



ویژه
کنکوری‌های
۱۴۰۳

۱۴۰۳/۰۴/۰۴

آزمون
شانزدهم
حضور

دفترچه شماره ۱

خوبی‌ها
آزمون
تجربین | ریاضی | انسانی

سال تحصیلی
۱۴۰۲-۱۴۰۳

مطابق کنکور سراسری

آزمون آزمایشی خیلی سبز

گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی

نام و نام خانوادگی: شماره داوطلبی:

عنوان مواد امتحانی آزمون، تعداد، شماره سؤالات و مدت پاسخ‌گویی

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخ‌گویی	ملاحظات
۱	ریاضیات	۴۰	۱	۴۰	۷۵ دقیقه	۴۰ سؤال ۷۵ دقیقه

اساتید، مشاوران و دانش‌آموزان گرامی:

نظرات، پیشنهادات، انتقادات و بازخوردهای خود نسبت به سؤالات این آزمون را می‌توانید از طریق آیدی @Kheilisabz_edit در همه پیام‌رسان‌ها با ما به اشتراک بگذارید.

Azmoon.kheilisabz.com

۱- اگر $x = \alpha$ جواب معادله $\frac{3}{x+1} = 1 + \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}$ باشد، حاصل $\alpha^3 + \frac{1}{\alpha^3}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{5}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{2}{5}$ (۴) $\frac{2}{4}$

۲- مجموع ریشه‌های معادله $|2x-2| + 3|x-2| = k$ برابر $\frac{3}{6}$ است، مقدار k کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{5}$ (۲) 3 (۳) 2 (۴) $\frac{2}{25}$

۳- برای مجموعه‌های $A = \{a+1, 5, b-1, c^2\}$ و $B = \{4, 0, 2d+1\}$ ، فرض کنید $A \times B \subseteq B \times A$ است. اگر $c > 0$ ، مجموع مقادیر مختلف $abcd$ کدام است؟

- (۱) $40 + 16\sqrt{5}$ (۲) $-20 - 4\sqrt{5}$ (۳) $40 - 16\sqrt{5}$ (۴) $8 - 4\sqrt{5}$

p	q	r	S
T	T	T	F
T	T	F	T
T	F	T	T
T	F	F	F
F	T	T	F
F	T	F	T
F	F	T	F
F	F	F	F

۴- کدام گزاره می‌تواند هم‌ارزی منطقی با گزاره S داشته باشد؟

- (۱) $[(q \Rightarrow (p \vee r)) \Rightarrow (\sim q \wedge (\sim p \vee r))] \Rightarrow (p \wedge q)$
 (۲) $[(p \vee \sim r) \Rightarrow ((q \wedge r) \Rightarrow (q \vee r))] \Rightarrow (\sim (q \wedge p) \vee r)$
 (۳) $[p \Rightarrow ((q \vee r) \Rightarrow (q \wedge r))] \Rightarrow (\sim (p \vee r) \wedge q)$
 (۴) $[(r \wedge (\sim p \vee q)) \Rightarrow (p \vee q)] \Rightarrow [(\sim q \wedge r) \Rightarrow p]$

۵- اگر α و β^2 ریشه‌های معادله $4x^2 + mx - 1 = 0$ و α^2 و β ریشه‌های معادله $2x^2 + nx + 1 = 0$ باشند، حاصل $\alpha m + \beta n$ کدام است؟

- (۱) $\frac{9}{2}$ (۲) $\frac{7}{2}$ (۳) $-\frac{7}{2}$ (۴) $-\frac{9}{2}$

۶- نمودار تابع $f(x) = 2x - x^2$ را نسبت به مبدأ مختصات قرینه کرده و سه واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم. ضابطه وارون تابع جدید در بزرگ‌ترین بازه‌ای که اکیداً نزولی است، کدام است؟

- (۱) $y = 2 - \sqrt{x-1}$ (۲) $y = 1 - \sqrt{x-2}$
 (۳) $y = 1 - \sqrt{x+2}$ (۴) $y = 2 - \sqrt{x+1}$

محل انجام محاسبات

۷- نقاط $A(4, 3)$ ، $B(-4, 9)$ و مبدأ مختصات سه رأس مثلثی هستند؛ کمترین ارتفاع مثلث برابر کدام است؟

- (۱) $3/6$ (۲) $2/4$ (۳) $4/8$ (۴) $1/8$

۸- فرض کنید تابع f خطی و اکیداً نزولی و $f^{-1}(1-2x) = 1-2f(x)$ باشد. اگر $\text{gof}(x) = 9x^2 + 3x$ باشد، ضابطه $g(x)$ کدام است؟

- (۱) $9x^2 - 15x + 6$ (۲) $9x^2 + 15x + 6$
(۳) $9x^2 - 15x - 6$ (۴) $9x^2 + 15x - 6$

۹- دامنه تعریف تابع $f(x) = \log_2\left(\frac{x}{\log_2 2x}\right)$ کدام است؟

- (۱) $(0, 2)$ (۲) $(0, 1)$ (۳) $(\frac{1}{2}, 1)$ (۴) $(0, \frac{1}{2})$

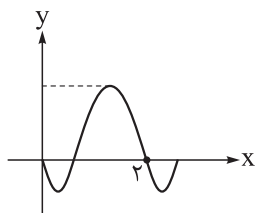
۱۰- اگر معادله $(\log_8 \frac{x}{4})(\log_4 4x) = \frac{7}{4}$ دارای ریشه‌های α و β باشد، مقدار $\log_{\frac{\alpha}{\beta}}$ کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۱- اگر $\sqrt{2 \sin x + \cos x} + \sqrt{\sin x + 2 \cos x} = 2$ باشد، مقدار $\sin(x + \frac{\pi}{4})$ کدام است؟

- (۱) $6\sqrt{2} - 9$ (۲) $8 - 6\sqrt{2}$ (۳) $6\sqrt{2} - 8$ (۴) $9 - 6\sqrt{2}$

۱۲- قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a - 4 \cos(bx - \frac{\pi}{3})$ به صورت زیر است. با کدام تبدیل‌های زیر روی نمودار f ، تابع جدید در مبدأ بر محور x ‌ها مماس می‌شود؟



(۱) $\frac{2}{3}$ واحد انتقال به راست و ۶ واحد انتقال به پایین

(۲) $\frac{4}{3}$ واحد انتقال به چپ و ۲ واحد انتقال به بالا

(۳) $\frac{4}{3}$ واحد انتقال به چپ و ۶ واحد انتقال به بالا

(۴) $\frac{2}{3}$ واحد انتقال به چپ و ۲ واحد انتقال به بالا

محل انجام محاسبات

۱۳- اگر α و β دو ریشه متوالی معادله $4\sin^2 x - \tan x = 0$ باشند، حاصل $\beta - \alpha$ کدام نمی تواند باشد؟

- (۱) $\frac{\pi}{12}$ (۲) $\frac{4\pi}{12}$ (۳) $\frac{5\pi}{12}$ (۴) $\frac{7\pi}{12}$

۱۴- نمودار $f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 - 1 & |x| \leq 1 \\ 4x + 3 & |x| > 1 \end{cases}$ نمودار مشتق خود را در چند نقطه قطع می کند؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

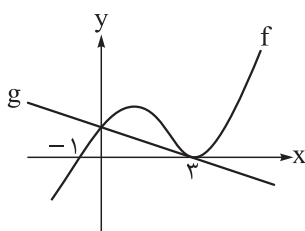
۱۵- هرگاه $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 2x}{f(x) + 4x + 1} = +\infty$ باشد، نمودار f در مجاورت $x = 2$ به کدام صورت می تواند باشد؟

- (۱) (۲) (۳) (۴)

۱۶- اگر $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & |x| > 1 \\ x & |x| \leq 1 \end{cases}$ و $g(x) = 1 - x^2$ باشد، توابع $f \circ g$ و $g \circ f$ به ترتیب از راست به چپ، در چند نقطه ناپیوسته است؟

- (۱) ۲, ۲ (۲) ۲, ۰ (۳) ۰, ۰ (۴) ۰, ۲

۱۷- نمودار تابع درجه سوم f و خط g به صورت زیر است. اگر $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x+4)}{x+1+f(x)} = \frac{-1}{3}$ باشد، مقدار $f(5)$ کدام است؟



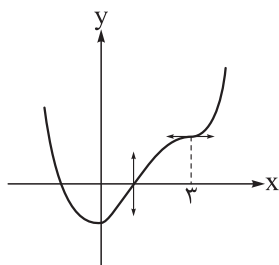
- (۱) $-\frac{24}{7}$ (۲) $-\frac{1}{7}$ (۳) $\frac{24}{7}$ (۴) $-\frac{6}{7}$

۱۸- با فرض آن که f تابعی پیوسته باشد، $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h-1) - 5}{2h} = \frac{-1}{4}$ و $g(2x) = \sqrt[3]{xf(\frac{1}{x})}$ ، مقدار $g'(-2)$ چه عددی است؟

- (۱) $\frac{13}{6}$ (۲) $\frac{5}{12}$ (۳) $\frac{7}{12}$ (۴) $\frac{7}{5}$

محل انجام محاسبات

۱۹- نمودار تابع $f(x) = x^4 - ax^3 + 18x^2 + k$ به شکل زیر است. مقدار k کدام است؟



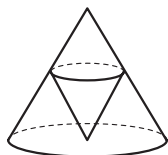
(۱) -۱۱

(۲) -۱۹

(۳) -۸

(۴) -۱۸

۲۰- در شکل زیر، اگر شعاع قاعده و ارتفاع مخروط بزرگ‌تر به ترتیب ۶ و ۸ باشند، حداکثر حجم مخروط کوچک چه عددی است؟



(۲) $\frac{128\pi}{9}$

(۱) $\frac{64\pi}{3}$

(۴) $\frac{128\pi}{27}$

(۳) $\frac{64\pi}{9}$

۲۱- یک رئیس، یک منشی و چهار کارمند به چند طریق می‌توانند دور یک میز گرد بنشینند، به طوری که رئیس و منشی روبه‌روی هم باشند؟

(۴) ۴۸

(۳) ۶۰

(۲) ۱۶

(۱) ۲۴

۲۲- در یک کلاس ۲۵ نفری، برخی از دانش‌آموزان در المپیاد ریاضی، فیزیک و یا هر دو ثبت‌نام کرده‌اند. یک دانش‌آموز به تصادف از این کلاس انتخاب می‌کنیم، نسبت احتمال حضور او در المپیاد ریاضی به احتمال حضور او در المپیاد فیزیک، $\frac{5}{9}$ است. اگر احتمال حضور این دانش‌آموز در هر دو المپیاد $\frac{1}{28}$ باشد، با چه احتمالی او در هیچ المپیادی شرکت نکرده است؟

(۴) $\frac{1}{72}$

(۳) $\frac{1}{64}$

(۲) $\frac{1}{16}$

(۱) $\frac{1}{8}$

۲۳- در یک آزمایش، دو تاس را پرتاب می‌کنیم. اگر عدد رو شده دو تاس متفاوت باشد، تابع $f(x) = x$ و اگر یکسان باشد، تابع $f(x) = -x$ را تشکیل می‌دهیم. اگر مجموع اعداد رو شده دو تاس، کوچک‌تر از ۶ باشد، $x = 5$ را به عنوان ورودی تابع f و اگر مجموع اعداد رو شده دو تاس، بزرگ‌تر از ۵ باشد، $x = -5$ را به عنوان ورودی تابع f قرار می‌دهیم. اگر $f(f(f(x))) = 5$ باشد، با چه احتمالی $x = 5$ بوده است؟

(۴) $\frac{2}{3}$

(۳) $\frac{21}{26}$

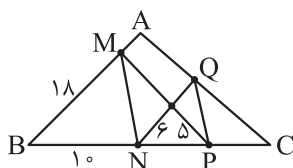
(۲) $\frac{20}{29}$

(۱) $\frac{25}{38}$

محل انجام محاسبات

۲۴- در مثلث ABC مجموع زوایای داخلی B و C برابر 70° است. عمودمنصف‌های دو ضلع AB و AC ، ضلع BC را به ترتیب در D و E قطع می‌کنند. اندازه زاویه DAE کدام است؟

- (۱) 20° (۲) 30° (۳) 40° (۴) 50°



۲۵- در شکل مقابل، اگر $AB \parallel NQ$ و $MN \parallel PQ$ ، آن گاه طول PQ کدام است؟

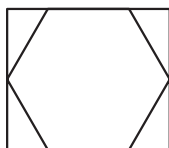
- (۱) $2\sqrt{13}$ (۲) $3\sqrt{5}$

- (۳) $4\sqrt{3}$ (۴) $5\sqrt{2}$

۲۶- اگر اندازه ضلع شش ضلعی منتظم مقابل ۶ باشد، آن گاه مساحت مستطیل کدام است؟

- (۱) $96\sqrt{3}$ (۲) $54\sqrt{3}$

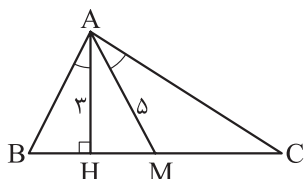
- (۳) $81\sqrt{3}$ (۴) $72\sqrt{3}$



۲۷- در شکل زیر $AM = 5$ و $AH = 3$ به ترتیب، میانه و ارتفاع وارد بر BC هستند. اگر $\hat{M}AC = \hat{B}AH$ ، آن گاه شعاع دایره محیطی مثلث ABC کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۶

- (۳) $3\sqrt{3}$ (۴) $2\sqrt{6}$



۲۸- در یک دوزنقه متساوی الساقین محیطی، طول قاعده بزرگ، چهار برابر طول قاعده کوچک است. نسبت شعاع دایره محاطی به طول ساق دوزنقه کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{2}{5}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{3}{10}$

۲۹- طول مماس مشترک خارجی دو دایره مماس خارج، واسطه حسابی شعاع‌های دو دایره است. اگر شعاع دایره کوچک ۱ باشد، شعاع دایره بزرگ کدام است؟

- (۱) $7 + 4\sqrt{3}$ (۲) $7 + 2\sqrt{3}$ (۳) $8 + 4\sqrt{3}$ (۴) $8 + 2\sqrt{3}$

۳۰- در مربع $ABCD$ ، طول رأس A برابر ۲ و طول رأس B برابر ۴ است. اگر بازتاب دو رأس A و D که هر دو در ربع اول واقع‌اند، نسبت به نیمساز این ربع، بر خودشان منطبق شود، فاصله بازتاب رأس A نسبت به قطر BD از مبدأ مختصات کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{10}$ (۲) $3\sqrt{5}$ (۳) ۷ (۴) $4\sqrt{3}$

محل انجام محاسبات

۳۱- در یک مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین، نیمساز زاویه کوچک را رسم می‌کنیم. مساحت مثلث اصلی، چند برابر مساحت کوچک‌ترین مثلث حاصل از رسم این نیمساز است؟

$\sqrt{2} + 1$ (۱) $\sqrt{2}$ (۲) ۲ (۳) $2 + \sqrt{2}$ (۴)

۳۲- فرض کنید $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ و $CBA = 15I$. مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس C کدام است؟

4 (۱) -4 (۲) 8 (۳) -8 (۴)

۳۳- شعاع کوچک‌ترین دایره‌ای که بر هر دو محور مختصات و دایره $x^2 + y^2 - 12x - 14y + 81 = 0$ مماس باشد، کدام است؟

$12 - \sqrt{59}$ (۱) 4 (۲) 3 (۳) 2 (۴)

۳۴- نقطه M واقع بر بیضی به کانون‌های F و F'، پاره خط FF' را با زاویه 60° رؤیت می‌کند. اگر $MF \times MF' = 40$ و طول قطر بزرگ بیضی ۱۲ باشد، خروج از مرکز بیضی برابر کدام است؟

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{6}}{6}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ (۴)

۳۵- زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ حاده است و $|\vec{a} + \vec{a} \times \vec{b} + \vec{b}| = 4$. اگر مساحت متوازی الاضلاع بنا شده روی دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر با ۲ واحد سطح باشد، طول قطر بزرگ این متوازی الاضلاع کدام است؟

$3\sqrt{3}$ (۱) $2\sqrt{2}$ (۲) $3\sqrt{2}$ (۳) $2\sqrt{3}$ (۴)

۳۶- اعداد $2 - a^2$ و a^2 در تقسیم بر ۱۱، باقی‌مانده یکسان دارند. باقی‌مانده تقسیم عدد a^{2a} بر عدد ۵ برابر r است. مجموع مقادیر مختلف برای r کدام است؟

1 (۱) 4 (۲) 6 (۳) 10 (۴)

۳۷- مجموع ارقام بزرگ‌ترین عدد دورقمی x که در معادله $5x - 7y = 17$ ($x, y \in \mathbb{N}$) صدق می‌کند، کدام است؟

6 (۱) 8 (۲) 10 (۳) 12 (۴)

محل انجام محاسبات

۳۸- هر کدام از جواب‌های معادله $[x] + [y] + [z] = 5$ ($x, y, z \geq 0$) را یک نقطه به شکل (x, y, z) در دستگاه مختصاتی $\mathbb{R}^3$ در نظر می‌گیریم. حجم شکل حاصل از این نقاط کدام است؟

- ۲۱ (۱) ۵۶ (۲) ۱۲۵ (۳) ۲۱۶ (۴)

۳۹- فرض کنید $A = \{[x] \mid x \in \mathbb{R}, x^2 \leq 4\}$ و $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 5^x \mid 625\}$. حداقل چند نقطه از مجموعه $A \times B$ انتخاب کنیم تا مطمئن باشیم می‌توان با نقاط انتخاب‌شده یک مثلث تشکیل داد؟

- ۷ (۱) ۶ (۲) ۵ (۳) ۴ (۴)

۴۰- درجهٔ رئوس یک گراف به صورت $4, 4, x, x, x, x$ است. اگر این گراف فاقد دور به طول فرد باشد و تعداد γ -مجموعه‌های آن برابر n باشد، حاصل $\gamma + n$ کدام است؟

- ۵ (۱) ۷ (۲) ۹ (۳) ۱۱ (۴)

دوستان عزیز خیلی سبز، سلام؛

فایل پاسخ‌نامهٔ این آزمون را که شامل درس‌نامه، نکات کنکوری، پاسخ تشریحی و ... است، ساعت ۱۴ امروز از صفحهٔ شخصی خودتان در سایت آزمون خیلی سبز دریافت کنید.

هم‌چنین شما می‌توانید همین امشب کارنامهٔ اولیهٔ آزمونتان را در صفحهٔ شخصی خود مشاهده بفرمایید.

برای دسترسی به صفحهٔ شخصی خود وارد سایت آزمون خیلی سبز به آدرس: azmoon.kheilisabz.com شوید و کدی را که توسط مدرسه و یا نمایندگی‌های آزمون‌های خیلی سبز به شما داده شده، در محل مشخص‌شده در سایت ثبت بفرمایید.

محل انجام محاسبات



ویژه
کنکوری‌های
۱۴۰۳

۱۴۰۳/۰۴/۰۴

آزمون
شانزدهم
حضور

دفترچه شماره ۲



سال تحصیلی
۱۴۰۲-۱۴۰۳

مطابق کنکور سراسری

آزمون آزمایشی خیلی سبز

گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی

• شماره داوطلبی:

• نام و نام خانوادگی:

عنوان مواد امتحانی آزمون، تعداد، شماره سؤالات و مدت پاسخ‌گویی

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخ‌گویی	ملاحظات
۱	فیزیک	۳۵	۴۱	۷۵	۴۵ دقیقه	۶۵ سؤال
۲	شیمی	۳۰	۷۶	۱۰۵	۳۵ دقیقه	۸۰ دقیقه

اساتید، مشاوران و دانش‌آموزان گرامی؛

نظرات، پیشنهادات، انتقادات و بازخوردهای خود نسبت به سؤالات این آزمون را می‌توانید از طریق آیدی @Kheilisabz_edit در همه پیام‌رسان‌ها با ما به اشتراک بگذارید.

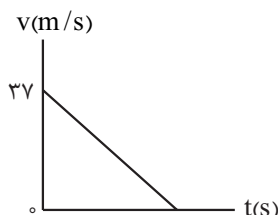
Azmoon.kheilisabz.com



SanjeshCloud

www.SanjeshCloud.ir

۴۱- نمودار سرعت - زمان متحرکی که روی خط راست حرکت می کند، به شکل زیر است. اگر متحرک 36m ابتدای حرکت را در مدت t و 36m انتهای حرکت را در مدت $6t$ طی کند، اندازه جابه جایی متحرک در کل این حرکت چند متر است؟



$$(1) \quad 243/25$$

$$(2) \quad 342/25$$

$$(3) \quad 486/5$$

$$(4) \quad 684/5$$

۴۲- خودرویی در یک مسیر مستقیم از حال سکون و با شتاب ثابت شروع به حرکت می کند و پس از مدتی تندی خود را با شتاب ثابتی به بزرگی 2 m/s^2 کاهش می دهد تا متوقف شود. اگر در مدتی که حرکت خودرو به صورت تندشونده است، تندی متوسط آن برابر با 20 m/s و مسافت طی شده توسط خودرو در کل مسیر برابر با 600m باشد، اندازه جابه جایی خودرو در ۷ ثانیه دوم حرکت آن چند متر است؟

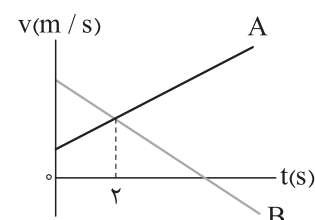
$$(1) \quad 246$$

$$(2) \quad 184$$

$$(3) \quad 326$$

$$(4) \quad 288$$

۴۳- نمودار سرعت - زمان دو متحرک A و B که روی محور x حرکت می کنند، به شکل زیر است. اگر دو متحرک، در مبدأ زمان در یک مکان قرار داشته باشند، فاصله دو متحرک در لحظه $t = 8\text{s}$ چند برابر فاصله دو متحرک در لحظه $t = 2\text{s}$ است؟



$$(1) \quad 3$$

$$(2) \quad 8$$

$$(3) \quad 9$$

$$(4) \quad 10$$

۴۴- در شرایط خلأ، گلوله ای از ارتفاع h نسبت به سطح زمین رها می شود. اگر گلوله 28m انتهای حرکت خود تا رسیدن به سطح زمین را در مدت 2s طی کند، تندی گلوله در فاصله $\frac{h}{4}$ از سطح زمین، چند متر بر ثانیه است؟ ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

$$(1) \quad 12$$

$$(2) \quad 16$$

$$(3) \quad 12\sqrt{2}$$

$$(4) \quad 16\sqrt{2}$$

محل انجام محاسبات

۴۵- دو گوی هم‌اندازه A و B که جرم گوی A بیشتر از جرم گوی B است، به‌صورت هم‌زمان، از سطح زمین و با سرعت اولیه یکسان، در راستای قائم به سمت بالا پرتاب می‌شوند. اگر اندازه نیروی مقاومت هوای وارد بر دو گوی در طی حرکت آن‌ها ثابت و یکسان باشد، چه تعداد از موارد زیر درست است؟

(الف) مدت بالارفتن گوی A بیشتر از مدت بالارفتن گوی B است.

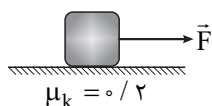
(ب) ارتفاع اوج گوی A کم‌تر از ارتفاع اوج گوی B است.

(پ) تندی برخورد به سطح زمین گوی A بیشتر از تندی برخورد به زمین گوی B است.

(ت) تندی متوسط هر دو گوی از لحظه پرتاب تا بالاترین نقطه مسیرشان برابر است.

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۴۶- در شکل زیر، جسم تحت تأثیر نیروی افقی $\vec{F}$ روی سطح افقی از حال سکون شروع به حرکت می‌کند و در $3s$ اول حرکت، $10m$ جابه‌جا می‌شود. اگر به این جسم ساکن روی همین سطح، نیروی $2\vec{F}$ وارد شود، در $3s$ اول حرکت چند متر جابه‌جا می‌شود؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$)



۱۴/۵ (۱) ۲۰ (۲)

۲۹ (۳) ۴۰ (۴)

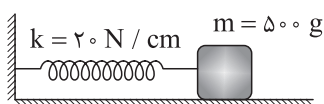
۴۷- جرم سیاره‌ای با جرم کره زمین برابر و حجم آن 27 برابر حجم کره زمین است. شتاب گرانش در سطح این سیاره با شتاب گرانش در چه فاصله‌ای از سطح زمین برابر است؟ (R_e شعاع کره زمین است.)

۲ R_e (۱) ۳ R_e (۲) ۸ R_e (۳) ۹ R_e (۴)

۴۸- متحرکی با تندی ثابت روی محیط دایره‌ای در حال حرکت است. اگر دوره تناوب متحرک برابر با $4s$ باشد، اندازه شتاب متوسط متحرک در هر ثانیه، چند برابر اندازه شتاب مرکزگرای آن است؟

۱ (۱) $\frac{\sqrt{2}}{\pi}$ ۲ (۲) $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$ ۳ (۳) $\frac{4}{\pi}$ ۴ (۴) $\frac{4\sqrt{2}}{\pi}$

۴۹- در شکل زیر، جسم متصل به فنر، روی سطح افقی بدون اصطکاک در حال نوسان است. اگر مسافت طی شده توسط جسم در مدت $0.5s$ برابر با $10cm$ باشد، بیشینه اندازه تکانه جسم در SI کدام است؟ ($\pi^2 \approx 10$)



۱ (۱) $\frac{\pi}{4}$ ۲ (۲) $\frac{\pi}{2}$

۳ (۳) π ۴ (۴) 2π

محل انجام محاسبات

۵۰- نخ به طول 100cm را به دو قسمت غیر مساوی تقسیم کرده و با هر قسمت یک آونگ ساده می‌سازیم. اگر دوره تناوب یکی از این آونگ‌ها ۳ برابر دوره تناوب آونگ دیگر باشد، طول نخ آونگی که بسامد بیشتری دارد، چند سانتی‌متر است؟

۲۵ (۲)

۱۰ (۱)

۹۰ (۴)

۷۵ (۳)

۵۱- اگر با ورود یک موج الکترومغناطیسی به بسامد 625 THz از محیط I به محیط R، طول موج آن 160nm کاهش یابد، تندی انتشار آن چند متر بر ثانیه و چگونه تغییر می‌کند؟

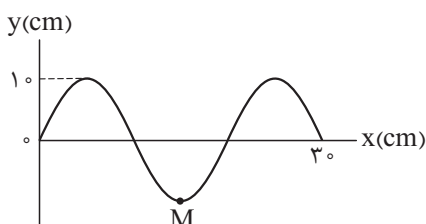
 ۲) 10^7 ، افزایش می‌یابد.

 ۱) 10^7 ، کاهش می‌یابد.

 ۴) 10^8 ، افزایش می‌یابد.

 ۳) 10^8 ، کاهش می‌یابد.

۵۲- تصویر موج عرضی منتشرشده در ریسمانی به چگالی خطی جرم 50 g/m ، در لحظه $t = 0$ به شکل زیر است. اگر نیروی کشش ریسمان برابر 5N باشد، حرکت ذره M از ریسمان در بازه زمانی $t_1 = 0.1\text{s}$ تا $t_2 = 0.35\text{s}$ ، به مدت چند میلی‌ثانیه تندشونده است؟



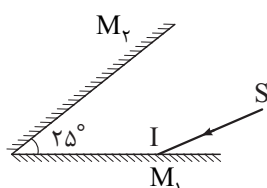
۵ (۱)

۱۰ (۲)

۱۵ (۳)

۲۵ (۴)

۵۳- در شکل زیر پرتوی نور SI با زاویه تابش 55° به آینه M_1 می‌تابد. پرتوی بازتاب‌شده از آینه M_1 ، در آخرین بازتاب ممکن از این آینه، با پرتوی SI زاویه چند درجه می‌سازد؟ (طول آینه‌ها به اندازه کافی بلند است.)



۱۰۵ (۱)

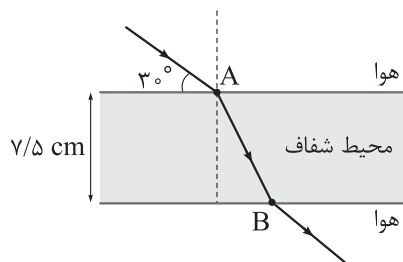
۱۳۵ (۲)

۱۵۰ (۳)

۱۸۰ (۴)

محل انجام محاسبات

۵۴- مسیر حرکت پرتوی نوری در یک محیط شفاف به ضریب شکست n به شکل زیر است. اگر نور فاصله دو نقطه A تا B را در مدت $5ns$ طی کند، n برابر کدام است؟ ($c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$, $\sin 37^\circ = 0.6$)



- (۱) $\sqrt{3}$
 (۲) $\frac{5\sqrt{3}}{6}$
 (۳) $\frac{5\sqrt{3}}{8}$
 (۴) $\sqrt{\frac{3}{2}}$

۵۵- در شکل زیر، تار بین دو تکیه‌گاه محکم شده و در هماهنگ اول خود به نوسان در آمده است. اگر طول تار 40 cm و تندی انتشار موج عرضی در تار 120 m/s باشد، ذرات تار در هر دقیقه چند نوسان انجام می‌دهند؟



- (۱) $1/5 \times 10^2$
 (۲) $1/8 \times 10^3$
 (۳) 9×10^3
 (۴) $1/8 \times 10^4$

۵۶- در اتم هیدروژن، الکترون در دومین حالت برانگیخته قرار دارد. با در نظر گرفتن گذارهای ممکن، بیشترین بسامد گسیلی توسط این الکترون، چند برابر بیشترین بسامد جذبی آن است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۸

۵۷- از طیف گسیلی اتم هیدروژن، طول موج مربوط به کدام یک از خط‌های زیر برابر $\frac{1}{15} \mu\text{m}$ است؟ ($R = 0.01 \text{ (nm)}^{-1}$)

- (۱) اولین خط رشته بالمر ($n' = 2$)
 (۲) دومین خط رشته بالمر ($n' = 2$)
 (۳) اولین خط رشته پاشن ($n' = 3$)
 (۴) دومین خط رشته پاشن ($n' = 3$)

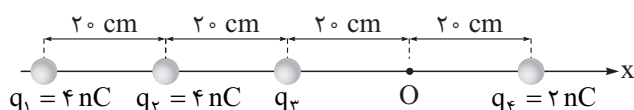
۵۸- نیمه عمر یک ماده پرتوزا برابر 2 min است. اگر نمونه‌ای از این ماده در لحظه $t = 0$ شروع به واپاشی کند، در بازه زمانی $t_1 = 6 \text{ min}$ تا $t_2 = 10 \text{ min}$ چند درصد از جرم اولیه این نمونه واپاشیده می‌شود؟

- (۱) $3/125$ (۲) $6/25$ (۳) $9/375$ (۴) $18/75$

محل انجام محاسبات

۵۹- در شکل زیر، چهار بار الکتریکی نقطه‌ای روی محور x ثابت شده‌اند. اگر میدان الکتریکی حاصل از این بارها در نقطه

O برابر با $\vec{E} = (100 \text{ N/C})\vec{i}$ باشد، نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار q_2 در SI کدام است؟ ($k = 9 \times 10^9 \frac{\text{N.m}^2}{\text{C}^2}$)



$$\vec{F} = (2/5 \times 10^{-6})\vec{i} \quad (1)$$

$$\vec{F} = (-2/5 \times 10^{-6})\vec{i} \quad (2)$$

$$\vec{F} = (3/3 \times 10^{-6})\vec{i} \quad (3)$$

$$\vec{F} = (-3/3 \times 10^{-6})\vec{i} \quad (4)$$

۶۰- یک ذره با بار الکتریکی q در میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{E} = (3 \times 10^5 \text{ N/C})\vec{i} - (4 \times 10^5 \text{ N/C})\vec{j}$ از نقطه

$A(0, 20 \text{ cm})$ به نقطه $B(0, 80 \text{ cm})$ جابه‌جا می‌شود. اگر در این جابه‌جایی انرژی پتانسیل الکتریکی ذره 360 mJ

افزایش یابد، q بر حسب میکروکولن کدام است؟

$$-1/5 \quad (2)$$

$$+1/5 \quad (1)$$

$$-2 \quad (4)$$

$$+2 \quad (3)$$

۶۱- اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر خازنی به ظرفیت $5 \mu\text{F}$ را ۲۰ درصد افزایش می‌دهیم. اگر با این کار انرژی

ذخیره‌شده در آن 11 mJ افزایش یابد، بار الکتریکی ذخیره‌شده در آن چند میکروکولن تغییر می‌کند؟

$$100 \quad (4)$$

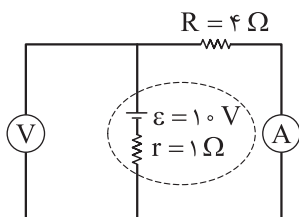
$$50 \quad (3)$$

$$10 \quad (2)$$

$$5 \quad (1)$$

۶۲- در مدار شکل زیر اگر جای آمپرسنج آرمانی و ولت‌سنج آرمانی عوض شود، مقادیری که آن‌ها نشان می‌دهند

به ترتیب از راست به چپ چند آمپر و چند ولت تغییر می‌کند؟



$$8, 2 \quad (1)$$

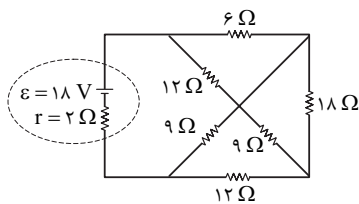
$$2, 2 \quad (2)$$

$$8, 8 \quad (3)$$

$$2, 8 \quad (4)$$

محل انجام محاسبات

۶۳- در مدار شکل زیر، توان مصرفی مقاومت 18Ω اهمی و توان خروجی باتری، به ترتیب از راست به چپ چند وات است؟



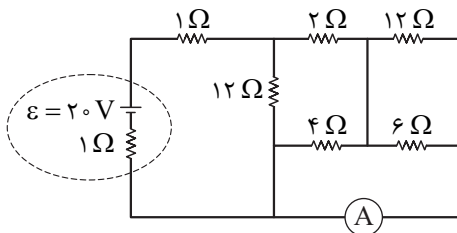
$$(1) \quad 22/5, 0/5$$

$$(2) \quad 13/5, 0/5$$

$$(3) \quad 22/5, 1/3$$

$$(4) \quad 13/5, 1/3$$

۶۴- در مدار شکل زیر، جریان عبوری از آمپرسنج آرمانی چند آمپر است؟



$$(1) \quad 0/5$$

$$(2) \quad 1$$

$$(3) \quad 1/5$$

$$(4) \quad 2/5$$

۶۵- ذره‌ای به جرم 3g و بار الکتریکی $6\mu\text{C}$ در راستای افقی با تندی 500 km/s به سمت شرق پرتاب می‌شود. در محل پرتاب این ذره، میدان مغناطیسی یکنواخت $B = 500\text{G}$ به سمت شمال، و میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{E}$ وجود دارد. $\vec{E}$ برابر چند ولت بر میلی‌متر و در چه جهتی باشد تا ذره روی خط راست و بدون انحراف به حرکت خود ادامه دهد؟ ($g = 10\text{ N/kg}$)

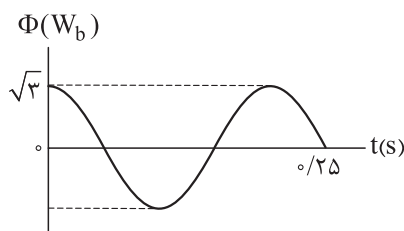
$$(2) \quad 25, \text{ عمود بر سطح زمین و به سمت بالا}$$

$$(1) \quad 20, \text{ عمود بر سطح زمین و به سمت بالا}$$

$$(4) \quad 25, \text{ عمود بر سطح زمین و به سمت پایین}$$

$$(3) \quad 20, \text{ عمود بر سطح زمین و به سمت پایین}$$

۶۶- نمودار شار مغناطیسی عبوری از یک پیچه مولد جریان متناوب به مقاومت الکتریکی 3Ω به شکل زیر است. اگر بیشینه جریان القا شده در این پیچه 2A باشد، در لحظه $t = \frac{1}{12}\text{s}$ به ترتیب از راست به چپ، نیروی محرکه القایی در پیچه چند ولت و شار مغناطیسی گذرنده از آن چند وبر است؟



$$(2) \quad 3 \text{ و } -\frac{3}{2}$$

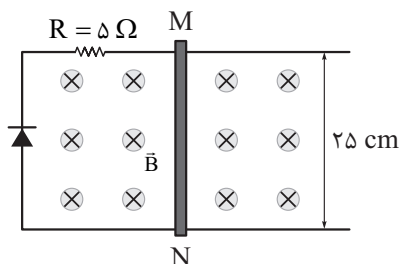
$$(1) \quad 3 \text{ و } \frac{3}{2}$$

$$(4) \quad 6 \text{ و } -\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$(3) \quad 6 \text{ و } \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

محل انجام محاسبات

۶۷- مدار شکل زیر، عمود بر میدان مغناطیسی یکنواختی به بزرگی $B = 200G$ قرار دارد. بردار سرعت حرکت میله رسانای MN بر حسب متر بر ثانیه، کدام باشد تا در مقاومت R، جریان الکتریکی متوسط $4mA$ القا شود؟ (مقاومت الکتریکی دیود ناچیز است.)

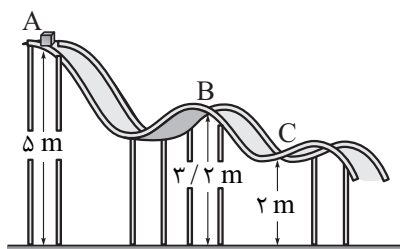


- (۱) $4\vec{i}$
 (۲) $0/4\vec{i}$
 (۳) $-4\vec{i}$
 (۴) $0/4\vec{i}$

۶۸- در مدتی که تندی خودرویی به جرم 1080 kg از 30 km/h به 60 km/h می‌رسد، کار کل انجام‌شده روی آن چند کیلوژول است؟

- (۱) $112/5$ (۲) 1125 (۳) $145/8$ (۴) 1458

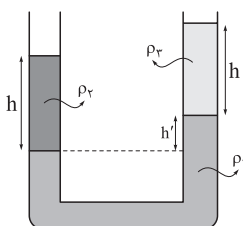
۶۹- در شکل زیر، جسمی به جرم 12 kg در نقطه A از حال سکون رها می‌شود و در مسیری بدون اصطکاک شُر می‌خورد. کدام‌یک از موارد زیر درباره این جسم درست است؟ ($g = 10\text{ N/kg}$)



- (الف) تندی جسم در نقطه B به 6 m/s می‌رسد.
 (ب) انرژی جنبشی جسم در نقطه C برابر 240 J است.
 (پ) کار نیروی گرانش در حرکت جسم از نقطه A تا نقطه B برابر 216 J است.

- (۱) الف
 (۲) الف و ب
 (۳) الف و پ
 (۴) ب و پ

۷۰- در شکل زیر، سه مایع مخلوط‌نشده به چگالی‌های ρ_1 ، ρ_2 و ρ_3 در تعادل هستند. اگر $\rho_1 = 2\rho_2 = 10\rho_3$ باشد،

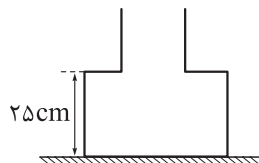


نسبت $\frac{h'}{h}$ کدام است؟

- (۱) $2/$
 (۲) $4/$
 (۳) $6/$
 (۴) $8/$

محل انجام محاسبات

۷۱- در شکل زیر، ظرفی که از دو قسمت استوانه‌ای به مساحت‌های مقطع 50 cm^2 و 20 cm^2 تشکیل شده است، روی سطح افقی قرار دارد. در این ظرف چند کیلوگرم از مایعی به چگالی 8 g/cm^3 بریزیم تا نیرویی که از ظرف مایع به کف ظرف وارد می‌شود، برابر 12 N باشد؟ $(g = 10\text{ N/kg})$



$$1/2 \quad (2)$$

$$1/35 \quad (1)$$

$$9/6 \quad (4)$$

$$1/08 \quad (3)$$

۷۲- یک قرص دایره‌ای به شعاع 10 cm و ضخامت 2 mm ، از فلزی به چگالی 8 g/cm^3 و گرمای ویژه 400 J/kg.K ساخته شده است. اگر این قرص $3/6\text{ kJ}$ گرما دریافت کند، حجم آن $6/75\text{ mm}^3$ افزایش می‌یابد. ضریب انبساط طولی فلز سازنده قرص در SI کدام است؟ $(\pi = 3)$

$$6 \times 10^{-6} \quad (4)$$

$$6 \times 10^{-5} \quad (3)$$

$$2 \times 10^{-6} \quad (2)$$

$$2 \times 10^{-5} \quad (1)$$

۷۳- یک قطعه فلز به جرم 500 g را که دمای آن بر حسب درجه سلسیوس برابر θ است درون مقداری آب $^\circ\text{C}$ می‌اندازیم. اگر دمای تعادل بر حسب درجه سلسیوس برابر $\frac{\theta}{4}$ باشد، جرم آب چند گرم است؟ $(c_{\text{آب}} = 4/2\text{ J/g.K}, c_{\text{فلز}} = 350\text{ J/kg.K})$ و $100^\circ\text{C} > \theta$ و اتلاف گرما ناچیز است.

$$250 \quad (4)$$

$$187/5 \quad (3)$$

$$125 \quad (2)$$

$$62/5 \quad (1)$$

۷۴- درون استوانه‌ای 12 L گاز اکسیژن با دمای 7°C وجود دارد. فشار گاز درون استوانه را با فشارسنجی اندازه می‌گیریم. فشارسنج 14 atm را نشان می‌دهد. دمای گاز را به 77°C و حجم آن را به 25 L می‌رسانیم. فشاری که فشارسنج در پایان نشان می‌دهد. چند اتمسفر است؟ (فشار هوای بیرون استوانه 1 atm و گاز درون استوانه، گاز آرمانی است).

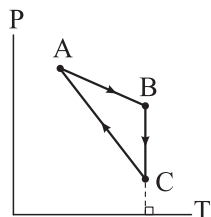
$$9 \quad (4)$$

$$8/4 \quad (3)$$

$$8 \quad (2)$$

$$7/4 \quad (1)$$

۷۵- نمودار فشار بر حسب دمای مقدار معینی گاز کامل، در طی یک چرخه ترمودینامیکی به شکل زیر است. کدام یک از موارد زیر درباره این چرخه درست است؟



(الف) در فرایند AB، کار انجام‌شده روی گاز مثبت است.

(ب) در فرایند BC، گاز از محیط گرما دریافت می‌کند.

(پ) در فرایند CA، گاز از محیط گرما دریافت می‌کند.

(ت) در طی چرخه، کار انجام‌شده توسط گاز مثبت است.

$$4 \quad (4)$$

$$3 \quad (3)$$

$$2 \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

محل انجام محاسبات

۷۶- عنصر گالیم دارای دو ایزوتوپ طبیعی ^{69}Ga و ^{71}Ga است که فراوانی ایزوتوپ سبک تر آن، $1/5$ برابر ایزوتوپ دیگر است. اگر عنصر فلئور تنها دارای یک ایزوتوپ پایدار ^{19}F باشد، مجموع شمار یون‌ها در یک نمونه $95/1$ گرمی GaF_3 چه مضربی از 10^{23} است؟ (عدد جرمی را به تقریب معادل جرم اتمی هر ایزوتوپ در نظر بگیرید.)

(۱) $18/06$ (۲) $14/515$ (۳) $12/04$ (۴) $24/08$

۷۷- کدام مورد درست است؟

- (۱) طیف نشری خطی عنصری که اتم آن تنها دو ذره زیراتمی دارد، در گستره امواج الکترومغناطیس دارای ۴ خط است.
- (۲) اگر طول موج‌ها در طیف نشری خطی دو عنصر یکسان باشد، آن دو عنصر خواص شیمیایی مشابهی دارند.
- (۳) اگر زیرلایه‌های $3s$ تا $6s$ به ترتیب پرشدن مرتب شوند، ۳ زیرلایه با $n + l = 5$ در میان آن‌ها وجود خواهد داشت.
- (۴) قاعده آفا آرایش الکترونی همه عناصرها تا عدد اتمی ۲۳ را به درستی پیش‌بینی می‌کند؛ اما تا عدد اتمی ۳۶، تنها یک عنصر از این قاعده پیروی نمی‌کند.

۷۸- در چه تعداد از ردیف‌های جدول زیر، همه داده‌های گزارش شده درست است؟

ردیف	نام	فرمول شیمیایی	شمار الکترون‌های آخرین زیرلایه اشغال شده کاتیون	عدد اکسایش اتم مشخص شده
۱	$\text{Mn}(\text{HCO}_3)_2$	منگنز هیدروژن کربنات	۵	$C = +4$
۲	$\text{Cr}_3(\text{PO}_4)_2$	کروم (III) فسفات	۳	$P = -3$
۳	$\text{Fe}(\text{HCO}_2)_3$	آهن (III) فورمات	۵	$C = +2$
۴	$\text{Ca}(\text{NO}_3)_2$	کلسیم نیترات	۶	$N = +5$

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۷۹- کدام مطلب درست است؟

- (۱) مولکول‌های دواتمی فراوان و جور هسته هواکره، نقشی در جذب پرتوهای فروسرخ خورشیدی و افزایش دمای کره زمین ندارند.
- (۲) تروپوسفر، چگال‌ترین لایه هواکره است و برخلاف استراتوسفر، از نظر الکتریکی خنثی است.
- (۳) در فرایند تهیه هوای مایع، پس از عبور هوا از صافی، با استفاده از سرما، دمای هوا را پیوسته کاهش می‌دهند.
- (۴) در ساختار لوویس فراوان‌ترین گاز هواکره و گاز سمی حاصل از سوختن ناقص هیدروکربن‌ها، برخلاف ساختار لوویس مولکول اتین، پیوند سه‌گانه وجود دارد.

۸۰- در جدول زیر نقطه جوش سه گاز اصلی سازنده هوای پاک و خشک، آلوتروپ ناپایدار اکسیژن و مواد شرکت‌کننده در واکنش هابر آورده شده است. با توجه به این جدول، کدام موارد از مطالب زیر درست‌اند؟ (نمادها فرضی هستند.)

گاز	A	B	C	D	E	G
نقطه جوش (کلوین)	۲۴۰	۱۶۱	۹۰	۷۷	۲۰	۸۷

الف) انحلال گاز A در آب، خصلت شیمیایی بیشتری نسبت به انحلال گاز D در آب دارد.

ب) گاز G، بی‌رنگ، بی‌بو، غیرآتش‌گیر و غیرسمی است که در واکنش‌های شیمیایی شرکت نمی‌کند.

پ) در دما و فشار اتاق، مخلوط گازهای E و C در حضور کاتالیزگر به سرعت واکنش می‌دهند، اما مخلوط گازهای E و D در حضور کاتالیزگر و جرقه هم واکنش نمی‌دهند.

ت) گاز B برخلاف گاز A، در میدان الکتریکی جهت‌گیری نمی‌کند.

(۱) الف - ب - ت (۲) الف - پ (۳) ب - پ (۴) الف - ب - پ

محل انجام محاسبات

۸۱- با توجه به معادله واکنش زیر، به ازای مصرف ۱۷ گرم محلول ۵۰ درصد جرمی هیدروژن پراکسید، تفاوت جرم فراورده‌های یونی تولیدشده چند گرم است و در این واکنش چند لیتر گاز اکسیژن در شرایط استاندارد تشکیل می‌شود؟
 $(\text{Mn} = ۵۵, \text{K} = ۳۹, \text{S} = ۳۲, \text{O} = ۱۶, \text{H} = ۱: \text{g.mol}^{-1})$ (موازنه معادله واکنش کامل شود).



۵/۶ - ۶/۴ (۴) ۴/۸ - ۶/۴ (۳) ۴/۸ - ۱/۱۵ (۲) ۵/۶ - ۱/۱۵ (۱)

۸۲- انحلال پذیری گاز اکسیژن در آب، در دمای ۲۰°C و فشار P اتمسفر برابر a گرم است. اگر در محلول سیرشده از این گاز در دمای ۲۰°C و فشار $P/۵$ ، غلظت گاز اکسیژن برابر $۱/۲۵ \times ۱۰^{-۲}$ مولار باشد، مقدار a کدام است؟
 $(\text{O} = ۱۶ \text{ g.mol}^{-1})$

۰/۰۰۶ (۴) ۰/۰۱۶ (۳) ۰/۰۰۴ (۲) ۰/۰۱۴ (۱)

۸۳- درستی یا نادرستی چه تعداد از عبارات‌های زیر، مانند درستی یا نادرستی عبارت درون کادر است؟

یکی از اتم‌های سازنده هر ترکیب یونی به یقین فلز است.

- اگر در فرایند انحلال یک ماده در آب، حل‌شونده ویژگی ساختاری خود را حفظ نکند، آن ماده به یقین ترکیبی یونی است.
- در ساختار لوویس مولکول‌ها، مجموع شمار الکترون‌های پیوندی و ناپیوندی همه اتم‌ها، برابر ۸ است.
- در مدل فضاپرکن، موقعیت سه‌بعدی اتم‌ها در مولکول با کره‌هایی که شعاع آن‌ها متناسب با شعاع اتم‌ها است، نشان داده می‌شود.
- فرمول مولکولی ترکیب‌های یونی، افزون بر نوع عنصرها، ساده‌ترین نسبت بین کاتیون و آنیون سازنده را نیز نشان می‌دهد.

۱ (۴) ۲ (۳) ۳ (۲) ۴ (۱)

۸۴- محلولی از پتاسیم نیترات به جرم ۲/۵ کیلوگرم در دمای ۵۰°C ، دارای ۲۳۴ گرم یون پتاسیم است. با توجه به این که انحلال پذیری پتاسیم نیترات در این دما برابر ۸۰ گرم در ۱۰۰ گرم آب است، در همین شرایط، حداکثر چند مول دیگر از این نمک را می‌توان در این محلول حل کرد؟ (جرم مولی پتاسیم نیترات و پتاسیم را به ترتیب تقریباً ۱۰۰ و ۳۹ گرم بر مول در نظر بگیرید).

۱۴ (۴) ۱۲/۵ (۳) ۹/۲ (۲) ۶ (۱)

۸۵- با توجه به ویژگی‌های بیان‌شده برای دو عنصر (الف) و (ب) که به ۴ دوره اول جدول تناوبی تعلق دارند، کدام نتیجه‌گیری درست است؟

- (الف) فلزی است که مجموع ارقام عدد اتمی آن با عدد اتمی نخستین عنصر دسته p جدول تناوبی برابر است.
- (ب) نافلزی از دوره دوم است که مجموع $n + l$ الکترون‌های بیرونی‌ترین زیرلایه آن، با عدد اتمی آن برابر است.
- (۱) نماد شیمیایی عنصر (ب) برخلاف عنصر (الف)، تک‌حرفی است.
- (۲) شعاع اتمی عنصر (ب) از شعاع اتمی اکسندترین عنصر جدول تناوبی، کوچک‌تر است.
- (۳) محلول آبی عنصر (الف) با عدد اکسایش +۴، به رنگ زرد است.
- (۴) مجموع عدد اتمی عنصرهای (الف) و (ب)، برابر با عدد اتمی نخستین عنصری است که لایه الکترونی سوم آن به طور کامل پر می‌شود.

محل انجام محاسبات

۸۶- چند مورد از مطالب زیر، درباره واکنش داده شده، درست است؟ ($O = ۱۶, K = ۳۹, Cr = ۵۲: g.mol^{-1}$)
 $K_2Cr_2O_7(s) \rightarrow K_2CrO_4(s) + Cr_2O_3(s) + O_2(g)$ (معادله شیمیایی موازنه نشده است.)

- پس از موازنه معادله، مجموع ضرایب فراورده‌ها، ۲۵/۲ برابر ضریب واکنش دهنده است.
- با انجام واکنش، حدود ۸ درصد از جرم نمونه جامد اولیه کاسته می‌شود.
- براساس معادله موازنه شده، ۵۰ درصد اتم‌های کروم، تغییر عدد اکسایش نداشته‌اند.
- اگر واکنش با بازده ۷۰ درصد انجام شود، به ازای تولید ۷۶ گرم ترکیب یونی دوتایی، ۱۶/۸ گرم گاز اکسیژن نیز تولید می‌شود.

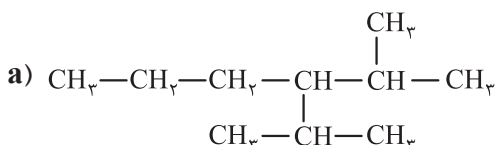
۱ (۴)

۲ (۳)

۳ (۲)

۴ (۱)

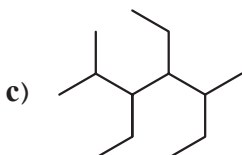
۸۷- با توجه به ساختار سه هیدروکربن سیرشده زیر، کدام مورد نادرست است؟ ($H = ۱, C = ۱۲: g.mol^{-1}$)



(۱) شمار اتم‌های کربن در زنجیر اصلی هر سه هیدروکربن، متفاوت است.



(۲) مجموع اعداد به کاررفته در نام گذاری ترکیب C به روش آیوپاک، با عدد اتمی تنها شبه فلز دوره سوم جدول تناوبی، برابر است.



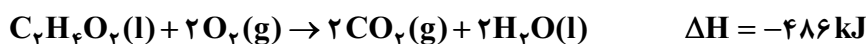
(۳) ترکیب a در ساختار خود، شاخه فرعی اتیل ندارد.

(۴) تفاوت جرم مولی دو ترکیب b و c برابر ۱۴ گرم است.

۸۸- ۸/۴ گرم از یک هیدروکربن (C_xH_y) با ۱۸ لیتر گاز اکسیژن با چگالی $1/6 g.L^{-1}$ به طور کامل می‌سوزد. بر این اساس، کدام گزینه درباره آن نادرست است؟ ($H = ۱, C = ۱۲, O = ۱۶: g.mol^{-1}$)

- (۱) می‌تواند یک ترکیب حلقوی و سیرشده باشد.
- (۲) اگر هیدروکربن مورد نظر، ترکیبی زنجیره‌ای و بدون شاخه با ۴ اتم کربن باشد، در واکنش آن با گاز کلر کافی، ترکیبی با نام ۱، ۲-دی‌کلروپنتان تولید می‌شود.
- (۳) حدود ۷۱/۸۵ درصد جرم آن را کربن تشکیل داده است.
- (۴) ممکن است ترکیبی باشد که از آن به عنوان عمل‌آورنده در کشاورزی استفاده می‌شود.

۸۹- واکنش زیر، سوختن استیک اسید در دمای اتاق را نشان می‌دهد. اگر گرمای لازم برای تبخیر ۱ مول استیک اسید و آب به ترتیب برابر ۲۴ و ۴۲ کیلوژول باشد، مجموع آنتالپی پیوندهای $C=O$ و $O-H$ برابر چند کیلوژول بر مول است؟



C—O	C—C	C—H	O=O	پیوند
۳۸۰	۳۵۱	۴۱۵	۵۰۰	آنتالپی پیوند ($kJ.mol^{-1}$)

۱۳۰۰ (۴)

۱۳۱۴ (۳)

۱۱۳۴ (۲)

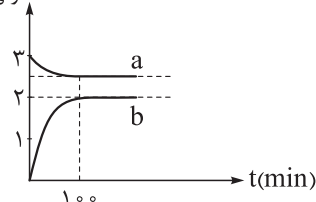
۱۰۳۰ (۱)

محل انجام محاسبات

۹۰- قند شیر یا لاکتوز در فرایند تخمیر در حضور آب و طی چند مرحله به لاکتیک اسید تبدیل می‌شود. با توجه به معادله کلی این فرایند و نمودار غلظت - زمان رسم‌شده برای آن، کدام مطلب درست است؟



غلظت مولی

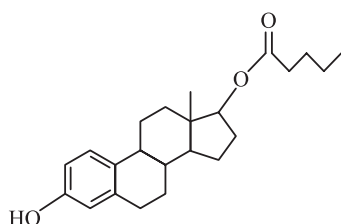


- (۱) نمودار a مربوط به آب و نمودار b مربوط به لاکتیک اسید است.
 (۲) در ۱۰۰ دقیقه اول واکنش، سرعت تولید فراورده $2 \text{ mol.L}^{-1} \cdot \text{h}^{-1}$ است.
 (۳) مقدار ثابت تعادل این واکنش برابر ۶/۴ است.
 (۴) در هر لحظه از واکنش قبل از رسیدن به تعادل، غلظت مولی لاکتیک اسید، ۴ برابر غلظت مولی لاکتوز است.

۹۱- کدام مطلب در مورد پلیمرها نادرست است؟ ($H = 1, C = 12, O = 16, F = 19, Cl = 35.5 : \text{g.mol}^{-1}$)

- (۱) جرم مولی تترافلورو اتن از جرم مولی پروپن بیشتر و از جرم مولی گلوکز کم‌تر است.
 (۲) در ساختار پلی‌سیانو اتن و پلی‌استیرن، پیوندهای دوگانه وجود دارد.
 (۳) درصد جرمی کلر در پلی‌وینیل کلرید بیش از ۵۰ درصد است.
 (۴) برای تبدیل اتن به پلی‌اتن، از ترکیب‌های محتوی آلومینیم و تیتانیم به عنوان کاتالیزگر استفاده می‌شود.

۹۲- استرادیول والرات (Estradiol Valerate) یک داروی تزریقی و خوراکی است که در روش‌های کمک باروری به کار می‌رود. براساس ساختار آن، کدام موارد از مطالب زیر، درست است؟ ($H = 1, C = 12, O = 16 : \text{g.mol}^{-1}$)



- (الف) به تقریب ۹ درصد جرم آن را هیدروژن تشکیل داده است.
 (ب) فراورده‌های واکنش آبکافت آن، می‌توانند در تولید پلی‌استرها به کار روند.
 (پ) نسبت شمار پیوندهای C-H به C-O در آن، برابر ۱۱ است.
 (ت) برای سنتز ۳ مول از آن، باید ۳۰۶ گرم اسید مصرف شود.
 (ث) برهم‌کنش بین مولکولی غالب در آن، پیوند هیدروژنی است.

۹۳- ۱، ۶ - هگزان دی‌آمین دارای ساختار $H_2N(CH_2)_6NH_2$ است. فرمول پلیمر به‌دست‌آمده از واکنش آن با تریتالیک اسید در شرایط مناسب، کدام است؟

- (۱) $(C_{14}H_{18}N_2O_4)_n$
 (۲) $(C_{14}H_{16}N_2O_4)_n$
 (۳) $(C_{14}H_{16}N_2O_4)_n$
 (۴) $(C_{14}H_{18}N_2O_4)_n$

۹۴- بر پایه واکنش موازنه‌نشده: $Cu_2S(s) + HCl(aq) \rightarrow CuCl(aq) + H_2S(g)$ ، اگر ۶/۴ گرم سنگ معدن مس ناخالص با اسید کافی واکنش دهد و ۶۷۲ میلی‌لیتر گاز در شرایط STP آزاد شود، درصد خلوص فلز مس در سنگ معدن چه‌قدر است و چند لیتر محلول اسید با $pH = 1/2$ در این فرایند مصرف می‌شود؟

($S = 32, Cu = 64 : \text{g.mol}^{-1}, \log 2 = 0.3, \log 3 = 0.5$)

- (۱) ۶۰٪ - ۵
 (۲) ۶۰٪ - ۱
 (۳) ۷۵٪ - ۵
 (۴) ۷۵٪ - ۱

محل انجام محاسبات

۹۵- چند مورد، جمله «با افزایش طول زنجیر کربنی در کربوکسیلیک اسیدهای یک‌عاملی، کاهش می‌یابد»، را به درستی کامل می‌کند؟

- نقطه جوش آن‌ها
- انحلال‌پذیری آن‌ها در آب
- pH محلول ۱ مولار آن‌ها
- چربی‌گریزی آن‌ها

• نسبت شمار پیوندهای C-H به شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

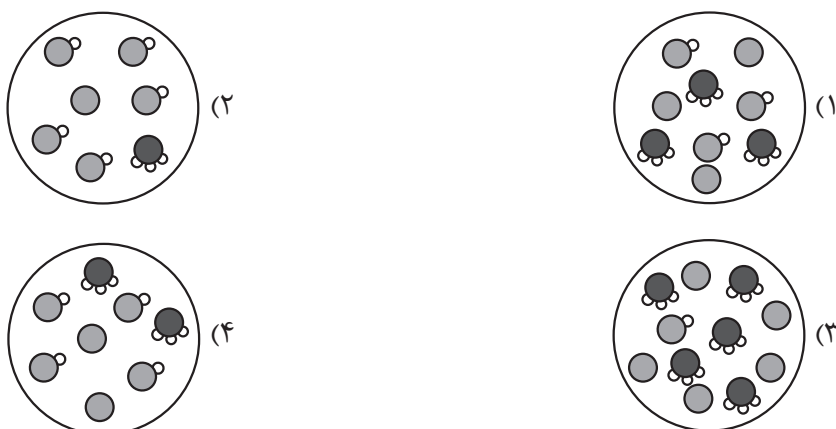
۹۶- یک شرکت داروسازی، شربت شیر منیزی را با غلظت ۸ درصد جرمی منیزیم هیدروکسید ($d = 1/16 \text{ g.mL}^{-1}$) در قوطی‌هایی با میانگین حجم ۱۱۰ میلی‌لیتر تولید و روانه بازار می‌کند. منیزیم مورد استفاده در تهیه ۴۰ هزار قوطی از این دارو را از چند متر مکعب آب دریا ($d = 1/1 \text{ g.mL}^{-1}$) که غلظت یون منیزیم در آن برابر ۱۰۲۴ ppm است، می‌توان به دست آورد؟ ($H = 1, O = 16, Mg = 24 : \text{g.mol}^{-1}$)

- ۱۳۵ (۱) ۱۵۰ (۲) ۱۶۵ (۳) ۱۸۰۰ (۴)

۹۷- همه عبارت‌های زیر درست هستند، به جز:

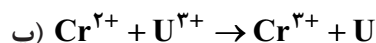
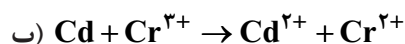
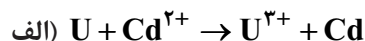
- (۱) گل ادریسی در خاکی که غلظت یون هیدروکسید در آن $2/5 \times 10^{-6}$ مولار است، به رنگ سرخ دیده می‌شود.
- (۲) فراورده‌های واکنش جوهر نمک با جوش شیرین، دارای سه حالت فیزیکی متفاوت هستند.
- (۳) رسانایی الکتریکی محلول فورمیک اسید به طور آشکاری از رسانایی الکتریکی محلول پتاس سوزآور کم‌تر است.
- (۴) فرمول شیمیایی $C_{18}H_{33}O_2Na$ را می‌توان به صابون جامد نسبت داد که زنجیر هیدروکربنی آن دارای ۱۷ اتم کربن و یک پیوند دوگانه است.

۹۸- اگر مقدار ثابت یونش اسید HA برابر ۵/۰ باشد، کدام شکل می‌تواند نشان‌دهنده نمای ذره‌ای محلول ۱ مولار آن باشد؟ (مولکول‌های آب نشان داده نشده‌اند.)



محل انجام محاسبات

۹۹- اگر واکنش (الف) را بر خلاف واکنش های (ب) و (پ)، بتوان در یک سلول گالوانی انجام داد، کدام مطلب نادرست است؟



(۱) مقایسه قدرت اکسندگی گونه ها به صورت: $U^{3+} < Cr^{3+} < Cd^{2+}$ است.

(۲) در سلول گالوانی اورانیم - کادمیم، الکتروکاتود کادمیم است.

(۳) موقعیت نیم واکنش $Cr^{2+}(aq) + e^- \rightarrow Cr^{3+}(aq)$ در جدول سری الکتروشیمیایی، پایین تر از موقعیت نیم واکنش $Cd^{2+}(aq) + 2e^- \rightarrow Cd(s)$ است.

(۴) تمایل Cr^{2+} برای اکسید شدن به Cr^{3+} ، بیشتر از تمایل U برای اکسید شدن به U^{3+} است.

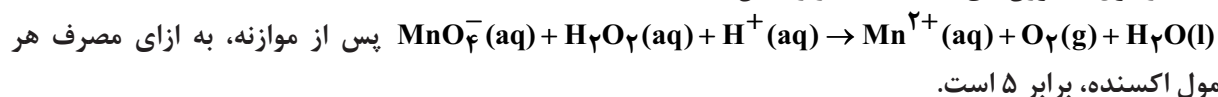
۱۰۰- اگر در فرایند هال، $\frac{3}{612} \times 10^{26}$ الکترون مبادله شود، برای جذب کربن دی اکسید تولید شده طی این فرایند، به

چند کیلوگرم آهک نیاز است؟ ($O = 16, Ca = 40 : g.mol^{-1}$)

(۱) ۴ / ۸ (۲) ۵ / ۶ (۳) ۶ / ۵ (۴) ۸ / ۴

۱۰۱- چند مورد از مطالب زیر درست است؟

• شمار مول الکترون های مبادله شده در واکنش:



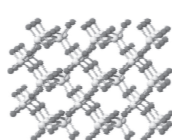
• نیم واکنش کاتدی در زنگ زدنی حلبی، به صورت: $O_2(g) + 2H_2O(l) + 4e^- \rightarrow 4OH^-(aq)$ است.

• در سری الکتروشیمیایی، یون لیتیم اکسنده ترین کاتیون و یون فلوئورید، ضعیف ترین اکسنده است.

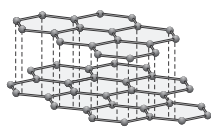
• در سلول سوختی هیدروژن - اکسیژن، جهت حرکت الکترون ها همسو با جهت حرکت یون های هیدرونیوم از غشای مبادله کننده است.

(۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

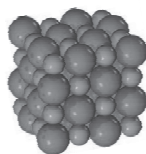
۱۰۲- کدام دسته از مواد، نماینده مناسبی برای ساختار یا ویژگی عمومی جامد بلوری ارائه شده است؟



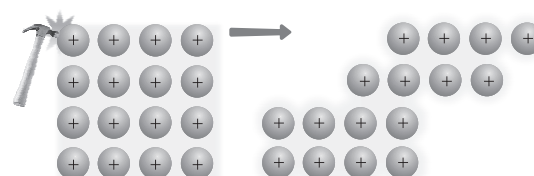
(a)



(b)



(c)



(d)

(۱) آلایژ نیتینول: d و گرافن: b و سیلیسیم: a (۲) سیلیسیم کربید: c و گرافیت: b و کوارتز: a

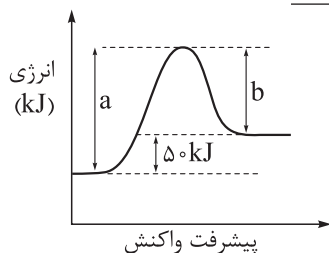
(۳) قوطی آلومینیومی: d و کلسیم اکسید: c و گرافیت: b (۴) ساچمه سری: d و نیتروژن مونوکسید: c و سیلیس: a

محل انجام محاسبات

۱۰۳- کدام مطلب به یقین درست است؟

- (۱) مولکول‌هایی که اتم مرکزی آن‌ها فاقد الکترون ناپیوندی است، در میدان الکتریکی جهت‌گیری نمی‌کنند.
- (۲) عنصری از دوره سوم که شعاع اتمی بزرگ‌تری دارد، شعاع یون پایدار آن نیز نسبت به سایر یون‌های پایدار این دوره بزرگ‌تر است.
- (۳) همه مولکول‌هایی که از اتم‌های یکسانی تشکیل شده‌اند، ناقطبی‌اند.
- (۴) آنتالپی فروپاشی شبکه بلور هالیدهای فلزهای قلیایی، با کاهش واکنش‌پذیری فلز، افزایش می‌یابد.

۱۰۴- نمودار انرژی - پیشرفت واکنش گازی در غیاب کاتالیزگر به صورت زیر است. اگر در حضور کاتالیزگر، مقدار a ، ۳۰ درصد کاهش یابد و مقدار b به $62/5$ درصد مقدار اولیه خود برسد، کدام مطلب نادرست است؟



- (۱) مجموع آنتالپی پیوندها در مواد واکنش‌دهنده، از مجموع آنتالپی پیوندها در مواد فراورده بیشتر است.
- (۲) در غیاب کاتالیزگر، نسبت انرژی فعال‌سازی واکنش (در جهت رفت) به ΔH واکنش، برابر ۵ است.
- (۳) انرژی فعال‌سازی واکنش در حضور کاتالیزگر، 75 kJ کاهش یافته است.
- (۴) اگر a و b در حضور کاتالیزگر به a' و b' تبدیل شوند، نسبت a' به b' برابر $1/25$ است.

۱۰۵- کدام موارد از مطالب زیر، نادرست‌اند؟

- (الف) اگر در واکنش تعادلی: $2\text{NO}(g) + \text{O}_2(g) \rightleftharpoons 2\text{NO}_2(g)$ ، غلظت همه مواد موجود در تعادل را دو برابر کنیم، مقدار ثابت تعادل دو برابر می‌شود.
 - (ب) واکنش حذف $\text{NO}(g)$ در مبدل‌های کاتالیستی خودروهای بنزینی، گرماده و از نوع اکسایش - کاهش است.
 - (پ) برای تبدیل پارازیلین به ترفتالیک اسید در صنعت، از کاتالیزگر اکسیژن استفاده می‌شود.
 - (ت) نقش جرقه در افزایش سرعت واکنش هیدروژن با اکسیژن، کاهش انرژی فعال‌سازی است.
- (۱) الف - پ - ت (۲) الف - ب (۳) پ - ت (۴) الف - ب - ت

محل انجام محاسبات



ویژه
کنکوری های
۱۴۰۳

۱۴۰۳/۰۴/۰۴

دفترچه
پاسخ
آزمون شانزدهم
حضور

علوم ریاضی و فنی



سال تحصیلی
۱۴۰۲ - ۱۴۰۳

آزمون آزمایشی خیلی سبز

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا
حسابان	حسین شفیع زاده - مهرداد کیوان
ریاضیات گسسته و آمار و احتمال	علیرضا شریف خطیبی - عطا صادقی - حمید گلزاری - سروش موئینی
هندسه	محمد رضا حسینی فرد - محمد طاهر شعاعی - کیوان صارمی - محسن محمد کریمی - محسن میراسلامی - حسین هاشمی طاهری
فیزیک	محمد باغبان - علیرضا جباری - مجید ساکی - رضا سبزمیدانی - محمد جواد سورچی - نوید شاهی - علیرضا عبدللهی - علیرضا علینقی - علیرضا گونه
شیمی	مهدی براتی - محمد علی توسلی فر - علی حیدری - یاسر راش - شهرام شاپرویزی - یاسر عبدللهی

نام درس	مسئول درس	گزینشگر	مؤلف پاسخ نامه	کارشناسان علمی	ویراستاران به ترتیب حروف الفبا
حسابان	حسین شفیع زاده - مهرداد کیوان	حسین شفیع زاده - مهرداد کیوان	عاطفه خان محمدی	محمد سجاد نقیه - سجاد داوطلب	زهره جالینوسی - محمد حمیدی - سید احمد عباسی
ریاضیات گسسته و آمار و احتمال	حمید گلزاری	حمید گلزاری	مسعود شفیعی	امیرحسین ابومحبوب	ماهان فنی فر - علیرضا کاظمی بقا - ابوالفضل ناصری - مریم نظری
هندسه	حمید گلزاری	حمید گلزاری	زهره جالینوسی	امیرحسین ابومحبوب	ماهان فنی فر - ابوالفضل ناصری - مریم نظری
فیزیک	رضا سبزمیدانی	نوید شاهی	محمد باغبان - علیرضا جباری - محمد جواد سورچی - علیرضا گونه	علیرضا جباری	محمد احمد بیکی - مینا غلام پور - احسان محمدی - ابوالفضل ناصری - محمد مهدی یوسفی
شیمی	یاسر عبدللهی	شهرام شاپرویزی - یاسر عبدللهی	یاسر عبدللهی	محمد مرادی - وحید فارسین	علی حیدری - مهسا خاکی - هومن زندی

سرپرست محتوایی: فاطمه آقاجانپور

Azmoon.kheilisabz.com



تست و پاسخ ۱

اگر $x = \alpha$ جواب معادله $\frac{3}{x+1} = 1 + \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}$ باشد، حاصل $\alpha^3 + \frac{1}{\alpha^3}$ کدام است؟

۳/۲ (۲)

۳/۵ (۱)

۲/۴ (۴)

۲/۵ (۳)

پاسخ: گزینه ۳

خودت حل کنی بهتره از فرمول اتحاد چاق و لاغر برای عبارت $\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1$ که عبارت چاق است، استفاده کنید.

درس نامه •• اتحادهای جبری

نام اتحاد	فرمول	مثال
مربع دو جمله‌ای	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	$(\sqrt{3}+1)^2 = 3 + 2\sqrt{3} + 1 = 4 + 2\sqrt{3}$
مکعب دو جمله‌ای	$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$	$(x + \frac{1}{x})^3 = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3(x + \frac{1}{x})$
مربع ۳ جمله‌ای	$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$	—
مزدوج	$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$	$x^6 - 1 = (x^3 - 1)(x^3 + 1)$
جمله مشترک	$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$ $(x+a)(x-b) = x^2 + (a-b)x - ab$	$x^2 + 3x - 4 = (x+4)(x-1)$
چاق و لاغر	$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$	$x^3 - 8 = (x-2)(x^2 + 2x + 4)$

پاسخ تشریحی گام اول: در سمت راست معادله، از اتحاد چاق و لاغر استفاده می‌کنیم:

$$1 + \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} = (1 - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2^2}) \times \frac{(1 + \sqrt[3]{2})}{(1 + \sqrt[3]{2})} = \frac{1+2}{1 + \sqrt[3]{2}} = \frac{3}{1 + \sqrt[3]{2}}$$

$$\frac{3}{x+1} = \frac{3}{1 + \sqrt[3]{2}}$$

گام دوم: پس معادله به صورت مقابل می‌شود:

که نتیجه می‌گیریم $x = \sqrt[3]{2}$ است.

گام سوم: جواب معادله $x = \alpha = \sqrt[3]{2}$ می‌شود. حاصل $\alpha^3 + \frac{1}{\alpha^3}$ برابر است با: $\alpha^3 + \frac{1}{\alpha^3} = (\sqrt[3]{2})^3 + \frac{1}{(\sqrt[3]{2})^3} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

تست و پاسخ ۲

مجموع ریشه‌های معادله $|2x-2| + 3|x-2| = k$ برابر ۳/۶ است، مقدار k کدام است؟

۲/۲۵ (۴)

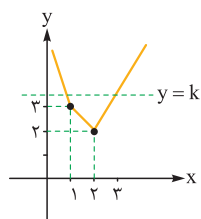
۲ (۳)

۳ (۲)

۲/۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

خودت حل کنی بهتره به کمک رسم نمودار مربوط به سمت چپ معادله، در مورد ریشه‌ها بحث کنید.



پاسخ تشریحی گام اول: ابتدا نمودار تابع $f(x) = |2x-2| + 3|x-2|$ را به کمک ریشه‌های داخل قدرمطلق‌ها،

رسم می‌کنیم.

$$2x-2=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow f(1)=3$$

$$x-2=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow f(2)=2$$

گام دوم: از آنجایی که در صورت سؤال، مجموع ریشه‌های معادله را گفته است، خط $y=k$ حتماً نمودار را در ۲ نقطه قطع می‌کند، پس $k > 2$ است. از طرفی اگر خط $y=k$ را با نمودار تابع f قطع دهیم، یکی از ریشه‌ها حتماً در بازه $(2, +\infty)$ قرار می‌گیرد. پس برای $x > 2$ داریم:

$$x > 2: f(x) = 2x-2+3(x-2) = 5x-8 = k \Rightarrow x = \frac{8+k}{5}$$

$$1) x < 1: -(2x-2) - 3(x-2) = -5x+8 = k \Rightarrow x = \frac{8-k}{5}$$

$$\frac{8+k}{5} + \frac{8-k}{5} = \frac{16}{5} \neq 3/6$$

گام سوم: برای ریشه دیگر، ۲ حالت را بحث می‌کنیم:

در این صورت جمع ریشه‌ها برابر است با:

پس این حالت قابل قبول نیست.

$$2) 1 < x < 2: (2x-2) - 3(x-2) = -x+4 = k \Rightarrow x = 4-k$$

در این حالت، مجموع ریشه‌ها را به دست می‌آوریم:

$$\frac{8+k}{5} + 4-k = \frac{8+k+20-5k}{5} = \frac{28-4k}{5} = 3/6 \Rightarrow 4k = 28-18 = 10 \Rightarrow k = \frac{10}{4} = 2.5$$

بنابراین به ازای $k = 2.5$ ، مجموع ریشه‌های معادله داده شده، برابر با $3/6$ می‌شود.

تست و پاسخ ۳

برای مجموعه‌های $A = \{a+1, 5, b-1, c^2\}$ و $B = \{4, 0, 2d+1\}$ ، فرض کنید $A \times B \subseteq B \times A$ است. اگر $c > 0$ ، مجموع مقادیر مختلف

$abcd$ کدام است؟

$$8-4\sqrt{5} \quad (4)$$

$$40-16\sqrt{5} \quad (3)$$

$$-20-4\sqrt{5} \quad (2)$$

$$40+16\sqrt{5} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۲

خودت حل کنی بهتره از خاصیت زیرمجموعه‌ها و خصوصیات دو مجموعه مساوی استفاده کن.

پاسخ تشریحی

$$A \times B \subseteq B \times A \Rightarrow A \subseteq B, B \subseteq A \Rightarrow A = B$$

گام اول:

بنابراین تعداد اعضای دو مجموعه A و B با هم برابر است.

$$5 \in A \Rightarrow 5 \in B \Rightarrow 2d+1=5 \Rightarrow d=2$$

گام دوم:

$$A = B = \{4, 0, 5\}$$

پس

گام سوم: چون $c > 0$ بنابراین دو حالت برای c^2 داریم:

حالت اول:

$$c^2 = 4 \xrightarrow{c>0} c = 2$$

حال بین $a+1$ و $b-1$ یکی حتماً برابر صفر است و دیگری می‌تواند ۰ یا ۴ یا ۵ باشد، پس داریم:

$$\begin{cases} a+1=0 \\ b-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow abcd = -4, \quad \begin{cases} b-1=0 \\ a+1=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=1 \\ a=3 \end{cases} \Rightarrow abcd = 12$$

$$\begin{cases} a+1=0 \\ b-1=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=5 \end{cases} \Rightarrow abcd = -20, \quad \begin{cases} b-1=0 \\ a+1=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=1 \\ a=4 \end{cases} \Rightarrow abcd = 16$$

$$\begin{cases} a+1=0 \\ b-1=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=6 \end{cases} \Rightarrow abcd = -24$$



$$c^2 = 5 \xrightarrow{c>0} c = \sqrt{5}$$

حالت دوم:

بین $a-1$ و $a+1$ یکی حتماً برابر صفر و دیگری برابر ۴ است، پس داریم:

$$\begin{cases} a+1=4 \\ b-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow abcd = 6\sqrt{5}$$

$$\begin{cases} a+1=0 \\ b-1=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=5 \end{cases} \Rightarrow abcd = -10\sqrt{5}$$

گام چهارم:

$$-4 - 20 - 24 + 12 + 16 + 6\sqrt{5} - 10\sqrt{5} = -20 - 4\sqrt{5}$$

بنابراین مجموع مقادیر مختلف $abcd$ برابر است با:

تست و پاسخ ۴

کدام گزاره می‌تواند هم‌ارزی منطقی با گزاره S داشته باشد؟

$$[(q \Rightarrow (p \vee r)) \Rightarrow (\sim q \wedge (\sim p \vee r))] \Rightarrow (p \wedge q) \quad (۱)$$

$$[(p \vee \sim r) \Rightarrow ((q \wedge r) \Rightarrow (q \vee r))] \Rightarrow (\sim (q \wedge p) \vee r) \quad (۲)$$

$$[p \Rightarrow ((q \vee r) \Rightarrow (q \wedge r))] \Rightarrow (\sim (p \vee r) \wedge q) \quad (۳)$$

$$[(r \wedge (\sim p \vee q)) \Rightarrow (p \vee q)] \Rightarrow [(\sim q \wedge r) \Rightarrow p] \quad (۴)$$

p	q	r	S
T	T	T	F
T	T	F	T
T	F	T	T
T	F	F	F
F	T	T	F
F	T	F	T
F	F	T	F
F	F	F	F

پاسخ: گزینه ۳

خودت حل کنی بهتره از جدول ارزش گزاره‌ها کمک بگیر.

$$\begin{cases} \text{☁} \rightarrow T \equiv T \\ F \rightarrow \text{☁} \equiv T \end{cases}$$

نکته

پاسخ تشریحی

۳

p	q	r	S	$(q \vee r) \Rightarrow (q \wedge r)$	$p \Rightarrow ((q \vee r) \Rightarrow (q \wedge r))$	$\sim (p \vee r) \wedge q$	گزاره گزینه ۳
T	T	T	F	T	T	F	F
T	T	F	T	F	F	F	T
T	F	T	T	F	F	F	T
T	F	F	F	T	T	F	F
F	T	T	F	T	T	F	F
F	T	F	T	F	T	T	T
F	F	T	F	F	T	F	F
F	F	F	F	T	T	F	F

بررسی سایر گزینه‌ها می‌پردازیم:

۱

p	q	r	S	$q \Rightarrow (p \vee r)$	$\sim q \wedge (\sim p \vee r)$	$(q \Rightarrow p \vee r) \Rightarrow (\sim q \wedge (\sim p \vee r))$	گزاره گزینه ۱
T	T	T	F	T	F	F	T

نیازی به ادامه نیست، این گزاره با S هم‌ارز نیست.





۲

p	q	r	S	$\overbrace{(q \wedge r)}^m \Rightarrow (q \vee r)$	$(p \vee \sim r) \Rightarrow (m)$	$\sim (q \wedge p) \vee r$	گزاره گزینه ۲
T	T	T	F	T	T	T	T

این گزینه نیز با گزاره S هم ارز منطقی نیست.

۴

p	q	r	S	$(r \wedge (\sim p \vee q)) \Rightarrow (p \vee q)$	$(\sim q \wedge r) \Rightarrow p$	گزاره گزینه ۴
T	T	T	F	T	T	T

گزاره S با گزاره ۴ نیز هم ارز منطقی نیست.

تست و پاسخ ۵

اگر α و β ریشه‌های معادله $4x^2 + mx - 1 = 0$ و α^2 و β ریشه‌های معادله $2x^2 + nx + 1 = 0$ باشند، حاصل $\alpha m + \beta n$ کدام است؟

$$\frac{9}{2} \quad (۱) \quad \frac{7}{2} \quad (۲) \quad -\frac{7}{2} \quad (۳) \quad -\frac{9}{2} \quad (۴)$$

پاسخ: گزینه ۴

مشاوره یکی از سوالات پای ثابت کنکور، روابط بین ریشه‌های معادله درجه دوم است که با حل سوالات کنکور می‌توانید به تسلط کافی در این مبحث برسید. دو فرمول اصلی S و P را فراموش نکنید!

خود حل کنی بهتره از فرمول ضرب ریشه‌های معادله درجه ۲، α و β را پیدا کنید.

درس نامه روابط بین ریشه‌های معادله درجه دوم با ضرایب آن

$y = ax^2 + bx + c = 0 \quad (\Delta \geq 0, \beta, \alpha \text{ ریشه‌های } \Delta)$			
۱	$S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a}$	۲	$P = \alpha\beta = \frac{c}{a}$
۳	$\alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P$	۴	$\alpha^3 + \beta^3 = S^3 - 3PS$
۵	$ \alpha - \beta = \frac{\sqrt{\Delta}}{ a }$	۶	$a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ $a\beta^2 + b\beta + c = 0$

نکته گاهی ممکن است در حل برخی از سوالات این مبحث، از خاصیت ۶ استفاده کنید که در واقع همان جای گذاری ریشه‌ها در معادله اصلی است.

پاسخ تشریحی گام اول: از فرمول ضرب ریشه‌ها در معادلات درجه دوم استفاده می‌کنیم تا هر یک از مقادیر α و β را به دست بیاوریم:

$$\begin{cases} 4x^2 + mx - 1 = 0 \xrightarrow{\text{ریشه‌ها: } \alpha \text{ و } \beta} \alpha\beta^2 = \frac{-1}{4} \quad (*) \\ 2x^2 + nx + 1 = 0 \xrightarrow{\text{ریشه‌ها: } \alpha^2 \text{ و } \beta} \alpha^2\beta = \frac{1}{2} \quad (**) \end{cases} \xrightarrow[\text{درهم ضرب می‌کنیم}]{\text{طرفین معادله‌ها را}} \alpha^3\beta^2 = \frac{-1}{8} \Rightarrow \alpha\beta = -\frac{1}{2}$$

گام دوم: حالا عبارت $\alpha\beta = -\frac{1}{2}$ را در هر یک از (*) و (**) جای گذاری می‌کنیم تا α و β به دست بیاید:

$$\alpha\beta^2 = \frac{-1}{4} \Rightarrow \beta = \frac{\frac{-1}{4}}{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\alpha^2\beta = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$$



گام سوم: حالا از فرمول جمع ریشه‌ها در معادلات درجه دوم استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} 4x^2 + mx - 1 = 0 \Rightarrow \alpha + \beta^2 = -\frac{m}{4} \xrightarrow{\text{از گام دوم}} -1 + \frac{1}{4} = -\frac{m}{4} \Rightarrow m = 3 \\ 2x^2 + nx + 1 = 0 \Rightarrow \alpha^2 + \beta = \frac{-n}{2} \xrightarrow{\text{از گام دوم}} 1 + \frac{1}{2} = \frac{-n}{2} \Rightarrow n = -3 \end{cases}$$

گام چهارم: حاصل عبارت خواسته شده، برابر می‌شود با:

$$\alpha m + \beta n = -1 \times 3 + \frac{1}{4}(-3) = -3 - \frac{3}{4} = -\frac{9}{4}$$

تست و پاسخ ۶

نمودار تابع $f(x) = 2x - x^2$ را نسبت به مبدأ مختصات قرینه کرده و سه واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم. ضابطه وارون تابع جدید در بزرگ‌ترین بازه‌ای که اکیداً نزولی است، کدام است؟

$-f(-x)$

$$y = 2 - \sqrt{x+1} \quad (۴)$$

$$y = 1 - \sqrt{x+2} \quad (۳)$$

$$y = 1 - \sqrt{x-2} \quad (۲)$$

$$y = 2 - \sqrt{x-1} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۴

درس نامه: انتقال، قرینه‌یابی، انبساط و انقباض

نمودار چه می‌شود؟	نماد ریاضی	اتفاقی که برای ضابطه می‌افتد
a واحد راست	$f(x-a)$	جای x ها، $x-a$ می‌گذاریم.
a واحد چپ	$f(x+a)$	جای x ها، $x+a$ می‌گذاریم.
b واحد بالا	$f(x)+b$	b تا به ضابطه اضافه می‌کنیم.
b واحد پایین	$f(x)-b$	b تا از ضابطه کم می‌کنیم.
نسبت به محور x ها	$-f(x)$	جای y، $-y$ می‌گذاریم.
نسبت به محور y ها	$f(-x)$	جای x ها، $-x$ می‌گذاریم.
نسبت به مبدأ	$-f(-x)$	هر دو کار بالا با هم!
نسبت به خط $x=k$	$f(2k-x)$	جای x ها، $2k-x$ می‌گذاریم.
نسبت به خط $y=k$	$2k-f(x)$	به جای y ها، $2k-y$ می‌گذاریم.
انبساط با ضریب ۲	$f\left(\frac{x}{2}\right)$	جای x ها، $\frac{x}{2}$ می‌گذاریم.
انقباض با ضریب $\frac{1}{2}$	$f(2x)$	جای x ها، $2x$ می‌گذاریم.
انبساط با ضریب ۲	$2f(x)$	کل ضابطه ضربدر ۲ می‌شود.
انقباض با ضریب $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}f(x)$	کل ضابطه ضربدر $\frac{1}{2}$ می‌شود.

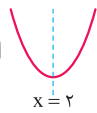
پاسخ تشریحی گام اول: ابتدا تابع f را نسبت به مبدأ مختصات قرینه می‌کنیم:

$$f(x) = 2x - x^2 \xrightarrow{g_1(x) = -f(-x)} g_1(x) = -(-2x - x^2) = 2x + x^2$$

گام دوم: حالا $g_1(x)$ را ۳ واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم، یعنی به جای x ها، $x-3$ می‌گذاریم:

$$g_2(x) = g_1(x-3) = 2(x-3) + (x-3)^2 = 2x - 6 + x^2 - 6x + 9 = x^2 - 4x + 3 = (x-2)^2 - 1$$



گام سوم: در تابع $g_2(x)$ به دست آمده، محور تقارن $x = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{2} = 2$ است و تابع، مینیمم دارد، پس شکل تابع به صورت  است و در بازه $[-\infty, 2]$ ، نزولی اکید است. در این بازه، وارون آن را پیدا می‌کنیم.

$$y = (x - 2)^2 - 1 \Rightarrow y + 1 = (x - 2)^2 \Rightarrow \sqrt{y + 1} = |x - 2|$$

$$\xrightarrow{x \leq 2} \sqrt{y + 1} = -x + 2 \Rightarrow x = 2 - \sqrt{y + 1} \xrightarrow{\text{جای } x \text{ و } y \text{ را عوض می‌کنیم.}} g_2^{-1}(x) = 2 - \sqrt{x + 1}$$

تست و پاسخ ۷

نقاط $A(4, 3)$ ، $B(-4, 9)$ و مبدأ مختصات سه رأس مثلثی هستند؛ کمترین ارتفاع مثلث برابر کدام است؟

$$1/8 (4)$$

$$4/8 (3)$$

$$2/4 (2)$$

$$3/6 (1)$$

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره در حل سوالات هندسه تحلیلی، از رسم شکل‌های فرضی برای بهتر فهمیدن مسئله، کمک بگیرید. معمولاً سوالات مربوط به هندسه تحلیلی همانند این سوال ساده هستند.

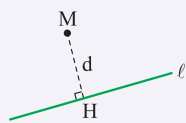
خودت حل کنی بهتره کمترین ارتفاع مثلث، بر بزرگ‌ترین ضلع مثلث عمود می‌شود.

نکات ۱ فاصله بین دو نقطه در صفحه:



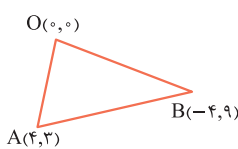
$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

۲ فاصله نقطه $M(x_M, y_M)$ از خط $ax + by + c = 0$:



$$d = MH = \frac{|ax_M + by_M + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

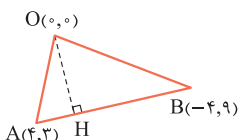
پاسخ تشریحی گام اول: مثلث فرضی زیر را در نظر بگیرید. طول اضلاع مثلث را پیدا می‌کنیم:



$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(4 + 4)^2 + (3 - 9)^2} = \sqrt{64 + 36} = 10$$

$$AO = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$$

$$BO = \sqrt{(-4)^2 + 9^2} = \sqrt{16 + 81} = \sqrt{97}$$



پس AB بیشترین طول را در بین اضلاع مثلث ABO دارد. بنابراین ارتفاع وارد بر AB که آن را با OH نمایش می‌دهیم، کمترین طول را خواهد داشت:

گام دوم: برای پیدا کردن طول OH، ابتدا معادله خط AB را می‌نویسیم و سپس از فرمول فاصله نقطه از خط استفاده می‌کنیم.

$$y - y_A = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} (x - x_A) \Rightarrow y - 3 = \frac{3 - 9}{4 + 4} (x - 4) \Rightarrow y - 3 = \frac{-3}{4} x + 3 \Rightarrow \frac{3}{4} x + y - 6 = 0$$

$$OH = \frac{\left| \frac{3}{4} \times 0 + 0 - 6 \right|}{\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 1^2}} = \frac{6}{\frac{5}{4}} = \frac{24}{5} = 4/8$$





تست و پاسخ ۸

فرض کنید تابع f خطی و اکیداً نزولی و $f^{-1}(1-2x) = 1-2f(x)$ باشد. اگر $\text{gof}(x) = 9x^2 + 3x$ باشد، ضابطه $g(x)$ کدام است؟

ضریب x در تابع خطی منفی است.

$$9x^2 + 15x + 6 \quad (2)$$

$$9x^2 - 15x + 6 \quad (1)$$

$$9x^2 + 15x - 6 \quad (4)$$

$$9x^2 - 15x - 6 \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۱

نکات ۱ در تابع اکیداً نزولی f ، به ازای $x_1 < x_2$ رابطه $f(x_1) > f(x_2)$ برقرار است.

۲ اگر تابع خطی f ، نزولی اکید باشد، شیب آن منفی است و اگر صعودی اکید باشد، شیب آن مثبت خواهد بود.

۳ اگر در تابع وارون پذیر f ، (a, b) روی تابع f قرار داشته باشد، نقطه (b, a) روی تابع f^{-1} قرار دارد.

پاسخ تشریحی گام اول: تابع f خطی و اکیداً نزولی است، پس می‌توانیم آن را به صورت $f(x) = ax + b$ در نظر بگیریم. به طوری که $a < 0$ باشد. در این صورت $f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$ می‌شود.

گام دوم: تابع f و f^{-1} را در عبارت داده‌شده، جای‌گذاری می‌کنیم:

$$f^{-1}(1-2x) = 1-2f(x) \Rightarrow \frac{1-2x-b}{a} = 1-2(ax+b) \Rightarrow 1-2x-b = a-2a^2x-2ab$$

$$\Rightarrow -2x + (1-b) = -2a^2x + (a-2ab)$$

گام سوم: با توجه به این که تساوی گفته‌شده، اتحاد است، باید ضرایب x و ضرایب ثابت در دو طرف با هم برابر باشند:

$$x^1: -2 = -2a^2 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1 \xrightarrow{a < 0} a = -1 (*)$$

$$x^0: 1-b = a-2ab \xrightarrow{(*)} 1-b = -1+2b \Rightarrow 2b = 2 \Rightarrow b = \frac{2}{3}$$

گام چهارم: پس $f(x) = -x + \frac{2}{3}$ است. از طرفی تابع gof داده شده است. با جای‌گذاری ضابطه f در آن داریم:

$$\text{gof}(x) = g(f(x)) = g(-x + \frac{2}{3}) = 9x^2 + 3x$$

از تغییر متغیر $-x + \frac{2}{3} = t$ استفاده می‌کنیم. در این صورت $x = \frac{2}{3} - t$ می‌شود:

$$g(t) = 9(\frac{2}{3}-t)^2 + 3(\frac{2}{3}-t) = 9(\frac{4}{9} - \frac{4}{3}t + t^2) + 2 - 3t = 4 - 12t + 9t^2 + 2 - 3t = 9t^2 - 15t + 6$$

بنابراین ۱ درست است.

تست و پاسخ ۹

دامنه تعریف تابع $f(x) = \log_2(\frac{x}{\log_2 2x})$ کدام است؟

$$(0, \frac{1}{2}) \quad (4)$$

$$(\frac{1}{2}, 1) \quad (3)$$

$$(0, 1) \quad (2)$$

$$(0, 2) \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۴

درس‌نامه دامنه توابع لگاریتمی

در تابع لگاریتمی $y = \log_a x$ که در آن $a \neq 1$ و $a > 0$ است، بایستی $x > 0$ باشد. بنابراین در تعیین دامنه تابع، بین ۳ عبارت مقابل، اشتراک می‌گیریم:

$$\begin{cases} x > 0 \\ a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases} \xrightarrow{\cap} \text{دامنه تابع}$$



پاسخ تشریحی گام اول: در تابع $y = \log_a x$ دامنه تابع به صورت $x > 0$ است. بنابراین برای تابع داده شده داریم:

$$f(x) = \log_2 \left(\frac{x}{\log_2 2x} \right) \Rightarrow \begin{cases} 1) \log_2 2x > 0 \Rightarrow x > 0 (*) \\ 2) \frac{x}{\log_2 2x} > 0 \Rightarrow \end{cases}$$

با توجه به (*), صورت این کسر مثبت است، پس باید مخرج کسر هم مثبت باشد تا کل عبارت، مثبت شود:

$$\log_2 2x > 0 \Rightarrow -\log_2 2x < 0 \Rightarrow -(\log_2 2 + \log_2 x) < 0 \Rightarrow 1 + \log_2 x < 0$$

$$\Rightarrow \log_2 x < -1 = \log_2 2^{-1} \Rightarrow x < \frac{1}{2} (**)$$

گام دوم: با اشتراک (*) و (**), دامنه تابع به صورت $(0, \frac{1}{2})$ به دست می آید.

تست و پاسخ ۱۰

اگر معادله $(\log_2 4x) = \frac{7}{4} (\log_8 \frac{x}{4})$ دارای ریشه های α و β باشد، مقدار $\log_{\frac{\alpha}{\beta}}$ کدام می تواند باشد؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

درس نامه •• ویژگی های لگاریتم

ویژگی	توضیح
$y = a^x \Leftrightarrow \log_a y = x$	رابطه های لگاریتمی را می توانیم به صورت توانی بنویسیم و برعکس.
$y = \log_b a \xrightarrow{D} \begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \\ b \neq 1 \end{cases}$	برای تعیین دامنه توابع لگاریتمی بین سه شرط اشتراک می گیریم.
$\log_b 1 = 0, \log_a a = 1$	لگاریتم ۱ در هر پایه ای صفر است و لگاریتم هر عدد در پایه خودش برابر یک می شود.
$\log_b a^n = n \log_b a$	توان عبارت جلوی لگاریتم به پشت لگاریتم می رود. ($a > 0$)
$\log_{b^n} a = \frac{1}{n} \log_b a$	توان پایه لگاریتم، معکوس شده و به پشت لگاریتم می رود.
$\log_c ab = \log_c a + \log_c b$	لگاریتم ضرب دو عدد تبدیل به جمع لگاریتم ها می شود.
$\log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b$	لگاریتم تقسیم دو عدد تبدیل به تفاضل لگاریتم ها می شود.
$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$	ویژگی تغییر پایه (قانون تغییر مبنا)
$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$	اگر جای a و b عوض شود، حاصل معکوس می شود. مثلاً $\log_2 3$ و $\log_3 2$ معکوس هم هستند.

حل معادلات لگاریتمی

برای حل معادلات لگاریتمی، با استفاده از ویژگی های لگاریتم به یکی از دو حالت مقابل می رسیم: الف) $\log_a \square = \log_a \bigcirc \Rightarrow \square = \bigcirc$

ب) $\log_a \square = b \Rightarrow \square = a^b$

x را به دست می آوریم. جواب هایی قبول هستند که در دامنه تمام لگاریتم ها قرار داشته باشند.



پاسخ تشریحی گام اول: لگاریتم‌ها را ساده می‌کنیم، ابتدا آن‌ها را به مبنای ۲ تبدیل می‌کنیم:

$$(\log_8 \frac{x}{4})(\log_4 4x) = \frac{y}{2} \Rightarrow (\log_{2^3} \frac{x}{4})(\log_{2^2} 4x) = \frac{y}{2} \Rightarrow (\frac{1}{3} \log_2 \frac{x}{4})(\frac{1}{2} \log_2 4x) = \frac{y}{2}$$

$$\Rightarrow (\log_2 \frac{x}{4})(\log_2 4x) = 2y \Rightarrow (\log_2 x - \log_2 4)(\log_2 x + \log_2 4) = 2y$$

$$\Rightarrow (\log_2 x - 2)(\log_2 x + 2) = 2y \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} (\log_2 x)^2 - 4 = 2y \Rightarrow (\log_2 x)^2 = 25 (*)$$

۱) $\log_2 x = 5 \Rightarrow x = 2^5 = 32$ گام دوم: حالا برای معادله (*) دو حالت داریم:

۲) $\log_2 x = -5 \Rightarrow x = 2^{-5} = \frac{1}{32}$

گام سوم: پس $\frac{\alpha}{\beta}$ می‌تواند یکی از مقادیر 2^{1° یا 2^{-1° باشد. در این صورت داریم:

$$\frac{\alpha}{\beta} = 2^{1^\circ} \Rightarrow \log_{2^2} \frac{\alpha}{\beta} = \log_{2^5} 2^{1^\circ} = \frac{1^\circ}{5} = 2$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = 2^{-1^\circ} \Rightarrow \log_{2^2} \frac{\alpha}{\beta} = \log_{2^5} 2^{-1^\circ} = \frac{-1^\circ}{5} = -2$$

که با توجه به گزینه‌ها، مقدار خواسته شده برابر با ۲ می‌تواند باشد.

تست و پاسخ ۱۱

اگر $2 = \sqrt{2 \sin x + \cos x} + \sqrt{\sin x + 2 \cos x}$ باشد، مقدار $\sin(x + \frac{\pi}{4})$ کدام است؟

۹ - $6\sqrt{2}$ (۴)

$6\sqrt{2} - 8$ (۳)

۸ - $6\sqrt{2}$ (۲)

$6\sqrt{2} - 9$ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

خودت حل کنی بهتره طرفین معادله را به توان ۲ برسانید و از تغییر متغیر و اتحادهای مثلثاتی استفاده کنید.

پاسخ تشریحی گام اول: طرفین معادله داده شده را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\sqrt{2 \sin x + \cos x} + \sqrt{\sin x + 2 \cos x} = 2$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} 2 \sin x + \cos x + \sin x + 2 \cos x + 2\sqrt{(2 \sin x + \cos x)(\sin x + 2 \cos x)} = 4$$

$$\Rightarrow 3 \sin x + 3 \cos x + 2\sqrt{2 \sin^2 x + 4 \sin x \cos x + \sin x \cos x + 2 \cos^2 x} = 4$$

$$\Rightarrow 3(\sin x + \cos x) + 2\sqrt{2 + 5 \sin x \cos x} = 4 (*)$$

گام دوم: از تغییر متغیر $\sin x + \cos x = t$ استفاده می‌کنیم:

$$(\sin x + \cos x)^2 = t^2 \Rightarrow 1 + 2 \sin x \cos x = t^2 \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$$

گام سوم: با جای گذاری تغییر متغیری که داده ایم در معادله (*), داریم:

$$3t + 2\sqrt{2 + 5(\frac{t^2 - 1}{2})} = 4 \Rightarrow 2\sqrt{\frac{4 + 5t^2 - 5}{2}} = 4 - 3t$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم}} 4(\frac{5t^2 - 1}{2}) = 16 - 24t + 9t^2 \Rightarrow 10t^2 - 2 = 16 - 24t + 9t^2$$

$$t^2 + 24t - 18 = 0 \Rightarrow \Delta = (24)^2 + 4 \times 18 = 4 \times 162 \Rightarrow t = \frac{-24 \pm 2\sqrt{162}}{2} = -12 \pm \sqrt{162} = -12 \pm 9\sqrt{2}$$

گام چهارم: عبارت $\sin x + \cos x = t$ می‌تواند حداکثر و حداقل مقدار زیر را بگیرد:

$$(\sin x + \cos x)^2 = 1 + \sin 2x \Rightarrow -1 \leq \sin 2x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 1 + \sin 2x \leq 2$$

$$\Rightarrow 0 \leq (\sin x + \cos x)^2 \leq 2 \Rightarrow -\sqrt{2} \leq \sin x + \cos x \leq \sqrt{2}$$



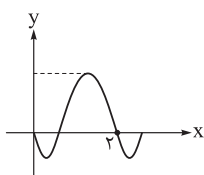
بنابراین مقدار $t = -12 + 9\sqrt{2}$ قابل قبول است. داریم:

$$t = \sin x + \cos x = -12 + 9\sqrt{2} \Rightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin x \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin x + \cos x) = \frac{\sqrt{2}}{2} t = \frac{\sqrt{2}}{2} (-12 + 9\sqrt{2}) = -6\sqrt{2} + 9$$

تست و پاسخ ۱۲

قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a - 4 \cos(bx - \frac{\pi}{3})$ به صورت زیر است. با کدام تبدیل‌های زیر روی نمودار f ، تابع جدید در مبدأ بر محور x مماس می‌شود؟



(۱) $\frac{2}{3}$ واحد انتقال به راست و ۶ واحد انتقال به پایین

(۲) $\frac{4}{3}$ واحد انتقال به چپ و ۲ واحد انتقال به بالا

(۳) $\frac{4}{3}$ واحد انتقال به چپ و ۶ واحد انتقال به بالا

(۴) $\frac{2}{3}$ واحد انتقال به چپ و ۲ واحد انتقال به بالا

پاسخ: گزینه ۳

درس نامه ●● به دست آوردن ضرایب مجهول در توابع به فرم $y = a \sin(bx) + c$ یا $y = a \cos(bx) + c$

گام	چیکار می‌کنیم؟	توضیح
۱	ساده کردن	اگر ضابطه ساده می‌شود، حتماً ساده می‌کنیم. مثلاً جای $4 \sin(\frac{\pi}{3} - x)$ می‌نویسیم $4 \cos x$.
۲	دوره تناوب	اگر از روی شکل دوره تناوب معلوم بود، $\frac{2\pi}{ b }$ را با آن برابر قرار می‌دهیم تا b به دست آید.
۳	min و max	اگر مقدار min و max روی نمودار معلوم بود، از معادلات $\max = a + c$ و $\min = - a + c$ مقدار $ a $ و c را حساب می‌کنیم.
۴	نقطه کمکی	اگر مختصات نقطه‌ای از نمودار معلوم بود، آن را در ضابطه جای گذاری می‌کنیم تا یک معادله به ما بدهد.

پاسخ تشریحی **گام اول:** مختصات $(0,0)$ در ضابطه تابع فوق صدق می‌کند، پس داریم: $f(0) = a - 4 \cos(\frac{-\pi}{3}) = 0 \Rightarrow a = 4 \times \frac{1}{2} = 2$

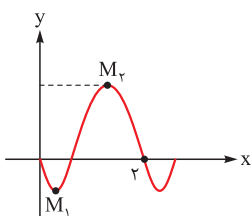
گام دوم: از طرفی از روی نمودار مشخص است که دوره تناوب تابع، برابر با $T = 2$ است. پس: $T = 2 = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = \pi$
از آنجایی که شروع نمودار، نزولی است، مشتق تابع در $x = 0$ باید مقداری منفی باشد که اگر مشتق را محاسبه کنید، شرط $b > 0$ برقرار است. پس: $b = \pi$ قابل قبول است.

گام سوم: $f(x) = 2 - 4 \cos(\pi x - \frac{\pi}{3})$ می‌شود. در نمودار تابع f ، باید مختصات نقطه M_1 و M_2 را پیدا کنیم تا با انتقال این نقطه‌ها به مبدأ مختصات، تابع جدید در مبدأ بر محور x مماس شود:

نقطه M_1 ، نقطه مینیمم تابع است. پس: $f(x) = 2 - 4 \cos(\pi x - \frac{\pi}{3}) \xrightarrow{\cos(\pi x - \frac{\pi}{3}) = 1} y_{M_1} = 2 - 4 = -2$

$\cos(\pi x - \frac{\pi}{3}) = 1 = \cos(2k\pi) \Rightarrow \pi x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi \Rightarrow x = 2k + \frac{1}{3} \Rightarrow x_{M_1} = \frac{1}{3}$
پس $M_1(\frac{1}{3}, -2)$ است که با انتقال نمودار به اندازه $\frac{1}{3}$ به سمت چپ و ۲ واحد به بالا، نمودار مد نظر، به دست می‌آید.

با توجه به گزینه‌ها، این مورد را نداریم. پس به سراغ نقطه M_2 می‌رویم.





گام چهارم: نقطه M_y ، $\max$ تابع است پس: $f(x) = 2 - 4 \cos(\pi x - \frac{\pi}{3}) \xrightarrow{\cos(x\pi - \frac{\pi}{3}) = -1} y_{M_y} = 2 + 4 = 6$

$$\cos(\pi x - \frac{\pi}{3}) = -1 = \cos(2k\pi + \pi) \Rightarrow \pi x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = 2k + \frac{4}{3} \Rightarrow x_{M_y} = \frac{4}{3}$$

پس $M_y(\frac{4}{3}, 6)$ است که با انتقال نمودار به اندازه $\frac{4}{3}$ به سمت چپ و ۶ واحد به بالا، نمودار مد نظر به دست می‌آید.

تست و پاسخ ۱۳

اگر α و β دو ریشه متوالی معادله $4 \sin^2 x - \tan x = 0$ باشند، حاصل $\beta - \alpha$ کدام نمی‌تواند باشد؟

$\frac{\pi}{12}$ (۱) $\frac{4\pi}{12}$ (۲) $\frac{5\pi}{12}$ (۳) $\frac{7\pi}{12}$ (۴)

پاسخ: گزینه ۳

خودت حل کنی بهتره چون مقدار اختلاف ریشه‌های متوالی خواسته شده است، ریشه‌های معادله را در یک بازه با دوره 2π به دست بیاورید.

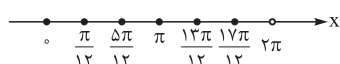
پاسخ تشریحی گام اول: چون اختلاف دو ریشه متوالی خواسته شده، معادله را در بازه $[0, 2\pi)$ حل می‌کنیم. داریم:

$$4 \sin^2 x - \tan x = 0 \Rightarrow 4 \sin^2 x - \frac{\sin x}{\cos x} = 0 \Rightarrow \frac{4 \sin^2 x \cos x - \sin x}{\cos x} = 0$$

$$\xrightarrow{\cos x \neq 0} \sin x (4 \sin x \cos x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 1) \sin x = 0 \Rightarrow x = 0, \pi \\ 2) 4 \sin x \cos x - 1 = 0 \end{cases}$$

$$4 \sin x \cos x = 1 \Rightarrow 2 \sin 2x = 1 \Rightarrow \sin 2x = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ 2x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{12} \Rightarrow x = \frac{\pi}{12}, \frac{13\pi}{12} \\ x = k\pi + \frac{5\pi}{12} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{12}, \frac{17\pi}{12} \end{cases}$$



گام سوم: جواب‌های به دست آمده برای x را روی محور نمایش می‌دهیم:

$$\beta - \alpha = \frac{\pi}{12}$$

$$\beta - \alpha = \frac{4\pi}{12}$$

$$\beta - \alpha = \frac{4\pi}{12}$$

$$\beta - \alpha = \frac{7\pi}{12}$$

اختلاف ریشه‌های متوالی را به دست می‌آوریم:

با توجه به گزینه‌ها، اختلاف ریشه‌های متوالی نمی‌تواند برابر با $\frac{5\pi}{12}$ باشد.

تست و پاسخ ۱۴

$f'(x)$

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 - 1 & |x| \leq 1 \\ 4x + 3 & |x| > 1 \end{cases} \quad \text{نمودار } f(x) \text{ نمودار مشتق خود را در چند نقطه قطع می‌کند؟}$$

(۴) صفر

(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) ۱

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ تشریحی گام اول: مشتق تابع f را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 - 1 & |x| \leq 1 \\ 4x + 3 & |x| > 1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x + 2 & |x| \leq 1 \\ 4 & |x| > 1 \end{cases}$$

گام دوم: نمودار تابع f و f' را به ازای $|x| < 1$ و $|x| > 1$ قطع می‌دهیم:

$$1) |x| \leq 1: (x+1)^2 - 1 = 2x + 2 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 - 1 = 2x + 2 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

دو مقدار به دست آمده برای x در بازه $|x| < 1$ قرار نمی‌گیرند، پس قابل قبول نیستند.

می‌بینیم که x به دست آمده در $|x| > 1$ قرار ندارد، پس قابل قبول نیست.

بنابراین تابع f و مشتق آن، در هیچ نقطه‌ای یکدیگر را قطع نمی‌کنند.

تست و پاسخ ۱۵

هرگاه $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 2x}{f(x) + 4x + 1} = +\infty$ باشد، نمودار f در مجاورت $x = 2$ به کدام صورت می‌تواند باشد؟



پاسخ: گزینه ۲

مشاوره پیشنهاد می‌کنم پاسخ این سؤال را به دقت بررسی کنید. تسلط به این سؤال یعنی اینکه با هر سؤال حد دیگری مشکلی نخواهید داشت!

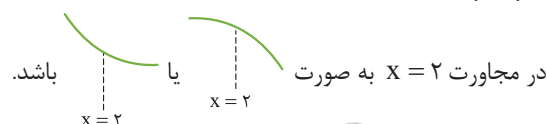
پاسخ تشریحی گام اول: حاصل حد بی‌نهایت شده است. پس مخرج کسر داده شده، به ازای $x = 2$ صفر است:

$$f(x) + 4x + 1 = 0 \xrightarrow{x=2} f(2) + 9 = 0 \Rightarrow f(2) = -9$$

گام دوم: در صورت کسر، $x = 2$ ریشه می‌باشد، بنابراین برای این که حاصل حد بی‌نهایت شود، باید عامل $(x-2)^2$ در مخرج وجود داشته باشد. پس $f(x) + 4x + 1 = a(x-2)^2$ است.

صورت نیز به ازای $x \rightarrow 2^-$ عبارتی منفی است. پس مخرج به ازای $x \rightarrow 2^-$ نیز باید منفی باشد، پس $a < 0$ است.

گام سوم: تابع f به صورت $f(x) = a(x-2)^2 - 4x - 1$ با شرط $a < 0$ است. پس در مجاورت $x = 2$ ، تابع f نزولی اکید است. یعنی می‌تواند



تست و پاسخ ۱۶

اگر $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & |x| > 1 \\ x & |x| \leq 1 \end{cases}$ و $g(x) = 1 - x^2$ باشد، توابع $f \circ g$ و $g \circ f$ به ترتیب از راست به چپ، در چند نقطه ناپیوسته است؟

۰, ۲ (۴)

۰, ۰ (۳)

۲, ۰ (۲)

۲, ۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

مشاوره از پیوستگی حتماً یک سؤال در کنکور می‌آید که با بررسی تیپ‌های سال‌های قبلی، به راحتی قابل حل شدن است.

پاسخ تشریحی گام اول: با توجه به توابع f و g داده شده، تابع $f \circ g$ را تشکیل می‌دهیم:

$$f(g(x)) = f(1 - x^2) = \begin{cases} \frac{1-x^2}{|1-x^2|} & |1-x^2| > 1 \\ 1-x^2 & |1-x^2| \leq 1 \end{cases}$$

برای حالت $|1-x^2| > 1$ ، بازه‌های مربوط به x را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} |1-x^2| > 1 \\ \text{یا} \\ |1-x^2| < -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 < 0 \Rightarrow \emptyset \\ \text{یا} \\ x^2 > 2 \Rightarrow x > \sqrt{2} \text{ یا } x < -\sqrt{2} \end{cases} \xrightarrow{\text{اجتماع}} x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$$

برای x به دست آمده، مقدار $\frac{1-x^2}{|1-x^2|} = -1$ به دست می‌آید.



برای حالت $|1 - x^2| \leq 1$ نیز، همانند بالا، $x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ به دست می‌آید. پس در نهایت خواهیم داشت:

$$f(g(x)) = \begin{cases} -1 & |x| > \sqrt{2} \\ 1 - x^2 & |x| \leq \sqrt{2} \end{cases}$$

کافی است که شرط پیوستگی را در نقاط مرزی $x = \pm\sqrt{2}$ بررسی کنیم. در این نقاط رابطه $f(g(\sqrt{2})) = \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}^+} f(g(x)) = \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}^-} f(g(x))$ و هم چنین $f(g(-\sqrt{2})) = \lim_{x \rightarrow (-\sqrt{2})^+} f(g(x)) = \lim_{x \rightarrow (-\sqrt{2})^-} f(g(x))$ برقرار است.

مشاهده می‌کنید که تابع $f \circ g$ در تمامی نقاط پیوسته است.

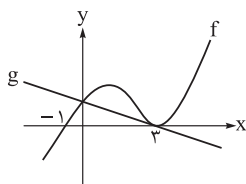
گام دوم: حالا تابع $g \circ f$ را تشکیل می‌دهیم:

$$g(f(x)) = \begin{cases} 1 - \frac{x^2}{|x|^2} & |x| > 1 \\ 1 - x^2 & |x| \leq 1 \end{cases} = \begin{cases} 0 & |x| > 1 \\ 1 - x^2 & |x| \leq 1 \end{cases}$$

مشابه گام اول می‌بینیم که تابع $g \circ f$ هم در تمامی نقاط پیوسته است.

تست و پاسخ ۱۷

نمودار تابع درجه سوم f و خط g به صورت زیر است. اگر $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x+4)}{x+1+f(x)} = \frac{-1}{3}$ باشد، مقدار $f(5)$ کدام است؟



$$-\frac{1}{3}$$

$$-\frac{6}{3}$$

$$-\frac{24}{3}$$

$$\frac{24}{3}$$

پاسخ: گزینه ۱

خودت حل کنی بهتره به کمک ریشه‌های توابع، ضابطه آن‌ها را به دست بیاورید.

درس نامه نمودار تابع‌های درجه سوم $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

نکات	$a < 0$	$a > 0$	
(۱) اگر مشتق دو ریشه داشته باشد، تابع دو اکسترمم نسبی دارد. (۲) نقطه عطف وسط دو اکسترمم قرار دارد. (۳) اگر $a > 0$ ، اول، max و بعد min اتفاق می‌افتد (اگر $a < 0$ بالعکس).			$\Delta_{f'} > 0$
(۱) اگر مشتق ریشه مضاعف داشته باشد، تابع اکسترمم نسبی ندارد. (۲) خط مماس در نقطه عطف افقی است. (۳) اگر $a > 0$ ، اول تقعر رو به پایین و بعد رو به بالاست (اگر $a < 0$ بالعکس).			$\Delta_{f'} = 0$
(۱) اگر مشتق ریشه نداشته باشد، تابع اکسترمم نسبی ندارد. (۲) خط مماس در نقطه عطف غیرافقی است. (۳) اگر $a > 0$ ، اول تقعر رو به پایین و بعد رو به بالاست (اگر $a < 0$ بالعکس).			$\Delta_{f'} < 0$





نکات ۱ تابع درجه سوم همواره یک نقطه عطف دارد که ریشه $f''(x)$ است.

۲ نقطه عطف از رابطه $x_0 = -\frac{b}{3a}$ نیز به دست می آید.

۳ اگر $\Delta f' \leq 0$ باشد، تابع اکسترمم نسبی ندارد.

پاسخ تشریحی گام اول: تابع f یک ریشه مضاعف در نقطه $x = 3$ و یک ریشه ساده در $x = -1$ دارد. پس می توان آن را به صورت زیر در نظر گرفت:

$$f(x) = a(x+1)(x-3)^2$$

گام دوم: از طرفی تابع g هم در $x = 3$ ریشه دارد، پس $g(x) = b(x-3)$ است.

$$f(0) = g(0) \Rightarrow 9a = -3b \Rightarrow b = -3a$$

گام سوم: دو تابع f و g در $x = 0$ یکدیگر را قطع می کنند، بنابراین:

گام چهارم: در حد داده شده، توابع f و g را جای گذاری می کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x+4)}{x+1+f(x)} = \frac{-1}{3} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-3a(x+4-3)}{(x+1)+a(x+1)(x-3)^2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-3a(x+1)}{(x+1)(1+a(x-3)^2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{-3a}{1+a(x-3)^2} = \frac{-3a}{1+16a} = \frac{-1}{3} \Rightarrow 9a = 1+16a \Rightarrow 7a = -1 \Rightarrow a = \frac{-1}{7}$$

گام پنجم: پس $f(x) = \frac{-1}{7}(x+1)(x-3)^2$ است. حالا مقدار $f(5)$ را محاسبه می کنیم:

$$f(5) = \frac{-1}{7} \times 6 \times 4 = \frac{-24}{7}$$

تست و پاسخ ۱۸

با فرض آن که f تابعی پیوسته باشد، $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h-1)-5}{2h} = \frac{-1}{4}$ و $g(2x) = \sqrt[3]{xf(\frac{1}{x})}$ مقدار $g'(-2)$ چه عددی است؟

$$\frac{5}{12} \quad (2)$$

$$\frac{13}{6} \quad (1)$$

$$\frac{7}{5} \quad (4)$$

$$\frac{7}{12} \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۳

مشاوره در این گونه سوالات، استفاده از قاعده هوییتال را فراموش نکنید.

درس نامه • قضیه هوییتال

فرض کنید $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ در حالت مبهم $\frac{0}{0}$ باشد.

حاصل حد $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ را به دست می آوریم. اگر حاصل آن L باشد، حاصل حد اصلی هم L است.

درس نامه • مشتق تابع مرکب

مشتق تابع $f(x)$ همان $f'(x)$ می شود، اما برای مشتق گیری از $f(u)$ که u یک عبارت بر حسب x است، داریم:

$$(f(u))' = u' \times f'(u)$$

مشتق عبارت درون $\rightarrow$ مشتق تابع مرکب $\rightarrow$

$$(f(x^2+1))' = 2x \times f'(x^2+1)$$

مثلاً:



پاسخ تشریحی

گام اول: در حد $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h-1) - 5}{2h} = -\frac{1}{4}$ ، مخرج به ازای $h = 0$ ، صفر است و حاصل حد عددی حقیقی است. پس صورت نیز به ازای $h = 0$ صفر است: $f(-1) - 5 = 0 \Rightarrow f(-1) = 5$

گام دوم: در حد داده شده، از قاعده هوییتال استفاده می کنیم: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h-1) - 5}{2h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(h-1)}{2} = \frac{f'(-1)}{2} = -\frac{1}{4} \Rightarrow f'(-1) = -\frac{1}{2}$

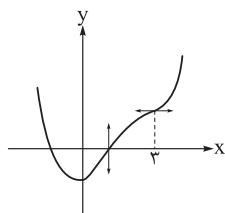
گام سوم: حالا مشتق تابع g را به دست می آوریم: $g(2x) = \sqrt[3]{2x} f\left(\frac{1}{x}\right) \Rightarrow 2g'(2x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} f\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2} \sqrt[3]{2x} f'\left(\frac{1}{x}\right)$

$$\xrightarrow{x=-1} 2g'(-2) = \frac{1}{3} f(-1) + 1 f'(-1)$$

از گام اول، مقادیر $f(-1)$ و $f'(-1)$ را جای گذاری می کنیم: $2g'(-2) = \frac{5}{3} - \frac{1}{2} = \frac{7}{6} \Rightarrow g'(-2) = \frac{7}{12}$

تست و پاسخ ۱۹

نمودار تابع $f(x) = x^4 - ax^3 + 18x^2 + k$ به شکل زیر است. مقدار k کدام است؟



۱۱ (۱)

۱۹ (۲)

۸ (۳)

۱۸ (۴)

پاسخ: گزینه ۱

مشاوره سؤال نمودار توابع پای ثابت سؤال التکنکور است که کاربردهای مشتق را نشان می دهد. باید در این مبحث، خلاقیت به خرج دهید!

سؤال نمودار فصل کاربرد مشتق ترکیبی از تمام موضوعات این فصل است. اگر در حل آن هابه مشکل برخوردید مقدار روی سایر موضوعات کار کنید.

خودت حل کنی بهتره تقعر نمودار تابع در دو نقطه، تغییر یافته است. برای تعیین این نقاط، از مشتق دوم تابع استفاده کنید تا نقاط عطف به دست بیایند.

درس نامه •• تغییر یکنوایی و تقعر

(۱) وضعیت صعودی یا نزولی بودن تابع را از تغییر علامت f' به دست می آوریم.

(۲) وضعیت تقعر تابع را از تغییر علامت f'' به دست می آوریم.

حالت اول	حالت دوم	حالت سوم	حالت چهارم
f'	+	+	-
(صعودی)	(صعودی)	(نزولی)	(نزولی)
f''	+	-	+
(تقعر رو به بالا)	(تقعر رو به پایین)	(تقعر رو به بالا)	(تقعر رو به پایین)
مثال نموداری			

اطلاعات به دست آمده از روی نمودار f

f''	f'	f	نمودار f
$f''(\alpha) > 0$ (تقعر رو به بالا)	$f'(\alpha) > 0$ (شیب مماس مثبت)	$f(\alpha) = 0$	
$f''(0) < 0$ (تقعر رو به پایین)	$f'(0) > 0$ (شیب مماس مثبت)	$f(0) = \beta$	
$f''(\alpha) > 0$ $f''(\alpha) < 0$	$f'(\alpha) = 0$ (مماس افقی)	$f(\alpha) = \beta$	
$f''(\alpha) = 0$ (مشتق دوم در α تغییر علامت می دهد.)	$f'(\alpha) = 0$ (مماس در عطف افقی)	—	
$f''(\alpha) = 0$	(شیب مماس در عطف غیر صفر است.)	—	
—	—	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$	
—	—	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a$	
—	—	a ریشه ساده مخرج است.	
—	—	a ریشه مضاعف مخرج است.	



پاسخ تشریحی

گام اول: با توجه به نمودار تابع f ، به ازای $x = 3$ ، مشتق این تابع برابر با صفر است، پس:

$$f(x) = x^4 - ax^3 + 18x^2 + k \Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 3ax^2 + 36x$$

$$f'(3) = 0 \Rightarrow 4 \times 27 - 27a + 108 = 0 \Rightarrow 27a = 108 \times 2 \Rightarrow a = 8$$

گام دوم: با توجه به نمودار، تقعر تابع در دو نقطه، تغییر یافته است، مشتق دوم تابع را به دست می‌آوریم تا طول این نقاط مشخص شود:

$$f''(x) = 12x^2 - 48x + 36 = 0 \Rightarrow 12(x^2 - 4x + 3) = 0 \Rightarrow (x-1)(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=3 \end{cases}$$

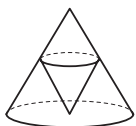
پس $x=1$ طول نقطه عطف تابع است که در نمودار نیز مشخص شده است. در این نقطه $f(1) = 0$ است.

گام سوم: از $f(1) = 0$ استفاده می‌کنیم تا مقدار k را پیدا کنیم:

$$f(1) = 1 - 8 + 18 + k = 0 \Rightarrow k = -11$$

تست و پاسخ ۲۰

در شکل مقابل، اگر شعاع قاعده و ارتفاع مخروط بزرگ‌تر به ترتیب ۶ و ۸ باشند، حداکثر حجم مخروط کوچک چه عددی است؟



$$\frac{128\pi}{27} \quad (4)$$

$$\frac{64\pi}{9} \quad (3)$$

$$\frac{128\pi}{9} \quad (2)$$

$$\frac{64\pi}{3} \quad (1)$$

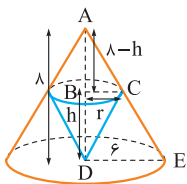
پاسخ: گزینه ۲

مشاوره یک سوال ساده از کاربرد مشتق در مسئله بهینه‌سازی؛ اگر این‌گونه سوالات را در کنکور دیدید، از دستشان ندهید!

پاسخ تشریحی

گام اول: ارتفاع و شعاع مخروط کوچک را به ترتیب برابر با h و r در نظر می‌گیریم. مقادیر را روی

شکل مشخص می‌کنیم:



$$\frac{r}{6} = \frac{8-h}{8} \Rightarrow r = \frac{3}{4}(8-h)$$

گام دوم: در دو مثلث ABC و ADE ، قضیه تالس برقرار است:

گام سوم: حجم مخروط کوچک‌تر برابر است با:

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 h = \frac{\pi}{3} \left(\frac{3}{4}(8-h) \right)^2 h = \frac{3\pi}{16} (8-h)^2 h$$

گام چهارم: بیشترین حجم مخروط کوچک را می‌خواهیم. پس از V ، نسبت به h مشتق می‌گیریم تا بهینه به دست آید:

$$V' = \frac{3\pi}{16} (-2(8-h)h + (8-h)^2) = 0 \Rightarrow (8-h)(2h + h - 8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} h=8 \\ h=\frac{8}{3} \end{cases}$$

گام پنجم: برای مخروط کوچک‌تر، $h = \frac{8}{3}$ قابل قبول است. برای این مقدار از h ، حجم برابر است با:

$$V_{\max} = \frac{3\pi}{16} \left(8 - \frac{8}{3} \right)^2 \times \frac{8}{3} = \frac{\pi}{2} \times \frac{64 \times 4}{9} = \frac{128\pi}{9}$$

تست و پاسخ ۲۱

یک رئیس، یک منشی و چهار کارمند به چند طریق می‌توانند دور یک میز گرد بنشینند به طوری که رئیس و منشی روبه‌روی هم باشند؟

$$48 \quad (4)$$

$$60 \quad (3)$$

$$16 \quad (2)$$

$$24 \quad (1)$$

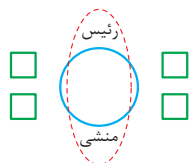
پاسخ: گزینه ۱

خودت حل کنی بهتره به مبحث جایگشت دوری مراجعه کن.

n شیء دور یک میز گرد به $(n-1)!$ حالت می‌توانند قرار بگیرند.



پاسخ تشریحی



گام اول: رئیس روی هر صندلی بنشینند، منشی روبه روی آن است، پس می توان رئیس و منشی را در یک بسته قرار دارد.

گام دوم: بسته رئیس و منشی با چهار کارمند (در واقع ۵ نفر) می خواهند دور یک میز گرد بنشینند که بنا به جایگشت دوری به $4! = 24$ حالت امکان پذیر است.

تست و پاسخ ۲۲

در یک کلاس ۲۵ نفری، برخی از دانش آموزان در المپیاد ریاضی، فیزیک و یا هر دو ثبت نام کرده اند. یک دانش آموز به تصادف از این کلاس انتخاب می کنیم، نسبت احتمال حضور او در المپیاد ریاضی به احتمال حضور او در المپیاد فیزیک، $\frac{5}{9}$ است. اگر احتمال حضور این دانش آموز در هر دو المپیاد $\frac{28}{100}$ باشد، با چه احتمالی او در هیچ المپیادی شرکت نکرده است؟

$$0/72 \text{ (۴)}$$

$$0/64 \text{ (۳)}$$

$$0/16 \text{ (۲)}$$

$$0/08 \text{ (۱)}$$

پاسخ: گزینه ۲

$$P(A' \cap B') = 1 - P(A \cup B)$$

خودت حل کنی بهتره

پاسخ تشریحی

گام اول:

A: دانش آموزانی که در المپیاد ریاضی شرکت کرده اند.

B: دانش آموزانی که در المپیاد فیزیک شرکت کرده اند.

S: کل دانش آموزان یک کلاس

گام دوم:

$$P(A \cap B) = 0/28 \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{28}{100} = \frac{7}{25}$$

$$\frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{7}{25} \Rightarrow n(A \cap B) = 7$$

گام سوم:

$$\frac{P(A)}{P(B)} = \frac{5}{9} \Rightarrow \frac{n(A)}{n(B)} = \frac{5}{9} \Rightarrow n(A) = 5x, n(B) = 9x$$

x نمی تواند بیشتر از ۲ باشد زیرا $n(B) < n(S)$ ، از طرفی $x=1$ نمی تواند باشد زیرا در این صورت $n(A)=5$ است. ولی می دانیم

$$n(A \cap B) = 7 \text{ است پس } x=2, n(A)=10, n(B)=18$$

$$P(A' \cap B') = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$$

گام چهارم:

$$P(A' \cap B') = 1 - \frac{10}{25} - \frac{18}{25} + \frac{7}{25} = \frac{4}{25} = 0/16$$

تست و پاسخ ۲۳

در یک آزمایش، دو تاس را پرتاب می کنیم. اگر عدد رو شده دو تاس متفاوت باشد، تابع $f(x) = x$ و اگر یکسان باشد، تابع $f(x) = -x$ را تشکیل می دهیم. اگر مجموع اعداد رو شده دو تاس، کوچک تر از ۶ باشد، $x=5$ را به عنوان ورودی تابع f و اگر مجموع اعداد رو شده دو تاس،

بزرگ تر از ۵ باشد، $x=-5$ را به عنوان ورودی تابع f قرار می دهیم. اگر $f(f(f(x))) = 5$ باشد، با چه احتمالی $x=5$ بوده است؟

$$\frac{2}{3} \text{ (۴)}$$

$$\frac{21}{26} \text{ (۳)}$$

$$\frac{20}{29} \text{ (۲)}$$

$$\frac{25}{38} \text{ (۱)}$$

پاسخ: گزینه ۴





خودت حل کنی بهتره در احتمال شرطی فضای نمونه‌ای محدود می‌شود.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

پاسخ تشریحی

گام اول:

$$f(x) = x \Rightarrow f(f(f(x))) = x$$

$$f(x) = -x \Rightarrow f(f(f(x))) = -x$$

گام دوم: می‌خواهیم $f(f(f(x))) = 5$ باشد بنابراین دو حالت پیش می‌آید:

۱) $x = 5, f(x) = x \Rightarrow$ عدد روشده دو تاس متفاوت و مجموع کوچک‌تر از ۶

۸ حالت وجود دارد.

$$\{(1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,3), (3,1), (3,2), (4,1)\}$$

۲) $x = -5, f(x) = -x \Rightarrow$ عدد روشده یکسان و مجموع بزرگ‌تر از ۵

$$\{(3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$$

که ۴ حالت وجود دارد.

گام سوم: تعداد حالت‌هایی که $f(f(f(x))) = 5$ برابر $12 = 8 + 4$ است که در ۸ تا از آن‌ها $x = 5$ است.

گام چهارم: احتمال خواسته شده برابر است با:

$$P = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

تست و پاسخ ۲۴

در مثلث ABC مجموع زوایای داخلی B و C برابر 70° است. عمودمنصف‌های دو ضلع AB و AC، ضلع BC را به ترتیب در D و E قطع می‌کنند. اندازه زاویه DAE کدام است؟

50° (۴)

40° (۳)

30° (۲)

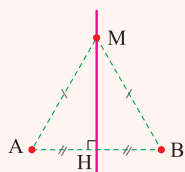
20° (۱)

پاسخ: گزینه ۳

خودت حل کنی بهتره نقاطی که روی عمودمنصف یک پاره خط هستند، چه ویژگی مهمی دارند؟

درس نامه

نقاطی که روی عمودمنصف پاره خط AB باشند، از دو نقطه A و B به یک فاصله‌اند و برعکس.

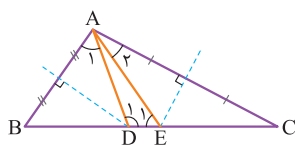


$$AB \text{ عمودمنصف } M \Leftrightarrow MA = MB$$

پاسخ تشریحی

گام اول (رسم شکل مناسب): با توجه به شکل، در مثلث ABC که در آن $\hat{A} = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$ ،

عمودمنصف‌های AB و AC به ترتیب BC را در D و E قطع کرده‌اند.



گام دوم (محاسبه زوایای $\hat{A}_1$ و $\hat{A}_2$): D روی عمودمنصف AB است پس از A و B به یک فاصله است و E هم روی عمودمنصف AC است،

پس از A و C به یک فاصله است، در نتیجه:

$$DA = DB \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \Rightarrow \hat{B} = \hat{A}_1 \Rightarrow \hat{B} = \hat{A}_1 \quad (1)$$

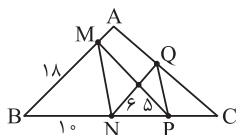
$$EA = EC \Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{A}_1 \Rightarrow \hat{C} = \hat{A}_2 \quad (2)$$

گام سوم (محاسبه خواسته سؤال): زاویه $\widehat{DAE}$ برابر $\widehat{A} - (\widehat{A}_1 + \widehat{A}_2)$ است، در نتیجه با توجه به (۱) و (۲) داریم:

$$\widehat{DAE} = \widehat{A} - (\widehat{B} + \widehat{C}) = 11^\circ - 7^\circ = 4^\circ$$

تست و پاسخ ۲۵

در شکل مقابل، اگر $NQ \parallel AB$ و $MN \parallel PQ$ ، آن گاه طول PQ کدام است؟



(۲) $3\sqrt{5}$

(۱) $2\sqrt{13}$

(۴) $5\sqrt{2}$

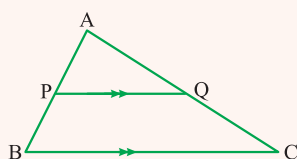
(۳) $4\sqrt{3}$

پاسخ: گزینه ۱

مشاوره با یک سؤال ترکیبی از قضیه تالس، تشابه مثلث‌ها و ویژگی‌های مثلث قائم‌الزاویه طرفیم. همان‌طور که می‌دانید در سال‌های اخیر، سؤال‌های ترکیبی خیلی مورد علاقه طراحان کنکور بوده است.

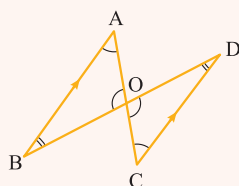
درس‌نامه

(۱) در مثلث ABC زیر، اگر $PQ \parallel BC$ باشد، آن گاه رابطه‌های زیر همواره بین پاره‌خط‌های ایجادشده برقرار است:



$$PQ \parallel BC \Rightarrow \begin{cases} \frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC} & (\text{تالس جزء به جزء}) \\ \frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC} = \frac{PQ}{BC} & (\text{تالس جزء به کل}) \end{cases}$$

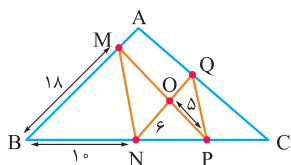
(۲) اگر دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگری برابر باشند، آن دو مثلث با هم متشابه‌اند؛ پس در شکل زیر که $AB \parallel CD$ ، دو مثلث OAB و OCD متشابه‌اند.



$$\begin{cases} \widehat{A} = \widehat{C} \\ \widehat{B} = \widehat{D} \end{cases} \xrightarrow{\triangle AOB - \triangle DOC} \frac{AO}{OC} = \frac{OB}{OD}$$

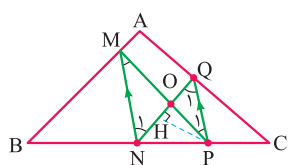
پاسخ تشریحی

گام اول (استفاده از قضیه تالس): طبق صورت سؤال $QN \parallel AB$ ، پس $MB \parallel ON$ است و می‌توانیم در مثلث MPB قضیه تالس را بنویسیم:



$$MB \parallel ON \Rightarrow \frac{PN}{PB} = \frac{PO}{PM} = \frac{ON}{MB} \Rightarrow \frac{PN}{PN + 10} = \frac{5}{OM + 5} = \frac{6}{18} \Rightarrow \begin{cases} PN = 5 & (1) \\ OM = 10 \end{cases}$$

گام دوم (پیدا کردن مثلث‌های متشابه و محاسبه طول OQ): پاره‌خط‌های PQ و MN طبق صورت سؤال با هم موازی‌اند، پس طبق مورد (۲) درس‌نامه، دو مثلث OPQ و OMN متشابه‌اند و داریم:



$$\frac{ON}{OQ} = \frac{OM}{OP} \Rightarrow \frac{6}{OQ} = \frac{10}{5} \Rightarrow OQ = 3$$



گام سوم (محاسبه خواسته سؤال): از گام اول می دانیم که $PN = 5$ ، پس مثلث OPN با داشتن دو ضلع برابر، متساوی الساقین است و اگر ارتفاع PH را در آن رسم کنیم ضلع ON را نصف می کند (ارتفاع، میانه هم هست)، در نتیجه:

$$OH = HN = \frac{6}{2} = 3 \Rightarrow QH = OQ + OH = 3 + 3 = 6$$

$$PH = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$$

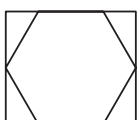
$$QP = \sqrt{4^2 + 6^2} = 2\sqrt{13}$$

از طرفی طبق فیثاغورس در OHP داریم:

و در مثلث قائم الزاویه PHQ می توانیم بنویسیم:

تست و پاسخ ۲۶

اگر اندازه ضلع شش ضلعی منتظم مقابل ۶ باشد، آن گاه مساحت مستطیل کدام است؟



$$54\sqrt{3} \quad (2)$$

$$72\sqrt{3} \quad (4)$$

$$96\sqrt{3} \quad (1)$$

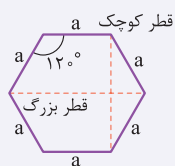
$$81\sqrt{3} \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۴

درس نامه در هر مثلث قائم الزاویه ضلع مقابل زاویه 30° ، نصف وتر، ضلع مقابل زاویه 60° ، $\frac{\sqrt{3}}{2}$ وتر و ضلع مقابل زاویه 45° ، $\frac{\sqrt{2}}{2}$ وتر است.

نکته

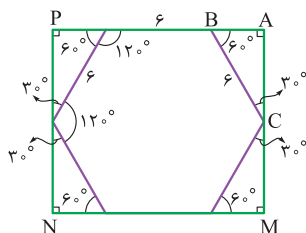
اگر طول ضلع شش ضلعی منتظم مقابل برابر a باشد، آن گاه طول قطر کوچک و بزرگ آن برابر است با:



$$\begin{cases} \text{طول قطر کوچک} = a\sqrt{3} \\ \text{طول قطر بزرگ} = 2a \end{cases}$$

پاسخ تشریحی

راه اول: اندازه هر ضلع 6 ضلعی منتظم زیر برابر 6 است و می دانیم که هر زاویه داخلی 120° است و برای محاسبه مساحت مستطیل باید اندازه طول و عرض آن را به دست آوریم. به شکل دقت کنید، مثلث های قائم الزاویه ای که بین مستطیل و 6 ضلعی تشکیل شده همنهشت اند و زاویه های حاده آن ها 30° و 60° است، پس اضلاع قائم این مستطیل ها برابر است با:



$$\Delta ABC: \begin{cases} \hat{A} = 90^\circ, BC = 6 \\ \hat{C} = 30^\circ \Rightarrow AB = \frac{BC}{2} = \frac{6}{2} = 3 \\ \hat{B} = 60^\circ \Rightarrow AC = \frac{\sqrt{3}}{2} BC = 3\sqrt{3} \end{cases}$$

$$AP = 6 + 2AB = 6 + 6 = 12$$

$$AM = 2AC = 6\sqrt{3}$$

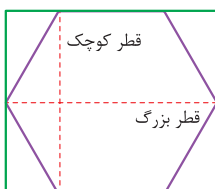
$$S_{\text{مستطیل}} = AP \times AM = 6\sqrt{3} \times 12 = 72\sqrt{3}$$

در نتیجه، طول اضلاع مستطیل به صورت مقابل است:

و مساحت مستطیل برابر است با:

راه دوم: این سؤال یک راه خیلی کوتاه تر هم دارد. اگر نکته ای را که در درس نامه گفتیم حفظ باشید، می بینید که طول مستطیل همان قطر بزرگ 6 ضلعی و عرض آن برابر قطر کوچک 6 ضلعی است و می توان نوشت:

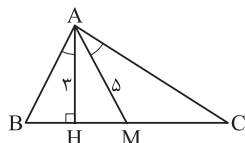
$$\begin{aligned} \text{قطر بزرگ} &= 2a = 12 \\ \text{قطر کوچک} &= a\sqrt{3} = 6\sqrt{3} \Rightarrow S_{\text{مستطیل}} = 12 \times 6\sqrt{3} = 72\sqrt{3} \end{aligned}$$



تست و پاسخ ۲۷

در شکل زیر $AM = 5$ و $AH = 3$ به ترتیب، میانه و ارتفاع وارد بر BC هستند. اگر $\hat{M}\hat{A}\hat{C} = \hat{B}\hat{A}\hat{H}$ ، آن گاه شعاع دایره محیطی مثلث ABC

کدام است؟



۶ (۲)

۵ (۱)

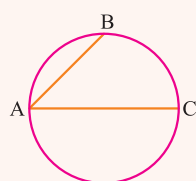
$2\sqrt{6}$ (۴)

$3\sqrt{3}$ (۳)

پاسخ: گزینه ۱

خودت حل کنی بهتره دایره محیطی $\triangle ABC$ را رسم کن، میانه AM را امتداد بده تا دایره را قطع کند.

درس نامه



(۱) **زاویه محاطی**: زاویه‌ای که رأس آن روی محیط دایره و وترهای دایره باشند را زاویه محاطی می‌نامیم و برابر است با:

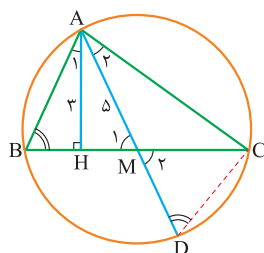
$$\hat{A} = \frac{\widehat{BC}}{2}$$

(۲) اگر در مثلثی طول میانه وارد بر یکی از اضلاع، نصف طول آن ضلع باشد، زاویه روبه‌روی آن ضلع قائمه است.

(۳) در مثلث قائم‌الزاویه، طول میانه وارد بر وتر، نصف طول وتر و برابر با شعاع دایره محیطی است.

(۴) زاویه محاطی مقابل قطر دایره برابر 90° است و برعکس، یعنی اگر یک زاویه محاطی در دایره برابر 90° باشد، آن زاویه مقابل قطر دایره است.

پاسخ تشریحی



گام اول (ایجاد تغییرات مناسب در شکل و تحلیل آن): دایره محیطی مثلث ABC را رسم کرده و میانه AM را امتداد می‌دهیم تا دایره را در D قطع کند.

گام دوم (یافتن خواسته سؤال): با توجه به این که $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ و $\hat{B} = \hat{D} = \frac{\widehat{AC}}{2}$ ، دو مثلث ABH و ADC دو زاویه برابر دارند، پس زاویه سوم آن‌ها هم با هم برابر است یعنی $\hat{ACD} = 90^\circ$ و در نتیجه AD قطر دایره است. با توجه به این که قطر AD وتر BC را نصف کرده و بر آن عمود نیست، M مرکز دایره است. (دقت کنید که اگر M مرکز دایره نباشد، قطر AD که در نقطه M وتر BC را نصف کرده، باید در M بر BC عمود باشد). یعنی $R = AM = 5$.

تست و پاسخ ۲۸

در یک دوزنقه متساوی‌الساقین محیطی، طول قاعده بزرگ، چهار برابر طول قاعده کوچک است. نسبت شعاع دایره محیطی به طول ساق

دوزنقه کدام است؟

$\frac{3}{10}$ (۴)

$\frac{1}{4}$ (۳)

$\frac{2}{5}$ (۲)

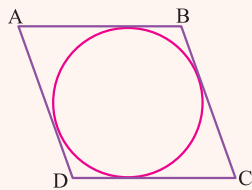
$\frac{1}{3}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۲



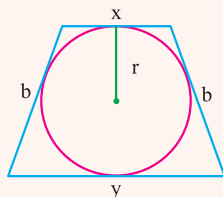
درس نامه...

● یک چهارضلعی محیطی است، اگر و فقط اگر مجموع اضلاع روبه‌رو در آن برابر باشند، یعنی:



$$AB + DC = AD + BC \Leftrightarrow \text{ABCD محیطی است.}$$

● مطابق شکل در دوزنقه متساوی‌الساقین محیطی به طول قاعده‌های x و y و طول ساق b ، داریم:
الف) ساق، واسطه حسابی قاعده‌ها است:



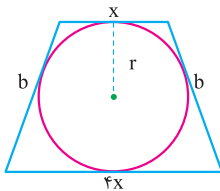
$$b = \frac{x + y}{2}$$

$$2r = \sqrt{xy}$$

ب) ارتفاع (قطر دایره محاطی)، واسطه هندسی قاعده‌ها است.

پاسخ تشریحی

شکل صورت سؤال به صورت روبه‌رو است.



$$2r = \sqrt{(x)(4x)} \Rightarrow 2r = 2x \Rightarrow r = x$$

$$b = \frac{x + 4x}{2} = \frac{5x}{2}$$

$$\frac{r}{b} = \frac{x}{\frac{5}{2}x} = \frac{2}{5}$$

حالا طبق درس‌نامه، قطر واسطه هندسی قاعده‌ها است، پس:

هم‌چنین ساق واسطه حسابی قاعده‌ها است، پس:

حالا نسبت شعاع دایره به ساق دوزنقه برابر است با:

تست و پاسخ ۲۹

طول مماس مشترک خارجی دو دایره مماس خارج، واسطه حسابی شعاع‌های دو دایره است. اگر شعاع دایره کوچک ۱ باشد، شعاع دایره بزرگ کدام است؟

$$7 + 2\sqrt{3} \quad (2)$$

$$8 + 2\sqrt{3} \quad (4)$$

$$7 + 4\sqrt{3} \quad (1)$$

$$8 + 4\sqrt{3} \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۱

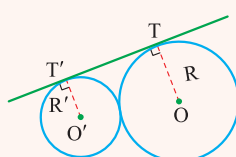
خودت حل کنی بهتره طول مماس مشترک دو دایره مماس خارج برابر $TT' = 2\sqrt{RR'}$ است.

درس نامه...

(۱) اگر c واسطه حسابی a و b باشد، آن‌گاه:

$$c = \frac{a + b}{2}$$

(۲) هر دو دایره‌ای که مماس مشترک خارجی داشته باشند، طول مماس مشترک خارجی آن‌ها برابر است با:

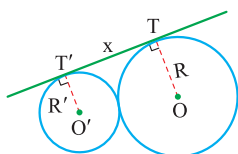


$$TT' = \sqrt{(OO')^2 - (R - R')^2}$$

$$TT' = 2\sqrt{RR'}$$

و اگر این دو دایره مثل شکل بالا مماس خارج باشند، چون $OO' = R + R'$ است، داریم:

پاسخ تشریحی



گام اول (محاسبه طول مماس مشترک خارجی): طبق مورد (۲) درسنامه، طول مماس مشترک خارجی این دو دایره برابر است با:

$$TT' = 2\sqrt{RR'} = 2\sqrt{R} = x \quad (1)$$

$$x = \frac{R + R'}{2} = \frac{1 + R}{2} \quad (2)$$

گام دوم (اعمال فرض سؤال و محاسبه خواسته آن): با توجه به فرض سؤال، داریم:

$$2\sqrt{R} = \frac{1 + R}{2} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 16R = R^2 + 2R + 1$$

با توجه به تساوی‌های (۱) و (۲)، داریم:

$$\Rightarrow R^2 - 14R + 1 = 0 \Rightarrow R = 7 \pm \sqrt{49 - 1} = 7 \pm \sqrt{48} = 7 \pm 4\sqrt{3}$$

چون شعاع دایره بزرگ‌تر باید بیشتر از $R' = 1$ باشد، پس $7 + 4\sqrt{3}$ یعنی ۱ قابل قبول است.

تست و پاسخ ۳۰

در مربع ABCD، طول رأس A برابر ۲ و طول رأس B برابر ۴ است. اگر بازتاب دو رأس A و D که هر دو در ربع اول واقع‌اند، نسبت به نیمساز این ربع، بر خودشان منطبق شود، فاصله بازتاب رأس A نسبت به قطر BD از مبدأ مختصات کدام است؟

$$3\sqrt{5} \quad (۲)$$

$$2\sqrt{10} \quad (۱)$$

$$4\sqrt{3} \quad (۴)$$

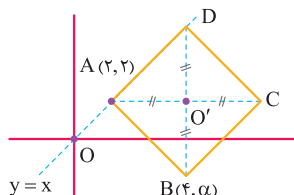
$$7 \quad (۳)$$

پاسخ: گزینه ۱

درس‌نامه

در بازتاب نسبت به خط Δ ، تصویر نقطه A نقطه‌ای مانند A' است، به طوری که:
(الف) اگر A بر Δ واقع نباشد، Δ عمودمنصف AA' است.
(ب) اگر A بر Δ واقع باشد، A' همان A است.

پاسخ تشریحی



اگر نقاط A' و D' به ترتیب بازتاب نقاط A و D باشد طبق درسنامه، چون سؤال گفته A' بر A و D' بر D منطبق است، پس A و D هم روی نیمساز ربع اول و سوم قرار دارد و مختصات آن به صورت $A(2,2)$ است. حالا یک شکل تقریبی از مربع ABCD با داشتن مختصات $B(4, \alpha)$ رسم می‌کنیم.

می‌دانیم در هر مربع، قطرها با هم برابر و عمودمنصف یکدیگرند، پس بازتاب A نسبت به قطر BD همان نقطه C است و چون $\angle DAC = 45^\circ$ با زاویه بین امتداد AD با محور xها برابر است، پس AC با محور xها موازی است و داریم $y_C = y_A = 2$ ؛ در نتیجه فاصله C تا مبدأ مختصات برابر است با:

$$OC = \sqrt{(x_C - 0)^2 + (y_C - 0)^2} = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$



تست و پاسخ ۳۱

در یک مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین، نیمساز زاویه کوچک را رسم می‌کنیم. مساحت مثلث اصلی، چند برابر مساحت کوچک‌ترین مثلث حاصل از رسم این نیمساز است؟

$$2 + \sqrt{2} \quad (4)$$

$$2 \quad (3)$$

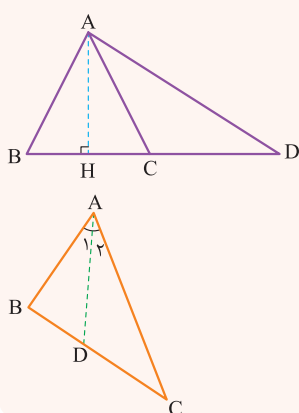
$$\sqrt{2} \quad (2)$$

$$\sqrt{2} + 1 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۱

مشاوره این سؤال قضیه نیمسازها را با قضایای نسبت مساحت مثلث‌های دارای قاعده یا ارتفاع مشترک ترکیب کرده است که هر دو از مباحث مهم هندسه پایه هستند.

درس‌نامه



(۱) اگر دو مثلث دارای ارتفاع برابر باشند، نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر با نسبت قاعده‌های نظیر آن ارتفاع مشترک است؛ مثلاً در شکل مقابل داریم:

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{BC}{CD}$$

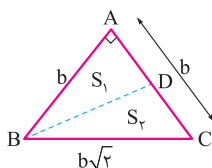
(۲) قضیه نیمسازها: در هر مثلث، نیمساز هر زاویه، ضلع مقابل به آن زاویه را به نسبت اضلاع آن زاویه تقسیم می‌کند:

$$A_1 = A_2 \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$$

پاسخ تشریحی

گام اول (استراتژی حل مسئله): در مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین ABC، نیمساز BD را رسم می‌کنیم. می‌دانیم $AB = AC = b$ و طبق فیثاغورس هم داریم:

$$BC = \sqrt{b^2 + b^2} = b\sqrt{2}$$



حالا چون $\triangle ABD$ و $\triangle BCD$ در ارتفاع گذرنده از B مشترک‌اند، نسبت مساحت آن‌ها را می‌نویسیم و چون BD نیمساز است از قضیه نیمسازها در مورد (۲) درس‌نامه استفاده می‌کنیم و خواسته سؤال را به دست می‌آوریم.

گام دوم (استفاده از نسبت مثلث‌های هم‌ارتفاع): طبق گام اول S_1 و S_2 هم‌ارتفاع‌اند، پس طبق مورد (۱) درس‌نامه داریم:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{AD}{DC} \quad (1)$$

گام سوم (استفاده از قضیه نیمسازها): BD نیمساز است، پس طبق مورد (۲) درس‌نامه می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{AD}{CD} = \frac{AB}{BC} = \frac{b}{b\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (2)$$

گام چهارم (محاسبه خواسته سؤال): طبق قسمت‌های (۱) و (۲) درس‌نامه از گام‌های قبل داریم $\frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ، پس S_1 مساحت مثلث کوچک‌تر است و نسبت مساحت مثلث اصلی به مساحت مثلث کوچک‌تر برابر است با:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{S_1}{S_1 + S_2} = \frac{1}{1 + \sqrt{2}} \Rightarrow \frac{S_1 + S_2}{S_1} = 1 + \sqrt{2}$$





تست و پاسخ ۳۳

فرض کنید $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ و $CBA = 15I$. مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس C کدام است؟

(۱) ۴ (۲) -۴ (۳) ۸ (۴) -۸

پاسخ: گزینه ۱

مشاوره اگر در محاسبات اشتباه نکنید، معمولاً سؤالات ماتریس در آزمون‌ها قابل حل هستند. سعی کنید آن‌ها را از دست ندهید.

درس نامه

(۱) اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ، آن گاه:

$$|A| = ad - bc$$

الف) دترمینان ماتریس A به صورت روبه‌رو تعریف می‌شود:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

ب) با شرط $|A| \neq 0$ ماتریس A وارون پذیر است و داریم:

(۲) می‌دانیم که اگر A^{-1} وارون ماتریس مربعی A باشد، آن گاه $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ همواره برقرار است، پس برای پیدا کردن ماتریس مجهول C در یک معادله ماتریسی مثل $CBA = D$ کافی است دو طرف معادله را در وارون ماتریس معلوم ضرب کنیم، در این صورت داریم:

$$CBA(BA)^{-1} = D(BA)^{-1}$$

$$\Rightarrow CI = D(BA)^{-1} \Rightarrow C = D(BA)^{-1}$$

پاسخ تشریحی

گام اول (استراتژی حل سؤال): معادله صورت سؤال به صورت $CBA = 15I$ است، تنها ماتریس مجهول، C است، در نتیجه طبق مورد (۲) درس‌نامه کافی است دو طرف معادله را در وارون BA ضرب کنیم.

$$B \times A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 14 \end{bmatrix}$$

گام دوم (محاسبه حاصل ضرب BA):

$$(BA)^{-1} = \frac{1}{6 \times 14 - 9} \begin{bmatrix} 14 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \frac{1}{75} \begin{bmatrix} 14 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

گام سوم (محاسبه وارون BA): طبق مورد (۱) درس‌نامه داریم:

گام چهارم (محاسبه خواسته سؤال): اگر دو طرف معادله $CBA = 15I$ را از سمت راست در $(BA)^{-1}$ ضرب کنیم، داریم:

$$CBA = 15I \Rightarrow C \underbrace{(BA)(BA)^{-1}}_I = 15I \underbrace{(BA)^{-1}}_{BA^{-1}} \xrightarrow{CI=C} C = 15 \times \frac{1}{75} \begin{bmatrix} 14 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{14}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{6}{5} \end{bmatrix}$$

$$\frac{14}{5} + \frac{6}{5} = \frac{20}{5} = 4$$

پس مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس C برابر است با:



تست و پاسخ ۳۳

شعاع کوچک ترین دایره‌ای که بر هر دو محور مختصات و دایره $x^2 + y^2 - 12x - 14y + 81 = 0$ مماس باشد، کدام است؟

- (۱) $12 - \sqrt{59}$ (۲) ۴ (۳) ۳ (۴) ۲

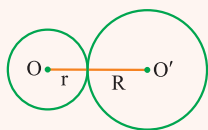
پاسخ: گزینه ۳

خودت حل کنی بهتره کوچک ترین دایره، دایره‌ای است که بر دایره مفروض مماس خارج باشد.

درس نامه

(۱) اگر $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ معادله یک دایره باشد، مرکز این دایره نقطه $O(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$ و شعاع آن $r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$ است.

(۲) دایره‌ای به مرکز O و شعاع r بر دایره‌ای به مرکز O' و شعاع R مماس خارج است اگر فقط اگر:



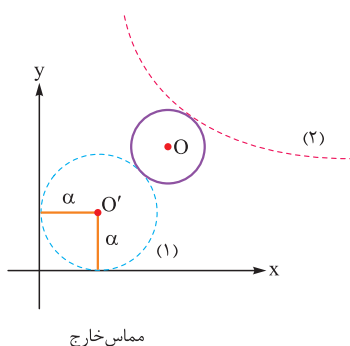
$$OO' = R + r$$

پاسخ تشریحی

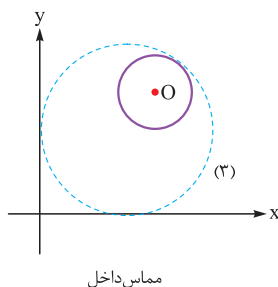
طبق مورد (۱) درس نامه شعاع و مرکز دایره $x^2 + y^2 - 12x - 14y + 81 = 0$ برابر است با:

$$O(-\frac{-12}{2}, -\frac{-14}{2}) = (6, 7)$$

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{(-12)^2 + (-14)^2 - 4 \times 81} = 2$$



مماس خارج



مماس داخل

که دایره‌ای با این ویژگی‌ها در ناحیه اول مختصات قرار دارد و دایره‌هایی که به این دایره و هم چنین محورهای مختصات مماس باشند، به صورت مقابل هستند.

در نتیجه کوچک ترین دایره، دایره شماره (۱) خواهد بود که بر دایره اصلی مماس خارج است، پس:

$$OO' = R + R' \xrightarrow{R'=2} \sqrt{(\alpha-6)^2 + (\alpha-7)^2} = 2 + \alpha$$

$$\Rightarrow \alpha^2 - 30\alpha + 81 = 0 \Rightarrow (\alpha-3)(\alpha-27) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 3 \\ \alpha = 27 \end{cases}$$

پس شعاع کوچک ترین دایره برابر ۳ است.

تست و پاسخ ۳۴

نقطه M واقع بر بیضی به کانون‌های F و F' ، پاره خط FF' را با زاویه 60° رؤیت می‌کند. اگر $MF \times MF' = 40$ و طول قطر بزرگ بیضی ۱۲ باشد، خروج از مرکز بیضی برابر کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{6}}{6}$ (۴) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

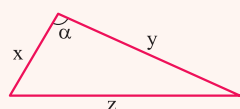
پاسخ: گزینه ۳



مشاوره سؤال ترکیبی از موضوع «بیضی» و «قضیه کسینوس‌ها» که مشابه آن را در کنکور هم داشته‌ایم.

خودت حل کنی بهتره از قضیه کسینوس‌ها در مثلث MFF' استفاده کنی.

درس نامه



(۱) در هر مثلث به طول اضلاع x ، y و z اگر زاویه بین دو ضلع به طول x و y برابر α باشد، داریم:

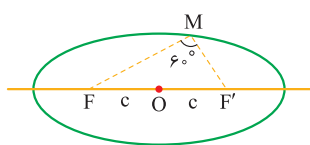
$$z^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha$$

(۲) مجموع فواصل هر نقطه واقع بر یک بیضی از دو کانون آن برابر با $2a$ است. ضمن این‌که طول قطر بزرگ هر بیضی هم برابر با $2a$ است.

پاسخ تشریحی

گام اول (استفاده از قضیه کسینوس‌ها مثلث FMF'): ابتدا شکل مسئله را رسم می‌کنیم. به کمک قضیه کسینوس‌ها در

مثلث MFF' داریم:



$$FF'^2 = MF^2 + MF'^2 - 2MF \times MF' \times \frac{1}{2}$$

$$\frac{FF' = 2c}{MF \times MF' = 40} \rightarrow 4c^2 = MF^2 + MF'^2 - 40 \quad (1)$$

گام دوم (استفاده از خاصیت نقطه واقع بر بیضی): M روی بیضی قرار دارد، پس $MF + MF' = 2a$ و همچنین طول قطر بزرگ بیضی برابر ۱۲

$$MF + MF' = 12 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} MF^2 + MF'^2 + 2MF \times MF' = 144$$

است یعنی $2a = 12$ ، بنابراین:

$$\frac{MF \times MF' = 40}{\rightarrow} MF^2 + MF'^2 = 64$$

گام سوم (محاسبه خواسته سؤال): حال با قراردادن مقدار $MF^2 + MF'^2 = 64$ در رابطه (۱) داریم:

$$4c^2 = 64 - 40 \Rightarrow 4c^2 = 24$$

$$\Rightarrow c^2 = 6 \Rightarrow c = \sqrt{6}$$

بنابراین خروج از مرکز بیضی برابر $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{6}$ است.

تست و پاسخ ۳۵

زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ حاده است و $|\vec{a} + \vec{a} \times \vec{b} + \vec{b}| = 4$. اگر مساحت متوازی‌الاضلاع بناشده روی دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر با ۲ واحد سطح باشد، طول قطر بزرگ این متوازی‌الاضلاع کدام است؟

$$2\sqrt{3} \quad (4)$$

$$3\sqrt{2} \quad (3)$$

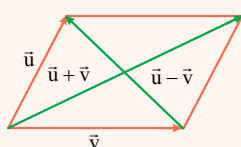
$$2\sqrt{2} \quad (2)$$

$$3\sqrt{3} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۴

خودت حل کنی بهتره اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ضلع‌های متوازی‌الاضلاع باشند، قطرهای آن بر حسب $\vec{a}$ و $\vec{b}$ چه بردارهایی هستند؟

درس نامه



(۱) مطابق شکل، اگر دو بردار $\vec{u}$ و $\vec{v}$ که با هم زاویه حاده می‌سازند، ضلع‌های یک متوازی‌الاضلاع

باشند، بردار $\vec{u} + \vec{v}$ قطر بزرگ و بردار $\vec{u} - \vec{v}$ قطر کوچک این متوازی‌الاضلاع است.

(۲) اگر دو بردار بر هم عمود باشند، حاصل ضرب داخلی آن‌ها صفر است.

(۳) مساحت متوازی‌الاضلاع بناشده روی دو بردار $\vec{u}$ و $\vec{v}$ برابر است با:

$$S = |\vec{u} \times \vec{v}|$$



پاسخ تشریحی

چون زاویه بین $\vec{a}$ و $\vec{b}$ حاده است، پس قطر بزرگ متوازی الاضلاع ساخته شده روی $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر $\vec{a} + \vec{b}$ است که برای به دست آوردن آن داریم:

$$|\vec{a} + \vec{a} \times \vec{b} + \vec{b}| = 4 \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} |(\vec{a} + \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{b})|^2 = 16$$

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 + |\vec{a} \times \vec{b}|^2 + \underbrace{2(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b})}_{\text{صفر}} = 16 \quad (1)$$

دقت کنید بردار $\vec{a} \times \vec{b}$ بر بردار $\vec{a} + \vec{b}$ عمود است.

در طراحی سؤال گفته مساحت متوازی الاضلاع برابر ۲ است، پس طبق مورد (۲) درس نامه داریم:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = 2$$

در نتیجه طبق رابطه (۱) داریم:

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 + 2^2 = 16 \Rightarrow |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

تست و پاسخ ۳۶

اعداد $a^2 - 2$ و $a^5 a^1$ در تقسیم بر ۱۱، باقی مانده یکسان دارند. باقی مانده تقسیم عدد a^{a^a} بر عدد ۵ برابر r است. مجموع مقادیر مختلف

برای r کدام است؟

۱۰ (۴)

۶ (۳)

۴ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

خودت حل کنی بهتره در بسط هر عدد n رقمی مانند $A = \overline{a_{n-1}a_{n-2}\dots a_2a_1a_0}$ خواهیم داشت:

$$A \equiv a_0 \pmod{5}, \quad A \equiv a_0 - a_1 + \dots + (-1)^{n-1} a_{n-1} \pmod{11}$$

پاسخ تشریحی

گام اول: اعداد $a^2 - 2$ و $a^5 a^1$ در تقسیم بر ۱۱ باقی مانده یکسان دارند بنابراین به پیمانه ۱۱ همبسته هستند.

$$a^2 - 2 \equiv a^5 a^1 \pmod{11} \Rightarrow 1 - a + 5 - a = 6 - 2a$$

$$\Rightarrow a^2 + 2a - 8 \equiv 0 \Rightarrow (a - 2)(a + 4) \equiv 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a - 2 \equiv 0 \Rightarrow a \equiv 2 \\ a + 4 \equiv 0 \Rightarrow a \equiv -4 + 11 = 7 \end{cases}$$

گام دوم: a یک رقمی بین ۰ تا ۹ است، بنابراین:

$$\begin{cases} a \equiv 2 \Rightarrow a = 2 \\ a \equiv 7 \Rightarrow a = 7 \end{cases}$$

گام سوم: باقی مانده a^{a^a} را بر ۵ به دست می آوریم:

$$a = 2 \Rightarrow 2^2 \equiv 2 \Rightarrow 2^{2^2} = 2^4 = 16 \equiv 1 \pmod{5} \quad (I)$$

$$a = 7 \Rightarrow 7^7 \equiv 2 \Rightarrow 7^{7^7} \equiv 2^{7^7} \pmod{5}$$

$$7^7 \equiv (-1)^7 = -1 + 4 = 3 \Rightarrow 7^7 = 4k + 3$$

$$2^{7^7} = 2^{4k+3} = (2^4)^k \times 2^3 \equiv 1^k \times 2^3 \equiv 2^3 \equiv 3 \pmod{5} \quad (II)$$

حال باقی مانده 7^7 را بر ۴ به دست می آوریم:

بنابراین:

گام چهارم: مجموع مقادیر مختلف r را به دست می آوریم:

$$(I), (II): 1 + 3 = 4$$



تست و پاسخ ۳۷

مجموع ارقام بزرگ‌ترین عدد دورقمی x که در معادله $5x - 7y = 17$ ($x, y \in \mathbb{N}$) صدق می‌کند، کدام است؟

- ۶ (۱) ۸ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

خود حل کنی بهتره معادله سیاله را به معادله همنهشتی با مجهول x تبدیل کن.

پاسخ تشریحی

گام اول: $(5, -7) = 1 | 17$ پس معادله سیاله جواب دارد.

گام دوم: معادله سیاله را به معادله همنهشتی به پیمانه ۷ با مجهول x تبدیل می‌کنیم:

$$5x - 7y = 17 \Rightarrow 5x \equiv 17 \equiv 3 + 7 = 10 \pmod{7} \Rightarrow 5x \equiv 10 \pmod{7}, (5, 7) = 1$$

$$\Rightarrow x \equiv 2 \pmod{7} \Rightarrow x = 7k + 2, (k \in \mathbb{Z})$$

گام سوم: مقدار k را به دست می‌آوریم:

$$7k + 2 < 100 \Rightarrow 7k < 98 \Rightarrow k < \frac{98}{7} = 14 \Rightarrow k \leq 13$$

بنابراین $k = 13$.

گام چهارم: بزرگ‌ترین عدد دورقمی x که در معادله سیاله $5x - 7y = 17$ صدق می‌کند برابر است با:

$$x = 7k + 2 = 7 \times 13 + 2 = 93$$

گام پنجم: مجموع ارقام x برابر است با:

$$x = 93 \Rightarrow 9 + 3 = 12$$

تست و پاسخ ۳۸

هر کدام از جواب‌های معادله $[x] + [y] + [z] = 5$ ($x, y, z \geq 0$) را یک نقطه به شکل (x, y, z) در دستگاه مختصات $\mathbb{R}^3$ در نظر می‌گیریم.

حجم شکل حاصل از این نقاط کدام است؟

- ۲۱ (۱) ۵۶ (۲) ۱۲۵ (۳) ۲۱۶ (۴)

پاسخ: گزینه ۱

خود حل کنی بهتره تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ برابر است با:

$$\binom{n+k-1}{k-1}$$

پاسخ تشریحی

گام اول: چون $x, y, z \geq 0$ ، $[x]$ ، $[y]$ و $[z]$ اعداد صحیح هستند، پس تعداد جواب‌های معادله $[x] + [y] + [z] = 5$ برابر است با تعداد

$$\text{جواب‌های صحیح و نامنفی معادله } x_1 + x_2 + x_3 = 5 \text{ یعنی } \binom{5+3-1}{3-1} = \binom{7}{2} = 21.$$

گام دوم: در هر کدام از حالت‌ها مقادیر x ، y و z یک مکعب به ضلع ۱ تشکیل می‌دهند که حجم آن برابر $1 \times 1 \times 1 = 1$ است.

گام سوم: ۲۱ حالت مختلف برای x ، y و z وجود دارد که در همه حالت‌ها حجم شکل حاصل یکسان است، پس حجم شکل حاصل از این نقاط برابر ۲۱ است.

توجه این ۲۱ مکعب تشکیل‌شده روی حجم یکدیگر اشتراکی ندارند زیرا بازه‌ای را نمی‌توان پیدا کرد که هر ۳ مؤلفه دو مکعب دلخواه

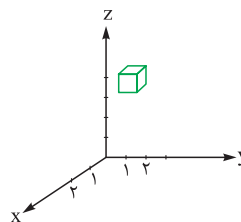
در آن اشتراک داشته باشند.



گام چهارم: یکی از حالت‌ها را بررسی می‌کنیم.

$$[x] + [y] + [z] = 5 \Rightarrow [x] = 1, [y] = 1, [z] = 3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} [x] = 1 \Rightarrow 1 \leq x < 2 \\ [y] = 1 \Rightarrow 1 \leq y < 2 \\ [z] = 3 \Rightarrow 3 \leq z < 4 \end{cases}$$



تست و پاسخ ۳۹

فرض کنید $A = \{[x] \mid x \in \mathbb{R}, x^2 \leq 4\}$ و $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 5^x \mid 625\}$. حداقل چند نقطه از مجموعه $A \times B$ انتخاب کنیم تا مطمئن باشیم می‌توان با نقاط انتخاب‌شده یک مثلث تشکیل داد؟

۴ (۴)

۵ (۳)

۶ (۲)

۷ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

خودت حل کنی بهتره ضرب دکارتی بین دو مجموعه A و B .

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$$

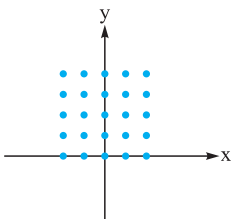
اصل لانه کبوتری: اگر m کبوتر n لانه داشته باشیم و $m > n$ و همه کبوترها درون لانه‌ها قرار بگیرند، در این صورت لانه‌ای وجود دارد که حداقل ۲ کبوتر در آن قرار گرفته است.

پاسخ تشریحی

گام اول: تعداد نقاط مجموعه‌های A و B را به دست می‌آوریم.

$$A = \{[x] \mid x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 4\} = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 5^x \mid 625\} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$



گام دوم: مجموعه $A \times B$ را تشکیل می‌دهیم:

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$$

گام سوم: برای تشکیل مثلث نیاز به سه نقطه داریم. اگر سه نقطه در یک راستا باشند مثلث تشکیل نمی‌شود.

حداکثر نقاطی که در یک راستا هستند ۵ نقطه است (تعداد لانه‌ها)، بنابراین اگر ۶ نقطه انتخاب کنیم (تعداد کبوترها) مطمئن هستیم که حداقل یک نقطه از بین این ۶ نقطه با بقیه نقاط در یک راستا نیست.

تست و پاسخ ۴۰

درجهٔ رئوس یک گراف به صورت $x, x, x, x, 4, 4$ است. اگر این گراف فاقد دور به طول فرد باشد و تعداد $\gamma -$ مجموعه‌های آن برابر n باشد، حاصل $\gamma + n$ کدام است؟

۱۱ (۴)

۹ (۳)

۷ (۲)

۵ (۱)

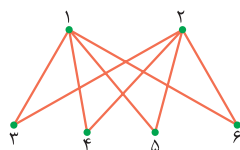
پاسخ: گزینه ۴

خودت حل کنی بهتره گراف دوبخشی فاقد دور به طول فرد است و بالعکس.



پاسخ تشریحی

گام اول: چون گراف فاقد دور به طول فرد است، بنابراین به شکل زیر یعنی $4, 4, 2, 2, 2, 2$ است.



گام دوم: در این گراف $\Delta = 4$ و $P = 6$ بنابراین:

$$\left\lceil \frac{P}{\Delta+1} \right\rceil \leq \gamma \Rightarrow \left\lceil \frac{6}{4+1} \right\rceil = 2 \leq \gamma$$

از طرفی رئوس 1 و 2 گراف را احاطه می کند پس $\gamma = 2$.

گام سوم: تعداد γ مجموعه های گراف را حساب می کنیم. با انتخاب دو رأس بالا یعنی رئوس $\{1, 2\}$ گراف احاطه می شود. یک رأس از بین دو رأس بالا و یک رأس از بین چهار رأس پایین نیز یک γ مجموعه تشکیل می دهند، بنابراین تعداد γ مجموعه ها برابر است با:

$$n = \underbrace{\binom{2}{1}}_{\text{یک رأس از دو رأس بالا}} \times \underbrace{\binom{4}{1}}_{\text{یک رأس از چهار رأس پایین}} + \underbrace{1}_{\substack{\text{انتخاب دو} \\ \text{رأس بالا}}} = 2 \times 4 + 1 = 9 \Rightarrow n = 9$$

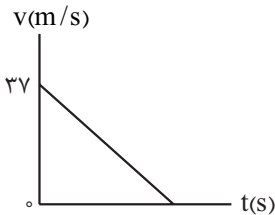
گام چهارم: محاسبه $\gamma + n$:

$$\gamma = 2, n = 9 \Rightarrow \gamma + n = 2 + 9 = 11$$



تست و پاسخ ۴۱

نمودار سرعت - زمان متحرکی که روی خط راست حرکت می کند، به شکل زیر است. اگر متحرک ۳۶m ابتدای حرکت را در مدت t و ۳۶m انتهای حرکت را در مدت ۶t طی کند، اندازه جابه جایی متحرک در کل این حرکت چند متر است؟



(۱) ۲۴۳ / ۲۵

(۲) ۳۴۲ / ۲۵

(۳) ۴۸۶ / ۵

(۴) ۶۸۴ / ۵

پاسخ: گزینه ۲

خودت حل کنی بهتره جابه جایی در t ثانیه اول را به کمک رابطه $\Delta x = \frac{1}{2}a(t)^2 + v_0(t)$ به دست آورید و سپس جابه جایی در ۶t ثانیه انتهای حرکت را به کمک رابطه $\Delta x = -\frac{1}{2}a(6t)^2 + v_{\text{پایانی}}(6t)$ به دست آورید و هر دو جابه جایی را برابر ۳۶ قرار دهید و در نهایت شتاب حرکت را به دست آورید تا بتوانید جابه جایی متحرک در کل این حرکت را محاسبه کنید.

درس نامه برای محاسبه جابه جایی در بازه زمانی Δt در حرکت با شتاب ثابت a می توانیم از دو رابطه زیر استفاده کنیم:

$$\Delta x = \frac{1}{2}a(\Delta t)^2 + \underbrace{v_1}_{\text{سرعت جسم در ابتدای بازه } \Delta t}(\Delta t)$$

سرعت جسم در ابتدای بازه Δt

$$\Delta x = -\frac{1}{2}a(\Delta t)^2 + \underbrace{v_2}_{\text{سرعت جسم در انتهای بازه } \Delta t}(\Delta t)$$

سرعت جسم در انتهای بازه Δt

پاسخ تشریحی گام اول: جابه جایی در t ثانیه اول حرکت و با سرعت اولیه $v_0 = 37 \text{ m/s}$ ، برابر با ۳۶m داده شده؛ بنابراین داریم:

$$v_0 \Rightarrow \Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t \Rightarrow 36 = \frac{1}{2}at^2 + 37t \quad (I)$$

گام دوم: جابه جایی در ۶t ثانیه پایانی که سرعت متحرک در انتهای این بازه زمانی صفر است، برابر با ۳۶m داده شده است؛ بنابراین داریم:

$$v_{\text{پایانی}}(6t) \Rightarrow \Delta x = -\frac{1}{2}a(6t)^2 + v_{\text{پایانی}}(6t)$$

$$36 = -\frac{1}{2}a(36t^2) + 0 \Rightarrow at^2 = -2 \quad (II)$$

گام سوم: به کمک رابطه های I و II در گام اول و دوم، شتاب حرکت را به دست می آوریم:

$$36 = \frac{1}{2}at^2 + 37t \xrightarrow{at^2 = -2} 36 = \frac{-2}{2} + 37t \Rightarrow t = 1 \text{ s}$$

$$at^2 = -2 \xrightarrow{t=1 \text{ s}} a = -2 \text{ m/s}^2$$

گام چهارم: حال که شتاب و سرعت اولیه و نهایی را داریم، جابه جایی جسم را در کل مسیر حرکت به کمک رابطه $v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x$ به دست می آوریم:

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \Rightarrow 0^2 - (37)^2 = 2(-2)\Delta x \Rightarrow \Delta x = \frac{37 \times 37}{4} = 342 / 25 \text{ m}$$

تست و پاسخ ۴۲

خودرویی در یک مسیر مستقیم از حال سکون و با شتاب ثابت شروع به حرکت می کند و پس از مدتی تندی خود را با شتاب ثابتی به بزرگی 2 m/s^2 کاهش می دهد تا متوقف شود. اگر در مدتی که حرکت خودرو به صورت تندشونده است، تندی متوسط آن برابر با 20 m/s و

مسافت طی شده توسط خودرو در کل مسیر برابر با ۶۰۰m باشد، اندازه جابه جایی خودرو در ۷ ثانیه دوم حرکت آن چند متر است؟

(۴) ۳۲۶

(۳) ۲۸۸

(۲) ۲۴۶

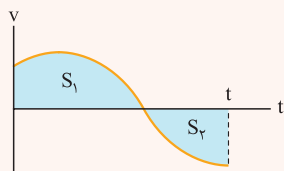
(۱) ۱۸۴

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره: در حل سؤال های حرکت با شتاب ثابت توصیه می کنیم که سؤال را به فضای نمودار $(v - t)$ ببرید. هم تحلیل آن ساده تر است و هم سرعت شما در محاسبات بالاتر خواهد رفت.

خودت حل کنی بهتره: نمودار سرعت - زمان را برای خودرو رسم کنید و با توجه به تندی متوسط در مرحله تندشونده، بیشترین تندی خودرو (قبل از ترمز کردن) را به دست آورید، سپس به کمک مساحت محدود به این نمودار و محور زمان، که بیانگر جابه جایی است، مدت زمان کل حرکت را به دست آورید. با استفاده از شتاب در مرحله دوم حرکت $(a = -2 \text{ m/s}^2)$ ، مدت زمان حرکت کندشونده را به دست آورید. در نتیجه، مدت زمان تندشونده بودن حرکت هم به دست می آید. حالا که تمام اطلاعات را داریم، جابه جایی متحرک را در بازه زمانی ۷s تا ۱۴s به کمک نمودار یا روابط به دست آورید.

درس نامه: مساحت محدود بین نمودار و محور زمان در نمودار $v - t$ ، بیانگر جابه جایی است.

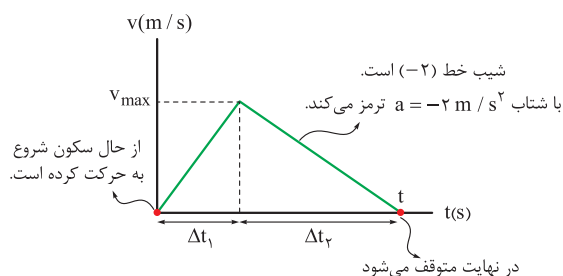


$$\Delta x_{(0-t)} = +S_1 - S_2 \quad \text{جابه جایی:}$$

$$\ell_{(0-t)} = +S_1 + S_2 \quad \text{مسافت طی شده:}$$

شیب نمودار سرعت - زمان، بیانگر شتاب است؛ بنابراین در حرکت با شتاب ثابت، نمودار سرعت - زمان به صورت خطی است.

پاسخ تشریحی: گام اول: شکل زیر، نمودار سرعت - زمان خودرو را نشان می دهد.



گام دوم: تندی متوسط در Δt_1 ثانیه اول برابر با 20 m/s است. (چون خودرو تغییر جهت نکرده، پس می توانیم به مسافت بگیریم سرعت متوسط هم در این بازه همون 20 m/s است)؛ بنابراین در بازه زمانی Δt_1 داریم:

$$v_{av} = \frac{v_0 + v_{max}}{2} \Rightarrow 20 = \frac{0 + v_{max}}{2} \Rightarrow v_{max} = 40 \text{ m/s}$$

گام سوم: مسافت طی شده در کل مسیر (چون خودرو تغییر جهت نکرده، می توانیم به مسافت بگیریم جابه جایی) برابر 600 m است؛ بنابراین مساحت محدود بین نمودار و محور زمان در کل t ثانیه، معادل 600 m است.

$$\frac{v_{max} \times t}{2} = 600 \Rightarrow \frac{40 \times t}{2} = 600 \Rightarrow t = 30 \text{ s}$$

گام چهارم: اندازه شیب خط در بازه زمانی Δt_2 ، برابر ۲ است؛ بنابراین داریم:

$$\frac{v_{max}}{\Delta t_2} = 2 \Rightarrow \frac{40}{\Delta t_2} = 2 \Rightarrow \Delta t_2 = 20 \text{ s}$$

$$\Delta t_1 + \Delta t_2 = 30 \Rightarrow \Delta t_1 + 20 = 30 \Rightarrow \Delta t_1 = 10 \text{ s}$$

گام پنجم: اندازه جابه جایی در ۷ ثانیه دوم $(t_1 = 7 \text{ s} \text{ تا } t_2 = 14 \text{ s})$ را به دست می آوریم. در بازه ۷s تا ۱۰s، شتاب خودرو برابر با

$$a_1 = \frac{v_{max}}{\Delta t_1} = \frac{40}{10} = 4 \text{ m/s}^2 \text{ است و در بازه } 10 \text{ s تا } 14 \text{ s شتاب خودرو } a_2 = -2 \text{ m/s}^2 \text{ است. حال جابه جایی را در این دو بازه مختلف به دست می آوریم و با هم جمع می کنیم:}$$

$$\Delta x_1 = -\frac{1}{2} a_1 t^2 + v_1 t$$

جابه جایی در بازه ۷s تا ۱۰s برابر است با:

$$\Delta x_1 = -\frac{1}{2} (4) (3)^2 + 40 (3) = -18 + 120 = 102 \text{ m}$$



$$\Delta x_p = \frac{1}{2} a_p t^2 + v_{10} t$$

جابه‌جایی در بازه ۱۰s تا ۱۴s برابر است با:

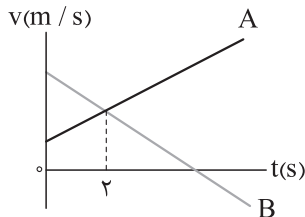
$$\Delta x_p = \frac{1}{2} (-2)(4)^2 + 40(4) = -16 + 160 = 144 \text{ m}$$

$$\Delta x_{(v_s-14s)} = \Delta x_1 + \Delta x_p = 102 + 144 = 246 \text{ m}$$

بنابراین جابه‌جایی خودرو در ۷ ثانیه دوم حرکت برابر است با:

تست و پاسخ ۴۳

نمودار سرعت - زمان دو متحرک A و B که روی محور x حرکت می‌کنند، به شکل زیر است. اگر دو متحرک، در مبدأ زمان در یک مکان قرار داشته باشند، فاصله دو متحرک در لحظه $t = 8s$ چند برابر فاصله دو متحرک در لحظه $t = 2s$ است؟



۸ (۲)

۳ (۱)

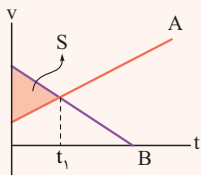
۱۰ (۴)

۹ (۳)

پاسخ: گزینه ۲

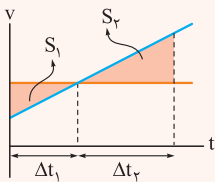
خودت حل کنی بهتره مساحت محدود بین نمودارهای A و B بیانگر جابه‌جایی دو متحرک نسبت به یکدیگر است. این مساحت را یک بار در ۲ ثانیه اول و بار دیگر در ۸ ثانیه اول محاسبه کنید تا در نهایت این دو را با هم مقایسه کنید، حتماً از تشابه مثلث‌ها، در روند حل سؤال استفاده کنید.

درس نامه مساحت محدود بین نمودارهای دو متحرک در نمودار $v-t$ ، بیانگر جابه‌جایی دو متحرک نسبت به یکدیگر است.



$\Rightarrow$

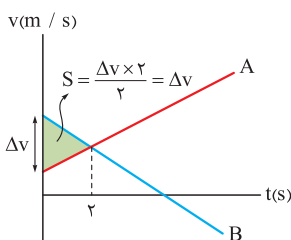
در t_1 ثانیه اول، متحرک B به اندازه S واحد نسبت به متحرک A بیشتر جابه‌جا شده است.



$\Rightarrow$

اگر نسبت تشابه دو مثلث k باشد، نسبت مساحت این دو مثلث k^2 است.

$$\frac{\Delta t_2}{\Delta t_1} = k \Rightarrow \frac{S_2}{S_1} = k^2$$



$$\Delta x_{AB} = \Delta v$$

پاسخ تشریحی گام اول: هر دو متحرک در مبدأ زمان در یک مکان

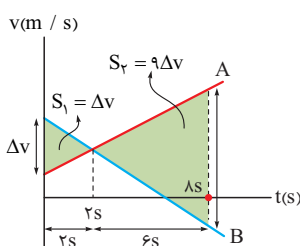
قرار دارند، جابه‌جایی نسبی دو متحرک A و B را که برابر با مساحت

محدود بین نمودارهای $(v-t)$ دو متحرک A و B است، در مدت ۲s

مشخص می‌کنیم.

گام دوم: مطابق شکل، جابه‌جایی نسبی دو متحرک A و B را پس از

مدت زمان ۸s مشخص می‌کنیم:





دو مثلث هاشور خورده با نسبت تشابه $\frac{6}{4} = 3$ با هم متشابه هستند؛ بنابراین نسبت مساحت مثلث هاشور خورده بزرگ تر به مثلث هاشور خورده کوچک تر، $(3)^2$ است.

$$\Delta x'_{AB} = +\Delta v - 9\Delta v = -8\Delta v$$

گام سوم: نسبت فاصله دو متحرک در $t = 8s$ و $t = 2s$ را به دست می آوریم:

$$\frac{\Delta x'_{AB}}{\Delta x_{AB}} = \frac{|-8\Delta v|}{\Delta v} = 8$$

تست و پاسخ ۴۴

در شرایط خلأ، گلوله ای از ارتفاع h نسبت به سطح زمین رها می شود. اگر گلوله $28m$ انتهای حرکت خود تا رسیدن به سطح زمین را در مدت $2s$ طی کند، تندی گلوله در فاصله $\frac{h}{4}$ از سطح زمین، چند متر بر ثانیه است؟ ($g = 10 m/s^2$)

$$16\sqrt{2} \quad (4)$$

$$12\sqrt{2} \quad (3)$$

$$16 \quad (2)$$

$$12 \quad (1)$$

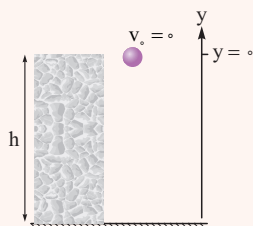
پاسخ: گزینه ۳

خود حل کنی بهتره رابطه $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ و $\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{v_1 + v_2}{2}$ را در $2s$ آخر حرکت به کار ببرید تا سرعت برخورد گلوله با سطح زمین را به دست آورید.

سپس به کمک سرعت برخورد گلوله با زمین و رابطه $v^2 = -2g\Delta y$ ارتفاعی که گلوله از آنجا رها شده است (h) را محاسبه کنید.

در نهایت رابطه $v^2 = -2g\Delta y$ را پس از پیمودن ($\frac{h}{4}$) از مسیر به کار ببرید تا سرعت در میانه راه به دست بیاید.

درس نامه •• اگر جسمی در شرایط خلأ (مقاومت هوا ناچیز است) از ارتفاع h مطابق شکل زیر رها شود، حرکت جسم از نوع سقوط آزاد است. در این صورت جسم با شتابی ثابت به بزرگی g سقوط خواهد کرد و روابط زیر برای آن برقرار است.



$$v = -gt \quad \text{سرعت در لحظه } t$$

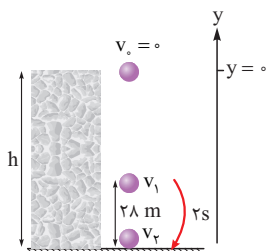
$$\Delta y = -\frac{1}{2}gt^2 \quad \text{جابه جایی پس از } t \text{ ثانیه}$$

$$v^2 = -2g\Delta y \quad \text{رابطه مستقل از زمان}$$

$$-g = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad \text{شتاب گرانش}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \underbrace{\left(\frac{v_1 + v_2}{2}\right)}_{v_{av}}$$

پاسخ تشریحی گام اول: شکل زیر وضعیت گلوله از لحظه رها شدن تا رسیدن به سطح زمین را نشان می دهد.



به کمک رابطه $-g = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ ، اختلاف سرعت در نقطه های (۱) و (۲) را به دست می آوریم:

$$-g = \frac{v_2 - v_1}{2} \Rightarrow v_2 - v_1 = -20 \quad (I)$$

جابه جایی گلوله (Δy) در $2s$ آخر حرکت از رابطه $\Delta y = \left(\frac{v_1 + v_2}{2}\right)\Delta t$ به دست می آید؛ بنابراین داریم:

$$-28 = \left(\frac{v_1 + v_2}{2}\right) \times 2 \Rightarrow v_2 + v_1 = -28 \quad (II)$$



گام دوم: با استفاده از رابطه‌های (I) و (II)، سرعت گلوله در لحظه برخورد به زمین (v_2) را محاسبه می‌کنیم و سپس به کمک رابطه $v_2^2 = -2g\Delta y$ ارتفاع h را به دست می‌آوریم.

$$\begin{cases} v_2 - v_1 = -20 \\ v_2 + v_1 = -28 \end{cases} \Rightarrow 2v_2 = -48 \Rightarrow v_2 = -24 \text{ m/s}$$

$$v_2^2 = -2g\Delta y \Rightarrow (-24)^2 = -2(10)(-h) \Rightarrow h = \frac{(24)^2}{20} = 28.8 \text{ m}$$

گام سوم: تندی گلوله را در ارتفاع $h = 14/4 \text{ m}$ به دست می‌آوریم. گلوله برای رسیدن به ارتفاع $14/4 \text{ m}$ ، جابه‌جایی $14/4 \text{ m}$ را داشته است؛ بنابراین داریم:

$$v^2 = -2g\Delta y = -2(10)(-14/4) = 2 \times 144 \Rightarrow v_2 = 12\sqrt{2} \text{ m/s}$$

تست و پاسخ ۴۵

دو گوی هم‌اندازه A و B که جرم گوی A بیشتر از جرم گوی B است، به‌صورت هم‌زمان، از سطح زمین و با سرعت اولیه یکسان، در راستای قائم به سمت بالا پرتاب می‌شوند. اگر اندازه نیروی مقاومت هوای وارد بر دو گوی در طی حرکت آن‌ها ثابت و یکسان باشد، چه تعداد از موارد زیر درست است؟

الف) مدت بالارفتن گوی A بیشتر از مدت بالارفتن گوی B است.

ب) ارتفاع اوج گوی A کمتر از ارتفاع اوج گوی B است.

پ) تندی برخورد به سطح زمین گوی A بیشتر از تندی برخورد به زمین گوی B است.

ت) تندی متوسط هر دو گوی از لحظه پرتاب تا بالاترین نقطه مسیرشان برابر است.

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ تشریحی گام اول: اندازه شتاب هر یک از دو گوی، هنگام بالارفتن از رابطه $a = g + \frac{f_D}{m}$ به دست می‌آید. باتوجه به این‌که گوی A جرم بیشتری دارد، شتاب گوی A کمتر است.

$$a = g + \frac{f_D}{m} \quad (f_D)_A = (f_D)_B, m_A > m_B \rightarrow a_A < a_B$$

سرعت اولیه و نهایی دو گوی در مسیر رفت (تا رسیدن به نقطه اوج) یکسان است؛ بنابراین داریم:

$$\frac{\Delta v_A}{\Delta t_A} < \frac{\Delta v_B}{\Delta t_B} \quad \Delta v_A = \Delta v_B \rightarrow \Delta t_A > \Delta t_B$$

بنابراین مورد «الف» درست است.

گام دوم: با استفاده از رابطه $\Delta y = \left(\frac{v_0 + v_{\text{اوج}}}{2} \right) \Delta t$ ، ارتفاع اوج دو گوی را به دست می‌آوریم و مقایسه می‌کنیم:

$$\begin{cases} A \text{ گوی} \Rightarrow \Delta y_A = \left(\frac{v_{0A} + 0}{2} \right) \Delta t_A \\ B \text{ گوی} \Rightarrow \Delta y_B = \left(\frac{v_{0B} + 0}{2} \right) \Delta t_B \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} v_{0A} = v_{0B} \\ \Delta t_A > \Delta t_B \end{array} \right. \rightarrow \Delta y_A > \Delta y_B$$

پس مورد «ب» نادرست است.

گام سوم: اندازه شتاب در مسیر برگشت از رابطه $a' = g - \frac{f_D}{m}$ به دست می‌آید و باتوجه به این‌که جرم گوی A بیشتر است، شتاب گوی A در مسیر برگشت بیشتر است.

$$a'_{\text{برگشت}} = g - \frac{f_D}{m} \quad m_A > m_B \rightarrow (a'_A)_{\text{برگشت}} > (a'_B)_{\text{برگشت}}$$

به کمک رابطه $v^2 - v_{\text{اوج}}^2 = 2a'\Delta y$ در مسیر برگشت تندی دو گوی در زمان رسیدن به زمین را مقایسه می‌کنیم: ($\Delta y = \Delta y'$)

$$\begin{cases} A \text{ گوی} \Rightarrow v_A^2 - 0^2 = 2a'_A \Delta y'_A \\ B \text{ گوی} \Rightarrow v_B^2 - 0^2 = 2a'_B \Delta y'_B \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} a'_A > a'_B \\ \Delta y'_A = \Delta y'_B \end{array} \right. \rightarrow v_A > v_B$$

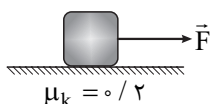
بنابراین گوی A با تندی بیشتری به زمین برمی‌گردد. در نتیجه مورد «پ» درست است.

$$v_{av} = \frac{v_o + 0}{2} = \frac{v_o}{2} \xrightarrow{v_o A = v_o B} (v_{av})_A = (v_{av})_B$$

گام چهارم: مورد «ت» درست است.

تست و پاسخ ۴۶

در شکل زیر، جسم تحت تأثیر نیروی افقی $\vec{F}$ روی سطح افقی از حال سکون شروع به حرکت می‌کند و در ۳s اول حرکت، ۱۰m جابه‌جا می‌شود. اگر به این جسم ساکن روی همین سطح، نیروی $2\vec{F}$ وارد شود، در ۳s اول حرکت چند متر جابه‌جا می‌شود؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$)



۲۰ (۲)

۱۴/۵ (۱)

۴۰ (۴)

۲۹ (۳)

پاسخ: گزینه ۳

خود حل کنی بهتره ابتدا شتاب حرکت را با استفاده از رابطه $\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_o t$ به دست آورید. سپس به کمک قانون دوم نیوتون و شتاب به دست آمده در این مرحله، نیروی F را بر حسب جرم مشخص کنید.

در مرحله دوم که نیروی $2F$ وارد شده است، ابتدا شتاب را به کمک قانون دوم نیوتون به دست آورده و سپس رابطه $\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_o t$ را به کار ببرید تا جابه‌جایی در مدت ۳s را در این حالت محاسبه کنید.

درس نامه ۱۰۰۰ (۱) طبق قانون دوم نیوتون، اگر نیروی خالص وارد بر جسم (F_{net}) مخالف صفر باشد. جسم در جهت نیروی خالص، شتاب a را می‌گیرد که اندازه این شتاب با بزرگی نیرو رابطه مستقیم و با جرم جسم رابطه عکس دارد.

$$F_{net} = ma$$

$$f_k = \mu_k + F_N$$

(۲) اندازه نیروی اصطکاک جنبشی (f_k)، از رابطه مقابل به دست می‌آید:

$$\mu_k = \text{ضریب اصطکاک جنبشی} \quad F_N = \text{نیروی عمودی سطح (N)}$$

پاسخ تشریحی گام اول: باتوجه به این که در ۳s اول حرکت جسم با شتاب ثابت، به اندازه ۱۰m جابه‌جا شده است، شتاب متحرک را در این حالت (تحت تأثیر نیروی F) به دست می‌آوریم.

$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_o t \xrightarrow{v_o=0} 10 = \frac{1}{2}a(3)^2 \Rightarrow a = \frac{20}{9} \text{ m/s}^2$$

گام دوم: مطابق شکل زیر در حالتی که جسم تحت تأثیر نیروی F قرار دارد، شتاب حرکت جسم $\frac{20}{9} \text{ m/s}^2$ است؛ حال به کمک قانون دوم نیوتون، نیروی F را به دست می‌آوریم:

$$F_{net,y} = 0 \Rightarrow F_N - mg = 0 \Rightarrow F_N = mg$$

$$F_{net,x} = ma \Rightarrow F - f_k = ma$$

$$F - \mu_k(mg) = ma$$

$$F = ma + \mu_k(mg)$$

$$F = m\left(\frac{20}{9}\right) + 0.2(10 \cdot m) = \frac{38}{9}m$$

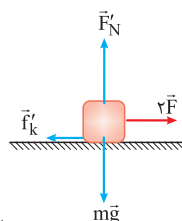
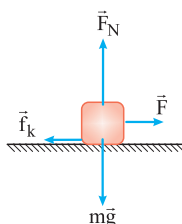
گام سوم: شکل زیر وضعیتی را که جسم تحت تأثیر نیروی $2F$ قرار دارد، نشان می‌دهد. به کمک قانون دوم نیوتون شتاب جسم را در این حالت به دست می‌آوریم:

$$F_{net,y} = 0 \Rightarrow F'_N - mg = 0 \Rightarrow F'_N = mg$$

$$F_{net,x} = ma' \Rightarrow 2F - f'_k = ma'$$

$$2\left(\frac{38}{9}m\right) - \mu_k(mg) = ma'$$

$$\frac{76}{9}m - 0.2(10 \cdot m) = ma' \Rightarrow a' = \frac{58}{9} \text{ m/s}^2$$





گام چهارم: حال جابه‌جایی جسمی ساکن که با شتاب ثابت $\frac{58}{9} \text{ m/s}^2$ شروع به حرکت می‌کند را پس از ۳s به دست می‌آوریم.

$$\Delta x' = \frac{1}{2} a' t^2 + v_0 t \xrightarrow{v_0=0} \Delta x' = \frac{1}{2} \left(\frac{58}{9} \right) (3)^2 + 0 = 29 \text{ m}$$

تست و پاسخ ۴۷

جرم سیاره‌ای با جرم کره زمین برابر و حجم آن ۲۷ برابر حجم کره زمین است. شتاب گرانش در سطح این سیاره با شتاب گرانش در چه فاصله‌ای از سطح زمین برابر است؟ (R_e شعاع کره زمین است).

۹ R_e (۴)

۸ R_e (۳)

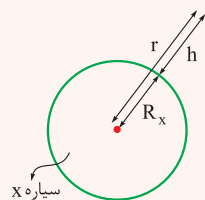
۳ R_e (۲)

۲ R_e (۱)

پاسخ: گزینه ۱

خودت حل کنی بهتره باتوجه به نسبت حجم دو سیاره، نسبت شعاع دو سیاره را به دست آورید و در نهایت از رابطه $g = \frac{GM_{\text{سیاره}}}{r^2}$ شتاب گرانش در فاصله h از سطح زمین را با شتاب گرانش بر روی سطح سیاره برابر قرار دهید تا ارتفاع h به دست آید.

درس نامه اگر جسمی در فاصله r از مرکز یک سیاره به جرم M قرار گیرد، شتاب گرانشی‌ای که سیاره به آن جسم وارد می‌کند از رابطه زیر به دست می‌آید.



$$g = \frac{GM_{\text{سیاره}}}{r^2} = \frac{GM_{\text{سیاره}}}{(R_x + h)^2}$$

شتاب گرانش در فاصله r از مرکز سیاره

$$G = \text{ثابت گرانش عمومی که برابر با } \frac{\text{N.m}^2}{\text{kg}^2} \times 10^{-11} \times 6.67 \text{ است.}$$

پاسخ تشریحی

گام اول: حجم سیاره ۲۷ برابر حجم کره زمین است، شعاع سیاره (R_x) را برحسب شعاع زمین (R_e) به دست می‌آوریم:

$$V_x = 27 V_e \Rightarrow \frac{4}{3} \pi R_x^3 = 27 \times \frac{4}{3} \pi R_e^3 \Rightarrow R_x^3 = 27 R_e^3 \Rightarrow R_x = 3 R_e$$

گام دوم: شتاب گرانش در سطح سیاره را برحسب جرم و شعاع سیاره مشخص می‌کنیم:

$$g_x = \frac{GM_x}{R_x^2}$$

گام سوم: شتاب گرانش در فاصله h از سطح زمین را برحسب جرم و شعاع زمین مشخص می‌کنیم:

$$g_h = \frac{GM_e}{(R_e + h)^2}$$

گام چهارم: شتاب گرانش در فاصله h از سطح زمین و شتاب گرانش در سطح سیاره برابر است؛ بنابراین داریم:

$$g_h = g_x \Rightarrow \frac{GM_x}{R_x^2} = \frac{GM_e}{(R_e + h)^2} \xrightarrow{M_e=M_x, R_x=3R_e} \frac{1}{(3R_e)^2} = \frac{1}{(R_e + h)^2}$$

$$\xrightarrow{\text{جذر می‌گیریم}} 3R_e = R_e + h \Rightarrow h = 2R_e$$

تست و پاسخ ۴۸

متحرکی با تندی ثابت روی محیط دایره‌ای در حال حرکت است. اگر دوره تناوب متحرک برابر با ۴s باشد، اندازه شتاب متوسط متحرک در هر ثانیه، چند برابر اندازه شتاب مرکزگرای آن است؟

$\frac{4\sqrt{2}}{\pi}$ (۴)

$\frac{4}{\pi}$ (۳)

$\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$ (۲)

$\frac{\sqrt{2}}{\pi}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

خودت حل کنی بهتره ابتدا به کمک رابطه $a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ شتاب متوسط را در بازه زمانی $\Delta t = 1s$ به دست آورید. (برای محاسبه Δv توصیه می کنیم شکل رسم کنید و به Δv نگاه برداری داشته باشید نه نرده ای)، سپس از رابطه $a_c = \frac{v^2}{r}$ شتاب مرکزگرا را محاسبه کنید. نسبت این دو شتاب به راحتی قابل محاسبه است. از رابطه $v = \frac{2\pi r}{T}$ هم برای محاسبه تندی استفاده کنید.

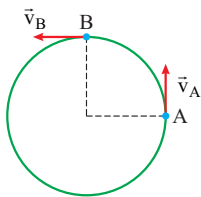
درس نامه در حرکت دایره ای یکنواخت، اگرچه تندی ثابت است اما جهت سرعت در حال تغییر است و حرکت از نوع شتابدار محسوب می شود. در حرکت دایره ای یکنواخت پس از مدت زمان T (دوره تناوب)، ذره یک دور کامل محیط دایره $(2\pi r)$ را طی می کند؛ بنابراین تندی در این نوع حرکت از رابطه زیر به دست می آید:

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

جهت شتاب لحظه ای در حرکت دایره ای یکنواخت همواره به سمت مرکز دایره است و این شتاب مرکزگرا از روابط زیر به دست می آید.

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

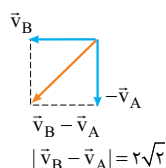
پاسخ تشریحی **گام اول:** باتوجه به این که دوره تناوب متحرک $4s$ است، در مدت زمان $1s$ متحرک، $\frac{1}{4}$ از محیط دایره را پیموده است. مانند شکل زیر که متحرک با تندی ثابت v_A از نقطه A تا نقطه B ، $\frac{1}{4}$ محیط دایره را پیموده است.



گام دوم: شتاب متوسط متحرک را در بازه $1s$ (مسیر A تا B) به کمک رابطه $\vec{a}_{av} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$ به دست می آوریم. (هواستون باشه شتاب کمیتی برداری است و برای مناسبه تغییرات سرعت هم باید نگاهمون برداری باشه).

$$\vec{a}_{av} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_B - \vec{v}_A}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_B + (-\vec{v}_A)}{\Delta t}$$

$\vec{v}_B$ و $(-\vec{v}_A)$ را به صورت برداری با هم جمع می کنیم. (هواستون باشه که تندی ثابته و اون رو v فرض می کنیم).



$$a_{av} = \frac{|\vec{v}_B - \vec{v}_A|}{\Delta t} = \frac{v\sqrt{2}}{1} = v\sqrt{2}$$

گام سوم: شتاب مرکزگرا را از رابطه $a_c = \frac{v^2}{r}$ به دست می آوریم. (توجه کن که اندازه شتاب مرکزگرا ثابته!)

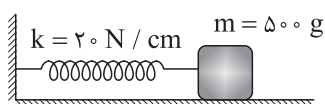
$$a_c = \frac{v^2}{r}$$

گام چهارم: نسبت بزرگی شتاب متوسط در هر ثانیه (اونی که تو کالم دوم حساب کردیم) را به شتاب مرکزگرا به دست می آوریم.

$$\frac{a_{av}}{a_c} = \frac{v\sqrt{2}}{\frac{v^2}{r}} = \frac{r\sqrt{2}}{v} \xrightarrow{v = \frac{2\pi r}{T}} \frac{r\sqrt{2}}{\frac{2\pi r}{T}} = \frac{T\sqrt{2}}{2\pi} = \frac{4\sqrt{2}}{2\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$$

تست و پاسخ ۴۹

در شکل زیر، جسم متصل به فنر، روی سطح افقی بدون اصطکاک در حال نوسان است. اگر مسافت طی شده توسط جسم در مدت $0.5s$ برابر با $10cm$ باشد، بیشینه اندازه تکانه جسم در SI کدام است؟ ($\pi^2 \approx 10$)



2π (۴)

π (۳)

$\frac{\pi}{2}$ (۲)

$\frac{\pi}{4}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۲



مشاوره در حل سؤال‌های حرکت هماهنگ ساده، بازه‌های زمانی را برحسب دوره تناوب مشخص کنید تا بتوانید تحلیل درستی از حرکت داشته باشید.

خودت حل کنی بهتره ابتدا دوره تناوب را از رابطه $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ به دست آورید و پس از مشخص کردن نسبت Δt به T ، رابطه‌ای بین مسافت و دامنه بیابید و در نهایت بیشینه تکانه را به کمک رابطه $p_{\max} = mA\omega$ به دست آورید.

درس نامه در حرکت هماهنگ ساده سامانه جرم - فنر، که جسمی به جرم m به فنری با ضریب ثابت k وصل شده است، دوره تناوب

(T) و بسامد زاویه‌ای (ω) از روابط زیر به دست می‌آیند.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad \leftarrow \text{دوره تناوب (s)}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \leftarrow \text{بسامد زاویه‌ای (rad/s)}$$

در حرکت هماهنگ ساده در هر بازه زمانی دلخواه $\Delta t = \frac{T}{\gamma}$ ، نوسانگر مسافت $2A$ را می‌پیماید. به عبارتی اگر Δt مضرب صحیحی از $\frac{T}{\gamma}$ باشد، مسافت هم همان مضرب صحیح از $2A$ خواهد بود.

$$\Delta t = n\left(\frac{T}{\gamma}\right) \Leftrightarrow \ell = n(2A)$$

بیشینه تندی نوسانگر هماهنگ ساده، هنگام عبور از نقطه تعادل رخ می‌دهد و بزرگی آن برابر با $v_{\max} = A\omega$ است.

پاسخ تشریحی گام اول: دوره تناوب نوسانگر جرم - فنر را از رابطه $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ به دست می‌آوریم.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \xrightarrow[k=20 \frac{N}{cm} = 2000 \frac{N}{m}}{m=0.5 \text{ kg}} T = 2\pi\sqrt{\frac{0.5}{2000}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{4000}} \xrightarrow{\pi^2=10} T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{400 \cdot \pi^2}} = \frac{2\pi}{20\pi} = 0.1 \text{ s}$$

گام دوم: نسبت بازه زمانی 0.5 s را به دوره تناوب مشخص می‌کنیم تا بتوانیم مسافت پیموده شده را برحسب دامنه بیان کنیم.

$$\frac{\Delta t}{T} = \frac{0.5}{0.1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \Delta t = \frac{T}{2}$$

نوسانگر هماهنگ ساده در هر بازه دلخواه $\Delta t = \frac{T}{\gamma}$ ، مسافتی به اندازه $2A$ را طی می‌کند؛ بنابراین 10 cm معادل $2A$ است.

$$2A = 10 \text{ cm} \Rightarrow A = 5 \text{ cm} = 0.05 \text{ m}$$

گام سوم: بیشینه اندازه تکانه جسم در حرکت هماهنگ ساده، هنگام عبور از نقطه تعادل رخ می‌دهد؛ بنابراین داریم:

$$p_{\max} = mv_{\max} \xrightarrow{v_{\max} = A\omega} p_{\max} = mA\omega \xrightarrow{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}} p_{\max} = mA\sqrt{\frac{k}{m}} = A\sqrt{km}$$

$$p_{\max} = A\sqrt{km} = 0.05 \sqrt{2000 \times 0.5} = \frac{5}{100} \sqrt{1000} = \frac{50\sqrt{10}}{100} = \frac{\sqrt{10}}{2} \xrightarrow{\pi^2=10} \frac{\pi}{2} \text{ kg.m/s}$$

تست و پاسخ ۵۰

نخی به طول 100 cm را به دو قسمت غیرمساوی تقسیم کرده و با هر قسمت یک آونگ ساده می‌سازیم. اگر دوره تناوب یکی از این آونگ‌ها ۳ برابر دوره تناوب آونگ دیگر باشد، طول نخ آونگی که بسامد بیشتری دارد، چند سانتی‌متر است؟

۲۵ (۲)

۱۰ (۱)

۹۰ (۴)

۷۵ (۳)

پاسخ: گزینه ۱



درس نامه ●● اگر یک آونگ ساده را اندکی از حالت تعادل خارج کرده و رها کنیم تا شروع به نوسان کند، دوره تناوب نوسان آونگ از رابطه زیر به دست می آید:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \rightarrow (m) \text{ طول نخ آونگ} \quad \leftarrow \text{دوره تناوب (s)}$$

$$g \rightarrow (m/s^2) \text{ شتاب گرانش}$$

پاسخ تشریحی گام اول: طبق رابطه $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ باتوجه به یکسان بودن شتاب گرانش (g) برای هر دو آونگ، دوره تناوب با جذر طول

$$\frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \xrightarrow{T_2 = 3T_1} 3 = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \Rightarrow \frac{L_2}{L_1} = 9$$

آونگ رابطه مستقیم دارد؛ بنابراین می توانیم بنویسیم:

گام دوم: حالا با داشتن مجموع طول نخ ها و نسبت طول آن ها، طول هریک از نخ ها را حساب می کنیم:

$$\frac{L_2}{L_1} = 9 \Rightarrow L_2 = 9L_1 \rightarrow L_1 + L_2 = 100 \rightarrow L_1 + 9L_1 = 100 \Rightarrow 10L_1 = 100 \Rightarrow L_1 = 10 \text{ cm}$$

گام سوم: می دانیم بسامد با دوره تناوب رابطه عکس دارد؛ بنابراین $f_1 = 3f_2$ است، پس طول نخ آونگی که بسامد بیشتری دارد، همان $L_2 = 10 \text{ cm}$ است.

تست و پاسخ ۵۱

اگر با ورود یک موج الکترومغناطیسی به بسامد 625 THz از محیط I به محیط R ، طول موج آن 160 nm کاهش یابد، تندی انتشار آن چند متر بر ثانیه و چگونه تغییر می کند؟

- (۱) 10^6 ، کاهش می یابد. (۲) 10^6 ، افزایش می یابد. (۳) 10^8 ، کاهش می یابد. (۴) 10^8 ، افزایش می یابد.

پاسخ: گزینه ۳

درس نامه ●● رابطه طول موج و تندی انتشار موج در یک محیط معین به صورت زیر است:

$$v = \lambda f \rightarrow (m/s) \text{ تندی انتشار} \quad \leftarrow \text{طول موج (m)}$$

$$f \rightarrow (Hz) \text{ بسامد}$$

پاسخ تشریحی طبق رابطه $\lambda = \frac{v}{f}$ و باتوجه به ثابت بودن بسامد موج در اثر شکست، می توانیم بنویسیم:

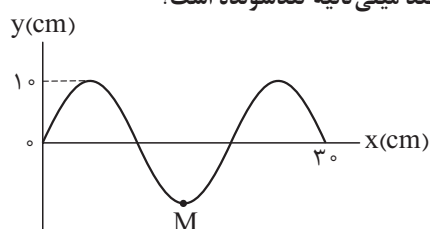
$$\begin{cases} \lambda_I = \frac{v_I}{f} \\ \lambda_R = \frac{v_R}{f} \end{cases} \Rightarrow \lambda_R - \lambda_I = \frac{v_R}{f} - \frac{v_I}{f} = \frac{v_R - v_I}{f}$$

$$\frac{\lambda_R - \lambda_I = -160 \text{ nm} = -160 \times 10^{-9} \text{ m}}{f = 625 \text{ THz} = 625 \times 10^{12} \text{ Hz}} \rightarrow -160 \times 10^{-9} = \frac{v_R - v_I}{625 \times 10^{12}} \Rightarrow v_R - v_I = -10^8 \text{ m/s}$$

بنابراین در اثر ورود موج از محیط I به محیط R ، تندی انتشار موج، 10^8 m/s کاهش می یابد.

تست و پاسخ ۵۲

تصویر موج عرضی منتشر شده در ریسمانی به چگالی خطی جرم 50 g/m ، در لحظه $t = 0$ به شکل زیر است. اگر نیروی کشش ریسمان برابر 5 N باشد، حرکت ذره M از ریسمان در بازه زمانی $t_1 = 0.1 \text{ s}$ تا $t_2 = 0.35 \text{ s}$ ، به مدت چند میلی ثانیه تندشونده است؟



(۱) ۵

(۲) ۱۰

(۳) ۱۵

(۴) ۲۵

پاسخ: گزینه ۳

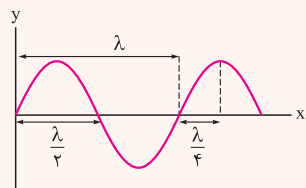




درس نامه

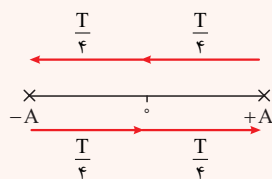
(۱) تندی انتشار موج عرضی در یک ریسمان تحت کشش با نیروی F و چگالی خطی جرم μ از رابطه $v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$ به دست می‌آید.

(۲) با توجه به شکل زیر، در نمودار $y-x$ برای موج عرضی، طول موج (λ) به دست می‌آید:

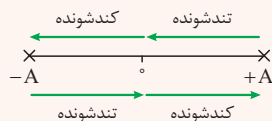


(۳) دوره تناوب یک موج با طول موج λ و تندی انتشار v از رابطه $T = \frac{\lambda}{v}$ به دست می‌آید.

(۴) در یک حرکت هماهنگ ساده، نوسانگر در مدت زمان $\frac{T}{4}$ از مکان صفر به $+A$ یا $-A$ می‌رود و یا از مکان $\pm A$ به صفر می‌رود. به شکل زیر دقت کنید.



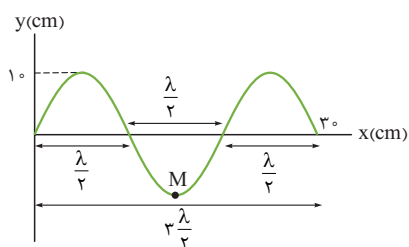
(۵) مطابق شکل زیر، هرگاه نوسانگر به نقطه تعادل نزدیک شود، حرکت تندشونده و هرگاه از نقطه تعادل دور شود، حرکت کندشونده است.



پاسخ تشریحی گام اول: تندی انتشار موج عرضی در ریسمان را حساب می‌کنیم.

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \xrightarrow{\mu = \frac{F}{v^2} = \frac{5}{1^2} = 5 \text{ kg/m}} v = \sqrt{\frac{5}{5}} = \sqrt{1} = 1 \text{ m/s}$$

گام دوم: طول موج (λ) را به دست می‌آوریم:



$$\frac{3\lambda}{2} = 3 \Rightarrow \lambda = 2 \text{ cm}$$

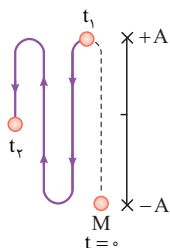
گام سوم: دوره تناوب موج را محاسبه می‌کنیم:

$$T = \frac{\lambda}{v} = \frac{2 \text{ cm} = 0.02 \text{ m}}{1 \text{ m/s}} \Rightarrow T = \frac{0.02}{1} = 0.02 \text{ s}$$

گام چهارم: لحظات t_1 و t_2 را بر حسب دوره تناوب حساب می‌کنیم:

$$\frac{t_1}{T} = \frac{0.01}{0.02} = \frac{1}{2} \Rightarrow t_1 = \frac{T}{2}$$

$$\frac{t_2}{T} = \frac{0.035}{0.02} = \frac{3.5}{2} = \frac{7}{4} \Rightarrow t_2 = \frac{7T}{4}$$



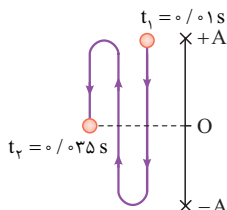
$$t_1 = 0.1 \text{ s} = \frac{T}{2}$$

$$t_2 = 0.35 \text{ s} = \frac{3T}{4}$$

گام پنجم: مسیر حرکت ذره M از t_1 تا t_2 را رسم می‌کنیم:

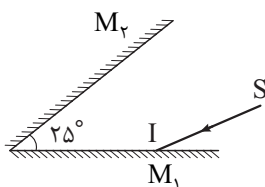
گام ششم: باتوجه به مسیر حرکت، مدت زمان حرکت تندشونده را برای ذره M به دست می‌آوریم:

باتوجه به شکل زیر که مسیر حرکت را نشان می‌دهد به مدت $\Delta t = \frac{3}{4}T = 0.15 \text{ s} = 15 \text{ ms}$ حرکت ذره M تندشونده است.



تست و پاسخ ۵۳

در شکل زیر پرتوی نور SI با زاویه تابش 55° به آینه M_1 می‌تابد. پرتوی بازتاب‌شده از آینه M_2 ، در آخرین بازتاب ممکن از این آینه، با پرتوی SI زاویه چند درجه می‌سازد؟ (طول آینه‌ها به اندازه کافی بلند است.)



(۱) 105

(۲) 135

(۳) 150

(۴) 180

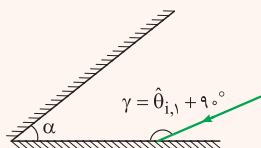
پاسخ: گزینه ۳

مشاوره درسته فیزیک مفهومی و ولی یه پاهایی باید واقع بین باشی. توی این سوال آله فرمولایی که توی نکته‌ها آوردیم یادگیری، کلاً باید قید جواب‌دانشو بزنی.

پس بدو برو یاد بگیر!

درس نامه

(۱) هرگاه یک پرتوی نور به یکی از دو آینه تخت متقاطع که با هم زاویه حاده می‌سازند بتابد، برای محاسبه تعداد بازتاب‌های پرتو از آینه‌ها، مطابق الگوریتم زیر پیش می‌رویم. باتوجه به شکل زیر داریم:



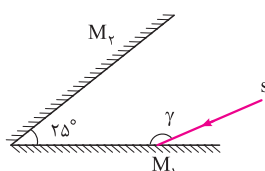
$$\left. \begin{array}{l} \frac{\gamma}{\alpha} \leftarrow \text{عدد صحیح است.} \\ \frac{\gamma}{\alpha} \leftarrow \text{نسبت } \frac{\gamma}{\alpha} \text{ را به دست می‌آوریم} \\ \frac{\gamma}{\alpha} \leftarrow \text{عدد صحیح نیست.} \end{array} \right\} n = \left[\frac{\gamma}{\alpha} \right] + 1$$

(۲) وقتی یک پرتو به مجموعه دو آینه تخت که با هم زاویه حاده می‌سازند وارد می‌شود، در اثر برخورد به مجموعه آینه‌ها منحرف می‌شود و زاویه انحراف پرتوی بازتاب n ام نسبت به پرتوی تابش اولیه برابر است با:

$$D = n\alpha \leftarrow \text{زاویه بین دو آینه}$$

پاسخ تشریحی گام اول: تعداد برخورد پرتو به آینه‌ها (تعداد بازتاب) را به دست می‌آوریم.

باتوجه به شکل زیر داریم:



$$\gamma = \underbrace{\theta_{i1}}_{55^\circ} + 90^\circ = 55^\circ + 90^\circ = 145^\circ$$

$$\alpha = 25^\circ$$

$$\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{145^\circ}{25^\circ} = 5.8 \leftarrow \text{(عدد صحیح نیست)} \Rightarrow n = \left[\frac{\gamma}{\alpha} \right] + 1 = \left[\frac{5.8}{1} \right] + 1 = 6$$



گام دوم: با توجه به این که برخورد های فرد مربوط به آینه M_1 و برخوردهای زوج مربوط به آینه M_2 است، درمی یابیم در برخورد $6^{\text{ام}}$ (زوج) پرتو پس از بازتاب از آینه M_2 از مجموعه آینه ها خارج می شود.

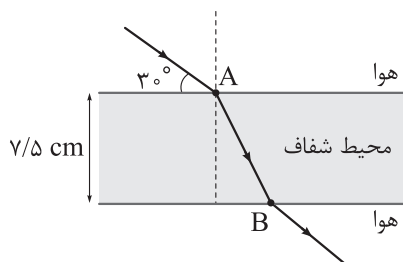
گام سوم: زاویه انحراف پرتوی نهایی، نسبت به پرتوی اولیه را حساب می کنیم.

$$D = n\alpha \xrightarrow[\alpha = 25^\circ]{n=6} D = 6 \times 25^\circ = 150^\circ$$

تست و پاسخ ۵۴

مسیر حرکت پرتوی نوری در یک محیط شفاف به ضریب شکست n به شکل زیر است. اگر نور فاصله دو نقطه A تا B را در مدت Δt / ns طی

کند، n برابر کدام است؟ ($c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$, $\sin 37^\circ = 0.6$)



- (۱) $\sqrt{3}$
- (۲) $\frac{5\sqrt{3}}{6}$
- (۳) $\frac{5\sqrt{3}}{8}$
- (۴) $\sqrt{\frac{3}{2}}$

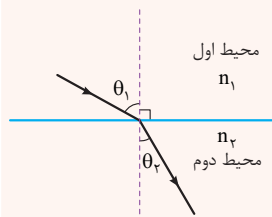
پاسخ: گزینه ۱

مشاوره مشابه این سؤال در کنکورهای قبلی، مطرح شده و تیپ مهمی از تست ها به شمار می رود.

درس نامه

قانون شکست اسنل: هنگامی که نور به طور مایل از یک محیط شفاف وارد محیط شفاف دیگری می شود رابطه زیر برقرار است:

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2}$$



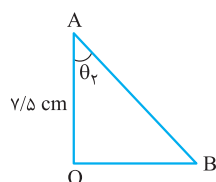
n_1 = ضریب شکست محیط اول

n_2 = ضریب شکست محیط دوم

θ_1 = زاویه تابش

θ_2 = زاویه شکست

پاسخ تشریحی گام اول: با توجه به شکل زیر فاصله AB را بر حسب زاویه θ_2 به دست می آوریم.



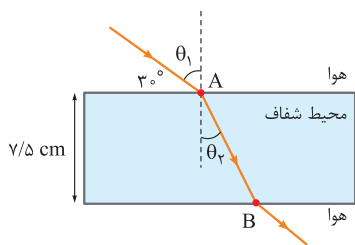
$$\cos \theta_2 = \frac{7/5}{d_{AB}} \Rightarrow d_{AB} = \frac{7/5}{\cos \theta_2} \text{ cm} \quad (1)$$

گام دوم: فاصله AB را به کمک تندی و زمان حساب می کنیم:

$$d_{AB} = v_2 \cdot \Delta t \xrightarrow[v_2 = \frac{c}{n}]{c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}, \Delta t = 0.5 \text{ ns} = 0.5 \times 10^{-9} \text{ s}} d_{AB} = \frac{3 \times 10^8}{n} \times 0.5 \times 10^{-9} = \frac{0.15}{n} \text{ (m)} = \frac{15}{n} \text{ cm} \quad (2)$$



گام سوم: رابطه‌ای بین n و θ_r به دست می‌آوریم. به شکل زیر دقت کنید. طبق قانون شکست اسنل داریم:



$$\frac{n_r}{n_1} = \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_r} \quad \theta_1 = 90^\circ - 3^\circ = 87^\circ \quad n_1 = 1, n_r = n \rightarrow \frac{n}{1} = \frac{\sin 87^\circ}{\sin \theta_r} \Rightarrow n = \frac{\sqrt{3}}{2 \sin \theta_r} \quad (2)$$

گام چهارم: از ترکیب روابط (2) و (3) داریم:

$$d_{AB} = \frac{15}{n} \xrightarrow{n = \frac{\sqrt{3}}{2 \sin \theta_r}} d_{AB} = \frac{15}{\frac{\sqrt{3}}{2 \sin \theta_r}} = \frac{30 \sin \theta_r}{\sqrt{3}} \text{ cm} \quad (4)$$

گام پنجم: از ترکیب روابط (1) و (4)، θ_r را به دست می‌آوریم:

$$d_{AB} = \frac{\gamma/\Delta}{\cos \theta_r} = \frac{30 \sin \theta_r}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{4} = \sin \theta_r \times \cos \theta_r$$

$$\xrightarrow{\sin \theta_r \cdot \cos \theta_r = \frac{1}{2} \sin 2\theta_r} \frac{1}{2} \sin 2\theta_r = \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \sin 2\theta_r = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 2\theta_r = 60^\circ \Rightarrow \theta_r = 30^\circ$$

گام ششم: ضریب شکست محیط شفاف را حساب می‌کنیم:

$$\xrightarrow{(2)} n = \frac{\sqrt{3}}{2 \sin \theta_r} \xrightarrow{\sin \theta_r = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}} n = \frac{\sqrt{3}}{2 \times \frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

تست و پاسخ ۵۵

در شکل زیر، تارِ بین دو تکیه‌گاه محکم شده و در هماهنگ اول خود به نوسان درآمده است. اگر طول تار 40 cm و تندی انتشار موج عرضی در تار 120 m/s باشد، ذرات تار در هر دقیقه چند نوسان انجام می‌دهند؟



$$1/8 \times 10^4 \quad (4)$$

$$9 \times 10^3 \quad (3)$$

$$1/8 \times 10^3 \quad (2)$$

$$1/5 \times 10^2 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۳

مشاوره این قسمت از اون بخش‌های آسونیه که معمولاً ردّ پاش توی دفترچه کنکور دیده می‌شه. نگلی گفتیا!

خودت حل کنی بهتره اول بسامد هماهنگ اول رو حساب کن. بعدش از روی رابطه بسامد با تعداد نوسان، تعداد نوسان رو به دست بیار.

درس نامه

بسامد هماهنگ اول در تارِ به طول L از رابطه $f_1 = \frac{v}{2L}$ به دست می‌آید.

پاسخ تشریحی گام اول: بسامد تار را حساب می‌کنیم.

$$f_1 = \frac{v}{2L} \xrightarrow{v=120 \text{ m/s}, L=40 \text{ cm} = 0.4 \text{ m}} f_1 = \frac{120}{2 \times 0.4} = 150 \text{ Hz}$$

گام دوم: تعداد نوسان‌ها در مدت یک دقیقه را حساب می‌کنیم:

$$f = \frac{N}{t} \xrightarrow{f=150 \text{ Hz}, t=60 \text{ s}} 150 = \frac{N}{60} \Rightarrow N = 150 \times 60 = 9000 = 9 \times 10^3$$





تست و پاسخ ۵۶

در اتم هیدروژن، الکترون در دومین حالت برانگیخته قرار دارد. با در نظر گرفتن گذارهای ممکن، بیشترین بسامد گسیلی توسط این الکترون، چند برابر بیشترین بسامد جذبی آن است؟

۸ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

مشاوره پدید آ طرح کنکور بسیار علاقه منده از بسامد گسیلی سوال بده. هتماً فرمولی که به صورت نکته توی پاسخ نوشته شده رو یاد بگیر.

درس نامه

(۱) در اتم هیدروژن اگر الکترون در k امین حالت برانگیخته باشد، شماره مدار آن $n = k + 1$ است.

(۲) بسامد گسیلی و جذبی در اثر گذار بین دو مدار n_L و n_u از رابطه $f = Rc \left(\frac{1}{n_L^2} - \frac{1}{n_u^2} \right)$ به دست می آید.

پاسخ تشریحی **گام اول:** شماره مدار الکترون را به دست می آوریم که برابر با $n = 2 + 1 = 3$ است.

گام دوم: گذاری که منجر به بیشترین بسامد گسیلی و بیشترین بسامد جذبی الکترون می شود را به دست می آوریم. بیشترین بسامد گسیلی، در اثر گذار به مدار $n = 1$ است. از طرفی بیشترین بسامد جذبی، در اثر گذار به مدار $n = \infty$ است.

گام سوم: بیشترین بسامد گسیلی و بیشترین بسامد جذبی را برای الکترونی که در مدار $n = 3$ است حساب می کنیم:

$$3 \rightarrow 1: f_{\text{گسیلی}} = Rc \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2} \right) = \frac{8}{9} Rc$$

$$3 \rightarrow \infty: f_{\text{جذبی}} = Rc \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{\infty^2} \right) = \frac{1}{9} Rc$$

$$\frac{f_{\text{گسیلی}}}{f_{\text{جذبی}}} = \frac{\frac{8}{9} Rc}{\frac{1}{9} Rc} = 8$$

گام چهارم: نسبت $\frac{f_{\text{گسیلی}}}{f_{\text{جذبی}}}$ را به دست می آوریم:

تست و پاسخ ۵۷

از طیف گسیلی اتم هیدروژن، طول موج مربوط به کدام یک از خطهای زیر برابر $\frac{1}{15} \mu m$ است؟ ($R = 0.01 (nm)^{-1}$)

(۲) دومین خط رشته بالمر ($n' = 2$)

(۱) اولین خط رشته بالمر ($n' = 2$)

(۴) دومین خط رشته پاشن ($n' = 3$)

(۳) اولین خط رشته پاشن ($n' = 3$)

پاسخ: گزینه ۲

درس نامه

طول موج خطهای طیف اتمی هیدروژن از معادله ریدبرگ به دست می آیند:

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

$\lambda =$ طول موج (nm)

$n' =$ شماره مدار کوچکتر

$n =$ شماره مدار بزرگتر

پاسخ تشریحی طبق معادله ریدبرگ داریم:

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right) \xrightarrow[R=0.01(nm)^{-1}]{\lambda=\frac{1}{15}\mu m=\frac{1000}{15}nm} \frac{15}{1000} = \frac{1}{100} \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$



$$\Rightarrow \frac{15}{80} = \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right) \Rightarrow \frac{3}{16} = \frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \Rightarrow \begin{cases} n'^2 = 4 \Rightarrow n' = 2 \rightarrow \text{رشته بالمر} \\ n^2 = 16 \Rightarrow n = 4 \end{cases}$$

$$n - n' = 4 - 2 = 2 \Rightarrow \text{شماره خط} = 2$$

بنابراین طول موج $\frac{8}{15} \mu\text{m}$ مربوط به دومین خط رشته بالمر است.

حواستون باشه توی معادله ریدبرگ هتماً هواست به یگاها باشد که وقتی R بر حسب یگای $(\text{nm})^{-1}$ است باید λ رو هم بر حسب یگای nm بنویسی.

تست و پاسخ ۵۸

نیمه عمر یک ماده پرتوزا برابر ۲ min است. اگر نمونه‌ای از این ماده در لحظه $t = 0$ شروع به واپاشی کند، در بازه زمانی $t_1 = 6 \text{ min}$ تا $t_2 = 10 \text{ min}$ چند درصد از جرم اولیه این نمونه واپاشیده می‌شود؟

$$18 / 75 \quad (4)$$

$$9 / 375 \quad (3)$$

$$6 / 25 \quad (2)$$

$$3 / 125 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۳

مشاوره آگه بگن زود بازده ترین مبحث فیزیک پیه، بهت میگم نیمه عمر. قسمتی که سوالاش خیلی روتینه و به راحتی می‌تونن از پیش‌پرسی‌های پس این سوالا رو خوب تحلیل کن.

درس نامه

(۱) برای نمونه‌ای با نیمه عمر T_1 تعداد نیمه عمر در مدت زمان t از رابطه $n = \frac{t}{T_1}$ به دست می‌آید.

(۲) درصد باقی‌مانده از نمونه اولیه، بعد از n نیمه عمر از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\text{درصد باقی‌مانده} = \frac{N}{N_0} \times 100 = \frac{100}{2^n}$$

پاسخ تشریحی گام اول: ابتدا باید ببینیم در لحظات t_1 و t_2 چند نیمه عمر سپری شده است.

$$n_1 = \frac{t_1}{T_1} = \frac{6 \text{ min}}{2 \text{ min}} \rightarrow n_1 = \frac{6}{2} = 3$$

$$n_2 = \frac{t_2}{T_1} = \frac{10 \text{ min}}{2 \text{ min}} \rightarrow n_2 = \frac{10}{2} = 5$$

گام دوم: درصد نمونه باقی‌مانده در لحظات t_1 و t_2 را حساب می‌کنیم.

$$t_1 \text{ درصد باقی‌مانده در } = \frac{100}{2^{n_1}} = \frac{100}{2^3} = \frac{100}{8} = 12.5\%$$

$$t_2 \text{ درصد باقی‌مانده در } = \frac{100}{2^{n_2}} = \frac{100}{2^5} = \frac{100}{32} = 3.125\%$$

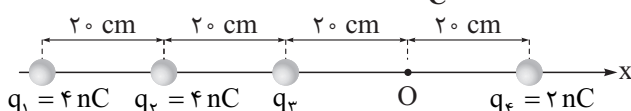
گام سوم: درصد واپاشیده شده از t_1 تا t_2 را حساب می‌کنیم:

$$t_2 \text{ تا } t_1 \text{ درصد واپاشیده شده} = \text{درصد باقی‌مانده در } t_1 - \text{درصد باقی‌مانده در } t_2 = 12.5 - 3.125 = 9.375\%$$

تست و پاسخ ۵۹

در شکل زیر، چهار بار الکتریکی نقطه‌ای روی محور x ثابت شده‌اند. اگر میدان الکتریکی حاصل از این بارها در نقطه O برابر با

$$\vec{E} = (100 \text{ N/C}) \vec{i} \quad \text{باشد، نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار } q_4 \text{ در SI کدام است؟ } (k = 9 \times 10^9 \frac{\text{N.m}^2}{\text{C}^2})$$



$$\vec{F} = (-3 / 3 \times 10^{-6}) \vec{i} \quad (4)$$

$$\vec{F} = (3 / 3 \times 10^{-6}) \vec{i} \quad (3)$$

$$\vec{F} = (-2 / 5 \times 10^{-6}) \vec{i} \quad (2)$$

$$\vec{F} = (2 / 5 \times 10^{-6}) \vec{i} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۱





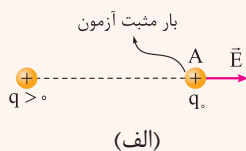
درس نامه •• میدان الکتریکی: اندازه میدان الکتریکی حاصل از بار نقطه‌ای q در فاصله r از آن، از رابطه زیر به دست می‌آید.

اندازه بار الکتریکی (C) $\uparrow$

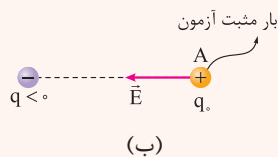
$$E = k \frac{|q|}{r^2} \quad , \quad k = 9 \times 10^9 \left(\frac{N \cdot m^2}{C^2} \right)$$

اندازه میدان الکتریکی (N/C) $\leftarrow$ $\frac{1}{r^2}$ فاصله از بار (m) $\leftarrow$ ثابت کولن $\left(\frac{N \cdot m^2}{C^2} \right)$

جهت بردار میدان الکتریکی: برای این که جهت بردار میدان الکتریکی در یک نقطه را مشخص کنیم، کافی است در آن نقطه یک بار مثبت آزمون قرار بدهیم. در این صورت، جهت میدان الکتریکی در آن نقطه، هم جهت با نیروی الکتریکی وارد بر بار مثبت آزمون است. در شکل‌های زیر جهت میدان الکتریکی حاصل از بارهای مثبت و منفی در نقطه A مشخص شده‌اند.

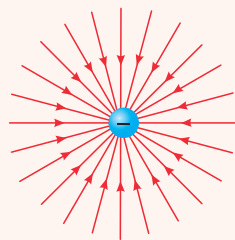


بار q بار آزمون q_0 را به سمت راست دفع می‌کند؛ پس جهت $\vec{E}$ هم به سمت راست است.

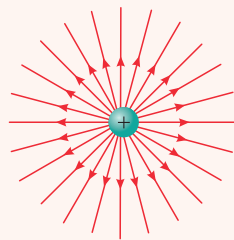


بار q بار آزمون q_0 را به سمت چپ جذب می‌کند؛ پس جهت $\vec{E}$ هم به سمت چپ است.

به طور کلی می‌توانیم بگوییم خطوط میدان الکتریکی از بارهای مثبت خارج (شکل پ) و به بارهای منفی وارد می‌شوند (شکل ت).



(ت)



(پ)

میدان الکتریکی خالص: برای این که میدان الکتریکی خالص در یک نقطه را به دست آوریم، ابتدا باید بردار میدان الکتریکی حاصل از هر بار الکتریکی در آن نقطه را مشخص کنیم، سپس برآیند میدان‌ها در آن نقطه را حساب کنیم. در شکل‌های زیر، اندازه میدان الکتریکی خالص (E_T) در اطراف بارهای هم‌نام و ناهم‌نام را می‌بینید.

(ث)

$$E_{TA} = E_1 + E_2 \quad E_{TB} = |E_2 - E_1| \quad E_{TC} = E_1 + E_2$$

(ج)

$$E_{TA} = E_1 + E_2 \quad E_{TB} = |E_1 - E_2| \quad E_{TC} = E_1 + E_2$$

(چ)

$$E_{TA} = |E_1 - E_2| \quad E_{TB} = E_1 + E_2 \quad E_{TC} = |E_1 - E_2|$$

قانون کولن: اگر بارهای q_1 و q_2 در فاصله r از یکدیگر قرار بگیرند، اندازه نیروی الکتریکی‌ای که به یکدیگر وارد می‌کنند، از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$F = k \frac{|q_1| |q_2|}{r^2} \quad \leftarrow \text{اندازه نیروی الکتریکی وارد بر هر بار (N)}$$

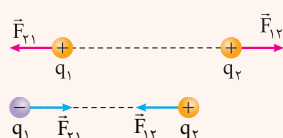
بزرگی بار q_1 (C) بزرگی بار q_2 (C)

فاصله بین دو بار (m) $\rightarrow r$

$$k = 9 \times 10^9 \frac{\text{N.m}^2}{\text{C}^2}$$

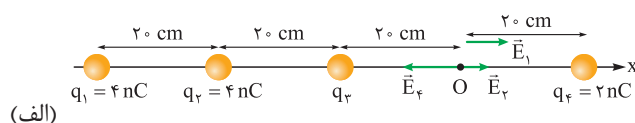
↓
ثابت کولن

برای تعیین جهت نیروهای الکتریکی وارد بر بارها، باید جاذبه یا دافعه بودن نیروها را بررسی کنیم. توجه داشته باشید که مطابق شکل‌های زیر بارهای هم‌نام یکدیگر را دفع و بارهای ناهم‌نام یکدیگر را جذب می‌کنند.

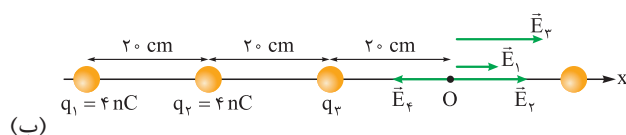


پاسخ تشریحی ابتدا میدان الکتریکی حاصل از بار q_f در نقطه O را E_f در نظر می‌گیریم و میدان الکتریکی حاصل از بارهای q_1 و q_2 در این نقطه را برحسب E_f می‌نویسیم. سپس جهت هریک از میدان‌های الکتریکی در نقطه O را مشخص می‌کنیم (شکل الف).

$$E = k \frac{|q|}{r^2} \rightarrow \begin{cases} \frac{E_1}{E_f} = \left| \frac{q_1}{q_f} \right| \times \left(\frac{r_f}{r_1} \right)^2 = \frac{4}{2} \times \left(\frac{2}{4} \right)^2 = \frac{1}{2} \rightarrow E_1 = \frac{1}{2} E_f \\ \frac{E_2}{E_f} = \left| \frac{q_2}{q_f} \right| \times \left(\frac{r_f}{r_2} \right)^2 = \frac{4}{2} \times \left(\frac{2}{4} \right)^2 = \frac{1}{2} \rightarrow E_2 = \frac{1}{2} E_f \end{cases}$$



با توجه به این که بردار میدان الکتریکی خالص در نقطه O برابر با $100 \hat{i}$ است، پس می‌توانیم نتیجه بگیریم که جهت میدان الکتریکی حاصل از بار q_3 در نقطه O ($\vec{E}_3$) در جهت محور x است (شکل ب)؛ بنابراین می‌توانیم بنویسیم:



$$E_1 + E_2 + E_3 - E_4 = 100 \rightarrow \frac{E_1 = \frac{1}{2} E_f}{E_f = \frac{1}{2} E_f} \rightarrow \frac{1}{2} E_f + \frac{1}{2} E_f + E_3 - E_4 = 100 \rightarrow E_3 - \frac{5}{18} E_f = 100$$

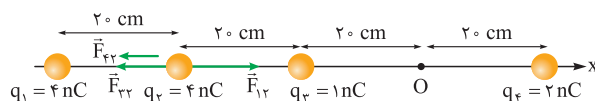
$$\begin{aligned} \frac{E = k \frac{|q|}{r^2}}{E_f = k \frac{|q_f|}{r_f^2}} &= \frac{k |q_3|}{r_3^2} - \frac{5}{18} \frac{k |q_f|}{r_f^2} = 100 \rightarrow \frac{9 \times 10^9 |q_3|}{q_3^2 = 2 \times 10^{-9} \text{ C}, r_3 = r_f = 0.2 \text{ m}} - \frac{5}{18} \times \frac{9 \times 10^9 |q_f|}{4 \times 10^{-2}} = 100 \\ \Rightarrow \frac{9 \times 10^9 |q_3|}{4 \times 10^{-2}} - 125 &= 100 \rightarrow 9 \times 10^9 |q_3| = 9 \times 10^{-2} \rightarrow q_3 = 1 \text{ nC} \end{aligned}$$



حالا همه اطلاعات لازم برای محاسبه نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار q_2 را داریم. برای راحتی محاسبه، نیروی الکتریکی ای را که بار q_3 به بار q_2 وارد می کند، F_{32} در نظر می گیریم و بقیه نیروهای الکتریکی وارد بر بار q_2 را بر حسب F_{32} می نویسیم.

$$F = \frac{k|q_1||q_2|}{r^2} \rightarrow \begin{cases} \frac{F_{12}}{F_{32}} = \left| \frac{q_1}{q_3} \right| \times \left(\frac{r_{32}}{r_{12}} \right)^2 = \frac{4}{1} \times \left(\frac{2}{2} \right)^2 = 4 \rightarrow F_{12} = 4F_{32} \\ \frac{F_{42}}{F_{32}} = \left| \frac{q_4}{q_3} \right| \times \left(\frac{r_{32}}{r_{42}} \right)^2 = \frac{2}{1} \times \left(\frac{2}{6} \right)^2 = \frac{2}{9} \rightarrow F_{42} = \frac{2}{9}F_{32} \end{cases}$$

در آخر جهت نیروهای الکتریکی بر بار q_2 را مشخص می کنیم و بردار نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار q_2 در SI را به دست می آوریم.



$$F_{net} = F_{12} - F_{32} - F_{42} \xrightarrow{F_{12}=4F_{32}, F_{42}=\frac{2}{9}F_{32}} F_{net} = 4F_{32} - F_{32} - \frac{2}{9}F_{32} = \frac{25}{9}F_{32}$$

$$F_{32} = \frac{k|q_3||q_2|}{r_{32}^2}, r_{32} = 20 \text{ m}$$

$$\xrightarrow{k=9 \times 10^9 \frac{\text{N.m}^2}{\text{C}^2}, |q_3|=1 \times 10^{-9} \text{ C}, |q_2|=4 \times 10^{-9} \text{ C}} F_{net} = \frac{25}{9} \times 9 \times 10^9 \times \frac{1 \times 10^{-9} \times 4 \times 10^{-9}}{4 \times 10^{-2}} = 2.5 \times 10^{-6} \text{ N}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{net} = 2.5 \times 10^{-6} \vec{i}$$

تست و پاسخ ۶۰

یک ذره با بار الکتریکی q در میدان الکتریکی $\vec{E} = (3 \times 10^5 \text{ N/C})\vec{i} - (4 \times 10^5 \text{ N/C})\vec{j}$ از نقطه $A(0, 20 \text{ cm})$ به نقطه $B(0, 80 \text{ cm})$ جابه جا می شود. اگر در این جابه جایی انرژی پتانسیل الکتریکی ذره 360 mJ افزایش یابد، q بر حسب میکروکولن کدام است؟

- $-2 (4)$
 $+2 (3)$
 $-1/5 (2)$
 $+1/5 (1)$

پاسخ: گزینه ۱

درس نامه ۱۰۰ اختلاف پتانسیل الکتریکی بین دو نقطه از میدان الکتریکی، از رابطه زیر به دست می آید.

اختلاف پتانسیل الکتریکی V

$$\Delta V = \frac{\Delta U_E}{q} \rightarrow (J)q \text{ تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی بار } q \text{ بار الکتریکی } (C) \rightarrow q$$

هواستون باشه! تو این رابطه باید بار q رو با علامتش بنویسیم.

۲) اندازه اختلاف پتانسیل الکتریکی بین دو نقطه از میدان الکتریکی یکنواخت از رابطه زیر به دست می آید.

میدان الکتریکی $(\frac{V}{m})$

$$|\Delta V| = Ed \rightarrow (m) \text{ فاصله بین دو نقطه در راستای میدان الکتریکی}$$

اندازه اختلاف پتانسیل (V)

پاسخ تشریحی گام اول: میدان الکتریکی داده شده یک مؤلفه در جهت محور x ($\vec{E}_x = 3 \times 10^5 \text{ N/C} \vec{i}$) و یک مؤلفه در خلاف جهت

محور y ($\vec{E}_y = -4 \times 10^5 \text{ N/C} \vec{j}$) دارد و ذره از نقطه $A(0, 20 \text{ cm})$ به نقطه $B(0, 80 \text{ cm})$ یعنی در جهت محور y و خلاف جهت $\vec{E}_y$ جابه جا می شود. باتوجه به این که با حرکت در خلاف جهت میدان الکتریکی، پتانسیل الکتریکی افزایش می یابد، پس می توانیم نتیجه بگیریم

که در این جابه جایی ذره، پتانسیل الکتریکی افزایش می یابد؛ بنابراین می توانیم بنویسیم:

$$E = \frac{|\Delta V|}{d} \xrightarrow{E=3 \times 10^5 \text{ N/C}, d=0.6 \text{ m}} 3 \times 10^5 = \frac{|\Delta V|}{0.6} \xrightarrow{\Delta V > 0} \Delta V = 24 \times 10^4 \text{ V}$$



پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

فیزیک

گام دوم: حالا داده‌ها را در رابطه زیر جای گذاری می‌کنیم و مقدار q را به دست می‌آوریم.

$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q} \rightarrow \frac{\Delta V = 24 \times 10^{-4} \text{ V}}{\Delta U = 360 \times 10^{-3} \text{ J}} \rightarrow 24 \times 10^{-4} = \frac{360 \times 10^{-3}}{q} \rightarrow q = 1/5 \times 10^{-6} \text{ C} = 1/5 \mu\text{C}$$

تست و پاسخ ۶۱

اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر خازنی به ظرفیت $5 \mu\text{F}$ را 20% درصد افزایش می‌دهیم. اگر با این کار انرژی ذخیره شده در آن 11 mJ افزایش یابد، بار الکتریکی ذخیره شده در آن چند میکروکولن تغییر می‌کند؟

- ۱) ۵ ۲) ۱۰ ۳) ۵۰ ۴) ۱۰۰

پاسخ: گزینه ۲

درس نامه ۱۱ انرژی ذخیره شده در خازن از رابطه زیر به دست می‌آید:

انرژی ذخیره شده در خازن (J)

$$U = \frac{1}{2} CV^2$$

اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر خازن (V) ظرفیت خازن (F)

۲) اگر اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر خازن از V_1 به V_2 و بار الکتریکی روی صفحات آن از Q_1 به Q_2 برسد، رابطه زیر برقرار است:

$$\Delta Q = C \Delta V$$

تغییر اختلاف پتانسیل الکتریکی (V) ظرفیت خازن (F)

پاسخ تشریحی گام اول: سؤال به ما تغییرات اختلاف پتانسیل دو سر خازن و تغییرات انرژی ذخیره شده در آن را داده است؛ پس با استفاده

از رابطه $U = \frac{1}{2} CV^2$ می‌توانیم بنویسیم:

$$U_2 - U_1 = \frac{1}{2} CV_2^2 - \frac{1}{2} CV_1^2 = \frac{1}{2} C(V_2^2 - V_1^2) \rightarrow \frac{U_2 - U_1 = 11 \times 10^{-5} \text{ J}}{C = 5 \times 10^{-6} \text{ F}, V_2 = V_1 + \frac{20}{100} V_1 = \frac{6}{5} V_1} \rightarrow$$

$$11 \times 10^{-5} = \frac{1}{2} \times 5 \times 10^{-6} \left(\left(\frac{6}{5} V_1 \right)^2 - V_1^2 \right) \rightarrow \frac{11}{25} V_1^2 \times \frac{5}{2} = 11 \times 10^{-5} \Rightarrow V_1^2 = 100 \Rightarrow V_1 = 10 \text{ V}$$

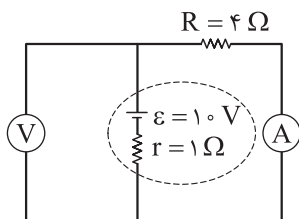
گام دوم: در آخر، مقدار افزایش بار الکتریکی خازن در اثر افزایش اختلاف پتانسیل آن را به دست می‌آوریم:

$$\Delta Q = C \Delta V \rightarrow \frac{C = 5 \times 10^{-6} \text{ F}}{\Delta V = \frac{1}{5} V_1, V_1 = 10 \text{ V}} \rightarrow \Delta Q = 5 \times 10^{-6} \times \frac{1}{5} \times 10 = 10 \times 10^{-6} \text{ C} = 10 \mu\text{C}$$

تست و پاسخ ۶۲

در مدار شکل زیر اگر جای آمپر سنج آرمانی و ولت سنج آرمانی عوض شود، مقادیری که آن‌ها نشان می‌دهند به ترتیب از راست به چپ چند

آمپر و چند ولت تغییر می‌کند؟



۱) ۸، ۲

۲) ۲، ۲

۳) ۸، ۸

۴) ۲، ۸

پاسخ: گزینه ۳

مشاوره این سؤال مشابه سؤالی است که در کنکور تجربی ۱۴۰۲ مطرح شد.

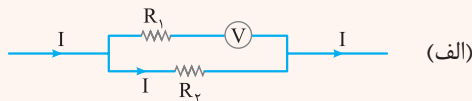




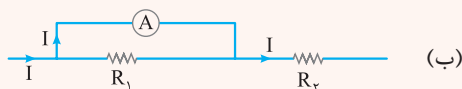
$$I = \frac{\varepsilon}{R_{eq} + r}$$

درس نامه •• جریان خروجی از باتری، از رابطه روبه‌رو به دست می‌آید:

(۱) مقاومت ولت‌سنج آرمانی بی‌نهایت است و جریان الکتریکی از آن عبور نمی‌کند، پس از شاخه‌ای که ولت‌سنج آرمانی در آن قرار دارد نیز جریان الکتریکی عبور نمی‌کند. مثلاً در شکل (الف) تمام جریان I از مقاومت R_2 می‌گذرد و جریانی از R_1 عبور نمی‌کند.

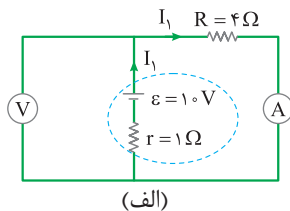


(۲) مقاومت آمپرسنج آرمانی صفر است؛ بنابراین آمپرسنج آرمانی در یک مدار الکتریکی مانند یک سیم رسانای بدون مقاومت عمل می‌کند و اختلاف پتانسیل دو سر آن و هر چیزی که با آن موازی است، صفر می‌شود. مثلاً در شکل (ب) اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت R_1 صفر می‌شود و از R_1 هیچ جریانی عبور نمی‌کند.



پاسخ تشریحی

مقاومت ولت‌سنج آرمانی بی‌نهایت است و از شاخه‌ای که ولت‌سنج آرمانی در آن قرار دارد، جریان الکتریکی عبور نمی‌کند؛ پس در حالت اول، تمام جریان الکتریکی از شاخه سمت راست عبور می‌کند. (شکل الف). در این حالت، جریان الکتریکی عبوری از آمپرسنج را می‌توانیم با استفاده از رابطه $I = \frac{\varepsilon}{R_{eq} + r}$ به دست بیاوریم.

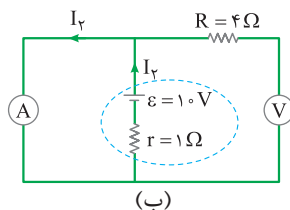


$$I_1 = \frac{\varepsilon}{R_{eq} + r} = \frac{10V}{4\Omega + 1\Omega} \rightarrow I_1 = \frac{10}{5} = 2A$$

در حالت اول، دو سر ولت‌سنج آرمانی به باتری وصل است و از آن جایی که ولت‌سنج آرمانی اختلاف پتانسیل دو سر خودش را نشان می‌دهد، پس در این حالت، ولت‌سنج آرمانی اختلاف پتانسیل دو سر باتری را نشان می‌دهد.

$$V_1 = \varepsilon - rI_1 = 10V - 1\Omega \times 2A = 8V$$

در حالت دوم، جای ولت‌سنج آرمانی و آمپرسنج آرمانی عوض می‌شود و باتوجه به این که مقاومت ولت‌سنج آرمانی بی‌نهایت است، پس جریان الکتریکی از شاخه سمت راست عبور نمی‌کند و تمام جریان از شاخه سمت چپ می‌گذرد (شکل ب).

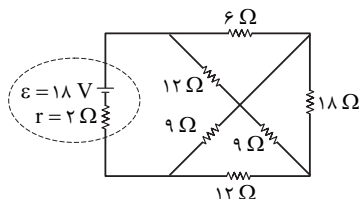


$$I_2 = \frac{\varepsilon}{R'_{eq} + r} = \frac{10V}{0\Omega + 1\Omega} \rightarrow I_2 = \frac{10}{1} = 10A$$

باتوجه به این که از شاخه سمت راست جریان الکتریکی عبور نمی‌کند، پس ولت‌سنج آرمانی اختلاف پتانسیل دو سر باتری را نشان می‌دهد. از طرفی مقاومت آمپرسنج آرمانی صفر است و در شاخه‌ای که قرار می‌گیرد، مانند یک سیم بدون مقاومت عمل می‌کند؛ بنابراین پتانسیل الکتریکی دو سر باتری یکسان و در نتیجه اختلاف پتانسیل دو سر آن صفر است. بنابراین، ولت‌سنج آرمانی در حالت دوم، مقدار صفر را نشان می‌دهد. نتیجه‌گیری کلی: اگر جای آمپرسنج آرمانی و ولت‌سنج آرمانی عوض شود، مقداری که آمپرسنج آرمانی نشان می‌دهد $(I_2 - I_1 = 10 - 2)A$ و ولت‌سنج آرمانی نشان می‌دهد، $(V_1 - V_2 = 8 - 0)V$ تغییر می‌کند.

تست و پاسخ ۶۳

در مدار شکل زیر، توان مصرفی مقاومت ۱۸ اهمی و توان خروجی باتری، به ترتیب از راست به چپ چند وات است؟



(۱) $22/5, 0/5$

(۲) $13/5, 0/5$

(۳) $22/5, 1$

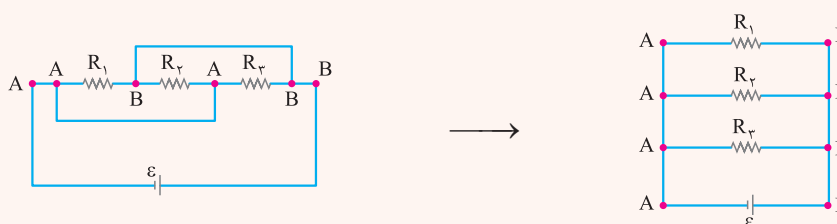
(۴) $13/5, 1$

پاسخ: گزینه ۱

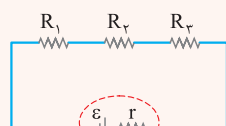
درس نامه

(۱) نام گذاری نقاط هم پتانسیل: بعضی وقت ها تشخیص متوالی یا موازی بودن مقاومت ها مشکل است. در این صورت می توانیم شکل ساده تری از مدار را رسم کنیم تا متوالی یا موازی بودن مقاومت ها را تشخیص بدهیم. برای این کار، نقاطی از مدار را که با سیم به یکدیگر وصل شده اند، با یک نام مشترک در نظر می گیریم. بعد از نام گذاری چنین نقاطی از مدار، دو سر مولد یا دو سر مدار را مینا قرار می دهیم و بقیه اجزای مدار را بین نقطه های نام گذاری شده جای گذاری می کنیم تا شکل ساده تری از مدار به دست بیاید.

مثال:

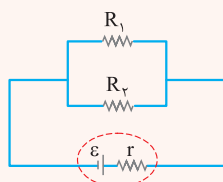


(۲) مقاومت معادل مقاومت هایی که به صورت متوالی به یکدیگر وصل شده اند، برابر با مجموع مقاومت هاست:



$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3$$

(۳) اگر دو مقاومت به صورت موازی به یکدیگر وصل شده باشند، مقاومت معادل آن ها به صورت زیر محاسبه می شود:



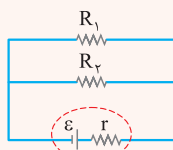
$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \Rightarrow R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

(۴) تعریف مقاومت الکتریکی: به نسبت اختلاف پتانسیل دو سر یک رسانا به جریان الکتریکی عبوری از آن، مقاومت الکتریکی رسانا می گوئیم.

$$R = \frac{V}{I} \rightarrow \text{اختلاف پتانسیل الکتریکی (V)} \rightarrow R = \frac{V}{I} \rightarrow \text{مقاومت الکتریکی (}\Omega\text{)}$$

$$\rightarrow \text{جریان الکتریکی (A)}$$

(۵) اختلاف پتانسیل مقاومت ها در اتصال موازی، با یکدیگر برابر است؛ بنابراین جریان الکتریکی عبوری از مقاومت ها به نسبت عکس مقاومت ها تقسیم می شود.



$$V_1 = V_2 \xrightarrow{V=RI} R_1 I_1 = R_2 I_2 \Rightarrow \frac{R_1}{R_2} = \frac{I_2}{I_1}$$



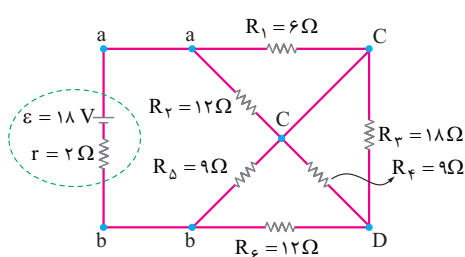
۶) توان مصرفی مقاومت الکتریکی از رابطه زیر به دست می آید:

$$\begin{aligned} & \text{جریان الکتریکی (A)} \\ & \uparrow \\ & P = RI^2 \leftarrow \text{توان مصرفی (W)} \\ & \downarrow \\ & \text{مقاومت الکتریکی } (\Omega) \end{aligned}$$

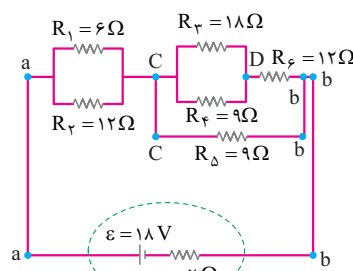
۷) توان خروجی باتری از رابطه زیر به دست می آید:

$$\begin{aligned} & \text{جریان الکتریکی (A)} \\ & \uparrow \\ & P = \varepsilon I - rI^2 \leftarrow \text{مقاومت درونی باتری } (\Omega) \rightarrow \text{توان خروجی باتری (W)} \\ & \downarrow \\ & \text{نیروی محرکه مولد (V)} \end{aligned}$$

پاسخ تشریحی شکل مدار کمی پیچیده است (شکل الف)؛ پس به کمک نام گذاری نقاط هم پتانسیل، شکل ساده تری از مدار را رسم می کنیم (شکل ب).



(الف)



(ب)

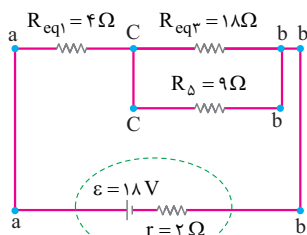
سؤال از ما توان مصرفی مقاومت R_3 و توان خروجی باتری را می خواهد؛ پس به جریان عبوری از مقاومت R_3 و جریان خروجی از باتری نیاز داریم. برای محاسبه این جریان ها، ابتدا باید مقاومت معادل مدار را به دست بیاوریم. باتوجه به شکل (ب)، دو مقاومت R_1 و R_2 موازی هستند؛ بنابراین مقاومت معادل آن ها برابر است با:

$$R_{eq1} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{6 \times 12}{6 + 12} = 4 \Omega$$

دو مقاومت R_3 و R_4 هم موازی هستند و مقاومت معادل آن ها (R_{eq2}) با مقاومت R_5 متوالی است؛ بنابراین می توانیم بنویسیم:

$$R_{eq2} = \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} = \frac{18 \times 9}{18 + 9} = 6 \Omega, R_{eq3} = R_{eq2} + R_5 = 6 + 12 = 18 \Omega$$

تا الان شکل مدار به صورت شکل (پ) است.



(پ)

با توجه به شکل (پ)، دو مقاومت R_{eq3} و R_6 موازی هستند و مقاومت معادل آن ها با مقاومت R_{eq1} متوالی است؛ بنابراین مقاومت معادل مدار را می توانیم به دست بیاوریم.

$$R_{eqf} = \frac{R_{eq3} R_6}{R_{eq3} + R_6} = \frac{18 \times 9}{18 + 9} = 6 \Omega, R_{eq} = R_{eqf} + R_{eq1} = 6 + 4 = 10 \Omega$$

حالا که مقاومت معادل مدار را به دست آوردیم، می‌توانیم جریان خروجی از باتری را محاسبه کنیم.

$$I = \frac{\varepsilon}{R_{eq} + r} \xrightarrow{R_{eq}=10\Omega, r=2\Omega} I = \frac{18}{10+2} = \frac{3}{2} A$$

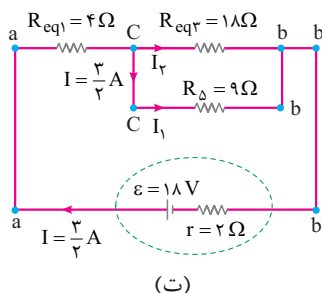
الان همه اطلاعات لازم را برای محاسبه توان خروجی باتری داریم؛ پس توان خروجی باتری را محاسبه می‌کنیم.

$$P = \varepsilon I - r I^2 \xrightarrow{\varepsilon=18V, I=\frac{3}{2}A} P = 18 \times \frac{3}{2} - 2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 27 - \frac{9}{2} = \frac{45}{2} W$$

۲ و ۴ پر!

به سراغ توان مصرفی مقاومت R_3 می‌رویم. همان‌طور که گفتیم، برای محاسبه توان مصرفی مقاومت R_3 به جریان عبوری از آن نیاز داریم.

برای محاسبه این جریان، ابتدا باید جریان عبوری از مقاومت R_{eq3} را به دست بیاوریم (شکل ت).



(ت)

$$I_1 + I_r = \frac{3}{2} A \quad (1)$$

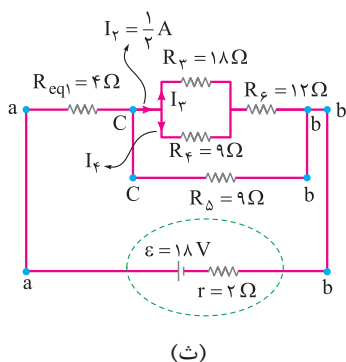
$$R_{\Delta}, R_{eq3} \text{ دو مقاومت موازی‌اند} \Rightarrow V_{Re_{q3}} = V_{\Delta} \Rightarrow R_{eq3} I_r = R_{\Delta} I_1 \xrightarrow{R_{eq3}=18\Omega, R_{\Delta}=9\Omega} 18 I_r = 9 I_1 \Rightarrow I_1 = 2 I_r \quad (2)$$

$$(2), (1): 2 I_r + I_r = \frac{3}{2} \rightarrow 3 I_r = \frac{3}{2} \Rightarrow I_r = \frac{1}{2} A$$

شکل (ب) را ببینید! مقاومت R_{eq3} از مقاومت‌های R_3 و R_4 که مقاومت معادل آن‌ها (R_{eq3}) با مقاومت R_6 متوالی است، تشکیل شده

است. از طرفی جریان عبوری از دو مقاومت متوالی R_{eq3} و R_6 یکسان و برابر با $I_r = \frac{1}{2} A$ است؛ با توجه به این توضیحات، جریان عبوری از

مقاومت R_3 را به دست می‌آوریم (شکل ث).



(ث)

$$I_3 + I_4 = \frac{1}{2} A \quad (1)$$

$$V_r = V_4 \rightarrow R_3 I_3 = R_4 I_4 \xrightarrow{R_3=18\Omega, R_4=12\Omega} 18 I_3 = 12 I_4 \rightarrow I_4 = \frac{3}{2} I_3 \quad (2)$$

$$(2), (1): I_3 + 2 I_3 = \frac{1}{2} \rightarrow 3 I_3 = \frac{1}{2} \rightarrow I_3 = \frac{1}{6} A$$

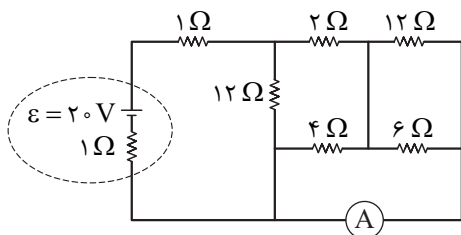
حالا می‌توانیم توان مصرفی مقاومت R_3 را محاسبه کنیم.

$$P_r = R_3 I_r^2 \xrightarrow{R_3=18\Omega, I_r=\frac{1}{6}A} P_r = 18 \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 = 18 \times \frac{1}{36} = \frac{1}{2} W$$



تست و پاسخ ۶۴

در مدار شکل زیر، جریان عبوری از آمپرسنج آرمانی چند آمپر است؟



۰ / ۵ (۱)

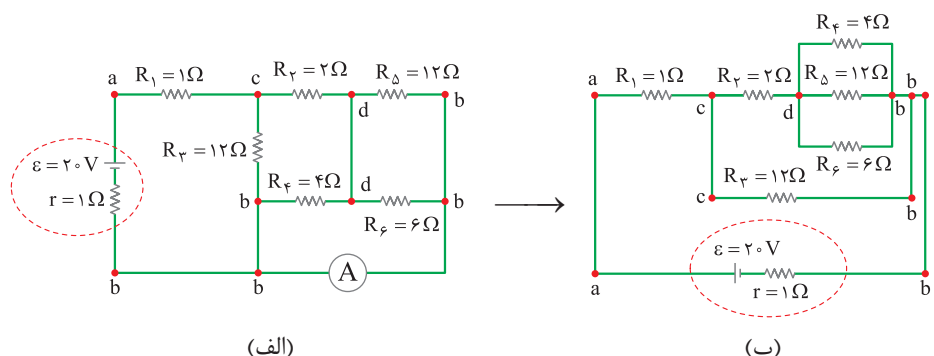
۱ (۲)

۱ / ۵ (۳)

۲ / ۵ (۴)

پاسخ: گزینه ۳

ابتدا نقاط هم‌پتانسیل را نام‌گذاری می‌کنیم (شکل الف). سپس شکل ساده‌تری از مدار را رسم می‌کنیم (شکل ب).

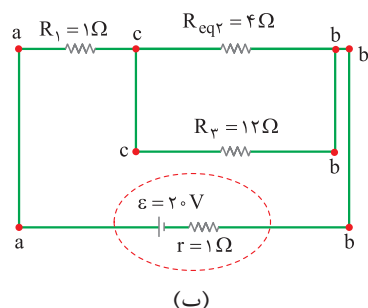


برای این‌که جریان عبوری از آمپرسنج آرمانی را به دست بیاوریم، ابتدا باید جریان خروجی از باتری را پیدا کنیم؛ پس به سراغ مقاومت معادل مدار می‌رویم تا با استفاده از آن بتوانیم جریان خروجی از باتری را محاسبه کنیم. با توجه به شکل (ب)، سه مقاومت R_4 ، R_5 و R_6 موازی هستند و مقاومت معادل آن‌ها (R_{eq1}) با مقاومت R_3 متوالی است؛ بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{1}{R_{eq1}} = \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} \xrightarrow{R_4=4\Omega, R_5=12\Omega, R_6=6\Omega} \frac{1}{R_{eq1}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{6} = \frac{3+1+2}{12} = \frac{6}{12}$$

$$\rightarrow R_{eq1} = 2\Omega, R_{eq2} = R_3 + R_{eq1} = 2 + 2 = 4\Omega$$

تا الان شکل مدار به صورت شکل (پ) شده است.



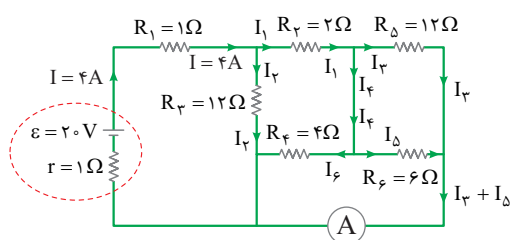
باتوجه به شکل (پ) دو مقاومت R_{eq2} و R_1 با هم موازی‌اند و مقاومت معادل آن (R_{eq3}) با مقاومت R_1 متوالی است؛ پس می‌توانیم بنویسیم:

$$R_{eq3} = \frac{R_{eq2}R_1}{R_{eq2} + R_1} \xrightarrow{R_{eq2}=4\Omega, R_1=12\Omega} R_{eq3} = \frac{4 \times 12}{4 + 12} = 3\Omega, R_{eq} = R_{eq3} + R_1 = 3 + 1 = 4\Omega$$

حالا می‌توانیم جریان خروجی از باتری را به دست بیاوریم.

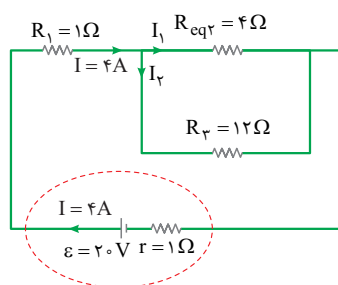
$$I = \frac{\varepsilon}{R_{eq} + r} = \frac{\varepsilon = 20V}{R_{eq} = 4\Omega, r = 1\Omega} \rightarrow I = \frac{20}{4+1} = 4A$$

با توجه به شکل (ت)، آمپرسنج آرمانی جریان عبوری از مقاومت‌های R_δ و R_ϵ را نشان می‌دهد؛ پس باید جریان عبوری از این دو مقاومت را به دست بیاوریم.



(ت)

شکل (ث) را ببینید! جریان خروجی از باتری بین دو مقاومت موازی R_ϵ و R_δ تقسیم می‌شود؛ بنابراین می‌توانیم بنویسیم:



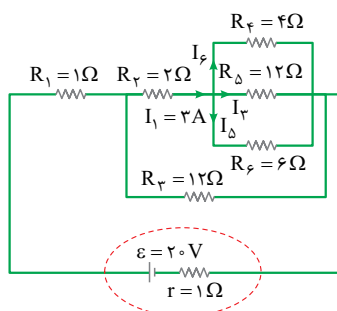
(ث)

$$I_1 + I_2 = 4A \quad (1)$$

$$V_{R_{eq2}} = V_{R_3} \rightarrow R_{eq2} I_1 = R_3 I_2 \rightarrow 4 I_1 = 12 I_2 \rightarrow I_1 = 3 I_2$$

$$\xrightarrow{(1), (2)} 3 I_2 + I_2 = 4 \rightarrow I_2 = 1A, I_1 = 3A$$

مقاومت R_{eq} از مقاومت‌های موازی R_δ ، R_ϵ و R_6 که مقاومت معادل آن‌ها (R_{eq1}) با مقاومت R_2 متوالی است، تشکیل شده است. از طرفی جریان عبوری از دو مقاومت متوالی R_{eq1} و R_2 یکسان و برابر با $I_1 = 3A$ است. با توجه به این توضیحات، جریان عبوری از مقاومت‌های R_δ ، R_ϵ و R_6 را به دست می‌آوریم (شکل ج).



(ج)

$$I_4 + I_5 + I_6 = 3A \quad (1)$$

$$V_4 = V_5 \rightarrow R_4 I_4 = R_5 I_5 \rightarrow \frac{R_4 = 4\Omega}{R_5 = 12\Omega} \rightarrow 4 I_4 = 12 I_5 \rightarrow I_4 = 3 I_5 \quad (2)$$

$$V_5 = V_6 \rightarrow R_5 I_5 = R_6 I_6 \rightarrow \frac{R_5 = 12\Omega}{R_6 = 6\Omega} \rightarrow 12 I_5 = 6 I_6 \rightarrow I_5 = 2 I_6 \quad (3)$$

$$\xrightarrow{(1), (2), (3)} 3 I_6 + I_6 + 2 I_6 = 3 \rightarrow I_6 = 0.5A, I_5 = 1A, I_4 = 1.5A$$

جریان عبوری از آمپرسنج آرمانی برابر با مجموع جریان‌های I_5 و I_4 است.

$$I_4 + I_5 = 0.5 + 1 = 1.5A$$



تست و پاسخ ۶۵

ذره‌ای به جرم 3g و بار الکتریکی $6\mu\text{C}$ در راستای افقی با تندی 500 km/s به سمت شرق پرتاب می‌شود. در محل پرتاب این ذره، میدان مغناطیسی یکنواخت $B = 500\text{G}$ به سمت شمال، و میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{E}$ وجود دارد. $\vec{E}$ برابر چند ولت بر میلی‌متر و در چه جهتی باشد تا ذره روی خط راست و بدون انحراف به حرکت خود ادامه دهد؟ ($g = 10\text{ N/kg}$)

- (۱) 20 ، عمود بر سطح زمین و به سمت بالا
(۲) 25 ، عمود بر سطح زمین و به سمت بالا
(۳) 20 ، عمود بر سطح زمین و به سمت پایین
(۴) 25 ، عمود بر سطح زمین و به سمت پایین

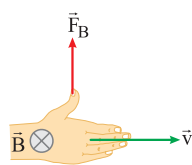
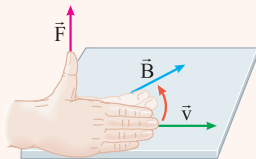
پاسخ: گزینه ۳

درس نامه ۱ اندازه نیروی مغناطیسی وارد بر ذره باردار متحرک از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$\vec{F} = |q|vB\sin\theta \rightarrow \vec{B} \text{ و } \vec{v} \text{ زاویه بین } \vec{F} \text{ و } \vec{v} \text{ زاویه بین } \vec{F} \text{ و } \vec{v} \text{ زاویه بین } \vec{F} \text{ و } \vec{v}$$

تندی (m/s)
اندازه بار الکتریکی (C)
اندازه نیروی مغناطیسی (N)
اندازه میدان مغناطیسی (T)

(۲) برای تشخیص جهت نیروی مغناطیسی وارد بر ذره باردار متحرک، از قاعده دست راست استفاده می‌کنیم. طبق این قاعده، اگر چهار انگشت دست راست را در جهت حرکت ذره با بار مثبت ($\vec{v}$) قرار دهیم، به طوری که وقتی آن‌ها را خم می‌کنیم، در جهت میدان مغناطیسی ($\vec{B}$) قرار بگیرد، آن‌گاه انگشت شستمان جهت نیروی مغناطیسی وارد بر ذره ($\vec{F}$) را نشان می‌دهد.



(الف)

پاسخ تشریحی ابتدا جهت و اندازه نیروی مغناطیسی وارد بر ذره باردار را به دست می‌آوریم. طبق قاعده دست راست، چهار انگشت دست راستمان را در جهت حرکت ذره (شرق) قرار می‌دهیم به طوری که وقتی آن‌ها را خم می‌کنیم به سمت میدان مغناطیسی (شمال) قرار بگیرد. در این صورت، انگشت شستمان جهت نیروی مغناطیسی وارد بر ذره (بالا) را نشان می‌دهد. با استفاده از رابطه زیر می‌توانیم اندازه آن را نیز به دست آوریم (شکل الف).

$$F_B = |q|vB\sin\theta \quad \begin{matrix} |q| = 6 \times 10^{-6}\text{ C}, v = 500 \times 10^3\text{ m/s} \\ B = 500 \times 10^{-4}\text{ T}, \theta = 90^\circ \end{matrix}$$

$$F_B = 6 \times 10^{-6} \times 500 \times 10^3 \times 500 \times 10^{-4} \times 1 = 0.15\text{ N}$$

از طرفی، اندازه وزن ذره برابر با $W = mg = 3 \times 10^{-3} \times 10 = 0.03\text{ N}$ و جهت آن رو به پایین است؛ پس اگر ذره بخواهد روی خط راست و بدون انحراف به حرکت خود ادامه دهد، جهت نیروی الکتریکی وارد بر ذره باردار باید رو به پایین باشد؛ بنابراین باتوجه به شکل (ب) می‌توانیم بنویسیم:



(ب)

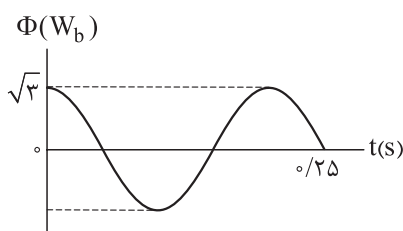
$$F_E + W = F_B \quad \begin{matrix} F_E = qE, W = 0.03\text{ N} \\ F_B = 0.15\text{ N}, q = 6 \times 10^{-6}\text{ C} \end{matrix} \rightarrow 6 \times 10^{-6} E + 0.03 = 0.15$$

$$\rightarrow \frac{1}{6} \times 10^{-6} E = \frac{1}{6} \times 10^{-6} \rightarrow E = 20 \times 10^3 \frac{\text{V}}{\text{m}} = 20 \frac{\text{V}}{\text{mm}}$$

با توجه به این که بار ذره مثبت است، پس نیروی الکتریکی وارد بر آن هم‌جهت با میدان الکتریکی است؛ بنابراین جهت میدان الکتریکی هم رو به پایین است.

تست و پاسخ ۶۶

نمودار شار مغناطیسی عبوری از یک پیچه مولد جریان متناوب به مقاومت الکتریکی 3Ω به شکل زیر است. اگر بیشینه جریان القاشده در این پیچه $2A$ باشد، در لحظه $t = \frac{1}{12} s$ به ترتیب از راست به چپ، نیروی محرکه القایی در پیچه چند ولت و شار مغناطیسی گذرنده از آن چند وبر است؟



- (۱) $\frac{3}{2}$ و 3
(۲) $-\frac{3}{2}$ و 3
(۳) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ و 6
(۴) $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$ و 6

پاسخ: گزینه ۲

درس نامه ۱ شار مغناطیسی که در لحظه t از پیچه می‌گذرد، از رابطه زیر به دست می‌آید:

بیشینه شار مغناطیسی (W_b)

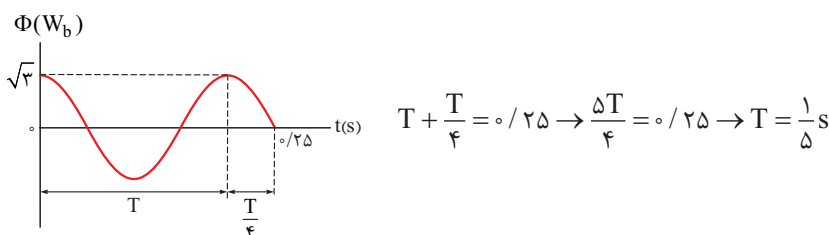
$$\phi = \phi_m \cos \frac{2\pi}{T} t$$
 دوره (s)

۲ نیروی محرکه القایی در پیچه و در لحظه t از رابطه زیر به دست می‌آید:

بیشینه مقدار نیروی محرکه القایی (V)

$$\varepsilon = \varepsilon_m \sin \frac{2\pi}{T} t$$
 دوره (s)

پاسخ تشریحی **گام اول:** ابتدا با توجه به نمودار $\phi - t$ ، دوره تناوب را به دست می‌آوریم تا بتوانیم معادله شار مغناطیسی عبوری از پیچه بر حسب زمان را بنویسیم.



گام دوم: حالا می‌توانیم معادله شار مغناطیسی عبوری از پیچه بر حسب زمان را بنویسیم و شار مغناطیسی عبوری از پیچه در لحظه $t = \frac{1}{12} s$ را پیدا کنیم.

$$\phi = \phi_m \cos \frac{2\pi}{T} t \xrightarrow{T=\frac{1}{5} s, \phi_m=\sqrt{3} W_b} \phi = \sqrt{3} \cos \frac{2\pi}{1/5} t = \sqrt{3} \cos 10\pi t$$

$$\phi = \sqrt{3} \cos 10\pi t \xrightarrow{t=\frac{1}{12} s} \phi = \sqrt{3} \cos 10\pi \times \frac{1}{12} = \sqrt{3} \cos \frac{5}{6}\pi = \sqrt{3} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{3}{2} W_b$$

همین جا گزینه درست معلوم شده است.



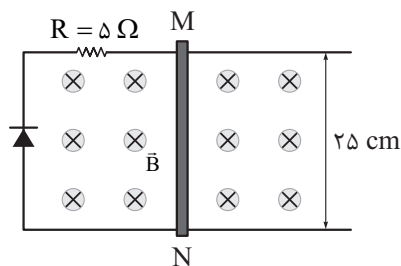
گام سوم: سؤال از ما نیروی محرکه القایی در پیچه در لحظه $t = \frac{1}{12} \text{ s}$ را هم می‌خواهد؛ پس معادله نیروی محرکه القایی در پیچه در لحظه t را می‌نویسیم.

$$\varepsilon = \varepsilon_m \sin \frac{2\pi}{T} t \xrightarrow{\varepsilon_m = RI_m, T = \frac{1}{5} \text{ s}} \varepsilon = 3 \times 2 \sin \frac{2\pi}{\frac{1}{5}} t = 6 \sin 10\pi t$$

$$\xrightarrow{t = \frac{1}{12} \text{ s}} \varepsilon = 6 \sin 10\pi \times \frac{1}{12} = 6 \times \frac{1}{2} = 3 \text{ V}$$

تست و پاسخ ۶۷

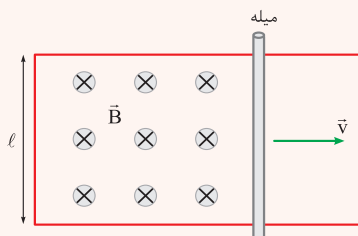
مدار شکل زیر، عمود بر میدان مغناطیسی یکنواختی به بزرگی $B = 200 \text{ G}$ قرار دارد. بردار سرعت حرکت میله رسانای MN بر حسب متر بر ثانیه، کدام باشد تا در مقاومت R ، جریان الکتریکی متوسط 4 mA القا شود؟ (مقاومت الکتریکی دیود ناچیز است.)



- (۱) $4 \vec{i}$
- (۲) $0 / 4 \vec{i}$
- (۳) $-4 \vec{i}$
- (۴) $0 / 4 \vec{i}$

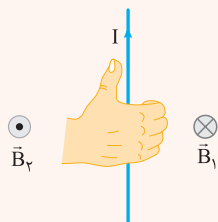
پاسخ: گزینه ۳

درس نامه ۰۰۰ (۱) اگر میله رسانایی با سرعت ثابت $\vec{v}$ بر روی رسانای U شکلی که درون میدان مغناطیسی $\vec{B}$ و عمود بر آن قرار دارد حرکت کند، بزرگی نیروی محرکه القایی ایجاد شده، از رابطه زیر به دست می‌آید:



$$|\varepsilon_{av}| = B\ell v$$

(۲) برای تشخیص جهت میدان مغناطیسی در اطراف سیم راست، انگشت شست دست راست را در جهت جریان قرار می‌دهیم، جهت خم شدن چهار انگشت دیگر، جهت میدان مغناطیسی را نشان می‌دهد.

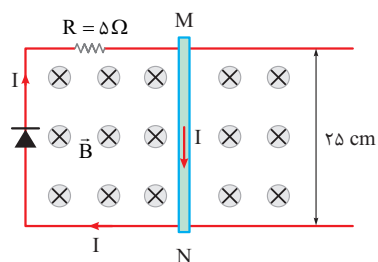


(۳) با تغییر میدان مغناطیسی در محل یک پیچه یا تغییر مساحت پیچه در حضور میدان مغناطیسی یا چرخش پیچه درون میدان مغناطیسی، جریان الکتریکی در آن القا می‌شود. عامل اساسی در ایجاد جریان القایی، تغییر شار مغناطیسی عبوری از پیچه است.

(۴) **قانون لنز:** جریان القایی در جهتی است که با تغییر شار مغناطیسی مخالفت کند؛ یعنی اگر شار در حال افزایش باشد، جریان در جهتی القا می‌شود که از افزایش شار جلوگیری کند و اگر شار در حال کاهش باشد، جریان در جهتی القا می‌شود که از کاهش شار جلوگیری کند.

پاسخ تشریحی

دیود جریان را در یک جهت عبور می‌دهد؛ بنابراین وجود دیود در این جا باعث می‌شود که جریان در مدار به صورت ساعتگرد باشد.



طبق قاعده دست راست، اگر انگشت شست دست راستمان را در جهت جریان الکتریکی القایی (I) قرار بدهیم، جهت خم شدن چهار انگشت دیگر، جهت میدان مغناطیسی القایی را نشان می‌دهد؛ بنابراین میدان مغناطیسی القایی درون حلقه، درون سو است. با توجه به این که میدان مغناطیسی القایی، هم جهت با میدان مغناطیسی اصلی است، پس طبق قانون لنز، شار مغناطیسی عبوری از حلقه در حال کاهش است؛ بنابراین می‌توانیم نتیجه بگیریم که مساحت حلقه در حال کاهش است و میله رسانای MN به سمت چپ حرکت می‌کند. حالا سرعت حرکت میله رسانای MN را با استفاده از رابطه زیر به دست می‌آوریم:

$$|\varepsilon_{av}| = B\ell v \xrightarrow{\varepsilon_{av} = RI_{av}} RI = B\ell v \xrightarrow{R=5\Omega, I_{av}=4 \times 10^{-3}A, B=2 \times 10^{-4}T, \ell=0.25m}$$

$$5 \times 4 \times 10^{-3} = 2 \times 10^{-4} \times 0.25 v \rightarrow v = 4 \text{ m/s} \xrightarrow{\text{میله رسانای MN به سمت چپ حرکت می‌کند.}} \vec{v} = -4 \vec{i}$$

تست و پاسخ ۶۸

در مدتی که تندی خودرویی به جرم ۱۰۸۰ kg از ۳۰ km/h به ۶۰ km/h می‌رسد، کار کل انجام شده روی آن چند کیلوژول است؟

۱۴۵۸ (۴)

۱۴۵/۸ (۳)

۱۱۲۵ (۲)

۱۱۲/۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

مشاوره قضیه کار - انرژی جنبشی، از مطالب بسیار مهم در فصل ۳ فیزیک دهم است و تاکنون تست‌های زیادی از آن در کنکورهای اخیر مطرح شده است.

خودت حل کنی بهتره تندی‌های داده شده را بر حسب m/s بنویسید. سپس با استفاده از قضیه کار - انرژی جنبشی، کار کل انجام شده را به دست آورید.

درس نامه •• قضیه کار - انرژی جنبشی

کار کل انجام شده روی یک جسم در یک جابه‌جایی معین، با تغییر انرژی جنبشی آن برابر است.

$$W_t = K_2 - K_1$$

$$(J) = W_t = \text{کار کل (کار برآیند نیروها)}$$

$$K_1 = \text{انرژی جنبشی در حالت ۱ (J)}$$

$$K_2 = \text{انرژی جنبشی در حالت ۲ (J)}$$



$$K = \frac{1}{2}mv^2 \quad \begin{matrix} \text{جرم (kg)} \\ \uparrow \\ \text{انرژی جنبشی (J)} \\ \downarrow \\ \text{تندی (m/s)} \end{matrix}$$



پاسخ تشریحی

گام اول: تندی متحرک در حالت اول و در حالت دوم را بر حسب m/s به دست می آوریم:

$$v_1 = \frac{30}{3/6} = \frac{25}{3} m/s$$

$$v_2 = \frac{60}{3/6} = \frac{50}{3} m/s$$

گام دوم: با استفاده از قضیه کار - انرژی جنبشی، کار کل انجام شده روی خودرو را به دست می آوریم:

$$W_t = K_2 - K_1 \Rightarrow W_t = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2)$$

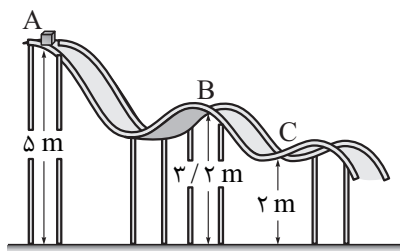
$$\xrightarrow[m = 1080 kg]{v_1 = \frac{25}{3} m/s, v_2 = \frac{50}{3} m/s} W_t = \frac{1}{2} \times 1080 \left(\left(\frac{50}{3} \right)^2 - \left(\frac{25}{3} \right)^2 \right)$$

$$\Rightarrow W_t = 540 \left(\frac{2500}{9} - \frac{625}{9} \right) = 540 \left(\frac{1875}{9} \right) = 112500 J$$

$$\Rightarrow W_t = 112/5 kJ$$

تست و پاسخ ۶۹

در شکل زیر، جسمی به جرم $12 kg$ در نقطه A از حال سکون رها می شود و در مسیری بدون اصطکاک سُر می خورد. کدام یک از موارد زیر درباره این جسم درست است؟ ($g = 10 N/kg$)



الف) تندی جسم در نقطه B به $6 m/s$ می رسد.

ب) انرژی جنبشی جسم در نقطه C برابر $240 J$ است.

پ) کار نیروی گرانش در حرکت جسم از نقطه A تا نقطه B برابر $216 J$ است.

- | | |
|-------------|-------------|
| (۱) الف | (۲) الف و ب |
| (۳) الف و پ | (۴) ب و پ |

پاسخ: گزینه ۱

مشاوره این تست بر اساس یکی از مسئله های دوره های فصل ۳ کتاب فیزیک ۱ طرح شده است. مسئله ها و تمرین های کتاب درسی را جدی بگیرید.

درس نامه ●● (۱) انرژی مکانیکی: مجموع انرژی های جنبشی و پتانسیل هر جسم را انرژی مکانیکی آن می نامیم و با E نشان می دهیم.

انرژی پتانسیل $(J) \leftarrow E = K + U \leftarrow$ انرژی مکانیکی (J)

↓
انرژی جنبشی (J)

(۲) اصل پایستگی انرژی مکانیکی: در شرایطی که بتوان اثر ناشی از نیروهایی مانند اصطکاک و مقاومت هوا را نادیده گرفت، مجموع انرژی های جنبشی و پتانسیل جسم در نقطه های مختلف مسیر حرکت، با هم برابر و پایسته می ماند.

$$E_1 = E_2 \Rightarrow K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

E_1 = انرژی مکانیکی در حالت اول (J)

E_2 = انرژی مکانیکی در حالت دوم (J)

(۳) کار نیروی گرانش یا کار نیروی وزن (W_{mg}) :

اگر جسم به گونه ای حرکت کند که جابه جایی قائم آن، رو به پایین باشد، کار نیروی گرانش بر روی آن مثبت بوده و از رابطه زیر به دست می آید:

$$W_{mg} = mgh \rightarrow (m) \text{ جابه جایی قائم} \rightarrow (N/kg) \text{ شتاب گرانش}$$

↑ جرم (kg)

↓



پاسخ تشریحی گام اول: رابطه پایستگی انرژی را بین دو نقطه A و B می‌نویسیم. توجه کنید که تندی جسم در نقطه A، صفر است؛ بنابراین انرژی جنبشی آن نیز صفر است.

$$E_A = E_B \Rightarrow K_A + U_A = K_B + U_B \Rightarrow mgh_A = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgh_B$$

$$\Rightarrow gh_A = \frac{1}{2}v_B^2 + gh_B \xrightarrow[h_A = \Delta m, h_B = 3/2 m]{g = 10 \text{ N/kg}} 10 \times 5 = \frac{1}{2}v_B^2 + 10 \times 3/2$$

$$\Rightarrow v_B^2 = 36 \Rightarrow v_B = 6 \text{ m/s}$$

پس مورد «الف» درست است.

گام دوم: پایستگی انرژی مکانیکی را بین دو نقطه A و C می‌نویسیم:

$$E_A = E_C \Rightarrow K_A + U_A = K_C + U_C \Rightarrow K_C = U_A - U_C \xrightarrow[h_A = \Delta m, h_C = 2 m]{m = 12 \text{ kg}, g = 10 \text{ N/kg}} K_C = 12 \times 10 (5 - 2) = 360 \text{ J}$$

پس مورد «ب» نادرست است.

گام سوم: کار نیروی گرانش در جابه‌جایی جسم از نقطه A تا B را به دست می‌آوریم. چون جابه‌جایی قائم جسم رو به پایین است، کار نیروی گرانش مثبت بوده و مورد «پ» نادرست است.

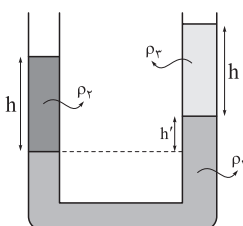
$$(W_{mg})_{AB} = mg(h_A - h_B) \xrightarrow[h_A = \Delta m, h_B = 3/2 m]{m = 12 \text{ kg}, g = 10 \text{ N/kg}} (W_{mg})_{AB} = 12 \times 10 (5 - 3/2)$$

$$\Rightarrow (W_{mg})_{AB} = 120 \times 1/8 = 216 \text{ J}$$

تکنیک جابه‌جایی قائم جسم از A تا B به سمت پایین است. بنابراین کار نیروی گرانش مثبت است و (۳) و (۴) رد می‌شوند. مورد الف هم در هر دو (۱) و (۲) وجود دارد، پس درست است. بنابراین می‌توانیم فقط با محاسبات گام دوم، انرژی جنبشی جسم در نقطه C را به دست آوریم و گزینه صحیح را انتخاب کنیم.

تست و پاسخ ۷۰

در شکل زیر، سه مایع مخلوط‌نشدنی به چگالی‌های ρ_1 ، ρ_2 و ρ_3 در تعادل هستند. اگر $\rho_1 = 2\rho_2 = 10\rho_3$ باشد، نسبت $\frac{h'}{h}$ کدام است؟



۰/۲ (۱)

۰/۴ (۲)

۰/۶ (۳)

۰/۸ (۴)

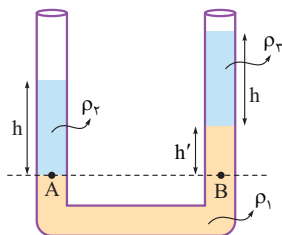
پاسخ: گزینه ۲

مشاوره مشابه این سؤال چندین بار در کنکورهای سال‌های اخیر تکرار شده است. روی این نوع سؤال‌ها کاملاً مسلط شوید.

درس‌نامه در لوله‌های U شکل اگر یک سطح افقی فرضی از طرفین لوله بگذرانیم، طوری که زیر آن سطح فقط یک نوع مایع قرار گیرد، فشار در طرفین لوله روی این سطح برابر است.

نکته در نوشتن معادله فوق، وقتی هر دو انتهای لوله U شکل باز بوده و با هوای آزاد در تماس است، نیازی به نوشتن فشار هوای محیط (P_0) نیست، زیرا P_0 از طرفین معادله حذف می‌شود.

پاسخ تشریحی یک سطح افقی فرضی را از طرفین لوله می‌گذرانیم تا لوله را در نقاط A و B قطع کند. سپس فشار در نقاط A و B را مساوی با هم قرار می‌دهیم.



$$P_A = P_B \Rightarrow \rho_2 g h_2 = \rho_2 g h_2 + \rho_1 g h_1$$

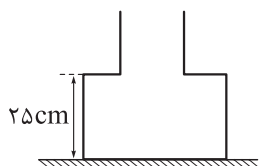
$$\Rightarrow \rho_2 h_2 = \rho_2 h_2 + \rho_1 h_1 \xrightarrow{\rho_1 = 10 \rho_2, \rho_2 = 5 \rho_1}$$

$$\Rightarrow 5 \rho_2 h = \rho_2 h + 10 \rho_2 h' \Rightarrow 4h = 10h'$$

$$\Rightarrow \frac{h'}{h} = 0.4$$

تست و پاسخ ۷۱

در شکل زیر، ظرفی که از دو قسمت استوانه‌ای به مساحت‌های مقطع 50 cm^2 و 20 cm^2 تشکیل شده است، روی سطح افقی قرار دارد. در این ظرف چند کیلوگرم از مایعی به چگالی 0.8 g/cm^3 بریزیم تا نیرویی که از ظرف مایع به کف ظرف وارد می‌شود، برابر 12 N باشد؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$)



۱/ ۳۵ (۱)

۱/ ۲ (۲)

۱/ ۰.۸ (۳)

۹/ ۶ (۴)

پاسخ: گزینه ۳

درس نامه •• نیروی وارد بر کف یک ظرف محتوی مایع از رابطه زیر به دست می‌آید:

عمق مایع $\rightarrow$ چگالی (kg/m^3)

مساحت کف ظرف $(\text{m}^2) \rightarrow F = \rho g h A \rightarrow$ نیرو (N)

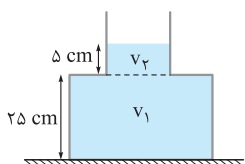
شتاب گرانش (N/kg)

پاسخ تشریحی گام اول: با معلوم بودن نیروی وارد بر کف ظرف، ارتفاع مایع را به دست می‌آوریم:

$$F = \rho g h A \xrightarrow{F=12 \text{ N}, \rho=0.8 \text{ g/cm}^3=800 \text{ kg/m}^3, g=10 \text{ N/kg}, A=50 \text{ cm}^2=50 \times 10^{-4} \text{ m}^2}$$

$$12 = 800 \times 10 \times h \times 50 \times 10^{-4} \Rightarrow 12 = 8 \times 5 h \Rightarrow h = 0.3 \text{ m}$$

$$\Rightarrow h = 30 \text{ cm}$$



گام دوم: حجم کل مایع را به دست آورده و با استفاده از رابطه چگالی، جرم مایع را محاسبه می‌کنیم:

$$V = V_1 + V_2 = 50 \times 25 + 20 \times 5 = 1250 + 100 = 1350 \text{ cm}^3$$

$$m = \rho V \xrightarrow{\rho=0.8 \text{ g/cm}^3, V=1350 \text{ cm}^3} m = 0.8 \times 1350 = 8 \times 135 = 1080 \text{ g}$$

$$\Rightarrow m = 1.08 \text{ kg}$$



تست و پاسخ ۷۲

یک قرص دایره‌ای به شعاع 10 cm و ضخامت 2 mm ، از فلزی به چگالی 8 g/cm^3 و گرمای ویژه $400 \frac{\text{J}}{\text{kg.K}}$ ساخته شده است. اگر این قرص $3/6\text{ kJ}$ گرما دریافت کند، حجم آن $6/75\text{ mm}^3$ افزایش می‌یابد. ضریب انبساط طولی فلز سازنده قرص در SI کدام است؟ ($\pi = 3$)

- (۱) 2×10^{-5} (۲) 2×10^{-6} (۳) 6×10^{-5} (۴) 6×10^{-6}

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره این تست به صورت کاملاً ترکیبی بین چگالی، گرما و انبساط گرمایی مطرح شده است. دقت داشته باشید که اگرچه ممکن است در کنکور، یک تست مجزا از چگالی نداشته باشیم، اما این مبحث به راحتی با بسیاری از مطالب دیگر فیزیک ترکیب می‌شود.

خودت حل کنی بهتره ابتدا حجم و جرم جسم را به دست آورید. سپس با استفاده از رابطه $Q = mc\Delta T$ تغییر دمای جسم را محاسبه کنید و با قراردادن این تغییر دما در رابطه انبساط حجمی، ضریب انبساط طولی فلز را به دست آورید.

درس نامه ۱۱ اگر دمای جسم جامدی از T_1 به T_2 برسد، حجم آن از V_1 به V_2 می‌رسد، به طوری که می‌توان نوشت:

$$\Delta T = T_2 - T_1 \quad \Delta V = V_2 - V_1 \quad (\text{K یا } ^\circ\text{C}) \quad \text{تغییر حجم (m}^3\text{)}$$

$$\alpha = \text{ضریب انبساط طولی } \left(\frac{1}{\text{K}}\right) \quad \beta = \text{ضریب انبساط حجمی } \left(\frac{1}{\text{K}}\right)$$

$$\Delta V = V_1(\beta\alpha)\Delta T$$

۲) برای جسمی که بدون تغییر حالت، در اثر تبادل گرمایی فقط دمای آن تغییر می‌کند، می‌توان نوشت:

$$Q = mc\Delta T$$

$\begin{matrix} \text{گرمای ویژه } \left(\frac{\text{J}}{\text{kg.K}}\right) \\ \uparrow \\ \text{گرمای (J)} \leftarrow Q = mc\Delta T \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \text{جرم (kg)} \quad \text{تغییر دما (K)} \end{matrix}$

پاسخ تشریحی گام اول: حجم و جرم جسم را به دست می‌آوریم:

$R = 10\text{ cm}$
 $h = 2\text{ mm}$

$$V = \pi R^2 h \xrightarrow{\pi=3, R=10\text{ cm}, h=2\text{ mm}=0.2\text{ cm}} V = 3 \times 10^2 \times 0.2 = 600\text{ cm}^3$$

$$\Rightarrow V = 60\text{ cm}^3$$

$$m = \rho V \xrightarrow{\rho=8\text{ g/cm}^3, V=60\text{ cm}^3} m = 8 \times 60 = 480\text{ g} = 0.48\text{ kg}$$

گام دوم: با استفاده از گرمای داده‌شده، تغییر دمای جسم را محاسبه می‌کنیم:

$$Q = mc\Delta T \xrightarrow{Q=3/6\text{ kJ}=3/6 \times 10^3\text{ J}, m=0.48\text{ kg}, c=400\text{ J/kg.K}} 3/6 \times 10^3 = 0.48 \times 400 \Delta T$$

$$\Rightarrow \Delta T = \frac{3600}{0.48 \times 400} = \frac{9}{0.48} = \frac{3}{16}\text{ K}$$

گام سوم: تغییر دمای به دست آمده را در رابطه انبساط حجمی جسم جامد قرار می‌دهیم و از آنجا ضریب انبساط طولی را محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta V = V_1(\beta\alpha)\Delta T \xrightarrow{\Delta V=6/75\text{ mm}^3=6/75 \times 10^{-3}\text{ cm}^3, V_1=60\text{ cm}^3, \Delta T=\frac{3}{16}\text{ K}}$$

$$6/75 \times 10^{-3} = 60(\beta\alpha) \times \frac{3}{16} \Rightarrow \alpha = \frac{6/75 \times 0.16 \times 10^{-3}}{540} = \frac{1/8 \times 10^{-3}}{540} = 2 \times 10^{-6}\text{ K}^{-1}$$



تست و پاسخ ۷۳

یک قطعه فلز به جرم 500g را که دمای آن بر حسب درجه سلسیوس برابر θ است درون مقداری آب $^{\circ}\text{C}$ می اندازیم. اگر دمای تعادل بر حسب درجه سلسیوس برابر $\frac{\theta}{4}$ باشد، جرم آب چند گرم است؟ ($c_{\text{آب}} = 4/2 \frac{\text{J}}{\text{g.K}}$ ، $c_{\text{فلز}} = 350 \frac{\text{J}}{\text{kg.K}}$ و $\theta < 100^{\circ}\text{C}$ و اتلاف گرما ناچیز است.)

- (۱) $62/5$ (۲) 125 (۳) $187/5$ (۴) 250

پاسخ: گزینه ۲

درس نامه ●● اگر دو یا چند جسم با دماهای مختلف، در تماس با یکدیگر قرار گیرند پس از مدتی هم دما می شوند؛ یعنی دمای آن ها به مقدار یکسانی می رسد که دمای تعادل نام دارد. براساس قانون پایستگی انرژی، جمع جبری گرماهای مبادله شده بین این اجسام، برابر با صفر است.

$$Q_1 + Q_2 + \dots = 0$$

پاسخ تشریحی فلز را به عنوان جسم ۱ و آب را به عنوان جسم ۲ در نظر می گیریم. جمع جبری گرماهای مبادله شده بین آن ها، برابر با صفر است.

$$Q_1 + Q_2 = 0 \Rightarrow m_1 C_1 \Delta\theta_1 + m_2 C_2 \Delta\theta_2 = 0$$

$$\frac{m_1 = 500\text{g}, C_1 = 350 \frac{\text{J}}{\text{kg.K}}, \Delta\theta_1 = \frac{\theta}{4} - \theta = -\frac{3}{4}\theta}{C_2 = 4/2 \frac{\text{J}}{\text{g.K}}, \Delta\theta_2 = \frac{\theta}{4} - 0 = \frac{\theta}{4}} \rightarrow$$

$$500 \times 350 \times (-\frac{3}{4}\theta) + m_2 \times 4/2 \times (\frac{\theta}{4}) = 0 \Rightarrow$$

$$m_2 \times 4/2 \times \frac{\theta}{4} = 5 \times 350 \times \frac{3\theta}{4} \Rightarrow m_2 = \frac{5 \times 350 \times 3}{4/2} = 125\text{g}$$

تست و پاسخ ۷۴

درون استوانه ای 12L گاز اکسیژن با دمای 7°C وجود دارد. فشار گاز درون استوانه را با فشارسنجی اندازه می گیریم. فشارسنج 14atm را نشان می دهد. دمای گاز را به 77°C و حجم آن را به 25L می رسانیم. فشاری که فشارسنج در پایان نشان می دهد. چند اتمسفر است؟ (فشار هوای بیرون استوانه 1atm و گاز درون استوانه، گاز آرمانی است.)

- (۱) $7/4$ (۲) 8 (۳) $8/4$ (۴) 9

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره این تست، یکی از مثال های کتاب درسی فیزیک پایه دهم رشته ریاضی در فصل ۴ است.

درس نامه ●● باتوجه به قانون گازهای آرمانی، برای مقداری معینی از یک گاز آرمانی در دو حالت مختلف می توان نوشت:

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2}$$

$$P_1 = \text{فشار گاز در حالت اول (atm)}$$

$$P_2 = \text{فشار گاز در حالت دوم (atm)}$$

$$V_1 = \text{حجم گاز در حالت اول (L)}$$

$$V_2 = \text{حجم گاز در حالت دوم (L)}$$

$$T_1 = \text{دمای گاز در حالت اول (K)}$$

$$T_2 = \text{دمای گاز در حالت دوم (K)}$$

پاسخ تشریحی گام اول: می دانیم فشارسنج، فشار پیمانه ای را نشان می دهد و در قانون گازهای کامل باید از فشار مطلق استفاده کنیم. همچنین دمای به کاررفته در مورد گازها، حتماً باید بر حسب کلون باشد.

$$\begin{cases} P_1 = P_{g_1} + P_0 = 14 + 1 = 15\text{atm} \\ V_1 = 12\text{L} \\ T_1 = \theta_1 + 273 = 7 + 273 = 280\text{K} \end{cases} \begin{cases} P_2 = ? \\ V_2 = 25\text{L} \\ T_2 = \theta_2 + 273 = 77 + 273 = 350\text{K} \end{cases}$$



گام دوم: باتوجه به قانون گازهای کامل داریم:

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2} \Rightarrow \frac{15 \times 12}{280} = \frac{P_2 \times 25}{350} \Rightarrow \frac{3 \times 12}{4} = \frac{P_2 \times 5}{5}$$

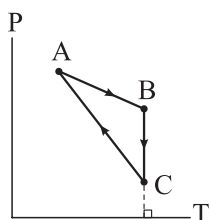
$$\Rightarrow P_2 = \frac{3 \times 12 \times 5}{4 \times 5} \Rightarrow P_2 = 9 \text{ atm}$$

بنابراین، فشاری که اکنون فشارسنج نشان می‌دهد برابر است با:

$$P_{g_2} = P_2 - P_0 = 9 - 1 = 8 \text{ atm}$$

تست و پاسخ ۷۵

نمودار فشار بر حسب دمای مقدار معینی گاز کامل، در طی یک چرخه ترمودینامیکی به شکل زیر است. کدام یک از موارد زیر درباره این چرخه درست است؟



(۴) پ، ت

(۳) پ، الف

(۲) ب، ت

(۱) ب، الف

(الف) در فرآیند AB، کار انجام‌شده روی گاز مثبت است.

(ب) در فرآیند BC، گاز از محیط گرما دریافت می‌کند.

(پ) در فرآیند CA، گاز از محیط گرما دریافت می‌کند.

(ت) در طی چرخه، کار انجام‌شده توسط گاز مثبت است.

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره فکر نکنید که تمام چرخه‌های ترمودینامیکی باید در دستگاه مختصات $P - V$ یعنی فشار بر حسب حجم باشند. لازم است مانند این تست، نمونه سؤال‌هایی از دستگاه‌های مختصات $P - T$ یعنی فشار بر حسب دمای مطلق یا $V - T$ یعنی حجم بر حسب دمای مطلق نیز حل کنید.

$$PV = nRT$$

درس‌نامه ۱۰۰ (۱) معادله حالت گاز کامل:

$$P = \text{فشار } (P_a)$$

$$V = \text{حجم } (m^3)$$

$$n = \text{تعداد مول } (mol)$$

$$R = \text{ثابت جهانی گازها} = \frac{8.314 \text{ J}}{\text{mol.K}}$$

$$T = \text{دما } (K)$$

(۲) کار: هنگامی که حجم گاز (دستگاه) تغییر کند یعنی متراکم یا منبسط شود. کار صورت گرفته است. کار انجام‌شده روی گاز را با W نشان می‌دهیم.

$$\left. \begin{array}{l} W > 0: \text{تراکم} \\ W < 0: \text{انبساط} \end{array} \right\}$$

(۳) قانون اول ترمودینامیک: در یک فرایند ایستوار، تغییر انرژی درونی دستگاه (گاز) برابر است با مجموع کار انجام‌شده توسط محیط روی دستگاه (W) و گرمای مبادله‌شده بین دستگاه و محیط (Q).

$$\Delta U = \text{تغییر انرژی درونی دستگاه (گاز)} (J) \quad \Delta U = Q + W$$

(۴) در یک فرایند هم‌دم، $\Delta U = 0$ است.

(۵) اگر در دستگاه مختصات $P - T$ ، یک چرخه ترمودینامیکی به صورت ساعتگرد باشد، کار انجام‌شده توسط گاز، مثبت است.

پاسخ تشریحی موارد «الف» تا «ت» را به ترتیب بررسی می‌کنیم.

(الف) نادرست است؛ باتوجه به معادله حالت گاز کامل از A تا B، حجم گاز افزایش یافته و $W_{AB} < 0$ است.

$$PV = nRT \Rightarrow \uparrow V = \frac{nRT \uparrow}{P \downarrow} \Rightarrow W_{AB} < 0$$



ب) درست؛ در فرایند هم‌دمای BC، حجم گاز افزایش یافته و $W_{BC} < 0$ است.

$$\uparrow V = \frac{nRT}{\downarrow P} \Rightarrow W_{BC} < 0$$

از طرفی چون در فرایند هم‌دمای $\Delta U = 0$ است، داریم:

$$\Delta U = Q + W \xrightarrow{W_{BC} < 0, \Delta U = 0} Q_{BC} > 0$$

یعنی گاز، از محیط گرما دریافت کرده است.

پ) نادرست؛ در فرایند CA حجم گاز کاهش یافته و $W_{CA} > 0$ است. همچنین به علت کاهش دما، انرژی درونی نیز کاهش می‌یابد.

$$\downarrow V = \frac{nRT}{P \uparrow} \Rightarrow W_{CA} > 0$$

$$\Delta U = Q + W \xrightarrow{W_{CA} > 0, \Delta U < 0} Q_{CA} < 0$$

یعنی گاز به محیط گرما می‌دهد.

ت) درست؛ با توجه به نکته ۵ درس‌نامه، در طی این چرخه، کار انجام شده توسط گاز مثبت است.





تست و پاسخ ۷۶

عنصر گالیم دارای دو ایزوتوپ طبیعی ^{69}Ga و ^{71}Ga است که فراوانی ایزوتوپ سبک تر آن، $1/5$ برابر ایزوتوپ دیگر است. اگر عنصر فلوثور تنها دارای یک ایزوتوپ پایدار ^{19}F باشد، مجموع شمار یون ها در یک نمونه $95/1$ گرمی GaF_3 چه مضربی از 10^{23} است؟ (عدد جرمی را به تقریب معادل جرم اتمی هر ایزوتوپ در نظر بگیرید.)

$$24/08 (4)$$

$$12/04 (3)$$

$$14/515 (2)$$

$$18/06 (1)$$

پاسخ: گزینه ۱

پاسخ تشریحی

$$F_1 + F_2 = 100 \xrightarrow{F_1 = 1/5 F_2} 2/5 F_2 = 100 \Rightarrow F_2 = 100 \times 5/2 = 250$$

گام اول: جرم اتمی میانگین گالیم را حساب می کنیم:

$$M = M_1 + \frac{F_2}{100} (M_2 - M_1) = 69 + \frac{40}{100} (71 - 69) = 69/8$$

گام دوم: جرم مولی GaF_3 را به دست می آوریم:

$$\text{GaF}_3 \text{ جرم مولی} = \text{Ga جرم مولی} + 3(\text{F جرم مولی}) = 69/8 + 3(19) = 126/8 \text{ g.mol}^{-1}$$

گام سوم: شمار یون ها در $95/1$ گرم GaF_3 را حساب می کنیم؛ با توجه به این که در هر مول GaF_3 ، ۴ مول یون وجود دارد، خواهیم داشت:

$$95/1 \text{ g GaF}_3 \times \frac{1 \text{ mol GaF}_3}{126/8 \text{ g GaF}_3} \times \frac{4 \text{ mol یون}}{1 \text{ mol GaF}_3} \times \frac{6/02 \times 10^{23} \text{ یون}}{1 \text{ mol یون}} = \frac{95/1 \times 4 \times 6/02 \times 10^{23}}{126/8} = 18/06 \times 10^{23} \text{ یون}$$

تست و پاسخ ۷۷

کدام مورد درست است؟

- (۱) طیف نشری خطی عنصری که اتم آن تنها دو ذره زیراتمی دارد، در گستره امواج الکترومغناطیس دارای ۴ خط است.
- (۲) اگر طول موج ها در طیف نشری خطی دو عنصر یکسان باشد، آن دو عنصر خواص شیمیایی مشابهی دارند.
- (۳) اگر زیرلایه های ۳s تا ۶s به ترتیب پر شدن مرتب شوند، ۳ زیرلایه با $n+l=5$ در میان آن ها وجود خواهد داشت.
- (۴) قاعده آفبا آرایش الکترونی همه عناصرها تا عدد اتمی ۲۳ را به درستی پیش بینی می کند؛ اما تا عدد اتمی ۳۶، تنها یک عنصر از این قاعده پیروی نمی کند.

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ تشریحی

(۱) عنصری که اتم آن فقط دو ذره زیراتمی دارد، همان ^1H با ۱ پروتون و ۱ الکترون است. طیف نشری خطی هیدروژن در گستره مرئی، دارای

۴ خط است و نه در کل گستره امواج الکترومغناطیسی! ✗

(۲) طیف نشری خطی عناصرها منحصر به فرد است و امکان ندارد طول موج ها در طیف نشری خطی دو عنصر کاملاً یکسان باشد. ✗



(نکته) ترتیب پر شدن زیرلایه ها مطابق قاعده آفبا، به صورت مقابل است:

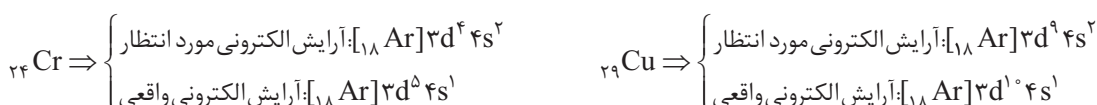
ترتیب پر شدن زیرلایه ها از ۳s تا ۶s به صورت زیر است: ✓

$$3s \rightarrow 3p \rightarrow 4s \rightarrow 3d \rightarrow 4p \rightarrow 5s \rightarrow 4d \rightarrow 5p \rightarrow 6s$$

$$n+l: \quad 3+0=3 \quad 3+1=4 \quad 4+0=4 \quad 3+2=5 \quad 4+1=5 \quad 5+0=5 \quad 4+2=6 \quad 5+1=6 \quad 6+0=6$$

$n+l=5$ به ۳ زیرلایه با $n+l=5$ زیر ۳

(۲) در بین عناصرهایی با عدد اتمی ۱ تا ۳۶، آرایش الکترونی دو عنصر ($_{29}\text{Cu}$ ، $_{24}\text{Cr}$) از قاعده آفبا پیروی نمی کند. ✗





تست و پاسخ ۷۸

در چه تعداد از ردیف‌های جدول زیر، همه داده‌های گزارش شده درست است؟

ردیف	نام	فرمول شیمیایی	شمار الکترون‌های آخرین زیرلایه اشغال شده کاتیون	عدد اکسایش مشخص شده
۱	$\text{Mn}(\text{HCO}_3)_2$	منگنز هیدروژن کربنات	۵	$C = +4$
۲	$\text{Cr}_3(\text{PO}_4)_2$	کروم (III) فسفات	۳	$P = -3$
۳	$\text{Fe}(\text{HCO}_3)_3$	آهن (III) فورمات	۵	$C = +2$
۴	$\text{Ca}(\text{NO}_3)_2$	کلسیم نیترات	۶	$N = +5$

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

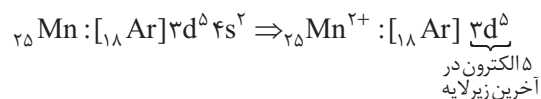
نکته: یون‌های چنداتیمنی کنکور:

نام یون	فرمول یون	نام یون	فرمول یون
آمونیم	NH_4^+	سولفات	SO_4^{2-}
هیدروکسید	OH^-	فسفات	PO_4^{3-}
نیترات	NO_3^-	کربنات	CO_3^{2-}
پرکلرات	ClO_4^-	اتانوات (استات)	CH_3COO^-
هیدروژن کربنات	HCO_3^-	سیلیکات	SiO_4^{4-}
سیانید	CN^-	پرمنگنات	MnO_4^-
متانوات (فورمات)	HCOO^-		

پاسخ تشریحی: همه داده‌های ردیف‌های ۳ و ۴ جدول، کاملاً درست‌اند.

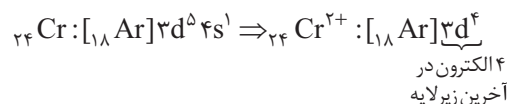
بررسی ردیف‌های جدول:

ردیف (۱): منگنز دارای چند نوع کاتیون پایدار است؛ بنابراین در نام‌گذاری ترکیب‌های آن باید از اعداد رومی استفاده کرد؛ در نتیجه نام درست $\text{Mn}(\text{HCO}_3)_2$ ، منگنز (II) هیدروژن کربنات است.



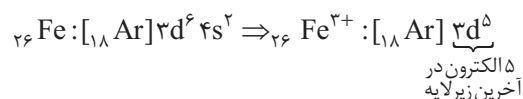
$$\text{HCO}_3^- : (+1) + C + 3(-2) = -1 \Rightarrow C = +4$$

ردیف (۲): نام $\text{Cr}_3(\text{PO}_4)_2$ ، کروم (II) فسفات است.



$$\text{PO}_4^{3-} : P + 4(-2) = -3 \Rightarrow P = +5$$

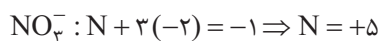
ردیف (۳): نام $\text{Fe}(\text{HCO}_3)_3$ یا همان $\text{Fe}(\text{HCOO})_3$ ، آهن (III) متانوات یا آهن (III) فورمات است.



$$\text{HCOO}^- : (+1) + C + 2(-2) = -1 \Rightarrow C = +2$$



ردیف (۴): نام $\text{Ca}(\text{NO}_3)_2$ ، کلسیم نیترات است.
 ${}_{20}\text{Ca} : [{}_{18}\text{Ar}] 4s^2 \Rightarrow {}_{20}\text{Ca}^{2+} : [{}_{18}\text{Ar}] : [{}_{10}\text{Ne}] \underbrace{3s^2 3p^6}_{\substack{\text{۶ الکترون در} \\ \text{آخرین زیرلایه}}}$



تست و پاسخ ۷۹

کدام مطلب درست است؟

- (۱) مولکول‌های دواتمی فراوان و جور هسته هواکره، نقشی در جذب پرتوهای فروسرخ خورشیدی و افزایش دمای کره زمین ندارند.
- (۲) تروپوسفر، چگال‌ترین لایه هواکره است و برخلاف استراتوسفر، از نظر الکتریکی خنثی است.
- (۳) در فرایند تهیه هوای مایع، پس از عبور هوا از صافی، با استفاده از سرما، دمای هوا را پیوسته کاهش می‌دهند.
- (۴) در ساختار لوویس فراوان‌ترین گاز هواکره و گاز سمی حاصل از سوختن ناقص هیدروکربن‌ها، برخلاف ساختار لوویس مولکول اتین، پیوند سه‌گانه وجود دارد.

پاسخ: گزینه ۱

پاسخ تشریحی مولکول‌های دواتمی فراوان و جور هسته هواکره، همان گازهای N_2 و O_2 هستند که گاز گلخانه‌ای محسوب نمی‌شوند، بنابراین نقشی در اثر گلخانه‌ای و افزایش دمای کره زمین ندارند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

- (۲) با افزایش ارتفاع از سطح زمین، شمار ذره‌ها در واحد حجم هوا کاهش می‌یابد؛ بنابراین اولین لایه هواکره یعنی تروپوسفر، چگال‌ترین لایه هواکره محسوب می‌شود؛ پس قسمت اول عبارت، درست است؛ مشکل از قسمت دومه! زیرا تا ارتفاع 80° کیلومتری از سطح زمین که شامل لایه‌های تروپوسفر، استراتوسفر و مزوسفر می‌باشد، فقط ذره‌های خنثی در هواکره وجود دارند و 3° لایه اول خنثی محسوب می‌شوند. ذره‌های باردار مانند He^+ ، N^+ و ... از ارتفاع 80° کیلومتری به بعد سروکله‌شون در هوا پیدا می‌شه!
- (۳) در فرایند تقطیر جزء به جزء هوای مایع، با استفاده از فشار، دمای هوا را پیوسته کاهش می‌دهند.
- (۴) فراوان‌ترین گاز هواکره، N_2 و گاز سمی حاصل از سوختن ناقص هیدروکربن‌ها، CO می‌باشد؛ در ضمن اتین، نخستین عضو خانواده آلکین‌ها است. در ساختار هر سه مولکول، پیوند سه‌گانه وجود دارد.



تست و پاسخ ۸۰

در جدول زیر نقطه جوش سه گاز اصلی سازنده هوای پاک و خشک، آلوتروپ ناپایدار اکسیژن و مواد شرکت کننده در واکنش هابر آورده شده است. با توجه به این جدول، کدام موارد از مطالب زیر درست‌اند؟ (نمادها فرضی هستند.)

G	E	D	C	B	A	گاز
۸۷	۲۰	۷۷	۹۰	۱۶۱	۲۴۰	نقطه جوش (کلوین)

- (الف) انحلال گاز A در آب، خصلت شیمیایی بیشتری نسبت به انحلال گاز D در آب دارد.
- (ب) گاز G، بی‌رنگ، بی‌بو، غیرآتش‌گیر و غیرسمی است که در واکنش‌های شیمیایی شرکت نمی‌کند.
- (پ) در دما و فشار اتاق، مخلوط گازهای E و C در حضور کاتالیزگر به سرعت واکنش می‌دهند، اما مخلوط گازهای E و D در حضور کاتالیزگر و جرقه هم واکنش نمی‌دهند.
- (ت) گاز B برخلاف گاز A، در میدان الکتریکی جهت‌گیری نمی‌کند.

(۴) الف - ب - پ

(۳) ب - پ

(۲) الف - پ

(۱) الف - ب - ت

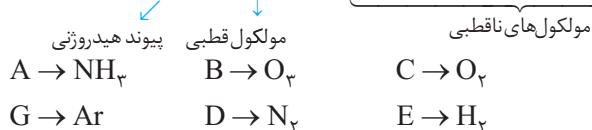
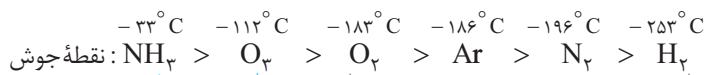
پاسخ: گزینه ۴

پاسخ تشریحی عبارت‌های «الف»، «ب» و «پ» درست‌اند.





مقایسه نقطه جوش مواد داده شده به صورت زیر است:



بررسی عبارت ها:

الف) A و D به ترتیب NH_3 و N_2 هستند. آمونیاک در آب یونیده می شود $(\text{NH}_3(\text{aq}) + \text{H}_2\text{O}(\text{l}) \rightleftharpoons \text{NH}_4^+(\text{aq}) + \text{OH}^-(\text{aq}))$ ولی N_2 کاملاً به صورت مولکولی در آب حل می شود؛ بنابراین، می توان گفت انحلال آمونیاک در آب، یک فرایند شیمیایی و انحلال نیتروژن در آب، یک فرایند فیزیکی است.

ب) گاز G همان گاز نجیب آرگون است که بی رنگ، بی بو، غیر آتش گیر، غیر سمی و واکنش ناپذیر است.

پ) در دما و فشار اتاق، گازهای هیدروژن (E) و اکسیژن (C) در حضور کاتالیزگر یا جرقه، به شدت با هم واکنش می دهند؛ در حالی که گازهای هیدروژن (E) و نیتروژن (D) در این شرایط، هیچ واکنشی با هم نمی دهند.

ت) هر دو مولکول O_3 (B) و NH_3 (A)، قطبی اند و در میدان الکتریکی جهت گیری می کنند.

تست و پاسخ ۸۱

با توجه به معادله واکنش زیر، به ازای مصرف ۱۷ گرم محلول ۵۰ درصد جرمی هیدروژن پراکسید، تفاوت جرم فراورده های یونی تولید شده چند گرم است و در این واکنش چند لیتر گاز اکسیژن در شرایط استاندارد تشکیل می شود؟

($\text{Mn} = 55$, $\text{K} = 39$, $\text{S} = 32$, $\text{O} = 16$, $\text{H} = 1$; g.mol^{-1}) (موازنة معادله واکنش کامل شود.)



$$5/6 - 6/4 (4)$$

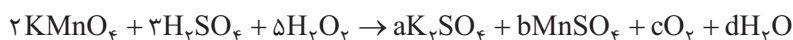
$$4/8 - 6/4 (3)$$

$$4/8 - 1/15 (2)$$

$$5/6 - 1/15 (1)$$

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ تشریحی ابتدا باید موازنه معادله واکنش را کامل کنیم.



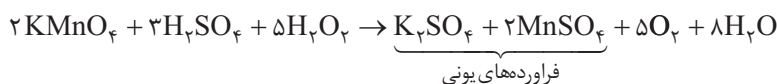
$$\text{K موازنه: } 2 = 2a \Rightarrow a = 1$$

$$\text{Mn موازنه: } 2 = b$$

$$\text{H موازنه: } (3 \times 2) + (5 \times 2) = 2d \Rightarrow d = 8$$

$$\text{O موازنه: } (2 \times 4) + (3 \times 4) + (5 \times 2) = 4 + (2 \times 4) + 2c + 8 \Rightarrow c = 5$$

پس معادله موازنه شده کامل به صورت زیر است:



حالا تفاوت جرم K_2SO_4 (A) و MnSO_4 (B) و هم چنین حجم گاز تولید شده را حساب می کنیم:

$$\frac{\text{درصد جرمی} \times \text{جرم محلول}}{100} = \frac{\text{تفاوت جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{\text{حجم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}$$

$$\frac{17 \times \frac{50}{100}}{5 \times \frac{34}{2}} = \frac{x}{|(1 \times 174) - (2 \times 151)|} = \frac{y}{5 \times \frac{22}{4}} \Rightarrow \frac{1}{20} = \frac{x}{128} = \frac{y}{112} \Rightarrow \begin{cases} x = 6/4 \text{ g} \\ y = 5/6 \text{ L} \end{cases}$$



تست و پاسخ ۸۲

انحلال پذیری گاز اکسیژن در آب، در دمای 20°C و فشار P اتمسفر برابر a گرم است. اگر در محلول سیر شده از این گاز در دمای 20°C و فشار P ۲/۵، غلظت گاز اکسیژن برابر $1/25 \times 10^{-2}$ مولار باشد، مقدار a کدام است؟ ($O = 16 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$)

- ۰/۰۰۶ (۴) ۰/۰۱۶ (۳) ۰/۰۰۴ (۲) ۰/۰۱۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

نکات

- طبق قانون هنری، انحلال پذیری گازها با فشار، رابطه مستقیم دارد و با n برابر شدن فشار، انحلال پذیری گازها در آب نیز n برابر می شود.
- برای گازهایی مانند N_2 ، O_2 و NO که انحلال پذیری ناچیزی در آب دارند، مقدار درصد جرمی محلول به تقریب با انحلال پذیری گاز (S) برابر و همچنین چگالی محلول به تقریب با چگالی آب ($1 \text{ g} \cdot \text{mL}^{-1}$) برابر است؛ بنابراین، غلظت مولی محلول سیر شده این گازها در آب را می توان به صورت زیر حساب کرد:

$$\frac{10S}{\text{جرم مولی}} = \frac{\text{چگالی (d)} \times \text{درصد جرمی (a)} \times 10}{\text{جرم مولی}} \xrightarrow{a=S, d=1} \text{غلظت مولی} = \frac{10S}{\text{جرم مولی}}$$

پاسخ تشریحی: با $2/5$ برابر شدن فشار، انحلال پذیری گاز نیز $2/5$ برابر می شود:

$$S = 2/5 a \quad \Rightarrow \quad \frac{10S}{\text{جرم مولی}} = \frac{10 \times 2/5 a}{32} = \frac{10 \times 2/5 a}{32} \Rightarrow 20a = 0/32 \Rightarrow a = \frac{32}{2} \times 10^{-3} = 0/016 \text{ g}$$

تست و پاسخ ۸۳

درستی یا نادرستی چه تعداد از عبارات های زیر، مانند درستی یا نادرستی عبارت درون کادر است؟

یکی از اتم های سازنده هر ترکیب یونی به یقین فلز است.

- اگر در فرایند انحلال یک ماده در آب، حل شونده ویژگی ساختاری خود را حفظ نکند، آن ماده به یقین ترکیبی یونی است.
- در ساختار لوویس مولکول ها، مجموع شمار الکترون های پیوندی و ناپیوندی همه اتم ها، برابر ۸ است.
- در مدل فضا پرکن، موقعیت سه بعدی اتم ها در مولکول با کره هایی که شعاع آن ها متناسب با شعاع اتم ها است، نشان داده می شود.
- فرمول مولکولی ترکیب های یونی، افزون بر نوع عنصرها، ساده ترین نسبت بین کاتیون و آنیون سازنده را نیز نشان می دهد.

- ۱ (۴) ۲ (۳) ۳ (۲) ۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ تشریحی: عبارت داخل کادر نادرست است.

نکته

یکی از عنصرهای سازنده هر ترکیب یونی دوتایی به یقین فلز است، اما در ساختار ترکیب های یونی چندتایی، به دلیل وجود کاتیون ها و آنیون های چندتایی، ممکن است فلزی وجود نداشته باشد؛ به عنوان نمونه، همه عنصرهای سازنده آمونیوم کلرید (NH_4Cl) و آمونیوم سولفات ($(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$)، نافلزند.

بررسی عبارت ها:

• ممکن است یک ترکیب مولکولی نیز هنگام انحلال در آب، ویژگی ساختاری خود را حفظ نکند؛ مانند HCl که با انحلال در آب، یونیده

می شود و انحلال آن، یونی است:

$$\text{HCl(g)} \xrightarrow{\text{آب}} \text{H}^+(\text{aq}) + \text{Cl}^-(\text{aq})$$

• غلطه! مثلاً اتم هیدروژن همواره دوتایی می شود و نه هشت تایی!

• درست است.

• در ساختار ترکیب های یونی، مولکول های مجزا وجود ندارند؛ بنابراین به کار بردن واژه «فرمول مولکولی» برای ترکیب های یونی نادرست!

باید می گفت فرمول شیمیایی 😊



تست و پاسخ ۸۴

محلولی از پتاسیم نیترات به جرم ۲/۵ کیلوگرم در دمای 50°C ، دارای ۲۳۴ گرم یون پتاسیم است. با توجه به این که انحلال پذیری پتاسیم نیترات در این دما برابر ۸۰ گرم در ۱۰۰ گرم آب است، در همین شرایط، حداکثر چند مول دیگر از این نمک را می توان در این محلول حل کرد؟ (جرم مولی پتاسیم نیترات و پتاسیم را به ترتیب تقریباً ۱۰۰ و ۳۹ گرم بر مول در نظر بگیرید.)

۱۴ (۴)

۱۲/۵ (۳)

۹/۲ (۲)

۶ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

خودت حل کنی بهتره ابتدا با توجه به مقدار یون پتاسیم در محلول، جرم KNO_3 و جرم آب موجود در محلول را به دست بیاور! بعد با توجه به مقدار آب و انحلال پذیری KNO_3 ، حساب کن که حداکثر چند مول پتاسیم نیترات را می توان در آب حل کرد. اختلاف عدد محاسبه شده و مول اولیه KNO_3 موجود در محلول، جواب سؤال است.

پاسخ تشریحی گام اول: با استفاده از مقدار K^+ ، جرم KNO_3 و جرم آب موجود در محلول را به دست می آوریم:

$$234 \text{ g K}^+ \times \frac{1 \text{ mol K}^+}{39 \text{ g K}^+} \times \frac{1 \text{ mol KNO}_3}{1 \text{ mol K}^+} = 6 \text{ mol KNO}_3$$

$$\text{جرم KNO}_3 \text{ موجود در محلول} = 6 \text{ mol} \times \frac{100 \text{ g}}{1 \text{ mol}} = 600 \text{ g}$$

$$\text{جرم آب} = \text{جرم محلول} - \text{جرم KNO}_3 = 2500 - 600 = 1900 \text{ g}$$

گام دوم: با استفاده از انحلال پذیری KNO_3 در دمای 50°C ، حساب می کنیم که در ۱۹۰۰ گرم آب، حداکثر چند مول پتاسیم نیترات می توان حل کرد.

$$1900 \text{ g آب} \times \frac{80 \text{ g KNO}_3}{100 \text{ g آب}} \times \frac{1 \text{ mol KNO}_3}{100 \text{ g KNO}_3} = 15/2 \text{ mol KNO}_3$$

گام سوم: حداکثر می توان ۱۵/۲ مول پتاسیم نیترات را در این مقدار آب حل کرد، ولی فقط ۶ مول حل شده است؛ بنابراین می توان $9/2 = 15/2 - 6$ مول دیگر پتاسیم نیترات را در محلول حل کرد.

تست و پاسخ ۸۵

با توجه به ویژگی های بیان شده برای دو عنصر (الف) و (ب) که به ۴ دوره اول جدول تناوبی تعلق دارند، کدام نتیجه گیری درست است؟

(الف) فلزی است که مجموع ارقام عدد اتمی آن با عدد اتمی نخستین عنصر دسته p جدول تناوبی برابر است.

(ب) نافلزی از دوره دوم است که مجموع $n + l$ الکترون های بیرونی ترین زیرلایه آن، با عدد اتمی آن برابر است.

(۱) نماد شیمیایی عنصر (ب) برخلاف عنصر (الف)، تک حرفی است.

(۲) شعاع اتمی عنصر (ب) از شعاع اتمی اکسندترین عنصر جدول تناوبی، کوچک تر است.

(۳) محلول آبی عنصر (الف) با عدد اکسایش +۴، به رنگ زرد است.

(۴) مجموع عدد اتمی عنصرهای (الف) و (ب)، برابر با عدد اتمی نخستین عنصری است که لایه الکترونی سوم آن به طور کامل پر می شود.

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ تشریحی ابتدا باید عنصرهای (الف) و (ب) را پیدا کنیم.

(الف) نخستین عنصر دسته p، عنصر ${}_{25}^{55}\text{Mn}$ است؛ بنابراین، مجموع ارقام عدد اتمی فلز A باید برابر ۵ باشد؛ در نتیجه عنصر A همان وانادیم (${}_{23}^{51}\text{V}$) می باشد. دقت کنید که مجموع ارقام عدد اتمی ${}_{31}^{75}\text{Ga}$ و ${}_{14}^{28}\text{Si}$ نیز برابر ۵ است، اما این دو عنصر شبه فلزند.

(ب) در بین نافلزهای دوره دوم، فقط برای کربن، مجموع $(n + l)$ الکترون های بیرونی ترین زیرلایه با عدد اتمی برابر است:

$${}_{6}^{12}\text{C} : [{}_{2}^{4}\text{He}] 2s^2 2p^2 \Rightarrow (n + l) = 2(2 + 1) = 6 \text{ الکترون های بیرونی ترین زیرلایه } (2p)$$



بررسی گزینه‌ها:

- ۱) نماد شیمیایی هر دو عنصر (الف) و (ب) تک حرفی (V, ۲۳, C) است.
- ۲) اکسندترین عنصر جدول، فلئور (F) است. با توجه به این که در یک دوره از چپ به راست، شعاع اتمی کاهش می‌یابد، شعاع اتمی C از F بزرگتر است.
- ۳) محلول آبی وانادیم با عدد اکسایش +۴ به رنگ آبی است.

رنگ	محلول
زرد	نمک وانادیم (V)
آبی	نمک وانادیم (IV)
سبز	نمک وانادیم (III)
بنفش	نمک وانادیم (II)

- ۴) مجموع عدد اتمی عنصرهای (الف) و (ب) برابر با $۲۹ + ۶ = ۳۵$ است. عنصر Cu ۲۹، نخستین عنصری از جدول است که لایه سوم آن ($n = ۳$) به طور کامل پر و ۱۸ الکترونی می‌شود.



تست و پاسخ ۸۶

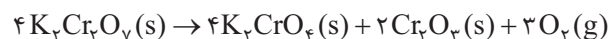
- چند مورد از مطالب زیر، درباره واکنش داده شده، درست است؟ ($O = ۱۶, K = ۳۹, Cr = ۵۲: g \cdot mol^{-1}$)
- (معادله شیمیایی موازنه نشده است): $K_2Cr_2O_7(s) \rightarrow K_2CrO_4(s) + Cr_2O_3(s) + O_2(g)$
- پس از موازنه معادله، مجموع ضرایب فراورده‌ها، $۲/۲۵$ برابر ضریب واکنش دهنده است.
 - با انجام واکنش، حدود ۸ درصد از جرم نمونه جامد اولیه کاسته می‌شود.
 - براساس معادله موازنه شده، ۵۰ درصد اتم‌های کروم، تغییر عدد اکسایش نداشته‌اند.
 - اگر واکنش با بازده ۷۰ درصد انجام شود، به ازای تولید ۷۶ گرم ترکیب یونی دوتایی، $۱۶/۸$ گرم گاز اکسیژن نیز تولید می‌شود.

۴ (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ تشریحی عبارت‌های اول تا سوم درست‌اند.

معادله موازنه شده واکنش به صورت زیر است:



بررسی عبارت‌ها:

$$\frac{\text{مجموع ضرایب فراورده‌ها}}{\text{ضریب واکنش دهنده}} = \frac{4+2+3}{4} = \frac{9}{4} = \frac{8}{4} + \frac{1}{4} = 2/25$$

• کاهش جرم نمونه جامد اولیه، به دلیل تولید گاز اکسیژن است.

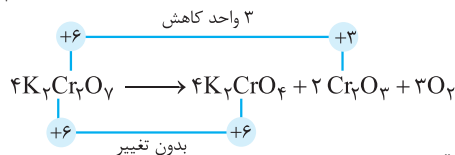
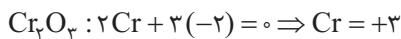
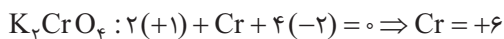
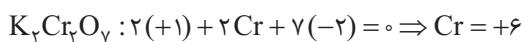
$$K_2Cr_2O_7 \text{ جرم مولی} = (2 \times 39) + (2 \times 52) + (7 \times 16) = 294 g \cdot mol^{-1}$$

$$K_2Cr_2O_7 \text{ جرم } 4 \text{ مول} = 4 \times 294 = 1176 g$$

$$O_2 \text{ جرم تولیدشده: } 3 \times 32 = 96 g$$

$$\text{درصد کاهش جرم} = \frac{\text{جرم } O_2}{\text{جرم جامد اولیه}} \times 100 = \frac{96}{1176} \times 100 = \frac{12}{15} \times 100 = \frac{1200}{150} = 8\%$$

• از ۸ اتم کروم اولیه، ۴ اتم آن تغییر عدد اکسایش نداشته‌اند.



• ترکیب یونی دوتایی تولید شده Cr_2O_3 است.

روش اول: کسر تبدیل:

$$76 \text{ g } Cr_2O_3 \times \frac{1 \text{ mol } Cr_2O_3}{152 \text{ g } Cr_2O_3} \times \frac{3 \text{ mol } O_2}{2 \text{ mol } Cr_2O_3} \times \frac{32 \text{ g } O_2}{1 \text{ mol } O_2} = 24 \text{ g } O_2$$

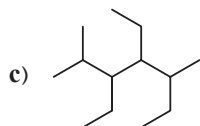
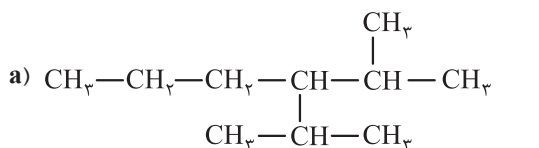
روش دوم: کسر تناسب:

$$\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} \Rightarrow \frac{76}{152 \times 2} = \frac{x}{32 \times 3} \Rightarrow x = 24 \text{ g } O_2$$

دام تستی وقتی می‌خواهیم مقدار یک فراورده را از روی مقدار یک فراورده دیگر حساب کنیم، نباید بازده درصدی را در محاسبات وارد کنیم. در این‌جا اگر اشتباهی بازده واکنش را در محاسبات دخیل می‌کردیم، به عدد $16/8 = 2$ گرم برای اکسیژن می‌رسیدیم!

تست و پاسخ ۸۷

با توجه به ساختار سه هیدروکربن سیرشده زیر، کدام مورد نادرست است؟ ($H = 1, C = 12 \text{ g.mol}^{-1}$)



(۱) شمار اتم‌های کربن در زنجیر اصلی هر سه هیدروکربن، متفاوت است.

(۲) مجموع اعداد به کاررفته در نام‌گذاری ترکیب C به روش آیوپاک، با عدد اتمی تنها شبه‌فلز دوره سوم جدول تناوبی، برابر است.

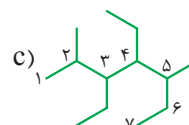
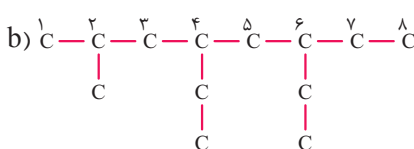
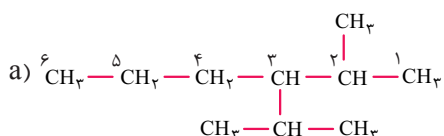
(۳) ترکیب a در ساختار خود، شاخه فرعی اتیل ندارد.

(۴) تفاوت جرم مولی دو ترکیب b و c برابر ۱۴ گرم است.

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ تشریحی بررسی گزینه‌ها:

(۱) زنجیر اصلی ترکیب‌های a، b و c به ترتیب ۶، ۸ و ۷ اتم کربن دارد.



(۲) نام ترکیب c، ۴،۳-دی‌اتیل-۵،۲-دی‌متیل‌هپتان است. مجموع اعداد در نام این ترکیب، برابر با $3+4+2+5=14$ است. تنها شبه‌فلز دوره سوم نیز سیلیسیم با عدد اتمی ۱۴ (Si) می‌باشد.



۳ با توجه به ساختار ترکیب (a)، معلومه که این ترکیب، شاخه فرعی اتیل ($-\text{CH}_2\text{CH}_3$) ندارد.

۴ هر دو ترکیب b و c، ۱۳ اتم کربن دارند؛ یعنی فرمول مولکولی آنها ($\text{C}_{13}\text{H}_{28}$) یکسان و جرم مولی آنها برابر است.

تست و پاسخ ۸۸

۸/۴ گرم از یک هیدروکربن (C_xH_y) با ۱۸ لیتر گاز اکسیژن با چگالی $1/6 \text{ g.L}^{-1}$ به طور کامل می‌سوزد. بر این اساس، کدام گزینه درباره آن نادرست است؟ ($\text{H} = 1, \text{C} = 12, \text{O} = 16 \text{ g.mol}^{-1}$)

(۱) می‌تواند یک ترکیب حلقوی و سیر شده باشد.

(۲) اگر هیدروکربن مورد نظر، ترکیبی زنجیره‌ای و بدون شاخه با ۴ اتم کربن باشد، در واکنش آن با گاز کلر کافی، ترکیبی با نام ۱، ۲-دی‌کلروپنتان تولید می‌شود.

(۳) حدود ۸۵/۷۱ درصد جرم آن را کربن تشکیل داده است.

(۴) ممکن است ترکیبی باشد که از آن به عنوان عمل‌آورنده در کشاورزی استفاده می‌شود.

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ تشریحی ابتدا باید با توجه به اطلاعات داده شده، فرمول هیدروکربن مورد نظر را به دست آوریم:

$$\text{C}_x\text{H}_y + (x + \frac{y}{4})\text{O}_2 \rightarrow x\text{CO}_2 + \frac{y}{2}\text{H}_2\text{O}$$

$$\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{\text{حجم} \times \text{چگالی}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} \Rightarrow \frac{8/4}{12x + y} = \frac{1/6 \times 18}{(x + \frac{y}{4}) \times 32}$$

$$\Rightarrow 28x + 7y = 36x + 3y \Rightarrow 4y = 8x \Rightarrow y = 2x \Rightarrow \text{فرمول هیدروکربن: } \text{C}_x\text{H}_{2x}$$

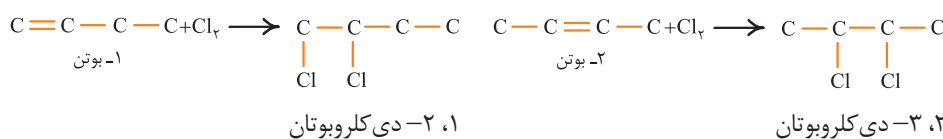
بررسی گزینه‌ها:

(۱) ترکیب مورد نظر که شمار اتم‌های هیدروژن آن دو برابر شمار اتم‌های کربن آن است، می‌تواند از خانواده آلکن‌ها یا سیکلوآلکن‌ها باشد.

سیکلوآلکن‌ها، حلقوی و سیر شده هستند.

(۲) در بین آلکن‌ها و سیکلوآلکن‌ها، آلکن‌ها، زنجیره‌ای محسوب می‌شوند.

دو آلکن ۴ کربنه بدون شاخه وجود دارد؛ بنابراین، در واکنش با گاز کلر می‌توان دو نوع فراورده تولید کرد:



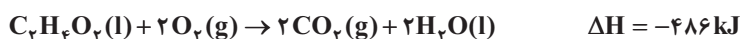
۳ درصد جرمی کربن در همه آلکن‌ها و سیکلوآلکن‌ها، برابر و حدود ۸۵/۷۱ درصد است:

$$\text{C}_x\text{H}_{2x} \text{ درصد جرمی کربن در } = \frac{12x}{14x} \times 100 = \frac{6}{7} \times 100 \approx 85/71$$

۴ از اتن (C_2H_4) که عضوی از خانواده آلکن‌ها است، به عنوان عمل‌آورنده در کشاورزی استفاده می‌شود.

تست و پاسخ ۸۹

واکنش زیر، سوختن استیک اسید در دمای اتاق را نشان می‌دهد. اگر گرمای لازم برای تبخیر ۱ مول استیک اسید و آب به ترتیب برابر ۲۴ و ۴۲ کیلوژول باشد، مجموع آنتالپی پیوندهای $\text{C}=\text{O}$ و $\text{O}-\text{H}$ برابر چند کیلوژول بر مول است؟



C—O	C—C	C—H	O=O	پیوند
۳۸۰	۳۵۱	۴۱۵	۵۰۰	آنتالپی پیوند (kJ.mol^{-1})

۱۳۰۰ (۴)

۱۳۱۴ (۳)

۱۱۳۴ (۲)

۱۰۳۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۲



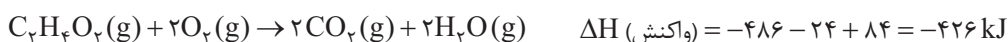
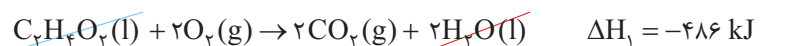


نکته

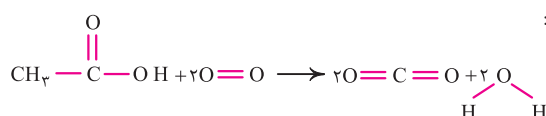
به شرطی می‌توان از آنتالپی‌های پیوند برای محاسبه ΔH یک واکنش استفاده کرد که همه مواد شرکت‌کننده در آن واکنش، به حالت گاز باشند. $\Delta H (\text{واکنش}) = [\text{مجموع آنتالپی پیوندهای مواد فراورده}] - [\text{مجموع آنتالپی پیوندهای مواد واکنش دهنده}]$

پاسخ تشریحی

گام اول: به کمک اطلاعات داده‌شده و به کمک قانون هس، آنتالپی سوختن واکنش استیک اسید، در حالتی که همه مواد شرکت‌کننده به حالت گازند را حساب می‌کنیم:



گام دوم: رابطه محاسبه ΔH واکنش به کمک آنتالپی‌های پیوند را می‌نویسیم:

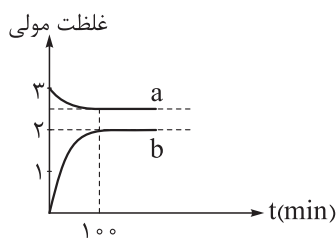


$$\Delta H (\text{واکنش}) = [3\Delta H(\text{C}-\text{H}) + \Delta H(\text{C}-\text{C}) + \Delta H(\text{C}=\text{O}) + \Delta H(\text{C}-\text{O}) + \Delta H(\text{O}-\text{H}) + 2\Delta H(\text{O}=\text{O})] - [4\Delta H(\text{C}=\text{O}) + 4\Delta H(\text{O}-\text{H})]$$

$$-426 = 3(415) + 351 - 3\Delta H(\text{C}=\text{O}) + 380 - 3\Delta H(\text{O}-\text{H}) + 2(500) \Rightarrow 3\Delta H(\text{C}=\text{O}) + 3\Delta H(\text{O}-\text{H}) = 3402$$

$$\Rightarrow \Delta H(\text{C}=\text{O}) + \Delta H(\text{O}-\text{H}) = \frac{3402}{3} = 1134 \text{ kJ.mol}^{-1}$$

تست و پاسخ ۹۰



قند شیر یا لاکتوز در فرایند تخمیر در حضور آب و طی چند مرحله به لاکتیک اسید تبدیل می‌شود. با توجه به معادله کلی این فرایند و نمودار غلظت - زمان رسم‌شده برای آن، کدام مطلب درست است؟



(۱) نمودار a مربوط به آب و نمودار b مربوط به لاکتیک اسید است.

(۲) در ۱۰۰ دقیقه اول واکنش، سرعت تولید فراورده $0.2 \text{ mol.L}^{-1}.\text{h}^{-1}$ است.

(۳) مقدار ثابت تعادل این واکنش برابر $6/4$ است.

(۴) در هر لحظه از واکنش قبل از رسیدن به تعادل، غلظت مولی لاکتیک اسید، ۴ برابر غلظت مولی لاکتوز است.

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ تشریحی بررسی گزینه‌ها:

(۱) غلظت مواد جامد (s) و مایع خالص (l) ثابت است؛ بنابراین، نمودار a نمی‌تواند مربوط به آب باشد.

(۲) در ۱۰۰ دقیقه اول واکنش، غلظت فراورده از صفر به ۲ مولار رسیده است؛ بنابراین خواهیم داشت:

$$\bar{R} = \frac{\Delta[\text{C}_3\text{H}_6\text{O}_3]}{\Delta t} = \frac{2 \text{ mol.L}^{-1}}{100 \text{ min}} \times \frac{60 \text{ min}}{1 \text{ h}} = 1/2 \text{ mol.L}^{-1}.\text{h}^{-1}$$

(۳) ابتدا باید غلظت تعادلی $\text{C}_{12}\text{H}_{22}\text{O}_{11}$ را به دست آوریم. تا رسیدن به تعادل، غلظت فراورده، ۲ واحد تغییر کرده است. از اون بایی

که ضریب $\text{C}_{12}\text{H}_{22}\text{O}_{11}$ ، $\frac{1}{4}$ ضریب فراورده است، غلظتش $0.5 \times 2 = \frac{1}{4}$ مولار تغییر می‌کند؛ بنابراین، غلظت تعادلی $\text{C}_{12}\text{H}_{22}\text{O}_{11}$ برابر با

$0.5 - 0.25 = 0.25$ مولار خواهد بود:

$$K = \frac{[\text{C}_3\text{H}_6\text{O}_3]^4}{[\text{C}_{12}\text{H}_{22}\text{O}_{11}]} = \frac{2^4}{2/5} = \frac{16}{2/5} = \frac{16 \times 5}{2} = 40$$

توجه مواد جامد و مایع خالص، در عبارت ثابت تعادل نوشته نمی‌شوند.

۴ برابر بودن ضریب استوکیومتری لاکتیک اسید نسبت به لاکتوز، نشان دهنده این است که در هر بازه زمانی، تغییر غلظت (نه خود غلظت!) لاکتیک اسید، ۴ برابر تغییر غلظت لاکتوز خواهد بود.

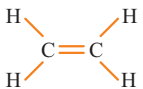
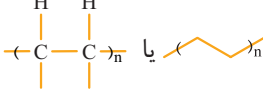
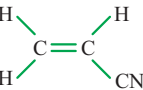
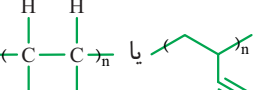
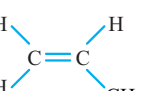
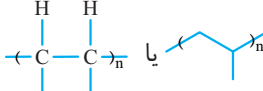
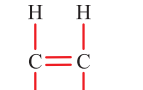
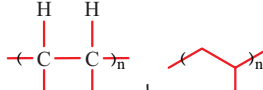
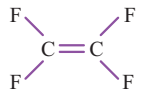
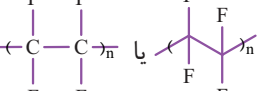
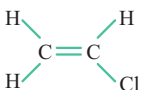
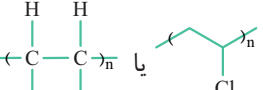
تست و پاسخ ۹۱

کدام مطلب در مورد پلیمرها نادرست است؟ ($H = 1, C = 12, O = 16, F = 19, Cl = 35.5 : g.mol^{-1}$)

- ۱) جرم مولی تترافلوئورو اتن از جرم مولی پروپن بیشتر و از جرم مولی گلوکز کمتر است.
- ۲) در ساختار پلی سیانو اتن و پلی استیرن، پیوندهای دوگانه وجود دارد.
- ۳) درصد جرمی کلر در پلی وینیل کلرید بیش از ۵۰ درصد است.
- ۴) برای تبدیل اتن به پلی اتن، از ترکیبهای محتوی آلومینیم و تیتانیوم به عنوان کاتالیزگر استفاده می شود.

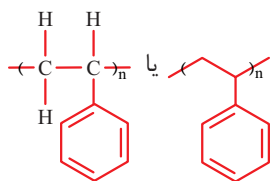
پاسخ: گزینه ۲

نکته: پلی اتن و مشتقات آن:

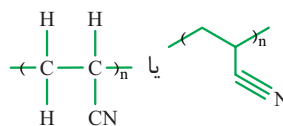
نام و ساختار مونومر	نام و ساختار پلیمر	کاربرد
 اتن	 پلی اتن	کیسه های پلاستیکی، لوله های پلاستیکی، دبه های آب یا بطری پلاستیکی
 سیانو اتن	 پلی سیانو اتن	پتو
 پروپن	 پلی پروپن	به عنوان پلاستیک در تجهیزات آزمایشگاهی و پزشکی مانند سرنگ
 استیرن	 پلی استیرن	به عنوان پلاستیک در صنعت بسته بندی مواد غذایی مانند ظرف یکبار مصرف
 تترافلوئورو اتن	 پلی تترافلوئورو اتن یا تفلون	ظرف نجسب، نخ دندان، کف اتو، نوارهای آب بندی لوله ها (نوار تفلون)
 وینیل کلرید (کلرو اتن)	 پلی وینیل کلرید	کیسه خون



پاسخ تشریحی در ساختار پلی سیانو اتن برخلاف پلی استیرن، پیوند دوگانه وجود ندارد.



پلی استیرن



پلی سیانو اتن

بررسی سایر گزینه‌ها:

فرمول مولکولی تترافلوئورو اتن، پروپن و گلوکز به ترتیب به صورت C_3H_6 ، $C_3H_6O_6$ و $C_6H_{12}O_6$ است:

جرم مولی: $C_6H_{12}O_6 > C_3H_6 > C_3H_6O_6$

$$180 \text{ g.mol}^{-1} \quad 100 \text{ g.mol}^{-1} \quad 42 \text{ g.mol}^{-1}$$

$$(C_6H_7Cl)_n \text{ جرم مولی پلی وینیل کلرید} = [2(12) + 3(1) + 35/5] \times n = 62/5n \text{ g.mol}^{-1}$$

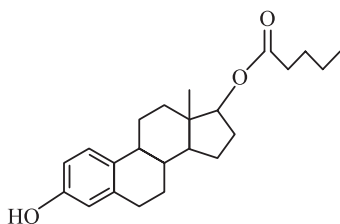
$$\text{درصد جرمی کلر در پلی وینیل کلرید} = \frac{\text{مقدار کلر موجود در پلی وینیل کلرید (بر حسب گرم)}}{\text{جرم مولی پلی وینیل کلرید (بر حسب گرم)}} \times 100 = \frac{35/5 \times n}{62/5n} \times 100 = 56.4\%$$

نکته درصد جرمی عناصر در پلی اتن و پلیمرهای مشابه مانند پلی پروپن، تفلون و ... همان درصد جرمی عناصر در مونومر سازنده آن‌ها است و ربطی به n ندارد؛ بنابراین، در این جا برای محاسبه درصد جرمی کلر در پلی وینیل کلرید، کافی است درصد جرمی آن را در وینیل کلرید محاسبه کنیم.

در تمرین‌های دوره‌ای فصل ۳ کتاب شیمی یازدهم می‌خوانیم که برای تبدیل اتن به پلی اتن، از کاتالیزگر محتوی آلومینیم و تیتانیم استفاده می‌شود.

تست و پاسخ ۹۲

استرادیول والرات (Estradiol Valerate) یک داروی تزریقی و خوراکی است که در روش‌های کمک باروری به کار می‌رود. براساس ساختار آن، کدام موارد از مطالب زیر، درست است؟ ($H = 1, C = 12, O = 16 \text{ g.mol}^{-1}$)



(۴) الف - ت - ث

(۳) ب - پ - ت

(۲) ب - پ

(۱) الف - ت

پاسخ: گزینه ۱

نکته برای تعیین شمار اتم‌های هیدروژن در یک ترکیب آلی می‌توان از رابطه زیر استفاده کرد:

$$\text{تعداد اتم‌های هیدروژن} = (1 \times \text{تعداد اتم‌های نیتروژن}) + (1 \times \text{تعداد اتم‌های هالوژن}) - (4 \times \text{تعداد پیوندهای سه‌گانه}) - (\text{تعداد پیوندهای دوگانه} + \text{تعداد حلقه‌ها}) - 2 \times (2n + 2) = \text{تعداد اتم‌های هیدروژن در ترکیبی با n کربن}$$

پاسخ تشریحی عبارت‌های «الف» و «ت» درست‌اند.

بررسی موارد:

الف) ترکیب مورد نظر، ۲۳ اتم کربن و ۳ اتم اکسیژن دارد. شمار اتم‌های هیدروژن آن را به کمک فرمول، پیدا می‌کنیم:

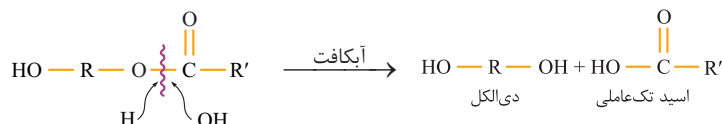
$$\text{شمار H} = (2 \times 23) + 2 - 2(8) = 32 \Rightarrow \text{فرمول ترکیب: } C_{23}H_{32}O_3$$

مجموع تعداد پیوند دوگانه و حلقه آلکان هم‌کربن

$$\text{جرم مولی ترکیب} = (23 \times 12) + 32 + (3 \times 16) = 356 \text{ g.mol}^{-1}$$

$$\text{درصد جرمی H در } C_{23}H_{32}O_3 = \frac{32}{356} \times 100 \approx 9\%$$

(ب) گروه عاملی استری ترکیب مورد نظر، می تواند آبکافت شود. اگر ساختار ترکیب را به صورت $HO-R-O-C(=O)-R'$ نشان دهیم، خواهیم داشت:



از آبکافت ترکیب، یک دی الکل به دست می آید که می تواند در واکنش تولید پلی استر به کار رود؛ اما اسید تولید شده، تک عاملی است و به درد تولید پلی استر نمی خوره!

(پ) از کل ۳۲ اتم هیدروژن ترکیب، فقط ۱ اتم هیدروژن با اکسیژن در OH پیوند دارد؛ بنابراین در ساختار ترکیب، ۳۱ پیوند C-H وجود دارد. از طرفی ترکیب مورد نظر، ۳ پیوند C-O دارد:

$$\frac{\text{شمار پیوندهای C-H}}{\text{شمار پیوندهای C-O}} = \frac{31}{3} \approx 11$$

(ت) با توجه به قسمت «ب»، اسید سازنده ترکیب مورد نظر، $HO-C(=O)-CH_2-CH_2-CH_2-CH_3$ یا $C_5H_{10}O_2$ است.

$$3 \text{ mol استر} \times \frac{1 \text{ mol } C_5H_{10}O_2}{1 \text{ mol استر}} \times \frac{102 \text{ g } C_5H_{10}O_2}{1 \text{ mol } C_5H_{10}O_2} = 306 \text{ g } C_5H_{10}O_2$$

(ث) ترکیب مورد نظر تنها یک گروه OH دارد و نمی توان نیروی بین مولکولی غالب آن را پیوند هیدروژنی در نظر گرفت. نیروی بین مولکولی غالب در این ترکیب، از نوع وان دروالسی است.

تست و پاسخ ۹۳

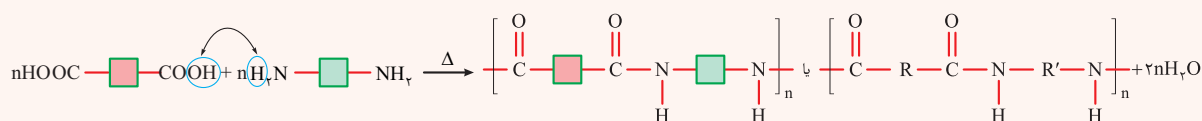
۱، ۶ - هگزان دی آمین دارای ساختار $H_2N(CH_2)_6NH_2$ است. فرمول پلیمر به دست آمده از واکنش آن با ترفتالیک اسید در شرایط مناسب، کدام است؟



پاسخ: گزینه ۱

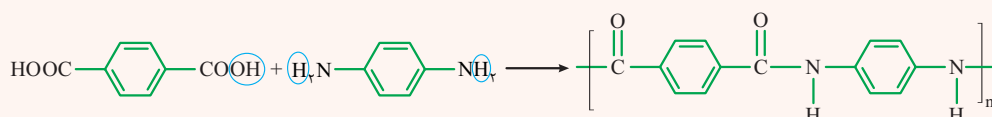
درس نامه •• واکنش تهیه پلی آمید از دی آمین و دی اسید

پلی آمیدها را می توان از واکنش دو نوع مونومر متفاوت شامل کربوکسیلیک اسید دو عاملی (دی اسید) و آمین دو عاملی (دی آمین) تولید کرد. در واکنش تولید پلی آمید، گروه عاملی $R-NH_2$ یا $R'-NH_2$ با عامل اسیدی $(-COOH)$ واکنش می دهد.



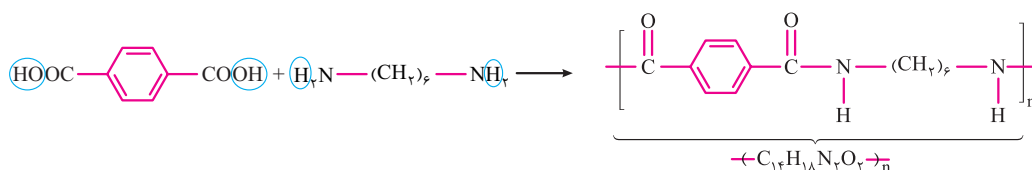
برای رسم ساختار پلی آمید حاصل از واکنش یک دی اسید و یک دی آمین، کافی است یکی از اتم های H موجود در گروه عاملی آمینی $(-NH_2)$ و OH موجود در گروه عاملی اسیدی $(-COOH)$ را حذف کرده، سپس قسمت های باقی مانده را به هم متصل کنیم.

مثال:





پاسخ تشریحی ترفتالیک اسید یک دی اسید با ساختار $\text{HOOC}-\text{C}_6\text{H}_4-\text{COOH}$ است؛ بنابراین، خواهیم داشت:

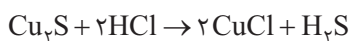


تست و پاسخ ۹۴

بر پایه واکنش موازنه نشده: $\text{Cu}_2\text{S(s)} + \text{HCl(aq)} \rightarrow \text{CuCl(aq)} + \text{H}_2\text{S(g)}$ اگر $6/4$ گرم سنگ معدن مس ناخالص با اسید کافی واکنش دهد و 672 میلی لیتر گاز در شرایط STP آزاد شود، درصد خلوص فلز مس در سنگ معدن چه قدر است و چند لیتر محلول اسید با $\text{pH} = 1/2$ در این فرایند مصرف می شود؟ ($S = 32, \text{Cu} = 64 : \text{g.mol}^{-1}, \log 2 = 0/3, \log 3 = 0/5$)

(۱) $60\% - 5$ (۲) $60\% - 1$ (۳) $75\% - 5$ (۴) $75\% - 1$

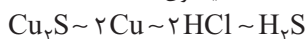
پاسخ: گزینه ۲



پاسخ تشریحی گام اول: معادله واکنش را موازنه می کنیم:

گام دوم: با توجه به حجم گاز تولید شده، درصد خلوص مس و حجم اسید مصرف شده را حساب می کنیم.

اسید قوی



$$\frac{\text{درصد خلوص} \times \text{جرم ناخالص}}{100} = \frac{\text{حجم} \times \text{غلظت مولی}}{\text{ضریب}} = \frac{\text{حجم}}{\text{حجم مولی} \times \text{ضریب}}$$

$$\frac{\text{Cu}}{\text{HCl}} = \frac{\text{H}_2\text{S}}{\text{H}_2\text{S}}$$

در محلول اسید قوی HCl ، غلظت مولی محلول، با غلظت $(10^{-\text{pH}}) \text{H}^+$ برابر است؛ بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{6/4 \times \frac{x}{100}}{2 \times 64} = \frac{10^{-1/2} \times y}{2} = \frac{672}{22400} \Rightarrow x = 20 \times 3 = 60\%$$

$$y = \frac{2 \times 3}{10^{-1/2} \times 10^2} = \frac{2 \times 3}{10^{-1/2} \times 10^2} = \frac{6}{10^{-1/2} \times 10^2} = \frac{6}{2 \times 3} = 1\text{L}$$

دام تستی اگر به جای درصد خلوص مس، درصد خلوص Cu_2S را حساب می کردین، به عدد 75% می رسیدین:

$$\frac{6/4 \times \frac{x}{100}}{1 \times 160} = \frac{672}{22400} \Rightarrow x = 75\%$$

تست و پاسخ ۹۵

چند مورد، جمله «با افزایش طول زنجیر کربنی در کربوکسیلیک اسیدهای یک عاملی، کاهش می یابد.» را به درستی کامل می کند؟

- نقطه جوش آن ها
- انحلال پذیری آن ها در آب
- pH محلول 1 مولار آن ها
- جری گریزی آن ها
- نسبت شمار پیوندهای $\text{C}-\text{H}$ به شمار جفت الکترون های ناپیوندی

(۱) 1 (۲) 2 (۳) 3 (۴) 4

پاسخ: گزینه ۲



پاسخ تشریحی ۲ مورد «انحلال پذیری در آب و چربی گریزی»، جمله داده شده را به درستی کامل می کنند.

بررسی موارد:

- با افزایش طول زنجیر کربنی و در نتیجه افزایش جرم مولی کربوکسیلیک اسیدها (RCOOH)، نقطه جوش آن ها افزایش می یابد.
- با افزایش طول زنجیر کربنی، بخش ناقطبی مولکول بزرگ تر شده و انحلال پذیری ترکیب در آب کاهش می یابد.

نکته با افزایش تعداد کربن ها در کربوکسیلیک اسیدهای یک عاملی، قدرت اسیدی (K_a) آن کاهش می یابد.

- با افزایش طول زنجیر کربنی، قدرت اسیدی کربوکسیلیک اسیدها کاهش یافته و در نتیجه در غلظت یکسان، غلظت یون هیدرونیوم در محلول آن ها کمتر بوده و در نتیجه pH محلول بیشتر خواهد بود:



- با افزایش طول زنجیر کربنی و بزرگ تر شدن بخش ناقطبی، آب گریزی مولکول و چربی دوستی آن افزایش می یابد؛ یعنی چربی گریزی آن کاهش خواهد یافت.

- با افزایش طول زنجیر کربنی و بیشتر شدن تعداد اتم های کربن و هیدروژن، شمار پیوندهای C-H مولکول افزایش می یابد؛ اما همه اسیدهای آلی یک عاملی (RCOOH)، به دلیل داشتن ۲ اتم اکسیژن، ۴ جفت الکترون ناپیوندی دارند؛ پس نسبت گفته شده، افزایش می یابد:

$$\frac{\uparrow \text{شمار پیوندهای C-H}}{\uparrow \text{شمار جفت الکترون های ناپیوندی}} \Rightarrow \uparrow$$

ثابت

تست و پاسخ ۹۶

یک شرکت داروسازی، شربت شیر منیزی را با غلظت ۸ درصد جرمی منیزیم هیدروکسید ($d = 1/16 \text{ g.mL}^{-1}$) در قوطی هایی با میانگین حجم ۱۱۰ میلی لیتر تولید و روانه بازار می کند. منیزیم مورد استفاده در تهیه ۴۰ هزار قوطی از این دارو را از چند متر مکعب آب دریا ($d = 1/1 \text{ g.mL}^{-1}$) که غلظت یون منیزیم در آن برابر ۱۰۲۴ ppm است، می توان به دست آورد؟ ($\text{H} = 1, \text{O} = 16, \text{Mg} = 24 \text{ g.mol}^{-1}$)

۱۸۰۰ (۴)

۱۶۵ (۳)

۱۵۰ (۲)

۱۳۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ تشریحی گام اول: ابتدا جرم منیزیم به کاررفته در ۴۰ هزار قوطی شربت را حساب می کنیم:

نکته اگر درصد جرمی یک محلول، a و چگالی محلول بر حسب g.mL^{-1} برابر d باشد، غلظت مولی محلول را می توان از رابطه زیر به دست آورد:

$$\text{غلظت مولی} = \frac{10 \cdot ad}{\text{جرم مولی}}$$

$$\text{غلظت مولی } \text{Mg(OH)}_2 = \frac{10 \cdot ad}{\text{جرم مولی}} = \frac{10 \times 8 \times 1/16}{58} = 1/6 \text{ mol.L}^{-1}$$

$$40,000 \times \frac{110 \text{ mL}}{1 \text{ قوطی}} \times \frac{1 \text{ L}}{1000 \text{ mL}} \times \frac{1/6 \text{ mol Mg(OH)}_2}{1 \text{ L}} \times \frac{1 \text{ mol Mg}^{2+}}{1 \text{ mol Mg(OH)}_2} \times \frac{24 \text{ g Mg}^{2+}}{1 \text{ mol Mg}^{2+}} = 4 \times 110 \times 16 \times 24 \text{ g Mg}^{2+}$$

گام دوم: با استفاده از غلظت Mg^{2+} در آب دریا بر حسب ppm، حجم آب دریا را حساب می کنیم:

$$\text{ppm} = \frac{\text{جرم } \text{Mg}^{2+}}{\text{جرم آب دریا}} \times 10^6 \Rightarrow 1024 = \frac{4 \times 110 \times 16 \times 24}{\text{جرم آب دریا}} \times 10^6$$

$$\Rightarrow \text{جرم آب دریا} = \frac{110 \times 24 \times 10^6}{16} \text{ g} \xrightarrow{d=1/1 \text{ g.mL}^{-1}} \text{حجم آب دریا} = \frac{110 \times 3 \times 10^6}{2} \text{ g} \times \frac{1 \text{ mL}}{1/1 \text{ g}} \times \frac{1 \text{ m}^3}{10^6 \text{ mL}} = 150 \text{ m}^3$$





تست و پاسخ ۹۷

همه عبارت‌های زیر درست هستند، به جز:

- (۱) گل ادریسی در خاکی که غلظت یون هیدروکسید در آن $10^{-6} \times 2/5$ مولار است، به رنگ سرخ دیده می‌شود.
- (۲) فراورده‌های واکنش جوهر نمک با جوش شیرین، دارای سه حالت فیزیکی متفاوت هستند.
- (۳) رسانایی الکتریکی محلول فورمیک اسید به طور آشکاری از رسانایی الکتریکی محلول پتاس سوزآور کم‌تر است.
- (۴) فرمول شیمیایی $C_{18}H_{33}O_2Na$ را می‌توان به صابون جامدی نسبت داد که زنجیر هیدروکربنی آن دارای ۱۷ اتم کربن و یک پیوند دوگانه است.

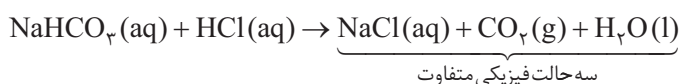
پاسخ: گزینه ۳

پاسخ تشریحی

بررسی گزینه‌ها:

(۱) گل ادریسی در خاک‌های اسیدی ($[H^+] > 10^{-7}$ یا $[OH^-] < 10^{-7}$) به رنگ آبی و در خاک‌های بازی ($[H^+] < 10^{-7}$ یا $[OH^-] > 10^{-7}$) به رنگ سرخ درمی‌آید.

(۲) معادله واکنش جوش شیرین با جوهر نمک به صورت زیر است:



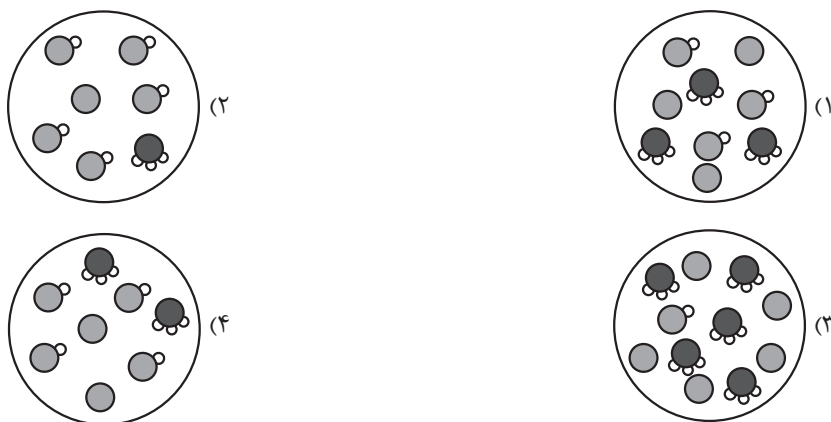
(۳) درسته که فورمیک اسید ($HCOOH$) یک اسید ضعیف و پتاس سوزآور (KOH) یک باز قوی است، اما بدون داشتن غلظت محلول‌های آن‌ها نمی‌توان رسانایی الکتریکی آن‌ها را با هم مقایسه کرد.

(۴) فرمول کلی صابون‌های جامد به صورت $RCOONa$ است. اگر R ، گروه آلکیل باشد و پیوند دوگانه نداشته باشد، فرمول آن به صورت C_nH_{2n+1} خواهد بود. به ازای هر پیوند دوگانه، دو اتم هیدروژن از هیدروژن‌ها کم می‌شود؛ پس اگر گروه R یک زنجیر هیدروکربنی ۱۷ کربنه با یک پیوند دوگانه باشد، خواهیم داشت:



تست و پاسخ ۹۸

اگر مقدار ثابت یونش اسید HA برابر $5/0$ باشد، کدام شکل می‌تواند نشان‌دهنده نمای ذره‌ای محلول ۱ مولار آن باشد؟ (مولکول‌های آب نشان داده نشده‌اند.)



پاسخ: گزینه ۱

خودت حل کنی بهتره با استفاده از غلظت محلول و K_a اسید، α را حساب کن! بعد ببین در کدام شکل، α با مقدار محاسبه شده تطابق دارد.

پاسخ تشریحی

گام اول: درجه یونش (α) اسید در محلول ۱ مولار را حساب می کنیم:

$$K_a = \frac{M\alpha^2}{1-\alpha} \Rightarrow 0.5 = \frac{\alpha^2}{1-\alpha} \Rightarrow 2\alpha^2 + \alpha - 1 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$$

گام دوم: درجه یونش اسید در محلول های داده شده را حساب می کنیم:

$$\alpha = \frac{\text{تعداد مولکول یونیده شده}}{\text{تعداد کل مولکول های حل شده}} = \frac{\text{تعداد } H_3O^+}{\text{تعداد } H_3O^+ + \text{تعداد مولکول اسید باقی مانده}}$$

$$(1) \alpha_1 = \frac{3}{3+3} = \frac{1}{2}$$

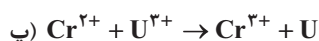
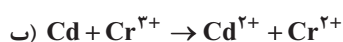
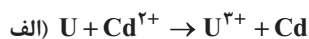
$$(2) \alpha_2 = \frac{1}{5+1} = \frac{1}{6}$$

$$(3) \alpha_3 = \frac{5}{5+1} = \frac{5}{6}$$

$$(4) \alpha_4 = \frac{2}{4+2} = \frac{1}{3}$$

تست و پاسخ ۹۹

اگر واکنش (الف) را برخلاف واکنش های (ب) و (پ)، بتوان در یک سلول گالوانی انجام داد، کدام مطلب نادرست است؟



(۱) مقایسه قدرت اکسندگی گونه ها به صورت: $U^{3+} < Cr^{3+} < Cd^{2+}$ است.

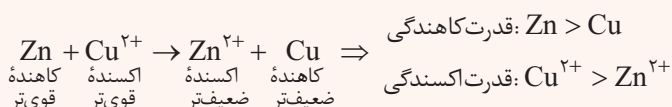
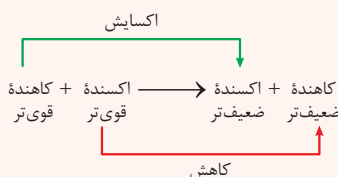
(۲) در سلول گالوانی اورانیم - کادمیم، الکتروکادمیم کاتد است.

(۳) موقعیت نیم واکنش $Cr^{3+}(aq) + e^- \rightarrow Cr^{2+}(aq)$ در جدول سری الکتروشیمیایی، پایین تر از موقعیت نیم واکنش $Cd^{2+}(aq) + 2e^- \rightarrow Cd(s)$ است.

(۴) تمایل Cr^{2+} برای اکسید شدن به Cr^{3+} ، بیشتر از تمایل U برای اکسید شدن به U^{3+} است.

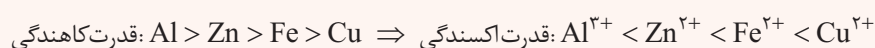
پاسخ: گزینه ۴

درس نامه در واکنش های اکسایش - کاهش که به طور طبیعی انجام می شوند، کاهنده قوی تر و اکسندۀ قوی تر با هم واکنش می دهند و اکسندۀ ضعیف تر و کاهندۀ ضعیف تر، تشکیل می شوند.



مثال:

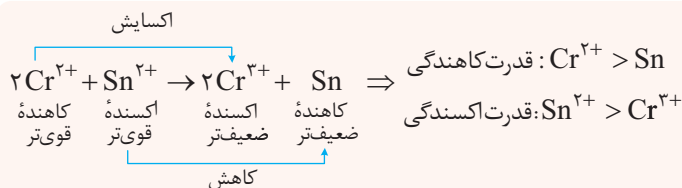
توجه مقایسه قدرت اکسندگی کاتیون های دو فلز، برعکس مقایسه قدرت کاهندگی خود فلزها است؛ به عبارت دیگر، هر چه فلزی قدرت کاهندگی بیشتری داشته باشد، کاتیون آن، تمایل کمتری برای گرفتن الکترون دارد:



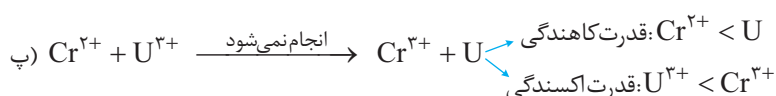
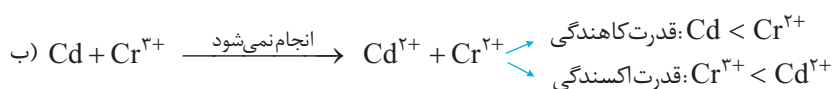
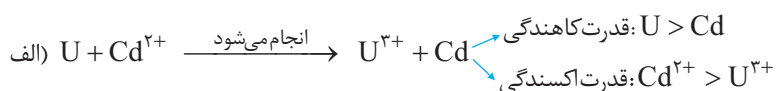
گونه هایی که می خواهید قدرت اکسندگی و یا کاهندگی آن ها را با هم مقایسه کنید، باید در دو سمت معادله باشند نه در یک سمت! به طور مثال در واکنش بالا، گفتن جمله: «قدرت اکسندگی Cu^{2+} از Zn بیشتر است» غلطه!



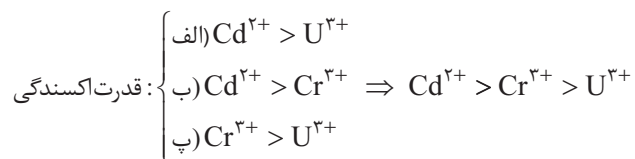
مثال:



پاسخ تشریحی ابتدا ببینیم از هر واکنش، چه نتیجه‌ای می‌گیریم:



بررسی گزینه‌ها:



۲) با توجه به واکنش (الف)، قدرت کاهندگی اورانیوم (U) از کادمیم (Cd) بیشتر است؛ بنابراین، در سلول گالوانی (اورانیوم - کادمیم)، اورانیوم آند و کادمیم، کاتد است.

۳) با توجه به واکنش (ب) که به طور طبیعی انجام نمی‌شود، می‌توان نتیجه گرفت که نیم‌سلول Cr^{3+} / Cr^{2+} در سری الکتروشیمیایی، پایین‌تر از نیم‌سلول Cd^{2+} / Cd است. در واقع، وارونه واکنش (ب) به طور طبیعی انجام می‌شود و قدرت کاهندگی Cr^{2+} از Cd بیشتر است و در سری الکتروشیمیایی، گونه‌هایی با قدرت کاهندگی بیشتر، در موقعیت پایین‌تری قرار دارند.

۴) با توجه به واکنش (پ) که وارونه آن به طور طبیعی انجام می‌شود، می‌توان گفت که قدرت کاهندگی U از Cr^{2+} بیشتر است و به عبارت دیگر تمایل اکسایش U به U^{3+} ، بیشتر از تمایل اکسایش Cr^{2+} به Cr^{3+} است.

تست و پاسخ ۱۰۰

اگر در فرایند هال، $3/612 \times 10^{26}$ الکترون مبادله شود، برای جذب کربن دی‌اکسید تولیدشده طی این فرایند، به چند کیلوگرم آهک نیاز است؟ ($O = 16, Ca = 40 : g.mol^{-1}$)

۸ / ۴ (۴)

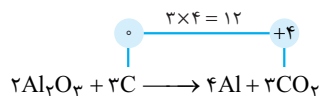
۶ / ۵ (۳)

۵ / ۶ (۲)

۴ / ۸ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ تشریحی در فرایند هال به ازای تولید ۳ مول کربن دی‌اکسید، ۱۲ مول الکترون مبادله می‌شود:



هر مول CO_2 با ۱ مول آهک (CaO) به طور کامل واکنش می‌دهد:

$$CO_2 + CaO \rightarrow CaCO_3$$

$$3/612 \times 10^{26} e^- \times \frac{1 \text{ mole}^-}{6.02 \times 10^{23} e^-} \times \frac{3 \text{ mol } CO_2}{12 \text{ mole}^-} \times \frac{1 \text{ mol CaO}}{1 \text{ mol } CO_2} \times \frac{56 \text{ g CaO}}{1 \text{ mol CaO}} \times \frac{1 \text{ kg CaO}}{1000 \text{ g CaO}}$$

$$= \frac{36/12 \times 10^{25} \times 3 \times 56}{6.02 \times 10^{23} \times 12 \times 1000} = \frac{6 \times 56}{4 \times 10} = 8/4 \text{ kg CaO}$$

تست و پاسخ ۱۰۱

چند مورد از مطالب زیر درست است؟

- شمار مول الکترون های مبادله شده در واکنش: $\text{MnO}_4^- (\text{aq}) + \text{H}_2\text{O}_2 (\text{aq}) + \text{H}^+ (\text{aq}) \rightarrow \text{Mn}^{2+} (\text{aq}) + \text{O}_2 (\text{g}) + \text{H}_2\text{O} (\text{l})$ پس از موازنه، به ازای مصرف هر مول اکسنده، برابر ۵ است.
- نیم واکنش کاتدی در زنگ زدنی حلی، به صورت: $\text{O}_2 (\text{g}) + 2\text{H}_2\text{O} (\text{l}) + 4\text{e}^- \rightarrow 4\text{OH}^- (\text{aq})$ است.
- در سری الکتروشیمیایی، یون لیتیم اکسنده ترین کاتیون و یون فلئورید، ضعیف ترین اکسنده است.
- در سلول سوختی هیدروژن - اکسیژن، جهت حرکت الکترون ها همسو با جهت حرکت یون های هیدرونیوم از غشای مبادله کننده است.

۱ (۴)

۲ (۳)

۳ (۲)

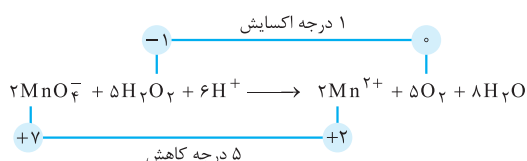
۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ تشریحی عبارت های اول، دوم و چهارم درست اند.

بررسی عبارت ها:

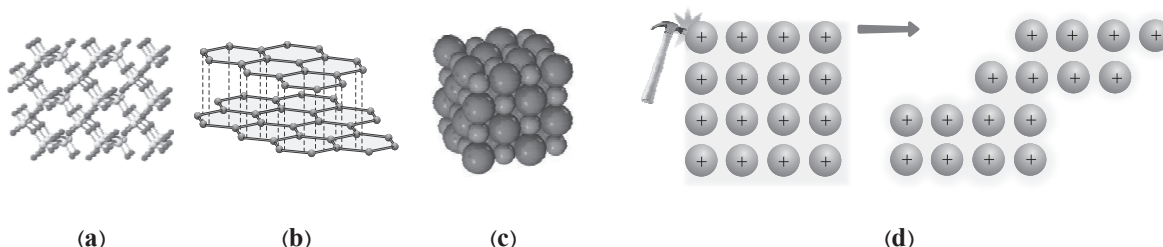
• ابتدا معادله واکنش را موازنه می کنیم.



- به ازای ۲ مول اکسنده (MnO_4^-)، ۱۰ مول الکترون مبادله می شود؛ بنابراین به ازای هر مول از آن، ۵ مول الکترون مبادله خواهد شد. ✓
- نیم واکنش کاتدی در زنگ زدنی آهن، آهن گالوانیزه و حلی، همگی مربوط به کاهش مولکول های اکسیژن بوده و به صورت $\text{O}_2 (\text{g}) + 2\text{H}_2\text{O} (\text{l}) + 4\text{e}^- \rightarrow 4\text{OH}^- (\text{aq})$ است. ✓
- در سری الکتروشیمیایی، لیتیم (Li) قوی ترین کاهنده و یون فلئورید (F^-) ضعیف ترین کاهنده است؛ بنابراین، یون لیتیم (Li^+) ضعیف ترین اکسنده و گاز فلئور (F_2) قوی ترین اکسنده است. ✗
- در سلول سوختی هیدروژن همانند سایر سلول های گالوانی، جهت حرکت الکترون ها در مدار بیرونی، از آند به کاتد است. همچنین، در سلول های گالوانی، کاتیون ها به سمت کاتد می روند. در سلول سوختی نیز یون های هیدرونیوم (H^+) از طریق غشای مبادله کننده به سمت کاتد حرکت می کند. ✓

تست و پاسخ ۱۰۲

کدام دسته از مواد، نماینده مناسبی برای ساختار یا ویژگی عمومی جامد بلوری ارائه شده است؟



(a)

(b)

(c)

(d)

- ۱) آلایز نیتینول: d و گرافن: b و سیلیسیم: a
- ۲) سیلیسیم کربید: c و گرافیت: b و کوارتز: a
- ۳) قوطی آلومینیومی: d و کلسیم اکسید: c و گرافیت: b
- ۴) ساچمه سربی: d و نیتروژن مونوکسید: c و سیلیس: a

پاسخ: گزینه ۲



درس نامه •• مقایسه کلی انواع جامدهای بلوری

خواص	نوع جامد	جامد مولکولی	جامد کووالانسی	جامد یونی	جامد فلزی
ذره‌های سازنده بلور	ذره‌های سازنده بلور	مولکول‌های مجزا	اتم‌ها	کاتیون‌ها و آنیون‌ها	کاتیون‌ها و دریای الکترونی
سختی	سختی	معمولاً نرم	بسیار سخت (به جز گرافیت)	سخت و شکننده	برخی نرم ولی اغلب سخت
رسانایی الکتریکی در حالت جامد	رسانایی الکتریکی در حالت جامد	نارسانا	برخی نارسانا (مانند الماس) و بعضی رسانا (مانند گرافیت)	نارسانا	رسانا
رسانایی الکتریکی در حالت مذاب (مایع)	رسانایی الکتریکی در حالت مذاب (مایع)	نارسانا	نارسانا	رسانا	رسانا
دمای ذوب نسبی	دمای ذوب نسبی	پایین	خیلی بالا	بالا	اغلب متوسط یا بالا
مثال	مثال	H_2O (یخ)، I_2 ، CO_2 (یخ خشک)، گوگرد و نفتان ($C_{10}H_8$)	SiO_2 ، Si (سیلیس)، SiC (سیلیسیم کربید)، گرافیت و الماس	$NaCl$ ، Al_2O_3 ، NH_4Cl و MgO	Na و Fe ، Au

پاسخ تشریحی

- (a) می‌تواند نشان‌دهنده جامدهای کووالانسی مانند سیلیسیم، کوارتز یا سیلیس باشد.
 (b) ساختار لایه‌ای دارد و می‌تواند گرافیت باشد.
 (c) می‌تواند یک ترکیب یونی مانند کلسیم اکسید یا منیزیم برمید باشد.
 (d) یک جامد چکش‌خوار است و می‌تواند یک فلز مانند آلومینیم، سرب یا آلیاژ فلزی باشد.

تست و پاسخ ۱۰۳

کدام مطلب به یقین درست است؟

- (۱) مولکول‌هایی که اتم مرکزی آن‌ها فاقد الکترون ناپیوندی است، در میدان الکتریکی جهت‌گیری نمی‌کنند.
- (۲) عنصری از دوره سوم که شعاع اتمی بزرگ‌تری دارد، شعاع یون پایدار آن نیز نسبت به سایر یون‌های پایدار این دوره بزرگ‌تر است.
- (۳) همه مولکول‌هایی که از اتم‌های یکسانی تشکیل شده‌اند، ناقطبی‌اند.
- (۴) آنتالپی فروپاشی شبکه بلور هالیدهای فلزهای قلیایی، با کاهش واکنش‌پذیری فلز، افزایش می‌یابد.

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ تشریحی بررسی گزینه‌ها:

- (۱) اگر اتم‌های متصل به اتم مرکزی در یک مولکول متفاوت باشند، مولکول قطبی بوده و در میدان الکتریکی جهت‌گیری می‌کند. مانند CH_3O یا SCO !
- (۲) در دوره سوم، بیشترین شعاع اتمی مربوط به اولین عنصر دوره یعنی Na است؛ اما بیشترین شعاع یونی در این دوره، مربوط به P^{3-} می‌باشد.
- (۳) اوزون (O_3) با این که از اتم‌های یکسانی تشکیل شده است، اما مولکولی قطبی به حساب می‌آید.
- (۴) آنتالپی فروپاشی شبکه بلور ترکیب‌های یونی با بار یون‌ها رابطه مستقیم و با شعاع آن‌ها رابطه وارونه دارد. در فلزهایی قلیایی با کاهش واکنش‌پذیری فلز (یعنی از پایین به بالا)، شعاع یون پیدارشان کاهش یافته و آنتالپی فروپاشی آن‌ها افزایش می‌یابد:



کاهش واکنش‌پذیری فلز



پاسخ تشریحی

عبارت‌های «الف»، «پ» و «ت» نادرست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

الف) ثابت تعادل فقط به دما بستگی دارد و با تغییر غلظت مواد، تغییری نمی‌کند.

ب) واکنش $2\text{NO(g)} \rightarrow \text{N}_2\text{(g)} + \text{O}_2\text{(g)}$ ، گرماده و از نوع اکسایش - کاهش است.

پ) برای تبدیل پارازیلین به ترفتالیک اسید، می‌توان از اکسیژن هوا به عنوان واکنش‌دهنده و کاتالیزگرهای مناسب استفاده کرد.

ت) جرقه انرژی فعال‌سازی واکنش را تأمین می‌کند، کاهش نمی‌دهد!

