

آزمون آزمایشی ۲۲ خرداد ۱۴۰۵

گروه آزمایشی علوم ریاضی

ویژه داوطلبان آزمون سراسری ۱۴۰۵

A

دفترچه شماره ۱

وقت پیشنهادی	تا شماره	از شماره	تعداد پرسش	مواد امتحانی
۷۰ دقیقه	۴۰	۱	۴۰	ریاضیات
مدت پاسخ‌گویی: ۷۰ دقیقه		تعداد کل پرسش‌ها: ۴۰		

دفترچه پاسخ تشریحی



داوطلب گرامی، جهت استفاده از خدمات اختصاصی خود مانند کارنامه هوشمند بعد از آزمون، بانک سؤال گزینه دو، آزمونک‌ها، رفع اشکال هوشمند و ... با استفاده از نام کاربری و رمز عبور وارد سایت gozine2.ir شوید. در ثبت نام اینترنتی نام کاربری کد ملی شماست و رمز عبور توسط خودتان تعیین شده است. در ثبت نام انفرادی و مدرسه‌ای، نام کاربری و رمز عبور خود را از مدرسه یا نمایندگی شهر خود دریافت نمایید.

پاسخ تشریحی تصویری



۱- اگر $a_n = 3 \times 2^{n-1}$ و $P = (a_1 + a_2) + (a_4 + a_5) + (a_7 + a_8) + \dots + (a_{28} + a_{29})$ ، حاصل $\log_2 \left(\frac{P}{9} + 1 \right)$ کدام است؟

- (۱) ۳۰ (۲) ۲۹ (۳) ۲۸ (۴) ۲۷

۲- اگر $3 = x^2 - 2x + \frac{2}{(x-1)^2}$ باشد، حاصل $A = \frac{(x-1)^4}{2} + \frac{2}{(x-1)^4}$ کدام است؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۸ (۳) ۶ (۴) ۴

۳- در یک کلاس ۴۰ نفری، ۲۶ نفر علاقه‌مند به علم آمار و ۲۰ نفر علاقه‌مند به علم احتمال هستند. که در این میان ۱۲ نفر به هیچ کدام علاقه ندارند. اگر علاقه‌مندان را با مجموعه A و علاقه‌مندان به علم آمار را با مجموعه B نمایش دهیم، مجموعه

$$(B - A') \times (B - A)'$$

- (۱) ۵۴۰ (۲) ۶۳۰ (۳) ۶۴۸ (۴) ۵۷۶

۴- اگر k عدد طبیعی یک‌رقمی بوده و گزاره $(\exists x \in \mathbb{Z}; x^2 + kx + \frac{9}{4} = 0) \wedge (\forall x > 0; x + \frac{1}{x} \geq \frac{k}{4})$ درست باشد، احتمال اینکه k عددی

مضرب ۳ باشد، چقدر است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{1}{5}$

۵- اگر a و b دو ریشه متمایز و غیر صفر معادله $ax^2 - 3x + b = 0$ باشند، حاصل $a + \frac{1}{b}$ کدام است؟

- (۱) $\pm \frac{4}{3}$ (۲) $\pm \frac{5}{2}$ (۳) $\pm \frac{3}{2}$ (۴) صفر

۶- فرض کنید، k بزرگ‌ترین عدد صحیح باشد که نمودار سهمی $y = (m+1)x^2 - 2x + 6 - m$ به ازای $m = k$ حداکثر از سه ناحیه دستگاه مختصات عبور کند. عرض رأس سهمی وقتی $m = k$ کدام است؟

- (۱) $\frac{5}{6}$ (۲) $-\frac{1}{7}$ (۳) ۵ (۴) $\frac{1}{7}$

۷- مجموع جواب‌های معادله $\sqrt{x+5} = |x-1| - 6$ کدام است؟

- (۱) ۱۵ (۲) -۹ (۳) -۳ (۴) ۶

۸- از نقطه $A(0, a)$ دو عمود بر خطوط $y = -3x$ و $x = 2y$ رسم نموده‌ایم. اگر فاصله دو پای عمود از یکدیگر برابر $7\sqrt{2}$ باشد، مقدار a کدام است؟

- (۱) ± 8 (۲) ± 9 (۳) ± 10 (۴) ± 12

۹- تابع $f(x) = 3x - \sqrt{x} - 3$ با دامنه $[1, +\infty)$ مفروض است. اگر f و f^{-1} در نقطه‌ای به طول a متقاطع باشند، مقدار $f(4a)$ کدام است؟

- (۱) ۷ (۲) ۲۱ (۳) ۴۱ (۴) ۳۶

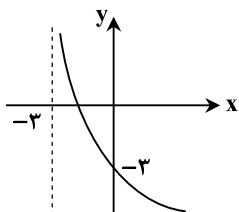
۱۰- نقطه $A(1, -2)$ روی تابع $y = af\left(\frac{x}{b}\right)$ با نقطه $A'(2, -1)$ روی تابع $y = 2 - f(-x)$ متناظر است. دامنه تابع $y = \sqrt{\frac{2a-x}{x-2b}}$ شامل چند

عدد صحیح است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

محل انجام محاسبات:

۱۱- نمودار تابع $f(x) = a - \log_3(bx + c)$ به صورت مقابل است. مقدار $f^{-1}(0)$ کدام است؟



(۱) $-\frac{8}{3}$

(۲) $-\frac{7}{3}$

(۳) $-\frac{25}{9}$

(۴) $-\frac{26}{9}$

۱۲- اگر انتهای کمان روبه‌رو به زاویه θ در ناحیه چهارم بوده و $\tan \theta - 2 \cot \theta = 2$ ، حاصل $P = \frac{\sin \theta - \cos \theta}{\sin \theta + \cos \theta}$ کدام است؟

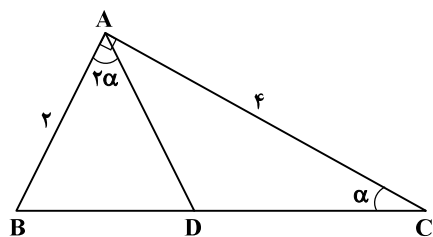
(۴) $2 + 2\sqrt{3}$

(۳) $-3 + 2\sqrt{3}$

(۲) $3 - 2\sqrt{3}$

(۱) $-3 - 2\sqrt{3}$

۱۳- در مثلث قائم‌الزاویه شکل مقابل طول پاره خط BD کدام است؟



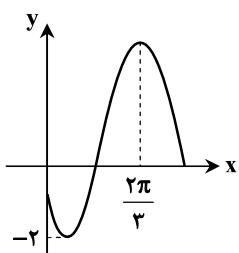
(۱) $\frac{20}{3\sqrt{5}}$

(۲) $\frac{4}{\sqrt{5}}$

(۳) $\frac{6}{\sqrt{5}}$

(۴) $\frac{10}{3\sqrt{5}}$

۱۴- قسمتی از نمودار تابع $f(x) = 1 - a \cos(bx + \frac{\pi}{3})$ به صورت مقابل است. مقدار $a - b$ کدام است؟



(۱) ۱

(۲) -۱

(۳) -۵

(۴) ۵

۱۵- معادله $\sin^2 2x + \cos^2 x = 1$ در بازه $(0, 2\pi)$ چند جواب دارد؟

(۴) ۴

(۳) ۳

(۲) ۵

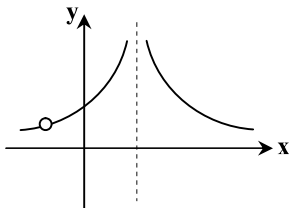
(۱) ۶

محل انجام محاسبات:

۱۶- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-\sqrt[3]{\cos x}}}{|x|}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3\sqrt{2}}$ (۲) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (۳) $\frac{1}{\sqrt{6}}$ (۴) $\frac{1}{2\sqrt{3}}$

۱۷- نمودار تابع $f(x) = \frac{2x+b}{x^3+ax+2}$ به صورت مقابل است. حاصل $a-b$ کدام است؟



- (۱) ۱
(۲) -۷
(۳) ۷
(۴) -۱

۱۸- تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2+ax+b}{x^3-1} & x \neq 1 \\ bx+c & x = 1 \end{cases}$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته است. اگر $f(2)$ برابر صفر باشد، مقدار c کدام است؟

- (۱) $-\frac{14}{3}$ (۲) $-\frac{10}{3}$ (۳) $\frac{8}{3}$ (۴) $\frac{4}{3}$

۱۹- خط $2x+3y+4=0$ در نقطه‌ای با طول یک بر نمودار تابع f مماس است. حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(\sin x) - f(1)}{(2x-\pi)^2}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{6}$ (۲) $\frac{1}{12}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{3}$

۲۰- آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}$ در نقطه $x=1$ چقدر با آهنگ تغییر متوسط آن در بازه $[0,9]$ اختلاف دارد؟

- (۱) صفر (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) $\frac{2}{3}$

۲۱- اگر m و n به ترتیب تعداد نقاط بحرانی و اکسترمم نسبی تابع $y = 3\sqrt[3]{x} + |x-1|$ باشند، حاصل $2m-n$ کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۲۲- به ازای چند مقدار صحیح k ، معادله $x^3 - 3x^2 - 9x + k = 2$ سه ریشه متمایز حقیقی دارد؟

- (۱) ۳۱ (۲) ۳۰ (۳) ۲۹ (۴) ۲۸

۲۳- اگر A و B دو پیشامد ناتهی و مستقل باشند به طوری که $P(A|B) = 0/6$ و $P(A \cap B) = 0/2$ ، مقدار $P(A \cup B')$ کدام است؟

- (۱) $\frac{4}{5}$ (۲) $\frac{13}{15}$ (۳) $\frac{14}{15}$ (۴) $\frac{2}{3}$

محل انجام محاسبات:

۲۴- اگر انحراف معیار تعدادی داده را به تمام داده‌ها اضافه کنیم، ضریب تغییرات داده‌های جدید $\frac{2}{5}$ ضریب تغییرات داده‌های اولیه می‌شود.

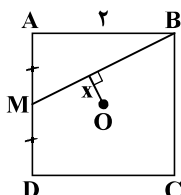
ضریب تغییرات داده‌های جدید کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{5}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{4}{5}$ (۴) $\frac{1}{3}$

۲۵- نقطه O محل هم‌مرسی عمودمنصف‌های مثلث ABC با زوایای حاده است. اگر از A، B و C به ترتیب خطوطی عمود بر AO، BO و CO رسم کنیم، از محل تلاقی دوبه‌دوی این خطوط، مثلثی حاصل می‌شود که نقطه O در این مثلث، محل هم‌مرسی کدام است؟

- (۱) عمودمنصف‌ها (۲) ارتفاع‌ها (۳) نیمسازها (۴) میانه‌ها

۲۶- در شکل زیر، نقطه O مرکز مربعی به ضلع ۲ است. اگر M وسط ضلع مربع باشد، x کدام است؟



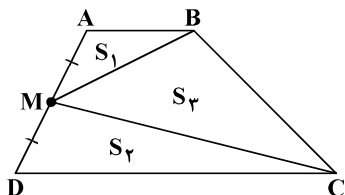
(۱) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

(۲) $\frac{1}{\sqrt{5}}$

(۳) $\frac{1}{\sqrt{6}}$

(۴) $\frac{1}{\sqrt{7}}$

۲۷- در دوزنقه شکل زیر، M وسط ساق AD است. کدام رابطه بین مساحت‌های S_1 ، S_2 و S_3 برقرار است؟



(۱) $S_1 + S_2 = 2S_3$

(۲) $S_3 = \sqrt{S_1 S_2}$

(۳) $S_1 + S_2 = S_3$

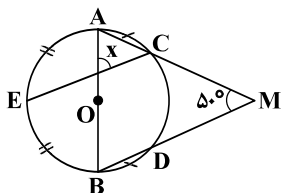
(۴) $S_3 = S_1 S_2$

۲۸- در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC، نقاط M و N به ترتیب روی اضلاع AB و AC طوری قرار گرفته‌اند که $\frac{AM}{AB} = \frac{CN}{AC} = \frac{1}{3}$. طول MN چه

کسری از طول ضلع مثلث است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۲۹- در شکل زیر، AB قطر دایره است. اگر $\widehat{AC} = \widehat{BD}$ و $\widehat{AE} = \widehat{EB}$ باشد، زاویه x کدام است؟



(۱) 50°

(۲) 60°

(۳) 70°

(۴) 80°

محل انجام محاسبات:

۳۰- مربع ABCD به ضلع ۴ مفروض است. این مربع را ابتدا با بردار $\overline{AB}$ انتقال داده و سپس مجانس مربع تصویر را در تجانس به مرکز وسط

AC و نسبت $\frac{1}{4}$ می‌یابیم. مساحت بخشی از مربع ABCD غیرمشتک با مربع حاصل، کدام است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۲ (۳) ۸ (۴) ۱۴

۳۱- اگر $A = \begin{bmatrix} a & a+1 \\ 2b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -a & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ یک ماتریس قطری باشد، مجموع درایه‌های ماتریس A^{1405} کدام است؟

- (۱) 7^{1405} (۲) 2×7^{1404} (۳) -2×7^{1405} (۴) صفر

۳۲- محور تقارن یک سهمی، موازی یکی از محورهای مختصات است و رأس این سهمی واقع بر نیمساز ناحیه اول است. اگر این سهمی محور xها را در نقاطی به طول ۱ و ۵ قطع کند، فاصله کانونی سهمی کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{12}$

۳۳- اگر مساحت مثلث بناشده بر دو بردار $\vec{u}$ و $\vec{v}$ برابر ۶ باشد، حجم متوازی‌السطوح بناشده بر سه بردار $2\vec{u}$ ، $3\vec{v}$ و $\vec{u} \times \vec{v}$ کدام است؟

- (۱) ۵۶۷ (۲) ۷۲۰ (۳) ۸۶۴ (۴) ۹۲۰

۳۴- خط $d: y = 2$ و نقطه $A(5, 4)$ مفروض‌اند. نقاطی از صفحه مختصات که از خط d به فاصله ۱ بوده و از A به فاصله ۳ باشند، رئوس یک چندضلعی‌اند. مساحت این چندضلعی کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{6}$ (۳) $4\sqrt{2}$ (۴) $2\sqrt{6}$

۳۵- چند نقطه با مختصات صحیح روی منحنی نمایش رابطه $x^2 - 2xy - 3x - y + 2 = 0$ وجود دارد که در ربع سوم قرار داشته باشند؟

- (۱) ۳ (۲) ۱ (۳) ۴ (۴) ۲

۳۶- اگر سه رقم ۱، سه رقم ۲ و سه رقم ۳ را به تصادف در خانه‌های یک مربع 3×3 بچینیم، احتمال تشکیل مربع لاتین چقدر است؟

- (۱) $\frac{1}{140}$ (۲) $\frac{1}{160}$ (۳) $\frac{1}{120}$ (۴) $\frac{1}{110}$

۳۷- به چند طریق می‌توان ۸ فقره چک پول یکسان ۱۰۰ هزار تومانی را بین ۶ نفر توزیع کرد به‌طوری‌که دقیقاً به ۳ نفر چک پول نرسد؟

- (۱) ۳۶۰ (۲) ۴۲۰ (۳) ۳۸۰ (۴) ۴۰۰

۳۸- چند عدد چهاررقمی با ارقام ۰ تا ۴ وجود دارد که در آن‌ها ۱۳ ظاهر نمی‌شود؟

- (۱) ۴۳۷ (۲) ۴۳۵ (۳) ۴۳۶ (۴) ۴۳۸

۳۹- مجموع ارقام بزرگ‌ترین عدد سه‌رقمی m که در رابطه $32^{62} + m \equiv 0 \pmod{9}$ صدق می‌کند، کدام است؟

- (۱) ۲۱ (۲) ۱۸ (۳) ۱۹ (۴) ۲۰

۴۰- گراف G یک گراف ۲-منتظم ناهمبند است. اگر $\gamma(G) = 3$ باشد، چند نوع گراف G قابل‌رسم است؟

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

محل انجام محاسبات:

اسامی هیأت علمی آزمون های ویژه داوطلبان کنکور ۱۴۰۵ گروه علوم ریاضی

مدیر گروه	عنوان درس	مسئول درس	طراحان	دستیار مسئول درس
سید امیر محمد سید شاکری	حسابان و ریاضی پایه	علی افضل زاده	حسین شفیع زاده- ایمان اردستانی	عباس سعیدی- وحید جعفری
	هندسه	سعید اکبرزاده	سید محسن میراسلامی- فرهاد فرزانی- سعید اکبرزاده	هادی کاظم نژاد
	ریاضیات گسسته	سعید اکبرزاده	علیرضا شریف خطیبی- سعید اکبرزاده- امیدرضا پورحسینی	فرهاد فرزانی
محمد حسین کشانی	فیزیک	منصور داودوندی	علی نعیمی- بهمن شاهمرادی- احمد رضوانی منصور داودوندی- جمال خم خاجی	ساناز دریگوندی
	شیمی	شهرام شاه پرویزی	ماشاءالله سلیمانی- بهنام ابراهیم پور- مهرداد ملاصالحی- سید صمد صفوی حسین شرانلو- رضا بخشیان- محمدرضا پورجاوید- یاسر راش	حنانه شریف خطیبی

معاون تولید محتوا: علی الفتی

مدیر واحد آموزش تخصصی: محمدرضا محمد هاشمی

خزینہ دو



مؤسسہ آموزشی فرهنگی

آزمون آزمایشی ۲۲ خرداد ۱۴۰۵

گروه آزمایشی علوم ریاضی

ویژه داوطلبان آزمون سراسری ۱۴۰۵

A

دفترچه شماره ۲

وقت پیشنهادی	تا شماره	از شماره	تعداد پرسش	مواد امتحانی
۴۵ دقیقه	۷۵	۴۱	۳۵	فیزیک
۳۰ دقیقه	۱۰۵	۷۶	۳۰	شیمی
مدت پاسخ‌گویی: ۷۵ دقیقه		تعداد کل پرسش‌ها: ۶۵		

دفترچه پاسخ تشریحی



داوطلب گرامی، جهت استفاده از خدمات اختصاصی خود مانند کارنامه هوشمند بعد از آزمون، بانک سؤال گزینه دو، آزمونک‌ها، رفع اشکال هوشمند و ... با استفاده از نام کاربری و رمز عبور وارد سایت gozine2.ir شوید. در ثبت نام اینترنتی نام کاربری کد ملی شماست و رمز عبور توسط خودتان تعیین شده است. در ثبت نام انفرادی و مدرسه‌ای، نام کاربری و رمز عبور خود را از مدرسه یا نمایندگی شهر خود دریافت نمایید.

پاسخ تشریحی تصویری



۴۱- به ترتیب از راست به چپ، کدام کمیت نرده‌ای و کدام کمیت برداری است؟

- (۱) جرم - فشار (۲) نیرو - سرعت (۳) انرژی - فشار (۴) فشار - شتاب

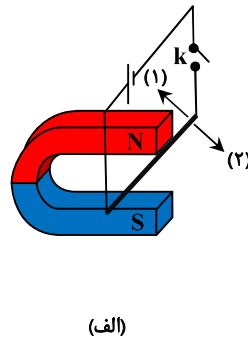
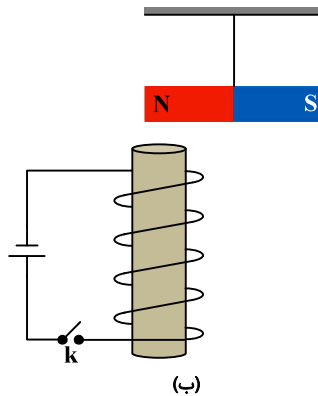
۴۲- کدام یک از جمله‌های زیر درست هستند؟

(الف) پدیده سراب به این علت اتفاق می‌افتد که ضریب شکست هوا به دمای آن بستگی دارد و هرچه دمای هوا بیشتر باشد، ضریب شکست آن بیشتر می‌شود.

(ب) در آزمایش تداخل موج‌های صوتی و تشکیل نقاط S و L (نقاط بی‌صدا و نقاط با صدای بلند)، فاصله نقاط S و L مجاور از یکدیگر با بسامد صوت تناسب وارون دارد.

- (۱) «الف» و «ب» (۲) فقط «الف» (۳) فقط «ب» (۴) هیچ کدام

۴۳- با بستن کلیدها در مدارهای شکل «الف» و «ب»، جهت نیروی مغناطیسی وارد بر سیم راست در شکل «الف» و نوع نیروی مغناطیسی وارد بر آهن‌ربا از طرف سیم‌لوله در شکل «ب»، به ترتیب از راست به چپ مطابق کدام گزینه است؟



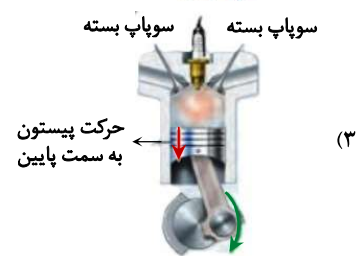
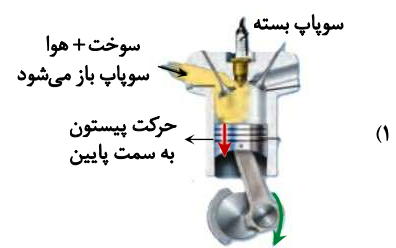
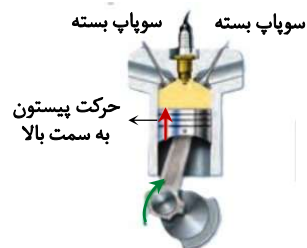
(۱) در جهت (۱)، ربایشی

(۲) در جهت (۱)، رانشی

(۳) در جهت (۲)، ربایشی

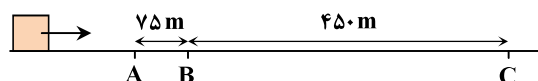
(۴) در جهت (۲)، رانشی

۴۴- در موتور درون‌سوز، کدام شکل مربوط به مرحله ضربه قدرت است؟



۴۵- متحرکی با شتاب ثابت و در یک جهت، روی خط راست حرکت می‌کند. اگر تندی آن در عبور از نقاط A و B به ترتیب $\frac{5}{s} m$ و $\frac{25}{s} m$ باشد،

مدت حرکت متحرک از نقطه B تا نقطه C چند برابر مدت حرکت آن از نقطه A تا نقطه B است؟



- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) $\frac{5}{2}$

محل انجام محاسبات:

۴۶- متحرک A در لحظه $t = 0$ با سرعت $(4 \frac{m}{s}) \vec{i}$ از نقطه $x = 0$ می‌گذرد و با شتاب ثابت $(1 \frac{m}{s^2}) \vec{i}$ به حرکت خود ادامه می‌دهد. متحرک B

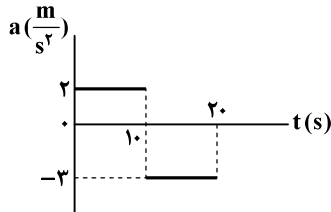
در $t = 2s$ با سرعت $(2 \frac{m}{s}) \vec{i}$ از نقطه $x = 0$ می‌گذرد و با شتاب ثابت $(2 \frac{m}{s^2}) \vec{i}$ به حرکت خود ادامه می‌دهد. در فاصله زمانی $t = 0$ تا

زمانی که متحرک B به متحرک A برسد، بیشترین فاصله آن‌ها از یکدیگر چند متر می‌شود؟

- (۱) ۱۸ (۲) ۲۲ (۳) ۲۴ (۴) ۲۸

۴۷- نمودار شتاب- زمان حرکت متحرکی که روی خط راست حرکت می‌کند، مطابق شکل

است. در ۱۶ ثانیه اول حرکت، شتاب متوسط متحرک چند سانتی‌متر بر مربع ثانیه است؟

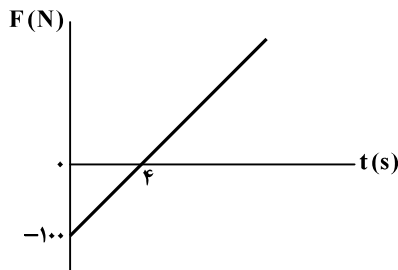


- (۱) ۸
(۲) ۰/۵
(۳) ۵
(۴) ۱۲/۵

۴۸- از بالای یک برج، گلوله‌های کوچکی پشت سر هم و با فاصله‌های زمانی $1/5$ ثانیه رها می‌شوند. با چشم‌پوشی از مقاومت هوا، در لحظه رها

شدن گلوله چهارم، فاصله گلوله اول و سوم که هنوز به زمین نرسیده‌اند، چند متر است؟ ($g = 10 \frac{m}{s^2}$)

- (۱) ۶۰ (۲) ۹۰ (۳) ۱۲۰ (۴) ۱۵۰



۴۹- متحرکی به جرم ۲۰ کیلوگرم روی محور x حرکت می‌کند و سرعت آن در لحظه $t = 2s$

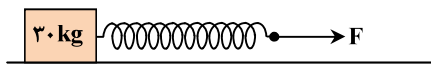
برابر $(-4 \frac{m}{s}) \vec{i}$ است. اگر متحرک تحت تأثیر نیروی خالص افقی F باشد و نمودار نیرو-

زمان به شکل مقابل باشد، تندی متحرک در لحظه $t = 10s$ چند متر بر ثانیه می‌شود؟

- (۱) ۱۲
(۲) ۲۰
(۳) ۲۴
(۴) ۱۶

۵۰- در شکل مقابل، طول عادی فنر ۵۰ cm و اصطکاک وزنه با سطح افقی و جرم فنر ناچیز است. اگر فنر را با نیروی افقی F بکشیم، در حالی که

وزنه با شتاب ثابت $4 \frac{m}{s^2}$ به طرف راست کشیده شود، طول فنر ۵۱/۵ cm می‌شود. ثابت فنر چند نیوتون بر متر است؟



- (۱) ۴۰۰۰
(۲) ۱۲۰۰۰
(۳) ۸۰۰۰
(۴) ۶۰۰۰

۵۱- در شکل مقابل، وزنه‌ای به جرم ۵۰ کیلوگرم توسط یک طناب با جرم ناچیز از حال سکون و با شتاب ثابت، در راستای

قائم پایین آورده می‌شود و پس از ۸ متر حرکت، تندی آن به $4 \frac{m}{s}$ می‌رسد. در لحظه‌ای که تندی وزنه به $4 \frac{m}{s}$ رسیده

است، ناگهان نیروی کشش طناب (F) را دو برابر می‌کنیم و از این به بعد در همین مقدار ثابت نگاه می‌داریم. از لحظه

شروع حرکت تا تغییر جهت حرکت، وزنه چند متر مسافت طی می‌کند؟ ($g = 10 \frac{m}{s^2}$)



- (۱) ۹
(۲) ۱۱
(۳) ۱۲
(۴) ۱۴

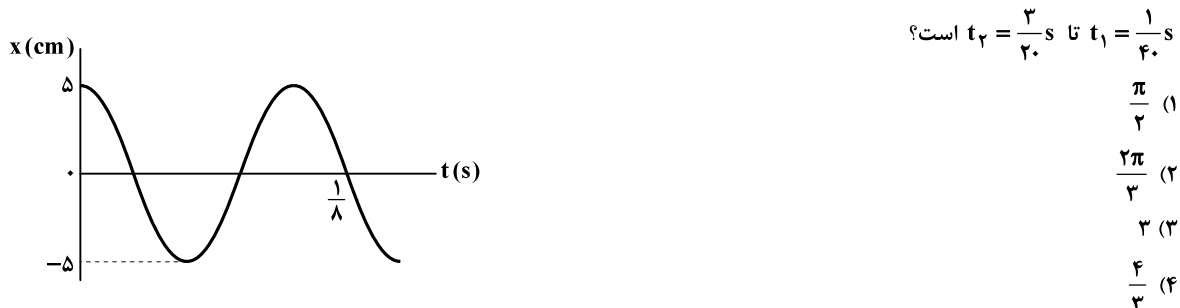
محل انجام محاسبات:

۵۲- ماهواره‌ای به جرم ۷۲۰ کیلوگرم به دور زمین می‌گردد و فاصله آن از سطح زمین سه برابر شعاع کره زمین است. بزرگی نیروی مرکز‌گرایی

وارد بر ماهواره چند نیوتون است؟ (بزرگی شتاب گرانشی در سطح زمین $g = 10 \frac{m}{s^2}$ است.)

- (۱) ۸۰۰ (۲) ۳۶۰ (۳) ۲۴۰ (۴) ۴۵۰

۵۳- نمودار مکان- زمان یک حرکت هماهنگ ساده به شکل مقابل است. بیشینه تندی متحرک چند برابر تندی متوسط آن در بازه زمانی



۵۴- وزنه‌ای به جرم ۸۰۰ گرم به انتهای یک فنر با جرم ناچیز بسته شده و روی سطح افقی بدون اصطکاک، حرکت هماهنگ ساده انجام می‌دهد.

اگر بسامد نوسان ۱۰ هرتز و نمودارهای انرژی جنبشی و پتانسیل برحسب مکان نوسانگر به صورت شکل زیر باشد، فاصله دو انتهای مسیر از یکدیگر، چند سانتی‌متر است؟ ($\pi^2 = 10$)



۵۵- یک نوسان‌ساز، موج عرضی با بسامد ۳۰ هرتز در یک تار کشیده شده منتشر می‌کند و فاصله میان هر قله (برآمدگی) و دره (فرورفتگی) مجاور آن در هر لحظه ۴۰ سانتی‌متر است. اگر نیروی کشش تار را ۴ برابر کنیم و موج عرضی با بسامد ۴۰ هرتز در تار منتشر شود، طول موج

آن چند سانتی‌متر می‌شود؟

- (۱) ۲۴۰ (۲) ۱۸۰ (۳) ۱۲۰ (۴) ۹۰

۵۶- مطابق شکل، یک پرتو نور از محیط (۱) به محیط (۲) می‌رود. طول موج نور در محیط (۱) چند برابر طول موج نور در محیط (۲) است؟



۵۷- در یک تار دوسر بسته موج ایستاده با ۵ گره تشکیل شده است و بسامد هر نقطه از تار برابر f است. در حالتی که در تار، موج ایستاده

تشکیل شود و طول تار $\frac{3}{4}$ برابر طول موج باشد، بسامد نوسان تار برابر f' است. نسبت $\frac{f}{f'}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{5}{2}$ (۲) $\frac{4}{3}$ (۳) $\frac{5}{3}$ (۴) ۲

محل انجام محاسبات:

۵۸- اگر الکترون اتم هیدروژن از مدار $n_1 = 2$ به مدار $n_2 = 6$ گذاری انجام دهد، چند مورد از جمله‌های زیر در مورد آن درست است؟

$$(E_R = 13/6 \text{ eV})$$

(الف) انرژی آن $\frac{1}{9}$ برابر می‌شود.

(ب) شعاع مدار آن ۹ برابر می‌شود.

(پ) انرژی آن $\frac{2}{9} E_R$ زیاد می‌شود.

(۴) صفر

(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) ۱

۵۹- نمودار بیشینه انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها بر حسب بسامد پرتو فرودی بر سطح یک فلز مطابق شکل است. اگر در آزمایش فوتوالکتریک، پرتوی با طول موج ۱۵۰ نانومتر بر این فلز بتابد، بیشینه انرژی جنبشی فوتوالکترون‌های خروجی از فلز چند ژول می‌شود؟

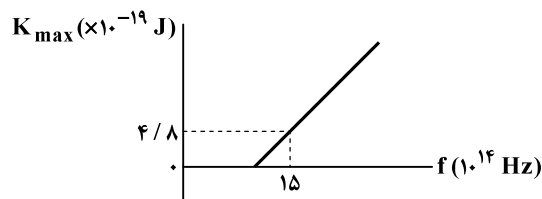
$$(e = 1/6 \times 10^{-19} \text{ C}, h = 4 \times 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{s}, c = 3 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}})$$

$$(1) 8 \times 10^{-19}$$

$$(2) 3/2 \times 10^{-19}$$

$$(3) 9/6 \times 10^{-19}$$

$$(4) 6 \times 10^{-19}$$



۶۰- $\frac{3}{4}$ هسته‌های موجود در یک نمونه پرتوزا در ۶۰ روز اول واپاشیده‌اند. چند روز دیگر باید بگذرد تا فقط $\frac{1}{128}$ هسته‌های اولیه باقی بماند؟

$$(4) 210$$

$$(3) 180$$

$$(2) 150$$

$$(1) 120$$

۶۱- یک هسته پرتوزا (هسته مادر) با گسیل تعدادی ذره آلفا و تعدادی ذره بتا به هسته‌ای تبدیل می‌شود که عدد جرمی آن ۸ واحد با هسته مادر اختلاف دارد و عدد اتمی آن از هسته مادر، ۱ واحد بیشتر است. با فرض آنکه همه ذره‌های بتای گسیل شده، بار همنام داشته باشند، تعداد و نوع ذره‌های بتای گسیل شده کدام است؟

(۴) ۵، الکترون

(۳) ۵، پوزیترون

(۲) ۳، پوزیترون

(۱) ۳، الکترون

۶۲- سه گوی رسانای مشابه دارای بارهای الکتریکی $q_1 = q$ ، $q_2 = 1/25q$ و $q_3 = -4/5q$ هستند. آن‌ها را مطابق شکل با یکدیگر تماس می‌دهیم و سپس جدا می‌کنیم. پس از تماس، بار الکتریکی هر گوی به $+3 \mu\text{C}$ می‌رسد. در اثر این تماس، گوی با بار q_2 چند الکترون و

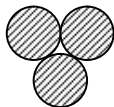
$$\text{چگونه مبادله کرده است؟ } (e = 1/6 \times 10^{-19} \text{ C})$$

$$(1) 1/25 \times 10^{13} \text{ الکترون از دست داده است.}$$

$$(2) 5 \times 10^{13} \text{ الکترون از دست داده است.}$$

$$(3) 1/25 \times 10^{12} \text{ الکترون دریافت کرده است.}$$

$$(4) 5 \times 10^{12} \text{ الکترون دریافت کرده است.}$$



۶۳- بارهای الکتریکی $q_1 = +5 \text{ nC}$ و q_2 روی محور x به ترتیب در مکان‌های $x_1 = 10 \text{ cm}$ و $x_2 = 20 \text{ cm}$ قرار دارند. اگر میدان الکتریکی

$$\text{خالص آن‌ها در مبدأ مختصات } (x=0) \text{ برابر با } \vec{E} = (4500 \frac{\text{N}}{\text{C}}) \vec{i} \text{ باشد، بار الکتریکی } q_2 \text{ چند نانوکولن است؟ } (k = 9 \times 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2})$$

$$(4) -40$$

$$(3) -20$$

$$(2) +40$$

$$(1) +20$$

۶۴- دو خازن با ظرفیت‌های $C_1 = 1 \mu\text{F}$ و $C_2 = 2 \mu\text{F}$ دارای بار الکتریکی برابرند. اگر انرژی الکتریکی یکی به اندازه $16 \mu\text{J}$ از دیگری بیشتر باشد، اختلاف پتانسیل خازن با ظرفیت C_2 چند ولت است؟

$$(4) 4$$

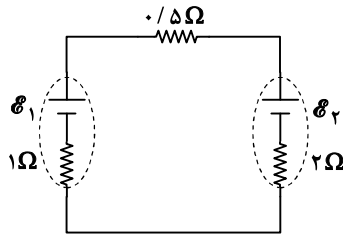
$$(3) 8$$

$$(2) 12$$

$$(1) 16$$

محل انجام محاسبات:

۶۵- در مدار شکل زیر، توان تولیدی باتری (۱) به اندازه 24 W بیشتر از توان ورودی باتری (۲) است ($\mathcal{E}_1 > \mathcal{E}_2$). توان مصرفی در مقاومت 0.5Ω چند وات است؟



(۱) ۳۲

(۲) ۱۶

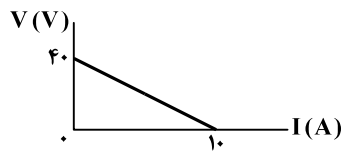
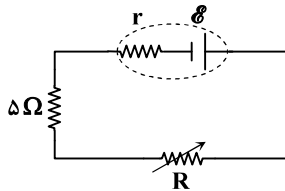
(۳) ۸

(۴) ۴

۶۶- قطر مقطع سیمی 2 mm است. چه طولی از این سیم مقاومتی برابر 4Ω دارد؟ ($\pi = 3/14$ و $\rho = 6/28 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$)

(۴) 2000 m (۳) 20 m (۲) 200 km (۱) 0.2 km

۶۷- نمودار اختلاف پتانسیل دو سر باتری مدار شکل مقابل بر حسب جریان عبوری از آن، مطابق شکل زیر است. در لحظه‌ای که مقاومت رئوس تا $R = 1\Omega$ است، جریان عبوری در مدار چند آمپر است؟



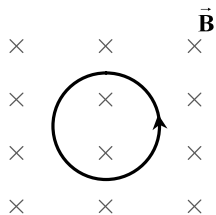
(۱) ۱

(۲) ۲

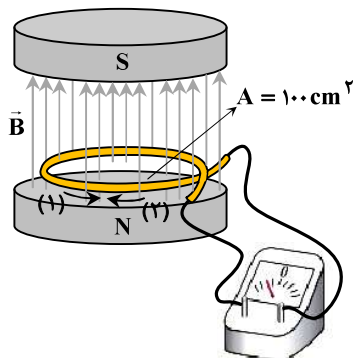
(۳) ۳

(۴) ۴

۶۸- مطابق شکل، الکترونی در میدان مغناطیسی یکنواخت $B = 5/4\text{ G}$ با تندی ثابت، بر مسیر دایره‌ای حرکت می‌کند. الکترون در هر ثانیه چند دور روی مسیر دایره‌ای می‌چرخد؟ ($\pi = 3$ ، $e = 1/6 \times 10^{-19}\text{ C}$ و $m_e = 9 \times 10^{-31}\text{ kg}$)

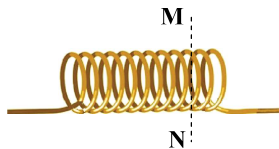
(۱) $6/25 \times 10^8$ (۲) $1/6 \times 10^8$ (۳) $6/25 \times 10^7$ (۴) $1/6 \times 10^7$

۶۹- میدان مغناطیسی بین قطب‌های آهن‌ربای الکتریکی شکل روبه‌رو که بر سطح حلقه عمود است، با زمان تغییر می‌کند و در مدت 0.4 s از 8 T رو به بالا به 4 T رو به پایین تغییر می‌کند. اگر مقاومت و مساحت سطح حلقه به ترتیب 0.5Ω و 100 cm^2 باشد، جریان القایی متوسط در حلقه چند آمپر و در کدام جهت است؟

(۱) 0.2 A ، جهت (۱)(۲) 0.6 A ، جهت (۱)(۳) 0.2 A ، جهت (۲)(۴) 0.6 A ، جهت (۲)

محل انجام محاسبات:

۷۰- سیم لوله مقابل شامل ۱۰۰۰ حلقه و ضریب القاوری آن $0.1H$ است. اگر آن را در امتداد خط MN به دو قسمت کنیم، تعداد حلقه‌های یک قسمت ۸۰۰ تا می‌شود. ضریب القاوری این قسمت چند هانری است؟



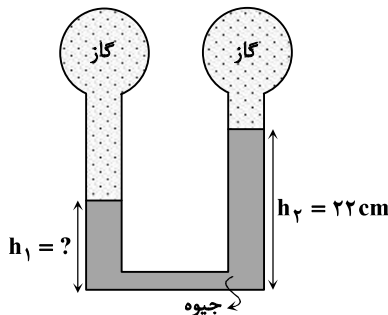
(۱) 0.08

(۲) 0.064

(۳) 0.8

(۴) 0.64

۷۱- در شکل روبه‌رو، درون لوله U شکل جیوه قرار دارد و فشار پیمانه‌ای گاز درون مخزن‌ها $1.3 \times 10^5 \text{ Pa}$ و $1.36 \times 10^5 \text{ Pa}$ است. ارتفاع h_1 چند سانتی‌متر است؟ ($g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ و $\rho_{\text{جیوه}} = 13.6 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$)



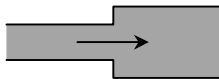
(۱) 13

(۲) 11

(۳) 9

(۴) 6

۷۲- در لوله افقی شکل زیر، قطر بخش پهن $1/6$ برابر قطر بخش باریک است و مایعی که تمام فضای لوله را پر کرده است، به‌صورت لایه‌ای در آن جریان دارد. اگر اختلاف تندی مایع در دو بخش پهن و باریک $3/9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ باشد، تندی مایع در بخش پهن لوله چند متر بر ثانیه است؟



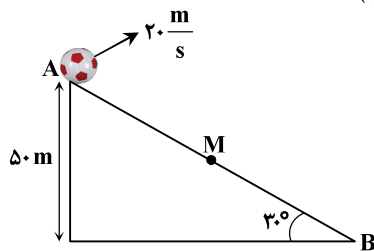
(۱) 1

(۲) $1/5$

(۳) 2

(۴) $2/5$

۷۳- مطابق شکل، توپی را با تندی $20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ از نقطه A بالای سطح شیب‌دار پرتاب می‌کنیم. توپ با تندی $30 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ در نقطه M دوباره به سطح شیب‌دار برخورد می‌کند. فاصله MB چند متر است؟ ($g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ و مقاومت هوا ناچیز فرض شود).



(۱) 20

(۲) 25

(۳) 40

(۴) 50

۷۴- دمای یک گوی فلزی را از -50°F تا 150°F بالا می‌بریم و در این حالت حجم گوی به 503 cm^3 می‌رسد. حجم اولیه گوی چند سانتی‌متر مکعب است؟ ($\alpha_{\text{فلز}} = 18 \times 10^{-6} \frac{1}{^\circ\text{C}}$)

(۴) 500

(۳) 495

(۲) 485

(۱) 460

۷۵- درون یک ظرف فلزی 40°C گرم یخ 0°C و 60°C گرم آب 0°C موجود است. اگر 100°C گرم آب 100°C به درون ظرف اضافه کنیم، دمای تعادل به

$$30^\circ\text{C} \text{ خواهد رسید. جرم ظرف چند گرم است؟ } (c_{\text{فلز}} = 0.21 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}}, L_F = 336 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}, \text{ و } c_{\text{آب}} = 4.2 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}})$$

(۴) $\frac{1700}{3}$

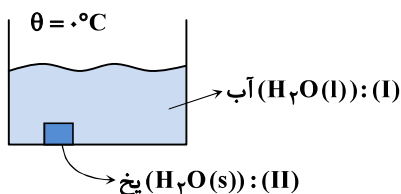
(۳) 800

(۲) $\frac{1600}{3}$

(۱) 600

محل انجام محاسبات:

۷۶- بر اساس شکل زیر کدام نتیجه گیری درست است؟ (اتم هیدروژن موجود در نمونه $\text{H}:\text{I}$ و اتم هیدروژن موجود در نمونه $\text{H}:\text{II}$)



(۱) در حالت فیزیکی یکسان از نمونه های (I) و (II)، سدیم تنها با نمونه (I) واکنش می دهد.

(۲) اگر نمونه (I) منجمد شود و در مایعی از نمونه (II) ریخته شود، نمونه (I) به ته ظرف خواهد رفت.

(۳) علت تفاوت چگالی دو نمونه به علت تفاوت در تعداد نوترون اتم های هیدروژن است.

(۴) دو نمونه آب (I) و (II) را می توان ایزوتوپ یکدیگر در نظر گرفت.

۷۷- عنصری دارای ۳ الکترون در بیرونی ترین زیرلایه خود با $n = 4$ و $l = 1$ است. چه تعداد از موارد زیر در رابطه با این عنصر درست است؟

■ با عنصری که عدد اتمی آن ۸۳ است، هم گروه است.

■ عدد اتمی آن برابر ۳۹ است.

■ در دسته ای از جدول تناوبی است که دارای ۳۶ عنصر است.

■ در آرایش الکترونی آن ۱۱ الکترون با $l = 2$ وجود دارد.

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۷۸- عنصر A در شرایط مناسب با گاز اکسیژن واکنش می دهد و ترکیبی حاصل می شود که ویژگی های زیر را دارد. با توجه به ویژگی های ذکر شده کدام عبارت درست است؟ (A در دسته d قرار ندارد).

■ با حل کردن آن در آب، pH آب افزایش می یابد.

■ در فرمول شیمیایی آن مجموع زیروندها برابر ۳ است.

■ تفاوت شمار الکترون های کاتیون و آنیون آن برابر ۸ است.

(۱) در معادله شیمیایی موازنه شده سوختن عنصر A مجموع ضرایب مولی مواد ۶ است.

(۲) عنصر A فلزی از گروه اول است و به یقین عدد اتمی آن بیشتر از ۱۱ است.

(۳) در ساختار ترکیب حاصل از واکنش عنصر A با گاز فلوئور، شمار کاتیون ها با شمار آنیون ها برابر است.

(۴) فرمول شیمیایی ترکیب مورد نظر AO_x است که رنگ کاغذ pH در محلول آبی آن متفاوت با رنگ کاغذ pH در محلول آب آهک است.

۷۹- در کدام گزینه ساختار لوویس و شکل مولکول های داده شده مشابه هم است؟

(۱) SO_3 , NH_3 (۲) CO_2 , SO_2 (۳) CO_2 , CS_2 (۴) PCl_3 , SO_3

۸۰- در حال حاضر کشور ایران ششمین تولیدکننده آمونیاک در جهان است. اگر سالانه در کل پتروشیمی های کشور حدود ۵/۶ میلیون تن نیتروژن مصرف شود، در شرایطی که بدانیم در فرایند هابر دما برابر 455°C و فشار برابر ۲۰۰ اتمسفر است، به تقریب سالانه چند میلیون

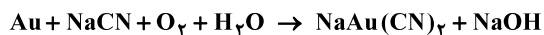
مترمکعب گاز آمونیاک در این شرایط تولید می شود؟ ($\text{H} = 1, \text{N} = 14 : \text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$)

(۱) ۱۲۰ (۲) ۸۰ (۳) ۱۰۰ (۴) ۶۰

۸۱- اگر در واکنش موازنه نشده زیر، ابتدا ۹/۸ گرم سدیم سیانید (NaCN) را به طور کامل وارد واکنش کنیم و حجم محلول پایانی ۵۰

میلی لیتر از ۵۰۰ برابر آب مصرفی بیشتر باشد، غلظت سدیم هیدروکسید در محلول پایانی چند مولار است؟ ($1 \text{g} \cdot \text{mL}^{-1} = \text{چگالی آب}$)

($\text{H}_2\text{O} = 18, \text{NaCN} = 49 : \text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$)



(۱) ۰/۲ (۲) ۰/۱ (۳) ۰/۵ (۴) ۰/۲۲

۸۲- در دمای 20°C و فشار ۴/۵ atm، انحلال پذیری گاز نیتروژن در آب برابر با $\frac{\text{g}}{100 \text{g H}_2\text{O}}$ است. کدام گزینه در مورد این گاز نادرست است؟

(۱) انحلال این گاز در آب از نوع فیزیکی است.

(۲) در همین دما و فشار، با افزودن NaCl به آب انحلال پذیری این گاز کاهش می یابد.

(۳) در دمای 25°C و فشار ۹ اتمسفر، انحلال پذیری این گاز در آب برابر با ۰/۰۴ است.

(۴) با افزایش فشار در دمای ثابت، انحلال پذیری این گاز در آب افزایش می یابد.

محل انجام محاسبات:

۸۳- کدام گزینه نادرست است؟

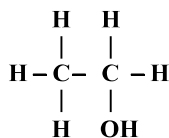
- (۱) در یک دوره، اگر فلز X در سمت چپ فلز Y قرار گرفته باشد، قطعاً واکنش پذیری X از Y بیشتر است.
 (۲) طلا واکنش پذیری ناچیزی دارد، به همین جهت گنبد برخی اماکن مقدس پس از گذشت سال‌ها تغییری نمی‌کند.
 (۳) برخی عنصرهای واسطه دوره چهارم جدول ترکیب‌های گوناگونی با نافلزها تشکیل می‌دهند که برای نام‌گذاری بعضی از آن‌ها باید از اعداد رومی استفاده کرد.

(۴) در آرایش الکترونی برخی گونه‌های شیمیایی زیرلایه $3d^4$ مشاهده می‌شود.

۸۴- در واکنش تجزیه کلسیم کربنات به کلسیم اکسید و گاز کربن دی‌اکسید، واکنش به تقریب چند درصد پیشرفت کند تا جرم جامد تولیدشده نصف جرم جامد اولیه باشد؟

- (۱) $89/3$ (۲) $60/3$ (۳) $50/2$ (۴) 63

۸۵- ترکیب A در شرایطی مناسب با آب و اسید واکنش می‌دهد و فراورده‌ای با فرمول ساختاری نمایش داده شده حاصل می‌شود. بر این اساس،

چند مورد از عبارات زیر درست هستند؟ ($H = 1, C = 12, O = 16 : g \cdot mol^{-1}$)

(الف) تفاوت جرم مولی فراورده نمایش داده شده با جرم مولی دومین عضو از خانواده آلکان‌ها، با جرم مولی متان برابر است.

(ب) از واکنش ترکیب A با محلول برم، ترکیبی آلی با فرمول مولکولی $C_7H_6Br_2$ حاصل می‌شود.

(پ) در شرایط معمولی، نقطه جوش ترکیب A کمتر از دمای اتاق است و در ساختار مولکول آن ۶ جفت الکترون پیوندی وجود دارد.

(ت) ترکیب A، در مقایسه با سایر هیدروکربن‌های سیرنشده، جرم مولی کمتری دارد.

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۸۶- برای آلکانی با ۱۴ اتم هیدروژن، کدام موارد ایزومرهای این آلکان هستند؟

(الف) ۲- متیل پنتان و ۲ و ۳- دی متیل بوتان
 (ب) ۲ و ۳- دی متیل بوتان و ۳- متیل پنتان

(پ) ۲- متیل پنتان و ۳- متیل هگزان
 (ت) ۲- اتیل بوتان و ۲- متیل بوتان

- (۱) «پ» و «ت» (۲) «ب» و «پ» (۳) «الف» و «ب» (۴) «الف» و «ت»

۸۷- در مورد نفت خام، بنزین و زغال سنگ کدام عبارت یا عبارت‌ها نادرست است؟

(الف) بخش عمده هیدروکربن‌های موجود در نفت خام را آلکان‌ها تشکیل می‌دهند.

(ب) از نظر فرار بودن، نفت سفید بیشتر از نفت کوره و نفت کوره بیشتر از گازوئیل فرار است.

(پ) گرمای حاصل از سوختن یک گرم زغال سنگ کمتر از یک گرم بنزین است.

(ت) جایگزینی نفت با زغال سنگ باعث ورود مقدار بیشتری از آلاینده‌ها به هوا می‌شود.

(ث) مقدار CO_2 تولیدشده به ازای هر کیلوژول انرژی آزادشده از سوختن زغال سنگ بیشتر از بنزین است.

- (۱) «ب» (۲) «ب» و «پ» (۳) «پ» و «ث» (۴) «الف» و «ت»

۸۸- اگر آنتالپی سوختن گازهای اتان و پروپان به ترتیب ۱۵۶۰- و ۲۲۰۰- کیلوژول بر مول باشد، بر اثر سوختن کامل ۲۹ گرم گاز بوتان دمای ۱۰

کیلوگرم آب به تقریب چند درجه سلسیوس افزایش می‌یابد؟ ($H = 1, C = 12 : g \cdot mol^{-1}, c_{H_2O} = 4/2 \frac{J}{g \cdot ^\circ C}$)

- (۱) $33/81$ (۲) $52/39$ (۳) $18/57$ (۴) $37/14$

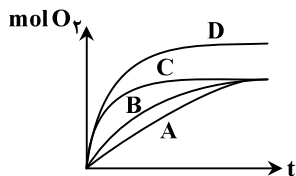
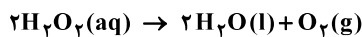
۸۹- با توجه به واکنش‌های داده شده، از تولید ۴۴۰ گرم N_2O طی واکنش $N_2(g) + \frac{1}{2}O_2(g) \rightarrow N_2O(g)$ چند کیلوژول انرژی مبادله می‌شود؟ ($N = 14, O = 16 : g \cdot mol^{-1}$)



- (۱) ۲۴۰۰ (۲) ۱۲۰۰ (۳) ۱۵۰۰ (۴) ۳۰۰۰

محل انجام محاسبات:

۹۰- اگر در واکنش زیر، با شرایط مختلف مقدار گاز تولید شده را بررسی کنیم، نمودارهای A، B، C و D به ترتیب به کدام واکنش‌ها مرتبط هستند؟



الف) یک لیتر محلول ۱/۵ مولار آب اکسیژنه در دمای ۴۰°C و در حضور پتاسیم یدید

ب) یک لیتر محلول ۱ مولار آب اکسیژنه در دمای ۴۰°C و بدون کاتالیزگر

پ) یک لیتر محلول ۱ مولار آب اکسیژنه در دمای ۲۰°C و بدون کاتالیزگر

ت) یک لیتر محلول ۱ مولار آب اکسیژنه در دمای ۲۰°C و در حضور نوعی بازدارنده

(۱) «ت»، «پ»، «ب»، «الف» (۲) «الف»، «پ»، «ب»، «ت»

(۳) «ت»، «پ»، «ب»، «الف» (۴) «الف»، «پ»، «ب»، «ت»

۹۱- چه تعداد از جمله‌های زیر در مورد مولکول مقابل درست است؟

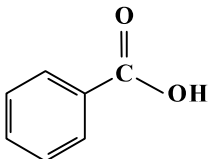
■ فرمول مولکولی آن $C_7H_7O_2$ است.

■ عطر دارچین به دلیل وجود این ترکیب در آن است.

■ می‌توان آن را یک کربوکسیلیک اسید آروماتیک دانست.

■ دارای گروه عاملی کربوکسیل است.

■ از ترکیب‌های آن به عنوان ماده نگهدارنده مواد غذایی استفاده می‌شود.



(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۹۲- در چند مورد زیر نام پلیمر به کار رفته در تولید کالای عنوان شده به درستی بیان شده است؟

■ سرنگ: پلی وینیل کلرید

■ پتو: پلی سیانواتن

■ کیسه خون: پلی پروپن

■ ظرف یکبارمصرف: تترا فلئورواتن

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۹۳- چند مورد از مطالب زیر درباره اتیل هپتانوات درست است؟ ($H = 1, C = 12, O = 16 : g \cdot mol^{-1}$)

■ با پنتیل بوتانوات همپار است.

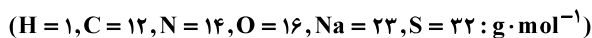
■ از جمله ترکیب‌های سازنده طعم و بوی انگور است.

■ از آبکافت یک مول از آن ۴۶ گرم اتانول تولید می‌شود.

■ بخش ناقطبی اسید سازنده آن ۶ اتم کربن دارد.

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۹۴- تفاوت شمار اتم‌های کربن و هیدروژن در نوعی پاک‌کننده غیرصابونی با زنجیر هیدروکربنی سیرشده برابر شمار پروتون‌ها در هسته اتم آلومینیم است. جرم مولی این پاک‌کننده چند برابر جرم مولی اوره است؟



(۱) ۶/۲۶ (۲) ۶/۶۲ (۳) ۳/۶۶ (۴) ۵/۲۶

۹۵- به ۴۰۰ mL محلول HNO_3 با $pH = 0.3$ ، ۱۰۰ mL محلول ۰/۵ مولار $Ba(OH)_2$ می‌افزاییم. pH حاصل کدام است؟

($\log 2 = 0.3$)

(۱) ۷ (۲) ۰/۷ (۳) ۰/۵ (۴) ۰/۰۵

۹۶- غلظت کدام یون در سلول گالوانی «مس- نقره» با گذشت زمان کاهش می‌یابد و کدام یون با گذر از دیواره متخلخل به سمت کاتد مهاجرت می‌کند؟

(۱) Cu^{2+} ، Ag^+ (۲) Ag^+ ، Cu^{2+}

(۳) Ag^+ ، Ag^+ (۴) Cu^{2+} ، Cu^{2+}

محل انجام محاسبات:

۹۷- اگر طی فرایندهای استخراج سدیم و آلومینیوم شمار الکترون یکسانی از مدار بیرونی سلول‌های الکتروشیمیایی مربوط به آن‌ها عبور کرده باشد، در شرایط معین و یکسان، حجم گاز تولید شده طی فرایند استخراج آلومینیوم چند برابر حجم گاز تولید شده در فرایند استخراج فلز سدیم است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۳ (۴) ۲

۹۸- در یک آزمایش نیمی از الکترون‌های حاصل از اکسایش ۲۶ گرم فلز روی به یون روی را از سلول الکترولیتی مورد استفاده در برق‌کافت منیزیم کلرید مذاب عبور داده‌ایم. فلز منیزیم تولیدشده در این فرایند با چند گرم گاز اکسیژن ۶۴٪ خالص به‌طور کامل واکنش می‌دهد؟

- (O = ۱۶, Mg = ۲۴, Zn = ۶۵ : g · mol⁻¹)
(۱) ۵ (۲) ۱۰ (۳) ۲۰ (۴) ۴۰

۹۹- جمع جبری دو عدد اکسایش در کدام مورد بیشتر است؟

- (۱) دو اتم نیتروژن در آمونیوم نیترات
(۲) دو اتم کربن در اتانول
(۳) اتم گوگرد در SF_۶ با اتم گوگرد در آلومینیم سولفید
(۴) دو اتم کربن متصل به اکسیژن در متیل اتانوات

۱۰۰- چند مورد از عبارتهای زیر درست هستند؟

- اتم‌های کربن در مولکول اتین مانند اتم کربن در کربن دی‌اکسید، بار جزئی مثبت دارند.
- در مولکول کربن تتراکلرید برخلاف مولکول متان تراکم الکترون‌ها در مراکز مولکول بیشتر است.
- در نقشه پتانسیل الکتروستاتیکی مولکول آمونیاک و مولکول گوگرد دی‌اکسید اتم مرکزی دو مولکول رنگ مشابه دارد.
- اگر اتم گوگرد جایگزین یکی از اتم‌های اکسیژن در مولکول کربن دی‌اکسید شود، گشتاور دوقطبی و جرم مولی افزایش می‌یابند.

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۰۱- کدام مقایسه به‌درستی انجام شده است؟

- (۱) آنتالپی فروپاشی: $\text{AlF}_3 > \text{MgO}$
(۲) شعاع یونی: $\text{Fe}^{2+} < \text{Fe}^{3+}$
(۳) شعاع (اندازه): $\text{Cl}^- > \text{Na}$
(۴) چگالی بار: $\text{O}^{2-} > \text{N}^{3-}$

۱۰۲- برای تبدیل یون $\text{VO}^{2+}(\text{aq})$ به یون $\text{VO}_2^+(\text{aq})$ از کدام ماده می‌توان استفاده کرد؟

- (۱) MnO_4^- (۲) Zn
(۳) S^{2-} (۴) NH_4^+

۱۰۳- انرژی فعال‌سازی واکنش حذف کدام آلاینده تولیدشده در موتور خودروهای دیزلی را نمی‌توان با یکی از سه کاتالیزگر پلاتین، پالادیم و رودیم تأمین کرد؟

- (۱) NO (۲) NO_2
(۳) CO (۴) C_xH_y

۱۰۴- تعادل گازی $\text{N}_2\text{O}_4(\text{g}) \rightleftharpoons 2\text{NO}_2(\text{g})$ در سامانه‌ای ۲ لیتری برقرار است. کدام دو تغییر باعث افزایش رنگ تعادلی سامانه می‌شود؟

- (۱) افزایش دما- افزایش حجم (۲) افزایش دما- کاهش حجم (۳) کاهش دما- افزایش حجم (۴) کاهش دما- کاهش حجم

۱۰۵- تعادل گازی: $\text{A} \rightleftharpoons \text{B}$ با ۱۰۰ گرم A و ۱۰۰ گرم B در سامانه‌ای ۵ لیتری برقرار است. اگر جرم مولی A دو برابر جرم مولی B باشد، ثابت تعادل این واکنش برحسب جرم مولی A (a) کدام است؟

- (۱) $0.1a$ (۲) $0.1a$
(۳) $10a$ (۴) $100a$

محل انجام محاسبات:

اسامی هیأت علمی آزمون های ویژه داوطلبان کنکور ۱۴۰۵ گروه علوم ریاضی

مدیر گروه	عنوان درس	مسئول درس	طراحان	دستیار مسئول درس
سید امیر محمد سید شاگری	حسابان و ریاضی پایه	علی افضل زاده	حسین شفیع زاده- ایمان اردستانی	عباس سعیدی- وحید جعفری
	هندسه	سعید اکبرزاده	سید محسن میراسلامی- فرهاد فرزادی- سعید اکبرزاده	هادی کاظم نژاد
	ریاضیات گسسته	سعید اکبرزاده	علیرضا شریف خطیبی- سعید اکبرزاده- امیدرضا پورحسینی	فرهاد فرزادی
محمد حسین کشانی	فیزیک	منصور داودوندی	علی نعیمی- بهمن شاهمرادی- احمد رضوانی منصور داودوندی- جمال خم خاجی	ساناز دریکوندی
	شیمی	شهرام شاه پرویزی	ماشاءالله سلیمانی- بهنام ابراهیم پور- مهرداد ملاصالحی- سید صمد صفوی حسین شرانلو- رضا بخشیان- محمدرضا پور جاوید- یاسر راش	حنانه شریف خطیبی

معاون تولید محتوا: علی الفتی

مدیر واحد آموزش تخصصی: محمدرضا محمد هاشمی

A

دفترچه پاسخ تشریحی

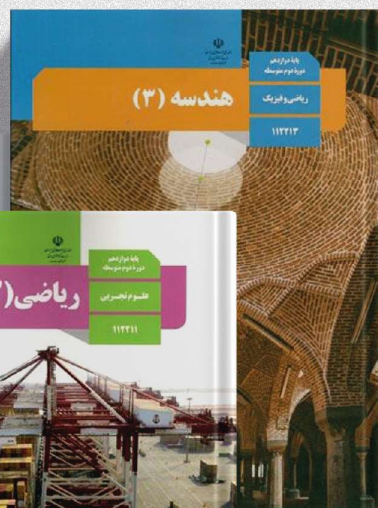
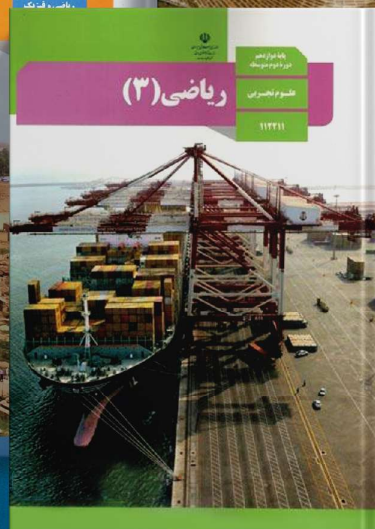
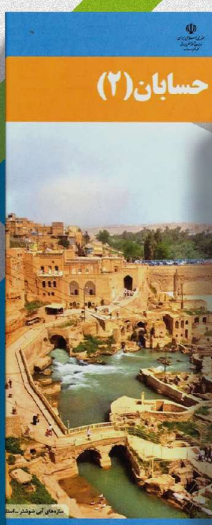
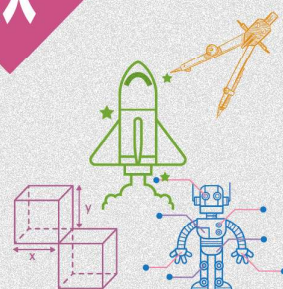
گروه آزمایشی علوم ریاضی

آزمون آزمایشی ۲۲ خرداد ۱۴۰۵

ویژه داوطلبان آزمون سراسری ۱۴۰۵

پایه
دوازدهم

مرحله
۱۸



۱۴۰۴-۱۴۰۵

گزیده دو
مؤسسه آموزشی فرهنگی

تذکرات مهم

➡ آزمون آزمایشی مرحله ۱۹ گزینه دو، در روز سه شنبه ۲۶ خرداد ۱۴۰۵ برگزار می گردد.

➡ داوطلب گرامی، جهت استفاده از خدمات طلایی خود مانند کارنامه های هوشمند بعد از آزمون، آزمونک ها، بانک سؤال گزینه دو، رفع اشکال هوشمند، آرشیو آزمون های گزینه دو و ...، با استفاده از شماره داوطلبی (به عنوان نام کاربری) و کد ملی خود (به عنوان رمز عبور) وارد وب سایت گزینه دو به آدرس www.gozine2.ir شوید.

➡➡ در صورتی که اینترنتی ثبت نام کرده اید، رمز عبور شما همان رمزی است که خودتان انتخاب نموده اید.

➡ کارنامه های آزمون آزمایشی مرحله ۱۸ به صورت کامل، با فاصله زمانی کوتاهی پس از آزمون مطابق اطلاعیه اعلام شده، بر روی پایگاه اینترنتی گزینه دو به آدرس www.gozine2.ir قرار می گیرد. در صورت بروز اشکال در دریافت کارنامه، موضوع را از طریق نمایندگی شهر خود پیگیری نمایید.



داوطلب گرامی، شما می توانید با اسکن تصویر بالا به وسیله گوشی هوشمند و یا تبلت خود، به صفحه اینستاگرام مؤسسه گزینه دو وارد شوید.

[gozine2.ir](https://www.instagram.com/gozine2.ir)

● معاون تولید محتوا: علی الفتی

● مدیر واحد آموزش تخصصی: محمدرضا محمدهاشمی

کارشناسان		طراحان		گروه ریاضی	
سید مهدی عابدی	سید علی موسوی راد	حسین شفیع زاده	ایمان اردستانی	مسئول درس: علی افضل زاده دستیاران: عباس سعیدی - وحید جعفری	حسابان و ریاضی پایه
علی صادقی	مانی خداپنده	سید محسن میراسلامی	فرهاد فرزانی	مسئول درس: سعید اکبرزاده دستیار: هادی کاظم نژاد	هندسه
حسین خواجوند	مانی خداپنده	علیرضا شریف خطیبی	سعید اکبرزاده	مسئول درس: سعید اکبرزاده دستیار: فرهاد فرزانی	ریاضیات گسترده
پوپک مقدم		مهرداد کیوان	علی افضل زاده	مسئول درس: ایمان اردستانی دستیاران: وحید جعفری - مهدی پوررضایی	ریاضی تجربی
امیرحسین حریری	ایمان حسین زاده	وحید رباعی	علی افضل زاده	مسئول درس: حسین افسری دستیاران: مهدی پوررضایی - عباس مالکی	ریاضی انسانی
کارشناسان		طراحان		گروه علوم	
بتول خواجه پور	علی حاجی محمدزاده	محمد بازوگی	امیر کبری راد	مسئول درس: امیر کبری راد دستیار: پرسا کامکار	زیست شناسی
مهدیار مسعودی نیا		علی پناهی شایق	علیرضا اکبرپور	مسئول درس: منصور داودوندی دستیار: ساناز دریکوندی	فیزیک
مریم گلی حسن لو		بهرام میرحبیبی	پهمن شاهمرادی	مسئول درس: شهرام شاه پرویزی دستیار: حنا نه شریف خطیبی	شیمی
مرتضی قدبانی	حسین ایمانی پور	منصور حدادی	محمد رضا شاملو	مسئول درس: شکبیا کریمی دستیار: ثنا کاشیان	زمین شناسی
فرزانه صاعدی	حسن علیمحمدی	علی نعیمی	پهمن شاهمرادی		
روزبه اسحاقیان	فرزانه صاعدی	احمد رضوانی	منصور داودوندی		
		جمال خم خاجی			
		ماشاءالله سلیمانی	پهمن شاهمرادی		
		مهداد ملاصالحی	سید صمد صفوی		
		حسین شرانلو	رضا بخشیان		
		محمد رضا پورجاوید	یاسر راش		
		فرزانه رجایی	حسن علیمحمدی		
		فرزانه صاعدی	عباس روزبهانی		
کارشناسان		طراحان		گروه انسانی	
محمدصادق حسام زاده	محمدصدرا حسینی	ابوالفضل قاضی	محمد رضا لمسه چی	مسئول درس: محمد رضا پیرو دستیار: حسنا محمدی - سپهر سالار کیا	علوم و فنون ادبی
مهتاب شیرازی	هستی ناصح	آریتا بیدقی	فاطمه موسی زاده	مسئول درس: الهام رضایی دستیار: فاطمه صفری	جامعه شناسی
علی شکری	فاطمه یاری	سیمین زاهدی	امیرمهدی اسفندی	مسئول درس: سیده ضحی سکاکی دستیار: ثنا کاشیان	روان شناسی
فاطمه نظری	سارا حمزه	کاظم غلامی	سیده ضحی سکاکی	مسئول درس: پویا رضاداد	زبان عربی
مهتاب شیرازی	صبا پهلوان	حمید جوهری مجد	اسرافیل قربانی پور	مسئول درس: سیده ساره زاهدی	تاریخ
مهتاب شیرازی	محمدصدرا حسینی	پویا رضاداد	پدرام علیمرادی	مسئول درس: الناز گنج کار دستیار: الهه ریاحی نسب	جغرافیا
مهتاب شیرازی	محمدصدرا حسینی	شهرام امامی	عرفان جالیزی	مسئول درس: سعید رحیمیان دستیاران: محمدحسین خدام - فراز مختاری نژاد	فلسفه و منطق
سپهر علی پور	ابوالفضل میرمحمدی	شهرام امامی	بهروز یحیی	مسئول درس: امیر محمد بیگی دستیار: محمدرضا مبارکی	اقتصاد
امیررضا علیرزاده		نگار مروتی	میرحسین حاکساری		
		محمد سودیان پهرانی	بهروز یحیی		
		سعید رحیمیان	بهروز یحیی		
		فرهاد قاسمی نژاد	علی اکبر آخوندی		
		حسین حاکساری	مهدی لاچوردی		
		طاهره کریمی	ناصر آزادجو		
		علی محسنی	میترا چینی ساز		
			محمد رضا مبارکی		
			آرش بدری		

ریاضیات



۱- اگر $a_n = 3 \times 2^{n-1}$ و $P = (a_1 + a_2) + (a_2 + a_3) + (a_3 + a_4) + \dots + (a_{28} + a_{29})$ ، حاصل $\log_2(\frac{P}{9} + 1)$ کدام است؟

(۱) ۳۰ (۲) ۲۹ (۳) ۲۸ (۴) ۲۷

۱- پاسخ: گزینه ۱ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۱ (فصل ۱، درس ۱ و فصل ۳، درس ۳)



$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

- مجموع جملات دنباله هندسی a_n با قدرنسبت q و جمله اول a_1 برابر است با:

$$\log_a b^n = n \log_a b$$

- اگر لگاریتم‌های زیر تعریف شده باشد، آنگاه:



ابتدا هریک از پرانتزها را محاسبه می‌کنیم:

$$a_1 + a_2 = 3 + 3 \times 2 = 3(1 + 2) = 9$$

$$a_2 + a_3 = 3 \times 2^2 + 3 \times 2^3 = 3 \times 2^2(1 + 2) = 9 \times 2^2$$

$$a_3 + a_4 = 3 \times 2^3 + 3 \times 2^4 = 3 \times 2^3(1 + 2) = 9 \times 2^3$$

بنابراین هریک از پرانتزها جملات یک دنباله هندسی با قدرنسبت 2^3 هستند که تعداد آن‌ها برابر ۱۰ است. P همان مجموع ده جمله اول دنباله هندسی جدید است.

$$P = S_{10} = \frac{(a_1 + a_{10})(q^{10} - 1)}{q - 1} = \frac{9(\lambda^{10} - 1)}{\lambda - 1} = \frac{9}{2}(\lambda^{10} - 1)$$

بنابراین مقدار لگاریتم خواسته شده برابر است با:

$$\log_2\left(\frac{P}{9} + 1\right) = \log_2\left(\frac{9}{9} \times \frac{9}{2} \times (\lambda^{10} - 1) + 1\right) = \log_2 \lambda^{10} = \log_2 2^{30} = 30 \log_2 2 = 30$$



ابتدا مجموع 30 جمله ابتدایی دنباله a_n را پیدا می‌کنیم. سپس مجموع جملاتی که شماره آن‌ها مضرب 3 است را از آن کم می‌کنیم. مقدار P به دست می‌آید.

توجه کنید در دنباله a_n ، جمله اول برابر 3 و قدرنسبت برابر 2 می‌باشد.

$$S_{30} = 3 \frac{(2^{30} - 1)}{(2 - 1)} = 3 \times (2^{30} - 1)$$

ضمناً دنباله جملات با شماره مضرب 3 در a_n ، یک دنباله هندسی با جمله اول $12 = 3 \times 2^2$ و قدرنسبت $2^3 = 8$ است و تعداد این جملات برابر 10 می‌باشد.

$$S'_{10} = 12 \times \left(\frac{8^{10} - 1}{8 - 1}\right) = \frac{12}{7}(\lambda^{10} - 1) = \frac{12}{7}(2^{30} - 1)$$

از تفاضل این دو مقدار، حاصل P به دست می‌آید:

$$P = S_{30} - S'_{10} = 3 \times (2^{30} - 1) - \frac{12}{7}(2^{30} - 1) = \left(3 - \frac{12}{7}\right)(2^{30} - 1) = \frac{9}{7}(2^{30} - 1)$$

اکنون به محاسبه مقدار لگاریتم خواسته شده می‌پردازیم:

$$\log_2\left(\frac{P}{9} + 1\right) = \log_2\left(\frac{9}{9} \times \frac{9}{7} \times (2^{30} - 1) + 1\right) = \log_2 2^{30} = 30$$

$$۲- اگر $x^2 - 2x + \frac{2}{(x-1)^2} = 3$ باشد، حاصل $A = \frac{(x-1)^4}{2} + \frac{2}{(x-1)^4}$ کدام است؟$$

۴ (۴)

۶ (۳)

۸ (۲)

۱۲ (۱)

۲- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضی ۱ (فصل ۳، درس ۴)



- برای دو عدد دلخواه a و b «اتحاد مربع دو جمله‌ای» به صورت زیر برقرار است:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$



با توجه به اینکه $x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$ ، از تغییر متغیر $t = (x-1)^2$ استفاده می‌کنیم و با به توان رساندن، مقدار را پیدا می‌کنیم:

$$x^2 - 2x + \frac{2}{(x-1)^2} = 3 \xrightarrow{t=(x-1)^2} t - 1 + \frac{2}{t} = 3$$

$$\Rightarrow t + \frac{2}{t} = 4 \xrightarrow{\text{توان ۲}} t^2 + \frac{4}{t} + 4 = 16 \Rightarrow t^2 + \frac{4}{t} = 12$$

$$\xrightarrow{\text{تقسیم بر ۲}} \frac{t^2}{2} + \frac{2}{t^2} = 6 \Rightarrow \frac{(x-1)^4}{2} + \frac{2}{(x-1)^4} = 6 \Rightarrow A = 6$$

۳- در یک کلاس ۴۰ نفری، ۲۶ نفر علاقه‌مند به علم آمار و ۲۰ نفر علاقه‌مند به علم احتمال هستند. که در این میان ۱۲ نفر به هیچ‌کدام علاقه ندارند. اگر علاقه‌مندان به علم احتمال را با مجموعه A و علاقه‌مندان به علم آمار را با مجموعه B نمایش دهیم، مجموعه $(B-A)' \times (B-A)$ چند عضو دارد؟

۵۷۶ (۴)

۶۴۸ (۳)

۶۳۰ (۲)

۵۴۰ (۱)

۳- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * آمار و احتمال (فصل ۱، درس ۲) ریاضی ۱ (فصل ۱، درس ۲)



- اگر A و B دو مجموعه متناهی دلخواه باشند، داریم:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$$

$$n(A') = n(U) - n(A)$$

- تساوی‌های زیر را که به قوانین دمورگان معروف‌اند برای هر دو مجموعه دلخواه A و B از مجموعه مرجع U برقرارند:

$$\text{الف) } (A \cup B)' = (A' \cap B')$$

$$\text{ب) } (A \cap B)' = (A' \cup B')$$

$$A - B = A \cap B'$$

- برای دو مجموعه دلخواه A و B داریم:

$$n(A \times B) = n(B \times A) = n(A) \cdot n(B)$$

- تعداد اعضای ضرب دکارتی دو مجموعه A و B از رابطه زیر به دست می‌آید:



با توجه به مفروضات سؤال و نکات بالا، داریم:

$$n(A) = 20, n(B) = 26, n(A' \cap B') = 12, n(U) = 40$$

$$n(A' \cap B') = n(U) - n(A \cup B) \Rightarrow 12 = 40 - n(A \cup B) \Rightarrow n(A \cup B) = 28$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow 28 = 20 + 26 - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = 18$$

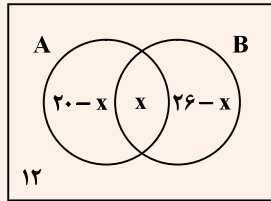
$$n((B-A') \times (B-A)') = n(B \cap A) \times n(B-A)'$$

برای محاسبه $n(B-A)'$ داریم:

$$n(B-A)' = n(U) - n(B-A) = n(U) - n(B) + n(A \cap B) = 40 - 26 + 18 = 32$$

$$n((B-A') \times (B-A)') = 18 \times 32 = 576$$

خواسته سؤال برابر است با:



با در نظر گرفتن نمودار ون زیر، داریم:

$$20 - x + x + 26 - x + 12 = 40 \Rightarrow x = 18 \Rightarrow n(A \cap B) = 18$$

$$n((A \cap B) \times (B - A)') = n(A \cap B) \times n(B - A)' = 18 \times (40 - 18) = 18 \times 22 = 396$$

۴- اگر k عدد طبیعی یک‌رقمی بوده و گزاره $(\exists x \in \mathbb{Z}; x^2 + kx + \frac{9}{4} = 0) \wedge (\forall x > 0; x + \frac{1}{x} \geq \frac{k}{4})$ درست باشد، احتمال اینکه k عددی

مضرب ۳ باشد، چقدر است؟

$\frac{1}{5}$ (۴) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۱)

▲ مشخصات سؤال: دشوار * آمار و احتمال (فصل ۱، درس ۱) پاسخ: گزینه ۱



هرگاه p و q دو گزاره باشند، گزاره مرکب « $p \wedge q$ » که خوانده می‌شود « p و q » را ترکیب عطفی دو گزاره می‌گوییم. در اینجا به رابط منطقی « $\wedge$ » عاطف گفته می‌شود. ارزش ترکیب عطفی دو گزاره « $p \wedge q$ » فقط وقتی درست است که ارزش هر دو گزاره p و q درست باشد و در بقیه حالات ارزش $p \wedge q$ نادرست است.

p	q	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

گزاره‌نمای شامل متغیر x که با سور وجودی همراه می‌شود، وقتی درست است که مجموعه جواب آن تهی نباشد.

گزاره‌نمای شامل سور عمومی هنگامی درست است که مجموعه جواب با دامنه متغیر برابر باشد.



می‌دانیم ترکیب عطفی دو گزاره زمانی درست است که هر دو گزاره درست باشند، پس شرط درستی هر دو گزاره سوری را بررسی می‌کنیم:

$$\exists x \in \mathbb{Z}; x^2 + kx + \frac{9}{4} = 0$$

$$\Delta \geq 0 \Rightarrow k^2 - 4\left(\frac{9}{4}\right) \geq 0 \Rightarrow k^2 \geq 9 \Rightarrow k \leq -3 \text{ یا } k \geq 3 \xrightarrow{k \text{ عدد طبیعی یک‌رقمی}} k \in \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \quad (1)$$

$$\forall x > 0; x + \frac{1}{x} \geq \frac{k}{4}$$

$$x > 0 \Rightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2 \Rightarrow \frac{k}{4} \leq 2 \Rightarrow k \leq 8 \xrightarrow{k \text{ عدد طبیعی یک‌رقمی}} k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \quad (2)$$

از اشتراک مجموعه‌های (۱) و (۲) داریم: $k \in \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ پس: $n(S) = 6$

از طرفی در میان این ۶ مقدار، دو مقدار ۳ و ۶ مضرب ۳ هستند پس $n(A) = 2$ و در نهایت، احتمال موردنظر برابر است با:

$$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

۵- اگر a و b دو ریشه متمایز و غیرصفر معادله $ax^2 - 3x + b = 0$ باشند، حاصل $a + \frac{1}{b}$ کدام است؟

$\pm \frac{4}{3}$ (۱) $\pm \frac{5}{2}$ (۲) $\pm \frac{3}{2}$ (۳) صفر (۴)

▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۱ (فصل ۱، درس ۲)

۵- پاسخ: گزینه ۳

- در هر معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ اگر جمع ریشه‌ها S و ضرب ریشه‌ها P باشد، این روابط برقرار است.

$$S = -\frac{b}{a}, \quad P = \frac{c}{a}$$

از روابط مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها استفاده می‌کنیم تا مقدار a و b به دست آید:

$$S = \frac{-(-3)}{a} \Rightarrow (a+b) = \frac{3}{a} \Rightarrow b = \frac{3}{a} - a$$

$$P = \frac{b}{a} \Rightarrow ab = \frac{b}{a} \xrightarrow{b \neq 0} a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

در هر حالت $a = 1$ یا $a = -1$ مقدار b و حاصل $a + \frac{1}{b}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} a = 1 \Rightarrow b = \frac{3}{1} - 1 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow a + \frac{1}{b} = \frac{3}{2} \\ a = -1 \Rightarrow b = \frac{3}{-1} + 1 \Rightarrow b = -2 \Rightarrow a + \frac{1}{b} = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

عدد b ریشه معادله $ax^2 - 3x + b = 0$ است. پس در آن صدق می‌کند.

$$ab^2 - 3b + b = 0 \Rightarrow ab^2 = 2b \xrightarrow{b \neq 0} ab = 2 \quad (1)$$

از طرفی با توجه به رابطه حاصل ضرب ریشه‌ها، داریم:

$$P = a \times b \Rightarrow \frac{b}{a} = ab \xrightarrow{(1)} \frac{b}{a} = 2 \Rightarrow b = 2a \xrightarrow{(1)} a \times 2a = 2 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

بنابراین مقدار b مقدار خواسته شده برابر است با:

$$\begin{cases} a = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{2} \Rightarrow a + b = \frac{3}{2} \\ a = -1 \Rightarrow b = -\frac{1}{2} \Rightarrow a + b = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

۶- فرض کنید، k بزرگ‌ترین عدد صحیح باشد که نمودار سهمی $y = (m+1)x^2 - 2x + 6 - m$ به‌ازای $m = k$ ، حداکثر از سه ناحیه دستگاه مختصات عبور کند. عرض رأس سهمی وقتی $m = k$ کدام است؟

$$\begin{array}{ll} \frac{5}{6} & (1) \\ -\frac{1}{6} & (2) \\ \frac{1}{6} & (3) \\ \frac{1}{6} & (4) \end{array}$$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۱ (فصل ۱، درس ۲)

۶- پاسخ: گزینه ۲

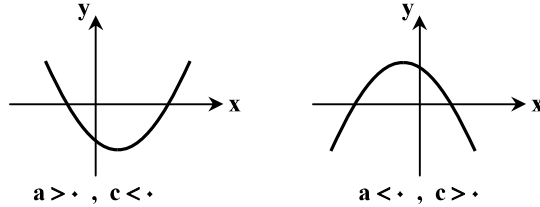
- در هر معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ حاصل ضرب ریشه‌ها (P) برابر است با:

$$P = \frac{c}{a}$$

- در سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c$ ، عرض رأس سهمی برابر $-\frac{\Delta}{4a}$ است.



در سهمی $y = ax^2 + bx + c$ اگر $\frac{c}{a}$ مقداری منفی باشد آنگاه نمودار سهمی محور طول‌ها را در دو طرف مبدأ مختصات قطع می‌کند. زیرا در این صورت حتماً معادله $ax^2 + bx + c = 0$ دو جواب داشته و حاصل ضرب آن دو جواب منفی است. پس نمودار سهمی از هر چهار ناحیه دستگاه مختصات عبور می‌کند.



پس در این سؤال باید $\frac{c}{a}$ مقداری نامنفی باشد:

$$\frac{c}{a} \geq 0 \Rightarrow \frac{6-m}{m+1} \geq 0 \Rightarrow -1 < m \leq 6 \Rightarrow \begin{array}{c|c|c} m & -1 & 6 \\ \hline \frac{6-m}{m+1} & - & + \end{array}$$

ت.ن

پس $m = 6$ بزرگ‌ترین عددی است که به‌ازای آن سهمی از چهار ناحیه نمی‌گذرد. یعنی حداکثر از سه ناحیه می‌گذرد. پس $k = 6$.

به‌ازای $m = 6$ معادله سهمی به‌صورت $y = 7x^2 - 2x$ درمی‌آید، که عرض رأس آن برابر است با:

$$y_{\min} = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{-(4-0)}{4 \times 7} = \frac{-1}{7}$$

۷- مجموع جواب‌های معادله $\sqrt{x+5} = |x-1| - 6$ کدام است؟

- ۱۵ (۱)
-۳ (۳)
۹ (۲)
۶ (۴)

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (فصل ۱، درس‌های ۳ و ۴)

۷- پاسخ: گزینه ۴



- اگر u یک عبارت جبری باشد، قدرمطلق u طبق تعریف برابر است با:

$$|u| = \begin{cases} u & u \geq 0 \\ -u & u < 0 \end{cases}$$

- برای حل معادلات گنگ با به توان رساندن طرفین معادله (و در صورت لزوم تکرار این عمل) و ساده‌کردن به معادله‌ای بدون رادیکال می‌رسیم که آن را حل می‌کنیم، جواب‌های به‌دست‌آمده باید در معادله اصلی آزمایش شوند، زیرا عملیات توان‌رسانی ممکن است جواب‌های اضافی تولید کند.



با توجه به وجود عبارت قدرمطلق $|x-1|$ در معادله، آن را در دو حالت زیر حل می‌کنیم:

$$\text{حالت اول: } x \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x+5} = x-7 \xrightarrow[\text{به توان ۲}]{x \geq 7} x+5 = x^2 - 14x + 49$$

$$\Rightarrow x^2 - 15x + 44 = 0 \Rightarrow (x-11)(x-4) = 0 \Rightarrow x = 11, 4 \xrightarrow{x \geq 7} x = 11$$

$$\text{حالت دوم: } x < 1 \Rightarrow \sqrt{x+5} = -x-5 \xrightarrow[\text{به توان ۲}]{x \leq -5} x+5 = x^2 + 10x + 25 \Rightarrow x^2 + 9x + 20 = 0 \Rightarrow (x+4)(x+5) = 0$$

$$\Rightarrow x = -5, -4 \xrightarrow{x \leq -5} x = -5$$

بنابراین معادله دارای دو جواب قابل قبول $x = 11$ و $x = -5$ بوده و مجموع جواب‌ها برابر $6 = 11 + (-5)$ است.

۸- از نقطه $A(0, a)$ دو عمود بر خطوط $y = -3x$ و $x = 2y$ رسم نموده‌ایم. اگر فاصله دو پای عمود از یکدیگر برابر $7\sqrt{2}$ باشد، مقدار a کدام است؟

- ± 8 (۱)
 ± 12 (۴)
 ± 9 (۲)
 ± 10 (۳)

▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۱ (فصل ۱، درس ۵)

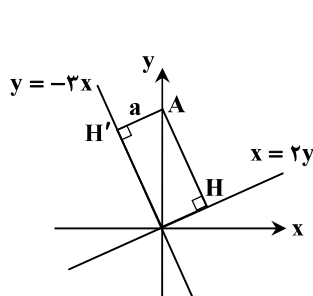
۸- پاسخ: گزینه ۳



- اگر خطوط d_1 و d_2 به ترتیب با شیب‌های m_1 و m_2 بر هم عمود باشند، آنگاه $m_1 m_2 = -1$ و برعکس.
 - به‌طور کلی، اگر در صفحه مختصات دو نقطه $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ را داشته باشیم، طول پاره خط AB برابر است با:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$


نقطه A ، به طول صفر روی محور عرض‌ها قرار دارد و همچنین نقاط $H(2b, b)$ و $H'(c, -3c)$ را پای عمودها روی خطوط مبدأ گذر $x = 2y$ و $y = -3x$ در نظر می‌گیریم:



شیب این دو خط به ترتیب برابر $\frac{1}{2}$ و -3 بوده و شیب خطوط عمود به ترتیب برابر -2 و $\frac{1}{3}$ می‌باشد. پس معادله خطوط عمود به صورت زیر است:

$$\text{AH معادله: } y = -2x + a \xrightarrow{H(2b, b)} b = -4b + a$$

$$\text{AH' معادله: } y = \frac{1}{3}x + a \xrightarrow{H'(c, -3c)} -3c = \frac{c}{3} + a$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{5}a \Rightarrow H = (\frac{2}{5}a, \frac{1}{5}a) \\ c = \frac{-3}{10}a \Rightarrow H' = (-\frac{3}{10}a, \frac{9}{10}a) \end{cases}$$

$$HH' = \sqrt{\frac{49}{100}a^2 + \frac{49}{100}a^2} = \frac{7\sqrt{2}}{10}|a|$$

فاصله بین این دو پای عمود برابر است با:

با توجه به اینکه فاصله برابر $7\sqrt{2}$ است، پس $|a| = 10$ (توجه کنید نقطه A می‌تواند زیر محور طول‌ها نیز باشد).

۹- تابع $f(x) = 3x - \sqrt{x} - 3$ با دامنه $[1, +\infty)$ مفروض است. اگر f و f^{-1} در نقطه‌ای به طول a متقاطع باشند، مقدار $f(4a)$ کدام است؟	۷ (۱)
	۲۱ (۲)
	۳۶ (۴)
	۴۱ (۳)

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (فصل ۲، درس ۳)

۹- پاسخ: گزینه ۲



- اگر تابع وارون‌پذیر f ، خط نیمساز ربع اول و سوم را در نقطه A قطع کند، تابع f^{-1} نیز از A می‌گذرد.



اگر محل تلاقی تابع f با نیمساز ربع اول و سوم را پیدا کنیم، محل تلاقی تابع f و f^{-1} نیز پیدا می‌شود. پس تابع f با خط $y = x$ تقاطع می‌دهیم:

$$f(x) = x \Rightarrow 3x - \sqrt{x} - 3 = x \Rightarrow 2x - \sqrt{x} - 3 = 0 \Rightarrow (\sqrt{x} + 1)(2\sqrt{x} - 3) = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{3}{2} \text{ یا } \sqrt{x} = -1 \text{ غ ق}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} = \frac{3}{2} \Rightarrow x = \frac{9}{4}$$

$$f(4a) = f(9) = 3 \times 9 - \sqrt{9} - 3 = 27 - 3 - 3 = 21$$

بنابراین مقدار a برابر $\frac{9}{4}$ بوده و مقدار خواسته‌شده برابر است با:

۱۰- نقطه $A(1, -2)$ روی تابع $y = af(\frac{x}{b})$ با نقطه $A'(2, -1)$ روی تابع $y = 2 - f(-x)$ متناظر است. دامنه تابع $y = \sqrt{\frac{3a-x}{x-2b}}$ شامل

چند عدد صحیح است؟

۲ (۲)	۱ (۱)
۴ (۴)	۳ (۳)



- برای تعیین دامنه تابع $y = \sqrt{f(x)}$ کافی است، نامعادله $f(x) \geq 0$ حل شود.



مختصات نقاط A و A' را در ضابطه توابع، جایگزین می‌کنیم.

$$y = af\left(\frac{x}{b}\right) \xrightarrow{A(1,-2)} -2 = af\left(\frac{1}{b}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{b}\right) = \frac{-2}{a} \quad (1)$$

$$y = 2 - f(-x) \xrightarrow{A'(2,-1)} -1 = 2 - f(-2) \Rightarrow f(-2) = 3 \quad (2)$$

با توجه به اینکه نقاط A و A' متناظر یکدیگر هستند، با مقایسه روابط (۱) و (۲) داریم:

$$\begin{cases} \frac{1}{b} = -2 \Rightarrow b = -\frac{1}{2} \\ -\frac{2}{a} = 3 \Rightarrow a = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

می‌دانیم دامنه تابع رادیکالی $y = \sqrt{\frac{3a-x}{x-2b}}$ از حل نامعادله $\frac{3a-x}{x-2b} \geq 0$ به‌دست می‌آید. با توجه به مقادیر a و b به‌دست آمده داریم:

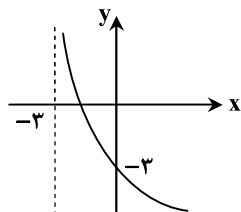
$$\frac{3a-x}{x-2b} \geq 0 \Rightarrow \frac{-2-x}{x+1} \geq 0 \Rightarrow -2 \leq x < -1$$

x	-2	-1
$\frac{-2-x}{x+1}$	-	+
$\frac{-2-x}{x+1}$	-	-

ت.ن

پس دامنه تابع به‌صورت $D = [-2, -1)$ بوده که تنها شامل یک عدد صحیح $(x = -2)$ است.

۱۱- نمودار تابع $f(x) = a - \log_3(bx + c)$ به‌صورت مقابل است. مقدار $f^{-1}(0)$ کدام است؟



- (۱) $-\frac{8}{3}$
- (۲) $-\frac{7}{3}$
- (۳) $-\frac{25}{9}$
- (۴) $-\frac{26}{9}$



- لگاریتم اعداد نامثبت تعریف نمی‌شود. همچنین پایه لگاریتم باید عددی مثبت و مخالف یک باشد. یعنی اگر $\log_b a$ تعریف‌شده باشد،
آنگاه $a > 0$ ، $b > 0$ و $b \neq 1$.

$$y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$$

- مطابق تعریف لگاریتم، داریم:



دامنه این تابع لگاریتمی از حل نامعادله $bx + c > 0$ به‌دست می‌آید. با توجه به نمودار تابع، دامنه برابر $x > -3$ است، پس $x = -3$ همان ریشه معادله $bx + c = 0$ است.

$$b(-3) + c = 0 \Rightarrow c = 3b \Rightarrow b = \frac{c}{3} \quad (1)$$

همچنین مطابق نمودار تابع f از نقطه $(0, -3)$ می‌گذرد، پس:

$$f(0) = -3 \Rightarrow a - \log_3 c = -3 \Rightarrow \log_3 c = a + 3 \Rightarrow c = 3^{a+3} \Rightarrow c = 3^a \times 27 \Rightarrow 3^a = \frac{1}{27} c \quad (2)$$

حال $f^{-1}(0) = \alpha$ را برابر α در نظر گرفته و مقدار α محاسبه می‌کنیم.

$$f^{-1}(0) = \alpha \Rightarrow f(\alpha) = 0 \Rightarrow a - \log_3 (b\alpha + c) = 0 \Rightarrow b\alpha + c = 3^a$$

$$\xrightarrow{(2), (1)} \frac{c}{3} \alpha + c = \frac{1}{27} c \xrightarrow{c \neq 0} \frac{\alpha}{3} + 1 = \frac{1}{27} \Rightarrow \frac{\alpha}{3} = -\frac{26}{27} \Rightarrow \alpha = -\frac{26}{9}$$

۱۲- اگر انتهای کمان روبه‌رو به زاویه θ در ناحیه چهارم بوده و $\tan \theta - 2 \cot \theta = 2$ ، حاصل $P = \frac{\sin \theta - \cos \theta}{\sin \theta + \cos \theta}$ کدام است؟

(۱) $-3 - 2\sqrt{3}$ (۲) $3 - 2\sqrt{3}$ (۳) $-3 + 2\sqrt{3}$ (۴) $3 + 2\sqrt{3}$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضی ۱ (فصل ۲، درس ۳)

۱۲- پاسخ: گزینه ۱



$$\tan \alpha \times \cot \alpha = 1 \Rightarrow \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$$

- برای زاویه دلخواه α داریم:

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

- برای زاویه دلخواه α ، داریم:



ابتدا با استفاده از رابطه داده‌شده و به کمک تغییر متغیر، مقدار $\tan \theta$ را محاسبه می‌کنیم.

$$\tan \theta - 2 \cot \theta = 2 \Rightarrow \tan \theta - \frac{2}{\tan \theta} = 2 \xrightarrow{\tan \theta = a} a - \frac{2}{a} = 2 \Rightarrow a^2 - 2a - 2 = 0$$

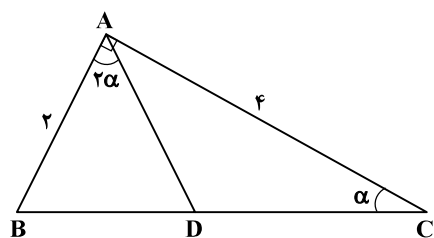
$$\Rightarrow a = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2} \Rightarrow a = 1 \pm \sqrt{3} \xrightarrow{a < 0} a = 1 - \sqrt{3}$$

توجه کنید در ناحیه چهارم مقدار تانژانت منفی است، پس $\tan \theta = 1 - \sqrt{3}$ تنها جواب قابل قبول است.

اکنون با تقسیم کردن صورت و مخرج عبارت P بر $\cos \theta$ ، این عبارت را بر حسب $\tan \theta$ نوشته و مقدار آن را محاسبه می‌کنیم:

$$P = \frac{\frac{\sin \theta}{\cos \theta} - \frac{\cos \theta}{\cos \theta}}{\frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\cos \theta}} = \frac{\tan \theta - 1}{\tan \theta + 1} = \frac{a - 1}{a + 1} = \frac{(1 - \sqrt{3}) - 1}{(1 - \sqrt{3}) + 1} = \frac{-\sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} \times \frac{2 + \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3}(2 + \sqrt{3})}{4 - 3} = -3 - 2\sqrt{3}$$

۱۳- در مثلث قائم‌الزاویه شکل مقابل طول پاره خط BD کدام است؟



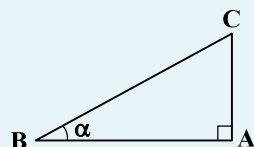
- (۱) $\frac{20}{3\sqrt{5}}$
(۲) $\frac{4}{\sqrt{5}}$
(۳) $\frac{6}{\sqrt{5}}$
(۴) $\frac{10}{3\sqrt{5}}$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۲ (فصل ۲، درس ۲)

۱۳- پاسخ: گزینه ۲



- مثلث قائم‌الزاویه‌ای که یکی از زوایای حاده آن α باشد را در نظر بگیرید. تانژانت زاویه α به صورت زیر تعریف می‌شود:



$$\tan \alpha = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{AC}{AB}$$

- رابطه تانژانت دو برابر زاویه به صورت زیر است:

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

- مساحت هر مثلث برابر نصف حاصل ضرب طول دو ضلع در سینوس زاویه بین آنها است.



با توجه به رابطه فیثاغورس در مثلث قائم الزاویه $\triangle ABC$ داریم:

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

همچنین در مثلث قائم الزاویه $\triangle ABC$ طبق تعریف تانژانت داریم:

$$\tan \alpha = \frac{AB}{AC} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

در دو مثلث ABD و ACD ، طول ارتفاع وارد بر اضلاع BD و CD یکسان است. پس نسبت مساحت این دو مثلث با نسبت قاعده‌های آن برابر می‌باشد. پس اگر مقدار خواسته شده یعنی BD را x بنامیم، آنگاه:

$$\begin{aligned} \frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ADC}} &= \frac{BD}{DC} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2} \times AB \times AD \times \sin 2\alpha}{\frac{1}{2} \times AC \times AD \times \sin(\frac{\pi}{2} - 2\alpha)} = \frac{BD}{BC - BD} \\ \Rightarrow \frac{2 \times \sin 2\alpha}{4 \times \cos 2\alpha} &= \frac{x}{2\sqrt{5} - x} \Rightarrow \frac{1}{2} \tan 2\alpha = \frac{x}{2\sqrt{5} - x} \Rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{x}{2\sqrt{5} - x} \\ \Rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} &= \frac{x}{2\sqrt{5} - x} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{x}{2\sqrt{5} - x} \Rightarrow 2x = 4\sqrt{5} - 2x \Rightarrow x = \frac{4\sqrt{5}}{4} \Rightarrow x = \sqrt{5} \end{aligned}$$



ابتدا ثابت می‌کنیم مثلث $\triangle ABD$ متساوی الساقین است. برای این کار توجه می‌کنیم که مجموع زوایا در مثلث $\triangle ABC$ و $\triangle ABD$ برابر 180° است:

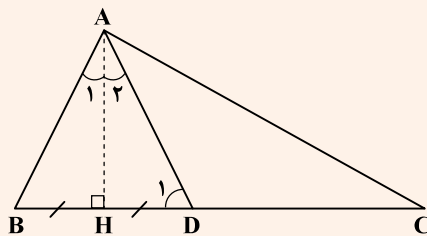
$$\triangle ABC: \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow 90^\circ + \hat{B} + \alpha = 180^\circ \Rightarrow \hat{B} = 90^\circ - \alpha$$

$$\triangle ABD: 2\alpha + \hat{B} + \hat{D}_1 = 180^\circ \Rightarrow 2\alpha + (90^\circ - \alpha) + \hat{D}_1 = 180^\circ \Rightarrow \hat{D}_1 = 90^\circ - \alpha$$

بنابراین دو زاویه $\hat{B}$ و $\hat{D}_1$ مساوی بوده و مثلث $\triangle ABD$ متساوی الساقین است.

پس اگر ارتفاع AH را رسم کنیم، AH نیمساز و میانه نیز هست پس

$$BH = HD \text{ و } \hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \alpha$$



$$\sin \hat{A}_1 = \frac{BH}{AB} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{BH}{2} \Rightarrow BH = 2 \sin \alpha$$

ضمناً با توجه به تعریف کتانژانت در مثلث قائم الزاویه $\triangle ABC$ می‌دانیم:

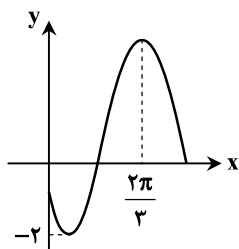
$$\cot \alpha = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \cot \alpha = 2 \Rightarrow 1 + \cot^2 \alpha = 1 + 4 \Rightarrow \frac{1}{\sin^2 \alpha} = 5 \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{5}} \xrightarrow{\text{حاده } \alpha} \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

بنابراین مقدار BD برابر است با:

$$BD = 2BH = 4 \sin \alpha = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

۱۴- قسمتی از نمودار تابع $f(x) = 1 - a \cos(bx + \frac{\pi}{3})$ به صورت مقابل است. مقدار $a - b$ کدام است؟



- (۱) ۱
(۲) -۱
(۳) -۵
(۴) ۵

۱۴- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۲ (فصل ۲، درس ۱ و فصل ۵، درس‌های ۱ و ۲)



- توابع $y = a \cos bx + c$ و $y = a \sin bx + c$ دارای مقدار ماکزیمم $|a| + c$ و مقدار مینیمم $-|a| + c$ است.



برای تعیین مثبت یا منفی بودن a و b ، به جهت یکنوایی و تقعر تابع در $x = 0$ توجه می‌کنیم.
در $x = 0$ نمودار تابع، نزولی و دارای تقعر رو به بالاست.

$$f'(x) = ab \sin(bx + \frac{\pi}{3}) \xrightarrow{f'(0) < 0} ab \times \frac{\sqrt{3}}{2} < 0 \Rightarrow ab < 0$$

$$f''(x) = ab^2 \cos(bx + \frac{\pi}{3}) \xrightarrow{f''(0) > 0} ab^2 \times \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow a > 0$$

پس a عددی مثبت و b عددی منفی است.

با توجه به نمودار تابع مقدار مینیمم تابع برابر -2 است، پس:

$$\min = -2 \Rightarrow 1 - |a| = -2 \xrightarrow{a > 0} 1 - a = -2 \Rightarrow a = 3$$

بنابراین ماکزیمم این تابع مثلثاتی برابر $1 + |a| = 1 + 3 = 4$ می‌باشد. طول نقطه ماکزیمم تابع برابر $\frac{2\pi}{3}$ است، پس f از نقطه $(\frac{2\pi}{3}, 4)$ می‌گذرد.

$$f(\frac{2\pi}{3}) = 4 \Rightarrow 1 - 3 \cos(\frac{2\pi}{3}b + \frac{\pi}{3}) = 4 \Rightarrow \cos(\frac{2\pi}{3}b + \frac{\pi}{3}) = -1$$

می‌دانیم مقدار کسینوس در مضارب فرد π برابر منفی یک است. پس با توجه به منفی بودن b و اینکه $\frac{2\pi}{3}$ طول اولین ماکزیمم تابع در

سمت راست محور طول‌ها است، داریم:

$$\frac{2\pi}{3}b + \frac{\pi}{3} = -\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{3}b = -\frac{4\pi}{3} \Rightarrow b = -2$$

$$a - b = 3 - (-2) = 5$$

بنابراین مقدار خواسته شده برابر است با:

۱۵- معادله $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ در بازه $(0, 2\pi)$ چند جواب دارد؟

- (۱) ۶ (۲) ۵ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۵- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۲، درس ۲)



- اگر α زاویه دلخواهی باشد، همواره داریم:

$$(۱) \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \begin{cases} \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \\ \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha \end{cases} \quad (۲) \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

- جواب‌های کلی معادله $\sin x = \sin \alpha$ به صورت $x = 2k\pi + \alpha$ و $x = (2k+1)\pi - \alpha$ می‌باشد که در آن $k \in \mathbb{Z}$.



با استفاده از اتحادهای مثلثاتی، معادله را ساده کرده و حل می‌کنیم:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \sin^2 x + 1 - \sin^2 x = 1 \Rightarrow (\sin x \cos x)^2 - \sin^2 x = 0$$

$$\Rightarrow \sin^2 x \cos^2 x - \sin^2 x = 0 \Rightarrow \sin^2 x (\cos^2 x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \xrightarrow{0 < x < 2\pi} x = \pi \\ \cos x = \pm \frac{1}{2} \xrightarrow{0 < x < 2\pi} x = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \end{cases}$$

بنابراین معادله در بازه $(0, 2\pi)$ ، ۵ جواب دارد.



معادله داده شده را به این صورت نیز می‌توان حل کرد:

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x \Rightarrow \sin^2 x = \sin^2 x \Rightarrow \begin{cases} \sin^2 x = \sin^2 x \\ \sin^2 x = -\sin^2 x = \sin^2(-x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + x \\ 2x = 2k\pi + \pi - x \\ 2x = 2k\pi - x \\ 2x = 2k\pi + \pi + x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi \\ x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \\ x = \frac{2k\pi}{3} \\ x = 2k\pi + \pi \end{cases}$$

با توجه به محدوده $0 < x < 2\pi$ ، جواب‌های $\left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right\}$ قابل قبول است.

۱۶- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-\sqrt{\cos x}}}{|x|}$ کدام است؟

$\frac{1}{2\sqrt{3}}$ (۴)

$\frac{1}{\sqrt{6}}$ (۳)

$\frac{1}{\sqrt{3}}$ (۲)

$\frac{1}{3\sqrt{2}}$ (۱)

▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۱ (فصل ۵، درس ۴)

۱۶- پاسخ: گزینه ۳



- برای اعداد دلخواه a و b ، «اتحاد تفاضل مکعبات» به صورت زیر برقرار است:

$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$$

- اگر α زاویه دلخواهی باشد، همواره داریم:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$$

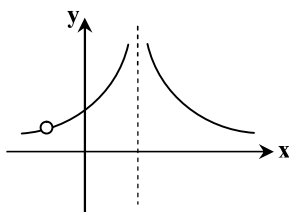
- در رفع ابهام حالت صفر تقسیم بر صفر مثلثاتی، سعی می‌کنیم آن را به عبارت $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ برسانیم.



برای کمتر شدن مقدار نوشتن در حل سؤال، فرض کنید $t = \sqrt{\cos x}$ ، پس:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-\sqrt{\cos x}}}{|x|} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-t}}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-t}\sqrt{1+t+t^2}}{|x|\sqrt{1+t+t^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-t^3}}{\sqrt{3}|x|} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{3}|x|} \times \frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{1+\cos x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\sqrt{3}|x| \times \sqrt{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\sin^2 x}}{\sqrt{6}|x|} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{6}} \left| \frac{\sin x}{x} \right| = \frac{1}{\sqrt{6}} \times 1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \end{aligned}$$

۱۷- نمودار تابع $f(x) = \frac{2x+b}{x^3+ax+2}$ به صورت مقابل است. حاصل $a-b$ کدام است؟



- (۱) ۱
(۲) -۷
(۳) ۷
(۴) -۱

۱۷- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۳، درس ۱ و فصل ۴، درس ۲)



- اگر معادله $f(x) = 0$ ریشه مضاعفی برابر a داشته باشد، آنگاه $f(a) = f'(a) = 0$



با توجه به نمودار f ، حد تابع در یک نقطه برابر $+\infty$ بوده و نقطه دیگری با طول منفی در دامنه تابع قرار ندارد ولی در آن نقطه حد دارد. پس مخرج کسر یک ریشه مضاعف و یک ریشه ساده دارد. به طوری که ریشه ساده مخرج با ریشه صورت یکسان است. این باعث می شود که در این ریشه ساده، تابع f حد داشته باشد.
در ریشه مضاعف، مخرج و مشتق مخرج هر دو برابر صفر هستند.

$$\begin{cases} x^3 + ax + 2 = 0 \\ 3x^2 + a = 0 \end{cases} \Rightarrow a = -3x^2 \Rightarrow x^3 - 3x^3 + 2 = 0 \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow x = 1$$

پس $x = 1$ ریشه مضاعف مخرج بوده و $a = -3$ ، بنابراین مخرج کسر به صورت زیر تجزیه می شود.

$$x^3 + ax + 2 = x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2)$$

پس $x = -2$ ریشه صورت هم هست و در نتیجه:

$$2(-2) + b = 0 \Rightarrow b = 4 \Rightarrow a - b = -3 - 4 \Rightarrow a - b = -7$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 + ax + b}{x^3 - 1} & x \neq 1 \\ bx + c & x = 1 \end{cases}$$

۱۸- تابع $f(x)$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته است. اگر $f(2)$ برابر صفر باشد، مقدار c کدام است؟

(۱) $-\frac{14}{3}$ (۲) $-\frac{10}{3}$ (۳) $\frac{8}{3}$ (۴) $\frac{4}{3}$

۱۸- پاسخ: گزینه ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (فصل ۵، درس ۵)



- تابع f در نقطه $x = a$ پیوسته است، هرگاه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$



تابع f باید در $x = 1$ پیوسته باشد، پس باید در این نقطه حد داشته باشد. حد تابع f در $x = 1$ از ضابطه اول به دست می آید. مخرج این ضابطه در $x = 1$ برابر صفر است، پس در ضابطه اول، صورت کسر نیز در $x = 1$ برابر صفر است. ضمناً از آنجاکه $f(2)$ برابر صفر است، پس ریشه های صورت کسر ضابطه اول، ۱ و ۲ است، یعنی:

$$2x^2 + ax + b = 2(x-1)(x-2) \Rightarrow 2x^2 + ax + b = 2x^2 - 6x + 4 \Rightarrow a = -6, b = 4$$

از طرفی برای پیوستگی تابع f در $x = 1$ باید حد تابع و مقدار آن با یکدیگر برابر باشند:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 6x + 4}{x^2 - 1} = b + c = 4 + c \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x-1)(x-2)}{(x-1)(x^2 + x + 1)} = 4 + c$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x-2)}{x^2 + x + 1} = -\frac{2}{3} \Rightarrow \frac{-2}{3} = 4 + c \Rightarrow c = -\frac{14}{3}$$

۱۹- خط $2x + 3y + 4 = 0$ در نقطه‌ای با طول یک بر نمودار تابع f مماس است. حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(\sin x) - f(1)}{(2x - \pi)^2}$ کدام است؟

$\frac{1}{6}$ (۱) $\frac{1}{12}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴)

۱۹- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۲ (فصل ۴، درس ۲)



- برای پیدا کردن حاصل حد یک تابع کسری وقتی حد صورت و مخرج کسر برابر صفر می‌شود می‌توان از قضیه هوییتال استفاده کرد:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \stackrel{\text{Hop}}{=} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

- شیب خط مماس بر نمودار تابع در یک نقطه، برابر با مشتق آن تابع در نقطه موردنظر است.



شیب خط مماس برابر $-\frac{2}{3}$ است پس مقدار مشتق تابع در $x = 1$ نیز برابر $-\frac{2}{3}$ است، یعنی $f'(1) = -\frac{2}{3}$. در ضمن $f(1) = -2$ ، زیرا خط $2x + 3y + 4 = 0$ از نقطه $(1, -2)$ می‌گذرد.

حد صورت و مخرج کسر در تابع داده‌شده برابر صفر است، پس از قاعده هوییتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(\sin x) - f(1)}{(2x - \pi)^2} \stackrel{\text{Hop}}{=} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x f'(\sin x)}{2(2x - \pi) \times 2} \stackrel{\text{Hop}}{=} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-\sin x \times f'(\sin x) + \cos x \times \cos x \times f''(\sin x)}{4 \times 2} = \frac{-1 \times f'(1) + 0}{8}$$

$$= \frac{-\frac{2}{3}}{8} = \frac{1}{12}$$



با توجه به اینکه خط $y = \frac{-2}{3}x - \frac{4}{3}$ در نقطه‌ای به طول یک بر نمودار تابع f مماس است، پس $f'(1) = -\frac{2}{3}$ و $f(1) = -2$. اگر نخواهیم برای محاسبه حد داده‌شده از قاعده هوییتال استفاده کنیم، می‌توانیم با تقسیم صورت و مخرج کسر بر $\sin x - 1$ حاصل حد را پیدا کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(\sin x) - f(1)}{(2x - \pi)^2} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{f(\sin x) - f(1)}{\sin x - 1}}{\frac{(2x - \pi)^2}{\sin x - 1}}$$

حاصل حد صورت و مخرج را به ترتیب A و B می‌نامیم. با استفاده از تغییر متغیر، حاصل حدهای A و B را پیدا می‌کنیم.

$$A = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(\sin x) - f(1)}{\sin x - 1} \stackrel{t = \sin x}{=} \lim_{t \rightarrow 1} \frac{f(t) - f(1)}{t - 1} = f'(1) = -\frac{2}{3}$$

$$B = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(2x - \pi)^2}{\sin x - 1} \xrightarrow{t = x - \frac{\pi}{2}} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(2(t + \frac{\pi}{2}) - \pi)^2}{\sin(t + \frac{\pi}{2}) - 1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(2t)^2}{\cos t - 1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{4t^2}{-2\sin^2 \frac{t}{2}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{4t^2}{-2(\frac{t}{2})^2} = \frac{4}{-2 \times \frac{1}{4}} = -8$$

بنابراین مقدار خواسته‌شده برابر $\frac{A}{B} = \frac{1}{12}$ است.

۲۰- آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}$ در نقطه $x=1$ چقدر با آهنگ تغییر متوسط آن در بازه $[0,9]$ اختلاف دارد؟

- (۱) صفر (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) $\frac{2}{3}$

۲۰- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۴، درس ۳)



- آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f در یک نقطه برابر مشتق تابع f در آن نقطه است.

- آهنگ تغییر متوسط تابع f روی بازه $[a, b]$ برابر است با:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(2-\sqrt{x}) - (-\frac{1}{2\sqrt{x}}) \times \sqrt{x}}{(2-\sqrt{x})^2} \Rightarrow f'(1) = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{1} \Rightarrow f'(1) = 1$$

$$\frac{f(9) - f(0)}{9 - 0} = \frac{-\frac{3}{9} - 0}{9 - 0} = -\frac{1}{3}$$

$$1 - (-\frac{1}{3}) = \frac{4}{3}$$

اکنون به محاسبه آهنگ تغییر متوسط تابع f روی بازه $[0,9]$ می‌پردازیم:

۲۱- اگر m و n به ترتیب تعداد نقاط بحرانی و اکسترمم نسبی تابع $y = 3\sqrt[3]{x} + |x-1|$ باشند، حاصل $2m - n$ کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۲۱- پاسخ: گزینه ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۵، درس ۱)



- فرض کنیم $c \in D_f$. نقطه به طول c را یک نقطه بحرانی برای تابع f می‌نامیم، هرگاه $f'(c)$ برابر صفر باشد و یا $f'(c)$ موجود نباشد.

- اگر مشتق تابع پیوسته در اطراف $x=a$ تغییر علامت دهد، آنگاه f در $x=a$ اکسترمم نسبی دارد.



ابتدا تابع را بدون قدرمطلق به صورت دو ضابطه‌ای بازنویسی کرده، سپس مشتق آن را محاسبه می‌کنیم:

$$y = \begin{cases} 3\sqrt[3]{x} + x - 1 & x \geq 1 \\ 3\sqrt[3]{x} - x + 1 & x < 1 \end{cases}$$

$$y' = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + 1 & x > 1 \\ \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - 1 & x < 1 \end{cases}$$

اکنون با صفر قرار دادن مشتق، نقاط بحرانی تابع را به دست می‌آوریم. واضح است معادله اول نمی‌تواند برابر صفر باشد، چون همواره مثبت است.

$$y' = 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - 1 = 0 \Rightarrow \frac{1 - \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}} = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{x^2} = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \xrightarrow{x < 1} x = -1$$

پس در $x = -1$ مشتق تابع برابر صفر بوده و یک نقطه بحرانی برای تابع است.

همچنین مشتق تابع یعنی $y' = \frac{1 - \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}}$ در اطراف $x = -1$ تغییر علامت می‌دهد، پس $x = -1$ طول اکسترمم نسبی تابع نیز هست.

ضمناً مشتق تابع در $x = 0$ تعریف نشده است. اما از آنجا که تابع $y = \frac{1 - \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}}$ در اطراف $x = 0$ تغییر علامت نمی‌دهد، پس اکسترمم

نسبی نیست.

از طرف دیگر تابع در $x=1$ نیز مشتق ناپذیر است، زیرا مشتق راست و چپ تابع در آن برابر ۲ و صفر بوده که با یکدیگر برابر نیست. پس $x=1$ نیز طول نقطه بحرانی تابع است. اما این نقطه نیز اکسترمم نسبی محسوب نمی شود چون مشتق در اطراف $x=1$ تغییر علامت

نمی دهد (توجه کنید وقتی $x \rightarrow 1^-$ مشتق تابع یعنی $1 - \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$ مقداری مثبت است).

پس تابع ۳ نقطه بحرانی با طول های $\{0, 1, -1\}$ و یک اکسترمم نسبی با طول $\{-1\}$ دارد، بنابراین:

$$m=3, n=1 \Rightarrow 2m-n=5$$

۲۲- به ازای چند مقدار صحیح k ، معادله $x^3 - 3x^2 - 9x + k = 2$ سه ریشه متمایز حقیقی دارد؟

۳۱ (۱) ۳۰ (۲) ۲۹ (۳) ۲۸ (۴)

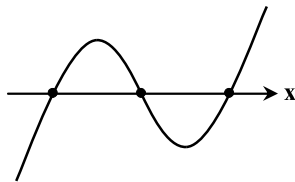
۲۲- پاسخ: گزینه ۱ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۲ (فصل ۵، درس ۳)



- برای هر تابع f جواب های معادله $f(x) = 0$ را (در صورت وجود) ریشه های تابع f می نامیم.
- اگر نمودار $f(x)$ را رسم کنیم، ریشه های f طول نقاط تلاقی نمودار با محور طول هاست.



برای آنکه معادله $x^3 - 3x^2 - 9x + k = 2$ دارای سه ریشه متمایز باشد، می بایست نمودار تابع $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + k - 2$ به صورت مقابل باشد. پس اگر عرض نقاط اکسترمم نسبی تابع f ، مختلف العلامه باشند، معادله فوق سه ریشه دارد.



$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3) = 3(x-3)(x+1)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow y_{\max} = f(-1) = k + 3 \\ x = 3 \Rightarrow y_{\min} = f(3) = k - 29 \end{cases}$$

برای آنکه مقادیر اکسترمم به دست آمده مختلف العلامه باشد، می بایست حاصل ضرب آن ها منفی باشد.

$$y_{\max} \times y_{\min} < 0 \Rightarrow (k+3)(k-29) < 0 \Rightarrow -3 < k < 29 \Rightarrow k = -2, -1, \dots, 28$$

یعنی برای k ، ۳۱ مقدار صحیح وجود دارد.

۲۳- اگر A و B دو پیشامد ناتهی و مستقل باشند به طوری که $P(A|B) = 0/6$ و $P(A \cap B) = 0/2$ ، مقدار $P(A \cup B')$ کدام است؟

۴ (۱) ۱۳ (۲) ۱۴ (۳) ۲ (۴)

۲۳- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * آمار و احتمال (فصل ۲، درس ۴)



- پیشامدهای A و B را مستقل می گوئیم، هرگاه وقوع یکی از آن ها در احتمال وقوع دیگری تأثیری نداشته باشد. به عبارت دیگر دو پیشامد A و B مستقل اند، اگر و تنها اگر $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. دو پیشامدی که مستقل نباشند، وابسته نامیده می شوند.
- اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، پیشامدهای « A و « B' »، « A' و « B » و « A' و « B' » نیز مستقل اند.



$$P(A|B) = P(A) = 0/6 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

A و B دو پیشامد مستقل اند، پس:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \Rightarrow 0/2 = 0/6 \times P(B) \Rightarrow P(B) = \frac{1}{3}$$

از طرفی می دانیم اگر A و B مستقل باشند، A و « B' » نیز مستقل هستند، پس مقدار $P(A \cup B')$ برابر است با:

$$P(A \cup B') = P(A) + P(B') - P(A \cap B') = P(A) + P(B') - P(A) \times P(B')$$

$$= P(A) + (1 - P(B)) - P(A) \times (1 - P(B)) = \frac{3}{5} + (1 - \frac{1}{3}) - \frac{3}{5} \times (1 - \frac{1}{3}) = \frac{3}{5} + \frac{2}{3} - \frac{2}{5} = \frac{1}{5} + \frac{2}{3} = \frac{13}{15}$$

۲۴- اگر انحراف معیار تعدادی داده را به تمام داده‌ها اضافه کنیم، ضریب تغییرات داده‌های جدید $\frac{2}{5}$ ضریب تغییرات داده‌های اولیه می‌شود.

ضریب تغییرات داده‌های جدید کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{5}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{4}{5}$ (۴) $\frac{1}{3}$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * آمار و احتمال (فصل ۳، درس ۳)

۲۴- پاسخ: گزینه ۱



- اگر به تمام داده‌های $x_1, x_2, \dots, x_n$ مقدار ثابت b اضافه شود، به میانگین آن‌ها نیز مقدار ثابت b اضافه می‌شود.

$$\overline{x+b} = \bar{x} + b$$

- اگر به تمام داده‌های $x_1, x_2, \dots, x_n$ عدد ثابتی را اضافه یا کم کنیم، انحراف معیار و واریانس تغییری نمی‌کند.

$$\sigma_{x \pm b} = \sigma_x \quad \text{یا} \quad \sigma_{x \pm b}^2 = \sigma_x^2$$

- ضریب تغییرات داده‌ها: معیاری است که از تقسیم انحراف معیار داده‌ها (σ) به میانگین داده‌ها ($\bar{x}$) به دست می‌آید و آن را با نماد CV نشان می‌دهند:

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$$

هر قدر ضریب تغییرات کمتر باشد، میزان پراکندگی داده‌ها کمتر خواهد شد که این موضوع برای ما مطلوب است.



ضریب تغییرات داده‌های اولیه را $CV_1 = \frac{\sigma}{\bar{x}}$ در نظر می‌گیریم. اگر به تمام داده‌ها مقدار σ را اضافه کنیم به میانگین داده‌ها نیز به اندازه σ

اضافه می‌شود ولی انحراف معیار داده‌ها تغییر نمی‌کند و ضریب تغییرات داده‌های جدید به صورت $CV_2 = \frac{\sigma}{\bar{x} + \sigma}$ می‌شود. اینک با توجه به

اطلاعات مسئله، داریم:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma}{\bar{x} + \sigma} &= \frac{2}{5} \times \frac{\sigma}{\bar{x}} \Rightarrow \frac{1}{\bar{x} + \sigma} = \frac{2}{5\bar{x}} \Rightarrow 5\bar{x} = 2\bar{x} + 2\sigma \Rightarrow 3\bar{x} = 2\sigma \\ \Rightarrow \frac{\sigma}{\bar{x}} &= \frac{3}{2} \Rightarrow CV_1 = \frac{3}{2} \Rightarrow CV_2 = \frac{2}{5} CV_1 = \frac{2}{5} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

۲۵- نقطه O محل هم‌رسمی عمودمنصف‌های مثلث ABC با زوایای حاده است. اگر از A، B و C به ترتیب خطوطی عمود بر AO، BO و CO

رسم کنیم، از محل تلاقی دوبه‌دوی این خطوط، مثلثی حاصل می‌شود که نقطه O در این مثلث، محل هم‌رسمی کدام است؟

- (۱) عمودمنصف‌ها (۲) ارتفاع‌ها (۳) نیمسازها (۴) میانه‌ها

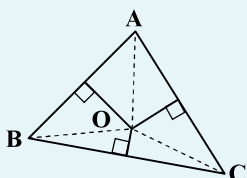
▲ مشخصات سؤال: ساده * هندسه ۱ (فصل ۱، درس ۲)

۲۵- پاسخ: گزینه ۳



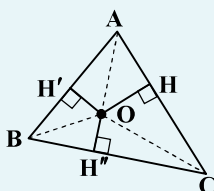
- سه عمودمنصف هر مثلث در یک نقطه هم‌رسم هستند. نقطه هم‌رسمی سه عمودمنصف مثلث از سه رأس مثلث به یک فاصله است.

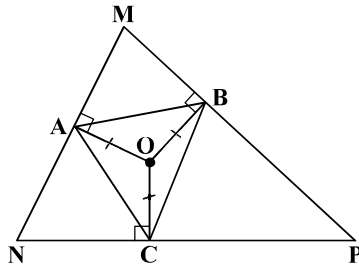
$$OA = OB = OC$$



- در هر مثلث، سه نیمساز داخلی در یک نقطه هم‌رسم هستند. نقطه هم‌رسمی سه نیمساز داخلی همواره داخل مثلث قرار دارد و از سه ضلع مثلث به یک فاصله است.

$$OH = OH' = OH''$$



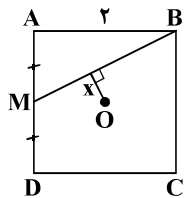


محل هم‌رسی عمودمنصف‌ها، نقطه‌ای است که از سه رأس مثلث به یک فاصله است:

$$OA = OB = OC$$

مطابق شکل، اگر از A، B و C به ترتیب خطوطی عمود بر OA، OB و OC رسم کنیم، نقطه O در مثلث MNP، نقطه‌ای است که از سه ضلع مثلث به یک فاصله است. پس این نقطه محل هم‌رسی نیمسازها در مثلث MNP می‌باشد.

۲۶- در شکل زیر، نقطه O مرکز مربعی به ضلع ۲ است. اگر M وسط ضلع مربع باشد، x کدام است؟



$$(1) \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$(2) \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$(3) \frac{1}{\sqrt{6}}$$

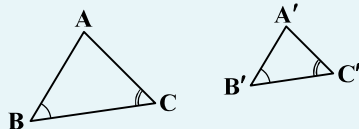
$$(4) \frac{1}{\sqrt{7}}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۱ (فصل ۲، درس ۳)

۲۶- پاسخ: گزینه ۲



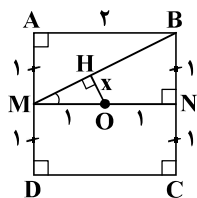
- هرگاه دو زاویه از مثلثی، با دو زاویه از مثلث دیگر هم‌اندازه باشند، دو مثلث متشابه‌اند.



$$(\hat{B} = \hat{B}', \hat{C} = \hat{C}' \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C')$$



از M به O وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا ضلع BC را در N قطع کند:



$$\triangle ABM : MB^2 = AM^2 + AB^2 = 1 + 2 = 5 \Rightarrow MB = \sqrt{5}$$

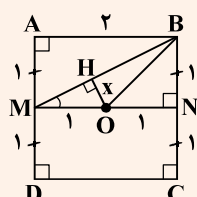
مثلث‌های MHO و MBN متشابه هستند.

$$\hat{M} = \hat{M}, \hat{H} = \hat{N} = 90^\circ \Rightarrow \triangle MHO \sim \triangle MBN$$

$$\frac{MO}{MB} = \frac{OH}{BN} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{x}{1} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{5}}$$



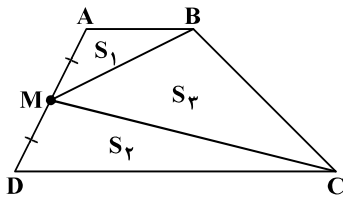
پس از محاسبه اندازه MB، با استفاده از مساحت مثلث OMB داریم:



$$S_{OMB} = \frac{1}{2} BN \cdot OM = \frac{1}{2} OH \cdot MB$$

$$\Rightarrow BN \cdot OM = OH \cdot MB \Rightarrow 1 \times 1 = x \times \sqrt{5} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

۲۷- در دوزنقه شکل زیر، M وسط ساق AD است. کدام رابطه بین مساحت‌های S_1 ، S_2 و S_3 برقرار است؟



$$(1) S_1 + S_2 = 2S_3$$

$$(2) S_3 = \sqrt{S_1 S_2}$$

$$(3) S_1 + S_2 = S_3$$

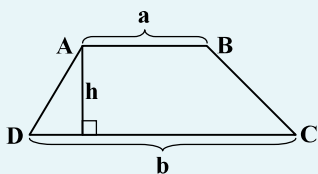
$$(4) S_3 = S_1 S_2$$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * هندسه ۱ (فصل ۳، درس ۲)

۲۷- پاسخ: گزینه ۳



- اگر اندازه‌های دو قاعده یک دوزنقه a و b و اندازه ارتفاع آن h باشد، $S = \frac{(a+b)h}{2}$.

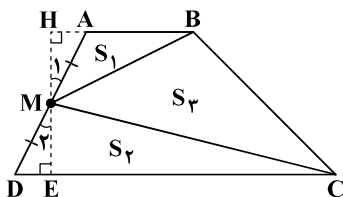


از M به دو قاعده عمود رسم می‌کنیم:

$$MA = MD, \hat{M}_1 = \hat{M}_2$$

پس دو مثلث قائم‌الزاویه MAH و MDE به حالت تساوی وتر و یک زاویه حاده،

هم‌نهشت‌اند. پس $MH = ME = h$.



$$\begin{cases} S_1 + S_2 = \frac{1}{2}h \cdot AB + \frac{1}{2}h \cdot DC = \frac{1}{2}h(AB + DC) \\ S_{ABCD} = \frac{1}{2} \times 2h(AB + DC) = h(AB + DC) \end{cases}$$

$$\Rightarrow S_1 + S_2 = \frac{1}{2} S_{ABCD} \quad (1)$$

پس مجموع $S_1 + S_2$ نصف مساحت دوزنقه ABCD است و در نتیجه S_3 نیز باید نصف مساحت دوزنقه باشد:

$$S_3 = \frac{1}{2} S_{ABCD} \xrightarrow{(1)} S_1 + S_2 = S_3$$

۲۸- در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC، نقاط M و N به ترتیب روی اضلاع AB و AC طوری قرار گرفته‌اند که $\frac{AM}{AB} = \frac{CN}{AC} = \frac{1}{3}$. طول MN

چه کسری از طول ضلع مثلث است؟

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (4)$$

$$\frac{1}{3} \quad (3)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} \quad (1)$$

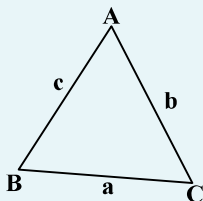
▲ مشخصات سؤال: ساده * هندسه ۲ (فصل ۳، درس ۲)

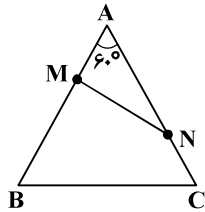
۲۸- پاسخ: گزینه ۲



- قضیه کسینوس‌ها: در هر مثلث، مربع اندازه هر ضلع برابر است با مجموع مربع‌های اندازه‌های دو ضلع دیگر، منهای دو برابر حاصل‌ضرب اندازه آن دو ضلع در کسینوس زاویه بین آن‌ها:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}, \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \hat{B}, \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \hat{C}$$





فرض می‌کنیم طول ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع ABC برابر a باشد، پس:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{1}{3} \Rightarrow AM = \frac{1}{3} AB \Rightarrow AM = \frac{a}{3}$$

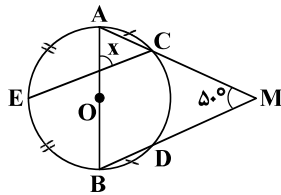
$$\frac{CN}{AC} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{AN}{AC} = \frac{2}{3} \Rightarrow AN = \frac{2}{3} AC \Rightarrow AN = \frac{2}{3} a$$

بر طبق قضیه کسینوس‌ها در مثلث AMN داریم:

$$MN^2 = AM^2 + AN^2 - 2AM \cdot AN \cos 60^\circ = \frac{a^2}{9} + \frac{4a^2}{9} - 2\left(\frac{a}{3}\right)\left(\frac{2}{3}a\right)\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow MN^2 = \frac{1}{9}(a^2 + 4a^2 - 2a^2)$$

$$= \frac{a^2}{3} \Rightarrow MN = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

۲۹- در شکل زیر، AB قطر دایره است. اگر $\widehat{AC} = \widehat{BD}$ و $\widehat{AE} = \widehat{EB}$ باشد، زاویه x کدام است؟



(۱) 50°

(۲) 60°

(۳) 70°

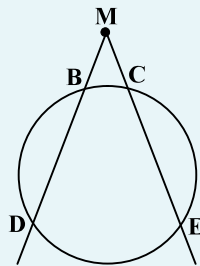
(۴) 80°

▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۲ (فصل ۱، درس ۱)

۲۹- پاسخ: گزینه ۳

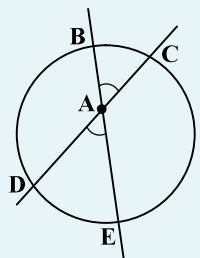


- زاویه‌ای که از برخورد امتدادهای دو وتر در خارج دایره تشکیل می‌شود، از رابطه زیر به دست می‌آید:



$$\hat{M} = \frac{1}{2}(\widehat{DE} - \widehat{BC})$$

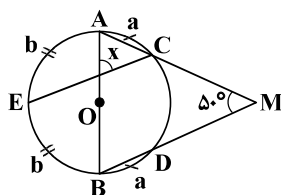
- زاویه‌ای که از برخورد دو وتر در داخل دایره تشکیل می‌شود، از رابطه زیر به دست می‌آید:



$$\hat{DAE} = \hat{BAC} = \frac{1}{2}(\widehat{BC} + \widehat{DE})$$



با توجه به شکل مقابل و مفروضات سؤال، داریم:



$$\begin{cases} \widehat{AC} = \widehat{DB} = a \\ \widehat{AE} = \widehat{EB} = b = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ \end{cases}$$

$$\hat{M} = \frac{\widehat{AB} - \widehat{CD}}{2} \Rightarrow 50^\circ = \frac{180^\circ - \widehat{CD}}{2} \Rightarrow 100^\circ = 180^\circ - \widehat{CD} \Rightarrow \widehat{CD} = 80^\circ$$

$$\widehat{AC} + \widehat{CD} + \widehat{BD} = 180^\circ \Rightarrow a + 80^\circ + a = 180^\circ \Rightarrow a = 50^\circ$$

$$x = \frac{\widehat{AC} + \widehat{BE}}{2} = \frac{a + b}{2} = \frac{50^\circ + 90^\circ}{2} = 70^\circ$$

اندازه زاویه x برابر است با:

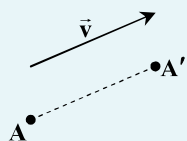
۳۰- مربع $ABCD$ به ضلع ۴ مفروض است. این مربع را ابتدا با بردار $\overrightarrow{AB}$ انتقال داده و سپس مجانس مربع تصویر را در تجانس به مرکز وسط AC و نسبت $\frac{1}{2}$ می‌یابیم. مساحت بخشی از مربع $ABCD$ غیر مشترک با مربع حاصل، کدام است؟

۱۰ (۱) ۱۲ (۲) ۸ (۳) ۱۴ (۴)

۳۰- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * هندسه ۲ (فصل ۲، درس ۱)



- انتقال T تحت بردار $\vec{v}$ ، تبدیلی از صفحه است که در آن، تصویر هر نقطه A از صفحه P ، نقطه‌ای مانند A' در همان صفحه است که $\overrightarrow{AA'} = \vec{v}$



- اگر O نقطه‌ای ثابت در صفحه و $k \neq 0$ یک عدد حقیقی باشد، نقطه M' را متجانس نقطه M در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس k گوئیم؛ هرگاه سه شرط زیر برقرار باشد:

(الف) سه نقطه O ، M و M' روی یک خط راست باشند.

$$OM' = |k| \cdot OM \quad (ب)$$

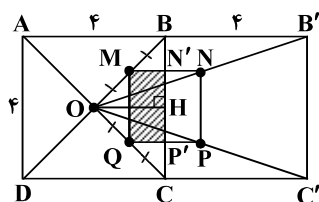
- اگر k مثبت باشد، M' روی نیم خط OM و نقاط M و M' در یک طرف نقطه O قرار دارند.

مثال: $OM' = 2OM$ $k = 2$

مثال: $OM' = \frac{1}{2}OM$ $k = \frac{1}{2}$

- اگر k منفی باشد، نقطه O بین نقاط M و M' قرار می‌گیرد.

مثال: $OM' = 2OM$ $k = -2$



مربع $BB'C'C$ انتقال یافته مربع $ABCD$ تحت بردار $\overrightarrow{AB}$ است.

مربع $MNPQ$ تصویر مربع $BB'C'C$ تحت تجانس به مرکز O و نسبت تجانس $\frac{1}{2}$ است.

$$MQ = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \times 4 = 2$$

نقطه برخورد MN و PQ با ضلع BC را به ترتیب N' و P' در نظر می‌گیریم. با توجه به اینکه مجانس هر پاره خط، پاره خطی موازی با آن است، داریم:

$$MN' \parallel BB', BB' \parallel OH \Rightarrow MN' \parallel OH \Rightarrow \frac{BM}{BO} = \frac{MN'}{OH}, \frac{BM}{BO} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{MN'}{OH} = \frac{1}{2} \xrightarrow{OH=2} \frac{MN'}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow MN' = 1 \Rightarrow S_{MN'P'Q} = 1 \times 2 = 2$$

مساحت خواسته شده برابر است با:

$$S_{ABCD} - S_{MN'P'Q} = 4^2 - 2 = 16 - 2 = 14$$

۳۱- اگر $A = \begin{bmatrix} a & a+1 \\ 2b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -a & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ یک ماتریس قطری باشد، مجموع درایه‌های ماتریس A^{1405} کدام است؟

۱) 2×7^{1404} ۲) 2×7^{1405}

۳) -2×7^{1405} ۴) صفر



- ماتریس قطری: ماتریس مربعی که تمام درایه‌های غیر از قطر اصلی آن برابر صفر باشند، ماتریس قطری است.

$$\text{ماتریس قطری مرتبه } 2 = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

- اگر A یک ماتریس قطری باشد، برای محاسبه A^n باید درایه‌های قطر اصلی آن را به توان n برسانیم.

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \Rightarrow A^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{bmatrix}$$



با توجه به اینکه ماتریس A، قطری است، داریم:

$$A = \begin{bmatrix} a & a+1 \\ 2b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -a & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a^2 + 4a + 4 & -a+1 \\ -2ab + 4a & a-4b \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -a+1=0 \\ -2ab+4a=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} -1+4+4 & -1+1 \\ -4+4 & 1-8 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{1405} = \begin{bmatrix} 7^{1405} & 0 \\ 0 & -7^{1405} \end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های این ماتریس برابر صفر است.

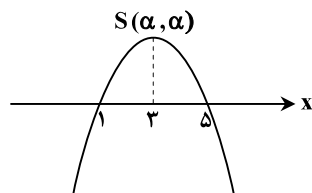
۳۲- محور تقارن یک سهمی، موازی یکی از محورهای مختصات است و رأس این سهمی واقع بر نیمساز ناحیه اول است. اگر این سهمی محور xها را در نقاطی به طول ۱ و ۵ قطع کند، فاصله کانونی سهمی کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{12}$



- معادله سهمی افقی یا قائم با رأس $S(h, k)$ به صورت زیر است.

معادله سهمی	کانون	خط هادی	محور سهمی	دهانه سهمی
$(y-k)^2 = 4a(x-h)$	$(a+h, k)$	$x = -a+h$	خط $y = k$	روبه راست
$(y-k)^2 = -4a(x-h)$	$(-a+h, k)$	$x = a+h$	خط $y = k$	روبه چپ
$(x-h)^2 = 4a(y-k)$	$(h, a+k)$	$y = -a+k$	خط $x = h$	روبه بالا
$(x-h)^2 = -4a(y-k)$	$(h, -a+k)$	$y = a+k$	خط $x = h$	روبه پایین



فقط سهمی قائم می‌تواند محور xها را در دو نقطه قطع کند، پس مطابق شکل زیر چون رأس سهمی روی خط $y = x$ قرار دارد و سهمی نسبت به خط قائم گذرنده از رأس تقارن دارد،

$$\alpha = \frac{1+5}{2} = 3$$

می‌توان رأس سهمی را به صورت زیر به دست آورد:

$$\text{رأس سهمی: } S(3, 3)$$

معادله سهمی به صورت زیر است. توجه کنید که سهمی رو به پایین است.

$$(x-3)^2 = -4a(y-3)$$

$$(1-3)^2 = -4a(0-3) \Rightarrow 4 = 12a \Rightarrow a = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

نقطه $(1, 0)$ باید در این معادله صدق کند، پس:

۳۳- اگر مساحت مثلث بناشده بر دو بردار $\vec{u}$ و $\vec{v}$ برابر ۶ باشد، حجم متوازی السطوح بناشده بر سه بردار $2\vec{u}$ ، $3\vec{v}$ و $\vec{u} \times \vec{v}$ کدام است؟

(۲) ۷۲۰

(۱) ۵۶۷

(۴) ۹۲۰

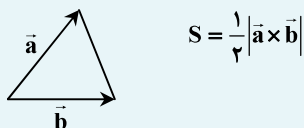
(۳) ۸۶۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۳ (فصل ۳، درس ۲)

۳۳- پاسخ: گزینه ۳

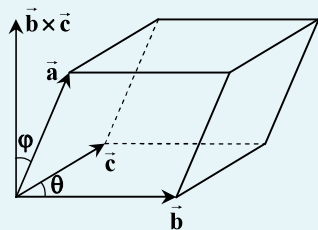


- مساحت مثلثی که توسط دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ساخته می شود برابر است با:



- حجم متوازی السطوح ساخته شده بر روی سه بردار $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ به صورت زیر به دست می آید:

$$\text{حجم متوازی السطوح} = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$$



مساحت مثلث بناشده بر دو بردار $\vec{u}$ و $\vec{v}$ برابر است با:

$$S = \frac{1}{2} |\vec{u} \times \vec{v}| \xrightarrow{S=6} \frac{1}{2} |\vec{u} \times \vec{v}| = 6 \Rightarrow |\vec{u} \times \vec{v}| = 12$$

حجم متوازی السطوح ساخته شده بر روی سه بردار $2\vec{u}$ ، $3\vec{v}$ و $\vec{u} \times \vec{v}$ برابر است با:

$$V = |(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (2\vec{u} \times 3\vec{v})| = 6 |(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (\vec{u} \times \vec{v})| = 6 |\vec{u} \times \vec{v}|^2 = 6 \times 12^2 = 864$$

۳۴- خط $d: y = 2$ و نقطه $A(5, 4)$ مفروض اند. نقاطی از صفحه مختصات که از خط d به فاصله ۱ بوده و از A به فاصله ۳ باشند، رئوس یک چندضلعی اند. مساحت این چندضلعی کدام است؟

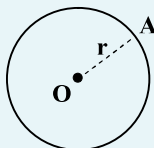
(۲) $\sqrt{6}$ (۱) $2\sqrt{2}$ (۴) $2\sqrt{6}$ (۳) $4\sqrt{2}$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * هندسه ۳ (فصل ۲، درس ۱)

۳۴- پاسخ: گزینه ۳

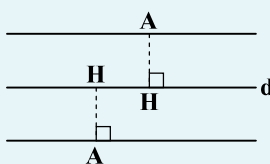


- مکان هندسی نقاطی که از نقطه ثابت O به فاصله ثابت r قرار دارند، دایره ای به مرکز O و به شعاع r است.



$$A \text{ روی دایره} \Leftrightarrow OA = r$$

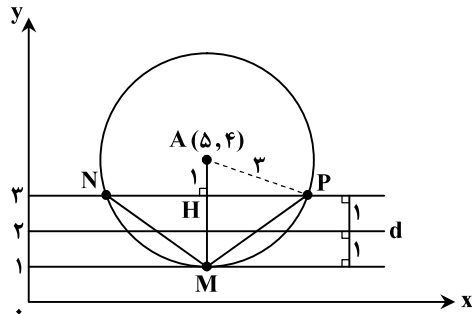
- مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط d به فاصله ثابت k قرار دارند، دو خط موازی d ، به فاصله k از آن و در دو طرف آن است.



$$AH = k$$



باید دو خط موازی d در طرفین آن و به فاصله ۱ از آن را با دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۳ قطع دهیم که مطابق شکل با توجه به مختصات A و معادله خط d ، در سه نقطه M ، N و P یکدیگر را قطع می‌کنند.



$$AP = 3, AH = 1 \Rightarrow PH = \sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2}$$

$$PN = 2PH = 2 \times 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}, MH = AM - AH = 3 - 1 = 2$$

$$\Rightarrow S_{\triangle MNP} = \frac{1}{2} MH \times PN = \frac{1}{2} \times 2 \times 4\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

۳۵- چند نقطه با مختصات صحیح روی منحنی نمایش رابطه $x^2 - 2xy - 3x - y + 2 = 0$ وجود دارد که در ربع سوم قرار داشته باشند؟

۲ (۴)

۴ (۳)

۱ (۲)

۳ (۱)

▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (فصل ۱، درس ۲)

۳۵- پاسخ: گزینه ۳



- هرگاه عددی دو عدد را بشمارد، آنگاه مجموع و تفاضل آن دو عدد را نیز می‌شمارد.

$$a|b \wedge a|c \Rightarrow a|b \pm c$$

- به $mb + nc$ وقتی m و n اعداد دلخواهی هستند، ترکیب خطی b و c می‌گویند. اگر a دو عدد b و c را عاد کند، آنگاه a هر ترکیب خطی b و c را هم عاد می‌کند.

$$\left. \begin{array}{l} a|b \\ a|c \end{array} \right\} \Rightarrow a|mb + nc$$



ابتدا y را بر حسب x حل می‌کنیم:

$$x^2 - 2xy - 3x - y + 2 = 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 2xy + y \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = y(2x + 1) \Rightarrow y = \frac{x^2 - 3x + 2}{2x + 1}$$

پس باید $x^2 - 3x + 2$ بر $2x + 1$ بخش پذیر باشد، یعنی: $2x + 1 | x^2 - 3x + 2$

به کمک ویژگی‌های عاد کردن، داریم:

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 1 | (2x + 1)^2 \Rightarrow 2x + 1 | 4x^2 + 4x + 1 \\ 2x + 1 | x^2 - 3x + 2 \xrightarrow{\times 4} 2x + 1 | 4x^2 - 12x + 8 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ازهم کم کنیم}} 2x + 1 | 4x^2 + 4x + 1 - (4x^2 - 12x + 8) \\ \Rightarrow 2x + 1 | 4x^2 + 4x + 1 - 4x^2 + 12x - 8 \Rightarrow 2x + 1 | 16x - 7 \\ \left. \begin{array}{l} 2x + 1 | 2x + 1 \\ 2x + 1 | 16x - 7 \end{array} \right\} \Rightarrow 2x + 1 | 8(2x + 1) - (16x - 7) \Rightarrow 2x + 1 | 15$$

پس $2x + 1$ مقسوم‌علیه‌های صحیح عدد ۱۵ است.

$$2x + 1 = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15 \Rightarrow x = 0, -1, 1, -2, 2, -3, 7, -8$$

در ربع سوم مقادیر x و y منفی هستند، پس برای x های $-8, -3, -2, -1$ مقادیر $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{2x + 1}$ را به دست می‌آوریم:

$$x = -1 \Rightarrow y = -6$$

$$x = -2 \Rightarrow y = -4$$

$$x = -3 \Rightarrow y = -4$$

$$x = -8 \Rightarrow y = -6$$

همان گونه که مشاهده می‌کنید هر ۴ نقطه در ناحیه سوم قرار دارند.



در رابطه بخش پذیری $x^2 - 3x + 2$ | $x^2 - 3x + 1$ ریشه $2x + 1 = 0$ را یافته و در عبارت $x^2 - 3x + 2$ قرار می دهیم.

$$2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{2} + 2 = \frac{1+6+8}{4} = \frac{15}{4}$$

$2x + 1$ باید صورت کسر فوق یعنی عدد ۱۵ را عاد کند: $15 | 2x + 1$ ادامه راه حل مانند روش اول است.

۳۶- اگر سه رقم ۱، سه رقم ۲ و سه رقم ۳ را به تصادف در خانه های یک مربع 3×3 بچینیم، احتمال تشکیل مربع لاتین چقدر است؟

$$\frac{1}{140} \quad (۱) \quad \frac{1}{160} \quad (۲) \quad \frac{1}{120} \quad (۳) \quad \frac{1}{110} \quad (۴)$$

۳۶- پاسخ: گزینه ۱ **▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (فصل ۳، درس ۱)**



- یک جدول مربعی از اعداد ۱، ۲، ... و n به شکل یک مربع $n \times n$ را که سطرها و ستون های آن با اعداد ۱، ۲، ... و n پر شده باشد و در هیچ سطر آن و نیز در هیچ ستون آن عدد تکراری وجود نداشته باشد، «مربع لاتین» می نامیم. (به هریک از اعداد درون مربع لاتین یک درایه می گوئیم.)
- قضیه جایگشت بانکرار: اگر n شیء مفروض باشند، به طوری که n_1 تای آن ها از نوع اول و یکسان و n_2 تای آن ها از نوع دوم و یکسان و ... و n_k تای آن ها از نوع k ام و یکسان باشند در این صورت تعداد کل جایگشت های این اشیاء برابر است با:

$$\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \dots \times n_k!}$$



در مربع 3×3 ، ۹ خانه داریم که توسط سه رقم ۱، سه رقم ۲ و سه رقم ۳ پر می شود، پس به کمک فرمول جایگشت با تکرار، تعداد کل حالات، برابر است با:

$$n(S) = \frac{9!}{3! \times 3! \times 3!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3 \times 2 \times 1 \times 3 \times 2 \times 1 \times 3!} = 1680$$

از طرفی تعداد مربع های لاتین مرتبه ۳ برابر ۱۲ است، پس: $n(A) = 12$

پس احتمال مورد نظر برابر است با:

$$P(A) = \frac{12}{1680} = \frac{1}{140}$$

۳۷- به چند طریق می توان ۸ فقره چک پول یکسان ۱۰۰ هزار تومانی را بین ۶ نفر توزیع کرد به طوری که دقیقاً به ۳ نفر چک پول نرسد؟

$$360 \quad (۱) \quad 420 \quad (۲) \quad 380 \quad (۳) \quad 400 \quad (۴)$$

۳۷- پاسخ: گزینه ۲ **▲ مشخصات سؤال: دشوار * ریاضیات گسسته (فصل ۳، درس ۱)**



- تعداد جواب های صحیح و مثبت معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ برابر است با $\binom{n-1}{k-1}$.



اگر به نفر اول تا ششم به ترتیب x_1 تا x_6 چک پول برسد، داریم:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 8$$

ابتدا سه نفری که قرار است به آن ها چک پول نرسد را انتخاب می کنیم، تعداد حالات این کار برابر است با:

$$\binom{6}{3} = 20$$

اگر فرض کنیم تعداد چک پول این سه نفر x_4, x_5, x_6 باشند، داریم:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 8 \quad ; \quad x_4 = x_5 = x_6 = 0$$

اینک قرار است که به سه نفر دیگر هر کدام حداقل یک چک پول برسد، پس تعداد جواب‌های طبیعی معادلهٔ اخیر را به دست می‌آوریم:

$$\binom{8-1}{3-1} = \binom{7}{2} = 21$$

و در نهایت تعداد کل حالات به کمک اصل ضرب برابر است با:

$$20 \times 21 = 420$$

۳۸- چند عدد چهاررقمی با ارقام ۰ تا ۴ وجود دارد که در آن‌ها ۱۳ ظاهر نمی‌شود؟

۴۳۸ (۴)

۴۳۶ (۳)

۴۳۵ (۲)

۴۳۷ (۱)

▲ مشخصات سؤال: دشوار * ریاضیات گسسته (فصل ۳، درس ۲)

۳۸- پاسخ: گزینهٔ ۳



- (اصل شمول و عدم شمول برای سه مجموعه): اگر A, B, C زیرمجموعه‌هایی از مجموعهٔ مرجع S باشند، در این صورت همواره تساوی‌های زیر برقرار است:

$$1) |A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

$$2) |\overline{A \cap B \cap C}| = |\overline{A \cup B \cup C}| = |S| - |A \cup B \cup C|$$



تعداد کل اعداد چهاررقمی با ارقام ۰ تا ۴ برابر است با:

$$|S| = 4 \times 5 \times 5 \times 5 = 500$$

اگر $|A|$ را تعداد اعداد چهاررقمی به صورت $\overline{12ab}$ و $|B|$ را تعداد اعداد چهاررقمی به صورت $a12b$ و $|C|$ را تعداد اعداد چهاررقمی به صورت $ab13$ در نظر بگیریم، داریم:

$$|A|: \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & & \\ \hline \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & \times & 1 & \times & 5 & \times & 5 & = 25 \\ \hline \end{array} \Rightarrow |A| = 25$$

$$|B|: \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & 1 & 3 & \\ \hline \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 4 & \times & 1 & \times & 1 & \times & 5 & = 20 \\ \hline \end{array} \Rightarrow |B| = 20$$

$$|C|: \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & 1 & 3 \\ \hline \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 4 & \times & 5 & \times & 1 & \times & 1 & = 20 \\ \hline \end{array} \Rightarrow |C| = 20$$

$$|A \cap B| = |B \cap C| = |A \cap B \cap C| = 0, \quad |A \cap C| = 1 \quad (\text{عدد } 1313)$$

پس تعداد اعداد چهاررقمی که در آن‌ها ۱۳ ظاهر نمی‌شود، برابر است با:

$$|\overline{A \cap B \cap C}| = |S| - |A| - |B| - |C| + |A \cap B| + |B \cap C| + |A \cap C| - |A \cap B \cap C| \\ = 500 - 25 - 20 - 20 + 0 + 0 + 1 - 0 = 436$$

۳۹- مجموع ارقام بزرگ‌ترین عدد سه‌رقمی m که در رابطه $m + 3262 \equiv 9 \pmod{10}$ صدق می‌کند، کدام است؟

۲۰ (۴)

۱۹ (۳)

۱۸ (۲)

۲۱ (۱)

▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (فصل ۱، درس ۳)

۳۹- پاسخ: گزینهٔ ۴



- دو طرف یک رابطهٔ هم‌نهشتی را می‌توان به توان n رساند. ($n \in \mathbb{N}$)

$$a \equiv b \Rightarrow a^n \equiv b^n$$

- می‌توان به دو طرف یا یک طرف یک رابطهٔ هم‌نهشتی هر ضربی از پیمانه را اضافه یا از آن کم کرد.

$$a \equiv b \Rightarrow \begin{cases} a + mt \equiv b + mk \\ a - mt \equiv b - mk \end{cases}$$



با استفاده از خواص هم‌نهشتی، داریم:

$$32 \equiv 32 \Rightarrow 32 \equiv 32 - 4 \times 9 \Rightarrow 32 \equiv -4 \xrightarrow{\text{توان } 2} 32^2 \equiv 16$$

$$32^2 \equiv 16 - 2 \times 9 \Rightarrow 32^2 \equiv -2 \xrightarrow{\text{توان } 3} 32^6 \equiv -8$$

$$32^6 \equiv -8 + 9 \Rightarrow 32^6 \equiv 1 \xrightarrow{\text{توان } 10} 32^{60} \equiv 1$$

با توجه به اینکه $32^2 \equiv 16$ داریم:

$$32^{60} \times 32^2 \equiv 1 \times 16 \Rightarrow 32^{62} \equiv 16$$

حال رابطه بالا را در فرض سؤال قرار می‌دهیم:

$$32^{62} + m \equiv 0 \Rightarrow 16 + m \equiv 0 \Rightarrow m \equiv -16 \Rightarrow m \equiv -16 + 2 \times 9 \equiv 2 \Rightarrow m = 9k + 2$$

با توجه به اینکه بزرگ‌ترین عدد سه‌رقمی m را می‌خواهیم، داریم:

$$m \leq 999 \Rightarrow 9k + 2 \leq 999 \Rightarrow k \leq \frac{997}{9} \Rightarrow k_{\max} = 110 \Rightarrow m_{\max} = 9 \times 110 + 2 = 992 \Rightarrow \text{مجموع ارقام} = 9 + 9 + 2 = 20$$

۴۰- گراف G یک گراف 2 -منتظم ناهمبند است. اگر $\gamma(G) = 3$ باشد، چند نوع گراف G قابل‌رسم است؟

۴ (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴)

۴۰- پاسخ: گزینه ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (فصل ۲، درس‌های ۱ و ۲)



- (همبندی و ناهمبندی یک گراف): گراف G را همبند می‌نامیم هرگاه بین هر دو رأس آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد، در غیر این صورت آن را ناهمبند می‌نامیم.

- در بین تمام مجموعه‌های احاطه‌گر گراف G ، مجموعه یا مجموعه‌های احاطه‌گری که کمترین تعداد عضو را دارند «مجموعه احاطه‌گر مینیمم» و تعداد اعضای چنین مجموعه‌ای را «عدد احاطه‌گری» گراف G می‌نامیم و آن را با $\gamma(G)$ نمایش می‌دهیم.



با توجه به گراف ناهمبند موردنظر با عدد احاطه‌گری ۳ می‌توان حالت‌های زیر را در نظر گرفت:

حالت اول: $1+1+1=3$

یک گراف ناهمبند با سه دور به طول ۳ می‌توان رسم کرد. (G_1)

حالت دوم: $1+2=3$

گراف ناهمبند در این حالت را به ۳ صورت می‌توان رسم کرد.

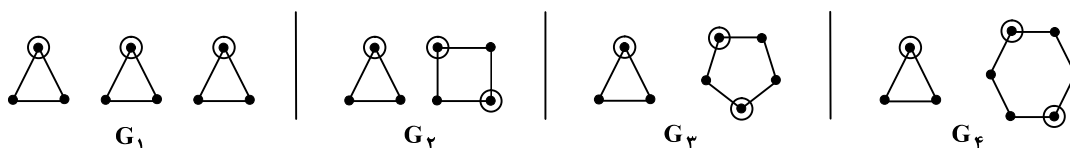
۱. گرافی با یک دور به طول ۳ و یک دور به طول ۴ (G_2)

۲. گرافی با یک دور به طول ۳ و یک دور به طول ۵ (G_3)

۳. گرافی با یک دور به طول ۳ و یک دور به طول ۶ (G_4)

بدیهی است که اگر از دوری به طول ۷ استفاده کنیم، عدد احاطه‌گری ۳ می‌شود و دیگر گراف ناهمبند نیست یعنی همبند است. همچنین اگر از دورهای به طول بیشتر از ۷ استفاده کنیم عدد احاطه‌گری آن بیشتر از ۳ می‌شود و با فرض مسئله در تناقض است.

بنابراین گراف ۲-منتظم ناهمبند با عدد احاطه‌گری ۳، به شکل‌های زیر می‌تواند باشد:



پس ۴ نوع گراف وجود دارد.

فیزیک



۴۱- به ترتیب از راست به چپ، کدام کمیت نرده‌ای و کدام کمیت برداری است؟

- (۱) جرم- فشار (۲) نیرو- سرعت (۳) انرژی- فشار (۴) فشار- شتاب

۴۱- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۱ (فصل ۱)



در بین کمیت‌های داده‌شده، جرم، فشار و انرژی نرده‌ای هستند و نیرو، سرعت و شتاب برداری هستند.

۴۲- کدام یک از جمله‌های زیر درست هستند؟

- (الف) پدیده سراب به این علت اتفاق می‌افتد که ضریب شکست هوا به دمای آن بستگی دارد و هرچه دمای هوا بیشتر باشد، ضریب شکست آن بیشتر می‌شود.
(ب) در آزمایش تداخل موج‌های صوتی و تشکیل نقاط S و L (نقاط بی‌صدا و نقاط با صدای بلند)، فاصله نقاط S و L مجاور از یکدیگر با بسامد صوت تناسب وارون دارد.

- (۱) «الف» و «ب» (۲) فقط «الف» (۳) فقط «ب» (۴) هیچ کدام

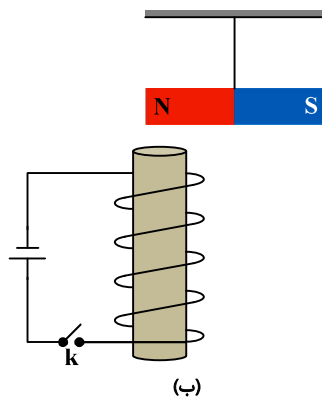
۴۲- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۳ (فصل ۴)



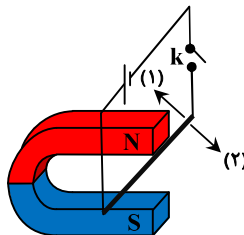
جمله «الف» نادرست است. هرچه دمای هوا بیشتر شود، ضریب شکست آن کمتر می‌شود.

جمله «ب» درست است. فاصله نقاط S و L مجاور با طول موج صوت تناسب مستقیم و با بسامد صوت تناسب وارون دارد.

۴۳- با بستن کلیدها در مدارهای شکل «الف» و «ب»، جهت نیروی مغناطیسی وارد بر سیم راست در شکل «الف» و نوع نیروی مغناطیسی وارد بر آهن‌ربا از طرف سیم‌لوله در شکل «ب»، به ترتیب از راست به چپ مطابق کدام گزینه است؟



(ب)



(الف)

(۱) در جهت (۱)، ربایشی

(۲) در جهت (۱)، رانشی

(۳) در جهت (۲)، ربایشی

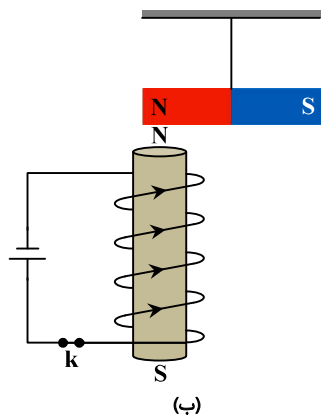
(۴) در جهت (۲)، رانشی

۴۳- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۲ (فصل ۳)

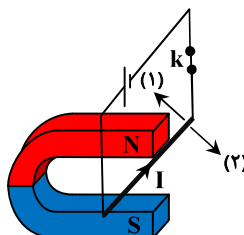


با قاعده دست راست، جهت نیروی مغناطیسی وارد بر سیم راست در شکل «الف»، در جهت (۱) است.

با قاعده دست راست، بالای سیم‌لوله در شکل «ب»، قطب N آهن‌ربایی است. به این ترتیب هر دو قطب N مجاور هم قرار می‌گیرند و نیروی بین آنها رانشی است.



(ب)



(الف)

▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۱ (فصل ۵)



A diagram showing a block on a horizontal surface. An arrow points to the right from the block. Below the surface, three points are marked: A, B, and C. The distance from the block to point A is labeled $7\Delta m$. The distance from point A to point C is labeled $4\Delta m$.

$$\frac{\Delta}{\gamma} = \frac{\gamma}{\gamma} \quad (f)$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)



A diagram showing a block on a horizontal surface. An arrow points to the right from the block. Below the surface, three points are marked: A, B, and C. The distance from the start of the surface to point A is labeled 4 m . The distance from point A to point B is labeled 4 m . The distance from the start of the surface to point C is labeled 8 m .

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A &= \mathbf{r}_A \Delta \mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{r}_A \mathbf{\dot{\omega}} - \mathbf{\dot{\omega}} = \mathbf{r}_A \times \mathbf{\dot{\omega}} \\ \Rightarrow (\mathbf{r}_A - \mathbf{\dot{\omega}}) \times (\mathbf{r}_A + \mathbf{\dot{\omega}}) &= \mathbf{\dot{\omega}} \times \mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{\dot{\omega}} \frac{\mathbf{n}}{s} \end{aligned}$$

برای حرکت متحرک از نقطه B تا نقطه C داریم:

$$\Delta x = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t \Rightarrow 45 = \frac{1}{2} 2 t^2 + 25 t \Rightarrow t = 1.5$$

مدت حرکت متحرک از نقطه B تا نقطه C برابر ۱۰ ثانیه ($\Delta t_{BC} = 10s$) است.

مدت حرکت متحرک از نقطه A تا نقطه B برابر است با:

$$\Delta v = a \cdot \Delta t \Rightarrow \Delta t_{AB} = \frac{25 - 5}{4} = 5 \text{ s}$$

$$\frac{\Delta t_{BC}}{\Delta t_{AB}} = \frac{10}{5} = 2$$

نسبت خواسته شده برابر است با:

۴۶- متحرک A در لحظه $t = 0$ با سرعت $(\frac{m}{s})\hat{i}$ از نقطه $x = 0$ می‌گذرد و با شتاب ثابت $(\frac{m}{s^2})\hat{i}$ به حرکت خود ادامه می‌دهد. متحرک B

در $t = 2s$ با سرعت $\vec{v} = \left(\frac{m}{s}\right)\vec{i}$ از نقطه $x = 0$ می‌گذرد و با شتاب ثابت $\vec{a} = \left(\frac{m}{s^2}\right)\vec{i}$ به حرکت خود ادامه می‌دهد. در فاصله زمانی $t = 0$ تا

زمانی که متحرک B به متحرک A برسد، بیشترین فاصله آن‌ها از یکدیگر چند متر می‌شود؟

2A (F

۲۴ (۳)

۲۲ (۲

14 ()

▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۳ (فصل ۱)

۴۶- پاسخ: گزینه ۱



معادله مکان- زمان و سرعت- زمان دو متحرک را می نویسیم:

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0, \quad v = at + v_0$$

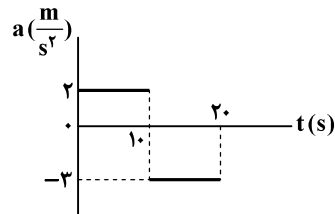
$$\text{متحرک A: } \begin{cases} x_A = \frac{1}{2}t^2 + 4t + 0 \\ v_A = t + 4 \end{cases} \quad \text{متحرک B: } \begin{cases} x_B = (t-2)^2 + 2(t-2) + 0 = t^2 - 2t \\ v_B = 2(t-2) + 2 = 2t - 2 \end{cases}$$

متحرک B در $t = 2s$ در $x = 0$ است و پشت سر متحرک A حرکت می کند و تا وقتی که سرعت متحرک B از متحرک A کمتر باشد، فاصله آن ها زیاد می شود؛ پس باید زمانی را پیدا کنیم که سرعت ها برابر می شود.

$$v_A = v_B \Rightarrow t + 4 = 2t - 2 \Rightarrow t = 6s$$

$$\begin{cases} x_A(6) = \frac{1}{2} \times 6^2 + 4 \times 6 = 18 + 24 = 42m \\ x_B(6) = 6^2 - 2 \times 6 = 36 - 12 = 24m \end{cases} \Rightarrow d = 42 - 24 = 18m$$

۴۷- نمودار شتاب- زمان حرکت متحرکی که روی خط راست حرکت می کند، مطابق شکل است. در ۱۶ ثانیه اول حرکت، شتاب متوسط متحرک چند سانتی متر بر مربع ثانیه است؟



(۱) ۸

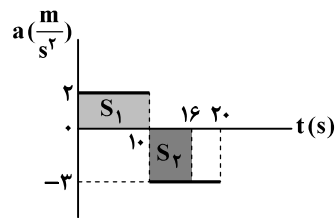
(۲) ۰/۵

(۳) ۵

(۴) ۱۲/۵

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)

۴۷- پاسخ: گزینه ۴



$$\Delta v = S_1 + S_2 = (2 \times 10) + (-3 \times 10) = 2 \frac{m}{s}$$

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{+2}{16} = \frac{1}{8} \frac{m}{s^2} = \frac{100}{8} \frac{cm}{s^2} = 12.5 \frac{cm}{s^2}$$

۴۸- از بالای یک برج، گلوله های کوچکی پشت سر هم و با فاصله های زمانی ۱/۵ ثانیه رها می شوند. با چشم پوشی از مقاومت هوا، در لحظه رها شدن گلوله چهارم، فاصله گلوله اول و سوم که هنوز به زمین نرسیده اند، چند متر است؟ ($g = 10 \frac{m}{s^2}$)

- (۱) ۶۰ (۲) ۹۰ (۳) ۱۲۰ (۴) ۱۵۰

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)

۴۸- پاسخ: گزینه ۲

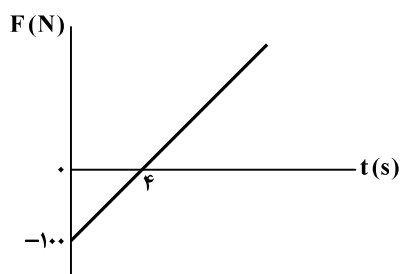


اولین گلوله در $t = 0$ ، دومین گلوله در $t = 1/5s$ ، سومین گلوله در $t = 3/5s$ و چهارمی در $t = 4/5s$ رها شده است.

$$y = \frac{1}{2}gt^2 \xrightarrow{g = 10 \frac{m}{s^2}} y = 5t^2$$

در $t = 4/5s$ اولین گلوله ۴/۵ ثانیه سقوط کرده و سومین گلوله ۱/۵ ثانیه، پس می توان نوشت:

$$d = y(4/5) - y(1/5) = 5 \times (4/5)^2 - 5 \times (1/5)^2 = 5 \times (4/5 - 1/5) \times (4/5 + 1/5) = 5 \times 3 \times 1 = 15m$$

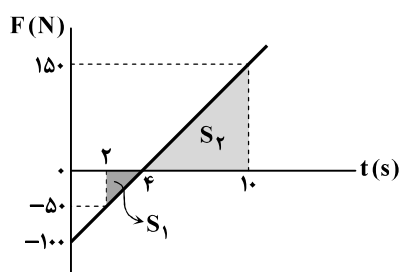


۴۹- متحرکی به جرم ۲۰ کیلوگرم روی محور x حرکت می‌کند و سرعت آن در لحظه $t = ۲s$ برابر $\vec{i}(-\frac{۴}{۳} \frac{m}{s})$ است. اگر متحرک تحت تأثیر نیروی خالص افقی F باشد و نمودار نیرو- زمان به شکل مقابل باشد، تندی متحرک در لحظه $t = ۱۰s$ چند متر بر ثانیه می‌شود؟

- (۱) ۱۲
(۲) ۲۰
(۳) ۲۴
(۴) ۱۶

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

۴۹- پاسخ: گزینه ۴



مساحت زیر نمودار نیرو- زمان برابر است با تغییرات تکانه متحرک:

$$S_1 = \frac{۲ \times ۵۰}{۲} = ۵۰$$

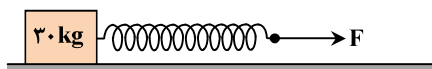
$$S_2 = \frac{۶ \times ۱۵۰}{۲} = ۴۵۰$$

$$\Delta p = S_2 - S_1 = ۴۵۰ - ۵۰ = ۴۰۰ \frac{kg \cdot m}{s}$$

$$\Delta p = m \cdot \Delta v \Rightarrow ۴۰۰ = ۲۰(v_2 - (-۴)) \Rightarrow v_2 - (-۴) = ۲۰ \Rightarrow v_2 = ۱۶ \frac{m}{s}$$

۵۰- در شکل مقابل، طول عادی فنر ۵۰ cm و اصطکاک وزنه با سطح افقی و جرم فنر ناچیز است. اگر فنر را با نیروی افقی F بکشیم، در حالی

که وزنه با شتاب ثابت $\frac{۴}{۳} \frac{m}{s^2}$ به طرف راست کشیده شود، طول فنر ۵۱/۵ cm می‌شود. ثابت فنر چند نیوتون بر متر است؟



- (۱) ۴۰۰۰
(۲) ۱۲۰۰۰
(۳) ۸۰۰۰
(۴) ۶۰۰۰

▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۳ (فصل ۲)

۵۰- پاسخ: گزینه ۳



$$F = ma \xrightarrow{F = kx} ma = kx \Rightarrow ۳۰ \times ۴ = k \times \frac{۱/۵}{۱۰۰} \Rightarrow ۱۲۰۰ = \frac{۳}{۲}k \Rightarrow k = ۸۰۰۰ \frac{N}{m}$$

۵۱- در شکل مقابل، وزنه‌ای به جرم ۵۰ کیلوگرم توسط یک طناب با جرم ناچیز از حال سکون و با شتاب ثابت، در راستای قائم پایین آورده

می‌شود و پس از ۸ متر حرکت، تندی آن به $\frac{۴}{۳} \frac{m}{s}$ می‌رسد. در لحظه‌ای که تندی وزنه به $\frac{۴}{۳} \frac{m}{s}$ رسیده است، ناگهان نیروی کشش طناب (F) را دو برابر می‌کنیم و از این به بعد در همین مقدار ثابت نگاه می‌داریم. از لحظه شروع حرکت تا تغییر جهت حرکت، وزنه چند متر مسافت طی

می‌کند؟ ($g = ۱۰ \frac{m}{s^2}$)



- (۱) ۹
(۲) ۱۱
(۳) ۱۲
(۴) ۱۴

▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۳ (فصل ۲)

۵۱- پاسخ: گزینه ۱



قسمت اول: حرکت تندشونده رو به پایین:

$$v_2^2 - v_1^2 = 2a_1 \Delta x_1 \Rightarrow 4^2 - 0 = 2a_1 \times 8 \Rightarrow a_1 = 1 \frac{m}{s^2}$$

$$F_{net} = ma_1 \Rightarrow W - F = ma_1 \Rightarrow 500 - F = 50 \times 1 \Rightarrow F = 450 \text{ N}$$

وقتی F دو برابر می شود، مقدار آن به ۹۰۰ نیوتون می رسد که از وزن جسم بیشتر است، پس در قسمت دوم حرکت کندشونده است:

$$F'_{net} = ma_2 \Rightarrow 2F - W = ma_2 \Rightarrow 900 - 500 = 50a_2 \Rightarrow a_2 = 8 \frac{m}{s^2}$$

شتاب حرکت رو به بالا است؛ بنابراین متحرک با شتاب $8 \frac{m}{s^2}$ به سمت پایین حرکت می کند و سرعت آن از $4 \frac{m}{s}$ به صفر می رسد.

$$v'^2 - v^2 = 2a_2 \Delta x_2 \Rightarrow 0 - 4^2 = 2 \times (-8) \times \Delta x_2 \Rightarrow \Delta x_2 = 1 \text{ m}$$

از لحظه شروع حرکت تا تغییر جهت حرکت وزنه، وزنه مسافت ۹ m را طی می کند:

$$\Delta x_{\text{کل}} = \Delta x_1 + \Delta x_2 \Rightarrow \Delta x_{\text{کل}} = 8 + 1 = 9 \text{ m}$$

۵۲- ماهواره ای به جرم ۷۲۰ کیلوگرم به دور زمین می گردد و فاصله آن از سطح زمین سه برابر شعاع کره زمین است. بزرگی نیروی مرکزگرایی

وارد بر ماهواره چند نیوتون است؟ (بزرگی شتاب گرانشی در سطح زمین $g = 10 \frac{m}{s^2}$ است.)

۴۵۰ (۴)

۲۴۰ (۳)

۳۶۰ (۲)

۸۰۰ (۱)

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

۵۲- پاسخ: گزینه ۴



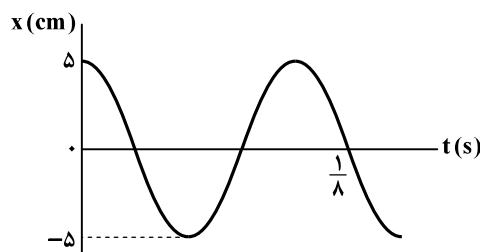
نیروی خالص (نیروی مرکزگرا) وارد بر ماهواره همان نیروی گرانش و بزرگی شتاب مرکزگرایی ماهواره برابر g در آن محل است. همچنین g با مربع فاصله از مرکز سیاره تناسب وارون دارد.

$$g = \frac{GM}{r^2} \Rightarrow \frac{g'}{g} = \left(\frac{r}{r'}\right)^2 = \left(\frac{R_e}{R_e + 3R_e}\right)^2 = \frac{1}{16} \Rightarrow g' = \frac{10}{16} \frac{m}{s^2}$$

$$F_{net} = mg' \Rightarrow F_{net} = 720 \times \frac{10}{16} = 450 \text{ N}$$

۵۳- نمودار مکان- زمان یک حرکت هماهنگ ساده به شکل مقابل است. بیشینه تندی

متحرک چند برابر تندی متوسط آن در بازه زمانی $t_1 = \frac{1}{4} \text{ s}$ تا $t_2 = \frac{3}{4} \text{ s}$ است؟



$\frac{2\pi}{3}$ (۲)

$\frac{\pi}{2}$ (۱)

$\frac{4}{3}$ (۴)

۳ (۳)

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۳)

۵۳- پاسخ: گزینه ۱

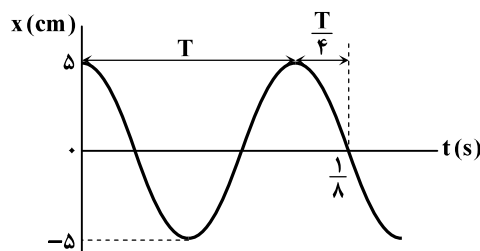


حرکت از هر انتهای مسیر تا نقطه تعادل $\frac{T}{4}$ و برعکس آن هم $\frac{T}{4}$ طول می کشد:

$$T + \frac{T}{4} = \frac{5T}{4} = \frac{1}{8} \Rightarrow T = \frac{1}{10} \text{ s}$$

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{\Delta A}{\frac{T}{4}} = \frac{4A}{T} = \frac{4 \times 0.05}{0.1} = 2 \frac{m}{s}$$

$$v_{max} = A\omega = A \times \frac{2\pi}{T} = 0.05 \times \frac{2\pi}{0.1} = \pi \frac{m}{s}$$

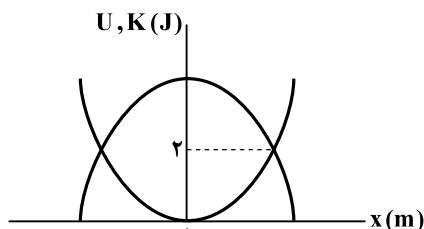


نسبت خواسته شده برابر است با:

$$t_2 = \frac{3}{2}s$$

$$\frac{v_{\max}}{s_{\text{av}}} = \frac{\pi}{2}$$

۵۴- وزنه‌ای به جرم ۸۰۰ گرم به انتهای یک فنر با جرم ناچیز بسته شده و روی سطح افقی بدون اصطکاک، حرکت هماهنگ ساده انجام می‌دهد. اگر بسامد نوسان ۱۰ هرتز و نمودارهای انرژی جنبشی و پتانسیل برحسب مکان نوسانگر به صورت شکل زیر باشد، فاصله دو انتهای مسیر از یکدیگر، چند سانتی‌متر است؟ ($\pi^2 = 10$)



(۱) ۵

(۲) ۱۰

(۳) ۲۰

(۴) ۴۰

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۳)

۵۴- پاسخ: گزینه ۲



$$E = U + K = 2 + 2 = 4 \text{ J}$$

انرژی مکانیکی نوسانگر برابر است با:

$$E = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 = 2 \pi^2 m f^2 A^2 \Rightarrow 4 = 2 \times 10 \times 0.008 \times 100 \times A^2 \Rightarrow A^2 = \frac{4}{1600} \Rightarrow A = \frac{2}{40} = \frac{1}{20} \text{ m} = 5 \text{ cm}$$

$$2A = 10 \text{ cm}$$

فاصله دو انتهای مسیر حرکت برابر است با:

۵۵- یک نوسان‌ساز، موج عرضی با بسامد ۳۰ هرتز در یک تار کشیده شده منتشر می‌کند و فاصله میان هر قله (برآمدگی) و دره (فرورفتگی) مجاور آن در هر لحظه ۴۰ سانتی‌متر است. اگر نیروی کشش تار را ۴ برابر کنیم و موج عرضی با بسامد ۴۰ هرتز در تار منتشر شود، طول موج آن چند سانتی‌متر می‌شود؟

(۴) ۹۰

(۳) ۱۲۰

(۲) ۱۸۰

(۱) ۲۴۰

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۳)

۵۵- پاسخ: گزینه ۳

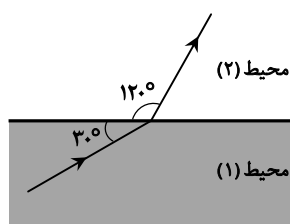
فاصله یک قله از یک دره مجاور آن برابر با نصف طول موج ($\frac{\lambda}{2}$) است:

$$\frac{\lambda}{2} = 40 \text{ cm} \Rightarrow \lambda = 80 \text{ cm}$$

$$\text{در حالت دوم: } \begin{cases} F' = 4F \rightarrow v' = 2v \\ f' = 40 \text{ Hz} = \frac{4}{3}f \end{cases}$$

$$\lambda = \frac{v}{f} \Rightarrow \frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{v'}{v} \times \frac{f}{f'} = 2 \times \frac{3}{4} \Rightarrow \lambda' = \frac{3}{2} \lambda = \frac{3}{2} \times 80 = 120 \text{ cm}$$

۵۶- مطابق شکل، یک پرتو نور از محیط (۱) به محیط (۲) می‌رود. طول موج نور در محیط (۱) چند برابر طول موج نور در محیط (۲) است؟

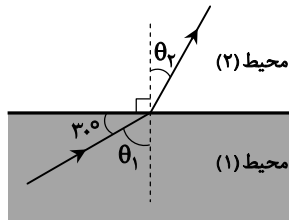
(۱) $\sqrt{3}$ (۲) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

(۳) ۳

(۴) $\frac{1}{3}$

▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۳ (فصل ۴)

۵۶- پاسخ: گزینه ۱



$$\theta_1 = 90 - 30 = 60^\circ$$

$$\theta_2 + 90 = 120^\circ \Rightarrow \theta_2 = 30^\circ$$

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} \Rightarrow \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{\sin 30^\circ}{\sin 60^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \sqrt{3}$$

۵۷- در یک تار دوسریسته موج ایستاده با ۵ گره تشکیل شده است و بسامد هر نقطه از تار برابر f است. در حالتی که در تار، موج ایستاده

تشکیل شود و طول تار $\frac{3}{4}$ برابر طول موج باشد، بسامد نوسان تار برابر f' است. نسبت $\frac{f}{f'}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{5}{2}$ (۲) $\frac{4}{3}$ (۳) $\frac{5}{3}$ (۴) ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۴)

۵۸- پاسخ: گزینه ۲



در هماهنگ n ام، طول تار برابر $\frac{n\lambda}{2}$ می شود و n شکم و $(n+1)$ گره در تار تشکیل می شود.

$f = f_4 = 4f_1 \Rightarrow$ هماهنگ چهارم $\Rightarrow$ تار دوسریسته با ۵ گره و ۴ شکم

$f' = f_3 = 3f_1 \Rightarrow$ هماهنگ سوم $\Rightarrow$ تار دوسریسته در حالت $L = \frac{3\lambda}{2}$

$$\frac{f}{f'} = \frac{f_4}{f_3} = \frac{4}{3}$$

نسبت خواسته شده برابر است با:

۵۸- اگر الکترون اتم هیدروژن از مدار $n_1 = 2$ به مدار $n_2 = 6$ گذاری انجام دهد، چند مورد از جمله های زیر در مورد آن درست است؟

$$(E_R = 13.6 \text{ eV})$$

الف) انرژی آن $\frac{1}{9}$ برابر می شود. ب) شعاع مدار آن ۹ برابر می شود. پ) انرژی آن $\frac{2}{9} E_R$ زیاد می شود.

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۵)

۵۸- پاسخ: گزینه ۳



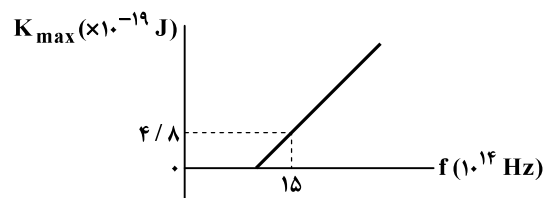
$$E_n = \frac{-E_R}{n^2} = \frac{-13.6}{n^2} \Rightarrow \begin{cases} \text{جمله «الف» درست است. } E_6 = \frac{1}{9} E_2 \Rightarrow \\ \text{جمله «پ» درست است. } E_6 - E_2 = E_R \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{36} \right) = \frac{8}{36} E_R = \frac{2}{9} E_R \Rightarrow \end{cases}$$

$$r_n = n^2 a_0 \Rightarrow \begin{cases} \text{جمله «ب» درست است. } r_6 = 9r_2 \Rightarrow \\ r_6 = 36a_0, r_2 = 4a_0 \end{cases}$$

۵۹- نمودار بیشینه انرژی جنبشی فوتوالکترون ها بر حسب بسامد پرتو فرودی بر سطح یک فلز مطابق شکل است. اگر در آزمایش

فوتوالکتریک، پرتوی با طول موج ۱۵۰ نانومتر بر این فلز بتابد، بیشینه انرژی جنبشی فوتوالکترون های خروجی از فلز چند ژول می شود؟

$$(c = 3 \times 10^8 \frac{m}{s} \text{ و } h = 4 \times 10^{-15} \text{ eV} \cdot s, e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C})$$



$$8 \times 10^{-19} \text{ (1)}$$

$$3/2 \times 10^{-19} \text{ (2)}$$

$$9/6 \times 10^{-19} \text{ (3)}$$

$$6 \times 10^{-19} \text{ (4)}$$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۳ (فصل ۵)

۵۹- پاسخ: گزینه ۱



$$K_{\max} = hf - W_0 \Rightarrow K_{\max,2} - K_{\max,1} = h(f_2 - f_1) = h\left(\frac{c}{\lambda_2} - f_1\right)$$

$$\Rightarrow K_{\max,2} - 4/8 \times 10^{-19} = 4 \times 10^{-15} \times 1/6 \times 10^{-19} \times \left(\frac{3 \times 10^8}{150 \times 10^{-9}} - 1/5 \times 10^{15}\right)$$

$$\Rightarrow K_{\max,2} - 4/8 \times 10^{-19} = 6/4 \times 10^{-19} \times (2 - 1/5) \Rightarrow K_{\max,2} = (4/8 + 3/2) \times 10^{-19} = 8 \times 10^{-19} \text{ J}$$

۶۰- $\frac{3}{4}$ هسته‌های موجود در یک نمونه پرتوزا در ۶۰ روز اول واپاشیده‌اند. چند روز دیگر باید بگذرد تا فقط $\frac{1}{128}$ هسته‌های اولیه باقی بماند؟

۱۲۰ (۱)	۱۵۰ (۲)	۱۸۰ (۳)	۲۱۰ (۴)
---------	---------	---------	---------

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۶)

۶۰- پاسخ: گزینه ۲



تعداد هسته‌های واپاشیده $\frac{3}{4} N_0$ است و تعداد هسته‌های باقی‌مانده پس از ۶۰ روز اول برابر $\frac{1}{4} N_0$ است:

$$\frac{N}{N_0} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow n = 2$$

$$\text{روز } 30 = T = \frac{\Delta t}{n} = \frac{60}{2} \Rightarrow T = 30 \text{ نیمه‌عمر سپری شده است.}$$

کل مدت‌زمان لازم برای آنکه تعداد هسته‌های باقی‌مانده به $\frac{1}{128}$ هسته‌های اولیه برسد، برابر است با:

$$\frac{N}{N_0} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow \frac{1}{128} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow n = 7$$

$$t = 7T = 7 \times 30 = 210 \text{ روز}$$

$$\Delta t = 210 - 60 = 150 \text{ روز}$$

بنابراین باید ۱۵۰ روز دیگر بگذرد:

۶۱- یک هسته پرتوزا (هسته مادر) با گسیل تعدادی ذره آلفا و تعدادی ذره بتا به هسته‌ای تبدیل می‌شود که عدد جرمی آن ۸ واحد با هسته مادر اختلاف دارد و عدد اتمی آن از هسته مادر، ۱ واحد بیشتر است. با فرض آنکه همه ذره‌های بتای گسیل‌شده، بار همنام داشته باشند، تعداد و نوع ذره‌های بتای گسیل‌شده کدام است؟

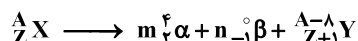
(۱) ۳، الکترون (۲) ۳، پوزیترون (۳) ۵، پوزیترون (۴) ۵، الکترون

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۶)

۶۱- پاسخ: گزینه ۴



گسیل هر ذره آلفا عدد جرمی را ۴ واحد و عدد اتمی را ۲ واحد کم می‌کند. گسیل ذره بتا عدد جرمی را تغییر نمی‌دهد. گسیل هر پوزیترون باعث کاهش ۱ واحد از عدد اتمی می‌شود و گسیل هر الکترون باعث ۱ واحد افزایش عدد اتمی می‌شود. به این ترتیب معلوم می‌شود که ذرات بتای گسیل‌شده الکترون هستند.

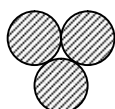


$$A = 4m + 0 + A - 8 \Rightarrow m = 2$$

تعداد ذره‌های آلفا ۲ عدد است ($m = 2$). تعداد الکترون‌ها برابر است با:

$$2m + (-1)n + Z + 1 = Z \xrightarrow{m=2} Z + 5 - n = Z \Rightarrow n = 5$$

۶۲- سه گوی رسانای مشابه دارای بارهای الکتریکی $q_1 = q$ ، $q_2 = 1/25q$ و $q_3 = -4/5q$ هستند. آن‌ها را مطابق شکل با یکدیگر تماس می‌دهیم و سپس جدا می‌کنیم. پس از تماس، بار الکتریکی هر گوی به $+3\mu C$ می‌رسد. در اثر این تماس، گوی با بار q_2 چند الکترون و

چگونه مبادله کرده است؟ ($e = 1/6 \times 10^{-19} \text{ C}$)(۲) 5×10^{13} الکترون از دست داده است.(۱) $1/25 \times 10^{13}$ الکترون از دست داده است.(۴) 5×10^{12} الکترون دریافت کرده است.(۳) $1/25 \times 10^{12}$ الکترون دریافت کرده است.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۱)

۶۲- پاسخ: گزینه ۲



$$\frac{q_1 + q_2 + q_3}{3} = +3 \Rightarrow \frac{q + 1/25q - 4/5q}{3} = +3 \Rightarrow -2/25q = 9 \Rightarrow q = -4\mu C$$

$$q_2 = 1/25q \Rightarrow q_2 = 1/25 \times (-4) = -5\mu C$$

در مورد گوی با بار q_2 ، بار الکتریکی آن از $-5\mu C$ به $+3\mu C$ رسیده یعنی بار $-8\mu C$ از دست داده است؛ بنابراین تعداد الکترون‌های از دست داده این گوی برابر است با:

$$q = -ne \Rightarrow -8 \times 10^{-6} = -n \times 1/6 \times 10^{-19} \Rightarrow n = 5 \times 10^{13}$$

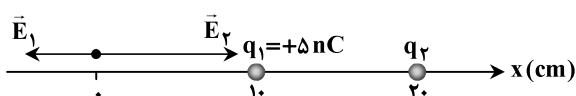
۶۳- بارهای الکتریکی $q_1 = +5nC$ و q_2 روی محور x به ترتیب در مکان‌های $x_1 = 10cm$ و $x_2 = 20cm$ قرار دارند. اگر میدان الکتریکی

خالص آن‌ها در مبدأ مختصات ($x=0$) برابر با $\vec{E} = (4500 \frac{N}{C})\vec{i}$ باشد، بار الکتریکی q_2 چند نانوکولن است؟ ($k = 9 \times 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2}$)

(۱) +۲۰	(۲) +۴۰	(۳) -۲۰	(۴) -۴۰
---------	---------	---------	---------

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۱)

۶۳- پاسخ: گزینه ۴



$$E = k \frac{|q|}{r^2} \Rightarrow E_1 = 9 \times 10^9 \times \frac{5 \times 10^{-9}}{0.1^2} = 4500 \frac{N}{C}$$

$$\Rightarrow \vec{E}_1 = (-4500 \frac{N}{C})\vec{i}$$

با توجه به اینکه جهت میدان خالص به طرف بار q_2 است، از این رو بار q_2 منفی است.

$$\vec{E}_t = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \Rightarrow 4500\vec{i} = -4500\vec{i} + \vec{E}_2 \Rightarrow \vec{E}_2 = (9000 \frac{N}{C})\vec{i}$$

$$E = k \frac{|q|}{r^2} \Rightarrow 9000 = 9 \times 10^9 \times \frac{|q_2|}{0.2^2} \Rightarrow |q_2| = 40 \times 10^{-9} C \xrightarrow{q_2 < 0} q_2 = -40nC$$

۶۴- دو خازن با ظرفیت‌های $C_1 = 1\mu F$ و $C_2 = 2\mu F$ دارای بار الکتریکی برابرند. اگر انرژی الکتریکی یکی به اندازه $16\mu J$ از دیگری بیشتر باشد، اختلاف پتانسیل خازن با ظرفیت C_2 چند ولت است؟

- | | | | |
|--------|--------|-------|-------|
| (۱) ۱۶ | (۲) ۱۲ | (۳) ۸ | (۴) ۴ |
|--------|--------|-------|-------|

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۱)

۶۴- پاسخ: گزینه ۴

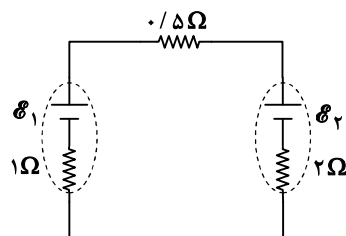


طبق رابطه $U = \frac{Q^2}{2C}$ ، با توجه به یکسان بودن بار الکتریکی دو خازن، خازنی که ظرفیت بیشتری دارد، انرژی الکتریکی کمتری دارد.

$$U_1 - U_2 = 16 \Rightarrow \frac{Q^2}{2 \times 1} - \frac{Q^2}{2 \times 2} = 16 \Rightarrow \frac{1}{4} Q^2 = 16 \Rightarrow Q = 8\mu C$$

$$C = \frac{Q}{V} \Rightarrow 2 = \frac{8}{V_2} \Rightarrow V_2 = 4V$$

۶۵- در مدار شکل زیر، توان تولیدی باتری (۱) به اندازه $24W$ بیشتر از توان ورودی باتری (۲) است ($\mathcal{E}_1 > \mathcal{E}_2$). توان مصرفی در مقاومت 0.5Ω چند وات است؟



(۱) ۳۲

(۲) ۱۶

(۳) ۸

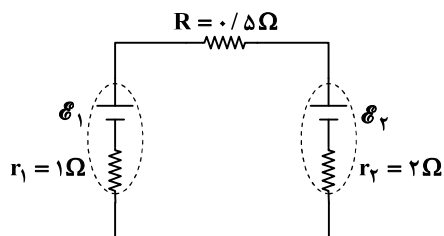
(۴) ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۲)

۶۵- پاسخ: گزینه ۳



توان تولیدی باتری (۱) برابر با مجموع توان ورودی به باتری (۲) و توان‌های مصرفی در مقاومت 0.5Ω و مقاومت داخلی 1Ω است. به این ترتیب اختلاف توان تولیدی با توان ورودی به باتری (۲) برابر توان مصرفی در دو مقاومت $r_1 = 1\Omega$ و $R = 0.5\Omega$ است.



$$P_{\text{تولیدی}} - P_{\text{ورودی}} = r_1 I^2 + R I^2 \Rightarrow 24 = 1 \times I^2 + 0.5 I^2$$

$$\Rightarrow I^2 = 16 \Rightarrow I = 4 \text{ A}$$

$$P = R I^2 \Rightarrow P = 0.5 \times 4^2 = 8 \text{ W} \quad \text{توان مصرفی در مقاومت } R \text{ برابر است با:}$$

۶۶- قطر مقطع سیمی 2 mm است. چه طولی از این سیم مقاومتی برابر 4Ω دارد؟ ($\pi = 3/14$ و $\rho = 6/28 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$)

- (۱) 0.2 km (۲) 200 km (۳) 20 m (۴) 2000 m

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۲)

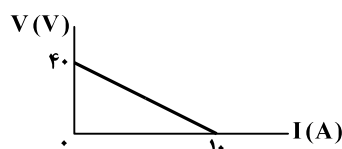
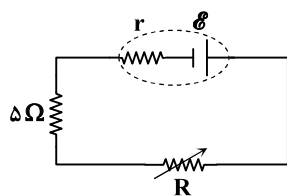
۶۶- پاسخ: گزینه ۱



$$A = \pi r^2 \Rightarrow A = 3/14 \times \left(\frac{2 \times 10^{-3}}{2} \right)^2 = 3/14 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

$$R = \rho \frac{L}{A} \Rightarrow 4 = 6/28 \times 10^{-8} \times \frac{L}{3/14 \times 10^{-6}} \Rightarrow L = 200 \text{ m} = 0.2 \text{ km}$$

۶۷- نمودار اختلاف پتانسیل دو سر باتری مدار مقابل بر حسب جریان عبوری از آن، مطابق شکل زیر است. در لحظه‌ای که مقاومت رئوستا $R = 1\Omega$ است، جریان عبوری در مدار چند آمپر است؟



- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۲)

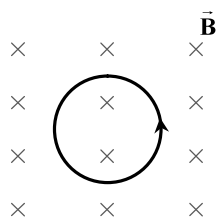
۶۷- پاسخ: گزینه ۴



$$V = \mathcal{E} - rI \Rightarrow \begin{cases} I = 0 \Rightarrow V = \mathcal{E} = 4.0 \text{ V} \\ V = 0 \Rightarrow \frac{\mathcal{E}}{r} = 1.0 \Rightarrow \frac{4.0}{r} = 1.0 \Rightarrow r = 4\Omega \end{cases}$$

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_{\text{eq}} + r} \Rightarrow I = \frac{4.0}{5 + 1 + 4} = 4 \text{ A}$$

۶۸- مطابق شکل، الکترونی در میدان مغناطیسی یکنواخت $B = 5/4 \text{ G}$ با تندی ثابت، بر مسیر دایره‌ای حرکت می‌کند. الکترون در هر ثانیه چند دور روی مسیر دایره‌ای می‌چرخد؟ ($\pi = 3$ ، $e = 1/6 \times 10^{-19} \text{ C}$ و $m_e = 9 \times 10^{-31} \text{ kg}$)



- (۱) $6/25 \times 10^8$
(۲) $1/6 \times 10^8$
(۳) $6/25 \times 10^7$
(۴) $1/6 \times 10^7$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۳ (فصل ۲) و فیزیک ۲ (فصل ۳)

۶۸- پاسخ: گزینه ۴



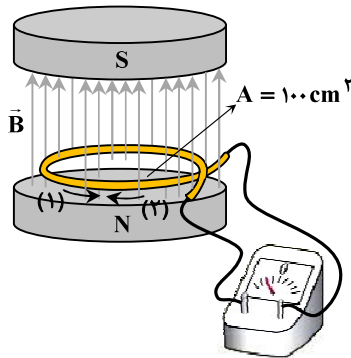
نیروی مغناطیسی، نیروی مرکزگرای وارد بر الکترون است؛ بنابراین داریم:

$$\begin{cases} F = m \frac{v^2}{r} \\ F = |q|vB \Rightarrow |q|vB = m \frac{v^2}{r} \Rightarrow |q|Br = mv \Rightarrow |q|Br = m \frac{2\pi r}{T} \\ v = \frac{2\pi r}{T} \end{cases}$$

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi m}{|q|B} \Rightarrow T = \frac{2 \times 3 \times 9 \times 10^{-31}}{1/6 \times 10^{-19} \times 5/4 \times 10^{-4}} = \frac{10^{-7}}{1/6} \text{ s}$$

این الکترون در هر ثانیه $f = \frac{1}{T} = 1/6 \times 10^7$ دور روی مسیر دایره‌ای می‌چرخد.

۶۹- میدان مغناطیسی بین قطب‌های آهن‌ربای الکتریکی شکل روبه‌رو که بر سطح حلقه عمود است، با زمان تغییر می‌کند و در مدت $0/4 \text{ s}$ از $0/8 \text{ T}$ رو به بالا به $0/4 \text{ T}$ رو به پایین تغییر می‌کند. اگر مقاومت و مساحت سطح حلقه به ترتیب $0/05 \Omega$ و 100 cm^2 باشد، جریان القایی متوسط در حلقه چند آمپر و در کدام جهت است؟



(۱) جهت $0/2$ ، (۱)

(۲) جهت $0/6$ ، (۱)

(۳) جهت $0/2$ ، (۲)

(۴) جهت $0/6$ ، (۲)

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۴)

۶۹- پاسخ: گزینه ۲



$$\Phi_1 = B_1 A \cos \theta_1 = 0/8 \times 100 \times 10^{-4} \times \cos 0 = 80 \times 10^{-6} \text{ Wb}$$

$$\Phi_2 = B_2 A \cos \theta_2 = 0/4 \times 100 \times 10^{-4} \times \cos \pi = -40 \times 10^{-6} \text{ Wb}$$

$$\Delta \Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = (-40 - 80) \times 10^{-6} = -120 \times 10^{-6} \text{ Wb}$$

$$\mathcal{E}_{av} = \left| -N \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \right| = \left| -1 \times \frac{-120 \times 10^{-6}}{0/4} \right| = 0/3 \text{ V}$$

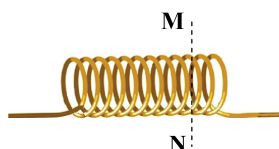
نیروی محرکه القایی متوسط در حلقه برابر است با:

$$I_{av} = \frac{\mathcal{E}_{av}}{R} = \frac{0/3}{0/05} = 0/6 \text{ A}$$

جریان القایی متوسط در حلقه برابر است با:

میدان مغناطیسی رو به بالا کاهش می‌یابد، در نتیجه شار مغناطیسی کم می‌شود و جهت جریان القایی در حلقه، طبق قانون لنز مطابق جهت (۱) است.

۷۰- سیم‌لوله مقابل شامل ۱۰۰۰ حلقه و ضریب القاوری آن $0/1 \text{ H}$ است. اگر آن را در امتداد خط MN به دو قسمت کنیم، تعداد حلقه‌های یک قسمت ۸۰۰ تا می‌شود. ضریب القاوری این قسمت چند هانری است؟



(۱) $0/08$

(۲) $0/064$

(۳) $0/8$

(۴) $0/64$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۴)

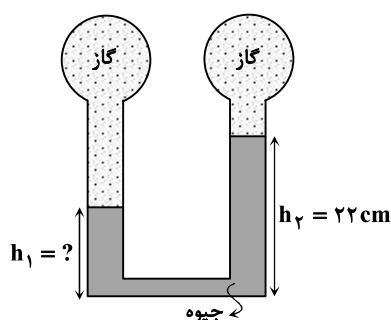
۷۰- پاسخ: گزینه ۱



با دو قسمت نمودن سیم لوله، نسبت $\frac{N}{\ell}$ ثابت می ماند و می توان ضریب القاوری را به صورت مقابل نوشت:

$$L = \frac{\mu_0 N^2 A}{\ell} = \left(\frac{\mu_0 N A}{\ell} \right) N$$

$$\frac{L_2}{L_1} = \frac{N_2}{N_1} \Rightarrow \frac{L_2}{0.1} = \frac{800}{1000} \Rightarrow L_2 = 0.08 H$$



۷۱- در شکل روبه رو، درون لوله U شکل جیوه قرار دارد و فشار پیمانه ای گاز درون مخزن ها $1/36 \times 10^3 \text{ Pa}$ و $1/36 \times 10^4 \text{ Pa}$ است. ارتفاع h_1 چند

سانتی متر است؟ ($g = 10 \frac{m}{s^2}$ و $\rho_{\text{جیوه}} = 13/6 \frac{g}{cm^3}$)

- (۱) ۱۳
(۲) ۱۱
(۳) ۹
(۴) ۶

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۲)

۷۱- پاسخ: گزینه ۱



فشار گاز در شاخه سمت چپ بیشتر از فشار گاز در شاخه سمت راست است و این اختلاف بر حسب سانتی متر جیوه برابر است با:

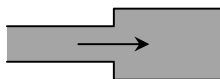
$$\Delta P = -1/36 \times 10^3 - (-1/36 \times 10^4) = 12240 \text{ Pa}$$

$$\Delta P = \rho g \Delta h \Rightarrow 12240 = 13600 \times 10 \times \Delta h \Rightarrow \Delta h = 0.09 \text{ m} = 9 \text{ cm}$$

$$\Delta h = h_2 - h_1 \Rightarrow 9 = 22 - h_1 \Rightarrow h_1 = 13 \text{ cm}$$

۷۲- در لوله افقی شکل زیر، قطر بخش پهن $1/6$ برابر قطر بخش باریک است و مایعی که تمام فضای لوله را پر کرده است، به صورت لایه ای در

آن جریان دارد. اگر اختلاف تندی مایع در دو بخش پهن و باریک $3/9 \frac{m}{s}$ باشد، تندی مایع در بخش پهن لوله چند متر بر ثانیه است؟



- (۱) ۱
(۲) ۱/۵
(۳) ۲
(۴) ۲/۵

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۲)

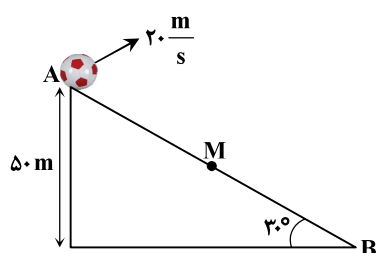
۷۲- پاسخ: گزینه ۴



$$\frac{A_2}{A_1} = \left(\frac{D_2}{D_1} \right)^2 = \left(\frac{1/6 D_1}{D_1} \right)^2 = 1/36 \quad (۱) \text{ رابطه}$$

تندی مایع در بخش باریک بیشتر از تندی آن در بخش پهن است؛ بنابراین طبق معادله پیوستگی داریم:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \xrightarrow{\text{رابطه (۱)}} A_1 (v_2 + 3/9) = 1/36 A_1 v_2 \Rightarrow v_2 = 2/5 \frac{m}{s}$$



۷۳- مطابق شکل، توپی را با تندی $20 \frac{m}{s}$ از نقطه A بالای سطح شیب دار پرتاب می کنیم. توپ

با تندی $30 \frac{m}{s}$ در نقطه M دوباره به سطح شیب دار برخورد می کند. فاصله MB چند متر

است؟ ($g = 10 \frac{m}{s^2}$ و مقاومت هوا ناچیز فرض شود.)

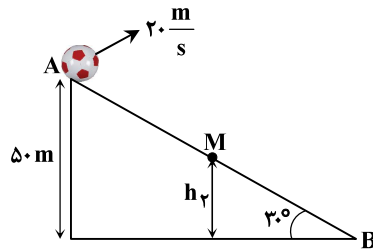
- (۱) ۲۰
(۲) ۲۵
(۳) ۴۰
(۴) ۵۰

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۳)

۷۳- پاسخ: گزینه ۴



مقاومت هوا ناچیز است؛ پس از پایداری انرژی مکانیکی داریم:



$$\begin{aligned} E_1 = E_f &\Rightarrow mgh_1 + \frac{1}{2}mv_1^2 = mgh_f + \frac{1}{2}mv_f^2 \\ &\Rightarrow m \times 10 \times 50 + \frac{1}{2}m \times 20^2 = m \times 10 \times h_f + \frac{1}{2}m \times 30^2 \\ &\Rightarrow 700 = 10h_f + 450 \Rightarrow h_f = 25 \text{ m} \\ \sin 30^\circ = \frac{h_f}{MB} &\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{25}{MB} \Rightarrow MB = 50 \text{ m} \end{aligned}$$

۷۴- دمای یک گوی فلزی را از -50°F تا 150°F بالا می‌بریم و در این حالت حجم گوی به 50.3 cm^3 می‌رسد. حجم اولیه گوی چند

سانتی‌متر مکعب است؟ ($\alpha = 18 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$) (فلز: α)

۵۰۰ (۴)

۴۹۵ (۳)

۴۸۵ (۲)

۴۶۰ (۱)

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۴)

۷۴- پاسخ: گزینه ۴



$$F = \frac{9}{5}\theta + 32 \Rightarrow \Delta F = \frac{9}{5}\Delta\theta \Rightarrow 150 - (-50) = \frac{9}{5}\Delta\theta \Rightarrow \Delta\theta = \frac{200}{1/8}^\circ\text{C}$$

$$\Delta V = V_1 \alpha \Delta\theta \Rightarrow V_f - V_1 = V_1 \times 3 \times 18 \times 10^{-6} \times \frac{200}{1/8} \Rightarrow 50.3 = 1/006 V_1 \Rightarrow V_1 = 500 \text{ cm}^3$$

۷۵- درون یک ظرف فلزی ۴۰ گرم یخ 0°C و ۶۰ گرم آب 0°C موجود است. اگر ۱۰۰ گرم آب 100°C به درون ظرف اضافه کنیم، دمای تعادل

به 30°C خواهد رسید. جرم ظرف چند گرم است؟ ($c = 0.21 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K}$ ، $L_F = 336 \text{ kJ/kg}$ و $c_{\text{آب}} = 4/2 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K}$)

$\frac{1700}{3}$ (۴)

۸۰۰ (۳)

$\frac{1600}{3}$ (۲)

۶۰۰ (۱)

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۴)

۷۵- پاسخ: گزینه ۲



$$Q_{\text{ظرف}} + Q_{\text{یخ}} + Q_{\text{آب}} = 0 \Rightarrow 0 + Q_{\text{یخ}} + Q_{\text{آب}} = 0$$

$$\Rightarrow (mc\Delta\theta)_{\text{آب}} + (mc\Delta\theta)_{\text{یخ}} + (mL_F)_{\text{یخ}} = 0$$

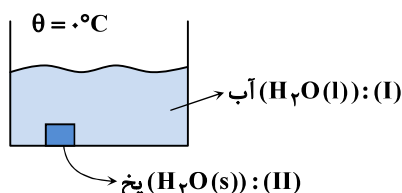
$$\Rightarrow m \times 210 \times (30 - 0) + \frac{40}{1000} \times 336000 + \frac{40 + 60}{1000} \times 4200 \times (30 - 0) + \frac{100}{1000} \times 4200 \times (30 - 100) = 0$$

$$\xrightarrow{+2100} 3m + 6/4 + 6 - 14 = 0 \Rightarrow m = \frac{1/6}{3} \text{ kg} = \frac{1600}{3} \text{ g}$$

شیمی



۷۶- براساس شکل زیر کدام نتیجه‌گیری درست است؟ (اتم هیدروژن موجود در نمونه H:I و اتم هیدروژن موجود در نمونه H:II)



(۱) در حالت فیزیکی یکسان از نمونه‌های (I) و (II)، سدیم تنها با نمونه (I) واکنش می‌دهد.

(۲) اگر نمونه (I) منجمد شود و در مایعی از نمونه (II) ریخته شود، نمونه (I) به ته ظرف خواهد رفت.

(۳) علت تفاوت چگالی دو نمونه به علت تفاوت در تعداد نوترون اتم‌های هیدروژن است.

(۴) دو نمونه آب (I) و (II) را می‌توان ایزوتوپ یکدیگر در نظر گرفت.

▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۱ (فصل ۱)

۷۶- پاسخ: گزینه ۳



گزینه ۳: درست؛ تفاوت در خواص فیزیکی به دلیل تفاوت در چگالی و البته جرم در ایزوتوپ‌ها است.



گزینه ۱: نادرست؛ تغییر در ایزوتوپ H، خواص شیمیایی را تغییر نمی‌دهد.

گزینه ۲: نادرست؛ اگر $d(II) > d(I)$ باشد، یخ (I) بر سطح آب (II) قرار خواهد گرفت. (چون سبک‌تر است).

گزینه ۴: نادرست؛ ایزوتوپ برای عنصر معنا دارد نه ترکیب.

۷۷- عنصری دارای ۳ الکترون در بیرونی‌ترین زیرلایه خود با $n = 4$ و $l = 1$ است. چه تعداد از موارد زیر در رابطه با این عنصر درست است؟

■ با عنصری که عدد اتمی آن ۸۳ است، هم‌گروه است.

■ عدد اتمی آن برابر ۳۹ است.

■ در دسته‌ای از جدول تناوبی است که دارای ۳۶ عنصر است.

■ در آرایش الکترونی آن ۱۱ الکترون با $l = 2$ وجود دارد.

۴ (۴)

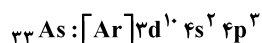
۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

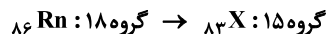
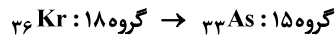
▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۱)

۷۷- پاسخ: گزینه ۲

عنصر موردنظر ۳ الکترون در زیرلایه $4p$ دارد، پس آرایش آن به $4p^3$ ختم می‌شود.

بررسی عبارت‌ها:

عبارت «اول»: درست؛ هر دو عنصر در گروه ۱۵ هستند. برای پیدا کردن شماره گروه آن‌ها از گاز نجیب هم‌دوره‌شان کمک می‌گیریم:

عبارت «دوم»: نادرست؛ $Z = 33$ عبارت «سوم»: درست؛ دسته p دارای ۳۶ عنصر (6×6) است.عبارت «چهارم»: نادرست؛ $3d^{10} \Leftarrow 10$ الکترون با $l = 2$ دارد.

۷۸- عنصر A در شرایط مناسب با گاز اکسیژن واکنش می‌دهد و ترکیبی حاصل می‌شود که ویژگی‌های زیر را دارد. با توجه به ویژگی‌های ذکر شده کدام عبارت درست است؟ (A در دسته d قرار ندارد).

■ با حل کردن آن در آب، pH آب افزایش می‌یابد.

■ در فرمول شیمیایی آن مجموع زیروندها برابر ۳ است.

■ تفاوت شمار الکترون‌های کاتیون و آنیون آن برابر ۸ است.

(۱) در معادله شیمیایی موازنه‌شده سوختن عنصر A مجموع ضرایب مولی مواد ۶ است.

(۲) عنصر A فلزی از گروه اول است و به یقین عدد اتمی آن بیشتر از ۱۱ است.

(۳) در ساختار ترکیب حاصل از واکنش عنصر A با گاز فلوئور، شمار کاتیون‌ها با شمار آنیون‌ها برابر است.

(۴) فرمول شیمیایی ترکیب مورد نظر AO_3 است که رنگ کاغذ pH در محلول آبی آن متفاوت با رنگ کاغذ pH در محلول آب آهک است.

▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۱ (فصل ۲)

۷۸- پاسخ: گزینه ۳



از عبارت:

■ اول می‌فهمیم که با توجه به افزایش pH، این ترکیب یک ترکیب یونی و اکسید فلزی است، پس عنصر A فلز است.

■ دوم می‌فهمیم چون A فلز است و ترکیب آن با اکسیژن یونی است و بار O، -۲ است، پس حتماً بار A، +۱ است و ترکیب A_2O است.■ سوم می‌فهمیم چون O^{2-} ۱۰ الکترون دارد، پس A^+ ۲ یا ۱۸ الکترون دارد، یعنی A، ۳ یا ۱۹ الکترون دارد، پس A یا Li است یا K.

ترکیب حاصل از واکنش فلز A با فلوئور، ترکیب یونی AF است که در آن شمار کاتیون با شمار آنیون برابر است.

نباید سرراغ اینا بری

گزینه ۱: در معادله شیمیایی موازنه شده سوختن عنصر A (یک فلز قلیایی) $4A + O_2 \rightarrow 2A_2O$ مجموعه ضرایب مولی مواد ۷ است.
گزینه ۲: عنصر A فلزی از گروه اول است و عدد اتمی آن می تواند ۳ یا ۱۹ باشد.
گزینه ۴: فرمول شیمیایی ترکیب مورد نظر A_2O است که رنگ کاغذ pH در محلول آبی آن مشابه با رنگ کاغذ pH در محلول آب آهک (CaO)، آبی رنگ (بازی) است.

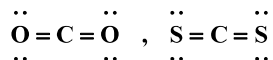
۷۹- در کدام گزینه ساختار لوویس و شکل مولکول های داده شده مشابه هم است؟

(۱) SO_3 ، NH_3 (۲) CO_2 ، SO_2 (۳) CO_2 ، CS_2 (۴) PCl_3 ، SO_3

۷۹- پاسخ: گزینه ۳ **▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۲)**

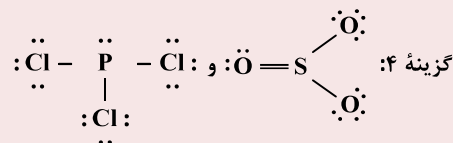
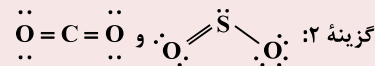
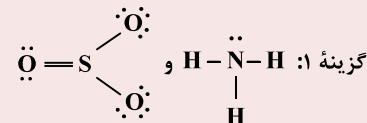
جوابش اینه

مولکول های CO_2 و CS_2 هر دو ساختاری خطی با پیوندهای دوگانه کربن در اتم مرکزی دارند:



اتم های متصل به اتم مرکزی هم هر دو به یک گروه تعلق داشته و دارای دو جفت الکترون ناپیوندی می باشند.

نباید سرراغ اینا بری



۸۰- در حال حاضر کشور ایران ششمین تولیدکننده آمونیاک در جهان است. اگر سالانه در کل پتروشیمی های کشور حدود ۵/۶ میلیون تن نیتروژن مصرف شود، در شرایطی که بدانیم در فرایند هابر دما برابر $455^\circ C$ و فشار برابر ۲۰۰ اتمسفر است، به تقریب سالانه چند میلیون

مترمکعب گاز آمونیاک در این شرایط تولید می شود؟ ($H = 1, N = 14 : g \cdot mol^{-1}$)

(۱) ۱۲۰ (۲) ۸۰ (۳) ۱۰۰ (۴) ۶۰

۸۰- پاسخ: گزینه ۱ **▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۱ (فصل ۲)**

جوابش اینه

ابتدا باید حجم مولی گازها در شرایط داده شده را به کمک داده های شرایط STP محاسبه کنیم:

$$P_1 = 1 \text{ atm} \quad , \quad V_1 = 22/4 \quad , \quad T_1 = 273 \text{ K (STP)}$$

$$P_2 = 200 \text{ atm} \quad , \quad V_2 = x \quad , \quad T_2 = 455 + 273 = 728 \text{ K}$$

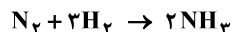
$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2}$$

$$\frac{1 \times 22/4}{273} = \frac{200 \times x}{728}$$

$$x = \frac{22/4 \times 728}{200 \times 273}$$

$$x = \frac{8}{3}$$

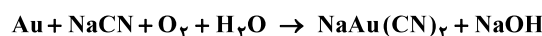
$$x = \frac{8}{3} \times \frac{0.112}{1} = \frac{896}{3} \times 10^{-3} \text{ L NH}_3$$



$$5/6 \times 10^{12} \text{ g N}_2 \times \frac{1 \text{ mol N}_2}{28 \text{ g N}_2} \times \frac{2 \text{ mol NH}_3}{1 \text{ mol N}_2} \times \frac{\frac{896}{3} \times 10^{-3} \text{ L NH}_3}{1 \text{ mol NH}_3} \times \frac{1 \text{ m}^3}{10^3 \text{ L}} \times \frac{1 \text{ million m}^3}{10^6 \text{ m}^3} = 0.4 \times \frac{896}{3} \approx 120 \text{ million m}^3 \text{ NH}_3$$

۸۱- اگر در واکنش موازنه نشده زیر، ابتدا ۹/۸ گرم سدیم سیانید (NaCN) را به طور کامل وارد واکنش کنیم و حجم محلول پایانی ۵۰ میلی لیتر از ۵۰۰ برابر آب مصرفی بیشتر باشد، غلظت سدیم هیدروکسید در محلول پایانی چند مولار است؟ ($1 \text{ g} \cdot \text{mL}^{-1}$ = چگالی آب)

($\text{H}_2\text{O} = 18, \text{NaCN} = 49 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$)



۰/۲۲ (۴)

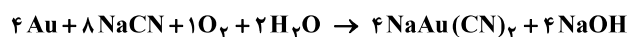
۰/۵ (۳)

۰/۱ (۲)

۰/۲ (۱)

▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۱ (فصل ۳)

۸۱- پاسخ: گزینه ۱



برای محاسبه غلظت NaOH در محلول پایانی، باید مول NaOH تولید شده و حجم محلول پایانی را به دست آوریم.

$$? \text{ mol NaOH} = 9/8 \text{ g NaCN} \times \frac{1 \text{ mol NaCN}}{49 \text{ g NaCN}} \times \frac{4 \text{ mol NaOH}}{8 \text{ mol NaCN}} = 0.1 \text{ mol NaOH}$$

$$? \text{ mL H}_2\text{O} : 9/8 \text{ g NaCN} \times \frac{1 \text{ mol NaCN}}{49 \text{ g NaCN}} \times \frac{2 \text{ mol H}_2\text{O}}{1 \text{ mol NaCN}} \times \frac{18 \text{ g H}_2\text{O}}{1 \text{ mol H}_2\text{O}} \times \frac{1 \text{ mL H}_2\text{O}}{1 \text{ g H}_2\text{O}} = 0.9 \text{ mL H}_2\text{O}$$

$$\text{حجم کل محلول} = 0.9 \times 500 + 50 = 500.9 \text{ mL} \approx 0.5 \text{ L}$$

$$[\text{NaOH}] = \frac{0.1}{0.5} = 0.2 \frac{\text{mol}}{\text{L}}$$

۸۲- در دمای 20°C و فشار $4/5 \text{ atm}$ ، انحلال پذیری گاز نیتروژن در آب برابر با $0.2 \frac{\text{g}}{100 \text{ g H}_2\text{O}}$ است. کدام گزینه در مورد این گاز

نادرست است؟

(۱) انحلال این گاز در آب از نوع فیزیکی است.

(۲) در همین دما و فشار، با افزودن NaCl به آب انحلال پذیری این گاز کاهش می یابد.

(۳) در دمای 25°C و فشار ۹ اتمسفر، انحلال پذیری این گاز در آب برابر با ۰/۰۴ است.

(۴) با افزایش فشار در دمای ثابت، انحلال پذیری این گاز در آب افزایش می یابد.

▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۱ (فصل ۳)

۸۲- پاسخ: گزینه ۳



با توجه به اینکه انحلال پذیری گازها در دمای ثابت، با افزایش فشار به صورت خطی افزایش می یابد (درستی گزینه ۴)، می توان انحلال پذیری این گاز را در دمای 20°C و فشار ۹ اتمسفر محاسبه کرد. (توجه نمایید که انحلال پذیری گازها در فشار 0.1 atm برابر است.)

معادله انحلال پذیری- فشار: $S = aP$

$$a = \frac{\Delta S}{\Delta P} = \frac{0.2 - 0}{4/5 - 0} = \frac{0.2}{4/5} \Rightarrow S = \frac{0.2}{4/5} P \xrightarrow{P=9 \text{ atm}} S = \frac{0.2}{4/5} \times 9 = 0.4 \frac{\text{g}}{100 \text{ g آب}} (20^\circ\text{C در دمای})$$

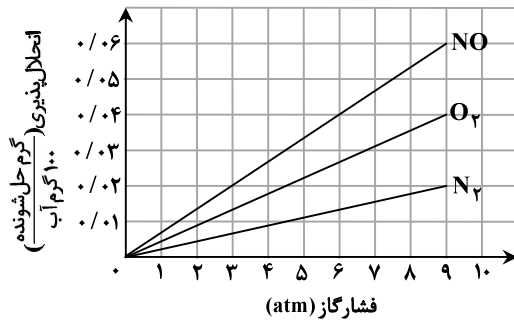
با توجه به اینکه با افزایش دما انحلال پذیری گازها کاهش می یابد، می توان نتیجه گرفت که انحلال پذیری این گاز در فشار 9 atm و دمای

25°C کمتر از $0.4 \frac{\text{g}}{100 \text{ g آب}}$ است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه ۱: درست

گزینه ۲: با افزودن یک حل‌شونده به آب، ظرفیت آب برای پذیرش این گاز کاهش می‌یابد.



۸۳- کدام گزینه نادرست است؟

- (۱) در یک دوره، اگر فلز X در سمت چپ فلز Y قرار گرفته باشد، قطعاً واکنش پذیری X از Y بیشتر است.
 (۲) طلا واکنش پذیری ناچیزی دارد، به همین جهت گنبد برخی اماکن مقدس پس از گذشت سال‌ها تغییری نمی‌کند.
 (۳) برخی عنصرهای واسطه دوره چهارم جدول ترکیب‌های گوناگونی با نافلزها تشکیل می‌دهند که برای نام‌گذاری بعضی از آن‌ها باید از اعداد رومی استفاده کرد.
 (۴) در آرایش الکترونی برخی گونه‌های شیمیایی زیرلایه $3d^4$ مشاهده می‌شود.

۸۳- پاسخ: گزینه ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۱)



به‌طور مثال در دوره چهارم جدول، واکنش‌پذیری Zn، Cu و بیشتر است. (روندهای واکنش‌پذیری در فلزات واسطه صادق نیست).



- گزینه ۲: گنبد برخی اماکن مقدس با لایه نازکی از طلا پوشیده شده است و این فلز با گازهای موجود در هواکره واکنش نمی‌دهد.
 گزینه ۳: بعضی از عناصر واسطه در دوره چهارم مانند Cr، Fe و... در واکنش با نافلزها از ظرفیت‌های متفاوتی استفاده می‌کنند که برای نام‌گذاری ترکیب‌های آن‌ها باید از اعداد رومی استفاده شود، اما بعضی از عناصر این دوره مانند Sc و Zn تک ظرفیتی هستند و برای نام‌گذاری ترکیب‌های آن‌ها نیازی به استفاده از اعداد رومی نیست.
 گزینه ۴: به‌طور مثال در آرایش الکترونی Cr^{2+} زیرلایه $3d^4$ مشاهده می‌شود:
 $Cr^{2+}: [Ar]3d^4$

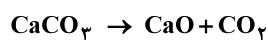


- وقتی می‌گیریم گونه‌های شیمیایی، یعنی علاوه بر اتم‌ها، یون‌ها هم مدنظرمون هستن.

۸۴- در واکنش تجزیه کلسیم کربنات به کلسیم اکسید و گاز کربن‌دی‌اکسید، واکنش به تقریب چند درصد پیشرفت کند تا جرم جامد تولیدشده نصف جرم جامد اولیه باشد؟

- (۱) ۸۹ / ۳ (۲) ۶۰ / ۳ (۳) ۵۰ / ۲ (۴) ۶۳

۸۴- پاسخ: گزینه ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۱)



مقدار اولیه را a مول از $CaCO_3$ در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم b مول CaO تولید شده باشد.

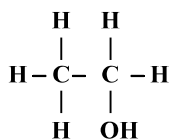
$$\frac{b \times 56}{a \times 100} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{100}{112}$$

$\Rightarrow b = a$ اگر واکنش کامل بود

$$\text{درصد پیشرفت} = \frac{b}{a} \times 100 = \frac{100}{112} \times 100 \approx 89 / 3$$

۸۵- ترکیب A در شرایطی مناسب با آب و اسید واکنش می‌دهد و فراورده‌ای با فرمول ساختاری نمایش داده شده حاصل می‌شود. بر این اساس،

چند مورد از عبارات زیر درست هستند؟ ($H = 1, C = 12, O = 16 : g \cdot mol^{-1}$)



الف) تفاوت جرم مولی فراورده نمایش داده شده با جرم مولی دومین عضو از خانواده آلکان‌ها، با جرم مولی متان برابر است.

ب) از واکنش ترکیب A با محلول برم، ترکیبی آلی با فرمول مولکولی $C_7H_6Br_4$ حاصل می‌شود.

پ) در شرایط معمولی، نقطه جوش ترکیب A کمتر از دمای اتاق است و در ساختار مولکول آن ۶ جفت الکترون پیوندی وجود دارد.

ت) ترکیب A، در مقایسه با سایر هیدروکربن‌های سیر نشده، جرم مولی کمتری دارد.

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۸۵- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۲ (فصل ۱)

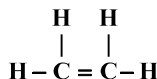


عبارات‌های «الف» و «پ» درست هستند.

ترکیب A، گاز اتن (C_2H_4) است که در شرایط مناسب با مخلوط آب و اسید واکنش داده و اتانول که الکی دو کربنی است را تولید می‌کند.

الف) تفاوت جرم مولی فراورده نمایش داده شده (اتانول با جرم مولی ۴۶ گرم بر مول) با جرم مولی دومین عضو از خانواده آلکان‌ها (اتان با جرم مولی ۳۰ گرم بر مول)، با جرم مولی متان (۱۶ گرم بر مول) برابر است.

پ) در شرایط معمولی و در دمای اتاق اتن به حالت گازی وجود دارد، در نتیجه نقطه جوش آن کمتر از دمای اتاق است. همچنین ساختار اتن به این صورت است:



ب) از واکنش ترکیب A با محلول برم، ترکیبی آلی با فرمول مولکولی $C_7H_6Br_4$ حاصل می‌شود.

ت) ترکیب A، در مقایسه با اتیلن (C_2H_4) که هیدروکربن سیر نشده‌ای از خانواده آلکین‌ها است، جرم مولی بیشتری دارد.

۸۶- برای آلکانی با ۱۴ اتم هیدروژن، کدام موارد ایزومرهای این آلکان هستند؟

الف) ۲- متیل پنتان و ۳- دی متیل بوتان

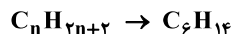
پ) ۲- متیل پنتان و ۳- متیل هگزان

۱) «پ» و «ت» ۲) «ب» و «پ» ۳) «الف» و «ب» ۴) «الف» و «ت»

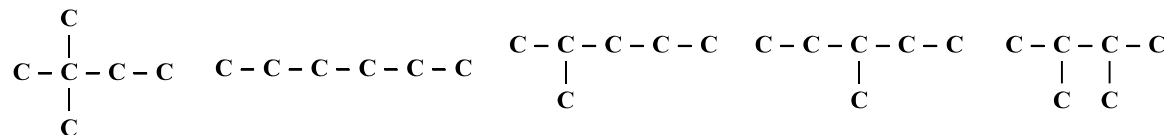
۸۶- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۱)



آلکانی با ۱۴ اتم هیدروژن ($2n + 2 = 14$) دارای ۶ اتم کربن ($n = 6$) است.



$C_6 H_{14}$ دارای ۵ ایزومر ساختاری است.



- برای محاسبه تعداد ایزومرهای ساختاری آلکان‌هایی با ۴ تا ۷ اتم کربن می‌توان از فرمول $2^{n-4} + 1$ استفاده کرد. (تعداد کربن = n)

- به‌عنوان مثال برای هگزان با ۶ اتم کربن ۵ ایزومر ساختاری می‌تواند وجود داشته باشد: $2^2 + 1 = 4 + 1 = 5$



بدون رسم ساختار هم می شود این تست رو پاسخ داد.
در عبارت پ ماده متیل هگزان دارای ۷ اتم کربن و در عبارت ت ماده متیل بوتان دارای ۵ اتم کربن است که هر دو نادرست هستند.

- ۸۷- در مورد نفت خام، بنزین و زغال سنگ کدام عبارت یا عبارت ها نادرست است؟
الف) بخش عمده هیدروکربن های موجود در نفت خام را آلکان ها تشکیل می دهند.
ب) از نظر فرار بودن، نفت سفید بیشتر از نفت کوره و نفت کوره بیشتر از گازوئیل فرار است.
پ) گرمای حاصل از سوختن یک گرم زغال سنگ کمتر از یک گرم بنزین است.
ت) جایگزینی نفت با زغال سنگ باعث ورود مقدار بیشتری از آلاینده ها به هوا می شود.
ث) مقدار CO_2 تولید شده به ازای هر کیلوژول انرژی آزاد شده از سوختن زغال سنگ بیشتر از بنزین است.
- (۱) «ب»
(۲) «پ» و «ب»
(۳) «پ» و «ث»
(۴) «الف» و «ت»

۸۷- پاسخ: گزینه ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۱)



فقط عبارت «ب» نادرست است.
بررسی عبارت های درست:
الف) درست
پ) گرمای حاصل از سوختن یک گرم زغال سنگ حدود $30 kJ$ و یک گرم بنزین حدود $48 kJ$ است.
ت) فراورده حاصل از سوختن زغال سنگ حاوی انواع آلاینده ها با میزان بالایی است.
ث) این میزان برای زغال سنگ 0.104 گرم و برای بنزین 0.065 گرم است.

- ۸۸- اگر آنتالپی سوختن گازهای اتان و پروپان به ترتیب -1560 و -2200 کیلوژول بر مول باشد، بر اثر سوختن کامل 29 گرم گاز بوتان دمای 10 کیلوگرم آب به تقریب چند درجه سلسیوس افزایش می یابد؟
($H = 1, C = 12 : g \cdot mol^{-1}, C_4H_{10} = 4/2 \frac{J}{g \cdot ^\circ C}$)
- (۱) $33/81$
(۲) $52/39$
(۳) $18/57$
(۴) $37/14$

۸۸- پاسخ: گزینه ۱ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۲ (فصل ۲)



با توجه به اینکه اختلاف آنتالپی سوختن دو آلکان متوالی تقریباً مقدار ثابتی است، ابتدا آنتالپی سوختن بوتان را محاسبه می کنیم:
 $640 = -1560 - (-2200)$ = اختلاف آنتالپی سوختن اتان و پروپان
 $\Delta H_{\text{سوختن بوتان}} = -2200 - 640 = -2840 kJ \cdot mol^{-1}$
گرمای آزاد شده $29 g C_4H_{10} \times \frac{1 mol C_4H_{10}}{58 g C_4H_{10}} \times \frac{2840 kJ}{1 mol C_4H_{10}} = 1420 kJ$
 $Q = mc\Delta\theta \Rightarrow 1420 \times 10^3 = 10 \times 10^3 \times 4/2 \times \Delta\theta \Rightarrow \Delta\theta = 33/81^\circ C$

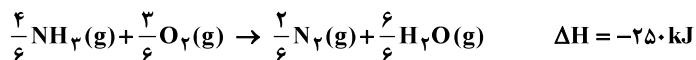
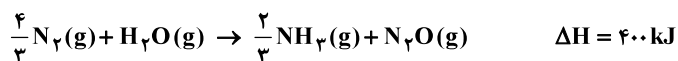
- ۸۹- با توجه به واکنش های داده شده، از تولید 440 گرم N_2O طی واکنش $N_2(g) + \frac{1}{2}O_2(g) \rightarrow N_2O(g)$ چند کیلوژول انرژی مبادله می شود؟ ($N = 14, O = 16 : g \cdot mol^{-1}$)
- I) $2NH_3(g) + 2N_2O(g) \rightarrow 4N_2(g) + 3H_2O(g) \quad \Delta H = -1200 kJ$
II) $4NH_3(g) + 3O_2(g) \rightarrow 2N_2(g) + 6H_2O(g) \quad \Delta H = -1500 kJ$
- (۱) 2400
(۲) 1200
(۳) 1500
(۴) 3000

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۲)

۸۹- پاسخ: گزینه ۳

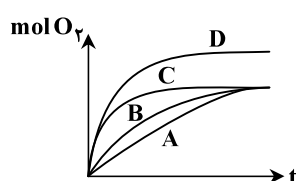


با توجه به $N_2O(g)$ واکنش اول را وارونه و در $\frac{1}{3}$ ضرب می‌کنیم و با توجه به $O_2(g)$ واکنش دوم را در $\frac{1}{6}$ ضرب می‌کنیم:



$$x \text{ kJ} = 440 \text{ g } N_2O \times \frac{1 \text{ mol } N_2O}{44 \text{ g } N_2O} \times \frac{150 \text{ kJ}}{1 \text{ mol } N_2O} = 1500 \text{ kJ}$$

۹۰- اگر در واکنش زیر، با شرایط مختلف مقدار گاز تولید شده را بررسی کنیم، نمودارهای A، B، C و D به ترتیب به کدام واکنش‌ها مرتبط هستند؟



الف) یک لیتر محلول ۱/۵ مولار آب اکسیژنه در دمای $40^\circ C$ و در حضور پتاسیم یدید

ب) یک لیتر محلول ۱ مولار آب اکسیژنه در دمای $40^\circ C$ و بدون کاتالیزگر

پ) یک لیتر محلول ۱ مولار آب اکسیژنه در دمای $20^\circ C$ و بدون کاتالیزگر

ت) یک لیتر محلول ۱ مولار آب اکسیژنه در دمای $20^\circ C$ و در حضور نوعی بازدارنده

۱) «ت»، «ب»، «پ»، «الف» ۲) «الف»، «ب»، «پ»، «ت»

۳) «ت»، «پ»، «ب»، «الف» ۴) «الف»، «پ»، «ب»، «ت»

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۲)

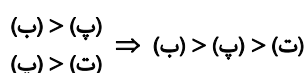
۹۰- پاسخ: گزینه ۳



واکنش «الف» بالاترین غلظت، دما و حضور کاتالیزگر و در نتیجه بیشترین سرعت را دارد و ضمناً مقدار ماده اولیه آن بیشتر است.

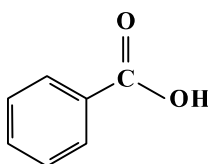
واکنش «ب» کاملاً شبیه واکنش «پ» است با این فرق که در واکنش «ب» دما بالاتر است. پس سرعت واکنش «ب» از «پ» بیشتر است.

واکنش «پ» و واکنش «ت» شبیه به هم هستند با این تفاوت که در واکنش «ت» بازدارنده وجود دارد و سرعت آن از واکنش «پ» کمتر خواهد بود.



مقایسه سرعت: (الف) < (ب) < (پ) < (ت)

۹۱- چه تعداد از جمله‌های زیر در مورد مولکول مقابل درست است؟



■ فرمول مولکولی آن $C_7H_6O_2$ است.

■ عطر دارچین به دلیل وجود این ترکیب در آن است.

■ می‌توان آن را یک کربوکسیلیک اسید آروماتیک دانست.

■ دارای گروه عاملی کربوکسیل است.

■ از ترکیب‌های آن به عنوان ماده نگهدارنده مواد غذایی استفاده می‌شود.

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۲ (فصل ۲)

۹۱- پاسخ: گزینه ۲



عبارات «سوم»، «چهارم» و «پنجم» درست است.

ساختار داده شده متعلق به بنزوئیک اسید است.

عبارت «سوم» درست؛ دارای عامل اسیدی و حلقه بنزنی می‌باشد.



عبارت «چهارم» درست؛ $(-C-OH)$ یا گروه کربوکسیل در ساختار آن وجود دارد.

عبارت «پنجم» درست؛ نمک‌های بنزوئیک اسید به عنوان مواد نگهدارنده مواد غذایی کاربرد دارند.

نباید سرانگ اینا بری

عبارت «اول»: نادرست؛ فرمول آن $C_7H_{16}O_2$ است.

عبارت «دوم»: نادرست؛ این ماده در تمشک و توت فرنگی وجود دارد.

۹۲- در چند مورد زیر نام پلیمر به کار رفته در تولید کالای عنوان شده به درستی بیان شده است؟

■ سرنگ: پلی وینیل کلرید

■ پتو: پلی سیانواتن

■ کیسه خون: پلی پروپن

■ ظرف یکبارمصرف: تترا فلوروواتن

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۹۲- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۲ (فصل ۳)

جوابش اینه

نام درست پلیمرهای به کار رفته در کالاها:

سرنگ: پلی پروپن

کیسه خون: پلی وینیل کلرید

ظروف یکبارمصرف: پلی استیرن

۹۳- چند مورد از مطالب زیر درباره اتیل هپتانوات درست است؟ ($H = 1, C = 12, O = 16 : g \cdot mol^{-1}$)

■ با پنتیل بوتانوات همپار است.

■ از جمله ترکیبهای سازنده طعم و بوی انگور است.

■ از آبکافت یک مول از آن ۴۶ گرم اتانول تولید می شود.

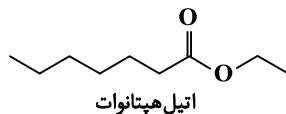
■ بخش ناقطبی اسید سازنده آن ۶ اتم کربن دارد.

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۹۳- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۳)

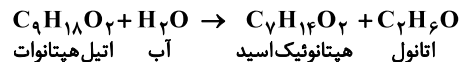
جوابش اینه

عبارت «اول»: درست؛ پنتیل بوتانوات مانند اتیل هپتانوات دارای ۹ اتم کربن و فرمول کلی $C_9H_{18}O_2$ می باشد.



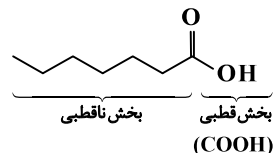
عبارت دوم: درست

عبارت سوم: درست



$$x g C_2H_6O = 1 mol C_9H_{18}O_2 \times \frac{1 mol C_2H_6O}{1 mol C_9H_{18}O_2} \times \frac{46 g C_2H_6O}{1 mol C_2H_6O} = 46 g C_2H_6O$$

عبارت چهارم: درست؛ بخش ناقطبی هپتانوئیک اسید دارای ۶ اتم کربن است.



۹۴- تفاوت شمار اتمهای کربن و هیدروژن در نوعی پاک کننده غیرصابونی با زنجیر هیدروکربنی سیرشده برابر شمار پروتون ها در هسته اتم آلومینیم است. جرم مولی این پاک کننده چند برابر جرم مولی اوره است؟

($H = 1, C = 12, N = 14, O = 16, Na = 23, S = 32 : g \cdot mol^{-1}$)

(۱) ۶/۲۶ (۲) ۶/۶۲ (۳) ۳/۶۶ (۴) ۵/۲۶

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)

۹۴- پاسخ: گزینه ۱



فرمول همگانی پاک‌کننده‌های غیرصابونی با زنجیر هیدروکربنی سپر شده به صورت زیر است:



با توجه به داده‌های سؤال: تفاوت شمار اتم‌های H و C برابر عدد اتمی آلومینیم و ۱۳ است.

$$(2n + 5) - (n + 6) = 13 \Rightarrow n = 14$$

جرم مولی این ترکیب برابر $376 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ است.



جرم مولی آورده با فرمول $CO(NH_2)_2$ برابر ۶۰ گرم بر مول است. پس:

$$\frac{376}{60} = 6.26$$

۹۵- به ۴۰۰ mL محلول HNO_3 با $pH = 0.3$ ، ۱۰۰ mL محلول ۰/۵ مولار $Ba(OH)_2$ می‌افزاییم. pH حاصل کدام است؟ ($\log 2 = 0.3$)

(۴) ۰/۰۵

(۳) ۰/۵

(۲) ۰/۷

(۱) ۷

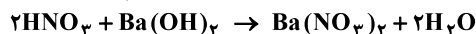
▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)

۹۵- پاسخ: گزینه ۲



$$HNO_3 \begin{cases} pH = 0.3 \Rightarrow [H^+] = M = 0.5 \\ V = 0.4 L \end{cases} \Rightarrow \text{مول} = M \cdot V = 0.2 \text{ mol}$$

$$Ba(OH)_2 \begin{cases} M = 0.5 \\ V = 0.1 \end{cases} \Rightarrow \text{مول} = 0.05 \text{ mol}$$

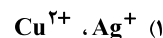


$$\frac{x}{2} = \frac{0.05}{1} \Rightarrow x = 0.1 \text{ mol} \quad (\text{نیتریک اسید خنثی شده})$$

$$\Rightarrow \text{نیتریک اسید باقی‌مانده} = 0.2 - 0.1 = 0.1$$

$$\Rightarrow M(\text{نیتریک اسید باقی‌مانده}) = \frac{0.1}{0.5} = 0.2 \Rightarrow [H^+] = 0.2 \Rightarrow pH = 0.7$$

۹۶- غلظت کدام یون در سلول گالوانی «مس- نقره» با گذشت زمان کاهش می‌یابد و کدام یون با گذر از دیواره متخلخل به سمت کاتد مهاجرت می‌کند؟



▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۳ (فصل ۲)

۹۶- پاسخ: گزینه ۱



در سلول گالوانی «مس- نقره» نیم‌سلول مس در نقش آند و نیم‌سلول نقره در نقش کاتد است. کاتیون‌ها در نیم‌سلول کاتدی با گرفتن الکترون از محلول جدا شده و بر سطح الکترود می‌نشینند؛ بنابراین غلظت یون نقره با گذشت زمان کاهش می‌یابد. از سویی کاتیون‌های محلول آنودی برای جبران کاهش غلظت کاتیون‌ها در محلول کاتدی از آند به سمت کاتد مهاجرت می‌کنند، پس یون‌های Cu^{2+} از دیواره متخلخل عبور می‌کنند.

۹۷- اگر طی فرایندهای استخراج سدیم و آلومینیوم شمار الکترون یکسانی از مدار بیرونی سلول‌های الکتروشیمیایی مربوط به آن‌ها عبور کرده باشد، در شرایط معین و یکسان، حجم گاز تولید شده طی فرایند استخراج آلومینیوم چند برابر حجم گاز تولید شده در فرایند استخراج فلز سدیم است؟

(۴) ۲

(۳) ۳

(۲) $\frac{1}{2}$ (۱) $\frac{1}{3}$



معادله فرایند استخراج سدیم: $2\text{NaCl(l)} \rightarrow 2\text{Na(l)} + \text{Cl}_2\text{(g)}$ و به ازای عبور ۲ مول الکترون یک مول گاز تولید می شود.
معادله فرایند استخراج آلومینیوم: $2\text{Al}_2\text{O}_3\text{(l)} + 3\text{C(s)} \rightarrow 4\text{Al(l)} + 3\text{CO}_2\text{(g)}$ و به ازای عبور ۴ مول الکترون یک مول گاز تولید می شود. پس اگر شمار مول الکترون عبور کرده از مدار بیرونی دو سلول یکسان باشد، شمار مول و حجم گاز تولید شده طی استخراج آلومینیوم نصف شمار مول و حجم گاز تولید شده طی فرایند استخراج سدیم است.

۹۸- در یک آزمایش نیمی از الکترون های حاصل از اکسایش ۲۶ گرم فلز روی به یون روی را از سلول الکترولیتی مورد استفاده در برقکافت منیزیم کلرید مذاب عبور داده ایم. فلز منیزیم تولید شده در این فرایند با چند گرم گاز اکسیژن ۶۴٪ خالص به طور کامل واکنش می دهد؟

($\text{O} = ۱۶, \text{Mg} = ۲۴, \text{Zn} = ۶۵ : \text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$)

۴۰ (۴)

۲۰ (۳)

۱۰ (۲)

۵ (۱)



نیم واکنش اکسایش روی به صورت $\text{Zn} \rightarrow \text{Zn}^{2+} + 2\text{e}^-$ است. تعداد مول الکترون های مبادله شده برای اکسایش ۲۶ گرم از آن برابر است با:

$$26 \text{ g Zn} \times \frac{1 \text{ mol Zn}}{65 \text{ g Zn}} \times \frac{2 \text{ mole}^-}{1 \text{ mol Zn}} = 0.8 \text{ mole}^-$$

اگر نیمی از این تعداد الکترون (یعنی ۰/۴ mol) در الکترولیز منیزیم کلرید مصرف شوند، مقدار Mg تولید شده برابر خواهد بود با:



$$0.4 \text{ mole}^- \times \frac{1 \text{ mol Mg}}{2 \text{ mole}^-} = 0.2 \text{ mol Mg}$$

برای تعیین جرم گاز اکسیژن ناخالص مورد نیاز برای انجام واکنش با این مقدار منیزیم نیز خواهیم داشت:



$$0.2 \text{ mol Mg} \times \frac{1 \text{ mol O}_2}{2 \text{ mol Mg}} \times \frac{32 \text{ g O}_2}{1 \text{ mol O}_2} \times \frac{100 \text{ g O}_2 \text{ ناخالص}}{64 \text{ g O}_2 \text{ خالص}} = 5 \text{ g O}_2 \text{ ناخالص}$$

۹۹- جمع جبری دو عدد اکسایش در کدام مورد بیشتر است؟

(۲) دو اتم کربن در اتانول

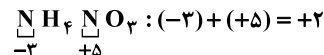
(۱) دو اتم نیتروژن در آمونیوم نیترات

(۴) دو اتم کربن متصل به اکسیژن در متیل اتانوات

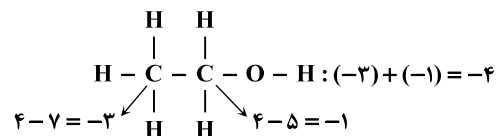
(۳) اتم گوگرد در SF_6 با اتم گوگرد در آلومینیم سولفید



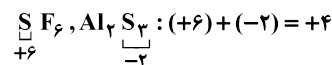
گزینه ۱:



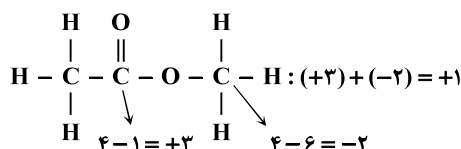
گزینه ۲:



گزینه ۳:



گزینه ۴:



۱۰۰- چند مورد از عبارت‌های زیر درست هستند؟

- اتم‌های کربن در مولکول اتین مانند اتم کربن در کربن دی‌اکسید، بار جزئی مثبت دارند.
- در مولکول کربن تتراکلرید برخلاف مولکول متان تراکم الکترون‌ها در مراکز مولکول بیشتر است.
- در نقشه پتانسیل الکتروستاتیکی مولکول آمونیاک و مولکول گوگرد دی‌اکسید اتم مرکزی دو مولکول رنگ مشابه دارد.
- اگر اتم گوگرد جایگزین یکی از اتم‌های اکسیژن در مولکول کربن دی‌اکسید شود، گشتاور دوقطبی و جرم مولی افزایش می‌یابند.

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۱۰۰- پاسخ: گزینه ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۳)



بررسی عبارت نادرست:

- عبارت «اول»: اتم‌های کربن در مولکول اتین برخلاف اتم کربن در کربن دی‌اکسید، بار جزئی منفی دارند.
- عبارت «دوم»: در مولکول کربن تتراکلرید برخلاف مولکول متان تراکم الکترون‌ها در مرکز مولکول کمتر است.
- عبارت «سوم»: در نقشه پتانسیل الکتروستاتیکی مولکول آمونیاک و مولکول گوگرد دی‌اکسید اتم مرکزی دو مولکول رنگ متفاوت دارد.

۱۰۱- کدام مقایسه به‌درستی انجام شده است؟

- (۱) آنتالپی فروپاشی: $\text{AlF}_3 > \text{MgO}$ (۲) شعاع یونی: $\text{Fe}^{2+} < \text{Fe}^{3+}$
- (۳) شعاع (اندازه): $\text{Cl}^- > \text{Na}$ (۴) چگالی بار: $\text{O}^{2-} > \text{N}^{3-}$

۱۰۱- پاسخ: گزینه ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۳)



آنتالپی فروپاشی متناسب است با حاصل ضرب بار یون‌ها در شمار یون‌های سازنده که بر این اساس داریم:

$$\text{AlF}_3 : 3 \times 1 \times (1 + 3) = 12$$

$$\text{MgO} : 2 \times 2 \times (1 + 1) = 8$$

گزینه ۲: نادرست؛ با افزایش بار کاتیون یک عنصر، جاذبه هسته بر الکترون‌ها افزایش می‌یابد و شعاع یونی کاهش می‌یابد. پس: $\text{Fe}^{3+} < \text{Fe}^{2+}$.گزینه ۳: نادرست؛ شعاع اتم Na از یون Cl^- بزرگ‌تر است.گزینه ۴: نادرست؛ در یون‌های هم‌الکترون مانند N^{3-} و O^{2-} هرچه بار یون بیشتر باشد، چگالی بار یون بیشتر است.۱۰۲- برای تبدیل یون $\text{VO}^{2+}(\text{aq})$ به یون $\text{VO}_2^+(\text{aq})$ از کدام ماده می‌توان استفاده کرد؟

- (۱) MnO_4^- (۲) Zn (۳) S^{2-} (۴) NH_4^+

۱۰۲- پاسخ: گزینه ۱ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۳)

عدد اکسایش واندیم در دو یون VO_2^+ و VO_2^+ به ترتیب برابر ۴+ و ۵+ است، پس برای اکسید کردن V^{4+} به V^{5+} نیاز به یک اکسنده داریم. اکسنده ماده‌ای است که کاهش می‌یابد و سبب اکسایش ماده دیگر می‌شود.گزینه ۱: درست؛ در یون MnO_4^- عدد اکسایش Mn برابر ۷+ است که بالاترین عدد اکسایش منگنز است، پس این یون تنها می‌تواند کاهش یابد و در نقش اکسنده عمل کند.

گزینه ۲: نادرست؛ اتم Zn تنها با از دست دادن الکترون، اکسایش می‌یابد و همواره کاهنده است.

گزینه ۳: نادرست؛ یون سولفید تنها می‌تواند الکترون از دست بدهد و همواره کاهنده است.

گزینه ۴: نادرست؛ اتم N در یون NH_4^+ دارای عدد اکسایش ۳- است که پایین‌ترین عدد اکسایش نیتروژن است، پس همواره می‌تواند الکترون از دست بدهد و مثبت‌تر شود و نقش کاهندگی دارد.

۱۰۳- انرژی فعال سازی واکنش حذف کدام آلاینده تولید شده در موتور خودروهای دیزلی را نمی توان با یکی از سه کاتالیزگر پلاتین، پالادیم و رودیم تأمین کرد؟



▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۳ (فصل ۴)

۱۰۳- پاسخ: گزینه ۲



برای حذف آلاینده NO_2 در خودروهای دیزلی از واکنش آن با آمونیاک استفاده می کنند؛ زیرا کاتالیزگرها انتخابی عمل می کنند و این سه فلز واسطه تأثیری بر انرژی فعال سازی واکنش حذف NO_2 ندارند.

۱۰۴- تعادل گازی $N_2O_4(g) \rightleftharpoons 2NO_2(g)$ در سامانه ای ۲ لیتری برقرار است. کدام دو تغییر باعث افزایش رنگ تعادلی سامانه می شود؟

(۱) افزایش دما - افزایش حجم

(۲) افزایش دما - کاهش حجم

(۳) کاهش دما - افزایش حجم

(۴) کاهش دما - کاهش حجم

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۴)

۱۰۴- پاسخ: گزینه ۲



■ واکنش گرماده است و افزایش دما باعث جابه جایی در جهت برگشت می شود؛ بنابراین تولید NO_2 باعث افزایش غلظت آن و افزایش رنگ تعادل می شود.

■ هر چند که کاهش حجم، تعادل را در جهت رفت جابه جا می کند، اما تمام غلظت های تعادلی افزایش می یابند و شدت رنگ مخلوط تعادلی زیاد می شود.

۱۰۵- تعادل گازی: $2A \rightleftharpoons B$ با ۱۰۰ گرم A و ۱۰۰ گرم B در سامانه ای ۵ لیتری برقرار است. اگر جرم مولی A دو برابر جرم مولی B باشد، ثابت تعادل این واکنش بر حسب جرم مولی A (a) کدام است؟

$$100a \quad (۴)$$

$$10a \quad (۳)$$

$$0.1a \quad (۲)$$

$$0.01a \quad (۱)$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۴)

۱۰۵- پاسخ: گزینه ۲



$$A \text{ مول} = \frac{100}{a} \Rightarrow [A] = \frac{20}{a}$$

$$B \text{ مول} = \frac{100}{\left(\frac{a}{2}\right)} = \frac{200}{a} \Rightarrow [B] = \frac{40}{a}$$

$$K = \frac{\left(\frac{40}{a}\right)}{\left(\frac{20}{a}\right)^2} = 0.1a$$