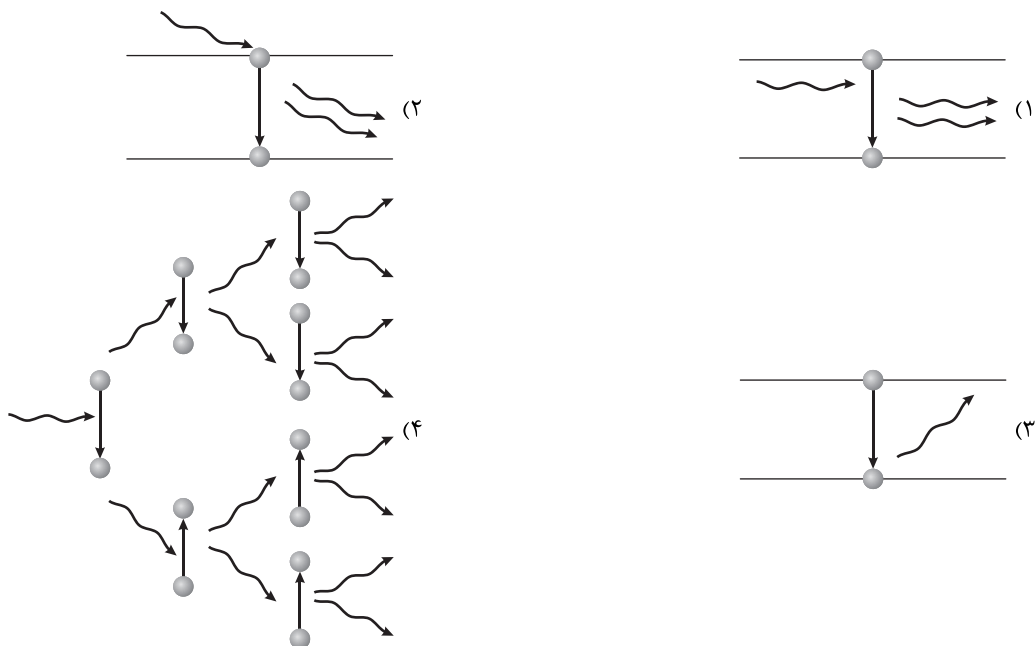
- (۱) ۴۰ (۲) ۵۰ (۳) ۸۰ (۴) ۲۰

سطح افق

محل انجام محاسبات



۱۸۵- شکل داده شده در کدام گزینه نمی تواند نمایش درستی از گسیل خودبه خود و گسیل القایی باشد؟



۱۸۶- در طیف اتم هیدروژن، کمینه بسامد خطوط در رشته بالمر ($n' = 2$)، چند برابر بیشینه بسامد خطوط در رشته پاشن ($n' = 3$) است؟

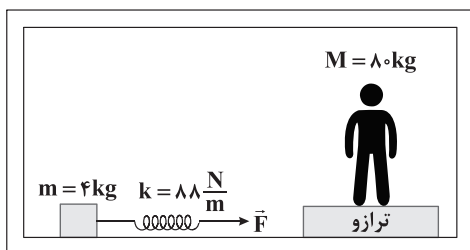
- (۱) $\frac{4}{5}$ (۲) $\frac{36}{7}$ (۳) $\frac{5}{4}$ (۴) $\frac{7}{36}$

۱۸۷- توسط یک دیپازون، در یک طناب با دو انتهای ثابت، یک موج ایستاده با ۳ شکم تولید شده است. اگر اندازه نیروی کشش طناب را ۹ برابر کنیم، بسامد موج ایستاده جدید و تعداد شکم ها به ترتیب از راست به چپ، چند برابر می شوند؟

- (۱) $\frac{1}{3} - 3$ (۲) $3 - 3$ (۳) $3 - 1$ (۴) $\frac{1}{3} - 1$

۱۸۸- یک هسته پرتوزا، بتای مثبت (پوزیترون) تابش می کند. در اثر این تابش، عدد جرمی هسته و عدد اتمی آن

- (۱) تغییر نمی کند - یک واحد کاهش می یابد. (۲) یک واحد کاهش می یابد - تغییر نمی کند.
(۳) یک واحد افزایش می یابد - تغییر نمی کند. (۴) تغییر نمی کند - یک واحد افزایش می یابد.



۱۸۹- مطابق شکل مقابل، شخصی در یک آسانسور در حال حرکت بر روی یک ترازو

ایستاده است. ترازو وزن شخص را 680 N نشان می دهد. اگر افزایش طول فنر، 15 cm باشد، اندازه شتاب حرکت وزنه m چند متر بر مجذور ثانیه است؟
($g = 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}}$ و ضریب اصطکاک جنبشی بین وزنه m و سطح آسانسور،

برابر با $\frac{5}{17}$ است.)

- (۱) $0/8$ (۲) $1/5$ (۳) $1/7$ (۴) $2/3$

۱۹۰- یک لامپ رشته ای با توان 400 W و بازده 8% از فاصله یک کیلومتری توسط شخصی که قطر مردمک چشمش، 2 mm است، دیده می شود.

اگر بسامد نور تابش شده از لامپ، 1000 THz باشد، در هر دقیقه چه تعداد فوتون وارد مردمک های چشم این شخص می شود؟

($h = 4 \times 10^{-15} \text{ eV.s}$, $e = 1/6 \times 10^{-19} \text{ C}$)

- (۱) $1/5 \times 10^9$ (۲) $1/5 \times 10^{12}$ (۳) 3×10^{21} (۴) 3×10^{18}

محل انجام محاسبات



۱۹۱- چه تعداد از عبارت‌های زیر نادرست است؟ (${}_{28}\text{Ni}$, ${}_{27}\text{Co}$, ${}_{26}\text{Fe}$)

- شمار الکترون‌های زیرلایه $3d$ هر سه یون Fe^{2+} , Ni^{2+} و Co^{3+} با هم برابر است.
- نسبت شمار کاتیون به آنیون در منیزیم فسفات، دو برابر همین نسبت در آلومینیم کربنات است.
- فرمول ترکیب یونی حاصل از عنصرهای A و X می‌تواند به صورت AX_3 باشد.
- بیش از نیمی از ده عنصر نخست جدول دوره‌ای در دما و فشار اتاق، گازی شکل هستند.

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

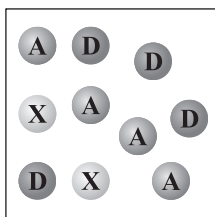
۱۹۲- اگر اتم‌های موجود در یک گرم منیزیم را مطابق شکل زیر روی هم قرار دهیم، اتم‌ها تا چه ارتفاعی برحسب کیلومتر بالا



می‌روند؟ ($r_{\text{Mg}} = 160 \text{ pm}$, $1 \text{ pm} = 10^{-12} \text{ m}$, $\text{Mg} = 24 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$)

(۱) 4×10^6 (۲) 4×10^9
(۳) 8×10^6 (۴) 8×10^9

۱۹۳- شکل زیر یک نمونه تصادفی از اتم‌های هیدروژن را نشان می‌دهد. جرم اتمی میانگین این نمونه به تقریب چند amu است؟ (جرم هر



پروتون و هر نوترون را 1 amu در نظر بگیرید.)

A: پایدارترین ایزوتوپ هیدروژن با هسته شامل نوترون

X: ایزوتوپ پرتوزا و طبیعی هیدروژن

D: پایدارترین ایزوتوپ ساختگی هیدروژن

(۱) ۳/۴ (۲) ۳/۵ (۳) ۲/۶ (۴) ۳/۸

۱۹۴- پس از عنصر X، عنصر A فراوان‌ترین عنصر سازنده سیاره مشتری است. چه تعداد از عبارت‌های زیر درست است؟

- انرژی گرمایی و نور خیره‌کننده خورشید به دلیل تبدیل X به A در واکنش‌های شیمیایی است.
- نقطه جوش A پایین‌تر از نقطه جوش X است.
- عنصر X به حالت آزاد در طبیعت یافت نمی‌شود.

• شمار الکترون‌های جفت نشده در آرایش الکترون - نقطه‌ای A، دو برابر شمار این الکترون‌ها در آرایش الکترون - نقطه‌ای X است.

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۹۵- نسبت شمار جفت الکترون‌های پیوندی به شمار جفت الکترون‌های ناپیوندی ترکیب آلی $\text{C}_7\text{H}_5\text{NCO}$ کدام است؟

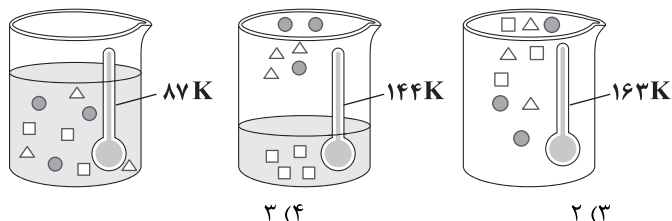
(۱) ۵/۵ (۲) ۱۱/۳ (۳) ۶ (۴) ۲/۵

محل انجام محاسبات



۱۹۶- با توجه به داده‌های جدول، چه تعداد از شکل‌های زیر درست هستند؟

گاز	X	Y	Z	
نقطه انجماد ($^{\circ}\text{C}$)	-۱۸۵	-۱۸۸	-۱۹۴	X: ●
نقطه جوش ($^{\circ}\text{C}$)	-۱۱۸	-۱۳۲	-۱۲۴	Y: □
				Z: △



(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) ۳

۱۹۷- نسبت جرم مولی اکسید یک فلز قلیایی خاکی به جرم مولی پراکسید همان فلز برابر ۰/۹۰۵ است. فلز قلیایی خاکی مورد نظر کدام

است؟ ($\text{O} = 16 \text{ g.mol}^{-1}$) ^{137}Ba (۴) ^{88}Sr (۳) ^{40}Ca (۲) ^{24}Mg (۱)

۱۹۸- کدام یک از مطالب زیر نادرست است؟

(۱) یکی از کاربردهای سومین گاز نجیب جدول دوره‌ای، ایجاد محیط بی‌اثر هنگام جوشکاری است.

(۲) ضخامت لایه اوزون در استراتوسفر حدود ۴۵ کیلومتر است.

(۳) هنگامی که به شکر گرما داده می‌شود، دچار تغییر شیمیایی شده و رنگ آن تغییر می‌کند.

(۴) تفاوت فرمول شیمیایی چربی کوهان شتر و روغن زیتون، مشابه تفاوت فرمول شیمیایی بنزن و سیکلوهگزان است.

۱۹۹- اگر غلظت یون فسفات در محلولی از پتاسیم فسفات برابر ۲۸۵۰ ppm باشد در ۲ لیتر از این محلول چند مول یون پتاسیم وجود دارد؟

($\text{K} = 39, \text{P} = 31, \text{O} = 16 \text{ g.mol}^{-1}, d = 1/1 \text{ g.mL}^{-1}$)

۱/۹۸ (۴)

۱/۶۳ (۳)

۰/۱۹۸ (۲)

۰/۱۶۳ (۱)

۲۰۰- ۲۰ گرم سدیم نیترات را در ۲۵ گرم آب 35°C حل می‌کنیم تا یک محلول پایدار به دست آید. اگر این محلول را تا دمای 10°C سرد کنیم،درصد جرمی سدیم در محلول ایجاد شده برابر ۴/۶٪ است. از دمای 35°C تا 10°C ، چه جرمی از نمک برحسب گرم رسوب کرده است؟($\text{Na} = 23, \text{N} = 14, \text{O} = 16 \text{ g.mol}^{-1}$)

۱۷/۲۲ (۴)

۹/۷۶ (۳)

۱۴/۸۸ (۲)

۱۲/۲۴ (۱)

۲۰۱- کدام یک از مطالب زیر نادرست است؟ ($\text{C} = 12, \text{H} = 1 \text{ g.mol}^{-1}$)(۱) جرم مولی یک آلکین نمی‌تواند برابر 136 g.mol^{-1} باشد.

(۲) فسفر، کربن و اکسیژن جزو عنصرهایی هستند که آلوتروپ (دگر شکل) طبیعی دارند.

(۳) از برج تقطیر نفت خام، علاوه بر هیدروکربن‌ها، مقداری نمک، اسید و آب نیز به دست می‌آید.

(۴) عنصری با عدد اتمی ۸۲ رسانایی الکتریکی و گرمایی بالایی دارد و در اثر ضربه خرد نمی‌شود.

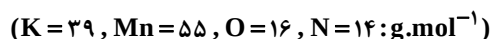
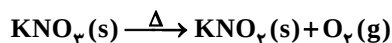
محل انجام محاسبات



۲۰۲- با هیدروژن دار کردن چه تعداد هیدروکربن سیر نشده، می توان آلکانی با نام ۲، ۲- دی متیل پنتان تولید کرد؟ (در ساختار هیدروکربن های سیر نشده می تواند بیش از یک پیوند چندگانه وجود داشته باشد.)

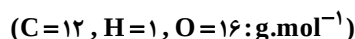
۵ (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴)

۲۰۳- اگر m گرم پتاسیم نیترات با خلوص ۸۰٪ و بازده ۶۰٪ و m گرم پتاسیم پرمنگنات با خلوص ۷۰٪ و بازده ۸۰٪ در دو ظرف جداگانه مطابق واکنش های موازنه نشده زیر تجزیه شوند، مجموع جرم اکسیژن تولید شده در دو واکنش چند گرم است؟



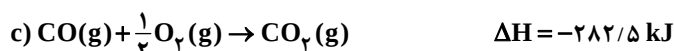
۰/۳۱۱m (۴) ۰/۲۴۵m (۳) ۰/۱۳۲m (۲) ۰/۰۸۹m (۱)

۲۰۴- در تخمیر بی هوازی گلوکز که طی آن گاز کربن دی اکسید و اتانول به دست می آید، محلولی از گلوکز که شامل ۲ مول حل شونده است تخمیر شده و طی آن ۱۵۰ گرم محلول اتانول با درصد جرمی ۹۰ به دست می آید. بازده واکنش چند درصد است؟



۵۱/۳ (۱) ۸۹/۴ (۲) ۷۳/۳ (۳) ۶۶/۰ (۴)

۲۰۵- با توجه به واکنش های زیر برای تبدیل ۱ گرم گرافیت به الماس باید به تقریب کیلوژول گرما شود. ($C=12\text{g.mol}^{-1}$)



۰/۱۷ (۱) آزاد، ۰/۱۷ (۲) مصرف، ۰/۱۷ (۳) آزاد، ۰/۱۷ (۴) مصرف، ۰/۱۷

۲۰۶- با توجه به داده های جدول زیر، تفاوت میان آنتالپی سوختن استیلن و ۱- بوتین چند کیلوژول بر مول است؟ (تمامی اجزای هر دو واکنش گازی شکل هستند.)

پیوند	C—C	C—H	O=O	C=O	O—H	C≡C
$\Delta H(\text{kJ.mol}^{-1})$	۳۵۰	۴۱۵	۵۰۰	۸۰۰	۴۶۵	۸۵۰

۸۵۰ (۱)

۱۵۵۰ (۲)

۱۲۰۰ (۳)

۲۰۵۰ (۴)

۲۰۷- در یک سامانه بسته ۱۲۰۰ گرم سیلیس به همراه آهن (II) سولفید و گاز اکسیژن (به نسبت های استوکیومتری) قرار داده شده تا واکنش زیر انجام شود. اگر پس از گذشت ۱۰ دقیقه، ۵۶ لیتر از حجم گازهای درون سامانه کاسته شود، سرعت متوسط واکنش چند mol.h^{-1} بوده و با

فرض سرعت ثابت، چند دقیقه دیگر لازم است تا واکنش کامل شود؟ (حجم مولی گازها در شرایط آزمایش 28L.mol^{-1})



۳۰، ۱۲ (۱) ۴۰، ۱۲ (۲) ۳۰، ۸ (۳) ۴۰، ۸ (۴)

محل انجام محاسبات



۲۰۸- گرمای حاصل از سوختن ۱۲/۸ گرم متانول می تواند دمای ۳ کیلوگرم اتانول را از 3°C به 7°C برساند، گرمای سوختن متانول چند

کیلوژول بر مول است؟ ($C=12, H=1, O=16:\text{g.mol}^{-1}$, $c_{\text{اتانول}}=2/5 \text{ J.g}^{-1}.\text{C}^{-1}$)

۸۶۰ (۴)

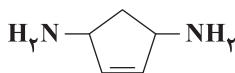
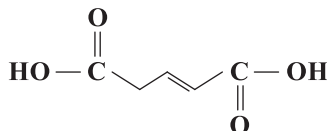
۸۰۰ (۳)

۷۵۰ (۲)

۶۴۰ (۱)

۲۰۹- از واکنش مولکول های زیر در شرایط مناسب یک پلیمر با جرم مولی 2×10^6 گرم بر مول تولید می شود. شمار واحدهای تکرارشونده این

پلیمر به تقریب کدام است؟ ($C=12, H=1, N=14, O=16:\text{g.mol}^{-1}$)



۶۱۴۰ (۱)

۸۲۴۰ (۲)

۱۰۴۱۵ (۳)

۱۱۸۲۵ (۴)

۲۱۰- کدام یک از مطالب زیر نادرست است؟

(۱) کلوئیدها مخلوط هایی ناهمگن و پایدار هستند و برخلاف محلول ها، ظاهری مات و کدر دارند.

(۲) اگر در اوره، گروه کربونیل را با حلقه بنزنی جایگزین کنیم، ترکیب ایجاد شده می تواند در تولید پلی آمید به کار رود.

(۳) برای افزایش قدرت پاک کردن چربی ها، به شوینده ها جوش شیرین اضافه می کنند.

(۴) محلول همه الکترولیت های قوی، رسانای خوبی برای جریان برق هستند.

۲۱۱- pH محلولی شامل سود سوزآور و پتاس برابر ۱۲ است. به ۴۰۰ میلی لیتر از این محلول مقداری جوهرنمک با $\text{pH}=1/7$ اضافه می کنیم تا

سدیم هیدروکسید و پتاسیم هیدروکسید را به طور کامل خنثی کند. اگر نسبت غلظت مولی یون سدیم در محلول اولیه به غلظت مولی یون

کلرید در محلول نهایی برابر ۱ باشد، نسبت غلظت مولی یون سدیم به یون پتاسیم در محلول اولیه کدام است؟

۲ (۴)

 $\frac{1}{3}$ (۳)

۳ (۲)

 $\frac{1}{3}$ (۱)

۲۱۲- در یک محلول چهار اسید HCOOH ، CH_3COOH ، HNO_3 و HCN با غلظت های ۰/۱، ۰/۳، ۰/۲ و ۰/۴ مولار و درجه

یونش ۰/۰۵، ۰/۰۲، ۰/۰۱ و ۰/۰۰۱ موجود است. نسبت غلظت مولی یون هیدرونیوم به یون استات کدام است؟

۲/۲۳ (۴)

۳/۲۲ (۳)

۲/۶۸ (۲)

۲/۸۶ (۱)

۲۱۳- در معادله واکنش زیر پس از موازنه با کوچک ترین اعداد صحیح، تفاوت مجموع ضرایب واکنش دهنده ها و مجموع ضرایب فراورده ها کدام است؟



۴ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

۲۱۴- کدام عبارت ها درست هستند؟

(آ) در سری الکتروشیمیایی علامت E° فلزهایی که قدرت کاهندگی بیشتری از H_2 دارند، منفی است.

(ب) در نیم واکنش آندی مربوط به برقکافت آب، گاز هیدروژن و یون هیدروکسید تولید می شود.

(پ) در واکنش کلی سلول هال به ازای مبادله ۴ مول الکترون، یک مول گاز در قطب منفی تولید می شود.

(ت) با فرض شرایط استاندارد، emf سلول سوختی هیدروژن-اکسیژن، بیشتر از E° کاهش اکسیژن در محیط خنثی است.

«ت»، «پ» (۴)

«پ»، «ب» (۳)

«ت»، «آ» (۲)

«پ»، «آ» (۱)

محل انجام محاسبات



۲۱۵- تفاوت میان پایین‌ترین عدد اکسایش کربن در پارازایلن و بالاترین عدد اکسایش کربن در متیل متانوات کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۵ (۳) ۴ (۴) ۳

۲۱۶- اعداد موجود در گزینه‌ها مربوط به آنتالپی فروپاشی شبکه بلور چهار ترکیب سدیم اکسید، منیزیم اکسید، منیزیم فلوئورید و سدیم

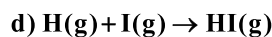
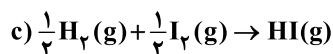
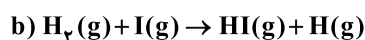
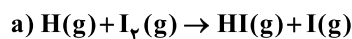
فلوئورید (برحسب $\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$) است. کدام یک از آن‌ها مربوط به ترکیبی است که شعاع یون‌های سازنده آن اختلاف کم‌تری با هم دارند؟

- (۱) ۳۷۹۸ (۲) ۲۹۶۵ (۳) ۲۴۸۸ (۴) ۹۲۶

۲۱۷- چه تعداد از گونه‌های مقابل خطی هستند؟
 C_3O_2 , SCO , H_2Te , N_3^- , NO_2^+

- (۱) ۵ (۲) ۴ (۳) ۳ (۴) ۲

۲۱۸- در کدام گزینه انرژی فعال‌سازی واکنش‌های a تا d درست مقایسه شده است؟



- (۱) $b > a > c > d$ (۲) $b > c > a > d$ (۳) $c > a > b > d$ (۴) $c > b > a > d$

۲۱۹- در یک سامانه بسته ۴ لیتری، ۲ مول A و ۵/۵ مول X را وارد می‌کنیم تا در تعادل گازی $3\text{D} \rightleftharpoons \text{A} + 2\text{X}$ شرکت کنند. اگر در لحظه تعادل،

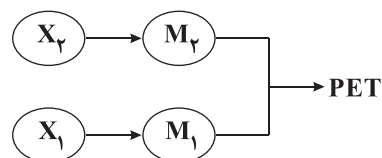
درصد مولی فراورده در مخلوط واکنش ۴۰٪ باشد، مقدار ثابت تعادل کدام است؟

- (۱) ۰/۹۵ (۲) ۱/۸۰ (۳) ۲/۲۰ (۴) ۳/۷۵

۲۲۰- شکل مقابل فرایند کلی سنتز پلیمر PET را نشان می‌دهد که در آن M_1 و M_2 مونومرهای سازنده این پلیمر و X_1 و X_2 مواد اولیه برای

تهیه هر کدام از مونومرها هستند. اگر جرم مولی X_1 کم‌تر از X_2 باشد، چه تعداد از عبارت‌های زیر درست

است؟ ($\text{C}=12$, $\text{H}=1$, $\text{O}=16$: $\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$)



• تفاوت جرم مولی M_1 و M_2 بیشتر از جرم مولی M_1 است.

• برای X_2 حداقل ۳ ایزومر با حلقه بنزنی می‌توان در نظر گرفت.

• حالت‌های فیزیکی X_1 و M_1 در دما و فشار اتاق، متفاوت است.

• PET در اثر واکنش با الکل چوب به مونومرهای سازنده خود تبدیل می‌شود.

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴



آزمون‌های سراسر گاج

گزینه‌درسورا انتخاب کنید.

سال تحصیلی ۱۴۰۱-۱۴۰۰

دفترچه شماره ۴

آزمون جامع ۱

جمعه ۱۴۰۱/۰۳/۲۰

پاسخ‌های تشریحی

پایه دوازدهم ریاضی

دوره دوم متوسطه

نام و نام خانوادگی:	شماره داوطلبی:
تعداد سؤالاتی که باید پاسخ دهید: ۲۲۰	مدت پاسخگویی: ۲۳۰ دقیقه

عناوین مواد امتحانی آزمون گروه آزمایشی علوم ریاضی، تعداد سؤالات و مدت پاسخگویی

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	شماره سؤال		مدت پاسخگویی
			از	تا	
۱	فارسی	۲۵	۱	۲۵	۱۸ دقیقه
۲	زبان عربی	۲۵	۲۶	۵۰	۲۰ دقیقه
۳	دین و زندگی	۲۵	۵۱	۷۵	۱۷ دقیقه
۴	زبان انگلیسی	۲۵	۷۶	۱۰۰	۲۰ دقیقه
۵	ریاضیات	۵۰	۱۰۱	۱۵۰	۷۵ دقیقه
۶	فیزیک	۴۰	۱۵۱	۱۹۰	۵۰ دقیقه
۷	شیمی	۳۰	۱۹۱	۲۲۰	۳۰ دقیقه





ریاضیات

عدد ۱۰ در بازه مورد نظر است. بنابراین:

$$\begin{cases} n^2 + 9n > 10 \Rightarrow n^2 + 9n - 10 > 0 \Rightarrow n < -10 \text{ یا } n > 1 \\ \frac{11n-5}{n} < 10 \Rightarrow \frac{11n-5}{n} - 10 < 0 \Rightarrow \frac{11n-5-10n}{n} < 0 \\ \Rightarrow \frac{n-5}{n} < 0 \Rightarrow 0 < n < 5 \end{cases}$$

از اشتراک مجموعه جواب‌های بالا حدود n به صورت $(1, 5)$ است. بنابراین فقط شامل اعداد طبیعی ۲، ۳، ۴ می‌باشد. پس n فقط سه عدد طبیعی می‌تواند باشد.

۱۰۲

$$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow m_L = -\sqrt{3}$$

$$L: y = -\sqrt{3}x + 6 \xrightarrow{y=0} x = \frac{6}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} \Rightarrow c = 2\sqrt{3}$$

با جاگذاری $y = \sqrt{3}$ مختصات نقطه برخورد دو خط به دست می‌آید.

$$\sqrt{3} = -\sqrt{3}x + 6 \Rightarrow \sqrt{3}x = 6 - \sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{6}{\sqrt{3}} - 1$$

نقطه $(\frac{6}{\sqrt{3}} - 1, \sqrt{3})$ روی خط P قرار دارد.

$$P: y - \sqrt{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}(x - \frac{6}{\sqrt{3}} + 1) \Rightarrow \sqrt{3}y - 3 = x - 2\sqrt{3} + 1$$

$$\xrightarrow{x=0} \sqrt{3}y - 3 = -2\sqrt{3} + 1 \Rightarrow y = -2 + \frac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow b = -2 + \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$\xrightarrow{y=0} -3 = x - 2\sqrt{3} + 1 \Rightarrow x = 2\sqrt{3} - 4 \Rightarrow a = 2\sqrt{3} - 4$$

$$2a + \sqrt{3}b - c = 2(2\sqrt{3} - 4) + \sqrt{3}(-2 + \frac{4}{\sqrt{3}}) - 2\sqrt{3}$$

$$= 4\sqrt{3} - 8 - 2\sqrt{3} + 4 - 2\sqrt{3} = -4$$

۱۰۳

$$(2^3 \times 2^3)^{\frac{1}{2}} = (2^6)^{\frac{1}{2}} = 2^3 = 2^{\Delta A} \Rightarrow \frac{\Delta}{3} = \Delta A \Rightarrow A = \frac{1}{3}$$

$$(2^2 \times 2^3)^{\frac{1}{3}} = (2^5)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{5}{3}} = 2^{\Delta B} \Rightarrow \frac{\Delta}{6} = \Delta B \Rightarrow B = \frac{\Delta}{18}$$

$$\frac{1}{A} + \frac{1}{B} = 3 + \frac{18}{\Delta} = \frac{39}{\Delta}$$

۱۰۴

$$x_s = \frac{-b}{2a} = \frac{-a}{-4} = 1 \Rightarrow a = 4$$

$$A(0, 2) \in (\text{سه‌می}) \Rightarrow 0 + 0 + b = 2 \Rightarrow b = 2$$

$$y = -2x^2 + 4x + 2 \xrightarrow{(1, m)} m = -2 + 4 + 2 = 4 \Rightarrow m = 4$$

$$2a + b - m = 8 + 2 - 4 = 6$$

روز کاری من خیلی زود شروع می‌شود. از دوشنبه تا جمعه ساعت سه و نیم بیدار می‌شوم و دوش می‌گیرم و صبحانه و میوه و یک فنجان قهوه می‌خورم. باید آن [قهوه] را بنوشم تا بیدار بمانم. من معمولاً در ابتدا احساس خواب‌آلودگی می‌کنم اما بعد از چند دقیقه (احساس خواب‌آلودگی‌ام از بین می‌رود). من معمولاً ساعت چهار و ده دقیقه از خانه خارج می‌شوم زیرا ماشین همیشه چند دقیقه زودتر می‌رسد (احساس خواب‌آلودگی‌ام از بین می‌رود). هزار بار به راننده گفته‌ام زود نیاید، اما گوش نمی‌دهد. او می‌گوید که شب‌ها فقط ۳ ساعت می‌خوابد و فکر می‌کند این برایش کافی است. او هر روز صبح به باشگاه می‌رود، بنابراین می‌خواهد من را زودتر بیاورد تا به باشگاهش دیر نرسد. حدود ساعت پنج به استودیو می‌رسم و کار را شروع می‌کنم. برنامه من صبح بخیر بریتانیا از ساعت هفت شروع می‌شود و در ساعت نه به پایان می‌رسد. بعد از پایان کار، یک فنجان قهوه دیگر می‌نوشم و با تعدادی از همکارانم در مورد کار صحبت می‌کنم. ما معمولاً برای برنامه‌های آینده برنامه‌ریزی می‌کنیم و در مورد مزایا و معایب کارم در آن روز صحبت می‌کنیم. من دوست دارم نظر دیگران را در مورد شغلم بدانم، بنابراین می‌توانم روز به روز آن را بهتر کنم. سپس ساعت ده و ربع استودیو را ترک می‌کنم. بعد از آن به خرید می‌روم و بعضی از دوستانم را ملاقات می‌کنم. ساعت سه به خانه می‌رسم. زنی در کارخانه و اتو کردن به من کمک می‌کند. [سپس] روزنامه می‌خوانم و کمی کار می‌کنم. سپس شوهرم ساعت پنج و نیم عصر به خانه می‌رسد و من شام را درست می‌کنم. عصر در خانه می‌مانیم. ما بیرون نمی‌رویم چون من خیلی زود می‌خوابم. ما معمولاً تلویزیون نگاه می‌کنیم و بعد ساعت هشت و نیم به رختخواب می‌روم، معمولاً تا ساعت نه خوابم [برده است]. فکر می‌کنم کارم خیلی جالب است اما دوست ندارم خیلی زود بیدار شوم. آخر هفته‌ها تا ساعت ده بیدار نمی‌شوم. ما عصرها اغلب دوستان را می‌بینیم یا به سینما می‌رویم. اما من همیشه دوشنبه صبح دوباره زود بیدارم.

۹۷ ۴ کدام یک از موارد زیر در مورد متن صحیح است؟

(۱) آن زن هر روز ماشین خود به محل کار می‌راند.

(۲) او بعد از تمام شدن برنامه به خانه می‌رود.

(۳) او همه چیز را در مورد شغلش دوست دارد.

(۴) تا زمانی که شوهرش به خانه برسد او در خانه تنها نیست.

۹۸ ۱ او وقتی که بعد از ظهر به خانه می‌رسد چه می‌کند؟

(۱) روزنامه می‌خواند.

(۲) او تلویزیون تماشا می‌کند.

(۳) دوستانش را به خانه خود دعوت می‌کند.

(۴) او شام می‌پزد.

۹۹ ۳ ضمیر "It" در سطر ۳ به چه چیزی اشاره دارد؟

(۱) خروج از خانه نوشیدن قهوه

(۲) صرف صبحانه

(۳) احساس خواب‌آلودگی

۱۰۰ ۲ [برنامه] صبح‌بخیر بریتانیا چقدر طول می‌کشد؟

(۱) یک ساعت دو ساعت

(۲) هفت ساعت (۳) متفاوت است.





۱۰۹ ۱ توجه کنید که دامنه و برد تابع $\log_p x$ به ترتیب $(0, +\infty)$ و $\mathbb{R}$ می باشد. پس:

$$(f \circ f^{-1})(x) = x, D = \mathbb{R} \quad \xrightarrow{\cap} D = (0, +\infty)$$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x, D = (0, +\infty)$$

اکنون معادله داده شده را مرتب می کنیم:

$$x^2 - 4 - x = x \Rightarrow x^2 - 2x - 4 = 0$$

$$\Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{5} \xrightarrow{x > 0} x = 1 + \sqrt{5}$$

سه واحد به طرف راست $y = 2x - 3 + |x - 3|$

۸ واحد به طرف پایین $y = 2x - 3 + |x - 3| - 8$

برای یافتن محل برخورد با محور x ها باید تابع را برابر صفر قرار دهیم.

$$2x - 3 + |x - 3| - 8 = 0 \Rightarrow 2x - 3 + |x - 3| = 8 \Rightarrow x - 3 + |x - 3| = 3$$

$$\begin{cases} x \geq 3 \Rightarrow x - 3 + x - 3 = 3 \Rightarrow 2x = 9 \Rightarrow x = 4.5 \\ x < 3 \Rightarrow x - 3 - x + 3 = 3 \Rightarrow 0 = 3 \Rightarrow \text{جواب ندارد.} \end{cases}$$

$$\frac{\sin(270^\circ - 2^\circ) + 3\cos(90^\circ + 2^\circ)}{2\sin(180^\circ + 2^\circ) + \cos(360^\circ + 2^\circ)} = \frac{-\cos 2^\circ - 3\sin 2^\circ}{-2\sin 2^\circ + \cos 2^\circ}$$

صورت و مخرج را بر $\cos 2^\circ$ تقسیم می کنیم.

$$= \frac{-1 - 3\tan 2^\circ}{-2\tan 2^\circ + 1} = \frac{-(1+3k)}{-(2k-1)} = \frac{1+3k}{2k-1}$$

روش اول: ۴ ۱۱۲

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x} - \sqrt{x+2} - 2}{x^2 - 4} \times \frac{\sqrt{3x} - \sqrt{x+2} + 2}{\sqrt{3x} - \sqrt{x+2} + 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x - 4 - \sqrt{x+2}}{(x^2 - 4)(\sqrt{3x} - \sqrt{x+2} + 2)} \times \frac{3x - 4 + \sqrt{x+2}}{3x - 4 + \sqrt{x+2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(3x - 4)^2 - (x + 2)}{(x^2 - 4)(\sqrt{3x} - \sqrt{x+2} + 2)(3x - 4 + \sqrt{x+2})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{9x^2 - 25x + 14}{(x^2 - 4)(\sqrt{3x} - \sqrt{x+2} + 2)(3x - 4 + \sqrt{x+2})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(9x-7)}{(x-2)(x+2)(\sqrt{3x} - \sqrt{x+2} + 2)(3x - 4 + \sqrt{x+2})}$$

$$= \frac{11}{4 \times 4 \times 4} = \frac{11}{64}$$

روش دوم: (هویتال)

$$\xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{3 - \frac{1}{2\sqrt{x+2}}}{2\sqrt{x+2}}}{2x} = \frac{11}{64}$$

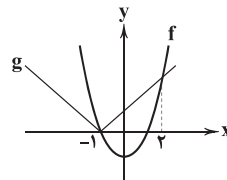
۱۱۳ تابع اکیداً صعودی، پیوسته و $f(0) = 1$ است، پس:

$$f(\lambda^{|x-2|} - 2\sqrt{2}) < f(0) \Rightarrow \lambda^{|x-2|} - 2\sqrt{2} < 0 \Rightarrow \lambda^{|x-2|} < 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow 2^{\frac{3}{2}|x-2|} < 2^{\frac{3}{2}} \Rightarrow |x-2| < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} < x-2 < \frac{1}{2}$$

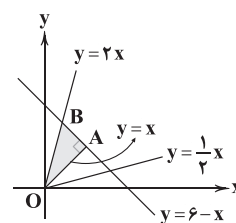
$$\Rightarrow \frac{3}{2} < x < \frac{5}{2}$$

$$x^2 - 1 = |x + 1| \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = x + 1 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \end{cases} \\ x^2 - 1 = -x - 1 \Rightarrow x^2 + x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases} \end{cases}$$



بنابراین در بازه $(-1, 2)$ نمودار $f(x)$ پایین تر از $g(x)$ قرار دارد.

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow b - a = 2 - (-1) = 3$$



$$x = 6 - x \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow A \left(\frac{3}{\sqrt{2}} \right) \Rightarrow OA = 3\sqrt{2}$$

$$2x = 6 - x \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow B \left(\frac{2}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{(3-2)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{2} \Rightarrow S_{OAB} = \frac{3\sqrt{2} \times \sqrt{2}}{2} = 3$$

$$\sqrt{x+2} \geq 0 \xrightarrow{-3} \sqrt{x+2} - 3 \geq -3 \Rightarrow y \geq -3$$

$$\Rightarrow R_f = [-3, +\infty) \Rightarrow D_{f^{-1}} = [-3, +\infty)$$

$$y = \sqrt{x+2} - 3 \Rightarrow y + 3 = \sqrt{x+2}$$

به توان ۲ می رسانیم

$$\Rightarrow x = y^2 + 6y + 9 \Rightarrow f^{-1}(x) = x^2 + 6x + 9$$

$$f^{-1}(x) = g(x) \Rightarrow x^2 + 6x + 9 = 7x + 27 \Rightarrow x^2 - x - 20 = 0$$

$$\Rightarrow (x-5)(x+4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{قق } x = -4 \\ \text{قق } x = 5 \end{cases}$$

$$x = 5 \Rightarrow y = 6 \Rightarrow A \left(\frac{5}{\sqrt{2}} \right) \Rightarrow OA = \sqrt{x_A^2 + y_A^2} = \sqrt{5^2 + 6^2} = \sqrt{38} \approx 6.16$$

۱۰۸ $(f \circ g)(x) - (g \circ f)(x) = x^2 + 3$

$$\Rightarrow (2x+1)^2 + 2(2x+1) + 5 - 2(x^2 + 2x + 5) - 1 = x^2 + 3$$

$$\Rightarrow 4x^2 + 4x + 1 + 4x + 2 + 5 - 2x^2 - 4x - 10 - 1 = x^2 + 3$$

$$\Rightarrow x^2 + 4x - 6 = 0 \Rightarrow \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{-4}{-6} = \frac{2}{3}$$



$$g(x) = \frac{1}{f(x)} \Rightarrow g'(x) = \frac{-f'(x)}{f^2(x)}$$

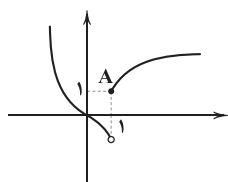
$$\Rightarrow g'(1) = \frac{-f'(1)}{f^2(1)} = \frac{-18}{4} = -\frac{9}{2}$$

حال معادله خط مماس را می‌نویسیم:

$$g(1) = \frac{1}{f(1)} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow (1, -\frac{1}{2}) \in g$$

$$y + \frac{1}{2} = -\frac{9}{2}(x-1) \xrightarrow{x=0} y = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4$$

نمودار را رسم می‌کنیم: **۱۲۱ ۳**



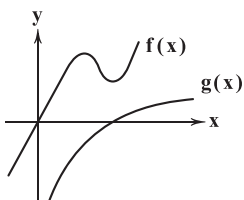
ملاحظه می‌کنید که نقطه A یک نقطه بحرانی است، اما اکسترمم نسبی یا مطلق نیست.

معادله را به صورت $27(2x^3 - 5x^2 + 4x) = \log x$ تبدیل

می‌کنیم. دو تابع $f(x) = 27(2x^3 - 5x^2 + 4x)$ و $g(x) = \log x$ را رسم می‌کنیم.

$$f'(x) = 27(6x^2 - 10x + 4) = 0 \Rightarrow x = 1, \frac{2}{3}$$

نقاط $A(1, 27)$ و $B(\frac{2}{3}, 28)$ به ترتیب min نسبی و max نسبی تابع $f(x)$ است. نمودار تقریبی دو تابع f و g را ببینید:



دو تابع برخوردی ندارند، پس معادله فوق ریشه حقیقی ندارد.

گزاره یک شرطی، فقط در یک حالت نادرست است. **۱۲۳ ۱**

این‌که مقدم درست و تالی نادرست باشد.

پس مقدم درست است یعنی p درست و $\sim r$ نیز درست پس r نادرست است.

از طرفی تالی نادرست است پس $p \vee q \sim p$ نادرست است.

یعنی q نیز نادرست است بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

۱۲۴ ۴

$$B \cap C = \{\delta\} \Rightarrow A \times (B \cap C) = \{(2, \delta), (4, \delta)\}$$

$$B \cup C = \{1, 3, \delta\}$$

$$A \times (B \cup C) = \{(2, 1), (2, \delta), (2, 3), (4, 3), (4, 1), (4, \delta)\}$$

از طرفی گزینه (۱) و (۳) نادرست است زیرا جواب مسأله مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب است. بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

۱۱۴ ۳ تابع $f(x) = a(x+4)^2$ به صورت $f(x) = a(x+4)^2$ خواهد بود.

تابع $g(x)$ روی $\mathbb{R}$ نزولی اکید است. پس نمی‌تواند درجه دوم باشد و حتماً باید درجه اول باشد و در نتیجه $a = -2$ است.

$$g(x) = 2x^2 + f(x) = 2x^2 - 2(x+4)^2 = -2(8x+16) = -16x - 32$$

$$(f+g)(1) = f(1) + g(1) = -2(1+4)^2 + (-16-32)$$

$$= -2 \times 25 - 48 = -98$$

۱۱۵ ۳ ابتدا عبارت داده شده را به ساده‌ترین صورت می‌نویسیم و

توان‌ها را از بین می‌بریم:

$$f(x) = 1 - \sin^2 3x + \cos 6x = 1 - \frac{1 - \cos 6x}{2} + \cos 6x$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos 6x \Rightarrow T = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

۱۱۶ ۲ به کمک رابطه $x = \arccos \frac{1}{\cos^2 x}$ داریم:

$$\tan^4 x = 1 + \tan^2 x + 5 \Rightarrow \tan^4 x - \tan^2 x - 6 = 0$$

$$\Rightarrow (\tan^2 x + 2)(\tan^2 x - 3) = 0 \Rightarrow \tan^2 x = 3$$

$$\Rightarrow \tan^2 x = \tan^2 \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

۱۱۷ ۳ ابتدا حد براکت‌ها را حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} [-x] = [-(2^-)] = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} [2x^2] = [2 \times 4^-] = [8^-] = 7$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{[-x] + 2/5}{4x + [2x^2] - 15} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-2 + 2/5}{4x + 7 - 15}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{0/5}{4(x-2)} = \frac{0/5}{0^-} = -\infty$$

۱۱۸ ۲

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^{2x-1}}{9^x} = \frac{1}{3} \Rightarrow y = \frac{1}{3} \text{ (مجاانب افقی)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3^{1-2x}}{9^{-x}} = -3 \Rightarrow y = -3 \text{ (مجاانب افقی)}$$

فاصلهٔ مجانب‌های افقی برابر است با:

$$\left| \frac{1}{3} - (-3) \right| = \frac{10}{3}$$

۱۱۹ ۲

$$g'(x) = (1 + \tan^2 x) f'(\tan x) = (1 + \tan^2 x) \times \frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = \tan^2 x$$

$$\Rightarrow g''(x) = 2 \tan x (1 + \tan^2 x) \Rightarrow g''\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \times 2 = 4$$

۱۲۰ ۲ به کمک تعریف مشتق داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + 2}{(x-1)(x+2)} = 6 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - (-2)}{x-1} \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+2} = 6$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - (-2)}{x-1} = 18 \Rightarrow \begin{cases} f'(1) = 18 \\ f(1) = -2 \end{cases}$$



$$\frac{10+22+26+29+34+x+42+67+70+y}{10} = 42$$

۱۲۹ ۳

$$\Rightarrow 300 + x + y = 420 \Rightarrow x + y = 120$$

$$\frac{34+x}{2} = 35 \Rightarrow x = 36$$

و هم چنین

$$\Rightarrow y = 84$$

$$\text{بنابراین: } \frac{y}{x} = \frac{84}{36} = \frac{7}{3}$$

$$(627, 429) = 33, [33, 154] = 462$$

۱۳۰ ۱

$$9x + 5y = 462 \Rightarrow 9x \equiv 462 \xrightarrow{(9,5)=1} 3x \equiv 154$$

$$\Rightarrow 3x \equiv 154 + 5 \Rightarrow 3x \equiv 159 \xrightarrow{(3,5)=1} x \equiv 53 \equiv 3$$

$$\Rightarrow x = 5k + 3 \quad \text{در معادله سیاله قرار می دهیم.}$$

$$9(5k+3) + 5y = 462 \Rightarrow 5y = -45k + 423$$

$$\Rightarrow y = -9k + 84 \Rightarrow x + y = -4k + 90$$

به ازای $k=22$ کمترین مقدار مثبت $x+y$ حاصل می شود که مقدار آن ۲ است.

۱۳۱ ۳ می دانید که:

(الف)

$$\begin{cases} a \equiv m \pmod{b} \\ a \equiv n \pmod{b} \Rightarrow a \equiv [m, n, t] \pmod{b} \\ a \equiv t \pmod{b} \end{cases}$$

ب) اگر $a \equiv m \pmod{b}$ و $n \mid m$ آن گاه $a \equiv n \pmod{b}$

$$\begin{cases} a \equiv 3 \pmod{2} \Rightarrow a \equiv -1 \\ a \equiv 4 \pmod{3} \Rightarrow a \equiv -1 \Rightarrow a \equiv -1 \xrightarrow{3 \times 60} a \equiv -1 \Rightarrow a \equiv 29 \\ a \equiv 5 \pmod{4} \Rightarrow a \equiv -1 \end{cases}$$

۱۳۲ ۱ می دانید که: برای یافتن باقی مانده تقسیم بر عدد ۴ کافی است. دو رقم سمت راست آن را بر ۴ تقسیم کنیم.

$$\overline{a23b6} \equiv 0 \xrightarrow{4 \mid 36, 9 \mid 36} \begin{cases} \overline{a23b6} \equiv 0 \\ \overline{a23b6} \equiv 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overline{b6} \equiv 0 \Rightarrow b = 1, 3, 5, 7, 9 \\ a + b + 11 \equiv 0 \Rightarrow a + b \equiv -11 \equiv 7 \equiv 16 \end{cases}$$

b	۱	۳	۵	۷	۹
a	۶	۴	۲	۹	۷

بنابراین ۵ جواب وجود دارد.

۱۲۵ ۳ تعداد یک را x و تعداد ۲ را y و تعداد ۳ را z در نظر

$$x + 2y + 3z = 10, x + y + z = 7$$

می گیریم، خواهیم داشت:

بنابراین $y + 2z = 3$ پس:

$$\begin{cases} y = 1, z = 1 \Rightarrow x = 5 \\ \text{یا} \\ y = 3, z = 0 \Rightarrow x = 4 \end{cases}$$

$$\text{تعداد} = \frac{7!}{5!} + \frac{7!}{4! \times 3!} = 42 + 35 = 77$$

۱۲۶ ۱

$$\begin{aligned} P(B|A \cup B') &= \frac{P(B \cap (A \cup B'))}{P(A \cup B')} \\ &= \frac{P(A \cap B)}{P(A \cup B')} = \frac{P(A \cap B)}{P(A) + P(B') - P(A \cap B')} \\ &= \frac{P(A) - P(A \cap B')}{0.7 + 0.6 - 0.5} = \frac{0.8}{1.8} = \frac{4}{9} \end{aligned}$$

۱۲۷ ۱

(۱) E_1 : پیشامد هر ۵ تا توپ سفید

(۲) E_2 : پیشامد ۴ تا توپ سفید و یکی رنگ دیگر

(۳) E_3 : پیشامد ۳ تا توپ سفید و ۲ تا رنگ دیگر

(۴) E_4 : پیشامد ۲ تا توپ سفید و ۳ تا رنگ دیگر

بنابراین:

$$P(E_1) = P(E_2) = P(E_3) = P(E_4) = \frac{1}{4}$$

فرض کنید W پیشامد این باشد که دو توپ بیرون آمده سفید است. بنابراین:

$$P(W|E_1) = 1$$

$$P(W|E_2) = \frac{C(4, 2)}{C(5, 2)} = \frac{3}{5}$$

$$P(W|E_3) = \frac{C(3, 2)}{C(5, 2)} = \frac{3}{10}$$

$$P(W|E_4) = \frac{C(2, 2)}{C(5, 2)} = \frac{1}{10}$$

می خواهیم $P(E_1|W)$ را محاسبه کنیم، طبق قانون بیز خواهیم داشت:

$$P(E_1|W) = \frac{P(E_1) \times P(W|E_1)}{P(W)}$$

$$= \frac{1 \times \frac{1}{4}}{1 \times \frac{1}{4} + \frac{3}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{10} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{10} \times \frac{1}{4}} = \frac{10}{10 + 6 + 3 + 1} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

$$\bar{x} = \frac{100 \times 40 + 3 + 27 - 30 - 70}{100} = 39/3$$

۱۲۸ ۲

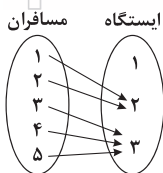
$$\Sigma x_i^2 = N(\sigma^2 + \bar{x}^2)$$

$$\Sigma x_i^2 = 100(100 + 1600) = 170000$$

$$\Sigma x_i^2 = 170000 - (30)^2 - (70)^2 + (3)^2 + (27)^2$$

$$= 170000 - 900 - 4900 + 9 + 729 = 164938$$

$$\sigma' = \sqrt{\frac{164938}{100} - (39/3)^2} = 10/24$$

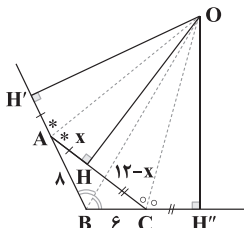


یکی از حالت‌های تابع غیرپوشا در نمودار مشخص شده است.

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

$$= 93 = 25 + 25 + 25 - 1 - 1 - 1 + 0$$

اولاً با توجه به ویژگی نقاط روی نیمساز زاویه، داریم:



$$\begin{cases} \triangle OAH \cong \triangle OAH' \Rightarrow OH = OH' \\ \triangle OCH \cong \triangle OCH'' \Rightarrow OH = OH'' \end{cases}$$

یعنی O روی نیمساز داخلی زاویه B نیز هست.

حال اگر فرض کنیم $AH = x$ ، داریم: $CH = 12 - x$ و به کمک قواعد همنهشتی در مثلث، خواهیم داشت:

$$\triangle OAH \cong \triangle OAH' \Rightarrow AH' = AH = x$$

$$\triangle OCH \cong \triangle OCH'' \Rightarrow CH'' = CH = 12 - x$$

$$\triangle OBH' \cong \triangle OBH'' \Rightarrow BH' = BH'' \Rightarrow BA + AH' = BC + CH''$$

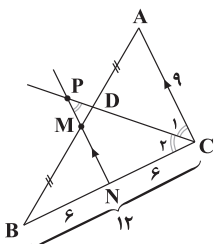
$$\Rightarrow 8 + x = 6 + 12 - x \Rightarrow 2x = 10 \Rightarrow x = 5$$

$$\Rightarrow AH = 5$$

مطابق شکل $MN \parallel AC$ و M وسط AB است. پس طبق

قضیه تالس، داریم:

$$\frac{BM}{MA} = \frac{BN}{NC} = 1 \Rightarrow BN = NC = \frac{12}{2} = 6$$



از طرفی طبق تعمیم قضیه تالس، داریم:

$$\frac{BM}{BA} = \frac{MN}{AC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{MN}{9} \Rightarrow MN = \frac{9}{2} = 4.5$$

از سوی دیگر طبق قضیه خطوط موازی و مورب، داریم:

$$\begin{cases} MP \parallel AC, \text{ مورب } PC \Rightarrow \hat{P} = \hat{C}_1 \Rightarrow \hat{P} = \hat{C}_2 \\ CD: \text{ نیمساز } \Rightarrow \hat{C}_1 = \hat{C}_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \triangle NPC \text{ متساوی الساقین} \Rightarrow PN = NC = 6$$

$$MP = NP - MN = 6 - 4.5 = 1.5 \quad \text{بنابراین اندازه } MP, \text{ برابر است با:}$$

۴ ۱۳۳ بررسی گزینه‌ها:

(۱) عدد احاطه‌گری گراف ۳ است زیرا مجموعه $\{m, n, j\}$ یک مجموعه احاطه‌گر می‌نیمد.(۲) گراف دارای ۸ مجموعه احاطه‌گر می‌نیمد (مجموعه) است. اگر از بین رئوس m و h یکی و از بین رئوس g و n نیز یکی و همچنین از بین رئوس i و j یکی را انتخاب کنیم یک مجموعه احاطه‌گر می‌نیمد خواهیم داشت.

$$\text{تعداد کل } 7 - \text{مجموعه‌ها} = \binom{2}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{2}{1} = 8$$

(۳) مجموعه $\{a, b, c, d, e, f\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال است زیرا هر رأس از این مجموعه را اگر حذف کنیم دیگر احاطه‌گر نخواهد بود.(۴) مجموعه $\{h, g, i, j\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال نیست. زیرا اگر رأس j را از مجموعه حذف کنیم، گراف همچنان احاطه‌گر است. بنابراین گزینه (۴) نادرست است.

۳ ۱۳۴ می‌دانید که:

$$|A| = |S| - |A'|$$

$$|S|: x_1 + x_2 + x_3 = 10 \quad (x_i \geq 3)$$

$$\xrightarrow{\text{۳ شی به } x_1} \text{تعداد جواب‌ها} = \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{7+3-1}{3-1} = \binom{9}{2} = 36$$

$$|A|: \begin{cases} x_1 \geq 3 \\ x_2 \leq 4 \end{cases} \xrightarrow{\text{متمم}} |A'|: \begin{cases} x_1 \geq 3 \\ x_2 \geq 5 \end{cases} \xrightarrow{\text{۵ شی به } x_2} x_1 + x_2 + x_3 = 2$$

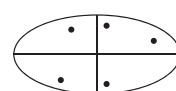
$$\Rightarrow \text{تعداد جواب‌ها} = \binom{2+3-1}{3-1} = \binom{4}{2} = 6$$

$$|A| = |S| - |A'| = 36 - 6 = 30$$

۴ ۱۳۵ می‌دانید که:

$$\begin{cases} \text{قطر بزرگ } AA' = 2a \\ \text{قطر کوچک } BB' = 2b \\ \text{خروج از مرکز } e = \frac{c}{a} \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases}$$

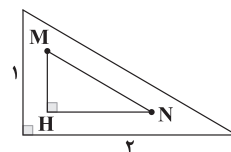
بیضی را به ۴ قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم. (تعداد لانه‌های کبوتر)



$$AA' = 2a = 4 \Rightarrow a = 2$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \xrightarrow{a=2} c = \sqrt{3}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b^2 = 4 - 3 = 1 \Rightarrow b = 1$$



$$MH < 1 \xrightarrow{\text{توان } 2} MH^2 < 1$$

$$NH < 2 \xrightarrow{\text{توان } 2} NH^2 < 4$$

$$\underbrace{MH^2 + NH^2}_{MN^2} < 5 \Rightarrow MN < \sqrt{5}$$

تعداد حالت‌های پیاده شدن مسافران با توجه به شرایط مسئله

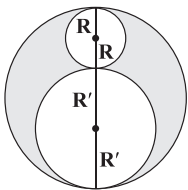
معادل توزیع ۵ شی متمایز در ۳ جعبه متمایز است به شرطی که حداقل یک

جعبه خالی بماند. (تعداد توابع غیرپوشا)



۱۴۱ ۳ اولاً با توجه به شکل، داریم:

$$R + R + R' + R' = 2 \times 25 \Rightarrow 2R + 2R' = 50 \Rightarrow R + R' = 25 \quad (1)$$



ثانیاً می‌دانیم اندازه مماس مشترک خارجی دو دایره مماس بیرون از رابطه $2\sqrt{RR'}$ به دست می‌آید، پس:

$$2\sqrt{RR'} = 24 \Rightarrow \sqrt{RR'} = 12 \Rightarrow RR' = 144 \quad (2)$$

با حل دستگاه دو رابطه (۱) و (۲) داریم:

$$\begin{cases} R + R' = 25 \\ RR' = 144 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R = 9 \\ R' = 16 \end{cases}$$

اینک مساحت قسمت هاشورخورده را به دست می‌آوریم:

$$S_{\text{هاشورخورده}} = S_{\text{دایره بزرگ}} - (S_R + S_{R'}) = 625\pi - (81\pi + 256\pi) = 288\pi$$

و سپس مجموع محیط‌های سه دایره را به دست می‌آوریم:

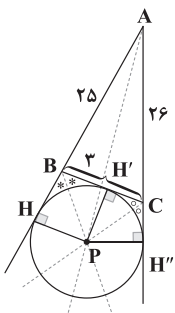
$$P + P_R + P_{R'} = 50\pi + 18\pi + 32\pi = 100\pi$$

بنابراین نسبت مقدار مساحت هاشورخورده به مقدار مجموع محیط‌ها برابر است با:

$$\frac{288\pi}{100\pi} = \frac{2}{11}$$

۱۴۲ ۳ می‌دانیم نیمساز داخلی رأس A با نیمسازهای خارجی رئوس

B و C در مرکز دایره محاطی خارجی نظیر ضلع BC هم‌رسند پس نقطه P مرکز دایره محاطی خارجی مماس بر ضلع BC است.



از طرفی می‌دانیم فاصله مرکز دایره محاطی تا هر ضلع برابر است با شعاع دایره محاطی، پس برای محاسبه فاصله نقطه P تا ضلع AB کافی است شعاع دایره محاطی خارجی نظیر ضلع BC را به دست آوریم و داریم:

$$P = \frac{AB + AC + BC}{2} = \frac{25 + 26 + 3}{2} = \frac{54}{2} = 27$$

$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} = \sqrt{27 \times 2 \times 1 \times 24} = \sqrt{1296} = 36$$

$$\Rightarrow PH' = r_a = \frac{S}{P-a} = \frac{36}{27-3} = \frac{36}{24} = \frac{3}{2}$$

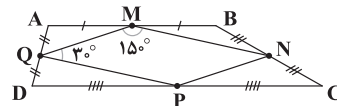
۱۴۳ ۱ اولاً با توجه به اطلاعات مسئله بایستی دریابیم که نقطه O،

نقطه تلاقی امتداد ساقهای دوزنقه و نقطه O'، نقطه تلاقی قطرهای دوزنقه است، زیرا به کمک تعمیم قضیه تالس، داریم:

$$AB \parallel DC \Rightarrow \frac{OD}{OA} = \frac{OC}{OB} = \frac{DC}{AB} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$$

۱۳۹ ۲ می‌دانیم از اتصال متوالی وسط‌های اضلاع هر چهارضلعی

محدب، یک متوازی‌الاضلاع پدید می‌آید که مساحتش نصف مساحت چهارضلعی اولیه است. پس مطابق شکل، چهارضلعی MNPQ متوازی‌الاضلاع است.



از طرفی در متوازی‌الاضلاع، زوایای مجاور مکمل‌اند، پس:

$$\hat{Q} = 180^\circ - \hat{M} = 30^\circ$$

و در نهایت می‌دانیم مساحت هر متوازی‌الاضلاع برابر است با حاصل ضرب دو ضلع مجاور در سینوس زاویه بین دو ضلع. پس داریم:

$$S_{MNPQ} = QM \times QP \times \sin \hat{Q} = 8 \times 12 \times \sin 30^\circ = 96 \times \frac{1}{2} = 48$$

بنابراین مساحت دوزنقه برابر است با:

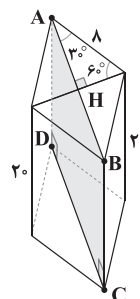
$$S_{ABCD} = 2S_{MNPQ} = 2 \times 48 = 96$$

۱۴۰ ۱ با توجه به شکل، سطح مقطع صفحه عمود بر قاعده‌ها با

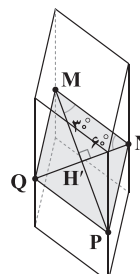
بیشترین مساحت، یک مستطیل است که طولش ارتفاع منشور و عرضش، قطر بزرگ لوزی است. پس با توجه به شکل طول قطر بزرگ لوزی را به دست می‌آوریم:

$$AH = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 8 = 4\sqrt{3} \Rightarrow AB = 8\sqrt{3}$$

$$S_{ABCD} = AB \times BC = 8\sqrt{3} \times 20 = 160\sqrt{3} = S_1$$



هم‌چنین با توجه به شکل زیر، سطح مقطع صفحه موازی با قاعده‌ها یک لوزی همنهشت با قاعده‌هاست. پس با توجه به شکل، طول قطر کوچک لوزی را نیز به دست می‌آوریم:



$$NH' = \frac{1}{2} \times 8 = 4 \Rightarrow QN = 2 \times 4 = 8$$

$$S_{MNPQ} = \frac{1}{2} \times MP \times QN = \frac{1}{2} \times 8\sqrt{3} \times 8 = 32\sqrt{3} = S_2$$

$$\frac{160\sqrt{3}}{32\sqrt{3}} = 5$$

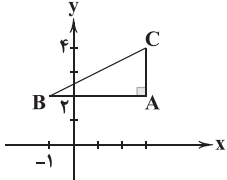
و در نهایت $\frac{S_1}{S_2}$ برابر است با:



۱۴۵ ۲ با توجه به شکل، مثلث ABC قائم الزاویه است. پس مرکز دایره محیطی مثلث، وسط وتر BC می شود و شعاع آن دایره، نصف BC است.

$$O\left(\frac{x_B+x_C}{2}, \frac{y_B+y_C}{2}\right) = (1, 3)$$

$$r = \frac{1}{2} \times \sqrt{(3-(-1))^2 + (4-2)^2} = \frac{\sqrt{20}}{2} = \sqrt{5}$$



حال فاصله نقطه داده شده تا O باید کم تر از شعاع دایره باشد:

$$\sqrt{(0-1)^2 + (m-3)^2} < \sqrt{5} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 1^2 + (m-3)^2 < 5$$

$$\Rightarrow (m-3)^2 < 4 \Rightarrow -2 < m-3 < 2$$

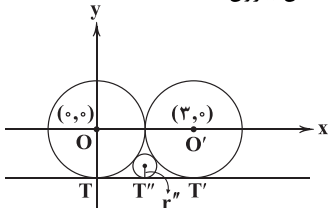
$$\xrightarrow{+3} 1 < m < 5$$

۱ ۱۴۶

$$x^2 + y^2 - 6x + \frac{2y}{4} = 0 \Rightarrow \begin{cases} O'(3, 0) \\ r' = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow \begin{cases} O(0, 0) \\ r = \frac{3}{2} \end{cases}$$

دو دایره مماس بیرون اند $d = OO' = r + r' = 3$



هدف در این شکل یافتن مساحت دایره به شعاع r'' است.

$$TT' = TT'' + T'T''$$

$$\sqrt{4r \times r'} = \sqrt{4r \times r''} + \sqrt{4r' \times r''}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} 4rr' = 4rr'' + 4r'r'' + 2 \times 4\sqrt{rr'r''}$$

$$\Rightarrow rr' = rr'' + r'r'' + 2\sqrt{rr'r''}$$

$$\Rightarrow r'' = \frac{r \times r'}{r + r' + 2\sqrt{rr'}} = \frac{\frac{3}{2} \times \frac{3}{2}}{\frac{3}{2} + \frac{3}{2} + 2 \times \sqrt{\frac{9}{4}}} = \frac{\frac{9}{4}}{3 + 3} = \frac{3}{8}$$

$$\Rightarrow S = \pi \times \left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{9\pi}{64}$$

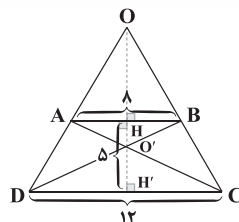
دستگاه را تشکیل می دهیم و آن را حل می کنیم:

۱ ۱۴۷

$$\begin{cases} 6x + 8y = 3 \\ 12x - 24y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{11}{30} \\ y = \frac{1}{10} \end{cases}$$

$$\left| \begin{array}{cc} 30 \times \left(\frac{11}{30}\right) + 10 \times \left(\frac{1}{10}\right) & 60 \times \left(\frac{11}{30}\right) - 22 \\ 5^{100} \times \left(\frac{11}{30}\right) - \left(\frac{1}{10}\right)^4 & 12 \end{array} \right|$$

$$= \left| \begin{array}{cc} 12 & 0 \\ 5^{100} \times \left(\frac{11}{30}\right) - \left(\frac{1}{10}\right)^4 & 12 \end{array} \right| = 144$$



و چون هر نقطه و تصویرش یک طرف O هستند پس تجانس به مرکز O و نسبت $\frac{3}{2}$ است.

$$AB \parallel DC \Rightarrow \frac{O'D}{O'B} = \frac{O'C}{O'A} = \frac{DC}{AB} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

و چون هر نقطه و تصویرش در طرفین O' هستند پس تجانس به مرکز O' و نسبت $-\frac{3}{2}$ است.

از آنجایی که طبق قضیه اساسی تشابه $\triangle OAB \sim \triangle ODC$

و $\triangle O'AB \sim \triangle O'CD$ دو مثلث متشابه اند، نسبت ارتفاع ها نیز با نسبت تشابه برابر است، پس خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \frac{OH'}{OH} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{OH + 5}{OH} = \frac{3}{2} \Rightarrow OH = 10 \\ \frac{O'H'}{O'H} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{5 - O'H}{O'H} = \frac{3}{2} \Rightarrow O'H = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow OO' = OH + O'H = 10 + 2 = 12$$

۱۴۴ ۲ ابتدا با توجه به این که BE و DE نیمسازهای زوایای B و D

هستند، طبق قضیه نیمساز زوایای داخلی در مثلث، داریم:

$$\begin{cases} \frac{BA}{BC} = \frac{AE}{CE} \\ \frac{DA}{DC} = \frac{AE}{CE} \end{cases} \Rightarrow \frac{BA}{BC} = \frac{DA}{DC} \Rightarrow \frac{18}{24} = \frac{DA}{12} \Rightarrow DA = 9$$

اینک به کمک قضیه کسینوس ها در مثلث DAC، داریم:

$$AC^2 = DA^2 + DC^2 - 2DA \cdot DC \cdot \cos \hat{D}$$

$$= 81 + 144 - 2 \times 9 \times 12 \times \underbrace{\cos 150^\circ}_{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = 225 + 108\sqrt{3}$$

$$AC^2 = 225 + 108\sqrt{3} \quad (1)$$

همچنین مساحت چهارضلعی ABCD از مجموع مساحت مثلث های BAC و DAC به دست می آید:

$$S_{ABCD} = S_{BAC} + S_{DAC}$$

$$= \frac{1}{2} \times BA \times BC \times \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \times DA \times DC \times \sin 150^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \times 18 \times 24 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \times 9 \times 12 \times \frac{1}{2} = 108\sqrt{3} + 27 \quad (2)$$

و در نهایت، اختلاف اعداد (۱) و (۲) برابر است با:

$$225 + 108\sqrt{3} - (108\sqrt{3} + 27) = 198$$



فیزیک

۱۵۱ | حجم پوسته کروی را در هر دو حالت به دست می آوریم:

$$V = \frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3) \quad \text{حجم پوسته کره در حالت اول}$$

$$V' = \frac{4}{3}\pi(R'^3 - r'^3) \quad \text{حجم پوسته کره در حالت دوم} \quad \frac{R'}{r'} = \frac{rR}{r'^3}$$

$$V' = \frac{4}{3}\pi((rR)^3 - (r^3)^3) = \frac{4}{3}\pi \times 27 \times (R^3 - r^3) = 27V$$

چون جنس ماده (آلیاز) تغییری نمی کند، پس چگالی، ثابت است، بنابراین با استفاده از رابطه چگالی داریم:

$$m = \rho V \Rightarrow \frac{m'}{m} = \frac{\rho'}{\rho} \times \frac{V'}{V} \quad \frac{\rho = \rho'}{V' = 27V} \rightarrow \frac{m'}{m} = 1 \times \frac{27V}{V} = 27$$

۱۵۲ | در حالت اول، در هر دو ظرف، آب داریم و هم چنین در هر دو ظرف، ارتفاع آب ها برابر است، بنابراین:

$$P = \rho gh + P_0 \Rightarrow \begin{cases} P_1 = \rho_1 gh_1 + P_0 \\ P_2 = \rho_2 gh_2 + P_0 \end{cases} \quad \frac{h_1 = h_2 = h}{\rho_1 = \rho_2} \rightarrow P_1 = P_2$$

هم چنین در سؤال گفته شده است که نیروی وارد بر کف هر دو ظرف، برابر است، بنابراین:

$$F_p = F_1 \xrightarrow{F = P \times A} P_1 A_1 = P_2 A_2 \xrightarrow{P_1 = P_2} A_1 = A_2$$

این سطح مقطع کف ظرف ها است که با هم برابرند. در حالی که کاملاً مشخص است که قسمت باریک لوله سطح مقطع کوچک تری دارد.

وقتی به یک اندازه به هر دو ظرف، آب اضافه می کنیم ($m_1 = m_2$)، سطح آب در هر دو ظرف، بالا می آید، اما در ظرف (۲) چون قرار است آب در قسمت باریک تر ظرف بالا بیاید، پس ارتفاع بیشتری از ظرف (۱) خواهد داشت.

$$h'_2 > h'_1 \Rightarrow P'_2 > P'_1 \xrightarrow{F' = P' \times A} F'_2 > F'_1$$

۱۵۳ | آهنگ شارش حجمی شاره در همه مقاطع لوله برابر است، یعنی در هر دقیقه همان حجمی از آب که از مقطع (۱) عبور می کند، از مقطع (۲) هم عبور خواهد کرد.

حال برای به دست آوردن تندی حرکت آب برحسب متر بر ثانیه، ابتدا آهنگ شارش حجمی آب را برحسب متر مکعب بر ثانیه به دست می آوریم، بنابراین:

$$\text{آهنگ شارش حجمی} = 300 \times \frac{L}{\min} \times \frac{1 \min}{60 s} \times \frac{1 m^3}{10^3 L} = 5 \times 10^{-3} \frac{m^3}{s}$$

با استفاده از رابطه آهنگ شارش حجمی داریم:

$$A_p v_p = A_v v_v \Rightarrow 5 \times 10^{-3} = 5 \times 10^{-4} \times v_v$$

$$\Rightarrow v_v = 10 \frac{m}{s}$$

$$\tan 2\alpha = -2 \Rightarrow \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = -2 \Rightarrow \sin 2\alpha = -2 \cos 2\alpha \quad (*)$$

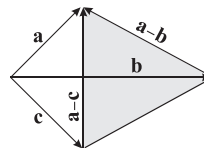
حال دترمینان را حول سطر دوم محاسبه می کنیم:

$$|A| = 16(\sin \alpha + \cos \alpha)(\sin \alpha - \cos \alpha) - 15 \sin \alpha \times \cos \alpha$$

$$= 16(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) - \frac{15}{2}(2 \sin \alpha \times \cos \alpha)$$

$$= 16(-\cos 2\alpha) - \frac{15}{2}(\sin 2\alpha) \xrightarrow{(*)}$$

$$= -16 \cos 2\alpha - \frac{15}{2}(-2 \cos 2\alpha) = -\cos 2\alpha$$



$$S = \frac{1}{2} |(a-b) \times (a-c)|$$

$$a-b = (0, 1, 1) - (4, 5, -3) = (-4, -4, 4)$$

$$a-c = (0, 1, 1) - (2, 5, 1) = (-2, -4, 0)$$

$$(a-b) \times (a-c) = (16, -8, 8)$$

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{16^2 + (-8)^2 + 8^2} = 4\sqrt{6}$$

۱۵۰ | اگر α زاویه بین دو بردار a و b و S مساحت متوازی الاضلاع ساخته شده به وسیله این دو بردار باشد (چون طول دو بردار برابر است، متوازی الاضلاع به لوزی تبدیل می شود).

$$S = |a \times b| = |a| |b| \sin(\alpha)$$

$$\Rightarrow 80 = 10 \times 10 \times \sin(\alpha) \Rightarrow \sin(\alpha) = \frac{4}{5}$$

$$\cos(\alpha) = \pm \sqrt{1 - \sin^2(\alpha)} = \pm \sqrt{1 - \frac{16}{25}} \xrightarrow{\text{مقدار مثبت}} \cos(\alpha) = \frac{3}{5}$$

$$a \cdot b = |a| |b| \cos(\alpha) \Rightarrow a \cdot b = 10 \times 10 \times \frac{3}{5} = 60$$



حال با استفاده از رابطه سرعت و طول لوله، مدت زمان عبور آب از لوله را حساب کنیم:

$$v = \frac{\Delta x}{t} \Rightarrow \Delta = \frac{f}{t} \Rightarrow t = \lambda s$$

بنابراین آهنگ انتقال گرما به لوله برابر است با:

$$P = \frac{|Q|}{t} = \frac{48 \times 42 \times 10}{\lambda} = 2520 \frac{J}{s}$$

ابتدا به کمک رابطه $Q = mc\Delta\theta$ ، رابطه بین تغییرات دمای دو جسم را محاسبه می‌کنیم. دقت کنید که به جای جرم می‌توان حاصل ضرب چگالی در حجم را جای‌گذاری کرد، بنابراین:

$$Q = \rho V c \Delta\theta$$

$$\Rightarrow \frac{Q_A}{Q_B} = \frac{\rho_A}{\rho_B} \times \frac{V_A}{V_B} \times \frac{c_A}{c_B} \times \frac{\Delta\theta_A}{\Delta\theta_B}$$

A و B هم‌جنس هستند، بنابراین ρ و c برای هر دو جسم یکسان است. در ادامه حجم جسم‌های A و B را محاسبه می‌کنیم و در عبارت بالا جای‌گذاری می‌کنیم:

$$V_A = \pi r^2 h = 3 \times \left(\frac{x}{2}\right)^2 \times 2x = \frac{3x^3}{2}$$

$$V_B = x^3$$

$$1 = 1 \times \frac{\frac{3x^3}{2}}{x^3} \times 1 \times \frac{\Delta\theta_A}{\Delta\theta_B} \Rightarrow \frac{\Delta\theta_A}{\Delta\theta_B} = \frac{2}{3}$$

بنابراین:

برای محاسبه تغییر شعاع و ارتفاع از رابطه تغییرات طولی برحسب تغییرات دما استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\Delta h_B}{\Delta R_A} = \frac{h_B}{R_A} \times \frac{\alpha_B \Delta\theta_B}{\alpha_A \Delta\theta_A} = \frac{x}{\frac{x}{2}} \times 1 \times \frac{2}{3} = 3$$

با توجه به آن‌که هر سه فرایند، هم‌حجم هستند (زیرا امتداد نمودار P-T از مبدأ می‌گذرد)، پس کار انجام‌شده در هر سه فرایند، برابر صفر است.

$$\Delta V = 0 \Rightarrow W = 0$$

با توجه به رابطه بازده ماشین گرمایی داریم:

$$\eta = \frac{|W|}{Q_H} = \frac{|W| = Q_H - |Q_L|}{Q_H} \Rightarrow \eta = \frac{Q_H - |Q_L|}{Q_H} = 1 - \frac{|Q_L|}{Q_H}$$

$$\frac{25}{100} = \frac{25}{100} \times \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{4} = 1 - \frac{|Q_L|}{1200} \Rightarrow \frac{|Q_L|}{1200} = \frac{3}{4} \Rightarrow |Q_L| = 900 J$$

با توجه به این‌که هر دو جسم در تعادل هستند، نیروی شناوری وارد بر آن‌ها با وزن آن‌ها برابر است و چون جرم دو جسم برابر است، نیروی شناوری وارد بر آن‌ها نیز برابر خواهد بود.

۱۵۴ | ۲ هنگامی که گلوله به فنر برخورد می‌کند، فنر را جمع می‌کند.

بیشترین انرژی در فنر، زمانی ذخیره می‌شود که گلوله متوقف می‌گردد، بنابراین با توجه به قانون پایستگی انرژی مکانیکی می‌توان نوشت:

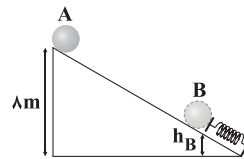
$$E_A = E_B \Rightarrow U_A + \cancel{K_A} = U_B + \cancel{K_B} + U_{\text{فنر}}$$

$$\Rightarrow U_A = U_B + U_{\text{فنر}}$$

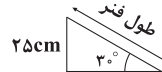
$$\Rightarrow mgh_A = mgh_B + U_{\text{فنر}}$$

$$\Rightarrow 2 \times 10 \times 8 = 2 \times 10 \times h_B + 155$$

$$\Rightarrow 160 = 20h_B + 155 \Rightarrow \Delta = 20h_B \Rightarrow h_B = \frac{1}{4}m = 25 \text{ cm}$$



با توجه به شیب سطح، طول فنر در این حالت برابر است با:



$$\sin 30^\circ = \frac{25}{\text{طول فنر}} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{25}{\text{طول فنر}} \Rightarrow \text{طول فنر} = 25 \times 2 = 50 \text{ cm}$$

۱۵۵ | ۲ با توجه به صورت سؤال می‌توان متوجه شد که تنها دو نیروی پیشران موتور اتومبیل و اصطکاک روی ماشین کار انجام داده‌اند. (چون نیروهای وزن و عمودی سطح، عمود بر جهت حرکت هستند، کارشان روی اتومبیل، صفر است)، پس می‌توان گفت:

$$W_t = W_{\text{پیشران}} + W_f \quad (1)$$

کار نیروی پیشران برابر است با:

$$W_{\text{پیشران}} = Fd \cos\theta$$

$$\xrightarrow{\theta=0^\circ} W_{\text{پیشران}} = 12 \times 10^3 \times 1000 \times 1 = 12 \times 10^6 J$$

می‌دانیم کار کل انجام‌شده روی اتومبیل طبق اصل کار و انرژی جنبشی برابر با تغییرات انرژی جنبشی اتومبیل است، پس داریم:

$$W_t = \Delta K = \frac{1}{2}m(v_f^2 - v_i^2) = \frac{1}{2} \times 1000 \times ((30)^2 - 0) = 45 \times 10^4 J$$

حال با توجه به رابطه (۱) داریم:

$$45 \times 10^4 = 12 \times 10^6 + W_f \Rightarrow W_f = -75 \times 10^4 J = -750 kJ$$

۱۵۶ | ۴ ابتدا حجم لوله (حجم آب) را محاسبه می‌کنیم:

$$V = Ah \xrightarrow{A = \pi r^2} V = \pi r^2 h = 3 \times 2^2 \times 40 = 480 \text{ cm}^3$$

$$m = \rho V = 1 \times 480 = 480 g$$

جرم آب درون لوله برابر است با:

اندازه گرمایی که آب از دست می‌دهد، برابر است با:

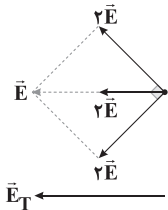
$$Q = mc\Delta\theta = 480 \times 10^{-3} \times 4200 \times (85 - 95) = 48 \times 42 \times (-10)$$

$$\Rightarrow |Q| = 48 \times 42 \times 10 J$$



۱۶۶ ۲ فاصله تمام بارها تا نقطه O، یکسان و برابر با شعاع دایره (a) است.

از طرفی میدان دو بار الکتریکی همنام واقع بر محور y، یکدیگر را خنثی می‌کنند. هر بار الکتریکی در نقطه O، یک میدان الکتریکی ایجاد می‌کند که شکل میدان در نقطه O به صورت زیر است:



بزرگی میدان برابریست با:

$$E' = \sqrt{(\sqrt{2}E)^2 + (\sqrt{2}E)^2} = \sqrt{4E^2 + 4E^2} = \sqrt{8E^2} = 2\sqrt{2}E$$

بنابراین:

$$E_T = E' + 2E = 2\sqrt{2}E + 2E = (2 + 2\sqrt{2})E$$

$$E = \frac{k|Q|}{a^2} \rightarrow E_T = (2 + 2\sqrt{2}) \frac{k|Q|}{a^2}$$

می‌دانیم ظرفیت خازن تخت از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$C = \frac{\kappa \epsilon_0 A}{d}$$

برای نسبت ظرفیت دو خازن می‌توان نوشت:

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{A_2}{A_1} \times \frac{d_1}{d_2} \rightarrow \frac{C_1 = C_2, A_2 = 10 \times 10 = 100 \text{ cm}^2}{A_1 = 20 \times 20 = 400 \text{ cm}^2, d_1 = 3 \text{ mm}} \rightarrow$$

$$1 = \frac{100}{400} \times \frac{3}{d_2} \Rightarrow 1 = \frac{1}{4} \times \frac{3}{d_2} \Rightarrow 1 = \frac{3}{4d_2} \Rightarrow 4d_2 = 3$$

$$\Rightarrow d_2 = \frac{3}{4} \text{ mm} = 0.75 \text{ mm}$$

۱۶۸ ۲ آمپرسنج، شدت جریانی که از باتری می‌گذرد (شدت جریان

کل) و ولت‌سنج، اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر باتری را نشان می‌دهد.

با بستن کلیدها، به مقاومت‌های مدار به طور موازی افزوده شده و در نتیجه

مقاومت معادل مدار، کاهش می‌یابد، با توجه به رابطه $I = \frac{\mathcal{E}}{R_{eq} + r}$ ، با

کاهش R_{eq} (مقاومت مدار) مقدار I یا همان شدت جریانی که از باتری

می‌گذرد، افزایش می‌یابد.

اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر باتری از رابطه $V = \mathcal{E} - rI$ محاسبه می‌شود

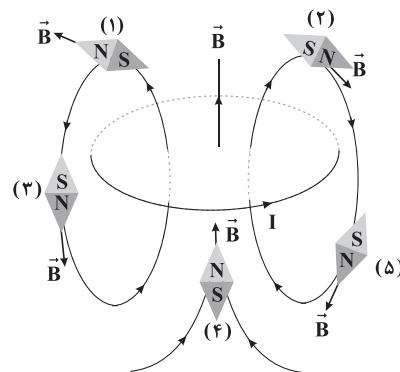
که با افزایش شدت جریان گذرنده از باتری (شدت جریان اصلی مدار)، مقدار

اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر آن (V) کاهش می‌یابد.

۱۶۹ ۳ هنگامی که دو پایانه یک باتری را به دو سر یک مقاومت

می‌بندیم، توان خروجی باتری (و یا توان مفید باتری) با توان مصرف‌شده در

مقاومت خارجی برابر است.



۱۶۲ ۴ با استفاده از رابطه انرژی ذخیره‌شده در سیملوله آرمانی و با

توجه به رابطه ضریب القاوری سیملوله داریم:

$$U = \frac{1}{2} LI^2 \Rightarrow 6 \times 10^{-3} = \frac{1}{2} \times \frac{\mu_0 N^2 A}{\ell} I^2$$

$$\Rightarrow 12 \times 10^{-3} \times 0.8 = 12 \times 10^{-7} \times (1000)^2 \times 20 \times 10^{-4} \times I^2 \Rightarrow I = 2 \text{ A}$$

۱۶۳ ۲ با استفاده از رابطه $\epsilon_{\max} = NBA \frac{2\pi}{T}$ داریم:

$$\epsilon_{\max} = NBA \frac{2\pi}{T} \Rightarrow 5/4 = 10 \times 25 \times 10^{-4} \times 0.9 \times \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{1}{12} \text{ s}$$

با استفاده از رابطه $T = \frac{t}{n}$ داریم:

$$\frac{1}{12} = \frac{t}{600} \Rightarrow t = \frac{600}{12} = 50 \text{ s} \xrightarrow[\text{دقیقه}]{\text{تبدیل به}} t = \frac{5}{6} \text{ min}$$

۱۶۴ ۲ در نمودار شار مغناطیسی برحسب زمان، شیب خط، بیانگر نیرو

محرکه القایی متوسط ($\mathcal{E}$) است. در هر بازه زمانی، شیب خط را پیدا می‌کنیم و

در نهایت آن‌ها را مقایسه می‌کنیم.

$$t_1 \Rightarrow (t = 5 \text{ s تا } t = 0): \bar{\mathcal{E}}_1 = \frac{5-0}{5-0} = 1 \text{ mV}$$

$$t_2 \Rightarrow (t = 7 \text{ s تا } t = 5 \text{ s}): \bar{\mathcal{E}}_2 = \frac{8-5}{7-5} = 1.5 \text{ mV}$$

$$t_3 \Rightarrow (t = 12 \text{ s تا } t = 7 \text{ s}): \bar{\mathcal{E}}_3 = \frac{8-0}{12-7} = 1.6 \text{ mV}$$

با توجه به اعداد به دست آمده داریم:

$$\bar{\mathcal{E}}_3 > \bar{\mathcal{E}}_2 > \bar{\mathcal{E}}_1$$

۱۶۵ ۳ در مرکز مختصات، برابری نیروهای الکتریکی وارد بر بار q' از

طرف دو بار دیگر برابر با صفر است و به ذره q' نیرویی وارد نمی‌شود و در

بی‌نهایت دور هم برابری نیروهای وارد بر بار q' به صفر می‌رسد، ولی با دور

شدن از مرکز مختصات، اندازه برابری نیروها به تدریج زیاد می‌شود تا این‌که بعد

از نقطه‌ای با زیاد شدن فاصله اندازه برابری نیروها دوباره کاهش می‌یابد تا این‌که

به صفر برسد، بنابراین اندازه برابری نیروهای وارد بر بار q' از طرف دو بار دیگر

ابتدا افزایش و سپس کاهش می‌یابد.



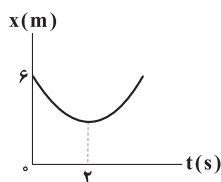
$$v_{av} = \frac{20 \times (t_p - t_1) \times 60}{(t_p - t_1) \times 60} = 10 \frac{m}{s}$$

دقت کنید: محور زمان برحسب دقیقه بود که با ضرب در عدد ۶۰، تبدیل واحد انجام دادیم، اما تأثیری در حل نداشت.

ابتدا به کمک رابطه داده شده در سؤال، رابطه مکان - زمان متحرک را به دست می آوریم:

$$t = \sqrt{x-2} + 2 \Rightarrow t-2 = \sqrt{x-2} \\ \Rightarrow (t-2)^2 = x-2 \Rightarrow x = (t-2)^2 + 2$$

نمودار مکان - زمان جسم را رسم می کنیم:



همان طور که مشخص است، حرکت جسم قبل از لحظه $t=2s$ به صورت کندشونده و سپس تندشونده می شود، زیرا قبل از $t=2s$ اندازه شیب خط مماس بر نمودار در حال کاهش و سپس در حال افزایش است، بنابراین از لحظه $t_1=1s$ تا لحظه $t_p=3s$ حرکت جسم، ابتدا کندشونده و سپس تندشونده می باشد.

به کمک معادله مکان - زمان در حرکت با شتاب ثابت، جابه جایی متحرک را در ۳ ثانیه اول حرکتش محاسبه کرده و سپس به کمک رابطه $\Delta x = x_p - x_1$ ، می توانیم مکان ثانویه جسم را محاسبه کنیم:

$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t \Rightarrow \Delta x = \frac{1}{2} \times (-4) \times 3^2 + 4 \times 3 = -6m$$

بنابراین:

$$\Delta \bar{x} = -6\bar{i} = \bar{d}_p - \bar{d}_1 \Rightarrow -6\bar{i} = d_p - (-3\bar{i}) \Rightarrow \bar{d}_p = -9\bar{i} (m)$$

حرکت قطره ها، یک حرکت سقوط آزاد است، بنابراین داریم:

$$\Delta y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \Rightarrow -0.8 = -5t^2 + 0 \times t \Rightarrow t^2 = 0.16 \Rightarrow t = 0.4s$$

در این مدت زمان، ۴ قطره از شیر چکیده است، بنابراین فاصله بین هر قطره ۰/۱۵ می باشد.

$$\Delta y = \frac{v_1 + v_2}{2} \Delta t$$

فاصله بین دو قطره از رابطه زیر محاسبه می شود:

قطره دوم، ۰/۱ ثانیه و قطره چهارم، ۰/۳ ثانیه بعد از قطره اول چکه کرده است، بنابراین سرعت دو قطره از روابط زیر محاسبه می شود، بنابراین قطره دوم، ۰/۳۵ و قطره چهارم، ۰/۱۵ در حال سقوط بوده اند، بنابراین:

$$v = -gt + v_0 \begin{cases} \text{قطره دوم: } v = -10 \times 0.3 + 0 = -3 \frac{m}{s} \\ \text{قطره چهارم: } v = -10 \times 0.1 + 0 = -1 \frac{m}{s} \end{cases}$$

بنابراین فاصله بین دو قطره برابر است با:

$$\Delta y = \frac{-1-3}{2} \times (0.3-0.1) = -0.4m \Rightarrow |\Delta y| = 0.4m$$

توان الکتریکی مصرفی در یک مقاومت، از رابطه $P = RI^2$ قابل محاسبه است، در نتیجه می توان نوشت:

$$P_1 = R_1 I_1^2 \Rightarrow \frac{P_1 = 10.8W}{R_1 = 12\Omega} \Rightarrow 10.8 = 12 I_1^2 \Rightarrow I_1^2 = 9 \Rightarrow I_1 = 3A$$

$$P_2 = R_2 I_2^2 \Rightarrow \frac{P_2 = 50W}{R_2 = 50\Omega} \Rightarrow 50 = 50 I_2^2 \Rightarrow I_2^2 = 1 \Rightarrow I_2 = 1A$$

اگر شدت جریان در باتری برابر با I باشد، توان مفید باتری از رابطه $P = \varepsilon I - rI^2$ محاسبه می شود، بنابراین:

$$P_1 = \varepsilon I_1 - rI_1^2 \Rightarrow 10.8 = 3\varepsilon - 9r \Rightarrow 3\varepsilon = \varepsilon - 3r \quad (I)$$

$$P_2 = \varepsilon I_2 - rI_2^2 \Rightarrow 50 = \varepsilon - r \quad (II)$$

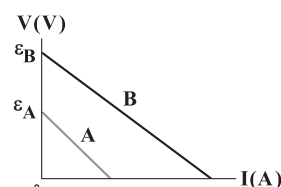
بنابراین با حل دستگاه معادلات زیر داریم:

$$\begin{cases} \varepsilon - 3r = 36 \\ \varepsilon - r = 50 \end{cases} \Rightarrow \varepsilon = 57V, r = 7\Omega$$

۱۷۰ | ۱ می دانیم اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر یک باتری بر حسب شدت جریانی که از باتری عبور می کند، از رابطه $V = \varepsilon - rI$ به دست می آید.

با توجه به رابطه بالا، نمودار V (اختلاف پتانسیل دو سر یک باتری) بر حسب I (شدت جریان عبوری از باتری) یک تابع درجه اول است، بنابراین نمودار $V-I$ ، یک خط راست خواهد بود که عرض از مبدأ خط، نیروی محرکه باتری و قدرمطلق شیب خط، برابر با مقاومت درونی باتری است.

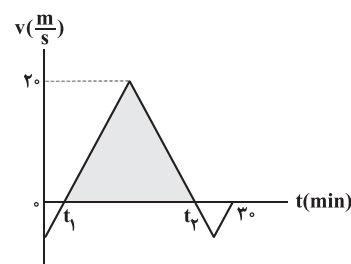
به نمودار شکل زیر دقت کنید:



با توجه به مطالب بیان شده و نمودار شکل فوق، می توان نتیجه گرفت که:

$$\begin{cases} r_A > r_B \\ \varepsilon_A < \varepsilon_B \end{cases}$$

۱۷۱ | ۳ لحظه شروع حرکت در جهت مثبت محور x را t_1 و لحظه اتمام آن را t_2 می نامیم. می دانیم سرعت متوسط یک متحرک در یک بازه زمانی از رابطه $v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ به دست می آید، از طرف دیگر می دانیم مساحت سطح محصور بین نمودار سرعت - زمان و محور زمان، برابر با جابه جایی متحرک است، بنابراین:





در حالت دوم داریم:

$$v_2 = a_2 t_2 + v_1 \xrightarrow{v_2=0} a_2 t_2 + v_1 = 0 \quad (2)$$

از روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم:

$$a_1 t_1 = -a_2 t_2 \Rightarrow a_1 \times 2 t_2 = -a_2 t_2 \Rightarrow a_1 = -2 a_2 \quad (3)$$

قانون دوم نیوتون را در هر دو حالت برای جسم می‌نویسیم، بنابراین:

$$\begin{cases} F - f_k = m a_1 \Rightarrow a_1 = \frac{F - f_k}{m} & \text{حالت اول} \\ -f_k = m a_2 \Rightarrow a_2 = \frac{-f_k}{m} & \text{حالت دوم} \end{cases} \quad (4)$$

با استفاده از روابط (۳) و (۴) داریم:

$$2 \times \left(\frac{F - f_k}{m} \right) = \frac{f_k}{m} \Rightarrow F - f_k = \frac{f_k}{2} \Rightarrow F = \frac{3}{2} f_k$$

$$F = \frac{3}{2} f_k \Rightarrow 60 = \frac{3}{2} \times \mu_k \times mg = \frac{3}{2} \mu_k \times 10 \times 10 \quad \text{بنابراین:}$$

$$\Rightarrow 60 = \frac{3}{2} \mu_k \times 100 \Rightarrow \mu_k = \frac{60}{150} = \frac{2}{5} = 0.4 \Rightarrow \mu_k = 0.4$$

نیروی مرکزگرای وارد بر ماهواره همان نیروی وزن ماهواره

می‌باشد، بنابراین:

$$F_A = 4 F_B \Rightarrow mg_A = 4 mg_B \Rightarrow g_A = 4 g_B$$

$$g = G \frac{M_e}{r^2} \xrightarrow{\quad} r_B = 2 r_A$$

به کمک رابطه نیروی مرکزگرا ($F = m \frac{v^2}{r}$) داریم:

$$\frac{F_A}{F_B} = \frac{m_A}{m_B} \times \left(\frac{v_A}{v_B} \right)^2 \times \frac{r_B}{r_A} \Rightarrow 4 = 1 \times \left(\frac{v_A}{v_B} \right)^2 \times 2 \Rightarrow \left(\frac{v_A}{v_B} \right)^2 = 2$$

حال با استفاده از رابطه انرژی جنبشی داریم:

$$\frac{K_A}{K_B} = \frac{m_A}{m_B} \times \left(\frac{v_A}{v_B} \right)^2 = 1 \times 2 = 2$$

از رابطه تراز شدت صوت، می‌توان نوشت:

$$\beta = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right) \xrightarrow{\beta = 21 \text{ dB}} 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right) = 21 \Rightarrow \log \left(\frac{I}{I_0} \right) = 2.1$$

$$\Rightarrow \log \left(\frac{I}{I_0} \right) = 2.1 \Rightarrow \log \left(\frac{I}{I_0} \right) = 2 \log 2 = \log 2^2 \quad \downarrow \log 2$$

$$\Rightarrow \log \left(\frac{I}{I_0} \right) = \log 2^2 \Rightarrow \frac{I}{I_0} = 2^2 = 4$$

$$I_0 = 10^{-10} \frac{W}{m^2} \xrightarrow{\quad} I = 4 \times 10^{-10} = 4 \times 10^{-10} \frac{W}{m^2}$$

$$\Rightarrow I = 4 \times 10^{-10} \frac{W}{m^2}$$

۱۷۵ ابتدا به کمک رابطه $a = \frac{F}{m}$ شتاب این دو شخص را حساب

می‌کنیم. در نظر داشته باشید که نیرویی که این دو شخص به یکدیگر وارد می‌کنند، از نوع کنش و واکنش بوده و با هم برابر است و داریم:

$$\begin{cases} a_1 = \frac{F}{m_1} \Rightarrow a_1 = \frac{F}{40} \\ a_2 = \frac{F}{m_2} \Rightarrow a_2 = \frac{F}{50} \end{cases} \Rightarrow a_1 + a_2 = \frac{F}{40} + \frac{F}{50} = \frac{9F}{200}$$

از آنجایی که F عددی طبیعی است، جواب $a_1 + a_2$ حتماً باید مضربی از ۹ باشد. تنها عددی که بین گزینه‌ها مضرب ۹ است، عدد ۷۲۰ است. با جای‌گذاری ۷۲۰ به جای $a_1 + a_2$ ، مقدار F برابر با ۱۶ نیوتون به دست می‌آید که عددی طبیعی است و در شرط سؤال صدق می‌کند.

۱۷۶ مساحت محصور بین نمودار نیرو بر حسب زمان و محور زمان،

نشان‌دهنده تغییرات تکانه وارد بر جسم (Δp) می‌باشد، بنابراین از لحظه $t_1 = 0.5$ تا لحظه $t_2 = 1.5$ داریم:

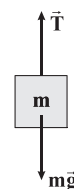
$$S = \Delta p = \frac{1 \times 2000}{2} = 1000 \frac{\text{kg.m}}{\text{s}}$$

مقدار تکانه توپ در لحظه $t_1 = 0.5$ برابر با صفر است، چراکه هیچ نیرویی به جسم وارد نمی‌شود، پس داریم:

$$\Delta p = p_2 - p_1 = 1000 \Rightarrow p_2 = 1000 \frac{\text{kg.m}}{\text{s}}$$

۱۷۷ برای آن‌که این سؤال را حل کنیم، ابتدا حالت بدون حرکت را

در نظر می‌گیریم:



در حالت تعادل، اندازه نیروی کشش نخ با اندازه نیروی وزن، برابر است.

$$T = mg$$

در صورتی‌که جسم، حرکت شتابدار با شتاب ثابت a داشته باشد، اندازه نیروی کشش نخ برابر با $T = m(g + a)$ یا $T = m(g - a)$ خواهد شد. چون نیروی کشش نخ در حال کاهش است، یعنی رابطه $T = m(g - a)$ صحیح است. این یعنی جهت شتاب باید به سمت پایین (-) باشد. در حرکت تندشونده رو به پایین، جهت شتاب رو به پایین است (ب) و همچنین در حرکت کندشونده رو به بالا چون آسانسور می‌خواهد توقف کند، باز هم شتاب در خلاف جهت حرکت و رو به پایین است (ج).

در حالت اول داریم:

$$v_1 = a_1 t_1 + v_0 \xrightarrow{v_0=0} v_1 = a_1 t_1 \quad (1)$$

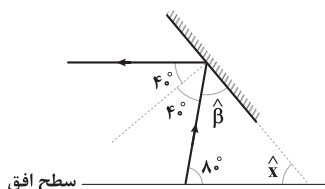


بنابراین عبارت خواسته شده برابر است با:

$$\frac{f_1}{f_2} \times \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 1 \times \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

۱۸۴ با توجه به ویژگی‌های خطوط موازی و مورب و قانون بازتاب

عمومی داریم:



$$\beta + 40^\circ = 90^\circ \Rightarrow \beta = 50^\circ$$

با توجه به این که جمع زوایای داخلی مثلث باید برابر با 180° باشد، خواهیم داشت:

$$\beta + \alpha + 18^\circ = 180^\circ \xrightarrow{\beta=50^\circ} 50^\circ + \alpha + 18^\circ = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 112^\circ$$

۱۸۵ در گسیل خودبه خود، الکترون از تراز انرژی بالاتر به طور خودبه خودی به تراز انرژی پایین تر جهش می‌کند و یک فوتون در جهت کاتوره‌ای گسیل می‌کند.

در گسیل القایی، الکترون با جذب یک فوتون مناسب از تراز برانگیخته به تراز پایدار انتقال می‌یابد و یک فوتون در جهت فوتون ورودی گسیل می‌کند.

بررسی گزینه‌ها:

(۱) گسیل القایی را نشان می‌دهد. (✓)

(۲) گسیل القایی را نمایش می‌دهد و صحیح است. (✓)

دقت کنید: فوتون گسیل شده در جهت همان فوتون ورودی است.

(۳) گسیل خودبه خودی را نمایش می‌دهد. (✓)

(۴) برای نمایش گسیل القایی باید فوتون‌های خروجی در جهت فوتون ورودی باشند. (✗)

۱۸۶ می‌دانیم بسامد (فرکانس) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f = \frac{c}{\lambda}$$

بنابراین برای بیشینه بسامد باید کمینه طول موج را به دست آورد و بالعکس.

در رشته پاشن، بسامد بیشینه ($f_{\max}$) در جابه جایی الکترون از $n = \infty$ به $n' = 3$ اتفاق می‌افتد و در رشته بالمر، کمینه بسامد ($f_{\min}$) در جابه جاییاز $n = 3$ به $n' = 2$ رخ می‌دهد.

به کمک معادله ریدبرگ می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right) \Rightarrow f = Rc \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

بنابراین نسبت خواسته شده برابر است با:

$$\frac{(f_{\min})_{\text{بالمر}}}{(f_{\max})_{\text{پاشن}}} = \frac{\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right)}{\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{\infty^2} \right)} = \frac{5}{4}$$

۱۸۱ بسامد نوسانگر جرم و فنر از رابطه $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$ به دست

می‌آید. طبق این رابطه با کاهش جرم نوسانگر، بسامد آن افزایش می‌یابد، بنابراین:

$$m' = \frac{1}{4}m \Rightarrow \frac{f'}{f} = \sqrt{\frac{m}{m'}} = \sqrt{\frac{m}{\frac{1}{4}m}} = \sqrt{4} = 2$$

بسامد نوسانگر، ۲ برابر شده است، پس یعنی ۱۰۰ درصد افزایش یافته است.

می‌دانیم انرژی مکانیکی نوسانگر از رابطه $E = \frac{1}{2}kA^2$ به دست می‌آید، در

نتیجه با ثابت ماندن ثابت فنر و دامنه حرکت، انرژی مکانیکی نوسانگر تغییری نخواهد کرد.

۱۸۲ ابتدا تندی انتشار موج در ریسمان را به دست می‌آوریم:

$$v = \sqrt{\frac{FL}{m}} \xrightarrow{F=40N, m=20g} v = \sqrt{\frac{40 \times 2}{0.02}} = \sqrt{\frac{4000}{0.02}} = \sqrt{200000} = 447.21 \text{ m/s}$$

$$\Rightarrow v = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

دوره تناوب این موج برابر است با:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{40} = 0.025 \text{ s} = 25 \text{ ms} \Rightarrow T = 25 \text{ ms}$$

مشاهده می‌کنید که زمان داده شده در صورت سؤال، برابر با یک دوره تناوب است.

موج در یک دوره تناوب، مسافتی معادل با یک طول موج را پیشروی می‌کند، بنابراین:

$$\lambda = \frac{v}{f} \xrightarrow{v=20 \frac{\text{m}}{\text{s}}, f=40 \text{ Hz}} \lambda = \frac{20}{40} = 0.5 \text{ m} = 50 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow \lambda = 50 \text{ cm}$$

۱۸۳ مطابق داده‌های سؤال و شکل زیر، برای θ_1 و θ_2 می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} \theta_1 = 135^\circ - 90^\circ = 45^\circ \\ \theta_2 = 15^\circ - 90^\circ = 75^\circ \end{cases}$$

بنابراین با استفاده از قانون شکست عمومی داریم:

$$\frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{\lambda_2 \times f_2}{\lambda_1 \times f_1} \quad (I)$$

باتوجه به ثابت ماندن بسامد در تغییر محیط، داریم:

$$f_2 = f_1 \Rightarrow \frac{f_2}{f_1} = 1$$

با جایگذاری $\frac{f_2}{f_1} = 1$ در رابطه (I) داریم:

$$\frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} = \frac{\lambda_2 \times f_2}{\lambda_1 \times f_1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \xrightarrow{\theta_2=75^\circ, \theta_1=45^\circ} \frac{\sin 75^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

$$\frac{\sin 75^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2} \xrightarrow{\lambda_1=2} \frac{\lambda_2}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \lambda_2 = \sqrt{3}$$



۱۹۰ | ۱ ابتدا کل انرژی مفیدی که از لامپ به چشم شخص می‌رسد را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{P_{\text{مفید}}}{P_{\text{کل}}} \times 100 \Rightarrow \frac{\lambda}{100} = \frac{P_{\text{مفید}}}{400}$$

$$\Rightarrow P_{\text{مفید}} = \frac{400 \times \lambda}{100} = 32 \text{ W}$$

پس انرژی مفید برابر است با:

$$P_{\text{مفید}} = \frac{E_{\text{مفید}}}{t} \Rightarrow 32 = \frac{E_{\text{مفید}}}{60} \Rightarrow E_{\text{مفید}} = 1920 \text{ J}$$

بنابراین تعداد کل فوتون‌های تابش شده برابر است با:

$$E = nhf \Rightarrow n_{\text{کل}} = \frac{E}{hf}$$

$$\Rightarrow n_{\text{کل}} = \frac{1920}{4 \times 10^{-15} \times 1/6 \times 10^{-19} \times 1000 \times 10^{12}}$$

$$\Rightarrow n_{\text{کل}} = \frac{1920}{6/4 \times 10^{-19}} = 300 \times 10^{19} = 3 \times 10^{21}$$

بنابراین تعداد فوتون‌هایی که وارد مردمک چشم می‌شود، برابر است با:

$$n_{\text{فوتون}} = \frac{2\pi r^2}{4\pi R^2} \times n_{\text{کل}} = \frac{1}{4} \times \left(\frac{10^{-3}}{10^3}\right)^2 \times 3 \times 10^{21} = 1/5 \times 10^9$$

۱۸۷ | ۴ بسامد ایجادشده به منبع بستگی دارد و چون دیافراژم تغییر نکرده است، بسامد موج ایستاده ثابت می‌ماند، بنابراین:

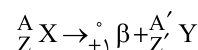
$$f_2 = f_1 \Rightarrow \frac{f_2}{f_1} = 1$$

با توجه به رابطه تندی انتشار موج عرضی در طناب داریم:

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{F_2}{F_1}} \xrightarrow{F_2 = 9F_1} \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{9}{1}} = 3 \quad (*)$$

$$f_2 = f_1 \Rightarrow \frac{n_2 v_2}{2L} = \frac{n_1 v_1}{2L} \Rightarrow \frac{n_2}{n_1} = \frac{v_1}{v_2} \xrightarrow{(*)} \frac{n_2}{n_1} = \frac{1}{3} \quad \text{بنابراین:}$$

۱۸۸ | ۱ فرایند واپاشی β^+ به صورت زیر بیان می‌شود:



$$\begin{cases} A = 0 + A' \rightarrow A' = A \\ Z = 1 + Z' \rightarrow Z' = Z - 1 \end{cases}$$

۱۸۹ | ۳ ابتدا شتاب حرکت آسانسور را محاسبه می‌کنیم.

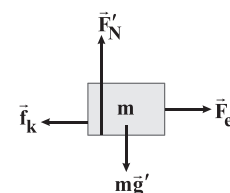


$$F_{\text{net}_y} = Ma \Rightarrow mg - F_N = Ma_1$$

$$\Rightarrow 800 - 680 = 80 a_1 \Rightarrow a_1 = 1/5 \frac{m}{s^2}$$

برای بررسی وزنه m کافی است از حرکت آسانسور صرف‌نظر کرده و به جای g از $g' = g \pm a_1$ استفاده کنیم.

$$g' = g \pm a_1 \xrightarrow{a_1 \downarrow} g' = g - a_1 = 8/5 \frac{m}{s^2}$$



$$F_{\text{net}_x} = ma_y \Rightarrow F_e - f_k = ma_y$$

$$\Rightarrow kx - \mu_k mg' = ma_y$$

$$\Rightarrow 88 \times \frac{15}{100} - \frac{5}{17} \times 4 \times 8/5 = 4 \times a_y$$

$$\Rightarrow 13/2 - 10 = 4 a_y \Rightarrow a_y = 3/8 \frac{m}{s^2}$$

شتاب حرکت وزنه m برابر با فرایند $\vec{a}_1$ و $\vec{a}_y$ است، بنابراین:

$$a = \sqrt{a_1^2 + a_y^2} = \sqrt{(1/5)^2 + (3/8)^2} = 1/7 \frac{m}{s^2}$$



۱۹۶ ۲ فقط شکل اول درست است.

بررسی شکل‌ها:

- در دمای ۱۶۳K یا همان -۱۱°C ، هر سه ماده X ، Y و Z ، گازی شکل هستند. زیرا این دما بالاتر از نقطه جوش هر کدام از آن‌هاست.
- در دمای ۱۴۴K یا همان -۱۲۹°C ، فقط ماده Y گازی شکل خواهد بود. زیرا این دما فقط بالاتر از نقطه جوش ماده Y بوده و X و Z همچنان به حالت مایع هستند.
- در دمای ۸۷K یا همان -۱۸۶°C ، دو ماده Y و Z همچنان به حالت مایع هستند اما ماده X به صورت جامد درمی‌آید زیرا نقطه انجماد آن بالاتر از -۱۸۶°C است. بنابراین شکل داده شده نادرست است، زیرا هر سه ماده را به صورت مایع نشان داده است.

۱۹۷ ۴ فرمول اکسید فلز قلیایی خاکی M به صورت MO و فرمولپراکسید آن به صورت $\text{MO}_۲$ است. مطابق داده‌های سؤال می‌توان نوشت:

$$\frac{M+۱۶}{M+۲(۱۶)} = ۰/۹۰۵ \Rightarrow (M+۳۲) \cdot ۰/۹ = M+۱۶$$

$$\Rightarrow ۰/۹M + ۲۸/۸ = M+۱۶ \Rightarrow ۰/۱M = ۱۲/۸ \Rightarrow M = ۱۲۸$$

نزدیک‌ترین گزینه ^{۱۳۷}Ba است.۱۹۸ ۲ ضخامت کل لایه استراتوسفر کم‌تر از ۴۵ کیلومتر است.۱۹۹ ۲ با توجه به فرمول پتاسیم فسفات ($\text{K}_۳\text{PO}_۴$)، در این محلولبه‌ازای ۳ مول یون پتاسیم (K^+)، ۹۵ گرم یون فسفات وجود دارد.

بنابراین غلظت یون پتاسیم برحسب ppm برابر است با:

$$\begin{array}{cc} \text{K}^+ & \text{PO}_۴^{۳-} \\ \left[\begin{array}{cc} ۳ & ۹۵ \\ x & ۲۸۵ \end{array} \right] & \Rightarrow x = ۹۰ \text{ mol K}^+ \end{array}$$

$$? \text{ mol K}^+ = ۲ \text{ L محلول} \times \frac{۱/۱ \times ۱۰^۳ \text{ محلول}}{۱ \text{ L محلول}} \times \frac{۹۰ \text{ mol K}^+}{۱۰^۶ \text{ g محلول}}$$

$$= ۰/۱۹۸ \text{ mol K}^+$$

۲۰۰ ۲ اگر در دمای ۱۰°C جرم محلول سیرشده برابر ۱۰۰g باشد،مقدار $\text{NaNO}_۳$ موجود در آن برابر است با:

$$? \text{ g NaNO}_۳ = ۴/۶ \text{ g Na}^+ \times \frac{۸۵ \text{ g NaNO}_۳}{۲۳ \text{ g Na}^+} = ۱۷ \text{ g NaNO}_۳$$

بنابراین هر ۱۰۰g از محلول سیرشده در دمای ۱۰°C شامل ۱۷ گرم $\text{NaNO}_۳$ و ۸۳ گرم آب است. با توجه به این‌که جرم آب در محلول اولیه برابر ۲۵ گرم بوده است، جرم نمک موجود در محلول ۱۰°C برابر خواهد بود با:

$$? \text{ g NaNO}_۳ = ۲۵ \text{ g H}_۲\text{O} \times \frac{۱۷ \text{ g NaNO}_۳}{۸۳ \text{ g H}_۲\text{O}} = ۵/۱۲ \text{ g NaNO}_۳$$

جرم رسوب $= ۲۰ - ۵/۱۲ = ۱۴/۸۸\text{g}$

شیمی

۱۹۱ ۳ فقط عبارت آخر درست است.

بررسی عبارت‌هاک نادرست:

- شمار الکترون‌های زیرلایه $۳d$ یون‌های $\text{Ni}^{۲+}$ ، $\text{Fe}^{۳+}$ و $\text{Co}^{۳+}$ به ترتیب برابر با ۸ ، ۶ و ۶ الکترون است.

- نسبت شمار کاتیون به آنیون در $\text{Mg}_۳(\text{PO}_۴)_۲$ برابر $۱/۵ = \frac{۳}{۲}$ و

در $\text{Al}_۳(\text{CO}_۳)_۲$ برابر با $۰/۶۷ = \frac{۲}{۳}$ است.

$$\frac{۳}{\frac{۲}{\frac{۲}{۳}}} \neq ۲$$

- A و X به ترتیب نافلزهای S و F هستند. ترکیب حاصل از این دو

عنصر، مولکولی است، نه یونی!!

۱۹۲ ۴ شمار اتم‌های موجود در یک گرم منیزیم برابر است با:

$$? \text{ atom Mg} = ۱ \text{ g Mg} \times \frac{۱ \text{ mol Mg}}{۲۴ \text{ g Mg}} \times \frac{۶/۰۲ \times ۱۰^{۲۳} \text{ atom Mg}}{۱ \text{ mol Mg}}$$

$$= ۲/۵۰ \times ۱۰^{۲۲} \text{ atom Mg}$$

مطابق شکل داده شده ارتفاع کلی برابر است با:

$$m = ۲/۵ \times ۱۰^{۲۲} \times ۲ \times ۱۶ \times ۱۰^{-۱۲} = ۸ \times ۱۰^{۱۲} \text{ m} \equiv ۸ \times ۱۰^۹ \text{ km}$$

۱۹۳ ۱ مطابق داده‌های سؤال، A ، X و D به ترتیب ^۳H ، ^۲H و ^۵H هستند.

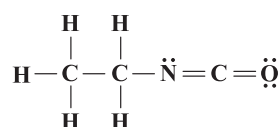
$$\text{جرم اتمی میانگین} = \frac{(۲ \times ۴) + (۳ \times ۲) + (۵ \times ۴)}{۴ + ۲ + ۴} = \frac{۸ + ۶ + ۲۰}{۱۰} = ۳/۴ \text{ amu}$$

۱۹۴ ۲ عبارت‌های دوم و سوم درست هستند. عنصرهای X و A به

ترتیب هیدروژن و هلیوم هستند. انرژی گرمایی و نور خیره‌کننده خورشید به دلیل تبدیل هیدروژن به هلیوم در واکنش‌های هسته‌ای است. در آرایش الکترون نقطه‌ای اتم هلیوم، الکترون جفت‌نشده وجود ندارد.

He:

۱۹۵ ۲ با توجه به ساختار ترکیب آلی مورد نظر، شمار جفت

الکترون‌های پیوندی و ناپیوندی آن به ترتیب ۱۱ و ۳ است:



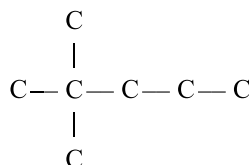
۲۰۱ ۳

نفت خام را پس از جداسازی نمک‌ها، اسیدها و آب،

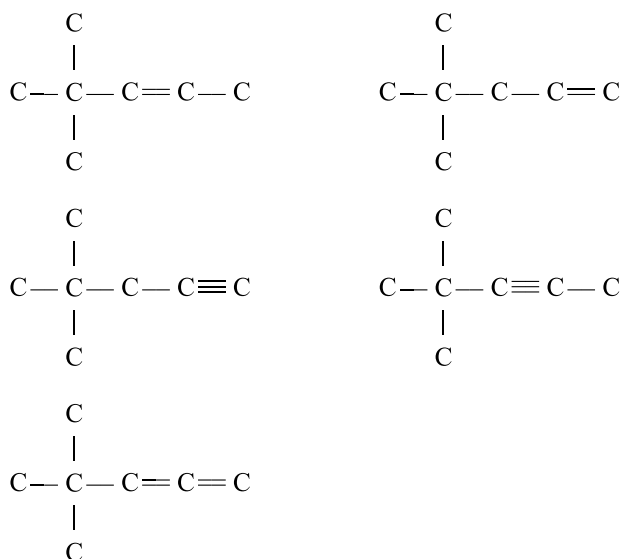
پالایش می‌کنند.

۲۰۲ ۱

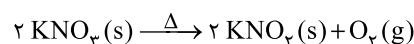
ساختار ۲، ۲- دی‌متیل پنتان به صورت زیر است:



با هیدروژن‌دار کردن هیدروکربن‌های زیر می‌توان این آلکان را تولید کرد:



۲۰۳ ۲



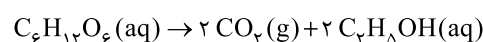
$$\frac{m \times \frac{100}{100} \times \frac{60}{100}}{2 \times 101} = \frac{x}{1 \times 32} \Rightarrow x = 0.076 \text{ m}$$



$$\frac{m \times \frac{70}{100} \times \frac{100}{100}}{2 \times 158} = \frac{x}{1 \times 32} \Rightarrow x = 0.056 \text{ m}$$

$$\text{مجموع جرم اکسیژن} = 0.076 \text{ m} + 0.056 \text{ m} = 0.132 \text{ m g O}_2$$

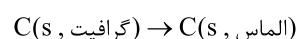
۲۰۴ ۳



$$\frac{2 \text{ mol C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6 \times \frac{R}{100} \times \frac{150 \text{ g} \times \frac{90}{100}}{1}}{1} = \frac{x}{2 \times 46} \Rightarrow \%R = \%73/3$$

معادله واکنش هدف به صورت زیر است:

۲۰۵ ۲



برای رسیدن به این واکنش کافیسیت واکنش a را به همان صورت نوشته، واکنش b را وارونه کنیم و سپس آن‌ها را با دو برابر واکنش c جمع کنیم:

$$\Delta H(\text{هدف}) = \Delta H_a - \Delta H_b + 2\Delta H_c = (+172) - (-395)$$

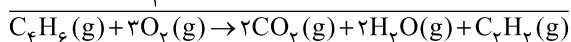
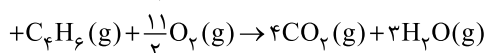
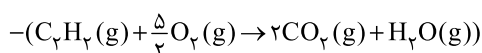
$$+ (2(-282/5)) = +2 \text{ kJ}$$

$$? \text{ kJ} = 1 \text{ g C} \times \frac{1 \text{ mol C}}{12 \text{ g C}} \times \frac{2 \text{ kJ}}{1 \text{ mol C}} \approx 0.17 \text{ kJ}$$

*علامت مثبت نشان‌دهنده مصرف شدن گرما است.

۲۰۶ ۳ با توجه به معادله‌های واکنش سوختن C_4H_6 و C_4H_8 ،

معادله واکنش مورد نظر از تفاضل آن‌ها به دست می‌آید:



$$\Delta H(\text{واکنش}) = [\text{مجموع آنتالپی پیوندهای فراورده‌ها}] - [\text{مجموع آنتالپی پیوندهای واکنش دهنده‌ها}]$$

$$\Delta H(\text{واکنش}) = [2\Delta H(\text{C}-\text{C}) + \Delta H(\text{C} \equiv \text{C}) + 6\Delta H(\text{C}-\text{H})]$$

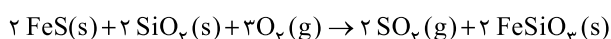
$$+ 3\Delta H(\text{O}=\text{O})] - [4\Delta H(\text{C}=\text{O}) + 4\Delta H(\text{O}-\text{H}) + 2\Delta H(\text{C}-\text{H})]$$

$$+ \Delta H(\text{C} \equiv \text{C}) = [2(350) + 4(415) + 3(500)]$$

$$- [4(800) + 4(465)] = [3860] - [5060] = -1200 \text{ kJ}$$

معادله موازنه‌شده واکنش داده‌شده به صورت زیر است:

۲۰۷ ۲



به‌ازای مصرف ۳ مول واکنش‌دهنده‌های گازی شکل (O_2)، دو مول فراورده گازی شکل (SO_2) تولیدشده و یک مول از گازهای درون سامانه کاسته می‌شود که معادل $1 \times 28 = 28$ لیتر است.

کاهش حجم (L) مول O_2

$$\left[\begin{array}{cc} 3 & 28 \\ x & 56 \end{array} \right] \Rightarrow x = 6 \text{ mol O}_2$$

$$\bar{R}_{\text{O}_2} = \frac{|\Delta n|}{\Delta t} = \frac{6 \text{ mol}}{(\frac{1}{6}) \text{ h}} = 36 \text{ mol.h}^{-1}$$

$$\bar{R}_{\text{واکنش}} = \frac{1}{3} \bar{R}_{\text{O}_2} = \frac{1}{3} \times 36 = 12 \text{ mol.h}^{-1}$$

$$\bar{R}_{\text{SiO}_2} = \frac{2}{3} \bar{R}_{\text{O}_2} = \frac{2}{3} \times 36 = 24 \text{ mol.h}^{-1}$$

$$\frac{24 \text{ mol}}{\text{h}} = \frac{1200 \text{ g} \times \frac{60 \text{ g}}{100 \text{ g}}}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{5}{6} \text{ h} \approx 50 \text{ min}$$

مدت زمان برای کامل شدن واکنش از آغاز برابر ۵۰ دقیقه بوده که پس از گذشت ۱۰ دقیقه به ۴۰ دقیقه دیگر نیاز است.



$$H^+ = (0.1 \times 0.05) + (0.3 \times 0.02)$$

$$+ (0.2 \times 0.01) + (0.4 \times 0.01) = 1.34 \times 10^{-2}$$

$$CH_3COO^- \text{ غلظت} = (0.3 \times 0.02) = 6 \times 10^{-3}$$

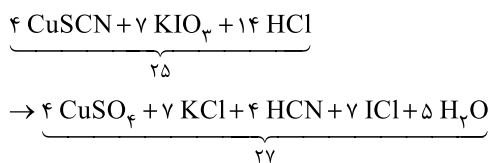
$$\frac{[H^+]}{[CH_3COO^-]} = \frac{1.34 \times 10^{-2}}{6 \times 10^{-3}} = 2.23$$

۲۱۳ ۳ موازنه را با هر کدام از عنصرهای C، S، Cu یا N می‌توانیم شروع کنیم:



در ادامه برای موازنه هر کدام از عنصرهای H، O، K، I و Cl به بن بست می‌خوریم. می‌توان ضرایب مواد KIO_3 ، HCl ، KCl ، ICl و H_2O را به ترتیب a، b، c، d و e در نظر گرفت و از روی مفهوم موازنه برای اتم‌های پنج عنصر H، O، K، I و Cl معادله‌های زیر را تشکیل داد:

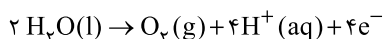
$$\left. \begin{array}{l} b = 1 + 2e \\ 3a = 4 + e \\ a = c \\ a = d \\ b = c + d \end{array} \right\} \Rightarrow a = \frac{5}{4}, b = \frac{9}{4}, c = \frac{5}{4}, d = \frac{5}{4}, e = \frac{5}{4}$$



$$27 - 25 = 2$$

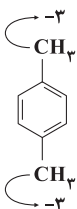
۲۱۴ ۲ بررسی عبارت‌هاک نادرست:

ب) در نیم‌واکنش آندی مربوط به برقکافت آب، گاز اکسیژن و یون هیدرونیوم تولید می‌شود:

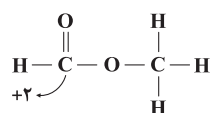


پ) در واکنش کلی سلول هال به‌ازای مبادله ۴ مول الکترون، یک مول گاز در آند (قطب مثبت) تولید می‌شود.

۲۱۵ ۲ • پایین‌ترین عدد اکسایش C در پارازاین برابر ۳- است:



• بالاترین عدد اکسایش C در متیل متانوات برابر ۲+ است:



• تفاوت دو عدد ۳- و ۲+ برابر ۵ است.

۲۰۸ ۲ مقدار گرمای حاصل از سوختن ۱۲/۸ گرم

متانول (CH_3OH) برابر است با:

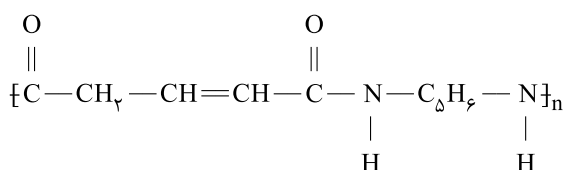
$$Q = mc\Delta\theta = 300g \times 2.5J.g^{-1}.^{\circ}C^{-1} \times (70 - 30)^{\circ}C = 3 \times 10^5 J$$

$$\equiv 300 kJ$$

در صورتی‌که یک مول متانول بسوزد گرمای حاصل برابر است با:

$$? kg = 1 mol CH_3OH \times \frac{32g CH_3OH}{1mol CH_3OH} \times \frac{300kJ}{12/8g CH_3OH} = 750kJ$$

۲۰۹ ۳ ساختار پلیمر مورد نظر به صورت زیر است:



جرم مولی واحد تکرارشونده این پلیمر برابر $192 g.mol^{-1}$ است:

$$n = \frac{2 \times 10^6}{192} \approx 10415$$

۲۱۰ ۴ ترکیب‌های یونی نامحلول در آب مانند $AgCl$ با این‌که

الکترولیت قوی هستند، اما محلول آن‌ها رسانای خوبی برای جریان برق به شمار نمی‌روند.

۲۱۱ ۴ ابتدا حساب می‌کنیم مقدار یون OH^- موجود در ۴۰۰

میلی‌لیتر از محلول اولیه برابر چند مول است:

$$pH = 12 \Rightarrow [H^+] = 10^{-12} \Rightarrow [OH^-] = 10^{-2} mol.L^{-1}$$

$$? mol OH^- = 0.4 L \times 10^{-2} \frac{mol}{L} = 4 \times 10^{-3} mol OH^-$$

از طرفی با توجه به pH محلول جوهرنمک (HCl) می‌توان حجم اضافه شده از این محلول را به دست آورد.

$$pH = 1/7 \Rightarrow [H^+] = 10^{-1/7} = 10^{-0.143} \approx 0.72 \times 10^{-1} mol.L^{-1}$$

$$H^+ \text{ مول} = 4 \times 10^{-3} \Rightarrow 2 \times 10^{-2} \frac{mol}{L} \times V(L) = 4 \times 10^{-3} mol$$

$$\Rightarrow V = 0.2 L \equiv 200 mL$$

$$[Cl^-] = \frac{4 \times 10^{-3}}{0.4 + 0.2} = \frac{2}{3} \times 10^{-2} \Rightarrow [Na^+] = \frac{2}{3} \times 10^{-2} mol.L^{-1}$$

$$\Rightarrow [OH^-]_{NaOH} = \frac{2}{3} \times 10^{-2}$$

$$\Rightarrow [OH^-]_{KOH} = (10^{-2}) - (\frac{2}{3} \times 10^{-2}) = \frac{1}{3} \times 10^{-2}$$

$$\Rightarrow [K^+] = \frac{1}{3} \times 10^{-2} \Rightarrow \frac{[Na^+]}{[K^+]} = \frac{\frac{2}{3} \times 10^{-2}}{\frac{1}{3} \times 10^{-2}} = 2$$



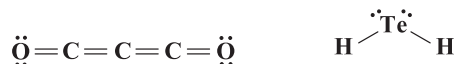
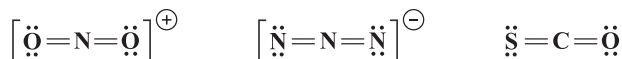
شبکه: $\text{MgO} > \text{MgF}_2 > \text{Na}_2\text{O} > \text{NaF}$

(۹۲۶) (۲۴۸۸) (۲۹۶۵) (۳۷۹۸) (kJ.mol^{-1})

$\text{O}^{2-} > \text{F}^- > \text{Na}^+ > \text{Mg}^{2+}$ شعاع یون

۲۱۷ به جز H_7Te که ساختار خمیده (V شکل) دارد، ساختار

سایر گونه‌ها به صورت خطی است:



۲۱۸ مقایسه میان آنتالپی پیوندهای $\text{H}-\text{H}$ و $\text{I}-\text{I}$ به

صورت زیر است: $\Delta H(\text{H}-\text{H}) > \Delta H(\text{I}-\text{I})$

می‌توان نتیجه گرفت که انرژی فعال‌سازی واکنش b بیشتر از واکنش a است (حذف گزینه ۳). از طرفی در واکنش c در واکنش‌دهنده‌ها نیم‌مول پیوند $\text{H}-\text{H}$ و نیم مول پیوند $\text{I}-\text{I}$ وجود دارد که مجموع آن‌ها معادل میانگین آنتالپی‌های این پیوند بوده که از آنتالپی پیوند $\text{H}-\text{H}$ کم‌تر و از آنتالپی پیوند $\text{I}-\text{I}$ بیشتر خواهد بود (حذف گزینه‌های ۱ و ۴).

۲۱۹ با توجه به این‌که در هر سمت واکنش، ۳ مول گاز داریم، حجم

سامانه در مقدار K بی‌تأثیر است.



۲: ۵/۵ ° آغاز

۲-x ۵/۵-۲x ۳x تعادل

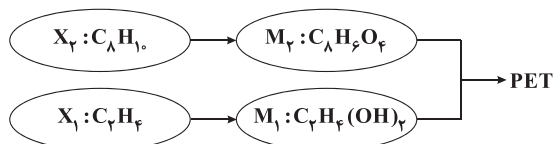
مطابق داده‌های سؤال می‌توان نوشت:

$$\frac{3x}{(2-x+5/5-2x)+3x} = \frac{40}{100} \Rightarrow \frac{3x}{2-x+5/5-2x} = \frac{40}{100} = \frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{3x}{7/5-3x} = \frac{2}{5} \Rightarrow 9x = 15-6x \Rightarrow 15 = 15x \Rightarrow x = 1$$

$$K = \frac{[\text{D}]^3}{[\text{A}][\text{X}]^2} = \frac{[3(1)]^3}{[2-1][5/5-2]^2} = \frac{3 \times 3 \times 3}{1 \times 3/5 \times 3/5} = 2/20$$

۲۲۰ عبارت‌های دوم و سوم درست هستند.

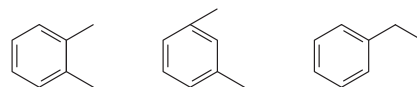


بررسی عبارت‌ها:

• جرم مولی M_7 ، X_7 و M_1 به ترتیب برابر ۱۶۶، ۱۰۶ و ۶۲ گرم بر مول است:

$$166 - 106 < 62$$

• ساختارهای زیر ایزومرهای پارازایلن با حلقه بنزنی هستند:



• C_7H_7 در دما و فشار اتاق، گازی شکل و $\text{C}_7\text{H}_7(\text{OH})_7$ در همین

شرایط مایع است.

• PET در اثر واکنش با متانول به مواد مفیدی تبدیل می‌شود، نه به

مونومرهای سازنده خود