خیلی سبز! آزمون
تجربی | ریاضی | انسانی

سال تحصیلی ۱۴۰۳_۱۴۰۲

آزمون هفدهم حضوری

دفترچه شماره ۱

ویژهٔ کنکوری‌های ۱۴۰۳

۱۴۰۳/۰۴/۱۳

مطابق کنکور سراسری

آزمون آزمایشی خیلی سبز

گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی

• نام و نام خانوادگی: • شماره داوطلبی:

عنوان مواد امتحانی آزمون، تعداد، شماره سؤالات و مدت پاسخ‌گویی

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخ‌گویی	ملاحظات
۱	ریاضیات	۴۰	۱	۴۰	۷۵ دقیقه	۴۰ سؤال ۷۵ دقیقه

اساتید، مشاوران و دانش‌آموزان گرامی؛
نظرات، پیشنهادات، انتقادات و بازخوردهای خود نسبت به سؤالات این آزمون را می‌توانید از طریق آیدی Kheilisabz_edit@ در همهٔ پیام‌رسان‌ها با ما به اشتراک بگذارید.

Azmoon.kheilisabz.com

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱- هرگاه ... , $a , a+2b , 2a+b$ جملات ابتدایی یک دنبالهٔ حسابی باشند که جمع ده جملهٔ ابتدایی آن ۲۴۰ باشد، مقدار ab کدام است؟

۱) ۶　　۲) ۱۲　　۳) ۸　　۴) ۱۶

۲- اگر α و β ریشه‌های $2x^2-5x-m=0$ و اعداد $\alpha+\beta$ و $\beta-\alpha$ ریشه‌های معادلهٔ $x^2-mx+n=0$ باشند، مقدار n کدام است؟

۱) $\frac{45}{4}$　　۲) $\frac{45}{2}$　　۳) $\frac{9}{4}$　　۴) $\frac{25}{4}$

۳- برای دو مجموعهٔ A و B ، ساده‌شدهٔ عبارت $[(A-B')\cup(A'\cap B')]\cap(A'\cup B)'$ کدام است؟

۱) $A-B$　　۲) $B-A$　　۳) $\varnothing$　　۴) $A\cap B$

۴- کدام‌یک از گزاره‌های زیر، همواره نادرست است؟

۱) $[(p\wedge\sim q)\vee\sim(\sim p\vee\sim q)]\wedge\sim p$

۲) $A=\{1,2,3\},B=\{1,4,9,16\}\Rightarrow n[(A\times B)\cap(B\times A)]=1$

۳) $\exists x\in\mathbb{R},\ \forall y\in\mathbb{R}\ ;\ x^2\le y^4$

۴) $A\in B\ \Rightarrow\ \{A\}\subseteq B$

۵- تابع $f(x)=x^2+ax+b$ مفروض است. اگر نمودار f را دو واحد به سمت بالا انتقال دهیم و سپس نسبت به محور yها قرینه کنیم، بر نیمساز ناحیهٔ اول مماس می‌شود و اگر نمودار f را یک واحد به سمت پایین انتقال دهیم و سپس نسبت به محور xها قرینه کنیم، بر نیمساز ناحیهٔ دوم مماس می‌شود. مقدار $a+b$ کدام است

۱) ۴　　۲) ۵　　۳) ۶　　۴) ۷

۶- هرگاه $\frac{4}{21}=\frac{x-1}{x^3-1}-\frac{x+1}{x^3+1}$، مقدار $[\frac{3x}{2}]$ با شرط $x>1$ چه عددی است؟

۱) ۶　　۲) ۲　　۳) ۴　　۴) ۳

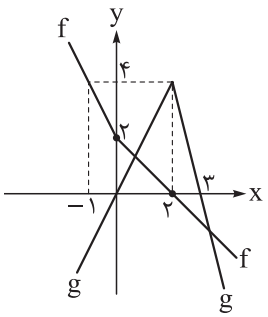
۷- نقطهٔ M روی عمودمنصف نقاط $A(4,0)$ و $B(0,8)$ قرار گرفته و فاصلهٔ آن تا هر یک از نقاط A و B برابر ۵ است. مجموع طول و عرض مختصات M کدام است؟

۱) ۱۲　　۲) ۸　　۳) ۹　　۴) ۱۰

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸- نمودار توابع f و g به صورت زیر است. دامنهٔ تابع $y=\sqrt{gof(x)}$ شامل چند عدد صحیح است؟



۱) ۳

۲) ۴

۳) ۵

۴) ۲

۹- اگر $a\neq b$ و $\log_{\sqrt{b}} a^{۲}-\log_{a} b^{۲}=۲$، کدام رابطه بین a و b برقرار است؟

۱) $a^{۲}b=۱$　　۲) $ab^{۲}=۱$　　۳) $ab^{۴}=۱$　　۴) $a^{۴}b=۱$

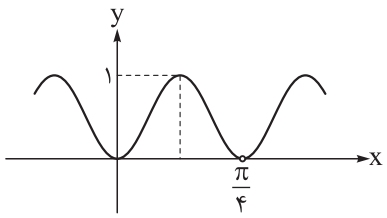
۱۰- هرگاه $f(x)=x+\sqrt{۴+x^{۲}}$، مقدار $f^{-۱}(۲\tan x)$ کدام است؟

۱) $۲\cot ۲x$　　۲) $-۲\cot ۲x$　　۳) $۲\tan ۲x$　　۴) $-\frac{۱}{۲}\tan ۲x$

۱۱- اگر $\sin(x+\frac{\pi}{۳})+۲\cos(x-\frac{\pi}{۶})=\frac{۳}{۲}$، مقدار $\sin(x+\frac{\pi}{۶})$ چه عددی است؟

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ یا ۱　　۲) $\pm\frac{۱}{۲}$　　۳) $-\frac{۱}{۲}$ یا صفر　　۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ یا صفر

۱۲- قسمتی از نمودار تابع $f(x)=\frac{a\sin^{۲} bx}{۱+\tan^{۲} bx}$ به صورت زیر است. مقدار $f(\frac{\pi}{۲۴})$ کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۸}$　　۲) $\frac{۱}{۴}$

۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$　　۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۸}$

۱۳- اگر α کوچک‌ترین جواب معادلهٔ $\sin x\cos x+\sin^{۲} x=\cos^{۲} x$ در بازهٔ $(۰,\frac{\pi}{۲})$ باشد، حاصل $\tan(\frac{\pi}{۴}+۲\alpha)$ چه‌قدر است؟

۱) -۳　　۲) $\frac{۳}{۴}$　　۳) $\frac{۴}{۳}$　　۴) -۴

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۴- اگر g وارون تابع $f(x)=-\sqrt{x-3}$ باشد، فاصلهٔ نقطهٔ برخورد مجانب‌های تابع $y=\frac{|2x+1|}{2x-\sqrt{g(-x)}}$ از نیمساز ناحیهٔ سوم چه‌قدر است؟

۱) $\frac{1}{3}$　　۲) $\frac{1}{\sqrt{2}}$　　۳) $\frac{3}{\sqrt{2}}$　　۴) $\frac{3}{2}$

۱۵- اگر $f(x)$ یک چندجمله‌ای درجه‌دوم باشد و تابع $y=\frac{f(x)+x^3}{2[\frac{x}{3}]+3}$ در بازهٔ $(0,10)$ پیوسته باشد، طول رأس تابع $y=f(x)$ چه عددی است؟

۱) $\frac{13}{4}$　　۲) $\frac{11}{4}$　　۳) $\frac{15}{4}$　　۴) $\frac{10}{4}$

۱۶- مقدار $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}(4x^2-1)\tan\pi x$ چه عددی است؟

۱) $\frac{\pi}{4}$　　۲) $\frac{4}{\pi}$　　۳) $-\frac{4}{\pi}$　　۴) $-\frac{\pi}{4}$

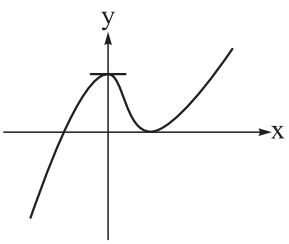
۱۷- اگر تابع f در $x=2$ مشتق‌پذیر و $\lim\limits_{x\to2}\frac{f(x)-3x}{x^2-4}=3$ باشد، حاصل مشتق تابع $g(x)=\sqrt[3]{4x}\,f(x)$ در نقطهٔ $x=2$ چه‌قدر است؟

۱) ۱۸　　۲) ۲۴　　۳) ۲۷　　۴) ۳۲

۱۸- تابع $f(x)=\frac{2x+1}{x-3}$ مفروض است. آهنگ تغییر متوسط f در بازهٔ $[4,10]$ با آهنگ تغییر لحظه‌ای f^{-1} در نقطه‌ای با کدام طول در این بازه برابر است؟

۱) $3+\sqrt{3}$　　۲) $3+\sqrt{2}$　　۳) $2+\sqrt{5}$　　۴) $2+\sqrt{7}$

۱۹- نمودار تابع $f(x)=x+a+3\sqrt[3]{1+bx}$ به صورت زیر است. عرض نقطهٔ ماکزیمم نسبی چه‌قدر است؟



۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۶

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۰- نقطهٔ $A(-۱,۲)$ نقطهٔ عطف تابع $f(x)=x^۳+ax^۲+bx+c$ است. اگر خط مماس بر f در نقطهٔ A دارای عرض از مبدأ یک باشد، مقدار $b+c$ کدام است؟

۱) ۲　　۲) ۳　　۳) ۴　　۴) ۵

۲۱- A و B دو پیشامد مستقل از فضای نمونه‌ای S هستند که $P(A)+P(B)=\frac{۲۳}{۱۷}$. اگر $P(A|B)=۲P(B|A)$، آن‌گاه احتمال آن‌که فقط پیشامد A رخ دهد یا هر دو با هم رخ دهند، کدام است؟

۱) $\frac{۲۳}{۵۱}$　　۲) $\frac{۴۶}{۵۱}$　　۳) $\frac{۱۰۵۸}{۲۶۰۱}$　　۴) $\frac{۱۲۸۸}{۲۶۰۱}$

۲۲- آمارها نشان می‌دهد در کشور چین، تنها ۱ درصد خودروهای تولیدشده معیوب هستند. در سال ۲۰۲۳ کشور چین، یک میلیون خودرو تولید کرده است و هزار دستگاه خودرو از این کشور در این سال وارد کشور ایران شده است. اگر به تصادف از بین خودروهای چینی مدل ۲۰۲۳ در کشور ایران، یک دستگاه انتخاب کنیم، با چه احتمالی معیوب است؟

۱) ۱ درصد　　۲) ۲ درصد　　۳) ۱/۵ درصد　　۴) بیش از ۱۰ درصد

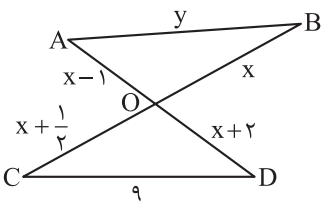
۲۳- از یک جامعه، نمونهٔ ۲۲۰ ، ۱۸۰ ، ۱۶۰ ، ۱۶۰ ، ۱۴۰ ، ۱۲۰ ، ۱۰۰ ، ۱۰۰ و ۸۰ انتخاب شده است. اگر انحراف معیار جامعه، نصف انحراف معیار نمونه باشد، طول بازهٔ اطمینان بالای ۹۵ درصد برای میانگین این جامعه کدام است؟

۱) $۱۰\sqrt{۵}$　　۲) $۱۰\sqrt{۲۰}$　　۳) $\frac{۱۰}{۳}\sqrt{۲۰}$　　۴) $\frac{۸۰\sqrt{۱۰}}{۹}$

۲۴- از میان زیرمجموعه‌های دوعضوی یک مجموعهٔ پنج‌عضوی، k زیرمجموعه به تصادف انتخاب کرده‌ایم. اگر مطمئن باشیم اشتراک لااقل دوتا از آن‌ها تهی است، چه‌قدر احتمال دارد که k مضرب ۳ باشد؟

۱) $\frac{۱}{۳}$　　۲) $\frac{۲}{۵}$　　۳) $\frac{۳}{۱۰}$　　۴) $\frac{۳}{۸}$

۲۵- در شکل مقابل، AB و CD موازی نیستند. اگر دو مثلث متشابه باشند، مقدار y کدام است؟



۱) ۴

۲) ۳

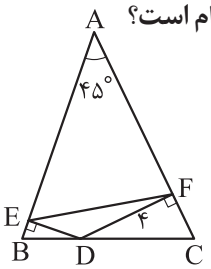
۳) ۴/۵

۴) ۶

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۶- در شکل مقابل، اگر $AB = AC = 5\sqrt{2}$، $DF = 4$ و $\hat{A} = 45^\circ$، آن‌گاه مساحت مثلث DEF کدام است؟



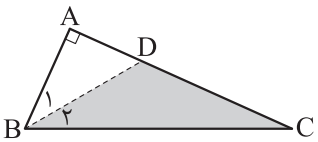
۱) $\sqrt{2}$

۲) ۲

۳) $\sqrt{6}$

۴) $2\sqrt{2}$

۲۷- در شکل زیر $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$، اگر $AB = 3$ و $AC = 4$، آن‌گاه حجم شکل حاصل از دوران مثلث BCD حول AC چند برابر π است؟



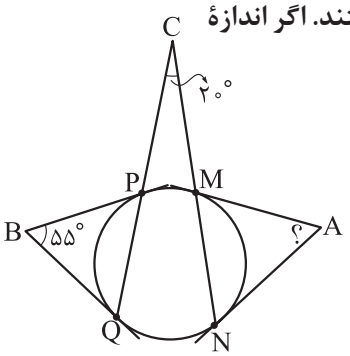
۱) ۷

۲) ۷/۵

۳) ۸

۴) ۸/۵

۲۸- در شکل مقابل، اضلاع دو زاویهٔ A و B در نقاط M، N، P و Q بر دایره مماس هستند. اگر اندازهٔ کمان $\overset{\frown}{QN}$ دو برابر اندازهٔ کمان $\overset{\frown}{PM}$ باشد، آن‌گاه اندازهٔ زاویهٔ A چند درجه است؟



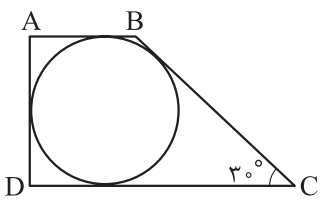
۱) ۷۰

۲) ۷۵

۳) ۶۵

۴) ۶۰

۲۹- مطابق شکل، در ذوزنقهٔ قائم‌الزاویهٔ ABCD دایره‌ای به شعاع ۳ محاط شده است. مساحت ذوزنقه کدام است؟



۱) ۳۶

۲) ۶۴

۳) ۵۴

۴) ۴۸

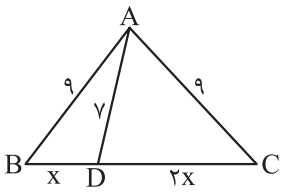
محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۰- دو دایره به شعاع‌های ۱ و ۳ مماس‌خارج هستند و خط L مماس‌مشترک خارجی آن‌ها است. اگر M نقطه‌ای روی L باشد، آن‌گاه کم‌ترین مقدار مجموع فواصل M از مراکز دو دایره کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۷}$　　۲) ۵　　۳) $۳\sqrt{۳}$　　۴) $۴\sqrt{۲}$

۳۱- در شکل مقابل، اگر نقطهٔ M وسط BC باشد، سینوس زاویهٔ DAM کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۷}$　　۲) $\frac{۲}{۷}$

۳) $\frac{۳}{۷}$　　۴) $\frac{۴}{۷}$

۳۲- اگر $\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۴ & ۰ \\ ۳ & -۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix} = M$، آن‌گاه مجموع درایه‌های ستون سوم ماتریس M کدام است؟

۱) ۸　　۲) ۷　　۳) ۶　　۴) ۵

۳۳- اگر $A = \begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ ۳ & -۱ \end{bmatrix}$، I ماتریس همانی و α و β دو عدد حقیقی باشند، به طوری که $A = \alpha A^{-۱} + \beta I$، آن‌گاه مقدار $\frac{\alpha}{\beta}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۵}{۲}$　　۲) $\frac{۵}{۲}$　　۳) ۲　　۴) -۲

۳۴- اگر تنها یک خط بر هر دو دایرهٔ $x^۲ + y^۲ - ۲y - ۱ = ۰$ و $x^۲ + y^۲ - ۲x + m = ۰$ مماس باشد، m کدام است؟

۱) -۳　　۲) -۵　　۳) -۷　　۴) ۳

۳۵- طول مماسی که از کانون سهمی $y^۲ + ۴x = ۳(۲y + ۱)$ بر دایرهٔ $x^۲ + y^۲ - ۲x + y = ۰$ رسم می‌شود، کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۳}$　　۲) ۳

۳) $\sqrt{۱۵}$　　۴) چنین مماسی قابل رسم نیست.

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۶- بردارهای $\vec{a}=(۳,m-۱,۵)$ و $\vec{b}=(m,۱,-۳)$ و $\vec{c}=(m,۲m,m^{۲})$ مفروض‌اند. اگر اندازهٔ بردارهای $\vec{a}+\vec{b}$ و $\vec{a}-\vec{b}$ برابر باشند، حجم متوازی‌السطوح بنا شده، بر بردارهای $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ کدام است؟

۱) ۳۲　　۲) ۳۴　　۳) ۳۶　　۴) ۳۸

۳۷- در تقسیم عدد a بر ۱۱، باقی‌مانده ۱ واحد کوچک‌تر از خارج قسمت است. مجموع ارقام بزرگ‌ترین عدد ممکن برای a کدام است؟

۱) ۱۲　　۲) ۹　　۳) ۷　　۴) ۵

۳۸- عدد شش‌رقمی $A=\overline{abcabc}$ بر ۱۰۵ بخش‌پذیر و B برابر با مجموع ارقام A است. مجموع ارقام بزرگ‌ترین مقدار ممکن برای B کدام است؟

۱) ۱۲　　۲) ۹　　۳) ۶　　۴) ۳

۳۹- به ازای چند عدد دورقمی a، معادلهٔ سیالهٔ خطی $ax+۱۵y=۱۷$ دارای جواب صحیح نیست؟

۱) ۴۱　　۲) ۴۲　　۳) ۴۸　　۴) ۴۹

۴۰- در گرافی ۴ـ منتظم و ناهمبند، عدد احاطه‌گری برابر ۲ است. تعداد دورهای به طول ۳ در این گراف کدام است؟

۱) ۲۰　　۲) ۱۰　　۳) ۵　　۴) صفر

دوستان عزیز خیلی‌سبز، سلام؛
فایل پاسخ‌نامهٔ این آزمون را که شامل درس‌نامه، نکات کنکوری، پاسخ تشریحی و ... است، ساعت ۱۴ امروز از صفحهٔ شخصی خودتان در سایت آزمون خیلی‌سبز دریافت کنید.
هم‌چنین شما می‌توانید همین امشب کارنامهٔ اولیهٔ آزمونتان را در صفحهٔ شخصی خود مشاهده بفرمایید.
برای دسترسی به صفحهٔ شخصی خود وارد سایت آزمون خیلی‌سبز به آدرس: azmoon.kheilisabz.com شوید و کدی را که توسط مدرسه و یا نمایندگی‌های آزمون‌های خیلی‌سبز به شما داده شده، در محل مشخص‌شده در سایت ثبت بفرمایید.

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

خیلی سبز! آزمون
تجربی | ریاضی | انسانی
سال تحصیلی ۱۴۰۳_۱۴۰۲

آزمون هفدهم حضوری
دفترچه شماره ۲

ویژهٔ کنکوری‌های ۱۴۰۳
۱۴۰۳/۰۴/۱۳

مطابق کنکور سراسری

آزمون آزمایشی خیلی سبز

گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی

• نام و نام خانوادگی: • شماره داوطلبی:

عنوان مواد امتحانی آزمون، تعداد، شماره سؤالات و مدت پاسخ‌گویی

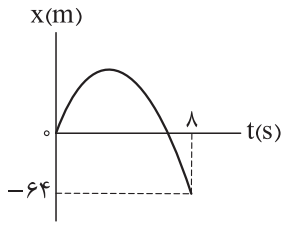
ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخ‌گویی	ملاحظات
۱	فیزیک	۳۵	۴۱	۷۵	۴۵ دقیقه	۶۵ سؤال ۸۰ دقیقه
۲	شیمی	۳۰	۷۶	۱۰۵	۳۵ دقیقه	

اساتید، مشاوران و دانش‌آموزان گرامی؛
نظرات، پیشنهادات، انتقادات و بازخوردهای خود نسبت به سؤالات این آزمون را می‌توانید از طریق آیدی Kheilisabz_edit@ در همهٔ پیام‌رسان‌ها با ما به اشتراک بگذارید.

Azmoon.kheilisabz.com

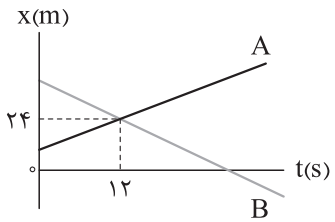
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۱- نمودار مکان ـ زمان متحرکی که با شتاب ثابت در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل مقابل است. اگر متحرک با تندی $24\,m/s$ از مبدأ مکان عبور کند، در بازهٔ زمانی‌ای که بردار مکان متحرک در جهت محور x است، مسافت طی‌شده توسط آن چند متر است؟



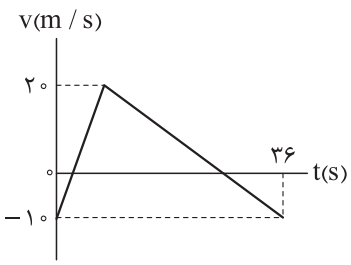
۱) ۳۶　　۲) ۴۸
۳) ۷۲　　۴) ۹۶

۴۲- نمودار مکان ـ زمان دو متحرک A و B که در راستای محور x حرکت می‌کنند، به شکل زیر است. تندی متحرک B، ۲ برابر تندی متحرک A است. اگر فاصلهٔ دو متحرک در مبدأ زمان $48\,m$ باشد، در لحظه‌ای که متحرک B از مبدأ مکان عبور می‌کند، فاصلهٔ دو متحرک از هم چند متر است؟



۱) ۲۴
۲) ۲۸
۳) ۳۲
۴) ۳۶

۴۳- نمودار سرعت ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل مقابل است. در بازه‌ای که متحرک در جهت محور x حرکت می‌کند، مسافت طی‌شده توسط آن چند متر است؟



۱) ۲۴۰　　۲) ۲۷۰
۳) ۴۸۰　　۴) ۵۴۰

۴۴- در شرایط خلأ، گلوله‌ای از یک بلندی رها می‌شود. وقتی این گلوله مسافت $28/8\,m$ را طی می‌کند، گلولهٔ دیگری از همان نقطه رها می‌شود. فاصلهٔ دو گلوله $4/2\,s$ پس از رهاشدن گلولهٔ اول چند متر است؟ $(g = 10\,m/s^2)$

۱) ۴۳/۲　　۲) ۴۶/۸
۳) ۷۲　　۴) ۹۶

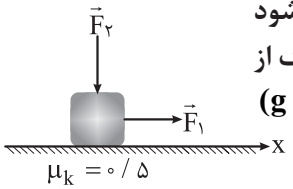
۴۵- وزنه‌ای به جرم $3\,kg$ به یک انتهای فنری با ثابت $500\,N/m$ بسته شده و انتهای دیگر نیز به سقف آسانسوری متصل است. در حالتی که آسانسور با شتاب رو به بالای $2\,m/s^2$ حرکت می‌کند، طول فنر به L_1 و در حالتی که آسانسور با شتاب رو به پایین $1\,m/s^2$ حرکت می‌کند، طول فنر به L_2 می‌رسد. $L_2 - L_1$ برحسب سانتی‌متر کدام است؟

۱) ۰/۶　　۲) −۰/۶
۳) ۱/۸　　۴) −۱/۸

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

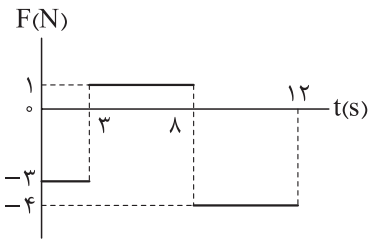
۴۶- در شکل مقابل، به جسم ۴کیلوگرمی دو نیروی هم‌اندازهٔ افقی $\vec{F}_1$ و قائم $\vec{F}_2$ وارد می‌شود و جسم روی سطح افقی با سرعت ثابت در حال حرکت است. اگر در یک لحظه، اندازهٔ هر یک از نیروها نصف شود، بلافاصله پس از این لحظه، شتاب جسم در SI کدام است؟ $(g = ۱۰\ N/kg)$



۱) $۲\vec{i}$　　۲) $-۲\vec{i}$

۳) $۲/۵\vec{i}$　　۴) $-۲/۵\vec{i}$

۴۷- نمودار نیروی خالص وارد بر جسمی به جرم ۸۰۰ g که در راستای محور x حرکت می‌کند، برحسب زمان به شکل مقابل است. اگر در مبدأ زمان، جسم با تندی ۵ m/s در جهت محور x در حال حرکت باشد، اندازهٔ تکانهٔ جسم در لحظهٔ $t = ۱۰\ s$ در SI کدام است؟



۱) ۸　　۲) ۱۲

۳) ۱۶　　۴) ۲۰

۴۸- دو ماهوارهٔ A و B به‌ترتیب با جرم‌های m و ۲m، در فاصله‌های R_e و $۲R_e$ از سطح زمین، در مدارهای دایره‌ای به دور زمین می‌چرخند. چه تعداد از عبارت‌های زیر دربارهٔ این دو ماهوارهٔ در حال چرخش درست است؟ (R_e شعاع زمین است.)

الف) تندی ماهوارهٔ A، $\sqrt{\frac{۲}{۳}}$ برابر تندی ماهوارهٔ B است.

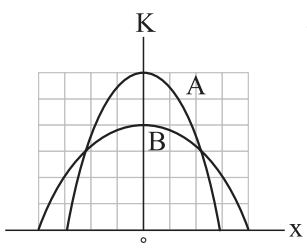
ب) وزن ماهوارهٔ A، نصف وزن ماهوارهٔ B است.

پ) دورهٔ گردش ماهوارهٔ A، $\sqrt{\frac{۲۷}{۸}}$ برابر دورهٔ گردش ماهوارهٔ B است.

ت) انرژی جنبشی ماهوارهٔ A، $\frac{۳}{۴}$ برابر انرژی جنبشی ماهوارهٔ B است.

۱) ۴　　۲) ۳　　۳) ۲　　۴) ۱

۴۹- نمودار انرژی جنبشی ـ مکان دو سامانهٔ جرم ـ فنر A و B به شکل مقابل است. ثابت فنر سامانهٔ A، چند برابر ثابت فنر سامانهٔ B است؟



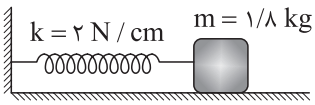
۱) $\frac{۸}{۳}$　　۲) $\frac{۳}{۸}$

۳) $\frac{۳۲}{۲۷}$　　۴) $\frac{۲۷}{۳۲}$

محل انجام محاسبات

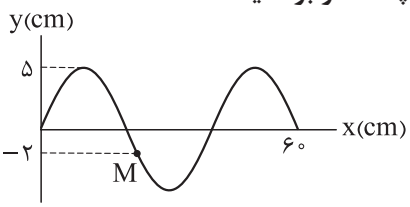
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۰- در شکل زیر، جسم متصل به فنر روی سطح افقی بدون اصطکاک در حال نوسان است. اگر حداکثر مسافت طی‌شده توسط جسم در یک بازهٔ زمانی ۰/۱ ثانیه‌ای برابر ۹ cm باشد، بیشینهٔ شتاب نوسانگر چند متر بر مربع ثانیه است؟ $(\pi^2 = 10)$



۱) ۵
۲) ۱۰
۳) $5\sqrt{3}$
۴) $10\sqrt{3}$

۵۱- تصویر موج عرضی منتشرشده در تار کشیده‌ای در لحظهٔ $t = 0$ به شکل زیر است. اگر تندی انتشار موج در تار برابر ۶۰ m / s باشد، تندی متوسط ذرهٔ M از تار در بازهٔ زمانی $t = 0$ تا $t = 0/05\ s$ چند متر بر ثانیه است؟

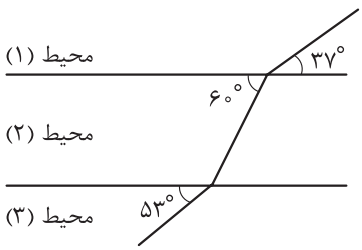


۱) ۱/۵
۲) ۳
۳) ۱۵
۴) ۳۰

۵۲- تراز شدت صوت در فاصلهٔ معینی از یک چشمه ۵۶ dB است. آهنگ متوسط انرژی رسیده به سطحی به مساحت ۵ cm^2 که در این فاصله و عمود بر راستای انتشار صوت قرار دارد، در SI کدام است؟ $(I_0 = 10^{-12}\ W/m^2$ و $\log 2 = 0/3)$

۱) 4×10^{-10}
۲) 4×10^{-11}
۳) 2×10^{-10}
۴) 2×10^{-11}

۵۳- شکل مقابل، یکی از جبهه‌های موج تختی را در سه محیط با مرزهای موازی نشان می‌دهد. به ترتیب از راست به چپ، طول موج و بسامد موج در محیط (۱) چند برابر طول موج و بسامد آن در محیط (۳) است؟ $(\sin 37^\circ = 0/6)$



۱) $\frac{4}{3}$ ، $\frac{3}{4}$
۲) $\frac{4}{3}$ ، ۱
۳) $\frac{3}{4}$ ، $\frac{3}{4}$
۴) $\frac{3}{4}$ ، ۱

۵۴- یکی از سیم‌های ویولن به طول ۲۵ cm و جرم ۰/۵ g در نزدیکی یک نوسان‌کننده با بسامد متغیر که بسامد آن بین ۵۰۰ تا ۱۰۰۰ هرتز تغییر می‌کند، قرار دارد و این سیم فقط برای دو بسامد ۶۰۰ و ۹۰۰ هرتز به تشدید درمی‌آید. نیروی کشش سیم چند نیوتون است؟

۱) ۴۵
۲) ۵۰
۳) ۴/۵
۴) ۵

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۵۵- طول موج آستانهٔ فلزی $۳۱۰\,nm$ است. اگر فوتونی با انرژی $۱۵/۲۵\,eV$ بر سطح این فلز بتابد، بیشینهٔ تندی فوتوالکترون‌های خارج‌شده از سطح این فلز چند متر بر ثانیه است؟ ($hc = ۱۲۴۰\,eV.nm$ ، $e = ۱/۶\times۱۰^{-۱۹}\,C$ و جرم الکترون $۹\times۱۰^{-۳۱}\,kg$ است.)

۱) ۲×۱۰^{۵}　　۲) ۲×۱۰^{۶}　　۳) ۴×۱۰^{۵}　　۴) ۴×۱۰^{۶}

۵۶- در اتم هیدروژن، بلندترین طول موجی که الکترون تابش می‌کند تا به مدار n' برسد، $\frac{۴۰}{۹}\,\mu m$ است. شعاع مدار n' چند برابر شعاع بور است؟ $(R = ۰/۰۱(nm)^{-۱})$

۱) ۴　　۲) ۵　　۳) ۱۶　　۴) ۲۵

۵۷- تعداد پروتون‌های یک هسته، برابر تعداد نوترون‌های آن است. این هسته با گسیل ۲ پرتو α و ۴ پرتو β^{+} به هستهٔ جدیدی تبدیل می‌شود. اختلاف تعداد نوترون‌ها و پروتون‌های این هستهٔ جدید کدام است؟

۱) ۸　　۲) ۴　　۳) ۲　　۴) صفر

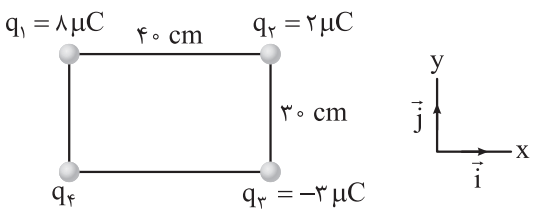
۵۸- در راکتور شکافت هسته‌ای، به ترتیب از راست به چپ، از کدام ماده برای کُندکردن نوترون‌ها و از کدام ماده برای ساخت میله‌های کنترل استفاده می‌شود؟

۱) گرافیت، بور　　۲) گرافیت، آب سنگین $(D_۲O)$

۳) کادمیم، بور　　۴) کادمیم، آب سنگین $(D_۲O)$

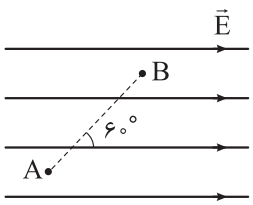
۵۹- در شکل مقابل چهار بار الکتریکی نقطه‌ای در چهار رأس مستطیلی قرار دارند. اگر نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار $q_۲$ برابر $\vec{F} = (۱/۷N)\vec{i}$ باشد، اندازهٔ میدان الکتریکی حاصل از بار $q_۴$ در مرکز مستطیل چند نیوتون بر کولن است؟

$(K = ۹\times۱۰^{۹}\,\frac{N.m^{۲}}{C^{۲}})$



۱) ۵×۱۰^{۵}　　۲) ۵×۱۰^{۶}　　۳) ۲×۱۰^{۵}　　۴) ۲×۱۰^{۶}

۶۰- در شکل مقابل، اندازهٔ میدان الکتریکی یکنواخت $۵۰۰\,N/C$ و فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B برابر $۴۰\,cm$ است. اگر پتانسیل الکتریکی نقطهٔ A برابر $۵۰\,V$ باشد، پتانسیل الکتریکی نقطهٔ B برابر چند ولت است؟



۱) ۵۰　　۲) ۱۵۰

۳) -۵۰　　۴) -۱۵۰

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶۱- ثابت دی‌الکتریک یک خازن متصل به باتری، برابر ۴ است. اگر ابتدا دی‌الکتریک خازن را برداشته، سپس خازن را از باتری جدا کرده و فاصلهٔ بین صفحه‌های آن را نصف کنیم، کدام‌یک از موارد زیر درست است؟

الف) اندازهٔ میدان الکتریکی بین صفحه‌های خازن تغییر نمی‌کند.

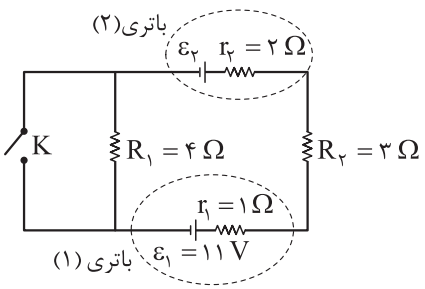
ب) اختلاف پتانسیل بین صفحه‌های خازن ۲ برابر می‌شود.

پ) بار الکتریکی ذخیره‌شده در خازن ۸ برابر می‌شود.

ت) انرژی ذخیره‌شده در خازن $\frac{۱}{۸}$ برابر می‌شود.

۱) الف و پ　　۲) الف و ت　　۳) ب و پ　　۴) ب و ت

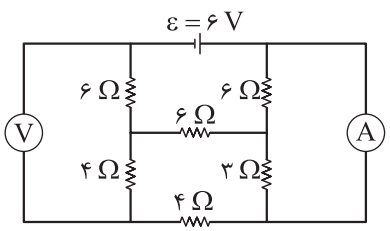
۶۲- در مدار شکل مقابل، اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر باتری (۱) برابر $۱۱/۵\ V$ است. با بستن کلید K، اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر باتری (۲) چندولت تغییر می‌کند؟



۱) $\frac{۱}{۳}$　　۲) $\frac{۲}{۳}$

۳) $\frac{۱}{۶}$　　۴) $\frac{۷}{۶}$

۶۳- در مدار شکل زیر، مقداری که آمپرسنج آرمانی و ولت‌سنج آرمانی نشان می‌دهند، به ترتیب چند آمپر و چند ولت است؟



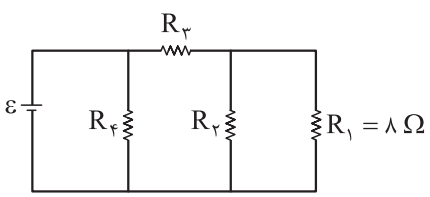
۱) ۳ / ۴،۰ / ۲

۲) ۳ / ۸،۰ / ۴

۳) ۵ / ۴،۰ / ۲

۴) ۵ / ۸،۰ / ۴

۶۴- در مدار شکل زیر، اگر توان مصرفی تمام مقاومت‌ها با یکدیگر برابر باشد، مقاومت معادل مدار چند اهم است؟



۱) ۶

۲) ۵ / ۴

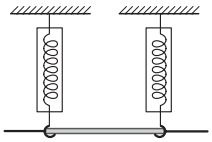
۳) ۵ / ۳

۴) ۳

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

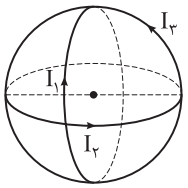
۶۵- در شکل زیر، یک سیم به چگالی خطی جرم $8\,g/m$ با دو نیروسنج فنری که به دو انتهای آن بسته شده‌اند، به طور افقی و در راستای غرب ـ شرق قرار دارد. در محل سیم، میدان مغناطیسی زمین، یکنواخت، به طرف شمال و اندازهٔ آن برابر $0/05\,mT$ است. جریان الکتریکی چند آمپری و در چه جهتی از سیم عبور کند تا نیروسنج‌ها عدد صفر را نشان دهند؟ $(g = 10\,N/kg)$



۱) ۱۶۰، غرب به شرق　　۲) ۱۶۰، شرق به غرب

۳) ۱۶۰۰، غرب به شرق　　۴) ۱۶۰۰، شرق به غرب

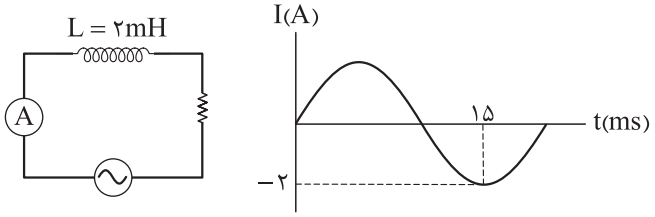
۶۶- در شکل زیر، شعاع هر سه حلقه $20\,cm$ و جریان الکتریکی عبوری از آن‌ها $I_1 = 0/3A$، $I_2 = 0/4A$ و $I_3 = 1/2A$ است. حلقه‌ها هم‌مرکزند، روکش عایق دارند و سطح هر حلقه بر دو حلقهٔ دیگر عمود است. بزرگی میدان مغناطیسی در مرکز حلقه‌ها چند گاوس است؟ $(\mu_0 = 12\times10^{-7}\,\frac{T.m}{A})$



۱) $3/9\times10^{-2}$　　۲) $3/9\times10^{-4}$

۳) $7/8\times10^{-2}$　　۴) $7/8\times10^{-4}$

۶۷- در مدار شکل «الف»، نمودار جریان حاصل از مولد جریان متناوب برحسب زمان به شکل «ب» است. انرژی ذخیره‌شده در القاگر در لحظهٔ $t = 7/5\,ms$ چند میلی‌ژول است؟



(الف)　　(ب)

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) ۴

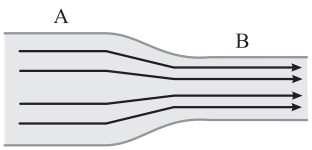
۶۸- چگالی مایع A، ۲ برابر چگالی مایع B است. در حالت اول جرم یکسانی از دو مایع و در حالت دوم حجم یکسانی از دو مایع را مخلوط می‌کنیم. چگالی محلول حاصل در حالت اول، چند برابر چگالی محلول حاصل در حالت دوم است؟ (حجم مایع‌ها در اثر مخلوط‌شدن کاهش نمی‌یابد.)

۱) $\frac{8}{9}$　　۲) $\frac{9}{8}$　　۳) $\frac{3}{4}$　　۴) $\frac{4}{3}$

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

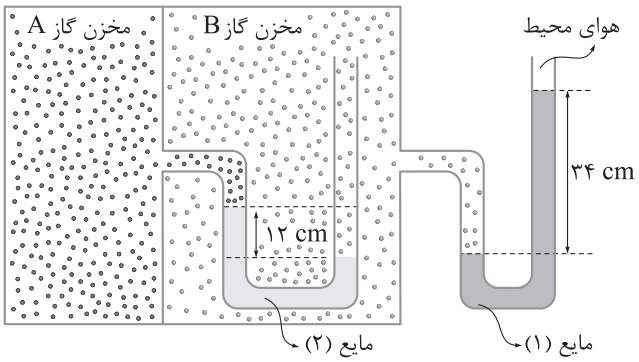
۶۹- در شکل زیر، شارهٔ تراکم‌ناپذیری که حجم لوله را پر کرده است در راستای افقی جاری است و شعاع مقطع لوله در قسمت A، ۲ برابر شعاع مقطع لوله در قسمت B است. اگر تندی شاره در قسمت A برابر $۰/۵\ m/s$ باشد، کار کل انجام‌شده روی $۸۰۰\ g$ از شاره، وقتی از قسمت A به قسمت B می‌رسد، چند ژول است؟



۱) ۱/۵　　۲) −۱/۵

۳) ۰/۳　　۴) −۰/۳

۷۰- در شکل زیر، اگر چگالی مایع‌های (۱) و (۲) به ترتیب برابر $۱/۲\ g/cm^3$ و $۰/۸۵\ g/cm^3$ باشد، فشار پیمانه‌ای مخزن گاز A چند میلی‌متر جیوه است؟ (فشار هوای محیط $۱۰^5\ Pa$ و چگالی جیوه $۱۳/۶\ g/cm^3$ است.)



۱) ۳۷/۵

۲) ۲۲/۵

۳) −۳۷/۵

۴) −۲۲/۵

۷۱- تلمبه‌ای با توان ورودی $۱۲/۵\ kW$ در هر دقیقه $۳\ m^3$ از آب ساکن دریاچه‌ای را $۱۲\ m$ بالا برده و آن را با تندی $۴\ m/s$ وارد مخزنی می‌کند. اگر چگالی آب $۱\frac{g}{cm^3}$ باشد، بازده تلمبه چند درصد است؟ $(g = ۱۰\ N/kg)$

۱) ۴۸　　۲) ۴۸/۸　　۳) ۵۱/۲　　۴) ۵۲

۷۲- ضریب انبساط طولی فلزی $۳\times۱۰^{-۵}\ \frac{۱}{K}$ است. اگر دمای این فلز $۱۲۰^\circ F$ افزایش یابد، چگالی آن تقریباً چند درصد کاهش می‌یابد؟

۱) ۰/۲　　۲) ۰/۶　　۳) ۰/۳۶　　۴) ۱/۰۸

۷۳- مقداری یخ به جرم $m_۱$ و دمای $-۲۰^\circ C$ را در مقداری آب به جرم $m_۲$ و دمای $۲۰^\circ C$ می‌اندازیم. اگر پس از برقراری تعادل گرمایی مخلوطی از $۱۰۰\ g$ یخ و $۶۰۰\ g$ آب ایجاد شود، نسبت $\frac{m_۲}{m_۱}$ برابر کدام است؟ $(L_f = ۳۳۶\ J/g\ ,\ c_{آب} = ۲c_{یخ} = ۴/۲\ \frac{J}{gk})$

۱) $\frac{۳}{۴}$　　۲) $\frac{۴}{۳}$　　۳) $\frac{۲}{۵}$　　۴) $\frac{۵}{۲}$

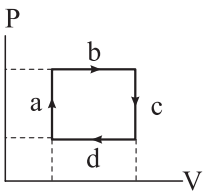
محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷۴- با یک مخزن ۱۵لیتری که با گاز کامل با دمای $27^{\circ}C$ پر شده و فشار آن $6/4\,atm$ است، به نوبت دو کپسول خالی ۵لیتری را تا رسیدن به تعادل پر و جدا می‌کنیم. عددی که فشارسنج متصل به آخرین کپسول پرشده نشان می‌دهد، چند اتمسفر است؟ (فشار هوای محیط $1\,atm$ و دمای گاز در تمام مراحل ثابت است.)

۱) ۳/۶ ۲) ۳/۸۴ ۳) ۲/۸۴ ۴) ۲/۶

۷۵- یک ماشین گرمایی چرخه‌ای به شکل مقابل طی می‌کند. اگر اندازهٔ گرمای مبادله‌شده بین ماشین گرمایی و محیط در فرایندهای a، b، c و d به ترتیب برابر ۵، ۲۰، ۱۰ و ۵ کیلوژول باشد، به ترتیب از راست به چپ، کار انجام‌شده توسط ماشین گرمایی در هر چرخه چند کیلوژول و بازده آن چند درصد است؟



۱) ۴۰، ۱۰ ۲) ۴۰، ۴۰
۳) ۱۰، ۱۰ ۴) ۱۰، ۴۰

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۷۶- اگر فلز قلیایی M با هالوژن X_2 در شرایط مناسب واکنش دهد، کدام مورد درست است؟ (M و X در جدول تناوبی، هم‌دوره هستند.)

۱) اگر X_2، حتی در دمای $-۲۰۰^\circ C$ با گاز هیدروژن واکنش دهد، فلز M با از دست دادن یک الکترون به آرایش هشت‌تایی گاز نجیب قبل از خود می‌رسد.

۲) شعاع کاتیون سازندهٔ فراوردهٔ واکنش، از شعاع آنیون سازندهٔ آن بزرگ‌تر است.

۳) اگر X_2 هالوژن مایع جدول دوره‌ای باشد، تفاوت شمار الکترون‌های با $l=0$ و $l=1$ در اتم M، برابر ۴ است.

۴) آنتالپی فروپاشی شبکهٔ بلور فراوردهٔ واکنش، به یقین از آنتالپی فروپاشی شبکهٔ بلور منیزیم اکسید کم‌تر است.

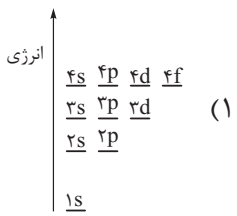
۷۷- با توجه به جدول زیر که شمار الکترون‌های لایهٔ سوم و چهارم چند گونه را در حالت پایه نشان می‌دهد، چند مورد از مطالب داده‌شده درست است؟

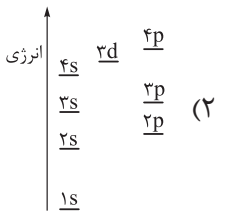
اتم یا یون پایدار	M	Y	X	Z
شمار الکترون لایهٔ سوم	۱۳	۱۶	۱۸	۱۷
شمار الکترون لایهٔ چهارم	۱	۲	۷	۰

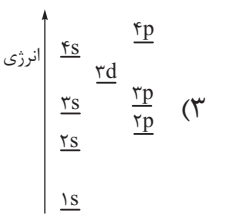
- **آرایش الکترونی M از قاعدهٔ آفبا پیروی نمی‌کند.**
- **در دمای اتاق، حالت فیزیکی X و Y متفاوت است.**
- **گونهٔ Z به یقین یک کاتیون دو بار مثبت است.**
- **عدد اتمی Y، دو برابر عدد اتمی گاز نجیب دورهٔ سوم جدول تناوبی است.**
- **شمار الکترون‌های ظرفیتی M، با شمار این الکترون‌ها در عنصر A_{16} برابر است.**

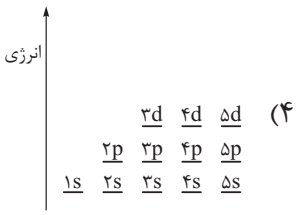
۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲

۷۸- کدام نمودار، سطح انرژی زیرلایه‌های الکترونی در اتم‌های مختلف (قبل از اشغال‌شدن از الکترون) را به درستی نشان می‌دهد؟

۱)


۲)


۳)


۴)


۷۹- درستی یا نادرستی کدام گزینه با دیگر گزینه‌ها، متفاوت است؟

۱) درصد حجمی گاز هلیم در نمونه‌ای از هوا با دمای $۲۵^\circ C$ و فشار ۱atm، بیشتر از درصد حجمی آن در نمونه‌ای از هوا با دمای $-۹۰^\circ C$ و فشار ۱atm است.

۲) فراوان‌ترین گاز نجیب هواکره، حدود ۷ درصد حجمی از مخلوط گاز طبیعی را نیز تشکیل داده است.

۳) نام سولفاتی از آهن که شمار اتم‌ها در فرمول شیمیایی آن با شمار اتم‌های دی‌نیتروژن تتراکسید برابر است، آهن (II) سولفات می‌باشد.

۴) نام ترکیب‌های CO، CuO، ClO_2 و CrO_2 به ترتیب کربن مونوکسید، مس (II) اکسید، کلر دی‌اکسید و کروم (II) اکسید است.

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۸۰- داده‌های چند ردیف جدول زیر، همگی درست‌اند؟ ($p.e$ شمار جفت‌الکترون‌های پیوندی و $n.e$ شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی را نشان می‌دهد.)

ردیف	ویژگی / نام ماده	$\frac{p.e}{n.e}$	جهت‌گیری در میدان الکتریکی	فرمول شیمیایی	بار جزئی اتمی با شعاع بزرگ‌تر
۱	هیدروژن سیانید	۴	دارد	HCN	$\delta-$
۲	گوگرد دی‌کلرید	۰/۲۵	ندارد	SCl_2	$\delta-$
۳	کلروفرم	۱	دارد	CH_2Cl_2	$\delta-$
۴	کربونیل سولفید	۱	دارد	SCo	$\delta+$

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۸۱- ۱۸۰ گرم مس (I) اکسید مطابق واکنش‌های زیر مصرف می‌شود. اگر طی این فرایند ۹ گرم بخار آب تولید شده باشد، جرم نمونهٔ جامد چند گرم تغییر می‌کند؟ $(Cu = 64 , O = 16 , H = 1 : g.mol^{-1})$

I) $Cu_2O(s) + O_2(g) \rightarrow CuO(s)$

II) $Cu_2O(s) + H_2(g) \rightarrow Cu(s) + H_2O(g)$

(معادلهٔ واکنش‌ها موازنه شود.)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۱۲

۸۲- چند مورد از مطالب زیر، درست است؟ $(H = 1 , O = 16 : g.mol^{-1})$

- غلظت یون هیدروکسید در آب خالص در دمای اتاق، به تقریب برابر $0/0017ppm$ است.
- در صنعت برای تولید نوشابهٔ گازدار، ابتدا نوشابه را گرم می‌کنند، سپس گاز کربن دی‌اکسید به آن اضافه می‌کنند.
- هر چند جرم مولی و گشتاور دو قطبی H_2S از H_2O بیشتر است، اما آب به دلیل توانایی تشکیل پیوندهای هیدروژنی، نقطهٔ جوش بالاتری دارد.
- با توجه به معادلهٔ انحلال‌پذیری نمک A برحسب دما $(S = 0/2\theta + 20)$، درصد جرمی محلول سیرشدهٔ این نمک در دمای $25^\circ C$، برابر ۲۰٪ است.

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۸۳- a میلی‌لیتر محلول $0/8$ مولار سدیم هیدروکسید را با $1/5a$ میلی‌لیتر محلول پتاسیم هیدروکسید ۱۴ درصد جرمی $(d = 1/12 g.mL^{-1})$ مخلوط می‌کنیم. غلظت یون هیدروکسید در محلول حاصل برحسب مول بر لیتر کدام است و ۱۰۰ میلی‌لیتر از این محلول به تقریب با چند گرم محلول سیرشدهٔ H_2S به‌طور کامل واکنش می‌دهد؟ (انحلال‌پذیری گاز H_2S در شرایط واکنش، برابر $0/25$ گرم در ۱۰۰ گرم آب است.) $(H = 1 , O = 16 , S = 32 , K = 39 : g.mol^{-1})$

$2MOH(aq) + H_2S(aq) \rightarrow M_2S(aq) + 2H_2O(l)$

۱) ۲-۶۸۰ ۲) ۲-۱۳۶۰ ۳) ۱/۸-۶۸۰ ۴) ۱/۸-۱۳۶۰

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۸۴- مطابق واکنش زیر، با مصرف ۴ گرم از مادهٔ X_2 با خلوص ۸۰٪، ۲/۰۶ گرم NaX تولید می‌شود. نسبت جرم مولی X_2 به سود سوزآور کدام است و طی این فرایند چند گرم آب تولید می‌شود؟ (معادلهٔ واکنش موازنه شود.)
$(H = 1, O = 16, Na = 23 : g.mol^{-1})$

$$NaOH + X_2 \rightarrow NaX + NaXO + H_2O$$

۱) ۱/۷۷۵ - ۰/۳۶ ۲) ۱/۷۷۵ - ۰/۸ ۳) ۴ - ۰/۳۶ ۴) ۴ - ۰/۸

۸۵- چند مورد از مطالب زیر، درست است؟

- در بین عنصرهای اصلی دوره‌های سوم و چهارم جدول تناوبی، در مجموع ۵ عنصر وجود دارند که دارای رسانایی الکتریکی هستند و هم‌چنین در اثر ضربه تغییر شکل می‌دهند.
- در دوره‌های مختلف جدول تناوبی (به‌جز دورهٔ اول)، شمار عنصرهای فلزی بیشتر از شمار عنصرهای نافلزی و شبه‌فلزی است.
- در بین عناصر دورهٔ سوم، ۴ عنصر دارای سطح براق هستند و قوی‌ترین عنصر نافلز در این دوره، دارای ۵ الکترون با مجموع اعداد کوانتومی اصلی و فرعی برابر ۵، در لایهٔ ظرفیت خود است.
- شعاع اتمی نافلزهای هم‌دوره با یک شبه‌فلز، کم‌تر از عنصر شبه‌فلز است.
- برای استخراج مس از سنگ معدن آن (Cu_2S) می‌توان از اکسیژن و برای استخراج آهن از سنگ معدن آن (Fe_2O_3)، می‌توان از گاز کربن مونوکسید استفاده کرد.

۱) ۵ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۸۶- براساس واکنش زیر، اگر ۲ لیتر محلول ۱/۵ مولار هیدروژن پراکسید مصرف شود و ۴۴/۸ لیتر گاز اکسیژن در شرایط STP تولید شود، بازده واکنش چند درصد است؟ (معادلهٔ واکنش موازنه شود.)

$$MnO_4^-(s) + H_2O_2(aq) + H^+(aq) \rightarrow O_2(g) + Mn^{2+}(aq) + H_2O(l)$$

۱) ۳۳/۳ ۲) ۵۰ ۳) ۶۶/۶ ۴) ۷۵

۸۷- کدام موارد از مطالب زیر، نادرست است؟ $(H = 1, C = 12 : g.mol^{-1})$

الف) آلکان راست‌زنجیری با جرم مولی $170 g.mol^{-1}$، برخلاف آلکان راست‌زنجیری که ۴ پیوند کربن ـ کربن دارد، در دمای $22^\circ C$ به حالت مایع است.

ب) اگر جرم مولی یک آلکن، ۳۰ درصد از جرم مولی آلکینی که شمار اتم‌های هیدروژن یکسانی با آن دارد، کم‌تر باشد، در ساختار آلکین، ۸ پیوند اشتراکی وجود دارد.

پ) اگر به جای اتم‌های هیدروژن در مولکول استیلن، یک گروه متیل و یک گروه اتیل قرار گیرد، ترکیبی با نام ۲-پنتین به دست می‌آید.

ت) از واکنش گاز اتن با برم مایع، ترکیبی به‌دست می‌آید که شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی و جفت‌الکترون‌های پیوندی مولکول آن با هم برابر است.

۱) الف ـ ت ۲) ب ـ پ ۳) الف ـ پ ۴) ب ـ ت

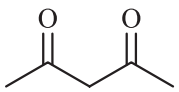
محل انجام محاسبات

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

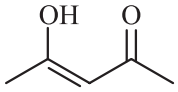
۸۸- در کدام گزینه، نام ساده‌ترین آلکان ممکنی که دارای ۲ اتم کربن با عدد اکسایش صفر و یک اتم کربن با عدد اکسایش ۲- می‌باشد، آمده است و در اثر سوختن کامل یک نمونهٔ ۳۰۰ گرمی از این ماده با خلوص ۶۴ درصد، چند مول مولکول ناقطبی تولید می‌شود؟ (ناخالصی‌ها فاقد اتم‌های H و C هستند و $C=12:g.mol^{-1}$ و $H=1$)

۱) ۲، ۲، ۳، ۳ ـ تترامتیل پنتان، ۱۳/۵
۲) ۲، ۳ ـ دی متیل هگزان، ۱۳/۵
۳) ۲، ۲، ۴، ۴ ـ تترامتیل پنتان، ۲۸/۵
۴) ۲، ۴ ـ دی متیل هگزان، ۲۸/۵

۸۹- چند مورد از مطالب زیر دربارهٔ ترکیب‌های (I) و (II)، درست است؟ $(O=16, C=12, H=1:g.mol^{-1})$



(I)



(II)

- **ایزومر یکدیگرند و نقطهٔ جوش ترکیب (II) بالاتر است.**
- **۶۰ درصد جرمی ترکیب (I) را کربن تشکیل داده است.**
- **شمار و نوع اتم‌های سازندهٔ آن‌ها یکسان است و خواص فیزیکی و شیمیایی مشابهی دارند.**
- **پیوند اشتراکی یگانه‌ای که آسان‌تر از سایر پیوندهای یگانه شکسته می‌شود، در دو ترکیب (I) و (II) یکسان است.**

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۹۰- با توجه به اطلاعات داده‌شده، نام ترکیب آلی موجود در واکنش‌دهنده‌ها کدام است و اگر در شرایط معین، تفاوت جرم واکنش‌دهنده‌ها در مخلوط آغازی برابر ۲۵ گرم باشد و واکنش به‌طور کامل انجام شود، چند کیلوژول گرما آزاد خواهد شد؟ $(H=1, C=12, O=16:g.mol^{-1})$

$$C_2H_6O(g)+3O_2(g)\rightarrow 2CO_2(g)+3H_2O(g) \quad \Delta H=-1210kJ$$

پیوند	C—H	C—O	O—H	O=O	C=O	C—C
آنتالپی پیوند $(kJ.mol^{-1})$	۴۱۵	۳۸۰	۴۶۰	۵۰۰	۸۰۰	۳۵۰

۱) اتانول، ۶۰۵ ۲) دی‌متیل اتر، ۱۰۸۰ ۳) اتانول، ۱۰۸۰ ۴) دی‌متیل اتر، ۶۰۵

۹۱- دو نمونه آب (I) و (II) به ترتیب با دماهای θ_1 و θ_2 در اختیار داریم. اگر $\theta_1>\theta_2$ و انرژی گرمایی نمونهٔ (II) بیشتر از نمونهٔ (I) باشد، کدام موارد از مطالب زیر، درست‌اند؟ (گرمای ویژهٔ آب در دماهای θ_1 و θ_2 را برابر در نظر بگیرید.)

الف) در صورت تماس این دو نمونه، انرژی گرمایی از نمونهٔ (II) به نمونهٔ (I) جاری می‌شود.

ب) برای افزایش دمای این دو نمونه به میزان $5^\circ C$، انرژی لازم برای نمونهٔ (II) بیشتر از نمونهٔ (I) است.

پ) اگر جرم یکسانی از این دو نمونه آب را با هم مخلوط کنیم، دمای تعادل با میانگین دماهای θ_1 و θ_2 برابر خواهد بود.

ت) میانگین تندی مولکول‌های آب در ظرف (II) بیشتر از ظرف (I) است.

۱) الف ـ ب ـ پ ۲) ب ـ پ ۳) ب ـ پ ـ ت ۴) الف ـ ت

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۹۲- واکنش‌های گرماشیمیایی زیر، مربوط به تشکیل اوزون تروپوسفری هستند:

a) $N_2(g) + O_2(g) \rightarrow 2NO(g)\ ,\ \Delta H = +181kJ$

b) $2NO(g) + O_2(g) \rightarrow 2NO_2(g)\ ,\ \Delta H = -173kJ$

c) $NO_2(g) + O_2(g) \rightarrow NO(g) + O_3(g)\ ,\ \Delta H = +199kJ$

براساس آن، چند مورد از مطالب زیر درست‌اند؟

- **در واکنش تشکیل گاز نیتروژن مونوکسید از عنصرهای سازندهٔ آن، سطح انرژی مواد کاهش می‌یابد.**
- **با توجه به منفی‌بودن ΔH واکنش (b)، سرعت انجام آن نسبت به واکنش‌های (a) و (c) بیشتر است.**
- **در هر سه واکنش، واکنش‌دهندهٔ دارای اتم نیتروژن، نقش کاهنده را دارد.**
- **ΔH واکنش کلی که با حذف NO_2 از معادله‌های شیمیایی واکنش‌های داده‌شده به دست می‌آید، برابر با ۴۰۶ کیلوژول است.**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۹۳- در یک ظرف دربسته به حجم ۵ لیتر، ۵ مول گاز کربن مونوکسید با ۱۰ مول گاز هیدروژن واکنش می‌دهد. اگر پس از ۱۰ دقیقه، تعداد مول‌های گازی موجود در ظرف برابر ۱۰ باشد، سرعت کلی واکنش برابر چند مول بر لیتر بر دقیقه است و اگر طی ده دقیقهٔ دیگر، واکنش با سرعت متوسط نصف ۱۰ دقیقهٔ اول پیش برود، در پایان این فرایند، چند درصد حجم ظرف واکنش را گاز کربن مونوکسید تشکیل خواهد داد؟ $CO(g) + 2H_2(g) \rightarrow CH_3OH(g)$

۱) 10^{-2} و ۳۳/۳ ۲) 5×10^{-2} و ۱۶/۶ ۳) 10^{-2} و ۱۶/۶ ۴) 5×10^{-2} و ۳۳/۳

۹۴- کدام مورد نادرست است؟

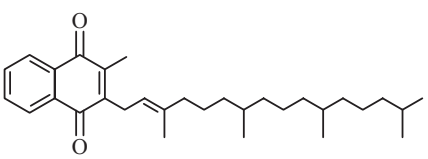
۱) تعداد اتم‌های هیدروژن متصل به کربن در هیچ‌کدام از اتم‌های کربن مونومر سازندهٔ پلیمر به‌کاررفته در ساختار پتو، یکسان نیست.

۲) از بین ترکیب‌های «تفلون، پلی‌اتن سبک، پلی‌سیانو اتن، استیرن و پلیمر سازندهٔ سرنگ»، ۳ مورد فقط دارای پیوند یگانه هستند.

۳) پلی‌اتن به‌کاررفته در ساخت کیسه‌های پلاستیکی شفاف، شاخه‌دار بوده و چگالی کم‌تری نسبت به آب دارد.

۴) سلولز به عنوان الیاف سازندهٔ پنبه، جرم مولی بیشتری نسبت به سایر پلیمرهای طبیعی دارد.

۹۵- براساس ساختار ویتامین کا (K)، کدام مطلب نادرست است؟



۱) بخش ناقطبی آن بر قطبی غلبه دارد و در چربی نسبت به آب بهتر حل می‌شود.

۲) شمار پیوندهای دوگانه در ساختار آن، با تعداد گروه‌های CH_3 برابر است.

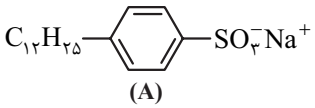
۳) مجموع اعداد اکسایش اتم‌های کربن آن برابر ۴۲- است.

۴) گروه عاملی آن در ساختار ۲ ـ هپتانون نیز وجود دارد.

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۹۶- با توجه به ساختارهای داده‌شده، چه تعداد از مطالب زیر درست است؟



(A)

$C_{۱۴}H_{۲۵}COOK$
(X)

HCl
(D)

- **ترکیب A برخلاف ترکیب D، برای ایجاد اثر پاک‌کنندگی، با آلاینده‌ها واکنش می‌دهد.**
- **در ترکیب A همانند ترکیب X، اکسنده‌ترین اتم نافلزی دارای دو جفت الکترون ناپیوندی است.**
- **ترکیب D همانند ترکیب A، هنگام انحلال در آب به یون‌های سازندهٔ آن تبدیل می‌شود.**
- **ترکیب X همانند ترکیب D، در دمای اتاق به صورت مایع یافت می‌شود.**
- **ترکیب A برخلاف ترکیب D، با یون‌های منیزیم و کلسیم موجود در آب سخت رسوب می‌دهد.**

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۹۷- در دمای اتاق، ۱۵ گرم BaO ناخالص به مقداری آب خالص اضافه می‌کنیم و حجم محلول را به نیم لیتر می‌رسانیم، اگر pH محلول تشکیل‌شده ۱۲/۷ باشد، درصد خلوص BaO کدام است؟ (ناخالصی‌ها خاصیت اسیدی یا بازی ندارند، $Ba = ۱۳۷ , O = ۱۶ : g.mol^{-۱}$)

۱) ۳۰ ۲) ۲۵/۵
۳) ۱۲/۷۵ ۴) ۵۱

۹۸- کدام مطلب درست است؟

۱) آرنیوس نخستین شیمی‌دانی بود که به ویژگی‌های اسیدها و بازها و واکنش‌های آن‌ها پی برد.

۲) با حل‌کردن مقداری HCl در آب در دمای ثابت، غلظت یون هیدرونیوم و در نتیجه حاصل $[H^+][OH^-]$ افزایش می‌یابد.

۳) با انحلال هر ترکیب مولکولی قطبی در آب، یک محلول الکترولیت ایجاد می‌شود.

۴) اگر غلظت یون هیدروکسید در محلول نیم‌مولار اسید HA در دمای اتاق برابر $۱۰^{-۱۳}\ mol.L^{-۱}$ باشد، ثابت یونش HA در این دما برابر $۲/۵\times۱۰^{-۲}$ است.

۹۹- اگر طی واکنش زیر که با محلول هیدروکلریک اسید ۰/۲ مولار شروع شده است، پس از ۱۰۰ ثانیه، pH سامانه ۰/۴ واحد تغییر کند، سرعت مصرف یون برمید، چند $mol.L^{-۱}.s^{-۱}$ است و اگر حجم محلول سامانه برابر ۰/۱ لیتر باشد، چند گرم برم مایع تشکیل خواهد شد؟ $(Br = ۸۰ g.mol^{-۱})$

$$۵Br^-(aq) + BrO_۳^-(aq) + ۶H^+(aq) \rightarrow ۳Br_۲(l) + ۳H_۲O(l)$$

۱) $۴/۸ ، ۱۲\times۱۰^{-۳}$ ۲) $۰/۹۶ ، ۱۲\times۱۰^{-۳}$
۳) $۴/۸ ، ۱۰^{-۳}$ ۴) $۰/۹۶ ، ۱۰^{-۳}$

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۱۰۰- کدام موارد از مطالب زیر دربارهٔ دومین گاز فراوان هوای پاک و خشک، درست است؟

الف) در سلول سوختی هیدروژن برخلاف فرایند خوردگی آهن در محیط اسیدی، آب تولید می‌کند.

ب) در برخی از واکنش‌های حذف آلاینده‌ها در مبدل کاتالیستی خودروهای بنزینی، به عنوان واکنش‌دهنده و در برخی از آن‌ها به عنوان فراورده، حضور دارد.

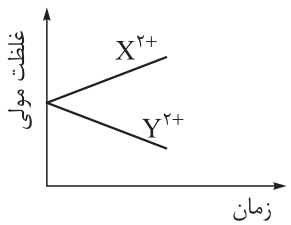
پ) هر چند گازی واکنش‌پذیر است اما با فلزهای نجیبی مانند طلا و پلاتین، واکنش نمی‌دهد.

ت) در واکنش تجزیهٔ هیدروژن پراکسید همانند واکنش مخلوط آلومینیم و سدیم هیدروکسید با آب، تولید می‌شود.

ث) انحلال‌پذیری آن در شرایط یکسان در آب از گازهای N_2 و NO بیشتر و از گاز CO_2 کم‌تر است.

۱) الف ـ ب ـ ت
۲) ب ـ پ
۳) پ ـ ت ـ ث
۴) ب ـ ث

۱۰۱- با توجه به قدرمطلق پتانسیل کاهشی استاندارد فلزهای X و Y و نمودار تغییر غلظت یون‌ها در سلول گالوانی حاصل از این دو فلز، کدام مطلب به یقین درست است؟



$$X^{2+}(aq) + 2e^- \rightarrow X(s) \qquad |E^\circ| = 0/24\ V$$
$$Y^{2+}(aq) + 2e^- \rightarrow Y(s) \qquad |E^\circ| = 0/85\ V$$

۱) emf سلول گالوانی حاصل از این دو نیم‌سلول، برابر ۱/۰۹ ولت است.
۲) قدرت اکسندگی X^{2+} بیشتر از Y^{2+} است.
۳) فلز Y با محلول ۱مولار هیدروکلریک اسید واکنش نمی‌دهد.
۴) پتانسیل کاهشی استاندارد دو فلز X و Y، هم‌علامت نیست.

۱۰۲- در آبکاری یک قطعهٔ فولادی با فلز نقره، از یک لیتر محلول ۱ مولار نقرهٔ نیترات و در آبکاری قطعهٔ مشابهی (با جرم برابر) با فلز نیکل، از یک لیتر محلول ۱ مولار نیکل (II) سولفات، استفاده شده است. اگر شمار الکترون‌های عبوری از این دو سلول، یکسان و اختلاف جرم دو قطعهٔ آبکاری‌شده برابر ۳۹/۵ گرم باشد، چند مول الکترون از هر یک از این دو سلول عبور کرده است؟

$(Fe = 56, Ni = 58, Ag = 108 : g.mol^{-1})$

۱) ۰/۲۵
۲) ۰/۵
۳) ۰/۷۵
۴) ۱

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۱۰۳- درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر، به ترتیب در کدام گزینه آمده است؟

- فناوری شناسایی و تولید آنتی‌بیوتیک از گسترش بیماری‌هایی همچون وبا جلوگیری کرد.
- تولید فراوردهٔ فرایند هابر در طی فناوری‌های شیمیایی در گذر زمان، قبل از ویتامین A و اوره $(CO(NH_2)_2)$ بوده است.
- در ساعاتی از شبانه‌روز، هم‌زمان با کاهش غلظت گازهای NO و NO_2 در هواکره، غلظت آلوتروپ ناپایدارتر اکسیژن افزایش می‌یابد.
- در مبدل کاتالیستی خودروهای دیزلی، از آمونیاک برای حذف اکسیدهای نیتروژن استفاده می‌شود.
- برای تأمین انرژی فعال‌سازی واکنش‌ها، می‌توان از گرما یا کاتالیزگر استفاده کرد.

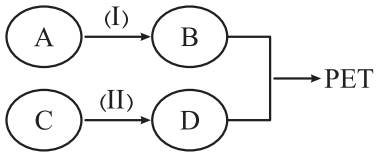
۱) نادرست ـ درست ـ درست ـ درست ـ درست
۲) نادرست ـ درست ـ درست ـ درست ـ نادرست
۳) درست ـ درست ـ نادرست ـ درست ـ نادرست
۴) درست ـ نادرست ـ درست ـ نادرست ـ نادرست

۱۰۴- واکنش تعادلی $2NOCl(g) + O_2(g) \rightleftharpoons 2NO_2(g) + Cl_2(g)\ ,\ \Delta H = -37kJ$، در یک ظرف دولیتری برقرار است. اگر در حالت تعادل، مقدار گازهای NO_2، Cl_2، NOCl و O_2 به ترتیب برابر ۰/۴، ۰/۲، ۰/۲، ۰/۲ و ۰/۳۲ مول باشد، کدام موارد از مطالب زیر نادرست است؟ (در ابتدا فقط واکنش‌دهنده‌ها در ظرف واکنش وجود داشته‌اند.)

الف) تا لحظهٔ برقراری تعادل، ۷/۴ کیلوژول گرما در واکنش آزاد می‌شود.
ب) مقدار عددی ثابت تعادل واکنش، برابر ۵۰۰ است.
پ) با افزایش دمای ظرف واکنش، تعادل در جهت برگشت جابه‌جا می‌شود.
ت) انتقال مخلوط تعادلی به ظرفی بزرگ‌تر، باعث کاهش ثابت تعادل واکنش می‌شود.

۱) الف ـ پ ۲) پ ـ ت ۳) ب ـ ت ۴) الف ـ ب

۱۰۵- چند مورد از مطالب زیر، دربارهٔ نمودار داده‌شده که روند کلی تولید پلیمر سازندهٔ بطری آب را نشان می‌دهد، درست است؟ $(H = 1\ ,\ C = 12\ ,\ O = 16 : g.mol^{-1})$



- اگر جرم مولی B برابر با $62g.mol^{-1}$ باشد، فراوردهٔ حاصل از واکنش کامل C و گاز هیدروژن، با اوکتن همپار است.
- واکنش بین B و D از نوع اکسایش ـ کاهش نیست و فرمول شیمیایی فراوردهٔ آلی این واکنش، $+C_{10}H_8O_4+_n$ است.
- اگر شمار پیوندهای دوگانه در D با شمار پیوندهای دوگانه در مولکول نفتالن برابر باشد، در واکنش (II)، عدد اکسایش اتم منگنز ۴ درجه کاهش می‌یابد.
- در ساختار هر دو ترکیب A و C، اتم کربنی با عدد اکسایش ۱- وجود دارد.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

دوستان عزیز خیلی‌سبز، سلام؛

فایل پاسخ‌نامهٔ این آزمون را که شامل درس‌نامه، نکات کنکوری، پاسخ تشریحی و ... است، ساعت ۱۴ امروز از صفحهٔ شخصی خودتان در سایت آزمون خیلی‌سبز دریافت کنید.

هم‌چنین شما می‌توانید همین امشب کارنامهٔ اولیهٔ آزمونتان را در صفحهٔ شخصی خود مشاهده بفرمایید.

برای دسترسی به صفحهٔ شخصی خود وارد سایت آزمون خیلی‌سبز به آدرس: azmoon.kheilisabz.com شوید و کدی را که توسط مدرسه و یا نمایندگی‌های آزمون‌های خیلی‌سبز به شما داده شده، در محل مشخص‌شده در سایت ثبت بفرمایید.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

خیلی سبز! آزمون
تجربی | ریاضی | انسانی

سال تحصیلی
۱۴۰۲ - ۱۴۰۳

دفترچه پاسخ آزمون هفدهم حضوری

علوم ریاضی و فنی

ویژهٔ کنکوری‌های ۱۴۰۳

۱۴۰۳/۰۴/۱۳

آزمون آزمایشی خیلی سبز

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا
حسابان	حسین شفیع‌زاده - مهرداد کیوان
ریاضیات گسسته و آمار و احتمال	علیرضا شریف‌خطیبی - عطا صادقی - حمید گلزاری - سروش موئینی
هندسه	محمدرضا حسینی‌فرد - محمدطاهر شعاعی ـ کیوان صارمی ـ حمید علیزاده ـ حسین هاشمی طاهری
فیزیک	علیرضا جباری ـ مجید ساکی ـ رضا سبزمیدانی ـ نوید شاهی ـ علیرضا گونه
شیمی	مهدی براتی ـ محمدعلی توسلی‌فر ـ یاسر راش ـ رضا فولادپور ـ مرضیه قاسمی ـ یاسر عبداللهی ـ امیرحسین مسلمی

نام درس	مسئول درس	گزینشگر	مولف پاسخ‌نامه	کارشناسان علمی	ویراستاران به ترتیب حروف الفبا
حسابان	حسین شفیع‌زاده - مهرداد کیوان	حسین شفیع‌زاده- مهرداد کیوان	عاطفه خان‌محمدی	محمدسجاد نقیه ـ سجاد داوطلب	زهرا جالینوسی ـ ماهان فنی‌فر ـ امیرحسین قنبری
ریاضیات گسسته و آمار و احتمال	حمید گلزاری	حمید گلزاری	مریم نظری	امیرحسین ابومحبوب	محمد حمیدی ـ ماهان فنی‌فر ـ ابوالفضل ناصری
هندسه	حمید گلزاری	حمید گلزاری	زهرا جالینوسی	امیرحسین ابومحبوب	ماهان فنی‌فر ـ ابوالفضل ناصری ـ مریم نظری
فیزیک	رضا سبزمیدانی	نوید شاهی	محمد باغبان- علیرضا جباری- محمدجواد سورچی	علیرضا جباری	امیر محمودی انزابی ـ مهدی بابائی ـ مهدی خوش‌نویس ـ ماهان فنی‌فر ـ محمدمهدی یوسفی
شیمی	یاسر عبداللهی	یاسر عبداللهی	یاسر عبداللهی ـ امیرحسین مسلمی	محمد مرادی ـ وحید فارسیان	علی حیدری ـ مهسا خاکی ـ سروش عبادی

سرپرست محتوایی: فاطمه آقاجانپور

Azmoon.kheilisabz.com

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

تست و پاسخ ۱

هرگاه ... , $۲a+b$, $a+۲b$, a جملات ابتدایی یک دنبالهٔ حسابی باشند که جمع ده جملهٔ ابتدایی آن ۲۴۰ باشد، مقدار ab کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۱۲ ۳) ۸ ۴) ۱۶

پاسخ: گزینهٔ ۲

مشاوره از مبحث الگو و دنباله حتماً یک سؤال در کنکور مطرح می‌شود که با بررسی سؤال‌های سال‌های قبل و نکات این مبحث، می‌توانید از پس این نوع سؤال‌ها بر بیایید.

درس‌نامه بررسی نکات دنبالهٔ حسابی

ویژگی	توضیح فارسی	مثال
دنبالهٔ حسابی	هر جمله با یک عدد ثابت (d یا قدرنسبت) جمع شده و عدد بعدی به دست می‌آید.	$-۱, ۵, ۱۱, ۱۷, \dots$ (+۶ +۶ +۶) $a_۱=-۱, d=۶$
$a_n=a_۱+(n-۱)d$	جملهٔ عمومی دنباله	$a_n=-۱+(n-۱)۶=۶n-۷$
$a_n-a_m=(n-m)d$	اختلاف جملهٔ n ام و m ام $(n-m)$ برابر قدرنسبت است.	$a_{۱۵}-a_۷=۸d$
$\underbrace{a, b, c}_{\text{دنبالهٔ حسابی}} \Rightarrow b=\frac{a+c}{۲}$	اگر سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ حسابی را داشته باشیم، عدد وسط میانگین (واسطهٔ حسابی) دو عدد کناری است.	$\underbrace{-۱۵, x, ۲۰}_{\text{حسابی}} \Rightarrow x=\frac{-۱۵+۲۰}{۲}=\frac{۵}{۲}$
$a, \underbrace{\square, \dots, \square}_{n \text{ واسطهٔ حسابی}}, b$ $d=\frac{b-a}{n+۱}$	اگر بین دو عدد b و a بخواهیم n واسطهٔ حسابی درج کنیم، d از رابطهٔ داده‌شده به دست می‌آید.	$-۱۱, \square, \square, \square, ۲۹$ $d=\frac{۲۹-(-۱۱)}{۳+۱}=\frac{۴۰}{۴}=۱۰$ $\Rightarrow -۱۱, -۱, ۹, ۱۹, ۲۹$ (+۱۰)
$S_n=\frac{n}{۲}(۲a_۱+(n-۱)d)$	S_n برابر با مجموع n جملهٔ ابتدایی دنبالهٔ حسابی است.	$-۱, ۵, ۱۱, \dots$ $S_{۱۰۰}=\frac{۱۰۰}{۲}(-۲+۹۹\times۶)$
$S_n=\frac{n}{۲}(a_۱+a_n)$	فرمول دوم S_n که برابر است با: $S_n=\frac{\text{تعداد}}{۲}(\text{جملهٔ اول}+\text{جملهٔ آخر})$	$۱+۲+\dots+n=\frac{n(n+۱)}{۲}$

پاسخ تشریحی **گام اول:** ۳ جملهٔ اول دنبالهٔ حسابی را داریم. بین این جملات، رابطهٔ واسطهٔ حسابی برقرار است: $a, a+۲b, ۲a+b, \dots$

$$\Rightarrow ۲(a+۲b)=a+۲a+b \Rightarrow ۲a+۴b=۳a+b \Rightarrow a=۳b$$

گام دوم: جمع ده جملهٔ اول این دنباله برابر با ۲۴۰ است؛ پس داریم:

$$S_{۱۰}=\frac{۱۰}{۲}(۲a+۹\times۲b)=۵(۲\times۳b+۱۸b)=۵\times۲۴b=۱۲۰b=۲۴۰ \Rightarrow \begin{cases} b=۲ \\ a=۶ \end{cases}$$

گام سوم: بنابراین مقدار $ab=۱۲$ است.

تست و پاسخ ۲

اگر α و β ریشه‌های $۲x^۲-۵x-m=۰$ و اعداد $\alpha+\beta$ و $\beta-\alpha$ ریشه‌های معادلهٔ $x^۲-mx+n=۰$ باشند، مقدار n کدام است؟

۱) $\frac{۴۵}{۴}$ ۲) $\frac{۴۵}{۲}$ ۳) $\frac{۹}{۴}$ ۴) $\frac{۲۵}{۴}$

پاسخ: گزینهٔ ۱

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

مشاوره یکی از سؤالات مهم کنکور، رابطهٔ بین ضرایب و ریشه‌ها در معادلهٔ درجه‌دوم است که باید بتوانید از پس آن بربیایید.

درس‌نامه مجموع، تفاضل و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$

اگر $\Delta>0$، معادله دو ریشهٔ β و α دارد، داریم:

۱) $S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$

۲) $P=\alpha\beta=\frac{c}{a}$

۳) $|\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}\Rightarrow\begin{cases}\alpha>\beta\Rightarrow\alpha-\beta=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}\\ \alpha<\beta\Rightarrow\beta-\alpha=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}\end{cases}$

۴) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=S^2-2P$

پاسخ تشریحی **گام اول:** از معادلهٔ اول، رابطهٔ بین ضرایب و ریشه‌ها را می‌یابیم:

$$2x^2-5x-m=0\Rightarrow\begin{cases}S_1=\alpha+\beta=\frac{5}{2}\\ P_1=\alpha\beta=\frac{-m}{2}\end{cases}$$

گام دوم: ریشه‌های معادلهٔ $x^2-mx+n=0$ برابر با $\alpha+\beta$ و $\beta-\alpha$ هستند:

$$x^2-mx+n=0\Rightarrow\begin{cases}S_2=\beta-\alpha+\alpha+\beta=m\\ P_2=(\beta-\alpha)(\beta+\alpha)=n\end{cases}\xrightarrow{\text{از گام اول}}\begin{cases}\beta=\frac{m}{2}\xrightarrow{\text{از گام اول}}\alpha(\frac{m}{2})=-\frac{m}{2}\Rightarrow\alpha=-1\\ \frac{5}{2}(\beta-\alpha)=n\end{cases}$$

گام سوم: با جای‌گذاری مقدار α در رابطهٔ S_1، مقدار β برابر با $\frac{7}{2}$ به دست می‌آید.

حالا داریم:

$$\frac{5}{2}(\frac{7}{2}+1)=n\Rightarrow n=\frac{5}{2}\times\frac{9}{2}=\frac{45}{4}$$

تست و پاسخ ۳

برای دو مجموعهٔ A و B، ساده‌شدهٔ عبارت $[(A-B')\cup(A'\cap B')]\cap(A'\cup B)'$ کدام است؟

۱) $A-B$ ۲) $B-A$ ۳) $\varnothing$ ۴) $A\cap B$

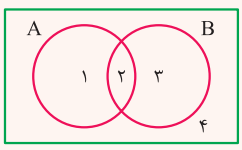
پاسخ گزینهٔ ۳

مشاوره تقریباً هر سال در کنکور سراسری، یک سؤال از جبر مجموعه‌ها داریم که راحت‌ترین روش برای حل این سؤالات، استفاده از روش شماره‌گذاری ناحیه‌ها است.

خودت حل کنی بهتره کافیه از روش شماره‌گذاری ناحیه‌ها کمک بگیرید.

درس‌نامه روش شماره‌گذاری ناحیه‌ها برای حل سؤالات جبر مجموعه‌ها

در این روش اگر دو مجموعه داشته باشیم، نمودار ون را به صورت مقابل در نظر می‌گیریم:



حالا هر قسمت را با مجموعه‌ای از اعداد درون آن نمایش می‌دهیم، برای مثال

$A=\{1,2\}$، $B=\{2,3\}$، $A\cap B=\{2\}$ و ...

برای مثال برای این‌که بفهمیم حاصل $A\cup(A'\cap B)$ چیست، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$A\cup(A'\cap B)=\{1,2\}\cup(\{3,4\}\cap\{2,3\})=\{1,2\}\cup\{3\}=\{1,2,3\}=A\cup B$$

یا به عنوان مثالی دیگر اگر $(A-B)\cup(B-A)=A$ باشد، داریم:

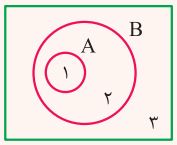
$$(A-B)\cup(B-A)=A\Rightarrow\{1\}\cup\{3\}=\{1,2\}\Rightarrow\{1,3\}=\{1,2\}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

دقت کنید در این روش، هیچ دو ناحیه‌ای نمی‌توانند با هم مساوی باشند، چون نواحی کاملاً جدا از هم‌اند،
پس $\{۳\}=\varnothing=\{۲\}$ می‌شود که از آن نتیجه می‌گیریم:

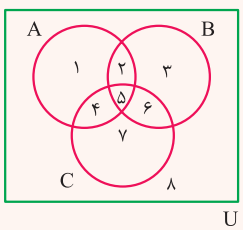
$$\begin{matrix} A=\{۱,۲\}=\{۱\} \\ B=\{۲,۳\}=\varnothing \end{matrix} \Rightarrow B\subseteq A$$

اگر در سؤالی شرطی مثل $A\subseteq B$ داشته باشیم، نمودار ون را به صورت مقابل در نظر می‌گیریم:

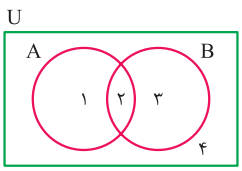


$$\Rightarrow \begin{cases} A=\{۱\} \\ B=\{۱,۲\} \end{cases}$$

حالا اگر سه مجموعه داشته باشیم هم نمودار را به صورت مقابل فرض می‌کنیم:



پاسخ تشریحی **گام اول:** دو مجموعه داریم پس نمودار ون را به صورت مقابل در نظر می‌گیریم.



گام دوم: حالا با استفاده از روش شماره‌گذاری ناحیه‌ها داریم:

$$[\underbrace{(\underbrace{A}_{۱,۲}-\underbrace{B'}_{۱,۴})}_{۲}\cup\underbrace{(\underbrace{A'}_{۳,۴}\cap\underbrace{B'}_{۱,۴})}_{۴}]\cap\underbrace{(\underbrace{A'}_{۳,۴}\cup\underbrace{B}_{۲,۳})'}_{۲,۴}=\{۲,۴\}\cap\underbrace{\{۲,۳,۴\}'}_{۱}=\varnothing$$

تست و پاسخ ۴

کدام‌یک از گزاره‌های زیر، همواره نادرست است؟

۱) $[(p\wedge\sim q)\vee\sim(\sim p\vee\sim q)]\wedge\sim p$

۲) $A=\{۱,۲,۳\},B=\{۱,۴,۹,۱۶\}\Rightarrow n[(A\times B)\cap(B\times A)]=۱$

۳) $\exists x\in\mathbb{R},\forall y\in\mathbb{R}\,;\,x^۲\le y^۴$

۴) $A\in B\Rightarrow\{A\}\subseteq B$

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس‌نامه

۱) برخی از قوانین جبر گزاره‌ها را در زیر ببینید:

۱) $\sim(\sim p)\equiv p$ ۲) $p\wedge\sim p\equiv F$ ۳) $p\vee\sim p\equiv T$

۴) $\sim(p\wedge q)\equiv\sim p\vee\sim q$ ۵) $\sim(p\vee q)\equiv\sim p\wedge\sim q$

۶) $(p\vee q)\wedge(p\vee r)\equiv p\vee(q\wedge r)$ ۷) $(p\wedge q)\vee(p\wedge r)\equiv p\wedge(q\vee r)$

۲) ضرب دکارتی $A\times B$ به صورت مقابل تعریف می‌شود: $A\times B=\{(x,y)\,|\,(x\in A)\wedge(y\in B)\}$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

نکات ۱) تعداد اعضای $A\times B$ برابر است با: $n(A\times B)=n(A)n(B)$

۲) $(A\times B)\cap(B\times A)=(A\cap B)\times(A\cap B)$

$$\Rightarrow n\big((A\times B)\cap(B\times A)\big)=n\big((A\cap B)\times(A\cap B)\big)=n(A\cap B)n(A\cap B)=n(A\cap B)^{2}$$

پاسخ تشریحی هر گزینه را بررسی می‌کنیم.

۱) $$[(p\wedge\sim q)\vee\underbrace{\sim(\sim p\vee\sim q)}_{p\wedge q}]\wedge\sim p\equiv\underbrace{\underbrace{[(p\wedge\sim q)\vee(p\wedge q)]}_{p\wedge\underbrace{(\sim q\vee q)}_{T}}}_{p}\wedge\sim p\equiv p\wedge\sim p\equiv F$$

بنابراین ارزش این گزاره همواره نادرست است.

۲) ابتدا دقت کنید که: $\left.\begin{matrix}A=\{1,2,3\}\\B=\{1,4,9,16\}\end{matrix}\right\}\Rightarrow A\cap B=\{1\}\Rightarrow n(A\cap B)=1$

حالا با توجه به نکتهٔ (۲) داریم: $n\big[(A\times B)\cap(B\times A)\big]=n(A\cap B)^{2}=1^{2}=1$

پس ارزش این گزاره درست است.

۳) اول ببینیم که منظور این گزینه چیه؟! $\forall y\in\mathbb{R}$ و $\exists x\in\mathbb{R}$ یعنی به x حقیقی وجود داره که به ازای هر مقدار y، $x^{2}\le y^{4}$ می‌شه! خب واضحه که چنین xای وجود داره! $(x=0)$ به ازای $x=0$، باید به ازای هر مقدار حقیقی y، $y^{4}\ge 0$ باشد که هست، پس این گزینه هم درسته.

۴) $A\in B$ یعنی A عضوی از مجموعهٔ B است. حالا واضح است که در بین زیرمجموعه‌های مجموعهٔ B، $\{A\}$ را داریم (A عضوی از B است، پس یکی از زیرمجموعه‌های تک‌عضوی B، $\{A\}$ می‌شود)، پس این گزینه هم درست است.

تست و پاسخ ۵

تابع $f(x)=x^{2}+ax+b$ مفروض است. اگر نمودار f را دو واحد به سمت بالا انتقال دهیم و سپس نسبت به محور yها قرینه کنیم، بر نیمساز ناحیهٔ اول مماس می‌شود و اگر نمودار f را یک واحد به سمت پایین انتقال دهیم و سپس نسبت به محور xها قرینه کنیم، بر نیمساز ناحیهٔ دوم مماس می‌شود. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

پاسخ: گزینهٔ ۲

مشاوره این تیپ سؤال در سال‌های اخیر، بارها و بارها در کنکور مطرح شده است.

درس‌نامه انتقال افقی و عمودی توابع

تابع $f(x)$ را داریم. $(k>0)$:

عملیات	به جای x قرار دهیم $x-k$.	به جای x قرار دهیم $x+k$.	کل تابع را با k جمع کنیم.	کل تابع را منهای k کنیم.
ضابطه	$y=f(x-k)$	$y=f(x+k)$	$y=f(x)+k$	$y=f(x)-k$
نمودار	نمودار f را k واحد به راست می‌بریم.	نمودار f را k واحد به چپ می‌بریم.	نمودار f را k واحد بالا می‌بریم.	نمودار f را k واحد پایین می‌بریم.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

انعکاس نسبت به محور xها و yها و مبدأ مختصات

عملیات	(۱) قراردادن $-x$ به جای x در تابع	(۲) کل تابع قرینه می‌شود.	انجام هر دو عملیات (۲) و (۱)
ضابطه	$f(-x)$	$-f(x)$	$-f(-x)$
نمودار	نمودار f نسبت به محور yها قرینه می‌شود.	نمودار f نسبت به محور xها قرینه می‌شود.	نمودار f نسبت به مبدأ قرینه می‌شود.

پاسخ تشریحی **گام اول:** نمودار تابع f را دو واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم و سپس نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم تا تابع جدید به دست بیاید:

$$f(x) \xrightarrow{\text{۲ واحد به بالا}} g_1(x)=f(x)+2 \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور yها}} g_2(x)=f(-x)+2=x^2-ax+(b+2)$$

گام دوم: نمودار $g_2(x)$ به‌دست‌آمده، بر نیمساز ناحیهٔ اول مماس است، پس معادلهٔ $g_2(x)=x$، باید ریشهٔ مضاعف داشته باشد:

$$g_2(x)=x^2-a+(b+2)=x \to x^2-(a+1)x+b+2=0 \xrightarrow[\Delta=0]{\text{ریشهٔ مضاعف دارد.}} \Delta=(a+1)^2-4(b+2)=0 \quad (*)$$

گام سوم: حالا نمودار تابع f را یک واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم و سپس نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم تا تابع جدید به دست بیاید:

$$f(x) \xrightarrow{\text{۱ واحد به سمت پایین}} h_1(x)=f(x)-1 \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور xها}} h_2(x)=-h_1(x)=-f(x)+1=-x^2-ax-b+1$$

گام چهارم: تابع $h_2(x)$ به‌دست‌آمده بر نیمساز ناحیهٔ دوم مماس است؛ پس معادلهٔ $h_2(x)=-x$ باید ریشهٔ مضاعف داشته باشد:

$$h_2(x)=-x^2-ax-b+1=-x \to -x^2+(1-a)x+(1-b)=0 \xrightarrow[\Delta=0]{\text{ریشهٔ مضاعف دارد.}} \Delta=(1-a)^2+4(1-b)=0 \quad (**)$$

گام پنجم: از (*) و (**) استفاده می‌کنیم تا a و b را پیدا کنیم:

$$\begin{cases}(a+1)^2-4b-8=0\\-(1-a)^2-4+4b=0\end{cases} \xrightarrow{\text{جمع می‌کنیم}} a^2+2a+1-(1-2a+a^2)-12=0 \Rightarrow 4a=12 \Rightarrow a=3, b=2$$

گام ششم: بنابراین $a+b=5$ می‌شود.

تست و پاسخ ۶

هرگاه $\frac{4}{21}=\frac{x-1}{x^3-1}-\frac{x+1}{x^3+1}$، مقدار $[\frac{3x}{2}]$ با شرط $x>1$ چه عددی است؟

۱) ۶ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ تشریحی

گام اول: از اتحاد چاق و لاغر در مخرج‌ها استفاده می‌کنیم تا عبارت‌ها را ساده کنیم:

$$\frac{x+1}{x^3+1}-\frac{x-1}{x^3-1}=\frac{4}{21} \Rightarrow \frac{x+1}{(x+1)(x^2-x+1)}-\frac{x-1}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{4}{21}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{((x^2+1)-x)}-\frac{1}{((x^2+1)+x)}=\frac{4}{21} \Rightarrow \frac{x^2+1+x-(x^2+1-x)}{(x^2+1)^2-x^2}=\frac{4}{21}$$

$$\Rightarrow \frac{2x}{(x^2+1)^2-x^2}=\frac{4}{21} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین می‌کنیم}} 21x=2(x^4+2x^2+1-x^2) \Rightarrow 2x^4+2x^2-21x+2=0$$

SanjeshCloud

گام دوم: یکی از ریشه‌های معادلهٔ $2x^4+2x^2-21x+2=0$ برابر با $x=2$ است؛ بنابراین با تقسیم عبارت $2x^4+2x^2-21x+2$ بر $x-2$، داریم:

$$\begin{array}{r|l} 2x^4+2x^2-21x+2 & x-2 \\ \hline -(2x^4-4x^3) & 2x^3+4x^2+10x-1 \\ \hline 4x^3+2x^2-21x+2 & \\ -(4x^3-8x^2) & \\ \hline 10x^2-21x+2 & \\ -(10x^2-20x) & \\ \hline -x+2 & \\ -(-x+2) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\Rightarrow 2x^4+2x^2-21x+2=(x-2)(2x^3+4x^2+10x-1)=0$$

پس یکی از ریشه‌های معادله، $x=2$ است و دیگری از $2x^3+4x^2+10x-1=0$ به دست می‌آید.

معادلهٔ $2x^3+4x^2+10x=1$ نمی‌تواند ریشهٔ بزرگ‌تر از یک داشته باشد، زیرا عبارت سمت چپ، برای $x>1$، همواره از یک بزرگ‌تر است.

بنابراین نتیجه می‌گیریم که به ازای $x>1$، ریشهٔ معادله $x=2$ است و $[\frac{3x}{2}]=3$ می‌شود.

تست و پاسخ ۷

نقطهٔ M روی عمودمنصف نقاط $A(4,0)$ و $B(0,8)$ قرار گرفته و فاصلهٔ آن تا هر یک از نقاط A و B برابر ۵ است. مجموع طول و عرض مختصات M کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

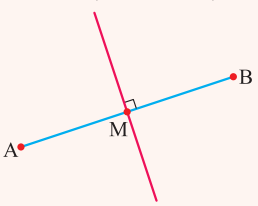
پاسخ: گزینهٔ ۳

خودت حل کنی بهتره معادلهٔ عمودمنصف پاره‌خط AB را پیدا کنید.

درس نامه ●● معادلهٔ عمودمنصف

برای نوشتن معادلهٔ عمودمنصف AB:

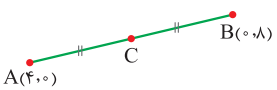
۱) مختصات نقطهٔ M، وسط پاره‌خط AB را به دست می‌آوریم: $M(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2})$



۲) از رابطهٔ $m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$ شیب AB را به دست آورده و قرینه معکوس می‌کنیم تا شیب عمودمنصف (m') به دست آید.

۳) از فرمول معادلهٔ خط، خطی که از نقطهٔ M گذشته و شیب آن m' است را می‌نویسیم: $y-y_M=m'(x-x_M)$

پاسخ تشریحی **گام اول:** فاصلهٔ M از دو نقطهٔ A و B یکسان است پس M روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارد، در نتیجه باید معادلهٔ عمودمنصف پاره‌خط واصل A و B را پیدا کنیم:



$$\frac{A+B}{2}=\frac{(4,0)+(0,8)}{2}=(2,4)$$

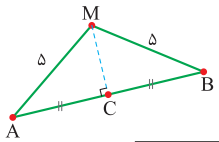
$$\text{شیب خط AB}=m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{8-0}{0-4}=-2 \Rightarrow \text{شیب خط عمودمنصف}=m'=\frac{-1}{m}=\frac{1}{2}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

گام دوم: با داشتن نقطهٔ $C(۲,۴)$ روی خط عمودمنصف و شیب آن، معادلهٔ آن را می‌نویسیم.

$$y-۴=\frac{۱}{۲}(x-۲) \Rightarrow y=\frac{۱}{۲}x+۳$$

گام سوم: نقطهٔ M روی خط عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارد، پس مختصات آن به صورت $(\alpha,\frac{۱}{۲}\alpha+۳)$ و فاصله‌اش از نقاط A و B، برابر با ۵ است؛ یعنی:



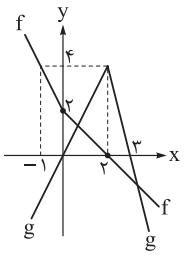
$$AM=۵=\sqrt{(x_M-x_A)^۲+(y_M-y_A)^۲}=\sqrt{(\alpha-۴)^۲+(\frac{۱}{۲}\alpha+۳-۰)^۲}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم}} ۲۵=\alpha^۲-۸\alpha+۱۶+\frac{۱}{۴}\alpha^۲+۳\alpha+۹ \Rightarrow \frac{۵}{۴}\alpha^۲-۵\alpha=۰ \Rightarrow \begin{cases}\alpha=۰ \Rightarrow M(۰,۳)\\ \alpha=۴ \Rightarrow M(۴,۵)\end{cases}$$

با توجه به گزینه‌ها، $M(۴,۵)$ مد نظر است و مجموع طول و عرض مختصات M برابر با ۹ می‌شود.

تست و پاسخ ۸

نمودار توابع f و g به صورت زیر است. دامنهٔ تابع $y=\sqrt{gof(x)}$ شامل چند عدد صحیح است؟



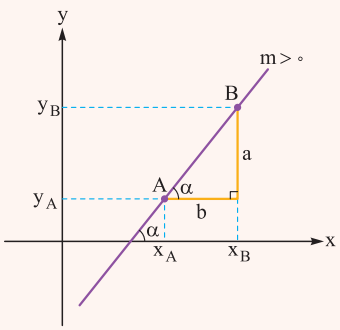
۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۲

پاسخ: گزینهٔ ۱

مشاوره اعمال روی توابع از مهم‌ترین موضوعاتی است که حتماً از آن‌ها در کنکور سؤال می‌آید. گزینه‌های سؤال هم طوری طراحی شده که با عددگذاری نمی‌توانید سؤالات را حل کنید؛ پس حتماً باید سؤال را کامل حل کنید. راه حل اصلی سؤال‌هایی که با عددگذاری حل نمی‌شوند را به خوبی یاد بگیرید.

خودت حل کنی بهتره ضابطهٔ هر یک از توابع f و g را بنویسید و gof را تشکیل بدهید.

درس نامه ●● محاسبهٔ شیب خط



$$\text{شیب خط } AB = m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{a}{b}=\tan\alpha$$

دامنهٔ fog

برای محاسبهٔ دامنهٔ fog دوتا کار می‌توانیم انجام دهیم:

راه اول	$D_{fog}=\{\underbrace{x\in D_g}_{\text{شرط ۱}} \cap \underbrace{g(x)\in D_f}_{\text{شرط ۲}}\}$
راه دوم	ضابطهٔ fog را بدون هیچ ساده‌کردنی تشکیل می‌دهیم و سپس دامنهٔ آن را حساب می‌کنیم.

پاسخ تشریحی **گام اول:** ضابطهٔ هر یک از توابع f و g را می‌نویسیم:

$$f(x)=\begin{cases}-۲x+۲ & x<۰\\ -x+۲ & x\geq ۰\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}۲x & x<۲\\ -۴x+۱۲ & x\geq ۲\end{cases}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

گام دوم: حالا تابع $gof(x)$ را تشکیل می‌دهیم:

$$g(f(x))=\begin{cases}2f(x) & f(x)<2\\ -4f(x)+12 & f(x)\geq 2\end{cases}$$

از نمودار مشخص است که تابع f به ازای $x>0$ از عدد ۲ کوچک‌تر است و به ازای $x<0$ از عدد ۲ بزرگ‌تر است؛ پس داریم:

$$g(f(x))=\begin{cases}2f(x) & x>0\\ -4f(x)+12 & x\leq 0\end{cases}=\begin{cases}2(-x+2) & x>0\\ -4(-2x+2)+12 & x\leq 0\end{cases}=\begin{cases}-2x+4 & x>0\\ 8x+4 & x\leq 0\end{cases}$$

گام سوم: دامنهٔ تابع $y=\sqrt{gof(x)}$ به ازای $gof(x)\geq 0$ به دست می‌آید؛ پس داریم:

$$\left.\begin{array}{l}1)\ x>0:-2x+4\geq 0 \Rightarrow x\leq 2 \xrightarrow{\text{اشتراک}} 0<x\leq 2\\ 2)\ x\leq 0:8x+4\geq 0 \Rightarrow x\geq -\frac{1}{2} \xrightarrow{\text{اشتراک}} -\frac{1}{2}\leq x\leq 0\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{اجتماع این دو بازه}} -\frac{1}{2}\leq x\leq 2$$

پس ۳ عدد صحیح ۰، ۱ و ۲ در دامنهٔ این تابع قرار می‌گیرند.

تست و پاسخ ۹

اگر $a\neq b$ و $\log_{\sqrt{b}} a^2-\log_a b^2=2$ ، کدام رابطه بین a و b برقرار است؟

۱) $a^2b=1$
۲) $ab^2=1$
۳) $ab^4=1$
۴) $a^4b=1$

پاسخ: گزینهٔ ۱

مشاوره از نمودار تابع‌های نمایی و لگاریتمی، ویژگی‌ها و دامنهٔ آن‌ها معمولاً حداقل دو سؤال در کنکور می‌آید. با توجه به حجم نسبتاً کم این موضوعات و تعداد سؤال زیاد آن‌ها، حتماً روی این بخش حساب ویژه‌ای باز کنید.

درس‌نامه ویژگی‌های لگاریتم

ویژگی	توضیح
$y=a^x \Leftrightarrow \log_a y=x$	رابطه‌های لگاریتمی را می‌توانیم به صورت توانی بنویسیم و برعکس.
$y=\log_b a \xrightarrow{\text{دامنه}} \begin{cases}a>0\\ b>0\\ b\neq 1\end{cases}$	برای تعیین دامنهٔ توابع لگاریتمی بین سه شرط اشتراک می‌گیریم.
$\log_b 1=0,\ \log_a a=1$	لگاریتم ۱ در هر پایه‌ای صفر است و لگاریتم هر عدد در پایهٔ خودش برابر یک می‌شود.
$\log_b a^n=n\log_b a$	توان عبارت جلوی لگاریتم به پشت لگاریتم می‌رود. $(a>0)$
$\log_{b^n} a=\frac{1}{n}\log_b a$	توان پایهٔ لگاریتم، معکوس شده و به پشت لگاریتم می‌رود.
$\log_c ab=\log_c a+\log_c b$	لگاریتم ضرب دو عدد تبدیل به جمع لگاریتم‌ها می‌شود.
$\log_c \frac{a}{b}=\log_c a-\log_c b$	لگاریتم تقسیم دو عدد تبدیل به تفاضل لگاریتم‌ها می‌شود.
$\log_b a=\frac{\log_c a}{\log_c b}$	ویژگی تغییر پایه
$\log_b a=\frac{1}{\log_a b}$	اگر جای a و b عوض شود، حاصل معکوس می‌شود. مثلاً $\log_2 3$ و $\log_3 2$ معکوس هم هستند.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ تشریحی **گام اول:** به کمک خواص لگاریتم، معادلهٔ داده‌شده را ساده می‌کنیم:

$$\log_{\sqrt{b}} a^۲ - \log_a b^۲ = ۲ \Rightarrow ۲\log_{b^{\frac{۱}{۲}}} a - ۲\log_a b = ۲$$

$$۴\log_b a - ۲\log_a b = ۲ \Rightarrow ۲\log_b a - \log_a b = ۱$$

گام دوم: حالا از تغییر متغیر $A = \log_b a$ استفاده می‌کنیم:

$$۲A - \frac{۱}{A} = ۱ \Rightarrow ۲A^۲ - A - ۱ = ۰ \Rightarrow (A-۱)(۲A+۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} A = ۱ \\ A = -\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

گام سوم: حالا داریم:

$$\begin{cases} A = ۱ = \log_b a \Rightarrow a = b \Rightarrow \text{طبق صورت سؤال، قابل قبول نیست.} \\ A = \frac{-۱}{۲} = \log_b a \Rightarrow a = b^{-\frac{۱}{۲}} = \frac{۱}{\sqrt{b}} \Rightarrow a^۲ b = ۱ \end{cases}$$

تست و پاسخ ۱۰

هرگاه $f(x) = x + \sqrt{۴ + x^۲}$، مقدار $f^{-۱}(۲\tan x)$ کدام است؟

۱) $۲\cot ۲x$ ۲) $-۲\cot ۲x$ ۳) $۲\tan ۲x$ ۴) $-\frac{۱}{۲}\tan ۲x$

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ تشریحی **گام اول:** وارون تابع f را پیدا می‌کنیم:

$$y = x + \sqrt{۴ + x^۲} \Rightarrow y - x = \sqrt{۴ + x^۲} \xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم.}} (y-x)^۲ = ۴ + x^۲$$

$$\Rightarrow y^۲ - ۲xy + x^۲ = ۴ + x^۲ \Rightarrow ۲xy = y^۲ - ۴ \Rightarrow x = \frac{y^۲ - ۴}{۲y} \xrightarrow{\text{جای } x \text{ و } y \text{ را عوض می‌کنیم}} f^{-۱}(x) = \frac{x^۲ - ۴}{۲x}$$

گام دوم: حالا مقدار $f^{-۱}(۲\tan x)$ را پیدا می‌کنیم:

$$f^{-۱}(۲\tan x) = \frac{۴\tan^۲ x - ۴}{۴\tan x} = \frac{\tan^۲ x - ۱}{\tan x} = \frac{\frac{\sin^۲ x - \cos^۲ x}{\cos^۲ x}}{\frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{(\sin^۲ x - \cos^۲ x)\cos x}{\sin x \cos^۲ x} = \frac{-\cos ۲x}{\frac{۱}{۲}\sin ۲x} = -۲\cot ۲x$$

تست و پاسخ ۱۱

اگر $\sin(x + \frac{\pi}{۳}) + ۲\cos(x - \frac{\pi}{۶}) = \frac{۳}{۲}$، مقدار $\sin(x + \frac{\pi}{۶})$ چه عددی است؟

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ یا ۱ ۲) $\pm\frac{۱}{۲}$ ۳) $-\frac{۱}{۲}$ یا صفر ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ یا صفر

پاسخ: گزینهٔ ۴

مشاوره این سؤال ترکیب حل معادلهٔ مثلثاتی با به دست آوردن نسبت‌های هم‌خانواده است. یک سؤال با ایدهٔ نو که ممکن است در کنکور مطرح شود. حتماً ارتباط نسبت‌های هم‌خانواده و به دست آوردن یکی از روی بقیهٔ نسبت‌ها را به خوبی یاد بگیرید.

خودت حل کنی بهتره به کمک زاویه‌های متمم، sin را به cos تبدیل کنید.

درس‌نامه **به دست آوردن نسبت‌های هم‌خانواده** $(\frac{۳\pi}{۲} \pm \theta, \frac{\pi}{۲} \pm \theta, \pi \pm \theta)$

۱) از مضارب زوج π در کمان صرف نظر می‌کنیم؛ مثلاً:

$$\sin(۲k\pi \pm \theta) = \sin(\pm\theta) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

۲) در کمان‌های $\pi \pm \theta$ خود نسبت را نوشته و با فرض حاده‌بودن θ، علامت نسبت را در آن ربع قرار می‌دهیم؛ مثلاً:

$$\sin(\underbrace{\pi + \theta}_{\text{ربع سوم}}) = -\sin\theta$$
سینوس ⊖

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳) در کمان‌های $\frac{\pi}{۲} \pm \theta$ یا $\frac{۳\pi}{۲} \pm \theta$ نسبت مقابل (یعنی مثلاً sin به cos تبدیل می‌شود و tan به cot و برعکس.) را نوشته و با فرض حاده‌بودن θ، علامت نسبت اول را در آن ربع قرار می‌دهیم:

$\sin(\underbrace{\frac{\pi}{۲}}_{\text{ربع دوم}} + \theta) = +\cos\theta$ (ربع دوم سینوس⊕) یا $\tan(\underbrace{\frac{۳\pi}{۲}}_{\text{ربع سوم}} - \theta) = +\cot\theta$ (ربع سوم تانژانت⊕)

حل معادلات مثلثاتی

برای حل معادلات مثلثاتی با استفاده از روابط مثلثاتی، به یکی از حالت‌های زیر رسیده و از فرمول دسته‌جواب‌ها استفاده می‌کنیم:

۱) $\sin x = \sin\alpha \Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \alpha \\ x = (۲k+۱)\pi - \alpha \end{cases}$

۲) $\cos x = \cos\alpha \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \alpha$

۳) $\left.\begin{matrix} \tan x = \tan\alpha \\ \cot x = \cot\alpha \end{matrix}\right\} \Rightarrow x = k\pi + \alpha$

پاسخ تشریحی **گام اول:** با توجه به آرگومان‌های تابع sin و cos در معادلهٔ داده‌شده، داریم:

$$(x+\frac{\pi}{۳}) - (x-\frac{\pi}{۶}) = \frac{\pi}{۲} \Rightarrow \sin(x+\frac{\pi}{۳}) = \sin(\frac{\pi}{۲} + (x-\frac{\pi}{۶})) = \cos(x-\frac{\pi}{۶})$$

گام دوم: عبارت به‌دست‌آمده از گام اول را در معادلهٔ داده‌شده جای‌گذاری می‌کنیم:

$$۳\cos(x-\frac{\pi}{۶}) = \frac{۳}{۲} \Rightarrow \cos(x-\frac{\pi}{۶}) = \frac{۱}{۲} = \cos\frac{\pi}{۳}$$

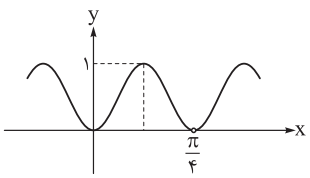
$$\Rightarrow x - \frac{\pi}{۶} = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳} \Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} \\ x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۶} \end{cases}$$

گام سوم: حالا با توجه به جواب‌هایی که برای x به دست آورده‌ایم، مقدار $\sin(x+\frac{\pi}{۶})$ را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases} \sin(x+\frac{\pi}{۶}) = \sin(۲k\pi + \frac{\pi}{۲} + \frac{\pi}{۶}) = \cos(\frac{\pi}{۶}) = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \\ \sin(x+\frac{\pi}{۶}) = \sin(۲k\pi - \frac{\pi}{۶} + \frac{\pi}{۶}) = ۰ \end{cases}$$

تست و پاسخ ۱۲

قسمتی از نمودار تابع $f(x) = \frac{a\sin^۲ bx}{۱+\tan^۲ bx}$ به صورت زیر است. مقدار $f(\frac{\pi}{۲۴})$ کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۸}$
۲) $\frac{۱}{۴}$
۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$
۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۸}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

خودت حل کنی بهتره تابع tan در نقاط $۲k\pi \pm \frac{\pi}{۲}$ تعریف‌نشده است. به کمک نقطهٔ $x = \frac{\pi}{۴}$، مقدار b را پیدا کنید.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

درس‌نامه اتحادهای اولیهٔ مثلثاتی

	صورت اصلی اتحاد	صورت فرعی اتحاد	
۱	$\sin^۲ x+\cos^۲ x=۱$	$۱-\cos^۲ x=\sin^۲ x$	$۱-\sin^۲ x=\cos^۲ x$
۲	$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$	$\cot x=\frac{۱}{\tan x}$	$\tan x.\cot x=۱$
۳	$\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$		
۴	$۱+\tan^۲ x=\frac{۱}{\cos^۲ x}$		
۵	$۱+\cot^۲ x=\frac{۱}{\sin^۲ x}$		

پاسخ تشریحی **گام اول:** ابتدا تابع f را به کمک اتحادهای مثلثاتی ساده می‌کنیم:

$$۱+\tan^۲ bx=\frac{۱}{\cos^۲ bx}\Rightarrow f(x)=a\sin^۲ bx\cos^۲ bx=a(\frac{۱}{۲}\sin ۲bx)^۲=\frac{a}{۴}\sin^۲ ۲bx$$

گام دوم: از نمودار مشخص است که تابع در $x=\frac{\pi}{۴}$ تعریف‌نشده است. برای تابع $y=\tan bx$، اولین نقطه‌ای با طول مثبت که در آن تعریف نمی‌شود به صورت $x=\frac{\pi}{۲|b|}$ است؛ پس:

$$\frac{\pi}{۲|b|}=\frac{\pi}{۴}\Rightarrow |b|=۲$$

گام سوم: از طرفی، مقدار max تابع برابر با ۱ است:

$$\frac{a}{۴}=۱\Rightarrow a=۴$$

در نتیجه $f(x)=\sin^۲ ۴x$ می‌شود. (چون sin به توان ۲ رسیده، فرقی نمی‌کند b را ۲− یا ۲+ در نظر بگیریم.)

گام چهارم: حالا مقدار $f(\frac{\pi}{۲۴})$ را پیدا می‌کنیم.

$$f(\frac{\pi}{۲۴})=\sin^۲ ۴(\frac{\pi}{۲۴})=\sin^۲ \frac{\pi}{۶}=(\frac{۱}{۲})^۲=\frac{۱}{۴}$$

تست و پاسخ ۱۳

اگر α کوچک‌ترین جواب معادلهٔ $\sin x\cos x+\sin^۲ x=\cos^۲ x$ در بازهٔ $(۰,\frac{\pi}{۲})$ باشد، حاصل $\tan(\frac{\pi}{۴}+۲\alpha)$ چه‌قدر است؟

۱) -۳ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) -۴

پاسخ: گزینهٔ ۱

مشاوره در حل معادلات مثلثاتی، تسلط به اتحادهای مثلثاتی بسیار مهم است. حتماً یک بار اتحادهای مثلثاتی را مرور کنید.

درس‌نامه اتحادهای ۲α

سینوس	اتحاد	$\sin ۲\alpha=۲\sin\alpha\cos\alpha$
	نتیجه	$\sin\alpha\cos\alpha=\frac{۱}{۲}\sin ۲\alpha$
کسینوس	اتحاد	$\cos ۲\alpha=\cos^۲\alpha-\sin^۲\alpha=۲\cos^۲\alpha-۱=۱-۲\sin^۲\alpha$
	نتایج (روابط طلایی)	$۱-\cos ۲\alpha=۲\sin^۲\alpha\qquad ۱+\cos ۲\alpha=۲\cos^۲\alpha$
تانژانت	اتحاد	$\tan ۲\alpha=\frac{۲\tan\alpha}{۱-\tan^۲\alpha}$

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

فرمول بسط و دو برابر کمان تانژانت

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$
$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

نتایج

$$\tan(\alpha+\alpha)=\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$
$$\tan(\alpha+\frac{\pi}{4})=\frac{\tan\alpha+1}{1-\tan\alpha}$$
$$\tan(\alpha-\frac{\pi}{4})=\frac{\tan\alpha-1}{1+\tan\alpha}$$

پاسخ تشریحی **گام اول:** ابتدا معادلهٔ داده‌شده را به کمک اتحادهای مثلثاتی ساده می‌کنیم:

$$\sin x\cos x+\sin^2 x=\cos^2 x\Rightarrow\frac{1}{2}\sin 2x=\cos^2 x-\sin^2 x\Rightarrow\frac{1}{2}\sin 2x=\cos 2x\Rightarrow\tan 2x=2\xrightarrow[\text{معادله است.}]{\alpha\text{ کوچک‌ترین جواب}}\tan 2\alpha=2$$

گام دوم: حالا مقدار $\tan(\frac{\pi}{4}+2\alpha)$ را پیدا می‌کنیم:

$$\tan(\frac{\pi}{4}+2\alpha)=\frac{1+\tan 2\alpha}{1-\tan 2\alpha}=\frac{1+2}{1-2}=-3$$

تست و پاسخ ۱۴

اگر g وارون تابع $f(x)=-\sqrt{x-3}$ باشد، فاصلهٔ نقطهٔ برخورد مجانب‌های تابع $y=\frac{|2x+1|}{2x-\sqrt{g(-x)}}$ از نیمساز ناحیهٔ سوم چه‌قدر است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ۳) $\frac{3}{\sqrt{2}}$ ۴) $\frac{3}{2}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

خودت حل کنی بهتره وارون تابع f را به کمک ضابطهٔ آن، پیدا کنید و تابع y را تشکیل دهید.

درس نامه برای به دست آوردن ضابطهٔ تابع وارون، مراحل زیر را طی می‌کنیم:

۱) به جای $f(x)$ قرار می‌دهیم y. ۲) x را در یک طرف تساوی تنها می‌کنیم. (x برحسب y) ۳) جای y و x را عوض می‌کنیم.

هم‌ارزی چندجمله‌ای‌ها در بی‌نهایت

برای محاسبهٔ حد توابع چندجمله‌ای در $\pm\infty$، فقط جملهٔ با درجهٔ بیشتر اهمیت دارد و بقیهٔ جملات را حذف می‌کنیم:

$$\lim_{x\to\pm\infty}(ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\cdots)=\lim_{x\to\pm\infty}ax^n$$

حالا اگر چندجمله‌ای‌ها زیر رادیکال باشند، باید حواستان به «زوج یا فرد بودن فرجه» و «میل‌کردن x به $+\infty$ یا $-\infty$» باشد.

چند مثال ببینید:

مثال از فرجهٔ ...	عبارت اولیه	هم‌ارز در $+\infty$	هم‌ارز در $-\infty$
زوج	$\sqrt{4x^2+8x-1}$	$\sqrt{4x^2}=2\lvert x\rvert=2x$	$\sqrt{4x^2}=2\lvert x\rvert=-2x$
فرد	$\sqrt[3]{8x^3-30x^2+10x}$	$\sqrt[3]{8x^3}=2x$	$\sqrt[3]{8x^3}=2x$

پاسخ تشریحی **گام اول:** به کمک تابع f، وارون آن یعنی تابع g را پیدا می‌کنیم:

$$f(x)=-\sqrt{x-3},\ x\geq 3,\ y\leq 0\Rightarrow y=-\sqrt{x-3}\Rightarrow y^2=x-3\Rightarrow x=3+y^2\xrightarrow[\text{عوض می‌کنیم.}]{\text{جای x و y را}}g(x)=3+x^2,\ x\leq 0,\ y\geq 3$$

گام دوم: حالا تابع y را تشکیل می‌دهیم. دقت کنید که با توجه به دامنهٔ تابع $g(-x)$، شرط $x\geq 0$ را داریم:

$$y=\frac{|2x+1|}{2x-\sqrt{3+x^2}},\ x\geq 0$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

گام سوم: حالا مجانب‌های تابع y را پیدا می‌کنیم:

$$\text{مخرج برابر با صفر: مجانب قائم} = ۲x - \sqrt{۳+x^۲} = ۰ \Rightarrow ۴x^۲ = ۳ + x^۲ \Rightarrow x^۲ = ۱ \Rightarrow x = \pm ۱ \xrightarrow{x \geq ۰} x = ۱$$

$$\text{مجانب افقی: } \lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty} \frac{|۲x+۱|}{۲x-\sqrt{۳+x^۲}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(۲x+۱)}{۲x-\sqrt{۳+x^۲}} \overset{\text{هم‌ارزی}}{\equiv} \lim_{x\to+\infty} \frac{۲x}{۲x-x} = ۲$$

پس محل برخورد مجانب‌های تابع، نقطهٔ $A(۱,۲)$ است.

گام چهارم: فاصلهٔ نقطهٔ A از نیمساز ناحیهٔ سوم برابر است با:

$$y = x \Rightarrow d = \frac{|۱-۲|}{\sqrt{۱^۲+۱^۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

تست و پاسخ ۱۵

اگر $f(x)$ یک چندجمله‌ای درجه‌دوم باشد و تابع $y = \frac{f(x)+x^۳}{۲[\frac{x}{۳}]+۳}$ در بازهٔ $(۰,۱۰)$ پیوسته باشد، طول رأس تابع $y = f(x)$ چه عددی است؟

۱) $\frac{۱۳}{۴}$ ۲) $\frac{۱۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱۵}{۴}$ ۴) $\frac{۱۰}{۴}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

مشاوره روی ویژگی‌های قدرمطلق و جزء صحیح کار کنید. ردپای آن‌ها در بسیاری از سؤال‌های کنکور دیده می‌شود. این که براکت در چه نقاطی پیوسته در چه نقاطی ناپیوسته است، بارها در کنکور سؤال آمده است.

خودت حل کنی بهتره تابع جزء صحیح، در نقاط صحیح، ناپیوسته می‌شود. در این نقاط باید تابع برابر با صفر شود تا پیوسته شود.

پاسخ تشریحی **گام اول:** از آن‌جایی که در تابع $y = \frac{f(x)+x^۳}{۲[\frac{x}{۳}]+۳}$ جزء صحیح داریم، تابع در نقاطی ناپیوسته می‌شود که عبارت داخل جزء صحیح، عددی صحیح باشد؛ بنابراین اگر x در بازهٔ $(۰,۱۰)$ قرار بگیرد، تابع y در نقاط صحیح $x = ۳,۶,۹$ ناپیوسته است.

گام دوم: برای این‌که ناپیوستگی در این نقاط از بین برود، باید صورت کسر به ازای این مقادیر x، برابر با صفر باشد؛ پس در صورت کسر، یک چندجمله‌ای از درجهٔ ۳ با ریشه‌های ۹، ۶ و ۳ و ضریب پشت پرانتز یک خواهیم داشت:

$$(x-۳)(x-۶)(x-۹) = x^۳ - ۱۸x^۲ + ۹۹x - ۱۶۲ = f(x) + x^۳$$

$$\xrightarrow{f(x) \text{ چندجمله‌ای درجه‌دوم است.}} f(x) = -۱۸x^۲ + ۹۹x - ۱۶۲$$

گام سوم: حالا طول رأس سهمی $y = f(x)$ را پیدا می‌کنیم:

$$x_S = \frac{-b}{۲a} = \frac{-۹۹}{۲(-۱۸)} = \frac{۱۱}{۴}$$

تست و پاسخ ۱۶

مقدار $\lim_{x\to\frac{۱}{۲}} (۴x^۲-۱)\tan \pi x$ چه عددی است؟

۱) $\frac{\pi}{۴}$ ۲) $\frac{۴}{\pi}$ ۳) $-\frac{۴}{\pi}$ ۴) $-\frac{\pi}{۴}$

پاسخ: گزینهٔ ۳

مشاوره اگر در حد داده‌شده، $\tan \pi x = \frac{۱}{\cot \pi x}$ را قرار دهیم، تبدیل به حد مبهم $\frac{۰}{۰}$ می‌شود که یک سؤال کاملاً آشناست. اگر در حل این سؤال به مشکل برخورد کرده‌اید، پیشنهاد می‌کنیم تعدادی سؤال تشریحی هم از این قسمت حل کنید. در حدهای مبهم $\frac{۰}{۰}$، اگر فرمول‌های مشتق را بلدید، هوپیتال خیلی بهتر از راه عادی است.

خودت حل کنی بهتره عبارت را به کمک تغییر متغیر $t = x - \frac{۱}{۲}$، تبدیل به رفع ابهام $\frac{۰}{۰}$ کنید.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ تشریحی **گام اول:** در حد داده‌شده، به ازای $x=\frac{1}{2}$، مقدار $\tan \pi x$ بی‌نهایت می‌شود و عبارت $4x^2-1$ برابر با صفر می‌شود؛ بنابراین باید رفع ابهام کنیم. از تغییر متغیر $t=x-\frac{1}{2}$ استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}(4x^2-1)\tan \pi x=\lim_{t\to 0}(4(t+\frac{1}{2})^2-1)\tan(\pi(t+\frac{1}{2}))$$

$$=\lim_{t\to 0}(4(t+\frac{1}{2})^2-1)(-\cot \pi t)=\lim_{t\to 0}\frac{-(4(t+\frac{1}{2})^2-1)}{\tan \pi t}=\lim_{t\to 0}\frac{-((2(t+\frac{1}{2})-1)(2(t+\frac{1}{2})+1))}{\tan \pi t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{-(2t+1-1)(2t+1+1)}{\tan \pi t}=\lim_{t\to 0}\frac{-2t(2t+2)}{\tan \pi t}$$

گام دوم: در حد به‌دست‌آمده، از هم‌ارزی $\tan \pi t \sim \pi t$ وقتی که $t\to 0$، استفاده می‌کنیم؛ پس داریم:

$$\lim_{t\to 0}\frac{-2t(2t+2)}{\pi t}=\frac{-2}{\pi}\times 2=\frac{-4}{\pi}$$

تست و پاسخ ۱۷

اگر تابع f در $x=2$ مشتق‌پذیر و $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-3x}{x^2-4}=3$ باشد، حاصل مشتق تابع $g(x)=\sqrt[3]{4x}\,f(x)$ در نقطهٔ $x=2$ چه‌قدر است؟

۱) ۱۸ ۲) ۲۴ ۳) ۲۷ ۴) ۳۲

پاسخ: گزینهٔ ۴

مشاوره استفاده از قضیهٔ هوپیتال، راه حل سریع‌تری برای حل این‌گونه سؤالات است، حتماً به این قضیه توجه داشته باشید.

درس‌نامه ●● قضیهٔ هوپیتال

کسر $\frac{f(x)}{g(x)}$ را در نظر بگیرید. به عبارت $\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{\text{مشتق صورت}}{\text{مشتق مخرج}}$ هوپیتال تابع می‌گوییم. برای رفع ابهام حدهای $\frac{0}{0}$ داریم:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

یعنی از صورت و مخرج مشتق گرفته و حاصل حد را به دست می‌آوریم.

تذکر هوپیتال تابع را با مشتق تابع کسری اشتباه نگیرید.

قواعد مشتق‌گیری

(در جدول زیر، منظور از $(\ )'$ روی فلش، همان مشتق است.)

	رابطه	مثال
ضریب عددی	$a\cdot(\ )\xrightarrow{'} a\cdot(\ )'$	$5x^3\xrightarrow{'}5(3x^2)=15x^2$
جمع و تفریق	$f\pm g\xrightarrow{'} f'\pm g'$	$4x^7-\sqrt[3]{x}\xrightarrow{'}28x^6-\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$
ضرب	$f.g\xrightarrow{'} f'.g+f.g'$	$x^2(\sqrt{x}+1)\xrightarrow{'}2x(\sqrt{x}+1)+x^2(\frac{1}{2\sqrt{x}})$
تقسیم	$\frac{f}{g}\xrightarrow{'}\frac{f'.g-f.g'}{g^2}$	$\frac{x+4}{2x^3-1}\xrightarrow{'}\frac{1(2x^3-1)-6x^2(x+4)}{(2x^3-1)^2}$
ترکیب	$f(\ )\xrightarrow{'}(\ )'.f'(\ )$	$f(x^2+2x-3)\xrightarrow{'}(2x+2).f'(x^2+2x-3)$

پاسخ تشریحی **گام اول:** از آن‌جایی که در حد داده‌شده، مخرج به ازای $x=2$ برابر با صفر است و حاصل حد، عددی حقیقی است. نتیجه می‌گیریم که صورت نیز به ازای $x=2$ برابر با صفر است.

$$f(2)-3\times 2=0 \Rightarrow f(2)=6$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

گام دوم: برای رفع ابهام حد داده‌شده، از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-۳x}{x^۲-۴}=\lim_{x\to ۲}\frac{f'(x)-۳}{۲x}=\frac{f'(۲)-۳}{۴}=۳\Rightarrow f'(۲)=۱۵$$

گام سوم: حالا به کمک فرمول مشتق ضرب توابع، مشتق تابع g را پیدا می‌کنیم:

$$g(x)=\sqrt[۳]{۴x}\,f(x)\ \Rightarrow\ g'(x)=\frac{۴}{۳\sqrt[۳]{(۴x)^۲}}f(x)+\sqrt[۳]{۴x}\,f'(x)$$

گام چهارم: مقدار $g'(۲)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$g'(۲)=\frac{۴}{۳\sqrt[۳]{۸^۲}}f(۲)+\sqrt[۳]{۸}\,f'(۲)=\frac{۴}{۳\times ۴}f(۲)+۲f'(۲)=\underset{\text{از گام اول و دوم}}{\frac{۱}{۳}}\times ۶+۲\times ۱۵=۳۲$$

تست و پاسخ ۱۸

تابع $f(x)=\frac{۲x+۱}{x-۳}$ مفروض است. آهنگ تغییر متوسط f در بازهٔ $[۴,۱۰]$ با آهنگ تغییر لحظه‌ای $f^{-۱}$ در نقطه‌ای با کدام طول در این بازه برابر است؟

۱) $۳+\sqrt{۳}$ ۲) $۳+\sqrt{۲}$ ۳) $۲+\sqrt{۵}$ ۴) $۲+\sqrt{۷}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

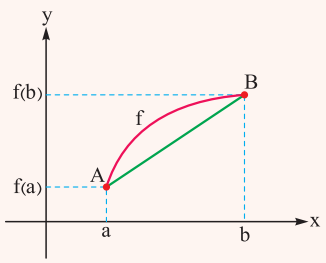
درس‌نامه ●● آهنگ تغییر متوسط و لحظه‌ای

آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازهٔ $[a\,,b]$ برابر است با:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

یعنی a و b را در تابع قرار داده تا $f(b)$ و $f(a)$ به دست آید. آهنگ تغییر متوسط همان نسبت تغییرات y به تغییرات x است.

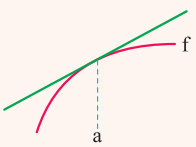
تعبیر هندسی:



شیب پاره‌خط AB = آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازهٔ $[a\,,b]$

آهنگ تغییر لحظه‌ای در نقطهٔ a همان $f'(a)$ است.

تعبیر هندسی: آهنگ تغییر لحظه‌ای در نقطهٔ a همان شیب خط مماس بر تابع f در نقطه‌ای با طول a است.



محاسبهٔ وارون تابع هموگرافیک $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$

۱) $y=\frac{ax+b}{cx+d}$

۲) با طرفین‌وسطین داریم:

$$cxy+dy=ax+b\ \Rightarrow\ cxy-ax=-dy+b\Rightarrow x(cy-a)=-dy+b\ \Rightarrow\ x=\frac{-dy+b}{cy-a}$$

۳) جای y و x را عوض می‌کنیم:

$$y=f^{-۱}(x)=\frac{-dx+b}{cx-a}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ تشریحی **گام اول:** آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازهٔ $[۴,۱۰]$ را پیدا می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{۲x+۱}{x-۳}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(۱۰)-f(۴)}{۱۰-۴}=\frac{\frac{۲۱}{۷}-\frac{۹}{۱}}{۶}=\frac{۳-۹}{۶}=-۱$$

گام دوم: حالا تابع $f^{-۱}$ را پیدا می‌کنیم:

$$f^{-۱}(x)=\frac{۳x+۱}{x-۲}$$

چون آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع $f^{-۱}$ را می‌خواهیم، مشتق آن را به دست می‌آوریم:

$$(f^{-۱}(x))'=\frac{-۶-۱}{(x-۲)^۲}=\frac{-۷}{(x-۲)^۲}$$

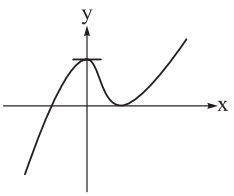
گام سوم: آهنگ تغییر متوسط به‌دست‌آمده در گام اول، با آهنگ تغییر لحظه‌ای در نقطهٔ $x_۰$ در گام دوم برابر است؛ پس:

$$\frac{-۷}{(x_۰-۲)^۲}=-۱ \Rightarrow (x_۰-۲)^۲=۷ \Rightarrow x_۰-۲=\pm\sqrt{۷} \Rightarrow x_۰=۲\pm\sqrt{۷}$$

چون بازهٔ داده‌شده $[۴,۱۰]$ است، پس $۲-\sqrt{۷}$ قابل قبول نیست زیرا در این بازه قرار ندارد و پاسخ $۲+\sqrt{۷}$ است.

تست و پاسخ ۱۹

نمودار تابع $f(x)=x+a+۳\sqrt[۳]{۱+bx}$ به صورت زیر است. عرض نقطهٔ ماکزیمم نسبی چه‌قدر است؟



۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۶

پاسخ: گزینهٔ ۳

مشاوره یکی از کاربردهای مشتق، به‌دست‌آوردن ضرایب ضابطهٔ یک تابع بر اساس نمودار تابع است. توجه به نقاط عطف، اکسترمم‌های نسبی و مطلق و ریشه‌های تابع، در حل این سؤالات کمک‌کننده است.

خودت حل کنی بهتره $x=۰$، نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع f است، از f مشتق بگیرید.

درس‌نامه **دو ویژگی مهم نقاط اکسترمم نسبی**

اگر تابع f در نقطهٔ (α,β) مشتق‌پذیر بوده (مثل تابع‌های چندجمله‌ای، گویا و مثلثاتی) و دارای اکسترمم نسبی باشد، همواره دو شرط زیر برقرار است:

۱) $f(\alpha)=\beta$ (یعنی نقطه در ضابطهٔ تابع صدق می‌کند.)

۲) $f'(\alpha)=۰$ (یعنی α ریشهٔ مشتق است.)

پاسخ تشریحی **گام اول:** با توجه به نمودار تابع f، این تابع در $x=۰$، دارای max نسبی است؛ پس مشتق در این نقطه برابر با صفر است:

$$f(x)=x+a+۳\sqrt[۳]{۱+bx} \Rightarrow f'(x)=۱+\frac{۳b}{۳\sqrt[۳]{(۱+bx)^۲}}$$

$$f'(۰)=۰ \Rightarrow ۱+b=۰ \Rightarrow b=-۱$$

گام دوم: پس $f'(x)=۱-\frac{۱}{\sqrt[۳]{(۱-x)^۲}}$ می‌شود. با توجه به نمودار، تابع، min نسبی نیز دارد، داریم:

$$f'(x)=۰ \Rightarrow ۱-\frac{۱}{\sqrt[۳]{(۱-x)^۲}}=۰ \Rightarrow \sqrt[۳]{(۱-x)^۲}=۱ \Rightarrow (۱-x)^۲=۱ \Rightarrow \begin{cases} ۱-x=۱ \Rightarrow x=۰ \Rightarrow \text{نقطهٔ max نسبی تابع است.} \\ ۱-x=-۱ \Rightarrow x=۲ \Rightarrow \text{نقطهٔ min نسبی تابع است.} \end{cases}$$

گام سوم: نقطهٔ $(۲,۰)$ در تابع صدق می‌کند، داریم:

$$f(۲)=۲+a+۳\sqrt[۳]{۱-۲}=۰ \Rightarrow ۲+a-۳=۰ \Rightarrow a=۱$$

گام چهارم: عرض نقطهٔ max نسبی را پیدا می‌کنیم.

$$f(x)=x+۱+۳\sqrt[۳]{۱-x} \Rightarrow f(۰)=۱+۳=۴$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

تست و پاسخ ۲۰

نقطهٔ $A(-1,2)$ نقطهٔ عطف تابع $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ است. اگر خط مماس بر f در نقطهٔ A دارای عرض از مبدأ یک باشد، مقدار $b+c$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ: گزینهٔ ۳

خودت حل کنی بهتره در نقطهٔ عطف، مشتق دوم تابع صفر می‌شود و تغییر علامت می‌دهد.

درس‌نامه ●● نوشتن معادلهٔ خط مماس

- معادلهٔ خط مماس بر تابع f در نقطهٔ $(a\ ,\ f(a))$ به صورت زیر است:

$$y-y_\circ=m(x-x_\circ)\Rightarrow y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

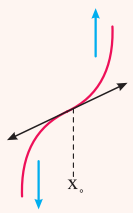
نقطهٔ عطف

- نقطهٔ $x=x_\circ$ نقطهٔ عطف تابع f است، هرگاه:

۱) f در $x_\circ$ پیوسته باشد.

۲) جهت تقعر تغییر کند (علامت f'' تغییر کند).

۳) خط مماس واحد داشته باشد (نقطهٔ ناپیوسته یا گوشه نباشد، ولی مماس قائم می‌تواند داشته باشد).



- روش تعیین نقاط عطف در تابع‌هایی که مشتق دوم دارند:

۱) $f''(x)$ را محاسبه کرده و مساوی صفر قرار می‌دهیم.

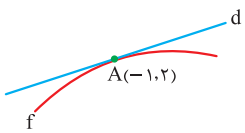
۲) جواب‌های $f''(x)=0$ را به دست آورده و f'' را تعیین علامت می‌کنیم.

۳) f'' در هر ریشه‌ای تغییر علامت بدهد، آن ریشه نقطهٔ عطف است.

پاسخ تشریحی **گام اول:** چون نقطهٔ $A(-1,2)$، نقطهٔ عطف تابع است، دو نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{cases}f(x_A)=y_A\\f''(x_A)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-1+a-b+c=2\Rightarrow a-b+c=3\\f''(x)=6x+2a\Rightarrow 2a-6=0\Rightarrow a=3\end{cases}\Rightarrow c-b=0\Rightarrow c=b$$

گام دوم: معادلهٔ خط مماس را به دست می‌آوریم:



شیب خط d برابر با مقدار مشتق تابع f در نقطهٔ A است:

$$m=f'(-1)=3-2\times 3+b=-3+b$$

معادلهٔ خط مماس: $y-2=(b-3)(x+1)$

گام سوم: خط مماس بر تابع f در نقطهٔ $A(-1,2)$، دارای عرض از مبدأ ۱ است، پس نقطهٔ $(0,1)$ در این خط صدق می‌کند:

$$1-2=b-3\Rightarrow b=2=c$$

گام چهارم: بنابراین $b+c=4$ می‌شود.

تست و پاسخ ۲۱

A و B دو پیشامد مستقل از فضای نمونه‌ای S هستند که $P(A)+P(B)=\frac{23}{17}$.

اگر $P(A|B)=2P(B|A)$، آن‌گاه احتمال آن‌که فقط پیشامد A رخ دهد یا هر دو با هم رخ دهند، کدام است؟

۱) $\frac{23}{51}$ ۲) $\frac{46}{51}$

۳) $\frac{1058}{2601}$ ۴) $\frac{1288}{2601}$

این قسمت سؤال که گفته «احتمال این‌که فقط پیشامد A رخ دهد ($A-B$) یا ($\cup$) هر دو با هم رخ دهند ($A\cap B$)» یعنی $P\big((A-B)\cup(A\cap B)\big)$

پاسخ: گزینهٔ ۲

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

درس‌نامه دو پیشامد مستقل

دو پیشامد A و B را مستقل گوییم هرگاه: $P(A\cap B)=P(A).P(B)$

نکته اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند آن‌گاه:

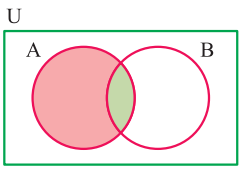
الف) A و B' هم مستقل‌اند: $P(A\cap B')=P(A)P(B')$

ب) A' و B هم مستقل‌اند: $P(A'\cap B)=P(A')P(B)$

پ) A' و B' هم مستقل‌اند: $P(A'\cap B')=P(A')P(B')$

نکته $P(A\mid B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$

پاسخ تشریحی **گام اول:** ابتدا به خواستهٔ سؤال توجه کنید. $P\big((A-B)\cup(A\cap B)\big)$ را می‌خواهیم.



با توجه به نمودار ون مقابل واضح است که $(A-B)\cup(A\cap B)=A$ است، پس $P\big((A-B)\cup(A\cap B)\big)=P(A)$ شده و باید مقدار $P(A)$ را محاسبه کنیم.

گام دوم: حالا سراغ تساوی $P(A\mid B)=2P(B\mid A)$ می‌رویم:

$$P(A\mid B)=2P(B\mid A)\Rightarrow\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{2\,P(B\cap A)}{P(A)}\xrightarrow{\text{طرفین‌وسطین}}P(A)=2P(B)$$

گام سوم: با جای‌گذاری $P(A)=2P(B)$ در تساوی $P(A)+P(B)=\frac{23}{17}$ داریم:

$$2P(B)+P(B)=\frac{23}{17}\Rightarrow 3P(B)=\frac{23}{17}\Rightarrow P(B)=\frac{23}{51}\Rightarrow P(A)=2P(B)=2\times\frac{23}{51}=\frac{46}{51}$$

دقت کنید: دیدیم که در حل سؤال نیازی به استفاده‌کردن از مستقل‌بودن A و B نبود! ☺

تست و پاسخ ۲۲

آمارها نشان می‌دهد در کشور چین، تنها ۱ درصد خودروهای تولیدشده معیوب هستند. در سال ۲۰۲۳ کشور چین، یک میلیون خودرو تولید کرده است و هزار دستگاه خودرو از این کشور در این سال وارد کشور ایران شده است. اگر به تصادف از بین خودروهای چینی مدل ۲۰۲۳ در کشور ایران، یک دستگاه انتخاب کنیم، با چه احتمالی معیوب است؟

۱) ۱ درصد ۲) ۲ درصد ۳) ۱/۵ درصد ۴) بیش از ۱۰ درصد

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس‌نامه

نمونه‌گیری به روش تصادفی ساده: در روش نمونه‌گیری تصادفی ساده به هر یک از واحدهای آماری شماره‌ای اختصاص داده می‌شود و سپس به تصادف تعدادی از آن‌ها را انتخاب می‌کنیم.

نکات ۱) در روش نمونه‌گیری تصادفی ساده، اگر جامعه nعضوی و نمونه mعضوی باشد، احتمال انتخاب هر عضو جامعه $\frac{m}{n}$ است.

۲) در روش نمونه‌گیری تصادفی ساده، اگر جامعه nعضوی و نمونه mعضوی باشد و احتمال این‌که اعضای جامعه دارای یک ویژگی خاص باشند، t باشد، احتمال این‌که اعضای نمونه هم دارای آن ویژگی خاص باشند t می‌شود؛ برای مثال اگر ایران شامل ۸۰ میلیون نفر باشد و احتمال سیگاری‌بودن در ایران $\frac{1}{11}$ باشد و ما نمونه‌ای به اندازهٔ ۵۰۰ هزار نفر از بین ایرانی‌ها را به روش نمونه‌گیری تصادفی ساده انتخاب کنیم، احتمال سیگاری‌بودن در بین ۵۰۰ هزار نفر انتخاب‌شده هم دقیقاً همان $\frac{1}{11}$ می‌شود.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ تشریحی طبق گفتهٔ سؤال، چین در سال ۲۰۲۳ یک میلیون خودرو تولید کرده (جامعه) و احتمال معیوب‌بودن هر خودرو ۱ درصد است. حالا از میان این خودروها هزار دستگاه (نمونه) وارد ایران شده، پس طبق نکتهٔ (۲)، احتمال خراب‌بودن این خودروها باز هم همان ۱ درصد می‌شود.

تست و پاسخ ۲۳

از یک جامعه، نمونهٔ ۲۲۰ ، ۱۸۰ ، ۱۶۰ ، ۱۶۰ ، ۱۴۰ ، ۱۲۰ ، ۱۰۰ ، ۱۰۰ و ۸۰ انتخاب شده است. اگر انحراف معیار جامعه، نصف انحراف معیار نمونه باشد، طول بازهٔ اطمینان بالای ۹۵ درصد برای میانگین این جامعه کدام است؟

۱) $10\sqrt{5}$ ۲) $10\sqrt{20}$ ۳) $\frac{10}{3}\sqrt{20}$ ۴) $\frac{80\sqrt{10}}{9}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

خودت حل کنی بهتره اول با استفاده از نمونهٔ داده‌شده، انحراف معیار اعضای نمونه و سپس انحراف معیار اعضای جامعه را حساب کنید و بعد کافی است به این توجه کنید که طول بازهٔ اطمینان بیش از ۹۵ درصد میانگین برابر $\frac{4\sigma}{\sqrt{n}}$ است.

درس‌نامه **بازهٔ اطمینان بیش از ۹۵ درصد برای میانگین**

اگر از جامعه‌ای با انحراف معیار σ، نمونه‌ای به اندازهٔ n با میانگین $\bar{x}$ انتخاب کنیم، بازهٔ اطمینان بیش از ۹۵ درصد میانگین جامعه به صورت مقابل می‌شود:

$$(\bar{x}-\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\bar{x}+\frac{2\sigma}{\sqrt{n}})$$

نکات ۱) طول بازهٔ اطمینان بیش از ۹۵ درصد میانگین برابر است با:

$$\text{ابتدای بازه}-\text{انتهای بازه}=\underbrace{\bar{x}+\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}}_{\text{انتهای بازه}}-\underbrace{(\bar{x}-\frac{2\sigma}{\sqrt{n}})}_{\text{ابتدای بازه}}=\bar{x}+\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}-\bar{x}+\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{4\sigma}{\sqrt{n}}$$

۲) اگر میانگین داده‌های آماری x_1 تا x_n برابر $\bar{x}$ باشد، انحراف معیار این داده‌ها از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$\sigma=\sqrt{\frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+(x_3-\bar{x})^2+\ldots+(x_n-\bar{x})^2}{n}}$$

پاسخ تشریحی **گام اول:** تعداد اعضای نمونه $n=9$ تا است. میانگین اعضای نمونه را محاسبه می‌کنیم:

$$\bar{x}=\frac{\text{مجموع اعضا}}{\text{تعداد اعضا}}=\frac{\overbrace{80+100+100+120}^{400}+\overbrace{140+160}^{300}+160+\overbrace{180+220}^{400}}{9}=\frac{1100+160}{9}=\frac{1260}{9}=140$$

گام دوم: انحراف معیار اعضای نمونه را به دست می‌آوریم:

$$\sigma_{\text{نمونه}}=\sqrt{\frac{(80-140)^2+(100-140)^2+(100-140)^2+(120-140)^2+(140-140)^2+(160-140)^2+(160-140)^2+(180-140)^2+(220-140)^2}{9}}$$

$$=\sqrt{\frac{3600+1600+1600+400+0+400+400+1600+6400}{9}}=\sqrt{\frac{16000}{9}}=\frac{40\sqrt{10}}{3}$$

گام سوم: طبق گفتهٔ سؤال انحراف معیار جامعه نصف انحراف معیار نمونه است، پس:

$$\sigma_{\text{جامعه}}=\frac{1}{2}\sigma_{\text{نمونه}}=\frac{1}{2}\times\frac{40\sqrt{10}}{3}=\frac{20\sqrt{10}}{3}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

گام چهارم: حالا طبق نکتهٔ ۱، طول بازهٔ اطمینان بالای ۹۵ درصد برای میانگین این جامعه برابر است با:

$$\frac{۴\sigma_{\text{جامعه}}}{\sqrt{n}}=\frac{۴\times\frac{۲۰\sqrt{۱۰}}{۳}}{\sqrt{۹}}=\frac{\frac{۸۰\sqrt{۱۰}}{۳}}{۳}=\frac{۸۰\sqrt{۱۰}}{۹}$$

تست و پاسخ ۲۴

از میان زیرمجموعه‌های دوعضوی یک مجموعهٔ پنج‌عضوی، k زیرمجموعه به تصادف انتخاب کرده‌ایم. اگر مطمئن باشیم اشتراک لااقل دوتا از آن‌ها تهی است، چه‌قدر احتمال دارد که k مضرب ۳ باشد؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۵}$ ۳) $\frac{۳}{۱۰}$ ۴) $\frac{۳}{۸}$

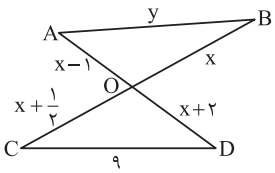
پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ تشریحی **گام اول:** یک مجموعهٔ ۵عضوی، $\binom{۵}{۲}=۱۰$ زیرمجموعهٔ دوعضوی دارد. باید حداقل ۵ زیرمجموعهٔ دوعضوی انتخاب کنیم تا مطمئن باشیم اشتراک لااقل دوتا از این زیرمجموعه‌های دوعضوی تهی است (اگر مجموعهٔ ۵عضوی به صورت $A=\{a,b,c,d,e\}$ باشد، بدترین حالت این است که مثلاً چهار زیرمجموعهٔ $\{a,b\}$، $\{a,c\}$، $\{a,d\}$ و $\{a,e\}$ را انتخاب کنیم که در این صورت اشتراک هیچ دو مجموعه‌ای تهی نیست، اما با انتخاب مجموعهٔ دوعضوی پنجم، مطمئن هستیم که حداقل دو مجموعهٔ با اشتراک تهی داریم، مثلاً اگر مجموعهٔ $\{b,c\}$ را انتخاب کنیم، اشتراک این مجموعه با مجموعهٔ $\{a,d\}$ تهی است!)؛ پس k می‌تواند برابر ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ یا ۱۰ یعنی برابر ۶ مقدار باشد.

گام دوم: از بین این ۶ مقدار، دو مقدار ۶ و ۹ مضرب ۳ هستند، پس احتمال این‌که k مضرب ۳ باشد برابر $\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$ می‌شود.

تست و پاسخ ۲۵

در شکل مقابل، AB و CD موازی نیستند. اگر دو مثلث متشابه باشند، مقدار y کدام است؟



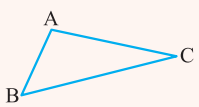
۱) ۴ ۲) ۳
۳) ۴/۵ ۴) ۶

پاسخ: گزینهٔ ۴

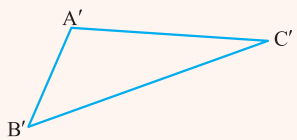
درس‌نامه

مثلث‌های ABC و $A'B'C'$ در سه حالت زیر می‌توانند متشابه باشند:

الف) برابری دو زاویه $(\hat{A}=\hat{A}',\ \hat{B}=\hat{B}')$

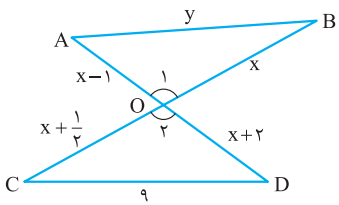


ب) تناسب دو ضلع و برابری زاویهٔ بین آن‌ها $(\hat{A}=\hat{A}',\ \frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'})$



پ) تناسب سه ضلع $(\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'})$

پاسخ تشریحی **گام اول (استراتژی حل سؤال):** در شکل صورت سؤال، زوایای $O_۱$ و $O_۲$ به دلیل متقابل به رأس بودن برابرند و سؤال گفته AB و CD موازی نیستند.



چون دو مثلث متشابه‌اند، پس زوایا دوبه‌دو برابرند، حالا اگر AB و CD موازی بودند در این صورت با مورب در نظر گرفتن AD می‌توانستیم بگوییم دو زاویهٔ A و D برابرند. حالا که موازی نیستند؛ پس $\hat{B}=\hat{D}$ و با نوشتن نسبت اضلاع متناظر، نسبت تشابه و مقدار y به دست می‌آید.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

گام دوم (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال):

$$\overset{\triangle}{ABO} \sim \overset{\triangle}{CDO} \xrightarrow{\hat{A}\neq\hat{D}} \begin{cases}\hat{O}_1 = \hat{O}_2 \\ \hat{B} = \hat{D}\end{cases} \Rightarrow \frac{AB}{CD} = \frac{AO}{CO} = \frac{BO}{DO} \Rightarrow \overbrace{\frac{y}{9} = \frac{x-1}{x+\frac{1}{2}}}^{(2)} = \underbrace{\frac{x}{x+2}}_{(1)}$$

ابتدا از تناسب (۱) مقدار x را محاسبه می‌کنیم:

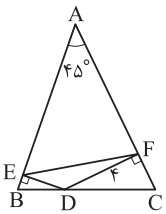
$$(x-1)(x+2) = x(x+\tfrac{1}{2}) \Rightarrow x^2 + x - 2 = x^2 + \frac{x}{2} \Rightarrow x = 4$$

حالا $x = 4$ را در تناسب (۲) جای‌گذاری کرده و y را به دست می‌آوریم:

$$\frac{y}{9} = \frac{4-1}{4+\frac{1}{2}} = \frac{3}{\frac{9}{2}} \Rightarrow y = 6$$

تست و پاسخ ۲۶

در شکل مقابل، اگر $AB = AC = 5\sqrt{2}$، $DF = 4$ و $\hat{A} = 45^\circ$، آن‌گاه مساحت مثلث DEF کدام است؟



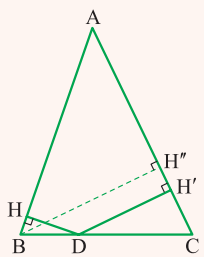
۱) $\sqrt{2}$
۲) ۲
۳) $\sqrt{6}$
۴) $2\sqrt{2}$

پاسخ: گزینهٔ ۱

خودت حل کنی بهتره ارتفاع BH رو رسم کن و با استفاده از مورد (۱) درس‌نامه طول DE رو به دست بیار.

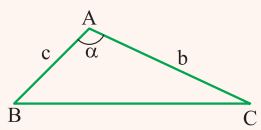
درس‌نامه

۱) در هر مثلث متساوی‌الساقین، مجموع فاصله‌های هر نقطه روی قاعده از دو ساق، برابر ارتفاع وارد بر ساق است:



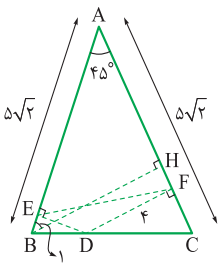
$$AB = AC \Rightarrow DH + DH' = BH''$$

۲) در هر مثلث با داشتن دو ضلع و زاویهٔ بین آن‌ها، مساحت از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:



$$S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$$

پاسخ تشریحی **گام اول (استراتژی حل):** ارتفاع BH را رسم کنید. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH می‌توانیم طول BH را محاسبه کرده و سپس طول DE را با توجه به مورد (۱) درس‌نامه به دست آوریم و در نهایت با استفاده از مورد (۲) درس‌نامه مساحت مثلث DEF را محاسبه کنیم.



گام دوم (محاسبهٔ طول DE از مثلث DEF): در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH داریم:

$$\sin 45^\circ = \frac{BH}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{BH}{5\sqrt{2}} \Rightarrow BH = 5$$

طبق مورد (۱) درس‌نامه می‌دانیم که $DE + DF = BH$؛ پس:

$$DE = 5 - 4 = 1$$

گام سوم (محاسبهٔ زاویهٔ $E\hat{D}F$ و خواستهٔ سؤال): در چهارضلعی AEDF مجموع زوایای داخلی برابر 360° است؛ پس:

$$E\hat{D}F = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 135^\circ$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

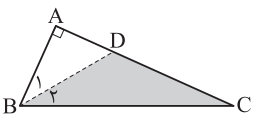
در نتیجه با داشتن طول اضلاع $DE=۱$، $DF=۴$ و زاویهٔ بین آن‌ها $E\hat{D}F=۱۳۵^\circ$، طبق مورد (۲) درس‌نامه مساحت مثلث EDF برابر است با:

$$S_{\overset{\triangle}{EDF}}=\frac{۱}{۲}ED\times DF\times\underbrace{\sin ۱۳۵^\circ}_{\sin ۴۵^\circ}=\frac{۱}{۲}\times ۱\times ۴\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\sqrt{۲}$$

یادآوری $\sin(۱۸۰-\alpha)=\sin(\alpha)$

تست و پاسخ ۲۷

در شکل زیر $\hat{B}_۲=\hat{B}_۱$، اگر $AB=۳$ و $AC=۴$، آن‌گاه حجم شکل حاصل از دوران مثلث BCD حول AC چند برابر π است؟

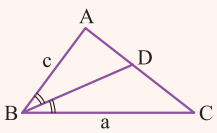


۱) ۷
۲) ۷/۵
۳) ۸
۴) ۸/۵

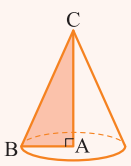
پاسخ: گزینهٔ ۲

درس‌نامه

۱) در مثلث ABC، اگر نیمساز زاویهٔ داخلی B، ضلع AC را در D قطع کند، آن‌گاه $\frac{AD}{CD}=\frac{AB}{BC}$، یعنی می‌توانیم در نظر بگیریم: $\begin{cases}AD=ck\\CD=ak\end{cases}$

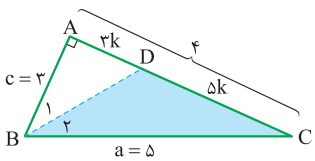


۲) شکل حاصل از دوران مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC که در آن $\hat{A}=۹۰^\circ$ حول ضلع AC، یک مخروط قائم به شعاع قاعدهٔ AB و ارتفاع AC است، پس حجم آن برابر است با $\frac{۱}{۳}\pi AB^۲.AC$.



پاسخ تشریحی **گام اول (محاسبهٔ طول AD)**: ابتدا توجه کنید که مثلث ABC قائم‌الزاویه است، بنابه قضیهٔ فیثاغورس $BC=\sqrt{AB^۲+AC^۲}=۵$.

از طرفی، BD نیمساز است، پس:



$$\begin{cases}AD=۳k\\CD=۵k\end{cases}\Rightarrow ۳k+۵k=۴\Rightarrow k=\frac{۱}{۲}\Rightarrow AD=\frac{۳}{۲}$$

گام دوم (تشخیص شکل حاصل از دوران): شکل حاصل از این دوران، مخروط قائم حاصل از دوران $\overset{\triangle}{ABC}$ حول AC است که مخروط حاصل از دوران $\overset{\triangle}{ABD}$ حول AD از آن جدا شده است.

گام سوم (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال): حجم مخروط حاصل از دوران $\overset{\triangle}{ABC}$ حول AC برابر است با:

$$V_۱=\frac{۱}{۳}\pi.AB^۲.AC=\frac{۱}{۳}\pi(۳)^۲\times ۴=۱۲\pi$$

حجم مخروط حاصل از دوران $\overset{\triangle}{ABD}$ حول AD برابر است با:

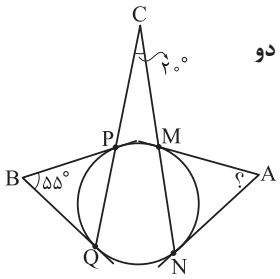
$$V_۲=\frac{۱}{۳}\pi.AB^۲.AD=\frac{۱}{۳}\pi(۳)^۲\times\frac{۳}{۲}=\frac{۹}{۲}\pi$$

بنابراین حجم شکل حاصل از دوران مورد نظر سؤال، برابر است با:

$$V_۱-V_۲=۱۲\pi-\frac{۹}{۲}\pi=(۱۲-\frac{۹}{۲})\pi=۷/۵\pi$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

تست و پاسخ ۲۸



در شکل مقابل، اضلاع دو زاویهٔ A و B در نقاط P، N، M و Q بر دایره مماس هستند. اگر اندازهٔ کمان $\overset{\frown}{QN}$ دو برابر اندازهٔ کمان $\overset{\frown}{PM}$ باشد، آن‌گاه اندازهٔ زاویهٔ A چند درجه است؟

۱) ۷۰

۲) ۷۵

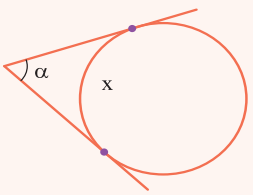
۳) ۶۵

۴) ۶۰

پاسخ: گزینهٔ ۳

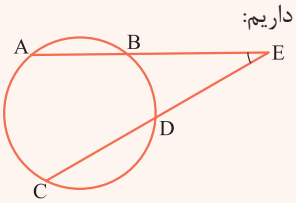
درس‌نامه

۱) اگر از یک نقطه خارج دایره دو مماس بر دایره رسم کنیم، آن‌گاه اندازهٔ کمان کوچک‌تر بین دو نقطهٔ تماس، مکمل زاویهٔ بین دو مماس است، یعنی در شکل روبه‌رو داریم:



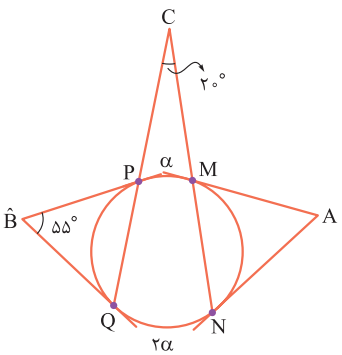
$$\begin{cases} x = 180^\circ - \alpha \\ y = 180^\circ + \alpha \end{cases}$$

۲) اگر امتداد وترهای AB و CD از یک دایره، در نقطهٔ E بیرون دایرهٔ متقاطع باشند، مطابق شکل زیر داریم:



$$\hat{E} = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC} - \overset{\frown}{BD})$$

پاسخ تشریحی طبق مورد (۱) درس‌نامه برای زاویهٔ B داریم:



$$\overset{\frown}{PQ} = 180^\circ - \hat{B} = 180^\circ - 55^\circ = 125^\circ$$

بنا به فرض $\overset{\frown}{QN} = 2\overset{\frown}{PM}$؛ پس در نظر می‌گیریم $\overset{\frown}{PM} = \alpha$ و $\overset{\frown}{QN} = 2\alpha$. طبق مورد (۲) درس‌نامه زاویهٔ C برابر است با:

$$\hat{C} = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{QN} - \overset{\frown}{PN}) \Rightarrow 20^\circ = \frac{1}{2}(2\alpha - \alpha) \Rightarrow \hat{\alpha} = 40^\circ$$

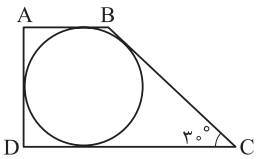
اندازهٔ کمان MN برابر است با:

$$\overset{\frown}{MN} = 360^\circ - \overset{\frown}{PM} - \overset{\frown}{QN} - \overset{\frown}{PQ} = 360^\circ - 40^\circ - 80^\circ - 125^\circ = 115^\circ$$

حالا دوباره از مورد (۱) درس‌نامه استفاده می‌کنیم تا زاویهٔ A را به دست آوریم:

$$\hat{A} = 180^\circ - \overset{\frown}{MN} = 180^\circ - 115^\circ = 65^\circ$$

تست و پاسخ ۲۹



مطابق شکل، در ذوزنقهٔ قائم‌الزاویهٔ ABCD دایره‌ای به شعاع ۳ محاط شده است. مساحت ذوزنقه کدام است؟

۱) ۳۶

۲) ۶۴

۳) ۵۴

۴) ۴۸

پاسخ: گزینهٔ ۳

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

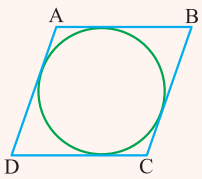
پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

مشاوره سؤال ترکیبی از مباحث «مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ خاص» و ویژگی‌های چهارضلعی محیطی است. حواستون به سؤال‌های ترکیبی باشه چون خیلی برای طراحان کنکور پراهمیت هستند.

خودت حل کنی بهتره در چهارضلعی محیطی ABCD داریم: $AB+DC=AD+BC$، پس کافیه طول BC رو به دست بیاری تا مساحت محاسبه بشه.

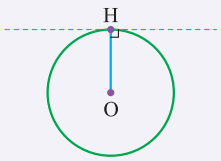
درس نامه

چهارضلعی ABCD، محیطی است، اگر و تنها اگر مجموع اضلاع روبه‌روی آن با هم برابر باشد، مثلاً در شکل زیر داریم:



$$ABCD \text{ محیطی} \Leftrightarrow AB+DC=AD+BC$$

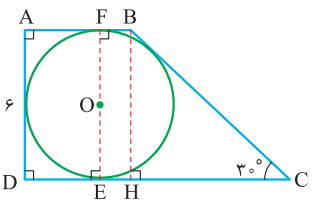
نکات ۱) در هر مثلث قائم‌الزاویه، ضلع رو به زاویهٔ 30°، نصف وتر و ضلع رو به زاویهٔ 60°، $\frac{\sqrt{3}}{2}$ وتر است.



۲) شعاع دایره، در نقطهٔ تماس، برخط مماس عمود است:

پاسخ تشریحی **گام اول (استراتژی حل مسئله):** ارتفاع ذوزنقهٔ محیطی برابر قطر دایرهٔ محاطی آن است و مجموع قاعده‌های ذوزنقهٔ محیطی هم برابر مجموع ساق‌های آن است؛ در نتیجه با داشتن این اطلاعات، مساحت ذوزنقه که برابر است با نصف مجموع دو قاعده ضرب در ارتفاع ذوزنقه، محاسبه می‌شود.

گام دوم (محاسبهٔ ارتفاع ذوزنقه): مطابق شکل، OE و OF در نقاط تماس بر قاعده‌های CD و AB عمودند، پس OE و OF در یک امتدادند و EF قطر دایرهٔ محاطی است و برابر با ارتفاع ذوزنقه است:



$$BH=EF=6$$

گام سوم (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال): مطابق با درس‌نامه، چون ABCD ذوزنقهٔ محیطی است؛ پس:

$$AB+DC=AD+BC=6+BC \quad (1)$$

برای محاسبهٔ طول BC در مثلث قائم‌الزاویهٔ BHC داریم:

$$\hat{C}=30^\circ,\ BH=6 \Rightarrow BC=2BH=12$$

پس در رابطهٔ (۱) داریم:

$$AB+DC=6+12=18$$

در نهایت:

$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}BH(AB+DC)=\frac{1}{2}\times 6\times 18=54$$

تست و پاسخ ۳۰

دو دایره به شعاع‌های ۱ و ۳ مماس‌خارج هستند و خط L مماس‌مشترک خارجی آن‌ها است. اگر M نقطه‌ای روی L باشد، آن‌گاه کم‌ترین مقدار مجموع فواصل M از مراکز دو دایره کدام است؟

۱) $2\sqrt{7}$ ۲) ۵ ۳) $3\sqrt{3}$ ۴) $4\sqrt{2}$

پاسخ: گزینهٔ ۱

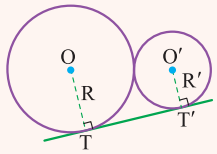
مشاوره با یک سؤال ترکیبی از دو مبحث مهم «مماس‌مشترک و مسائل کوتاه‌ترین مسیر» طرفیم. این مدل سؤالات خیلی حال و هوای کنکور دارند.....

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

خودت حل کنی بهتره وقتی کم‌ترین مقدار مجموع فواصل یک نقطه از دو نقطهٔ دیگر را می‌خواهند، حتماً یاد مسئلهٔ هرون بیفتین.

درس نامه

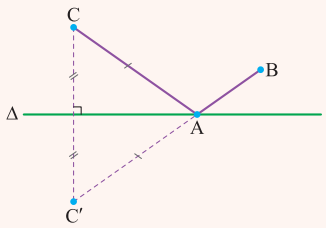
۱) طول مماس‌مشترک خارجی دو دایرهٔ مماس‌خارج با شعاع‌های R و R' برابر است با:



$$TT' = ۲\sqrt{RR'}$$

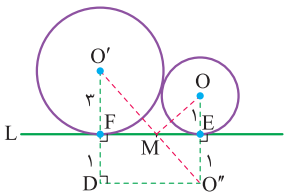
۲) اگر دو نقطهٔ B و C در یک طرف خط Δ باشند و بخواهیم روی Δ نقطه‌ای مانند A طوری پیدا کنیم که مجموع فاصله‌های آن از B و C کم‌ترین مقدار ممکن باشد، به این صورت عمل می‌کنیم:

«یکی از دو نقطهٔ B و C (مثلاً C) را نسبت به Δ قرینه می‌کنیم و آن را C' می‌نامیم، حالا از نقطهٔ حاصل به نقطهٔ دیگر (B) وصل می‌کنیم. نقطهٔ تقاطع پاره‌خط حاصل با Δ همان A است و داریم:



$$\boxed{CA + AB = C'B}$$

پاسخ تشریحی **گام اول (رسم شکل مناسب و استفاده از مسئلهٔ هرون):** با توجه به شکل، O را نسبت به L بازتاب می‌دهیم تا به O'' برسیم و O'' را به O' وصل می‌کنیم، داریم: $O'O'' = MO + MO'$. در مثلث قائم‌الزاویهٔ $\overset{\Delta}{O'DO''}$ با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس می‌توانیم طول $O'O''$ را محاسبه کنیم.



گام دوم (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال): طبق گام (۱) در مثلث قائم‌الزاویهٔ $\overset{\Delta}{O'DO''}$ طبق فیثاغورس داریم:

$$O'O'' = \sqrt{DO'^{۲} + DO''^{۲}} \quad (۱)$$

چون $FEO''D$ مستطیل است، پس $DO'' = EF$ و EF طول مماس‌مشترک خارجی دو دایرهٔ مماس‌خارج است که طبق مورد (۱) درس‌نامه از رابطهٔ روبه‌رو محاسبه می‌شود:

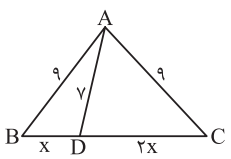
$$EF = ۲\sqrt{RR'} = ۲\sqrt{۳\times۱} = ۲\sqrt{۳} = DO''$$

در نتیجه طبق رابطهٔ (۱) داریم:

$$O'O'' = \sqrt{(۲\sqrt{۳})^{۲} + ۴^{۲}} = \sqrt{۱۲+۱۶} = \sqrt{۲۸} = ۲\sqrt{۷}$$

تست و پاسخ ۳۱

در شکل مقابل، اگر نقطهٔ M وسط BC باشد، سینوس زاویهٔ DAM کدام است؟



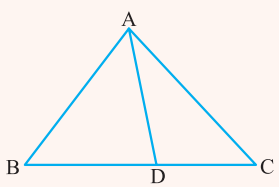
۱) $\frac{۱}{۷}$
۲) $\frac{۲}{۷}$
۳) $\frac{۳}{۷}$
۴) $\frac{۴}{۷}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

خودت حل کنی بهتره از قضیهٔ استوارت استفاده کنید.

درس نامه

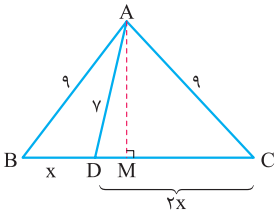
اگر D نقطه‌ای روی ضلع BC از مثلث ABC باشد، آن‌گاه داریم:



$$BD\times AC^{۲} + DC\times AB^{۲} = BC(AD^{۲} + BD\times DC)$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

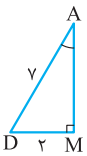
پاسخ تشریحی ابتدا به کمک قضیهٔ استوارت x را به دست می‌آوریم:



$$x\times 9^2+2x\times 9^2=3x(7^2+x\times 2x)$$
$$81\times 3x=(49+2x^2)\times 3x$$
$$\Rightarrow 2x^2=32 \Rightarrow x=4$$

چون ABC متساوی‌الساقین است و AM طبق فرض سؤال میانهٔ وارد بر قاعده است، پس AM ارتفاع هم هست؛ در نتیجه در مثلث قائم‌الزاویهٔ ADM داریم:

$$DM=BM-BD=\frac{3x}{2}-x=\frac{x}{2}=2$$



$$\Rightarrow \sin D\hat{A}M=\frac{DM}{AD}=\frac{2}{7}$$

تست و پاسخ ۳۲

اگر $\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\4&0\\3&-2\end{bmatrix}=M$، آن‌گاه مجموع درایه‌های ستون سوم ماتریس M کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۷ ۳) ۶ ۴) ۵

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس نامه

اگر A و B دو ماتریس باشند به طوری‌که $C=A\times B$ تعریف‌پذیر باشد، آن‌گاه برای به دست آوردن درایه‌های سطر iام از ماتریس C به صورت مقابل عمل می‌کنیم:

$$\text{سطر } i \text{ام از } C = (\text{سطر } i \text{ام از } A)\times B$$

و هم‌چنین ستون jام از ماتریس C به صورت روبه‌رو است:

$$\text{ستون } j \text{ام از } C = A\times(\text{ستون } j \text{ام از } B)$$

پاسخ تشریحی ابتدا دو ماتریس سمت چپ را در هم ضرب می‌کنیم:

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\4&0\\3&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1\\3&-2\\4&0\end{bmatrix}$$

حالا کافی است ماتریس A را در ستون سوم ماتریس $\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}$ ضرب کنیم:

$$\text{ستون سوم از ماتریس } M=\begin{bmatrix}2&1\\3&-2\\4&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\1\\4\end{bmatrix}$$

در نتیجه مجموع درایه‌های ستون سوم برابر است با:

$$3+1+4=8$$

تست و پاسخ ۳۳

اگر $A=\begin{bmatrix}2&-1\\-1&3\end{bmatrix}$، I ماتریس همانی و α و β دو عدد حقیقی باشند، به طوری که $A=\alpha A^{-1}+\beta I$، آن‌گاه مقدار $\frac{\alpha}{\beta}$ کدام است؟

۱) $-\frac{5}{2}$ ۲) $\frac{5}{2}$ ۳) ۲ ۴) -۲

پاسخ: گزینهٔ ۱

مشاوره هر جا صحبت از رابطهٔ بین سه ماتریس A، A^2 و I یا A، A^{-1} و I بود، به یاد رابطهٔ کیلی-همیلتون بیفتید.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

درس‌نامه

۱) اگر $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$، آن‌گاه همواره رابطهٔ زیر بین A^2، A و I برقرار است:

$$A^2-(a+d)A+|A|I=\bar{O}$$ (رابطهٔ کیلی-همیلتون)

۲) اگر در ماتریس $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ داشته باشیم $ad-bc\neq 0$، آن‌گاه این ماتریس وارون‌پذیر است و ماتریس وارون آن برابر است با:

$$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$$

پاسخ تشریحی **روش اول:**

صورت سؤال یک رابطه برحسب A، A^{-1} و I به ما داده است، طبق مشاوره در این مواقع سعی می‌کنیم از رابطهٔ کیلی ـ همیلتون به رابطهٔ صورت سؤال برسیم:

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 3 & -1\end{bmatrix}\Rightarrow a+d=-1-1=-2\,,\ |A|=(-1)(-1)-(2)(3)=-5$$

$$\Rightarrow A^2+2A-5I=\bar{O}$$

حالا طرفین این تساوی را از سمت راست در A^{-1} ضرب می‌کنیم، داریم:

$$A^2=5I-2A\xrightarrow[\text{از راست}]{\times A^{-1}}\underbrace{A^2\times A^{-1}}_{A}=5I\times A^{-1}-2\underbrace{A\times A^{-1}}_{I}$$

$$\Rightarrow A=5A^{-1}-2I\quad (1)$$

با مقایسهٔ رابطهٔ (۱) با رابطهٔ سؤال یعنی $A=\alpha A^{-1}+\beta I$ داریم:

$$\alpha=5\quad \beta=-2$$

پس:

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{5}{-2}$$

روش دوم:

ابتدا به سراغ محاسبهٔ A^{-1} می‌رویم:

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 3 & -1\end{bmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{(-1)(-1)-2\times 3}\begin{bmatrix}-1 & -2\\ -3 & -1\end{bmatrix}=\frac{-1}{5}\begin{bmatrix}-1 & -2\\ -3 & -1\end{bmatrix}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{bmatrix}$$

حالا A^{-1} را در رابطهٔ $A=\alpha A^{-1}+\beta I$ جای‌گذاری کرده و درایه‌های طرفین تساوی را نظیربه‌نظیر برابر قرار می‌دهیم:

$$\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 3 & -1\end{bmatrix}=\frac{\alpha}{5}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\beta & 0\\ 0 & \beta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\alpha}{5}+\beta & \frac{2\alpha}{5}\\ \frac{3\alpha}{5} & \frac{\alpha}{5}+\beta\end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{2\alpha}{5}=2\Rightarrow\alpha=5\\ \frac{\alpha}{5}+\beta=-1\xrightarrow{\alpha=5}1+\beta=-1\Rightarrow\beta=-2\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{\alpha}{\beta}=\frac{-5}{2}$$

تست و پاسخ ۳۴

اگر تنها یک خط بر هر دو دایرهٔ $x^2+y^2-2y-1=0$ و $x^2+y^2-2x+m=0$ مماس باشد، m کدام است؟

۱) -3 ۲) -5 ۳) -7 ۴) 3

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس‌نامه

۱) در دایرهٔ $x^2+y^2+ax+by+c=0$، مرکز و شعاع از روابط مقابل محاسبه می‌شود:

$$O\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2}\right)$$

$$R=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}$$

۲) دو دایره، یک مماس‌مشترک دارند، اگر و فقط اگر مماس‌داخل باشند، در دو دایرهٔ مماس‌داخل، طول خط‌المرکزین، برابر تفاضل شعاع‌ها است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ تشریحی **گام اول (استراتژی حل سؤال):** سؤال گفته دو دایرهٔ مذکور فقط یک مماس‌مشترک دارند، طبق درس‌نامه فقط در یک حالت مماس‌داخل‌بودن، دو دایره می‌توانند در مجموع یک مماس‌مشترک داشته باشند؛ پس مرکز و شعاع دایره را به دست آورده و از رابطهٔ $OO' = |R - R'|$ استفاده می‌کنیم.

گام دوم (محاسبهٔ شعاع و مرکز دایره‌ها): از روابط مورد (۱) درس‌نامه استفاده می‌کنیم:

$$x^2 + y^2 - 2y - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} O(0,1) \\ R = \frac{1}{2}\sqrt{0^2 + (-2)^2 - 4(-1)} = \sqrt{2} \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 - 2x + m = 0 \Rightarrow \begin{cases} O'(1,0) \\ R' = \frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2 + 0^2 - 4m} = \sqrt{1-m} \end{cases}$$

گام سوم (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال): چون دو دایره مماس‌داخل‌اند؛ پس رابطهٔ $|R - R'| = OO'$ برقرار است:

$$OO' = \sqrt{(0-1)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2} = |R' - \sqrt{2}| \Rightarrow \begin{cases} R' - \sqrt{2} = \sqrt{2} \Rightarrow R' = 2\sqrt{2} \checkmark \\ R' - \sqrt{2} = -\sqrt{2} \Rightarrow R' = 0 \times \end{cases}$$

شعاع که نمی‌تواند صفر باشد؛ پس از رابطهٔ $R' = 2\sqrt{2}$ داریم:

$$\sqrt{1-m} = 2\sqrt{2} \Rightarrow m = -7$$

تست و پاسخ ۳۵

طول مماسی که از کانون سهمی $y^2 + 4x = 3(2y+1)$ بر دایرهٔ $x^2 + y^2 - 2x + y = 0$ رسم می‌شود، کدام است؟

۱) $2\sqrt{3}$
۲) ۳
۳) $\sqrt{15}$
۴) چنین مماسی قابل رسم نیست.

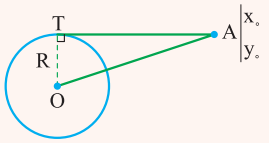
پاسخ: گزینهٔ ۱

مشاوره رایج‌ترین تیپ سؤالات سهمی در کنکور شبیه این سؤال است، یعنی معادلهٔ گستردهٔ سهمی را به شما می‌دهند و اطلاعاتی در مورد آن از شما می‌خواهند که در اکثریت قریب به اتفاق سؤال‌ها، باید برای حل، معادلهٔ گسترده را به معادلهٔ استاندارد تبدیل کنید.

خودت حل کنی بهتره معادلهٔ گسترده را به معادلهٔ استاندارد تبدیل کنید.

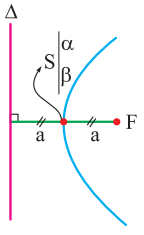
درس‌نامه

۱) برای محاسبهٔ طول مماس رسم‌شده از نقطهٔ $A(x_0, y_0)$ بر دایرهٔ $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ کافی است مختصات A را در سمت چپ معادلهٔ دایره جای‌گذاری و از عدد حاصل جذر بگیریم، یعنی:

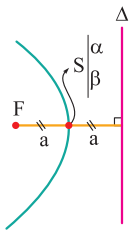
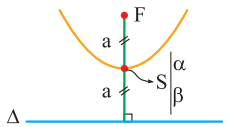
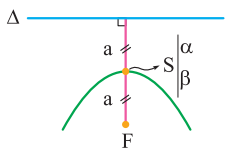


$$AT = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + ax_0 + by_0 + c}$$

۲) برای پیداکردن مختصات F و معادلهٔ Δ باید معادلهٔ گستردهٔ سهمی را به استاندارد تبدیل کنیم تا α، β و a به دست آیند، سپس بسته به این‌که کدام‌یک از حالت‌های پایین را داریم، F و Δ معلوم می‌شوند.

سهمی افقی با دهانهٔ به سمت راست		از رأس $F\begin{vmatrix}\alpha + a \\ \beta\end{vmatrix}$ (a تا به راست می‌رویم) $\Delta : x = \alpha - a$ (a تا به چپ می‌رویم)

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

سهمی افقی با دهانهٔ به سمت چپ		از رأس: $F\begin{vmatrix}\alpha-a\\ \beta\end{vmatrix}$ ← a تا به چپ می‌رویم. $\Delta: x=\alpha+a$ ← a تا به راست می‌رویم.
سهمی قائم با دهانهٔ به سمت بالا		از رأس: $F\begin{vmatrix}\alpha\\ \beta+a\end{vmatrix}$ ← a تا به بالا می‌رویم. $\Delta: y=\beta-a$ ← a تا به پایین می‌رویم.
سهمی قائم با دهانهٔ به سمت پایین		از رأس: $F\begin{vmatrix}\alpha\\ \beta-a\end{vmatrix}$ ← a تا به پایین می‌رویم. $\Delta: y=\beta+a$ ← a تا به بالا می‌رویم.

پاسخ تشریحی **گام اول (محاسبهٔ مختصات کانون سهمی):** ابتدا معادلهٔ گستردهٔ سهمی را به معادلهٔ استاندارد تبدیل می‌کنیم:

$$y^2+4x=6y+3 \Rightarrow y^2-6y=-4x+3$$

$$\Rightarrow y^2-6y+9=-4x+3+9 \Rightarrow (y-3)^2=-4(x-3)$$

پس یک سهمی افقی با دهانهٔ رو به چپ داریم که مختصات رأس آن $S(3,3)$ و فاصلهٔ کانونی آن $a=1$ است؛ در نتیجه طبق مورد (۲) درس‌نامه، مختصات کانون سهمی به صورت $F\begin{vmatrix}3-1\\ 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2\\ 3\end{vmatrix}$ می‌باشد.

گام دوم (محاسبهٔ طول مماس بر دایره): طبق مورد (۱) درس‌نامه، طول مماسی که از نقطهٔ $F\begin{vmatrix}2\\ 3\end{vmatrix}$ بر دایرهٔ $x^2+y^2-2x+y=0$ رسم می‌شود، برابر است با:

$$F(2,3) \xrightarrow{\text{جای‌گذاری در معادلهٔ دایره}} \sqrt{2^2+3^2-2(2)+3}=2\sqrt{3}$$

تست و پاسخ ۳۶

بردارهای $\vec{a}=(3,m-1,5)$ و $\vec{b}=(m,1,-3)$ و $\vec{c}=(m,2m,m^2)$ مفروض‌اند. اگر اندازهٔ بردارهای $\vec{a}+\vec{b}$ و $\vec{a}-\vec{b}$ برابر باشند، حجم متوازی‌السطوح بنا شده، بر بردارهای $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ کدام است؟

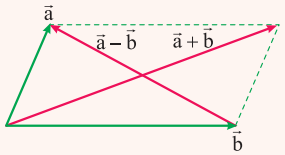
۱) ۳۲ ۲) ۳۴ ۳) ۳۶ ۴) ۳۸

پاسخ: گزینهٔ ۱

خودت حل کنی بهتره اگر دو بردار بر هم عمود باشند، حاصل‌ضرب داخلی آن‌ها صفر است.

درس‌نامه

۱) بردارهای $\vec{a}+\vec{b}$ و $\vec{a}-\vec{b}$ قطرهای متوازی‌الاضلاعی هستند که روی بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ساخته می‌شود:

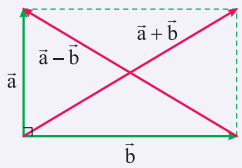


۲) اگر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بر هم عمود باشند، ضرب داخلی آن‌ها همواره برابر صفر است: $\vec{a}\perp\vec{b} \Rightarrow \vec{a}.\vec{b}=0$

۳) حجم متوازی‌السطوحی که روی بردارهای $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ ساخته می‌شود، از رابطهٔ مقابل محاسبه می‌شود: $V=|\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})|$

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

نکته بردارهای $\vec{a}+\vec{b}$ و $\vec{a}-\vec{b}$ قطرهای متوازی‌الاضلاعی هستند که روی بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ساخته می‌شوند؛ بنابراین اگر اندازهٔ بردارهای $\vec{a}+\vec{b}$ و $\vec{a}-\vec{b}$ برابر باشند، متوازی‌الاضلاع به مستطیل تبدیل شده و در نتیجه بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بر هم عمودند.



$$\vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow |\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$$

پاسخ تشریحی **گام اول (محاسبهٔ مختصات بردارهای $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$)**: با توجه به نکتهٔ فوق بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بر هم عمودند؛ پس طبق مورد (۲) درس‌نامه داریم:

$$\vec{a}\perp\vec{b} \Rightarrow \vec{a}.\vec{b}=0 \Rightarrow (3,m-1,5).(m,1,-3)=0$$

$$\Rightarrow 3m+(m-1)-15=0 \Rightarrow 4m=16 \Rightarrow m=4$$

بنابراین بردارهای $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\Rightarrow \vec{a}=(3,m-1,5)=(3,3,5) \text{ و } \vec{b}=(m,1,-3)=(4,1,-3) \text{ و } \vec{c}=(m,2m,m^2)=(4,8,16)$$

گام دوم (محاسبهٔ حجم متوازی‌السطوح): طبق مورد (۳) درس‌نامه، حجم متوازی‌السطوحی که روی بردارهای $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ ساخته می‌شود، برابر است با:

$$V=|\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})|=\begin{vmatrix}3&3&5\\4&1&-3\\4&8&16\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}1&-3\\8&16\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}4&-3\\4&16\end{vmatrix}+5\begin{vmatrix}4&1\\4&8\end{vmatrix}=|3(40)-3(76)+5(28)|=32$$

تست و پاسخ ۳۷

در تقسیم عدد a بر ۱۱، باقی‌مانده ۱ واحد کوچک‌تر از خارج قسمت است. مجموع ارقام بزرگ‌ترین عدد ممکن برای a کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۹ ۳) ۷ ۴) ۵

پاسخ: گزینهٔ ۴

خودت حل کنی بهتره کافیه الگوریتم تقسیم رو بنویسید و البته حواستون به شرط باقی‌مانده هم باشه!

درس‌نامه **الگوریتم تقسیم**: اگر عدد صحیح a را بر عدد طبیعی b تقسیم کنیم، داریم:

مقسوم
a | b → مقسوم‌علیه
$-$ q → خارج‌قسمت
r → باقی‌مانده

$$\Rightarrow a=bq+r,\ \underbrace{0\le r<b}_{\text{شرط باقی‌مانده}}$$

پاسخ تشریحی **گام اول**: الگوریتم تقسیم را می‌نویسیم:

$$a=11q+r,\ 0\le r<11$$

گام دوم: طبق گفتهٔ سؤال باقی‌مانده، ۱ واحد کوچک‌تر از خارج قسمت است، یعنی $r=q-1$ یا همان $q=r+1$. حالا با جای‌گذاری $q=r+1$ داریم:

$$a=11(r+1)+r=11r+11+r=12r+11$$

$$\Rightarrow a=12r+11$$

گام سوم: بزرگ‌ترین عدد ممکن برای a را می‌خواهیم. واضح است که هر چه r بزرگ‌تر باشد، a هم بزرگ‌تر می‌شود، پس برای پیداکردن بزرگ‌ترین مقدار a، به جای r بزرگ‌ترین مقدار آن یعنی $r=10$ را قرار می‌دهیم. (شرط باقی‌مانده $0\le r<11$ است، پس بزرگ‌ترین مقدار برای r، ۱۰ است):

$$a=12r+11 \overset{r=10}{=} 12\times10+11=131 \xrightarrow{\text{جمع ارقام}} 1+3+1=5$$

تست و پاسخ ۳۸

عدد شش‌رقمی $A=\overline{abcabc}$ بر ۱۰۵ بخش‌پذیر و B برابر با مجموع ارقام A است. مجموع ارقام بزرگ‌ترین مقدار ممکن برای B کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۹ ۳) ۶ ۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۳

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

خودت حل کنی بهتره کافیه A رو به صورت $\overline{abc}+\overline{abc}$ $A=1000\,\overline{abc}+\overline{abc}$ بنویسید.

درس نامه بسط اعداد

یک عدد nرقمی را در حالت کلی می‌توانیم به صورت $\overline{a_n a_{n-1}...a_3a_2a_1}$ نمایش دهیم که در آن داریم:

$$\overline{a_n a_{n-1}...a_3a_2a_1}=a_1+10\times a_2+10^2\times a_3+...+10^{n-1}a_n$$

نکات ۱) بسط اعداد را به صورت‌های متفاوتی می‌توان باز کرد، برای مثال: $\overline{abcd}=100\overline{ab}+\overline{cd}$ یا $\overline{abcde}=100\,\overline{abc}+\overline{de}$

۲) اگر $a\mid bc$ و $(a,b)=1$ باشد، $a\mid c$.

پاسخ تشریحی **گام اول:** A را به کمک بسط اعداد باز می‌کنیم:

$$A=\overline{abc}\,\overline{abc}=1000\overline{abc}+\overline{abc}=1001\overline{abc}=7\times11\times13\overline{abc}$$

گام دوم: می‌خواهیم A بر $3\times5\times7=105$ بخش‌پذیر باشد، پس:

$$105\mid A\Rightarrow 3\times5\times\cancel{7}\mid\cancel{7}\times11\times13\overline{abc}\Rightarrow 3\times5\mid11\times13\overline{abc}$$

از طرفی 11×13 نسبت به 3×5 اول است، پس طبق نکتهٔ ۲ داریم:

$$3\times5\mid11\times13\overline{abc}\xrightarrow{(3\times5,11\times13)=1}3\times5\mid\overline{abc}$$

یعنی می‌خواهیم $\overline{abc}$ مضرب 3×5 باشد.

گام سوم: $\overline{abc}$ مضرب 3×5 است، پس باید هم مضرب 3 و هم مضرب 5 باشد. برای این‌که $\overline{abc}$ مضرب 5 باشد، باید یکان آن برابر صفر یا 5 باشد، (پس $c=0$ یا 5) و برای این‌که $\overline{abc}$ مضرب 3 باشد، باید جمع ارقامش یعنی $a+b+c$ مضرب 3 شود. دو حالت داریم:

حالت اول: اگر $c=0$ باشد، باید $a+b+\underbrace{c}_{0}$ یا همان $a+b$ مضرب 3 باشد. حالا واضح است برای این‌که بزرگ‌ترین مقدار B را به دست آوریم، باید $a+b$ بزرگ‌ترین مقدار باشد که بزرگ‌ترین مقدار $a+b$ برابر 18 است (به ازای $a=9$ و $b=9$ که در این صورت $a+b=18$ مضرب 3 هم می‌شود):

$$\Rightarrow B=\underbrace{a+b}_{18}+\underbrace{c}_{0}+\underbrace{a+b}_{18}+\underbrace{c}_{0}=36$$

$B\downarrow$ جمع ارقام A

بنابراین در این حالت بزرگ‌ترین مقدار B برابر 36 است.

حالت دوم: اگر $c=5$ باشد، باید $a+b+\underbrace{c}_{5}$ یا همان $a+b+5$ مضرب 3 باشد. مشابه حالت قبل باید $a+b$ بزرگ‌ترین مقدار باشد به طوری که $a+b+5$ مضرب 3 شود که بزرگ‌ترین مقدار $a+b$ با این شرط برابر 16 است (برای مثال به ازای $a=9$ و $b=7$ یا بالعکس):

$$B=\underbrace{a+b}_{16}+\underbrace{c}_{5}+\underbrace{a+b}_{16}+\underbrace{c}_{5}=42$$

$B\downarrow$ جمع ارقام A

بنابراین در این حالت بزرگ‌ترین مقدار B برابر 42 است.

گام چهارم: پس در کل بزرگ‌ترین مقدار B برابر 42 است که جمع ارقام آن برابر $6=2+4$ می‌شود.

تست و پاسخ ۳۹

به ازای چند عدد دورقمی a، معادلهٔ سیالهٔ خطی $ax+15y=17$ دارای جواب صحیح نیست؟

۱) 41 ۲) 42 ۳) 48 ۴) 49

پاسخ: گزینهٔ ۲

نکات ۱) معادلهٔ سیالهٔ خطی $ax+by=c$ دارای جواب صحیح است اگر $(a,b)\mid c$.

۲) برای دو مجموعهٔ دلخواه A و B داریم: $n(A'\cap B')=n(U)-n(A\cup B)=n(U)-\big(n(A)+n(B)-n(A\cap B)\big)$

۳) تعداد اعداد مضرب k در بین اعداد ۱ تا n برابر است با: $[\frac{n}{k}]$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

دقت کنید، برای مثال برای پیداکردن تعداد اعداد دورقمی مضرب ۷ به این صورت عمل می‌کنیم:

$$\underbrace{\left[\frac{۹۹}{۷}\right]}_{\substack{\text{تعداد اعداد مضرب}\\ \text{۷ در بین اعداد}\\ \text{۱ تا ۹۹}}} - \underbrace{\left[\frac{۹}{۷}\right]}_{\substack{\text{تعداد اعداد مضرب}\\ \text{۷ در بین اعداد}\\ \text{۱ تا ۹}}} = ۱۴ - ۱ = ۱۳$$

پاسخ تشریحی **گام اول:** معادلهٔ سیالهٔ خطی $ax + ۱۵y = ۱۷$ دارای جواب صحیح است، اگر $(a,۱۵) | ۱۷$. واضح است که وقتی $(a,۱۵) | ۱۷$ که $(a,۱۵) = ۱$ باشد.

گام دوم: گفتیم باید $(a,۱۵) = ۱$ باشد، یعنی a باید نسبت به $۵ \times ۳ = ۱۵$ اول باشد یا به عبارت دیگر a نه عامل ۳ داشته باشد و نه عامل ۵، بنابراین باید تعداد اعداد دورقمی را بشماریم که نه مضرب ۳ اند و نه مضرب ۵.

گام سوم: اعداد دورقمی مضرب ۳ را با A و اعداد دورقمی مضرب ۵ را با B نمایش می‌دهیم. داریم:

$$n(A) = \left[\frac{۹۹}{۳}\right] - \left[\frac{۹}{۳}\right] = ۳۳ - ۳ = ۳۰$$

$$n(B) = \left[\frac{۹۹}{۵}\right] - \left[\frac{۹}{۵}\right] = ۱۹ - ۱ = ۱۸$$

$$n(A \cap B) = \left[\frac{۹۹}{۱۵}\right] - \left[\frac{۹}{۱۵}\right] = ۶ - ۰ = ۶$$

$$\underbrace{n(U) = ۹۰}_{\text{تعداد اعداد دورقمی}}$$

گام چهارم: تعداد اعداد دورقمی که نه مضرب ۳ اند و نه مضرب ۵، همان $n(A' \cap B')$ است که برابر است با:

$$n(A' \cap B') = n(U) - n(A \cup B)$$

$$= n(U) - \big(n(A) + n(B) - n(A \cap B)\big) = ۹۰ - (۳۰ + ۱۸ - ۶) = ۹۰ - ۴۲ = ۴۸$$

گام پنجم: پس به ازای ۴۸ مقدار دورقمی a معادله دارای جواب صحیح است و به ازای $۹۰ - ۴۸ = ۴۲$ مقدار دورقمی دیگر، معادله جواب صحیح ندارد.

تذکر البته دقت کنید می‌توانستیم بگوییم اگر a مضرب ۳ یا ۵ باشد، $(a,۱۵) \neq ۱$ شده و معادله جواب ندارد که تعداد اعدادی که مضرب ۳ یا ۵ هستند، برابر است با: $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = ۳۰ + ۱۸ - ۶ = ۴۲$

تست و پاسخ ۴۰

در گرافی ۴ـ منتظم و ناهمبند، عدد احاطه‌گری برابر ۲ است. تعداد دورهای به طول ۳ در این گراف کدام است؟

۱) ۲۰ ۲) ۱۰ ۳) ۵ ۴) صفر

پاسخ: گزینهٔ ۱

خودت حل کنی بهتره کافیه به این توجه کنید که گراف ۴ـ منتظم ناهمبند با عدد احاطه‌گری ۲، از اجتماع دوتا گراف $k_۵$ تشکیل شده!

نکته تعداد دورهای به طول m در گراف کامل P رأسی برابر است با: $\binom{P}{m} \times \frac{(m-۱)!}{۲}$

پاسخ تشریحی **گام اول:** می‌دانیم گراف ناهمبند از حداقل دو بخش جدا از هم تشکیل شده. از طرفی چون عدد احاطه‌گری گراف هم ۲ است، یعنی گراف باید دقیقاً از دو قسمت جدا از هم تشکیل شده باشد که هر قسمت با یک رأس احاطه می‌شود. حالا با توجه به ۴ـ منتظم‌بودن گراف، متوجه می‌شویم که گراف باید به شکل مقابل باشد:

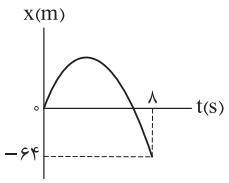


گام دوم: این گراف از دو گراف $k_۵$ تشکیل شده. طبق نکته، تعداد دورهای به طول ۳ در یک گراف کامل ۵رأسی برابر $\binom{۵}{۳} \times \frac{(۳-۱)!}{۲} = ۱۰$ تا است، پس در گراف بالا تعداد دورهای به طول ۳ برابر $۱۰ \times ۲ = ۲۰$ تا است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

تست و پاسخ ۴۱

نمودار مکان ـ زمان متحرکی که با شتاب ثابت در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل مقابل است. اگر متحرک با تندی $24\,m/s$ از مبدأ مکان عبور کند، در بازهٔ زمانی‌ای که بردار مکان متحرک در جهت محور x است، مسافت طی‌شده توسط آن چند متر است؟



۱) ۳۶ ۲) ۴۸ ۳) ۷۲ ۴) ۹۶

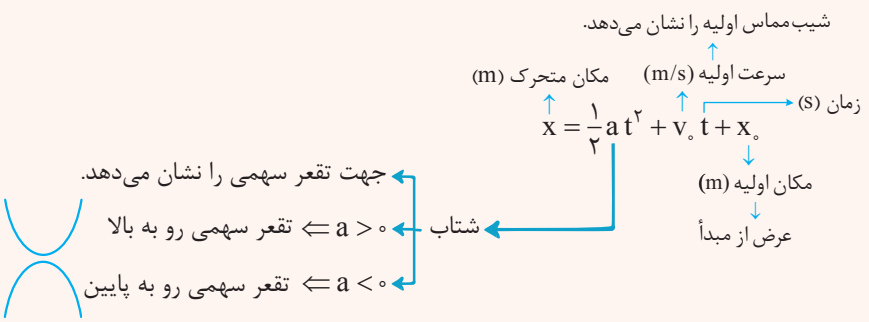
پاسخ: گزینهٔ ۳

مشاوره در نمودارهای مکان ـ زمان حرکت با شتاب ثابت، یکی از زمان‌های کلیدی، زمان توقف $(v=0)$ است و غالباً در حل مسئله از این زمان استفاده می‌کنیم.

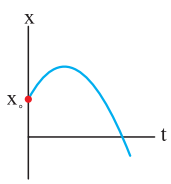
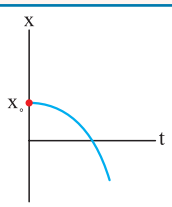
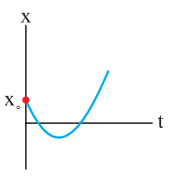
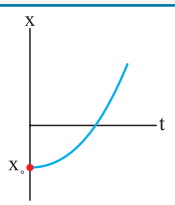
خودت حل کنی بهتره ابتدا به کمک رابطهٔ $\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t$ شتاب متحرک را به دست آورید، سپس از رابطهٔ $v_2^2 - v_1^2 = 2a\Delta x$، فاصلهٔ متحرک از مبدأ مکان را در زمانی که تندی‌اش صفر است بیابید تا در نهایت به خواستهٔ سؤال برسید.

درس نامه **معادله و نمودار مکان ـ زمان، در حرکت با شتاب ثابت:**

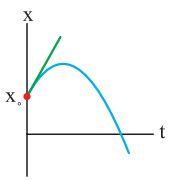
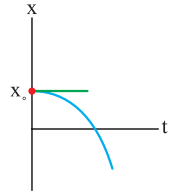
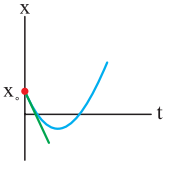
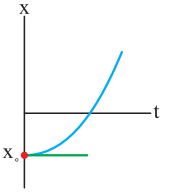
معادلهٔ مکان ـ زمان، در حرکت با شتاب ثابت، به صورت $x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$ است و درجهٔ دوم بودن این معادله نشان می‌دهد که نمودار آن به صورت سهمی است.



در شکل‌های زیر، به صورت چند مثال، علامت شتاب مشخص شده است.

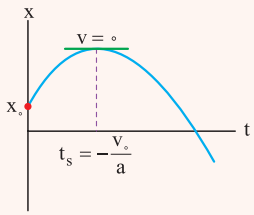
			
$a < 0$	$a < 0$	$a > 0$	$a > 0$

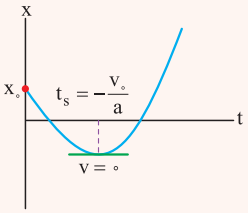
در شکل‌های زیر، به صورت چند مثال، علامت سرعت اولیه مشخص شده است.

			
$v_0 > 0$	$v_0 = 0$	$v_0 < 0$	$v_0 = 0$

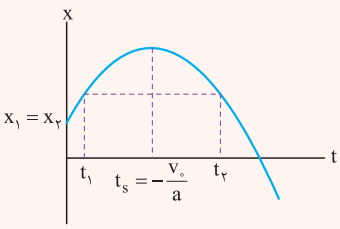
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

در نمودار مکان ـ زمان حرکت با شتاب ثابت، مختصهٔ زمان رأس سهمی از رابطهٔ $t_s = -\frac{v_\circ}{a}$ به دست می‌آید و لحظه‌ای را که متحرک می‌ایستد، نشان می‌دهد. در صورتی که سهمی در طرفین این لحظه، ادامه‌دار باشد، به این معناست که متحرک حتماً تغییر جهت داده است.





در حرکت با شتاب ثابت، زمان‌هایی که نسبت به $t_s = -\frac{v_\circ}{a}$ (زمان رأس سهمی) تقارن دارند، دارای مکان‌های یکسان و تندی‌های برابر هستند، البته سرعت‌ها قرینهٔ هم هستند.



$$\frac{t_۱ + t_۲}{۲} = t_s \Rightarrow \begin{cases} x_۱ = x_۲ \\ v_۱ = -v_۲ \end{cases}$$

چند رابطهٔ دیگر در حرکت با شتاب ثابت:

اگر متحرکی با شتاب ثابت a در حال حرکت باشد به طوری که در لحظهٔ $t_۱$، از مکان $x_۱$ با سرعت $v_۱$ بگذرد و در لحظهٔ $t_۲$، از مکان $x_۲$ با سرعت $v_۲$ بگذرد، روابط زیر برقرار است ($\Delta t = t_۲ - t_۱$ و $\Delta x = x_۲ - x_۱$):

$$\Delta x = \frac{۱}{۲}a(\Delta t)^۲ + v_۱(\Delta t)$$

$$v_۲^۲ - v_۱^۲ = ۲a\Delta x$$

$$\Delta x = \underbrace{(\frac{v_۱ + v_۲}{۲})}_{v_{av}}\Delta t$$

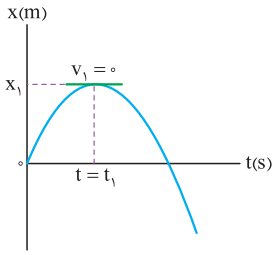
$$v_۲ = a(\Delta t) + v_۱$$

پاسخ تشریحی **گام اول:** تندی متحرک هنگام عبور از مبدأ مکان ۲۴ m / s است. با توجه به تقارن سهمی، سرعت اولیه ۲۴ m / s+ است.

حال به کمک رابطهٔ $\Delta x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_\circ t$ در ۸ ثانیهٔ اول حرکت، شتاب متحرک را به دست می‌آوریم.

$$\Delta x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_\circ t \Rightarrow -۶۴ - \circ = \frac{۱}{۲}a(۸)^۲ + ۲۴(۸) \xrightarrow{\div ۸} -۸ = ۴a + ۲۴ \Rightarrow -۳۲ = ۴a \Rightarrow a = -۸\ m/s^۲$$

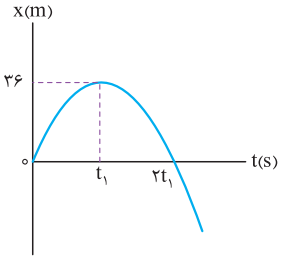
گام دوم: جابه‌جایی متحرک را از $t = \circ$ تا $t = t_۱$ (جایی که متحرک متوقف شده است) به دست می‌آوریم.



$$v_۱^۲ - v_\circ^۲ = ۲a(x_۱ - x_\circ)$$

$$\Rightarrow \circ^۲ - ۲۴^۲ = ۲(-۸)(x_۱ - \circ) \Rightarrow x_۱ = ۳۶\ m$$

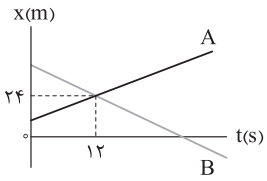
گام سوم: مطابق شکل مقابل و با توجه به تقارن سهمی، مسافت طی‌شده در مدت‌زمانی که متحرک در جهت محور x حرکت می‌کند ($\circ - ۲t_۱$)، برابر ۷۲ m است.



SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

تست و پاسخ ۴۲

نمودار مکان ـ زمان دو متحرک A و B که در راستای محور x حرکت می‌کنند، به شکل زیر است. تندی متحرک B، ۲ برابر تندی متحرک A است. اگر فاصلهٔ دو متحرک در مبدأ زمان ۴۸ m باشد، در لحظه‌ای که متحرک B از مبدأ مکان عبور می‌کند، فاصلهٔ دو متحرک از هم چند متر است؟



۱) ۲۴
۲) ۲۸
۳) ۳۲
۴) ۳۶

پاسخ: گزینهٔ ۴

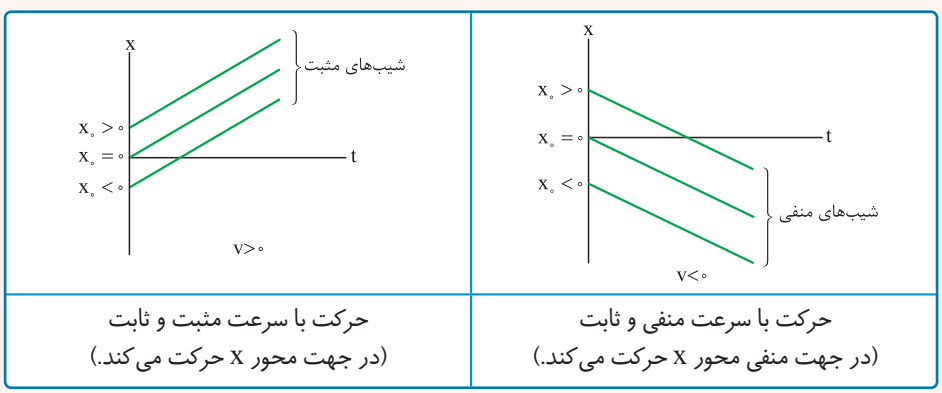
خودت حل کنی بهتره معادلهٔ مکان ـ زمان در حرکت با سرعت ثابت را به ترتیب با تندی‌های v و ۲v، برای متحرک‌های A و B بنویسید و با توجه به این‌که در لحظهٔ $t = ۱۲\ s$ به یکدیگر می‌رسند، تندی v را به دست آورید. حال پس از نوشتن معادلهٔ مکان ـ زمان متحرک B، مکان اولیهٔ آن و زمان عبور آن از مبدأ مکان را به دست آورید و در نهایت فاصلهٔ دو متحرک را در لحظهٔ عبور متحرک B از مبدأ مکان $(x = ۰)$ محاسبه کنید.

درس نامه

معادله و نمودار مکان ـ زمان حرکت با سرعت ثابت:

معادلهٔ مکان ـ زمان حرکت با سرعت ثابت از رابطهٔ $x = vt + x_۰$ پیروی می‌کند و به صورت تابعی درجه‌یک است، بنابراین نمودار مکان ـ زمان حرکت با سرعت ثابت به صورت خطی است.

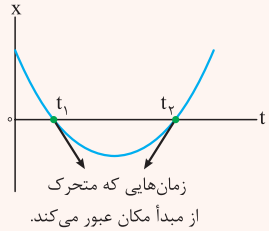
در شکل‌های زیر، علامت سرعت و مکان اولیه در چند حالت مختلف، مشخص شده است.



حرکت با سرعت منفی و ثابت (در جهت منفی محور x حرکت می‌کند.)	حرکت با سرعت مثبت و ثابت (در جهت محور x حرکت می‌کند.)

شیب نمودار مکان ـ زمان بیانگر سرعت است.

به محل برخورد نمودار مکان ـ زمان با محور زمان (t)، لحظهٔ عبور متحرک از مبدأ مکان گفته می‌شود و برای محاسبهٔ آن کافی است معادلهٔ مکان ـ زمان متحرک را برابر صفر قرار دهیم. *(انگار داریم ریشه حساب می‌کنیم.)*



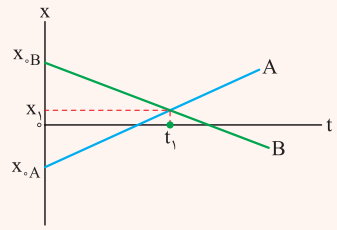
ملاقات دو متحرک

اگر مکان‌های دو متحرک با هم یکسان شوند، دو متحرک همدیگر را ملاقات خواهند کرد. برای یافتن زمان و مکان رسیدن دو متحرک به هم، کافی است معادله‌های مکان برحسب زمان دو متحرک را با هم برابر قرار داده و پس از حل معادله، زمان رسیدن را پیدا کرد.

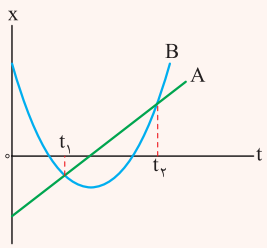
در شکل صفحهٔ بعد، دو متحرک A و B با سرعت‌های ثابت به سمت هم حرکت می‌کنند و در لحظهٔ $t_۱$ در مکان $x_۱$ به یکدیگر می‌رسند. در بازهٔ زمانی $(۰ - t_۱)$ متحرک‌های A و B به هم نزدیک می‌شوند.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

در بازهٔ زمانی t_1 به بعد متحرک‌های A و B از هم دور می‌شوند.



در شکل مقابل، متحرک A با سرعت ثابت و متحرک B با شتاب ثابت حرکت می‌کنند. این دو متحرک در لحظه‌های t_1 و t_2 به هم می‌رسند.



پاسخ تشریحی **گام اول:** اگر تندی متحرک A را v در نظر بگیریم، تندی متحرک B برابر ۲v است؛ بنابراین معادلهٔ مکان ـ زمان دو متحرک به صورت زیر است:

$$x_A = vt + x_{\circ A}$$

$$x_B = -2vt + x_{\circ B}$$

توجه کنید که متحرک B در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند و سرعت آن منفی است.

گام دوم: دو متحرک در لحظهٔ $t = 12\,s$ همدیگر را ملاقات می‌کنند و مکان‌های برابر دارند؛ بنابراین داریم:

$$x_A(t=12\,s) = x_B(t=12\,s) \Rightarrow 12v + x_{\circ A} = -24v + x_{\circ B} \Rightarrow 36v = x_{\circ B} - x_{\circ A}$$

$$v = \frac{x_{\circ B} - x_{\circ A}}{36} \xrightarrow[\text{مکان اولیهٔ B بالاتر از مکان اولیهٔ A است.}]{x_{\circ B} - x_{\circ A} = +48\,m} v = \frac{+48}{36} = \frac{4}{3}\,m/s$$

گام سوم: متحرک B در لحظهٔ $t = 12\,s$ از مکان $x = 24\,m$ عبور کرده است. حال مکان اولیهٔ متحرک B را به دست می‌آوریم:

$$x_B = \underbrace{-\frac{8}{3}}_{-2v=-\frac{8}{3}} t + x_{\circ B} \xrightarrow{t=12s\,,\,x_B=24m} 24 = -\frac{8}{3}(12) + x_{\circ B} \Rightarrow x_{\circ B} = +56\,m$$

گام چهارم: لحظه‌ای که متحرک B از مبدأ مکان $(x = \circ)$ عبور می‌کند را به دست می‌آوریم:

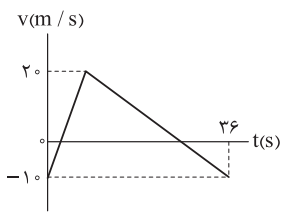
$$x_B = -\frac{8}{3}t + 56 \xrightarrow{x_B = \circ} -\frac{8}{3}t + 56 = \circ \Rightarrow t = 21\,s$$

گام پنجم: فاصلهٔ متحرک A از متحرک B را در لحظهٔ $t = 21\,s$ به دست می‌آوریم:

$$\left.\begin{matrix} x_A = vt + x_{\circ A} \\ x_B = -2vt + x_{\circ B} \end{matrix}\right\} \Rightarrow x_A - x_B = 3vt + (x_{\circ A} - x_{\circ B}) \Rightarrow x_A - x_B = 3(\frac{4}{3})(21) - 48 = 84 - 48 = 36\,m$$

تست و پاسخ ۴۳

نمودار سرعت ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل مقابل است. در بازه‌ای که متحرک در جهت محور x حرکت می‌کند، مسافت طی‌شده توسط آن چند متر است؟



۱) ۲۴۰
۲) ۲۷۰
۳) ۴۸۰
۴) ۵۴۰

پاسخ: گزینهٔ ۱

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

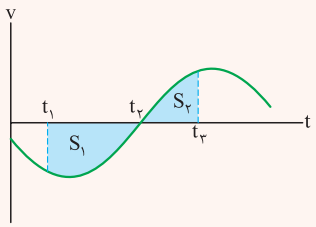
مشاوره گاهی اوقات تست‌های نموداری در حرکت‌شناسی، نیاز به ایدهٔ اولیه دارند که توصیه می‌کنیم چنین تست‌هایی را در اولویت‌های بعدی برای حل قرار دهید.

خودت حل کنی بهتره مدت‌زمانی که سرعت متحرک از $-۱۰\ m/s$ به صفر رسیده است را t در نظر بگیرید و مدت‌زمانی که سرعت متحرک از صفر به $-۱۰\ m/s$ رسیده است را t' در نظر بگیرید، سپس به کمک ثابت‌بودن شیب خط‌ها و مدت‌زمان $۳۶\ s$ کل حرکت، رابطه‌ای برای t و t' بیابید.

در نهایت مساحت محدود به نمودار $(v-t)$ را در بازه‌ای که بالای محور t قرار دارد، محاسبه کنید.

درس نامه

مساحت محدود بین نمودار سرعت ـ زمان و محور زمان، بیانگر جابه‌جایی (تغییر مکان) است.



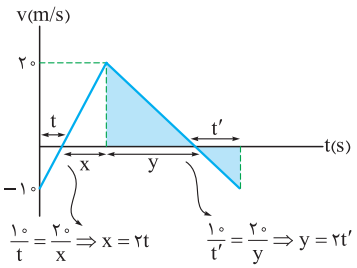
جابه‌جایی و مسافت طی‌شده در بازهٔ زمانی $t_۱$ تا $t_۳$ به صورت زیر قابل محاسبه است.

$$\Delta x_{(t_۱-t_۳)} = -S_۱ + S_۲$$

$$l_{(t_۱-t_۳)} = +S_۱ + S_۲$$

برای محاسبهٔ جابه‌جایی، مساحت‌های محدود به نمودار و محور زمان که در پایین محور زمان قرار دارند را منفی قرار می‌دهیم، اما برای محاسبهٔ مسافت طی‌شده، تمام مساحت‌ها با علامت مثبت به کار می‌روند.

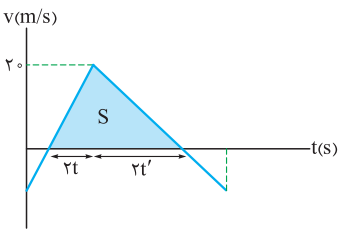
پاسخ تشریحی **گام اول:** مطابق شکل مقابل، مدت‌زمانی که طول کشیده تا سرعت از $-۱۰\ m/s$ به صفر برسد را t و مدت‌زمانی که طول کشیده تا سرعت از صفر به $-۱۰\ m/s$ برسد را t' در نظر می‌گیریم. حال به کمک شیب دو خط، مدت‌زمانی که سرعت از صفر به $۲۰\ m/s$ و از $۲۰\ m/s$ به صفر رسیده است را برحسب t و t' به دست می‌آوریم.



گام دوم: کل مدت‌زمان حرکت $۳۶\ s$ است، بنابراین داریم:

$$t + ۲t + ۲t' + t' = ۳۶ \Rightarrow ۳(t+t') = ۳۶ \Rightarrow t + t' = ۱۲\ s$$

گام سوم: مسافت طی‌شده در مدت‌زمانی که متحرک در جهت محور x حرکت کرده است (سرعت مثبت است) را به کمک مساحت محدود به نمودار $v-t$ و محور زمان به دست می‌آوریم:



$$\ell = S = \frac{۲۰(۲t + ۲t')}{۲} = ۲۰(t+t') = ۲۰ \times ۱۲ = ۲۴۰\ m$$

تست و پاسخ ۴۴

در شرایط خلأ، گلوله‌ای از یک بلندی رها می‌شود. وقتی این گلوله مسافت $۲۸/۸\ m$ را طی می‌کند، گلولهٔ دیگری از همان نقطه رها می‌شود. فاصلهٔ دو گلوله $۴/۲\ s$ پس از رهاشدن گلولهٔ اول چند متر است؟ $(g = ۱۰\ m/s^۲)$

۱) $۴۳/۲$ ۲) $۴۶/۸$ ۳) ۷۲ ۴) ۹۶

پاسخ: گزینهٔ ۳

خودت حل کنی بهتره به کمک رابطهٔ $\Delta y = -\frac{۱}{۲}gt^۲$ مدت‌زمان سقوط گلولهٔ اول را پس از طی مسافت $۲۸/۸\ m$ به دست آورید.

حال پس از این مدت گلولهٔ دوم رها می‌شود. مشخص کنید پس از $۴/۲\ s$، گلولهٔ دوم چند ثانیه از سقوطش را تجربه کرده است.

در نهایت به کمک رابطهٔ $\Delta y = -\frac{۱}{۲}gt^۲$ مسافت طی‌شده توسط گلولهٔ اول را در مدت $۴/۲\ s$ و گلولهٔ دوم را در مدت‌زمانی که سقوط را تجربه کرده است، محاسبه کنید و اختلاف آن‌ها را به دست آورید.

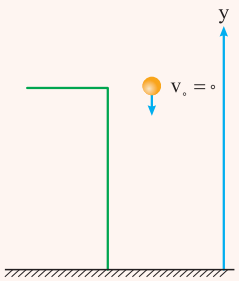
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

درس‌نامه

به حرکت جسم بدون سرعت اولیه در راستای قائم، که تنها در اثر نیروی وزن جابه‌جا می‌شود، سقوط آزاد گفته می‌شود.

اگر مطابق شکل زیر، جهت رو به بالا را مثبت در نظر بگیریم، شتاب حرکت جسم $-g$ خواهد بود و روابط آن به صورت زیر است.



$$v = -gt$$

$$\Delta y = -\frac{1}{2}gt^2$$

$$v^2 = -2g\Delta y$$

$$\Delta y = \left(\frac{v_1 + v_2}{2}\right)\Delta t$$

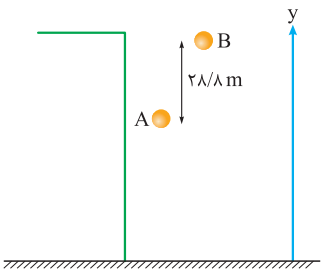
توجه کنید که چون جهت رو به بالا را مثبت در نظر گرفته‌ایم، علامت سرعت در این حرکت خلاف جهت محور y و منفی است.

پاسخ تشریحی

گام اول: مدت‌زمانی که طول کشیده تا گلولهٔ اول (A) مسافت $28/8\ m$ را طی کند، به دست می‌آوریم.

$$\Delta y = -\frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow -28/8 = -\frac{1}{2}\times 10\times t^2 \Rightarrow -28/8 = -5t^2 \Rightarrow t = 2/4\ s$$

گام دوم: شکل مقابل موقعیت مکانی گلولهٔ اول (A) و گلولهٔ دوم (B) را در لحظهٔ $t = 2/4\ s$ نشان می‌دهد که گلولهٔ B می‌خواهد حرکت خود را شروع کند.



بنابراین $4/2\ s$ پس از رهاشدن گلولهٔ A، گلولهٔ B، به مدت‌زمان $4/2 - 2/4 = 1/8\ s$ درحال سقوط بوده است.

گام سوم: حال برای محاسبهٔ فاصلهٔ دو گلولهٔ A و B، اختلاف جابه‌جایی گلولهٔ A پس از $4/2\ s$ و جابه‌جایی گلولهٔ B پس از $1/8\ s$ را به دست می‌آوریم:

$$\Delta y_A = -\frac{1}{2}gt_A^2 = -5(4/2)^2$$

$$\Delta y_B = -\frac{1}{2}gt_B^2 = -5(1/8)^2$$

$$\Delta y_A - \Delta y_B = -5(4/2)^2 - (-5(1/8)^2) = 5(1/8^2 - 4/2^2)$$

برای محاسبهٔ $1/8^2 - 4/2^2$ از اتحاد مزدوج استفاده می‌کنیم.

$$1/8^2 - 4/2^2 = (1/8 - 4/2)(1/8 + 4/2) = (-2/4)(6)$$

$$\Delta y_A - \Delta y_B = 5(-2/4)(6) = -72\ m$$

تست و پاسخ ۴۵

وزنه‌ای به جرم $3\ kg$ به یک انتهای فنری با ثابت $500\ N/m$ بسته شده و انتهای دیگر نیز به سقف آسانسوری متصل است. در حالتی که آسانسور با شتاب رو به بالای $2\ m/s^2$ حرکت می‌کند، طول فنر به L_1 و در حالتی که آسانسور با شتاب رو به پایین $1\ m/s^2$ حرکت می‌کند، طول فنر به L_2 می‌رسد. $L_2 - L_1$ برحسب سانتی‌متر کدام است؟

۱) $0/6$ ۲) $-0/6$ ۳) $1/8$ ۴) $-1/8$

پاسخ: گزینهٔ ۴

خودت حل کنی بهتره وزن ظاهری را در حالت اول و دوم به دست آورید و جداگانه، برابر با نیروی فنر $(F_e = k\Delta L)$ قرار دهید.

در حالت اول $F_{e1} = k(L_1 - L_0) = W'_1$ و در حالت دوم $F_{e2} = k(L_2 - L_0) = W'_2$ است. با تفریق این دو رابطه، حاصل $L_2 - L_1$ به دست خواهد آمد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

درس‌نامه ●● وزن ظاهری (w')

اگر جسمی به جرم m، با شتاب a در راستای قائم حرکت کند، می‌توانیم اثر شتاب را با مطرح‌کردن وزن ظاهری (W') بیان کنیم.

تندشونده رو به بالا ـ کندشونده رو به پایین

$$W' = m(g \pm a)$$

تندشونده رو به پایین ـ کندشونده رو به بالا

پس اگر جسمی درون آسانسور باشد، می‌توانید با اثردادن شتاب آسانسور در وزن ظاهری، مسئله را به راحتی حل کنید.

نیروی کشسانی فنر

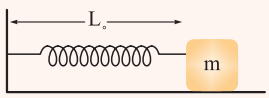
اگر فنری را نسبت به نقطهٔ تعادلش (طول فنر L_0 است)، فشرده کنیم یا آن را بکشیم تا طول فنر به L_1 برسد، اندازهٔ نیروی بازگرداننده به سمت نقطهٔ تعادل که از طرف فنر وارد می‌شود، از رابطهٔ زیر به دست می‌آید.

ثابت فنر (N/m)

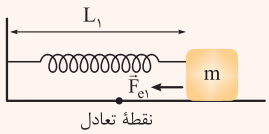
نیروی بازگردانندهٔ فنر (N) ← $F_e = k(L_1 - L_0)$

تغییر طول فنر (m)

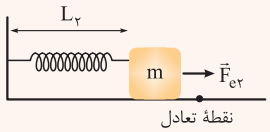
جهت نیروی فنر در شکل‌های زیر مشخص شده است.



فنر در حالت تعادل است. $F_e = 0$



فنر نسبت به نقطهٔ تعادل کشیده شده است. $F_{e1} = k(L_1 - L_0)$



فنر نسبت به نقطهٔ تعادل فشرده شده است. $F_{e2} = k|(L_2 - L_0)|$

برای مقایسهٔ نیروی فنر در دو حالت مختلف از دو تکنیک مقابل استفاده می‌کنیم. $|F_{e2} - F_{e1}| = k|(L_2 - L_1)|$ ، $\frac{F_{e2}}{F_{e1}} = \frac{|L_2 - L_0|}{L_1 - L_0}$

پاسخ تشریحی **گام اول:** در حالتی که آسانسور با شتاب رو به بالای $a_1 = 2\,m/s^2$ حرکت می‌کند، وزن ظاهری جسم متصل به فنر برابر با $m(g + a_1)$ است؛ بنابراین نیروی فنر برابر است با:

$$F_{e1} = m(g + a_1) \Rightarrow k(L_1 - L_0) = m(g + a_1) \Rightarrow 500(L_1 - L_0) = 3(g + 2) \quad (I)$$

گام دوم: در حالتی که آسانسور با شتاب رو به پایین $a_2 = 1\,m/s^2$ حرکت می‌کند، وزن ظاهری جسم متصل به فنر برابر با $m(g - a_2)$ است؛ بنابراین نیروی فنر در این حالت برابر است با:

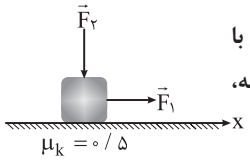
$$F_{e2} = m(g - a_2) \Rightarrow k(L_2 - L_0) = m(g - a_2) \Rightarrow 500(L_2 - L_0) = 3(g - 1) \quad (II)$$

گام سوم: حال اگر رابطهٔ (II) را از رابطهٔ (I) کم کنیم، داریم:

$$500(L_2 - L_1) = 3(-1 - 2) \Rightarrow L_2 - L_1 = -0/018\,m = -1/8\,cm$$

تست و پاسخ ۴۶

در شکل مقابل، به جسم ۴کیلوگرمی دو نیروی هم‌اندازهٔ افقی $\vec{F}_1$ و قائم $\vec{F}_2$ وارد می‌شود و جسم روی سطح افقی با سرعت ثابت در حال حرکت است. اگر در یک لحظه، اندازهٔ هر یک از نیروها نصف شود، بلافاصله پس از این لحظه، شتاب جسم در SI کدام است؟ $(g = 10\,N/kg)$



۱) $2\vec{i}$ ۲) $-2\vec{i}$ ۳) $2/5\vec{i}$ ۴) $-2/5\vec{i}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

خودت حل کنی بهتره قانون دوم نیوتون $(F_{net} = ma)$ را در حالت اول به کار ببرید و رابطه‌ای بین اندازهٔ نیروهای $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ به دست آورید. سپس در حالت دوم که اندازهٔ نیروهای $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ نصف شده‌اند نیز قانون دوم نیوتون را به کار برده و به کمک رابطهٔ بین F_1 و F_2 در قسمت اول، شتاب متحرک را به دست آورید.

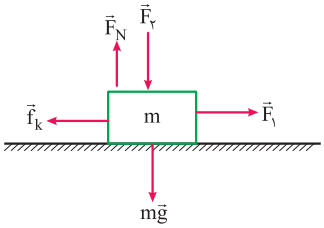
درس نامه ●● **قانون دوم نیوتون**

اگر به جسمی نیروی خالص وارد شود، شتابی هم‌جهت با نیروی خالص می‌گیرد. اندازهٔ این شتاب با نیروی خالص وارد بر جسم، رابطهٔ مستقیم و با جرم جسم نسبت وارون دارد. رابطهٔ قانون دوم نیوتون به صورت زیر است:

$$\vec{F}_{net} = m\vec{a}$$

در تحلیل سؤالات، قانون دوم نیوتون $(\vec{F}_{net} = m\vec{a})$ را در راستای حرکت و عمود بر راستای حرکت به کار ببرید (ابتدا در راستای عمود بر مسیر حرکت به کار ببرید که شتاب آن در ۹۹ درصد موارد صفر است و سپس در راستای حرکت که شتابدار است).

پاسخ تشریحی **گام اول:** شکل زیر، نیروهای وارد بر جسم را در حالت اول نشان می‌دهد. در این حالت جسم با سرعت ثابت حرکت می‌کند، بنابراین شتاب صفر است.



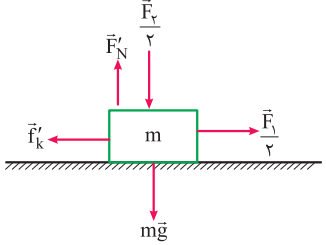
$$F_{net,y} = 0 \Rightarrow F_N - F_2 - mg = 0 \Rightarrow F_N = F_2 + mg$$

$$F_{net,x} = 0 \Rightarrow F_1 - f_k = 0 \Rightarrow F_1 - \mu_k F_N = 0$$

$$\Rightarrow F_1 - 0/5(F_2 + mg) = 0 \Rightarrow F_1 - 0/5(F_2 + 40) = 0$$

$$\Rightarrow F_1 - 0/5F_2 = 20$$

گام دوم: در حالت دوم، اندازهٔ نیروهای F_1 و F_2 نصف می‌شوند. شکل مقابل نیروهای وارد بر جسم را در این حالت نشان می‌دهد. حال با استفاده از قانون دوم نیوتون شتاب جسم را به دست می‌آوریم:



$$F_{net,y} = 0 \Rightarrow F'_N - \frac{F_2}{2} - mg = 0 \Rightarrow F'_N = \frac{F_2}{2} + mg = \frac{F_2}{2} + 40$$

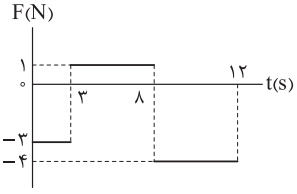
$$F_{net,x} = ma \Rightarrow \frac{F_1}{2} - f'_k = ma$$

$$\Rightarrow \frac{F_1}{2} - 0/5\left(\frac{F_2}{2} + 40\right) = ma \Rightarrow \frac{F_1}{2} - \frac{F_2}{4} - 20 = ma$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین} \times 2} \underbrace{F_1 - 0/5F_2}_{20} - 40 = 2ma \Rightarrow 20 - 40 = 2(4)a \Rightarrow a = -2/5\,m/s^2 \Rightarrow \vec{a} = (-2/5\frac{m}{s})\vec{i}$$

تست و پاسخ ۴۷

نمودار نیروی خالص وارد بر جسمی به جرم ۸۰۰ g که در راستای محور x حرکت می‌کند، برحسب زمان به شکل مقابل است. اگر در مبدأ زمان، جسم با تندی ۵ m/s در جهت محور x در حال حرکت باشد، اندازهٔ تکانهٔ جسم در لحظهٔ $t = 10\,s$ در SI کدام است؟



۱) ۸
۲) ۱۲
۳) ۱۶
۴) ۲۰

پاسخ: گزینهٔ ۱

خودت حل کنی بهتره مساحت محدود به نمودار رسم‌شده و محور زمان در بازهٔ زمانی صفر تا ۱۰ s را به دست آورید. این مساحت بیانگر تغییرات تکانه است. در واقع توانسته‌اید حاصل $p_{10} - p_0$ را به دست آورید. حال به کمک رابطهٔ $p = mv$، تکانهٔ متحرک را در لحظهٔ $t = 10\,s$ حساب کنید.

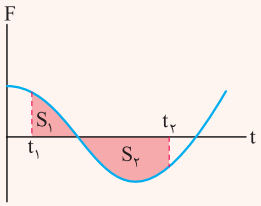
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

درس‌نامه

مساحت محدود به نمودار نیروی خالص ـ زمان ($F-t$) و محور زمان، بیانگر تغییرات تکانه است. *(حواستون به کلمهٔ تغییرات باشه.)*

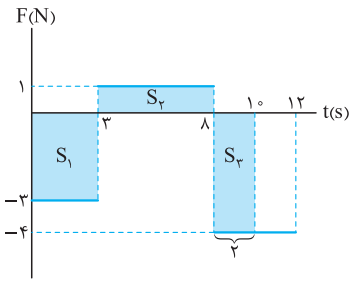
شکل زیر نمودار $F-t$ را برای یک جسم نشان می‌دهد، بنابراین می‌توانیم تغییرات تکانه را در بازهٔ t_1 تا t_2 از رابطهٔ زیر به دست آوریم.



$$\Delta p = +S_1 - S_2 = m\Delta v = m(v_2 - v_1)$$

توجه کنید که تکانه، یک کمیت برداری است و برای محاسبهٔ $v_2 - v_1$ نگاه خود را به صورت برداری تا انتهای مسئله حفظ کنید.

پاسخ تشریحی **گام اول:** مساحت محدود به نمودار نیروی خالص و محور زمان را در بازهٔ صفر تا ۱۰ s به دست می‌آوریم. این مساحت برابر با تغییرات تکانه در این بازهٔ زمانی است.



$$\Delta p_{(0-10)} = -S_1 + S_2 - S_3$$

$$\Rightarrow \Delta p_{(0-10)} = -(3\times 3) + (1\times 5) - (2\times 4)$$

$$\Rightarrow \Delta p_{(0-10)} = -9 + 5 - 8 = -12\ \frac{kg.m}{s}$$

حواستون باشه خواستهٔ سؤال اندازهٔ تکانهٔ جسم در لحظهٔ $t = 10\ s$ است و محاسباتی که تا این‌جا انجام دادیم، فقط تغییرات تکانه را از لحظهٔ صفر تا ۱۰ s تحویل داده است بنابراین مراقب باشید در دام ۲ گرفتار نشوید.

گام دوم: تکانهٔ جسم را در لحظهٔ $t = 0$ به دست می‌آوریم:

$$p_0 = mv_0 = 0/8\times(+5) = +4\ \frac{kg.m}{s}$$

گام سوم: تکانهٔ جسم را در لحظهٔ $t = 10\ s$ به دست می‌آوریم:

$$\Delta p_{(0-10)} = -12 \Rightarrow p_{10} - p_0 = -12 \Rightarrow p_{10} - (+4) = -12 \Rightarrow p_{10} = -8\ \frac{kg.m}{s}$$

بنابراین اندازهٔ تکانه در لحظهٔ $t = 10\ s$ برابر با $8\ \frac{kg.m}{s}$ است.

تست و پاسخ ۴۸

دو ماهوارهٔ A و B به‌ترتیب با جرم‌های m و ۲m، در فاصله‌های R_e و $2R_e$ از سطح زمین، در مدارهای دایره‌ای به دور زمین می‌چرخند. چه تعداد از عبارت‌های زیر دربارهٔ این دو ماهوارهٔ درحال چرخش درست است؟ (R_e شعاع زمین است.)

الف) تندی ماهوارهٔ A، $\sqrt{\frac{2}{3}}$ برابر تندی ماهوارهٔ B است.

ب) وزن ماهوارهٔ A، نصف وزن ماهوارهٔ B است.

پ) دورهٔ گردش ماهوارهٔ A، $\sqrt{\frac{27}{8}}$ برابر دورهٔ گردش ماهوارهٔ B است.

ت) انرژی جنبشی ماهوارهٔ A، $\frac{3}{4}$ برابر انرژی جنبشی ماهوارهٔ B است.

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

پاسخ: گزینهٔ ۴

خودت حل کنی بهتره به کمک رابطهٔ $V = \sqrt{\frac{GM_e}{r}}$ و $T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_e}r^3$، تندی و دورهٔ تناوب ماهواره‌های A و B را مقایسه کنید و در نهایت نیروی وزن را به کمک رابطهٔ $W = \frac{GmM_e}{r^2}$ مقایسه کنید.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

درس‌نامه

در حرکت دایره‌ای ماهواره‌ای که در فاصلهٔ r از مرکز زمین قرار دارد، نیروی گرانش زمین، تأمین‌کنندهٔ نیروی مرکزگراست؛ بنابراین داریم:

$$F_c = mg \Rightarrow \frac{mv^2}{r} = m\frac{GMe}{r^2} \Rightarrow v^2 = \frac{GM_e}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM_e}{r}}$$

طبق رابطهٔ $T = \frac{2\pi r}{v}$، دورهٔ تناوب ماهواره به دست می‌آید:

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r}{\sqrt{\frac{GM_e}{r}}} \xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم.}} T^2 = \frac{4\pi^2 r^2}{\frac{GM_e}{r}} \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_e} r^3$$

نکته تندی ماهواره و دورهٔ تناوب ماهواره ربطی به جرم ماهواره ندارند.

کمیت	فرمول
تندی ماهواره (v)	$v = \sqrt{\frac{GM_e}{r}}$
دورهٔ تناوب ماهواره (T)	$T^2 = (\frac{4\pi^2}{GM_e})r^3$
وزن ماهواره (W)	$W = \frac{Gm_{ماهواره}M_e}{r^2}$
انرژی جنبشی ماهواره (K)	$K = \frac{Gm_{ماهواره}M_e}{2r}$

البته پیشنهاد می‌کنیم دو رابطهٔ اول که به عنوان روابط اصلی هستند را به خاطر بسپارید. دو رابطهٔ دیگر از روابط اصلی به دست می‌آیند.

پاسخ تشریحی **گام اول:** تندی ماهواره از رابطهٔ $v = \sqrt{\frac{GM_e}{r}}$ به دست می‌آید؛ بنابراین نسبت تندی ماهوارهٔ A به تندی ماهوارهٔ B برابر است با:

$$\frac{v_A}{v_B} = \sqrt{\frac{r_B}{r_A}} = \sqrt{\frac{(R_e + h_B)}{(R_e + h_A)}} = \sqrt{\frac{3R_e}{2R_e}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

عبارت «الف» نادرست است.

گام دوم: وزن ماهواره از رابطهٔ $W = \frac{Gm_{ماهواره}M_e}{r^2}$ به دست می‌آید؛ بنابراین نسبت وزن ماهوارهٔ A به وزن ماهوارهٔ B برابر است با:

$$\frac{W_A}{W_B} = \frac{m_A}{m_B} \times (\frac{r_B}{r_A})^2 = \frac{m}{2m} \times (\frac{R_e + 2R_e}{R_e + R_e})^2 = \frac{1}{2} \times (\frac{3}{2})^2 = \frac{9}{8}$$

عبارت «ب» نادرست است.

گام سوم: دورهٔ تناوب ماهواره از رابطهٔ $T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_e} r^3$ به دست می‌آید؛ بنابراین نسبت دورهٔ گردش ماهوارهٔ A به دورهٔ گردش ماهوارهٔ B برابر است با:

$$(\frac{T_A}{T_B})^2 = (\frac{r_A}{r_B})^3 \Rightarrow (\frac{T_A}{T_B})^2 = (\frac{2R_e}{3R_e})^3 \Rightarrow \frac{T_A}{T_B} = \sqrt{\frac{8}{27}}$$

عبارت «پ» نادرست است.

گام چهارم: انرژی جنبشی از رابطهٔ $\frac{1}{2}mv^2$ به دست می‌آید؛ بنابراین انرژی جنبشی ماهواره از رابطهٔ $K = \frac{1}{2}m_{ماهواره} \times \frac{GM_e}{r}$ به دست می‌آید و داریم:

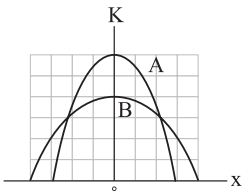
$$\frac{K_A}{K_B} = \frac{m_A}{m_B} \times \frac{r_B}{r_A} = \frac{m}{2m} \times \frac{(R_e + h_B)}{(R_e + h_A)} = \frac{1}{2} \times \frac{3R_e}{2R_e} = \frac{3}{4}$$

تنها عبارت «ت»، صحیح است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

تست و پاسخ ۴۹

نمودار انرژی جنبشی ـ مکان دو سامانهٔ جرم ـ فنر A و B به شکل مقابل است. ثابت فنر سامانهٔ A، چند برابر ثابت فنر سامانهٔ B است؟



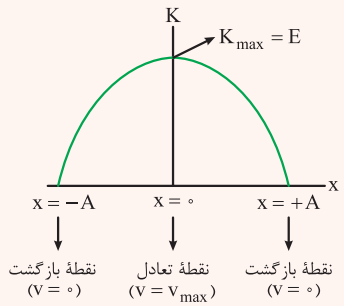
۱) $\frac{۸}{۳}$
۲) $\frac{۳}{۸}$
۳) $\frac{۳۲}{۲۷}$
۴) $\frac{۲۷}{۳۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۱

خودت حل کنی بهتره ابتدا انرژی مکانیکی نوسانگرها که برابر با K_{max} هست را برای هر دو نوسانگر مقایسه کنید، سپس به کمک رابطهٔ $E=\frac{۱}{۲}kA^۲$ به صورت مقایسه‌ای، نسبت $\frac{k_A}{k_B}$ به دست می‌آید.

درس‌نامه **نمودار انرژی جنبشی ـ مکان نوسانگر هماهنگ ساده**

نمودار انرژی جنبشی برحسب مکان در حرکت هماهنگ ساده به صورت سهمی با دهانهٔ رو به پایین است که در شکل مقابل مشخص شده است. در هنگام عبور از نقطهٔ تعادل، تندی نوسانگر بیشینه است؛ در نتیجه انرژی جنبشی نوسانگر نیز بیشینه بوده و برابر با انرژی مکانیکی نوسانگر است.



رابطهٔ انرژی مکانیکی نوسانگر هماهنگ ساده:

$E=$ انرژی مکانیکی نوسانگر (J)

$$E=\frac{۱}{۲}kA^۲$$

دامنهٔ نوسانگر ↑
ثابت فنر ↓

پاسخ تشریحی **گام اول:** بیشینهٔ انرژی جنبشی نوسانگر (K_{max}) بیانگر انرژی مکانیکی نوسانگر (E) است و با توجه به نمودار داریم:

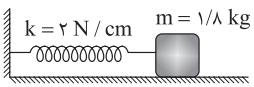
$$\frac{E_A}{E_B}=\frac{۶}{۴}=\frac{۳}{۲}$$

گام دوم: به کمک رابطهٔ $E=\frac{۱}{۲}kA^۲$ و مقایسهٔ انرژی مکانیکی دو نوسانگر، نسبت ثابت فنر سامانهٔ A به ثابت فنر سامانهٔ B به دست می‌آید.

$$\frac{E_A}{E_B}=\frac{k_A}{k_B}\times\left(\frac{A_A}{A_B}\right)^۲ \xrightarrow{\frac{A_A}{A_B}=\frac{۳}{۴}} \frac{۳}{۲}=\frac{k_A}{k_B}\times\left(\frac{۳}{۴}\right)^۲ \Rightarrow \frac{۳}{۲}=\frac{k_A}{k_B}\times\frac{۹}{۱۶} \Rightarrow \frac{k_A}{k_B}=\frac{۸}{۳}$$

تست و پاسخ ۵۰

در شکل زیر، جسم متصل به فنر روی سطح افقی بدون اصطکاک در حال نوسان است. اگر حداکثر مسافت طی‌شده توسط جسم در یک بازهٔ زمانی ۰/۱ ثانیه‌ای برابر ۹ cm باشد، بیشینهٔ شتاب نوسانگر چند متر بر مربع ثانیه است؟ $(\pi^۲=۱۰)$



۱) ۵
۲) ۱۰
۳) $۵\sqrt{۳}$
۴) $۱۰\sqrt{۳}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

مشاوره در سؤال‌های حرکت هماهنگ ساده، معمولاً کلید حل مسئله دورهٔ تناوب است. پس اگر در صورت سؤال به یک بازهٔ زمانی اشاره شد، حتماً مشخص کنید این بازهٔ زمانی چه رابطه‌ای با دورهٔ تناوب دارد و چه کسری از آن است.

خودت حل کنی بهتره با استفاده از رابطهٔ $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$، دورهٔ تناوب را به دست آورید و سپس نسبت $\frac{\Delta t}{T}$ را مشخص کنید تا بتوانید حرکت را در بازهٔ Δt به خوبی تحلیل کنید؛ در نهایت پس از یافتن دامنه، شتاب بیشینه را از رابطهٔ $a_{max} = A\omega^2$ محاسبه کنید.

درس نامه دورهٔ تناوب حرکت هماهنگ سادهٔ جرم ـ فنر

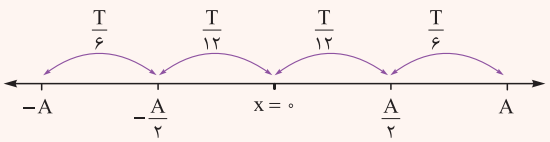
اگر جسمی به جرم m به فنری با ثابت k وصل باشد و حرکت هماهنگ ساده انجام دهد، دورهٔ تناوب و بسامد زاویه‌ای از رابطه‌های زیر به دست می‌آیند:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

توجه کنید که دورهٔ تناوب، هیچ ربطی به دامنهٔ حرکت ندارد.

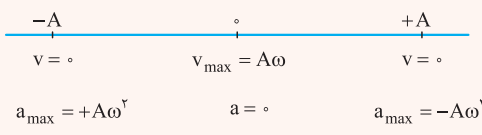
چند مکان و زمان معروف در حرکت هماهنگ ساده:

در حرکت هماهنگ ساده، مدت‌زمانی که طول می‌کشد تا نوسانگر فاصلهٔ مکانی $x = \pm\frac{A}{2}$ تا مرکز نوسان $(x = 0)$ را طی کند، معادل $\frac{T}{12}$ است؛ هم‌چنین مدت‌زمانی که طول می‌کشد تا نوسانگر فاصلهٔ مکانی $x = +\frac{A}{2}$ تا $x = +A$ و $x = -\frac{A}{2}$ تا $x = -A$ را طی کند، معادل با $\frac{T}{6}$ است. در شکل زیر به صورت خلاصه همهٔ این نکات به تصویر کشیده شده است.



شتاب بیشینه و تندی بیشینه در حرکت هماهنگ ساده:

در حرکت هماهنگ ساده، هنگام عبور از نقطهٔ تعادل $(x = 0)$، تندی، بیشینه و برابر با $v_{max} = A\omega$ و شتاب صفر است، اما در نقاط بازگشتی $(x = \pm A)$ تندی صفر و اندازهٔ شتاب بیشینه و برابر با $a_{max} = A\omega^2$ است.

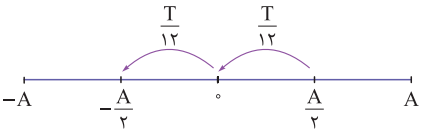


پاسخ تشریحی **گام اول:** به کمک رابطهٔ $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ دورهٔ تناوب نوسانگر را به دست می‌آوریم:

$$k = 2\ N/cm = 200\ N/m$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{1/8}{200}} = 2\pi\sqrt{\frac{18}{2000}} = 2\pi\sqrt{\frac{9}{1000}} = 0/6\frac{\pi}{\sqrt{10}} = 0/6\ s$$

گام دوم: بازهٔ زمانی $\Delta t = 0/1\ s$، معادل $\frac{T}{6}$ است. حال بیشینهٔ مسافت پیموده‌شده را در این بازهٔ زمانی برحسب دامنهٔ نوسان به دست می‌آوریم. سرعت نوسانگر در مرکز نوسان به بیشترین مقدار خود می‌رسد، بنابراین نوسانگر باید $\frac{T}{12}$ را قبل از رسیدن به مرکز نوسان و $\frac{T}{12}$ را بعد از مرکز نوسان طی کند تا مسافت پیموده‌شده بیشینه شود.



$$\Rightarrow 1 = A$$

در نتیجه دامنهٔ نوسان $9\ cm$ است.

گام سوم: بیشینهٔ شتاب نوسانگر را از رابطهٔ $a_{max} = A\omega^2$ به دست می‌آوریم:

$$a_{max} = A\omega^2 = A\left(\frac{k}{m}\right) = \frac{9}{100} \times \frac{200}{1/8} = 10\ m/s^2$$

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

تست و پاسخ ۵۱

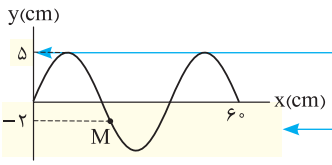
تصویر موج عرضی منتشرشده در تار کشیده‌ای در لحظهٔ $t=0$ به شکل زیر است. اگر تندی انتشار موج در تار برابر $60\ m/s$ باشد، تندی متوسط ذرهٔ M از تار در بازهٔ زمانی $t=0$ تا $t=0/05\ s$ چند متر بر ثانیه است؟

۱) ۱/۵

۲) ۳

۳) ۱۵

۴) ۳۰



دامنه: $A=5\ cm$

طول موج: $1/5\lambda=60\Rightarrow\lambda=40\ cm$

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس‌نامه مسافتی که جبههٔ موج در مدت یک دورهٔ تناوب (T) طی می‌کند، برابر با طول موج (λ) است. اگر تندی انتشار موج برابر v باشد، رابطهٔ طول موج با دورهٔ تناوب به صورت مقابل است: $\lambda=vT$

پاسخ تشریحی **گام اول:** با استفاده از شکل سؤال، طول موج را به دست می‌آوریم:

$$1/5\lambda=60\ cm\Rightarrow\lambda=40\ cm=0/4\ m$$

سپس دورهٔ حرکت را حساب می‌کنیم:

$$T=\frac{\lambda}{v}\xrightarrow[v=60\frac{m}{s}]{\lambda=0/4\ m}T=\frac{0/4}{60}=\frac{1}{150}\ s$$

گام دوم: اکنون باید ببینیم که بازهٔ زمانی داده‌شده، چند برابر دورهٔ تناوب است:

$$\frac{\Delta t}{T}=\frac{\frac{5}{100}}{\frac{1}{150}}=\frac{750}{100}=7/5$$

نوسانگر در هر دوره، مسافتی به اندازهٔ چهار برابر دامنه و در هر نصف دوره، مسافتی به اندازهٔ دو برابر دامنه را می‌پیماید. بنابراین مسافت طی‌شده در این مدت برابر است با:

$$\ell=7/5\times4A=30A\xrightarrow{A=5cm=0/05m}\ell=30\times0/05=1/5m$$

گام سوم: تندی متوسط ذرهٔ M در بازهٔ زمانی $t=0s$ تا $t=0/05s$ را محاسبه می‌کنیم:

$$S_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{1/5}{0/05}=30\ m/s$$

تست و پاسخ ۵۲

تراز شدت صوت در فاصلهٔ معینی از یک چشمهٔ صوت $56\ dB$ است. آهنگ متوسط انرژی رسیده به سطحی به مساحت $5\ cm^2$ که عمود بر راستای انتشار صوت قرار دارد، در SI کدام است؟ $(I_0=10^{-12}\ W/m^2$ و $\log 2=0/3)$

توان متوسط

۱) 4×10^{-10}

۲) 4×10^{-11}

۳) 2×10^{-10}

۴) 2×10^{-11}

پاسخ: گزینهٔ ۳

خودت حل کنی بهتره *اول از رابطهٔ تراز شدت صوت، شدت صوت رو حساب کن. بعدش از رابطهٔ شدت صوت، توان متوسط رو به دست بیار.*

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ تشریحی **گام اول:** شدت صوت را حساب می‌کنیم. طبق رابطهٔ تراز شدت صوت می‌توانیم بنویسیم:

$$\beta = 10\log\frac{I}{I_0} \xrightarrow{\beta=56\,dB,\ I_0=10^{-12}\ W/m^2} 56 = 10\log\frac{I}{10^{-12}} \Rightarrow 5/6 = \log\frac{I}{10^{-12}}$$

$$\xrightarrow[5=\log 10^5,\ 0/6=2\times 0/3=2\times\log 2=\log 4]{5/6=5+0/6} \log 10^5 + \log 4 = \log\frac{I}{10^{-12}} \Rightarrow \log(4\times 10^5) = \log\frac{I}{10^{-12}} \Rightarrow \frac{I}{10^{-12}} = 4\times 10^5$$

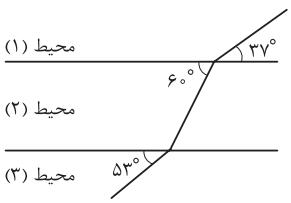
$$\Rightarrow I = 4\times 10^{-7}\ W/m^2$$

گام دوم: توان متوسطی که به سطح رسیده را حساب می‌کنیم. طبق رابطهٔ شدت صوت می‌توانیم بنویسیم:

$$I = \frac{P_{av}}{A} \xrightarrow[A=5cm^2=5\times 10^{-4}\,m^2]{I=4\times 10^{-7}\ W/m^2} 4\times 10^{-7} = \frac{P_{av}}{5\times 10^{-4}} \Rightarrow P_{av} = 2\times 10^{-10}\,W$$

تست و پاسخ ۵۳

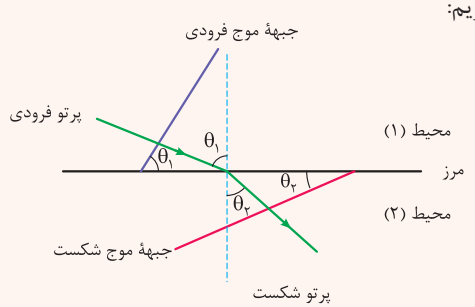
شکل مقابل، یکی از جبهه‌های موج تختی را در سه محیط با مرزهای موازی نشان می‌دهد. به ترتیب از راست به چپ، طول موج و بسامد موج در محیط (۱) چند برابر طول موج و بسامد آن در محیط (۳) است؟ ($\sin 37^\circ = 0/6$)



۱) $\frac{4}{3}$ ، $\frac{3}{4}$
۲) $\frac{4}{3}$ ، ۱
۳) $\frac{3}{4}$ ، $\frac{3}{4}$
۴) $\frac{3}{4}$ ، ۱

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس‌نامه اگر موجی از یک محیط وارد محیط دیگر شود، مطابق شکل زیر داریم:



θ_1: زاویهٔ بین پرتو فرودی با خط عمود بر مرز دو محیط یا زاویهٔ جبههٔ فرودی با مرز

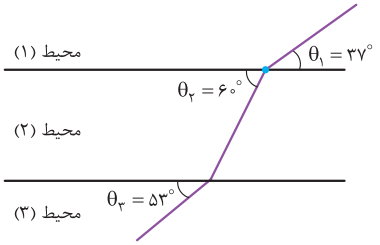
θ_2: زاویهٔ بین پرتو شکست با خط عمود بر مرز دو محیط یا زاویهٔ جبههٔ شکست با مرز

قانون شکست عمومی: $\frac{v_2}{v_1} = \frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1}$

نکته بسامد موج، ویژگی مربوط به چشمهٔ موج است و به محیط انتشار ربطی ندارد؛ بنابراین در اثر شکست موج بسامد ثابت می‌ماند؛ در نتیجه داریم:

$$\xrightarrow[\lambda=\frac{v}{f}]{f:\text{ثابت}} \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{v_2}{v_1} \xrightarrow{\frac{v_2}{v_1}=\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1}} \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1}$$

پاسخ تشریحی طبق درس‌نامهٔ بالا و مطابق شکل مقابل، داریم:



$$\frac{\lambda_1}{\lambda_3} = \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_3} \xrightarrow{\sin\theta_1=0/6,\ \sin\theta_3=0/8} \frac{\lambda_1}{\lambda_3} = \frac{0/6}{0/8} = \frac{3}{4}$$

از طرفی می‌دانیم در اثر شکست موج بسامد ثابت است؛ بنابراین $f_1 = f_3$ است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

تست و پاسخ ۵۴

یکی از سیم‌های ویولن به طول ۲۵ cm و جرم ۰/۵ g در نزدیکی یک نوسان‌کننده با بسامد متغیر که بسامد آن بین ۵۰۰ تا ۱۰۰۰ هرتز تغییر می‌کند، قرار دارد و این سیم فقط برای دو بسامد ۶۰۰ و ۹۰۰ هرتز به تشدید درمی‌آید. نیروی کشش سیم چند نیوتون است؟

۱) ۴۵ ۲) ۵۰ ۳) ۴/۵ ۴) ۵

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس‌نامه

تندی انتشار موج عرضی در یک تار تحت کشش از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{FL}{m}}$$

v: تندی انتشار موج عرضی (m/s)، F: نیروی کشش تار (N)، μ: چگالی خطی جرم $(\frac{kg}{m})$ $\mu = \frac{m}{L}$، L: طول تار (m)، m: جرم تار (kg)

نکات ۱) اختلاف بسامد دو هماهنگ متوالی در یک تار برابر است با بسامد هماهنگ اول. به رابطهٔ زیر توجه کنید: $f_{n+1} - f_n = f_1$

۲) بسامد هماهنگ اول تار از رابطهٔ مقابل به دست می‌آید: $f_n = \frac{nv}{2L} \xrightarrow{n=1} f_1 = \frac{v}{2L}$

پاسخ تشریحی **گام اول:** بسامد هماهنگ اول را طبق نکتهٔ (۱) به دست می‌آوریم:

$$f_{n+1} - f_n = f_1 \Rightarrow f_1 = 900 - 600 = 300\ Hz$$

گام دوم: تندی انتشار موج در تار را طبق نکتهٔ (۲) حساب می‌کنیم:

$$f_1 = \frac{v}{2L} \xrightarrow[L=25cm=0/25m]{f_1=300\ Hz} 300 = \frac{v}{2\times 0/25} \Rightarrow v = 150\ m/s$$

گام سوم: نیروی کشش تار را طبق رابطهٔ تندی انتشار موج در تار به دست می‌آوریم:

$$v = \sqrt{\frac{FL}{m}} \xrightarrow[L=0/25m\ ,\ m=0/5g=5\times 10^{-4}kg]{v=150\ m/s} 150 = \sqrt{\frac{F\times 0/25}{5\times 10^{-4}}} \Rightarrow 22500 = \frac{F}{2\times 10^{-3}} \Rightarrow F = 45\ N$$

تست و پاسخ ۵۵

طول موج آستانهٔ فلزی ۳۱۰ nm است. اگر فوتونی با انرژی ۱۵/۲۵ eV بر سطح این فلز بتابد، بیشینهٔ تندی فوتوالکترون‌های خارج‌شده از سطح این فلز چند متر بر ثانیه است؟ ($hc = 1240\ eV.nm$ ، $e = 1/6\times 10^{-19} C$ و جرم الکترون $9\times 10^{-31} kg$ است.)

۱) 2×10^5 ۲) 2×10^6 ۳) 4×10^5 ۴) 4×10^6

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس‌نامه بیشینهٔ انرژی جنبشی فوتوالکترون از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$K_{max} = E_{فوتون} - W_0$$

تابع کار (W_0): حداقل انرژی لازم برای جداشدن الکترون از سطح فلز، تابع کار نامیده می‌شود و از رابطهٔ زیر به دست می‌آید.

$$W_0 = h f_0 = \frac{hc}{\lambda_0}$$

f_0: بسامد آستانه، λ_0: طول موج آستانه

پاسخ تشریحی **گام اول:** تابع کار فلز را حساب می‌کنیم:

$$W_0 = \frac{hc}{\lambda_0} \xrightarrow[\lambda_0=310\ nm]{hc=1240\ eV.nm} W_0 = \frac{1240}{310} = 4\ eV$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

گام دوم: بیشینهٔ انرژی جنبشی فوتوالکترون را به دست می‌آوریم:

$$K_{max}=E_{\text{فوتون}}-W_{\circ}\xrightarrow[W_{\circ}=۴eV]{E_{\text{فوتون}}=۱۵/۲۵eV}K_{max}=۱۵/۲۵-۴=۱۱/۲۵\,eV$$

$$\xrightarrow{۱eV=۱/۶\times۱۰^{-۱۹}J}K_{max}=۱۱/۲۵\times۱/۶\times۱۰^{-۱۹}=۱۸\times۱۰^{-۱۹}J$$

گام سوم: طبق رابطهٔ انرژی جنبشی، بیشینهٔ تندی فوتوالکترون را به دست می‌آوریم:

$$K_{max}=\frac{۱}{۲}mv_{max}^{۲}\xrightarrow[m=۹\times۱۰^{-۳۱}kg]{K_{max}=۱۸\times۱۰^{-۱۹}J}۱۸\times۱۰^{-۱۹}=\frac{۱}{۲}\times۹\times۱۰^{-۳۱}\times v_{max}^{۲}\Rightarrow v_{max}^{۲}=۴\times۱۰^{۱۲}\Rightarrow v_{max}=۲\times۱۰^{۶}\ m/s$$

تست و پاسخ ۵۶

در اتم هیدروژن، بلندترین طول موجی که الکترون تابش می‌کند تا به مدار n' برسد، $\frac{۴۰}{۹}\mu m$ است. شعاع مدار n' چند برابر شعاع بور است؟ $(R=۰/۰۱(nm)^{-۱})$

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۱۶ ۴) ۲۵

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس‌نامه

۱) رابطهٔ ریدبرگ برای طول موج‌های گسیلی هیدروژن به صورت زیر است:

$$\frac{۱}{\lambda}=R\left(\frac{۱}{n'^{۲}}-\frac{۱}{n^{۲}}\right)$$

ثابت ریدبرگ $(nm)^{-۱}$ — طول موج (nm)

n': شمارهٔ مدار کوچک‌تر

n: شمارهٔ مدار بزرگ‌تر

طبق رابطهٔ بالا، کم‌انرژی‌ترین فوتون (بیشترین طول موج) مربوط به حالتی است که الکترون از مدار $n=n'+۱$ به مدار n' گذار کند؛ بنابراین داریم:

$$\frac{۱}{\lambda_{max}}=R\left(\frac{۱}{n'^{۲}}-\frac{۱}{(n'+۱)^{۲}}\right)$$

۲) بنا به مدل اتمی بور، شعاع‌های مدارهای اتم هیدروژن، گسسته‌اند یعنی فقط مقادیر خاصی را می‌توانند داشته باشند.

$r_n=n^{۲}a_{\circ}$ → شعاع بور (شعاع کوچک‌ترین مدار در اتم هیدروژن)

r_n: شعاع مدار nام — n: شمارهٔ مدار (عدد کوانتومی)

پاسخ تشریحی طبق درس‌نامهٔ بالا می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{۱}{\lambda_{max}}=R\left(\frac{۱}{n'^{۲}}-\frac{۱}{(n'+۱)^{۲}}\right)\xrightarrow[R=۰/۰۱(nm)^{-۱}]{\lambda_{max}=\frac{۴۰}{۹}\mu m=\frac{۴۰۰۰۰}{۹}nm}\frac{۱}{\frac{۴۰۰۰۰}{۹}}=\frac{۱}{۱۰۰}\left(\frac{۱}{n'^{۲}}-\frac{۱}{(n'+۱)^{۲}}\right)$$

با توجه به این‌که طول موج تابشی در ناحیهٔ فروسرخ است، باید $n'>۲$ باشد.

$$\frac{۹}{۴۰۰}=\frac{۱}{n'^{۲}}-\frac{۱}{(n'+۱)^{۲}}\xrightarrow{\text{مقادیر } n'(n'>۲) \text{ را چک می‌کنیم.}}\begin{cases}n'=۳\Rightarrow\frac{۹}{۴۰۰}\neq\frac{۷}{۱۴۴} & \times\\ n'=۴\Rightarrow\frac{۹}{۴۰۰}=\frac{۹}{۴۰۰} & \checkmark\end{cases}$$

حالا طبق رابطهٔ مقابل داریم:

$$r_n=n^{۲}a_{\circ}\Rightarrow r_{n'}=n'^{۲}.a_{\circ}=۱۶a_{\circ}$$

بنابراین شعاع n'، ۱۶ برابر شعاع بور است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

تست و پاسخ ۵۷

تعداد پروتون‌های یک هسته، برابر تعداد نوترون‌های آن است. این هسته با گسیل ۲ پرتو α و ۴ پرتو β^+ به هستهٔ جدیدی تبدیل می‌شود. اختلاف تعداد نوترون‌ها و پروتون‌های این هستهٔ جدید کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) صفر

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس‌نامه

۱) رابطهٔ واپاشی آلفا (α):

$$\underbrace{{}^{A}_{Z}X}_{\text{هستهٔ مادر (اولیه)}} \rightarrow {}^{4}_{2}\alpha + \underbrace{{}^{A-4}_{Z-2}Y}_{\text{هستهٔ دختر}}$$

۲) رابطهٔ واپاشی β^+ (پوزیترون):

$$\underbrace{{}^{A}_{Z}X}_{\text{هسته مادر (اولیه)}} \rightarrow {}^{0}_{1}\beta^{+} + \underbrace{{}^{A}_{Z-1}Y}_{\text{هسته دختر}}$$

۳) A = عدد جرمی (تعداد نوکلئون‌ها) $\boxed{A = Z + N}$

Z = عدد اتمی (تعداد پروتون‌ها)

N = عدد نوترونی (تعداد نوترون‌ها)

پاسخ تشریحی **گام اول:** معادلهٔ واپاشی را برای واکنش مورد نظر می‌نویسیم:

$${}^{A}_{Z}X \Rightarrow {}^{A'}_{Z'}Y + {}^{4}_{2}\alpha + {}^{0}_{1}\beta^{+}$$

گام دوم: از روی موازنهٔ عدد جرمی و عدد اتمی، رابطهٔ A با A' و Z با Z' را به دست می‌آوریم:

موازنهٔ عدد جرمی: $A = A' + 2(4) + 4(0) = A' + 8$

موازنهٔ عدد اتمی: $Z = Z' + 2(2) + 4(1) = Z' + 4 + 4 = Z' + 8$

گام سوم: اختلاف تعداد پروتون‌ها و تعداد نوترون‌های هستهٔ جدید را به دست می‌آوریم:

$$A = A' + 8 \xrightarrow[A'=Z'+N']{A=Z+N} Z + N = Z' + N' + 8 \xrightarrow{N=Z} 2Z = Z' + N' + 8$$

$$\xrightarrow{Z=Z'+8} 2(Z' + 8) = Z' + N' + 8 \Rightarrow 2Z' + 16 = Z' + N' + 8 \Rightarrow Z' + 8 = N' \Rightarrow N' - Z' = 8$$

نکات ۱) در اثر گسیل α، اختلاف تعداد پروتون‌ها و تعداد نوترون‌ها در هستهٔ جدید نسبت به هستهٔ اولیه تغییر نمی‌کند.

۲) در اثر گسیل هر ذرهٔ β (الکترون یا پوزیترون)، اختلاف تعداد پروتون‌ها و تعداد نوترون‌ها نسبت به هستهٔ اولیه به اندازهٔ ۲ واحد تغییر می‌کند.

اختلاف پروتون و نوترون $\begin{cases} 2\alpha \Rightarrow \text{بی‌تأثیر} \\ 4\beta \Rightarrow 4(2) = 8 \end{cases}$

تست و پاسخ ۵۸

در راکتور شکافت هسته‌ای، به ترتیب از راست به چپ، از کدام ماده برای کُندکردن نوترون‌ها و از کدام ماده برای ساخت میله‌های کنترل استفاده می‌شود؟

۱) گرافیت، بور ۲) گرافیت، آب سنگین (D_2O)

۳) کادمیم، بور ۴) کادمیم، آب سنگین (D_2O)

پاسخ: گزینهٔ ۱

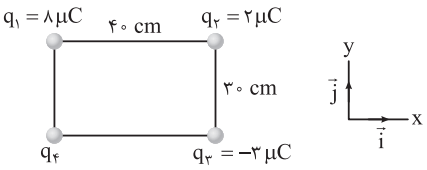
مشاوره *شاید از دیدن این سؤال تعجب کردی. اگه این مبحث رو خوندی، که دیدی چه‌قدر آسونه. اگه هم نخوندی همین الان برو بخونش.*

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ تشریحی در راکتور شکاف هسته‌ای از آب معمولی (H_2O)، آب سنگین (D_2O) و گرافیت برای کندکردن نوترون‌ها و از کادمیم و بور برای جذب نوترون و ساخت میله‌های کنترل استفاده می‌شود؛ بنابراین گزینهٔ (۱) صحیح است.

تست و پاسخ ۵۹

در شکل مقابل چهار بار الکتریکی نقطه‌ای در چهار رأس مستطیلی قرار دارند. اگر نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار q_2 برابر $\vec{F} = (1/7N)\vec{i}$ باشد، اندازهٔ میدان الکتریکی حاصل از بار q_4 در مرکز مستطیل چند نیوتون بر کولن است؟ $(K = 9\times10^9 \frac{N.m^2}{C^2})$



۱) 5×10^5
۲) 5×10^6
۳) 2×10^5
۴) 2×10^6

پاسخ: گزینهٔ ۴

مشاوره محاسبهٔ نیروی الکتریکی و میدان الکتریکی ناشی از بارهای ذره‌ای، همیشه در کنکورها مطرح بوده‌است. این مطلب درسی را جدی بگیرید و سعی کنید با انواع تست‌های آن آشنا شوید.

خودت حل کنی بهتره ابتدا نیروی $\vec{F}_{42}$ را به دست آورید، سپس با استفاده از این نیرو، اندازهٔ بار q_4 را پیدا کنید. در مرحلهٔ آخر نیز میدان الکتریکی حاصل از بار q_4 را در مرکز مستطیل حساب کنید.

درس نامه

۱) قانون کولن: اندازهٔ نیروی الکتریکی بین دو بار نقطه‌ای که در راستای خط مستقیم بین آن‌ها اثر می‌کند، با حاصل‌ضرب بزرگی آن‌ها متناسب است و با مربع فاصلهٔ بین آن‌ها نسبت وارون دارد.

$$F = k\frac{|q_1||q_2|}{r^2}$$

F: بزرگی نیروی الکتریکی (N)

k: ثابت کولن $= 9\times10^9 \frac{N.m^2}{C^2}$

$|q_1|$ و $|q_2|$: اندازه‌های بارهای الکتریکی (C)

r: فاصلهٔ بین دو بار (m)

نکته هنگام عددگذاری در رابطهٔ قانون کولن، اگر بارهای الکتریکی برحسب میکروکولن و فاصله برحسب سانتی‌متر نوشته شوند، ضریب ثابت k را برابر با $90 \frac{N.cm^2}{(\mu C)^2}$ در نظر می‌گیریم تا نیرو برحسب نیوتون به دست آید.

نکته نیروی الکتریکی بین بارهای هم‌نام از نوع رانش و بین بارهای ناهم‌نام از نوع ربایش است.

۲) اصل برهم‌نهی نیروهای الکتروستاتیکی: نیروی الکتریکی خالص وارد بر هر ذرهٔ باردار، برایند نیروهایی است که هر یک از ذره‌های دیگر به تنهایی بر آن ذره وارد می‌کنند.

۳) اندازهٔ میدان الکتریکی حاصل از یک بار نقطه‌ای، از رابطهٔ مقابل به دست می‌آید:

$$E = k\frac{|q|}{r^2}$$

E: اندازهٔ میدان الکتریکی $(\frac{N}{C})$

k: ثابت کولن $= 9\times10^9 \frac{N.m^2}{C^2}$

r: فاصلهٔ بار q تا نقطه‌ای که میدان الکتریکی را در آن نقطه می‌خواهیم (m).

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ تشریحی **گام اول:** اندازه و جهت نیروهای $\vec{F}_{12}$ و $\vec{F}_{32}$ را به دست می‌آوریم:

$$F_{12}=k\frac{|q_1||q_2|}{r_{12}^2}\xrightarrow[|q_1|=8\mu C\,,\,|q_2|=2\mu C]{k=9\times10^9\frac{N.cm^2}{(\mu C)^2}\,,\,r_{12}=40\,cm}F_{12}=900\times\frac{8\times2}{40^2}=0/9\,N$$

$$\Rightarrow\vec{F}_{12}=(0/9N)\vec{i}$$

$$F_{32}=k\frac{|q_2||q_3|}{r_{32}^2}\xrightarrow[|q_2|=2\mu C\,,\,|q_3|=3\mu C]{k=9\times10^9\frac{N.cm^2}{(\mu C)^2}\,,\,r_{32}=30\,cm}F_{32}=900\times\frac{2\times3}{30^2}=0/6N$$

$$\Rightarrow\vec{F}_{32}=-(0/6N)\vec{j}$$

گام دوم: نیروی $\vec{F}_{42}$ را برحسب بردارهای یکّه به دست آورده و اندازهٔ آن را محاسبه می‌کنیم:

$$\vec{F}=\vec{F}_{12}+\vec{F}_{32}+\vec{F}_{42}$$

$$\Rightarrow(1/7N)\vec{i}=(0/9N)\vec{i}-(0/6N)\vec{j}+\vec{F}_{42}\Rightarrow\vec{F}_{42}=(0/8N)\vec{i}+(0/6N)\vec{j}\Rightarrow F_{42}=\sqrt{(0/8)^2+(0/6)^2}=1\,N$$

گام سوم: با استفاده از نیروی F_{42}، اندازهٔ بار q_4 را پیدا می‌کنیم:

$$F_{42}=k\frac{|q_4||q_2|}{r_{24}^2}\xrightarrow[|q_2|=2\mu C\,,\,r_{24}=\sqrt{30^2+40^2}=50\,cm]{F_{42}=1\,N\,,\,k=90\frac{N.cm^2}{(\mu C)^2}}1=900\times\frac{|q_4|\times2}{50^2}\Rightarrow|q_4|=\frac{2500}{180}=\frac{250}{18}\,\mu C$$

گام چهارم: فاصلهٔ مرکز مستطیل تا بار q_4، نصف قطر مستطیل است.

$$r=\frac{50}{2}=25\,cm$$

اندازهٔ میدان الکتریکی حاصل از بار q_4 را در مرکز مستطیل حساب می‌کنیم:

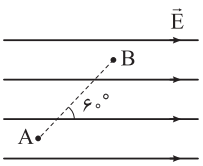
$$E=k\frac{|q_4|}{r^2}\xrightarrow[r=25cm=0/25m]{k=9\times10^9\frac{N.m^2}{C^2}\,,\,|q_4|=\frac{250}{18}\mu C}E=9\times10^9\times\frac{\frac{250}{18}\times10^{-6}}{25^2\times10^{-4}}\Rightarrow E=\frac{9\times250}{18\times25\times25}\times10^7$$

$$\Rightarrow E=0/2\times10^7\frac{N}{C}=2\times10^6\frac{N}{C}$$

تست و پاسخ ۶۰

در شکل مقابل، اندازهٔ میدان الکتریکی یکنواخت $500\,N/C$ و فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B برابر $40\,cm$ است.

اگر پتانسیل الکتریکی نقطهٔ A برابر $50\,V$ باشد، پتانسیل الکتریکی نقطهٔ B برابر چند ولت است؟



۱) ۵۰ ۲) ۱۵۰

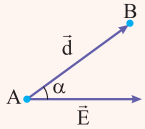
۳) -50 ۴) -150

پاسخ: گزینهٔ ۳

مشاوره این نوع تست‌ها در مبحث الکتریسیته را غنیمت بدانید، زیرا حجم محاسبات زیادی ندارند و در زمان نسبتاً کوتاهی به جواب می‌رسند.

درس‌نامه

در یک میدان الکتریکی یکنواخت، اگر بردار $\vec{d}$ نقطهٔ A را به B وصل کند، اختلاف پتانسیل الکتریکی میان این دو نقطه، از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:



$$V_B-V_A=-Ed\cos\alpha$$

V_B: پتانسیل الکتریکی نقطهٔ B (V)

V_A: پتانسیل الکتریکی نقطهٔ A (V)

E: اندازهٔ میدان الکتریکی یکنواخت $(\frac{N}{C})$ یا $(\frac{V}{m})$

d: فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B از یکدیگر (m)

α: زاویهٔ بین $\vec{E}$ و $\vec{d}$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ تشریحی رابطهٔ اختلاف پتانسیل الکتریکی بین دو نقطهٔ A و B را می‌نویسیم و از آن‌جا، پتانسیل الکتریکی نقطهٔ B را حساب می‌کنیم:

$$V_B - V_A = -Ed\cos\alpha \xrightarrow[d=۴۰cm=۰/۴m\,,\,\alpha=۶۰^\circ]{V_A=۵۰V\,,\,E=۵۰۰\frac{N}{C}} V_B - ۵۰ = -۵۰۰\times ۰/۴\cos ۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow V_B - ۵۰ = -۲۰۰\times\frac{۱}{۲} \Rightarrow V_B = -۵۰\,V$$

حواستون باشه چون مؤلفهٔ افقی بردار $\vec{d}$ در جهت میدان الکتریکی $\vec{E}$ است، بنابراین باید در این جابه‌جایی، پتانسیل الکتریکی کاهش یابد $(V_B < V_A)$؛ یعنی از ابتدا معلوم بود که گزینه‌های (۱) و (۲) نادرست هستند.

تست و پاسخ ۶۱

ثابت دی‌الکتریک یک خازن متصل به باتری، برابر ۴ است. اگر ابتدا دی‌الکتریک خازن را برداشته، سپس خازن را از باتری جدا کرده و فاصلهٔ بین صفحه‌های آن را نصف کنیم، کدام‌یک از موارد زیر درست است؟

الف) اندازهٔ میدان الکتریکی بین صفحه‌های خازن تغییر نمی‌کند.

ب) اختلاف پتانسیل بین صفحه‌های خازن ۲ برابر می‌شود.

پ) بار الکتریکی ذخیره‌شده در خازن ۸ برابر می‌شود.

ت) انرژی ذخیره‌شده در خازن $\frac{۱}{۸}$ برابر می‌شود.

۱) الف و پ ۲) الف و ت

۳) ب و پ ۴) ب و ت

پاسخ: گزینهٔ ۲

مشاوره این تست یک سؤال کاملاً ترکیبی از خازن‌هاست که چند کمیت مختلف در چند حالت مختلف با هم مقایسه می‌شوند. باید با دقت و حوصله گزینه‌ها را بررسی کنید. گرچه ممکن است برای حل این تست، کمی از زمان استاندارد، فراتر بروید.

درس‌نامه

۱) رابطهٔ ظرفیت خازن براساس مشخصات ساختاری آن:

$$C = \kappa\varepsilon_\circ\frac{A}{d}$$

ظرفیت (F) ← C؛ ثابت دی‌الکتریک ← κ؛ ضریب گذردهی الکتریکی خلأ (F/m) ← $\varepsilon_\circ$؛ مساحت متقابل صفحه‌ها $(m^۲)$ ← A؛ فاصلهٔ بین صفحه‌ها (m) ← d

نکته کم‌ترین κ برای هوا و خلأ بوده و برابر یک فرض می‌شود.

۲) نسبت بار ذخیره‌شده در خازن به اختلاف پتانسیل بین دو صفحهٔ آن را ظرفیت خازن می‌گوییم:

$$C = \frac{Q}{V}$$

ظرفیت (F) ← C؛ بار الکتریکی (C) ← Q؛ اختلاف پتانسیل (V) ← V

۳) میدان الکتریکی بین صفحه‌های خازن، یکنواخت است و از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$E = \frac{V}{d}$$

میدان الکتریکی یکنواخت (V/m) ← E؛ اختلاف پتانسیل الکتریکی (V) ← V؛ فاصلهٔ بین دو صفحه (m) ← d

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴) انرژی ذخیره‌شده در یک خازن به شکل‌های زیر محاسبه می‌شود:

$$U=\frac{1}{2}QV=\frac{1}{2}CV^2=\frac{Q^2}{2C}$$

U: انرژی (J) Q: بار الکتریکی (C) V: اختلاف پتانسیل الکتریکی (V) C: ظرفیت (F)

پاسخ تشریحی **گام اول:** در مرحلهٔ اول، هنگام خروج دی‌الکتریک، خازن هم‌چنان به باتری متصل است، بنابراین اختلاف پتانسیل دو سر آن ثابت می‌ماند؛ یعنی:

$$V'=V$$

اندازهٔ میدان الکتریکی تغییر نمی‌کند.

$$E=\frac{V}{d}\xrightarrow[d'=d]{V'=V}E'=E$$

اما ظرفیت، بار الکتریکی و انرژی خازن به صورت مقابل تغییر می‌کنند:

$$C=\kappa\varepsilon_0\frac{A}{d}\Rightarrow\frac{C'}{C}=\frac{\kappa'}{\kappa}\xrightarrow[\kappa=4]{\text{هوا }\kappa'=1}\frac{C'}{C}=\frac{1}{4}$$

$$Q=CV\xrightarrow{V'=V}\frac{Q'}{Q}=\frac{C'}{C}\Rightarrow\frac{Q'}{Q}=\frac{1}{4}$$

$$U=\frac{1}{2}QV\xrightarrow{V'=V}\frac{U'}{U}=\frac{Q'}{Q}\Rightarrow\frac{U'}{U}=\frac{1}{4}$$

گام دوم: در مرحلهٔ دوم، وقتی خازن از باتری جدا می‌شود، بار الکتریکی آن ثابت می‌ماند، یعنی: $Q''=Q'$.

اما ظرفیت، انرژی الکتریکی و اختلاف پتانسیل الکتریکی آن به صورت زیر تغییر می‌کند:

$$C=\kappa\varepsilon_0\frac{A}{d}\Rightarrow\frac{C''}{C'}=\frac{d'}{d''}\xrightarrow{d''=\frac{1}{2}d'}\frac{C''}{C'}=2$$

$$U=\frac{Q^2}{2C}\xrightarrow{Q''=Q'}\frac{U''}{U'}=\frac{C'}{C''}=\frac{1}{2}$$

$$V=\frac{Q}{C}\xrightarrow{Q''=Q'}\frac{V''}{V'}=\frac{C'}{C''}=\frac{1}{2}$$

اما میدان الکتریکی بین صفحه‌های خازن تغییر نمی‌کند:

$$E=\frac{V}{d}\Rightarrow\frac{E''}{E'}=\frac{V''}{V'}\times\frac{d'}{d''}=\frac{1}{2}\times2=1$$

گام سوم: اکنون موارد «الف» تا «ت» را برای حالت نهایی نسبت به حالت اولیه بررسی می‌کنیم:

درستی «الف» $\frac{E''}{E}=\frac{E''}{E'}\times\frac{E'}{E}=1\times1=1$

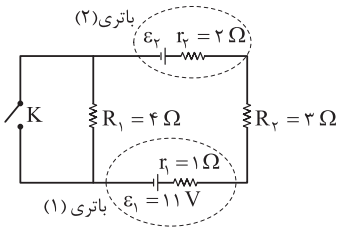
نادرستی «ب» $\frac{V''}{V}=\frac{V''}{V'}\times\frac{V'}{V}=\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{2}$

نادرستی «پ» $\frac{Q''}{Q}=\frac{Q''}{Q'}\times\frac{Q'}{Q}=1\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$

درستی «ت» $\frac{U''}{U}=\frac{U''}{U'}\times\frac{U'}{U}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$

تست و پاسخ ۶۲

در مدار شکل مقابل، اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر باتری (۱) برابر ۱۱/۵ V است. با بستن کلید K، اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر باتری (۲) چند ولت تغییر می‌کند؟



۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$

۳) $\frac{1}{6}$ ۴) $\frac{7}{6}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

خودت حل کنی بهتره ابتدا جریان الکتریکی مدار و نیروی محرکهٔ باتری (۲) را به دست آورید، سپس اختلاف پتانسیل دو سر باتری (۲) را پیدا کنید. بعد از وصل کلید K و حذف مقاومت R_1 جریان مدار و اختلاف پتانسیل دو سر باتری (۲) را در حالت جدید حساب کنید. در پایان نیز تغییرات اختلاف پتانسیل دو سر باتری (۲) را محاسبه کنید.

درس نامه

۱) جریان الکتریکی در یک مدار تک‌حلقه، از رابطهٔ مقابل به دست می‌آید:

$$I=\frac{\sum\varepsilon-\sum\varepsilon'}{\sum(R+r)}$$

I: جریان الکتریکی (A)

$\sum\varepsilon$: مجموع نیروی محرکهٔ باتری‌های مولد (V)

$\sum\varepsilon'$: مجموع نیروی محرکهٔ باتری‌های مصرف‌کننده (V)

$\sum(R+r)$: مجموع کل مقاومت‌های خارجی و داخلی مدار (Ω)

۲) اختلاف پتانسیل دو سر باتری در مدار:

باتری مولد: $V=\varepsilon-rI$

باتری مصرف‌کننده: $V=\varepsilon+rI$

V: اختلاف پتانسیل (V) $\quad$ ε: نیروی محرکه (V)

I: جریان الکتریکی (A) $\quad$ r: مقاومت درونی (Ω)

۳) اتصال کوتاه: هرگاه دو سر یک مقاومت، به وسیلهٔ یک سیم رابط (که مقاومت آن ناچیز است) به هم متصل شوند، تمام جریان از درون آن سیم گذشته و از مقاومت، هیچ جریانی نمی‌گذرد. در این حالت می‌گوییم آن مقاومت اتصال کوتاه شده و از مدار حذف می‌گردد. به عبارت دیگر به جای آن مقاومت، یک قطعه سیم رابط قرار می‌گیرد.



پاسخ تشریحی **گام اول**: با توجه به مقادیر داده‌شده در سؤال، اختلاف پتانسیل دو سر باتری (۱) از نیروی محرکهٔ آن بزرگ‌تر است؛ یعنی باتری (۱) مصرف‌کننده است و برای آن می‌توان نوشت:

$$V_1=\varepsilon_1+Ir_1 \xrightarrow[\varepsilon_1=11\,V\,,\,r_1=1\Omega]{V_1=11/5\,V} 11/5=11+I\times1 \Rightarrow I=\frac{1}{2}A$$

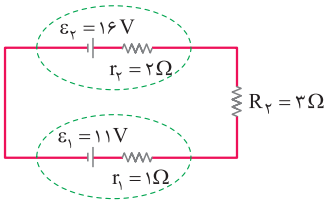
گام دوم: اکنون معلوم می‌شود که باتری (۲) مولد است و می‌توانیم نیروی محرکهٔ آن را به دست آوریم:

$$I=\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{R_1+R_2+r_1+r_2} \Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{\varepsilon_2-11}{4+3+1+2} \Rightarrow 5=\varepsilon_2-11 \Rightarrow \varepsilon_2=16\,V$$

گام سوم: اختلاف پتانسیل دو سر باتری (۲) را حساب می‌کنیم:

$$V_2=\varepsilon_2-Ir_2 \xrightarrow[I=\frac{1}{2}A\,,\,r_2=2\Omega]{\varepsilon_2=16V} V_2=16-\frac{1}{2}\times2=15\,V$$

گام چهارم: بعد از وصل کلید K، مقاومت R_1 اتصال کوتاه شده و از مدار حذف می‌گردد.



جریان گذرنده از مدار را در حالت جدید محاسبه می‌کنیم:

$$I'=\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{R_2+r_1+r_2}=\frac{16-11}{3+1+2}=\frac{5}{6}A$$

گام پنجم: اختلاف پتانسیل دو سر باتری (۲) را در حالت جدید به دست می‌آوریم:

$$V_2'=\varepsilon_2-I'r_2=16-\frac{5}{6}\times2=16-\frac{5}{3}=\frac{43}{3}V$$

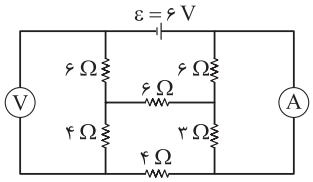
و در پایان، تغییرات اختلاف پتانسیل دو سر باتری (۲) را حساب می‌کنیم:

$$V_2-V_2'=15-\frac{43}{3}=\frac{2}{3}V$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

تست و پاسخ ۶۳

در مدار شکل زیر، مقداری که آمپرسنج آرمانی و ولت‌سنج آرمانی نشان می‌دهند، به ترتیب چند آمپر و چند ولت است؟



۱) ۲ / ۴ ، ۰ / ۳

۲) ۴ / ۸ ، ۰ / ۳

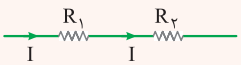
۳) ۲ / ۴ ، ۰ / ۵

۴) ۴ / ۸ ، ۰ / ۵

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس‌نامه

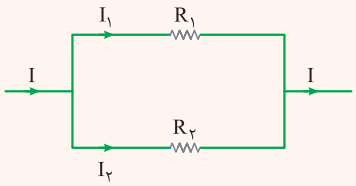
۱) **به هم بستن متوالی مقاومت‌ها:** هنگامی دو مقاومت را متوالی می‌گوییم که فقط از یک سر به هم متصل بوده و از محل اتصال آن‌ها هیچ انشعاب جریان‌داری خارج نگردد. در این حالت جریان الکتریکی عبوری از مقاومت‌ها یکسان است.



R_{eq} : مقاومت معادل (Ω)

$$R_{eq} = R_1 + R_2$$

۲) **به هم بستن موازی مقاومت‌ها:** هنگامی دو مقاومت را موازی می‌گوییم که هر دو سر آن‌ها به وسیلهٔ سیم‌های رابط به یکدیگر متصل شده باشند. در این حالت اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت‌ها یکسان است.



$$I = I_1 + I_2$$

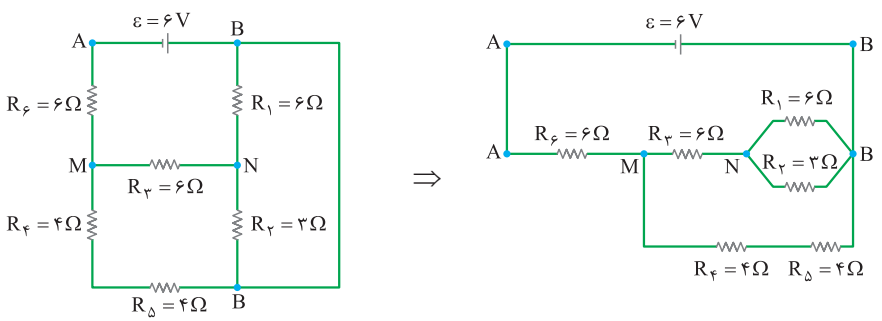
$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \Rightarrow R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

نکته جریان الکتریکی بین دو مقاومت موازی و مشابه به اندازهٔ مساوی تقسیم می‌شود. اما اگر اندازهٔ مقاومت‌ها یکسان نباشند، جریان الکتریکی به نسبت عکس مقاومت‌های الکتریکی بین آن‌ها تقسیم می‌شود.

$$I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \times I \quad , \quad I_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \times I$$

۳) آمپرسنج آرمانی، مقاومت ناچیزی دارد و اختلاف پتانسیل دو سر آن صفر فرض می‌شود. اما ولت‌سنج آرمانی، مقاومت بسیار زیادی دارد. چنان‌که جریان عبوری از آن صفر فرض می‌شود.

پاسخ تشریحی **گام اول:** ابتدا شکل ساده‌تری از مدار را رسم می‌کنیم و مقاومت معادل مدار را به دست می‌آوریم:



R_1 و R_2 موازی هستند. $\Rightarrow R_{1,2} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{6 \times 3}{6 + 3} = \frac{18}{9} = 2\,\Omega$

$R_{1,2}$ و R_3 متوالی هستند. $\Rightarrow R_{1,2,3} = R_{1,2} + R_3 = 2 + 6 = 8\,\Omega$

R_4 و R_5 متوالی هستند. $\Rightarrow R_{4,5} = R_4 + R_5 = 4 + 4 = 8\,\Omega$

$R_{1,2,3}$ و $R_{4,5}$ موازی هستند. $\Rightarrow R_{MB} = \frac{R_{1,2,3} \times R_{4,5}}{R_{1,2,3} + R_{4,5}} = \frac{8 \times 8}{8 + 8} = 4\,\Omega$

R_6 و R_{MB} متوالی هستند. $\Rightarrow R_{eq} = R_6 + R_{MB} = 6 + 4 = 10\,\Omega$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

گام دوم: جریان الکتریکی گذرنده از مولد را به دست آورده و این جریان را در شاخه‌های مختلف مدار تقسیم می‌کنیم.

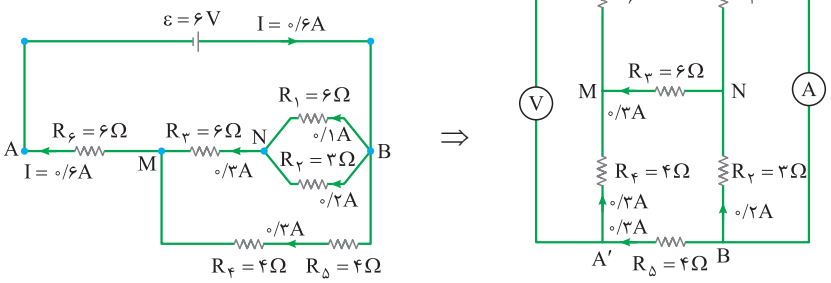
$$I=\frac{\varepsilon}{R_{eq}+r} \xrightarrow[R_{eq}=۱۰\,\Omega,\ r=۰]{\varepsilon=۶V} I=\frac{۶}{۱۰}=۰/۶\,A$$

این جریان بین شاخه‌های موازی و مشابه $R_{۱,۲,۳}$ و $R_{۴,۵}$ به طور یکسان و به اندازهٔ $۰/۳A$ تقسیم می‌شود.

جریان $۰/۳A$ نیز بین مقاومت‌های موازی $R_۱$ و $R_۲$ به صورت مقابل تقسیم می‌شود:

$$I_۱=\frac{R_۲}{R_۱+R_۲}\times I=\frac{۳}{۶+۳}\times ۰/۳=۰/۱\,A$$

$$I_۲=\frac{R_۱}{R_۱+R_۲}\times I=\frac{۶}{۶+۳}\times ۰/۳=۰/۲\,A$$



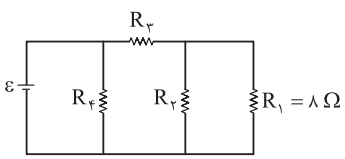
در گره B داریم: $۰/۶=۰/۱+x \Rightarrow x=۰/۵A$

گام سوم: روی مدار از نقطهٔ A به طرف نقطهٔ A' رفته و اختلاف پتانسیل دو نقطهٔ A و A' را که همان عدد ولت‌سنج است به دست می‌آوریم:

$$V_A+R_۶I_۶+R_۴I_۴=V_{A'} \xrightarrow[R_۴=۴\,\Omega,I_۴=۰/۳A]{R_۶=۶\,\Omega,I_۶=۰/۶A} V_A+۶\times ۰/۶+۴\times ۰/۳=V_{A'} \Rightarrow V_{A'}-V_A=۴/۸V$$

تست و پاسخ ۶۴

در مدار شکل زیر، اگر توان مصرفی تمام مقاومت‌ها با یکدیگر برابر باشد، مقاومت معادل مدار چند اهم است؟



۱) ۶
۲) ۴/۵
۳) ۳/۵
۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۲

مشاوره با حل تعداد زیادی از تست‌های مدارهای الکتریکی و آشنایی با شکل‌های متنوع آن، سعی کنید تسلط لازم روی حل آن‌ها را پیدا کنید. انتظار حداقل ۲ تست از این مبحث را در کنکور داشته باشید.

درس‌نامه

توان مصرفی در یک مقاومت، از روابط مقابل به دست می‌آید:

$$\text{توان (W)} \leftarrow P=RI^۲ \quad \begin{matrix}\uparrow \text{ مقاومت الکتریکی } (\Omega)\\ \downarrow \text{ جریان الکتریکی } (A)\end{matrix}$$

این رابطه معمولاً برای مقایسهٔ توان مقاومت‌های متوالی به کار می‌رود که می‌دانیم جریان یکسانی دارند.

$$\text{توان (W)} \leftarrow P=\frac{V^۲}{R} \quad \begin{matrix}\uparrow \text{ اختلاف پتانسیل } (V)\\ \downarrow \text{ مقاومت الکتریکی } (\Omega)\end{matrix}$$

وقتی چند مقاومت با هم بسته می‌شوند (چه متوالی و چه موازی)، توان مصرفی مجموعهٔ آن‌ها با مجموع توان‌های مصرفی هر یک از آن‌ها برابر است.

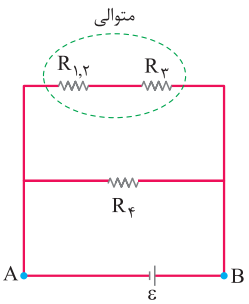
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ تشریحی **گام اول:** دو مقاومت R_1 و R_2 موازی هستند و توان یکسانی دارند، پس می‌توان نوشت:

$$P_1 = P_2 \Rightarrow \frac{V_1^2}{R_1} = \frac{V_2^2}{R_2} \xrightarrow{V_1=V_2} R_1 = R_2 = 8\,\Omega$$

$$R_{1,2} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{8 \times 8}{8 + 8} = 4\,\Omega$$

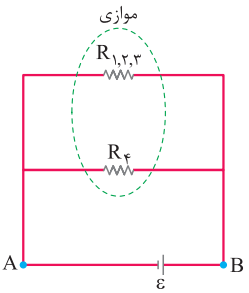
گام دوم: مقاومت $R_{1,2}$ با مقاومت R_3 متوالی است. مقاومت R_3 را به دست می‌آوریم:



$$P_{1,2} = P_1 + P_2 \xrightarrow{P_1=P_2=P_3} P_{1,2} = 2P_3 \Rightarrow R_{1,2} \times I_{1,2}^2 = 2R_3 \times I_3^2 \xrightarrow{I_{1,2}=I_3\,,\,R_{1,2}=4\Omega} 4 = 2R_3 \Rightarrow R_3 = 2\,\Omega$$

$$R_{1,2,3} = R_{1,2} + R_3 = 4 + 2 = 6\,\Omega$$

گام سوم: مقاومت $R_{1,2,3}$ با مقاومت R_4 موازی است. مقاومت R_4 را نیز محاسبه می‌کنیم:



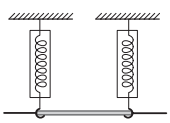
$$P_{1,2,3} = P_1 + P_2 + P_3 \xrightarrow{P_1=P_2=P_3=P_4} P_{1,2,3} = 3P_4 \Rightarrow \frac{V_{AB}^2}{R_{1,2,3}} = 3 \times \frac{V_{AB}^2}{R_4}$$

$$\xrightarrow{R_{1,2,3}=6\Omega} \frac{1}{6} = 3 \times \frac{1}{R_4} \Rightarrow R_4 = 18\,\Omega$$

$$R_{eq} = \frac{R_{1,2,3} \times R_4}{R_{1,2,3} + R_4} = \frac{6 \times 18}{6 + 18} = \frac{18}{4} = 4/5\,\Omega$$

تست و پاسخ ۶۵

در شکل زیر، یک سیم به چگالی خطی جرم $8\,g/m$ با دو نیروسنج فنری که به دو انتهای آن بسته شده‌اند، به طور افقی و در راستای غرب ـ شرق قرار دارد. در محل سیم، میدان مغناطیسی زمین، یکنواخت، به طرف شمال و اندازهٔ آن برابر $0/05\,mT$ است. جریان الکتریکی چند آمپری و در چه جهتی از سیم عبور کند تا نیروسنج‌ها عدد صفر را نشان دهند؟ $(g = 10\,N/kg)$



۱) ۱۶۰، غرب به شرق
۲) ۱۶۰، شرق به غرب
۳) ۱۶۰۰، غرب به شرق
۴) ۱۶۰۰، شرق به غرب

پاسخ: گزینهٔ ۳

مشاوره این تست بر اساس یکی از مسئله‌های آخر فصل ۳ کتاب درسی فیزیک ۲ طرح شده است و مشابه آن در کنکورهای سال‌های اخیر دیده می‌شود.

درس‌نامه

۱) اندازهٔ نیروی مغناطیسی وارد بر سیم راست حامل جریان از رابطهٔ مقابل به دست می‌آید: $F = I\ell B\sin\theta$

F: اندازهٔ نیرو (N)

I: جریان الکتریکی (A)

ℓ: طول قسمتی از سیم که داخل میدان مغناطیسی قرار می‌گیرد. (m)

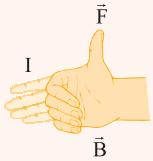
B: اندازهٔ میدان مغناطیسی یکنواخت (T)

θ: زاویهٔ بین امتداد سیم و میدان مغناطیسی

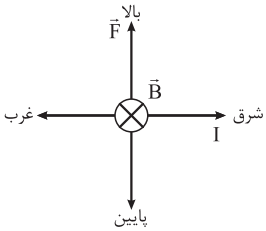
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

این نیرو بر راستای سیم و راستای میدان عمود است.

۲) جهت نیروی فوق براساس قاعدهٔ دست راست تعیین می‌گردد. به طوری که اگر دست راست خود را طوری نگه داریم که انگشتان بازشدهٔ ما در جهت جریان باشد و میدان مغناطیسی عمود بر کف دستمان خارج شود، انگشت شست، جهت نیروی مغناطیسی را نشان می‌دهد.



پاسخ تشریحی باید نیروی مغناطیسی F رو به بالا باشد تا وزن سیم را خنثی کند و نیروسنج‌ها عدد صفر را نشان دهند. جهت این جریان نیز با استفاده از قاعدهٔ دست راست تعیین می‌گردد. با توجه به شکل مقابل باید جهت این جریان از غرب به طرف شرق باشد.

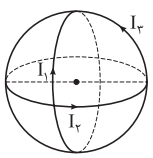


$$F = mg \Rightarrow I\ell B\sin\theta = mg \xrightarrow[\theta=۹۰^\circ\,,\,m=۸g=۸\times۱۰^{-۳}kg]{\ell=۱m\,,\,B=۰/۰۵mT=۵\times۱۰^{-۵}T} I\times۱\times۵\times۱۰^{-۵}\times\sin۹۰^\circ = ۸\times۱۰^{-۳}\times۱۰$$

$$\Rightarrow I = \frac{۸\times۱۰^{-۲}}{۵\times۱۰^{-۵}} = ۱۶۰۰\,A$$

تست و پاسخ ۶۶

در شکل زیر، شعاع هر سه حلقه ۲۰ cm و جریان الکتریکی عبوری از آن‌ها $I_۱ = ۰/۳A$ ، $I_۲ = ۰/۴A$ و $I_۳ = ۱/۲A$ است. حلقه‌ها هم‌مرکزند، روکش عایق دارند و سطح هر حلقه بر دو حلقهٔ دیگر عمود است. بزرگی میدان مغناطیسی در مرکز حلقه‌ها چند گاوس است؟ $(\mu_۰ = ۱۲\times۱۰^{-۷}\frac{T.m}{A})$



۱) $۳/۹\times۱۰^{-۲}$
۲) $۳/۹\times۱۰^{-۴}$
۳) $۷/۸\times۱۰^{-۲}$
۴) $۷/۸\times۱۰^{-۴}$

پاسخ: گزینهٔ ۱

مشاوره مشابه این تست اما به صورت دو حلقهٔ عمود بر هم، در کنکورهای سال‌های قبل مطرح شده است.

خودت حل کنی بهتره میدان مغناطیسی حاصل از هر حلقه را در مرکز آن به دست آورید، سپس میدان مغناطیسی خالص (برایند) آن‌ها را حساب کنید.

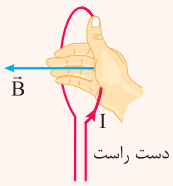
درس نامه

اندازهٔ میدان مغناطیسی در مرکز یک حلقهٔ حامل جریان از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$B = \frac{\mu_۰ I}{۲r}$$

- $\mu_۰ = ۴\pi\times۱۰^{-۷}(\frac{T.m}{A})$: تراوایی مغناطیسی خلأ
- I : جریان الکتریکی (A)
- B : اندازهٔ میدان مغناطیسی (T)
- r : شعاع حلقه

این میدان بر سطح حلقه عمود است و جهت آن به کمک قاعدهٔ دست راست تعیین می‌گردد، به طوری که اگر انگشت شست دست راست خود را در جهت جریان بگیریم، جهت بسته‌شدن چهار انگشت دیگر، سوی میدان مغناطیسی را نشان می‌دهد.



پاسخ تشریحی **گام اول:** ابتدا اندازه و جهت میدان مغناطیسی حاصل از هر یک از حلقه‌ها را در مرکز آن‌ها به دست می‌آوریم:

$$B_۱ = B_x = \frac{\mu_۰ I_۱}{۲r} \xrightarrow[r=۲۰\,cm=۰/۲\,m]{\mu_۰=۱۲\times۱۰^{-۷}\frac{T.m}{A}\,,\,I_۱=۰/۳A} B_۱ = B_x = \frac{۱۲\times۱۰^{-۷}\times۰/۳}{۲\times۰/۲}$$

$$\Rightarrow B_۱ = B_x = ۹\times۱۰^{-۷}T = ۹\times۱۰^{-۳}G$$

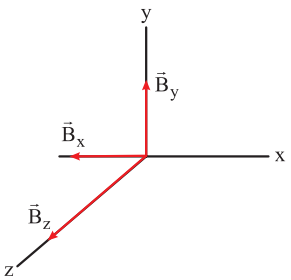
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

به طور مشابه، اندازهٔ میدان‌های مغناطیسی حاصل از حلقه‌های ۲ و ۳ را نیز به دست می‌آوریم:

$$B_۲ = B_y = \frac{\mu_۰ I_۲}{۲r} = \frac{۱۲\times۱۰^{-۷}\times۰/۴}{۲\times۰/۲} = ۱۲\times۱۰^{-۷}\,T = ۱۲\times۱۰^{-۳}\,G$$

$$B_۳ = B_z = \frac{\mu_۰ I_۳}{۲r} = \frac{۱۲\times۱۰^{-۷}\times۱/۲}{۲\times۰/۲} = ۳۶\times۱۰^{-۷}\,T = ۳۶\times۱۰^{-۳}\,G$$

گام دوم: با استفاده از قاعدهٔ دست راست جهت میدان‌های مغناطیسی به‌دست‌آمده را روی شکل نشان می‌دهیم و در پایان، برایند آن‌ها را به دست می‌آوریم.



$$B_T = \sqrt{B_x^۲ + B_y^۲ + B_z^۲}$$

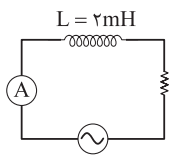
$$\Rightarrow B_T = \sqrt{(۹\times۱۰^{-۳})^۲ + (۱۲\times۱۰^{-۳})^۲ + (۳۶\times۱۰^{-۳})^۲}$$

$$\Rightarrow B_T = \sqrt{۹^۲ + ۱۲^۲ + ۳۶^۲}\times۱۰^{-۳}$$

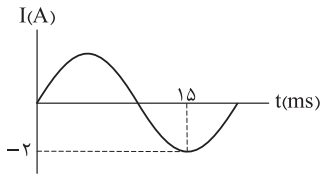
$$\Rightarrow B_T = \sqrt{۱۵۲۱}\times۱۰^{-۳} = ۳۹\times۱۰^{-۳} = ۳/۹\times۱۰^{-۲}\,G$$

تست و پاسخ ۶۷

در مدار شکل «الف»، نمودار جریان حاصل از مولد جریان متناوب برحسب زمان به شکل «ب» است. انرژی ذخیره‌شده در القاگر در لحظهٔ $t = ۷/۵\ ms$ چند میلی‌ژول است؟



(الف)



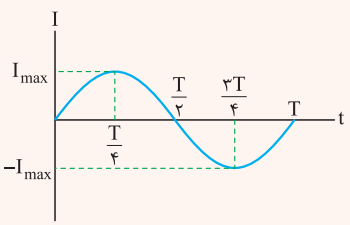
(ب)

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۲

خودت حل کنی بهتره زمان ۱۵ ms در نمودار را برحسب دورهٔ تناوب (T) بنویسید تا T را به دست آورید، سپس به کمک رابطهٔ $I = I_{max}\sin(\frac{۲\pi}{T}t)$ معادلهٔ جریان ـ زمان را نوشته تا در نهایت مقدار جریان را در لحظهٔ $t = ۷/۵\ ms$ به دست آورید. حال که جریان به دست آمد، انرژی ذخیره‌شده در القاگر را به کمک رابطهٔ $U = \frac{۱}{۲}LI^۲$ محاسبه کنید.

درس‌نامه نمودار زیر، جریان متناوب برحسب زمان را که به صورت سینوسی است در یک دورهٔ تناوب (T) نشان می‌دهد. رابطهٔ جریان برحسب زمان به صورت زیر است:



$$I = I_{max}\sin(\frac{۲\pi}{T}t)$$

انرژی ذخیره‌شده در القاگر

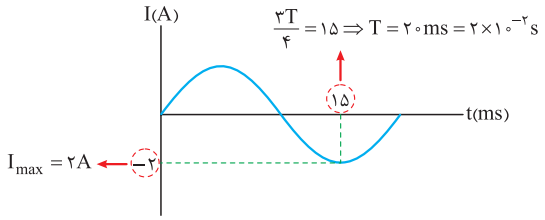
اگر در دو سر القاگری اختلاف پتانسیل برقرار شود، مدار به القاگر انرژی می‌دهد؛ مقداری از این انرژی به صورت گرما توسط سیم‌های القاگر تلف می‌شود و بقیهٔ آن در میدان مغناطیسی القاگر ذخیره می‌شود که از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$U = \frac{۱}{۲}LI^۲$$

U: انرژی ذخیره‌شده در القاگر (J)
L: ضریب القاوری (هانری)
I: جریان عبوری از القاگر (A)

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ تشریحی **گام اول:** به کمک نمودار، دورهٔ تناوب (T) و جریان بیشینه (I_{max}) را به دست می‌آوریم و سپس از رابطهٔ $I = I_{max}\sin(\frac{2\pi}{T}t)$ برای نوشتن معادلهٔ جریان برحسب زمان استفاده می‌کنیم:



$$I = I_{max}\sin(\frac{2\pi}{T}t)$$

$$\Rightarrow I = 2\sin(\frac{2\pi}{2\times10^{-2}}t) = 2\sin(100\pi)$$

گام دوم: جریان عبوری از القاگر را در لحظهٔ $t_1 = 7/5\ ms = 7/5\times10^{-3}\ s$ به دست می‌آوریم.

$$I = 2\sin(100\pi t) = 2\sin(100\pi\times7/5\times10^{-3}) = 2\sin(\frac{3\pi}{4}) = 2\times\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}A$$

گام سوم: انرژی ذخیره‌شده در القاگر را در لحظهٔ $t = 7/5\ m/s$ به دست می‌آوریم:

$$U = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}(2)(\sqrt{2})^2 = 2mJ$$

توجه کنید که در رابطهٔ $U = \frac{1}{2}LI^2$ ضریب القاوری را برحسب میلی هانری قرار دادیم و انرژی را برحسب میلی‌ژول تحویل گرفتیم.

تست و پاسخ ۶۸

چگالی مایع A، ۲ برابر چگالی مایع B است. در حالت اول جرم یکسانی از دو مایع و در حالت دوم حجم یکسانی از دو مایع را مخلوط می‌کنیم. چگالی محلول حاصل در حالت اول، چند برابر چگالی محلول حاصل در حالت دوم است؟ (حجم مایع‌ها در اثر مخلوط‌شدن کاهش نمی‌یابد.)

۱) $\frac{8}{9}$ ۲) $\frac{9}{8}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{4}{3}$

پاسخ: گزینهٔ ۱

خودت حل کنی بهتره چگالی مخلوط در حالتی که جرم یکسان از دو مایع ریخته شده است برابر $\frac{2\rho_A\rho_B}{\rho_A+\rho_B}$ است و چگالی مخلوط در حالتی که حجم یکسان از دو مایع ریخته شده است، برابر $\frac{\rho_A+\rho_B}{2}$ است، با محاسبهٔ جداگانهٔ آن‌ها نسبت خواسته‌شده را به دست آورید.

درس‌نامه اگر جسم A به جرم m_A و حجم V_A را با جسم B به جرم m_B و حجم V_B با یکدیگر مخلوط کنیم و در اثر مخلوط‌کردن، حجم آن‌ها تغییر نکند، چگالی مخلوط از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\rho_{مخلوط} = \frac{m_A+m_B}{V_A+V_B}$$

نکات

۱) چگالی مخلوط عددی بین چگالی جسم A (ρ_A) و چگالی جسم B (ρ_B) است.

۲) چگالی مخلوط به چگالی جسمی نزدیک‌تر است که حجم بیشتری از آن مخلوط را تشکیل داده است.

۳) چگالی مخلوط دو جسم با جرم یکسان از رابطهٔ $\frac{2\rho_1\rho_2}{\rho_1+\rho_2}$ به دست می‌آید که به صورت زیر اثبات می‌شود:

$$\rho_{مخلوط} = \frac{m_1+m_2}{V_1+V_2} \xrightarrow{V=\frac{m}{\rho}} \rho_{مخلوط} = \frac{m_1+m_2}{\frac{m_1}{\rho_1}+\frac{m_2}{\rho_2}} \xrightarrow{m_1=m_2=m} \rho_{مخلوط} = \frac{m+m}{\frac{m}{\rho_1}+\frac{m}{\rho_2}}$$

$$\Rightarrow \rho_{مخلوط} = \frac{2m}{\frac{\rho_2 m+\rho_1 m}{\rho_1\rho_2}} = \frac{2m\rho_1\rho_2}{m(\rho_1+\rho_2)} = \frac{2\rho_1\rho_2}{\rho_1+\rho_2}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴) چگالی مخلوط دو جسم با نسبت حجم یکسان از رابطهٔ $\frac{\rho_۱+\rho_۲}{۲}$ به دست می‌آید که به صورت زیر اثبات می‌شود.

$$\rho_{\text{مخلوط}}=\frac{m_۱+m_۲}{V_۱+V_۲}\xrightarrow{m=\rho V}\rho_{\text{مخلوط}}=\frac{\rho_۱V_۱+\rho_۲V_۲}{V_۱+V_۲}\xrightarrow{V_۱=V_۲=V}\rho_{\text{مخلوط}}=\frac{\rho_۱V+\rho_۲V}{V+V}$$

$$\Rightarrow \rho_{\text{مخلوط}}=\frac{(\rho_۱+\rho_۲)V}{۲V}=\frac{\rho_۱+\rho_۲}{۲}$$

پاسخ تشریحی **گام اول:** چگالی مایع مخلوط را در حالتی که جرم یکسان از دو مایع را مخلوط می‌کنیم، به دست می‌آوریم:

$$\rho_۱=\frac{۲\rho_A\times\rho_B}{\rho_A+\rho_B}=\frac{۲(۲\rho_B)(\rho_B)}{(۲\rho_B)+(\rho_B)}=\frac{۴\rho^۲_B}{۳\rho_B}=\frac{۴}{۳}\rho_B$$

گام دوم: چگالی مایع مخلوط را در حالتی که حجم یکسان از دو مایع را مخلوط می‌کنیم، به دست می‌آوریم:

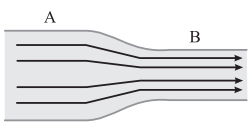
$$\rho_۲=\frac{\rho_A+\rho_B}{۲}=\frac{(۲\rho_B)+\rho_B}{۲}=\frac{۳}{۲}\rho_B$$

گام سوم: نسبت چگالی در حالت اول به حالت دوم برابر است با:

$$\frac{\rho_۱}{\rho_۲}=\frac{\frac{۴}{۳}\rho_B}{\frac{۳}{۲}\rho_B}=\frac{۸}{۹}$$

تست و پاسخ ۶۹

در شکل زیر، شارهٔ تراکم‌ناپذیری که حجم لوله را پر کرده است در راستای افقی جاری است و شعاع مقطع لوله در قسمت A، ۲ برابر شعاع مقطع لوله در قسمت B است. اگر تندی شاره در قسمت A برابر ۰/۵ m/s باشد، کار کل انجام‌شده روی ۸۰۰ g از شاره، وقتی از قسمت A به قسمت B می‌رسد، چند ژول است؟



۱) ۱/۵
۲) −۱/۵
۳) ۰/۳
۴) −۰/۳

پاسخ: گزینهٔ ۱

خودت حل کنی بهتره به کمک رابطهٔ $v_Ar^۲_A=v_Br^۲_B$، تندی شاره هنگام عبور از نقطهٔ B را به دست آورید.

سپس به کمک رابطهٔ $W_t=\Delta K=\frac{۱}{۲}m(v^۲_B-v^۲_A)$، کل کار انجام‌شده را محاسبه کنید.

درس‌نامه معادلهٔ پیوستگی در شارهٔ تراکم‌ناپذیر

اگر شاره‌ای با تندی v در لوله‌ای با مساحت مقطع A حرکت کند، آهنگ شارش حجمی شاره به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\text{آهنگ شارش حجمی شاره}=\frac{V}{t}=\frac{AL}{t}=A(\frac{L}{t})=Av$$

طبق معادلهٔ پیوستگی برای شارهٔ تراکم‌ناپذیر، آهنگ شارش حجمی شاره در لولهٔ افقی ثابت است؛ بنابراین داریم:



$$A_۱v_۱=A_۲v_۲$$

اگر سطح مقطع لوله‌ها به صورت دایره‌ای به شعاع r باشد، در این صورت داریم:

$$r^۲_۱v_۱=r^۲_۲v_۲$$

پاسخ تشریحی **گام اول:** تندی شاره در هنگام عبور از قسمت B را به دست می‌آوریم:

$$v_AA_A=v_BA_B\Rightarrow v_Ar^۲_A=v_Br^۲_B\Rightarrow ۰/۵\times(۲r_B)^۲=v_Br^۲_B$$

$$۰/۵\times۴=v_B\Rightarrow v_B=۲\,m/s$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

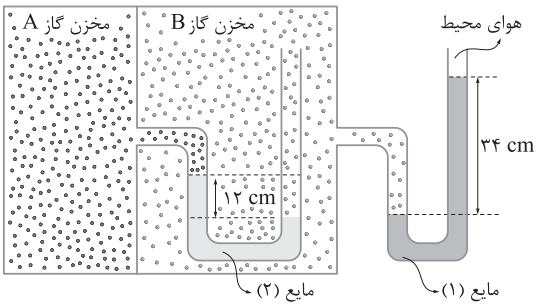
گام دوم: کار کل انجام‌شده روی ۸۰۰ گرم شاره را زمانی که از ناحیهٔ A به ناحیهٔ B حرکت می‌کند به دست می‌آوریم:

$$W_t = \Delta K = \frac{1}{2} \times m(v_B^2 - v_A^2) = \frac{1}{2}(0/8)(2^2 - 0/5^2) = 0/4(4 - 0/25) = +1/5\ J$$

تست و پاسخ ۷۰

در شکل زیر، اگر چگالی مایع‌های (۱) و (۲) به ترتیب برابر $1/2\ g/cm^3$ و $0/85\ g/cm^3$ باشد، فشار پیمانه‌ای مخزن گاز A چند میلی‌متر جیوه است؟ (فشار هوای محیط $10^5\ Pa$ و چگالی جیوه $13/6\ g/cm^3$ است.)

۱) ۳۷/۵
۲) ۲۲/۵
۳) −۳۷/۵
۴) −۲۲/۵

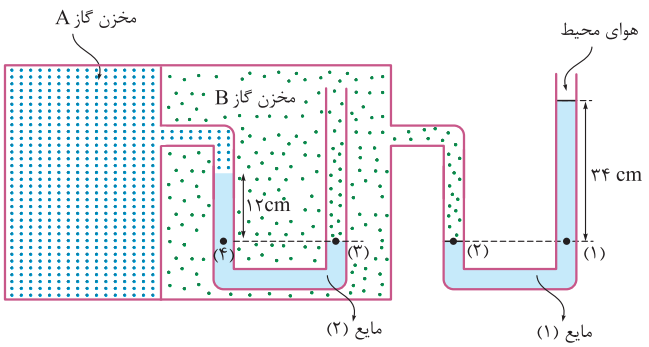


پاسخ: گزینهٔ ۲

مشاوره *بیا همین‌جا یه قولی بهم بده! نکات این سؤال رو خوب تحلیل کن و دیگه از این مدل سؤالا نترس. بزَن بریم!*

پاسخ تشریحی

گام اول: ابتدا نقاط هم‌فشار را مشخص می‌کنیم. مطابق شکل زیر داریم:



$$P_1 = P_2 = P_3 = P_4$$

گام دوم: فشار پیمانه‌ای (P_g) را در نقطهٔ (۴) به دست می‌آوریم:

$$P_4 = P_1 \xrightarrow{P_g = P - P_0} P_{g_4} = P_1 - P_0 \xrightarrow{P_1 = \rho_1 g h_1 + P_0} P_{g_4} = \rho_1 g h_1$$

$$\xrightarrow[h_1 = 34cm = 0/34m]{\rho_1 = 1/2\ g/cm^3 = 1200\ kg/m^3} P_{g_4} = 1200 \times 10 \times 0/34 = 1200 \times 3/4\ Pa$$

گام سوم: فشار پیمانه‌ای مخزن گاز (A) را حساب می‌کنیم:

$$P_{g_4} = P_{g_A} + \rho_2 g h_2 \xrightarrow[\rho_2 = 0/85\ g/cm^3 = 850(\frac{kg}{m^3}),\ h_2 = 12cm = 0/12m]{P_{g_4} = 1200 \times 3/4 Pa} 1200 \times 3/4 = P_{g_A} + (850 \times 10 \times 0/12)$$

$$\Rightarrow P_{g_A} = (1200 \times 3/4) - \underbrace{(850 \times 1/2)}_{0/85 \times 1200} = 1200(3/4 - \frac{3/4}{4}) = \frac{3}{4} \times 1200 \times 3/4 Pa$$

گام چهارم: فشار پیمانه‌ای مخزن گاز (A) را برحسب mmHg به دست می‌آوریم:

$$P_{g_A} = \rho_{جیوه} g h_{جیوه} \xrightarrow{\rho_{جیوه} = 13600\ kg/m^3} \frac{3}{4} \times 1200 \times 3/4 = 13600 \times 10 \times h \Rightarrow h = 2/25 \times 10^{-2}\ mHg = 22/5\ mmHg$$

بنابراین فشار پیمانه‌ای مخزن A برابر ۲۲/۵ میلی‌متر جیوه است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

تست و پاسخ ۷۱

تلمبه‌ای با توان ورودی $12/5\ kW$ در هر دقیقه $3\ m^3$ از آب ساکن دریاچه‌ای را $12\ m$ بالا برده و آن را با تندی $4\ m/s$ وارد مخزنی می‌کند. اگر چگالی آب $1\frac{g}{cm^3}$ باشد، بازده تلمبه چند درصد است؟ $(g = 10\ N/kg)$

۱) ۴۸ ۲) ۴۸/۸ ۳) ۵۱/۲ ۴) ۵۲

پاسخ: گزینهٔ ۳

مشاوره *طراح کنکور عاشق سؤال ترکیبیه بازده و توانه. احتمالاً توی کنکور می‌بینی!*

درس‌نامه

کار مفیدی که یک تلمبه در صورت نبود اتلاف انرژی بر روی مقداری آب انجام می‌دهد، برابر است با:

$$\underbrace{W}_{\text{کار تلمبه}} = \overbrace{\Delta U}^{\text{تغییر انرژی پتانسیل}} + \underbrace{\Delta K}_{\text{تغییر انرژی جنبشی}}$$

توان یعنی آهنگ انجام کار و از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$P = \frac{W}{t}$$

کار (J) — توان (W) — زمان (s)

بازده یک دستگاه از رابطهٔ مقابل به دست می‌آید:

$$R_a = \frac{P_{\text{خروجی}}}{P_{\text{ورودی}}}$$

پاسخ تشریحی **گام اول:** کاری که پمپ بر روی آب انجام می‌دهد را حساب می‌کنیم:

$$W = \Delta U + \Delta K \xrightarrow[\Delta K=\frac{1}{2}m(v_2^2-v_1^2)]{\Delta U=mgh} W = (mgh) + \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) \xrightarrow{V_1=0} W = m(gh + \frac{1}{2}v_2^2)$$

$$\xrightarrow{m=\rho V} W = \rho V(gh + \frac{1}{2}v_2^2) \xrightarrow[V=3m^3, h=12m, v_2=4\ m/s]{\rho=1\ g/cm^3=1000\ kg/m^3} W = 1000\times 3(\underbrace{(10\times 12)}_{120} + \underbrace{(\frac{1}{2}\times 4^2)}_{8}) = 3000\times 128(J)$$

گام دوم: توان خروجی پمپ را حساب می‌کنیم:

$$P_{\text{خروجی}} = \frac{W}{t} \xrightarrow[t=1min=60\ s]{W=3000\times 128\ (J)} P_{\text{خروجی}} = \frac{3000\times 128}{60} = 50\times 128(W)$$

گام سوم: بازده پمپ را حساب می‌کنیم:

$$Ra = \frac{P_{\text{خروجی}}}{P_{\text{ورودی}}} \xrightarrow[P_{\text{ورودی}}=12/5kW=12/5\times 10^3\ W]{P_{\text{خروجی}}=50\times 128(W)} Ra = \frac{50\times 128}{12/5\times 10^3} = \frac{512}{1000}$$

بنابراین بازده پمپ برحسب درصد برابر است با:

$$Ra = \frac{512}{1000}\times 100 = \%51/2$$

تست و پاسخ ۷۲

ضریب انبساط طولی فلزی $3\times 10^{-5}\frac{1}{K}$ است. اگر دمای این فلز $120^\circ F$ افزایش یابد، چگالی آن تقریباً چند درصد کاهش می‌یابد؟

۱) ۰/۲ ۲) ۰/۶ ۳) ۰/۳۶ ۴) ۱/۰۸

پاسخ: گزینهٔ ۲

مشاوره *توی این سؤالا حتماً هواست به تبدیل‌کردن ضریب انبساط طولی به ضریب انبساط حجمی باشه، چون دامش توی گزینهٔ (۱) برات آورده شده.*

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

درس‌نامه

اگر دمای جسمی با چگالی ρ_1 به اندازهٔ $\Delta\theta$ تغییر کند، تغییرات چگالی جسم $(\Delta\rho)$ به طور تقریبی از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\Delta\rho = -\rho_1\beta\Delta\theta$$

در نتیجه درصد تغییر چگالی برابر است با:

$$\text{درصد تغییر چگالی} = \frac{\Delta\rho}{\rho_1}\times 100 = -\beta\Delta\theta\times 100$$

پاسخ تشریحی **گام اول:** ابتدا تغییر دما را برحسب درجهٔ سلسیوس به دست می‌آوریم:

$$\Delta F = 1/8\Delta\theta \xrightarrow{\Delta F = 120^\circ F} 120 = 1/8\Delta\theta \Rightarrow \Delta\theta = \frac{120}{1/8} = \frac{200}{3}\ ^\circ C$$

گام دوم: درصد تغییر چگالی را طبق رابطه‌ای که در درس‌نامه آوردیم، به دست می‌آوریم:

$$\text{درصد تغییر چگالی} = -\beta.\Delta\theta\times 100 \xrightarrow[\Delta\theta=\frac{200}{3}^\circ C]{\beta=3\alpha=3\times 3\times 10^{-5}=9\times 10^{-5}\frac{1}{K}\text{یا}\frac{1}{^\circ C}}$$

$$\text{درصد تغییر چگالی} = -9\times 10^{-5}\times\frac{200}{3}\times 100 = -0/6 \text{ درصد}$$

بنابراین چگالی فلز ۰/۶ درصد کاهش می‌یابد.

تست و پاسخ ۷۳

مقداری یخ به جرم m_1 و دمای $-20^\circ C$ را در مقداری آب به جرم m_2 و دمای $20^\circ C$ می‌اندازیم. اگر پس از برقراری تعادل گرمایی مخلوطی از ۱۰۰ g یخ و ۶۰۰ g آب ایجاد شود، نسبت $\frac{m_2}{m_1}$ برابر کدام است؟ $(L_F = 336\ J/g, c_{\text{آب}} = 2c_{\text{یخ}} = 4/2\ \frac{J}{gk})$

۱) $\frac{3}{4}$
۲) $\frac{4}{3}$
۳) $\frac{2}{5}$
۴) $\frac{5}{2}$

دمای تعادل صفر درجهٔ سلسیوس است.

پاسخ: گزینهٔ ۴

مشاوره در کنکورهای سال‌های اخیر، وقتی به تست‌های مطرح‌شده از فصل دما و گرما نگاه می‌کنیم، بیشترین تعداد تست، مربوط به مبحث تعادل گرمایی است. این مبحث را با توجه و دقت بیشتری مطالعه کنید.

درس‌نامه

۱) اگر در اثر تبادل گرما و بدون تغییر حالت فقط دمای جسم تغییر کند، گرمای مورد نظر از رابطهٔ زیر حساب می‌شود:

$$Q = m\ c\ \Delta\theta$$

(Q: گرما (J)، m: جرم (kg)، c: گرمای ویژه $(\frac{J}{kg.^\circ C})$، $\Delta\theta$: تغییر دما $(^\circ C)$)

۲) وقتی به جسم جامدی مانند یخ گرما دهیم تا به نقطهٔ ذوب خود برسد، از این پس در اثر گرما در دمای ثابت، شروع به ذوب‌شدن می‌کند. گرمای لازم از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$Q = m L_f$$

(Q: گرما (J)، m: جرم (kg)، L_f: گرمای نهان ویژهٔ ذوب (J/kg))

۳) اگر دو یا چند جسم با دماهای مختلف، در تماس با یکدیگر قرار گیرند، پس از مدتی هم‌دما می‌شوند، یعنی به دمای تعادل می‌رسند. براساس قانون پایستگی انرژی، جمع جبری گرماهای مبادله‌شدهٔ بین این اجسام صفر است.

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 + \ldots = 0$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ تشریحی **گام اول:** پس از تعادل گرمایی، جرم آب ۶ برابر جرم یخ شده است. در حالی که با توجه به گزینه‌ها، جرم آب اولیه به جرم یخ اولیه $(\frac{m_۲}{m_۱})$ کم‌تر از ۶ بوده است؛ بنابراین معلوم می‌شود که مقداری از یخ ذوب شده و می‌توان نوشت:

$$\text{یخ } -۲۰^\circ C \xrightarrow{Q_۱} \text{یخ } ۰^\circ C \xrightarrow{Q'_۱} \text{مخلوط آب و یخ } ۰^\circ C \xleftarrow{Q_۲} \text{آب } ۲۰^\circ C$$

گام دوم: با توجه به پایستگی انرژی، معادلهٔ تعادل گرمایی را می‌نویسیم تا رابطه‌ای بین $m_۱$ و $m_۲$ به دست آوریم:

$$Q_۱ + Q'_۱ + Q_۲ = ۰$$

$$\Rightarrow m_۱c_۱\Delta\theta_۱ + (m_۱ - ۱۰۰)L_f + m_۲c_۲\Delta\theta_۲ = ۰$$

$$\xrightarrow[L_f = ۸۰c_۲]{c_۱ = \frac{۱}{۲}c_۲} m_۱ \times \frac{۱}{۲}c_۲(۰-(-۲۰)) + (m_۱ - ۱۰۰) \times ۸۰c_۲ + m_۲c_۲(۰-۲۰) = ۰$$

$$\Rightarrow ۱۰m_۱ + ۸۰m_۱ - ۸۰۰۰ - ۲۰m_۲ = ۰ \Rightarrow ۹۰m_۱ - ۲۰m_۲ = ۸۰۰۰ \Rightarrow ۹m_۱ - ۲m_۲ = ۸۰۰$$

گام سوم:

با توجه به پایستگی جرم داریم: $m_۱ + m_۲ = ۷۰۰ \Rightarrow ۲m_۱ + ۲m_۲ = ۱۴۰۰$

این رابطه را با رابطهٔ به‌دست‌آمده در گام دوم ترکیب می‌کنیم تا مقادیر $m_۱$ و $m_۲$ را به دست آوریم:

$$\left.\begin{matrix} ۹m_۱ - ۲m_۲ = ۸۰۰ \\ ۲m_۱ + ۲m_۲ = ۱۴۰۰ \end{matrix}\right\} \Rightarrow ۱۱m_۱ = ۲۲۰۰ \Rightarrow m_۱ = ۲۰۰\,g$$

$$\Rightarrow ۲(۲۰۰) + ۲m_۲ = ۱۴۰۰ \Rightarrow ۲m_۲ = ۱۰۰۰ \Rightarrow m_۲ = ۵۰۰\,g$$

بنابراین نسبت $\frac{m_۲}{m_۱}$ به دست می‌آید: $\frac{m_۲}{m_۱} = \frac{۵۰۰}{۲۰۰} = \frac{۵}{۲}$

تست و پاسخ ۷۴

با یک مخزن ۱۵لیتری که با گاز کامل با دمای $۲۷^\circ C$ پر شده و فشار آن $۶/۴\,atm$ است، به نوبت دو کپسول خالی ۵لیتری را تا رسیدن به تعادل پر و جدا می‌کنیم. عددی که فشارسنج متصل به آخرین کپسول پرشده نشان می‌دهد، چند اتمسفر است؟ (فشار هوای محیط $۱\,atm$ و دمای گاز در تمام مراحل ثابت است.)

۱) ۳/۶ ۲) ۳/۸۴ ۳) ۲/۸۴ ۴) ۲/۶

چون دما در تمام مراحل ثابت است، این مقدار در حل تست تأثیری ندارد.

فشارسنج، فشار پیمانه‌ای را نشان می‌دهد.

پاسخ: گزینهٔ ۴

خودت حل کنی بهتره با استفاده از معادلهٔ گازهای کامل، فشارِ گاز را بعد از هر اتصال به مخزن‌های ۵لیتری تا مرحلهٔ سوم به دست آورید. در پایان نیز دقت کنید که فشار مطلق به‌دست‌آمده را باید به فشار پیمانه‌ای تبدیل کنید.

درس نامه با توجه به قانون گازهای آرمانی (کامل)، برای مقایسهٔ دو حالت مختلف از مقدار یعنی گاز کامل می‌توان نوشت:

$$\frac{P_۱V_۱}{T_۱} = \frac{P_۲V_۲}{T_۲}$$

$P_۱$: فشار مطلق گاز در حالت اول — $P_۲$: فشار مطلق گاز در حالت دوم

$V_۱$: حجم گاز در حالت اول — $V_۲$: حجم گاز در حالت دوم

$T_۱$: دمای مطلق گاز در حالت اول — $T_۲$: دمای مطلق گاز در حالت دوم

نکته اگر دمای گاز ثابت بماند، رابطهٔ فوق به شکل ساده‌تری نوشته می‌شود: $P_۱V_۱ = P_۲V_۲$

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

پاسخ تشریحی **گام اول:** فشار اولیهٔ مخزن ۱۵لیتری را P_1 در نظر می‌گیریم. با اتصال کپسول اول به مخزن، حجم کپسول به حجم مخزن اضافه می‌شود و حجم گاز از $V_1 = 15\ L$ به $V_2 = 20\ L$ می‌رسد و داریم:

$$P_1V_1 = P_2V_2 \xrightarrow[V_2=15+5=20L]{P_1=6/4atm,\ V_1=15L} 6/4\times15 = P_2\times20 \Rightarrow P_2 = \frac{6/4\times15}{20} = 4/8\ atm$$

گام دوم: قبل از وصل‌کردن کپسول دوم، فشار گاز درون مخزن $4/8\ atm$ است. پس با اتصال کپسول دوم، فشار گاز به صورت زیر محاسبه می‌شود. در این مرحله هم مثل مرحلهٔ قبل حجم گاز از $15\ L$ به $20\ L$ می‌رسد.

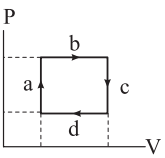
$$P_2V_1 = P_3V_2 \xrightarrow{P_2=4/8atm} 4/8\times15 = P_3\times20 \Rightarrow P_3 = 3/6\ atm$$

گام سوم: فشاری که از قانون گازهای کامل به دست می‌آید، فشار مطلق است، اما فشارسنج، فشار پیمانه‌ای را نشان می‌دهد؛ بنابراین عددی که فشارسنج کپسول نشان می‌دهد (P_{g_2}) از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$P_{g_2} = P_3 - P_0 = 3/6 - 1 = 2/6\ atm$$

تست و پاسخ ۷۵

یک ماشین گرمایی چرخه‌ای به شکل مقابل طی می‌کند. اگر اندازهٔ گرمای مبادله‌شده بین ماشین گرمایی و محیط در فرایندهای a، b، c و d به ترتیب برابر ۵، ۲۰، ۱۰ و ۵ کیلوژول باشد، به ترتیب از راست به چپ، کار انجام‌شده توسط ماشین گرمایی در هر چرخه چند کیلوژول و بازده آن چند درصد است؟



۱) ۱۰، ۴۰ ۲) ۴۰، ۴۰ ۳) ۱۰، ۱۰ ۴) ۴۰، ۱۰

پاسخ: گزینهٔ ۴

مشاوره در این تست، چند مطلب مهم ترمودینامیک به خوبی در ارتباط با هم مطرح شده و یک تست ترکیبی را تشکیل داده‌اند.

خودت حل کنی بهتره ابتدا کل گرمای مبادله‌شده در چرخه را حساب کنید، سپس با استفاده از قانون اول ترمودینامیک، کار انجام‌شده توسط محیط و از روی آن، کار انجام‌شده توسط ماشین گرمایی را به دست آورید. در پایان نیز با جمع‌کردن گرماهای مراحل a و b و داشتن $|W|$، بازده ماشین گرمایی را پیدا کنید.

درس نامه ۱) روی نمودار $P-V$، اگر به سمت بالا یا به سمت راست برویم به دمای بالاتری می‌رسیم؛ یعنی دستگاه (گاز) گرما گرفته و $Q>0$ است، اما اگر به سمت چپ یا به سمت پایین برویم به دمای پایین‌تری می‌رسیم، یعنی دستگاه (گاز) گرما از دست داده و $Q<0$ است.

۲) بنا به قرارداد، کار محیط روی دستگاه را با W و کار دستگاه روی محیط را با W' نشان می‌دهیم. $W' = -W$

۳) قانون اول ترمودینامیک: در یک فرایند ایستاوار، تغییر انرژی درونی دستگاه، برابر است با مجموع کار انجام‌شده توسط محیط روی دستگاه (W) و گرمای مبادله‌شده بین دستگاه و محیط (Q). $\Delta U = Q + W$

ΔU: تغییر انرژی درونی

نکته در یک چرخه، تغییر انرژی درونی دستگاه، برابر با صفر است. $\Delta U = 0$

۴) بازده ماشین گرمایی:

$$\eta = \frac{|W|}{Q_H}$$

η: بازده

$|W|$: کاری که ماشین روی محیط انجام می‌دهد.

Q_H: گرمایی که ماشین از یک منبع با دمای بالا می‌گیرد.

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

پاسخ تشریحی **گام اول:** در فرایندهای a و b، ماشین گرمایی (دستگاه)، گرما دریافت می‌کند.

$Q_a = ۵\ kJ$

$Q_b = ۲۰\ kJ$

اما در فرایندهای c و d، ماشین گرمایی (دستگاه)، گرما از دست می‌دهد.

$Q_c = -۱۰\ kJ$

$Q_d = -۵\ kJ$

اکنون کل گرمای مبادله‌شده در چرخه را به دست می‌آوریم:

$$Q = Q_a + Q_b + Q_c + Q_d = ۵ + ۲۰ + (-۱۰) + (-۵) = ۱۰\ kJ$$

گام دوم: با استفاده از قانون اول ترمودینامیک، کار انجام‌شده توسط محیط را محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta U = Q + W \xrightarrow[Q=۱۰\,kJ]{\Delta U=۰} W = -۱۰\ kJ$$

بنابراین کار انجام‌شده توسط ماشین گرمایی برابر است با:

$$W' = -W = ۱۰\ kJ$$

گام سوم: گرمایی که ماشین گرمایی از منبع با دمای بالا می‌گیرد، مجموع گرماهای مراحل a و b است.

$$Q_H = Q_a + Q_b = ۵ + ۲۰ = ۲۵\ kJ$$

براین اساس، بازده ماشین گرمایی به دست می‌آید:

$$\eta = \frac{|W|}{Q_H} \times ۱۰۰ \xrightarrow[Q_H=۲۵\,kJ]{|W|=۱۰\,kJ} \eta = \frac{۱۰}{۲۵} \times ۱۰۰ = ٪۴۰$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

تست و پاسخ ۷۶

اگر فلز قلیایی M با هالوژن X_2 در شرایط مناسب واکنش دهد، کدام مورد درست است؟ (M و X در جدول تناوبی، هم‌دوره هستند.)

۱) اگر X_2، حتی در دمای $-200^\circ C$ با گاز هیدروژن واکنش دهد، فلز M با از دست دادن یک الکترون به آرایش هشت‌تایی گاز نجیب قبل از خود می‌رسد.

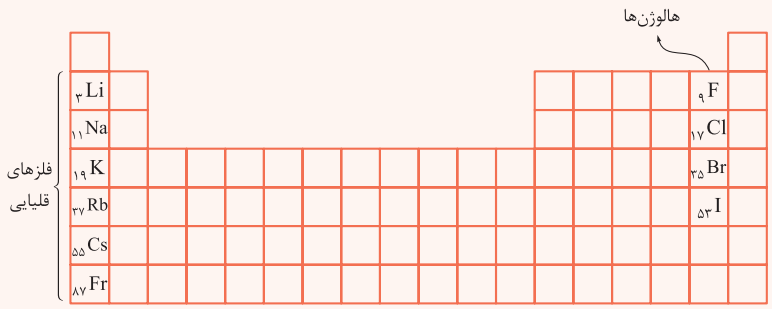
۲) شعاع کاتیون سازندهٔ فراوردهٔ واکنش، از شعاع آنیون سازندهٔ آن بزرگ‌تر است.

۳) اگر X_2 هالوژن مایع جدول دوره‌ای باشد، تفاوت شمار الکترون‌های با $l=0$ و $l=1$ در اتم M، برابر ۴ است.

۴) آنتالپی فروپاشی شبکهٔ بلور فراوردهٔ واکنش، به یقین از آنتالپی فروپاشی شبکهٔ بلور منیزیم اکسید کم‌تر است.

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس‌نامه فلزهای قلیایی در گروه ۱ و هالوژن‌ها در گروه ۱۷ جدول تناوبی قرار دارند:



- فلزهای قلیایی با از دست دادن یک الکترون و تشکیل کاتیون یک‌بار مثبت (M^+)، به آرایش گاز نجیب قبل از خود می‌رسند.
- هالوژن‌ها با گرفتن یک الکترون و تشکیل آنیون یک‌بار منفی (X^-)، به آرایش گاز نجیب بعد از خود (هم‌دوره) می‌رسند.
- در دما و فشار اتاق، هالوژن‌ها به شکل مولکول‌های دو اتمی (X_2) یافت می‌شوند:

$$\underbrace{F_2}_{\text{گاز}} - Cl_2 - \underbrace{Br_2}_{\text{مایع}} - \underbrace{I_2}_{\text{جامد}}$$

- از واکنش فلزهای قلیایی با هالوژن‌ها، ترکیب یونی تولید می‌شود:

$$2M + X_2 \rightarrow 2MX$$

- در گروه فلزهای قلیایی از بالا به پایین، واکنش‌پذیری عناصر افزایش می‌یابد.
- در گروه هالوژن‌ها، از بالا به پایین، واکنش‌پذیری عناصر کاهش یافته، به‌طوری‌که دمای لازم برای انجام واکنش آن‌ها با گاز هیدروژن، افزایش می‌یابد.

نام هالوژن	شرایط واکنش با گاز هیدروژن
فلوئور	حتی در دمای $-200^\circ C$ به سرعت واکنش می‌دهد.
کلر	در دمای اتاق به آرامی واکنش می‌دهد.
برم	در دمای $200^\circ C$ واکنش می‌دهد.
ید	در دمای بالاتر از $400^\circ C$ واکنش می‌دهد.

پاسخ تشریحی بررسی گزینه‌ها:

۱) در میان هالوژن‌ها، فقط F_2 است که در دمای $-200^\circ C$، با گاز هیدروژن واکنش می‌دهد. فلز قلیایی هم‌دورهٔ فلوئور $(_9F)$، لیتیم $(_3Li)$ است. لیتیم برخلاف سایر فلزهای قلیایی به آرایش دوتایی (گاز نجیب هلیم) می‌رسد و نه هشت‌تایی!

$$_3Li : 1s^2 2s^1 \Rightarrow {}_3Li^+ : 1s^2 = [{}_2He]$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲) فراوردهٔ واکنش، یک ترکیب یونی با فرمول شیمیایی MX است. با توجه به این‌که دو عنصر M و X، هم‌دوره هستند، شعاع M^+ قطعاً از شعاع X^- کوچک‌تر است، زیرا M^+ یک لایهٔ الکترونی کم‌تر از X^- دارد. مثال:

شعاع یونی: $_{11}Na^+ < {}_{17}Cl^-$

۳) هالوژن مایع جدول دوره‌ای، همان برم ($_{35}Br$) است که در دورهٔ چهارم قرار دارد. فلز قلیایی دورهٔ چهارم، پتاسیم ($_{19}K$) است. در آرایش الکترونی این اتم، ۷ الکترون با $l=0$ (زیرلایه‌های s) و ۱۲ الکترون با $l=1$ (زیرلایه‌های p) وجود دارد:

$$_{19}K: 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^1$$

تفاوت شمار الکترون‌های با $l=0$ و $l=1$ $= 12-7=5$

۴) آنتالپی فروپاشی شبکهٔ بلور MX از MgO کم‌تر است، زیرا مجموع قدرمطلق بار یون‌ها در آن کم‌تر است:

$MX \Rightarrow M^+, X^-$ ⇒ مجموع قدرمطلق بار یون‌ها $= 1+1=2$

$MgO \Rightarrow Mg^{2+}, O^{2-}$ ⇒ مجموع قدرمطلق بار یون‌ها $= 2+2=4$

نکته آنتالپی فروپاشی شبکهٔ بلور ترکیب‌های یونی، با بار یون‌ها رابطهٔ مستقیم و با شعاع آن‌ها رابطهٔ وارونه دارد.

به طور کلی برای مقایسهٔ ΔH فروپاشی شبکهٔ ترکیب‌های یونی می‌توان از روش کنکوری زیر استفاده کرد:

گام اول: هر چه مجموع قدرمطلق بار یک کاتیون و یک آنیون در یک ترکیب یونی بزرگ‌تر باشد، ΔH فروپاشی شبکهٔ آن، بزرگ‌تر است.

گام دوم: اگر مجموع قدرمطلق بار یک کاتیون و یک آنیون برای دو ترکیب یونی برابر باشد، شعاع یون‌های سازندهٔ آن‌ها را با هم مقایسه می‌کنیم؛ هر چه شعاع یون‌ها کوچک‌تر باشد، ΔH فروپاشی بزرگ‌تر است.

تست و پاسخ ۷۷

با توجه به جدول زیر که شمار الکترون‌های لایهٔ سوم و چهارم چند گونه را در حالت پایه نشان می‌دهد، چند مورد از مطالب داده‌شده درست است؟

اتم یا یون پایدار	M	Y	X	Z
شمار الکترون لایهٔ سوم	۱۳	۱۶	۱۸	۱۷
شمار الکترون لایهٔ چهارم	۱	۲	۷	۰

- آرایش الکترونی M از قاعدهٔ آفبا پیروی نمی‌کند.
- در دمای اتاق، حالت فیزیکی X و Y متفاوت است.
- گونهٔ Z به یقین یک کاتیون دو بار مثبت است.
- عدد اتمی Y، دو برابر عدد اتمی گاز نجیب دورهٔ سوم جدول تناوبی است.
- شمار الکترون‌های ظرفیتی M، با شمار این الکترون‌ها در عنصر $_{16}A$ برابر است.

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ تشریحی به‌جز عبارت چهارم، بقیهٔ عبارت‌ها درست‌اند.

ابتدا باید با توجه به شمار الکترون‌های لایهٔ سوم و چهارم گونه‌های جدول، آرایش الکترونی آن‌ها را رسم کنیم:

$$M\begin{cases} n=3(13e^-) \Rightarrow 3s^2 3p^6 3d^5 \\ n=4(1e^-) \Rightarrow 4s^1 \end{cases} \Rightarrow M: [_{18}Ar]3d^5 4s^1 \Rightarrow$$ M همان عنصر کروم ($_{24}Cr$) است.

$$Y\begin{cases} n=3(16e^-) \Rightarrow 3s^2 3p^6 3d^8 \\ n=4(2e^-) \Rightarrow 4s^2 \end{cases} \Rightarrow Y: [_{18}Ar]3d^8 4s^2 \Rightarrow$$ Y همان عنصر نیکل ($_{28}Ni$) است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

$$X\begin{cases} n=3(18e^-)\Rightarrow 3s^2 3p^6 3d^{10} \\ n=4(7e^-)\Rightarrow 4s^2 4p^5 \end{cases} \Rightarrow X:[_{18}Ar]3d^{10}4s^2 4p^5 \Rightarrow$$ X همان عنصر برم $(_{35}Br)$ است.

$$Z\begin{cases} n=3(17e^-)\Rightarrow 3s^2 3p^6 3d^9 \\ n=4(0\,e^-) \end{cases}$$

با توجه به این‌که در گونهٔ Z، زیرلایهٔ 3d وجود دارد اما زیرلایهٔ 4s وجود ندارد، این گونه قطعاً یک کاتیون است. در بین یون‌های پایدار، فقط آرایش Cu^{2+} به $3d^9$ ختم می‌شود:

$$_{29}Cu:[_{18}Ar]3d^{10}4s^1 \Rightarrow {}_{29}Cu^{2+}:[_{18}Ar]3d^9 \Rightarrow$$ Z همان یون Cu^{2+} است.

بررسی عبارت‌ها:

- M همان کروم $(_{24}Cr)$ است که آرایش الکترونی آن از قاعدهٔ آفبا پیروی نمی‌کند.

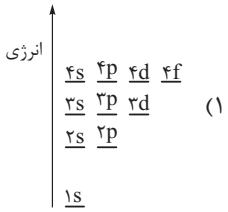
$$_{24}Cr \Rightarrow \begin{cases} \text{آرایش الکترونی موردانتظار}: [_{18}Ar]3d^4 4s^2 \\ \text{آرایش الکترونی واقعی}: [_{18}Ar]3d^5 4s^1 \end{cases}$$

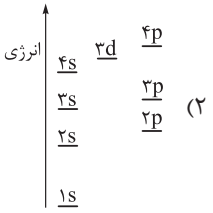
- X و Y به ترتیب نافلز برم و فلز نیکل هستند. در دمای اتاق، برم به حالت مایع و نیکل به حالت جامد است.
- *دیدیم که* Z همان $_{29}Cu^{2+}$ است.
- عدد اتمی Y برابر ۲۸ و عدد اتمی گاز نجیب دورهٔ سوم $(_{18}Ar)$ برابر ۱۸ است. *مشخصه که* ۲۸ دو برابر ۱۸ نیست!
- هر دو عنصر $_{24}M$ و $_{16}A$، ۶ الکترون ظرفیتی دارند:

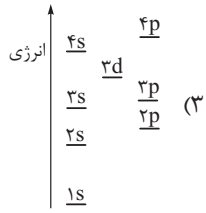
$$_{24}M:[_{18}Ar]\underbrace{3d^5 4s^1}_{\text{۶الکترون ظرفیتی}} \quad \text{و} \quad {}_{16}A:[_{10}Ne]\underbrace{3s^2 3p^4}_{\text{۶الکترون ظرفیتی}}$$

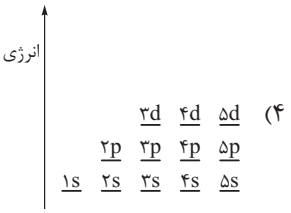
تست و پاسخ ۷۸

کدام نمودار، سطح انرژی زیرلایه‌های الکترونی در اتم‌های مختلف (قبل از اشغال‌شدن از الکترون) را به درستی نشان می‌دهد؟

۱)


۲)


۳)


۴)


پاسخ: گزینهٔ ۲

درس‌نامه

ترتیب پرشدن زیرلایه‌های یک اتم، با **قاعدهٔ آفبا** بیان می‌شود. آفبا واژه‌ای آلمانی به معنای ساختن یا افزایش گام‌به‌گام است. بر طبق این قاعده، الکترون‌ها تمایل دارند، ابتدا زیرلایه‌هایی را پر کنند که انرژی کم‌تری دارند.

انرژی زیرلایه‌ها به مجموع عدد کوانتومی اصلی و فرعی $(n+l)$ وابسته است.

- هر چه مقدار $(n+l)$ برای زیرلایه‌ای کوچک‌تر باشد، این زیرلایه، انرژی کم‌تری دارد و زودتر از الکترون پر می‌شود.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

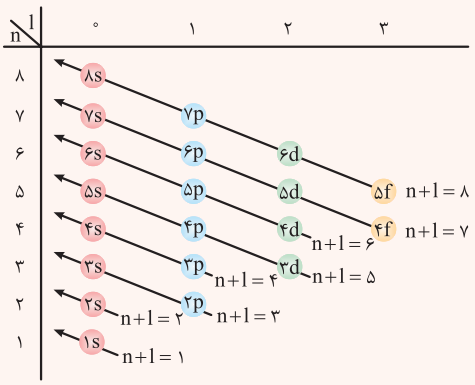
مثال: ۴s زودتر از ۳d الکترون می‌پذیرد؛ زیرا $(n+l)$ برای آن کوچک‌تر است.

	n	l	n+l
۴s	۴	۰	۴
۳d	۳	۲	۵

- اگر مقدار $(n+l)$ برای دو زیرلایه یکسان باشد، زیرلایه‌ای که n آن کوچک‌تر است، انرژی کم‌تری دارد و زودتر از الکترون پر می‌شود.

مثال: ۴p زودتر از ۵s الکترون می‌پذیرد. $(n+l)$ برای هر دو زیرلایه برابر ۵ است، اما چون ۴p، n کم‌تری دارد، زودتر از الکترون اشغال می‌شود.

	n	l	n+l
۴p	۴	۱	۵
۵s	۵	۰	۵



نکته! اگه از قواعد گفته‌شده استفاده کنیم، نتیجه می‌گیریم که ترتیب پرشدن زیرلایه‌ها *این‌طوریاست*:

ترتیب پرشدن زیرلایه‌ها : ۱s ۲s ۲p ۳s ۳p ۴s ۳d ۴p ۵s ۴d ۵p ۶s ۴f ۵d ۶p ۷s ۵f ۶d ۷p ۸s

پاسخ تشریحی با توجه به این‌که انرژی زیرلایهٔ ۱s، کم‌تر از همهٔ زیرلایه‌ها و انرژی زیرلایهٔ ۴s، کم‌تر از ۳d است، می‌توان نتیجه گرفت که ۲ درست است.

تست و پاسخ ۷۹

درستی یا نادرستی کدام گزینه با دیگر گزینه‌ها، متفاوت است؟

۱) درصد حجمی گاز هلیم در نمونه‌ای از هوا با دمای $25^\circ C$ و فشار ۱atm، بیشتر از درصد حجمی آن در نمونه‌ای از هوا با دمای $-90^\circ C$ و فشار ۱atm است.

۲) فراوان‌ترین گاز نجیب هواکره، حدود ۷ درصد حجمی از مخلوط گاز طبیعی را نیز تشکیل داده است.

۳) نام سولفاتی از آهن که شمار اتم‌ها در فرمول شیمیایی آن با شمار اتم‌های دی‌نیتروژن تتراکسید برابر است، آهن (II) سولفات می‌باشد.

۴) نام ترکیب‌های CO، CuO، ClO_2 و CrO_2 به ترتیب کربن مونوکسید، مس (II) اکسید، کلر دی‌اکسید و کروم (II) اکسید است.

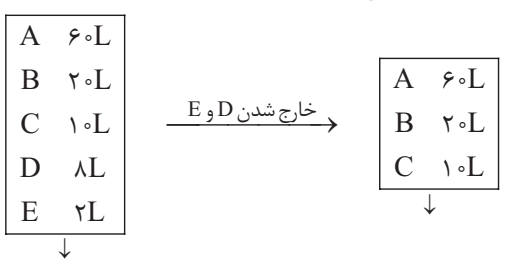
پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ تشریحی ۳ برخلاف سایر گزینه‌ها، درست است.

بررسی گزینه‌ها:

۱ در دمای $25^\circ C$، همهٔ اجزای سازندهٔ هوا به حالت گازند؛ اما در دمای $0^\circ C$، رطوبت و در دمای $-78^\circ C$، کربن دی‌اکسید به شکل جامد از مخلوط خارج می‌شود؛ بنابراین در دمای $-90^\circ C$، رطوبت و کربن دی‌اکسید در هوا وجود ندارند و درصد حجمی سایر اجزای گازی بیشتر از درصد حجمی آن‌ها در نمونه‌ای هوا با دمای $25^\circ C$ است.

برای این‌که بهتر متوجه بشین، شکل مقابل رو ببینید:



$$\text{درصد حجمی A} = \frac{۶۰}{۹۰} \times ۱۰۰ \simeq ٪۶۶/۶۷$$

$$\text{درصد حجمی A} = \frac{۶۰}{۱۰۰} \times ۱۰۰ = ٪۶۰$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲) فراوان‌ترین گاز نجیب هواکره، آرگون (Ar) است؛ در حالی‌که هلیم (He)، حدود ۷ درصد حجمی از مخلوط گاز طبیعی را تشکیل می‌دهد.

نکته مقایسهٔ درصد حجمی ۸ گاز مهم هواکره *این‌طوریاست*:

$$N_2 > O_2 > \underbrace{Ar}_{\text{گاز نجیب}} > CO_2 > \underbrace{Ne > He > Kr > Xe}_{\text{گاز نجیب}}$$: مقایسهٔ درصد حجمی گازهای تشکیل‌دهندهٔ هوای خشک و پاک در لایهٔ تروپوسفر

۳) فرمول مولکولی دی‌نیتروژن تتراکسید به صورت N_2O_4 بوده و این ترکیب دارای ۶ اتم است. همچنین فلز آهن دارای دو نوع کاتیون Fe^{2+} و Fe^{3+} بوده و فرمول‌های شیمیایی سولفات آن به صورت زیر است:

آهن (II) سولفات : $Fe^{2+}SO_4^{2-} \Rightarrow FeSO_4 \Rightarrow$ ۶ اتم

آهن (III) سولفات : $Fe^{3+}SO_4^{2-} \Rightarrow Fe_2(SO_4)_3 \Rightarrow$ ۱۷ اتم

۴) همهٔ فرمول‌های شیمیایی و نام‌ها با هم تطابق دارند به جز CrO_2! فرمول کروم (II) اکسید به صورت CrO است و نه CrO_2!

تست و پاسخ ۸۰

داده‌های چند ردیف جدول زیر، همگی درست‌اند؟ (p.e شمار جفت‌الکترون‌های پیوندی و n.e شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی را نشان می‌دهد.)

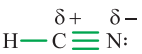
ردیف	ویژگی / نام ماده	$\frac{p.e}{n.e}$	جهت‌گیری در میدان الکتریکی	فرمول شیمیایی	بار جزئی اتمی با شعاع بزرگ‌تر
۱	هیدروژن سیانید	۴	دارد	HCN	$\delta-$
۲	گوگرد دی‌کلرید	۰/۲۵	ندارد	SCl_2	$\delta-$
۳	کلروفرم	۱	دارد	CH_2Cl_2	$\delta-$
۴	کربونیل سولفید	۱	دارد	SCo	$\delta+$

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

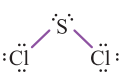
پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ تشریحی در هیچ‌یک از ردیف‌های جدول، همهٔ داده‌ها درست نیستند. حالا *یکی یکی* همهٔ ردیف‌ها رو بررسی کنیم.

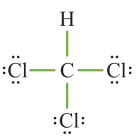
ردیف ۱) در هیدروژن سیانید (HCN)، شعاع اتمی کربن از دو عنصر دیگر بزرگ‌تر است، اما خصلت نافلزی کربن از نیتروژن کم‌تر است؛ در نتیجه بار جزئی آن، مثبت ($\delta+$) است:



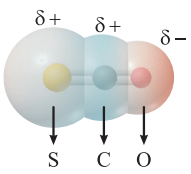
ردیف ۲) گوگرد دی‌کلرید (SCl_2)، به دلیل داشتن جفت‌الکترون ناپیوندی روی اتم مرکزی، مولکولی قطبی به حساب می‌آید و در میدان الکتریکی جهت‌گیری می‌کند. در ضمن بین گوگرد ($_{16}S$) و کلر ($_{17}Cl$)، شعاع گوگرد بزرگ‌تر، اما خصلت نافلزی کلر بیشتر است؛ بنابراین در این مولکول، بار جزئی گوگرد، مثبت ($\delta+$) می‌باشد.



ردیف ۳) فرمول شیمیایی کلروفرم به صورت $CHCl_3$ است. همچنین $\frac{p.e}{n.e}$ برای آن $\frac{۴}{۹}$ است.



ردیف ۴) فرمول شیمیایی کربونیل سولفید به صورت SCO است (حرف O باید به صورت بزرگ نوشته شود.) توجه کنید که در این مولکول، گوگرد بزرگ‌ترین شعاع اتمی را دارد و با توجه به این‌که خاصیت نافلزی S و C تفاوت چندانی با یکدیگر ندارند، تراکم بار الکتریکی روی این دو اتم تقریباً یکسان است.



SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

تست و پاسخ ۸۱

۱۸۰ گرم مس (I) اکسید مطابق واکنش‌های زیر مصرف می‌شود. اگر طی این فرایند ۹ گرم بخار آب تولید شده باشد، جرم نمونهٔ جامد چند گرم تغییر می‌کند؟ $(Cu=64, O=16, H=1: g.mol^{-1})$

(معادلهٔ واکنش‌ها موازنه شود.)

I) $Cu_2O(s)+O_2(g)\rightarrow CuO(s)$

II) $Cu_2O(s)+H_2(g)\rightarrow Cu(s)+H_2O(g)$

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۱۲

پاسخ: گزینهٔ ۲

خودت حل کنی بهتره با توجه به جرم H_2O تولیدی، جرم Cu_2O مصرف‌شده در هر یک از واکنش‌ها رو به دست بیار! در واکنش اول، جرم نمونهٔ جامد (به دلیل جذب O_2) افزایش و در واکنش دوم، جرم آن (به دلیل خروج O)، کاهش یافته است. برای محاسبهٔ تغییر جرم نمونه، هر دوی این موارد رو باید به کمک جرم Cu_2O مصرف‌شده در هر واکنش، به دست بیاری!

پاسخ تشریحی **گام اول:** معادلهٔ واکنش‌ها را موازنه می‌کنیم:

I) $2Cu_2O(s)+O_2(g)\rightarrow 4CuO(s)$

II) $Cu_2O(s)+H_2(g)\rightarrow 2Cu(s)+H_2O(g)$

گام دوم: به کمک جرم H_2O تولیدشده در واکنش (II) و جرم کل Cu_2O، جرم Cu_2O مصرف‌شده در هر واکنش را حساب می‌کنیم.

$$Cu_2O: 9g\,H_2O\times\frac{1mol\,H_2O}{18g\,H_2O}\times\frac{1mol\,Cu_2O}{1mol\,H_2O}\times\frac{144g\,Cu_2O}{1mol\,Cu_2O}=72g\,Cu_2O$$ مصرف‌شده در واکنش (II)

$Cu_2O=Cu_2O$ مصرف‌شده در واکنش (I) $=180-72=108g$ جرم کل $-$ (II) مصرف‌شده در واکنش Cu_2O جرم

گام سوم: به کمک جرم Cu_2O مصرف‌شده در هر واکنش، تغییر جرم نمونه را حساب می‌کنیم.

در واکنش (I)، جرم Cu_2O به دلیل جذب O_2 افزایش می‌یابد:

جرم O_2 جذب‌شده = افزایش جرم نمونهٔ جامد در واکنش (I)

$$108g\,Cu_2O\times\frac{1mol\,Cu_2O}{144g\,Cu_2O}\times\frac{1mol\,O_2}{2mol\,Cu_2O}\times\frac{32g\,O_2}{1mol\,O_2}=12g\,O_2$$

در واکنش (II)، اگر ۱ مول $(144g)$ Cu_2O مصرف شود، ۲ مول Cu $(2\times64=128g)$ تولید می‌شود؛ بنابراین کاهش جرم نمونه به ازای ۱۴۴ گرم Cu_2O، برابر $144-128=16$ گرم است؛ پس به ازای ۷۲ گرم Cu_2O خواهیم داشت:

$$72g\,Cu_2O\times\frac{\text{کاهش جرم}\ 16g}{144g\,Cu_2O}=8g$$: کاهش جرم نمونهٔ جامد در واکنش (II)

با انجام واکنش (I)، جرم نمونه $12g$ افزایش و با انجام واکنش (II)، جرم نمونه $8g$ کاهش یافته است؛ بنابراین در مجموع جرم نمونه، $12-8=4$ گرم افزایش خواهد یافت.

تست و پاسخ ۸۲

چند مورد از مطالب زیر، درست است؟ $(H=1, O=16: g.mol^{-1})$

- **غلظت یون هیدروکسید در آب خالص در دمای اتاق، به تقریب برابر $0/00017ppm$ است.**
- **در صنعت برای تولید نوشابهٔ گازدار، ابتدا نوشابه را گرم می‌کنند، سپس گاز کربن دی‌اکسید به آن اضافه می‌کنند.**
- **هر چند جرم مولی و گشتاور دو قطبی H_2S از H_2O بیشتر است، اما آب به دلیل توانایی تشکیل پیوندهای هیدروژنی، نقطهٔ جوش بالاتری دارد.**
- **با توجه به معادلهٔ انحلال‌پذیری نمک A برحسب دما $(S=0/2\theta+20)$، درصد جرمی محلول سیرشدهٔ این نمک در دمای $25^\circ C$، برابر ٪۲۰ است.**

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

پاسخ: گزینهٔ ۳

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ تشریحی عبارت‌های اول و چهارم درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

- می‌دانیم که غلظت یون هیدروکسید (OH^-) در آب خالص در دمای اتاق برابر $10^{-7}\,mol.L^{-1}$ است؛ حالا باید غلظت 10^{-7} مولار را به غلظت ppm تبدیل کنیم:

$$\text{حجم آب} = 1L = 1000mL \xrightarrow{d=1g.mL^{-1}} \text{جرم آب} = 1000g$$

$$\text{جرم } OH^-: 10^{-7}mol \times \frac{17g}{1mol} = 17\times10^{-7}g$$

$$ppm(OH^-) = \frac{\text{جرم } OH^-}{\text{جرم آب}} \times 10^6 = \frac{17\times10^{-7}}{1000}\times10^6 = 17\times10^{-4} = 1/7\times10^{-3} = 0/0017ppm$$

- با افزایش دما، انحلال‌پذیری گازها در آب کاهش می‌یابد؛ پس *دلیلی ندارد* که نوشابه را گرم کنند. برای تولید نوشابه‌های گازدار، از افزایش فشار استفاده می‌شود، زیرا با افزایش فشار، انحلال‌پذیری گازها در آب افزایش می‌یابد.
- با توجه به متن کتاب درسی، گشتاور دوقطبی هیدروژن سولفید (H_2S) از آب (H_2O) کم‌تر است.
- ابتدا انحلال‌پذیری نمک را در دمای $25^\circ C$ حساب می‌کنیم:

$$S = 0/2\theta + 20 = 0/2(25) + 20 = 25 \quad \text{(در ۱۰۰ گرم آب)}$$

$$\text{درصد جرمی محلول سیرشده} = \frac{\text{جرم نمک}}{\text{جرم محلول سیر شده}}\times100 = \frac{25}{25+100}\times100 = \frac{1}{5}\times100 = \%20$$

تست و پاسخ ۸۳

a میلی‌لیتر محلول ۰/۸ مولار سدیم هیدروکسید را با ۱/۵a میلی‌لیتر محلول پتاسیم هیدروکسید ۱۴ درصد جرمی $(d = 1/12g.mL^{-1})$ مخلوط می‌کنیم. غلظت یون هیدروکسید در محلول حاصل برحسب مول بر لیتر کدام است و ۱۰۰ میلی‌لیتر از این محلول به تقریب با چند گرم محلول سیرشدهٔ H_2S به‌طور کامل واکنش می‌دهد؟ (انحلال‌پذیری گاز H_2S در شرایط واکنش برابر ۰/۲۵ گرم در ۱۰۰ گرم آب است.)

$$(H = 1, O = 16, S = 32, K = 39 : g.mol^{-1})$$

$$2MOH(aq) + H_2S(aq) \rightarrow M_2S(aq) + 2H_2O(l)$$

۱) ۲-۶۸۰ ۲) ۲-۱۳۶۰ ۳) ۱/۸-۶۸۰ ۴) ۱/۸-۱۳۶۰

پاسخ: گزینهٔ ۲

نکته ۱) اگر درصد جرمی محلولی برابر a و چگالی آن برحسب $g.mL^{-1}$ برابر d باشد، غلظت مولی آن محلول (M) از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$M = \frac{10ad}{\text{جرم مولی}}$$

۲) اگر دو یا چند محلول هم‌جنس را با هم مخلوط کنیم، غلظت مولی محلول نهایی از رابطهٔ زیر به دست می‌آید. (V_1، V_2 و ... حجم محلول‌ها هستند)

$$M_{\text{نهایی}} = \frac{M_1V_1 + M_2V_2 + \ldots}{V_1 + V_2 + \ldots}$$

پاسخ تشریحی در محلول‌های سدیم هیدروکسید (NaOH) و پتاسیم هیدروکسید (KOH)، غلظت یون هیدروکسید (OH^-) با غلظت خود محلول برابر است؛ بنابراین خواهیم داشت:

$$\text{غلظت مولی یون } OH^- \text{ در محلول NaOH} = 0/8\,mol.L^{-1}$$

$$\text{غلظت مولی یون } OH^- \text{ در محلول KOH} = \text{غلظت مولی KOH} = \frac{10ad}{\text{جرم مولی}} = \frac{10\times14\times1/12}{56} = 2/8\,mol.L^{-1}$$

a میلی‌لیتر محلول ۰/۸ مولار یون OH^- و ۱/۵a میلی‌لیتر محلول ۲/۸ مولار یون OH^- را با هم مخلوط کرده‌ایم؛ بنابراین غلظت یون OH^- در محلول نهایی برابر است با:

$$M_{\text{نهایی}} = \frac{M_1V_1 + M_2V_2}{V_1 + V_2} = \frac{0/8a + 2/8(1/5a)}{a + 1/5a} = \frac{0/8 + 4/2}{2/5} = \frac{5}{2/5} = 2\,mol.L^{-1}$$

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

برای قسمت دوم سؤال، ابتدا باید به کمک معادلهٔ واکنش، حساب کنیم که ۱۰۰ میلی‌لیتر محلول ۲ مولار OH^- (یا همان MOH) با چند گرم H_2S واکنش می‌دهد:

$$2MOH + H_2S \rightarrow M_2S + 2H_2O$$

$$\underbrace{\frac{\text{حجم(L)} \times \text{غلظت مولی}}{\text{ضریب}}}_{MOH} = \underbrace{\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}}_{H_2S} \Rightarrow \frac{2 \times 0/1}{2} = \frac{x}{1 \times 34} \Rightarrow x = 3/4\,g\,H_2S$$

حالا به کمک انحلال‌پذیری، جرم H_2S را به جرم محلول سیرشدهٔ آن تبدیل می‌کنیم:

(به ازای ۱۰۰ گرم آب) $S = 0/25g \Rightarrow$ جرم محلول سیرشده $= 100 + 0/25 = 100/25\,g$

$$3/4\,g\,H_2S \times \frac{\text{محلول سیرشده } 100/25g}{0/25g\,H_2S} = 3/4 \times 100/25 \times 4 \simeq 3/4 \times 400 = 1360\,g \text{ محلول سیرشده}$$

تست و پاسخ ۸۴

مطابق واکنش زیر، با مصرف ۴ گرم از مادهٔ X_2 با خلوص ۸۰٪، ۲/۰۶ گرم NaX تولید می‌شود. نسبت جرم مولی X_2 به سود سوزآور کدام است و طی این فرایند چند گرم آب تولید می‌شود؟ (معادلهٔ واکنش موازنه شود.)

$(H = 1, O = 16, Na = 23 : g.mol^{-1})$

$NaOH + X_2 \rightarrow NaX + NaXO + H_2O$

۱) ۰/۳۶ - ۱/۷۷۵ ۲) ۰/۸ - ۱/۷۷۵ ۳) ۰/۳۶ - ۴ ۴) ۰/۸ - ۴

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ تشریحی معادلهٔ موازنه‌شدهٔ واکنش به صورت زیر است:

$$2NaOH + X_2 \rightarrow NaX + NaXO + H_2O$$

به کمک جرم X_2 مصرف‌شده و جرم NaX تولیدشده، می‌توان جرم مولی X را حساب کرد:

$$\underbrace{\frac{\text{درصد خلوص}}{100} \times \text{جرم ناخالص}}_{X_2} = \underbrace{\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}}_{NaX}$$

اگر جرم مولی X را a گرم بر مول در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$\frac{4 \times \frac{80}{100}}{1 \times 2a} = \frac{2/06}{1 \times (23 + a)} \Rightarrow 20/6a = 16(23 + a) \Rightarrow 10/3a - 8a = 184 \Rightarrow a = \frac{184}{2/3} = 80\,g.mol^{-1}$$

$$\frac{\text{جرم مولی } X_2}{\text{جرم مولی NaOH}} = \frac{2 \times 80}{40} = 4$$

برای محاسبهٔ جرم آب تولیدشده، می‌توان از جرم X_2 یا NaX استفاده کرد:

$$\underbrace{\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}}_{NaX} = \underbrace{\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}}_{H_2O} \Rightarrow \frac{2/06}{1 \times 103} = \frac{x}{1 \times 18} \Rightarrow x = 0/36\,g\,H_2O$$

تست و پاسخ ۸۵

چند مورد از مطالب زیر، درست است؟

- **در بین عنصرهای اصلی دوره‌های سوم و چهارم جدول تناوبی، در مجموع ۵ عنصر وجود دارند که دارای رسانایی الکتریکی هستند و هم‌چنین در اثر ضربه تغییر شکل می‌دهند.**
- **در دوره‌های مختلف جدول تناوبی (به‌جز دورهٔ اول)، شمار عنصرهای فلزی بیشتر از شمار عنصرهای نافلزی و شبه‌فلزی است.**
- **در بین عناصر دورهٔ سوم، ۴ عنصر دارای سطح براق هستند و قوی‌ترین عنصر نافلز در این دوره، دارای ۵ الکترون با مجموع اعداد کوانتومی اصلی و فرعی برابر ۵، در لایهٔ ظرفیت خود است.**
- **شعاع اتمی نافلزهای هم‌دوره با یک شبه‌فلز، کم‌تر از عنصر شبه‌فلز است.**
- **برای استخراج مس از سنگ معدن آن (Cu_2S) می‌توان از اکسیژن و برای استخراج آهن از سنگ معدن آن (Fe_2O_3)، می‌توان از گاز کربن مونوکسید استفاده کرد.**

۱) ۵ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۲

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ تشریحی عبارت‌های چهارم و پنجم درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

- عنصرهایی که دارای رسانایی الکتریکی هستند و هم‌چنین در اثر ضربه تغییر شکل می‌دهند (چکش‌خوارند)، همان فلزها هستند. در بین عنصرهای اصلی (دستهٔ s و p) دوره‌های سوم و چهارم، در مجموع ۶ عنصر فلزی وجود دارد: ${}_{11}Na$، ${}_{12}Mg$ و ${}_{13}Al$ از دورهٔ سوم و ${}_{19}K$، ${}_{20}Ca$ و ${}_{31}Ga$ از دورهٔ چهارم!
- در دوره‌های دوم و سوم، شمار عنصرهای نافلزی از شمار عنصرهای فلزی و شبه‌فلزی بیشتر است:

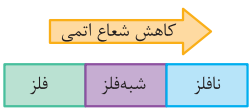
دورهٔ دوم: $\underbrace{Li, Be}_{\text{فلز}}, \underbrace{B}_{\text{شبه‌فلز}}, \underbrace{C, N, O, F, Ne}_{\text{نافلز}}$

دورهٔ سوم: $\underbrace{Na, Mg, Al}_{\text{فلز}}, \underbrace{Si}_{\text{شبه‌فلز}}, \underbrace{P, S, Cl, Ar}_{\text{نافلز}}$

- عنصرهای فلزی و شبه‌فلزی دورهٔ سوم دارای سطح براق هستند؛ یعنی ۴ عنصر Na، Mg، Al و Si! در یک دوره از چپ به راست، خصلت نافلزی افزایش می‌یابد؛ بنابراین قوی‌ترین نافلز دورهٔ سوم، ${}_{17}Cl$ است:

${}_{17}Cl : [{}_{10}Ne]\ \underbrace{3s^2}_{n+l=3}\ \underbrace{3p^5}_{n+l=4} \Rightarrow$ الکترون با $n+l=5$ ندارد.

- در یک دوره، عنصرهای نافلزی سمت راست عنصرهای شبه‌فلزی قرار دارند؛ با توجه به این‌که در یک دوره از چپ به راست، شعاع اتمی کاهش می‌یابد، شعاع اتمی نافلزهای یک دوره، کم‌تر از شعاع اتمی شبه‌فلزهای همان دوره است.



- معادلهٔ واکنش استخراج Cu از Cu_2S به کمک اکسیژن و معادلهٔ واکنش استخراج Fe از Fe_2O_3 به کمک کربن مونوکسید، در کتاب درسی آمده است:

$$Cu_2S + O_2 \rightarrow 2Cu + SO_2$$

$$Fe_2O_3 + 3CO \rightarrow 2Fe + 3CO_2$$

تست و پاسخ ۸۶

براساس واکنش زیر، اگر ۲ لیتر محلول ۱/۵ مولار هیدروژن پراکسید مصرف شود و ۸/۴۴ لیتر گاز اکسیژن در شرایط STP تولید شود، بازده واکنش چند درصد است؟ (معادلهٔ واکنش موازنه شود.)

$$MnO_4^-(s) + H_2O_2(aq) + H^+(aq) \rightarrow O_2(g) + Mn^{2+}(aq) + H_2O(l)$$

۱) ۳۳/۳ ۲) ۵۰ ۳) ۶۶/۶ ۴) ۷۵

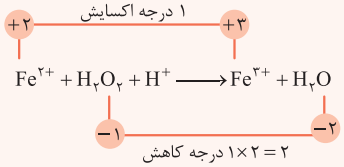
پاسخ: گزینهٔ ۳

درس‌نامه موازنهٔ واکنش‌ها به روش اکسایش ـ کاهش

به طور کلی برای موازنهٔ واکنش‌های اکسایش ـ کاهش، ابتدا تغییر عدد اکسایش اتم‌ها را حساب می‌کنیم، سپس مقدار تغییر عدد اکسایش گونهٔ کاهنده را ضریب گونهٔ اکسنده و مقدار تغییر عدد اکسایش گونهٔ اکسنده را ضریب کاهنده قرار می‌دهیم و در آخر، با توجه به ضرایبی که معلوم هستند، ضرایب بقیهٔ گونه‌ها را تعیین می‌کنیم. *هواستون باشه* که اگر عنصری که عدد اکسایش آن تغییر کرده است، دارای زیروند باشد، باید تغییر عدد اکسایش آن را در زیروندش ضرب کنیم و سپس جابه‌جایی تغییر عدد اکسایش‌ها را انجام بدهیم.

مثال: در این واکنش، عدد اکسایش آهن و اکسیژن تغییر کرده است:

$$Fe^{2+} + H_2O_2 + H^+ \rightarrow Fe^{3+} + H_2O$$



SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

چون در سمت چپ معادله، ۲ اتم اکسیژن در H_2O_2 داشتیم، تغییر عدد اکسایش آن را در ۲ ضرب کردیم. حالا عدد ۲ (تغییر عدد اکسایش O) را ضریب Fe^{2+} و عدد ۱ (تغییر عدد اکسایش Fe) را ضریب H_2O_2 قرار می‌دهیم:

$$2Fe^{2+} + 1H_2O_2 + \_H^+ \rightarrow \_Fe^{3+} + \_H_2O \quad (I)$$

به منظور برابرشدن تعداد اتم‌های Fe و O در دو سمت معادله، ضریب Fe^{3+} و H_2O را برابر با ۲ قرار می‌دهیم:

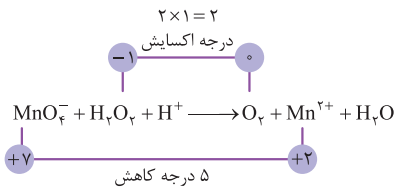
$$2Fe^{2+} + 1H_2O_2 + \_H^+ \rightarrow 2Fe^{3+} + 2H_2O \quad (II)$$

در آخر، به منظور موازنه‌شدن اتم‌های H و موازنهٔ بار، ضریب H^+ را هم برابر با ۲ قرار می‌دهیم:

$$2Fe^{2+} + H_2O_2 + 2H^+ \rightarrow 2Fe^{3+} + 2H_2O$$

پاسخ تشریحی گام اول) معادلهٔ واکنش را موازنه می‌کنیم:

برای شروع موازنه، ضریب MnO_4^- را برابر ۲ و ضریب H_2O_2 را برابر ۵ قرار می‌دهیم:



$$2MnO_4^- + 5H_2O_2 + \_H^+ \rightarrow \_O_2 + \_Mn^{2+} + \_H_2O$$

با توجه به موازنهٔ Mn، ضریب Mn^{2+} باید برابر ۲ و با توجه به موازنهٔ بار، ضریب H^+ باید برابر ۶ باشد.

مجموع بارهای مثبت و منفی در سمت راست = مجموع بارهای مثبت و منفی در سمت چپ: موازنهٔ بار

$$\underbrace{2(-1)}_{MnO_4^-} + \underbrace{x(+1)}_{H^+} = \underbrace{2(+2)}_{Mn^{2+}} \Rightarrow x = 6$$

$$2MnO_4^- + 5H_2O_2 + 6H^+ \rightarrow \_O_2 + 2Mn^{2+} + \_H_2O$$

در آخر برای موازنهٔ اتم‌های H و O در دو سمت معادله، ضریب H_2O و O_2 به ترتیب باید برابر ۸ و ۵ باشد:

$$2MnO_4^- + 5H_2O_2 + 6H^+ \rightarrow 5O_2 + 2Mn^{2+} + 8H_2O$$

گام دوم: به کمک اطلاعات داده‌شده در مورد H_2O_2 و O_2، بازده درصدی واکنش را حساب می‌کنیم:

روش اول: کسر تبدیل: ابتدا مقدار نظری O_2 را به دست می‌آوریم:

$$2L\,H_2O_2(aq) \times \frac{1/5\,mol\,H_2O_2}{1\,L\,H_2O_2(aq)} \times \frac{5\,mol\,O_2}{5\,mol\,H_2O_2} \times \frac{22/4\,L\,O_2}{1\,mol\,O_2} = 67/2\,L\,O_2 \text{ (مقدار نظری)}$$

حالا از رابطهٔ بازده درصدی استفاده می‌کنیم:

$$\text{بازده درصدی} = \frac{\text{مقدار عملی}}{\text{مقدار نظری}} \times 100 = \frac{44/8}{67/2} \times 100 = \frac{2 \times 22/4}{3 \times 22/4} \times 100 = \frac{2}{3} \times 100 \simeq \%66/6$$

روش دوم: کسر تناسب

$$\overset{1}{\cancel{5}}\,H_2O_2 \sim \overset{1}{\cancel{5}}\,O_2$$

$$\underbrace{\frac{\text{بازده درصدی}}{100} \times \text{حجم} \times \text{غلظت مولی}}_{H_2O_2 \text{ ضریب}} = \underbrace{\frac{\text{حجم}}{\text{حجم مولی} \times \text{ضریب}}}_{O_2} \Rightarrow \frac{1/5 \times \cancel{2} \times \frac{x}{100}}{1} = \frac{\overset{2}{\cancel{44/8}}}{1 \times \underset{1}{\cancel{22/4}}} \Rightarrow x = \frac{100}{1/5} = \frac{2}{3} \times 100 \simeq \%66/6$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

تست و پاسخ ۸۷

کدام موارد از مطالب زیر، نادرست است؟ $(H=1, C=12 : g.mol^{-1})$

الف) آلکان راست‌زنجیری با جرم مولی $170 g.mol^{-1}$، برخلاف آلکان راست‌زنجیری که ۴ پیوند کربن ـ کربن دارد، در دمای $22^{\circ}C$ به حالت مایع است.

ب) اگر جرم مولی یک آلکن، ۳۰ درصد از جرم مولی آلکینی که شمار اتم‌های هیدروژن یکسانی با آن دارد، کم‌تر باشد، در ساختار آلکین، ۸ پیوند اشتراکی وجود دارد.

پ) اگر به جای اتم‌های هیدروژن در مولکول استیلن، یک گروه متیل و یک گروه اتیل قرار گیرد، ترکیبی با نام ۲-پنتین به دست می‌آید.

ت) از واکنش گاز اتن با برم مایع، ترکیبی به‌دست می‌آید که شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی و جفت‌الکترون‌های پیوندی مولکول آن با هم برابر است.

۱) الف ـ ت ۲) ب ـ پ ۳) الف ـ پ ۴) ب ـ ت

پاسخ: گزینهٔ ۱

مشاوره در سؤالاتی که گزینه‌های آن به صورت الف، ب، پ و ت است، نیازی نیست عبارت‌ها را به طور کامل بررسی کنید. برای پاسخ به این سؤالات، اول عبارت‌های ساده‌تر را چک کنید. مثلاً در این سؤال، عبارت‌های (پ) و (ت)، عبارت‌های ساده‌تری محسوب می‌شوند. فرض کنید (ت) را بررسی کردیم و فهمیدیم *غلطه*! پس جواب یا ۱ یا ۴ است. حالا بین عبارت‌های (الف) و (ب)، *یکی رو که برامون ساده‌تره*، بررسی می‌کنیم و جواب *معلوم می‌شه*!

پاسخ تشریحی عبارت‌های (الف) و (ت) نادرست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

الف) فرمول عمومی آلکان‌ها به صورت C_nH_{2n+2} است:

$$\text{جرم مولی } C_nH_{2n+2} = 14n+2 \Rightarrow 14n+2=170 \Rightarrow n=12$$

آلکانی با ۴ پیوند $C-C$، دارای ۵ اتم کربن است. هر دو آلکان راست‌زنجیر ۵ و ۱۲ کربنی در دمای $22^{\circ}C$، به حالت مایع هستند.

نکته

۱) در ساختار هر آلکان nکربنی (C_nH_{2n+2})، $(n-1)$ پیوند $C-C$ و $(2n+2)$ پیوند $C-H$ وجود دارد و مجموع شمار پیوندهای اشتراکی در آن، برابر $3n+1$ است.

۲) در دمای $22^{\circ}C$، تنها چهار آلکان راست‌زنجیر اول (یعنی متان، اتان، پروپان و بوتان) به حالت گازند اما آلکان‌های راست‌زنجیر ۵ تا ۱۷ کربنی به حالت مایع هستند.

ب) روش اول: اگر فرمول مولکولی آلکن را C_nH_{2n} و فرمول مولکولی آلکین را C_mH_{2m-2} در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$\text{شمار اتم‌های هیدروژن آلکین} = \text{شمار اتم‌های هیدروژن آلکن} : 2n=2m-2 \Rightarrow n=m-1$$

$$\text{جرم مولی آلکن} = \frac{70}{100}\times \text{جرم مولی آلکین} \Rightarrow 14n=\frac{70}{100}\times(14m-2)$$

$$\xrightarrow{n=m-1} \overset{2}{\cancel{14}}(m-1)=\frac{\overset{1}{\cancel{7}}}{\cancel{10}}\times(14m-2) \Rightarrow 20m-20=14m-2 \Rightarrow 6m=18 \Rightarrow m=3 \text{ و } n=2$$

پس فرمول مولکولی آلکن و آلکین مورد نظر به ترتیب به صورت C_2H_4 و C_3H_4 است. در ساختار C_3H_4 (پروپین)، ۸ پیوند اشتراکی وجود دارد:

پروپین: $H-C\equiv C-\underset{H}{\overset{H}{C}}-H$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

روش دوم: *بیایید برعکس به قضیه نگاه کنیم!* در ساختار آلکین‌ها (C_nH_{2n-2})، $3n-1$ پیوند اشتراکی وجود دارد؛ پس آلکینی با ۸ پیوند اشتراکی همان C_3H_4 است:

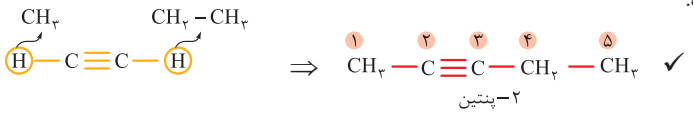
$$3n-1=8 \Rightarrow n=3$$

مالاکسوم آلکن، ۴ اتم هیدروژن دارد؟ *درسته!* C_2H_4! بررسی می‌کنیم که آیا جرم مولی C_2H_4، ۳۰ درصد کم‌تر از C_3H_4 است یا نه! به عبارت دیگر، آیا جرم مولی C_2H_4، ۷۰ درصد C_3H_4 است یا نه!

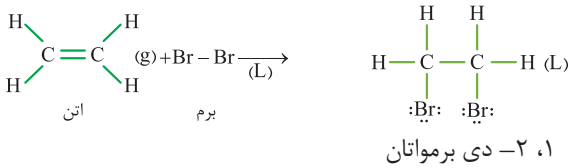
$$C_2H_4 \text{ جرم مولی} = (2\times12)+4=28\,g.mol^{-1}$$

$$C_3H_4 \text{ جرم مولی } (3\times12)+4=40\,g.mol^{-1} \Rightarrow 28=\frac{70}{100}\times40 \checkmark$$

پ) استیلن یا همان اتین (C_2H_2)، یک آلکین دوکربنی است:



ت) معادلهٔ واکنش گاز اتن با برم به صورت زیر است:



در ساختار ۱، ۲– دی برموا‌تان، ۶ جفت‌الکترون ناپیوندی و ۷ جفت‌الکترون پیوندی وجود دارد.

تست و پاسخ ۸۸

در کدام گزینه، نام ساده‌ترین آلکان ممکنی که دارای ۲ اتم کربن با عدد اکسایش صفر و یک اتم کربن با عدد اکسایش ۲– می‌باشد، آمده است و در اثر سوختن کامل یک نمونهٔ ۳۰۰ گرمی از این ماده با خلوص ۶۴ درصد، چند مول مولکول ناقطبی تولید می‌شود؟ (ناخالصی‌ها فاقد اتم‌های H و C هستند و $g.mol^{-1}$: C = ۱۲ و H = ۱)

۱) ۲، ۲، ۳، ۳ ـ تترامتیل پنتان، ۱۳ / ۵

۲) ۲، ۳ ـ دی متیل هگزان، ۱۳ / ۵

۳) ۲، ۲، ۴، ۴ ـ تترامتیل پنتان، ۲۸ / ۵

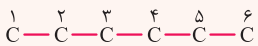
۴) ۲، ۴ ـ دی متیل هگزان، ۲۸ / ۵

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس‌نامه برای رسم ساختار یک آلکان شاخه‌دار که نام آن داده شده است، ابتدا به تعداد کربن زنجیر اصلی، اتم C رسم می‌کنیم. بعد شماره‌گذاری را از هر سمتی که *دلمون خواست!* شروع می‌کنیم و با توجه به شماره‌های داده‌شده، هر شاخه را در موقعیت درست خود می‌گذاریم. *آفرشم* اتم‌های هیدروژن مورد نیاز اتم‌های کربن را می‌گذاریم تا همهٔ کربن‌ها دارای ۴ پیوند با ۴ اتم باشند.

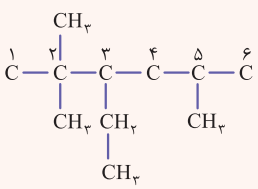
مثال: ۳ ـ اتیل ـ ۲، ۲، ۵ ـ تری‌متیل هگزان

گام اول: زنجیر اصلی (هگزان) دارای ۶ اتم کربن است. ۶ اتم کربن رسم کرده و از *یه سمت*

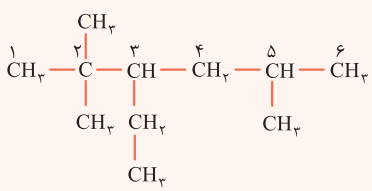


دلخواه شماره‌گذاری را شروع می‌کنیم:

گام دوم: شاخه‌های فرعی را در موقعیت درست خود می‌گذاریم:



گام سوم: اتم‌های هیدروژن مورد نیاز کربن‌ها را می‌گذاریم:

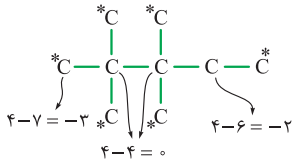


SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

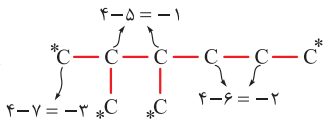
پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

پاسخ تشریحی برای قسمت اول سؤال، عدد اکسایش اتم‌های کربن در آلکان‌های داده‌شده را حساب می‌کنیم. *البته هواستون به Hهای متصل به اتم‌های C هم باشه، ما برای جلوگیری از شلوغ‌شدن ساختارها، Hها رو نذاشتیم.*

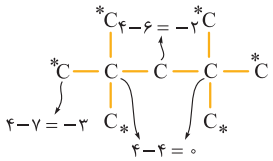
۱) ۲، ۲، ۳، ۳ ـ تترامتیل پنتان $\Rightarrow$



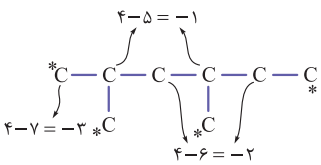
۲) ۳،۲ ـ دی‌متیل هگزان $\Rightarrow$



۳) ۲، ۲، ۴، ۴ ـ تترامتیل پنتان $\Rightarrow$



۴) ۲، ۴ ـ دی‌متیل هگزان $\Rightarrow$



در ساختار آلکان‌های داده‌شده، در ۱ و ۳، دو اتم کربن با عدد اکسایش صفر و یک اتم کربن با عدد اکسایش ۲− وجود دارد.

توجه در ساختار آلکان‌ها، فقط عنصرهای کربن و هیدروژن وجود دارند. کربن دارای ۴ الکترون ظرفیتی بوده و خصلت نافلزی آن از هیدروژن بیشتر است؛ بنابراین برای داشتن اتم کربن با عدد اکسایش صفر $(۰ = ۴ - ۴)$، باید به آن ۴ اتم کربن دیگر متصل باشد؛ یعنی در ساختار آلکان موردنظر، باید دو اتم کربن وجود داشته باشد که به هر یک از آن‌ها دو شاخهٔ فرعی متصل است یا به عبارت دیگر، دو اتم کربن وجود داشته باشد که به آن‌ها، هیچ اتم هیدروژنی متصل نیست.  فقط آلکان‌های داده‌شده در ۱ و ۳، این ویژگی را دارند (هر دو عدد یکسان در نام یک آلکان، نشان‌دهندهٔ یک اتم کربن فاقد هیدروژن است.)

آلکان‌های داده‌شده در ۱ و ۳، ۹کربنی هستند.

$$\text{فرمول آلکان} : C_۹H_{۲۰} \xrightarrow{C_nH_{۲n+۲}} \underbrace{\text{تترا متیل}}_{\text{۴ کربن}}\ \underbrace{\text{پنتان}}_{\text{۵ کربن}}$$

از سوختن کامل آلکان‌ها، $CO_۲$ و $H_۲O$ تولید می‌شود که $CO_۲$، مولکولی ناقطبی و $H_۲O$، مولکولی قطبی است:

$$C_۹H_{۲۰} \sim ۹CO_۲$$

روش اول: کسر تبدیل:

$$۳۰۰\,g\,C_۹H_{۲۰}\,\text{ناخالص} \times \frac{۶۴\,g\,C_۹H_{۲۰}}{۱۰۰\,g\,C_۹H_{۲۰}\,\text{ناخالص}} \times \frac{۱\,mol\,C_۹H_{۲۰}}{۱۲۸\,g\,C_۹H_{۲۰}} \times \frac{۹\,mol\,CO_۲}{۱\,mol\,C_۹H_{۲۰}} = ۱۳/۵\,mol\,CO_۲$$

روش دوم: کسر تناسب:

$$\underbrace{\frac{\text{جرم ناخالص} \times \frac{\text{درصد خلوص}}{۱۰۰}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}}_{C_۹H_{۲۰}} = \underbrace{\frac{\text{مول}}{\text{ضریب}}}_{CO_۲} \Rightarrow \frac{۳۰۰ \times \frac{۶۴}{۱۰۰}}{۱ \times ۱۲۸} = \frac{x}{۹} \Rightarrow x = \frac{۲۷}{۲} = ۱۳/۵\,mol\,CO_۲$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

تست و پاسخ ۸۹

چند مورد از مطالب زیر دربارهٔ ترکیب‌های (I) و (II)، درست است؟ $(O=16, C=12, H=1: g.mol^{-1})$



(I) (II)

- **ایزومر یکدیگرند و نقطهٔ جوش ترکیب (II) بالاتر است.**
- **۶۰ درصد جرمی ترکیب (I) را کربن تشکیل داده است.**
- **شمار و نوع اتم‌های سازندهٔ آن‌ها یکسان است و خواص فیزیکی و شیمیایی مشابهی دارند.**
- **پیوند اشتراکی یگانه‌ای که آسان‌تر از سایر پیوندهای یگانه شکسته می‌شود، در دو ترکیب (I) و (II) یکسان است.**

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

پاسخ: گزینهٔ ۲

به‌جز عبارت سوم، بقیهٔ عبارت‌ها درست‌اند.

نکته به موادی که فرمول مولکولی یکسان اما ساختار متفاوتی دارند، ایزومر یا همپار می‌گوییم.

پاسخ تشریحی بررسی عبارت‌ها:

- فرمول مولکولی هر دو ترکیب به صورت $C_5H_8O_2$ است اما ساختار آن‌ها با هم متفاوت است؛ در نتیجه این دو ترکیب، ایزومر یکدیگر محسوب می‌شوند. ترکیب (II) به دلیل داشتن پیوند $O-H$، برخلاف ترکیب (I)، می‌تواند با مولکول‌های خود پیوند هیدروژنی برقرار کند؛ به همین دلیل نقطهٔ جوش آن بالاتر است.
- $C_5H_8O_2$ درصد جرمی C در $= \frac{\text{جرم C}}{\text{جرم ترکیب}} \times 100 = \frac{5\times12}{(5\times12)+8+(2\times16)} \times 100 = \frac{60}{100} \times 100 = \%60$
- هر چند شمار و نوع اتم‌های سازندهٔ ایزومرها با هم یکسان است، اما به دلیل داشتن گروه‌های عاملی (ساختار) مختلف، خواص فیزیکی و شیمیایی آن‌ها با هم متفاوت است.
- در ساختار ترکیب (I)، پیوندهای یگانهٔ $C-H$ و $C-C$ داریم و در ساختار ترکیب (II)، علاوه بر آن‌ها، پیوندهای یگانهٔ $O-H$ و $C-O$ نیز وجود دارد.

نکات برای مقایسهٔ مقدار آنتالپی پیوندها، *عجالتاً!* شما باید دو عامل زیر رو *بلد باشین*؛

۱) **تعداد پیوند بین دو اتم (مرتبهٔ پیوند)**: هر چه تعداد پیوند بین دو اتم بیشتر باشد، آنتالپی پیوند بیشتر خواهد بود. به عبارت دیگر آنتالپی پیوند سه‌گانه بیشتر از دوگانه و آنتالپی پیوند دوگانه بیشتر از یگانه است.

آنتالپی پیوند: $C\equiv C > C=C > C-C$

(۸۳۹) (۶۱۴) (۳۴۸)

حواستون باشه که آنتالپی پیوند «$C\equiv C$» کم‌تر از ۳ برابر و آنتالپی پیوند «$C=C$» کم‌تر از ۲ برابر آنتالپی پیوند «$C-C$» است.

بد نیست مقایسهٔ آنتالپی پیوندهای $C\equiv C$، $N\equiv N$ و $O=O$ رو هم *بلد باشین*؛ آنتالپی پیوند: $N\equiv N > C\equiv C > O=O$

۲) **شعاع اتم‌های تشکیل‌دهندهٔ پیوند**: به طور کلی هر چه شعاع اتم‌های تشکیل‌دهندهٔ پیوند کوچک‌تر باشد، انرژی لازم برای شکستن آن بیشتر و در نتیجه آنتالپی پیوند نیز بیشتر می‌شود. آنتالپی پیوند: $H-F > H-Cl > H-Br > H-I \Rightarrow$ شعاع اتمی: $F < Cl < Br < I$

مقایسهٔ آنتالپی پیوندهای اشتراکی یگانه در هر کدام از ترکیب‌های (I) و (II) به صورت زیر است:

مقایسهٔ آنتالپی پیوندهای یگانه در ترکیب (I): $C-H > C-C$

مقایسهٔ آنتالپی پیوندهای یگانه در ترکیب (II): $O-H > C-H > C-O > C-C$

بنابراین ضعیف‌ترین پیوند اشتراکی یگانه در ساختار هر دو ترکیب (I) و (II)، پیوند $C-C$ است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

تست و پاسخ ۹۰

با توجه به اطلاعات داده‌شده، نام ترکیب آلی موجود در واکنش‌دهنده‌ها کدام است و اگر در شرایط معین، تفاوت جرم واکنش‌دهنده‌ها در مخلوط آغازی برابر ۲۵ گرم باشد و واکنش به‌طور کامل انجام شود، چند کیلوژول گرما آزاد خواهد شد؟ $(H=1, C=12, O=16 : g.mol^{-1})$

$$C_2H_6O(g) + 3O_2(g) \rightarrow 2CO_2(g) + 3H_2O(g) \qquad \Delta H = -1210\,kJ$$

پیوند	C—H	C—O	O—H	O=O	C=O	C—C
آنتالپی پیوند $(kJ.mol^{-1})$	۴۱۵	۳۸۰	۴۶۰	۵۰۰	۸۰۰	۳۵۰

۱) اتانول، ۶۰۵ ۲) دی‌متیل اتر، ۱۰۸۰ ۳) اتانول، ۱۰۸۰ ۴) دی‌متیل اتر، ۶۰۵

پاسخ: گزینهٔ ۴

خودت حل کنی بهتره C_2H_6O می‌تواند اتانول (CH_3CH_2OH) یا دی‌متیل اتر (CH_3-O-CH_3) باشد. با توجه به ΔH واکنش و آنتالپی‌های پیوند داده‌شده، مجموع آنتالپی پیوندها در C_2H_6O را به دست بیار و با توجه به ساختار اتانول و دی‌متیل اتر، ببین عدد به‌دست‌آمده با مجموع آنتالپی پیوندها در کدام ترکیب مطابقت دارد. برای حل قسمت دوم سؤال نیز، باید بین $(3O_2 - C_2H_6O)$ و ΔH واکنش، تناسب *برقرار کنی*!

پاسخ تشریحی **گام اول:** با توجه به رابطهٔ محاسبهٔ ΔH واکنش به کمک آنتالپی‌های پیوند، مجموع آنتالپی پیوندها در C_2H_6O را به دست می‌آوریم:

$$\Delta H\ (\text{واکنش}) = [\text{مجموع آنتالپی پیوندها در مواد فراورده}] - [\text{مجموع آنتالپی پیوندها در مواد واکنش دهنده}]$$

$$C_2H_6O + 3O=O \rightarrow 2O=C=O + 3\ H-\overset{\displaystyle O}{\diagdown\diagup}-H$$

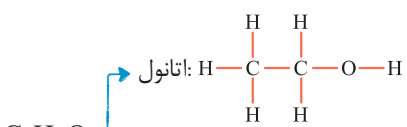
$$\Delta H = [\underbrace{\text{مجموع آنتالپی پیوندها در } C_2H_6O}_{x} + 3\Delta H(O=O)] - [4\Delta H(C=O) + 6\Delta H(O-H)]$$

$$\Rightarrow -1210 = x + 3(500) - 4(800) - 6(460) \Rightarrow x = 3250$$

گام دوم: حساب می‌کنیم در کدام‌یک از ترکیب‌های اتانول یا دی‌متیل اتر، مجموع آنتالپی پیوندها برابر ۳۲۵۰ است:

C_2H_6O ←

اتانول:



دی‌متیل اتر:



$$\text{مجموع آنتالپی پیوندها در اتانول} = 5\Delta H(C-H) + \Delta H(C-C) + \Delta H(C-O) + \Delta H(O-H)$$
$$= (5\times 415) + 350 + 380 + 460 = 3265\ kJ.mol^{-1}$$

$$\text{مجموع آنتالپی پیوندها در دی‌متیل اتر} = 6\Delta H(C-H) + 2\Delta H(C-O) = 6(415) + 2(380) = 3250\,kJ.mol^{-1}$$

پس ترکیب آلی اولیه (C_2H_6O)، همان دی‌متیل اتر است.

گام سوم: مقدار گرمای آزادشده را حساب می‌کنیم.

روش اول: با توجه به معادلهٔ واکنش، اگر ۱ مول یا ۴۶ گرم C_2H_6O با ۳ مول یا $3\times 32 = 96$ گرم O_2 به طور کامل واکنش دهد، ۱۲۱۰ kJ گرما آزاد خواهد شد؛ یعنی اگر تفاوت جرم واکنش‌دهنده‌های مصرفی برابر $50 - 46 = 96$ گرم باشد، مقدار گرمای آزادشده برابر با ۱۲۱۰ kJ خواهد بود؛ بنابراین در شرایط گفته‌شده در صورت سؤال یعنی ۲۵ گرم اختلاف جرم واکنش‌دهنده‌ها، مقدار گرمای آزادشده برابر با $\frac{1210}{2} = 605$ کیلوژول خواهد بود.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

روش دوم: کسر تناسب:

$$\frac{\text{تفاوت جرم}}{\underbrace{(\text{ضریب A} \times \text{جرم مولی A}) - (\text{ضریب B} \times \text{جرم مولی B})}_{3O_2 - C_2H_6O}} = \frac{Q}{|\Delta H|}$$

$$\Rightarrow \frac{25}{(3\times 32)-(1\times 46)} = \frac{Q}{1210} \Rightarrow Q = \frac{1210}{2} = 605\,kJ$$

تست و پاسخ ۹۱

دو نمونه آب (I) و (II) به ترتیب با دماهای θ_1 و θ_2 در اختیار داریم. اگر $\theta_2 > \theta_1$ و انرژی گرمایی نمونهٔ (II) بیشتر از نمونهٔ (I) باشد، کدام موارد از مطالب زیر، درست‌اند؟ (گرمای ویژهٔ آب در دماهای θ_1 و θ_2 را برابر در نظر بگیرید.)

الف) در صورت تماس این دو نمونه، انرژی گرمایی از نمونهٔ (II) به نمونهٔ (I) جاری می‌شود.

ب) برای افزایش دمای این دو نمونه به میزان $5^\circ C$، انرژی لازم برای نمونهٔ (II) بیشتر از نمونهٔ (I) است.

پ) اگر جرم یکسانی از این دو نمونه آب را با هم مخلوط کنیم، دمای تعادل با میانگین دماهای θ_1 و θ_2 برابر خواهد بود.

ت) میانگین تندی مولکول‌های آب در ظرف (II) بیشتر از ظرف (I) است.

۱) الف ـ ب ـ پ ۲) ب ـ پ ۳) ب ـ پ ـ ت ۴) الف ـ ت

پاسخ: گزینهٔ ۲

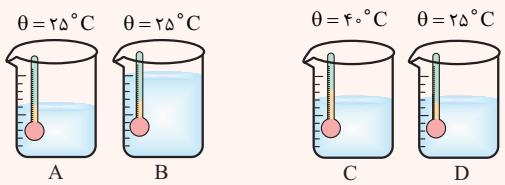
درس‌نامه ●● دما و انرژی گرمایی:

دمای یک ماده ← تعیین‌کنندهٔ:
- میزان سردی و گرمی ماده
- میزان جنب‌وجوش ذره‌های سازندهٔ ماده
- میانگین تندی ذره‌های سازندهٔ ماده
- میانگین انرژی جنبشی ذره‌های سازندهٔ ماده

به مجموع انرژی جنبشی ذره‌های سازندهٔ یک ماده، انرژی گرمایی آن ماده می‌گویند.

انرژی گرمایی هم به دما و هم به تعداد ذره‌های سازندهٔ (جرم) ماده بستگی دارد. اگر تعداد ذره‌های سازندهٔ دو نمونه از یک ماده برابر باشد، نمونه‌ای با دمای بیشتر، انرژی گرمایی بیشتری دارد و اگر دمای دو نمونه از یک ماده برابر باشد، نمونه‌ای با تعداد ذره‌های سازندهٔ (جرم) بیشتر، انرژی گرمایی بیشتری خواهد داشت.

مثال:



انرژی گرمایی: $B > A$ انرژی گرمایی: $C > D$

پاسخ تشریحی عبارت‌های (ب) و (پ) درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

الف) جهت جاری‌شدن انرژی گرمایی از نمونه‌ای با دمای بیشتر به نمونه‌ای با دمای کم‌تر است؛ بنابراین در این‌جا، انرژی گرمایی از نمونهٔ (I) به نمونهٔ (II) جاری می‌شود.

نکته جهت جاری‌شدن انرژی گرمایی، از ماده‌ای با انرژی گرمایی بیشتر به ماده‌ای با انرژی گرمایی کم‌تر نیست. بلکه از ماده‌ای با دمای بالاتر (که ممکن است انرژی گرمایی کم‌تری هم داشته باشد) به ماده‌ای با دمای پایین‌تر می‌باشد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

ب) باید از رابطهٔ $Q = mc\Delta\theta$ استفاده کنیم. c و $\Delta\theta$ برای هر دو نمونه یکسان است؛ بنابراین باید جرم (m) دو نمونه را با هم مقایسه کنیم. انرژی گرمایی هم به دما و هم به جرم نمونه بستگی دارد. نمونهٔ (II)، با وجود دمای کم‌تر، انرژی گرمایی بیشتری دارد؛ پس حتماً جرم آن بیشتر از جرم نمونهٔ (I) است:

$$\begin{cases} \text{دما : نمونهٔ (I)} > \text{نمونهٔ (II)} \\ \text{انرژی گرمایی : نمونهٔ (II)} > \text{نمونهٔ (I)} \end{cases} \Rightarrow \text{جرم : نمونهٔ (II)} > \text{نمونهٔ (I)}$$

با توجه به بیشتربودن جرم نمونهٔ (II)، به ازای تغییر دمای یکسان، انرژی لازم برای نمونهٔ (II) بیشتر است.

پ) اگر جرم و گرمای ویژهٔ دو نمونه با هم برابر باشد، دمای تعادل بر اثر مخلوط‌کردن این دو نمونه با هم، برابر با میانگین دماهای اولیهٔ آن‌هاست:

$$\theta_{\text{تعادل}} = \frac{m_1c_1\theta_1 + m_2c_2\theta_2}{m_1c_1 + m_2c_2} \xrightarrow[c_1=c_2]{m_1=m_2} \theta_{\text{تعادل}} = \frac{mc(\theta_1+\theta_2)}{2mc} = \frac{\theta_1+\theta_2}{2}$$

ت) دما، تعیین‌کنندهٔ میانگین تندی ذرات سازندهٔ یک نمونه ماده است. با توجه به بیشتربودن دمای نمونهٔ (I) نسبت به نمونهٔ (II)، میانگین تندی مولکول‌های آب در ظرف (I) بیشتر از ظرف (II) است.

تست و پاسخ ۹۲

واکنش‌های گرماشیمیایی زیر، مربوط به تشکیل اوزون تروپوسفری هستند:

a) $N_2(g) + O_2(g) \rightarrow 2NO(g)\ ,\ \Delta H = +181kJ$

b) $2NO(g) + O_2(g) \rightarrow 2NO_2(g)\ ,\ \Delta H = -173kJ$

c) $NO_2(g) + O_2(g) \rightarrow NO(g) + O_3(g)\ ,\ \Delta H = +199kJ$

براساس آن، چند مورد از مطالب زیر درست‌اند؟

- **در واکنش تشکیل گاز نیتروژن مونوکسید از عنصرهای سازندهٔ آن، سطح انرژی مواد کاهش می‌یابد.**
- **با توجه به منفی‌بودن ΔH واکنش (b)، سرعت انجام آن نسبت به واکنش‌های (a) و (c) بیشتر است.**
- **در هر سه واکنش، واکنش‌دهندهٔ دارای اتم نیتروژن، نقش کاهنده را دارد.**
- **ΔH واکنش کلی که با حذف NO_2 از معادله‌های شیمیایی واکنش‌های داده‌شده به دست می‌آید، برابر با ۴۰۶ کیلوژول است.**

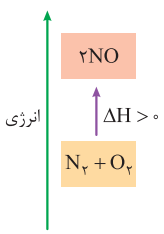
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۱

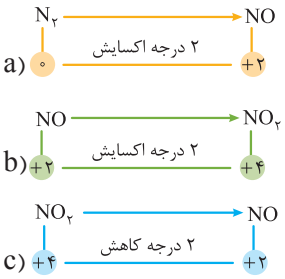
پاسخ تشریحی فقط عبارت چهارم درست است.

بررسی عبارت‌ها:

- واکنش تشکیل گاز NO از N_2 و O_2 (واکنش a)، گرماگیر $(\Delta H > 0)$ است و با انجام این واکنش، سطح انرژی مواد افزایش می‌یابد.



- برای مقایسهٔ سرعت واکنش‌ها، باید انرژی فعال‌سازی (E_a) آن‌ها را با هم مقایسه کنیم و نه ΔH آن‌ها! ΔH یک کمیت ترموشیمیایی و سرعت یک کمیت سینتیکی است و *این دو تا هیچ ربطی به هم ندارن!*
- در واکنش‌های a و b، عدد اکسایش اتم نیتروژن افزایش یافته و به ترتیب N_2 و NO نقش کاهنده را در این واکنش‌ها دارند اما در واکنش c، عدد اکسایش اتم N کاهش یافته است و NO_2 نقش اکسنده را در این واکنش ایفا می‌کند.



SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

معادله‌ها را با هم جمع می‌کنیم به طوری‌که NO_2 در واکنش کلی نباشد، برای این منظور باید واکنش c را در ۲ ضرب کنیم:

a) $N_2 + O_2 \rightarrow 2NO$; $\Delta H_1 = +181kJ$

b) $2NO + O_2 \rightarrow 2NO_2$; $\Delta H_2 = -173kJ$

c) $2NO_2 + 2O_2 \rightarrow 2NO + 2O_3$; $\Delta H_3 = 2(199) = 398kJ$

واکنش کلی: $N_2 + 4O_2 \rightarrow 2NO + 2O_3$; $\Delta H_{\text{کلی}} = 181 - 173 + 398 = 406kJ$

تست و پاسخ ۹۳

در یک ظرف دربسته به حجم ۵ لیتر، ۵ مول گاز کربن مونوکسید با ۱۰ مول گاز هیدروژن واکنش می‌دهد. اگر پس از ۱۰ دقیقه، تعداد مول‌های گازی موجود در ظرف برابر ۱۰ باشد، سرعت کلی واکنش برابر چند مول بر لیتر بر دقیقه است و اگر طی ده دقیقهٔ دیگر، واکنش با سرعت متوسط نصف ۱۰ دقیقهٔ اول پیش برود، در پایان این فرایند، چند درصد حجم ظرف واکنش را گاز کربن مونوکسید تشکیل خواهد داد؟ $CO(g) + 2H_2(g) \rightarrow CH_3OH(g)$

۱) 10^{-2} و ۳۳/۳ ۲) 5×10^{-2} و ۱۶/۶ ۳) 10^{-2} و ۱۶/۶ ۴) 5×10^{-2} و ۳۳/۳

پاسخ: گزینهٔ ۲

خودت حل کنی بهتره ابتدا به کمک جدول تغییرات مول مواد، مول ثانویه و در نتیجه تغییرات مول هر ماده را محاسبه کن تا *بتونی* سرعت واکنش را در ۱۰ دقیقهٔ اول به دست *بیاری* و برای محاسبهٔ قسمت دوم سؤال باز هم به کمک جدول تغییرات مول مواد *می‌تونی* به مول هر یک از گازها و درصد حجمی گاز کربن مونوکسید *برسی*.

پاسخ تشریحی x : میزان تغییرات مول مواد در بازهٔ صفر تا ۱۰ دقیقه به ازای ضریب استوکیومتری ۱ است.

	CO	$+ 2H_2$	$\rightarrow CH_3OH$
$t=0$	۵	۱۰	۰
$t=10min$	$5-x$	$10-2x$	x

مجموع مول مواد گازی در $t=10$: $5-x+10-2x+x=10 \Rightarrow 15-2x=10 \Rightarrow x=2/5mol$

سرعت واکنش در ۱۰min ابتدایی: $\bar{R} = \bar{R}_{CH_3OH} = \frac{\Delta x}{\Delta t \times v} = \frac{2/5}{10\times5} = 5\times10^{-2} mol.L^{-1}.min^{-1}$

اگر سرعت واکنش در ۱۰min بعدی نصف ۱۰min اول باشد، داریم:

	CO	$+ 2H_2$	$\rightarrow CH_3OH$
$t=10min$	۲/۵	۵	۲/۵
$t=20min$	$2/5-\frac{2/5}{2}$	$5-\frac{5}{2}$	$2/5+\frac{2/5}{2}$

بنابراین مجموع مول مواد گازی در $t=20$، برابر است با: $2/5-\frac{2/5}{2}+2/5+\frac{2/5}{2}+5-\frac{5}{2}=7/5mol$

درصد مولی در گازها با درصد حجمی برابر است، بنابراین: درصد حجمی $CO = \frac{\text{مول } CO}{\text{مول کل گازها}}\times100 = \frac{1/25}{7/5}\times100 \simeq \%16/6$

تست و پاسخ ۹۴

کدام مورد نادرست است؟

۱) تعداد اتم‌های هیدروژن متصل به کربن در هیچ‌کدام از اتم‌های کربن مونومر سازندهٔ پلیمر به‌کاررفته در ساختار پتو، یکسان نیست.

۲) از بین ترکیب‌های «تفلون، پلی‌اتن سبک، پلی‌سیانو اتن، استیرن و پلیمر سازندهٔ سرنگ»، ۳ مورد فقط دارای پیوند یگانه هستند.

۳) پلی‌اتن به‌کاررفته در ساخت کیسه‌های پلاستیکی شفاف، شاخه‌دار بوده و چگالی کم‌تری نسبت به آب دارد.

۴) سلولز به عنوان الیاف سازندهٔ پنبه، جرم مولی بیشتری نسبت به سایر پلیمرهای طبیعی دارد.

پاسخ: گزینهٔ ۴

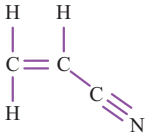
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

پاسخ تشریحی

پنبه از الیاف سلولز تشکیل شده که مونومر سازندهٔ آن گلوکز است. مقایسهٔ جرم مولی پنبه و سایر پلیمرها بدون توجه به تعداد دقیق مونومرها در هر پلیمر، امکان‌پذیر نیست.

بررسی سایر گزینه‌ها:

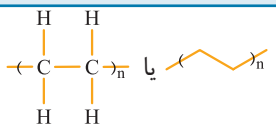
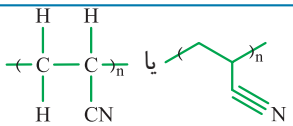
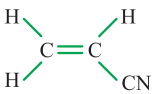
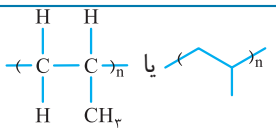
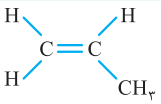
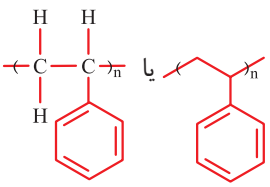
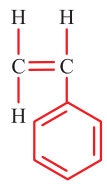
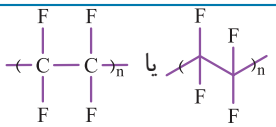
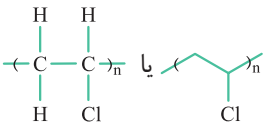
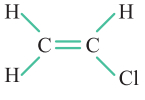


۱) با توجه به ساختار مونومر سازندهٔ پلی‌سیانو اتن (پلیمر مورد استفاده در پتو) داریم:

بنابراین، شمار اتم‌های هیدروژن متصل به دو اتم کربن موجود در ساختار سیانو اتن متفاوت است.

۲) در پلی‌اتن، تفلون و پلی‌پروپن، فقط پیوند یگانه وجود دارد.

نکته ساختار برخی از پلیمرها و مونومر سازندهٔ آن‌ها به صورت زیر است:

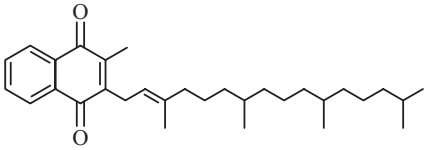
کاربرد	نام و ساختار پلیمر	نام و ساختار مونومر
کیسه‌های پلاستیکی، لوله‌های پلاستیکی، دبه‌های آب یا بطری پلاستیکی	 پلی‌اتن	 اتن
پتو	 پلی‌سیانو اتن	 سیانو اتن
به عنوان پلاستیک در تجهیزات آزمایشگاهی و پزشکی مانند سرنگ	 پلی‌پروپن	 پروپن
به عنوان پلاستیک در صنعت بسته‌بندی مواد غذایی مانند ظروف یک‌بار مصرف	 پلی‌استیرن	 استیرن
ظرف نچسب، نخ دندان، کف اتو، نوارهای آب‌بندی لوله‌ها (نوار تفلون)	 پلی تترافلوئورو اتن یا تفلون	 تترا فلوئورو اتن
کیسهٔ خون	 پلی‌وینیل کلرید	 وینیل کلرید (کلرو اتن)

۳) پلی‌اتن سبک و سنگین هر دو چگالی کم‌تر از آب $(1\,g.cm^{-3})$ دارند و پلی‌اتن سبک، شاخه‌دار و شفاف می‌باشد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

تست و پاسخ ۹۵

براساس ساختار ویتامین کا (K)، کدام مطلب نادرست است؟



۱) بخش ناقطبی آن بر قطبی غلبه دارد و در چربی نسبت به آب بهتر حل می‌شود.

۲) شمار پیوندهای دوگانه در ساختار آن، با تعداد گروه‌های CH_3 برابر است.

۳) مجموع اعداد اکسایش اتم‌های کربن آن برابر ۴۲− است.

۴) گروه عاملی آن در ساختار ۲ ـ هپتانون نیز وجود دارد.

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ تشریحی با توجه به ساختار داده‌شده، در مولکول ویتامین K، ۷ پیوند دوگانه و ۶ گروه متیل (CH_3) وجود دارد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) در ویتامین K، بخش ناقطبی (گروه هیدروکربنی) بر بخش قطبی (گروه عاملی) غلبه دارد؛ به همین دلیل این ویتامین محلول در چربی است.

۳) با توجه به ساختار ویتامین K، فرمول مولکولی آن به صورت $C_{31}H_{46}O_2$ و با توجه به اعداد اکسایش اتم‌های اکسیژن و هیدروژن داریم:

$$\underset{\text{مجموع اعداد اکسایش کربن‌ها}}{x} + \underset{\text{تعداد H}}{46} \times \underset{\text{عدد اکسایش هیدروژن}}{(+1)} + \underset{\text{تعداد O}}{2} \times \underset{\text{عدد اکسایش اکسیژن}}{(-2)} = 0 \Rightarrow x = -42$$

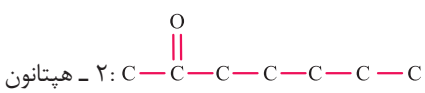
نکته شمار اتم‌های هیدروژن در یک ترکیب آلی با n اتم کربن و شامل اتم‌های C، H و O را می‌توان به صورت زیر به دست آورد:

$$\text{شمار اتم‌های هیدروژن} = (2n+2) - 2(\text{تعداد پیوندهای دوگانه}) + (\text{تعداد حلقه‌ها}) - 4(\text{تعداد پیوندهای سه‌گانه})$$

مثال: ویتامین K دارای ۳۱ اتم کربن است و در ساختار آن، ۲ حلقه و ۷ پیوند دوگانه وجود دارد:

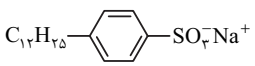
$$\text{شمار اتم‌های هیدروژن} = (2\times 31) + 2 - 2(7+2) = 64 - 18 = 46$$

۴) ۲ـ هپتانون (ترکیب آلی میخک) همانند ویتامین K دارای گروه عاملی کتونی $(\overset{\overset{O}{\|}}{C})$ است.



تست و پاسخ ۹۶

با توجه به ساختارهای داده‌شده، چه تعداد از مطالب زیر درست است؟



(A)

$C_{14}H_{25}COOK$

(X)

HCl

(D)

- **ترکیب A برخلاف ترکیب D، برای ایجاد اثر پاک‌کنندگی، با آلاینده‌ها واکنش می‌دهد.**
- **در ترکیب A همانند ترکیب X، اکسنده‌ترین اتم نافلزی دارای دو جفت الکترون ناپیوندی است.**
- **ترکیب D همانند ترکیب A، هنگام انحلال در آب به یون‌های سازندهٔ آن تبدیل می‌شود.**
- **ترکیب X همانند ترکیب D، در دمای اتاق به صورت مایع یافت می‌شود.**
- **ترکیب A برخلاف ترکیب D، با یون‌های منیزیم و کلسیم موجود در آب سخت رسوب می‌دهد.**

۱) صفر ۲) ۱

۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۱

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ تشریحی همهٔ عبارت‌های داده‌شده، نادرست‌اند.

نکته

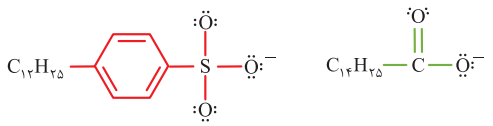
انواع پاک‌کننده‌ها
- صابونی: $RCOO^-Na^+$ (جامد)، $RCOO^-K^+$ (مایع)، $RCOO^-NH_4^+$ (مایع)
- غیرصابونی: $R-C_6H_4SO_3^-Na^+$
- خورنده: اسید و باز قوی $(HCl, NaOH, ...)$

ترکیب A نوعی پاک‌کنندهٔ غیرصابونی، ترکیب X پاک‌کنندهٔ صابونی و ترکیب D پاک‌کنندهٔ خورنده است.

بررسی عبارت‌ها:

عبارت اول: پاک‌کننده‌های خورنده برخلاف پاک‌کننده‌های صابونی و غیرصابونی با آلاینده‌ها واکنش می‌دهند اما اساس عملکرد پاک‌کننده‌های صابونی و غیرصابونی، برهم‌کنش فیزیکی با آلاینده‌هاست.

عبارت دوم: اکسنده‌ترین نافلز در ترکیبات A و X، اکسیژن است و شمار جفت‌الکترون ناپیوندی اتم‌های اکسیژن در آن‌ها مطابق ساختارهای زیر به ترتیب برابر ۳ و ۲ یا ۳ می‌باشد.



(A) (X)

عبارت سوم: HCl یک ترکیب مولکولی است و طی انحلال، از طریق یونش به یون تبدیل می‌شود؛ بنابراین عبارت تبدیل‌شدن به یون‌های سازنده برای HCl نادرست است.

عبارت چهارم: در دمای اتاق، ترکیب X یک صابون مایع و ترکیب D گاز هیدروژن کلرید می‌باشد.

عبارت پنجم: پاک‌کنندهٔ غیرصابونی با یون‌های منیزیم و کلسیم آب سخت رسوب نمی‌دهد و قدرت پاک‌کنندگی آن در آب سخت حفظ می‌شود.

تست و پاسخ ۹۷

در دمای اتاق، ۱۵ گرم BaO ناخالص به مقداری آب خالص اضافه می‌کنیم و حجم محلول را به نیم لیتر می‌رسانیم، اگر pH محلول تشکیل‌شده ۱۲/۷ باشد، درصد خلوص BaO کدام است؟ (ناخالصی‌ها خاصیت اسیدی یا بازی ندارند، $Ba = ۱۳۷ , O = ۱۶ : g.mol^{-1}$)

۱) ۳۰ ۲) ۲۵/۵ ۳) ۱۲/۷۵ ۴) ۵۱

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس‌نامه ● اکسیدهای فلزی و نافلزی

- به‌صورت کلی اکسیدهای فلزی باز آرنیوس و اکسیدهای نافلزی اسید آرنیوس هستند، *اما اینو هم بلد باشید که* NO، CO و NO_2 به صورت مولکولی در آب حل می‌شوند و خاصیت اسیدی یا بازی ندارند.
- معادلهٔ انحلال و یونش برخی از اکسیدهای نافلزی به صورت زیر است:

$$N_2O_5(s) + H_2O(l) \rightarrow 2HNO_3(aq) \xrightarrow{\text{یونش یک‌طرفه}} 2H^+(aq) + 2NO_3^-(aq)$$

$$SO_3(s) + H_2O(l) \rightarrow H_2SO_4(aq) \xrightarrow{\text{یونش یک‌طرفه}} 2H^+(aq) + SO_4^{2-}(aq)$$

$$CO_2(s) + H_2O(l) \rightarrow H_2CO_3(aq) \underset{\text{یونش دوطرفه (تعادلی)}}{\rightleftharpoons} 2H^+(aq) + CO_3^{2-}(aq)$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

معادلهٔ انحلال و تفکیک یونی (*نه یونش!*) برخی از اکسیدهای فلزی به صورت زیر است:

$$Na_2O + H_2O \rightarrow 2NaOH \xrightarrow{\text{تفکیک یونی}} 2Na^+ + 2OH^-$$

$$SrO + H_2O \rightarrow Sr(OH)_2 \xrightarrow{\text{تفکیک یونی}} Sr^{2+} + 2OH^-$$

پاسخ تشریحی برای حل سؤال ابتدا معادلهٔ واکنش BaO با آب را می‌نویسیم:

$$BaO + H_2O \rightarrow Ba(OH)_2 \xrightarrow{\text{تفکیک یونی}} Ba^{2+}(aq) + 2OH^-(aq)$$

با توجه به pH محلول می‌توانیم به غلظت یون هیدرونیوم برسیم و با توجه به رابطهٔ $[H^+][OH^-] = 10^{-14}$، داریم:

$$[H^+] = 10^{-pH} \Rightarrow [H^+] = 10^{-12/7} = 10^{-13+0/3} = 10^{-13} \times 10^{0/3} = 10^{-13} \times 2\,mol.L^{-1}$$

$$[OH^-] = \frac{10^{-14}}{[H^+]} = 5 \times 10^{-2}\,mol.L^{-1}$$

در ادامه از غلظت یون هیدروکسید به میزان BaO و درصد خلوص آن می‌رسیم:

$$\text{ناخالص } 15g = 5 \times 10^{-2}\frac{mol}{L}OH^- \times 0/5L\,\text{محلول} \times \frac{1molBaO}{2molOH^-} \times \frac{153gBaO}{1molBaO} \times \frac{100g\,\text{ناخالص}}{xg\,\text{خالص}}$$

$$\Rightarrow \frac{153 \times 2/5}{2x} = 15 \Rightarrow x = \frac{153 \times 2/5}{30} = \%12/75$$

درصد خلوص BaO اولیه برابر ۱۲/۷۵٪ است.

تست و پاسخ ۹۸

کدام مطلب درست است؟

۱) آرنیوس نخستین شیمی‌دانی بود که به ویژگی‌های اسیدها و بازها و واکنش‌های آن‌ها پی برد.

۲) با حل‌کردن مقداری HCl در آب در دمای ثابت، غلظت یون هیدرونیوم و در نتیجه حاصل $[H^+][OH^-]$ افزایش می‌یابد.

۳) با انحلال هر ترکیب مولکولی قطبی در آب، یک محلول الکترولیت ایجاد می‌شود.

۴) اگر غلظت یون هیدروکسید در محلول نیم‌مولار اسید HA در دمای اتاق برابر $10^{-13}\,mol.L^{-1}$ باشد، ثابت یونش HA در این دما برابر $2/5 \times 10^{-2}$ است.

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ تشریحی در همهٔ محلول‌های آبی در دمای ۲۵°C، رابطهٔ $[H^+][OH^-] = 10^{-14}$ برقرار می‌باشد؛ هم‌چنین رابطهٔ ثابت یونش HA به صورت زیر است:

$$HA \rightleftharpoons H^+ + A^-$$

$$K_a = \frac{[H^+][A^-]}{[HA]_{\text{تعادلی}}}$$

حالا با توجه به رابطه‌های بالا، ابتدا از غلظت یون هیدروکسید به غلظت یون هیدرونیوم می‌رسیم و با استفاده از غلظت محلول HA، K_a را محاسبه می‌کنیم:

$$[H^+][OH^-] = 10^{-14} \Rightarrow [H^+] = 10^{-1}\,mol.L^{-1}$$

$$\text{غلظت یون } -H^+ \text{ غلظت اولیهٔ } HA = HA \text{ غلظت تعادلی} = 0/5 - 0/1 = 0/4\,mol.L^{-1}$$

$$K_a = \frac{(0/1)^2}{0/5 - 0/1} = \frac{10^{-2}}{0/4} = 2/5 \times 10^{-2}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) آرنیوس بر روی رسانایی الکتریکی محلول‌های آبی کار می‌کرد و پیش از او شیمی‌دانان با ویژگی‌های اسیدها و بازها و نیز برخی واکنش‌های آن‌ها آشنا بودند.

۲) در دمای ثابت، حاصل $[H^+][OH^-]$ در آب و محلول‌های آبی، عددی ثابت است. با حل‌کردن مقداری HCl در آب، $[H^+]$ افزایش و $[OH^-]$ کاهش می‌یابد و در نتیجه حاصل $[H^+][OH^-]$ ثابت باقی می‌ماند.

۳) مثلاً اتانول (C_2H_5OH)، یک ترکیب مولکولی قطبی است اما به صورت مولکولی در آب حل می‌شود و محلول آن، غیرالکترولیت است.

تست و پاسخ ۹۹

اگر طی واکنش زیر که با محلول هیدروکلریک اسید ۰/۲ مولار شروع شده است، پس از ۱۰۰ ثانیه، pH سامانه ۰/۴ واحد تغییر کند، سرعت مصرف یون برمید، چند $mol.L^{-1}.s^{-1}$ است و اگر حجم محلول سامانه برابر ۰/۱ لیتر باشد، چند گرم برم مایع تشکیل خواهد شد؟ $(Br = 80 g.mol^{-1})$

$$5Br^-(aq) + BrO_3^-(aq) + 6H^+(aq) \rightarrow 3Br_2(l) + 3H_2O(l)$$

۱) 12×10^{-3} ، ۴/۸

۲) 12×10^{-3} ، ۰/۹۶

۳) 10^{-3} ، ۴/۸

۴) 10^{-3} ، ۰/۹۶

پاسخ: گزینهٔ ۴

مشاوره یکی از مباحثی که سؤال ترکیبی زیاد از آن می‌بینیم، pH و مسائل آن است که خیلی از بچه‌ها از آن فرار می‌کنند! توجه کنید در این سؤال تنها قسمت مربوط به pH، تبدیل pH به تغییرات غلظت یون هیدرونیوم و رابطهٔ $pH = -\log[H^+]$ است و عمدهٔ سؤال، مربوط به مباحث پایه‌ای استوکیومتری و سینتیک است.

پاسخ تشریحی قسمت اول سؤال:

$$5Br^- + BrO_3^- + 6H^+ \rightarrow 3Br_2 + 3H_2O$$

در این واکنش، با مصرف HCl، غلظت یون H^+ کاهش می‌یابد، از تفاوت غلظت یون H^+ به مقدار مصرف‌شدهٔ آن می‌رسیم:

$$pH_{\text{محلول اولیه}} = -\log[H^+] = -\log 0/2 = 0/7$$

$$\Delta pH = 0/4 \Rightarrow pH_{\text{محلول ثانویه}} = 1/1 \Rightarrow [H^+]_{\text{محلول ثانویه}} = 10^{-1/1} = 10^{-2+0/9} = 8\times10^{-2}\, mol.L^{-1}$$

$$\bar{R}(H^+) = \frac{-([H^+]_2 - [H^+]_1)}{\Delta t} = \frac{0/12}{100} = 12\times10^{-4}\, mol.L^{-1}.s^{-1}$$

از رابطهٔ سرعت مصرف یون H^+ به سرعت مصرف یون Br^- می‌رسیم:

$$\frac{\bar{R}(H^+)}{6} = \frac{\bar{R}(Br^-)}{5} \Rightarrow \bar{R}(Br^-) = 10^{-3}\, mol.L^{-1}.s^{-1}$$

قسمت دوم سؤال: برای محاسبهٔ جرم Br_2 تولیدشده از تغییرات غلظت یون H^+ استفاده می‌کنیم، بنابراین:

$$\text{تغییرات غلظت یون } H^+ = 0/2 - 8\times10^{-2} = 12\times10^{-2}$$

$$12\times10^{-2}\,\frac{mol}{L}H^+ \times 0/1L_{\text{محلول}} \times \frac{3 mol\, Br_2}{6 mol\, H^+} \times \frac{160 g\, Br_2}{1 mol\, Br_2} = 96\times10^{-2}\, g\, Br_2$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

تست و پاسخ ۱۰۰

کدام موارد از مطالب زیر دربارهٔ دومین گاز فراوان هوای پاک و خشک، درست است؟

الف) در سلول سوختی هیدروژن برخلاف فرایند خوردگی آهن در محیط اسیدی، آب تولید می‌کند.

ب) در برخی از واکنش‌های حذف آلاینده‌ها در مبدل کاتالیستی خودروهای بنزینی، به عنوان واکنش‌دهنده و در برخی از آن‌ها به عنوان فراورده، حضور دارد.

پ) هر چند گازی واکنش‌پذیر است اما با فلزهای نجیبی مانند طلا و پلاتین، واکنش نمی‌دهد.

ت) در واکنش تجزیهٔ هیدروژن پراکسید همانند واکنش مخلوط آلومینیم و سدیم هیدروکسید با آب، تولید می‌شود.

ث) انحلال‌پذیری آن در شرایط یکسان در آب از گازهای N_2 و NO بیشتر و از گاز CO_2 کم‌تر است.

۱) الف ـ ب ـ ت ۲) ب ـ پ ۳) پ ـ ت ـ ث ۴) ب ـ ث

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ تشریحی عبارت‌های «ب» و «پ» درست‌اند.

دومین گاز فراوان هوای خشک و پاک، اکسیژن (O_2) است.

بررسی عبارت‌ها:

الف) واکنش کلی سلول سوختی هیدروژن ـ اکسیژن به صورت:

$$2H_2(g) + O_2(g) \rightarrow \underbrace{2H_2O(g)}_{\text{تولید آب}}$$

و نیم‌واکنش کاتدی فرایند خوردگی در محیط مرطوب و اسیدی به صورت زیر است:

نیم‌واکنش کاتدی خوردگی در محیط اسیدی: $4H^+ + O_2 + 4e^- \rightarrow \underbrace{2H_2O}_{\text{تولید آب}}$

نیم‌واکنش کاتدی خوردگی در محیط مرطوب: $2H_2O + 4e^- + O_2 \rightarrow 4OH^-$

ب) در مبدل کاتالیستی خودروهای بنزینی، طی واکنش‌های سوختن هیدروکربن (C_xH_y) و کربن مونوکسید (CO)، اکسیژن مصرف و طی واکنش تجزیهٔ نیتروژن مونوکسید (NO)، اکسیژن تولید می‌شود:

$$C_xH_y + O_2 \rightarrow CO_2 + H_2O$$

$$CO + O_2 \rightarrow CO_2$$

$$NO \rightarrow N_2 + O_2$$

پ) اکسیژن با طلا و پلاتین واکنش نمی‌دهد، اما با نقره و مس واکنش می‌دهد.

ت) واکنش تجزیهٔ هیدروژن پراکسید (H_2O_2) به صورت: $H_2O_2 \xrightarrow{KI(aq)} H_2O + O_2$

و واکنش مخلوط سدیم هیدروکسید و آلومینیم با آب به صورت: $NaOH + Al + H_2O \rightarrow H_2 + NaAl(OH)_4$

است که در واکنش اول برخلاف واکنش دوم، اکسیژن تولید می‌شود.

ث) در شرایط یکسان، مقایسهٔ انحلال‌پذیری گازهای NO، N_2، O_2 و CO_2 به صورت زیر است:

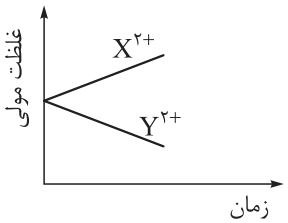
انحلال‌پذیری: $CO_2 > NO > O_2 > N_2$

(NO: با آب واکنش می‌دهد؛ O_2: جرم مولی بیشتر از N_2؛ CO_2: مادهٔ قطبی)

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

تست و پاسخ ۱۰۱

با توجه به قدرمطلق پتانسیل کاهشی استاندارد فلزهای X و Y و نمودار تغییر غلظت یون‌ها در سلول گالوانی حاصل از این دو فلز، کدام مطلب به یقین درست است؟



$$X^{2+}(aq)+2e^- \rightarrow X(s) \qquad |E^\circ| = 0/24\ V$$

$$Y^{2+}(aq)+2e^- \rightarrow Y(s) \qquad |E^\circ| = 0/85\ V$$

۱) emf سلول گالوانی حاصل از این دو نیم‌سلول، برابر ۱/۰۹ ولت است.

۲) قدرت اکسندگی X^{2+} بیشتر از Y^{2+} است.

۳) فلز Y با محلول ۱مولار هیدروکلریک اسید واکنش نمی‌دهد.

۴) پتانسیل کاهشی استاندارد دو فلز X و Y، هم‌علامت نیست.

پاسخ: گزینهٔ ۳

نکته در سلول گالوانی، آند محل اکسایش و کاتد محل کاهش است؛ بنابراین، در آند غلظت کاتیون فلزی افزایش و در کاتد، غلظت کاتیون فلزی کاهش می‌یابد.

پاسخ تشریحی با توجه به نمودار داده‌شده، غلظت X^{2+} افزایش و غلظت Y^{2+} کاهش یافته است. بنابراین در نیم‌سلول حاوی الکترود X، اکسایش و در نیم‌سلول حاوی الکترود Y، کاهش رخ می‌دهد.

در سلول گالوانی X–Y که X الکترود آندی و Y الکترود کاتدی است، داریم:

$$E^\circ_{\text{آند}} < E^\circ_{\text{کاتد}} \Rightarrow E^\circ_X < E^\circ_Y \Rightarrow \begin{cases} E^\circ_X = +0/24 \text{ یا } -0/24\ V \\ E^\circ_Y = +0/85 \text{ یا } -0/85\ V \end{cases}$$

با توجه به شرط $E^\circ_X < E^\circ_Y$، E°_Y نمی‌تواند $-0/85$ ولت باشد ولی E°_X می‌تواند $0/24$ یا $-0/24$ ولت باشد.

بررسی گزینه‌ها:

۱) با توجه به این‌که E°_X می‌تواند $\pm 0/24$ ولت باشد، emf سلول گالوانی $X-Y$ می‌تواند مقادیر ۰/۶۱ یا ۱/۰۹ ولت باشد.

$$emf = E^\circ_{\text{کاتد}} - E^\circ_{\text{آند}} \Rightarrow \begin{cases} (1)\ emf = 0/85 - 0/24 = 0/61V \\ (2)\ emf = 0/85 - (-0/24) = 1/09V \end{cases}$$

۲) نیم‌سلول حاوی الکترود X، نیم‌سلول آندی بوده و قدرت کاهندگی X از Y بیشتر است؛ در نتیجه قدرت اکسندگی Y^{2+} از X^{2+} بیشتر خواهد بود (قدرت اکسندگی و کاهندگی با هم رابطهٔ عکس دارند.)

نکته اگر قدرت کاهندگی فلز A از B بیشتر باشد، قدرت اکسندگی فلز B از A بیشتر نخواهد بود بلکه قدرت اکسندگی یون پایدار B از یون پایدار A بیشتر خواهد بود، زیرا فلزها قدرت اکسندگی ندارند!

۳) E° نیم‌واکنش کاهش $Y^{2+} + 2e^- \rightarrow Y$ باید $+0/85V$ باشد؛ بنابراین قدرت کاهندگی Y از H_2 کم‌تر است و فلز Y نمی‌تواند با محلول HCl که حاوی یون H^+ است به صورت خودبه‌خودی واکنش دهد.

نکته فلزهایی با E° مثبت، با محلول ۱ مولار هیدروکلریک اسید واکنش نمی‌دهند!

۴) پتانسیل کاهشی استاندارد X و Y می‌توانند هم‌علامت یا غیرهم‌علامت باشند، زیرا E°_X می‌تواند مثبت یا منفی باشد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

تست و پاسخ ۱۰۲

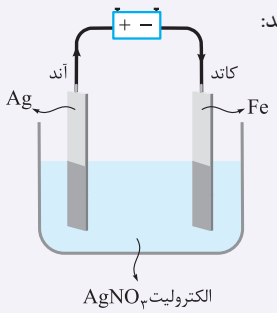
در آبکاری یک قطعهٔ فولادی با فلز نقره، از یک لیتر محلول ۱ مولار نقرهٔ نیترات و در آبکاری قطعهٔ مشابهی (با جرم برابر) با فلز نیکل، از یک لیتر محلول ۱ مولار نیکل (II) سولفات، استفاده شده است. اگر شمار الکترون‌های عبوری از این دو سلول، یکسان و اختلاف جرم دو قطعهٔ آبکاری‌شده برابر ۳۹/۵ گرم باشد، چند مول الکترون از هر یک از این دو سلول عبور کرده است؟

$(Fe = ۵۶, Ni = ۵۸, Ag = ۱۰۸ : g.mol^{-۱})$

۱) ۰/۲۵ ۲) ۰/۵
۳) ۰/۷۵ ۴) ۱

پاسخ: گزینهٔ ۲

نکته در فرایند آبکاری، قطعه‌ای که مورد آبکاری قرار می‌گیرد، به کاتد و ماده‌ای که روی قطعهٔ مربوطه قرار می‌گیرد، به آند متصل می‌شود و الکترولیت مورد استفاده باید از جنس فلزی باشد که برای آبکاری استفاده می‌شود. به مثال زیر توجه کنید:



نیم‌واکنش آندی: $Ag \rightarrow Ag^{+} + e^{-}$

نیم‌واکنش کاتدی: $Ag^{+} + e^{-} \rightarrow Ag$

- در این فرایند، غلظت Ag^{+} ثابت می‌ماند و با تولید یون‌های نقره در آند، این یون‌ها در کاتد مصرف می‌شوند.
- قدرت اکسندگی یا کاهندگی گونه‌ها اهمیتی ندارد، زیرا این فرایند غیرخودبه‌خودی است و به وسیلهٔ باتری قابل انجام می‌باشد.
- الکترون‌ها از آند به کاتد حرکت می‌کنند و کاتیون‌ها به سمت کاتد می‌روند.
- آند به قطب مثبت باتری و کاتد به قطب منفی باتری متصل است *(مثل هر سلول الکترولیتی دیگه‌ای!)*
- تغییر جرم تیغهٔ کاتدی با تیغهٔ آندی برابر است *(البته اگر بازده سلول ۱۰۰٪ باشد.)*

پاسخ تشریحی با توجه به این‌که جرم قطعهٔ فولادی در این دو سلول برابر است، ابتدا با فرض این‌که شمار مول‌های الکترون مبادله‌شده در هر دو سلول برابر x می‌باشد، تغییرات جرم هر دو قطعه را جداگانه محاسبه می‌کنیم:

جرم نقرهٔ اضافه‌شده به قطعهٔ فولادی در محلول نقرهٔ نیترات:

$$Ag^{+} + e^{-} \rightarrow Ag$$

$$x mole^{-} \times \frac{۱ mol Ag}{۱ mole^{-}} \times \frac{۱۰۸ g Ag}{۱ mol Ag} = ۱۰۸x g Ag$$

جرم نیکل اضافه‌شده به قطعهٔ فولادی در محلول نیکل (II) سولفات:

$$Ni^{۲+} + ۲e^{-} \rightarrow Ni$$

$$x mole^{-} \times \frac{۱ mol Ni}{۲ mole^{-}} \times \frac{۵۸ g Ni}{۱ mol Ni} = ۲۹x g Ni$$

اختلاف جرم دو تیغه و در نتیجه شمار مول‌های الکترون مبادله‌شده برابر است با:

$$۱۰۸x - ۲۹x = ۳۹/۵ \Rightarrow ۷۹x = ۳۹/۵ \Rightarrow x = ۰/۵ mole^{-}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

تست و پاسخ ۱۰۳

درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر، به ترتیب در کدام گزینه آمده است؟

- **فناوری شناسایی و تولید آنتی‌بیوتیک از گسترش بیماری‌هایی همچون وبا جلوگیری کرد.**
- **تولید فراوردهٔ فرایند هابر در طی فناوری‌های شیمیایی در گذر زمان، قبل از ویتامین A و اوره $(CO(NH_2)_2)$ بوده است.**
- **در ساعاتی از شبانه‌روز، همزمان با کاهش غلظت گازهای NO و NO_2 در هواکره، غلظت آلوتروپ ناپایدارتر اکسیژن افزایش می‌یابد.**
- **در مبدل کاتالیستی خودروهای دیزلی، از آمونیاک برای حذف اکسیدهای نیتروژن استفاده می‌شود.**
- **برای تأمین انرژی فعال‌سازی واکنش‌ها، می‌توان از گرما یا کاتالیزگر استفاده کرد.**

۱) نادرست ـ درست ـ درست ـ درست ـ درست
۲) نادرست ـ درست ـ درست ـ درست ـ نادرست
۳) درست ـ درست ـ نادرست ـ درست ـ نادرست
۴) درست ـ نادرست ـ درست ـ نادرست ـ نادرست

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ تشریحی عبارت‌های اول و پنجم، نادرست و عبارت‌های دوم، سوم و چهارم درست‌اند.

نکته واکنش‌های حذف آلاینده‌های خروجی از اگزوز خودروها به صورت زیر است:

۱) هر سه واکنش گرماده هستند.

۲) کاتالیزگر واکنش‌های روبه‌رو Pd، Pt و Rh هستند.

۳) O_2 به عنوان واکنش‌دهنده و فراورده در واکنش‌ها شرکت می‌کند.

۴) انرژی فعال‌سازی واکنش (II) از واکنش (I) بیشتر و گرمای آزادشده در واکنش (I) از (II) بیشتر است.

۵) میزان آلایندهٔ خروجی از اگزوز خودروها به صورت $NO < C_xH_y < CO$ است.

I) $2CO + O_2 \rightarrow 2CO_2$

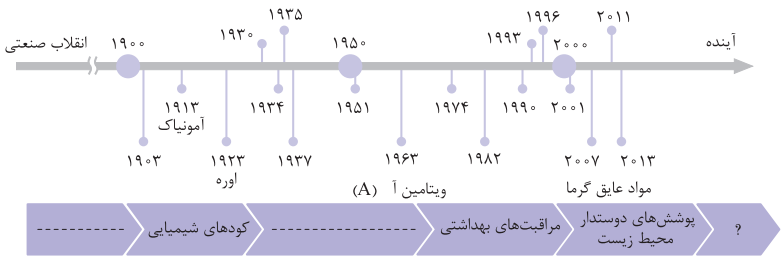
II) $2NO \rightarrow N_2 + O_2$

III) $C_xH_y + (x + \frac{y}{4})O_2 \rightarrow xCO_2 + \frac{y}{2}H_2O$

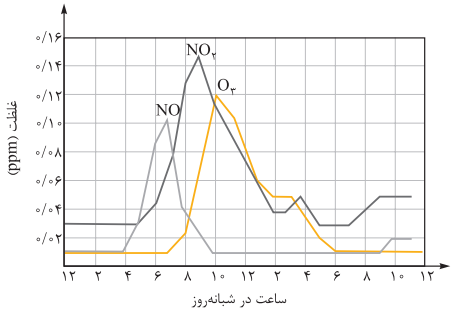
بررسی موارد:

عبارت اول: فناوری تصفیهٔ آب از گسترش بیماری‌هایی همچون وبا در جهان جلوگیری کرده است.

عبارت دوم: فراوردهٔ فرایند هابر، آمونیاک است که قبل از اوره و ویتامین A در گذر زمان تولید شده است.



عبارت سوم: در ساعاتی از شبانه‌روز طی واکنش $NO_2 + O_2 \rightarrow NO + O_3$، در هواکره اوزون تروپوسفری تولید می‌شود که طبق نمودار زیر همزمان غلظت گاز NO هم در هواکره کاهش می‌یابد.



SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

عبارت چهارم: در مبدل کاتالیستی خودروهای دیزلی، طی واکنش اکسایش ـ کاهش آمونیاک مصرف می‌شود.

$$\underset{\downarrow}{NO}+\underset{\downarrow}{NO_2}+\underset{\downarrow}{2NH_3}\rightarrow\underset{\downarrow}{2N_2}+3H_2O$$

$$\underbrace{\underset{\downarrow}{+2}\quad\underset{\downarrow}{+4}}_{\text{گونه‌های اکسنده}}\qquad\underset{\downarrow}{-3}\qquad\underset{\downarrow}{0}$$

گونهٔ کاهنده

عبارت پنجم: کاتالیزگر با تغییر مسیر انجام واکنش و کاهش E_a ، به واکنش‌های شیمیایی سرعت می‌بخشد ولی **تأمین انرژی فعال‌سازی** توسط گرما، فشار و جرقه و ... انجام می‌شود، نه کاتالیزگر!!

تست و پاسخ ۱۰۴

واکنش تعادلی $2NOCl(g)+O_2(g)\rightleftharpoons 2NO_2(g)+Cl_2(g)\ ,\ \Delta H=-37kJ$ ، در یک ظرف دولیتری برقرار است. اگر در حالت تعادل، مقدار گازهای NO_2 ، Cl_2 ، $NOCl$ و O_2 به ترتیب برابر ۰/۴ ، ۰/۲ ، ۰/۰۲ و ۰/۳۲ مول باشد، کدام موارد از مطالب زیر نادرست است؟ (در ابتدا فقط واکنش‌دهنده‌ها در ظرف واکنش وجود داشته‌اند.)

الف) تا لحظهٔ برقراری تعادل، ۷/۴ کیلوژول گرما در واکنش آزاد می‌شود.

ب) مقدار عددی ثابت تعادل واکنش، برابر ۵۰۰ است.

پ) با افزایش دمای ظرف واکنش، تعادل در جهت برگشت جابه‌جا می‌شود.

ت) انتقال مخلوط تعادلی به ظرفی بزرگ‌تر، باعث کاهش ثابت تعادل واکنش می‌شود.

۱) الف ـ پ
۲) پ ـ ت
۳) ب ـ ت
۴) الف ـ ب

پاسخ: گزینهٔ ۳

مشاوره در سؤالات شمارشی، ابتدا گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم که ببینیم می‌توانیم با بررسی کم‌ترین تعداد عبارت‌ها و هم‌چنین عدم بررسی عبارت‌های مسئله‌محور به پاسخ سؤال برسیم یا نه!

پاسخ تشریحی عبارت‌های (ب) و (ت) نادرست‌اند.

در این سؤال با بررسی عبارت‌های (پ) و (ت) که به صورت مفهومی هستند، می‌توان به پاسخ سؤال رسید و حتی نیاز به محاسبات خاصی هم در حل این سؤال نیست.

بررسی عبارت‌ها:

الف) با توجه به این‌که در ابتدای واکنش فقط مواد واکنش‌دهنده در ظرف وجود دارند، می‌توانیم از مول NO_2 یا Cl_2 تولیدی، به میزان گرمای آزادشده در واکنش تا لحظهٔ برقراری تعادل برسیم:

$$0/2\,molCl_2\times\frac{37\,kJ}{1\,molCl_2}=7/4\,kJ$$

ب) رابطهٔ ثابت تعادل در واکنش مورد نظر به صورت $K=\frac{[NO_2]^2[Cl_2]}{[NOCl]^2[O_2]}$ است؛ بنابراین:

$$K=\frac{[\frac{0/4}{2}]^2[\frac{0/2}{2}]}{[\frac{0/02}{2}]^2[\frac{0/32}{2}]}=\frac{(0/2)^2\times 0/1}{(0/01)^2(0/16)}=250$$

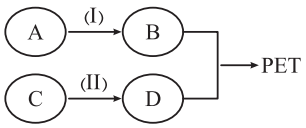
پ) در واکنش‌های تعادلی با افزایش دما، تعادل در جهت مصرف گرما پیش می‌رود؛ بنابراین، چون واکنش گرماده است، با افزایش دما، تعادل در جهت برگشت جابه‌جا شده و مقدار ثابت تعادل کاهش می‌یابد.

ت) تغییر فشار و حجم در تعادل‌های گازی، مقدار ثابت تعادل را تغییر نمی‌دهند و ثابت تعادل فقط به **دما** وابسته است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

تست و پاسخ ۱۰۵

چند مورد از مطالب زیر، دربارهٔ نمودار داده‌شده که روند کلی تولید پلیمر سازندهٔ بطری آب را نشان می‌دهد، درست است؟ $(H=1, C=12, O=16 : g.mol^{-1})$



- اگر جرم مولی B برابر با $62 g.mol^{-1}$ باشد، فراوردهٔ حاصل از واکنش کامل C و گاز هیدروژن، با اوکتن هم‌پار است.
- واکنش بین B و D از نوع اکسایش ـ کاهش نیست و فرمول شیمیایی فراوردهٔ آلی این واکنش، $+C_{10}H_8O_4+_n$ است.
- اگر شمار پیوندهای دوگانه در D با شمار پیوندهای دوگانه در مولکول نفتالن برابر باشد، در واکنش (II)، عدد اکسایش اتم منگنز ۴ درجه کاهش می‌یابد.
- در ساختار هر دو ترکیب A و C، اتم کربنی با عدد اکسایش ۱- وجود دارد.

۱) ۱ ۲) ۲
۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۲

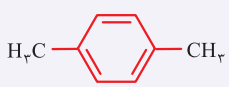
پاسخ تشریحی عبارت‌های اول و دوم درست‌اند.

نکته واکنش تولید پلیمر سازندهٔ بطری آب (PET) را می‌توان به صورت زیر نشان داد:

اتن C_2H_4 —(محلول رقیق پتاسیم پرمنگنات)→ اتیلن گلیکول $C_2H_6O_2$

پارازایلن C_8H_{10} —(محلول غلیظ پتاسیم پرمنگنات)→ ترفتالیک اسید $C_8H_6O_4$

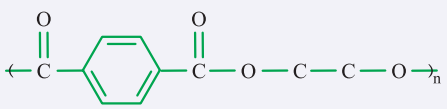
⇒ پلی اتیلن ترفتالات $(C_{10}H_8O_4)_n$



پارازایلن



ترفتالیک اسید

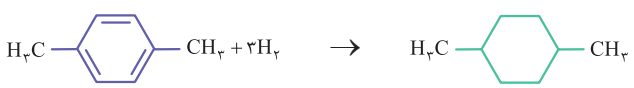


PET

بررسی عبارت‌ها:

عبارت اول: جرم مولی اتیلن گلیکول $(C_2H_6O_2)$ برابر ۶۲ گرم بر مول می‌باشد؛ بنابراین A همان اتن و C همان پارازایلن است. معادلهٔ واکنش کامل پارازایلن با گاز هیدروژن به صورت زیر است:

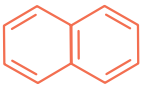
$$C_8H_{10} + 3H_2 \rightarrow C_8H_{16}$$



نکته در فرایند سیرشدن ترکیب‌های غیرخطی، فقط پیوندهای دوگانه یا سه‌گانهٔ کربن ـ کربن به پیوند یگانه تبدیل می‌شوند و هر پیوند دوگانه با یک مولکول هیدروژن و هر پیوند سه‌گانه با دو مولکول هیدروژن سیر می‌شود.

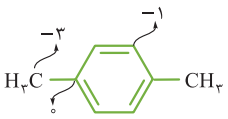
عبارت دوم: واکنش بین B و D از نوع استری‌شدن است که واکنش اکسایش ـ کاهش محسوب نمی‌شود و فرمول واحد تکرارشوندهٔ PET، $C_{10}H_8O_4$ است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

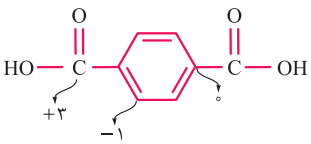
عبارت سوم: نفتالن با فرمول مولکولی $C_{10}H_8$ و فرمول ساختاری  ، دارای ۵ پیوند دوگانه است.

ترفتالیک اسید نیز دارای ۵ پیوند دوگانه در ساختار خود می‌باشد، اما در واکنش (II)، یون پرمنگنات به MnO_2 تبدیل می‌شود که در این فرایند عدد اکسایش منگنز از ۷+ به ۴+ (یعنی ۳ واحد) کاهش می‌یابد.

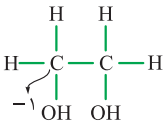
عبارت چهارم: در اتن، کربنی با عدد اکسایش (۱−) وجود ندارد. عدد اکسایش اتم‌های کربن در ۴ ترکیب داده‌شده را ببینید:



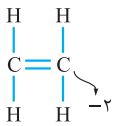
پارازایلن



ترفتالیک اسید



اتیلن گلیکول



اتن

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir