خیلی سبز! آزمون
تجربی | ریاضی | انسانی
سال تحصیلی ۱۴۰۳_۱۴۰۲

آزمون چهاردهم حضوری
دفترچه شماره ۱

ویژهٔ کنکوری‌های ۱۴۰۳
۱۴۰۳/۰۱/۳۱

مطابق کنکور سراسری

آزمون آزمایشی خیلی سبز

گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی

• نام و نام خانوادگی: • شماره داوطلبی:

عنوان مواد امتحانی آزمون، تعداد، شماره سؤالات و مدت پاسخ‌گویی

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخ‌گویی	ملاحظات
۱	ریاضیات	۴۰	۱	۴۰	۷۵ دقیقه	۴۰ سؤال ۷۵ دقیقه

اساتید، مشاوران و دانش‌آموزان گرامی؛
نظرات، پیشنهادات، انتقادات و بازخوردهای خود نسبت به سؤالات این آزمون را می‌توانید از طریق آیدی Kheilisabz_edit@ در همهٔ پیام‌رسان‌ها با ما به اشتراک بگذارید.

Azmoon.kheilisabz.com

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱- هرگاه $A=\frac{۱}{\sqrt[۳]{۴}+\sqrt[۳]{۲}+۲}$ باشد، مقدار $(A-۱)^۳$ کدام است؟

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۴　　۴) $-\frac{۱}{۲}$

۲- مجموعه جواب نامعادلهٔ $\frac{ax^۳+bx^۲+cx-۶}{x-۱}<۰$، بازهٔ $(-\infty,-۲)$ است. حاصل $a+b-۲c$ کدام است؟

۱) -۳　　۲) -۶　　۳) -۲　　۴) -۴

۳- در معادلهٔ $\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{y}+\frac{۲}{x}=۰$، تمام جواب‌های صحیح را به دست آورده‌ایم. مجموع مقادیر به‌دست‌آمده برای x کدام است؟

۱) -۱۲۰　　۲) ۶۰　　۳) -۳۰　　۴) صفر

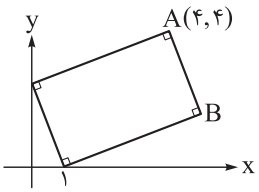
۴- ارزش نهایی گزارهٔ $[p\wedge(\sim p\Rightarrow q)]\Rightarrow(\sim q\vee p)$ کدام است؟

۱) p　　۲) q　　۳) T　　۴) F

۵- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ درجه‌دوم $ax^۲-۴x-۲=۰$ و $\frac{\alpha^۲}{\beta}$ و $\frac{\beta^۲}{\alpha}$ ریشه‌های معادلهٔ درجه‌دوم $ax^۲+bx+c=۰$ باشند، به طوری که جمع و ضرب ریشه‌های آن با هم برابر باشد، مقدار a چه عددی است؟

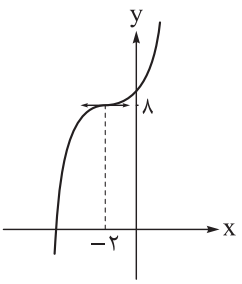
۱) $-\frac{۱۶}{۵}$　　۲) $\frac{-۸}{۵}$　　۳) $\frac{۸}{۵}$　　۴) $\frac{۱۶}{۵}$

۶- در شکل زیر، یک مستطیل که نقطهٔ $A(۴,۴)$ مختصات یکی از رئوس آن است، رسم شده است. امتداد ضلع AB محور yها را با کدام عرض قطع می‌کند؟



۱) ۹
۲) ۱۲
۳) ۱۵
۴) ۱۸

۷- نمودار $f(x)=(x+a)(x^۲+bx+۲c)$، به صورت شکل زیر است. نمودار وارون تابع $g(x)=(x-b)^۳-a$ از کدام ناحیه عبور نمی‌کند؟



۱) اول و سوم
۲) سوم
۳) چهارم
۴) دوم و چهارم

محل انجام محاسبات

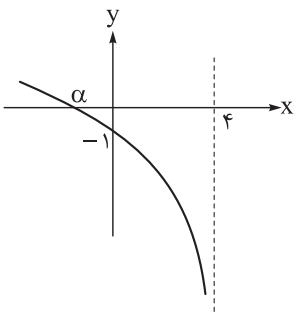
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸- اگر $f(x)=x+۴\sqrt{x-۴}$ باشد، به طوری که $f^{-۱}(x)=(\sqrt{x}+a)^۲+b$، مقدار $f(۲b+a)$ کدام است؟

۱) $۴+۲\sqrt{۶}$　　۲) $۶+۴\sqrt{۲}$

۳) $۲\sqrt{۲}$　　۴) $۲\sqrt{۶}$

۹- نمودار تابع $f(x)=a+\log_۲(b+cx)$، به صورت شکل زیر است. مقدار α کدام است؟



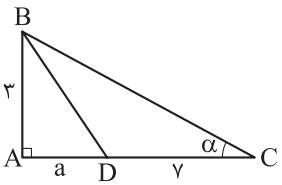
۱) -۲

۲) -۸

۳) -۴

۴) -۱

۱۰- در شکل زیر $\cos\alpha=\frac{۳}{\sqrt{۱۰}}$ است. مساحت مثلث BCD چه مقدار از $a^۲$ بیشتر است؟



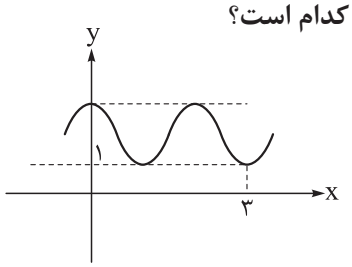
۱) ۶

۲) ۶/۵

۳) ۸

۴) ۸/۵

۱۱- قسمتی از نمودار تابع $f(x)=a+b\sin^۲\frac{a\pi}{۶}x$ به صورت زیر است. مقدار $f(\frac{۵}{۳})$ کدام است؟



۱) ۲/۵

۲) ۱/۵

۳) ۳

۴) ۲

۱۲- مجموع ریشه‌های معادلهٔ $\sin^۲x+\sin ۲x=\frac{۳}{۲}$ در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ برابر θ است. حاصل $\sin\theta$ کدام است؟

۱) ۰/۸　　۲) ۰/۶　　۳) $-۰/۶$　　۴) $-۰/۸$

۱۳- نمودار تابع g فقط از انتقال نمودار تابع $f(x)=۲x^۲-۸x+۶$ به دست آمده است. اگر $\lim\limits_{x\to۱}\frac{f(x)-g(x)}{۲-۲x}=۶$ باشد، مقدار $g(۲)$ کدام است؟

۱) ۸　　۲) ۱۰　　۳) ۱۲　　۴) ۹

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۴- اگر $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{3x+a}{2x^2-ax+a-2}=-\infty$ باشد، حدود a کدام است؟

۱) $-2<a<1$　　۲) $-3<a<4$　　۳) $a>4$　　۴) $a<-3$

۱۵- تابع $f(x)=[\frac{x^2-4x+8}{x-2}]$ در نقطه‌ای با کدام طول حد چپ و راست دارد، ولی ناپیوسته است؟

۱) ۱　　۲) ۳　　۳) ۴　　۴) صفر

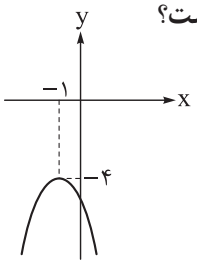
۱۶- خط $y=2x+4$ در نقطهٔ $x=-1$ بر نمودار تابع $f(x)$ مماس است. حاصل مشتق تابع $y=xf(\frac{-4}{x^2})$ در نقطهٔ $x=2$ چه‌قدر است؟

۱) ۴　　۲) ۸　　۳) ۱۲　　۴) ۶

۱۷- اگر $p(x)=x^3-3x^2+2ax+a$ باشد، به طوری که باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای‌های $p(x)$ و $p'(x)$ بر $p''(x)$ با هم برابر باشد، مقدار a چه عددی است؟

۱) -3　　۲) ۳　　۳) ۱　　۴) -1

۱۸- نمودار سهمی f به صورت مقابل است. اگر نمودار fof' بر نمودار f' مماس باشد، مقدار $f(5)$ کدام است؟

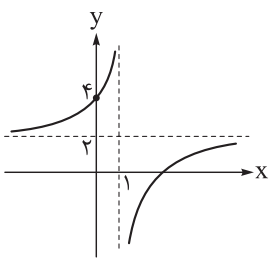


۱) -3
۲) -4
۳) -6
۴) -7

۱۹- نقطهٔ عطف تابع $f(x)=x^3-3ax^2-9x+12a$ بر نیمساز ناحیهٔ اول دستگاه مختصات واقع است. کدام خط زیر در نقطهٔ ماکزیمم نسبی f بر نمودار f مماس است؟

۱) $y=17$　　۲) $y=12$　　۳) $y=-15$　　۴) $y=-3$

۲۰- نمودار تابع هموگرافیک f به صورت زیر است. اگر تابع $y=(x-2)f(x)$ در بازهٔ (a,b) اکیداً نزولی باشد، حداکثر مقدار $b-a$ کدام است؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۱- اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند به طوری که $۴P(A' \cup B) = ۷P(B') = ۷P(A) = ۲/۸$، آن‌گاه مقدار $P\big((S-A)-B\big)$ کدام است؟

۱) ۰/۲　　۲) ۰/۱　　۳) ۰/۸　　۴) ۰/۹

۲۲- اگر تمام داده‌های بین چارک اول و میانه را در داده‌های زیر سه برابر کنیم، آن‌گاه میانگینِ «میانه، مد و میانگین» در داده‌های جدید کدام است؟

۱۰۹,۱۲۴,۱۲۵,۱۲۶,۱۲۶,۱۲۷,۱۳۱,۱۴۰,۱۴۷,۲۵۰
۲۵۷,۳۶۰,۳۸۱,۳۸۱,۳۹۰,۴۲۰,۴۳۱,۴۴۴,۴۴۵

۱) ۴۱۲/۶۷　　۲) ۳۵۹/۳۳　　۳) ۲۸۸/۶۷　　۴) ۲۴۱/۳۳

۲۳- از یک جامعهٔ آماری با واریانس $\frac{۹}{۴}$، نمونه‌ای شامل داده‌های ۹، ۱۳، ۱۶ و ۱۸ انتخاب کرده‌ایم. چند عدد صحیح در بازهٔ اطمینان ۹۵درصدی برای میانگین جامعه، قرار می‌گیرد؟

۱) ۲　　۲) ۳　　۳) ۴　　۴) ۵

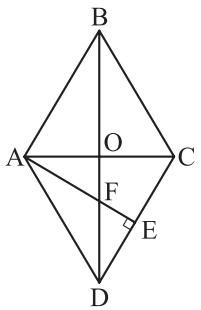
۲۴- یک تاس داریم که در پرتاب آن، احتمال روشدن اعداد اول، نصف احتمال روشدن اعداد غیراول است. این تاس را پرتاب می‌کنیم، سپس به تعداد عدد روشده سکه‌ای را می‌اندازیم. اگر سکه دو بار رو آمده باشد، با کدام احتمال سکه دقیقاً دو بار انداخته شده است؟

۱) $\frac{۸}{۶۹}$　　۲) $\frac{۸}{۹۹}$　　۳) $\frac{۱۶}{۶۹}$　　۴) $\frac{۱۶}{۹۹}$

۲۵- قطر یک مستطیل، واسطهٔ هندسی ضلع کوچک و محیط آن است. نسبت مساحت این مستطیل به مساحت چهارضلعی حاصل از برخورد نیمسازهای داخلی آن کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}+۱$　　۲) ۲　　۳) $۲\sqrt{۲}-۱$　　۴) $\frac{۵}{۲}$

۲۶- مطابق شکل، چهارضلعی $ABCD$ لوزی است. اگر قطر بزرگ این لوزی، ۳ برابر قطر کوچک آن باشد، طول AF چند برابر طول AB است؟



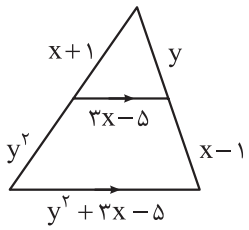
۱) $\frac{۲}{۳}$　　۲) $\frac{\sqrt{۱۰}}{۵}$

۳) $\frac{۱}{۳}$　　۴) $\frac{\sqrt{۵}}{۳}$

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۷- در شکل زیر، مساحت ذوزنقه چند درصد مساحت بزرگ‌ترین مثلث است؟



۱) ۶۵
۲) ۷۰
۳) ۷۵
۴) ۸۰

۲۸- در مثلث ABC، اندازهٔ میانه‌های نظیر اضلاع AB و AC به ترتیب $2\sqrt{3}$ و ۴ و اندازهٔ زاویه بین این دو میانه 120° است. مساحت مثلث ABC کدام است؟

۱) ۸　　۲) ۹　　۳) ۱۲　　۴) ۶

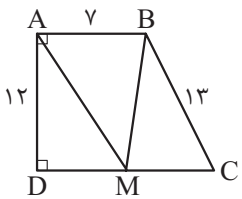
۲۹- نقطهٔ O درون مثلث ABC از سه ضلع آن به یک فاصله است. اگر $B\hat{O}C = 112^\circ$، آنگاه اندازهٔ کمان BC در دایرهٔ محیطی این مثلث چند درجه است؟

۱) ۸۸　　۲) ۹۶　　۳) ۱۰۴　　۴) ۱۱۲

۳۰- در مثلثی به طول اضلاع ۷, ۸, ۹، شعاع دایرهٔ محیطی، چند برابر شعاع دایرهٔ محاطی داخلی است؟

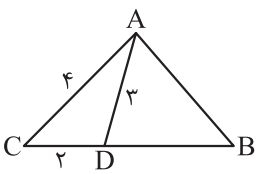
۱) ۲
۲) ۲/۱
۳) ۳
۴) ۳/۱

۳۱- مطابق شکل، نقطهٔ متغیر M روی CD حرکت می‌کند. زمانی که محیط مثلث ABM کم‌ترین مقدار ممکن است، حاصل $\frac{MD}{MC}$ کدام است؟



۱) $\frac{۵}{۱۲}$
۲) $\frac{۷}{۱۷}$
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) $\frac{۵}{۱۳}$

۳۲- در شکل مقابل، اگر $B\hat{A}D = 2D\hat{A}C$، آن‌گاه محیط مثلث ABC کدام است؟



۱) ۱۴
۲) ۱۳/۵
۳) ۱۳
۴) ۱۴/۵

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۳- اگر $A=\begin{bmatrix} ۳^{x} & ۲۷^{x} \\ ۳^{-x} & ۱ \end{bmatrix}$ و $x=\frac{۱}{\log_{\frac{۱}{۲}}\frac{۱}{۳}}+\frac{۱}{\log_{\frac{۱}{۵}}\frac{۱}{۳}}$ باشد، آن‌گاه حاصل $\left|\frac{۱}{۵}A\right|$ کدام است؟

۱) $-۴/۸$　　۲) $۲/۷$

۳) $-۱/۸$　　۴) $-۳/۶$

۳۴- از کانون سهمی به معادلهٔ $y=x^{۲}+x+۱$ خطی موازی با خط هادی آن رسم می‌کنیم تا سهمی را در نقاط A و B قطع کند. اگر A و B رأس‌های مستطیلی باشند که دو رأس دیگر آن بر خط هادی سهمی واقع است، مساحت این مستطیل کدام است؟

۱) $۰/۲۵$　　۲) ۴　　۳) ۲　　۴) $۰/۵$

۳۵- اگر اندازهٔ بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ به ترتیب ۲ و $۳\sqrt{۳}$ و زاویهٔ بین آن‌ها ۳۰° باشد، اندازهٔ بردار $(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}\times\vec{b})$ کدام است؟

۱) $\frac{۲۱\sqrt{۳}}{۲}$　　۲) $۱۵\sqrt{۳}$

۳) $۲۱\sqrt{۳}$　　۴) $۳۰\sqrt{۳}$

۳۶- نقطه‌های M و N به ترتیب روی دو دایرهٔ متداخل $x^{۲}+y^{۲}+۲x-۴y+a=۰$ و $x^{۲}+y^{۲}-۶x+۲y-۵۴=۰$ قرار دارند. اگر کم‌ترین فاصله M و N برابر یک باشد، آن‌گاه شعاع دایرهٔ کوچک‌تر کدام است؟

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) ۴

۳۷- چند عدد بیست‌ویک‌رقمی مثل A، با ارقام ۱ و ۲ می‌توان نوشت که مضرب ۱۲ باشد و دو عدد به صورت $\left[\frac{A}{۱۰^{n}}\right]$ و $\left[\frac{۱۰^{n}A}{۱۰^{۲۰}}\right]$ به پیمانهٔ ۱۰ همنهشت شوند؟ $(n=۰,۱,۲,...,۹)$

۱) ۱۷۰　　۲) ۱۷۵

۳) $۳۴۰\times۸!$　　۴) $۳۵۰\times۱۰!$

۳۸- در جواب‌های طبیعی معادلهٔ $۹۳x-۱۵۹y=۶۴۵$، مجموع ارقام بزرگ‌ترین x سه‌رقمی کدام است؟

۱) ۱۸　　۲) ۱۴　　۳) ۱۰　　۴) ۶

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۳۹- درون یک مستطیل به ابعاد ۹ و ۱۶، حداقل چند نقطه اختیار شود تا مطمئن باشیم فاصلهٔ حداقل دو نقطه از این نقاط انتخابی، بیشتر از $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ است؟

۱) ۱۴۵ ۲) ۲۸۹ ۳) ۵۷۷ ۴) حداقل وجود ندارد.

۴۰- در مکمل گراف $C_۶$، چند دور وجود دارد؟

۱) ۶ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴

دوستان عزیز خیلی‌سبز، سلام؛
فایل پاسخ‌نامهٔ این آزمون را که شامل درس‌نامه، نکات کنکوری، پاسخ تشریحی و ... است، ساعت ۱۴ امروز از صفحهٔ شخصی خودتان در سایت آزمون خیلی‌سبز دریافت کنید.
هم‌چنین شما می‌توانید همین امشب کارنامهٔ اولیهٔ آزمونتان را در صفحهٔ شخصی خود مشاهده بفرمایید.
برای دسترسی به صفحهٔ شخصی خود وارد سایت آزمون خیلی‌سبز به آدرس: azmoon.kheilisabz.com شوید و کدی را که توسط مدرسه و یا نمایندگی‌های آزمون‌های خیلی‌سبز به شما داده شده، در محل مشخص‌شده در سایت ثبت بفرمایید.

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

خیلی سبز! آزمون
تجربی | ریاضی | انسانی

سال تحصیلی ۱۴۰۲_۱۴۰۳

آزمون چهاردهم حضوری

دفترچه شماره ۲

ویژهٔ کنکوری‌های ۱۴۰۳

۱۴۰۳/۰۱/۳۱

مطابق کنکور سراسری

آزمون آزمایشی خیلی سبز

گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی

• نام و نام خانوادگی: • شماره داوطلبی:

عنوان مواد امتحانی آزمون، تعداد، شماره سؤالات و مدت پاسخ‌گویی

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخ‌گویی	ملاحظات
۱	فیزیک	۳۵	۴۱	۷۵	۴۵ دقیقه	۶۵ سؤال ۸۰ دقیقه
۲	شیمی	۳۰	۷۶	۱۰۵	۳۵ دقیقه	

اساتید، مشاوران و دانش‌آموزان گرامی؛
نظرات، پیشنهادات، انتقادات و بازخوردهای خود نسبت به سؤالات این آزمون را می‌توانید از طریق آیدی Kheilisabz_edit@ در همهٔ پیام‌رسان‌ها با ما به اشتراک بگذارید.

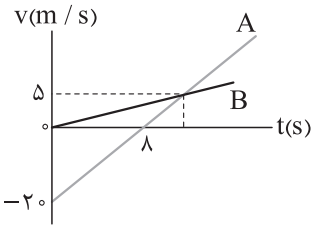
Azmoon.kheilisabz.com

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۱- در یک مسیر مستقیم، خودروی A، ساکن و خودروی B با سرعت ثابت $90\ km/h$ در حال دورشدن از خودروی A است. در لحظه‌ای که فاصلهٔ دو خودرو $125\ m$ است، خودروی A با شتاب ثابت $2/4\ m/s^2$ در جهت حرکت خودروی B شروع به حرکت می‌کند. تا لحظه‌ای که دو خودرو به هم می‌رسند، مسافت طی‌شده توسط خودروی A برابر با چند متر است؟

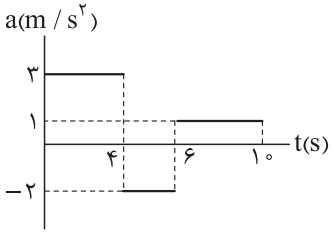
۱) ۱۸۷/۵　　۲) ۶۲۵　　۳) ۷۵۰　　۴) ۸۷۵

۴۲- نمودار سرعت ـ زمان دو متحرک A و B که در راستای محور x حرکت می‌کنند، به شکل مقابل است. دو متحرک در مبدأ زمان، در مبدأ مکان قرار دارند. در بازهٔ زمانی‌ای که بردار مکان دو متحرک در خلاف جهت یکدیگر است، تندی متوسط متحرک A، چند برابر تندی متوسط متحرک B است؟



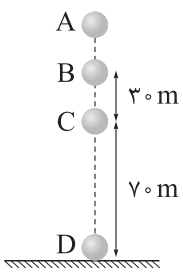
۱) ۱/۵　　۲) ۲/۵
۳) ۳　　۴) ۵

۴۳- نمودار شتاب ـ زمان متحرکی به جرم $5\ kg$ که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل مقابل است. اگر جابه‌جایی متحرک در بازهٔ زمانی $t_1 = 0\ s$ تا $t_2 = 10\ s$ برابر $(44m)\vec{i}$ باشد، کار کل انجام‌شده روی آن در این بازهٔ زمانی چند ژول است؟



۱) ۳۶۰　　۲) ۲۶۴
۳) ۱۶۰　　۴) ۱۲۰

۴۴- در شکل مقابل، در شرایط خلأ، گلوله‌ای از نقطهٔ A رها شده و در نقطهٔ D به سطح زمین برخورد می‌کند. اگر گلوله، فاصلهٔ نقطهٔ C تا نقطهٔ D را در مدت $2s$ طی کرده باشد، فاصلهٔ نقطهٔ B تا نقطهٔ C را در چند ثانیه طی کرده است؟ $(g = 10\ m/s^2)$



۱) ۱　　۲) ۱/۵
۳) ۲　　۴) ۲/۵

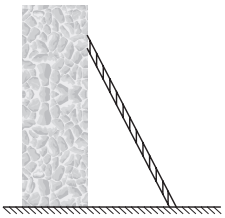
۴۵- شخصی به جرم $60\ kg$ در یک آسانسور، روی یک ترازو ایستاده است. اگر مقداری که ترازو نشان می‌دهد $480\ N$ باشد، کدام‌یک از موارد زیر الزاماً درست است؟ $(g = 10\ N/kg)$

الف) جهت حرکت آسانسور به سمت پایین است.
ب) جهت شتاب آسانسور به سمت پایین است.
پ) حرکت آسانسور به صورت کندشونده است.
ت) اندازهٔ شتاب آسانسور $2\ m/s^2$ است.

۱) الف و پ　　۲) الف و ت　　۳) ب و ت　　۴) پ و ت

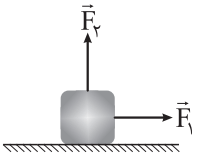
محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir



۴۶- در شکل مقابل، نردبانی به دیوار قائم بدون اصطکاک تکیه داده شده است. اگر ضریب اصطکاک ایستایی بین سطح افقی و پای نردبان ۰/۷۵ باشد، در آستانهٔ سرخوردن نردبان، اندازهٔ نیرویی که دیوار به آن وارد می‌کند، چند برابر اندازهٔ نیرویی است که سطح افقی به نردبان وارد می‌کند؟

۱) $\frac{۳}{۴}$　　۲) $\frac{۳}{۵}$　　۳) $\frac{۴}{۵}$　　۴) $\frac{۴}{۳}$



۴۷- در شکل زیر، به جسمی به جرم ۱۰ kg که روی سطحی افقی با ضریب اصطکاک جنبشی ۰/۵ ساکن است، نیروی افقی $F_۱ = ۱۰۰\ N$ و نیروی قائم $\vec{F}_۲$ وارد می‌شود. اگر بزرگی تکانهٔ جسم ۴s پس از شروع حرکت آن به $۲۴۰\ \frac{kg.m}{s}$ برسد، اندازهٔ نیروی $\vec{F}_۲$ چند نیوتون است؟ $(g = ۱۰\ N/kg)$

۱) ۲۰　　۲) ۴۰　　۳) ۶۰　　۴) ۸۰

۴۸- دو ماهوارهٔ A و B در مدارهای معینی به دور زمین در حال گردش هستند. اگر فاصلهٔ دو ماهواره تا سطح زمین به ترتیب برابر R_e و $۴R_e$ باشد، تندی ماهوارهٔ A چند برابر تندی ماهوارهٔ B است؟ (R_e شعاع کرهٔ زمین است.)

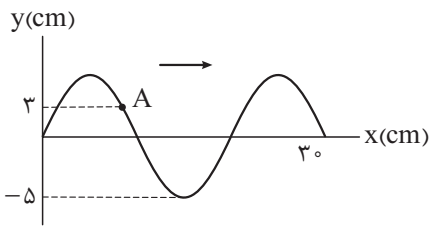
۱) $\frac{۱}{۲}$　　۲) ۲　　۳) $\frac{\sqrt{۱۰}}{۲}$　　۴) $\frac{\sqrt{۱۰}}{۵}$

۴۹- فنری به جرم ناچیز و طول ۲۰ cm را از یک انتها، از نقطهٔ ثابتی آویزان کرده و به انتهای دیگر آن، وزنه‌ای می‌بندیم. وزنه را در شرایطی که فنر طول عادی خود را دارد، از حال سکون رها می‌کنیم. اگر بیشترین طول فنر به ۲۸ cm برسد، بسامد نوسان‌های وزنه چند هرتز است؟ ($g = \pi^۲\ m/s^۲$ و مقاومت هوا ناچیز است.)

۱) $\frac{۵}{۲}$　　۲) $\frac{۵\pi}{۲}$　　۳) ۵　　۴) ۵π

۵۰- معادلهٔ مکان ـ زمان نوسانگر هماهنگ ساده‌ای که در راستای محور x نوسان می‌کند، در SI به صورت $x = ۰/۲\cos ۵\pi t$ است. در لحظه‌ای که انرژی پتانسیل نوسانگر ۵۰ درصد بیشتر از انرژی جنبشی آن است، تندی نوسانگر چند متر بر ثانیه است؟ $(\pi^۲ = ۱۰)$

۱) ۲　　۲) $\sqrt{۶}$　　۳) ۲π　　۴) $\sqrt{۶}\pi$



۵۱- تصویر موج منتشرشده در طنابی به جرم واحد طول $۲۰\ g/m$ و نیروی کشش ۵۰ N، در لحظهٔ $t_۱ = ۰$ به شکل مقابل است. سرعت متوسط ذرهٔ A از طناب، در بازهٔ زمانی $t_۱ = ۰s$ تا $t_۲ = \frac{۱}{۱۰۰}\ s$ چند متر بر ثانیه است؟

۱) $۶\vec{j}$　　۲) $-۶\vec{j}$

۳) $۳\vec{j}$　　۴) $-۳\vec{j}$

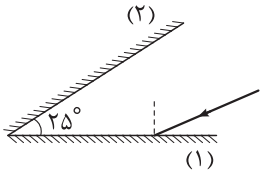
محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۲- اگر از یک منبع صوت $۴۹\ m$ دور شویم، تراز شدت صوت $۳۴dB$ تغییر می‌کند. فاصله تا منبع صوت در حالت اوّل، چند متر است؟ ($\log ۲ = ۰/۳$ و اتلاف انرژی ناچیز است.)

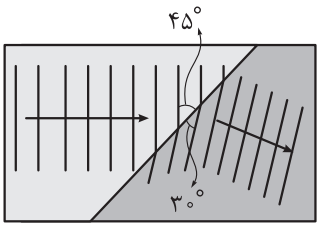
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۵۰ ۴) ۱۰۰

۵۳- در شکل مقابل، پرتو نوری با زاویهٔ تابش ۵۰° به آینهٔ (۱) می‌تابد. در آخرین بازتاب ممکن پرتو از آینهٔ (۲)، زاویهٔ بازتاب چند درجه است؟



۱) ۱۵ ۲) ۴۰
۳) ۵۰ ۴) ۷۵

۵۴- جبهه‌های موج تشکیل‌شده در سطح آب یک تشت موج، در مرز بین ناحیهٔ کم‌عمق و ناحیهٔ عمیق آن، به شکل مقابل است. تندی انتشار موج در ناحیهٔ کم‌عمق، چند برابر تندی انتشار موج در ناحیهٔ عمیق است؟



۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$
۳) $\frac{\sqrt{۶}}{۳}$ ۴) $\frac{\sqrt{۶}}{۲}$

۵۵- در یک تار مرتعش با دو انتهای بسته، اختلاف بسامد هماهنگ‌های چهارم و هفتم برابر $۳۶۰\ Hz$ است. اگر تندی انتشار موج عرضی در این تار $۲۸۸\ m/s$ باشد، هنگام تشکیل مُد پنجم در تار، بیشترین فاصلهٔ دو شکم از یکدیگر چند سانتی‌متر است؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۹۶ ۳) ۴۸ ۴) ۲۴

۵۶- در مدل اتمی هیدروژن، اگر کوتاه‌ترین طول موجی که الکترون تابش می‌کند تا به مدار n برسد، برابر $\frac{۸}{۵}\ \mu m$ باشد، بلندترین طول موجی که الکترون تابش می‌کند تا به مدار $n-۲$ برسد، چند میکرومتر است؟ $(R = \frac{۱}{۱۰۰}(nm)^{-۱})$

۱) $\frac{۲}{۱۵}$ ۲) $\frac{۲}{۵}$ ۳) $\frac{۱۸}{۲۵}$ ۴) $\frac{۹}{۱۰}$

۵۷- تعداد هسته‌های واپاشی‌شده از یک نمونهٔ پرتوزا در یک ساعت اول، برابر با $N_۱$ و تعداد هسته‌های باقی‌مانده از همان نمونه پس از دو ساعت، برابر با $N_۲$ است. اگر $\frac{N_۱}{N_۲} = ۱۲$ باشد، نیمه‌عمر این نمونه چند دقیقه است؟

۱) ۷/۵ ۲) ۱۵ ۳) ۲۲/۵ ۴) ۳۰

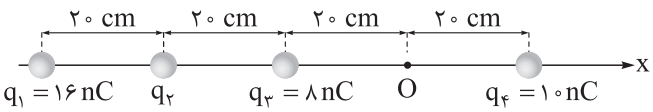
محل انجام محاسبات

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۵۸- واپاشی هستهٔ $^{237}_{93}Np$ از طریق گسیل ذرات α ، β^- ، α و α صورت می‌گیرد. پس از وقوع تمام این واپاشی‌ها، اختلاف تعداد نوترون‌ها و تعداد پروتون‌های هستهٔ نهایی کدام است؟

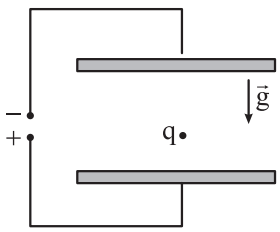
۱) ۱۳۷　　۲) ۱۳۹　　۳) ۴۹　　۴) ۵۱

۵۹- در شکل زیر، چهار بار الکتریکی نقطه‌ای روی محور x قرار دارند. اگر میدان الکتریکی در نقطهٔ O برابر $\vec{E} = (-۲۷۵\ N/C)\vec{i}$ باشد، بار $q_۲$ چند نانوکولن است؟ $(k = ۹\times۱۰^۹ \frac{N.m^۲}{C^۲})$



۱) ۲　　۲) −۲　　۳) ۴　　۴) −۴

۶۰- در شکل زیر، فاصلهٔ دو صفحهٔ فلزی موازی افقی که به اختلاف پتانسیل الکتریکی ۲۰۰ V متصل هستند، برابر با ۴۰ cm است. ذره‌ای به جرم ۰/۱ g و بار الکتریکی ۳ μC در وسط فاصلهٔ بین این دو صفحه رها می‌شود. در ۰/۲ ثانیهٔ اول حرکت ذره، انرژی پتانسیل الکتریکی آن چند میکروژول و چگونه تغییر می‌کند؟ ($g = ۱۰\ N/kg$ و مقاومت هوا ناچیز است.)

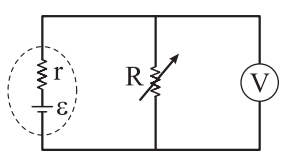


۱) ۵۰، کاهش می‌یابد.
۲) ۵۰، افزایش می‌یابد.
۳) ۱۵۰، کاهش می‌یابد.
۴) ۱۵۰، افزایش می‌یابد.

۶۱- ظرفیت خازن تختی که بین صفحه‌های آن هواست، ۲۰ nF و بار الکتریکی ذخیره‌شده در آن ۱۸۰ nC است. اگر خازن را از باتری جدا کرده و فاصلهٔ بین صفحه‌های آن را سه برابر کنیم، انرژی ذخیره‌شده در خازن چند میکروژول و چگونه تغییر می‌کند؟

۱) ۵۴/۰، افزایش می‌یابد.　۲) ۵۴/۰، کاهش می‌یابد.　۳) ۶۲/۱، افزایش می‌یابد.　۴) ۶۲/۱، کاهش می‌یابد.

۶۲- در مدار شکل زیر، اگر مقاومت رئوستا از ۱۲ Ω به ۱۶ Ω برسد، مقداری که ولت‌سنج آرمانی نشان می‌دهد، از ۶V به ۶/۴V می‌رسد. بیشینهٔ توان خروجی باتری این مدار چند وات است؟

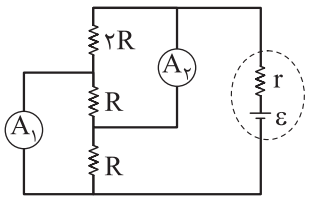


۱) ۴　　۲) ۸
۳) ۱۶　　۴) ۳۲

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

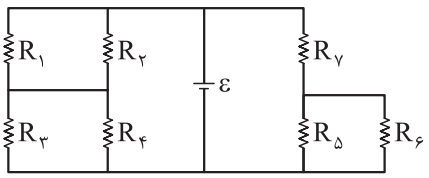
۶۳- در مدار شکل مقابل، اگر اختلاف مقدارهایی که دو آمپرسنج آرمانی نشان می‌دهند، برابر با $2A$ باشد، جریان الکتریکی عبوری از منبع نیروی محرکه چند آمپر است؟



۱) ۶　　۲) ۸

۳) ۱۰　　۴) ۱۲

۶۴- در مدار شکل زیر، تمام مقاومت‌ها، یکسان هستند. توان مصرفی مقاومت $R_۶$ چند برابر توان مصرفی مقاومت $R_۳$ است؟



۱) $\frac{۱۶}{۹}$

۲) $\frac{۹}{۱۶}$

۳) $\frac{۹}{۴}$

۴) $\frac{۴}{۹}$

۶۵- ذره‌ای با بار الکتریکی $-۵\ \mu C$ و جرم $۴\ mg$ در میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$، با سرعت $۱۰^۵\ m/s$ در راستای افقی و به سمت شمال شرقی پرتاب می‌شود و بدون انحراف به حرکت خود ادامه می‌دهد. $\vec{B}$ چند گاوس و در چه جهتی است؟ ($g = ۱۰\ N/kg$ و بردار $\vec{B}$ بر بردار سرعت عمود است.)

۱) ۰/۸، جنوب شرقی　　۲) ۰/۸ ، شمال غربی

۳) ۸۰، جنوب شرقی　　۴) ۸۰، شمال غربی

۶۶- سطح پیچه‌ای که شامل ۵۰۰ حلقه است، عمود بر خطوط میدان مغناطیسی یکنواختی به بزرگی $۲۰۰\ G$ قرار دارد. در مدت $۰/۰۱\ s$ پیچه چرخیده و سطح آن، موازی خطوط میدان می‌شود. اگر اندازهٔ نیروی محرکهٔ القایی متوسط در پیچه در این بازهٔ زمانی برابر $۲۰\ V$ باشد، مساحت حلقه‌ها چند سانتی‌متر مربع است؟

۱) ۱۰　　۲) ۲۰　　۳) ۱۰۰　　۴) ۲۰۰

۶۷- طول یک سیم‌لولهٔ آرمانی $۴۰\ cm$ و جریان الکتریکی عبوری از آن $۱/۲A$ است. اگر اندازهٔ میدان مغناطیسی درون آن و دور از لبه‌ها $۷۵\ G$ باشد، تعداد دورهای سیم‌لوله کدام است؟ $(\mu_۰ = ۱۲/۵ \times ۱۰^{-۷}\ \frac{T.m}{A})$

۱) ۵۰　　۲) ۲۰۰　　۳) ۵۰۰　　۴) ۲۰۰۰

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶۸- یک ظرف استوانه‌ای که روی سطح افقی قرار دارد، با جرم یکسانی از آب و روغن پر شده است. اگر این ظرف را با حجم یکسانی از آب و روغن پر کنیم، فشار ناشی از مایع‌ها در کف ظرف چند درصد و چگونه تغییر می‌کند؟ ($\rho_{روغن} = ۰/۸\rho_{آب}$)

۱) ۲/۵، افزایش می‌یابد.
۲) ۲/۵، کاهش می‌یابد.
۳) ۱/۲۵، افزایش می‌یابد.
۴) ۱/۲۵، کاهش می‌یابد.

۶۹- در لولهٔ U شکل زیر که سطح مقطع هر یک از شاخه‌های آن $۵\,cm^۲$ است، مقداری جیوه به ارتفاع ۴۰cm ریخته شده است. چند سانتی‌متر مکعب آب روی جیوهٔ شاخهٔ سمت راست بریزیم تا فشار در نقطهٔ M، ۵cmHg افزایش یابد؟ ($\rho_{جیوه} = ۱۳/۶\rho_{آب} = ۱۳/۶\,g/cm^۳$)



۱) ۶۸
۲) ۱۳۶
۳) ۳۴۰
۴) ۶۸۰

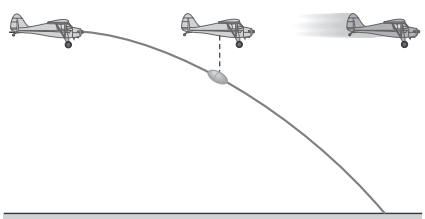
۷۰- در یک آزمایش یک استوانهٔ توپر فلزی با چگالی اولیهٔ $۸\,g/cm^۳$، گرمای ویژهٔ $۴\,J/g.K$ و ضریب انبساط طولی $۲\times۱۰^{-۵}\,\frac{۱}{K}$، ۸kJ گرما دریافت می‌کند. اگر در این آزمایش دمای استوانه $۱۸^\circ F$ افزایش یابد، حجم آن چند میلی‌متر مکعب افزایش می‌یابد؟

۱) ۱۵　　۲) ۲۷　　۳) ۱/۵　　۴) ۲/۷

۷۱- قطعه یخی به جرم ۱۰۰g و دمای صفر درجهٔ سلسیوس را درون ۲kg آب با دمای θ می‌اندازیم. اگر نیمی از یخ به صورت ذوب‌نشده باقی‌بماند، θ چند درجهٔ سلسیوس است؟ (گرمای ویژهٔ آب $۴/۲\,\frac{J}{g.K}$ و گرمای نهان ذوب آن $۳۳۶\,J/g$ است.)

۱) ۲　　۲) ۴　　۳) ۲۰　　۴) ۴۰

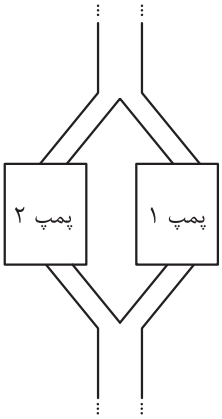
۷۲- در شکل زیر، هواپیمایی که در ارتفاع ۳۲۰m از سطح زمین و با تندی $۶۰\,m/s$ در حال حرکت است، بسته‌ای را رها می‌کند. اگر مقاومت هوا ناچیز باشد، بسته با تندی چند متر بر ثانیه به سطح زمین می‌رسد؟ ($g = ۱۰\,m/s^۲$)



۱) ۸۰
۲) ۱۰۰
۳) $۸۰\sqrt{۲}$
۴) $۱۰۰\sqrt{۲}$

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir



۷۳- مطابق شکل در قسمتی از یک خط انتقال نفت، در هر دقیقه $۱۲۰\,m^۳$ نفت از طریق لوله‌ای توسط دو پمپ مشابه از ارتفاع ۲۰۰۰متری تا ارتفاع ۲۶۰۰متری سطح زمین منتقل می‌شود. اگر بازدهٔ هریک از این پمپ‌ها ۳۰ درصد باشد، توان ورودی هر یک از پمپ‌ها چند مگاوات است؟ ($g = ۱۰\,N/kg$ و چگالی نفت $۰/۹\,g/cm^۳$ است.)

۱) ۴۰

۲) ۳۶

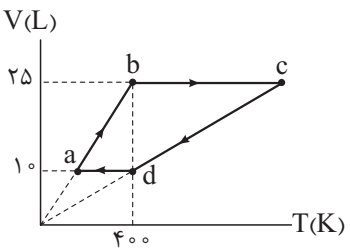
۳) ۲۰

۴) ۱۸

۷۴- درون یک مخزن به حجم $۲۰\,L$، مقداری گاز اکسیژن با دمای $۲۷^\circ C$ و فشار $۴/۵\,atm$ وجود دارد. شیر مخزن را باز می‌کنیم تا بخشی از گاز درون مخزن خارج شود. اگر در این حالت فشار و دمای گاز به ترتیب $۱/۴\,atm$ و $۷^\circ C$ شده باشد، جرم گاز خارج‌شده چند گرم است؟ (جرم مولی گاز اکسیژن $۳۲\,g/mol$ و $R = ۸\,J/mol.K$ است.)

۱) ۸۰　　۲) ۴۰　　۳) ۲/۵　　۴) ۱/۲۵

۷۵- نمودار حجم ـ دما برای $۰/۵\,mol$ گاز کامل در طی یک چرخه، به شکل مقابل است. در این چرخه، کار انجام‌شده روی گاز چند ژول است؟ $(R = ۸\,\frac{J}{mol.K})$



۱) ۱۴۴۰

۲) −۱۴۴۰

۳) ۷۵۰

۴) −۷۵۰

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷۶- کدام مورد، نادرست است؟

۱) در ساختار لوویس یون سیلیکات، نسبت شمار الکترون‌های ناپیوندی به پیوندی برابر ۳ است.

۲) نفتالن و پارازایلن ایزومر یکدیگر به شمار می‌آیند.

۳) بار یون‌های سولفات و سولفید برخلاف بار یون‌های نیترات و نیترید، با هم یکسان است.

۴) شمار جفت‌الکترون‌های پیوندی در مولکول اتیلن با شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی در اوزون برابر است.

۷۷- با توجه به جدول زیر، محلول ۵۶ درصد جرمی سدیم نیترات در دمای $97/5^{\circ}C$ چه نوع محلولی است و اگر ۳۰۰ گرم از این محلول را تا دمای $10^{\circ}C$ سرد کنیم، چند گرم سدیم نیترات رسوب می‌کند؟

$\theta(^{\circ}C)$	۱۰	۲۰	۳۰
$S(\frac{g\,NaNO_3}{100g\,H_2O})$	۸۰	۸۸	۹۶

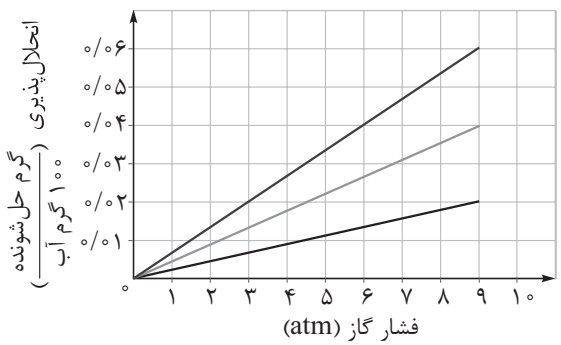
۱) سیرنشده ـ ۸۴

۲) سیرنشده ـ $62/4$

۳) فراسیرشده ـ ۸۴

۴) فراسیرشده ـ $62/4$

۷۸- شکل زیر، تغییر انحلال‌پذیری سه گاز NO، N_2 و O_2 را با تغییر فشار گاز، در دمای ثابت، نشان می‌دهد. اگر فشار گازی که شیب نمودار آن حدود $6/66\times10^{-3}\,g/atm$ است، بر روی یک مخزن آب ۳۰۰۰ لیتری برابر $0/6\,atm$ باشد، حداکثر شمار مولکول‌های این گاز که می‌توان در مخزن حل کرد، کدام است؟ $(N=14\,,O=16:g.mol^{-1})$



۱) $2/408\times10^{25}$

۲) $1/204\times10^{25}$

۳) $2/408\times10^{24}$

۴) $1/204\times10^{24}$

۷۹- کدام مورد درست است؟

۱) حرکت مولکول‌های آب از یک غشای تراوا از محیط رقیق به غلیظ را گذرندگی می‌گویند.

۲) در فرایند اسمز معکوس، غلظت محلول رقیق اولیه با گذشت زمان کاهش می‌یابد.

۳) اگر گلبول‌های قرمز خون انسان در آب‌مقطر قرار بگیرند، احتمال چروکیده‌شدن آن‌ها وجود دارد.

۴) آب تصفیه‌شده به روش تقطیر برخلاف آب به‌دست‌آمده از روش صافی کربن، نیازی به کلرزنی ندارد.

محل انجام محاسبات

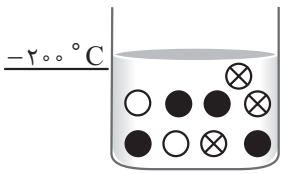
SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

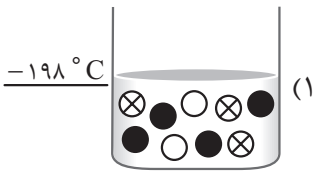
۸۰- با توجه به شکل که اجزای ظرف حاوی هوای مایع در دمای $-۲۰۰^{\circ}C$ را نشان می‌دهد و توضیحات زیر در مورد مواد موجود در ظرف، کدام شکل نمایش درستی از وضعیت اجزای هوای مایع در دمای مشخص‌شده را نشان نمی‌دهد؟ (نسبت اجزای سازندهٔ هوا در شکل رعایت نشده است.)

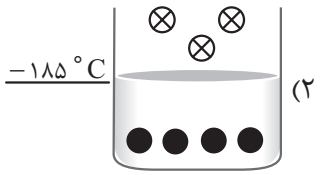
● اختلاف نقطهٔ جوش آن با گازی که برای خنک‌کردن قطعات الکترونیکی مانند MRI استفاده می‌شود، برابر $۷۳\,K$ است.

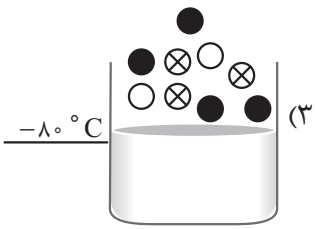
○ مجموع عددهای کوانتومی فرعی الکترون‌های ظرفیت آن برابر ۶ است.

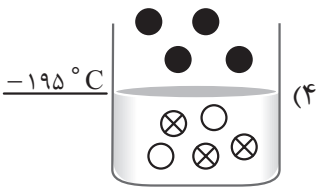
⊗ فشار این گاز در سطح زمین به تقریب برابر $۰/۲\,atm$ است.



۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۸۱- اگر در واکنش زیر به‌ازای ۳۹ گرم پلاتین ناخالص، ۲۹/۴۴ گرم گاز تولید شده باشد، درصد خلوص پلاتین کدام است و طی این فرایند چند لیتر محلول ۰/۲ مولار هیدروکلریک اسید مصرف شده است؟ $(Pt = ۱۹۵ , O = ۱۶ , N = ۱۴ : g.mol^{-1})$

$$Pt(s) + HNO_3(aq) + HCl(aq) \rightarrow H_2PtCl_6(aq) + NO_2(g) + H_2O(l)$$ (معادلهٔ واکنش موازنه شود.)

۱) ۱/۶ ـ ۸۰　　۲) ۴/۸ ـ ۷۵

۳) ۱/۶ ـ ۷۵　　۴) ۴/۸ ـ ۸۰

۸۲- چند مورد از مطالب زیر، به یقین درست است؟

- روند تغییرات واکنش‌پذیری عنصرها و شعاع اتمی آن‌ها در گروه‌های جدول تناوبی، همسو است.
- در همهٔ عنصرهای یک دورهٔ جدول تناوبی، شمار لایه‌های الکترونی اشغال‌شدهٔ عنصرها برابر است.
- در جدول تناوبی، مقدار کم‌ترین و بیشترین عدد اکسایش عنصرهای هم‌گروه مشابه است.
- شمار الکترون‌های ظرفیت دو عنصر غیرهم‌گروه، نمی‌تواند یکسان باشد.

۱) ۱　　۲) ۲

۳) ۳　　۴) ۴

محل انجام محاسبات

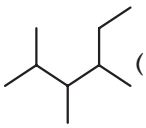
SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۸۳- در ۸۰۰ گرم محلول نمک کلرید فلز M، ۴۰ گرم MCl_2 وجود دارد. اگر چگالی محلول $1/11 g.mL^{-1}$ و مجموع غلظت یون‌ها در محلول برابر $1/5 mol.L^{-1}$ باشد، فلز M کدام است؟ $(Cl = 35/5 g.mol^{-1})$

۱) $^{200}_{80}Hg$ ۲) $^{40}_{20}Ca$ ۳) $^{65}_{30}Zn$ ۴) $^{24}_{12}Mg$

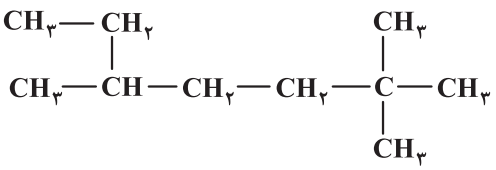
۸۴- براساس ترکیب‌های داده‌شده، کدام مورد درست است؟

الف)



ب) $CH_3C(CH_3)_2CH_2CH(CH_3)C_2H_5$

پ)



۱) هر سه ترکیب با یکدیگر همپار هستند.

۲) نام ترکیب «الف»، ۳، ۴، ۵ ـ تری‌متیل هگزان است.

۳) ترکیب «ب» دارای یک کربن با عدد اکسایش صفر و دو کربن با عدد اکسایش (-2) است.

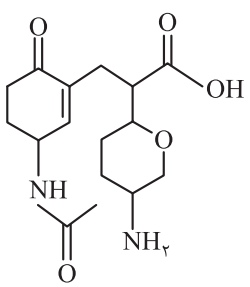
۴) آلکان راست‌زنجیری که همپار ترکیب «پ» است، نسبت به هگزان فرّاریت بیشتری دارد.

۸۵- درصد جرمی زیرکونیم (IV) هیدروکسید در ۱۲۰ میلی‌لیتر از محلول آن برابر با ۲ درصد است. اگر در اثر واکنش کامل با ۳۰ میلی‌لیتر محلول سولفوریک اسید، درصد جرمی زیرکونیم (IV) سولفات در محلول نهایی برابر با ۲/۸۴ درصد شود، جرم مولی فلز زیرکونیم چند گرم بر مول است؟ (از حجم آب تولیدشده در واکنش صرف نظر کنید و چگالی محلول‌ها را برابر یک گرم بر میلی‌لیتر در نظر بگیرید و $H = 1, O = 16, S = 32 : g.mol^{-1}$)

(معادله موازنه شود.) $Zr(OH)_4(aq) + H_2SO_4(aq) \rightarrow Zr(SO_4)_2(aq) + H_2O(l)$

۱) ۹۲ ۲) ۱۰۱ ۳) ۱۱۸ ۴) ۱۷۸

۸۶- کدام موارد از مطالب زیر دربارهٔ ترکیب داده‌شده، درست است؟



الف) در ساختار آن یک گروه کربوکسیل، یک گروه اتری، دو گروه کتونی و دو گروه آمینی وجود دارد.

ب) بیش از ۵۰ درصد شمار کل اتم‌های سازندهٔ آن را اتم هیدروژن تشکیل داده است.

پ) در شرایط مناسب می‌تواند در واکنش‌های تهیهٔ آمید و پلی‌آمید شرکت کند.

ت) در ساختار آن، ۱۲ جفت‌الکترون ناپیوندی وجود دارد.

ث) در ساختار آن، ۳ اتم کربن وجود دارند که به اتم هیدروژن متصل نیستند.

۱) الف ـ ب ـ ت ۲) پ ـ ث ۳) ب ـ پ ـ ت ۴) ب ـ پ ـ ث

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۸۷- اگر سه واکنش داده‌شده، مراحل انجام یک واکنش کلی باشند، ΔH واکنش کلی (بدون تغییر در ضرایب استوکیومتری معادلهٔ واکنش‌ها) برابر چند کیلوژول است و اگر ۲ مول فراوردهٔ نهایی را در آب کافی حل کنیم و سپس حجم محلول را به ۵ L برسانیم، محلول حاصل با چند گرم سدیم هیدروکسید ۸۰٪ خالص، خنثی خواهد شد؟ (آنتالپی پیوند $O=O$ برابر ۴۹۵ و میانگین آنتالپی پیوند $S-O$ برابر ۳۶۵ کیلوژول بر مول است.) $(H=1, O=16, Na=23 : g.mol^{-1})$

I) $O_2(g)+NO(g) \rightarrow NO_2(g)+O(g)$

II) $SO_2(g)+O(g) \rightarrow SO_3(g)$

III) $NO_2(g)+SO_2(g) \rightarrow NO(g)+SO_3(g)$

۱) -335 ، ۲۰۰ ۲) -235 ، ۲۰۰ ۳) -335 ، ۱۶۰ ۴) -235 ، ۱۶۰

۸۸- با توجه به معادلهٔ موازنه‌نشدهٔ: $X(aq)+Y(aq) \rightarrow A(s)+E(aq)$، کدام مطلب درست است؟

۱) اگر X و Y، کلسیم کلرید و سدیم فسفات باشند، A سدیم کلرید است و مجموع ضرایب مواد شرکت‌کننده در واکنش برابر ۱۲ است.

۲) اگر A باریم سولفات باشد، X و Y می‌توانند باریم نیترات و سدیم سولفات باشند و مجموع ضرایب مواد شرکت‌کننده در این واکنش برابر ۴ است.

۳) اگر X و Y، سدیم کلرید و نقره نیترات باشند، با مخلوط‌شدن آن‌ها و انجام واکنش، نسبت غلظت آنیون چنداتمی به آنیون تک‌اتمی در محلول، افزایش می‌یابد.

۴) اگر X و Y، سدیم هیدروکسید و آهن (III) کلرید باشند، A آهن (III) هیدروکسید است و با انجام واکنش، pH محلول افزایش می‌یابد.

۸۹- ۳۰/۷ گرم از $POCl_3$ را در ظرفی وارد کرده تا مطابق واکنش زیر تجزیه شود. اگر سرعت متوسط تولید گاز کلر ۰/۱ مول بر دقیقه باشد، پس از ۴۵ ثانیه، چند درصد حجمی گازهای درون ظرف واکنش را فسفر تری‌کلرید تشکیل می‌دهد؟ $(Cl=35/5, P=31, O=16 : g.mol^{-1})$

$POCl_3(g) \rightarrow PCl_3(g)+Cl_2(g)+P_4O_{10}(s)$ (معادلهٔ واکنش موازنه شود.)

۱) ۲۵ ۲) ۳۳/۳۳ ۳) ۵۰ ۴) ۶۶/۶۷

۹۰- کدام مورد درست است؟ $(Al=27\ g.mol^{-1})$

۱) ظرفیت گرمایی ۵ لیتر گاز اکسیژن $(c=0/9\ J.g^{-1}.^{\circ}C^{-1})$ با چگالی $1/5\ g.L^{-1}$ برابر با $7/65\ J.^{\circ}C^{-1}$ است.

۲) علامت ΔH واکنش تبدیل گرافیت به الماس، مانند علامت ΔH فرایند انحلال کلسیم کلرید در آب است.

۳) در دمای ثابت، انرژی پتانسیل واکنش‌دهنده‌ها و فراورده‌های یک واکنش، تفاوت چندانی با یکدیگر ندارد.

۴) اگر ΔH واکنش موازنه‌شدهٔ ترمیت، -810 کیلوژول باشد، از مصرف هر گرم آلومینیم در این واکنش، ۱۵ کیلوژول گرما آزاد می‌شود.

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۹۱- ۳۰۰ میلی‌لیتر باریم هیدروکسید با مخلوطی از آمونیوم کلرید و هیدروکلریک اسید مطابق معادله‌های زیر واکنش می‌دهد. اگر طی این فرایند، ۶/۸ میلی‌گرم آمونیاک و ۲۴۹/۶ میلی‌گرم باریم کلرید تولید شود، pH محلول باریم هیدروکسید اولیه کدام است؟ $(Ba=۱۳۷, Cl=۳۵/۵, N=۱۴, H=۱: g.mol^{-1})$

$$Ba(OH)_۲(aq)+NH_۴Cl(aq)\rightarrow BaCl_۲(aq)+NH_۳(g)+H_۲O(l)$$
$$Ba(OH)_۲(aq)+HCl(aq)\rightarrow BaCl_۲(aq)+H_۲O(l)$$

(معادلهٔ واکنش‌ها موازنه شوند.)

۱) ۱۱/۹ ۲) ۱۲ ۳) ۱۲/۳ ۴) ۱۲/۷

۹۲- با توجه به ساختار چهار ترکیب داده‌شده، کدام موارد زیر درست است؟ $(H=۱, C=۱۲, N=۱۴, O=۱۶: g.mol^{-1})$

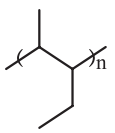
الف) تفاوت جرم مولی الکل حاصل از آبکافت ترکیب (۴) و اوره، با جرم مولی پروپین برابر است.

ب) نام مونومر سازندهٔ ترکیب (۱)، ۱ـ پنتن است.

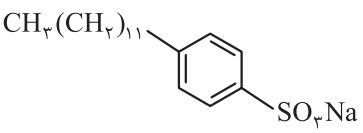
پ) فرمول مولکولی مونومرهای سازندهٔ ترکیب (۳)، $C_۴H_{۱۲}N_۲$ و $C_۴H_۶O_۴$ است.

ت) شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی ترکیب (۲)، با شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی گوگرد تری‌اکسید برابر است.

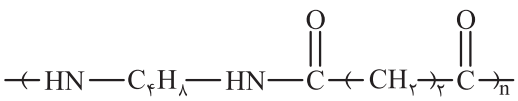
ث) تفاوت شمار اتم‌های هیدروژن در فرمول شیمیایی ترکیب (۲) و اسید چرب سازندهٔ ترکیب (۴) برابر ۷ است.



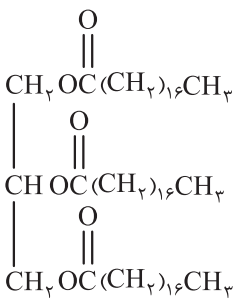
ترکیب (۱)



ترکیب (۲)



ترکیب (۳)



ترکیب (۴)

۱) پ ـ ت ـ ث ۲) الف ـ ب ـ پ ۳) پ ـ ث ۴) ب ـ ت

۹۳- حساسیت یک pH سنج دیجیتال ۰/۱ واحد pH است. اگر ۵۰۰ میلی‌لیتر محلول هیدروسیانیک اسید با $pH=۴/۷$ در اختیار داشته باشیم، در دمای ثابت، حداقل چند لیتر گاز هیدروژن سیانید (در شرایط STP) در آن حل کنیم تا تغییر pH توسط این pH سنج مشاهده شود؟ (از تغییر حجم محلول بر اثر اضافه‌کردن هیدروژن سیانید صرف نظر شود، ثابت یونش هیدروسیانیک اسید برابر ۵×۱۰^{-۱۰} مول بر لیتر است و $\log ۲=۰/۳$)

۱) ۵/۰۴ ۲) ۶/۱۶ ۳) ۱۰/۰۸ ۴) ۱۲/۳۲

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۹۴- با توجه به سلول‌ها و پتانسیل‌های کاهشی داده‌شده، چند مورد از مطالب زیر، درست است؟

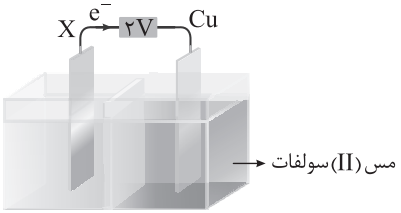
$E^\circ(Zn^{2+}/Zn) = -0/76V$

$E^\circ(Cu^{2+}/Cu) = +0/34V$

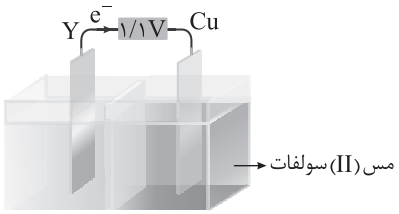
$E^\circ(Sn^{2+}/Sn) = -0/14V$

$E^\circ(Fe^{2+}/Fe) = -0/44V$

$E^\circ(Al^{3+}/Al) = -1/66V$



(۱)



(۲)

- **قدرت کاهندگی فلز Y کم‌تر از X بوده و برخلاف فلز X، جزء فلزهای واسطه است.**
- **به ازای شمار الکترون‌های مبادله‌شدهٔ یکسان، تغییر جرم تیغهٔ آندی در سلول (۲) بیشتر است.**
- **ولتاژ سلول گالوانی استاندارد حاصل از الکترودهای X و Y برابر ۰/۹ ولت است.**
- **مجموع ضرایب مواد در معادلهٔ واکنش کلی انجام‌شده در سلول (۱) بیشتر از سلول (۲) است.**

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) ۴

۹۵- کدام مورد دربارهٔ دو ترکیب گوگرد تری‌اکسید (X) و آمونیاک (Y) درست است؟

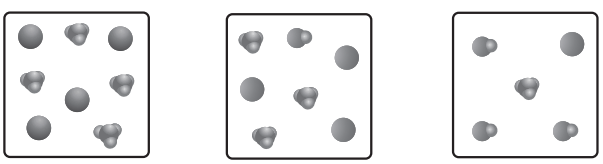
۱) بار جزئی اتم مرکزی در هر دو، $+\delta$ است.

۲) مولکول X قطبی و مولکول Y، ناقطبی است.

۳) هر دو مولکول، چهاراتمی و شکل هندسی آن‌ها یکسان است.

۴) کاغذ pH در محلول آبی X، به رنگ سرخ درمی‌آید.

۹۶- محلول‌های زیر از انحلال مول‌های مساوی از اسیدهای HA، HB و HX در مقادیر یکسان آب $25^\circ C$ به دست آمده‌اند. کدام موارد زیر درست است؟ (حجم همهٔ محلول‌ها ۲۰۰ میلی‌لیتر است.)


HA(aq)　　HB(aq)　　HX(aq)

الف) pH محلول HA، بیشتر از pH محلول HX است.

ب) اگر مقدار ثابت یونش HX، برابر ۱/۰ باشد، هر ذرهٔ نشان داده شده در محلول آن، هم‌ارز ۰/۰۶ مول است.

پ) درجهٔ یونش اسید HB، سه برابر درجهٔ یونش اسید HX است.

ت) با افزودن مقدار یکسانی آب به محلول‌های HA، HX و pH آن‌ها به یک میزان تغییر می‌کند.

۱) الف ـ ت　　۲) ب ـ پ　　۳) الف ـ پ　　۴) ب ـ ت

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹۷- با توجه به واکنش‌های داده‌شده، چند مورد از مطالب زیر درست است؟ (A فراوردهٔ اصلی واکنش (I) است.)

$$I)\text{اتن}+KMnO_4 \rightarrow A \quad II)\text{اتن}+H_2O \xrightarrow{x} B \quad III)\text{اتن}+HCl \rightarrow C \quad IV)\ B+\text{استیک اسید} \xrightarrow{y} D+H_2O$$

- x و y، هر دو سولفوریک اسید هستند که به عنوان کاتالیزگر در واکنش شرکت نکرده و دست‌نخورده باقی می‌مانند.
- C، کلرواتان می‌باشد که ترکیبی سیرشده است و به عنوان افشانهٔ بی‌حس‌کننده استفاده می‌شود.
- واکنش‌های (I)، (II) و (III) برخلاف واکنش (IV)، از نوع اکسایش ـ کاهش هستند.
- D حلال چسب است که چهارمین عضو خانوادهٔ کربوکسیلیک اسیدها با زنجیرهٔ هیدروکربنی سیرشده، می‌تواند ایزومر آن باشد.
- A می‌تواند به عنوان مونومر در واکنش تولید پلی‌استر استفاده شود.

۱) ۵ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

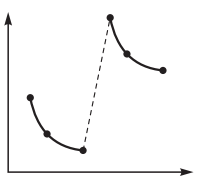
۹۸- دربارهٔ واکنش: $C_2H_5OH(aq)+MnO_4^-(aq)+H^+(aq) \rightarrow CH_3COOH(aq)+Mn^{2+}(aq)+H_2O(l)$

پس از موازنه، چند مورد از مطالب زیر، درست است؟

- ترکیب آلی موجود در واکنش‌دهنده‌ها، خاصیت بازی دارد.
- تغییر عدد اکسایش هر اتم منگنز در این واکنش با این تغییر در واکنش اکسایش پارازایلن به ترفتالیک اسید در حضور پتاسیم پرمنگنات، برابر است.
- مجموع ضرایب مواد شرکت‌کننده در واکنش برابر ۴۱ است.
- ترکیب آلی موجود در فراورده‌ها، قدرت اسیدی بیشتری نسبت به فورمیک اسید دارد.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۹۹- کدام موارد از مطالب زیر، دربارهٔ شعاع اتمی و یونی عنصرهای دورهٔ دوم و سوم جدول تناوبی، درست است؟



الف) شعاع آنیون از اتم خنثی خود بزرگ‌تر و شعاع کاتیون از اتم خنثی خود، کوچک‌تر است.

ب) در یک دوره، شعاع یک آنیون پایدار از شعاع یک کاتیون پایدار، بزرگ‌تر است.

پ) در یک دوره، بزرگ‌ترین شعاع یونی مربوط به عنصری با آرایش الکترونی لایهٔ ظرفیت ns^2np^5 است.

ت) نمودار داده‌شده را می‌توان به چگالی بار یون‌های پایدار عنصرهای دورهٔ سوم برحسب عدد اتمی آن‌ها نسبت داد.

۱) الف ـ ب ۲) الف ـ پ ـ ت ۳) ب ـ پ ـ ت ۴) ب ـ ت

۱۰۰- دربارهٔ فرایندهای الکتروشیمیایی انجام‌شده طی خراشیده‌شدن حلبی و آهن گالوانیزه، چند مورد از موارد زیر درست است؟

- در هر دو حالت، رسوب تشکیل‌شده در پایان واکنش‌ها، یکسان است.
- در حلبی خراشیده‌شده، آهن و در آهن گالوانیزهٔ خراشیده‌شده، روی نقش آند را ایفا می‌کند.
- در هر دو حالت، مولکول‌های اکسیژن نقش اکسنده را دارند.
- این فرایندها، در حضور یون هیدرونیوم با سرعت بیشتری انجام می‌شوند.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

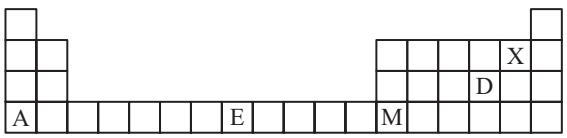
۱۰۱- در واکنش تعادلی تولید آمونیاک به روش هابر، افزایش فشار، کاهش دما و خروج مقداری آمونیاک از ظرف واکنش، به ترتیب، تعادل را در کدام جهت جابه‌جا می‌کنند؟

۱) رفت ـ رفت ـ رفت ۲) برگشت ـ رفت ـ رفت ۳) رفت ـ برگشت ـ رفت ۴) برگشت ـ رفت ـ برگشت

۱۰۲- در واکنش تعادلی تولید بخار متانول از گازهای کربن مونوکسید و هیدروژن، شرایط به گونه‌ای است که بازده واکنش برابر ۴۰٪ است. اگر در آغاز، یک مول گاز کربن مونوکسید با مقدار لازم (براساس نسبت استوکیومتری) از گاز هیدروژن در یک ظرف دولیتری مخلوط شوند، چند گرم متانول تولید می‌شود و مقدار ثابت تعادل این واکنش به تقریب کدام است؟ $(H=1, C=12, O=16 : g.mol^{-1})$

۱) ۰/۴۶ ـ ۳۲ ۲) ۱/۸۵ ـ ۳۲ ۳) ۰/۴۶ ـ ۱۲/۸ ۴) ۱/۸۵ ـ ۱۲/۸

۱۰۳- باتوجه به شکل مقابل که قسمتی از جدول تناوبی عنصرها را نشان می‌دهد، کدام مطلب درست است؟ $(S=32 g.mol^{-1})$



۱) یون‌های تک‌اتمی پایدار عنصرهای D، X و A به ترتیب به آرایش الکترونی گازهای نجیب دوره‌های دوم، سوم و چهارم جدول تناوبی می‌رسند.

۲) در تشکیل ۲ مول کلرید عنصر M، ۴ مول الکترون مبادله می‌شود.

۳) اگر مجموع شمار ذرات زیراتمی عنصر A برابر ۵۹ باشد، ۲۸ گرم سولفید این عنصر دارای ۰/۵ مول کاتیون است.

۴) در هر واحد فرمولی از فسفات فلز E با بیشترین بار الکتریکی، ۷ اتم وجود دارد.

۱۰۴- در عنصری از دورهٔ چهارم، تفاوت مجموع شمار الکترون‌های دارای $l=0$ و $l=1$ با شمار الکترون‌های دارای $l=2$ برابر ۹ است. کدام موارد از مطالب زیر دربارهٔ این عنصر درست است؟

الف) تفاوت عدد اتمی آن با اکسنده‌ترین عنصر جدول دوره‌ای برابر ۲۰ است.

ب) با عنصرهایی با عددهای اتمی ۴۷ و ۷۹ هم‌گروه است.

پ) فلزی اصلی است و یون پایدار آن، دارای آرایش الکترونی گاز نجیب است.

ت) واکنش‌پذیری آن از عنصر بعد از خود در دورهٔ چهارم، بیشتر است.

۱) الف ـ ب ۲) پ ـ ت ۳) الف ـ پ ۴) ب ـ ت

۱۰۵- در جدول زیر، همهٔ ویژگی‌ها در مورد چند ماده که نام آن‌ها داده‌شده، درست است؟

نام ماده / ویژگی‌ها	۱ـ هگزن	برم	اتیلن گلیکول	کلروفرم	آهن (III) اکسید
فرمول شیمیایی	C_6H_{12}	Br_2	$C_2H_6O_2$	$CHCl_3$	Fe_2O_3
حالت فیزیکی در دما و فشار اتاق	گاز	مایع	مایع	گاز	جامد
رنگ	بی‌رنگ	قرمز	سبز	بی‌رنگ	قرمز

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

خیلی سبز! آزمون
تجربی | ریاضی | انسانی

سال تحصیلی
۱۴۰۲ - ۱۴۰۳

دفترچه پاسخ آزمون چهاردهم حضوری

علوم ریاضی و فنی

ویژهٔ کنکوری‌های ۱۴۰۳

۱۴۰۳/۰۱/۳۱

آزمون آزمایشی خیلی سبز

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا
حسابان	حسین شفیع‌زاده- مهرداد کیوان
ریاضیات گسسته و آمار و احتمال	علیرضا شریف‌خطیبی- عطا صادقی- حمید گلزاری- سروش موئینی
هندسه	امیرحسین ابومحبوب- محمدطاهر شعاعی- کیوان صارمی- حمید گلزاری
فیزیک	یاشار انگوتی- محمد باغبان- علیرضا جباری- مجید ساکی- رضا سبزمیدانی- محمدجواد سورچی- نوید شاهی- علیرضا عبدالهی- علیرضا علینقی- حمید فدائی‌فرد- حامد نبی‌منصور
شیمی	اسلام آب روشن - مجتبی ابراهیمی - مهدی براتی - امیرسامان بنی‌جمالی - محمدعلی توسلی‌فر - یاسر راش - عباس سرمایه - یاسر عبداللهی

نام درس	مسئول درس	گزینشگر	مولف پاسخ‌نامه	کارشناسان علمی	ویراستاران به ترتیب حروف الفبا
حسابان	حسین شفیع‌زاده - مهرداد کیوان	حسین شفیع‌زاده- مهرداد کیوان	عاطفه خان‌محمدی	محمدسجاد نقیه سجاد داوطلب	زهرا جالینوسی- محمد حمیدی- امیرحسین قنبری
ریاضیات گسسته و آمار و احتمال	حمید گلزاری	حمید گلزاری	مسعود شفیعی	امیرحسین ابومحبوب	محمد حمیدی- ماهان فنی‌فر- ابوالفضل ناصری
هندسه	حمید گلزاری	حمید گلزاری	زهرا جالینوسی	امیرحسین ابومحبوب	محمد حمیدی- ماهان فنی‌فر- علیرضا کاظمی بقا
فیزیک	رضا سبزمیدانی	نوید شاهی	محمد باغبان- علیرضا جباری- محمدجواد سورچی- علیرضا گونه	علیرضا جباری	محمد احمدبیکی- مهدی بابائی- ماهان فنی‌فر- احسان محمدی- امیر محمودی انزابی
شیمی	یاسر عبداللهی	عباس سرمایه - یاسر عبداللهی	معصومه سعیدی - وحید فارسیان	محمد مرادی	یاسر راش- احسان رحیمی- هومن زندی - وحید فارسیان

سرپرست محتوایی: فاطمه آقاجانپور

Azmoon.kheilisabz.com

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

تست و پاسخ ۱

هرگاه $A=\frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+2}$ باشد، مقدار $(A-1)^3$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) $-\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

خودت حل کنی بهتره در مخرج از $\sqrt[3]{2}$ فاکتور بگیرید و سپس از اتحاد چاق و لاغر استفاده کنید تا مخرج A را گویا کنید.

پاسخ تشریحی **گام اول:** در عبارت A از $\sqrt[3]{2}$ فاکتور می‌گیریم:

$$A=\frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+2}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}(\sqrt[3]{2}+1+\sqrt[3]{4})}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}(\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2}+1)}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}(\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2}+1)}\times\frac{(\sqrt[3]{2}-1)}{(\sqrt[3]{2}-1)}$$

↑ اتحاد چاق و لاغر

$$=\frac{\sqrt[3]{2}-1}{\sqrt[3]{2}(2-1)}=\frac{\sqrt[3]{2}-1}{\sqrt[3]{2}}=1-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

گام دوم: حالا حاصل $(A-1)^3$ را پیدا می‌کنیم:

$$A-1=1-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}-1=-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\Rightarrow(A-1)^3=(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}})^3=-\frac{1}{2}$$

تست و پاسخ ۲

مجموعه جواب نامعادلهٔ $\frac{ax^3+bx^2+cx-6}{x-1}<0$، بازهٔ $(-\infty,-2)$ است. حاصل $a+b-2c$ کدام است؟

۱) ۳− ۲) ۶− ۳) ۲− ۴) ۴−

پاسخ: گزینهٔ ۱

مشاوره تجربهٔ این چند ساله در کنکور نشان داده است که سؤال مربوط به حل نامعادله دشوارتر شده است و با چند عددگذاری ساده قابل حل نیست. این سؤال، نمونهٔ بسیار خوبی از این موضوع است. به دقت آن را تحلیل کنید.

پاسخ تشریحی **گام اول:** از آن‌جایی که مجموعه‌جواب نامعادلهٔ داده‌شده به صورت $(-\infty,-2)$ است، در این بازه، مخرج کسر (یعنی $(x-1)$) منفی است؛ پس صورت باید مثبت باشد:

$$\frac{ax^3+bx^2+cx-6}{x-1}<0\xrightarrow{x-1<0}ax^3+bx^2+cx-6>0$$

گام دوم: چون مجموعه‌جواب به صورت $(-\infty,-2)$ است؛ پس یکی از ریشه‌های صورت $x=-2$ است. از طرفی، کسر نباید در $x=1$ تغییر علامت دهد، پس $x=1$ یکی دیگر از ریشه‌های صورت است، پس صورت باید از درجه‌دوم باشد؛ پس ضریب x^3 صفر است: $a=0$

گام سوم: با توجه به گام اول و دوم داریم: $bx^2+cx-6=b(x-1)(x+2)=b(x^2+x-2)$

$$\Rightarrow\begin{cases}b=c\\-2b=-6\end{cases}\Rightarrow b=c=3$$

گام چهارم: حالا حاصل عبارت خواسته‌شده را می‌یابیم:

$$a+b-2c=0+3-6=-3$$

تست و پاسخ ۳

در معادلهٔ $\frac{1}{5}+\frac{1}{y}+\frac{2}{x}=0$، تمام جواب‌های صحیح را به دست آورده‌ایم. مجموع مقادیر به‌دست‌آمده برای x کدام است؟

۱) ۱۲۰− ۲) ۶۰ ۳) ۳۰− ۴) صفر

پاسخ: گزینهٔ ۱

خودت حل کنی بهتره اول y را تنها کنید. حالا با توجه به صحیح‌بودن x و y، به یک معادلهٔ عادکردنی می‌رسید که حل آن بسیار آسان است.

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

درس‌نامه

معادلهٔ عاد کردنی

یک مدل بسیار پرتکرار در سؤال‌های بخش‌پذیری سؤال‌هایی مثل این است که به ازای چند مقدار x، رابطهٔ $x-2 \mid 3x+4$ برقرار است؟ این مدل سؤال‌ها را معادلهٔ عادکردنی می‌نامیم. روش اصلی پاسخ‌گویی به این نوع سؤال‌ها این است که x را از سمت راست حذف کنیم؛ برای مثال برای حل $x-2 \mid 3x+4$، ابتدا معادلهٔ کمکی $x-2 \mid x-2$ را می‌نویسیم و سپس x را از سمت راست حذف می‌کنیم:

$$\begin{cases} x-2 \mid x-2 \xrightarrow{\times 3} x-2 \mid 3x-6 \\ x-2 \mid 3x+4 \rightarrow x-2 \mid 3x+4 \end{cases} \xrightarrow{-} x-2 \mid 10 \Rightarrow x-2 = \pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10$$

حالا مقادیر x را به دست می‌آوریم. دقت کنید که مقادیر به‌دست‌آمده را باید در معادلهٔ اولیه، $x-2 \mid 3x+4$ چک کنید، برای مثال $x=10$ در این رابطه صدق نمی‌کند!

روش تستی حل معادلهٔ عاد کردنی

یک راه ساده‌تر برای حل معادلهٔ عادکردنی این است که اگر عبارت سمت چپ ریشه داشت، می‌توانیم ریشهٔ آن را در عبارت سمت راست قرار دهیم. برای مثال در معادلهٔ عادکردنی بالا، $x=2$ ریشهٔ عبارت سمت چپ است که با جای‌گذاری آن در عبارت سمت راست به $x-2 \mid 10$ می‌رسیم. به همین راحتی!

پاسخ تشریحی **گام اول:** اول y را تنها می‌کنیم:

$$\frac{2}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{5}=0 \Rightarrow \frac{1}{y}=-\frac{2}{x}-\frac{1}{5}=\frac{-10-x}{5x} \Rightarrow \frac{1}{y}=\frac{-10-x}{5x} \xrightarrow{\text{معکوس}} y=\frac{5x}{-10-x}$$

گام دوم: y عددی صحیح است، پس کسر $\frac{5x}{-10-x}$ هم باید صحیح باشد. حالا با توجه به صحیح‌بودن x، این کسر وقتی صحیح می‌شود که مخرج صورت را عاد کند، یعنی: $-10-x \mid 5x$

گام سوم: برای حل‌کردن معادلهٔ عادکردنی بالا، ریشهٔ عبارت سمت چپ (یعنی $x=-10$) را در عبارت سمت راست قرار می‌دهیم:

$$\Rightarrow -10-x \mid -50 \xrightarrow[\text{عدد } -50 \text{ است.}]{-10-x \text{ یکی از مقسوم‌علیه‌های}} \begin{cases} -10-x=50 \Rightarrow x=-60 \\ -10-x=-50 \Rightarrow x=40 \\ -10-x=25 \Rightarrow x=-35 \\ -10-x=-25 \Rightarrow x=15 \\ -10-x=10 \Rightarrow x=-20 \\ -10-x=-10 \Rightarrow x=0 \quad \text{چون مخرج کسر اول در صورت سؤال صفر می‌شود} \\ -10-x=5 \Rightarrow x=-15 \\ -10-x=-5 \Rightarrow x=-5 \\ -10-x=2 \Rightarrow x=-12 \\ -10-x=-2 \Rightarrow x=-8 \\ -10-x=1 \Rightarrow x=-11 \\ -10-x=-1 \Rightarrow x=-9 \end{cases}$$

گام چهارم: بنابراین جمع مقادیر صحیح x برابر -120 می‌شود.

تست و پاسخ ۴

ارزش نهایی گزارهٔ $[p \wedge (\sim p \Rightarrow q)] \Rightarrow (\sim q \vee p)$ کدام است؟

۱) p ۲) q ۳) T ۴) F

پاسخ: گزینهٔ ۳

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

درس‌نامه برخی از قوانین جبر گزاره‌ها را در زیر ببینید:

۱) $p \wedge T \equiv p$
۲) $p \vee T \equiv T$
۳) $p \wedge F \equiv F$
۴) $p \vee F \equiv p$
۵) $p \vee (p \wedge q) \equiv p$ } قانون جذب
۶) $p \wedge (p \vee q) \equiv p$ } قانون جذب
۷) $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$
۸) $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$
۹) $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$

پاسخ تشریحی

روش اول: جدول ارزش گزاره‌ها را رسم می‌کنیم:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \Rightarrow q$	$p \wedge (\sim p \Rightarrow q)$	$\sim q \vee p$	$[p \wedge (\sim p \Rightarrow q)] \Rightarrow (\sim q \vee p)$
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	F	T	T	T	T	T
F	T	T	F	T	F	F	T
F	F	T	T	F	F	T	T

با توجه به جدول رسم‌شده، واضح است که ارزش نهایی گزارهٔ داده‌شده در صورت سؤال، T است.

روش دوم: با استفاده از قوانین جبر گزاره‌ها داریم:

$$[p \wedge \underbrace{(\sim p \Rightarrow q)}_{\sim(\sim p)\vee q}] \Rightarrow (\sim q \vee p) \equiv \underbrace{[p \wedge (p \vee q)]}_{p} \Rightarrow (\sim q \vee p)$$

$$\equiv p \Rightarrow (\sim q \vee p) \equiv (\sim p) \vee (\sim q \vee p) \equiv \underbrace{(\sim p \vee p)}_{T} \vee (\sim q) \equiv T$$

تست و پاسخ ۵

اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ درجه‌دوم $2x^2 - 4x - 2 = 0$ و $\frac{\alpha^2}{\beta}$ و $\frac{\beta^2}{\alpha}$ ریشه‌های معادلهٔ درجه‌دوم $ax^2 + bx + c = 0$ باشند، به طوری که جمع و ضرب ریشه‌های آن با هم برابر باشد، مقدار a چه عددی است؟

۱) $-\frac{16}{5}$
۲) $\frac{-8}{5}$
۳) $\frac{8}{5}$
۴) $\frac{16}{5}$

$$\frac{\beta^2}{\alpha} + \frac{\alpha^2}{\beta} = \frac{\beta^2\alpha^2}{\alpha\beta}$$

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس‌نامه روابط ریشه‌های (α, β) معادلهٔ درجه‌دوم $ax^2 + bx + c = 0$ $(\Delta > 0)$

۱) جمع ریشه‌ها $= S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$
۲) ضرب ریشه‌ها $= P = \alpha\beta = \frac{c}{a}$
۳) قدرمطلق تفاضل ریشه‌ها $= |\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$
۴) $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = S^2 - 2P$
۵) $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(a + \beta) = S^3 - 3PS$

پاسخ تشریحی **گام اول:** α و β ریشه‌های معادلهٔ $2x^2 - 4x - 2 = 0$ هستند؛ پس داریم:

$$S = \alpha + \beta = \frac{-B}{A} = \frac{-(-4)}{a} = \frac{4}{a}$$

$$P = \alpha\beta = \frac{C}{A} = \frac{-2}{a}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

گام دوم: هم‌چنین $\frac{\alpha^۲}{\beta}$ و $\frac{\beta^۲}{\alpha}$، ریشه‌های معادلهٔ $ax^۲+bx+c=۰$ هستند، به طوری که مجموع و حاصل‌ضرب این ریشه‌ها با هم برابر است؛ پس:

$$\frac{\alpha^۲}{\beta}+\frac{\beta^۲}{\alpha}=\frac{\alpha^۲\beta^۲}{\alpha\beta} \Rightarrow \frac{\alpha^۳+\beta^۳}{\alpha\beta}=\frac{\alpha^۲\beta^۲}{\alpha\beta} \xrightarrow{\alpha\beta\neq ۰} \alpha^۳+\beta^۳=\alpha^۲\beta^۲ \xrightarrow[\text{درس‌نامه}]{\text{از گام اول و}} S^۳-۳PS=P^۲ \quad (*)$$

گام سوم: از گام اول، مقادیر S و P به دست آمده برحسب a را در معادلهٔ (*) جای‌گذاری می‌کنیم:

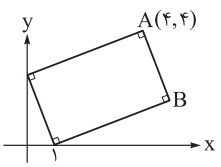
$$(\frac{۴}{a})^۳-۳(-\frac{۲}{a})(\frac{۴}{a})=(\frac{-۲}{a})^۲ \Rightarrow \frac{۶۴}{a^۳}+\frac{۲۴}{a^۲}=\frac{۴}{a^۲} \Rightarrow \frac{۶۴}{a^۳}=\frac{-۲۰}{a^۲}$$

$$\xrightarrow{a\neq ۰} ۶۴a^۲=-۲۰a^۳ \Rightarrow a=\frac{-۶۴}{۲۰}=-\frac{۱۶}{۵}$$

نکته $a\neq ۰$ است چون باید معادلات اولیه، از درجهٔ ۲ باشند.

تست و پاسخ ۶

در شکل زیر، یک مستطیل که نقطهٔ $A(۴,۴)$ مختصات یکی از رئوس آن است، رسم شده است، امتداد ضلع AB محور yها را با کدام عرض قطع می‌کند؟



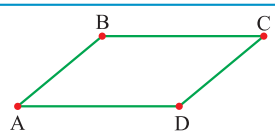
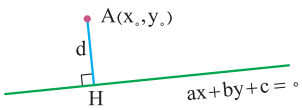
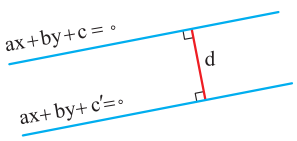
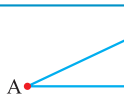
عرض از مبدأ خط گذرنده از AB

۱) ۹
۲) ۱۲
۳) ۱۵
۴) ۱۸

پاسخ: گزینهٔ ۲

مشاوره از موضوع هندسهٔ تحلیلی معمولاً یک سؤال مستقیم در کنکور می‌آید. (به صورت غیرمستقیم هم از مفاهیم آن استفاده می‌شود)؛ پس فرمول‌های آن را یک بار مرور کنید.

درس‌نامه ●● فرمول‌های هندسهٔ تحلیلی

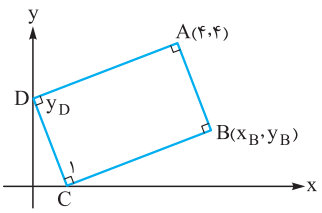
فاصلهٔ دو نقطهٔ $A(x_A,y_A)$, $B(x_B,y_B)$	$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^۲+(y_B-y_A)^۲}$
وسط پاره‌خط	$M(\frac{x_A+x_B}{۲},\frac{y_A+y_B}{۲})$ وسط AB
ارتباط مختصات رأس‌های متوازی‌الاضلاع	 $\begin{cases}x_A+x_C=x_B+x_D\\y_A+y_C=y_B+y_D\end{cases}$
فاصلهٔ نقطه از خط	 $d=\frac{\lvert ax_۰+by_۰+c\rvert}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$
فاصلهٔ دو خط موازی	 $d=\frac{\lvert c-c'\rvert}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$
مساحت مثلث از روی مختصات سه نقطه	 $S=\frac{۱}{۲}\begin{vmatrix}۱&۱&۱\\x_A&x_B&x_C\\y_A&y_B&y_C\end{vmatrix}=\frac{۱}{۲}\left(\begin{vmatrix}x_B&x_C\\y_B&y_C\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}x_A&x_C\\y_A&y_C\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x_A&x_B\\y_A&y_B\end{vmatrix}\right)$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

یادآوری ۱ $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ (دترمینان ۲ در ۲)

۲ اگر در فرمول محاسبهٔ مساحت، حاصل منفی شود آن را مثبت می‌کنیم.

پاسخ تشریحی **گام اول:** در شکل مقابل، مختصات رأس‌های مستطیل را مشخص می‌کنیم:



گام دوم: هر مستطیل یک متوازی‌الاضلاع است، پس طبق درس‌نامه رابطهٔ زیر را بین مختصات رئوس داریم:

$$\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \Rightarrow ۴ + ۱ = x_B + ۰ \Rightarrow x_B = ۵ \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases}$$

گام سوم: فرض می‌کنیم شیب خط AB برابر با m باشد، در این صورت با داشتن نقطهٔ $A(۴,۴)$ روی این خط، معادلهٔ خط AB به صورت زیر می‌شود:

$$\text{معادلهٔ خط AB}: y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow y - ۴ = m(x - ۴) \Rightarrow y = m(x - ۴) + ۴$$

گام چهارم: باید مقدار m را پیدا کنیم.

خط BC، عمود بر AB است؛ پس شیب این خط برابر با $\frac{-۱}{m}$ می‌شود. معادلهٔ این خط را با داشتن نقطهٔ $C(۱,۰)$ روی آن می‌نویسیم:

$$\text{معادلهٔ خط BC}: y - y_C = -\frac{۱}{m}(x - x_C) \Rightarrow y - ۰ = \frac{-۱}{m}(x - ۱) \Rightarrow y = \frac{-۱}{m}x + \frac{۱}{m}$$

گام پنجم: دو خط BC و AB، در نقطهٔ B یکدیگر را قطع می‌کنند:

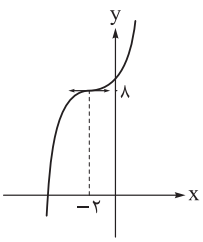
$$x_B = ۵ \Rightarrow \frac{-۵}{m} + \frac{۱}{m} = m(۵ - ۴) + ۴ \Rightarrow \frac{-۴}{m} = m + ۴ \Rightarrow m^۲ + ۴m + ۴ = ۰ \Rightarrow (m+۲)^۲ = ۰ \Rightarrow m = -۲$$

گام ششم: با جای‌گذاری مقدار m در معادلهٔ خط AB، عرض از مبدأ خط را می‌یابیم:

$$y = -۲(x - ۴) + ۴ = -۲x + ۱۲ \Rightarrow \text{عرض از مبدأ خط} = ۱۲$$

تست و پاسخ ۷

نمودار $f(x) = (x+a)(x^۲ + bx + ۲c)$، به صورت شکل زیر است. نمودار وارون تابع $g(x) = (x-b)^۳ - a$ از کدام ناحیه عبور نمی‌کند؟



$g^{-۱}(x)$

۱) اول و سوم
۲) سوم
۳) چهارم
۴) دوم و چهارم

پاسخ: گزینهٔ ۳

خودت حل کنی بهتره نمودار $f(x)$ از انتقال نمودار $y = x^۳$ به دست آمده است. به کمک شکل، ضابطهٔ آن را پیدا کنید.

پاسخ تشریحی **گام اول:** نمودار تابع f، از انتقال نمودار $y = x^۳$، دو واحد به سمت چپ و ۸ واحد به سمت بالا به دست آمده است؛ پس تابع f را می‌توان به صورت مقابل نوشت:

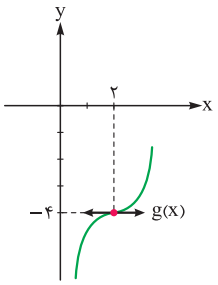
$$f(x) = (x+۲)^۳ + ۸ = (x+۲)^۳ + ۲^۳ = ((x+۲)+۲)((x+۲)^۲ - ۲(x+۲) + ۴)$$
$$= (x+۴)(x^۲ + ۴x + ۴ - ۲x - ۴ + ۴) = (x+۴)(x^۲ + ۲x + ۴)$$

گام دوم: تابع f به دست آمده را با صورت سؤال، مقایسه می‌کنیم تا مقادیر a و b را پیدا کنیم:

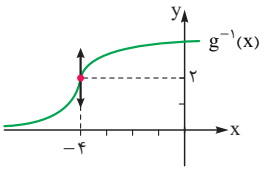
$$f(x) = (x+۴)(x^۲ + ۲x + ۴) = (x+a)(x^۲ + bx + ۲c) \Rightarrow \begin{cases} a = ۴ \\ b = ۲ \end{cases}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

گام سوم: تابع g به صورت $g(x)=(x-b)^{۳}-a=(x-۲)^{۳}-۴$ می‌شود. این تابع از انتقال نمودار $y=x^{۳}$، ۲ واحد به سمت راست و چهار واحد به پایین به دست می‌آید:



گام چهارم: حالا نمودار وارون تابع g را به دست می‌آوریم. g و $g^{-۱}$ نسبت به خط $y=x$ متقارن هستند؛ پس داریم:



می‌بینیم که $g^{-۱}(x)$ از ناحیهٔ چهارم عبور نمی‌کند.

تست و پاسخ ۸

اگر $f(x)=x+۴\sqrt{x-۴}$ باشد، به طوری که $f^{-۱}(x)=(\sqrt{x}+a)^{۲}+b$، مقدار $f(۲b+a)$ کدام است؟

۱) $۴+۲\sqrt{۶}$ ۲) $۶+۴\sqrt{۲}$ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) $۲\sqrt{۶}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

خودت حل کنی بهتره به کمک مربع کامل نمودن $f(x)$، وارون آن را بیابید.

درس‌نامه ●● نکات تابع وارون f

۱) اگر f در بازهٔ یک‌به‌یک باشد، در این بازه وارون‌پذیر است.

۲) $D_{f^{-۱}}=R_f$ (دامنهٔ تابع وارون برابر برد تابع است و برعکس)، $R_{f^{-۱}}=D_f$.

۳) برای پیداکردن ضابطهٔ $f^{-۱}$، x را برحسب y پیدا کرده و جای y و x را عوض می‌کنیم.

۴) اگر $(a,b)\in f$، آن‌گاه $(b,a)\in f^{-۱}$. به زبان دیگر، اگر $f(a)=b$، آن‌گاه: $f^{-۱}(b)=a$.

از این خاصیت، برای رد گزینه نیز می‌توانیم استفاده کنیم. اگر نقطهٔ (a,b) روی تابع باشد، (b,a) باید روی $f^{-۱}$ باشد.

۵) برای پیداکردن $f^{-۱}(a)$ کافی است معادلهٔ $f(x)=a$ را حل کنیم.

۶) نمودار f و $f^{-۱}$ نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول و سوم (خط $y=x$) قرینهٔ یکدیگر هستند.

۷) برای هر $x\in D_f$ داریم: $f^{-۱}(f(x))=x$ و برای هر $x\in D_{f^{-۱}}$ داریم: $f(f^{-۱}(x))=x$.

۸) اگر f اکیداً صعودی باشد، جواب‌های معادلهٔ $f(x)=f^{-۱}(x)$ و $f(x)=x$ یکسان است.

پاسخ تشریحی **گام اول:** از مربع کامل کردن $f(x)$ شروع می‌کنیم:

$$f(x)=x+۴\sqrt{x-۴}=(\sqrt{x-۴}+۲)^{۲}\quad,\quad x\geq ۴$$

گام دوم: حالا باید در رابطهٔ $f(x)$، x را تنها کنیم و سپس جای x و y را عوض کنیم تا وارون تابع f به دست بیاید:

$$y=(\sqrt{x-۴}+۲)^{۲}\Rightarrow\sqrt{y}=|\sqrt{x-۴}+۲|=\sqrt{x-۴}+۲\Rightarrow\sqrt{y}-۲=\sqrt{x-۴}$$

$$\Rightarrow x-۴=(\sqrt{y}-۲)^{۲}\Rightarrow x=۴+(\sqrt{y}-۲)^{۲}\xrightarrow[\text{می‌کنیم.}]{\text{جای }x\text{ و }y\text{ را عوض}}f^{-۱}(x)=۴+(\sqrt{x}-۲)^{۲}$$

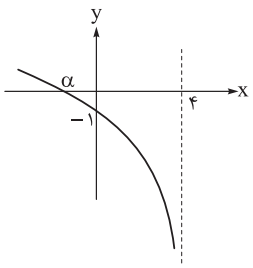
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

گام سوم: با مقایسهٔ $f^{-1}(x)$ به دست آمده با $f^{-1}(x)=(\sqrt{x}+a)^2+b$ داریم:

$$\begin{cases} b=4 \\ a=-2 \end{cases} \Rightarrow f(2b+a)=f(8-2)=f(6)=6+4\sqrt{6-4}=6+4\sqrt{2}$$

تست و پاسخ ۹

نمودار تابع $f(x)=a+\log_2(b+cx)$، به صورت شکل زیر است. مقدار α کدام است؟



۱) -2

۲) -8

۳) -4

۴) -1

پاسخ: گزینهٔ ۳

مشاوره لگاریتم نکات زیادی ندارد، اما از ویژگی‌ها یا نمودار آن در کنکور حتماً یک سؤال می‌آید که باید از پس آن برآیید.

درس‌نامه ●● ویژگی‌های لگاریتم

ویژگی	توضیح
$y=a^x \Leftrightarrow \log_a y=x$	رابطه‌های لگاریتمی را می‌توانیم به صورت توانی بنویسیم و برعکس.
$y=\log_b a \xrightarrow[\text{دامنه}]{D} \begin{cases} a>0 \\ b>0 \\ b\neq 1 \end{cases}$	برای تعیین دامنهٔ توابع لگاریتمی، بین سه شرط اشتراک می‌گیریم.
$\log_b 1=0 \,,\, \log_a a=1$	لگاریتم ۱ در هر پایه‌ای صفر و لگاریتم هر عدد در پایهٔ خودش برابر یک می‌شود.
$\log_b a^n=n\log_b a$	توان عبارت جلوی لگاریتم به پشت لگاریتم می‌رود. $(a>0)$
$\log_{b^n} a=\frac{1}{n}\log_b a$	توان پایهٔ لگاریتم، معکوس شده و به پشت لگاریتم می‌رود.
$\log_c ab=\log_c a+\log_c b$	لگاریتم ضرب دو عدد تبدیل به جمع لگاریتم‌ها می‌شود.
$\log_c \frac{a}{b}=\log_c a-\log_c b$	لگاریتم تقسیم دو عدد تبدیل به تفاضل لگاریتم‌ها می‌شود.
$\log_b a=\frac{\log_c a}{\log_c b}$	ویژگی تغییر پایه (قانون تغییر مبنا)
$\log_b a=\frac{1}{\log_a b}$	اگر جای a و b عوض شود، حاصل معکوس می‌شود: مثلاً $\log_2 3$ و $\log_3 2$ معکوس هم هستند.

پاسخ تشریحی

گام اول: اولاً $\lim\limits_{x\to 4} f(x)=-\infty$ است؛ پس به ازای $x=4$، عبارت جلوی لگاریتم صفر می‌شود:

$$b+cx=0 \xrightarrow{x=4} b=-4c \quad (I)$$

گام دوم: از طرفی نقطهٔ $(-1,0)$ در تابع f صدق می‌کند:

$$f(0)=a+\log_2 b=-1 \Rightarrow a=-\log_2 b-1 \quad (II)$$

گام سوم: نقطهٔ $(\alpha,0)$ نیز در f صدق می‌کند، داریم:

$$f(\alpha)=a+\log_2(b+c\alpha)=0 \Rightarrow a=-\log_2(b+c\alpha) \xrightarrow{(II)} -\log_2 b-1=-\log_2(b+c\alpha)$$

$$\Rightarrow \log_2 b+\log_2 2=\log_2(b+c\alpha) \Rightarrow \log_2 2b=\log_2(b+c\alpha)$$

چون پایهٔ لگاریتم‌ها با هم برابرند، عبارت جلوی لگاریتم‌ها نیز با هم برابر می‌شوند؛ پس:

$$2b=b+c\alpha \quad (III)$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

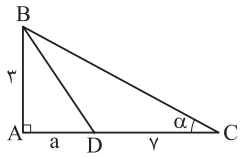
گام چهارم: از (I) استفاده می‌کنیم و در عبارت (III) جای‌گذاری می‌کنیم:

$$۲(-۴c) = -۴c + c\alpha \xrightarrow{\text{c را از طرفین معادله حذف می‌کنیم.}} -۸ = -۴ + \alpha \Rightarrow \alpha = -۴$$

تست و پاسخ ۱۰

در شکل زیر $\cos\alpha = \frac{۳}{\sqrt{۱۰}}$ است. مساحت مثلث BCD چه مقدار از $a^۲$ بیشتر است؟

۱) ۶
۲) ۶/۵
۳) ۸
۴) ۸/۵



پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ تشریحی

گام اول: مساحت مثلث BCD برابر است با:

$$S_{\triangle BCD} = \frac{۱}{۲}AB \times CD = \frac{۱}{۲} \times ۳ \times ۷ = ۱۰/۵$$

گام دوم: مقدار $\cos\alpha$ داده شده است. به کمک این مقدار، حاصل $\tan\alpha$ را می‌یابیم:

$$۱ + \tan^۲\alpha = \frac{۱}{\cos^۲\alpha} \Rightarrow ۱ + \tan^۲\alpha = \frac{۱}{(\frac{۳}{\sqrt{۱۰}})^۲} = \frac{۱۰}{۹} \Rightarrow \tan^۲\alpha = \frac{۱}{۹} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{۱}{۳} = \frac{AB}{AC}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۳} = \frac{۳}{a+۷} \Rightarrow a + ۷ = ۹ \Rightarrow a = ۲$$

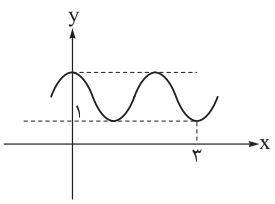
گام سوم: حاصل $S_{\triangle BCD} - a^۲$ را می‌یابیم:

$$S_{\triangle BCD} - a^۲ = ۱۰/۵ - ۴ = ۶/۵$$

تست و پاسخ ۱۱

قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a + b\sin^۲\frac{a\pi}{۶}x$ به صورت زیر است. مقدار $f(\frac{۵}{۳})$ کدام است؟

۱) ۲/۵
۲) ۱/۵
۳) ۳
۴) ۲



پاسخ: گزینهٔ ۱

مشاوره از مبحث مثلثات معمولاً دو سؤال در کنکور می‌آید که یکی از آن‌ها نمودارهای مثلثاتی است. نکات نمودار زیاد نیست و حتماً ارزش سرمایه‌گذاری دارد.

پاسخ تشریحی

گام اول: با توجه به این‌که شروع تابع f از $x = ۰$ به صورت نزولی است، مقدار b باید در ضریب توان دوم سینوس، منفی باشد $(b < ۰)$.

گام دوم: از طرفی $۰ \le \sin^۲\alpha \le ۱$ است، داریم:

$$۰ \le \sin^۲(\frac{a\pi}{۶}x) \le ۱ \xrightarrow{b<۰} b \le b\sin^۲(\frac{a\pi}{۶}x) \le ۰ \xrightarrow{+a} a + b \le f(x) \le a \quad (*)$$

گام سوم: به ازای $x = ۳$، مقدار مینیمم تابع به دست می‌آید که برابر با ۱ است:

$$f(۳) = a + b\sin^۲(\frac{a\pi}{۶} \times ۳) = ۱ \overset{(*)}{=} a + b \Rightarrow a + b\sin^۲(\frac{a\pi}{۲}) = ۱ = a + b \quad (**)$$

گام چهارم: از طرفی اگر دورهٔ تناوب تابع f را T در نظر بگیریم، با توجه به نمودار $\frac{۳}{۲}T = ۳$ می‌شود:

$$T = ۲ \Rightarrow \frac{\pi}{|\frac{a\pi}{۶}|} = ۲ \Rightarrow \frac{۶}{|a|} = ۲ \Rightarrow |a| = ۳$$

گام پنجم: مقدار $f(۰) = a$ است که با توجه به نمودار، مقداری مثبت است؛ پس $a = ۳$ می‌شود.

گام ششم: از $(**)$، مقدار $b = -۲$ می‌شود؛ پس $f(x) = ۳ - ۲\sin^۲(\frac{\pi}{۲}x)$ است.

گام هفتم: حاصل $f(\frac{۵}{۳})$ را می‌یابیم:

$$f(\frac{۵}{۳}) = ۳ - ۲\sin^۲(\underbrace{\frac{\pi}{۲} \times \frac{۵}{۳}}_{\frac{۵\pi}{۶}}) = ۳ - ۲(\frac{۱}{۲})^۲ = ۳ - \frac{۲}{۴} = \frac{۵}{۲} = ۲/۵$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

تست و پاسخ ۱۲

مجموع ریشه‌های معادلهٔ $\sin^۲ x + \sin ۲x = \frac{۳}{۲}$ در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ برابر θ است. حاصل $\sin\theta$ کدام است؟

۱) $۰/۸$ ۲) $۰/۶$ ۳) $-۰/۶$ ۴) $-۰/۸$

پاسخ: گزینهٔ ۴

مشاوره سؤال معادلهٔ مثلثاتی در این سال‌ها فراز و فرود زیادی داشته است (هم خیلی دشوار و هم نسبتاً ساده). این سؤال با این‌که ممکن است ظاهر دشواری داشته باشد، اما معادله به سادگی به کمک اتحادهای مثلثاتی حل می‌شود. پیشنهاد می‌کنم با ذهنیت منفی سراغ سؤال معادلهٔ مثلثاتی نروید.

درس‌نامه حل معادلهٔ مثلثاتی

برای حل معادلات مثلثاتی با استفاده از روابط مثلثاتی، به یکی از حالت‌های زیر رسیده و از فرمول دسته‌جواب‌ها استفاده می‌کنیم:

۱) $\sin x = \sin\alpha \Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \alpha \\ x = (۲k+۱)\pi - \alpha \end{cases}$

۲) $\cos x = \cos\alpha \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \alpha$

۳) $\left.\begin{matrix} \tan x = \tan\alpha \\ \cot x = \cot\alpha \end{matrix}\right\} \Rightarrow x = k\pi + \alpha$

پاسخ تشریحی **گام اول:** عبارت $\sin ۲x$ را در معادله باز می‌کنیم:

$$\sin^۲ x + \sin ۲x = \frac{۳}{۲} \Rightarrow \sin^۲ x + ۲\sin x\cos x = \frac{۳}{۲}$$

حالا طرفین معادله را بر $\cos^۲ x$ تقسیم می‌کنیم و معادله را برحسب تانژانت می‌نویسیم: $(\cos^۲ x \neq ۰)$

$$\frac{\sin^۲ x}{\cos^۲ x} + \frac{۲\sin x\cos x}{\cos^۲ x} = \frac{۳}{۲\cos^۲ x} \Rightarrow \tan^۲ x + ۲\tan x = \frac{۳}{۲}(۱+\tan^۲ x)$$

$$\Rightarrow ۲\tan^۲ x + ۴\tan x = ۳ + ۳\tan^۲ x \Rightarrow \tan^۲ x - ۴\tan x + ۳ = ۰$$

$$\Rightarrow (\tan x - ۳)(\tan x - ۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \tan x = ۳ \\ \tan x = ۱ \end{cases}$$

گام دوم: حالا باید مقادیر x را در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ پیدا کنیم:

۱) $\tan x = ۳ \xrightarrow[\text{باشد.}\alpha]{\text{فرض می‌کنیم یکی از ریشه‌ها برابر با}} x = \alpha, \alpha + \pi$

۲) $\tan x = ۱ \Rightarrow x = \frac{\pi}{۴}, \frac{۵\pi}{۴}$

گام سوم: حالا مقدار $\sin\theta$ را پیدا می‌کنیم:

$$\theta = \alpha + \alpha + \pi + \frac{\pi}{۴} + \frac{۵\pi}{۴} = ۲\alpha + \frac{۵\pi}{۲}$$

$$\Rightarrow \sin\theta = \sin(۲\alpha + \frac{۵\pi}{۲}) = \cos ۲\alpha = \frac{۱-\tan^۲\alpha}{۱+\tan^۲\alpha}$$

(برحسب $\tan\alpha$ می‌نویسیم.)

از طرفی از گام دوم، می‌دانیم که $\tan\alpha = ۳$ است. با جای‌گذاری این مقدار در عبارت به دست آمده از گام قبلی داریم:

$$\sin\theta = \frac{۱-۹}{۱+۹} = -۰/۸$$

تست و پاسخ ۱۳

نمودار تابع g فقط از انتقال نمودار تابع $f(x) = ۲x^۲ - ۸x + ۶$ به دست آمده است. اگر $\lim\limits_{x\to ۱} \frac{f(x)-g(x)}{۲-۲x} = ۶$ باشد، مقدار $g(۲)$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۹

پاسخ: گزینهٔ ۲

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

مشاوره سؤال حد کنکور، معمولاً ساده است و جزء مباحثی است که حتماً باید حل شود. حواستان باشد قضیهٔ هوپیتال را با مشتق تابع کسری اشتباه نگیرید.

درس‌نامه ●● قضیهٔ هوپیتال

فرض کنید $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ در حالت مبهم $\frac{0}{0}$ باشد.

حاصل حد $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ را به دست می‌آوریم. اگر حاصل آن L باشد، حاصل حد اصلی هم L است.

پاسخ تشریحی **گام اول:** چون تابع g فقط از انتقال نمودار تابع f به دست آمده است، آن را به صورت $g(x)=a+f(x+b)$ در نظر می‌گیریم.

گام دوم: در حد داده‌شده، مخرج به ازای $x=1$، صفر است و حاصل حد نیز عددی حقیقی است؛ پس به ازای $x=1$، صورت نیز برابر صفر است:

$$f(1)-g(1)=0 \Rightarrow g(1)=f(1) \Rightarrow a+f(b+1)=2-8+6=0$$

$$\Rightarrow f(b+1)=-a \quad (*)$$

گام سوم: در حد داده‌شده، از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم، داریم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-g(x)}{2-2x}=\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-8x+6-g(x)}{2-2x}\overset{HOP}{=}\lim_{x\to 1}\frac{4x-8-g'(x)}{-2}=6$$

$$\Rightarrow 4-8-g'(1)=-12 \Rightarrow g'(1)=8$$

گام چهارم: $g(x)=a+f(x+b)$ و در نتیجه $g'(x)=f'(x+b)$ است؛ پس:

$$g'(1)=f'(1+b)=8 \xrightarrow{f'(x)=4x-8} 4(1+b)-8=8 \Rightarrow 1+b=4 \Rightarrow b=3$$

گام پنجم: مقدار a را از $(*)$ به دست می‌آوریم:

$$f(4)=-a \Rightarrow a=-(2\times 16-32+6)=-6$$

گام ششم: حالا مقدار $g(2)$ را پیدا می‌کنیم:

$$g(x)=-6+f(x+3) \Rightarrow g(2)=-6+f(5) \Rightarrow -6+(2\times 25-40+6)=-6+16=10$$

تست و پاسخ ۱۴

اگر $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{3x+a}{2x^2-ax+a-2}=-\infty$ باشد، حدود a کدام است؟

۱) $-2<a<1$ ۲) $-3<a<4$ ۳) $a>4$ ۴) $a<-3$

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ تشریحی **گام اول:** حاصل حد، منفی بی‌نهایت شده است؛ پس به ازای $x=1$، مخرج عبارت برابر با صفر است:

$$2x^2-ax+a-2=(x-1)(2x-a+2)$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{3x+a}{(x-1)(2x-a+2)}=-\infty$$

به ازای $x\to 1^-$، عبارت $x-1\to 0^-$ می‌شود.

گام دوم: با توجه به حاصل حد، عبارت $\frac{3x+a}{2x-a+2}$، به ازای $x=1$، باید مثبت باشد:

$$\frac{3+a}{2-a+2}>0 \Rightarrow \frac{a+3}{4-a}>0 \xrightarrow{\text{بین دو ریشه}} -3<a<4$$

تست و پاسخ ۱۵

حد چپ و راست، نابرابر.

تابع $f(x)=[\frac{x^2-4x+8}{x-2}]$ در نقطه‌ای با کدام طول حد چپ و راست دارد، ولی ناپیوسته است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) صفر

پاسخ: گزینهٔ ۴

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ تشریحی **گام اول:** تابع $f(x)=[\frac{x^۲-۴x+۸}{x-۲}]$، در نقطه‌ای حد چپ و راست دارد و در آن ناپیوسته است (عدد صحیح باید باشد) که عبارت داخل جزء صحیح، به ازای آن ماکزیمم نسبی باشد.

گام دوم: نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع داخل جزء صحیح را با مشتق‌گیری پیدا می‌کنیم:

$$y=\frac{x^۲-۴x+۸}{x-۲} \Rightarrow y'=\frac{(۲x-۴)(x-۲)-(x^۲-۴x+۸)\times ۱}{(x-۲)^۲}$$

$$=\frac{۲(x^۲-۴x+۴)-x^۲+۴x-۸}{(x-۲)^۲}=\frac{x^۲-۴x}{(x-۲)^۲}=۰$$

نقاط بحرانی تابع y، برابر هستند با: $x=۰$، $x=۴$.

گام سوم: حالا عبارت y' را با توجه به ریشه‌ها تعیین علامت می‌کنیم تا نقطهٔ ماکزیمم نسبی را به دست آوریم:

x		۰		۲		۴	
y'	$+$	۰	$-$	‖	$-$	۰	$+$
y	↗		↘	‖	↘		↗

با توجه به جدول تعیین علامت بالا، $x=۰$، طول نقطهٔ max نسبی است؛ پس در این نقطه، تابع f، حد چپ و راست دارد، ولی ناپیوسته است.

نکته دقت کنید که $x=۲$، نقطهٔ بحرانی تابع نیست، چون عضو دامنهٔ تابع نیست.

تست و پاسخ ۱۶

خط $y=۲x+۴$ در نقطهٔ $x=-۱$ بر نمودار تابع $f(x)$ مماس است. حاصل مشتق تابع $y=xf(\frac{-۴}{x^۲})$ در نقطهٔ $x=۲$ چه‌قدر است؟

۱) ۴

۲) ۸

۳) ۱۲

۴) ۶

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس‌نامه **مشتق تابع مرکب**

مشتق تابع $f(x)$ همان $f'(x)$ می‌شود؛ اما برای مشتق‌گیری از $f(u)$ که u یک عبارت برحسب x است، داریم:

$$\underbrace{(f(u))'}_{\text{مشتق تابع مرکب}}=\underbrace{u'}_{\text{مشتق عبارت درون}}\times f'(u)$$

مثلاً: $(f(x^۲+۱))'=۲x\times f'(x^۲+۱)$

پاسخ تشریحی **گام اول:** با توجه به این‌که خط $y=۲x+۴$، در نقطهٔ $x=-۱$ بر نمودار تابع $f(x)$ مماس است، دو نتیجه می‌گیریم:

۱) $f(-۱)=-۲+۴=۲$

۲) $f'(-۱)=$ شیب خط $=۲$

گام دوم: مشتق تابع $y=xf(\frac{-۴}{x^۲})$ را پیدا می‌کنیم:

$$y'=۱\times f(\frac{-۴}{x^۲})+x(\frac{۴\times ۲x}{x^۴})f'(\frac{-۴}{x^۲})=f(\frac{-۴}{x^۲})+\frac{۸}{x^۲}f'(\frac{-۴}{x^۲})$$

گام سوم: مقدار $x=۲$ را در y' جای‌گذاری می‌کنیم:

$$y'(۲)=f(-۱)+\frac{۸}{۴}f'(-۱)=f(-۱)+۲f'(-۱)\underset{\text{از گام اول}}{=}۲+۲(۲)=۲+۴=۶$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

تست و پاسخ ۱۷

اگر $p(x)=x^۳-۳x^۲+۲ax+a$ باشد، به طوری که باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای‌های $p(x)$ و $p'(x)$ بر $p''(x)$ با هم برابر باشد، مقدار a چه عددی است؟

۱) -۳ ۲) ۳ ۳) ۱ ۴) -۱

پاسخ: گزینهٔ ۴

مشاوره یک سؤال ترکیبی ساده از مبحث تقسیم چندجمله‌ای‌ها و مشتق که به راحتی قابل حل است. از حل این سؤالات غافل نشوید.

پاسخ تشریحی **گام اول:** از روی $p(x)$، $p'(x)$ و $p''(x)$ را پیدا می‌کنیم:

$$p(x)=x^۳-۳x^۲+۲ax+a$$
$$p'(x)=۳x^۲-۶x+۲a$$
$$p''(x)=۶x-۶$$

گام دوم: باقی‌ماندهٔ تقسیم $p(x)$ بر $p''(x)$ و $p'(x)$ بر $p''(x)$ را پیدا می‌کنیم:

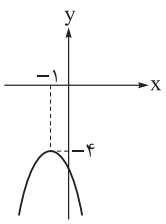
$$p''(x)\text{ ریشهٔ }: p''(x)=۶x-۶=۰ \Rightarrow x=۱$$
$$p''\text{ بر }p\text{ باقی‌ماندهٔ }: R_۱=p(۱)=۱-۳+۲a+a=۳a-۲ \quad (I)$$
$$p''\text{ بر }p'\text{ باقی‌ماندهٔ }: R_۲=p'(۱)=۳-۶+۲a=۲a-۳ \quad (II)$$

گام سوم: (I) و (II) با هم برابرند؛ پس:

$$۳a-۲=۲a-۳ \Rightarrow a=-۱$$

تست و پاسخ ۱۸

نمودار سهمی f به صورت مقابل است. اگر نمودار fof' بر نمودار f' مماس باشد، مقدار $f(۵)$ کدام است؟



معادلهٔ $fof'=f'$ ریشهٔ مضاعف دارد.

۱) -۳
۲) -۴
۳) -۶
۴) -۷

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس‌نامه ●● معادلهٔ سهمی به صورت‌های گوناگون

معادلهٔ سهمی		نمودار تابع	
		$a>۰$	$a<۰$
شکل استاندارد	$f(x)=ax^۲+bx+c$ (عرض از مبدأ)	$S\left\|\begin{matrix}-\frac{b}{۲a}\\ -\frac{\Delta}{۴a}\end{matrix}\right.$ یا $f(-\frac{b}{۲a})$	$S\left\|\begin{matrix}-\frac{b}{۲a}\\ -\frac{\Delta}{۴a}\end{matrix}\right.$ یا $f(-\frac{b}{۲a})$
شکل مربع کامل	$f(x)=a(x-x_S)^۲+y_S$	$S\left\|\begin{matrix}x_S\\ y_S\end{matrix}\right.$	$S\left\|\begin{matrix}x_S\\ y_S\end{matrix}\right.$
شکل تجزیه‌شده	$f(x)=a(x-x_۱)(x-x_۲)$ (صفرهای تابع (ریشه‌ها))	$\frac{x_۱+x_۲}{۲}$ $x_۱$ $x_۲$ x	$x_۱$ $\frac{x_۱+x_۲}{۲}$ $x_۲$ x

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

نکات

۱) سهمی به هر صورتی که باشد، $f(0)$ همان عرض از مبدأ سهمی است.

۲) اگر رأس سهمی داده شده باشد، بهتر است معادلهٔ سهمی را به صورت مربع کامل بگیریم و با جای‌گذاری یک نقطه غیر از ریشه‌ها، a را به دست آوریم.

۳) اگر برخورد(های) سهمی با محور xها داده شده باشد، بهتر است معادلهٔ سهمی را به صورت تجزیه‌شده بگیریم.

۴) اگر سه نقطهٔ عادی از سهمی داده شده باشد، بهتر است از صورت استاندارد استفاده کرده و نقاط را جایگزین کنیم تا a، b و c را به دست آوریم.

۵) اگر $a>0$، عرض رأس سهمی یا y_S همان کم‌ترین مقدار تابع و اگر $a<0$، عرض رأس سهمی یا y_S بیشترین مقدار تابع است.

۶) معادلهٔ محور تقارن $x=-\frac{b}{2a}$ (طول رأس سهمی) است.

پاسخ تشریحی **گام اول:** با توجه به این‌که رأس سهمی f داده شده است، ضابطهٔ تابع را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$f(x)=a(x-x_S)^2+y_S \xrightarrow{(x_S,y_S)=(-1,-4)} f(x)=a(x+1)^2-4$$

گام دوم: نمودار fof' بر نمودار f' مماس است. دو تابع را تشکیل می‌دهیم:

$$f'(x)=2a(x+1)$$

$$fof'(x)=f(2a(x+1))=a(2ax+2a+1)^2-4$$

گام سوم:

$$f'(x)=fof'(x) \Rightarrow a(2a(x+1)+1)^2-4=2a(x+1)$$

این معادله باید ریشهٔ مضاعف داشته باشد. برای حل معادله، از تغییر متغیر $x+1=t$ استفاده می‌کنیم:

$$a(2at+1)^2-4=2at \Rightarrow a(4a^2t^2+4at+1)-4=2at$$

$$\Rightarrow 4a^3t^2+4a^2t+a-4-2at=0 \Rightarrow 4a^3t^2+(4a^2-2a)t+a-4=0$$

$$\Rightarrow \Delta=0 \Rightarrow (4a^2-2a)^2-16a^3(a-4)=0$$

$$\Rightarrow 4a^2(2a-1)^2-16a^3(a-4)=0 \xrightarrow{a\neq 0} (2a-1)^2=4a(a-4)$$

$$\Rightarrow 4a^2-4a+1=4a^2-16a \Rightarrow 12a=-1 \Rightarrow a=\frac{-1}{12}$$

گام چهارم: پس $f(x)=-\frac{1}{12}(x+1)^2-4$ می‌شود؛ در نتیجه:

$$f(5)=-\frac{1}{12}\times 36-4=-7$$

تست و پاسخ ۱۹

نقطهٔ عطف تابع $f(x)=x^3-3ax^2-9x+12a$ بر نیمساز ناحیهٔ اول دستگاه مختصات واقع است. کدام خط زیر در نقطهٔ ماکزیمم نسبی f بر نمودار f مماس است؟

$f''(x_0)=0$

۱) $y=17$ ۲) $y=12$ ۳) $y=-15$ ۴) $y=-3$

پاسخ: گزینهٔ ۱

نکته ویژگی نقطهٔ عطف یک تابع درجه۳، این است که مشتق دوم تابع در آن نقطه برابر با صفر است و مختصات آن در ضابطهٔ تابع صدق می‌کند.

پاسخ تشریحی **گام اول:** مشتق دوم تابع f را پیدا می‌کنیم تا طول نقطهٔ عطف را بیابیم:

$$f(x)=x^3-3ax^2-9x+12a$$

$$f'(x)=3x^2-6ax-9$$

$$f''(x)=6x-6a=0 \Rightarrow x=a$$

گام دوم: نقطهٔ عطف تابع، روی نیمساز ناحیهٔ اول قرار دارد؛ پس مختصات آن به صورت (a,a) است و در تابع f صدق می‌کند.

$$f(a)=a \Rightarrow a^3-3a^3-9a+12a=a \Rightarrow -2a^3=-2a \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=1 \\ a=-1 \end{cases}$$

با توجه به این‌که نقطهٔ عطف، روی نیمساز ناحیهٔ اول است، باید $a>0$ باشد، $a=1$ قابل قبول است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

گام سوم: تابع f به صورت $f(x)=x^3-3x^2-9x+12$ می‌شود. max نسبی تابع f را به کمک مشتق آن پیدا می‌کنیم.

$$f'(x)=3x^2-6x-9=0 \Rightarrow x^2-2x-3=0 \Rightarrow (x-3)(x+1)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=3 \end{cases} \xrightarrow{\text{تعیین علامت می‌کنیم.}}$$

x		-1		3	
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	↗		↘		↗

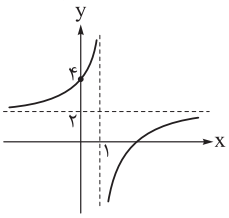
نقطهٔ max نسبی

گام چهارم: مختصات نقطهٔ نسبی به صورت $(-1,17)$ است؛ پس خط $y=17$ در این نقطه بر تابع f مماس است.

تست و پاسخ ۲۰

نمودار تابع هموگرافیک f به صورت زیر است. اگر تابع $y=(x-2)f(x)$ در بازهٔ (a,b) اکیداً نزولی باشد، حداکثر مقدار $b-a$ کدام است؟

$y'<0$



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۱

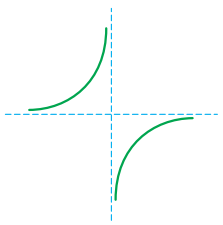
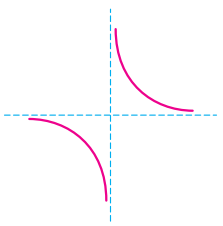
درس‌نامه تابع هموگرافیک $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ $(ad-bc\neq 0, c\neq 0)$ در یک نگاه

۱) $f'(x)=\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

۲) تابع یک مجانب قائم دارد که ریشهٔ مخرج است: $cx+d=0 \Rightarrow x=-\frac{d}{c}$

۳) تابع یک مجانب افقی دارد که نسبت ضرایب x بالا به x پایین است: $y=\frac{a}{c}$

۴) نمودار تابع به یکی از دو صورت زیر است:

شرط	نمودار	وضعیت یکنوایی	وضعیت تعقر (نقطهٔ عطف ندارد.)
$ad-bc>0$		در هر شاخه صعودی (اما در کل غیریکنوا)	ابتدا رو به بالا و بعد رو به پایین
$ad-bc<0$		در هر شاخه نزولی (اما در کل غیریکنوا)	ابتدا رو به پایین و بعد رو به بالا

۵) $f^{-1}(x)=\frac{-dx+b}{cx-a}$ (برای وارون جای d و a را عوض کرده و آن‌ها را قرینه می‌کنیم.)

۶) اگر $c=0$، تابع هموگرافیک نبوده و تبدیل به تابع خطی می‌شود.

۷) اگر $ad-bc=0$ باشد، صورت و مخرج ساده شده و تابع تبدیل به تابع ثابت می‌گردد.

۸) اگر بازه شامل مجانب قائم باشد، تابع در آن بازه غیریکنواست.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ تشریحی **گام اول:** تابع هموگرافیک f را به صورت $f(x)=A\frac{x+B}{x+C}$ در نظر می‌گیریم.

گام دوم: با توجه به نمودار، مجانب قائم تابع $x=1$ است که همان ریشهٔ مخرج است؛ پس $C=-1$ می‌شود.

گام سوم: مجانب افقی تابع، $y=2$ است که از نسبت ضرایب x صورت به مخرج به دست می‌آید؛ پس $A=2$ می‌شود.

گام چهارم: نقطهٔ $(0,4)$ روی تابع قرار دارد. مقدار B را با توجه به آن می‌یابیم:

$$f(x)=2\frac{x+B}{x-1}\xrightarrow{x=0}\frac{2B}{-1}=4\Rightarrow B=-2$$

گام پنجم: پس $f(x)=\frac{2x-4}{x-1}$ است و $y=(x-2)\times\frac{2x-4}{(x-1)}=\frac{2(x-2)^2}{(x-1)}$ می‌شود.

گام ششم: تابع y در بازهٔ (a,b) اکیداً نزولی است؛ پس مشتق این تابع در این بازه منفی است:

$$y'=\frac{4(x-2)(x-1)-2(x-2)^2}{(x-1)^2}=\frac{2x(x-2)}{(x-1)^2}<0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\x=2\\x=1\end{cases}$$

جدول تعیین علامت y' را رسم می‌کنیم:

x		0		1		2	
$2x(x-2)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$(x-1)^2$	$+$		$+$	0	$+$		$+$
y'	$+$	0	$-$	ت	$-$	0	$+$

$\Rightarrow x\in(0,1)\cup(1,2)$

بازهٔ (a,b) می‌تواند $(0,1)$ یا $(1,2)$ باشد که بیشترین مقدار $b-a$ برابر با 1 می‌شود.

تست و پاسخ ۲۱

اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند به طوری که $4P(A'\cup B)=7P(B')=7P(A)=2/8$، آن‌گاه مقدار $P((S-A)-B)$ کدام است؟

۱) $0/2$ ۲) $0/1$ ۳) $0/8$ ۴) $0/9$

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس‌نامه برخی از قوانین اعمال روی مجموعه‌ها و پیشامدها را در زیر ببینید:

۱) $S-A=A'$
۲) $A\cap B'=A-B$
۳) $(A')'=A$
۴) $(A\cup B)'=A'\cap B'$
۵) $(A\cap B)'=A'\cup B'$
۶) $P(A')=1-P(A)$
۷) $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$
۸) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

پاسخ تشریحی **گام اول:** ابتدا دقت کنید که:

$$4P(A'\cup B)=7P(B')=7P(A)=2/8\Rightarrow\begin{cases}P(A)=0/4\\P(B')=0/4\\P(A'\cup B)=0/7\end{cases}$$

گام دوم: از طرفی:

$$P(B')=0/4\xrightarrow{\text{مورد (۶) درس‌نامه}}1-P(B)=0/4\Rightarrow P(B)=0/6$$

به علاوه:

$$P(A'\cup B)=0/7\Rightarrow 1-\underbrace{P((A'\cup B)')}_{P(A\cap B')}=0/7\Rightarrow P(A\cap B')=0/3$$

$$\Rightarrow P(A-B)=0/3\Rightarrow \underbrace{P(A)}_{0/4}-P(A\cap B)=0/3\Rightarrow P(A\cap B)=0/1$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

گام سوم: حالا سراغ خواستهٔ مسئله می‌رویم:

$$P((S-A)-B)=P(A'-B)=P(A'\cap B')=1-((A'\cap B')')=1-P(A\cup B)$$
$$=1-(\underbrace{P(A)}_{0/4}+\underbrace{P(B)}_{0/6}-\underbrace{P(A\cap B)}_{0/1})=1-0/9=0/1$$

تست و پاسخ ۲۲

اگر تمام داده‌های بین چارک اول و میانه را در داده‌های زیر سه برابر کنیم، آن‌گاه میانگینِ «میانه، مد و میانگین» در داده‌های جدید کدام است؟

۱۰۹,۱۲۴,۱۲۵,۱۲۶,۱۲۶,۱۲۷,۱۳۱,۱۴۰,۱۴۷,۲۵۰

۲۵۷,۳۶۰,۳۸۱,۳۸۱,۳۹۰,۴۲۰,۴۳۱,۴۴۴,۴۴۵

۱) $412/67$ ۲) $359/33$

۳) $288/67$ ۴) $241/33$

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ تشریحی **گام اول:** تعداد داده‌ها ۱۹تا است، پس میانه برابر دادهٔ وسط یعنی دادهٔ دهم می‌شود:

۱۰۹,۱۲۴,۱۲۵,۱۲۶,۱۲۶,۱۲۷,۱۳۱,۱۴۰,۱۴۷,۲۵۰,۲۵۷,۳۶۰,۳۸۱,۳۸۱,۳۹۰,۴۲۰,۴۳۱,۴۴۴,۴۴۵

↑ میانه

گام دوم: قبل از میانه، ۹ داده داریم، پس چارک اول، برابر دادهٔ وسط، یعنی دادهٔ پنجم می‌شود:

۱۰۹,۱۲۴,۱۲۵,۱۲۶, ۱۲۶ ,۱۲۷,۱۳۱,۱۴۰,۱۴۷,۲۵۰,۲۵۷,۳۶۰,۳۸۱,۳۸۱,۳۹۰,۴۲۰,۴۳۱,۴۴۴,۴۴۵

↑ چارک اول ↑ میانه

گام سوم: تمام داده‌های بین چارک اول و میانه را سه برابر می‌کنیم:

۱۰۹,۱۲۴,۱۲۵,۱۲۶,۱۲۶,۳۸۱,۳۹۳,۴۲۰,۴۴۱,۲۵۰,۲۵۷,۳۶۰,۳۸۱,۳۸۱,۳۹۰,۴۲۰,۴۳۱,۴۴۴,۴۴۵

گام چهارم: دوباره داده‌ها را مرتب می‌کنیم:

۱۰۹,۱۲۴,۱۲۵,۱۲۶,۱۲۶,۲۵۰,۲۵۷,۳۶۰,۳۸۱,۳۸۱,۳۸۱,۳۹۰,۳۹۳,۴۲۰,۴۲۰,۴۳۱,۴۴۱,۴۴۴,۴۴۵

↑ میانه

میانهٔ این داده‌ها برابر $m=381$ است. مد داده‌ها هم برابر $M=381$ است، چون بیشترین فراوانی را دارد. حالا میانگین داده‌ها را محاسبه می‌کنیم:

$$\bar{x}=\frac{\text{جمع داده‌ها}}{\text{تعداد داده‌ها}}=\frac{6004}{19}=316$$

گام پنجم: بنابراین جواب برابر است با:

$$\frac{M+m+\bar{x}}{3}=\frac{381+381+316}{3}\simeq 359/33$$

تست و پاسخ ۲۳

از یک جامعهٔ آماری با واریانس $\frac{9}{4}$، نمونه‌ای شامل داده‌های ۹، ۱۳، ۱۶ و ۱۸ انتخاب کرده‌ایم. چند عدد صحیح در بازهٔ اطمینان ۹۵درصدی برای میانگین جامعه، قرار می‌گیرد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ: گزینهٔ ۲

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

درس‌نامه اگر از جامعه، نمونه‌ای به اندازهٔ n انتخاب کنیم به طوری که انحراف معیار جامعه برابر σ و میانگین اعضای نمونه برابر $\bar{x}$ باشد، در این صورت بازهٔ اطمینان بالای ۹۵٪ برای میانگین جامعه به شکل زیر می‌شود:

$$(\bar{x}-\frac{۲\sigma}{\sqrt{n}},\bar{x}+\frac{۲\sigma}{\sqrt{n}})$$

پاسخ تشریحی **گام اول:** واریانس جامعه برابر $\frac{۹}{۴}$ است، پس انحراف معیار آن برابر $\sigma=\sqrt{\frac{۹}{۴}}=\frac{۳}{۲}$ می‌شود.

گام دوم: تعداد اعضای نمونه برابر $n=۴$ است. میانگین اعضای نمونه را محاسبه می‌کنیم:

$$\bar{x}=\frac{۹+۱۳+۱۶+۱۸}{۴}=۱۴$$

گام سوم: بنابراین بازهٔ اطمینان بیش از ۹۵٪ برای این جامعه به صورت زیر می‌شود:

$$(\bar{x}-\frac{۲\sigma}{\sqrt{n}},\bar{x}+\frac{۲\sigma}{\sqrt{n}})=(۱۴-\frac{۲\times\frac{۳}{۲}}{\sqrt{۴}},۱۴+\frac{۲\times\frac{۳}{۲}}{\sqrt{۴}})=(۱۴-\frac{۳}{۲},۱۴+\frac{۳}{۲})=(۱۲/۵,۱۵/۵)$$

که این بازه شامل سه عدد صحیح (اعداد ۱۳، ۱۴ و ۱۵) است.

تست و پاسخ ۲۴

یک تاس داریم که در پرتاب آن، احتمال روشدن اعداد اول، نصف احتمال روشدن اعداد غیراول است. این تاس را پرتاب می‌کنیم، سپس به تعداد عدد روشده سکه‌ای را می‌اندازیم. اگر سکه دو بار رو آمده باشد، با کدام احتمال سکه دقیقاً دو بار انداخته شده است؟

یعنی احتمال این را می‌خواهیم که سکه دقیقاً دوبار انداخته شده باشد، به شرط آن‌که بدانیم سکه دوبار رو آمده است.

۱) $\frac{۸}{۶۹}$
۲) $\frac{۸}{۹۹}$
۳) $\frac{۱۶}{۶۹}$
۴) $\frac{۱۶}{۹۹}$

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ تشریحی **گام اول:** در این تاس، احتمال روشدن اعداد اول، نصف احتمال روشدن اعداد غیراول است.

احتمال روشدن هر عدد اول را برابر x در نظر می‌گیریم، پس احتمال روشدن هر عدد غیراول برابر $۲x$ می‌شود:

$$\left.\begin{array}{l}P(۱)=۲x\\P(۲)=x\\P(۳)=x\\P(۴)=۲x\\P(۵)=x\\P(۶)=۲x\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{جمع احتمال‌ها برابر ۱}}P(۱)+P(۲)+P(۳)+\cdots+P(۶)=۱$$

$$\Rightarrow ۲x+x+x+۲x+x+۲x=۱\Rightarrow ۹x=۱\Rightarrow x=\frac{۱}{۹}$$

گام دوم: بنابراین احتمال روشدن اعداد ۱ تا ۶ در این تاس، برابر است با:

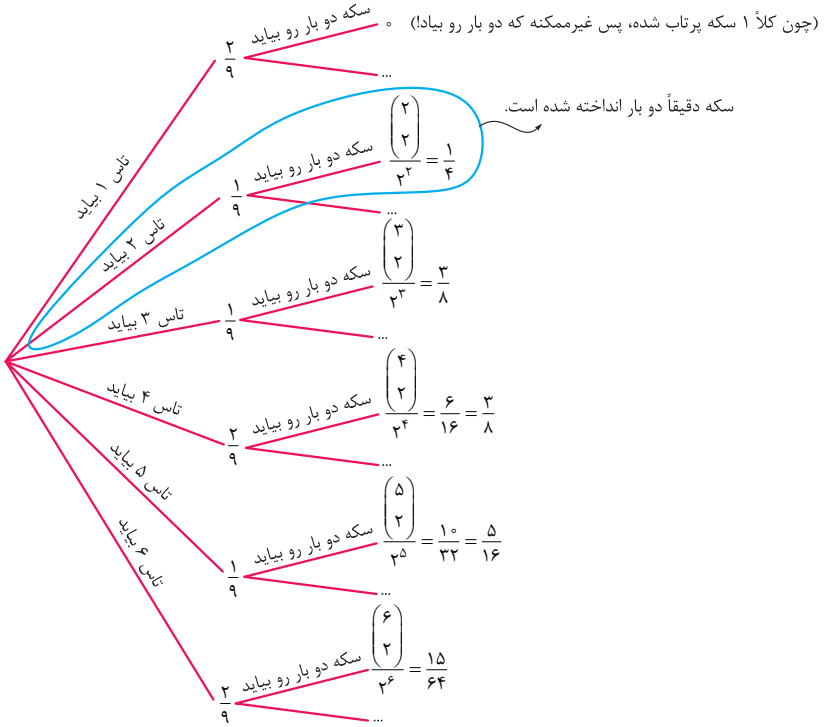
$$P(۱)=\frac{۲}{۹}\quad P(۴)=\frac{۲}{۹}$$
$$P(۲)=\frac{۱}{۹}\quad P(۵)=\frac{۱}{۹}$$
$$P(۳)=\frac{۱}{۹}\quad P(۶)=\frac{۲}{۹}$$

گام سوم: حالا دقت کنید در k بار پرتاب یک سکه، احتمال این‌که سکه دقیقاً دو بار رو آمده باشد، برابر است با:

$$\frac{\binom{k}{۲}}{۲^k}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

گام چهارم: نمودار درختی رسم می‌کنیم:



گام پنجم: با توجه به نمودار درختی، احتمال این‌که سکه دو بار رو بیاید برابر است با:

$$(\frac{۲}{۹}\times ۰)+(\frac{۱}{۹}\times\frac{۱}{۴})+(\frac{۱}{۹}\times\frac{۳}{۸})+(\frac{۲}{۹}\times\frac{۳}{۸})+(\frac{۱}{۹}\times\frac{۵}{۱۶})+(\frac{۲}{۹}\times\frac{۱۵}{۶۴})=\frac{۱۳۸}{۵۷۶}=\frac{۲۳}{۹۶}$$

گام ششم: بنابراین احتمال این‌که سکه دقیقاً دو بار انداخته شده باشد به شرط آن‌که سکه دو بار رو آمده باشد، طبق قانون بیز برابر است با:

$$\frac{\frac{۱}{۹}\times\frac{۱}{۴}}{\frac{۲۳}{۹۶}}=\frac{\frac{۱}{۹}}{\frac{۲۳}{۲۴}}=\frac{۸}{۶۹}$$

تست و پاسخ ۲۵

قطر یک مستطیل، واسطهٔ هندسی ضلع کوچک و محیط آن است. نسبت مساحت این مستطیل به مساحت چهارضلعی حاصل از برخورد نیمسازهای داخلی آن کدام است؟

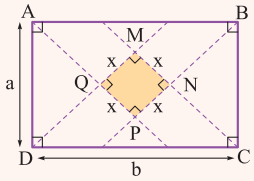
۱) $\sqrt{۲}+۱$ ۲) ۲ ۳) $۲\sqrt{۲}-۱$ ۴) $\frac{۵}{۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس‌نامه

۱) اگر m واسطهٔ هندسی n و p باشد، آن‌گاه: $m^۲=n.p$

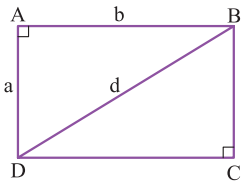
۲) چهارضلعی حاصل از برخورد نیمسازهای داخلی مستطیلی به ابعاد a و b یک مربع است که طول ضلع آن برابر است با:



$$x=\frac{\sqrt{۲}}{۲}|b-a|$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ تشریحی **گام اول (محاسبهٔ رابطهٔ بین a و b)**: مستطیل زیر را با فرض $b > a$ در نظر می‌گیریم. بنا به فرض قطر مستطیل واسطهٔ هندسی ضلع کوچک‌تر و محیط آن است؛ پس:



$$\begin{cases} \text{ضلع کوچک} = a \\ \text{محیط مستطیل} = ۲(a+b) \end{cases} \Rightarrow d^۲ = (a)(۲(a+b))$$

از طرفی، طبق قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABD می‌دانیم $d^۲ = a^۲ + b^۲$؛ پس:

$$a^۲ + b^۲ = ۲a^۲ + ۲ab \Rightarrow b^۲ - a^۲ - ۲ab = ۰ \xrightarrow{\div a^۲} (\frac{b}{a})^۲ - ۲(\frac{b}{a}) - ۱ = ۰$$

$$\xrightarrow[\text{تغییر متغیر}]{\frac{b}{a}=t} t^۲ - ۲t - ۱ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} t = ۱ + \sqrt{۲} \checkmark \\ t = ۱ - \sqrt{۲} < ۰ \times \end{cases} \Rightarrow \frac{b}{a} = ۱ + \sqrt{۲}$$

گام دوم (محاسبهٔ مساحت چهارضلعی حاصل از برخورد نیمسازهای داخلی مستطیل و خواستهٔ مسئله):

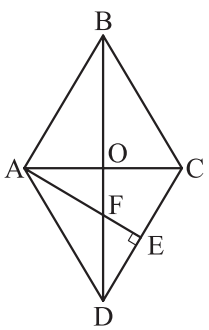
طبق درس‌نامه، مساحت چهارضلعی مفروض برابر است با: $S_{\text{مربع}} = (\frac{\sqrt{۲}}{۲}(b-a))^۲ = \frac{۱}{۲}(b-a)^۲$

پس نسبت مساحت مستطیل به مساحت این چهارضلعی برابر است با:

$$\left.\begin{array}{l} k = \frac{S_{\text{مستطیل}}}{S_{\text{مربع}}} = \frac{ab}{\frac{۱}{۲}(b-a)^۲} \\ \frac{b}{a} = \frac{۱+\sqrt{۲}}{۱} \xrightarrow{\text{تفضیل در صورت}} \frac{b-a}{a} = \frac{(۱+\sqrt{۲})-۱}{۱} = \sqrt{۲} \Rightarrow b-a = \sqrt{۲}a \end{array}\right\} \Rightarrow k = \frac{a(a(۱+\sqrt{۲}))}{\frac{۱}{۲}(a\sqrt{۲})^۲} = \frac{a^۲(۱+\sqrt{۲})}{a^۲} = ۱+\sqrt{۲}$$

تست و پاسخ ۲۶

مطابق شکل، چهارضلعی ABCD لوزی است. اگر قطر بزرگ این لوزی، ۳ برابر قطر کوچک آن باشد، طول AF چند برابر طول AB است؟



۱) $\frac{۲}{۳}$

۲) $\frac{\sqrt{۱۰}}{۵}$

۳) $\frac{۱}{۳}$

۴) $\frac{\sqrt{۵}}{۳}$

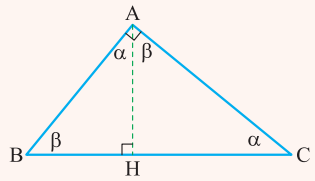
پاسخ: گزینهٔ ۳

خودت حل کنی بهتره دو مثلث AOB و AOF متشابه‌اند.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

درس‌نامه

۱) در هر مثلث قائم‌الزاویه، اگر ارتفاع وارد بر وتر را رسم کنیم، دو مثلث قائم‌الزاویه متشابه جدید ایجاد می‌شود که هر دو با مثلث اصلی متشابه‌اند.

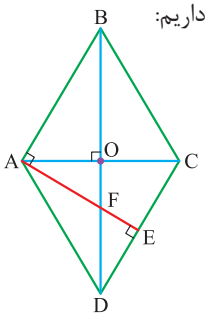


$$\overset{\Delta}{ABH} \sim \overset{\Delta}{ACH} \sim \overset{\Delta}{ABC}$$

۲) چهارضلعی‌ای که هر چهار ضلع آن با هم برابرند، لوزی نامیده می‌شود، هر لوزی یک متوازی‌الاضلاع است؛ پس تمام خواص متوازی‌الاضلاع را دارد. علاوه بر آن، در لوزی قطرها بر هم عمودند.

پاسخ تشریحی **گام اول (تحلیل سؤال):** سؤال از ما حاصل یک نسبت را می‌خواهد؛ پس احتمالاً باید حل را به سمت تشابه ببریم.

طبق مورد (۲) درس‌نامه، در هر لوزی ضلع‌های روبه‌رو با هم موازی‌اند (چون هر لوزی یک متوازی‌الاضلاع است)؛ پس داریم:



$$AB \parallel CD \ , \ CD \perp AE \Rightarrow AB \perp AE$$

پس مثلث ABF قائم‌الزاویه است و AO ارتفاع وارد بر وتر آن است؛ در نتیجه طبق مورد (۱) درس‌نامه می‌توانیم بگوییم دو مثلث AOF و AOB متشابه‌اند و داریم:

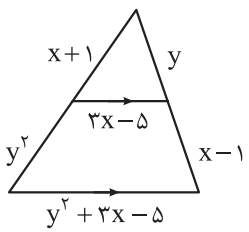
$$\overset{\Delta}{AOB} \sim \overset{\Delta}{AOF} \Rightarrow \frac{AF}{AB} = \frac{OA}{OB} \ (*)$$

گام دوم (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال): چون قطرهای لوزی یکدیگر را نصف می‌کنند، از $BD = ۳AC$ می‌توان نتیجه گرفت $OB = ۳OA$ یا به بیان دیگر $\frac{OA}{OB} = \frac{۱}{۳}$؛ در نتیجه از تساوی $(*)$ داریم:

$$\frac{AF}{AB} = \frac{۱}{۳}$$

تست و پاسخ ۲۷

در شکل زیر، مساحت ذوزنقه چند درصد مساحت بزرگ‌ترین مثلث است؟



۱) ۶۵

۲) ۷۰

۳) ۷۵

۴) ۸۰

پاسخ: گزینهٔ ۳

مشاوره استفاده از قضیهٔ تالس و تشابه مثلث‌ها در محاسبهٔ نسبت مساحت‌ها از تیپ سؤال‌های پرتکرار در کنکور بوده است.

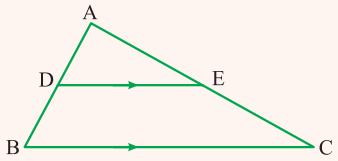
خودت حل کنی بهتره هر جا خطی موازی با یکی از اضلاع مثلث دیدی حتماً یاد قضیهٔ تالس و تشابه بیفت.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

درس‌نامه

۱) اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$، آن‌گاه $\frac{a}{b-a}=\frac{c}{d-c}$ (خاصیت تفضیل در مخرج).

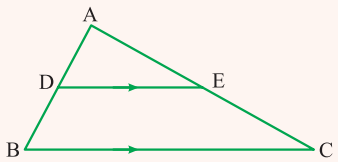
۲) **قضیهٔ تالس:** مطابق شکل اگر $DE \parallel BC$، آن‌گاه:



$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$$ (تالس جزءبه‌جزء)

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$$ (تالس جزءبه‌کل)

۳) **قضیهٔ اساسی تشابه مثلث‌ها:** اگر خط راستی موازی یکی از اضلاع مثلث دو ضلع دیگر آن را قطع کند، مثلثی تشکیل می‌شود که با مثلث اولیه متشابه است:



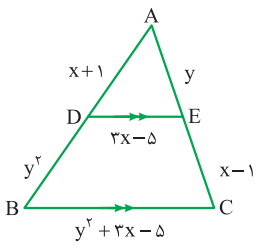
$$DE \parallel BC \Rightarrow \overset{\Delta}{ADE} \sim \overset{\Delta}{ABC}$$

۴) در دو مثلث متشابه، نسبت محیط‌ها برابر نسبت تشابه و نسبت مساحت‌ها مجذور نسبت تشابه است.

پاسخ تشریحی

گام اول (تحلیل سؤال): در مثلث ABC، DE با BC موازی است؛ پس اول با استفاده از قضیهٔ تالس مقادیر مجهول x و y را محاسبه می‌کنیم و سپس با استفاده از تشابه دو مثلث ADE و ABC نسبت مساحت ذوزنقهٔ $DECB$ به مثلث ABC را به دست می‌آوریم.

گام دوم (محاسبهٔ مجهولات): با دو بار استفاده از قضیهٔ تالس در مثلث ABC داریم:



$$DE \parallel BC \Rightarrow \frac{AD}{AB}=\frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{x+1}{y^2+x+1}=\frac{3x-5}{y^2+3x-5}$$

$$\xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}} \frac{x+1}{y^2}=\frac{3x-5}{y^2} \Rightarrow x+1=3x-5 \Rightarrow x=3$$

$$DE \parallel BC \Rightarrow \frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC} \Rightarrow \frac{x+1}{y^2}=\frac{y}{x-1} \xrightarrow{x=3} \frac{4}{y^2}=\frac{y}{2} \Rightarrow y^3=8 \Rightarrow y=2$$

گام سوم (محاسبهٔ نسبت مساحت‌ها با استفاده از نسبت تشابه):

چون DE با BC موازی است، طبق مورد (۳) درس‌نامه، مثلث‌های ADE و ABC متشابه‌اند؛ پس نسبت مساحت آن‌ها با مجذور نسبت تشابه برابر است و داریم:

$$\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}}=\left(\frac{AD}{AB}\right)^2 \Rightarrow \frac{S_{ADE}}{S_{ABC}}=\left(\frac{x+1}{y^2+x+1}\right)^2=\left(\frac{4}{4+4}\right)^2=\frac{1}{4} \Rightarrow S_{ABC}=4S_{ADE} \quad (1)$$

$$\frac{S_{BDEC}}{S_{ABC}}=\frac{S_{ABC}-S_{ADE}}{S_{ABC}} \overset{(1)}{=} \frac{4S_{ADE}-S_{ADE}}{4S_{ADE}}=\frac{3}{4}=0/75=\%75$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

تست و پاسخ ۲۸

در مثلث ABC، اندازهٔ میانه‌های نظیر اضلاع AB و AC به ترتیب $2\sqrt{3}$ و ۴ و اندازهٔ زاویه بین این دو میانه 120° است. مساحت مثلث ABC کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۲ ۴) ۶

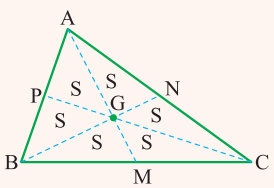
پاسخ: گزینهٔ ۱

مشاوره خواص همرسی میانه‌های مثلث همیشه مهم بوده، هست و خواهد بود! این خواص را در درس‌نامهٔ این سؤال گفته‌ایم، حتماً آن‌ها را یاد بگیرید.

خودت حل کنی بهتره اول مساحت مثلث BGC رو حساب کنید و از روی آن مساحت ABC رو به دست بیاورید.

درس‌نامه

۱) میانه‌های هر مثلث همرس‌اند و نقطهٔ همرسی میانه‌ها، هر میانه را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم می‌کند، مثلاً در شکل زیر اگر M ، N و P پایِ میانه‌های نظیر اضلاع باشند، داریم:

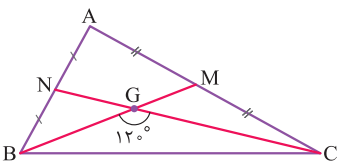


$$\frac{GM}{AG}=\frac{GN}{BG}=\frac{GP}{CG}=\frac{1}{2}\Rightarrow AG=\frac{2}{3}AM\ ,\ BG=\frac{2}{3}BN\ ,\ CG=\frac{2}{3}CP$$

۲) با رسم هر سه میانه در یک مثلث (مثل شکل بالا) ۶ مثلث هم‌مساحت ایجاد می‌شود.

۳) مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصل‌ضرب دو ضلع در سینوس زاویهٔ بین آن دو ضلع.

پاسخ تشریحی



گام اول (تحلیل مسئله):

طول میانه‌های $CN=2\sqrt{3}$ و $BM=4$ را داریم و زاویهٔ G هم برابر 120° است. برای به دست آوردن مساحت مثلث ABC کافیست طول BG و CG را یافته و با محاسبهٔ مساحت مثلث BGC و استفاده از مورد (۲) درس‌نامه، مساحت ABC را پیدا کنید.

گام دوم (محاسبهٔ GB و GC): طبق مورد (۱) درس‌نامه طول CG و BG برابر است با:

$$CG=\frac{2}{3}CN=\frac{2}{3}\times 2\sqrt{3}=\frac{4}{3}\sqrt{3}$$

$$BG=\frac{2}{3}BM=\frac{2}{3}\times 4=\frac{8}{3}$$

گام سوم (محاسبهٔ مساحت $\overset{\Delta}{BGC}$): مساحت مثلث BGC برابر است با:

$$S_{BGC}=\frac{1}{2}BG\times CG\times\sin 120^\circ=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\sqrt{3}\times\frac{8}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{8}{3}$$

گام چهارم (محاسبهٔ مساحت $\overset{\Delta}{ABC}$): طبق مورد (۲) درس‌نامه اگر میانهٔ نظیر رأس A را رسم کنیم، مساحت BGC برابر $2S$ یعنی $\frac{1}{3}$ مساحت مثلث ABC خواهد بود؛ پس:

$$S_{BGC}=\frac{1}{3}S_{ABC}\Rightarrow S_{ABC}=\frac{8}{3}\times 3=8$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

تست و پاسخ ۲۹

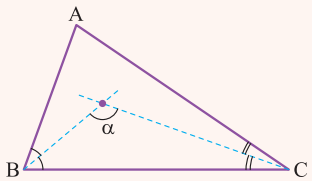
نقطهٔ O درون مثلث ABC از سه ضلع آن به یک فاصله است. اگر $B\hat{O}C = ۱۱۲^\circ$، آنگاه اندازهٔ کمان BC در دایرهٔ محیطی این مثلث چند درجه است؟

۱) ۸۸ ۲) ۹۶ ۳) ۱۰۴ ۴) ۱۱۲

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس‌نامه

۱) در مثلث ABC، زاویهٔ منفرجهٔ بین نیمسازهای داخلی دو زاویهٔ B و C برابر است با:

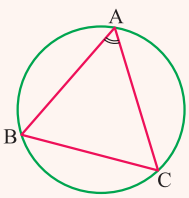


$$\alpha = ۹۰^\circ + \frac{\hat{A}}{۲}$$

۲) نیمسازهای داخلی هر مثلث همرس‌اند و نقطهٔ همرسی آن‌ها، تنها نقطه‌ای درون مثلث است که از هر سه ضلع آن به یک فاصله است.

۳) اگر عمود منصف‌های اضلاع یک چندضلعی همرس باشند، دایره‌ای وجود دارد که از تمام رأس‌های آن می‌گذرد، این دایره را دایرهٔ محیطی می‌نامیم.

۴) اندازهٔ هر زاویهٔ محاطی در دایره، نصف اندازهٔ کمان روبه‌روی آن است:

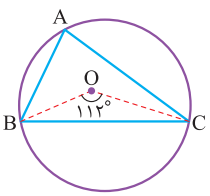


دایرهٔ محیطی مثلث ABC

$$\hat{A} = \frac{۱}{۲}\overset{\frown}{BC}$$

پاسخ تشریحی نقطهٔ O از اضلاع مثلث به یک فاصله است، یعنی نقطهٔ O محل همرسی نیمسازهای داخلی این مثلث است. مثلث ABC و دایرهٔ محیطی آن را رسم می‌کنیم:

اگر $\hat{O}$ محل تقاطع نیمسازهای $\hat{B}$ و $\hat{C}$ باشد، آن‌گاه طبق مورد (۱) درس‌نامه داریم:



$$\hat{O} = ۹۰^\circ + \frac{\hat{A}}{۲} \Rightarrow \hat{A} = ۲(\hat{O} - ۹۰^\circ) \Rightarrow \hat{A} = ۲(۱۱۲^\circ - ۹۰^\circ) = ۴۴^\circ$$

و کمان BC رو به زاویهٔ محاطی A در دایره است؛ پس طبق مورد (۴) درس‌نامه:

$$\hat{A} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{BC} = ۸۸$$

تست و پاسخ ۳۰

در مثلثی به طول اضلاع ۷،۸،۹، شعاع دایرهٔ محیطی، چند برابر شعاع دایرهٔ محاطی داخلی است؟

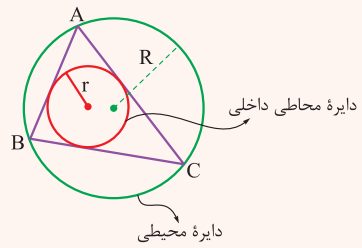
۱) ۲ ۲) ۲/۱ ۳) ۳ ۴) ۳/۱

پاسخ: گزینهٔ ۲

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

درس‌نامه

اگر مساحت مثلث ABC برابر S و محیط آن ۲P باشد، آن‌گاه:



(۱) $S=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$

(۲) شعاع دایرهٔ محیطی : $R=\frac{abc}{4S}$

(۳) شعاع دایرهٔ محاطی داخلی : $r=\frac{S}{P}$

پاسخ تشریحی طبق درس‌نامه نسبت شعاع دایرهٔ محیطی به محاطی داخلی برابر است با:

$$\frac{R}{r}=\frac{\frac{abc}{4S}}{\frac{S}{p}}=\frac{abcP}{4S^2}$$

پس باید محیط و مساحت مثلث را به دست آوریم:

$$2P=7+8+9 \Rightarrow P=\frac{24}{2}=12$$

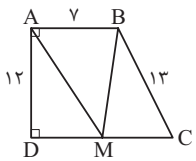
$$S=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}=\sqrt{12(5)(4)(3)}=12\sqrt{5}$$

در نتیجه:

$$\frac{R}{r}=\frac{7\times8\times9\times12}{4\times(12\sqrt{5})^2}=\frac{21}{10}=2/1$$

تست و پاسخ ۳۱

مطابق شکل، نقطهٔ متغیر M روی CD حرکت می‌کند. زمانی که محیط مثلث ABM کم‌ترین مقدار ممکن است، حاصل $\frac{MD}{MC}$ کدام است؟



۱) $\frac{5}{12}$

۲) $\frac{7}{17}$

۳) $\frac{1}{2}$

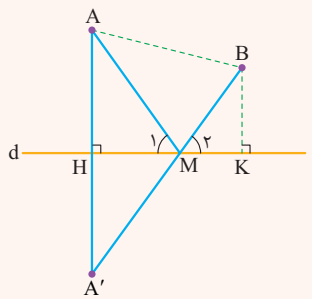
۴) $\frac{5}{13}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

مشاوره مسئلهٔ هرون در کنکورهای نظام جدید خیلی مورد علاقهٔ طراحان کنکور قرار گرفته است.

درس‌نامه

اگر دو نقطهٔ A و B در یک طرف خط d واقع باشند، برای پیداکردن نقطه‌ای مانند M روی خط d به طوری‌که MA + MB مینیمم باشد (یا به بیان دیگر، محیط مثلث MAB مینیمم باشد)، یکی از نقاط A یا B ، مثلاً A را نسبت به خط d قرینه می‌کنیم تا A' به دست آید. M محل تقاطع $A'B$ با خط d است و داریم:



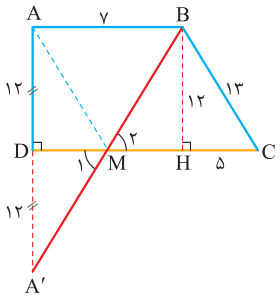
۱) $MA+MB=A'B$

۲) $\hat{M}_1=\hat{M}_2 \Rightarrow \overset{\Delta}{MAH}\sim\overset{\Delta}{MBK}$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ تشریحی **گام اول (تحلیل مسئله)**: سؤال گفته کم‌ترین محیط مثلث ABM را داشته باشیم، طول AB که ثابت است؛ پس برای این‌که محیط این مثلث کم‌ترین مقدار باشد، باید $AM + MB$، مینیمم باشد؛ یعنی با مسئلهٔ هرون طرفیم.

گام دوم (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال): برای داشتن $\text{Min}(AM + MB)$، نقطهٔ A را نسبت به خط CD بازتاب می‌دهیم تا به A' برسیم و سپس A' را به B وصل می‌کنیم، محل تقاطع $A'B$ با خط DC همان نقطهٔ M است.



در مثلث قائم‌الزاویهٔ BHC داریم:

$$HC = \sqrt{۱۳^۲ - ۱۲^۲} = ۵$$

$$DH = ۷$$

و هم‌چنین طبق فرض:

از طرفی، دو مثلث ADM و MBH متشابه‌اند و نسبت تشابه آن‌ها برابر است با:

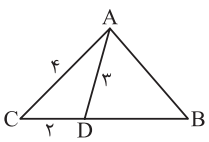
$$\frac{AD}{BH} = \frac{DM}{MH} = \frac{۱۲}{۱۲} = ۱ \Rightarrow DM = MH = \frac{۷}{۲}$$

پس:

$$\frac{MD}{MC} = \frac{\frac{۷}{۲}}{\frac{۷}{۲} + ۵} = \frac{\frac{۷}{۲}}{\frac{۱۷}{۲}} = \frac{۷}{۱۷}$$

تست و پاسخ ۳۲

در شکل مقابل، اگر $\hat{BAD} = ۲\hat{DAC}$، آنگاه محیط مثلث ABC کدام است؟



۱) ۱۴
۲) ۱۳/۵
۳) ۱۳
۴) ۱۴/۵

پاسخ: گزینهٔ ۲

مشاوره این تست شبیه یکی از تست‌های کنکور ۱۴۰۲ است؛ پس با دقت روش حل آن را یاد بگیرید.

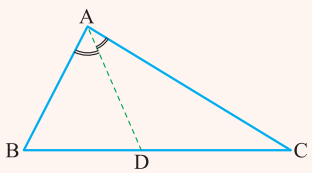
خودت حل کنی بهتره $B\hat{A}D = ۲D\hat{A}C$، پس اگر نیمساز زاویهٔ $B\hat{A}D$ را رسم کنی، دوتا مثلث و دوتا نیمساز داری که می‌تونی از قضایای نیمساز برای حل استفاده کنی.

درس نامه

۱) اگر $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$، آن‌گاه می‌توانیم این‌طور در نظر بگیریم که:

$$\begin{cases} a = mk \\ b = nk \end{cases}$$

۲) در شکل زیر، اگر AD نیمساز زاویهٔ A باشد، آن‌گاه:

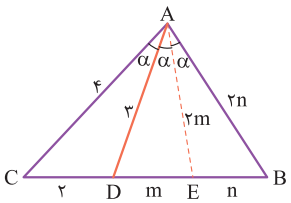


۱) $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$

۲) $AD^۲ = AC.AB - BD.DC$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ تشریحی **گام اول (استفاده از خواص نیمساز در مثلث ACE)**: AE نیمساز زاویهٔ BAD را رسم می‌کنیم تا زاویهٔ A به سه زاویهٔ برابر تقسیم شود. حالا در مثلث ACE که AD نیمساز آن است، داریم:



$$\frac{AC}{AE}=\frac{CD}{DE}\Rightarrow\frac{AC}{CD}=\frac{AE}{DE}=\frac{۴}{۲}=۲\Rightarrow DE=m \text{ و } AE=۲m$$

برای به دست آوردن مقدار m از رابطهٔ طولی نیمساز در مثلث ACE استفاده می‌کنیم:

$$AD^{۲}=AC\times AE-CD\times DE\Rightarrow ۹=۴\times ۲m-۲\times m\Rightarrow ۹=۶m\Rightarrow m=\frac{۳}{۲}$$

گام دوم (استفاده از خواص نیمساز در مثلث ADB): یک بار دیگر قضیهٔ نیمساز را در مثلث ADB می‌نویسیم تا مقدار EB و AB به دست آید.

$$\overset{\Delta}{ABD}\text{ نیمساز: }AE\Rightarrow\frac{AD}{AB}=\frac{DE}{EB}\Rightarrow\frac{AB}{EB}=\frac{AD}{DE}=\frac{\frac{۳}{۲}}{\frac{۳}{۲}}=۲\Rightarrow AB=۲n\,,\,EB=n$$

$$AE^{۲}=AD\times AB-DE\times EB\Rightarrow (۳)^{۲}=۳\times ۲n-\frac{۳}{۲}\times n\Rightarrow ۹=\frac{۹}{۲}n\Rightarrow n=۲$$

گام سوم (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال): پس محیط مثلث برابر است با:

$$\overset{\Delta}{ABC}\text{ محیط}=۴+(۲+m+n)+۲n=۶+\frac{۳}{۲}+۳\times ۲=\frac{۲۷}{۲}=۱۳/۵$$

تست و پاسخ ۳۳

اگر $A=\begin{bmatrix}۳^{x} & ۲۷^{x}\\ ۳^{-x} & ۱\end{bmatrix}$ و $x=\frac{۱}{\log_{\frac{۱}{۲}}\frac{۱}{۳}}+\frac{۱}{\log_{\frac{۱}{۵}}\frac{۱}{۳}}$ باشد، آن‌گاه حاصل $\left|\frac{۱}{۵}A\right|$ کدام است؟

۱) $-۴/۸$ ۲) $۲/۷$ ۳) $-۱/۸$ ۴) $-۳/۶$

پاسخ: گزینهٔ ۴

مشاوره ترکیب هندسهٔ (۳) و حسابان (۱) این تست شبیه به یکی از تست‌های کنکور ۱۴۰۲ است که اگر قوانین لگاریتم از ریاضی را بلد نباشید، هرگز به جواب نمی‌رسید و این اهمیت سؤالات ترکیبی را نشان می‌دهد.

درس نامه

۱) اگر $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$، آن‌گاه دترمینان ماتریس A برابر است با:

$$|A|=ad-bc$$

۲) اگر λ عدد حقیقی و A ماتریسی $n\times n$ باشد، آن‌گاه $|\lambda A_{n\times n}|=\lambda^{n}|A|$، مثلاً اگر A ماتریس ۲×۲ باشد، آن‌گاه:

$$|-۲A|=(-۲)^{۲}|A|=۴|A|$$

۳) یادآوری قوانین لگاریتم:

الف) $x=\log_b a\Rightarrow b^{x}=a$

ب) $\log_b a=\frac{۱}{\log_a b}$

پ) $\log_{c^d} a^{b}=\frac{b}{d}\log_c a$

ت) $\log_b a+\log_b c=\log_b ac$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ تشریحی **گام اول (محاسبهٔ مقدار x)**: از قوانین لگاریتم گفته‌شده در مورد (۳) درس‌نامه استفاده می‌کنیم:

$$x=\frac{۱}{\log_{\frac{۱}{۲}}\frac{۱}{۳}}+\frac{۱}{\log_{\frac{۱}{۵}}\frac{۱}{۳}}=\log_{\frac{۱}{۳}}\frac{۱}{۲}+\log_{\frac{۱}{۳}}\frac{۱}{۵}=\log_{۳^{-۱}}۲^{-۱}+\log_{۳^{-۱}}۵^{-۱}=\frac{-۱}{-۱}\log_{۳}۲+\frac{-۱}{-۱}\log_{۳}۵=\log_{۳}۲+\log_{۳}۵=\log_{۳}۱۰$$

$$\Rightarrow x=\log_{۳}۱۰ \Rightarrow ۳^{x}=۱۰$$

گام دوم (جای‌گذاری x در ماتریس A و محاسبهٔ $|A|$):

با جای‌گذاری مقدار x در ماتریس A، طبق مورد (۱) درس‌نامه دترمینان A را محاسبه می‌کنیم:

$$۳^{x}=۱۰ \Rightarrow \begin{cases} ۳^{-x}=\frac{۱}{۳^{x}}=\frac{۱}{۱۰}=۱۰^{-۱} \\ ۲۷^{x}=(۳^{x})^{۳}=۱۰^{۳} \end{cases}$$

$$A=\begin{bmatrix} ۳^{x} & ۲۷^{x} \\ ۳^{-x} & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱۰ & ۱۰^{۳} \\ ۱۰^{-۱} & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow |A|=۱۰\times۱-۱۰^{۳}\times۱۰^{-۱}=۱۰-۱۰^{۲}=-۹۰$$

گام سوم (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال): بنابراین طبق مورد (۲) درس‌نامه مقدار $|\frac{۱}{۵}A|$ برای ماتریس $A_{۲\times۲}$ برابر است با:

$$|\frac{۱}{۵}A|=(\frac{۱}{۵})^{۲}|A|=\frac{۱}{۲۵}\times(-۹۰)=-۳/۶$$

تست و پاسخ ۳۴

از کانون سهمی به معادلهٔ $y=x^{۲}+x+۱$ خطی موازی با خط هادی آن رسم می‌کنیم تا سهمی را در نقاط A و B قطع کند. اگر A و B رأس‌های مستطیلی باشند که دو رأس دیگر آن بر خط هادی سهمی واقع است، مساحت این مستطیل کدام است؟

۱) ۰/۲۵ ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) ۰/۵

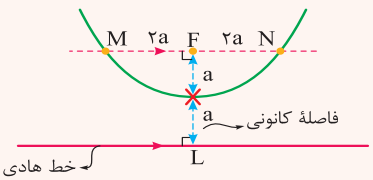
پاسخ: گزینهٔ ۴

خودت حل کنی بهتره در هر سهمی، فاصلهٔ کانون از خط هادی برابر با ۲a است. a که برابر با فاصلهٔ رأس تا کانون (یا فاصلهٔ رأس تا خط هادی) است، فاصلهٔ کانونی سهمی نامیده می‌شود.

AB وتر کانونی سهمی است.

درس نامه

۱) **طول وتر کانونی سهمی**: وتری از سهمی که از کانون گذشته و موازی خط هادی می‌باشد (یا به بیان دیگر، عمود بر محور تقارن باشد)، وتر کانونی نام دارد که طول آن ۴ برابر فاصلهٔ کانونی است:



$$MN=۴a$$

۲) در سهمی $Ax^{۲}+Bx+Cy+D=۰$ فاصلهٔ کانونی برابر است با:

$$a=|\frac{C}{۴A}|$$

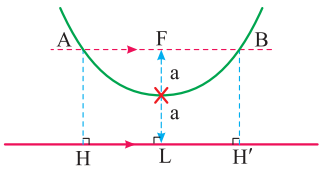
پاسخ تشریحی **گام اول (تحلیل سؤال)**: با توجه به صورت سؤال، AB همان وتر کانونی سهمی و طول آن برابر با ۴a است؛ پس ابتدا فاصلهٔ کانونی (a) را به دست می‌آوریم.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

گام دوم (محاسبهٔ فاصلهٔ کانون): معادلهٔ استاندارد سهمی به صورت $x^۲ + x - y + ۱ = ۰$ است؛ پس طبق مورد (۲) درس‌نامه فاصلهٔ کانونی برابر است با:

$$a = |\frac{C}{۴A}| = \frac{۱}{۴}$$

گام سوم (محاسبهٔ طول AB): گفتیم AB همان وتر کانونی سهمی است و طول آن برابر است با:



$$AB = ۴a = ۱$$

گام چهارم (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال): سؤال از ما مساحت مستطیل ABH′H را می‌خواهد، داریم: $AH = BH' = ۲a = \frac{۱}{۲}$؛ پس:

$$S_{ABH'H} = AB \times BH' = ۱ \times \frac{۱}{۲} = ۰/۵$$

تست و پاسخ ۳۵

اگر اندازهٔ بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ به ترتیب ۲ و $۳\sqrt{۳}$ و زاویهٔ بین آن‌ها ۳۰° باشد، اندازهٔ بردار $(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}\times\vec{b})$ کدام است؟

۱) $\frac{۲۱\sqrt{۳}}{۲}$
۲) $۱۵\sqrt{۳}$
۳) $۲۱\sqrt{۳}$
۴) $۳۰\sqrt{۳}$

پاسخ: گزینهٔ ۳

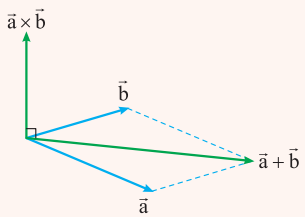
خودت حل کنی بهتره بردار $\vec{a}\times\vec{b}$ بر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و هر برداری که در صفحهٔ دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ باشد (مثل $\vec{a}+\vec{b}$) عمود است.

درس نامه

۱) اگر a و b دو بردار غیرصفر و θ زاویهٔ بین آن‌ها باشد، در این صورت:

$$|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta \ , \ \vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

۲) بردار $\vec{a}\times\vec{b}$ همواره بر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ عمود است؛ پس بر هر بردار موجود در صفحهٔ این دو بردار مثل $\vec{a}+\vec{b}$ هم عمود خواهد بود، ببینید:



نکته اتحادهای جبری برای ضرب داخلی بردارها برقرار هستند، مثلاً:

$$|\vec{a}+\vec{b}|^۲ = |\vec{a}|^۲ + |\vec{b}|^۲ + ۲\vec{a}.\vec{b}$$
$$|\vec{a}-\vec{b}|^۲ = |\vec{a}|^۲ + |\vec{b}|^۲ - ۲\vec{a}.\vec{b}$$

پاسخ تشریحی **گام اول (تحلیل سؤال):** طبق مورد (۲) درس‌نامه می‌دانیم زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}+\vec{b}$ و $\vec{a}\times\vec{b}$، برابر ۹۰° است؛ پس حاصل‌ضرب خارجی آن‌ها برابر است با:

$$|(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}\times\vec{b})| = |\vec{a}+\vec{b}||\vec{a}\times\vec{b}|\underbrace{\sin ۹۰^\circ}_{۱} = |\vec{a}+\vec{b}||\vec{a}\times\vec{b}| \quad (*)$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

گام دوم (محاسبهٔ خواستهٔ سوال): برای محاسبهٔ $(\vec{a}+\vec{b})$ داریم:

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2\underbrace{\vec{a}.\vec{b}}_{|\vec{a}||\vec{b}|\cos 30^\circ}=2^2+(3\sqrt{3})^2+2\times 2\times 3\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=4+27+18=49 \Rightarrow |\vec{a}+\vec{b}|=7$$

و برای محاسبهٔ $|\vec{a}\times\vec{b}|$ داریم:

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin 30^\circ=2\times 3\sqrt{3}\times\frac{1}{2}=3\sqrt{3}$$

در نتیجه طبق (*):

$$|(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}+\vec{b})|=|\vec{a}+\vec{b}||\vec{a}\times\vec{b}|=7\times 3\sqrt{3}=21\sqrt{3}$$

تست و پاسخ ۳۶

نقطه‌های M و N به ترتیب روی دو دایرهٔ متداخل $x^2+y^2+2x-4y+a=0$ و $x^2+y^2-6x+2y-54=0$ قرار دارند. اگر کم‌ترین فاصله M و N برابر یک باشد، آن‌گاه شعاع دایرهٔ کوچک‌تر کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس‌نامه

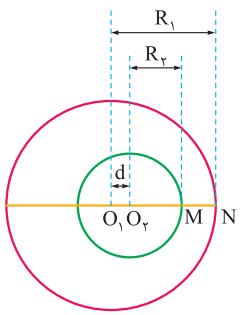
۱) در صورتی‌که معادلهٔ گستردهٔ دایره یعنی $x^2+y^2+ax+by+c=0$ را داشته باشیم، آن‌گاه مرکز و شعاع دایره به صورت زیر به دست می‌آیند:

مختصات مرکز : $O(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2})$

طول شعاع : $R=\sqrt{(-\frac{a}{2})^2+(-\frac{b}{2})^2-c}=\sqrt{x_O^2+y_O^2-c}$

۲) شرط این‌که دو دایرهٔ $C_1(O_1,R_1)$ و $C_2(O_2,R_2)$ متداخل باشند این است که: $O_1O_2<|R_1-R_2|$

پاسخ تشریحی **گام اول (تحلیل مسئله):** در دو دایرهٔ متداخل مطابق شکل زیر، کم‌ترین فاصلهٔ نقاط روی دایره (خواستهٔ مسئله) یعنی MN برابر است با:



$$MN=|O_1N-O_1O_2-O_2M|=|R_1-d-R_2|$$

(قدرمطلق را به این دلیل گذاشتیم که در این سؤال نمی‌دانیم R_1 بزرگ‌تر است یا R_2.)

پس کافیست طول خط‌المرکزین (O_1O_2) و شعاع دایره‌ها را به دست آوریم.

گام دوم (محاسبه مرکز و شعاع دایره‌های C_1 و C_2):

طبق مورد (۱) درس‌نامه مرکز و شعاع دایره‌ها را محاسبه می‌کنیم:

$$C_1: x^2+y^2-6x+2y-54=0 \Rightarrow O_1(-(-\frac{6}{2}),-\frac{2}{2})=(3,-1) \qquad R_1=\sqrt{3^2+(-1)^2+54}=8$$

$$C_2: x^2+y^2+2x-4y+a=0 \Rightarrow O_2(-\frac{2}{2},-(-\frac{4}{2}))=(-1,2) \qquad R_2=\sqrt{(-1)^2+2^2-a}=\sqrt{5-a}$$

$R_1=8$ در گزینه‌ها نیست؛ پس شعاع دایرهٔ کوچک‌تر همان $R_2=\sqrt{5-a}$ است و باید a را پیدا کنیم.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

گام سوم (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال): برای محاسبهٔ مقدار a دو تا شرط را بررسی می‌کنیم، شرط اول این‌که طبق فرض $MN=۱$ است؛ پس:

$$\begin{cases} MN=|R_۱-O_۱O_۲-R_۲| \\ O_۱O_۲=\sqrt{(۳-(-۱))^۲+(-۱-۲)^۲}=\sqrt{۱۶+۹}=۵ \end{cases} \Rightarrow MN=|۸-۵-\sqrt{۵-a}|=۱$$

$$\Rightarrow ۳-\sqrt{۵-a}=\pm ۱ \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{۵-a}=۲ \Rightarrow ۵-a=۴ \Rightarrow a=۱ \\ \sqrt{۵-a}=۴ \Rightarrow ۵-a=۱۶ \Rightarrow a=-۱۱ \end{cases}$$

و شرط دوم این‌که دایره‌ها متداخل‌اند، پس طبق مورد (۲) درس‌نامه باید $O_۱O_۲<|R_۱-R_۲|$؛ پس جواب $a=-۱۱$ قابل قبول نیست، چون در این صورت $R_۲=\sqrt{۵-a}=۴$ و شرط $\underbrace{|R_۱-R_۲|}_{۸-۴=۴}<\underbrace{O_۱O_۲}_{۵}$ برقرار نیست.

در نتیجه به ازای $a=۱$ داریم: $R_۲=\sqrt{۵-۱}=\sqrt{۴}=۲$ که شعاع دایرهٔ کوچک‌تر است.

تست و پاسخ ۳۷

چند عدد بیست‌ویک‌رقمی مثل A، با ارقام ۱ و ۲ می‌توان نوشت که مضرب ۱۲ و باشد و دو عدد به صورت $\left[\frac{A}{۱۰^n}\right]$ و $\left[\frac{۱۰^n A}{۱۰^{۲۰}}\right]$ به پیمانهٔ ۱۰ همنهشت شوند؟ $(n=۰,۱,۲,...,۹)$

۱) ۱۷۰ ۲) ۱۷۵ ۳) $۳۴۰\times ۸!$ ۴) $۳۵۰\times ۱۰!$

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ تشریحی **گام اول:** ابتدا دقت کنید دو عدد وقتی به پیمانهٔ ۱۰ همنهشت هستند که رقم یکان یکسانی داشته باشند.

گام دوم: عدد را به شکل $A=\overline{a_{۲۱}a_{۲۰}a_{۱۹}\cdots a_۳a_۲a_۱}$ فرض می‌کنیم. می‌خواهیم رقم یکان دو عدد $\left[\frac{A}{۱۰^n}\right]$ و $\left[\frac{۱۰^n A}{۱۰^{۲۰}}\right]$ یکسان باشد. با جای‌گذاری $n=۰,۱,۲,...$ داریم:

$$n=۰ \Rightarrow \begin{cases} \left[\frac{A}{۱۰^n}\right]=\left[\frac{A}{۱۰^۰}\right]=\left[\frac{\overline{a_{۲۱}a_{۲۰}a_{۱۹}\cdots a_۳a_۲a_۱}}{۱}\right]=a_{۲۱}a_{۲۰}a_{۱۹}\cdots a_۳a_۲a_۱ \xrightarrow{\text{یکان}} a_۱ \\ \left[\frac{۱۰^n A}{۱۰^{۲۰}}\right]=\left[\frac{۱۰^۰ A}{۱۰^{۲۰}}\right]=\left[\frac{A}{۱۰^{۲۰}}\right]=\left[\frac{a_{۲۱}a_{۲۰}a_{۱۹}\cdots a_۳a_۲a_۱}{\underbrace{۱۰^{۲۰}}_{a_{۲۱}/a_{۲۰}a_{۱۹}\cdots a_۱}}\right]=a_{۲۱} \xrightarrow{\text{یکان}} a_{۲۱} \end{cases}$$

پس باید $a_۱=a_{۲۱}$ باشد.

$$n=۱ \Rightarrow \begin{cases} \left[\frac{A}{۱۰^n}\right]=\left[\frac{A}{۱۰}\right]=\left[\frac{\overline{a_{۲۱}a_{۲۰}\cdots a_۲a_۱}}{\underbrace{۱۰}_{a_{۲۱}a_{۲۰}\cdots a_۲/a_۱}}\right]=a_{۲۱}a_{۲۰}\cdots a_۲ \xrightarrow{\text{یکان}} a_۲ \\ \left[\frac{۱۰^n A}{۱۰^{۲۰}}\right]=\left[\frac{۱۰A}{۱۰^{۲۰}}\right]=\left[\frac{A}{۱۰^{۱۹}}\right]=\left[\frac{\overline{a_{۲۱}a_{۲۰}a_{۱۹}\cdots a_۱}}{\underbrace{۱۰^{۱۹}}_{a_{۲۱}a_{۲۰}/a_{۱۹}a_{۱۸}\cdots a_۱}}\right]=a_{۲۱}a_{۲۰} \xrightarrow{\text{یکان}} a_{۲۰} \end{cases}$$

به طور مشابه باید $a_۳=a_{۱۹}$، $a_۴=a_{۱۸}$، $a_۵=a_{۱۷}$، ... و $a_{۱۰}=a_{۱۲}$ باشد، یعنی برای این‌که دو عدد $\left[\frac{A}{۱۰^n}\right]$ و $\left[\frac{۱۰^n A}{۱۰^{۲۰}}\right]$ به پیمانهٔ ۱۰ همنهشت باشند، عدد باید به صورت زیر باشد:

$$\underbrace{abcdefghij}_{\text{۱۰ رقم سمت چپ}}\underbrace{kjihgfedcba}_{\text{۱۰ رقم سمت راست}}$$

فودمونیش اینه که ۱۰ رقم سمت چپ رو باید برعکس کنیم تا ۱۰ رقم سمت راست به دست آید، مثلاً یکی از اعداد به این صورت، به شکل زیر است:

$$\underbrace{۱۱۱۲۱۲۲۲۱۲۱}_{\text{۱۰ رقم سمت چپ}}\underbrace{۱۲۱۲۲۲۱۲۱۱۱}_{\text{۱۰ رقم سمت راست}}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

گام سوم: حالا باید کاری کنیم تا عدد مضرب ۱۲ شود. عددی مضرب ۱۲ است که بر ۴ و ۳ بخش‌پذیر باشد. حالا با توجه به این‌که ارقام ما فقط ۱ و ۲ هستند، تنها حالتی که ممکن است عدد مضرب ۴ باشد این است که دو رقم سمت راست آن ۱۲ باشد. *(یادتون هست که عددی مضرب ۴ می‌شه که عدد دورقمی سمت راست اون مضرب ۴ باشه!)*، پس تا این‌جا عدد به شکل زیر می‌شود:

۲۱cdefghijk jihgfedc۱۲
(۱۷ رقم وسط)

گام چهارم: از طرفی عددی مضرب ۳ می‌شود که جمع ارقامش مضرب ۳ باشد. جمع دو رقم سمت راست (که ۱ و ۲ هست) و دو رقم سمت چپ (که ۲ و ۱ هست) برابر ۶ می‌شود، پس باید جمع ۱۷ رقم وسط مضرب ۳ باشد. چند حالت برای تعداد ارقام ۱ و ۲ در ۱۷ رقم وسط داریم:

حالت اول:

۱ رقم ۱ و ۱۶ رقم ۲ داشته باشیم که تنها حالت برای این ۱۷ رقم به صورت زیر است:

۲۲۲۲۲۲۲۲۱۲۲۲۲۲۲۲۲

حالت دوم:

۴ رقم ۱ و ۱۳ رقم ۲ داشته باشیم. یکی از ارقام ۲ را در جایگاه وسط قرار می‌دهیم:

cdefghij۲ jihgfedc
(۸ رقم سمت چپ — ۸ رقم سمت راست)

حالا نصف ارقام باقی‌مانده، یعنی ۲ رقم ۱ و ۶ رقم ۲ را به $\frac{۸!}{۲!۶!}=۲۸$ حالت می‌توانیم در ۸ رقم سمت راست قرار دهیم که در این صورت، ترتیب ۸ رقم سمت چپ هم باید دقیقاً برعکس ۸ رقم سمت راست باشد، پس ۱ جایگشت دارد.

حالت سوم:

۷ رقم ۱ و ۱۰ رقم ۲ داشته باشیم. یکی از ارقام ۱ را در جایگاه وسط قرار می‌دهیم:

cdefghij۱ jihgfedc

و نصف ارقام باقی‌مانده، یعنی ۳ رقم ۱ و ۵ رقم ۲ را هم به $\frac{۸!}{۳!۵!}=۵۶$ حالت در ۸ رقم سمت راست قرار می‌دهیم.

حالت چهارم:

۱۰ رقم ۱ و ۷ رقم ۲ داشته باشیم که مشابه حالت سوم $\frac{۸!}{۳!۵!}=۵۶$ جایگشت دارد.

حالت پنجم: ۱۳ رقم ۱ و ۴ رقم ۲ داشته باشیم که مشابه حالت دوم $\frac{۸!}{۲!۶!}=۲۸$ جایگشت دارد.

حالت ششم: ۱۶ رقم ۱ و ۱ رقم ۲ داشته باشیم که مشابه حالت اول ۱ جایگشت دارد.

بنابراین جواب برابر است با:

$۱+۲۸+۵۶+۵۶+۲۸+۱=۱۷۰$

تست و پاسخ ۳۸

در جواب‌های طبیعی معادلهٔ $۶۴۵=۱۵۹y-۹۳x$، مجموع ارقام بزرگ‌ترین x سه‌رقمی کدام است؟

۱) ۱۸
۲) ۱۴
۳) ۱۰
۴) ۶

پاسخ: گزینهٔ ۱

خودت حل کنی بهتره کافی است به جای تساوی، همنهشتی به پیمانهٔ ۱۵۹ را قرار دهید تا به یک معادلهٔ همنهشتی برحسب x برسید.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

درس‌نامه معادلهٔ همنهشتی

به معادل‌هایی به فرم $ax \overset{m}{\equiv} b$ معادلهٔ همنهشتی می‌گوییم. برای مثال $7x \overset{11}{\equiv} 1$ یک معادلهٔ همنهشتی است و هدف ما از حل آن پیداکردن همهٔ x هایی است که وقتی در ۷ ضرب می‌شوند، باقی‌ماندهٔ آن‌ها بر ۱۱ برابر ۱ شود. حالا برای حل این معادله ما باید کاری کنیم که ضریب x از بین برود که برای این کار مضرب‌های ۱۱ را به طرف دیگر معادله اضافه یا کم می‌کنیم تا مضرب ۷ شود، سپس طرفین را به ۷ تقسیم می‌کنیم و جواب حاصل می‌شود:

$$7x \overset{11}{\equiv} 1 \xrightarrow{-22} 7x \overset{11}{\equiv} -21 \xrightarrow[(7,11)=1]{\div 7} x \overset{11}{\equiv} -3 \Rightarrow x = 11t - 3$$

نکته در معادلهٔ $a = b$، می‌توانیم به جای تساوی، همنهشتی به پیمانهٔ دلخواه m را قرار دهیم:

$$a = b \Rightarrow a \overset{m}{\equiv} b$$

پاسخ تشریحی **گام اول:** به جای تساوی، همنهشتی به پیمانهٔ ۱۵۹ (به پیمانهٔ ضریب y) را قرار می‌دهیم:

$$93x - 159y = 645 \Rightarrow 93x - \underbrace{159y}_{\text{مضرب ۱۵۹}} \overset{159}{\equiv} 645 \Rightarrow 93x \overset{159}{\equiv} 645$$

گام دوم:

نکته اگر $ax \overset{m}{\equiv} ay$ باشد، می‌توانیم طرفین را به a تقسیم کنیم که در این صورت، پیمانه هم به ب. م. م a و m تقسیم می‌شود:

$$ax \overset{m}{\equiv} ay \Rightarrow x \overset{\frac{m}{(a,m)}}{\equiv} y$$

با استفاده از نکتهٔ بالا، طرفین $93x \overset{159}{\equiv} 645$ را بر ۳ تقسیم می‌کنیم:

$$31x \overset{\frac{159}{(3,159)}}{\equiv} 215 \Rightarrow 31x \overset{53}{\equiv} 215$$

گام سوم: معادلهٔ همنهشتی را حل می‌کنیم:

$$31x \overset{53}{\equiv} 215 \xrightarrow[\substack{215 \overset{53}{\equiv} 3}]{31 \overset{53}{\equiv} -22} -22x \overset{53}{\equiv} 3 \Rightarrow \underbrace{-22x \overset{53}{\equiv} -50}_{-53} \xrightarrow{\div 2} -11x \overset{\frac{53}{(2,53)}}{\equiv} -25 \Rightarrow -11x \overset{53}{\equiv} -25 \xrightarrow{\times 5} -55x \overset{53}{\equiv} -125$$

$$\xrightarrow[\substack{-125 \overset{53}{\equiv} -72}]{-55 \overset{53}{\equiv} -2} -2x \overset{53}{\equiv} -72 \xrightarrow{\div 2} -x \overset{\frac{53}{(2,53)}}{\equiv} -36 \Rightarrow -x \overset{53}{\equiv} -36 \xrightarrow{\times(-1)} x \overset{53}{\equiv} 36 \Rightarrow x = 53t + 36$$

گام چهارم: حالا به دنبال بزرگ‌ترین مقدار سه‌رقمی طبیعی x هستیم:

$$x < 1000 \Rightarrow 53t + 36 < 1000 \Rightarrow 53t < 964 \Rightarrow t < 18/1$$

بنابراین بزرگ‌ترین مقدار سه‌رقمی x، به ازای $t = 18$ حاصل می‌شود:

$$x = 53t + 36 \xrightarrow{t=18} x_{max} = 53 \times 18 + 36 = 990$$

که جمع ارقام آن برابر $18 = 0 + 9 + 9$ است.

تست و پاسخ ۳۹

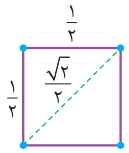
درون یک مستطیل به ابعاد ۹ و ۱۶، حداقل چند نقطه اختیار شود تا مطمئن باشیم فاصلهٔ حداقل دو نقطه از این نقاط انتخابی، بیشتر از $\frac{\sqrt{2}}{2}$ است؟

۱) ۱۴۵ ۲) ۲۸۹ ۳) ۵۷۷ ۴) حداقل وجود ندارد.

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس‌نامه برای حل سؤالات لانه‌کبوتری و اشکال هندسی، کافی است شکل را به چند قسمت تقسیم کنید به طوری که هر قسمت، ویژگی گفته‌شده در صورت سؤال را داشته باشد.

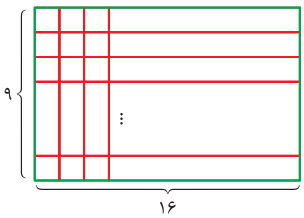
پاسخ تشریحی **گام اول:** اول دقت کنید که در هر مربع به طول ضلع $\frac{1}{2}$ داریم:



پس اگر دو نقطه درون یک مربع به طول ضلع $\frac{1}{2}$ واحد انتخاب کنیم، فاصلهٔ این دو نقطه حتماً کم‌تر از $\frac{\sqrt{2}}{2}$ است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

گام دوم: حالا مستطیل به ابعاد ۹ و ۱۶ را به مربع‌هایی به طول ضلع $\frac{۱}{۲}$ واحد تقسیم می‌کنیم:



با توجه به شکل، $۵۷۶ = ۳۲ \times ۱۸$ مربع به طول ضلع $\frac{۱}{۲}$ داریم، پس اگر ۵۷۷ نقطه درون این شکل انتخاب کنیم، طبق اصل لانه کبوتری حداقل دو نقطه درون یک مربع قرار می‌گیرند و فاصلهٔ آن‌ها از هم کم‌تر از $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ می‌شود.

خب الان احتمالاً می‌گین که پس جواب می‌شه ۳. ولی خب غلطه! چرا؟ چون سؤال دقیقاً برعکسش رو گفته! سؤال گفته حداقل چند نقطه انتخاب کنیم تا مطمئن باشیم فاصله لااقل دو نقطه، بیشتر از $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ باشه. خب چنین حداقلی وجود نداره، چون اگه ما بیاییم و مثلاً یک میلیارد نقطه داخل یه مربع به طول ضلع واحد نزدیک هم انتخاب کنیم، باز هم هیچ دو نقطه‌ای وجود نداره که فاصلهٔ اونا از $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ بیشتر باشه، پس جواب درست می‌شه ۴.

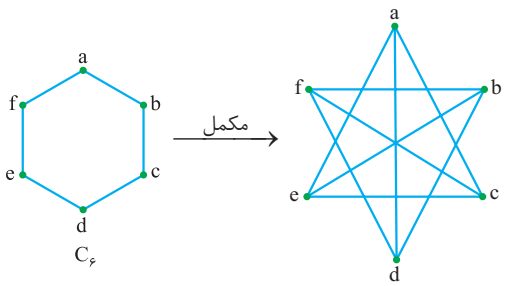
تست و پاسخ ۴۰

در مکمل گراف $C_۶$، چند دور وجود دارد؟

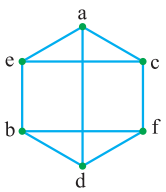
۱) ۶ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ تشریحی **گام اول:** اول گراف $C_۶$ و مکمل آن را رسم می‌کنیم:



گام دوم: حالا با یک جراحی زیبایی، شکل گراف را کمی تغییر می‌دهیم:



گام سوم: حالا شمردن دورها در این گراف راحت‌تر است. دورهای این گراف به صورت زیرند:

دورهای به طول ۳: acea / bfdb

دورهای به طول ۴: acfda / aebda / becfb

دورهای به طول ۵: aebfca / ecfdbe / dacfbd / daebfd / adfcea / adbeca

دورهای به طول ۶: acfdbea / acebfda / aecfbda

بنابراین در مجموع در این گراف ۱۴ دور داریم.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

تست و پاسخ ۴۱

در یک مسیر مستقیم، خودروی A، ساکن و خودروی B با سرعت ثابت ۹۰ km / h در حال دورشدن از خودروی A است. در لحظه‌ای که فاصلهٔ دو خودرو ۱۲۵ m است، خودروی A با شتاب ثابت ۲ / ۴ m / s² در جهت حرکت خودروی B شروع به حرکت می‌کند. تا لحظه‌ای که دو خودرو به هم می‌رسند، مسافت طی‌شده توسط خودروی A برابر با چند متر است؟

۱) ۱۸۷ / ۵ ۲) ۶۲۵ ۳) ۷۵۰ ۴) ۸۷۵

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس‌نامه

۱) معادلهٔ مکان ـ زمان متحرکی که بر روی خط راست و با سرعت ثابت حرکت می‌کند، از رابطهٔ مقابل به دست می‌آید:

$$x = v t + x_0$$

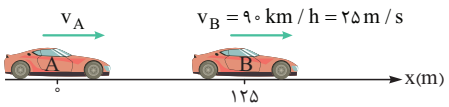
(x: مکان در لحظهٔ t (m)، v: سرعت (m / s)، t: زمان (s)، x_0: مکان اولیه (m))

۲) معادلهٔ مکان ـ زمان متحرکی که بر روی خط راست و با شتاب ثابت حرکت می‌کند، از رابطهٔ مقابل به دست می‌آید:

$$x = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t + x_0$$

(x: مکان در لحظهٔ t (m)، a: شتاب (m / s^2)، v_0: سرعت اولیه (m / s)، t: زمان (s)، x_0: مکان اولیه (m))

پاسخ تشریحی شکل مقابل، لحظه‌ای را نشان می‌دهد که دو خودرو در فاصلهٔ ۱۲۵متری از یکدیگر قرار دارند و خودروی A با شتاب ثابت به سمت خودروی B شروع به حرکت می‌کند:



لحظه‌ای که دو خودرو به هم می‌رسند، مکان آن‌ها یکسان می‌شود ($x_A = x_B$)؛ پس ابتدا معادلهٔ مکان ـ زمان دو خودرو را می‌نویسیم تا بتوانیم لحظه‌ای را که دو خودرو به هم می‌رسند، پیدا کنیم:

$$x_A = \frac{1}{2} a_A t^2 + v_{0A} t + x_{0A} \xrightarrow[a_A = ۲/۴ m/s^2]{x_{0A} = 0 ,\, v_{0A} = 0} x_A = \frac{1}{2} \times (۲/۴) t^2 + 0 + 0 = ۱/۲ t^2$$

$$x_B = v_B t + x_{0B} \xrightarrow[v_B = ۲۵ m/s]{x_{0B} = ۱۲۵ m} x_B = ۲۵t + ۱۲۵$$

حالا معادلهٔ مکان ـ زمان دو خودروی A و B را برابر با یکدیگر قرار می‌دهیم تا لحظه‌ای را که به هم می‌رسند، پیدا کنیم:

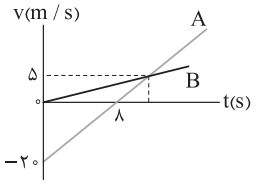
$$x_A = x_B \Rightarrow ۱/۲ t^2 = ۲۵t + ۱۲۵ \xrightarrow{\times ۵} ۶t^2 - ۱۲۵t - ۶۲۵ = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = -\frac{۲۵}{۶} s \ \times \\ t_2 = ۲۵ s \ \checkmark \end{cases}$$

بنابراین، ۲۵s پس از شروع حرکت خودروی A، دو خودرو به یکدیگر می‌رسند. سؤال از ما مسافت طی‌شده توسط خودروی A در این ۲۵s را می‌خواهد. با توجه به این‌که خودروی A از حال سکون، با شتاب ثابت و بر روی خط راست شروع به حرکت کرده است، پس مسافت طی‌شده در ۲۵s اول حرکت آن با جابه‌جایی آن در این مدت برابر است. با استفاده از معادلهٔ مکان ـ زمان خودروی A می‌توانیم بنویسیم:

$$x_A = ۱/۲ t^2 \xrightarrow{t = ۲۵ s} x_A = ۱/۲ (۲۵)^2 = ۷۵۰ m$$

تست و پاسخ ۴۲

نمودار سرعت ـ زمان دو متحرک A و B که در راستای محور x حرکت می‌کنند، به شکل مقابل است. دو متحرک در مبدأ زمان، در مبدأ مکان قرار دارند. در بازهٔ زمانی‌ای که بردار مکان دو متحرک در خلاف جهت یکدیگر است، تندی متوسط متحرک A، چند برابر تندی متوسط متحرک B است؟



۱) ۱ / ۵ ۲) ۲ / ۵ ۳) ۳ ۴) ۵

پاسخ: گزینهٔ ۲

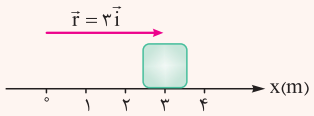
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

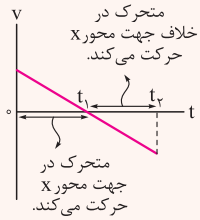
درس‌نامه

۱) **بردار مکان**: بردار مکان برداری است که ابتدایش در مبدأ مختصات $(x=0)$ و انتهایش در محل جسم است.

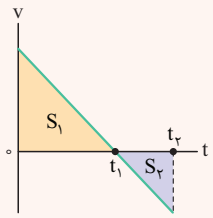
مثال:



۲) اگر متحرکی در جهت محور x حرکت کند، سرعت آن مثبت $(v>0)$ و اگر در خلاف جهت محور x حرکت کند، سرعت آن منفی $(v<0)$ است.



۳) مساحت محصور بین نمودار سرعت ـ زمان و محور t در یک بازهٔ زمانی، بیانگر مسافت طی‌شده توسط متحرک در آن بازهٔ زمانی است. مثلاً در نمودار سرعت ـ زمان زیر، مسافت طی‌شده توسط متحرک در بازهٔ زمانی صفر تا t_2 به صورت زیر است:



$$\left.\begin{array}{l} l_1=S_1 : \text{مسافت طی‌شده در بازهٔ زمانی صفر تا } t_1 \\ l_2=S_2 : \text{مسافت طی‌شده در بازهٔ زمانی } t_1 \text{ تا } t_2 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow l=l_1+l_2=S_1+S_2 : \text{مسافت طی‌شده در بازهٔ زمانی صفر تا } t_2$$

۴) **تندی متوسط**: نسبت مسافت طی‌شده به مدت‌زمان حرکت متحرک را تندی متوسط متحرک می‌گوییم.

$$s_{av}=\frac{l}{\Delta t}\begin{array}{l}\rightarrow \text{مسافت(m)}\\ \rightarrow \text{زمان(s)}\end{array}$$

پاسخ تشریحی هر دو متحرک در مبدأ زمان $(t=0)$ در مبدأ مکان $(x=0)$ هستند. با توجه به این‌که سرعت حرکت B همواره مثبت است، پس متحرک B همواره در جهت محور x حرکت می‌کند و در نتیجه بردار مکان آن در جهت محور x است.

از طرفی، سرعت متحرک A تا لحظهٔ $t=8s$ منفی و پس از آن مثبت است، بنابراین می‌توانیم نتیجه بگیریم که متحرک A تا لحظهٔ $t=8s$ در خلاف جهت محور x حرکت کرده و در لحظهٔ $t=8s$ تغییر جهت داده، سپس در جهت محور x به حرکت خود ادامه می‌دهد؛ پس بردار مکان متحرک A تا لحظه‌ای که دوباره از مکان $x=0$ می‌گذرد، در خلاف جهت محور x است. بازهٔ زمانی‌ای که مد نظر سؤال است، مدت‌زمانی است که بردار مکان دو متحرک در خلاف جهت یکدیگرند؛ پس باید ببینیم که متحرک A در چه لحظه‌ای از مکان $x=0$ عبور می‌کند.

$$x_A=\frac{1}{2}a_At^2+v_{0A}t+x_{0A} \xrightarrow[a_A=\frac{20}{8}=\frac{5}{2}m/s^2,\ v_{0A}=-20m/s]{x_{0A}=0} 0=\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}t^2-20t+0 \Rightarrow$$

$$\frac{5}{4}t^2-20t=0 \Rightarrow 5t(\frac{t}{4}-4)=0 \Rightarrow t_1=0s,\ t_2=16s$$

متحرک A در لحظه‌های $t_1=0$ و $t_2=16s$ از مکان $x=0$ عبور می‌کند. در این مدت، بردار مکان متحرک A در خلاف جهت محور x و بردار مکان متحرک B در جهت محور x است؛ پس بازهٔ زمانی‌ای که مد نظر طراح است، 16s اول حرکت است.

سؤال از ما نسبت تندی متوسط متحرک A به تندی متوسط متحرک B در این 16s را می‌خواهد؛ پس باید مسافتی را که هر یک از این متحرک‌ها در این مدت طی می‌کنند، به دست بیاوریم. با توجه به نمودار سرعت ـ زمان این دو متحرک، متحرک A تا لحظهٔ $t=8s$ در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند، سپس در این لحظه تغییر جهت داده و در جهت محور x به حرکت خود ادامه می‌دهد؛ پس جابه‌جایی متحرک A از لحظهٔ $t_1=0$ تا لحظهٔ $t=8s$ و همچنین از لحظهٔ $t=8s$ تا $t_2=16s$ را به دست می‌آوریم.

$$\Delta x_{1A}=\frac{1}{2}a_At_1^2+v_{0A}t_1 \xrightarrow[t_1=8s,\ v_{0A}=-20m/s]{a_A=\frac{5}{2}m/s^2} \Delta x_{1A}=\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}\times8^2-20\times8=-80m$$

$$\Delta x_{2A}=\frac{1}{2}a_At_2^2+v_{(t=8s)}t_2 \xrightarrow[t_2=8s,\ v_{(t=8s)}=0m/s]{a_A=\frac{5}{2}m/s^2} \Delta x_{2A}=\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}\times8^2+0\times8=80m$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

حالا اندازهٔ این جابه‌جایی‌ها را با هم جمع می‌کنیم تا مسافت طی‌شده توسط متحرک A تا لحظهٔ $t=16s$ را پیدا کنیم:

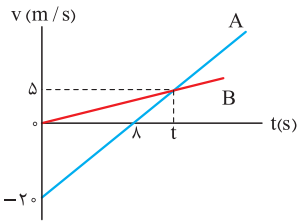
$$l_A = |\Delta x_{1A}| + |\Delta x_{2A}| = 80 + 80 = 160m$$

بنابراین تندی متوسط متحرک A در ۱۶s اول حرکت برابر است با:

$$s_{av,A} = \frac{l_A}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t = 16s]{l_A = 160m} s_{av,A} = \frac{160}{16} = 10 m/s$$

به سراغ متحرک B می‌رویم. برای این‌که مسافت طی‌شده توسط متحرک B در ۱۶s اول حرکت را به دست بیاوریم، به شتاب آن نیاز داریم.

با توجه به نمودار سرعت ـ زمان دو متحرک A و B و با استفاده از تشابه مثلث‌ها، لحظهٔ t را به دست می‌آوریم تا بتوانیم شتاب متحرک B را پیدا کنیم.



$$\frac{20}{5} = \frac{8}{t-8} \Rightarrow t-8=2 \Rightarrow t=10s$$

$$a_B = \frac{\Delta v_B}{\Delta t} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} m/s^2$$

متحرک B از لحظهٔ $t=0$ تا لحظهٔ $t=16s$ در جهت محور x حرکت می‌کند و تغییر جهت نمی‌دهد؛ پس مسافت طی‌شده توسط آن در این مدت با جابه‌جایی آن در این بازهٔ زمانی یکسان است و می‌توانیم بنویسیم:

$$\Delta x_B = \frac{1}{2}a_B t^2 + v_{0B} t \xrightarrow[t=16s,\ v_{0B}=0]{a_B=\frac{1}{2}m/s^2} \Delta x_B = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 16^2 + 0\times 16 = 64m$$

بنابراین تندی متوسط متحرک B در ۱۶s اول حرکت برابر است با:

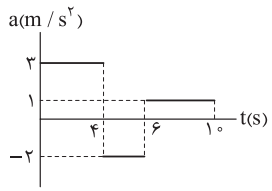
$$s_{av,B} = \frac{l_B}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t = 16s]{l_B = \Delta x_B = 64m} s_{av,B} = \frac{64}{16} = 4 m/s$$

در آخر، خواستهٔ سؤال یعنی نسبت تندی متوسط متحرک A $(s_{av,A})$ به تندی متوسط متحرک B $(s_{av,B})$ را به دست می‌آوریم:

$$\frac{s_{av,A}}{s_{av,B}} = \frac{10}{4} = 2/5$$

تست و پاسخ ۴۳

نمودار شتاب ـ زمان متحرکی به جرم ۵ kg که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل مقابل است. اگر جابه‌جایی متحرک در بازهٔ زمانی $t_1=0s$ تا $t_2=10s$ برابر $(44m)\vec{i}$ باشد، کار کل انجام‌شده روی آن در این بازهٔ زمانی چند ژول است؟

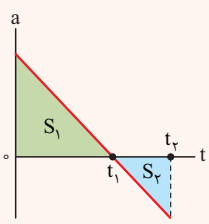


۱) ۳۶۰
۲) ۲۶۴
۳) ۱۶۰
۴) ۱۲۰

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس‌نامه

۱) مساحت محصور بین نمودار شتاب ـ زمان و محور t در یک بازهٔ زمانی، برابر با اندازهٔ تغییرات سرعت در آن بازهٔ زمانی است. اگر نمودار شتاب ـ زمان بالای محور t باشد، علامت تغییرات سرعت مثبت و اگر پایین محور t باشد، علامت تغییرات سرعت منفی است.



$$\left.\begin{array}{l} \text{تغییرات سرعت در بازهٔ زمانی صفر تا } t_1 : \Delta v_1 = S_1 \\ \text{تغییرات سرعت در بازهٔ زمانی } t_1 \text{ تا } t_2 : \Delta v_2 = S_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{تغییرات سرعت در بازهٔ زمانی صفر تا } t_2 : \Delta v = S_1 - S_2$$

۲) **کار کل**: به جمع جبری تک‌تک کارهای انجام شده روی جسم، کار کل می‌گوییم. به عبارت دیگر، کار کل انجام‌شده روی جسم برابر با کار نیروی خالص وارد بر آن است.

$$W_t = W_1 + W_2 + \cdots$$

۳) **قضیهٔ کار ـ انرژی جنبشی**: کار کل انجام‌شده بر روی جسم در یک جابه‌جایی معین، برابر با تغییرات انرژی جنبشی جسم در آن جابه‌جایی است.

$$W_t = \Delta K = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2)$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ تشریحی حرکت متحرک از سه قسمت تشکیل شده است: بازهٔ زمانی (۰s تا ۴s) با شتاب ثابت $a_1 = 3\,m/s^2$، بازهٔ زمانی (۴s تا ۶s) با شتاب ثابت $a_2 = -2\,m/s^2$ و بازهٔ زمانی (۶s تا ۱۰s) با شتاب ثابت $a_3 = 1\,m/s^2$.

جابه‌جایی متحرک در هر یک از این بازه‌های زمانی را به دست می‌آوریم:

$$\Delta x_1 = \frac{1}{2}a_1t_1^2 + v_0t_1 \xrightarrow{a_1=3\,m/s^2,\ t_1=4\,s} \Delta x_1 = \frac{3}{2}\times 4^2 + v_0\times 4 = 24 + 4v_0$$

$$\Delta x_2 = \frac{1}{2}a_2t_2^2 + v_{(t=4s)}t_2 \xrightarrow[v_{(t=4s)}=v_0+3\times4=v_0+12]{a_2=-2\,m/s^2,\ t_2=2\,s} \Delta x_2 = \frac{1}{2}\times(-2)\times 2^2 + (v_0+12)\times 2 = 2v_0 + 20$$

$$\Delta x_3 = \frac{1}{2}a_3t_3^2 + v_{(t=6s)}t_3 \xrightarrow[v_{(t=6s)}=v_0+3\times4-2\times2=v_0+8]{a_3=1\,m/s^2,\ t_3=4\,s} \Delta x_3 = \frac{1}{2}\times 1\times 4^2 + (v_0+8)\times 4 = 4v_0 + 40$$

جابه‌جایی متحرک در ۱۰s اول برابر با ۴۴m است؛ بنابراین مجموع Δx_1، Δx_2 و Δx_3 برابر با ۴۴m است و می‌توانیم بنویسیم:

$$\Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 = 44 \Rightarrow 24 + 4v_0 + 2v_0 + 20 + 4v_0 + 40 = 44 \Rightarrow 10v_0 = -40 \Rightarrow v_0 = -4\,m/s$$

سؤال از ما کار کل انجام‌شده بر روی متحرک در ۱۰s اول حرکت را می‌خواهد. سرعت متحرک در لحظهٔ $t_1 = 0s$ را به دست آوردیم $(v_0 = -4\,m/s)$، اگر سرعت متحرک در لحظهٔ $t_2 = 10s$ را هم پیدا کنیم، می‌توانیم با استفاده از قضیهٔ کار ـ انرژی جنبشی کار کل انجام‌شده بر روی متحرک در ۱۰s اول حرکت را محاسبه کنیم:

$$v_{(t=10s)} = v_0 + 3\times4 - 2\times2 + 1\times4 = v_0 + 12 \xrightarrow{v_0=-4\,m/s} v_{(t=10s)} = 8\,m/s$$

در آخر با استفاده از قضیهٔ کار ـ انرژی جنبشی می‌توانیم بنویسیم:

$$W_t = \Delta K = \frac{1}{2}m(v_{(t=10s)}^2 - v_0^2) \xrightarrow[v_0=-4\,m/s]{m=5\,kg,\ v_{(t=10s)}=8\,m/s} W_t = \frac{1}{2}\times5\times(8^2-(-4)^2) = \frac{5}{2}\times(64-16) = 120\,J$$

حواستون باشه کار کل انجام‌شده روی جسم برابر با کار نیروی خالص وارد بر آن است، نه کار نیروی متوسط! اگر به جای نیروی خالص از نیروی متوسط وارد بر متحرک استفاده کنید، طبق محاسبات زیر، به گزینهٔ نادرست [۲] می‌رسید.

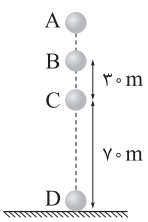
$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_{(t=10s)} - v_0}{10-0} = \frac{8-(-4)}{10} = 1/2\,m/s^2$$

$$F_{av} = ma_{av} = 5\times1/2 = 6\,N$$

$$W_{F_{av}} = F_{av}\times d = 6\times44 = 264\,J$$

تست و پاسخ ۴۴

در شکل مقابل، در شرایط خلأ، گلوله‌ای از نقطهٔ A رها شده و در نقطهٔ D به سطح زمین برخورد می‌کند. اگر گلوله، فاصلهٔ نقطهٔ C تا نقطهٔ D را در مدت ۲s طی کرده باشد، فاصلهٔ نقطهٔ B تا نقطهٔ C را در چند ثانیه طی کرده است؟ $(g = 10\,m/s^2)$



۱) ۱
۲) ۱/۵
۳) ۲
۴) ۲/۵

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس‌نامه

رابطه‌های سقوط آزاد بدون سرعت اولیه (جهت $+y$ را رو به پایین فرض کردیم.)

۱) **رابطهٔ مستقل از زمان:** $v^2 = 2g\Delta y$

۲) **رابطهٔ مستقل از شتاب:** $\frac{v_1+v_2}{2} = \frac{\Delta y}{\Delta t}$

۳) **معادلهٔ مکان ـ زمان:** $y = \frac{1}{2}gt^2 + y_0$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ تشریحی گلوله فاصلهٔ نقطهٔ C تا D را در مدت ۲s طی کرده است؛ بنابراین با استفاده از معادلهٔ مستقل از شتاب می‌توانیم بنویسیم (در تمام مراحل، جهت $+y$ را رو به پایین فرض کردیم):

$$\frac{v_C+v_D}{2}=\frac{\Delta y_{CD}}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t=2s]{\Delta y_{CD}=70m} \frac{v_C+v_D}{2}=\frac{70}{2} \Rightarrow v_C+v_D=70m/s \quad (1)$$

همچنین با استفاده از رابطهٔ $g=\frac{\Delta v}{\Delta t}$ برای این دو نقطه داریم: $g=\frac{\Delta v}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta v=v_D-v_C]{g=10m/s^2,\Delta t=2s} 10=\frac{v_D-v_C}{2} \Rightarrow v_D-v_C=20m/s \quad (2)$

حالا با توجه به رابطه‌های (۱) و (۲) می‌توانیم دستگاه تشکیل بدهیم و مقادیر v_C و v_D را پیدا کنیم:

$$\begin{cases} v_C+v_D=70 \\ v_D-v_C=20 \end{cases} \Rightarrow v_D=45m/s, v_C=25m/s$$

قبل از این‌که به سراغ خواستهٔ سؤال برویم، ابتدا با استفاده از معادلهٔ مستقل از زمان در سقوط آزاد بدون سرعت اولیه، فاصلهٔ نقطهٔ A تا D را محاسبه می‌کنیم تا بتوانیم فاصلهٔ نقطهٔ A تا B را پیدا کنیم. $v_D^2=2g\Delta y_{AD} \xrightarrow[v_D=45m/s]{g=10m/s^2} 45^2=2\times10\Delta y_{AD} \Rightarrow \Delta y_{AD}=101/25m$

بنابراین فاصلهٔ نقطهٔ A تا B برابر است با: $\Delta y_{AB}=\Delta y_{AD}-\Delta y_{BD} \xrightarrow[\Delta y_{BD}=100m]{\Delta y_{AD}=101/25m} \Delta y_{AB}=101/25-100=1/25m$

حالا فاصلهٔ بین تمام نقاط را داریم. سؤال از ما مدت‌زمانی که گلوله فاصلهٔ نقطهٔ B تا C را طی کرده است، می‌خواهد.

با استفاده از معادلهٔ مکان ـ زمان در سقوط آزاد بدون سرعت اولیه، مدت‌زمانی که گلوله فاصلهٔ نقطهٔ A تا B و نیز A تا C را طی کرده است، به دست می‌آوریم. اختلاف این دو مدت‌زمان برابر با مدت‌زمانی است که گلولهٔ فاصلهٔ B تا C را طی کرده است.

$$\Delta y_{AB}=\frac{1}{2}gt_1^2 \xrightarrow[\Delta y_{AB}=1/25m]{g=10m/s^2} 1/25=\frac{1}{2}\times10t_1^2 \Rightarrow t_1^2=0/25 \Rightarrow t_1=0/5s$$

$$\Delta y_{AC}=\frac{1}{2}gt_2^2 \xrightarrow[\Delta y_{AC}=31/25m]{g=10m/s^2} 31/25=\frac{1}{2}\times10t_2^2 \Rightarrow t_2^2=6/25 \Rightarrow t_2=2/5s$$

بنابراین مدت‌زمانی که طول می‌کشد تا گلوله فاصلهٔ B تا C را طی کند، برابر با $2s\ (=2/5-0/5)$ است.

تست و پاسخ ۴۵

شخصی به جرم ۶۰ kg در یک آسانسور، روی یک ترازو ایستاده است. اگر مقداری که ترازو نشان می‌دهد ۴۸۰ N باشد، کدام‌یک از موارد زیر الزاماً درست است؟ $(g=10\ N/kg)$

الف) جهت حرکت آسانسور به سمت پایین است.

ب) جهت شتاب آسانسور به سمت پایین است.

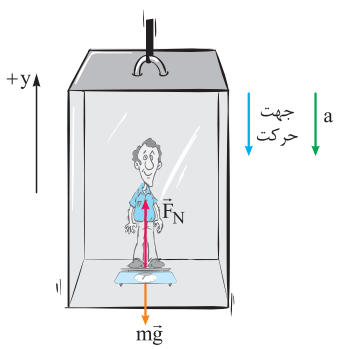
پ) حرکت آسانسور به صورت کندشونده است.

ت) اندازهٔ شتاب آسانسور $2\ m/s^2$ است.

۱) الف و پ ۲) الف و ت ۳) ب و ت ۴) پ و ت

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ تشریحی عددی که ترازو نشان می‌دهد $(480N)$ کم‌تر از وزن شخص $(W=mg=600N)$ است. این حالت موقعی رخ می‌دهد که آسانسور با شتاب ثابت به صورت تندشونده رو به پایین یا کندشونده رو به بالا حرکت کند؛ بنابراین جهت حرکت آسانسور الزاماً رو به پایین نیست (نادرستی «الف») و نوع حرکت آسانسور الزاماً کندشونده نیست (نادرستی «پ»). گزینهٔ درست معلوم شد! ولی برای این‌که نشان بدهیم کارمان درست است، عبارت‌های «ب» و «ت» را هم‌زمان با هم بررسی می‌کنیم. همان‌طور که گفتیم، چون عددی که ترازو نشان می‌دهد کم‌تر از وزن جسم است، پس حرکت آسانسور یا به صورت تندشونده با شتاب ثابت رو به پایین است یا به صورت کندشونده با شتاب ثابت رو به بالا است؛ در هر دو حالت، جهت شتاب آسانسور رو به پایین است. مثلاً برای حالتی که آسانسور به صورت تندشونده با شتاب ثابت رو به پایین حرکت می‌کند، می‌توانیم بنویسیم:



$$F_N-mg=ma \Rightarrow F_N=mg+ma$$

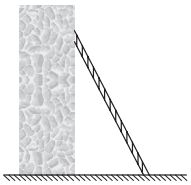
$$\xrightarrow[m=60kg,\ g=10m/s^2]{F_N=480N} 480=60\times10+60a \Rightarrow 60a=-120 \Rightarrow a=-2m/s^2$$

علامت منفی نشان می‌دهد که شتاب آسانسور رو به پایین است. (درستی «ب»)

ضمناً اندازهٔ شتاب $(|a|)$، برابر با $2m/s^2$ است. (درستی «ت»)

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

تست و پاسخ ۴۶



در شکل مقابل، نردبانی به دیوار قائم بدون اصطکاک تکیه داده شده است. اگر ضریب اصطکاک ایستایی بین سطح افقی و پای نردبان ۰/۷۵ باشد، در آستانهٔ سرخوردن نردبان، اندازهٔ نیرویی که دیوار به آن وارد می‌کند، چند برابر اندازهٔ نیرویی است که سطح افقی به نردبان وارد می‌کند؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۳}{۵}$ ۳) $\frac{۴}{۵}$ ۴) $\frac{۴}{۳}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

مشاوره این تست براساس یکی از مثال‌های فصل ۲ کتاب فیزیک (۳) طراحی شده و مشابه آن در کنکور هم مطرح شده است. مثال‌های کتاب درسی را جدی بگیرید.

خودت حل کنی بهتره نیروهای افقی و قائم وارد بر نردبان را رسم کنید. سپس با استفاده از این موضوع که نیروی خالص وارد بر آن در هر دو راستای قائم و افقی صفر است، رابطهٔ نیروهای خواسته‌شده را به دست آورید.

درس نامه

۱) وقتی جسمی در حال تعادل است، نیروی خالص وارد بر آن، در هر دو راستای افقی و قائم صفر است.

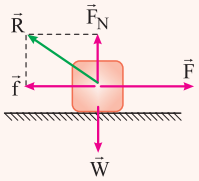
$$F_{net,x}=۰$$
$$F_{net,y}=۰$$

۲) **رابطهٔ نیروی اصطکاک در آستانهٔ حرکت:**

$$f_{s,max}=\mu_s\times F_N$$

$f_{s,max}$: اندازهٔ نیروی اصطکاک در آستانهٔ حرکت (N)
μ_s: ضریب اصطکاک ایستایی
F_N: اندازهٔ نیروی عمودی سطح (N)

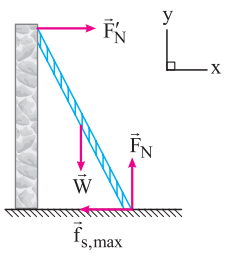
۳) **نیروی سطح:**



از طرف سطح تماس، دو نیروی $\vec{F}_N$ (نیروی عمودی سطح) و $\vec{f}$ (نیروی اصطکاک) بر جسم اثر می‌کنند. این دو نیرو بر هم عمودند و برایند آن‌ها، نیروی سطح بر جسم نام دارد که آن را با $\vec{R}$ نشان می‌دهیم:

$$R=\sqrt{F_N^۲+f^۲}$$

پاسخ تشریحی **گام اول:** نیروهای افقی و قائم وارد بر نردبان را رسم می‌کنیم. با توجه به این‌که نردبان در حال تعادل است، نیروی خالص وارد بر آن را در هر دو راستای افقی و قائم، برابر با صفر قرار می‌دهیم:



$$F_{net,y}=۰ \Rightarrow F_N-W=۰ \Rightarrow F_N=W$$
$$F_{net,x}=۰ \Rightarrow F'_N-f_{s,max}=۰ \Rightarrow F'_N=f_{s,max}$$

گام دوم: نیروی اصطکاک و نیروی سطح وارد بر جسم را به دست می‌آوریم:

$$f_{s,max}=\mu_s\times F_N \xrightarrow{\mu_s=۰/۷۵=\frac{۳}{۴}} f_{s,max}=\frac{۳}{۴}F_N$$

$$R=\sqrt{F_N^۲+f_{s,max}^۲}=\sqrt{F_N^۲+(\frac{۳}{۴}F_N)^۲}=\sqrt{F_N^۲(۱+\frac{۹}{۱۶})} \Rightarrow R=\sqrt{\frac{۲۵}{۱۶}F_N^۲}=\frac{۵}{۴}F_N$$

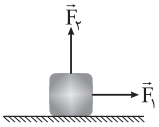
گام سوم: نسبت F'_N به R را پیدا می‌کنیم:

$$\frac{F'_N}{R}=? \xrightarrow[R=\frac{۵}{۴}F_N]{F'_N=f_{s,max}=\frac{۳}{۴}F_N} \frac{F'_N}{R}=\frac{\frac{۳}{۴}F_N}{\frac{۵}{۴}F_N}=\frac{۳}{۵}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

تست و پاسخ ۴۷

در شکل زیر، به جسمی به جرم ۱۰ kg که روی سطحی افقی با ضریب اصطکاک جنبشی ۰/۵ ساکن است، نیروی افقی $F_1 = 100\ N$ و نیروی قائم $\vec{F}_2$ وارد می‌شود. اگر بزرگی تکانهٔ جسم ۴s پس از شروع حرکت آن به ۲۴۰ $\frac{kg.m}{s}$ برسد، اندازهٔ نیروی $\vec{F}_2$ چند نیوتون است؟ $(g = 10\ N/kg)$



۱) ۲۰
۲) ۴۰
۳) ۶۰
۴) ۸۰

پاسخ: گزینهٔ ۱

خودت حل کنی بهتره ابتدا شتاب حرکت را پیدا کنید. سپس با استفاده از قانون دوم نیوتون، نیروی اصطکاک را حساب کنید. در پایان نیز به کمک رابطهٔ نیروی اصطکاک جنبشی، نیروی عمودی سطح و از آن‌جا اندازهٔ نیروی $\vec{F}_2$ را به دست آورید.

درس نامه

۱) **رابطهٔ نیروی اصطکاک جنبشی:**

ضریب اصطکاک جنبشی ↑
اندازهٔ نیروی عمودی سطح (N) → $f_k = \mu_k \times F_N$ ← اندازهٔ نیروی اصطکاک جنبشی (N)

۲) **تکانه:** حاصل‌ضرب جرم جسم در سرعت آن را تکانه می‌گوییم.

سرعت (m/s) → $\vec{p} = m\vec{v}$ ← تکانه $(\frac{kg.m}{s})$
جرم (kg) ↓

۳) **رابطهٔ قانون دوم نیوتون:**

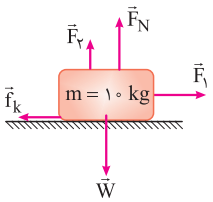
شتاب (m/s^2) → $\vec{F}_{net} = m\vec{a}$ ← نیروی خالص (N)
جرم (kg) ↓

پاسخ تشریحی **گام اول:** با معلوم‌بودن تکانه و جرم جسم، سرعت آن در لحظهٔ $t = 4s$ و هم‌چنین شتاب حرکت را به دست می‌آوریم:

$$p = mv \xrightarrow[p=240\frac{kg.m}{s}]{m=10kg} 240 = 10v \Rightarrow v = 24\ m/s$$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t=4-0]{\Delta v=24-0} a = \frac{24}{4} = 6\ m/s^2$$

گام دوم: نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم و قانون دوم نیوتون را در راستای افقی می‌نویسیم:



$$F_{net} = ma \Rightarrow F_1 - f_k = ma$$

$$\xrightarrow[m=10kg,\ a=6\ m/s^2]{F_1=100N} 100 - f_k = 10 \times 6 \Rightarrow f_k = 40N$$

گام سوم: با استفاده از رابطهٔ نیروی اصطکاک، نیروی عمودی سطح (F_N) را محاسبه می‌کنیم:

$$f_k = \mu_k \times F_N \xrightarrow[\mu_k=0/5]{f_k=40N} 40 = 0/5 \times F_N \Rightarrow F_N = \frac{40}{0/5} = 80N$$

گام چهارم: در راستای قائم $F_{net} = 0$ است؛ پس داریم:

$$F_N + F_2 - W = 0 \xrightarrow[W=mg=1\times10=100N]{F_N=80N} 80 + F_2 - 100 = 0 \Rightarrow F_2 = 20N$$

تست و پاسخ ۴۸

دو ماهوارهٔ A و B در مدارهای معینی به دور زمین در حال گردش هستند. اگر فاصلهٔ دو ماهواره تا سطح زمین به ترتیب برابر R_e و $4R_e$ باشد، تندی ماهوارهٔ A چند برابر تندی ماهوارهٔ B است؟ (R_e شعاع کرهٔ زمین است.)

۱) $\frac{1}{2}$
۲) ۲
۳) $\frac{\sqrt{10}}{2}$
۴) $\frac{\sqrt{10}}{5}$

پاسخ: گزینهٔ ۳

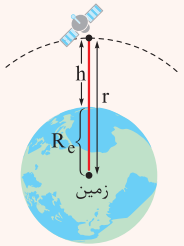
SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

مشاوره یکی از نکات مهم در حل تست‌های مربوط به ماهواره‌ها این است که فاصلهٔ ماهواره تا سطح زمین را با فاصلهٔ ماهواره از مرکز زمین اشتباه نگیرید.

خودت حل کنی بهتره با توجه به رابطهٔ تندی حرکت ماهواره، نسبت تندی دو ماهواره را برحسب فاصلهٔ آن‌ها از مرکز زمین بنویسید و جواب را به دست آورید.

درس نامه ●● رابطهٔ تندی حرکت ماهواره



$$v = \sqrt{\frac{GM_e}{r}}$$

$$r = R_e + h$$

v = تندی ماهواره (m/s)

G = ثابت گرانش عمومی $= ۶/۶۷ \times ۱۰^{-۱۱} \frac{N.m^۲}{kg^۲}$

M_e = جرم کرهٔ زمین $= ۶ \times ۱۰^{۲۴} kg$

r = فاصلهٔ ماهواره از مرکز زمین (m)

R_e = شعاع زمین $= ۶/۴ \times ۱۰^{۶} m$

h = فاصلهٔ ماهواره از سطح زمین (m)

پاسخ تشریحی نسبت تندی ماهوارهٔ A به تندی ماهوارهٔ B را می‌نویسیم:

$$v = \sqrt{\frac{GM_e}{r}} \Rightarrow \frac{v_A}{v_B} = \sqrt{\frac{r_B}{r_A}}$$

$$\frac{r_B = R_e + h_B = R_e + ۴R_e = ۵R_e}{r_A = R_e + h_A = R_e + R_e = ۲R_e} \rightarrow \frac{v_A}{v_B} = \sqrt{\frac{۵R_e}{۲R_e}} = \sqrt{\frac{۵}{۲}} = \frac{\sqrt{۵}}{\sqrt{۲}} \times \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۱۰}}{۲}$$

تست و پاسخ ۴۹

فنری به جرم ناچیز و طول ۲۰ cm را از یک انتها، از نقطهٔ ثابتی آویزان کرده و به انتهای دیگر آن، وزنه‌ای می‌بندیم. وزنه را در شرایطی که فنر طول عادی خود را دارد، از حال سکون رها می‌کنیم. اگر بیشترین طول فنر به ۲۸ cm برسد، بسامد نوسان‌های وزنه چند هرتز است؟ ($g = \pi^۲ \, m/s^۲$ و مقاومت هوا ناچیز است.)

۱) $\frac{۵}{۲}$ ۲) $\frac{۵\pi}{۲}$ ۳) ۵ ۴) ۵π

پاسخ: گزینهٔ ۱

مشاوره علاوه بر سؤال‌های مربوط به نوسان افقی فنر، به سؤال نوسان قائم آن‌ها نیز توجه داشته باشید. نوسان قائم فنرها نکات ویژه‌ای را در بر دارد.

خودت حل کنی بهتره ابتدا دامنهٔ نوسان را پیدا کنید. سپس رابطهٔ بین m، k، g و دامنهٔ نوسان را به دست آورید تا به کمک آن، دوره و بسامد را محاسبه کنید.

درس نامه ●● ۱) رابطهٔ نیروی کشسانی فنر:

$$F_e = k\Delta L$$

F_e: اندازهٔ نیروی کشسانی فنر (N) ← ΔL: تغییر طول فنر (m) ← k: ثابت فنر (N/m)

۲) رابطهٔ دوره و بسامد نوسان در سامانهٔ جرم ـ فنر:

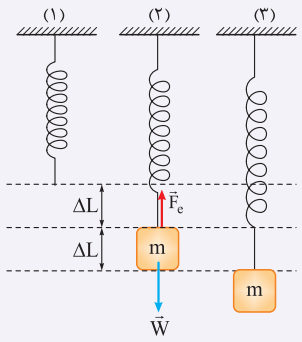
$$T = ۲\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \xrightarrow{f = \frac{۱}{T}} f = \frac{۱}{۲\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

T: دوره (s) ← m: جرم (kg) ← k: ثابت فنر (N/m)

f: بسامد (Hz)

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

نکته اگر وزنه‌ای به جرم m را به انتهای فنر قائمی با ضریب ثابت k بیاویزیم و آن را به آرامی به پایین بیاوریم (بدون این‌که آن را بکشیم) تا به حالت تعادل برسد (شکل ۲)، داریم:

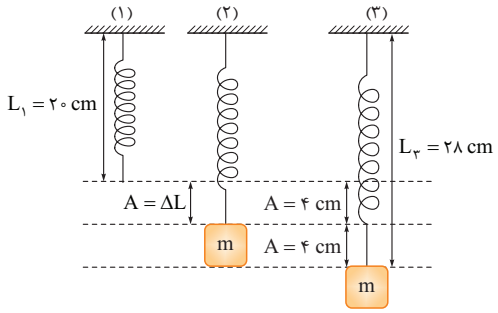


$$F_e - W = 0 \Rightarrow W = F_e$$

$$\Rightarrow mg = k\Delta L \Rightarrow \frac{k}{m} = \frac{g}{\Delta L}$$

اما اگر وزنه را به انتهای همان فنر ببندیم و آن را ناگهان رها کنیم، وزنه، حداکثر به اندازهٔ $2\Delta L$ پایین آمده و به نوسان در می‌آید. در واقع ΔL همان دامنهٔ نوسان است.

پاسخ تشریحی **گام اول:** وقتی وزنه را از حال سکون رها می‌کنیم، بیشترین تغییر طول فنر نسبت به حالت عادی خود، دو برابر دامنهٔ نوسان است. با توجه به این موضوع دامنهٔ نوسان را به دست می‌آوریم:



$$2A = L_3 - L_1 \xrightarrow[L_1=20\,cm]{L_3=28\,cm} 2A = 28 - 20$$

$$\Rightarrow 2A = 8 \Rightarrow A = 4\,cm$$

گام دوم: بسامد نوسان‌های وزنه ـ فنر را حساب می‌کنیم:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \xrightarrow{\frac{k}{m}=\frac{g}{\Delta L}} f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\Delta L}} \xrightarrow[\Delta L = A = 4\,cm = 4\times10^{-2}\,m]{g=\pi^2 m/s^2} f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi^2}{4\times10^{-2}}} = \frac{1}{2\pi}\times\frac{\pi}{2\times10^{-1}} = \frac{1}{4\times10^{-1}}$$

$$\Rightarrow f = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}\,Hz$$

تست و پاسخ ۵۰

معادلهٔ مکان ـ زمان نوسانگر هماهنگ ساده‌ای که در راستای محور x نوسان می‌کند، در SI به صورت $x = 0/2\cos 5\pi t$ است. در لحظه‌ای که انرژی پتانسیل نوسانگر ۵۰ درصد بیشتر از انرژی جنبشی آن است، تندی نوسانگر چند متر بر ثانیه است؟ $(\pi^2 = 10)$

۱) ۲ ۲) $\sqrt{6}$ ۳) 2π ۴) $\sqrt{6}\pi$

پاسخ: گزینهٔ ۱

مشاوره در مبحث نوسان، یکی از مطالبی که توسط طراحان سؤال‌های کنکور مورد توجه خاصی قرار دارد، انرژی نوسانگر است، زیرا به راحتی با سایر روابط و مطالب این درس ترکیب می‌شود.

خودت حل کنی بهتره ابتدا رابطه‌ای بین انرژی‌های جنبشی و پتانسیل تشکیل دهید. سپس انرژی جنبشی را برحسب انرژی کل نوسانگر بنویسید تا تندی نوسانگر به دست آید.

درس نامه

۱) **معادلهٔ مکان ـ زمان در حرکت هماهنگ ساده:**

$$x = A\cos\omega t$$

x: مکان نوسانگر (m) ← A: دامنه (m)، ωt: زمان (s) ← ω: بسامد زاویه‌ای (rad/s)

۲) **رابطهٔ بیشینهٔ تندی نوسانگر:**

$$v_{max} = A\omega$$

v_{max}: بیشینهٔ تندی (m/s)، A: دامنه (m)، ω: بسامد زاویه‌ای (rad/s)

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳) **رابطهٔ انرژی جنبشی و انرژی مکانیکی (کل) نوسانگر:**

$$K=\frac{1}{2}mv^2 \rightarrow \text{تندی } (m/s) \quad ,\quad K \rightarrow \text{انرژی جنبشی } (J) \quad ,\quad m \rightarrow \text{جرم } (kg)$$

$$E=\frac{1}{2}mv_{max}^2 \rightarrow \text{بیشینهٔ تندی نوسانگر } (m/s) \quad ,\quad E \rightarrow \text{انرژی مکانیکی } (J) \quad ,\quad m \rightarrow \text{جرم } (kg)$$

$$E=K+U \rightarrow \text{انرژی پتانسیل } (J) \quad ,\quad E \rightarrow \text{انرژی مکانیکی } (J) \quad ,\quad K \rightarrow \text{انرژی جنبشی } (J)$$

پاسخ تشریحی **گام اول:** ابتدا انرژی پتانسیل نوسانگر را برحسب انرژی جنبشی آن می‌نویسیم، سپس انرژی مکانیکی (کل) نوسانگر را برحسب انرژی جنبشی آن به دست می‌آوریم:

$$U=K+\frac{50}{100}K=1/5K$$

$$E=K+U \xrightarrow{U=1/5K} E=K+1/5K=2/5K$$

گام دوم: با استفاده از معادلهٔ مکان ـ زمان نوسانگر، دامنه و بسامد زاویه‌ای نوسانگر معلوم می‌شود:

$$\left.\begin{matrix} x=A\cos\omega t \\ x=0/2\cos 5\pi t \end{matrix}\right\} \Rightarrow A=0/2\,m\,,\ \omega=5\pi\,rad/s$$

اکنون می‌توانیم بیشینهٔ تندی نوسانگر را حساب کنیم:

$$v_{max}=A\omega \xrightarrow[\omega=5\pi\,rad/s]{A=0/2\,m} v_{max}=0/2\times 5\pi=\pi\,m/s$$

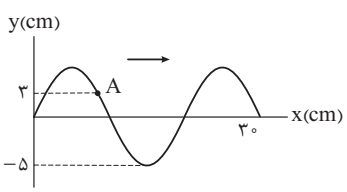
گام سوم: نسبت انرژی جنبشی نوسانگر به انرژی کل آن را می‌نویسیم و تندی آن را به دست می‌آوریم:

$$\frac{K}{E}=\frac{\frac{1}{2}mv^2}{\frac{1}{2}mv_{max}^2} \xrightarrow[v_{max}=\pi]{E=2/5K} \frac{K}{2/5K}=\frac{v^2}{\pi^2}$$

$$\xrightarrow{\pi^2=10} \frac{1}{2/5}=\frac{v^2}{10} \Rightarrow v^2=4 \Rightarrow v=2\,m/s$$

تست و پاسخ ۵۱

تصویر موج منتشرشده در طنابی با جرم واحد طول $20\,g/m$ و نیروی کشش $50\,N$، در لحظهٔ $t_1=0\,s$ به شکل مقابل است. سرعت متوسط ذرهٔ A از طناب، در بازهٔ زمانی $t_1=0\,s$ تا $t_2=\frac{1}{100}\,s$ چند متر بر ثانیه است؟



۱) $6\vec{j}$
۲) $-6\vec{j}$
۳) $3\vec{j}$
۴) $-3\vec{j}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

مشاوره در تست‌های مربوط به انتشار موج در محیط، توجه داشته باشید که تندی انتشار موج در محیط با سرعت نوسان ذرات محیط، متفاوت است.

خودت حل کنی بهتره تندی انتشار موج در طناب و طول موج را به دست آورید. سپس دورهٔ حرکت را حساب کنید و ببینید که بازهٔ زمانی داده‌شده، چند برابر دوره است. در پایان، مکان ذرهٔ A را در لحظهٔ t_2 پیدا کرده و سرعت متوسط ذرهٔ A را در بازهٔ زمانی مورد نظر به دست آورید.

درس نامه

۱) **رابطهٔ سرعت متوسط (v_{av}):** اگر متحرکی در بازهٔ زمانی Δt در راستای محور y، جابه‌جایی Δy را داشته باشد، سرعت متوسط آن از رابطهٔ مقابل به دست می‌آید:

$$v_{av}=\frac{\Delta y}{\Delta t}=\frac{y_2-y_1}{t_2-t_1}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

y_1 = مکان متحرک در لحظهٔ t_1

y_2 = مکان متحرک در لحظهٔ t_2

۲) رابطهٔ طول موج با تندی انتشار موج در یک محیط معین به صورت زیر است:

$$\lambda = \frac{v}{T} \quad \begin{matrix} \text{طول موج (m)} \leftarrow \lambda \\ \text{تندی انتشار موج (m/s)} \rightarrow v \\ \text{دوره (s)} \rightarrow T \end{matrix}$$

۳) تندی انتشار موج در یک طناب که با نیروی F کشیده شده است، به شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \quad \begin{matrix} \text{تندی (m/s)} \leftarrow v \\ \text{نیروی کشش (N)} \rightarrow F \\ \text{چگالی خطی جرم (kg/m)} \rightarrow \mu \end{matrix}$$

پاسخ تشریحی **گام اول:** تندی انشار موج در طناب را حساب می‌کنیم:

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \xrightarrow[\mu = ۲۰ g/m = ۲۰\times۱۰^{-۳} kg/m]{F = ۵۰ N} v = \sqrt{\frac{۵۰}{۲۰\times۱۰^{-۳}}} = \sqrt{۲۵۰۰} = ۵۰ m/s$$

با توجه به شکل داده‌شده، طول موج را نیز به دست می‌آوریم:

$$\frac{۳\lambda}{۲} = ۳۰ \Rightarrow \lambda = ۲۰ cm = ۰/۲ m$$

گام دوم: دورهٔ حرکت را به دست آورده و آن را با بازهٔ زمانی داده‌شده مقایسه می‌کنیم:

$$\lambda = Tv \Rightarrow T = \frac{\lambda}{v} \xrightarrow[v = ۵۰ m/s]{\lambda = ۰/۲ m} T = \frac{۰/۲}{۵۰} = \frac{۱}{۲۵۰} s$$

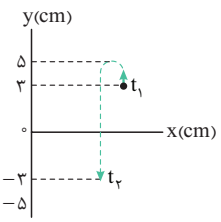
$$\frac{\Delta t}{T} = \frac{t_2 - t_1}{T} \xrightarrow[T = \frac{۱}{۲۵۰} s]{t_2 = \frac{۱}{۱۰۰} s, t_1 = ۰} \frac{\Delta t}{T} = \frac{\frac{۱}{۱۰۰}}{\frac{۱}{۲۵۰}} = ۲/۵$$

یعنی در بازهٔ زمانی Δt، ذرهٔ A، ۲/۵ نوسان انجام می‌دهد. بعد از گذشت ۲ نوسان دوباره به نقطهٔ شروع حرکت خود برمی‌گردد و جابه‌جایی آن صفر است، پس کافی است جابه‌جایی ذره را پس از زمان $\frac{T}{۲}$ به دست آوریم.

گام سوم: در مدت‌زمان نصف دوره $(\frac{T}{۲})$ مسافتی که نوسانگر می‌پیماید دو برابر دامنه است.

$$l = ۲A \xrightarrow{A = ۵ cm} l = ۲\times۵ = ۱۰ cm$$

با توجه به جهت انتشار موج، ذرهٔ A ابتدا ۲cm به طرف بالا رفته و سپس ۸cm به طرف پایین می‌آید تا به مکان $y = -۳ cm$ برسد.



$$v_{av} = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1} \xrightarrow[t_2 = \frac{۱}{۱۰۰} s, t_1 = ۰]{y_2 = -۳ cm, y_1 = ۳ cm} v_{av} = \frac{-۳ - ۳}{\frac{۱}{۱۰۰} - ۰} = -۶۰۰ cm/s = -۶ m/s$$

چون جابه‌جایی ذرهٔ A در این بازه رو به پایین است، داریم:

$$\vec{v}_{av} = (-۶ m/s)\vec{j}$$

تست و پاسخ ۵۲

اگر از یک منبع صوت ۴۹ m دور شویم، تراز شدت صوت ۳۴dB تغییر می‌کند. فاصله تا منبع صوت در حالت اوّل، چند متر است؟ ($\log ۲ = ۰/۳$ و اتلاف انرژی ناچیز است.)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۵۰ ۴) ۱۰۰

پاسخ: گزینهٔ ۱

مشاوره برای حل تست‌های مربوط به تراز شدت صوت باید تسلط نسبی روی محاسبات لگاریتمی داشته باشید.

خودت حل کنی بهتره ابتدا با استفاده از رابطهٔ تراز شدت صوت، نسبت شدت صوت در دو حالت را به دست آورید. سپس رابطهٔ شدت صوت با فاصلهٔ شنونده از چشمهٔ صوت را بنویسید و فاصلهٔ خواسته‌شده را به دست آورید.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

درس‌نامه

۱) برای مقایسهٔ شدت صوت بین دو حالت مختلف، با چشم‌پوشی از جذب انرژی صوت توسط محیط می‌توان نوشت:

$$\frac{I_2}{I_1}=(\frac{A_2}{A_1})^2(\frac{f_2}{f_1})^2(\frac{r_1}{r_2})^2$$

I = شدت صوت (W/m^2)

A = دامنه (m)

f = بسامد (Hz)

r = فاصلهٔ شنونده از چشمهٔ صوت (m)

۲) رابطهٔ تراز شدت صوتی برای مقایسهٔ شدت صوت در دو حالت مختلف را می‌توان به صورت زیر به کار برد:

$$\beta_1-\beta_2=10\log\frac{I_1}{I_2}$$

β_1 = تراز شدت صوت در حالت اول (dB)

β_2 = تراز شدت صوت در حالت دوم (dB)

I_1 = شدت صوت در حالت اول (W/m^2)

I_2 = شدت صوت در حالت دوم (W/m^2)

پاسخ تشریحی **گام اول:** چون از منبع صوت دور شده‌ایم $(r_2>r_1)$، شدت صوت و تراز شدت صوت کاهش یافته‌اند.

$$\beta_1-\beta_2=10\log\frac{I_1}{I_2}\xrightarrow{\beta_1-\beta_2=34\,dB}34=10\log\frac{I_1}{I_2}$$

$$\Rightarrow \log\frac{I_1}{I_2}=3/4=4-0/6=4-2\times0/3\xrightarrow[\log10^4=4]{\log2=0/3}\log\frac{I_1}{I_2}=\log10^4-2\log2$$

$$\Rightarrow \log\frac{I_1}{I_2}=\log10^4-\log2^2=\log\frac{10^4}{2^2}\Rightarrow\frac{I_1}{I_2}=\frac{10^4}{4}$$

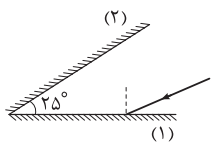
گام دوم: شدت صوت با مربع فاصلهٔ شنونده از چشمهٔ صوت، نسبت وارون دارد. توجه کنید که دامنه و بسامد صوت در این‌جا هیچ تغییری نداشته‌اند.

$$\frac{I_1}{I_2}=(\frac{r_2}{r_1})^2\xrightarrow{\frac{I_1}{I_2}=\frac{10^4}{4}}\frac{10^4}{4}=(\frac{r_2}{r_1})^2\Rightarrow\frac{r_2}{r_1}=\frac{100}{2}=50$$

$$r_2-r_1=49\xrightarrow{r_2=50r_1}50r_1-r_1=49\Rightarrow 49r_1=49\Rightarrow r_1=1m$$

تست و پاسخ ۵۳

در شکل مقابل، پرتو نوری با زاویهٔ تابش 50° به آینهٔ (۱) می‌تابد. در آخرین بازتاب ممکن پرتو از آینهٔ (۲)، زاویهٔ بازتاب چند درجه است؟



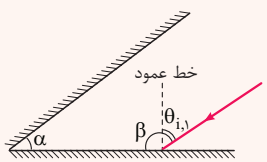
۱) ۱۵
۲) ۴۰
۳) ۵۰
۴) ۷۵

پاسخ: گزینهٔ ۴

مشاوره وقتی پرتوهای نور بین دو آینهٔ تخت متقاطع، چندین بار بازتاب می‌شوند، اگر بخواهیم با رسم شکل کامل و دقیق مسئله را حل کنیم، بسیار وقت‌گیر خواهد بود؛ پس بهتر است از تکنیک‌هایی استفاده کنیم که یک نمونهٔ آن را در حل این تست می‌بینید.

درس‌نامه

هرگاه دو آینهٔ تخت متقاطع با یکدیگر زاویهٔ α بسازند و یک پرتوی نور با زاویهٔ تابش $\theta_{i,1}$ به سطح یکی از دو آینهٔ تخت متقاطع بتابد، تعداد بازتاب‌ها یا تعداد برخورد به آینه‌ها (n) از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:



الف) اگر نسبت $\frac{\beta}{\alpha}$ عدد صحیح باشد:

$$n=\frac{\beta}{\alpha}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

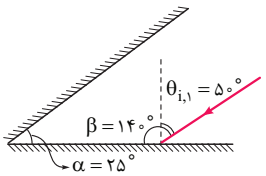
ب) اگر نسبت $\frac{\beta}{\alpha}$ عدد صحیح نباشد:

$$n=[\frac{\beta}{\alpha}]+1$$

هم‌چنین زاویهٔ بازتاب در nاُمین برخورد پرتو به آینه‌ها $(\theta_{r,n})$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\theta_{r,n}=|(n-1)\alpha-\theta_{i,1}|$$

پاسخ تشریحی **گام اول:** ابتدا تعداد بازتاب‌ها را به دست می‌آوریم:



$$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{140^\circ}{25^\circ}=5/6$$

$$n=[5/6]+1 \Rightarrow n=5+1=6$$

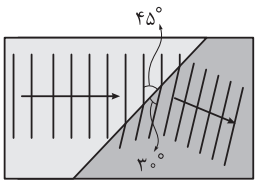
گام دوم: زاویهٔ ششمین بازتاب از سطح آینه‌ها را حساب می‌کنیم:

$$\theta_{r,n}=|(n-1)\alpha-\theta_{i,1}| \xrightarrow[\theta_{i,1}=50^\circ]{n=6,\alpha=25^\circ} \theta_{r,6}=(6-1)\times 25^\circ-50^\circ$$

$$\Rightarrow \theta_{r,6}=125^\circ-50^\circ=75^\circ$$

تست و پاسخ ۵۴

جبهه‌های موج تشکیل‌شده در سطح آب یک تشت موج، در مرز بین ناحیهٔ کم‌عمق و ناحیهٔ عمیق آن، به شکل مقابل است. تندی انتشار موج در ناحیهٔ کم‌عمق، چند برابر تندی انتشار موج در ناحیهٔ عمیق است؟



۱) $\sqrt{2}$
۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
۳) $\frac{\sqrt{6}}{3}$
۴) $\frac{\sqrt{6}}{2}$

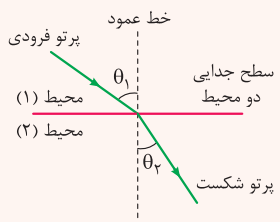
پاسخ: گزینهٔ ۲

مشاوره مشابه این تست در کنکور تیرماه ۱۴۰۱ رشتهٔ تجربی مطرح شده است.

خودت حل کنی بهتره ابتدا زاویه‌های تابش و شکست در دو محیط را مشخص کنید. سپس رابطهٔ قانون شکست عمومی را بنویسید تا نسبت تندی انتشار موج در دو محیط را به دست آورید.

درس‌نامه

قانون شکست عمومی: وقتی پرتوهای موج به طور مایل از یک محیط وارد محیط دیگر می‌شوند، در مرز جدایی دو محیط به علت اختلاف تندی انتشار موج در دو محیط، مسیر پرتوها تغییر می‌کند و رابطهٔ زیر برقرار است:



$$\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1}=\frac{v_2}{v_1}$$

θ_1 = زاویهٔ تابش

θ_2 = زاویهٔ شکست

v_1 = تندی انتشار موج در محیط اول (m/s)

v_2 = تندی انتشار موج در محیط دوم (m/s)

توجه کنید که در هر محیط، زاویهٔ بین جبههٔ موج و سطح جدایی دو محیط (مانع) همان زاویهٔ پرتو با خط عمود است.

پاسخ تشریحی **گام اول:** وقتی امواج سطحی آب از قسمت عمیق به قسمت کم‌عمق می‌رسند، فاصلهٔ بین جبهه‌های موج و در نتیجه طول موج کاهش می‌یابد؛ بنابراین با توجه به شکل داده‌شده در این سؤال، محیط اول عمیق‌تر و محیط دوم کم‌عمق‌تر است.

گام دوم: با استفاده از قانون شکست عمومی، نسبت $\frac{v_2}{v_1}$ را به دست می‌آوریم:

$$\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1}=\frac{v_2}{v_1} \xrightarrow[\theta_1=45^\circ]{\theta_2=30^\circ} \frac{v_2}{v_1}=\frac{\sin 30^\circ}{\sin 45^\circ}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{v_2}{v_1}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

تست و پاسخ ۵۵

در یک تار مرتعش با دو انتهای بسته، اختلاف بسامد هماهنگ‌های چهارم و هفتم برابر ۳۶۰ Hz است. اگر تندی انتشار موج عرضی در این تار ۲۸۸ m / s باشد، هنگام تشکیل مُد پنجم در تار، بیشترین فاصلهٔ دو شکم از یکدیگر چند سانتی‌متر است؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۹۶ ۳) ۴۸ ۴) ۲۴

پاسخ: گزینهٔ ۲

خودت حل کنی بهتره بسامد اصلی و بسامد هماهنگ پنجم تار مرتعش را حساب کنید. سپس طول تار و طول موج هماهنگ پنجم آن را به دست آورید. در پایان نیز با رسم یک شکل ساده از تار مرتعش، فاصلهٔ خواسته‌شده را پیدا کنید.

درس نامه

۱) به هنگام تشکیل موج ایستاده در یک تار مرتعش، نقاطی از تار که همواره ساکن می‌مانند گره، نام دارند و آن‌ها را با N نمایش می‌دهیم. نقاطی که وسط دو گرهٔ مجاور هم قرار می‌گیرند و دامنهٔ موج برایند در آن نقاط بیشینه است، شکم نام دارند و با A نمایش داده می‌شوند.

۲) فاصلهٔ دو گرهٔ مجاور هم یا دو شکم مجاور هم، برابر با $\frac{\lambda}{۲}$ (نصف طول موج) است. هم‌چنین فاصلهٔ یک گره از شکم مجاور آن برابر $\frac{\lambda}{۴}$ (ربع طول موج) است.

۳) بسامدهای تشدیدی یک تار مرتعش که بین دو نقطه بسته شده است، از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$f_n = \frac{nv}{۲L}$

$L = n\frac{\lambda_n}{۲}$

f_n = بسامد هماهنگ nام (Hz)

n = شمارهٔ هماهنگ یا مد

v = تندی انتشار موج در تار (m / s)

L = طول تار (m)

λ_n = طول موج هماهنگ nام تار (m)

تذکر بسامدهای تشدیدی یک تار مرتعش، مضرب صحیحی از بسامد اصلی (هماهنگ اول) آن تار می‌باشند.

$f_n = nf_۱$: $f_۱$ بسامد اصلی (Hz)

پاسخ تشریحی **گام اول:** اختلاف بسامد هماهنگ‌های چهارم و هفتم تار مرتعش را برابر با ۳۶۰Hz قرار می‌دهیم تا بسامد اصلی تار را به دست آوریم:

$$f_n = nf_۱ \Rightarrow f_۷ - f_۴ = ۷f_۱ - ۴f_۱ = ۳f_۱$$

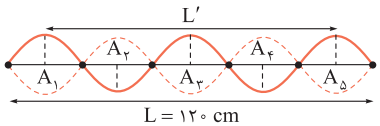
$$f_۷ - f_۴ = ۳۶۰Hz \Rightarrow ۳f_۱ = ۳۶۰ \Rightarrow f_۱ = ۱۲۰Hz$$

گام دوم: بسامد هماهنگ پنجم تار و طول تار را محاسبه می‌کنیم:

$$f_۵ = ۵f_۱ \xrightarrow{f_۱=۱۲۰Hz} f_۵ = ۵\times۱۲۰ = ۶۰۰Hz$$

$$f_n = \frac{nv}{۲L} \xrightarrow[v=۲۸۸m/s]{n=۵, f_۵=۶۰۰Hz} ۶۰۰ = \frac{۵\times۲۸۸}{۲\times L} \Rightarrow L = \frac{۵\times۲۸۸}{۱۲۰۰} = ۱/۲m$$

گام سوم: طول موج هماهنگ پنجم تار را حساب می‌کنیم و با رسم شکل هماهنگ پنجم تار، فاصلهٔ خواسته‌شده را به دست می‌آوریم:



$$L = n\frac{\lambda_n}{۲} \xrightarrow[n=۵]{L=۱/۲m=۱۲۰cm} ۱۲۰ = ۵\frac{\lambda_۵}{۲} \Rightarrow \frac{\lambda_۵}{۲} = \frac{۱۲۰}{۵} = ۲۴cm$$

بیشترین فاصلهٔ دو شکم از یکدیگر یعنی فاصلهٔ $A_۱$ تا $A_۵$ که آن را با L' نشان داده‌ایم. با توجه به شکل داریم:

$$L - L' = ۲\frac{\lambda_۵}{۴} = \frac{\lambda_۵}{۲} \xrightarrow[\frac{\lambda_۵}{۲}=۲۴cm]{L=۱۲۰cm} ۱۲۰ - L' = ۲۴ \Rightarrow L' = ۹۶cm$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

تست و پاسخ ۵۶

در مدل اتمی هیدروژن، اگر کوتاه‌ترین طول موجی که الکترون تابش می‌کند تا به مدار n برسد، برابر $\frac{۸}{۵}\mu m$ باشد، بلندترین طول موجی که الکترون تابش می‌کند تا به مدار $n-۲$ برسد، چند میکرومتر است؟ $(R=\frac{۱}{۱۰۰}(nm)^{-۱})$

۱) $\frac{۲}{۱۵}$ ۲) $\frac{۲}{۵}$ ۳) $\frac{۱۸}{۲۵}$ ۴) $\frac{۹}{۱۰}$

پاسخ: گزینهٔ ۳

خودت حل کنی بهتره با توجه به این‌که کوتاه‌ترین طول موجی که الکترون تابش می‌کند، $\frac{۸}{۵}\mu m$ است، مداری که الکترون در آن لایه قرار دارد را به دست آورید. (توجه کنید کوتاه‌ترین طول موج مربوط به بیشترین انرژی است.)

پس از یافتن n، بلندترین طول موجی که الکترون تابش می‌کند تا به مدار $n'=n-۲$ برسد را به کمک رابطهٔ $\frac{۱}{\lambda_{max}}=R(\frac{۱}{n'^۲}-\frac{۱}{(n'+۱)^۲})$ به دست آورید.

درس‌نامه

در یک رشته، هر چه‌قدر فاصلهٔ دو تراز بیشتر باشد، انرژی‌ای که فوتون تابش می‌کند، بیشتر و در نتیجه طول موج آن کم‌تر است و برعکس، هرچه فاصلهٔ دو تراز کم‌تر باشد، انرژی فوتون تابش‌شده کم‌تر و طول موج آن بیشتر می‌شود.

نتیجه

۱) برای محاسبهٔ بلندترین طول موج در یک رشته، کم‌ترین مقدار n *(یه دونه بیشتر)* را انتخاب می‌کنیم. $\frac{۱}{\lambda_{max}}=R(\frac{۱}{n'^۲}-\frac{۱}{(n'+۱)^۲})$

۲) برای محاسبهٔ کوتاه‌ترین طول موج در یک رشته، بیشترین مقدار n *(همون بی‌نهایت)* را انتخاب می‌کنیم.

$$\frac{۱}{\lambda_{min}}=R(\frac{۱}{n^۲}-\frac{۱}{\infty^۲})=\frac{R}{n^۲}$$

پاسخ تشریحی

گام اول: کوتاه‌ترین طول موجی که الکترون تابش می‌کند تا به مدار n برسد، برابر با $\frac{۸}{۵}\mu m$ است. n را به دست می‌آوریم:

$$\frac{۱}{\lambda_{min}}=R(\frac{۱}{n^۲}-\frac{۱}{\infty^۲})=\frac{R}{n^۲} \xrightarrow{\lambda_{min}=\frac{۸۰۰۰}{۵}nm} \frac{۱}{\frac{۸۰۰۰}{۵}}=\frac{۰/۰۱}{n^۲} \Rightarrow n^۲=\frac{۸۰}{۵}=۱۶ \Rightarrow n=۴$$

گام دوم: بلندترین طول موجی (λ_{max}) که الکترون تابش می‌کند تا به مدار $n'=n-۲=۴-۲=۲$ برسد را به دست می‌آوریم:

$$\frac{۱}{\lambda_{max}}=R(\frac{۱}{n'^۲}-\frac{۱}{(n'+۱)^۲}) \Rightarrow \frac{۱}{\lambda_{max}}=R(\frac{۱}{۲^۲}-\frac{۱}{۳^۲}) \Rightarrow$$

$$\frac{۱}{\lambda_{max}}=\frac{۱}{۱۰۰}(\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۹})=\frac{۱}{۱۰۰}(\frac{۹-۴}{۴\times۹})=\frac{۵}{۱۰۰\times۳۶}$$

$$\Rightarrow \lambda_{max}=\frac{۳۶۰۰}{۵}nm=\frac{۳/۶}{۵}\mu m=\frac{۳۶}{۵۰}\mu m=\frac{۱۸}{۲۵}\mu m$$

تست و پاسخ ۵۷

تعداد هسته‌های واپاشی‌شده از یک نمونهٔ پرتوزا در یک ساعت اول، برابر با $N_۱$ و تعداد هسته‌های باقی‌مانده از همان نمونه پس از دو ساعت، برابر با $N_۲$ است. اگر $\frac{N_۱}{N_۲}=۱۲$ باشد، نیمه‌عمر این نمونه چند دقیقه است؟

۱) ۷/۵ ۲) ۱۵ ۳) ۲۲/۵ ۴) ۳۰

پاسخ: گزینهٔ ۴

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

مشاوره اگر به تست‌های پنج سال اخیر کنکور تجربی و ریاضی توجه کنیم، هر سال ردپای یک تست از مبحث نیمه‌عمر در آن‌ها دیده می‌شود. شاید آن یک تست، امسال در کنکور رشتهٔ شما دیده شود. مبحث نیمه‌عمر ساده است، به شرط آن‌که به آن نگاه صرفاً فرمولی نداشته باشید و آن را درک کنید.

درس نامه

اگر تعداد و جرم هسته‌های اولیهٔ یک ماده پرتوزا با نیمه‌عمر T به ترتیب N_0 و m_0 باشند، در این صورت پس از مدت‌زمان t، تعداد هسته‌های مادهٔ پرتوزا (N) و جرم هسته مادهٔ پرتوزا (m) از روابط زیر به دست می‌آیند:

$$N = \frac{N_0}{2^n}$$

$$m = \frac{m_0}{2^n}$$

n تعداد نیمه‌عمر است که از رابطهٔ $n = \frac{t}{T}$ به دست می‌آید.

نکته تعداد هسته‌های واپاشیده (N') و جرم هسته‌های واپاشیده (m') از رابطه‌های زیر به دست می‌آیند:

$$N' = N_0 - N = N_0 - \frac{N_0}{2^n} = N_0\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

$$m' = m_0 - m = m_0 - \frac{m_0}{2^n} = m_0\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

پاسخ تشریحی **گام اول:** تعداد هسته‌های واپاشی‌شده در یک ساعت اول را به دست می‌آوریم و طبق فرض سؤال آن را N_1 در نظر می‌گیریم:

$$N_1 = N_0 - \frac{N_0}{2^n} \xrightarrow[t=1h]{n=\frac{t}{T}=\frac{1}{T}} N_1 = N_0 - \frac{N_0}{2^{\frac{1}{T}}}$$

گام دوم: تعداد هسته‌های باقی‌مانده را پس از ۲ ساعت به دست می‌آوریم و طبق فرض سؤال آن را N_2 در نظر می‌گیریم:

$$N_2 = \frac{N_0}{2^n} \xrightarrow[t=2h]{n=\frac{t}{T}=\frac{2}{T}} N_2 = \frac{N_0}{2^{\frac{2}{T}}}$$

گام سوم: نسبت N_1 به N_2 برابر ۱۲ است؛ بنابراین داریم:

$$\frac{N_1}{N_2} = 12 \Rightarrow \frac{N_0 - \frac{N_0}{2^{\frac{1}{T}}}}{\frac{N_0}{2^{\frac{2}{T}}}} = 12 \Rightarrow \frac{1-\frac{1}{2^{\frac{1}{T}}}}{\frac{1}{2^{\frac{2}{T}}}} = 12$$

$$\Rightarrow \frac{1-2^{-\frac{1}{T}}}{2^{-\frac{2}{T}}} = 2^{\frac{2}{T}} - 2^{\frac{1}{T}} = 12 \xrightarrow{2^{\frac{1}{T}} \text{را } x \text{ فرض می‌کنیم.}} x^2 - x = 12$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 12 = 0 \Rightarrow x = 4 \text{ قق}, x = -3 \text{ غق} \Rightarrow 2^{\frac{1}{T}} = 4 \Rightarrow \frac{1}{T} = 2 \Rightarrow$$

$$T = 0/5\,h = 30\,min$$

تست و پاسخ ۵۸

واپاشی هستهٔ $^{237}_{93}Np$ از طریق گسیل ذرات α ، β^- ، α و α صورت می‌گیرد. پس از وقوع تمام این واپاشی‌ها، اختلاف تعداد نوترون‌ها و تعداد پروتون‌های هستهٔ نهایی کدام است؟

۱) ۱۳۷ ۲) ۱۳۹ ۳) ۴۹ ۴) ۵۱

پاسخ: گزینهٔ ۳

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

مشاوره کافیست به کنکورهای چند سال اخیر *(منظورم سه چهار سال هستش)* توجه کنید، تقریباً هر سال یک تست از واپاشی هسته مطرح می‌شود، مبحثی ساده که می‌توان در مدت‌زمان کوتاه پاسخ داد و زمانش را به سایر تست‌ها داد.

خودت حل کنی بهتره با توجه به این‌که سه ذرهٔ آلفا ($^{4}_{2}\alpha$) و یک ذرهٔ بتای منفی ($^{0}_{-1}\beta$) در معادلهٔ واپاشی تابش شده است، عدد اتمی (Z) و عدد جرمی (A) هستهٔ دختر را به دست آورید و در نهایت تعداد نوترون‌های آن را از اختلاف عدد جرمی و عدد اتمی محاسبه کنید.
$(N = A - Z)$

درس نامه

در جدول زیر انواع واپاشی‌ها و معادلهٔ آن‌ها مشخص شده است:

واپاشی	ویژگی	معادلهٔ واپاشی
آلفا (α)	از جنس هستهٔ اتم هلیم است و اندازهٔ بار آن $+2e$ است.	$^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2}Y + {}^{4}_{2}\alpha$
بتای منفی (β^-)	از جنس الکترون است و اندازهٔ بار آن $-e$ است.	$^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A}_{Z+1}Y + {}^{0}_{-1}\beta^-$
بتای مثبت (β^+)	از جنس پوزیترون است و اندازهٔ بار آن $+e$ است.	$^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A}_{Z-1}Y + {}^{0}_{+1}\beta^+$
گاما (γ)	از جنس انرژی است و بار آن خنثی است.	$^{A}_{Z}X^{*} \rightarrow {}^{A}_{Z}X + {}^{0}_{0}\gamma$

در تمام فرایندهای واپاشی پرتوزا، تعداد نوکلئون‌ها در طی فرایند واپاشی هسته‌ای پایسته است؛ یعنی تعداد نوکلئون‌ها پیش از فرایند با تعداد نوکلئون‌ها پس از فرایند، مساوی است.

علاوه‌براین، بار الکتریکی نیز در طی فرایند واپاشی هسته‌ای پایسته می‌ماند.

پاسخ تشریحی **گام اول:** در اثر واپاشی هستهٔ $^{237}_{93}Np$، سه ذرهٔ α و یک ذرهٔ β^- تابش می‌شود. معادلهٔ واپاشی به صورت زیر است. عدد اتمی و جرمی هستهٔ دختر را مشخص می‌کنیم:

$$\underbrace{^{237}_{93}Np}_{\text{هستهٔ مادر}} \rightarrow 3(^{4}_{2}\alpha) + {}^{0}_{-1}\beta + \underbrace{^{A}_{Z}Y}_{\text{هستهٔ دختر}}$$

$$237 = 3(4) + 0 + A \Rightarrow A = 225$$

$$93 = 3(2) - 1 + Z \Rightarrow Z = 88$$

گام دوم: اختلاف تعداد نوترون‌ها و پروتون‌های هستهٔ دختر ($^{225}_{88}Y$) را به دست می‌آوریم:

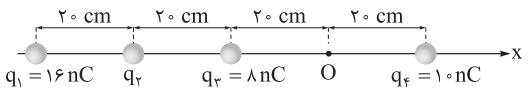
$Z = 88 \Rightarrow$ تعداد پروتون‌ها

$N = A - Z = 225 - 88 = 137 \Rightarrow$ تعداد نوترون‌ها

$$\underbrace{N - Z}_{\text{اختلاف تعداد نوترون‌ها و تعداد پروتون‌ها}} = 137 - 88 = 49$$

تست و پاسخ ۵۹

در شکل زیر، چهار بار الکتریکی نقطه‌ای روی محور x قرار دارند. اگر میدان الکتریکی در نقطهٔ O برابر $\vec{E} = (-275\ N/C)\vec{i}$ باشد، بار q_2 چند نانوکولن است؟ $(k = 9\times10^{9}\ \frac{N.m^2}{C^2})$



۱) ۲ ۲) -2 ۳) ۴ ۴) -4

پاسخ: گزینهٔ ۴

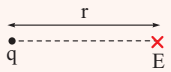
خودت حل کنی بهتره اندازهٔ میدان الکتریکی ناشی از بارهای q_1، q_3 و q_4 را درنقطهٔ O با استفاده از رابطهٔ $E = \frac{k|q|}{r^2}$ به دست آورید و جهت‌های آن را مشخص کنید. به کمک برایند میدان‌های الکتریکی در نقطهٔ O، میدان الکتریکی ناشی از بار q_2 را محاسبه کنید تا بتوانید اندازه و علامت بار q_2 را مشخص کنید.

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

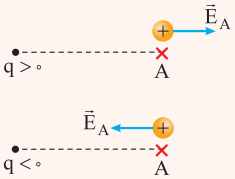
درس‌نامه

برای محاسبهٔ اندازهٔ میدان الکتریکی در نقطه‌ای که در فاصلهٔ r از بار q قرار دارد، از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم.

$$E = \frac{k|q|}{r^2}$$

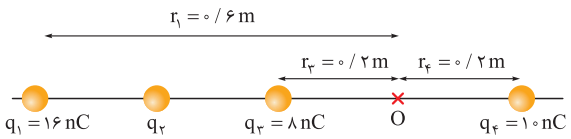


میدان الکتریکی کمیتی برداری است، برای تعیین جهت میدان الکتریکی در یک نقطه، بار آزمون را در آن نقطه قرار می‌دهیم. جهت نیرویی که از طرف بار q به بار آزمون وارد می‌شود، همان جهت میدان الکتریکی است، مثلاً در شکل‌های زیر، جهت میدان در نقطهٔ A مشخص شده است.



پاسخ تشریحی

گام اول: اندازهٔ میدان الکتریکی ناشی از بارهای q_1، q_3 و q_4 را در نقطهٔ O به دست می‌آوریم. شکل مقابل فاصلهٔ بین بارها را تا نقطهٔ O نشان می‌دهد.

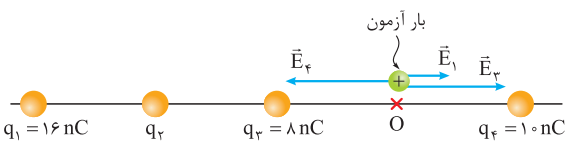


$$E_1 = \frac{k|q_1|}{r_1^2} = \frac{۹\times۱۰^۹\times۱۶\times۱۰^{-۹}}{(۰/۶)^2} = \frac{۹\times۱۶}{۰/۳۶} = ۴۰۰\,N/C$$

$$E_3 = \frac{k|q_3|}{r_3^2} = \frac{۹\times۱۰^۹\times۸\times۱۰^{-۹}}{(۰/۲)^2} = \frac{۹\times۸}{۰/۰۴} = ۱۸۰۰\,N/C$$

$$E_4 = \frac{k|q_4|}{r_4^2} = \frac{۹\times۱۰^۹\times۱۰\times۱۰^{-۹}}{(۰/۲)^2} = \frac{۹\times۱۰}{۰/۰۴} = ۲۲۵۰\,N/C$$

گام دوم: با در نظر گرفتن بار آزمون در نقطهٔ O، جهت میدان‌های الکتریکی $\vec{E}_1$، $\vec{E}_3$ و $\vec{E}_4$ را در نقطهٔ O مشخص می‌کنیم و برایند این سه میدان الکتریکی را به دست می‌آوریم:



$$\underbrace{\vec{E}_{1,3,4}}_{\text{برایند میدان‌های الکتریکی ناشی از سه بار } q_1, q_3 \text{ و } q_4} = \vec{E}_1 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4 = ۴۰۰\vec{i} + ۱۸۰۰\vec{i} - ۲۲۵۰\vec{i} = (-۵۰\,N/C)\vec{i}$$

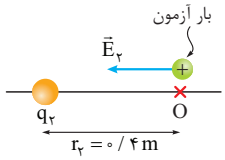
گام سوم: برایند میدان‌های الکتریکی در نقطهٔ O، برابر با $(-۲۷۵\,N/C)\vec{i}$ است. از آن‌جا که برایند میدان الکتریکی ناشی از بارهای q_1، q_3 و q_4 برابر با $(-۵۰\,N/C)\vec{i}$ است، میدان الکتریکی ناشی از بار q_2 را به دست می‌آوریم:

$$\vec{E}_t = \vec{E}_{1,3,4} + \vec{E}_2 \Rightarrow -۲۷۵\vec{i} = -۵۰\vec{i} + \vec{E}_2 \Rightarrow \vec{E}_2 = (-۲۲۵\,N/C)\vec{i}$$

با توجه به این‌که جهت میدان الکتریکی E_2 به سمت چپ است، علامت بار q_2 را مشخص می‌کنیم.

شکل مقابل بار q_2 و جهت میدان الکتریکی را نشان می‌دهد.

بار q_2 منفی است؛ زیرا بار q_2، بار آزمون را جذب کرده است.



SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

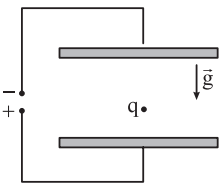
گام چهارم: اندازهٔ میدان $\vec{E}_2$ برابر با $225\,N/C$ است، اندازهٔ بار q_2 را به دست می‌آوریم:

$$E_2=\frac{k|q_2|}{r_2^2}\Rightarrow 225=\frac{9\times10^9\times|q_2|}{(0/4)^2}\Rightarrow |q_2|=\frac{225\times0/16}{9\times10^9}\Rightarrow$$

$$|q_2|=4\times10^{-9}C=4nC\Rightarrow q_2=-4nC$$

تست و پاسخ ۶۰

در شکل زیر، فاصلهٔ دو صفحهٔ فلزی موازی افقی که به اختلاف پتانسیل الکتریکی $200\,V$ متصل هستند، برابر با $40\,cm$ است. ذره‌ای به جرم $0/1\,g$ و بار الکتریکی $3\,\mu C$ در وسط فاصلهٔ بین این دو صفحه رها می‌شود. در $0/2$ ثانیهٔ اول حرکت ذره، انرژی پتانسیل الکتریکی آن چند میکروژول و چگونه تغییر می‌کند؟ ($g=10\,N/kg$ و مقاومت هوا ناچیز است.)



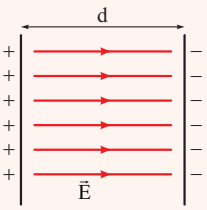
۱) ۵۰، کاهش می‌یابد.
۲) ۵۰، افزایش می‌یابد.
۳) ۱۵۰، کاهش می‌یابد.
۴) ۱۵۰، افزایش می‌یابد.

پاسخ: گزینهٔ ۳

خودت حل کنی بهتره ابتدا اندازهٔ میدان الکتریکی بین دو صفحه را به کمک رابطهٔ $E=\frac{V}{d}$ به دست آورید و سپس اندازهٔ نیروی الکتریکی وارد بر ذرهٔ باردار را با رابطهٔ $F_E=E|q|$ محاسبه کنید تا پس از محاسبهٔ برایند نیروی ناشی از F_E و نیروی وزن، شتاب ذره محاسبه شود. حالا نوبت این هست که جابه‌جایی ذره را با استفاده از رابطهٔ $d=\frac{1}{2}at^2+v_0t$، به دست آورید که بتوانید در نهایت تغییرات انرژی پتانسیل الکتریکی را پیدا کنید.

درس‌نامه

- اگر اختلاف پتانسیل دو صفحهٔ رسانای باردار، V و فاصلهٔ آن‌ها از هم d باشد، در فضای بین این دو صفحه، یک میدان الکتریکی به بزرگی E ایجاد می‌شود که از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

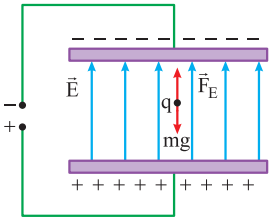


$$E=\frac{V}{d}$$

- اگر ذره‌ای باردار در فضایی قرار بگیرد که میدان الکتریکی در آن‌جا وجود داشته باشد، از طرف میدان الکتریکی، نیرویی هم‌راستا با میدان الکتریکی به بزرگی $F_E=E|q|$ بر آن وارد می‌شود. اگر بار این ذره، مثبت باشد، جهت نیروی $\vec{F}_E$ در جهت میدان الکتریکی و اگر بار ذره منفی باشد، جهت نیروی $\vec{F}_E$ در خلاف جهت میدان الکتریکی است.

پاسخ تشریحی **گام اول:** نیروی خالص وارد بر جسم را به دست می‌آوریم و به کمک قانون دوم نیوتون $(F_{net}=ma)$، شتاب وارد بر ذرهٔ باردار را حساب می‌کنیم.

با توجه به شکل زیر، جهت میدان الکتریکی رو به بالا و بار ذره، مثبت است؛ بنابراین نیرویی که میدان به ذرهٔ باردار وارد می‌کند، رو به بالا است.



$$F_E=E|q|\xrightarrow[q=3\mu C=3\times10^{-6}C]{E=\frac{V}{d}=\frac{200}{0/4}=500N/C}F_E=E|q|=500\times3\times10^{-6}=1/5\times10^{-3}N$$

$$mg=0/1\times10^{-3}\times10=10^{-3}N$$

$$F_{net}=F_E-mg=1/5\times10^{-3}-10^{-3}=0/5\times10^{-3}N$$

$$F_{net}=ma\Rightarrow 0/5\times10^{-3}=0/1\times10^{-3}\times a\Rightarrow a=5m/s^2$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

گام دوم: جابه‌جایی ذرهٔ باردار در مدت $0/2s$ را با استفاده از رابطهٔ $d=\frac{1}{2}at^2+v_0t$ به دست می‌آوریم:

$$d=\frac{1}{2}at^2+v_0t \xrightarrow[v_0=0]{\text{ذرهٔ باردار رها شده}} d=\frac{1}{2}at^2=\frac{1}{2}(5)(0/2)^2=0/1m$$

گام سوم: تغییرات انرژی پتانسیل الکتریکی را پس از این‌که ذرهٔ باردار مثبت به اندازهٔ $0/1m$ به سمت بالا حرکت کرده است، به دست می‌آوریم:

$$\Delta U_E=\pm E|q|d_E \xrightarrow{\text{ذرهٔ باردار مثبت به سمت پتانسیل کم‌تر حرکت کرده.}} \Delta U_E=-E|q|d_E$$

$$\Rightarrow \Delta U_E=-500\times3\times10^{-6}\times0/1=-150\mu J$$

بنابراین انرژی پتانسیل الکتریکی $150\mu J$ کاهش یافته است.

تست و پاسخ ۶۱

ظرفیت خازن تختی که بین صفحه‌های آن هواست، $20\,nF$ و بار الکتریکی ذخیره‌شده در آن $180\,nC$ است. اگر خازن را از باتری جدا کرده و فاصلهٔ بین صفحه‌های آن را سه برابر کنیم، انرژی ذخیره‌شده در خازن چند میکروژول و چگونه تغییر می‌کند؟

۱) $0/54$، افزایش می‌یابد. ۲) $0/54$، کاهش می‌یابد. ۳) $1/62$، افزایش می‌یابد. ۴) $1/62$، کاهش می‌یابد.

پاسخ: گزینهٔ ۳

مشاوره در سؤالات مربوط به خازن که تغییراتی در یک کمیت صورت می‌گیرد، در قدم اول تکلیف خود را با ظرفیت خازن مشخص کنید و به کمک رابطهٔ $\frac{C_2}{C_1}=\frac{\kappa_2}{\kappa_1}\times\frac{A_2}{A_1}\times\frac{d_1}{d_2}$، نسبت ظرفیت خازن در حالت دوم به حالت اول را به دست آورید.

خودت حل کنی بهتره به کمک رابطهٔ مقایسه‌ای $\frac{C_2}{C_1}=\frac{\kappa_2}{\kappa_1}\times\frac{A_2}{A_1}\times\frac{d_1}{d_2}$، ظرفیت خازن را در حالت دوم را به دست آورید، سپس با استفاده از رابطهٔ $U=\frac{Q^2}{2C}$، انرژی ذخیره‌شده در حالت اول و دوم را به دست آورید و در نهایت تغییرات آن را حساب کنید. (توجه کنید که خازن از باتری جدا شده و بار ذخیره‌شده تغییر نمی‌کند.)

درس‌نامه

- ظرفیت خازن به ساختمان خازن بستگی دارد. ظرفیت خازنی با مساحت صفحات A که در فاصلهٔ d از هم قرار دارند و بین صفحات توسط یک عایق (نارسانا) با ثابت دی‌الکتریک κ پر شده است، از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

ضریب گذردهی الکتریکی خلأ

$$\text{ظرفیت خازن} \leftarrow C=\frac{\kappa\varepsilon_0 A}{d}$$

برای مقایسهٔ دو حالت مختلف می‌توان نوشت:

$$\frac{C_2}{C_1}=\frac{\kappa_2}{\kappa_1}\times\frac{A_2}{A_1}\times\frac{d_1}{d_2}$$

- انرژی ذخیره‌شده در یک خازن با ظرفیت C که اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر آن V و بار ذخیره‌شده در آن Q است، از رابطه‌های زیر به دست می‌آید:

$$U=\frac{1}{2}QV=\frac{1}{2}CV^2=\frac{Q^2}{2C}$$

نکات ۱) تا زمانی که خازن به باتری وصل است، اختلاف پتانسیل دو سر خازن ثابت می‌ماند و برابر با ولتاژ باتری است.

۲) اگر یک خازن را از باتری جدا کنیم، بار ذخیره‌شده در خازن تغییر نمی‌کند. *(دیگه باتری وجود نداره تا با اون تبادل بار کنه!)*

پاسخ تشریحی **گام اول:** ظرفیت خازن را پس از سه برابر کردن فاصلهٔ بین صفحات به دست می‌آوریم:

$$\frac{C_2}{C_1}=\frac{\kappa_2}{\kappa_1}\times\frac{A_2}{A_1}\times\frac{d_1}{d_2} \xrightarrow{\text{فقط فاصله ۳ برابر شده است.}} \frac{C_2}{C_1}=\frac{d_1}{d_2} \Rightarrow \frac{C_2}{20}=\frac{d_1}{3d_1} \Rightarrow C_2=\frac{20}{3}nF$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

گام دوم: اگر خازن را از باتری جدا کنیم، دیگر خازن تبادل باری با باتری نخواهد داشت و بار ذخیره‌شده ثابت می‌ماند *(یعنی همون ۱۸۰nC می‌مونه.)*

$$Q_1 = Q_2 = 180\,nC = Q$$

گام سوم: به کمک رابطهٔ $U = \frac{Q^2}{2C}$ تغییرات انرژی خازن را به دست می‌آوریم:

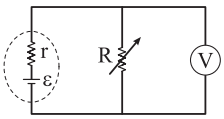
$$U_2 - U_1 = \frac{Q_2^2}{2C_2} - \frac{Q_1^2}{2C_1} = \frac{Q^2}{2}\left(\frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_1}\right) = \frac{180^2}{2}\left(\frac{3}{20} - \frac{1}{20}\right)$$

$$= \frac{180^2}{2} \times \frac{2}{20} = \frac{180 \times 180}{20} = 1620\,nJ = 1/62\,\mu J$$

با توجه به این‌که مقدار تغییرات مثبت بوده است؛ پس انرژی خازن افزایش یافته است.

تست و پاسخ ۶۲

در مدار شکل زیر، اگر مقاومت رئوستا از ۱۲ Ω به ۱۶ Ω برسد، مقداری که ولت‌سنج آرمانی نشان می‌دهد، از ۶V به ۶/۴V می‌رسد. بیشینهٔ توان خروجی باتری این مدار چند وات است؟



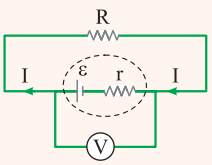
۱) ۴
۲) ۸
۳) ۱۶
۴) ۳۲

پاسخ: گزینهٔ ۱

خودت حل کنی بهتره رابطهٔ $V = \varepsilon\left(\frac{R}{R+r}\right)$ را که بیانگر اختلاف پتانسیل بین دو صفحه است، برای هر دو حالت بنویسید و با دو معادله و دو مجهولی که ایجاد شده است، مقادیر ε و r را به دست آورید و در نهایت به کمک رابطهٔ $P_{max} = \frac{\varepsilon^2}{4r}$ بیشینهٔ توان خروجی باتری را محاسبه کنید.

درس‌نامه

- شکل زیر مداری را نشان می‌دهد که یک باتری با مقاومت درونی r و نیروی محرکهٔ ε به مقاومت خارجی R متصل شده و جریان خروجی از مولد برابر با I است. در این صورت داریم:



$$I = \frac{\varepsilon}{R+r}$$

اختلاف پتانسیل دو سر مولد $V = \varepsilon - Ir = \varepsilon\left(\frac{R}{R+r}\right) = IR$

- توان خروجی باتری‌ای که نیروی محرکهٔ آن ε و مقاومت درونی آن r است و جریان I از آن عبور می‌کند، از رابطهٔ $P = \varepsilon I - rI^2$ به دست می‌آید.

نکته بیشترین توان خروجی یک باتری زمانی اتفاق می‌افتد که مقاومت خارجی (R) برابر با مقاومت درونی (r) باشد، در این صورت توان خروجی بیشینه از رابطهٔ زیر به دست می‌آید.

$$P_{max} = \frac{\varepsilon^2}{4r}$$

پاسخ تشریحی

گام اول: ولت‌سنج، اختلاف پتانسیل دو سر باتری را نشان می‌دهد که این مقدار از رابطهٔ $V = \varepsilon\left(\frac{R}{R+r}\right)$ به دست می‌آید؛ بنابراین داریم:

$$R_1 = 12\Omega\,,\ V_1 = 6\,V \xrightarrow{V_1 = \varepsilon\left(\frac{R_1}{R_1+r}\right)} 6 = \varepsilon\left(\frac{12}{12+r}\right) \quad (I)$$

$$R_2 = 16\Omega\,,\ V_2 = 6/4\,V \xrightarrow{V_2 = \varepsilon\left(\frac{R_2}{R_2+r}\right)} 6/4 = \varepsilon\left(\frac{16}{16+r}\right) \quad (II)$$

گام دوم: با تقسیم رابطهٔ (I) به رابطهٔ (II) مقاومت درونی باتری را به دست می‌آوریم:

$$\frac{6}{6/4} = \frac{12}{16} \times \frac{16+r}{12+r} \Rightarrow \frac{5}{4} = \frac{16+r}{12+r} \Rightarrow 60 + 5r = 64 + 4r \Rightarrow r = 4\Omega$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

گام سوم: با استفاده از رابطهٔ (I) و از آن‌جا که مقاومت درونی 4Ω است، نیروی محرکهٔ باتری به دست می‌آید:

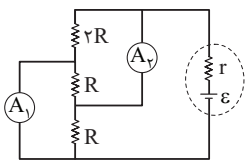
$$6=\varepsilon\left(\frac{12}{12+r}\right) \xrightarrow{r=4\Omega} 6=\varepsilon\left(\frac{12}{12+4}\right) \Rightarrow \varepsilon=\frac{6\times16}{12}=8\,V$$

گام چهارم: بیشینهٔ توان خروجی باتری را از رابطهٔ $P_{max}=\frac{\varepsilon^2}{4r}$ به دست می‌آوریم:

$$P_{max}=\frac{\varepsilon^2}{4r}=\frac{(8)^2}{4(4)}=\frac{64}{16}=4\,W$$

تست و پاسخ ۶۳

در مدار شکل زیر، اگر اختلاف مقدارهایی که دو آمپرسنج آرمانی نشان می‌دهند، برابر با ۲A باشد، جریان الکتریکی عبوری از منبع نیروی محرکه چند آمپر است؟



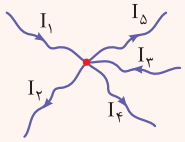
۱) ۶
۲) ۸
۳) ۱۰
۴) ۱۲

پاسخ: گزینهٔ ۳

خودت حل کنی بهتره جریان عبوری از مقاومت ۲R را I فرض کنید و سپس جریان عبوری از مقاومت‌ها و آمپرسنج‌ها را به کمک قاعدهٔ انشعاب به دست آورید. به کمک فرض سؤال که اختلاف عدد آمپرسنج‌ها را بیان کرده است، مقدار I به دست می‌آید و در نهایت جریان خروجی از باتری را حساب کنید.

درس نامه

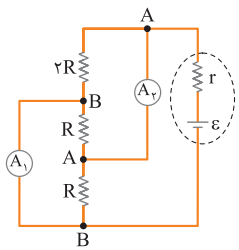
با توجه به پایستگی بار الکتریکی، مجموع جریان‌هایی که به هر گره وارد می‌شود با مجموع جریان‌هایی که از آن گره خارج می‌شود برابر است. شکل مقابل این قاعده را برای گره‌ای مانند M را نمایش می‌دهد.



$$I_{\text{خروجی}}=I_{\text{ورودی}}$$

$$I_1+I_3=I_2+I_4+I_5$$

پاسخ تشریحی **گام اول:** با مشخص‌کردن نقاط هم‌پتانسیل، وضعیت مقاومت‌ها را مشخص می‌کنیم:

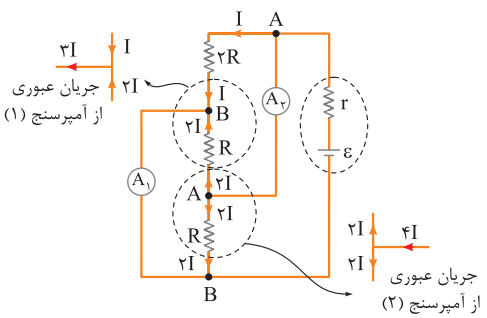


هر سه مقاومت بین دو اختلاف پتانسیل یکسان قرار دارند؛ بنابراین هر سه با هم موازی هستند.

گام دوم: جریان عبوری از مقاومت ۲R را I فرض می‌کنیم. در این صورت جریان عبوری از مقاومت‌های R را به دست می‌آوریم. از آن‌جا که مقاومت‌ها موازی هستند، اختلاف پتانسیل دو سر آن‌ها یکسان است.

$$V_R=V_{2R} \Rightarrow R\times x=2R\times I \Rightarrow x=2I$$

گام سوم: با توجه به این‌که جهت جریان از پتانسیل بیشتر به پتانسیل کم‌تر است (یعنی از A به B)، جهت و اندازهٔ جریان را در مدار مشخص می‌کنیم و به کمک قاعدهٔ انشعاب جریان عبوری از آمپرسنج‌ها را مشخص می‌کنیم:

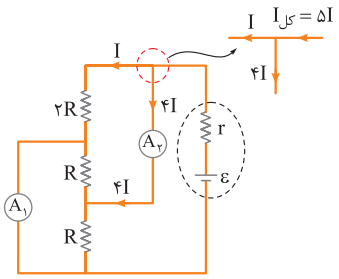


اختلاف جریان آمپرسنج‌های آرمانی ۲A است؛ بنابراین داریم:

$$4I-3I=I=2A$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

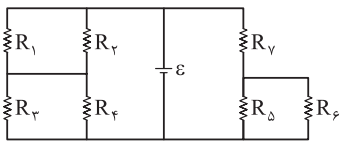
گام چهارم: حال به کمک گره مشخص‌شده، جریان کل مدار را به دست می‌آوریم:



$$I_{کل}=5I=5(2)=10A$$

تست و پاسخ ۶۴

در مدار شکل زیر، تمام مقاومت‌ها، یکسان هستند. توان مصرفی مقاومت R_6 چند برابر توان مصرفی مقاومت R_3 است؟



۱) $\frac{16}{9}$
۲) $\frac{9}{16}$
۳) $\frac{9}{4}$
۴) $\frac{4}{9}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

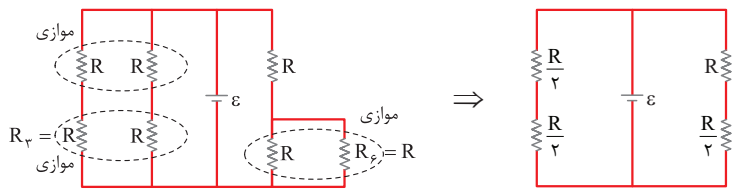
خودت حل کنی بهتره با ساده‌کردن مدار، اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت‌های R_3 و R_6 را به دست آورید. سپس به کمک رابطهٔ $P=\frac{V^2}{R}$، توان مصرفی مقاومت‌ها را با هم مقایسه کنید.

درس نامه

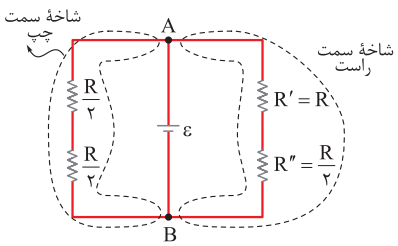
- در مقاومت‌های موازی اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت‌ها با هم برابر است.
- اگر دو مقاومت R_1 و R_2 به صورت متوالی به یک اختلاف پتانسیل V وصل شوند، اختلاف پتانسیل دو سر یک مقاومت مانند R_1 از رابطهٔ $V_1=(\frac{R_1}{R_1+R_2})V$ به دست می‌آید.
- اگر جریان عبوری از یک مقاومت خارجی R، برابر با I و اختلاف پتانسیل دو سر آن V باشد، توان مصرفی توسط مقاومت R از رابطه‌های زیر به دست می‌آید:

$$P=VI=RI^2=\frac{V^2}{R}$$

پاسخ تشریحی **گام اول:** هر یک از مقاومت‌ها را R فرض می‌کنیم و مدار را ساده‌تر می‌کنیم:



گام دوم: اختلاف پتانسیل بین دو نقطهٔ A و B برابر ε است؛ بنابراین اختلاف پتانسیل دو شاخهٔ سمت چپ و راست که موازی با باتری آرمانی بسته شده‌اند نیز ε است.



در شاخهٔ سمت چپ، اختلاف پتانسیل کل دو مقاومت متوالی و مشابه، معادل ε است؛ بنابراین اختلاف پتانسیل دو سر هر یک از مقاومت‌ها برابر $\frac{\varepsilon}{2}$ است؛ پس اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت R_3، $\frac{\varepsilon}{2}$ است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

در شاخهٔ سمت راست، اختلاف پتانسیل دو مقاومت متوالی R و $\frac{R}{۲}$، برابر ε است.

$$V_{R'}+V_{R''}=\varepsilon \xrightarrow[V_{R'}=۲V_{R''}]{\text{مقاومت } R' \text{ دو برابر مقاومت } R'' \text{ است.}} ۲V_{R''}+V_{R''}=\varepsilon \Rightarrow V_{R''}=\frac{\varepsilon}{۳}$$

پس اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت $R_۶$، $\frac{\varepsilon}{۳}$ است.

البته از رابطهٔ $V_{R''}=(\frac{R''}{R'+R''})\varepsilon$ هم می‌توانیم $V_{R''}$ را به دست آوریم.

گام سوم: با استفاده از رابطهٔ $P=\frac{V^۲}{R}$ توان مصرفی مقاومت‌های $R_۶$ و $R_۳$ را با هم مقایسه می‌کنیم:

$$\frac{P_۶}{P_۳}=\frac{\frac{V_۶^۲}{R_۶}}{\frac{V_۳^۲}{R_۳}}=(\frac{V_۶}{V_۳})^۲\times(\frac{R_۳}{R_۶})=(\frac{\frac{\varepsilon}{۳}}{\frac{\varepsilon}{۲}})^۲\times\frac{R}{R}=\frac{۴}{۹}$$

تست و پاسخ ۶۵

ذره‌ای با بار الکتریکی $-۵\ \mu C$ و جرم $۴\ mg$ در میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$، با سرعت $۱۰^۵\ m/s$ در راستای افقی و به سمت شمال شرقی پرتاب می‌شود و بدون انحراف به حرکت خود ادامه می‌دهد. $\vec{B}$ چند گاوس و در چه جهتی است؟ ($g=۱۰\ N/kg$ و بردار $\vec{B}$ بر بردار سرعت عمود است.)

۱) ۰/۸، جنوب شرقی ۲) ۰/۸ ، شمال غربی ۳) ۸۰، جنوب شرقی ۴) ۸۰، شمال غربی

پاسخ: گزینهٔ ۱

خودت حل کنی بهتره برای این‌که ذره بدون انحراف باشد، نیروی ناشی از میدان مغناطیسی (F_B) باید در خلاف جهت نیروی وزن و هم‌اندازه با آن باشد. با استفاده از قاعدهٔ دست راست و داشتن جهت راستای حرکت و نیروی F_B، جهت میدان مغناطیسی را مشخص کنید. سپس با رابطهٔ $F_B=mg$، اندازهٔ میدان مغناطیسی را به دست آورید.

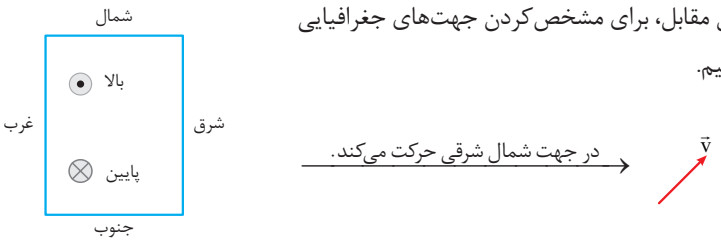
درس نامه

اگر ذره‌ای باردار با تندی v در فضایی تحت تأثیر میدان مغناطیسی (B) حرکت کند، نیرویی از طرف میدان مغناطیسی به آن وارد می‌شود که از رابطهٔ مقابل به دست می‌آید:

$$F_B=|q|vB\sin\alpha$$

α: زاویهٔ بین راستای حرکت و راستای میدان مغناطیسی است.

پاسخ تشریحی **گام اول:** یک صفحهٔ کاغذ را مطابق شکل مقابل، برای مشخص‌کردن جهت‌های جغرافیایی در نظر می‌گیریم و راستای حرکت را در آن مشخص می‌کنیم.



گام دوم: جهت نیروی وزن رو به پایین است. برای این‌که ذره بدون انحراف حرکت کند باید نیرویی به سمت بالا و هم‌اندازه به آن وارد شود که در این سؤال نیروی مغناطیسی این نقش را بازی می‌کند. حال جهت میدان مغناطیسی را به کمک قاعدهٔ دست راست مشخص می‌کنیم:



با توجه به جهت‌های جغرافیایی، میدان مغناطیسی در جهت جنوب شرقی است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

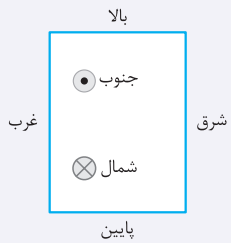
گام سوم: اندازهٔ نیروی وزن باید با نیرویی که از طرف میدان مغناطیسی $(\vec{B})$ به ذرهٔ باردار وارد شده است، برابر باشد؛ بنابراین داریم:

$$F_B = mg \Rightarrow |q|vB\sin\alpha = mg \xrightarrow[\sin 90^\circ = 1]{\text{بردار } \vec{B} \text{ بر بردار } \vec{v} \text{ عمود است.}} |q|vB = mg$$

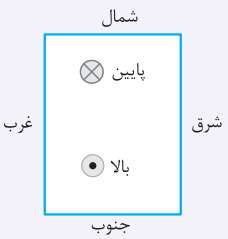
$$\Rightarrow 5\times10^{-6}\times10^{5}\times B = 4\times10^{-6}\times10 \Rightarrow B = 0/8\times10^{-4}\,T \xrightarrow{1G=10^{-4}T} B = 0/8\,G$$

تکنیک در فصل مغناطیس گاهی با سؤال‌هایی مواجه هستیم که جهت کمیت‌های برداری را براساس جهت جغرافیایی بیان می‌کنند. در این صورت از یک صفحهٔ کاغذ برای تصویرسازی سریع و راحت به دو حالت زیر استفاده می‌کنیم:

حالت اول: در حالتی که رو به سمت شمال ایستاده یا نشسته‌اید، یک کاغذ را در روبه‌روی خود قرار دهید. در این صورت، برداری که به درون صفحهٔ کاغذ می‌رود، درون‌سو و برداری که از صفحهٔ کاغذ بیرون می‌آید، برون‌سو است، این در حالی است که سمت راست و چپ شما به ترتیب در جهت‌های شرق و غرب هستند و به شکل مقابل این صفحه را نام‌گذاری می‌کنیم:



حالت دوم: در حالتی که رو به سمت شمال ایستاده یا نشسته‌اید، یک کاغذ را به صورت افقی (صفحهٔ کاغذ هم‌راستا با سطح زمین باشد.) در جلوی خود قرار دهید یا بر روی یک سطح افقی قرار دهید. در این صورت برداری که به درون صفحه می‌رود، رو به پایین و برداری که از صفحه بیرون می‌آید، رو به بالا است. این در حالی است که سمت راست و چپ شما به ترتیب شرق و غرب و روبه‌روی شما به سمت شمال است. در این صورت صفحهٔ کاغذ به صورت مقابل نام‌گذاری می‌شود:



تست و پاسخ ۶۶

$\theta_1 = 0$

$B = 200\times10^{-4}\,T$

$\theta_2 = 90^\circ$

سطح پیچه‌ای که شامل ۵۰۰ حلقه است، عمود بر خطوط میدان مغناطیسی یکنواختی به بزرگی ۲۰۰ G قرار دارد. در مدت ۰/۰۱ s پیچه چرخیده و سطح آن، موازی خطوط میدان می‌شود. اگر اندازهٔ نیروی محرکهٔ القایی متوسط در پیچه در این بازهٔ زمانی برابر ۲۰ V باشد، مساحت حلقه‌ها چند سانتی‌متر مربع است؟

۱) ۱۰ ۲) ۲۰ ۳) ۱۰۰ ۴) ۲۰۰

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس‌نامه

در حالتی که زاویهٔ نیم‌خط عمود بر سطح پیچه با خطوط میدان (B) تغییر کند طبق قانون القای الکترومغناطیسی فاراده می‌توانیم بنویسیم:

$$\varepsilon_{av} = -NAB\times\frac{(\cos\theta_2 - \cos\theta_1)}{\Delta t}$$

ε_{av} : نیروی محرکهٔ القایی متوسط (V)

N : تعداد حلقه‌ها

A : مساحت هر حلقه (m^2)

B : میدان مغناطیسی (T)

θ : زاویهٔ بین خطوط میدان مغناطیسی $(\vec{B})$ با نیم‌خط عمود بر سطح حلقه

Δt : مدت‌زمان تغییر زاویهٔ $\theta\,(s)$

پاسخ تشریحی طبق درس‌نامهٔ بالا می‌توانیم بنویسیم:

$$|\varepsilon_{av}| = NAB\times\frac{|\cos\theta_2 - \cos\theta_1|}{\Delta t} \xrightarrow[B=200G=2\times10^{-2}T,\,\theta_1=0,\,\theta_2=90^\circ]{|\varepsilon_{av}|=20V,\,N=500,\,\Delta t=0/01s} 20 = 500\times A\times2\times10^{-2}\times\frac{|\cos90^\circ - \cos0|}{0/01}$$

$$\xrightarrow{\substack{\cos90^\circ=0\\ \cos0=1}} A = \frac{20\times0/01}{500\times2\times10^{-2}\times1} = 0/02\,m^2 \xrightarrow{1m^2=10^4\,cm^2} A = 0/02\times10^4 = 200\,cm^2$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

تست و پاسخ ۶۷

طول یک سیم‌لولهٔ آرمانی ۴۰ cm و جریان الکتریکی عبوری از آن ۱/۲A است. اگر اندازهٔ میدان مغناطیسی درون آن و دور از لبه‌ها ۷۵ G باشد، تعداد دورهای سیم‌لوله کدام است؟ $(\mu_0 = 12/5\times10^{-7}\ \frac{T.m}{A})$

$B = 75\times10^{-4}\ T$

۱) ۵۰ ۲) ۲۰۰ ۳) ۵۰۰ ۴) ۲۰۰۰

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس‌نامه

برای محاسبهٔ میدان مغناطیسی (B) ناشی از یک سیم‌لوله با تعداد دورهای (N) و طول (ℓ) که از آن جریان الکتریکی (I) عبور می‌کند، از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

$$B = \frac{\mu_0 NI}{\ell}$$

B = اندازهٔ میدان مغناطیسی (T)

μ_0 = ضریب تراوایی مغناطیسی خلأ $\quad \mu_0 = 4\pi\times10^{-7}\ \frac{T.m}{A}$

پاسخ تشریحی طبق درس‌نامهٔ بالا داریم:

$$B = \frac{\mu_0 NI}{\ell} \xrightarrow[I=1/2A,\ \ell=40cm=0/4m]{B=75G=75\times10^{-4}T} 75\times10^{-4} = \frac{12/5\times10^{-7}\times N\times1/2}{0/4} \Rightarrow N = 2000$$

تست و پاسخ ۶۸

یک ظرف استوانه‌ای که روی سطح افقی قرار دارد، با جرم یکسانی از آب و روغن پر شده است. اگر این ظرف را با حجم یکسانی از آب و روغن پر کنیم، فشار ناشی از مایع‌ها در کف ظرف چند درصد و چگونه تغییر می‌کند؟ $(\rho_{روغن} = 0/8\rho_{آب})$

۱) ۲/۵، افزایش می‌یابد. ۲) ۲/۵، کاهش می‌یابد.

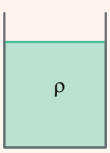
۳) ۱/۲۵، افزایش می‌یابد. ۴) ۱/۲۵، کاهش می‌یابد.

پاسخ: گزینهٔ ۳

مشاوره *سؤالایی مثل این تست ظاهر ساده‌ای دارن، ولی پر از نکته‌ان. اگر نتونستی تو آزمون بهش درست جواب بدی یا شانسی درست زدی، حتماً پاسخ‌نامه را بررسی کن.*

درس‌نامه

فشار ناشی از مایع از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:



$P_{مایع} = \rho g h$

- $P_{مایع}$: فشار ناشی از مایع (Pa)
- ρ: چگالی مایع (kg/m^3)
- h: عمق مایع نسبت به سطح آزاد (m)
- g: شتاب گرانشی (m/s^2)

پاسخ تشریحی **گام اول:** با توجه به یکسان‌بودن جرم آب و روغن، نسبت ارتفاع آب و روغن را در حالت اول حساب می‌کنیم:

$$m_{آب} = m_{روغن} \xrightarrow{m=\rho V} \rho_{آب}V_{آب} = \rho_{روغن}V_{روغن} \xrightarrow[\rho_{روغن}=0/8\rho_{آب}]{V=Ah} \rho_{آب}\times A h_{آب} = 0/8\rho_{آب}\times A h_{روغن} \Rightarrow h_{آب} = 0/8 h_{روغن}$$

گام دوم: با توجه به یکسان‌بودن حجم آب و روغن در حالت دوم، نسبت ارتفاع آب و روغن را در این حالت نیز حساب می‌کنیم:

$$V_{آب} = V_{روغن} \xrightarrow[A\ یکسان]{V=Ah} h'_{آب} = h'_{روغن}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

گام سوم: با توجه به پرشدن ظرف در هر دو حالت، نسبت $\frac{h_{\text{روغن}}}{h'_{\text{روغن}}}$ را به دست می‌آوریم:

$$\text{حالت اول: } h_{\text{ظرف}} = h_{\text{آب}} + h_{\text{روغن}} \xrightarrow{h_{\text{آب}}=0/8h_{\text{روغن}}} h_{\text{ظرف}} = 0/8h_{\text{روغن}} + h_{\text{روغن}} = 1/8h_{\text{روغن}} \quad (I)$$

$$\text{حالت دوم: } h_{\text{ظرف}} = h'_{\text{آب}} + h'_{\text{روغن}} \xrightarrow{h'_{\text{آب}}=h'_{\text{روغن}}} h_{\text{ظرف}} = h'_{\text{روغن}} + h'_{\text{روغن}} = 2h'_{\text{روغن}} \quad (II)$$

$$\xrightarrow{(I)\text{و}(II)} 1/8h_{\text{روغن}} = 2h'_{\text{روغن}} \Rightarrow h'_{\text{روغن}} = 0/9h_{\text{روغن}}$$

گام چهارم: طبق رابطهٔ $P_{\text{مایع}} = \rho gh$، فشار را در هر دو حالت حساب می‌کنیم:

$$\text{حالت اول: } P_1 = \rho_{\text{آب}}gh_{\text{آب}} + \rho_{\text{روغن}}gh_{\text{روغن}} \xrightarrow[h_{\text{آب}}=0/8h_{\text{روغن}}]{\rho_{\text{روغن}}=0/8\rho_{\text{آب}}} P_1 = \rho_{\text{آب}}g(0/8h_{\text{روغن}}) + (0/8\rho_{\text{آب}})gh_{\text{روغن}} \Rightarrow P_1 = 1/6\rho_{\text{آب}}gh_{\text{روغن}}$$

$$\text{حالت دوم: } P_2 = \rho_{\text{آب}}gh'_{\text{آب}} + \rho_{\text{روغن}}gh'_{\text{روغن}} \xrightarrow[h'_{\text{آب}}=h'_{\text{روغن}}]{\rho_{\text{روغن}}=0/8\rho_{\text{آب}}} P_2 = \rho_{\text{آب}}gh'_{\text{روغن}} + (0/8\rho_{\text{آب}})gh'_{\text{روغن}}$$

$$\Rightarrow P_2 = 1/8\rho_{\text{آب}}gh'_{\text{روغن}} \xrightarrow{h'_{\text{روغن}}=0/9h_{\text{روغن}}} P_2 = 1/8\rho_{\text{آب}}g(0/9h_{\text{روغن}})$$

گام پنجم: درصد تغییر فشار را به دست می‌آوریم:

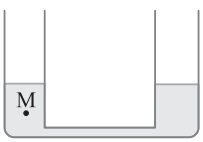
$$\text{درصد تغییر فشار} = \frac{P_2 - P_1}{P_1} \times 100 = \frac{1/8\rho_{\text{آب}}g(0/9h_{\text{روغن}}) - 1/6\rho_{\text{آب}}gh_{\text{روغن}}}{1/6\rho_{\text{آب}}gh_{\text{روغن}}} \times 100 = \frac{0/02\rho_{\text{آب}}gh_{\text{روغن}}}{1/6\rho_{\text{آب}}gh_{\text{روغن}}} \times 100$$

$$= \frac{2}{160} \times 100 = \%1/25$$

بنابراین فشار در کف ظرف ۱/۲۵ درصد افزایش می‌یابد.

تست و پاسخ ۶۹

در لولهٔ U‌شکل زیر که سطح مقطع هر یک از شاخه‌های آن $5\,cm^2$ است، مقداری جیوه به ارتفاع ۴۰cm ریخته شده است. چند سانتی‌متر مکعب آب روی جیوهٔ شاخهٔ سمت راست بریزیم تا فشار در نقطهٔ M، 5cmHg افزایش یابد؟ $(\rho_{\text{جیوه}} = 13/6\rho_{\text{آب}} = 13/6\,g/cm^3)$



۱) ۶۸

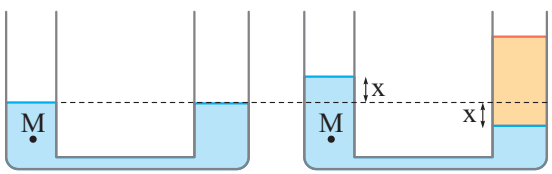
۲) ۱۳۶

۳) ۳۴۰

۴) ۶۸۰

پاسخ: گزینهٔ ۴

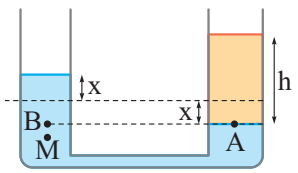
پاسخ تشریحی **گام اول:** ابتدا پس از افزودن آب به شاخهٔ سمت راست، تغییرات را در لوله اعمال می‌کنیم. با توجه به یکسان‌بودن سطح مقطع لوله در دو شاخه، اگر در شاخهٔ سمت راست سطح جیوه به اندازهٔ x پایین برود، در شاخهٔ سمت چپ سطح جیوه به اندازهٔ x بالا خواهد رفت.



مطابق شکل مقابل داریم:

گام دوم: ارتفاع آب اضافه‌شده را حساب می‌کنیم. با توجه به این‌که فشار در نقطهٔ M به اندازهٔ 5 cmHg زیاد شده است، به اندازهٔ 5 cm ارتفاع مایع جیوه بالای نقطهٔ M افزوده شده؛ بنابراین x برابر با 5cm است.

حالا مطابق شکل زیر از روی برابری فشار در نقاط A و B داریم:



$$P_A = P_B \Rightarrow \rho_{\text{آب}}gh = \rho_{\text{جیوه}}g(2x) \Rightarrow \rho_{\text{آب}}h = 2\rho_{\text{جیوه}}x$$

$$\xrightarrow[\rho_{\text{جیوه}}=13/6\,g/cm^3]{\rho_{\text{آب}}=1\,g/cm^3,\ x=5\,cm} 1\times h = 2\times 13/6\times 5 \Rightarrow h = 136\,cm$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

گام سوم: حجم آب اضافه‌شده را حساب می‌کنیم:

$$V = Ah \xrightarrow{A=5\,cm^2,\ h=136\,cm} V = 5\times 136 = 680\,cm^3$$

تست و پاسخ ۷۰

$\beta = 3\alpha = 3\times 2\times 10^{-5}$

در یک آزمایش یک استوانهٔ توپر فلزی با چگالی اولیهٔ $8\,g/cm^3$، گرمای ویژهٔ $4\,J/g.K$ و ضریب انبساط طولی $2\times 10^{-5}\,\frac{1}{K}$، $8\,kJ$ گرما دریافت می‌کند. اگر در این آزمایش دمای استوانه $18^\circ F$ افزایش یابد، حجم آن چند میلی‌متر مکعب افزایش می‌یابد؟

باید تغییر دما برحسب سلسیوس نوشته شود.

۱) ۱۵ ۲) ۲۷ ۳) ۱/۵ ۴) ۲/۷

پاسخ: گزینهٔ ۱

مشاوره *این سؤال به تنهایی ۳ سؤال توی دل خودش داره، از انبساط گرمایی، گرمایی که صرف تغییر دما می‌شه و تبدیل یکاهای دمایی؛ پس هواست باشه، می‌تونی علامت بزاری برای روزای جمع‌بندی نکاتشو مرور کنی.*

درس‌نامه

رابطهٔ دما برحسب درجهٔ فارنهایت (F) و درجهٔ سلسیوس (θ) به صورت مقابل است:

$$F = \frac{9}{5}\theta + 32 \Rightarrow \Delta F = \frac{9}{5}\Delta\theta$$

اگر به جسمی به جرم m و با گرمای ویژهٔ c، گرمای Q را بدهیم و حالت جسم تغییر نکند، دمای جسم به اندازهٔ $\Delta\theta$ تغییر می‌کند.

$$Q = mc\Delta\theta$$

اگر دمای جامدی با حجم اولیهٔ V_1 و ضریب انبساطی حجمی $\beta = 3\alpha$، به اندازهٔ $\Delta\theta$ تغییر کند، حجم آن به اندازهٔ ΔV تغییر می‌کند؛ بنابراین طبق رابطهٔ روبه‌رو داریم:

$$\Delta V = V_1 \underbrace{\beta}_{3\alpha}\Delta\theta$$

پاسخ تشریحی **گام اول:** جرم جسم را حساب می‌کنیم. طبق رابطهٔ $Q = mc\Delta\theta$، داریم:

$$Q = mc\Delta\theta \xrightarrow[c=4\frac{J}{g.K}=4000=\frac{J}{kg.K}]{Q=8\,kJ=8\times 10^3\,J,\ \Delta F=\frac{9}{5}\Delta\theta \Rightarrow 18=\frac{9}{5}\Delta\theta \Rightarrow \Delta\theta=10^\circ C}$$

$$8\times 10^3 = m\times 4\times 10^3\times 10 \Rightarrow m = 0/2\,kg = 200\,g$$

گام دوم: حجم اولیهٔ جسم را حساب می‌کنیم:

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow V = \frac{m}{\rho} \xrightarrow[\rho=8\,g/cm^3]{m=200\,g} V = \frac{200}{8} = 25\,cm^3 = 25\times 10^{-6}\,m^3$$

گام سوم: تغییر حجم جسم را حساب می‌کنیم:

$$\Delta V = V_1\beta\Delta\theta \xrightarrow[\Delta\theta=10^\circ C]{V_1=25\times 10^{-6}\,m^3,\ \beta=3\alpha=6\times 10^{-5}\,1/K} \Delta V = 25\times 10^{-6}\times 6\times 10^{-5}\times 10$$

$$\Rightarrow \Delta V = 15\times 10^{-9}\,m^3 \xrightarrow{1\,m^3=10^9\,mm^3} \Delta V = 15\,mm^3$$

تست و پاسخ ۷۱

قطعه یخی به جرم $100\,g$ و دمای صفر درجهٔ سلسیوس را درون $2\,kg$ آب با دمای θ می‌اندازیم. اگر نیمی از یخ به صورت ذوب‌نشده باقی‌بماند، θ چند درجهٔ سلسیوس است؟ (گرمای ویژهٔ آب $4/2\,\frac{J}{g.K}$ و گرمای نهان ذوب آن $336\,J/g$ است.)

یعنی $50\,g$ یخ ذوب شود و دمای تعادل صفر درجه باشد.

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۲۰ ۴) ۴۰

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ تشریحی با توجه به این‌که اتلاف گرما نداریم، می‌توانیم بنویسیم:

$$Q_{یخ} + Q_{آب} = 0 \xrightarrow[Q_{آب}=m_{آب}c\Delta\theta]{Q_{یخ}=m_{ذوب}L_f} m_{ذوب}L_f + m_{آب}c\Delta\theta = 0$$

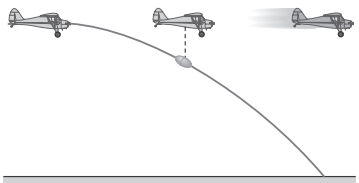
$$\xrightarrow[m_{آب}=2\,kg,\ c=4/2\frac{J}{g.K}=4200\frac{J}{kg.^\circ C},\ \Delta\theta=0-\theta=-\theta]{m_{ذوب}=\frac{1}{2}\times 100=50\,g=0/05\,kg,\ L_f=336\times 10^3\,J/kg} (0/05\times 336\times 10^3) + (2\times 4200\times(-\theta)) = 0 \Rightarrow \theta = 2^\circ C$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

تست و پاسخ ۷۲

در شکل زیر، هواپیمایی که در ارتفاع ۳۲۰m از سطح زمین و با تندی ۶۰m/s در حال حرکت است، بسته‌ای را رها می‌کند. اگر مقاومت هوا ناچیز باشد، بسته با تندی چند متر بر ثانیه به سطح زمین می‌رسد؟ ($g = ۱۰ m/s^۲$)

تندی اولیهٔ بسته، برابر با ۶۰m/s است.



۱) ۸۰
۲) ۱۰۰
۳) $۸۰\sqrt{۲}$
۴) $۱۰۰\sqrt{۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس‌نامه اصل پایستگی انرژی مکانیکی

وقتی نیروهای اتلافی مانند اصطکاک و مقاومت هوا نداشته باشیم، انرژی مکانیکی ثابت بوده و مجموع تغییرات انرژی جنبشی و پتانسیل جسم صفر است؛ بنابراین طبق رابطهٔ زیر داریم:

$$\Delta K + \Delta U = ۰$$

پاسخ تشریحی طبق درس‌نامهٔ بالا می‌توانیم بنویسیم:

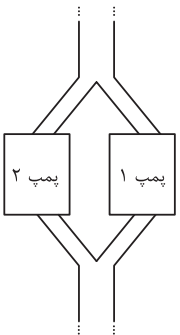
$$\Delta K + \Delta U = ۰ \xrightarrow[\Delta K = \frac{۱}{۲}m(v_۲^۲ - v_۱^۲)]{\Delta U = mg\Delta h} mg\Delta h + \frac{۱}{۲}m(v_۲^۲ - v_۱^۲) = ۰$$

$$\Rightarrow g\Delta h + \frac{۱}{۲}(v_۲^۲ - v_۱^۲) = ۰ \xrightarrow[v_۱ = ۶۰ m/s]{\Delta h = h_۲ - h_۱ = ۰ - ۳۲۰ = -۳۲۰ m} ۱۰ \times (-۳۲۰) + \frac{۱}{۲}(v_۲^۲ - ۶۰^۲) = ۰$$

$$\Rightarrow v_۲^۲ = ۱۰۰۰۰ \Rightarrow v_۲ = ۱۰۰ m/s$$

تست و پاسخ ۷۳

مطابق شکل در قسمتی از یک خط انتقال نفت، در هر دقیقه $۱۲۰ m^۳$ نفت از طریق لوله‌ای توسط دو پمپ مشابه از ارتفاع ۲۰۰۰متری تا ارتفاع ۲۶۰۰متری سطح زمین منتقل می‌شود. اگر بازدهٔ هریک از این پمپ‌ها ۳۰ درصد باشد، توان ورودی هر یک از پمپ‌ها چند مگاوات است؟ ($g = ۱۰ N/kg$ و چگالی نفت $۰/۹ g/cm^۳$ است.)



۱) ۴۰
۲) ۳۶
۳) ۲۰
۴) ۱۸

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس‌نامه

۱) کاری که یک پمپ برای بالا آوردن آب انجام می‌دهد:

$$W = mg\Delta h$$

W = کار (J)
m = جرم (kg)
g = اندازهٔ شتاب گرانش زمین $\simeq ۱۰ \frac{N}{kg}$
Δh = تغییر ارتفاع جسم (m)

۲) توان خروجی یک پمپ از رابطهٔ مقابل به دست می‌آید:

$$P_{\text{خروجی}} = \frac{W}{t}$$

P = توان خروجی (مفید) (W)
W = کار (J)
t = زمان (S)

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ تشریحی **گام اول:** کار مفید هر یک از پمپ‌ها را حساب می‌کنیم:

$$\rho = ۰/۹\,g/cm^۳ = ۹۰۰\,kg/m^۳$$

$$W_t = mg\Delta h \xrightarrow[\Delta h=۲۶۰۰-۲۰۰۰=۶۰۰m]{m=\rho V=۹۰۰\times ۱۲۰=۱۰۸۰۰۰kg} W_t = ۱۰۸۰۰۰\times ۱۰\times ۶۰۰ = ۶۴۸\times ۱۰^۶\,J$$

$$\xrightarrow[W_t=۲W]{\text{۲پمپ مشابه داریم.}} ۲W = ۶۴۸\times ۱۰^۶ \Rightarrow W = ۳۲۴\times ۱۰^۶\,J$$

گام دوم: توان خروجی هر یک از پمپ‌ها را حساب می‌کنیم:

$$P_{\text{خروجی}} = \frac{W}{t} \xrightarrow[t=۱min=۶۰s]{W=۳۲۴\times ۱۰^۶\,J} P_{\text{خروجی}} = \frac{۳۲۴\times ۱۰^۶}{۶۰} = ۵/۴\times ۱۰^۶\,W = ۵/۴\,MW$$

گام سوم: توان ورودی هر یک از پمپ‌ها را حساب می‌کنیم:

$$Ra = \frac{P_{\text{خروجی}}}{P_{\text{ورودی}}}\times ۱۰۰ \xrightarrow[P_{\text{خروجی}}=۵/۴MW]{Ra=۳۰} ۳۰ = \frac{۵/۴}{P_{\text{ورودی}}}\times ۱۰۰ \Rightarrow P_{\text{ورودی}} = \frac{۵۴۰}{۳۰} = ۱۸\,MW$$

تست و پاسخ ۷۴

درون یک مخزن به حجم $۲۰\,L$، مقداری گاز اکسیژن با دمای $۲۷^\circ C$ و فشار $۴/۵\,atm$ وجود دارد. شیر مخزن را باز می‌کنیم تا بخشی از گاز درون مخزن خارج شود. اگر در این حالت فشار و دمای گاز به ترتیب $۱/۴\,atm$ و $۷^\circ C$ شده باشد، جرم گاز خارج‌شده چند گرم است؟ (جرم مولی گاز اکسیژن $۳۲\,g/mol$ و $R = ۸\,J/mol.K$ است.)

$T_۱ = ۲۷+۲۷۳ = ۳۰۰K$

$۴/۵\times ۱۰^۵\,Pa$

$T_۲ = ۷+۲۷۳ = ۲۸۰K$

۱) ۸۰ ۲) ۴۰ ۳) ۲/۵ ۴) ۱/۲۵

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ تشریحی **گام اول:** ابتدا تعداد مول‌های اولیهٔ گاز را حساب می‌کنیم. طبق معادلهٔ حالت برای گازهای کامل داریم:

$$PV = nRT \xrightarrow[R=۸\frac{J}{mol.K},\,T_۱=۲۷+۲۷۳=۳۰۰K]{P_۱=۴/۵atm=۴/۵\times ۱۰^۵\,Pa,\,V_۱=۲۰L=۲۰\times ۱۰^{-۳}\,m^۳} ۴/۵\times ۱۰^۵\times ۲۰\times ۱۰^{-۳} = n_۱\times ۸\times ۳۰۰ \Rightarrow n_۱ = \frac{۱۵}{۴}\,mol$$

گام دوم: تعداد مول‌های گاز در حالت دوم را حساب می‌کنیم:

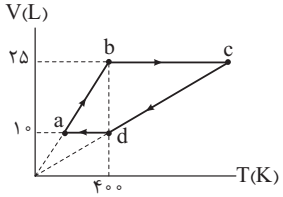
$$\frac{P_۱V_۱}{n_۱T_۱} = \frac{P_۲V_۲}{n_۲T_۲} \xrightarrow[P_۲=۱/۴atm,\,V_۲=V_۱=۲۰L,\,T_۲=۷+۲۷۳=۲۸۰K]{P_۱=۴/۵atm,\,T_۱=۲۷+۲۷۳=۳۰۰K,\,n_۱=\frac{۱۵}{۴}mol} \frac{۴/۵\times ۲۰}{\frac{۱۵}{۴}\times ۳۰۰} = \frac{۱/۴\times ۲۰}{n_۲\times ۲۸۰} \Rightarrow n_۲ = \frac{۵}{۴}\,mol$$

گام سوم: جرم گاز خارج‌شده را حساب می‌کنیم:

$$m_۲ - m_۱ = (n_۲ - n_۱)M \xrightarrow[M=۳۲g/mol]{n_۲-n_۱=\frac{۵}{۴}-\frac{۱۵}{۴}=-\frac{۱۰}{۴}mol} m_۲ - m_۱ = (-\frac{۱۰}{۴})\times ۳۲ = -۸۰g$$

تست و پاسخ ۷۵

نمودار حجم ـ دما برای $۰/۵\,mol$ گاز کامل در طی یک چرخه، به شکل مقابل است. در این چرخه، کار انجام‌شده روی گاز چند ژول است؟ $(R = ۸\frac{J}{mol.K})$



۱) ۱۴۴۰ ۲) −۱۴۴۰ ۳) ۷۵۰ ۴) −۷۵۰

پاسخ: گزینهٔ ۱

مشاوره نکنه یه وقت گول بخوری فکِ کنی چون چرخه ساعتگرده پس کار منفیه. اون مال نمودار $P-V$ هست، نه $V-T$!

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

نکات

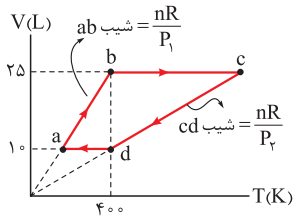
۱) اگر نمودار $V-T$ یک فرایند برای مقدار معینی گاز کامل به صورت خطی باشد که امتداد آن از مبدأ مختصات عبور می‌کند، آن فرایند یک فرایند هم‌فشار است و شیب نمودار $V-T$ برابر با $\frac{nR}{P}$ است.

۲) اگر نمودار $V-T$ یک فرایند برای مقدار معینی گاز کامل به صورت خطی موازی محور T (افقی) باشد، آن فرایند یک فرایند هم‌حجم است.

۳) در یک فرایند هم‌حجم کار محیط بر روی گاز برابر با صفر است.

۴) کار کل در یک چرخه برابر با جمع جبری کار تک‌تک فرایندهای آن است.

پاسخ تشریحی طبق نکتهٔ ۱ درمی‌یابیم فرایندهای ab و cd فرایندهایی هم‌فشار هستند؛ بنابراین مطابق شکل مقابل، کار محیط بر روی گاز در هر یک از این فرایندها به صورت زیر به دست می‌آید:



$$۲۵L = ۲۵\times۱۰^{-۳}\,m^۳$$

$$۱۰L = ۱۰\times۱۰^{-۳}\,m^۳$$

$$\xrightarrow[R=۸\frac{J}{mol.K}]{n=۰/۵\,mol}\begin{cases} \text{ab شیب} = \frac{nR}{P_1} \Rightarrow \frac{۲۵\times۱۰^{-۳}}{۴۰۰} = \frac{۰/۵\times۸}{P_1} \Rightarrow P_1 = ۶۴\times۱۰^۳\,Pa \\ \text{cd شیب} = \frac{nR}{P_2} \Rightarrow \frac{۱۰\times۱۰^{-۳}}{۴۰۰} = \frac{۰/۵\times۸}{P_2} \Rightarrow P_2 = ۱۶۰\times۱۰^۳\,Pa \end{cases}$$

$$\text{فرایند هم‌فشار}: W=-P\Delta V \Rightarrow \begin{cases} W_{ab} = -(۶۴\times۱۰^۳)(۲۵-۱۰)۱۰^{-۳} = -۹۶۰J \\ W_{cd} = -(۱۶۰\times۱۰^۳)(۱۰-۲۵)۱۰^{-۳} = ۲۴۰۰J \end{cases}$$

از طرفی، طبق نکته‌های ۲ و ۳ درمی‌یابیم کار در فرایندهای bc و da که فرایندهایی هم‌حجم هستند، برابر با صفر است؛ در نتیجه طبق نکتهٔ ۴ کار کل را در چرخهٔ abcda حساب می‌کنیم:

$$W_t = W_{ab}+W_{bc}+W_{cd}+W_{da} \xrightarrow[W_{cd}=۲۴۰۰J\,,\,W_{da}=۰]{W_{ab}=-۹۶۰J\,,\,W_{bc}=۰} W_t = -۹۶۰+۰+۲۴۰۰+۰ \Rightarrow W_t = ۱۴۴۰J$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

تست و پاسخ ۷۶

کدام مورد، نادرست است؟

۱) در ساختار لوویس یون سیلیکات، نسبت شمار الکترون‌های ناپیوندی به پیوندی برابر ۳ است. (SiO_4^{4-})

۲) نفتالن ($C_{10}H_8$) و پارازایلن (C_8H_{10}) ایزومر یکدیگر به شمار می‌آیند.

۳) بار یون‌های سولفات (SO_4^{2-}) و سولفید (S^{2-}) برخلاف بار یون‌های نیترات (NO_3^-) و نیترید (N^{3-})، با هم یکسان است.

۴) شمار جفت‌الکترون‌های پیوندی در مولکول اتیلن (C_2H_4) با شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی در اوزون (O_3) برابر است.

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ تشریحی ایزومرها فرمول مولکولی یکسان اما فرمول ساختاری متفاوتی دارند. نفتالن ($C_{10}H_8$)، و پارازایلن (C_8H_{10})، اصلاً فرمول مولکولی یکسانی ندارند!

نکته مهم‌ترین ترکیبات آلی حلقوی که در کتاب درسی می‌خوانیم، در جدول زیر آمده است:

بنزن	نفتالن	سیکلوهگزان	بنزآلدهید	بنزوئیک اسید	استیرن	ترفتالیک اسید	پارازایلن
(C_6H_6)	$(C_{10}H_8)$	(C_6H_{12})	(C_7H_6O)	$(C_7H_6O_2)$	(C_8H_8)	$(C_8H_6O_4)$	(C_8H_{10})

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) سیلیسیم از جمله عنصرهای اکسیژن‌دوست است و با اکسیژن می‌تواند یون چندتایی مثل سیلیکات (SiO_4^{4-}) تشکیل دهد:

$$\frac{\text{شمار الکترون‌های ناپیوندی}}{\text{شمار الکترون‌های پیوندی}} = \frac{24}{8} = 3$$

۳) یون‌های سولفات (SO_4^{2-}) و سولفید (S^{2-}) دارای بارهای یکسان بوده، اما یون‌های نیترات (NO_3^-) و نیترید (N^{3-}) بارشان با هم متفاوت می‌باشد.

۴) *درسته!* خودتون ببینید:

اتیلن (اتن) $= C_2H_4 \Rightarrow$ ۶ جفت‌الکترون پیوندی $\Rightarrow$

اوزون $= O_3 \Rightarrow$ ۶ جفت‌الکترون ناپیوندی $\Rightarrow$

تست و پاسخ ۷۷

با توجه به جدول زیر، محلول ۵۶ درصد جرمی سدیم نیترات در دمای $97/5\,^\circ C$ چه نوع محلولی است و اگر ۳۰۰ گرم از این محلول را تا دمای $10\,^\circ C$ سرد کنیم، چند گرم سدیم نیترات رسوب می‌کند؟

$\theta(^\circ C)$	۱۰	۲۰	۳۰
$S(\frac{g\,NaNO_3}{100g\,H_2O})$	۸۰	۸۸	۹۶

۱) سیرنشده ـ ۸۴

۲) سیرشده ـ ۶۲/۴

۳) فراسیرشده ـ ۸۴

۴) فراسیرشده ـ ۶۲/۴

پاسخ: گزینهٔ ۲

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ تشریحی ابتدا معادلهٔ انحلال‌پذیری سدیم نیترات برحسب دما را به دست می‌آوریم:

$$S-S_1=\frac{S_2-S_1}{\theta_2-\theta_1}(\theta-\theta_1) \Rightarrow S-80=\frac{88-80}{20-10}(\theta-10) \Rightarrow S=0/8\theta+72$$

انحلال‌پذیری $NaNO_3$ را در دمای $97/5^\circ C$ حساب می‌کنیم:

$$\theta=97/5 \Rightarrow S=0/8\times97/5+72=150$$

بنابراین در دمای $97/5^\circ C$، به ازای ۱۰۰ گرم آب، حداکثر ۱۵۰ گرم $NaNO_3$ حل می‌شود و ۲۵۰ گرم محلول را ایجاد می‌کند؛ پس خواهیم داشت:

$$\text{درصد جرمی محلول سیر شده } NaNO_3=\frac{\text{جرم } NaNO_3}{\text{جرم محلول}}\times100=\frac{150g}{250g}\times100=\%60$$

درصد جرمی محلول سیرشدهٔ $NaNO_3$ در دمای $97/5^\circ C$ برابر ۶۰ درصد است؛ بنابراین محلول ۵۶ درصد جرمی آن در این دما، یک محلول سیرنشده می‌باشد، زیرا به ازای جرم معینی محلول، مقدار کم‌تری حل‌شونده در آن وجود دارد.

برای قسمت دوم سؤال، ابتدا باید جرم نمک و آب موجود در ۳۰۰ گرم محلول ۵۶ درصد جرمی را حساب کنیم:

$$\text{جرم نمک}=300\times\frac{56}{100}=168g \Rightarrow \text{جرم آب}=300-168=132g$$

انحلال‌پذیری نمک در دمای $10^\circ C$ برابر $80g$ در $100g$ آب است؛ بنابراین حداکثر جرم نمکی که می‌توان در ۱۳۲ گرم آب در دمای $10^\circ C$ حل کرد، برابر است با:

$$132g\ \text{آب}\times\frac{80g\ \text{نمک}}{100g\ \text{آب}}=105/6g\ \text{نمک}$$

پس، از ۱۶۸ گرم نمک اولیه، $62/4=105/6-168$ گرم آن رسوب می‌کند.

دام تستی وقتی محلول سیرشده نیست، باید از فرمول زیر، جرم رسوب را به دست آورد:

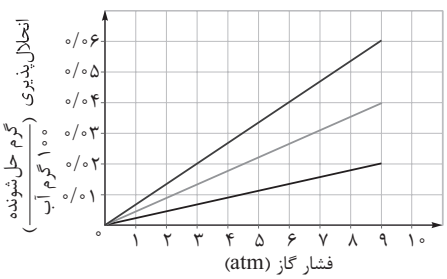
جرم نمک قابل حل در دمای نهایی به ازای آب موجود − جرم نمک اولیه = جرم نمک رسوب‌کرده

اگر به اشتباه از جرم اولیهٔ محلول استفاده می‌کردیم، به ۸۴ گرم رسوب می‌رسیدیم:

$$\left.\begin{matrix}\theta_1=97/5^\circ C=S_1=150g\\ \theta_2=10^\circ C \Rightarrow S_2=80g\end{matrix}\right\} \Rightarrow 300g\ \text{محلول}\times\frac{70g\ \text{رسوب}}{250g\ \text{محلول}}=84g\ \text{رسوب}$$

تست و پاسخ ۷۸

شکل زیر، تغییر انحلال‌پذیری سه گاز NO، N_2 و O_2 را با تغییر فشار گاز، در دمای ثابت، نشان می‌دهد. اگر فشار گازی که شیب نمودار آن حدود $6/66\times10^{-3}\ g/atm$ است، بر روی یک مخزن آب ۳۰۰۰ لیتری برابر $0/6\ atm$ باشد، حداکثر شمار مولکول‌های این گاز که می‌توان در مخزن حل کرد، کدام است؟ $(N=14, O=16 : g.mol^{-1})$



۱) $2/4008\times10^{25}$

۲) $1/2004\times10^{25}$

۳) $2/4008\times10^{24}$

۴) $1/2004\times10^{24}$

پاسخ: گزینهٔ ۳

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

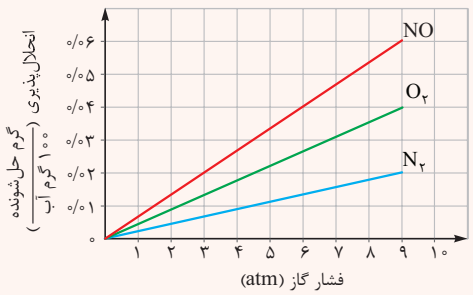
درس‌نامه

- مطابق قانون هنری، با افزایش فشار، انحلال‌پذیری گازها در آب افزایش می‌یابد.
- معادلهٔ انحلال‌پذیری گازها برحسب فشار را می‌توان به صورت روبه‌رو نشان داد:

$$S = K \times P$$

(S: انحلال‌پذیری، K: شیب خط، P: فشار)

- هر گازی که انحلال‌پذیری بیشتری در آب دارد، تأثیر فشار بر انحلال‌پذیری آن بیشتر است؛ یعنی شیب نمودار انحلال‌پذیری برحسب فشار برای آن بیشتر (تندتر) می‌باشد؛ مثلاً:



تأثیر فشار بر انحلال‌پذیری: $NO > O_2 > N_2$

(NO: مولکول قطبی؛ O_2: مولکول ناقطبی با جرم مولی بیشتر؛ N_2: مولکول ناقطبی با جرم مولی کم‌تر)

پاسخ تشریحی ابتدا باید گازی را پیدا کنیم که شیب نمودار آن $6/66 \times 10^{-3}\ g/atm$ است:

$$\text{شیب نمودار سه گاز } NO, O_2, N_2 \ (0-9\,atm) \Rightarrow \begin{cases} NO: \frac{0/06-0}{9-0} = \frac{2}{3} \times 10^{-2} \simeq 6/66 \times 10^{-3}\ g/atm \ \checkmark \\ O_2 = \frac{0/04-0}{9-0} = \frac{4}{9} \times 10^{-2} \simeq 4/44 \times 10^{-3}\ g/atm \\ N_2 = \frac{0/02-0}{9-0} = \frac{2}{9} \times 10^{-2} \simeq 2/22 \times 10^{-3}\ g/atm \end{cases}$$

خب تا این‌جا فهمیدیم که گاز مورد نظر، گاز NO می‌باشد. حالا چون سؤال از ما تعداد مولکول‌های NO رو در فشار $0/6\,atm$ رو می‌خواد! با توجه به نمودار و یک تناسب ساده حساب می‌کنیم که در $0/6\,atm$، انحلال‌پذیری NO چه‌قدر است:

$$S_2 = 4 \times 10^{-3} \frac{g\,NO}{100\,g\,\text{آب}} \ (\text{انحلال‌پذیری در فشار } 0/6\,atm) \Rightarrow \frac{S_2}{0/06} = \frac{0/6}{9} \Rightarrow \frac{S_2}{S_1} = \frac{P_2}{P_1}$$

(S_2: انحلال‌پذیری در فشار $0/6\,atm$؛ S_1: انحلال‌پذیری در فشار $9\,atm$؛ P_2: فشار $0/6\,atm$؛ P_1: فشار $9\,atm$)

و در نهایت تعداد مولکول‌های NO را در این مخزن ۳۰۰۰ لیتری محاسبه می‌کنیم: (چگالی آب را $1\,g.ml^{-1}$ در نظر می‌گیریم.)

$$3000\,L \times \underbrace{\frac{1000\,mL}{1\,L}}_{\text{کسر تبدیل یکا}} \times \underbrace{\frac{1\,g\,\text{آب}}{1\,mL}}_{\text{کسر چگالی}} \times \underbrace{\frac{4 \times 10^{-3}\,g\,NO}{100\,g\,\text{آب}}}_{\text{کسر انحلال‌پذیری}} \times \underbrace{\frac{1\,mol\,NO}{30\,g\,NO}}_{\text{کسر جرم مولی}} \times \underbrace{\frac{6/02 \times 10^{23}\,\text{مولکول } NO}{1\,mol\,NO}}_{\text{کسر تعداد ذره}} = 2/408 \times 10^{24}\,\text{مولکول } NO$$

تست و پاسخ ۷۹

کدام مورد درست است؟

۱) حرکت مولکول‌های آب از یک غشای تراوا از محیط رقیق به غلیظ را گذرندگی می‌گویند.

۲) در فرایند اسمز معکوس، غلظت محلول رقیق اولیه با گذشت زمان کاهش می‌یابد.

۳) اگر گلبول‌های قرمز خون انسان در آب‌مقطر قرار بگیرند، احتمال چروکیده‌شدن آن‌ها وجود دارد.

۴) آب تصفیه‌شده به روش تقطیر برخلاف آب به‌دست‌آمده از روش صافی کربن، نیازی به کلرزنی ندارد.

پاسخ: گزینهٔ ۲

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

نکته مقایسهٔ اسمز و اسمز معکوس:

ویژگی / فرایند		اسمز	اسمز معکوس
جهت خالص انتقال مولکول‌های حلال (آب)		از محلول رقیق‌تر به محلول غلیظ‌تر (یا از حلال خالص به محلول)	از محلول غلیظ‌تر به محلول رقیق‌تر (یا از محلول به حلال خالص)
تغییر غلظت محلول‌ها با گذشت زمان	محلول رقیق	غلیظ‌تر می‌شود.	رقیق‌تر می‌شود.
	محلول غلیظ	رقیق‌تر می‌شود.	غلیظ‌تر می‌شود.
تغییر حجم و ارتفاع محلول‌ها با گذشت زمان	محلول رقیق	کاهش می‌یابد.	افزایش می‌یابد.
	محلول غلیظ	افزایش می‌یابد.	کاهش می‌یابد.
نوع فرایند		خودبه‌خودی	غیرخودبه‌خودی (اعمال فشار)

پاسخ تشریحی در فرایند اسمز معکوس، جابه‌جایی مولکول‌های حلال از محلول غلیظ به رقیق است؛ بنابراین با گذشت زمان محلول غلیظ، غلیظ‌تر و محلول رقیق نیز رقیق‌تر می‌شود.

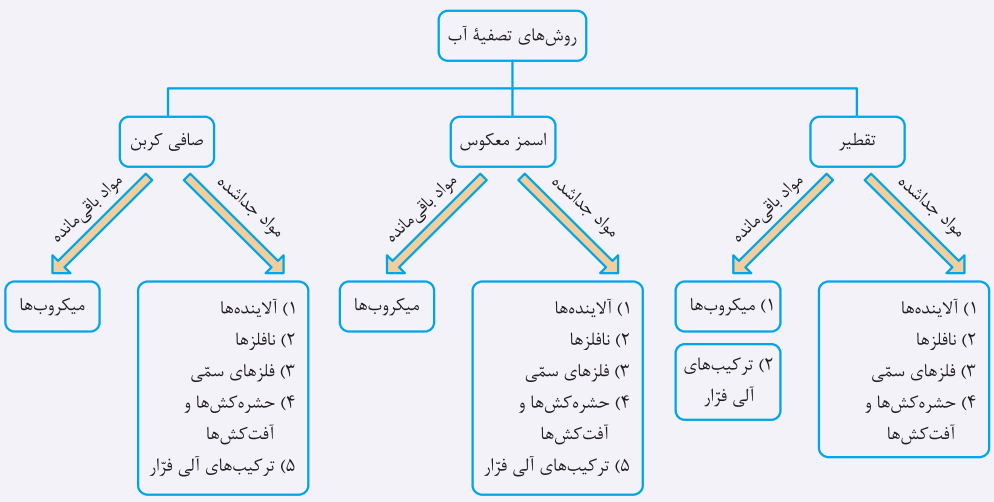
بررسی گزینه‌های نادرست:

۱) اسمز یا گذرندگی، به حرکت مولکول‌های آب از درون یک غشای **نیمه‌تراوا** از سمت محلول رقیق‌تر به سمت محلول غلیظ‌تر و یا از سمت حلال خالص به سمت محلول گفته می‌شود.

۳) هنگامی که گلبول قرمز خون درون آب مقطر (خالص) قرار می‌گیرد، مولکول‌های آب به طور خودبه‌خود از محیط رقیق (یعنی آب) به سمت غشای نیمه‌تراوای محیط غلیظ (یعنی گلبول قرمز خون) رفته و در نتیجه گلبول قرمز **متورم** (نه چروک!) می‌شود!

۴) آب به‌دست‌آمده از هر سه روش تقطیر، اسمز معکوس و صافی کربن، حاوی میکروب بوده و نیاز به کلرزنی دارند.

نکته مقایسهٔ روش‌های تصفیهٔ آب:



SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

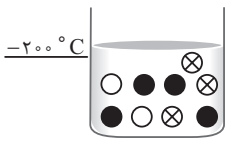
تست و پاسخ ۸۰

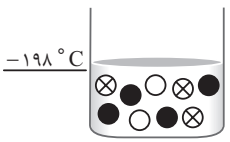
با توجه به شکل که اجزای ظرف حاوی هوای مایع در دمای $-۲۰۰^{\circ}C$ را نشان می‌دهد و توضیحات زیر در مورد مواد موجود در ظرف، کدام شکل نمایش درستی از وضعیت اجزای هوای مایع در دمای مشخص‌شده را نشان نمی‌دهد؟ (نسبت اجزای سازندهٔ هوا در شکل رعایت نشده است.)

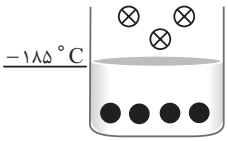
● اختلاف نقطهٔ جوش آن با گازی که برای خنک‌کردن قطعات الکترونیکی مانند MRI استفاده می‌شود، برابر ۷۳ K است.

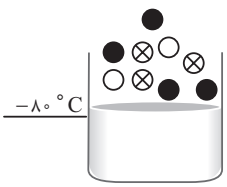
○ مجموع عددهای کوانتومی فرعی الکترون‌های ظرفیت آن برابر ۶ است.

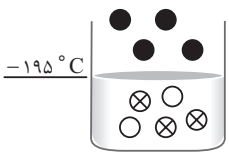
⊗ فشار این گاز در سطح زمین به تقریب برابر ۰/۲ atm است.



۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

پاسخ: گزینهٔ ۲

نکته نقطهٔ جوش چهار گاز نیتروژن، اکسیژن، آرگون و هلیم در جدول زیر آمده است:

گاز	نقطهٔ جوش ($^{\circ}C$)	نقطهٔ جوش (K)
اکسیژن	-۱۸۳	۹۰
آرگون	-۱۸۶	۸۷
نیتروژن	-۱۹۶	۷۷
هلیم	-۲۶۹	۴

پاسخ تشریحی ابتدا باید بررسی کنیم هر کدام از گوی‌های داده‌شده مربوط به کدام گاز می‌باشد:

● ← برای خنک‌کردن قطعات الکترونیکی از هلیم استفاده می‌شود.

از آن‌جا که نقطهٔ جوش هلیم $۴\,K\,(-۲۶۹^{\circ}C)$ است، اختلاف آن با گاز مورد نظر $۷۳\,K$ می‌باشد؛ پس خواهیم داشت:

اختلاف نقطهٔ جوش = نقطهٔ جوش گاز مورد نظر − نقطهٔ جوش هلیم ⇒ نقطهٔ جوش گاز مورد نظر − ۴ = ۷۳

⇒ نقطهٔ جوش گاز مورد نظر = $۷۷K$

بنابراین گاز مورد نظر نیتروژن $(N_۲)$ با نقطهٔ جوش $۷۷\,K\,(-۱۹۶^{\circ}C)$ می‌باشد.

○ ← در بین اجزای هوای مایع، تنها گاز آرگون (Ar) می‌تواند چنین شرایطی داشته باشد:

$$[_{۱۰}Ne]۳s^{۲}۳p^{۶} \Rightarrow \text{مجموع عدد کوانتومی فرعی (l) الکترون‌های ظرفیت} = ۲\underbrace{(۰)}_{s} + ۶\underbrace{(۱)}_{p} = ۶$$

⊗ ← سطح زمین، فشار گاز اکسیژن $(O_۲)$ برابر با $۲۰/۹\times۱۰^{-۲}$ اتمسفر یا حدوداً ۰/۲ atm می‌باشد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

خب! حالا تا این‌جا متوجه شدیم که هر کدام از گوی‌های داده‌شده مربوط به کدام گاز می‌باشد:

	●	○	⊗
گاز	N_2	Ar	O_2
نقطهٔ جوش ($^\circ C$)	-196	-186	-183

بررسی گزینه‌ها:

۱) در دمای $-198^\circ C$ هر سه گوی در حالت مایع‌اند؛ چراکه نقطهٔ جوش هر سه گاز (گوی) بالاتر از $-198^\circ C$ می‌باشد.

۲) *نادرسته!* در دمای $-185^\circ C$ گاز آرگون ○ در حال تبخیرشدن و خارج‌شدن از مخلوط است، چراکه نقطهٔ جوش پایین‌تری از $-185^\circ C$ دارد. هم‌چنین در این ظرف اکسیژن ⊗ که نقطهٔ جوش بالاتری از $-185^\circ C$ دارد، باید به صورت مایع باشد!

۳) دمای $-80^\circ C$ بالاتر از نقطهٔ جوش هر سه گاز است؛ پس در این دما هیچ‌کدام از این سه ماده را به صورت مایع نداریم و هر سه به صورت گازند.

۴) از آن‌جا که دمای مخلوط $-195^\circ C$ است، در این دما گاز N_2 (●) در حالت گاز قرار دارد، زیرا نقطهٔ جوش آن پایین‌تر از $-195^\circ C$ است. هم‌چنین نقطهٔ جوش دو گاز O_2 و Ar بالاتر از $-195^\circ C$ می‌باشد و در این دما به حالت مایع درون ظرف قرار دارند.

تست و پاسخ ۸۱

اگر در واکنش زیر به ازای ۳۹ گرم پلاتین ناخالص، ۲۹/۴۴ گرم گاز تولید شده باشد، درصد خلوص پلاتین کدام است و طی این فرایند چند لیتر محلول ۰/۲ مولار هیدروکلریک اسید مصرف شده است؟ $(Pt=195, O=16, N=14 : g.mol^{-1})$

(معادلهٔ واکنش موازنه شود.) $Pt(s)+HNO_3(aq)+HCl(aq)\rightarrow H_2PtCl_6(aq)+NO_2(g)+H_2O(l)$

۱) ۸۰ـ۱/۶ ۲) ۷۵ـ۴/۸ ۳) ۷۵ـ۱/۶ ۴) ۸۰ـ۴/۸

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ تشریحی اول باید معادلهٔ واکنش را موازنه کنیم:

ابتدا موازنه را با عنصر Pt و Cl از ترکیب پیچیدهٔ H_2PtCl_6 شروع می‌کنیم:

$$1Pt(s)+\_\,HNO_3(aq)+6HCl(aq)\rightarrow 1H_2PtCl_6(aq)+\_\,NO_2(g)+\_\,H_2O(l)$$

موازنه را با هیچ‌یک از عنصرهای N، O و H نمی‌توان ادامه داد، زیرا هنوز ضریب بیش از یک مادهٔ دارای آن‌ها نامشخص است؛ پس *ناچاریم* ضرایب مجهول a و b را استفاده کنیم. دقت داشته باشید به منظور موازنهٔ اتم‌های نیتروژن، ضریب HNO_3 باید با ضریب NO_2 برابر باشد؛ بنابراین ضریب هر دو را a در نظر می‌گیریم. برای H_2O هم ضریب b را انتخاب می‌کنیم.

$$1Pt(s)+aHNO_3(aq)+6HCl(aq)\rightarrow 1H_2PtCl_6(aq)+aNO_2(g)+bH_2O(l)$$

$$\begin{matrix}O\text{ موازنهٔ}: 3a=2a+b\\ H\text{ موازنهٔ}: a+6=2+2b\end{matrix}\Rightarrow\begin{cases}a=b\\2b-a=4\end{cases}\Rightarrow a=4,\ b=4$$

پس معادلهٔ موازنه‌شده به صورت زیر است:

$$1Pt(s)+4HNO_3(aq)+6HCl(aq)\rightarrow 1H_2PtCl_6(aq)+4NO_2(g)+4H_2O(l)$$

در مرحلهٔ بعد باید درصد خلوص پلاتین و حجم مصرفی محلول HCl را به دست آوریم:

روش اول: **استفاده از کسر تبدیل:**

$$29/44\,g\,NO_2\times\frac{1\,mol\,NO_2}{46\,g\,NO_2}\times\frac{1\,mol\,Pt}{4\,mol\,NO_2}\times\frac{195\,g\,Pt}{1\,mol\,Pt}=31/2\,g\,Pt$$

$$\text{درصد خلوص}=\frac{\text{جرم مادهٔ خالص}}{\text{جرم مادهٔ ناخالص}}\times 100=\frac{31/2}{39}\times 100=80$$

$$31/2\,g\,Pt\times\frac{1\,mol\,Pt}{195\,g\,Pt}\times\frac{6\,mol\,HCl}{1\,mol\,Pt}\times\frac{1\,L\,HCl}{0/2\,mol\,HCl}=4/8\,L\,HCl$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

روش دوم: **استفاده از کسر تناسب:**

$$\underbrace{\frac{\frac{\text{درصد خلوص}}{100}\times\text{جرم ناخالص}}{\text{جرم مولی}\times\text{ضریب}}}_{Pt}=\underbrace{\frac{\text{حجم}\times\text{غلظت مولی}}{\text{ضریب}}}_{HCl}=\underbrace{\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی}\times\text{ضریب}}}_{NO_2}$$

$$\Rightarrow \frac{39\times\frac{x}{100}}{1\times195}=\frac{0/2\times y}{6}=\frac{29/44}{4\times46}\Rightarrow x=\%80\ ,\ y=4/8\ L\ HCl(aq)$$

تست و پاسخ ۸۲

چند مورد از مطالب زیر، به یقین درست است؟

- **روند تغییرات واکنش‌پذیری عنصرها و شعاع اتمی آن‌ها در گروه‌های جدول تناوبی، همسو است.**
- **در همهٔ عنصرهای یک دورهٔ جدول تناوبی، شمار لایه‌های الکترونی اشغال‌شدهٔ عنصرها برابر است.**
- **در جدول تناوبی، مقدار کم‌ترین و بیشترین عدد اکسایش عنصرهای هم‌گروه مشابه است.**
- **شمار الکترون‌های ظرفیت دو عنصر غیرهم‌گروه، نمی‌تواند یکسان باشد.**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ تشریحی فقط عبارت دوم درست است.

بررسی عبارت‌ها:

عبارت اول: واکنش‌پذیری و خصلت فلزی با شعاع اتمی در فلزها رابطهٔ مستقیم و برای اغلب نافلزها رابطهٔ وارونه دارد.

نکته در یک گروه با افزایش شعاع اتمی در فلزها ← افزایش خصلت فلزی و واکنش‌پذیری

شعاع اتمی، خصلت فلزی و واکنش‌پذیری فلزهای گروه ۱: $Li < Na < K < Rb < Cs$

در گروه نافلزها مانند هالوژن‌ها، با افزایش شعاع اتمی ← کاهش خصلت نافلزی و واکنش‌پذیری

خصلت نافلزی و واکنش‌پذیری: $F > Cl > Br > I$ ← شعاع اتمی: $F < Cl < Br < I$

عبارت دوم: مهم‌ترین وجه تشابه عنصرهای یک دوره از جدول تناوبی، تعداد لایه‌های اصلی الکترونی اشغال‌شده می‌باشد. مثلاً در دورهٔ دوم، همهٔ عنصرها دارای ۲ لایهٔ الکترونی اشغال‌شده می‌باشند.

عبارت سوم: برای عنصرهای گروه ۱۴ تا ۱۷ به‌جز اکسیژن و فلوئور می‌تواند صادق باشد! دامنهٔ تغییرات عدد اکسایش اکسیژن از گروه ۱۶ از ۲− تا ۲+ است و هم‌چنین فلوئور از گروه ۱۷ تنها دارای عددهای اکسایش صفر (در F_2) و ۱− است. در ضمن، عدد اکسایش هیدروژن از گروه اول نیز می‌تواند صفر، ۱+ و ۱− باشد.

عبارت چهارم: مثلاً شمار الکترون‌های ظرفیت عنصرهای گروه ۴ و ۱۴، ۵ و ۱۵، ... با هم برابر است.

شمار الکترون‌های ظرفیت ← گروه‌های ۱ تا ۱۲ = شمارهٔ گروه
شمار الکترون‌های ظرفیت ← گروه‌های ۱۳ تا ۱۸ (به‌جز هلیم) = یکان شمارهٔ گروه

تست و پاسخ ۸۳

در ۸۰۰ گرم محلول نمک کلرید فلز M، ۴۰ گرم MCl_2 وجود دارد. اگر چگالی محلول $1/11\ g.mL^{-1}$ و مجموع غلظت یون‌ها در محلول برابر $1/5\ mol.L^{-1}$ باشد، فلز M کدام است؟ $(Cl = 35/5\ g.mol^{-1})$

۱) $^{200}_{80}Hg$ ۲) $^{40}_{20}Ca$ ۳) $^{65}_{30}Zn$ ۴) $^{24}_{12}Mg$

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ تشریحی روش اول: ابتدا از روی مجموع غلظت مولی یون‌ها، غلظت نمک MCl_2 را حساب می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} MCl_2 \rightarrow M^{2+} + 2Cl^- \\ \text{غلظت:}\ \ x \qquad x \qquad 2x \end{array}\right\} \Rightarrow x + 2x = 1/5 \Rightarrow x = 0/5\ mol.L^{-1}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

در مرحلهٔ بعد، حجم محلول را محاسبه می‌کنیم:

$$۸۰۰\,g\times\frac{۱\,mL}{۱/۱۱\,g}\times\frac{۱\,L}{۱۰۰۰\,mL}=\frac{۸۰}{۱۱۱}\,L$$

حالا با استفاده از غلظت مولار $MCl_۲$ و حجم محلول، می‌توانیم تعداد مول و جرم مولی حل‌شونده را حساب کنیم:

$$\text{غلظت مولی}\,(M)=\frac{\text{تعداد مول مادهٔ حل‌شونده}\,(n)}{\text{حجم محلول برحسب لیتر}\,(L)}\Rightarrow ۰/۵=\frac{n}{\frac{۸۰}{۱۱۱}}\Rightarrow \text{تعداد مول}\,MCl_۲=\frac{۴۰}{۱۱۱}\,mol$$

$$۴۰\,g\,MCl_۲\times\frac{۱\,mol\,MCl_۲}{a\,g\,MCl_۲}=\frac{۴۰}{۱۱۱}\,mol\,MCl_۲\Rightarrow a=\text{جرم مولی}\,MCl_۲=۱۱۱\,g.mol^{-۱}$$

و در نهایت جرم مولی فلز M را می‌یابیم:

$$\text{جرم مولی}\,MCl_۲=M+۲(۳۵/۵)\Rightarrow ۱۱۱=M+۷۱\Rightarrow M=۴۰\,g.mol^{-۱}\Rightarrow M:{}^{۴۰}Ca$$

روش دوم:

نکته اگر درصد جرمی محلول برابر «a» و چگالی محلول برحسب $g.mL^{-۱}$ برابر «d» باشد، غلظت مولی (M) این محلول برحسب $(mol.L^{-۱})$ برابر است با:

$$M=\frac{۱۰ad}{\text{جرم مولی}}$$

ابتدا درصد جرمی $MCl_۲$ را حساب می‌کنیم:

$$\text{درصد جرمی}\,(a)=\frac{\text{جرم حل‌شونده}}{\text{جرم محلول}}\times۱۰۰=\frac{۴۰\,g}{۸۰۰\,g}\times۱۰۰=۵$$

حالا با استفاده از فرمولمون، جرم مولی $MCl_۲$ را به دست می‌آوریم:

$$M=\frac{۱۰\times a\times d}{\text{جرم مولی حل‌شونده}}\Rightarrow ۰/۵=\frac{۱۰\times۵\times۱/۱۱}{\text{جرم مولی}\,MCl_۲}\Rightarrow \text{جرم مولی}\,MCl_۲=۱۱۱\,g.mol^{-۱}$$

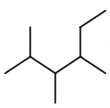
حالا جرم مولی M را به دست می‌آوریم:

$$\text{جرم مولی}\,MCl_۲=M+۲(۳۵/۵)\Rightarrow ۱۱۱=M+۷۱\Rightarrow M=۴۰\,g.mol^{-۱}\Rightarrow M:{}^{۴۰}Ca$$

تست و پاسخ ۸۴

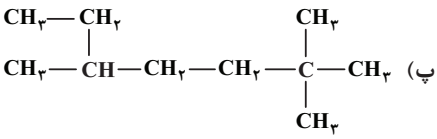
براساس ترکیب‌های داده‌شده، کدام مورد درست است؟

الف)



ب) $CH_۳C(CH_۳)_۲CH_۲CH(CH_۳)C_۲H_۵$

پ)



۱) هر سه ترکیب با یکدیگر همپار هستند.

۲) نام ترکیب «الف»، ۳، ۴، ۵ ـ تری‌متیل هگزان است.

۳) ترکیب «ب» دارای یک کربن با عدد اکسایش صفر و دو کربن با عدد اکسایش (-۲) است.

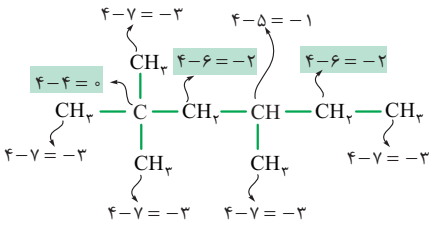
۴) آلکان راست‌زنجیری که همپار ترکیب «پ» است، نسبت به هگزان فراریت بیشتری دارد.

پاسخ: گزینهٔ ۳

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ تشریحی عدد اکسایش هر یک از اتم‌های کربن موجود در ساختار «ب» را محاسبه می‌کنیم:

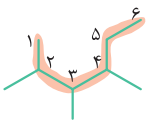
همان‌طور که می‌بینید یک کربن، عدد اکسایش صفر و دو کربن عدد اکسایش (-2) دارند.



بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) ترکیب‌های «الف» و «ب» دارای ۹ کربن، اما ترکیب «پ» دارای ۱۰ اتم کربن می‌باشد؛ پس این سه ترکیب فرمول مولکولی یکسانی نخواهند داشت و بنابراین ایزومر یا همپار نخواهند بود.

۲) با توجه به ساختار روبه‌رو، نام ترکیب مورد نظر ۲، ۳، ۴ ـ تری متیل هگزان می‌باشد.



۴) آلکان راست‌زنجیر ۱۰کربنه $(C_{10}H_{22})$، نسبت به هگزان (C_6H_{14})، تعداد اتم‌های کربن و هیدروژن بیشتر و در نتیجه جرم مولی بیشتری دارد؛ بنابراین میزان فرّاریت آن نسبت به هگزان کم‌تر می‌باشد.

نکته

با افزایش تعداد اتم‌های کربن در آلکان‌های راست‌زنجیر ← جرم مولکولی، قدرت نیروهای بین مولکولی، نقطهٔ جوش، گرانروی و چسبندگی، افزایش می‌یابد. / فرّاریت کاهش می‌یابد.

تست و پاسخ ۸۵

درصد جرمی زیرکونیم (IV) هیدروکسید در ۱۲۰ میلی‌لیتر از محلول آن برابر با ۲ درصد است. اگر در اثر واکنش کامل با ۳۰ میلی‌لیتر محلول سولفوریک اسید، درصد جرمی زیرکونیم (IV) سولفات در محلول نهایی برابر با ۲/۸۴ درصد شود، جرم مولی فلز زیرکونیم چند گرم بر مول است؟ (از حجم آب تولیدشده در واکنش صرف نظر کنید و چگالی محلول‌ها را برابر یک گرم بر میلی‌لیتر در نظر بگیرید و $H=1, O=16, S=32 : g.mol^{-1}$)

$Zr(OH)_4(aq) + H_2SO_4(aq) \rightarrow Zr(SO_4)_2(aq) + H_2O(l)$ (معادله موازنه شود.)

۱) ۹۲
۲) ۱۰۱
۳) ۱۱۸
۴) ۱۷۸

پاسخ: گزینهٔ ۱

خودت حل کنی بهتره رابطهٔ استوکیومتری را بین محلول‌های $Zr(OH)_4$ و $Zr(SO_4)_2$ بنویس و جرم مولی Zr را به دست بیار! حواست باشه که در استوکیومتری محلول‌ها باید از جرم حل‌شونده استفاده کنیم و نه جرم محلول! با توجه به معلوم‌بودن حجم و چگالی محلول‌ها، جرم آن‌ها به دست می‌آید که می‌تونی به کمک درصد جرمی، جرم محلول‌ها را به جرم حل‌شونده‌های آن‌ها تبدیل کنی!

پاسخ تشریحی **گام اول:** معادلهٔ واکنش را موازنه می‌کنیم: $Zr(OH)_4(aq) + 2H_2SO_4(aq) \rightarrow Zr(SO_4)_2(aq) + 4H_2O(l)$

گام دوم: جرم محلول‌ها را مشخص می‌کنیم: با توجه به فرضیات سؤال (چشم‌پوشی‌کردن از حجم آب تولیدشده و در نظر گرفتن چگالی همهٔ محلول‌ها برابر با $1g.mL^{-1}$)، از واکنش کامل ۱۲۰g (یا همان ۱۲۰mL) محلول $Zr(OH)_4$ با ۳۰g (یا همان ۳۰mL) محلول H_2SO_4، ۱۵۰g $(120+30=150)$ محلول $Zr(SO_4)_2$ تولید می‌شود.

گام سوم: با داشتن جرم محلول‌ها و درصد جرمی حل‌شونده در آن‌ها، روابط استوکیومتری بین دو مادهٔ $Zr(OH)_4$ و $Zr(SO_4)_2$ را نوشته و جرم مولی Zr را به دست می‌آوریم.

$1mol\,Zr(OH)_4 \sim 1mol\,Zr(SO_4)_2$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

روش اول: **استفاده از کسر تبدیل:**

$$\text{درصد جرمی} = \frac{\text{جرم حل‌شونده}}{\text{جرم محلول}} \times ۱۰۰$$

$$۱۲۰\,g\ Zr(OH)_۴ \times \underbrace{\frac{۲\,g\ Zr(OH)_۴}{۱۰۰\,g\ Zr(OH)_۴}}_{\text{درصد جرمی } Zr(OH)_۴ \text{ در محلول}} \times \underbrace{\frac{۱\,mol\ Zr(OH)_۴}{(M+۶۸)\,g\ Zr(OH)_۴}}_{\text{جرم مولی } Zr(OH)_۴} \times \frac{۱\,mol\ Zr(SO_۴)_۲}{۱\,mol\ Zr(OH)_۴} \times \frac{\overbrace{(M+۱۹۲)\,g}^{\text{جرم مولی } Zr(SO_۴)_۲}\ Zr(SO_۴)_۲}{۱\,mol\ Zr(SO_۴)_۲}$$

$$\times \underbrace{\frac{۱۰۰\,g\ Zr(SO_۴)_۲}{۲/۸۴\,g\ Zr(SO_۴)_۲}}_{\text{درصد جرمی } Zr(SO_۴)_۲ \text{ در محلول}} = ۱۵۰\,g \Rightarrow \frac{۲\times(M+۱۹۲)\times ۱۰۰^{۲}}{(M+۶۸)\times ۲/۸۴} = ۱۵۰^{۳} \Rightarrow \frac{M+۱۹۲}{M+۶۸} = \frac{۷/۱}{۴}$$

نکته **(تکنیک محاسباتی تفاضل نسبت در صورت یا مخرج کسر):**

در درس ریاضی خوانده‌اید که اگر دو کسر با هم برابر باشند، می‌توان صورت‌های هر کدام را از مخرج‌های آن‌ها، کم کرده و به جای صورت یا مخرج کسر اولیه نوشت و کسرهایی برابر با هم را به دست آورد؛ *یعنی این‌بوری:*

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} \text{ یا } \frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d}$$

مثال: $\frac{۲}{۳} = \frac{۶}{۹} \Rightarrow \frac{\underbrace{۲-۳}_{-\frac{۱}{۳}}}{۳} = \frac{\underbrace{۶-۹}_{-\frac{۳}{۹}}}{۹}$ یا $\frac{۲}{\underbrace{۲-۳}_{\frac{۲}{-۱}=\frac{۶}{-۳}}} = \frac{۶}{۶-۹}$

برای راحت‌تر به دست آوردن M می‌توانیم از تکنیک بالا استفاده کنیم:

$$\frac{M+۱۹۲}{M+۶۸} = \frac{۷/۱}{۴} \Rightarrow \frac{(M+۱۹۲)-(M+۶۸)}{M+۶۸} = \frac{۷/۱-۴}{۴}$$

$$\Rightarrow \frac{۱۲۴^{۴۰}}{M+۶۸} = \frac{۳/۱^{۱}}{۴} \Rightarrow M = ۹۲\,g.mol^{-۱}$$

روش دوم: **استفاده از کسر تناسب:**

$$\text{درصد جرمی} \times \text{جرم محلول} = \text{جرم حل‌شونده} \Rightarrow \text{درصد جرمی} = \frac{\text{جرم حل‌شونده}}{\text{جرم محلول}} \times ۱۰۰$$

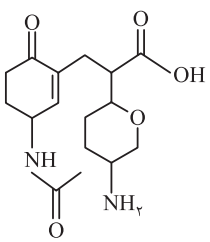
$$۱\,mol\ Zr(OH)_۴ \sim ۱\,mol\ Zr(SO_۴)_۲$$

$$\frac{\text{جرم}}{\underbrace{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}_{Zr(OH)_۴}} = \frac{\text{جرم}}{\underbrace{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}_{Zr(SO_۴)_۲}} \Rightarrow \frac{\overbrace{۱۲۰}^{\text{جرم محلول}} \times \frac{\overbrace{۲}^{\text{درصد جرمی}}}{۱۰۰}}{۱\times(M+۶۸)} = \frac{\overbrace{۱۵۰}^{\text{جرم محلول}} \times \frac{\overbrace{۲/۸۴}^{\text{درصد جرمی}}}{۱۰۰}}{۱\times(M+۱۹۲)} \Rightarrow \frac{M+۱۹۲}{M+۶۸} = \frac{۱۵^{۵}\times ۲/۸۴}{۱۲\times ۲} = \frac{۷/۱}{۴}$$

$$\Rightarrow \frac{(M+۱۹۲)-(M+۶۸)}{M+۶۸} = \frac{۷/۱-۴}{۴} \Rightarrow \frac{۱۲۴^{۴۰}}{M+۶۸} = \frac{۳/۱^{۱}}{۴} \Rightarrow M = ۱۶۰-۶۸ = ۹۲\,g.mol^{-۱}$$

تست و پاسخ ۸۶

کدام موارد از مطالب زیر دربارهٔ ترکیب داده‌شده، درست است؟



الف) در ساختار آن یک گروه کربوکسیل، یک گروه اتری، دو گروه کتونی و دو گروه آمینی وجود دارد.

ب) بیش از ۵۰ درصد شمار کل اتم‌های سازندهٔ آن را اتم هیدروژن تشکیل داده است.

پ) در شرایط مناسب می‌تواند در واکنش‌های تهیهٔ آمید و پلی‌آمید شرکت کند.

ت) در ساختار آن، ۱۲ جفت‌الکترون ناپیوندی وجود دارد.

ث) در ساختار آن، ۳ اتم کربن وجود دارند که به اتم هیدروژن متصل نیستند.

۱) الف ـ ب ـ ت ۲) پ ـ ث ۳) ب ـ پ ـ ت ۴) ب ـ پ ـ ث

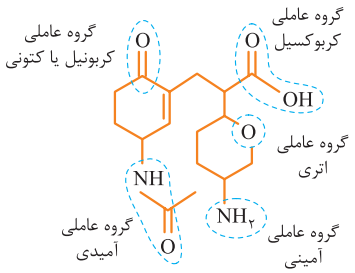
پاسخ: گزینهٔ ۳

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ تشریحی عبارت‌های «ب»، «پ» و «ت» درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

الف) در ساختار داده‌شده، یک گروه کربوکسیل ($-\overset{O}{\overset{\|}{C}}-OH$)، یک گروه اتری ($-O-$)، یک گروه کتونی ($-\overset{O}{\overset{\|}{C}}-$)، یک گروه آمینی ($-NH_2$) و یک گروه آمیدی ($-\overset{O}{\overset{\|}{C}}-N-$) وجود دارد.



ب)

نکته تعداد اتم‌های هیدروژن در ترکیب‌های آلی را می‌توان با استفاده از فرمول زیر، به سرعت تعیین کرد.

(تعداد پیوندهای سه‌گانه $\times 4$) $-$ (تعداد حلقه‌ها $+$ تعداد پیوندهای دوگانه) $\times 2 - (2n + 2)$ = تعداد اتم‌های هیدروژن در ترکیبی با n کربن

$-$ (تعداد اتم‌های هالوژن $\times 1$) $+$ (تعداد اتم‌های نیتروژن $\times 1$)

ترکیب داده‌شده، دارای ۱۶ اتم کربن است؛ بنابراین تعداد اتم‌های هیدروژن در آن برابر است با:

$$\text{تعداد اتم‌های هیدروژن} = [2(16) + 2] - 2(4 + 2) + (2 \times 1) = 24$$

(تعداد حلقه‌ها: 4، تعداد پیوندهای دوگانه: 6، تعداد اتم‌های نیتروژن: 2)

پس فرمول مولکولی ترکیب داده‌شده، $C_{16}H_{24}O_5N_2$ است و بیش از ۵۰ درصد شمار کل اتم‌های سازندهٔ آن را، اتم هیدروژن تشکیل داده است.

$$\text{درصد شمار اتم‌های هیدروژن} = \frac{\text{شمار اتم‌های هیدروژن}}{\text{شمار کل اتم‌ها}} \times 100 = \underbrace{\frac{24}{(16 + 24 + 5 + 2)}}_{23+24=47} \times 100 > \%50$$

پ)

نکته آمیدها ($-\overset{O}{\overset{\|}{C}}-N-$) از واکنش کربوکسیلیک اسیدها ($-\overset{O}{\overset{\|}{C}}-OH$) با آمین‌ها ($R-\underset{R'}{\overset{}{N}}-H$)، که حداقل یکی از گروه‌های R یا R' گروه هیدروکربنی‌اند یا آمونیاک ($H-\underset{H}{\overset{}{N}}-H$)، به دست می‌آیند. پلی‌آمیدها هم از واکنش آمین‌های دوعاملی با اسیدهای دوعاملی یا از واکنش پلیمری‌شدن مولکولی که هر دو گروه عاملی اسیدی و آمینی را با هم داشته باشد، به وجود می‌آیند.

واکنش تهیهٔ آمید:

$$\underset{\text{کربوکسیلیک اسید}}{\square-COOH} + \underset{\text{آمین}}{H_2N-\square} \longrightarrow \square-\overset{O}{\overset{\|}{C}}-\underset{\text{آمید}}{\underset{H}{N}}-\square + \underset{\text{آب}}{H_2O}$$

واکنش تهیهٔ پلی‌آمید از مولکولی که هر دو گروه اسیدی و آمینی را دارد:

$$n\,H_2N-\square-\overset{O}{\overset{\|}{C}}-OH \longrightarrow \left[-\underset{H}{N}-\square-\overset{O}{\overset{\|}{C}}-\right]_n + n\,\underset{\text{آب}}{H_2O}$$

مولکول داده‌شده، هر دو گروه عاملی اسیدی و آمینی را با هم دارد؛ بنابراین هم می‌تواند با کربوکسیلیک اسیدها، آمین‌ها و آمونیاک و حتی مولکول‌های خود در واکنش تشکیل آمید شرکت کند و هم می‌تواند با مولکول‌های خود در تشکیل پلی‌آمید شرکت کند.

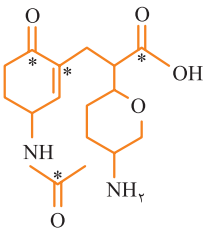
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

ت) ترکیب داده‌شده دارای ۵ اتم اکسیژن و دو اتم نیتروژن است. هر اتم اکسیژن، دو جفت‌الکترون ناپیوندی و هر اتم نیتروژن، یک جفت‌الکترون ناپیوندی دارد؛ بنابراین:

$$\text{شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی در مولکول} = (۵\times ۲) + (۲\times ۱) = ۱۲$$

(۵×۲): شمار اتم‌های O — (۲×۱): شمار اتم‌های N

ث) در ساختار ترکیب داده‌شده ۴ اتم کربن (اتم‌های کربن مشخص‌شده در شکل) وجود دارد که به اتم هیدروژن متصل نیستند، نه ۳تا!



تست و پاسخ ۸۷

اگر سه واکنش داده‌شده، مراحل انجام یک واکنش کلی باشند، ΔH واکنش کلی (بدون تغییر در ضرایب استوکیومتری معادلهٔ واکنش‌ها) برابر چند کیلوژول است و اگر ۲ مول فراوردهٔ نهایی را در آب کافی حل کنیم و سپس حجم محلول را به ۵L برسانیم، محلول حاصل با چند گرم سدیم هیدروکسید ۸۰٪ خالص، خنثی خواهد شد؟ (آنتالپی پیوند $O=O$ برابر ۴۹۵ و میانگین آنتالپی پیوند $S-O$ برابر ۳۶۵ کیلوژول بر مول است.) $(H=۱, O=۱۶, Na=۲۳: g.mol^{-1})$

I) $O_۲(g) + NO(g) \rightarrow NO_۲(g) + O(g)$

II) $SO_۲(g) + O(g) \rightarrow SO_۳(g)$

III) $NO_۲(g) + SO_۲(g) \rightarrow NO(g) + SO_۳(g)$

۱) ۲۰۰ ،−۳۳۵ ۲) ۲۰۰ ،−۲۳۵ ۳) ۱۶۰ ،−۳۳۵ ۴) ۱۶۰ ،−۲۳۵

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ تشریحی **گام اول:** ابتدا معادلهٔ واکنش کلی را به دست می‌آوریم:

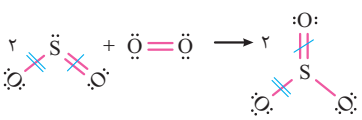
$$I)\ O_۲(g) + \cancel{NO(g)} \rightarrow \cancel{NO_۲(g)} + \cancel{O(g)}$$

$$II)\ SO_۲(g) + \cancel{O(g)} \rightarrow SO_۳(g)$$

$$III)\ \cancel{NO_۲(g)} + SO_۲(g) \rightarrow \cancel{NO(g)} + SO_۳(g)$$

$$\text{واکنش کلی: } ۲SO_۲(g) + O_۲(g) \rightarrow ۲SO_۳(g)$$

گام دوم: به کمک آنتالپی‌های پیوند، ΔH واکنش کلی را به دست می‌آوریم:



$$\Delta H_{\text{واکنش}} = [\text{مجموع آنتالپی پیوندها در مواد فراورده}] - [\text{مجموع آنتالپی پیوندها در مواد واکنش‌دهنده}]$$

$$\Delta H_{\text{واکنش}} = [\Delta H(O=O)] - [۲\Delta H(S-O)] = ۴۹۵ - (۲\times ۳۶۵) = -۲۳۵\,kJ$$

گام سوم: از انحلال گاز $SO_۳$ در آب، سولفوریک اسید $(H_۲SO_۴)$ تشکیل می‌شود. حالا باید حساب کنیم که محلول حاصل از انحلال کامل ۲ مول $SO_۳$ در آب، با چند گرم $NaOH$ ۸۰٪ خالص خنثی می‌شود.

ضریب مادهٔ مشترک در واکنش $(H_۲SO_۴)$، یکسان است؛ بنابراین می‌توانیم به طور مستقیم بین $SO_۳$ و $NaOH$ کسر تبدیل‌های مناسب را بنویسیم یا تناسب برقرار کنیم:

$$SO_۳(g) + H_۲O(l) \rightarrow \underline{H_۲SO_۴(aq)}$$

$$\underline{H_۲SO_۴(aq)} + ۲NaOH(aq) \rightarrow Na_۲SO_۴(aq) + ۲H_۲O(l)$$

روش اول: **استفاده از کسر تبدیل:**

$$۲\,mol\,SO_۳ \times \frac{۲\,mol\,NaOH}{۱\,mol\,SO_۳} \times \frac{۴۰\,g\,NaOH}{۱\,mol\,NaOH} \times \frac{۱۰۰\,g\,NaOH\ \text{ناخالص}}{۸۰\,g\,NaOH\ \text{خالص}} = ۲۰۰\,g\ NaOH\ \text{ناخالص}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

روش دوم: **استفاده از کسر تناسب:**

$$\frac{\text{مول}}{\text{ضریب}}_{SO_3} = \frac{\text{درصد خلوص}}{100} \times \text{جرم ناخالص} \Rightarrow \frac{2}{1} = \frac{x \times \frac{80}{100}}{2 \times 40} \Rightarrow x = 200\,g\ NaOH \text{ ناخالص}$$

جرم مولی × ضریب $NaOH$

به ۵ لیتر حجم محلول H_2SO_4 هم نیازی نداشتیم، *چون سؤال مول SO_3 رو بهمون داده بود!*

تست و پاسخ ۸۸

با توجه به معادلهٔ موازنه‌نشدهٔ: $X(aq) + Y(aq) \rightarrow A(s) + E(aq)$، کدام مطلب درست است؟

۱) اگر X و Y، کلسیم کلرید و سدیم فسفات باشند، A سدیم کلرید است و مجموع ضرایب مواد شرکت‌کننده در واکنش برابر ۱۲ است.

۲) اگر A باریم سولفات باشد، X و Y می‌توانند باریم نیترات و سدیم سولفات باشند و مجموع ضرایب مواد شرکت‌کننده در این واکنش برابر ۴ است.

۳) اگر X و Y، سدیم کلرید و نقره نیترات باشند، با مخلوط‌شدن آن‌ها و انجام واکنش، نسبت غلظت آنیون چنداتمی به آنیون تک‌اتمی در محلول، افزایش می‌یابد.

۴) اگر X و Y، سدیم هیدروکسید و آهن (III) کلرید باشند، A آهن (III) هیدروکسید است و با انجام واکنش، pH محلول افزایش می‌یابد.

پاسخ: گزینهٔ ۳

نکته در جدول زیر نام و فرمول شیمیایی همهٔ ترکیب‌های یونی نامحلول که باید *بلد باشین رو براتون آوردیم.*

نام	فرمول شیمیایی	نام	فرمول شیمیایی
آهن (II) هیدروکسید	$Fe(OH)_2$	نقره کلرید	$AgCl$
آهن (III) هیدروکسید	$Fe(OH)_3$	کلسیم فسفات	$Ca_3(PO_4)_2$
منیزیم هیدروکسید	$Mg(OH)_2$	باریم سولفات	$BaSO_4$
آلومینیم هیدروکسید	$Al(OH)_3$		

پاسخ تشریحی بررسی گزینه‌ها:

۱) از واکنش محلول‌های کلسیم کلرید (X) و سدیم فسفات (Y)، رسوب کلسیم فسفات (A) و محلول سدیم کلرید (E) به دست می‌آید: (سدیم کلرید، ترکیب یونی محلول در آب است، نه نامحلول در آب!)

$$3CaCl_2(aq) + 2Na_3PO_4(aq) \rightarrow Ca_3(PO_4)_2(s) + 6NaCl(aq)$$

۲) باریم سولفات ($BaSO_4$) یک ترکیب یونی نامحلول در آب (A) است و می‌توان آن را از واکنش محلول‌های باریم نیترات (X) و سدیم سولفات (Y) به دست آورد، ولی مجموع ضرایب مواد شرکت‌کننده در واکنش ۵ است، نه ۴!

$$Ba(NO_3)_2(aq) + Na_2SO_4(aq) \rightarrow BaSO_4(s) + 2NaNO_3(aq)$$

۳) از واکنش محلول‌های سدیم کلرید (X) و نقره نیترات (Y)، رسوب نقره کلرید (A) و محلول سدیم نیترات (E) به دست می‌آید:

$$NaCl(aq) + AgNO_3(aq) \rightarrow AgCl(s) + NaNO_3(aq)$$

با انجام واکنش و تشکیل رسوب $AgCl$، از غلظت یون $Cl^-(aq)$ در محلول، کاسته می‌شود؛ بنابراین نسبت غلظت آنیون چنداتمی به غلظت آنیون تک‌اتمی $\left(\frac{\text{غلظت آنیون چنداتمی}}{\text{غلظت آنیون تک‌اتمی}}\right) = \frac{[NO_3^-(aq)] \rightarrow \text{ثابت}}{[Cl^-(aq)] \downarrow}$ به غلظت آنیون تک‌اتمی $Cl^-(aq)$، در محلول افزایش می‌یابد. ↑

۴) از واکنش محلول‌های سدیم هیدروکسید (X) و آهن (III) کلرید (Y)، رسوب آهن (III) هیدروکسید (A) و محلول سدیم کلرید (E) به دست می‌آید. می‌دانیم که در محلول‌های آبی، غلظت یون هیدروکسید با pH رابطهٔ مستقیم دارد؛ بنابراین در این واکنش با تشکیل رسوب $Fe(OH)_3$، از غلظت یون هیدروکسید ($OH^-(aq)$) در محلول کاسته شده و pH محلول کاهش می‌یابد.

$$3NaOH(aq) + FeCl_3(aq) \rightarrow Fe(OH)_3(s) + 3NaCl(aq)$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

تست و پاسخ ۸۹

۳۰/۷ گرم از $POCl_3$ را در ظرفی وارد کرده تا مطابق واکنش زیر تجزیه شود. اگر سرعت متوسط تولید گاز کلر ۰/۱ مول بر دقیقه باشد، پس از ۴۵ ثانیه، چند درصد حجمی گازهای درون ظرف واکنش را فسفر تری‌کلرید تشکیل می‌دهد؟ $(Cl = 35/5, P = 31, O = 16 : g.mol^{-1})$

(معادلهٔ واکنش موازنه شود.) $POCl_3(g) \rightarrow PCl_3(g) + Cl_2(g) + P_4O_{10}(s)$

۱) ۲۵ ۲) ۳۳/۳۳ ۳) ۵۰ ۴) ۶۶/۶۷

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس‌نامه

سرعت متوسط تولید یا مصرف مواد در یک واکنش با ضرایب استوکیومتری آن‌ها متناسب است:

$$aA + bB \rightarrow cC + dD$$

$$\overline{R}_{\text{واکنش}} = \frac{\overline{R}(A)}{a} = \frac{\overline{R}(B)}{b} = \frac{\overline{R}(C)}{c} = \frac{\overline{R}(D)}{d}$$

$$\overline{R} = \left|\frac{\Delta n}{\Delta t}\right|$$

پاسخ تشریحی **گام اول:** معادلهٔ واکنش را موازنه می‌کنیم:

$$10POCl_3(g) \rightarrow 6PCl_3(g) + 6Cl_2(g) + P_4O_{10}(s)$$

گام دوم: تعداد مول اولیهٔ $POCl_3$ را حساب می‌کنیم:

$$\text{جرم مولی } POCl_3 = 31 + 16 + 3(35/5) = 153/5\ g.mol^{-1}$$

$$\text{تعداد مول } POCl_3: 30/7\ g \times \frac{1\ mol}{153/5\ g} = 0/2\ mol$$

گام سوم: به کمک سرعت تولید Cl_2، تعداد مول Cl_2 تولیدشده پس از ۴۵ ثانیه را حساب می‌کنیم:

$$45\ s \times \frac{1\ min}{60\ s} \times \frac{0/1\ mol\ Cl_2}{1\ min} = \frac{3}{40} = 0/075\ mol\ Cl_2$$

گام چهارم: جدول تغییرات تعداد مول مواد را کشیده و به کمک تعداد مول Cl_2، مول سایر گونه‌ها را حساب می‌کنیم:

	$10POCl_3$	$\rightarrow 6PCl_3$	$+ 6Cl_2$	$+ P_4O_{10}$
مول اولیه:	0/2	0	0	0
مول نهایی:	$0/2 - 10x$	$6x$	$\underbrace{6x}_{\frac{3}{40}}$	x

$$\overset{2}{\cancel{6}}x = \frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{40} \Rightarrow x = \frac{1}{80}\ mol \Rightarrow \begin{cases} \text{مول } POCl_3 = 0/2 - 10x = \frac{16}{80} - \frac{10}{80} = \frac{6}{80} = \frac{3}{40} = 0/075 \\ \text{مول } PCl_3 = 6x = 0/075 \\ \text{مول } Cl_2 = 6x = 0/075 \end{cases}$$

گام پنجم: درصد حجمی PCl_3 را در بین گازها به دست می‌آوریم.

نکته در یک مخلوط گازی، درصد حجمی گازها با درصد مولی آن‌ها برابر است.

$$\text{درصد حجمی } PCl_3 = \text{درصد مولی } PCl_3 = \frac{\text{مول } PCl_3}{\text{مول } PCl_3 + \text{مول } Cl_2 + \text{مول } POCl_3} \times 100$$

$$= \frac{0/075}{3 \times 0/075} \times 100 = \frac{1}{3} \times 100 \simeq \%33/33$$

تست و پاسخ ۹۰

کدام مورد درست است؟ $(Al = 27\ g.mol^{-1})$

۱) ظرفیت گرمایی ۵ لیتر گاز اکسیژن $(c = 0/9\ J.g^{-1}.^\circ C^{-1})$ با چگالی $1/5\ g.L^{-1}$ برابر با $7/65\ J.^\circ C^{-1}$ است.

۲) علامت ΔH واکنش تبدیل گرافیت به الماس، مانند علامت ΔH فرایند انحلال کلسیم کلرید در آب است.

۳) در دمای ثابت، انرژی پتانسیل واکنش‌دهنده‌ها و فراورده‌های یک واکنش، تفاوت چندانی با یکدیگر ندارد.

۴) اگر ΔH واکنش موازنه‌شدهٔ ترمیت، -810 کیلوژول باشد، از مصرف هر گرم آلومینیم در این واکنش، ۱۵ کیلوژول گرما آزاد می‌شود.

پاسخ: گزینهٔ ۴

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ تشریحی بررسی گزینه‌ها:

۱

نکته بین ظرفیت گرمایی (C) و گرمای ویژهٔ (c) یک ماده رابطهٔ زیر برقرار است:

ظرفیت گرمایی ← $C = mc$ ← گرمای ویژه
جرم

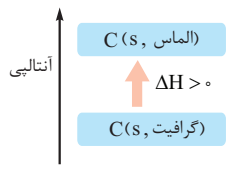
$$\text{ظرفیت گرمایی} = \underbrace{(۵\text{L} \times \frac{۱/۵\text{g}}{۱\text{L}})}_{\text{جرم}} \times ۰/۹\,\text{J.g}^{-۱}.^{\circ}\text{C}^{-۱} = ۶/۷۵\,\text{J}.^{\circ}\text{C}^{-۱}$$

۲

نکته مهم‌ترین فرایندهای گرماگیر و گرماده در جدول زیر آورده شده است:

فرایندهای گرماگیر ($\Delta H > ۰$)	فرایندهای گرماده ($\Delta H < ۰$)
۱) تغییر حالت‌های فیزیکی ذوب، تبخیر و تصعید (فرازش)	۱) همهٔ واکنش‌های سوختن (مانند سوختن گاز هیدروژن، کربن، هیدروکربن‌ها و ...)
۲) واکنش فتوسنتز: $۶\,CO_۲(g) + ۶\,H_۲O(l) \rightarrow C_۶H_{۱۲}O_۶(s) + ۶\,O_۲(g)$	۲) واکنش ترمیت: $۲Al(s) + Fe_۲O_۳(s) \rightarrow Al_۲O_۳(s) + ۲Fe(l)$
۳) انحلال آمونیوم نیترات در آب: $NH_۴NO_۳(s) \xrightarrow{\text{در آب}} NH_۴^+(aq) + NO_۳^-(aq)$	۳) واکنش فلزهای گروه اول با گاز کلر: $۲M(s) + Cl_۲(g) \rightarrow ۲MCl(s)$ (M: گروه اول)
۴) تجزیهٔ $N_۲O_۴$ به $NO_۲$: $N_۲O_۴(g) \rightarrow ۲NO_۲(g)$	۴) انحلال کلسیم کلرید در آب: $CaCl_۲(s) \xrightarrow{\text{در آب}} Ca^{۲+}(aq) + ۲Cl^-(aq)$
۵) تبدیل گرافیت به الماس: $C(s, \text{گرافیت}) \rightarrow C(s, \text{الماس})$	۵) تشکیل HCl از $H_۲$ و $Cl_۲$: $H_۲(g) + Cl_۲(g) \rightarrow ۲HCl(g)$
۶) تولید اوزون از گاز اکسیژن: $۳\,O_۲(g) \rightarrow ۲\,O_۳(g)$	۶) تشکیل $NH_۳$ از $H_۲$ و $N_۲$ (فرایند هابر): $N_۲(g) + ۳H_۲(g) \rightarrow ۲NH_۳(g)$
۷) تشکیل NO از $N_۲$ و $O_۲$: $N_۲(g) + O_۲(g) \rightarrow ۲NO(g)$	۷) تشکیل آمونیاک از هیدرازین و هیدروژن: $N_۲H_۴(g) + H_۲(g) \rightarrow ۲NH_۳(g)$
۸) تشکیل $N_۲H_۴$ (هیدرازین) از $H_۲$ و $N_۲$: $N_۲(g) + ۲H_۲(g) \rightarrow N_۲H_۴(g)$	۸) تجزیهٔ هیدروژن پراکسید: $۲H_۲O_۲(l) \rightarrow ۲H_۲O(l) + O_۲(g)$
۹) تشکیل گاز هیدروژن یدید از گاز هیدروژن و ید جامد: $H_۲(g) + I_۲(s) \rightarrow ۲HI(g)$	۹) واکنش گازهای CO و NO: $۲CO(g) + ۲NO(g) \rightarrow ۲CO_۲(g) + N_۲(g)$
	۱۰) تشکیل گاز هیدروژن یدید از گاز هیدروژن و ید گازی: $H_۲(g) + I_۲(g) \rightarrow ۲HI(g)$

الماس سطح انرژی بالاتری نسبت به گرافیت دارد؛ بنابراین تبدیل گرافیت به الماس یک واکنش گرماگیر ($\Delta H > ۰$) است، در حالی‌که انحلال کلسیم کلرید در آب، فرایندی گرماده ($\Delta H < ۰$) می‌باشد.



۳ در دمای ثابت، انرژی گرمایی واکنش‌دهنده‌ها و فراورده‌ها، تفاوت چندانی با یکدیگر ندارد، اما انرژی پتانسیل مواد با هم متفاوت است. گرمای مبادله‌شده در واکنش شیمیایی نیز به دلیل همین تفاوت انرژی پتانسیل واکنش‌دهنده‌ها و فراورده‌ها است.

۴ معادلهٔ واکنش ترمیت به صورت مقابل است: $۲Al + Fe_۲O_۳ \rightarrow Al_۲O_۳ + ۲Fe \quad \Delta H = -۸۱۰\,kJ$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

روش اول: استفاده از کسر تبدیل:

$$1\,g\,Al\times\frac{1\,mol\,Al}{27\,g\,Al}\times\frac{810\,kJ}{2\,mol\,Al}=15\,kJ$$

روش دوم: استفاده از کسر تناسب:

$$\underbrace{\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی}\times\text{ضریب}}}_{Al}=\frac{Q}{|\Delta H|}\Rightarrow\frac{1}{2\times27}=\frac{Q}{810}\Rightarrow Q=15\,kJ$$

تست و پاسخ ۹۱

۳۰۰ میلی‌لیتر باریم هیدروکسید با مخلوطی از آمونیوم کلرید و هیدروکلریک اسید مطابق معادله‌های زیر واکنش می‌دهد. اگر طی این فرایند، ۶/۸ میلی‌گرم آمونیاک و ۲۴۹/۶ میلی‌گرم باریم کلرید تولید شود، pH محلول باریم هیدروکسید اولیه کدام است؟ $(Ba=137, Cl=35/5, N=14, H=1: g.mol^{-1})$

$$Ba(OH)_2(aq)+NH_4Cl(aq)\rightarrow BaCl_2(aq)+NH_3(g)+H_2O(l)$$
$$Ba(OH)_2(aq)+HCl(aq)\rightarrow BaCl_2(aq)+H_2O(l)$$

(معادلهٔ واکنش‌ها موازنه شوند.)

۱) ۱۱/۹ ۲) ۱۲ ۳) ۱۲/۳ ۴) ۱۲/۷

پاسخ: گزینهٔ ۱

خودت حل کنی بهتره با کمک جرم آمونیاک تولیدشده، تعداد مول $Ba(OH)_2$ مصرفی و $BaCl_2$ تولیدی در واکنش اول رو به دست بیار! با توجه به مقدار کل $BaCl_2$ تولیدشده، مقدار $BaCl_2$ تولیدی در واکنش دوم نیز به دست می‌آید. *این‌بوری می‌تونی* تعداد مول $Ba(OH)_2$ مصرف‌شده در واکنش دوم را هم حساب کنی! در آخر با توجه به حجم محلول و تعداد کل مول $Ba(OH)_2$، غلظت OH^- و pH محلول را محاسبه کن!

پاسخ تشریحی **گام اول:** به کمک جرم NH_3 تولیدشده در واکنش اول، تعداد مول $BaCl_2$ تولیدی و $Ba(OH)_2$ مصرفی در این واکنش را حساب می‌کنیم:

$$Ba(OH)_2+2NH_4Cl\rightarrow BaCl_2+2NH_3+2H_2O$$

$$\underbrace{\frac{\text{مول}}{\text{ضریب}}}_{Ba(OH)_2}=\underbrace{\frac{\text{مول}}{\text{ضریب}}}_{BaCl_2}=\underbrace{\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی}\times\text{ضریب}}}_{NH_3}\Rightarrow\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{\overset{0/2}{\cancel{6/8}}\times10^{-3}}{\underset{1}{\cancel{2}\times17}}\Rightarrow x=y=2\times10^{-4}\,mol$$

گام دوم: به کمک مقدار کل $BaCl_2$ تولیدشده در دو واکنش و مقدار $BaCl_2$ تولیدشده، در واکنش اول، تعداد مول $BaCl_2$ تولیدشده در واکنش دوم را حساب کرده و به کمک آن، تعداد مول $Ba(OH)_2$ مصرفی در واکنش دوم را به دست می‌آوریم:

$$\text{جرم مولی } BaCl_2=137+2(35/5)=208\,g.mol^{-1}$$

$$\text{تعداد کل مول } BaCl_2 \text{ تولیدی}=249/6\times10^{-3}\,g\times\frac{1\,mol}{208\,g}=1/2\times10^{-3}\,mol$$

$$\text{تعداد مول } BaCl_2 \text{ تولیدی در واکنش دوم}=\text{تعداد کل مول } BaCl_2 \text{ تولیدی} - \text{تعداد مول } BaCl_2 \text{ تولیدی در واکنش اول}$$
$$=1/2\times10^{-3}-\underbrace{2\times10^{-4}}_{0/2\times10^{-3}}=10^{-3}$$

$$Ba(OH)_2+2HCl\rightarrow BaCl_2+2H_2O$$

$$\underbrace{\frac{\text{مول}}{\text{ضریب}}}_{Ba(OH)_2}=\underbrace{\frac{\text{مول}}{\text{ضریب}}}_{BaCl_2}\Rightarrow\frac{x}{1}=\frac{10^{-3}}{1}\Rightarrow x=10^{-3}\,mol\,Ba(OH)_2$$

گام سوم: به کمک تعداد کل مول $Ba(OH)_2$ و حجم محلول، غلظت OH^- و سپس غلظت H^+ و pH محلول را حساب می‌کنیم:

$$\text{تعداد کل مول } Ba(OH)_2=\underbrace{2\times10^{-4}}_{0/2\times10^{-3}}+10^{-3}=1/2\times10^{-3}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

تکنیک در معادلهٔ موازنه‌شدهٔ هر دو واکنش، ضریب $BaCl_2$ و $Ba(OH)_2$ با هم برابر است؛ بنابراین می‌توان گفت مجموع تعداد مول $Ba(OH)_2$ مصرفی در هر دو واکنش با مجموع تعداد مول $BaCl_2$ تولیدی در هر دو واکنش برابر است، یعنی اصلاً نیازی نبود از جرم آمونیاک استفاده کنیم و تعداد مول $Ba(OH)_2$ مصرف‌شده در واکنش‌ها را جداگانه به دست آوریم:

$$\underset{x\,mol}{Ba(OH)_2} + 2NH_4Cl \rightarrow \underset{x\,mol}{BaCl_2} + 2NH_3 + 2H_2O$$

$$\underset{y\,mol}{Ba(OH)_2} + 2HCl \rightarrow \underset{y\,mol}{BaCl_2} + 2H_2O$$

$$\text{مول } Ba(OH)_2 \text{ مصرفی} = \underbrace{\text{مول } BaCl_2 \text{ تولیدی}}_{249/6\times10^{-3}\,g\times\frac{1\,mol}{208\,g}=1/2\times10^{-3}\,mol} = x + y$$

$$\text{تعداد مول } OH^- = 2\times \text{تعداد مول } Ba(OH)_2 = 2\times 1/2\times10^{-3} = 2/4\times10^{-3}$$

$$\left[OH^-\right] = \frac{2/4\times10^{-3}\,mol}{0/3\,L} = 8\times10^{-3}\,mol.L^{-1}$$

$$\left[H^+\right] = \frac{10^{-14}}{\left[OH^-\right]} = \frac{10^{-14}}{8\times10^{-3}} = \frac{1}{8}\times10^{-11}$$

$$pH = -\log\left[H^+\right] = -\log\left(\frac{1}{8}\times10^{-11}\right) = 11 - \log\left(\frac{1}{8}\right) = 11 + \log 8$$

$$= 11 + 3\underbrace{\log 2}_{0/3} = 11/9$$

تست و پاسخ ۹۲

با توجه به ساختار چهار ترکیب داده‌شده، کدام موارد زیر درست است؟ $(H=1, C=12, N=14, O=16 : g.mol^{-1})$

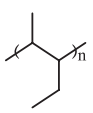
الف) تفاوت جرم مولی الکل حاصل از آبکافت ترکیب (۴) و اوره، با جرم مولی پروپین برابر است.

ب) نام مونومر سازندهٔ ترکیب (۱)، ۱ـ پنتن است.

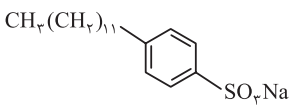
پ) فرمول مولکولی مونومرهای سازندهٔ ترکیب (۳)، $C_4H_{12}N_2$ و $C_4H_6O_4$ است.

ت) شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی ترکیب (۲)، با شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی گوگرد تری‌اکسید برابر است.

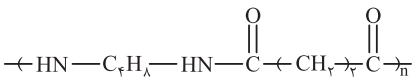
ث) تفاوت شمار اتم‌های هیدروژن در فرمول شیمیایی ترکیب (۲) و اسید چرب سازندهٔ ترکیب (۴) برابر ۷ است.



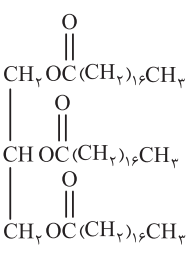
ترکیب (۱)



ترکیب (۲)



ترکیب (۳)



ترکیب (۴)

۱) پ ـ ت ـ ث ۲) الف ـ ب ـ پ ۳) پ ـ ث ۴) ب ـ ت

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ تشریحی عبارت‌های «پ» و «ث» درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

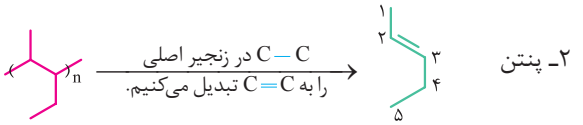
الف) فرمول مولکولی الکل حاصل از آبکافت استرهای سه‌عاملی (مانند ترکیب ۴)، $C_3H_8O_3$ است. از طرفی، فرمول مولکولی اوره و پروپین به ترتیب به صورت $CO(NH_2)_2$ و C_3H_4 است.

$$\text{جرم‌مولی } C_3H_8O_3 - \text{جرم‌مولی } CO(NH_2)_2 = 92 - 60 = 32\,g$$

$$\text{جرم‌مولی } C_3H_4 = 40\,g$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

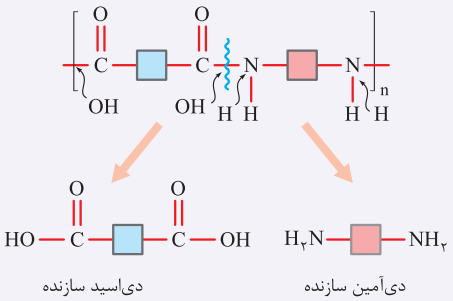
ب) مونومر سازندهٔ ترکیب (۱)، ۲ـ پنتن است و نه ۱ـ پنتن!

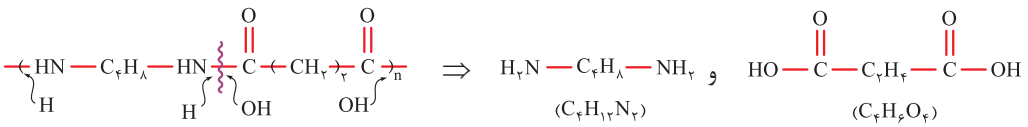


۲ـ پنتن

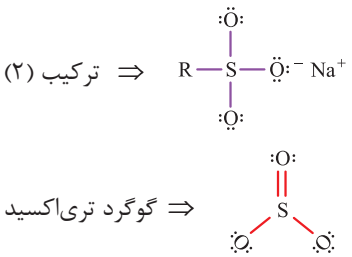
پ)

نکته برای تعیین دی‌اسید و دی‌آمین سازندهٔ یک پلی‌آمید، پیوند بین اتم‌های کربن و نیتروژن را شکسته و به صورت زیر عمل می‌کنیم:

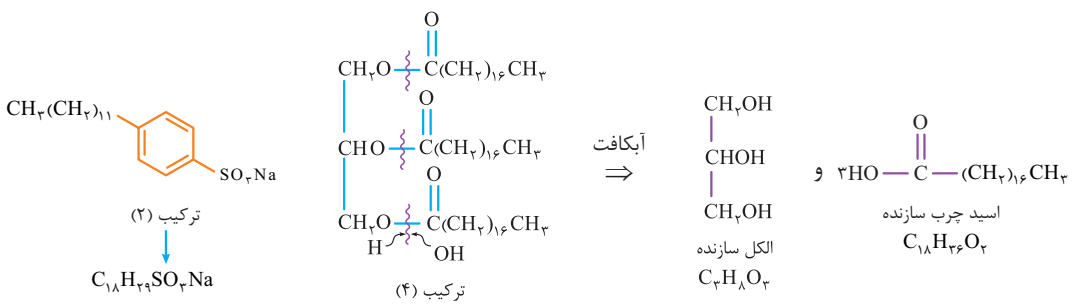




ت) ترکیب (۲) دارای ۹ جفت‌الکترون ناپیوندی است، درحالی‌که گوگرد تری‌اکسید (SO_3)، ۸ جفت‌الکترون ناپیوندی دارد.



ث) فرمول شیمیایی ترکیب (۲) و اسید چرب سازندهٔ ترکیب (۴) به ترتیب $C_{18}H_{29}SO_3Na$ و $C_{18}H_{36}O_2$ است؛ یعنی تفاوت شمار اتم‌های هیدروژن آن‌ها برابر $36 - 29 = 7$ است.



تست و پاسخ ۹۳

حساسیت یک pH سنج دیجیتال ۰/۱ واحد pH است. اگر ۵۰۰ میلی‌لیتر محلول هیدروسیانیک اسید با pH = ۴/۷ در اختیار داشته باشیم، در دمای ثابت، حداقل چند لیتر گاز هیدروژن سیانید (در شرایط STP) در آن حل کنیم تا تغییر pH توسط این pH سنج مشاهده شود؟ (از تغییر حجم محلول بر اثر اضافه‌کردن هیدروژن سیانید صرف نظر شود، ثابت یونش هیدروسیانیک اسید برابر 5×10^{-10} مول بر لیتر است و $\log 2 = 0/3$)

یعنی pH محلول، ۰/۱ واحد تغییر کند. (کم شود.)

۱) ۵/۰۴ ۲) ۶/۱۶ ۳) ۱۰/۰۸ ۴) ۱۲/۳۲

پاسخ: گزینهٔ ۱

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

خودت حل کنی بهتره با حل‌کردن HCN در محلول، غلظت H^+ افزایش یافته و pH محلول کاهش می‌یابد. از روی pH محلول اولیه و نهایی، غلظت محلول‌ها را به دست بیار و از روی تفاوت غلظت محلول‌ها و حجم آن‌ها، به حجم HCN اضافه‌شده برس!

پاسخ تشریحی **گام اول:** به کمک pH محلول اولیه، غلظت مولی محلول اولیه را حساب می‌کنیم:

$$[H^+] = ۱۰^{-pH} = ۱۰^{-۴/۷} = ۱۰^{-۵} \times \underbrace{۱۰^{۰/۳}}_{۲} = ۲\times ۱۰^{-۵}$$

$$K_a = \frac{[H^+]^۲}{M-[H^+]} \xrightarrow{\text{اسید HCN بسیار ضعیفی است.}} K_a \simeq \frac{[H^+]^۲}{M}$$

$$۵\times ۱۰^{-۱۰} = \frac{(۲\times ۱۰^{-۵})^۲}{M} \Rightarrow M_۱ = \frac{۴}{۵} = ۰/۸\,mol.L^{-۱}$$

گام دوم: به کمک pH نهایی، غلظت مولی محلول نهایی را به دست می‌آوریم.

با افزودن HCN به محلول، غلظت H^+ افزایش یافته و pH محلول کاهش می‌یابد.

با توجه به این‌که می‌خواهیم pH محلول، ۰/۱ واحد تغییر کند، pH محلول نهایی برابر با $۴/۶ = ۰/۱ - ۴/۷$ است.

$$[H^+] = ۱۰^{-pH} = ۱۰^{-۴/۶} = \frac{۱۰^{-۴}}{۱۰^{۰/۶}} = \frac{۱۰^{-۴}}{(۱۰^{۰/۳})^۲} = \frac{۱۰^{-۴}}{۴}$$

$$K_a = \frac{[H^+]^۲}{M} \Rightarrow ۵\times ۱۰^{-۱۰} = \frac{\frac{۱۰^{-۸}}{۱۶}}{M_۲} \Rightarrow M_۲ = \frac{۵}{۴} = ۱/۲۵\,mol.L^{-۱}$$

گام سوم: با توجه به تغییر غلظت محلول و حجم آن، حجم HCN اضافه‌شده را حساب می‌کنیم:

$$\text{حجم HCN اضافه‌شده} = (۱/۲۵ - ۰/۸)\frac{mol}{L} \times ۰/۵\,L \times \frac{۲۲/۴\,L}{۱\,mol}$$

$$= ۰/۴۵ \times ۰/۵ \times ۲۲/۴ = \frac{۹}{۲۰} \times \frac{۱}{۲} \times ۲۲/۴ = ۹ \times ۰/۵۶ = ۵/۰۴\,L$$

تست و پاسخ ۹۴

با توجه به سلول‌ها و پتانسیل‌های کاهشی داده‌شده، چند مورد از مطالب زیر، درست است؟

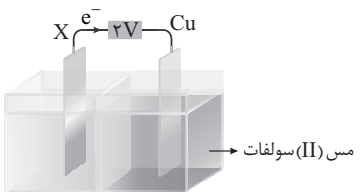
$E^\circ(Zn^{۲+}/Zn) = -۰/۷۶V$

$E^\circ(Cu^{۲+}/Cu) = ۰/۳۴V$

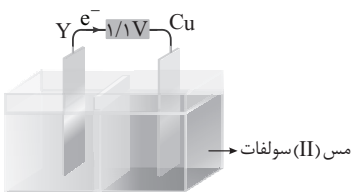
$E^\circ(Sn^{۲+}/Sn) = -۰/۱۴V$

$E^\circ(Fe^{۲+}/Fe) = -۰/۴۴V$

$E^\circ(Al^{۳+}/Al) = -۱/۶۶V$



(۱)



(۲)

- **قدرت کاهندگی فلز Y کم‌تر از X بوده و برخلاف فلز X، جزء فلزهای واسطه است.**
- **به ازای شمار الکترون‌های مبادله‌شدهٔ یکسان، تغییر جرم تیغهٔ آندی در سلول (۲) بیشتر است.**
- **ولتاژ سلول گالوانی استاندارد حاصل از الکترودهای X و Y برابر ۰/۹ ولت است.**
- **مجموع ضرایب مواد در معادلهٔ واکنش کلی انجام‌شده در سلول (۱) بیشتر از سلول (۲) است.**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۴

نکته ولتاژ سلول‌های گالوانی از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$emf = E^\circ(\text{کاتد}) - E^\circ(\text{آند})$$

هر چه ولتاژ یک سلول گالوانی بیشتر باشد، تفاوت قدرت کاهندگی آند و کاتد آن سلول بیشتر است و الکترودهای آندی و کاتدی در سری الکتروشیمیایی، فاصلهٔ بیشتری از هم دارند.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ تشریحی همهٔ عبارت‌های داده‌شده درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

- در سلول‌های گالوانی، جهت حرکت الکترون‌ها در مدار بیرونی از آند به کاتد است؛ پس در هر دو سلول داده‌شده، فلز مس نقش کاتد را دارد.

از اون‌جایی که ولتاژ سلول (۱) بیشتر از سلول (۲) است، می‌توان فهمید که X کاهنده‌تر از Y است، *اما برای این‌که بدونیم*، X و Y چه فلزهایی هستند، باید E° آن‌ها را حساب می‌کنیم:

$$emf = E^\circ(\text{کاتد}) - E^\circ(\text{آند})$$

(۱) سلول: $۲ = ۰/۳۴ - E^\circ(X) \Rightarrow E^\circ(X) = -۱/۶۶\,V \Rightarrow$ X همان فلز آلومینیم (Al) است.

(۲) سلول: $۱/۱ = ۰/۳۴ - E^\circ(Y) \Rightarrow E^\circ(Y) = -۰/۷۶\,V \Rightarrow$ Y همان فلز روی (Zn) است.

فلز آلومینیم $(_{۱۳}Al)$ جزء فلزهای اصلی دستهٔ p و فلز روی $(_{۳۰}Zn)$، جزء فلزهای واسطهٔ دستهٔ d است.

- فهمیدیم که آند سلول (۱)، آلومینیم و آند سلول (۲)، روی است.

$$\begin{matrix}(۱)\ \text{نیم‌واکنش آندی سلول}: Al \rightarrow Al^{۳+} + ۳e^- \\ (۲)\ \text{نیم‌واکنش آندی سلول}: Zn \rightarrow Zn^{۲+} + ۲e^-\end{matrix} \xrightarrow[\text{الکترون‌ها}]{\text{برابرکردن شمار}} \begin{cases} ۲Al \rightarrow ۲Al^{۳+} + ۶e^- \\ ۳Zn \rightarrow ۳Zn^{۲+} + ۶e^- \end{cases}$$

به ازای مبادلهٔ ۶ مول الکترون، ۲ مول Al و ۳ مول Zn مصرف می‌شود. با توجه به این‌که $_{۱۳}Al$ در دورهٔ سوم و $_{۳۰}Zn$ در دورهٔ چهارم قرار دارد، *می‌شه* فهمید که جرم ۳ مول Zn قطعاً بیشتر از جرم ۲ مول Al است.

- X و Y به ترتیب آلومینیم و روی هستند؛ بنابراین خواهیم داشت:

$$emf = E^\circ(\text{کاتد}) - E^\circ(\text{آند}) = E^\circ(Zn^{۲+}/Zn) - E^\circ(Al^{۳+}/Al) = -۰/۷۶ - (-۱/۶۶) = ۰/۹\,V$$

- معادله‌های واکنش‌های انجام‌شده در دو سلول به صورت زیر است:

(۱) سلول: $۲Al + ۳Cu^{۲+} \rightarrow ۲Al^{۳+} + ۳Cu$ مجموع ضرایب $= ۱۰$

(۲) سلول: $Zn + Cu^{۲+} \rightarrow Zn^{۲+} + Cu$ مجموع ضرایب $= ۴$

تست و پاسخ ۹۵

$SO_۳$

$NH_۳$

کدام مورد دربارهٔ دو ترکیب گوگرد تری‌اکسید (X) و آمونیاک (Y) درست است؟

۱) بار جزئی اتم مرکزی در هر دو، $+\delta$ است.

۲) مولکول X قطبی و مولکول Y، ناقطبی است.

۳) هر دو مولکول، چهاراتمی و شکل هندسی آن‌ها یکسان است.

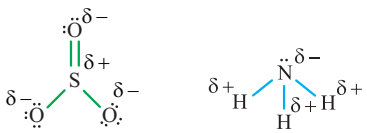
۴) کاغذ pH در محلول آبی X، به رنگ سرخ درمی‌آید.

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ تشریحی گوگرد تری‌اکسید $(SO_۳)$ یک اکسید نافلزی و اسیدی است؛ کاغذ pH در محلول‌های اسیدی به رنگ سرخ درمی‌آید.

بررسی سایر گزینه‌ها:

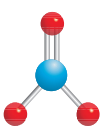
۱) مقایسهٔ خصلت نافلزی عنصرهای اکسیژن، نیتروژن، گوگرد و هیدروژن به صورت $O > N > S > H$ است؛ بنابراین در $SO_۳$، اتم گوگرد بار جزئی مثبت و در $NH_۳$، اتم نیتروژن، بار جزئی منفی دارد.



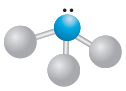
۲) *برعکس گفته!* مولکول $SO_۳$ ناقطبی و مولکول $NH_۳$، قطبی است.

۳) شکل هندسی $SO_۳$ با $NH_۳$ متفاوت است.

$SO_۳$ سه‌ضلعی مسطح



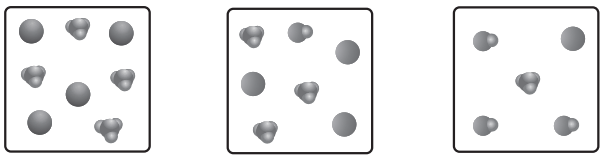
$NH_۳$ هرمی



SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

تست و پاسخ ۹۶

محلول‌های زیر از انحلال مول‌های مساوی از اسیدهای HA، HB و HX در مقادیر یکسان آب $25^\circ C$ به دست آمده‌اند. کدام موارد زیر درست است؟ (حجم همهٔ محلول‌ها ۲۰۰ میلی‌لیتر است.)



الف) pH محلول HA، بیشتر از pH محلول HX است.

ب) اگر مقدار ثابت یونش HX، برابر ۰/۱ باشد، هر ذرهٔ نشان داده شده در محلول آن، هم‌ارز ۰/۰۶ مول است.

پ) درجهٔ یونش اسید HB، سه برابر درجهٔ یونش اسید HX است.

ت) با افزودن مقدار یکسانی آب به محلول‌های HA، HX و pH آن‌ها به یک میزان تغییر می‌کند.

۱) الف ـ ت ۲) ب ـ پ ۳) الف ـ پ ۴) ب ـ ت

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ تشریحی عبارت‌های «ب» و «پ» درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

الف) اسید HA به طور کامل به یون‌های H_3O^+ (●) و A^- (●) یونیده شده و اسیدی قوی است. درحالی‌که در محلول HX، علاوه بر یون‌ها، مولکول‌های اسید یونیده‌نشده ● نیز وجود دارد؛ یعنی اسید HX، یک اسید ضعیف است. در شرایط یکسان، pH محلول اسیدهای قوی، کم‌تر از pH محلول اسیدهای ضعیف است.

ب) در محلول HX، ۱ ذرهٔ H_3O^+، ۱ ذرهٔ X^- و ۳ ذرهٔ HX وجود دارد.

فرض می‌کنیم هر ذره معادل a مول باشد؛ با توجه به رابطهٔ ثابت یونش خواهیم داشت:

$$\text{حجم محلول} = ۲۰۰\,mL = ۰/۲\,L$$

$$K_a = \frac{[H_3O^+]^2}{[HX]} \Rightarrow ۰/۱ = \frac{(\frac{۱\times a}{۰/۲})^2}{(\frac{۳\times a}{۰/۲})} \Rightarrow ۰/۱ = \frac{a^2}{۰/۲\times ۳a} \Rightarrow a = ۰/۰۶$$

پ)

$$\text{تعداد ذرات اسید اولیه} = \underbrace{\text{تعداد ذرات اسید یونیده‌شده}}_{=\text{تعداد یون } H_3O^+} + \text{تعداد ذرات اسید باقی‌مانده}$$

$$\text{درجهٔ یونش} = \frac{\text{تعداد مولکول‌های اسید یونیده‌شده}}{\text{تعداد کل مولکول‌های اسید حل‌شده}} \Rightarrow \begin{cases} \alpha(HB) = \frac{۳}{۳+۱} = \frac{۳}{۴} \\ \alpha(HX) = \frac{۱}{۱+۳} = \frac{۱}{۴} \end{cases}$$

ت) با توجه به این‌که HA، اسید قوی و HX، اسید ضعیف است، رقیق‌کردن آن‌ها به یک میزان، تأثیر یکسانی بر pH آن‌ها ندارد. (pH محلول اسید قوی HA نسبت به اسید ضعیف HX، بیشتر تغییر می‌کند.)

تکنیک در این‌جا فقط با بررسی‌های عبارت‌های «الف» و «ت»، می‌شد به جواب سؤال رسید و اصلاً نیازی به بررسی عبارت‌های «ب» و «پ» که محاسباتی هستند، نبود!

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

تست و پاسخ ۹۷

با توجه به واکنش‌های داده‌شده، چند مورد از مطالب زیر درست است؟ (A فراوردهٔ اصلی واکنش (I) است.)

I) اتن $+ KMnO_4 \rightarrow A$

II) اتن $+ H_2O \xrightarrow{x} B$

III) اتن $+ HCl \rightarrow C$

IV) $B +$ استیک اسید $\xrightarrow{y} D + H_2O$

- x و y، هر دو سولفوریک اسید هستند که به عنوان کاتالیزگر در واکنش شرکت نکرده و دست‌نخورده باقی می‌مانند.
- C، کلرواتان می‌باشد که ترکیبی سیرشده است و به عنوان افشانهٔ بی‌حس‌کننده استفاده می‌شود.
- واکنش‌های (I)، (II) و (III) برخلاف واکنش (IV)، از نوع اکسایش ـ کاهش هستند.
- D حلال چسب است که چهارمین عضو خانوادهٔ کربوکسیلیک اسیدها با زنجیرهٔ هیدروکربنی سیرشده، می‌تواند ایزومر آن باشد.
- A می‌تواند به عنوان مونومر در واکنش تولید پلی‌استر استفاده شود.

۱) ۵ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس‌نامه

گاز اتن یکی از مهم‌ترین خوراک‌ها در صنایع پتروشیمی است که می‌توان از آن، مواد آلی گوناگون پرمصرف و ارزشمند تهیه کرد.

کاربرد فراوردهٔ هدف	فراوردهٔ هدف	فرم نوشتاری سنتز	معادلهٔ موزانه‌شدهٔ سنتز
سوخت	گاز اتان (C_2H_6)	گاز اتان → گاز هیدروژن + گاز اتن	$C_2H_4(g) + H_2(g) \xrightarrow{Ni(s)} C_2H_6(g)$
ضدعفونی‌کننده	اتانول (C_2H_6O)	اتانول → آب + گاز اتن	$C_2H_4(g) + H_2O(l) \xrightarrow{H_2SO_4} C_2H_6O(l)$
افشانهٔ بی‌حس‌کنندهٔ موضعی	کلرو اتان (C_2H_5Cl)	کلرو اتان → گاز هیدروژن کلرید + گاز اتن	$C_2H_4(g) + HCl(g) \rightarrow C_2H_5Cl(g)$
سازندهٔ اصلی برخی لوازم پلاستیکی	پلی اتن $-(C_2H_4)-_n$	پلی‌اتن → ... + اتن + اتن	$nC_2H_4(g) \xrightarrow{\text{دما و فشار}} -(C_2H_4)-_n(s)$
مادهٔ اولیه برای تهیهٔ PET	اتیلن گلیکول ($C_2H_6O_2$)	اتیلن گلیکول → پتاسیم پرمنگنات + اتن + ...	$C_2H_4(g) + KMnO_4(s) \xrightarrow{\text{اکسایش}} C_2H_6O_2(l) + ...$

برای سنتز یک استر می‌توان از واکنش یک اسید آلی (کربوکسیلیک اسید) با یک الکل در شرایط مناسب استفاده کرد:

$$\underset{\text{اسید آلی}}{RCOOH} + \underset{\text{الکل}}{R'OH} \rightleftharpoons^{H_2SO_4} \underset{\text{استر}}{RCOOR'} + \underset{\text{آب}}{H_2O}$$

مثال: اتیل استات (اتیل اتانوات) که به عنوان حلال چسب، کاربرد دارد، از واکنش اتانول و اتانوئیک اسید (استیک اسید) تولید می‌شود.

$$CH_3COOH + HO-CH_2CH_3 \xrightarrow{H_2O} CH_3COOCH_2CH_3 + H_2O$$

$$\underset{\text{استیک اسید}}{C_2H_4O_2} + \underset{\text{اتانول}}{C_2H_6O} \rightarrow \underset{\text{اتیل استات}}{C_4H_8O_2} + \underset{\text{آب}}{H_2O}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ تشریحی به‌جز عبارت اول، بقیهٔ عبارت‌ها درست‌اند.

ابتدا کامل‌شدهٔ واکنش‌ها را ببینیم:

I) $C_2H_4 + KMnO_4 \rightarrow \underset{\text{اتیلن‌گلیکول}}{C_2H_6O_2} +$ فراورده‌های دیگر

II) $C_2H_4 + H_2O \xrightarrow{H_2SO_4} \underset{\text{اتانول}}{C_2H_6O}$

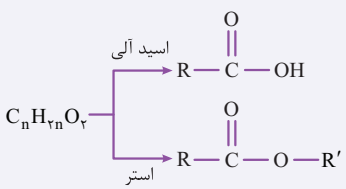
III) $C_2H_4 + HCl \rightarrow \underset{\text{کلرو اتان}}{C_2H_5Cl}$

IV) $C_2H_6O + C_2H_4O_2 \rightarrow \underset{\text{اتیل استات}}{C_4H_8O_2} + H_2O$

بررسی عبارت‌ها:

- کاتالیزگر واکنش اتن با آب و هم‌چنین واکنش تولید استر از (الکل و اسید) سولفوریک اسید (H_2SO_4) است، اما دقت کنید که کاتالیزگرها در واکنش شرکت می‌کنند، ولی در پایان واکنش باقی می‌مانند.
- فراوردهٔ واکنش اتن و گاز هیدروژن کلرید، کلرو اتان (C_2H_5Cl) است. همهٔ پیوندها در این ترکیب، یگانه بوده و به همین دلیل، سیرشده محسوب می‌شود. در ضمن، کلرو اتان، به عنوان افشانهٔ بی‌حس‌کنندهٔ موضعی کاربرد دارد.
- در واکنش‌های (I)، (II) و (III)، حداقل عدد اکسایش یک عنصر تغییر می‌کند، ولی در واکنش (IV)، عدد اکسایش هیچ عنصری تغییر نمی‌کند.
- D، همان اتیل استات (حلال چسب) با فرمول $C_4H_8O_2$ است. فرمول عمومی کربوکسیلیک اسیدها با زنجیر هیدروکربنی سیرشده به صورت $C_nH_{2n}O_2$ است؛ بنابراین فرمول چهارمین عضو خانوادهٔ کربوکسیلیک اسیدها نیز به صورت $C_4H_8O_2$ می‌باشد.

نکته کربوکسیلیک اسیدها و استرهای هم‌کربن، به شرطی که گروه‌های هیدروکربنی در آن‌ها، گروه آلکیل باشد، ایزومر یکدیگر بوده و فرمول مولکولی آن‌ها به صورت $C_nH_{2n}O_2$ است.



- A همان الکل دوعاملی اتیلن گلیکول است که می‌تواند به عنوان مونومر واکنش تولید پلی‌استر به کار رود.

تست و پاسخ ۹۸

دربارهٔ واکنش: $C_2H_5OH(aq) + MnO_4^-(aq) + H^+(aq) \rightarrow CH_3COOH(aq) + Mn^{2+}(aq) + H_2O(l)$ پس از موازنه، چند مورد از مطالب زیر، درست است؟

- **ترکیب آلی موجود در واکنش‌دهنده‌ها، خاصیت بازی دارد.**
- **تغییر عدد اکسایش هر اتم منگنز در این واکنش با این تغییر در واکنش اکسایش پارازایلن به ترفتالیک اسید در حضور پتاسیم پرمنگنات، برابر است.**
- **مجموع ضرایب مواد شرکت‌کننده در واکنش برابر ۴۱ است.**
- **ترکیب آلی موجود در فراورده‌ها، قدرت اسیدی بیشتری نسبت به فورمیک اسید دارد.**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۱

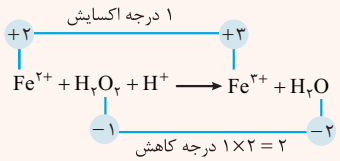
درس‌نامه موازنهٔ واکنش‌ها به روش اکسایش ـ کاهش

به طور کلی برای موازنهٔ واکنش‌های اکسایش ـ کاهش، ابتدا تغییر عدد اکسایش اتم‌ها را حساب می‌کنیم، سپس مقدار تغییر عدد اکسایش گونهٔ کاهنده را ضریب گونهٔ اکسنده و مقدار تغییر عدد اکسایش گونهٔ اکسنده را ضریب گونهٔ کاهنده قرار می‌دهیم و در آخر، با توجه به ضرایبی که معلوم هستند، ضرایب بقیهٔ گونه‌ها را تعیین می‌کنیم.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

مثال: در این واکنش، عدد اکسایش آهن و اکسیژن تغییر کرده است:

$$Fe^{2+} + H_2O_2 + H^+ \rightarrow Fe^{3+} + H_2O$$



چون در سمت چپ معادله، ۲ اتم اکسیژن در H_2O_2 داشتیم، عدد اکسایش آن را در ۲ ضرب کردیم. حالا ۲ (تغییر عدد اکسایش O) را ضریب Fe^{2+} و ۱ (تغییر عدد اکسایش Fe) را ضریب H_2O_2 قرار می‌دهیم:

$$\underline{۲}\ Fe^{2+} + \underline{۱}\ H_2O_2 + \underline{\ }\ H^+ \rightarrow \underline{\ }\ Fe^{3+} + \underline{\ }\ H_2O$$

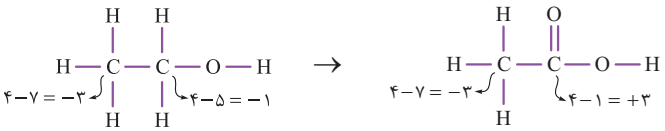
به منظور برابرشدن تعداد اتم‌های Fe و O در دو سمت معادله، ضریب Fe^{3+} و H_2O را برابر با ۲ قرار می‌دهیم:

$$\underline{۲}\ Fe^{2+} + \underline{۱}\ H_2O_2 + \underline{\ }\ H^+ \rightarrow \underline{۲}\ Fe^{3+} + \underline{۲}\ H_2O$$

در آخر، به منظور موازنه‌شدن اتم‌های H و موازنهٔ بار، ضریب H^+ را هم برابر با ۲ قرار می‌دهیم:

$$۲Fe^{2+} + H_2O_2 + ۲H^+ \rightarrow ۲Fe^{3+} + ۲H_2O$$

پاسخ تشریحی فقط عبارت سوم درست است. ابتدا باید معادلهٔ واکنش را موازنه کنیم. در این واکنش، عدد اکسایش کربن و منگنز تغییر می‌کند.



$$Mn + ۴(-۲) = -۱ \rightarrow Mn = +۷$$

$$MnO_4^- \rightarrow Mn^{2+}$$

با انجام واکنش، عدد اکسایش یکی از اتم‌های کربن، ۴ واحد افزایش یافته و عدد اکسایش اتم منگنز، ۵ واحد کاهش یافته است؛ پس در مرحلهٔ اول، باید ضریب MnO_4^- را برابر ۴ و ضریب C_2H_5OH را برابر ۵ قرار دهیم.

$$\underline{۵}\ CH_5OH + \underline{۴}\ MnO_4^- + \underline{\ }\ H^+ \rightarrow \underline{\ }\ CH_3COOH + \underline{\ }\ Mn^{2+} + \underline{\ }\ H_2O$$

به منظور موازنهٔ اتم‌های C، Mn، O و H ضرایب CH_3COOH، Mn^{2+}، H_2O و H^+ به ترتیب باید برابر ۵، ۴، ۱۱ و ۱۲ باشد:

$$۵C_2H_5OH + ۴MnO_4^- + ۱۲H^+ \rightarrow ۵CH_3COOH + ۴Mn^{2+} + ۱۱H_2O$$

بررسی عبارت‌ها:

- ترکیب آلی موجود در واکنش‌دهنده‌ها، الکل اتانول (C_2H_5OH) است که به صورت مولکولی در آب حل می‌شود و یون OH^- ایجاد نمی‌کند؛ بنابراین خاصیت بازی ندارد.
- در اکسایش پارازایلن به ترفتالیک اسید، عدد اکسایش اتم منگنز از +۷ به +۴ می‌رسد، درحالی‌که در این واکنش، عدد اکسایش منگنز از +۷ به +۲ می‌رسد.
- مجموع ضرایب مواد در واکنش برابر با $۴ + ۱۱ + ۴ + ۱۲ + ۵ + ۴ = ۴۱$ است.
- ترکیب آلی موجود در فراورده‌ها، استیک اسید (CH_3COOH) است که قدرت اسیدی کم‌تری نسبت به فورمیک اسید $(HCOOH)$ دارد.

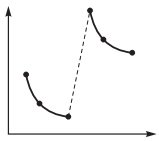
نکته با افزایش شمار اتم‌های کربن، ثابت یونش و قدرت اسیدی کربوکسیلیک اسیدها کاهش می‌یابد.

$$K_a: HCOOH > CH_3COOH$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

تست و پاسخ ۹۹

کدام موارد از مطالب زیر، دربارهٔ شعاع اتمی و یونی عنصرهای دورهٔ دوم و سوم جدول تناوبی، درست است؟



الف) شعاع آنیون از اتم خنثی خود بزرگ‌تر و شعاع کاتیون از اتم خنثی خود، کوچک‌تر است.

ب) در یک دوره، شعاع یک آنیون پایدار از شعاع یک کاتیون پایدار، بزرگ‌تر است.

پ) در یک دوره، بزرگ‌ترین شعاع یونی مربوط به عنصری با آرایش الکترونی لایهٔ ظرفیت ns^2np^5 است.

ت) نمودار داده‌شده را می‌توان به چگالی بار یون‌های پایدار عنصرهای دورهٔ سوم برحسب عدد اتمی آن‌ها نسبت داد.

۱) الف ـ ب ۲) الف ـ پ ـ ت ۳) ب ـ پ ـ ت ۴) ب ـ ت

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ تشریحی عبارت‌های «الف» و «ب» درست‌اند.

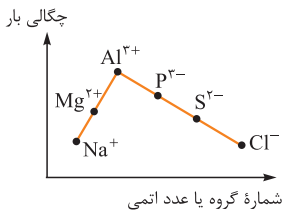
بررسی عبارت‌های نادرست:

پ) در دوره‌های دوم و سوم، بزرگ‌ترین شعاع یونی مربوط به عنصرهای گروه ۱۵ است. آرایش الکترونی عنصرهای گروه ۱۵ به ns^2np^3 ختم می‌شود.

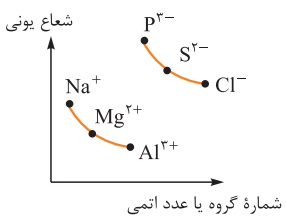
ت) می‌دانیم در مقایسهٔ چگالی بار یون‌ها، اولویت با بار یون است؛ یعنی هر چه مقدار بار یون بیشتر باشد، چگالی بار یون بیشتر است. در ضمن اگر مقدار بار دو یون برابر باشد، یونی که شعاع کم‌تری دارد، چگالی بار آن بیشتر است.

چگالی بار: $Al^{3+} > P^{3-} > Mg^{2+} > S^{2-} > Na^{+} > Cl^{-}$

بنابراین بیشترین چگالی بار یون پایدار در دورهٔ سوم، متعلق به عنصر گروه ۱۳ (آلومینیم) و کم‌ترین آن مربوط به عنصر گروه ۱۷ (کلر) است.



نمودار داده‌شده، در صورت سؤال، در واقع مربوط به مقایسهٔ شعاع یون‌های پایدار عنصرهای دورهٔ سوم است:



تست و پاسخ ۱۰۰

دربارهٔ فرایندهای الکتروشیمیایی انجام‌شده طی خراشیده‌شدن حلبی و آهن گالوانیزه، چند مورد از موارد زیر درست است؟

- در هر دو حالت، رسوب تشکیل‌شده در پایان واکنش‌ها، یکسان است.
- در حلبی خراشیده‌شده، آهن و در آهن گالوانیزهٔ خراشیده‌شده، روی نقش آند را ایفا می‌کند.
- در هر دو حالت، مولکول‌های اکسیژن نقش اکسنده را دارند.
- این فرایندها، در حضور یون هیدرونیوم با سرعت بیشتری انجام می‌شوند.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۳

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

نکته مقایسهٔ حلبی و آهن گالوانیزه:

نوع آهن	آهن گالوانیزه (آهن سفید) (آهن + لایهٔ نازکی از فلز روی)	حلبی (آهن + لایهٔ نازکی از فلز قلع)
نوع حفاظت آهن	فیزیکی + کاتدی	فقط فیزیکی
آند	روی	آهن
نیم‌واکنش اکسایش	$Zn(s) \rightarrow Zn^{2+}(aq) + 2e^-$	$Fe(s) \rightarrow Fe^{2+}(aq) + 2e^-$
کاتد	آهن	قلع
نیم‌واکنش کاهش	$O_2(g) + 2H_2O(l) + 4e^- \rightarrow 4OH^-(aq)$	$O_2(g) + 2H_2O(l) + 4e^- \rightarrow 4OH^-(aq)$
گونهٔ کاهنده	Zn	Fe
گونهٔ اکسنده	O_2	O_2
رسوب تشکیل‌شده در پایان واکنش	روی هیدروکسید ($Zn(OH)_2$)	آهن (III) هیدروکسید ($Fe(OH)_3$)
کاربرد	تانکر آب و کانال کولر	ظروف بسته‌بندی مواد غذایی

پاسخ تشریحی عبارت‌های دوم تا چهارم درست‌اند.

بررسی عبارت‌های اول و چهارم:

عبارت اول: با توجه به این‌که در آهن گالوانیزه، فلز روی و در حلبی خراش دیده، آهن اکسایش می‌یابد؛ با خراش‌دیدن آهن گالوانیزه، رسوب $Zn(OH)_2$ و با خراش‌دیدن حلبی، رسوب $Fe(OH)_3$ تشکیل می‌شود.

عبارت چهارم: از آن‌جا که پتانسیل کاهشی اکسیژن در محیط اسیدی بیشتر است، حضور یون هیدرونیوم باعث افزایش سرعت واکنش‌ها خواهد شد.

تست و پاسخ ۱۰۱

در واکنش تعادلی تولید آمونیاک به روش هابر، افزایش فشار، کاهش دما و خروج مقداری آمونیاک از ظرف واکنش، به ترتیب، تعادل را در کدام جهت جابه‌جا می‌کنند؟

$$N_2(g) + 3H_2(g) \rightleftharpoons 2NH_3(g)$$

۱) رفت ـ رفت ـ رفت
۲) برگشت ـ رفت ـ رفت
۳) رفت ـ برگشت ـ رفت
۴) برگشت ـ رفت ـ برگشت

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ تشریحی معادلهٔ واکنش تولید آمونیاک به روش هابر به صورت زیر است:

$$N_2(g) + 3H_2(g) \rightleftharpoons 2NH_3(g) + Q$$

- با افزایش فشار، تعادل به سمت تعداد مول‌های گازی کم‌تر یعنی در جهت رفت جابه‌جا می‌شود.
- واکنش تولید آمونیاک، گرماده است؛ بنابراین با کاهش دما در جهت رفت جابه‌جا می‌شود.
- با خروج مقداری آمونیاک از ظرف واکنش، تعادل به منظور جبران مقدار آمونیاک، در جهت رفت جابه‌جا می‌شود.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

تست و پاسخ ۱۰۲

در واکنش تعادلی تولید بخار متانول از گازهای کربن مونوکسید و هیدروژن، شرایط به گونه‌ای است که بازده واکنش برابر ۴۰٪ است. اگر در آغاز، یک مول گاز کربن مونوکسید با مقدار لازم (براساس نسبت استوکیومتری) از گاز هیدروژن در یک ظرف دولیتری مخلوط شوند، چند گرم متانول تولید می‌شود و مقدار ثابت تعادل این واکنش به تقریب کدام است؟ $(H=1, C=12, O=16: g.mol^{-1})$

۱) ۳۲ ـ ۰/۴۶ ۲) ۳۲ ـ ۱/۸۵ ۳) ۱۲/۸ ـ ۰/۴۶ ۴) ۱۲/۸ ـ ۱/۸۵

پاسخ: گزینهٔ ۴

نکته بازده درصدی در واکنش‌های تعادلی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\text{بازده درصدی} = \frac{\text{تعداد مول مصرفی واکنش‌دهنده}}{\text{تعداد مول اولیه واکنش‌دهنده}} \times 100$$

پاسخ تشریحی معادلهٔ واکنش انجام‌شده به صورت زیر است:

$$CO(g) + 2H_2(g) \rightleftharpoons CH_3OH(g)$$

مول اولیه: ۱ ۲ ۰

مول تعادلی: $1-x$ $2-2x$ x

$$\text{بازده واکنش: } 40\% \Rightarrow \frac{x}{1} \times 100 = 40 \Rightarrow x = 0/4$$

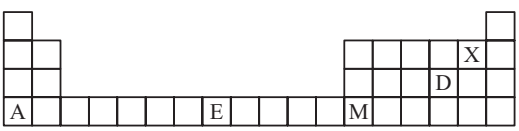
$$\Rightarrow \begin{cases} \text{مول تعادلی } CO = 1-x = 0/6 \\ \text{مول تعادلی } H_2 = 2-2x = 1/2 \\ \text{مول تعادلی } CH_3OH = x = 0/4 \end{cases}$$

$$\text{جرم } CH_3OH = 0/4\,mol \times \frac{32\,g}{1\,mol} = 12/8\,g$$

$$K = \frac{[CH_3OH]}{[CO][H_2]^2} = \frac{\frac{0/4}{2}}{\frac{0/6}{2} \times (\frac{1/2}{2})^2} = \frac{\frac{1}{0/2}}{0/3 \times \frac{0/6}{3} \times 0/6} = \frac{100}{54} \simeq 1/85$$

تست و پاسخ ۱۰۳

باتوجه به شکل مقابل که قسمتی از جدول تناوبی عنصرها را نشان می‌دهد، کدام مطلب درست است؟ $(S=32\,g.mol^{-1})$



۱) یون‌های تک‌اتمی پایدار عنصرهای X، D و A به ترتیب به آرایش الکترونی گازهای نجیب دوره‌های دوم، سوم و چهارم جدول تناوبی می‌رسند.

۲) در تشکیل ۲ مول کلرید عنصر M، ۴ مول الکترون مبادله می‌شود.

۳) اگر مجموع شمار ذرات زیراتمی عنصر A برابر ۵۹ باشد، ۲۸ گرم سولفید این عنصر دارای ۰/۵ مول کاتیون است.

۴) در هر واحد فرمولی از فسفات فلز E با بیشترین بار الکتریکی، ۷ اتم وجود دارد.

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ تشریحی

بررسی گزینه‌ها:

۱) عنصرهای X و D با تشکیل یون‌های X^- و D^{2-} به آرایش الکترونی گاز نجیب و هم‌دورهٔ خود می‌رسند، اما A یک فلز است و با تشکیل کاتیون A^+، به آرایش گاز نجیب دورهٔ قبل از خود، یعنی دورهٔ سوم می‌رسد.

۲) فلز M در گروه ۱۳ قرار دارد و کاتیون M^{3+} تشکیل می‌شود؛ بنابراین فرمول کلرید آن به صورت MCl_3 است. در تشکیل یک مول از این ترکیب، ۳ مول الکترون مبادله می‌شود؛ در نتیجه در تشکیل ۲ مول از آن، ۶ مول الکترون مبادله خواهد شد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

نکته شمار الکترون‌های مبادله‌شده به ازای تشکیل هر واحد فرمولی از ترکیب‌های یونی را می‌توان از رابطهٔ زیر حساب کرد:

$$\text{تعداد الکترون‌های مبادله‌شده} = \text{تعداد کاتیون} \times \text{بار کاتیون} = \text{تعداد آنیون} \times \text{قدرمطلق بار آنیون}$$

۳) عدد اتمی عنصر A، برابر ۱۹ است؛ بنابراین اتم A، ۱۹ الکترون و ۱۹ پروتون دارد. حالا با توجه به مجموع شمار ذرات زیراتمی آن، می‌توان عدد جرمی و در نتیجه جرم مولی آن را به دست آورد:

$$\text{مجموع شمار ذرات زیراتمی} = \text{شمار الکترون} + \underbrace{\text{شمار پروتون} + \text{شمار نوترون}}_{\text{عدد جرمی}} \Rightarrow \text{عدد جرمی} = ۱۹ + ۵۹ \Rightarrow \text{عدد جرمی} = ۴۰$$

$$\Rightarrow \text{جرم مولی A} \simeq ۴۰\,g.mol^{-۱}$$

حالا فرمول سولفید A را می‌نویسیم:

$$A^{+}S^{۲-} \Rightarrow A_۲S \Rightarrow \text{جرم مولی} = (۲\times ۴۰) + ۳۲ = ۱۱۲\,g.mol^{-۱}$$

$$۲۸\,g\,A_۲S \times \frac{۱\,mol\,A_۲S}{۱۱۲\,g\,A_۲S} \times \frac{۲\,mol\,A^{+}}{۱\,mol\,A_۲S} = \frac{۵۶}{۱۱۲} = ۰/۵\,mol\,A^{+}$$

۴) فلز E با عدد اتمی ۲۶ همان آهن است که دارای دو کاتیون پایدار $Fe^{۲+}$ و $Fe^{۳+}$ بوده که بیشترین بار الکتریکی مربوط به $Fe^{۳+}$ است.

$$Fe^{۳+}PO_۴^{۳-} \Rightarrow FePO_۴ \Rightarrow \text{۶ اتم}$$

تست و پاسخ ۱۰۴

در عنصری از دورهٔ چهارم، تفاوت مجموع شمار الکترون‌های دارای $l = ۰$ و $l = ۱$ با شمار الکترون‌های دارای $l = ۲$ برابر ۹ است. کدام موارد از مطالب زیر دربارهٔ این عنصر درست است؟

فلوئور ($_۹F$)

الف) تفاوت عدد اتمی آن با اکسنده‌ترین عنصر جدول دوره‌ای برابر ۲۰ است.

ب) با عنصرهایی با عددهای اتمی ۴۷ و ۷۹ هم‌گروه است.

پ) فلزی اصلی است و یون پایدار آن، دارای آرایش الکترونی گاز نجیب است.

ت) واکنش‌پذیری آن از عنصر بعد از خود در دورهٔ چهارم، بیشتر است.

۱) الف ـ ب
۲) پ ـ ت
۳) الف ـ پ
۴) ب ـ ت

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ تشریحی عبارت‌های «الف» و «ب» درست‌اند.

عدد اتمی عنصرهای دورهٔ چهارم از ۱۹ تا ۳۶ است. در بین این عنصرها، فقط برای عنصر $_{۲۹}Cu$، تفاوت مجموع شمار الکترون‌های دارای $\ell = ۰$ و $\ell = ۱$ با شمار الکترون‌های دارای $\ell = ۲$ برابر ۹ است.

$$_{۲۹}Cu: ۱s^{۲} / ۲s^{۲}۲p^{۶} / ۳s^{۲}۳p^{۶}۳d^{۱۰} / ۴s^{۱} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}(s\text{ زیرلایه‌های})\ \ell = ۰\text{ الکترون با } ۷ \\ (p\text{ زیرلایه‌های})\ \ell = ۱\text{ الکترون با } ۱۲ \\ (۳d\text{ زیرلایهٔ})\ \ell = ۲\text{ الکترون با } ۱۰\end{array}\right\}^{۱۹} \Rightarrow ۱۹ - ۱۰ = ۹$$

بررسی عبارت‌ها:

الف) اکسنده‌ترین عنصر جدول دوره‌ای، فلوئور ($_۹F$) است. تفاوت عدد اتمی مس و فلوئور برابر $۲۹ - ۹ = ۲۰$ است.

ب) عنصرهایی با عددهای اتمی ۲۹، ۴۷ و ۷۹ در گروه ۱۱ جدول دوره‌ای قرار دارند.

نکته برای تعیین این‌که چند عنصر هم‌گروه هستند یا خیر، می‌توان تفاوت عدد اتمی آن‌ها با گاز نجیب هم‌دوره‌شان را مقایسه کرد. اگر برای همهٔ عنصرها، یک عدد به دست آمد، آن چند عنصر هم‌گروه می‌باشند. (البته به‌جز برای عنصرهای گروه‌های ۱ و ۲ که عدد اتمی آن‌ها ۱ یا ۲ واحد بیشتر از گاز نجیب دورهٔ قبل است.)

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

عنصرهایی با عددهای اتمی ۲۹، ۴۷ و ۷۹، هم‌گروه هستند. $\Rightarrow$

$۲۹ \xrightarrow{{}_{۳۶}Kr:\text{گاز نجیب هم‌دوره}} ۳۶ - ۲۹ = ۷$

$۴۷ \xrightarrow{{}_{۵۴}Xe:\text{گاز نجیب هم‌دوره}} ۵۴ - ۴۷ = ۷$

$۷۹ \xrightarrow{{}_{۸۶}Rn:\text{گاز نجیب هم‌دوره}} ۸۶ - ۷۹ = ۷$

پ) عنصر ${}_{۲۹}Cu$ جزء عنصرهای واسطه (دستهٔ d) است و هیچ‌کدام از یون‌های پایدار آن (Cu^{+} و $Cu^{۲+}$) آرایش گاز نجیب را ندارند.

ت) عنصر بعد از مس، در دورهٔ چهارم، فلز روی (${}_{۳۰}Zn$) است. واکنش‌پذیری فلز مس از فلز روی کم‌تر است.

تست و پاسخ ۱۰۵

در جدول زیر، همهٔ ویژگی‌ها در مورد چند ماده که نام آن‌ها داده‌شده، درست است؟

نام ماده / ویژگی‌ها	۱ـ هگزن	برم	اتیلن گلیکول	کلروفرم	آهن (III) اکسید
فرمول شیمیایی	$C_۶H_{۱۲}$	$Br_۲$	$C_۲H_۶O_۲$	$CHCl_۳$	$Fe_۲O_۳$
حالت فیزیکی در دما و فشار اتاق	گاز	مایع	مایع	گاز	جامد
رنگ	بی‌رنگ	قرمز	سبز	بی‌رنگ	قرمز

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ تشریحی اطلاعات داده‌شده در مورد برم، اتیلن گلیکول و آهن (III) اکسید، درست هستند.

دقت کنید که به رنگ اتیلن گلیکول که به عنوان ضدیخ خودروها کاربرد دارد، در فصل (۳) شیمی دهم و به رنگ‌های برم و آهن (III) اکسید در فصل (۱) یازدهم، اشاره شده است.

بررسی موارد نادرست:

- ۱ـ هگزن همانند هگزان، مایعی بی‌رنگ است.
- کلروفرم در دما و فشار اتاق به حالت مایع است. به باریکهٔ این مایع در فصل (۳) شیمی دوازدهم اشاره شده است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir