خیلی سبز!
آزمون
تجربی | ریاضی | انسانی

آزمون آزمایشی خیلی سبز

رشته ریاضی

پایه دوازدهم	مرحله هجدهم
سال تحصیلی ۰۴-۱۴۰۳	تاریخ برگزاری: ۵/اردیبهشت/۱۴۰۴

دفترچه شماره یک

حسابان و ریاضیات پایه	هندسه	ریاضیات گسسته و آمار و احتمال	بودجه‌بندی دروس
ریاضی (۱) کل کتاب صفحهٔ ۱ تا ۱۷۰ حسابان (۱) کل کتاب صفحهٔ ۱ تا ۱۵۱ حسابان (۲) کل کتاب صفحهٔ ۱ تا ۱۴۴	هندسه (۱) کل کتاب صفحهٔ ۹ تا ۹۶ هندسه (۲) کل کتاب صفحهٔ ۹ تا ۷۵ هندسه (۳) کل کتاب صفحهٔ ۹ تا ۸۶	آمار و احتمال کل کتاب صفحهٔ ۱ تا ۱۲۱ ریاضیات گسسته کل کتاب صفحهٔ ۱ تا ۸۴	

مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخگویی
ریاضیات	۴۰	۱	۴۰	۷۰ دقیقه
مجموع	۴۰ سؤال			۷۰ دقیقه

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

این آزمون نمره منفی دارد.

دفترچه سؤالات آزمون‌های خیلی سبز، از همه نظر (تعداد سؤال‌ها، زمان پاسخگویی، نوع چینش گزینه‌ها، نوع صفحه‌آرایی، فونت سؤالات، سایز کلمات و اعداد، جای خالی محل انجام محاسبات و...) در شبیه‌ترین حالت به دفترچه سؤالات کنکور سراسری طراحی می‌شود.

ویژه کنکوری‌های ۱۴۰۴

آزمون جامع - مطابق با کنکور سراسری

Azmoon.kheilisabz.com

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱- مجموع بیست جملهٔ اول دنبالهٔ $a_n = \frac{3n}{2} - 2$ کدام است؟

۱) ۲۷۰ ۲) ۲۸۵ ۳) ۲۸۰ ۴) ۲۷۵

۲- اگر ارزش گزارهٔ $(p \wedge q) \Rightarrow (\sim r \vee s)$ نادرست باشد، ارزش کدام گزینه با بقیه متفاوت است؟

۱) $p \Rightarrow q$ ۲) $r \Rightarrow s$ ۳) $s \Rightarrow p$ ۴) $q \Rightarrow r$

۳- سهمی به معادلهٔ $f(x) = -2x^2 - 4x + 3 - a$ از ناحیهٔ اول دستگاه مختصات عبور نمی‌کند. بیشترین مقدار عرض رأس سهمی کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۴- جواب‌های معادلهٔ $2x^2 + x + \beta = 0$ اعداد α و -2 است. جواب‌های کدام معادلهٔ اعداد $\frac{1}{\alpha}$ و $\frac{1}{\beta}$ هستند؟

۱) $18x^2 - 9x - 4 = 0$ ۲) $18x^2 - 9x - 2 = 0$

۳) $9x^2 - 6x - 2 = 0$ ۴) $9x^2 - 6x - 1 = 0$

۵- دو ضلع مجاور یک مربع بر خطوط $3x - 4y = 3$ و $ax + 6y = 8$ قرار دارند. مرکز مربع کدام نقطه می‌تواند باشد؟

۱) $(-6,1)$ ۲) $(6,-1)$ ۳) $(-4,2)$ ۴) $(4,-2)$

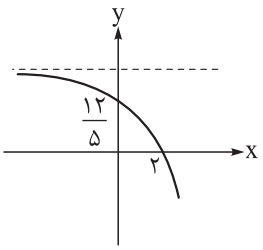
۶- دامنهٔ تابع $f(x) = \sqrt{-1 + \frac{k}{\sqrt{x-1}}}$ به صورت $[1,1+5k)$ است. مقدار k کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۵ ۴) ۷

۷- اگر تابع $f(x) = \frac{x+1}{4} - \frac{\sqrt{x}}{2}$ با دامنهٔ $[1,+\infty)$، تابع وارون تابع $g(x) = ax + a\sqrt{x} + b$ باشد، حاصل $a + b$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۸- نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{a}(b - 5^{x+c})$ به صورت مقابل است. حاصل $\frac{a}{b}$ کدام است؟



۱) $-\frac{3}{5}$ ۲) $\frac{3}{5}$

۳) $\frac{2}{5}$ ۴) $-\frac{2}{5}$

۹- حاصل عبارت $P = \frac{\sin 2x + \cos 4x}{\sin x - \cos x}$ به ازای $x = \frac{\pi}{12}$ کدام است؟

۱) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) $-\sqrt{2}$

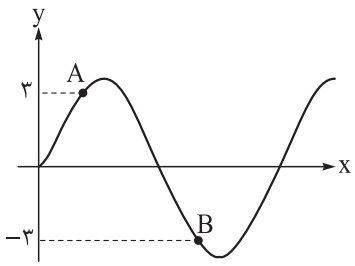
محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۰- در مثلث ABC هرگاه $۴\tan(\hat{B}-\hat{C})=۳$، حاصل عبارت $\frac{۴+۵\cos\hat{A}}{\sin\hat{B}\sin\hat{C}}$ کدام است؟

۱) -۵ ۲) ۵ ۳) -۱۰ ۴) ۱۰

۱۱- بخشی از نمودار تابع $f(x)=۴\sin ۳x$ در شکل زیر رسم شده است. شیب پاره‌خط AB کدام است؟



۱) $-\frac{۱۸}{\pi}$
۲) $-\frac{۱۲}{\pi}$
۳) $-\frac{۶}{\pi}$
۴) $-\frac{۴}{\pi}$

۱۲- اگر α و β انتهای کمان جواب‌های معادلهٔ $\sin x-۲\cos x=۱-\frac{۱}{۲}\tan x$ در ناحیهٔ سوم دایرهٔ مثلثاتی باشند، حاصل $\cos^۲\alpha+\cos^۲\beta$ کدام است؟

۱) $\frac{۹}{۱۰}$ ۲) $\frac{۱}{۲۰}$ ۳) $\frac{۱}{۱۰}$ ۴) $\frac{۹}{۲۰}$

۱۳- تابع $f(x)=\sqrt{۱+۲x}$ مفروض است. اگر $\lim\limits_{x\to ۴}\frac{f(x)-a}{x-۴}=\frac{k}{a}$ باشد، مقدار k کدام است؟

۱) -۱ ۲) -۲ ۳) ۱ ۴) ۲

۱۴- برای تابع $f(x)=x+۲\sqrt{x-۱}$، اگر $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f^{-۱}(kx)}{f(x)}=۴$ باشد، مقدار k کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۱۶ ۴) ۸

۱۵- تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{۶x^۲+(m+۳)x+\frac{m}{۲}}}{|۲x^۳+a^۲|} & ;\ x\neq a\\ b\sqrt{۲m} & ;\ x=a\end{cases}$ در $\mathbb{R}$ پیوسته است. مقدار b کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

۱۶- فرض کنید $P(x)=x^۳+۶x^۲+ax+b$ باشد، اگر هر دو چندجمله‌ای $P(\frac{x}{۲})$ و $P'(x)$ بر $P''(x)$ بخش‌پذیر باشند، مقدار b کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۴ ۳) -۷ ۴) -۴

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۷- برای ساخت یک قوطی فلزی استوانه‌ای‌شکل بدون در با حجم 8π، حداقل مساحت فلز به‌کاررفته کدام است؟

۱) 12π ۲) 16π ۳) 14π ۴) 8π

۱۸- تابع $f(x)=|x-a|\sqrt[3]{ax+b}$ در $x=2$ دارای نقطهٔ گوشه و در $x=1$ دارای مماس قائم است. مقدار b کدام است؟

۱) -1 ۲) 1 ۳) 2 ۴) -2

۱۹- خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=\frac{ax}{x-2}$ در $x=-1$ دارای عرض از مبدأ ۲ است. طول مینیمم نسبی تابع $g(x)=xf(x)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۰- اگر برای سه مجموعهٔ ناتهی A، B و C بدانیم $A=B\cup C$، $B=A\cup C$ و $C=A\cup B$، آن‌گاه متمم مجموعهٔ $(A-B)\cup[(C-B)'\cap(B\cap A)']$ کدام است؟

۱) $B\cup C$ ۲) $B'\cap C$ ۳) $A'\cap B$ ۴) $A\cup B'$

۲۱- اگر A و B دو پیشامد سازگار از فضای نمونه، $P(A\mid B)=3P(B\mid A)$ و $P(A-B)=5P(B-A)$ باشد، چه‌قدر احتمال دارد که پیشامد B رخ ندهد، اگر بدانیم پیشامد A رخ داده است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{5}{6}$ ۴) صفر

۲۲- سه کیسه که هر کدام شامل ۶ مهره باشند داریم. در کیسهٔ اول ۱ مهرهٔ قرمز، در کیسهٔ دوم ۲ مهرهٔ قرمز و در کیسهٔ سوم ۳ مهرهٔ قرمز داریم و بقیهٔ مهره‌ها آبی هستند. به تصادف یک کیسه را انتخاب می‌کنیم و از آن یک مهره خارج می‌کنیم. اگر مهرهٔ خارج‌شده قرمز باشد، با چه احتمالی این مهره از کیسهٔ سوم خارج نشده است؟

۱) $\frac{1}{5}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۲۳- ضریب تغییرات داده‌های $c-1, a, 2, ab^3$ برابر صفر است. واریانس داده‌های a^3, b^2, c کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{14}{3}$ ۳) $\frac{26}{3}$ ۴) $\frac{38}{3}$

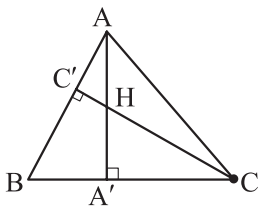
۲۴- نقاطی از دایرهٔ $C(O,5)$ که از خط d به فاصلهٔ x قرار دارند، رأس‌های یک ذوزنقه با قاعده‌های ۶ و ۸ هستند. بیشترین مساحت این ذوزنقه کدام است؟

۱) ۳۵ ۲) ۴۲ ۳) ۴۹ ۴) ۵۶

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۵- در شکل زیر، ارتفاع‌های AA' و CC' در نقطهٔ H متقاطع‌اند. اگر $A'B < A'H$ باشد، آن‌گاه نسبت $\frac{CH}{AB}$ چگونه است؟



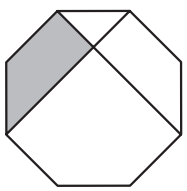
۱) برابر با ۱

۲) بیشتر از ۱

۳) کم‌تر از ۱

۴) هر مقداری می‌تواند داشته باشد.

۲۶- مطابق شکل اگر طول ضلع هشت‌ضلعی منتظم برابر ۲ باشد، مساحت قسمت رنگی کدام است؟



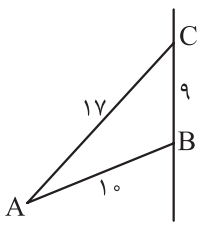
۱) $۲\sqrt{۲}+۱$

۲) $۲\sqrt{۲}-۱$

۳) $۲\sqrt{۲}+۲$

۴) $۴\sqrt{۲}+۲$

۲۷- مطابق شکل، حجم حاصل از دوران مثلث ABC حول ضلع BC کدام است؟



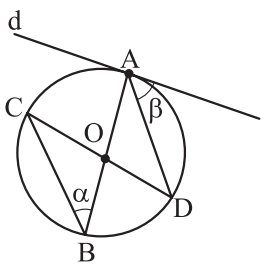
۱) ۲۳۲π

۲) ۲۱۶π

۳) ۱۹۲π

۴) ۱۸۰π

۲۸- در شکل زیر، O مرکز دایره و خط d در نقطهٔ A بر دایره مماس است. کدام رابطه همواره بین دو زاویهٔ α و β برقرار است؟



۱) $\alpha+\beta=۹۰^\circ$

۲) $\alpha=\beta$

۳) $۲\alpha+\beta=۱۸۰^\circ$

۴) $\alpha+۲\beta=۱۸۰^\circ$

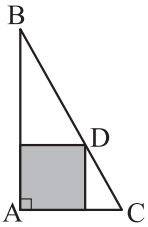
۲۹- نقطهٔ A به فاصلهٔ $\sqrt{۶}$ از خط d قرار دارد. تصویر A در بازتاب نسبت به خط d، نقطهٔ A' و تصویر A' در دوران حول A به اندازهٔ ۱۲۰°، نقطهٔ A'' است. فاصلهٔ A'' از خط AA' کدام است؟

۱) ۳ ۲) $۳\sqrt{۲}$ ۳) $۲\sqrt{۳}$ ۴) $\sqrt{۶}$

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۰- چهارضلعی مشخص‌شده در شکل، یک مربع است. اگر $BC = 3AC$ باشد، آن‌گاه حاصل $\frac{CD}{BD}$ کدام است؟



۱) $\frac{1}{3}$
۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
۳) $\frac{1}{2}$
۴) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

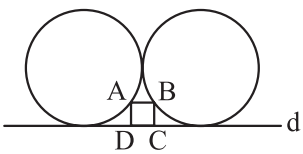
۳۱- اگر A یک ماتریس مربعی و $A^3 + A^2 + A + I = \bar{O}$ باشد، آن‌گاه حاصل $A^{12} + A^9 + A^6 + A^3$ کدام است؟

۱) $\bar{O}$
۲) $2(A + I)$
۳) $2(A - I)$
۴) $4I$

۳۲- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & x \\ -1 & 5 & 3 \\ 2 & -8 & -2 \end{bmatrix}$، آن‌گاه دترمینان ماتریس $\frac{1}{3}(A - I)$ همواره برابر کدام است؟

۱) ۶
۲) ۲
۳) $\frac{2}{3}$
۴) $\frac{x}{9}$

۳۳- در شکل زیر، خط d مماس‌مشترک دو دایرهٔ مماس خارج هم‌اندازه به شعاع ۵ است. مساحت مربع $ABCD$ کدام است؟



۱) ۵
۲) ۴
۳) ۳
۴) ۲

۳۴- طول مماسی که از مبدأ مختصات بر دایره‌ای به مرکز کانون سهمی $x^2 - 4x + 8y + 12 = 0$ و شعاع ۳ رسم می‌شود، کدام است؟

۱) $\sqrt{3}$
۲) $\sqrt{2}$
۳) ۳
۴) ۲

۳۵- اگر $\vec{a} = (1,1,-2)$، $\vec{b} = (m,3,-1)$ و $|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{30}$ باشد، آن‌گاه حاصل $\vec{a}.\vec{b}$ کدام است؟

۱) $-3/5$
۲) ۴
۳) -7
۴) ۶

۳۶- باقی‌ماندهٔ تقسیم دو عدد ۳۳ و ۱۲۴ بر عدد $b > 1$، با هم برابر است. باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد ۲۷۹ بر b، چند مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۴
۲) ۳
۳) ۲
۴) ۱

۳۷- جواب‌های طبیعی معادلهٔ سیالهٔ $15x_1 + 39x_2 = 459$ را در معادلهٔ $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20$ قرار می‌دهیم. معادلهٔ جدید چند جواب در مجموعهٔ اعداد صحیح نامنفی دارد؟

۱) ۳۶
۲) ۴۵
۳) ۵۵
۴) ۶۶

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۸- در مربع لاتین روبه‌رو، $\frac{a+b+c+d}{e+f+g+h}$ کدام است؟

x	e	f	x+۱
x−۱	a	x+۲	b
x+۱	g	h	d
c			

۱) ۱
۲) $\frac{۱۳}{۸}$
۳) $\frac{۴}{۵}$
۴) $\frac{۵}{۴}$

۳۹- در گرافی با ۵ رأس، از هر رأس به رأس دیگر دقیقاً یک مسیر وجود دارد. یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال در این گراف، حداکثر چند عضو دارد؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۴۰- در یک کلاس ۴۵ نفری، ۱۷ نفر به فوتبال، ۱۹ نفر به بسکتبال، ۲۵ نفر به والیبال، ۸ نفر به فوتبال و بسکتبال، ۹ نفر به فوتبال و والیبال، ۱۲ نفر به بسکتبال و والیبال و ۴ نفر به هر سه رشته علاقه‌مند هستند. چند نفر از اعضای این کلاس به هیچ‌یک از رشته‌های فوتبال، بسکتبال و والیبال علاقه‌ای ندارند؟

۱) صفر
۲) ۵
۳) ۹
۴) ۱۰

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

آزمون آزمایشی خیلی سبز

رشته ریاضی

پایه دوازدهم	مرحله هجدهم
سال تحصیلی ۰۴-۱۴۰۳	تاریخ برگزاری: ۵/اردیبهشت/۱۴۰۴

دفترچه شماره دو

فیزیک	شیمی
فیزیک (۱) کل کتاب صفحهٔ ۱ تا ۱۴۹	شیمی (۱) کل کتاب صفحهٔ ۱ تا ۱۲۲
فیزیک (۲) کل کتاب صفحهٔ ۱ تا ۱۳۰	شیمی (۲) کل کتاب صفحهٔ ۱ تا ۱۲۳
فیزیک (۳) کل کتاب صفحهٔ ۱ تا ۱۵۶	شیمی (۳) کل کتاب صفحهٔ ۱ تا ۱۲۳

بودجه‌بندی دروس

مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخگویی
فیزیک	۳۵	۴۱	۷۵	۴۵ دقیقه
شیمی	۳۰	۷۶	۱۰۵	۳۰ دقیقه
مجموع	۶۵ سؤال			۷۵ دقیقه

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

این آزمون نمره منفی دارد.

دفترچه سؤالات آزمون های خیلی سبز، از همه نظر (تعداد سؤال ها، زمان پاسخگویی، نوع چینش گزینه ها، نوع صفحه آرایی، فونت سؤالات، سایز کلمات و اعداد، جای خالی محل انجام محاسبات و...) در شبیه ترین حالت به دفترچه سؤالات کنکور سراسری طراحی می شود.

ویژه کنکوری های ۱۴۰۴

آزمون جامع - مطابق با کنکور سراسری

Azmoon.kheilisabz.com

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۱- تولیوم $^{168}_{69}Tm$ ایزوتوپ ناپایداری است که واپاشی آن از طریق گسیل ۲ ذرهٔ α و یک ذرهٔ β^- صورت می‌گیرد. در هستهٔ نهایی این واپاشی، اختلاف تعداد نوترون‌ها و پروتون‌ها کدام است؟

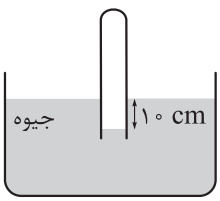
۱) ۲۸ ۲) ۳۰ ۳) ۶۰ ۴) ۶۶

۴۲- طول موج چندمین خط طیفی اتم هیدروژن در رشتهٔ لیمان $(n' = 1)$ برابر $112/5\ nm$ است؟ $(R = 0/01\ (nm)^{-1})$

۱) سومین خط ۲) دومین خط

۳) اولین خط ۴) چهارمین خط

۴۳- در شکل زیر، فشار هوا برابر $75\ cmHg$ است. فشار گاز محبوس در لوله چند سانتی‌متر جیوه است؟



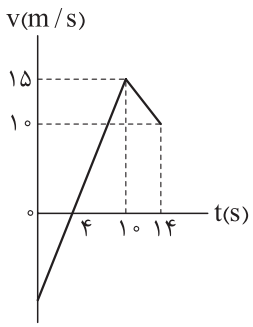
۱) ۶۵ ۲) ۷۰

۳) ۸۰ ۴) ۸۵

۴۴- قابی مربع‌شکل به ضلع $40\ cm$ و شامل ۱۰۰ حلقهٔ رسانا، موازی با خطوط میدان مغناطیسی یکنواختی به بزرگی $500\ G$ قرار دارد. اگر این قاب در مدت $0/02\ s$ بچرخد و با خطوط میدان، زاویهٔ 30° بسازد، در این مدت بزرگی نیروی محرکهٔ القایی متوسط در قاب چند ولت است؟

۱) ۱۰۰ ۲) ۲۰۰ ۳) ۱۰ ۴) ۲۰

۴۵- نمودار سرعت ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. اندازهٔ شتاب متوسط متحرک در ۳ ثانیهٔ دوم، چند برابر اندازهٔ شتاب متوسط متحرک در ۲ ثانیهٔ ششم است؟



۱) ۱

۲) ۲

۳) $\frac{1}{2}$

۴) $\frac{3}{2}$

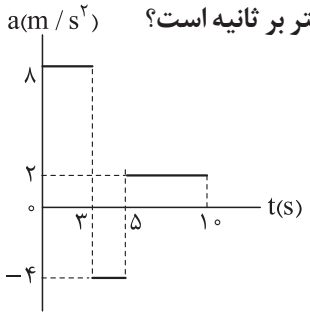
۴۶- در مسیری مستقیم، خودروی A با سرعت ثابت v به سمت خودروی ساکن B در حال حرکت است. در لحظه‌ای که فاصلهٔ خودروی A از خودروی B به $250\ m$ می‌رسد، خودروی B با شتاب ثابت $4\ m/s^2$ در جهت حرکت خودروی A شروع به حرکت می‌کند. بیشینهٔ v چند متر بر ثانیه باشد تا فاصلهٔ بین دو خودرو کم‌تر از $50\ m$ نباشد؟

۱) ۲۵ ۲) ۳۵ ۳) ۴۰ ۴) ۵۰

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۷- نمودار شتاب ـ زمان متحرکی که در بازهٔ صفر تا $10\ s$ در جهت محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. اگر تندی متوسط متحرک در این $10\ s$ برابر $20/1\ m/s$ باشد، تندی متحرک در لحظهٔ $t = 6\ s$ چند متر بر ثانیه است؟



۱) ۱۶
۲) ۱۸
۳) ۲۰
۴) ۲۲

۴۸- در شرایط خلأ، سه گلولهٔ A، B و C را به ترتیب و با فاصله‌های زمانی یکسان از ارتفاع ۸۰ متری سطح زمین رها می‌کنیم. اگر $2\ s$ پس از برخورد گلولهٔ A به زمین، گلولهٔ C رها شود، در لحظهٔ رهاشدن گلولهٔ C، ارتفاع گلولهٔ B از سطح زمین چند متر است؟ $(g = 10\ N/kg)$

۱) ۳۵ ۲) ۴۵ ۳) ۶۰ ۴) ۲۰

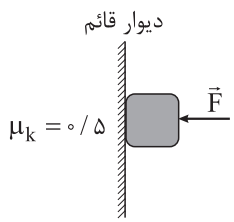
۴۹- جسمی به جرم $100\ g$ را به انتهای نخی به طول $50\ cm$ بسته و آن را روی سطح افقی بدون اصطکاکی حول انتهای دیگر نخ به طور یکنواخت می‌چرخانیم. اگر دورهٔ تناوب جسم $\frac{\pi}{5}$ ثانیه باشد، اندازهٔ نیروی کشش نخ چند نیوتون است؟

۱) ۱/۲۵ ۲) ۱۲/۵ ۳) ۵ ۴) ۵۰

۵۰- وزنه‌ای به جرم $2\ kg$ توسط یک فنر به سقف آسانسوری متصل است. اگر آسانسور با شتابی به بزرگی $2\ m/s^2$، رو به بالا شروع به حرکت کند، طول فنر به $24\ cm$ و اگر آسانسور با شتابی به بزرگی $2\ m/s^2$ رو به پایین شروع به حرکت کند، طول فنر به $22\ cm$ می‌رسد. به ترتیب طول عادی فنر چند سانتی‌متر و ثابت آن چند نیوتون بر متر است؟ $(g = 10\ N/kg)$

۱) ۱۸، ۲۰۰ ۲) ۱۸، ۴۰۰ ۳) ۲۳، ۲۰۰ ۴) ۲۳، ۴۰۰

۵۱- در شکل زیر، نیروی افقی $\vec{F}$ به جسم وارد شده و جسم ساکن است. اگر اندازهٔ نیروی $\vec{F}$ نصف شود، جسم با شتابی به بزرگی $5\ m/s^2$ شروع به حرکت می‌کند. اندازهٔ نیرویی که دیوار قائم به جسم وارد می‌کند، در حالت اول چند برابر حالت دوم است؟ $(g = 10\ N/kg)$

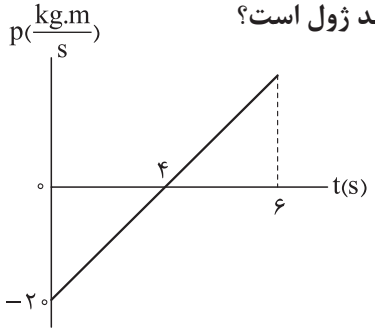


۱) $\sqrt{5}$
۲) $\frac{\sqrt{10}}{2}$
۳) $\frac{\sqrt{17}}{2}$
۴) ۲

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۲- نمودار تکانه ـ زمان جسمی که در مسیر مستقیم حرکت می‌کند، به شکل زیر است. اگر بزرگی شتاب جسم در لحظهٔ $t = ۴\,s$ برابر $۲/۵\,m/s^۲$ باشد، انرژی جنبشی جسم در لحظهٔ $t = ۵\,s$ چند ژول است؟



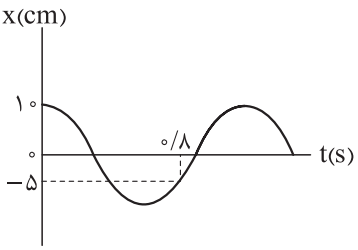
۱) ۵

۲) ۶/۲۵

۳) ۷/۵

۴) ۲۵

۵۳- نمودار مکان ـ زمان یک نوسانگر هماهنگ ساده به شکل زیر است. در یک بازهٔ زمانی دلخواه ۰/۳ ثانیه‌ای، بیشترین مسافتی که نوسانگر می‌تواند طی کند، چند سانتی‌متر است؟



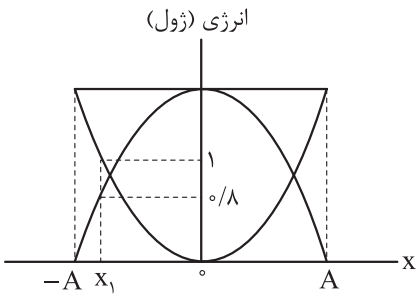
۱) $۱۰\sqrt{۲}$

۲) ۱۰

۳) $۵\sqrt{۲}$

۴) ۲۰

۵۴- نمودار انرژی پتانسیل و انرژی جنبشی نوسانگر هماهنگ ساده‌ای برحسب مکان به شکل زیر است. تندی نوسانگر در مکان $x_۱$ چند برابر تندی بیشینهٔ آن است؟



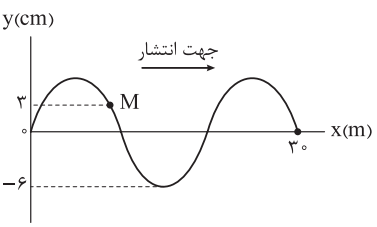
۱) $\frac{۵}{۹}$

۲) $\frac{۴}{۹}$

۳) $\frac{\sqrt{۵}}{۳}$

۴) $\frac{۲}{۳}$

۵۵- نقش موج عرضی منتشرشده در طنابی در مبدأ زمان به شکل زیر است. نیروی کشش طناب ۴۰N، مساحت مقطع آن $۱\,cm^۲$ و چگالی آن $۴\,g/cm^۳$ است. در چه لحظه‌ای برحسب ثانیه، جهت شتاب ذرهٔ M از طناب برای اولین بار تغییر می‌کند؟



۱) $\frac{۱۰}{۳}$

۲) $\frac{۵}{۳}$

۳) $\frac{۵}{۶}$

۴) $\frac{۵}{۱۲}$

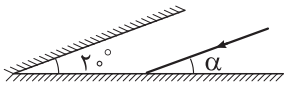
محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۶- اختلاف تراز شدت دو صوت A و B برابر $6\ dB$ است. اگر شدت صوت A به اندازهٔ $15\ \mu W/cm^2$ بیشتر از شدت صوت B باشد، شدت صوت B چند واحد SI است؟ $(\log 2 = 0/3)$

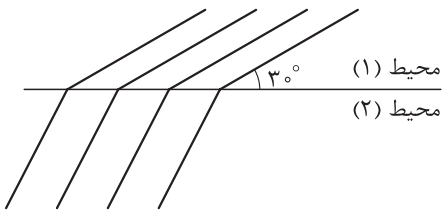
۱) $0/05$ ۲) $0/02$ ۳) ۵ ۴) ۲

۵۷- در شکل زیر، پرتوی نور در چهارمین برخورد به آینه‌ها، بر روی خودش بازتاب می‌شود. α چند درجه است؟



۱) ۲۰ ۲) ۳۰ ۳) ۴۵ ۴) ۶۰

۵۸- جبهه‌های موج تختی در مرز دو محیط (۱) و (۲) به شکل زیر است. اگر زاویهٔ بین جبهه‌های موج در دو محیط برابر 15° و تندی انتشار موج در محیط (۱) برابر $12\ m/s$ باشد، تندی انتشار موج در محیط (۲) چند متر بر ثانیه است؟



۱) $6\sqrt{2}$
۲) $12\sqrt{2}$
۳) $6\sqrt{6}$
۴) $4\sqrt{6}$

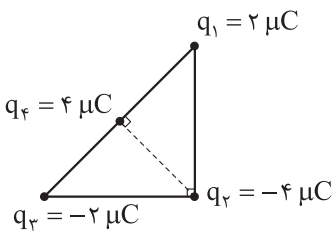
۵۹- لامپ تک‌رنگی با بازده ۲۰ درصد، در هر دقیقه 6×10^{21} فوتون با طول موج $640\ nm$ گسیل می‌کند. توان ورودی این لامپ چند وات است؟ $(h = 4\times10^{-15}\ eV.s\ ،\ e = 1/6\times10^{-19}C\ ،\ c = 3\times10^{8}\ m/s)$

۱) ۱۵۰ ۲) ۳۰۰ ۳) ۱۵ ۴) ۳۰

۶۰- در آزمایش فوتوالکتریک، اگر طول موج نور تابیده‌شده بر سطح فلز ۲۰ درصد کاهش یابد، تندی سریع‌ترین فوتوالکترون‌های آزادشده از سطح فلز، ۲۵ درصد افزایش می‌یابد. تابع کار فلز چند برابر انرژی هر یک از فوتون‌های تابیده‌شده بر سطح فلز در حالت اوّل است؟

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{5}{6}$ ۳) $\frac{5}{9}$ ۴) $\frac{9}{16}$

۶۱- در شکل زیر، بار الکتریکی نقطه‌ای q_4 در وسط خط واصل دو بار الکتریکی نقطه‌ای q_1 و q_2 قرار دارد. اندازهٔ نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار q_4، چند برابر اندازهٔ نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار الکتریکی نقطه‌ای q_2 است؟

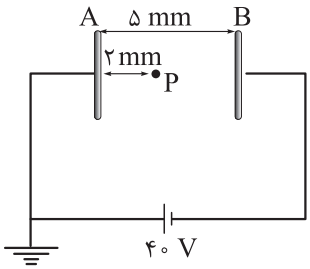


۱) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$
۲) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$
۳) $\frac{3}{4}$
۴) $\frac{4}{3}$

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶۲- در شکل زیر، بین دو صفحهٔ موازی هوا است و نقطهٔ P در ۲ میلی‌متری صفحهٔ A قرار دارد. اگر با ثابت‌ماندن صفحهٔ A، صفحهٔ B را دور کنیم تا فاصلهٔ بین دو صفحه ۱۰ mm شود، پتانسیل الکتریکی نقطهٔ P، چند ولت و چگونه تغییر می‌کند؟



۱) ۸، افزایش می‌یابد.

۲) ۸، کاهش می‌یابد.

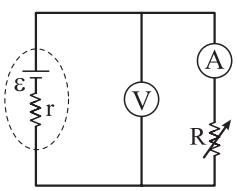
۳) ۱۲، افزایش می‌یابد.

۴) ۱۲، کاهش می‌یابد.

۶۳- خازنی به ظرفیت ۵ μF را با اختلاف پتانسیل الکتریکی ۱۲۰۰ V شارژ کرده و از باتری جدا می‌کنیم. چند میلی‌کولن بار الکتریکی از صفحهٔ منفی این خازن جدا کرده و به صفحهٔ مثبت آن منتقل کنیم تا انرژی ذخیره‌شده در خازن ۴/۵ J افزایش یابد؟

۱) ۹ ۲) −۹ ۳) ۳ ۴) −۳

۶۴- در مدار شکل زیر، با تغییر مقاومت متغیر به مقدار معین، آمپرسنج آرمانی ۳A افزایش و ولت‌سنج آرمانی ۴/۵ V کاهش نشان می‌دهند. اگر مقدار مقاومت متغیر را به تدریج از ۱Ω به ۲Ω برسانیم، توان خروجی باتری چگونه تغییر می‌کند؟



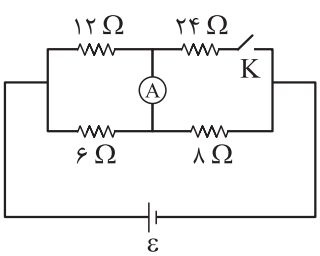
۱) پیوسته کاهش می‌یابد.

۲) پیوسته افزایش می‌یابد.

۳) ابتدا افزایش و سپس کاهش می‌یابد.

۴) ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد.

۶۵- در مدار شکل زیر، اگر کلید K را ببندیم، جریان الکتریکی عبوری از آمپرسنج آرمانی، ۰/۷ A تغییر می‌کند. نیروی محرکهٔ مولد آرمانی چند ولت است؟



۱) ۲۴

۲) ۳۶

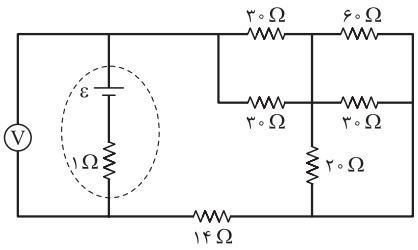
۳) ۴۸

۴) ۶۰

محل انجام محاسبات

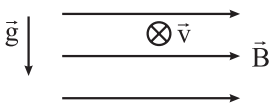
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶۶- در مدار شکل زیر، اگر توان مصرفی مقاومت ۲۰ اُهمی برابر $1/8\ W$ باشد، مقداری که ولت‌سنج آرمانی نشان می‌دهد، چند ولت است؟



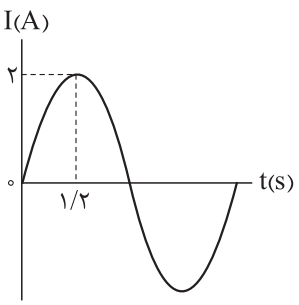
۱) ۲۳
۲) ۲۴
۳) ۲۳/۴
۴) ۲۴/۴

۶۷- مطابق شکل، ذره‌ای با بار الکتریکی $q = -2\ mC$ و تندی $10^4\ m/s$ به صورت درون‌سو وارد فضایی می‌شود که در آن میدان مغناطیسی افقی و یکنواخت $B = 400\ G$ و میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{E}$ وجود دارد. اگر جرم ذره برابر $20\ g$ باشد، E چند نیوتون بر کولن و در چه جهتی باشد تا ذره بدون انحراف به مسیر خود ادامه دهد؟ $(g = 10\ N/kg)$



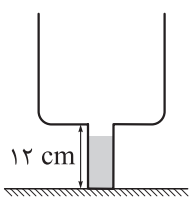
۱) ۳۰۰، به سمت بالا
۲) ۳۰۰، به سمت پایین
۳) ۶۰۰، به سمت بالا
۴) ۶۰۰، به سمت پایین

۶۸- نمودار جریان متناوب عبوری از یک سیم‌لولهٔ آرمانی به ضریب القاوری $4\ mH$ برحسب زمان به شکل زیر است. در چه لحظه‌ای برحسب ثانیه، انرژی ذخیره‌شده در این سیم‌لوله برای سومین بار به $6\ mJ$ می‌رسد؟



۱) ۳/۲
۲) ۳/۴
۳) ۴/۲
۴) ۴/۴

۶۹- در شکل زیر، در ظرفی که از دو بخش با سطح مقطع‌های $20\ cm^2$ و $40\ cm^2$ تشکیل شده، تا ارتفاع $10\ cm$ مایعی به چگالی $4\ g/cm^3$ ریخته شده است. اگر $240\ g$ از مایعی به چگالی $2\ g/cm^3$ به ظرف اضافه کنیم، فشار در کف ظرف به چند کیلوپاسکال می‌رسد؟ ($P_0 = 100\ kPa$ ، $g = 10\ N/kg$ و دو مایع با هم مخلوط نمی‌شوند.)



۱) ۱۱۲
۲) ۱۱۶
۳) ۱۰۵/۲
۴) ۱۰۴/۸

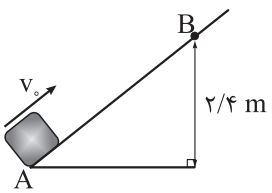
محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷۰- جسمی به جرم $۲۰\,kg$ از ارتفاع ۴۵ متری زمین رها می‌شود و با تندی $۲۰\,m/s$ به زمین برخورد می‌کند. از لحظهٔ رهاشدن جسم تا لحظهٔ رسیدن آن به زمین، کار انجام‌شده توسط نیروی مقاومت هوا بر روی جسم، چند برابر کار انجام‌شده توسط نیروی وزن بر روی آن است؟ $(g = ۱۰\,m/s^۲)$

۱) $\frac{۵}{۹}$ ۲) $-\frac{۵}{۹}$ ۳) $\frac{۴}{۵}$ ۴) $-\frac{۴}{۵}$

۷۱- در شکل زیر، جسمی از نقطهٔ A با تندی $v_۰$، مماس با سطح و رو به بالا پرتاب شده و حداکثر تا نقطهٔ B بالا می‌رود. اگر تا رسیدن جسم به نقطهٔ B، ۲۵ درصد از انرژی جنبشی اولیهٔ آن تلف شود، $v_۰$ چند متر بر ثانیه است؟ $(g = ۱۰\,m/s^۲)$



۱) ۸
۲) ۱۲
۳) $۸\sqrt{۳}$
۴) $۱۲\sqrt{۳}$

۷۲- اگر دمای یک میلهٔ فلزی $۱۸۰\,^\circ F$ افزایش یابد، طول آن ۰/۰۹ درصد تغییر می‌کند. ضریب انبساط طولی این فلز در SI کدام است؟

۱) ۹×۱۰^{-۴} ۲) ۹×۱۰^{-۶} ۳) ۵×۱۰^{-۴} ۴) ۵×۱۰^{-۶}

۷۳- درون ظرفی عایق، $۱\,kg$ آب با دمای $۳۰\,^\circ C$ ریخته شده است. $۵۰۰\,g$ آب با دمای $۶۰\,^\circ C$ به آن اضافه می‌کنیم. پس از مدتی تعادل گرمایی ایجاد می‌شود. این مجموعه حداکثر چند گرم یخ با دمای $-۴۰\,^\circ C$ را می‌تواند ذوب کند؟ ($c_{آب} = ۲۱۰۰\,\frac{J}{kg.K}$، $c_{یخ} = \frac{۱}{۲}c_{آب}$، $L_F = ۳۳۶\,kJ/kg$ و تبادل گرمایی با محیط ناچیز است.)

۱) ۲۰۰ ۲) ۴۰۰ ۳) ۶۰۰ ۴) ۸۰۰

۷۴- در کدام‌یک از فرایندهای زیر، دمای مقدار معینی گاز کامل افزایش می‌یابد؟

الف) انبساط بی‌دررو
ب) انبساط هم‌فشار
پ) تراکم بی‌دررو
ت) تراکم هم‌فشار

۱) الف و ب ۲) پ و ت ۳) الف و ت ۴) ب و پ

۷۵- یک ماشین گرمایی در هر دقیقه، با منبع دمابالا و منبع دماپایین به ترتیب $۱۲۰\,kJ$ و $۴۸\,kJ$ گرما مبادله می‌کند. توان خروجی این ماشین گرمایی چند کیلووات است؟

۱) ۱/۲ ۲) ۱۲ ۳) ۲/۸ ۴) ۲۸

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷۶- در یک ظرف دربسته، ۰/۴ مول گاز N_2O_5 به طور کامل تجزیه می‌شود. اگر در همین ظرف و پس از پایان واکنش اول، به ترتیب ۱/۲ مول گاز H_2 و ۰/۶ مول گاز O_2 وارد شده و ۷۵ درصد هیدروژن طی واکنش دوم به فراورده تبدیل شود، به تقریب چند درصد از مول‌های گازی درون ظرف را گاز NO_2 تشکیل می‌دهد؟ (واکنش‌ها برگشت‌ناپذیر در نظر گرفته شوند و واکنش دیگری انجام نمی‌شود.)

$$2N_2O_5(g) \rightarrow 4NO_2(g) + O_2(g) \quad , \quad 2H_2(g) + O_2(g) \rightarrow 2H_2O(g)$$

۱) ۲۸ ۲) ۳۴ ۳) ۳۶ ۴) ۴۲

۷۷- کدام مطلب زیر نادرست است؟

۱) پس از آرگون، فراوان‌ترین گاز نجیب در هوای پاک و خشک، هلیم است.

۲) گاز هلیم در ژرفای زمین از واکنش‌های هسته‌ای تولید می‌شود و پس از نفوذ به لایه‌های زمین وارد میدان‌های گازی می‌شود.

۳) تغییرات دما با تغییر فشار در لایهٔ دوم هواکره همسو نیست.

۴) گاز آرگون در پتروشیمی شیراز از تقطیر جزءبه‌جزء هوای مایع با خلوص بالا تهیه می‌شود.

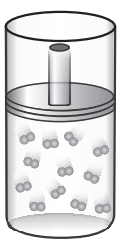
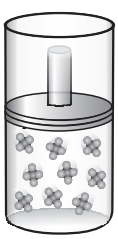
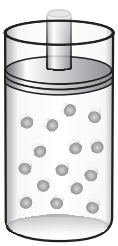
۷۸- تفاوت مجموع ضرایب استوکیومتری مواد در واکنش‌های a و b پس از موازنهٔ معادلهٔ آن‌ها کدام است؟

a) $Fe_2O_3(s) + HCl(aq) \rightarrow FeCl_3(aq) + H_2O(l)$

b) $Al(s) + NaOH(aq) + H_2O(l) \rightarrow NaAlO_2(aq) + H_2(g)$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۷۹- با توجه به شکل داده‌شده که ظرف‌های محتوی گازهای مختلف را در دما و فشار یکسان نشان می‌دهد، کدام مورد درست است؟ (هر ذره معادل ۰/۰۵ مول است. $H=1, C=12, O=16, Ar=40 : g.mol^{-1}$)

شمارهٔ نمونه	۱	۲	۳	۴
گاز	H_2	O_2	CH_4	Ar
ظرف محتوی گاز				

۱) شمار مولکول‌های نمونهٔ (۳)، دو برابر شمار اتم‌های نمونهٔ (۱) است.

۲) حجم گاز نمونهٔ (۲)، دو برابر حجم گاز نمونهٔ (۳) است.

۳) جرم گاز نمونهٔ (۴)، ۵۰ برابر جرم گاز نمونهٔ (۱) و برابر ۳۰ گرم است.

۴) چگالی گاز نمونهٔ (۲)، با چگالی گاز نمونهٔ (۴) برابر است.

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸۰- با توجه به جدول زیر که انحلال‌پذیری آمونیوم کلرید را در دماهای گوناگون (برحسب $^\circ C$) نشان می‌دهد، کدام مورد نادرست است؟ (معادلهٔ انحلال‌پذیری، خطی در نظر گرفته شود. $H=1, N=14, Cl=35/5 : g.mol^{-1}$)

$\theta(^\circ C)$	۰	۲۰	۴۰	۶۰
$S\ (\frac{g\ NH_4Cl}{100\ g\ H_2O})$	۲۹	۳۶	۴۳	۵۰

۱) در دمای $40^\circ C$، محلول آبی ۲۵ درصد جرمی از این نمک، سیرنشده است.

۲) در ۱۰۰ گرم آب و در دمای $30^\circ C$، حداکثر جرم نمک حل‌شونده برای رسیدن به محلول سیرشده، ۳۹/۵ گرم است.

۳) با کاهش دمای ۲۰۰ گرم محلول سیرشده از $60^\circ C$ به $20^\circ C$، حدود ۱۴ گرم نمک رسوب می‌کند.

۴) برای تهیهٔ ۲۷۶ گرم محلول سیرشده در دمای $40^\circ C$، به حدود ۸۳ گرم آمونیوم کلرید نیاز است.

۸۱- کدام مقایسه دربارهٔ نقطهٔ جوش ماده‌های داده‌شده نادرست است؟

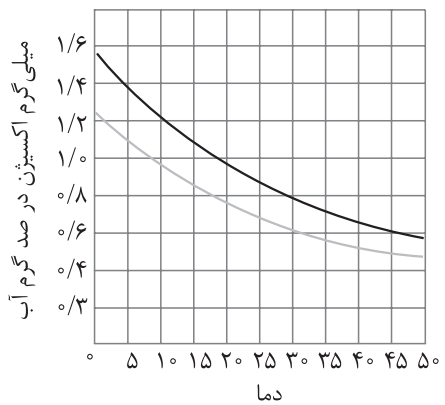
۱) $CH_4 < H_2O < KCl < MgO$

۲) $H_2 < H_2Se < H_2O < H_2S$

۳) $CH_4 < SiH_4 < GeH_4 < SnH_4$

۴) $He < CH_3CH_2CH_3 < CH_3OCH_3 < C_2H_5OH$

۸۲- اگر حداقل غلظت اکسیژن محلول در آب برای ادامهٔ زندگی برخی از سخت‌پوستان ۷ ppm باشد، با توجه به نمودار داده‌شده که انحلال‌پذیری گاز اکسیژن را در آب آشامیدنی و آب دریا نشان می‌دهد، حداکثر دمای آب دریا به تقریب برابر چند درجهٔ سلسیوس باشد تا این سخت‌پوستان با حداقل غلظت اکسیژن محلول در آب، زنده بمانند؟ (جرم هر میلی‌لیتر آب برابر یک گرم در نظر گرفته شود. $O=16\ g.mol^{-1}$)



۱) ۱۵

۲) ۲۰

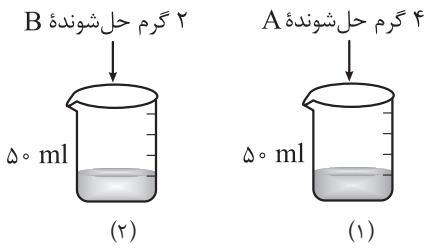
۳) ۲۵

۴) ۳۰

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸۳- دربارهٔ تهیهٔ محلول‌های رقیق از حل‌شونده‌های متفاوت در آب، مطابق شکل‌های (۱) و (۲)، کدام مورد درست است؟ (از تغییر حجم در اثر اضافه‌کردن حل‌شونده صرف نظر شود. جرم مولی حل‌شوندهٔ A دو برابر جرم مولی حل‌شوندهٔ B است.)



۱) غلظت مولی دو محلول برابر است.

۲) درصد جرمی محلول (۲) دقیقاً نصف درصد جرمی محلول (۱) است.

۳) اگر به هر یک از محلول‌ها ۲۵ میلی‌لیتر آب اضافه کنیم، درصد جرمی هر دو محلول، نصف می‌شود.

۴) اگر محتویات دو ظرف با هم مخلوط شوند، غلظت مولی محلول حاصل، دو برابر غلظت مولی محلول (۲) می‌شود.

۸۴- مقایسهٔ شعاع اتمی در کدام مورد نادرست است؟

۱) $_{12}Mg > {}_{13}Al$ ۲) $_{19}K < {}_{37}Rb$ ۳) $_{8}O > {}_{7}N$ ۴) $_{14}Si > {}_{16}S$

۸۵- اگر ۵۲۲ گرم از یک نمونهٔ ناخالص پتاسیم دی‌کرومات $(K_2Cr_2O_7)$ با مقدار اضافی هیدروژن یدید (HI) در محیط اسیدی واکنش داده و ۲/۴ مول بخار ید (I_2) تولید کند و بازده واکنش ۸۰٪ باشد، درصد خلوص پتاسیم دی‌کرومات در نمونهٔ اولیه به تقریب چه‌قدر است؟ (معادله، موازنه نشده است.) $(O=16, K=39, Cr=52, I=127 : g.mol^{-1})$

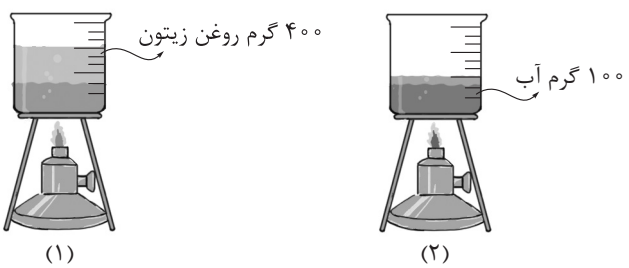
$$K_2Cr_2O_7(s) + HI(aq) \rightarrow KI(aq) + CrI_3(aq) + I_2(g) + H_2O(l)$$

۱) ۴۵ ۲) ۵۶ ۳) ۶۵ ۴) ۷۴

۸۶- در کدام‌یک از عنصرهای دورهٔ چهارم جدول تناوبی، شمار الکترون‌ها با $l=2$، دو برابر شمار الکترون‌های ظرفیتی آن است؟

۱) $_{30}Zn$ ۲) $_{22}Ti$ ۳) $_{32}Ge$ ۴) $_{33}As$

۸۷- دو نمونه آب و روغن زیتون را در آزمایشگاه مطابق شکل زیر حرارت می‌دهیم. اگر سوخت مصرفی در چراغ شعلهٔ آتش، متان باشد، در صورتی که دمای دو نمونه را به $50^\circ C$ برسانیم، جرم متان مصرفی در شعلهٔ (۱)، چند برابر جرم متان مصرفی در شعلهٔ (۲) است؟ (دمای اولیهٔ دو نمونه برابر $20^\circ C$ است؛ گرمای ویژه آب و روغن زیتون را به ترتیب برابر ۴ و ۲ ژول بر گرم بر درجهٔ سلیسیوس در نظر بگیرید. فرض کنید بر اثر سوختن کامل هر مول متان، ۸۹۰ کیلوژول انرژی آزاد می‌شود؛ $(CH_4 = 16 g.mol^{-1})$



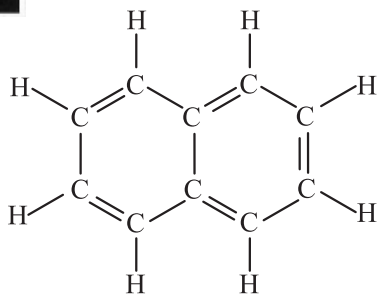
۱) ۰/۵ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

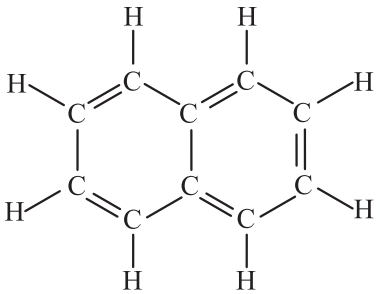
محل انجام محاسبات

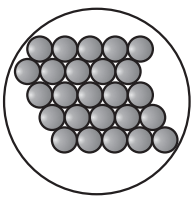
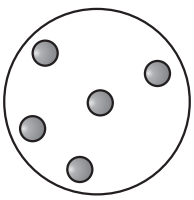
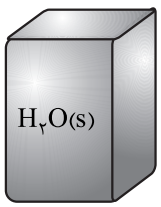
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

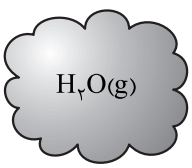


۸۸- چند مورد از فرایندهای زیر با فرایند شکل مقابل از نظر ماهیت مشابهت دارد؟





- 
- 
- 

- 

- 
- 

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۸۹- با توجه به واکنش داده‌شده، کدام گزینه سبب افزایش سرعت واکنش (با یکای مول بر لیتر بر ثانیه) می‌شود؟

$$Mg(s) + 2HBr(aq) \rightarrow MgBr_2(aq) + H_2(g)$$

الف) افزایش دمای واکنش

ب) استفاده از محلول غلیظ‌تر HBr

پ) استفاده از نوار منیزیم به جای پودر منیزیم

ت) افزودن یک باز قوی به مخلوط واکنش

۱) فقط الف ۲) الف و ب ۳) ب و ت ۴) پ و ت

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹۰- جدول زیر مربوط به آزمایش قرص جوشان است که با هدف بررسی عوامل مؤثر بر سرعت واکنش انجام شده است. کدام مورد نادرست است؟

آزمایش	مقدار قرص جوشان	دمای آب ($^\circ C$)	زمان انجام واکنش	سرعت متوسط انجام واکنش	حجم گاز CO_2 تولیدشده در پایان واکنش
۱		θ_1	t_1	$\bar{R}_1$	V_1
۲		θ_2	t_2	$\bar{R}_2$	V_2
۳		θ_3	t_3	$\bar{R}_3$	V_3
۴		θ_4	t_4	$\bar{R}_4$	V_4
۵		θ_5	t_5	$\bar{R}_5$	V_5

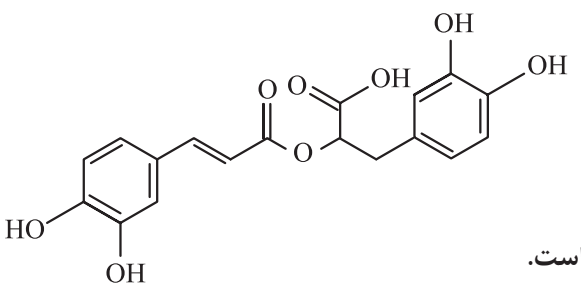
۱) اگر $\theta_2 > \theta_1$ باشد، آن‌گاه، $t_1 > t_2$ است.

