

پنجشنبه

۱۴۰۳/۰۱/۲۳



آزمون الکترونیکی کنکوری های ریاضی – مرحله ۱۶

آزمون اختصاصی – دفترچه ۱

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سوال	از شماره	تا شماره	زمان پاسخ گویی
۱	ریاضیات	۴۰	۱	۴۰	۷۰ دقیقه

حق چاپ و تکثیر سوالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز «گروه ماز» مجاز می باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می شود.

به دلیل عدم رضایت تیم ماز، هر گونه استفاده غیر قانونی از دفترچه سوالات مجاز نیست. تمامی اشخاص، شرعاً حرام است.



۱- عمود منصف پاره خط واصل بین دو نقطه‌ی $A(-7, 6)$ و $B(3, 4)$ نیمساز ناحیه‌ی دوم و چهارم را در نقطه‌ای با کدام طول قطع می‌کند؟

- (۱) $\frac{5}{3}$ (۲) $\frac{-5}{3}$ (۳) $\frac{5}{2}$ (۴) $\frac{-5}{2}$

۲- نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \sqrt{x}$ را در امتداد محور x ها، ۱۱ واحد در جهت منفی و سپس در امتداد محور y ها، ۳ واحد در جهت منفی انتقال می‌دهیم. فاصله‌ی نقطه‌ی برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f ، از مبدأ مختصات کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{9}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{\sqrt{10}}{9}$ (۴) $\frac{\sqrt{10}}{3}$

۳- تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-3} + 4 & x \geq 3 \\ 6x - 2k & x < 3 \end{cases}$ در تمام نقاط دامنه‌اش در تعریف $(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2))$ صدق می‌کند. حدود k کدام است؟

- (۱) $k \geq 7$ (۲) $k \leq 7$ (۳) $k \geq 9$ (۴) $k \leq 9$

۴- اگر معادله‌ی $\frac{x-1}{x-3} + \frac{x-1+a}{x^2-2x-3} = 1$ ریشه‌ی حقیقی نداشته باشد، اختلاف مقادیر ممکن برای a کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۶ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲

۵- اگر مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $x^4 - 4x^2 - 1 = 0$ به ترتیب برابر S و P باشند، حاصل ضرب $P^2 - 6PS + S^2$ کدام است؟

- (۱) $7 + 4\sqrt{3}$ (۲) $7 - 4\sqrt{3}$ (۳) $9 + 4\sqrt{5}$ (۴) $9 - 4\sqrt{5}$

۶- اعداد طبیعی طوری دسته‌بندی شده‌اند که تعداد عضوهای هر دسته (به جز دسته اول) برابر بزرگ‌ترین عضو دسته‌ی قبل است یعنی:

$$\{1, 2, 3, 4, 5\}, \{6, 7, 8, 9, 10\}, \{11, 12, 13, \dots, 20\}, \dots$$

در این صورت میانگین اعضای دسته‌ی یازدهم کدام است؟

- (۱) $3840/5$ (۲) $3940/5$ (۳) $3850/5$ (۴) $3950/5$

۷- اگر $f(x) = \frac{3^{x+1} + 3^{-x+1}}{3^x - 3^{-x+2}}$ و $f^{-1}(x) = m \log_3 \frac{nx+3}{x-3}$ باشد، $m+n$ کدام است؟

- (۱) ۱۰ (۲) $10/5$ (۳) ۹ (۴) $9/5$

۸- اگر مجموع جواب‌های معادله‌ی $\log_3^{(81^x + 140)} = 2x + 3$ را برابر k فرض کنیم، حاصل $[k]$ کدام است؟ ($[]$ نماد جزء صحیح است)

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

محل انجام محاسبات



۹- اگر $f(x) = \sqrt{x^2 + x - 12}$ و $g(x) = \sqrt{18 - x^2}$ ، آن گاه دامنه‌ی تابع $g \circ f$ شامل چند عدد صحیح است؟
 ۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۱۰- باقی مانده و خارج قسمت تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $(3x^2 + 12x)$ به ترتیب $(6x - 1)$ و $Q(x)$ است. اگر $Q(-4) = 12$ باشد، آن گاه مقدار باقی مانده‌ی تقسیم عبارت $P'(x)$ بر $(x + 4)$ کدام است؟
 ۱) ۱۵۶ ۲) ۱۵۰ ۳) -۱۳۸ ۴) -۱۴۴

۱۱- حاصل عبارت $A = \frac{\cos^2 x \cos^2 y - \sin^2 x \sin^2 y}{\sin x \cos x \cos y}$ به ازای $x = y = 45^\circ$ به صورت $4\sqrt{a - \sqrt{b}}$ است. مقدار $2b - 3a$ کدام است؟
 ۱) صفر ۲) ۵ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۲- معادله‌ی $\sin^2 x (\cos^2 x + \sin^2 x) = \cos^2 x (\cos^2 x - \sin^2 x)$ در بازه‌ی $[-\pi, 0]$ دارای چند جواب است؟
 ۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۸ ۴) ۶

۱۳- کدام یک از حدهای زیر، نامتناهی نیست؟

(۲) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x - |x|}{x^2 + [-x]}$

(۱) $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{|4 - x|}{x^2 - 8x + 16}$

(۴) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \left[\frac{-1}{x} \right]$

(۳) $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \frac{[\cos^2 x]}{\cos x}$

۱۴- حاصل $\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\sin(\pi - x) \sin(\frac{\pi}{2} - x)}{\sqrt{1 + \cos^3 x}}$ کدام است؟

(۴) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

(۳) $-\frac{\sqrt{6}}{3}$

(۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(۱) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

۱۵- تعداد نقاط ناپیوستگی تابع با ضابطه‌ی $f(x) = 2 \left[x - \frac{2}{5} \right] + \left[x + \frac{3}{5} \right]$ در بازه‌ی $[-3, 3]$ کدام است؟
 ۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۱۶- تعداد مجانب‌های نمودار تابع $f(x) = \frac{\tan x}{\sqrt{9 - x^2}}$ کدام است؟

(۴) بی شمار

(۳) ۲

(۲) ۳

(۱) ۴

محل انجام محاسبات

۱۷- کدام یک از موارد زیر صحیح هستند؟

الف: دامنه‌ی تابع مشتق تابع $f(x) = |x^3 + x|$ برابر $\mathbb{R}$ است.

ب: تابع $f(x) = \sqrt[5]{x^2 - 1}$ دقیقاً در دو نقطه از دامنه‌اش دارای مماس قائم است.

- (۱) فقط الف (۲) فقط ب (۳) هر دو گزاره الف و ب (۴) هیچ کدام

۱۸- اگر $f(x) = \frac{x^7 + 128}{x^6 - 2x^5 + 4x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 32x + 64}$ مقدار $f'(0)$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۱ (۳) صفر (۴) -۱

۱۹- معادله‌ی خطی که نقاط اکسترمم نسبی تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x^3 - (3a+6)x^2 + (6a+9)x + 2b$ را به هم وصل می‌کند به صورت $2y + 3x = 6$ است. اگر طول نقطه‌ی عطف تابع f برابر $x=2$ باشد، مقدار $f(-1)$ کدام است؟

- (۱) -۲۰ (۲) -۱۹ (۳) -۱۸ (۴) -۱۷

۲۰- اولین نقطه‌ی عطف تابع $f(x) = \sin^2 x + \cos^4 x$ با طول مثبت دارای کدام طول است؟

- (۱) $\frac{\pi}{2}$ (۲) $\frac{\pi}{4}$ (۳) $\frac{\pi}{8}$ (۴) $\frac{3\pi}{8}$

۲۱- در مثلث ABC ، عمود منصف ضلع BC از رأس A عبور می‌کند و نقطه‌ی M از سه ضلع مثلث به یک فاصله است. اگر $AB=6$ باشد و خطی که از نقطه‌ی M موازی با ضلع BC رسم می‌شود، دو ضلع دیگر مثلث را در نقاط P و Q قطع کند، محیط مثلث APQ کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲

۲۲- در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ ، نقاط M و P به ترتیب وسط اضلاع BC و AB قرار دارند. اگر AM و MP به ترتیب قطر BD را در نقاط N و Q قطع کنند، مساحت مثلث MNQ چه کسری از مساحت متوازی‌الاضلاع $ABCD$ است؟

- (۱) $\frac{1}{48}$ (۲) $\frac{1}{36}$ (۳) $\frac{1}{24}$ (۴) $\frac{1}{18}$

۲۳- سه صفحه‌ی P_1, P_2, P_3 دوجه دو متقاطع اند. فصل مشترک‌های این سه صفحه کدام نمی‌تواند باشد؟

- (۱) یک نقطه (۲) یک خط (۳) سه خط موازی (۴) سه خط متقاطع

۲۴- در دوزنقه $ABCD$ ($AB \parallel CD$)، $AB=10$ ، $DC=15$ و $AD=7$ است. از نقطه‌ی P محل تلاقی امتداد ساق‌های این دوزنقه، مماسی بر دایره‌ی گذرنده از نقاط A و D رسم می‌کنیم. طول این قطعه‌ی مماس کدام است؟

- (۱) $5\sqrt{3}$ (۲) $5\sqrt{6}$ (۳) $7\sqrt{6}$ (۴) $7\sqrt{3}$

محل انجام محاسبات



۲۵- در مثلث قائم الزاویه ABC ($\hat{B} = 90^\circ$)، $AB = BC = 15$ است. اگر نقطه N روی ضلع AB و $BN = 7$ باشد، آن گاه کمترین محیط ممکن برای مثلث MBN به گونه ای که M روی وتر AC باشد، کدام است؟

- (۱) ۲۶ (۲) ۲۴ (۳) ۲۲ (۴) ۲۰

۲۶- در مثلث ABC ، اگر $AB = 3$ ، $AC = 3\sqrt{2}$ ، $\hat{A} = 135^\circ$ باشد، طول میانه AM کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) ۲ (۳) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ (۴) ۳

۲۷- به ازای کدام مقادیر a و b ، با افزوده شدن ۲ واحد به درایه واقع در سطر دوم و ستون سوم ماتریس $A = \begin{bmatrix} a+2 & b & c \\ 3 & b+2 & c \\ a & b & c+1 \end{bmatrix}$ واحد به دترمینان این ماتریس اضافه می شود؟

- (۱) b دلخواه و $a = \frac{1}{3}$ (۲) a دلخواه و $b = \frac{1}{3}$
(۳) b دلخواه و $a = -\frac{1}{3}$ (۴) a دلخواه و $b = -\frac{1}{3}$

۲۸- نقاط $A(a, -2)$ و $B(6-a, 4)$ دو سر قطری از دایره به معادله $x^2 + y^2 + mx + ny - 15 = 0$ هستند. مقدار مثبت a کدام است؟

- (۱) ۷ (۲) ۶ (۳) ۵ (۴) ۴

۲۹- کانون یک سهمی که دهانه آن رو به بالا باز می شود، نقطه $F(-1, 1)$ است و این سهمی از نقطه $M(2, 5)$ می گذرد. عرض نقطه تقاطع این سهمی با محور y ها کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۱ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) ۲

۳۰- اگر $\vec{a} = (1, 2, -m)$ ، $\vec{b} = (2m, -1, 1)$ و اندازه دو بردار $\vec{a} + \vec{b}$ و $\vec{a} - \vec{b}$ برابر هم باشد، مساحت متوازی الاضلاعی که روی دو بردار $\vec{a} + \vec{b}$ و $\vec{a} - \vec{b}$ ساخته می شود، کدام است؟

- (۱) ۲۷ (۲) $27\sqrt{2}$ (۳) $63\sqrt{2}$ (۴) ۶۳

۳۱- باقی مانده تقسیم اعداد a و $3a$ بر عدد طبیعی b به ترتیب ۱۷ و ۹ شده است. چند مقدار برای b وجود دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۳۲- رقم یکان عدد $24^{2024} (1! + 2! + 3! + \dots + 1403!)$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۳ (۴) ۴

محل انجام محاسبات

۳۳- در یک گراف ناهمبند با حداقل رأس، اگر مجموعه همسایگی باز هر رأس شامل ۵ عضو باشد، تعداد دورهای به طول ۵ کدام است؟

- ۱۲۰ (۱) ۱۲۲ (۲) ۱۴۰ (۳) ۱۴۴ (۴)

۳۴- تعداد جوابهای صحیح و نامنفی نامعادله $x_1^4 + x_2 + x_3 < 7$ کدام است؟

- ۳۶ (۱) ۴۲ (۲) ۴۹ (۳) ۵۰ (۴)

۳۵- گراف C_5 چند مجموعه احاطه گر دارد؟

- ۱۱ (۱) ۱۸ (۲) ۱۹ (۳) ۲۱ (۴)

۳۶- در جامعه‌ای انحراف معیار برابر ۴۰ است. حداقل تعداد اعضای نمونه چقدر باشد تا انحراف معیار بر آورد میانگین نمونه‌ای کمتر از ۲/۵ باشد؟

- ۲۵۶ (۱) ۲۵۷ (۲) ۲۵۸ (۳) ۲۵۹ (۴)

۳۷- ضریب تغییرات داده‌های آماری زیر کدام است؟

$x_i - 16$	-۴	-۲	۰	۲	۴
f_i	۷	۹	۱۷	۱۱	۶

- ۰/۱۵ (۱)
۰/۲ (۲)
۰/۲۲ (۳)
۰/۲۵ (۴)

۳۸- سه سکه را پرتاب می‌کنیم. اگر در بین آن‌ها پشت ظاهر شد دو تاس پرتاب می‌کنیم و اگر هیچ کدام پشت ظاهر نشود سکه‌ای دیگر می‌اندازیم. احتمال آن که بر روی دو تاس اعداد زوج ظاهر شود، چقدر است؟

- $\frac{1}{16}$ (۱) $\frac{7}{32}$ (۲) $\frac{7}{16}$ (۳) $\frac{1}{32}$ (۴)

۳۹- فضای نمونه‌ای شامل ۴ برآمد $\{a, b, c, d\}$ است. $P(\{b, c\}) = \frac{1}{3}$ و $P(\{b, d\}) = \frac{2}{3}$ می‌باشد. اگر دو پیشامد $\{b, c\}, \{b, d\}$ مستقل باشند، مقدار $P\{d\}$ چند برابر $P\{a\}$ است؟

- $\frac{1}{6}$ (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) ۲ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴)

۴۰- اگر $A = \{\{1, 2\}, \{1, \{2\}\}, \{1, \{2\}, \{1, 2\}\}, \{2\}\}$ و $B = \{\{1\}, \{1, 2\}\}$ باشند، تعداد زیرمجموعه‌های سره غیر تهی $A \cap B'$ کدام است؟

- ۷ (۱) ۶ (۲) ۱۴ (۳) ۱۵ (۴)

محل انجام محاسبات

پنجشنبه

۱۴۰۳/۰۱/۲۳



آزمون الکترونیکی کنکوری های ریاضی - مرحله ۱۶

آزمون اختصاصی - دفترچه ۲

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سوال	از شماره	تا شماره	زمان پاسخ گویی	ملاحظات
۱	فیزیک	۳۵	۴۱	۷۵	۴۵ دقیقه	۶۵ سوال
۲	شیمی	۳۰	۷۶	۱۰۵	۳۰ دقیقه	۷۵ دقیقه

حق چاپ و تکثیر سوالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز «گروه ماز» مجاز می باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می شود.

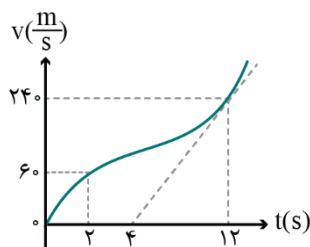
به دلیل عدم رضایت تیم ماز، هر گونه استفاده غیرقانونی از دفترچه سوالات و برنامه ماز برای تمامی اشخاص، شرعاً حرام است.



SanjeshCloud

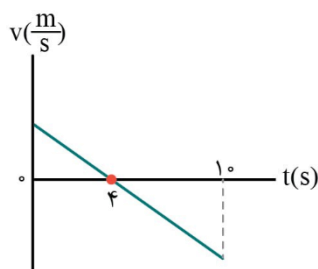
www.SanjeshCloud.ir

۴۱- نمودار سرعت - زمان متحرکی مطابق شکل است. اگر شتاب متحرک در لحظه $t = 12s$ برابر شتاب متوسط متحرک در بازه $t_1 = 2s$ تا $t_2 = 14s$ باشد، شتاب متوسط در ۲ ثانیه هفتم، چند متر بر مربع ثانیه بیشتر از شتاب متوسط در ۲ ثانیه اول است؟



- (۱) ۳۰
(۲) ۶۰
(۳) ۹۰
(۴) ۱۲۰

۴۲- نمودار سرعت - زمان متحرکی که روی محور X حرکت می کند مطابق شکل است. اگر متحرک در ۱۰ ثانیه ابتدایی حرکت ۲۰ متر در خلاف جهت محور X جابه جا شود، تندی متوسط متحرک در بازه زمانی که حرکت آن تندشونده است، چند متر بر ثانیه می باشد؟



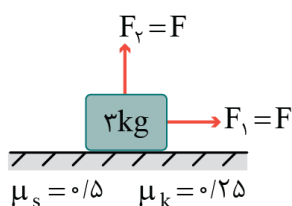
- (۱) ۴
(۲) ۶
(۳) ۸
(۴) ۱۰

۴۳- مطابق شکل، خودرویی از نقطه A با شتاب ثابت $2 \frac{m}{s^2}$ از حال سکون شروع به حرکت می کند و به نقطه B می رسد. اگر جابه جایی خودرو در ۲ ثانیه آخر حرکت ۳۴m باشد، فاصله بین دو نقطه A و B برابر چند متر است؟



- (۱) ۱۸۰/۵
(۲) ۹۰/۲۵
(۳) ۶۰/۲۵
(۴) ۳۰/۵

۴۴- در شکل زیر جسم با سرعت ثابت به سمت راست در حال حرکت است. اگر در یک لحظه، اندازه نیروی F_y ، ۳ برابر شود، بزرگی نیرویی که سطح به جسم وارد می کند، چند برابر می شود؟ $(g = 10 \frac{m}{s^2})$



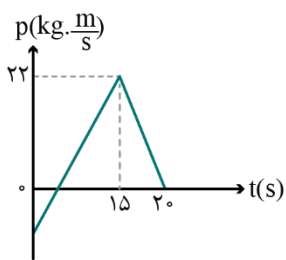
- (۱) $\sqrt{17}$
(۲) $2\sqrt{17}$
(۳) $\frac{1}{2}$
(۴) ۲

محل انجام محاسبات



۴۵- نمودار تکانه - زمان متحرکی به جرم ۵۰۰ گرم به صورت زیر است. اگر نیروی متوسط خالص وارد بر متحرک در ۲۰ ثانیه اول برابر

۰/۴ نیوتون باشد، شتاب متوسط متحرک در ۳ ثانیه چهارم حرکت چند متر بر مربع ثانیه است؟



- ۴ (۱)
- ۲ (۲)
- ۱ (۳)
- ۸ (۴)

۴۶- ماهواره‌ای به جرم ۴۰۰ kg در فاصله ۱۶۰۰ کیلومتری سطح زمین قرار دارد. فاصله این ماهواره تا سطح زمین چند کیلومتر افزایش

یابد تا شتاب گرانش در محل ماهواره ۳۶ درصد کاهش یابد؟ ($R_e = 6400 \text{ km}$: شعاع زمین)

- ۱۶۰۰ (۱)
- ۲۰۰۰ (۲)
- ۸۰۰۰ (۳)
- ۱۰۰۰۰ (۴)

۴۷- نوسانگر ساده‌ای بر روی پاره‌خطی به طول ۳۰ cm با دوره تناوب ۲ s از مکان دامنه مثبت خود ($x = +A$) در مبدأ زمان، شروع

به حرکت می‌کند. چه تعداد از موارد زیر در مورد این حرکت، نادرست است؟

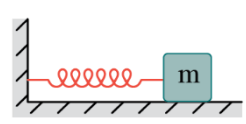
- الف: در حداکثر بازه زمانی که اندازه سرعت متوسط با تندی متوسط برابر است، جهت بردار تکانه یک بار تغییر می‌کند.
- ب: هنگامی که برای دومین بار نوسانگر به مکان $x = -10 \text{ cm}$ می‌رسد، مسافت طی شده دو برابر اندازه جابجایی می‌شود.
- ج: در بازه زمانی $0/5 \text{ s} < t < 1/5 \text{ s}$ ، اندازه نیروی خالص متوسط نوسانگر، صفر است.
- د: در بازه زمانی $0 < t < 0/5 \text{ s}$ ، به مدت ۰/۳۵ ثانیه، انرژی جنبشی از انرژی پتانسیل کمتر است.

- ۱) یک مورد
- ۲) دو مورد
- ۳) سه مورد
- ۴) چهار مورد

۴۸- در شکل زیر، طول عادی فنر ۲۵ cm می‌باشد و جرم m در حال حرکت نوسانی ساده با دوره تناوب T است. در طی یک تناوب

کامل، کمترین و بیشترین طول فنر به ترتیب ۱۰ cm و ۴۰ cm است. کمترین مسافت طی شده در مدت زمان دلخواه $\frac{T}{6}$ چند

سانتی‌متر از بیشترین مسافت طی شده در مدت زمان دلخواه $\frac{T}{3}$ کمتر است؟



- ۱) $15(\sqrt{2} - 1)$
- ۲) $15(\sqrt{3} - 1)$
- ۳) $30(\sqrt{2} - 1)$
- ۴) $30(\sqrt{3} - 1)$

۴۹- یک کابل مسی را تحت نیروی F' قرار داده و در آن موج عرضی تشکیل می‌دهیم. در این حالت موج ایجاد شده در مدت ۳

ثانیه طول کابل را طی می‌کند. اگر ۲۰ درصد از طول کابل را بریده و کنار بگذاریم و بقیه آن را از دستگاه عبور دهیم تا طول

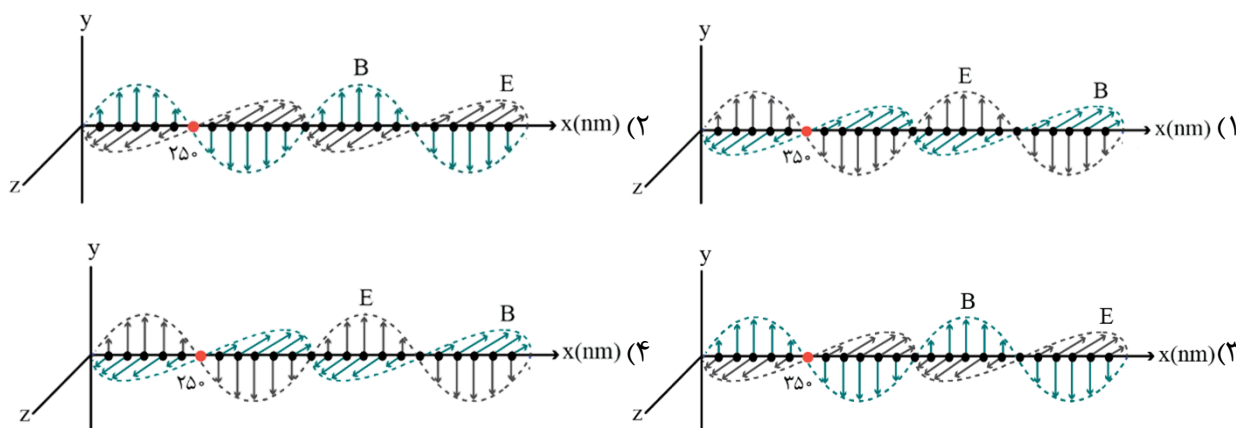
آن دو برابر طول اولیه شود و سپس تحت نیروی کشش $2/5 F'$ قرار دهیم، آن‌گاه چند ثانیه طول می‌کشد تا موج عرضی ایجاد

شده، طول کابل را طی کند؟

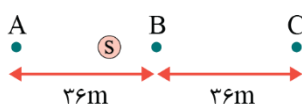
- ۱) ۱
- ۲) ۱/۸
- ۳) ۲
- ۴) ۲/۴

محل انجام محاسبات

۵۰- کدام گزینه نقش موج نور مرئی سبز را در حالتی نشان می دهد که در خلاف جهت محور x در حال انتشار است؟

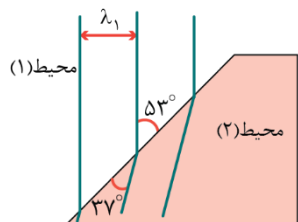


۵۱- در شکل زیر اگر اختلاف تراز شدت صوتی که از بلندگوی S به گیرنده های A و B می رسد ۱۸ دسی بل باشد، آن گاه اختلاف تراز شدت صوتی که به گیرنده های B و C می رسد چند دسی بل است؟ $(\log 2 = 0.3)$



- (۱) ۱۰
(۲) ۲۰
(۳) ۳۰
(۴) ۳۶

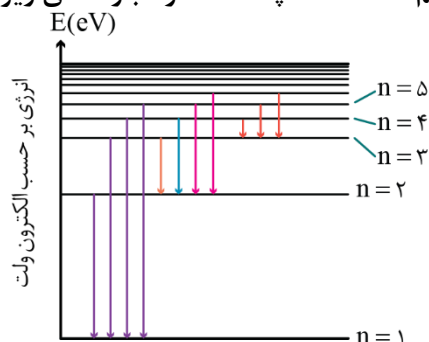
۵۲- شکل زیر جبهه های نوری را نشان می دهد که از محیط (۱) وارد محیط (۲) شده است. اگر طول موج نور در محیط (۲)، $\frac{1}{8} \mu m$ کمتر از طول موج نور در محیط (۱) باشد، انرژی فوتون های این پرتو در محیط (۱) چند الکترون ولت است؟ (تندی نور در محیط



(۱) برابر $3 \times 10^{-18} \frac{m}{s}$ است، $h = 4 \times 10^{-15} eV.s$ ، $\sin 53^\circ = 0.8$

- (۱) ۰/۵
(۲) $\frac{2}{3}$
(۳) $\frac{1}{2}$
(۴) $\frac{2}{4}$

۵۳- شکل زیر ترازهای انرژی برای اتم هیدروژن را نشان می دهد که بر اساس مدل بور رسم شده است. چه تعداد از عبارت های زیر در مورد آن صحیح است؟ $(E_R = 13.6 eV)$



الف: در بین گذارهای نشان داده شده، فقط ۴ فوتون فرابنفش گسیل می شود.
ب: در بین گذارهای نشان داده شده، فقط ۴ فوتون مرئی گسیل می شود.
ج: انرژی فوتون گسیلی در خط دوم بالمر ($n'=2$) برابر $2/55$ الکترون ولت است.

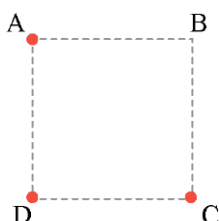
- (۱) صفر
(۲) ۱
(۳) ۲
(۴) ۳

محل انجام محاسبات

۵۴- در یک واپاشی، هسته عنصری ۳ ذره آلفا و تعدادی ذرات β تابش کرده است. اگر بار الکتریکی هسته دختر $10^{-19} \times 6/4$ کولن کمتر از بار الکتریکی هسته مادر باشد، در این صورت تعداد نوترون های هسته دختر تا از تعداد نوترون های هسته مادر است. ($e = 1/6 \times 10^{-19} C$)

- (۱) کمتر، ۱۰ (۲) بیشتر، ۱۰ (۳) کمتر، ۸ (۴) بیشتر، ۸

۵۵- مطابق شکل، سه ذره با بارهای مثبت و هم اندازه در رأس های یک مربع نشان داده شده اند. بزرگی میدان الکتریکی خالص در مرکز مربع، چند برابر بزرگی میدان الکتریکی خالص در رأس B است؟



- (۱) $\frac{2}{\sqrt{2}}(2\sqrt{2}-1)$
(۲) $\frac{4}{\sqrt{2}}(2\sqrt{2}-1)$
(۳) $\frac{2}{\sqrt{2}}(2\sqrt{2}+1)$
(۴) $\frac{4}{\sqrt{2}}(2\sqrt{2}+1)$

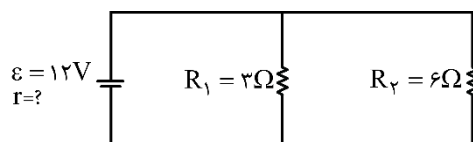
۵۶- ذره ای با بار الکتریکی $q = -5\mu C$ و جرم $5mg$ درون یک میدان الکتریکی یکنواخت $\frac{10^5}{C} N$ ، از حال سکون رها می شود. وقتی این ذره در راستای میدان به اندازه ۲۰ سانتی متر جابه جا شود، تندی حرکت ذره به چند متر بر ثانیه می رسد؟ (از نیروی وزن ذره و نیروهای مقاوم صرف نظر کنید.)

- (۱) ۱۰۰ (۲) $100\sqrt{2}$ (۳) ۲۰۰ (۴) $200\sqrt{2}$

۵۷- اگر اختلاف پتانسیل دو سر یک خازن ۱۰ میکروفارادی، ۲۵ درصد افزایش یابد، انرژی ذخیره شده در آن ۱۸۰ میکروژول افزایش می یابد. بار الکتریکی اولیه ذخیره شده در خازن چند میکروکولن بوده است؟

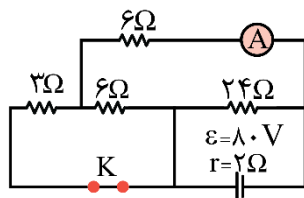
- (۱) ۴۰ (۲) ۸۰ (۳) ۱۶۰ (۴) ۳۲۰

۵۸- در مدار شکل زیر اگر توان مصرفی مقاومت R_1 برابر $12W$ باشد، مقاومت درونی باتری چند اهم بوده و توان تلف شده در باتری چند وات است؟



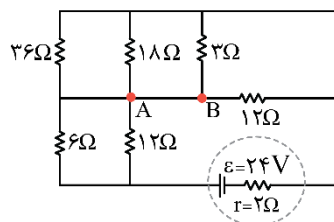
- (۱) ۱۸ و ۲
(۲) ۶ و ۲
(۳) ۱۸ و ۱
(۴) ۶ و ۱

۵۹- در مدار شکل زیر، با باز کردن کلید K، عدد نشان داده شده توسط آمپرسنج ایده آل، چند آمپر تغییر می کند؟



- (۱) $\frac{13}{6}$
(۲) $\frac{1}{6}$
(۳) $\frac{15}{2}$
(۴) صفر

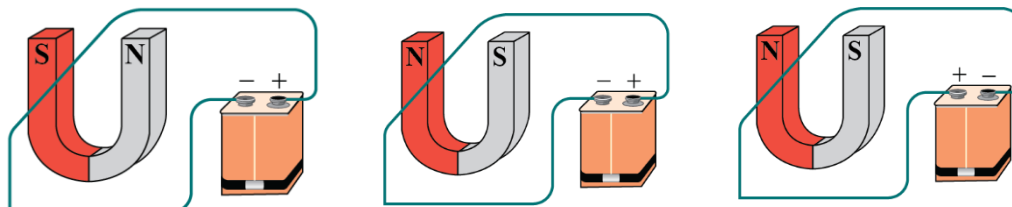
محل انجام محاسبات



۶۰- در مدار شکل مقابل جریان عبوری از سیم AB چند آمپر است؟

- (۱) ۰/۵
(۲) ۲
(۳) ۲/۵
(۴) ۳

۶۱- در چه تعداد از شکل های زیر، نیروی مغناطیسی وارد بر قسمتی از سیم که بین آهنربا قرار دارد، به سمت بالا است؟



(ج)

(ب)

(الف)

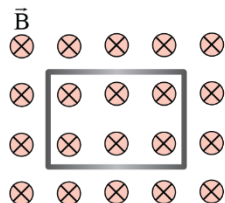
۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

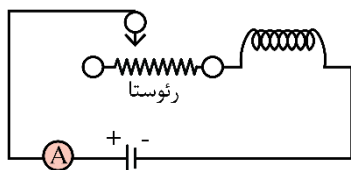
صفر (۱)

۶۲- در شکل زیر، حلقه رسانایی به مساحت 600 cm^2 و مقاومت 3Ω ، عمود بر میدان مغناطیسی 100 گاوس قرار دارد. اگر میدان مغناطیسی در مدت زمان یک میلی ثانیه تغییر کرده به 100 گاوس در خلاف جهت اولیه برسد، در این مدت، جریان القایی متوسط در حلقه چند آمپر و در چه جهتی است؟



- (۱) $1/2$ ، پادساعتگرد
(۲) $1/2$ ، ابتدا ساعتگرد و سپس پادساعتگرد
(۳) $0/4$ ، ابتدا ساعتگرد و سپس پادساعتگرد
(۴) $0/4$ ، ساعتگرد

۶۳- در شکل زیر، سیملوله دارای 200 حلقه و طولش 16 cm است. اگر میدان مغناطیسی درون سیملوله برابر 60 گاوس و ضریب القاوری سیملوله برابر $0/1 \text{ H}$ باشد، انرژی ذخیره شده در سیملوله (القاگر) چند میلی ژول است؟ $(\mu_0 = 12 \times 10^{-7} \frac{\text{T.m}}{\text{A}})$



- (۱) $0/4$
(۲) $0/8$
(۳) $1/6$
(۴) ۴

۶۴- آلیاژی از مس و نقره به جرم 1530 g را درون استوانه ای مدرج به شعاع مقطع 10 cm می اندازیم و ارتفاع آب درون آن 5 cm افزایش می یابد. نسبت حجم نقره به حجم مس آلیاژ کدام است؟ $(\rho_{\text{نقره}} = 10/5 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}, \rho_{\text{مس}} = 9 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}, \pi = 3)$

افزایش می یابد. نسبت حجم نقره به حجم مس آلیاژ کدام است؟ $(\rho_{\text{نقره}} = 10/5 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}, \rho_{\text{مس}} = 9 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}, \pi = 3)$

$\frac{1}{2}$ (۴)

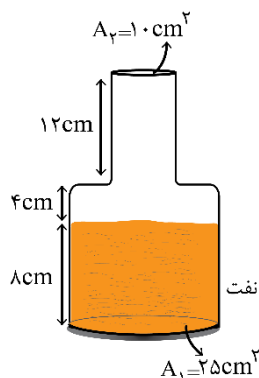
۲ (۳)

$\frac{1}{4}$ (۲)

۴ (۱)

محل انجام محاسبات

۶۵- درون ظرف مقابل مقداری نفت وجود دارد. اگر شلنگی با آهنگ شارش حجمی $\frac{\text{Lit}}{\text{min}} 0.36$ روغن به ظرف اضافه کند، پس از چند ثانیه کف ظرف در آستانه شکستن قرار می گیرد؟ (حداکثر نیرویی که کف ظرف می تواند تحمل کند $4/6$ نیوتون است، $\rho_{\text{نفت}} = 900 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ ، $\rho_{\text{روغن}} = 800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$)



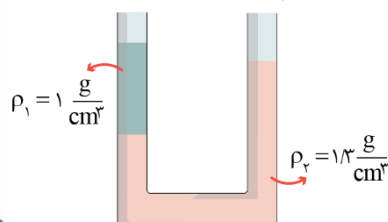
(۱) ۳۰

(۲) $\frac{200}{3}$

(۳) $7/5$

(۴) $\frac{100}{3}$

۶۶- در شکل زیر، اگر $14/4$ گرم از یک مایع با چگالی $8 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ به سمت راست لوله اضافه کنیم، سطح آزاد مایع ها در دو طرف لوله در یک ارتفاع قرار می گیرد. اگر سطح مقطع لوله برابر 2cm^2 باشد، جرم مایع با چگالی ρ_1 ، چند گرم است؟



(۱) ۹

(۲) ۱۸

(۳) ۱۵

(۴) ۳۰

۶۷- گلوله ای به جرم $1/6 \text{kg}$ را با تندی $30 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ از سطح زمین صورت قائم به بالا پرتاب می کنیم. اگر مقاومت هوا نباشد، بیشترین ارتفاع گلوله h_1 می شود. اگر 10% از انرژی جنبشی اولیه گلوله در اثر مقاومت هوا تلف شود، گلوله تا ارتفاع h_2 بالا می رود.

نسبت $\frac{h_2}{h_1}$ کدام است؟ ($g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$)

(۴) $0/8$

(۳) $0/9$

(۲) $\frac{10}{9}$

(۱) $0/1$

۶۸- در ظرفی عایق 50g بخار آب 100°C در مجاورت با m گرم آب 10°C قرار دارد. بعد از تعادل گرمایی 245g آب 100°C در ظرف باقی می ماند. جرم بخار آب باقی مانده در ظرف و جرم مقدار اولیه آب به ترتیب از راست به چپ چند گرم است؟

($L_V = 2268 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$ ، $c_{\text{آب}} = 4200 \frac{\text{J}}{\text{kg.K}}$)

(۴) ۳۵ و ۲۳۰

(۳) ۳۵ و ۲۱۰

(۲) ۱۵ و ۲۱۰

(۱) ۱۵ و ۲۳۰

۶۹- در رابطه با روش های انتقال گرما، چه تعداد از عبارات های زیر درست است؟

الف: در انتقال گرما به روش رسانش در نازلزات، گرما صرفاً از طریق ارتعاش اتم ها منتقل می شود.

ب: در همرفت برخلاف رسانش گرمایی، انتقال گرما با انتقال بخش هایی از خود مایع صورت می گیرد.

ج: هر جسم در هر دمایی تابش گرمایی گسیل می کند که این تابش گرمایی به دما، مساحت، میزان صیقلی بودن و رنگ آن جسم بستگی دارد.

(۴) ۳

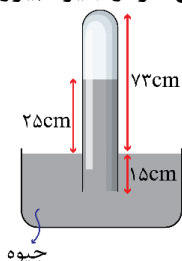
(۳) ۲

(۲) ۱

(۱) صفر

محل انجام محاسبات

۷۰- در شکل زیر، مجموعه در حال تعادل است و فشار هوای محیط 74 cmHg است. لوله را به آرامی چند سانتی متر از جیوه بیرون بیاوریم تا ارتفاع ستون جیوه نسبت به سطح آزاد آن، 26 cm شود؟ (دما ثابت است).



۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴)

۷۱- توان و بازده یک ماشین گرمایی به ترتیب 40 kW و 25% است. این ماشین در هر ثانیه چند ژول گرما به منبع با دمای پایین تر می دهد؟

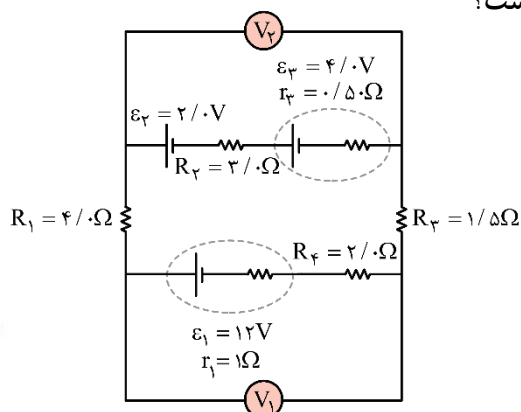
۱۰ (۴)

$1/7 \times 10^4$ (۳)

$1/5 \times 10^4$ (۲)

$1/2 \times 10^4$ (۱)

۷۲- در مدار زیر، عدد ولت سنج آرمانی (۱)، چند برابر عدد ولت سنج آرمانی (۲) است؟



$\frac{42}{33}$ (۱)

$\frac{42}{31}$ (۲)

$\frac{31}{17}$ (۳)

$\frac{33}{17}$ (۴)

۷۳- گلوله ای از ارتفاع h نسبت به زمین رها می شود. پس از 4 ثانیه گلوله دیگری از ارتفاع $\frac{h}{9}$ رها می شود. اگر دو گلوله همزمان به

زمین برسند، ارتفاع h چند متر است؟ (از مقاومت هوا صرف نظر کنید و $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$)

۱۸۰ (۴)

$137/5$ (۳)

۹۰ (۲)

$112/5$ (۱)

۷۴- پدری فرزند 20 کیلوگرمی خود را در یک چهارچرخه ایمن به جرم M قرار می دهد و با یک طناب 4 متری، چهارچرخه را روی

سطح افقی زمین به گونه ای می کشد تا چهارچرخه روی دایره ای با تندی ثابت $8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ حرکت کند. با صرف نظر کردن از اصطکاک

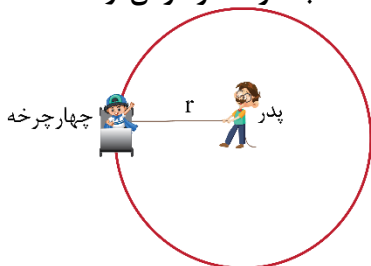
و با فرض اینکه نیروی کشش طناب 400 N باشد، M چند کیلوگرم است؟

۵ (۱)

۱۰ (۲)

$2/5$ (۳)

۴ (۴)



محل انجام محاسبات



- ۷۵- رشته‌ای از بسامدهای متوالی تشدیدي یک تار دو انتها بسته به طول 50 cm عبارت‌اند از: 150 Hz ، 225 Hz و 300 Hz ، کدام یک از عبارت‌های زیر صحیح است؟
- (۱) بسامد پنجم تار برابر 450 Hz است.
 - (۲) تندی انتشار موج در تار $150 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ است.
 - (۳) بسامد اصلی تار 75 Hz است.
 - (۴) طول موج مد دوم تار 25 cm است.

محل انجام محاسبات

۷۶- چه تعداد از عبارت‌های داده شده درست هستند؟

آ: زیرلایه‌هایی که آرایش الکترونی عناصر موجود در تناوب چهارم به آن‌ها ختم می‌شود، مقدار $n + l$ را برای دارند.
ب: شماره گروه دو عنصر از دوره دوم که کمترین واکنش‌پذیری را در این دوره دارند، ۴ واحد با یکدیگر تفاوت دارد.
پ: در عنصری از تناوب چهارم که با Hg هم‌گروه است، شمار الکترون‌هایی با $l = 2$ و $n = 2$ با هم برابر است.
ت: در چهار مورد از عناصر تناوب چهارم، همانند دو مورد از عناصر تناوب سوم، زیرلایه تک‌الکترونی وجود دارد.

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۷۷- جدول زیر را در نظر بگیرید:

ستون	۱	۲	۳	۴
نام ترکیب	گالیم اکسید	کلسیم فسفات	اسکاندیم نیتريد	آمونیم نترات

نسبت شمار آنیون به کاتیون در ترکیب موجود در ستون معادل با برابر نسبت شمار جفت الکترون‌های ناپیوندی به شمار جفت الکترون‌های پیوندی در ساختار است.

(۱) ۱ - ۳ - مولکول اوزون
(۲) ۲ - ۲ - مولکول آمونیاک
(۳) ۳ - ۲ - یون سولفات
(۴) ۴ - ۰/۲۵ - یون کربنات

۷۸- دمای مخلوطی از گازهای متان، هیدروژن و گوگرد تری اکسید را تا جایی کاهش می‌دهیم که یکی از مواد موجود در این مخلوط، میعان شود. در ساختار هر مولکول از ماده میعان شده، چند پیوند اشتراکی وجود دارد و اگر این ماده را از مخلوط جدا کرده و دمای مواد باقیمانده را مجدداً به حالت اولیه برسانیم، چگالی مخلوط نهایی در مقایسه با مخلوط اولیه چگونه خواهد بود؟

($S = 32$ و $O = 16$ و $C = 12$ و $H = 1 : g \cdot mol^{-1}$)

(۱) ۴ - بیشتر (۲) ۴ - کمتر (۳) ۳ - بیشتر (۴) ۳ - کمتر

۷۹- با در نظر گرفتن عدد اکسایش اتم‌های A و X در ساختار دو ترکیب شیمیایی ASO_4 و X_2O_5 ، فرمول شیمیایی چند ترکیب زیر می‌تواند درست باشد؟ (عناصر A و X ، جزو عناصر اصلی موجود در جدول دوره‌ای هستند.)

آ: A_2N_3 ب: KXO_3 ج: AF_3
ت: X_2O ث: A_3O_2 ح: HXO_2

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۸۰- چه تعداد از عبارت‌های داده شده درست هستند؟

آ: در لایه تروپوسفر زمین، از واکنش گاز اکسیژن با یک گونه رادیکال، گاز اوزون تولید می‌شود.

ب: در دمای $-60^\circ C$ ، دو مورد از مواد شرکت‌کننده در فرایند هابر به حالت گاز و یک ماده به حالت مایع است.

پ: با افزایش ارتفاع در هریک از لایه‌های هواکره، میزان جنب‌وجوش ذرات سازنده هواکره همواره کاهش می‌یابد.

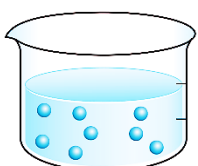
ت: گاز نیتروژن مونوکسید موجود در تروپوسفر، فقط از واکنش گازهای N_2 و O_2 در موتور خودروها می‌تواند تولید شود.

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۸۱- اگر هر ذره نشان داده شده در محلول ۲۰۰ میلی‌لیتری مقابل، هم‌ارز با $10^{22} \times 3/01$ ذره از یون کلرید موجود در محلول منیزیم کلرید باشد، غلظت نمک در این محلول چند مولار بوده و $50 mL$ از آن، با چند گرم نقره نترات با خلوص ۸۰٪ به طور کامل واکنش می‌دهد؟

($Ag = 108$ و $O = 16$ و $N = 14 : g \cdot mol^{-1}$)

(۱) ۱ - ۲۱/۲۵ (۲) ۱ - ۴۲/۵ (۳) ۰/۲۵ - ۲۱/۲۵ (۴) ۰/۲۵ - ۴۲/۵



محل انجام محاسبات

۸۲- چند مورد از مطالب زیر، نادرست است؟

آ: در فرایند تصفیه آب برای آشامیدن، آنیون حاصل از واکنش پذیرترین نافلز موجود در تناوب دوم، به آب افزوده می شود.
ب: اگر گشتاور دوقطبی مولکول A بیشتر از مولکول B باشد، دمای جوش ماده A به یقین بیشتر از ماده B خواهد بود.
پ: در ساختار یک ترکیب یونی دوتایی، تعداد ذرات یونی که قدر مطلق بار بیشتری دارد، کمتر از یون دیگر است.
ت: همه مولکول های سه اتمی خمیده با ساختار V شکل، در حضور یک میدان الکتریکی جهت گیری پیدا می کنند.

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۸۳- یک مخلوط ۲۵ گرمی از گاز کربن مونوکسید و بخار پروپان را در حضور مقدار کافی اکسیژن، به طور کامل می سوزانیم. اگر طی این فرایند، ۲۸ لیتر گاز کربن دی اکسید در شرایط استاندارد تولید شود، درصد جرمی اتم های هیدروژن در مخلوط آغازی چقدر بوده است؟ ($H = 1$ و $C = 12$ و $O = 16$ $g \cdot mol^{-1}$)

(۱) ۸ (۲) ۱۲ (۳) ۱۶ (۴) ۲۴

۸۴- کدام موارد از عبارت های زیر درست هستند؟

آ: در شرایط یکسان از نظر دما و فشار محیط، انحلال پذیری گاز آمونیاک در آب بیشتر از گاز نیتروژن خواهد بود.
ب: مطابق قانون هنری، انحلال گازها در آب گرماده بوده و افزایش دما، انحلال پذیری گازها در آب را کاهش می دهد.
پ: با رساندن دمای یک محلول از $20^{\circ}C$ به $40^{\circ}C$ ، انحلال پذیری پتاسیم نیترات در این محلول کمتر از ۱۰۰٪ افزایش می یابد.
ت: اگر در دمای θ_1 ، انحلال پذیری لیتیم سولفات و پتاسیم کلرید در آب برابر باشد، در دماهای بالاتر از θ_1 ، درصد جرمی محلول سیر شده پتاسیم کلرید بیشتر از لیتیم سولفات می شود.

(۱) «آ» و «پ» (۲) «آ» و «ت» (۳) «ب» و «پ» (۴) «ب» و «ت»

۸۵- کدام یک از مطالب داده شده، درست است؟

(۱) اگر کاتیون یک ترکیب را با کاتیون حاصل از یک فلز واکنش پذیرتر جایگزین کنیم، انحلال پذیری آن در آب کاهش می یابد.
(۲) در صورت انداختن قطعاتی از فلزهای آهن، منیزیم و یا مس در محلول روی سولفات، یک محلول رنگی ایجاد می شود.
(۳) در صورت انداختن یک میخ آهنی زنگ زده در محلول هیدروکلریک اسید، یک رسوب آجری در محلول ایجاد می شود.
(۴) اگر به کمک فلز X بتوان آهن را از Fe_2O_3 استخراج کنیم، فلز X به یقین با Ag_2O نیز واکنش می دهد.

۸۶- بر اثر سوختن ۰/۲ مول از یک هیدروکربن سیر شده که دارای ۲ حلقه کربنی در ساختار خود است، ۵/۴ گرم آب تولید شده است. در ساختار این ماده، چند اتم کربن وجود داشته و جرم مولی آن، چند برابر جرم مولی پروپین خواهد بود؟

($H = 1$ و $C = 12$ و $O = 16$ $g \cdot mol^{-1}$)

(۱) ۱۶ - ۵/۷۵ (۲) ۱۸ - ۶/۴۵ (۳) ۱۶ - ۵/۵۵ (۴) ۱۸ - ۶/۲۵

۸۷- یک نمونه از سدیم هیدروژن کربنات به جرم ۱۴۰ گرم را به طور کامل تجزیه می کنیم. اگر تفاوت جرم فراورده های گازی تولید شده در این فرایند برابر با ۶/۵ گرم باشد، درصد خلوص سدیم هیدروژن کربنات مصرف شده چقدر بوده است؟

($Na = 23$ و $O = 16$ و $C = 12$ و $H = 1$ $g \cdot mol^{-1}$)

معادله واکنش موازنه شود $NaHCO_3(s) \rightarrow Na_2CO_3(s) + H_2O(g) + CO_2(g)$

(۱) ۸۰ (۲) ۶۰ (۳) ۴۰ (۴) ۳۰

۸۸- کدام مطلب در رابطه با بنزوئیک اسید و ۱-هگزانول، درست است؟

(۱) در ساختار هر دو، یک اتم هیدروژن متصل به اکسیژن وجود دارد.
(۲) شمار اتم های کربن سازنده مولکول این دو ترکیب آلی با هم برابر است.
(۳) هر دو مولکول در میدان الکتریکی جهت گیری کرده و انحلال پذیری آن ها در آب زیاد است.
(۴) در ساختار مولکولی این دو ماده، اتم های کربن با عدد اکسایش بزرگ تر از صفر یافت می شود.

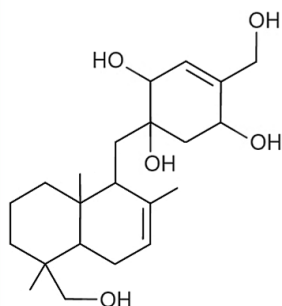
محل انجام محاسبات

۸۹- چند مورد از مطالب زیر درست است؟

- آ: اگر در یک سامانه، گاز N_2O_4 به NO_2 تجزیه شود، دمای محیط اطراف آن سامانه افزایش می‌یابد.
ب: یک گلوله آهن گداخته شده در مقایسه با یک استخر آب با دمای $50^\circ C$ ، انرژی گرمایی بیشتری دارد.
پ: اگر ظرفیت گرمایی نمونه‌هایی از آب و روغن زیتون برابر باشد، جرم نمونه روغن زیتون بیشتر خواهد بود.
ت: اگر حجم یک مول گاز برابر $30L$ باشد، میانگین انرژی جنبشی ذرات این ماده به یقین بیشتر از مقداری آب $10^\circ C$ است.

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

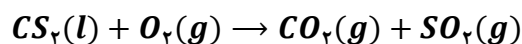
۹۰- با توجه به ساختار مولکول مقابل، چند مورد از مطالب زیر درست است؟ ($H = 1 \text{ g.mol}^{-1}$)



- آ: چهار اتم کربن در آن، تنها به اتم‌های کربن متصل شده‌اند.
ب: بیشتر از ۲۵٪ اتم‌های کربن، با اتم‌های اکسیژن پیوند دارند.
پ: شمار گروه‌های CH_3 در آن، ۲ برابر شمار گروه‌های CH_2 است.
ت: شمار جفت الکترون‌های ناپیوندی در آن، ۵ برابر متیل آمین است.
ث: اگر پیوندهای $C = C$ آن به پیوند یگانه تبدیل شود، جرم مولی آن ۴ واحد افزایش می‌یابد.

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۹۱- با توجه به واکنش زیر، برای تشکیل 32 گرم گاز SO_2 ، چند میلی‌لیتر کربن دی‌سولفید با چگالی $3/8 \text{ g.mL}^{-1}$ و با درصد خلوص ۵۰٪ لازم است و تفاوت جرم کربن دی‌اکسید تولید شده و اکسیژن مصرف شده در این واکنش، برابر با چند گرم خواهد بود؟ ($S = 32$ و $O = 16$ و $C = 12 : \text{g.mol}^{-1}$)



معادله واکنش موازنه شود

(۱) $13 - 10$ (۲) $13 - 8$ (۳) $26 - 10$ (۴) $26 - 8$

۹۲- چند مورد از مطالب زیر در رابطه با سلولز درست است؟

- آ: برخلاف کولار، یک پلیمر زیست تخریب پذیر است.
ب: مونومر سازنده آن، از تجزیه ذرات مالتوز تولید می‌شود.
پ: نوعی پلی استر بوده و در ساختار آن، حلقه‌های شش ضلعی وجود دارد.
ت: عناصر موجود در ساختار این پلیمر، در ساختار ذرات پلی لاکتیک اسید نیز یافت می‌شود.
ث: در طول سال‌های اخیر، روند تولید الیاف ساخته شده از این پلیمر، روند افزایشی داشته است.

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۹۳- چند مورد از مطالب زیر درست است؟

- آ: استون، اتانول و پروپانویک اسید، از طریق جاذبه‌های بین مولکولی مشابه در آب حل می‌شوند.
ب: یک نمونه از شربت معده، برخلاف یک نمونه از رنگ‌های پوششی، ناپایدار بوده و ته‌نشین می‌شود.
پ: با افزودن نمک سدیم فسفات به صابون‌ها، قدرت پاک‌کنندگی این مواد در مواجهه با آب سخت افزایش می‌یابد.
ت: شمار عناصر موجود در ساختار یک پاک‌کننده غیرصابونی، می‌تواند برابر با شمار عناصر در ساختار نوعی صابون باشد.

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

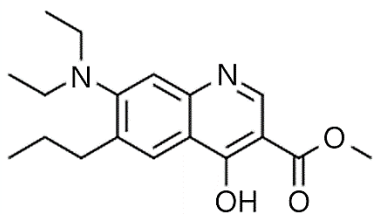
۹۴- بر پایه مدل آرنیوس، عنصر برخلاف عنصر در واکنش با اکسیژن نوعی اکسید اسیدی را ایجاد کرده و اسید حاصل از واکنش این اکسید با آب، در مقایسه با نیتریک اسید، قدرت اسیدی دارد.

- (۱) گوگرد - کلسیم - کمتری (۲) کربن - روییدیم - کمتری
(۳) لیتیم - کلر - بیشتری (۴) پتاسیم - فسفر - بیشتری

محل انجام محاسبات

۹۵- اگر به محلولی از هیدروکلریک اسید با $pH = 0.3$ و حجم ۵۰ میلی لیتر، مقدار ۴۵۰ میلی لیتر آب خالص اضافه شود، غلظت مولی اسید در این محلول به اندازه چند $mol.L^{-1}$ تغییر می کند و درصد یونش باز BOH در محلول ۰/۴ مولار این ماده باید چقدر باشد تا pH این محلول بازی، ۱۰ برابر pH محلول نهایی هیدروکلریک اسید شود؟

- (۱) ۲۵ - ۰/۴۵ (۲) ۲۵ - ۰/۴ (۳) ۱۲/۵ - ۰/۴۵ (۴) ۱۲/۵ - ۰/۴



- (۱) «آ» و «ب» (۲) «ب» و «پ» (۳) «پ» و «ت» (۴) «آ» و «ت»

۹۶- کدام موارد از مطالب زیر در رابطه با ترکیب مقابل درست است؟

آ: دارای گروه های عاملی آمینی، کتونی، اتری و هیدروکسیل است.

ب: شمار اتم های هیدروژن در آن، ۱/۲۵ برابر شمار اتم های کربن است.

پ: مجموع عدد اکسایش اتم های کربن موجود در حلقه کربنی آن برابر صفر است.

ت: توانایی ایجاد پیوند هیدروژنی را داشته و می تواند در واکنش آبکافت، شرکت کند.

۹۷- کدام یک از مطالب زیر درست است؟

(۱) با ریختن محلول هیدروکلریک اسید روی یک تیغه مسی، یک واکنش اکسایش-کاهش انجام می شود.

(۲) با قرار دادن یک تیغه از جنس روی در محلول پتاسیم سولفات، دمای محلول به تدریج افزایش می یابد.

(۳) پس از قرار دادن یک تیغه از فلز آهن در محلول نقره نیترات، شمار کاتیون ها در محلول، کاهش می یابد.

(۴) با وارد کردن بخار برم به محلول پتاسیم فلوئورید، ماده قرمز رنگ وارد شده به سامانه، به تدریج مصرف می شود.

۹۸- در رابطه با سلول گالوانی منیزیم-نقره، کدام گزینه نادرست است؟

(۱) در این سلول، جرم تیغه منیزیمی به تدریج کاهش یافته و الکترون ها به سمت الکتروود نقره جاری می شوند.

(۲) مقدار نیروی الکتروموتوری این سلول گالوانی، بیشتر از نیروی الکتروموتوری سلول منیزیم-هیدروژن است.

(۳) غلظت یون نقره در محلول کاتدی افزایش یافته و غلظت یون منیزیم در محلول آندی کاهش می یابد.

(۴) با افزودن مقداری نمک نقره نیترات به محلول کاتدی، مقدار emf سلول دچار تغییر خواهد شد.

۹۹- چند مورد از مطالب زیر درست است؟

آ: با افزودن آب به الکترولیت موجود در سلول برقکافت $NaCl(l)$ ، نوع فرآورده های تولید شده در سلول تغییر می کند.

ب: در سلول الکترولیتی، تیغه ها همواره از جنس گرافیت بوده و به طور همزمان، در یک الکترولیت قرار گرفته اند.

پ: در فرایند هال، شمار مول های ماده تولید شده در اطراف آند، کمتر از ماده تولید شده در اطراف کاتد است.

ت: محلول موجود در اطراف آند طی فرایند برقکافت آب، همانند محلول شیشه پاک کن، خاصیت بازی دارد.

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۰۰- اگر نسبت بار به شعاع برای آنیون حاصل از عنصری که آرایش الکترونی اتم آن به $3p^4$ ختم می شود، برابر با $\frac{e}{pm} \times 10^{-2} \times 1/0.8$ باشد، شعاع این یون به تقریب برابر با چند نانومتر است؟

- (۱) ۰/۱۶۸ (۲) ۰/۱۸۵ (۳) ۱/۶۸ (۴) ۱/۸۵

۱۰۱- درستی یا نادرستی مطالب زیر، به ترتیب در کدام گزینه آمده است؟

آ: یکی از عناصر اصلی سازنده مواد کووالانسی، در ایجاد سنج مناسب برای اندازه گیری جرم اتم ها کاربرد داشته است.

ب: در ساختار سیلیس، هر اتم سیلیسیم الکترون های ظرفیتی خود را با ۲ اتم اکسیژن به اشتراک گذاشته است.

پ: گرافن، لایه ای از اتم های کربن به ضخامت نانومتر بوده و یک ماده انعطاف پذیر است.

ت: الماس، دارای ساختار سه بعدی بوده و نسبت به سیلیسیم دمای ذوب بالاتری دارد.

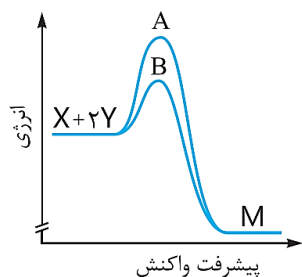
ث: در ساختار سیلیسیم کربید، فقط پیوندهای اشتراکی $Si - C$ دیده می شود.

- (۱) درست - درست - نادرست - درست - نادرست (۲) درست - نادرست - درست - درست - درست
(۳) نادرست - نادرست - درست - نادرست - درست (۴) نادرست - نادرست - درست - درست - نادرست

محل انجام محاسبات

۱۰۲- مول برابر از دو گاز A و X را وارد یک ظرف ۵ لیتری می کنیم تا تعادل $2A(g) + X(g) \rightleftharpoons 3D(g)$ در ظرف واکنش برقرار شود. اگر در حالت تعادل، شمار مول های دو گاز A و D با هم برابر باشد، مقدار ثابت تعادل این واکنش کدام است؟

- (۱) ۰/۴ (۲) ۰/۶ (۳) ۰/۵ (۴) ۰/۷۵



۱۰۳- نمودار مقابل، روند پیشرفت یک واکنش گازی را در حضور و عدم حضور کاتالیزگر نشان می دهد.

اگر ΔH این واکنش برابر با -240 کیلوژول باشد، کدام مطلب زیر نادرست است؟

- (۱) به ازای مصرف $11/2$ لیتر گاز Y در شرایط استاندارد، 60 کیلوژول انرژی آزاد می شود.
(۲) سرعت تولید فراورده M در مسیر B این واکنش، بیشتر از مسیر دیگر آن است.
(۳) مسیر A در دماهای بالاتری انجام شده و طی آن، گرمای بیشتری آزاد می شود.
(۴) در این واکنش، فراورده تولید شده نسبت به واکنش دهنده ها پایدارتر است.

۱۰۴- اولین عنصری که آرایش الکترونی آن از قاعده آفبا پیروی نمی کند، دارای ۲ ایزوتوپ متفاوت است که در هسته یکی از آن ها ۲۸ نوترون و در هسته دیگری، ۲۷ نوترون وجود دارد. اگر جرم اتمی میانگین این عنصر برابر با $51/9 amu$ باشد، فراوانی ایزوتوپ سنگین تر، چند برابر فراوانی ایزوتوپ دیگر است؟

- (۱) ۹ (۲) ۸ (۳) ۵ (۴) ۴

۱۰۵- جدول زیر، شمار الکترون های ظرفیتی چهار مورد از عناصر موجود در تناوب چهارم را نشان می دهد:

عنصر	A	D	X	Z
شمار الکترون های ظرفیتی	۳	۱۰	۲	۷

در رابطه با این عناصر، چه تعداد از مطالب زیر درست است؟

- آ: عنصر D ، با عنصر ${}_{78}Pt$ در یک گروه مشابه قرار داشته و از مدل دریای الکترونی پیروی می کند.
ب: اتم عنصر X ، پس از تبدیل شدن به یون پایدار این عنصر، به آرایش الکترونی آرگون می رسد.
پ: عناصر A و D ، به یقین چکش خوار بوده و در مقایسه با پتاسیم، واکنش پذیری کمتری دارند.
ت: در هر اتم از عنصر Z ، به یقین ۳ لایه الکترونی به طور کامل پر از الکترون هستند.

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

محل انجام محاسبات

بودجه بندی آزمون مرحله ۱۲ دوازدهم ریاضی

جامع شبیه ساز کنکور سراسری
□□□□□□□□

۳۰ فروردین

گسسته

هندسه

حسابان

آمار و احتمال

دوازدهم

پایه

دوازدهم

پایه

دوازدهم +
پایه مرتبط

آزمون جامع شبیه ساز کنکور (۲)

شیمی

فیزیک

پایه

دوازدهم

پایه

دوازدهم

آزمون جامع شبیه ساز کنکور (۲)



گروه آموزشی ماز





کد کنترل

121

A

پنجشنبه

۱۴۰۳/۰۱/۲۳



پاسخنامه آزمون الکترونیکی کنکوری‌های ریاضی - مرحله ۱۶

درس	مسئول درس	طراحان	ویراستاران
ریاضیات	محدثه شیخعلی	محمد پورسعید - امیرحسین ابومحبوب - علیرضا شریف خطیبی - سوگند روشنی	علیرضا کاظمی بقا - حمیدرضا ولی‌پور رضا قانع
فیزیک	سعید احمدی	سجاد صادقی‌زاده - سعید احمدی - ارسلان رحمانی احسان ایرانی - محسن قندچلر - مجید میرزایی علی محمودی - محمدجواد حاجی‌وند - کامران ابراهیمی	نرجس تیمناک - پویا هدایتی‌گودرزی امیر مخانی - امیر هوشنگ کیانی علیرضا ملک‌حسینی - محمد صادقی‌فرد
شیمی	فرشاد هادیان‌فرد	فرشاد هادیان‌فرد - حسین ابروانی - سعیده محبی فرهنگ امیری - محمد کهنه‌پوشی	فرهنگ امیری - رامین رزمجو محمد رضا جمشیدی محمد داوودآبادی فراهانی
مدیر آزمون: رسول خنجری			

حق چاپ و تکثیر سوالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز «گروه ماز» مجاز می‌باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می‌شود.
به دلیل عدم رضایت تیم ماز، هر گونه استفاده غیر قانونی از دفترچه سوالات پاسخنامه ماز برای تمامی اشخاص، شرعاً حرام است.



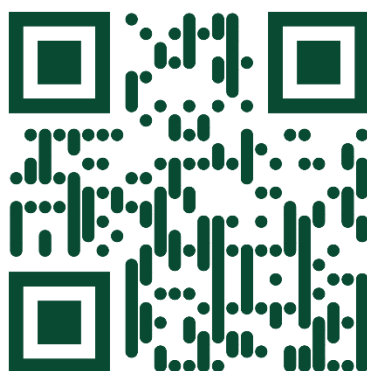
SanjeshCloud

www.SanjeshCloud.ir



دوست مازی من، سلام!

برای اینکه ما نظرت رو در رابطه با آزمون بدونیم نیاز هست که در نظرسنجی شرکت کنی.
برای شرکت در نظرسنجی فقط کافیه روی لینک زیر بزنی یا QR کد زیر رو اسکن کنی تا صفحه
نظرسنجی برات باز بشه!
ممنون که نظرت رو به ما میگی و بهمون برای بهتر شدن آزمون ها کمک می کنی (:



<https://B2n.ir/z59291>

مازی ها؛ میدونین که جلوی هر سوال ما براتون ویژگی و آدرس اون سوال رو میذاریم، حالا
واسه اینکه کامل یادش بگیرید میخوام براتون بگم که چجوری اینا رو براتون چیدیم:

(سطح سوال - سبک سوال - آدرس سوال)

آسان - متوسط - سخت مفهومی - مساله و ... مثلاً: ۱۱۰۱ یعنی فصل ۱ پایه یازدهم آدرس سوال

۱- عمود منصف پاره خط واصل بین دو نقطه ی $A(-7, 6)$ و $B(3, 4)$ نیمساز ناحیه ی دوم و چهارم را در نقطه ای با کدام طول قطع می کند؟

- (۱) $\frac{5}{3}$ (۲) $\frac{-5}{3}$ (۳) $\frac{5}{2}$ (۴) $\frac{-5}{2}$

(متوسط - محاسباتی - ۱۱۰۱)

پاسخ: گزینه ۴

چتنا نکته کاربردی ببینیم!

نکته:

اگر نقاط $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ دو سر یک پاره خط باشند، مختصات نقطه وسط آن ها به صورت زیر به دست می آید:

$$M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right)$$

نکته ۲:

شیب دو خط عمود بر هم قرینه و معکوس یکدیگرند، یعنی اگر شیب یکی از آن ها برابر m باشد، شیب دیگری برابر $\frac{-1}{m}$ است.

نکته ۳:

برای نوشتن معادله یک خط به شیب m و گذرنده از نقطه (x_0, y_0) به شکل مقابل عمل می کنیم:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

پاسخ شریعی

ابتدا مختصات نقطه وسط پاره خط AB را به دست می آوریم و آن را M می نامیم:

$$M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right) \Rightarrow M = \left(\frac{-7+3}{2}, \frac{6+4}{2} \right) \Rightarrow M = (-2, 5)$$

حالا شیب پاره خط AB را محاسبه می کنیم و از روی آن شیب عمود منصف را به دست می آوریم:

$$m_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} \Rightarrow m_{AB} = \frac{6-4}{-7-3} \Rightarrow m_{AB} = -\frac{1}{5}$$

$$\text{عمود منصف} \rightarrow m = \text{قرینه و معکوس} = 5$$

شیب عمود منصف و نقطه M که بر روی آن قرار دارد را داریم، پس معادله آن را می نویسیم:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \xrightarrow{x_0 = -2, y_0 = 5, m = 5} y - 5 = 5(x + 2) \Rightarrow y = 5x + 15$$

معادله نیمساز ناحیه دوم و چهارم به صورت $y = -x$ است به کمک دستگاه، طول نقطه تلاقی آن با عمود منصف را به دست می آوریم:

$$\begin{cases} y = 5x + 15 \\ y = -x \end{cases} \xrightarrow{-} 0 = 6x + 15 \Rightarrow x = \frac{-15}{6} \Rightarrow x = \frac{-5}{2}$$

گروه آموزشی ماز

۲- نمودار تابع با ضابطه ی $f(x) = \sqrt{x}$ را در امتداد محور x ها، ۱۱ واحد در جهت منفی و سپس در امتداد محور y ها، ۳ واحد در جهت منفی انتقال می دهیم.

فاصله ی نقطه ی برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f ، از مبدأ مختصات کدام است؟

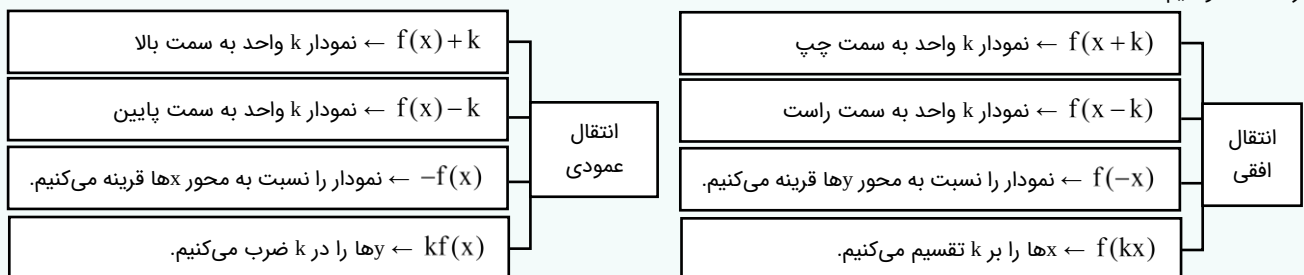
- (۱) $\frac{1}{9}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{\sqrt{10}}{9}$ (۴) $\frac{\sqrt{10}}{3}$

(متوسط - محاسباتی - ۱۰۰۵)

پاسخ: گزینه ۳

انتقال:

اگر $k > 0$ خواهیم داشت:



انتقال های گفته شده در صورت سؤال را بر روی ضابطه f اعمال می کنیم:

$$y = \sqrt{x} \xrightarrow[\text{منفی های } x]{\text{۱۱ واحد در جهت}} y = \sqrt{x+11} \xrightarrow[\text{منفی محور } y]{\text{۳ واحد در جهت}} y = \sqrt{x+11} - 3$$

حال ضابطه به دست آمده و ضابطه تابع f را با هم برابر قرار می دهیم تا نقطه تلاقی منحنی حاصل با منحنی اولیه به دست آید:

$$\begin{cases} y = \sqrt{x+11} - 3 \\ y = \sqrt{x} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x+11} - 3 = \sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{x+11} = \sqrt{x} + 3$$

دو طرف رابطه به دست آمده را به توان ۲ می رسانیم:

$$(\sqrt{x+11})^2 = (\sqrt{x} + 3)^2 \Rightarrow x+11 = x+6\sqrt{x}+9 \Rightarrow 6\sqrt{x} = 2 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{9} \xrightarrow[\text{جاگذاری در } y=\sqrt{x}]{\text{جاگذاری در}} y = \frac{1}{3} \Rightarrow \text{نقطه تلاقی } A(\frac{1}{9}, \frac{1}{3})$$

در آخر فاصله نقطه $(\frac{1}{9}, \frac{1}{3})$ را از مبدأ مختصات به دست می آوریم:

$$OA = \sqrt{(\frac{1}{9}-0)^2 + (\frac{1}{3}-0)^2} = \sqrt{\frac{1}{81} + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{10}{81}} \Rightarrow OA = \frac{\sqrt{10}}{9}$$

گروه آموزشی ماز

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-3} + 4 & x \geq 3 \\ 6x - 2k & x < 3 \end{cases} \quad \text{تابع } -3$$

حدود k کدام است؟

$k \leq 9$ (۴) $k \geq 9$ (۳) $k \leq 7$ (۲) $k \geq 7$ (۱)

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۱

توابع یکنوا:

تابع f را از نظر یکنوایی در شرایط مختلف بررسی کرده ایم:

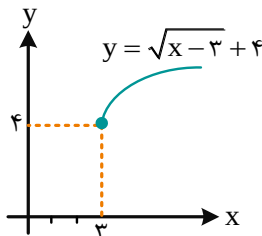
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f \text{ اکیداً صعودی است}$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \Rightarrow f \text{ صعودی است}$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow f \text{ اکیداً نزولی است}$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \Rightarrow f \text{ نزولی است}$$

تعریف داده شده در صورت سؤال نشان دهنده این است که تابع f صعودی است، هر یک از ضابطه های بالایی و پایینی نیز اکیداً صعودی هستند، حال برای درک بهتر، نمودار $y = \sqrt{x-3} + 4$ در $x \geq 3$ را در شکل زیر ببینید:



$y = 6x - 2k$ نیز اکیداً صعودی است، دقت کنید برای اینکه کل تابع صعودی شود مقدار ضابطه $y = 6x - 2k$ در $x = 3$ باید کمتر از ۴ (کمترین مقدار ضابطه بالایی) شود:

$$6(3) - 2k \leq 4 \Rightarrow 18 - 2k \leq 4 \Rightarrow 2k \geq 14 \Rightarrow k \geq 7$$

پس پاسخ گزینه ۱ است.

گروه آموزشی ماز

۴- اگر معادله $\frac{x-1}{x-3} + \frac{x-1+a}{x^2-2x-3} = 1$ ریشه‌ی حقیقی نداشته باشد، اختلاف مقادیر ممکن برای a کدام است؟
 (۱) ۸ (۲) ۶ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۱)

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ تشریحی:

ابتدا $x^2 - 2x - 3$ را تجزیه می‌کنیم و سپس در سمت چپ، مخرج مشترک می‌گیریم تا معادله به صورت زیر در بیاید:

$$\frac{x-1}{x-3} + \frac{x-1+a}{x^2-2x-3} = 1 \Rightarrow \frac{x-1}{x-3} + \frac{x-1+a}{(x+1)(x-3)} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x^2-1+x-1+a}{(x+1)(x-3)} = 1 \Rightarrow \cancel{x^2} - 2x - 3 = \cancel{x^2} + x - 2 + a \Rightarrow 3x = -1 - a \Rightarrow x = \frac{-1-a}{3}$$

می‌خواهیم معادله ریشه نداشته باشد، پس x به دست آمده را باید برابر ریشه‌های مخرج قرار دهیم:

$$\text{اگر } x = 3: 3 = \frac{-1-a}{3} \Rightarrow -1-a = 9 \Rightarrow a = -10$$

$$\text{اگر } x = -1: -1 = \frac{-1-a}{3} \Rightarrow -1-a = -3 \Rightarrow a = 2$$

پس اختلاف مقادیر به دست آمده برای a برابر است با:

$$2 - (-10) = 12$$

گروه آموزشی ماز

۵- اگر مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های حقیقی معادله $x^4 - 4x^2 - 1 = 0$ به ترتیب برابر S و P باشند، حاصل ضرب $S^2 - 6PS + P^2$ کدام است؟
 (۱) $7 + 4\sqrt{3}$ (۲) $7 - 4\sqrt{3}$ (۳) $9 + 4\sqrt{5}$ (۴) $9 - 4\sqrt{5}$

(متوسط - محاسباتی - ۱۱۰۱)

پاسخ: گزینه ۳

روابط بین ریشه‌ها در معادله درجه دوم

در معادله درجه دوم به فرم $ax^2 + bx + c = 0$ که دارای ریشه‌های α و β می‌باشد، روابط زیر برقرار است:

$$S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} \quad \text{مجموع ریشه‌ها}$$

$$P = \alpha\beta = \frac{c}{a} \quad \text{ضرب ریشه‌ها}$$

پاسخ تشریحی:

ابتدا از تغییر متغیر استفاده می‌کنیم و x^2 را برابر t در نظر می‌گیریم:

$$x^4 - 4x^2 - 1 = 0 \xrightarrow{x^2=t} t^2 - 4t - 1 = 0 \xrightarrow{\Delta=20} t = \frac{4 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 2 \pm \sqrt{5}$$

با توجه به اینکه $x^2 = t$ ، t نمی‌تواند عددی منفی باشد پس فقط $t = 2 + \sqrt{5}$ قابل قبول است. حالا خواهیم داشت:

$$t = 2 + \sqrt{5} \Rightarrow x^2 = 2 + \sqrt{5} \Rightarrow x = \pm\sqrt{2+\sqrt{5}}$$

حالا به سراغ محاسبه S و P می‌رویم:

$$S = \sqrt{2+\sqrt{5}} + (-\sqrt{2+\sqrt{5}}) = 0$$

$$P = \sqrt{2+\sqrt{5}}(-\sqrt{2+\sqrt{5}}) = -(2+\sqrt{5})$$

در نتیجه خواسته سؤال برابر می‌شود با:

$$P^2 - 6PS + S^2 = (-(2+\sqrt{5}))^2 + 0 + 0 = (2+\sqrt{5})^2 = 9 + 4\sqrt{5}$$

گروه آموزشی ماز

۶- اعداد طبیعی طوری دسته بندی شده اند که تعداد عضوهای هر دسته (به جز دسته اول) برابر بزرگ ترین عضو دسته ی قبل است یعنی:

$\{1, 2, 3, 4, 5\}, \{6, 7, 8, 9, 10\}, \{11, 12, 13, \dots, 20\}, \dots$

در این صورت میانگین اعضای دسته ی یازدهم کدام است؟

۳۹۵۰/۵ (۴)

۳۸۵۰/۵ (۳)

۳۹۴۰/۵ (۲)

۳۸۴۰/۵ (۱)

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۱)

پاسخ: گزینه ۱

دنباله هندسی:

دنباله ای است که هر جمله (به جز جمله اول) از حاصل ضرب عدد قبلی در عددی ثابت (r) که به آن قدرنسبت گفته می شود به دست می آید.
جمله عمومی دنباله هندسی به صورت زیر است:

$$a_n = ar^{n-1}$$

a: جمله اول
r: قدرنسبت

نکته:

اگر دسته ای از اعداد را داشته باشیم که با یکدیگر دنباله حسابی ساخته باشند (فاصله شان از یکدیگر برابر باشد) برای محاسبه میانگین آن ها کافی است میانگین دو عدد اول و آخر را حساب کنیم.

پاسخ تشریحی:

$$\begin{array}{c} \times 2 \quad \times 2 \quad \times 2 \\ \swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \quad \searrow \\ 5, 10, 20, 40, \dots \end{array}$$

ابتدا بزرگ ترین عدد دسته ها را به ترتیب می نویسیم:

با کمی دقت می بینیم که این عددها تشکیل دنباله هندسی داده اند، به کمک جمله عمومی دنباله هندسی، عدد آخر دسته یازدهم و عدد آخر دسته دهم را به دست می آوریم:

$$a_n = ar^{n-1} \xrightarrow[r=2]{a=5} a_n = 5(2^{n-1}) \begin{cases} n=10 \rightarrow a_{10} = 5 \times 512 = 2560 \\ n=11 \rightarrow a_{11} = 5 \times 1024 = 5120 \end{cases}$$

پس عدد اول و آخر دسته یازدهم ۵۱۲۰ و ۲۵۶۱ هستند و اعداد نیز متوالی اند، با توجه به نکته گفته شده میانگین اعداد این دسته به صورت زیر به دست می آید:

$$\text{میانگین اعداد دسته یازدهم} = \frac{2561 + 5120}{2} = 3840.5$$

گروه آموزشی ماز

۷- اگر $f(x) = \frac{3^{x+1} + 3^{-x+1}}{3^x - 3^{-x+2}}$ و $f^{-1}(x) = m \log_3 \frac{nx+3}{x-3}$ باشد، m+n کدام است؟

۹/۵ (۴)

۹ (۳)

۱۰/۵ (۲)

۱۰ (۱)

(متوسط - ترکیبی / محاسباتی - ۱۱۰۲)

پاسخ: گزینه ۴

به دست آوردن ضابطه ی تابع وارون:

برای تشکیل ضابطه تابع وارون به صورت زیر عمل می کنیم:

(۱) ابتدا x را بر حسب y می نویسیم.

(۲) سپس جای x و y را عوض می کنیم تا ضابطه وارون پیدا شود.

نکته:

برای از بین بردن متغیر در توان در تساوی های مختلف، از دو طرف تساوی در مبنای دلخواه لگاریتم می گیریم.

پاسخ تشریحی:

ابتدا به کمک قوانین توان، تابع را ساده می کنیم:

$$f(x) = \frac{3^x \times 3 + 3^{-x} \times 3}{3^x - 3^{-x+2} \times 3^2} \Rightarrow f(x) = \frac{3^x \times 3 + \frac{1}{3^x} \times 3}{3^x - \frac{1}{3^x} \times 9} \xrightarrow{3^x=t} f(t) = \frac{3t + \frac{3}{t}}{t - \frac{9}{t}} \Rightarrow f(t) = \frac{\frac{3t^2 + 3}{t}}{\frac{t^2 - 9}{t}} \Rightarrow f(t) = \frac{3t^2 + 3}{t^2 - 9}$$

حال ضابطه وارون تابع f را تشکیل می‌دهیم:

$$y = \frac{3t^2 + 3}{t^2 - 9} \Rightarrow 3t^2 + 3 = y(t^2 - 9) \Rightarrow 3t^2 + 3 = yt^2 - 9y$$

$$\Rightarrow yt^2 - 3t^2 = 9y + 3 \Rightarrow t^2(y - 3) = 9y + 3$$

$$\Rightarrow t^2 = \frac{9y + 3}{y - 3} \xrightarrow[t^2 = 3^{2x}]{t = 3^x} 3^{2x} = \frac{9y + 3}{y - 3}$$

$$\xrightarrow[\text{لگاریتم می‌گیریم}]{\text{از دو طرف در مبنای ۳}} \log_3 3^{2x} = \log_3 \frac{9y + 3}{y - 3} \Rightarrow 2x = \log_3 \frac{9y + 3}{y - 3}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2} \log_3 \frac{9y + 3}{y - 3} \xrightarrow[\text{جای } x, y \text{ عوض شود}]{\text{جای } x, y} f^{-1}(x) = \frac{1}{2} \log_3 \frac{9x + 3}{x - 3}$$

با مقایسه حاصل به دست آمده و صورت سؤال واضح است که $m = \frac{1}{2}$ و $n = 9$ در نتیجه $m + n = 9\frac{1}{2}$

گروه آموزشی ماز

۸- اگر مجموع جواب‌های معادله $\log_3(81^x + 140) = 2x + 3$ را برابر k فرض کنیم، حاصل $[k]$ کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است)

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۳)

پاسخ: گزینه ۱

یک قانون مهم از لگاریتم:

اگر در جمع دو لگاریتم، مبنای یکسان باشد، خواهیم داشت:

$$\log_c^a + \log_c^b = \log_c^{ab}$$

نکته:

$$\log_b^a = c \Leftrightarrow b^c = a$$

پاسخ تشریحی:

ابتدا به کمک نکته گفته شده لگاریتم را حذف می‌کنیم:

$$\log_3^{81^x + 140} = 2x + 3 \Rightarrow 3^{2x+3} = 81^x + 140 \Rightarrow 3^{2x} \times 3^3 = 9^{2x} + 140$$

$$\Rightarrow 9^x \times 27 = (9^x)^2 + 140 \Rightarrow (9^x)^2 - 27 \times 9^x + 140 = 0$$

حال در نظر می‌گیریم که $9^x = t$:

$$t^2 - 27t + 140 = 0 \Rightarrow (t - 7)(t - 20) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 7 \Rightarrow 9^x = 7 \Rightarrow x = \log_9^7 \\ t = 20 \Rightarrow 9^x = 20 \Rightarrow x = \log_9^{20} \end{cases}$$

در نتیجه مجموع جواب‌های معادله که برابر k است به صورت زیر در می‌آید:

$$\log_9^7 + \log_9^{20} = k \Rightarrow \log_9^{140} = k$$

از آنجایی که تابع لگاریتم اکیداً یکنوا است داریم:

$$\underbrace{\log_9^7}_2 < \underbrace{\log_9^{140}}_k < \underbrace{\log_9^{200}}_3 \Rightarrow 2 < k < 3$$

پس خواسته سؤال برابر می‌شود با:

$$2 < k < 3 \Rightarrow [k] = 2$$

گروه آموزشی ماز

۹- اگر $f(x) = \sqrt{x^2 + x - 12}$ و $g(x) = \sqrt{18 - x^2}$ ، آن‌گاه دامنه‌ی تابع gof شامل چند عدد صحیح است؟

۱۲ (۴)

۱۰ (۳)

۸ (۲)

۶ (۱)

دامنه ترکیب توابع:

برای به دست آوردن دامنه ترکیب توابع به صورت زیر عمل می کنیم:

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

نکته:

برای تعیین دامنه توابع رادیکالی، عبارت زیر رادیکال را بزرگتر یا مساوی صفر قرار می دهیم.

پاسخ سریعی:

ابتدا دامنه توابع f و g را پیدا می کنیم:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + x - 12} \xrightarrow{\text{تعیین دامنه}} x^2 + x - 12 \geq 0 \Rightarrow (x-3)(x+4) \geq 0$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} -4 \quad 3 \\ + \quad - \quad + \end{array} \Rightarrow D_f = (-\infty, -4] \cup [3, +\infty)$$

$$g(x) = \sqrt{18 - x^2} \xrightarrow{\text{تعیین دامنه}} 18 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 18 \Rightarrow -\sqrt{18} \leq x \leq \sqrt{18}$$

$$\Rightarrow -3\sqrt{2} \leq x \leq 3\sqrt{2}$$

حال به سراغ دامنه $g \circ f$ می رویم:

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

$$= \left\{x \leq -4 \text{ یا } x \geq 3 \mid -3\sqrt{2} \leq \sqrt{x^2 + x - 12} \leq 3\sqrt{2}\right\}$$

نامساوی $-3\sqrt{2} \leq \sqrt{x^2 + x - 12} \leq 3\sqrt{2}$ بدیهی است بنابراین کافی است نامساوی $\sqrt{x^2 + x - 12} \leq 3\sqrt{2}$ را حل کنیم:

$$\sqrt{x^2 + x - 12} \leq 3\sqrt{2} \xrightarrow{\text{توان ۲}} x^2 + x - 12 \leq 18$$

$$\Rightarrow x^2 + x - 30 \leq 0 \Rightarrow (x+6)(x-5) \leq 0 \Rightarrow \begin{array}{c} -6 \quad 5 \\ + \quad - \quad + \end{array} \Rightarrow -6 \leq x \leq 5$$

حال $D_{g \circ f}$ را پیدا می کنیم:

بین x های چپ و راست اشتراک می گیریم

$$D_{g \circ f} = \left\{x \leq -4 \cup x \geq 3 \mid -6 \leq x \leq 5\right\} \Rightarrow D_{g \circ f} = [-6, -4] \cup [3, 5]$$

پس دامنه $g \circ f$ دارای اعداد صحیح $-6, -5, -4, 3, 4, 5$ است که تعدادشان ۶ تا است.

گروه آموزشی ماز

۱۰- باقی مانده و خارج قسمت تقسیم چندجمله ای $P(x)$ بر $(3x^2 + 12x)$ به ترتیب $(6x-1)$ و $Q(x)$ است. اگر $Q(-4) = 12$ باشد، آن گاه مقدار باقی مانده ی

تقسیم عبارت $P'(x)$ بر $(x+4)$ کدام است؟

-۱۴۴ (۴)

-۱۳۸ (۳)

۱۵۰ (۲)

۱۵۶ (۱)

قضیه تقسیم برای چندجمله ای ها:

اگر $f(x)$ و $P(x)$ توابع چندجمله ای باشند و درجه $P(x)$ از صفر بزرگتر باشد، آن گاه توابع چندجمله ای و منحصر به فرد $R(x)$ و $Q(x)$ وجود دارند به طوری که:

$$f(x) = P(x)Q(x) + R(x)$$

نکته: $R(x)$ یا برابر صفر است و یا درجه اش از درجه $P(x)$ کمتر است.

مشتق ضرب دو تابع:

مشتق ضرب دو تابع برابر است با مشتق اولی در دومی به اضافه مشتق دومی در اولی:

$$f(x) = g(x)h(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x)h(x) + h'(x)g(x)$$

با توجه به قضیه تقسیم و اطلاعات سؤال خواهیم داشت:

$$P(x) = (3x^2 + 12x) \underbrace{Q(x)}_{\text{باقی مانده}} + \underbrace{(6x - 1)}_{\text{خارج قسمت}}$$

حال به کمک مشتق ضرب دو تابع، $P'(x)$ را تشکیل می‌دهیم:

$$P'(x) = (6x + 12)Q(x) + Q'(x)(3x^2 + 12x) + 6$$

در عبارت بالا $x = -4$ را جاگذاری می‌کنیم تا به خواسته سؤال برسیم:

$$P'(-4) = -12Q(-4) + \underbrace{Q'(-4)(0)}_0 + 6$$

طبق اطلاعات سؤال $Q(-4) = 12 \Rightarrow P'(-4) = -12(12) + 6 \Rightarrow P'(-4) = -138$

گروه آموزشی ماز

۱۱- حاصل عبارت $A = \frac{\cos 3x \cos 7x - \sin 3x \sin 7x}{\sin x \cos x \cos 2x}$ به ازای $x = 7/5^\circ$ به صورت $4\sqrt{a-b}$ است. مقدار $2b-3a$ کدام است؟

(۱) صفر (۲) ۵ (۳) ۲ (۴) ۳

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۴)

پاسخ: گزینه ۱

برخی از اتصادهای مهم مثلثاتی:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \begin{cases} \cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 \\ \cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x \end{cases}$$

ابتدا به کمک فرمول $\cos(\alpha + \beta)$ و $\sin 2x$ عبارت را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$A = \frac{\cos 3x \cos 7x - \sin 3x \sin 7x}{\sin x \cos x \cos 2x} \Rightarrow A = \frac{\cos(3x + 7x)}{\frac{1}{2} \sin 2x \cos 2x} \Rightarrow A = \frac{\cos 10x}{\frac{1}{4} \sin 4x}$$

حال $x = 7/5^\circ$ را جاگذاری می‌کنیم:

$$A = \frac{\cos 75^\circ}{\frac{1}{4} \sin 30^\circ} \Rightarrow A = \frac{4 \cos 75^\circ}{\sin 30^\circ} \xrightarrow{\sin 30^\circ = \frac{1}{2}} A = \frac{4 \cos 75^\circ}{\frac{1}{2}} \Rightarrow A = 8 \cos 75^\circ$$

به کمک رابطه $\cos 2x$ ، $\cos 75^\circ$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 \xrightarrow{x=75^\circ} \cos 150^\circ = 2 \cos^2 75^\circ - 1 \xrightarrow{\cos 150^\circ = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{-\sqrt{3}}{2} = 2 \cos^2 75^\circ - 1$$

$$\Rightarrow \cos^2 75^\circ = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} \xrightarrow{\text{حاده } 75^\circ} \cos 75^\circ = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

پس A برابر می‌شود با:

$$A = 8 \cos 75^\circ = 8 \left(\frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{3}} \right) = 4 \sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

با مقایسه حاصل به دست آمده و صورت سؤال، $a = 2$ و $b = 3$ در نتیجه:

$$2b - 3a = 0$$

۱۲- معادله ی $\sin 4x(\cos 2x + \sin 2x) = \cos 4x(\cos 2x - \sin 2x)$ در بازه ی $[-\pi, 0]$ دارای چند جواب است؟
 ۴ (۱) ۲ (۲) ۸ (۳) ۶ (۴)

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۲۰۲)

جواب های کلی معادله مثلثاتی:

$$\begin{aligned}\sin x = \sin \alpha &\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases} \\ \cos x = \cos \alpha &\Rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha \\ \tan x = \tan \alpha &\Rightarrow x = k\pi + \alpha \\ \cot x = \cot \alpha &\Rightarrow x = k\pi + \alpha\end{aligned}$$

پاسخ شریقی:

معادله داده شده را به صورت زیر ساده می کنیم:

$$\begin{aligned}\sin 4x(\cos 2x + \sin 2x) &= \cos 4x(\cos 2x - \sin 2x) \\ \Rightarrow \sin 4x \cos 2x + \sin 4x \sin 2x &= \cos 4x \cos 2x - \cos 4x \sin 2x\end{aligned}$$

حال $\sin 4x \sin 2x - \cos 4x \sin 2x$ را با یکدیگر در طرفین تساوی جابجا می کنیم تا از فرمول های $\cos(\alpha + \beta)$ و $\sin(\alpha + \beta)$ استفاده کنیم:

$$\begin{aligned}\sin 4x \cos 2x + \cos 4x \sin 2x &= \cos 4x \cos 2x - \sin 4x \sin 2x \\ \sin(4x + 2x) &= \cos(4x + 2x) \\ \Rightarrow \sin(6x) &= \cos(6x) \Rightarrow \sin 6x = \cos 6x\end{aligned}$$

حال طرفین معادله به دست آمده را به $\cos 6x$ تقسیم می کنیم:

$$\begin{aligned}\sin 6x = \cos 6x &\xrightarrow{\div \cos 6x} \tan 6x = 1 \xrightarrow{1 = \tan \frac{\pi}{4}} 6x = k\pi + \frac{\pi}{4} \\ \Rightarrow x &= \frac{k\pi}{6} + \frac{\pi}{24}\end{aligned}$$

به جای k اعداد صحیح مناسب قرار می دهیم تا جواب های معادله در بازه $[-\pi, 0]$ پیدا شود:

k	-۱	-۲	-۳	-۴	-۵	-۶
x	$-\frac{\pi}{8}$	$-\frac{7\pi}{24}$	$-\frac{11\pi}{24}$	$-\frac{15\pi}{24}$	$-\frac{19\pi}{24}$	$-\frac{23\pi}{24}$

بنابراین معادله در بازه ی $[-\pi, 0]$ دارای ۶ جواب است.

گروه آموزشی ماز

۱۳- کدام یک از حدهای زیر، نامتناهی نیست؟

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - |x|}{x^2 + [-x]} & \quad (۲) \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \left[\frac{-1}{x} \right] & \quad (۴)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{|4 - x|}{x^2 - 8x + 16} & \quad (۱) \\ \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \frac{[\cos 2x]}{\cos x} & \quad (۳)\end{aligned}$$

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۲۰۳)

حدهای نامتناهی:

حاصل حدهای نامتناهی به شکل زیر است:

$$\begin{aligned}\frac{\text{عدد مثبت}}{+} &= +\infty & \frac{\text{عدد مثبت}}{-} &= -\infty \\ \frac{\text{عدد منفی}}{+} &= -\infty & \frac{\text{عدد منفی}}{-} &= +\infty\end{aligned}$$

نکته:

$$\begin{array}{ll} \frac{\text{عدد مثبت}}{+\infty} = 0^+ & \frac{\text{عدد مثبت}}{-\infty} = 0^- \\ \frac{\text{عدد منفی}}{-\infty} = 0^+ & \frac{\text{عدد منفی}}{+\infty} = 0^- \end{array}$$

بررسی گزینه‌ها:

به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

$$\begin{aligned} 1) \quad \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{|4-x|}{x^2 - 16x + 64} &= \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{4-x}{(x-4)^2} = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{-1}{x-4} = \frac{-1}{0^-} = +\infty \\ 2) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x - |x|}{x^2 + [-x]} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x + x}{x^2 + [-x]} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3}{x} = \frac{3}{0^+} = +\infty \\ 3) \quad \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \frac{[\cos 2x]}{\cos x} &= \frac{[(-1)^+]}{0^-} = \frac{-1}{0^-} = +\infty \\ 4) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \left[\frac{-1}{x} \right] &= (+\infty) \left[\frac{-1}{-\infty} \right] = (+\infty) [0^+] = (+\infty) \times (\text{صفر مطلق}) = 0 \end{aligned}$$

پس پاسخ گزینه ۴ است.

گروه آموزشی ماز

۱۴- حاصل $\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\sin(\pi-x) \sin(\frac{\pi}{2}-x)}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$ کدام است؟

(۱) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۳) $-\frac{\sqrt{6}}{3}$ (۴) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط - ترکیبی / محاسباتی - ۱۱۰۵)

نسبت‌های مثلثاتی زوایای متمم و مکمل:

اگر α و β دو زاویه متمم باشند خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \cos \beta & \sin \alpha &= \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) \\ \tan \alpha &= \cot \beta & \tan \alpha &= \cot(\frac{\pi}{2} - \alpha) \end{aligned}$$

سینوس یکی با کسینوس دیگری برابر است و بالعکس و همچنین تانژانت یکی با کتانژانت دیگری برابر است و بالعکس.

اگر α و β دو زاویه مکمل باشند، آن‌گاه:

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \sin \beta & \sin \alpha &= \sin(\pi - \alpha) \\ \cos \alpha &= -\cos \beta & \cos \alpha &= -\cos(\pi - \alpha) \end{aligned}$$

سینوس‌هایشان برابر و کسینوس‌هایشان قرینه‌اند، در نتیجه تانژانت و کتانژانت آن‌ها نیز قرینه یکدیگرند.

یادآوری اتحاد چاق و لاغر:

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

$$1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha$$

$$1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha$$

فرمول‌های طلایی مثلثات:

به کمک مطالب گفته شده حد را ساده می کنیم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\overbrace{\sin(\pi-x)}^{\sin x} \overbrace{\sin(\frac{\pi}{2}-x)}^{\cos x}}{\sqrt{1+\cos^2 x}} &= \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{(1+\cos x)(1-\cos x+\cos^2 x)}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\overbrace{\sin x}^{\sqrt{2} \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} \cos x}{\sqrt{2 \cos^2 \frac{x}{2}} \sqrt{(1-\cos x+\cos^2 x)}} = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\sqrt{2} \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \cos x}{\sqrt{2} \left| \cos \frac{x}{2} \right| \times \sqrt{3}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\sqrt{2} \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \times (-1)}{\sqrt{2} \cos \frac{x}{2} \times \sqrt{3}} = \frac{2 \times (-1)}{\sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{6}}{3} \end{aligned}$$

گروه آموزشی ماز

۱۵- تعداد نقاط ناپیوستگی تابع با ضابطه ی $f(x) = 2\left[x - \frac{2}{5}\right] + \left[x + \frac{3}{5}\right]$ در بازه ی $[-3, 3]$ کدام است؟

۸ (۴)

۷ (۳)

۶ (۲)

۵ (۱)

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۵)

پاسخ: گزینه ۲

مشتق ناپذیری در توابع پراکتی:

در توابع به صورت $y = [f(x)]$ ، در x هایی که $f(x)$ دارای مقدارهای صحیح باشد، ناپیوسته است. (البته $f(x)$ در نقاط مذکور، مینیمم نسبی نباشد)

ابتدا $\frac{3}{5}$ را به صورت $1 - \frac{2}{5}$ می نویسیم و سپس تابع را ساده می کنیم:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\left[x - \frac{2}{5}\right] + \left[x + \frac{3}{5}\right] \Rightarrow f(x) = 2\left[x - \frac{2}{5}\right] + \left[x - \frac{2}{5} + 1\right] \\ \Rightarrow f(x) &= 2\left[x - \frac{2}{5}\right] + \left[x - \frac{2}{5}\right] + 1 \Rightarrow f(x) = 3\left[x - \frac{2}{5}\right] + 1 \end{aligned}$$

این تابع در نقاطی که عبارت $(x - \frac{2}{5})$ صحیح باشد ناپیوسته است. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} x - \frac{2}{5} &= k \quad (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow x = k + \frac{2}{5} \xrightarrow{-3 \leq x \leq 3} \\ x &= -\frac{13}{5}, -\frac{8}{5}, -\frac{3}{5}, \frac{2}{5}, \frac{7}{5}, \frac{12}{5} \end{aligned}$$

یعنی تابع f در ۶ نقطه از بازه ی $[-3, 3]$ ناپیوسته است.

گروه آموزشی ماز

۱۶- تعداد مجانب های نمودار تابع $f(x) = \frac{\tan x}{\sqrt{9-x^2}}$ کدام است؟

۴ بی شمار

۲ (۳)

۳ (۲)

۴ (۱)

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۲۰۳)

پاسخ: گزینه ۱

پیدا کردن مجانب های افقی و عمودی تابع کسری:

مجانب افقی:

برای پیدا کردن مجانب افقی، x را به ∞ میل می دهیم و حاصل حد، همان مجانب افقی خواهد بود.

مجانِب عمودی:

در ریشه های مخرج کسر، مجانب عمودی خواهیم داشت به شرطی که آن ریشه ها، ریشه صورت نباشند.

پاسخ شریعی:

ابتدا $\tan x$ را به صورت $\frac{\sin x}{\cos x}$ می نویسیم و سپس دامنه تابع را پیدا می کنیم:

$$f(x) = \frac{\tan x}{\sqrt{9-x^2}} = \frac{\sin x}{\cos x \sqrt{9-x^2}}$$

$$9-x^2 > 0 \Rightarrow x^2 < 9 \Rightarrow -3 < x < 3 \quad (\text{عبارت زیر رادیکال})$$

$$\cos x \neq 0 \Rightarrow x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x \neq -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \quad (\text{مخرج ثانوات})$$

$$D_f = (-3, 3) - \left\{ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\}$$

ریشه های مخرج کسر را پیدا می کنیم:

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$$

$$\sqrt{9-x^2} = 0 \Rightarrow 9-x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 3$$

به ازای مقادیر $x = 3$ و $x = -3$ و $x = \frac{\pi}{2}$ و $x = -\frac{\pi}{2}$ صورت کسر برابر صفر نخواهد بود ولی این نقاط در دامنه ی تابع دارای همسایگی چپ یا راست (یا هر دو) هستند پس تابع در این نقاط دارای مجانب قائم است.

همچنین توجه شود که تابع f فاقد مجانب افقی است زیرا با توجه به دامنه ی تابع، امکان میل کردن متغیر x به $+\infty$ یا $-\infty$ وجود ندارد پس تابع f فقط دارای ۴ خط مجانب قائم است.

گروه آموزشی ماز

۱۷- کدام یک از موارد زیر صحیح هستند؟

الف: دامنه ی تابع مشتق تابع $f(x) = |x^3 + x|$ برابر $\mathbb{R}$ است.

ب: تابع $f(x) = \sqrt[5]{x^2 - 1}$ دقیقاً در دو نقطه از دامنه اش دارای مماس قائم است.

(۴) هیچ کدام

(۳) هر دو گزاره الف و ب

(۲) فقط ب

(۱) فقط الف

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۲۰۴)

پاسخ: گزینه ۲

نکته ۱:

توابع قدرمطلق در ریشه های ساده داخل قدرمطلق مشتق ناپذیرند.

نکته ۲:

اگر تابع در یک نقطه دارای حد نامتناهی $+\infty$ و یا $-\infty$ باشد، در آن نقطه دارای مماس قائم است.

پاسخ شریعی:

گزاره الف نادرست است زیرا توابع شامل قدرمطلق به شکل کلی $f(x) = |g(x)|$ در ریشه های ساده ی عبارت $g(x)$ مشتق ناپذیرند پس تابع $f(x) = |x^3 + x|$ در نقطه ی $x = 0$ که ریشه ی ساده ی عبارت داخل قدرمطلق است، مشتق ناپذیر است. ($x = 0$ طول نقطه ی گوشه ای تابع f است زیرا $x = 0$ ریشه ی ساده ی عبارت داخل قدرمطلق است)

$$x^3 + x = 0 \Rightarrow x(x^2 + 1) = 0 \Rightarrow x = 0$$

بنابراین دامنه ی تابع مشتق تابع $f(x) = |x^3 + x|$ برابر $\mathbb{R} - \{0\}$ است.

گزاره ب صحیح است زیرا مشتق های چپ و راست تابع f در دو نقطه ی $x = 1$ و $x = -1$ نامتناهی هستند و بنابراین تابع f در این دو نقطه دارای مماس قائم است.

$$f(x) = \sqrt[5]{x^2 - 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x}{5\sqrt[5]{(x^2 - 1)^4}}$$

ریشه‌های مخرج مشتق: $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

$f'_+(1) = +\infty$, $f'_-(1) = +\infty$, $f'_+(-1) = -\infty$, $f'_-(-1) = -\infty$

گروه آموزشی ماز

۱۸- اگر $f(x) = \frac{x^7 + 128}{x^6 - 2x^5 + 4x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 32x + 64}$ مقدار $f'(0)$ کدام است؟

(۴) -۱

(۳) صفر

(۲) ۱

(۱) ۲

(آسان - محاسباتی - ۱۲۰۴)

پاسخ: گزینه ۲

مشتق کسرها:

مشتق تابع کسری به صورت زیر به دست می‌آید:

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{g'(x)h(x) - h'(x)g(x)}{h^2(x)}$$

روش اول:

به کمک قاعده مشتق کسرها $f'(x)$ را تشکیل می‌دهیم:

$$f'(x) = \frac{7x^6(x^6 - 2x^5 + 4x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 32x + 64) - (x^7 + 128)(6x^5 - 10x^4 + 16x^3 - 24x^2 + 32x - 32)}{(x^6 - 2x^5 + 4x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 32x + 64)^2}$$

حالا $f'(0)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\Rightarrow f'(0) = \frac{0 - (-32)(128)}{(64)^2} \Rightarrow f'(0) = \frac{32 \times 128}{64 \times 64} \Rightarrow f'(0) = 1$$

روش دوم:

طبق اتحاد $a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - a^{n-4}b^3 + \dots + b^{n-1})$ که به ازای مقادیر طبیعی و فرد n برقرار است، داریم:

$$x^7 + 128 = x^7 + 2^7 = (x+2)(x^6 - 2x^5 + 4x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 32x + 64)$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{(x+2)(x^6 - 2x^5 + 4x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 32x + 64)}{x^6 - 2x^5 + 4x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 32x + 64}$$

$$\Rightarrow f(x) = x+2 \Rightarrow f'(x) = 1 \Rightarrow f'(0) = 1$$

گروه آموزشی ماز

۱۹- معادله‌ی خطی که نقاط اکسترمم نسبی تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x^3 - (3a+6)x^2 + (6a+9)x + 2b$ را به هم وصل می‌کند به صورت $2y + 3x = 6$ است.

اگر طول نقطه‌ی عطف تابع f برابر $x=2$ باشد، مقدار $f(-1)$ کدام است؟

(۴) -۱۷

(۳) -۱۸

(۲) -۱۹

(۱) -۲۰

(متوسط - محاسباتی - ۱۲۰۵)

پاسخ: گزینه ۳

نقطه عطف در توابع درجه ۳:

(۱) در توابع درجه ۳ با فرم کلی $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ، طول نقطه عطف تابع از رابطه $x = -\frac{b}{3a}$ به دست می‌آید.

(۲) خط گذرنده از نقاط اکسترمم نسبی تابع درجه ۳، از نقطه عطف آن عبور می‌کند، چرا که نقطه عطف تابع درجه ۳، مرکز تقارن تابع است.

پاسخ تشریحی:

ابتدا با توجه به درسنامه ۱، مقدار a را به دست می‌آوریم:

$$\text{طول نقطه عطف} = \frac{3a+6}{3} = 2 \Rightarrow 3a+6 = 6 \Rightarrow a = 0$$

$$\Rightarrow f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2b$$

حالا $x=2$ را در f جاگذاری می‌کنیم تا عرض نقطه عطف پیدا شود:

$$f(2) = 8 - 24 + 18 + 2b = 2 + 2b$$



پس مختصات نقطه عطف به صورت $(2, 2+2b)$ است، با توجه به نکته ۲، این نقطه باید در معادله خط گذرنده از اکسترمم‌های تابع f صدق کند، پس:

$$2y + 3x = 6 \Rightarrow 2(2+2b) + 3(2) = 6 \Rightarrow 4 + 4b + 6 = 6 \Rightarrow b = -1$$

پس ضابطه f به صورت $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ است، در نتیجه $f(-1)$ برابر است با:

$$f(-1) = (-1)^3 - 6(-1)^2 + 9(-1) - 2 = -1 - 6 - 9 - 2 \Rightarrow f(-1) = -18$$

گروه آموزشی ماز

۲۰- اولین نقطه‌ی عطف تابع $f(x) = \sin^2 x + \cos^4 x$ با طول مثبت دارای کدام طول است؟

$\frac{3\pi}{8}$ (۴)

$\frac{\pi}{8}$ (۳)

$\frac{\pi}{4}$ (۲)

$\frac{\pi}{2}$ (۱)

(متوسط - ترکیبی / محاسباتی - ۱۴۰۵)

پاسخ: گزینه ۳

یافتن نقاط عطف توابع:

برای پیدا کردن طول نقطه عطف تابع f که از مرتبه دوم، مشتق پذیر است، ابتدا ریشه‌های f'' را پیدا می‌کنیم و اگر ریشه‌های به دست آمده در آن‌ها هر دو شرط زیر را داشته باشند نقطه عطف تابع خواهند بود:

(۱) نمودار f در آن‌ها خط مماس داشته باشد. (f' در آن‌ها وجود داشته باشد). (این شرط همواره برقرار خواهد بود، زیرا f'' همواره موجود است)

(۲) جهت تقعر f در آن‌ها تغییر کند.

مشتق توابع مثلثاتی:

مشتق توابع $y = \sin x$ و $y = \cos x$ به صورت زیر است:

$y = \sin x \rightarrow y' = \cos x$

$y = \cos x \rightarrow y' = -\sin x$

پاسخ تشریحی:

ابتدا مشتق تابع f را به دست می‌آوریم:

$f(x) = \sin^2 x + \cos^4 x \Rightarrow f'(x) = 2 \sin x \cos x - 4 \sin x \cos^3 x$

$f'(x) = \underbrace{2 \sin x \cos x}_{\sin 2x} \underbrace{(-2 \cos^2 x)}_{-\cos 2x} = \sin 2x (-\cos 2x) = -\frac{1}{2} \sin 4x$

حال به سراغ مشتق مرتبه دوم تابع f می‌رویم:

$f'(x) = -\frac{1}{2} \sin 4x \Rightarrow f''(x) = -\frac{1}{2} (4) \cos 4x = -2 \cos 4x$

برای پیدا کردن نقطه عطف، مشتق مرتبه دوم را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$f''(x) = -2 \cos 4x = 0 \Rightarrow \cos 4x = 0 \Rightarrow 4x = k\pi + \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$

اولین نقطه با طول مثبت به ازای $k=0$ به دست می‌آید که $x = \frac{\pi}{8}$ است، این نقطه شرط اول برای نقطه عطف بودن (f' در آن موجود است) را دارد، حال باید

شرط دوم که تغییر تقعر تابع است را بررسی کنیم:

x	$-\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{8}$
f''	$-$	$+$	$-$
f	$\downarrow$	$\uparrow$	$\downarrow$

f'' در $x = \frac{\pi}{8}$ تغییر علامت می‌دهد، پس شرط دوم نیز برقرار است و $x = \frac{\pi}{8}$ نقطه عطف تابع است.

گروه آموزشی ماز

- ۲۱- در مثلث ABC ، عمود منصف ضلع BC از رأس A عبور می‌کند و نقطه M از سه ضلع مثلث به یک فاصله است. اگر $AB = 6$ باشد و خطی که از نقطه M موازی با ضلع BC رسم می‌شود، دو ضلع دیگر مثلث را در نقاط P و Q قطع کند، محیط مثلث APQ کدام است؟
- (۱) ۶ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۰۰۱)

پاسخ: گزینه ۴

خاصیت عمود منصف:

هر نقطه بر روی عمود منصف یک پاره خط، از دو سر آن به یک فاصله است.

خاصیت نیمساز:

هر نقطه بر روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است.

نکته:

در هر مثلث، محل هم‌رسانی نیمسازهای زوایای مثلث، در داخل آن از سه ضلع مثلث به یک فاصله است.

پاسخ تشریحی:

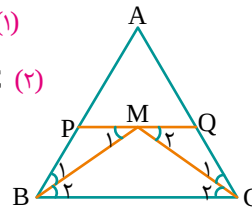
عمود منصف ضلع BC از رأس A عبور می‌کند، پس $AB = AC$ است. از طرفی نقطه M از سه ضلع مثلث ABC به یک فاصله است، پس نقطه هم‌رسانی نیمسازهای داخلی در این مثلث است. مطابق شکل، BM و CM نیمسازهای زوایای B و C هستند و در نتیجه داریم:

$$PQ \parallel BC \text{ و } BM \text{ مورب} \Rightarrow \hat{M}_1 = \hat{B}_r \xrightarrow{\hat{B}_1 = \hat{B}_r} \hat{M}_1 = \hat{B}_1 \Rightarrow PM = PB \quad (1)$$

$$PQ \parallel BC \text{ و } MC \text{ مورب} \Rightarrow \hat{M}_r = \hat{C}_r \xrightarrow{\hat{C}_1 = \hat{C}_r} \hat{M}_r = \hat{C}_1 \Rightarrow MQ = QC \quad (2)$$

$$APQ \text{ مثلث} = AP + PQ + AQ = AP + (PM + MQ) + AQ$$

$$= (AP + PB) + (QC + AQ) = AB + AC = 2AB = 2 \times 6 = 12$$



با توجه به روابط (۱) و (۲) خواهیم داشت:

گروه آموزشی ماز

- ۲۲- در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ ، نقاط M و P به ترتیب وسط اضلاع BC و AB قرار دارند. اگر AM و MP به ترتیب قطر BD را در نقاط N و Q قطع کنند، مساحت مثلث MNQ چه کسری از مساحت متوازی‌الاضلاع $ABCD$ است؟

$$\frac{1}{18} \quad (4)$$

$$\frac{1}{24} \quad (3)$$

$$\frac{1}{36} \quad (2)$$

$$\frac{1}{48} \quad (1)$$

(متوسط - ترکیبی / محاسباتی - ۱۰۰۳)

پاسخ: گزینه ۱

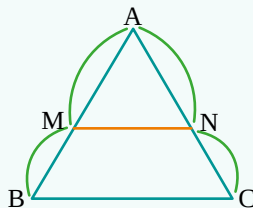
میانۀ در مثلث:

(۱) میانۀ‌های یک مثلث یکدیگر را به نسبت‌های ۱ به ۲ تقسیم می‌کنند.

(۲) اگر هر سه میانۀ مثلث را رسم کنیم، مثلث به ۶ مثلث هم‌مساحت تقسیم می‌شود.

عکس قضیه تالس:

در مثلث مقابل خواهیم داشت:



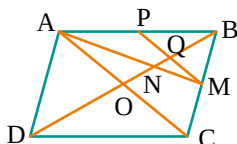
$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \Rightarrow MN \parallel BC$$

نکته:

اگر نسبت تشابه دو مثلث k باشد، نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر k^2 است.

پاسخ تشریحی:

در مثلث ABC ، نقاط M و P به ترتیب وسط اضلاع BC و AB قرار دارند، پس طبق عکس قضیه تالس، $MP \parallel AC$ است و در نتیجه دو مثلث MNQ و AON با هم متشابه‌اند.



از طرفی، AM و BO میانه های مثلث ABC هستند که یکدیگر را به نسبت ۲ به ۱ قطع می کنند، پس نسبت تشابه دو مثلث MNQ و AON برابر است با:

$$k = \frac{MN}{AN} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{S_{\triangle MNQ}}{S_{\triangle AON}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow S_{\triangle MNQ} = \frac{1}{4} S_{\triangle AON} \quad (1)$$

همچنین می دانیم از برخورد میانه های هر مثلث، ۶ مثلث هم مساحت ایجاد می شود، پس داریم:

$$S_{\triangle AON} = \frac{1}{6} S_{\triangle ABC} = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2} S_{ABCD}\right) = \frac{1}{12} S_{ABCD} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow S_{\triangle MNQ} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{12} S_{ABCD} = \frac{1}{48} S_{ABCD}$$

گروه آموزشی ماز

۲۳- سه صفحه P_1, P_2, P_3 دوهی دو متقاطع اند. فصل مشترک های این سه صفحه کدام نمی تواند باشد؟

- (۱) یک نقطه (۲) یک خط (۳) سه خط موازی (۴) سه خط متقاطع

(متوسط - مفهومی - ۱۰۰۴)

پاسخ: گزینه ۴

فصل مشترک دو صفحه:

اگر دو صفحه فقط در یک خط راست مشترک باشند، نسبت به هم متقاطع هستند، این خط راست را فصل مشترک آن دو صفحه می نامیم.



فرض کنید خط d فصل مشترک دو صفحه P_1 و P_2 باشد، در این صورت، سه حالت زیر امکان پذیر است:

- (۱) خط d، صفحه P_3 را در یک نقطه قطع کند. در این صورت، این خط فصل مشترک سه صفحه P_1, P_2, P_3 است.
- (۲) خط d، درون صفحه P_3 باشد. در این صورت، این نقطه فصل مشترک سه صفحه P_1, P_2, P_3 است.
- (۳) خط d، با صفحه P_3 موازی باشد. در این صورت، فصل مشترک صفحه P_3 با صفحه P_1 ، خطی مانند d و فصل مشترک صفحه P_3 با صفحه P_2 ، خطی مانند d است که هر دوی آنها با خط d موازی اند.

بنابراین فصل مشترک های دوهی دو صفحه، متقاطع، هیچ گاه نمی تواند سه خط متقاطع باشد.

گروه آموزشی ماز

۲۴- در دوزنقه ABCD ($AB \parallel CD$)، $AB=10$ ، $DC=15$ و $AD=7$ است. از نقطه P محل تلاقی امتداد ساق های این دوزنقه، مماسی بر دایره گذرنده از

نقاط A و D رسم می کنیم. طول این قطعه مماس کدام است؟

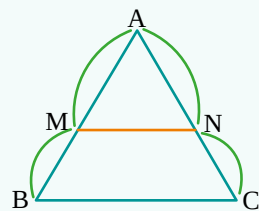
- (۱) $5\sqrt{3}$ (۲) $5\sqrt{6}$ (۳) $7\sqrt{6}$ (۴) $7\sqrt{3}$

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۱)

پاسخ: گزینه ۳

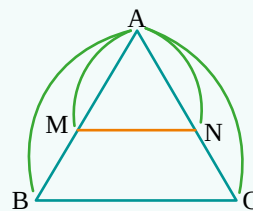
درسمانه:

اگر خطی داخل مثلث دو ضلع مثلث را قطع کند و با ضلع سوم موازی باشد، آن گاه خواهیم داشت:



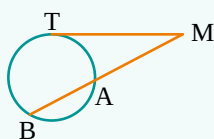
$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$$

تالس جزء به جزء



$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

تالس جزء به کل

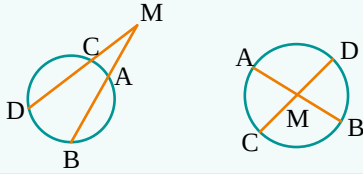


$$MT^2 = MA \times MB$$

روابط طولی در دایره:

اگر MT بر دایره مماس باشد و MB دایره را قطع کند، آن گاه:

هرگاه وترهای AB و CD از دایره‌ای در نقطه M متقاطع باشند (M می‌تواند بیرون یا درون دایره باشد)، آن‌گاه در هر دو شکل زیر خواهیم داشت:



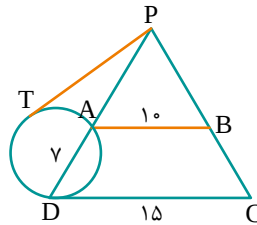
$$MA \times MB = MC \times MD$$

پاسخ شریعی:

طبق تعمیم قضیه تالس در مثلث PCD داریم:

$$AB \parallel CD \Rightarrow \frac{PA}{PD} = \frac{AB}{CD} \Rightarrow \frac{PA}{PA+7} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow 3PA = 2PA + 14 \Rightarrow PA = 14$$



طبق روابط طولی در دایره داریم:

$$PT^2 = PA \times PD = 14 \times 21 \Rightarrow PT^2 = (7 \times 2) \times (7 \times 3) \Rightarrow PT = 7\sqrt{6}$$

گروه آموزشی ماز

۲۵- در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\hat{B} = 90^\circ$), $AB = BC = 15$ است. اگر نقطه N روی ضلع AB و $BN = 7$ باشد، آن‌گاه کمترین محیط ممکن برای مثلث MBN به گونه‌ای که M روی وتر AC باشد، کدام است؟

۲۰ (۴)

۲۲ (۳)

۲۴ (۲)

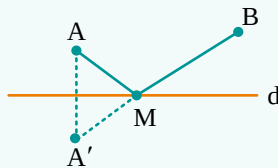
۲۶ (۱)

(سخت - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۲)

پاسخ: گزینه ۲

مسئله کوتاه‌ترین مسیر (قضیه هرون):

فرض کنیم خط d و دو نقطه A و B در یک طرف d داده شده باشد و بخواهیم از A به نقطه‌ای مانند M واقع بر خط d رفته و از آن‌جا به نقطه B برویم طوری که طول مسیر AMB کوتاه‌ترین مقدار ممکن باشد، برای این کار، بازتاب یکی از دو نقطه مثلاً A را نسبت به d پیدا می‌کنیم تا A' به دست آید و سپس A' را به B وصل کرده تا d را در M قطع کند، حال مسیر AMB کوتاه‌ترین مسیر ممکن است.



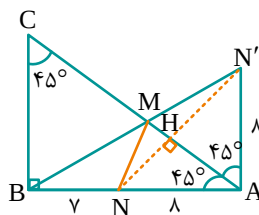
حال به دو نکته زیر توجه کنید:

- طول خط شکسته AMB برابر است با طول پاره خط $A'B$.
- خط d نیمساز زاویه AMA' است.

پاسخ شریعی:

مثلث ABC قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است، پس داریم:

$$\hat{A} = \hat{C} = 45^\circ$$



برای پیدا کردن محل نقطه M واقع بر وتر AC به گونه‌ای که محیط مثلث MBN کمترین مقدار ممکن باشد، با توجه به درسنامه کافی است بازتاب N نسبت به AC را به دست آوریم.

دو مثلث ANH و $AN'H$ هم‌نهشت هستند و در نتیجه $AN' = 8$ و $\hat{HAN'} = 45^\circ$ است. بنابراین مطابق شکل، مثلث $AN'B$ در رأس A قائم‌الزاویه بوده و در نتیجه داریم:

$$BN'^2 = AB^2 + AN'^2 = 15^2 + 8^2 = 289 \Rightarrow BN' = 17$$

کمترین مقدار محیط مثلث MNB با توجه به روش هرون برابر است با:

$$\underbrace{BM + MN}_{BN'} + BN = BN' + BN = 17 + 7 = 24$$

گروه آموزشی ماز

۲۶- در مثلث ABC ، اگر $AB=3$ ، $AC=3\sqrt{2}$ ، $\hat{A}=135^\circ$ باشد، طول میانه AM کدام است؟

۳ (۴)

$\frac{3\sqrt{2}}{2}$ (۳)

۲ (۲)

$\frac{3}{2}$ (۱)

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۳)

پاسخ: گزینه ۱

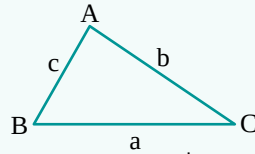
قضیه کسینوس ها در مثلث:

در هر مثلث مربع اندازه هر ضلع برابر است با مجموع مربعات اندازه های دو ضلع دیگر منهای دو برابر حاصل ضرب اندازه آن دو ضلع در کسینوس زاویه بین دو ضلع:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$$

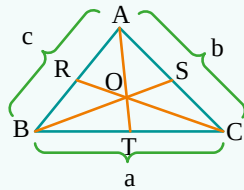


قضیه میانه ها: در شکل زیر، نقطه O محل هم رسی میانه های مثلث ABC است. در این صورت، داریم:

$$b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2}$$

$$a^2 + c^2 = 2m_b^2 + \frac{b^2}{2}$$

$$a^2 + b^2 = 2m_c^2 + \frac{c^2}{2}$$



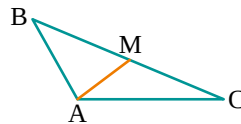
پاسخ شریعی:

$$\cos 135^\circ = -\cos 45^\circ = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

135° و 45° مکمل هم هستند، پس:

اکنون طبق قضیه کسینوس ها در مثلث ABC ، داریم:

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos \hat{A} \\ &= 3^2 + (3\sqrt{2})^2 - 2 \times 3 \times 3\sqrt{2} \times \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) = 9 + 18 + 18 = 45 \end{aligned}$$



حال طبق قضیه میانه ها در این مثلث داریم:

$$AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + \frac{BC^2}{2} \Rightarrow 9 + 18 = 2AM^2 + \frac{45}{2}$$

$$\Rightarrow 2AM^2 = \frac{9}{2} \Rightarrow AM^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow AM = \frac{3}{2}$$

گروه آموزشی ماز

۲۷- به ازای کدام مقادیر a و b ، با افزوده شدن ۲ واحد به درایه واقع در سطر دوم و ستون سوم ماتریس $A = \begin{bmatrix} a+2 & b & c \\ 2 & b+2 & c \\ a & b & c+1 \end{bmatrix}$ ، A ، ۳ واحد به دترمینان

این ماتریس اضافه می شود؟

(۲) $a = \frac{1}{2}$ و $b = \frac{1}{2}$ دلخواه

(۱) $a = \frac{1}{2}$ و $b = \frac{1}{2}$ دلخواه

(۴) $a = \frac{1}{2}$ و $b = \frac{1}{2}$ دلخواه

(۳) $a = \frac{1}{2}$ و $b = \frac{1}{2}$ دلخواه

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۴

محاسبه دترمینان:

(۱) ماتریس های 2×2 :

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = ad - bc$$

۲) ماتریس های 3×3 :

در اینجا یک سطر یا یک ستون دلخواه از ماتریس را انتخاب می‌کنیم، درایه اول از سطر یا ستون انتخاب شده را در نظر می‌گیریم، سطر و ستون آن را حذف می‌کنیم و دترمینان درایه‌های باقی‌مانده را حساب می‌کنیم، سپس در $(-1)^{مجموع\ سطر\ و\ ستون}$ درایه انتخاب شده و خود درایه انتخاب شده ضرب می‌کنیم. برای دو درایه بعدی هم همین کار را انجام می‌دهیم و سه عدد به دست آمده را با هم جمع می‌کنیم. مثلاً در این جا برحسب سطر اول دترمینان را حساب می‌کنیم:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} + b(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

پاسخ تشریحی:

فرض کنید ماتریسی که با افزودن ۲ واحد به درایه واقع در سطر دوم و ستون سوم ماتریس A حاصل می‌شود را B بنامیم. در این صورت، اگر دترمینان دو ماتریس را برحسب ستون سوم آن‌ها به دست آوریم. داریم:

$$\begin{aligned} |B| &= |A| + 2 \Rightarrow \begin{vmatrix} a+2 & b & c \\ 2 & b+2 & c+2 \\ a & b & c+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+2 & b & c \\ 2 & b+2 & c \\ a & b & c+1 \end{vmatrix} + 2 \\ &\Rightarrow c \begin{vmatrix} 2 & b+2 \\ a & b \end{vmatrix} - (c+2) \begin{vmatrix} a+2 & b \\ a & b \end{vmatrix} + (c+1) \begin{vmatrix} a+2 & b \\ 2 & b+2 \end{vmatrix} \\ &= c \begin{vmatrix} 2 & b+2 \\ a & b \end{vmatrix} - c \begin{vmatrix} a+2 & b \\ a & b \end{vmatrix} + (c+1) \begin{vmatrix} a+2 & b \\ 2 & b+2 \end{vmatrix} + 2 \\ &\Rightarrow -2 \begin{vmatrix} a+2 & b \\ a & b \end{vmatrix} = 2 \Rightarrow -2(ab + 2b - ab) = 2 \Rightarrow -2b = 2 \Rightarrow b = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، رابطه به مقدار a بستگی ندارد.

گروه آموزشی ماز

۲۸- نقاط $A(a, -2)$ و $B(6-a, 4)$ دو سر قطری از دایره به معادله $x^2 + y^2 + mx + ny - 15 = 0$ هستند. مقدار مثبت a کدام است؟

۴ (۴)

۵ (۳)

۶ (۲)

۷ (۱)

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۲۰۲)

پاسخ: گزینه ۱

معادله گسترده دایره:

در معادله گسترده دایره به فرم $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ برای به دست آوردن شعاع و مرکز دایره خواهیم داشت:

$$O = \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2} \right) \text{ مرکز دایره}$$

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} \text{ شعاع دایره}$$

توجه! برای به دست آوردن شعاع و مرکز حواستان باشد که معادله گسترده به فرم بالا باشد (یعنی ضریب x^2 و y^2 برابر ۱ باشد).

نکته:

$$M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right)$$

برای به دست آوردن مختصات وسط پاره خط AB باید از رابطه مقابل استفاده کنیم:

پاسخ تشریحی:

نقاط $A(a, -2)$ و $B(6-a, 4)$ دو سر قطری از دایره هستند، پس نقطه وسط آن‌ها مرکز دایره است: $W = \frac{A+B}{2} = (3, 1)$

از طرفی، با توجه به معادله گسترده دایره داریم:

$$O = \left(-\frac{m}{2}, -\frac{n}{2} \right) = (3, 1) \Rightarrow \begin{cases} m = -6 \\ n = -2 \end{cases}$$

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{(-6)^2 + (-2)^2 - 4(-15)} = \frac{1}{2} \sqrt{100} = 5$$

طول قطر AB، دو برابر شعاع دایره است، پس داریم:

$$AB = 2R \Rightarrow \sqrt{(6-a-a)^2 + (4+2)^2} = 10 \Rightarrow \sqrt{(6-2a)^2 + 6^2} = 10$$

$$\Rightarrow (6-2a)^2 = 100 - 36 = 64 \Rightarrow \begin{cases} 6-2a = 8 \Rightarrow a = -1 \\ 6-2a = -8 \Rightarrow a = 7 \end{cases}$$

گروه آموزشی ماز

۲۹- کانون یک سهمی که دهانه آن رو به بالا باز می‌شود، نقطه $F(-1, 1)$ است و این سهمی از نقطه $M(2, 5)$ می‌گذرد. عرض نقطه تقاطع این سهمی با محور y ها کدام است؟

۲ (۴)

$\frac{3}{2}$ (۳)

۱ (۲)

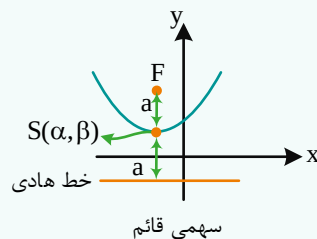
$\frac{1}{2}$ (۱)

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۴۰۲)

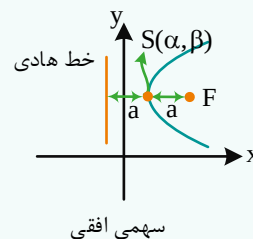
پاسخ: گزینه ۲

سهمی در یک نگاه:

۱) اگر $S(\alpha, \beta)$ مختصات رأس سهمی باشد، آن‌گاه معادله سهمی به صورت زیر است:



$$(x - \alpha)^2 = 4a(y - \beta)$$



$$(y - \beta)^2 = 4a(x - \alpha)$$

a فاصله رأس سهمی تا کانون و خط هادی است که به آن پارامتر سهمی می‌گویند.

توجه! a عددی مثبت است، اگر سهمی موردنظر، رو به پایین (برای سهمی قائم) و یا رو به سمت چپ (برای سهمی‌های افقی) بوده، آن‌گاه در معادله‌های سهمی، به جای a قرار می‌دهیم $-a$.

۲) سهمی مکان هندسی نقاطی است که فاصله آن‌ها از نقطه‌ای به نام کانون برابر است با فاصله‌شان از خطی به نام خط هادی، پس تمام نقاط روی سهمی فاصله یکسان از کانون و خط هادی دارند.

۳) فاصله خط هادی تا کانون دو برابر فاصله کانونی یا همان $2a$ است.

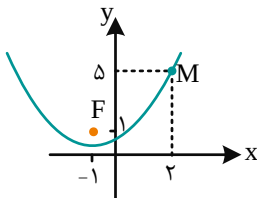
پاسخ سریعی:

فاصله هر نقطه واقع بر سهمی، از کانون و خط هادی سهمی برابر است. دهانه سهمی رو به بالا باز می‌شود، (سهمی قائم است). پس معادله خط هادی آن به صورت $y = y_0$ است و داریم:

$$MF = \sqrt{(-1-2)^2 + (1-5)^2} = 5 \Rightarrow |y_0 - 5| = 5 \Rightarrow \begin{cases} y_0 - 5 = 5 \Rightarrow y_0 = 10 \\ y_0 - 5 = -5 \Rightarrow y_0 = 0 \end{cases}$$

فاصله M از خط هادی

با توجه به اینکه دهانه سهمی رو به بالا باز می‌شود و با در نظر گرفتن موقعیت نقاط M و F ، تنها خط $y = 0$ (محور x ها) می‌تواند خط هادی این سهمی باشد.



$$2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

فاصله کانون تا خط هادی یک واحد است که دو برابر فاصله کانونی سهمی است. بنابراین داریم:

اگر از F به اندازه a یعنی $\frac{1}{2}$ پایین بیاییم به نقطه $A(-1, \frac{1}{2})$ می‌رسیم که رأس این سهمی است بنابراین معادله آن به صورت زیر است:

$$(x+1)^2 = 2(y - \frac{1}{2}) \xrightarrow{x=0} 1 = 2(y - \frac{1}{2}) \Rightarrow y - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 1$$

گروه آموزشی ماز

۳۰- اگر $\vec{a} = (1, 2, -m)$ و $\vec{b} = (2m, -1, 1)$ و اندازه دو بردار $\vec{a} + \vec{b}$ و $\vec{a} - \vec{b}$ برابر هم باشد، مساحت متوازی الاضلاعی که روی دو بردار $\vec{a} + \vec{b}$ و $\vec{a} - \vec{b}$ ساخته می شود، کدام است؟

۶۳ (۴)

$۶۳\sqrt{۲}$ (۳)

$۲۷\sqrt{۲}$ (۲)

۲۷ (۱)

(متوسط - محاسباتی - ۱۲۰۳)

پاسخ: گزینه ۳

بردارهای $\vec{a} + \vec{b}$ و $\vec{a} - \vec{b}$:

اگر یک متوازی الاضلاع توسط بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ساخته شود، آن گاه $\vec{a} + \vec{b}$ و $\vec{a} - \vec{b}$ قطرهای متوازی الاضلاع هستند، اگر $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ ، یعنی اندازه های دو بردار $\vec{a} + \vec{b}$ و $\vec{a} - \vec{b}$ برابر باشند، $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مستطیل می سازند و این دو بردار بر هم عمودند.

حاصل ضرب داخلی دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$:

دو حالت زیر را خواهیم داشت:

(۱) اگر اندازه و زاویه بین دو بردار را داشته باشیم از رابطه زیر استفاده می کنیم:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

نکته:

- اگر دو بردار a و b بر هم عمود باشند، آن گاه حاصل ضرب داخلی آن ها برابر صفر است.

- اندازه بردار $a(x_1, y_1, z_1)$ به صورت $\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$ به دست می آید.

(۲) اگر دو بردار به صورت $a = (x_1, y_1, z_1)$ و $b = (x_2, y_2, z_2)$ داشته باشیم:

$$a \cdot b = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

نکاتی در مورد ضرب خارجی:

(۱) اندازه ضرب خارجی دو بردار a و b به صورت زیر به دست می آید:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \alpha$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} \quad (۲)$$

(۳) ضرب خارجی هر بردار در خودش برابر صفر است.

(۴) اگر یک متوازی الاضلاع توسط دو بردار ساخته شود، مساحت متوازی الاضلاع برابر است با: اندازه ضرب خارجی آن دو بردار.

پاسخ تشریحی:

بردارهای $\vec{a} + \vec{b}$ و $\vec{a} - \vec{b}$ ، قطرهای متوازی الاضلاعی هستند که بر روی دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ساخته می شود. چون $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ ، پس این متوازی الاضلاع دارای قطرهای برابر بوده و در نتیجه یک مستطیل است. پس بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بر هم عمودند و داریم:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow 2m - 2 - m = 0 \Rightarrow m = 2 \Rightarrow \begin{cases} \vec{a} = (1, 2, -2) \\ \vec{b} = (4, -1, 1) \end{cases}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{1 + 4 + 4} = \sqrt{9} = 3$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{16 + 1 + 1} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

مساحت متوازی الاضلاع ساخته شده روی دو بردار $\vec{a} + \vec{b}$ و $\vec{a} - \vec{b}$ برابر است با:

$$S = |(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b})| = |\underbrace{\vec{a} \times \vec{a}}_0 - \vec{a} \times \vec{b} + \underbrace{\vec{a} \times \vec{b}}_0 - \vec{b} \times \vec{b}|$$

$$= \sqrt{|\vec{b} \times \vec{a}|} = \sqrt{|\vec{b}| |\vec{a}| \sin 90^\circ} = \sqrt{3 \times 3\sqrt{2} \times 3 \times 1} = 6\sqrt{2}$$

گروه آموزشی ماز

۳۱- باقی مانده تقسیم اعداد a و $3a$ بر عدد طبیعی b به ترتیب ۱۷ و ۹ شده است. چند مقدار برای b وجود دارد؟
 ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۲۰۱)

مفهوم هم‌نهشتی و ویژگی‌های آن:

هم‌نهشتی:

اگر دو عدد a و b در تقسیم بر m که عددی طبیعی است باقی‌مانده یکسانی داشته باشند، می‌گوییم a و b با یکدیگر به پیمانه m هم‌نهشت هستند و می‌نویسیم $a \equiv b \pmod{m}$. رابطه هم‌نهشتی را به صورت زیر هم می‌توانیم بنویسیم:

$$a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow m \mid a - b \text{ یا } a = mk + b$$

ویژگی‌های هم‌نهشتی:

(۱) هر عدد با خودش هم‌نهشت است. $a \equiv a \pmod{m}$

(۲) هم‌نهشتی دارای خاصیت تعدی است. $\begin{cases} a \equiv b \pmod{m} \\ b \equiv c \pmod{m} \end{cases} \Rightarrow a \equiv c \pmod{m}$

(۳) دو طرف هم‌نهشتی را می‌توانیم با هر عددی جمع یا تفریق کنیم. $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a \pm c \equiv b \pm c \pmod{m}$

(۴) دو طرف هم‌نهشتی را می‌توانیم در هر عددی ضرب کنیم. $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow ac \equiv bc \pmod{m}$

(۵) دو طرف هم‌نهشتی را می‌توانیم به توان عدد طبیعی n برسانیم. $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a^n \equiv b^n \pmod{m}$

(۶) در هر هم‌نهشتی می‌توانیم مضارب مختلف پیمانه را به دو طرف اضافه و یا از آن‌ها کم کنیم. هدف از این کار بزرگ کردن و یا کوچک کردن اعداد دو طرف است.

$$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a \pm mq \equiv b \pm mq \pmod{m}$$

(۷) طرفین دو هم‌نهشتی با پیمانه‌های یکسان را می‌توانیم با هم جمع و تفریق و یا در هم ضرب کنیم.

$$\begin{cases} a \equiv b \pmod{m} \\ c \equiv d \pmod{m} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \pm c \equiv b \pm d \pmod{m} \\ ac \equiv bd \pmod{m} \end{cases}$$

(۸) در هر هم‌نهشتی می‌توانیم به جای پیمانه، یکی از مقسوم‌علیه‌های آن را قرار دهیم.

$$a \equiv b \pmod{m} \xrightarrow{n \mid m} a \equiv b \pmod{n}$$

(۹) اگر دو طرف هم‌نهشتی بر a بخش‌پذیر باشند، دو طرف را می‌توانیم بر a تقسیم کنیم، با این شرط که پیمانه را نیز باید بر $d = (a, m)$ که همان ب.م.م a و m است

$$ax \equiv ay \pmod{m} \xrightarrow[\substack{\div a \\ (a, m) = d}]{\frac{m}{d}} x \equiv y \pmod{\frac{m}{d}}$$

تقسیم کنیم.

(۱۰) اگر دو هم‌نهشتی دارای طرفین یکسان و پیمانه‌های متفاوت باشند به صورت روبه‌رو می‌توانیم آن‌ها را به یک هم‌نهشتی تبدیل کنیم:

$$\begin{cases} a \equiv b \pmod{m} \\ a \equiv b \pmod{n} \end{cases} \Rightarrow a \equiv b \pmod{[m, n]}$$

پاسخ شریعی:

با توجه به صورت سوال، a و $3a$ به ترتیب به پیمانه b با ۱۷ و ۹ هم‌نهشت هستند:

$$a \equiv 17 \pmod{b}$$

$$3a \equiv 9 \pmod{b}$$

طرفین هم‌نهشتی $a \equiv 17$ را در ۳ ضرب می‌کنیم تا به $3a \equiv 51$ برسیم و سپس از خاصیت تعدی استفاده می‌کنیم:

$$\left. \begin{array}{l} 3a \equiv 51 \\ 3a \equiv 9 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{تعدی}} \begin{array}{l} b \\ 51 \equiv 9 \end{array}$$

طبق مفهوم هم‌نهشتی داریم:

$$51 \equiv 9 \Rightarrow b | 51 - 9 \Rightarrow b | 42 \xrightarrow{b \text{ طبیعی است}} b = \{1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42\}$$

می‌دانیم که باقی‌مانده همیشه باید از مقسوم علیه کوچکتر باشد، پس $b > 17$ ، در نتیجه فقط $b = 21$ و $b = 42$ قابل قبول است، در نتیجه دو مقدار برای b داریم.

گروه آموزشی ماز

۳۲- رقم یکان عدد $(1! + 2! + 3! + \dots + 1403!)$ کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

(سخت - مفهومی / محاسباتی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۲

به دست آوردن رقم یکان عدد a^m :

رقم یکان هر عدد برابر است با باقی‌مانده تقسیم آن عدد بر ۱۰. حال برای به دست آوردن رقم یکان a^m ، داریم:

(۱) ابتدا عدد a را به پیمانه ۱۰ کوچک می‌کنیم و عدد کوچک شده را به جای a قرار می‌دهیم.

(۲) به جای m ، باقی‌مانده آن بر ۴ را قرار می‌دهیم. (اگر باقی‌مانده برابر صفر شد، همان ۴ را قرار می‌دهیم).

پاسخ تشریحی:

توجه کنید که از ۵! به بعد تمام اعداد بر ۱۰ بخش‌پذیرند. پس باقی‌مانده مجموع آن‌ها در تقسیم بر ۱۰ برابر صفر است. بر همین اساس، پایه را در هم‌نهشتی به پیمانه ۱۰ کوچک می‌کنیم:

$$1! + 2! + 3! + 4! + 5! + \dots + 1403! \equiv 1 + 2 + 6 + 24 + 0 \equiv 33 \equiv 30 + 3 \equiv 3 \pmod{10}$$

باقی‌مانده تقسیم 2024 بر ۴ برابر صفر است، پس طبق درسنامه به جای عدد صورت سوال، رقم یکان عدد 3^4 را پیدا می‌کنیم:

$$3^4 = 81 \xrightarrow{\text{رقم یکان}} 1$$

گروه آموزشی ماز

۳۳- در یک گراف ناهمبند با حداقل رأس، اگر مجموعه همسایگی باز هر رأس شامل ۵ عضو باشد، تعداد دورهای به طول ۵ کدام است؟

۱۴۴ (۴)

۱۴۰ (۳)

۱۲۲ (۲)

۱۲۰ (۱)

(سخت - مفهومی / محاسباتی - ۱۲۰۲)

پاسخ: گزینه ۴

مجموعه همسایگی یک رأس:

مجموعه همسایگی باز یک رأس: به مجموعه رئوسی که به یک رأس وصل هستند، مجموعه همسایگی باز آن رأس گفته می‌شود.

مجموعه همسایگی بسته یک رأس: اگر به مجموعه همسایگی باز یک رأس، خود آن رأس را اضافه کنیم، مجموعه به دست آمده، مجموعه همسایگی بسته یک رأس می‌باشد.

گراف‌های همبند و ناهمبند:

اگر گراف فقط دارای یک بخش باشد (بین تمام رئوس حداقل یک مسیر وجود داشته باشد)، همبند است و در غیر این صورت، ناهمبند می‌شود.

نکته:

در گراف کامل P رأسی، تعداد دور به طول m از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\binom{P}{m} \times \frac{(m-1)!}{2}$$

پاسخ تشریحی:

مجموعه همسایگی باز هر رأس دارای ۵ عضو است، پس درجه هر رأس ۵ می‌باشد، در نتیجه با یک گراف ۵-منتظم روبه‌رو هستیم. توجه کنید که گراف ۵-منتظم با حداقل تعداد رأس یک گراف کامل ۶ رأسی است و با توجه به ناهمبند بودن گراف مذکور در نتیجه گرافمان از دو گراف کامل ۶ رأسی تشکیل شده است.

حال با توجه به فرمول آورده شده در نکته بالا، تعداد دورهای به طول ۵ در گراف کامل ۶ رأسی را به دست می آوریم:

$$\binom{6}{5} \times \frac{(5-1)!}{2} = 6 \times \frac{24}{2} = 72$$

$$2 \times 72 = 144$$

چون دو گراف کامل ۶ رأسی داریم، پس جواب برابر می شود با:

گروه آموزشی ماز

۳۴- تعداد جواب های صحیح و نامنفی نامعادله $x_1^4 + x_2 + x_3 < 7$ کدام است؟

۵۰ (۴)

۴۹ (۳)

۴۲ (۲)

۳۶ (۱)

(سخت - مفهومی / محاسباتی - ۱۲۰۳)

پاسخ: گزینه ۳

تعداد جواب های صحیح و نامنفی نامعادلات چند مجهولی:

برای پیدا کردن تعداد جواب های نامعادله $x_1 + x_2 + \dots + x_k \leq n$ ، متغیری صحیح و نامنفی مانند t را به سمت چپ نامعادله اضافه می کنیم تا به معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_k + t = n$ برسیم و سپس تعداد جواب های صحیح و نامنفی این معادله را حساب می کنیم.

توجه! اگر در نامعادله به جای $x_1 + x_2 + \dots + x_k \leq n$ ، $x_1 + x_2 + \dots + x_k < n$ داشته باشیم، آن گاه معادله به شکل زیر می شود:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k + t = n - 1$$

پاسخ شریعی:

ابتدا متغیر x_4 را به سمت چپ نامساوی اضافه می کنیم تا به معادله زیر برسیم:

$$x_1^4 + x_2 + x_3 + x_4 = 6$$

حال به جای x_1 ، مقادیر ممکن را قرار می دهیم:

$$x_1 = 0 \Rightarrow x_2 + x_3 + x_4 = 6 \Rightarrow \text{تعداد جواب ها} = \binom{6+3-1}{3-1} = \binom{8}{2} = \frac{8 \times 7}{2} = 28$$

$$x_1 = 1 \Rightarrow x_2 + x_3 + x_4 = 5 \Rightarrow \text{تعداد جواب ها} = \binom{5+3-1}{3-1} = \binom{7}{2} = \frac{7 \times 6}{2} = 21$$

غرق $x_1 = 2$

پس $28 + 21 = 49$ جواب صحیح نامنفی داریم.

گروه آموزشی ماز

۳۵- گراف C_5 چند مجموعه احاطه گر دارد؟

۲۱ (۴)

۱۹ (۳)

۱۸ (۲)

۱۱ (۱)

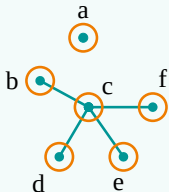
(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۲۰۲)

پاسخ: گزینه ۴

مجموعه احاطه گر:

به هر زیرمجموعه از مجموعه رئوس یک گراف مجموعه احاطه گر گفته می شود، هرگاه هر رأس از گراف یا در این مجموعه باشد و یا با یکی از رأس های موجود در این مجموعه مجاور باشد.

به عنوان مثال، مجموعه $\{c, a\}$ برای گراف زیر احاطه گر است چرا که رأس c به تمام رئوس به جز a وصل است و رأس a به صورت جداگانه در این مجموعه آمده است.



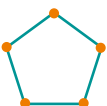
توجه! تعداد مجموعه های احاطه گر، بسته به نوع گراف متفاوت است.

نکته:

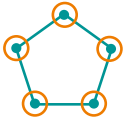
به گراف ۲-منتظم n رأسی گراف C_n گفته می شود.

پاسخ شریعی:

با توجه به نکته گفته شده گراف C_5 به صورت مقابل است:

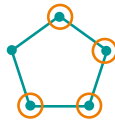


در این گراف مجموعه احاطه گر حداکثر می تواند ۵ عضو داشته باشد (هر پنج عضو خودشان را احاطه می کنند) پس به تعداد $\binom{5}{5}$ مجموعه احاطه گر ۵ عضوی داریم.

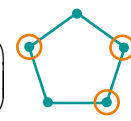


به همین ترتیب:

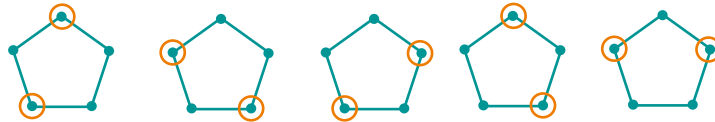
تعداد مجموعه های احاطه گر ۴ عضوی $= \binom{5}{4}$



تعداد مجموعه های احاطه گر ۳ عضوی $= \binom{5}{3}$



دقت کنید که برای مجموعه های احاطه گر ۵، ۴، ۳ عضوی، این که کدام رأس در مجموعه احاطه گر باشد، اهمیتی نداشت، اما اگر بخواهیم مجموعه احاطه گرمان دو عضوی باشد، این دو عضو نباید پشت سر هم قرار بگیرند، به عبارتی رئوس باید یکی در میان باشد:



پس پنج مجموعه احاطه گر دو عضوی داریم، گراف C_n مجموعه احاطه گر تک عضوی ندارد، پس پاسخ سوال برابر است با:

$$\binom{5}{5} + \binom{5}{4} + \binom{5}{3} + 5 = 1 + 5 + 10 + 5 = 21$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 $\binom{5}{1} = 5$ $\binom{5}{2} = \frac{5 \times 4}{2}$

گروه آموزشی ماز

۳۶- در جامعه ای انحراف معیار برابر ۴۰ است. حداقل تعداد اعضای نمونه چقدر باشد تا انحراف معیار برآورد میانگین نمونه ای کمتر از ۲/۵ باشد؟

۲۵۹ (۴)

۲۵۸ (۳)

۲۵۷ (۲)

۲۵۶ (۱)

(آسان - محاسباتی - ۱۱۰۴)

پاسخ: گزینه ۲

انحراف معیار برآورد میانگین:

از تقسیم انحراف معیار جامعه بر جذر اندازه نمونه، انحراف معیار برآورد میانگین به دست می آید:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

پاسخ تشریحی:

با توجه به فرمول و اطلاعات سوال داریم:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 2/5 > \frac{40}{\sqrt{n}} \xrightarrow[\sqrt{n} > 0]{\text{دو طرف ضرب در } \sqrt{n}} 2/5 \sqrt{n} > 40 \xrightarrow{+2/5} \sqrt{n} > 16 \xrightarrow[\text{دو طرف به توان ۲}]{+2/5} n > 256$$

پس حداقل تعداد n برابر ۲۵۷ است.

گروه آموزشی ماز

۳۷- ضریب تغییرات داده های آماری زیر کدام است؟

x_i	-۱۶	-۴	-۲	۰	۲	۴
f_i	۷	۹	۱۷	۱۱	۶	

۰/۱۵ (۱)

۰/۲ (۲)

۰/۲۲ (۳)

۰/۲۵ (۴)

(متوسط - محاسباتی - ۱۱۰۳)

پاسخ: گزینه ۱

میانگین داده ها:

اگر n داده داشته باشیم، میانگین از طریق فرمول زیر به دست می آید:

ضرب هر داده در فراوانی خودش

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{n}$$

$\uparrow$
 تعداد کل داده ها

به عبارت دیگر میانگین برابر است با تقسیم مجموع داده ها بر تعدادشان.

نکته:

هر تغییری که بر روی داده‌ها اعمال کنیم، روی میانگین هم اعمال می‌شود. مثلاً اگر داده‌ها را دو برابر کنیم و سپس ۳ واحد از آن‌ها کم کنیم، میانگین آن‌ها هم $2\bar{x} - 3$ خواهد شد.

واریانس:

برای به دست آوردن واریانس فرمول زیر را داریم. برای اینکه این فرمول بهتر در ذهنتان بماند، آن را به صورت فارسی حفظ کنید که عبارت است از مجموع مربعات اختلاف هر داده با میانگین تقسیم بر تعداد داده‌ها:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

انحراف معیار:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}} \quad \text{جذر واریانس برابر است با انحراف معیار:}$$

نکته:

جمع و تفریق داده‌ها تاثیری در انحراف معیار ندارد، اما اگر داده‌ها را در a ضرب کنیم و یا بر a تقسیم کنیم به ترتیب انحراف معیار داده‌ها برابر می‌شود با σ یا $\frac{1}{|a|}\sigma$

ضریب تغییرات:

حاصل تقسیم انحراف معیار بر میانگین برابر است با ضریب تغییرات داده‌ها که آن را با نماد CV نشان می‌دهیم: $CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$

پاسخ تشریحی:

ابتدا در نظر نمی‌گیریم که ۱۶ واحد از داده‌ها کم شده است و میانگین و انحراف معیار را در همین حالت محاسبه می‌کنیم:

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{n} = \frac{7(-4) + 9(-2) + 17(0) + 11(2) + 6(4)}{7+9+17+11+6} \Rightarrow \bar{x} = \frac{-28-18+0+22+24}{50} \Rightarrow \bar{x} = 0$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{n}} \xrightarrow{\bar{x}=0} \sigma = \sqrt{\frac{7(-4)^2 + 9(-2)^2 + 17(0)^2 + 11(2)^2 + 6(4)^2}{50}}$$

$$\Rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{112+36+0+44+96}{50}} \Rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{288}{50}} = \sqrt{\frac{144}{25}} = \frac{12}{5}$$

حال به سراغ محاسبه ضریب تغییرات می‌رویم، دقت کنید که کاهش ۱۶ واحد از داده‌ها تغییری در انحراف معیار ایجاد نمی‌کند اما چون از تمام داده‌ها ۱۶ کم شده است، پس از میانگین هم ۱۶ تا کم شده است. پس میانگین داده‌های اصلی برابر $0+16$ بوده است، پس:

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}_{\text{قبلی}}} = \frac{\frac{12}{5}}{0+16} = \frac{\frac{12}{5}}{16} = \frac{3}{20} = 0.15$$

گروه آموزشی ماز

۳۸- سه سکه را پرتاب می‌کنیم. اگر در بین آن‌ها پشت ظاهر شد دو تاس پرتاب می‌کنیم و اگر هیچ کدام پشت ظاهر نشود سکه‌ای دیگر می‌اندازیم. احتمال آن که بر روی دو تاس اعداد زوج ظاهر شود، چقدر است؟

$$\frac{1}{32} (4)$$

$$\frac{7}{16} (3)$$

$$\frac{7}{32} (2)$$

$$\frac{1}{16} (1)$$

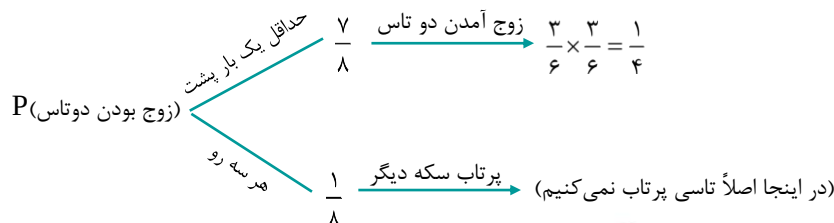
(متوسط - محاسباتی - ۱۱۰۲)

پاسخ: گزینه ۲

نکته:

در سوالات احتمال، هرگاه در سوال حالت‌های مختلف و پشت سر هم داشتیم، بهترین کار رسم نمودار درختی و جمع احتمالات هر شاخه است. مانند همین سوال:

پاسخ تشریحی:



احتمال‌های هر شاخه را در هم ضرب می‌کنیم و سپس آن‌ها را با هم جمع می‌کنیم تا به خواسته سوال برسیم:

$$\frac{7}{8} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \times 0 = \frac{7}{32}$$

پس احتمال زوج آمدن دو تاس برابر $\frac{7}{32}$ است.

گروه آموزشی ماز

۳۹- فضای نمونه‌ای شامل ۴ برآمد $\{a, b, c, d\}$ است. $P(\{b, c\}) = \frac{1}{3}$ و $P(\{b, d\}) = \frac{2}{3}$ می‌باشد. اگر دو پیشامد $\{b, c\}, \{b, d\}$ مستقل باشند، مقدار $P\{d\}$ چند برابر $P\{a\}$ است؟

$$\frac{1}{2} \quad (4)$$

$$2 \quad (3)$$

$$\frac{1}{3} \quad (2)$$

$$\frac{1}{6} \quad (1)$$

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۲)

پاسخ: گزینه ۳

پیشامدهای مستقل:

هرگاه وقوع یک پیشامد بر وقوع دیگری تاثیری نداشته باشد، به آن پیشامد مستقل می‌گوییم. هرگاه دو پیشامد مستقل باشند، آن‌گاه:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

پاسخ شریعی:

دقت کنید که $P(\{b, d\}) \cap P(\{b, c\}) = P(\{b\})$ ، حال از آن‌جا که $P\{b, c\}$ و $P\{b, d\}$ مستقل از هم هستند. (با توجه به مطلبی که در درسنامه آمده است) داریم:

$$P(\{b, c\}) \cap P(\{b, d\}) = P(\{b, c\}) \times P(\{b, d\}) \Rightarrow P(\{b\}) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

حال برای پیدا کردن $P(\{d\})$ و $P(\{c\})$ داریم:

$$P(\{b, d\}) = P(\{b\}) + P(\{d\}) \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{1}{3} + P(\{d\}) \Rightarrow P(\{d\}) = \frac{1}{3}$$

$$P(\{b, c\}) = P(\{b\}) + P(\{c\}) \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + P(\{c\}) \Rightarrow P(\{c\}) = \frac{1}{6}$$

به سراغ پیدا کردن $P(\{a\})$ می‌رویم:

$$P(\{a, b, c, d\}) = P(\{a\}) + P(\{b\}) + P(\{c\}) + P(\{d\})$$

$$\Rightarrow P(\{a\}) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

بنابراین خواسته سوال برابر است با:

$$\frac{P(\{d\})}{P(\{a\})} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{6}} = 2$$

گروه آموزشی ماز

۴۰- اگر $A = \{\{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$ و $B = \{\{1\}, \{1, 2\}\}$ باشند، تعداد زیرمجموعه‌های سره غیر تهی $A \cap B'$ کدام است؟

$$15 \quad (4)$$

$$14 \quad (3)$$

$$6 \quad (2)$$

$$7 \quad (1)$$

(متوسط - محاسباتی - ۱۱۰۱)

پاسخ: گزینه ۳

تعداد زیرمجموعه‌های محض یا سره:

زیرمجموعه‌های محض یا سره یک مجموعه عبارتند از تمام زیرمجموعه‌های یک مجموعه به جز خودش، پس تعدادشان برابر است با: $2^n - 1$



نکته:

 $A \cap B'$ همان $A - B$ است.ابتدا $A \cap B'$ را به صورت $A - B$ می نویسیم و سپس برای به دست آوردن حاصل، عضوهای مشترک را از A حذف می کنیم:

$$A \cap B' = A - B = \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}\}$$

مجموعه $A - B$ دارای ۴ عضو است. حالا با توجه به درسنامه، تعداد زیرمجموعه های سره غیر تهی را پیدا می کنیم:

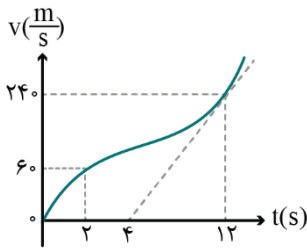
$$1 - 1 = 2^n - 1 \Rightarrow \text{تعداد زیرمجموعه های سره غیر تهی} = 2^n - 1$$

$$\xrightarrow{n=4} \text{تعداد زیرمجموعه های سره غیر تهی} = 2^4 - 1 = 15$$

گروه آموزشی ماز



۴۱- نمودار سرعت - زمان متحرکی مطابق شکل است. اگر شتاب متحرک در لحظه $t = ۱۲s$ برابر شتاب متوسط متحرک در بازه $t_1 = ۲s$ تا $t_2 = ۱۴s$ باشد، شتاب متوسط در ۲ ثانیه هفتم، چند متر بر مربع ثانیه بیشتر از شتاب متوسط در ۲ ثانیه اول است؟



- (۱) ۳۰
(۲) ۶۰
(۳) ۹۰
(۴) ۱۲۰

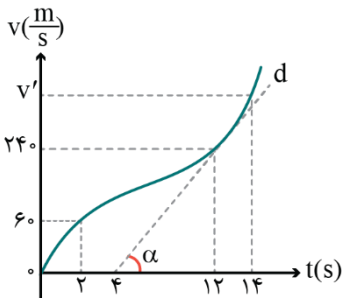
(متوسط - نموداری - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۲

یادآوری:

شیب خط مماس بر نمودار سرعت - زمان در هر لحظه، برابر شتاب متحرک در آن لحظه است.

گام اول:



شتاب متحرک در لحظه $t = ۱۲s$ برابر شیب خط d است.

$$a = \tan \alpha = \frac{240 - 0}{12 - 4} = 30 \frac{m}{s^2}$$

گام دوم:

طبق صورت سؤال، شتاب متحرک در لحظه $t = ۱۲s$ برابر شتاب متوسط متحرک از $t_1 = ۲s$ تا $t_2 = ۱۴s$ است. بنابراین می توان نوشت:

$$a = a_{av} \rightarrow 30 = \frac{v' - 60}{14 - 2} \rightarrow v' = 420 \frac{m}{s}$$

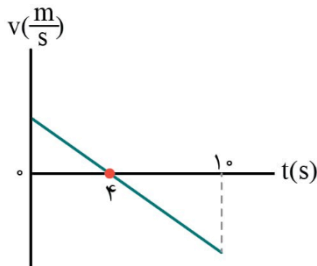
گام سوم:

حال شتاب متوسط در بازه های ۲ ثانیه اول و ۲ ثانیه هفتم حرکت برابر است با:

$$\begin{cases} a_{av_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{60 - 0}{2 - 0} = 30 \frac{m}{s^2} \\ a_{av_2} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{420 - 240}{14 - 12} = 90 \frac{m}{s^2} \end{cases} \rightarrow a_{av_2} - a_{av_1} = 60 \frac{m}{s^2}$$

گروه آموزشی ماز

۴۲- نمودار سرعت - زمان متحرکی که روی محور x حرکت می کند مطابق شکل است. اگر متحرک در ۱۰ ثانیه ابتدایی حرکت ۲۰ متر در خلاف جهت محور x جابه جا شود، تندی متوسط متحرک در بازه زمانی که حرکت آن تندشونده است، چند متر بر مربع ثانیه می باشد؟



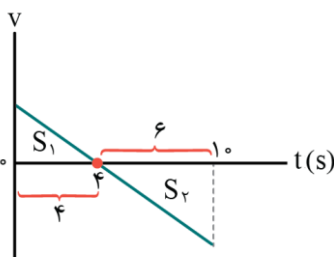
- (۱) ۴
(۲) ۶
(۳) ۸
(۴) ۱۰

(متوسط - نموداری - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ تشریحی:

جابه جایی متحرک در ۱۰ ثانیه اول حرکت را داریم. با توجه به نمودار سرعت - زمان داریم:



$$\frac{S_2}{S_1} = \left(\frac{6}{4}\right)^2 \rightarrow \frac{S_2}{S_1} = \frac{9}{4} \rightarrow S_2 = \frac{9}{4} S_1$$

جابه جایی در ۱۰ ثانیه اول حرکت ۲۰ متر در خلاف جهت محور x است، یعنی $S_1 - S_2$ برابر $20m$ است.

$$S_1 - S_2 = -20 \rightarrow S_1 - \frac{9}{4}S_1 = -20 \rightarrow \frac{-5}{4}S_1 = -20$$

$$\rightarrow S_1 = 16m, |S_2| = \frac{9}{4} \times 16 = 36m$$

$|S_2|$ مسافتی است که متحرک تندشونده حرکت کرده است و برای محاسبهٔ تندی متوسط داریم:

$$s_{av} = \frac{|S_2|}{\Delta t} = \frac{36}{6} = 6 \frac{m}{s}$$

کنکور سراسری ریاضی خارج ۱۴۰۲

شکل زیر، نمودار سرعت - زمان متحرکی است که در مسیر مستقیم حرکت می‌کند. تندی متوسط آن در بازهٔ زمانی $t_1 = 3s$ تا $t_2 = 13s$ چند متر بر ثانیه است؟

۱) $7/9$

۲) $7/7$

۳) $8/3$

۴) $8/1$

پاسخ: گزینه ۱

ابتدا باتوجه به نمودار $v-t$ ، شیب دو خط (۱) و (۲) را به دست می‌آوریم:

$$\text{شیب} = \frac{\text{تغییر عمودی}}{\text{تغییر افقی}} \begin{cases} \text{شیب (۱)} = \frac{-16-0}{12-4} = \frac{-16}{8} = -2 \\ \text{شیب (۲)} = \frac{0-(-16)}{16-12} = \frac{16}{4} = 4 \end{cases}$$

سپس با داشتن شیب خط‌های (۱) و (۲) سرعت متحرک در لحظات t_1 و t_2 را به دست می‌آوریم:

$$\text{شیب (۱)} = -2 = \frac{0 - v_1}{4 - 3} \rightarrow v_1 = 2 \frac{m}{s}$$

$$\text{شیب (۲)} = 4 = \frac{0 - v_2}{16 - 13} \rightarrow v_2 = -12 \frac{m}{s}$$

در نهایت مسافت طی شده را به کمک مساحت محصور $v-t$ و پس از آن تندی متوسط را به دست می‌آوریم:

$$l_1 = S_1 + S_2 + S_3 = \frac{(4-3) \cdot 2}{2} + \frac{(12-4) \cdot 16}{2} + \frac{(16+12)(13-12)}{2} = 1 + 64 + 14 = 79m$$

$$s_{av} = \frac{l_1}{\Delta t} \Rightarrow s_{av} = \frac{79}{13-3} = 7.9 \frac{m}{s}$$

گروه آموزشی ماز

۴۳- مطابق شکل، خودرویی از نقطه A با شتاب ثابت $\frac{2}{3} \frac{m}{s^2}$ از حال سکون شروع به حرکت می‌کند و به نقطه B می‌رسد. اگر جابه‌جایی خودرو در ۲ ثانیه آخر حرکت ۳۴m باشد، فاصلهٔ بین دو نقطه A و B برابر چند متر است؟

۱) $180/5$

۲) $90/25$

۳) $60/25$

۴) $30/5$



(متوسط - محاسباتی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۲

گام اول:

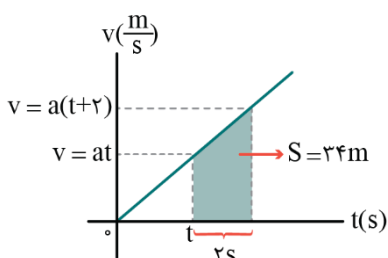
متحرک از حال سکون به حرکت درآمده است بنابراین نمودار سرعت - زمان آن مطابق شکل است.

$$\frac{at + a(t+2)}{2} \times 2 = 34$$

$$at + at + 2a = 34$$

$$2at + 2a = 34 \rightarrow 4t + 4 = 34$$

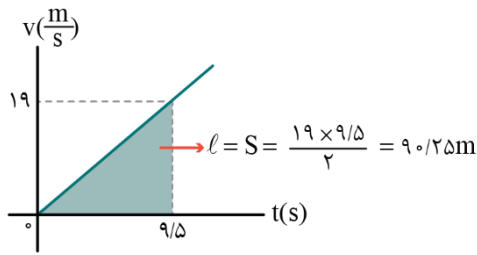
$$\rightarrow t = 7.5s$$





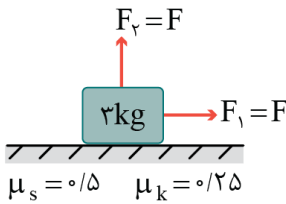
گام دوم:

حال برای محاسبه فاصله A تا B خواهیم داشت:



گروه آموزشی ماز

۴۴- در شکل زیر جسم با سرعت ثابت به سمت راست در حال حرکت است. اگر در یک لحظه، اندازه نیروی F_y ، ۳ برابر شود، بزرگی نیرویی که سطح به جسم وارد می کند، چند برابر می شود؟ ($g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$)



- (۱) $\frac{\sqrt{17}}{2}$
- (۲) $2\sqrt{17}$
- (۳) $\frac{1}{2}$
- (۴) ۲

(سخت - محاسباتی - ۱۲۰۲)

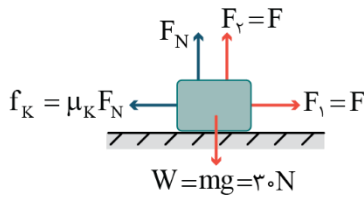
پاسخ: گزینه ۳

پاسخ تشریحی:

هر دو حالت را بررسی می کنیم:

۱

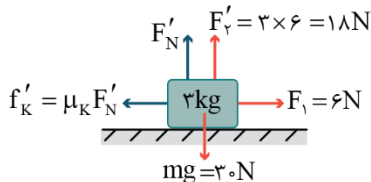
جسم با سرعت ثابت حرکت می کند.



$$\begin{aligned} \text{رابطه (۱): } F_x = ma \xrightarrow{a=0} F_x = f_k \rightarrow F = 0/25 F_N \rightarrow F_N = 4F \\ \text{رابطه (۲): } F_y = 0 \rightarrow F_y + F_N = mg \rightarrow F + F_N = 30 \\ F + F_N = 30 \cdot \frac{F_N = 4F}{\text{رابطه (۱)}} \rightarrow F + 4F = 30 \rightarrow F = 6 \text{ N و } F_N = 24 \text{ N} \end{aligned}$$

۲

طبق صورت سؤال، اندازه نیروی F_y ، ۳ برابر شده است، بنابراین می توان نوشت:



$$\begin{aligned} F_y = 0 \rightarrow F_N' + F_y' = mg \rightarrow F_N' + 18 = 30 \rightarrow F_N' = 12 \text{ N} \\ f_k' = \mu_k F_N' = 0/25 \times 12 = 3 \text{ N} \end{aligned}$$

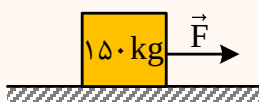
حال نیرویی که سطح به جسم در هر دو حالت وارد می کند را به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} R_1 = \sqrt{f_k'^2 + F_N'^2} = \sqrt{3^2 + 12^2} = 3\sqrt{17} \text{ N} \\ R_2 = \sqrt{f_k^2 + F_N^2} = \sqrt{6^2 + 24^2} = 6\sqrt{17} \text{ N} \end{aligned} \rightarrow \frac{R_2}{R_1} = \frac{6\sqrt{17}}{3\sqrt{17}} = 2$$

کنکور سراسری ریاضی فارغ.ا.۱۴۰۱

مطابق شکل زیر، جسمی با نیروی افقی $\vec{F}$ روی سطح افقی با شتاب ثابت $2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ به طرف راست به حرکت درمی آید. اگر نیرویی که سطح زمین به جسم وارد می کند،

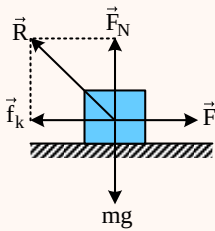
۱۶۲۵ N باشد، نیروی F چند نیوتون است؟ ($g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$)



- (۱) ۴۰۰
- (۲) ۴۲۵
- (۳) ۸۰۰
- (۴) ۹۲۵

پاسخ: گزینه ۴

از طرف زمین دو نیروی عمودی تکیه گاه و اصطکاک به جسم وارد می شود. در راستای قائم داریم:



$$(F_{\text{net}})_y = 0 \Rightarrow F_N - mg = 0 \Rightarrow F_N = mg = 150 \times 10 = 1500 \text{ N}$$

برای نیرویی که از طرف زمین به جسم وارد می شود، برابر است با:

$$R = \sqrt{F_N^2 + f_k^2}$$

$$\Rightarrow 1625 = \sqrt{1500^2 + f_k^2} \Rightarrow 1625^2 = 1500^2 + f_k^2$$

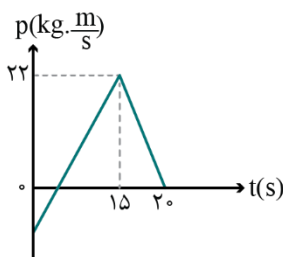
$$\Rightarrow f_k^2 = (1625 - 1500) \times (1625 + 1500) = 125 \times 3125 = 125^2 \times 5^2 \text{ N} \Rightarrow f_k = 625 \text{ N}$$

حال قانون دوم نیوتون را برای حرکت افقی جسم می نویسیم:

$$(F_{\text{net}})_x = ma_x \Rightarrow F - f_k = ma_x \Rightarrow F - 625 = 150 \times 2 \Rightarrow F = 925 \text{ N}$$

گروه آموزشی ماز

۴۵- نمودار تکانه - زمان متحرکی به جرم ۵۰۰ گرم به صورت زیر است. اگر نیروی متوسط خالص وارد بر متحرک در ۲۰ ثانیه اول برابر ۰/۴ نیوتون باشد، شتاب متوسط متحرک در ۳ ثانیه چهارم حرکت چند متر بر مربع ثانیه است؟



- (۱) ۴
(۲) ۲
(۳) ۱
(۴) ۸

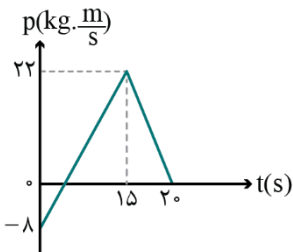
(متوسط - نموداری - ۱۳۰۲)

پاسخ: گزینه ۱

یادآوری:

آهنگ تغییرات تکانه برابر نیروی خالص وارد بر جسم است.

گام اول:



نیروی متوسط در ۲۰ ثانیه اول حرکت برابر ۰/۴ نیوتون است. بنابراین می توان نوشت:

$$F_{\text{av}} = \frac{\Delta p}{\Delta t} \rightarrow 0/4 = \frac{p' - (-8)}{20} \rightarrow p' = -8 \frac{\text{kg.m}}{\text{s}}$$

گام دوم:

نیروی متوسط در ۱۵ ثانیه اول حرکت، برابر نیروی متوسط در ۳ ثانیه چهارم حرکت (۹س < t < ۱۲س) است، بنابراین می توان نوشت:

$$F_{\text{av}} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{22 - (-8)}{15 - 0} = 2 \text{ N}$$

گام سوم:

طبق رابطه $F_{\text{net}} = ma$ ، می توان نوشت:

$$F_{\text{av}} = ma_{\text{av}} \rightarrow 2 = \frac{1}{2} a_{\text{av}} \rightarrow a_{\text{av}} = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

گروه آموزشی ماز

۴۶- ماهواره ای به جرم ۴۰۰ kg در فاصله ۱۶۰۰ کیلومتری سطح زمین قرار دارد. فاصله این ماهواره تا سطح زمین چند کیلومتر افزایش یابد تا شتاب گرانش در محل ماهواره ۳۶ درصد کاهش یابد؟ ($R_e = 6400 \text{ km}$: شعاع زمین)

(۴) ۱۰۰۰۰

(۳) ۸۰۰۰

(۲) ۲۰۰۰

(۱) ۱۶۰۰



طبق رابطه زیر، می‌توان نوشت:

$$g = \frac{GM_e}{r^2} \rightarrow \frac{g_r}{g_1} = \left(\frac{r_1}{r_r}\right)^2 \rightarrow \frac{64}{100} = \left(\frac{1600 + 6400}{h + 6400}\right)^2$$

$$\rightarrow \frac{1}{10} = \frac{100}{h + 6400} \rightarrow h + 6400 = 10000 \rightarrow h = 3600 \text{ km}$$

فاصله اولیه ماهواره از سطح زمین برابر ۱۶۰۰ km است. بنابراین ماهواره باید ۳۶۰۰ - ۱۶۰۰ = ۲۰۰۰ km دیگر از زمین فاصله بگیرد.

کنکور سراسری تجربی دی ماه ۱۴۰۰

یک تلسکوپ فضایی در ارتفاع تقریبی ۱۶۰۰ کیلومتری از سطح زمین به دور زمین می‌چرخد. شتاب گرانشی در این فاصله چند متر بر مربع ثانیه است؟

$$(R_e = 6400 \text{ km و } g = 9.8 \frac{m}{s^2})$$

(۱) ۷/۸۴ (۲) ۷/۸۲۵ (۳) ۶/۵۲ (۴) ۶/۲۷۲

پاسخ: گزینه ۴

با استفاده از رابطه زیر، شتاب گرانشی را به دست می‌آوریم:

$$g = G \frac{M}{(R+h)^2} \Rightarrow \frac{g}{g_0} = \left(\frac{R}{R+h}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{g}{9.8} = \left(\frac{6400}{6400 + 1600}\right)^2 \Rightarrow \frac{g}{9.8} = \frac{16}{25} \Rightarrow g = 6.272 \frac{m}{s^2}$$

گروه آموزشی ماز

۴۷- نوسانگر ساده‌ای بر روی پاره‌خطی به طول ۳۰ cm با دوره تناوب ۲ s از مکان دامنه مثبت خود (x = +A) در مبدأ زمان، شروع به حرکت می‌کند. چه

تعداد از موارد زیر در مورد این حرکت، نادرست است؟

الف: در حداکثر بازه زمانی که اندازه سرعت متوسط با تندی متوسط برابر است، جهت بردار تکانه یک بار تغییر می‌کند.

ب: هنگامی که برای دومین بار نوسانگر به مکان x = -۱۰ cm می‌رسد، مسافت طی شده دو برابر اندازه جابجایی می‌شود.

ج: در بازه زمانی ۰/۸۵ < t < ۱/۵۵، اندازه نیروی خالص متوسط نوسانگر، صفر است.

د: در بازه زمانی ۰/۸۵ < t < ۰/۳۵، به مدت ۰/۳۵ ثانیه، انرژی جنبشی از انرژی پتانسیل کمتر است.

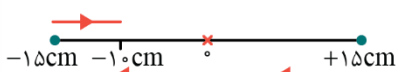
(۱) یک مورد (۲) دو مورد (۳) سه مورد (۴) چهار مورد



الف: در بازه زمانی ۰ ≤ t ≤ T که نوسانگر تغییر جهت حرکت نداده است، تندی متوسط برابر با اندازه سرعت متوسط است و در این بازه جهت سرعت و تکانه

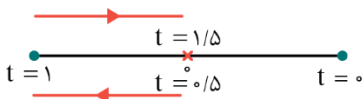
تغییری نمی‌کند. (×)

ب: با توجه به اینکه دامنه حرکت ۱۵ cm است، مطابق شکل هنگامی که برای دومین بار به مکان x = -۱۰ cm می‌رسد:



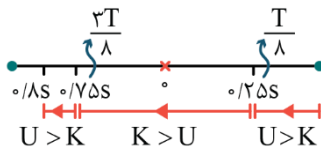
$$\begin{cases} L = 15 + 15 + 5 = 35 \text{ cm} \\ | \Delta x | = 15 - (-10) = 25 \text{ cm} \end{cases} \rightarrow L \neq 2 | \Delta x | \quad (*)$$

ج: با توجه به اینکه T = ۲ s می‌باشد، مسیر حرکت در بازه ۰/۸۵ < t < ۱/۵۵ مطابق شکل است:



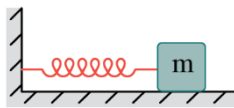
$$F_{av} = m a_{av} = m \frac{\Delta v}{\Delta t} = m \frac{(v_{max}) - (-v_{max})}{\Delta t} = \frac{2mv_{max}}{\Delta t} \rightarrow F_{av} \neq 0 \quad (*)$$

د: در فاصله‌های زمانی $\frac{T}{8}$ از دو انتهای پاره خط اندازه K و U با یکدیگر برابر است. در نتیجه در این بازه زمانی به مدت $0.25 + 0.05 = 0.3$ s حاصل $K < U$ برقرار است. (X)



گروه آموزشی ماز

۴۸- در شکل زیر، طول عادی فنر 25 cm می‌باشد و جرم m در حال حرکت نوسانی ساده با دوره تناوب T است. در طی یک تناوب کامل، کمترین و بیشترین طول فنر به ترتیب 10 cm و 40 cm است. کمترین مسافت طی شده در مدت زمان $\frac{T}{6}$ چند سانتی‌متر از بیشترین مسافت طی شده در مدت زمان دلخواه $\frac{T}{3}$ کمتر است؟



- (۱) $15(\sqrt{2}-1)$
- (۲) $15(\sqrt{3}-1)$
- (۳) $30(\sqrt{2}-1)$
- (۴) $30(\sqrt{3}-1)$

(سخت - مفهومی و محاسباتی - ۱۲۰۳)

پاسخ: گزینه ۴

نکته:

اگر در حرکت هماهنگ ساده یک سامانه جرم - فنر، کمترین و بیشترین طول فنر به ترتیب $L_{\min}$ و $L_{\max}$ باشد، آن گاه:

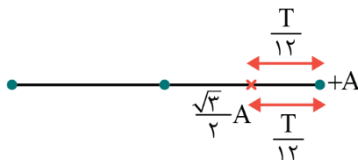
$$2A = L_{\max} - L_{\min} : \text{طول پاره خط نوسان}$$

$$A = \frac{L_{\max} - L_{\min}}{2} : \text{دامنه نوسان}$$

پاسخ شش‌پایه

طول پاره خط نوسان برابر $40 - 10 = 30\text{ cm}$ و دامنه نوسان برابر 15 cm $A = \frac{30}{2}$ است.

کمترین مسافت طی شده در یک بازه زمانی معین مانند شکل زیر هنگامی رخ می‌دهد که نوسانگر به صورت متقارن در مجاورت دامنه حرکت کند.



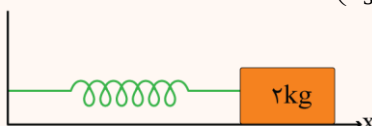
بیشترین مسافت طی شده در یک بازه زمانی معین مانند شکل زیر هنگامی رخ می‌دهد که نوسانگر به صورت متقارن در مجاورت نقطه تعادل حرکت کند.

$$\begin{aligned} & \rightarrow \begin{cases} L_{\text{کمینه}} = 2\left(A - \frac{\sqrt{3}}{2}A\right) \xrightarrow{A=15\text{ cm}} L_{\text{کمینه}} = 30\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 30 - 15\sqrt{3}\text{ cm} \\ L_{\text{بیشینه}} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}A\right) \xrightarrow{A=15\text{ cm}} L_{\text{بیشینه}} = 15\sqrt{3}\text{ cm} \end{cases} \\ & \rightarrow L_{\text{بیشینه}} - L_{\text{کمینه}} = 30(\sqrt{3}-1) \end{aligned}$$

کنکور سراسری تجربی خارج ۱۴۰۲

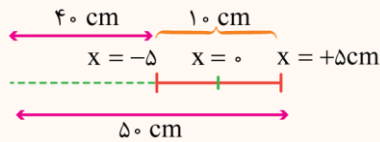
مطابق شکل، وزنه‌ای به جرم 2 kg به فنری که ثابت آن $200 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ است بسته شده و روی سطح افقی بدون اصطکاک، حرکت هماهنگ ساده انجام می‌دهد. اگر

کمترین و بیشترین طول فنر در حین نوسان به ترتیب 40 cm و 50 cm باشد، در لحظه‌ای که شتاب نوسانگر $\vec{a} = \left(2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) \vec{i}$ است، طول فنر چند سانتی‌متر است؟



- (۱) ۴۲
- (۲) ۴۳
- (۳) ۴۷
- (۴) ۴۸

پاسخ: گزینه ۲



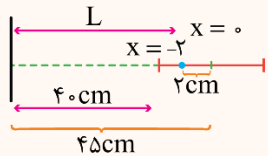
باتوجه به کمترین و بیشترین طول فنر، طول پاره‌خط نوسان و دامنه (A) را به دست می‌آوریم:

$$A = \Delta \text{ cm} \rightarrow \text{طول پاره‌خط} = 10 \text{ cm}$$

حال با داشتن شتاب نوسانگر، مکان نوسانگر را به دست می‌آوریم:

$$a = -\omega^2 x \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \omega^2 = \frac{k}{m} \rightarrow a = -\frac{k}{m} x \rightarrow \frac{a}{x} = -\frac{k}{m} \rightarrow \frac{a}{x} = -\frac{200}{2} \rightarrow x = -0.02 \text{ m} = -2 \text{ cm}$$

در نهایت با داشتن مکان نوسانگر، طول فنر را به دست می‌آوریم:



$$L = 45 - 2 = 43 \text{ cm}$$

گروه آموزشی ماز

۴۹- یک کابل مسی را تحت نیروی F' قرار داده و در آن موج عرضی تشکیل می‌دهیم. در این حالت موج ایجاد شده در مدت ۳ ثانیه طول کابل را طی می‌کند. اگر ۲۰ درصد از طول کابل را بریده و کنار بگذاریم و بقیه آن را از دستگاهی عبور دهیم تا طول آن دو برابر طول اولیه شود و سپس تحت نیروی کشش $2/5 F'$ قرار دهیم، آن گاه چند ثانیه طول می‌کشد تا موج عرضی ایجاد شده، طول کابل را طی کند؟

۲/۴ (۴)

۲ (۳)

۱/۸ (۲)

۱ (۱)

(متوسط - محاسباتی - ۱۴۰۳)

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ تشریحی:

برای محاسبه زمانی که طول می‌کشد تا موج طول یک طناب را طی کند، می‌توان از رابطه زیر استفاده کرد:

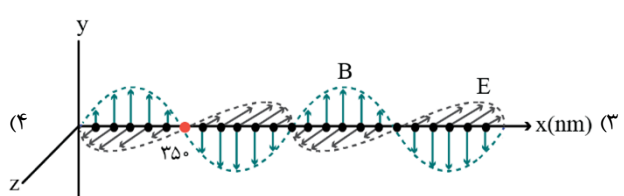
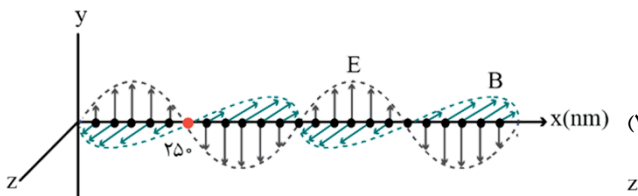
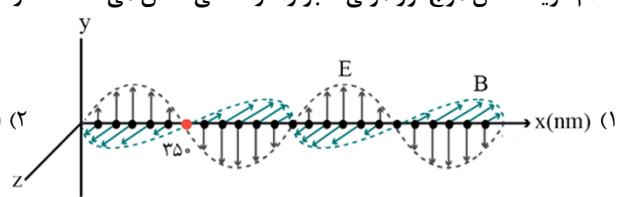
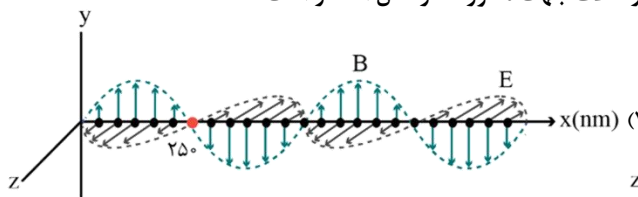
$$v = \sqrt{\frac{F.L}{m}} = \frac{L}{\Delta t} \rightarrow \Delta t = \frac{L}{v} = \sqrt{\frac{L.m}{F}}$$

دقت شود که چون در حالت جدید از ۸۰ درصد طول کابل استفاده شده است، پس جرم آن نیز ۸۰ درصد جرم اولیه است.

$$\frac{\Delta t'}{\Delta t} = \sqrt{\frac{L'}{L}} \times \sqrt{\frac{m'}{m}} \times \sqrt{\frac{F}{F'}} \rightarrow \frac{\Delta t'}{\Delta t} = \sqrt{2} \times \sqrt{\frac{4}{5}} \times \sqrt{\frac{2}{5}} \rightarrow \frac{\Delta t'}{\Delta t} = \frac{4}{5} \rightarrow \Delta t' = 2/4 \text{ s}$$

گروه آموزشی ماز

۵۰- کدام گزینه نقش موج نور مرئی سبز را در حالتی نشان می‌دهد که در خلاف جهت محور x در حال انتشار است؟



(آسان - نموداری - ۱۴۰۳)

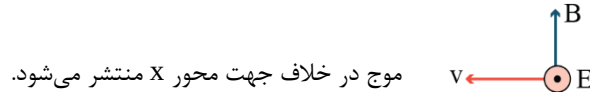
پاسخ: گزینه ۲

پاسخ تشریحی:

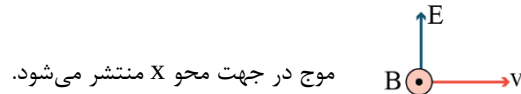
در گزینه‌های ۱ و ۳ $\lambda = 700 \text{ nm} \rightarrow \frac{\lambda}{2} = 350$ ← رنگ قرمز است.

در گزینه‌های ۲ و ۴ $\lambda = 500 \text{ nm} \rightarrow \frac{\lambda}{2} = 250$ ← رنگ سبز است.

قاعده دست راست برای گزینه ۲:

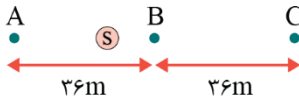


قاعده دست راست برای گزینه ۴:



گروه آموزشی ماز

۵۱- در شکل زیر اگر اختلاف تراز شدت صوتی که از بلندگوی S به گیرنده‌های A و B می‌رسد ۱۸ دسی‌بل باشد، آن‌گاه اختلاف تراز شدت صوتی که به گیرنده‌های B و C می‌رسد چند دسی‌بل است؟ ($\log 2 = 0.3$)



(۲) ۲۰
(۴) ۲۶

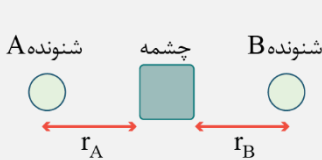
(۱) ۱۰
(۳) ۳۰

(سخت - محاسباتی - ۱۲۰۳)

پاسخ: گزینه ۲

نکته:

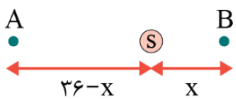
برای مقایسه تراز شدت صوت در فاصله‌های مختلف از یک چشمه صوت، می‌توان به صورت زیر عمل کرد:



$$\begin{cases} \beta_B - \beta_A = 10 \log \frac{I_B}{I_A} \\ \frac{I_B}{I_A} = \left(\frac{r_A}{r_B} \right)^2 \end{cases} \Rightarrow \beta_B - \beta_A = 10 \log \left(\frac{r_A}{r_B} \right)^2$$

$$\beta_B - \beta_A = 20 \log \frac{r_A}{r_B}$$

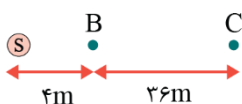
پاسخ تشریحی:



با توجه به اختلاف تراز شدت صوت برای A و B، ابتدا فاصله B تا بلندگو را به دست می‌آوریم.

$$\beta_B - \beta_A = 18 = 10 \log \left(\frac{r_A}{r_B} \right)^2 = 20 \log \left(\frac{r_A}{r_B} \right) = 20 \log \left(\frac{36-x}{x} \right) \rightarrow \frac{20}{10} \log \left(\frac{36-x}{x} \right) = \log \left(\frac{36-x}{x} \right)$$

$$\rightarrow \log \left(\frac{36-x}{x} \right) = 0.9 \rightarrow \frac{36-x}{x} = 10^{0.9} \rightarrow x = 4m$$



با مشخص شدن فاصله B تا S، اکنون اختلاف تراز شدت صوت بین B و C را محاسبه می‌کنیم.

$$\beta_B - \beta_C = 10 \log \left(\frac{r_C}{r_B} \right)^2 = 10 \log \left(\frac{4}{36} \right)^2 = 20 \log \left(\frac{1}{9} \right) = 20 \log 0.1 = -20 \text{ dB}$$

گروه آموزشی ماز

۵۲- شکل زیر جبهه‌های نوری را نشان می‌دهد که از محیط (۱) وارد محیط (۲) شده است. اگر طول موج نور در محیط (۲)، $\frac{1}{8} \mu m$ کمتر از طول موج نور در محیط (۱) باشد، انرژی فوتون‌های این پرتو در محیط (۱) چند الکترون‌ولت است؟ (تندی نور در محیط (۱) برابر $3 \times 10^8 \frac{m}{s}$ است، $h = 4 \times 10^{-15} \text{ eV.s}$)

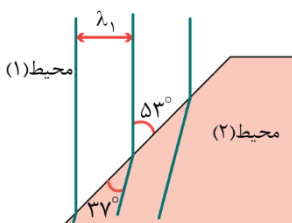
($\sin 53^\circ = 0.8$)

(۱) ۰.۵

(۲) $\frac{2}{3}$

(۳) $\frac{1}{2}$

(۴) $\frac{2}{4}$



محاسبه طول موج نور در محیط (۱):

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} \rightarrow \frac{\lambda_2 - \frac{1}{\lambda_1}}{\lambda_1} = \frac{\sin 37^\circ}{\sin 53^\circ} = \frac{10}{10} = \frac{3}{4}$$

$$\rightarrow 4\lambda_2 - \frac{1}{\lambda_1} = 3\lambda_1 \rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{3} \mu\text{m} = \frac{1}{3} \times 10^{-6} \text{ m}$$

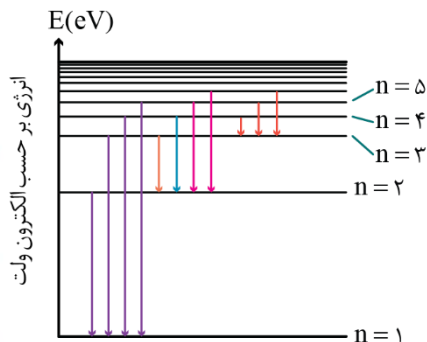
گام دوم:

انرژی فوتونهای امواج الکترومغناطیسی از رابطه زیر به دست می آید:

$$E = hf = h \frac{v_1}{\lambda_1} = 4 \times 10^{-15} \times \frac{3 \times 10^8}{\frac{1}{3} \times 10^{-6}} = 2 / 4 \text{ eV}$$

گروه آموزشی ماز

۵۳- شکل زیر ترازهای انرژی برای اتم هیدروژن را نشان می دهد که بر اساس مدل بور رسم شده است. چه تعداد از عبارتهای زیر در مورد آن صحیح است؟
($E_R = 13 / 6 \text{ eV}$)



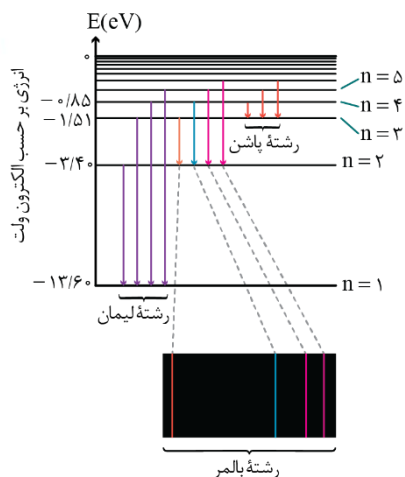
الف: در بین گذارهای نشان داده شده، فقط ۴ فوتون فرابنفش گسیل می شود.

ب: در بین گذارهای نشان داده شده، فقط ۴ فوتون مرئی گسیل می شود.

ج: انرژی فوتون گسیلی در خط دوم بالمر ($n' = 2$) برابر $2 / 55$ الکترون ولت است.

- (۱) صفر
(۲) ۱
(۳) ۲
(۴) ۳

بررسی موارد:



الف و ب: در گذارهای نشان داده شده در این سؤال، ۴ خط اول رشته لیمان نشان داده شده است که در آن ها فرابنفش گسیل می شود. همچنین ۴ خط اول رشته بالمر مشخص شده است که در آن ها نیز نور مرئی گسیل می شود.

ج: دقت کنید برای به دست آوردن انرژی ترازهای مختلف در این شکل، از رابطه $E_n = \frac{-E_R}{n^2}$ استفاده شده است.

ج: خط دوم بالمر، یعنی گذار الکترون از تراز $n = 4$ به $n' = 2$. بنابراین انرژی گسیلی در این گذار برابر است با:

$$E_n = \frac{-E_R}{n^2} \rightarrow E_4 - E_2 = -0 / 85 - (-3 / 4) = 2 / 55 \text{ eV}$$

گروه آموزشی ماز

۵۴- در یک واپاشی، هسته عنصری ۳ ذره آلفا و تعدادی ذرات β تابش کرده است. اگر بار الکتریکی هسته دختر $6 / 4 \times 10^{-19} \text{ C}$ کولن کمتر از بار الکتریکی

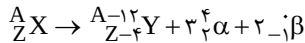
هسته مادر باشد، در این صورت تعداد نوترونهای هسته دختر تا از تعداد نوترونهای هسته مادر است. ($e = 1 / 6 \times 10^{-19} \text{ C}$)

- (۱) ۱۰، کمتر (۲) ۱۰، بیشتر (۳) ۸، کمتر (۴) ۸، بیشتر

$$\Delta q = ne \rightarrow 6/4 \times 10^{-19} = n \times 1/6 \times 10^{-19} \rightarrow n = 4$$

بنابراین عدد اتمی هسته دختر باید ۴ تا کمتر از عدد اتمی هسته مادر باشد.

حال با توجه به معادله زیر، باید در این واکنش ۲ تا β تابش شود.



$$\begin{cases} \text{تعداد نوترون‌های مادر} = A - Z \\ \text{تعداد نوترون‌های دختر} = (A - 12) - (Z - 4) = A - Z - 8 \end{cases}$$

بنابراین تعداد نوترون‌های هسته دختر، ۸ تا کمتر از تعداد نوترون‌های هسته مادر است.

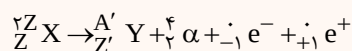
کنکور سراسری تجربی ۱۴۰۳:

اگر عدد جرمی عنصری ۲ برابر عدد اتمی آن باشد، پس از گسیل یک پرتو α و یک الکترون و یک پوزیترون، تعداد نوترون‌های هسته جدید چند تا از تعداد پروتون‌های هسته جدید بیش‌تر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) صفر

پاسخ: گزینه ۴

طبق صورت سؤال، اگر عدد اتمی هسته اولیه Z باشد، عدد جرمی آن برابر $A = 2Z$ است. معادله واپاشی به صورت زیر است:



$$\text{پایستگی عدد اتمی: } Z = Z' + 2 - 1 + 1 \Rightarrow Z' = Z - 2$$

$$\text{پایستگی عدد جرمی: } 2Z = A' + 4 \Rightarrow A' = 2Z - 4$$

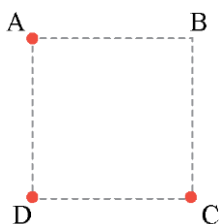
$$\Rightarrow \begin{cases} \text{تعداد پروتون‌های هسته جدید} : Z - 2 \\ \text{تعداد نوترون‌های هسته جدید} : A' - Z' = 2Z - 4 - (Z - 2) = Z - 2 \end{cases}$$

تعداد پروتون‌ها و نوترون‌های هسته جدید باهم برابرند.

درواقع با روش ساده‌تر می‌توان گفت واپاشی‌های β^- و β^+ اثر هم را خنثی می‌کنند و با گسیل یک ذره α ، تعداد پروتون‌ها و نوترون‌ها، هریک به اندازه ۲ واحد کم می‌شود و چون تعداد اولیه پروتون‌ها و نوترون‌ها برابر بوده است، تعداد آن‌ها در هسته نهایی هم برابر خواهد بود.

گروه آموزشی ماز

۵۵- مطابق شکل، سه ذره با بارهای مثبت و هم‌اندازه در رأس‌های یک مربع نشان داده شده‌اند. بزرگی میدان الکتریکی خالص در مرکز مربع، چند برابر بزرگی میدان الکتریکی خالص در رأس B است؟



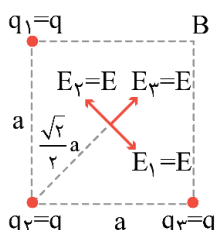
$$(1) \frac{2}{\sqrt{2}}(2\sqrt{2}-1)$$

$$(2) \frac{4}{\sqrt{2}}(2\sqrt{2}-1)$$

$$(3) \frac{2}{\sqrt{2}}(2\sqrt{2}+1)$$

$$(4) \frac{4}{\sqrt{2}}(2\sqrt{2}+1)$$

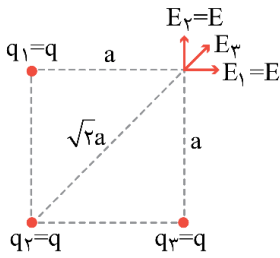
ابتدا میدان الکتریکی خالص را در مرکز مربع به دست می‌آوریم:



$$E_{\text{برآیند}} = E_3 = \frac{kq}{(\frac{\sqrt{2}a}{2})^2} = 2 \frac{kq}{a^2}$$

گام دوم:

حال برای محاسبه میدان الکتریکی خالص در نقطه B می توان نوشت:



$$E'_{\text{برایند}} = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} = \sqrt{2} \frac{kq}{a^2} + \frac{kq}{(\sqrt{2}a)^2} = \frac{kq}{a^2} \left(\sqrt{2} + \frac{1}{2} \right)$$

گام سوم:

$$\begin{aligned} \frac{E'_{\text{برایند}}}{E_{\text{برایند}}} &= \frac{\frac{kq}{a^2} \left(\sqrt{2} + \frac{1}{2} \right)}{\frac{kq}{a^2}} = \frac{\sqrt{2} + \frac{1}{2}}{1} = \frac{2\sqrt{2} + 1}{2} = \frac{2\sqrt{2} + 1}{2} \times \frac{2\sqrt{2} - 1}{2\sqrt{2} - 1} \\ &= \frac{4(2\sqrt{2} - 1)}{8 - 1} = \frac{4}{7} (2\sqrt{2} - 1) \end{aligned}$$

گروه آموزشی ماز

۵۶- ذره‌ای با بار الکتریکی $q = -5\mu\text{C}$ و جرم 5mg درون یک میدان الکتریکی یکنواخت $\frac{10^5}{\text{C}} \text{N}$ ، از حال سکون رها می‌شود. وقتی این ذره در راستای میدان به اندازه ۲۰ سانتی‌متر جابه‌جا شود، تندی حرکت ذره به چند متر بر ثانیه می‌رسد؟ (از نیروی وزن ذره و نیروهای مقاوم صرف‌نظر کنید.)

۲۰۰√۲ (۴)

۲۰۰ (۳)

۱۰۰√۲ (۲)

۱۰۰ (۱)

(متوسط - محاسباتی - ۱۱۰۱)

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ تشریحی:

با توجه به پایستگی انرژی، می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \Delta K &= -\Delta U \rightarrow \frac{1}{2} m(v^2 - v_0^2) = -(-E|q|d \cos \theta) \\ \rightarrow \frac{1}{2} \times 5 \times 10^{-6} \times (v^2 - 0) &= 10^5 \times 5 \times 10^{-6} \times 0.2 \times 1 \\ \rightarrow v^2 &= 4 \times 10^4 \rightarrow v = 200 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned}$$

گروه آموزشی ماز

۵۷- اگر اختلاف پتانسیل دو سر یک خازن ۱۰ میکروفارادی، ۲۵ درصد افزایش یابد، انرژی ذخیره شده در آن ۱۸۰ میکروژول افزایش می‌یابد. بار الکتریکی اولیه ذخیره شده در خازن چند میکروکولن بوده است؟

۳۲۰ (۴)

۱۶۰ (۳)

۸۰ (۲)

۴۰ (۱)

(متوسط - محاسباتی - ۱۱۰۱)

پاسخ: گزینه ۲

گام اول:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} CV^2 \rightarrow \frac{U_2}{U_1} = \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^2 \xrightarrow{V_2 = \frac{5}{4} V_1} \frac{U_1 + 180}{U_1} = \left(\frac{5}{4} \right)^2 = \frac{25}{16} \\ \rightarrow 25U_1 &= 16U_1 + 16 \times 180 \rightarrow 9U_1 = 16 \times 180 \rightarrow U_1 = 320 \mu\text{J} \end{aligned}$$

گام دوم:

برای محاسبه بار الکتریکی اولیه خازن می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{1}{2} \frac{q_1^2}{C} \rightarrow 320 \times 10^{-6} = \frac{1}{2} \times \frac{q_1^2}{10 \times 10^{-6}} \rightarrow q_1^2 = 6400 \times 10^{-12} \\ \rightarrow q_1 &= 80 \times 10^{-6} \text{C} = 80 \mu\text{C} \end{aligned}$$

کنکور سراسری ریاضی خارج ۱۴۰۲

اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر یک خازن ۲۵ میکروفارادی را ۲۰ درصد افزایش می‌دهیم و ۵۰ میکروکولن بر بار الکتریکی ذخیره شده در آن اضافه می‌شود. در این شرایط، انرژی خازن چند میلی‌ژول می‌شود؟

- (۱) ۳۶۰ (۲) ۳/۶ (۳) ۱۸۰ (۴) ۱/۸

ابتدا به کمک رابطه $Q = C.V$ ، ولتاژ نهایی خازن را به دست می‌آوریم:

$$Q = C.V \rightarrow Q_f - Q_i = C.V_f - C.V_i = C(V_f - V_i)$$

$$\frac{V_f = V_i + \frac{20}{100} V_i = 1/2 V_i}{C = 25 \times 10^{-6} F} \rightarrow 50 \times 10^{-6} = 25 \times 10^{-6} (1/2 V_i - V_i)$$

$$\rightarrow 2 = 0/2 V_i \rightarrow V_i = 10V, V_f = 1/2 V_i = 5V$$

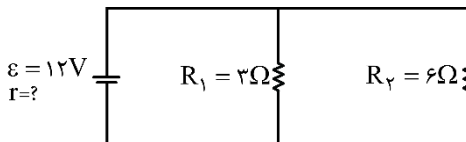
سپس با داشتن ولتاژ نهایی و ظرفیت خازن، انرژی ذخیره شده در خازن را به دست می‌آوریم:

$$U_f = \frac{1}{2} C V_f^2 = \frac{1}{2} \times 25 \times 10^{-6} \times (5)^2$$

$$\rightarrow U_f = 180 \cdot \mu J = 1/8 mJ$$

گروه آموزشی ماز

۵۸- در مدار شکل زیر اگر توان مصرفی مقاومت R_1 برابر ۱۲W باشد، مقاومت درونی باتری چند اهم بوده و توان تلف شده در باتری چند وات است؟



- (۱) ۲ و ۱۸
(۲) ۲ و ۶
(۳) ۱ و ۱۸
(۴) ۱ و ۶

(متوسط - محاسباتی - ۱۱۰۲)

پاسخ : گزینه ۱



ابتدا جریان شاخه‌های مدار را به دست می‌آوریم:

$$P_1 = R_1 I_1^2 \rightarrow 12 = 3 I_1^2 \rightarrow I_1 = 2A$$

$$V_1 = V_2 \rightarrow R_1 I_1 = R_2 I_2 \rightarrow 3 \times 2 = 6 I_2 \rightarrow I_2 = 1A$$

$$I_{\text{باتری}} = I_1 + I_2 = 2 + 1 = 3A$$

مقاومت معادل مدار و مقاومت درونی باتری برابر است با:

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{3 \times 6}{3 + 6} = 2\Omega$$

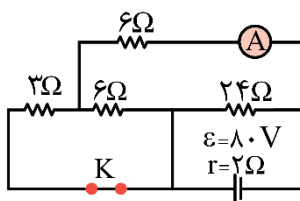
$$I_{\text{باتری}} = \frac{\varepsilon}{R_{eq} + r} \rightarrow 3 = \frac{12}{2 + r} \rightarrow r = 2\Omega$$

توان تلف شده در باتری برابر است با:

$$P_{\text{تلف شده در باتری}} = r I^2 = 2 \times (3)^2 = 18W$$

گروه آموزشی ماز

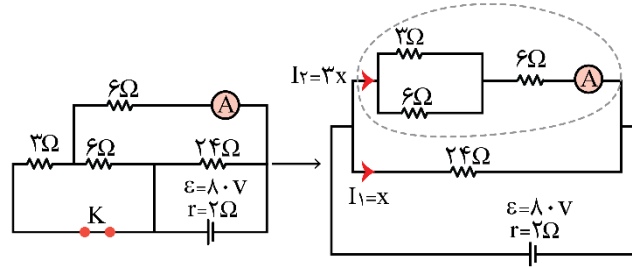
۵۹- در مدار شکل زیر، با باز کردن کلید K، عدد نشان داده شده توسط آمپرسنج ایده‌آل، چند آمپر تغییر می‌کند؟



- (۱) ۱۳/۶
(۲) ۱/۶
(۳) ۱۵/۲
(۴) صفر

کلید بسته:

در این حالت شکل ساده مدار مطابق زیر خواهد بود. 8Ω



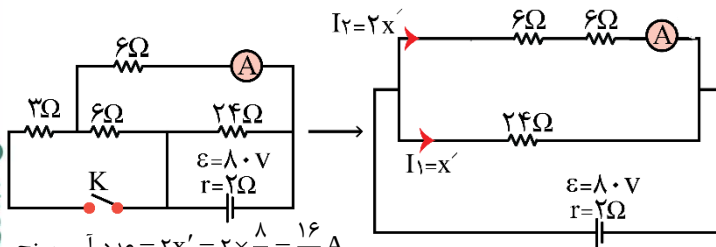
$$R_{eq} = 6\Omega \rightarrow I_{کل} = \frac{\varepsilon}{R_{eq} + r} = \frac{8}{6 + 2} = 1.0 A$$

$$\rightarrow x + 3x = I_{کل} \rightarrow 4x = 1.0 \rightarrow x = 0.25 A$$

$$\rightarrow \text{عدد آمپرسنج} = 3x = 3 \times 0.25 = 0.75 A$$

کلید باز:

در حالت کلید باز، مقاومت ۳ اهمی از مدار حذف شده و شکل مدار به صورت زیر ساده خواهد شد:



$$\text{عدد آمپرسنج} = 2x' = 2 \times \frac{8}{3} = \frac{16}{3} A$$

$$R'_{eq} = 8\Omega \rightarrow I'_{کل} = \frac{\varepsilon}{R'_{eq} + r} = \frac{8}{8 + 2} = 1 A$$

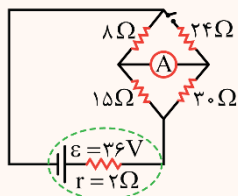
$$x' + 2x' = I'_{کل} \rightarrow 3x' = 1 \rightarrow x' = \frac{1}{3} A$$

بنابراین اختلاف عدد آمپرسنج در دو حالت برابر است با:

$$0.75 - \frac{16}{3} = \frac{15}{2} - \frac{16}{3} = \frac{45 - 32}{6} = \frac{13}{6} A$$

کنکور سراسری تجربی خارج ۱۴۰۲

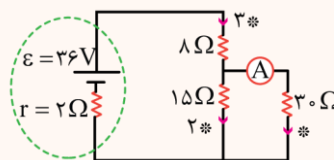
در مدار زیر، با بستن کلید، عددی که آمپرسنج آرمانی نشان می‌دهد، چند آمپر تغییر می‌کند؟



- (۱) $\frac{1}{10}$ (۲) $\frac{1}{6}$ (۳) $\frac{7}{15}$ (۴) $\frac{13}{30}$

پاسخ: گزینه ۴

قبل از بستن کلید:



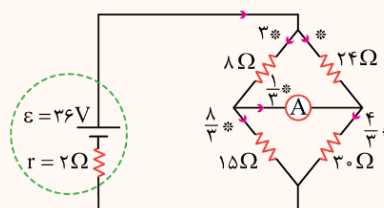
$$R_{eq} = 8 + \left(\frac{15 \times 30}{15 + 30} \right) = 8 + 10 = 18\Omega$$

$$I = \frac{\varepsilon}{R_{eq} + r} \Rightarrow I = \frac{36}{18 + 2} = \frac{36}{20} = 1.8 A \rightarrow A: \frac{1}{3} I = 0.6 A$$

$$R'_{eq} = \left(\frac{8 \times 24}{8 + 24} \right) + \left(\frac{30 \times 15}{30 + 15} \right) = 6 + 10 = 16\Omega$$

$$I' = \frac{36}{16 + 2} = 2 A \rightarrow 2 = 4 * \rightarrow * = 0.5 \rightarrow A': \frac{1}{3} \times 0.5 = \frac{1}{6} A$$

پس از بستن کلید:



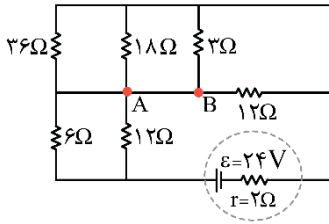
در نهایت تغییر عدد آمپرسنج را به دست می آوریم:

$$A' - A = \frac{1}{6} - \frac{0}{6} = \frac{5-18}{30} = -\frac{13}{30} A$$

گروه آموزشی ماز

۶۰- در مدار شکل مقابل جریان عبوری از سیم AB چند آمپر است؟

- (۱) ۰/۵
(۲) ۲
(۳) ۲/۵
(۴) ۳

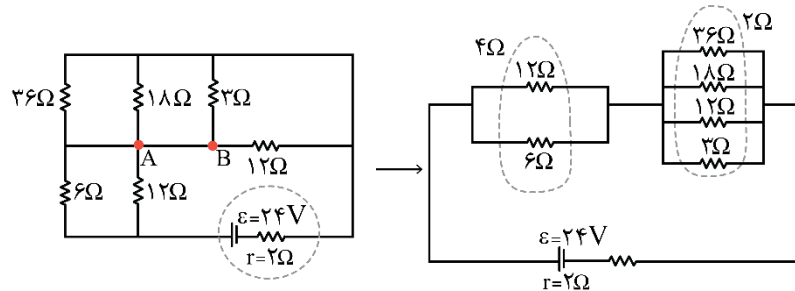


(سخت - محاسباتی - ۱۱۰۲)

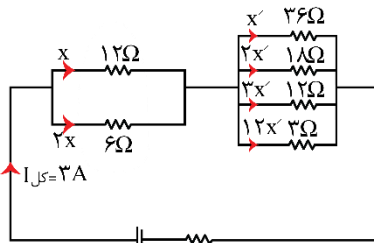
پاسخ: گزینه ۳

پاسخ سریعی:

شکل ساده شده مدار به صورت زیر است:



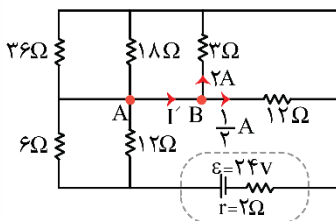
$$R_{eq} = 6\Omega, I_{\text{کل}} = \frac{\varepsilon}{R_{eq} + r} = \frac{24}{6+2} = 3A$$



حال پس از پخش کردن جریان در بین مقاومت‌ها، به شکل اصلی بازگشته و در گره B قانون جریان می نویسیم:

$$x + 2x = I_{\text{کل}} \rightarrow 3x = 3 \rightarrow x = 1A$$

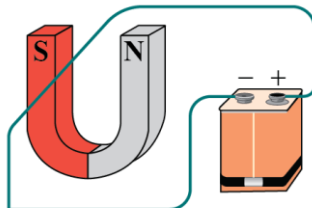
$$x' + 2x' + 3x' + 12x' = I_{\text{کل}} \rightarrow 18x' = 3 \rightarrow x' = \frac{1}{6} A$$



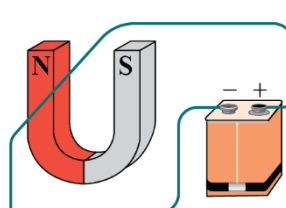
$$\text{گره B: } I' = 2 + \frac{1}{6} \rightarrow I' = 2 \frac{1}{6} A$$

گروه آموزشی ماز

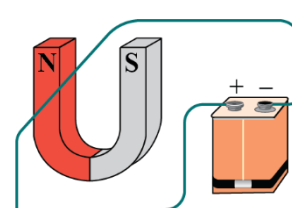
۶۱- در چه تعداد از شکل‌های زیر، نیروی مغناطیسی وارد بر قسمتی از سیم که بین آهنربا قرار دارد، به سمت بالا است؟



(ج)
۳ (۴)



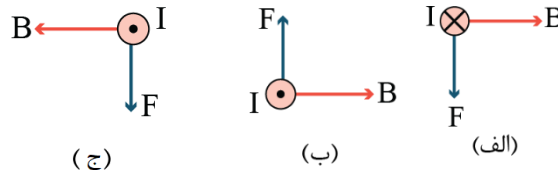
(ب)
۲ (۳)



(الف)
۱ (۲)

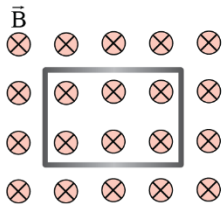
(۱) صفر

با توجه به قاعده دست راست، نیروی وارد بر شکل (ب) به سمت بالا و نیروی وارد بر شکل‌های (الف) و (ج) به سمت پایین است.



گروه آموزشی ماز

۶۲- در شکل زیر، حلقه رسانایی به مساحت 600 cm^2 و مقاومت 2Ω ، عمود بر میدان مغناطیسی 100 گاوس قرار دارد. اگر میدان مغناطیسی در مدت زمان یک میلی‌ثانیه تغییر کرده به 100 گاوس در خلاف جهت اولیه برسد، در این مدت، جریان القایی متوسط در حلقه چند آمپر و در چه جهتی است؟



(۱) $1/2$ ، پادساعتگرد

(۲) $1/2$ ، ابتدا ساعتگرد و سپس پادساعتگرد

(۳) $0/4$ ، ابتدا ساعتگرد و سپس پادساعتگرد

(۴) $0/4$ ، ساعتگرد

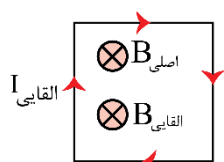
نیروی محرکه القایی برابر است با:

$$\varepsilon = -N \frac{\Delta \phi}{\Delta t} = -NA \cos \theta \frac{\Delta B}{\Delta t} = -1 \times 600 \times 10^{-4} \times 1 \times \frac{(-100 - 100) \times 10^{-4}}{10^{-3}} = 1/2 \text{ V}$$

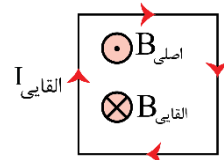
جریان القایی برابر است با:

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{1/2}{2} = 0/4 \text{ A}$$

طبق قانون لنز، وقتی میدان اصلی کاهش می‌یابد، باید میدان القایی هم جهت میدان اصلی باشد.

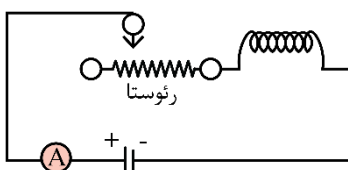


حال وقتی میدان اصلی از صفر شروع به افزایش یافتن می‌کند و به صورت برون‌سو می‌شود، میدان القایی باید در خلاف جهت میدان اصلی و به صورت درون‌سو باشد.



گروه آموزشی ماز

۶۳- در شکل مقابل، سیم‌لوله دارای 200 حلقه و طولش 16 cm است. اگر میدان مغناطیسی درون سیم‌لوله برابر 60 گاوس و ضریب القاوری سیم‌لوله برابر $0/1 \text{ H}$ باشد، انرژی ذخیره شده در سیم‌لوله (القاگر) چند میلی‌ژول است؟ $(\mu_0 = 12 \times 10^{-7} \frac{\text{T.m}}{\text{A}})$



(۱) $0/4$

(۲) $0/8$

(۳) $1/6$

(۴) 4

جریان سیملوله برابر است با:

$$B = \frac{\mu_0 NI}{L} \rightarrow 6.0 \times 10^{-4} = \frac{12 \times 10^{-7} \times 20.0 \cdot I}{16 \times 10^{-2}} \rightarrow I = 4A$$

انرژی ذخیره شده در سیملوله برابر است با:

$$U = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} \times 0.1 \times (4)^2 = 0.8J$$

گروه آموزشی ماز

۶۴- آلیاژی از مس و نقره به جرم ۱۵۳۰g را درون استوانه‌ای مدرج به شعاع مقطع ۱۰cm می‌اندازیم و ارتفاع آب درون آن ۵cm افزایش می‌یابد. نسبت

$$\text{حجم نقره به حجم مس آلیاژ کدام است؟} \left(\rho_{\text{نقره}} = 10/5 \frac{g}{cm^3}, \rho_{\text{مس}} = 9 \frac{g}{cm^3}, \pi = 3 \right)$$

$$\frac{1}{2} \quad (4)$$

$$2 \quad (3)$$

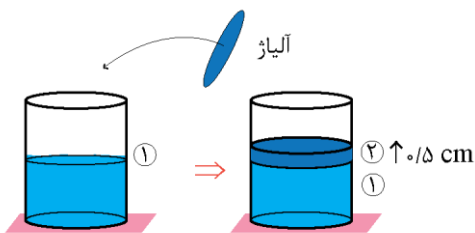
$$\frac{1}{4} \quad (2)$$

$$4 \quad (1)$$

چگالی یک مخلوط در صورتی که تغییر حجم نداشته باشد از رابطه $\rho_{\text{مخلوط}} = \frac{\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2}{V_1 + V_2}$ به دست می‌آید.

به دست آوردن حجم آلیاژ:

← حجم آلیاژ = حجم آبی که بالا رفته است.



$$\begin{aligned} \text{حجم آلیاژ: } V &= A \times \Delta h = \pi r^2 \Delta h \\ \Rightarrow V &= 3 \times 10^2 \times 0.5 = 150 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

به دست آوردن چگالی آلیاژ:

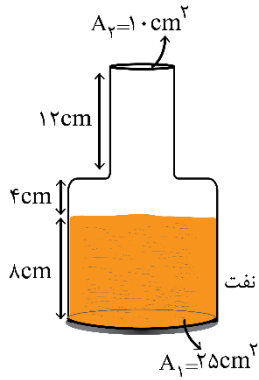
$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{1530}{150} = 10.2 \frac{g}{cm^3}$$

اگر فرض کنیم حجم نقره آلیاژ برابر X سانتی متر مربع باشد بنابراین حجم مس آن ۱۵۰ - X سانتی متر مربع می‌باشد.

$$\rho_{\text{مخلوط}} = \frac{\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2}{V_1 + V_2} \rightarrow \frac{10/5(x) + 9(150 - x)}{150} = 10.2$$

$$\rightarrow 1530 = 10/5x + 1350 - 9x \rightarrow 180 = 1/5x \rightarrow x = 900 \text{ cm}^3 \Rightarrow \begin{cases} \text{حجم نقره} = x = 900 \text{ cm}^3 \\ \text{حجم مس} = 150 - x = 60 \text{ cm}^3 \end{cases}$$

گروه آموزشی ماز



۶۵- درون ظرف مقابل مقداری نفت وجود دارد. اگر شلنگی با آهنگ شارش حجمی $\frac{0.36 \text{ Lit}}{\text{min}}$ روغن به ظرف اضافه کند، پس از چند ثانیه کف ظرف در آستانه شکستن قرار می گیرد؟ (حداکثر نیرویی که کف ظرف می تواند تحمل کند

$$4/6 \text{ نیوتون است، } \rho_{\text{نفت}} = 900 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, \rho_{\text{روغن}} = 800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

(۱) ۳۰

(۲) $\frac{200}{3}$

(۳) $7/5$

(۴) $\frac{100}{3}$

(سخت - محاسباتی - ۱۰۰۲)

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ تشریحی:

تعیین کنیم چه فشاری در کف ظرف نیروی ۴/۶ نیوتونی ایجاد می کند.

$$P = \frac{F}{A} \rightarrow F = PA \rightarrow 4/6 = 25 \times 10^{-4} \times P \rightarrow P = 1840 \text{ Pa}$$

تعیین می کنیم چه مقدار از این ۱۸۴۰ پاسکال مربوط به نفتی است که از قبل وجود دارد.

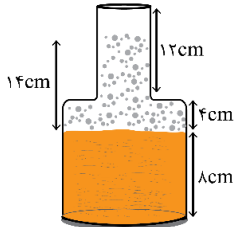
$$P = \rho gh \rightarrow P_{\text{نفت}} = \rho_{\text{نفت}} \times g \times h_{\text{نفت}} = 900 \times 10 \times 8 \times 10^{-2} = 720 \text{ Pa}$$

بنابراین از ۱۸۴۰ پاسکال فشار مورد نیاز برای شکستن کف ظرف ۷۲۰ پاسکال مربوط به نفتی است که از قبل است. بنابراین روغن باید $1120 = (1840 - 720)$ پاسکال فشار ایجاد نماید.

چه ارتفاعی از روغن ۱۱۲۰ پاسکال فشار ایجاد می کند؟

$$P_{\text{روغن}} = \rho_{\text{روغن}} gh_{\text{روغن}} \rightarrow 1120 = 800 \times 10 \times h_{\text{روغن}} \rightarrow h_{\text{روغن}} = 14 \text{ cm}$$

۱۴ سانتی متر افزایش ارتفاع توسط روغن چه حجمی دارد؟



$$\left. \begin{aligned} V_1 &= A_1 \times h_1 = 25 \times 4 = 100 \text{ cm}^3 \\ V_2 &= A_2 \times h_2 = 10 \times 10 = 100 \text{ cm}^3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow V = V_1 + V_2 = 200 \text{ cm}^3$$

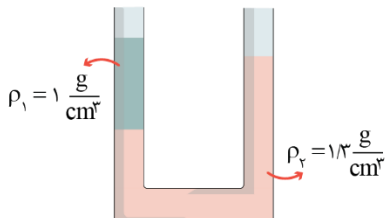
حال باید زمان پر شدن روغن را محاسبه کنیم.

$$\frac{0.36 \text{ Lit}}{\text{min}} \xrightarrow{\text{Lit} = 1000 \text{ cm}^3} \frac{360 \text{ cm}^3}{60 \text{ s}} \rightarrow \frac{6 \text{ cm}^3}{\text{s}} \rightarrow \frac{200 \text{ cm}^3}{6 \text{ s}} \rightarrow 33.3 \text{ s}$$

بنابراین $\frac{200}{6} = 33.3 \text{ s}$ طول می کشد تا شیشه در آستانه شکستن قرار بگیرد.

گروه آموزشی ماز

۶۶- در شکل زیر، اگر ۱۴/۴ گرم از یک مایع با چگالی $0.8 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ به سمت راست لوله اضافه کنیم، سطح آزاد مایع ها در دو طرف لوله در یک ارتفاع قرار



می گیرد. اگر سطح مقطع لوله برابر 2 cm^2 باشد، جرم مایع با چگالی ρ_1 چند گرم است؟

(۱) ۹

(۲) ۱۸

(۳) ۱۵

(۴) ۳۰

(متوسط - مفهومی و محاسباتی - ۱۰۰۲)

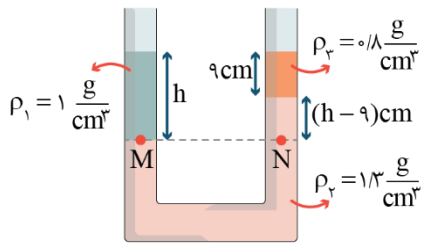
پاسخ: گزینه ۴

گام اول:

ارتفاع مایع $\rho_3 = 0.8 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ برابر است با:

$$m_3 = \rho_3 V_3 = \rho_3 (A h_3) \rightarrow 14/4 = 0.8 \times (2 \times h_3) \rightarrow h_3 = 9 \text{ cm}$$

گام دوم:



شکل زیر حالت نهایی مایع‌ها را نشان می‌دهد. با توجه به برابر بودن فشار در نقاط M و N، می‌توان نوشت:

$$P_M = P_N \rightarrow \rho_1 h = \rho_2 (h - 9) + \rho_2 h_2$$

$$\rightarrow 1 \times h = 1/3 (h - 9) + 0/8 \times 9$$

$$\rightarrow h = 1/3 h - 11/7 + 7/2$$

$$\rightarrow 0/3 h = 4/5 \rightarrow h = 15 \text{ cm}$$

گام سوم:

جرم مایع با چگالی $\rho_1 = 1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ و ارتفاع $h = 15 \text{ cm}$ برابر است با:

$$m_1 = \rho_1 V_1 = \rho_1 (A h_1) = 1 \times (2 \times 15) = 30 \text{ g}$$

گروه آموزشی ماز

۶۷- گلوله‌ای به جرم $1/6 \text{ kg}$ را با تندی $30 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ از سطح زمین صورت قائم به بالا پرتاب می‌کنیم. اگر مقاومت هوا نباشد، بیشترین ارتفاع گلوله h_1 می‌شود.

اگر ۱۰٪ از انرژی جنبشی اولیه گلوله در اثر مقاومت هوا تلف شود، گلوله تا ارتفاع h_2 بالا می‌رود. نسبت $\frac{h_2}{h_1}$ کدام است؟ ($g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$)

۰/۸ (۴)

۰/۹ (۳)

۱۰/۹ (۲)

۰/۱ (۱)

(متوسط - مفهومی و محاسباتی - ۱۰۰۳)

پاسخ: گزینه ۳

گام اول:

در حالت اول که مقاومت هوا نیست پس پایداری انرژی مکانیکی داریم.

$$E_1 = E_2 \rightarrow K_1 + U_1 = K_2 + U_2 \rightarrow \frac{1}{2} m \times 30^2 + 0 = 0 + m \times 10 \times h_1 \rightarrow h_1 = 45 \text{ m}$$

گام دوم:

در حالت دوم ۱۰ درصد انرژی جنبشی اولیه تلف می‌شود، پس داریم:

$$W_f = E_1' - E_2' \rightarrow -\frac{1}{2} K_2' = (K_2' + U_2') - (K_1' + U_1')$$

$$-\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 1/6 \times 30^2 = (0 + 1/6 \times 10 \times h_2) - (\frac{1}{2} \times 1/6 \times 30^2 + 0)$$

$$-72 = 16 h_2 - 720 \rightarrow h_2 = 40/5 \text{ m}$$

بنابراین داریم:

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{40/5}{45} = 0/9$$

گروه آموزشی ماز

۶۸- در ظرفی عایق ۵۰g بخار آب 100°C در مجاورت با m گرم آب 100°C قرار دارد. بعد از تعادل گرمایی ۲۴۵g آب 100°C در ظرف باقی می‌ماند. جرم بخار

آب باقی‌مانده در ظرف و جرم مقدار اولیه آب به ترتیب از راست به چپ چند گرم است؟ ($c_{\text{آب}} = 4200 \frac{\text{J}}{\text{kg.K}}$, $L_V = 2268 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$)

۲۳۰ و ۳۵ (۴)

۲۱۰ و ۳۵ (۳)

۲۱۰ و ۱۵ (۲)

۲۳۰ و ۱۵ (۱)

(متوسط - محاسباتی - ۱۰۰۴)

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ تشریحی:

جرم آب m گرم و جرم بخار آب میعان شده را m' گرم می‌گیریم.

$$Q_{\text{آب}} = |Q_{\text{بخار آب میعان شده}}| \rightarrow mc\Delta\theta = m'L_V$$

$$m \times 4200 \times (100 - 10) = m' \times 2268000 \rightarrow m = 6m'$$

از طرفی جرم m گرم آب و m' گرم بخار آب میعان شده باید $245g$ شوند، پس:

$$m + m' = 7m' = 245 \rightarrow m' = 35g, m = 210g$$

پس جرم بخار آب باقی مانده $50 - 35 = 15g$ و جرم اولیه آب 210 گرم بوده است.

گروه آموزشی ماز

۶۹- در رابطه با روش های انتقال گرما، چه تعداد از عبارات های زیر درست است؟

الف: در انتقال گرما به روش رسانش در نافلزات، گرما صرفاً از طریق ارتعاش اتم ها منتقل می شود.

ب: در همرفت برخلاف رسانش گرمایی، انتقال گرما با انتقال بخش هایی از خود مایع صورت می گیرد.

ج: هر جسم در هر دمایی تابش گرمایی گسیل می کند که این تابش گرمایی به دما، مساحت، میزان صیقلی بودن و رنگ آن جسم بستگی دارد.

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

(آسان - مفهومی و خطبه خط کتاب درسی - ۱۰۰۴)

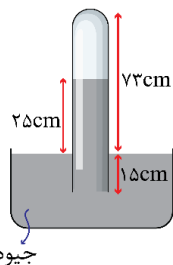
پاسخ: گزینه ۴

پاسخ تشریحی:

تمامی عبارات ها از کتاب درسی انتخاب شده و صحیح هستند.

گروه آموزشی ماز

۷۰- در شکل زیر، مجموعه در حال تعادل است و فشار هوای محیط $74cmHg$ است. لوله را به آرامی چند سانتی متر از جیوه بیرون بیاوریم تا ارتفاع ستون جیوه نسبت به سطح آزاد آن، $26cm$ شود؟ (دما ثابت است.)



۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴)

(متوسط - مفهومی و محاسباتی - ۱۰۰۴)

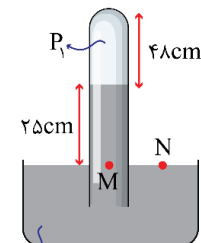
پاسخ: گزینه ۲

پاسخ تشریحی:

در حالت اول، فشار گاز درون لوله برابر است با:

$$P_M = P_N \rightarrow P_1 + 25cmHg = P$$

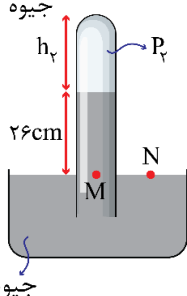
$$\rightarrow P_1 + 25cmHg = 74cmHg \rightarrow P_1 = 49cmHg$$



در حالت دوم، فشار گاز برابر است با:

$$P_M = P_N \rightarrow P_2 + 26cmHg = P$$

$$\rightarrow P_2 + 26cmHg = 74cmHg \rightarrow P_2 = 48cmHg$$



با نوشتن قانون گازهای کامل در دمای ثابت داریم:

$$P_1 V_1 = P_2 V_2 \rightarrow P_1 h_1 = P_2 h_2$$

$$\rightarrow 49 \times 48 = 48 h_2 \rightarrow h_2 = 49cm$$

بنابراین طول لوله بالای سطح آزاد جیوه از $73cm$ به $26 + 49 = 75cm$ رسیده است و لوله $2cm$ بالاتر آورده شده است.

گروه آموزشی ماز

۷۱- توان و بازده یک ماشین گرمایی به ترتیب $40kW$ و 25% است. این ماشین در هر ثانیه چند ژول گرما به منبع با دمای پایین تر می دهد؟

۱۰۰۰ (۴)

۱۷۷۰ (۳)

۱۷۵۰ (۲)

۱۷۲۰ (۱)

(آسان - محاسباتی - ۱۰۰۵)

پاسخ: گزینه ۱

نکته:

۱- توان (P): به مقدار کاری (W) که ماشین در واحد زمان (t) انجام می‌دهد توان می‌گوییم.

$$P = \frac{|W|}{t}$$

۲- راندمان (Ra): هدف از ساختن هر ماشین آن است که انرژی گرفته شده را تا بیشترین مقدار ممکن به انرژی مفید خروجی تبدیل کند بنابراین بازده هر ماشین به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\eta = \frac{\text{انرژی مفید خروجی}}{\text{انرژی داده شده به ماشین}}$$

۳- در ماشین گرمایی انرژی مفید خروجی همان کار |W| و انرژی داده شده به ماشین همان Q_H است، بنابراین:

$$\eta = \frac{|W|}{Q_H}$$

پاسخ تشریحی:

رابطه توان را می‌نویسیم:

$$P = \frac{|W|}{t} \rightarrow 40 \times 10^{+3} = \frac{|W|}{1} \rightarrow |W| = 4 \times 10^{+4} \text{ J}$$

رابطه راندمان یا بازده را می‌نویسیم و Q_H را به دست می‌آوریم:

$$\eta = \frac{|W|}{Q_H} \rightarrow \frac{|W|}{Q_H} = \frac{25}{100}$$

$$\frac{4 \times 10^{+4}}{Q_H} = \frac{1}{4} \rightarrow Q_H = 16 \times 10^{+4} \text{ J}$$

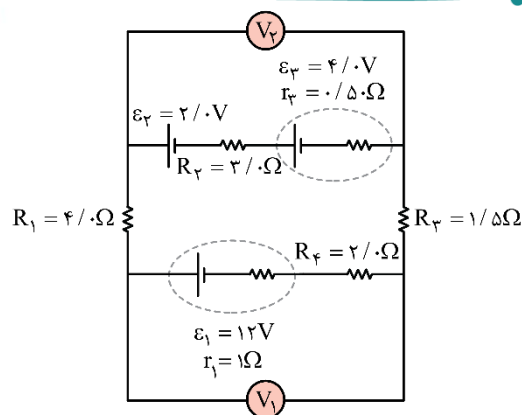
طبق رابطه $Q_H = |W| + |Q_L|$ ، خواسته سؤال (Q_L) را پیدا می‌کنیم:

$$|Q_L| = Q_H - |W| \rightarrow |Q_L| = 16 \times 10^{+4} - 4 \times 10^{+4} = 12 \times 10^{+4} \text{ J} = 1/2 \times 10^{+5} \text{ J}$$

$$\rightarrow Q_L = -1/2 \times 10^{+5} \text{ J}$$

گروه آموزشی ماز

۷۲- در مدار زیر، عدد ولت‌سنج آرمانی (۱)، چند برابر عدد ولت‌سنج آرمانی (۲) است؟



- (۱) $\frac{42}{33}$
(۲) $\frac{42}{31}$
(۳) $\frac{31}{17}$
(۴) $\frac{33}{17}$

(سخت - محاسباتی - ۱۱۰۲)

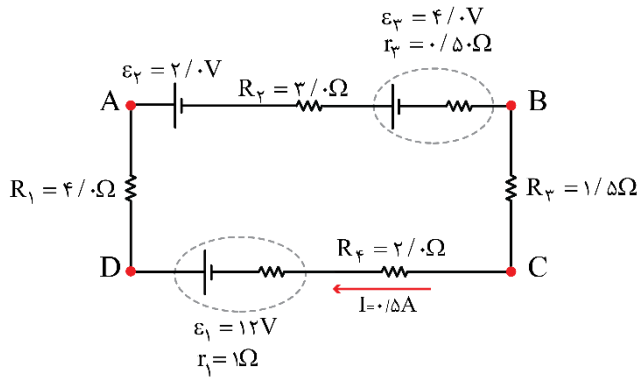
پاسخ: گزینه ۲

گام اول:

جریان مدار برابر است با:

$$I = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3}{r_1 + r_2 + r_3 + R_{eq}} = \frac{12 - 2 - 4}{1 + 0.5 + (4 + 3 + 1/5 + 2)} = 0.5 \text{ A}$$

گام دوم:



$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{10/5}{7/75} = \frac{42}{31}$$

یک بار از A تا B و بار دیگر از C تا D در مدار حرکت می‌کنیم.

$$V_A - \varepsilon_2 - R_2 I - \varepsilon_3 - r_3 I = V_B$$

$$\rightarrow V_A - 2 - 3 \times 0.5 - 4 - 0.5 \times 0.5 = V_B$$

$$\rightarrow V_A - V_B = 2 + 1.5 + 4 + 0.25 = 7.75V$$

$$V_C - R_4 I + \varepsilon_1 - r_1 I = V_D$$

$$\rightarrow V_C - 2 \times 0.5 + 12 - 1 \times 0.5 = V_D$$

$$\rightarrow V_D - V_C = 10.5V$$

بنابراین ولت‌سنج (۱)، $10.5V$ و ولت‌سنج (۲)، $7.75V$ را نشان می‌دهد.

گروه آموزشی ماز

۷۳- گلوله‌ای از ارتفاع h نسبت به زمین رها می‌شود. پس از ۴ ثانیه گلوله دیگری از ارتفاع $\frac{h}{9}$ رها می‌شود. اگر دو گلوله همزمان به زمین برسند، ارتفاع h چند متر است؟ (از مقاومت هوا صرف‌نظر کنید و $g = 10 \frac{m}{s^2}$)

۱۸۰ (۴)

۱۳۷/۵ (۳)

۹۰ (۲)

۱۱۲/۵ (۱)

(متوسط - محاسباتی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ تشریحی:

زمان سقوط گلوله را به دست می‌آوریم:

$$y = \frac{1}{2}gt^2 \rightarrow \begin{cases} h = \frac{1}{2}gt^2 = \Delta t^2 \\ \frac{h}{9} = \Delta(t-4)^2 \end{cases} \rightarrow \frac{h}{h/9} = 9 = \frac{t^2}{(t-4)^2}$$

$$\rightarrow 3 = \frac{t}{t-4} \rightarrow 3t - 12 = t \rightarrow 2t = 12 \rightarrow t = 6s$$

در نتیجه:

$$h = \Delta(6)^2 = 5 \times 36 = 180$$

گروه آموزشی ماز

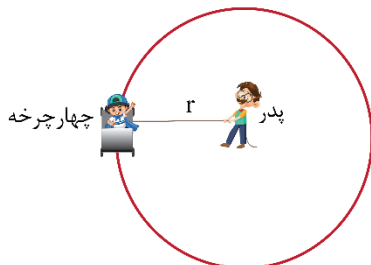
۷۴- پدری فرزند ۲۰ کیلوگرمی خود را در یک چهارچرخه ایمن به جرم M قرار می‌دهد و با یک طناب ۴ متری، چهارچرخه را روی سطح افقی زمین به گونه‌ای می‌کشد تا چهارچرخه روی دایره‌ای با تندی ثابت $8 \frac{m}{s}$ حرکت کند. با صرف‌نظر کردن از اصطکاک و با فرض اینکه نیروی کشش طناب ۴۰۰N باشد، M چند کیلوگرم است؟

۵ (۱)

۱۰ (۲)

۲/۵ (۳)

۴ (۴)



(آسان - محاسباتی - ۱۲۰۲)

پاسخ: گزینه ۱

پاسخ تشریحی:

نیروی کشش طناب همان نیروی مرکزگرا است و می‌توان نوشت:

$$F_C = m \frac{v^2}{r} \rightarrow 400 = m \times \frac{8^2}{4} \rightarrow m = 25kg$$



با توجه به این که جرم خود فرزند برابر 20 kg است، جرم چهار چرخه برابر 5 kg می باشد.

گروه آموزشی ماز

۷۵- رشته ای از بسامدهای متوالی تشدید یک تار دو انتها بسته به طول 50 cm عبارت اند از: 150 Hz ، 225 Hz و 300 Hz ، کدام یک از عبارتهای زیر صحیح است؟

(۱) بسامد پنجم تار برابر 450 Hz است.

(۲) تندی انتشار موج در تار $150 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ است.

(۳) بسامد اصلی تار 75 Hz است.

(۴) طول موج مد دوم تار 25 cm است.

(آسان - مفهومی و محاسباتی - ۱۲۰۴)

پاسخ: گزینه ۳



پاسخ سریعی:

اختلاف دو بسامد متوالی برابر بسامد اصلی است، بنابراین بسامد اصلی این تار برابر $225 - 150 = 75\text{ Hz}$ است و گزینه (۳) صحیح است.

گروه آموزشی ماز



۷۶- چه تعداد از عبارات‌های داده شده درست هستند؟

- آ: زیرلایه‌هایی که آرایش الکترونی عناصر موجود در تناوب چهارم به آن‌ها ختم می‌شود، مقدار $n + l$ برابری دارند.
 ب: شماره گروه دو عنصر از دوره دوم که کمترین واکنش‌پذیری را در این دوره دارند، ۴ واحد با یکدیگر تفاوت دارد.
 پ: در عنصری از تناوب چهارم که با Hg هم‌گروه است، شمار الکترون‌هایی با $l = 2$ و $n = 2$ با هم برابر است.
 ت: در چهار مورد از عناصر تناوب چهارم، همانند دو مورد از عناصر تناوب سوم، زیرلایه تک‌الکترونی وجود دارد.

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۱ (مفهومی - متوسط - ۱۰۰)

پاسخ تشریحی:

فقط عبارت (ب) درست است.

بررسی موارد:

آ: بیرونی‌ترین زیرلایه عناصر دسته S در دوره چهارم، ۴s بوده که $n + l$ آن برابر ۴ است. از طرفی، آرایش الکترونی عناصر دسته d نیز به زیرلایه ۴s ختم می‌شود. تصویر زیر، آرایش الکترونی عناصر دسته d را در دوره چهارم جدول تناوبی نشان می‌دهد:

$[18Ar]3d^14s^2$	$[18Ar]3d^24s^2$	$[18Ar]3d^34s^2$	$[18Ar]3d^54s^1$	$[18Ar]3d^54s^2$	$[18Ar]3d^64s^2$	$[18Ar]3d^74s^2$	$[18Ar]3d^84s^2$	$[18Ar]3d^{10}4s^1$	
۲۱ Sc اسکاندیم	۲۲ Ti تیتانیم	۲۳ V وانادیم	۲۴ Cr کروم	۲۵ Mn منگنز	۲۶ Fe آهن	۲۷ Co کوبالت	۲۸ Ni نیکل	۲۹ Cu مس	۳۰ Zn روی
$[18Ar]3d^24s^2$	$[18Ar]3d^34s^2$	$[18Ar]3d^54s^1$	$[18Ar]3d^54s^2$	$[18Ar]3d^64s^2$	$[18Ar]3d^74s^2$	$[18Ar]3d^84s^2$	$[18Ar]3d^94s^2$	$[18Ar]3d^{10}4s^2$	

در این دوره، آرایش الکترونی عناصر دسته p به زیرلایه ۴p ختم می‌شود که $n + l$ آن برابر ۵ است.

ب: در دوره دوم جدول تناوبی، عناصر نئون و کربن به ترتیب کم‌ترین واکنش‌پذیری را دارند. کربن اولین عنصر گروه ۱۴ و نئون دومین عنصر گروه ۱۸ جدول دوره‌ای است. شماره گروه این دو عنصر، ۴ واحد با هم تفاوت دارد.

اگر فقط عناصر اصلی (s و p) را در نظر بگیریم، در هر تناوب، با حرکت از سمت چپ به راست، ابتدا از خاصیت فلزی عناصر کاسته شده و واکنش‌پذیری آن‌ها نیز کاهش می‌یابد. این روند تا گروه ۱۴ هر تناوب ادامه پیدا می‌کند اما پس از آن، خاصیت نافلزی عناصر افزایش پیدا کرده و واکنش‌پذیری آن‌ها نیز افزایش پیدا می‌کند تا نهایتاً به گروه ۱۷ از هر تناوب برسیم. توجه داریم که در آخرین خانه هر تناوب (گروه ۱۸) نیز یک گاز نجیب با واکنش‌پذیری بسیار اندک وجود دارد. به عنوان مثال، نمودار زیر تغییر واکنش‌پذیری عناصر تناوب دوم جدول دوره‌ای را نشان می‌دهد:



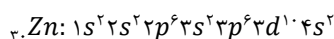
پ: برای تعیین شماره گروه عناصر با استفاده از عدد اتمی، از فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

(عدد اتمی عنصر مورد نظر - عدد اتمی گاز نجیب بعدی) - ۱۸ = شماره گروه

حال شماره گروه عنصر جیوه (Hg) را تعیین می‌کنیم:

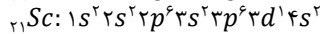
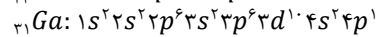
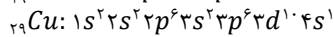
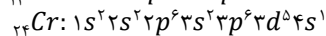
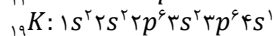
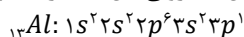
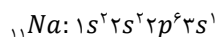
$$۱۲ = ۱۸ - (۸۶ - ۸۰) = \text{شماره گروه}$$

در تناوب چهارم، عنصر روی (Zn) در گروه ۱۲ قرار دارد. آرایش الکترون این عنصر به صورت زیر است:



در آرایش الکترونی اتم این عنصر، ۱۰ الکترون در زیرلایه ۳d قرار دارد، درحالی‌که در لایه دوم این عنصر ($n = 2$)، ۸ الکترون قرار گرفته است.

ت: در تناوب سوم، در آرایش الکترونی عناصر سدیم و آلومینیم، زیرلایه تک الکترونی حضور دارد. در تناوب چهارم نیز، عناصر پتاسیم، اسکاندیم، کروم، مس و گالیم در آرایش الکترونی خود زیرلایه تک الکترونی دارند. آرایش الکترونی این عناصر به صورت زیر است:



۷۷- جدول زیر را در نظر بگیرید:

ستون	۱	۲	۳	۴
نام ترکیب	گالیم اکسید	کلسیم فسفات	اسکاندیم نیتريد	آمونیم نیترات

نسبت شمار آنیون به کاتیون در ترکیب موجود در ستون معادل با برابر نسبت شمار جفت الکترون های ناپیوندی به شمار جفت الکترون های پیوندی در ساختار است.

(۱) ۱ - ۳ - مولکول اوزون

(۲) ۲ - ۲ - مولکول آمونیاک

(۳) ۳ - ۲ - یون سولفات

(۴) ۴ - ۰/۲۵ - یون کربنات

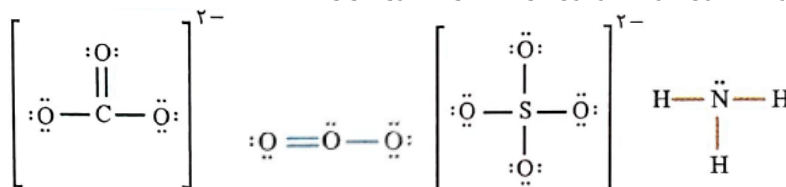
پاسخ: گزینه ۲ (متوسط - مفهومی - ۱۰۰۱)

پاسخ سرنی

جدول زیر، نسبت شمار آنیون به کاتیون را در ترکیب های یونی ذکر شده نشان می دهد:

ستون	۱	۲	۳	۴
نام و فرمول شیمیایی ترکیب	گالیم اکسید Ga_2O_3	کلسیم فسفات $Ca_3(PO_4)_2$	اسکاندیم نیتريد ScN	آمونیم نیترات NH_4NO_3
نسبت شمار آنیون به کاتیون	۱/۵	۲/۳	۱	۱

ساختار لوویس گونه های اوزون، آمونیاک، یون سولفات و یون کربنات نیز به صورت زیر است:



نسبت شمار جفت الکترون های ناپیوندی به جفت الکترون های پیوندی در این گونه ها به ترتیب از راست به چپ برابر ۳ و ۲ است. همانطور که مشخص است، نسبت شمار آنیون به کاتیون در ترکیب کلسیم فسفات، ۲ برابر نسبت شمار جفت الکترون ناپیوندی به شمار جفت الکترون پیوندی در آمونیاک است.

گروه آموزشی ماز

۷۸- دمای مخلوطی از گازهای متان، هیدروژن و گوگرد تری اکسید را تا جایی کاهش می دهیم که یکی از مواد موجود در این مخلوط، میعان شود. در ساختار هر مولکول از ماده میعان شده، چند پیوند اشتراکی وجود دارد و اگر این ماده را از مخلوط جدا کرده و دمای مواد باقیمانده را مجدداً به حالت اولیه برسانیم، چگالی مخلوط نهایی در مقایسه با مخلوط اولیه چگونه خواهد بود؟

($S = ۳۲$ و $O = ۱۶$ و $C = ۱۲$ و $H = ۱$: $g \cdot mol^{-1}$)

(۴) ۳ - کمتر

(۳) ۳ - بیشتر

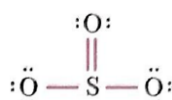
(۲) ۴ - کمتر

(۱) ۴ - بیشتر

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط - مفهومی - ۱۰۰۳)

پاسخ سرنی

گازهای هیدروژن، متان و گوگرد تری اکسید همگی جزو مواد ناقطبی طبقه بندی شده و جرم مولی آن ها به ترتیب برابر ۲، ۱۶ و ۸۰ گرم بر مول است. گوگرد تری اکسید نسبت به باقی مولکول ها، جرم مولی بیشتر و در نتیجه نقطه جوش بالاتری دارد و در دمای بالاتری دچار میعان می شود. ساختار لوویس این ترکیب به صورت زیر است:



نقطه جوش و نقطه ذوب در ترکیب های مولکولی، نشان دهنده قدرت نیروی بین مولکولی در آن ها است. هرچه در گونه ای، نیروی بین مولکولی قوی تر باشد، نقطه جوش آن بالاتر خواهد بود. در ترکیب های مولکولی، قدرت نیروی بین مولکولی به سه عامل بستگی دارد:

پیوند هیدروژنی: اگر بین مولکول های یک ترکیب، پیوندی هیدروژنی حضور داشته باشد، نیروی بین مولکولی قوی تر خواهد بود. برای مثال نقطه جوش آب (H_2O) بالاتر از هیدروژن سولفید (H_2S) است.

قطبیت: در مولکول هایی که جرم مولی آن ها به یکدیگر نزدیک است، گونه ای که قطبیت بیشتری داشته باشد، نقطه جوش بالاتری خواهد داشت. برای مثال کربن مونوکسید (CO) نسبت به نیتروژن (N_2) در دمای بالاتری به جوش می آید.

جرم مولی: با افزایش جرم مولی، نیروی واندروالسی بین مولکول ها قوی تر شده و آن نمونه در دمای بالاتری تبخیر می شود. برای مثال اکسیژن (O_2) نسبت به نیتروژن (N_2) نقطه جوش بالاتری دارد.

در شرایط یکسان، نسبت چگالی گازها به یکدیگر، برابر با نسبت جرم مولی آنها نسبت به هم است. در طی این فرایند، مولکولی با جرم مولی بالاتر (که در مقایسه با سایر مواد موجود در مخلوط، چگالی بیشتری دارد) را از مخلوط جدا کرده ایم، پس می توان گفت چگالی مخلوط کاهش پیدا کرده است.

گروه آموزشی ماز

۷۹- با در نظر گرفتن عدد اکسایش اتم های A و X در ساختار دو ترکیب شیمیایی ASO_4 و X_2O_5 ، فرمول شیمیایی چند ترکیب زیر می تواند درست باشد؟ (عناصر A و X ، جزو عناصر اصلی موجود در جدول دوره های هستند).

آ: A_2N_3	ب: KXO_3	پ: AF_2
ت: X_2O	ث: A_2O_2	ج: HXO_2
۲ (۱)	۳ (۲)	۴ (۳)
		۵ (۴)

پاسخ: گزینه ۳ (سخت - مساله - ۱۲۰۲)

پاسخ تشریحی

جدول زیر، بازه تغییر عدد اکسایش عناصر اصلی و برخی از عناصر واسطه مهم جدول تناوبی را نشان می دهد:

شماره گروه	۱	۲	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	عناصر استثنا			عناصر واسطه مهم			
							اکسیژن	فلوئور	هیدروژن	آهن	مس	منگنز	نقره
کم ترین عدد اکسایش	۰	۰	-۴	-۳	-۲	-۱	-۲	-۱	-۱	۰	۰	۰	۰
بالاترین عدد اکسایش	+۱	+۲	+۴	+۵	+۶	+۷	+۲	۰	+۱	+۳	+۲	+۷	+۱

مجموع عدد اکسایش اتم های مختلف در یک گونه، برابر با بار گونه است. در گونه های خنثی، مجموع عدد اکسایش اتم ها برابر صفر است. بر این اساس، عدد اکسایش عناصر A و X را در ترکیب های ذکر شده به دست می آوریم:

$$ASO_4 : A + (-2) = 0 \Rightarrow A = +2$$

$$X_2O_5 : 2X + 5 \times (-2) = 0 \Rightarrow X = +5$$

باتوجه به جدول بالا، عنصر A می تواند جزو عناصر گروه ۲ باشد. عنصر X نیز می تواند جزو عناصر گروه ۱۵ باشد و عدد اکسایش ۳- تا ۵+ برای آن قابل قبول است. حال عدد اکسایش عناصر مجهول را در ترکیب های یونی ذکر شده، محاسبه می کنیم:

$$۱) A_2N_3 : 2A + 3 \times (-3) = 0 \Rightarrow A = 4/5 \times$$

$$ب) KXO_3 : +1 + X + 3 \times (-2) = 0 \Rightarrow X = +5 \checkmark$$

$$پ) AF_2 : A + 2 \times (-1) = 0 \Rightarrow A = 2 \checkmark$$

$$ت) X_2O : 2X + (-2) = 0 \Rightarrow X = 1 \checkmark$$

$$ث) A_2O_2 : 2A + 2 \times (-2) = 0 \Rightarrow A = \frac{4}{2} \times$$

$$ج) HXO_2 : +1 + X + 2 \times (-2) = 0 \Rightarrow X = 3 \checkmark$$

بر این اساس، فرمول شیمیایی ترکیب های (ب)، (پ)، (ت) و (ج) می تواند درست باشد.

گروه آموزشی ماز

۸۰- چه تعداد از عبارات های داده شده درست هستند؟

آ: در لایه تروپوسفر زمین، از واکنش گاز اکسیژن با یک گونه رادیکال، گاز اوزون تولید می شود.

ب: در دمای $-60^\circ C$ ، دو مورد از مواد شرکت کننده در فرایند هابر به حالت گاز و یک ماده به حالت مایع است.

پ: با افزایش ارتفاع در هریک از لایه های هواکره، میزان جنب و جوش ذرات سازنده هواکره همواره کاهش می یابد.

ت: گاز نیتروژن مونوکسید موجود در تروپوسفر، فقط از واکنش گازهای N_2 و O_2 در موتور خودروها می تواند تولید شود.

۱ (۱)	۲ (۲)	۳ (۳)	۴ (۴)
-------	-------	-------	-------

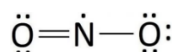
پاسخ: گزینه ۲ (متوسط - مفهومی - ۱۰۰۲)

پاسخ تشریحی

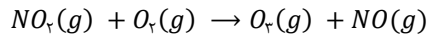
فقط عبارات های (آ) و (ب) درست هستند.

بررسی موارد:

آ: ساختار لوویس نیتروژن دی اکسید، به صورت زیر است:

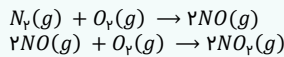


نیتروژن دی اکسید در حضور نور خورشید با گاز اکسیژن واکنش داده و مقداری اوزون تروپوسفری تولید می کند.

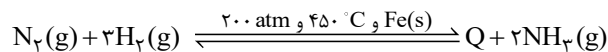


رادیکال، گونه فعال و ناپایداری است که در ساختار خود الکترون جفت نشده دارد. در بدن ما طی واکنش های متنوع و پیچیده، رادیکال هایی تولید می شوند که اگر به وسیله بازدارنده ها جذب نشوند، می توانند با انجام واکنش های سریع، به بافت بدن آسیب برسانند. لیکوپن یکی از این بازدارنده هاست که در گوجه فرنگی و هندوانه یافت می شود. اکسیژن در واکنش با یک گونه رادیکال (نیتروژن دی اکسید)، اوزون تروپوسفری را تولید می کند.

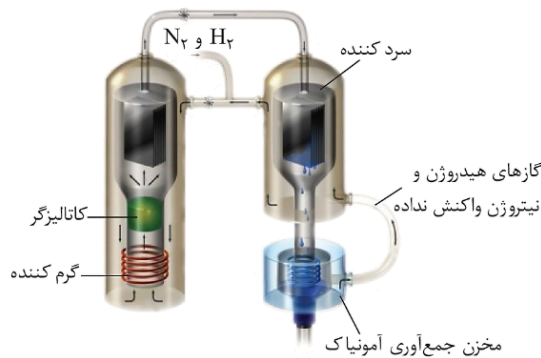
نیتروژن با عدد اتمی ۷، نخستین عنصر گروه ۱۵ جدول دوره ای است. این گاز در صنعت و زندگی روزمره، کاربردهای مختلفی از جمله پرکردن تایر خودروها، نگهداری نمونه های بیولوژیکی و همچنین انجماد مواد دارد. توجه داریم که گیاهان نمی توانند به طور مستقیم از گاز نیتروژن موجود در هوا کره استفاده کنند و جانداران ذره بینی موجود در خاک، این گاز را برای مصرف گیاهان در خاک تثبیت می کنند. گاز نیتروژن به عنوان اصلی ترین جزء سازنده هوا کره، واکنش پذیری بسیار کمی دارد و به طور معمول با اکسیژن واکنش نمی دهد. تنها در هنگام رعد و برق و همچنین درون موتور خودروها، این دو گاز ترکیب شده و به اکسیدهای نیتروژن تبدیل می شوند. معادله این واکنش ها به صورت زیر است:



پ: معادله واکنش فرایند هابر به صورت زیر است:

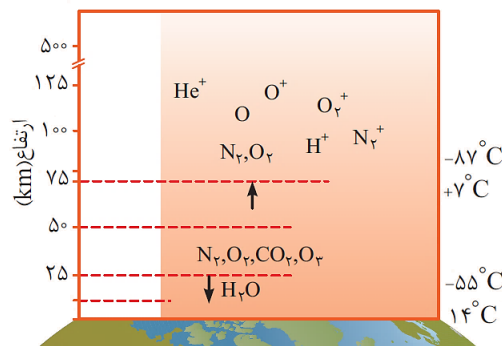


در طی فرایند هابر، گازهای نیتروژن و هیدروژن را در فشار $200\ atm$ و دمای $450\ ^\circ C$ وارد مخزن می کنند. این واکنش برگشت پذیر بوده و در مخلوط نهایی، هر سه گاز نیتروژن، هیدروژن و آمونیاک حضور دارند. با کاهش دمای مخزن تا پایین تر از نقطه جوش آمونیاک ($-33\ ^\circ C$) این گاز را به حالت مایع در آورده و آن را از مخلوط جدا می کنند. در پایان، باقی مانده گازهای نیتروژن و هیدروژن را برای مصرف در واکنش تولید آمونیاک به مخزن اول باز می گردانند. تصویر زیر، نحوه تولید آمونیاک در فرایند هابر را نشان می دهد:



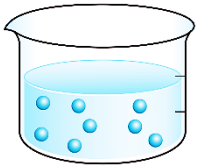
نقطه جوش گازهای هیدروژن، نیتروژن و آمونیاک به ترتیب برابر $-253\ ^\circ C$ ، $-196\ ^\circ C$ و $-33\ ^\circ C$ است. هر ماده ای در بالاتر از نقطه جوش خود، به حالت گاز است. در دمایی بین نقطه جوش و نقطه ذوب خود به حالت مایع و در دماهایی پایین تر از نقطه ذوب خود به حالت جامد یافت می شود. دمای $-60\ ^\circ C$ از نقطه جوش نیتروژن و هیدروژن بالاتر است، پس این دو نمونه در این دما به حالت گاز هستند اما این دما از نقطه جوش آمونیاک پایین تر است پس آمونیاک در این دما به حالت مایع یافت می شود.

پ: دمای یک نمونه، میزان جنب و جوش ذرات آن نمونه از ماده را نشان می دهد. با افزایش دما، میزان جنب و جوش ذرات سازنده مواد افزایش پیدا می کند. تصویر زیر، روند تغییر دما در لایه های مختلف هوا کره را نشان می دهد:



همانطور که مشخص است، روند تغییر دما در لایه های مختلف هوا کره یکسان نیست.

ت: علاوه بر فرایندهای انجام شده در موتور خودروها، گاز نیتروژن در حین رعد و برق از واکنش گازهای نیتروژن و اکسیژن نیز تولید می شود.



۸۱- اگر هر ذره نشان داده شده در محلول ۲۰۰ میلی لیتری مقابل، هم‌ارز با $10^{22} \times \frac{3}{0.1}$ ذره از یون کلرید موجود در محلول منیزیم کلرید باشد، غلظت نمک در این محلول چند مولار بوده و 50 mL از آن، با چند گرم نقره نیترات با خلوص 80% به طور کامل واکنش می‌دهد؟

$$(Ag = 108 \text{ و } O = 16 \text{ و } N = 14 : g.mol^{-1})$$

$$42/5 - 0/25 \text{ (۴)}$$

$$21/25 - 0/25 \text{ (۳)}$$

$$42/5 - 1 \text{ (۲)}$$

$$21/25 - 1 \text{ (۱)}$$

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط - مساله - ۱۰۰۳)

پاسخ تشریحی:

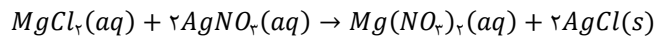
ابتدا تعداد مول منیزیم کلرید موجود در محلول را محاسبه می‌کنیم:

$$? \text{ mol } MgCl_2 = \text{ذره} \times \frac{3/0.1 \times 10^{22} \text{ ion } Cl^-}{\text{ذره} 1} \times \frac{1 \text{ mol } Cl^-}{6/0.2 \times 10^{23} \text{ ion } Cl^-} \times \frac{1 \text{ mol } MgCl_2}{2 \text{ mol } Cl^-} = 0/2 \text{ mol}$$

در مرحله بعد، غلظت منیزیم کلرید را در محلول بدست می‌آوریم:

$$\text{غلظت مولار} = \frac{\text{تعداد مول}}{\text{حجم}} = \frac{0/2 \text{ mol}}{0/2 \text{ L}} = 1 \text{ mol.L}^{-1}$$

نقره نیترات طبق معادله موازنه شده زیر، با منیزیم کلرید واکنش می‌دهد:



در مرحله بعد، جرم نقره نیترات خالص مصرف شده را محاسبه می‌کنیم:

$$? \text{ g } AgNO_3 = 50 \text{ ml محلول} \times \frac{0/2 \text{ mol } MgCl_2}{200 \text{ ml محلول}} \times \frac{2 \text{ mol } AgNO_3}{1 \text{ mol } MgCl_2} \times \frac{170 \text{ g } AgNO_3}{1 \text{ mol } AgNO_3} = 17 \text{ g}$$

در پایان، باتوجه به فرمول، جرم نقره نیترات ناخالص مصرف شده را بدست می‌آوریم:

$$\text{جرم ماده خالص} = \frac{\text{جرم ماده ناخالص}}{\text{درصد خلوص}} \times 100 \Rightarrow 80 = \frac{17}{\text{جرم ماده ناخالص}} \times 100 \Rightarrow 21/25 \text{ g}$$

گروه آموزشی ماز

۸۲- چند مورد از مطالب زیر، نادرست است؟

- آ: در فرایند تصفیه آب برای آشامیدن، آنیون حاصل از واکنش پذیرترین نافلز موجود در تناوب دوم، به آب افزوده می‌شود.
ب: اگر گشتاور دوقطبی مولکول A بیشتر از مولکول B باشد، دمای جوش ماده A به یقین بیشتر از ماده B خواهد بود.
پ: در ساختار یک ترکیب یونی دوتایی، تعداد ذرات یونی که قدر مطلق بار بیشتری دارد، کمتر از یون دیگر است.
ت: همه مولکول‌های سه‌اتمی خمیده با ساختار V شکل، در حضور یک میدان الکتریکی جهت‌گیری پیدا می‌کنند.

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط - مفهومی - ۱۰۰۳)

پاسخ تشریحی:

فقط عبارت (ب) نادرست است.

بررسی موارد:

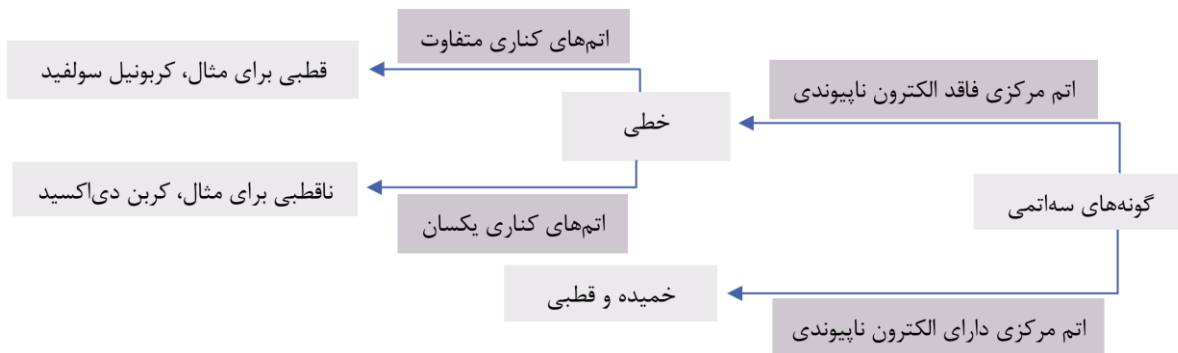
آ: آب آشامیدنی مخلوطی زلال و همگن بوده که حاوی مقداری از یون‌های مختلف است. برخی از این یون‌ها به طور طبیعی در آب حل شده و برخی نیز در مراکز تامین آب آشامیدنی به آن افزوده می‌شود. برای نمونه، یون فلوئورید برای حفظ سلامت دندان‌ها به آب آشامیدنی افزوده می‌شود. از طرفی غلظت برخی از یون‌ها از جمله یون نیترات باید کمترین حد ممکن باشد، پس اگر مقدار آن در آب از حدی بالاتر باشد، آن را از طریق روش‌های مختلف جداسازی می‌کنند. توجه داریم که فلوئور اولین عضو خانواده هالوژن‌ها در گروه ۱۷ جدول دوره‌ای بوده و بین عناصر دوره دوم و همچنین کل عناصر جدول دوره‌ای، بیشترین خاصیت نافلزی را دارد.

ب: نقطه جوش به عوامل مختلفی از جمله جرم مولی، قطبیت و داشتن یا نداشتن پیوند هیدروژنی بستگی دارد. اگر نقطه جوش ماده A نسبت به ماده B بیشتر باشد، نمی‌توان گفت به طور حتم قطبیت آن نیز بالاتر است، بلکه ممکن است جرم مولی این ماده در مقایسه با ماده دیگر خیلی بیشتر باشد. برای مثال، با اینکه ید ناقطبی است، در مقایسه با آمونیاک دمای جوش بالاتری دارد.

پ: ترکیب های یونی از نظر بار الکتریکی خنثی هستند، به این معنی که مجموع بار الکتریکی یون های موجود در آن ها برابر صفر است. به همین دلیل یونی که قدر مطلق بار آن بزرگ تر باشد، تعداد کمتری در ترکیب یونی خواهد داشت. برای مثال در ترکیب منیزیم کلرید ($MgCl_2$)، اندازه بار یون منیزیم دو برابر اندازه بار یون کلرید است، پس برای اینکه مجموع بار یون ها برابر صفر شود، تعداد یون های کلرید باید دو برابر یون های منیزیم باشد.

ت: جهت گیری مولکول های قطبی یک ماده در میدان الکتریکی، مبنای اندازه گیری کمیتی به نام گشتاور دو قطبی است. در واقع مولکول های قطبی، در میدان الکتریکی جهت گیری پیدا کرده و مولکول های ناقطبی، جهت گیری پیدا نمی کنند. مولکول های سه اتمی با ساختار خمیده، قطعاً روی اتم مرکزی خود دارای جفت الکترون ناپیوندی بوده و در حضور میدان الکتریکی، جهت گیری پیدا می کنند.

در رابطه با انواع گونه های سه اتمی، داریم:



مولکول های ناقطبی شرایط زیر را دارند:

مولکول های دارای دو اتم یکسان مانند F_2 و N_2
مولکول هایی با اتم های مشابه پیرامون اتم مرکزی و فاقد جفت الکترون ناپیوندی روی اتم مرکزی مانند CO_2 و CH_4

مولکول های قطبی شرایط زیر را دارند:

مولکول های دارای جفت الکترون ناپیوندی روی اتم مرکزی مانند NH_3 و SO_2
مولکول های دواتمی با دو اتم متفاوت مانند HCl و CO
مولکول های دارای اتم های متفاوت پیرامون اتم مرکزی مانند CH_3Cl

عوامل موثر بر نیروی بین مولکولی (وان در والسی)، به شرح زیر هستند:

- (۱) قطبیت مولکول: هر چه قطبیت بیشتر باشد $\leftarrow$ نیروی بین مولکولی بیشتر است $\leftarrow$ نقطه جوش بیشتر است
مثال: HCl قطبی و N_2 ناقطبی است. بنابراین نیروی بین مولکولی و نقطه جوش HCl بیشتر است.
 - (۲) جرم و حجم مولکول: هر چه جرم و حجم بیشتر باشد $\leftarrow$ نیروی بین مولکولی بیشتر است $\leftarrow$ نقطه جوش بیشتر است
مثال: I_2 جرم و حجم بیشتری نسبت به Br_2 دارد، بنابراین نیروی بین مولکولی قوی تر و نقطه جوش بالاتری دارد.
- نکته: هر چه نقطه جوش یک گاز بالاتر باشد (به صفر نزدیک تر باشد)، آن ماده راحت تر به مایع تبدیل می شود. به عبارتی هر چه نقطه جوش یک گاز بالاتر باشد، مایع کردن آن در دماهای بالاتری انجام می شود.

گروه آموزشی ماز

۸۳- یک مخلوط ۲۵ گرمی از گاز کربن مونوکسید و بخار پروپان را در حضور مقدار کافی اکسیژن، به طور کامل می سوزانیم. اگر طی این فرایند، ۲۸ لیتر گاز کربن دی اکسید در شرایط استاندارد تولید شود، درصد جرمی اتم های هیدروژن در مخلوط آغازی چقدر بوده است؟

($O = 16$ و $C = 12$ و $H = 1 : g.mol^{-1}$)

۲۴ (۴)

۱۶ (۳)

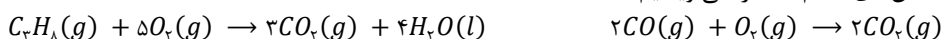
۱۲ (۲)

۸ (۱)

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط - مساله - ۱۰۰۲)

پاسخ شریعی

ابتدا معادله موازنه شده واکنش های انجام شده را می نویسیم:



توجه داریم بخاطر اینکه در صوت سوال ذکر شده که واکنش در شرایط استاندارد اتفاق می افتد، حالت آب را باید مایع فرض کنیم. مول کربن مونوکسید را برابر x و مول پروپان را برابر y در نظر می گیریم. مقدار x مول کربن مونوکسید جرمی معادل $28x$ گرم و y مول پروپان جرمی معادل $44y$ گرم خواهد داشت. مجموع جرم این دو ماده برابر ۲۵ گرم است، پس داریم:

$$28x + 44y = 25$$

مقدار x مول کربن مونوکسید طبق معادله موازنه شده، x مول کربن دی‌اکسید و y مول پروپان طبق معادله موازنه شده، $3y$ مول کربن دی‌اکسید تولید می‌کند. پس مجموع گاز کربن دی‌اکسید تولید شده برابر $x + 3y$ مول خواهد بود. در مرحله بعد، مول گاز کربن دی‌اکسید تولید شده را محاسبه می‌کنیم:

$$? \text{ mol } CO_2 = 28 \text{ L } CO_2 \times \frac{1 \text{ mol } CO_2}{22.4 \text{ L } CO_2} = 1/25 \text{ mol}$$

پس در رابطه با مقدار گاز کربن دی‌اکسید تولید شده، داریم:

$$3y + x = 1/25$$

در قدم بعد، با تشکیل دستگاه و حل دو معادله، مول اولیه هرکدام از گازها را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} 28x + 44y = 25 \\ 3y + x = 1/25 \end{cases} \Rightarrow x = 0/5, \quad y = 0/25$$

در کربن مونوکسید که اتم هیدروژنی وجود ندارد. در پروپان به ازای $0/25$ مول گاز، 2 مول اتم هیدروژن معادل 2 گرم هیدروژن حضور دارد. در پایان، درصد جرمی هیدروژن را در مخلوط اولیه بدست می‌آوریم:

$$\text{درصد جرمی} = \frac{\text{جرم ماده مورد نظر}}{\text{جرم کل}} \times 100 = \frac{2}{25} \times 100 = 8\%$$

گروه آموزشی ماز

۸۴- کدام موارد از عبارتهای زیر درست هستند؟

آ: در شرایط یکسان از نظر دما و فشار محیط، انحلال پذیری گاز آمونیاک در آب بیشتر از گاز نیتروژن خواهد بود.

ب: مطابق قانون هنری، انحلال گازها در آب گرماده بوده و افزایش دما، انحلال پذیری گازها در آب را کاهش می‌دهد.

پ: با رساندن دمای یک محلول از 20°C به 40°C ، انحلال پذیری پتاسیم نیترات در این محلول کمتر از 100% افزایش می‌یابد.

ت: اگر در دمای θ_1 ، انحلال پذیری لیتیم سولفات و پتاسیم کلرید در آب برابر باشد، در دماهای بالاتر از θ_1 ، درصد جرمی محلول سیر شده پتاسیم کلرید بیشتر از لیتیم سولفات می‌شود.

(۴) «ب» و «ت»

(۳) «ب» و «پ»

(۲) «آ» و «ت»

(۱) «آ» و «پ»

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط - مفهومی - ۱۰۰۳)

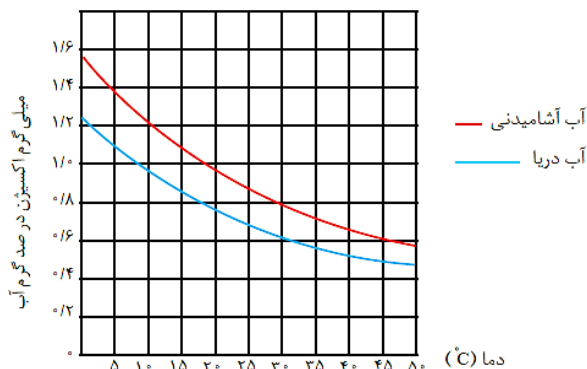
پاسخ تشریحی:

عبارتهای (آ) و (ت) درست هستند.

بررسی موارد:

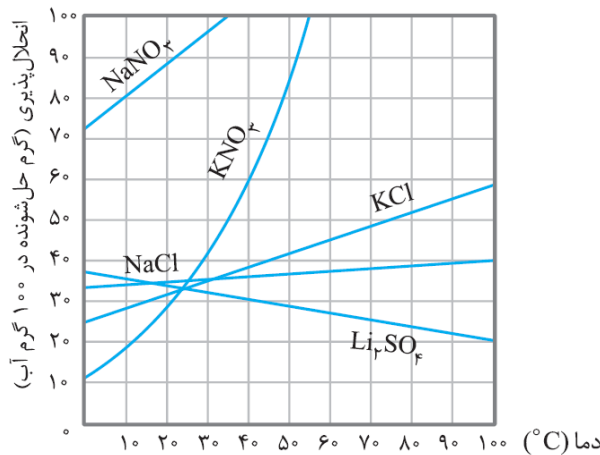
آ: انحلال پذیری گازها در آب به عوامل مختلفی بستگی دارد. از جمله این عوامل، واکنش دادن آن گاز با آب است. آمونیاک در هنگام حل شدن در آب، با آن واکنش داده و یونهای آمونیوم (NH_4^+) و هیدروکسید (OH^-) را تولید می‌کند اما گاز نیتروژن با آب واکنش نمی‌دهد. به طور کلی انحلال پذیری گازهایی که با آب واکنش می‌دهند، نسبت به انحلال پذیری گازهایی که با آن واکنش نمی‌دهند، بیشتر است.

ب: طبق قانون هنری، انحلال پذیری گازها با فشار، رابطه مستقیم و خطی دارد. توجه داریم که این قانون، ارتباط بین دما و انحلال پذیری گازها در آب را مقایسه نمی‌کند. به طور کلی، با افزایش دمای محلول، انحلال پذیری گازها در محلول کاهش پیدا می‌کند. تصویر زیر، مقایسه انحلال پذیری گاز اکسیژن را در آب آشامیدنی و آب دریا در دماهای مختلف مقایسه می‌کند:



همانطور که مشخص است، با افزایش مقدار نمک در آب، انحلال پذیری گاز اکسیژن در آن کاهش پیدا کرده است. از طرفی، با افزایش دما نیز انحلال پذیری این گاز در آب کاهش پیدا می‌کند پس می‌توان گفت انحلال گازها در آب، فرایندی گرماده است.

پ: جدول زیر، انحلال پذیری برخی نمکها را در آب در دماهای متفاوت مقایسه می‌کند.



انحلال پذیری نمک پتاسیم نترات (KNO_3) در دمای $20^\circ C$ کمی کمتر از 30 گرم در 100 گرم آب است، درحالیکه انحلال پذیری این نمک در دمای $40^\circ C$ بیش از 60 گرم در 100 گرم آب است. بر این اساس، می توان گفت انحلال پذیری نمک مورد نظر بیشتر از 100 درصد افزایش پیدا کرده است.

ت: انحلال پذیری نمک لیتیم سولفات با دما رابطه عکس و انحلال پذیری نمک پتاسیم کلرید با دما رابطه مستقیم دارد. اگر در دمای θ_1 انحلال پذیری این دو ترکیب یکسان باشد، در دماهای بالاتر، انحلال پذیری و در نتیجه درصد جرمی محلول سیر شده پتاسیم کلرید بالاتر خواهد بود.

گروه آموزشی ماز

۸۵- کدام یک از مطالب داده شده، درست است؟

- اگر کاتیون یک ترکیب را با کاتیون حاصل از یک فلز واکنش پذیرتر جایگزین کنیم، انحلال پذیری آن در آب کاهش می یابد.
- در صورت انداختن قطعاتی از فلزهای آهن، منیزیم و یا مس در محلول روی سولفات، یک محلول رنگی ایجاد می شود.
- در صورت انداختن یک میخ آهنی زنگ زده در محلول هیدروکلریک اسید، یک رسوب آجری در محلول ایجاد می شود.
- اگر به کمک فلز X بتوان آهن را از Fe_2O_3 استخراج کنیم، فلز X به یقین با Ag_2O نیز واکنش می دهد.

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط - مفهومی - ۱۱۰۱)

پاسخ تشریحی:

طبق یک قاعده کلی، اگر واکنش پذیری فلز X از واکنش پذیری فلز Y بیشتر باشد، با استفاده از فلز X می توان فلز Y را از ترکیب جداسازی و استخراج کرد. واکنش پذیری آهن نسبت به نقره بیشتر است. از طرفی واکنش پذیری فلز X نسبت به آهن بیشتر است، پس می توان نتیجه گرفت که فلز X نسبت به نقره نیز فعال تر است و می تواند آن را از ترکیب هایش جداسازی کند.

بررسی سایر گزینه ها:

- واکنش پذیری کاتیون لزوماً با انحلال پذیری ترکیب یونی حاصل ارتباط مستقیم ندارد. برای مثال ترکیب یونی آهن (II) کلرید در آب محلول و ترکیب یونی نقره کلرید در آب نامحلول است. این در حالی است که آهن نسبت به نقره فلزی فعال تر و با واکنش پذیری بالاتر است.
- محلول حاصل از انحلال روی سولفات در آب، بی رنگ است. فلزهای مس و آهن نسبت به روی واکنش پذیری کمتری داشته و با انداختن قطعاتی از آنها در محلول روی سولفات، واکنشی رخ نمی دهد پس تغییری نیز در رنگ محلول اتفاق نمی افتد.
- میخ زنگ زده حاوی آهن (III) اکسید است. با انداختن آن در محلول هیدروکلریک اسید، واکنش زیر انجام می شود:

$$Fe_2O_3(s) + 6HCl(aq) \rightarrow 2FeCl_3(aq) + 3H_2O(l)$$
محلول حاوی یون Fe^{3+} محلول در آب، زرد رنگ است. توجه داریم که طی این فرایند، هیچ ترکیب رسوبی در محلول ایجاد نمی شود.

گروه آموزشی ماز

۸۶- بر اثر سوختن 0.2 مول از یک هیدروکربن سیر شده که دارای ۲ حلقه کربنی در ساختار خود است، $5/4$ گرم آب تولید شده است. در ساختار این ماده، چند اتم کربن وجود داشته و جرم مولی آن، چند برابر جرم مولی پروپین خواهد بود؟

($O = 16$ و $C = 12$ و $H = 1$: $g.mol^{-1}$)

۶/۲۵ - ۱۸ (۴)

۵/۵۵ - ۱۶ (۳)

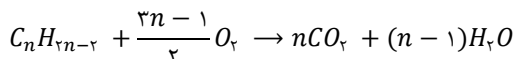
۶/۴۵ - ۱۸ (۲)

۵/۷۵ - ۱۶ (۱)



برای تعیین شمار اتم‌های هیدروژن موجود در یک هیدروکربن، از فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

$$(4 \times \text{تعداد پیوند سه‌گانه}) - (2 \times \text{تعداد پیوند دوگانه}) - (2 \times \text{تعداد حلقه}) + 2 = (2 \times \text{تعداد کربن}) + \text{تعداد اتم هیدروژن}$$
 باتوجه به فرمول، هیدروکربن سیرشده با n کربن و دو حلقه کربنی، تعداد $2n - 2$ هیدروژن در ساختار خود خواهد داشت. معادله موازنه شده سوختن کامل این هیدروکربن، به‌صورت زیر است:



طبق معادله موازنه شده، 0.2 مول از این هیدروکربن در طی سوختن کامل، مقدار $(0.2n - 0.2)$ مول آب (معادل با $0.36n - 0.36$ گرم آب) تولید خواهد کرد، پس خواهیم داشت:

$$0.36n - 0.36 = 5/4 \Rightarrow n = 16$$

پس فرمول هیدروکربن مدنظر به صورت $C_{16}H_{26}$ بوده و در هر واحد از مولکول این ترکیب آلی، تعداد ۱۶ اتم کربن وجود دارد. جرم مولی این ترکیب برابر ۲۲۲ گرم بر مول است.

آلکین‌ها دسته‌ای از هیدروکربن‌های زنجیری هستند که در ساختار خود، یک پیوند سه‌گانه دارند. آلکین‌ها واکنش‌پذیری بالایی داشته و همانند سایر هیدروکربن‌ها ناقطبی هستند. توجه داریم که مقدار قطبیت این مواد، تقریباً برابر صفر است (برخلاف مولکول‌های دواتمی جوهرسته که قطبیت آن‌ها دقیقاً برابر صفر است). نخستین و ساده‌ترین عضو این خانواده، اتین با فرمول مولکولی C_2H_2 بوده که در گذشته آن را با نام استیلن می‌خواندند. از اتین در جوشکاری و برشکاری فلزها استفاده می‌شود. دومین عضو خانواده آلکین‌ها، پروپین با فرمول شیمیایی C_3H_4 است.

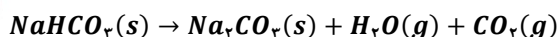
پروپین دومین عضو خانواده آلکین‌ها با فرمول مولکولی C_3H_4 و جرم مولی ۴۰ گرم بر مول است. در پایان نسبت خواسته شده را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{222}{40} = 5.55 \text{ برابر}$$

گروه آموزشی ماز

۸۷- یک نمونه از سدیم هیدروژن کربنات به جرم ۱۴۰ گرم را به طور کامل تجزیه می‌کنیم. اگر تفاوت جرم فراورده‌های گازی تولید شده در این فرایند برابر با $6/5$ گرم باشد، درصد خلوص سدیم هیدروژن کربنات مصرف شده چقدر بوده است؟

$$(Na = 23 \text{ و } O = 16 \text{ و } C = 12 \text{ و } H = 1 : g \cdot mol^{-1})$$



معادله واکنش موازنه شود

۳۰ (۴)

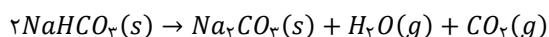
۴۰ (۳)

۶۰ (۲)

۸۰ (۱)



معادله موازنه شده واکنش انجام شده به‌صورت زیر است:



فراورده‌های گازی این واکنش شامل بخار آب و کربن دی‌اکسید می‌شود. باتوجه به معادله موازنه شده، به ازای مصرف ۲ مول سدیم هیدروژن کربنات (۱۶۸ گرم سدیم هیدروژن کربنات)، ۱ مول گاز کربن دی‌اکسید (۴۴ گرم گاز کربن دی‌اکسید) و ۱ مول بخار آب (۱۸ گرم بخار آب) تولید می‌شود. پس به ازای مصرف ۱۶۸ گرم سدیم هیدروژن کربنات، تفاوت جرم فراورده‌های گازی تولیدشده برابر ۲۶ گرم (۴۴-۱۸) خواهد بود. در مرحله بعد، مقدار سدیم هیدروژن کربنات خالص مصرف شده را محاسبه می‌کنیم:

$$? g NaHCO_3 = 6/5 g \text{ تفاوت} \times \frac{168 g NaHCO_3}{26 g \text{ تفاوت}} = 42 g$$

در مرحله آخر، درصد خلوص سدیم هیدروژن کربنات را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{درصد خلوص} = \frac{\text{جرم ماده خالص}}{\text{جرم ماده ناخالص}} \times 100 = \frac{42}{140} \times 100 = 30\%$$

در بسیاری از سوالات استوکیومتری، با مفاهیم درصد خلوص و بازده سر و کار داریم. برای محاسبه مقدار بازده یا درصد خلوص یک ماده بهتر است عیناً از فرمول درصد خلوص و بازده استفاده کنیم. اما برای سایر حالت‌ها، راه حل تستی وجود دارد:

(۱) اگر سوال مقدار ماده خالص و درصد خلوص را داده بود، از تقسیم مقدار ماده خالص به درصد خلوص، مقدار ماده ناخالص (کل) بدست می‌آید.

(۲) اگر سوال مقدار ماده ناخالص مصرفی (مقدار کل ماده مصرف شده) و درصد خلوص را داده بود، از ضرب مقدار ماده ناخالص در درصد خلوص، مقدار ماده خالص بدست می‌آید.

۳) اگر سوال مول یک واکنش دهنده و بازده را داده بود و مول یک فراورده را خواسته بود، مول واکنش دهنده را علاوه بر نسبت ضرایب استوکیومتری، در مقدار بازده نیز ضرب می‌کنیم تا مقدار عملی فراورده محاسبه شود.

۴) اگر سوال مول یک فراورده و بازده را داده بود و مول یک واکنش دهنده را خواسته بود، مول فراورده در نسبت ضرایب استوکیومتری ضرب کرده و سپس به بازده تقسیم می‌کنیم تا مقدار واکنش دهنده مصرف شده محاسبه شود.

توجه داریم در تبدیل مول دو فراورده به یکدیگر یا دو واکنش دهنده به یکدیگر، بازده هیچ تاثیری نخواهد داشت.

گروه آموزشی ماز

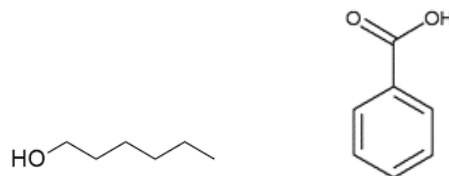
۸۸- کدام مطلب در رابطه با بنزوئیک اسید و ۱-هگزانول، درست است؟

- ۱) در ساختار هر دو، یک اتم هیدروژن متصل به اکسیژن وجود دارد.
- ۲) شمار اتم‌های کربن سازنده مولکول این دو ترکیب آلی با هم برابر است.
- ۳) هر دو مولکول در میدان الکتریکی جهت‌گیری کرده و انحلال‌پذیری آن‌ها در آب زیاد است.
- ۴) در ساختار مولکولی این دو ماده، اتم‌های کربن با عدد اکسایش بزرگ‌تر از صفر یافت می‌شود.

پاسخ: گزینه ۱ (آسان - حفظی - ۱۱۰۲)

پاسخ تشریحی:

ساختار بنزوئیک اسید و ۱-هگزانول به صورت زیر است:



یکی از این مواد دارای گروه هیدروکسیل بوده و یکی دارای گروه عاملی کربوکسیل است. همانطور که مشخص است، در ساختار هر دو ماده، یکی از اتم‌های هیدروژن به اتم اکسیژن با پیوند کووالانسی (اشتراکی) متصل شده است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

- ۲) در ساختار بنزوئیک اسید، ۷ اتم کربن و در ساختار ۱-هگزانول، ۶ اتم کربن وجود دارد.
- ۳) هردو مولکول، در ساختار خود بخش‌های قطبی و ناقطبی دارند اما در هر دو این مولکول‌ها، به ویژه مولکول هگزانول، بخش ناقطبی بر بخش قطبی غلبه داشته و به همین دلیل، این مواد انحلال‌پذیری بالایی در آب ندارند.
- ۴) در ساختار بنزوئیک اسید، عدد اکسایش کربن موجود در گروه اسیدی برابر ۳+ است اما در ۱-هگزانول عدد اکسایش کربن‌ها بین ۳- و ۱- است و کربنی با عدد اکسایش مثبت نداریم.

گروه آموزشی ماز

۸۹- چند مورد از مطالب زیر درست است؟

- آ: اگر در یک سامانه، گاز N_2O_4 به NO_2 تجزیه شود، دمای محیط اطراف آن سامانه افزایش می‌یابد.
- ب: یک گلوله آهن گداخته شده در مقایسه با یک استخر آب با دمای $50^\circ C$ ، انرژی گرمایی بیشتری دارد.
- پ: اگر ظرفیت گرمایی نمونه‌هایی از آب و روغن زیتون برابر باشد، جرم نمونه روغن زیتون بیشتر خواهد بود.
- ت: اگر حجم یک مول گاز برابر $30L$ باشد، میانگین انرژی جنبشی ذرات این ماده به یقین بیشتر از مقداری آب $0^\circ C$ است.

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

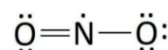
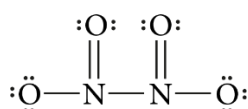
پاسخ: گزینه ۱ (سخت - مفهومی - ۱۱۰۲)

پاسخ تشریحی:

فقط عبارت (پ) درست است.

بررسی موارد:

آ: تصاویر زیر ساختار ترکیب‌های N_2O_4 و NO_2 را نمایش می‌دهد:



واکنش تجزیه گاز N_2O_4 به NO_2 گرماگیر بوده و با گرفتن گرما از محیط اطراف، دمای محیط را کاهش می‌دهد.

به عنوان یک قانون کلی، تجزیه پیوند گرماگیر بوده و با گرفتن انرژی از محیط اطراف، دمای آن را کاهش می‌دهد. توجه داریم که در فرایندهای گرماگیر، انرژی فرآورده‌ها بیشتر از انرژی واکنش‌دهنده‌هاست. تشکیل پیوند نیز یک واکنش گرماگیر بوده و با دادن انرژی به محیط اطراف، دمای آن را افزایش می‌دهد. توجه داریم که در فرایندهای گرماگیر، انرژی مواد واکنش‌دهنده بیشتر از فرآورده‌ها است.

ب: انرژی گرمایی، به مجموع انرژی جنبشی ذرات سازنده یک ماده گفته می‌شود و به عواملی مثل جرم، دما و جنس آن نمونه بستگی دارد. با توجه به اینکه جرم آب موجود در استخر به مراتب از گلوله آهن بیشتر است، انرژی گرمایی آن نیز نسبت به گلوله آهنی بیشتر است.

پ: ظرفیت گرمایی به گرمای لازم برای افزایش دمای یک نمونه به اندازه 1°C گفته می‌شود و با حاصل ضرب ظرفیت گرمایی ویژه در جرم نمونه، رابطه مستقیم دارد. ظرفیت گرمایی ویژه گرمای لازم برای افزایش دمای یک نمونه 1°C گرمی از ماده به اندازه 1°C گفته می‌شود. ظرفیت گرمایی ویژه روغن نسبت به آب کمتر است، پس برای اینکه ظرفیت گرمایی دو نمونه برابر باشد، باید جرم نمونه روغن بیشتر از آب باشد.

روغن و چربی از جمله ترکیب‌های آلی هستند که به دلیل تفاوت در ساختار، رفتارهای فیزیکی و شیمیایی متفاوتی دارند. روغن دارای حالت فیزیکی مایع (l) بوده و چربی دارای حالت فیزیکی جامد (s) است. از دیدگاه شیمیایی، در ساختار مولکول‌های روغن پیوندهای دوگانه بیشتری وجود داشته و به همین خاطر، روغن در مقایسه با چربی واکنش‌پذیری بیشتری دارد. هرچقدر که تعداد پیوندهای دوگانه در یک نمونه از روغن بیشتر باشد، آن نمونه از روغن با سرعت بالاتری با محلول برم واکنش داده و آن را بی‌رنگ می‌کند.

ت: با توجه به قانون گازها ($PV = nRT$)، حجم یک نمونه گاز با حاصل تقسیم دما به فشار آن نمونه ($\frac{T}{P}$) رابطه مستقیم دارد. در شرایط استاندارد (دمای 0°C و فشار 1 atm)، مقدار 1 مول از هر گازی 22.4 لیتر حجم دارد. در شرایط ذکرشده، حجم 1 مول گاز 30 لیتر شده است، پس می‌توان گفت نسبت $\frac{T}{P}$ در این نمونه گاز بیشتر از حالت استاندارد است ولی نمی‌توان به یقین گفت که دما در این شرایط بیشتر از شرایط استاندارد است. توجه داریم دمای یک نمونه نشان‌دهنده میانگین انرژی جنبشی ذرات آن نمونه است.

گروه آموزشی ماز

۹۰- با توجه به ساختار مولکول مقابل، چند مورد از مطالب زیر درست است؟ ($H = 1\text{ g.mol}^{-1}$)

آ: چهار اتم کربن در آن، تنها به اتم‌های کربن متصل شده‌اند.

ب: بیشتر از 25% اتم‌های کربن، با اتم‌های اکسیژن پیوند دارند.

پ: شمار گروه‌های CH_2 در آن، 2 برابر شمار گروه‌های CH_3 است.

ت: شمار جفت الکترون‌های ناپیوندی در آن، 5 برابر متیل آمین است.

ث: اگر پیوندهای $C = C$ آن به پیوند یگانه تبدیل شود، جرم مولی آن 4 واحد افزایش می‌یابد.

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

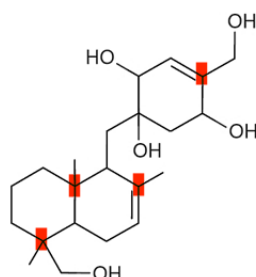
پاسخ: گزینه ۲ (متوسط - مفهومی - ۱۱۱)

پاسخ تشریحی:

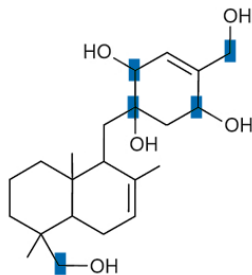
فرمول شیمیایی این ترکیب به صورت $C_{27}H_{46}O_5$ است. در رابطه با این ترکیب، عبارت‌های (آ) و (ث) درست هستند.

بررسی موارد:

آ: هر اتم کربن، در ساختار خود 4 الکترون ظرفیتی دارد که با استفاده از آن‌ها می‌تواند در تشکیل 4 پیوند شرکت کند. کربنی که از 4 الکترون ظرفیتی خود برای اتصال به سایر اتم‌های کربن استفاده کند، نمی‌تواند با سایر اتم‌ها (اکسیژن یا هیدروژن) پیوندی برقرار کند. کربن‌هایی با این شرایط، در شکل مقابل با رنگ قرمز مشخص شده‌اند:

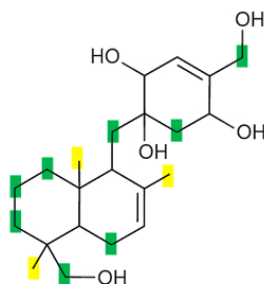


ب: اتم‌های کربنی که با اتم اکسیژن پیوند دارند، در شکل زیر با رنگ آبی مشخص شده‌اند:



همانطور که مشخص است، تعداد ۵ اتم کربن با اتم‌های اکسیژن پیوند اشتراکی برقرار کرده‌اند که تقریباً معادل $22/7$ درصد شمار اتم‌های کربن ترکیب است ($22/7 \approx 100 \times \frac{5}{77}$).

پ: کربنی که با سایر اتم‌های کربن و اتم‌های اکسیژن ۲ پیوند برقرار کند، به صورت گروه CH_2 و کربنی که با سایر اتم‌های کربن و اکسیژن‌ها تنها ۱ پیوند برقرار کند، به صورت گروه CH_3 دیده می‌شود. در تصویر زیر، گروه‌های CH_2 با رنگ سبز و گروه‌های CH_3 با رنگ زرد مشخص شده‌اند:



همانطور که مشخص است شمار گروه‌های CH_2 بیش از دو برابر شمار گروه‌های CH_3 است.

ت: در ساختار مولکولی ترکیب ذکر شده، ۱۰ جفت الکترون ناپیوندی روی اتم‌های اکسیژن قرار دارد. در متیل آمین نیز تنها ۱ جفت الکترون ناپیوندی روی اتم نیتروژن حضور دارد ($\frac{1}{2} = 10$).

در ترکیب‌های آلی، اتم‌های کربن و هیدروژن از همه الکترون‌های ظرفیتی خود برای تشکیل پیوند استفاده می‌کنند. اتم‌های اکسیژن و عناصر هم‌گروه آن مانند گوگرد، ۶ الکترون ظرفیتی دارند که ۲ مورد از آن‌ها را برای تشکیل پیوند استفاده می‌کنند و ۴ الکترون به صورت ۲ جفت الکترون ناپیوندی روی اتم قرار می‌گیرد. اتم‌های نیتروژن و عناصر هم‌گروه آن نیز ۵ الکترون ظرفیتی دارند که ۳ مورد از آن‌ها را برای تشکیل پیوند استفاده می‌کنند و ۲ الکترون نیز به صورت ۱ جفت الکترون ناپیوندی روی اتم قرار می‌گیرد. هالوژن‌ها نیز ۷ الکترون ظرفیتی دارند که ۱ الکترون برای تشکیل پیوند استفاده می‌کنند و ۶ الکترون باقی‌مانده به صورت ۳ جفت الکترون ناپیوندی روی اتم آن‌ها قرار می‌گیرد. با توجه به نکات گفته شده، برای شمارش جفت الکترون پیوندی (تعداد پیوند) و جفت الکترون‌های ناپیوندی در ترکیب‌های آلی، از فرمول‌های زیر استفاده می‌کنیم:

$$\text{تعداد پیوند} = \frac{(1 \times \text{اتم‌های هالوژن}) + (3 \times \text{اتم‌های نیتروژن}) + (2 \times \text{اتم‌های اکسیژن}) + (1 \times \text{اتم‌های هیدروژن}) + (4 \times \text{اتم‌های کربن})}{2}$$

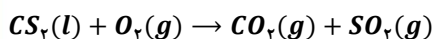
$$\text{تعداد جفت الکترون ناپیوندی} = (3 \times \text{اتم‌های هالوژن}) + (1 \times \text{اتم‌های نیتروژن}) + (2 \times \text{اتم‌های اکسیژن})$$

ث: با تبدیل هر پیوند $C = C$ به پیوند $C - C$ ، به هر کدام از اتم‌های کربن که در تشکیل پیوند شرکت داشته‌اند، ۱ اتم هیدروژن متصل می‌شود. ترکیب ذکر شده، دو پیوند دوگانه کربن-کربن دارد، بنابراین با این تغییر ۴ گرم بر مول به جرم مولی آن افزوده می‌شود.

گروه آموزشی ماز

۹۱- با توجه به واکنش زیر، برای تشکیل ۳۲ گرم گاز SO_2 ، چند میلی‌لیتر کربن دی‌سولفید با چگالی 1.26 g/mL و با درصد خلوص ۵۰٪ لازم است و تفاوت جرم کربن دی‌اکسید تولید شده و اکسیژن مصرف شده در این واکنش، برابر با چند گرم خواهد بود؟

$$(S = 32 \text{ و } O = 16 \text{ و } C = 12 : \text{g.mol}^{-1})$$



معادله واکنش موازنه شود

$$26 - 8 \quad (4)$$

$$26 - 10 \quad (3)$$

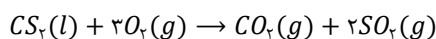
$$13 - 8 \quad (2)$$

$$13 - 10 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۱ (سخت - مساله - ۱۱۰۱)

پاسخ تشریحی

معادله موازنه شده واکنش انجام شده، به صورت زیر است:



ابتدا با استفاده از مقدار گاز گوگرد دی‌اکسید تولید شده، جرم کربن دی‌سولفید خالص مصرف شده را محاسبه می‌کنیم:

$$? \text{ g } CS_2 = 32 \text{ g } SO_2 \times \frac{1 \text{ mol } SO_2}{64 \text{ g } SO_2} \times \frac{1 \text{ mol } CS_2}{2 \text{ mol } SO_2} \times \frac{76 \text{ g } CS_2}{1 \text{ mol } CS_2} = 19 \text{ g}$$

در مرحله بعد جرم کربن دی سولفید ناخالص را بدست می آوریم:

$$\text{جرم ماده خالص} = \frac{\text{جرم ماده ناخالص}}{\text{درصد خلوص}} \times 100 \Rightarrow 50 = \frac{19}{\text{جرم ماده ناخالص}} \times 100 \Rightarrow 38 \text{ g}$$

با استفاده از فرمول چگالی، جرم کربن دی سولفید ناخالص را به حجم آن تبدیل می کنیم:

$$\text{چگالی} = \frac{\text{جرم}}{\text{حجم}} \Rightarrow 3/8 \text{ g} \cdot \text{mL}^{-1} = \frac{38 \text{ g}}{\text{حجم}} \Rightarrow \text{حجم} = 10 \text{ mL}$$

حال، مقدار اکسیژن مصرف شده و کربن دی اکسید تولید شده را بدست می آوریم:

$$? \text{ g } O_2 = 32 \text{ g } SO_2 \times \frac{1 \text{ mol } SO_2}{64 \text{ g } SO_2} \times \frac{3 \text{ mol } O_2}{2 \text{ mol } SO_2} \times \frac{32 \text{ g } O_2}{1 \text{ mol } O_2} = 24 \text{ g}$$

$$? \text{ g } CO_2 = 32 \text{ g } SO_2 \times \frac{1 \text{ mol } SO_2}{64 \text{ g } SO_2} \times \frac{1 \text{ mol } CO_2}{2 \text{ mol } SO_2} \times \frac{44 \text{ g } CO_2}{1 \text{ mol } CO_2} = 11 \text{ g}$$

بنابراین تفاوت جرم اکسیژن مصرف شده و کربن دی اکسید تولید شده، برابر ۱۳ گرم خواهد بود.

گروه آموزشی ماز

۹۲- چند مورد از مطالب زیر در رابطه با سلولز درست است؟

آ: برخلاف کولار، یک پلیمر زیست تخریب پذیر است.

ب: مونومر سازنده آن، از تجزیه ذرات مالتوز تولید می شود.

پ: نوعی پلی استر بوده و در ساختار آن، حلقه های شش ضلعی وجود دارد.

ت: عناصر موجود در ساختار این پلیمر، در ساختار ذرات پلی لاکتیک اسید نیز یافت می شود.

ث: در طول سال های اخیر، روند تولید الیاف ساخته شده از این پلیمر، روند افزایشی داشته است.

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط - مفهومی - ۱۱۰۳)

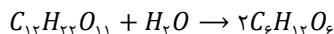
پاسخ تشریحی:

عبارت های (آ)، (ب)، (ت) و (ث) درست هستند.

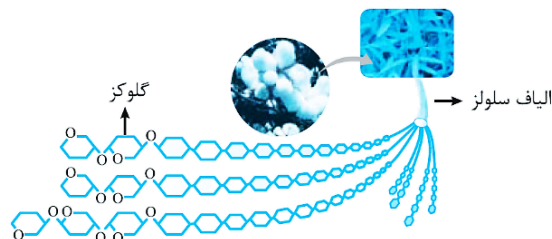
بررسی موارد:

آ: کولار یکی از پلی آمیدهای ساختگی است. این پلیمر از فولاد هم جرم خود، ۵ برابر مقاوم تر است. از کولار در تهیه تایر اتوموبیل، قایق بادبانی، لباس های مخصوص مسابقه موتورسواری و جلیقه ضد گلوله استفاده می شود. این پلیمر همانند اغلب پلیمرهای ساختگی زیست تخریب ناپذیر است. سلولز نوعی پلیمر طبیعی و زیست تخریب پذیر است که همانند نشاسته از ذرات گلوکز تولید شده است.

ب: گلوکز که واحد تشکیل دهنده سلولز است، از واکنش مالتوز موجود در جوانه گندم با آب نیز تولید می شود. معادله این واکنش به صورت زیر است:



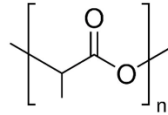
پ: ساختار سلولز به صورت زیر است:



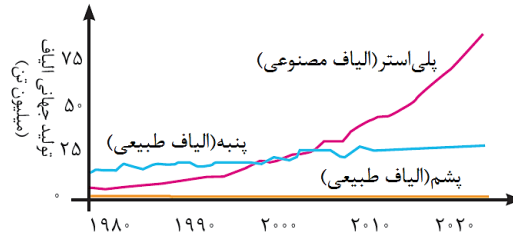
همانطور که مشخص است، سلولز از اتصال واحدهای شش ضلعی تشکیل شده است که در ساختار این حلقه شش ضلعی، ۵ اتم کربن و ۱ اتم اکسیژن حضور دارد. اتم اکسیژن، حلقه های شش ضلعی گلوکز را به صورت گروه عاملی اتری به یکدیگر متصل می کند و نشاسته که نوعی پلیمر با گروه عاملی اتری است را ایجاد می کند.

ت: در ساختار نشاسته، همانند پلی لاکتیک اسید، عناصر کربن، هیدروژن و اکسیژن حضور دارند. برای تولید پلی لاکتیک اسید به صورت صنعتی، ابتدا نشاسته موجود در فراورده های کشاورزی مانند سیب زمینی، ذرت و نیلشکر را به لاکتیک اسید تبدیل می کنند. مولکول های لاکتیک اسید، یک گروه عاملی الکلی و یک گروه عاملی کربوکسیل دارند. از واکنش مولکول های لاکتیک اسید با یکدیگر، پلی استری زیست تخریب پذیر به نام پلی لاکتیک اسید تولید می شود.

تصویر زیر ساختار پلی لاکتیک اسید را نمایش می دهد:



ث: الیاف پنبه از سلولز ساخته شده اند. نمودار زیر روند تولید الیاف پشمی، نخی (پنبه) و پلی استری را در سطح جهان نشان دهد:



همانطور که مشخص است، روند تولید الیاف نخی همانند الیاف پلی استری، در طی سالیان اخیر رو به افزایش بوده است.

گروه آموزشی ماز

۹۳- چند مورد از مطالب زیر درست است؟

- آ: استون، اتانول و پروپانویک اسید، از طریق جاذبه های بین مولکولی مشابه در آب حل می شوند.
 ب: یک نمونه از شربت معده، برخلاف یک نمونه از رنگ های پوششی، ناپایدار بوده و ته نشین می شود.
 پ: با افزودن نمک سدیم فسفات به صابون ها، قدرت پاک کنندگی این مواد در مواجهه با آب سخت افزایش می یابد.
 ت: شمار عناصر موجود در ساختار یک پاک کننده غیر صابونی، می تواند برابر با شمار عناصر در ساختار نوعی صابون باشد.
- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط - حفظی و مفهومی - ۱۲۰۱)

پاسخ شریعی

عبارت های (آ)، (ب) و (پ) درست هستند.

بررسی موارد

آ: اتانول و پروپانویک اسید، در ساختار خود هیدروژن متصل به اتم اکسیژن داشته و با آب پیوند هیدروژنی برقرار می کنند و در آب حل می شوند. استون نیز به واسطه جفت الکترون های ناپیوندی روی اتم اکسیژن خود، با آب پیوند هیدروژنی برقرار می کند.

استون با فرمول مولکولی C_3H_6O نخستین عضو خانواده کتون هاست. از این ترکیب به عنوان حلال انواع لاک ها، مواد رنگی و برخی چربی ها استفاده می شود. از طرفی این ماده در آب به خوبی حل می شود و نمی توان محلول سیر شده ای از آن تهیه کرد. بین مولکول های استون، پیوند هیدروژنی حضور ندارد و به دلیل وجود بخش های قطبی و ناقطبی در ساختار این ماده، استون می تواند مواد ناقطبی مانند چربی ها را در خود حل کند. زمانی که استون را در آب حل می کنیم، بین مولکول های استون و آب پیوند هیدروژنی تشکیل شده و در این حالت، می تواند به خوبی در آب که نوعی ماده با قطبیت بسیار بالا است نیز حل شود.

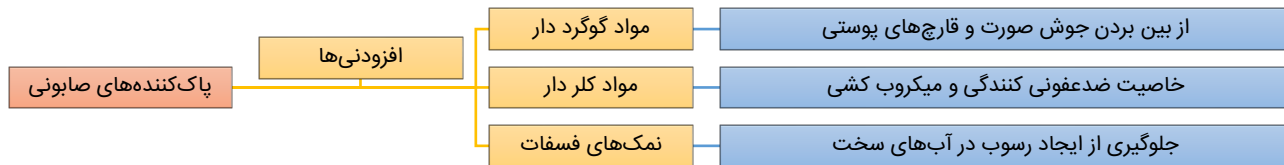
ب: جدول زیر، برخی از ویژگی های کلونیدها و مخلوط های همگن و ناهمگن را در مقایسه با یکدیگر نشان می دهد.

ویژگی	مخلوط ناهمگن (سوسپانسیون)	کلونید	مخلوط همگن (محلول)
عبور نور	نور را پخش می کند.	نور را پخش می کند.	نور را عبور می دهد.
ظاهر	ناهمگن	همگن	همگن
همگن بودن	ناهمگن	ناهمگن	همگن
پایداری	ناپایدار است.	پایدار است.	پایدار است.
نوع ذره	ذره ها و قطعات مجزا	مولکول های بزرگ یا توده های مولکولی	یون ها یا مولکول ها
نمونه	شربت معده - شربت خاکشیر	سس مایونز	محلول آب نمک

شربت معده، نوعی سوسپانسیون است. سوسپانسیون ها نمونه ای از مخلوط های ناپایدار بوده و به مرور زمان ته نشین می شوند.

برای مقابله با مقدار اضافی از اسید موجود در معده افرادی که به بیماری های معده ای دچار هستند، از داروهایی به نام ضد اسید استفاده می کنند. این داروها خاصیت بازی داشته و با ورود به معده، سبب خنثی کردن اسید معده و افزایش pH محتویات معده می شوند. مواد مؤثر موجود در ضد اسید های مختلف، شامل منیزیم هیدروکسید، آلومینیم هیدروکسید و سدیم هیدروژن کربنات (جوش شیرین) می شود. برای مثال، شیر منیزی یکی از رایج ترین ضد اسید های مورد استفاده به شمار می رود که ماده مؤثر موجود در آن، منیزیم هیدروکسید است. از آنجا که ماده موجود در این دارو انحلال پذیری بسیار کمی در آب دارد، شیر منیزی را می توان یک مخلوط ناهمگن و متعلق به دسته سوسپانسیون ها به حساب آورد.

پ: نمودار زیر، نقش افزودنی های مختلف را در پاک کننده های صابونی نشان می دهد:



نمک های فسفات، برای جلوگیری از تشکیل رسوب صابون با یون های کلسیم و منیزیم موجود در آب سخت، به صابون اضافه می شوند. توجه داریم که در آب سخت، نمک های فسفات با یون های کلسیم و منیزیم واکنش می دهند. معادله واکنش انجام شده طی این فرایند به صورت زیر است:



ت: در قسمت آنیونی پاک کننده های غیر صابونی، عناصر کربن، هیدروژن، اکسیژن و گوگرد حضور دارند. در قسمت کاتیونی نیز یک نوع عنصر (برای مثال یون سدیم) یافت می شود. پس در کل ۵ نوع عنصر در ساختار این گروه از مواد قرار دارد. در قسمت آنیونی صابون ها نیز عناصر کربن، هیدروژن و اکسیژن حضور دارند. یون موجود در بخش کاتیونی نیز ۱ نوع عنصر به انواع عناصر موجود در این ترکیب اضافه می کند؛ پس در مجموع در این ترکیب یونی، تعداد ۴ نوع عنصر حضور دارد.

گروه آموزشی ماز

۹۴- بر پایه مدل آرنیوس، عنصر برخلاف عنصر در واکنش با اکسیژن نوعی اکسید اسیدی را ایجاد کرده و اسید حاصل از واکنش این اکسید با آب، در مقایسه با نیتریک اسید، قدرت اسیدی دارد.

(۱) گوگرد - کلسیم - کمتری

(۲) کربن - روییدیم - کمتری

(۳) لیتیم - کلر - بیشتری

(۴) پتاسیم - فسفر - بیشتری

پاسخ: گزینه ۲ (آسان - حفظی و مفهومی - ۱۲۰۱)

پاسخ تشریحی:

اکسید عناصر نافلز می معمولاً اسید آرنیوس هستند و در هنگام حل شدن در آب، غلظت یون هیدروژن را افزایش می دهند. از طرفی اکسید عناصر فلزی معمولاً باز آرنیوس هستند و در هنگام حل شدن در آب، غلظت یون هیدروکسید را افزایش می دهند. از واکنش اکسید گوگرد با آب، سولفوریک اسید تولید می شود که همانند نیتریک اسید، جزو اسیدهای قوی طبقه بندی شده و درجه یونش نزدیک به ۱ دارد. معادله یونش مرحله اول این اسید در آب به صورت زیر است:

$$\text{SO}_3 + \text{H}_2\text{O} \rightarrow \text{H}_2\text{SO}_4 \rightarrow \text{H}^+ + \text{HSO}_4^-$$

از واکنش اکسید کربن با آب، کربنیک اسید تولید می شود که برخلاف نیتریک اسید، جزو اسیدهای ضعیف طبقه بندی شده و درجه یونش پایینی دارد. معادله یونش این اسید در آب به صورت زیر است:



آهک یا همان کلسیم اکسید (CaO)، نوعی اکسید فلزی بوده و با حل شدن در آب، خصلت بازی از خود نشان می دهد؛ بنابراین می تواند برای کاهش میزان اسیدی بودن خاک (افزایش مقدار pH خاک)، استفاده شود. به همین خاطر است که برخی کشاورزان کلسیم اکسید (آهک) را به عنوان اکسید فلزی برای افزایش بهره وری در کشاورزی به خاک می افزایند؛ زیرا افزودن این نوع مواد به خاک سبب می شود تا مقدار و نوع مواد معدنی در دسترس گیاه تغییر کند. همچنین از کلسیم اکسید برای کاهش میزان اسیدی بودن خاک و کنترل میزان اسیدی بودن آب دریاچه ها نیز استفاده می شود.

گروه آموزشی ماز

۹۵- اگر به محلولی از هیدروکلریک اسید با $\text{pH} = 0.3$ و حجم ۵۰ میلی لیتر، مقدار ۴۵۰ میلی لیتر آب خالص اضافه شود، غلظت مولی اسید در این محلول به اندازه چند mol.L^{-1} تغییر می کند و درصد یونش باز BOH در محلول ۰/۴ مولار این ماده باید چقدر باشد تا pH این محلول بازی، ۱۰ برابر pH محلول نهایی هیدروکلریک اسید شود؟

(۱) ۲۵ - ۰/۴

(۲) ۲۵ - ۰/۴

(۳) ۱۲/۵ - ۰/۴۵

(۴) ۱۲/۵ - ۰/۴

پاسخ: گزینه ۱ (سخت - مساله - ۱۲۰۱)

پاسخ تشریحی:

ابتدا غلظت یون هیدروژن را در محلول اولیه محاسبه می کنیم:

$$\text{pH} = -\log[\text{H}^+] = 0.3 \Rightarrow [\text{H}^+] = 0.5 \text{ mol.L}^{-1}$$

فرمول مربوط به محاسبه غلظت مولی (مولار)، به صورت زیر است:

$$\text{غلظت مولی} = \frac{\text{شمار مول ماده حل شونده}}{\text{حجم محلول}}$$

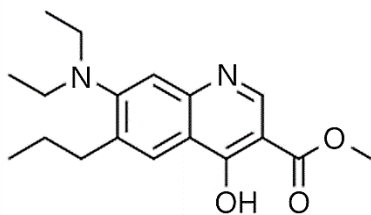
باتوجه به فرمول، غلظت مولی با تعداد مول ماده حل شونده رابطه مستقیم و با حجم محلول رابطه عکس دارد. با اضافه کردن ۴۵۰ میلی لیتر آب به ۵۰ میلی لیتر محلول اسید قوی، شمار مول اسید ثابت باقی می ماند اما حجم محلول، ۱۰ برابر می شود، پس می توان گفت غلظت آن ۰/۱ برابر می شود. می توان گفت غلظت یون هیدروژن در محلول دوم برابر $0.5 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ شده و نسبت به محلول اولیه $0.45 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ تغییر می کند. با ۰/۱ برابر شدن غلظت اسید قوی، pH به اندازه لگاریتم عدد ۰/۱ یعنی ۱ واحد به pH ناحیه خنثی نزدیک می شود. پس pH نهایی محلول اسیدی برابر با ۱/۳ خواهد شد. حال به حل قسمت دوم سوال می پردازیم. در این رابطه، داریم:

$$pH = -\log[H^+] = 13 \Rightarrow [H^+] = 10^{-13} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \Rightarrow [H^+] \times [(OH)^-] = 10^{-14} \Rightarrow [(OH)^-] = 10^{-1} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

در مرحله پایانی، درصد یونش باز را بدست می آوریم:

$$\text{درصد یونش باز} = \frac{\text{غلظت یون هیدروکسید}}{\text{غلظت اولیه باز}} \times 100 = \frac{0.1}{0.4} \times 100 = 25\%$$

گروه آموزشی ماز



(۴) «آ» و «ت»

(۳) «پ» و «ت»

(۲) «ب» و «پ»

(۱) «آ» و «ب»

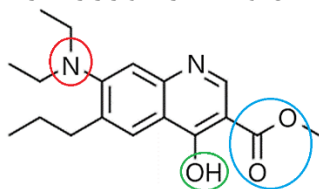
پاسخ: گزینه ۳ (سخت - مفهومی - ۱۱۰۳)

پاسخ تشریحی

عبارت های (پ) و (ت) درست هستند.

بررسی موارد

آ: این ترکیب دارای گروه های عاملی آمینی، استری و هیدروکسیل بوده که در تصویر زیر به ترتیب با رنگ های قرمز، آبی و سبز نشان داده شده اند:



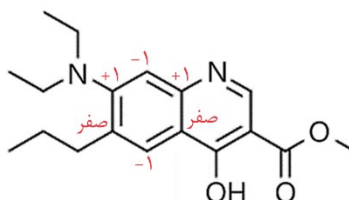
ب: فرمول شیمیایی این ترکیب آلی به صورت $C_{18}H_{24}N_2O_3$ است و نسبت شمار اتم های هیدروژن به اتم های کربن برابر $\frac{24}{18}$ یا $\frac{4}{3}$ است. تعداد اتم هیدروژن در این ترکیب را به صورت زیر محاسبه می کنیم:

$$\text{تعداد اتم هیدروژن} = (2) + (2 \times 2) - (2 \times 2) - (6 \times 2) + (2) = 24$$

شمارش تعداد کربن ها، اکسیژن ها و نیتروژن ها و هالوژن های ترکیبات آلی از روی شکل، ساده است ولی برای شمارش تعداد هیدروژن ترکیبات آلی، از فرمول زیر استفاده می کنیم:

$$(\text{تعداد نیتروژن}) + (\text{تعداد هالوژن}) - (4 \times \text{تعداد پیوند سه گانه}) - (2 \times \text{تعداد پیوند دوگانه}) - (2 \times \text{تعداد حلقه}) + 2 - (2 \times \text{تعداد کربن}) = \text{تعداد اتم هیدروژن}$$

پ: عدد اکسایش اتم های کربن موجود در حلقه کربنی آن به صورت زیر است:



همانطور که مشخص است، مجموع عدد اکسایش اتم های کربن مشخص شده برابر صفر است.

ت: این مولکول در ساختار خود هیدروژن متصل به اکسیژن داشته (مانند همه موادی که گروه عاملی هیدروکسیل و یا کربوکسیلیک اسیدی دارند) و می تواند با مولکول های آب پیوند هیدروژنی برقرار کند. از طرفی این مولکول گروه عاملی استری داشته و با شرکت در واکنش آبکافت، به اسید آلی و الکل سازنده خود تجزیه می شود.

گروه آموزشی ماز

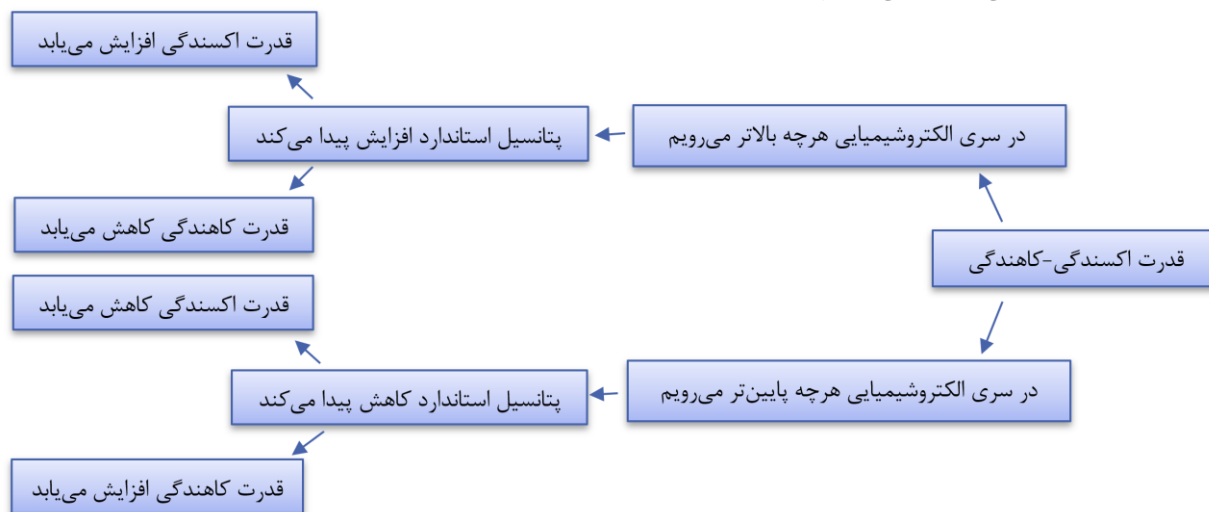
۹۷- کدام یک از مطالب زیر درست است؟

- (۱) با ریختن محلول هیدروکلریک اسید روی یک تیغه مسی، یک واکنش اکسایش-کاهش انجام می شود.
- (۲) با قرار دادن یک تیغه از جنس روی در محلول پتاسیم سولفات، دمای محلول به تدریج افزایش می یابد.
- (۳) پس از قرار دادن یک تیغه از فلز آهن در محلول نقره نیترات، شمار کاتیون ها در محلول، کاهش می یابد.
- (۴) با وارد کردن بخار برم به محلول پتاسیم فلوئورید، ماده قرمز رنگ وارد شده به سامانه، به تدریج مصرف می شود.

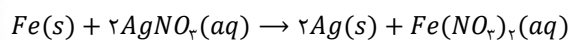
پاسخ: گزینه ۳ (آسان - مفهومی - ۱۲۰۲)

پاسخ تشریحی:

در رابطه با مقایسه قدرت اکسندگی و کاهندگی، داریم:



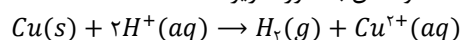
معادله موازنه شده واکنش انجام شده به صورت زیر است:



با انجام واکنش، به ازای ورود ۱ واحد یون آهن (II) به محلول، ۲ واحد از یون نقره به اتم نقره تبدیل شده و به شکل رسوب درمی آید؛ پس می توان گفت با گذشت زمان، مجموع تعداد کاتیون های موجود در محلول کاهش پیدا می کند.

بررسی سایر گزینه ها:

۱) باید بررسی کنیم که واکنش زیر به صورت طبیعی و بدون مصرف انرژی خارجی انجام می شود یا نه! معادله واکنش به صورت زیر است:



پتانسیل استاندارد نیم سلول هیدروژن به صورت قراردادی برابر با صفر ولت در نظر گرفته شده است. از طرفی می دانیم که پتانسیل کاهشی استاندارد مس عددی مثبت است. برای انجام این واکنش، اتم مس باید اکسایش پیدا کند (الکترون از دست بدهد) و یون های هیدروژن باید کاهش پیدا کنند (الکترون بگیرند). اگر مس بخواهد در نقش کاهنده ظاهر شود، باید پتانسیل کاهشی استاندارد آن پایین تر از هیدروژن باشد پس انجام این واکنش به صورت طبیعی و بدون اعمال انرژی بیرونی، امکان پذیر نیست.

۲) روی با عدد اتمی ۳۰، آخرین فلز واسطه موجود در تناوب چهارم جدول دوره ای است. پتاسیم نیز سومین فلز قلیایی جدول دوره ای است. به عنوان یک قانون کلی، واکنش پذیری فلزهای اصلی از واکنش پذیری فلزهای واسطه (عناصر دسته d) بیشتر است؛ بنابراین روی نمی تواند فلز پتاسیم را از ترکیبش جدا کند و این واکنش انجام پذیر نیست.

۴) در گروه هفدهم جدول دوره ای (هالوژن ها)، واکنش پذیری از بالا به پایین کاهش پیدا می کند؛ بنابراین واکنش پذیری عنصر فلوئور بیشتر از عنصر برم بوده و برم نمی تواند فلوئور را از ترکیب های حاوی این عنصر جداسازی کند.

گروه آموزشی ماز

۹۸- در رابطه با سلول گالوانی منیزیم-نقره، کدام گزینه نادرست است؟

- (۱) در این سلول، جرم تیغه منیزیمی به تدریج کاهش یافته و الکترون ها به سمت الکتروند نقره جاری می شوند.
- (۲) مقدار نیروی الکتروموتوری این سلول گالوانی، بیشتر از نیروی الکتروموتوری سلول منیزیم-هیدروژن است.
- (۳) غلظت یون نقره در محلول کاتدی افزایش یافته و غلظت یون منیزیم در محلول آندی کاهش می یابد.
- (۴) با افزودن مقداری نمک نقره نیترات به محلول کاتدی، مقدار emf سلول دچار تغییر خواهد شد.

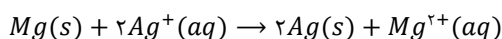
در رابطه با آند سلول‌های گالوانی، داریم:



در رابطه با کاتد سلول‌های گالوانی، داریم:



واکنش انجام شده در سلول، به صورت زیر است:



در این سلول، منیزیم به عنوان کاهنده در نیم‌سلول آند و نقره به عنوان اکسندۀ در نیم‌سلول کاتد حضور دارد. در این نیم‌سلول، به مرور یون‌های نقره مصرف شده و غلظت آن‌ها در محلول کاهش پیدا می‌کند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

- ۱ در این سلول، فلز موجود در آند (منیزیم) مصرف شده و به مرور زمان جرم آن کاهش پیدا می‌کند. از طرفی الکترون‌های موجود در مدار خارجی از نیم‌سلول آند به سمت نیم‌سلول کاتد (نقره) حرکت می‌کنند.
- ۲ نیروی الکتروموتوری (emf)، از کم کردن پتانسیل کاهشی استاندارد آند از پتانسیل کاهشی استاندارد کاتد محاسبه می‌شود و در سلول گالوانی همیشه مثبت است. اندازه نیروی الکتروموتوری به اندازه اختلاف پتانسیل استاندارد آند و کاتد بستگی دارد. پتانسیل استاندارد فلز منیزیم، هیدروژن و نقره به ترتیب منفی، صفر و مثبت است، پس می‌توان گفت اندازه emf سلول $Mg - Ag$ بیشتر از سلول $Mg - H_2$ خواهد بود.
- ۴ پتانسیل استاندارد هر سلول، به عوامل مختلفی از جمله غلظت یون‌های موجود در محلول، دما، فشار و ... بستگی دارد و با تغییر هر کدام از این عوامل، پتانسیل استاندارد نیز تغییر پیدا می‌کند.

۹۹- چند مورد از مطالب زیر درست است؟

- آ: با افزودن آب به الکترولیت موجود در سلول برقکافت $NaCl(l)$ ، نوع فراورده های تولید شده در سلول تغییر می کند.
ب: در سلول الکترولیتی، تیغه ها همواره از جنس گرافیت بوده و به طور همزمان، در یک الکترولیت قرار گرفته اند.
پ: در فرایند هال، شمار مول های ماده تولید شده در اطراف آند، کمتر از ماده تولید شده در اطراف کاتد است.
ت: محلول موجود در اطراف آند طی فرایند برقکافت آب، همانند محلول شیشه پاک کن، خاصیت بازی دارد.

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۲ (سخت - مفهومی - ۱۲۰۲)

پاسخ تشریحی:

عبارت های (آ) و (پ) درست هستند.

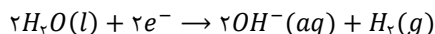
بررسی موارد:

آ: قبل از اضافه شدن آب، واکنش زیر در سلول برقکافت انجام می شود:

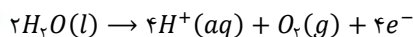


با اضافه شدن آب به سدیم کلرید مذاب، ۲ اتفاق می افتد:

- مولکول آب و یون سدیم برای گرفتن الکترون رقابت می کنند. در بین این گونه ها، آب پتانسیل کاهشی استاندارد بالاتری داشته و در رقابت کاتدی پیروز می شود. نیم واکنش انجام شده به صورت زیر است:

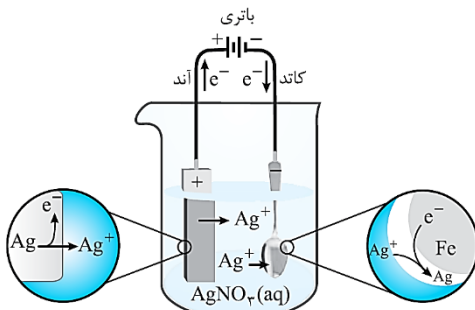


- مولکول آب و یون کلرید برای گرفتن الکترون رقابت می کنند. در بین این گونه ها، در شرایط خاصی آب پتانسیل کاهشی استاندارد پایین تری داشته و در رقابت آندی پیروز می شود. نیم واکنش انجام شده به صورت زیر است:

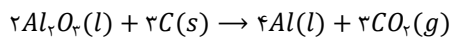


پس به طور کلی، فراورده های واکنش تغییر می کند.

ب: در سلول های الکترولیتی، در اغلب (نه همه!) موارد جنس تیغه ها از گرافیت است. مهم ترین مثال نقض، تیغه های سلول استفاده شده برای آبکاری است. تصویر زیر، نمایی از سلول آبکاری را نشان می دهد:



پ: در سلول هال، در قسمت آند، گاز کربن دی اکسید و در قسمت کاتد، آلومینیم مذاب تولید می شود. معادله موازنه شده واکنش انجام شده در این سلول به صورت زیر است:



همانطور که مشخص است، شمار مول های ماده تولید شده در اطراف آند، کمتر از ماده تولید شده در اطراف کاتد است.

ت: نیم واکنش انجام شده در آند و کاتد سلول برقکافت آب، به صورت زیر است:



در نیم واکنش آندی برقکافت آب، یون هیدروژن تولید شده و به همین دلیل، محیط اطراف آند، خاصیت اسیدی دارد. این در حالی است که محلول آبی حاصل از انحلال آمونیاک و ترکیب های آمینی در آب، خاصیت بازی دارد.

برقکافت آب، یک نمونه از واکنش هایی است که به کمک سلول های الکترولیتی انجام می شود. طی این فرایند، مولکول های آب به عناصر سازنده خود، یعنی اکسیژن و هیدروژن، تجزیه می شوند. معادله ی واکنش برقکافت آب در یک سلول الکترولیتی به صورت $2H_2O(l) \rightarrow 2H_2(g) + O_2(g)$ است. در این واکنش، اتم های اکسیژن در نقش عامل کاهنده بوده و اتم های هیدروژن نیز در نقش عامل اکسنده هستند. در این فرایند، عدد اکسایش اتم های O از ۲- به ۰ رسیده و عدد اکسایش اتم های H نیز از ۱+ به ۰ می رسد.

۱۰۰- اگر نسبت بار به شعاع برای آنیون حاصل از عنصری که آرایش الکترونی اتم آن به $3p^4$ ختم می شود، برابر با $1.08 \times 10^{-2} \frac{e}{pm}$ باشد، شعاع این یون به تقریب برابر با چند نانومتر است؟

۱/۸۵ (۴)

۱/۶۸ (۳)

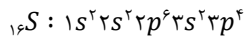
۰/۱۸۵ (۲)

۰/۱۶۸ (۱)

پاسخ: گزینه ۲ (آسان - مساله - ۱۴۰۳)

پاسخ تشریحی:

اگر هر یون را کره ای باردار در نظر بگیریم، چگالی بار هم ارز با نسبت اندازه بار به حجم آن یون است. چگالی بار، کمیتی است که برای مقایسه میزان برهمکنش میان یون ها به کار می رود. نسبت ساده تری که می توان به کار برد، نسبت مقدار بار به شعاع یون است. گوگرد با عدد اتمی ۱۶ دومین عنصر گروه شانزدهم بوده که در دوره سوم قرار دارد. آرایش الکترونی این اتم به صورت زیر است:



همانطور که مشخص است، آرایش الکترونی این اتم به زیرلایه $3p^4$ ختم می شود. گوگرد با گرفتن ۲ الکترون و تبدیل شدن به یون سولفید (S^{2-}) در ترکیب های یونی شرکت می کند. حال با استفاده از فرمول، شعاع یون سولفید را محاسبه می کنیم:

$$\text{چگالی بار یون} = \frac{\text{اندازه بار یون}}{\text{شعاع یون}} \Rightarrow 1.08 \times 10^{-2} \frac{e}{pm} = \frac{2}{\text{شعاع یون}} \Rightarrow \text{شعاع یون} \approx 185 pm \cong 0.185 nm$$

گروه آموزشی ماز

۱۰۱- درستی یا نادرستی مطالب زیر، به ترتیب در کدام گزینه آمده است؟

آ: یکی از عناصر اصلی سازنده مواد کووالانسی، در ایجاد سنجه مناسب برای اندازه گیری جرم اتم ها کاربرد داشته است.

ب: در ساختار سیلیس، هر اتم سیلیسیم الکترون های ظرفیتی خود را با ۲ اتم اکسیژن به اشتراک گذاشته است.

پ: گرافن، لایه ای از اتم های کربن به ضخامت نانومتر بوده و یک ماده انعطاف پذیر است.

ت: الماس، دارای ساختار سه بعدی بوده و نسبت به سیلیسیم دمای ذوب بالاتری دارد.

ث: در ساختار سیلیسیم کربید، فقط پیوندهای اشتراکی $Si - C$ دیده می شود.

(۲) درست - نادرست - درست - درست - درست

(۱) درست - نادرست - درست - نادرست

(۴) نادرست - نادرست - درست - درست - نادرست

(۳) نادرست - نادرست - درست - نادرست - درست

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط - مفهومی - ۱۴۰۳)

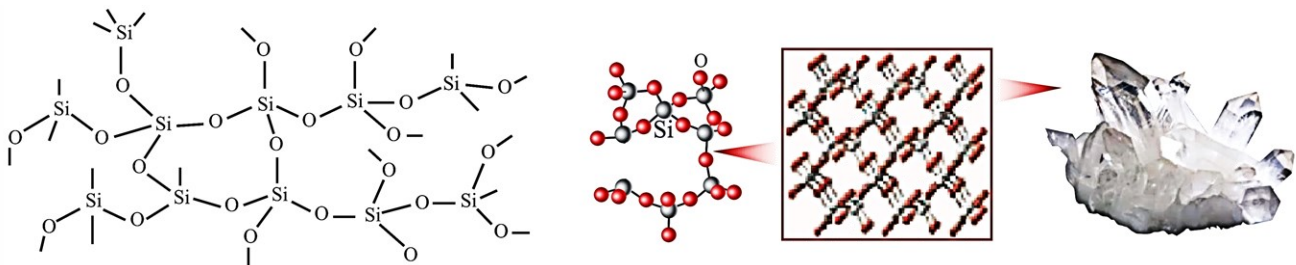
پاسخ تشریحی:

عبارت های (آ)، (پ)، (ت) و (ث) درست هستند.

بررسی موارد:

آ: عناصر اصلی سازنده مواد کووالانسی، کربن و سیلیسیم هستند. از یکی از ایزوتوپ های کربن (^{12}C)، به منظور ایجاد سنجه ای برای اندازه گیری جرم اتم ها (واحد amu) استفاده می شود.

ب: تصویر زیر، ساختار سیلیس را نشان می دهد:



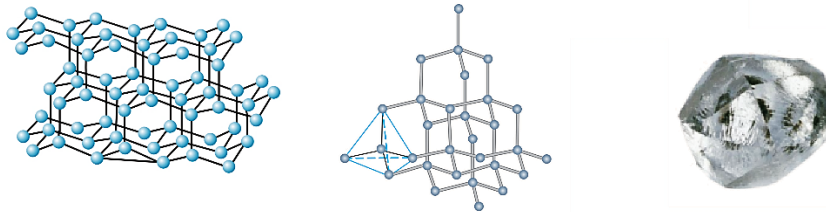
طبق تصویر، هر اتم سیلیسیم الکترون های خود را با ۴ اتم اکسیژن به اشتراک می گذارد.

سیلیس افزون بر خاک های رس، یکی از سازنده های اصلی بسیاری از سنگ ها، صخره ها و نیز شن و ماسه است. وجود این ماده باعث استحکام و ماندگاری سازه های سنگی و نقشکندهای روی آنها شده است. در ساختار این ماده، هر اتم سیلیسیم به چهار اتم اکسیژن و هر اتم اکسیژن نیز به دو اتم سیلیسیم متصل شده است. با توجه به ساختار نشان داده شده، این ماده مقاوت بالایی در برابر سایش و گرما دارد. کوارتز از جمله نمونه های خالص و ماسه از جمله نمونه های ناخالص سیلیس است. سیلیس خالص به دلیل داشتن خواص نوری ویژه، در ساخت منشورها و عدسی ها به کار می رود.

پ: در رابطه با گرافن، داریم:

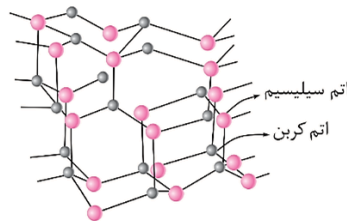


ت: الماس، آلوتروپ (دگرشکل) پرنرژی تر و ناپایدارتر عنصر کربن بوده که علاوه بر داشتن درجه سختی زیاد، رسانای خوب گرما نیز هست. ساختار این ماده به صورت زیر است:



شعاع اتم های کربن کمتر از شعاع اتم های سیلیسیم است و به همین دلیل، طول پیوند کربن-کربن نسبت به پیوند سیلیسیم-سیلیسیم کمتر بوده و آنتالپی پیوند آن بیشتر است. برای ذوب کردن جامدهای کووالانسی، باید به پیوند اشتراکی بین اتم ها غلبه کنیم. به دلیل قوی تر بودن این پیوندها در ساختار بلوری الماس، نقطه ذوب آن نسبت به سیلیسیم بالاتر است.

ث: تصویر زیر، ساختار سیلیسیم کربید را نمایش می دهد:



طبق تصویر، در سیلیسیم کربید، فقط پیوندهای یگانه $C - Si$ بین اتم ها یافت می شود. توجه داریم که از سیلیسیم کربید، در تهیه سنباده استفاده می شود.

گروه آموزشی ماز

۱۰۲- مول برابر از دو گاز A و X را وارد یک ظرف ۵ لیتری می کنیم تا تعادل $2A(g) + X(g) \rightleftharpoons 2D(g)$ در ظرف واکنش برقرار شود. اگر در حالت تعادل، شمار مول های دو گاز A و D با هم برابر باشد، مقدار ثابت تعادل این واکنش کدام است؟

۰/۷۵ (۴)

۰/۵ (۳)

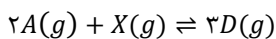
۰/۶ (۲)

۰/۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط - مساله - ۱۲۰۴)

پاسخ ششگانه

معادله موازنه شده واکنش انجام شده به صورت زیر است:



فرض می کنیم در ابتدا y مول از هر کدام از گازهای A و X در ظرف واکنش حضور دارند و تا لحظه رسیدن به تعادل، z مول از گاز X مصرف شود. در این صورت باتوجه به ضرایب استوکیومتری، $2z$ مول از گاز A نیز مصرف شده و $3z$ مول از گاز D تولید می شود. بنابراین مول تعادلی گازهای A ، X و D به ترتیب برابر $y - 2z$ ، $y - z$ و $3z$ خواهد شد. جدول زیر مول اولیه، تغییر مول و مول تعادلی هر کدام از گازها را نشان می دهد:

گاز	A	X	D
مول اولیه	y	y	۰
تغییر مول	$-2z$	$-z$	$+3z$
مول تعادلی	$y - 2z$	$y - z$	$3z$

$$y - 2z = 3z \Rightarrow y = 5z$$

طبق گفته صورت سوال، مول تعادلی گازهای A و D برابر است. پس داریم:

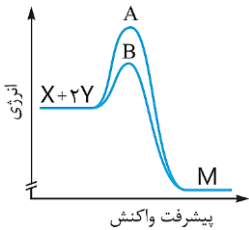
باتوجه به محاسبات انجام شده، مول تعادلی گازهای A ، X و D به ترتیب برابر $3z$ ، $4z$ و $3z$ خواهد شد.

مجموع ضرایب مواد گازی در دو سمت واکنش با یکدیگر برابر است، بنابراین می‌توانیم بجای استفاده از غلظت مواد در فرمول ثابت تعادل، مول تعادلی آن‌ها را جایگذاری کنیم:

$$K = \frac{D^r}{A^r \times X} = \frac{(3Z)^3}{(3Z)^2 \times 4Z} = \frac{3}{4} \times 10 / 75$$

گروه آموزشی ماز

۱۰۳- نمودار مقابل، روند پیشرفت یک واکنش گازی را در حضور و عدم حضور کاتالیزگر نشان می‌دهد. اگر ΔH این واکنش برابر با -240 کیلوژول باشد، کدام



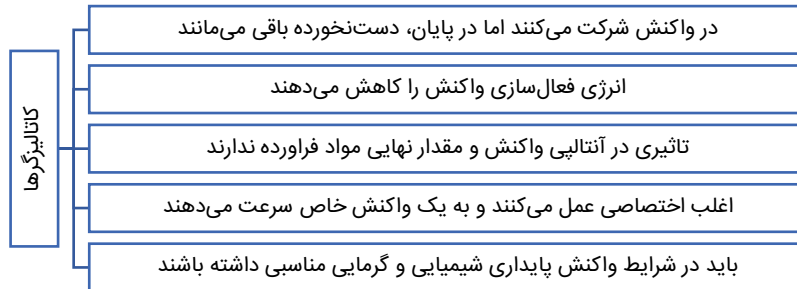
مطلب زیر نادرست است؟

- (۱) به ازای مصرف $11/2$ لیتر گاز Y در شرایط استاندارد، 60 کیلوژول انرژی آزاد می‌شود.
- (۲) سرعت تولید فراورده M در مسیر B این واکنش، بیشتر از مسیر دیگر آن است.
- (۳) مسیر A در دماهای بالاتری انجام شده و طی آن، گرمای بیشتری آزاد می‌شود.
- (۴) در این واکنش، فراورده تولید شده نسبت به واکنش‌دهنده‌ها پایدارتر است.

پاسخ: گزینه ۳ (آسان - مفهومی و مساله - ۱۲۰۴)

پاسخ تشریحی:

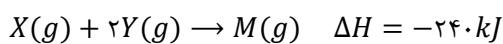
در رابطه با کاتالیزگرها، داریم:



انرژی فعال‌سازی واکنش در مسیر A بیشتر است، پس برای انجام آن باید گرمای بیشتری تامین کنیم. یکی از راه‌های تامین کردن انرژی فعال‌سازی واکنش‌های شیمیایی، افزایش دمای نمونه است. همانطور که اشاره شد، استفاده از کاتالیزگر، آنتالپی واکنش را تغییر نمی‌دهد و بنابراین مقدار گرمای مصرف یا آزادشده، تغییری نخواهد کرد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) معادله موازنه‌شده واکنش انجام‌شده به صورت زیر است:



حال مقدار انرژی مبادله‌شده به ازای مصرف $11/2$ لیتر از گاز Y در شرایط استاندارد را محاسبه می‌کنیم:

$$? \text{ kJ} = 11/2 \text{ L Y} \times \frac{1 \text{ mol Y}}{22/4 \text{ L Y}} \times \frac{240 \text{ kJ}}{2 \text{ mol Y}} = 60 \text{ kJ}$$

توجه داریم که واکنش گرماده بوده و طی آن، 60 کیلوژول انرژی آزاد می‌شود.

۲) در مسیر B انرژی فعال‌سازی واکنش نسبت به مسیر A کمتر است. پس مسیر B مربوط به استفاده از کاتالیزگر برای انجام واکنش است. با استفاده از کاتالیزگر، سرعت تولید فراورده واکنش (M) افزایش پیدا می‌کند.

۴) در واکنش‌های گرماده، مواد واکنش‌دهنده مقداری از انرژی خود را به محیط داده و فراورده‌هایی با انرژی کمتر و پایداری بیشتر تولید می‌کنند. از طرفی، در واکنش‌های گرمگیر، مواد واکنش‌دهنده مقداری انرژی از محیط گرفته و فراورده‌هایی با انرژی بیشتر و پایداری کمتر تولید می‌کنند.

گروه آموزشی ماز

۱۰۴- اولین عنصری که آرایش الکترونی آن از قاعده آفبا پیروی نمی‌کند، دارای ۲ ایزوتوپ متفاوت است که در هسته یکی از آن‌ها ۲۸ نوترون و در هسته

دیگری، ۲۷ نوترون وجود دارد. اگر جرم اتمی میانگین این عنصر برابر با $51/9 \text{ amu}$ باشد، فراوانی ایزوتوپ سنگین‌تر، چند برابر فراوانی ایزوتوپ

دیگر است؟

۴ (۴)

۵ (۳)

۸ (۲)

۹ (۱)



اولین عنصری که آرایش الکترونی آن از قاعده آفبا پیروی نمی کند، کروم با عدد اتمی ۲۴ است. عدد جرمی (A) حاصل جمع عدد اتمی (Z) و تعداد نوترون های موجود در هسته اتم است؛ بنابراین عدد جرمی دو ایزوتوپ این عنصر برابر $۵۱(۲۷+۲۴)$ و $۵۲(۲۸+۲۴)$ است. جمع فراوانی ایزوتوپ های یک عنصر، برابر ۱۰۰ است، پس اگر فراوانی ایزوتوپ اول را برابر x فرض کنیم، فراوانی ایزوتوپ دوم برابر $۱۰۰ - x$ خواهد بود.

پرشیدن زیرلایه ها تنها به عدد کوانتومی اصلی وابسته نیست؛ بلکه از یک قاعده کلی به نام قاعده آفبا پیروی می کند. قاعده آفبا ترتیب پر شدن زیرلایه ها را در اتم های گوناگون نشان می دهد. مطابق این قاعده هنگام افزودن الکترون به زیرلایه ها، نخست زیرلایه های نزدیک تر به هسته پر می شوند که دارای انرژی کمتر هستند و سپس لایه های بالاتر پر خواهند شد. براساس قاعده آفبا هرچه انرژی یک زیرلایه کمتر باشد، آن زیرلایه زودتر از الکترون پر می شود. هرچه یک زیرلایه $n + l$ پایین تری داشته باشد، انرژی آن زیرلایه نیز کمتر است. برای مثال زیرلایه $4s$ زودتر از زیرلایه $3d$ شروع به گرفتن الکترون می کند. هنگامی که مقدار $n + l$ برای دو زیرلایه برابر باشد، زیرلایه با عدد کوانتومی اصلی کوچک تر، انرژی کمتری داشته و زودتر از الکترون پر می شود. برای مثال، زیرلایه $3p$ نسبت به زیرلایه $4s$ انرژی کمتری دارد. داده های طیف سنجی نشان می دهند که قاعده آفبا برای برخی اتم ها نارسایی دارد. برای مثال عناصر کروم و مس در بیرونی ترین زیرلایه خود ($4s$)، تنها دارای یک الکترون هستند. آرایش الکترونی این عناصر به شرح زیر است:



حال با استفاده از فرمول، میانگین جرم اتمی کروم را محاسبه می کنیم:

$$\bar{M} = \frac{M_1 F_1 + M_2 F_2}{F_1 + F_2} = \frac{(51 \times x) + (52 \times (100 - x))}{100} = 51.9 \Rightarrow x = 10$$

در قدم پایانی، نسبت فراوانی ایزوتوپ سنگین تر به ایزوتوپ سبک تر را بدست می آوریم:

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{90}{10} = 9$$

گروه آموزشی ماز

۱۰۵- جدول زیر، شمار الکترون های ظرفیتی چهار مورد از عناصر موجود در تناوب چهارم را نشان می دهد:

عنصر	A	D	X	Z
شمار الکترون های ظرفیتی	۳	۱۰	۲	۷

در رابطه با این عناصر، چه تعداد از مطالب زیر درست است؟

آ: عنصر D ، با عنصر ${}_{78}\text{Pt}$ در یک گروه مشابه قرار داشته و از مدل دریای الکترونی پیروی می کند.

ب: اتم عنصر X ، پس از تبدیل شدن به یون پایدار این عنصر، به آرایش الکترونی آرگون می رسد.

پ: عناصر A و D ، به یقین چکش خوار بوده و در مقایسه با پتاسیم، واکنش پذیری کمتری دارند.

ت: در هر اتم از عنصر Z ، به یقین ۳ لایه الکترونی به طور کامل پر از الکترون هستند.

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)



در رابطه با الکترون های ظرفیتی در عناصر مختلف، داریم:



در قدم اول، باید عناصر داده شده را مشخص کنیم. عنصر A می تواند یکی از عناصر اسکاندیم یا گالیوم باشد. عنصر D ، همان عنصر نیکل است. عنصر X همان عنصر کلسیم است و عنصر Z نیز می تواند یکی از عناصر منگنز یا برم باشد. در رابطه با این عناصر، عبارت ها (آ)، (ب) و (پ) درست هستند.

بررسی موارد

آ: با استفاده از فرمول زیر، شماره گروه هردو عنصر را پیدا می کنیم:

(عدد اتمی عنصر مورد نظر - عدد اتمی گاز نجیب بعدی) - ۱۸ = شماره گروه

$${}_{28}\text{Ni}: 18 - (36 - 28) = 10$$

$${}_{78}\text{Pt}: 18 - (86 - 78) = 10$$

از طرفی هردو این عناصر جزو دسته فلزات بوده و از مدل دریای الکترونی پیروی می کنند.



ب: اتم Ca با از دست دادن ۲ الکترون، به آرایش گاز نجیب قبل از خود یعنی آرگون می‌رسد. آرایش الکترونی اتم و یون کلسیم به صورت زیر است:



پ: عناصر اسکاندیم، گالیم و نیکل همگی جزو دسته فلزات طبقه بندی شده و چکش خوار هستند. پتاسیم یک فلز اصلی بوده و اسکاندیم و نیکل نیز نوعی فلز واسطه هستند. واکنش پذیری فلزات اصلی، بیشتر از فلزات واسطه است. از طرفی در یک تناوب از جدول دوره‌ای، با حرکت از سمت چپ به راست خاصیت فلزی عناصر کاهش پیدا می‌کند؛ بنابراین، واکنش پذیری پتاسیم از گالیم نیز بیشتر است.

ت: آرایش الکترونی عناصر منگنز و برم به صورت زیر است:



لایه سوم الکترونی شامل زیرلایه‌های $3s$ ، $3p$ و $3d$ است. این زیرلایه‌ها در برم کاملاً پر شده‌اند ولی زیرلایه $3d$ در منگنز نیمه پر است.

گروه آموزشی ماز