



723

A

پنجشنبه

۱۴۰۲/۰۳/۲۵



گروه آموزشی ماز

آزمون الکترونیکی کنکوری‌های ریاضی - مرحله ۲۳

آزمون اختصاصی - دفترچه ۱

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سوال	از شماره	تا شماره	زمان پاسخگویی
۱	ریاضیات	۴۰	۱	۴۰	۷۰ دقیقه

حق چاپ و تکثیر سوالات به هر روش (الکترونیکی و ...) پس از برگزاری آزمون برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز «گروه ماز» مجاز می‌باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می‌شود.

به دلیل عدم رضایت تیم ماز، هر گونه استفاده غیرقانونی از دفترچه سوالات و پاسخنامه ماز برای تمامی اشخاص، شرعاً حرام است.



SanjeshCloud

www.SanjeshCloud.ir

۱- جملات سوم و پنجم یک دنباله هندسی صعودی به ترتیب برابر $\frac{2}{3}$ و ۶ است. با فرض $\log_3^5 = \frac{7}{3}$ ، مجموع لگاریتم‌های هفت جمله اول این دنباله کدام است؟

- (۱) $2/4$ (۲) $2/1$ (۳) $3/4$ (۴) $3/1$

۲- رأس سهمی $y = -2x^2 + 8x + a$ روی عمودمنصف دو نقطه $A(2, 1)$ و $B(-3, 2)$ قرار دارد. فاصله رأس سهمی از مبدأ چند برابر a است؟

- (۱) $\frac{7}{3}$ (۲) $\frac{5}{3}$ (۳) $\frac{7\sqrt{2}}{3}$ (۴) $\frac{5\sqrt{2}}{3}$

۳- معادله‌های $x^2 - mx - n = 0$ و $2x^2 - 5x - n = 0$ دارای یک ریشه مشترک هستند. نسبت ریشه‌های غیرمشترک آن‌ها کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $-\frac{1}{3}$ (۳) -2 (۴) 2

۴- نمودار تابع $y = x^6 - x$ در بازه (a, b) زیر نمودار $y - 4x - 6 = 0$ قرار می‌گیرد. بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟

- (۱) 3 (۲) 2 (۳) 1 (۴) $\frac{7}{2}$

۵- نقاط $A(4, 11)$ و $B(1, 3)$ ، دو رأس یک مستطیل و دو ضلع مقابل به هم مستطیل، روی خطوط $y = ax + 3$ و $y = ax + 3$ قرار دارند. اندازه طول مستطیل کدام است؟

- (۱) $\frac{17}{\sqrt{15}}$ (۲) $\frac{17}{\sqrt{5}}$ (۳) $\frac{19}{\sqrt{5}}$ (۴) $\frac{19}{\sqrt{15}}$

۶- توابع $g(x) = \frac{x+7}{4x-4} + \frac{2x^2+13x-7}{x^2+9x+14}$ و $f(x) = 3^{\frac{x}{2}-1}$ را در نظر بگیرید. اگر جواب معادله $f^{-1}(g^{-1}(x)) = b$ برابر ۳ باشد، مقدار b کدام است؟

- (۱) $\log_3^{49}$ (۲) $\log_3^{36}$ (۳) $\log_3^{52}$ (۴) برای b مقداری وجود ندارد.

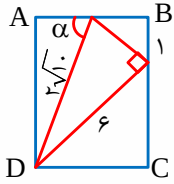
۷- نمودار تابع $f(x) = a(3^{bx})$ ، نمودار تابع $y = \frac{4x-6}{3}$ را در نقطه‌ای به طول ۶ قطع می‌کند. اگر $f^{-1}(2) = 3$ باشد، مقدار $f(12)$ کدام است؟

- (۱) 72 (۲) 54 (۳) 729 (۴) 486

محل انجام محاسبات



۸- در شکل مقابل، چهارضلعی ABCD یک مستطیل است. مقدار $\tan \alpha$ کدام است؟



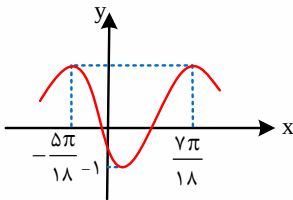
(۲) $\frac{5\sqrt{3}+6}{3}$

(۱) $\frac{6\sqrt{3}+5}{3}$

(۴) $\frac{6\sqrt{5}+5}{3}$

(۳) $\frac{3\sqrt{5}+5}{3}$

۹- شکل مقابل، قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a \sin(bx + \frac{\pi}{3}) + c$ است. اگر نمودار تابع f از نقطه $(-\frac{\pi}{6}, 2)$ عبور کند، از کدام نقطه زیر نیز عبور می‌کند؟



(۲) $(-\frac{\pi}{9}, 1)$

(۱) $(-\frac{\pi}{9}, 0)$

(۴) $(-\frac{\pi}{9}, \sqrt{3}-1)$

(۳) $(-\frac{\pi}{9}, -1)$

۱۰- یک ریشه معادله $\tan(x + \frac{\pi}{4}) - \tan(\frac{\pi}{4} - x) = m$ برابر $\frac{\pi}{12}$ است. مجموع ریشه‌های معادله در بازه $[0, \frac{3\pi}{4}]$ کدام است؟

(۴) $\frac{7\pi}{2}$

(۳) $\frac{5\pi}{2}$

(۲) $\frac{7\pi}{4}$

(۱) $\frac{5\pi}{4}$

۱۱- اگر $f(x) = \log(2x+8) + \log \frac{10}{x}$ و $g(x) = \sqrt{2x-2} + x - 4$ و $h(x) = ||3x-1|-1|$ ، مجموع ریشه‌های معادله

$f(g(h(x))) = 2$ کدام است؟

(۴) $-\frac{4}{3}$

(۳) $\frac{2}{3}$

(۲) $-\frac{1}{2}$

(۱) صفر

۱۲- فرض کنید $(x \leq -1)$ و $f(x) = 2x^2 + 4x - 1$ ، حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{f(x)}}{(f^{-1}(x))^2}$ کدام است؟

(۴) $4\sqrt{2}$

(۳) $2\sqrt{2}$

(۲) $\sqrt{2}$

(۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۱۳- تابع $f(x) = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x+1} - \sqrt{4x-8})}{x^2 + ax + b}$ ، با فرض $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \frac{-3\sqrt{3}}{28}$ ، چند خط مجانب دارد؟

(۴) ۳

(۳) ۲

(۲) ۱

(۱) صفر

محل انجام محاسبات



۱۴- برای تابع $f(x) = \frac{ax[x]}{|x^2 - 1| + 2}$ داریم $f'_+(0) - f'_-(0) = -\frac{2}{3}$ مقدار a کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) ۴ (۴) -۴

۱۵- مثلث‌های متساوی‌الساقین با محیط ۶ را در نظر بگیرید. مثلثی که بیشترین مساحت را دارد را حول قاعده دوران می‌دهیم. حجم شکل حاصل کدام است؟

- (۱) 2π (۲) 4π (۳) $\frac{2\pi}{3}$ (۴) $\frac{4\pi}{3}$

۱۶- نقاط عطف تابع $y = \sqrt[3]{x}(x-4)$ روی کدام خط زیر قرار دارند؟

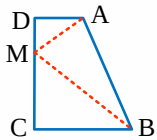
- (۱) $y = 5\sqrt[3]{2}x$ (۲) $y = -5\sqrt[3]{2}x$ (۳) $y = -3\sqrt[3]{2}x$ (۴) $y = 3\sqrt[3]{2}x$

محل انجام محاسبات

۱۷- در مثلث متساوی الاضلاعی به ضلع واحد، دایره‌های محاطی داخلی و خارجی نظیر رأس A را رسم نموده‌ایم. طول مماس مشترک خارجی این دو دایره کدام است؟

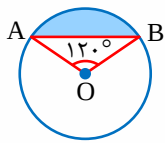
- (۱) $1/\sqrt{5}$ (۲) ۱ (۳) $2/\sqrt{5}$ (۴) ۲

۱۸- در ذوزنقه قائم‌الزاویه ABCD، اندازه‌های $CD=8$ ، $BC=6$ و $AD=2$ هستند. نقطه M روی ساق قائم CD متحرک است. کمترین مقدار $MA+MB$ کدام است؟



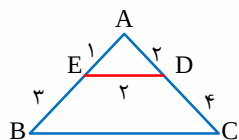
- (۱) $5\sqrt{2}$ (۲) $4\sqrt{2}$ (۳) $8\sqrt{2}$ (۴) $7\sqrt{2}$

۱۹- اگر در شکل زیر O مرکز دایره و $AB=3$ باشد، مساحت قسمت سایه‌زده شده کدام است؟



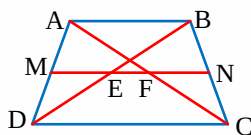
- (۱) $\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}$ (۲) $\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2}$ (۳) $\pi - \frac{\sqrt{3}}{4}$ (۴) $\pi - \frac{3\sqrt{3}}{4}$

۲۰- در شکل زیر، مساحت چهارضلعی BCDE کدام است؟



- (۱) $\frac{11\sqrt{15}}{4}$ (۲) $\frac{11\sqrt{15}}{3}$ (۳) $\frac{11\sqrt{15}}{2}$ (۴) $11\sqrt{15}$

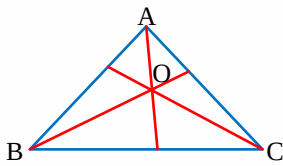
۲۱- در ذوزنقه زیر اگر M و N وسط ساق‌ها باشند و $MN=15$ و $EF=5$ باشد، حاصل $\frac{AB}{DC}$ کدام است؟



- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{3}{5}$

محل انجام محاسبات

۲۲- محیط و مساحت مثلث شکل زیر به ترتیب ۲۴ سانتی متر و ۱۸ سانتی متر مربع است. اگر O محل برخورد نیمسازهای مثلث باشد، مجموع فواصل نقطه O از سه ضلع مثلث چند سانتی متر است؟



- (۱) $1/5$
(۲) $2/5$
(۳) $3/5$
(۴) $4/5$

۲۳- سه نقطه A ، B و C غیرواقع بر یک خط راست مفروض اند. مکان هندسی نقاطی از فضا که از این سه نقطه به یک فاصله اند، کدام است؟

- (۱) یک نقطه (۲) یک خط (۳) یک صفحه (۴) یک دایره

۲۴- دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ کدام است؟

- (۱) -72 (۲) -36 (۳) 36 (۴) 72

۲۵- اگر $2A = \begin{bmatrix} |A| & -6 \\ |A| & |A| \end{bmatrix}$ و A ماتریسی وارون پذیر باشد، آنگاه مقدار دترمینان $\frac{1}{4} A^4 A^{-1}$ کدام است؟

- (۱) 2 (۲) 4 (۳) صفر (۴) -2

۲۶- طول مماس مشترک خارجی دو دایره $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$ و $x^2 + y^2 - 10x + 21 = 0$ کدام است؟

- (۱) 1 (۲) 2 (۳) $2\sqrt{2}$ (۴) $\sqrt{2}$

۲۷- کانون های بیضی به صورت $F \begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}$ و $F' \begin{pmatrix} 1-\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}$ دو سر قطری از یک دایره اند. این دایره نیمساز ناحیه اول را با کدام طول

قطع می کند؟

- (۱) 2 (۲) $1+\sqrt{3}$ (۳) $\frac{5}{2}$ (۴) 3

محل انجام محاسبات



۲۸- به ازای کدام مقدار k ، معادله خط هادی سهمی به معادله $y^2 = 2x + ky$ به فرم $x = -\frac{5}{4}$ است؟

- (۱) -۲ (۲) ۳ (۳) -۴ (۴) ۶

۲۹- اگر مساحت مثلث ساخته شده توسط بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر ۳ و $|\vec{a}| = ۲$ و $|\vec{b}| = ۳$ باشد، طول تصویر بردار $\vec{a}$ بر بردار $\vec{b}$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۶ (۴) صفر

۳۰- اگر میانگین داده‌های جدول زیر برابر ۱۶ باشد، واریانس کدام است؟

x_i	۱۲	۱۴	۱۶	۱۸	۲۰
f_i	۵	۷	۱۰	a	۳

- (۱) ۴/۵۵
(۲) ۵/۴۵
(۳) ۵/۵۵
(۴) ۴/۴۵

۳۱- کدام یک از گزاره‌های زیر همواره درست است؟

- (۱) $p \Leftrightarrow (p \vee \sim p)$ (۲) $p \Rightarrow (p \wedge \sim p)$ (۳) $p \Rightarrow (p \Leftrightarrow \sim p)$ (۴) $p \Rightarrow (\sim p \Rightarrow p)$

۳۲- متمم مجموعه $C \cup A' \cup B'$ نسبت به مجموعه مرجع با کدام مجموعه برابر نیست؟

- (۱) $(A \cap B) - (A \cap C)$
(۲) $(A - C) \cup (B - C)$
(۳) $A \cap (B - C)$
(۴) $(A \cap B) - C$

۳۳- در پرتاب ۲ تاس می‌دانیم حاصل ضرب اعداد رو شده تاس‌ها، عددی زوج است. احتمال این که مجموع ۲ تاس بر ۴ بخش پذیر باشد، کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{5}{18}$ (۳) $\frac{2}{9}$ (۴) $\frac{5}{27}$

محل انجام محاسبات

۳۴- دو سبد داریم که در سبد اول ۴ توپ قرمز و ۶ توپ سبز و در سبد دوم ۶ توپ قرمز و ۴ توپ سبز وجود دارد. یک سکه سالم را پرتاب می‌کنیم. اگر رو آمد، توپی به تصادف از سبد اول انتخاب می‌کنیم و اگر پشت آمد، توپی به تصادف از سبد دوم انتخاب می‌کنیم. احتمال انتخاب یک توپ قرمز چقدر است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{3}{5}$ (۴) $\frac{2}{3}$

۳۵- به ازای چند عدد طبیعی دورقمی x رابطه $x^2 - 8x \equiv -7 \pmod{9}$ برقرار است؟

- (۱) ۳۱ (۲) ۳۰ (۳) ۲۹ (۴) ۳۲

۳۶- معادله $25x + 12y = 1110$ بر روی مجموعه اعداد طبیعی چند زوج جواب دارد؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۳۷- در یک گراف ۳- منتظم اندازه گراف از ۵ برابر مرتبه آن ۲۱ واحد کمتر است. مجموع مرتبه و اندازه گراف کدام است؟

- (۱) ۱۵ (۲) ۱۲ (۳) ۱۸ (۴) ۲۱

۳۸- یک گراف ۴- منتظم از مرتبه ۶ چند مجموعه احاطه گر مینیمال دارد؟

- (۱) ۶ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴) ۱۵

۳۹- تعداد سه تایی‌های مرتب با مختصات صحیح و نامنفی به طوری که مجموع هر سه مولفه برابر ۱۰ و هر مولفه کمتر از ۶ باشد، کدام است؟

- (۱) ۲۰ (۲) ۲۱ (۳) ۲۲ (۴) ۱۹

۴۰- اگر هر یک از یال‌های گراف کامل K_{16} را با یکی از ۷ رنگ آبی، قرمز، سبز، زرد، قهوه‌ای، مشکی و سفید رنگ آمیزی کنیم، آنگاه بزرگترین مقدار n به طوری که مطمئن شویم حداقل n یال در این گراف هم‌رنگ هستند، کدام است؟

- (۱) ۱۷ (۲) ۱۸ (۳) ۱۹ (۴) ۲۰

محل انجام محاسبات



723

A

پنجشنبه

۱۴۰۲/۰۳/۲۵



گروه آموزشی ماز

آزمون الکترونیکی کنکوری‌های ریاضی – مرحله ۲۳

آزمون اختصاصی – دفترچه ۲

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سوال	از شماره	تا شماره	زمان پاسخگویی	ملاحظات
۲	فیزیک	۳۵	۴۱	۷۵	۴۵ دقیقه	۶۵ سوال
۳	شیمی	۳۰	۷۶	۱۰۵	۳۰ دقیقه	۷۵ دقیقه

حق چاپ و تکثیر سوالات به هر روش (الکترونیکی و ...) پس از برگزاری آزمون برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز «گروه ماز» مجاز می‌باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می‌شود.

به دلیل عدم رضایت تیم ماز، هر گونه استفاده غیرقانونی از دفترچه سوالات و پاسخنامه ماز برای تمامی اشخاص، شرعاً حرام است.

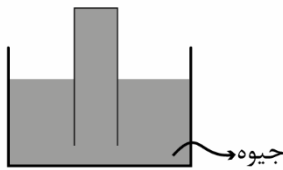


SanjeshCloud

www.SanjeshCloud.ir

۴۱- در شکل زیر، سطح مقطع لوله 4cm^2 است. اگر لوله را 5cm بیشتر در جیوه فرو ببریم، نیرویی که از طرف جیوه بر انتهای بسته لوله وارد می‌شود 20% درصد افزایش می‌یابد. در این حالت نیرویی که از طرف جیوه بر ته لوله وارد می‌شود چند نیوتون

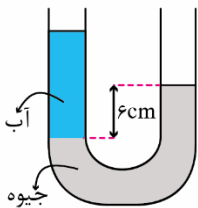
است؟ $(g = 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}}, \rho_{\text{جیوه}} = 13.5 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3})$



- (۱) $11/5$
- (۲) $12/4$
- (۳) $14/8$
- (۴) $16/2$

۴۲- در شکل زیر، اختلاف ارتفاع جیوه در دو طرف لوله U شکل، 6cm است. در لوله سمت راست چند سانتی‌متر روغن بریزیم تا

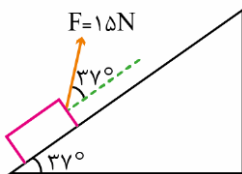
ارتفاع جیوه در دو لوله یکسان شود؟ $(\rho_{\text{آب}} = 1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}, \rho_{\text{روغن}} = 0.9 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}, \rho_{\text{جیوه}} = 13.5 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3})$



- (۱) ۹۰
- (۲) ۱۰۰
- (۳) ۱۲۰
- (۴) ۱۲۵

۴۳- مطابق شکل زیر، با استفاده از نیروی 15N نیوتونی جسمی به جرم $1/2\text{kg}$ را بر روی سطح شیب‌داری بالا می‌بریم. اگر در مدت

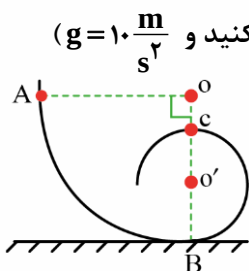
زمان مشخص t ، اندازه کار نیروی وزن 72J باشد، در این مدت کار نیروی F چند ژول است؟ $(g = 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}}, \sin 37^\circ = 0.6)$



- (۱) ۵۴
- (۲) ۶۰
- (۳) ۱۰۸
- (۴) ۱۲۰

۴۴- مطابق شکل زیر، گلوله‌ای از نقطه A در داخل یک سطح کروی به مرکز O رها می‌شود. گلوله در ادامه مسیر در نقطه B وارد

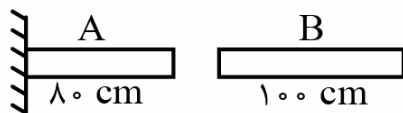
سطح کروی دیگر به مرکز O' می‌شود. اگر شعاع کره بزرگ‌تر ۳ برابر شعاع کره کوچک‌تر و تندی گلوله در نقطه C، $10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ باشد، بیشترین تندی گلوله در طول مسیر، از A تا C چند متر بر ثانیه است؟ (از اصطکاک صرف نظر کنید و $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$)



- (۱) $10\sqrt{2}$
- (۲) ۱۵
- (۳) $10\sqrt{3}$
- (۴) ۲۰

محل انجام محاسبات

۴۵- مطابق شکل زیر، دو میله فلزی A و B در امتداد یکدیگر و به فاصله $\frac{3}{1}$ میلی متری از هم در دمای یکسانی قرار دارند. میله A در یک انتهای خود بسته و هر دو انتهای میله B باز است. اگر ضریب انبساط طولی میله های A و B به ترتیب $\frac{1}{K} \times 10^{-5}$ و $\frac{1}{K} \times 10^{-5}$ باشد، دمای این مجموعه حداکثر چند درجه سلسیوس می تواند افزایش یابد، بدون اینکه میله ها به یکدیگر برسند؟



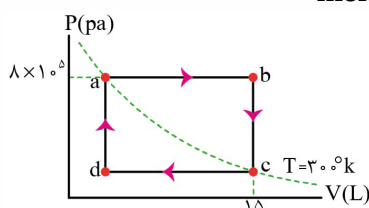
- (۱) ۳۰
- (۲) ۴۰
- (۳) ۵۰
- (۴) ۶۰

۴۶- درون ظرفی ۵ kg آب 20°C وجود دارد. درون این ظرف گلوله ای فلزی به جرم ۵۰۰ g و دمای 130°C و تکه یخی به جرم m و دمای -20°C می اندازیم. اگر پس از برقراری تعادل گرمایی، دمای مجموعه 10°C شود، m چند گرم است؟

$$c_{\text{آب}} = 4200 \frac{\text{J}}{\text{kg.K}}, c_{\text{فلز}} = 700 \frac{\text{J}}{\text{kg.K}}, L_f = 336000 \frac{\text{J}}{\text{kg}} \text{ و از تبادل گرما با ظرف و محیط صرف نظر شود}$$

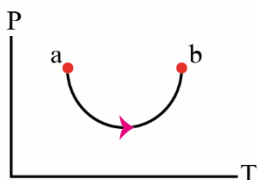
- (۱) ۳۰۰
- (۲) ۴۰۰
- (۳) ۶۰۰
- (۴) ۸۰۰

۴۷- نمودار (P-V) برای یک مول گاز کامل مطابق شکل زیر است. اگر نقاط a و c بر روی منحنی هم دمای نشان داده شده قرار داشته باشند، گرمایی که این گاز در یک چرخه با محیط مبادله می کند، چگونه است؟ $(R = 8 \frac{\text{J}}{\text{mol.K}})$



- (۱) ۷۶۸۰ J گرما می گیرد.
- (۲) ۷۶۸۰ J گرما از دست می دهد.
- (۳) ۸۲۴۰ J گرما می گیرد.
- (۴) ۸۲۴۰ J گرما از دست می دهد.

۴۸- نمودار P-T یک مول گاز کامل مطابق شکل مقابل است. کدام گزینه درباره کار انجام شده روی گاز در مسیر نشان داده شده درست است؟



- (۱) همواره مثبت است.
- (۲) همواره منفی است.
- (۳) در ابتدا مثبت و سپس منفی است.
- (۴) در ابتدا منفی و سپس مثبت است.

۴۹- در مواد، حتی در نبود میدان خارجی، در ناحیه هایی که حوزه مغناطیسی نامیده می شود، دو قطبی های مغناطیسی هم سو هستند که علت آن در این مواد است.

- (۱) فرومغناطیس - القای دو قطبی های مغناطیسی قوی
- (۲) پارامغناطیس - القای دو قطبی های مغناطیسی قوی
- (۳) فرومغناطیس - برهم کنش قوی بین دو قطبی های مغناطیسی
- (۴) پارامغناطیس - برهم کنش قوی بین دو قطبی های مغناطیسی

محل انجام محاسبات

۵۰- چند مورد از جمله‌های زیر در مورد انواع مقاومت‌ها درست است؟

(الف) از پتانسیومتر در زنگ خطر آتش به عنوان حسگر دما استفاده می‌شود چون بستگی آن به دما با سایر مقاومت‌ها متفاوت است.

(ب) در مقاومت‌های نوری، با افزایش نور، اندازه مقاومت کاهش می‌یابد.

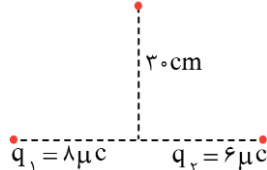
(ج) از دیود نورگسیل می‌توان به عنوان یکسوکننده جریان نیز استفاده کرد.

(د) پتانسیومتر در مدارهای الکترونیکی همان نقش رئوستا را دارد.

- (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) ۴

۵۱- در شکل زیر دو بار q_1 و q_2 در فاصله 60 cm از یکدیگر قرار دارند. اگر بار q_3 روی عمود منصف خط واصل دو بار q_1 و q_2 قرار گرفته باشد، نیروی الکتریکی وارد بر آن از طرف دو بار دیگر چند نیوتن است؟ $(k = 9 \times 10^9 \frac{\text{N.m}^2}{\text{C}^2})$

$$q_3 = 2\mu\text{C}$$



- (۱) ۴
(۲) ۳
(۳) ۲
(۴) ۱

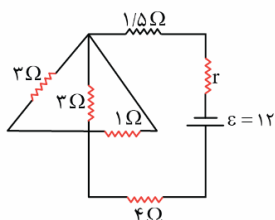
۵۲- شعاع کره فلزی A، نصف شعاع کره فلزی B است. اگر چگالی سطحی بار کره A، ۲۵ درصد چگالی سطحی بار کره B باشد، بار کره B چند برابر کره A است؟

- (۱) ۴ (۲) ۱۶ (۳) ۱ (۴) ۸

۵۳- در صفحه xy، بار الکتریکی نقطه‌ای $q_1 = -3\mu\text{C}$ در نقطه A به مختصات $(2\text{ cm}, 0)$ قرار دارد و بار الکتریکی $q_2 = 27\mu\text{C}$ نیز در نقطه B به مختصات $(-6\text{ cm}, 0)$ ثابت نگه داشته شده است و بار الکتریکی $q_3 = 4\mu\text{C}$ نیز در مکانی در این صفحه قرار دارد که نیروی الکتریکی خالص وارد بر آن صفر شود. اگر در این حالت، بار $q_4 = 2\mu\text{C}$ را در مختصات $(3\text{ cm}, 0)$ قرار دهیم، چه نیرویی (بر حسب نیوتن) از طرف بار q_3 بر آن وارد می‌شود؟ $(k = 9 \times 10^9 \frac{\text{N.m}^2}{\text{C}^2})$

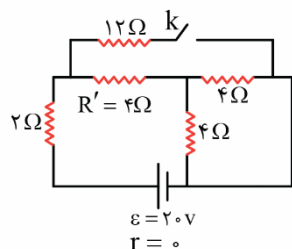
- (۱) ۸۰ (۲) ۶۰ (۳) ۴۰ (۴) ۲۰

۵۴- در مدار مقابل، انرژی مصرفی در مدت ۱۰ ثانیه در مقاومت $1/5$ اهمی چند برابر انرژی مصرفی در مدت ۵۰ ثانیه در یکی از مقاومت‌های ۳ اهمی است؟



- (۱) $1/5$
(۲) $2/5$
(۳) $3/5$
(۴) $4/5$

۵۵- در مدار مقابل، با بستن کلید k، جریان عبوری از مقاومت R' چند برابر می‌شود؟



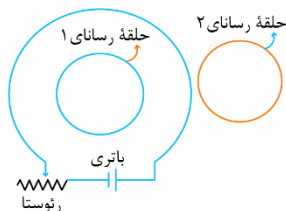
- (۱) $\frac{8}{9}$
(۲) $\frac{7}{8}$
(۳) $\frac{3}{4}$
(۴) $\frac{4}{5}$

محل انجام محاسبات

۵۶- سیملوله‌ای که از ۶۰۰ حلقه به شعاع ۱۰ cm تشکیل شده است دارای طول ۴۰ cm است. اگر جریان عبوری از سیملوله ۲۰۰ میلی آمپر کاهش یابد، به ترتیب از راست به چپ، میدان مغناطیسی روی محور سیملوله چند گاوس تغییر می‌کند و ضریب القاوری چند برابر می‌شود؟ ($\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{T.m}{A}$)

- (۱) $1, 1/2\pi$ (۲) $2, -1/2\pi$ (۳) $3, -1/2\pi$ (۴) $4, 1/2\pi$

۵۷- در مدار مقابل، اگر جریان القا شده در حلقه رسانای ۱، ساعتگرد باشد، به ترتیب از راست به چپ، مقاومت رؤستا به کدام سمت حرکت کرده است و جریان القایی در حلقه رسانای ۲ در کدام جهت است؟



- (۱) راست، ساعتگرد
(۲) چپ، پادساعتگرد
(۳) راست، پادساعتگرد
(۴) چپ، ساعتگرد

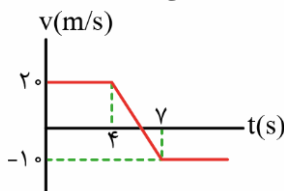
۵۸- حلقه‌ای به مساحت 50 cm^2 عمود بر خطوط میدان مغناطیسی قرار دارد. اگر معادله تغییرات این میدان در SI به صورت $B = 2t^2 + t$ باشد، اندازه جریان متوسط القایی در آن در ۲ ثانیه اول چند آمپر است؟ (مقاومت حلقه 0.5Ω است)

- (۱) 0.5 (۲) 0.5 (۳) 50 (۴) 5

۵۹- معادله مکان - زمان متحرکی که روی محور xها حرکت می‌کند، در SI به صورت $x = 2t^2 - 8t - 10$ است. تندی متوسط متحرک در بازه‌ای که جهت بردار مکان متحرک در خلاف جهت محور x است، چند متر بر ثانیه می‌باشد؟

- (۱) $3/6$ (۲) 2 (۳) $5/2$ (۴) 4

۶۰- شکل زیر، نمودار سرعت - زمان متحرکی است که روی محور xها در حرکت است. اگر متحرک در مبدأ زمان از مکان $x_0 = -40 \text{ m}$ عبور کرده باشد، در ۱۵ ثانیه اول حرکت، چند ثانیه متحرک در حال نزدیک شدن به مبدأ مکان بوده است؟



- (۱) ۶
(۲) $6/5$
(۳) $8/5$
(۴) ۹

۶۱- خودرویی روی خط راست با تندی ثابت در حرکت است. ناگهان راننده ترمز گرفته و حرکت خودرو با شتاب ثابت می‌شود و خودرو ۵ ثانیه پس از ترمز می‌ایستد. دو ثانیه پس از لحظه ترمز، چند درصد از کل مسافت طی شده از ترمز تا توقف خودرو، طی شده است؟

- (۱) ۳۶ (۲) ۴۰ (۳) ۶۰ (۴) ۶۴

۶۲- گلوله‌ای در شرایط خلأ از ارتفاعی نسبت به سطح زمین رها شده و در سه ثانیه پایانی حرکت خود ۱۹۵ متر طی می‌کند. تندی متوسط گلوله در دو ثانیه پایانی حرکت، چند برابر تندی متوسط آن در دو ثانیه آغازین حرکت است؟ ($g = 10 \frac{m}{s^2}$)

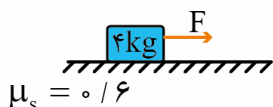
- (۱) ۱ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۲

محل انجام محاسبات

۶۳- فتری به جرم ناچیز را از سقف آویزان می‌کنیم. جسمی به جرم ۲۰۰ گرم را به آن متصل کرده و از حالتی که فنر طول عادی خود را دارد، جسم را رها می‌کنیم. اگر در این آزمایش، بیشترین طول فنر به ۳۲cm برسد، در لحظه‌ای که طول فنر ۳۰cm می‌شود، بردار شتاب جسم در SI کدام است؟ (ثابت فنر را $50 \frac{N}{m}$ در نظر بگیرید و $g = 10 \frac{m}{s^2}$)

(۱) $\vec{a} = (+1 \frac{m}{s^2}) \vec{j}$ (۲) $\vec{a} = (-1 \frac{m}{s^2}) \vec{j}$ (۳) $\vec{a} = (+5 \frac{m}{s^2}) \vec{j}$ (۴) $\vec{a} = (-5 \frac{m}{s^2}) \vec{j}$

۶۴- جسمی به جرم ۴kg مطابق شکل روی یک سطح افقی به حال سکون قرار دارد. چنانچه نیروی $\vec{F}$ را مطابق شکل به جسم اعمال کرده و آن را از صفر به تدریج افزایش دهیم، حداقل شتاب جسم در لحظه شروع به حرکت آن، معادل $4 \frac{m}{s^2}$ می‌باشد. اکنون اگر نیروی $\vec{F}'$ را در راستای قائم و رو به پائین به جسم اعمال کنیم، سرعت جسم ثابت خواهد شد. بزرگی نیروی $\vec{F}'$ چند نیوتن است؟ ($g = 10 \frac{N}{kg}$)



(۱) ۶۰ (۲) ۴۰ (۳) ۱۲۰ (۴) ۸۰

۶۵- دو جسم A و B را روی سطح افقی مماس بر سطح پرتاب می‌کنیم. جسم A پس از ۲۰ متر و جسم B پس از ۵ متر جابه‌جایی در نهایت متوقف می‌شوند. اگر ضریب اصطکاک جنبشی جسم A با زمین دو برابر ضریب اصطکاک جنبشی جسم B با زمین باشد و تغییر تکانه دو جسم از لحظه پرتاب تا لحظه توقف را با Δp نمایش دهیم، نسبت $\frac{\Delta p_A}{\Delta p_B}$ کدام است؟ (جرم جسم A نصف جرم جسم B است.)

(۱) $\sqrt{2}$ (۲) ۴ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴) ۲

۶۶- دو ماهواره A و B به ترتیب در فاصله‌های R_e و $2R_e$ از سطح زمین به طور یکنواخت در حال گردش هستند. چنانچه بزرگی نیروی گرانشی وارد بر دو ماهواره مساوی باشد، انرژی جنبشی ماهواره B چند برابر انرژی جنبشی ماهواره A است؟ (R_e شعاع کره زمین است)

(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) ۲ (۴) ۳

۶۷- نوسانگری روی یک خط راست حرکت هماهنگ ساده با دوره تناوب T و دامنه A انجام می‌دهد. بیشینه تندی متوسط این نوسانگر در پیمودن مسافتی معین به اندازه $A\sqrt{2}$ ، چند برابر تندی نوسانگر در لحظه عبور از مبدأ نوسان است؟

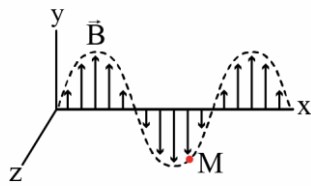
(۱) $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$ (۲) $\frac{4\sqrt{2}}{\pi}$ (۳) $\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$ (۴) $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$

۶۸- معادله مکان - زمان یک حرکت هماهنگ ساده در SI به صورت $x = 0.5 \cos(10\pi t)$ است. در کدام یک از لحظات زیر، انرژی پتانسیل نوسانگر در حال افزایش و بردار نیروی وارد بر نوسانگر در خلاف جهت محور x می‌باشد؟

(۱) $t = 30 \text{ ms}$ (۲) $t = 80 \text{ ms}$ (۳) $t = 120 \text{ ms}$ (۴) $t = 170 \text{ ms}$

محل انجام محاسبات

۶۹- شکل مقابل، نقش میدان مغناطیسی از یک موج الکترومغناطیسی که در خلأ منتشر می شود را در یک لحظه معین نشان می دهد. اگر در این لحظه، جهت میدان الکتریکی در نقطه M در جهت -z باشد، بردار سرعت انتشار این موج در SI کدام بوده و بزرگی میدان مغناطیسی در نقطه M در این لحظه به چه صورت در حال تغییر بوده است؟



(۲) $\left(\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}\right) \vec{i}$ ، در حال افزایش

(۱) $\left(-\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}\right) \vec{i}$ ، در حال کاهش

(۴) $\left(\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}\right) \vec{i}$ ، در حال کاهش

(۳) $\left(-\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}\right) \vec{i}$ ، در حال افزایش

۷۰- پرتو نوری تحت زاویه تابش 50° از محیط شفاف (۱) به مرز جدایی محیط های (۱) و (۲) تابیده و وارد محیط دوم می شود. اگر ضریب شکست محیط (۲)، ۲۵ درصد بیشتر از ضریب شکست محیط (۱) باشد، نور پس از ورود به محیط (۲) چند درجه از امتداد اولیه خود منحرف خواهد شد؟ ($\sin 50^\circ = 0.75$ و $\sin 30^\circ = 0.5$)

(۴) ۱۵

(۳) ۵

(۲) ۱۳

(۱) ۳

۷۱- در یک تار مرتعش، نیروی کشش ۹۰ نیوتن و قطر مقطع تار ۲cm می باشد. اگر چگالی تار $\frac{3}{\text{cm}} \text{g}$ بوده و موج عرضی با بسامد ۲۰۰Hz در تار در حال انتشار باشد، کدام یک از گزینه های زیر می تواند فاصله یک برآمدگی تا یک فرورفتگی در تار را بر حسب سانتی متر بیان کند؟ ($\pi = 3$)

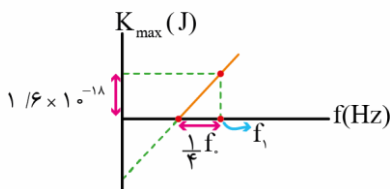
(۴) ۱۲/۵

(۳) ۱۰

(۲) ۱/۲۵

(۱) ۵

۷۲- در یک آزمایش فوتوالکتریک نمودار بیشینه انرژی جنبشی فوتوالکترن های گسیل شده بر حسب بسامد نور، مانند شکل زیر است. چنانچه f، بیانگر بسامد آستانه فلز بوده و نوری با بسامد f_1 بر فلز بتابانیم، تابع کار فلز چند الکترون ولت است؟ ($e = 1.6 \times 10^{-19} \text{C}$)



(۱) ۴۰

(۲) ۲۵

(۳) ۲۰

(۴) ۱۵

۷۳- در اتم هیدروژن، کدام گسیل زیر منجر به تابش فوتونی با بسامد ۶۷/۵THz خواهد شد؟

($R = 0.01 \text{nm}^{-1}$, $c = 3 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$)

(۴) $\Delta E(5 \rightarrow 2)$

(۳) $\Delta E(7 \rightarrow 2)$

(۲) $\Delta E(5 \rightarrow 4)$

(۱) $\Delta E(3 \rightarrow 1)$

۷۴- یک هسته پرتوزا در یک واپاشی طبیعی، دو ذره آلفا، یک ذره بتای منفی و یک نوترون گسیل می کند. بار الکتریکی هسته دختر نسبت به هسته مادر چند کولن و به چه صورت تغییر خواهد کرد؟ ($e = 1.6 \times 10^{-19} \text{C}$)

(۲) $4/8 \times 10^{-19}$ کولن کاهش می یابد.

(۱) $1/6 \times 10^{-19}$ کولن کاهش می یابد.

(۴) ثابت می ماند.

(۳) 8×10^{-19} کولن کاهش می یابد.

۷۵- در فروپاشی یک ماده پرتوزا، در لحظه t_1 ، ۵۰ درصد و در لحظه t_2 ، ۹۳/۷۵ درصد از تعداد هسته های اولیه دچار فروپاشی شده است. $\Delta t = t_2 - t_1$ چند برابر نیمه عمر این ماده است؟

(۴) ۵

(۳) ۴

(۲) ۳

(۱) ۲

محل انجام محاسبات

۷۶- چند مورد از مطالب زیر، نادرست هستند؟ (میانگین جرم اتمی بور (B) را $10^{-23} \times 1/8$ در نظر بگیرید).

- (آ) هر چه نیم عمر یک ایزوتوپ کوتاه تر باشد، پایداری آن ایزوتوپ بیش تر است.
 (ب) شمار ذرات زیراتمی باردار در آخرین گاز نجیب، $29/5$ برابر Z فراوان ترین عنصر پوسته جامد زمین است.
 (پ) با افزایش عدد اتمی، همواره تعداد نوارهای رنگی در طیف نشری خطی عناصر مختلف افزایش پیدا می کند.
 (ت) مدل بور توانست علاوه بر طیف نشری خطی هیدروژن، طیف نشری خطی سایر عنصرها را نیز توجیه کند.
 (ث) در یک نمونه به جرم $16/254$ گرم از عنصر بور، $10^{23} \times 3/612$ الکترون با عدد کوانتومی $l = 0$ وجود دارد.

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۷۷- اگر اختلاف شمار نوترون و الکترون در یک رادیوایزوتوپ پولونیوم (^{210}Po) برابر ۴۱ باشد، نسبت تعداد نوترون ها به پروتون ها در این رادیوایزوتوپ از $1/5$ بوده و بعد از گذشت سال، $96/875$ درصد از یک نمونه 50 گرمی آن، تجزیه خواهد شد. (نیم عمر رادیوایزوتوپ موردنظر را $10^9 \times 2/43$ ثانیه و هر ماه را معادل 30 روز در نظر بگیرید).

(۱) کوچک تر - $312/5$ (۲) بزرگ تر - $312/5$ (۳) کوچک تر - $390/625$ (۴) بزرگ تر - $390/625$

۷۸- در یک آزمایش، از واکنش مخلوطی از ایزوتوپ های ^{16}O و ^{18}O با ایزوتوپ های ^{50}Cr ، ^{52}Cr و ^{53}Cr اکسیدهایی با جرم های مولی متفاوت تشکیل می شود که در آن ها عدد اکسایش کروم برابر $+6$ است. نسبت تقریبی جرم مولی سنگین ترین این اکسیدها به جرم مولی سبک ترین آن ها و تعداد انواع اکسیدهایی با جرم مولی زوج، به ترتیب از راست به چپ کدام است؟

(۱) $6 - 1/0.4$ (۲) $8 - 1/0.4$ (۳) $6 - 1/0.9$ (۴) $8 - 1/0.9$

۷۹- کدام مطلب زیر، نادرست است؟

- (۱) اولین عنصر از جدول دوره های که آرایش الکترونی آن از قاعده آفبا تبعیت نمی کند، در لایه سوم خود 13 الکترون دارد.
 (۲) حدود $16/7$ درصد از عناصر موجود در دسته p جدول دوره های، تمایل به انجام واکنش های شیمیایی ندارند.
 (۳) شمار الکترون های ظرفیتی چهارمین عنصر دسته d با شمار این الکترون ها در اتم مرکزی SF_6 برابر است.
 (۴) میان یون های حاصل از دو عنصر A و B با آرایش الکترون - نقطه ای مقابل، پیوند یونی برقرار می شود.

۸۰- در چند درصد از گونه های زیر، شمار جفت الکترون های پیوندی و شمار جفت الکترون های ناپیوندی با هم برابر است؟

CS_2 • (۴) 80 N_2O • (۱) 20 $NOCl$ • (۲) 40 C_2^{2-} • (۳) 60 N_3^- • (۴) 80

۸۱- در یک آزمایش، گاز CO_2 حاصل از سوختن کامل $17/8$ گرم از نوعی چربی با فرمول $C_{57}H_{110}O_6$ ، با مخلوطی از دو ترکیب منیزیم اکسید و کلسیم اکسید به طور کامل واکنش داده است. اگر مجموع جرم مواد معدنی تولید شده در این آزمایش، برابر با $99/6$ گرم باشد، نسبت شمار یون های فلز با واکنش پذیری کمتر به شمار یون های فلز دیگر در مخلوط موردنظر کدام است؟

($Ca = 40$, $Mg = 24$, $O = 16$, $C = 12$, $H = 1$: $g \cdot mol^{-1}$)

(۱) $3/25$ (۲) $3/5$ (۳) $3/75$ (۴) 4

۸۲- در یک نمونه محلول آمونیوم فسفات، تفاوت شمار آنیون ها و کاتیون ها برابر با $10^{22} \times 1/505$ است. اگر به این محلول، مقدار $539/5$ میلی گرم سدیم فسفات اضافه کنیم، غلظت یون فسفات در محلول نهایی بر حسب ppm به تقریب کدام است؟ (جرم محلول نهایی را برابر با 400 گرم در نظر بگیرید. $P = 31$, $Na = 23$, $O = 16$: $g \cdot mol^{-1}$)

(۱) 3125 (۲) 3250 (۳) 3500 (۴) 3750

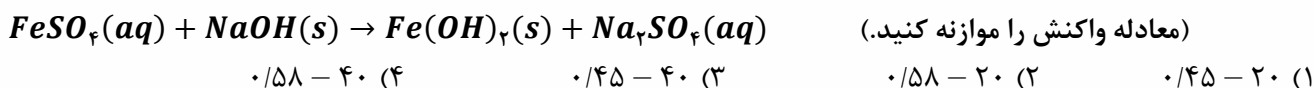
محل انجام محاسبات

۸۳- کدام موارد از عبارت‌های زیر، درست هستند؟

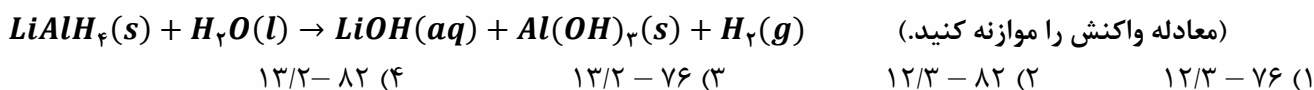
- (آ) میانگین قدرت پیوند یونی در کلسیم فسفات و پیوند هیدروژنی آب، از نیروی یون-دوقطبی در مخلوط این مواد بیشتر است.
 (ب) آب تصفیه شده با استفاده از فرایند تقطیر، نسبت به آب تصفیه شده توسط صافی کربن، مقدار آلودگی کمتری دارد.
 (پ) انحلال پذیری گازهای مختلف در آب با فشار گاز رابطه مستقیم داشته و با دمای محلول مورد نظر رابطه عکس دارد.
 (ت) در مواد مولکولی با جرم مولی مشابه، ماده‌ای که در میدان الکتریکی جهت‌گیری نمی‌کند، آسان‌تر مایع می‌شود.

(۱) آ و ب (۲) آ و پ (۳) ب و ت (۴) پ و ت

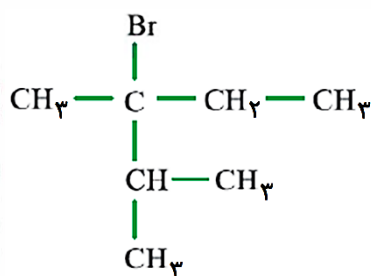
۸۴- اگر به ۲/۵ کیلوگرم محلول آهن(II) سولفات با غلظت 30400 ppm ، مقدار گرم سدیم هیدروکسید جامد اضافه کنیم، واکنش زیر به طور کامل انجام شده و مجموع غلظت مولی یون‌ها در محلول نهایی به تقریب برابر مول بر لیتر خواهد بود. (حجم محلول نهایی را برابر با ۲۵۶۰ میلی‌لیتر در نظر بگیرید. $(Fe = 56, S = 32, O = 16 : g. mol^{-1})$)



۸۵- از واکنش ۹/۳۷۵ گرم $LiAlH_4$ ناخالص با ۱۲۶۳/۵ میلی‌لیتر آب مطابق واکنش زیر، مقدار ۰/۶ لیتر گاز با چگالی $2/5 g. L^{-1}$ تولید شده است. درصد خلوص $LiAlH_4$ مصرف شده چقدر بوده و pH محلول نهایی کدام است؟ (آلومینیم هیدروکسید در آب کاملاً نامحلول است. $(Al = 27, O = 16, Li = 7, H = 1 : g. mol^{-1})$)



۸۶- نام ترکیبی با ساختار مولکولی مقابل، بر اساس قواعد آیوپاک به صورت بوده و این ترکیب، ایزومر با یک شاخه اتیل دارد.



- (۱) ۳-برمو-۳،۲-دی‌متیل پنتان، ۳
 (۲) ۳-برمو-۳-دی‌متیل پنتان، ۷
 (۳) ۳-برمو-۳،۲-دی‌متیل پنتان، ۷
 (۴) ۳-برمو-۳،۲-دی‌متیل پنتان، ۳

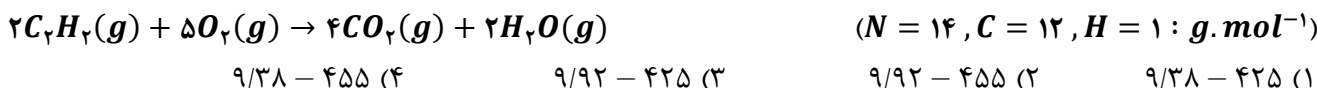
۸۷- معادله‌ی واکنش‌های زیر را در نظر بگیرید:



با توجه به معادله‌ی این واکنش‌ها، با استفاده از عنصر فلزی D ، عنصر A را از ساختار ACl_3 خارج کرد و از بین این سه عنصر فلزی، تامین شرایط مورد نیاز برای نگهداری فلز دشوارتر از سایر فلزها است.

(۱) می‌توان D (۲) نمی‌توان D (۳) می‌توان Z (۴) نمی‌توان Z

۸۸- اگر آنتالپی پیوندهای $N-H$ ، $N \equiv N$ و $N-N$ به ترتیب برابر با ۴۳۲، ۹۴۲ و ۳۸۸ کیلوژول بر مول باشد، برای تولید ۱۶۰ گرم هیدرازین از گازهای N_2 و H_2 ، چند کیلوژول انرژی نیاز است و این انرژی را به طور تقریبی با سوختن چند گرم گاز استیلن می‌توان تأمین کرد؟ (ارزش سوختی گاز استیلن برابر با $48/5 kJ. g^{-1}$ است.)



محل انجام محاسبات

۸۹- چند مورد از مطالب زیر، درست هستند؟ ($O = 16 \text{ g.mol}^{-1}$)

- (آ) یک نمونه آب خالص، در مقایسه با روغن زیتون با جرم یکسان، مقاومت بیشتری در برابر تغییر دما نشان می دهد.
 (ب) در واکنش فتوسنتز، فراورده های تولید شده در سطح انرژی بالاتری نسبت به واکنش دهنده ها قرار دارند.
 (پ) با انحلال مقداری آمونیوم نیترات در آب، مجموع انرژی جنبشی مولکول های آب کاهش پیدا خواهد کرد.
 (ت) برخلاف ماده آلی موجود در زردچوبه، گروه کربونیل در ماده آلی موجود در بادام، به اتم H متصل است.
 (ث) هر مول از ماده آلی موجود در میخک، در حضور 300°C گرم گاز O_2 با خلوص 80% به طور کامل می سوزد.
- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۹۰- کدام یک از موارد داده شده باعث افزایش سرعت واکنش میان اتانول و اتانویک اسید موجود در یک محلول آبی شده و در ساختار فراورده آلی حاصل از این فرایند، چند اتم هیدروژن وجود خواهد داشت؟

- (۱) افزودن مقداری اتانول خالص به محلول - ۱۰ (۲) انحلال گاز گوگرد تری اکسید در این محلول - ۸
 (۳) کاهش دمای محتویات موجود در ظرف - ۱۰ (۴) افزودن مقداری آب به محلول مورد نظر - ۸

۹۱- واکنش $2NH_3(g) + 3N_2O(g) \rightarrow 4N_2(g) + 3H_2O(g)$ در یک محفظه در حال انجام است. اگر در طول 20 ثانیه $74/12$ کیلوژول گرما تولید شود، با توجه به واکنش های زیر، سرعت متوسط تولید گاز N_2 بر حسب mol.s^{-1} و سرعت متوسط مصرف واکنش دهنده با مولکول خطی و چگالی $2/2 \text{ g.L}^{-1}$ بر حسب L.min^{-1} کدام است؟

($O = 16, N = 14 : \text{g.mol}^{-1}$)

- ۱) $2H_2(g) + O_2(g) \rightarrow 2H_2O(g)$, $\Delta H_1 = -531 \text{ kJ}$
 ۲) $4NH_3(g) + 3O_2(g) \rightarrow 6H_2O(g) + 2N_2(g)$, $\Delta H_2 = -1490 \text{ kJ}$
 ۳) $N_2O(g) + H_2(g) \rightarrow N_2(g) + H_2O(g)$, $\Delta H_3 = -326 \text{ kJ}$
- (۱) $13/2 - 0/016$ (۲) $14/4 - 0/016$ (۳) $13/2 - 0/024$ (۴) $14/4 - 0/024$

۹۲- کدام یک از مطالب زیر، درست است؟

- (۱) همه عناصر فلزی موجود در دسته p ، همانند عناصر دسته d ، با تشکیل یون پایدار، به آرایش یک گاز نجیب نمی رسند.
 (۲) هر اتم کروم با از دست دادن ۲ عدد الکترون با $n = 4$ ، به کاتیونی با آرایش الکترونی $[Ar]3d^4$ تبدیل می شود.
 (۳) تفاوت های قابل توجهی میان فلزهای واسطه و فلزهای اصلی وجود دارد، اما همه فلزها رسانای الکتریکی هستند.
 (۴) در جدول دوره ای عناصر، تعدادی از خانه های خالی وجود دارد که با کشف عناصر طبیعی دیگر در آینده، پر می شوند.

۹۳- چند مورد از مطالب زیر، نادرست است؟ ($F = 19, C = 12, H = 1 : \text{g.mol}^{-1}$)

- (آ) کولار، یک پلی آمید ساختگی بوده و برخلاف پلی لاکتیک اسید، زیست تخریب پذیر است.
 (ب) درصد جرمی کربن در ساختار تفلون از درصد جرمی هیدروژن در پلی استیرن بیشتر است.
 (پ) در حلقه شش ضلعی موجود در مونومر سازنده سلولز، پنج اتم کربن و یک اتم اکسیژن وجود دارد.
 (ت) ساده ترین آمین، شش پیوند اشتراکی در ساختار خود داشته و از عوامل ایجادکننده بوی ماهی است.
 (ث) ۱- بوتانول، نسبت به دی اتیل اتر ایزومر بوده و خاصیت آب گریزی آن نسبت به الکل تهیه شده از چوب کم تر است.
- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

محل انجام محاسبات

۹۴- کدام یک از مقایسه‌های زیر بین نمونه‌هایی به جرم برابر از استیک اسید و متانول درست است؟

(۱) شمار اتم‌های هیدروژن در نمونه : استیک اسید < متانول

(۲) دمای جوش نمونه مورد نظر : استیک اسید > متانول

(۳) رسانایی الکتریکی محلول آبی : استیک اسید < متانول

(۴) شمار جفت الکترون ناپیوندی در مولکول : استیک اسید > متانول

۹۵- روغن زیتون، استری با فرمول مولکولی $C_{57}H_{114}O_6$ است. اگر اسیدچرب سازنده این استر با الکل سازنده استر عامل ایجاد کننده بوی سیب واکنش دهد، درصد جرمی فراورده آلی در میان فراورده‌های تولید شده به تقریب کدام است؟ (بخش ناقطبی مولکول روغن زیتون با استفاده از ۳ زنجیره هیدروکربنی مشابه ساخته شده است.)

$$(O = 16, C = 12, H = 1 : g.mol^{-1})$$

(۴) ۹۵/۸

(۳) ۹۴/۳

(۲) ۹۲/۲

(۱) ۹۰/۱

۹۶- مواد HX و HY ، دو اسید ضعیف با جرم‌های مولی ۵۰ و ۱۵۰ گرم بر مول هستند. اگر ۸ گرم HX و ۱۵ گرم HY را جداگانه در یک لیتر آب خالص حل کنیم، pH محلول HX به اندازه ۰/۳ واحد بزرگ‌تر از pH محلول HY خواهد شد. بر این اساس، چه تعداد از مقایسه‌های زیر درست هستند؟

• مجموع غلظت یون‌ها در محلول: $HX < HY$

• درجه یونش: $HX > HY$

• شمار مولکول‌های اسید یونیده نشده: $HY > HX$

• رسانایی الکتریکی محلول: $HY < HX$

• نسبت $\frac{[OH^-]}{[H^+]}$ در محلول: $HX > HY$

(۴) ۵

(۳) ۴

(۲) ۳

(۱) ۲

۹۷- کدام موارد از عبارت‌های زیر، درست هستند؟

(آ) اسیدچرب غیرحلقوی با فرمول مولکولی $C_{18}H_{34}O_2$ ، می‌تواند با بخار برم واکنش بدهد.

(ب) برخلاف مولکول ویتامین (کا)، در مولکول روغن زیتون بخش ناقطبی بر بخش قطبی غلبه دارد.

(پ) پاک‌کننده با فرمول $C_{17}H_{33}O_2NH_4$ ، حالت مایع داشته و قدرت پاک‌کنندگی آن در آب سخت کاهش می‌یابد.

(ت) همه مخلوط‌هایی که نور عبور داده شده از خود را پخش می‌کنند، ناپایدار بوده و با گذشت زمان ته‌نشین می‌شوند.

(ث) اکسیدهای حاصل از عنصری که آرایش الکترونی آن به زیرلایه $3p^4$ ختم می‌شود، اسید آرنیوس به شمار می‌روند.

(۴) ب و ت

(۳) ب و ت و ث

(۲) آ و پ و ث

(۱) آ و ث

۹۸- محلولی از دو اسید ضعیف HX و HY به حجم ۲/۵ لیتر و با $pH = 3$ در اختیار داریم. اگر درصد یونش اسیدهای HX و HY در این محلول به ترتیب برابر با ۰/۲ و ۰/۴ درصد باشد و برای خنثی شدن کامل این محلول، ۶۸/۴ گرم باریوم هیدروکسید لازم باشد، درصد جرمی HX در محلول اولیه کدام است؟ (جرم مولی HX را $80 g.mol^{-1}$ و چگالی محلول اولیه را $1 g.mL^{-1}$ در نظر بگیرید. $Ba = 137, O = 16, H = 1 : g.mol^{-1}$)

(۴) ۲/۵

(۳) ۲/۲۴

(۲) ۱/۲۵

(۱) ۱/۱۲

۹۹- همه موارد زیر نادرست هستند، بجز ($Mg = 24, O = 16 : g.mol^{-1}$)

(۱) همه فلزها در واکنش با نافلزها تمایل دارند یک یا چند الکترون خود را از دست بدهند.

(۲) در واکنش سوختن منیزیم، به ازای تولید ۱۶ گرم فراورده جامد، $10^{23} \times 9/632$ الکترون مبادله می‌شود.

(۳) گاز تولید شده هنگام ورود تیغه فلز روی به هیدروکلریک اسید، در واکنش تجزیه هیدروژن پراکسید تولید می‌شود.

(۴) با استفاده از ۴ تیغه فلزی متفاوت و محلول الکترولیت آن‌ها، می‌توان ۶ نوع سلول گالوانی با آند و کاتد متفاوت ساخت.

محل انجام محاسبات

۱۰۰- چند مورد از مطالب زیر درباره ورقه گالوانیزه، درست هستند؟

- (آ) اگر ورقه گالوانیزه خراش دیده در معرض هوا و رطوبت قرار گیرد، فلزی که زیر لایه d آن پر است، اکسید می شود.
 (ب) در سلول گالوانی تشکیل شده در سطح آهن گالوانیزه خراش دیده، جهت حرکت الکترون از سمت روی به آهن است.
 (پ) به دلیل واکنش فلز روی با مواد غذایی، از ورقه گالوانیزه برخلاف حلبی برای ساخت قوطی کنسرو استفاده نمی شود.
 (ت) در آهن گالوانیزه، با هر دو رویکرد حفاظت فیزیکی و حفاظت کاتدی از خوردگی فلز آهن جلوگیری می شود.

۴ (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴)

۱۰۱- کدام موارد از عبارت های زیر درباره مولکول XY_3 درست است؟

- (آ) اگر در نقشه پتانسیل آن به اتم مرکزی δ^+ نسبت داده شود، اتم های Y به رنگ آبی مشخص خواهند شد.
 (ب) اگر نیروی بین مولکولی غالب در این ماده از نوع پیوند هیدروژنی باشد، مولکول های آن قطعا قطبی هستند.
 (پ) اگر هر دو عنصر X و Y در گروه ۱۶ جدول دوره ای قرار داشته باشند، مولکول XY_3 ساختاری مسطح خواهد داشت.
 (ت) اگر با نزدیک شدن میله شیشه ای، باریکه مایع از این ماده انحراف یابد، اتم مرکزی آن قطعا دارای بار جزئی منفی است.

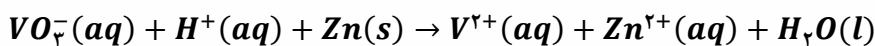
۱ (آ و پ) ۲ (آ و ت) ۳ (ب و پ) ۴ (ب و ت)

۱۰۲- چند مورد از مطالب زیر، درست اند؟ ($O = 16, C = 12, H = 1 : g. mol^{-1}$)

- (آ) الماس، رسانای گرما بوده و در ساختار بلوری ۱۵ گرم از آن، $10^{24} \times 3/01$ پیوند اشتراکی وجود دارد.
 (ب) پختن نان بر روی دانه های سنگ نشان از مقاومت گرمایی فراوان ترین اکسید موجود در پوسته جامد زمین دارد.
 (پ) اگر اتم های فلزات مولکول CF_4 با اتم هیدروژن جایگزین شوند، عدد اکسایش اتم کربن در این ترکیب تغییر نمی کند.
 (ت) درصد جرمی اکسیژن در ساختار مولکول گلوکز، از درصد جرمی اکسیژن در اتیلن گلیکول بیشتر است.

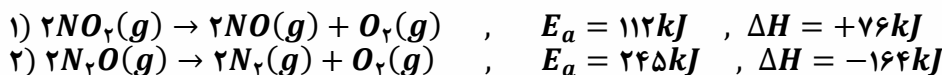
۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۱۰۳- کدام یک از مطالب داده شده، درباره معادله موازنه نشده زیر نادرست است؟ (حجم محلول اولیه را یک لیتر در نظر بگیرید.)



- (۱) نسبت مجموع ضرایب فراورده های یونی به واکنش دهنده های یونی در معادله موازنه شده برابر با $\frac{5}{14}$ است.
 (۲) یون VO_3^- در واکنش های اکسایش-کاهش، تنها می تواند در نقش گونه اکسندۀ ظاهر شود.
 (۳) طی واکنش شیمیایی انجام شده در این فرایند، رنگ محلول از زرد به بنفش تغییر می کند.
 (۴) اگر بر اثر انجام واکنش، pH محلول از ۲ به $2/3$ افزایش یابد، کمی بیشتر از $0/0125$ مول یون Zn^{2+} تولید خواهد شد.

۱۰۴- با توجه به واکنش های زیر، کدام موارد از عبارت های داده شده، نادرست هستند؟



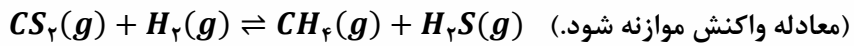
- (آ) در واکنشی که سطح انرژی فراورده ها از سطح انرژی واکنش دهنده ها بالاتر است، یک گاز قهوه ای رنگ تجزیه می شود.
 (ب) در شرایط یکسان از نظر دمای محیط و غلظت مواد شرکت کننده در واکنش، سرعت واکنش گرماگیر کمتر است.
 (پ) نسبت اختلاف سطح انرژی قله تا سطح انرژی فراورده در واکنش اول کمتر از $0/09$ برابر واکنش دوم است.
 (ت) با افزایش دما، سرعت واکنش اول برخلاف واکنش دوم افزایش می یابد.

۱ (آ و ب) ۲ (آ و پ) ۳ (ب و ت) ۴ (پ و ت)

محل انجام محاسبات



۱۰۵- چند مورد از مطالب داده شده درباره تعادل زیر، درست است؟ (حجم ظرف ۲ لیتر و ثابت تعادل $mol^{-2} \cdot L^2 \cdot 0.25$ است).



(آ) اگر ۲ مول از هر کدام از مواد ناقطبی در تعادل وجود داشته باشند، غلظت مولی ماده قطبی $mol \cdot L^{-1} \cdot 0.5$ خواهد بود.

(ب) همانند واکنش تولید اوزون با استفاده از گاز اکسیژن، با افزایش فشار واکنش در جهت رفت جابه‌جا می‌شود.

(پ) در صورت خارج کردن مقداری از گاز H_2S موجود در این تعادل، واکنش در جهت رفت جابه‌جا می‌شود.

(ت) در صورتی که بدانیم این واکنش گرماده است، با افزایش دما ثابت تعادل واکنش افزایش خواهد یافت.

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)





223

A

پنجشنبه

۱۴۰۲/۰۳/۲۵



گروه آموزشی ماز

پاسخنامه آزمون الکترونیکی کنکوری‌های ریاضی - مرحله ۲۳

دِرس	طراحان	ویراستاران
ریاضیات	اکبر کلاه ملکی - امیدرضا پورحسینی	جواد نظری - سجاد احمدی
فیزیک	جمال خمخاجی - عباس غریبی - ارسلان رحمانی - میثم دشتیان - سعید نصیری	مسعود قره‌خانی - رضا کریم‌زاده علیرضا ملک‌حسینی
شیمی	فرشاد هادیان‌فرد - حسین ایروانی	فرهنگ امیری - امیرمهدی غلامی سجاد سیفاللهی
مدیر آزمون: رسول خنجری		

۱- جملات سوم و پنجم یک دنباله هندسی صعودی به ترتیب برابر $\frac{2}{3}$ و ۶ است. با فرض $\log_2^5 = \frac{5}{3}$ ، مجموع لگاریتم‌های هفت جمله اول این دنباله کدام است؟

(۴) ۳/۱

(۳) ۳/۴

(۲) ۲/۱

(۱) ۲/۴

(ریاضی ۱ - صفحات ۲۱ تا ۲۷ / حسابان ۱ - صفحات ۲ تا ۶ و ۸۶ و ۸۷ - دشوار)

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ تشریحی:

$$\log_2^5 = \frac{\log 5}{\log 2} = \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{1 - \log 2}{\log 2} = \frac{5}{3} \Rightarrow 3 - 3 \log 2 = 5 \log 2 \Rightarrow \log 2 = \frac{2}{10}$$

$$\frac{a_5}{a_3} = r^2 \Rightarrow \frac{6}{\frac{2}{3}} = r^2 \xrightarrow{r>0} r = 3$$

$$a_1 = \frac{a_3}{r^2} = \frac{\frac{2}{3}}{9} = \frac{2}{27}, \quad a_5 = a_1 \times r^4 = 6 \times 9 = 54$$

می‌دانیم اگر از جملات یک دنباله هندسی، لگاریتم بگیریم به یک دنباله حسابی می‌رسیم.

$$S_7 = \frac{5}{2}(a_1 + a_7) = \frac{5}{2}(\log \frac{2}{27} + \log 54) = \frac{5}{2}(\log \frac{2}{27} \times 54) = \frac{5}{2} \log 4 = 5 \log 2 = 5(\frac{2}{10}) = 2/1$$

گروه آموزشی ماز

۲- رأس سهمی $y = -2x^2 + 8x + a$ روی عمود منصف دو نقطه $A(2, 1)$ و $B(-2, 2)$ قرار دارد. فاصله رأس سهمی از مبدأ چند برابر a است؟

(۴) $\frac{5\sqrt{2}}{3}$

(۳) $\frac{7\sqrt{2}}{3}$

(۲) $\frac{5}{3}$

(۱) $\frac{7}{3}$

(ریاضی ۱ - صفحات ۷۸ تا ۸۲ / حسابان ۱ - صفحات ۲۹ تا ۳۲ - متوسط)

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ تشریحی:

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = (x+2)^2 + (y-2)^2 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = x^2 + 4x + 4 + y^2 - 4y + 4$$

$$\Rightarrow 10x - 2y + 8 = 0 \Rightarrow 5x - y + 4 = 0 \quad (B \text{ و } A \text{ عمود منصف دو نقطه})$$

$$x = -\frac{b}{2a} = \frac{-8}{-10} = \frac{4}{5} \Rightarrow 5(\frac{4}{5}) - y + 4 = 0 \Rightarrow y = 14 \Rightarrow S(2, 14)$$

$$\Rightarrow OS = \sqrt{4 + 196} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$$

$$S(2, 14) \in y = -2x^2 + 8x + a \Rightarrow -8 + 16 + a = 14 \Rightarrow a = 6 \Rightarrow \frac{OS}{a} = \frac{10\sqrt{2}}{6} = \frac{5\sqrt{2}}{3}$$

گروه آموزشی ماز

۳- معادله‌های $x^2 - mx - n = 0$ و $2x^2 - 5x - n = 0$ دارای یک ریشه مشترک هستند. نسبت ریشه‌های غیرمشترک آن‌ها کدام است؟

(۴) ۲

(۳) -۲

(۲) $-\frac{1}{3}$

(۱) $\frac{1}{3}$

(حسابان ۱ - صفحات ۸ و ۹ - ساده)

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ تشریحی:

$$\begin{cases} x^2 - mx - n = 0 \rightarrow \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{-n}{1} = -n \\ 2x^2 - 5x - n = 0 \rightarrow \alpha\gamma = \frac{c}{a} = \frac{-n}{2} \end{cases} \xrightarrow{\text{تقسیم بر هم}} \frac{\beta}{\gamma} = \frac{-n}{-\frac{n}{2}} = 2$$

گروه آموزشی ماز

۴- نمودار تابع $y = x^4 - x$ در بازه (a, b) زیر نمودار $y - 4x - 6 = 0$ قرار می‌گیرد. بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟

$\frac{7}{2}$ (۴)

۱ (۳)

۲ (۲)

۳ (۱)

(ریاضی ۱ - صفحات ۸۸ تا ۹۱ - متوسط)

پاسخ: گزینه ۱

پاسخ تشریحی:

$$\begin{cases} y_1 = x^4 - x \\ y_2 = 4x + 6 \end{cases} \xrightarrow{y_1 < y_2} x^4 - x < 4x + 6 \Rightarrow x^4 - 5x - 6 < 0$$

$$\Rightarrow x^4 + x - 6x - 6 < 0 \Rightarrow x(x^3 + 1) - 6(x + 1) < 0 \Rightarrow x(x + 1)(x^2 - x + 1) - 6(x + 1) < 0$$

$$\Rightarrow (x + 1)(x^3 - x^2 + x - 6) < 0 \Rightarrow (x + 1)(x^3 - 8 - x^2 + x + 2) < 0$$

$$\Rightarrow (x + 1)((x - 2)(x^2 + 2x + 4) - (x - 2)(x + 1)) < 0$$

$$\Rightarrow (x + 1)(x - 2)(x^2 + 2x + 4 - x - 1) < 0 \Rightarrow (x + 1)(x - 2)(x^2 + x + 3) < 0$$

$$\Rightarrow (x + 1)(x - 2) < 0 \Rightarrow -1 < x < 2 \Rightarrow (a, b) = (-1, 2) \Rightarrow b - a = 3$$

گروه آموزشی ماز

۵- نقاط $A(4, 11)$ و $B(1, 3)$ ، دو رأس یک مستطیل و دو ضلع مقابل به هم مستطیل، روی خطوط $y = ax + 3$ و $y = (2a^2 - 6)x + 1$ قرار دارند. اندازه طول مستطیل کدام است؟

$\frac{19}{\sqrt{15}}$ (۴)

$\frac{19}{\sqrt{5}}$ (۳)

$\frac{17}{\sqrt{5}}$ (۲)

$\frac{17}{\sqrt{15}}$ (۱)

(حسابان ۱ - صفحات ۳۳ تا ۳۵ - متوسط)

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ تشریحی:

$$2a^2 - 6 = a \Rightarrow 2a^2 - a - 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \rightarrow \begin{cases} y = 2x + 3 \\ y = 2x + 1 \end{cases} \\ a = -\frac{3}{2} \rightarrow \begin{cases} y = -\frac{3}{2}x + 3 \\ y = -\frac{3}{2}x + 1 \end{cases} \end{cases}$$

با توجه به مختصات نقاط A و B ، مقدار $a = 2$ قابل قبول است. $((1, 3) \in y = 2x + 1)$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 2x + 3 \\ y = 2x + 1 \end{cases} \Rightarrow d = \frac{|3 - 1|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \text{عرض مستطیل} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$AB = \sqrt{3^2 + 8^2} = \sqrt{73} \Rightarrow \text{قطر مستطیل} = \sqrt{73} \Rightarrow \text{دو رأس مقابل هستند.}$$

$$\text{طول مستطیل} = \sqrt{(\sqrt{73})^2 - \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2} = \sqrt{73 - \frac{4}{5}} = \sqrt{\frac{361}{5}} = \frac{19}{\sqrt{5}}$$

گروه آموزشی ماز

۶- توابع $f(x) = 3^{\frac{x}{2}-1}$ و $g(x) = \frac{x+7}{4x-4} + \frac{2x^2+13x-7}{x^2+9x+14}$ را در نظر بگیرید. اگر جواب معادله $f^{-1}(g^{-1}(x)) = b$ برابر ۳ باشد، مقدار b کدام است؟

(۴) برای b مقداری وجود ندارد.

(۳) $\log_3^{52}$

(۲) $\log_3^{36}$

(۱) $\log_3^{49}$

(حسابان ۱ - صفحات ۸۰ تا ۸۷ و ۵۴ تا ۶۱ - متوسط)

پاسخ: گزینه ۲



پاسخ تشریحی:

$$b = f^{-1}(g^{-1}(3)), \quad g(x) = \frac{x+7}{4x-4} + \frac{(2x-1)(x+7)}{(x+2)(x+7)} \xrightarrow{x \neq -7} \frac{x+7}{4x-4} + \frac{2x-1}{x+2}$$

$$g(x) = 3 \Rightarrow \frac{x+7}{4x-4} + \frac{2x-1}{x+2} = 3 \Rightarrow \frac{x^2+7x+2x+14+8x^2-12x+4}{(4x-4)(x+2)} = 3$$

$$\Rightarrow \frac{9x^2-3x+18}{4x^2+4x-8} = 3 \Rightarrow 9x^2-3x+18 = 12x^2+12x-24 \Rightarrow 3x^2+15x-42 = 0$$

$$\Rightarrow (x-2)(3x+21) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \rightarrow g^{-1}(3) = 2 \\ x=-7 \text{ غ ق} \end{cases}$$

$$\Rightarrow b = f^{-1}(2)$$

$$3^{\frac{x}{2}-1} = 2 \Rightarrow \frac{x}{2}-1 = \log_3 2 \Rightarrow \frac{x}{2} = 1 + \log_3 2 = \log_3 3 + \log_3 2 = \log_3 6 \Rightarrow x = 2 \log_3 6 = \log_3^{36}$$

گروه آموزشی ماز

۷- نمودار تابع $f(x) = a(3^{bx})$ ، نمودار تابع $y = \frac{4x-6}{3}$ را در نقطه‌ای به طول ۶ قطع می‌کند. اگر $f^{-1}(2) = 3$ باشد، مقدار $f(12)$ کدام است؟

(۴) ۴۸۶

(۳) ۷۲۹

(۲) ۵۴

(۱) ۷۲

(حسابان ۱ - صفحات ۷۲ تا ۷۷ و ۵۴ تا ۶۱ - متوسط)

پاسخ: گزینه ۲

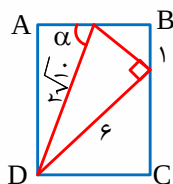


پاسخ تشریحی:

$$\left. \begin{aligned} x=6 \Rightarrow y = \frac{24-6}{3} = 6 \Rightarrow (6, 6) \in f \Rightarrow a(3^{6b}) = 6 \\ f^{-1}(2) = 3 \Rightarrow f(3) = 2 \Rightarrow a(3^{3b}) = 2 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{تقسیم بر هم}} 3^{3b} = 3 \Rightarrow 3b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{3} \Rightarrow a(3^1) = 2 \Rightarrow a = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{2}{3} (3^{\frac{1}{3}x}) \Rightarrow f(12) = \frac{2}{3} (3^4) = 2 \times 27 = 54$$

گروه آموزشی ماز



۸- در شکل مقابل، چهارضلعی ABCD یک مستطیل است. مقدار $\tan \alpha$ کدام است؟

(۲) $\frac{5\sqrt{3}+6}{3}$
(۴) $\frac{6\sqrt{5}+5}{3}$

(۱) $\frac{6\sqrt{3}+5}{3}$
(۳) $\frac{3\sqrt{5}+5}{3}$

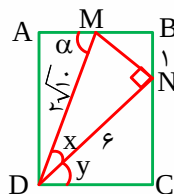
(حسابان ۲ - صفحات ۴۲ و ۴۳ - متوسط)

پاسخ: گزینه ۲



پاسخ تشریحی:

شکل مقابل را در نظر بگیرید:



$$MN = \sqrt{(2\sqrt{10})^2 - 6^2} = \sqrt{40 - 36} = 2 \Rightarrow \tan x = \frac{MN}{DN} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$MB = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3} \Rightarrow \tan y = \frac{MB}{BN} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

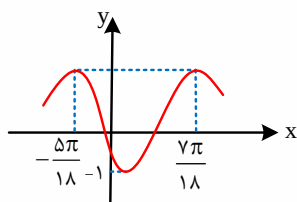
زوایای $\widehat{B\hat{N}M}$ و $\widehat{D\hat{N}C}$ با هم برابرند. (هر دو زاویه متمم زاویه $\widehat{D\hat{N}C}$ هستند).

$$\tan \alpha = \tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} = \frac{\frac{1}{3} + \sqrt{3}}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)(\sqrt{3})} = \frac{\frac{1}{3} + \sqrt{3}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{1 + 3\sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \tan \alpha = \frac{1 + 3\sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} \times \frac{3 + \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} = \frac{3 + \sqrt{3} + 9\sqrt{3} + 9}{9 - 3} = \frac{10\sqrt{3} + 12}{6} = \frac{5\sqrt{3} + 6}{3}$$

گروه آموزشی ماز

۹- شکل مقابل، قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a \sin(bx + \frac{\pi}{3}) + c$ است. اگر نمودار تابع f از نقطه $(-\frac{\pi}{6}, 2)$ عبور کند، از کدام نقطه زیر نیز عبور می کند؟



(۲) $(-\frac{\pi}{9}, 1)$

(۱) $(-\frac{\pi}{9}, 0)$

(۴) $(-\frac{\pi}{9}, \sqrt{3}-1)$

(۳) $(-\frac{\pi}{9}, -1)$

(حسابان ۲ - صفحات ۲۴ تا ۲۹ - متوسط)

پاسخ: گزینه ۲



پاسخ تشریحی:

$$T = \frac{7\pi}{18} - \frac{-5\pi}{18} = \frac{12\pi}{18} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow |b| = 3$$

با توجه به دامنه نمودار، متوجه می شویم که تبدیل x به $-x$ انجام نگرفته است، پس $b > 0$ و مقدار $b = 3$ قابل قبول است. همچنین با توجه به برد نمودار متوجه می شویم که تبدیل $f(x)$ به $-f(x)$ انجام گرفته است و در نتیجه $a < 0$ است.

$$\left. \begin{aligned} \min = -1 &\Rightarrow -|a| + c = -1 \Rightarrow a + c = -1 \\ f(-\frac{\pi}{6}) = 2 &\Rightarrow a \sin(-\frac{3\pi}{6} + \frac{\pi}{3}) + c = 2 \Rightarrow a(-\frac{1}{2}) + c = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow c = 1, a = -2 \Rightarrow f(x) = -2 \sin(3x + \frac{\pi}{3}) + 1$$

$$f(-\frac{\pi}{9}) = -2 \sin(0) + 1 = 1$$

گروه آموزشی ماز



۱۰- یک ریشه معادله $\tan(x + \frac{\pi}{4}) - \tan(\frac{\pi}{4} - x) = m$ برابر $\frac{\pi}{12}$ است. مجموع ریشه‌های معادله در بازه $[0, \frac{3\pi}{4}]$ کدام است؟

$$\frac{7\pi}{2} \quad (4)$$

$$\frac{5\pi}{2} \quad (3)$$

$$\frac{7\pi}{4} \quad (2)$$

$$\frac{5\pi}{4} \quad (1)$$

(حسابان ۲ - صفحات ۴۱ و ۴۲ - متوسط)

پاسخ: گزینه ۲



پاسخ تشریحی:

$$m = \tan(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{4}) - \tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{12}) = \tan(\frac{\pi}{3}) - \tan(\frac{\pi}{6}) = \sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{توجه: } (x + \frac{\pi}{4}) + (\frac{\pi}{4} - x) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan(\frac{\pi}{4} - x) = \cot(\frac{\pi}{4} + x)$$

$$\text{پس: } \tan(x + \frac{\pi}{4}) - \cot(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow -2 \cot(2(x + \frac{\pi}{4})) = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow -2 \cot(2x + \frac{\pi}{2}) = \frac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \tan 2x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{6}$$

$$x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{12} \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{12}, x_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12}, x_3 = \pi + \frac{\pi}{12}$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = \frac{\pi}{2} + \pi + 3(\frac{\pi}{12}) = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$$

گروه آموزشی ماز

۱۱- اگر $f(x) = \log(2x+8) + \log \frac{10}{x}$ و $g(x) = \sqrt{2x-2} + x - 4$ و $h(x) = ||3x-1|-1|$ ، مجموع ریشه‌های معادله $f(g(h(x))) = 2$ کدام است؟

$$-\frac{4}{3} \quad (4)$$

$$\frac{2}{3} \quad (3)$$

$$-\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$\text{صفر} \quad (1)$$

(حسابان ۱ - صفحات ۱۰ تا ۱۳ و ۶۶ تا ۶۸ - متوسط)

پاسخ: گزینه ۳



پاسخ تشریحی:

$$f(x) = 2 \Rightarrow \log(2x+8) + \log \frac{10}{x} = 2 \Rightarrow \log \frac{20x+80}{x} = 2 \Rightarrow \frac{20x+80}{x} = 100 \Rightarrow 20x+80 = 100x \Rightarrow x = 1 \Rightarrow g(h(x)) = 1$$

$$g(x) = 1 \Rightarrow \sqrt{2x-2} + x - 4 = 1 \Rightarrow \sqrt{2x-2} = -x + 5 \Rightarrow 2x-2 = x^2 - 10x + 25 \Rightarrow x^2 - 12x + 27 = 0$$

$$\Rightarrow (x-3)(x-9) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=9 \end{cases} \Rightarrow h(x) = 3 \Rightarrow ||3x-1|-1| = 3 \Rightarrow \begin{cases} |3x-1| = 4 \\ |3x-1| = -2 \end{cases} \Rightarrow 3x-1 = \pm 4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = \frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 = \frac{2}{3}$$

گروه آموزشی ماز



۱۲- فرض کنید $(x \leq -1)$ و $f(x) = 2x^2 + 4x - 1$ ، حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{f(x)}}{(f^{-1}(x))^2}$ کدام است؟

۴ $4\sqrt{2}$

۳ $2\sqrt{2}$

۲ $\sqrt{2}$

۱ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(حسابان ۱ - صفحات ۵۴ تا ۶۱ / حسابان ۲ - صفحات ۵۹ تا ۶۲ - متوسط)

پاسخ: گزینه ۳



پاسخ تشریحی:

$$y = 2x^2 + 4x - 1 = 2(x+1)^2 - 3 \Rightarrow (x+1)^2 = \frac{y+3}{2} \Rightarrow x+1 = \pm \sqrt{\frac{y+3}{2}}$$

$$x = -1 \pm \sqrt{\frac{y+3}{2}} \xrightarrow{x \leq -1} x = -1 - \sqrt{\frac{y+3}{2}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 4x - 1}}{(-1 - \sqrt{\frac{x+3}{2}})^2} \sim \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x^2}}{(-\sqrt{\frac{x+3}{2}})^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2}|x|}{\frac{x+3}{2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2}x}{\frac{1}{2}x} = 2\sqrt{2}$$

گروه آموزشی ماز

۱۳- تابع $f(x) = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x+1} - \sqrt{4x-8})}{x^2 + ax + b}$ ، با فرض $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \frac{-3\sqrt{3}}{28}$ ، چند خط مجانب دارد؟

۴ ۳

۳ ۲

۲ ۱

۱ صفر

(حسابان ۲ - صفحات ۵۵ تا ۵۷ و ۶۷ و ۶۸ - متوسط)

پاسخ: گزینه ۲



پاسخ تشریحی:

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \frac{0}{0} = -\frac{3\sqrt{3}}{28} \Rightarrow 9 + 3a + b = 0 \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{4}{2\sqrt{4x-8}})\sqrt{x}}{2x+a} = \frac{(\frac{1}{4} - \frac{2}{2})\sqrt{3}}{6+a} = \frac{-\frac{1}{2}\sqrt{3}}{6+a} = \frac{-3\sqrt{3}}{28}$$

$$\Rightarrow 24 + 4a = 28 \Rightarrow a = 1 \xrightarrow{(1)} b = -12$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x+1} - \sqrt{4x-8})}{x^2 + x - 12} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x+1} - \sqrt{4x-8})}{(x-3)(x+4)}$$

حد تابع در هیچ یک از ریشه‌های مخرج، نامتناهی نیست، پس تابع مجانب قائم ندارد:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x+1} - \sqrt{4x-8})}{x^2 + x - 12} \sim \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2\sqrt{x})}{x^2 + x - 12} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x^2} = 0$$

پس، خط $y = 0$ ، تنها مجانب تابع است.

گروه آموزشی ماز

۱۴- برای تابع $f(x) = \frac{ax[x]}{|x^2-1|+2}$ داریم $f'_+(0) - f'_-(0) = -\frac{2}{3}$ مقدار a کدام است؟

(۴) -۴

(۳) ۴

(۲) -۲

(۱) ۲

(حسابان ۲ - صفحات ۷۸ و ۷۹ و ۸۶ و ۸۷ - متوسط)

پاسخ: گزینه ۲



پاسخ تشریحی:

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{ax[x]}{|x^2-1|+2} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a[x]}{-x^2+1+2} \Rightarrow \begin{cases} f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{a[x]}{-x^2+3} = 0 \\ f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{a[x]}{-x^2+3} = \frac{a(-1)}{3} = -\frac{a}{3} \end{cases} \Rightarrow 0 - (-\frac{a}{3}) = -\frac{2}{3} \Rightarrow a = -2$$

گروه آموزشی ماز

۱۵- مثلث‌های متساوی‌الساقین با محیط ۶ را در نظر بگیرید. مثلثی که بیشترین مساحت را دارد را حول قاعده دوران می‌دهیم. حجم شکل حاصل کدام است؟

(۴) $\frac{4\pi}{3}$

(۳) $\frac{2\pi}{3}$

(۲) 4π

(۱) 2π

(حسابان ۲ - صفحات ۱۱۷ تا ۱۱۹ - متوسط)

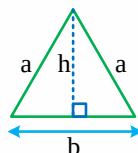
پاسخ: گزینه ۱



پاسخ تشریحی:

$$2a + b = 6 \Rightarrow a = \frac{6-b}{2}, h^2 = a^2 - (\frac{b}{2})^2 \Rightarrow h = \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}}$$

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{4a^2 - b^2} \Rightarrow S' = 0 \Rightarrow 4ab - b^2 = 0 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow h = \sqrt{3}$$



پس مثلث مورد نظر متساوی‌الاضلاع است و از دوران آن حول قاعده دو مخروط با حجم برابر حاصل می‌شود:

$$V = 2 \times \frac{1}{3} \pi (h)^2 (\frac{b}{2}) = \frac{2\pi}{3} (\sqrt{3})^2 (\frac{2}{2}) = 2\pi$$

گروه آموزشی ماز

۱۶- نقاط عطف تابع $y = \sqrt[3]{x}(x-4)$ روی کدام خط زیر قرار دارند؟

(۴) $y = 3\sqrt[3]{2}x$

(۳) $y = -3\sqrt[3]{2}x$

(۲) $y = -5\sqrt[3]{2}x$

(۱) $y = 5\sqrt[3]{2}x$

(حسابان ۲ - صفحات ۱۳۱ تا ۱۳۴ - متوسط)

پاسخ: گزینه ۳



پاسخ تشریحی:

$$y = x^{\frac{1}{3}}(x-4) = x^{\frac{4}{3}} - 4x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow y' = \frac{4}{3}x^{-\frac{2}{3}} + \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{5}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$= \frac{4(x+2)}{9\sqrt[3]{x^5}} = 0 \Rightarrow x = -2$$

$$= 0 \Rightarrow x = 0$$

تابع در نقاط -۲ و ۰ دارای مماس است، پس نقاط $(-2, 6\sqrt[3]{2})$ و $(0, 0)$ نقاط عطف تابع هستند.

$$y - 0 = \frac{6\sqrt[3]{2}}{-2}(x - 0) \Rightarrow y = -3\sqrt[3]{2}x$$

گروه آموزشی ماز



۱۷- در مثلث متساوی الاضلاعی به ضلع واحد، دایره‌های محاطی داخلی و خارجی نظیر رأس A را رسم نموده‌ایم. طول مماس مشترک خارجی این دو دایره کدام است؟

۲ (۴)

۲/۵ (۳)

۱ (۲)

۱/۵ (۱)

(هندسه ۲ - صفحات ۲۱ تا ۲۶ - هندسه ۱ - صفحه ۳۵ - دشوار)

پاسخ: گزینه ۲

نکته ۱:

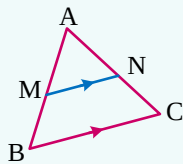
در هر مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a ، اندازه شعاع دایره محاطی داخلی و شعاع دایره‌های محاطی خارجی برابر است با:

$$r = \frac{\sqrt{3}}{6} a, r_a = r_b = r_c = \frac{\sqrt{3}}{2} a$$

نکته ۲:

طبق تعمیم قضیه تالس در مثلث $\triangle ABC$ ، داریم:

$$MN \parallel BC \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$$



نکته ۳:

طول مماس مشترک خارجی دو دایره مماس خارج به شعاع‌های r و r' برابر $2\sqrt{rr'}$ است.

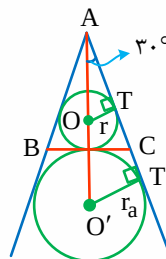
پاسخ تشریحی:

روش اول:

می‌دانید که در مثلث متساوی‌الاضلاع داریم:

$$r = \frac{\sqrt{3}}{6} a, r_a = \frac{\sqrt{3}}{2} a$$

$$\triangle AOT: \tan 30^\circ = \frac{r}{AT} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{6} a}{AT} \Rightarrow AT = \frac{1}{2} a$$



حال تعمیم قضیه تالس را در مثلث $\triangle AO'T'$ می‌نویسیم.

$$\frac{r}{r_a} = \frac{AT}{AT'} \Rightarrow \frac{\frac{\sqrt{3}}{6} a}{\frac{\sqrt{3}}{2} a} = \frac{\frac{1}{2} a}{AT'} \Rightarrow AT' = \frac{3}{2} a$$

$$\Rightarrow TT' = AT' - AT = \frac{3}{2} a - \frac{1}{2} a = a$$

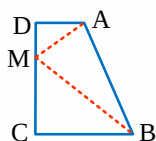
روش دوم:

دو دایره مماس خارج هستند، پس طول مماس مشترک آن‌ها برابر است با:

$$TT' = 2\sqrt{rr'} = 2\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{6} a \times \frac{\sqrt{3}}{2} a} = a$$

گروه آموزشی ماز

۱۸- در دوزنقه قائم الزاویه $ABCD$ ، اندازه‌های $CD=8$ ، $BC=6$ و $AD=2$ هستند. نقطه M روی ساق قائم CD متحرک است. کمترین مقدار $MA+MB$ کدام است؟



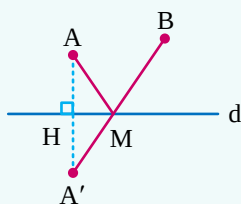
- (۱) $5\sqrt{2}$
- (۲) $4\sqrt{2}$
- (۳) $8\sqrt{2}$
- (۴) $7\sqrt{2}$

(هندسه ۲ - صفحه ۵۴ - دشوار)

پاسخ: گزینه ۳

نکته:

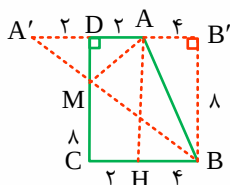
مطابق با مساله هرون، برای پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر AMB ، به طوری که M روی خط d باشد، مطابق شکل، ابتدا بازتاب A را نسبت به d نقطه A' نامیده، سپس از A' به B وصل می‌کنیم تا خط d را در M قطع کند که در این صورت پاره خط $A'B$ ، کوتاه‌ترین مسیر برابر با مسیر AMB خواهد بود.



پاسخ تشریحی:

طبق مسئله هرون، ابتدا بازتاب نقطه A را نسبت به DC می‌یابیم. نقطه A' مطابق شکل به دست می‌آید. اگر از A' به B وصل کنیم ضلع DC را در M قطع می‌کند و داریم:

$$MA + MB = MA' + MB = A'B$$

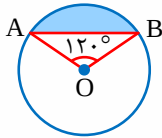


حال فاصله $A'B$ را با رابطه فیثاغورس حساب می‌کنیم. در مثلث $A'B'B$ داریم:

$$A'B^2 = A'B'^2 + BB'^2 = 8^2 + 8^2 = 2 \times 64 \Rightarrow A'B = 8\sqrt{2}$$

گروه آموزشی ماز

۱۹- اگر در شکل زیر O مرکز دایره و $AB=3$ باشد، مساحت قسمت سایه زده شده کدام است؟



$$\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad (2)$$

$$\pi - \frac{3\sqrt{3}}{4} \quad (4)$$

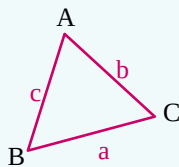
$$\pi - \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (1)$$

$$\pi - \frac{\sqrt{3}}{4} \quad (3)$$

(هندسه ۲ - صفحات ۱۲ و ۱۷ و ۷۴ - دشوار)

پاسخ: گزینه ۴

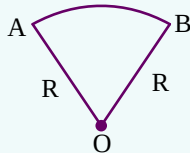
نکته ۱:



طبق قضیه کسینوسها در مثلث $\triangle ABC$ ، با اضلاع $AB=c$ ، $AC=b$ و $BC=a$ ، داریم:

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A} \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B} \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C} \end{cases}$$

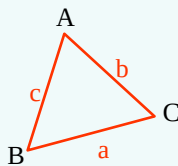
نکته ۲:



مساحت قطاع به شعاع R و زاویه مرکزی θ° برابر است با:

$$S_{\triangle OAB} = \frac{\pi R^2}{360} \theta^\circ$$

نکته ۳:



مساحت مثلث $\triangle ABC$ به اضلاع $AB=c$ ، $AC=b$ و $BC=a$ برابر است با:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} bc \sin \hat{A} = \frac{1}{2} ac \sin \hat{B} = \frac{1}{2} ab \sin \hat{C}$$

پاسخ تشریحی:

ابتدا به کمک قضیه کسینوسها شعاع دایره را می یابیم.

$$AB^2 = R^2 + R^2 - 2 \times R \times R \times \cos 120^\circ \Rightarrow 9 = 2R^2 - 2R^2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow 9 = 3R^2 \Rightarrow R^2 = 3 \Rightarrow R = \sqrt{3}$$

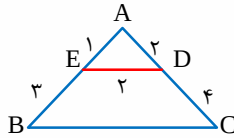
$$S_{\text{قطاع}} = \frac{\alpha}{360} \times \pi R^2 = \frac{\pi}{3} \times (\sqrt{3})^2 = \pi$$

$$S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} \times R \times R \times \sin 120^\circ = \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{مساحت سایه زده} = S_{\text{قطاع}} - S_{\triangle OAB} = \pi - \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

گروه آموزشی ماز

۲۰- در شکل زیر، مساحت چهارضلعی BCDE کدام است؟



$$\frac{11\sqrt{15}}{3} \quad (2)$$

$$11\sqrt{15} \quad (4)$$

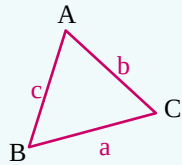
$$\frac{11\sqrt{15}}{4} \quad (1)$$

$$\frac{11\sqrt{15}}{2} \quad (3)$$

(هندسه ۲ - صفحات ۶۷ و ۷۴ - متوسط)

پاسخ: گزینه ۱

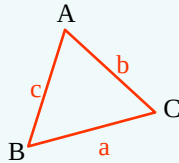
نکته ۱:



طبق قضیه کسینوسها در مثلث $\triangle ABC$ ، با اضلاع $AB=c$ ، $AC=b$ و $BC=a$ ، داریم:

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A} \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B} \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C} \end{cases}$$

نکته ۲:



مساحت مثلث $\triangle ABC$ به اضلاع $AB=c$ ، $AC=b$ و $BC=a$ برابر است با:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} bc \sin \hat{A} = \frac{1}{2} ac \sin \hat{B} = \frac{1}{2} ab \sin \hat{C}$$

پاسخ تشریحی:

$$\triangle AED: DE^2 = AE^2 + AD^2 - 2AE \times AD \times \cos \hat{A} \Rightarrow 4 = 1 + 4 - 2 \times 1 \times 2 \times \cos \hat{A} \Rightarrow \cos \hat{A} = \frac{1}{4}$$

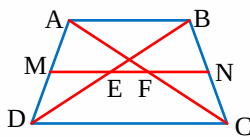
$$\Rightarrow \sin \hat{A} = \sqrt{1 - \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$S_{BCDE} = S_{ABC} - S_{ADE} = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin \hat{A} - \frac{1}{2} AE \times AD \times \sin \hat{A}$$

$$= \frac{1}{2} \times 4 \times 6 \times \frac{\sqrt{15}}{4} - \frac{1}{2} \times 1 \times 2 \times \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{11\sqrt{15}}{4}$$

گروه آموزشی ماز

۲۱- در دوزنقه زیر اگر M و N وسط ساقها باشند و $MN=15$ و $EF=5$ باشد، حاصل $\frac{AB}{DC}$ کدام است؟



$$\frac{1}{3} \quad (2)$$

$$\frac{3}{5} \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} \quad (1)$$

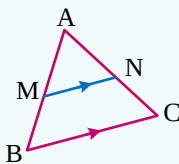
$$\frac{2}{3} \quad (3)$$

(هندسه ۱ - صفحات ۳۴ تا ۳۶ - متوسط)

پاسخ: گزینه ۱

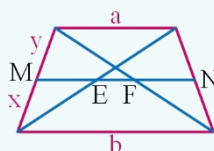
نکته ۱:

طبق قضیه تالس و تعمیم آن، داریم:



$$MN \parallel BC \Rightarrow \begin{cases} \text{تالس} : \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \\ \text{تعمیم تالس} : \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} \end{cases}$$

نکته ۲:



$$MN = \frac{ax + by}{x + y}, \quad EF = \frac{by - ax}{x + y}$$

$$MN \parallel DC \parallel AB \Rightarrow \triangle DAB: \frac{ME}{AB} = \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\triangle ABC: \frac{FN}{AB} = \frac{1}{2} \quad (2)$$

$$(1) \text{ و } (2) \Rightarrow FN = ME \xrightarrow{EF=5, MN=15} ME = FN = 5 \Rightarrow AB = 10$$

حال در مثلث ADC قضیه تالس را می نویسیم:

$$\frac{AM}{AD} = \frac{MF}{DC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{10}{DC} = \frac{1}{2} \Rightarrow DC = 20 \Rightarrow \frac{AB}{DC} = \frac{1}{2}$$

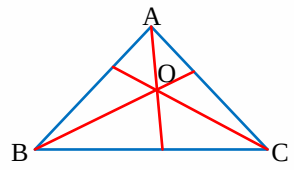
روشن دوم:

مطابق نکته فوق داریم:

$$\left. \begin{aligned} MN &= \frac{AB+CD}{2} = 15 \\ EF &= \frac{CD-AB}{2} = 5 \end{aligned} \right\} \rightarrow CD = 20, AB = 10 \rightarrow \frac{AB}{CD} = \frac{1}{2}$$

گروه آموزشی ماز

۲۲- محیط و مساحت مثلث شکل زیر به ترتیب ۲۴ سانتی متر و ۱۸ سانتی متر مربع است. اگر O محل برخورد نیمسازهای مثلث باشد، مجموع فواصل نقطه O از سه ضلع مثلث چند سانتی متر است؟



- ۱/۵ (۱)
- ۲/۵ (۲)
- ۳/۵ (۳)
- ۴/۵ (۴)

پاسخ: گزینه ۴ (هندسه ۲ - صفحات ۲۵ و ۲۶ - متوسط)

نکته ۱:

دایره محاطی داخل مثلث، بر سه ضلع مثلث مماس است و فاصله مرکز آن از سه ضلع مثلث برابر است با شعاع دایره محاطی.

نکته ۲:

مرکز دایره محاطی داخل مثلث، محل هم‌رسی نیمساز زوایای داخلی مثلث است.

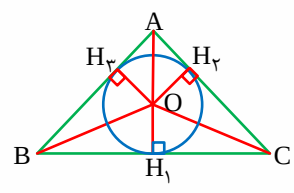
نکته ۳:

$$r = \frac{S}{P} \text{ شعاع دایره محاطی داخلی مثلثی با مساحت } S \text{ و محیط } P \text{ برابر است با:}$$

پاسخ تشریحی:

مرکز دایره محاطی مثلث نقطه هم‌رسی سه نیمساز است. شعاع این دایره فاصله این نقطه از هر یک از سه ضلع مثلث می‌باشد، پس:

$$OH_1 + OH_2 + OH_3 = 3r = 3 \times \frac{S}{P} = 3 \times \frac{18}{12} = 4.5$$



گروه آموزشی ماز

۲۳- سه نقطه A، B و C غیرواقع بر یک خط راست مفروض اند. مکان هندسی نقاطی از فضا که از این سه نقطه به یک فاصله اند، کدام است؟
(۱) یک نقطه (۲) یک خط (۳) یک صفحه (۴) یک دایره

پاسخ: گزینه ۲ (هندسه ۱ - صفحه ۸۳ - هندسه ۲ - صفحات ۲۵ و ۲۶ - ساده)

نکته ۱:

مرکز دایره محیطی مثلث از هر سه رأس مثلث به یک فاصله است.

نکته ۲:

خطی که در مرکز دایره محیطی مثلث بر صفحه مثلث عمود است، مکان هندسی نقاطی از فضا است که از سه رأس مثلث به یک فاصله اند.

پاسخ تشریحی:

نقطه‌ای که از هر سه رأس مثلث به یک فاصله است، مرکز دایره محیطی مثلث است. خطی که در مرکز دایره محیطی بر صفحه مثلث عمود است، مطلوب مسئله است.

گروه آموزشی ماز

۲۴- دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ کدام است؟

(۴) ۷۲

(۳) ۳۶

(۲) -۳۶

(۱) -۷۲

پاسخ: گزینه ۱ (هندسه ۳ - صفحات ۲۷ تا ۳۰ - متوسط)

نکته ۱:

دترمینان ماتریس 3×3 از بسط نسبت به یکی از سطرها یا ستون‌ها به دست می‌آید:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

نکته ۲:

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \times b_2 \times c_3$$

نکته ۳:

$$|AB| = |A| \times |B|$$

پاسخ تشریحی:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + 0 + 1 \times \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 + 2 = 6$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (-2)(2)(3) = -12$$

$$|A| = -12 \times 6 = -72$$

گروه آموزشی ماز

۲۵- اگر $2A = \begin{bmatrix} |A| & -6 \\ A & |A| \end{bmatrix}$ و A ماتریسی وارون پذیر باشد، آنگاه مقدار دترمینان $\frac{1}{4} A^4 A^{-1}$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) صفر (۴) -۲

پاسخ: گزینه ۴ (هندسه ۳ - صفحات ۲۷ تا ۳۰ - دشوار)

نکته ۱:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

نکته ۲:

$$r \in \mathbb{R}; |rA_{n \times n}| = r^n |A|$$

نکته ۳:

$$|A^n| = |A|^n$$

نکته ۴:

$$|AB| = |A||B|$$

نکته ۵:

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

پاسخ تشریحی:

با توجه به نکات، داریم:

$$2A = \begin{bmatrix} |A| & -6 \\ A & |A| \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{از طرفین دترمینان می گیریم}} 2|A| = |A|^2 + 6|A| \Rightarrow |A|^2 + 2|A| = 0 \Rightarrow |A|(|A| + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} |A| = 0 \\ |A| = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{2} A^4 A^{-1} \right| = \frac{1}{2^4} |A|^4 \times \frac{1}{|A|} = \frac{1}{2^4} \times |A|^3 = \frac{1}{2^4} (-2)^3 = \frac{-8}{4} = -2$$

گروه آموزشی ماز

۲۶- طول مماس مشترک خارجی دو دایره $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$ و $x^2 + y^2 - 10x + 21 = 0$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴) $\sqrt{2}$

پاسخ: گزینه ۳ (هندسه ۲ - صفحه ۲۲ - هندسه ۳ - صفحات ۴۱ و ۴۲ - دشوار)

نکته ۱:

مختصات مرکز و اندازه شعاع دایره به معادله ضمنی $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ عبارتند از:

$$O\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right), r = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$$

نکته ۲:

دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ با خط‌المركزین d مماس خارج‌اند، اگر و فقط اگر $d = R + R'$

نکته ۳:

اندازه مماس مشترک خارجی دو دایره مماس خارج به شعاع‌های R و R' برابر $2\sqrt{RR'}$ است.

پاسخ تشریحی:

$$C: x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow (x-2)^2 + y^2 = 1 \Rightarrow O(2, 0), R=1$$

$$C': x^2 + y^2 - 10x + 21 = 0 \Rightarrow x^2 - 10x + 25 - 4 + y^2 = 0$$

$$\Rightarrow (x-5)^2 + y^2 = 4 \Rightarrow O'(5, 0), R'=2$$

$$OO' = |2-5| = 3, R+R' = 1+2 = 3$$



$OO' = R + R'$ بنابراین دو دایره مماس خارجند. در این حالت طول مماس مشترک خارجی برابر است با :

$$TT' = 2\sqrt{RR'} = 2\sqrt{1 \times 2} = 2\sqrt{2}$$

گروه آموزشی ماز

۲۷- کانون‌های بیضی به صورت $F \left| \begin{smallmatrix} 1+\sqrt{5} \\ 1-\sqrt{5} \end{smallmatrix} \right|$ و $F' \left| \begin{smallmatrix} 1-\sqrt{5} \\ 1+\sqrt{5} \end{smallmatrix} \right|$ دو سر قطری از یک دایره‌اند. این دایره نیمساز ناحیه اول را با کدام طول قطع می‌کند؟

۳ (۴)

$\frac{5}{2}$ (۳)

$1+\sqrt{3}$ (۲)

۲ (۱)

(هندسه ۳ - صفحه ۴۰ و ۴۸ - متوسط)

پاسخ : گزینه ۱

نکته ۱:

در بیضی به فاصله کانونی $FF' = 2c$ ، مرکز بیضی وسط FF' قرار دارد.

نکته ۲:

معادله استاندارد دایره به مرکز (α, β) و شعاع r عبارتست از : $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$

شعاع دایره $2c = FF' = 2\sqrt{5} \Rightarrow c = \sqrt{5} = R$

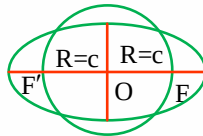
$O \left| \begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix} \right|$ وسط FF' مرکز دایره

معادله دایره : $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 5$

نقطه برخورد با $y = x$

$$\rightarrow x^2 - 2x + 1 + x^2 = 5$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 2x - 4 = 0 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2, x = -1$$



گروه آموزشی ماز

۲۸- به ازای کدام مقدار k ، معادله خط هادی سهمی به معادله $y^2 = 2x + ky$ به فرم $x = -\frac{5}{4}$ است؟

۶ (۴)

-۴ (۳)

۳ (۲)

-۲ (۱)

(هندسه ۳ - صفحات ۵۲ تا ۵۵ - دشوار)

پاسخ : گزینه ۳

نکته ۱:

معادله خط هادی سهمی افقی رو به راست به معادله $(y-k)^2 = 4a(x-h)$ به فرم $x = h - a$ است.

نکته ۲:

برای تبدیل معادله سهمی غیراستاندارد به معادله متعارف، متغیر درجه ۱ و عدد ثابت را به طرف راست معادله برده و در سمت چپ، متغیر درجه ۲ را مربع کامل می‌کنیم. آن‌گاه از ضریب متغیر درجه ۱ فاکتور می‌گیریم.

پایان تشریحی

مطابق درسنامه، معادله سهمی را به فرم متعارف تبدیل می‌کنیم:

$$y^2 - ky = 2x \Rightarrow y^2 - ky + \frac{k^2}{4} = 2x + \frac{k^2}{4}$$

$$\Rightarrow (y - \frac{k}{2})^2 = 2(x + \frac{k^2}{4}) \Rightarrow \begin{cases} -\frac{k^2}{4} \\ \frac{k^2}{4} \end{cases}, 4a = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$\text{خط هادی : } x = \frac{-k^2}{4} - \frac{1}{2} = \frac{-5}{2} \Rightarrow \frac{k^2}{4} = \frac{5}{2} \Rightarrow k^2 = 10 \Rightarrow k = \pm\sqrt{10}$$

گروه آموزشی ماز



۲۹- اگر مساحت مثلث ساخته شده توسط بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر ۳ و $|\vec{a}|=2$ و $|\vec{b}|=3$ باشد، طول تصویر بردار $\vec{a}$ بر بردار $\vec{b}$ کدام است؟

(۴) صفر

(۳) ۶

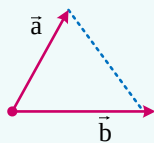
(۲) ۳

(۱) ۲

(هندسه ۳- صفحات ۸۰ و ۸۲ و ۸۴ - متوسط)

پاسخ: گزینه ۴

نکته ۱:



مساحت مثلث بنا شده روی دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر است با نصف اندازه ضرب خارجی دو بردار.

$$S = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$$

نکته ۲:

$$(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 + |\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2$$

نکته ۳:

تصویر قائم بردار $\vec{a}$ روی بردار $\vec{b}$ برابر است با: $\vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b}$

بدیهی است اگر دو بردار بر هم عمود باشند $(\vec{a} \cdot \vec{b} = 0)$ ، تصویر هر یک بر دیگری، بردار صفر است.

پاسخ تشریحی:

$$\text{مساحت مثلث} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}| = 3 \Rightarrow |\vec{a} \times \vec{b}| = 6$$

$$(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - |\vec{a} \times \vec{b}|^2 = 4 \times 9 - 36 = 0 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

چون $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ است پس $\vec{a} \perp \vec{b}$ است و در نتیجه اندازه تصویر $\vec{a}$ بر $\vec{b}$ برابر صفر است.

گروه آموزشی ماز

۳۰- اگر میانگین داده‌های جدول زیر برابر ۱۶ باشد، واریانس کدام است؟

x_i	۱۲	۱۴	۱۶	۱۸	۲۰
f_i	۵	۷	۱۰	a	۳

(۱) ۴ / ۵۵

(۲) ۵ / ۴۵

(۳) ۵ / ۵۵

(۴) ۴ / ۴۵

(آمار و احتمال - صفحات ۸۵ و ۹۴ و ۱۰۰ - متوسط)

پاسخ: گزینه ۳

نکته ۱:

اگر از همه داده‌ها به اندازه میانگین کم کنیم، میانگین داده‌های جدید برابر صفر می‌شود.

نکته ۲:

میانگین داده‌های x_1 تا x_n با فراوانی f_1 تا f_n برابر است با:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i x_i}{\sum_{i=1}^n f_i}$$

پاسخ تشریحی:

ابتدا ۱۶ واحد از هر یک از داده‌ها کم می‌کنیم تا جدول به صورت زیر شود.

اینک، میانگین این جدول را برابر صفر قرار می‌دهیم تا مقدار a به دست آید:

$x_i - 16$	-۴	-۲	۰	۲	۴
f_i	۵	۷	۱۰	a	۳

$$\bar{x} = \frac{5 \times (-4) + 7 \times (-2) + 10 \times 0 + a \times 2 + 3 \times 4}{5 + 7 + 10 + a + 3} = 0$$

$$\Rightarrow -20 + (-14) + 0 + 2a + 12 = 0 \Rightarrow 2a = 22 \Rightarrow a = 11$$

از آنجایی که کم کردن مقدار ثابتی از داده‌ها، مقدار واریانس را تغییر نمی‌دهد، پس واریانس داده‌های جدید را به دست می‌آوریم:

$$\sigma^2 = \frac{5 \times (-4 - 0)^2 + (7) \times (-2 - 0)^2 + 10 \times (0 - 0)^2 + 11 \times (2 - 0)^2 + 3 \times (4 - 0)^2}{36} = \frac{200}{36} = 5.55$$

گروه آموزشی ماز

۳۱- کدام یک از گزاره‌های زیر همواره درست است؟

- (۱) $p \Leftrightarrow (p \vee \sim p)$ (۲) $p \Rightarrow (p \wedge \sim p)$ (۳) $p \Rightarrow (p \Leftrightarrow \sim p)$ (۴) $p \Rightarrow (\sim p \Rightarrow p)$

پاسخ: گزینه ۴ (آمار و احتمال - صفحات ۶ تا ۱۳ - متوسط)

$$\begin{cases} p \vee \sim p \equiv T \\ p \wedge \sim p \equiv F \end{cases}$$

نکته ۱:

$$\begin{cases} T \Leftrightarrow T \equiv T \\ F \Leftrightarrow F \equiv T \\ T \Leftrightarrow F \equiv F \\ F \Leftrightarrow T \equiv F \end{cases}$$

نکته ۲:

نکته ۳:

ترکیب شرطی دو گزاره، فقط زمانی نادرست است که مقدم درست و تالی نادرست باشد و در بقیه موارد درست است.

پاسخ تشریحی:

p	~p	p ∨ ~p	p ⇔ (p ∨ ~p)	p ∧ ~p	p ⇒ (p ∧ ~p)	p ⇔ ~p	p ⇒ (p ⇔ ~p)	~p ⇒ p	p ⇒ (~p ⇒ p)
T	F	T	T	F	F	F	F	T	T
F	T	T	F	F	T	F	T	F	T

با توجه به جدول ارزش گزاره، گزینه (۴) درست است.

گروه آموزشی ماز

۳۲- متمم مجموعه $C \cup A' \cup B'$ نسبت به مجموعه مرجع با کدام مجموعه برابر نیست؟

- (۱) $(A \cap B) - (A \cap C)$ (۲) $(A - C) \cup (B - C)$ (۳) $A \cap (B - C)$ (۴) $(A \cap B) - C$

پاسخ: گزینه ۲ (آمار و احتمال - صفحات ۲۷ تا ۳۴ - متوسط)

نکته:

برای سه مجموعه A و B و C، به کمک جبر مجموعه‌ها، داریم:

$$\begin{aligned} A - B &= A \cap B' \\ (A \cap B)' &= A' \cup B' \\ A \cap (A' \cup B) &= A \cap B \\ A \cap (B \cap C) &= (A \cap B) \cap C = (A \cap C) \cap B \end{aligned}$$

پاسخ تشریحی:

روش اول:

به کمک قوانین جبر مجموعه‌ها، داریم:

$$\begin{aligned} (C \cup A' \cup B')' &= C' \cap A \cap B = A \cap B \cap C' \xrightarrow{\text{گزینه ۳}} A \cap (B \cap C') = A \cap (B - C) \xrightarrow{\text{گزینه ۴}} (A \cap B) \cap C' = (A \cap B) - C \\ &\xrightarrow{\text{گزینه ۱}} B \cap (A \cap C') = B \cap [A \cap (A' \cup C')] = (B \cap A) \cap (A' \cup C') = (A \cap B) \cap (A \cap C)' = (A \cap B) - (A \cap C) \end{aligned}$$

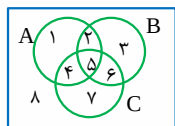
بنابراین گزینه ۲ پاسخ است.

روش دوم:

مسئله را با عددگذاری حل می‌کنیم:

$$(CUA' \cup B')' = (\{4, 5, 6, 7\} \cup \{3, 6, 7, 8\} \cup \{1, 4, 7, 8\})' = \{2\}$$

حال به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم تا ببینیم کدام گزینه با صورت مسئله برابر نیست. گزینه (۲) با صورت مسئله برابر نیست.



روش سوم:

با توجه به صورت سوال، ۳ تا از گزینه‌ها با هم برابرند و یکی فرق دارد. اگر دو گزینه قابل تبدیل به یکدیگر باشند، هر دو رد می‌شوند.

گروه آموزشی ماز

۳۳- در پرتاب ۲ تاس می‌دانیم حاصل ضرب اعداد رو شده تاس‌ها، عددی زوج است. احتمال این که مجموع ۲ تاس بر ۴ بخش پذیر باشد، کدام است؟

$$\frac{5}{27} \quad (4)$$

$$\frac{2}{9} \quad (3)$$

$$\frac{5}{18} \quad (2)$$

$$\frac{1}{3} \quad (1)$$

(آمار و احتمال - صفحات ۵۳ تا ۵۵ - متوسط)

پاسخ: گزینه ۴

نکته:

احتمال پیشامد A به شرط پیشامد B را با $P(A|B)$ نمایش داده و برابر است با:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

نکته ۲:

در حل بسیاری از مسائل احتمال شرطی، شرط مساله باعث کاهش فضای نمونه‌ای شده و مساله را به کمک فرمول احتمال ساده $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ حل می‌کنیم.

پاسخ تشریحی:

چون حاصل ضرب اعداد رو شده دو تاس عددی زوج است، پس عددهای ۲ تاس نباید هر دو فرد باشند، بنابراین:

تعداد حالت‌هایی که هر دو تاس فرد هستند - تعداد کل حالت‌ها = فضای نمونه‌ای

$$\Rightarrow S = 36 - 3 \times 3 = 27$$

از طرفی حالت‌هایی که حاصل ضرب اعداد رو شده زوج و مجموع آنها بر ۴ بخش پذیر باشد، به صورت زیر هستند:

$$\{(2, 2), (4, 4), (6, 2), (2, 6), (6, 6)\} \Rightarrow \text{حالت ۵}$$

$$\text{احتمال مورد نظر} = \frac{5}{27}$$

گروه آموزشی ماز

۳۴- دو سبد داریم که در سبد اول ۴ توپ قرمز و ۶ توپ سبز و در سبد دوم ۶ توپ قرمز و ۴ توپ سبز وجود دارد. یک سکه سالم را پرتاب می‌کنیم. اگر رو آمد، توپی به تصادف از سبد اول انتخاب می‌کنیم و اگر پشت آمد، توپی به تصادف از سبد دوم انتخاب می‌کنیم. احتمال انتخاب یک توپ قرمز چقدر است؟

$$\frac{2}{3} \quad (4)$$

$$\frac{3}{5} \quad (3)$$

$$\frac{3}{4} \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} \quad (1)$$

(آمار و احتمال - صفحات ۵۸ تا ۶۰ - متوسط)

پاسخ: گزینه ۱

نکته:

براساس قانون احتمال کل، اگر پیشامد A به پیشامدهای A_1 تا A_n وابسته باشد، احتمال وقوع پیشامد A برابر است با: $P(A) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \times P(A|A_i)$

پاسخ تشریحی:

فرض کنیم A پیشامد خروج توپ قرمز، R پیشامد رو آمدن سکه و P پیشامد پشت آمدن سکه باشد. در این صورت داریم:

$$P(A) = P(P) \times P(A|P) + P(R) \times P(A|R) = \frac{1}{2} \times \frac{4}{10} + \frac{1}{2} \times \frac{6}{10} = \frac{1}{2}$$

گروه آموزشی ماز

۳۵- به ازای چند عدد طبیعی دورقمی x رابطه $x^2 - 8x \equiv -7 \pmod{9}$ برقرار است؟

$$32 \quad (4)$$

$$29 \quad (3)$$

$$30 \quad (2)$$

$$31 \quad (1)$$

(ریاضیات گسسته - صفحات ۲۴ و ۲۵ - دشوار)

پاسخ: گزینه ۲

نکته:

برای حل معادله همنهستی $ax \equiv b \pmod{m}$ با شرط $(a, m) | b$ به طرفین عبارت، مضاربی از پیمانه را کم یا زیاد می‌کنیم تا طرفین قابل تقسیم بر ضریب x باشند، آن‌گاه با تقسیم طرفین همنهستی به ضریب x ، خواهیم داشت:

$$x \equiv c \pmod{m} \Rightarrow x = mk + c, k \in \mathbb{Z}$$

پاسخ تشریحی:

$$x^2 - 8x + 7 \equiv 0 \pmod{9} \Rightarrow (x-1)(x-7) \equiv 0 \pmod{9}$$

حالت‌های زیر ممکن است رخ دهد:

$$1) x-1 \equiv 0 \pmod{9} \Rightarrow x \equiv 1 \pmod{9}$$

$$2) x-7 \equiv 0 \pmod{9} \Rightarrow x \equiv 7 \pmod{9}$$

$$3) \begin{cases} x-1 \equiv 3k \\ x-7 \equiv 3k' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \equiv 1 \pmod{3} \\ x \equiv 7 \pmod{3} \end{cases} \Rightarrow x \equiv 1 \pmod{3}$$

از طرفی چون $3 | 9$ است، پس در حالت‌های ۱ و ۲ داریم:

$$x \equiv 1 \pmod{9} \xrightarrow{3|9} x \equiv 1 \pmod{3}, x \equiv 7 \pmod{9} \xrightarrow{3|9} x \equiv 7 \pmod{3}$$

پس $x \equiv 1 \pmod{9}$ در تمامی حالت‌های بالا صدق می‌کند و داریم:

$$x = 3k + 1 \rightarrow 10 \leq 3k + 1 \leq 99 \Rightarrow 3 \leq k \leq 32$$

پس ۳۰ عدد دو رقمی داریم که در معادله مورد نظر صدق می‌کنند.

گروه آموزشی ماز

۳۶- معادله $25x + 12y = 1110$ بر روی مجموعه اعداد طبیعی چند زوج جواب دارد؟

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

(ریاضیات گسسته - صفحات ۲۶ تا ۲۸ - متوسط)

پاسخ: گزینه ۲

نکته:

برای حل معادله سیاله $ax + by = c$ با شرط $(a, b) | c$ معادله را به معادله همبستگی $ax \equiv c \pmod{b}$ تبدیل کرده و پس از حل معادله همبستگی، دسته جوابهای x را در معادله سیاله قرار می‌دهیم تا دسته جوابهای y به دست آید.

نکته ۲:

اگر (x, y) یک جواب معادله سیاله $ax + by = c$ با شرط $(a, b) = d | c$ باشد، دسته جوابهای x و y عبارتند از:

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{b}{d}k \\ y = y_0 - \frac{a}{d}k \end{cases}$$

پاسخ تشریحی:

روش اول:

به کمک نکته ۱، داریم:

$$25x + 12y = 1110 \Rightarrow 25x \equiv 1110 \pmod{12} \xrightarrow[\text{طرف دوم}]{\text{طرف اول}} 25x \equiv 1110 \pmod{12} \Rightarrow x \equiv 6 \pmod{12} \Rightarrow x = 12k + 6$$

$$25(12k + 6) + 12y = 1110 \Rightarrow 12y = -30k + 960 \Rightarrow y = -25k + 80 \Rightarrow \begin{cases} x = 12k + 6 > 0 \Rightarrow k \geq 0 \\ y = -25k + 80 > 0 \Rightarrow k \leq 3 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq k \leq 3 \Rightarrow k \in \{0, 1, 2, 3\}$$

روش دوم:

به کمک نکته ۲، داریم:

$$25x + 12y = 1110$$

جواب اولیه دلخواه: $x_0 = 6, y_0 = 80$

$$x = x_0 + \frac{b}{d}k \Rightarrow x = 6 + \frac{12k}{1} \Rightarrow 6 + 12k > 0 \Rightarrow k \geq 0$$

$$y = y_0 - \frac{a}{d}k \Rightarrow y = 80 - \frac{25k}{1} \Rightarrow 80 - 25k > 0 \Rightarrow k \leq 3$$

مجموعه جوابهای طبیعی این معادله به ازای $k = 0, k = 1, k = 2, k = 3$ به دست می‌آید.

گروه آموزشی ماز

۳۷- در یک گراف ۳- منتظم اندازه گراف از ۵ برابر مرتبه آن ۲۱ واحد کمتر است. مجموع مرتبه و اندازه گراف کدام است؟

۲۱ (۴)

۱۸ (۳)

۱۲ (۲)

۱۵ (۱)

(ریاضیات گسسته - صفحات ۳۵ و ۴۰ - متوسط)

پاسخ: گزینه ۱

نکته:

گراف k -منتظم گرافی است که درجه هر رأس آن برابر با عدد حسابی k است.

نکته ۲:

در هر گراف k -منتظم مرتبه p و اندازه q رابطه $2q = pk$ برقرار است.

پاسخ تشریحی:

$$\begin{cases} 3p = 2q \Rightarrow q = \frac{3}{2}p \\ q = \frac{3}{2}p = 5p - 21 \Rightarrow p = 6, q = 9 \Rightarrow p + q = 15 \\ q = 5p - 21 \end{cases}$$

گروه آموزشی ماز

۳۸- یک گراف ۴- منتظم از مرتبه ۶ چند مجموعه احاطه گر مینیمال دارد؟

۱۵ (۴)

۱۰ (۳)

۹ (۲)

۶ (۱)

پاسخ: گزینه ۴ (ریاضیات گسسته - صفحات ۳۵ و ۴۶ - دشوار)

نکته ۱:

گراف k -منتظم گرافی است که درجه هر رأس آن برابر با عدد حسابی k است.

نکته ۲:

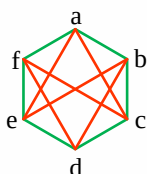
یک مجموعه احاطه گر را که با حذف هر یک از رئوسش دیگر احاطه گر نباشد، احاطه گر مینیمال گوئیم.

نکته ۳:

در هر گراف مرتبه n و ماکزیم درجه Δ ، کران پایین عدد احاطه گری برابر $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$ است.

پاسخ تشریحی:

گراف ۴- منتظم از مرتبه ۶ یک گراف منحصر به فرد است و به شکل زیر: (زیرا مکمل آن یک گراف منحصر به فرد است). عدد احاطه گری در این گراف بیش از یک است، زیرا در این گراف رأسی وجود ندارد که با همه رئوس مجاور باشد.



$$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{6}{4+1} \right\rceil = 2$$

از طرفی با هر ۲ رأس دلخواه می توان کل این گراف را احاطه کرد، پس مجموعه احاطه گر مینیمم و در نتیجه مینیمال آن ۲ عضوی است، پس در این گراف

باید تعداد زیرمجموعه های ۲ عضوی رئوس را به دست آوریم. یعنی: $\binom{6}{2} = 15$.

گروه آموزشی ماز

۳۹- تعداد سه تایی های مرتب با مختصات صحیح و نامنفی به طوری که مجموع هر سه مولفه برابر ۱۰ و هر مولفه کمتر از ۶ باشد، کدام است؟

۱۹ (۴)

۲۲ (۳)

۲۱ (۲)

۲۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضیات گسسته - صفحات ۶۰ و ۶۱ - دشوار)

نکته ۱:

تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_k = n$ برابر $\binom{n+k-1}{k-1}$ است.

نکته ۲:

تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_k = n$ با شرط $x_i \geq r_i$ به ازای $1 \leq i \leq n$ برابر $\binom{n+k-1-\sum r_i}{k-1}$ است.

پاسخ تشریحی:

اگر سه تایی های مرتب را به صورت (x_1, x_2, x_3) در نظر بگیریم، در این سؤال به دنبال جواب های معادله $x_1 + x_2 + x_3 = 10$ با شرط $x_1, x_2, x_3 < 6$ هستیم:

ابتدا کل جواب ها را به دست می آوریم:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 10$$

$$\text{تعداد جواب ها} = \binom{10+3-1}{3-1} = \binom{12}{2} = 66$$



حال فرض می‌کنیم $x_1 \geq 6$ یا $x_2 \geq 6$ یا $x_3 \geq 6$ باشد و تعداد جواب‌های معادله با این شروط را از کل جواب‌ها کم می‌کنیم:

$$x_1 \geq 6: \binom{10+3-1-6}{3-1} = \binom{6}{2} = 15 \Rightarrow \begin{cases} x_2 \geq 6: 15 \\ x_3 \geq 6: 15 \end{cases}$$

بنابراین تعداد جواب‌های مطلوب، برابر است با:

$$66 - 3(15) = 21$$

توجه: حالت‌هایی که ۲ یا ۳ متغیر بزرگتر از ۶ باشند غیرممکن است و حالت‌های آن ۰ است.

گروه آموزشی ماز

۴۰- اگر هر یک از یال‌های گراف کامل K_{16} را با یکی از ۷ رنگ آبی، قرمز، سبز، زرد، قهوه‌ای، مشکی و سفید رنگ‌آمیزی کنیم، آنگاه بزرگترین مقدار n به طوری که مطمئن شویم حداقل n یال در این گراف هم‌رنگ هستند، کدام است؟

۲۰ (۴)

۱۹ (۳)

۱۸ (۲)

۱۷ (۱)

(ریاضیات گسسته - صفحات ۳۸ و ۴۰ و ۸۱ - دشوار)

پاسخ: گزینه ۲



پاسخ تشریحی:

$$\binom{16}{2} = 120$$

تعداد یال‌های گراف کامل مرتبه ۱۶ برابر است با:

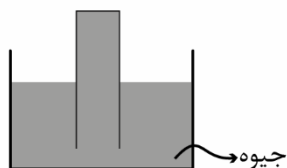
اگر ۱۲۰ یال را معادل ۱۲۰ کبوتر و ۷ رنگ را معادل ۷ لانه فرض کنیم، آنگاه با توجه به تعمیم اصل لانه کبوتری، داریم:

$$7k + 1 = 120 \Rightarrow 7k = 119 \Rightarrow k = 17 \Rightarrow k + 1 = 18$$

یعنی حداقل ۱۸ یال در این گراف هم‌رنگ خواهد بود.

گروه آموزشی ماز

۴۱- در شکل زیر، سطح مقطع لوله 4cm^2 است. اگر لوله را 5cm بیشتر در جیوه فرو ببریم، نیرویی که از طرف جیوه بر انتهای بسته لوله وارد می شود 20% درصد افزایش می یابد. در این حالت نیرویی که از طرف جیوه بر ته لوله وارد می شود چند نیوتون است؟ $(\rho_{\text{جیوه}} = 13/5 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}, g = 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}})$



- (۱) $11/5$
(۲) $12/4$
(۳) $14/8$
(۴) $16/2$

(۱۰۰۲ - متوسط - مفهومی و محاسباتی)

پاسخ: گزینه ۴

نیروی ناشی از فشار مایع:

مایع به هر سطحی که با آن تماس داشته باشد طبق فرمول $F = PA$ به طور عمود نیرو وارد می کند. برای محاسبه این نیرو لازم است تا در ابتدا فشار ناشی از مایع را بدست آوریم.

پایه تیغی

گام اول: با پایین آوردن لوله به مقدار 5cm ، فشاری که از طرف جیوه بر انتهای بسته لوله وارد می شود، 5cmHg افزایش می یابد. با فرض اینکه P و P' به ترتیب فشاری باشد که از طرف جیوه بر انتهای بسته لوله قبل و بعد از پایین آوردن لوله، وارد می شود، داریم:

$$\Delta P = 5\text{cmHg} \rightarrow P' - P = 5\text{cmHg} \quad (I)$$

گام دوم: با توجه به صورت تست، با پایین آوردن لوله به مقدار 5cm ، نیرویی که از طرف جیوه بر انتهای بسته لوله وارد می شود، 20% درصد افزایش می یابد، پس:

$$F' = F + \frac{20}{100} F = 1/2 F \xrightarrow{(F=PA)} P'A = 1/2 PA \rightarrow P' = 1/2 P \rightarrow$$

$$P = \frac{P'}{1/2} \rightarrow P = \frac{5}{6} P' \quad (II)$$

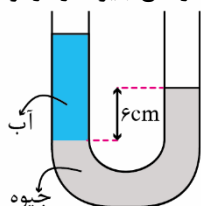
گام سوم: اکنون می توان با استفاده از رابطه های (I) و (II)، فشاری که از طرف جیوه بر انتهای بسته لوله پس از پایین آوردن آن وارد می شود را بدست آورد و سپس نیروی وارد بر انتهای بسته لوله از طرف جیوه در این حالت را محاسبه کرد:

$$(I): P' - P = 5\text{cmHg} \xrightarrow{(II)} P' - \frac{5}{6} P' = 5\text{cmHg} \rightarrow \frac{1}{6} P' = 5\text{cmHg} \rightarrow$$

$$P' = 30\text{cmHg} \xrightarrow{(P=\rho gh)} P' = (13/5 \times 10^{-3}) \times 10 \times 30 = 40/5 \times 10^{-3} \text{ Pa} \xrightarrow{(F=PA)} F' = P'A = (40/5 \times 10^{-3}) \times (4 \times 10^{-4}) = 162 \times 10^{-7} = 16/2 \text{ N}$$

گروه آموزشی ماز

۴۲- در شکل زیر، اختلاف ارتفاع جیوه در دو طرف لوله U شکل، 6cm است. در لوله سمت راست چند سانتی متر روغن بریزیم تا ارتفاع جیوه در دو لوله



$$\text{یکسان شود؟ } (\rho_{\text{آب}} = 1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}, \rho_{\text{روغن}} = 0/9 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}, \rho_{\text{جیوه}} = 13/5 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3})$$

- (۱) ۹۰
(۲) ۱۰۰
(۳) ۱۲۰
(۴) ۱۲۵

(۱۰۰۲ - متوسط - محاسباتی)

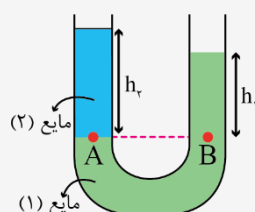
پاسخ: گزینه ۱

لوله های U شکل

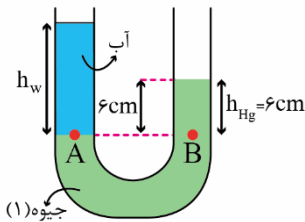
اصل هم فشاری نقاط هم تراز درون یک مایع: در نقطه های هم تراز درون یک مایع فشار برابر است. بعنوان مثال در شکل مقابل A و B هر دو در مایع (۱) قرار دارند و هم ترازند، بنابراین:

$$P_A = P_B \rightarrow P + \rho_2 gh_2 = P + \rho_1 gh_1 \rightarrow$$

$$\rho_2 gh_2 = \rho_1 gh_1 \rightarrow \rho_2 h_2 = \rho_1 h_1$$



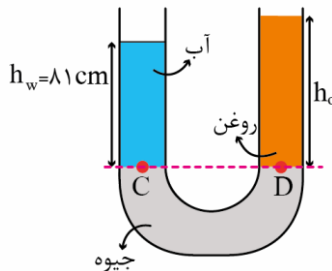
گام اول: در ابتدا ارتفاع ستون آب را بدست می آوریم. با توجه به اصل هم فشاری نقاط هم تراز و با فرض اینکه از زیروند w و Hg به ترتیب برای آب و جیوه استفاده کنیم، داریم:



$$P_A = P_B \rightarrow P + \rho_w g h_w = P + \rho_{Hg} g h_{Hg} \rightarrow$$

$$\rho_w h_w = \rho_{Hg} h_{Hg} \rightarrow 1 \times h_w = 13 / 5 \times 6 \rightarrow h_w = 15.6 \text{ cm}$$

گام دوم: با ریختن روغن در لوله سمت راست، ارتفاع جیوه در دو طرف لوله U شکل یکسان می شود؛ چون C و D هر دو در جیوه قرار دارند و هم تراز می باشند، بنابراین:



$$P_C = P_D \rightarrow P_0 + \rho_w g h_w = P_0 + \rho_o g h_o \rightarrow$$

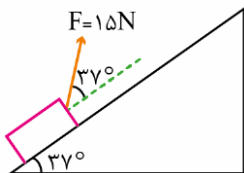
$$\rho_w h_w = \rho_o h_o \rightarrow 1 \times 15.6 = 0.9 \times h_o \rightarrow$$

$$h_o = \frac{15.6}{0.9} = 17.3 \text{ cm}$$

گروه آموزشی ماز

۴۳- مطابق شکل زیر، با استفاده از نیروی ۱۵ نیوتونی جسمی به جرم $1/2 \text{ kg}$ را بر روی سطح شیب داری بالا می بریم. اگر در مدت زمان مشخص t ، اندازه

کار نیروی وزن 72 J باشد، در این مدت کار نیروی F چند ژول است؟ ($g = 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}}$, $\sin 37^\circ = 0.6$)



- ۵۴ (۱)
- ۶۰ (۲)
- ۱۰۸ (۳)
- ۱۲۰ (۴)

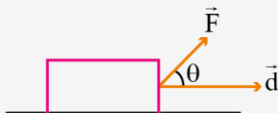
(۱۰۰۵ - متوسط - محساباتی)

پاسخ: گزینه ۴

کار نیروی ثابت و تغییر انرژی پتانسیل

هرگاه به جسمی نیروی F وارد شود و آن را به اندازه d جابجا نماید می گوئیم نیروی F روی جسم کار انجام داده است و مقدار این کار برابر است با:

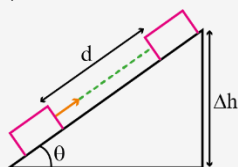
$$W_F = Fd \cos \theta$$



کار نیروی وزن جسم برابر است با قرینه تغییرات انرژی پتانسیل گرانشی

$$W_g = -\Delta U = -mg\Delta h$$

در مسائل سطح شیب دار برای محاسبه تغییر انرژی پتانسیل گرانشی جسم کافی است در ابتدا تغییر فاصله عمودی جسم که از حاصل ضرب میزان جابجایی جسم بر روی سطح شیب دار و سینوس زاویه سطح شیب دار با سطح افقی بدست می آید را بدست آوریم و سپس از رابطه زیر، استفاده کنیم:



$$\Delta h = d \sin \theta$$

$$\Delta U = mg\Delta h = mgd \sin \theta$$

گام اول: با فرض اینکه جسم در مدت t به اندازه d بر روی سطح شیب دار جابجا شده باشد، داریم:

$$W_g = -\Delta U_g = -mg\Delta h = -mgd \sin 37^\circ \rightarrow$$

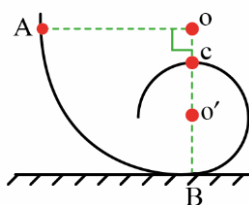
$$|W_g| = mgd \sin 37^\circ \rightarrow 72 = 1/2 \times 10 \times d \times 0.6 \rightarrow d = \frac{72}{7/2} = 10 \text{ m}$$

گام دوم: کار نیروی F در مدت زمان t را که در آن جسم به اندازه $d = 10 \text{ m}$ جابجا شده است را بدست می آوریم:

$$W_F = Fd \cos 37^\circ = 15 \times 10 \times 0.8 = 120 \text{ J}$$

گروه آموزشی ماز

۴۴- مطابق شکل زیر، گلوله‌ای از نقطه A در داخل یک سطح کروی به مرکز O رها می‌شود. گلوله در ادامه مسیر در نقطه B وارد سطح کروی دیگر به مرکز O' می‌شود. اگر شعاع کره بزرگ‌تر ۳ برابر شعاع کره کوچک‌تر و تندی گلوله در نقطه C، $10 \frac{m}{s}$ باشد، بیشترین تندی گلوله در طول مسیر، از A تا O' چند متر بر ثانیه است؟ (از اصطکاک صرف نظر کنید و $g = 10 \frac{m}{s^2}$)



- (۱) $10\sqrt{2}$
(۲) ۱۵
(۳) $10\sqrt{3}$
(۴) ۲۰

پاسخ: گزینه ۳ (۱۰۰۵ - سخت - مسأله)

انرژی مکانیکی

قانون بقاء انرژی مکانیکی: هرگاه نیروهای تلف‌کننده انرژی مانند اصطکاک و مقاومت هوا در مسیر حرکت یک جسم وجود نداشته باشد، انرژی مکانیکی جسم ثابت می‌ماند و عبارتی تغییر انرژی مکانیکی صفر است:

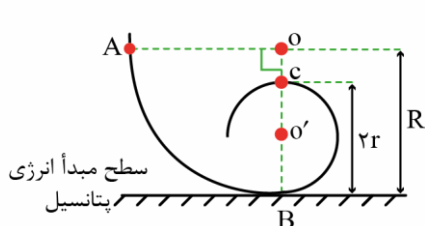
$$\Delta E = 0 \rightarrow E_f - E_i = 0 \rightarrow E_i = E_f$$

انرژی مکانیکی یک جسم در یک نقطه، مجموع انرژی پتانسیل گرانشی و انرژی جنبشی جسم در آن نقطه می‌باشد، بنابراین رابطه بالا را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$K_i + U_i = K_f + U_f$$

پایه تشریحی

گام اول: قانون بقاء انرژی مکانیکی را برای دو نقطه A و C می‌نویسیم؛ با فرض اینکه R و r به ترتیب شعاع کره‌های بزرگ‌تر و کوچک‌تر باشد، داریم: (انرژی جنبشی گلوله در شروع حرکت صفر است زیرا گلوله رها شده است.)



$$E_A = E_C \rightarrow K_A + U_A = K_C + U_C \rightarrow$$

$$0 + mgR = \frac{1}{2}mv_C^2 + mg(2r) \rightarrow$$

$$gR = \frac{1}{2}v_C^2 + 2gr \xrightarrow{(R=3r)}$$

$$10(3r) = \frac{1}{2} \times (10)^2 + 2 \times 10 \times r \rightarrow$$

$$30r = 50 + 20r \rightarrow 10r = 50 \rightarrow$$

$$r = 5m \rightarrow R = 3r = 3 \times 5 = 15m$$

گام دوم: انرژی مکانیکی گلوله در طول مسیر، از A تا C ثابت است و چون انرژی پتانسیل گلوله در نقطه B برابر صفر است، انرژی جنبشی آن و در نتیجه تندی‌اش در این نقطه بیشینه است، اکنون با نوشتن قانون بقاء انرژی مکانیکی برای دو نقطه A و B داریم:

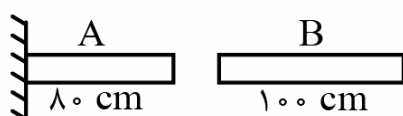
$$E_A = E_B \rightarrow K_A + U_A = K_B + U_B \rightarrow 0 + mgR = \frac{1}{2}mv_B^2 + 0 \rightarrow$$

$$mgR = \frac{1}{2}mv_B^2 \rightarrow gR = \frac{1}{2}v_B^2 \rightarrow v_B^2 = 2gR = 2 \times 10 \times 15 \rightarrow$$

$$v_B^2 = 300 \rightarrow v_B = 10\sqrt{3} \frac{m}{s}$$

گروه آموزشی ماز

۴۵- مطابق شکل زیر، دو میله فلزی A و B در امتداد یکدیگر و به فاصله $3/1$ میلی‌متری از هم در دمای یکسانی قرار دارند. میله A در یک انتهای خود بسته و هر دو انتهای میله B باز است. اگر ضریب انبساط طولی میله‌های A و B به ترتیب $\frac{1}{K} \times 10^{-5}$ و $\frac{1}{K} \times 10^{-5}$ باشد، دمای این مجموعه حداکثر چند درجه سلسیوس می‌تواند افزایش یابد، بدون اینکه میله‌ها به یکدیگر برسند؟

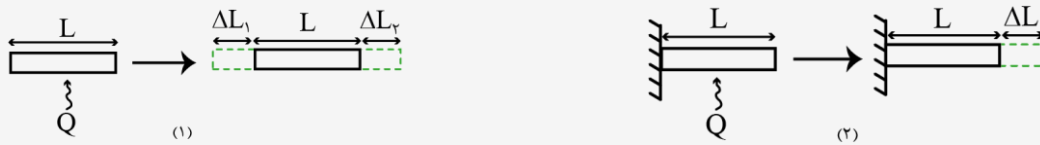


- (۱) ۳۰
(۲) ۴۰
(۳) ۵۰
(۴) ۶۰

پاسخ: گزینه ۳ (۱۰۰۵ - متوسط - مسأله)

انبساط طولی

هرگاه دمای میله‌ای را افزایش دهیم و دو طرف میله مطابق شکل (۱) باز باشد، میله از هر دو طرف منبسط می‌شود ولی چنانچه میله مطابق شکل (۲) از یک طرف مسدود شده باشد، میله فقط از سمت باز آن، منبسط می‌شود ولی دقت کنید که در هر دو حالت افزایش طول میله از رابطه $\Delta L = \alpha L \Delta T$ بدست می‌آید:



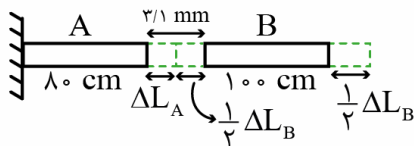
(۱) در شکل: $\Delta L = \Delta L_1 + \Delta L_2 = \alpha L \Delta T$

(۲) در شکل: $\Delta L = \alpha L \Delta T$

پاسخ تشریحی:

بر اثر افزایش دمای مجموعه به اندازه ΔT ، میله‌های A و B به ترتیب به اندازه ΔL_A و ΔL_B افزایش می‌یابند که این افزایش طول در مورد میله A همه آن از سمت راست و در مورد میله B، نیمی از آن از سمت راست و نیمی دیگر از سمت چپ میله افزایش می‌یابد، بنابراین با توجه به شکل زیر، داریم:

$$\Delta L_A + \frac{1}{2} \Delta L_B = 3/1 \text{ mm} = 0/31 \text{ cm} \rightarrow$$



$$L_A \alpha_A \Delta T + \frac{1}{2} L_B \alpha_B \Delta T = 0/31 \rightarrow 80 \times (4 \times 10^{-5}) \Delta T + \frac{1}{2} \times 100 \times (6 \times 10^{-5}) \Delta T = 0/31$$

$$\rightarrow 320 \times 10^{-5} \Delta T + 300 \times 10^{-5} \Delta T = 0/31 \rightarrow 620 \times 10^{-5} \Delta T = 0/31 \rightarrow$$

$$\Delta T = \frac{0/31}{620 \times 10^{-5}} = \frac{0/31}{0/62 \times 10^{-2}} = \frac{1}{2 \times 10^{-2}} = \frac{100}{2} = 50^\circ \text{C}$$

گروه آموزشی ماز

۴۶- درون ظرفی 5 kg آب 20°C وجود دارد. درون این ظرف گلوله‌ای فلزی به جرم 500 g و دمای 130°C و تکه یخی به جرم m و دمای -20°C می‌اندازیم. اگر پس از برقراری تعادل گرمایی، دمای مجموعه 10°C شود، m چند گرم است؟

$$(Q_{\text{یخ}} = 4200 \frac{\text{J}}{\text{kg.K}}, c_{\text{فلز}} = 700 \frac{\text{J}}{\text{kg.K}}, L_f = 336000 \frac{\text{J}}{\text{kg}} \text{ و از تبادل گرما با ظرف و محیط صرف نظر شود})$$

۸۰۰ (۴)

۶۰۰ (۳)

۴۰۰ (۲)

۳۰۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ (۱۰۰۵ - متوسط - محاسباتی)

تعادل گرمایی

تعادل گرمایی: هرگاه چند جسم با دماهای مختلف را در کنار یکدیگر قرار دهیم آن‌قدر با یکدیگر گرما مبادله می‌کنند تا سرانجام دمای آن‌ها یکسان و برابر دمای تعادل θ_e می‌شود؛ در این حالت جمع جبری گرمای مبادله شده بین اجسام مختلف برابر صفر است:

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots = 0$$

پاسخ تشریحی:

دمای آب درون ظرف و گلوله فلزی بزرگ‌تر از دمای تعادل ($\theta_e = 10^\circ \text{C}$) و دمای تکه یخ کمتر از دمای تعادل است، بنابراین آب و گلوله گرما می‌دهند و یخ گرما می‌گیرد و سرانجام دمای همه آن‌ها برابر 10°C می‌شود؛ با فرض اینکه از اندیس‌های w و i و f به ترتیب برای آب و یخ و فلز استفاده کنیم، داریم:

$$Q_i + Q_w + Q_f = 0 \rightarrow [m_i c_i (\theta_e - \theta_i) + m_i L_f + m_i c_w (\theta_e - \theta_i)]$$

$$+ m_w c_w (\theta_e - \theta_w) + m_f c_f (\theta_e - \theta_f) = 0 \rightarrow$$

$$m \times 2100 \times (10 - (-20)) + m \times (80 \times 4200) + m \times 4200 \times (10 - 0) + 5 \times 4200 \times (10 - 20)$$

$$+ 0/5 \times 700 \times (10 - 130) = 0 \rightarrow$$

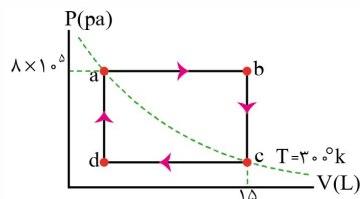
$$m \times 2100 \times 30 + m \times 80 \times 4200 + m \times 4200 \times 10 - 5 \times 4200 \times 10 - 4200 \times 0 = 0 \rightarrow$$

$$10m + 80m + 10m - 50 - 10 = 0 \rightarrow 100m = 60 \rightarrow m = 0/6 \text{ kg} = 600 \text{ g}$$

گروه آموزشی ماز

۴۷- نمودار $(P-V)$ برای یک مول گاز کامل مطابق شکل زیر است. اگر نقاط a و c بر روی منحنی همدمای نشان داده شده قرار داشته باشند، گرمایی که

این گاز در یک چرخه با محیط مبادله می‌کند، چگونه است؟ $(R = 8 \frac{J}{mol.K})$

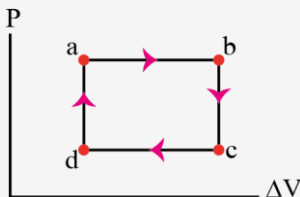


- (۱) $7680 J$ گرما می‌گیرد.
- (۲) $7680 J$ گرما از دست می‌دهد.
- (۳) $8240 J$ گرما می‌گیرد.
- (۴) $8240 J$ گرما از دست می‌دهد.

پاسخ: گزینه ۱ (۱۰۰۵ - متوسط - محاسباتی)

چرخه

هرگاه یک دستگاه ترمودینامیکی از حالت P_a, V_a, T_a چند فرآیند پی‌درپی انجام دهد و دوباره به حالت P_a, V_a, T_a برگردد یک چرخه را پیموده است، بنابراین در یک چرخه تغییر دمای دستگاه ترمودینامیکی برابر صفر و در نتیجه تغییر انرژی درونی آن صفر است:



$$\Delta T = 0 \rightarrow \Delta U = 0 \rightarrow Q + W = 0 \rightarrow Q = -W$$

در نمودار $P-V$ یک چرخه ترمودینامیکی اندازه کار کل $(|W_t|)$ برابر مساحت چرخه است و چنانچه چرخه ساعتگرد باشد، کار کل منفی $(W_t < 0)$ و چنانچه چرخه پادساعتگرد باشد، کار کل مثبت است $(W_t > 0)$

پاسخ تشریحی

گام اول: نقاط a و c روی منحنی همدمای $T = 300 K$ قرار دارند، بنابراین:

$$P_a V_a = nRT \rightarrow (10^5) \times V_a = 1 \times 8 \times 300 \rightarrow V_a = 3 \times 10^{-3} m^3 = 3L$$

$$P_c V_c = nRT \rightarrow P_c \times (15 \times 10^{-3}) = 1 \times 8 \times 300 \rightarrow P_c = 160 \times 10^3 = 1/6 \times 10^5 Pa$$

گام دوم: با معلوم شدن P_c و V_a می‌توان مساحت چرخه را بدست آورد، بنابراین:

$$|W_t| = S = (P_a - P_d) \times (V_c - V_d) = (10^5 - 1/6 \times 10^5) \times (15 \times 10^{-3} - 3 \times 10^{-3})$$

$$= (10^5 - 1/6 \times 10^5) \times (12 \times 10^{-3}) = 6/4 \times 12 \times 10^2 = 7680 J$$

چون چرخه ساعتگرد است بنابراین کار کل آن منفی است، پس:

$$W_t = -7680 J \rightarrow Q_t = 7680 J$$

پس گاز $7680 J$ گرما می‌گیرد.

گروه آموزشی ماز

۴۸- نمودار $P-T$ یک مول گاز کامل مطابق شکل مقابل است. کدام گزینه درباره کار انجام شده روی گاز در مسیر نشان داده شده درست است؟



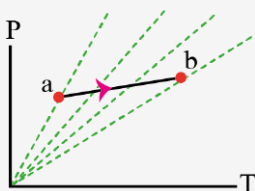
- (۱) همواره مثبت است.
- (۲) همواره منفی است.
- (۳) در ابتدا مثبت و سپس منفی است.
- (۴) در ابتدا منفی و سپس مثبت است.

پاسخ: گزینه ۴ (۱۰۰۵ - متوسط - مفهومی)

نمودار P-T

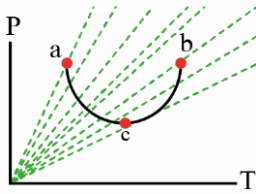
از نمودار $P-T$ یک گاز کامل می‌توان تشخیص داد که در طی یک فرآیند، حجم گاز کم یا زیاد شده است و در نتیجه می‌توان علامت کاری که بر روی گاز انجام گرفته است را تشخیص داد.

با توجه به قانون گازهای کامل داریم:



$$PV = nRT \rightarrow P = \frac{nR}{V} T$$

رابطه بالا بیان می‌کند که شیب خط گذرنده از مبدأ در نمودار $P-T$ با حجم گاز رابطه عکس دارد. بعنوان مثال در نمودار مقابل، شیب خط گذرنده از مبدأ در فرآیند a تا b به طور مرتب کاهش می‌یابد و بنابراین حجم گاز به طور مرتب افزایش می‌یابد و بنابراین فرآیند انبساطی و کار انجام گرفته روی گاز منفی است.



با توجه به درسنامه و نمودار شکل مقابل، ملاحظه می‌شود که از نقطه a تا c شیب خط‌های راست گذرنده از مبدأ به طور مرتب کاهش می‌یابد و بنابراین حجم گاز به طور مرتب افزایش یافته و در نتیجه کار انجام گرفته بر روی گاز منفی است. همچنین از نقطه c تا نقطه b شیب این خط‌ها به طور مرتب افزایش می‌یابد و بنابراین حجم گاز به طور مرتب کاهش یافته و در نتیجه کار انجام گرفته بر روی گاز مثبت است.

گروه آموزشی ماز

۴۹- در مواد حتی در نبود میدان خارجی، در ناحیه‌هایی که حوزه مغناطیسی نامیده می‌شود، دوقطبی‌های مغناطیسی هم‌سو هستند که علت آن در این مواد است.

(۲) پارامغناطیس - القای دو قطبی‌های مغناطیسی قوی

(۱) فرومغناطیس - القای دو قطبی‌های مغناطیسی قوی

(۴) پارامغناطیس - برهم‌کنش قوی بین دو قطبی‌های مغناطیسی

(۳) فرومغناطیس - برهم‌کنش قوی بین دو قطبی‌های مغناطیسی

پاسخ: گزینه ۳ (۱۱۰۳ - ساده - مفهومی و حفظی)

خاصیت مغناطیسی مواد

قبل از هر چیز خواهش می‌کنم این درسنامه رو کامل و با دقت بخونین، چون حتماً از اون یه تست در کنکور خواهید دید. مواد مغناطیسی به سه دسته پارامغناطیس، دیامغناطیس و فرومغناطیس (نرم و سخت) تقسیم می‌شوند.

مواد پارامغناطیس

اتم‌های این مواد دارای خاصیت مغناطیسی هستند. دوقطبی‌های این مواد به صورت کاتوره‌ای جهت‌گیری می‌کنند، در نتیجه میدان مغناطیسی خالص ایجاد نمی‌کنند. اگر مواد پارامغناطیس در میدان مغناطیسی قوی قرار بگیرند، خاصیت مغناطیسی موقت و ضعیفی در آن‌ها ایجاد می‌شود و با حذف میدان خارجی، این خاصیت نیز از بین می‌رود.



دوقطبی‌های مواد پارامغناطیس

اورانیم، پلاتین، آلومینیم، سدیم، اکسیژن و اکسید نیتروژن از جمله مواد پارامغناطیسی‌اند.

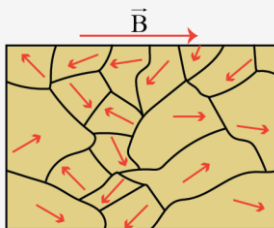
مواد دیامغناطیس

این مواد دارای خاصیت مغناطیسی نیست‌اند و در حضور میدان مغناطیسی قوی، در آن‌ها دوقطبی‌های مغناطیسی در خلاف جهت میدان خارجی القا می‌شود. نقره، چدن، مس و بیسموت از جمله این موادند.

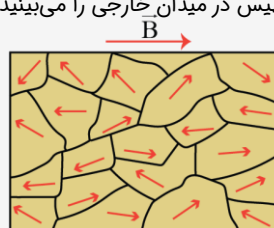
مواد فرومغناطیس

اتم‌های آن‌ها به طور ذاتی دارای دوقطبی هستند. در اثر برهم‌کنش‌های قوی بین دوقطبی‌های مغناطیسی در این مواد دوقطبی‌ها در ناحیه‌ای به نام حوزه‌های مغناطیسی هم‌سو می‌شوند. این مواد در میدان مغناطیسی آهنربا می‌شوند.

در شکل زیر، نحوه تغییر حجم حوزه‌های مغناطیسی مواد فرومغناطیس در میدان خارجی را می‌بینید.



(پ)



(ب)



(الف)

(الف) ماده فرومغناطیسی در نبود میدان مغناطیسی خارجی. (ب) ماده فرومغناطیسی در حضور میدان مغناطیسی ضعیف. (پ) ماده فرومغناطیس در حضور میدان مغناطیسی خارجی قوی.

مواد فرومغناطیس به دو دسته، سخت و نرم تقسیم می‌شوند، توضیحات هر مورد بصورت زیر است:

مواد فرومغناطیس نرم: در این مواد، حجم حوزه‌ها به آسانی تغییر می‌کند، در نتیجه در حضور میدان خارجی، به آسانی دارای خاصیت مغناطیسی می‌شوند و با حذف میدان خارجی نیز، به آسانی خاصیت مغناطیسی خود را از دست می‌دهند. آهن، نیکل و کبالت خالص از این نوع‌اند.

مواد فرومغناطیس سخت: در این مواد، حجم حوزه‌ها به سختی تغییر می‌کند، در نتیجه در حضور میدان خارجی، به سختی دارای خاصیت مغناطیسی می‌شوند و با حذف میدان خارجی نیز، به سختی خاصیت مغناطیسی خود را از دست می‌دهند. فولاد و آلیاژهای آهن، نیکل و کبالت از این نوع‌اند.

طبق متن کتاب درسی، علت وجود حوزه‌های مغناطیسی در مواد فرومغناطیس (چه نرم و چه سخت)، برهم‌کنش قوی بین دوقطبی‌های مغناطیسی این مواد است.

گروه آموزشی ماز

۵۰- چند مورد از جمله‌های زیر در مورد انواع مقاومت‌ها درست است؟

- (الف) از پتانسیومتر در زنگ خطر آتش به عنوان حسگر دما استفاده می‌شود چون بستگی آن به دما با سایر مقاومت‌ها متفاوت است.
 (ب) در مقاومت‌های نوری، با افزایش نور، اندازه مقاومت کاهش می‌یابد.
 (ج) از دیود نورگسیل می‌توان به عنوان یکسوکننده جریان نیز استفاده کرد.
 (د) پتانسیومتر در مدارهای الکترونیکی همان نقش رنوستا را دارد.

۴ (۴)

۱ (۳)

۲ (۲)

۳ (۱)

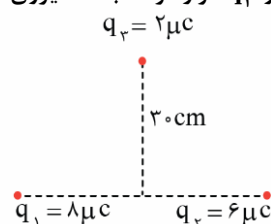
پاسخ: گزینه ۱ (۱۱۰۲ - ساده - حفظی)

پاسخ تشریحی:

تنها عبارت «الف» غلط است. توضیحات داده شده در این گزینه برای ترمیستور است نه برای پتانسیومتر. پتانسیومتر نوعی مقاومت متغیر است که همان نقش رنوستا در مدارهای الکترونیکی را بازی می‌کند.

گروه آموزشی ماز

۵۱- در شکل زیر دو بار q_1 و q_2 در فاصله 60 cm از یکدیگر قرار دارند. اگر بار q_3 روی عمود منصف خط واصل دو بار q_1 و q_2 قرار گرفته باشد، نیروی



الکتریکی وارد بر آن از طرف دو بار دیگر چند نیوتن است؟ $(k = 9 \times 10^9 \frac{\text{N.m}^2}{\text{C}^2})$

۴ (۱)

۳ (۲)

۲ (۳)

۱ (۴)

پاسخ: گزینه ۴ (۱۱۰۱ - متوسط - محاسباتی)

اندازه نیروی الکتریکی و میدان الکتریکی

اندازه نیروی الکتریکی: اندازه نیروی الکتریکی توسط قانون کولن و به صورت مقابل به دست می‌آید:

$$F = \frac{k|q_1||q_2|}{r^2}$$

در این رابطه، k ثابت قانون کولن $(k = 9 \times 10^9 \frac{\text{N.m}^2}{\text{C}^2})$ ، $|q_1|$ و $|q_2|$ اندازه بارها و r فاصله دو بار از یکدیگر است.

نکته: اگر در قانون کولن q_1 و q_2 برحسب میکروکولن و r برحسب سانتی‌متر باشند می‌توان از تبدیل واحد صرف‌نظر کرد و در عوض مقدار k را برابر 90 قرار داد. اندازه میدان الکتریکی: برای محاسبه میدان الکتریکی دو روش وجود دارد:

روش (۱) اگر در نقطه‌ای از فضا، بار آزمون q قرار گیرد و به آن نیروی الکتریکی $\vec{F}$ وارد شود، بردار میدان و اندازه‌اش در آن نقطه برابر است با:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \quad \text{و} \quad E = \frac{F}{q}$$

نکته مهم (۱) در شکل برداری رابطه بالا، q با علامت ولی در شکل اندازه‌ای این رابطه، اندازه q را قرار می‌دهیم.

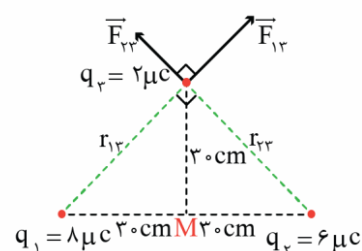
نکته مهم (۲) به طور کلی، اندازه و علامت q ، در شدت میدان الکتریکی و جهت آن بی‌تأثیر است.

روش (۲) اگر میدان الکتریکی ناشی از بار q در فاصله r از آن را بخواهیم، از رابطه مقابل استفاده می‌کنیم:

$$E = k \frac{|q|}{r^2}$$

پاسخ تشریحی:

گام (۱) با توجه به عمود منصف خط واصل دو بار، فاصله بارهای q_1 و q_2 از نقطه M برابر 30 cm است. $\frac{60}{2} = 30\text{ cm}$ است. حال می‌توان نیرویی که هر بار به بار q_3 وارد می‌کند را حساب کرد:



$$r_{13} = r_{23} = \sqrt{30^2 + 30^2} = 30\sqrt{2}\text{ cm}$$

$$F_{13} = 90 \times \frac{q_1 q_3}{r_{13}^2} = 90 \times \frac{8 \times 2}{(30\sqrt{2})^2} = 0.8\text{ N}$$

$$F_{23} = 90 \times \frac{q_2 \times q_3}{r_{23}^2} = 90 \times \frac{6 \times 2}{(30\sqrt{2})^2} = 0.6\text{ N}$$

گام ۲) با توجه به نیروهای رسم شده در شکل بالا، زاویه دو نیرو برابر با 90° است، پس اندازه نیروی برابند آنها برابر است با:

$$F_T = \sqrt{F_3^2 + F_4^2} = \sqrt{(0.8)^2 + (0.6)^2} = 1 \text{ N}$$

گروه آموزشی ماز

۵۲- شعاع کره فلزی A، نصف شعاع کره فلزی B است. اگر چگالی سطحی بار کره A، ۲۵ درصد چگالی سطحی بار کره B باشد، بار کره B چند برابر کره A است؟

۸ (۴)

۱ (۳)

۱۶ (۲)

۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۲ (۱۱۰۱ - ساده - محاسباتی)

چگالی سطحی بار الکتریکی

✓ چگالی سطحی بار الکتریکی را با نماد (σ) نمایش می‌دهند و برابر است با:

$$\sigma = \frac{q}{A}$$

✓ در این رابطه q، بار جسم و A، مساحت جانبی جسم است. به عنوان مثال، اگر جسم موردنظر کره‌ای به شعاع r باشد، چون مساحت جانبی کره $(4\pi r^2)$ است، چگالی سطحی بار آن برابر می‌شود با:

$$\sigma = \frac{q}{A} = \frac{q}{4\pi r^2}$$

✓ شکل مقایسه‌ای این رابطه بصورت مقابل است:

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{q_2}{q_1} \times \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2$$

مثال

دو کره فلزی مشابه به شعاع ۲ cm که دارای بارهای $q_1 = -4 \mu\text{C}$ و $q_2 = 10 \mu\text{C}$ هستند را با یکدیگر تماس می‌دهیم و سپس از هم جدا می‌کنیم. چگالی سطحی بار هر کدام از کره‌ها بعد از جدا شدن، چند میکروکولن بر سانتی‌متر مربع می‌شود؟ ($\pi = 3$)

$\frac{1}{12}$ (۴)

$\frac{1}{2}$ (۳)

$\frac{1}{16}$ (۲)

$\frac{1}{8}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

گام ۱) بعد از تماس دو کره، بار هر یک برابر می‌شود با:

$$q'_1 = q'_2 = \frac{q_1 + q_2}{2} = \frac{-4 + 10}{2} = 3 \mu\text{C}$$

گام ۲) چگالی سطحی بار دو کره برابر می‌شود با:

$$\sigma'_1 = \sigma'_2 = \frac{q'_1}{4\pi r_1^2} = \frac{3}{4 \times 3 \times 2^2} \frac{\mu\text{C}}{\text{cm}^2} = \frac{1}{16} \frac{\mu\text{C}}{\text{cm}^2}$$

پاسخ تشریحی

چگالی کره A، ۲۵ درصد (یعنی $\frac{1}{4}$) چگالی کره B و شعاع کره A نیز $\frac{1}{4}$ شعاع کره B است، پس می‌توان نوشت:

$$\sigma = \frac{q}{A} = \frac{q}{4\pi r^2} \rightarrow \frac{\sigma_A}{\sigma_B} = \frac{q_A}{q_B} \times \left(\frac{r_B}{r_A}\right)^2 \rightarrow \frac{1}{4} = \frac{q_A}{q_B} \times 2^2 \rightarrow q_B = 16q_A$$

گروه آموزشی ماز

۵۳- در صفحه xy، بار الکتریکی نقطه‌ای $q_1 = -3 \mu\text{C}$ در نقطه A به مختصات $(2 \text{ cm}, 0)$ قرار دارد و بار الکتریکی $q_2 = 27 \mu\text{C}$ نیز در نقطه B به مختصات $(-6 \text{ cm}, 0)$ ثابت نگه داشته شده است و بار الکتریکی $q_3 = 4 \mu\text{C}$ نیز در مکانی در این صفحه قرار دارد که نیروی الکتریکی خالص وارد بر آن صفر شود. اگر در این حالت، بار $q_4 = 2 \mu\text{C}$ را در مختصات $(3 \text{ cm}, 0)$ قرار دهیم، چه نیرویی (برحسب نیوتن) از طرف بار q_3 بر آن وارد می‌شود؟

$$\left(k = 9 \times 10^9 \frac{\text{N.m}^2}{\text{C}^2} \right)$$

۲۰ (۴)

۴۰ (۳)

۶۰ (۲)

۸۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۱ (۱۱۰۱ - متوسط - محاسباتی)

صفر شدن نیروی الکتریکی و میدان الکتریکی



دو ذره با بار q_1 و q_2 را در نظر بگیرید که در فاصله r از یکدیگر قرار دارند. روی خط واصل دو بار، نقطه‌ای وجود دارد که در آن اندازه میدان الکتریکی برابر صفر می‌شود.

در این مورد به نکات زیر توجه کنید:

(۱) این نقطه همواره نزدیک به باری است که اندازه کوچک‌تری دارد.

(۲) اگر q_1 و q_2 هم‌نام باشند، این نقطه بین فاصله دو بار و اگر q_1 و q_2 ناهم‌نام باشند، این نقطه خارج از فاصله دو بار است.

(۳) شرط صفر شدن میدان الکتریکی خالص، برابری میدان‌ها در آن نقطه است، یعنی:

$$E_1 = E_2 \rightarrow \frac{k|q_1|}{r_1^2} = \frac{k|q_2|}{r_2^2}$$

(۴) اگر $q_2 = q_1$ باشند، دقیقاً در وسط فاصله دو بار E_T صفر می‌شود ولی اگر $q_2 = -q_1$ باشد، در هیچ نقطه‌ای E_T صفر نمی‌شود.

(۵) در نقطه‌ای که میدان الکتریکی برابر صفر شود، اگر باری مثل q_3 قرار دهیم، نیروی الکتریکی وارد بر آن نیز صفر می‌شود، پس نکات بالا در مورد صفر شدن نیروی الکتریکی برابری دارند بر بار سومی مثل q_3 نیز برقرار است.

مثال:

دو بار الکتریکی $q_1 = -16 \mu C$ و $q_2 = 4 \mu C$ در فاصله 30 cm از یکدیگر قرار دارند.

الف) بار $q_3 = 4 \mu C$ را در چه فاصله‌ای از بار بزرگ‌تر قرار دهیم تا نیروی الکتریکی وارد بر آن صفر شود؟

ب) اگر اندازه q_3 را نصف و علامت آن را قرینه کنیم، باید آن را در چه فاصله‌ای از بار بزرگ‌تر قرار دهیم تا نیروی الکتریکی وارد بر آن صفر شود؟

پاسخ الف) طبق نکات گفته شده، بار q_3 را باید خارج از فاصله دو بار و نزدیک به q_2 قرار دهیم. اگر فاصله q_3 تا بار کوچک‌تر (q_1) را x فرض کنیم، داریم:

$$\begin{array}{c} r = 30 \text{ cm} \\ \text{---} q_1 = -16 \mu C \quad q_2 = 4 \mu C \quad \text{---} x \quad \text{---} q_3 = 4 \mu C \\ F_{13} \quad F_{23} \end{array} \quad F_{T_r} = 0 \rightarrow F_{13} = F_{23} \rightarrow \frac{k|q_1||q_3|}{r_{13}^2} = \frac{k|q_2||q_3|}{r_{23}^2}$$

گام ۲) با توجه به شکل بالا، $r_{23} = x$ و $r_{13} = r + x = 30 + x$ است، حال کافی است در رابطه بالا، این دو مورد را جایگذاری کنیم:

$$\frac{16}{(30+x)^2} = \frac{4}{x^2} \rightarrow \frac{\sqrt{4}}{30+x} = \frac{2}{x} \rightarrow \frac{2}{30+x} = \frac{1}{x} \rightarrow 2x = 30 + x \rightarrow x = 30 \text{ cm}$$

گام ۳) پس فاصله بار q_3 تا بار q_1 (بار بزرگ‌تر)، $30 + 30 = 60 \text{ cm}$ می‌شود.

نکته مهم:



در رابطه $F_{13} = F_{23}$ ، لازم نیست تمام کمیت‌ها در SI عددگذاری شوند، کافی است کمیت‌های مشابه در دو طرف، یکای مشابه داشته باشند. به عنوان مثال، بارها را بر حسب μC و فواصل را در طرفین می‌توان بر حسب متر (m) عددگذاری کرد.

پاسخ قسمت ب) اگر دقت کنید در رابطه تساوی بالا، q_3 از طرفین حذف شد، این یعنی، اندازه و نوع باری که قرار است نیروی وارد بر آن صفر شود، مهم نیست.

پس در این حالت نیز فاصله q_3 تا q_1 (بار بزرگ‌تر) همان 60 سانتی‌متر می‌شود.

پاسخ تشریحی:

$$\begin{array}{c} d \quad d' \\ \text{---} q_2 \quad q_1 \quad q_3 \text{---} x(\text{cm}) \\ -6 \quad 4 \quad 4 \end{array}$$

گام ۱) تمام بارها روی محور x قرار دارند، پس می‌توانیم مانند شکل مقابل، محل آن‌ها را مشخص کنیم. با توجه

به شکل، فاصله دو بار q_1 و q_2 ، $d = 8 \text{ cm}$ است. برای اینکه نیروی برابری وارد بر q_3 ، از طرف دو بار q_1 و

q_2 صفر شود، این بار باید خارج از فاصله دو بار و نزدیک به q_1 باشد (مانند شکل). اگر فاصله q_3 تا q_1 را

d' فرض کنیم، می‌توان نوشت:

$$F_{13} = F_{23} \rightarrow k \frac{q_1 q_3}{r_{13}^2} = k \frac{q_2 q_3}{r_{23}^2} \xrightarrow{r_{13}=d+d', r_{23}=d'} \frac{3}{d'^2} = \frac{27}{(8+d')^2} \xrightarrow{\sqrt{\quad}} \frac{1}{d'} = \frac{3}{8+d'}$$

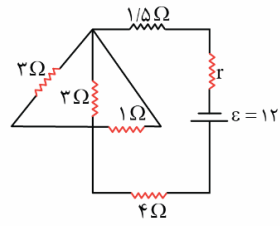
$$\rightarrow 8 + d' = 3d' \rightarrow d' = 4 \text{ cm}$$

گام ۲) چون $d' = 4 \text{ cm}$ باشد، پس بار q_3 در $x = 2 + 4 = 6 \text{ cm}$ قرار دارد، در نتیجه فاصله این بار از بار q_2 که در $x = 3 \text{ cm}$ قرار دارد، برابر با

$6 - 3 = 3 \text{ cm}$ می‌شود، پس F_{34} برابر می‌شود با:

$$F_{34} = 90 \cdot \frac{q_3 q_4}{r_{34}^2} = 90 \times \frac{4 \times 2}{(3)^2} = 80 \text{ N}$$

۵۴- در مدار مقابل، انرژی مصرفی در مدت ۱۰ ثانیه در مقاومت ۱/۵ اهمی چند برابر انرژی مصرفی در مدت ۵۰ ثانیه در یکی از مقاومت‌های ۳ اهمی است؟



- (۱) ۱/۵
- (۲) ۲/۵
- (۳) ۳/۵
- (۴) ۴/۵

پاسخ: گزینه ۲ (۱۱۰۲ - متوسط - مفهومی و محاسباتی)

توان در مقاومت‌ها و مقایسه توان‌ها

✓ توان مصرفی مقاومت‌های خارجی از روابط مقابل به دست می‌آید:

$$P = \frac{V^2}{R} = RI^2 = VI$$

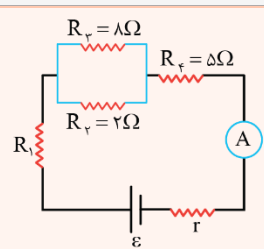
اگر انرژی مصرفی در مقاومت را بخواهیم، کافی است، روابط توان را در t ضرب کنیم، یعنی:

$$P = \frac{U}{t} \rightarrow U = P \cdot t \rightarrow U_R = \frac{V^2}{R} \cdot t = RI^2 t = VI t$$

✓ در مقاومت‌های موازی که ولتاژها برابر است، برای مقایسه توان‌ها از رابطه $P = \frac{V^2}{R}$ و در مقاومت‌های متوالی که جریان‌ها برابر است، برای مقایسه توان‌ها از

رابطه $P = RI^2$ استفاده کنید. در نتیجه در مقاومت‌های موازی $P \propto \frac{1}{R}$ و در مقاومت‌های متوالی $P \propto R$ است.

مثال:



در مدار مقابل، توان مصرفی مقاومت R_2 چند برابر توان مصرفی مقاومت R_4 است؟

- (۱) ۳۲ / ۱۲۵
- (۲) ۱۶ / ۱۲۵
- (۳) ۳۲ / ۲۵۰
- (۴) ۱۶ / ۲۵۰

پاسخ: گزینه ۱

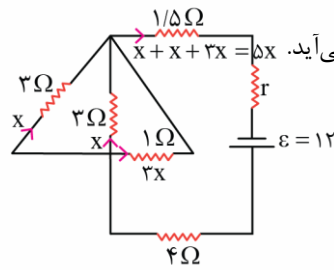
گام (۱) فرض می‌کنیم جریان عبوری از R_3 برابر x آمپر باشد، در این صورت چون $\frac{R_2}{R_3} = \frac{1}{4}$ است، پس جریان عبوری از R_2 برابر عکس $\frac{1}{4}$ ، یعنی $4x$ خواهد بود. جریان کل برابر با جمع جریان دو مقاومت موازی R_2 و R_3 ، یعنی برابر با $x + 4x = 5x$ است. پس جریان R_4 ، که برابر با جریان کل است نیز برابر $5x$ می‌شود. حال می‌توان توان‌های گفته شده را مقایسه کرد:

$$\frac{P_2}{P_4} = \frac{R_2 I_2^2}{R_4 I_4^2} = \frac{2 \times (4x)^2}{5 \times (5x)^2} = \frac{2 \times 16x^2}{5 \times 25x^2} = \frac{32}{125}$$

نکته:

همان‌طور که در مثال بالا دیدید، در مقایسه توان مقاومت‌ها، اندازه جریان کل، ϵ و r بی‌تأثیر است.

پاسخ تشریحی:



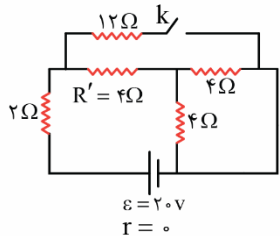
گام (۱) در مدار مقابل، اگر جریان عبوری از مقاومت ۳ اهمی x فرض شود، جریان بقیه مقاومت‌ها برحسب x به دست می‌آید. $x + x + 3x = 5x$

گام (۲) حال می‌توان نسبت خواسته شده را به دست آورد:

$$U = RI^2 t \rightarrow \frac{U_{1/5\Omega}}{U_{3\Omega}} = \frac{1/5 \times (5x)^2 \times 10}{3 \times x^2 \times 50} = 2/5$$

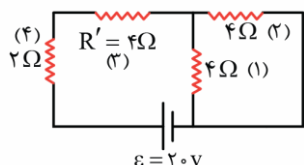
گروه آموزشی ماز

۵۵- در مدار مقابل، با بستن کلید k ، جریان عبوری از مقاومت R' چند برابر می‌شود؟



- (۱) ۸ / ۹
- (۲) ۷ / ۸
- (۳) ۳ / ۴
- (۴) ۴ / ۵

گام ۱: قبل از بستن کلید، مدار بصورت شکل مقابل است. در این مدار، مقاومت معادل مدار بصورت زیر محاسبه می‌شود:



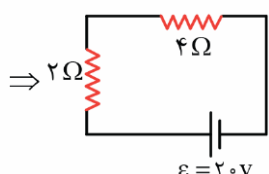
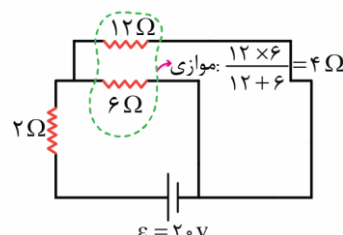
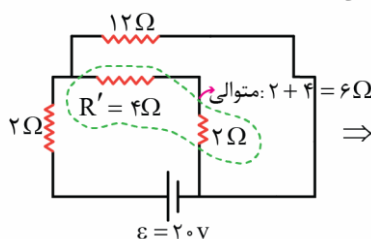
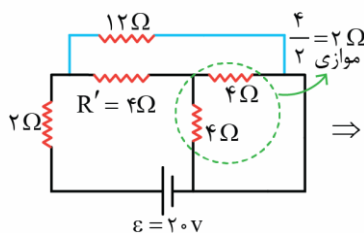
$$R_1 \parallel R_2 \rightarrow R_{1,2} = \frac{4}{2} = 2\Omega$$

$$R_4, R_3, R_{1,2} \rightarrow R_{eq} = 2 + 4 + 2 = 8\Omega$$

گام ۲: جریان عبوری از مقاومت R' (همان R_3) همان جریان کل است، پس:

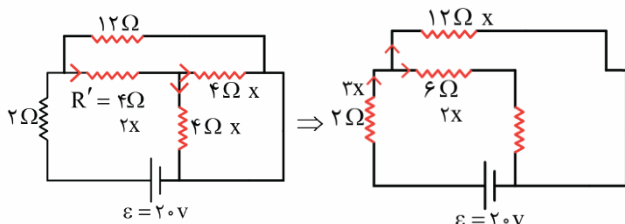
$$I_{R'} = I_{\text{کل}} = \frac{\varepsilon}{R_{eq} + r} = \frac{2}{8} = 0.25 \text{ A}$$

گام ۳: در حالت دوم و با بستن کلید، مدار بصورت زیر ساده می‌شود:



$$\rightarrow R'_{eq} = 2 + 4 = 6\Omega, \quad I'_{\text{کل}} = \frac{\varepsilon}{R'_{eq}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \text{ A}$$

گام ۴: جریان کل در حالت دوم $I' = \frac{1}{3} \text{ A}$ شد، در شکل زیر جریان را بین مقاومت‌ها تقسیم کرده‌ایم، در این مدار، جریان کل $3x$ شده است پس می‌توان نوشت:



$$3x = \frac{1}{3} \rightarrow x = \frac{1}{9} \text{ A}$$

گام ۵: با توجه به شکل بالا (سمت چپ)، جریان مقاومت R' ، $2x$ است، پس جریان این مقاومت $2 \times \frac{1}{9} = \frac{2}{9} \text{ A}$ است. پس جریان این مقاومت $\frac{2}{9} \text{ A}$ است. برابر خواهد شد.

گروه آموزشی ماز

۵۶- سیملوله‌ای که از ۶۰۰ حلقه به شعاع ۱۰ cm تشکیل شده است دارای طول ۴۰ cm است. اگر جریان عبوری از سیملوله ۲۰۰ میلی آمپر کاهش یابد، به

ترتیب از راست به چپ، میدان مغناطیسی روی محور سیملوله چند گاوس تغییر می‌کند و ضریب القاوری چند برابر می‌شود؟ ($\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{\text{T.m}}{\text{A}}$)

$$2, 1/2\pi \quad (4)$$

$$1, -1/2\pi \quad (3)$$

$$2, -1/2\pi \quad (2)$$

$$1, 1/2\pi \quad (1)$$

میدان سیملوله و ضریب القاوری سیملوله

اندازه میدان مغناطیسی سیملوله آرمانی، روی محور آن از رابطه مقابل به دست می‌آید:

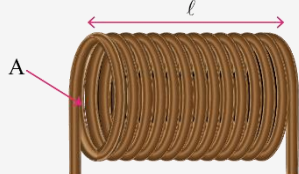
$$B = \mu_0 \frac{NI}{\ell}$$

در این رابطه، N ، تعداد حلقه‌های سیملوله، I جریان عبوری (برحسب آمپر) و ℓ طول سیملوله (برحسب متر) است.

ضریب القاوری: ویژگی‌های فیزیکی هر القاگر، توسط ضریب القاوری آن تعیین می‌شود. ضریب القاوری که با نماد L نمایش داده می‌شود به عواملی همچون تعداد دور، طول و سطح مقطع القاگر و جنس هسته‌ای که داخل آن قرار می‌گیرد بستگی دارد. برای مثال، ضریب القاوری سیملوله‌ای آرمانی و بدون هسته، که دارای طول

ℓ ، سطح مقطع A و N حلقه نزدیک به هم است (شکل مقابل) از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$L = \frac{\mu_0 AN^2}{\ell}$$

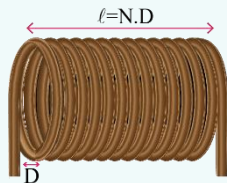


نکات طلایی:

در رابطه گفته شده، نسبت $\frac{N}{\ell}$ ، تعداد حلقه در واحد طول است که در واقع تراکم حلقه‌ها را نشان می‌دهد، این نسبت را معمولاً با n نمایش می‌دهند، در این صورت، میدان سیمولوله برابر می‌شود با:

$$B = \mu_0 n I$$

اگر مانند شکل زیر، حلقه‌های سیمولوله کاملاً به یکدیگر چسبیده باشند و در یک ردیف قرار گیرند، طول سیمولوله برابر با حاصل ضرب قطر هر حلقه در تعداد حلقه‌هاست، در این صورت اندازه میدان مغناطیسی سیمولوله روی محور آن به صورت زیر خواهد بود:



$$B = \mu_0 \frac{NI}{\ell} \xrightarrow{\ell = N \times D} B = \mu_0 \frac{NI}{ND} \rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{D}$$

با توجه به رابطه ضریب القاوری، ضریب القاوری به شدت جریان عبوری از سیمولوله بستگی ندارد.
تذکر: شعاع حلقه‌های سیمولوله در محاسبه خواسته‌های این تست تأثیری نداشت و صرفاً جهت گمراهی داده شده بود.

پاسخ تشریحی:

گام (۱) تغییر میدان مغناطیسی سیمولوله برابر می‌شود با:

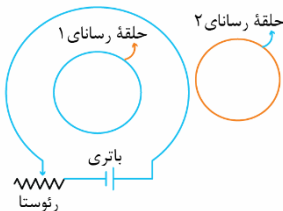
$$B_2 - B_1 = \frac{\mu_0 N I_2}{\ell} - \frac{\mu_0 N I_1}{\ell} = \frac{\mu_0 N (I_2 - I_1)}{\ell}$$

$$\frac{I_2 - I_1}{\ell} = \frac{-200 \text{ mA}}{0.4 \text{ m}} = -0.5 \text{ A/m} \rightarrow B_2 - B_1 = 4\pi \times 10^{-7} \times \frac{600 \times (-0.5)}{0.4} = -1/2\pi \times 10^{-4} \text{ T} = -1/2\pi \text{ G}$$

گام (۲) ضریب القاوری از رابطه $L = \frac{\mu_0 N^2 A}{\ell}$ به دست می‌آید، در نتیجه جریان و تغییر آن روی ضریب القاوری تأثیری ندارد پس (L) ثابت می‌ماند.

گروه آموزشی ماز

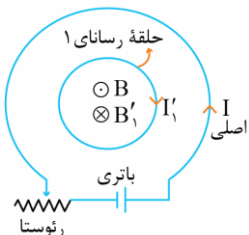
۵۷- در مدار مقابل، اگر جریان القا شده در حلقه رسانای ۱، ساعتگرد باشد، به ترتیب از راست به چپ، مقاومت رئوستا به کدام سمت حرکت کرده است و جریان القایی در حلقه رسانای ۲ در کدام جهت است؟



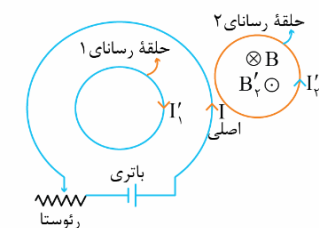
- (۱) راست، ساعتگرد
- (۲) چپ، پادساعتگرد
- (۳) راست، پادساعتگرد
- (۴) چپ، ساعتگرد

پاسخ: گزینه ۳ (۱۱۰۳ - متوسط - مفهومی)

پاسخ تشریحی:



گام (۱) در شکل مقابل، جریان اصلی در مدار دارای باتری، پادساعتگرد است. چون جریان القایی در حلقه ۱، ساعتگرد است، میدان القایی ناشی از آن در مرکز حلقه (B'_1) درون سو می‌شود و میدان مغناطیسی ناشی از جریان اصلی در مرکز حلقه بزرگ‌تر (B) برون سو است. چون B و B'_1 خلاف جهت یکدیگر هستند، پس شار عبوری از حلقه ۱ در حال افزایش بوده و این یعنی جریان اصلی مدار در حال افزایش بوده است، برای افزایش جریان اصلی باید مقاومت رئوستا در حال کاهش باشد، پس باید به سمت راست حرکت کند (رد گزینه‌های ۲ و ۴)



گام (۲) میدان ناشی از جریان اصلی در خارج از حلقه بزرگ‌تر (یعنی در محل حلقه رسانای ۲) درون سو خواهد بود. از طرفی چون I در حال افزایش است، پس شار عبوری از حلقه ۲ در حال افزایش است و این یعنی میدان القایی در حلقه ۲ (یعنی B'_1) باید در خلاف جهت میدان اصلی، یعنی باید برون سو باشد، با توجه به قاعده دست راست و جهت B'_1 ، جریان القایی در حلقه ۲، پادساعتگرد است.

گروه آموزشی ماز

۵۸- حلقه‌ای به مساحت 50 cm^2 عمود بر خطوط میدان مغناطیسی قرار دارد. اگر معادله تغییرات این میدان در SI به صورت $B = 2t^2 + t$ باشد، اندازه جریان متوسط القایی در آن در ۲ ثانیه اول چند آمپر است؟ (مقاومت حلقه 0.5Ω است)

- (۱) ۰/۵ (۲) ۰/۰۵ (۳) ۵۰ (۴) ۵

پاسخ: گزینه ۱ (۱۱۰۳ - متوسط - محاسباتی)

نیرو محرکه القایی و جریان القایی

✓ اگر شار عبوری از حلقه‌ای با N دور تغییر کند، در آن نیروی محرکه القا می‌شود که طبق قانون فاراده، اندازه آن از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\bar{\varepsilon} = -N \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

✓ در اثر نیروی محرکه القا شده در حلقه، در آن جریانی القا می‌شود که مقدار متوسط این جریان القایی از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\bar{I} = \frac{\bar{\varepsilon}}{R} \rightarrow \bar{I} = -\frac{N}{R} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

در رابطه مقابل، R، مقاومت حلقه است.

نکات مهم:

اگر در سؤال اندازه نیرو محرکه القایی و یا اندازه جریان القایی خواسته شود، می‌توانیم علامت منفی را از روابط بالا حذف کنیم.

به $\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ ، آهنگ تغییر شار گویند، هر چقدر شار سریع‌تر تغییر کند، مقدار $\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ بزرگ‌تر بوده و اندازه نیروی محرکه القایی و جریان القایی بزرگ‌تر خواهد بود.

پاسخ تشریحی:

گام ۱) ابتدا باید تغییر شار در محل حلقه را حساب کنیم، چون فقط اندازه میدان مغناطیسی در حال تغییر است، پس تغییرات شار برابر می‌شود با:

$$\Delta\varphi_{(t=2s)} = A \cos \theta (B_{(t=2s)} - B_{(t=0)}) = 5 \times 10^{-4} \times \cos 0 \times ((2 \times 2^2 + 2) - (2 \times 0^2 + 0)) = 0.5 \text{ Wb}$$

گام ۲) اندازه نیروی محرکه القایی در ۲ ثانیه اول برابر می‌شود با:

$$|\bar{\varepsilon}| = \left| -N \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \right| = \left| -1 \times \frac{0.5}{2} \right| = 0.25 \text{ V}$$

گام ۳) اندازه جریان متوسط القایی نیز برابر می‌شود با:

$$|\bar{I}| = \frac{|\bar{\varepsilon}|}{R} = \frac{0.25}{0.5} = 0.5 \text{ A}$$

گروه آموزشی ماز

۵۹- معادله مکان - زمان متحرکی که روی محور xها حرکت می‌کند، در SI به صورت $x = 2t^2 - 8t - 10$ است. تندی متوسط متحرک در بازه‌ای که جهت بردار مکان متحرک در خلاف جهت محور x است، چند متر بر ثانیه می‌باشد؟

۴ (۴)

۵/۲ (۳)

۲ (۲)

۳/۶ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ (۱۲۰۱ - متوسط - محاسباتی)

حرکت با شتاب ثابت روی خط راست

اگر مقدار شتاب متوسط در هر بازه زمانی دلخواه برابر با شتاب لحظه‌ای باشد حرکت را حرکت با شتاب ثابت روی خط راست می‌نامند. معادله مکان - زمان این متحرک یک معادله درجه ۲ و معادله سرعت - زمان آن یک معادله درجه ۱ است.

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \quad (\text{رابطه ۱})$$

$$v = at + v_0 \quad (\text{رابطه ۲})$$

برای محاسبه سرعت متوسط در این حرکت با استفاده از معادله مکان - زمان خواهیم داشت.

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \rightarrow \Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t$$

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\frac{1}{2}at^2 + v_0t}{t} = \frac{1}{2}at + v_0 \rightarrow v_{av} = \frac{1}{2}at + v_0$$

تجربی خارج - ۱۴۰۱:

متحرکی با شتاب ثابت $\frac{4}{3} \frac{m}{s^2}$ روی محور x حرکت می‌کند. اگر جابه‌جایی آن در بازه زمانی $t_1 = 9s$ تا $t_2 = 16s$ برابر صفر باشد، تندی متوسط آن در همین بازه زمانی چند متر بر ثانیه است؟

۱۴ (۴)

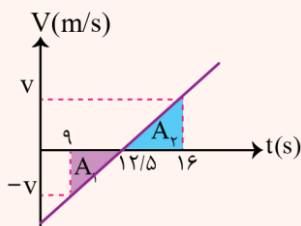
۱۰/۵ (۳)

۷ (۲)

۳/۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

جابه جایی متحرک در بازه t_1 تا t_2 صفر می شود بنابراین در لحظه $t = \frac{t_1 + t_2}{2} = 12/5$ سرعت متحرک صفر شده و تغییر جهت داده است. بنابراین:



$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \rightarrow a = \frac{v - (-v)}{3/5} \rightarrow v = 14 \frac{m}{s}$$

$$\ell = A_1 + A_2 = 2A_1 = 2 \times \frac{14 \times 3/5}{2} = 49 m$$

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{49}{5} = v \frac{m}{s}$$

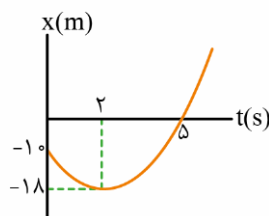
پاسخ تشریحی:

نمودار مکان - زمان این متحرک را رسم می کنیم:

$$x = v(t^2 - 4t - 5) = v(t+1)(t-5)$$

$$x = 0 \rightarrow \begin{cases} t_1 = -1s \\ t_2 = 5s \end{cases}$$

$$\text{رأس سهمی} \rightarrow t = \frac{-1+5}{2} = 2s \xrightarrow{\text{جایگذاری در معادله}} x = -18m$$



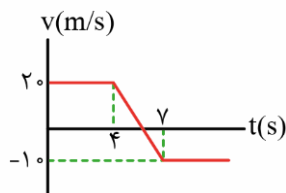
با توجه به نمودار مقابل، در بازه زمانی $t_1 = 0s$ تا $t_2 = 5s$ جهت بردار مکان در خلاف جهت محور x بوده است.

$$\ell_{[0,5]} = 18m + 18m = 36m$$

$$\rightarrow s_{av}[0,5] = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{36}{5} = 7.2 \frac{m}{s}$$

گروه آموزشی ماز

۶۰- شکل زیر، نمودار سرعت - زمان متحرکی است که روی محور x در حرکت است. اگر متحرک در مبدأ زمان از مکان $x_0 = -40m$ عبور کرده باشد، در ۱۵ ثانیه اول حرکت، چند ثانیه متحرک در حال نزدیک شدن به مبدأ مکان بوده است؟

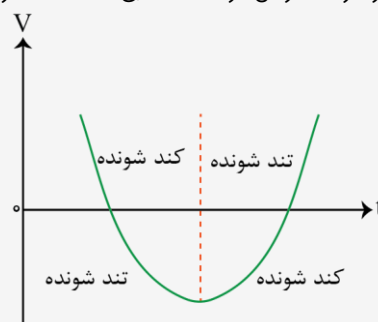
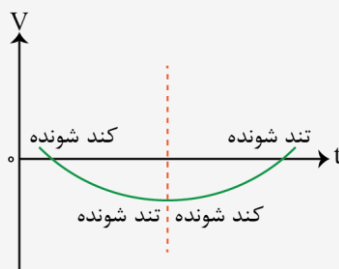
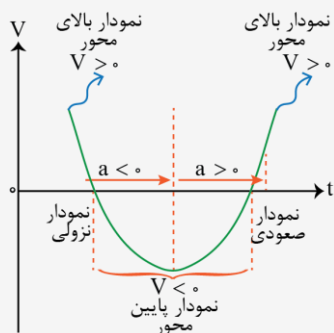


- ۱) ۶
- ۲) ۶/۵
- ۳) ۸/۵
- ۴) ۹

پاسخ: گزینه ۳ (۱۲۰۱ - سخت - محاسباتی)

نمودار سرعت - زمان

در نمودار سرعت - زمان در قسمت هایی که علامت سرعت و شتاب یکی است حرکت تندشونده و در صورتی که علامت آن ها مخالف یکدیگر باشد حرکت کندشونده است.



نکته:

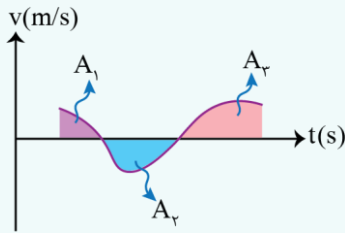


مشابه با نمودار مکان - زمان نوع حرکت قبل از لحظه توقف کندشونده و پس از آن تندشونده است. به بیان دیگر می‌توان گفت اگر نمودار سرعت - زمان به محور افقی نزدیک شود حرکت کندشونده و اگر از آن دور شود حرکت تندشونده خواهد بود.

نکته:



بررسی سطح زیر نمودار: در نمودار سرعت - زمان مساحت محصور بین نمودار و محور افقی بیانگر جابه‌جایی متحرک است. توجه کنید که علامت جابه‌جایی بالای محور زمان مثبت و پایین محور زمان منفی است. برای محاسبه مسافت باید تمامی مساحت‌ها را با علامت مثبت در نظر گرفت. پس از تعیین جابه‌جایی و مسافت می‌توان سرعت و تندی متوسط را محاسبه کرد.



$$\Delta x = +A_1 - A_2 + A_3 \rightarrow v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$L = +A_1 + A_2 + A_3 \rightarrow s_{av} = \frac{L}{\Delta t}$$

مثال:



نمودار سرعت - زمان یک متحرک که روی خط راست حرکت می‌کند مطابق شکل است. نسبت سرعت متوسط به تندی متوسط در کل حرکت کدام است؟

$$\frac{7}{9} \quad (1) \quad \frac{9}{7} \quad (2) \quad \frac{21}{20} \quad (3) \quad \frac{20}{21} \quad (4)$$

پاسخ: گزینه ۱

به کمک تشابه مثلث‌ها سرعت متحرک در لحظه $t = 30s$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{16}{10} = \frac{v}{20} \rightarrow v = 16 \frac{m}{s}$$

حال به کمک مساحت‌های زیر نمودار و محور t جابه‌جایی و مسافت طی شده را به دست می‌آوریم:

$$\Delta x = A_2 - A_1 = \frac{10+30}{2} \times 16 - \frac{10 \times 10}{2} = 320 - 40 = 280 m$$

$$\ell = A_2 + A_1 = 320 + 40 = 360 m$$

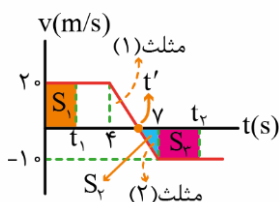
در نتیجه:

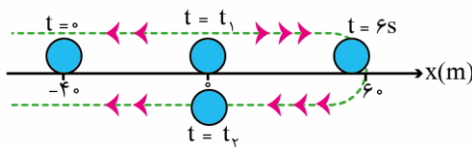
$$\frac{v_{av}}{s_{av}} = \frac{\frac{\Delta x}{\Delta t}}{\frac{\Delta \ell}{\Delta t}} = \frac{280}{360} = \frac{7}{9}$$

پاسخ تشریحی:

قبل از هر چیزی لحظه t' (در شکل) را پیدا می‌کنیم. از تشابه بین دو مثلث (۱) و (۲) می‌توان چنین نوشت:

$$\frac{t' - 4}{20} = \frac{7 - t'}{10} \rightarrow t' = 6s$$





با توجه به نمودار، شکل مسیر حرکت متحرک مانند شکل مقابل است. طبق این شکل، از لحظه $t = 0$ تا لحظه $t = t_1$ و نیز از لحظه $t = 6s$ تا لحظه $t = t_2$ متحرک در حال نزدیک شدن به مبدأ مکان است. پس باید مقادیر t_1 و t_2 را بدست آوریم.

سطح زیر نمودار از $t = 0$ تا $t = t_1$ باید برابر ۴۰ باشد $\rightarrow \Delta x_{[0,t_1]} = 0 - (-40) = 40m$

$$\rightarrow S_1 = 40m \rightarrow 20 \cdot t_1 = 40 \rightarrow t_1 = 2s$$

$$\Delta x_{[0,6]} = \frac{4+6}{2} \times 20 = 100m \rightarrow \Delta x_{[6,t_2]} = x_2 - x_1 \rightarrow x_2 = 60m$$

$$\Delta x_{[6,t_2]} = \frac{-1 \times 10}{2} = -50m$$

بنابراین از $t = 6s$ تا $t = t_2$ متحرک حداکثر ۵۵ متر دیگر می تواند جابه جا شود و در حال نزدیک شدن به مبدأ مکان باشد.

$$\Delta x_{[6,t_2]} = -50m \rightarrow S_2 = 50m \rightarrow 10 \cdot (t_2 - 6) = 50m \rightarrow t_2 = 11s$$

پس در کل در بازه های زمانی $t_1 = 0s$ تا $t_2 = 2s$ و $t_1' = 6s$ تا $t_2' = 11s$ یعنی مجموعاً به مدت ۸/۵ ثانیه متحرک در حال نزدیک شدن به مبدأ مکان بوده است.

گروه آموزشی ماز

۶۱- خودرویی روی خط راست با تندی ثابت در حرکت است. ناگهان راننده ترمز گرفته و حرکت خودرو با شتاب ثابت کند می شود و خودرو ۵ ثانیه پس از ترمز می ایستد. دو ثانیه پس از لحظه ترمز، چند درصد از کل مسافت طی شده از ترمز تا توقف خودرو، طی شده است؟

۶۴ (۴)

۶۰ (۳)

۴۰ (۲)

۳۶ (۱)

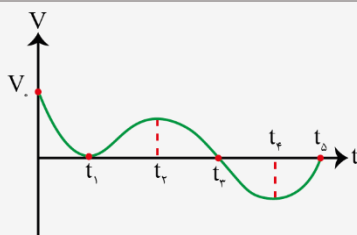
(۱۲۰۱ - متوسط - مسأله)

پاسخ: گزینه ۴



مفاهیم نمودار سرعت-زمان:

با توجه به نمودار سرعت - زمان مقابل، مفاهیم مهم این نمودار را مرور می کنیم.



۱) مانند بازه (۰ تا t_3) در شکل $\rightarrow$ حرکت در جهت محور است $\rightarrow \begin{cases} \Delta x > 0 \\ S > 0 \end{cases} \rightarrow$ اگر نمودار بالای محور t باشد

۲) مانند بازه (t_3 تا t_5) در شکل $\rightarrow$ حرکت در خلاف جهت محور است $\rightarrow \begin{cases} \Delta x < 0 \\ S < 0 \end{cases} \rightarrow$ اگر نمودار پایین محور t باشد

۳) مانند بازه های (t_1 تا t_2) و (t_3 تا t_4) در شکل $\rightarrow$ حرکت تندشونده است $\rightarrow$ اگر نمودار در حال دور شدن از محور t باشد

۴) مانند بازه های (۰ تا t_1)، (t_2 تا t_3) و (t_4 تا t_5) در شکل $\rightarrow$ حرکت کندشونده است $\rightarrow$ اگر نمودار در حال نزدیک شدن به محور t باشد

۵) مانند لحظه های t_1 و t_3 در شکل $\rightarrow$ سرعت متحرک صفر می شود $\rightarrow$ در لحظاتی که نمودار به محور t برخورد کند ولی از آن عبور نکند

۶) مانند لحظه t_2 در شکل $\rightarrow$ سرعت متحرک صفر شده و جهت حرکت تغییر می کند $\rightarrow$ در لحظاتی که نمودار از محور t عبور کند

۷) مانند لحظات t_1 ، t_2 ، t_3 و t_4 در شکل $\rightarrow$ نوع حرکت متحرک تغییر می کند $\rightarrow$ در قله ها و دره های نمودار و نقاطی که نمودار قطع می شود

۸) شتاب متوسط = شیب خط واصل و شتاب لحظه ای = شیب خط مماس بر نمودار

سراسری خارج از کشور تجربی ۱۴۰۰

نمودار سرعت - زمان متحرکی که روی محور x حرکت می کند، مطابق شکل مقابل است. کدام مورد زیر درست است؟

الف- جهت سرعت و شتاب در لحظه t_1 تغییر کرده است.

ب- در بازه زمانی t_1 تا t_2 حرکت در جهت محور x است.

پ- در بازه زمانی صفر تا t_1 تندی در حال کاهش است.

ت- بردار شتاب در بازه زمانی صفر تا t_2 خلاف جهت محور x است.

۱) ب

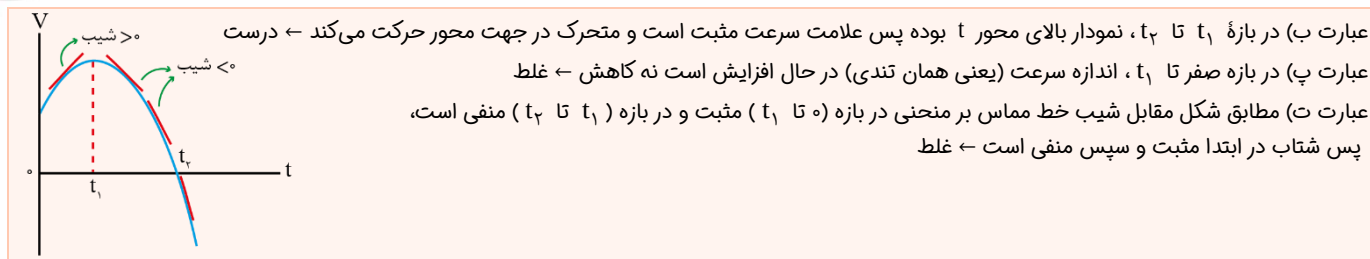
۲) پ

۳) الف و ت

۴) ب و ت

پاسخ: گزینه ۱

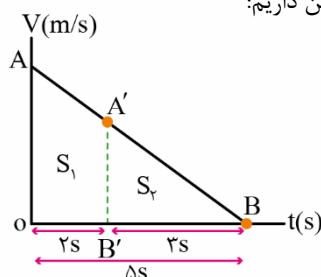
عبارت الف) در لحظه t_1 ، علامت شیب مماس بر نمودار از مثبت به منفی تغییر می کند، پس جهت شتاب تغییر می کند ولی علامت سرعت همچنان مثبت بوده و تغییر نمی کند $\leftarrow$ غلط



پاسخ تشریحی:

اگر نمودار سرعت - زمان از لحظه ترمز تا لحظه توقف خودرو را رسم کنیم، داریم: مساحت مثلث AOB معادل با کل مسافت طی شده از ترمز تا توقف است

و خواسته سؤال نسبت مساحت S_1 به کل مساحت می باشد. اگر بین دو مثلث AOB و $A'B'B'$ تشابه بنویسیم چنین داریم:



$$\frac{S_{A'B'B'}}{S_{AOB}} = \left(\frac{BB'}{OB}\right)^2$$

$$\rightarrow \frac{S_2}{S_{\text{کل}}} = \left(\frac{7}{25}\right)^2 \rightarrow S_2 = \frac{9}{25} S_{\text{کل}}$$

$$S_1 + S_2 = S_{\text{کل}} \rightarrow S_1 = S_{\text{کل}} - S_2 = \frac{16}{25} S_{\text{کل}} = \frac{64}{100} S_{\text{کل}}$$

بنابراین در دو ثانیه اول، ۶۴ درصد از کل مسافت طی شده است.

گروه آموزشی ماز

۶۲- گلوله ای در شرایط خلأ از ارتفاعی نسبت به سطح زمین رها شده و در سه ثانیه پایانی حرکت خود ۱۹۵ متر طی می کند. تندى متوسط گلوله در دو ثانیه

پایانی حرکت، چند برابر تندى متوسط آن در دو ثانیه آغازین حرکت است؟ $(g = 10 \frac{m}{s^2})$

۲ (۴)

۸ (۳)

۷ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۲ (۱۴۰۱ - متوسط - محاسباتی)

سقوط آزاد

جابه جایی جسمی که در راستای قائم و شرایط خلأ رها شود، به شرطی که $g = 10 \frac{m}{s^2}$ باشد، بصورت مقابل است:

مطابق با شکل، سرعت در هر ثانیه به اندازه $g = 10 \frac{m}{s^2}$ افزایش می یابد و جابه جایی نیز در هر ثانیه ۱۰ متر افزایش می یابد.

مثال:

گلوله ای از ارتفاع ۴۵ متری زمین رها می شود، مدت حرکت گلوله چند ثانیه است؟ $(g = 10 \frac{m}{s^2})$

پاسخ: در شکل مقابل جمع جابه جایی ها در ۳ ثانیه اول برابر $5 + 15 + 25 = 45m$ می شود. پس متحرک ۳s در راه بوده است.

تست زیر رو که برای کنکور سال ۱۴۰۱ هست به روش تستی گفته شده حل می کنیم:

$t = 0$	$V_i = 0$
$5m$	$V_1 = 10 m/s$
$15m$	$V_2 = 20 m/s$
$25m$	$V_3 = 30 m/s$
$35m$	$V_4 = 40 m/s$
$45m$	$V_5 = 50 m/s$
$55m$	$V_6 = 60 m/s$

سراسری ریاضی ۱۴۰۱

گلوله ای از ارتفاع h رها می شود و با شتاب ثابت $g = 10 \frac{m}{s^2}$ سقوط می کند. اگر تندى متوسط آن در $\frac{3}{4}$ پایانی مسیر ۱۵ $\frac{m}{s}$ باشد، تندى متوسط آن در کل مسیر چند متر بر ثانیه است؟

۱۲/۵ (۴)

۱۰ (۳)

۷/۵ (۲)

۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

نکته:

چون در این حرکت جسم نمی تواند تغییر جهت بدهد، پس جابه جایی و مسافت طی شده در بازه زمانی معین، برابر خواهند بود.

گام ۱: در حرکت رها شدن، تندی متوسط و سرعت متوسط برابر هستند، پس سرعت متوسط در $\frac{3}{4}$ آخر مسیر نیز $15 \frac{m}{s}$ است. $V_i = 0$

گام ۲: اگر حرکت متحرک ۲ ثانیه طول کشیده باشد، جابه‌جایی‌های آن بصورت مقابل خواهد بود:

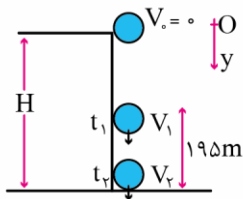
در این شکل مشاهده می‌کنید که جابه‌جایی در ثانیه دوم $(15m)$ ، $\frac{3}{4}$ جابه‌جایی کل $(20m)$ است و سرعت متوسط

در این بازه نیز $\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{15}{1} = 15 \frac{m}{s}$ است. پس همه اطلاعات سؤال منطبق بر حرکت گلوله به مدت ۲s است، حال کافی است، تندی متوسط در کل حرکت را حساب کنیم:

$$s_{av} = v_{av} = \frac{\Delta y_{کل}}{\Delta t_{کل}} = \frac{20}{2} = 10 \frac{m}{s}$$

پاسخ تشریحی:

با توجه به شکل مقابل می‌توان در بازه t_1 تا t_2 چنین نوشت:



$$\Delta v = g\Delta t \rightarrow v_2 - v_1 = 10 \times 2 = 20 \rightarrow v_2 = v_1 + 20$$

$$\Delta y = \left(\frac{v_1 + v_2}{2}\right)\Delta t \rightarrow 19.5 = \left(\frac{v_1 + 20 + v_1}{2}\right) \times 2 \rightarrow v_1 = 5 \frac{m}{s}$$

$$\rightarrow v_2 = v_1 + 20 = 25 \frac{m}{s}$$

$$v = gt + v_i \rightarrow 25 = 10 \cdot t_2 \rightarrow t_2 = 2.5s$$

طبق رابطه $s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t}$ و با توجه به یکسان بودن مدت زمان دو بازه مدنظر سؤال، برای یافتن نسبت تندیه‌های متوسط، کافی است نسبت مسافت‌های پیموده شده در دو ثانیه ابتدایی و انتهایی حرکت را بدست آوریم.

$$v = gt + v_i = 10t$$

$$\rightarrow \begin{cases} t_1 = 0 \rightarrow v_1 = 0 \\ t_2 = 2s \rightarrow v_2 = 20 \frac{m}{s} \end{cases} \rightarrow \ell_{[0,2]} = \Delta x_{[0,2]} = \left(\frac{v_1 + v_2}{2}\right)\Delta t = 20m$$

$$\rightarrow \begin{cases} t_1 = 6s \rightarrow v_1 = 60 \frac{m}{s} \\ t_2 = 8s \rightarrow v_2 = 80 \frac{m}{s} \end{cases} \rightarrow \ell_{[6,8]} = \Delta x_{[6,8]} = \left(\frac{v_1 + v_2}{2}\right)\Delta t = 140m$$

$$\rightarrow \frac{s_{av[6,8]}}{s_{av[0,2]}} = \frac{\ell_{[6,8]}}{\ell_{[0,2]}} = 7$$

گروه آموزشی ماز

۶۳- فنری به جرم ناچیز را از سقف آویزان می‌کنیم. جسمی به جرم ۲۰۰ گرم را به آن متصل کرده و از حالتی که فنر طول عادی خود را دارد، جسم را رها می‌کنیم. اگر در این آزمایش، بیشترین طول فنر به ۳۲cm برسد، در لحظه‌ای که طول فنر ۳۰cm می‌شود، بردار شتاب جسم در SI کدام است؟ (ثابت

$$\text{فنر را } 50 \frac{N}{m} \text{ در نظر بگیرد و } (g = 10 \frac{m}{s^2})$$

$$\vec{a} = (-5 \frac{m}{s^2}) \vec{j} \quad (۴)$$

$$\vec{a} = (+5 \frac{m}{s^2}) \vec{j} \quad (۳)$$

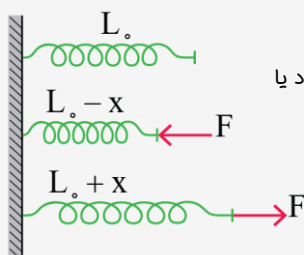
$$\vec{a} = (-1 \frac{m}{s^2}) \vec{j} \quad (۲)$$

$$\vec{a} = (+1 \frac{m}{s^2}) \vec{j} \quad (۱)$$

(۱۲۰۲ - متوسط - مسأله)

پاسخ: گزینه ۳

اثبات نیروی فنر



اگر مطابق شکل‌های روبه‌رو یک سر فنری که سر دیگر آن به یک نقطه ثابت بسته شده است با نیرویی به اندازه F فشرده شود یا کشیده شود، اندازه تغییر طول ایجاد شده برای فنر (x) با نیروی وارد بر آن متناسب است.

$$\text{ثابت } \rightarrow \frac{F}{x} = k \quad (\text{تغییر طول فنر با نیروی وارد بر آن متناسب است})$$

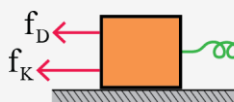
برای هر فنر نسبت نیروی وارد بر آن به تغییر طول آن مقدار ثابتی است که ثابت آن فنر نامیده می‌شود و آن را با k نمایش می‌دهند، یکای ثابت فنر در SI، نیوتون بر متر $(\frac{N}{m})$ است.

$$\frac{F}{x} = k \rightarrow F = kx$$

ثابت فنر به ویژگی‌های فیزیکی خود فنر بستگی دارد نه به نیرو یا تغییر طول فنر. برای تبدیل این رابطه به رابطه برداری (قانون هوک) علامت منفی را لحاظ می‌کنیم.

$$\vec{F} = -k\vec{x}$$

برای جسمی که روی سطح افقی حرکت می‌کند و نیروی مقاومت هوا به آن اثر می‌کند قانون دوم نیوتون به شکل زیر درمی‌آید.



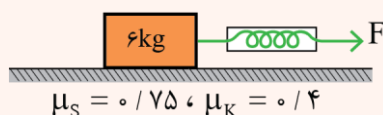
$$F_{net\ x} = ma$$

$$F_e - f_k - f_D = ma$$

کنکور سراسری ریاضی - سال ۱۴۰۱

در شکل زیر، جسم روی سطح افقی ساکن است. اگر با نیروی $F = ۲۵\text{ N}$ افقی بر آن وارد کنیم، نیرویی که جسم به سطح افقی وارد می‌کند، چند نیوتون است؟ $(g = ۱۰ \frac{m}{s^2})$

$$(g = ۱۰ \frac{m}{s^2})$$



$$۷۵\ (۲)$$

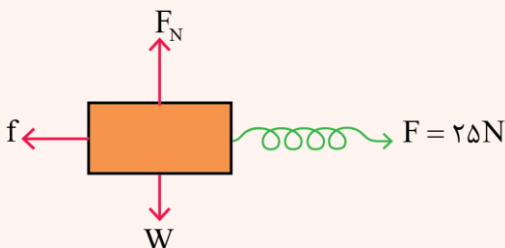
$$۶۵\ (۱)$$

$$۱۲\sqrt{۲۹}\ (۴)$$

$$۱۵\sqrt{۱۳}\ (۳)$$

پاسخ: گزینه ۱

ابتدا وضعیت حرکت جسم و نوع اصطکاک وارد بر جسم باید مشخص شود. در این حالت نیروی اصطکاک بیشینه را به دست می‌آوریم و با نیروی مؤثر در راستای حرکت (F) مقایسه می‌کنیم. با رسم نیروهای وارد بر جسم خواهیم داشت:



به کمک قانون دوم نیوتن در راستای عمودی، نیروی عمودی تکیه‌گاه برابر است با:

$$F_{net\ y} = 0 \rightarrow F_N = W = mg = ۶ \times ۱۰ = ۶۰\text{ N}$$

حال نیروی اصطکاک بیشینه جسم را به دست می‌آوریم:

$$f_{s, \max} = \mu_s F_N = ۰/۷۵ \times ۶۰ = ۴۵\text{ N}$$

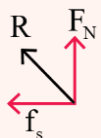
در این قسمت باید بررسی کنیم با اعمال نیروی $F = ۲۵\text{ N}$ آیا جسم حرکت می‌کند یا خیر:

$$F = ۲۵\text{ N} < f_{s, \max} = ۴۵\text{ N}$$

در نتیجه جسم ساکن است و نیروی اصطکاک وارد بر جسم ایستایی طبق قانون دوم نیوتن برابر است با:

$$F_{net\ x} = 0 \rightarrow f_s = F = ۲۵\text{ N}$$

نیرویی که سطح به جسم وارد می‌کند برآیند نیروی عمودی تکیه‌گاه و نیروی اصطکاک وارد بر جسم می‌باشد، در نتیجه:



$$R = \sqrt{F_N^2 + f_s^2} \rightarrow$$

$$R = \sqrt{۶۰^2 + ۲۵^2} = ۵ \times ۱۳ = ۶۵\text{ N}$$

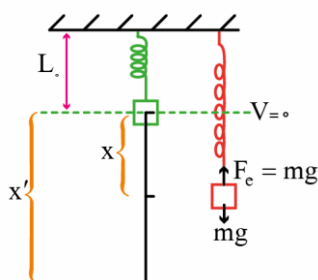
پاسخ تشریحی:

اگر بتوانیم در لحظه‌ای که بزرگی نیروی فنر با بزرگی نیروی وزن برابر است، تغییر طول فنر را بدست آوریم، دو برابر این مقدار تغییر طول در فنر باید ایجاد شود تا فنر به بیشترین طول خود برسد.

$$F_e = mg \rightarrow kx = mg$$

$$۵۰x = ۰/۲ \times ۱۰ \rightarrow x = ۰/۴\text{ m} = ۴\text{ cm} \rightarrow x' = ۸\text{ cm}$$

$$x' = L_{\max} - L_e \rightarrow ۸ = ۳۲ - L_e \rightarrow L_e = ۲۴\text{ cm}$$



همچنین در لحظه‌ای که فنر ۴cm تغییر طول داده و $F_e = mg$ است طول فنر معادل ۲۸cm خواهد بود. تا قبل از این لحظه $F_e < mg$ و بعد از این لحظه $F_e > mg$ می‌باشد. بنابراین در لحظه‌ای که طول فنر ۳۰cm است، $F_e > mg$ بوده و جهت نیروی خالص و شتاب جسم رو به بالا می‌باشد. در این لحظه می‌توان نوشت:

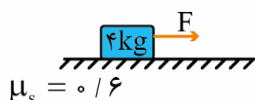
$$F_e = kx = 50 \cdot (30 - 24) \times 10^{-2} = 3 \text{ N}$$

$$F_{\text{net}} = F_e - mg = 3 - 2 = 1 \text{ N}, \quad F_{\text{net}} = ma \rightarrow 1 = 0.2a \rightarrow a = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \rightarrow \vec{a} = \left(+5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) \vec{j}$$

گروه آموزشی ماز

۶۴- جسمی به جرم ۴kg مطابق شکل روی یک سطح افقی به حال سکون قرار دارد. چنانچه نیروی $\vec{F}$ را مطابق شکل به جسم اعمال کرده و آن را از صفر به تدریج افزایش دهیم، حداقل شتاب جسم در لحظه شروع به حرکت آن، معادل $4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ می‌باشد. اکنون اگر نیروی $\vec{F}'$ را در راستای قائم و رو به پائین

به جسم اعمال کنیم، سرعت جسم ثابت خواهد شد. بزرگی نیروی $\vec{F}'$ چند نیوتن است؟ ($g = 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}}$)



۴۰ (۲)

۶۰ (۱)

۸۰ (۴)

۱۲۰ (۳)

پاسخ: گزینه ۴ (۱۲۰۲ - متوسط - محاسباتی)

نیروی اصطکاک

نیروی اصطکاک برای جلوگیری از لغزش دو سطح در تماس، در راستای مماس بر سطح تماس و به سمتی که از لغزش دو سطح روی یکدیگر جلوگیری کند ایجاد می‌شود. نیروی اصطکاک به دو شکل زیر ایجاد می‌شود:

(الف) دو سطح در تماس روی هم نمی‌لغزند و نسبت به هم ساکن هستند و بین دو سطح نیروی اصطکاک وجود دارد. در حالی که اگر نیروی اصطکاک وجود نداشت، دو سطح روی هم می‌لغزیدند. به نیروی اصطکاک در این شرایط نیروی اصطکاک ایستایی می‌گوییم. نیروی اصطکاک ایستایی را با f_s نشان می‌دهیم.

(ب) دو سطح در تماس روی هم می‌لغزند و بین دو سطح نیروی اصطکاک وجود دارد. به نیروی اصطکاک در این شرایط نیروی اصطکاک جنبشی (لغزشی) می‌گوییم. نیروی اصطکاک جنبشی را با f_k نشان می‌دهیم.

نیروی اصطکاک ایستایی

نیروی اصطکاک ایستایی با کمک قانون دوم نیوتون و با فرض ساکن بودن دو سطح روی هم به‌دست می‌آید. جسمی را در نظر بگیرید که مطابق شکل مقابل روی یک سطح افقی قرار دارد و به آن نیروی F در راستای افقی وارد می‌شود و ساکن است.

به دلیل تعادل جسم و طبق قانون دوم نیوتون داریم:

$$F_{\text{net}} = 0 \rightarrow f_s = F$$

یعنی نیروی اصطکاک ایستایی به اندازه نیروی محرک وارد بر جسم در راستای سطح است. اگر نیروی F تغییر کند و جسم باز هم ساکن باشد به معنی این است که نیروی اصطکاک ایستایی نیز تغییر کرده است و باز هم به اندازه نیروی محرک وارد بر جسم در راستای سطح ایجاد شده است. می‌توان نتیجه گرفت نیروی اصطکاک ایستایی به اندازه لازم و کافی برای جلوگیری از لغزش دو سطح روی هم ایجاد می‌شود.

بیشینه نیروی اصطکاک ایستایی (نیروی اصطکاک در آستانه حرکت):

بدیهی است که اگر نیروی F به اندازه کافی بزرگ باشد جسم روی سطح می‌لغزد. یعنی نیروی اصطکاک ایستایی به هر اندازه‌ای نمی‌تواند ایجاد شود. بیشترین نیروی اصطکاک ایستایی بین دو سطح در تماس را $f_{s, \text{max}}$ می‌نامیم و به آن نیروی اصطکاک در آستانه حرکت گفته می‌شود.

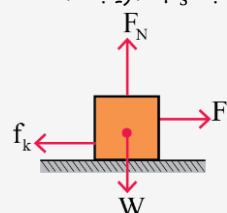
آزمایش‌های تجربی نشان می‌دهد که بیشینه نیروی اصطکاک ایستایی بین دو سطح در تماس متناسب با نیروی عمود بر سطح بین دو سطح در تماس است.

$$f_{s, \text{max}} \propto F_N \rightarrow \frac{f_{s, \text{max}}}{F_N} = \text{ثابت} = \mu_s \rightarrow f_{s, \text{max}} = \mu_s F_N$$

در رابطه $f_{s, \text{max}} = \mu_s F_N$ ، μ_s ضریب ثابتی است که به جنس دو سطح در تماس بستگی دارد و به‌طور تجربی محاسبه می‌شود، به μ_s ضریب اصطکاک ایستایی می‌گویند و بدون واحد است.

نیروی اصطکاک جنبشی (لغزشی):

جسمی را در نظر بگیرید که مطابق شکل زیر روی یک سطح افقی قرار دارد و به آن نیروی F در راستای افقی وارد می‌شود و جسم روی سطح در حال حرکت است.

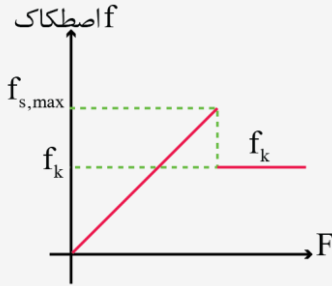


آزمایش‌های تجربی نشان می‌دهد که نیروی اصطکاک جنبشی بین دو سطح در تماس اندازه ثابتی دارد که متناسب با نیروی عمود بر سطح بین دو سطح در تماس است.

$$f_k \propto F_N \rightarrow \frac{f_k}{F_N} = \text{ثابت} = \mu_k \rightarrow f_k = \mu_k F_N$$

در رابطه $f_k = \mu_k F_N$ ، ضریب ثابتی است که به جنس دو سطح در تماس بستگی دارد و به طور تجربی محاسبه می‌شود، به μ_k ضریب اصطکاک جنبشی (لغزشی) می‌گویند.

اگر نمودار نیروی اصطکاک را بر حسب نیروی F (نیروی وارده برای به حرکت درآوردن جسم) رسم کنیم، خواهیم داشت:



f_s با تغییر F از صفر تا $f_{s, \max}$ افزایش می‌یابد و پس از حرکت نیروی اصطکاک برابر مقدار ثابت f_k می‌شود.

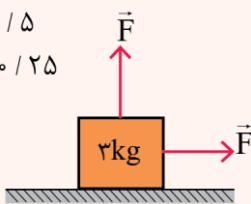
کنگر تجربی داخل کشور - سال ۱۴۰۱

در شکل زیر، جسمی روی سطح افقی در آستانه حرکت قرار دارد و دو نیروی افقی و عمودی هم‌اندازه F به آن وارد می‌شود. اگر اندازه نیروهای F هر کدام ۴

نیوتون کاهش یابند، نیروی اصطکاک چند نیوتون می‌شود؟ ($g = 10 \frac{m}{s^2}$)

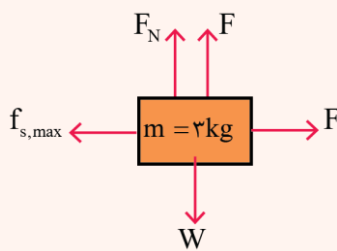
$$\mu_s = 0.5$$

$$\mu_k = 0.25$$



- ۴ (۱)
۶ (۲)
۶/۵ (۳)
۱۳ (۴)
پاسخ: گزینه ۲

در این سؤال ابتدا نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم، نیروهای وارد بر جسمی که در آستانه حرکت قرار دارد، طبق قانون اول نیوتن متوازن می‌باشند. اگر جسمی در آستانه حرکت قرار بگیرد، نیروی اصطکاک وارد بر آن، بیشینه نیروی اصطکاک ($f_{s, \max}$) می‌باشد.



در ابتدا بزرگی نیروی F را در حالت اول محاسبه می‌کنیم، طبق قانون دوم نیوتن در هر راستا خواهیم داشت:

$$\begin{cases} F_{\text{net } x} = 0 \rightarrow F - f_{s, \max} = 0 \\ F_{\text{net } y} = 0 \rightarrow F_N + F - W = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} F = f_{s, \max} \\ F_N = W - F \end{cases}$$

$$\frac{f_{s, \max} = \mu_s F_N, \mu_s = 0.5}{W = mg} \rightarrow \begin{cases} F = 0.5 F_N \\ F_N = 30 - F \end{cases} \rightarrow F = 0.5 (30 - F) \rightarrow 2F = 30 - F \rightarrow 3F = 30 \rightarrow F = 10 \text{ N}$$

در حالت دوم اندازه نیروی F به اندازه ۴ نیوتن کاهش می‌یابد و نیروی باقی‌مانده در این حالت ۶ N خواهد بود، در این موقعیت لازم است وضعیت حرکت جسم را بررسی کنیم:

$$\begin{cases} f'_{s, \max} = \mu_s F'_N \\ F'_N = 30 - F' \end{cases} \xrightarrow{F' = 6 \text{ N}} \begin{cases} f'_{s, \max} = 0.5 \times 24 = 12 \text{ N} \\ F'_N = 24 \text{ N} \end{cases}$$

در این وضعیت به علت $F' < f'_{s, \max}$ ، جسم همچنان ساکن است در نتیجه اصطکاک از نوع ایستایی و برابر با نیروی خارجی وارد بر جسم در راستای حرکت است:

$$F_{\text{net } x} = 0 \rightarrow F' - f_s = 0 \rightarrow f_s = F' = 6 \text{ N}$$

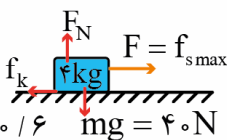
پاسخ تشریحی:

می‌دانیم با افزایش نیروی F در رسیدن آن به $f_{s, \max}$ ، جسم در آستانه حرکت قرار می‌گیرد. در این شرایط با اعمال یک ضربه (تلنگر) کوچک به جسم، بدون تغییر در اندازه F ، نیروی اصطکاک معادل f_k شده و در این شرایط جسم با حداقل شتاب اولیه ممکن شروع به حرکت خواهد کرد. بنابراین می‌توان نوشت:

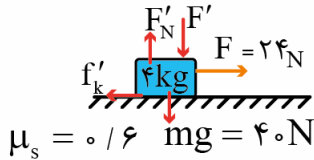
$$F_{\text{net } (y)} = 0 \rightarrow F_N = mg = 40 \text{ N}$$

$$F = f_{s, \max} = \mu_s F_N = 0.6 \times 40 = 24 \text{ N}$$

$$F_{\text{net } (x)} = ma \rightarrow F - f_k = ma \rightarrow 24 - \mu_k F_N = 4 \times 4 \rightarrow \mu_k = 0.2$$



در حالت ثانویه با توجه به ثابت شدن تندی جسم می توان نوشت:



$$a = 0 \rightarrow F_{\text{net}(x)} = 0 \rightarrow f'_k = F = 24 \text{ N}$$

$$f'_k = \mu_k F'_N \rightarrow 24 = 0.6 F'_N \rightarrow F'_N = 40 \text{ N}$$

$$F'_N = F' + mg \rightarrow F' = 8 \text{ N}$$

گروه آموزشی ماز

۶۵- دو جسم A و B را روی سطح افقی مماس بر سطح پرتاب می کنیم. جسم A پس از ۲۰ متر و جسم B پس از ۵ متر جابه جایی در نهایت متوقف می شوند. اگر ضریب اصطکاک جنبشی جسم A با زمین دو برابر ضریب اصطکاک جنبشی جسم B با زمین باشد و تغییر تکانه دو جسم از لحظه پرتاب تا لحظه توقف را با Δp نمایش دهیم، نسبت $\frac{\Delta p_A}{\Delta p_B}$ کدام است؟ (جرم جسم A نصف جرم جسم B است.)

- پاسخ: گزینه ۱
- ۱) $\sqrt{2}$ ۲) ۴ ۳) $2\sqrt{2}$ ۴) ۲

(۱۲۰۲ - متوسط - محاسباتی)

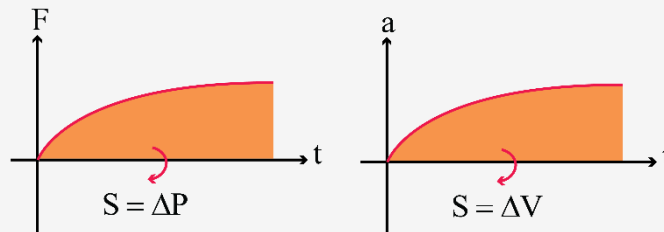
تکانه و نیروی متوسط

تکانه (مومنتم): یک کمیت برداری است و برابر با حاصل ضرب جرم در سرعت است، تکانه قدرت جسم برای ضربه زدن را بیان می کند. $\vec{p} = m\vec{v}$

هر چقدر تکانه یک جسم بیشتر باشد متوقف کردن آن جسم سخت تر است.

مقایسه رابطه تکانه و قانون دوم نیوتن: از مقایسه دو رابطه می توان نتیجه گرفت که هر رابطه ای که در فصل حرکت بین سرعت و شتاب برقرار باشد همان رابطه بین تکانه و نیرو در فصل دینامیک نیز برقرار است.

حرکت	دینامیک
$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$	$\vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}$

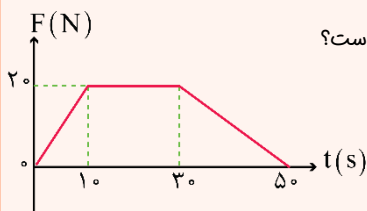


تغییرات اندازه حرکت برابر با سطح زیر نمودار نیرو - زمان است.

$$\vec{F} \cdot \Delta t = \Delta \vec{p} = m\vec{v}_f - m\vec{v}_i$$

کنکور ریاضی داخل کشور - سال ۱۴۰۱

نمودار نیرو - زمان متحرکی به صورت زیر است. نیروی خالص متوسط وارد بر جسم در ۵۰ ثانیه داده شده، چند نیوتون است؟



پاسخ: گزینه ۱

برای محاسبه نیروی متوسط ابتدا باید تغییرات تکانه را در مدت ۵۰ ثانیه محاسبه کنیم. طبق درسنامه ارائه شده مساحت زیر نمودار نیرو - زمان برابر تغییرات تکانه می باشد. مساحت زیر نمودار به کمک رابطه مساحت ذوزنقه محاسبه می شود. به این صورت که دو قاعده به طول های ۲۰ و ۵۰ و ارتفاعی به طول ۲۰ دارد. بنابراین:

$$\Delta p = \frac{(\text{ارتفاع} \times (\text{مجموع دو قاعده}))}{2} = \frac{(20 + 50) \times 20}{2} = 700 \text{ N}$$

در آخر این عدد را بر زمان تقسیم می کنیم تا طبق رابطه زیر، نیروی متوسط محاسبه شود:

$$F_{\text{net}} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{700}{50} = 14 \text{ (N)}$$

با توجه به رابطه $a = -\mu_k g$ می توان نوشت:

$$\frac{a_A}{a_B} = \frac{\mu_k(A)}{\mu_k(B)} = 2$$

$$v_A^2 - v_B^2 = 2a\Delta x \rightarrow \Delta x = \frac{-v_B^2}{2a} \rightarrow \frac{\Delta x_A}{\Delta x_B} = \left(\frac{v_A}{v_B}\right)^2 \times \frac{a_B}{a_A}$$

$$\rightarrow \frac{2}{5} = \left(\frac{v_A}{v_B}\right)^2 \times \frac{1}{2} \rightarrow \frac{v_A}{v_B} = 2\sqrt{2}$$

در نهایت طبق رابطه $\Delta p = m\Delta v$ می توان نوشت:

$$\frac{\Delta p_A}{\Delta p_B} = \frac{m_A \Delta v_A}{m_B \Delta v_B} = \frac{\frac{1}{2} m_B \times (-v_A)}{m_B \times (-v_B)} = \frac{1}{2} \times \frac{v_A}{v_B} = \sqrt{2}$$

گروه آموزشی ماز

۶۶- دو ماهواره A و B به ترتیب در فاصله های R_e و $2R_e$ از سطح زمین به طور یکنواخت در حال گردش هستند. چنانچه بزرگی نیروی گرانشی وارد بر دو ماهواره مساوی باشد، انرژی جنبشی ماهواره B چند برابر انرژی جنبشی ماهواره A است؟ (R_e شعاع کره زمین است)

۳ (۴)

۲ (۳)

$\frac{1}{3}$ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ (۱۳۰۲ - ساده - مسأله)

شتاب گرانش

نیروی وزن: «نیروی وزن نیروی گرانشی ای است که مرکز زمین به اجسام وارد می کند.»

محاسبه نیروی وزن با کمک قانون گرانش نیوتن: جرم زمین را M_e و شعاع زمین را R_e در نظر می گیریم. می توان نشان داد برای محاسبه نیروی گرانشی ای که زمین به اجسام مجاور خود وارد می کند باید جرم زمین را به صورت متمرکز در مرکز آن فرض کنیم. اگر جرم m در سطح زمین قرار داشته باشد:

$$\begin{cases} F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \\ m_1 = M_e, m_2 = m, r = R_e \end{cases} \rightarrow F = G \frac{M_e m}{R_e^2} = m \left(G \frac{M_e}{R_e^2} \right)$$

نیروی وزن اجسام با W نشان داده می شود و برای وزن اجسام در سطح زمین داریم $W = mg$.

$$W = m \left(G \frac{M_e}{R_e^2} \right) = mg \rightarrow g = G \frac{M_e}{R_e^2}$$

جرم زمین تقریباً برابر $M_e = 6 \times 10^{24} \text{ kg}$ ، شعاع زمین تقریباً برابر $R_e = 6/4 \times 10^6 \text{ m}$ و ثابت جهانی گرانش برابر $G = 6/67 \times 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}$ است.

$$g = G \frac{M_e}{R_e^2} = 6/67 \times 10^{-11} \left(\frac{6 \times 10^{24}}{(6/4 \times 10^6)^2} \right) \approx 9/8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

وزن اجسام در سطح زمین از رابطه $W = mg$ به دست می آید که در آن مقدار g برابر $g = 9/8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ است که برای سهولت در محاسبه برابر $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ فرض می شود.

واکنش نیروی وزن هر جسم نیرویی است که توسط جسم به مرکز زمین وارد می شود. اثر این نیرو روی زمین به دلیل جرم عظیم زمین عملاً ناچیز است.

محاسبه شدت جاذبه گرانشی یا شتاب گرانشی در اطراف و سطح یک سیاره:

جرم سیاره را M و شعاع آن را R در نظر می گیریم. می توان نشان داد برای محاسبه نیروی گرانشی ای که سیاره به اجسام مجاور خود وارد می کند باید جرم آن را به صورت متمرکز در مرکز آن فرض کنیم. اگر جرم m در فاصله r از مرکز سیاره قرار داشته باشد ($r \geq R$):

$$\begin{cases} F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \\ m_1 = M, m_2 = m \end{cases} \rightarrow F = G \frac{Mm}{r^2} = m \left(G \frac{M}{r^2} \right) \rightarrow \frac{F}{m} = G \frac{M}{r^2}$$

$$\rightarrow (r \geq R) \text{ شدت جاذبه گرانشی یا شتاب گرانشی در فاصله } r \text{ از مرکز سیاره } g = G \frac{M}{r^2}$$

$$r = R \rightarrow \text{شدت جاذبه گرانشی یا شتاب گرانشی در سطح سیاره } g = G \frac{M}{R^2}$$

برای درک بهتر به سؤال کنکور تجربی سال ۱۴۰۱ دقت کنید.

در کدام فاصله از سطح زمین، شتاب گرانش در مقایسه با سطح زمین، ۹۹ درصد کاهش می‌یابد؟ (R_e شعاع زمین است)

- (۱) $100 R_e$ (۲) $99 R_e$ (۳) $10 R_e$ (۴) $9 R_e$

پاسخ: گزینه ۴

با توجه به رابطه شتاب گرانش می‌توان بین سطح سیاره و ارتفاع h از سطح زمین رابطه زیر را به دست آورد:

$$\frac{g'}{g} = \left(\frac{R_e}{R_e + h}\right)^2 \xrightarrow{g' = \frac{1}{100}g} \frac{1}{100} = \left(\frac{R_e}{R_e + h}\right)^2 \rightarrow h = 9 R_e$$

پاسخ تشریحی:

با ترکیب رابطه انرژی جنبشی و نیروی مرکزگرا می‌توان نوشت:

$$F_C = \frac{mv^2}{r} \rightarrow mv^2 = F_C \cdot r$$

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \rightarrow K = \frac{1}{2}F_C \cdot r$$

بر اساس این رابطه و با توجه به مساوی بودن نیروی مرکزگرای وارد بر دو ماهواره (که در اینجا همان نیروی وزن ماهواره‌ها می‌باشد) می‌توان نوشت:

$$\frac{K_B}{K_A} = \frac{r_B}{r_A} = \frac{R_e + h_B}{R_e + h_A} = \frac{R_e + 9R_e}{R_e + R_e} = 9$$

گروه آموزشی ماز

۶۷- نوسانگری روی یک خط راست حرکت هماهنگ ساده با دوره تناوب T و دامنه A انجام می‌دهد. بیشینه تندی متوسط این نوسانگر در پیمودن مسافتی معین به اندازه $A\sqrt{2}$ ، چند برابر تندی نوسانگر در لحظه عبور از مبدأ نوسان است؟

- (۱) $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$ (۲) $\frac{4\sqrt{2}}{\pi}$ (۳) $\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$ (۴) $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$

پاسخ: گزینه ۴ (۱۲۰۳ - ساده - محاسباتی)

حرکت هماهنگ ساده

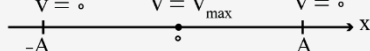
- با توجه به معادله مکان - زمان در یک حرکت هماهنگ ساده که به صورت $x = A \cos \omega t$ است می‌توان بازه‌های زمانی خاص که در آن نوسانگر مسافت مشخصی را می‌پیماید، بدست آورد:



برای راحتی محاسبه لازم است تا نمودار فوق را به خوبی به خاطر بسپارید.

- در یک حرکت هماهنگ ساده، تندی نوسانگر به هنگام عبور از نقطه تعادل، بیشینه و در نقاط بازگشت صفر است:

$$v_{\max} = A\omega$$



- هرچه نوسانگر به نقطه تعادل نزدیک‌تر شود، تندی آن بیشتر و هرچه نوسانگر به نقاط بازگشت نزدیک‌تر شود، تندی آن کمتر می‌شود.

پاسخ تشریحی:

برای آن که تندی متوسط نوسانگر در یک مسافت معین به اندازه $A\sqrt{2}$ به بیشینه خود برسد، باید این بازه به گونه‌ای انتخاب شود که مبدأ نوسان (جایی که تندی در آن بیشینه است) درست در وسط این بازه باشد. بنابراین شکلی مانند زیر خواهیم داشت:



با توجه به شکل:

$$\Delta t = \frac{T}{\lambda} + \frac{T}{\lambda} = \frac{T}{2}$$

$$s_{av \max} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{A\sqrt{2}}{\frac{T}{2}} = 4\sqrt{2} \frac{A}{T}$$

از طرفی تندی نوسانگر در مبدأ نوسان معادل است با:

$$v_{\max} = A\omega = A \times \frac{2\pi}{T}$$

$$\rightarrow \frac{s_{av_{\max}}}{v_{\max}} = \frac{4\sqrt{2} \frac{A}{T}}{2\pi \frac{A}{T}} = \frac{4\sqrt{2}}{2\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$$

گروه آموزشی ماز

۶۸- معادله مکان - زمان یک حرکت هماهنگ ساده در SI به صورت $x = 0.5 \cos(10\pi t)$ است. در کدام یک از لحظات زیر، انرژی پتانسیل نوسانگر در حال افزایش و بردار نیروی وارد بر نوسانگر در خلاف جهت محور x می باشد؟

$t = 170 \text{ ms}$ (۴)

$t = 120 \text{ ms}$ (۳)

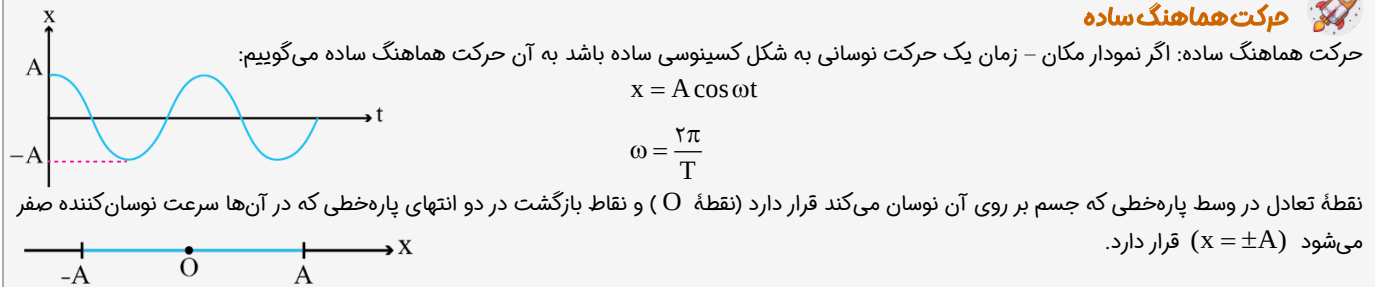
$t = 80 \text{ ms}$ (۲)

$t = 30 \text{ ms}$ (۱)

(۱۲۰۳) - متوسط - مفهومی و محاسباتی

پاسخ: گزینه ۴

حرکت هماهنگ ساده



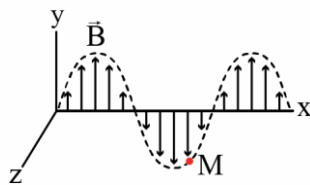
انرژی پتانسیل نوسانگر در مبدأ نوسان صفر و در دامنه ها بیشینه است. بنابراین زمانی که نوسانگر در حال دور شدن از مبدأ نوسان است، انرژی پتانسیل آن در حال افزایش می باشد. همچنین در حرکت هماهنگ ساده، بردار نیرو و شتاب همواره در خلاف جهت بردار مکان است. پس زمانی بردار نیرو در خلاف جهت محور x است که بردار مکان در جهت محور x باشد. یعنی $x > 0$ باشد. با توجه به این دو مورد، بازه $\frac{3T}{4} < t < T$ این دو شرط را با هم دارا می باشد.

$$x = 0.5 \cos(10\pi t) \rightarrow \omega = 10\pi = \frac{2\pi}{T} \rightarrow T = 0.2 \text{ s} \rightarrow \begin{cases} \frac{3T}{4} = 0.15 \text{ s} = 150 \text{ ms} \\ T = 0.2 \text{ s} = 200 \text{ ms} \end{cases}$$

پس لحظه های مربوط به بازه $150 \text{ ms} < t < 200 \text{ ms}$ می توانند پاسخ تست باشند که در بین گزینه ها، فقط گزینه ۴ در این بازه قرار دارد.

گروه آموزشی ماز

۶۹- شکل مقابل، نقش میدان مغناطیسی از یک موج الکترومغناطیسی که در خلأ منتشر می شود را در یک لحظه معین نشان می دهد. اگر در این لحظه، جهت میدان الکتریکی در نقطه M در جهت $-z$ باشد، بردار سرعت انتشار این موج در SI کدام بوده و بزرگی میدان مغناطیسی در نقطه M در این لحظه به چه صورت در حال تغییر بوده است؟



(۲) $\left(\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}\right) \vec{i}$ ، در حال افزایش

(۴) $\left(\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}\right) \vec{i}$ ، در حال کاهش

(۱) $\left(-\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}\right) \vec{i}$ ، در حال کاهش

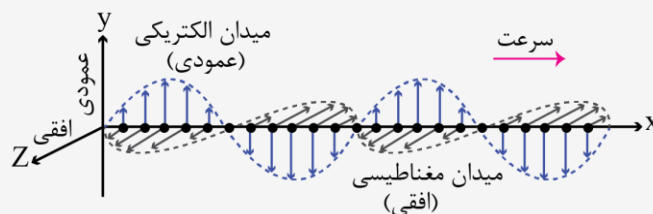
(۳) $\left(-\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}\right) \vec{i}$ ، در حال افزایش

(۱۲۰۳) - متوسط - مفهومی

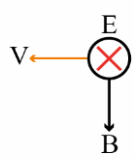
پاسخ: گزینه ۱

امواج الکترومغناطیسی

امواج الکترومغناطیسی امواجی هستند که از میدان های الکتریکی و مغناطیسی متغیر و تأثیر متقابل این میدان ها بر روی یکدیگر به وجود می آیند. در واقع زمانی که یک میدان متغیر الکتریکی در قسمتی از فضا وجود داشته باشد، سبب تولید یک میدان مغناطیسی متغیر شده و به طور برعکس، میدان مغناطیسی متغیر نیز سبب تولید میدان الکتریکی متغیر خواهد شد. این میدان های متغیر با تندی معینی در فضا حرکت کرده و انتشار موج های الکترومغناطیسی را رقم می زنند. بارهای الکتریکی متحرک می توانند میدان های الکتریکی و مغناطیسی متغیر تولید کرده و جمله تولیدکنندگان امواج الکترومغناطیسی باشند. در شکل زیر، تصویری لحظه ای از انتشار یک موج الکترومغناطیسی را مشاهده می کنیم. براساس این شکل می توان نتایج زیر را بیان کرد:



- (۱) راستای نوسان‌های میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی بر یکدیگر عمود است.
 (۲) راستای نوسان هر دو میدان بر راستای انتشار موج عمود است. پس امواج الکترومغناطیسی همگی از جمله امواج عرضی هستند.
 (۳) بسامد نوسان‌های هر دو میدان با یکدیگر مساوی است و دو میدان هم‌گام با یکدیگر تغییر می‌کنند.



با توجه به جهت گفته شده برای میدان الکتریکی و با توجه به اینکه طبق شکل، جهت میدان مغناطیسی در نقطه M در جهت -y می‌باشد، به کمک قانون دست راست، جهت انتشار موج در جهت -x بوده و بنابراین بردار تندی انتشار موج به صورت $\vec{i} = -\left(\frac{1}{\sqrt{\epsilon \cdot \mu}}\right)$ است. براساس جهت بدست آمده برای انتشار موج می‌توان گفت نقطه پشت سر نقطه M، نقطه $y=0$ بوده و بنابراین بزرگی میدان مغناطیسی در نقطه M در این لحظه در حال کاهش است.

گروه آموزشی ماز

- ۷۰- پرتو نوری تحت زاویه تابش 50° از محیط شفاف (۱) به مرز جدایی محیط‌های (۱) و (۲) تابیده و وارد محیط دوم می‌شود. اگر ضریب شکست محیط (۲)، ۲۵ درصد بیشتر از ضریب شکست محیط (۱) باشد، نور پس از ورود به محیط (۲) چند درجه از امتداد اولیه خود منحرف خواهد شد؟
 ($\sin 50^\circ = 0.75$ و $\sin 53^\circ = 0.8$)

۱۵ (۴)

۵ (۳)

۱۳ (۲)

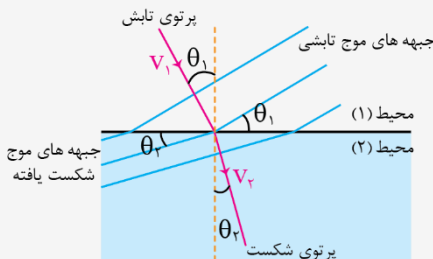
۳ (۱)

پاسخ: گزینه ۲ (۱۲۰۳ - ساده - محاسباتی)

شکست



اگر یک موج از محیطی به محیط دیگر برود به دلیل تغییر تندی در محیط جدید، موج از مسیر خط راست شکسته می‌شود. این پدیده را شکست موج می‌نامیم. اگر پرتوهای یک موج تخت تحت زاویه تابش θ_1 از محیط (۱) به محیط (۲) رفته و در محیط (۲) زاویه شکست برابر θ_2 باشد، می‌توان نوشت:



$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2}$$

✓ بر اساس این رابطه هر چه تندی موج در یک محیط بیشتر باشد، زاویه پرتوی نور با خط عمود در آن محیط بیشتر است. ضریب شکست محیط: اگر یک موج الکترومغناطیسی از هوا (خلأ) وارد یک محیط شفاف گردد، نسبت تندی نور در خلأ به تندی نور در آن محیط شفاف را ضریب شکست محیط می‌نامیم و با n نمایش می‌دهیم و داریم:

$$n = \frac{c}{v} \rightarrow v = \frac{c}{n} \rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \frac{n_1}{n_2}$$

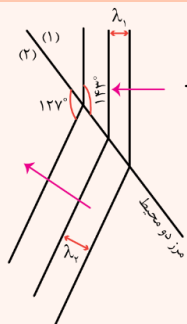
در نهایت با ترکیب دو رابطه می‌توان به رابطهٔ سومی به نام قانون شکست اسنل رسید که به صورت زیر است:

$$n_2 \sin \theta_2 = n_1 \sin \theta_1$$

توجه داشته باشید که مقدار n برای هوا (خلأ) برابر ۱ و برای سایر مواد بزرگ‌تر از ۱ است.

مثال

در شکل مقابل جبهه‌های یک موج الکترومغناطیسی از محیط (۱) به محیط (۲) تابیده و پس از ورود به محیط (۲) دچار شکست می‌شود. ضریب شکست محیط (۱) چند برابر محیط (۲) و فاصله دو جبهه موج متوالی در محیط (۱) چند برابر محیط (۲) می‌باشد؟ پاسخ: طبق شکل می‌توان نوشت:



$$\begin{cases} \theta_1 = 180 - 143 = 37 \\ \theta_2 = 180 - 127 = 53 \end{cases}$$

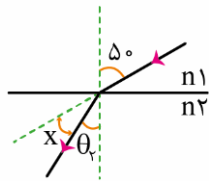
$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \rightarrow n_1 \times \sin 37 = n_2 \times \sin 53$$

$$\rightarrow n_1 \times 0.6 = n_2 \times 0.8 \rightarrow \frac{n_1}{n_2} = \frac{4}{3}$$

فاصله دو جبههٔ موج متوالی همان λ است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\lambda = \frac{v}{f} \xrightarrow{f \text{ ثابت}} \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2}$$

$$\rightarrow \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\sin 37}{\sin 53} = \frac{0.6}{0.8} \rightarrow \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{3}{4}$$



$$n_2 = \frac{1.25}{1.0} n_1 = \frac{5}{4} n_1$$

طبق رابطه شکست اسنل می‌توان نوشت:

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \rightarrow n_1 \times \sin 50^\circ = \frac{5}{4} n_1 \times \sin \theta_2$$

$$\frac{3}{4} = \frac{5}{4} \times \sin \theta_2 \rightarrow \sin \theta_2 = 0.6 \rightarrow \theta_2 = 37^\circ$$

$$\rightarrow \text{میزان انحراف پرتو } x = 50^\circ - 37^\circ = 13^\circ$$

گروه آموزشی ماز

- ۷۱- در یک تار مرتعش، نیروی کشش ۹۰ نیوتن و قطر مقطع تار ۲ cm می‌باشد. اگر چگالی تار $\frac{3}{\text{cm}^3}$ بوده و موج عرضی با بسامد ۲۰۰ Hz در تار در حال انتشار باشد، کدامیک از گزینه‌های زیر می‌تواند فاصله یک برآمدگی تا یک فرو رفتگی در تار را بر حسب سانتی‌متر بیان کند؟ ($\pi = 3$)
- (۱) ۵ (۲) ۱/۲۵ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲/۵

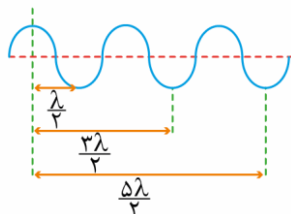
پاسخ: گزینه ۴ (۱۲۰۳ - متوسط - مسأله)

ابتدا تندی انتشار موج عرضی در تار و سپس طول موج را بدست می‌آوریم:

$$A = \pi r^2 \frac{r = d}{r} = 1 \text{ cm} \rightarrow A = 3 \times (10^{-2})^2 = 3 \times 10^{-4}$$

$$v = \sqrt{\frac{F}{\rho A}} = \sqrt{\frac{9 \times 10^1}{3 \times 10^{-3} \times 3 \times 10^{-4}}} = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{10}{200} = \frac{1}{20} \text{ m} = 5 \text{ cm}$$



با توجه به شکل مقابل، فاصله یک برآمدگی تا یک فرو رفتگی در تار به فرم کلی زیر می‌باشد:

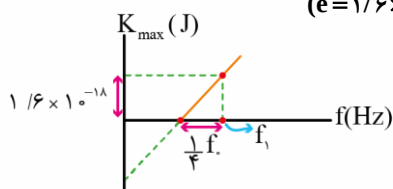
$$\Delta x = (2n-1) \left(\frac{\lambda}{2} \right) = (2 \text{ مضارب فرد}) \left(\frac{\lambda}{2} \right)$$

$$\frac{\lambda}{2} = 2/5 \text{ cm} \rightarrow \Delta x = (2 \text{ مضارب فرد}) (2/5 \text{ cm})$$

با توجه به گزینه‌ها، فقط گزینه ۴ به صورت مضرب فردی از $2/5 \text{ cm}$ خواهد بود.

گروه آموزشی ماز

- ۷۲- در یک آزمایش فوتوالکتریک نمودار بیشینه انرژی جنبشی فوتوالکترن‌های گسیل شده بر حسب بسامد نور، مانند شکل زیر است. چنانچه f بیانگر بسامد آستانه فلز بوده و نوری با بسامد f_1 بر فلز بتابانیم، تابع کار فلز چند الکترون‌ولت است؟ ($e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$)



- (۱) ۴۰
(۲) ۲۵
(۳) ۲۰
(۴) ۱۵

پاسخ: گزینه ۱ (۱۲۰۴ - متوسط - مفهومی و محاسباتی)

تابع کار

بنابر نظر اینشتین، وقتی نوری تک‌فام بر سطح فلزی می‌تابد، هر فوتون صرفاً با یکی از الکترون‌های فلز برهم‌کنش می‌کند. اگر فوتون انرژی کافی داشته باشد تا فرایند خارج کردن الکترون از فلز را انجام دهد، الکترون به‌طور آبی از آن گسیل می‌شود. در این صورت بخشی از انرژی فوتون صرف جدا کردن الکترون از فلز می‌شود و مابقی آن به صورت انرژی جنبشی الکترون خارج شده تبدیل می‌شود. این نظر اینشتین را می‌توان به کمک قانون پایستگی انرژی به صورت زیر نوشت:

$$hf = W + K \quad (\text{قانون پایستگی انرژی در اثر فوتوالکتریک})$$

که در آن W کار (انرژی) لازم برای خارج کردن الکترون‌ها از سطح یک فلز و K انرژی جنبشی آن‌ها پس از جدا شدن از سطح آن فلز است. از آن‌جا که برخی از الکترون‌ها در فلز کمتر مفیدند، برای خارج کردن آن‌ها از فلز کار کم‌تری لازم است. بنابراین اگر حداقل کار لازم برای خارج کردن الکترون‌ها از سطح یک فلز خاص W باشد، انرژی جنبشی سریع‌ترین فوتوالکترون‌های گسیل شده از آن برابر خواهد بود با:

$$K_{\max} = hf - W \quad (\text{معادله فوتوالکتریک})$$

W را تابع کار فلز می‌نامند که به جنس فلز بستگی دارد و همان‌گونه که گفتیم، کمینه کار لازم برای خارج کردن یک الکترون از یک فلز معین است.

نکته:

بیشینه انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها به بسامد فوتون فرودی (f) و جنس فلز (W) بستگی دارد و این انرژی مستقل از شدت نور تابشی است:

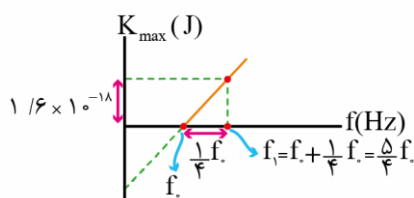
$$K_{\max} = hf - W \xrightarrow{W=hf_0} K_{\max} = h(f - f_0) = hc \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0} \right)$$

λ طول موج آستانه فلز است. حواستان باشد که باید $\lambda \leq \lambda_0$ باشد تا پدیده فوتوالکتریک رخ دهد.

پاسخ تشریحی:

با توجه به اینکه طول از مبدأ در این نمودار معادل f_0 است پس بسامد نور تابیده شده معادل با $f_1 = f_0 + \frac{1}{4}f_0 = \frac{5}{4}f_0$ خواهد شد.

همچنین مقدار انرژی جنبشی بیشینه برحسب eV معادل خواهد بود با:



$$K_{\max}(eV) = \frac{K_{\max}(J)}{e} = \frac{1/6 \times 10^{-18}}{1/6 \times 10^{-19}} = 1.0 eV$$

$$K_{\max} = hf_1 - W = \frac{5}{4}hf_0 - W \xrightarrow{hf_0=W} K_{\max} = \frac{5}{4}W - W$$

$$\rightarrow 1.0 = \frac{1}{4}W \rightarrow W = 4.0 eV$$

گروه آموزشی ماز

۷۳- در اتم هیدروژن، کدام گسیل زیر منجر به تابش فوتونی با بسامد $67/5 THz$ خواهد شد؟ ($R = 0.01(nm)^{-1}$, $c = 3 \times 10^8 \frac{m}{s}$)

(۴) $\Delta E(5 \rightarrow 2)$

(۳) $\Delta E(7 \rightarrow 2)$

(۲) $\Delta E(5 \rightarrow 4)$

(۱) $\Delta E(3 \rightarrow 1)$

پاسخ: گزینه ۲ (۱۲۰۴ - ساده - حفظی و مفهومی)

بررسی طول موج‌های اتم هیدروژن

تمامی طول موج‌های نشری اتم هیدروژن از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (n' < n)$$

ثابت ریدبرگ $R \approx 0.0109 nm^{-1}$

نام طیف	n'	n	ناحیه طیف
لیمان	۱	۲, ۳, ۴, ...	فرابنفش
بالمر	۲	۳, ۴, ۵, ...	۴ خط اصلی مرئی و بقیه فرابنفش
پاشن	۳	۴, ۵, ۶, ...	فروسرخ
براکت	۴	۵, ۶, ۷, ...	فروسرخ
پفوند	۵	۶, ۷, ۸, ...	فروسرخ

نکته:

برای درک بهتر از رشته‌ها (سری‌ها) از مفهوم انرژی استفاده کنید هرچه اختلاف بین n و n' بیشتر باشد، انرژی فوتون گسیل شده بیشتر است.

ویژگی فوتون گسیل شده	معادل انرژی	نتیجه	رابطه ریدبرگ
کمترین طول موج در رشته براکت	$E_{\max}$	$n' = 4, n = \infty$	$\frac{1}{\lambda} = R(\frac{1}{16} - \frac{1}{\infty})$
بیشترین بسامد گسیلی لیمان	$E_{\max}$	$n' = 1, n = \infty$	$\frac{1}{\lambda} = R(\frac{1}{1} - \frac{1}{\infty})$
بلندترین طول موج فرابنفش	$E_{\min}$	$n' = 2, n = 7$	$\frac{1}{\lambda} = R(\frac{1}{4} - \frac{1}{49})$
خط چهارم رشته بالمر	$E_{\min} < E < E_{\max}$	$n' = 2, n = 6$	$\frac{1}{\lambda} = R(\frac{1}{4} - \frac{1}{36})$

پاسخ تشریحی:

اگر طول موج فوتون گسیل شده را بدست آوریم چنین داریم:

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8}{67/5 \times 10^{12}} \approx 444.0 \text{ یا } 444.4 \text{ nm}$$

از آنجا که محدوده طول موج نور مرئی در بازه $400 \text{ nm} \leq \lambda \leq 700 \text{ nm}$ است، پس این فوتون در محدوده امواج فروسرخ قرار دارد و بنابراین در رشته پاشن ($n' = 3$)، براکت ($n' = 4$) یا پفوند ($n' = 5$) بوده است.

اکنون هر گزینه را جداگانه بررسی می‌کنیم:

گ ۱ $\leftarrow \Delta E(3 \rightarrow 1) \leftarrow$ لیمان $\leftarrow$ فرابنفش *

گ ۲ $\leftarrow \Delta E(5 \rightarrow 4) \leftarrow$ براکت $\leftarrow$ فروسرخ ✓

گ ۳ $\leftarrow \Delta E(7 \rightarrow 2) \leftarrow$ بالمر $\leftarrow$ فرابنفش *

گ ۴ $\leftarrow \Delta E(5 \rightarrow 2) \leftarrow$ بالمر $\leftarrow$ مرئی *

گروه آموزشی ماز

۷۴- یک هسته پرتوزا در یک واپاشی طبیعی، دو ذره آلفا، یک ذره بتای منفی و یک نوترون گسیل می‌کند. بار الکتریکی هسته دختر نسبت به هسته مادر چند کولن و به چه صورت تغییر خواهد کرد؟ ($e = 1/6 \times 10^{-19} \text{ C}$)

(۱) $1/6 \times 10^{-19}$ کولن کاهش می‌یابد.

(۲) $4/8 \times 10^{-19}$ کولن کاهش می‌یابد.

(۳) 8×10^{-19} کولن کاهش می‌یابد.

(۴) ثابت می‌ماند.

(۱۲۰۲ - متوسط - محاسباتی)

پاسخ: گزینه ۲

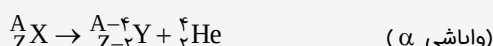
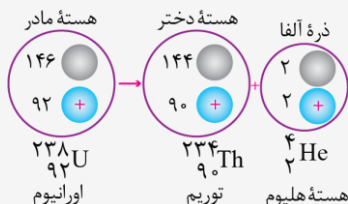
واپاشی α

(۱) این واپاشی در هسته‌های سنگین روی می‌دهد.

(۲) پرتوهای α ذرات باردار مثبت از جنس هسته اتم هلیوم (${}^4_2\text{He}$) هستند و از دو پروتون و دو نوترون تشکیل شده‌اند.

(۳) برد پرتوهای α کوتاه است. این ذرات پس از طی مسافتی کوتاه در حدود ۱ cm تا ۲ cm در هوا یا هنگام عبور از لایه‌ای نازک از مواد جذب می‌شوند. پرتوهای α کمترین نفوذ را دارند و با ورقه نازک سربی با ضخامت ناچیز (۰/۰۱ mm) متوقف می‌شوند.

(۴) اگر ذره‌های α از راه تنفس یا دستگاه گوارش وارد بدن شوند، باعث آسیب‌های شدید به بدن خواهند شد. به معادله این واپاشی و مثالی که مطرح شده است توجه کنید:



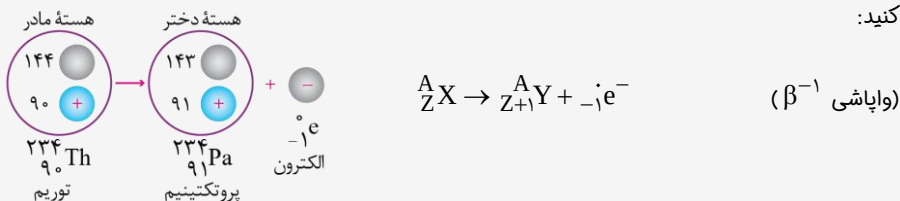
واپاشی β^-

(۱) این واپاشی، متداول‌ترین نوع واپاشی در هسته‌ها است.

(۲) پرتوهای β^- در واقع همان الکترون‌ها هستند.

(۳) پرتوهای β^- مسافت خیلی بیشتری را نسبت به پرتوهای α در سرب نفوذ می‌کنند. تقریباً پرتوهای β^- می‌توانند مسافتی در حدود (۰/۱ mm) در سرب نفوذ کنند.

۴) الکترون گسیل شده در این واپاشی یکی از الکترون‌های مداری اتم نیست؛ این الکترون وقتی به وجود می‌آید که نوترونی درون هسته، به پروتون تبدیل شود. به معادله این واپاشی و مثالی که مطرح شده توجه کنید:

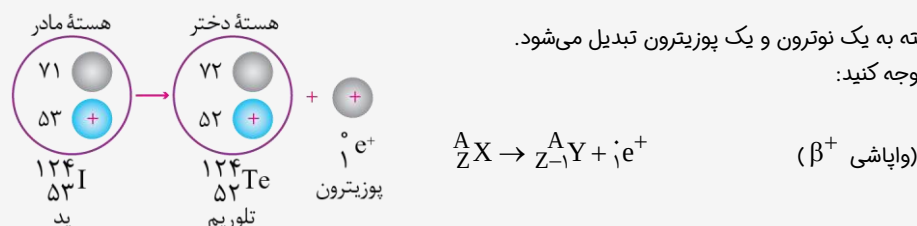


واپاشی β^+

۱) در این واپاشی ذره گسیل شده توسط هسته، جرم یکسانی با الکترون دارد ولی به جای بار $-e$ دارای بار الکتریکی $+e$ است. به این الکترون مثبت، پوزیترون می‌گویند و با نماد β^+ یا e^+ نمایش داده می‌شود.

۲) مسافتی که پرتوهای β^+ در سرب نفوذ می‌کنند مانند β^- در حدود (0.1 mm) است.

۳) هنگام واپاشی β^+ یکی از پروتون‌های درون هسته به یک نوترون و یک پوزیترون تبدیل می‌شود. به معادله این واپاشی و مثالی که مطرح شده است توجه کنید:

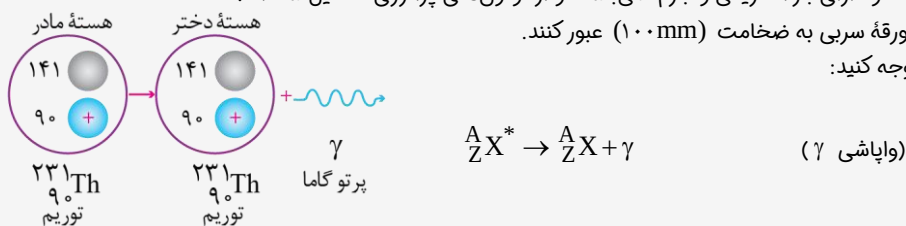


واپاشی γ

۱) اغلب هسته‌ها پس از واپاشی آلفا یا بتا، در حالت برانگیخته قرار می‌گیرند و با گسیل پرتوی گاما به حالت پایه می‌رسند.

۲) پرتوهای گاما از جنس امواج الکترومغناطیسی هستند و دارای بار الکتریکی و جرم نمی‌باشند و از فوتون‌های پرانرژی تشکیل شده‌اند.

۳) پرتوهای گاما بیشترین نفوذ را دارند و می‌توانند از ورقه سربی به ضخامت (100 mm) عبور کنند. به معادله این واپاشی و مثالی که مطرح شده است، توجه کنید:

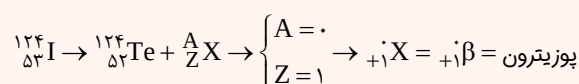


مثال:

شکل مقابل، واپاشی γ را نشان می‌دهد. نام ذره گسیل شده، کدام است؟
 ۱) آلفا ۲) گاما ۳) پوزیترون

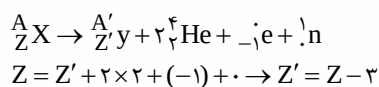
پاسخ: ۳

با توجه به واپاشی انجام شده می‌توان نوشت:



پاسخ تشریحی:

معادله این واپاشی را می‌نویسیم:



پس تعداد پروتون‌های هسته دختر سه واحد کمتر از تعداد پروتون‌های هسته مادر بوده و بنابراین بار الکتریکی هسته دختر نسبت به هسته مادر به اندازه زیر کاهش می‌یابد:

$$q = ne = 3 \times 1.6 \times 10^{-19} = 4.8 \times 10^{-19} \text{ C}$$

گروه آموزشی ماز

۷۵- در فروپاشی یک ماده پرتوزا، در لحظه t_1 ۵۰ درصد و در لحظه t_2 ۹۳/۷۵ درصد از تعداد هسته‌های اولیه دچار فروپاشی شده است. $\Delta t = t_2 - t_1$ چند برابر نیمه عمر این ماده است؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

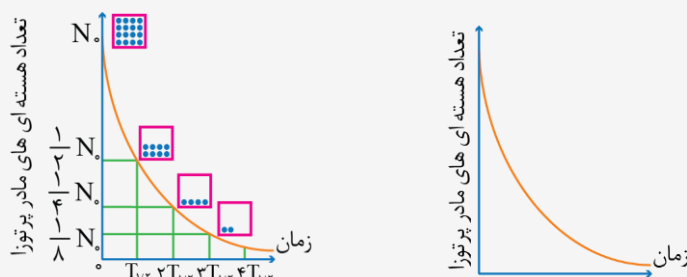
پاسخ: گزینه ۲ (۱۲۰۴ - ساده - مسأله)

نیمه عمر



همان‌طور که گفتیم هسته‌های ناپایدار با گذشت زمان دچار واپاشی می‌شوند و به ذرات، انرژی و هسته‌های سبک‌تر تبدیل می‌شوند، به مدت زمانی که طول می‌کشد تا تعداد هسته‌های مادر موجود در یک نمونه، به نصف برسند نیمه‌عمر می‌گویند و آن را با $T_{\frac{1}{2}}$ نشان می‌دهند.

فرض کنید تعداد هسته‌های مادر موجود در یک ماده پرتوزا برابر N_0 باشد، همان‌طور که در نمودارهای زیر می‌بینید، با گذشت زمان، این هسته‌ها دچار واپاشی شده و کاهش می‌یابند، همان‌طور که در نمودار سمت چپ می‌بینید با گذشت هر نیمه‌عمر تعداد هسته‌های باقی‌مانده نصف می‌شود.



برای به دست آوردن تعداد هسته‌های باقی‌مانده در یک واپاشی می‌توان از رابطه زیر استفاده کرد:

$$N = \frac{N_0}{2^n} \quad m = \frac{m_0}{2^n} \quad n = \frac{t}{T_{\frac{1}{2}}}$$

N_0 ← تعداد هسته‌های اولیه

m_0 ← جرم اولیه

t ← کل زمان واپاشی

N ← تعداد هسته‌های باقی‌مانده

m ← جرم فعال

n ← تعداد نیمه‌عمرهای سپری شده

$T_{\frac{1}{2}}$ ← زمان نیمه‌عمر

پاسخ تشریحی:

در هر نیمه‌عمر، تعداد هسته‌ها به نصف مقدار قبلی می‌رسد. در لحظه t_1 ، ۵۰ درصد از تعداد هسته‌های اولیه فروپاشیده شده و بنابراین ۵۰ درصد از تعداد هسته‌های اولیه باقی مانده است. همچنین در لحظه t_2 ، ۹۳/۷۵ درصد از تعداد هسته‌های اولیه فروپاشیده شده پس ۶/۲۵ درصد از تعداد هسته‌های اولیه باقی مانده است. اگر دو عدد ۵۰٪ و ۶/۲۵٪ را با هم مقایسه کنیم متوجه خواهیم شد که در این بازه زمانی، عدد ۵۰٪، ۳ بار نصف شده تا به عدد ۶/۲۵٪ رسیده است! پس به راحتی می‌توان گفت Δt معادل ۳ نیمه‌عمر بوده است!

گروه آموزشی ماز



۷۶- چند مورد از مطالب زیر، نادرست هستند؟ (میانگین جرم اتمی بور B) را $10^{-23} \times 1/8$ در نظر بگیرید.)
(آ) هر چه نیم‌عمر یک ایزوتوپ کوتاه‌تر باشد، پایداری آن ایزوتوپ بیش‌تر است.

(ب) شمار ذرات زیراتمی باردار در آخرین گاز نجیب، $29/5$ برابر Z فراوان‌ترین عنصر پوسته جامد زمین است.
(پ) با افزایش عدد اتمی، همواره تعداد نوارهای رنگی در طیف نشری خطی عناصر مختلف افزایش پیدا می‌کند.
(ت) مدل بور توانست علاوه بر طیف نشری خطی هیدروژن، طیف نشری خطی سایر عناصر را نیز توجیه کند.
(ث) در یک نمونه به جرم $16/254$ گرم از عنصر بور، $10^{23} \times 3/612$ الکترون با عدد کوانتومی $l = 0$ وجود دارد.

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

پاسخ: گزینه ۳ (سخت - مفهومی و مسئله - ۱۰۰)

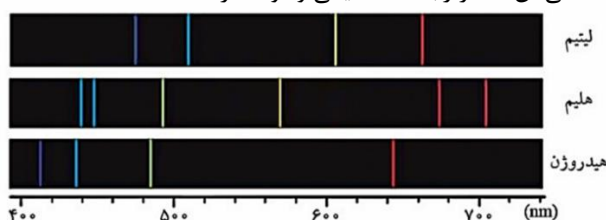
به جز عبارت (ب)، سایر عبارات‌های داده شده نادرست هستند.

بررسی موارد:

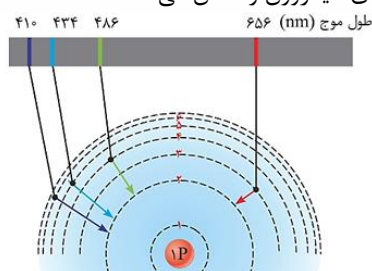
(آ) نیم‌عمر هر ایزوتوپ، برابر با طول بازه‌ی زمانی است که در طول آن، نیمی از جرم ایزوتوپ مورد نظر دچار واپاشی می‌شود. هر چه نیم‌عمر یک ایزوتوپ کوتاه‌تر باشد، آن ایزوتوپ زودتر دچار واپاشی شده و در نتیجه ذرات سازنده آن ناپایدارتر است. به عبارت دیگر، می‌توان گفت پایداری هر ایزوتوپ با نیم‌عمر آن ایزوتوپ رابطه مستقیم دارد.

(ب) آخرین عنصر جدول دوره‌ای، آخرین عنصری است که در گروه ۱۸ قرار گرفته است. این عنصر، معادل با اوگانسون ($118Og$) بوده و تعداد ذرات زیر اتمی باردار (مجموع الکترون‌ها و پروتون‌ها) در آن برابر با $236 = 2 \times 118 = Z$ عدد است. فراوان‌ترین عنصر موجود در پوسته جامد زمین، اکسیژن ($8O$) است و بنابراین مقدار نسبت موردنظر برابر با $29/5 = \frac{236}{8}$ خواهد بود.

(پ) مطابق شکل زیر، تعداد نوارهای رنگی در طیف نشری خطی عناصر $1H$ ، $2He$ ، $3Li$ به ترتیب ۴، ۶ و ۴ است. بنابراین می‌توان گفت میان تعداد خطوط مرئی موجود در طیف نشری یک عنصر و عدد اتمی آن عنصر رابطه مستقیمی وجود ندارد.



(ت) مدل بور توانست با موفقیت طیف نشری خطی هیدروژن را توجیه کند؛ اما توانایی توجیه طیف نشری خطی سایر عناصر را نداشت. شکل زیر چگونگی ایجاد چهار نوار رنگی ناحیه مرئی طیف نشری خطی اتم‌های هیدروژن را نشان می‌دهد:

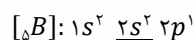


بور پس از پژوهش‌های بسیار، توانست مدلی برای اتم هیدروژن ارائه کند. اگرچه مدل بور با موفقیت توانست طیف نشری خطی هیدروژن را توجیه کند، اما توانایی توجیه طیف نشری خطی دیگر عناصر را نداشت. دانشمندان به دنبال توجیه و علت ایجاد طیف نشری خطی دیگر عناصر و نیز چگونگی نشر نور از سایر اتم‌ها، ساختاری لایه‌ای را برای اتم ارائه کردند. در این مدل، اتم را کره‌ای در نظر می‌گیرند که هسته در فضایی بسیار بسیار کوچک و در مرکز آن جای دارد و الکترون‌ها در فضایی بسیار بزرگ‌تر و در لایه‌هایی پیرامون هسته توزیع می‌شوند. نکته مهم در رابطه با این مدل اتمی، کوانتومی بودن دادوستد انرژی هنگام انتقال الکترون از یک لایه به لایه دیگر است. در واقع، الکترون هنگام انتقال از یک لایه به لایه دیگر، انرژی را به صورت پیمانه‌ای یا بسته‌های معین، جذب یا نشر می‌کند.

(ث) جرم مولی بور برابر با حاصل ضرب عدد آووگادرو در میانگین جرم هر اتم بور است. بر این اساس، داریم:

$$g \cdot mol^{-1} = (1/8 \times 10^{-23}) \times (6/02 \times 10^{23}) = 10/836$$

از طرفی با توجه به آرایش الکترونی بور، در هر اتم این عنصر، ۴ الکترون با $l = 0$ قرار دارد. آرایش الکترونی این عنصر به صورت زیر است:



در نهایت، تعداد الکترون‌های موردنظر را بدست می‌آوریم:

$$? e^- = 16/254 g B \times \frac{1 mol B}{10/836 g B} \times \frac{6/02 \times 10^{23} B}{1 mol B} \times \frac{4 e^-}{1 B} = 3/612 \times 10^{24} e^-$$

۷۷- اگر اختلاف شمار نوترون و الکترون در یک رادیوایزوتوپ پولونیوم (^{210}Po) برابر ۴۱ باشد، نسبت تعداد نوترون ها به پروتون ها در این رادیوایزوتوپ از ۱/۵ بوده و بعد از گذشت سال، ۹۶/۸۷۵ درصد از یک نمونه ۵۰ گرمی آن، تجزیه خواهد شد. (نیم عمر رادیوایزوتوپ مورد نظر را $10^9 \times 2/43$ ثانیه و هر ماه را معادل ۳۰ روز در نظر بگیرید.)

(۱) کوچک تر - ۳۱۲/۵ (۲) بزرگ تر - ۳۱۲/۵ (۳) کوچک تر - ۳۹۰/۶۲۵ (۴) بزرگ تر - ۳۹۰/۶۲۵

پاسخ: گزینه ۳ (سخت - مسأله - ۱۰۰۱)

در قدم اول، شمار نوترون ها و پروتون های این رادیوایزوتوپ را حساب می کنیم. با توجه به داده های سوال داریم:

$$\begin{cases} (1) n - e = 41 \\ (2) Z = e = 84 \end{cases} \rightarrow n = 41 + e = 41 + 84 = 125$$

در نتیجه نسبت مورد نظر برابر با $1/48 \approx \frac{125}{84}$ بوده و از ۱/۵ کوچک تر است.

اغلب هسته هایی که نسبت شمار نوترون ها به پروتون های آنها برابر یا بیش از ۱/۵ باشد، ناپایدار هستند. بر این اساس، داریم:

$$A = Z + N \text{ , در اغلب ایزوتوپ های ناپایدار , } \frac{N}{Z} \geq 1/5 \xrightarrow[\text{۱ اضافه می کنیم}]{\text{به دو طرف نامساوی}} \frac{N}{Z} + 1 \geq 2/5 \Rightarrow \frac{N+Z}{Z} \geq 2/5 \Rightarrow \frac{A}{Z} \geq 2/5 .$$

با توجه به محاسبات بالا، می توان گفت در اغلب ایزوتوپ های ناپایدار، نسبت عدد جرمی به عدد اتمی برابر یا بیشتر از ۲/۵ است. البته، در برخی از ایزوتوپ های ناپایدار، نسبت عدد جرمی به عدد اتمی کوچک تر از ۲/۵ است. به عنوان مثال، در ساختار اتم تکنسیم (^{99}Tc)، مقدار نسبت گفته شده برابر با ۲/۳ است، در حالی که تکنسیم از جمله عناصر رادیواکتیو بوده و نیم عمر بسیار کوتاهی دارد.

جرم رادیوایزوتوپ باقی مانده از رابطه زیر بدست می آید که در آن n تعداد نیم عمرهای سپری شده و m جرم اولیه رادیوایزوتوپ است. بر این اساس، داریم:

$$m = \left(\frac{1}{2}\right)^n \times m_0 \rightarrow \left(\frac{100 - 96/875}{100}\right) \times 50 = \left(\frac{1}{2}\right)^n \times 50 \rightarrow \frac{3/125}{100} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow \frac{1}{32} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow n = 5$$

نیم عمر رادیوایزوتوپ مورد نظر بر حسب سال برابر خواهد بود با:

$$? \text{ year} = (2/43 \times 10^9) s \times \frac{1 h}{3600 s} \times \frac{1 \text{ day}}{24 h} \times \frac{1 \text{ month}}{30 \text{ day}} \times \frac{1 \text{ year}}{12 \text{ month}} = 78/125 \text{ year}$$

در نهایت، زمان مورد نیاز برای تجزیه نمونه مورد نظر را بدست می آوریم:

$$n = \frac{t}{T} \rightarrow t = n \times T = 5 \times 78/125 = 390/625 \text{ year}$$

گروه آموزشی ماز

۷۸- در یک آزمایش، از واکنش مخلوطی از ایزوتوپ های ^{16}O و ^{18}O با ایزوتوپ های ^{50}Cr ، ^{52}Cr و ^{54}Cr اکسیدهایی با جرم های مولی متفاوت تشکیل می شود که در آن ها عدد اکسایش کروم برابر ۶+ است. نسبت تقریبی جرم مولی سنگین ترین این اکسیدها به جرم مولی سبک ترین آن ها و تعداد انواع اکسیدهایی با جرم مولی زوج، به ترتیب از راست به چپ کدام است؟

(۱) $6 - 1/0.4$ (۲) $8 - 1/0.4$ (۳) $6 - 1/0.9$ (۴) $8 - 1/0.9$

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط - مسأله - ۱۰۰۱)

عدد اکسایش کروم در ترکیب CrO_3 برابر با ۶+ است. در رابطه با این ترکیب، داریم:

$$\text{Cr} + 3(-2) = 0 \rightarrow \text{Cr} = +6$$

در ساختار سنگین ترین اکسید مورد نظر، ایزوتوپ های ^{54}Cr و ^{18}O و در ساختار سبک ترین اکسید ایزوتوپ های ^{50}Cr و ^{16}O به کار رفته اند. بر این اساس، در رابطه با این اکسیدها داریم:

$$\left. \begin{aligned} \text{جرم مولی سنگین ترین اکسید} &= 54 + (3 \times 18) = 107 \text{ g.mol}^{-1} \\ \text{جرم مولی سبک ترین اکسید} &= 50 + (3 \times 16) = 98 \text{ g.mol}^{-1} \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{نسبت مورد نظر} = \frac{107}{98} \approx 1/0.9$$

اما اکسیدهایی که در آن ها ایزوتوپ های ^{50}Cr یا ^{52}Cr و ایزوتوپ های ^{16}O و ^{18}O به کار رفته باشد، جرم مولی زوج دارند. از سه اتم اکسیژن CrO_3 ، صفر تا ۳ اتم می تواند ^{16}O باشد؛ پس در مجموع چهار حالت داریم:

حالت اول: ۳ تا ^{18}O و یک ^{16}O حالت دوم: یکی ^{16}O و ۲ تا ^{18}O

حالت سوم: ۲ تا ^{16}O و یکی ^{18}O حالت چهارم: ۳ تا ^{16}O

از طرف دیگر، تک اتم کروم در این ترکیب، یکی از ایزوتوپ ^{50}Cr یا ^{52}Cr که جرم اتمی زوج دارند می تواند باشد؛ بنابراین در مجموع $4 \times 2 = 8$ نوع اکسید با جرم مولی زوج داریم.

گروه آموزشی ماز

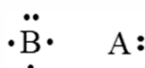
۷۹- کدام مطلب زیر، نادرست است؟

(۱) اولین عنصر از جدول دوره ای که آرایش الکترونی آن از قاعده آفا تبعیت نمی کند، در لایه سوم خود ۱۳ الکترون دارد.

(۲) حدود ۱۶/۷ درصد از عناصر موجود در دسته p جدول دوره ای، تمایل به انجام واکنش های شیمیایی ندارند.

(۳) شمار الکترون های ظرفیتی چهارمین عنصر دسته d با شمار این الکترون ها در اتم مرکزی SF_6 برابر است.

(۴) میان یون های حاصل از دو عنصر A و B با آرایش الکترون - نقطه ای مقابل، پیوند یونی برقرار می شود.



پاسخ: گزینه ۴ (آسان - مفهومی - ۱۰۰۱)

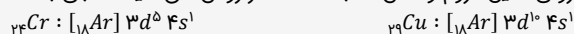
با توجه به آرایش الکترون-نقطه‌ای دو عنصر A و B، می‌توان گفت این دو عنصر به ترتیب نافلزی از گروه پانزدهم جدول تناوبی و گاز نجیب هلیوم (He) هستند و همانطور که می‌دانیم، گازهای نجیب با سایر اتم‌ها وارد واکنش نمی‌شوند. توجه داریم که بر اثر واکنش یک فلز و یک نافلز، به ترتیب یک کاتیون و یک آنیون تولید شده و به دلیل وجود بارهای الکتریکی ناهمنام، بین یون‌ها نیروی جاذبه بسیار قوی برقرار خواهد شد که پیوند یونی نامیده می‌شود.

بررسی سایر گزینه‌ها:

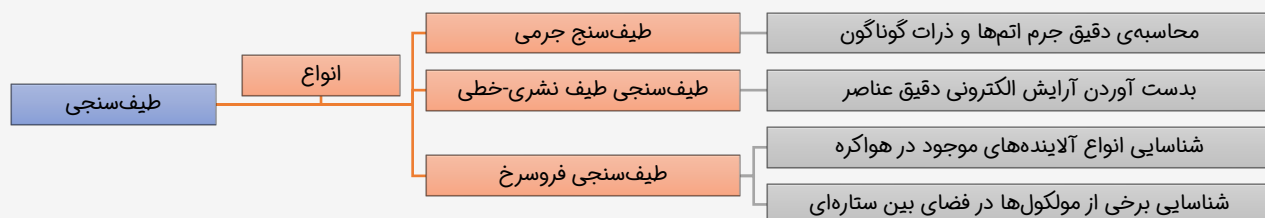
(۱) اولین عنصر از جدول دوره‌ای که آرایش الکترونی آن از قاعده آفبا تبعیت نمی‌کند، ${}_{24}Cr$ است که زیرلایه‌های $3s$ و $3p$ آن پر از الکترون و زیرلایه $3d$ آن نیمه پر است؛ بر این اساس در لایه سوم آن $13 = 2 + 6 + 1 =$ الکترون وجود دارد. آرایش الکترونی این عنصر به صورت زیر است:



قاعده آفبا، آرایش الکترونی اتم اغلب عنصرها را پیش‌بینی می‌کند؛ اما برای اتم برخی عنصرهای جدول دوره‌ای مثل کروم و مس، نارسایی دارد. امروزه به کمک روش‌های طیف سنجی پیشرفته، آرایش الکترونی چنین اتم‌هایی را با دقت تعیین می‌کنند. در واقع، روش طیف‌سنجی می‌تواند آرایش الکترونی دقیق همه عناصر از جمله کروم و مس را بدست بیاورد. آرایش الکترونی دقیق کروم و مس که با استفاده از روش‌های طیف‌سنجی بدست آمده، به صورت زیر است:



همانطور که مشخص است، در آرایش الکترونی این اتم‌ها یک الکترون از زیرلایه $4s$ به زیرلایه $3d$ منتقل شده است؛ پس این اتم‌ها از قاعده آفبا پیروی نمی‌کنند. کاربردهای مختلف انواع طیف‌سنجی به صورت زیر است:

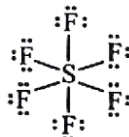


(۲) از بین $36 = 6 \times 6$ عنصر دسته p ، ۶ عنصر گاز نجیب بوده و تمایلی به انجام واکنش شیمیایی ندارد. بر این اساس درصد موردنظر برابر است با:

$$\frac{6}{36} \times 100 \approx 16.7 \text{ درصد}$$

توجه داریم که هلیوم $[He]$ ، تنها گاز نجیبی است که به دسته‌ای به غیر از دسته p (دسته s) تعلق دارد.

(۳) چهارمین عنصر دسته d ، معادل با ${}_{24}Cr$ است که آرایش الکترونی آن به $3d^5 4s^1$ ختم شده و ۶ الکترون ظرفیتی دارد. اتم مرکزی SF_6 اتم گوگرد (S) بوده که همانند دیگر عناصر گروه ۱۶ جدول دوره‌ای، ۶ الکترون ظرفیتی دارد. ساختار مولکولی این ماده به صورت زیر است:



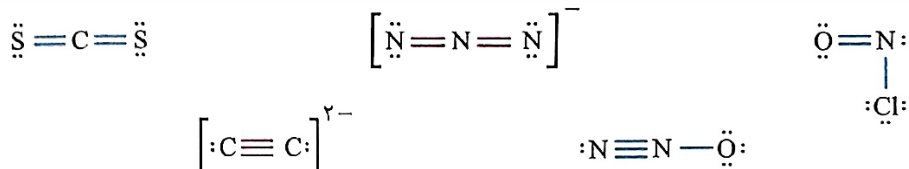
گروه آموزشی ماز

۸۰- در چند درصد از گونه‌های زیر، شمار جفت الکترون‌های پیوندی و شمار جفت الکترون‌های ناپیوندی با هم برابر است؟

- CS_2 • (۴) ۸۰
 N_3^- • (۳) ۶۰
 $NOCl$ • (۲) ۴۰
 C_2^{2-} • (۱) ۲۰
 N_2O •

پاسخ: گزینه ۳ (آسان - مفهومی - ۱۰۰۲)

ساختار لوویس گونه‌های داده شده به صورت زیر است:



با توجه به ساختارهای لوویس رسم شده، در ۳ گونه از گونه‌های داده شده (کربن دی‌سولفید، N_3^- و N_2O) یعنی $60\% = \frac{3}{5} \times 100$ از کل گونه‌ها، شمار جفت الکترون‌های پیوندی ($p.e$) و جفت الکترون‌های ناپیوندی ($n.p.e$) با هم برابر هستند.

گروه آموزشی ماز

۸۱- در یک آزمایش، گاز CO_2 حاصل از سوختن کامل ۱۷/۸ گرم از نوعی چربی با فرمول $C_{57}H_{110}O_6$ ، با مخلوطی از دو ترکیب منیزیم اکسید و کلسیم اکسید به طور کامل واکنش داده است. اگر مجموع جرم مواد معدنی تولید شده در این آزمایش، برابر با ۹۹/۶ گرم باشد، نسبت شمار یون های فلز با واکنش پذیری کمتر به شمار یون های فلز دیگر در مخلوط مورد نظر کدام است؟

($Ca = 40, Mg = 24, O = 16, C = 12, H = 1 : g.mol^{-1}$)

۴ (۴)

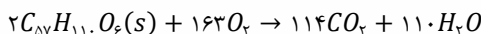
۳/۷۵ (۳)

۳/۵ (۲)

۳/۲۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ (سخت - مسأله ۱۰۰۲)

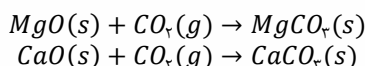
واکنش سوختن کامل چربی مورد نظر به صورت زیر انجام می شود:



ابتدا تعداد مول گاز CO_2 تولید شده در واکنش سوختن را محاسبه می کنیم:

$$? mol CO_2 = 17.8 g C_{57}H_{110}O_6 \times \frac{1 mol C_{57}H_{110}O_6}{890 g C_{57}H_{110}O_6} \times \frac{114 mol CO_2}{2 mol C_{57}H_{110}O_6} = 1.14 mol$$

از واکنش CO_2 با دو ترکیب MgO و CaO به ترتیب دو ماده معدنی $MgCO_3$ و $CaCO_3$ تولید می شود. معادله واکنش های انجام شده طی این فرایند به صورت زیر است:



اگر در مخلوط اولیه n مول MgO و m مول CaO وجود داشته باشد، از واکنش مخلوط اولیه با گاز CO_2 ، مقدار n مول $MgCO_3$ و m مول $CaCO_3$ تولید خواهد شد. بر این اساس داریم:

$$\text{جرم } CaCO_3 \text{ تولید شده} + \text{جرم } MgCO_3 \text{ تولید شده} = n \times (24 + 12 + 48) + m \times (40 + 12 + 48)$$

$$= 84n + 100m = 99.6 \quad (1)$$

از آن جا که هر مول از مخلوط اولیه با یک مول گاز CO_2 واکنش می دهد، داریم:

$$(2) \quad n + m = 1.14$$

با جایگزینی معادله (۲) در معادله (۱)، مقادیر m و n بدست می آید. در این رابطه، داریم:

$$84(1.14 - m) + 100m = 99.6 \rightarrow 16m = 3.84 \rightarrow m = 0.24 mol \rightarrow n = 1.14 - m = 1.14 - 0.24 = 0.9 mol$$

با افزایش شعاع اتمی فلزهای موجود در هر گروه از جدول دوره ای، واکنش پذیری آن ها افزایش می یابد. بنابراین واکنش پذیری فلز کلسیم از فلز منیزیم بیشتر است. بنابراین نسبت مورد نظر برابر خواهد بود با:

$$\frac{\text{شمار یون های فلز با واکنش پذیری کمتر}}{\text{شمار یون های فلز با واکنش پذیری بیشتر}} = \frac{n}{m} = \frac{0.9}{0.24} = 3.75$$

گروه آموزشی ماز

۸۲- در یک نمونه محلول آمونیوم فسفات، تفاوت شمار آنیون ها و کاتیون ها برابر با 1.5×10^{22} است. اگر به این محلول، مقدار 539.5 میلی گرم سدیم فسفات اضافه کنیم، غلظت یون فسفات در محلول نهایی بر حسب ppm به تقریب کدام است؟ (جرم محلول نهایی را برابر با 400 گرم در نظر بگیرید.

($P = 31, Na = 23, O = 16 : g.mol^{-1}$)

۳۷۵۰ (۴)

۳۵۰۰ (۳)

۳۲۵۰ (۲)

۳۱۲۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط - مسأله ۱۰۰۳)

با توجه به رابطه $ppm = \frac{\text{حل شونده } mg}{\text{محلول } kg}$ ، کافی است جرم کلی یون فسفات (PO_4^{3-}) موجود در محلول نهایی را بر حسب میلی گرم حساب کنیم. توجه داریم که

جرم محلول نهایی برابر با $400 g \times \frac{1 kg}{1000 g} = 0.4 kg$ است. در قدم اول، جرم یون فسفات موجود در محلول اولیه را حساب می کنیم. با توجه به فرمول شیمیایی نمک آمونیوم فسفات که به صورت $(NH_4)_3PO_4$ است، در هر مول از این ترکیب ۳ مول کاتیون و یک مول آنیون وجود دارد. در نتیجه می توان گفت تفاوت تعداد مول آنیون ها و کاتیون ها در هر مول از این ترکیب یونی برابر با ۲ مول یا معادل با $1.24 \times 10^{24} = 1.24 \times 10^{22} \times 100 = 1.24 \times 10^{24}$ عدد است. بر این اساس داریم:

$$? mg PO_4^{3-} = 1.5 \times 10^{22} \times \frac{1 mol (NH_4)_3PO_4}{1.24 \times 10^{24} \times \text{تفاوت شمار یون ها}} \times \frac{1 mol PO_4^{3-}}{1 mol (NH_4)_3PO_4} \times \frac{95 g PO_4^{3-}}{1 mol PO_4^{3-}} \times \frac{1000 mg}{1 g}$$

$$= 1187.5 mg$$

از طرف دیگر، از حل شدن یک مول سدیم فسفات با فرمول Na_3PO_4 در محلول، یک مول یون PO_4^{3-} آزاد می شود. بر این اساس داریم:

$$? mg PO_4^{3-} = 539.5 mg Na_3PO_4 \times \frac{1 g Na_3PO_4}{1000 mg Na_3PO_4} \times \frac{1 mol Na_3PO_4}{164 g Na_3PO_4} \times \frac{1 mol PO_4^{3-}}{1 mol Na_3PO_4} \times \frac{95 g PO_4^{3-}}{1 mol PO_4^{3-}} \times \frac{1000 mg PO_4^{3-}}{1 g PO_4^{3-}}$$

$$\approx 312.5 mg$$

بنابراین در محلول نهایی 1500 mg $1187/5 + 312/5 = 1500$ یون فسفات وجود داشته و غلظت این یون بر حسب ppm برابر خواهد بود با:

$$\text{ppm} = \frac{\text{حل شونده } \text{mg}}{\text{محلول } \text{kg}} = \frac{1500}{0/4} = 3750$$

گروه آموزشی ماز

۸۳- کدام موارد از عبارت‌های زیر، درست هستند؟

- (آ) میانگین قدرت پیوند یونی در کلسیم فسفات و پیوند هیدروژنی آب، از نیروی یون-دوقطبی در مخلوط این مواد بیشتر است.
 (ب) آب تصفیه شده با استفاده از فرایند تقطیر، نسبت به آب تصفیه شده توسط صافی کربن، مقدار آلودگی کمتری دارد.
 (پ) انحلال پذیری گازهای مختلف در آب با فشار گاز رابطه مستقیم داشته و با دمای محلول مورد نظر رابطه عکس دارد.
 (ت) در مواد مولکولی با جرم مولی مشابه، ماده‌ای که در میدان الکتریکی جهت گیری نمی کند، آسان تر مایع می شود.

(۴) پ و ت

(۳) ب و ت

(۲) آ و پ

(۱) آ و ب

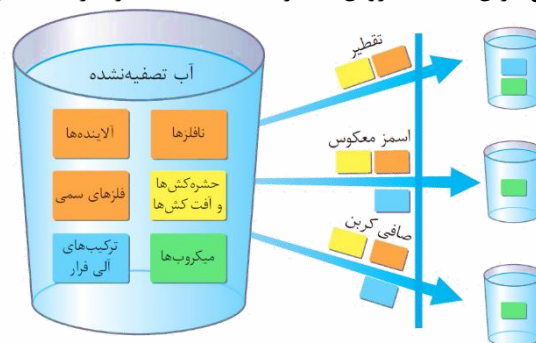
پاسخ: گزینه ۲ (متوسط - حفظی و مفهومی - ۱۰۰۳)

عبارت‌های (آ) و (پ) درست هستند.

پروسی موارده:

(آ) کلسیم فسفات $(Ca_3(PO_4)_2)$ ، یک ترکیب نامحلول در آب است. از این رو می توان گفت که میانگین جاذبه‌ها در حلال خالص (پیوند هیدروژنی در آب) و حل شونده خالص (پیوند یونی در کلسیم فسفات) از جاذبه‌های حل شونده با حلال در محلول (نیروی جاذبه یون - دوقطبی بین ذرات آب و یون‌های کلسیم و فسفات) بیشتر است.

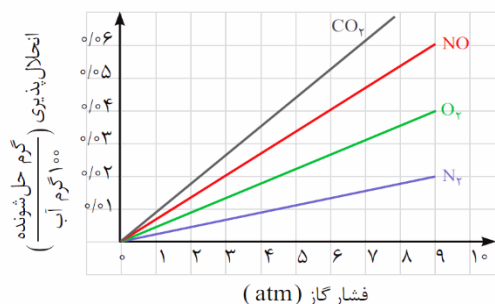
(ب) با توجه به شکل صفحه بعد، استفاده از صافی کربن نسبت به روش تقطیر، آلاینده‌های بیشتری را حذف می کند.



توجه داریم که ترکیب‌های آلی فرار در روش تقطیر حذف نشده ولی در دو روش اسمز معکوس و صافی کربن حذف می شوند. جدول زیر، مواد جداسازی شده و جدا نشده توسط روش‌های تصفیه‌ای آب دریا را نمایش می دهد:

مواد جداسازی شده و جدانشده از آب با روش‌های تصفیه‌ای					
تقطیر		اسمز معکوس		صافی کربن	
جداسازی شده	حشره کش و آفت کش / فلزات سمی / نافلرها / آلاینده ها	جداسازی شده	حشره کش‌ها و آفت کش‌ها / فلزات سمی / نافلرها / آلاینده ها	جداسازی شده	حشره کش‌ها و آفت کش‌ها / فلزات سمی / نافلرها / آلاینده ها / ترکیبات آلی فرار
جدانشده	میکروب‌ها / ترکیبات آلی فرار	جدانشده	میکروب‌ها	جدانشده	میکروب‌ها

همانطور که مشخص است، روش تقطیر، نسبت به روش‌های صافی کربنی و اسمز معکوس توان کمتری در جداسازی مواد آلاینده از آب دریا را دارد. (پ) مطابق قانون هنری، انحلال پذیری گازها در آب با افزایش فشار به صورت خطی افزایش پیدا می کند. برای مثال، به نمودار زیر توجه کنید:

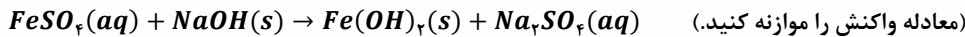


از طرفی انحلال پذیری گازها در آب با افزایش دما کاهش پیدا می کند. بر این اساس می توان گفت که انحلال پذیری گازها با فشار رابطه مستقیم و با دمای محلول مورد نظر نیز رابطه عکس دارد.

ت) از بین دو ماده مولکولی با جرم مولی مشابه، ماده‌ای که در میدان الکتریکی جهت‌گیری نمی‌کند، گشتاور دوقطبی صفر یا نزدیک به صفر داشته و ناقطبی است؛ بنابراین نقطه جوش آن پایین‌تر بوده و در فرایند میعان، سخت‌تر مایع می‌شود.

گروه آموزشی ماز

۸۴- اگر به ۲/۵ کیلوگرم محلول آهن(II) سولفات با غلظت 30400 ppm ، مقدار گرم سدیم هیدروکسید جامد اضافه کنیم، واکنش زیر به طور کامل انجام شده و مجموع غلظت مولی یون‌ها در محلول نهایی به تقریب برابر مول بر لیتر خواهد بود. (حجم محلول نهایی را برابر با ۲۵۶۰ میلی‌لیتر در نظر بگیرید. $(Fe = 56, S = 32, O = 16 : g.mol^{-1})$)



۰/۵۸ - ۴۰ (۴)

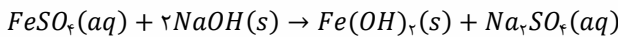
۰/۴۵ - ۴۰ (۳)

۰/۵۸ - ۲۰ (۲)

۰/۴۵ - ۲۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط - مسأله - ۱۰۰۳)

ابتدا معادله واکنش را موازنه می‌کنیم:



با توجه به تعریف ppm که به صورت $ppm = \frac{\text{حلال‌شونده (mg)}}{\text{محلول (kg)}}$ است، تعداد مول آهن(II) سولفات موجود در محلول ۲/۵ کیلوگرمی اولیه را بدست می‌آوریم:

$$? \text{ mol } FeSO_4 = 2/5 \text{ kg محلول} \times \frac{30400 \text{ mg } FeSO_4}{1 \text{ kg محلول}} \times \frac{1 \text{ g}}{1000 \text{ mg}} \times \frac{1 \text{ mol } FeSO_4}{152 \text{ g } FeSO_4} = 0/5 \text{ mol}$$

هر مول $FeSO_4$ با ۲ مول $NaOH$ به طور کامل واکنش می‌دهد. بر این اساس داریم:

$$? \text{ g } NaOH = 0/5 \text{ mol } FeSO_4 \times \frac{2 \text{ mol } NaOH}{1 \text{ mol } FeSO_4} \times \frac{40 \text{ g } NaOH}{1 \text{ mol } NaOH} = 40 \text{ g}$$

همچنین به ازای مصرف هر مول $FeSO_4$ ، مقدار ۲ مول Na^+ و یک مول یون SO_4^{2-} (در مجموع ۳ مول یون) در محلول نهایی وجود خواهد داشت. توجه داریم که آهن(II) هیدروکسید یک رسوب جامد است که ته‌نشین شده و یون‌های موجود در ساختار آن $(Fe^{2+} \text{ و } OH^-)$ به حالت آزاد در محلول نهایی وجود ندارند. بر این اساس داریم:

$$? \text{ mol یون} = 0/5 \text{ mol } FeSO_4 \times \frac{3 \text{ mol یون}}{1 \text{ mol } FeSO_4} = 1/5 \text{ mol}$$

در نهایت، مجموع غلظت مولی یون‌ها در محلول نهایی را بدست می‌آوریم:

$$\text{غلظت مولی} = \frac{\text{تعداد مول}}{\text{حجم}} = \frac{1/5}{2/56} \approx 0/58 \text{ mol. L}^{-1}$$

گروه آموزشی ماز

۸۵- از واکنش ۹/۳۷۵ گرم $LiAlH_4$ ناخالص با ۱۲۶۳/۵ میلی‌لیتر آب مطابق واکنش زیر، مقدار ۰/۶ لیتر گاز با چگالی $2/5 \text{ g. L}^{-1}$ تولید شده است. درصد خلوص $LiAlH_4$ مصرف شده چقدر بوده و pH محلول نهایی کدام است؟ (آلومینیم هیدروکسید در آب کاملاً نامحلول است.)

$(Al = 27, O = 16, Li = 7, H = 1 : g.mol^{-1})$



۱۳/۲ - ۸۲ (۴)

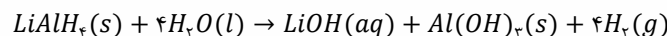
۱۳/۲ - ۷۶ (۳)

۱۲/۳ - ۸۲ (۲)

۱۲/۳ - ۷۶ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ (سخت - مسأله - ۱۱۰۱)

معادله واکنش انجام شده به صورت زیر است:



ابتدا با توجه به حجم گاز H_2 تولید شده، درصد خلوص $LiAlH_4$ را پیدا می‌کنیم:

$$? \text{ L } H_2 = 9/375 \text{ g } LiAlH_4 \text{ ناخالص} \times \frac{P \text{ g } LiAlH_4}{100 \text{ g } LiAlH_4 \text{ ناخالص}} \times \frac{1 \text{ mol } LiAlH_4}{38 \text{ g } LiAlH_4} \times \frac{4 \text{ mol } H_2}{1 \text{ mol } LiAlH_4} \times \frac{2 \text{ g } H_2}{1 \text{ mol } H_2} \times \frac{1 \text{ L } H_2}{2/5 \text{ g } H_2} = 0/6 \text{ L}$$

$$\rightarrow P = \frac{0/6 \times 2/5 \times 38 \times 100}{9/375 \times 4 \times 2} = 76 \text{ درصد}$$

در ادامه، تعداد مول $LiOH$ تولید شده و میلی‌لیتر آب مصرف شده را حساب می‌کنیم:

$$? \text{ mol } LiOH = 0/6 \text{ L } H_2 \times \frac{2/5 \text{ g } H_2}{1 \text{ L } H_2} \times \frac{1 \text{ mol } H_2}{2 \text{ g } H_2} \times \frac{1 \text{ mol } LiOH}{4 \text{ mol } H_2} = 0/1875 \text{ mol}$$

$$? \text{ mL } H_2O = 0/1875 \text{ mol } LiOH \times \frac{4 \text{ mol } H_2O}{1 \text{ mol } LiOH} \times \frac{18 \text{ g } H_2O}{1 \text{ mol } H_2O} \times \frac{1 \text{ mL } H_2O}{1 \text{ g } H_2O} = 13/5 \text{ mL}$$

بنابراین حجم آب باقیمانده برابر با $1250 - 13/5 = 1263/5$ میلی لیتر بوده و غلظت مولی لیتیم هیدروکسید برابر خواهد بود با:

$$M = \frac{\text{تعداد مول}}{\text{حجم}} = \frac{0/1875}{1/25} = 0/15 \text{ mol. L}^{-1}$$

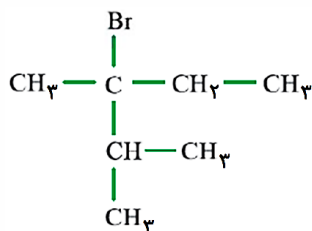
از آنجا که لیتیم هیدروکسید یک باز قوی تک ظرفیتی است، غلظت یون OH^- در محلول آن برابر با $0/15$ مول بر لیتر خواهد بود. بر این اساس، داریم:

$$[H^+] = \frac{10^{-14}}{[OH^-]} = \frac{10^{-14}}{0/15} \rightarrow pH = -\log\left(\frac{10^{-14}}{3 \times 5 \times 10^{-2}}\right) = 12 + \frac{\log 3}{0/5} + \frac{\log 5}{0/7} = 13/2$$

همانطور که مشخص است، pH محلول حاصل از این فرایند برابر با $13/2$ می شود.

گروه آموزشی ماز

۸۶- نام ترکیبی با ساختار مولکولی مقابل، بر اساس قواعد آیوپاک به صورت بوده و این ترکیب،



ایزومر با یک شاخه اتیل دارد.

(۱) ۳-برمو-۳،۲-دی متیل پنتان، ۳

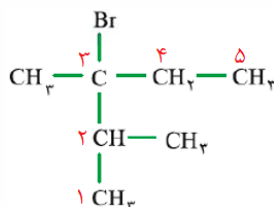
(۲) ۳،۲-دی متیل-۳-برمو پنتان، ۷

(۳) ۳-برمو-۳،۲-دی متیل پنتان، ۷

(۴) ۳،۲-دی متیل-۳-برمو پنتان، ۳

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط - مفهومی - ۱۱۰۱)

شماره گذاری زنجیره کربنی اصلی این ترکیب به صورت زیر است:

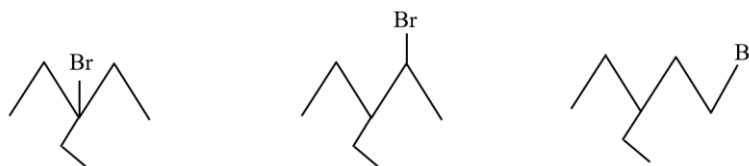


با توجه به شماره گذاری انجام شده، نام ترکیب موردنظر به صورت ۳-برمو-۳،۲-دی متیل پنتان است. توجه داریم که هنگام نام گذاری، شاخه ۳-برمو (Bromo) بر شاخه متیل (Methyl) اولویت دارد.

از آنجا که شاخه اتیل بر روی کربن شماره ۲ نمی تواند قرار بگیرد، اسکلت کربنی ایزومر مورد نظر به شکل زیر خواهد بود:

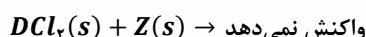
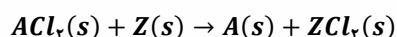


در واقع یک اتم کربن مرکزی داریم که به سه گروه اتیل متصل است. با توجه به تقارن این ساختار، اتم Br از ۹ جایگاه ممکن، می تواند به ۳ جایگاه متفاوت متصل شود؛ بنابراین ترکیب موردنظر ۳ ایزومر با یک شاخه اتیل دارد:



گروه آموزشی ماز

۸۷- معادله ی واکنش های زیر را در نظر بگیرید:



با توجه به معادله ی این واکنش ها، با استفاده از عنصر فلزی D، عنصر A را از ساختار ACl_2 خارج کرد و از بین این سه عنصر فلزی، تامین شرایط مورد نیاز برای نگهداری فلز دشوارتر از سایر فلزها است.

(۴) نمی توان Z

(۳) می توان Z

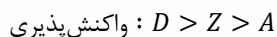
(۲) نمی توان D

(۱) می توان D

پاسخ: گزینه ۱ (آسان - مفهومی - ۱۱۰۱)

واکنش پذیری هر عنصر، به معنای تمایل اتم های آن عنصر به انجام واکنش شیمیایی است. هرچه واکنش پذیری اتم های عنصری بیشتر باشد، در شرایط یکسان تمایل آن عنصر برای تبدیل شدن به ترکیب بیشتر است. با توجه به معادله ی واکنش $ACl_2(s) + Z(s) \rightarrow A(s) + ZCl_2(s)$ و انجام شدن خودبه خودی

آن، می توان گفت واکنش پذیری فلز Z در مقایسه با فلز A بیشتر است. از طرفی، با توجه به انجام نشدن واکنش $DCl_2(s) + Z(s) \rightarrow$ می توان گفت فلز D در مقایسه با فلز Z ، واکنش پذیری بالاتری دارد. بر این اساس، مقایسه ی واکنش پذیری فلزهای داده شده به صورت زیر می شود:

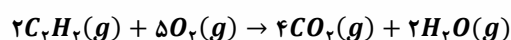


چون عنصر D از A واکنش پذیرتر است، با استفاده از این فلز می توان فلز A را از ترکیبات آن خارج کرد. از طرفی، چون فلز D در مقایسه با سایر فلزهای داده شده واکنش پذیرتر است، تأمین شرایط مورد نیاز برای نگهداری آن نیز سخت تر خواهد بود.

هرچه یک فلز فعال تر باشد، اتم های آن فلز میل بیشتری به تولید کاتیون و ایجاد ترکیب داشته و ترکیب های حاصل از آن فلز نیز پایدارتر از خود آن فلز خواهند بود. به عبارت دیگر، هرچه واکنش پذیری یک عنصر فلزی بیشتر باشد، استخراج آن فلز از ترکیبات حاوی آن دشوارتر است. به عنوان مثال، چون واکنش پذیری سدیم بیشتر از آلومینیم است، استخراج سدیم از Na_2O دشوارتر از استخراج آلومینیم از Al_2O_3 است. از طرفی، در هوای مرطوب نیز فلزی که واکنش پذیری بالاتری داشته باشد سریع تر از سایر عناصر فلزی واکنش می دهد. به عنوان مثال، چون واکنش پذیری سدیم بیشتر از روی است، در شرایط یکسان و در هوای مرطوب، یک قطعه از فلز سدیم در مقایسه با یک قطعه از فلز روی سریع تر واکنش می دهد.

گروه آموزشی ماز

۸۸- اگر آنتالپی پیوندهای $N \equiv N$ و $N-H$ و $N-H$ به ترتیب برابر با ۴۳۲، ۹۴۲، ۳۸۸ و ۱۶۳ کیلوژول بر مول باشد، برای تولید ۱۶۰ گرم هیدرازین از گازهای N_2 و H_2 چند کیلوژول انرژی نیاز است و این انرژی را به طور تقریبی با سوختن چند گرم گاز استیلن می توان تأمین کرد؟ (ارزش سوختی گاز استیلن برابر با $48/5 kJ \cdot g^{-1}$ است.)



$$(N = 14, C = 12, H = 1 : g \cdot mol^{-1})$$

$$9/38 - 455 \quad (4)$$

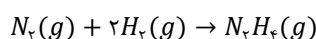
$$9/92 - 425 \quad (3)$$

$$9/92 - 455 \quad (2)$$

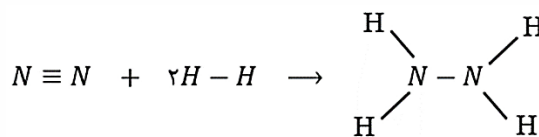
$$9/38 - 425 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط - مسأله ۱۱۰۲)

معادله واکنش تولید بخار هیدرازین به صورت زیر است:



ابتدا واکنش تشکیل هیدرازین را با رسم ساختار لوویس مواد می نویسیم:



آنتالپی واکنش از رابطه زیر بدست می آید:

$$\Delta H_{\text{واکنش}} = [\text{مجموع آنتالپی پیوندها در مواد واکنش دهنده}] - [\text{مجموع آنتالپی پیوندها در مواد فراورده}]$$

$$= [\Delta H(N \equiv N) + 2 \Delta H(H - H)] - [\Delta H(N - N) + 4 \Delta H(N - H)] = [942 + (2 \times 432)] - [163 + (4 \times 388)]$$

$$= 942 + 864 - 163 - 1552 = +91 kJ$$

بر این اساس داریم:

$$? kJ = 160 g N_2H_4 \times \frac{1 mol N_2H_4}{32 g N_2H_4} \times \frac{91 kJ}{1 mol N_2H_4} = 455 kJ$$

از طرفی از سوختن هر گرم گاز استیلن، $48/5 kJ$ گرما آزاد می شود؛ بنابراین:

$$? g C_2H_2 = 455 kJ \times \frac{1 g C_2H_2}{48/5 kJ} \approx 9/38 g C_2H_2$$

گروه آموزشی ماز

۸۹- چند مورد از مطالب زیر، درست هستند؟ ($0 = 16 g \cdot mol^{-1}$)

- (آ) یک نمونه آب خالص، در مقایسه با روغن زیتون با جرم یکسان، مقاومت بیشتری در برابر تغییر دما نشان می دهد.
- (ب) در واکنش فتوسنتز، فراورده های تولید شده در سطح انرژی بالاتری نسبت به واکنش دهنده ها قرار دارند.
- (پ) با انحلال مقداری آمونیوم نیترات در آب، مجموع انرژی جنبشی مولکول های آب کاهش پیدا خواهد کرد.
- (ت) برخلاف ماده آلی موجود در زردچوبه، گروه کربونیل در ماده آلی موجود در بادام، به اتم H متصل است.
- (ث) هر مول از ماده آلی موجود در میخک، در حضور ۳۰۰ گرم گاز O_2 با خلوص ۸۰٪ به طور کامل می سوزد.

$$5 \quad (4)$$

$$4 \quad (3)$$

$$3 \quad (2)$$

$$2 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۳ (سخت - مفهومی و مسأله ۱۱۰۲)

به جز عبارت (ث)، سایر عبارت ها درست هستند.

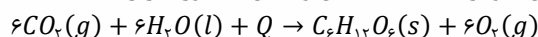
آ) ظرفیت گرمایی آب خالص از ظرفیت گرمایی روغن زیتون بیشتر بوده و در نتیجه جرم یکسانی آب نسبت به روغن زیتون، مقاومت بیشتری در برابر تغییر دما از خود نشان می دهد.

روغن و چربی از جمله ترکیب های آلی هستند که به دلیل تفاوت در ساختار، رفتارهای فیزیکی و شیمیایی متفاوتی دارند. روغن دارای حالت فیزیکی مایع (l) بوده و چربی دارای حالت فیزیکی جامد (s) است. از دیدگاه شیمیایی، در ساختار مولکول های روغن پیوندهای دوگانه بیشتری وجود داشته و به همین خاطر، روغن در مقایسه با چربی واکنش پذیری بیشتری دارد. چون روغن زیتون در مقایسه با آب گرمای ویژه کمتری دارد، پس می توان گفت اگر با دادن Q ژول گرما به مقداری آب و روغن زیتون، تغییر دمای این دو ماده برابر باشد، جرم نمونه آب کمتر است. در این رابطه، داریم:

$$Q_{\text{آب}} = Q_{\text{روغن}} \implies m_{\text{آب}} \times c_{\text{آب}} \times \Delta\theta_{\text{آب}} = m_{\text{روغن}} \times c_{\text{روغن}} \times \Delta\theta_{\text{روغن}} \implies m_{\text{آب}} \times c_{\text{آب}} = m_{\text{روغن}} \times c_{\text{روغن}}$$

با توجه به مطالب بالا، جرم نمونه ای که گرمای ویژه بالاتری دارد (آب)، کمتر از جرم ماده دیگر است.

ب) واکنش فتوسنتز، عکس واکنش اکسایش کامل گلوکز است. معادله این واکنش به صورت زیر است:

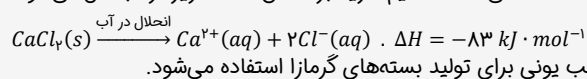


بر این اساس، می توان گفت واکنش مورد نظر گرماگیر بوده و همانطور که می دانیم، سطح انرژی فراورده ها در واکنش های گرماگیر نسبت به سطح انرژی واکنش دهنده ها بالاتر است. نمودار زیر، روند تغییر انرژی در واکنش های شیمیایی را نشان می دهد:

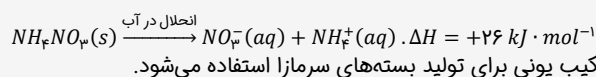


پ) انحلال آمونیوم نیترات (NH_4NO_3) در آب گرماگیر بوده و در نتیجه باعث کاهش دمای آب می شود. توجه داریم که با کاهش دمای آب، میانگین انرژی جنبشی مولکول های آب و همچنین مجموع انرژی جنبشی مولکول های آب، کاهش پیدا خواهد کرد.

پس از ریختن ترکیب های یونی در آب، یون های سازنده این مواد از یکدیگر جدا شده و در میان مولکول های آب پخش می شوند. فرایند حل شدن برخی از انواع ترکیب های یونی در آب با آزاد شدن گرما و فرایند حل شدن برخی از انواع ترکیب های یونی در آب با جذب گرما همراه است. از فرایند انحلال این ترکیب های یونی در آب، برای تولید انواع بسته های سرمازا و گرمازا استفاده می شود. در این بسته ها مقداری از یک ترکیب یونی که در یک کپسول قرار داده شده است در مجاورت با مقداری آب قرار داده شده است. با فشار دادن کپسول موجود در این بسته ها، ترکیب یونی در آب حل شده و پس از مبادله انرژی با محیط، با توجه به نوع ترکیب یونی، سرما یا گرما تولید می شود. ورزشکاران برای درمان آسیب دیدگی های خود از این بسته ها استفاده می کنند. کلسیم کلرید بر اساس معادله زیر در آب حل می شود:

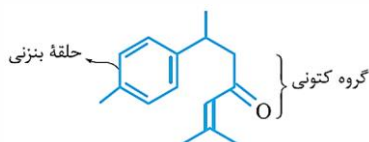


همانطور که مشخص است، این ترکیب طی یک فرایند گرما ده در آب حل می شود. از این ترکیب یونی برای تولید بسته های گرمازا استفاده می شود. آمونیوم نیترات بر اساس معادله زیر در آب حل می شود:

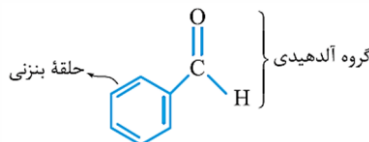


همانطور که مشخص است، این ترکیب طی یک فرایند گرما گیر در آب حل می شود. از این ترکیب یونی برای تولید بسته های سرمازا استفاده می شود.

ت) ساختار ترکیب آلی موجود در زردچوبه به صورت زیر است:

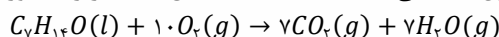


ساختار ترکیب آلی موجود در بادام به صورت زیر است:



با توجه به ساختارهای رسم شده، ماده آلی موجود در زردچوبه یک نوع کتون بوده و ماده آلی موجود در بادام یک آلدهید به نام بنزالدهید است. توجه داریم که گروه کربونیل در آلدهیدها برخلاف کتون ها به اتم H متصل است.

ث) ماده آلی موجود در میخک، ۲- هپتانون با فرمول شیمیایی $C_7H_{14}O$ است که مطابق معادله زیر به طور کامل می سوزد:



بر این اساس داریم:

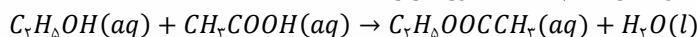
$$? \text{ g } O_2 = 1 \text{ mol } C_7H_{14}O \times \frac{10 \text{ mol } O_2}{1 \text{ mol } C_7H_{14}O} \times \frac{32 \text{ g } O_2}{1 \text{ mol } O_2} \times \frac{100 \text{ g } O_2}{100 \text{ g } O_2} = 400 \text{ g}$$

۹۰- کدام یک از موارد داده شده باعث افزایش سرعت واکنش میان اتانول و اتانویک اسید موجود در یک محلول آبی شده و در ساختار فراورده آلی حاصل از این فرایند، چند اتم هیدروژن وجود خواهد داشت؟

- (۱) افزودن مقداری اتانول خالص به محلول - ۱۰
(۲) انحلال گاز گوگرد تری اکسید در این محلول - ۸
(۳) کاهش دمای محتویات موجود در ظرف - ۱۰
(۴) افزودن مقداری آب به محلول مورد نظر - ۸

پاسخ: گزینه ۲ (آسان - مفهومی - ۱۱۰۲)

طی این فرایند، اتانول با استیک اسید واکنش داده و اتیل استات (اتیل اتانوات) را تولید می کند. اتیل اتانوات، عضوی از خانواده استرها است که در ساختار مولکولی خود ۸ اتم هیدروژن دارد. معادله واکنش انجام شده به صورت زیر است:



افزایش دمای محیط، افزایش غلظت واکنش دهنده ها و افزودن کاتالیزگر، همگی می توانند سبب افزایش سرعت این واکنش شیمیایی شوند، اما افزایش حجم محلول با افزودن مقداری آب به آن، سبب کاهش سرعت واکنش می شود. توجه داریم که با انحلال گاز گوگرد تری اکسید در محلول، سولفوریک اسید تولید شده و این ماده کاتالیزگر واکنش مورد نظر است.

با افزایش غلظت واکنش دهنده های شرکت کننده در یک واکنش شیمیایی، تعداد برخوردهای میان ذرات سازنده ی این مواد افزایش یافته و به دنبال آن، واکنش مورد نظر با سرعت بیشتری انجام می شود. بر این اساس، می توان گفت سرعت انجام شدن واکنش های شیمیایی با غلظت مواد شرکت کننده در آن ها رابطه مستقیم دارد. به عنوان مثال، بیماران تنفسی در شرایط اضطراری در هوای عادی نمی توانند به خوبی نفس بکشند؛ اما با اتصال کپسول اکسیژن به آن ها، هموگلوبین راحت تر با اکسیژن ترکیب شده و شرایط بیمار بهبود پیدا می کند. البته، توجه داریم که غلظت مواد جامد (s) و مایع خالص (l) به راحتی قابل تغییر نیست؛ چراکه اگر مقدار (جرم) این مواد را n برابر کنیم، حجم آن ها نیز n برابر می شود و در نتیجه، غلظت آن ها در دمای ثابت، تغییری نمی کند. با توجه به توضیحات داده شده، از تاثیر غلظت فقط برای تغییر سرعت واکنش هایی می توانیم استفاده کنیم که حداقل یکی از اجزا شرکت کننده در آن ها در حالت گاز (g) یا محلول (aq) باشند. به عنوان مثال، در واکنش $2Na(s) + 2H_2O(l) \rightarrow 2NaOH(aq) + H_2(g)$ از تاثیر غلظت نمی توانیم برای تغییر سرعت انجام شدن واکنش استفاده کنیم؛ چراکه واکنش دهنده های شرکت کننده در این واکنش در حالت مایع و جامد قرار دارند.

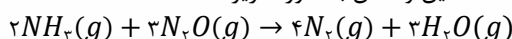
گروه آموزشی ماز

۹۱- واکنش $2NH_3(g) + 2N_2O(g) \rightarrow 4N_2(g) + 3H_2O(g)$ در یک محفظه در حال انجام است. اگر در طول ۲۰ ثانیه ۷۴/۱۲ کیلوژول گرما تولید شود، با توجه به واکنش های زیر، سرعت متوسط تولید گاز N_2 بر حسب $mol.s^{-1}$ و سرعت متوسط مصرف واکنش دهنده با مولکول خطی و چگالی $2/2 g.L^{-1}$ بر حسب $L.min^{-1}$ کدام است؟ ($O = 16, N = 14 : g.mol^{-1}$)

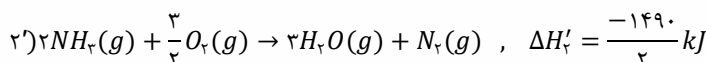
- ۱) $2H_2(g) + O_2(g) \rightarrow 2H_2O(g)$, $\Delta H_1 = -531 kJ$
۲) $4NH_3(g) + 3O_2(g) \rightarrow 6H_2O(g) + 2N_2(g)$, $\Delta H_2 = -1490 kJ$
۳) $N_2O(g) + H_2(g) \rightarrow N_2(g) + H_2O(g)$, $\Delta H_3 = -326 kJ$
(۱) ۱۳/۲ - ۰/۱۶ (۲) ۱۴/۴ - ۰/۱۶ (۳) ۱۳/۲ - ۰/۲۴ (۴) ۱۴/۴ - ۰/۲۴

پاسخ: گزینه ۲ (سخت - مسأله - ۱۱۰۲)

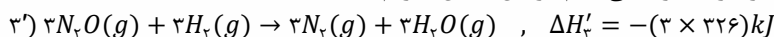
ابتدا آنتالپی واکنش داده شده را بدست می آوریم. معادله این واکنش به صورت زیر است:



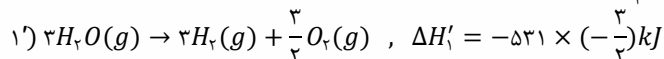
برای محاسبه مقدار تغییر آنتالپی این واکنش از قانون هس استفاده می کنیم. گاز NH_3 سمت چپ واکنش کلی و با ضریب ۲ است؛ پس واکنش (۲) را در ۱/۲ ضرب می کنیم. بر این اساس، داریم:



گاز N_2O سمت چپ واکنش کلی و با ضریب ۳ است؛ پس واکنش (۳) را در ۳ ضرب می کنیم. بر این اساس، داریم:



گاز O_2 در واکنش کلی وجود ندارد؛ پس واکنش (۱) را در ۳/۲ ضرب می کنیم تا $\frac{3}{2}O_2$ در سمت راست آن تشکیل شود. بر این اساس، داریم:



بنابراین آنتالپی کلی واکنش برابر خواهد بود با:

$$\Delta H_{کلی} = \Delta H'_1 + \Delta H'_2 + \Delta H'_3 = 796/5 - 745 - 978 = -926/5 kJ$$

در ادامه، تعداد مول گاز نیتروژن تولید شده و حجم گاز N_2O مصرف شده را حساب می کنیم:

$$? mol N_2 = 74/12 kJ \times \frac{4 mol N_2}{926/5 kJ} = 0/32 mol$$

$$? L N_2O = 0/32 mol N_2 \times \frac{3 mol N_2O}{4 mol N_2} \times \frac{44 g N_2O}{1 mol N_2O} \times \frac{1 L N_2O}{2/2 g N_2O} = 4/8 L$$

توجه داریم که ساختار N_2O به صورت خطی و ساختار NH_3 به صورت غیرخطی (هرمی) است. ساختار این مواد به صورت زیر است:



در نهایت، سرعت متوسط تولید گاز N_2 و سرعت متوسط مصرف N_2O را حساب می‌کنیم:

$$N_2 \text{ سرعت متوسط تولید} = \frac{\text{تعداد مول } N_2}{\text{زمان بر حسب ثانیه}} = \frac{0.32 \text{ mol}}{20 \text{ s}} = 0.016 \text{ mol.s}^{-1}$$

$$N_2O \text{ سرعت متوسط مصرف} = \frac{\text{حجم } N_2O \text{ مصرفی}}{\text{زمان بر حسب دقیقه}} = \frac{4/8 \text{ L}}{20 \text{ s} \times \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}}} = 14/4 \text{ L.min}^{-1}$$

گروه آموزشی ماز

۹۲- کدام یک از مطالب زیر، درست است؟

- (۱) همه عناصر فلزی موجود در دسته p ، همانند عناصر دسته d ، با تشکیل یون پایدار، به آرایش یک گاز نجیب نمی‌رسند.
- (۲) هر اتم کروم با از دست دادن ۲ عدد الکترون با $n = 4$ ، به کاتیونی با آرایش الکترونی $[Ar]3d^4$ تبدیل می‌شود.
- (۳) تفاوت‌های قابل توجهی میان فلزهای واسطه و فلزهای اصلی وجود دارد، اما همه فلزها رسانای الکتریکی هستند.
- (۴) در جدول دوره‌ای عناصر، تعدادی از خانه‌های خالی وجود دارد که با کشف عناصر طبیعی دیگر در آینده، پر می‌شوند.

پاسخ: گزینه ۳ (آسان - مفهومی - ۱۱۰۱)

اگرچه همه فلزها در حالت‌های کلی رفتارهای مشابهی از جمله رسانایی الکتریکی و گرمایی، سطح درخشان، چکش‌خواری و ... دارند؛ اما تفاوت‌های قابل توجهی میان آن‌ها وجود دارد، به طوری که هر فلز رفتارهای ویژه خود را دارد.

فلزها افزون بر رفتارهای مشابه، تفاوت‌های آشکاری در برخی رفتارها نشان می‌دهند. در واقع، هر فلز افزون بر رفتارهای مشترک با سایر عناصر فلزی، رفتارهای ویژه خود را نیز دارد. مثلاً فلزهای دسته d (فلزهای واسطه)، همانند سایر فلزها رسانایی الکتریکی بالا، رسانایی گرمایی بالا و شکل‌پذیری دارند، اما در ویژگی‌هایی مانند سختی، نقطه ذوب و تنوع اعداد اکسایش با آن‌ها تفاوت دارند. تیتانیم، دومین فلز واسطه‌ای موجود در تناوب چهارم است که به خاطر ویژگی‌های باورنکردنی و فراتر از انتظار مثل ماندگاری و استحکام مناسب، از آن در جاهای مختلفی مثل ساخت موتور جت، پروانه‌ی کشتی‌های اقیانوس‌پیما و نمای زیبای ساختمان‌ها استفاده می‌شود.

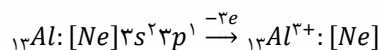
ویژگی‌های تیتانیم در مقایسه با فولاد به شرح جدول زیر است:

ویژگی	ماده	تیتانیوم	مقایسه	فولاد
	نقطه ذوب (°C)	۱۶۶۷	<	۱۵۳۵
	چگالی (g.mL ^{-۱})	۴/۵۱	>	۷/۹۰
	واکنش با ذره‌های موجود در آب دریا	ناچیز	>	متوسط
	مقاومت در برابر خوردگی	عالی	<	ضعیف
	مقاومت در برابر سایش	عالی	≈	عالی

از تیتانیم برای ساختن قطعات موتور جت استفاده می‌شود. هنگامی که موتور جت کار می‌کند، همه اجزای سازنده آن (اجزای ثابت و متحرک) دمای بالایی پیدا می‌کنند؛ پس برای ساختن این قطعات باید از فلزی استفاده کرد که دمای ذوب بالایی داشته باشد. از طرفی، این قطعات باید از جنس فلزی ساخته شوند که مقاومت بالایی در برابر خوردگی داشته باشد و تا حد امکان چگالی آن نیز کم‌تر باشد. با توجه به برتری فلز تیتانیم نسبت به فولاد در همه این زمینه‌ها، استفاده از این فلز برای ساختن موتور جت منطقی‌تر از فولاد است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

- (۱) از فلزهای دسته p ، عنصر آلومینیم با از دست دادن سه الکترون و تشکیل یون پایدار به آرایش الکترونی گاز نجیب نئون می‌رسد. فرایند انجام شده در رابطه با اتم‌های این فلز به صورت زیر است:



سایر فلزهای موجود در دسته p از جمله گالیم، سرب و قلع، هنگام تبدیل شدن به کاتیون به آرایش الکترونی یک گاز نجیب نمی‌رسند.

- (۲) کروم ($_{24}Cr$) برای رسیدن به آرایش الکترونی $[Ar]3d^4$ ، یک الکترون از زیرلایه $3d$ (با $n = 3$) و یک الکترون از $4s$ (با $n = 4$) از دست می‌دهد. در این حالت، اتم کروم به یون Cr^{2+} تبدیل می‌شود.

- (۴) همه ۱۱۸ عنصر جدول دوره‌ای امروزی شناسایی شده‌اند، به طوری که هیچ خانه‌ای در جدول خالی نیست و جست‌وجو برای کشف عناصر طبیعی به پایان رسیده و تنها راه افزایش شمار عنصرها، تولید عناصر به شکل ساختگی است.

جدول دوره‌ای امروزی شامل ۱۱۸ عنصر مختلف (۹۲ عنصر طبیعی و ۲۶ عنصر ساختگی) می‌شود. عناصر جدول دوره‌ای بر اساس افزایش عدد اتمی در ۷ دوره و ۱۸ گروه در کنار یکدیگر چیده شده‌اند؛ به طوری که هیچ خانه‌ای از این جدول خالی نیست. در این شرایط، شناسایی و ساخت عنصرهایی با عدد اتمی بزرگ‌تر از ۱۱۸ سبب ارائه طبقه بندی‌های تازه‌ای از عنصرها خواهد شد؛ چراکه در جدول دوره‌ای امروزی، جایی برای این عناصر جدید پیش‌بینی نشده است. شارل ژانت، یکی از افرادی بود که با ارائه یک الگوی جدید، توانست عناصری با عدد اتمی بزرگ‌تر از ۱۱۸ را نیز طبقه‌بندی کند. جدول پیشنهاد شده توسط ژانت، با مدل کوانتومی اتم‌ها همخوانی داشت. بر اساس چینش عناصر مختلف در این جدول، زیرلایه‌ی g به عنوان زیرلایه‌ی پنجم، پس از پر شدن زیرلایه‌های s ، p و d شروع به پر شدن می‌کند.

گروه آموزشی ماز

۹۳- چند مورد از مطالب زیر، نادرست است؟ ($F = 19, C = 12, H = 1 : g.mol^{-1}$)

- (آ) کولار، یک پلی آمید ساختگی بوده و برخلاف پلی لاکتیک اسید، زیست تخریب پذیر است.
 (ب) درصد جرمی کربن در ساختار تفلون از درصد جرمی هیدروژن در پلی استیرن بیشتر است.
 (پ) در حلقه شش ضلعی موجود در مونومر سازنده سلولز، پنج اتم کربن و یک اتم اکسیژن وجود دارد.
 (ت) ساده ترین آمین، شش پیوند اشتراکی در ساختار خود داشته و از عوامل ایجادکننده بوی ماهی است.
 (ث) ۱- بوتانول، نسبت به دی اتیل اتر ایزومر بوده و خاصیت آب گریزی آن نسبت به الکل تهیه شده از چوب کم تر است.

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط - مفهومی و حفظی و مسأله - ۱۱۰۳)

عبارت‌های (آ) و (ث) نادرست هستند.

بررسی موارد:

(آ) کولار، یک پلی آمید ساختگی است که مانند اغلب پلی آمیدها و همچنین پلی استرها به کندی در طبیعت تجزیه می‌شود. بر این اساس، می‌توان گفت کولار برخلاف پلی لاکتیک اسید، یک پلیمر زیست تخریب پذیر به شمار نمی‌رود.

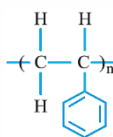
مو، ناخن، پوست بدن انسان، شاخ حیوانات و پشم گوسفند، از جمله موادی هستند که پلی آمیدهای طبیعی در ساختار آنها وجود دارد. در نقطه مقابل، پلی آمیدهای ساختگی را در صنایع پتروشیمی از واکنش میان دی آمین‌ها و دی اسیدها تولید می‌کنند. کولار یکی از معروفترین پلی آمیدهای مصنوعی است. کولار از فولاد هم جرم خود پنج برابر مقاومتر بوده و از آن در تهیه تایر اتومبیل‌ها، قایق بادبانی، لباس‌های مخصوص مسابقه‌ی موتورسواری و جلیقه‌های ضدگلوله استفاده می‌شود. پوشاک دوخته شده از کولار سبک و بسیار محکم بوده و در برابر ضربه، خراش و بریدگی مقاوم هستند.

(ب) فرمول شیمیایی تفلون و پلی استیرن به ترتیب به صورت $(C_2F_4)_n$ و $(C_8H_8)_n$ است. از آنجا که همواره مقدار درصد جرمی در واحد تکرار شونده و پلیمرهای افزایشی یکسان است، خواهیم داشت:

$$\text{درصد جرمی کربن در تفلون} = \frac{(2 \times 12)}{(2 \times 12) + (4 \times 19)} \times 100 = \frac{2400}{24 + 76} = 24 \text{ درصد}$$

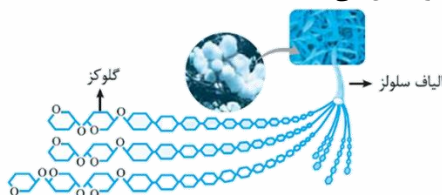
$$\text{درصد جرمی هیدروژن در پلی استیرن} = \frac{(8 \times 1)}{(8 \times 1) + (8 \times 12)} \times 100 = \frac{800}{104} \approx 7/7 \text{ درصد}$$

ساختار مولکول پلی استیرن به صورت زیر است:

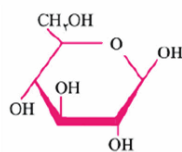


پلانکت و تیم پژوهشی او طی بررسی‌ها و مطالعات خود بر روی انواع سردکننده‌ها، تفلون را به طور اتفاقی کشف کردند. یکی از گازهایی که آنها مصرف می‌کردند، تترافلوئورواتن بود. این گاز در شرایط مناسب در کپسول‌های آزمایشگاهی وارد واکنش بسیار شده و به تفلون تبدیل می‌شود. تفلون، نقطه‌ی ذوب بالایی داشته و در برابر گرما مقاوم است. این پلیمر از نظر شیمیایی بی اثر بوده و با مواد شیمیایی واکنش نمی‌دهد و در حلال‌های آلی نیز حل نمی‌شود و نجسب است. این ویژگی‌ها دلیل کاربرد وسیع این پلیمر در صنایع مختلف است. تفلون یک پلیمر ساختگی بوده و از آن در تهیه نخ دندان، ظروف نجسب، کفی اتو و به عنوان نوار آببندی لوله‌ها استفاده می‌شود.

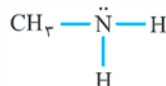
(پ) تصویر زیر، نمایی از الیاف سلولزی موجود در پنبه را نشان می‌دهد:



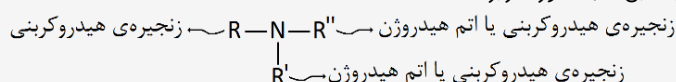
مونومر سازنده الیاف سلولز، گلوکز است که مطابق شکل داده شده از یک حلقه شش ضلعی تشکیل شده و پنج اتم کربن و یک اتم اکسیژن دارد. ساختار دقیق مولکول گلوکز به صورت زیر است:



(ت) ساده ترین ترکیب آمینی، متیل آمین با فرمول شیمیایی CH_3NH_2 است و در ساختار آن ۶ پیوند اشتراکی وجود دارد. بوی ماهی به دلیل وجود متیل آمین و برخی آمین های دیگر است. ساختار مولکول متیل آمین به صورت زیر است:

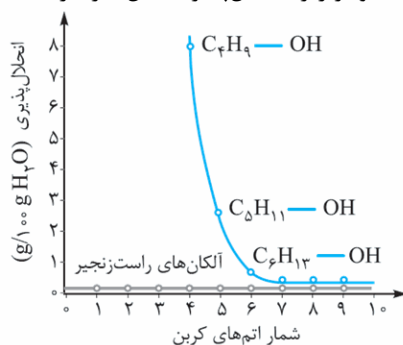


آمین ها گروهی از ترکیب های آلی نیتروژن دار هستند که از جایگزین شدن یک، دو و یا سه مورد از اتم های هیدروژن موجود در ساختار آمونیاک (NH_3) با زنجیره های هیدروکربنی حاصل می شوند. ساختار کلی آمین ها به صورت زیر است:



در ساختار آمین ها اتم های H ، C و N وجود دارد. وجود اتم N در ساختار آمین ها، خواص شیمیایی و فیزیکی منحصر به فردی به آن ها داده است.

ث) بوتانول ($CH_3CH_2CH_2CH_2OH$) و دی اتیل اتر ($CH_3CH_2OCH_2CH_3$) با هم ایزومر (همپار) هستند. الکل تهیه شده با استفاده از چوب نیز همان متانول (CH_3OH) است. با افزایش طول زنجیر کربنی در مولکول الکل ها، میزان آب گریزی آن ها افزایش و مقدار انحلال پذیری آن ها در آب کاهش پیدا می کند؛ بنابراین خاصیت آب گریزی بوتانول از متانول بیشتر است. نمودار زیر، انحلال پذیری الکل ها را در مقایسه با هیدروکربن ها در آب نشان می دهد:



با توجه به نمودار بالا می توان گفت که:

- ۱- با افزایش طول زنجیر هیدروکربنی در الکل ها، انحلال پذیری آن ها در آب کاسته می شود.
- ۲- سه الکل سبک تر یعنی متانول، اتانول و پروپانول به هر نسبتی در آب حل می شوند.
- ۳- انحلال پذیری هپتانول و الکل های سنگین تر، تنها اندکی از انحلال پذیری آلکان های راست زنجیر هم کربن با آن ها بیشتر است.

گروه آموزشی ماز

۹۴- کدام یک از مقایسه های زیر بین نمونه هایی به جرم برابر از استیک اسید و متانول درست است؟

- (۱) شمار اتم های هیدروژن در نمونه : استیک اسید < متانول
- (۲) دمای جوش نمونه مورد نظر : استیک اسید > متانول
- (۳) رسانایی الکتریکی محلول آبی : استیک اسید < متانول
- (۴) شمار جفت الکترون ناپیوندی در مولکول : استیک اسید > متانول

پاسخ: گزینه ۳ (آسان - مفهومی - ۱۱۰۳)

فرمول مولکولی استیک اسید و متانول، به ترتیب به صورت CH_3COOH و CH_3OH است. متانول به صورت کاملاً مولکولی در آب حل شده و به همین خاطر، محلول حاصل از این ماده جریان الکتریسیته را از خود عبور نمی دهد. این در حالی است که استیک اسید، یک اسید ضعیف بوده و بخشی از آن به صورت یونی در آب حل می شود و اندک یون های حاصل از انحلال این ماده در آب، باعث ایجاد محلولی با رسانایی ناچیز می شود.

بررسی سایر گزینه ها:

(۱) جرم مولی استیک اسید به اندازه یک اتم کربن و یک اتم اکسیژن بیشتر از جرم مولی متانول است، اما تعداد اتم های هیدروژن موجود در این دو ماده با هم برابر است. اگر جرم های برابر از استیک اسید و متانول در اختیار داشته باشیم، شمار مولکول های استیک اسید در نمونه این ماده حتماً کمتر از شمار مولکول های متانول بوده و به همین خاطر، می توان گفت شمار اتم های هیدروژن موجود در نمونه استیک اسید کمتر از نمونه متانول خواهد بود.

۲) استیک اسید در مقایسه با متانول جرم مولی بیشتری داشته و بخش قطبی (گروه کربوکسیل) موجود در ساختار آن نیز در مقایسه با بخش قطبی مولکول متانول بزرگتر است. بر این اساس، قدرت نیروهای بین مولکولی در استیک اسید قویتر بوده و این ماده دمای جوش بالاتری دارد.

۴) در ساختار ترکیبهای آلی بدون بار، هر اتم اکسیژن دارای ۲ جفت الکترون ناپیوندی خواهد بود. استیک اسید دارای ۲ اتم اکسیژن و متانول دارای ۱ اتم اکسیژن است، پس می توان گفت هر مولکول استیک اسید دارای ۴ جفت الکترون ناپیوندی و هر مولکول متانول، دارای ۲ جفت الکترون ناپیوندی است.

گروه آموزشی ماز

۹۵- روغن زیتون، استری با فرمول مولکولی $C_{57}H_{104}O_6$ است. اگر اسیدچرب سازنده این استر با الکل سازنده استر عامل ایجاد کننده بوی سیب واکنش دهد، درصد جرمی فراورده آلی در میان فراوردههای تولید شده به تقریب کدام است؟ (بخش ناقطبی مولکول روغن زیتون با استفاده از ۳ زنجیره هیدروکربنی مشابه ساخته شده است.) ($O = 16, C = 12, H = 1 : g. mol^{-1}$)

۹۵/۸ (۴)

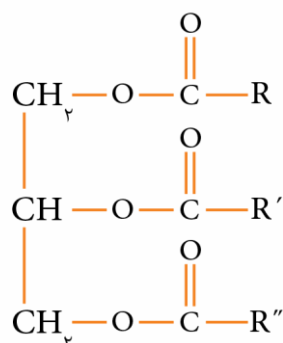
۹۴/۳ (۳)

۹۲/۲ (۲)

۹۰/۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ (آسان - مسأله - ۱۲۰۱)

ساختار کلی چربیها از نوع استر سنگین، به صورت زیر است:

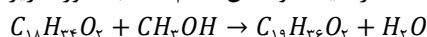


هر یک از مولکولهای سازنده چربیها (اسیدهای چرب و استرهای با جرم مولی زیاد)، از یک بخش قطبی (بخش آب دوست) و یک بخش ناقطبی (بخش چربی دوست) و یا آبگریز تشکیل شده است. از آنجا که بخش اعظم این مولکولها ناقطبی است، پس بخش ناقطبی مولکول به راحتی بر بخش قطبی آن غلبه کرده و در نتیجه مولکولهای چربی در مجموع، ناقطبی به حساب می آیند و در حلالهای قطبی مانند آب حل نمی شوند. به خاطر نامحلول بودن چربیها در حلالهای قطبی، آب به تنهایی نمی تواند چربیهای موجود بر روی پوست و لباسها را پاک کند و به همین دلیل، برای پاک کردن چربیها باید از سایر پاک کننده ها کمک بگیریم.

از آنجا که اسیدهای چرب یکسانی در ساختار روغن زیتون وجود دارد، گروههای R و R' و R'' یکسان بوده و فرمول مولکولی اسیدچرب سازنده این استر از رابطه زیر بدست می آید:

$$C_{57}H_{104}O_6 - C_3H_5 + 3H = C_{18}H_{34}O_2$$

الکل سازنده استر عامل بوی سیب، متانول (CH_3OH) است. در نتیجه، واکنش انجام شده به صورت زیر است:



در نهایت، درصد جرمی فراورده آلی (استر) تولید شده را حساب می کنیم:

$$\text{درصد جرمی فراورده آلی} = \frac{\text{جرم استر}}{\text{جرم آب} + \text{جرم استر}} \times 100 = \frac{296}{296 + 18} \times 100 = \frac{29600}{314} \approx 94/3$$

گروه آموزشی ماز

۹۶- مواد HX و HY ، دو اسید ضعیف با جرمهای مولی ۵۰ و ۱۵۰ گرم بر مول هستند. اگر ۸ گرم HX و ۱۵ گرم HY را جداگانه در یک لیتر آب خالص حل کنیم، pH محلول HX به اندازه ۰/۳ واحد بزرگتر از pH محلول HY خواهد شد. بر این اساس، چه تعداد از مقایسه های زیر درست هستند؟

• $HX > HY$ درجه یونش: $HX < HY$ مجموع غلظت یونها در محلول:

• $HY > HX$ رسانایی الکتریکی محلول: $HY < HX$ شمار مولکولهای اسید یونیده نشده:

• نسبت $\frac{[OH^-]}{[H^+]}$ در محلول: $HX > HY$

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۱ (سخت - مفهومی - ۱۲۰۱)

در قدم اول، غلظت مولی دو اسید را حساب می کنیم:

$$M_{HX} = \frac{\text{تعداد مول } HX}{\text{حجم محلول}} = \frac{8}{1} = 8 \text{ mol. L}^{-1}$$

$$M_{HY} = \frac{\text{تعداد مول } HY}{\text{حجم محلول}} = \frac{15}{1} = 15 \text{ mol. L}^{-1}$$

اگر pH محلول HX را با pH_1 و pH محلول HY را با pH_2 نشان دهیم، خواهیم داشت:

$$pH_1 - pH_2 = 0.3 \rightarrow -\log[H^+]_{HX} - (-\log[H^+]_{HY}) = \log 2 \rightarrow \log \left(\frac{[H^+]_{HY}}{[H^+]_{HX}} \right) = \log 2 \rightarrow [H^+]_{HY} = 2 \times [H^+]_{HX}$$

حالا با توجه به رابطه $[H^+] = n \times M \times \alpha$ ، نسبت درجه یونش اسیدها را بدست می آوریم:

$$\frac{\alpha_{HY}}{\alpha_{HX}} = \frac{\frac{[H^+]_{HY}}{1 \times 0.1}}{\frac{[H^+]_{HX}}{1 \times 0.16}} = \frac{0.16 \times [H^+]_{HY}}{0.1 \times [H^+]_{HX}} = 1.6 \times \frac{[H^+]_{HY}}{[H^+]_{HX}} = 1.6 \times 2 = 3.2$$

بر این اساس، موارد دوم و پنجم از مقایسه های انجام شده درست هستند.

بررسی موارد:

مقایسه اول: با اینکه غلظت مولی اسید HY در مقایسه با اسید دیگر کمتر است، اما درجه یونش ذرات HY از ذرات HX بزرگتر بوده و در نتیجه HY اسید قوی تری به شمار می رود. *

مقایسه دوم: با توجه به بزرگتر بودن درجه یونش HY ، این اسید بیشتر یونش یافته و مجموع غلظت یون ها در محلول آن بیشتر خواهد بود. ✓

مقایسه سوم: شمار مولکول های اسید یونیده نشده در محلول HX که اسید ضعیف تری به شمار می رود، بیشتر است. *

مقایسه چهارم: رسانایی الکتریکی در محلولی که مجموع غلظت یون ها در آن بیشتر است؛ یعنی محلول HY ، بیشتر خواهد بود. *

مقایسه پنجم: مقدار pH محلول HX از pH محلول HY بزرگتر بوده و در نتیجه نسبت $\frac{[OH^-]}{[H^+]}$ در آن بزرگتر است. ✓

گروه آموزشی ماز

۹۷- کدام موارد از عبارتهای زیر، درست هستند؟

(آ) اسید چرب غیر حلقوی با فرمول مولکولی $C_{18}H_{34}O_2$ ، می تواند با بخار برم واکنش بدهد.

(ب) برخلاف مولکول ویتامین (کا)، در مولکول روغن زیتون بخش ناقطبی بر بخش قطبی غلبه دارد.

(پ) پاک کننده با فرمول $C_{17}H_{33}O_2NH_4$ ، حالت مایع داشته و قدرت پاک کنندگی آن در آب سخت کاهش می یابد.

(ت) همه مخلوط هایی که نور عبور داده شده از خود را پخش می کنند، ناپایدار بوده و با گذشت زمان ته نشین می شوند.

(ث) اکسیدهای حاصل از عنصری که آرایش الکترونی آن به زیر لایه $3p^4$ ختم می شود، اسید آرنیوس به شمار می روند.

(۴) ب و ت

(۳) ب و ت و ث

(۲) آ و پ و ث

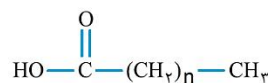
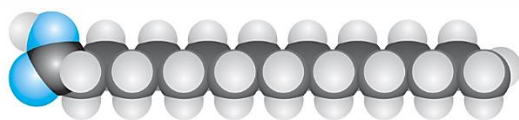
(۱) آ و ث

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط - مفهومی و حفظی - ۱۲۰۱)

عبارتهای (آ)، (پ) و (ث) درست هستند.

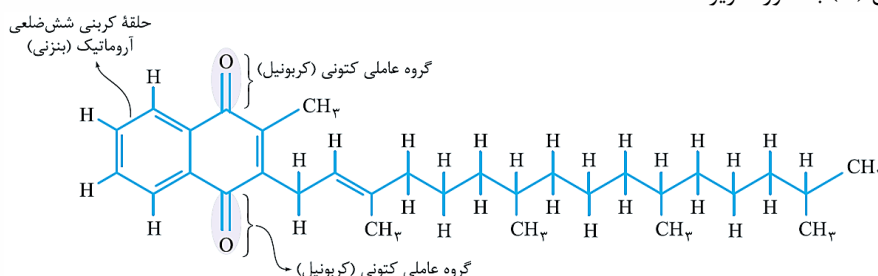
بررسی موارد:

(آ) تصویر زیر، ساختار کلی اسیدهای چرب سیر شده را نشان می دهد:



فرمول عمومی اسیدهای چرب سیر شده غیر حلقوی به صورت $C_nH_{2n}O_2$ است. بر این اساس، می توان گفت در ساختار اسید چرب مورد نظر تعداد $\frac{(18 \times 2) - 34}{2} = 1$ پیوند دوگانه $C=C$ وجود دارد که می تواند با بخار برم واکنش دهد.

(ب) در مولکول روغن زیتون، قسمت عمده مولکول از سه زنجیر هیدروکربنی یکسان تشکیل شده است و به همین خاطر در این مولکول، بخش ناقطبی بر بخش قطبی غلبه دارد. از طرفی می دانیم که ویتامین (کا) محلول در چربی است؛ از این رو در مولکول این ویتامین نیز بخش ناقطبی بر بخش قطبی غالب است. ساختار مولکول ویتامین (کا) به صورت زیر است:



فرمول مولکولی ویتامین کا به صورت $C_{31}H_{46}O_2$ بوده و این ماده در کلم و کاهو یافت می شود. در ساختار ویتامین کا، دو گروه عاملی کربونیل وجود دارد.

پ) در صورتی که کاتیون موجود در ساختار صابون یون Na^+ باشد، صابون به حالت جامد بوده و اگر کاتیون موجود در این ماده یکی از یون های K^+ یا NH_4^+ باشد، صابون به حالت مایع است. توجه داریم که صابون ها با یون های Mg^{2+} و Ca^{2+} موجود در آب سخت واکنش داده و رسوب تشکیل می دهند؛ در نتیجه قدرت پاک کنندگی آن ها کاهش پیدا می کند.

ت) کلوئیدها و سوسپانسیون ها هر دو مخلوط هایی هستند که نور را هنگام عبور از خود، پخش می کنند. توجه داریم که برخلاف سوسپانسیون ها، کلوئیدها پایدار بوده و با گذشت زمان ته نشین نمی شوند.

کلوئیدها مخلوط هایی از دو یا چند ماده به حساب می آیند که در برخی از ویژگی های خود، به محلول ها شباهت دارند و در برخی از ویژگی های خود، با محلول ها تفاوت داشته و به مخلوط های ناهمگن شبیه هستند. ذره های سازنده کلوئیدها عموماً به صورت مولکول های بزرگ و یا توده های مولکولی هستند که اندازه آن ها بزرگتر از اندازه حل شونده های موجود در محلول های همگن است. چون ذرات موجود در کلوئیدها بزرگتر از اندازه ذرات موجود در محلول ها است، اگر پرتوی نوری از درون کلوئیدها بگذرد، توسط ذره های سازنده کلوئید پخش شده و به چشم بازتابیده می شود و به همین خاطر است که مسیر عبور نور در کلوئیدها قابل مشاهده است. سطح ذرات موجود در ساختار کلوئیدها باردار بوده و به همین خاطر، این مواد با ماندن در یک موقعیت ثابت ته نشین نمی شوند.

ث) آرایش الکترونی گوگرد ($16S$) به زیر لایه $3p^4$ ختم شده و این عنصر نافلزی، دو اکسید با فرمول های شیمیایی SO_2 و SO_3 دارد که با آب واکنش داده و یون هیدرونیوم آزاد می کنند؛ بنابراین اکسیدهای مورد نظر اسید آرنیوس به شمار می روند.

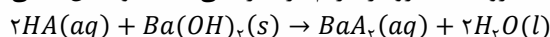
گروه آموزشی ماز

۹۸- محلولی از دو اسید ضعیف HX و HY به حجم $2/5$ لیتر و با $pH = 3$ در اختیار داریم. اگر درصد یونش اسیدهای HX و HY در این محلول به ترتیب برابر با $0/2$ و $0/4$ درصد باشد و برای خنثی شدن کامل این محلول، $68/4$ گرم باریم هیدروکسید لازم باشد، درصد جرمی HX در محلول اولیه کدام است؟ (جرم مولی HX را $80 g \cdot mol^{-1}$ و چگالی محلول اولیه را $1 g \cdot mL^{-1}$ در نظر بگیرید. $H = 1 : O = 16, Ba = 137$)

(۱) $1/12$ (۲) $1/25$ (۳) $2/24$ (۴) $2/5$

پاسخ: گزینه ۱ (سخت - مسأله ۱۲۰۱)

یکی از رفتارهای جالب و پر کاربرد اسیدها و بازها، واکنش هایی است که بین این دو دسته از مواد انجام می شود. به این گروه از واکنش ها، به اصطلاح واکنش های خنثی شدن یا همان تیتراسیون گفته می شود. طی واکنش های خنثی شدن، یون های هیدروکسید حاصل از بازها با یون های هیدرونیوم حاصل از اسیدها بر اساس معادله $OH^-(aq) + H_3O^+(aq) \rightarrow 2H_2O(l)$ وارد واکنش شده و مولکول های آب را تولید می کنند. از آنجا که هر دو اسید HX و HY تک پروتون دار هستند و با واکنش خنثی شدن این مواد با باریم هیدروکسید سروکار داریم، برای راحتی معادله واکنش خنثی شدن را به صورت زیر می نویسیم:



بر این اساس، تعداد مول HA برابر با مجموع تعداد مول HX و HY است. بر این اساس، داریم:

$$? mol HA = 68/4 g Ba(OH)_2 \times \frac{1 mol Ba(OH)_2}{171 g Ba(OH)_2} \times \frac{2 mol HA}{1 mol Ba(OH)_2} = 0/8 mol$$

بنابراین غلظت مولی HA (معادل با مجموع غلظت مولی دو اسید در محلول مورد نظر) برابر خواهد بود با:

$$HA \text{ غلظت مولی} = \frac{HA \text{ تعداد مول}}{\text{حجم محلول}} = \frac{0/8 mol}{2/5 L} = 0/32 mol \cdot L^{-1}$$

اگر غلظت اولیه HX را x مول بر لیتر در نظر بگیریم، غلظت اولیه HY برابر $0/32 - x$ مول بر لیتر خواهد شد. بر این اساس، غلظت یون H^+ تولید شده توسط هر کدام از این دو اسید را حساب می کنیم:

$$[H^+]_{HX} = n \times \alpha_{HX} \times M_{HX} = 1 \times \frac{0/2}{100} \times x = 2 \times 10^{-3} \times x$$

$$[H^+]_{HY} = n \times \alpha_{HY} \times M_{HY} = 1 \times \frac{0/4}{100} \times (0/32 - x) = 1/28 \times 10^{-3} - 4 \times 10^{-3} \times x$$

اما غلظت یون هیدرونیوم در محلول اولیه برابر با $10^{-pH} = 10^{-3} mol \cdot L^{-1}$ می است. بر این اساس، داریم:

$$[H^+]_{کلی} = [H^+]_{HX} + [H^+]_{HY} \rightarrow 10^{-3} = (2 \times 10^{-3} \times x) + (1/28 \times 10^{-3} - 4 \times 10^{-3} \times x) \rightarrow 1 = 2x + 1/28 - 4x \rightarrow$$

$$x = \frac{0/28}{2} = 0/14 mol \cdot L^{-1}$$

در نهایت، درصد جرمی HX را در محلول اولیه محاسبه می کنیم:

$$M = \frac{10 ad}{\text{جرم مولی}} \rightarrow a = \frac{0/14 \times 80}{10 \times 1} = 1/12 \text{ درصد}$$

گروه آموزشی ماز

۹۹- همه موارد زیر نادرست هستند، بجز ($Mg = 24, O = 16 : g \cdot mol^{-1}$)

- (۱) همه فلزها در واکنش با نافلزها تمایل دارند یک یا چند الکترون خود را از دست بدهند.
- (۲) در واکنش سوختن منیزیم، به ازای تولید ۱۶ گرم فراورده جامد، $9/632 \times 10^{23}$ الکترون مبادله می شود.
- (۳) گاز تولید شده هنگام ورود تیغه فلز روی به هیدروکلریک اسید، در واکنش تجزیه هیدروژن پراکسید تولید می شود.
- (۴) با استفاده از ۴ تیغه فلزی متفاوت و محلول الکترولیت آن ها، می توان ۶ نوع سلول گالوانی با آند و کاتد متفاوت ساخت.

پاسخ: گزینه ۴ (آسان - مفهومی و مسئله - ۱۲۰۲)

از آنجا که هر تیغه فلزی پتانسیل کاهشی متفاوتی دارد، تعداد سلول های گالوانی که می توان ساخت برابر است با:

$$\binom{4}{2} = \frac{4(4-1)}{2} = 2 \times 3 = 6$$

برای پی بردن به درستی این عبارت، می توانستیم ۴ تیغه فلزی را به ترتیب پتانسیل کاهشی مرتب کنیم و ببینیم اگر هر تیغه را به عنوان کاتد قرار دهیم، چند تیغه را می توان به عنوان آند انتخاب کرد. در این حالت، داریم:

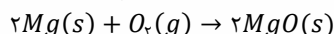
$$6 = 3 + 2 + 1 = \text{تعداد سلول های گالوانی}$$

پروسی سایر گزینه ها:

(۱) اغلب فلزها (نه همه آن ها)، در واکنش با نافلزها یک یا چند الکترون خود را به نافلزها منتقل می کنند. به عنوان یک مثال رد کننده، فلز طلا (Au) در طبیعت به صورت آزاد یافت می شود و تمایلی برای واکنش با نافلزهایی مانند اکسیژن ندارد.

در محیط پیرامون ما واکنش های اکسایش-کاهش زیادی مانند سیاه شدن وسایل نقره ای، خوردگی آهن و سایر فلزات، فساد مواد غذایی و ... در حال انجام شدن هستند که مطلوب ما نبوده و گاهی زیان هایی را به دنبال دارند. برای مثال، سالانه صدها میلیون تن از فلزهای گوناگون برای ساختن اسکله نفتی، اسکلت ساختمان ها و پل ها، کشتی، لوکوموتیو و راه آهن و ... مصرف می شود. هنگامی که فلزها در مجاورت با اکسیژن هوا قرار می گیرند، اغلب اکسایش یافته و به شکل اکسید درمی آیند. خوردگی به فرایند ترد شدن، خرد شدن و فروریختن فلزها بر اثر واکنش های اکسایش-کاهش گفته می شود. زنگ زدن آهن، تیره شدن نقره و زنگار سبز ایجاد شده بر سطح مس، نمونه هایی از فرایند خوردگی هستند.

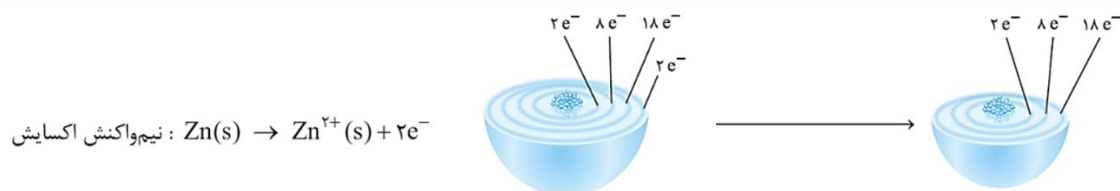
(۲) واکنش سوختن منیزیم به صورت زیر انجام می شود و به ازای تولید ۲ مول منیزیم اکسید، ۴ مول الکترون مبادله می شود:



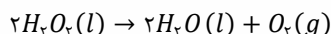
بر این اساس داریم:

$$? e^- = 16 g MgO \times \frac{1 mol MgO}{40 g MgO} \times \frac{4 mol e^-}{2 mol MgO} \times \frac{6/0.2 \times 10^{23} e^-}{1 mol e^-} = 4/816 \times 10^{23}$$

(۳) با توجه به مقایسه $E^\circ(Zn^{2+}/Zn) < E^\circ(H^+/H_2)$ ، بر اثر قرار دادن تیغه فلز روی (Zn) در محلول اسیدی (محلول HCl)، فلز روی به تدریج اکسید شده و گاز H_2 تولید می شود. تصویر زیر، نمایی از نیم واکنش اکسایش انجام شده طی این فرایند را نشان می دهد:



توجه داریم که از واکنش تجزیه هیدروژن پراکسید، گاز اکسیژن تولید می شود. معادله این واکنش به صورت زیر است:



گروه آموزشی ماز

۱۰۰- چند مورد از مطالب زیر درباره ورقه گالوانیزه، درست هستند؟

- (آ) اگر ورقه گالوانیزه خراش دیده در معرض هوا و رطوبت قرار گیرد، فلزی که زیر لایه $3d$ آن پر است، اکسید می شود.
- (ب) در سلول گالوانی تشکیل شده در سطح آهن گالوانیزه خراش دیده، جهت حرکت الکترون از سمت روی به آهن است.
- (پ) به دلیل واکنش فلز روی با مواد غذایی، از ورقه گالوانیزه برخلاف حلبی برای ساخت قوطی کنسرو استفاده نمی شود.
- (ت) در آهن گالوانیزه، با هر دو رویکرد حفاظت فیزیکی و حفاظت کاتدی از خوردگی فلز آهن جلوگیری می شود.

۱ (۴)

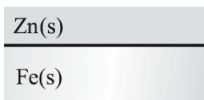
۲ (۳)

۳ (۲)

۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۱ (آسان - مفهومی - ۱۲۰۲)

ساختار ورقه های گالوانیزه به صورت زیر است:



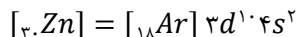
نیم‌واکنش‌های اکسایش و کاهش در آهن گالوانیزه خراش دیده، به صورت زیر هستند:



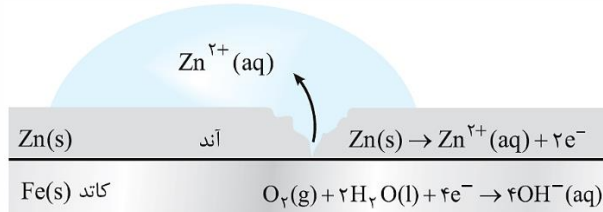
بر این اساس، همه عبارت های داده شده درست هستند.

بررسی موارد:

(آ) در ورقه گالوانیزه خراش دیده، فلز روی (Zn) اکسید می‌شود. توجه داریم که در آرایش الکترونی اتم این فلز، زیر لایه $3d$ پر است:



(ب) در سلول‌های گالوانی، جهت حرکت الکترون‌ها از سمت آند به سمت کاتد است. در ورق گالوانیزه خراش دیده، الکترون‌های حاصل از اکسایش آند (فلز روی) به سطح کاتد (فلز آهن) منتقل می‌شوند. تصویر زیر، نمای از ورق گالوانیزه خراشیده شده را نشان می‌دهد:



(پ) از آنجا که اسیدهای موجود در مواد غذایی با فلز روی واکنش می‌دهند، از ورق گالوانیزه نمی‌توان در ساخت ظروف بسته‌بندی استفاده کرد. توجه داریم که اسیدهای ضعیف موجود در مواد غذایی، بر فلز قلع (Sn) موجود در حلبی، اثر نمی‌کنند.

ت) در آهن گالوانیزه، قبل از ایجاد خراش، فلز روی از طریق حفاظت فیزیکی از خوردگی آهن جلوگیری می‌کند و پس از ایجاد خراش، آهن به واسطه حفاظت کاتدی خورده نمی‌شود.

تا قبل از ایجاد هر گونه خراشی در سطح آهن گالوانیزه (آهن سفید)، فلز روی به عنوان یک پوشش محافظ از خوردگی آهن جلوگیری می‌کند. توجه داریم که در این شرایط خود روی نیز به خاطر ایجادشدن یک لایه متراکم از $ZnO(s)$ در سطح آن، دچار خوردگی نمی‌شود. هنگامی که خراشی در سطح آهن گالوانیزه پدید می‌آید، هر دو فلز (روی و آهن) در مجاورت با اکسیژن و رطوبت قرار می‌گیرند و برای از دست دادن الکترون (اکسایش یافتن) رقابت می‌کنند. از آن‌جا که E° فلز روی از E° آهن کمتر است، فلز روی در این رقابت پیروز شده و در نقش آند اکسید می‌شود و از آهن به عنوان یک محافظ کاتدی در مقابل خورده‌شدن محافظت می‌کند.

گروه آموزشی ماز

۱۰۱- کدام موارد از عبارتهای زیر درباره مولکول XY_3 درست است؟

(آ) اگر در نقشه پتانسیل آن به اتم مرکزی δ^+ نسبت داده شود، اتم‌های Y به رنگ آبی مشخص خواهند شد.

(ب) اگر نیروی بین مولکولی غالب در این ماده از نوع پیوند هیدروژنی باشد، مولکول‌های آن قطعا قطبی هستند.

(پ) اگر هر دو عنصر X و Y در گروه ۱۶ جدول دوره‌ای قرار داشته باشند، مولکول XY_3 ساختاری مسطح خواهد داشت.

ت) اگر با نزدیک شدن میله شیشه‌ای، باریکه مایع از این ماده انحراف یابد، اتم مرکزی آن قطعا دارای بار جزئی منفی است.

(۴) ب و ت

(۳) ب و پ

(۲) آوت

(۱) آ و پ

یاسخ: گزینه ۳ (متوسط - مفهومی - ۱۲۰۳)

عبارت‌های (ب) و (پ) درست هستند.

بررسی موارد:

(آ) در نقشه پتانسیل الکتروستاتیکی هر مولکول، اتم‌هایی که به آن‌ها بار جزئی مثبت نسبت داده می‌شود، به رنگ آبی و اتم‌هایی که به آن‌ها بار جزئی منفی نسبت داده می‌شود، به رنگ قرمز نشان داده می‌شوند. اگر اتم مرکزی مولکول XY_3 بار جزئی مثبت داشته باشد، اتم‌های Y بار جزئی منفی داشته و به رنگ قرمز مشخص خواهند شد.

(ب) نیروی بین مولکولی غالب در مولکول‌های کوچک که دارای حداقل یکی از پیوندهای $N-H$ ، $O-H$ یا $F-H$ در ساختار خود هستند، از نوع پیوند هیدروژنی است. بنابراین مولکول XY_3 همان NH_3 است که مولکولی قطبی به شمار می‌رود. توجه داریم که اتم مرکزی مولکول مورد نظر، نمی‌تواند اکسیژن یا فلوئور باشد زیرا این دو اتم با اتم هیدروژن، به ترتیب مولکول‌های H_2O و HF را تشکیل می‌دهند.

(ب) در شرایط داده شده، دو عنصر X و Y به ترتیب معادل S و O هستند و مطابق شکل زیر، ساختار مولکول SO_3 مسطح است.



ت) اگر مولکول XY_3 یک مولکول قطبی باشد، باریکه XY_3 در حالت مایع، با نزدیک شدن میله شیشه‌ای انحراف خواهد یافت. توجه داریم که اتم مرکزی مولکول قطبی XY_3 می‌تواند مانند ترکیب NF_3 ، بار جزئی مثبت داشته باشد.

گروه آموزشی ماز

۱۰۲- چند مورد از مطالب زیر، درست‌اند؟ ($O = 16, C = 12, H = 1 : g. mol^{-1}$)

- (آ) الماس، رسانای گرما بوده و در ساختار بلوری ۱۵ گرم از آن، $10^{24} \times 3/01$ پیوند اشتراکی وجود دارد.
 (ب) پختن نان بر روی دانه‌های سنگ نشان از مقاومت گرمایی فراوان‌ترین اکسید موجود در پوسته جامد زمین دارد.
 (پ) اگر اتم‌های فلئور مولکول CF_4 با اتم هیدروژن جایگزین شوند، عدد اکسایش اتم کربن در این ترکیب تغییر نمی‌کند.
 (ت) درصد جرمی اکسیژن در ساختار مولکول گلوکز، از درصد جرمی اکسیژن در اتیلن گلیکول بیشتر است.

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط - مفهومی و مسأله - ۱۲۰۳)

عبارت‌های (ب) و (ت) درست‌اند.

بررسی موارد:

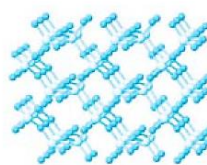
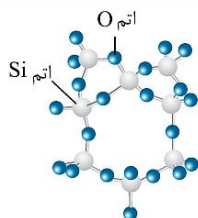
(آ) الماس، رسانای گرما است اما برخلاف گرافیت، جریان الکتریسیته را از خود عبور نمی‌دهد. توجه داریم که در ساختار الماس، هر اتم C به ۴ اتم C دیگر متصل است. از آنجا که هر پیوند اشتراکی بین دو اتم کربن وجود دارد، تعداد کل پیوندهای اشتراکی در ساختار بلوری با n اتم کربن برابر با $4n \times \frac{1}{2}$ خواهد بود. بر این اساس داریم:

$$\text{پیوند اشتراکی } 2n \times \frac{1 \text{ mol } C}{12 \text{ g } C} \times \frac{6/02 \times 10^{23} \text{ اتم } C}{1 \text{ mol } C} \times \frac{15 \text{ g } C}{12 \text{ g } C} = 1/505 \times 10^{24} = \text{پیوند اشتراکی ?}$$

سیلیس (سیلیسیم دی‌اکسید)، سیلیسیم، سیلیسیم کربید، گرافیت و الماس در دسته مواد کووالانسی قرار می‌گیرند. این گروه از مواد شامل شمار بسیار زیادی از اتم‌ها می‌شوند که توسط پیوندهای اشتراکی به یکدیگر متصل شده‌اند. از آنجا که این مواد در دما و فشار اتاق به حالت جامد هستند، آن‌ها را با نام جامدهای کووالانسی نیز می‌خوانند. یافته‌های تجربی نشان می‌دهند که عنصرهای اصلی سازنده جامدهای کووالانسی در طبیعت، کربن و سیلیسیم هستند. علاوه بر کربن و سیلیسیم، عنصر اکسیژن نیز در ساختار برخی از جامدهای کووالانسی وجود دارد. کربن یک عنصر نافلزی و سیلیسیم نیز یک عنصر شبه‌فلزی از گروه چهاردهم جدول تناوبی است. اتم‌های این عناصر در واکنش با سایر اتم‌ها، الکترون به اشتراک گذاشته و پیوند کووالانسی (اشتراکی) تشکیل می‌دهند و به همین خاطر، از آن‌ها تاکنون یون تک‌اتمی در هیچ ترکیبی شناخته نشده است.

(ب) فراوان‌ترین اکسید در پوسته جامد زمین سیلیس (SiO_2) است. این ماده یکی از سازنده‌های اصلی بسیاری از سنگ‌ها است و به علت مقاومت گرمایی بالای آن، می‌توان از دانه‌های درشت سنگ برای پختن نان سنگک استفاده کرد.

ساختار این ماده به صورت زیر است:



برای ذوب کردن یا خرد کردن سیلیس و سایر جامدهای کووالانسی، باید بر پیوندهای اشتراکی بین اتم‌های موجود در این مواد غلبه کرد. به همین خاطر، جامدهای کووالانسی دیرگداز بوده و علاوه بر سختی زیاد، نقطه ذوب بالایی نیز دارند. به عنوان مثال، پخته شدن نان سنگک بر روی دانه‌های درشت سنگ را می‌توان نشان از مقاومت گرمایی سیلیس و دیرگداز بودن آن دانست. در نقطه‌ی مقابل، برای ذوب یخ باید بر پیوندهای هیدروژنی موجود در ساختار این ماده غلبه کنیم. از آنجا که قدرت پیوندهای هیدروژنی موجود در ساختار یخ کمتر از قدرت پیوندهای کووالانسی موجود در سیلیس است، می‌توان گفت برای ذوب یخ به انرژی کمتری نیاز داریم.

(پ) با توجه به مقایسه قدرت نافلزی عناصر داده شده که به صورت $H < C < F$ است، عدد اکسایش اتم کربن در ساختار مولکول‌های CF_4 و CH_4 به ترتیب برابر ۴+ و ۴- است.

(ت) فرمول مولکولی گلوکز به صورت $C_6H_{12}O_6$ بوده و فرمول شیمیایی اتیلن گلیکول $C_2H_6O_2$ است؛ بر این اساس داریم:

$$\text{درصد جرمی اکسیژن در گلوکز} = \frac{(6 \times 16)}{(6 \times 16) + (6 \times 12) + (12 \times 1)} \times 100 = \frac{9600}{180} \approx 53\%$$

$$\text{درصد جرمی اکسیژن در اتیلن گلیکول} = \frac{(2 \times 16)}{(2 \times 16) + (2 \times 12) + (6 \times 1)} \times 100 = \frac{3200}{62} \approx 51/6\%$$

بنابراین درصد جرمی اکسیژن در گلوکز، بالاتر است. توجه داریم که از محلول اتیلن گلیکول به عنوان ضدیخ استفاده می‌شود. این ترکیب قطبی در آب محلول و در هگزان نامحلول است. این ماده همچنین یکی از مونومرهای به کار رفته در سنتز پلی اتیلن ترفتالات است که در ساخت بطری‌های آب بکار می‌رود.

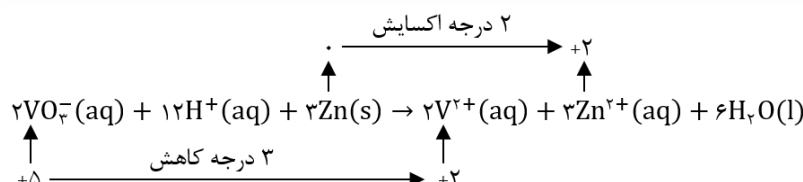
۱۰۳- کدام یک از مطالب داده شده، درباره معادله موازنه نشده زیر نادرست است؟ (حجم محلول اولیه را یک لیتر در نظر بگیرید.)

$$VO_3^-(aq) + H^+(aq) + Zn(s) \rightarrow V^{2+}(aq) + Zn^{2+}(aq) + H_2O(l)$$

- (۱) نسبت مجموع ضرایب فراورده‌های یونی به واکنش‌دهنده‌های یونی در معادله موازنه شده برابر با $\frac{5}{14}$ است.
- (۲) یون VO_3^- در واکنش‌های اکسایش-کاهش، تنها می‌تواند در نقش گونه اکسندۀ ظاهر شود.
- (۳) طی واکنش شیمیایی انجام شده در این فرایند، رنگ محلول از زرد به بنفش تغییر می‌کند.
- (۴) اگر بر اثر انجام واکنش، pH محلول از ۲ به $\frac{2}{3}$ افزایش یابد، کمی بیشتر از 0.0125 مول یون Zn^{2+} تولید خواهد شد.

پاسخ: گزینه ۴ (سخت - مفهومی و مسأله - ۱۲۰۳)

معادله موازنه شده واکنش به صورت زیر است:



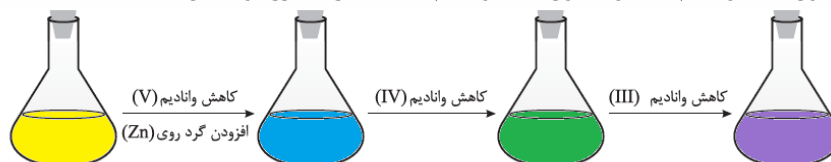
طی این فرایند، غلظت یون H^+ در محلول از $10^{-2} \text{ mol} \cdot L^{-1}$ در محلول اولیه به $5 \times 10^{-3} \text{ mol} \cdot L^{-1}$ رسیده است. چون در واکنش مورد نظر آب به عنوان فراورده تولید می‌شود، بنابراین می‌توان گفت تعداد مول یون H^+ موجود در محلول مورد نظر از 0.01 mol در محلول اولیه به $0.005 \times (1 + V) \text{ mol}$ می‌رسد و در نتیجه تغییر تعداد مول H^+ کمتر از 0.005 mol خواهد بود. اگر تغییر تعداد مول‌های یون هیدروژن را به تقریب برابر با 0.005 mol در نظر بگیریم، داریم:

$$? \text{ mol } Zn^{2+} = 0.005 \text{ mol } H^+ \times \frac{3 \text{ mol } Zn^{2+}}{12 \text{ mol } H^+} = 0.00125 \text{ mol } Zn^{2+}$$

بنابراین کمی کمتر از 0.0125 mol یون Zn^{2+} طی این فرایند تولید خواهد شد.

پروسی سایر گزینه‌ها:

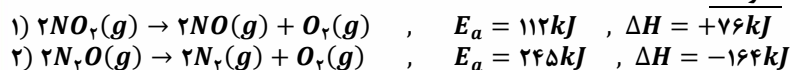
- (۱) با توجه به معادله واکنش مورد نظر، نسبت مجموع ضرایب فراورده‌های یونی به واکنش‌دهنده‌های یونی برابر با $\frac{5}{14}$ خواهد بود.
- (۲) از آنجا که در یون VO_3^- ، اتم وانادیم به بالاترین عدد اکسایش خود یعنی +۵ رسیده است؛ پس می‌توان گفت یون VO_3^- در واکنش‌های اکسایش-کاهش مختلف، تنها می‌تواند نقش اکسندۀ را ایفا کند. توجه داریم که آرایش الکترونی اتم وانادیم در حالت خنثی به $3d^3 4s^2$ ختم می‌شود.
- (۳) مطابق شکل زیر، محلول نمک وانادیم (V) و محلول نمک وانادیم (II) به ترتیب زرد و بنفش هستند.



محلول	محلولی از نمک وانادیم (V)	محلولی از نمک وانادیم (IV)	محلولی از نمک وانادیم (III)	محلولی از نمک وانادیم (II)
رنگ محلول	زرد	آبی	سبز	بنفش
آرایش الکترونی وانادیم	وانادیم در این محلول به شکل یون چنداتی است. شکل یون چنداتی است.	وانادیم در این محلول به شکل یون چنداتی است.	$[_{18}Ar]3d^2$	$[_{18}Ar]3d^3$

گروه آموزشی ماز

۱۰۴- با توجه به واکنش‌های زیر، کدام موارد از عبارات داده شده، نادرست هستند؟



- (آ) در واکنشی که سطح انرژی فراورده‌ها از سطح انرژی واکنش‌دهنده‌ها بالاتر است، یک گاز قهوه‌ای رنگ تجزیه می‌شود.
- (ب) در شرایط یکسان از نظر دمای محیط و غلظت مواد شرکت‌کننده در واکنش، سرعت واکنش گرماگیر کمتر است.
- (پ) نسبت اختلاف سطح انرژی قله تا سطح انرژی فراورده در واکنش اول کمتر از 0.09 برابر واکنش دوم است.
- (ت) با افزایش دما، سرعت واکنش اول برخلاف واکنش دوم افزایش می‌یابد.

(۴) پ و ت

(۳) ب و ت

(۲) آ و پ

(۱) آ و ب

عبارت های (ب) و (ت) نادرست اند.

پروسی موارد:

(آ) گاز NO_2 یک گاز قهوه ای رنگ است. از آنجا که آنتالپی واکنش تجزیه این گاز مثبت است، پس می توان گفت که در این واکنش، سطح انرژی فراورده ها از سطح انرژی واکنش دهنده ها بیشتر است.

(ب) در شرایط یکسان از نظر دما و غلظت، سرعت واکنش اول که یک واکنش گرماگیر است، بیشتر از واکنش دیگر است. توجه داریم که هر چه انرژی فعال سازی یک واکنش (E_a) کم تر باشد، سرعت انجام آن واکنش بیشتر است.

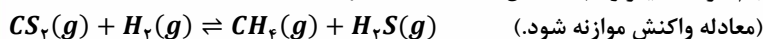
(پ) در رابطه با واکنش های (۱) و (۲) داریم:

$$\left. \begin{aligned} (۱) \quad E_a - \Delta H = 112 - 76 = 36 \text{ kJ} \\ (۲) \quad E_a + |\Delta H| = 245 + 164 = 409 \text{ kJ} \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{نسبت مورد نظر} = \frac{36}{409} = 0.088 < 0.09$$

(ت) با افزایش دما، انرژی فعال سازی واکنش ها تامین شده و بر این اساس، سرعت هر دو واکنش افزایش می یابد. توجه داریم که تاثیر دما بر سرعت یک واکنش، مستقل از گرماگیر یا گرماده بودن آن واکنش است.

گروه آموزشی ماز

۱۰۵- چند مورد از مطالب داده شده درباره تعادل زیر، درست است؟ (حجم ظرف ۲ لیتر و ثابت تعادل $0.25 \text{ mol}^{-2} \cdot \text{L}^2$ است.)



(آ) اگر ۲ مول از هر کدام از مواد ناقطبی در تعادل وجود داشته باشند، غلظت مولی ماده قطبی $0.5 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ خواهد بود.

(ب) همانند واکنش تولید اوزون با استفاده از گاز اکسیژن، با افزایش فشار واکنش در جهت رفت جابه جا می شود.

(پ) در صورت خارج کردن مقداری از گاز H_2S موجود در این تعادل، واکنش در جهت رفت جابه جا می شود.

(ت) در صورتی که بدانیم این واکنش گرماده است، با افزایش دما ثابت تعادل واکنش افزایش خواهد یافت.

۴ (۴)

۳ (۳)

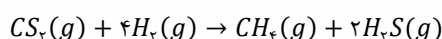
۲ (۲)

۱ (۱)

به جز عبارت (ت)، سایر عبارت های داده شده درست اند.

پروسی موارد:

(آ) معادله واکنش موازنه شده به صورت زیر است:



بنابراین ثابت تعادل واکنش برابر خواهد بود با:

$$K = \frac{[CH_4] \times [H_2S]^2}{[CS_2] \times [H_2]^4} = \frac{n_{CH_4} \times n_{H_2S}^2}{n_{CS_2} \times n_{H_2}^4} \times \left(\frac{1}{V}\right)^{2-4} = \frac{2 \times x^2}{2 \times 2^4} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 0.25 \rightarrow \frac{x^2}{2^4} \times 2^2 = \frac{1}{2^2} \rightarrow x^2 = \frac{2^4}{2^2} = 1 \text{ mol}$$

پس غلظت مولی H_2S در حالت تعادل برابر با $0.5 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ خواهد بود. توجه داریم که مولکول های CS_2 ، H_2 و CH_4 ناقطبی بوده و مولکول H_2S نیز قطبی است.

(ب) با افزایش فشار، واکنش تعادلی داده شده در جهت تعداد مول های گازی کمتر (یعنی جهت رفت) جابه جا می شود. توجه داریم که در واکنش تولید اوزون از اکسیژن که معادله آن به صورت $3O_2 \rightleftharpoons 2O_3$ است نیز افزایش فشار باعث جابه جایی واکنش در جهت رفت می شود.

(پ) با خارج کردن مقداری از گاز هیدروژن سولفید از ظرف واکنش، تعادل در جهت تولید H_2S یعنی جهت رفت، جابه جا خواهد شد.

(ت) در واکنش های گرماده، با افزایش دما تعادل در جهت برگشت جابه جا شده و در نتیجه مقدار عددی ثابت تعادل کاهش خواهد یافت.

گروه آموزشی ماز