۲) اگر $\theta_4 > \theta_3$ باشد، آن‌گاه $V_3 = V_4$ و $\bar{R}_4 > \bar{R}_3$ است.

۳) اگر $V_2 = V_5$ باشد، آن‌گاه $\bar{R}_5 > \bar{R}_2$ است.

۴) اگر $\bar{R}_1 > \bar{R}_4$ باشد، آن‌گاه $\theta_1 > \theta_4$ و $V_1 > V_4$ است.

۹۱- رزمارینیک اسید با ساختار زیر و با مهار رادیکال‌های آزاد، از اکسیداسیون چربی‌ها و رشد میکروب‌ها در فراورده‌های گوشتی جلوگیری می‌کند. چند مورد از مطالب زیر در رابطه با این ماده درست است؟



- فرمول مولکولی آن به صورت $C_{18}H_{16}O_8$ است.
- در دستهٔ افزودنی‌ها قرار دارد و به عنوان یک نگهدارندهٔ طبیعی عمل می‌کند.
- نسبت شمار اتم‌های کربن با عدد اکسایش (۱-) به شمار اتم‌های کربن با عدد اکسایش (۱+) برابر ۲ است.
- اختلاف شمار پیوندهای $C-C$ و $C=C$ در آن، برابر ۴ است.
- مولکول آن از دو بخش مشابه متصل به یک زنجیر کربنی متفاوت تشکیل شده است.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹۲- کدام مورد نادرست است؟ $(H=1, C=12, N=14, O=16 : g.mol^{-1})$

۱) اگر شمار اتم‌های کربن در مولکول یک آلدهید و یک اتر با زنجیر کربنی سیرشده برابر باشد، جرم مولی آلدهید کم‌تر از جرم مولی اتر است.

۲) اگر شمار اتم‌های کربن در مولکول کتون و مولکول آلدهید با زنجیر کربنی سیرشده برابر باشد، جرم مولی آن دو برابر است.

۳) در ساختار هر پلی‌استر، حداقل یک گروه هیدروکربنی با دو گروه عاملی استری احاطه شده است.

۴) در ساختار هر آمین، یک اتم نیتروژن وجود دارد که حتماً به یک اتم هیدروژن متصل است.

۹۳- در دمای یکسان، رسانایی الکتریکی ۵۰۰ میلی‌لیتر محلول ۰/۰۲ مولار نیتریک اسید (محلول A) و ۲۰۰ میلی‌لیتر محلول نیترواسید (محلول B)، یکسان است. اگر مجموع شمار مول گونه‌ها (به‌جز مولکول‌های آب) در محلول B، برابر با ۰/۲۰۴ مول باشد، کدام مورد نادرست است؟ (چگالی محلول‌ها را یکسان و برابر با چگالی آب در نظر بگیرید.) $(H=1, N=14, O=16 : g.mol^{-1})$

۱) شمار آنیون‌ها در محلول A، ۲/۵ برابر محلول B است.

۲) از هر ۵۰۰ مولکول نیترواسید، ۴۹۰ مولکول آن به صورت یونیده نشده در محلول B وجود دارد.

۳) درصد جرمی آنیون چند اتمی در محلول A، برابر با ۰/۱۲۴٪ است.

۴) شمار مول‌های آغازی اسید در محلول B، ۴۰ برابر محلول A است.

۹۴- کدام مطلب نادرست است؟

۱) مدل آرنیوس پیش‌بینی می‌کند که با حل شدن SO_3 و Na_2O در آب (به طور جداگانه)، غلظت یون هیدرونیوم در کدام محلول بیش‌تر است.

۲) با افزایش pH محلول، نسبت $\frac{[OH^-]}{[H_3O^+]}$ در آن، افزایش می‌یابد.

۳) اگر در محلول آبی اسید تک پروتون‌دار HA پس از یونش، $[HA]$ هفت برابر $[A^-]$ باشد، درصد یونش HA در این محلول، برابر با ۱۲/۵ درصد است.

۴) محلول شیشه‌پاک‌کن، با تشکیل پیوند هیدروژنی به خوبی در آب حل‌شده و محلول آن یک الکترولیت قوی به شمار می‌آید.

۹۵- در دما و غلظت آغازی یکسان، مقایسهٔ سرعت واکنش محلول آبی کدام اسید با فلز روی (Zn) نادرست است؟

۱) $CH_3COOH > HCOOH$ ۲) $HCl > CH_3COOH$

۳) $HNO_3 > HCOOH$ ۴) $HF > HCN$

۹۶- HX و YOH به ترتیب اسید و باز قوی می‌باشند که جرم مولی باز، ۵ برابر جرم مولی اسید است. اگر a گرم از اسید و 2a گرم از باز را به صورت مجزا در مقداری آب حل کرده و حجم هر دو را به ۲۰۰۰ میلی‌لیتر برسانیم، تفاوت pH این محلول‌ها برابر ۹/۶ می‌شود. pH محلول بازی کدام است؟

۱) ۱۱/۶ ۲) ۱۰/۶ ۳) ۱۲/۴ ۴) ۱۲

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹۷- قدر مطلق پتانسیل کاهشی استاندارد فلزهای X ، Y و Z به صورت زیر است. اگر با اتصال نیم‌سلول Z به SHE ، pH نیم‌سلول SHE افزایش یابد و به منظور محافظت کاتدی فلز Y بتوان از فلز X استفاده کرد، کدام مطلب به یقین درست است؟

$X^{2+}(aq) + 2e^- \rightarrow X(s) \quad |E^\circ| = 0/36$

$Y^{2+}(aq) + 2e^- \rightarrow Y(s) \quad |E^\circ| = 0/72$

$Z^{2+}(aq) + 2e^- \rightarrow Z(s) \quad |E^\circ| = 0/18$

۱) emf سلول گالوانی حاصل از دو نیم سلول X و Z، برابر با ۰/۵۴ ولت است.

۲) فلز X با محلول ۱ مولار هیدروکلریک اسید واکنش می‌دهد.

۳) به منظور نگه‌داری محلول $X(NO_3)_2$ می‌توان از ظرفی از جنس فلز Z بر خلاف ظرفی از جنس فلز Y استفاده کرد.

۴) واکنش $Y(s) + Z^{2+}(aq) \rightarrow Y^{2+}(aq) + Z(s)$ برخلاف واکنش «$Y(s) + X^{2+}(aq) \rightarrow Y^{2+}(aq) + X(s)$» به طور طبیعی انجام می‌شود.

۹۸- با توجه به واکنش موازنه‌نشدهٔ زیر، کدام مورد نادرست است؟ $(Al = 27 : g.mol^{-1})$

$Al(s) + NO_3^-(aq) + H^+(aq) + Cl^-(aq) \rightarrow AlCl_4^-(aq) + NO_2(g) + H_2O(l)$

۱) در این واکنش، به ازای مصرف ۰/۹ گرم فلز آلومینیم، ۰/۱ مول الکترون مبادله می‌شود.

۲) پس از موازنه، مجموع ضرایب یون‌های موجود در سمت چپ معادله، برابر با ۱۴ است.

۳) در این واکنش، یون نیترات نقش اکسنده را داشته و عدد اکسایش نیتروژن در آن یک واحد کاهش می‌یابد.

۴) پس از موازنه، ضریب استوکیومتری گاز قهوه‌ای رنگ برابر با ضریب استوکیومتری دو ماده دیگر است.

۹۹- کدام مورد دربارهٔ الماس و گرافیت نادرست است؟

۱) الماس یک شبکهٔ غول‌آسای کووالانسی با پیوندهای C — C یکسان است، در حالی که گرافیت از لایه‌هایی تشکیل شده که در هر لایه، اتم‌های کربن با پیوندهای کووالانسی قوی به هم متصل شده‌اند.

۲) در گرافیت، هر اتم کربن به سه اتم کربن دیگر متصل است، اما در الماس، هر اتم کربن به چهار اتم کربن دیگر پیوند دارد.

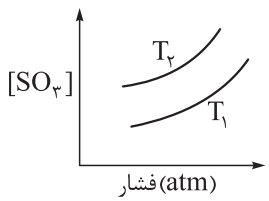
۳) الماس، سخت‌ترین مادهٔ طبیعی شناخته شده است، اما گرافیت، نرم است و به عنوان روان‌کنندهٔ جامد استفاده می‌شود.

۴) چگالی گرافیت از الماس بیشتر است و هر دو در واکنش با اکسیژن در شرایط مناسب، گاز کربن دی‌اکسید تولید می‌کنند.

۱۰۰- اگر مجموع آنتالپی فروپاشی CaO(s) و NaF(s) برابر a، مجموع آنتالپی فروپاشی CsI(s) و BaS(s) برابر b و مجموع آنتالپی فروپاشی AlN(s) و MgO(s) برابر c باشد، کدام مقایسه درست است؟

۱) $c < b < a$ ۲) $a < c < b$ ۳) $b < a < c$ ۴) $a < b < c$

۱۰۱- نمودار زیر، تغییر غلظت مولی فراورده را برای واکنش گازی $2SO_2(g) + O_2(g) \rightleftharpoons 2SO_3(g)$ در دو شرایط متفاوت نشان می‌دهد. کدام مورد درست است؟ (T: دما است.)



۱) $T_2 > T_1$ و در فشار ثابت، با افزایش مقدار SO_2، مقدار SO_3 بیشتر می‌شود.

۲) $T_2 > T_1$ و در فشار ثابت، مقدار SO_3 در دمای T_2 کم‌تر از دمای T_1 است.

۳) $T_2 < T_1$ و نسبت ثابت تعادل (K) در دمای T_2 به مقدار K در دمای T_1، بزرگ‌تر از یک است.

۴) $T_2 < T_1$ و در دمای T_1، با افزایش مقدار مواد واکنش‌دهنده، مقدار ثابت تعادل افزایش می‌یابد.

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۰۲- کدام مادهٔ گازی، به طور عمده توسط مبدل کاتالیستی در خودروها کاهش نمی‌یابد؟

۱) CO ۲) NO ۳) C_xH_y ۴) CO_2

۱۰۳- نسبت مجموع شمار ذرات زیراتمی در $^{23}_{11}Na$ به مجموع شمار ذرات زیراتمی در $^{20}_{10}Ne$ ، به تقریب چند برابر مجموع شمار ذرات زیراتمی در $^{3}_{1}H$ است؟

۱) ۰/۲۸ ۲) ۰/۳۸ ۳) ۰/۵۶ ۴) ۱/۱۳

۱۰۴- اگر بیرونی‌ترین زیرلایه در آرایش الکترونی یون پایدار عنصر Y، $3d^{10}$ باشد، کدام مورد دربارهٔ Y، به یقین نادرست است؟

۱) فلزی است که در واکنش با اکسیژن، ترکیبی یونی با فرمول YO ایجاد می‌کند.

۲) عنصری از گروه ۱۱ جدول تناوبی است، که رسانایی الکتریکی بالایی دارد.

۳) فلزی واسطه است که در لایهٔ ظرفیت اتم آن، ۲ الکترون با $l=0$ و ۱۰ الکترون با $l=2$ وجود دارد.

۴) فلزی از دورهٔ سوم که در واکنش با کلر، ترکیبی با فرمول YCl_4 تشکیل می‌دهد و کاتیونی با بار ۳+ دارد.

۱۰۵- دربارهٔ آرایش الکترونی عنصرها، کدام مورد نادرست است؟

۱) در آرایش الکترونی فشرده، می‌توان الکترون‌های لایهٔ ظرفیت همهٔ عنصرهای جدول تناوبی را مشاهده کرد.

۲) برای نوشتن آرایش الکترونی فشردهٔ عناصر واسطه، ابتدا نماد شیمیایی گاز نجیبِ قبل از عنصر را نوشته، سپس بقیهٔ الکترون‌ها را در زیرلایه‌ها قرار می‌دهیم.

۳) در عنصرهای دستهٔ f، زیرلایهٔ f در حال پرشدن است و این زیرلایه، دو لایه پایین‌تر از لایهٔ ظرفیت قرار دارد.

۴) آرایش الکترونی فشردهٔ همهٔ عناصر یک دوره، با نماد شیمیایی گاز نجیب هم‌دوره آغاز می‌شود.

پاسخ‌نامهٔ تشریحی آزمون را ساعت ۱۶ از صفحهٔ شخصی خودتان در سایت آزمون خیلی سبز دریافت کنید.

azmoon.kheilisabz.com

اساتید، مشاوران و دانش‌آموزان گرامی؛
نظرات، پیشنهادات، انتقادات و بازخوردهای خود نسبت به سؤالات این آزمون را می‌توانید از طریق آیدی Kheilisabz_edit@ در همهٔ پیام‌رسان‌ها با ما به اشتراک بگذارید.

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

خیلی سبز! آزمون
تجربی | ریاضی | انسانی

پاسخ‌نامه آزمون آزمایشی خیلی سبز

ویژه کنکوری‌های ۱۴۰۴
آزمون جامع - مطابق با کنکور سراسری

رشته ریاضی

پایه دوازدهم	مرحله هجدهم
سال تحصیلی ۰۴-۱۴۰۳	تاریخ برگزاری: ۵/اردیبهشت/۱۴۰۴

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا
حسابان	حسین شفیع‌زاده ـ مهرداد کیوان
هندسه	امیرحسین ابومحبوب ـ محمدرضا حسینی‌فرد ـ حمید گلزاری ـ محسن محمدکریمی ـ حسین نادری ـ حسین هاشمی طاهری
ریاضیات گسسته و آمار و احتمال	علیرضا شریف‌خطیبی ـ عطا صادقی ـ حمید گلزاری ـ سروش موئینی
فیزیک	علیرضا آذری ـ امین امینی ـ یاشار انگوتی ـ محمد توکلی ـ علیرضا جباری ـ مسعود خندانی مجید ساکی ـ رضا سبزمیدانی ـ نوید شاهی ـ علیرضا عبداللهی ـ حسین عبدوی‌نژاد احسان محمدی ـ حامد نبی‌منصور ـ نیما نوروزی ـ محمدرضا یاری ـ محمدمهدی یوسفی
شیمی	عباس سرمایه ـ یاسر راش ـ حسین شرانلو ـ سروش عبادی

نام درس	مسئول درس	گزینشگر	مولف پاسخ‌نامه	کارشناسان علمی	ویراستاران به ترتیب حروف الفبا
حسابان	حسین شفیع‌زاده مهرداد کیوان	حسین شفیع‌زاده مهرداد کیوان	علیرضا کاظمی‌بقا	محمدسجاد نقیه فرشاد حسن‌زاده رامین آزادی	سهیل تقی‌زاده منصور زرکش اصفهانی عادل حسینی
هندسه	حمید گلزاری	حمید گلزاری	امیرحسین ابومحبوب	زهرا جالینوسی محمد خندان	ماهان فنی‌فر ابوالفضل ناصری
ریاضیات گسسته و آمار و احتمال	حمید گلزاری	حمید گلزاری	مریم نظری	امیرحسین ابومحبوب سعید قندچی مریم نظری	فرزانه خاکپاش منصور زرکش اصفهانی علیرضا کاظمی‌بقا
فیزیک	رضا سبزمیدانی	نوید شاهی	امین امینی	امین امینی	مسعود خندانی مدیا عیدی مریم گلی حسن‌لو احسان محمدی امیر محمودی انزابی
شیمی	عباس سرمایه	عباس سرمایه	عباس سرمایه سروش عبادی	رامین آزادی حمید ذبحی آرمین عظیمی	رامین آزادی احسان رحیمی متین قنبری سروش عبادی

سرپرست محتوایی: فاطمه آقاجانپور

Azmoon.kheilisabz.com
SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۱ مجموع بیست جملهٔ اول دنبالهٔ $a_n = \frac{3n}{2} - 2$ کدام است؟

۱) ۲۷۰ ۲) ۲۸۵

۳) ۲۸۰ ۴) ۲۷۵

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

مجموع n جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول a_1 و قدرنسبت d از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول $a_1 = -\frac{1}{2}$ و قدرنسبت $d = \frac{3}{2}$ داریم.

گام دوم: در رابطهٔ درس‌باکس جای‌گذاری می‌کنیم:

$$S_{20} = \frac{20}{2}(2(-\frac{1}{2}) + (19)\frac{3}{2}) = 10(-1 + 28/5) = 10 \times 27/5 = 275$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲ اگر ارزش گزارهٔ $(\sim r \vee s) \Rightarrow (p \wedge q)$ نادرست باشد، ارزش کدام گزینه با بقیه متفاوت است؟

۱) $p \Rightarrow q$
۲) $r \Rightarrow s$
۳) $s \Rightarrow p$
۴) $q \Rightarrow r$

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

- هرگاه p و q دو گزاره باشند، گزارهٔ مرکب «$p \Rightarrow q$» که خوانده می‌شود «اگر p آن‌گاه q» را ترکیب شرطی دو گزاره می‌گوییم.
- ترکیب شرطی دو گزاره ($p \Rightarrow q$) زمانی نادرست است که، گزارهٔ p (مقدم) ارزش درست و گزارهٔ q (تالی) ارزش نادرست داشته باشند.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ارزش گزارهٔ $(p \wedge q) \Rightarrow (\sim r \vee s)$ نادرست است، پس گزارهٔ $(p \wedge q)$ ارزش درست و گزارهٔ $(\sim r \vee s)$ ارزش نادرست دارند.

گام دوم:

$$p \wedge q \equiv T \Rightarrow p \equiv T, q \equiv T$$

$$(\sim r \vee s) \equiv F \Rightarrow s \equiv F, \sim r \equiv F \Rightarrow s \equiv F, r \equiv T$$

گام سوم: گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ (۱): $p \Rightarrow q \equiv T \Rightarrow T \equiv T$

گزینهٔ (۲): $r \Rightarrow s \equiv T \Rightarrow F \equiv F$ ✓

گزینهٔ (۳): $s \Rightarrow p \equiv F \Rightarrow T \equiv T$

گزینهٔ (۴): $q \Rightarrow r \equiv T \Rightarrow T \equiv T$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳ سهمی به معادلهٔ $f(x) = -۲x^۲ - ۴x + ۳ - a$ از ناحیهٔ اول دستگاه مختصات عبور نمی‌کند. بیشترین مقدار عرض رأس سهمی کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی

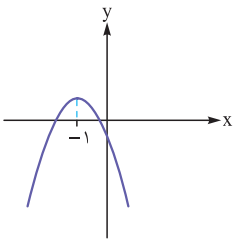
گام اول: ابتدا مختصات رأس سهمی را به دست می‌آوریم:

$$x_s = \frac{-(-۴)}{۲(-۲)} = -۱$$

$$f(-۱) = -۲(-۱)^۲ - ۴(-۱) + ۳ - a \Rightarrow f(-۱) = ۵ - a \quad (*)$$

پس عرض رأس سهمی برابر $y_s = ۵ - a$ است.

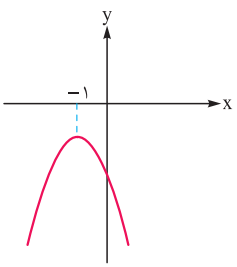
گام دوم: دهانهٔ سهمی رو به پایین است و از ناحیهٔ اول عبور نمی‌کند، دو حالت زیر را خواهیم داشت:



حالت اول:

$$\begin{cases} \Delta > ۰ \Rightarrow ۱۶ - ۴(-۲)(۳ - a) = ۴۰ - ۸a > ۰ \Rightarrow a < ۵ \\ S < ۰ \Rightarrow \frac{-(-۴)}{(-۲)} < ۰ \Rightarrow -۲ < ۰ \quad \text{(همواره برقرار)} \\ P \geq ۰ \Rightarrow \frac{۳ - a}{(-۲)} \geq ۰ \Rightarrow \frac{۳ - a}{۲} \leq ۰ \Rightarrow a \geq ۳ \end{cases}$$

در این حالت $۳ \leq a < ۵$.



حالت دوم: $\Delta \leq ۰ : ۴۰ - ۸a \leq ۰ \Rightarrow a \geq ۵$

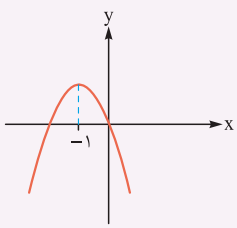
پس $۳ \leq a < ۵$ یا $a \geq ۵$، در نتیجه $a \geq ۳$.

گام سوم: با توجه به رابطهٔ $(*)$ در گام اول، بیشترین مقدار رأس سهمی به ازای کم‌ترین مقدار a به دست می‌آید، در نتیجه داریم:

$$a \geq ۳ \Rightarrow -a \leq -۳ \Rightarrow ۵ - a \leq ۲$$

تیزبازی

مختصات رأس سهمی برابر $(-۱, ۵ - a)$ است. در معادلهٔ سهمی فقط عرض از مبدأ آن مجهول است و سهمی از ناحیهٔ اول عبور نمی‌کند، برای این‌که سهمی بیشترین مقدار عرض رأس را داشته باشد، باید از مبدأ عبور کند (عرض از مبدأ آن صفر باشد.):



$$f(x) = -۲x^۲ - ۴x + \underbrace{۳ - a}_{\text{عرض از مبدأ}} \Rightarrow ۳ - a = ۰ \Rightarrow a = ۳$$

دیدیم که عرض رأس سهمی برابر $۵ - a$ است که به ازای $a = ۳$ برابر می‌شود با $۵ - ۳ = ۲$.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴ جواب‌های معادلهٔ $2x^2+x+\beta=0$ اعداد α و -2 است. جواب‌های کدام معادله اعداد $\frac{1}{\alpha}$ و $\frac{1}{\beta}$ هستند؟

۱) $18x^2-9x-4=0$

۲) $18x^2-9x-2=0$

۳) $9x^2-6x-2=0$

۴) $9x^2-6x-1=0$

مشاوره روابط بین ریشه‌های معادلهٔ درجه‌دوم از مباحث مورد علاقهٔ طراحان کنکور در سال‌های اخیر بوده است.

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

مجموع و حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ از روابط زیر به دست می‌آید:

مجموع: $S=-\frac{b}{a}$

حاصل‌ضرب: $P=\frac{c}{a}$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا مقادیر α و β را می‌یابیم:

$$\begin{cases}-2+\alpha=S=-\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha=\frac{3}{2}\\ (-2)\times\alpha=-3=P=\frac{\beta}{2} \Rightarrow \beta=-6\end{cases}$$

گام دوم: در گام اول دیدیم که $\beta=-6$ و $\alpha=\frac{3}{2}$، پس $\frac{1}{\beta}=-\frac{1}{6}$، $\frac{1}{\alpha}=\frac{2}{3}$، S و P معادله‌ای که ریشه‌های آن $\frac{1}{\alpha}$ و $\frac{1}{\beta}$ باشد برابر می‌شود با:

$$S=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{2}{3}-\frac{1}{6} \Rightarrow S=\frac{1}{2}$$

$$P=\frac{1}{\alpha}\times\frac{1}{\beta}=\frac{2}{3}\times(-\frac{1}{6}) \Rightarrow P=-\frac{1}{9}$$

در بین گزینه‌ها، در معادلهٔ گزینهٔ (۲) یعنی $18x^2-9x-2=0$، $S=\frac{9}{18}=\frac{1}{2}$ و $P=-\frac{2}{18}=-\frac{1}{9}$، پس همین گزینه پاسخ سؤال است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵ دو ضلع مجاور یک مربع بر خطوط $۳x-۴y=۳$ و $ax+۶y=۸$ قرار دارند. مرکز مربع کدام نقطه می‌تواند باشد؟

۱) $(-۶,۱)$ ۲) $(۶,-۱)$

۳) $(-۴,۲)$ ۴) $(۴,-۲)$

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint ابتدا a را به کمک شیب خط به دست آورید و سپس مرکز مربع را به صورت (α,β) در نظر بگیرید و فاصلهٔ آن را از اضلاع مربع برابر قرار دهید.

درس Box فاصلهٔ نقطهٔ $(x_۰,y_۰)$ از خط $ax+by+c=۰$ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$d=\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

نکته اگر دو خط عمود بر هم باشند، شیب آن‌ها قرینه و معکوس یکدیگرند، به عبارت دیگر حاصل‌ضرب شیب آن‌ها برابر -۱ است.

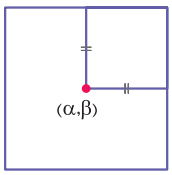
نکته شیب خط به معادلهٔ $ax+by+c=۰$ برابر است با $-\frac{a}{b}$.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** معادلهٔ دو ضلع مجاور داده شده است؛ این دو خط باید بر هم عمود باشند، یعنی شیب آن‌ها باید قرینه و معکوس یکدیگر باشد:

$$\begin{cases} ۳x-۴y=۳ \xrightarrow{\text{شیب}} m=\frac{۳}{۴} \\ ax+۶y=۸ \xrightarrow{\text{شیب}} m=-\frac{a}{۶} \end{cases} \xrightarrow[\text{معکوس یکدیگرند.}]{\text{شیب‌ها قرینه و}} \frac{۳}{۴}=\frac{۶}{a} \Rightarrow ۳a=۲۴ \Rightarrow a=۸$$

پس معادلهٔ خط $ax+۶y=۸$ به صورت $۸x+۶y=۸$ یا $۴x+۳y=۴$ است.

گام دوم: فرض می‌کنیم مرکز مربع (α,β) است. فاصلهٔ این نقطه از دو خط برابر یکدیگر است:



$$\begin{cases} \text{فاصلهٔ } (\alpha,\beta) \text{ از } ۳x-۴y=۳: \frac{|۳(\alpha)-۴(\beta)-۳|}{\sqrt{۹+۱۶}}=\frac{|۳\alpha-۴\beta-۳|}{۵} \\ \text{فاصلهٔ } (\alpha,\beta) \text{ از } ۴x+۳y=۴: \frac{|۴(\alpha)+۳(\beta)-۴|}{\sqrt{۹+۱۶}}=\frac{|۴\alpha+۳\beta-۴|}{۵} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{|۳\alpha-۴\beta-۳|}{۵}=\frac{|۴\alpha+۳\beta-۴|}{۵} \Rightarrow |۳\alpha-۴\beta-۳|=|۴\alpha+۳\beta-۴|$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۳\alpha-۴\beta-۳=۴\alpha+۳\beta-۴ \Rightarrow \alpha+۷\beta=۱ \\ ۳\alpha-۴\beta-۳=-۴\alpha-۳\beta+۴ \Rightarrow ۷\alpha-\beta=۷ \end{cases}$$

در بین گزینه‌ها مختصات نقطهٔ $(-۶,۱)$ در $\alpha+۷\beta=۱$ صدق می‌کند، پس پاسخ سؤال همین گزینه است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶ دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{-۱+\frac{k}{\sqrt{x-۱}}}$ به صورت $[۱,۱+۵k)$ است. مقدار k کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۵ ۴) ۷

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: رادیکال کوچک‌تر در مخرج قرار دارد، پس نمی‌تواند برابر صفر باشد. زیر رادیکال را بزرگ‌تر از صفر قرار می‌دهیم:

$$x-۱>۰ \Rightarrow x>۱ \quad (۱)$$

گام دوم: حالا زیر رادیکال بزرگ‌تر را بزرگ‌تر مساوی صفر می‌گذاریم:

$$-۱+\frac{k}{\sqrt{x-۱}}\geq ۰ \Rightarrow \frac{k}{\sqrt{x-۱}}\geq ۱ \xrightarrow{\times\sqrt{x-۱}} k\geq\sqrt{x-۱} \xrightarrow{\text{توان ۲}} k^۲\geq x-۱ \Rightarrow x\leq k^۲+۱ \quad (۲)$$

گام سوم: از اشتراک (۱) و (۲) دامنهٔ f برابر $[۱,k^۲+۱)$ می‌شود که طبق سؤال، همان $[۱,۱+۵k)$ است، پس k برابر می‌شود با:

$$[۱,k^۲+۱)=[۱,۱+۵k) \Rightarrow k^۲+۱=۱+۵k \Rightarrow k^۲-۵k=۰$$

(اگر $k=۰$ آن‌گاه بازهٔ داده‌شده مورد قبول نمی‌باشد.)

$$\Rightarrow k(k-۵)=۰ \Rightarrow \begin{cases} k=۰ & \times \\ k=۵ & \checkmark \end{cases}$$

پس ضابطهٔ تابع به صورت $f(x)=\sqrt{-۱+\frac{۵}{\sqrt{x-۱}}}$ است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷ اگر تابع $f(x)=\frac{x+1}{4}-\frac{\sqrt{x}}{2}$ با دامنهٔ $[1,+\infty)$، تابع وارون تابع $g(x)=ax+a\sqrt{x}+b$ باشد، حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

مشاوره در کنکورهای جدید همواره یک تست سهم تابع وارون بوده است.

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint در ضابطهٔ تابع، مخرج مشترک بگیرید و به کمک اتحاد مربع دوجمله‌ای آن را مربع کامل کنید و سپس وارون آن را به دست آورید.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** دو تابع داده‌شده وارون هم هستند، پس وارون هر کدام را که به دست آوریم، به دیگری می‌رسیم، ابتدا ضابطهٔ $f(x)=\frac{x+1}{4}-\frac{\sqrt{x}}{2}$ را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{x+1}{4}-\frac{\sqrt{x}}{2} \Rightarrow f(x)=\frac{x+1-2\sqrt{x}}{4} \Rightarrow f(x)=\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{4}$$

گام دوم: حال وارون این تابع را به دست می‌آوریم تا به $g(x)=ax+a\sqrt{x}+b$ برسیم:

$$y=\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{4} \Rightarrow 4y=(\sqrt{x}-1)^2 \xrightarrow{\sqrt{\ }} 2\sqrt{y}=|\sqrt{x}-1|$$

$$\xrightarrow[\text{را بیرون بیاوریم یا قرینه‌اش را}]{\text{در انتهای کار تفاوتی نمی‌کند که } \sqrt{x}-1} 2\sqrt{y}=\sqrt{x}-1 \Rightarrow$$

$$\sqrt{x}=2\sqrt{y}+1 \Rightarrow x=4y+4\sqrt{y}+1 \Rightarrow f^{-1}(x)=4x+4\sqrt{x}+1$$

با مقایسهٔ ضابطهٔ به‌دست‌آمده با $g(x)=ax+a\sqrt{x}+b$، واضح است که $a=4$ و $b=1$؛ در نتیجه $a+b=5$.

تیزبازی به ضابطهٔ داده‌شده $x=1$ را می‌دهیم:

$$y=\frac{x+1}{4}-\frac{\sqrt{x}}{2} \xrightarrow{x=1} y=\frac{(1)+1}{4}-\frac{\sqrt{(1)}}{2}=0$$

پس اگر به $y=ax+a\sqrt{x}+b$، صفر بدهیم باید به ما ۱ بدهد:

$$y=ax+a\sqrt{x}+b \xrightarrow[y=1]{x=0} 1=0+0+b \Rightarrow b=1$$

حالا برای پیداکردن a، یک بار دیگر عددگذاری می‌کنیم:

$$y=\frac{x+1}{4}-\frac{\sqrt{x}}{2} \xrightarrow{x=4} \frac{5}{4}-1=\frac{1}{4}$$

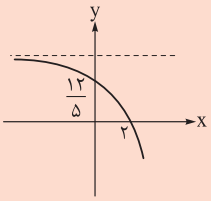
پس اگر به $ax+a\sqrt{x}+\underset{\downarrow}{b}$، $\frac{1}{4}$ بدهیم، باید ۴ بدهد:

$$\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}a+1=4 \Rightarrow \frac{3}{4}a=3 \Rightarrow a=4$$

پس $a+b=5$.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸ نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{a}(b-۵^{x+c})$ به صورت مقابل است. حاصل $\frac{a}{b}$ کدام است؟



۱) $-\frac{۳}{۵}$
۲) $\frac{۳}{۵}$
۳) $\frac{۲}{۵}$
۴) $-\frac{۲}{۵}$

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint نقاط $(۲,۰)$ و $(۰,\frac{۱۲}{۵})$ را در ضابطهٔ تابع جای‌گذاری کنید.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** نمودار تابع f از نقاط $(۲,۰)$ و $(۰,\frac{۱۲}{۵})$ می‌گذرد، پس:

$$f(۲)=۰ \Rightarrow \frac{۱}{a}(b-۵^{(۲)+c})=۰ \xrightarrow{\times a} b-۵^{۲+c}=۰ \Rightarrow ۵^{۲+c}=b \Rightarrow ۵^{c}\times ۲۵=b \Rightarrow ۵^{c}=\frac{b}{۲۵} \quad (*)$$

$$f(۰)=\frac{۱۲}{۵} \Rightarrow \frac{۱}{a}(b-۵^{۰+c})=\frac{۱۲}{۵} \xrightarrow{\times a} b-۵^{c}=\frac{۱۲a}{۵} \Rightarrow ۵^{c}=b-\frac{۱۲a}{۵} \quad (**)$$

گام دوم: سمت راست تساوی‌های (*) و (**) را برابر هم قرار می‌دهیم:

$$\frac{b}{۲۵}=b-\frac{۱۲a}{۵} \Rightarrow \frac{۱۲a}{۵}=b-\frac{b}{۲۵} \Rightarrow \frac{۱۲a}{۵}=\frac{۲۴b}{۲۵} \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{۲}{۵}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹ حاصل عبارت $P=\frac{\sin ۲x+\cos ۴x}{\sin x-\cos x}$ به ازای $x=\frac{\pi}{۱۲}$ کدام است؟

۱) $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $-\sqrt{۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

نکته روابط زیر را به خاطر داشته باشید:

$$\sin x+\cos x=\sqrt{۲}\sin(x+\frac{\pi}{۴})$$

$$\sin x-\cos x=\sqrt{۲}\sin(x-\frac{\pi}{۴})$$

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** با توجه به نکته، عبارت را ساده می‌کنیم:

$$P=\frac{\sin ۲x+\cos ۴x}{\sin x-\cos x}\Rightarrow P=\frac{\sin ۲x+\cos ۴x}{\sqrt{۲}\sin(x-\frac{\pi}{۴})}$$

گام دوم: حال $x=\frac{\pi}{۱۲}$ را در P جای‌گذاری می‌کنیم:

$$P=\frac{\sin(۲(\frac{\pi}{۱۲}))+\cos(۴(\frac{\pi}{۱۲}))}{\sqrt{۲}\sin((\frac{\pi}{۱۲})-\frac{\pi}{۴})}=\frac{\sin\frac{\pi}{۶}+\cos\frac{\pi}{۳}}{\sqrt{۲}\sin(-\frac{\pi}{۶})}=\frac{\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}}{\sqrt{۲}(-\frac{۱}{۲})}=\frac{۱}{-\frac{\sqrt{۲}}{۲}}=-\frac{۲}{\sqrt{۲}}=-\sqrt{۲}$$

یه جور دیگه عبارت $\sin\frac{\pi}{۱۲}-\cos\frac{\pi}{۱۲}$ را می‌توانستیم با استفاده از اتحاد $(\sin\theta-\cos\theta)^۲=۱-\sin ۲\theta$ به صورت $-\sqrt{۱-\sin\frac{\pi}{۶}}=-\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ حساب کنیم.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۰ در مثلث ABC هرگاه $4\tan(\hat{B}-\hat{C})=3$، حاصل عبارت $\frac{4+5\cos\hat{A}}{\sin\hat{B}\sin\hat{C}}$ کدام است؟

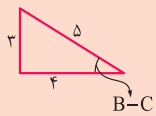
۱) -5 ۲) 5 ۳) -10 ۴) 10

پاسخ: گزینهٔ ۴

نکته سینوس یا کسینوس مجموع یا تفاضل دو زاویه از روابط زیر به دست می‌آید:

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** ابتدا از روی $4\tan(\hat{B}-\hat{C})=3$، $\cos(\hat{B}-\hat{C})$ را به دست می‌آوریم:



$$4\tan(\hat{B}-\hat{C})=3 \Rightarrow \tan(\hat{B}-\hat{C})=\frac{3}{4}$$
$$\xrightarrow{\text{۳، ۴ و ۵ فیثاغورسی هستند.}} \cos(\hat{B}-\hat{C})=\frac{4}{5} \Rightarrow 5\cos(\hat{B}-\hat{C})=4 \quad (*)$$

گام دوم: $\hat{A}$ و $\hat{B}$ و $\hat{C}$ زاویه‌های یک مثلث هستند؛ بنابراین:

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=\pi \Rightarrow \hat{A}=\pi-(\hat{B}+\hat{C}) \Rightarrow \cos\hat{A}=-\cos(\hat{B}+\hat{C}) \quad (**)$$

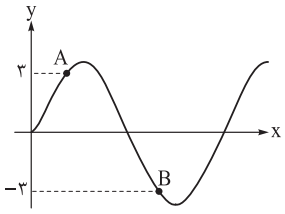
گام سوم: حال عبارت $(*)$ و $(**)$ را در کسر خواسته‌شده جاگذاری می‌کنیم:

$$\frac{4+5\cos\hat{A}}{\sin\hat{B}\sin\hat{C}} \overset{(*),(**)}{=\!=} \frac{5\cos(\hat{B}-\hat{C})-5\cos(\hat{B}+\hat{C})}{\sin\hat{B}\sin\hat{C}}=\frac{5(\cos(\hat{B}-\hat{C})-\cos(\hat{B}+\hat{C}))}{\sin\hat{B}\sin\hat{C}}$$

$$=\frac{5(\cos\hat{B}\cos\hat{C}+\sin\hat{B}\sin\hat{C}-\cos\hat{B}\cos\hat{C}+\sin\hat{B}\sin\hat{C})}{\sin\hat{B}\sin\hat{C}}=\frac{5(2\sin\hat{B}\sin\hat{C})}{\sin\hat{B}\sin\hat{C}}=\frac{10(\sin\hat{B}\sin\hat{C})}{\sin\hat{B}\sin\hat{C}}=10$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۱ بخشی از نمودار تابع $f(x)=۴\sin ۳x$ در شکل زیر رسم شده است. شیب پاره‌خط **AB** کدام است؟



۱) $-\frac{۱۸}{\pi}$

۲) $-\frac{۱۲}{\pi}$

۳) $-\frac{۶}{\pi}$

۴) $-\frac{۴}{\pi}$

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint با توجه به عبارت $۴\sin(۳x_A)=-۴\sin(۳x_B)$ و با نکتهٔ گفته‌شده کار را جلو ببرید.

نکته

$$\sin\alpha=-\sin\beta \Rightarrow \begin{cases}\alpha+\beta=۲k\pi\\ \alpha-\beta=(۲k+۱)\pi\end{cases} \quad ; \ k\in\mathbb{Z}$$

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** عرض نقاط A و B، قرینهٔ یکدیگرند، با توجه به نکته خواهیم داشت:

$$f(x_A)=-f(x_B) \Rightarrow ۴\sin(۳x_A)=-۴\sin(۳x_B) \Rightarrow \sin ۳x_A=-\sin ۳x_B$$

$$\xrightarrow{\text{نکته}} ۳x_B-۳x_A=(۲k+۱)\pi \Rightarrow x_B-x_A=(۲k+۱)\frac{\pi}{۳}$$

به ازای $k=۰$ می‌توانیم x_B-x_A را به دست آوریم؛ زیرا A و B در قرینه‌بودن عرض، نقاط متوالی هم هستند.

$$\Rightarrow x_B-x_A=\frac{\pi}{۳}$$

گام دوم: حال y_B-y_A و سپس خواستهٔ سؤال را به دست می‌آوریم:

$$y_B-y_A=-۳-۳=-۶$$

$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{-۶}{\frac{\pi}{۳}}=-\frac{۱۸}{\pi}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۲ اگر α و β انتهای کمان جواب‌های معادلهٔ $\sin x - ۲\cos x = ۱ - \frac{۱}{۲}\tan x$ در ناحیهٔ سوم دایرهٔ مثلثاتی باشند، حاصل $\cos^۲\alpha + \cos^۲\beta$ کدام است؟

۱) $\frac{۹}{۱۰}$ ۲) $\frac{۱}{۲۰}$ ۳) $\frac{۱}{۱۰}$ ۴) $\frac{۹}{۲۰}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: ابتدا معادله را به صورت زیر مرتب می‌کنیم و $\sin x$ را به صورت $\tan x \cos x$ می‌نویسیم:

$$\sin x + \frac{۱}{۲}\tan x = ۱ + ۲\cos x \Rightarrow \tan x \cos x + \frac{۱}{۲}\tan x = ۱ + ۲\cos x$$

گام دوم: حال در سمت چپ از $\tan x$ و در سمت راست از ۲ فاکتور می‌گیریم.

$$\tan x(\cos x + \frac{۱}{۲}) = ۲(\frac{۱}{۲} + \cos x) \Rightarrow \tan x(\cos x + \frac{۱}{۲}) - ۲(\frac{۱}{۲} + \cos x) = ۰$$

$$\Rightarrow (\cos x + \frac{۱}{۲})(\tan x - ۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \cos x + \frac{۱}{۲} = ۰ \Rightarrow \cos x = -\frac{۱}{۲} \\ \tan x - ۲ = ۰ \Rightarrow \tan x = ۲ \end{cases}$$

گام سوم: از روابط به‌دست‌آمده نتیجه می‌گیریم که $\cos\alpha = -\frac{۱}{۲}$ و $\tan\beta = ۲$، پس خواهیم داشت:

$$\tan\beta = ۲ \xrightarrow{۱+\tan^۲\beta = \frac{۱}{\cos^۲\beta}} ۱ + (۲)^۲ = \frac{۱}{\cos^۲\beta} \Rightarrow \frac{۱}{\cos^۲\beta} = ۵ \Rightarrow \cos^۲\beta = \frac{۱}{۵}$$

خواستهٔ سؤال برابر می‌شود با:

$$\cos^۲\alpha + \cos^۲\beta = (-\frac{۱}{۲})^۲ + \frac{۱}{۵} = \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۵} = \frac{۹}{۲۰}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۳ تابع $f(x)=\sqrt{۱+۲x}$ مفروض است. اگر $\lim\limits_{x\to ۴}\frac{f(x)-a}{x-۴}=\frac{k}{a}$ باشد، مقدار k کدام است؟

۱) -۱ ۲) -۲ ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

هرگاه حاصل حد به صورت $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ برابر $\frac{۰}{۰}$ شود، می‌توانیم برای رفع ابهام، مشتق صورت و مشتق مخرج را به جای صورت و مخرج قرار دهیم:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

به این قاعده، **قاعدهٔ هوپیتال** گفته می‌شود.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: حد مخرج در $x=۴$ صفر می‌شود اما حاصل حد عددی حقیقی است، پس حد صورت آن نیز باید در $x=۴$ برابر صفر شود:

$$\lim_{x\to ۴}(f(x)-a)=۰ \Rightarrow a=f(۴)=۳$$

گام دوم: $a=۳$ را جاگذاری می‌کنیم و از HOP استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۴}\frac{f(x)-۳}{x-۴}\overset{HOP}{=\!=}\lim_{x\to ۴}\frac{f'(x)}{۱}=f'(۴) \quad (*)$$

گام سوم: $f'(x)$ و سپس $f'(۴)$ را به دست می‌آوریم:

$$f(x)=\sqrt{۱+۲x} \Rightarrow f'(x)=\frac{۲}{۲\sqrt{۱+۲x}}=\frac{۱}{\sqrt{۱+۲x}} \Rightarrow f'(۴)=\frac{۱}{۳}$$

گام چهارم: حال با جاگذاری مناسب در رابطهٔ $(*)$ خواستهٔ سؤال را به دست می‌آوریم:

$$f'(۴)=\frac{۱}{۳}=\frac{k}{۳} \Rightarrow k=۱$$

یه‌جور دیگه

پس از به دست آوردن مقدار a، به صورت زیر حل می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۴}\frac{\sqrt{۱+۲x}-۳}{x-۴}=\lim_{x\to ۴}\frac{۱+۲x-۹}{(x-۴)(\sqrt{۱+۲x}+۳)}=\lim_{x\to ۴}\frac{۲(x-۴)}{(x-۴)(\sqrt{۱+۲x}+۳)}=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}=\frac{k}{۳} \Rightarrow k=۱$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۴ برای تابع $f(x)=x+۲\sqrt{x-۱}$، اگر $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f^{-۱}(kx)}{f(x)}=۴$ باشد، مقدار k کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۱۶ ۴) ۸

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint ضابطهٔ f را به صورت $f(x)=(۱+\sqrt{x-۱})^۲$ بنویسید.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** ضابطهٔ داده‌شده برای f را به صورت زیر می‌نویسیم و سپس وارون آن را به دست می‌آوریم:

$$f(x)=x+۲\sqrt{x-۱} \Rightarrow f(x)=(۱+\sqrt{x-۱})^۲$$

$$y=(۱+\sqrt{x-۱})^۲ \xrightarrow{\sqrt{}} \sqrt{y}=\underbrace{|۱+\sqrt{x-۱}|}_{\text{همواره مثبت}} \Rightarrow \sqrt{y}=۱+\sqrt{x-۱} \Rightarrow \sqrt{y}-۱=\sqrt{x-۱}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} y-۲\sqrt{y}+۱=x-۱ \Rightarrow x=y-۲\sqrt{y}+۲$$

$$\Rightarrow f^{-۱}(x)=x-۲\sqrt{x}+۲$$

گام دوم: حال که $f(x)$ و $f^{-۱}(x)$ را داریم، حد داده‌شده را به کمک آن‌ها تشکیل می‌دهیم تا k به دست آید:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f^{-۱}(kx)}{f(x)}=۴ \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{kx-۲\sqrt{kx}+۲}{x+۲\sqrt{x-۱}}=۴ \xrightarrow{\text{قاعدهٔ پرتوان}} \lim_{x\to+\infty}\frac{kx}{x}=۴ \Rightarrow k=۴$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۵ تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{۶x^۲+(m+۳)x+\frac{m}{۲}}}{|۲x^۳+a^۲|} & ; \quad x\neq a \\ b\sqrt{۲m} & ; \quad x=a\end{cases}$ در $\mathbb{R}$ پیوسته است. مقدار b کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$

۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: تابع در $\mathbb{R}$ پیوسته است، پس زیر رادیکال همواره بزرگ‌تر یا مساوی صفر است. در نتیجه دلتای معادلهٔ $۶x^۲+(m+۳)x+\frac{m}{۲}=۰$ کوچک‌تر یا مساوی صفر است:

$$\Delta\leq ۰ \Rightarrow (m+۳)^۲-۴(۶)(\frac{m}{۲})=m^۲+۶m+۹-۱۲m\leq ۰$$

$$\Rightarrow m^۲-۶m+۹=(m-۳)^۲\leq ۰ \Rightarrow m=۳$$

گام دوم: حال $m=۳$ را در ضابطهٔ بالایی جاگذاری می‌کنیم:

$$y=\frac{\sqrt{۶x^۲+(m+۳)x+\frac{m}{۲}}}{|۲x^۳+a^۲|} \xrightarrow{m=۳} y=\frac{\sqrt{۶x^۲+۶x+\frac{۳}{۲}}}{|۲x^۳+a^۲|} \Rightarrow y=\frac{\sqrt{۶(x^۲+x+\frac{۱}{۴})}}{|۲x^۳+a^۲|}$$

$$\xrightarrow{x^۲+x+\frac{۱}{۴}=(x+\frac{۱}{۲})^۲} y=\frac{\sqrt{۶}\,|x+\frac{۱}{۲}|}{|۲x^۳+a^۲|}$$

گام سوم: با توجه به صورت سؤال، $x=a$ ریشهٔ مخرج ضابطهٔ بالایی است. از آن‌جایی که حد تابع در $x=a$ باید برابر با مقدار آن در همین نقطه شود، پس $x=a$ ریشهٔ صورت ضابطهٔ بالایی نیز هست؛ بنابراین $a=-\frac{۱}{۲}$ و خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{۶}\,|x+\frac{۱}{۲}|}{|۲x^۳+a^۲|}=b\sqrt{۶} \xrightarrow{a=-\frac{۱}{۲}} \lim_{x\to -\frac{۱}{۲}}\frac{\sqrt{۶}\,|x+\frac{۱}{۲}|}{|۲x^۳+\frac{۱}{۴}|}=b\sqrt{۶}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to -\frac{۱}{۲}}\frac{\sqrt{۶}\,|x+\frac{۱}{۲}|}{۲|x^۳+\frac{۱}{۸}|}=\lim_{x\to -\frac{۱}{۲}}\frac{\sqrt{۶}\,|x+\frac{۱}{۲}|}{۲|x+\frac{۱}{۲}||x^۲-\frac{۱}{۲}x+\frac{۱}{۴}|}=b\sqrt{۶}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{۶}}{۲|\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۴}|}=b\sqrt{۶} \Rightarrow \frac{۱}{۲(\frac{۳}{۴})}=b \Rightarrow b=\frac{۲}{۳}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۶ فرض کنید $P(x)=x^۳+۶x^۲+ax+b$ باشد، اگر هر دو چندجمله‌ای $P(\frac{x}{۲})$ و $P'(x)$ بر $P''(x)$ بخش‌پذیر باشند، مقدار b کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۴ ۳) -۷ ۴) -۴

پاسخ: گزینهٔ ۱

نکته اگر چندجمله‌ای $Q(x)$ بر چندجمله‌ای $P(x)=ax+b$ بخش‌پذیر باشد، آن‌گاه مقدار $Q(x)$ در $x=-\frac{b}{a}$ برابر صفر است. ($-\frac{b}{a}$ ریشهٔ P است.)

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** ابتدا $P'(x)$ و $P''(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$P'(x)=۳x^۲+۱۲x+a$$

$$P''(x)=۶x+۱۲$$

گام دوم: $P(\frac{x}{۲})$ و $P'(x)$ بر $P''(x)=۶x+۱۲$ بخش‌پذیرند، ریشهٔ $P''(x)$ برابر -۲ است، پس $P(\frac{x}{۲})$ و $P'(x)$ به ازای $x=-۲$ باید صفر شوند:

$$P'(x)=۳x^۲+۱۲x+a \xrightarrow{P'(-۲)=۰} ۳(-۲)^۲+۱۲(-۲)+a=۰ \Rightarrow ۱۲-۲۴+a=۰ \Rightarrow a=۱۲$$

$$P(\frac{x}{۲})=(\frac{x}{۲})^۳+۶(\frac{x}{۲})^۲+a(\frac{x}{۲})+b \xrightarrow{P(-\frac{۲}{۲})=۰} -۱+۶-a+b=۰ \xrightarrow{a=۱۲} -۱+۶-۱۲+b=۰ \Rightarrow b=۷$$

پس b برابر ۷ است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۷ برای ساخت یک قوطی فلزی استوانه‌ای‌شکل بدون در با حجم ۸π، حداقل مساحت فلز به‌کاررفته کدام است؟

۱) ۱۲π

۲) ۱۶π

۳) ۱۴π

۴) ۸π

مشاوره بهینه‌سازی از آن دسته مباحثی است که دانش‌آموزان معمولاً نمی‌توانند با آن ارتباط برقرار کنند، اما در بعضی کنکورها از آن سؤال آسان طرح شده است، پس به آن مسلط باشید.

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint از روی حجم داده‌شده، ارتفاع را برحسب شعاع بنویسید و سپس آن را در رابطهٔ $S_{\text{فلز}} = ۲\pi rh + \pi r^۲$ جاگذاری کنید.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** ابتدا با توجه به این‌که حجم را داریم، ارتفاع را برحسب شعاع می‌نویسیم:

$$V = \pi r^۲ h \xrightarrow{V=۸\pi} ۸\pi = \pi r^۲ h \Rightarrow h = \frac{۸}{r^۲}$$

گام دوم: مساحت فلز به‌کاررفته در قوطی از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$S_{\text{فلز}} = S_{\text{فلز بدنه}} + S_{\text{فلز کف}} \Rightarrow S_{\text{فلز}} = ۲\pi rh + \pi r^۲ \xrightarrow{h=\frac{۸}{r^۲}} S_{\text{فلز}} = ۲\pi r(\frac{۸}{r^۲}) + \pi r^۲ = \frac{۱۶\pi}{r} + \pi r^۲$$

پس مساحت فلز از رابطهٔ $S_{\text{فلز}} = \frac{۱۶\pi}{r} + \pi r^۲$ به دست می‌آید.

گام سوم: رابطهٔ به‌دست‌آمده برحسب r است، برای این‌که حداقل مساحت فلز به‌کاررفته به دست آید، برحسب r از رابطهٔ مذکور مشتق می‌گیریم و آن را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$S_{\text{فلز}} = \frac{۱۶\pi}{r} + \pi r^۲ \longrightarrow S'_{\text{فلز}} = \frac{-۱۶\pi}{r^۲} + ۲\pi r \xrightarrow{S'_{\text{فلز}}=۰} -\frac{۱۶\pi}{r^۲} + ۲\pi r = ۰ \Rightarrow ۲\pi r = \frac{۱۶\pi}{r^۲} \Rightarrow r^۳ = ۸ \Rightarrow r = ۲$$

گام چهارم: پس به ازای $r = ۲$ حداقل مساحت فلز به‌کاررفته به دست می‌آید، آن را در رابطهٔ به‌دست‌آمده جاگذاری می‌کنیم:

$$S_{\text{فلز}} = \frac{۱۶\pi}{r} + \pi r^۲ \xrightarrow{r=۲} \min S_{\text{فلز}} = ۸\pi + ۴\pi = ۱۲\pi$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۸ تابع $f(x)=|x-a|\sqrt[3]{ax+b}$ در $x=2$ دارای نقطهٔ گوشه و در $x=1$ دارای مماس قائم است. مقدار b کدام است؟

۱) -1 ۲) 1 ۳) 2 ۴) -2

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint $x=2$ ریشهٔ داخل قدرمطلق و $x=1$ ریشهٔ زیر رادیکال است.

درس Box

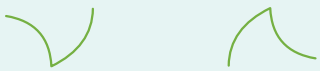
نقطهٔ گوشه‌ای

تابع f در $x=a$ دارای نقطهٔ گوشه‌ای است هرگاه:

۱) دارای مشتق چپ و راست متناهی و نابرابر باشد:



۲) یکی از مشتق‌های چپ و راست متناهی و دیگری نامتناهی باشد:



نکته توابع قدرمطلقی در ریشهٔ سادهٔ داخل قدرمطلق دارای نقاط گوشه‌ای هستند.

نقاط دارای مماس قائم

تابع f در $x=a$ دارای مماس قائم است، هرگاه مشتق چپ و راست f در این نقطه هر دو نامتناهی باشد.



نکته توابع به فرم $y=\sqrt[3]{ax+b}$، در ریشهٔ زیر رادیکال دارای مماس قائم هستند.

پاسخ خیلی تشریحی با توجه به درس‌باکس و نکات آن، $x=2$ ریشهٔ سادهٔ $|x-a|$ و $x=1$ ریشهٔ زیر رادیکال $\sqrt[3]{ax+b}$ است:

$|x-a|$ ریشهٔ $x=2$: $(2)-a=0 \Rightarrow a=2$

$\sqrt[3]{ax+b}$ ریشهٔ $x=1$: $a(1)+b=0 \xrightarrow{a=2} 2+b=0 \Rightarrow b=-2$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۹ خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=\frac{ax}{x-۲}$ در $x=-۱$ دارای عرض از مبدأ ۲ است. طول مینیمم نسبی تابع $g(x)=xf(x)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint شیب خط مماس گفته‌شده را با توجه به این‌که از نقاط $(۰,۲)$ و $(-۱,\frac{a}{۳})$ می‌گذرد، به دست آورید و برابر با $f'(-۱)$ قرار دهید.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** با توجه به صورت سؤال، خط مماس گفته‌شده از نقاط $(۰,۲)$ و $(-۱,\frac{a}{۳})$ عبور می‌کند، پس شیب آن برابر می‌شود با:

$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{a}{۳}-۲}{-۱-۰}=۲-\frac{a}{۳}\Rightarrow m=\frac{۶-a}{۳}\quad (*)$$

گام دوم: مشتق f را به دست می‌آوریم و $x=-۱$ را در آن جاگذاری می‌کنیم تا شیب خط مماس گذرنده از $x=-۱$ به دست آید:

$$f(x)=\frac{ax}{x-۲}\Rightarrow f'(x)=\frac{a(x-۲)-(ax)}{(x-۲)^۲}=\frac{-۲a}{(x-۲)^۲}\xrightarrow{x=-۱}f'(-۱)=\frac{-۲a}{۹}\quad (**)$$

گام سوم: روابط $(*)$ و $(**)$ را برابر هم قرار می‌دهیم:

$$\frac{۶-a}{۳}=\frac{-۲a}{۹}\Rightarrow ۱۸-۳a=-۲a\Rightarrow a=۱۸$$

گام چهارم: حال $a=۱۸$ را در تابع f جاگذاری می‌کنیم و سپس ضابطهٔ تابع $g(x)=xf(x)$ را تشکیل می‌دهیم:

$$f(x)=\frac{۱۸x}{x-۲}\Rightarrow g(x)=xf(x)=\frac{۱۸x^۲}{x-۲}$$

$$\Rightarrow g'(x)=\frac{۳۶x(x-۲)-۱۸x^۲}{(x-۲)^۲}=\frac{۱۸x^۲-۷۲x}{(x-۲)^۲}\xrightarrow{g'(x)=۰}۱۸x^۲-۷۲x=۰$$

$$\Rightarrow ۱۸x(x-۴)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۰\\x=۴\end{cases}$$

گام پنجم: جدول تغییرات رفتار تابع را می‌نویسیم:

x		۰		۲		۴	
g'	+		−		−		+
g	↗	Max نسبی	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	Min نسبی	↗

پس طول نقطهٔ مینیمم نسبی تابع ۴ است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۰ اگر برای سه مجموعهٔ ناتهی A، B و C بدانیم $A=B\cup C$، $B=A\cup C$ و $C=A\cup B$، آن‌گاه متمم مجموعهٔ $[(A-B)\cup[(C-B)'\cap(B\cap A)']$ کدام است؟

۱) $B\cup C$
۲) $B'\cap C$
۳) $A'\cap B$
۴) $A\cup B'$

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

فرض کنید A، B و C سه مجموعه با مرجع U باشند، در این صورت:

۱) $A=B \Leftrightarrow A\subseteq B\wedge B\subseteq A$
۲) $A\subseteq B \Rightarrow A-B=\varnothing$
۳) $A\subseteq B \Rightarrow A\cup B=B\wedge A\cap B=A$
۴) $A\cap B=A \Rightarrow A\subseteq B$
۵) $A\cup B=A \Rightarrow B\subseteq A$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول:

$$\left.\begin{cases}A=B\cup C\\B=A\cup C\end{cases}\Rightarrow A=A\cup C\Rightarrow C\subseteq A\right\}\Rightarrow A=C$$

$$\left.\begin{cases}B=A\cup C\\C=A\cup B\end{cases}\Rightarrow C=A\cup C\Rightarrow A\subseteq C\right\}$$

به همین ترتیب ثابت می‌شود $B=C$؛ بنابراین $A=B=C$، در نتیجه $A'=B'=C'$.

گام دوم:

$$A=B\Rightarrow A-B=\varnothing$$

$$C=B\Rightarrow C-B=\varnothing\Rightarrow (C-B)'=U$$

$$(B\cap A)=A\Rightarrow (B\cap A)'=A'=B'=C'$$

گام سوم:

$$(A-B)\cup[(C-B)'\cap(B\cap A)']=\varnothing\cup[U\cap A']=A'$$

که متمم آن برابر است با $(A')'=A=B\cup C$.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۱ اگر A و B دو پیشامد سازگار از فضای نمونه، $P(A \mid B) = ۳P(B \mid A)$ و $P(A - B) = ۵P(B - A)$ باشد، چه‌قدر احتمال دارد که پیشامد B رخ ندهد، اگر بدانیم پیشامد A رخ داده است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۵}{۶}$ ۴) صفر

پاسخ: گزینهٔ (۳)

درس Box

۱) $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$; $P(B) > ۰$

۲) $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

۳) $P(B' \mid A) = ۱ - P(B \mid A)$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول:

$$P(A \mid B) = ۳P(B \mid A) \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = ۳\frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$\Rightarrow P(A) = ۳P(B) \quad (۱)$$

گام دوم:

$$P(A - B) = ۵P(B - A) \Rightarrow P(A) - P(A \cap B) = ۵P(B) - ۵P(A \cap B)$$

$$\Rightarrow ۴P(A \cap B) = ۵P(B) - P(A) \overset{(۱)}{=} ۵P(B) - ۳P(B) = ۲P(B)$$

$$\Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{۲}{۴} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow P(A \mid B) = \frac{۱}{۲} \Rightarrow P(B \mid A) = \frac{۱}{۳} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۶}$$

گام سوم:

$$P(B' \mid A) = ۱ - P(B \mid A) = ۱ - \frac{۱}{۶} = \frac{۵}{۶}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۲ سه کیسه که هر کدام شامل ۶ مهره باشند داریم. در کیسهٔ اول ۱ مهرهٔ قرمز، در کیسهٔ دوم ۲ مهرهٔ قرمز و در کیسهٔ سوم ۳ مهرهٔ قرمز داریم و بقیهٔ مهره‌ها آبی هستند. به تصادف یک کیسه را انتخاب می‌کنیم و از آن یک مهره خارج می‌کنیم. اگر مهرهٔ خارج‌شده قرمز باشد، با چه احتمالی این مهره از کیسهٔ سوم خارج نشده است؟

۱) $\frac{۱}{۵}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

قانون بیز: فرض کنید $B_۱، B_۲، \ldots و B_n$ پیشامدهایی با احتمال ناصفر باشند که فضای نمونه را افراز می‌کنند. در این صورت، برای هر پیشامد دلخواه A و هر $i \le n$ داریم:

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(B_i)P(A \mid B_i)}{\sum_{k=۱}^{n} P(B_k)P(A \mid B_k)}$$

نکته

$$P(B' \mid A) = ۱ - P(B \mid A)$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: فرض کنیم پیشامد A، یعنی مهرهٔ خارج‌شده قرمز باشد و پیشامدهای $B_۱$، $B_۲$ و $B_۳$ به ترتیب به معنای انتخاب کیسه‌های اول، دوم و سوم باشد. لذا:

$$P(B_۱) = P(B_۲) = P(B_۳) = \frac{۱}{۳}$$

گام دوم:

$P(A \mid B_۱) = \frac{۱}{۶}$ در کیسهٔ اول یک مهره از ۶ مهره قرمز است.

$P(A \mid B_۲) = \frac{۲}{۶}$ در کیسهٔ دوم دو مهره از ۶ مهره قرمز است.

$P(A \mid B_۳) = \frac{۳}{۶}$ در کیسهٔ سوم سه مهره از ۶ مهره قرمز است.

گام سوم:

$$P(B_۳ \mid A) = \frac{P(B_۳)P(A \mid B_۳)}{P(B_۱)P(A \mid B_۱) + P(B_۲)P(A \mid B_۲) + P(B_۳)P(A \mid B_۳)}$$

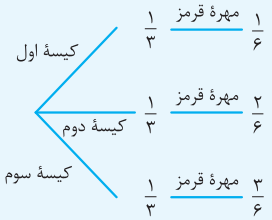
$$\Rightarrow P(B_۳ \mid A) = \frac{\frac{۱}{۳} \times \frac{۳}{۶}}{\frac{۱}{۳} \times \frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۳} \times \frac{۲}{۶} + \frac{۱}{۳} \times \frac{۳}{۶}} = \frac{\frac{۱}{۶}}{\frac{۱}{۳}} = \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲}$$

گام چهارم:

$$P(B'_۳ \mid A) = ۱ - P(B_۳ \mid A) = ۱ - \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲}$$

یه‌جور دیگه

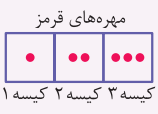
به کمک نمودار درختی، سریع‌تر به جواب می‌رسیم.



$$\Rightarrow P(B_۳ \mid A) = \frac{\frac{۱}{۳} \times \frac{۳}{۶}}{\frac{۱}{۳} \times \frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۳} \times \frac{۲}{۶} + \frac{۱}{۳} \times \frac{۳}{۶}} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow P(B'_۳ \mid A) = \frac{۱}{۲}$$

تیزبازی

احتمال انتخاب کیسه‌ها برابر است، پس آن را نادیده گرفته و فقط به مهره‌های قرمز توجه می‌کنیم.



احتمال این‌که مهرهٔ قرمز خارج‌شده متعلق به کیسهٔ سوم باشد، برابر $\frac{۳}{۶}$ یا $\frac{۱}{۲}$ است، پس با احتمال $۱ - \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲}$ مهرهٔ خارج‌شده به کیسهٔ سوم تعلق ندارد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۳ ضریب تغییرات داده‌های $ab^3, a, 2, c-1$ برابر صفر است. واریانس داده‌های a^3, b^2, c کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{14}{3}$ ۳) $\frac{26}{3}$ ۴) $\frac{38}{3}$

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

انحراف معیار داده‌ها: اگر n داده به صورت $x_1, x_2, \ldots, x_n$ داشته باشیم، انحراف معیار آن‌ها را با نماد σ نشان می‌دهیم، که به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

واریانس داده‌ها: توان دوم انحراف معیار داده‌ها را واریانس داده‌ها می‌گویند و آن را با نماد σ^2 نشان می‌دهیم.

ضریب تغییرات داده‌ها:

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$$

نکته اگر انحراف معیار چند داده برابر صفر باشد، آن داده‌ها با هم برابرند.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول:

$$CV = 0 \Rightarrow \frac{\sigma}{\bar{x}} = 0 \Rightarrow \sigma = 0$$

چون انحراف معیار داده‌ها صفر شد، پس داده‌ها با هم برابرند.

گام دوم:

$$\begin{cases} c-1=2 \Rightarrow c=3 \\ a=2 \\ ab^3=2 \xrightarrow{a=2} b^3=1 \Rightarrow b=1 \end{cases}$$

گام سوم: واریانس داده‌های ۳، 1^2 و 2^3 یعنی ۳، ۱ و ۸ را می‌خواهیم:

$$\bar{x} = \frac{8+1+3}{3} = \frac{12}{3} = 4$$

$$\sigma^2 = \frac{(8-4)^2+(1-4)^2+(3-4)^2}{3} = \frac{16+9+1}{3} = \frac{26}{3}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

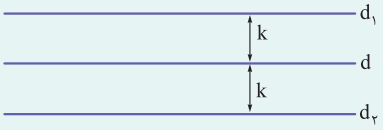
۲۴ نقاطی از دایرهٔ $C(O,5)$ که از خط d به فاصلهٔ x قرار دارند، رأس‌های یک ذوزنقه با قاعده‌های ۶ و ۸ هستند. بیشترین مساحت این ذوزنقه کدام است؟

۱) ۳۵ ۲) ۴۲ ۳) ۴۹ ۴) ۵۶

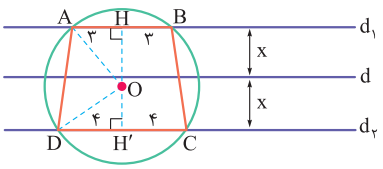
پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint از نقطهٔ O (مرکز دایره)، عمودهایی بر دو قاعدهٔ ذوزنقه رسم می‌کنیم.

درس Box مجموعهٔ نقاطی از صفحه که از خط d واقع در آن صفحه به فاصلهٔ ثابت k قرار دارند، دو خط موازی با d در طرفین آن و به فاصلهٔ ثابت k قرار دارند.



پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** می‌دانیم نقاطی از صفحه که از خط d در آن صفحه به فاصلهٔ ثابت x باشند، روی دو خط موازی با خط d در طرفین آن و به فاصلهٔ x از آن واقع‌اند. این دو خط را مطابق شکل d_1 و d_2 می‌نامیم. فرض کنید d_1 دایره را در نقاط A و B و d_2 دایره را در نقاط C و D قطع می‌کند، به گونه‌ای که $AB = 6$ و $CD = 8$ باشد.



گام دوم: می‌دانیم قطر عمود بر یک وتر، آن وتر را نصف می‌کند، پس مطابق شکل در دو مثلث قائم‌الزاویهٔ OAH و ODH′، فاصلهٔ مرکز دایره را از دو وتر AB و CD محاسبه می‌کنیم.

$$\overset{\Delta}{OAH}: OH^2 = OA^2 - AH^2 = 5^2 - 3^2 = 16 \Rightarrow OH = 4$$

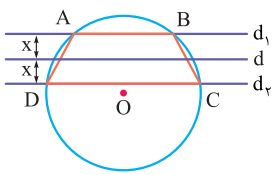
$$\overset{\Delta}{ODH'}: OH'^2 = OD^2 - OH'^2 = 5^2 - 4^2 = 9 \Rightarrow OH' = 3$$

گام سوم: با توجه به مقادیر به‌دست‌آمده در گام دوم، ارتفاع ذوزنقه و سپس مساحت ذوزنقه را به دست می‌آوریم:

$$\text{ارتفاع ذوزنقه} = HH' = OH + OH' = 4 + 3 = 7$$

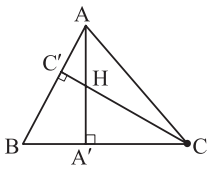
$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} HH'(AB + CD) = \frac{1}{2} \times 7(6 + 8) = 49$$

توجه: شکل سؤال را به صورت زیر هم می‌توان در نظر گرفت که در این صورت، کم‌ترین مقدار مساحت ذوزنقهٔ ABCD به دست می‌آید.



SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۵ در شکل زیر، ارتفاع‌های AA' و CC' در نقطهٔ H متقاطع‌اند. اگر $A'B < A'H$ باشد، آن‌گاه نسبت $\frac{CH}{AB}$ چگونه است؟



۱) برابر با ۱

۲) بیشتر از ۱

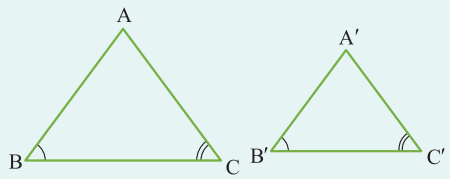
۳) کم‌تر از ۱

۴) هر مقداری می‌تواند داشته باشد.

پاسخ: گزینهٔ ۲

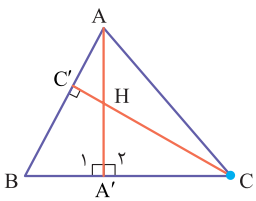
Hint با توجه به ارتفاع‌های مثلث ABC و مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ ایجادشده، دو مثلث متشابه شامل اضلاع $A'B$ و $A'H$ پیدا کنید.

درس Box هرگاه دو زاویه از مثلثی نظیربه‌نظیر با دو زاویه از مثلثی دیگر برابر باشند، آن‌گاه دو مثلث متشابه‌اند و نسبت اضلاع آن‌ها برابر نسبت تشابه دو مثلث است.



$$\left.\begin{matrix}\hat{B}=\hat{B}'\\ \hat{C}=\hat{C}'\end{matrix}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{A'B'C'} \Rightarrow \frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}=k$$

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** AA' و CC' ارتفاع‌های مثلث هستند، بنابراین داریم:



$$\left.\begin{matrix}\overset{\Delta}{BAA'}: \hat{A}'=۹۰^\circ \Rightarrow B\hat{A}A'=۹۰^\circ-\hat{B}\\ \overset{\Delta}{BCC'}: \hat{C}'=۹۰^\circ \Rightarrow B\hat{C}C'=۹۰^\circ-\hat{B}\end{matrix}\right\} \Rightarrow B\hat{A}A'=B\hat{C}C'$$

گام دوم: دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ABA' و CHA' را در نظر می‌گیریم:

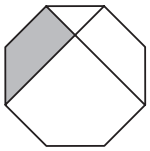
$$\left.\begin{matrix}B\hat{A}A'=B\hat{C}C'\\ \hat{A}'_۱=\hat{A}'_۲=۹۰^\circ\end{matrix}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{ABA'} \sim \overset{\Delta}{CHA'} \Rightarrow \frac{AB}{CH}=\frac{A'B}{A'H} \quad (*)$$

گام سوم: طبق فرض سؤال $A'B < A'H$ است پس $\frac{A'H}{A'B} > ۱$. بنابراین، با توجه به (*) داریم:

$$\frac{AB}{CH}=\frac{A'B}{A'H} \Rightarrow \frac{CH}{AB}=\frac{A'H}{A'B} > ۱$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۶ مطابق شکل اگر طول ضلع هشت‌ضلعی منتظم برابر ۲ باشد، مساحت قسمت رنگی کدام است؟

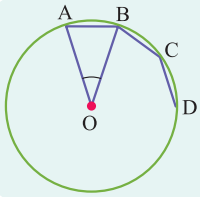


۱) $۲\sqrt{۲}+۱$
۲) $۲\sqrt{۲}-۱$
۳) $۲\sqrt{۲}+۲$
۴) $۴\sqrt{۲}+۲$

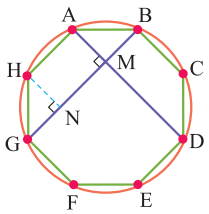
پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint دایرهٔ محیطی هشت‌ضلعی منتظم را رسم کنید.

درس Box هر nضلعی منتظم، یک چندضلعی محیطی و محاطی است. در صورتی‌که دایرهٔ محیطی nضلعی منتظم را رسم کنیم، اندازهٔ هر یک از کمان‌های روی دایرهٔ محیطی که بین دو رأس متوالی nضلعی ایجاد می‌شوند، برابر $\frac{۳۶۰^\circ}{n}$ است.



پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** مطابق شکل، دایرهٔ محیطی هشت‌ضلعی منتظم را رسم می‌کنیم. اندازهٔ هر یک از کمان‌های بین دو رأس متوالی روی دایره برابر $\frac{۳۶۰^\circ}{۸}=۴۵^\circ$ است.



طبق رابطهٔ زاویهٔ محاطی و زاویهٔ بین دو وتر در دایره داریم:

$$\hat{M}=\frac{\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{DG}}{۲}=\frac{۴۵^\circ+۳(۴۵^\circ)}{۲}=۹۰^\circ$$

$$M\hat{A}H=\frac{\overset{\frown}{DH}}{۲}=\frac{۴\times۴۵^\circ}{۲}=۹۰^\circ \quad \text{(زاویهٔ محاطی)}$$

$$M\hat{G}H=\frac{\overset{\frown}{BH}}{۲}=\frac{۲\times۴۵^\circ}{۲}=۴۵^\circ \quad \text{(زاویهٔ محاطی)}$$

گام دوم: چهارضلعی AMGH دوزنقهٔ قائم‌الزاویه است. یکی از دو قاعدهٔ دوزنقه $AH=۲$ است. در مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین GNH داریم:

$$GN^۲+NH^۲=GH^۲ \Rightarrow ۲NH^۲=۲^۲ \Rightarrow NH^۲=۲ \Rightarrow GN=NH=\sqrt{۲}$$

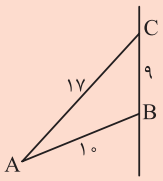
$$MG=MN+GN=۲+\sqrt{۲}$$

گام سوم: مساحت قسمت رنگی (ذوزنقهٔ AMGH) برابر است با:

$$S=\frac{۱}{۲}NH(AH+MG)=\frac{۱}{۲}\sqrt{۲}(۲+۲+\sqrt{۲})=\frac{\sqrt{۲}}{۲}(۴+\sqrt{۲})=۲\sqrt{۲}+۱$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۷ مطابق شکل، حجم حاصل از دوران مثلث **ABC** حول ضلع **BC** کدام است؟



۱) ۲۳۲π

۲) ۲۱۶π

۳) ۱۹۲π

۴) ۱۸۰π

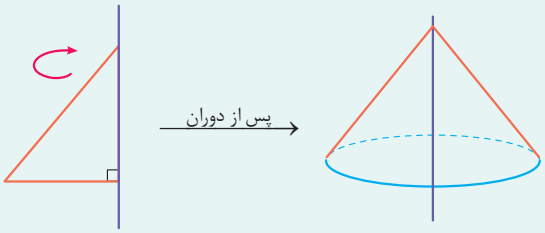
مشاوره محاسبهٔ حجم حاصل از دوران (مثلث، ذوزنقه، ربع دایره و ...) یکی از تیپ‌های پرتکرار در سؤالات کنکور است. فرمول‌های حجم اشکال فضایی که در کتاب ریاضی نهم یاد گرفته‌اید (مانند استوانه، مخروط، کره و ...) در این‌گونه مسائل کاربرد دارد.

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint از دوران مثلث ABC حول ضلع BC یک مخروط بزرگ ایجاد می‌شود که مخروط کوچکی از درون آن برداشته شده است.

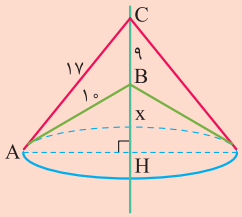
درس Box

۱) از دوران یک مثلث قائم‌الزاویه حول هر یک از اضلاع قائمهٔ آن، یک مخروط ایجاد می‌شود.



۲) حجم مخروطی به شعاع قاعدهٔ r و ارتفاع h، برابر است با: $\frac{۱}{۳}\pi r^۲ h$

پاسخ‌خیلی‌تشریحی **گام اول:** ابتدا از رأس A، عمود AH را بر راستای BC رسم می‌کنیم. فرض کنید $BH = x$ باشد، در این صورت داریم:



$$\overset{\Delta}{ABH}: AH^۲ = ۱۰^۲ - x^۲ = ۱۰۰ - x^۲ \qquad (۱)$$

$$\overset{\Delta}{ACH}: AH^۲ = ۱۷^۲ - (۹+x)^۲ = ۲۸۹ - (۸۱ + ۱۸x + x^۲) = ۲۰۸ - ۱۸x - x^۲ \qquad (۲)$$

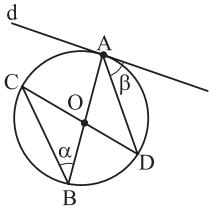
$$(۱), (۲) \Rightarrow ۲۰۸ - ۱۸x - x^۲ = ۱۰۰ - x^۲ \Rightarrow ۱۸x = ۱۰۸ \Rightarrow x = ۶ \Rightarrow AH = ۸$$

گام دوم: حجم حاصل از دوران، برابر حجم یک مخروط بزرگ است که یک مخروط کوچک هم‌قاعده با آن از درون آن برداشته شده است.

$$V = \text{حجم مخروط بزرگ} - \text{حجم مخروط کوچک} = \frac{۱}{۳}\pi(۸)^۲ \times ۱۵ - \frac{۱}{۳}\pi(۸)^۲ \times ۶ = \frac{۶۴\pi}{۳}(۱۵-۶) = \frac{۶۴\pi}{۳} \times ۹ = ۱۹۲\pi$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۸ در شکل زیر، **O** مرکز دایره و خط **d** در نقطهٔ **A** بر دایره مماس است. کدام رابطه همواره بین دو زاویهٔ α و β برقرار است؟



۱) $\alpha+\beta=۹۰^\circ$

۲) $\alpha=\beta$

۳) $۲\alpha+\beta=۱۸۰^\circ$

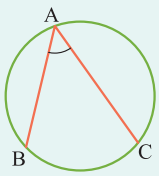
۴) $\alpha+۲\beta=۱۸۰^\circ$

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint اندازهٔ زوایای α و β را برحسب کمان‌های مقابل آن‌ها پیدا کنید.

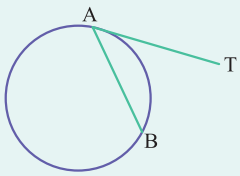
درس Box

۱) در هر دایره، اندازهٔ هر زاویهٔ محاطی برابر با نصف اندازهٔ کمان مقابل به آن زاویه است.



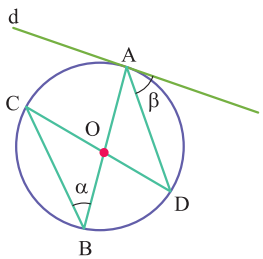
$$\hat{A}=\frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}$$

۲) در هر دایره، اندازهٔ هر زاویهٔ ظلی برابر با نصف اندازهٔ کمان مقابل به آن زاویه است.



$$T\hat{A}B=\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$$

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** مطابق شکل α زاویهٔ محاطی و β زاویهٔ ظلی است، بنابراین داریم:



$$\left.\begin{array}{l}\alpha \text{ (زاویهٔ محاطی)} \Rightarrow \alpha=\dfrac{\overset{\frown}{CA}}{۲}\\ \beta \text{ (زاویهٔ ظلی)} \Rightarrow \beta=\dfrac{\overset{\frown}{AD}}{۲}\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha+\beta=\frac{\overset{\frown}{CA}+\overset{\frown}{AD}}{۲}=\frac{\overset{\frown}{CD}}{۲}$$

گام دوم: CD قطر دایره است، پس $\overset{\frown}{CD}=۱۸۰^\circ$ و در نتیجه داریم:

$$\alpha+\beta=\frac{۱۸۰^\circ}{۲}=۹۰^\circ$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۹ نقطهٔ A به فاصلهٔ $\sqrt{۶}$ از خط d قرار دارد. تصویر A در بازتاب نسبت به خط d، نقطهٔ A' و تصویر A' در دوران حول A به اندازهٔ ۱۲۰°، نقطهٔ A'' است. فاصلهٔ A'' از خط AA' کدام است؟

۱) ۳ ۲) $۳\sqrt{۲}$ ۳) $۲\sqrt{۳}$ ۴) $\sqrt{۶}$

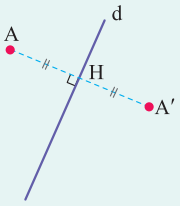
مشاوره این سؤال با الهام از تمرین (۶) صفحهٔ (۴۳) کتاب درسی هندسهٔ (۲) طراحی شده است.

پاسخ: گزینهٔ ۲

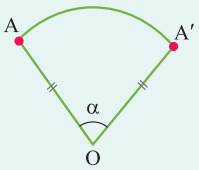
Hint به طولپابودن تبدیل‌های بازتاب و دوران دقت کنید.

درس Box

۱) بازتاب: نقطهٔ A' را بازتاب نقطهٔ A نسبت به خط d می‌گوییم، هرگاه d عمود منصف پاره‌خط AA' باشد.



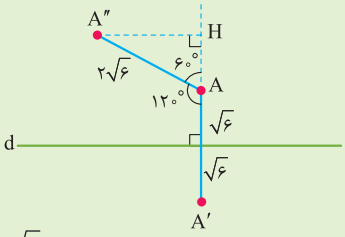
۲) دوران: دوران به مرکز O و زاویهٔ α تبدیلی است که در آن نقطهٔ A بر روی نقطهٔ A' تصویر می‌شود، به طوری که:



$$\begin{cases} A\hat{O}A' = \alpha \\ OA = OA' \end{cases}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: ابتدا بازتاب نقطهٔ A را نسبت به خط d یافته و آن را A' می‌نامیم. با توجه به این‌که فاصلهٔ نقطهٔ A از خط d برابر $\sqrt{۶}$ است، پس $AA' = ۲\sqrt{۶}$ خواهد بود، سپس نقطهٔ A' را به مرکز A و تحت زاویهٔ ۱۲۰° دوران می‌دهیم تا نقطهٔ A'' حاصل شود. دوران تبدیلی طولپاست؛ بنابراین $AA'' = AA' = ۲\sqrt{۶}$ است.

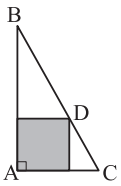


گام دوم: از A''، عمودی بر راستای AA' رسم می‌کنیم. می‌دانیم طول ضلع روبه‌رو به زاویهٔ ۶۰° در یک مثلث قائم‌الزاویه، $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ طول وتر است؛ بنابراین داریم:

$$A''H = \frac{\sqrt{۳}}{۲}AA'' = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times ۲\sqrt{۶} = \sqrt{۱۸} = ۳\sqrt{۲}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۰ چهارضلعی مشخص‌شده در شکل، یک مربع است. اگر $BC = ۳AC$ باشد، آن‌گاه حاصل $\frac{CD}{BD}$ کدام است؟

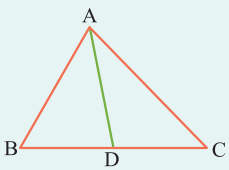


۱) $\frac{۱}{۳}$
۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۴}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint قطر AD را رسم کنید.

درس Box **قضیهٔ نیمسازها:** اگر AD نیمساز داخلی زاویهٔ A در مثلث ABC باشد، آن‌گاه داریم:



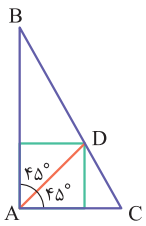
$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$$

به عبارت دیگر، در هر مثلث، نیمساز هر زاویهٔ داخلی، ضلع مقابل به آن زاویه را به نسبت اندازه‌های اضلاع آن زاویه تقسیم می‌کند.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** فرض کنید $AC = x$ باشد، در این صورت $BC = ۳x$ است و طبق قضیهٔ فیثاغورس در مثلث ABC داریم:

$$AB^۲ = BC^۲ - AC^۲ = ۹x^۲ - x^۲ = ۸x^۲ \Rightarrow AB = ۲\sqrt{۲}x$$

گام دوم: قطر AD را در مربع رسم می‌کنیم. می‌دانیم قطرهای مربع، نیمساز زوایای آن هستند، پس AD نیمساز داخلی زاویهٔ A در مثلث ABC است.



گام سوم: طبق قضیهٔ نیمسازها در مثلث ABC داریم:

$$\frac{CD}{BD} = \frac{AC}{AB} = \frac{x}{۲\sqrt{۲}x} = \frac{۱}{۲\sqrt{۲}} \times \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۴}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۱ اگر A یک ماتریس مربعی و $A^3+A^2+A+I=\bar{O}$ باشد، آن‌گاه حاصل $A^{12}+A^9+A^6+A^3$ کدام است؟

۱) $\bar{O}$ ۲) $2(A+I)$ ۳) $2(A-I)$ ۴) $4I$

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint سعی کنید به کمک اتحادهای جبری، ماتریس A^4 را محاسبه کنید.

درس Box ۱) اگر $n\geq 2$ عددی طبیعی باشد، آن‌گاه به ازای هر دو عدد حقیقی دلخواه a و b داریم:

$$(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1})=a^n-b^n$$

۲) ماتریس واحد یا همانی (I)، عضو بی‌اثر عمل ضرب ماتریس‌ها است، یعنی اگر A یک ماتریس مربعی دلخواه هم‌مرتبه با I باشد، آن‌گاه داریم:

$$A\times I=I\times A=A$$

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** طرفین رابطهٔ صورت سؤال را در ماتریس $(A-I)$ ضرب می‌کنیم.

$$(A-I)(A^3+A^2+A+I)=(A-I)\times\bar{O}$$

طبق اتحاد ارائه‌شده در مورد اول درس‌باکس، سمت چپ تساوی ساده می‌شود:

$$A^4-I^4=\bar{O}\Rightarrow A^4=I^4\Rightarrow A^4=I$$

یعنی ماتریس A^4، برابر ماتریس واحد است.

گام دوم: عبارت خواسته‌شده در صورت سؤال را تا حد ممکن برحسب ماتریس A^4 می‌نویسیم:

$$A^{12}+A^9+A^6+A^3=(A^4)^3+(A^4)^2A+A^4\times A^2+A^3=I^3+I^2A+I\times A^2+A^3=I+A+A^2+A^3$$

عبارت حاصل طبق فرض سؤال برابر ماتریس $\bar{O}$ است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۲ اگر $A=\begin{bmatrix}۲ & ۲ & x\\ -۱ & ۵ & ۳\\ ۲ & -۸ & -۲\end{bmatrix}$، آن‌گاه دترمینان ماتریس $\frac{۱}{۳}(A-I)$ همواره برابر کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۲ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{x}{۹}$

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint دترمینان ماتریس $(A-I)$ را با استفاده از دستور ساروس یا روش بسط محاسبه کنید.

درس Box

۱) محاسبهٔ دترمینان ماتریس‌های ۳×۳ با استفاده از دستور ساروس

در این روش دو ستون اول ماتریس اول و دوم ماتریس ۳×۳ را در کنارش می‌نویسیم، سپس درایه‌های قطر اصلی و دو قطر موازی آن (مطابق شکل) را مشخص می‌کنیم و درایه‌های روی هر قطر را در هم ضرب کرده و اعداد حاصل را با هم جمع می‌کنیم. مشابه همین کار را برای قطر فرعی و دو قطر موازی آن انجام می‌دهیم و در انتها اعداد حاصل را از هم کم می‌کنیم تا دترمینان به دست آید.

$$\begin{matrix}a & b & c & a & b\\ d & e & f & d & e\\ g & h & i & g & h\end{matrix} \Rightarrow (aei+bfg+cdh) \quad (۱)$$

$$\begin{matrix}a & b & c & a & b\\ d & e & f & d & e\\ g & h & i & g & h\end{matrix} \Rightarrow (ceg+afh+bdi) \quad (۲)$$

$$|A|=(۱)-(۲)=(aei+bfg+cdh)-(ceg+afh+bdi)$$

۲) اگر A یک ماتریس مربعی از رتبهٔ n و k عددی حقیقی باشد، آن‌گاه داریم:

$$|kA|=k^n|A|$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: ابتدا ماتریس $A-I$ را به دست می آوریم:

$$A-I=\begin{bmatrix}۲ & ۲ & x\\ -۱ & ۵ & ۳\\ ۲ & -۸ & -۲\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & x\\ -۱ & ۴ & ۳\\ ۲ & -۸ & -۳\end{bmatrix}$$

گام دوم: دترمینان ماتریس $A-I$ را با استفاده از دستور ساروس محاسبه می‌کنیم:

$$|A-I|=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & x\\ -۱ & ۴ & ۳\\ ۲ & -۸ & -۳\end{bmatrix}\begin{matrix}۱ & ۲\\ -۱ & ۴\\ ۲ & -۸\end{matrix}=(-۱۲+۱۲+۸x)-(۸x-۲۴+۶)=۱۸$$

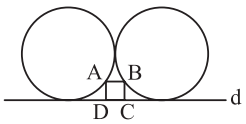
گام سوم: حال دترمینان $\frac{۱}{۳}(A-I)$ را به دست می‌آوریم:

$$\left|\frac{۱}{۳}(A-I)\right|=(\frac{۱}{۳})^۳|A-I|=\frac{۱}{۲۷}\times ۱۸=\frac{۲}{۳}$$

↓ ماتریس ۳×۳

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۳ در شکل زیر، خط **d** مماس‌مشترک دو دایرهٔ مماس خارج هم‌اندازه به شعاع ۵ است. مساحت مربع **ABCD** کدام است؟



۱) ۵
۲) ۴
۳) ۳
۴) ۲

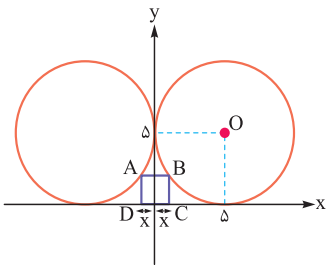
پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint فرض کنید مماس‌های مشترک خارجی و داخلی دو دایره بر محورهای مختصات منطبق باشند و سپس معادلهٔ دایره‌ها را بنویسید.

درس Box معادلهٔ دایره‌ای به شعاع R که بر هر دو محور مختصات در ناحیهٔ اول مماس است، عبارت است از:

$$(x-R)^۲+(y-R)^۲=R^۲$$

پاسخ‌خیلی‌تشریحی **گام اول:** خط d را منطبق بر محور xها و مماس مشترک داخلی دو دایره را منطبق بر محور yها در نظر بگیرید. در این صورت با توجه به اندازهٔ شعاع دایره‌ها، مختصات نقطهٔ O به صورت $O(۵,۵)$ خواهد بود، یعنی معادلهٔ دایرهٔ سمت راست به صورت $(x-۵)^۲+(y-۵)^۲=۵^۲$ نوشته می‌شود.



گام دوم: مطابق شکل فرض کنید طول هر ضلع مربع برابر $۲x$ باشد، در این صورت مختصات نقطهٔ B به صورت $(x,۲x)$ است که با جای‌گذاری آن در معادلهٔ دایره، می‌توان مقدار x را پیدا کرد.

$$(x-۵)^۲+(۲x-۵)^۲=۲۵ \Rightarrow x^۲-۱۰x+۲۵+۴x^۲-۲۰x+۲۵=۲۵$$

$$\Rightarrow ۵x^۲-۳۰x+۲۵=۰ \xrightarrow{\div ۵} x^۲-۶x+۵=۰ \Rightarrow (x-۱)(x-۵)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۱ \\ x=۵ \text{ غ‌ق‌ق} \end{cases}$$

با توجه به شکل مقدار $x=۱$ قابل قبول است و در نتیجه داریم:

$$S_{ABCD}=(۲x)^۲=۲^۲=۴$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۴ طول مماسی که از مبدأ مختصات بر دایره‌ای به مرکز کانون سهمی $x^۲ - ۴x + ۸y + ۱۲ = ۰$ و شعاع ۳ رسم می‌شود، کدام است؟

۱) $\sqrt{۳}$ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) ۳ ۴) ۲

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint معادلهٔ سهمی را استاندارد کنید و به کمک آن رأس و فاصلهٔ کانونی سهمی و سپس مختصات کانون سهمی را به دست آورید.

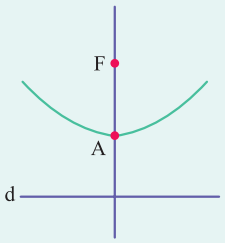
درس Box سهمی قائم با رأس $A(h,k)$ و فاصلهٔ کانونی a مفروض است.

۱) اگر دهانهٔ سهمی رو به بالا باز شود:

معادلهٔ سهمی: $(x-h)^۲ = ۴a(y-k)$

کانون: $F(h, k+a)$

خط هادی: $y = k-a$

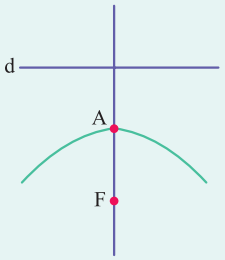


۲) اگر دهانهٔ سهمی قائم رو به پایین باز شود:

معادلهٔ سهمی: $(x-h)^۲ = -۴a(y-k)$

کانون: $F(h, k-a)$

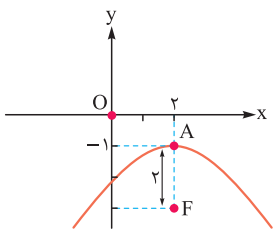
خط هادی: $y = k+a$



پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** ابتدا معادلهٔ سهمی را به حالت استاندارد تبدیل می‌کنیم:

$$x^۲ - ۴x + ۸y + ۱۲ = ۰ \Rightarrow x^۲ - ۴x = -۸y - ۱۲ \xrightarrow{+۴} x^۲ - ۴x + ۴ = -۸y - ۸ \Rightarrow (x-۲)^۲ = -۸(y+۱)$$

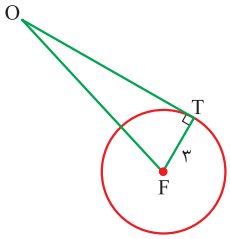
گام دوم: سهمی قائم است و دهانهٔ آن به سمت پایین باز می‌شود، رأس سهمی $A(۲,-۱)$ و فاصلهٔ کانونی سهمی $a = ۲$ است؛ بنابراین مطابق شکل مختصات کانون سهمی به صورت $F(۲,-۳)$ خواهد بود.



گام سوم: مطابق شکل فرض کنید از نقطهٔ O (مبدأ مختصات)، مماس OT بر دایره‌ای به مرکز F (کانون سهمی) و شعاع ۳ رسم شده باشد، در این صورت داریم:

$$OF = \sqrt{۲^۲ + ۳^۲} = \sqrt{۱۳}$$

$$OT^۲ = OF^۲ - FT^۲ = ۱۳ - ۹ = ۴ \Rightarrow OT = ۲$$



بنابراین طول مماس برابر ۲ است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۵ اگر $\vec{a}=(۲,۱,۱)$، $\vec{b}=(m,۳,-۱)$ و $|\vec{a}\times\vec{b}|=\sqrt{۳۰}$ باشد، آن‌گاه حاصل $\vec{a}.\vec{b}$ کدام است؟

۱) $-۳/۵$ ۲) ۴ ۳) -۷ ۴) ۶

مشاوره این سؤال با نگاه جدیدی به تمرین (۷) صفحهٔ (۸۴) کتاب درسی هندسهٔ (۳) طراحی شده است.

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint به کمک رابطهٔ ضرب خارجی دو بردار، ابتدا مقدار m را محاسبه کنید.

درس Box

۱) برای دو بردار $\vec{a}=(a_۱,a_۲,a_۳)$ و $\vec{b}=(b_۱,b_۲,b_۳)$، ضرب داخلی دو بردار که با نماد $\vec{a}.\vec{b}$ نمایش داده می‌شود، به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\vec{a}.\vec{b}=a_۱b_۱+a_۲b_۲+a_۳b_۳$$

۲) برای دو بردار $\vec{a}=(a_۱,a_۲,a_۳)$ و $\vec{b}=(b_۱,b_۲,b_۳)$، ضرب خارجی دو بردار که با نماد $\vec{a}\times\vec{b}$ نمایش داده می‌شود، به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\a_۱&a_۲&a_۳\\b_۱&b_۲&b_۳\end{vmatrix}=(a_۲b_۳-a_۳b_۲)\vec{i}+(a_۳b_۱-a_۱b_۳)\vec{j}+(a_۱b_۲-a_۲b_۱)\vec{k}$$

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** ابتدا ضرب داخلی دو بردار را محاسبه کرده و اندازهٔ آن را برابر $\sqrt{۳۰}$ قرار می‌دهیم:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\۱&۱&-۲\\m&۳&-۱\end{vmatrix}=(۵,-۲m+۱,۳-m)$$

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=\sqrt{۳۰}\Rightarrow\sqrt{۵^۲+(-۲m+۱)^۲+(۳-m)^۲}=\sqrt{۳۰}\xrightarrow{\text{به توان ۲}}۲۵+۴m^۲-۴m+۱+۹-۶m+m^۲=۳۰$$

$$\Rightarrow ۵m^۲-۱۰m+۵=۰\xrightarrow{\div ۵}m^۲-۲m+۱=۰\Rightarrow(m-۱)^۲=۰\Rightarrow m=۱$$

گام دوم: حاصل ضرب داخلی دو بردار را با جای‌گذاری مقدار m در بردار $\vec{b}$ به دست می‌آوریم:

$$\left.\begin{matrix}\vec{a}=(۱,۱,-۲)\\\vec{b}=(۱,۳,-۱)\end{matrix}\right\}\Rightarrow\vec{a}.\vec{b}=۱+۳+۲=۶$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۶ باقی‌ماندهٔ تقسیم دو عدد ۳۳ و ۱۲۴ بر عدد $b > 1$، با هم برابر است. باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد ۲۷۹ بر b، چند مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}, a \overset{m}{\equiv} b \Leftrightarrow m \mid a-b \quad (m \in \mathbb{N})$$

مجموعهٔ همهٔ اعداد صحیح که باقی‌ماندهٔ تقسیم آن‌ها بر عدد طبیعی m برابر با r می‌باشد، یعنی $A_r = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = mk + r\}$ را کلاس یا دستهٔ هم‌نهشتی r به پیمانهٔ m می‌نامیم.

نکته

$$\begin{cases} a \overset{m}{\equiv} b \\ a \overset{n}{\equiv} b \end{cases} \Rightarrow a \overset{[m,n]}{\equiv} b$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: باقی‌ماندهٔ تقسیم دو عدد ۳۳ و ۱۲۴ بر عدد $b > 1$ با هم برابر است، پس هر دو متعلق به یک دستهٔ هم‌نهشتی هستند؛ بنابراین:

$$۱۲۴ \overset{b}{\equiv} ۳۳ \Rightarrow b \mid ۱۲۴ - ۳۳ \Rightarrow b \mid ۹۱ \Rightarrow b \mid ۱۳ \times ۷$$

$$\overset{b>1}{\Rightarrow} \begin{cases} b = ۷ \\ b = ۱۳ \\ b = ۹۱ \end{cases}$$

گام دوم:

$$b = ۷ \Rightarrow ۲۷۹ \overset{۷}{\equiv} ۶ \Rightarrow ۲۷۹ \overset{[۷,۱۳]}{\equiv\equiv} ۶ \Rightarrow ۲۷۹ \overset{۹۱}{\equiv} ۶$$

$$b = ۱۳ \Rightarrow ۲۷۹ \overset{۱۳}{\equiv} ۶$$

بنابراین در همهٔ حالت‌های b، باقی‌ماندهٔ تقسیم ۲۷۹ بر b برابر ۶ است، پس فقط یک حالت دارد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۷ جواب‌های طبیعی معادلهٔ سیالهٔ $۱۵x_۱ + ۳۹x_۲ = ۴۵۹$ را در معادلهٔ $x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ + x_۵ = ۲۰$ قرار می‌دهیم. معادلهٔ جدید چند جواب در مجموعهٔ اعداد صحیح نامنفی دارد؟

۱) ۳۶ ۲) ۴۵ ۳) ۵۵ ۴) ۶۶

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

- هر معادلهٔ به فرم $ax + by = c$ که در آن $a, b, c \in \mathbb{Z}$ را معادلهٔ سیالهٔ درجه‌اول یا خطی می‌نامیم.
- شرط لازم و کافی برای آن‌که معادلهٔ سیالهٔ $ax + by = c$ دارای جواب باشد آن است که، $(a, b) \mid c$.
- اگر $(x_۰, y_۰)$ یک جواب برای معادلهٔ سیاله باشد، یعنی در $ax + by = c$ صدق کند و $(a, b) = d$، آن‌گاه جواب‌های معادلهٔ سیاله برابر است با:

$$\begin{cases} x = x_۰ + \frac{b}{d}k \quad ; \quad k \in \mathbb{Z} \\ y = y_۰ - \frac{a}{d}k \quad ; \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

- تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_۱ + x_۲ + \cdots + x_k = n$ برابر است با $\binom{n+k-۱}{k-۱}$.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: ابتدا معادلهٔ سیالهٔ $۱۵x_۱ + ۳۹x_۲ = ۴۵۹$ را بر ۳ ساده می‌کنیم:

$$۱۵x_۱ + ۳۹x_۲ = ۴۵۹ \xrightarrow{\div ۳} ۵x_۱ + ۱۳x_۲ = ۱۵۳$$

گام دوم: $x_۱ = ۲۸$ و $x_۲ = ۱$ یک جواب برای معادلهٔ سیالهٔ $۵x_۱ + ۱۳x_۲ = ۱۵۳$ است.

$$\begin{cases} x_۱ = ۲۸ + ۱۳k \\ x_۲ = ۱ - ۵k \end{cases} \xrightarrow{x_۱, x_۲ > ۰}$$

$x_۱$	۲۸	۱۵	۲
$x_۲$	۱	۶	۱۱
$x_۱ + x_۲$	۲۹	۲۱	۱۳

گام سوم:

$$x_۳ + x_۴ + x_۵ = ۲۰ - (x_۱ + x_۲)$$

$$x_۱ + x_۲ = ۲۹ \Rightarrow x_۳ + x_۴ + x_۵ = -۹ \quad \times$$

$$x_۱ + x_۲ = ۲۱ \Rightarrow x_۳ + x_۴ + x_۵ = -۱ \quad \times$$

$$x_۱ + x_۲ = ۱۳ \Rightarrow x_۳ + x_۴ + x_۵ = ۷ \overset{\substack{n=۷ \\ k=۳}}{\Rightarrow} \binom{۹}{۲} = ۳۶$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۸ در مربع لاتین زیر، $\frac{a+b+c+d}{e+f+g+h}$ کدام است؟

x	e	f	x+۱
x−۱	a	x+۲	b
x+۱	g	h	d
c			

۱) ۱

۲) $\frac{۱۳}{۸}$

۳) $\frac{۴}{۵}$

۴) $\frac{۵}{۴}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

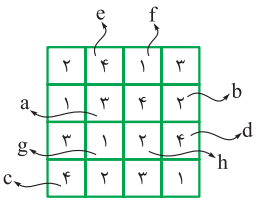
یک جدول مربعی از اعدادِ ۱، ۲، ...، n به شکل یک مربع $n\times n$ را که سطرها و ستون‌های آن با اعداد ۱، ۲، ...، n پُر شده باشد و در هیچ سطر آن و نیز در هیچ ستون آن عدد تکراری وجود نداشته باشد، «مربع لاتین» می‌نامیم.

به هر یک از اعدادِ درون مربع لاتین یک درایه می‌گوییم.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: مربع لاتین داده‌شده یک مربع ۴×۴ است، پس این مربع را باید با اعداد ۱، ۲، ۳ و ۴ پُر کنیم. از طرفی در درایه‌های این مربع چهار عدد $x-۱, x, x+۱, x+۲$ دیده می‌شود؛ بنابراین $x-۱=۱ \Rightarrow x=۲$ است.

گام دوم: در مربع لاتین داده‌شده، $x=۲$ را جای‌گذاری می‌کنیم و مربع لاتین را کامل می‌کنیم:



۲	۴	۱	۳
۱	۳	۴	۲
۳	۱	۲	۴
۴	۲	۳	۱

گام سوم:

$$\frac{a+b+c+d}{e+f+g+h}=\frac{۳+۲+۴+۴}{۴+۱+۱+۲}=\frac{۱۳}{۸}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۹ در گرافی با ۵ رأس، از هر رأس به رأس دیگر دقیقاً یک مسیر وجود دارد. یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال در این گراف، حداکثر چند عضو دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

مسیر: اگر u و v دو رأس از گراف G باشند، یک مسیر از u به v در G دنباله‌ای از رئوس دوبه‌دو متمایز در G است، که از u شروع و به v ختم می‌شود، به طوری که هر دو رأس متوالی این دنباله در G مجاور هم باشند.

دور: دنبالهٔ $v_1v_2v_3\dots v_nv_1$ $(n \geq 3)$ از رئوس دوبه‌دو متمایز که در آن هر رأس با رأس بعدی مجاور است، را یک دور به طول n می‌نامیم.

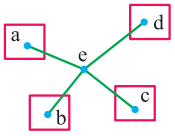
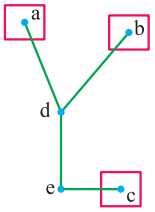
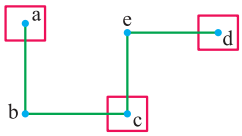
تعریف: یک مجموعهٔ احاطه‌گر را که با حذف هر یک از رأس‌هایش دیگر احاطه‌گر نباشد، احاطه‌گر مینیمال می‌نامیم.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: در گراف G، از هر رأس به رأس دیگر دقیقاً یک مسیر وجود دارد، پس این گراف دور ندارد.

گام دوم: برای آن‌که مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال حداکثر عضو را داشته باشد، رئوس درجهٔ یک در گراف G باید حداکثر باشد.

گام سوم: گراف‌های مختلف با ۵ رأس و بدون دور را رسم می‌کنیم:

		
$D = \{a , b , c , d\}$	$D = \{a , b , c\}$	$D = \{a , c , d\}$

پس مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال حداکثر ۴ عضو دارد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۰ در یک کلاس ۴۵ نفری، ۱۷ نفر به فوتبال، ۱۹ نفر به بسکتبال، ۲۵ نفر به والیبال، ۸ نفر به فوتبال و بسکتبال، ۹ نفر به فوتبال و والیبال، ۱۲ نفر به بسکتبال و والیبال و ۴ نفر به هر سه رشته علاقه‌مند هستند. چند نفر از اعضای این کلاس به هیچ‌یک از رشته‌های فوتبال، بسکتبال و والیبال علاقه‌ای ندارند؟

۱) صفر ۲) ۵ ۳) ۹ ۴) ۱۰

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

اصل شمول برای سه مجموعه: اگر A، B و C زیرمجموعه‌هایی از مجموعهٔ مرجع S باشند، در این صورت همواره تساوی زیر برقرار است:

$$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$$

نتیجهٔ اصل شمول: با استفاده از تعریف متمم، نتیجهٔ اصل شمول به صورت زیر بیان می‌شود:

$$|\overline{A\cup B\cup C}|=|S|-|A\cup B\cup C|$$

تعداد اعضایی از S که در هیچ یک از مجموعه‌های A، B و C قرار ندارند.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا با استفاده از اصل شمول تعداد افرادی را که حداقل به یکی از سه رشتهٔ ورزش علاقه دارند، مشخص می‌کنیم. اگر مجموعهٔ افرادی را که به فوتبال، بسکتبال و والیبال علاقه دارند، به ترتیب F، B و V بنامیم، در این صورت داریم:

$$|F\cup B\cup V|=|F|+|B|+|V|-|F\cap B|-|F\cap V|-|B\cap V|+|F\cap B\cap V|$$

$$\Rightarrow |F\cup B\cup V|=۱۷+۱۹+۲۵-۸-۹-۱۲+۴=۳۶$$

گام دوم:

$$\text{تعداد افرادی که به هیچ‌یک از رشته‌های F، B و V علاقه ندارند.}=|\overline{F\cup B\cup V}|=|S|-|F\cup B\cup V|=۴۵-۳۶=۹$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۱ تولیوم $^{168}_{69}Tm$ ایزوتوپ ناپایداری است که واپاشی آن از طریق گسیل ۲ ذرهٔ α و یک ذرهٔ β^- صورت می‌گیرد. در هستهٔ نهایی این واپاشی، اختلاف تعداد نوترون‌ها و پروتون‌ها کدام است؟

۱) ۲۸

۲) ۳۰

۳) ۶۰

۴) ۶۶

مشاوره واپاشی یکی از موضوعات مورد علاقهٔ طراحان کنکور است. اغلب یک سؤال هر کنکور به این موضوع اختصاص دارد و جزء سؤال‌های درصدبیار هم محسوب می‌شود. برای حل، کافی است که پایستگی عدد اتمی و پایستگی عدد جرمی را بنویسید.

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint پایستگی عدد جرمی و عدد اتمی را برای اجزای دو طرف فرایند بنویسید تا عدد جرمی و عدد اتمی هستهٔ نهایی به دست آید، سپس به کمک این دو، تعداد نوترون‌ها و خواستهٔ سؤال را حساب کنید.

درس Box

۱) **عدد جرمی**: مجموع تعداد پروتون‌ها (عدد اتمی) و نوترون‌ها (عدد نوترونی): $A = Z + N$

۲) در فرایندهای واپاشی دو اصل زیر برقرار است:

- **پایستگی عدد جرمی (پایستگی تعداد نوکلئون‌ها)**: مجموع تعداد نوکلئون‌های دو طرف فرایند یکسان است.
- **پایستگی عدد اتمی (پایستگی تعداد پروتون‌ها)**: مجموع تعداد پروتون‌های دو طرف فرایند یکسان است.

نکته ذرهٔ α، هستهٔ اتم هلیم $(^4_2\alpha)$ و ذرهٔ β^-، الکترون $(^0_{-1}\beta^-)$ است.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: فرایند این واپاشی به صورت روبه‌رو است: $^{168}_{69}Tm \longrightarrow {}^{A}_{Z}Y + 2\,^4_2\alpha + {}^0_{-1}\beta^-$

پایستگی عدد جرمی (پایستگی تعداد نوکلئون‌ها) و پایستگی عدد اتمی (پایستگی تعداد پروتون‌ها) را برای اجزای دو طرف فرایند می‌نویسیم:

پایستگی عدد اتمی: $69 = Z + (2\times 2) + (-1) \Rightarrow Z = 69 - 3 = 66$

پایستگی عدد جرمی: $168 = A + (2\times 4) + 0 \Rightarrow A = 168 - 8 = 160$

گام دوم: تعداد نوترون‌ها برابر با اختلاف عدد جرمی و عدد اتمی است:

$$N = A - Z = 160 - 66 = 94$$

محاسبهٔ خواستهٔ سؤال:

$$N - Z = 94 - 66 = 28$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۲ طول موج چندمین خط طیفی اتم هیدروژن در رشتهٔ لیمان $(n' = ۱)$ برابر $۱۱۲/۵\ nm$ است؟ $(R = ۰/۰۱\ (nm)^{-۱})$

۱) سومین خط

۲) دومین خط

۳) اولین خط

۴) چهارمین خط

مشاوره معمولاً در هر کنکور، یک سؤال از رابطهٔ ریدبرگ می‌آید. با دانستن معادلهٔ ریدبرگ و آشنایی با رشته‌ها، برای حل این سؤال‌ها کار چندان سختی نخواهید داشت.

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint داده‌های سؤال را در معادلهٔ ریدبرگ جای‌گذاری کنید تا شمارهٔ مدار مبدأ (n) به دست آید، سپس شمارهٔ خط طیفی را تعیین کنید.

درس Box

معادلهٔ ریدبرگ: طول موج خط‌های طیف گسیلی اتم هیدروژن در هر رشته از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\frac{۱}{\lambda} = R\left(\frac{۱}{n'^{۲}} - \frac{۱}{n^{۲}}\right) \qquad (n > n' \text{ و } R \text{ ثابت ریدبرگ: } R \simeq ۰/۰۱(nm)^{-۱})$$

n': شمارهٔ رشته

- در این رابطه طول موج (λ)، برحسب نانومتر است.
- شماره و نام رشته‌ها به صورت جدول زیر است:

شمارهٔ رشته (n')	۱	۲	۳	۴	۵
نام رشته	لیمان	بالمر	پاشن	براکت	پفوند

پاسخ خیلی تشریحی با نوشتن معادلهٔ ریدبرگ و جای‌گذاری داده‌ها، داریم:

$$\frac{۱}{\lambda} = R\left(\frac{۱}{n'^{۲}} - \frac{۱}{n^{۲}}\right) \Rightarrow \frac{۱}{۱۱۲/۵} = \frac{۱}{۱۰۰}\left(\frac{۱}{۱^{۲}} - \frac{۱}{n^{۲}}\right) \Rightarrow ۱ - \frac{۱}{n^{۲}} = \frac{\overset{۸}{\cancel{۱۰۰}}}{\underset{۹}{\cancel{۱۱۲/۵}}}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{n^{۲}} = ۱ - \frac{۸}{۹} \Rightarrow \frac{۱}{n^{۲}} = \frac{۱}{۹} \xrightarrow{\sqrt{\ }} \frac{۱}{n} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow n = ۳$$

نکته در اتم هیدروژن، شمارهٔ خط طیفی در رشتهٔ n' از رابطهٔ روبه‌رو به دست می‌آید: $\text{شمارهٔ خط طیفی در رشتهٔ } n' = n - n'$

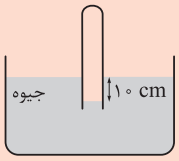
براساس نکتهٔ بالا:

$$\text{شمارهٔ خط طیفی} = ۳ - ۱ = ۲$$

گول نخوری در تست‌هایی که با شمارهٔ خط طیفی سروکار دارید، به‌هیچ وجه عجله نکنید. n شمارهٔ خط طیفی نیست! در این سؤال، گزینهٔ (۱) برای دانش‌آموزان عجول قرار داده شده است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۳ در شکل زیر، فشار هوا برابر ۷۵ cmHg است. فشار گاز محبوس در لوله چند سانتی متر جیوه است؟



۱) ۶۵

۲) ۷۰

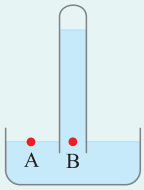
۳) ۸۰

۴) ۸۵

پاسخ: گزینهٔ ۴

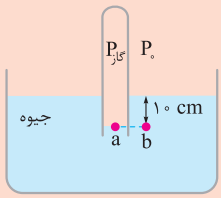
Hint کلید حل این تست آسان، برابر قراردادن فشار در دو نقطهٔ هم‌تراز است.

درس Box **اصل هم‌فشاری نقاط هم‌تراز**: در نقطه‌های هم‌تراز یک مایع ساکن، فشار یکسان است و به شکل ظرف بستگی ندارد. برای مثال، در شکل زیر، نقاط A و B هم‌ترازند و درون یک مایع ساکن قرار دارند؛ بنابراین فشار در این دو نقطه با هم برابر است:



$$P_A = P_B$$

پاسخ خیلی تشریحی با یک سؤال بسیار ساده روبه‌رو هستید. کافی است فشار در نقاط هم‌تراز a و b در شکل زیر را برابر قرار دهید:



$$P_a = P_b \Rightarrow P_{گاز} = P_0 + P_{۱۰\,سانتی‌متر\,جیوه} = ۷۵ + ۱۰ = ۸۵\,cmHg$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۴ قابی مربع‌شکل به ضلع $40\,cm$ و شامل ۱۰۰ حلقهٔ رسانا، موازی با خطوط میدان مغناطیسی یکنواختی به بزرگی $500\,G$ قرار دارد. اگر این قاب در مدت $0/02\,s$ بچرخد و با خطوط میدان، زاویهٔ 30° بسازد، در این مدت بزرگی نیروی محرکهٔ القایی متوسط در قاب چند ولت است؟

۱) ۱۰۰ ۲) ۲۰۰ ۳) ۱۰ ۴) ۲۰

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

قانون القای الکترومغناطیسی فاراده: با تغییر شار مغناطیسی عبوری از یک مدار بسته، نیروی محرکه‌ای در آن القا می‌شود. نیروی محرکهٔ القایی متوسط در این مدار از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$\varepsilon_{av}=-N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\xrightarrow[\text{فقط }\theta\text{ تغییر کند.}]{\Phi=BA\cos\theta}\varepsilon_{av}=-NBA\times\frac{(\cos\theta_2-\cos\theta_1)}{\Delta t}$$

(نیروی محرکهٔ القایی متوسط (V)، تعداد حلقه‌ها، زاویهٔ بین بردار میدان مغناطیسی و نیم‌خط عمود بر سطح حلقه، مساحت حلقه (m^2)، اندازهٔ میدان مغناطیسی (T))

معمولاً در سؤال‌ها زاویهٔ بین بردار میدان مغناطیسی و سطح حلقه (α) را می‌دهند. α متمم زاویهٔ θ است، یعنی:

$$\theta=90^\circ-\alpha$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: زاویهٔ بین بردار میدان مغناطیسی و نیم‌خط عمود بر سطح حلقه را در دو حالت تعیین می‌کنیم:

$$\theta_1=90^\circ-\alpha_1=90^\circ-0=90^\circ\quad,\quad\theta_2=90^\circ-\alpha_2=90^\circ-30^\circ=60^\circ$$

مساحت قاب هم برابر است با:

$$A=a^2\xrightarrow{a=40\,cm=0/4\,m}A=(0/4)^2=0/16\,m^2$$

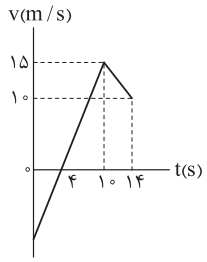
گام دوم: رابطهٔ قانون القای الکترومغناطیسی فاراده ما را به جواب می‌رساند:

$$\varepsilon_{av}=NBA\frac{(\cos\theta_2-\cos\theta_1)}{\Delta t}\xrightarrow{B=500\,G=500\times10^{-4}\,T}\varepsilon_{av}=100\times(500\times10^{-4})\times0/16\times\frac{(\cos60^\circ-\cos90^\circ)}{0/02}$$

$$=0/8\times\frac{(\frac{1}{2}-0)}{0/02}\Rightarrow\varepsilon_{av}=20\,V$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۵ نمودار سرعت ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. اندازهٔ شتاب متوسط متحرک در ۳ ثانیهٔ دوم، چند برابر اندازهٔ شتاب متوسط متحرک در ۲ ثانیهٔ ششم است؟



۱) ۱

۲) ۲

۳) $\frac{۱}{۲}$

۴) $\frac{۳}{۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

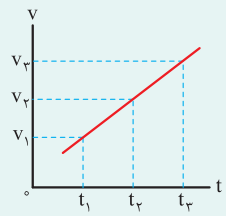
درس Box

۱) **شتاب متوسط:**

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_۲ - v_۱}{t_۲ - t_۱}$$

۲) **در حرکت راست‌خط با شتاب ثابت:**

- نمودار سرعت ـ زمان به شکل خط راست است:



- **شتاب متوسط در تمام بازه‌های زمانی دلخواه یکسان است:**

$$a_{av(t_۱,t_۲)} = a_{av(t_۲,t_۳)} = a_{av(t_۱,t_۳)}$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ۳ ثانیهٔ دوم یعنی بازهٔ زمانی ۳ s تا ۶ s. این بازهٔ زمانی در دلِ بازهٔ زمانی صفر تا ۱۰ s قرار دارد. با توجه به این‌که نمودار $v-t$ در بازهٔ زمانی صفر تا ۱۰ s به صورت خط راست است، شیب نمودار و در نتیجه شتاب متحرک در این بازهٔ زمانی ثابت است؛ بنابراین اندازهٔ شتاب متوسط در ۳ ثانیهٔ دوم با اندازهٔ شتاب متوسط در هر بازهٔ زمانی دلخواه درون بازهٔ زمانی صفر تا ۱۰ s برابر است.

پس داریم:

$$|a_{av(۳s,۶s)}| = |a_{av(۴s,۱۰s)}| = \frac{|v_{۱۰s} - v_{۴s}|}{۱۰-۴} = \frac{|۱۵-۰|}{۶} = \frac{۵}{۲}\,m/s^۲$$

گام دوم: ۲ ثانیهٔ ششم یعنی بازهٔ زمانی ۱۰ s تا ۱۲ s. این بازهٔ زمانی هم در دل بازهٔ زمانی ۱۰ s تا ۱۴ s قرار دارد. نمودار $v-t$ در بازهٔ زمانی ۱۰ s تا ۱۴ s هم به صورت خط راست است؛ بنابراین مانند همان توضیحاتی که در گام اول دادیم، برای ۲ ثانیهٔ ششم هم می‌توان نوشت:

$$|a_{av(۱۰s,۱۲s)}| = |a_{av(۱۰s,۱۴s)}| = \frac{|v_{۱۴s} - v_{۱۰s}|}{۱۴-۱۰} = \frac{|۱۰-۱۵|}{۴} = \frac{۵}{۴}\,m/s^۲$$

گام سوم: نسبت خواسته‌شده برابر است با:

$$\frac{|a_{av(۳s,۶s)}|}{|a_{av(۱۰s,۱۲s)}|} = \frac{\frac{۵}{۲}}{\frac{۵}{۴}} = \frac{۴}{۲} = ۲$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۶ در مسیری مستقیم، خودروی A با سرعت ثابت v به سمت خودروی ساکن B در حال حرکت است. در لحظه‌ای که فاصلهٔ خودروی A از خودروی B به ۲۵۰ m می‌رسد، خودروی B با شتاب ثابت ۴ m/s² در جهت حرکت خودروی A شروع به حرکت می‌کند. بیشینهٔ v چند متر بر ثانیه باشد تا فاصلهٔ بین دو خودرو کم‌تر از ۵۰m نباشد؟

۱) ۲۵ ۲) ۳۵

۳) ۴۰ ۴) ۵۰

مشاوره یک تست فوق‌العاده از مبحث حرکت‌شناسی با محاسبات کم ولی پر از مفهوم. این نوع سؤال‌ها عیار شما را می‌سنجند که تا چه حد مفاهیم را خوب یاد گرفته‌اید.

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

۱) **معادلهٔ مکان ـ زمان در حرکت با سرعت ثابت:**

$$x = vt + x_0$$

۲) **معادلهٔ مکان ـ زمان در حرکت با شتاب ثابت:**

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$$

۳) **معادلهٔ سرعت ـ زمان در حرکت با شتاب ثابت:**

$$v = at + v_0$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: مطابق شکل زیر، مکان خودروی A را در لحظهٔ شروع به حرکت خودروی B به عنوان مبدأ در نظر می‌گیریم و معادلهٔ مکان ـ زمان را برای دو خودرو می‌نویسیم:

$$x_A = vt + x_{0(A)} \Rightarrow x_A = vt$$

$$x_B = \frac{1}{2}a_Bt^2 + v_{0(B)}t + x_{0(B)} = \frac{1}{2}\times 4t^2 + 0 + 250 \Rightarrow x_B = 2t^2 + 250$$



گام دوم: فاصلهٔ بین دو خودرو نباید کم‌تر از ۵۰m باشد؛ بنابراین بیشینهٔ v مربوط به حالتی است که فاصلهٔ دو خودرو ۵۰m شود. داریم:

$$x_B - x_A = 50 \Rightarrow 2t^2 + 250 - vt = 50 \Rightarrow vt - 2t^2 = 200$$

گام سوم: خودروی A با سرعت ثابت v حرکت می‌کند و خودروی B از حال سکون شروع به حرکت می‌کند و به مرور سرعتش زیاد می‌شود. تا زمانی که سرعت خودروی B کم‌تر از سرعت خودروی A (v) است، فاصلهٔ بین دو خودرو در حال کاهش است. به محض این‌که سرعت خودروی B بیشتر از سرعت خودروی A شد، فاصلهٔ بین دو خودرو در حال افزایش خواهد بود، پس اگر تا لحظه‌ای که سرعت دو خودرو برابر می‌شود، فاصلهٔ بین آن‌ها بیشتر یا مساوی ۵۰m باشد، از آن لحظه به بعد هم این فاصله بیشتر از ۵۰m خواهد بود. این لحظه را به دست می‌آوریم:

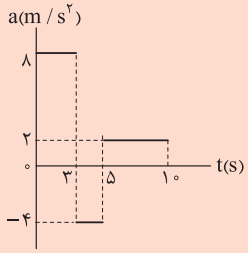
$$\begin{cases} v_A = v \\ v_B = a_Bt + v_{0(B)} = 4t \end{cases} \Rightarrow v = 4t \Rightarrow t = \frac{v}{4}$$

t را در رابطه‌ای که در گام دوم به دست آوردیم، جای‌گذاری می‌کنیم:

$$v\left(\frac{v}{4}\right) - 2\left(\frac{v}{4}\right)^2 = 200 \Rightarrow \frac{v^2}{4} - \frac{v^2}{8} = 200 \Rightarrow \frac{v^2}{8} = 200 \Rightarrow v^2 = 1600 \xrightarrow{\sqrt{}} v = 40\ m/s$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۷ نمودار شتاب ـ زمان متحرکی که در بازهٔ صفر تا ۱۰s در جهت محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. اگر تندی متوسط متحرک در این ۱۰ s برابر ۲۰/۱ m/s باشد، تندی متحرک در لحظهٔ $t = ۶\,s$ چند متر بر ثانیه است؟



۱) ۱۶

۲) ۱۸

۳) ۲۰

۴) ۲۲

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint

ابتدا مسافت طی‌شده توسط متحرک در این ۱۰ s را حساب کنید، سپس به کمک معادلهٔ سرعت ـ زمان و با توجه به نمودار، سرعت متحرک در پایان هر مرحله (لحظه‌های ۳ s، ۵ s و ۱۰ s) را برحسب $v_۰$ به دست آورید. در ادامه، جابه‌جایی متحرک در هر مرحله را برحسب $v_۰$ بنویسید. مجموع قدرمطلق این جابه‌جایی‌ها را برابر با مسافت طی‌شده توسط متحرک قرار دهید تا $v_۰$ به دست آید. در پایان به کمک معادلهٔ سرعت ـ زمان، سرعت متحرک در لحظهٔ $t = ۶s$ را محاسبه کنید.

درس Box

۱) **تندی متوسط:** $s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t}$ ← مسافت طی‌شده

۲) در حرکت راست‌خط با شتاب ثابت اگر سرعت متحرک در ابتدای یک بازهٔ زمانی معین برابر $v_۱$ و در انتهای آن بازهٔ زمانی برابر $v_۲$ باشد، جابه‌جایی متحرک در این بازهٔ زمانی از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\Delta x = (\frac{v_۲ + v_۱}{۲})\Delta t$$

۳) درس‌باکس شمارهٔ ۳ سؤال ۶ را بخوانید.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: مسافتی که متحرک در این ۱۰ s طی می‌کند، برابر است با:

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} \Rightarrow ۲۰/۱ = \frac{\ell}{۱۰} \Rightarrow \ell = ۲۰۱\,m$$

گام دوم: با این فرض که سرعت اولیهٔ متحرک برابر $v_۰$ است، به کمک نمودار، سرعت متحرک در لحظه‌های ۳ s، ۵ s و ۱۰ s را به دست می‌آوریم:

$$v_{۳s} - v_۰ = a_۱\Delta t_۱ = ۸\times ۳ \Rightarrow v_{۳s} = ۲۴ + v_۰$$

$$v_{۵s} - v_{۳s} = a_۲\Delta t_۲ = -۴\times ۲ \Rightarrow v_{۵s} = -۸ + v_{۳s} = -۸ + ۲۴ + v_۰ = ۱۶ + v_۰$$

$$v_{۱۰s} - v_{۵s} = a_۳\Delta t_۳ = ۲\times ۵ \Rightarrow v_{۱۰s} = ۱۰ + v_{۵s} = ۱۰ + ۱۶ + v_۰ = ۲۶ + v_۰$$

گام سوم: حرکت متحرک در هر مرحله با شتاب ثابت انجام می‌گیرد؛ بنابراین جابه‌جایی متحرک در هر مرحله را می‌توان از رابطهٔ $\Delta x = \frac{v + v_۰}{۲}\Delta t$ حساب کرد. داریم:

$$\Delta x_۱ = \frac{v_{۳s} + v_۰}{۲}\Delta t_۱ = (\frac{۲۴ + v_۰ + v_۰}{۲})\times ۳ = \frac{۳}{۲}(۲۴ + ۲v_۰) = ۳۶ + ۳v_۰$$

$$\Delta x_۲ = \frac{v_{۵s} + v_{۳s}}{۲}\Delta t_۲ = \frac{(۱۶ + v_۰ + ۲۴ + v_۰)}{۲})\times ۲ = ۴۰ + ۲v_۰$$

$$\Delta x_۳ = \frac{v_{۱۰s} + v_{۵s}}{۲}\Delta t_۳ = (\frac{۲۶ + v_۰ + ۱۶ + v_۰}{۲})\times ۵ = \frac{۵}{۲}(۴۲ + ۲v_۰) = ۱۰۵ + ۵v_۰$$

گام چهارم: از آن‌جایی که متحرک فقط در جهت محور x حرکت کرده و تغییر جهت نداشته است، مسافت طی‌شده توسط متحرک برابر با مجموع قدرمطلق Δx ها است:

$$\ell = |\Delta x_۱| + |\Delta x_۲| + |\Delta x_۳| \Rightarrow ۲۰۱ = ۳۶ + ۳v_۰ + ۴۰ + ۲v_۰ + ۱۰۵ + ۵v_۰$$

$$\Rightarrow ۲۰۱ = ۱۸۱ + ۱۰v_۰ \Rightarrow ۱۰v_۰ = ۲۰ \Rightarrow v_۰ = ۲\,m/s$$

گام پنجم: سرعت متحرک در لحظهٔ ۶ s به صورت زیر به دست می‌آید:

$$v_{۶s} = a_۲\Delta t' + v_{۵s} = ۲\times ۱ + (۱۶ + ۲) = ۲۰\,m/s$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۸ در شرایط خلأ، سه گلولهٔ A ، B و C را به ترتیب و با فاصله‌های زمانی یکسان از ارتفاع ۸۰ متری سطح زمین رها می‌کنیم. اگر ۲ s پس از برخورد گلولهٔ A به زمین، گلولهٔ C رها شود، در لحظهٔ رهاشدن گلولهٔ C ، ارتفاع گلولهٔ B از سطح زمین چند متر است؟ $(g = ۱۰\ N/kg)$

۱) ۳۵ ۲) ۴۵ ۳) ۶۰ ۴) ۲۰

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint ابتدا مدت‌زمان سقوط گلولهٔ A و سپس لحظه‌های رهاشدن گلوله‌های B و C را به دست آورید. در ادامه مدت‌زمان سقوط گلولهٔ B تا لحظهٔ رهاشدن گلوله C را محاسبه کنید. در پایان، ارتفاع گلولهٔ B از سطح زمین در لحظهٔ مورد نظر را به دست آورید.

درس Box معادلهٔ جابه‌جایی ـ زمان در حرکت سقوط آزاد بدون سرعت اولیه:

$$\Delta y = -\frac{۱}{۲}gt^۲$$

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** مدت‌زمان سقوط گلولهٔ A را حساب می‌کنیم:

$$\Delta y_A = -\frac{۱}{۲}gt_A^۲ \Rightarrow -۸۰ = -\frac{۱}{۲}\times ۱۰ \times t_A^۲ \Rightarrow t_A^۲ = ۱۶ \xrightarrow{\sqrt{}} t_A = ۴\ s$$

گام دوم: گلولهٔ C، ۲ ثانیه پس از برخورد گلولهٔ A به سطح زمین رها می‌شود؛ بنابراین فاصلهٔ زمانی بین رهاشدن دو گلولهٔ A و C برابر با $t_A + ۲ = ۴ + ۲ = ۶\ s$ است. چون فاصلهٔ زمانی بین رهاشدن گلوله‌ها یکسان است، گلولهٔ B، ۳ ثانیه پس از رهاشدن گلولهٔ A، رها شده است و هنگام رهاشدن گلولهٔ C، گلولهٔ B، ۳ s در حرکت بوده است.

گام سوم: ببینیم گلولهٔ B در مدت ۳ s، چه‌قدر سقوط می‌کند:

$$\Delta y_B = -\frac{۱}{۲}gt_B^۲ = -\frac{۱}{۲}\times ۱۰ \times ۳^۲ = -۴۵\ m$$

در این حالت ارتفاع گلولهٔ B از سطح زمین برابر است با:

$$H_B = ۸۰ - |\Delta y_B| = ۸۰ - ۴۵ = ۳۵\ m$$

گول نخوری گزینهٔ (۲) مقدار سقوط گلولهٔ B در مدت ۳ s است، نه ارتفاع آن از سطح زمین پس از ۳ s سقوط.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۹ جسمی به جرم ۱۰۰ g را به انتهای نخی به طول ۵۰cm بسته و آن را روی سطح افقی بدون اصطکاکی حول انتهای دیگر نخ به طور یکنواخت می‌چرخانیم. اگر دورهٔ تناوب جسم $\frac{\pi}{5}$ ثانیه باشد، اندازهٔ نیروی کشش نخ چند نیوتون است؟

۱) ۱/۲۵ ۲) ۱۲/۵ ۳) ۵ ۴) ۵۰

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint به کمک رابطهٔ دورهٔ تناوب، تندی چرخش جسم را محاسبه کنید، سپس اندازهٔ نیروی کشش نخ که همان نیروی مرکزگرا است را به دست آورید.

درس Box اگر متحرکی به جرم m، با تندی ثابت v روی محیط دایره‌ای به شعاع r بچرخد، دورهٔ تناوب حرکت و اندازهٔ نیروی مرکزگرای وارد بر جسم از روابط زیر به دست می‌آید:

$$T = \frac{2\pi r}{v}$$

$$F_{net} = m\frac{v^2}{r}$$

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** تندی چرخش جسم را حساب می‌کنیم:

$$T = \frac{2\pi r}{v} \xrightarrow{r=50\,cm=0/5\,m} \frac{\pi}{5} = \frac{2\pi \times 0/5}{v} \Rightarrow v = 5\,m/s$$

گام دوم: نیروی کشش نخ نقش نیروی مرکزگرا را دارد؛ بنابراین:

$$F_{net} = m\frac{v^2}{r} \Rightarrow T = m\frac{v^2}{r} \xrightarrow{m=100\,g=0/1\,kg} T = 0/1 \times \frac{5^2}{0/5} = \frac{2/5}{0/5} = 5\,N$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۰ وزنه‌ای به جرم $۲\,kg$ توسط یک فنر به سقف آسانسوری متصل است. اگر آسانسور با شتابی به بزرگی $۲\,m/s^۲$، رو به بالا شروع به حرکت کند، طول فنر به $۲۴\,cm$ و اگر آسانسور با شتابی به بزرگی $۲\,m/s^۲$ رو به پایین شروع به حرکت کند، طول فنر به $۲۲\,cm$ می‌رسد. به ترتیب طول عادی فنر چند سانتی‌متر و ثابت آن چند نیوتون بر متر است؟ $(g = ۱۰\,N/kg)$

۱) ۱۸، ۲۰۰ ۲) ۱۸، ۴۰۰ ۳) ۲۳، ۲۰۰ ۴) ۲۳، ۴۰۰

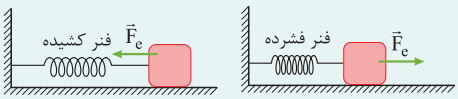
پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint با نوشتن قانون دوم نیوتون برای هر دو حالت، به دو معادله می‌رسید که با حل آن‌ها، طول عادی فنر به دست می‌آید، سپس با قراردادن طول عادی فنر در یکی از معادله‌ها، ثابت فنر هم به دست می‌آید.

درس Box ۱) **قانون هوک:** اگر فنری نسبت به حالت عادی خود، به اندازهٔ x کشیده یا فشرده شود، فنر به جسم متصل به خود نیروی کشسانی وارد می‌کند که اندازهٔ آن از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$F_e = kx$$
(k: ثابت فنر)

۲) فنر کشیده، جسم متصل به خود را می‌کشد و فنر فشرده، جسم متصل به خود را هل می‌دهد. شکل‌های زیر را ببینید. در این شکل‌ها، $\vec{F}_e$ نیرویی است که فنر به جسم وارد می‌کند.



۳) **قانون دوم نیوتون:**

$$F_{net} = ma$$

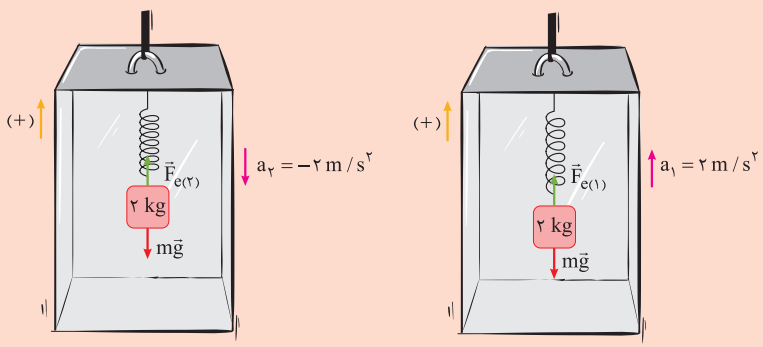
پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** در شکل‌های (الف) و (ب)، نیروهای وارد بر وزنه را در دو حالت رسم کرده‌ایم. در حالت اول چون آسانسور رو به بالا شروع به حرکت کرده، شتاب رو به بالا و در حالت دوم چون آسانسور رو به پایین شروع به حرکت کرده، شتاب رو به پایین است. با توجه به این شکل‌ها، قانون دوم نیوتون را در راستای قائم برای حالت‌های اول و دوم می‌نویسیم (در هر دو حالت جهت مثبت را رو به بالا در نظر می‌گیریم):

حالت اول: $F_{e(۱)} - mg = ma_۱ \Rightarrow kx_۱ - mg = ma_۱ \Rightarrow k(L_۱ - L_۰) - mg = ma_۱$

$$\xrightarrow[g=۱۰\,N/kg\,,\,a_۱=۲\,m/s^۲]{L_۱=۲۴\,cm\,,\,m=۲\,kg} k(۲۴ - L_۰) - ۲\times۱۰ = ۲\times۲ \Rightarrow k(۲۴ - L_۰) = ۲۴ \qquad (I)$$

حالت دوم: $F_{e(۲)} - mg = ma_۲ \Rightarrow kx_۲ - mg = ma_۲ \Rightarrow k(L_۲ - L_۰) - mg = ma_۲$

$$\xrightarrow[g=۱۰\,N/kg\,,\,a_۲=-۲\,m/s^۲]{L_۲=۲۲\,cm\,,\,m=۲\,kg} k(۲۲ - L_۰) - ۲\times۱۰ = ۲\times(-۲) \Rightarrow k(۲۲ - L_۰) = ۱۶ \qquad (II)$$



ب) حالت دوم — الف) حالت اول

گام دوم: رابطهٔ (I) را بر رابطهٔ (II) تقسیم می‌کنیم تا طول عادی فنر $(L_۰)$ به دست آید:

$$\frac{k(۲۴ - L_۰)}{k(۲۲ - L_۰)} = \frac{۲۴}{۱۶} \Rightarrow ۱۶\times۲۴ - ۱۶L_۰ = ۲۲\times۲۴ - ۲۴L_۰ \Rightarrow (۲۴ - ۱۶)L_۰ = ۲۴\times(۲۲ - ۱۶)$$

$$\Rightarrow L_۰ = \frac{۲۴\times۶}{۸} = ۱۸\,cm$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

گام سوم: $L_{\circ}$ به‌دست‌آمده را در یکی از روابط (I) یا (II) قرار می‌دهیم تا ثابت فنر (k) به دست آید:

$$(I):\ k(۲۴-L_{\circ})=۲۴ \xrightarrow{L_{\circ}=۱۸\,cm} k(۲۴-۱۸)=۲۴$$

$$\Rightarrow\ k=\frac{۲۴}{۶}=۴\ N/cm \xrightarrow{۱\ N/cm=۱۰۰\ N/m} k=۴۰۰\ N/m$$

یه‌جور دیگه

گام اول: ابتدا نکتهٔ زیر را بخوانید:

الف) اگر تغییر نیروی خالص وارد بر جسم برابر ΔF_{net} و تغییر شتاب ناشی از آن برابر Δa باشد، از قانون دوم نیوتون می‌توانیم نتیجه بگیریم:

$$\Delta F_{net}=m\Delta a$$

ب) اگر تغییر نیروی کشسانی فنری به ثابت k، برابر ΔF_e و تغییر طول فنر حاصل از آن برابر Δx باشد، داریم:

$$\Delta F_e=k\Delta x$$

در نتیجه اگر با تغییر نیروی کشسانی فنر، نیروی خالص وارد بر جسم و در نتیجه شتاب آن تغییر کند، داریم:

$$k\Delta x=m\Delta a$$

با توجه به نکتهٔ بالا، ثابت فنر را حساب می‌کنیم:

$$k\Delta x=m\Delta a\ \Rightarrow\ k(L_۲-L_۱)=m(a_۲-a_۱)$$

$$\xrightarrow[m=۲\,kg\ ,\ a_۲=-۲\,m/s^۲\ ,\ a_۱=۲\,m/s^۲]{L_۲=۲۲\,cm\ ,\ L_۱=۲۴\,cm} k(۲۲-۲۴)=۲\times(-۲-۲)\ \Rightarrow\ k=\frac{۲\times(-۴)}{-۲}=۴\ N/cm$$

گام دوم: قانون دوم نیوتون را برای حالت اول (یا حالت دوم) می‌نویسیم تا $L_{\circ}$ به دست آید:

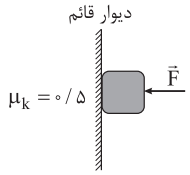
حالت اول: $F_{e(۱)}-mg=ma_۱\ \Rightarrow\ kx_۱-mg=ma_۱\ \Rightarrow\ k(L_۱-L_{\circ})-mg=ma_۱$

$$\xrightarrow[g=۱۰\ N/kg\ ,\ a_۱=۲\,m/s^۲]{k=۴\,N/cm\ ,\ L_۱=۲۴\,cm\ ,\ m=۲\,kg} ۴\times(۲۴-L_{\circ})-۲\times۱۰=۲\times۲\ \Rightarrow\ ۴\times(۲۴-L_{\circ})=۲۴$$

$$\Rightarrow\ ۲۴-L_{\circ}=۶\ \Rightarrow\ L_{\circ}=۱۸\ cm$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۱ در شکل زیر، نیروی افقی $\vec{F}$ به جسم وارد شده و جسم ساکن است. اگر اندازهٔ نیروی $\vec{F}$ نصف شود، جسم با شتابی به بزرگی $5\,m/s^2$ شروع به حرکت می‌کند. اندازهٔ نیرویی که دیوار قائم به جسم وارد می‌کند، در حالت اول چند برابر حالت دوم است؟ $(g = 10\,N/kg)$



۱) $\sqrt{5}$

۲) $\frac{\sqrt{10}}{2}$

۳) $\frac{\sqrt{17}}{2}$

۴) ۲

مشاوره نیروی اصطکاک و نیرویی که سطح به جسم وارد می‌کند پای ثابت سؤال‌های کنکور چند سال اخیر بوده‌اند. معمولاً این سؤال‌ها را دوحالته می‌دهند. پایهٔ حل این سؤال‌ها قانون دوم نیوتون است. در کنار آن باید با انواع مختلف اصطکاک‌ها و نحوهٔ محاسبهٔ آن‌ها هم آشنا باشید.

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint

با نوشتن قانون دوم نیوتون در راستاهای افقی و قائم برای هر دو حالت، به ترتیب اندازهٔ نیروی عمودی سطح و اندازهٔ نیروی اصطکاک وارد بر جسم در هر یک از حالت‌ها به دست می‌آید. در پایان، نسبت اندازهٔ نیرویی که دیوار قائم به جسم وارد می‌کند (برایند دو نیروی عمودی سطح و اصطکاک) به راحتی قابل محاسبه است.

درس Box

۱) وقتی جسمی با یک سطح در تماس است و با وجود نیروی محرکی که به آن وارد می‌شود، هم‌چنان ساکن می‌ماند، نیروی اصطکاک وارد بر آن، ایستایی $(\vec{f}_s)$ است. اندازهٔ نیروی اصطکاک ایستایی فرمول خاصی ندارد و برابر با اندازهٔ نیروی محرکی است که به جسم وارد می‌شود.

۲) اگر جسم روی سطح در حال حرکت (لغزش) باشد، نیروی اصطکاک وارد بر آن، جنبشی $(\vec{f}_k)$ است. اندازهٔ این نیرو از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

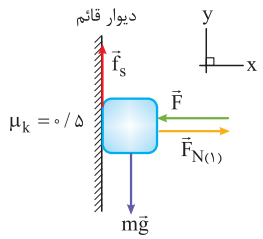
$$f_k = \mu_k F_N \rightarrow \text{اندازهٔ نیروی عمودی سطح}$$
$$\downarrow$$
ضریب اصطکاک جنبشی

۳) جسم و سطح به هم دو نیرو وارد می‌کنند، نیروی عمودی سطح $(\vec{F}_N)$ و اصطکاک $(\vec{f})$. این دو نیرو بر یکدیگر عمودند. اندازهٔ نیرویی که سطح و جسم به هم وارد می‌کنند، برایند این دو نیرو است، پس:

$$R = \sqrt{F_N^2 + f^2}$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: در شکل (الف)، نیروهای وارد بر جسم را در حالت اول رسم کرده‌ایم. قانون دوم نیوتون را در راستاهای افقی و قائم می‌نویسیم:

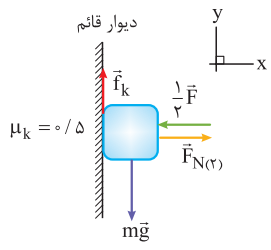


(الف)

راستای افقی: $F_{net(x)} = ma_1 \xrightarrow{a_1=0} F_{N(1)} - F = 0 \Rightarrow F_{N(1)} = F$

راستای قائم: $F_{net(y)} = ma'_1 \xrightarrow{a'_1=0} f_s - mg = 0 \Rightarrow f_s = mg = 10m$

گام دوم: در حالت دوم، با کاهش نیروی عمودی سطح و در نتیجه کاهش نیروی اصطکاک وارد بر جسم، جسم رو به پایین شروع به حرکت می‌کند. با توجه به شکل (ب)، برای این حالت می‌توان نوشت:



(ب)

راستای افقی: $F_{net(x)} = ma_2 \xrightarrow{a_2=0} F_{N(2)} - \frac{1}{2}F = 0 \Rightarrow F_{N(2)} = \frac{1}{2}F$

راستای قائم: $F_{net(y)} = ma'_2 \Rightarrow f_k - mg = ma'_2$

$\Rightarrow f_k - 10m = -5m \Rightarrow f_k = 5m$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

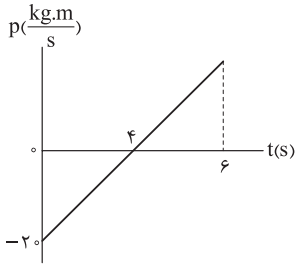
گام سوم: اندازهٔ نیرویی که دیوار قائم به جسم وارد می‌کند از رابطهٔ $R = \sqrt{F_N^2 + f^2}$ محاسبه می‌شود. با توجه به گام‌های قبل، در حالت دوم، هم نیروی عمودی سطح و هم نیروی اصطکاک وارد بر جسم نسبت به حالت اول نصف شده‌اند؛ بنابراین اندازهٔ نیرویی که دیوار قائم به جسم وارد می‌کند، در حالت دوم نصف حالت اول است:

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{R_1}{R_2} = 2$$

خواستون باشه! ضریب اصطکاک جنبشی (μ_k) *دادهٔ اضافی سؤال بود و اصلاً بهش نیازی نداشتیم.*

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۲ نمودار تکانه ـ زمان جسمی که در مسیر مستقیم حرکت می‌کند، به شکل زیر است. اگر بزرگی شتاب جسم در لحظهٔ $t = ۴\,s$ برابر $۲/۵\,m/s^۲$ باشد، انرژی جنبشی جسم در لحظهٔ $t = ۵\,s$ چند ژول است؟



۱) ۵

۲) ۶/۲۵

۳) ۷/۵

۴) ۲۵

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint

ابتدا قانون دوم نیوتون برحسب تکانه را بنویسید و به کمک اطلاعات روی نمودار در بازهٔ زمانی صفر تا ۴ s، جرم جسم را حساب کنید. سپس از روی نمودار و به کمک قضیهٔ تالس، تکانهٔ جسم در لحظهٔ ۵ s را به دست آورید. در پایان با استفاده از رابطهٔ بین انرژی جنبشی و تکانه، انرژی جنبشی جسم در لحظهٔ ۵ s را محاسبه کنید.

درس Box

۱) **قانون دوم نیوتون برحسب تکانه:**

$$\vec{F}_{net} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}$$

۲) **رابطهٔ انرژی جنبشی و تکانه:**

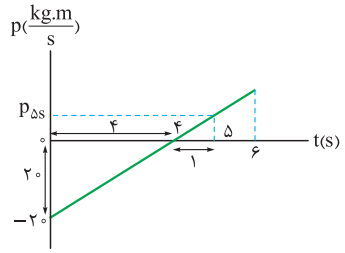
$$K = \frac{p^۲}{۲m} \rightarrow \text{جرم جسم}$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: چون نمودار تکانه ـ زمان جسم به صورت خط راستی با شیب ثابت است، نیروی خالص وارد بر جسم و در نتیجه شتاب جسم نیز ثابت است، پس بزرگی شتاب جسم در کل حرکت همان بزرگی شتاب جسم در لحظهٔ $t = ۴\,s$ است. قانون دوم نیوتون برحسب تکانه را برای بازهٔ زمانی صفر تا ۴ s می‌نویسیم تا جرم جسم به دست آید:

$$F_{net} = \frac{\Delta p}{\Delta t} \Rightarrow ma = \frac{p_{۴s} - p_۰}{\Delta t} \Rightarrow m \times ۲/۵ = \frac{۰ - (-۲۰)}{۴ - ۰} \Rightarrow m \times ۲/۵ = ۵ \Rightarrow m = ۲\,kg$$

گام دوم: به تکانهٔ جسم در لحظهٔ $t = ۵\,s$ نیاز داریم. با توجه به شکل زیر، به کمک قضیهٔ تالس می‌توان نوشت:



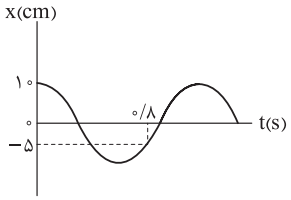
$$\frac{p_{۵s}}{۲۰} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow p_{۵s} = \frac{۲۰}{۴} = ۵\,\frac{kg \cdot m}{s}$$

گام سوم: انرژی جنبشی جسم در لحظهٔ $t = ۵\,s$ به صورت زیر حساب می‌شود:

$$K_{۵s} = \frac{p_{۵s}^۲}{۲m} = \frac{۵^۲}{۲ \times ۲} = \frac{۲۵}{۴} = ۶/۲۵\,J$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۳ نمودار مکان ـ زمان یک نوسانگر هماهنگ ساده به شکل زیر است. در یک بازهٔ زمانی دلخواه ۰/۳ ثانیه‌ای، بیشترین مسافتی که نوسانگر می‌تواند طی کند، چند سانتی‌متر است؟



۱) $۱۰\sqrt{۲}$

۲) ۱۰

۳) $۵\sqrt{۲}$

۴) ۲۰

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint

با توجه به نمودار و به کمک بازه‌های زمانی معروف در حرکت هماهنگ ساده، دورهٔ تناوب را به دست آورید، سپس بر این اساس که بیشترین مسافت طی‌شده توسط نوسانگر در یک بازهٔ زمانی معین، مربوط به حرکت متقارن حول نقطهٔ تعادل است و به کمک بازه‌های زمانی معروف، خواستهٔ سؤال را حساب کنید.

درس Box

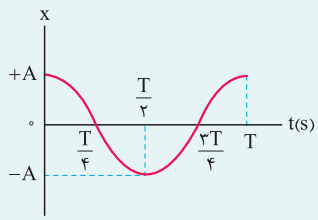
۱) در حرکت هماهنگ ساده:

معادلهٔ مکان ـ زمان:

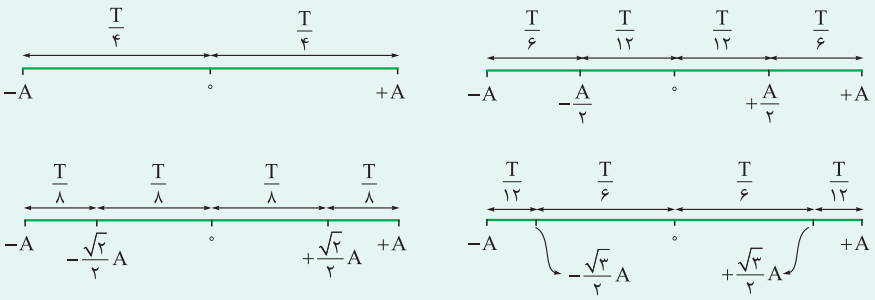
$$x = A\cos\omega t \qquad (\omega = \frac{۲\pi}{T})$$

(x: دامنهٔ نوسان، A: بسامد زاویه‌ای، $\frac{۲\pi}{T}$: دوره)

نمودار مکان ـ زمان:



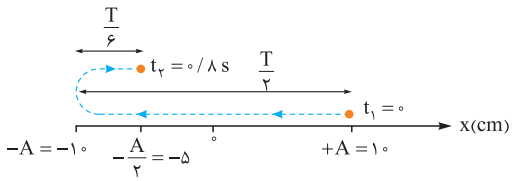
۲) بازه‌های زمانی معروف در حرکت هماهنگ ساده: مکان‌ها و جابه‌جایی‌های مشخص‌شده در شکل‌های زیر بسیار پرتکرارند. زمان لازم برای طی این جابه‌جایی‌ها را (برحسب دوره) به خاطر بسپارید:



پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: با توجه به نمودار $x-t$، نوسانگر در بازهٔ زمانی صفر تا ۰/۸ s از مکان $+A = ۱۰\ cm$ تا مکان $-A = -۱۰\ cm$ می‌رود و سپس به مکان $-\frac{A}{۲} = -۵\ cm$ برمی‌گردد، یعنی مسیری مطابق شکل زیر را طی می‌کند. به کمک بازه‌های زمانی معروف، دورهٔ تناوب نوسان را محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta t = \frac{T}{۲} + \frac{T}{۶} \Rightarrow ۰/۸ = \frac{۳T + T}{۶} \Rightarrow ۴T = ۶ \times ۰/۸ \Rightarrow T = \frac{۶ \times \overset{۰/۲}{۰/۸}}{\underset{۱}{۴}} = ۱/۲\ s$$



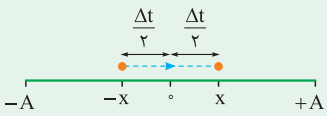
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

گام دوم: $\Delta t' = ۰/۳\,s$ را برحسب T به دست می‌آوریم:

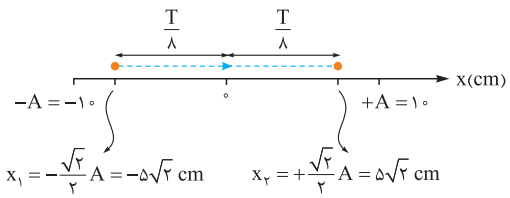
$$\frac{\Delta t'}{T} = \frac{۰/۳}{۱/۲} = \frac{T}{۴} \Rightarrow \Delta t' = \frac{T}{۴}$$

حالا نکتهٔ زیر را بخوانید:

نکته در حرکت هماهنگ ساده با دورهٔ تناوب T، در یک بازهٔ زمانی دلخواه Δt، $۰ < \Delta t < \frac{T}{۲}$، بیشترین مسافت طی‌شده توسط نوسانگر وقتی رخ می‌دهد که نوسانگر به مدت $\frac{\Delta t}{۲}$ قبل از نقطهٔ تعادل و به مدت $\frac{\Delta t}{۲}$ بعد از نقطهٔ تعادل حرکت کند، یعنی مسیری مطابق شکل زیر:



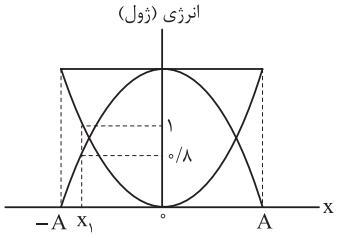
با توجه به نکتهٔ بالا، نوسانگر باید به مدت $\frac{\Delta t'}{۲} = \frac{T}{۸}$ قبل از نقطهٔ تعادل و به مدت $\frac{T}{۸}$ بعد از نقطهٔ تعادل حرکت کند. به کمک بازه‌های زمانی معروف، مسیر حرکت نوسانگر مطابق شکل زیر است. مسافت طی‌شده در این مدت برابر است با:



$$\ell = |x_۲ - x_۱| = ۵\sqrt{۲} - (-۵\sqrt{۲}) = ۱۰\sqrt{۲}\ cm$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۴ نمودار انرژی پتانسیل و انرژی جنبشی نوسانگر هماهنگ ساده‌ای برحسب مکان به شکل زیر است. تندی نوسانگر در مکان x_1 چند برابر تندی بیشینهٔ آن است؟



۱) $\frac{۵}{۹}$

۲) $\frac{۴}{۹}$

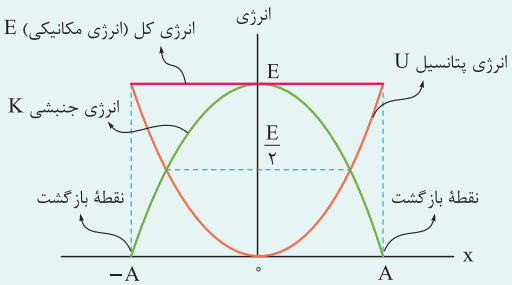
۳) $\frac{\sqrt{۵}}{۳}$

۴) $\frac{۲}{۳}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint ابتدا از روی نمودار، انرژی مکانیکی نوسانگر را به دست آورید. سپس با داشتن K و E، نسبت خواسته‌شده به راحتی محاسبه می‌شود.

درس Box ۱) نمودارهای انرژی پتانسیل، جنبشی و مکانیکی نوسانگر ساده مطابق شکل زیر است:



۲) انرژی مکانیکی نوسانگر ساده برابر با مجموع انرژی‌های جنبشی و پتانسیل آن است. هم‌چنین بیشینهٔ انرژی جنبشی و بیشینهٔ انرژی پتانسیل نوسانگر هم، همان انرژی مکانیکی نوسانگر است:

$$E = U + K = U_{max} = K_{max}$$

۳) انرژی جنبشی نوسانگری به جرم m که تندی آن v است، از رابطهٔ روبه‌رو به دست می‌آید:

$$K = \frac{۱}{۲}mv^۲$$

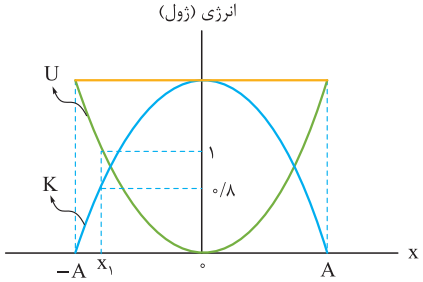
پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** در نقاط بازگشت، انرژی جنبشی نوسانگر صفر و انرژی پتانسیل آن بیشینه است؛ بنابراین نمودار آبی‌رنگ، نمودار انرژی جنبشی و نمودار سبزرنگ، نمودار انرژی پتانسیل نوسانگر است. با توجه به نمودار، در مکان x_1، انرژی جنبشی نوسانگر ۰/۸ J و انرژی پتانسیل آن ۱ J است، پس انرژی مکانیکی نوسانگر برابر است با:

$$E = K + U = ۰/۸ + ۱ = ۱/۸\ J$$

گام دوم: نسبت خواسته‌شده به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\frac{K}{E} = \frac{K}{K_{max}} = \frac{\frac{۱}{۲}mv^۲}{\frac{۱}{۲}mv_{max}^۲} \Rightarrow \frac{K}{E} = (\frac{v}{v_{max}})^۲ \Rightarrow \frac{۰/۸}{۱/۸} = (\frac{v}{v_{max}})^۲ \Rightarrow \frac{۴}{۹} = (\frac{v}{v_{max}})^۲$$

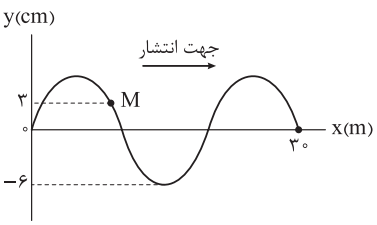
$$\xrightarrow{\sqrt{\ }} \frac{v}{v_{max}} = \frac{۲}{۳}$$



SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۵ نقش موج عرضی منتشرشده در طنابی در مبدأ زمان به شکل زیر است. نیروی کشش طناب $40N$، مساحت مقطع آن $1\,cm^2$ و چگالی آن $4\,g/cm^3$ است. در چه لحظه‌ای برحسب ثانیه، جهت شتاب ذرهٔ M از طناب برای اولین بار تغییر می‌کند؟

ذرهٔ M برای اولین بار از مرکز نوسان عبور می‌کند.



۱) $\frac{10}{3}$

۲) $\frac{5}{3}$

۳) $\frac{5}{6}$

۴) $\frac{5}{12}$

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint

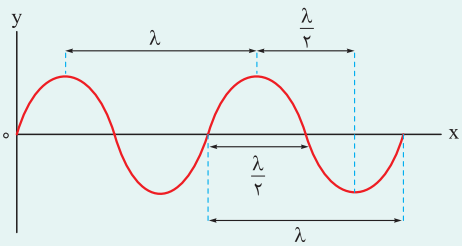
ابتدا تندی انتشار موج را به دست آورید، سپس از روی نمودار، طول موج را تعیین کنید. در ادامه و با داشتن تندی و طول موج، دورهٔ تناوب را حساب کنید. در پایان، با توجه به جهت حرکت ذرهٔ M و به کمک بازه‌های زمانی معروف، لحظهٔ اولین عبور ذرهٔ M از مرکز نوسان را به دست آورید.

درس Box

۱) بین تندی انتشار موج، دورهٔ موج و طول موجِ موج، رابطهٔ زیر برقرار است:

$$\lambda = vT$$

۲) شکل زیر را دربارهٔ رابطهٔ فاصلهٔ نقاط با طول موج به خاطر بسپارید:



۳) تندی انتشار امواج عرضی در یک طناب (تار) از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$v = \sqrt{\frac{F}{\rho A}}$$

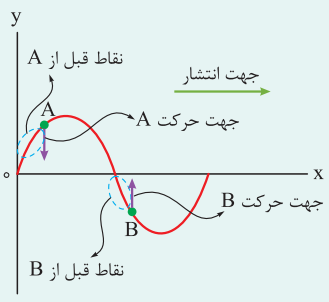
F → نیروی کشش تار

A → سطح مقطع تار

ρ → چگالی تار

۴) در یک موج عرضی، برای تعیین جهت حرکت هر یک از ذرات محیط در هر لحظه، از قاعدهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

با توجه به جهت انتشار، هر ذره (نقطه) قرار است شبیه ذرات (نقاط) قبل از خود شود.



۵) درس‌باکس شمارهٔ (۲) سؤال ۵۳ را بخوانید.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** تندی انتشار موج را حساب می‌کنیم:

$$v=\sqrt{\frac{F}{\rho A}} \xrightarrow[A=1\ cm^2=10^{-4}\ m^2]{\rho=4\ g/cm^3=4\times10^3\ kg/m^3} v=\sqrt{\frac{40}{4\times10^3\times10^{-4}}}=\sqrt{100}=10\ m/s$$

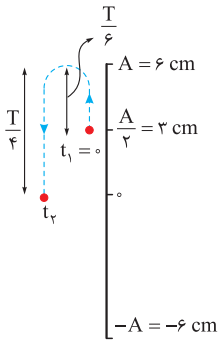
گام دوم: فاصلهٔ $30\ m$ که روی محور x نشان داده شده، برابر با $\frac{3\lambda}{2}$ است؛ بنابراین طول موجِ موج برابر است با:

$$\frac{3\lambda}{2}=30 \Rightarrow \lambda=\frac{2\times30}{3}=20\ m$$

دورهٔ تناوب موج هم به صورت روبه‌رو به دست می‌آید:

$$v=\frac{\lambda}{T} \Rightarrow 10=\frac{20}{T} \Rightarrow T=2\ s$$

گام سوم: با عبور هر ذره از مرکز نوسان (نقطهٔ $x=0$) جهت شتابش تغییر می‌کند، پس باید بفهمیم که ذرهٔ M در چه لحظه‌ای برای اولین بار از مرکز نوسان عبور می‌کند. می‌دانید حرکت ذرهٔ M به گونه‌ای است که می‌خواهد مانند ذرات قبل از خود (*ذرات سمت پیش*) شود؛ بنابراین این ذره ابتدا به سوی نقطهٔ بازگشت $+A$ می‌رود و سپس به سوی مرکز نوسان برمی‌گردد، یعنی مسیر حرکت آن از مبدأ زمان تا لحظهٔ اولین عبور از مرکز نوسان به شکل زیر است:



به کمک بازه‌های زمانی معروف داریم:

$$\Delta t=\frac{T}{6}+\frac{T}{4} \Rightarrow t_2-0=\frac{2T+3T}{12} \Rightarrow t_2=\frac{5T}{12}=\frac{5\times\cancel{2}^{1}}{\cancel{12}^{6}}=\frac{5}{6}\ s$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۶ اختلاف تراز شدت دو صوت A و B برابر ۶ dB است. اگر شدت صوت A به اندازهٔ ۱۵ $\mu W/cm^2$ بیشتر از شدت صوت B باشد، شدت صوت B چند واحد SI است؟ $(\log 2 = 0/3)$

۱) ۰/۰۵

۲) ۰/۰۲

۳) ۵

۴) ۲

مشاوره در حل سؤال‌های مبحث تراز شدت صوت، مهم‌ترین مهارت، حل رابطهٔ لگاریتمی است. در این تست‌ها اغلب $\log 2 = 0/3$ را می‌دهند و شما باید یاد بگیرید که چگونه عددی که با آن سروکار دارید را به صورت مجموع یا تفاضل یک عدد صحیح و یک عدد برحسب ۰/۳ بنویسید. چند نمونه ببینید:

$5/1 = 6 - (3\times 0/3)$

$5/3 = 5 + 0/3$

$5/5 = 4 + (5\times 0/3)$

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint ابتدا به کمک رابطهٔ اختلاف تراز شدت دو صوت، نسبت شدت دو صوت را حساب کنید، سپس با استفاده از رابطهٔ بین شدت دو صوت که در صورت سؤال آمده، شدت صوت B را به دست آورید.

درس Box اختلاف تراز شدت دو صوت (برحسب dB) از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\beta_2 - \beta_1 = 10\log\left(\frac{I_2}{I_1}\right)$$

برای حل تست‌های این مبحث، روابط لگاریتمی زیر به کارتان می‌آید:

$$\log A^n = n\log A \quad , \quad \log(AB) = \log(A) + \log(B) \quad , \quad \log\left(\frac{A}{B}\right) = \log(A) - \log(B)$$

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** چون شدت صوت A بیشتر از شدت صوت B است، تراز شدت صوت A هم بیشتر از تراز شدت صوت B است. رابطهٔ اختلاف تراز شدت صوت را می‌نویسیم تا نسبت شدت دو صوت به دست آید:

$$\beta_A - \beta_B = 10\log\frac{I_A}{I_B} \Rightarrow 6 = 10\log\frac{I_A}{I_B} \Rightarrow \log\frac{I_A}{I_B} = 0/6 = 2\times 0/3 = 2\log 2 = \log 2^2$$

$$\Rightarrow \frac{I_A}{I_B} = 2^2 = 4$$

گام دوم: شدت صوت B را حساب می‌کنیم:

$$\frac{I_A}{I_B} = 4 \xrightarrow{I_A = I_B + 15\ \mu W/cm^2} \frac{I_B + 15}{I_B} = 4 \Rightarrow I_B + 15 = 4I_B \Rightarrow 3I_B = 15 \Rightarrow I_B = 5\ \mu W/cm^2$$

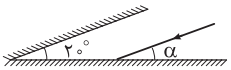
گول نخوری I_B برحسب واحد SI یعنی W/m^2 خواسته شده و گزینهٔ (۳) جواب درست نیست.

$$I_B = 5\ \mu W/cm^2 \times \frac{10^{-6}}{(10^{-2})^2} = 0/05\ W/m^2$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۷ در شکل زیر، پرتوی نور در چهارمین برخورد به آینه‌ها، بر روی خودش بازتاب می‌شود. α چند درجه است؟

عمود بر آینه به آن می‌تابد.

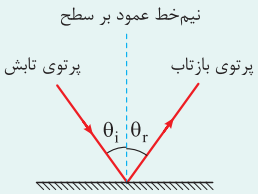


۱) ۲۰ ۲) ۳۰ ۳) ۴۵ ۴) ۶۰

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

۱) قانون بازتاب عمومی: در هر تابش، زاویهٔ تابش با زاویهٔ بازتابش برابر است.



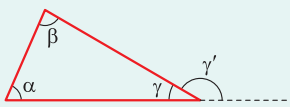
$$\theta_i = \theta_r$$

۲) قضایای هندسی زیر در حل سؤال‌های بازتاب به شما کمک می‌کنند:

- مجموع زوایای داخلی هر مثلث برابر با 180° است:

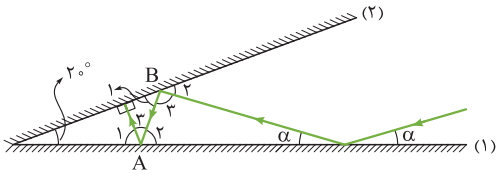
$$\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$$

- در هر مثلث، هر زاویهٔ خارجی برابر با مجموع زوایای داخلی غیرمجاور است:



$$\gamma' = \alpha+\beta$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ در شکل زیر، پرتوهای تابش و بازتاب را تا چهارمین برخورد به آینه‌ها رسم کرده‌ایم. طبق صورت سؤال، در برخورد چهارم، پرتو روی خودش بازتاب می‌شود؛ بنابراین زاویهٔ تابش پرتو به آینهٔ (۲) در برخورد چهارم برابر 90° است. محاسبهٔ زوایا را مرحله‌به‌مرحله انجام می‌دهیم تا α به دست آید:



$$\hat{A}_1 = 180^\circ - (20^\circ + 90^\circ) = 70^\circ$$

$$\hat{A}_2 = \hat{A}_1 \Rightarrow \hat{A}_2 = 70^\circ$$

$$\hat{A}_3 = 180^\circ - (\hat{A}_1 + \hat{A}_2) = 180^\circ - (70^\circ + 70^\circ) = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$$

$$\hat{B}_1 = 180^\circ - (90^\circ + \hat{A}_3) = 180^\circ - (90^\circ + 40^\circ) = 50^\circ$$

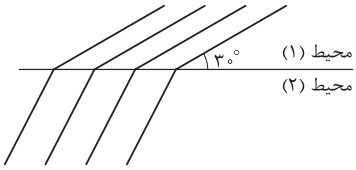
$$\hat{B}_2 = \hat{B}_1 \Rightarrow \hat{B}_2 = 50^\circ$$

$$\hat{B}_3 = 180^\circ - (\hat{B}_1 + \hat{B}_2) = 180^\circ - (50^\circ + 50^\circ) = 80^\circ$$

$$\alpha = 180^\circ - (\hat{A}_2 + \hat{B}_3) = 180^\circ - (70^\circ + 80^\circ) = 30^\circ$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۸ جبهه‌های موج تختی در مرز دو محیط (۱) و (۲) به شکل زیر است. اگر زاویهٔ بین جبهه‌های موج در دو محیط برابر ۱۵° و تندی انتشار موج در محیط (۱) برابر $۱۲\ m/s$ باشد، تندی انتشار موج در محیط (۲) چند متر بر ثانیه است؟



۱) $۶\sqrt{۲}$

۲) $۱۲\sqrt{۲}$

۳) $۶\sqrt{۶}$

۴) $۴\sqrt{۶}$

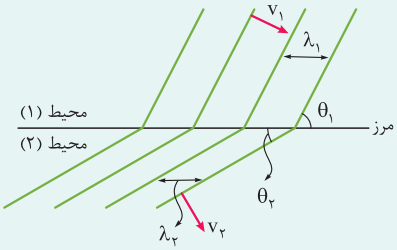
پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint ابتدا زاویهٔ بین جبهه‌های موج در محیط (۲) و مرز را بیابید، سپس با یک جای‌گذاری ساده در قانون شکست عمومی به جواب برسید.

درس Box

قانون شکست عمومی:

وقتی جبهه‌های موج، به شکل زیر از محیط (۱)، وارد محیط (۲) می‌شوند، داریم:



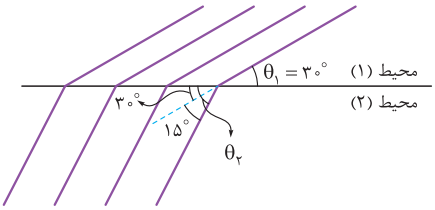
$$\frac{v_۲}{v_۱}=\frac{\sin\theta_۲}{\sin\theta_۱}$$

در رابطهٔ بالا، θ در هر محیط، زاویهٔ بین جبهه‌های موج با مرز است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: باید زاویهٔ بین جبهه‌های موج در محیط (۲) و مرز دو محیط $(\theta_۲)$ را پیدا کنیم. زاویهٔ بین جبهه‌های موج در دو محیط که برابر ۱۵° است را در شکل زیر نشان داده‌ایم. زاویهٔ متقابل به رأس با $\theta_۱=۳۰^\circ$ هم که برابر ۳۰° است؛ بنابراین:

$$\theta_۲=۳۰+۱۵=۴۵^\circ$$



گام دوم: به کمک قانون شکست عمومی داریم:

$$\frac{v_۲}{v_۱}=\frac{\sin\theta_۲}{\sin\theta_۱}\Rightarrow\frac{v_۲}{۱۲}=\frac{\sin ۴۵^\circ}{\sin ۳۰^\circ}\Rightarrow\frac{v_۲}{۱۲}=\frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{\frac{۱}{۲}}\Rightarrow v_۲=۱۲\sqrt{۲}\ m/s$$

گول نخوری ✘

قانون شکست عمومی به صورت $\frac{v_۲}{v_۱}=\frac{\sin\theta_۲}{\sin\theta_۱}$ و قانون شکست اسنل به صورت $\frac{n_۲}{n_۱}=\frac{\sin\theta_۱}{\sin\theta_۲}$ است. *اگه این دو تا رابطه رو با هم قاطی کنید و قانون شکست عمومی رو به صورت* $\frac{v_۲}{v_۱}=\frac{\sin\theta_۱}{\sin\theta_۲}$ *در نظر بگیرید*، به گزینهٔ نادرست (۱) می‌رسید.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۹ لامپ تک‌رنگی با بازده ۲۰ درصد، در هر دقیقه ۶×۱۰^{۲۱} فوتون با طول موج $۶۴۰\ nm$ گسیل می‌کند. توان ورودی این لامپ چند وات است؟

$(h=۴\times۱۰^{-۱۵}\ eV.s\ ،\ e=۱/۶\times۱۰^{-۱۹}C\ \ ،\ c=۳\times۱۰^{۸}\ m/s)$

۱) ۱۵۰ ۲) ۳۰۰ ۳) ۱۵ ۴) ۳۰

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint ابتدا به کمک رابطهٔ توان، توان خروجی (تابشی) لامپ را حساب کنید، سپس به کمک رابطهٔ بازده، توان ورودی لامپ را به دست آورید.

درس Box

۱) **رابطهٔ بین طول موج و بسامد فوتون:**

$\lambda=\frac{c}{f}$ (تندی نور در خلأ: $c=۳\times۱۰^{۸}\ m/s$)

۲) **توان تابشی منبع نور (لامپ، لیزر و ...):**

$P_{\text{تابشی}}=\frac{E}{t}=\frac{nE_{\text{فوتون}}}{t}=\frac{n\,hf}{t}$ (n: تعداد فوتون‌های تابشی، f: بسامد فوتون، t: زمان) (ثابت پلانک: $h\simeq۶/۶\times۱۰^{-۳۴}\ J.s$)

الکترون‌ولت (eV) یکای متداول انرژی در فیزیک اتمی و هسته‌ای است. تبدیل eV به J و برعکس به صورت زیر انجام می‌شود:

$eV \xrightarrow{\times(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})} J$ و $J \xrightarrow{\div(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})} eV$

۳) **بازده:** نسبت انرژی یا توان خروجی (تابشی) به انرژی یا توان ورودی (مصرفی) است و از روابط زیر به دست می‌آید:

$Ra=\frac{\text{انرژی خروجی}}{\text{انرژی ورودی}}\times۱۰۰=\frac{\text{توان خروجی}}{\text{توان ورودی}}\times۱۰۰$ (برحسب درصد)

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** توان خروجی لامپ که همان توان تابشی آن است را حساب می‌کنیم. قبل از این کار، لازم است که ثابت پلانک را برحسب ژول‌ـثانیه به دست آوریم:

$$h=۴\times۱۰^{-۱۵}\ eV\cdot s\times\frac{۱/۶\times۱۰^{-۱۹}\ J}{۱\ eV}=۶/۴\times۱۰^{-۳۴}\ J\cdot s$$

$$P_{\text{خروجی}}=\frac{E}{t}=\frac{nE_{\text{فوتون}}}{t}=\frac{n\frac{hc}{\lambda}}{t}\xrightarrow[t=۱\ min=۶۰\ s]{\lambda=۶۴۰\ nm=۶۴۰\times۱۰^{-۹}\ m}$$

$$P_{\text{خروجی}}=\frac{۶\times۱۰^{۲۱}\times۶/۴\times۱۰^{-۳۴}\times۳\times۱۰^{۸}}{۶۴۰\times۱۰^{-۹}\times۶۰}=\frac{۳\times۱۰^{-۵}}{۱۰^{-۶}}=۳۰\ W$$

گول نخوری خواستهٔ سؤال توان خروجی لامپ، یعنی گزینهٔ (۴) نیست.

گام دوم: رابطهٔ بازده را می‌نویسیم تا توان ورودی لامپ محاسبه شود:

$$Ra=\frac{P_{\text{خروجی}}}{P_{\text{ورودی}}}\times۱۰۰\ \Rightarrow\ ۲۰=\frac{۳۰}{P_{\text{ورودی}}}\times۱۰۰\ \Rightarrow\ P_{\text{ورودی}}=۱۵۰\ W$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶۰ در آزمایش فوتوالکتریک، اگر طول موج نور تابیده‌شده بر سطح فلز ۲۰ درصد کاهش یابد، تندی سریع‌ترین فوتوالکترون‌های آزادشده از سطح فلز، ۲۵ درصد افزایش می‌یابد. تابع کار فلز چند برابر انرژی هر یک از فوتون‌های تابیده‌شده بر سطح فلز در حالت اوّل است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۵}{۶}$ ۳) $\frac{۵}{۹}$ ۴) $\frac{۹}{۱۶}$

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint معادلهٔ فوتوالکتریک را به صورت نسبتی برای دو حالت بنویسید و به کمک داده‌های سؤال به جواب برسید.

درس Box

۱) **معادلهٔ فوتوالکتریک**: انرژی جنبشی سریع‌ترین فوتوالکترون‌های گسیل‌شده از سطح فلز از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$K_{max} = hf - W_۰ \xrightarrow{f=\frac{c}{\lambda}} K_{max} = \frac{hc}{\lambda} - W_۰$

K_{max}: انرژی فوتون فرودی، hf: بسامد فوتون فرودی، $W_۰$: تابع کار فلز، h: ثابت پلانک، c: تندی نور در خلأ، λ: طول موج فوتون فرودی

۲) تندی سریع‌ترین فوتوالکترون‌های گسیل‌شده از سطح فلز از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$K_{max} = \frac{۱}{۲} m_e v_{max}^۲$

m_e: جرم الکترون

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول**: طول موج نور تابیده‌شده، ۲۰ درصد کاهش و تندی فوتوالکترون‌های آزادشده ۲۵ درصد افزایش می‌یابد:

$$\lambda_۲ = \lambda_۱ - \frac{۲۰}{۱۰۰}\lambda_۱ = \frac{۸۰}{۱۰۰}\lambda_۱ \Rightarrow \lambda_۲ = \frac{۴}{۵}\lambda_۱ \quad (I)$$

$$v_{max\,(۲)} = v_{max\,(۱)} + \frac{۲۵}{۱۰۰}v_{max\,(۱)} = \frac{۱۲۵}{۱۰۰}v_{max\,(۱)} \Rightarrow v_{max\,(۲)} = \frac{۵}{۴}v_{max\,(۱)} \quad (II)$$

گام دوم: معادلهٔ فوتوالکتریک را به صورت نسبتی برای دو حالت می‌نویسیم:

$$K_{max} = hf - W_۰ \Rightarrow \frac{۱}{۲}m_e v_{max}^۲ = \frac{hc}{\lambda} - W_۰$$

$$\xrightarrow{m_e: \text{ثابت}} \left(\frac{v_{max\,(۲)}}{v_{max\,(۱)}}\right)^۲ = \frac{\frac{hc}{\lambda_۲} - W_۰}{\frac{hc}{\lambda_۱} - W_۰} \xrightarrow{\frac{(I)}{(II)}} \left(\frac{۵}{۴}\right)^۲ = \frac{\frac{hc}{\frac{۴}{۵}\lambda_۱} - W_۰}{\frac{hc}{\lambda_۱} - W_۰}$$

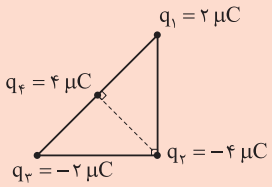
$$\Rightarrow \frac{۲۵}{۱۶}\frac{hc}{\lambda_۱} - \frac{۲۵}{۱۶}W_۰ = \frac{۵}{۴}\frac{hc}{\lambda_۱} - W_۰ \Rightarrow \frac{hc}{\lambda_۱}\left(\frac{۲۵}{۱۶} - \frac{۵}{۴}\right) = W_۰\left(\frac{۲۵}{۱۶} - ۱\right)$$

$$\Rightarrow \frac{hc}{\lambda_۱}\left(\frac{۲۵-۲۰}{۱۶}\right) = W_۰\left(\frac{۲۵-۱۶}{۱۶}\right) \Rightarrow \frac{۵}{۱۶}\frac{hc}{\lambda_۱} = \frac{۹}{۱۶}W_۰ \Rightarrow \frac{W_۰}{\frac{hc}{\lambda_۱}} = \frac{۵}{۹}$$

$$\xrightarrow{\frac{hc}{\lambda_۱}=E_۱} \frac{W_۰}{E_۱} = \frac{۵}{۹}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶۱ در شکل زیر، بار الکتریکی نقطه‌ای $q_۴$ در وسط خط واصل دو بار الکتریکی نقطه‌ای $q_۱$ و $q_۳$ قرار دارد. اندازهٔ نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار $q_۴$، چند برابر اندازهٔ نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار الکتریکی نقطه‌ای $q_۲$ است؟



۱) $\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$

۲) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$

۳) $\frac{۳}{۴}$

۴) $\frac{۴}{۳}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

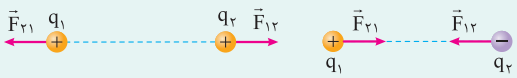
Hint ابتدا به کمک هندسه، فاصله‌های مورد نیاز را برحسب یکدیگر تعیین کنید، سپس به کمک قانون کولن، اندازهٔ نیروی خالص وارد بر بارهای $q_۴$ و $q_۲$ را حساب کنید و در پایان، نسبت خواسته‌شده را به دست آورید.

درس Box

۱) **قانون کولن**: دو بار نقطه‌ای $q_۱$ و $q_۲$ که در فاصلهٔ r از یکدیگر قرار دارند، به هم نیروی الکتریکی وارد می‌کنند که اندازهٔ آن از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$F = k\frac{|q_۱||q_۲|}{r^۲} \quad (\text{ثابت کولن}: k = ۹\times ۱۰^۹ \frac{N.m^۲}{C^۲})$$

۲) مطابق شکل زیر، بارهای **همنام** یکدیگر را **دفع** و بارهای **ناهمنام** یکدیگر را **جذب** می‌کنند.



پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: از هندسه کمک می‌گیریم تا فاصله‌هایی که برای حل سؤال نیاز داریم، تعیین شوند. با توجه به شکل (الف)، از آن‌جایی که D وسط AC است، AD و DC با هم برابرند. از طرفی خط‌چین BD، ضلع مشترک در دو مثلث ADB و CDB است و هم‌چنین زاویه‌های $\hat{D}_۱$ و $\hat{D}_۲$ با هم برابرند؛ بنابراین دو مثلث ADB و CDB به حالت دو ضلع و زاویهٔ بین (ض - ز - ض)، هم‌نهشت بوده و می‌توان نتیجه گرفت:

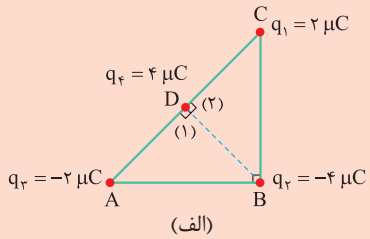
$$CB = AB$$

در مثلث قائم‌الزاویه، میانهٔ وارد بر وتر هم که برابر با نصف وتر است:

$$BD = \frac{AC}{۲} \Rightarrow BD = AD = CD$$

رابطهٔ فیثاغورس را برای یکی از مثلث‌های ADB یا CDB می‌نویسیم:

$$(CB)^۲ = (BD)^۲ + (CD)^۲ \xrightarrow{BD=CD} (CB)^۲ = (BD)^۲ + (BD)^۲ = ۲(BD)^۲ \xrightarrow{\sqrt{\ }} CB = \sqrt{۲}\,BD$$



(الف)

گام دوم: با توجه به نسبت‌های به‌دست‌آمده، در شکل (ب) همهٔ این فاصله‌ها را برحسب r می‌نویسیم. حالا نیروهای الکتریکی وارد بر بار $q_۴$ را از طرف بارهای دیگر رسم می‌کنیم. ابتدا اندازهٔ هر کدام از این نیروها و سپس اندازهٔ برایند آن‌ها را حساب می‌کنیم:

$$\begin{cases} |q_۱| = |q_۳| = ۲\,\mu C \\ r_{۱۴} = r_{۳۴} = r \end{cases} \Rightarrow F_{۱۴} = F_{۳۴} = k\frac{|q_۱||q_۴|}{r_{۱۴}^۲} = k\frac{۲\times ۴}{r^۲} = ۸\frac{k}{r^۲}$$

$$F_{۲۴} = k\frac{|q_۲||q_۴|}{r_{۲۴}^۲} = k\frac{۴\times ۴}{r^۲} = ۱۶\frac{k}{r^۲}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

$\vec{F}_{14}$ و $\vec{F}_{34}$ هم‌جهت‌اند و اندازهٔ برایند آن‌ها برابر است با:

$$F' = F_{14} + F_{34} \xrightarrow{F_{14}=F_{34}} F' = 2F_{14} = 2\times 8\frac{k}{r^2} = 16\frac{k}{r^2}$$

$\vec{F}'$ و $\vec{F}_{24}$ بر هم عمودند؛ بنابراین اندازهٔ برایند نیروهای الکتریکی وارد بر بار q_4 به صورت زیر به دست می‌آید:

$$F_{T(4)} = \sqrt{F'^2 + F_{24}^2} \xrightarrow{F'=F_{24}} F_{T(4)} = \sqrt{2}\,F_{24} = 16\sqrt{2}\frac{k}{r^2}$$

گام سوم: اندازهٔ برایند نیروهای الکتریکی وارد بر q_2 هم به صورت زیر حساب می‌شود:

$$\begin{cases} |q_1| = |q_3| = 2\,\mu C \\ r_{12} = r_{32} = \sqrt{2}r \end{cases} \Rightarrow F_{12} = F_{32} = k\frac{|q_1||q_2|}{r_{12}^2} = k\frac{2\times 4}{(\sqrt{2}r)^2} = 4\frac{k}{r^2}$$

طبق قانون سوم نیوتون:

$$F_{42} = F_{24} \Rightarrow F_{42} = 16\frac{k}{r^2}$$

$\vec{F}_{12}$ و $\vec{F}_{32}$ بر هم عمودند، پس:

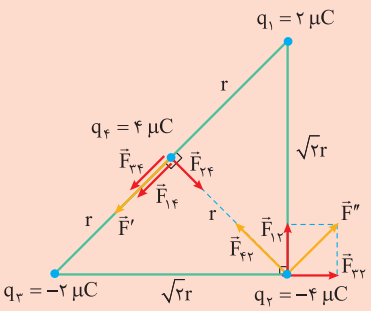
$$F'' = \sqrt{F_{12}^2 + F_{32}^2} \xrightarrow{F_{12}=F_{32}} F'' = \sqrt{2}F_{12} = 4\sqrt{2}\frac{k}{r^2}$$

$\vec{F}''$ و $\vec{F}_{42}$ نیز بر هم عمودند (*دلیلش رو دیگه خودتون باید بدونید*)؛ بنابراین:

$$F_{T(2)} = \sqrt{F''^2 + F_{42}^2} = \sqrt{(4\sqrt{2}\frac{k}{r^2})^2 + (16\frac{k}{r^2})^2} = \frac{k}{r^2}\sqrt{(16\times 2) + 16\times 16} = \frac{k}{r^2}\sqrt{16\times \underbrace{18}_{9\times 2}} = 12\sqrt{2}\frac{k}{r^2}$$

گام چهارم: نسبت خواسته‌شده برابر است با:

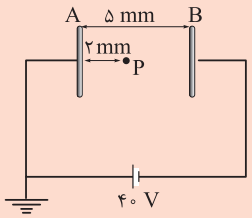
$$\frac{F_{T(4)}}{F_{T(2)}} = \frac{16\sqrt{2}\,\frac{k}{r^2}}{12\sqrt{2}\,\frac{k}{r^2}} = \frac{4}{3}$$



(ب)

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶۲ در شکل زیر، بین دو صفحهٔ موازی هوا است و نقطهٔ P در ۲ میلی‌متری صفحهٔ A قرار دارد. اگر با ثابت‌ماندن صفحهٔ A، صفحهٔ B را دور کنیم تا فاصلهٔ بین دو صفحه ۱۰ mm شود، پتانسیل الکتریکی نقطهٔ P، چند ولت و چگونه تغییر می‌کند؟



۱) ۸، افزایش می‌یابد.

۲) ۸، کاهش می‌یابد.

۳) ۱۲، افزایش می‌یابد.

۴) ۱۲، کاهش می‌یابد.

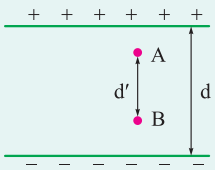
پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint در هر یک از حالت‌ها، رابطهٔ $\frac{\Delta V}{d}$ برای صفحات A و B را برابر با رابطهٔ $\frac{\Delta V}{d'}$ برای نقطهٔ P و صفحهٔ A قرار دهید تا پتانسیل الکتریکی نقطهٔ P در دو حالت به دست آید. اختلاف دو عدد به‌دست‌آمده، پاسخ سؤال است.

درس Box میدان الکتریکی بین دو صفحهٔ موازی باردار، یکنواخت است و اندازهٔ آن از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$E = \frac{|\Delta V|}{d}$$ ← اختلاف پتانسیل الکتریکی میان صفحه‌ها ← فاصلهٔ بین صفحه‌ها

چون اندازهٔ میدان ثابت است، برای هر دو نقطهٔ دلخواه از این فضا، رابطهٔ زیر برقرار است:



$$E: \text{ثابت} \Rightarrow \frac{V_+ - V_-}{d} = \frac{V_A - V_B}{d'}$$

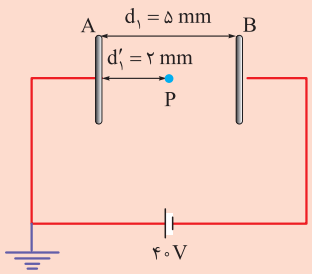
پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** هم صفحهٔ A و هم پایانهٔ مثبت باتری به زمین متصل‌اند؛ بنابراین پتانسیل الکتریکی آن‌ها برابر صفر است:

$$V_A = V_+ = ۰$$

صفحهٔ B به پایانهٔ منفی باتری متصل است؛ بنابراین پتانسیل الکتریکی آن به صورت زیر به دست می‌آید:

$$V_B = V_- \xrightarrow{\Delta V = V_+ - V_-} V_B = V_+ - \Delta V \xrightarrow[V_+ = ۰]{\Delta V = ۴۰\ V} V_B = -۴۰\ V$$

گام دوم: چون میدان الکتریکی بین صفحات ثابت است، با توجه به شکل (الف)، پتانسیل الکتریکی نقطهٔ P را در حالت اول حساب می‌کنیم:



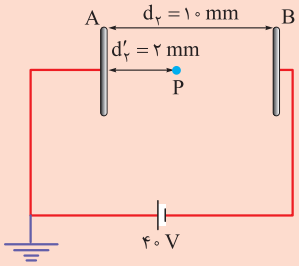
(الف)

$$E = \frac{\Delta V}{d} \Rightarrow \frac{V_A - V_B}{d_۱} = \frac{V_A - V_P}{d'_۱}$$

$$\Rightarrow \frac{۰ - (-۴۰)}{۵} = \frac{۰ - V_P}{۲} \Rightarrow V_P = -\frac{۸۰}{۵} = -۱۶\ V$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

گام سوم: حالت دوم مطابق شکل (ب) است. پتانسیل الکتریکی نقطهٔ P در این حالت به صورت زیر محاسبه می‌شود:



(ب)

$$E = \frac{\Delta V}{d} \Rightarrow \frac{V_A - V_B}{d_2} = \frac{V_A - V'_P}{d'_2}$$

$$\Rightarrow \frac{0-(-40)}{10} = \frac{0-V'_P}{2} \Rightarrow V'_P = -\frac{80}{10} = -8\ V$$

گام چهارم: تغییر پتانسیل الکتریکی نقطهٔ P را به دست می‌آوریم:

$$V'_P - V_P = -8-(-16) = 8V$$

یعنی پتانسیل نقطهٔ P، 8 V افزایش می‌یابد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶۳ خازنی به ظرفیت $۵\ \mu F$ را با اختلاف پتانسیل الکتریکی $۱۲۰۰\ V$ شارژ کرده و از باتری جدا می‌کنیم. چند میلی‌کولن بار الکتریکی از صفحهٔ منفی این خازن جدا کرده و به صفحهٔ مثبت آن منتقل کنیم تا انرژی ذخیره‌شده در خازن $۴/۵\ J$ افزایش یابد؟

۱) ۹ ۲) −۹ ۳) ۳ ۴) −۳

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint ابتدا با استفاده از رابطهٔ ظرفیت خازن، بار الکتریکی اولیهٔ خازن و سپس به کمک رابطهٔ اختلاف انرژی خازن، بار الکتریکی ثانویهٔ خازن را حساب کنید. اختلاف این دو بار الکتریکی پاسخ سؤال است.

درس Box

۱) اگر بار الکتریکی روی صفحه‌های خازنی برابر Q و اختلاف پتانسیل بین صفحه‌های آن برابر V باشد، ظرفیت خازن برابر است با:

$$C = \frac{Q}{V}$$

۲) انرژی ذخیره‌شده در خازنی به ظرفیت C که بار الکتریکی آن Q است، از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$U = \frac{۱}{۲}\frac{Q^۲}{C}$$

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** بار اولیهٔ خازن را حساب می‌کنیم:

$$Q_۱ = CV_۱ \xrightarrow[V_۱=۱۲۰۰\ V]{C=۵\ \mu F=۵\times۱۰^{-۶}\ F} Q_۱ = ۵\times۱۰^{-۶}\times۱۲۰۰ = ۶\times۱۰^{-۳}\ C \xrightarrow{۱۰^{-۳}\ C=۱\ mC} Q_۱ = ۶\ mC$$

گام دوم: رابطهٔ تغییر انرژی خازن را می‌نویسیم تا بار ثانویهٔ خازن به دست آید:

$$\Delta U = \frac{۱}{۲C}(Q_۲^۲ - Q_۱^۲) \Rightarrow ۴/۵ = \frac{۱}{۲\times۵}(Q_۲^۲ - ۶^۲) \Rightarrow Q_۲^۲ - ۳۶ = ۴۵$$

$$\Rightarrow Q_۲^۲ = ۸۱ \xrightarrow{\sqrt{}} Q_۲ = ۹\ mC$$

خواستون باشه! توی رابطهٔ بالا، با پای‌گذاری Q برحسب میلی‌کولن و C برحسب میکروفاراد، تونستیم ΔU رو برحسب ژول پای‌گذاری کنیم.

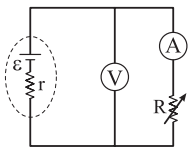
$$\frac{(۱۰^{-۳}\ C)^۲}{۱۰^{-۶}\ F} = \frac{۱۰^{-۶}\ C^۲}{۱۰^{-۶}\ F} = \frac{C^۲}{F} = J$$

گول نخوری سؤال بار منتقل‌شده از صفحهٔ منفی به صفحهٔ مثبت را می‌خواهد، سریع با محاسبهٔ $Q_۲$ گزینهٔ (۱) را انتخاب نکنی.

بار خازن و در نتیجه بار صفحهٔ مثبت، $Q_۲ - Q_۱ = ۹ - ۶ = ۳\ mC$ افزایش یافته است؛ بنابراین باید $۳\ mC$ بار الکتریکی از صفحهٔ منفی جدا و به صفحهٔ مثبت منتقل کنیم.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶۴ در مدار شکل زیر، با تغییر مقاومت متغیر به مقدار معین، آمپرسنج آرمانی ۳A افزایش و ولت‌سنج آرمانی ۴/۵ V کاهش نشان می‌دهند. اگر مقدار مقاومت متغیر را به تدریج از ۱Ω به ۲Ω برسانیم، توان خروجی باتری چگونه تغییر می‌کند؟



۱) پیوسته کاهش می‌یابد.

۲) پیوسته افزایش می‌یابد.

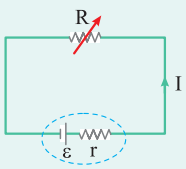
۳) ابتدا افزایش و سپس کاهش می‌یابد.

۴) ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد.

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint به کمک داده‌های سؤال، مقاومت داخلی باتری را به دست آورید، سپس با توجه به این‌که توان خروجی باتری به ازای $R = r$ بیشینه است، چگونگی تغییر توان خروجی باتری هنگام تغییر مقاومت متغیر را بررسی کنید.

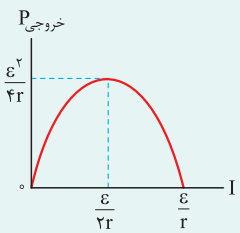
درس Box ۱) در مدار شکل زیر اختلاف پتانسیل دو سر باتری از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:



$$V = \varepsilon - rI$$

۲) نمودار توان خروجی باتری برحسب جریان عبوری از آن مطابق شکل زیر است. در مورد این نمودار باید بدانید که:

- وقتی جریان عبوری از باتری برابر $I = \frac{\varepsilon}{2r}$ است، یا به عبارت دیگر مقدار مقاومت خارجی مدار برابر با مقاومت داخلی باتری است $(R = r)$، توان خروجی باتری بیشینه و برابر با $\frac{\varepsilon^2}{4r}$ است.



- به ازای عبور جریان‌های $I = 0$ و $I = \frac{\varepsilon}{r}$ از باتری، توان خروجی آن برابر صفر است.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** آمپرسنج جریان عبوری از مدار (جریان عبوری از باتری) را نشان می‌دهد؛ بنابراین:

$$I_2 - I_1 = 3\ A$$

ولت‌سنج هم اختلاف پتانسیل دو سر باتری را نشان می‌دهد، پس:

$$V_2 - V_1 = -4/5\ V \xrightarrow{V=\varepsilon-rI} \varepsilon - rI_2 - (\varepsilon - rI_1) = -4/5$$

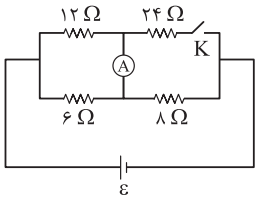
$$\Rightarrow \varepsilon - rI_2 - \varepsilon + rI_1 = -4/5 \Rightarrow r(I_2 - I_1) = 4/5$$

$$\xrightarrow{I_2 - I_1 = 3\ A} r \times 3 = 4/5 \Rightarrow r = \frac{4/5}{3} = 1/5\ \Omega$$

گام دوم: می‌دانید توان خروجی باتری زمانی بیشینه است که مقدار مقاومت متغیر برابر با مقاومت داخلی باتری شود؛ بنابراین با تغییر مقدار مقاومت متغیر از ۱Ω تا ۱/۵ Ω، توان خروجی باتری افزایش می‌یابد و وقتی مقدار مقاومت متغیر به ۱/۵ Ω رسید، توان خروجی باتری بیشینه می‌شود و سپس با تغییر مقدار مقاومت متغیر از ۱/۵ Ω تا ۲Ω، توان خروجی باتری کاهش می‌یابد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶۵ در مدار شکل زیر، اگر کلید K را ببندیم، جریان الکتریکی عبوری از آمپرسنج آرمانی، A ۰/۷ تغییر می‌کند. نیروی محرکهٔ مولد آرمانی چند ولت است؟



۱) ۲۴

۲) ۳۶

۳) ۴۸

۴) ۶۰

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint برای هر یک از حالت‌ها، مقاومت معادل و جریان کل عبوری از مدار را به دست آورید و با توجه به محل قرارگیری آمپرسنج، جریان عبوری از آمپرسنج را به دست آورید. در پایان همه‌چیز برای محاسبهٔ ε آماده است.

درس Box

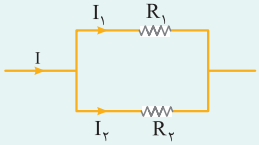
۱) مطابق شکل زیر، دو مقاومت R_1 و R_2 به صورت متوالی (سری) به هم متصل‌اند:



- مقاومت معادل این دو مقاومت:

$$R_{eq} = R_1 + R_2$$

۲) مطابق شکل زیر، دو مقاومت R_1 و R_2 به صورت موازی به هم متصل‌اند:



- مقاومت معادل این دو مقاومت:

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

- اگر مقاومت بزرگ‌تر، n برابر مقاومت کوچک‌تر باشد:

$$R_{eq} = \frac{\text{مقاومت بزرگ‌تر}}{n+1}$$

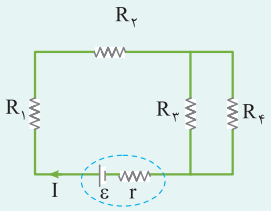
- نسبت جریان عبوری از مقاومت‌ها برابر با وارون نسبت مقاومت‌ها است:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

- طبق اصل پایستگی بار الکتریکی:

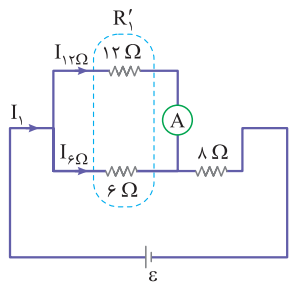
$$I = I_1 + I_2$$

۳) جریان کل عبوری از مدار (جریان عبوری از باتری) در شکل زیر از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:



$$I = \frac{\varepsilon}{R_{eq} + r}$$

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** در حالت اول که کلید باز است، مقاومت ۲۴ اهمی نقشی در مدار ندارد و حذف می‌شود (شکل (الف)). ابتدا مقاومت معادل مدار و سپس جریان کل عبوری از مدار (جریان عبوری از باتری) را حساب می‌کنیم:



(الف)

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

مقاومت‌های ۱۲ Ω و ۶ Ω موازی‌اند: $R'_1 = \frac{12\times6}{12+6} = \frac{12\times\cancel{6}}{\cancel{18}_{3}} = 4\,\Omega$ (یا: $12 = \overset{n}{2}\times6 \Rightarrow R'_1 = \frac{12}{n+1} = \frac{12}{2+1} = 4\,\Omega$)

مقاومت‌های R'_1 و ۸ Ω متوالی‌اند: $R_{eq(1)} = R'_1 + 8 = 4+8 = 12\,\Omega$

$$I_1 = \frac{\varepsilon}{R_{eq(1)}} = \frac{\varepsilon}{12}$$

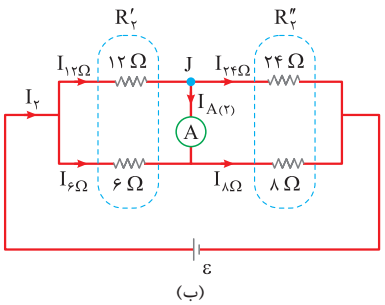
گام دوم: در این حالت، آمپرسنج جریان عبوری از مقاومت ۱۲ اُهمی را نشان می‌دهد. با توجه به موازی‌بودن مقاومت‌های ۱۲ Ω و ۶ Ω می‌توان نوشت:

$$\frac{I_{6\Omega}}{I_{12\Omega}} = \frac{12}{6} \Rightarrow I_{6\Omega} = 2I_{12\Omega}$$

اصل پایستگی بار الکتریکی: $I_1 = I_{12\Omega} + I_{6\Omega} \Rightarrow \frac{\varepsilon}{12} = I_{12\Omega} + 2I_{12\Omega}$

$$\Rightarrow 3I_{12\Omega} = \frac{\varepsilon}{12} \Rightarrow I_{12\Omega} = I_{A(1)} = \frac{\varepsilon}{36}$$

گام سوم: در حالت دوم که کلید بسته است، مدار مطابق شکل (ب) است. در این حالت، مقاومت معادل مدار و جریان کل عبوری از مدار (جریان عبوری از باتری) به صورت زیر به دست می‌آید:



(ب)

$$R'_2 = R'_1 = 4\Omega$$

مقاومت‌های ۲۴ Ω و ۸ Ω موازی‌اند: $R''_2 = \frac{24\times8}{24+8} = \frac{24\times\cancel{8}}{\cancel{32}_{4}} = 6\Omega$ (یا: $24 = \overset{n}{3}\times8 \Rightarrow R''_2 = \frac{24}{n+1} = \frac{24}{3+1} = 6\,\Omega$)

مقاومت‌های R'_2 و R''_2 متوالی‌اند: $R_{eq(2)} = R'_2 + R''_2 = 4+6 = 10\,\Omega$

$$I_2 = \frac{\varepsilon}{R_{eq(2)}} = \frac{\varepsilon}{10}$$

گام چهارم: جریان عبوری از مقاومت‌های ۱۲ Ω و ۲۴ Ω را حساب می‌کنیم:

$$\frac{I_{6\Omega}}{I_{12\Omega}} = \frac{12}{6} \Rightarrow I_{6\Omega} = 2I_{12\Omega}$$

اصل پایستگی بار الکتریکی: $I_2 = I_{12\Omega} + I_{6\Omega} \Rightarrow \frac{\varepsilon}{10} = I_{12\Omega} + 2I_{12\Omega} \Rightarrow 3I_{12\Omega} = \frac{\varepsilon}{10} \Rightarrow I_{12\Omega} = \frac{\varepsilon}{30}$

$$\frac{I_{8\Omega}}{I_{24\Omega}} = \frac{24}{8} \Rightarrow I_{8\Omega} = 3I_{24\Omega}$$

اصل پایستگی بار الکتریکی: $I_2 = I_{24\Omega} + I_{8\Omega} \Rightarrow \frac{\varepsilon}{10} = I_{24\Omega} + 3I_{24\Omega} \Rightarrow 4I_{24\Omega} = \frac{\varepsilon}{10} \Rightarrow I_{24\Omega} = \frac{\varepsilon}{40}$

با توجه به اصل پایستگی بار در نقطهٔ J، عددی که آمپرسنج در این حالت نشان می‌دهد برابر است با:

$$I_{12\Omega} = I_{24\Omega} + I_{A(2)} \Rightarrow \frac{\varepsilon}{30} = \frac{\varepsilon}{40} + I_{A(2)} \Rightarrow I_{A(2)} = \frac{4\varepsilon - 3\varepsilon}{120} = \frac{\varepsilon}{120}$$

گام پنجم: با توجه به صورت تست:

$$|\Delta I_A| = 0/7\,A \xrightarrow{I_{A(2)} < I_{A(1)}} I_{A(2)} - I_{A(1)} = -0/7 \Rightarrow \frac{\varepsilon}{120} - \frac{\varepsilon}{36} = -0/7$$

$$\Rightarrow \frac{3\varepsilon - 10\varepsilon}{360} = -0/7 \Rightarrow -7\varepsilon = -0/7\times360 \Rightarrow \varepsilon = 0/1\times360 = 36\ V$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

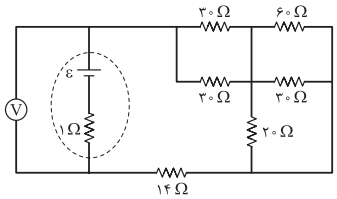
۶۶ در مدار شکل زیر، اگر توان مصرفی مقاومت ۲۰ اُهمی برابر ۱/۸ W باشد، مقداری که ولت‌سنج آرمانی نشان می‌دهد، چند ولت است؟

۱) ۲۳

۲) ۲۴

۳) ۲۳/۴

۴) ۲۴/۴



پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint

ابتدا به کمک رابطهٔ توان مصرفی در مقاومت، جریان عبوری از مقاومت ۲۰ اُهمی را حساب کنید، سپس با محاسبهٔ مقاومت معادل مقاومت‌های موازی ۳۰ Ω و ۶۰ Ω و جریان عبوری از این مقاومت معادل، می‌توان جریان کل عبوری از مدار را به دست آورد. در ادامه مقاومت معادل مدار را حساب کنید تا بتوانید نیروی محرکهٔ مولد را به دست آورید. در پایان عدد ولت‌سنج که برابر با اختلاف پتانسیل دو سر مولد است، تعیین می‌شود.

درس Box

۱) درس باکس سؤال ۶۵ را بخوانید.

۲) اگر جریان عبوری از مقاومت R برابر I باشد، توان مصرفی در این مقاومت از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$P = RI^2$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: جریان عبوری از مقاومت ۲۰ اُهمی برابر است با:

$$P_{20\Omega} = RI^2_{20\Omega} \Rightarrow 1/8 = 20 I^2_{20\Omega} \Rightarrow I^2_{20\Omega} = \frac{9}{100} \xrightarrow{\sqrt{\ }} I_{20\Omega} = 0/3\ A$$

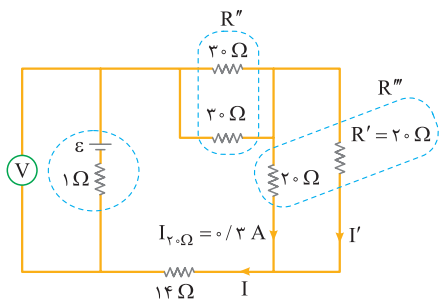
گام دوم: مقاومت معادل مقاومت‌های ۳۰ Ω و ۶۰ Ω را حساب می‌کنیم:

مقاومت‌های ۳۰ Ω و ۶۰ Ω موازی‌اند: $R' = \frac{30\times60}{30+60} = \frac{\cancel{30}\times60}{\cancel{90}_{3}} = 20\Omega$ (یا: $\frac{60}{n} = \frac{60}{2} = 30 \Rightarrow R' = \frac{60}{n+1} = \frac{60}{2+1} = 20\Omega$)

با محاسبهٔ R'، می‌توان مدار را به شکل زیر رسم کرد. دو مقاومت یکسان ۲۰ اُهمی با هم موازی‌اند؛ بنابراین جریان عبوری از آن‌ها یکسان است و جریان کل عبوری از مدار (جریان عبوری از باتری) به صورت زیر به دست می‌آید:

$I' = I_{20\Omega} \Rightarrow I' = 0/3\ A$

اصل پایستگی بار الکتریکی $\Rightarrow I = I_{20\Omega} + I' = 0/3 + 0/3 = 0/6\ A$



گام سوم: مقاومت معادل کل مدار را به دست می‌آوریم:

مقاومت‌های ۳۰ Ω و ۳۰ Ω موازی‌اند: $R'' = \frac{30\times30}{30+30} = \frac{30\times\cancel{30}}{\cancel{60}_{2}} = 15\ \Omega$ (یا: $R'' = \frac{30}{2} = 15\ \Omega$)

مقاومت‌های ۲۰ Ω و ۲۰ Ω موازی‌اند: $R''' = \frac{20\times20}{20+20} = \frac{400}{40} = 10\ \Omega$ (یا: $R''' = \frac{20}{2} = 10\ \Omega$)

مقاومت‌های R''' و R'' و ۱۴ Ω متوالی‌اند: $R_{eq} = R''' + R'' + 14 = 10 + 15 + 14 = 39\ \Omega$

نیروی محرکهٔ مولد برابر است با:

$$I = \frac{\varepsilon}{R_{eq} + r} \Rightarrow 0/6 = \frac{\varepsilon}{39+1} \Rightarrow \varepsilon = 24\ V$$

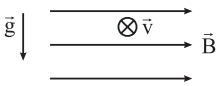
گام چهارم: مقداری که ولت‌سنج نشان می‌دهد، اختلاف پتانسیل دو سر مولد است:

$V = \varepsilon - rI = 24 - 1\times0/6 = 23/4\ V$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶۷ مطابق شکل، ذره‌ای با بار الکتریکی $q = -۲\ mC$ و تندی $۱۰^۴\ m/s$ به صورت درون‌سو وارد فضایی می‌شود که در آن میدان مغناطیسی افقی و یکنواخت $B = ۴۰۰\ G$ و میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{E}$ وجود دارد. اگر جرم ذره برابر $۲۰\ g$ باشد، E چند نیوتون بر کولن و در چه جهتی باشد تا ذره بدون انحراف به مسیر خود ادامه دهد؟ $(g = ۱۰\ N/kg)$

نیروی خالص وارد بر ذره برابر صفر باشد.



۱) ۳۰۰، به سمت بالا

۲) ۳۰۰، به سمت پایین

۳) ۶۰۰، به سمت بالا

۴) ۶۰۰، به سمت پایین

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint

ابتدا جهت و اندازهٔ نیروهای وزن و مغناطیسی وارد بر ذره را به دست آورید. به کمک این دو، جهت و اندازهٔ نیروی الکتریکی وارد بر ذره در حالتی که بدون انحراف به مسیر خود ادامه می‌دهد، تعیین شود. در پایان، جهت و اندازهٔ میدان الکتریکی به راحتی قابل محاسبه است.

درس Box

۱) ذره‌ای با بار q در میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{E}$ قرار دارد:

اندازهٔ نیروی الکتریکی وارد بر این ذره:

$$F = |q|E$$

جهت نیروی الکتریکی وارد بر این ذره:

علامت بار ذره	جهت نیروی الکتریکی وارد بر ذره
مثبت	هم‌جهت با میدان الکتریکی
منفی	در خلاف جهت میدان الکتریکی

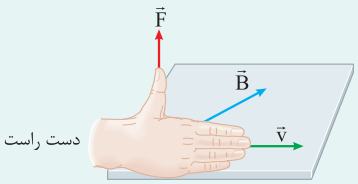
۲) ذره‌ای با بار q در میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ در حال حرکت با سرعت $\vec{v}$ است:

اندازهٔ نیروی مغناطیسی وارد بر این ذره:

$$F = |q|vB\sin\theta$$

در رابطهٔ بالا، θ زاویهٔ بین جهت حرکت بار الکتریکی (بردار $\vec{v}$) و جهت میدان مغناطیسی (بردار $\vec{B}$) است.

جهت نیروی مغناطیسی وارد بر این ذره: به کمک قاعدهٔ دست راست تعیین می‌شود. طبق این قاعده، اگر چهار انگشت دست راست را طوری در جهت بردار سرعت ذره $(\vec{v})$ قرار دهیم که بردار میدان مغناطیسی $(\vec{B})$ از کف دست خارج شود، شست دست جهت نیروی مغناطیسی وارد بر ذره با بار مثبت را نشان می‌دهد. (شکل زیر را ببینید.)



نکته

اگر بار ذره منفی باشد، این قاعده را با دست چپ اجرا می‌کنیم.

علامت بار ذره	جهت نیروی مغناطیسی وارد بر ذره
مثبت	قاعدهٔ دست راست
منفی	قاعدهٔ دست راست را با دست چپ اجرا می‌کنیم.

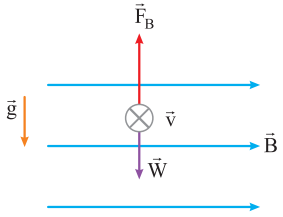
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** مطابق شکل (الف)، نیروی وزن وارد بر ذره رو به پایین و نیروی مغناطیسی وارد بر آن که به کمک قاعدهٔ دست راست (البته به دلیل منفی‌بودن بار الکتریکی ذره، از دست چپ استفاده می‌کنیم) تعیین می‌شود که رو به بالا است.

اندازهٔ هر یک از این نیروها را حساب می‌کنیم:

$$W = mg \xrightarrow[g=10\ N/kg]{m=20\ g=20\times10^{-3}\ kg} W = 20\times10^{-3}\times10 = 0/2\ N$$

$$F_B = |q|vB \xrightarrow[B=400\ G=400\times10^{-4}\ T]{|q|=2\ mC=2\times10^{-3}\ C} F_B = 2\times10^{-3}\times10^{4}\times400\times10^{-4} = 0/8\ N$$

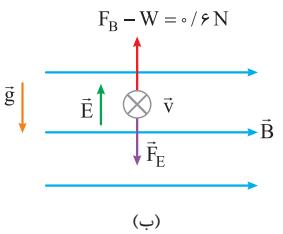


(الف)

چون $F_B > W$ است، برایند این دو نیرو به سمت بردار بزرگ‌تر $\vec{F}_B$، یعنی رو به بالا است. اندازهٔ آن هم برابر است با:

$$F_B - W = 0/8 - 0/2 = 0/6\ N$$

گام دوم: برای این‌که ذره بدون انحراف به مسیر خود ادامه دهد، لازم است که نیروی خالص وارد بر آن صفر باشد؛ بنابراین باید مطابق شکل (ب) نیروی الکتریکی وارد بر آن رو به پایین و اندازهٔ آن برابر $0/6\ N$ باشد. چون بار الکتریکی ذره منفی است، $\vec{E}$ در خلاف جهت $\vec{F}_E$ یعنی رو به بالا خواهد بود. اندازهٔ میدان الکتریکی هم به صورت زیر محاسبه می‌شود:



(ب)

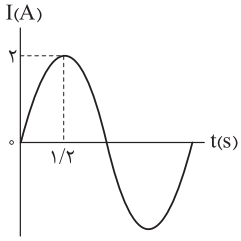
$$F_E = 0/6\ N \Rightarrow |q|E = 0/6$$

$$\xrightarrow{|q|=2\ mC=2\times10^{-3}\ C} 2\times10^{-3}\times E = 0/6 \Rightarrow E = \frac{0/6}{2\times10^{-3}} = 300\ N/C$$

گول نخوری اگر به منفی‌بودن بار الکتریکی توجه نکرده باشید، احتمالاً گزینهٔ نادرست (۲) را زده‌اید.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶۸ نمودار جریان متناوب عبوری از یک سیم‌لولهٔ آرمانی به ضریب القاوری ۴ mH برحسب زمان به شکل زیر است. در چه لحظه‌ای برحسب ثانیه، انرژی ذخیره‌شده در این سیم‌لوله برای سومین بار به ۶ mJ می‌رسد؟



۱) ۳/۲

۲) ۳/۴

۳) ۴/۲

۴) ۴/۴

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint ابتدا به کمک رابطهٔ انرژی سیم‌لوله، مقدار جریان عبوری از سیم‌لوله را در حالتی که انرژی ذخیره‌شده در آن به ۶ mJ می‌رسد، به دست آورید، سپس از روی نمودار، دوره را حساب کنید. در پایان به کمک بازه‌های زمانی معروف، خواستهٔ سؤال محاسبه می‌شود.

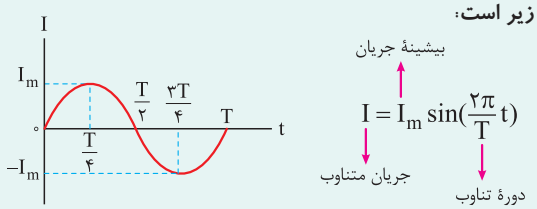
درس Box

۱) **انرژی ذخیره‌شده در سیم‌لوله:**

ضریب القاوری سیم‌لوله

$$U = \frac{1}{2}LI^2$$ ← جریان عبوری از سیم‌لوله

۲) **معادله و نمودار جریان متناوب برحسب زمان به صورت زیر است:**



بیشینهٔ جریان

$$I = I_m \sin(\frac{2\pi}{T}t)$$

جریان متناوب — دورهٔ تناوب

۳) درس‌باکس شمارهٔ ۲ سؤال ۵۳ را بخوانید.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ببینیم برای این‌که انرژی ذخیره‌شده در سیم‌لوله به ۶ mJ برسد، مقدار جریان عبوری از آن چه‌قدر باید باشد:

$$U = \frac{1}{2}LI^2 \Rightarrow 6 = \frac{1}{2}\times 4 \times I^2 \Rightarrow I^2 = 3 \xrightarrow{\sqrt{}} |I| = \sqrt{3}\ A$$

حواستون باشه! توی رابطهٔ بالا U رو برحسب mJ و L رو برحسب mH جای‌گذاری کردیم تا I برحسب A به دست بیاد.

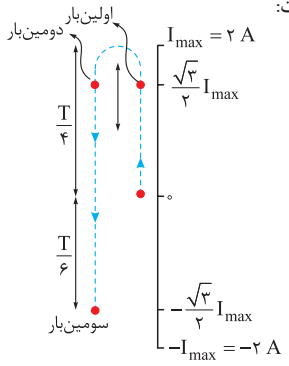
گام دوم: دورهٔ تناوب را می‌خواهیم. مقدار نشان داده شده روی محور t برابر $\frac{T}{4}$ است، پس:

$$\frac{T}{4} = 1/2\ s \Rightarrow T = 4/8\ s$$

گام سوم: حالا باید بفهمیم که در چه لحظه‌ای، مقدار جریان عبوری از سیم‌لوله برای سومین بار برابر با $\sqrt{3}A$ می‌شود:

$$\frac{|I|}{I_{max}} = \frac{\sqrt{3}\ A}{2\ A} \Rightarrow |I| = \frac{\sqrt{3}}{2}I_{max} \Rightarrow I = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}I_{max}$$

در این‌جا می‌توانیم از بازه‌های زمانی معروف کمک بگیریم. با توجه به شکل زیر می‌توان نوشت:



$$\Delta t = 2\frac{T}{4} + \frac{T}{6} \Rightarrow t_2 - t_1 = \frac{3T+T}{6} \Rightarrow t_2 - 0 = \frac{2T}{3} \Rightarrow t_2 = \frac{2\times \overset{1/6}{4/8}}{\underset{1}{3}} = 3/2\ s$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶۹ در شکل زیر، در ظرفی که از دو بخش با سطح مقطع‌های $20\ cm^2$ و $40\ cm^2$ تشکیل شده، تا ارتفاع $10\ cm$ مایعی به چگالی $4\ g/cm^3$ ریخته شده است. اگر $240\ g$ از مایعی به چگالی $2\ g/cm^3$ به ظرف اضافه کنیم، فشار در کف ظرف به چند کیلوپاسکال می‌رسد؟

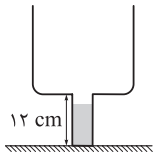
($P_0 = 100\ kPa$ ، $g = 10\ N/kg$ و دو مایع با هم مخلوط نمی‌شوند.)

۱) ۱۱۲

۲) ۱۱۶

۳) ۱۰۵/۲

۴) ۱۰۴/۸



پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint ابتدا حجم مایع اضافه‌شده را حساب کنید، سپس با توجه به سطح مقطع‌های متفاوت ظرف، بررسی کنید که ارتفاع مایع اضافه‌شده چه‌قدر است. در پایان فشار وارد بر کف ظرف را به دست آورید.

درس Box

۱) **چگالی:**

$$\rho = \frac{m}{V} \quad \begin{matrix} \rightarrow \text{جرم جسم} \\ \rightarrow \text{حجم جسم} \end{matrix}$$

۲) **فشار در عمق h از یک مایع:**

$$P = P_0 + \rho g h \quad \begin{matrix} \uparrow \text{چگالی مایع} \\ \downarrow \text{فشار هوا} \end{matrix}$$

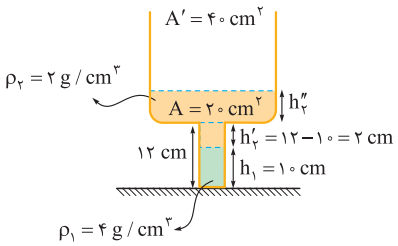
توجه داشته باشید که در تست‌ها، واژه‌های فشار، فشار کل و فشار مطلق معادل یکدیگرند.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: به کمک رابطهٔ چگالی، حجم مایع اضافه‌شده را حساب می‌کنیم:

$$\rho_2 = \frac{m_2}{V_2} \Rightarrow 2 = \frac{240}{V_2} \Rightarrow V_2 = \frac{240}{2} = 120\ cm^3$$

گام دوم: وقتی مایع دوم به ظرف اضافه می‌شود، به دلیل کم‌تر بودن چگالی آن نسبت به مایع اول، روی مایع اول قرار می‌گیرد. با توجه به شکل زیر، برای محاسبهٔ ارتفاع مایع دوم به صورت زیر عمل می‌کنیم:



$$V_2 = Ah'_2 + A'h''_2 \Rightarrow 120 = 20\times 2 + 40\times h''_2 \Rightarrow 40h''_2 = 80 \Rightarrow h''_2 = 2\ cm$$

$$h_2 = h'_2 + h''_2 = 2 + 2 = 4\ cm$$

گام سوم: فشار در کف ظرف را به دست می‌آوریم:

$$P = P_0 + P_1 + P_2 = P_0 + \rho_1 g h_1 + \rho_2 g h_2$$

$$\xrightarrow[h_2=4\ cm=0/04\ m,\ \rho_1=4\ g/cm^3=4\times10^3\ kg/m^3,\ \rho_2=2\ g/cm^3=2\times10^3\ kg/m^3]{P_0=100\ kPa=100\times10^3\ Pa,\ g=10\ N/kg,\ h_1=10\ cm=0/1\ m}$$

$$P = 100\times10^3 + 4\times10^3\times10\times0/1 + 2\times10^3\times10\times0/04$$

$$= 10^3\times(100 + 4 + 0/8) = 104/8\times10^3\ Pa \xrightarrow{10^3\ Pa = 1\ kPa} P = 104/8\ kPa$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷۰ جسمی به جرم ۲۰ kg از ارتفاع ۴۵ متری زمین رها می‌شود و با تندی ۲۰ m / s به زمین برخورد می‌کند. از لحظهٔ رهاشدن جسم تا لحظهٔ رسیدن آن به زمین، کار انجام‌شده توسط نیروی مقاومت هوا بر روی جسم، چند برابر کار انجام‌شده توسط نیروی وزن بر روی آن است؟ $(g = ۱۰ \, m/s^۲)$

۱) $\frac{۵}{۹}$ ۲) $-\frac{۵}{۹}$ ۳) $\frac{۴}{۵}$ ۴) $-\frac{۴}{۵}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint کار نیروی وزن برابر با منفی تغییر انرژی پتانسیل گرانشی است. کار نیروی مقاومت هوا هم به کمک قضیهٔ کار ـ انرژی جنبشی یا قانون پایستگی انرژی به دست می‌آید.

درس Box

۱) انرژی جنبشی جسمی به جرم m و تندی v از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$K = \frac{۱}{۲}mv^۲$$

۲) کار نیروی وزن جسم برابر با منفی تغییر انرژی پتانسیل گرانشی جسم است:

$$W_{mg} = -\Delta U = -mg\Delta h$$

در رابطهٔ بالا، اگر ارتفاع جسم زیاد شود، $\Delta h > ۰$ و اگر ارتفاع جسم کم شود، $\Delta h < ۰$ است.

۳) **قضیهٔ کار ـ انرژی جنبشی**: کار کل انجام‌شده روی یک جسم با تغییر انرژی جنبشی آن برابر است:

$$W_t = \Delta K \Rightarrow W_t = K_۲ - K_۱$$

- رابطهٔ بالا برای هر نوع مسیری برقرار است.
- انرژی جنبشی در آغاز و پایان هر مسیر مهم است و این‌که در طول مسیر انرژی جنبشی چگونه تغییر کرده، اهمیتی ندارد.

۴) انرژی مکانیکی جسم برابر با مجموع انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل جسم است:

$$E = K + U$$

۵) **قانون پایستگی انرژی**: کار نیروهای اتلافی مانند اصطکاک و مقاومت هوا برابر با تغییر انرژی مکانیکی است:

$$W_f = \Delta E = \Delta K + \Delta U$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: کار نیروی وزن را در این جابه‌جایی حساب می‌کنیم:

$$W_{mg} = -\Delta U = -mg\Delta h \xrightarrow[\Delta h = -۴۵ \, m]{\text{ارتفاع جسم کم می‌شود.}} W_{mg} = -۲۰ \times ۱۰ \times (-۴۵) = ۹۰۰۰ \, J$$

گام دوم: محاسبهٔ کار نیروی مقاومت هوا:

قضیهٔ کار ـ انرژی جنبشی:

$$W_t = \Delta K \Rightarrow W_{mg} + W_f = \frac{۱}{۲}m(v_۲^۲ - v_۱^۲) \Rightarrow ۹۰۰۰ + W_f = \frac{۱}{۲} \times ۲۰ \times (۲۰^۲ - ۰^۲)$$

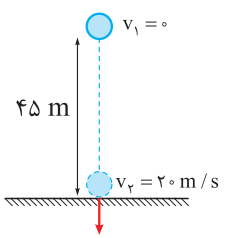
$$\Rightarrow W_f = ۴۰۰۰ - ۹۰۰۰ = -۵۰۰۰ \, J$$

یه‌جور دیگه

قانون پایستگی انرژی:

$$W_f = \Delta E = \Delta K + \Delta U = \frac{۱}{۲}m(v_۲^۲ - v_۱^۲) + mg\Delta h = \frac{۱}{۲} \times ۲۰ \times (۲۰^۲ - ۰^۲) + ۲۰ \times ۱۰ \times (-۴۵)$$

$$= ۴۰۰۰ - ۹۰۰۰ = -۵۰۰۰ \, J$$

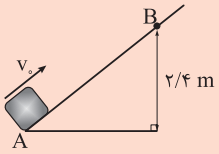


گام سوم: نسبت خواسته‌شده برابر است با:

$$\frac{W_f}{W_{mg}} = \frac{-۵۰۰۰}{۹۰۰۰} = -\frac{۵}{۹}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷۱ در شکل زیر، جسمی از نقطهٔ A با تندی v_0، مماس با سطح و رو به بالا پرتاب شده و حداکثر تا نقطهٔ B بالا می‌رود. اگر تا رسیدن جسم به نقطهٔ B، ۲۵ درصد از انرژی جنبشی اولیهٔ آن تلف شود، v_0 چند متر بر ثانیه است؟ $(g = 10\,m/s^2)$



۱) ۸

۲) ۱۲

۳) $8\sqrt{3}$

۴) $12\sqrt{3}$

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint قانون پایستگی انرژی (رابطهٔ کار نیروهای اتلافی و تغییر انرژی مکانیکی) شما را به جواب می‌رساند.

درس Box درس‌باکس سؤال ۷۰ را بخوانید.

پاسخ خیلی تشریحی ۲۵ درصد از انرژی جنبشی اولیهٔ جسم تلف می‌شود؛ بنابراین کار نیروهای اتلافی برابر است با:

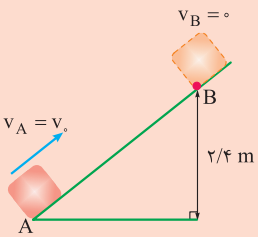
$$W_f = -\frac{25}{100}K_A$$

با توجه به شکل زیر، قانون پایستگی انرژی را برای جابه‌جایی جسم از نقطهٔ A تا نقطهٔ B می‌نویسیم:

$$W_f = \Delta E = \Delta K + \Delta U \Rightarrow -\frac{25}{100}K_A = K_B - K_A + mg\Delta h \xrightarrow{K_B=0} \frac{75}{100}K_A = mg\Delta h$$

$$\Rightarrow \frac{75}{100}\times\frac{1}{2}mv_A^2 = mg\Delta h \xrightarrow[\Delta h=2/4\ m]{\text{ارتفاع جسم زیاد می‌شود.}} \frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times v_0^2 = 10\times 2/4$$

$$\Rightarrow v_0^2 = \frac{24\times 8}{3} \xrightarrow{\sqrt{\ }} v_0 = 8\ m/s$$



SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷۲ اگر دمای یک میلهٔ فلزی $180\ ^\circ F$ افزایش یابد، طول آن ۰/۰۹ درصد تغییر می‌کند. ضریب انبساط طولی این فلز در SI کدام است؟

۱) 9×10^{-4}

۲) 9×10^{-6}

۳) 5×10^{-4}

۴) 5×10^{-6}

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint ابتدا تغییر دمای میله را برحسب کلوین به دست آورید و سپس به کمک رابطهٔ انبساط طولی، ضریب انبساط طولی را حساب کنید.

درس Box

۱) **رابطهٔ بین تغییرات دما در مقیاس‌های فارنهایت، کلوین و سلسیوس:**

$$\Delta F=\frac{9}{5}\Delta\theta=\frac{9}{5}\Delta T$$

۲) **رابطهٔ انبساط طولی:**

$\Delta L = L_1 \alpha \Delta T$ → K یا $^\circ C$ افزایش دما بر حسب

(افزایش طول، طول اولیه)

ضریب انبساط طولی بر حسب $\frac{1}{K}$ یا $\frac{1}{^\circ C}$

درصد تغییر طول:

$$\frac{\Delta L}{L_1}\times100=\alpha\Delta T\times100$$

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** تغییر دمای میله را برحسب کلوین به دست می‌آوریم:

$$\Delta F=\frac{9}{5}\Delta T \Rightarrow \cancel{180}^{20}=\frac{\cancel{9}^{1}}{5}\Delta T \Rightarrow \Delta T=100\ K$$

گام دوم: ضریب انبساط طولی میله به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\Delta L}{L_1}\times100=0/09 \Rightarrow \alpha\Delta T\times100=0/09 \Rightarrow \alpha\times100\times100=0/09 \Rightarrow \alpha=9\times10^{-6}\frac{1}{K}$$

گول نخوری اگر در رابطهٔ درصد تغییر طول، تغییر دما را برحسب درجهٔ فارنهایت جای‌گذاری کنید، به گزینهٔ اشتباه (۴) می‌رسید.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷۳ درون ظرفی عایق، $1\,kg$ آب با دمای $30\,^\circ C$ ریخته شده است. $500\,g$ آب با دمای $60\,^\circ C$ به آن اضافه می‌کنیم. پس از مدتی تعادل گرمایی ایجاد می‌شود. این مجموعه حداکثر چند گرم یخ با دمای $-40\,^\circ C$ را می‌تواند ذوب کند؟ ($c_{\text{یخ}} = \frac{1}{2} c_{\text{آب}} = 2100\ \frac{J}{kg.K}$، $L_F = 336\ kJ/kg$ و تبادل گرمایی با محیط ناچیز است.)

۱) ۲۰۰ ۲) ۴۰۰ ۳) ۶۰۰ ۴) ۸۰۰

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint ابتدا به کمک قانون پایستگی انرژی، دمای تعادل اولیه را حساب کنید، سپس دوباره قانون پایستگی انرژی را برای تعادل گرمایی جدید در دمای $0\,^\circ C$ بنویسید تا جرم یخ به دست آید.

درس Box

۱) **گرمای لازم برای تغییر دما:**

$Q = mc(\theta_2 - \theta_1)$

(جرم جسم، دمای ثانویه، دمای اولیه، گرمای ویژهٔ جسم)

۲) **گرمای لازم برای تغییر حالت از جامد به مایع:**

$Q_F = mL_F$

(گرمای نهان ذوب جسم، جرم جسم)

پاسخ خیلی تشریحی

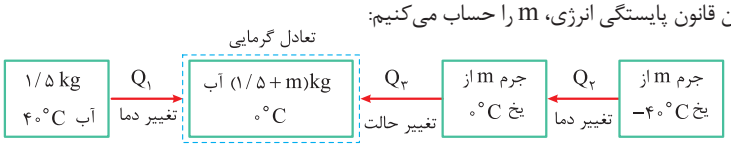
گام اول: دمای تعادل در حالت اول را حساب می‌کنیم:

$$Q_{\text{آب}} + Q'_{\text{آب}} = 0 \Rightarrow m_{\text{آب}} c_{\text{آب}} (\theta_e - \theta_{1(\text{آب})}) + m'_{\text{آب}}\, c_{\text{آب}} (\theta_e - \theta'_{1(\text{آب})}) = 0$$

$$\Rightarrow 1 \times 4200 \times (\theta_e - 30) + 0/5 \times 4200 \times (\theta_e - 60) = 0 \Rightarrow 0/5 \times 4200 \times [2(\theta_e - 30) + \theta_e - 60] = 0$$

$$\Rightarrow 3\theta_e - 120 = 0 \Rightarrow \theta_e = \frac{120}{3} = 40^\circ C$$

گام دوم: در حالت دوم، $1/5\,kg = 1 + 0/5$ آب با دمای $40\,^\circ C$ داریم. می‌خواهیم بفهمیم این آب حداکثر چند گرم یخ با دمای $-40\,^\circ C$ را می‌تواند ذوب کند، پس باید حالتی را در نظر بگیریم که از یک طرف کل این آب به دمای $0\,^\circ C$ برسد و از طرف دیگر جرم m از یخ به دمای $0\,^\circ C$ برسد و سپس ذوب شود. یعنی با یک تعادل گرمایی در دمای $0\,^\circ C$ روبه‌رو هستیم. بر این اساس، طرح‌وارهٔ گرمایی زیر را رسم و با نوشتن قانون پایستگی انرژی، m را حساب می‌کنیم:



$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0 \Rightarrow m_{\text{آب}} c_{\text{آب}} (\theta_e - \theta_{1(\text{آب})}) + m_{\text{یخ}} c_{\text{یخ}} \Delta\theta_{\text{یخ}} + m_{\text{یخ}} L_F = 0$$

$$\Rightarrow 1/5 \times \overset{2\times2100}{4200} \times (0 - 40) + m_{\text{یخ}} \times 2100 \times (0 - (-40)) + m_{\text{یخ}} \times \overset{160\times2100}{336000} = 0$$

$$\Rightarrow 40 \times 2100 \times (-3 + m_{\text{یخ}} + 4m_{\text{یخ}}) = 0 \Rightarrow 5m_{\text{یخ}} - 3 = 0 \Rightarrow m_{\text{یخ}} = \frac{3}{5}\,kg \xrightarrow{1\,kg = 10^3\,g} m_{\text{یخ}} = 600\,g$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷۴ در کدام‌یک از فرایندهای زیر، دمای مقدار معینی گاز کامل افزایش می‌یابد؟

الف) انبساط بی‌دررو

ب) انبساط هم‌فشار

پ) تراکم بی‌دررو

ت) تراکم هم‌فشار

۱) الف و ب ۲) پ و ت

۳) الف و ت ۴) ب و پ

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint برای بررسی فرایندهای بی‌دررو، از قانون اول ترمودینامیک و برای بررسی فرایندهای هم‌فشار، از قانون گازهای کامل استفاده کنید.

درس Box

۱) در فرایند بی‌دررو، گرمای مبادله‌شده بین محیط و گاز صفر است؛ بنابراین در این فرایند، تغییرات انرژی درونی گاز با کاری که محیط بر روی گاز انجام می‌دهد، برابر است.

$$\Delta U = Q + W \xrightarrow{Q=0} \Delta U = W$$

نکته در فرایند بی‌دررو، با توجه به روابط $W = -P\Delta V$ و $\Delta U = W$ و تناسب $\Delta U \propto \Delta T$، می‌توانیم جدول زیر را بنویسیم:

ΔT	ΔU	W	ΔV
−	−	−	+
+	+	+	−

۲) **قانون گازهای کامل:**

$PV = nRT$ ($R \simeq 8 \frac{J}{mol.K}$:ثابت جهانی گازها)

P: فشار گاز (Pa)، V: حجم گاز (m^3)، n: تعداد مول گاز (mol)، T: دمای گاز (k)

پاسخ خیلی تشریحی برای بررسی فرایند بی‌دررو، از قانون اول ترمودینامیک کمک می‌گیریم:

انبساط بی‌دررو: $\Delta U = W \xrightarrow[W<0]{\text{فرایند انبساطی}} \Delta U < 0 \Rightarrow \Delta T < 0 \Rightarrow T$: کاهش ✗

تراکم بی‌دررو: $\Delta U = W \xrightarrow[W>0]{\text{فرایند تراکمی}} \Delta U > 0 \Rightarrow \Delta T > 0 \Rightarrow T$: افزایش ✓

برای بررسی فرایند هم‌فشار، از قانون گازهای آرمانی کمک می‌گیریم:

انبساط هم‌فشار: $PV = nRT \xrightarrow[V:\text{افزایش}]{P:\text{ثابت}} T$: افزایش ✓

تراکم هم‌فشار: $PV = nRT \xrightarrow[V:\text{کاهش}]{P:\text{ثابت}} T$: کاهش ✗

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷۵ یک ماشین گرمایی در هر دقیقه، با منبع دماباالا و منبع دماپایین به ترتیب $120\ kJ$ و $48\ kJ$ گرما مبادله می‌کند. توان خروجی این ماشین گرمایی چند کیلووات است؟

۱) ۱/۲ ۲) ۱۲ ۳) ۲/۸ ۴) ۲۸

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint ابتدا به کمک قانون پایستگی انرژی در ماشین‌های گرمایی، کاری که ماشین گرمایی انجام می‌دهد را به دست آورید، سپس به کمک آن توان خروجی ماشین را حساب کنید.

درس Box

۱) **قانون پایستگی انرژی در ماشین‌های گرمایی:**

$$|Q_H| = |W| + |Q_L|$$

$|W|$: کاری که ماشین انجام می‌دهد.

$|Q_H|$: گرمایی که ماشین از منبع دماباالا می‌گیرد.

$|Q_L|$: گرمایی که ماشین به منبع دماپایین می‌دهد.

۲) **توان:** نسبت کار انجام‌شده به مدت‌زمان انجام کار است و از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$P = \frac{W}{\Delta t}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: کاری که ماشین گرمایی در مدت ۱ دقیقه انجام می‌دهد را حساب می‌کنیم:

$$|Q_H| = |W| + |Q_L| \Rightarrow 120 = |W| + 48 \Rightarrow |W| = 72\ kJ$$

گام دوم: توان خروجی ماشین گرمایی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$P = \frac{|W|}{t} \xrightarrow{t=1\ min=60\ s} P = \frac{72\ kJ}{60\ s} = 1/2\ kW$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷۶ در یک ظرف دربسته، ۰/۴ مول گاز N_2O_5 به طور کامل تجزیه می‌شود. اگر در همین ظرف و پس از پایان واکنش اول، به ترتیب ۱/۲ مول گاز H_2 و ۰/۶ مول گاز O_2 وارد شده و ۷۵ درصد هیدروژن طی واکنش دوم به فراورده تبدیل شود، به تقریب چند درصد از مول‌های گازی درون ظرف را گاز NO_2 تشکیل می‌دهد؟ (واکنش‌ها برگشت‌ناپذیر در نظر گرفته شوند و واکنش دیگری انجام نمی‌شود.)

$$2N_2O_5(g) \rightarrow 4NO_2(g) + O_2(g) \quad , \quad 2H_2(g) + O_2(g) \rightarrow 2H_2O(g)$$

۱) ۲۸ ۲) ۳۴ ۳) ۳۶ ۴) ۴۲

مشاوره این سؤال، ترکیبی از استوکیومتری و محاسبات مربوط به درصد مولی در مخلوط‌های گازی است.

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint

برای حل این نوع سؤال‌ها، باید مراحل زیر را به دقت دنبال کنید:

۱) معادله‌های موازنه‌شدهٔ واکنش‌ها را بنویسید.

۲) مقادیر اولیهٔ مواد را مشخص کنید.

۳) با توجه به درصد پیشرفت واکنش، تغییرات مقدار مواد را محاسبه کنید.

۴) مقادیر نهایی مواد را به دست آورید.

۵) درصد مولی گاز مورد نظر را محاسبه کنید.

نکته **درصد مولی:** درصد مولی یک جزء در مخلوط، برابر است با نسبت تعداد مول‌های آن جزء به تعداد کل مول‌های موجود در مخلوط، ضربدر ۱۰۰.

$$\text{درصد مولی} = \frac{\text{تعداد مول جزء مورد نظر}}{\text{تعداد مول کل}} \times 100$$

پاسخ خیلی تشریحی

واکنش اول:

$$2N_2O_5(g) \rightarrow 4NO_2(g) + O_2(g)$$

۰/۴ مول N_2O_5 کاملاً تجزیه می‌شود؛ بنابراین داریم:

- NO_2 تولیدشده:

$$0/4\,mol\,N_2O_5 \times \frac{4\,mol\,NO_2}{2\,mol\,N_2O_5} = 0/8\,mol\,NO_2$$

- O_2 تولیدشده:

$$0/4\,mol\,N_2O_5 \times \frac{1\,mol\,O_2}{2\,mol\,N_2O_5} = 0/2\,mol\,O_2$$

واکنش دوم:

$$2H_2(g) + O_2(g) \rightarrow 2H_2O(g)$$

۷۵٪ از ۱/۲ مول H_2 مصرف می‌شود؛ بنابراین داریم:

- H_2 مصرفی:

$$1/2\,mol\,H_2 \times \frac{75}{100} = 0/9\,mol\,H_2$$

- O_2 مصرفی:

$$0/9\,mol\,H_2 \times \frac{1\,mol\,O_2}{2\,mol\,H_2} = 0/45\,mol\,O_2$$

- H_2O تولیدی:

$$0/9\,mol\,H_2 \times \frac{2\,mol\,H_2O}{2\,mol\,H_2} = 0/9\,mol\,H_2O$$

مقادیر نهایی:

- NO_2: ۰/۸ mol
- O_2: ۰/۲ (از واکنش اول) + ۰/۶ (اولیه) − ۰/۴۵ (مصرفی در واکنش دوم) = ۰/۳۵ mol
- H_2: ۱/۲ − ۰/۹ = ۰/۳ mol
- H_2O: ۰/۹ mol

کل مول‌های گازی:

$$0/9 + 0/3 + 0/35 + 0/8 = 2/35\,mol$$

درصد مولی NO_2:

$$\text{درصد مولی } NO_2 = \frac{\text{مول } NO_2}{\text{مول کل}} \times 100 = \frac{0/8}{2/35} \times 100 \simeq 34\%$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷۷ کدام مطلب زیر نادرست است؟

۱) پس از آرگون، فراوان‌ترین گاز نجیب در هوای پاک و خشک، هلیم است.

۲) گاز هلیم در ژرفای زمین از واکنش‌های هسته‌ای تولید می‌شود و پس از نفوذ به لایه‌های زمین وارد میدان‌های گازی می‌شود.

۳) تغییرات دما با تغییر فشار در لایهٔ دوم هواکره همسو نیست.

۴) گاز آرگون در پتروشیمی شیراز از تقطیر جزءبه‌جزء هوای مایع با خلوص بالا تهیه می‌شود.

مشاوره این سؤال، اطلاعات شما رو در مورد ترکیب هوا، خواص گازهای نجیب و لایه‌های مختلف هواکره می‌سنجه.

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

ترکیب هوا: هوای پاک و خشک عمدتاً از نیتروژن (حدود ۷۸٪)، اکسیژن (حدود ۲۱٪) و آرگون (حدود ۱٪) تشکیل شده است. سایر گازها، از جمله گازهای نجیب، درصد بسیار کمی از هوا را تشکیل می‌دهند.

گازهای نجیب: گازهای نجیب (هلیم، نئون، آرگون، کریپتون، زنون، رادون) عناصری بی‌اثر هستند، که در گروه ۱۸ جدول تناوبی قرار دارند.

فراوانی: آرگون فراوان‌ترین گاز نجیب در هوا است. بعد از آرگون، نئون فراوان‌ترین گاز نجیب بوده و پس از آن هلیم است.

منشأ هلیم: هلیم عمدتاً در اثر واپاشی هسته‌ای عناصر سنگین پرتوزا در ژرفای زمین تولید می‌شود.

لایه‌های هواکره: هواکره (اتمسفر) زمین از چند لایه تشکیل شده است: تروپوسفر، استراتوسفر و ... .

استراتوسفر: در استراتوسفر (لایهٔ دوم)، با افزایش ارتفاع، دما افزایش می‌یابد (به دلیل وجود لایهٔ اوزون و نشر پرتوهای فروسرخ). از طرفی، با افزایش ارتفاع، فشار کاهش می‌یابد؛ پس تغییرات دما و فشار در این لایه همسو نیستند.

پاسخ خیلی تشریحی

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): پس از آرگون، فراوان‌ترین گاز نجیب در هوای پاک و خشک، نئون است، نه هلیم.

گزینهٔ (۲): گاز هلیم در اثر واکنش‌های هسته‌ای عناصر سنگین در زیر زمین تولید می‌شود و می‌تواند به لایه‌های بالایی نفوذ کند و وارد میدان‌های گازی شود.

گزینهٔ (۳): در استراتوسفر (لایهٔ دوم هواکره)، با افزایش ارتفاع، دما افزایش و فشار کاهش می‌یابد؛ پس تغییرات دما و فشار همسو نیستند.

گزینهٔ (۴): گاز آرگون را می‌شود از طریق تقطیر جزءبه‌جزء هوای مایع به دست آورد. پتروشیمی شیراز هم یکی از مراکز تولید گازهای صنعتی در ایران است.

نکته

ترتیب فراوانی گازهای نجیب در هوای پاک و خشک را به خاطر بسپارید:

$Rn < Xe < Kr < He < Ne < Ar$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷۸ تفاوت مجموع ضرایب استوکیومتری مواد در واکنش‌های **a** و **b** پس از موازنهٔ معادلهٔ آن‌ها کدام است؟

a) $Fe_2O_3(s) + HCl(aq) \rightarrow FeCl_3(aq) + H_2O(l)$

b) $Al(s) + NaOH(aq) + H_2O(l) \rightarrow NaAlO_2(aq) + H_2(g)$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

مشاوره برای حل این سؤال، باید بتونی معادله‌های واکنش رو موازنه کنی. موازنه‌کردن معادله‌ها هم یه سری اصول داره که با تمرین و تکرار می‌تونی توش استاد بشی.

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی

موازنهٔ واکنش a:

$$Fe_2O_3(s) + 6HCl(aq) \rightarrow 2FeCl_3(aq) + 3H_2O(l)$$

مجموع ضرایب: $1+6+2+3=12$

موازنهٔ واکنش b:

$$2Al(s) + 2NaOH(aq) + 2H_2O(l) \rightarrow 2NaAlO_2(aq) + 3H_2(g)$$

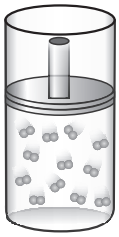
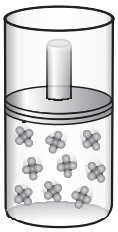
مجموع ضرایب: $2+2+2+2+3=11$

محاسبهٔ تفاوت:

تفاوت مجموع ضرایب: $12-11=1$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷۹ با توجه به شکل داده‌شده که ظرف‌های محتوی گازهای مختلف را در دما و فشار یکسان نشان می‌دهد، کدام مورد درست است؟ (هر ذره معادل ۰/۰۵ مول است. $(H=1, C=12, O=16, Ar=40 : g.mol^{-1})$

شمارهٔ نمونه	۱	۲	۳	۴
گاز	H_2	O_2	CH_4	Ar
ظرف محتوی گاز				

۱) شمار مولکول‌های نمونهٔ (۳)، دو برابر شمار اتم‌های نمونهٔ (۱) است.

۲) حجم گاز نمونهٔ (۲)، دو برابر حجم گاز نمونهٔ (۳) است.

۳) جرم گاز نمونهٔ (۴)، ۵۰ برابر جرم گاز نمونهٔ (۱) و برابر ۳۰ گرم است.

۴) چگالی گاز نمونهٔ (۲)، با چگالی گاز نمونهٔ (۴) برابر است.

مشاوره برای پاسخ‌دادن به این تست، باید به چندتا نکتهٔ اساسی توجه کنی: اول این‌که در دما و فشار یکسان، حجم مولی گازها با هم برابره. دوم این‌که باید بتونی تعداد مول‌ها رو از روی تعداد ذره‌ها حساب کنی. سوم، باید جرم مولی گازها رو بلد باشی یا بتونی حساب کنی و در نهایت، باید رابطهٔ بین جرم، حجم و چگالی رو بدونی.

پاسخ: گزینهٔ (۳)

نکته **قانون آووگادرو**: در دما و فشار ثابت، حجم یک مول از گازهای مختلف با هم برابر است (حجم مولی).

پاسخ خیلی تشریحی بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱):

- تعداد مولکول‌های نمونهٔ (۳):

$$۹\text{ذره } H_2 \times \frac{۰/۰۵\,mol}{۱\text{ذره}} = ۰/۴۵\,mol\ CH_4$$

- تعداد اتم‌های نمونهٔ (۱):

$$۶\text{ذره } H_2 \times \frac{۰/۰۵\,mol}{۱\text{ذره}} \times \frac{۲\,mol\ H}{۱\,mol\ H_2} = ۰/۶\,mol\ H$$

۴۵ دو برابر ۰/۶ نیست. پس گزینهٔ (۱) نادرست است.

گزینهٔ (۲):

- تعداد مول‌های نمونهٔ (۲):

$$۱۲\text{ذره } O_2 \times \frac{۰/۰۵\,mol}{۱\text{ذره}} = ۰/۶\,mol\ O_2$$

- تعداد مول‌های نمونهٔ (۳):

$۰/۴۵\,mol\ CH_4$

۰/۶مول دو برابر ۰/۴۵مول نیست، پس حجم هم دو برابر نیست. گزینهٔ (۲) نادرست است.

گزینهٔ (۳):

- جرم نمونه (۱):

$$۶\text{ذره } H_2 \times \frac{۰/۰۵\,mol}{۱\text{ذره}} \times \frac{۲\,g\ H_2}{۱\,mol\ H_2} = ۰/۶\,g\ H_2$$

- جرم نمونه (۴):

$$۱۵\text{ذره } Ar \times \frac{۰/۰۵\,mol}{۱\text{ذره}} \times \frac{۴۰\,g\ Ar}{۱\,mol\ Ar} = ۳۰\,g\ Ar$$

۳۰ گرم، ۵۰ برابر ۰/۶ گرم است. پس گزینهٔ (۳) درست است.

گزینهٔ (۴):

- می‌توانیم با محاسبهٔ جرم و حجم نمونه‌ها (که با تعداد مول آن‌ها متناسب است (قانون آووگادرو)) چگالی آن‌ها را حساب کنیم.
- اما می‌دانیم در گازها در دما و فشار ثابت، چگالی متناسب با جرم مولی است. جرم مولی O_2 $(۳۲\,g.mol^{-1})$ هم که با جرم مولی Ar $(۴۰\,g.mol^{-1})$ متفاوت است. پس گزینهٔ (۴) نادرست است.

نکته در دما و فشار ثابت، حجم گازها فقط به تعداد مول‌های آن‌ها بستگی دارد، نه به نوع گاز.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸۰ با توجه به جدول زیر که انحلال‌پذیری آمونیوم کلرید را در دماهای گوناگون (برحسب $^\circ C$) نشان می‌دهد، کدام مورد نادرست است؟ (معادلهٔ انحلال‌پذیری، خطی در نظر گرفته شود. $H=1, N=14, Cl=35/5 : g.mol^{-1}$)

$\theta(^\circ C)$	۰	۲۰	۴۰	۶۰
$S\ (\frac{g\ NH_4Cl}{100\ g\ H_2O})$	۲۹	۳۶	۴۳	۵۰

۱) در دمای $40^\circ C$، محلول آبی ۲۵ درصد جرمی از این نمک، سیرنشده است.

۲) در ۱۰۰ گرم آب و در دمای $30^\circ C$، حداکثر جرم نمک حل‌شونده برای رسیدن به محلول سیرشده، ۳۹/۵ گرم است.

۳) با کاهش دمای ۲۰۰ گرم محلول سیرشده از $60^\circ C$ به $20^\circ C$، حدود ۱۴ گرم نمک رسوب می‌کند.

۴) برای تهیهٔ ۲۷۶ گرم محلول سیرشده در دمای $40^\circ C$، به حدود ۸۳ گرم آمونیوم کلرید نیاز است.

مشاوره ببین دوست من، این سؤال‌ها رو باید با دقت و حوصله حل کنی. اولاً باید مفهوم انحلال‌پذیری و محلول سیرشده رو خوب بدونی. بعدش باید بتونی با استفاده از داده‌های جدول، انحلال‌پذیری رو در دماهای مختلف (حتی دماهایی که توی جدول نیستن) حساب کنی. درصد جرمی رو هم که حتماً بلدی چه‌طوری حساب می‌شه.

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

انحلال‌پذیری: مقدار ماده‌ای که در ۱۰۰ گرم آب (حلال) در دمای معین حل می‌شود، تا محلول سیرشده تشکیل دهد.

محلول سیرشده: محلولی که در دمای معین، بیشترین مقدار ممکن از مادهٔ حل‌شونده را در خودش حل کرده باشد و دیگر نتواند مقدار بیشتری از آن ماده را حل کند.

درصد جرمی: نسبت جرم مادهٔ حل‌شونده به جرم کل محلول، ضرب در ۱۰۰.

درون‌یابی خطی: وقتی نمودار را خطی فرض می‌کنیم، می‌توانیم مقادیر بین نقاط داده‌شده را با استفاده از تناسب خطی تخمین بزنیم.

پاسخ خیلی تشریحی

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): در دمای ۴۰ درجه، انحلال‌پذیری ۴۳ گرم در ۱۰۰ گرم آب است. یعنی در ۱۴۳ گرم محلول، ۴۳ گرم حل‌شونده وجود دارد.

درصد جرمی:

$$(a)\ \text{درصد جرمی} = \frac{\text{جرم حل‌شونده}}{\text{جرم محلول}} \times 100 = \frac{43}{143} \times 100 \simeq 30\%$$

محلول ۲۵ درصد جرمی در این دما سیرنشده است، پس گزینهٔ (۱) درست است.

گزینهٔ (۲): انحلال‌پذیری در دمای ۳۰ درجه را با درون‌یابی خطی بین دمای ۲۰ و ۴۰ درجه محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{43-36}{40-20} = \frac{x-36}{30-20} \Rightarrow x = 39/5$$

پس در ۱۰۰ گرم آب در دمای ۳۰ درجه، ۳۹/۵ گرم آمونیوم کلرید حل می‌شود، تا محلول سیرشده به دست آید؛ پس گزینهٔ (۲) درست است.

گزینهٔ (۳): در دمای ۶۰ درجه، در ۱۵۰ گرم محلول سیرشده، ۵۰ گرم حل‌شونده داریم؛ بنابراین در ۲۰۰ گرم محلول، جرم حل‌شونده برابر است با:

$$200\ g\ \text{محلول} \times \frac{50\ g\ \text{حل‌شونده}}{150\ g\ \text{محلول}} = 66/67\ g\ \text{حل‌شونده}$$

از طرفی جرم آب برابر می‌شود با:

$$200 - 66/67 = 133/33\ g$$

در دمای ۲۰ درجه، در ۱۳۶ گرم محلول سیرشده، ۳۶ گرم حل‌شونده داریم؛ بنابراین در دمای ۲۰ درجه، جرم حل‌شونده برابر می‌شود با:

$$133/33\ g\ \text{آب} \times \frac{36\ g\ \text{حل‌شونده}}{100\ g\ \text{آب}} = 48\ g\ \text{حل‌شونده}$$

پس مقدار رسوب برابر است با:

$$66/67 - 48 = 18/67\ g$$

حدود ۱۸/۶۷ گرم رسوب تشکیل می‌شود. پس گزینهٔ (۳) نادرست است.

گزینهٔ (۴): در دمای ۴۰ درجه، ۴۳ گرم حل‌شونده در ۱۰۰ گرم آب حل می‌شود و ۱۴۳ گرم محلول سیرشده به دست می‌آید.

برای ۲۷۶ گرم محلول سیرشده:

$$276\ g\ \text{محلول} \times \frac{43\ g\ \text{حل‌شونده}}{143\ g\ \text{محلول}} \simeq 83\ g\ \text{حل‌شونده}$$

تقریباً ۸۳ گرم آمونیوم کلرید نیاز است؛ پس گزینهٔ (۴) درست است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸۱ کدام مقایسه دربارهٔ نقطهٔ جوش مادههای دادهشده نادرست است؟

۱) $CH_4 < H_2O < KCl < MgO$

۲) $H_2 < H_2Se < H_2O < H_2S$

۳) $CH_4 < SiH_4 < GeH_4 < SnH_4$

۴) $He < CH_3CH_2CH_3 < CH_3OCH_3 < C_2H_5OH$

مشاوره برای حل این سؤال‌ها، باید خوب به نیروهای بین‌مولکولی و مقایسهٔ اون‌ها مسلط باشی. یادت باشه که ترکیبات یونی (مثل اونایی که فلز و نافلز دارن) معمولاً نقطهٔ جوش خیلی بالایی دارن، چون یون‌ها خیلی محکم همدیگه رو نگه می‌دارن.

پاسخ: گزینهٔ (۲)

درس Box

نیروهای بین‌مولکولی: نیروهایی که مولکول‌ها را در حالت مایع و جامد کنار هم نگه می‌دارند. این نیروها خیلی ضعیف‌تر از پیوندهای کووالانسی (درون مولکولی) هستند، اما روی خواص فیزیکی مثل نقطهٔ جوش و نقطهٔ ذوب تأثیر می‌گذارند.

انواع نیروهای بین‌مولکولی:

پیوند هیدروژنی: قوی‌ترین نوع نیروی بین مولکولی است. بین مولکول‌هایی وجود دارد که اتم هیدروژن مستقیماً به اتم‌های N، O و F متصل باشد.

دوقطبی ـ دوقطبی: بین مولکول‌های قطبی وجود دارد.

نیروی وان‌درووالسی: ضعیف‌ترین نوع نیروی بین مولکولی است. بین همهٔ مولکول‌ها (حتی مولکول‌های ناقطبی) وجود دارد و با افزایش جرم مولی، قوی‌تر می‌شود.

ترکیبات یونی: ترکیباتی که از یون‌های مثبت و منفی تشکیل شدند و با نیروی جاذبهٔ الکترواستاتیکی قوی (جاذبه بین بارهای مخالف) کنار هم قرار گرفتند. این مواد نقطهٔ ذوب و جوش بالایی دارند.

پاسخ خیلی تشریحی

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): درست؛

- MgO: ترکیب یونی (خیلی قوی)
- KCl: ترکیب یونی (قوی، اما ضعیف‌تر از MgO به دلیل بار کم‌تر یون‌ها)
- H_2O: مولکولی، پیوند هیدروژنی (نسبتاً قوی)
- CH_4: مولکولی، ناقطبی (خیلی ضعیف)

پس ترتیب نقطهٔ جوش درست است.

گزینهٔ (۲): نادرست؛

- H_2O: مولکولی، پیوند هیدروژنی (قوی)
- H_2Se: مولکولی، قطبی، بدون پیوند هیدروژنی
- H_2S: مولکولی، قطبی، بدون پیوند هیدروژنی و با جرم مولی کم‌تر
- H_2: ناقطبی و با جرم مولی خیلی کم‌تر

به خاطر پیوند هیدروژنی، H_2O باید بالاترین نقطهٔ جوش رو داشته باشه. H_2Se سنگین‌تر از H_2S است و نیروی وان‌درووالسی قوی‌تری داره، پس نقطهٔ جوش H_2Se باید از H_2S بیشتر باشه. پس ترتیب درست به صورت $H_2 < H_2S < H_2Se < H_2O$ است؛ پس گزینهٔ (۲) نادرست است.

گزینهٔ (۳): درست؛

- هر چهار ترکیب، مولکولی و ناقطبی هستن، پس هر چه جرم مولی بیشتر، نیروی وان‌درووالسی قوی‌تر و نقطهٔ جوش بالاتر.
- ترتیب جرم مولی: $CH_4 < SiH_4 < GeH_4 < SnH_4$

پس ترتیب نقطهٔ جوش درست است.

گزینهٔ (۴): درست؛

- C_2H_5OH (اتانول): مولکولی، پیوند هیدروژنی (قوی)
- CH_3OCH_3 (دی‌متیل اتر): مولکولی، قطبی، بدون پیوند هیدروژنی
- $CH_3CH_2CH_3$ (پروپان): مولکولی، ناقطبی (ضعیف)
- He ناقطبی با جرم مولی خیلی کم‌تر

پس ترتیب نقطهٔ جوش درست است.

نکته نقطهٔ جوش به مجموع نیروهای بین‌مولکولی بستگی دارد. اگر چند نوع نیروی بین‌مولکولی وجود داشته باشد، باید اثر همهٔ آن‌ها را در نظر بگیریم.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

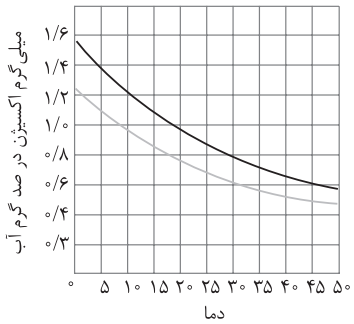
۸۲ اگر حداقل غلظت اکسیژن محلول در آب برای ادامهٔ زندگی برخی از سخت‌پوستان ۷ ppm باشد، با توجه به نمودار داده‌شده که انحلال‌پذیری گاز اکسیژن را در آب آشامیدنی و آب دریا نشان می‌دهد، حداکثر دمای آب دریا به تقریب برابر چند درجهٔ سلسیوس باشد تا این سخت‌پوستان با حداقل غلظت اکسیژن محلول در آب، زنده بمانند؟ (جرم هر میلی‌لیتر آب برابر یک گرم در نظر گرفته شود. $O = 16\ g.mol^{-1}$)

۱) ۱۵

۲) ۲۰

۳) ۲۵

۴) ۳۰



مشاوره برای حل این سؤال، باید چندتا چیز رو بلد باشی. اول باید مفهوم ppm رو خوب درک کنی. بعد باید بتونی ppm رو به میلی‌گرم در ۱۰۰ گرم تبدیل کنی (چون نمودار برحسب میلی‌گرم در ۱۰۰ گرم آبه). آخر سر هم باید بتونی از روی نمودار، دمای متناظر با یک غلظت مشخص رو پیدا کنی.

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

- **ppm (parts per million):** یک واحد برای بیان غلظت محلول‌ها، به ویژه محلول‌های خیلی رقیق. ۷ ppm یعنی در هر یک میلیون گرم از محلول، ۷ گرم از مادهٔ حل‌شونده وجود دارد.
- **انحلال‌پذیری گازها در مایعات:** انحلال‌پذیری گازها در مایعات (مثل اکسیژن در آب) با افزایش دما کاهش می‌یابد.
- **تبدیل واحد:** برای تبدیل ppm به میلی‌گرم در ۱۰۰ گرم، باید به چگالی محلول توجه کنیم. در این سؤال، چون چگالی آب ۱ گرم بر میلی‌لیتر در نظر گرفته شده، محاسبات ساده‌تر می‌شود.

پاسخ خیلی تشریحی

تبدیل ppm به میلی‌گرم در ۱۰۰ گرم:

- چون جرم هر میلی‌لیتر آب ۱ گرم در نظر گرفته شده، یک کیلوگرم آب معادل ۱۰۰۰ گرم آب است.
- برای ۱۰۰ گرم آب، مقدار اکسیژن می‌شود:

$$۱۰۰\ g\ آب \times \frac{۷\ g\ O_۲}{۱۰^۶\ g\ آب} \times \frac{۱۰۰۰\ mg\ O_۲}{۱\ g\ O_۲} = ۰/۷\ mg\ O_۲$$

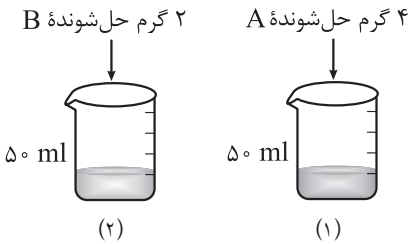
یافتن دما از روی نمودار:

- روی نمودار، خط مربوط به آب دریا را پیدا می‌کنیم (خط کم‌رنگ‌تر).
- به دنبال نقطه‌ای می‌گردیم که در آن، مقدار اکسیژن محلول ۰/۷ میلی‌گرم در ۱۰۰ گرم آب باشد.
- این نقطه تقریباً در دمای ۲۵ درجهٔ سلسیوس قرار دارد.

گول نخوری ممکن است به اشتباه، از خط مربوط به آب آشامیدنی (به جای آب دریا) استفاده کنید.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸۳ دربارهٔ تهیهٔ محلول‌های رقیق از حل‌شونده‌های متفاوت در آب، مطابق شکل‌های (۱) و (۲)، کدام مورد درست است؟ (از تغییر حجم در اثر اضافه‌کردن حل‌شونده صرف نظر شود. جرم مولی حل‌شوندهٔ **A** دو برابر جرم مولی حل‌شوندهٔ **B** است.)



۱) غلظت مولی دو محلول برابر است.

۲) درصد جرمی محلول (۲) دقیقاً نصف درصد جرمی محلول (۱) است.

۳) اگر به هر یک از محلول‌ها ۲۵ میلی‌لیتر آب اضافه کنیم، درصد جرمی هر دو محلول، نصف می‌شود.

۴) اگر محتویات دو ظرف با هم مخلوط شوند، غلظت مولی محلول حاصل، دو برابر غلظت مولی محلول (۲) می‌شود.

مشاوره برای حل این‌جور سؤال‌ها، باید فرمول‌های غلظت مولی و درصد جرمی رو بلد باشی و بتونی با جرم و حجم و جرم مولی، تعداد مول رو حساب کنی. حواست هم باشه که این‌جا گفته از تغییر حجم صرف نظر کنیم، یعنی حجم محلول همون حجم آبه.

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✔ گزینهٔ (۱):

- جرم حل‌شوندهٔ A برابر ۴ گرم و جرم حل‌شوندهٔ B برابر ۲ گرم است. حالا فرض می‌کنیم جرم مولی B برابر x است، پس جرم مولی A می‌شود ۲x.

- تعداد مول A:

$$\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی}} = \frac{۴}{(۲x)} = \frac{۲}{x}\ \text{mol}$$

- تعداد مول B:

$$\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی}} = \frac{۲}{x}\ \text{mol}$$

حجم هر دو محلول:

۵۰ mL = ۰/۰۵ L (یکسان)

غلظت مولی A:

$$\frac{(\frac{۲}{x})}{۰/۰۵} = (\frac{۴۰}{x})\ \text{mol.L}^{-۱}$$

غلظت مولی B:

$$\frac{(\frac{۲}{x})}{۰/۰۵} = (\frac{۴۰}{x})\ \text{mol.L}^{-۱}$$

غلظت مولی دو محلول برابر است، پس گزینهٔ (۱) درست است.

گزینهٔ (۲):

- جرم محلول (۱): ۵۰ g (آب) + ۴ g (حل‌شونده) = ۵۴ g

- جرم محلول (۲): ۵۰ g (آب) + ۲g (حل‌شونده) = ۵۲ g

- درصد جرمی محلول (۱):

$$\text{درصد جرمی}(a) = \frac{\text{جرم حل‌شونده}}{\text{جرم محلول}} \times ۱۰۰ = \frac{۴}{۵۴} \times ۱۰۰ \simeq ۷/۴۱٪$$

- درصد جرمی محلول (۲):

$$\text{درصد جرمی}(a) = \frac{\text{جرم حل‌شونده}}{\text{جرم محلول}} \times ۱۰۰ = \frac{۲}{۵۲} \times ۱۰۰ \simeq ۳/۸۵٪$$

۷/۴۱٪ تقریباً دو برابر ۳/۸۵٪ است، اما دقیقاً دو برابر نیست؛ پس گزینهٔ (۲) نادرست است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

گزینهٔ (۳):

- حجم جدید هر محلول: $۵۰\ mL + ۲۵\ mL = ۷۵\ mL$
- جرم جدید محلول (۱): $۵۴\ g + ۲۵\ g = ۷۹\ g$
- جرم جدید محلول (۲): $۵۲\ g + ۲۵\ g = ۷۷\ g$
- درصد جرمی جدید محلول (۱):

$$\text{درصد جرمی}(a) = \frac{\text{جرم حل‌شونده}}{\text{جرم محلول}} \times ۱۰۰ = \frac{۴}{۷۹} \times ۱۰۰ \simeq ۵/۰۶٪$$

- درصد جرمی جدید محلول (۲):

$$\text{درصد جرمی}(a) = \frac{\text{جرم حل‌شونده}}{\text{جرم محلول}} \times ۱۰۰ = \frac{۲}{۷۷} \times ۱۰۰ \simeq ۲/۶۰٪$$

درصد جرمی جدید، نصف درصد جرمی اولیه نیست؛ پس گزینهٔ (۳) نادرست است.

گزینهٔ (۴): حجم کل برابر ۱۰۰ میلی‌لیتر است. تعداد کل مول حل‌شده می‌شود $(\frac{۲}{x} + \frac{۲}{x})\frac{۴}{x}$؛ بنابراین غلظت مولی برابر می‌شود با:

$$\frac{\frac{۴}{x}}{۰/۱} = \frac{۴۰}{x}\ mol.L^{-۱}$$

این مقدار دو برابر غلظت مولی محلول (۲) نیست، پس گزینهٔ (۴) نادرست است.

گول نخوری ممکن است به دلیل این‌که جرم حل‌شوندهٔ A دو برابر جرم حل‌شوندهٔ B است، به اشتباه فکر کنید که درصد جرمی محلول (۱) هم دو برابر درصد جرمی محلول (۲) است (گزینهٔ (۲)).

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸۴ مقایسهٔ شعاع اتمی در کدام مورد نادرست است؟

۱) $_{12}Mg > {}_{13}Al$

۲) $_{19}K < {}_{37}Rb$

۳) $_{8}O > {}_{7}N$

۴) $_{14}Si > {}_{16}S$

مشاوره مقایسهٔ شعاع اتمی خیلی هم سخت نیست! یه قانونی داره که اگه بلد باشی، راحت می‌تونی سؤال‌هاش رو حل کنی. توی یه دوره (ردیف افقی جدول تناوبی)، هر چی به سمت راست می‌ریم، شعاع اتمی کم‌تر می‌شه. توی یه گروه (ستون عمودی جدول)، هر چی پایین‌تر می‌ریم، شعاع اتمی بیشتر می‌شه. حواست به این «کم‌تر» و «بیشتر»ها باشه!

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

شعاع اتمی، معیاری برای اندازه‌گیری اندازهٔ یک اتم است. این خاصیت، تحت تأثیر دو عامل اصلی قرار دارد:

۱) **تعداد لایه‌های الکترونی**: هر چه تعداد لایه‌های الکترونی بیشتر باشد، شعاع اتمی بزرگ‌تر است.

۲) **بار مؤثر هسته**: بار مؤثر هسته، میزان جاذبه‌ای است که الکترون‌های لایهٔ آخر از طرف هسته احساس می‌کنند. هر چه بار مؤثر هسته بیشتر باشد، جاذبه قوی‌تر شده و الکترون‌ها به هسته نزدیک‌تر می‌شوند، در نتیجه شعاع اتمی کاهش می‌یابد.

روند تناوبی:

- **در یک دوره**: با افزایش عدد اتمی (از چپ به راست)، بار مؤثر هسته افزایش یافته و شعاع اتمی کاهش می‌یابد.
- **در یک گروه**: با افزایش عدد اتمی (از بالا به پایین)، تعداد لایه‌های الکترونی افزایش یافته و شعاع اتمی افزایش می‌یابد.

پاسخ خیلی تشریحی

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): منیزیم (Mg) و آلومینیم (Al) در یک دوره (دورهٔ سوم) قرار دارند. عدد اتمی Al بیشتر است، بنابراین بار مؤثر هستهٔ آن بیشتر بوده و شعاع اتمی کم‌تری دارد؛ پس $Al < Mg$ درست است.

گزینهٔ (۲): پتاسیم (K) و روبیدیم (Rb) در یک گروه (گروه اول) قرار دارند. عدد اتمی Rb بیشتر است، بنابراین تعداد لایه‌های الکترونی بیشتری داشته و شعاع اتمی بزرگ‌تری دارد؛ پس $Rb > K$ درست است.

گزینهٔ (۳): اکسیژن (O) و نیتروژن (N) در یک دوره (دورهٔ دوم) قرار دارند. عدد اتمی O بیشتر است، بنابراین بار مؤثر هستهٔ آن بیشتر بوده و شعاع اتمی کم‌تری دارد. پس $N < O$ نادرست است.

گزینهٔ (۴): سیلیسیم (Si) و گوگرد (S) در یک دوره (دورهٔ سوم) قرار دارند. عدد اتمی S بیشتر است، بنابراین بار موثر هستهٔ آن بیشتر بوده و شعاع اتمی کم‌تری دارد. پس $S < Si$ درست است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸۵ اگر ۵۲۲ گرم از یک نمونهٔ ناخالص پتاسیم دی‌کرومات ($K_2Cr_2O_7$) با مقدار اضافی هیدروژن یدید (HI) در محیط اسیدی واکنش داده و ۲/۴ مول بخار ید (I_2) تولید کند و بازده واکنش ٪۸۰ باشد، درصد خلوص پتاسیم دی‌کرومات در نمونهٔ اولیه به تقریب چه‌قدر است؟ (معادله، موازنه نشده است.) $(O=16, K=39, Cr=52, I=127 : g.mol^{-1})$

$$K_2Cr_2O_7(s)+HI(aq)\rightarrow KI(aq)+CrI_3(aq)+I_2(g)+H_2O(l)$$

۱) ۴۵ ۲) ۵۶ ۳) ۶۵ ۴) ۷۴

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint این‌جور سؤال‌ها یه کم طولانی به نظر می‌رسن، اما اگه قدم‌به‌قدم بری جلو، اصلاً سخت نیستن. اول باید معادله رو موازنه کنی، بعد با استفاده از مقدار فراوردهٔ داده‌شده (تو این سؤال، ید) مقدار واکنش‌دهندهٔ خالص رو پیدا کنی. بعدش هم که یه درصدگیری ساده‌ست!

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول: موازنهٔ معادله:**

معادلهٔ موازنه‌شده به صورت زیر است:

$$K_2Cr_2O_7(s)+14HI(aq)\rightarrow 2KI(aq)+2CrI_3(aq)+3I_2(g)+7H_2O(l)$$

گام دوم: محاسبهٔ مقدار پتاسیم دی‌کرومات خالص مورد نیاز (با فرض بازده ٪۱۰۰):

با توجه به معادلهٔ موازنه‌شده، به ازای تولید ۳ مول I_2، به ۱ مول $K_2Cr_2O_7$ نیاز داریم؛ پس:

$$2/4\ mol\ I_2\times\frac{1\ mol\ K_2Cr_2O_7}{3\ mol\ I_2}=0/8\ mol\ K_2Cr_2O_7$$

اما چون بازده واکنش ٪۸۰ است، مقدار واقعی $K_2Cr_2O_7$ مورد نیاز بیشتر است:

$$0/8\ mol\ K_2Cr_2O_7\times\frac{100}{80}=1\ mol\ K_2Cr_2O_7$$

گام سوم: محاسبهٔ جرم پتاسیم دی‌کرومات خالص:

$$1\ mol\ K_2Cr_2O_7\times\frac{294\ g\ K_2Cr_2O_7}{1\ mol\ K_2Cr_2O_7}=294\ g\ K_2Cr_2O_7$$

گام چهارم: محاسبهٔ درصد خلوص:

$$\text{درصد خلوص}=\frac{\text{جرم خالص}}{\text{جرم ناخالص}}\times 100=\frac{294\ g}{522\ g}\times 100\simeq 56\%$$

یه‌جور دیگه

$$\underbrace{\frac{522\times\frac{P}{100}}{294\times 1}}_{K_2Cr_2O_7}\times\underbrace{\frac{80}{100}}_{\text{بازده}}=\underbrace{\frac{2/4}{3}}_{I_2}\Rightarrow P=56\%$$

گول نخوری حواست باشه که معادله رو موازنه‌نشده داده! اگه موازنه نکنی، همهٔ محاسباتت اشتباه می‌شه! یه دام دیگه هم بازده درصدیه. یادت نره که مقدار واقعی واکنش‌دهنده رو با توجه به بازده درصدی حساب کنی! ممکنه جرم مولی رو اشتباه حساب کنی. حتماً چک کن جرم مولی درست باشه.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸۶ در کدام‌یک از عنصرهای دورهٔ چهارم جدول تناوبی، شمار الکترون‌ها با $l = ۲$، دو برابر شمار الکترون‌های ظرفیتی آن است؟

۱) $_{۳۰}Zn$ ۲) $_{۲۲}Ti$

۳) $_{۳۲}Ge$ ۴) $_{۳۳}As$

مشاوره برای حل این سؤال اگه مفهوم عدد کوانتومی فرعی (l) و الکترون‌های ظرفیتی رو بدونی، حله!

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

عدد کوانتومی فرعی (l): این عدد، نوع زیرلایهٔ الکترونی را نشان می‌دهد. برای $l = ۲$، زیرلایهٔ d را داریم.

الکترون‌های ظرفیتی: الکترون‌های اتم هستند، که در واکنش‌های شیمیایی شرکت می‌کنند. برای عناصر اصلی (گروه‌های ۱ و ۲ و ۱۳ تا ۱۸)، تعداد الکترون‌های ظرفیتی برابر با یکان شمارهٔ گروه است. برای عناصر واسطه (گروه‌های ۳ تا ۱۲)، تعداد الکترون‌های ظرفیتی برابر با مجموع الکترون‌های s لایهٔ آخر و d لایهٔ ماقبل آخر است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ برای تعیین گزینهٔ صحیح، آرایش الکترونی هر یک از عناصر داده‌شده را می‌نویسیم و شمار الکترون‌های $l = ۲$ و الکترون‌های ظرفیتی را در هر مورد محاسبه می‌کنیم:

Zn (روی):

- آرایش الکترونی: $[Ar]\,۳d^{۱۰}۴s^{۲}$
- شمار الکترون‌ها با $l = ۲$ (یعنی الکترون‌های ۳d): ۱۰
- شمار الکترون‌های ظرفیتی: ۱۲ (الکترون‌های ۴s و ۳d)
- شرط برقرار نیست (۱۰ دو برابر ۱۲ نیست).

Ti (تیتانیم):

- آرایش الکترونی: $[Ar]\,۳d^{۲}۴s^{۲}$
- شمار الکترون‌ها با $l = ۲$: ۲
- شمار الکترون‌های ظرفیتی: ۴ (الکترون‌های ۴s و ۳d)
- شرط برقرار نیست.

Ge (ژرمانیم):

- آرایش الکترونی: $[Ar]\,۳d^{۱۰}۴s^{۲}۴p^{۲}$
- شمار الکترون‌ها با $l = ۲$: ۱۰
- شمار الکترون‌های ظرفیتی: ۴ (الکترون‌های ۴s و ۴p)
- شرط برقرار نیست.

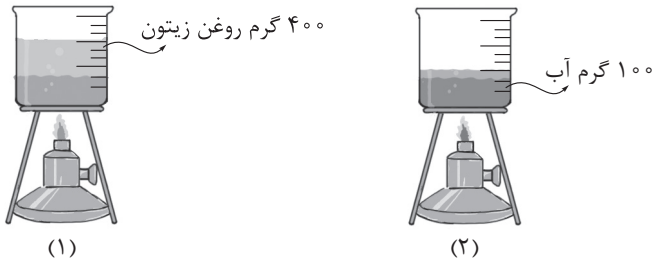
As (آرسنیک):

- آرایش الکترونی: $[Ar]\,۳d^{۱۰}۴s^{۲}۴p^{۳}$
- شمار الکترون‌ها با $l = ۲$: ۱۰
- شمار الکترون‌های ظرفیتی: ۵ (الکترون‌های ۴s و ۴p)
- شرط برقرار است (۱۰ دو برابر ۵ است).

نکته برای عناصر واسطه، در شمارش الکترون‌های ظرفیتی، الکترون‌های d لایهٔ ماقبل آخر را هم در نظر می‌گیریم.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸۷ دو نمونه آب و روغن زیتون را در آزمایشگاه مطابق شکل زیر حرارت می‌دهیم. اگر سوخت مصرفی در چراغ شعلهٔ آتش، متان باشد، در صورتی که دمای دو نمونه را به $50^\circ C$ برسانیم، جرم متان مصرفی در شعلهٔ (۱)، چند برابر جرم متان مصرفی در شعلهٔ (۲) است؟ (دمای اولیهٔ دو نمونه برابر $20^\circ C$ است؛ گرمای ویژه آب و روغن زیتون را به ترتیب برابر ۴ و ۲ ژول بر گرم بر درجهٔ سلسیوس در نظر بگیرید. فرض کنید بر اثر سوختن کامل هر مول متان، ۸۹۰ کیلوژول انرژی آزاد می‌شود؛ $CH_4 = 16\,g.mol^{-1}$)



۱) ۰/۵ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ‌خیلی‌تشریحی مقدار گرمای لازم برای رساندن دمای نمونه‌ها به $50^\circ C$ را با استفاده از رابطهٔ «$Q = mc\Delta\theta$» حساب می‌کنیم:

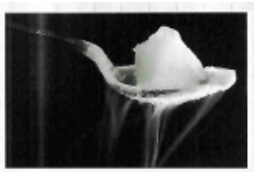
نمونهٔ روغن زیتون: $Q = mc\Delta\theta \Rightarrow Q = 400 \times 2 \times (50-20) = 24000\,J$

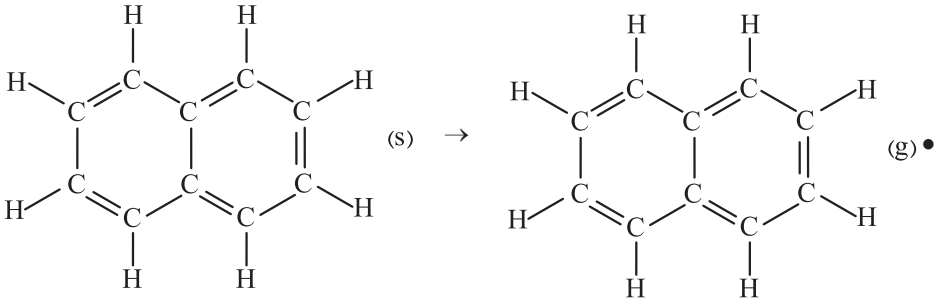
نمونهٔ آب: $Q = mc\Delta\theta \Rightarrow Q = 100 \times 4 \times (50-20) = 12000\,J$

نیاز به محاسبهٔ جرم متان مصرفی به صورت جداگانه نیست! بلکه می‌توان گفت از آن‌جایی که گرمای لازم برای آزمایش (۱)، دو برابر گرمای لازم برای آزمایش (۲) است، پس جرم متان مصرفی در آزمایش (۱) نیز دو برابر جرم متان مصرفی در آزمایش (۲) است.

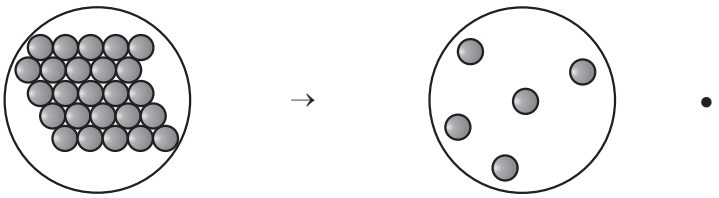
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸۸ چند مورد از فرایندهای زیر با فرایند شکل مقابل از نظر ماهیت مشابهت دارد؟

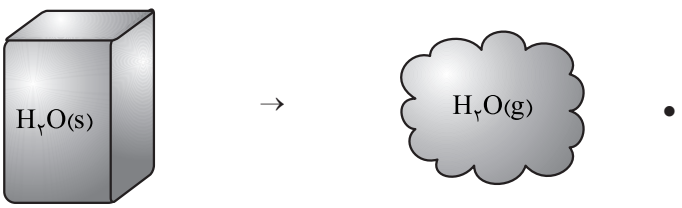




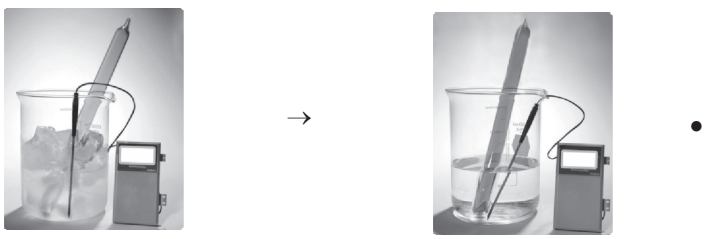
•



•



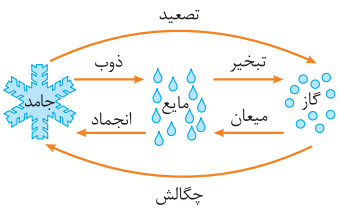
•



۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔ شکل صورت سؤال، فرایند فیزیکی تصعید کربن دی‌اکسید $(CO_2(s) \rightarrow CO_2(g))$ را نشان می‌دهد. فرایندهای نشان داده شده در سه مورد اول نیز تبدیل یک ماده از حالت جامد را به حالت گاز (تصعید) نشان می‌دهند و فرایندهایی فیزیکی هستند. در حالی که فرایند مورد آخر انجام یک واکنش شیمیایی و هم‌چنین ذوب‌شدن یخ را نشان می‌دهد. به طور کلی فرایندهای فیزیکی را می‌توان در طرح زیر نشان داد:



SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸۹ با توجه به واکنش داده‌شده، کدام گزینه سبب افزایش سرعت واکنش (با یکای مول بر لیتر بر ثانیه) می‌شود؟

$$Mg(s) + ۲HBr(aq) \rightarrow MgBr_۲(aq) + H_۲(g)$$

مشاوره این سؤال در مورد اینه که چه چیزایی سرعت واکنش رو زیاد می‌کنن. کلاً چندتا عامل بیشتر نداریم: ماهیت واکنش‌دهنده‌ها، دما، غلظت، سطح تماس و کاتالیزگر. حواست باشه که این‌جا گفته افزایش سرعت.

الف) افزایش دمای واکنش

ب) استفاده از محلول غلیظ‌تر HBr

پ) استفاده از نوار منیزیم به جای پودر منیزیم

ت) افزودن یک باز قوی به مخلوط واکنش

۱) فقط الف
۲) الف و ب
۳) ب و ت
۴) پ و ت

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

عوامل مؤثر بر سرعت واکنش:

۱) **دما:** افزایش دما، انرژی جنبشی مولکول‌ها را زیاد می‌کند و باعث می‌شود تعداد برخوردها و هم‌چنین سرعت واکنش بیشتر شود.

۲) **غلظت:** افزایش غلظت مواد واکنش‌دهنده، باعث می‌شود تعداد مولکول‌ها در واحد حجم بیشتر شده و در نتیجه سرعت واکنش بیشتر شود.

۳) **سطح تماس:** در واکنش‌هایی که حداقل یکی از مواد واکنش‌دهنده جامد است، هر چه سطح تماس جامد بیشتر باشد (مثلاً استفاده از پودر به جای نوار یا تکه)، سرعت واکنش بیشتر می‌شود.

۴) **کاتالیزگر:** کاتالیزگر ماده‌ای است که انرژی فعال‌سازی را کم می‌کند و در نتیجه سرعت واکنش را افزایش می‌دهد.

۵) **ماهیت واکنش‌دهنده‌ها:** هر چه واکنش‌پذیری واکنش‌دهنده‌ها بیشتر باشد، شدت و سرعت واکنش بیشتر می‌شود.

پاسخ خیلی تشریحی

الف) **افزایش دمای واکنش:** با افزایش دما، انرژی جنبشی مولکول‌های Mg و HBr بیشتر شده، تعداد برخوردهایشان زیادتر می‌شود و در نتیجه سرعت واکنش افزایش پیدا می‌کند.

ب) **استفاده از محلول غلیظ‌تر HBr:** با افزایش غلظت HBr، تعداد مولکول‌های HBr در واحد حجم بیشتر شده، احتمال برخوردشان با اتم‌های Mg زیادتر می‌شود و سرعت واکنش افزایش پیدا می‌کند.

پ) **استفاده از نوار منیزیم به جای پودر منیزیم:** نوار منیزیم سطح تماس کم‌تری نسبت به پودر منیزیم دارد. هر چه سطح تماس کم‌تر باشد، سرعت واکنش کم‌تر می‌شود.

ت) **افزودن یک باز قوی به مخلوط واکنش:** باز قوی با اسید (HBr) واکنش می‌دهد و غلظت HBr را کم می‌کند. در نتیجه سرعت واکنش کاهش پیدا می‌کند.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹۰ جدول زیر مربوط به آزمایش قرص جوشان است که با هدف بررسی عوامل مؤثر بر سرعت واکنش انجام شده است. کدام مورد نادرست است؟

آزمایش	مقدار قرص جوشان	دمای آب ($^\circ C$)	زمان انجام واکنش	سرعت متوسط انجام واکنش	حجم گاز CO_2 تولیدشده در پایان واکنش
۱		θ_1	t_1	$\bar{R}_1$	V_1
۲		θ_2	t_2	$\bar{R}_2$	V_2
۳		θ_3	t_3	$\bar{R}_3$	V_3
۴		θ_4	t_4	$\bar{R}_4$	V_4
۵		θ_5	t_5	$\bar{R}_5$	V_5

۱) اگر $\theta_1 > \theta_2$ باشد، آن‌گاه، $t_1 > t_2$ است.

۲) اگر $\theta_3 > \theta_4$ باشد، آن‌گاه، $V_3 = V_4$ و $\bar{R}_3 > \bar{R}_4$ است.

۳) اگر $V_2 = V_5$ باشد، آن‌گاه $\bar{R}_2 > \bar{R}_5$ است.

۴) اگر $\bar{R}_1 > \bar{R}_4$ باشد، آن‌گاه $\theta_1 > \theta_4$ و $V_1 > V_4$ است.

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔ با توجه به برابربودن مقدار قرص جوشان مصرفی در آزمایش‌های ۱ و ۴، حجم گاز CO_2 تولیدی در این آزمایش‌ها نیز برابر است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

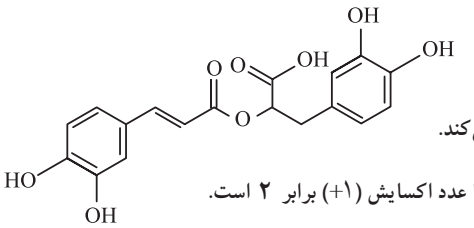
گزینهٔ (۱): در آزمایش (۱)، از نصف قرص جوشان و در آزمایش (۲)، از $\frac{1}{4}$ قرص جوشان استفاده شده است، پس مدت‌زمان لازم برای انجام کامل واکنش آزمایش (۱) بیشتر است؛ زیرا مقدار واکنش‌دهنده در آن بیشتر است.

گزینهٔ (۲): به دلیل یکسان‌بودن مقدار قرص جوشان مصرفی در آزمایش‌های (۳) و (۴)، حجم گازی که در پایان واکنش‌ها تولید می‌شود، یکسان $(V_3 = V_4)$ و از آن‌جایی که $\theta_4 > \theta_3$ است، واکنش آزمایش (۴) با سرعت بیشتری انجام می‌پذیرد $(\bar{R}_4 > \bar{R}_3)$.

گزینهٔ (۳): اگر حجم گاز تولیدشده در پایان دو آزمایش با هم برابر باشد، به این معنی است که مقدار اولیهٔ واکنش‌دهنده در ابتدای آزمایش‌ها باهم برابر بوده است (و برعکس این موضوع، مهر تأییدی بر نادرستی گزینهٔ (۴) است.) از آن جایی که سطح تماس قرص جوشان در آزمایش (۵)، بیشتر از سطح تماس آن در آزمایش (۲) است، پس واکنش (۵) با سرعت بیشتری نسبت به آزمایش (۲) انجام می‌پذیرد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹۱ رزمارینیک اسید با ساختار زیر و با مهار رادیکال‌های آزاد، از اکسیداسیون چربی‌ها و رشد میکروب‌ها در فراورده‌های گوشتی جلوگیری می‌کند. چند مورد از مطالب زیر در رابطه با این ماده درست است؟



- فرمول مولکولی آن به صورت $C_{18}H_{16}O_8$ است.
- در دستهٔ افزودنی‌ها قرار دارد و به عنوان یک نگهدارندهٔ طبیعی عمل می‌کند.
- نسبت شمار اتم‌های کربن با عدد اکسایش (۱-) به شمار اتم‌های کربن با عدد اکسایش (۱+) برابر ۲ است.
- اختلاف شمار پیوندهای $C-C$ و $C=C$ در آن، برابر ۴ است.
- مولکول آن از دو بخش مشابه متصل به یک زنجیر کربنی متفاوت تشکیل شده است.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔ به‌جز عبارت آخر، سایر عبارت‌ها درست هستند.

بررسی همهٔ عبارت‌ها:

عبارت اول: مولکول رزمارینیک اسید دارای ۱۸ اتم کربن است؛ بنابراین شمار اتم‌های هیدروژن آن برابر خواهد بود با:

$C_{18}H_{38}$: فرمول مولکولی آلکانی با ۱۸ اتم کربن

به ازای هر پیوند دوگانه و هر حلقه، ۲ هیدروژن کم می‌شود:

دوگانه‌ها ↑

$۲\times(۲+۹)=۲۲$

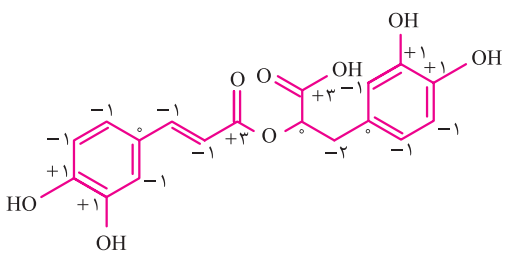
↓ حلقه‌ها

$C_{18}H_{16}O_8$: فرمول مولکولی ترکیب

عبارت دوم: افزودنی‌ها، مواد شیمیایی مانند نگهدارنده، رنگ‌دهنده، طعم‌دهنده و... هستند که به صورت هدفمند به مواد خوراکی یا غذاها افزوده می‌شوند. برای نمونه نگهدارنده‌ها سرعت واکنش‌های شیمیایی که منجر به فساد مادهٔ غذایی می‌شود را کاهش می‌دهند. با توجه به صورت سؤال یکی از این مواد، رزمارینیک اسید است که در گیاه رزماری وجود دارد.



عبارت سوم: عدد اکسایش همهٔ اتم‌های کربن در ساختار زیر مشخص شده است:

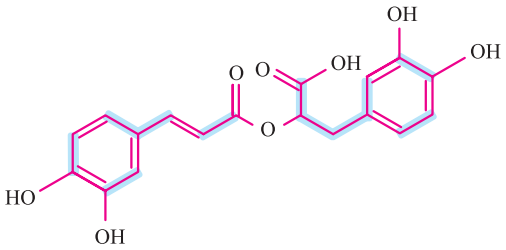


$$\Rightarrow \frac{\text{شمار اتم‌های کربن با عدد اکسایش } (-۱)}{\text{شمار اتم‌های کربن با عدد اکسایش } (+۱)}=\frac{۸}{۴}=۲$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

عبارت چهارم:

- پیوندهای C — C در ساختار مقابل هایلایت شده‌اند.۱۱تا:
- پیوندهای C = C در ساختار مقابل: ۷ تا ← اختلاف: ۴ تا



عبارت پنجم: زنجیر بین دو بخش ابتدایی و انتهایی مولکول، اولاً فقط از کربن تشکیل نشده و دوماً متقارن نیست.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹۲ کدام مورد نادرست است؟ $(H=1, C=12, N=14, O=16 : g.mol^{-1})$

۱) اگر شمار اتم‌های کربن در مولکول یک آلدهید و یک اتر با زنجیر کربنی سیرشده برابر باشد، جرم مولی آلدهید کم‌تر از جرم مولی اتر است.

۲) اگر شمار اتم‌های کربن در مولکول کتون و مولکول آلدهید با زنجیر کربنی سیرشده برابر باشد، جرم مولی آن دو برابر است.

۳) در ساختار هر پلی‌استر، حداقل یک گروه هیدروکربنی با دو گروه عاملی استری احاطه شده است.

۴) در ساختار هر آمین، یک اتم نیتروژن وجود دارد که حتماً به یک اتم هیدروژن متصل است.

مشاوره این سؤال داره دربارهٔ فرمول عمومی و ساختار چندتا ترکیب آلی مهم صحبت می‌کنه. برای حل این‌جور سؤال‌ها، باید فرمول عمومی هر کدوم رو بلد باشی و بتونی جرم مولی‌شون رو مقایسه کنی. یه نگاهی هم به ساختار پلی‌استر و آمین بنداز. حواست باشه که دنبال گزینهٔ غلط می‌گردیم!

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

آلدهید: ترکیبی آلی با گروه عاملی کربونیل $(C=O)$ در انتهای زنجیر کربنی؛ $(\text{یعنی } -\overset{\overset{O}{\|}}{C}-H)$ فرمول عمومی: $C_nH_{2n}O$.

اتر: ترکیبی آلی با گروه عاملی اتری $(-O-)$ در بین زنجیر کربنی؛ فرمول عمومی (برای اترهای سیرشده): $C_nH_{2n+2}O$.

کتون: ترکیبی آلی با گروه عاملی کربونیل $(C=O)$ در میان زنجیر کربنی؛ فرمول عمومی: $C_nH_{2n}O$.

پلی‌استر: پلیمری که در زنجیر اصلی آن، گروه‌های عاملی استری $(-COO-)$ تکرار می‌شوند.

آمین: ترکیبی آلی که در آن، اتم نیتروژن به یک یا چند گروه آلکیل یا هیدروژن متصل است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گزینهٔ (۱):

- **آلدهید (با n اتم کربن):**

$C_nH_{2n}O \Rightarrow$ جرم مولی: $12n+2n+16=14n+16\ g.mol^{-1}$

- **اتر (با n اتم کربن):**

$C_nH_{2n+2}O \Rightarrow$ جرم مولی: $12n+2n+2+16=14n+18\ g.mol^{-1}$

- جرم مولی آلدهید کم‌تر از جرم مولی اتر است؛ پس این گزینه درست است.

گزینهٔ (۲):

- **کتون (با n اتم کربن):**

$C_nH_{2n}O \Rightarrow$ جرم مولی: $12n+2n+16=14n+16\ g.mol^{-1}$

- **آلدهید (با n اتم کربن):**

$C_nH_{2n}O \Rightarrow$ جرم مولی: $12n+2n+16=14n+16\ g.mol^{-1}$

جرم مولی کتون و آلدهید با تعداد کربن برابر، یکسان است؛ پس این گزینه درست است.

گزینهٔ (۳): پلی‌استرها از واکنش تراکمی یک دی‌الکل و یک دی‌اسید تشکیل می‌شوند. در این فرایند، گروه‌های هیدروکسیل $(-OH)$ از الکل و گروه‌های کربوکسیل $(-COOH)$ از اسید با هم ترکیب شده و گروه‌های استری $(-COO-)$ را تشکیل می‌دهند و مولکول آب آزاد می‌شود؛ بنابراین، در ساختار هر پلی‌استر، حداقل یک گروه هیدروکربنی وجود دارد که از دو طرف به گروه‌های استری متصل است. پس این گزینه درست است.

گزینهٔ (۴): آمین‌ها می‌توانند سه حالت داشته باشند:

- نیتروژن به یک گروه آلکیل و دو هیدروژن متصل است.
- نیتروژن به دو گروه آلکیل و یک هیدروژن متصل است.
- نیتروژن به سه گروه آلکیل متصل است و هیچ اتم هیدروژنی ندارد؛ پس این گزینه نادرست است.

نکته در ترکیبات آلی، دانستن فرمول عمومی و گروه‌های عاملی، برای تعیین جرم مولی و پیش‌بینی خواص ترکیب، ضروری است.

گول نخوری توی آمین‌ها گول نخوری، آمین نوع سوم اصلاً هیدروژن نداره!

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹۳ در دمای یکسان، رسانایی الکتریکی ۵۰۰ میلی‌لیتر محلول ۰/۰۲ مولار نیتریک اسید (محلول **A**) و ۲۰۰ میلی‌لیتر محلول نیترواسید (محلول **B**)، یکسان است. اگر مجموع شمار مول گونه‌ها (به‌جز مولکول‌های آب) در محلول **B**، برابر با ۰/۲۰۴ مول باشد، کدام مورد نادرست است؟ (چگالی محلول‌ها را یکسان و برابر با چگالی آب در نظر بگیرید.) $(H=1, N=14, O=16 : g.mol^{-1})$

۱) شمار آنیون‌ها در محلول A، ۲/۵ برابر محلول B است.

۲) از هر ۵۰۰ مولکول نیترواسید، ۴۹۰ مولکول آن به صورت یونیده نشده در محلول B وجود دارد.

۳) درصد جرمی آنیون چند اتمی در محلول A، برابر با ۰/۱۲۴٪ است.

۴) شمار مول‌های آغازی اسید در محلول B، ۴۰ برابر محلول A است.

مشاوره سؤالات مفهومی مربوط به مقایسهٔ پارامترهای مختلف در دو یا چند اسید (قوی و ضعیف) یکی از مواردی است که بارها و بارها به‌ویژه در کنکورهای اخیر، مورد توجه طراحان کنکور سراسری بوده است و حل آن‌ها نیازمند دقت و توجه زیادی است. راستی! می‌تونین به عنوان یه حریف تمرین خوب! به این سؤال نگاه کنید تا آمادگی‌تان برای کنکور را افزایش دهید.

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی

با توجه به این‌که رسانایی الکتریکی دو محلول یکسان است، باید مجموع غلظت مولی یون‌ها در دو محلول برابر باشد. نیتریک اسید (HNO_3)، یک اسید قوی است و به طور کامل در آب یونش می‌یابد و هر مول از آن، دو مول یون پدید می‌آورد؛ بنابراین مجموع غلظت مولی یون‌ها در محلول آن، دو برابر غلظت اولیهٔ محلول است:

$$HNO_3 \rightarrow H^+ + NO_3^-$$

$$\text{مجموع غلظت مولی یون‌ها در محلول } HNO_3 = 2\times 0/02 = 0/04 mol\cdot L^{-1}$$

نیترواسید (HNO_2)، یک اسید ضعیف است و به طور جزئی در آب یونش می‌یابد:

$$HNO_2 \rightleftharpoons H^+ + NO_2^-$$

مول اولیه :	a	۰	۰	$\Rightarrow$ مجموع مول گونه‌ها $= (a-x)+x+x = a+x = 0/204$
مول نهایی :	a − x	x	x	

$$\text{مجموع غلظت مولی یون‌ها} = \frac{x}{0/2}+\frac{x}{0/2} = 0/04 \Rightarrow 10x = 0/04 \Rightarrow x = 0/004 \Rightarrow a = 0/2 mol$$

حالا بیایین یکی یکی! گزینه‌ها رو بررسی کنیم:

گزینهٔ (۱): در محلول A، $0/5 L \times 0/02 mol\cdot L^{-1} = 0/01$ مول یون NO_3^- (آنیون) و در محلول B، ۰/۰۰۴ مول یون NO_2^- (آنیون) وجود دارد؛ بنابراین داریم:

$$\frac{\text{شمار آنیون‌ها در محلول A}}{\text{شمار آنیون‌ها در محلول B}} = \frac{0/01\times N_A}{0/004\times N_A} = 2/5$$

گزینهٔ (۲):

$$\text{درصد یونش } (HNO_2) = \frac{[H^+]}{[HNO_2]_{\text{اولیه}}}\times 100 = \frac{x}{a}\times 100 = \frac{0/004}{0/2}\times 100 = 2\% \Rightarrow \text{درصد مولکول‌های یونیده‌نشده} = 98\%$$

$$\Rightarrow \text{تعداد مولکول‌های } HNO_2 \text{ یونیده‌نشده} = 500\times\frac{98}{100} = 490$$

گزینهٔ (۳):

$$\text{جرم } NO_3^- \text{ در محلول A} = 500 mL \text{ محلول} \times \frac{1 L}{1000 mL}\times\frac{0/02 mol\ NO_3^-}{1 L \text{ محلول}}\times\frac{62 g\ NO_3^-}{1 mol\ NO_3^-} = 0/62 g\ NO_3^-$$

$$\text{درصد جرمی } NO_3^- \text{ در محلول A} = \frac{\text{جرم } NO_3^-}{\text{جرم محلول}}\times 100 = \frac{0/62}{500}\times 100 = 0/124\%$$

گزینهٔ (۴): مول اولیهٔ HNO_3 در محلول A، برابر با $0/5 L \times 0/02 mol.L^{-1} = 0/01$ و مول اولیهٔ HNO_2 در محلول B، برابر ۰/۲ است؛ بنابراین داریم:

$$\frac{\text{شمار مول‌های آغازی اسید در محلول B}}{\text{شمار مول‌های آغازی اسید در محلول A}} = \frac{0/2}{0/01} = 20$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹۴ کدام مطلب نادرست است؟

۱) مدل آرنیوس پیش‌بینی می‌کند که با حل شدن SO_3 و Na_2O در آب (به طور جداگانه)، غلظت یون هیدرونیوم در کدام محلول بیش‌تر است.

۲) با افزایش pH محلول، نسبت $\frac{[OH^-]}{[H_3O^+]}$ در آن، افزایش می‌یابد.

۳) اگر در محلول آبی اسید تک پروتون‌دار HA پس از یونش، $[HA]$ هفت برابر $[A^-]$ باشد، درصد یونش HA در این محلول، برابر با ۱۲/۵ درصد است.

۴) محلول شیشه‌پاک‌کن، با تشکیل پیوند هیدروژنی به خوبی در آب حل‌شده و محلول آن یک الکترولیت قوی به شمار می‌آید.

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔ حواستون باشه که از محلول آمونیاک (NH_3) که یک باز ضعیف است، به عنوان شیشه پاک‌کن استفاده می‌شود. از آن‌جایی که آمونیاک به طور جزئی در آب یونش می‌یابد (انحلال آن به طور عمده مولکولی و به مقدار کمی یونی است)؛ در نتیجه محلول آن یک الکترولیت ضعیف محسوب می‌شود.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): طبق مدل آرنیوس، SO_3 اکسید اسیدی و Na_2O اکسید بازی است؛ بنابراین می‌توان گفت $[H^+]$ در محلول SO_3 بیش‌تر از محلول Na_2O است (یا $[OH^-]$ در محلول Na_2O بیش‌تر از محلول SO_3 است).

نکته

مدل آرنیوس
- آیا می‌تواند غلظت یون هیدرونیوم را در محلول دو اسید با هم مقایسه کند؟ ← خیر
- آیا می‌تواند غلظت یون هیدروکسید را در محلول دو باز با هم مقایسه کند؟ ← خیر
- آیا می‌تواند غلظت یون هیدرونیوم و یا هیدروکسید را در محلول یک اسید و یک باز با هم مقایسه کند؟ ← بله

گزینهٔ (۲): با افزایش pH محلول، $[OH^-]$ در آن افزایش یافته و به همان نسبت، $[H^+]$ در آن کاهش می‌یابد؛ بنابراین می‌توان گفت که با بیش‌تر شدن pH محلول، نسبت $\frac{[OH^-]}{[H^+]}$ در آن افزایش می‌یابد.

گزینهٔ (۳):

$$HA \rightleftharpoons H^+ + A^-$$

پیش از یونش: $M \quad 0 \quad 0$

پس از یونش: $M-x \quad x \quad x$

$$M-x=7x \Rightarrow M=8x$$

$$\text{درصد یونش} = \frac{x}{M}\times 100 = \frac{x}{8x}\times 100 = 12/5\%$$

گول نخوری ✘ الکترولیت یا غیرالکترولیت بودن یک ماده، ربطی به میزان انحلال آن در آب ندارد، مثلاً متانول به هر نسبتی در آب حل می‌شود، ولی چون یون تولید نمی‌کند، غیرالکترولیت است. هم‌چنین آمونیاک با این که به خوبی در آب حل می‌شود، الکترولیت ضعیف می‌باشد؛ بنابراین نوع انحلال (یونی یا مولکولی) مهم است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹۵ در دما و غلظت آغازی یکسان، مقایسهٔ سرعت واکنش محلول آبی کدام اسید با فلز روی (**Zn**) نادرست است؟

۱) $CH_3COOH > HCOOH$

۲) $HCl > CH_3COOH$

۳) $HNO_3 > HCOOH$

۴) $HF > HCN$

مشاوره این سؤال داره ازت مقایسهٔ قدرت اسیدی رو می‌پرسه! هر چی اسید قوی‌تر باشه، بیشتر توی آب یونیده می‌شه و یون‌های H^+ بیشتری تولید می‌کنه. این یون‌های H^+ هم که با فلز واکنش می‌دن و سرعت واکنش رو می‌برن بالا. پس حواست باشه که کدوم اسیدها قوی‌تر هستن، کدوم‌ها ضعیف‌تر!

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی واکنش کلی فلز روی با اسید به صورت زیر است:

$$Zn(s) + 2H^+(aq) \rightarrow Zn^{2+}(aq) + H_2(g)$$

سرعت این واکنش، به غلظت یون‌های H^+ در محلول بستگی دارد. هر چه غلظت H^+ بیشتر باشد، سرعت واکنش بیشتر خواهد بود. غلظت H^+ هم به قدرت اسیدی بستگی دارد.

گزینهٔ (۱):

- CH_3COOH (استیک اسید) و $HCOOH$ (فرمیک اسید) هر دو اسیدهای ضعیف آلی (کربوکسیلیک اسید) هستند.
- در کربوکسیلیک اسیدها، هر چه گروه آلکیل متصل به گروه کربوکسیل ($-COOH$) بزرگ‌تر باشد، قدرت اسیدی کم‌تر می‌شود (*چون بار منفی روی اکسیژن کربوکسیل رو بیشتر می‌کنه و جداشدن H^+ رو سفت‌تر می‌کنه*). این گزینه نادرست است.
- بد نیست بدانید گروه متیل (CH_3) در استیک اسید، الکترون‌دهنده‌تر از هیدروژن (H) در فرمیک اسید است؛ بنابراین، فرمیک اسید ($HCOOH$) قوی‌تر از استیک اسید (CH_3COOH) است و سرعت واکنش بیشتری با روی دارد.

گزینهٔ (۲):

- HCl (هیدروکلریک اسید) یک اسید قوی است. CH_3COOH (استیک اسید) یک اسید ضعیف است.
- اسیدهای قوی به مراتب بیشتر از اسیدهای ضعیف یونیزه می‌شوند؛ پس سرعت واکنش HCl با روی، بیشتر است. این گزینه درست است.

گزینهٔ (۳):

- HNO_3 (نیتریک اسید) یک اسید قوی است. $HCOOH$ (فرمیک اسید) یک اسید ضعیف آلی است.
- اسیدهای قوی به مراتب بیشتر از اسیدهای ضعیف یونیزه می‌شوند. پس سرعت واکنش HNO_3 با روی، بیشتر است. این گزینه درست است.

گزینهٔ (۴):

- HF (هیدروفلوئوریک اسید) یک اسید ضعیف است. HCN (هیدروسیانیک اسید) یک اسید بسیار ضعیف است.
- HF به مراتب قوی‌تر از HCN است؛ پس سرعت واکنش HF با روی، بیشتر است. این گزینه درست است.

نکته قدرت اسیدی نه‌تنها بر سرعت واکنش با فلزات، بلکه بر بسیاری از خواص و واکنش‌های شیمیایی دیگر نیز تأثیر می‌گذارد. به طور کلی، هر چه یک اسید قوی‌تر باشد (یعنی ثابت یونش اسیدی (K_a)، بزرگ‌تری داشته باشد)، تعادل یونش آن در آب بیشتر به سمت راست جابه‌جا شده و غلظت یون‌های هیدرونیوم (H_3O^+) در محلول آن بیشتر خواهد بود.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹۶ **HX** و **YOH** به ترتیب اسید و باز قوی می‌باشند که جرم مولی باز، ۵ برابر جرم مولی اسید است. اگر **a** گرم از اسید و **۲a** گرم از باز را به صورت مجزا در مقداری آب حل کرده و حجم هر دو را به ۲۰۰۰ میلی‌لیتر برسانیم، تفاوت **pH** این محلول‌ها برابر ۹/۶ می‌شود. **pH** محلول بازی کدام است؟

۱) ۱۱/۶ ۲) ۱۰/۶ ۳) ۱۲/۴ ۴) ۱۲

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: a گرم اسید HX و ۲a گرم باز YOH در ۲ لیتر آب حل شده است. حال با محاسبهٔ غلظت‌های مولی اولیه آن‌ها نسبت $[H^+]$ در محلول اسیدی را به $[OH^-]$ در محلول بازی حساب می‌کنیم:

$$\frac{M_{YOH}}{M_{HX}} = ۵ \Rightarrow M_{YOH} = ۵M_{HX}$$

$$\text{غلظت مولی اسید} = \frac{\text{مول}}{\text{حجم}} = \frac{\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی}}}{\text{حجم}} = \frac{\frac{a}{M_{HX}}}{۲} = ۰/۵(\frac{a}{M_{HX}}) \xrightarrow{\text{اسید قوی و تک پروتون دار}} [H^+] = ۰/۵(\frac{a}{M_{HX}})$$

$$\text{غلظت مولی باز} = \frac{\text{مول}}{\text{حجم}} = \frac{\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی}}}{\text{حجم}} = \frac{\frac{۲a}{۵M_{HX}}}{۲} = ۰/۲(\frac{a}{M_{HX}}) \xrightarrow{\text{باز قوی و تک ظرفیتی}} [OH^-] = ۰/۲(\frac{a}{M_{HX}})$$

$$\Rightarrow \frac{[H^+] \text{ در محلول اسیدی}}{[OH^-] \text{ در محلول بازی}} = ۲/۵(I)$$

گام دوم: pH دو محلول را به دست می‌آوریم:

$$\text{محلول اسیدی} : pH = -\log[H^+]$$

$$\text{محلول بازی} : pH = -\log[H^+] = -\log\frac{۱۰^{-۱۴}}{[OH^-]} = ۱۴ + \log[OH^-]$$

گام سوم: با توجه به تفاوت pH دو محلول و چون pH محلول بازی واقعاً بیش‌تره، داریم:

$$pH \text{ محلول بازی} - pH \text{ محلول اسیدی} = ۹/۶ \Rightarrow ۱۴ + \log[OH^-] + \log[H^+] = ۹/۶$$

$$\Rightarrow \log[OH^-] + \log[H^+] = -۴/۴ \Rightarrow \log[\underset{\text{مربوط به محلول بازی}}{OH^-}] \times [\underset{\text{مربوط به محلول اسیدی}}{H^+}] = -۴/۴$$

$$[\underset{\text{مربوط به محلول بازی}}{OH^-}] \times [\underset{\text{مربوط به محلول اسیدی}}{H^+}] = ۱۰^{-۴/۴} = ۱۰^{۰/۶} \times ۱۰^{-۵} = ۴ \times ۱۰^{-۵} \ (II)$$

$$\xrightarrow{(II),(I)} ۲/۵[\underset{\text{مربوط به محلول بازی}}{OH^-}]^۲ = ۴ \times ۱۰^{-۵} \Rightarrow [OH^-]^۲ = ۱۶ \times ۱۰^{-۶} \Rightarrow [OH^-] = ۴ \times ۱۰^{-۳} \ mol.L^{-۱}$$

گام چهارم: pH محلول بازی را با توجه به غلظت یون هیدروکسید (OH^-) در آن می‌یابیم:

$$\text{در محلول بازی} : [OH^-] \times [H^+] = ۱۰^{-۱۴} \xrightarrow{[OH^-]=۴\times۱۰^{-۳}} [H^+] = \frac{۱۰^{-۱۴}}{۴ \times ۱۰^{-۳}} = ۲/۵ \times ۱۰^{-۱۲}$$

$$pH = -\log[H^+] = -\log ۲/۵ \times ۱۰^{-۱۲} = -\log ۲۵ \times ۱۰^{-۱۳} = ۱۳ - ۲\log ۵ = ۱۳ - ۱/۴ = ۱۱/۶$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹۷ قدر مطلق پتانسیل کاهشی استاندارد فلزهای X ، Y و Z به صورت زیر است. اگر با اتصال نیم سلول Z به SHE ، pH نیم سلول SHE افزایش یابد و به منظور محافظت کاتدی فلز Y بتوان از فلز X استفاده کرد، کدام مطلب به یقین درست است؟

$X^{2+}(aq)+2e^- \rightarrow X(s) \quad |E^\circ|=0/36$

$Y^{2+}(aq)+2e^- \rightarrow Y(s) \quad |E^\circ|=0/72$

$Z^{2+}(aq)+2e^- \rightarrow Z(s) \quad |E^\circ|=0/18$

۱) emf سلول گالوانی حاصل از دو نیم سلول X و Z، برابر با ۰/۵۴ ولت است.

۲) فلز X با محلول ۱ مولار هیدروکلریک اسید واکنش می‌دهد.

۳) به منظور نگه‌داری محلول $X(NO_3)_2$ می‌توان از ظرفی از جنس فلز Z بر خلاف ظرفی از جنس فلز Y استفاده کرد.

۴) واکنش $Y^{2+}(aq)+Z(s) \rightarrow Y(s)+Z^{2+}(aq)$ برخلاف واکنش «$Y(s)+X^{2+}(aq) \rightarrow Y^{2+}(aq)+X(s)$»، به طور طبیعی انجام می‌شود.

مشاوره *شاید باور نکنین* اما ایدهٔ بسیاری از سؤال‌های کنکور سراسری که *اتفاقاً سفت هم هستن*، از تمرینات کتاب درسی است؛ بنابراین سعی کنید با دقت و تمرکز همهٔ سؤالات کتاب‌تان را حل و بررسی کنید.

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ‌خیلی‌تشریحی حفاظت کاتدی هنگامی صورت می‌گیرد که فلزی که قرار است از آن محافظت شود، کاتد واقع گردد؛ یعنی اگر بتوان به منظور محافظت کاتدی فلز Y، از فلز X استفاده کرد؛ در نتیجه پتانسیل کاهشی فلز X کم‌تر از فلز Y بوده و فلز X نسبت به فلز Y، کاهندهٔ قوی‌تری است؛ بنابراین داریم:

$$E^\circ_X < E^\circ_Y \Rightarrow \begin{cases} E^\circ_X = +0/36 \quad \text{یا} \quad -0/36V \\ E^\circ_Y = +0/72 \quad \text{یا} \quad -0/72V \end{cases}$$

با توجه به شرط $E^\circ_X < E^\circ_Y$ ، E°_Y نمی‌تواند ۰/۷۲− ولت باشد ولی E°_X می‌تواند ۰/۳۶ یا ۰/۳۶− ولت باشد. هم‌چنین اگر با تشکیل یک سلول گالوانی از نیم‌سلول Z و SHE ، pH نیم‌سلول SHE افزایش یابد ($[H^+]$ کاهش یابد)؛ می‌توان نتیجه گرفت که $E^\circ(Z^{2+}/Z)$ کم‌تر از صفر بوده و نیم‌واکنش اکسایش در آن رخ داده است.

حالا! با توجه به توضیحات داده‌شده، E° نیم سلول‌های داده‌شده را مرتب می‌کنیم:

$E^\circ(X^{2+}/X) = +0/36 \quad \text{یا} \quad -0/36V$

$E^\circ(Y^{2+}/Y) = +0/72\ V$

$E^\circ(Z^{2+}/Z) = -0/18\ V$

بیایید به ترتیب گزینه‌ها را بررسی کنیم:

گزینهٔ (۱): با توجه به این که E°_X می‌تواند $\pm 0/36$ ولت باشد، emf سلول گالوانی $X-Z$ می‌تواند مقادیر ۰/۱۸ یا ۰/۵۴ ولت باشد:

$$emf = E^\circ_{\text{کاتد}} - E^\circ_{\text{آند}} \Rightarrow \begin{cases} (1)\ emf = 0/36-(-0/18) = 0/54\ V \\ (2)\ emf = -0/18-(-0/36) = 0/18\ V \end{cases}$$

گزینهٔ (۲): با توجه به این که E°_X می‌تواند $\pm 0/36$ ولت باشد؛ بنابراین قدرت کاهندگی X می‌تواند کم‌تر و یا بیش‌تر از H_2 باشد و این جمله را نمی‌توان به یقین *درست دونست!*

نکته فلزهایی با E° مثبت، با محلول ۱ مولار هیدروکلریک اسید واکنش نمی‌دهند!

گزینهٔ (۳): از آن‌جا که E°_Y، همواره بیش‌تر از E°_X است؛ *در نتیجه می‌شه* به منظور نگه‌داری محلول‌های دارای یون‌های X^{2+}، از ظرفی از جنس فلز Y استفاده کرد.

نکته محلول نمک یا کاتیون یک فلز را می‌توان در ظرفی از جنس فلز بالاتر در سری الکتروشیمیایی (دارای E° بزرگ‌تر) نگه‌داری کرد؛ زیرا فلز بالاتر (با E° بزرگ‌تر) نمی‌تواند با کاتیون فلز پایین‌تر (با E° کوچک‌تر) واکنش دهد. به طور مثال محلول منیزیم نیترات را می‌توان در ظرف آهنی نگه‌داری کرد در حالی که محلول مس (II) نیترات را نه!

گزینهٔ (۴): فلز Z نسبت به فلز Y، کاهندهٔ قوی‌تری است؛ در نتیجه واکنش «$Z(s)+Y^{2+}(aq) \rightarrow \ldots$» به صورت طبیعی و خودبه‌خودی انجام خواهد گرفت، در حالی که چون فلز Y نسبت به فلز X، کاهندهٔ ضعیف‌تری است؛ در نتیجه واکنش «$Y(s)+X^{2+}(aq) \rightarrow \ldots$» به صورت طبیعی و خودبه‌خودی انجام ناپذیر است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹۸ با توجه به واکنش موازنه‌نشدهٔ زیر، کدام مورد نادرست است؟ $(Al = 27 : g.mol^{-1})$

$$Al(s) + NO_3^-(aq) + H^+(aq) + Cl^-(aq) \rightarrow AlCl_4^-(aq) + NO_2(g) + H_2O(l)$$

۱) در این واکنش، به ازای مصرف ۰/۹ گرم فلز آلومینیم، ۰/۱ مول الکترون مبادله می‌شود.

۲) پس از موازنه، مجموع ضرایب یون‌های موجود در سمت چپ معادله، برابر با ۱۴ است.

۳) در این واکنش، یون نیترات نقش اکسنده را داشته و عدد اکسایش نیتروژن در آن یک واحد کاهش می‌یابد.

۴) پس از موازنه، ضریب استوکیومتری گاز قهوه‌ای رنگ برابر با ضریب استوکیومتری دو ماده دیگر است.

مشاوره این مدل سؤال‌ها که یک واکنش داده شده و عبارت‌هایی در مورد آن مطرح می‌شود، تو کنکورهای جدید خیلی مد شده! این سؤال‌ها ترکیبی از موازنه، عدد اکسایش و استوکیومتری هستند!

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

واکنش‌های اکسایش ـ کاهش را می‌توان در سه مرحله موازنه کرد:

مرحلهٔ ۱: تغییر عدد اکسایش هر یک از عنصرها را حساب کنید.

در محاسبهٔ تغییر عدد اکسایش عنصرها، اگر زیروند عنصری در سمت چپ معادله غیر از یک بود، باید تغییر عدد اکسایش در زیروند آن ضرب شود.

مرحلهٔ ۲: در سمت چپ واکنش، تغییر عدد اکسایش مادهٔ اکسنده را به عنوان ضریب مادهٔ کاهنده و تغییر عدد اکسایش مادهٔ کاهنده را به عنوان ضریب مادهٔ اکسنده قرار دهید.

مرحلهٔ ۳: در آخر ضریب دیگر گونه‌ها را به روش وارسی تعیین کنید.

توجه: در صورت ساده‌شدن عددهای مربوط به تغییر عدد اکسایش گونه‌های کاهنده و اکسنده، آن‌ها را ساده می‌کنیم. مثلاً اگر این اعداد ۲ و ۴ بودند، به جای آن‌ها از اعداد ۱ و ۲ استفاده می‌کنیم.

توجه: تا حالا موازنه را از سمت چپ واکنش شروع می‌کردیم ولی به طور کلی اگر در یک سمت معادله، عنصری وجود داشته باشد که عدد اکسایش برخی از اتم‌های آن تغییر کرده و عدد اکسایش برخی دیگر از اتم‌های آن تغییری نکرده باشد، موازنه را باید از آن سمت و از اتمی که عدد اکسایش آن تغییر کرده، شروع کنیم.

مثال: موازنهٔ واکنش $Al + H_2O + OH^- \rightarrow Al(OH)_4^- + H_2$ را باید از سمت راست شروع کنیم؛ زیرا در سمت راست این معادله، اتم‌های هیدروژن با عدد اکسایش صفر و $+1$ وجود دارند در حالی که در سمت چپ معادله، عدد اکسایش همهٔ اتم‌های هیدروژن $+1$ است. در ضمن موازنه را باید از H_2 آغاز کنیم؛ زیرا عدد اکسایش اتم‌های هیدروژن در این گونه تغییر کرده است.

توجه: اگر عنصری که با آن موازنه را می‌خواهیم آغاز کنیم، دارای زیروند باشد (در همان سمتی از معادله که موازنه آغاز می‌شود)، باید تغییر عدد اکسایش هر اتم آن را در زیروندش ضرب کنیم و سپس جابه‌جایی تغییر عدد اکسایش‌ها را بین کاهنده و اکسنده انجام بدهیم.

به طور مثال در واکنش قبل، عدد اکسایش هر اتم هیدروژن در H_2 از صفر به $+1$ در سمت چپ معادله رسیده است؛ یعنی ۱ واحد تغییر کرده است ولی از آن‌جا که در H_2، ۲ اتم هیدروژن داریم، باید تغییر عدد اکسایش هیدروژن را در ۲ ضرب کنیم: $۲ \times ۱ = ۲$.

عدد اکسایش آلومینیم هم از $+3$ در $Al(OH)_4^-$ به صفر در Al رسیده است؛ یعنی ۳ واحد تغییر کرده است. در سمت راست معادله فقط یک اتم آلومینیوم داریم؛ پس ۳ را ضریب H_2 و ۲ را ضریب $Al(OH)_4^-$ قرار می‌دهیم؛ پس مراحل کامل موازنهٔ واکنش قبل این‌چوری می‌شه:

$$\overset{0}{Al} + \overset{+1}{H_2O} + OH^- \rightarrow \overset{+3}{Al(OH)_4^-} + \overset{0}{H_2}$$

۱) در سمت راست، دو نوع عدد اکسایش برای هیدروژن داریم ← موازنه را از سمت راست شروع می‌کنیم.

۲) تغییر عدد اکسایش آلومینیم $(۳ - ۰ = ۳)$ را ضریب H_2 قرار می‌دهیم. تغییر عدد اکسایش هر اتم هیدروژن، ۱ واحد $(۱ - ۰ = ۱)$ است ولی از آن‌جا که در H_2، ۲ اتم هیدروژن وجود دارد، $۲ \times ۱ = ۲$ را ضریب $Al(OH)_4^-$ قرار می‌دهیم:

$$\_\_ Al + \_\_ H_2O + \_\_ OH^- \rightarrow \frac{۲}{} Al(OH)_4^- + \frac{۳}{} H_2$$

۳) با توجه به این‌که تعداد بارهای منفی در سمت راست برابر -۲ است، به منظور موازنهٔ بار، ضریب OH^- در سمت چپ باید ۲ باشد.

$$\_\_ Al + \_\_ H_2O + \frac{۲}{} OH^- \rightarrow \frac{۲}{} Al(OH)_4^- + \frac{۳}{} H_2$$

۴) با توجه به مشخص‌بودن شمار همهٔ اتم‌ها در سمت راست معادله، ضریب Al و H_2O به ترتیب باید برابر با ۲ و ۶ باشد.

$$\frac{۲}{} Al + \frac{۶}{} H_2O + \frac{۲}{} OH^- \rightarrow \frac{۲}{} Al(OH)_4^- + \frac{۳}{} H_2$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ اول باید معادلهٔ واکنش انجام‌شده را موازنه کنیم:

محاسبهٔ تغییر عدد اکسایش اتم‌ها:

$$Al(s) + NO_3^-(aq) + H^+(aq) + Cl^-(aq) \longrightarrow AlCl_4^-(aq) + NO_2(g) + H_2O(l)$$

۰ ← +۳: ۳ درجه اکسایش

+۵ ← +۴: ۱ درجه کاهش

بلا! تغییر عدد اکسایش گونهٔ کاهنده (Al) را ضریب گونهٔ اکسنده (NO_3^-) و تغییر عدد اکسایش گونهٔ اکسنده را ضریب گونهٔ کاهنده قرار می‌دهیم:

$$\frac{1}{-}Al(s) + \frac{3}{-}NO_3^-(aq) + -H^+(aq) + -Cl^-(aq) \rightarrow \frac{1}{-}AlCl_4^-(aq) + \frac{3}{-}NO_2(g) + -H_2O(l)$$

در نهایت با دادن ضرایب مناسب به سایر گونه‌ها، موازنهٔ واکنش را تکمیل می‌کنیم:

$$Al(s) + 3NO_3^-(aq) + 6H^+(aq) + 4Cl^-(aq) \rightarrow AlCl_4^-(aq) + 3NO_2(g) + 3H_2O(l)$$

حالا گزینه‌ها را یکی یکی بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ (۱): در این واکنش به ازای اکسایش هر مول فلز Al، ۳ مول الکترون مبادله می‌شود:

$$0/9\ g\ Al \times \frac{1\ mol\ Al}{27\ g\ Al} \times \frac{3\ mol\ e^-}{1\ mol\ Al} = 0/1\ mol\ e^-$$

گزینهٔ (۲): یون‌های موجود در سمت چپ (واکنش دهنده‌ها) معادلهٔ واکنش، NO_3^-، H^+ و Cl^- هستند که مجموع ضرایب استوکیومتری آن‌ها *متأسفانه!* برابر با $3+4+6=13$ است.

گزینهٔ (۳): در این واکنش، یون نیترات نقش اکسنده دارد و عدد اکسایش نیتروژن در آن از +۵ به +۴ کاهش می‌یابد.

گزینهٔ (۴): فراوردهٔ قهوه‌ای‌رنگ در این واکنش، $NO_2(g)$ است که ضریب استوکیومتری آن برابر با ۳ می‌باشد. هم‌چنین ضرایب استوکیومتری $H_2O(l)$ و $NO_3^-(aq)$ نیز در این معادله، برابر با ۳ است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹۹ کدام مورد دربارهٔ الماس و گرافیت نادرست است؟

۱) الماس یک شبکهٔ غول‌آسای کووالانسی با پیوندهای C — C یکسان است، در حالی که گرافیت از لایه‌هایی تشکیل شده که در هر لایه، اتم‌های کربن با پیوندهای کووالانسی قوی به هم متصل شده‌اند.

۲) در گرافیت، هر اتم کربن به سه اتم کربن دیگر متصل است، اما در الماس، هر اتم کربن به چهار اتم کربن دیگر پیوند دارد.

۳) الماس، سخت‌ترین مادهٔ طبیعی شناخته شده است، اما گرافیت، نرم است و به عنوان روان‌کنندهٔ جامد استفاده می‌شود.

۴) چگالی گرافیت از الماس بیشتر است و هر دو در واکنش با اکسیژن در شرایط مناسب، گاز کربن دی‌اکسید تولید می‌کنند.

مشاوره این سؤال داره دربارهٔ دوتا شکل معروف از کربن (الماس و گرافیت) صحبت می‌کنه. این دو تا فقط از کربن ساخته شدن، اما چون اتم‌های کربن در هر یک از اون‌ها یه جور خاصی به هم وصل شدن، کلاً خواصشون با هم فرق می‌کنه.

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

آلوتروپ (دگرشکل): شکل‌های مختلف یک عنصر در حالت فیزیکی یکسان که ساختار بلوری یا مولکولی متفاوتی دارند و در نتیجه، خواص فیزیکی و گاهی شیمیایی متفاوتی نشان می‌دهند.

الماس: یکی از آلوتروپ‌های کربن با ساختار شبکه‌ای سه‌بعدی و بسیار فشرده. هر اتم کربن در الماس، با چهار اتم کربن دیگر، پیوند کووالانسی یگانه برقرار می‌کند.

گرافیت: یکی دیگر از آلوتروپ‌های کربن با ساختار لایه‌ای. در هر لایه، هر اتم کربن با سه اتم کربن دیگر، پیوند کووالانسی برقرار می‌کند. هم‌چنین بین لایه‌ها، نیروی واندروالسی ضعیف وجود دارد.

پاسخ خیلی تشریحی

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): این گزینه درست است. الماس یک شبکهٔ کووالانسی غول‌آسا و سه‌بعدی دارد که در آن، تمام اتم‌های کربن با پیوندهای کووالانسی قوی و یکسان به هم متصل شده‌اند. گرافیت از لایه‌هایی تشکیل‌شده که درون هر لایه، اتم‌های کربن با پیوندهای کووالانسی قوی به هم وصل هستند، اما بین لایه‌ها، نیروی وان‌دروالسی (بین مولکولی) ضعیف وجود دارد.

گزینهٔ (۲): این گزینه درست است. در گرافیت، هر اتم کربن با یک پیوند دوگانه و دو پیوند یگانه، به سه اتم کربن دیگر متصل است در الماس، هر اتم کربن با چهار پیوند یگانه به چهار اتم کربن دیگر متصل است.

گزینهٔ (۳): این گزینه درست است. ساختار شبکه‌ای و بسیار فشردهٔ الماس، باعث سختی فوق‌العادهٔ آن می‌شود. اما ساختار لایه‌ای گرافیت و نیروی ضعیف بین لایه‌ها، باعث می‌شود که لایه‌ها به راحتی روی هم بلغزند و گرافیت، نرم باشد.

گزینهٔ (۴): این گزینه نادرست است. الماس ساختار فشرده‌تری نسبت به گرافیت دارد و در نتیجه، چگالی آن بیشتر است (چگالی الماس: حدود $3/5\ g.cm^{-3}$ و چگالی گرافیت: حدود $2/27\ g.cm^{-3}$). هر دو ماده، چون از کربن خالص تشکیل شده‌اند، در واکنش با اکسیژن کافی و در دمای مناسب، می‌سوزند و گاز کربن دی‌اکسید (CO_2) تولید می‌کنند.

نکته آلوتروپی، پدیده‌ای است که نشان می‌دهد چگونه آرایش اتم‌ها در یک عنصر می‌تواند منجر به ایجاد خواص فیزیکی و شیمیایی متفاوت شود.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۰۰ اگر مجموع آنتالپی فروپاشی $CaO(s)$ و $NaF(s)$ برابر **a**، مجموع آنتالپی فروپاشی $CsI(s)$ و $BaS(s)$ برابر **b** و مجموع آنتالپی فروپاشی $AlN(s)$ و $MgO(s)$ برابر **c** باشد، کدام مقایسه درست است؟

۱) $c < b < a$

۲) $a < c < b$

۳) $b < a < c$

۴) $a < b < c$

مشاوره این سؤال داره دربارهٔ آنتالپی فروپاشی صحبت می‌کنه. این انرژی، نشون می‌ده که چه‌قدر لازمه زور بزنی تا یه بلور یونی رو از هم بپاشونی و یون‌هاش رو از هم جدا کنی! هر چی یون‌ها بار بیشتری داشته باشن و کوچولوتر باشن، این انرژی بیشتر می‌شه. پس حواست به بار و اندازهٔ یون‌ها باشه!

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

آنتالپی فروپاشی: مقدار انرژی لازم برای تبدیل یک مول ترکیب یونی جامد به یون‌های گازی سازندهٔ آن.

عوامل مؤثر بر آنتالپی فروپاشی:

۱) **بار یون‌ها:** هر چه قدرمطلق مجموع بار یون‌ها بیشتر باشد، نیروی جاذبهٔ بین یون‌ها قوی‌تر و آنتالپی فروپاشی بیشتر است.

۲) **اندازهٔ یون‌ها (شعاع یونی):** هر چه اندازهٔ یون‌ها کوچک‌تر باشد، فاصلهٔ بین هسته‌های یون‌ها کم‌تر، نیروی جاذبهٔ بین یون‌ها قوی‌تر و آنتالپی فروپاشی بیشتر است.

پاسخ خیلی تشریحی برای مقایسهٔ آنتالپی فروپاشی ترکیبات یونی داده‌شده، باید بار و اندازهٔ یون‌های سازندهٔ آن‌ها را بررسی کنیم:

مقدار a (مجموع CaO و NaF):

- CaO: یون‌های Ca^{2+} و O^{2-} (بار ۲+ و ۲−، اندازهٔ نسبتاً کوچک)
- NaF: یون‌های Na^{+} و F^{-} (بار ۱+ و ۱−، اندازهٔ کوچک)

مقدار b (مجموع CsI و BaS):

- CsI: یون‌های Cs^{+} و I^{-} (بار ۱+ و ۱−، اندازهٔ بزرگ)
- BaS: یون‌های Ba^{2+} و S^{2-} (بار ۲+ و ۲−، اندازهٔ نسبتاً بزرگ)

مقدار c (مجموع AlN و MgO):

- AlN: یون‌های Al^{3+} و N^{3-} (بار ۳+ و ۳−، اندازهٔ کوچک)
- MgO: یون‌های Mg^{2+} و O^{2-} (بار ۲+ و ۲−، اندازهٔ کوچک)

مقایسه:

۱) **مقدار c:** به دلیل داشتن یون‌هایی با بیشترین بار (۳+ و ۳− در AlN و ۲+ و ۲− در MgO) و اندازهٔ کوچک، بیشترین آنتالپی فروپاشی را دارد.

۲) **مقدار a:** اندازهٔ یون‌های Ca^{2+} و O^{2-} از اندازهٔ یون‌های Ba^{2+} و S^{2-} کوچک‌تر است، هم‌چنین اندازهٔ یون‌های Na^{+} و F^{-} از اندازهٔ یون‌های Cs^{+} و I^{-} کوچک‌تر است. بنابراین آنتالپی فروپاشی CaO از BaS بیشتر و NaF از CsI بیشتر است و در نتیجه مقدار a از b بیشتر است.

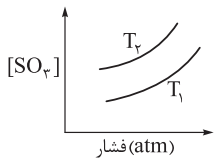
۳) **مقدار b:** کم‌ترین آنتالپی فروپاشی را دارد، زیرا CsI دارای یون‌هایی با کم‌ترین بار و بیشترین اندازه است. BaS هم با این‌که بار بیشتری نسبت به CsI دارد، اما به دلیل اندازهٔ بزرگ‌تر یون‌ها، آنتالپی فروپاشی کم‌تری نسبت به CaO و مخصوصاً نسبت به AlN و MgO دارد.

نتیجه‌گیری: $b < a < c$

نکته در مقایسهٔ آنتالپی فروپاشی ترکیبات یونی، ابتدا قدرمطلق مجموع بار یون‌ها و سپس اندازهٔ یون‌ها را در نظر می‌گیریم.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۰۱ نمودار زیر، تغییر غلظت مولی فراورده را برای واکنش گازی $2SO_3(g) \rightleftharpoons 2SO_2(g) + O_2(g)$ در دو شرایط متفاوت نشان می‌دهد. کدام مورد درست است؟ (T: دما است.)



۱) $T_2 > T_1$ و در فشار ثابت، با افزایش مقدار SO_2، مقدار SO_3 بیشتر می‌شود.

۲) $T_2 > T_1$ و در فشار ثابت، مقدار SO_3 در دمای T_2 کم‌تر از دمای T_1 است.

۳) $T_2 < T_1$ و نسبت ثابت تعادل (K) در دمای T_2 به مقدار K در دمای T_1، بزرگ‌تر از یک است.

۴) $T_2 < T_1$ و در دمای T_1، با افزایش مقدار مواد واکنش‌دهنده، مقدار ثابت تعادل افزایش می‌یابد.

مشاوره این سؤال داره با اصل لوشاتلیه بازی می‌کنه! حواست باشه که واکنش گرماده‌ست. نمودار رو هم خوب نگاه کن. هر چی دما بیشتر باشه، غلظت فراورده (SO_3) کم‌تر می‌شه (چون واکنش گرماده‌ست و با افزایش دما، تعادل به سمت چپ جابه‌جا می‌شه). یه نکتهٔ مهم دیگه هم اینه که ثابت تعادل (K) فقط با دما عوض می‌شه، نه با غلظت مواد!

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

- **اصل لوشاتلیه:** اگر به یک سیستم در حال تعادل، تغییری تحمیل شود (مانند تغییر دما، فشار، یا غلظت)، سیستم در جهتی جابه‌جا می‌شود، تا اثر این تغییر را به حداقل برساند.
- **ثابت تعادل (K):** نسبت غلظت فراورده‌ها به واکنش‌دهنده‌ها در حالت تعادل (با ضرایب استوکیومتری به عنوان توان). ثابت تعادل فقط به دما بستگی دارد.

پاسخ خیلی تشریحی

تحلیل نمودار: نمودار نشان می‌دهد که در یک فشار ثابت، با کاهش دما از T_1 به T_2 (یعنی $T_2 < T_1$)، غلظت تعادلی SO_3 افزایش می‌یابد.

گزینهٔ (۱):

- $T_2 > T_1$ نادرست (با توجه به نمودار و واکنش سؤال).
- با افزایش مقدار SO_2 (طبق اصل لوشاتلیه)، تعادل به سمت راست جابه‌جا شده و مقدار SO_3 بیشتر می‌شود. این بخش درست است.

گزینهٔ (۲):

- $T_2 > T_1$ نادرست (با توجه به نمودار و واکنش سؤال).
- در فشار ثابت، مقدار SO_3 در دمای T_2 بیشتر از دمای T_1 است (طبق نمودار). این بخش نادرست است.

گزینهٔ (۳):

- $T_2 < T_1$ درست (با توجه به نمودار و واکنش سؤال).
- واکنش گرماده است. با افزایش دما (T_2 به T_1)، تعادل به سمت چپ (واکنش‌دهنده‌ها) جابه‌جا می‌شود و مقدار K کاهش می‌یابد؛ پس نسبت K در دمای T_2 به K در دمای T_1، بزرگ‌تر از یک است. در کل، این گزینه درست است.

گزینهٔ (۴):

- $T_2 < T_1$ درست (با توجه به نمودار و واکنش سؤال).
- ثابت تعادل (K) فقط به دما بستگی دارد و با تغییر غلظت مواد واکنش‌دهنده یا فراورده، تغییر نمی‌کند. این بخش نادرست است.

نکته برای واکنش‌های گرماگیر، با افزایش دما، مقدار ثابت تعادل (K) افزایش می‌یابد و برای واکنش‌های گرماده، با افزایش دما، مقدار K کاهش می‌یابد.

گول نخوری حواست باشه که واکنش گرماده است، نه گرماگیر! اگه گرماگیر بود، جهت جابه‌جایی تعادل با دما برعکس می‌شد. یه دام دیگه هم اینه که ثابت تعادل فقط با دما عوض می‌شه، نه با چیز دیگه‌ای! صورت سؤال رو هم با دقت بخون!

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۰۲ کدام مادهٔ گازی، به طور عمده توسط مبدل کاتالیستی در خودروها کاهش نمی‌یابد؟

۱) CO

۲) NO

۳) C_xH_y

۴) CO_2

مشاوره این سؤال دربارهٔ اون دستگاهیه که توی اگزوز ماشین‌هاست و دودهای سمی رو تا حدی بی‌خطر می‌کنه. بهش می‌گن مبدل کاتالیستی. این دستگاه، یه سری گازهای خیلی بد رو می‌گیره و تبدیلشون می‌کنه به گازهای کم‌خطرتر. اما یه چیزی هست که این دستگاه نمی‌تونه کاریش بکنه، اونم گاز کربن دی‌اکسیده (CO_2)! چون CO_2 خودش محصول نهایی سوختنه و دیگه نمی‌شه بیشتر از این اکسیدش کرد.

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

- **مبدل کاتالیستی**: قطعه‌ای در مسیر خروجی اگزوز خودرو که با استفاده از واکنش‌های شیمیایی (معمولاً با کمک فلزات واسطه مثل پلاتین، پالادیم و رودیم به عنوان کاتالیزگر)، گازهای سمی خروجی از موتور را به گازهای کم‌خطرتر تبدیل می‌کند.
- **واکنش‌های اصلی در مبدل کاتالیستی**:
- اکسایش کربن مونوکسید:

$$2CO + O_2 \rightarrow 2CO_2$$

- کاهش اکسیدهای نیتروژن:

$$2NO \rightarrow O_2 + N_2$$

- اکسایش هیدروکربن‌های نسوخته:

$$C_xH_y + (x + \frac{y}{4})O_2 \rightarrow xCO_2 + \frac{y}{2}H_2O$$

پاسخ خیلی تشریحی بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): (CO)، کربن مونوکسید (CO) یک گاز سمی است، که در اثر احتراق ناقص سوخت تولید می‌شود. مبدل کاتالیستی، CO را به CO_2 (کربن دی‌اکسید) اکسید می‌کند، که سمیت بسیار کم‌تری دارد.

گزینهٔ (۲): (NO)، نیتروژن مونوکسید (NO) از آلاینده‌های مضر است، که در اثر دمای بالای احتراق در موتور خودرو تولید می‌شوند. مبدل کاتالیستی، NO را به N_2 (نیتروژن) و O_2 (اکسیژن) که گازهای بی‌خطر موجود در هوا هستند، تبدیل می‌کند.

گزینهٔ (۳): (C_xH_y)، هیدروکربن‌های نسوخته (C_xH_y) نیز از محصولات احتراق ناقص سوخت هستند و برای سلامتی مضرند. مبدل کاتالیستی، این هیدروکربن‌ها را به CO_2 (کربن دی‌اکسید) و H_2O (آب) اکسید می‌کند.

گزینهٔ (۴): (CO_2)، کربن دی‌اکسید (CO_2) محصول اصلی و نهایی احتراق کامل سوخت‌های فسیلی است. مبدل کاتالیستی برای کاهش CO_2 طراحی نشده است. CO_2 یک گاز گلخانه‌ای است، اما سمیت مستقیم ندارد (برخلاف CO یا NO).

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۰۳ نسبت مجموع شمار ذرات زیراتمی در $^{23}_{11}Na$ به مجموع شمار ذرات زیراتمی در $^{20}_{10}Ne$، به تقریب چند برابر مجموع شمار ذرات زیراتمی در $^{3}_{1}H$ است؟

۱) ۰/۲۸

۲) ۰/۳۸

۳) ۰/۵۶

۴) ۱/۱۳

مشاوره این سؤال خیلی ساده‌س! فقط کافیه تعداد پروتون، نوترون و الکترون هر کدوم از این اتم‌ها رو دربیاری، جمع بزنی، بعد نسبت بگیری. عدد اتمی که پایینه، همون تعداد پروتون و الکترونه. عدد جرمی (بالایی) رو هم که منهای عدد اتمی کنی، تعداد نوترون‌ها درمیاد.

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

- **عدد اتمی (Z)**: تعداد پروتون‌های موجود در هستهٔ یک اتم.
- **عدد جرمی (A)**: مجموع تعداد پروتون‌ها و نوترون‌های موجود در هستهٔ یک اتم.
- **ایزوتوپ**: اتم‌های یک عنصر که عدد اتمی یکسان ولی عدد جرمی متفاوت دارند (یعنی تعداد نوترون‌هاشون فرق می‌کنه).

ذرات زیراتمی:

- **پروتون (p)**: بار مثبت، جرم نسبی ۱، در هسته قرار دارد.
- **نوترون (n)**: بدون بار، جرم نسبی ۱، در هسته قرار دارد.
- **الکترون (e)**: بار منفی، جرم نسبی بسیار ناچیز (تقریباً صفر)، در اطراف هسته قرار دارد.

پاسخ خیلی تشریحی

۱) **محاسبهٔ تعداد ذرات زیراتمی برای هر اتم:**

- $^{23}_{11}Na$:
- پروتون: ۱۱
- الکترون: ۱۱ (چون اتم خنثی است.)
- نوترون: $23-11=12$
- مجموع: $12+11+11=34$
- $^{20}_{10}Ne$:
- پروتون: ۱۰
- الکترون: ۱۰
- نوترون: $20-10=10$
- مجموع: $10+10+10=30$
- $^{3}_{1}H$:
- پروتون: ۱
- الکترون: ۱
- نوترون: $3-1=2$
- مجموع: $2+1+1=4$

۲) **محاسبهٔ نسبت‌ها:**

- نسبت مجموع ذرات زیراتمی Na به Ne: $\frac{34}{30}$
- تقسیم بر مجموع ذرات زیراتمی $^{3}_{1}H$: $\frac{(\frac{34}{30})}{4}=\frac{34}{120}=\frac{17}{60}\simeq 0/28$

نکته در اتم‌های خنثی، تعداد پروتون‌ها و الکترون‌ها برابر است.

گول نخوری حواست باشه که سؤال گفته «نسبت» و بعدش گفته «چند برابر»! یعنی باید دو تا نسبت رو حساب کنی و تقسیم کنی، نه این‌که فقط یه نسبت بگیری!

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۰۴ اگر بیرونی‌ترین زیرلایه در آرایش الکترونی یون پایدار عنصر Y، $3d^{10}$ باشد، کدام مورد دربارهٔ Y، به یقین نادرست است؟

۱) فلزی است که در واکنش با اکسیژن، ترکیبی یونی با فرمول YO ایجاد می‌کند.

۲) عنصری از گروه ۱۱ جدول تناوبی است، که رسانایی الکتریکی بالایی دارد.

۳) فلزی واسطه است که در لایهٔ ظرفیت اتم آن، ۲ الکترون با $l=0$ و ۱۰ الکترون با $l=2$ وجود دارد.

۴) فلزی از دورهٔ سوم که در واکنش با کلر، ترکیبی با فرمول YCl_3 تشکیل می‌دهد و کاتیونی با بار ۳+ دارد.

مشاوره این تست‌ها که آرایش الکترونی می‌دن و یه چیزی در مورد عنصر می‌پرسن، خیلی وقتا با یه کم دقت حل می‌شن! کافیه آرایش الکترونی رو بنویسی و ببینی عنصر کجای جدول می‌افته. بعدش، خواص اون گروه و دوره رو مرور کنی. این‌جا هم گول $3d^{10}$ رو نخور! سریع نگو خب حتماً پر شده و فلان ... یه کم به گزینه‌ها دقت کن، تناقض‌هاشون رو پیدا می‌کنی!

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

برای تعیین موقعیت یک عنصر در جدول تناوبی از روی آرایش الکترونی، ابتدا باید به آخرین زیرلایهٔ پرشده توجه کرد. اگر آخرین زیرلایه s یا p باشد، عنصر به ترتیب در گروه‌های ۱ و ۲ (برای s) یا گروه‌های ۱۳ تا ۱۸ (برای p) قرار می‌گیرد. شمارهٔ دوره نیز با عدد کوانتومی اصلی (n) آخرین زیرلایه برابر است. اگر آخرین زیرلایه d باشد، عنصر جزء فلزات واسطه است و در دورهٔ چهارم به بعد قرار می‌گیرد. برای تعیین گروه فلزات واسطه، باید به تعداد الکترون‌های $(n-1)d$ و ns توجه کرد.

پاسخ خیلی تشریحی

با توجه به این‌که بیرونی‌ترین زیرلایه در آرایش الکترونی یون پایدار عنصر Y، $3d^{10}$ است، می‌توان نتیجه گرفت که اتم خنثی این عنصر، احتمالاً دارای زیرلایه‌های 4s و 3d است (مانند Zn و Cu) یا این‌که الکترونی در زیرلایهٔ 4p نیز دارد (مانند Ga). در هر صورت، این عنصر نمی‌تواند در دورهٔ سوم قرار داشته باشد، زیرا عناصر دورهٔ سوم، حداکثر دارای زیرلایه‌های 3s و 3p هستند.

گزینهٔ (۱): می‌تواند درست باشد. Zn و Cu می‌توانند ترکیباتی با فرمول YO تشکیل دهند.

گزینهٔ (۲): می‌تواند درست باشد. Cu در گروه ۱۱ قرار دارد.

گزینهٔ (۳): می‌تواند درست باشد. Zn دارای ۲ الکترون با $l=0$ (در 4s) و ۱۰ الکترون با $l=2$ (در 3d) است.

گزینهٔ (۴): قطعاً نادرست است. عنصر Y نمی‌تواند در دورهٔ سوم باشد و ترکیب YCl_3 با بار ۳+ برای عنصری با آرایش $3d^{10}$ محتمل نیست.

گول نخوری

ممکنه با دیدن 3d سریع بگی خب، لابد زیرلایهٔ d پر شده، پس عنصر واسطه‌ست و تمام! اما حواست باشه که ممکنه بعد از 3d، زیرلایهٔ 4p هم الکترون داشته باشه (مثل Ga ۳۱)؛ پس یه کم بادقت‌تر گزینه‌ها رو بررسی کن!

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۰۵ دربارهٔ آرایش الکترونی عنصرها، کدام مورد نادرست است؟

۱) در آرایش الکترونی فشرده، می‌توان الکترون‌های لایهٔ ظرفیت همهٔ عنصرهای جدول تناوبی را مشاهده کرد.

۲) برای نوشتن آرایش الکترونی فشردهٔ عناصر واسطه، ابتدا نماد شیمیایی گاز نجیبِ قبل از عنصر را نوشته، سپس بقیهٔ الکترون‌ها را در زیرلایه‌ها قرار می‌دهیم.

۳) در عنصرهای دستهٔ f، زیرلایهٔ f در حال پرشدن است و این زیرلایه، دو لایه پایین‌تر از لایهٔ ظرفیت قرار دارد.

۴) آرایش الکترونی فشردهٔ همهٔ عناصر یک دوره، با نماد شیمیایی گاز نجیب هم‌دوره آغاز می‌شود.

مشاوره سؤال‌های آرایش الکترونی فشرده، یه کم نکته‌بازی دارن! باید حواست به تفاوت‌های عناصر اصلی، واسطه و دستهٔ d و f باشه. این‌جا هم کلمهٔ «هم‌دوره» کلید ماجراست!

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box آرایش الکترونی فشرده، روشی مختصر برای نمایش آرایش الکترونی اتم‌هاست. در این روش، ابتدا نماد شیمیایی گاز نجیبِ دورهٔ قبل از عنصر نوشته شده، و سپس الکترون‌های باقی‌مانده به ترتیب افزایش انرژی زیرلایه‌ها (مطابق قاعدهٔ آفبا) اضافه می‌شوند. برای عناصر واسطه، ابتدا زیرلایهٔ ns و سپس زیرلایهٔ $(n-1)d$ پر می‌شود. برای عناصر دستهٔ f، زیرلایهٔ $(n-2)f$ در حال پرشدن است، در حالی که لایهٔ ظرفیت هم‌چنان شامل زیرلایه‌های ns و (در صورت وجود) np می‌شود.

پاسخ خیلی تشریحی بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): درست است. در آرایش الکترونی فشرده، الکترون‌های لایه‌ی ظرفیت به وضوح قابل مشاهده هستند. برای مثال، در آرایش $[Ar]\,3d^5\,4s^2$، الکترون‌های ۴s و ۳d لایهٔ ظرفیت را تشکیل می‌دهند و به طور صریح نمایش داده شده‌اند.

گزینهٔ (۲): درست است. این روش استاندارد نوشتن آرایش الکترونی فشردهٔ عناصر واسطه است. ابتدا آرایش گاز نجیب دورهٔ قبل نوشته‌شده، و سپس الکترون‌های ns و $(n-1)d$ نوشته می‌شوند.

گزینهٔ (۳): درست است. در عناصر دستهٔ f (یعنی لانتانیدها و اکتینیدها)، زیرلایهٔ $(n-2)f$ در حال پرشدن است، در حالی که لایهٔ ظرفیت هم‌چنان شامل ns و (در صورت وجود) np می‌شود.

گزینهٔ (۴): نادرست است. درسته که آرایش الکترونی فشرده عنصرهای یک دوره همگی با نماد شیمیایی یک گاز نجیب نوشته می‌شود، ولی آرایش الکترونی فشرده با نماد شیمیایی گاز نجیب دورهٔ قبل آغاز می‌شود، نه گاز نجیب هم‌دورهٔ آن‌ها. به عنوان مثال، آرایش الکترونی فشردهٔ سدیم (Na) که در ابتدای دورهٔ سوم قرار دارد، به صورت $[Ne]\,3s^1$ نوشته می‌شود، نه با گاز نجیب هم‌دوره‌اش یعنی آرگون.

گول نخوری ممکنه قاطی کنی که همهٔ عناصر یه دوره، آرایش فشردشون با یک گاز نجیب شروع می‌شه. ولی حواست باشه! آرایش فشرده‌شون با گاز نجیب دورهٔ قبلی شروع می‌شه! این «هم‌دوره» که اضافه شده، دقیقاً برای اینه که تو رو به اشتباه بندازه!

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir