



ویژه
کنکوری‌های
۱۴۰۲

آزمون
چهارم
حضور

دفترچه شماره ۱



سال تحصیلی
۱۴۰۱-۱۴۰۲

آزمون آزمایشی خلیسبز

گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی

نام و نام خانوادگی: شماره داوطلبی:

تعداد سؤال: ۵۰ مدت پاسخ‌گویی: ۹۰ دقیقه

عنوان مواد امتحانی آزمون. تعداد. شماره سؤالات و مدت پاسخ‌گویی

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخ‌گویی
۱	حسابان	۲۰	۱	۲۰	۳۵ دقیقه
۲	ریاضیات گسسته و آمار و احتمال	۱۵	۲۱	۳۵	۲۸ دقیقه
۳	هندسه	۱۵	۳۶	۵۰	۲۷ دقیقه

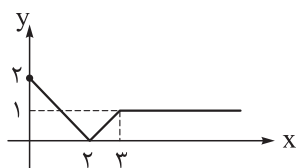
Azmoon.kheilisabz.com

حسابان دوازدهم و پایه مرتبط: حسابان (۲): صفحه‌های ۱ تا ۷۰

۱- $A(2, -1)$ نقطه‌ای روی نمودار تابع $y = 2 - 3f(\frac{x}{4})$ است. فاصله نقطه متناظر A روی نمودار تابع $y = f(x)$ تا مبدأ مختصات کدام است؟

- (۱) $\sqrt{26}$ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) ۵ (۴) $3\sqrt{2}$

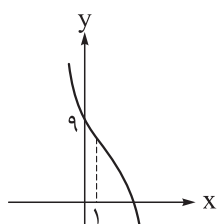
۲- نمودار تابع f مطابق شکل است. نمودار تابع $y = f(4 - |\frac{x}{4}|)$ در بازه $[-4, 4]$ با محور طول‌ها چه مساحتی می‌سازد؟



- (۱) ۱۶ (۲) ۱۲ (۳) ۸ (۴) ۶

۳- نمودار تابع $f(x) = \sqrt{4x+16}$ را نسبت به مبدأ مختصات قرینه کرده‌ایم و سپس ۶ واحد به بالا و k واحد به سمت چپ انتقال داده‌ایم؛ به طوری که نمودار حاصل، تابع $y = f(x)$ را روی محور عرض‌ها قطع کرده است. مقدار k کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۲ (۳) ۶ (۴) ۳



۴- اگر نمودار تابع $f(x) = (\alpha x + 2)^3 + \beta$ مطابق شکل باشد، نمودار تابع $y = \sqrt[3]{\beta - x} - \alpha$

از کدام ناحیه عبور نمی‌کند؟

- (۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم

۵- $f(x) = x^3 - ax^2 + bx + 3$ است. اگر چندجمله‌ای $f(1-2x)$ بر $x-1$ بخش‌پذیر باشد و باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(2-x)$ بر $x-4$ برابر ۵ باشد، حاصل $b-a$ کدام است؟

- (۱) ۱۶ (۲) -۸ (۳) -۲ (۴) ۱۲

۶- f تابعی خطی است؛ به طوری که باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $g(x) = xf(x^2) + f(2x)$ بر چندجمله‌ای $x^2 - 3x + 2$ برابر $7x - 8$ است. باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $g(x)$ بر $x+1$ کدام است؟

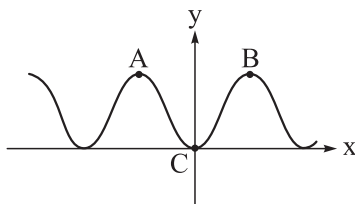
- (۱) -۳ (۲) ۳ (۳) -۲ (۴) ۲

۷- بیشترین مقدار تابع $f(x) = 3a + 1 - 2a \cos \frac{\pi}{a} x$ ، ۴ واحد از مقدار دوره تناوب آن بیشتر است. اگر $a > 0$ ، حداقل مقدار تابع کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) ۲ (۳) -۴ (۴) ۱

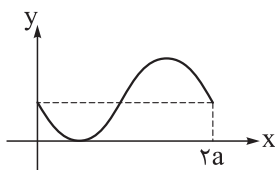
محل انجام محاسبات

۸- بخشی از نمودار تابع $f(x) = 2a - 4 \cos \frac{\pi}{a} x$ مطابق شکل است. مساحت مثلثی با رئوس A, B و C کدام است؟



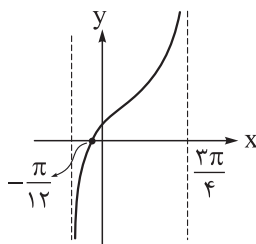
- (۱) ۶۴
(۲) ۸
(۳) ۱۶
(۴) ۳۲

۹- نمودار تابع $f(x) = a - 2 \sin b\pi x$ در یک دوره تناوب آن، مطابق شکل است. مقدار $a - b$ کدام است؟



- (۱) ۲
(۲) ۵/۲
(۳) ۳/۲
(۴) ۳

۱۰- بخشی از نمودار تابع $f(x) = 3 + a \tan(x + b)$ مطابق شکل است. حاصل $a \tan(\frac{\pi}{12} + b)$ کدام است؟



- (۱) -۱
(۲) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
(۳) ۱
(۴) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

۱۱- تابع $f(x) = 2 \sin^2(\frac{2\pi}{3}x)$ روی بازه $(\alpha, 3)$ اکیداً نزولی است. حداقل مقدار α کدام است؟

- (۱) $\frac{5}{4}$
(۲) $\frac{7}{4}$
(۳) ۲
(۴) $\frac{9}{4}$

۱۲- مجموع جوابهای معادله $\sin(x - \frac{\pi}{4}) + \sin 2x = 1$ در بازه $(0, 2\pi)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{9\pi}{4}$
(۲) $\frac{7\pi}{2}$
(۳) 4π
(۴) 3π

۱۳- انتهای کمان جوابهای معادله $\tan(\frac{\pi}{4} - x) - \tan 2x + 1 = 0$ روی دایره مثلثاتی، رئوس کدام چندضلعی محدب است؟

- (۱) مثلث قائم الزاویه
(۲) مستطیل
(۳) مثلث متساوی الاضلاع
(۴) چهارضلعی غیر مشخص

۱۴- اگر $\lim_{x \rightarrow a} \frac{a - 2x}{x^2 - 2ax + 4} = +\infty$ باشد، مقدار a کدام است؟

- (۱) ۲
(۲) -۲
(۳) -۱
(۴) ۱

محل انجام محاسبات

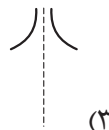
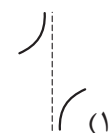
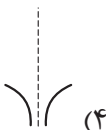
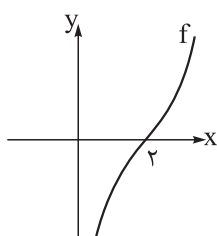
۱۵- اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - \frac{ax^2 + bx}{x+2}) = 2$ ، مقدار $a + b$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) صفر

۱۶- هرگاه $f(x) = \frac{2^{2x+2} + 3^{x+2}}{2^{2x} - 3^x}$ ، مقدار $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - f(-x))$ کدام است؟

- (۱) -۳ (۲) -۱ (۳) -۷ (۴) ۱۳

۱۷- نمودار تابع f مطابق شکل است. نمودار تابع $g(x) = \frac{(-1)^{[x]}}{f(2-x)}$ در مجاورت محور عرض‌ها به کدام صورت است؟
([] ، نماد جزء صحیح است.)



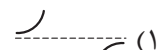
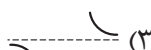
۱۸- مقدار $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \tan(x + \frac{3\pi}{4}) \tan 2x$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) ۱ (۴) -۱

۱۹- نمودار تابع $g = \frac{bx^2 + 7}{ax^2 + 8x + 4a}$ تنها دو خط مجانب، موازی محورهای مختصات دارد. اگر $A(2, 4)$ نقطه تلاقی این مجانب‌ها باشد، مقدار $a - b$ کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۱۰

۲۰- نمودار تابع $f(x) = 3 - \sqrt{\frac{4x-1}{x+2}}$ در کنار مجانب افقی خودش به کدام صورت است؟



محل انجام محاسبات

ریاضیات گسسته و آمار و احتمال: ریاضیات گسسته: صفحه‌های ۱ تا ۴۲

۲۱- چه تعداد از گزاره‌های زیر درست است؟

(الف) «اگر n اول باشد، $1 + 2^n$ اول است.» در بین اعداد طبیعی کم‌تر از ۶ دارای دو مثال نقض است.

(ب) میانگین پنج عدد صحیح متوالی همواره برابر با عدد وسطی می‌شود.

(پ) اگر α عددی گنگ و β عددی گویا باشد، عدد $(\beta^2 - 2)\alpha$ همواره، گنگ است.

(ت) میانگین حسابی عدد مثبت a و معکوشش همواره بزرگ‌تر یا مساوی ۱ است.

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۲۲- اگر $ab \mid c$ ، حاصل $([a, c^2], (b, 3c))$ کدام است؟

(۱) $3c^2$ (۲) $3 \mid c \mid 2$ (۳) $|b|$ (۴) c^2

۲۳- در تقسیم عدد طبیعی a بر b باقی‌مانده و خارج قسمت به ترتیب برابر ۱۱ و ۱۳ هستند. اگر a مضرب ۵ باشد، رقم

دهگان کوچک‌ترین مقدار a کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۸

۲۴- به ازای چند عدد طبیعی دورقمی n ، دو عدد $3n + 5$ و $2n - 1$ نسبت به هم اول هستند؟

(۱) ۷۹ (۲) ۸۲ (۳) ۸۱ (۴) ۸۰

۲۵- مجموع باقی‌مانده و نصف خارج قسمت تقسیم عدد طبیعی a بر ۱۷ برابر ۲۱ است. اگر باقی‌مانده تقسیم $a - 13$ بر

۶۶ برابر ۴۱ باشد، رقم دهگان کوچک‌ترین مقدار a کدام است؟

(۱) ۸ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۳

۲۶- چند عدد چهاررقمی مربع کامل مضرب ۷۵ وجود دارد؟ ($\sqrt{10} \approx 3.16$)

(۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۹ (۴) ۱۰

۲۷- باقی‌مانده تقسیم عدد 6^{11} بر 33 کدام است؟

(۱) ۳ (۲) ۶ (۳) ۱۵ (۴) ۲۷

۲۸- به ازای چند مقدار دورقمی n ، رابطهٔ همنهشتی $4^n \equiv 1$ به پیمانهٔ 31×15 برقرار است؟

(۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۸ (۴) ۹

محل انجام محاسبات

۲۹- عدد $a456b$ بر ۴۴ بخش پذیر است. اختلاف b و a کدام نمی تواند باشد؟

- | | |
|-------|---------|
| (۱) ۵ | (۲) ۳ |
| (۳) ۷ | (۴) صفر |

۳۰- ۳۰ ظرف ۱۵ لیتری و تعداد نامحدودی ظرف ۱۷ لیتری داریم. به چند طریق می توان ۸۰۰ لیتر بنزین را با این ظرف ها جابه جا کرد؟ (از هر ظرف با گنجایش کامل استفاده می شود.)

- | | | | |
|-------|-------|-------|---------|
| (۱) ۱ | (۲) ۲ | (۳) ۳ | (۴) هیچ |
|-------|-------|-------|---------|

۳۱- در گراف G از مرتبه ۶ داریم $N_G[a] = N_G[b] = N_G[c] = N_G[d] = \{e\}$ ، مجموع کم ترین و بیشترین مقدار اندازه گراف کدام است؟

- | | |
|--------|--------|
| (۱) ۱۱ | (۲) ۱۲ |
| (۳) ۱۵ | (۴) ۱۹ |

۳۲- حاصل ضرب درجه رأس های گرافی از مرتبه ۶ برابر ۴۰۰ است. تعداد رأس های درجه ۲ در این گراف، چند حالت مختلف ممکن است داشته باشد؟

- | | |
|---------|-------|
| (۱) صفر | (۲) ۱ |
| (۳) ۲ | (۴) ۳ |

۳۳- گراف مکمل گراف G با درجه رأس های ۳، ۳، ۳، ۵، ۵، ۵ چند زیرگراف ۳ یالی دارد؟

- | | | | |
|--------|-------|--------|-------|
| (۱) ۱۲ | (۲) ۸ | (۳) ۲۴ | (۴) ۱ |
|--------|-------|--------|-------|

۳۴- گراف منتظمی ۲۰ یال دارد. اگر این گراف حداقل تعداد رأس را داشته باشد، برای تبدیل آن به گراف کامل هم مرتبه اش، چند یال باید اضافه کنیم؟

- | | | | |
|-------|--------|--------|--------|
| (۱) ۸ | (۲) ۱۵ | (۳) ۱۶ | (۴) ۲۵ |
|-------|--------|--------|--------|

۳۵- در یک گراف مرتبه ۱۰ بین هر دو رأس یا مسیر وجود ندارد یا دقیقاً ۲ مسیر وجود دارد. این گراف به چند صورت قابل رسم است؟

- | | |
|-------|-------|
| (۱) ۳ | (۲) ۴ |
| (۳) ۵ | (۴) ۶ |

محل انجام محاسبات

هندسه: هندسه (۳): صفحه‌های ۹ تا ۵۰

 ۳۶- معادله دایره به مرکز $(-2, 1)$ و گذرنده از نقطه $(2, 1)$ کدام است؟

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y = 5 \quad (2) \quad x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0 \quad (1)$$

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y = 5 \quad (4) \quad x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0 \quad (3)$$

 ۳۷- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ، آن گاه درایه سطر اول و ستون دوم وارون ماتریس A کدام است؟

$$-\frac{5}{4} \quad (4) \quad \frac{5}{4} \quad (3) \quad -\frac{1}{4} \quad (2) \quad \frac{1}{4} \quad (1)$$

 ۳۸- اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ x & x \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 1 & y \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$ و بدانیم $AB + BA = 2I$ ، آن گاه حاصل $x + y$ کدام است؟

$$3 \quad (3) \quad 2 \quad (2) \quad 1 \quad (1) \quad 4 \quad (4) \text{ صفر}$$

 ۳۹- اگر A ماتریسی اسکالر باشد، به طوری که $A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ و $AB = \begin{bmatrix} 2 & 2-\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$ ، آن گاه مجموع درایه‌های BA کدام است؟

$$2 \pm \sqrt{2} \quad (1) \quad \pm 5\sqrt{2} \quad (2) \quad 5 \quad (3) \quad 4 \quad (4) \text{ صفر}$$

 ۴۰- اگر $A = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}$ ، آن گاه ماتریس $(AB)^{1401}$ با کدام ماتریس برابر است؟

$$I \quad (1) \quad AB \quad (2) \quad \bar{O} \quad (3) \quad BA \quad (4)$$

 ۴۱- اگر از دستگاه $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ ax + 2y = 6 \end{cases}$ جوابی برای (x, y) حاصل نشود، آن گاه دستگاه $\begin{cases} ax - y = 9 \\ 3x + 6y = 12 \end{cases}$ چند جواب برای (x, y) دارد؟

$$1 \quad (1) \quad 2 \quad (2) \quad 3 \quad (3) \quad 4 \quad (4) \text{ بی شمار}$$

 ۴۲- اگر A یک ماتریس وارون پذیر 2×2 باشد، به طوری که $||A| + A| = |A|$ ، آن گاه دترمینان ماتریس $\frac{1}{|A|}A$ کدام است؟

$$-1 \quad (2) \quad \frac{1}{2} \quad (3) \quad -\frac{1}{2} \quad (4) \quad 1 \quad (1)$$

 ۴۳- اگر $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ ، آن گاه دترمینان ماتریس $2(I - \frac{1}{2}A)$ کدام است؟

$$0/125 \quad (1) \quad 0/5 \quad (2) \quad 1 \quad (3) \quad 2 \quad (4)$$

محل انجام محاسبات

۴۴- ماتریس $A = \begin{bmatrix} y & 0 & 2 \\ x & -z & z \\ y & 2 & 0 \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. از درایه a_{11} ، دو واحد کم کرده و به درایه a_{22} ، سه واحد می‌افزاییم تا ماتریس B حاصل شود. کدام گزینه درست است؟

$$\begin{aligned} |A| &= |B| + 1 \quad (1) \\ |A| &= |B| - 1 \quad (2) \\ |A| &= -6|B| \quad (3) \\ |A| &= |B| \quad (4) \end{aligned}$$

۴۵- پاره خط $AB = 6$ را در نظر بگیرید. چند نقطه در صفحه وجود دارد که از حداقل یکی از دو نقطه A و B به فاصله ۶ و از خط گذرا بر A و B به فاصله $3\sqrt{3}$ باشد؟

$$\begin{aligned} 8 \quad (1) \quad & 4 \quad (2) \quad & 6 \quad (3) \quad & 2 \quad (4) \end{aligned}$$

۴۶- دایره‌ای به مرکز $(4, 0)$ بر نیمساز ربع اول مماس است. کدام نقطه بر این دایره واقع است؟

$$\begin{aligned} (4, 1) \quad (1) \quad & (2, 2) \quad (2) \quad & (1, 4\sqrt{2}) \quad (3) \quad & (2, 4\sqrt{2}) \quad (4) \end{aligned}$$

۴۷- دایره C از دو نقطه $(-1, 4)$ و $(2, 3)$ می‌گذرد. اگر دایره‌ای به معادله $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$ از مرکز دایره C بگذرد، آن گاه عرض نقطه مرکز دایره C کدام است؟

$$\begin{aligned} 2/2 \quad (1) \quad & 2/4 \quad (2) \quad & 2/6 \quad (3) \quad & 2/8 \quad (4) \end{aligned}$$

۴۸- معادله کوچک‌ترین دایره‌ای که بر هر دو دایره به معادله‌های $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$ و $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 6 = 0$ مماس خارج باشد، کدام است؟

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + x - 2y - 1 = 0 \quad (1) \quad & x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0 \quad (2) \\ x^2 + y^2 + x - 2y + 1 = 0 \quad (3) \quad & x^2 + y^2 - 2y = 0 \quad (4) \end{aligned}$$

۴۹- در یک بیضی، طول کوچک‌ترین قطر، چهار برابر فاصله کانون تانزدیک‌ترین رأس است. خروج از مرکز این بیضی کدام است؟

$$\begin{aligned} 0/4 \quad (1) \quad & 0/6 \quad (2) \quad & 0/8 \quad (3) \quad & 0/5 \quad (4) \end{aligned}$$

۵۰- فاصله بین دو نقطه F و F' که کانون‌های یک بیضی هستند $2\sqrt{7}$ است، اگر نقطه M روی این بیضی طوری واقع باشد که $MF' = 3MF$ آن گاه $\angle FMF' = 60^\circ$. طول بلندترین قطر این بیضی کدام است؟

$$\begin{aligned} 8 \quad (1) \quad & 6 \quad (2) \quad & 2\sqrt{10} \quad (3) \quad & 4 \quad (4) \end{aligned}$$

محل انجام محاسبات



ویژه
کنکوری‌های
۱۴۰۲

آزمون
چهارم
حضور

دفترچه شماره ۲



سال تحصیلی
۱۴۰۱-۱۴۰۲

آزمون آزمایشی خلیسبز

گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی

نام و نام خانوادگی: شماره داوطلبی:

تعداد سؤال: ۷۰ مدت پاسخ‌گویی: ۹۰ دقیقه

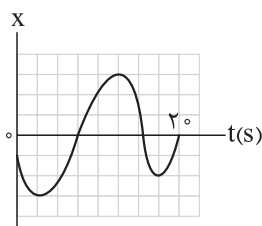
عنوان مواد امتحانی آزمون. تعداد. شماره سؤالات و مدت پاسخ‌گویی

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخ‌گویی
۱	فیزیک	۴۰	۵۱	۹۰	۵۵ دقیقه
۲	شیمی	۳۰	۹۱	۱۲۰	۳۵ دقیقه

Azmoon.kheilisabz.com

داوطلب گرامی، در این آزمون، در درس فیزیک، زوج درس نداریم و تمام سؤال‌ها از مباحث نیم‌سال اول پایه دوازدهم طرح شده است؛ بنابراین پاسخ‌گویی به تمام سوالات این درس اجباری است.

فیزیک دوازدهم: فیزیک (۳): صفحه‌های ۱ تا ۷۷

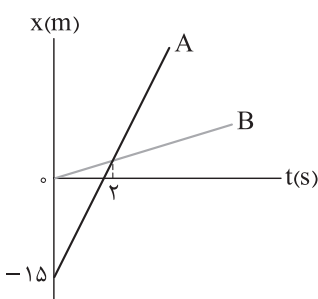


۵۱- نمودار مکان - زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند به شکل

مقابل است. تندی متوسط متحرک در کدام یک از بازه‌های زمانی زیر بیشتر است؟

(۱) صفر تا $12/5$ s (۲) صفر تا $17/5$ s

(۳) $2/5$ s تا 20 s (۴) $12/5$ s تا 20 s

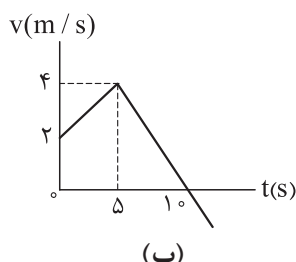
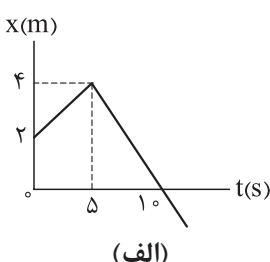


۵۲- نمودار مکان - زمان دو متحرک A و B که در راستای محور x حرکت می‌کنند،

به شکل مقابل است. فاصله این دو متحرک در لحظه $t = 5$ s برابر چند متر است؟

(۱) ۱۰ (۲) ۲۰

(۳) $22/5$ (۴) $37/5$



۵۳- دو متحرک A و B در راستای محور x در حال حرکت

هستند. نمودار مکان - زمان متحرک A به شکل (الف)

و نمودار سرعت - زمان متحرک B به شکل (ب) است.

در 10 ثانیه نخست، اندازه شتاب متوسط متحرک A

چند برابر اندازه شتاب متوسط متحرک B است؟

(۱) ۵ (۲) $1/5$ (۳) $3/5$ (۴) $5/3$

۵۴- متحرکی که با شتاب ثابت روی محور x حرکت می‌کند، در مدت 5 s سرعت خود را از $\vec{i} (-4 \text{ m/s})$ به $\vec{i} (6 \text{ m/s})$

می‌رساند. مسافت طی شده توسط متحرک در این مدت چند متر است؟

(۱) ۵ (۲) ۹ (۳) ۱۳ (۴) ۲۵

۵۵- متحرکی در راستای محور x با شتاب ثابت $\vec{i} (-2 \text{ m/s}^2)$ در حال حرکت است. اگر در بازه زمانی صفر تا T ،

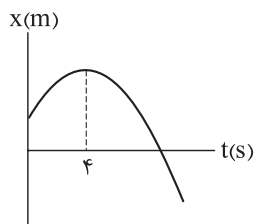
مسافت طی شده توسط متحرک 250 m و جابه‌جایی آن برابر $\vec{i} (200 \text{ m})$ باشد، اندازه سرعت متوسط متحرک در بازه

زمانی صفر تا $T/4$ چند متر بر ثانیه است؟

(۱) ۱۰ (۲) ۱۵ (۳) ۲۰ (۴) ۳۰

محل انجام محاسبات

۵۶- نمودار مکان - زمان متحرکی که با شتاب ثابت در راستای محور x حرکت می کند، به شکل زیر است. مسافت طی شده توسط متحرک در ۲ ثانیه سوم چند برابر اندازه جابه جایی آن در ۳ ثانیه دوم است؟

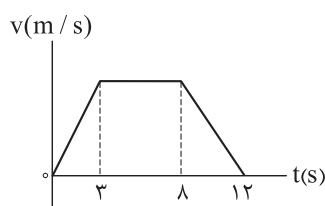


$$\frac{3}{4} \quad (2)$$

$$\frac{4}{3} \quad (1)$$

$$\frac{5}{4} \quad (4)$$

$$\frac{4}{5} \quad (3)$$



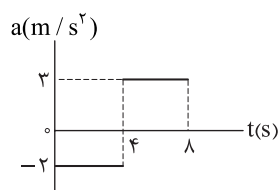
۵۷- نمودار سرعت - زمان متحرکی که روی محور x حرکت می کند، به شکل مقابل است. اگر تندی متوسط متحرک در بازه زمانی $t_1 = 2s$ تا $t_2 = 10s$ برابر 11 m/s باشد، شتاب متوسط متحرک در این بازه زمانی چند متر بر مربع ثانیه است؟

$$-0.5 \text{ i} \quad (2)$$

$$0.5 \text{ i} \quad (1)$$

$$-0.25 \text{ i} \quad (4)$$

$$0.25 \text{ i} \quad (3)$$



۵۸- نمودار شتاب - زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می کند، به شکل روبه رو است. اگر در لحظه $t = 8s$ سرعت متحرک برابر $(3 \text{ m/s}) \text{ i}$ باشد، تندی متوسط آن در بازه زمانی ای که به صورت کندشونده حرکت می کند، چند متر بر ثانیه است؟

$$5 \quad (2)$$

$$4/5 \quad (1)$$

$$2/5 \quad (4)$$

$$1/5 \quad (3)$$

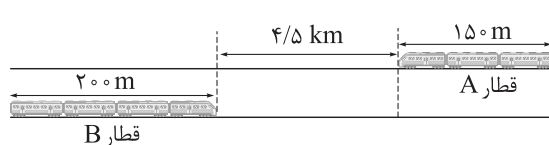
۵۹- خودرویی با تندی ثابت 90 km/h در مسیر مستقیمی در حال حرکت است. راننده خودرو، مانع ساکنی را در فاصله 80 m تری از خود می بیند و ترمز می کند. اگر زمان واکنش راننده $0.8s$ باشد، خودرو با سرعت 18 km/h به مانع برخورد می کند. برای این که خودرو به مانع برخورد نکند، راننده باید زمان واکنش خود را حداقل چند ثانیه کاهش دهد؟ (اندازه شتاب خودرو در حین ترمز کردن، در دو حالت ثابت و یکسان است.)

$$0.7 \quad (4)$$

$$0.6 \quad (3)$$

$$0.2 \quad (2)$$

$$0.1 \quad (1)$$



۶۰- قطار A به طول 150 m با تندی ثابت 30 m/s روی یک ریل مستقیم در حال حرکت است. قطار B به طول 200 m روی ریل مستقیم مجاور ساکن است. مطابق شکل روبه رو، در

لحظه ای که فاصله ابتدای دو قطار به $4/5 \text{ km}$ می رسد، قطار B با شتابی به بزرگی 2 m/s^2 به سمت قطار A شروع به حرکت کرده، تندی خود را به 40 m/s می رساند و با همان سرعت به حرکت خود ادامه می دهد. چند ثانیه پس از شروع حرکت قطار B، دو قطار به طور کامل از کنار هم عبور می کنند؟ (جهت حرکت قطارها مخالف یکدیگر است.)

$$75 \quad (4)$$

$$70 \quad (3)$$

$$55 \quad (2)$$

$$50 \quad (1)$$

محل انجام محاسبات

۶۱- در شرایط خلأ، گلوله‌ای را از بالای برجی از حال سکون رها می‌کنیم. اگر در نیم‌ثانیه آخر سقوط، انرژی جنبشی گلوله ۴۴ درصد افزایش یابد، ارتفاع برج چند متر است؟ ($g = 9.8 \text{ m/s}^2$)

- (۱) ۳۹/۲ (۲) ۴۴/۱ (۳) ۷۸/۴ (۴) ۸۸/۲

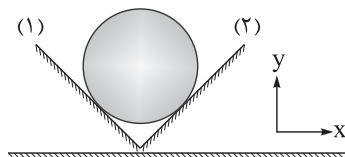
۶۲- در شرایط خلأ، دو گلوله به فاصله زمانی t از یک نقطه رها می‌شوند. اگر $2/5 \text{ s}$ پس از رها شدن گلوله دوم، فاصله دو گلوله به 70 m برسد، t چند ثانیه است؟ ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

- (۱) ۱/۵ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴/۵

۶۳- به جسمی، تنها دو نیروی عمود بر هم به اندازه‌های F_1 و F_2 وارد می‌شود. با حذف نیروی F_1 ، اندازه شتاب جسم 20% درصد کاهش می‌یابد. نسبت $\frac{F_1}{F_2}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{5}{4}$ (۲) $\frac{4}{5}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) $\frac{3}{4}$

۶۴- کره همگنی به جرم 25 kg مطابق شکل زیر درون یک ناوه بدون اصطکاک قرار دارد. اگر نیرویی که کره به دیواره (۱) وارد می‌کند برابر $\vec{F} = (-120\text{N})\vec{i} + (-160\text{N})\vec{j}$ باشد، اندازه نیرویی که کره به دیواره (۲) وارد می‌کند، چند نیوتون است؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$)



- (۱) ۹۰ (۲) ۱۶۰ (۳) ۲۰۰ (۴) ۱۵۰

۶۵- ماهواره‌ای در فاصله h از سطح زمین قرار دارد. اگر فاصله ماهواره از سطح زمین 3 برابر شود، نیروی وزن آن 75% درصد کاهش می‌یابد. h چند برابر شعاع زمین است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ۴

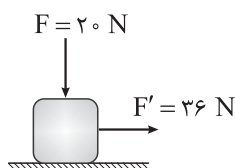
۶۶- گلوله‌ای به جرم 2 kg را در راستای قائم به سمت بالا پرتاب می‌کنیم. اگر اندازه شتاب گلوله در یک ارتفاع معین، در مسیر رفت و مسیر برگشت به ترتیب 16 m/s^2 و a باشد، کدام مورد درباره a درست است؟ ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

- (۱) $a < 4 \text{ m/s}^2$ (۲) $a = 4 \text{ m/s}^2$ (۳) $4 \text{ m/s}^2 < a < 10 \text{ m/s}^2$ (۴) $a > 10 \text{ m/s}^2$

۶۷- جسمی به جرم 4 kg توسط یک فنر با ثابت 400 N/m از سقف یک آسانسور آویزان است. وقتی آسانسور با شتابی به بزرگی 2 m/s^2 به صورت تندشونده به سمت پایین حرکت می‌کند، طول فنر به l_1 و وقتی آسانسور با شتابی به بزرگی 3 m/s^2 به صورت کندشونده به سمت پایین حرکت می‌کند، طول فنر به l_2 می‌رسد. $l_1 - l_2$ بر حسب سانتی‌متر کدام است؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$)

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۵ (۴) -۵

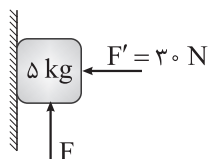
محل انجام محاسبات



۶۸- در شکل روبه‌رو، جسمی به جرم 3 kg روی یک سطح افقی با ضریب اصطکاک جنبشی ثابت در حال حرکت است. اگر اندازه نیروی F نصف شود، اندازه نیرویی که سطح به جسم وارد می‌کند چند برابر شده و زاویه بین این نیرو و سطح افقی چگونه تغییر می‌کند؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$)

- (۱) $\frac{2}{5}$ ، کاهش می‌یابد. (۲) $\frac{2}{5}$ ، تغییر نمی‌کند. (۳) $\frac{4}{5}$ ، کاهش می‌یابد. (۴) $\frac{4}{5}$ ، تغییر نمی‌کند.

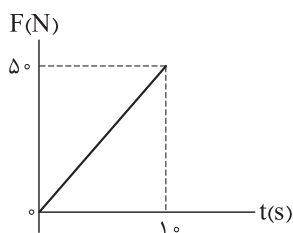
۶۹- در شکل زیر، جسم ساکن و ضریب اصطکاک ایستایی بین جسم و دیواره برابر 0.8 است. اندازه نیروی F بر حسب نیوتون با چه تعداد از مقادیر زیر نمی‌تواند برابر باشد؟



- (الف) ۲۴ (ب) ۳۱ (پ) ۷۶ (ت) ۸۰
(۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

۷۰- جسمی به جرم 20 kg با سرعت ثابت $\vec{v} = (5 \text{ m/s})\vec{i}$ در حال حرکت است. نیروی خالص و ثابت $\vec{F}_{\text{net}} = (-4 \text{ N})\vec{i}$ به مدت چند ثانیه بر جسم اثر کند تا اندازه تکانه آن دو برابر شود؟

- (۱) ۱۰۰ (۲) ۲۵ (۳) ۵۰ (۴) ۷۵



۷۱- جسمی به جرم 5 kg روی یک سطح افقی به ضریب اصطکاک ایستایی 0.8 و ضریب اصطکاک جنبشی 0.6 ساکن است. از مبدأ زمان نیروی افقی $\vec{F}$ به جسم وارد می‌شود. اگر نمودار اندازه این نیرو بر حسب زمان به شکل مقابل باشد، در لحظه $t = 10 \text{ s}$ اندازه تکانه جسم در SI چند واحد است؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$)

- (۱) ۲۵۰ (۲) ۹۰ (۳) ۳۰ (۴) ۱۰۰

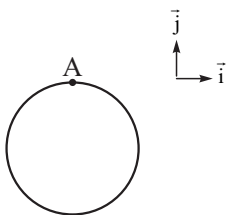
۷۲- چتربازی در مبدأ زمان از یک بلندی رها شده و در لحظه t_1 به تندی حدی خود می‌رسد، سپس در لحظه t_2 چتر را باز کرده و در لحظه t_3 به تندی حدی در وضعیتی که چترش باز است می‌رسد. چه تعداد از عبارتهای زیر درباره این چترباز درست است؟

- (الف) در بازه زمانی t_1 تا t_3 اندازه نیروی مقاومت هوای وارد بر چترباز در حال افزایش است.
(ب) اندازه نیروی مقاومت هوای وارد بر چترباز بعد از لحظه t_3 با اندازه این نیرو در بازه زمانی t_1 تا t_2 برابر است.
(پ) شتاب چترباز در بازه زمانی صفر تا t_1 رو به پایین و اندازه آن در حال کاهش است.
(ت) حرکت چترباز در بازه زمانی صفر تا t_1 تندشونده و در بازه زمانی t_2 تا t_3 کندشونده است.

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

محل انجام محاسبات

۷۳- مطابق شکل زیر، ذره‌ای روی مسیری دایره‌ای شکل و در جهت نشان داده شده با آهنگ 1200 rpm می‌چرخد. اگر بردار سرعت ذره در نقطه A ، $\vec{v} = (4\pi \text{ m/s})\vec{i}$ باشد، بردار شتاب آن در این نقطه کدام است؟ ($\pi^2 = 10$)

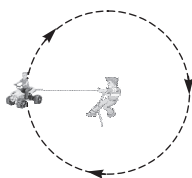


- (۱) $(400 \text{ m/s}^2)\vec{i}$
 (۲) $(-400 \text{ m/s}^2)\vec{j}$
 (۳) $(1600 \text{ m/s}^2)\vec{i}$
 (۴) $(-1600 \text{ m/s}^2)\vec{j}$

۷۴- اگر جرم ماهواره A ، ۴ برابر جرم ماهواره B و دوره تناوب ماهواره B ، ۸ برابر دوره تناوب ماهواره A باشد، اندازه تکانه ماهواره A چند برابر اندازه تکانه ماهواره B است؟ (ماهواره‌های A و B در مدارهای ثابتی در حال چرخیدن به دور کره زمین‌اند.)

- (۱) ۸
 (۲) $\frac{1}{8}$
 (۳) ۲
 (۴) $\frac{1}{2}$

۷۵- در شکل زیر، شخص یک چهارچرخه را توسط طنابی به طول 2 m روی سطح افقی بدون اصطکاک، در یک مسیر دایره‌ای به طور یکنواخت می‌چرخاند. اگر نیروی کشش طناب 25 N باشد، انرژی جنبشی چهارچرخه چند ژول است؟



- (۱) $12/5$
 (۲) ۲۵
 (۳) ۵۰
 (۴) ۱۰۰

۷۶- نوسانگر هماهنگ ساده‌ای روی محور x و حول مبدأ در حال نوسان است. کدام یک از عبارت‌های زیر درباره این نوسانگر درست است؟

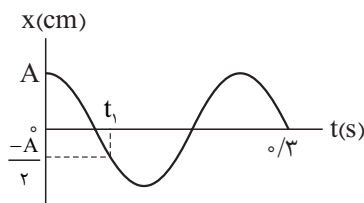
- (الف) در لحظه‌ای که جهت نیروی خالص وارد بر نوسانگر تغییر می‌کند، اندازه تکانه آن بیشینه است.
 (ب) در بازه زمانی‌ای که انرژی پتانسیل کشسانی نوسانگر در حال افزایش است، اندازه شتاب آن کاهش می‌یابد.
 (پ) هنگامی که نوسانگر در حال دور شدن از نقطه تعادل است، انرژی جنبشی آن کاهش می‌یابد.
 (ت) در لحظه‌ای که اندازه تکانه نوسانگر بیشینه است، جهت حرکت نوسانگر تغییر می‌کند.

- (۱) الف و ب
 (۲) الف و پ
 (۳) ب و ت
 (۴) پ و ت

۷۷- در مدت زمان معینی، آونگ‌های A و B به ترتیب ۳۶ و ۶۰ نوسان کامل انجام می‌دهند. به ترتیب از راست به چپ، بسامد و طول آونگ A چند برابر بسامد و طول آونگ B است؟

- (۱) $\frac{5}{3}, \frac{3}{5}$
 (۲) $\frac{3}{5}, \frac{5}{3}$
 (۳) $\frac{25}{9}, \frac{3}{5}$
 (۴) $\frac{9}{25}, \frac{5}{3}$

محل انجام محاسبات



۷۸- نمودار مکان - زمان نوسانگر هماهنگ ساده‌ای به شکل مقابل است.

لحظه t_1 بر حسب ثانیه کدام است؟

(۲) 0.08

(۱) 0.04

(۴) 0.12

(۳) 0.06

۷۹- نوسانگر هماهنگ ساده‌ای روی محور x و حول مبدأ (نقطه تعادل) با دامنه A نوسان می‌کند. نوسانگر در لحظه‌ای در خلاف

جهت محور x از مکان $x_1 = \frac{A}{4}$ عبور کرده و بعد از مدت Δt در جهت محور x از مکان $x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{4}A$ می‌گذرد. اگر کمینه Δt

برابر $1/5$ s باشد، حداقل چند ثانیه طول می‌کشد تا نوسانگر از مبدأ به نقطه بازگشت برسد؟

(۲) ۳

(۱) $1/5$

(۴) $1/8$

(۳) 0.9

۸۰- نوسانگری روی محور x و حول مبدأ با دامنه 5 cm حرکت هماهنگ ساده انجام می‌دهد. این نوسانگر در هر دقیقه

30 بار پاره خط نوسان را طی می‌کند. در لحظه t_1 نوسانگر از مکان $x_1 = +3$ cm عبور کرده و انرژی پتانسیل کشسانی

آن در حال افزایش است. در بازه زمانی t_1 تا $t_2 = t_1 + 2$ (بر حسب ثانیه) به ترتیب بزرگی سرعت متوسط و تندی

متوسط نوسانگر چند سانتی‌متر بر ثانیه هستند؟

(۴) ۳، ۱۰

(۳) ۵، ۳

(۲) صفر، ۱۰

(۱) صفر، ۵

۸۱- دامنه نوسانگر هماهنگ ساده‌ای برابر A است. نوسانگر در لحظه t_1 به صورت کندشونده از مکان $x_1 = \frac{A}{4}$ و پس از

یک بار عبور از مبدأ، در لحظه t_2 به صورت تندشونده از مکان $x_2 = -\frac{A}{4}$ عبور می‌کند. تندی متوسط نوسانگر در بازه

زمانی t_1 تا t_2 چند برابر تندی بیشینه آن در این مدت است؟ (نوسانگر بر روی محور x و حول مبدأ، نوسان می‌کند.)

(۴) $\frac{3}{\pi}$

(۳) $\frac{2}{\pi}$

(۲) $\frac{9}{4\pi}$

(۱) $\frac{9}{5\pi}$

۸۲- وزنه‌ای به جرم 2 kg به فنری با ثابت 180 N/m متصل است و روی سطح افقی بدون اصطکاکی قرار دارد. اگر فنر

را 8 cm کشیده و رها کنیم وزنه به نوسان درمی‌آید. کم‌ترین مسافتی که این وزنه در یک بازه زمانی دلخواه $\frac{1}{4}$ ثانیه‌ای

طی می‌کند، چند سانتی‌متر است؟ ($\sqrt{2} \approx 1/4$ ، $\sqrt{3} \approx 1/7$ ، $\pi^2 = 10$)

(۲) $2/4$

(۱) $4/8$

(۴) ۸

(۳) ۴

محل انجام محاسبات

۸۳- در شکل زیر، نوسانگر ساده‌ای روی محور x حول نقطه O حرکت می‌کند. در جابه‌جایی نوسانگر از نقطه M تا نقطه N ، انرژی پتانسیل نوسانگر ۸۰ درصد کاهش و انرژی جنبشی آن ۴۰ درصد افزایش می‌یابد. تندی نوسانگر در نقطه M چند برابر تندی پیشینه آن است؟

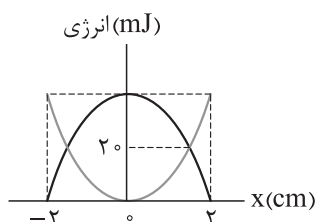


$$\sqrt{\frac{2}{3}} \quad (۴)$$

$$\frac{\pi}{3} \quad (۳)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (۲)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \quad (۱)$$



۸۴- نمودار تغییرات انرژی نوسانگر ساده‌ای بر حسب مکان به شکل مقابل است. اگر در لحظه‌ای که انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل نوسانگر برابر هستند، تندی نوسانگر $4\pi\sqrt{2} \text{ cm/s}$ باشد، حداقل زمان لازم برای آن که انرژی جنبشی نوسانگر از صفر به ۴۰ mJ برسد، چند ثانیه است؟

$$۱ \quad (۴)$$

$$\frac{1}{2} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{4} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{8} \quad (۱)$$

۸۵- طول تعدادی آونگ ساده که از یک میله افقی آویزان هستند، عبارت‌اند از: ۴ m ، ۸ m ، ۰ ، $۱/۲ \text{ m}$ ، $۱/۶ \text{ m}$ و $۲/۴ \text{ m}$. اگر میله با بسامد زاویه‌ای در گستره ۲ rad/s تا ۴ rad/s نوسان‌هایی افقی انجام دهد، برای چه تعداد از آونگ‌ها تشدید رخ می‌دهد؟ ($g = ۱۰ \text{ N/kg}$)

$$۱ \quad (۴)$$

$$۲ \quad (۳)$$

$$۳ \quad (۲)$$

$$۴ \quad (۱)$$

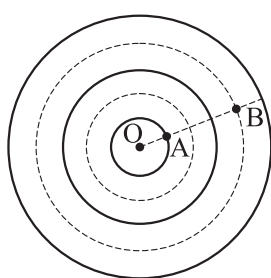
۸۶- جرم دو طناب A و B برابر و طول طناب A ، ۲۸ درصد کم‌تر از طول طناب B است. اگر نیروی کشش طناب A ، ۲ برابر نیروی کشش طناب B باشد، مدتی که طول می‌کشد تا موج عرضی طول طناب A را طی کند، چند برابر مدتی است که موج عرضی طول طناب B را طی می‌کند؟

$$\frac{3}{5} \quad (۴)$$

$$\frac{5}{3} \quad (۳)$$

$$\frac{3}{10} \quad (۲)$$

$$\frac{10}{3} \quad (۱)$$



۸۷- در یک تشت موج، یک گوی با حرکت هماهنگ ساده در هر دقیقه ۸۰ نوسان عمود بر سطح آب انجام می‌دهد. شکل مقابل تصویری از امواج دایره‌ای تشکیل شده در سطح آب این تشت موج را در یک لحظه نشان می‌دهد. اگر تندی انتشار این موج ۴ m/s باشد، فاصله دو نقطه A و B چند سانتی‌متر است؟ (دایره‌های ممتد جبهه‌های موج برآمده و دایره‌های خط چین جبهه‌های موج فرورفته سطح آب را نشان می‌دهد.)

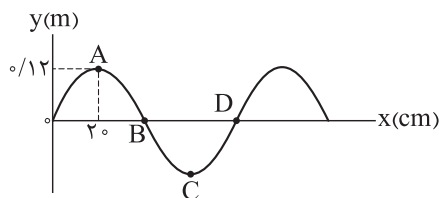
$$۹۰ \quad (۴)$$

$$۶۰ \quad (۳)$$

$$۴۵ \quad (۲)$$

$$۲۲/۵ \quad (۱)$$

محل انجام محاسبات



۸۸- شکل روبه‌رو تصویر لحظه‌ای موج سینوسی را که با سرعت $\vec{v} = (2 \text{ m/s})\vec{i}$ در طنابی منتشر شده است، در مبدأ زمان نشان می‌دهد. کدام یک از عبارتهای زیر درباره نقاط A ، B ، C و D از طناب درست است؟

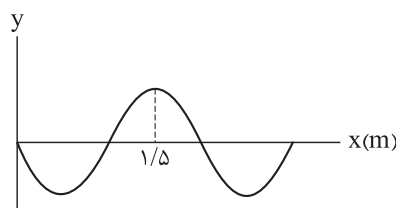
(الف) سرعت متوسط ذره A در ثانیه اول برابر $(0.12 \text{ m/s})\vec{j}$ است.

(ب) شتاب متوسط ذره B در ثانیه اول برابر $(-0.6\pi \text{ m/s}^2)\vec{j}$ است.

(پ) تندی متوسط ذره C در نیم‌ثانیه اول برابر $1/2 \text{ m/s}$ است.

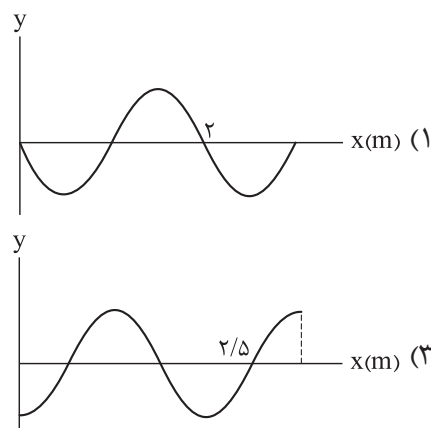
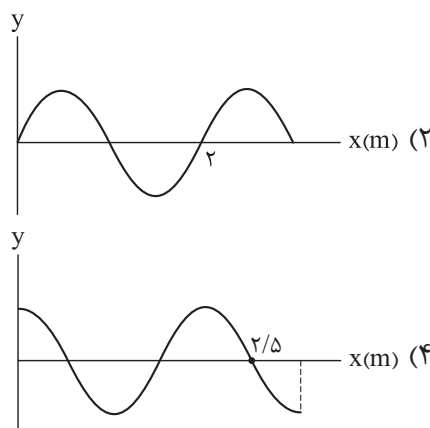
(ت) در $1/5$ ثانیه اول، حرکت ذره D مجموعاً به مدت 0.7 s تندشونده است.

(۱) الف و ب (۲) الف و پ (۳) ب و ت (۴) پ و ت



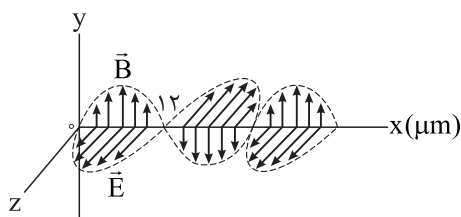
۸۹- شکل روبه‌رو تصویر لحظه‌ای موج سینوسی را در لحظه t_1 نشان می‌دهد. اگر

سرعت انتشار موج $\vec{i} (-2/5 \text{ m/s})$ باشد، تصویر موج در لحظه $t_2 = t_1 + 0.6 \text{ s}$ کدام شکل است؟



۹۰- تصویر یک موج الکترومغناطیسی که در خلأ منتشر می‌شود در لحظه‌ای معین به شکل زیر است. بسامد این موج

چند هرتز و جهت انتشار آن کدام است؟ (تندی انتشار موج الکترومغناطیسی در خلأ $3 \times 10^8 \text{ m/s}$ است.)



(۱) $1/25 \times 10^{13}$ ، در جهت محور X

(۲) $1/25 \times 10^{13}$ ، در خلاف جهت محور X

(۳) $2/5 \times 10^{13}$ ، در جهت محور X

(۴) $2/5 \times 10^{13}$ ، در خلاف جهت محور X

محل انجام محاسبات



آزمون وی آی پی

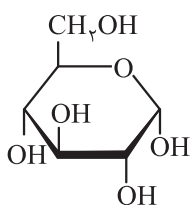


SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

داوطلب گرامی، در این آزمون، در درس شیمی، زوج درس نداریم و تمام سؤال‌ها از مباحث نیم‌سال اول پایه دوازدهم طرح شده است؛ بنابراین پاسخ‌گویی به تمام سوالات این درس اجباری است.

شیمی دوازدهم: شیمی (۳): صفحه‌های ۱ تا ۶۴

۹۱- عسل حاوی قندی به نام گلوکز است. با توجه به ساختار این ترکیب، کدام مطلب درباره آن نادرست است؟



(O = ۱۶, N = ۱۴, C = ۱۲, H = ۱: g.mol⁻¹)

(۱) شمار گروه‌های هیدروکسیل در آن، ۲/۵ برابر شمار این گروه‌ها در ساختار اتیلن گلیکول است.

(۲) همانند اتانول، توانایی تشکیل پیوند هیدروژنی با مولکول‌های آب را دارد.

(۳) جرم مولی آن، سه برابر جرم مولی اوره است.

(۴) شمار پیوندهای اشتراکی در آن با شمار پیوندهای اشتراکی در بنزین برابر است.

۹۲- اگر جرم مولی یک صابون مایع حاوی اتم فلزی و بازنجیر هیدروکربنی سیر شده، برابر ۳۲۲ گرم بر مول باشد، مجموع عدد اکسایش

اتم‌های کربن در اسید چرب سازنده این صابون کدام است؟ (K = ۳۹, Na = ۲۳, O = ۱۶, C = ۱۲, H = ۱: g.mol⁻¹)

(۱) -۳۵ (۲) -۳۳

(۳) -۳۲ (۴) -۳۰

۹۳- چند مورد از مطالب زیر، درباره سوسپانسیون‌ها درست است؟

• همانند کلوئیدها، ناپایدارند و با گذشت زمان، ذرات سازنده آن‌ها ته‌نشین می‌شوند.

• آب گل‌آلود و سس مایونز، نمونه‌هایی از این مخلوط‌ها هستند.

• برخلاف محلول‌ها، مسیر عبور نور از میان آن‌ها قابل دیدن است.

• رفتار آن‌ها را می‌توان رفتاری بین محلول‌ها و کلوئیدها در نظر گرفت.

(۱) یک (۲) دو (۳) سه (۴) چهار

۹۴- درصد جرمی اکسیژن در نوعی صابون جامد با زنجیر هیدروکربنی سیر شده برابر ۱۲/۸ است. اگر ۱۸ گرم از این

صابون به ۲ لیتر آب سخت (d = ۱ g.mL⁻¹) که غلظت یون‌های منیزیم و کلسیم در آن بر حسب ppm با هم برابر است،

اضافه شود، تنها ۲۰ درصد از صابون خاصیت پاک‌کنندگی خود را حفظ می‌کند. غلظت یون کلسیم در این نمونه آب،

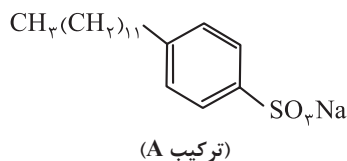
چند ppm است؟ (Ca = ۴۰, Mg = ۲۴, Na = ۲۳, O = ۱۶, C = ۱۲, H = ۱: g.mol⁻¹)

(معادله موازنه شود.) (RCOONa(aq) + X²⁺(aq) → (RCOO)₂X(s) + Na⁺(aq) (X : Ca, Mg)

(۱) ۶۲۱ (۲) ۲۶۱

(۳) ۶۱۲ (۴) ۲۱۶

محل انجام محاسبات



۹۵- با توجه به ساختار پاک کننده داده شده (ترکیب A)، کدام مقایسه درست است؟

- (۱) شمار جفت الکترون های ناپیوندی: گوگرد تری اکسید = ترکیب A
- (۲) نسبت شمار اتم های هیدروژن به کربن: ترکیب A > وازلین
- (۳) عدد اکسایش گوگرد: هیدروژن سولفید < ترکیب A
- (۴) خاصیت خوردگی: ترکیب A < سدیم هیدروکسید

۹۶- کدام مطلب درست است؟

- (۱) pH محلول هایی به حجم یکسان از لیتیم اکسید و کلسیم اکسید که از انحلال مول های برابری از این دو ماده در آب به دست آمده، با هم برابر است.
- (۲) در مقایسه دو محلول، محلولی اسیدی تر است که جرم یون هیدرونیوم در آن بیشتر باشد.
- (۳) با انحلال ۵ / ۰ مول آهک همانند انحلال ۵ / ۰ مول دی نیتروژن پنتا اکسید در آب، ۲ یون تولید می شود.
- (۴) با انحلال گاز گوگرد تری اکسید همانند انحلال کربن دی اکسید در آب، یک اسید قوی حاصل می شود.

۹۷- با توجه به نمودارهای داده شده که غلظت نسبی گونه ها در محلول دو اسید را پیش و پس از یونش نشان می دهند،

کدام موارد از مطالب زیر درست است؟



- (الف) در دمای یکسان، ثابت یونش اسید HA از سولفوریک اسید کم تر و از هیدروبرمیک اسید بیشتر است.
- (ب) در دما و غلظت یکسان، رسانایی الکتریکی محلول هر دو اسید از رسانایی الکتریکی محلول شکر در آب بیشتر است.
- (پ) در دمای اتاق، تفاوت pH محلول های ۰ / ۱ مولار HA و ۰ / ۱ مولار سدیم هیدروکسید، کم تر از ۱۲ واحد است.
- (ت) اگر حجم و غلظت دو محلول برابر باشد، با افزودن مقدار یکسانی آب خالص به آنها، pH محلول ها به یک میزان افزایش می یابد.

- (۱) الف - ت (۲) ب - پ (۳) الف - پ (۴) ب - ت

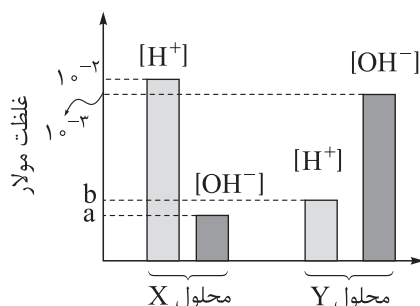
۹۸- اگر در محلول ۰ / ۱ مولار اسید ضعیف HA، نسبت شمار مولکول های یونیده نشده HA به شمار یون های حاصل از

یونش برابر با ۱۹ / ۵ باشد، درصد یونش اسید در محلول و ثابت یونش آن به ترتیب کدام است؟

- (۱) ۲ / ۵ - ۶ / ۲۵ × ۱۰^{-۵}
- (۲) ۲ / ۵ - ۲ / ۵ × ۱۰^{-۴}
- (۳) ۵ - ۶ / ۲۵ × ۱۰^{-۵}
- (۴) ۲ / ۵ - ۲ / ۵ × ۱۰^{-۴}

محل انجام محاسبات

۹۹- با توجه به نمودار داده شده که غلظت یون های هیدرونیوم و هیدروکسید را در دو محلول آبی در دمای 25°C



نشان می دهد، چند مورد از مطالب زیر درست است؟

- از نظر خاصیت اسیدی و بازی، آب گازدار مانند محلول Y است.
- در محلول X، رابطه $\text{pH} - \log a = 14$ برقرار است.
- محلول X می تواند محلول ۰/۰۱ مولار سولفوریک اسید باشد.
- مجموع pH دو محلول، دو برابر pH آب خالص است.

- (۱) یک (۲) سه (۳) چهار (۴) دو

۱۰۰- ۲۰۰ میلی لیتر محلول حاوی دو اسید HNO_3 و HBr موجود است. اگر غلظت مولی دو اسید در محلول یکسان و برابر ۰/۱ مولار باشد، با افزودن چند مول HNO_3 به محلول، pH نسبت به حالت آغازی ۰/۴ واحد تغییر می کند؟ (از تغییر حجم محلول در اثر اضافه شدن HNO_3 صرف نظر کنید.)

- (۱) ۰/۰۳ (۲) ۰/۰۴ (۳) ۰/۰۶ (۴) ۰/۰۸

۱۰۱- اگر pH محلول ۰/۰۰۱ مولار اسید قوی HX با pH محلول ۰/۰۲ مولار اسید ضعیف HA برابر باشد، ثابت یونش اسید HA کدام است؟

- (۱) $2/5 \times 10^{-6}$ (۲) 5×10^{-6} (۳) 5×10^{-5} (۴) $2/5 \times 10^{-5}$

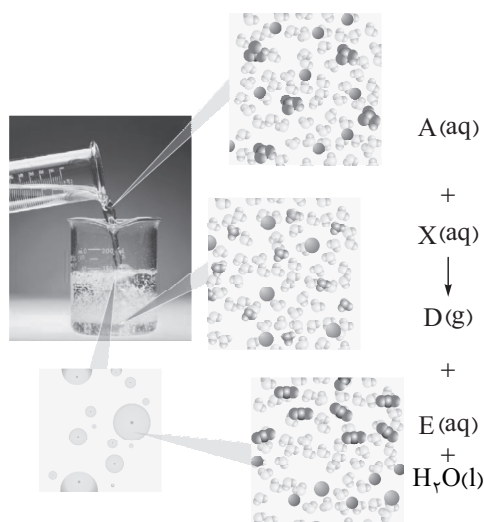
۱۰۲- نسبت غلظت مولی یون هیدروکسید به هیدرونیوم در محلولی از باریم هیدروکسید، در دمای 25°C ، برابر $10^1 \times 25/6$ است. pH این محلول کدام است و ۲۰۰ میلی لیتر از آن با چند میلی لیتر محلول ۶/۳ گرم بر لیتر نیتریک اسید به طور کامل واکنش می دهد؟ ($\text{O} = 16, \text{N} = 14, \text{H} = 1: \text{g.mol}^{-1}$)

- (۱) $100 - 12/7$ (۲) $100 - 12/4$ (۳) $50 - 12/4$ (۴) $50 - 12/7$

محل انجام محاسبات

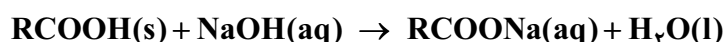
- ۱۰۳- اگر در دمای اتاق، درصد یونش آمونیاک در محلولی از آن با $\text{pH} = 11$ برابر $1/6$ باشد، کدام مطلب درست است؟
- (۱) در ۴ لیتر از این محلول، $5/0$ مول آمونیاک حل شده است.
 - (۲) ثابت یونش آمونیاک در دمای اتاق برابر با $10^{-4} \times 1/6$ است.
 - (۳) دو لیتر از این محلول با ۵ لیتر محلول $0.25/0$ مولار اتانوتیک اسید به طور کامل واکنش می‌دهد.
 - (۴) pH محلول $0.25/0$ مولار آمونیاک در دمای اتاق برابر با $10/7$ است.
- ۱۰۴- با توجه به شکل داده شده که نمای ذره‌ای از واکنش جوش شیرین با محلول هیدروکلریک اسید را نشان می‌دهد، کدام موارد از مطالب زیر نادرست است؟

- (الف) در دمای 25°C ، pH محلول A همانند pH مخلوط آب و صابون، بزرگ‌تر از ۷ است.
- (ب) محلول E یک محلول خنثی است و در آن، یون هیدرونیوم یا هیدروکسید وجود ندارد.
- (پ) عدد اکسایش کربن در مواد A و D با هم برابر است.
- (ت) برای تولید ۵۶ میلی‌لیتر گاز D در شرایط STP، به ۵۰ میلی‌لیتر محلول X با $\text{pH} = 1$ نیاز است.



- (۱) ب - ت
- (۲) الف - ب - پ
- (۳) الف - ت
- (۴) ب - پ - ت

۱۰۵- ۴۸ گرم از یک اسید چرب با 200 میلی‌لیتر محلول سدیم هیدروکسید با $\text{pH} = 14$ به طور کامل واکنش می‌دهد. فرمول مولکولی این اسید چرب کدام است و طی این فرایند، چند گرم صابون تولید می‌شود؟ ($\text{Na} = 23, \text{O} = 16, \text{C} = 12, \text{H} = 1: \text{g.mol}^{-1}$)



محل انجام محاسبات

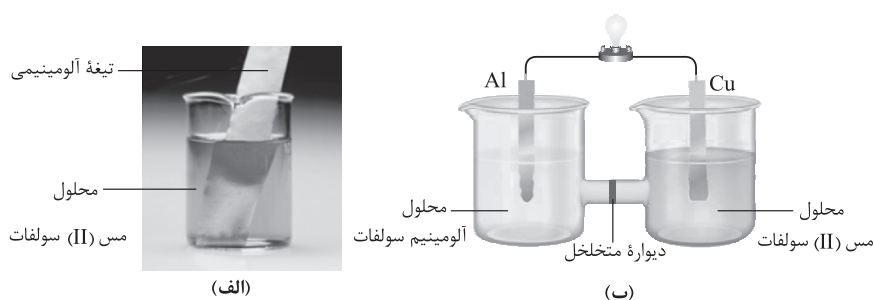
۱۰۶- چند مورد از مطالب زیر، درست است؟

- درون معده یک محیط بسیار اسیدی است و حتی می‌تواند فلزهایی مانند مس را در خود حل کند.
- اگر به ۱۰ میلی‌لیتر از محلول هیدرویدیک اسید ۸۰ میلی‌لیتر آب اضافه شود، غلظت یون هیدرونیوم در محلول به یک‌سوم مقدار اولیه خود می‌رسد.
- در فرایند یونش نیترو اسید در آب، پس از مدتی میان مولکول‌های یونش‌نیافته اسید و یون‌های حاصل از یونش، تعادل برقرار می‌شود.
- شیر منیزی به شکل سوسپانسیون مصرف می‌شود و ماده اصلی موجود در آن آلومینیم هیدروکسید است.

(۱) یک (۲) دو

(۳) سه (۴) چهار

۱۰۷- مطابق شکل‌های داده‌شده، در یک آزمایش، تیغه آلومینیمی درون محلول مس (II) سولفات قرار داده می‌شود و در آزمایشی دیگر، با استفاده از الکترودهای آلومینیم و مس یک سلول گالوانی ساخته می‌شود. چند مورد از مطالب زیر، درست است؟ ($Al = 27 \text{ g.mol}^{-1}$)



- در هر دو آزمایش، با مبادله ۳/۰ مول الکترون، جرم تیغه آلومینیمی ۲/۷ گرم کاهش می‌یابد.
- در آزمایش (ب)، با گذشت زمان به شدت رنگ آبی محلول مس (II) سولفات افزوده می‌شود.
- در هر دو آزمایش، اتم‌های آلومینیم نقش کاهنده و اتم‌های مس، نقش اکسنده را ایفا می‌کنند.
- در آزمایش (الف)، شیب تغییرات غلظت یون‌های آلومینیم و مس (II)، ضمن انجام واکنش، قرینه یکدیگر است.

(۱) صفر (۲) یک

(۳) دو (۴) سه

محل انجام محاسبات

۱۰۸- با توجه به جدول داده شده، کدام موارد از مطالب زیر درست است؟

نیم واکنش کاهش	$E^\circ (V)$
$A^+(aq) + e^- \rightarrow A(s)$	+۱/۳۳
$B^{2+}(aq) + 2e^- \rightarrow B(s)$	+۰/۸۷
$C^{3+}(aq) + e^- \rightarrow C^{2+}(aq)$	-۰/۱۲
$D^{3+}(aq) + 3e^- \rightarrow D(s)$	-۱/۵۹

الف) گونه های A و B می توانند C^{2+} را اکسید کنند.

ب) مجموع ضرایب کاتیون ها در معادله موازنه شده واکنش بین نیم سلول های (B^{2+} / B) و (C^{3+} / C^{2+}) برابر ۵ است.

پ) محلول هیدروکلریک اسید را می توان در ظرفی از جنس فلزهای A و B نگهداری کرد.

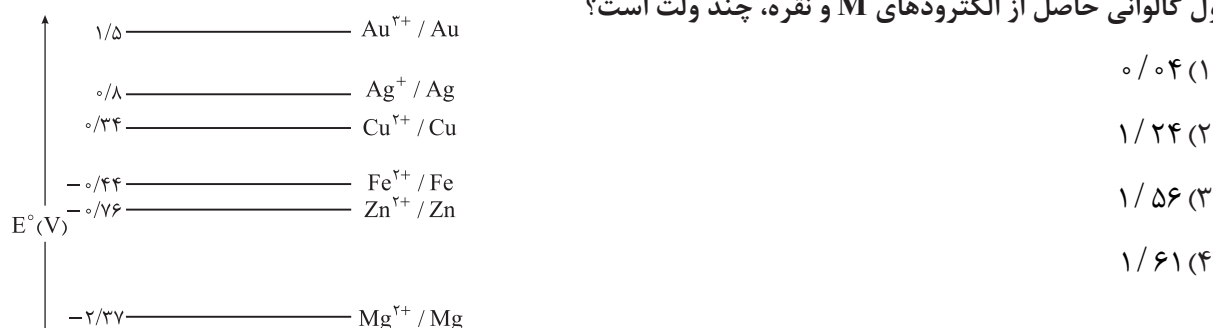
ت) با قراردادن تیغه ای از جنس B درون محلولی از نمک D^{3+} ، دمای محلول افزایش می یابد.

۱) الف - ت ۲) ب - پ ۳) الف - پ ۴) ب - ت

۱۰۹- نمودار داده شده پتانسیل کاهش استاندارد چند نیم سلول را نشان می دهد. اگر emf سلولی

که واکنش $3M(s) + 2Au^{3+}(aq) \rightarrow 3M^{2+}(aq) + 2Au(s)$ در آن رخ می دهد برابر با ۲/۲۶ ولت باشد، emf

سلول گالوانی حاصل از الکترودهای M و نقره، چند ولت است؟



۱۱۰- جرم اولیه هر یک از الکترودها در سلول گالوانی استاندارد مس - نقره برابر ۵/۲ گرم است. اگر پس از مدتی ۴۰ درصد از

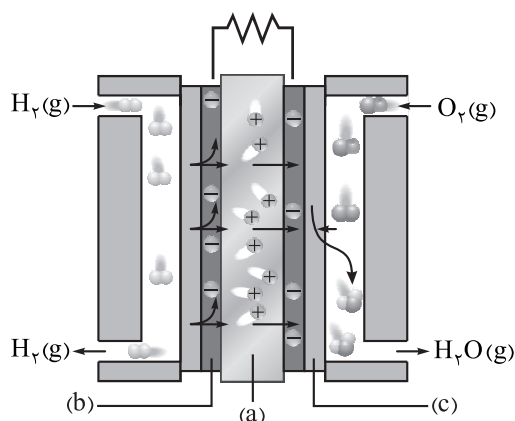
جرم تیغه آندی خورده شود، غلظت کاتیون در نیم سلول کاتدی به چند مولار می رسد؟ (حجم اولیه الکترولیت را ۲۵۰ mL در

نظر بگیرید؛ $Ag = 108, Cu = 64 : g.mol^{-1}$)

۱) ۰/۱۸۵ ۲) ۰/۲۶

۳) ۰/۶۵ ۴) ۰/۷۴

محل انجام محاسبات



۱۱۱- با توجه به شکل داده شده که مربوط به نوعی سلول سوختی

هیدروژن - اکسیژن است، چند مورد از مطالب زیر درست است؟

($O = ۱۶, C = ۱۲, H = ۱ : g.mol^{-1}$)

• b و c به ترتیب مربوط به آند و کاتد هستند که شامل کاتالیزگرند

تا به نیم واکنش های اکسایش و کاهش سرعت ببخشند.

• در این سلول سوختی، همه فرآورده های حاصل از نیم واکنش

آندی به سمت تیغه کاتد حرکت می کنند.

• در صورت جایگزینی گاز هیدروژن با گاز متان، مقدار گاز اکسیژن مورد نیاز برای اکسایش هر گرم سوخت، کاهش می یابد.

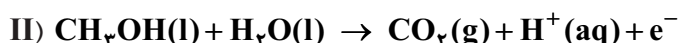
• نیم واکنش کاهش در این سلول، مانند نیم واکنش کاهش آب در سلول برقکافت آن است.

(۱) یک (۲) دو (۳) سه (۴) چهار

۱۱۲- با توجه به واکنش های زیر، کدام مطلب درست است؟ ($C = ۱۲, N = ۱۴, O = ۱۶ : g.mol^{-1}$)



(معادله واکنش ها موازنه شوند.)



(۱) با انجام هر دو واکنش، pH محیط کاهش می یابد.

(۲) براساس معادله موازنه شده واکنش (I)، عدد اکسایش ۲۵ درصد از اتم های نیتروژن طی واکنش تغییری نکرده است.

(۳) تغییر عدد اکسایش هر اتم کربن در واکنش (II)، با تغییر عدد اکسایش هر اتم مس در واکنش (I)، برابر است.

(۴) به ازای شمار الکترون های برابر، جرم گاز تولید شده در واکنش (I) بیشتر از (II) است.

۱۱۳- کدام مطلب نادرست است؟

(۱) در همه سلول های الکتروشیمیایی، الکترودی که در آن فرایند اکسایش رخ می دهد، آند نامیده می شود.

(۲) در سلول های الکترولیتی، قطب مثبت محل انجام نیم واکنش اکسایش است.

(۳) در همه سلول های الکتروشیمیایی، الکترون ها در مدار بیرونی از قطب منفی به قطب مثبت جریان می یابند.

(۴) در سلول های گالوانی، آنیون ها با عبور از دیواره متخلخل به سمت آند می روند.

محل انجام محاسبات

۱۱۴- حجم گاز تولیدشده در قطب مثبت سلول الکترولیتی برقکافت آب، به ازای عبور $4/515 \times 10^{24}$ الکترون از مدار، در شرایط STP چند لیتر است؟

- ۲۱ (۱) ۳۳ / ۶ (۲) ۴۲ (۳) ۶۷ / ۲ (۴)

۱۱۵- در دو سلول جداگانه، مقدار معینی سدیم کلرید مذاب و مقدار معینی منیزیم کلرید مذاب برقکافت می‌شوند. اگر از این دو سلول در مجموع ۵ مول الکترون عبور کند و جرم فراورده کاتدی سلول سدیم کلرید، ۴۵ گرم بیشتر از جرم فراورده کاتدی سلول منیزیم کلرید باشد، جرم سدیم کلرید اولیه چند گرم بوده است؟

($\text{Cl} = 35/5$, $\text{Mg} = 24$, $\text{Na} = 23$: g.mol^{-1})

- ۱۷۵ / ۵ (۱) ۱۴۲ / ۵ (۲) ۵۸ / ۵ (۳) ۹۵ (۴)

۱۱۶- کدام موارد از مطالب زیر، درست است؟

الف) فلز آلومینیم برخلاف آهن، در برابر اکسایش مقاوم است، به همین دلیل برای ساخت وسایل گوناگونی از آن استفاده می‌شود.

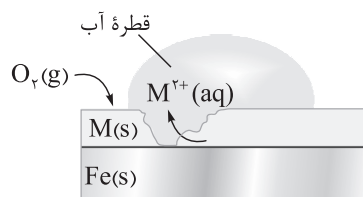
ب) قدرت اکسندگی مولکول‌های اکسیژن در محیطی با $\text{pH} < 7$ بیشتر از قدرت اکسندگی این مولکول‌ها در محیطی با $\text{pH} = 7$ است.

پ) فلز سدیم یک کاهنده قوی است و در طبیعت به حالت آزاد یافت نمی‌شود.

ت) سالانه حدود ۲ درصد از آهن تولیدی در جهان، برای جایگزینی قطعه‌های خورده‌شده مصرف می‌شود.

- (۱) ب - پ (۲) الف - ب - پ (۳) پ - ت (۴) الف - ب - ت

۱۱۷- شکل زیر مربوط به ورقه‌ای آهنی است که با لایه نازکی از فلز M پوشانده شده است. با توجه به شکل، کدام مطلب درست است؟



(۱) در سلول گالوانی تشکیل شده در محل خراش، آهن نقش کاتد را دارد و کاهش می‌یابد.

(۲) شکل داده شده می‌تواند مربوط به حلبی باشد که در ساخت قوطی کنسرو و روغن نباتی کاربرد دارد.

(۳) قدرت اکسندگی M^{2+} از کاتیون‌های Fe^{2+} و Cu^{2+} بیشتر است.

(۴) جهت حرکت کاتیون‌های M^{2+} در قطره آب، هم‌سو با جهت حرکت الکترون‌ها در ورقه آهنی است.

محل انجام محاسبات

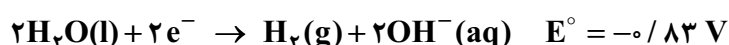
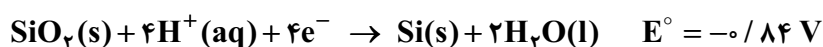
۱۱۸- با توجه به معادله کلی واکنش مربوط به خوردگی آهن در محیط مرطوب (واکنش (I) و تولید آلومینیم به روش هال (واکنش (II))، چند مورد از مطالب زیر درست است؟

- براساس معادله موازنه شده، شمار الکترون های مبادله شده در دو واکنش برابر است.
- تولید آلومینیم مطابق واکنش (II)، فقط به ۷ درصد انرژی لازم برای تهیه همان تعداد قوطی از قوطی های کهنه نیاز دارد.
- مجموع ضرایب واکنش دهنده ها در معادله واکنش (I)، ۶/۲ برابر مجموع ضرایب واکنش دهنده ها در معادله واکنش (II) است.
- نسبت شمار الکترون های مبادله شده در واکنش (I) به (II) به ازای مصرف ۱ مول آهن و ۱ مول کربن در این واکنش ها، برابر $\frac{4}{3}$ است.
- هر دو واکنش به طور طبیعی انجام می شوند اما بازده واکنش (II) بیشتر است.

(۱) دو (۲) سه (۳) چهار (۴) پنج

۱۱۹- کدام مطلب نادرست است؟

- (۱) فلز منگنز (${}_{25}\text{Mn}$) با بالاترین عدد اکسایش خود، می تواند یون چنداتی با فرمول MnO_4^- تشکیل دهد.
 - (۲) نقش کلسیم کلرید استفاده شده در برقکافت سدیم کلرید مذاب، کاهش نقطه ذوب سدیم کلرید و کاهش هزینه های اقتصادی این روش است.
 - (۳) عدد اکسایش کربن در فورمیک اسید و هیدروسیانیک اسید با هم برابر است.
 - (۴) عدد اکسایش عنصر اکسندتر در ترکیب OF_2 برابر با ۲+ است.
- ۱۲۰- نیمه واکنش های زیر مربوط به یک سلول نور الکتروشیمیایی هستند که برای تهیه گاز هیدروژن از آب به کار می رود. با توجه به این نیمه واکنش ها، کدام موارد از مطالب زیر، درست است؟



الف) emf این سلول برابر با ۱۰ میلی ولت است.

ب) نسبت ضریب گونه اکسند به کاهنده در معادله واکنش کلی این سلول برابر ۲ است.

پ) برخلاف emf ، بازده و سرعت انجام واکنش در این سلول، زیاد است.

ت) در آند این سلول، عدد اکسایش هر اتم سیلیسیم، ۴ واحد کاهش می یابد.

(۱) الف - ب (۲) پ - ت (۳) الف - پ (۴) ب - ت

محل انجام محاسبات

دوستان عزیز خیلی سبز، سلام؛

فایل پاسخنامه این آزمون را که شامل درسنامه، نکات کنکوری، پاسخ تشریحی و ... است، ساعت ۱۴ امروز از صفحه شخصی خودتان در سایت آزمون خیلی سبز دریافت کنید.

همچنین شما می توانید همین امشب کارنامه اولیه آزمونتان را در صفحه شخصی خود مشاهده بفرمایید.

برای دسترسی به صفحه شخصی خود وارد سایت آزمون خیلی سبز به آدرس: azmoon.kheilisabz.com شوید و کدی را که توسط مدرسه و یا نمایندگی های آزمون های خیلی سبز به شما داده شده، در محل مشخص شده در سایت ثبت بفرمایید.

محل انجام محاسبات



آزمون آزمایشی خیلی سبز

نام درس	طراحان
حسابان	حسین شفیع زاده - مهرداد کیوان
ریاضیات گسسته و آمار و احتمال	مصطفی دیداری - علیرضا شریف خطیبی - عطا صادقی - سروش موئینی
هندسه	امیرحسین ابومحبوب - محمدرضا حسینی فرد - کیوان صارمی - محسن میراسلامی
فیزیک	محمد باغبان - محسن توانا - احمد رضوانی - محمدرضا زارع - مجید ساکی - رضا سبزمیدانی - محمدجواد سورچی - نوید شاهی - علیرضا عبداللهی - علیرضا علینقی - علیرضا گونه - احسان محمدی - احمد مصالقی
شیمی	مجتبی ابراهیمی - مهدی براتی - محمدعلی توسلی فر - پیمان خواجهی مجد - حسن رحمتی کوکنده - معصومه سعیدی - هاله طاهری پور - سروش عبادی - یاسر عبداللهی - پارسا فراهانی

نام درس	مسئول درس	گزینشگر	مؤلف پاسخ نامه	کارشناسان علمی - محتوایی	ویراستاران
حسابان	حسین شفیع زاده - مهرداد کیوان	حسین شفیع زاده - مهرداد کیوان	مصطفی دیداری	علی شهرابی - حمید گلزاری	الما احسانیان - زهرا جالینوسی - عادل حسینی - محمدحسین رحیمی
ریاضیات گسسته و آمار و احتمال	علیرضا شریف خطیبی	مصطفی دیداری	مصطفی دیداری	سروش موئینی	الما احسانیان - حسین اسدزاده - زهرا جالینوسی - محمدحسین رحیمی - مسعود شفیعی - مریم نظری
هندسه	حمید گلزاری	حمید گلزاری	حمید گلزاری	محسن میراسلامی	الما احسانیان - زهرا جالینوسی - محمدحسین رحیمی - مسعود شفیعی - ندا صالح پور - محسن فراهانی
فیزیک	رضا سبزمیدانی	نوید شاهی	محمد باغبان - محمدجواد سورچی - علیرضا گونه	علی ایرانشاهی - علیرضا جباری - علیرضا عبداللهی - سعید فرهادی	مهدی بابائی - نرجس تیمناک - محمدرضا فضلی - مریم گلی حسن لو - احسان محمدی - امیر محمودی انزلی
شیمی	یاسر عبداللهی	یاسر عبداللهی	محدثه ملک پور	احسان عزیزآبادی - پارسا فراهانی - محمدعلی مؤمن زاده	زهرا تشریفی - مهسا خاکی - معصومه سعیدی - علی طهانی

مدیر آزمون: مهدی هاشمی
سرپرست محتوایی: فاطمه آقاچانیپور



حسابان دوازدهم و پایه مرتب: حسابان (۲): صفحه‌های ۱ تا ۷۰

تست و پاسخ ۱

$A(2, -1)$ نقطه‌ای روی نمودار تابع $y = 2 - 3f(\frac{x}{4})$ است. فاصله نقطه متناظر A روی نمودار تابع $y = f(x)$ تا مبدأ مختصات کدام است؟

$$\sqrt{(x_{A'})^2 + (y_{A'})^2}$$

$$\sqrt{2} \quad (2)$$

$$3\sqrt{2} \quad (4)$$

$$\sqrt{26} \quad (1)$$

$$5 \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۲

درس نامه به دست آوردن نقطه متناظر در تابع تبدیل یافته

فرض کنیم نقطه $A(x_0, y_0)$ روی نمودار تابع f باشد، یعنی $f(x_0) = y_0$. می‌خواهیم ببینیم این نقطه روی نمودار تابع $y = af(bx + c) + d$ به کدام نقطه متناظر (A') تبدیل می‌شود. برای این منظور به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$(1) \quad bx + c = x_0 \quad \text{قرار می‌دهیم؛ پس} \quad x = \frac{x_0 - c}{b} \quad \text{می‌شود.}$$

$$y = af(x_0) + d = ay_0 + d$$

(۲) با قراردادن x در تابع تبدیل یافته داریم:

یعنی نقطه A به نقطه $A(\frac{x_0 - c}{b}, ay_0 + d)$ تبدیل می‌شود.

مثلاً برای این که ببینیم $(2, -1)$ روی نمودار تابع f به کدام نقطه روی نمودار تابع $y = -2f(1 - 2x) + 3$ تبدیل می‌شود، داریم:

$$\left. \begin{aligned} 1 - 2x = 2 &\Rightarrow -2x = 1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \\ y = -2f(2) + 3 &= -2(-1) + 3 = 5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow A'(-\frac{1}{2}, 5)$$

برای انجام عملیات برعکس، اگر نقطه (x_0, y_0) روی تابع $y = af(bx + c) + d$ باشد (مثل این سؤال)، با جای گذاری به رابطه $f(x'_0) = y'_0$ می‌رسیم؛ پس نقطه (x'_0, y'_0) روی f قرار دارد.

پاسخ تشریحی

گام اول: $A(2, -1)$ روی تابع $y = 2 - 3f(\frac{x}{4})$ است؛ پس مختصات آن در این تابع صدق می‌کند:

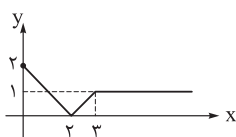
$$\xrightarrow[\frac{x}{4} = -1]{x = 2} -1 = 2 - 3f(\frac{2}{4}) \Rightarrow -3f(1) = -3 \Rightarrow f(1) = 1$$

پس نقطه $(1, 1)$ روی تابع f قرار دارد.

گام دوم: فاصله این نقطه تا مبدأ برابر $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ است.

تست و پاسخ ۲

نمودار تابع f مطابق شکل است. نمودار تابع $y = f(4 - |\frac{x}{4}|)$ در بازه $[-4, 4]$ با محور طول‌ها چه مساحتی می‌سازد؟



محور افقی

- ۱۶ (۱)
- ۱۲ (۲)
- ۸ (۳)
- ۶ (۴)

پاسخ: گزینه ۴

مشاوره سؤال ساده‌ای نیست. اگر از پس این سؤال برآمدید به شما تبریک می‌گوییم، چون روی تبدیل توابع تسلط خوبی دارید.

خودت حل کنی بهتره اول $y = f(4 - x)$ ، بعد $y = f(4 - \frac{x}{4})$ و بعد $y = f(4 - |\frac{x}{4}|)$ را رسم کنید.



درس نامه •• رسم تابع $y = f(-x + k)$ یا $y = f(k - x)$ ($k > 0$)

- (۱) نمودار f را k واحد به چپ می‌بریم. (به زبان دیگر $y = f(x + k)$ را رسم می‌کنیم.)
 (۲) نمودار به دست آمده را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم. (اگر به جای x قرار دهیم: $-x$ ، تابع $y = f(k - x)$ یا $y = f(-x + k)$ به دست می‌آید.)
 رسم تابع $y = f(-x - k)$ ($k > 0$)

- (۱) نمودار f را k واحد به راست می‌بریم. (در واقع تابع $y = f(x - k)$ را رسم می‌کنیم.)
 (۲) نمودار f را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم. (در واقع x را به $-x$ تبدیل می‌کنیم تا تابع $f(-x - k)$ به دست آید.)

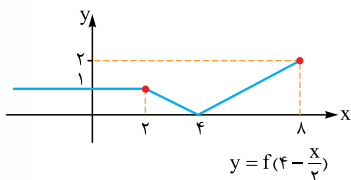
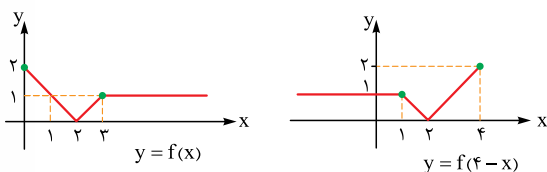
تذکر برای رسم هر دو تابع بالا، اول انتقال افقی انجام می‌گیرد و بعد قرینه‌سازی نسبت به محور y ها.

نکته تابع $y = f(k - x)$ را به صورت یک مرحله‌ای از روی نمودار f نیز می‌توانیم رسم کنیم. برای این کار کافی است نمودار f را نسبت به خط $x = \frac{k}{2}$ قرینه کنیم؛ مثلاً برای رسم تابع $y = f(2 - x)$ کافی است نمودار f را نسبت به خط $x = 1$ قرینه کنیم.

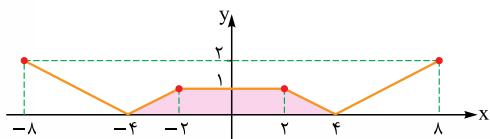
درس نامه •• رسم تابع $y = f(|x|)$ از روی $f(x)$

اگر به جای x در ضابطه تابع، $|x|$ قرار دهیم، نمودار تابع جدید $y = f(|x|)$ از روی $f(x)$ به صورت زیر به دست می‌آید:
 الف) قسمت‌های $x < 0$ را از نمودار f حذف می‌کنیم.
 ب) قرینه نمودار نسبت به محور y ها را به نمودار اضافه می‌کنیم.

پاسخ تشریحی گام اول: ابتدا تابع $y = f(4 - x)$ را رسم می‌کنیم. طبق درس‌نامه برای این کار، نمودار را نسبت به خط $x = 2$ قرینه می‌کنیم:



گام دوم: به جای x قرار می‌دهیم $\frac{x}{2}$ تا تابع $y = f(4 - \frac{x}{2})$ ایجاد شود؛ بنابراین طول نقاط نمودار دو برابر می‌شود:



گام سوم: به جای x قرار می‌دهیم $|x|$ تا به تابع داده شده یعنی $y = f(4 - \frac{|x|}{2})$ برسیم. طبق درس‌نامه برای رسم این تابع، قسمت‌های سمت چپ نمودار ($x < 0$) را حذف کرده و قرینه نقاط نسبت به محور y ها را اضافه می‌کنیم:

$$S_{\text{رنگی}} = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{مجموع دو قاعده}}{2} = \frac{(8 + 4) \times 1}{2} = 6$$

تست و پاسخ ۳

$-f(-x)$

نمودار تابع $f(x) = \sqrt{4x + 16}$ را نسبت به مبدأ مختصات قرینه کرده‌ایم و سپس ۶ واحد به بالا و k واحد به سمت چپ انتقال داده‌ایم، به طوری که نمودار حاصل، تابع $y = f(x)$ را روی محور عرض‌ها قطع کرده است. مقدار k کدام است؟

$x \rightarrow x + k$

$x = 0$

۲ (۲)

۳ (۴)

۴ (۱)

۶ (۳)

پاسخ: گزینه ۴



مشاوره مشابه این سؤال در این چند سال بارها در کنکور مطرح شده است. به سادگی از آن عبور نکنید.

خودت حل کنی بهتره به ترتیب اعمال مناسب را روی x یا y پیاده کنید.

درس نامه ●● انعکاس نسبت به محور x ها و y ها

عملیات	(۱) قراردادن $-x$ به جای x در تابع	(۲) کل تابع قرینه شود.	انجام هر دو عملیات ۱ و ۲
ضابطه	$y = f(-x)$	$y = -f(x)$	$y = -f(-x)$
نمودار	نمودار f نسبت به محور y ها قرینه می شود.	نمودار f نسبت به محور x ها قرینه می شود.	نمودار f نسبت به مبدأ قرینه می شود.

درس نامه ●● انتقال افقی و عمودی توابع ($k > 0$)

اگر تابع $y = f(x)$ را داشته باشیم:

عملیات	به جای x قرار دهیم $x - k$	به جای x قرار دهیم $x + k$	کل تابع را با k جمع کنیم.	کل تابع را منهای k کنیم.
ضابطه	$y = f(x - k)$	$y = f(x + k)$	$y = f(x) + k$	$y = f(x) - k$
نمودار	نمودار f را k واحد به راست می بریم.	نمودار f را k واحد به چپ می بریم.	نمودار f را k واحد بالا می بریم.	نمودار f را k واحد پایین می بریم.

پاسخ تشریحی گام اول: برای قرینه سازی نسبت به مبدأ کافی است تابع $y = -f(-x)$ را تشکیل دهیم:

$$y_1 = -\sqrt{-4x + 16}$$

$$y_2 = -\sqrt{-4x + 16} + 6$$

$$y_3 = -\sqrt{-4(x + k) + 16} + 6$$

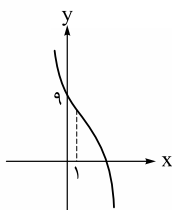
گام دوم: اگر کل تابع به دست آمده را $+6$ کنیم، نمودار 6 واحد بالا می رود:

گام سوم: اگر به جای x قرار دهیم $x + k$ ، نمودار y_2 ، k واحد به چپ می رود:

$$6 - \sqrt{-4(x + k) + 16} = \sqrt{4x + 16} \xrightarrow{x=0} 6 - \sqrt{16 - 4k} = 4 \Rightarrow 2 = \sqrt{16 - 4k} \Rightarrow 4 = 16 - 4k \Rightarrow k = 3$$

تست و پاسخ ۴

اگر نمودار تابع $f(x) = (\alpha x + 2)^3 + \beta$ مطابق شکل باشد، نمودار تابع $y = \sqrt[3]{\beta - x} - \alpha$ از کدام ناحیه عبور نمی کند؟



(۱) اول

(۲) دوم

(۳) سوم

(۴) چهارم

پاسخ: گزینه ۳

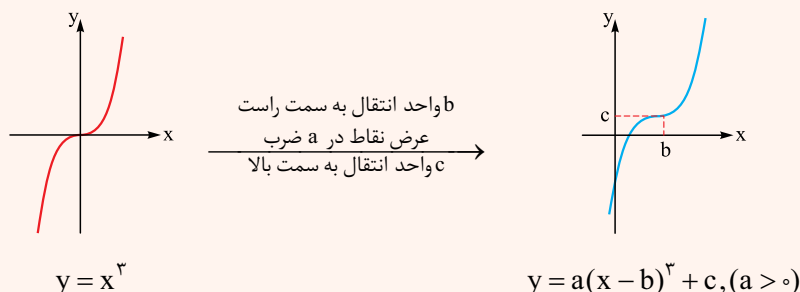
مشاوره رسم نمودار تابع درجه سوم با استفاده از انتقال تازه به کتاب اضافه شده است، پس ممکن است، در کنکور بیاید.

خودت حل کنی بهتره ریشه پُرانتز همان طول مرکز تقارن تابع است.



درس نامه •• تابع درجه سوم و انتقال آن

به نمودار تابع $y = x^3$ دقت کنید که نقطه $(0,0)$ مرکز تقارن آن است. اگر تبدیلات زیر را انجام دهیم به نمودار تابع درجه سوم $y = a(x-b)^3 + c$ می‌رسیم:

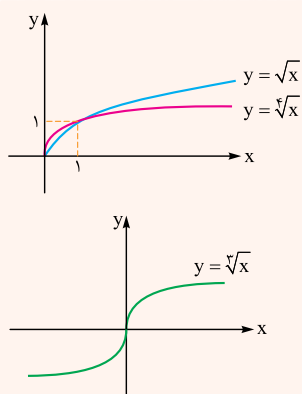


نکته در تابع $y = a(x-b)^3 + c$ نقطه (b, c) مرکز تقارن تابع است که b ریشه داخل پرانتز و c عدد ثابت است.

درس نامه •• نمودار تابع‌های $y = \sqrt[n]{x}$

(۱) زوج: اگر فرجه زوج باشد، به صورت مقابل است: $(x \geq 0)$

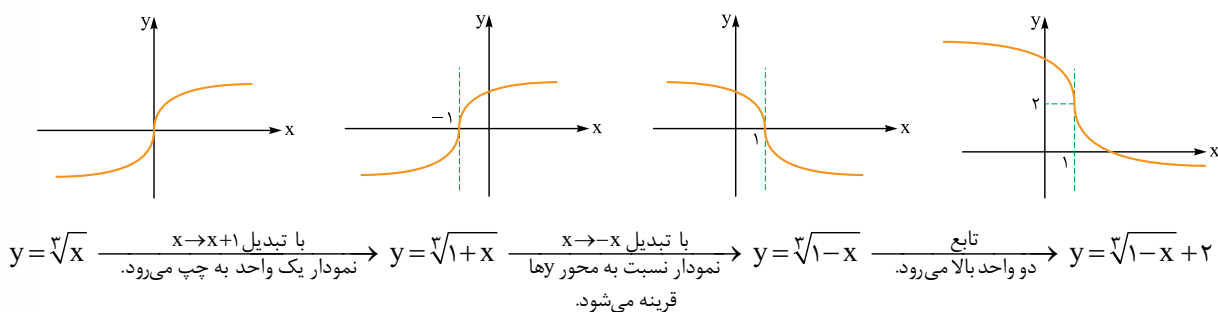
(۲) فرد: اگر فرجه فرد باشد، نمودار شبیه مقابل می‌شود: $(x \in \mathbb{R})$



پاسخ تشریحی گام اول: $f(0) = 9$ ، پس $(\alpha(0) + 2)^3 + \beta = 9$ ؛ در نتیجه: $\beta = 1$.

گام دوم: $f(x) = (\alpha x + 2)^3 + 1$ ، اما ریشه داخل پرانتز (طول مرکز تقارن نمودار) برابر $x = 1$ است، پس: $\alpha(1) + 2 = 0 \Rightarrow \alpha = -2$

گام سوم: نمودار تابع $y = \sqrt[3]{1-x} - (-2)$ یا $y = \sqrt[3]{1-x} + 2$ را رسم می‌کنیم:



پس نمودار از ناحیه سوم عبور نمی‌کند.

تست و پاسخ ۵

اگر چندجمله‌ای $f(1-2x)$ بر $x-1$ بخش پذیر باشد و باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(2-x)$ بر

$x-4$ برابر ۵ باشد، حاصل $b-a$ کدام است؟

باقی‌مانده صفر

۱۲ (۴)

-۲ (۳)

-۸ (۲)

۱۶ (۱)

پاسخ: گزینه ۱



مشاوره هر چند سال یک بار از بحث باقی مانده در کنکور سؤال آمده است. مطلب ساده ای است؛ پس اگر سؤال بیاید حتماً باید آن را حل کنید.

خودت حل کنی بهتره در تقسیم بر عبارت های درجه اول، با قراردادن ریشه مقسوم علیه در مقسوم، باقی مانده به دست می آید.

درس نامه به دست آوردن باقی مانده تقسیم چند جمله ای $f(x)$

الف) بر $ax + b$:

$$ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

(۱) ریشه مقسوم علیه را به دست می آوریم:

(۲) ریشه را در f قرار می دهیم تا باقی مانده که یک عدد است به دست آید؛ پس $R = f(-\frac{b}{a})$.

ب) بر $ax^2 + bx + c$:

$$\begin{array}{r} f(x) \quad | \quad ax^2 + bx + c \\ \hline Q(x) \\ \hline mx + n \end{array}$$

(۱) باقی مانده را به صورت چند جمله ای درجه اول $mx + n$ می گیریم:

(۲) رابطه تقسیم را می نویسیم:

$$f(x) = (ax^2 + bx + c)Q(x) + mx + n$$

(۳) ریشه های مقسوم علیه را در دو طرف رابطه تقسیم مرحله (۲) قرار می دهیم و با حل دستگاه، n و m را پیدا می کنیم.

پاسخ تشریحی

گام اول: $f(1-2x)$ بر $x-1$ بخش پذیر است؛ پس با قراردادن ریشه مقسوم علیه (یعنی $x=1$) در $f(1-2x)$ باقی مانده برابر صفر می شود:

$$R = f(1-2(1)) = 0 \Rightarrow f(-1) = 0 \Rightarrow (-1)^3 - a(-1)^2 + b(-1) + 3 = 0 \Rightarrow -a - b + 2 = 0 \Rightarrow a + b = 2 \quad (I)$$

گام دوم: شبیه گام اول داریم:

$$\begin{aligned} x-4=0 &\Rightarrow x=4 \Rightarrow R = f(2-4) = 5 \Rightarrow f(-2) = 5 \Rightarrow (-2)^3 - a(-2)^2 + b(-2) + 3 = 5 \\ &\Rightarrow -4a - 2b = 10 \Rightarrow 2a + b = -5 \quad (II) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} -a - b = -2 \\ 2a + b = -5 \end{cases} \Rightarrow a = -7, b = 9$$

گام سوم: با حل دستگاه (I) و (II) داریم:

$$b - a = 9 - (-7) = 16$$

پس:

تست و پاسخ

f تابعی خطی است به طوری که باقی مانده تقسیم چند جمله ای $f(2x) = xf(x^2) + f(2x)$ بر چند جمله ای $2x^2 - 3x + 2$ برابر $7x - 8$ است.

$$f(x) = ax + b$$

باقی مانده تقسیم چند جمله ای $g(x)$ بر $x+1$ کدام است؟

(۲) ۳

(۱) -۳

(۴) ۲

(۳) -۲

پاسخ: گزینه ۱

مشاوره حواستان باشد اگر مقسوم علیه درجه دوم باشد، باید رابطه تقسیم را بنویسید.

خودت حل کنی بهتره ریشه های مقسوم علیه را در رابطه تقسیم قرار دهید.



درس نامه به دست آوردن باقی مانده تقسیم چندجمله ای $f(x)$

الف) بر $ax + b$:

$$ax + b = 0 \Rightarrow x = \frac{-b}{a}$$

(۱) ریشه مقسوم علیه را به دست می آوریم:

(۲) ریشه را در f قرار می دهیم تا باقی مانده که یک عدد است به دست آید؛ پس $R = f(-\frac{b}{a})$.

$$f(x) \over Q(x) \begin{array}{l} ax^2 + bx + c \\ mx + n \end{array}$$

ب) بر $ax^2 + bx + c$:

(۱) باقی مانده را به صورت چندجمله ای درجه اول $mx + n$ می گیریم.

(۲) رابطه تقسیم را می نویسیم:

$$f(x) = (ax^2 + bx + c) Q(x) + mx + n$$

(۳) ریشه های مقسوم علیه را در دو طرف رابطه تقسیم مرحله (۲) قرار می دهیم و با حل دستگاه، m و n را پیدا می کنیم.

پاسخ تشریحی **گام اول:** تابع f را به صورت خطی $f(x) = ax + b$ در نظر می گیریم، پس $f(x^2) = 2ax + b$ و $f(x^2) = 2ax + b$.

گام دوم: با تقسیم $g(x)$ بر $x^2 - 3x + 2$ خارج قسمت $Q(x)$ و باقی مانده $7x - 8$ می شود؛ پس رابطه تقسیم به صورت زیر درمی آید:

$$g(x) = (x^2 - 3x + 2) Q(x) + 7x - 8 \Rightarrow x(ax^2 + b) + 2ax + b = (x-1)(x-2) Q(x) + 7x - 8$$

گام سوم: در رابطه تقسیم ریشه های مقسوم علیه، یعنی $x=1$ و $x=2$ را قرار می دهیم:

$$x=1 \Rightarrow a + b + 2a + b = 7(1) - 8 \Rightarrow 3a + 2b = -1$$

$$x=2 \Rightarrow 2(4a + b) + 4a + b = 7(2) - 8 \Rightarrow 12a + 3b = 6$$

$$\times(-4) \begin{cases} -12a - 8b = 4 \\ 12a + 3b = 6 \end{cases} \Rightarrow -5b = 10 \Rightarrow b = -2 \Rightarrow a = 1$$

با حل دستگاه داریم:

$$g(x) = x(x^2 - 2) + 2x - 2 = x^3 - 2$$

گام چهارم: چندجمله ای g را تشکیل می دهیم:

گام پنجم: باقی مانده $g(x)$ بر $x+1$ همان $g(-1)$ است؛ پس $R = g(-1) = (-1)^3 - 2 = -3$.

تست و پاسخ ۷

بیشترین مقدار تابع $f(x) = 3a + 1 - 2a \cos \frac{\pi}{a} x$ ، $f(x)$ ، 4 واحد از مقدار دوره تناوب آن بیشتر است. T

عرض بالاترین نقطه نمودار

عرض پایین ترین نقطه

اگر $a > 0$ ، حداقل مقدار تابع کدام است؟

(۱) -2

(۲) 2

(۳) -4

(۴) 1

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره روی فرمول های $\max$ ، $\min$ و T در تابع های مثلثاتی مسلط باشید. معمولاً یک سؤال کنکور به این موضوع اختصاص دارد. این سؤال در امتحان نهایی هم می تواند بیاید.

خودت حل کنی بهتره $T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{a}} = 2a$



درس نامه

بررسی مقدار $\min$, $\max$ و دوره تناوب تابع های $y = a \sin(bx + c) + d$ و $y = a \cos(bx + c) + d$

عدد ثابت قدرمطلق ضریب

$$\max = |a| + d \quad (1)$$

$$\min = -|a| + d \quad (2)$$

$$T = \frac{2\pi}{|b|} \quad (3)$$

گام اول: $\min$, $\max$ و T را به دست می آوریم: ($a > 0$)

$$T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{a}} = 2a, \quad \max = |-2a| + 3a + 1 = 2a + 3a + 1 = 5a + 1, \quad \min = -|-2a| + 3a + 1 = -2a + 3a + 1 = a + 1$$

$$\min = a + 1 = 2$$

گام دوم: $\max = T + 4$ پس $5a + 1 = 2a + 4$ و $a = 1$ به دست می آید:

تست و پاسخ

بخشی از نمودار تابع $f(x) = 2a - 4 \cos \frac{\pi}{a} x$ مطابق شکل است. مساحت مثلثی با رئوس A , B و C

کدام است؟

(1) 64

(2) 8

(3) 16

(4) 32

پاسخ: گزینه 3

مشاوره سؤال خوبی است که در این چند سال بارها و بارها شبیه آن در کنکور مطرح شده است.

خودت حل کنی بهتره $\min = 0$

درس نامه

بررسی مقدار $\min$, $\max$ و دوره تناوب تابع های $y = a \sin(bx + c) + d$ و $y = a \cos(bx + c) + d$

عدد ثابت قدرمطلق ضریب

$$\max = |a| + d \quad (1)$$

$$\min = -|a| + d \quad (2)$$

$$T = \frac{2\pi}{|b|} \quad (3)$$

گام اول: کمترین مقدار تابع برابر صفر است، پس:

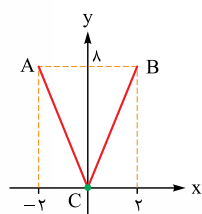
$$\min = -|-4| + 2a = 0 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow f(x) = 4 - 4 \cos \frac{\pi}{2} x$$

$$\max = |-4| + 2a = 4 + 4 = 8 \Rightarrow y_A = 8$$

گام دوم:

$$T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4 \Rightarrow x_B = 2 \Rightarrow x_A = -2$$

گام سوم:



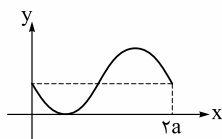
$$S = \frac{4 \times 8}{2} = 16$$

گام چهارم:



تست و پاسخ ۹

نمودار تابع $f(x) = a - 2 \sin b\pi x$ در یک دوره تناوب آن، مطابق شکل است. مقدار $a - b$ کدام است؟



(۲) $\frac{5}{2}$
(۴) $\frac{3}{4}$

(۱) ۲
(۳) $\frac{3}{2}$

پاسخ: گزینه ۳

مشاوره در تابع های مثلثاتی این که تحت چه شرایطی نمودار از محور y ها، شروع صعودی یا نزولی دارد خیلی مهم است.

خودت حل کنی بهتره $\max = a + 2$ و $\min = a - 2$

درس نامه

بررسی مقدار $\min$ ، $\max$ و دوره تناوب تابع های

$$\begin{cases} y = a \sin(bx + c) + d \\ y = a \cos(bx + c) + d \end{cases}$$

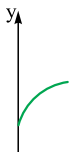
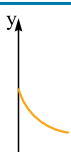
عدد ثابت قدرمطلق ضرب

(۱) $\max = |a| + d$

(۲) $\min = -|a| + d$

(۳) $T = \frac{2\pi}{|b|}$

بررسی شروع نمودارهای سینوسی از محور y ها

ضابطه	شرط	شروع نمودار از محور y ها	وضعیت	توضیح
$y = a \sin(bx) + d$	$ab > 0$		صعودی	اگر a و b هم علامت باشند، شروع نمودار از محور y ها صعودی است.
	$ab < 0$		نزولی	اگر a و b غیرهم علامت باشند، شروع نمودار از محور y ها نزولی است.

$-|-2| + a = 0 \Rightarrow a = 2$

پاسخ تشریحی گام اول: کمترین تابع برابر صفر است، پس:

$\frac{2\pi}{|b|} = 4 \Rightarrow 4|b|\pi = 2\pi \Rightarrow |b| = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \pm \frac{1}{2}$

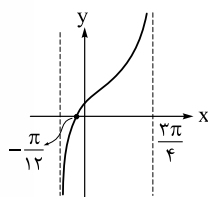
گام دوم: $a = 2$ پس $T = 2a = 4$ است. از طرفی $T = \frac{2\pi}{|b|}$ پس:

$a - b = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

گام سوم: شروع تابع از محور y ها نزولی است، پس طبق درس نامه $-2b < 0$ ، $b > 0$ و $b = \frac{1}{2}$ قابل قبول است:

تست و پاسخ ۱۰

بخشی از نمودار تابع $f(x) = 3 + a \tan(x + b)$ مطابق شکل است. حاصل $a \tan(\frac{\pi}{12} + b)$ کدام است؟



(۲) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
(۴) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

(۱) -۱

(۳) ۱

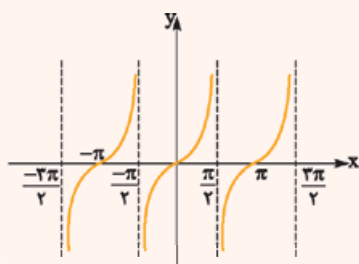
پاسخ: گزینه ۱



مشاوره در نمودارهای تانژانت توجه به خطوط مجانب قائم و صعودی یا نزولی بودن تابع مهم است.

خودت حل کنی بهتره ببینید تابع چه مقدار انتقال افقی داشته است.

درس نامه •• بررسی تابع تانژانت



نمودار تابع $y = \tan x$ به صورت مقابل است.

با توجه به نمودار نکات زیر به دست می آید:

(۱) تابع در بازه‌های $(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$, $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ و ... اکیداً صعودی است.

(۲) دوره تناوب تابع $T = \pi$ است.

(۳) $y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ ، از طرفی ریشه‌های معادله $\cos x = 0$ به صورت $x = \frac{(2k+1)\pi}{2}$ است. این خطوط عمودی، همان مجانب‌های قائم نمودار تابع در نمودار هستند. تابع در فاصله بین دو مجانب قائم، اکیداً صعودی است.

(۴) اگر بازه شامل مجانب قائم باشد، تابع در آن بازه یکنوا نیست.

(۵) دوره تناوب تابع $y = \tan(ax + b)$ به صورت $T = \frac{\pi}{|a|}$ است. اگر $a > 0$ هر شاخه تابع اکیداً صعودی و اگر $a < 0$ هر شاخه تابع

اکیداً نزولی می‌شود. تابع در فاصله بین دو مجانب قائم که یک دوره تناوب را تشکیل می‌دهد، اکیداً یکنواست. (دقت تابع در کل دامنه غیر یکنواست.)

پاسخ تشریحی گام اول: ضریب x برابر ۱ است؛ پس تابع انقباض یا انبساط افقی نداشته است. با مقایسه نمودار داده شده با نمودار $\tan x$ معلوم می‌شود تابع به اندازه $\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$ انتقال افقی به راست داشته است؛ پس $b = -\frac{\pi}{4}$.

گام دوم: $f(x) = 3 + a \tan(x - \frac{\pi}{4}) \Rightarrow f(-\frac{\pi}{12}) = 3 + a \tan(-\frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{4}) = 0 \Rightarrow 3 + a \tan(-\frac{\pi}{3}) = 3 - a\sqrt{3} = 0 \Rightarrow a = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

گام سوم: $a \tan(\frac{\pi}{12} + b) = \sqrt{3} \tan(\frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{3} \times (-\frac{\sqrt{3}}{3}) = -1$

تست و پاسخ ۱۱

تابع $f(x) = 2 \sin^2(\frac{2\pi}{3}x)$ روی بازه $(\alpha, 3)$ اکیداً نزولی است. حداقل مقدار α کدام است؟

(۲) $\frac{7}{4}$

(۱) $\frac{5}{4}$

(۴) $\frac{9}{4}$

(۳) ۲

پاسخ: گزینه ۴

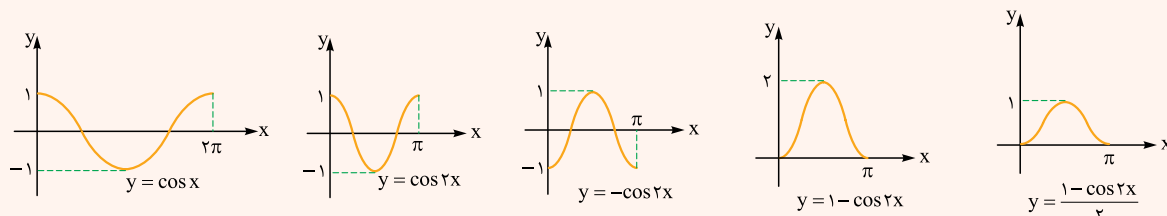
مشاوره سؤال خاص از نمودار که با اتحادهای مثلثاتی ترکیب شده است. در کل روی اتحادهای مثلثاتی خیلی کار کنید.

خودت حل کنی بهتره $2 \sin^2(\frac{2\pi}{3}x) = 1 - \cos \frac{4\pi}{3}x$

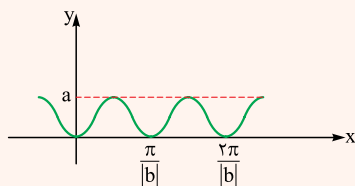
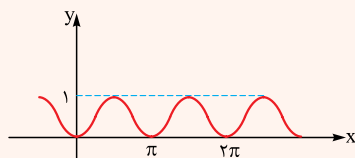


درس نامه •• بررسی نمودار تابع $y = \sin^2 x$

با توجه به اتحاد $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ برای رسم تابع $y = \sin^2 x$ کافی است مراحل زیر را طی کنیم:



پس نمودار تابع $y = \sin^2 x$ به صورت مقابل درمی آید:

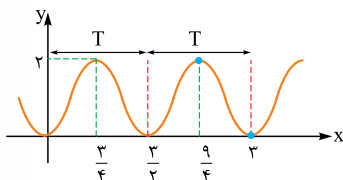


دوره تناوب این تابع برابر π ، $\min = 0$ و $\max = 1$ است.

در حالت کلی دوره تناوب تابع $y = a \sin^2 bx$ برابر $T = \frac{\pi}{|b|}$ است. ($a > 0$)

پاسخ تشریحی گام اول:

$$T = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2}$$



گام دوم: پس نمودار تابع به صورت مقابل است:

گام سوم: مطابق نمودار، کمترین مقدار α برای این که تابع روی بازه $(\alpha, 3)$ اکیداً نزولی باشد، برابر $\frac{9}{4} = \frac{\frac{3}{2} + 3}{2}$ می شود.

تست و پاسخ ۱۲

مجموع جواب های معادله $\sin(x - \frac{\pi}{4}) + \sin 2x = 1$ در بازه $(0, 2\pi)$ کدام است؟

$$\frac{7\pi}{2} \quad (2)$$

$$3\pi \quad (4)$$

$$\frac{9\pi}{4} \quad (1)$$

$$4\pi \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۴

مشاوره سوال دشوار از معادله مثلثاتی! ترکیب معادله و اتحاد مثلثاتی که در کنکور هم این مدلی خواهید داشت.

خودت حل کنی بهتره $\sin 2x = \cos(\frac{\pi}{4} - 2x)$ بنویسید و به ارتباط کمان ها دقت کنید.



درس نامه •• فرمول های دو برابر کمان

$$1) \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$$

$$2) \cos 2\alpha : \begin{cases} \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \\ \cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \\ \cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} \end{cases}$$

حل معادلات مثلثاتی

برای حل معادلات مثلثاتی با استفاده از روابط مثلثاتی، به یکی از حالت های زیر رسیده و از فرمول دسته جواب ها استفاده می کنیم:

$$1) \sin x = \sin \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = (2k+1)\pi - \alpha \end{cases}$$

$$2) \cos x = \cos \alpha \Rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha$$

$$3) \begin{cases} \tan x = \tan \alpha \\ \cot x = \cot \alpha \end{cases} \Rightarrow x = k\pi + \alpha$$

نکته ممکن است به جای x و α دو عبارت $\square$ و $\bigcirc$ قرار گیرد. در این گونه حالت ها نیز از فرمول دسته جواب استفاده کرده و x را به دست می آوریم. مثلاً:

$$\sin \square = \sin \bigcirc \Rightarrow \begin{cases} \square = 2k\pi + \bigcirc \Rightarrow 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4} \\ \square = (2k+1)\pi - \bigcirc \Rightarrow 2x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{(4k+1)\pi}{4} \end{cases}$$

پاسخ تشریحی روش اول: گام اول: $\sin 2x = \cos(\frac{\pi}{2} - 2x)$ ، پس معادله به صورت مقابل درمی آید: $\sin(x - \frac{\pi}{4}) + \cos(\frac{\pi}{4} - 2x) = 1$

گام دوم: اگر $x - \frac{\pi}{4} = t$ بگیریم، $2x - \frac{\pi}{4} = 2t$ یا $\frac{\pi}{4} - 2x = -2t$ می شود، پس داریم:

$$\sin t + \cos(-2t) = 1 \Rightarrow \sin t + \cos 2t = 1 \xrightarrow{\cos 2t = 1 - 2 \sin^2 t} \sin t + 1 - 2 \sin^2 t = 1$$

$$\Rightarrow \sin t(1 - 2 \sin t) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin t = 0 \Rightarrow \sin(x - \frac{\pi}{4}) = 0 \xrightarrow{\text{در بازه داده شده}} \begin{cases} x - \frac{\pi}{4} = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \\ x - \frac{\pi}{4} = \pi \Rightarrow x = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} \end{cases} \\ \sin t = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{در بازه داده شده}} \begin{cases} x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{12} \\ x - \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{13\pi}{12} \end{cases} \end{cases}$$

$$\frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{4} + \frac{5\pi}{12} + \frac{13\pi}{12} = 3\pi$$

گام سوم: پس مجموع جواب ها برابر است با:



روش دوم: گام اول:

$$\sin(x - \frac{\pi}{4}) = \sin x \cos \frac{\pi}{4} - \cos x \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin x - \cos x) \quad (I)$$

گام دوم:

$$(\sin x - \cos x)^2 = 1 - \sin 2x \quad (II)$$

پس داریم:

$$\sin(x - \frac{\pi}{4}) = 1 - \sin 2x \xrightarrow{(I) \text{ و } (II)} \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin x - \cos x) = (\sin x - \cos x)^2$$

$$A^2 - \frac{\sqrt{2}}{2} A = 0 \Rightarrow A(A - \frac{\sqrt{2}}{2}) = 0 \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ A = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

اگر $\sin x - \cos x = A$ بگیریم، معادله به صورت $A = \frac{\sqrt{2}}{2}$ درمی آید:

گام سوم:

$$A = 0 \Rightarrow \sin x = \cos x \xrightarrow{\div \cos x} \tan x = 1 \xrightarrow{\text{در بازه } (0, 2\pi)} x = \frac{\pi}{4}, \pi + \frac{\pi}{4}$$

$$A = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin x - \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sqrt{2} \sin(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$$

در یک دوره کامل مثلثاتی جوابهای معادله اخیر به صورت $x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6}$ یا $x - \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{6}$ است، پس $x = \frac{5\pi}{12}$ یا $x = \frac{13\pi}{12}$ به دست می آید:

$$\text{جمع جوابها} = \frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{12} + \frac{5\pi}{12} + \frac{13\pi}{12} = \frac{36\pi}{12} = 3\pi$$

تست و پاسخ ۱۳

انتهای کمان جوابهای معادله $\tan(\frac{\pi}{4} - x) - \tan 2x + 1 = 0$ روی دایره مثلثاتی، رئوس کدام چندضلعی محدب است؟

(۱) مثلث قائم الزاویه

(۳) مثلث متساوی الاضلاع

(۲) مستطیل

(۴) چهارضلعی غیرمستطیل

جوابها در دایره مثلثاتی را به هم وصل کنیم.

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره فرمول بسط تانژانت در کتاب دوازدهم مطرح شده است که نتایج مهمی از آن گرفته می شود. این سوال خاص نیز ترکیبی با معادله مثلثاتی داده شده است.

خودت حل کنی بهتره از رابطه $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$ استفاده کنید.

درس نامه فرمول بسط و دو برابر کمان تانژانت

$$1) \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \quad 2) \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

نتایج:

$$\bullet \tan(\alpha + \alpha) = \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \quad \bullet \tan(\alpha + \frac{\pi}{4}) = \frac{\tan \alpha + 1}{1 - \tan \alpha} \quad \bullet \tan(\alpha - \frac{\pi}{4}) = \frac{\tan \alpha - 1}{1 + \tan \alpha}$$

پاسخ تشریحی گام اول: از فرمول بسط تانژانت داریم:

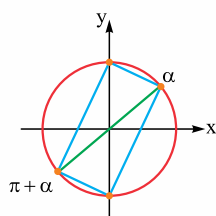
$$1) \tan(\frac{\pi}{4} - x) = \frac{\tan \frac{\pi}{4} - \tan x}{1 + \tan \frac{\pi}{4} \tan x} = \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x}$$

$$2) \tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

گام دوم: جای گذاری می کنیم:

$$\frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} - \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{(1 - \tan x)^2 - 2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = -1 \Rightarrow 1 + \tan^2 x - 4 \tan x = -1 + \tan^2 x \Rightarrow \tan x = \frac{1}{2}$$

(1 - tan x)(1 + tan x)



$\frac{1}{\pi}$ تانژانت زاویه معروفی نیست، اما زاویه‌ای مثل α در ربع اول (و $\pi + \alpha$ در ربع سوم) وجود دارد که تانژانت آن برابر $\frac{1}{\pi}$ است.

گام سوم: اتحادهای ۱ و ۲ که در گام اول از آن‌ها استفاده کردیم با فرض تعریف شده بودن $\tan x$ برقرار است، ولی ممکن است به ازای مقادیری که $\tan x$ تعریف نشده (یعنی $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$)، اما $\tan(\frac{\pi}{4} - x)$ و $\tan 2x$ تعریف شده باشند، معادله برقرار باشد؛ پس این اعداد را به صورت مستقیم بررسی می‌کنیم:

$$x = (2k+1)\frac{\pi}{4} \xrightarrow{k=0} x = \frac{\pi}{4} \xrightarrow[\text{در معادله}]{\text{جای گذاری}} \tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}) - \tan 2(\frac{\pi}{4}) = -1 - 0 = -1 \quad \checkmark$$

$$x = (2k+1)\frac{\pi}{4} \xrightarrow{k=1} x = \frac{3\pi}{4} \xrightarrow[\text{در معادله}]{\text{جای گذاری}} \tan(\frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{4}) - \tan 2(\frac{3\pi}{4}) = -1 - 0 = -1 \quad \checkmark$$

چون چهار زاویه محاطی رو به قطر هستند، پس هر چهار تا 90° درجه بوده و چهارضلعی مستطیل است.

تست و پاسخ ۱۴

اگر $\lim_{x \rightarrow a} \frac{a-2x}{x^2-2ax+4} = +\infty$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱ (۴)

-۱ (۳)

-۲ (۲)

۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره سوال بسیار مهمی است که بارها و بارها در کنکور آمده است.

خودت حل کنی بهتره مخرج باید به صورت مربع کامل باشد.

درس نامه •• بررسی تیپ مهم حدود بی‌نهایت

به تابع $f(x) = \frac{1}{x-2}$ دقت کنید. اگر از دو طرف به عدد ۲ نزدیک شویم، دو نوع بی‌نهایت مختلف به وجود می‌آید؛ چون $x = 2$ ریشه ساده مخرج بوده و علامت صفر در دو طرف $x = 2$ فرق می‌کند:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{0^+} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x-2)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty \quad \text{اما در تابع } f(x) = \frac{1}{(x-2)^2} \text{ داریم:}$$

یعنی اگر از هر دو طرف به ۲ نزدیک شویم، یک نوع بی‌نهایت به وجود می‌آید، چون $x = 2$ ریشه مضاعف مخرج است.

نکته در تابع گویای $y = \frac{1}{ax^2+bx+c}$ ، اگر حاصل حد وقتی $x \rightarrow k$ برابر یک نوع بی‌نهایت ($+\infty$ یا $-\infty$) شود، $x = k$ ریشه مضاعف

مخرج بوده و مخرج به صورت مربع کامل $a(x-k)^2$ است.

پاسخ تشریحی **گام اول:** وقتی $x \rightarrow a$ (از هر دو طرف) حاصل حد یک نوع بی‌نهایت شده است؛ پس $x = a$ ریشه مضاعف مخرج بوده و

$$(x-a)^2 = x^2 - 2ax + a^2 = x^2 - 2ax + 4 \Rightarrow a = \pm 2$$

مخرج به صورت $(x-a)^2$ باید باشد:

$$a = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-2x}{(x-2)^2} = \frac{-2}{0^+} = -\infty \quad \times$$

گام دوم: هر دو حالت را بررسی می‌کنیم:

$$a = -2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2} \frac{-2-2x}{(x+2)^2} = \frac{2}{0^+} = +\infty \quad \checkmark$$

پس $a = -2$ قابل قبول است.



تست و پاسخ ۱۵

اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - \frac{ax^2 + bx}{x+2}) = 2$ ، مقدار $a+b$ کدام است؟

- (۱) ۴
(۲) ۶
(۳) ۸
(۴) صفر

پاسخ: گزینه ۱

مشاوره سؤال مهم که مشابه آن را در سال های آینده خواهید دید.

خودت حل کنی بهتره مخرج مشترک بگیرید.

درس نامه بررسی $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ و f و g دو چندجمله ای هستند.

هر چندجمله ای در $\pm\infty$ هم ارز جمله با بزرگ ترین توان است، یعنی $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots) \sim a_n x^n$ برای رفع ابهام $\frac{\infty}{\infty}$ از این هم ارزی استفاده می کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots} = \frac{a_n x^n}{b_m x^m} = \begin{cases} \pm\infty & m < n \\ \frac{a_n}{b_m} & m = n \\ 0 & m > n \end{cases}$$

نکات

- اگر درجه صورت بزرگ تر از درجه مخرج باشد، حاصل حد بی نهایت می شود.
- اگر صورت و مخرج هم درجه باشند، حاصل حد برابر یک عدد حقیقی، یعنی نسبت ضریب بزرگ ترین درجه صورت به ضریب بزرگ ترین درجه مخرج می شود.
- اگر درجه مخرج بزرگ تر از درجه صورت باشد، حاصل حد صفر می شود.

نکته مهم

- اگر حاصل حد برابر یک عدد حقیقی غیر صفر شود، باید صورت و مخرج هم درجه باشند. (مثل این سؤال)
- برای رفع ابهام از حالت $\infty - \infty$ در تابع های کسری، مخرج مشترک گرفته و از نکات بالا استفاده می کنیم.

پاسخ تشریحی گام اول: مخرج مشترک می گیریم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - \frac{ax^2 + bx}{x+2}) = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 4x - ax^2 - bx}{x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2-a)x^2 + (4-b)x}{x+2} = 2$$

گام دوم: حاصل حد یک عدد حقیقی غیر صفر شده است، پس صورت و مخرج باید هم درجه باشند (مخرج درجه اول است؛ پس صورت هم باید درجه اول باشد). پس $2-a=0$ و $a=2$.

گام سوم: طبق هم ارزی پرتوان در بی نهایت داریم:

$$\frac{4-b}{1} = 2 \Rightarrow b=2$$

$$a+b=4$$

پس:



تست و پاسخ ۱۶

هرگاه $f(x) = \frac{2^{2x+2} + 3^{x+2}}{2^{2x} - 3^x}$ مقدار $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - f(-x))$ کدام است؟

۱۳ (۴)

-۷ (۳)

-۱ (۲)

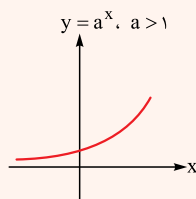
-۳ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

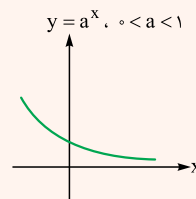
مشاوره درست است که حد تابع‌های نمایی در کتاب درسی نیامده است، اما مشابه این سؤال در سال ۹۸ در کنکور مطرح شده است؛ پس آن را به خوبی تحلیل کنید.

خودت حل کنی بهتره صورت و مخرج در $x \rightarrow +\infty$ هم‌ارز پایه بزرگ‌تر و در $x \rightarrow -\infty$ هم‌ارز پایه کوچک‌تر هستند.

درس‌نامه رفع ابهام تابع‌های نمایی



$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0 \end{cases} \quad (a \text{ بزرگتر از یک})$$



$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty \end{cases} \quad (a \text{ بین صفر و یک})$$

مثلاً $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x = +\infty$ ، اما $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{1}{2})^x = 0$. برای به دست آوردن حد $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3^x + 2^x)$ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (3^x + 2^x) = 3^x \left(1 + \underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)^x}_{\text{صفر}}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3^x = +\infty$$

نکته اگر $1 < a < b$ داریم: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (a^x + b^x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} b^x$ (در $+\infty$ هم‌ارز جمله با پایه بزرگ‌تر است).

نکته اگر $1 < a < b$ باشد، داریم $\lim_{x \rightarrow -\infty} (a^x + b^x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x$ (در $-\infty$ هم‌ارز جمله با پایه کوچک‌تر است). شبیه بالا برای به

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2^x + 3^x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x \left(1 + \underbrace{\left(\frac{3}{2}\right)^x}_{\text{صفر}}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = 0$$

دست آوردن حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2^x + 3^x)$ داریم:

پاسخ تشریحی گام اول: طبق هم‌ارزی، تابع نمایی در $+\infty$ هم‌ارز جمله با پایه بزرگ‌تر است؛ پس:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^{2x+2} + 3^{x+2}}{2^{2x} - 3^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^{2x} \times 2^2 + 3^x \times 3^2}{2^{2x} - 3^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4^x \times 4 + 3^x \times 9}{4^x - 3^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4^x \times 4}{4^x} = 4$$

گام دوم: طبق هم‌ارزی تابع نمایی در $-\infty$ هم‌ارز جمله با پایه کوچک‌تر است؛ پس:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(-x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^x \times 9}{-3^x} = -9$$

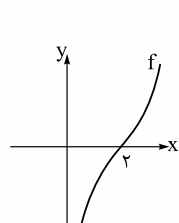
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - f(-x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \lim_{x \rightarrow +\infty} f(-x) = 4 - (-9) = 13$$

گام سوم:

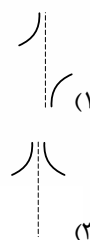
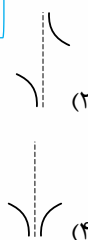


تست و پاسخ ۱۷

نمودار تابع f مطابق شکل است. نمودار تابع $g(x) = \frac{(-1)^{|x|}}{f(2-x)}$ در مجاورت محور عرض‌ها به کدام صورت است؟ $(\quad)$ ، نماد جزء صحیح است.



$x = 0$



پاسخ: گزینه ۴

مشاوره سؤال مفهومی و خوبی است چون که باید از روی نمودار علامت صفر را تعیین کنید.

خودت حل کنی بهتره با توجه به نمودار $f(2^+) = 0^+$ و $f(2^-) = 0^-$.

درس نامه •• حد بی‌نهایت

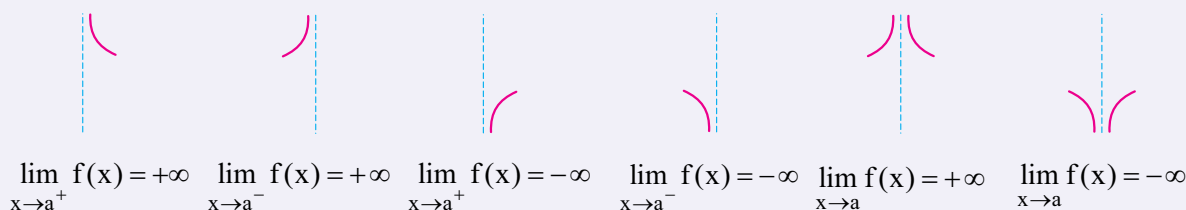
اگر در بررسی حد، حد صورت عدد غیر صفر و حد مخرج صفر شود (0 حدی یعنی به 0 نزدیک شود)، حاصل حد بی‌نهایت می‌شود؛ یعنی $\frac{\text{عدد}}{\text{صفر}} = \pm \infty$. برای به دست آوردن نوع بی‌نهایت باید علامت صفر مخرج را تعیین کنیم. در بررسی این حدود، یکی از حالت‌های زیر به وجود می‌آید:

$$\frac{+}{0^-} = -\infty \quad \frac{-}{0^-} = +\infty \quad \frac{-}{0^+} = -\infty \quad \frac{+}{0^+} = +\infty$$

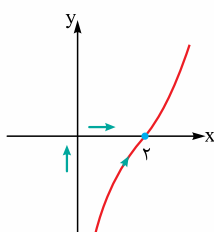
نکته برای تعیین علامت صفر مخرج از روش‌های زیر استفاده می‌کنیم:

- ۱ عددگذاری در نزدیکی حد داده شده
- ۲ تعیین علامت مخرج
- ۳ استفاده از دایره مثلثاتی در حدود مثلثاتی
- ۴ استفاده از نمودار (مثل این سؤال)

نکته اگر حاصل حد در نزدیکی نقطه a ، بی‌نهایت شود، نمودار تابع به صورت‌های زیر ممکن است باشد:



نکته اگر در بررسی حد به صورت مبهم $\frac{0}{0}$ رسیدیم، باید از روش‌های رفع ابهام صفر صفر استفاده کنیم. ممکن است بعد از رفع ابهام حاصل حد یک عدد حقیقی شود یا این که بی‌نهایت شود.



پاسخ تشریحی گام اول: نمودار تابع g را در دو طرف نقطه $x = 0$ بررسی می کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(-1)^{[x]}}{f(2-x)} = \frac{(-1)^{[0^+]}}{f(2-0^+)} = \frac{(-1)^0}{f(2^-)} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

دقت دارید که وقتی با مقادیر کمتر از ۲ به ۲ نزدیک می شویم، مقادیر f از پایین (0^-) به صفر نزدیک می شوند.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(-1)^{[x]}}{f(2-x)} = \frac{(-1)^{[0^-]}}{f(2-0^-)} = \frac{(-1)^{-1}}{f(2^+)} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

گام دوم:



پس نمودار تابع g در مجاورت محور عرض ها یا خط $x = 0$ به صورت مقابل است:
(چون در هر دو طرف به $-\infty$ میل می کند.)

تست و پاسخ ۱۸

مقدار $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \tan(x + \frac{3\pi}{4}) \tan 2x$ کدام است؟

$$-\frac{1}{2} (2)$$

$$\frac{1}{2} (1)$$

$$-1 (4)$$

$$1 (3)$$

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره می بینید که اتحادهای مثلثاتی همه جا ظاهر می شوند!

خودت حل کنی بهتره از فرمول بسط تانژانت عبارت ها را باز کرده و ساده کنید.

درس نامه فرمول بسط و دو برابر کمان تانژانت

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \quad \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\tan(\alpha + \alpha) = \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \quad \tan(\alpha + \frac{3\pi}{4}) = \frac{\tan \alpha - 1}{1 + \tan \alpha}$$

نتایج:

پاسخ تشریحی گام اول: عبارت را ساده می کنیم (دقت دارید که $\tan(\frac{3\pi}{4}) = \tan(\pi - \frac{\pi}{4}) = -1$):

$$1) \tan(x + \frac{3\pi}{4}) = \frac{\tan x + \tan \frac{3\pi}{4}}{1 - \tan x \tan \frac{3\pi}{4}} = \frac{\tan x - 1}{1 + \tan x}$$

$$2) \tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{1 + \tan x} \times \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{-2 \tan x}{(1 + \tan x)(1 + \tan x)} = \frac{-2}{2 \times 2} = -\frac{1}{2}$$

گام دوم: جای گذاری می کنیم:



تست و پاسخ ۱۹

نمودار تابع $g = \frac{bx^2 + 7}{ax^2 + 8x + 4a}$ تنها دو خط مجانب، موازی محورهای مختصات دارد. اگر $A(2, 4)$ نقطه تلاقی این مجانب‌ها باشد،

مقدار $a - b$ کدام است؟

۸ (۱)

۴ (۲)

۶ (۳)

۱۰ (۴)

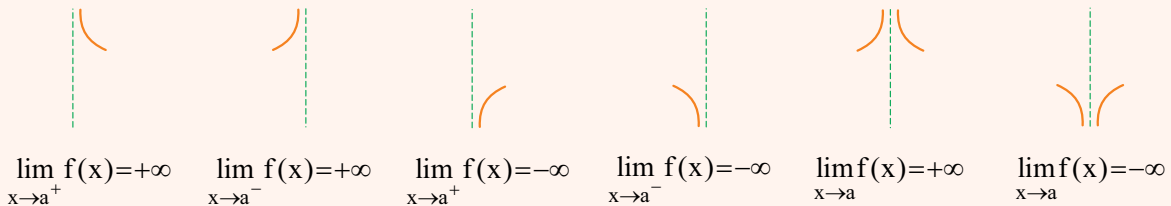
یک مجانب افقی و یک
مجانب عمودی

پاسخ: گزینه ۳

مشاوره سؤال بسیار مهم مشابه کنکور سر اسری. این‌که محل تلاقی مجانب‌ها را داده، یعنی بایک تیر دو نشان زده است و هر دو خط مجانب را داده است.

خودت حل کنی بهتره $x = 2$ و $y = 4$ خطوط مجانب‌های تابع هستند.

درس‌نامه •• مجانب‌های قائم تابع



در این صورت به خط $x = a$ مجانب قائم تابع می‌گوییم.

نکته برای به دست آوردن معادلات مجانب‌های قائم ابتدا تابع را ساده می‌کنیم.

نکته ریشه‌های مخرج که ریشه‌های صورت نباشند، معادلات مجانب‌های قائم هستند. (البته به شرطی که حداقل در یک طرف آن دامنه داشته باشیم.)

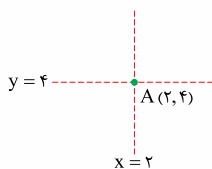
نکته اگر ریشه مخرج، ریشه صورت هم باشد، باید رفع ابهام کنیم. اگر بعد از رفع ابهام حاصل ∞ شود، آن ریشه مجانب قائم است و در غیر این صورت خیر.

به دست آوردن مجانب‌های افقی:

اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$ یا $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$ ، خط $y = b$ را مجانب افقی تابع می‌گوییم.

نکته برای به دست آوردن معادلات مجانب‌های افقی یک بار $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و بار دیگر $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ (در صورت متفاوت بودن) را حساب کنیم. اگر حاصل عدد حقیقی b شود، $y = b$ مجانب افقی است. یک تابع حداکثر دو مجانب افقی دارد.

نکته در تابع گویای $f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots}$ (صورت و مخرج هم‌درجه هستند)، خط $y = \frac{a_n}{b_n}$ مجانب افقی تابع است.



پاسخ تشریحی گام اول: $A(2, 4)$ نقطه تلاقی دو مجانب افقی و قائم است، پس $x = 2$ مجانب قائم (ریشه مخرج) و $y = 4$ مجانب افقی (نسبت ضرایب پرتوان) است.

گام دوم: از آنجایی که تنها یک مجانب قائم داریم، پس $x = 2$ تنها ریشه مخرج است، اما چون مخرج درجه دوم است، پس باید به صورت مربع کامل باشد؛ یعنی مخرج باید به صورت $a(x-2)^2$ باشد: $a(x-2)^2 = a(x^2 - 4x + 4) = ax^2 - 4ax + 4a = ax^2 + 8x + 4a$ پس $a = -2$ و $-4a = 8$ و $a = -2$ به دست می آید.

$$\frac{b}{-2} = 4 \Rightarrow b = -8$$

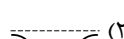
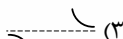
گام سوم: معادله مجانب افقی همان $y = \frac{b}{a}$ است؛ پس:

$$a - b = -2 - (-8) = 6$$

بنابراین:

تست و پاسخ ۲۰

نمودار تابع $f(x) = 3 - \sqrt{\frac{4x-1}{x+2}}$ در کنار مجانب افقی خودش به کدام صورت است؟

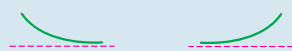


پاسخ: گزینه ۳

مشاوره سؤال بسیار مهم مشابه کنکور و تمرین های کتاب درسی. مقایسه نمودار و مجانب افقی و این که از کجا بفهمیم نمودار بالای خط مجانب افقی است یا پایین آن.

$$\text{خودت حل کنی بهتره} \quad \frac{4x-1}{x+2} = \frac{4(x+2)-9}{x+2} = 4 - \frac{9}{x+2}$$

به دست آوردن مجانب های افقی:



اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$ یا $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$ خط $y = b$ را مجانب افقی تابع می گوئیم.

نکته برای به دست آوردن معادلات مجانب های افقی یک بار $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و بار دیگر $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ (در صورت متفاوت بودن) را حساب می کنیم. اگر حاصل عدد حقیقی b شود، $y = b$ مجانب افقی است. یک تابع حداکثر دو مجانب افقی دارد.

نکته در تابع $f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots}$ (صورت و مخرج هم درجه هستند)، خط $y = \frac{a_n}{b_n}$ مجانب افقی تابع است.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(3 - \sqrt{\frac{4x-1}{x+2}} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(3 - \sqrt{\frac{4x}{x}} \right) = 3 - 2 = 1$$

پاسخ تشریحی گام اول: ابتدا مجانب افقی تابع را به دست می آوریم:

گام دوم: باید دید در $x \rightarrow +\infty$ و در $x \rightarrow -\infty$ نمودار بالای این خط قرار دارد یا پایین آن:

$$\frac{4x-1}{x+2} = \frac{4x+8-9}{x+2} = \frac{4(x+2)-9}{x+2} = 4 - \frac{9}{x+2} < 4$$

در $x \rightarrow +\infty$ داریم:

یعنی در $+\infty$ مقدار زیر رادیکال کمی از ۴ کمتر است، پس مقدار $\sqrt{\frac{4x-1}{x+2}}$ کمی از ۲ کمتر و مقدار تابع از یک بیشتر است ($3 - 2^- = 1^+$);

یعنی در $x \rightarrow +\infty$ نمودار بالای خط $y = 1$ قرار دارد، اما در $x \rightarrow -\infty$ مقدار $\frac{9}{x+2}$ منفی بوده، پس $4 - \frac{9}{x+2} > 4$ ؛ بنابراین مقدار

$\sqrt{\frac{4x-1}{x+2}}$ کمی از ۲ بزرگتر است، پس چون $3 - 2^+ = 1^-$ تابع در $x \rightarrow -\infty$ زیر مجانب خود قرار دارد؛ بنابراین نمودار به صورت زیر می شود:





ریاضیات گسسته و آمار و احتمال: ریاضیات گسسته: صفحه‌های ۱ تا ۴۲

تست و پاسخ ۲۱

چه تعداد از گزاره‌های زیر درست است؟

(الف) «اگر n اول باشد، $1 + 2^n$ اول است.» در بین اعداد طبیعی کم‌تر از ۶ دارای دو مثال نقض است.

(ب) میانگین پنج عدد صحیح متوالی همواره برابر با عدد وسطی می‌شود.

(پ) اگر α عددی گنگ و β عددی گویا باشد، عدد $\alpha(\beta - 2)$ همواره، گنگ است.

(ت) میانگین حسابی عدد مثبت a و معکوش همواره بزرگ‌تر یا مساوی ۱ است.

۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴)

$$\frac{x+y}{2}$$

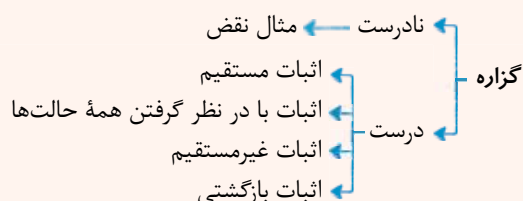
مثالی که نشان می‌دهد نتیجه‌گیری نادرست است.

پاسخ: گزینه ۴

مشاوره درس اول نظریه اعداد بیشتر به صورت اثباتی است. یک بار مطالب کتاب را به دقت مطالعه کنید. اگر قرار باشد از این درس سوالی در کنکور بیاید (تا حالا نیامده)، به احتمال زیاد از همین تمرین‌ها خواهد بود.

درس نامه • روش‌های استدلال

گزاره جمله خبری است که فقط یک ارزش دارد؛ یا درست است یا نادرست. نادرستی گزاره‌ها را با مثال نقض نشان می‌دهیم و برای درستی از یکی از روش‌های اثبات استفاده می‌کنیم.



مثال نقض: مثالی که نشان می‌دهد یک نتیجه‌گیری یا حدس کلی، نادرست است.

نکته برای رد کردن یک حکم (اثبات نادرستی) ارائه یک مثال نقض کافی است.

نکته مثال نقض باید در فرض درست در بیاید، ولی حکم را رد کند.

در هر کدام از چهار روش اثبات به صورت زیر عمل می‌کنیم:

نوع اثبات	روش کار	کاربرد
مستقیم	از درستی فرض به درستی حکم می‌رسیم.	از زوج یا فرد بودن اعداد به درستی حکم می‌رسیم.
در نظر گرفتن همه حالت‌ها	n را حالت‌بندی می‌کنیم (مثلاً زوج و فرد) و در هر کدام به درستی حکم می‌رسیم.	برای هر n می‌خواهیم حکمی را ثابت کنیم.
برهان خلف	خلاف حکم را به تناقض می‌رسانیم.	اثبات گنگ بودن اعداد - هر جا که اثبات مستقیم دشوار باشد.
بازگشتی	حکم را با اعمال دوطرفه به یک رابطه همواره درست می‌رسانیم.	نامساوی‌ها



نکات

۱ برای اثبات مستقیم قضیه‌ها، باید شکل اعداد را به درستی در نظر بگیریم:

شکل ریاضی	شکل فارسی	شکل ریاضی	شکل فارسی
$2k$	اعداد زوج	$2k$ و $2k'$	دو عدد زوج دلخواه
$2k+1$ یا $2k-1$	اعداد فرد	$2k+1$ و $2k'+1$	دو عدد فرد دلخواه
n و $n+1$	دو عدد متوالی	$2k$ و $2k+2$	دو عدد زوج متوالی
$n+1$ و $n+2$	سه عدد متوالی	$2k+1$ و $2k-1$	دو عدد فرد متوالی
$\{\frac{a}{b} a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$	عدد گویا	nq	عدد مضرب n

۲ در مورد گویا یا گنگ بودن جمع، تفریق و ضرب اعداد داریم:

ضرب	جمع و تفریق (نوع اثبات)	
گویا (اثبات مستقیم)	گویا (اثبات مستقیم)	هر دو گویا
(اگر عدد گویا صفر باشد، صفر ولی ضرب گویای ناصفر در گنگ، گنگ است.)	گنگ (برهان خلف)	یکی گویا و یکی گنگ
ممکن است گنگ یا گویا	ممکن است گنگ یا گویا	هر دو گنگ

۳ در اثبات با در نظر گرفتن همه حالت‌ها از درستی هم‌ارزی $p \vee q \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$ استفاده می‌کنیم.

۴ میانگین حسابی دو عدد x و y برابر $\frac{x+y}{2}$ و میانگین هندسی دو عدد مثبت x و y برابر $\sqrt{xy}$ است.

پاسخ تشریحی الف) مثال نقض باید در فرض درست بیاید، ولی حکم را رد کند. $n=1, 4$ که اول نیستند (در فرض درست نیستند)؛ پس مثال نقض به حساب نمی‌آیند، اما:

$$n=2 \Rightarrow 2^2+1=5$$

$$n=3 \Rightarrow 2^3+1=9 \text{ غیراول}$$

$$n=5 \Rightarrow 2^5+1=33 \text{ غیراول}$$

بنابراین $n=3$ و $n=5$ اعداد اولی هستند که به ازای آن‌ها 2^n+1 غیراول است؛ پس مثال نقض هستند. این گزاره درست است.

ب) پنج عدد صحیح متوالی را $n, n+1, n+2, n+3, n+4$ در نظر می‌گیریم:

$$\frac{n+(n+1)+(n+2)+(n+3)+(n+4)}{5} = \frac{5n+10}{5} = n+2 = \text{عدد وسطی}$$

پس این گزاره نیز درست است.

پ) حاصل ضرب عدد گنگ در گویای ناصفر، گنگ است. $\beta^2-2 \neq 0$ (ریشه‌های آن $\pm\sqrt{2}$ است که گویا نیست)؛ پس $\alpha(\beta^2-2)$ قطعاً گنگ

است. این گزاره نیز درست است.

$$a + \frac{1}{a} \geq 2$$

ت) میانگین حسابی همان میانگین معمولی است؛ پس باید نشان دهیم:

$$\xrightarrow{\times 2} a + \frac{1}{a} \geq 2 \xrightarrow{\times a} a^2 + 1 \geq 2a \Leftrightarrow \underbrace{(a-1)^2}_{\text{همواره درست}} \geq 0$$

با اثبات بازگشتی داریم:

پس این گزاره نیز درست است.

بنابراین هر ۴ گزاره درست هستند.



تست و پاسخ ۲۲

اگر $ab \mid c$ ، حاصل $([a, c^2], (b, 3c))$ کدام است؟
 $3 \mid c \mid 2$ $|b| \mid 3$ $c^2 \mid 4$
 نماد ب.م.م. نماد ک.م.م.

پاسخ: گزینه ۳

مشاوره یک سوال مشابه تمرین های کتاب درسی! محک خوبی است برای این که بفهمید روی ویژگی های عاد کردن و ب.م.م. مسلط هستید یا نه.

خودت حل کنی بهتره اگر $a \mid b$ ، آن گاه $(a, b) = |a|$ و $[a, b] = |b|$.

درس نامه •• ویژگی های عاد کردن

مضرب سمت چپ $\rightarrow$ $\square$ $\leftarrow$ مقسوم علیه سمت راست

ردیف	نماد ریاضی	توضیح
۱	$a \mid b \Rightarrow ma \mid mb$	می توانیم دو طرف را در عدد صحیح m ضرب کنیم.
۲	$a \mid b \Rightarrow a \mid mb$	فقط سمت راست را در عدد صحیح دلخواه m ضرب کنیم.
۳	$a \mid b \Rightarrow a^n \mid b^n$	دو طرف را به توان عدد طبیعی n برسانیم.
۴	$a \mid b \Rightarrow a \mid b^n$	فقط سمت راست را به توان عدد طبیعی دلخواه برسانیم.
۵	$\pm a \mid \pm a$	هر عدد صحیح خودش و قرینه اش را عاد می کند.
۶	$\pm 1 \mid \pm a$	± 1 هر عددی را عاد می کند.
۷	$a \mid 0$	هر عدد صحیح، صفر را عاد می کند.
۸	$0 \mid a \Rightarrow a = 0$	صفر فقط خودش را عاد می کند.
۹	$\begin{cases} a \mid b \\ a \mid c \end{cases} \Rightarrow a \mid b \pm c$	اگر a دو عدد b و c را عاد کند، جمع و تفریق آن ها را هم عاد می کند.

ویژگی های ب.م.م. و ک.م.م.

$[a, b]$ = نماد ک.م.م.

(a, b) = نماد ب.م.م.

۱) حاصل ضرب عامل های اول مشترک با توان کم تر (a, b)

۲) $a \mid b \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b) = |a| \\ [a, b] = |b| \end{cases}$

۳) حاصل ضرب عامل های اول مشترک با توان بیشتر در غیر مشترک ها $[a, b]$

۴) $\begin{cases} (ka, kb) = |k| \times (a, b) \\ [ka, kb] = |k| \times [a, b] \end{cases}$ ویژگی فاکتورگیری

$(a, b) = 1 \Rightarrow [a, b] = |ab|$

۵) $[a, b] = \frac{|ab|}{(a, b)} = \frac{|ab|}{\text{ب.م.م.}} = \text{ارتباط ب.م.م. و ک.م.م.}$



پاسخ تشریحی

گام اول: سمت چپ رابطه عادی کردن را لاغر می کنیم و سمت راست را چاق می کنیم، می شود:

$$ab|c \begin{cases} a|c \Rightarrow a|c^2 \\ b|c \Rightarrow b|3c \end{cases}$$

$$a|c^2 \Rightarrow [a, c^2] = |c^2| = c^2$$

$$b|3c \Rightarrow (b, 3c) = |b|$$

گام دوم:

گام سوم: شبیه گام اول $c^2 | |b|$ ، پس $(|b|, c^2) = |b|$ می شود.

تست و پاسخ ۳۳

در تقسیم عدد طبیعی a بر b باقی مانده و خارج قسمت به ترتیب برابر ۱۱ و ۱۳ هستند. اگر a مضرب ۵ باشد، رقم دهگان کوچک ترین مقدار a کدام است؟

۵ a ≡ ۰	۸ (۴)	۶ (۳)	۵ (۲)	۱ (۱)
------------	-------	-------	-------	-------

پاسخ: گزینه ۴

مشاوره یک سؤال خوب مشابه کنکور سر اسری! سؤال های ترکیبی از قضیه تقسیم و معادله همنهشتی خیلی مهم هستند و بارها و بارها در کنکور از آن ها سؤال آمده است.

خودت حل کنی بهتره قضیه تقسیم را بنویسید و معادله همنهشتی حل کنید.

درس نامه

قضیه تقسیم

$$a = bq + r$$

مقسوم
↑
a | b → مقسوم علیه
q → خارج قسمت
r
↓
باقی مانده

$$0 \leq r < b$$

شرط باقی مانده

تذکر هر بار که قضیه تقسیم را می نویسید، شرط باقی مانده را نیز حتماً به همراه آن بنویسید.

حل معادله همنهشتی

برای حل معادله همنهشتی $ax \equiv b^m$ مراحل زیر را طی می کنیم:

(۱) اگر a و b اعداد بزرگی هستند، همنهشت آن ها به پیمانه m را قرار می دهیم.

(۲) با اضافه کردن مضارب پیمانه به b کاری می کنیم تا دو طرف بر a بخش پذیر باشند.

(۳) دو طرف را به a ساده می کنیم تا x به دست آید. حواستان باشد اگر $(a, m) = d$ باشد، پیمانه را نیز باید به d تقسیم کنید؛ اما اگر

$(a, m) = 1$ باشد، بدون تغییر پیمانه، a را از دو طرف ساده کنید.

پاسخ تشریحی

گام اول: قضیه تقسیم را می نویسیم:

$$a | b \\ \underline{13} \Rightarrow a = b(13) + 11$$

گام دوم: شرط باقی مانده را می نویسیم: $0 \leq 11 < b$

گام سوم:

$$13b + 11 \equiv 0 \xrightarrow[11 \equiv 1]{13 \equiv 3} 3b + 1 \equiv 0 \Rightarrow 3b \equiv -1 + 2 \times 5 = 9$$

$$\xrightarrow[(3, 5) = 1]{\div 3} b \equiv 3 \Rightarrow b = 5k + 3$$

با توجه به شرط باقی مانده، b باید بزرگ تر از ۱۱ باشد؛ پس کوچک ترین مقدار b به ازای $k = 2$ ، یعنی $b = 13$ به دست می آید.



$$a_{\min} = b(13) + 11 = 13(13) + 11 = 180$$

گام چهارم؛ کوچکترین مقدار a برابر است با:
که رقم وسط آن برابر ۸ است.

تست و پاسخ ۲۴

به ازای چند عدد طبیعی دورقمی n ، دو عدد $5n + 3$ و $2n - 1$ نسبت به هم اول هستند؟

۸۰ (۴)

۸۱ (۳)

۸۲ (۲)

۷۹ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره این سؤال بارها و بارها در کنکور مطرح شده است. ببینید چه جوری ب.م.م با معادله همنهشتی ترکیب می‌شود.

خودت حل کنی بهتره اول ب.م.م دو عدد را پیدا کنید.

درس نامه

برای پیدا کردن ب.م.م دو عبارت a و b ، بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک آن‌ها را d می‌گیریم؛ یعنی $d = (a, b)$.

(۱) از $a \mid d$ و $b \mid d$ ویژگی‌های عادی‌کردن استفاده می‌کنیم.

(۲) جواب‌های به دست آمده برای d را کنترل می‌کنیم؛ یعنی می‌بینیم دو عدد از نظر زوج و فردی یا مضرب عدد خاصی بودن چگونه هستند و ب.م.م می‌تواند آن عدد خاص باشد یا خیر.

بررسی یک تیپ مهم؛ به دست آوردن ب.م.م دو عدد $an + b$ و $a'n + b'$:

$$d = (an + b, a'n + b') \Rightarrow d \mid \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - ba' \quad (\text{دترمینان ضرایب})$$

نکات (۱) جواب‌های به دست آمده برای d در حالت کلی نیاز به کنترل دارند، اما معمولاً حاصل $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$ عددی اول بوده و نیازی به این کار نیست.

(۲) برای به دست آوردن اعداد n به طوری که ب.م.م برابر d باشد، یکی از دو عدد را به دلخواه انتخاب کرده (مثلاً اولی) و معادله همنهشتی $d \mid an + b \Rightarrow an + b \equiv 0$ رویه‌رو را حل می‌کنیم؛

(۳) برای به دست آوردن اعداد n به طوری که ب.م.م برابر یک شود (یعنی دو عدد نسبت به هم اول شوند)، ابتدا از نکته ۲ حالت‌هایی که ب.م.م غیر یک می‌شود را به دست می‌آوریم و بعد آن‌ها را از کل حالت‌ها کم می‌کنیم.

نکات (۱) ب.م.م هر دو عدد متوالی برابر یک است؛ یعنی $(n, n+1) = 1$.

(۲) ب.م.م هر دو عدد فرد متوالی برابر یک است؛ یعنی $(2n-1, 2n+1) = 1$.

(۳) ب.م.م هر دو عدد زوج متوالی برابر دو است؛ یعنی $(2n, 2n+2) = 2$.

(۴) $(a, 1) = 1$ و $[a, 1] = |a|$.

پاسخ تشریحی گام اول: ب.م.م دو عدد d را می‌گیریم؛ یعنی $d = (2n-1, 5n+3)$.

$$\begin{aligned} d \mid 2n-1 &\Rightarrow d \mid \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 6 - (-5) = 11 \xrightarrow{d \mid} \begin{cases} d = 1 \\ d = 11 \end{cases} \\ d \mid 5n+3 &\end{aligned}$$

گام دوم؛ باید اعداد n را طوری به دست آوریم که $d = 1$ باشد، اما محاسبه این اعداد دشوار است. پس از اصل متمم استفاده می‌کنیم؛ یعنی حالت‌هایی که ب.م.م برابر ۱۱ می‌شود را پیدا کرده و از کل اعداد دورقمی کم می‌کنیم:

یکی از اعداد $5n + 3$ یا $2n - 1$ را به دلخواه می‌گیریم، اما چون ضریب ۲ کوچک‌تر است، بهتر است $2n - 1$ را بگیریم.

$$11 \mid 2n-1 \xrightarrow{\text{به زبان همنهشتی}} 2n-1 \equiv 0 \Rightarrow 2n \equiv 1+11=12 \xrightarrow{(2,11)=1} n \equiv 6 \Rightarrow n = 11k + 6$$



گام سوم: به ازای $k = 1, 2, \dots, 8$ عدد دورقمی می‌شود؛ پس ۸ عدد دورقمی n داریم که به ازای آن‌ها ب.م.م برابر ۱۱ می‌شود. از طرفی ۹۰ عدد دورقمی داریم، پس $82 = 90 - 8$ عدد دورقمی n داریم که ب.م.م برابر یک می‌شود؛ یعنی به ازای آن‌ها دو عدد نسبت به هم اول‌اند.

تست و پاسخ ۲۵

مجموع باقی‌مانده و نصف خارج قسمت تقسیم عدد طبیعی a بر ۱۷ برابر ۲۱ است. اگر باقی‌مانده تقسیم $a - ۱۳$ بر ۶۶ برابر ۴۱ باشد، رقم دهگان کوچک‌ترین مقدار a کدام است؟

۳ (۴)

۶ (۳)

۵ (۲)

۸ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

درس‌نامه •• تبدیل مقسوم‌علیه به مضارب آن

برای تبدیل مقسوم‌علیه به مضارب آن، خارج قسمت را افراز مناسب می‌کنیم، مثلاً فرض کنید باقی‌مانده a بر ۷ برابر ۱ باشد؛ پس $a = 7q + 1$. برای این که باقی‌مانده a بر ۱۴ پیدا کنیم (به جای این که دو طرف را در ۲ ضرب کنیم)، دو حالت برای q در نظر می‌گیریم:

$$q = 2k \text{ (زوج)} \Rightarrow a = 7(2k) + 1 = 14k + 1$$

$$q = 2k + 1 \text{ (فرد)} \Rightarrow a = 7(2k + 1) + 1 = 14k + 8$$

پس باقی‌مانده a بر ۱۴ برابر ۱ یا ۸ است.

یا اگر باقی‌مانده a را بر ۲۱ بخواهیم، برای q سه حالت در نظر می‌گیریم:

$$q = 3k \Rightarrow a = 7(3k) + 1 = 21k + 1$$

$$q = 3k + 1 \Rightarrow a = 7(3k + 1) + 1 = 21k + 8$$

$$q = 3k + 2 \Rightarrow a = 7(3k + 2) + 1 = 21k + 15$$

پس باقی‌مانده a بر ۲۱ برابر ۱، ۸ یا ۱۵ می‌تواند باشد.

پاسخ تشریحی گام اول: قضیه تقسیم، شرط باقی‌مانده و ارتباط بین باقی‌مانده و خارج قسمت که در صورت سؤال گفته شده را به زبان ریاضی می‌نویسیم:

$$\begin{cases} a = 17q + r \\ 0 \leq r < 17 \\ r + \frac{q}{7} = 21 \Rightarrow r = 21 - \frac{q}{7} \Rightarrow a = 17q + 21 - \frac{q}{7} = 33\left(\frac{q}{7}\right) + 21 \end{cases}$$

گام دوم: q باید زوج باشد (در غیر این صورت $\frac{q}{7}$ غیر صحیح می‌شود)، پس $q = 2k$ می‌گیریم: $a = 33k + 21 \Rightarrow a - 13 = 33k + 8$ (I)

گام سوم: با توجه به درس‌نامه برای این که مقسوم‌علیه برابر ۶۶ شود، دو حالت برای k می‌گیریم: ۱) $k = 2t \Rightarrow a - 13 = 66t + 8 \times$

۲) $k = 2t + 1 \Rightarrow a - 13 = 66t + 41 \checkmark$ (چون باقی‌مانده $a - 13$ بر ۶۶ برابر ۴۱ است.)

گام چهارم: $q = 2k = 2(2t + 1) = 4t + 2$ و $r + \frac{4t + 2}{7} = 21$ یعنی: $r + 2t + 1 = 21$

گام پنجم: اگر بزرگ‌ترین مقدار باقی‌مانده یعنی $r = 16$ بگیریم، کم‌ترین مقدار t یعنی $t = 2$ و در نتیجه کم‌ترین مقدار a از رابطه (I) به دست می‌آید: $a_{\min} = 33(5) + 21 = 186$

رقم دهگان این عدد برابر ۸ است. (دقت دارید که اگر $t = 2$ ، آن‌گاه $2k = 10$ و $k = 5$ می‌شود.)

تست و پاسخ ۲۶

چند عدد چهاررقمی مربع کامل مضرب ۷۵ وجود دارد؟ ($\sqrt{10} \approx 3.16$)

از ۱۰۰۰ تا کم‌تر از ۱۰۰۰۰

$75 \mid x^2$

۵ (۲)

۱۰ (۴)

۴ (۱)

۹ (۳)

پاسخ: گزینه ۱

مشاوره درست است که درسی به نام اعداد اول در کتاب درسی وجود ندارد، اما در چند تمرین کتاب به این موضوع اشاره شده است؛ به علاوه این که در سال‌های اخیر از این موضوع در کنکور سؤال آمده است؛ پس آن را به خوبی تحلیل کنید.



خودت حل کنی بهتره $75 = 3 \times 5^2$

درس نامه •• بخش پذیری و عامل ها

(۱) اگر $a \mid b$ ، آن گاه a مقسوم علیه b (بر a بخش پذیر) و b مضرب a است.

(۲) اگر $a \neq \pm 1$ ، باشد، رابطه $a^m \mid a^n$ فقط وقتی برقرار است که $m \leq n$.

(۳) اگر $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots$ تجزیه شود، داریم:

همه عامل های $p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \dots$ باید در b وجود داشته باشند. $n \mid b \Rightarrow p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots \mid b$ (الف)

a فقط عامل های $p_1, p_2, \dots$ و ... با توان کم تر یا مساوی از توان آن در سمت راست می تواند داشته باشد. $a \mid n \Rightarrow a \mid p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots$ (ب)

مثلاً از رابطه $2^2 \times 3 \mid b$ می فهمیم $b = 2^2 \times 3 \times k$ که k عامل های دیگر عدد b است، اما از رابطه $2^2 \times 3 \mid a$ می فهمیم $a = 2^\alpha \times 3^\beta$ بوده است که $0 \leq \alpha \leq 2$ و $0 \leq \beta \leq 1$.

پاسخ تشریحی گام اول: باید اعداد 2^2 را به دست آوریم به طوری که: $3 \times 5^2 = 75 \mid x^2$

گام دوم: در تجزیه عدد x باید عامل های 3 و 5 وجود داشته باشد تا x^2 بر 75 بخش پذیر باشد.

دقت دارید اگر x شامل 5 باشد، x^2 شامل 5^2 می شود و رابطه عا دکردن درست است.

پس x باید به صورت $x = 3 \times 5 \times k = 15k$ باشد.

گام سوم:

$$10000 \leq (15k)^2 < 100000 \xrightarrow{\sqrt{\quad}} 100\sqrt{10} \leq 15k < 1000$$

$$\xrightarrow{\sqrt{10} \approx 3.16} 31.6 \leq 15k < 1000 \Rightarrow 3 \leq k \leq 6 \Rightarrow k = 3, 4, 5, 6$$

پس 4 عدد وجود دارد.

تست و پاسخ ۲۷

باقی مانده تقسیم عدد 6^{111} بر 33 کدام است؟

۲۷ (۴)

۱۵ (۳)

۶ (۲)

۳ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره به دست آوردن باقی مانده با استفاده از همنهشتی پای ثابت امتحان نهایی و کنکور است. به چگونگی پیدا کردن همنهشتی اولیه خیلی دقت کنید.

درس نامه •• تعریف همنهشتی و ویژگی های آن

دو عدد a و b را به پیمانه m همنهشت می گوئیم و می نویسیم $a \equiv b \pmod{m}$ ، هرگاه $a - b$ مضرب m باشد. مفهوم این تعریف این است که a و b در تقسیم بر m باقی مانده یکسانی دارند.

اگر $a \equiv b \pmod{m}$ ، می توانیم نتیجه های زیر را بگیریم:

ویژگی	توضیح فارسی
$a + c \equiv b + c \pmod{m}$	دو طرف را با c جمع (یا تفریق) کنیم (به زبان دیگر اگر عددی از یک طرف به طرف دیگر برود، علامت آن عوض می شود).
$ca \equiv cb \pmod{m}$	دو طرف را در c ضرب کنیم.
$a^n \equiv b^n \pmod{m}$	دو طرف را به توان عدد طبیعی دلخواه n برسانیم.
$a \equiv b \pm mk \pmod{m}$	مضارب پیمانه را به هر طرف که بخواهیم اضافه یا کم کنیم.
اگر $n \mid m$ ، آن گاه $a \equiv b \pmod{n}$	به جای پیمانه m مقسوم علیه آن (یعنی n) را قرار دهیم.



به دست آوردن باقی مانده اعداد توان دار

- (۱) اگر a عددی بزرگ باشد، همنهشت آن به پیمانه m که کوچکتر از آن است (منفی یا مثبت مهم نیست) را قرار می دهیم.
- (۲) توانی از a پیدا می کنیم که همنهشت ۱ یا -1 به پیمانه m باشد. (اگر نشد سعی می کنیم توانی از a که همنهشت عدد کوچکی به پیمانه m باشد، پیدا کنیم).
- (۳) با توان رساندن دو طرف و ضرب دو طرف در اعداد مناسب a^n را می سازیم.

قضیه فرما

اگر p اول باشد، $a \not\equiv 0 \pmod{p}$ ، آن گاه $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

اگر پیمانه اول باشد، با قضیه فرما هم می توانیم رابطه همنهشتی اولیه بنویسیم.

تغییر پیمانه در همنهشتی

- (۱) اگر دو عدد به پیمانه m همنهشت باشند، به پیمانه مقسوم علیه های m نیز همنهشت هستند. مثلاً اگر $a \equiv b \pmod{m}$ ، آن گاه $a \equiv b \pmod{15}$ و $a \equiv b \pmod{10}$.
- (۲) اگر دو عدد به پیمانه m و n همنهشت باشند، به پیمانه ک.م.م m و n نیز همنهشت هستند. مثلاً اگر $a \equiv b \pmod{7}$ و $a \equiv b \pmod{11}$ ، آن گاه $a \equiv b \pmod{77}$.

تذکر

در استفاده از نکته دوم دو طرف همنهشتی باید یکسان باشند.

- (۳) اگر پیمانه عددی بزرگ و غیر اول باشد، می توانیم آن را به ضرب دو عدد (که نسبت به هم اول اند) بشکنیم. باقی مانده را به هر دو عدد به دست آوریم. سمت راست هر دو همنهشتی را یکسان کرده و از ویژگی ۲ استفاده کنیم. (مثل این سؤال)

پاسخ تشریحی

گام اول: $33 = 3 \times 11$ است، پس پیمانه را به ۳ و ۱۱ می شکنیم. باقی مانده 6^{111} را بر ۳ و ۱۱ به دست می آوریم:

$$6 \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow 6^{111} \equiv 0 \pmod{3} \quad \underbrace{6^{10} \equiv 1}_{\text{قضیه فرما}} \xrightarrow{\text{توان ۱۱}} 6^{110} \equiv 1 \xrightarrow{\times 6} 6^{111} \equiv 6 \pmod{11}$$

گام دوم: باید دو طرف همنهشتی را با زیاد یا کم کردن پیمانه ها یکسان کنیم تا بتوانیم از قضیه ک.م.م پیمانه استفاده کنیم:

$$6^{111} \equiv 0 + 2 \times 3 = 6 \pmod{33} \Rightarrow 6^{111} \equiv 6 \pmod{33}$$

تست و پاسخ ۲۸

به ازای چند مقدار دورقمی n ، رابطه همنهشتی $4^n \equiv 1$ به پیمانه 31×15 برقرار است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۸ (۴) ۹

پاسخ: گزینه ۴

مشاوره سؤال بسیار مهمی است که بارها مشاهده آن در کنکور آمده است. ببینید وقتی مجهول در توان قرار می گیرید چه کاری باید انجام دهید.

خود حل کنی بهتره کوچکترین مقدار n را یک بار به پیمانه ۱۵ و بار دیگر به پیمانه ۳۱ پیدا کنید.

درس نامه ●● بررسی یک تیپ مهم کنکور

به دست آوردن تعداد اعداد n که $a^n \equiv 1 \pmod{m}$

روش اول: با جست و جو کوچکترین توان a را طوری پیدا کنیم که $a^k \equiv 1$ ، در نتیجه $a^{2k} \equiv 1$ ، $a^{3k} \equiv 1$ و ... این یعنی n باید مضرب k باشد.

روش دوم: طبق اتحاد $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1})$ ، $a^n - b^n = 0$ می توان نتیجه گرفت $a^n - b^n \equiv 0 \pmod{a - b}$. اگر همه توان ها

عددی طبیعی باشند، از این اتحاد، نتیجه می شود:

● اگر $\frac{n}{k}$ عددی طبیعی باشد (یا $k \mid n$)، آن گاه $a^n - b^n \equiv 0 \pmod{a^k - b^k}$.

$a^n - 1 \mid m$ ، پس سعی می کنیم m را به صورت $a^k - 1$ بنویسیم و از نتیجه بالا استفاده کنیم.



پاسخ تشریحی

راه اول: گام اول: به جای پیمانه می توانیم مقسوم علیه های آن را قرار دهیم؛ پس یک بار n را طوری پیدا می کنیم که $4^n \equiv 1^{15}$ و بار دیگر $4^n \equiv 1^{31}$ (یا $2^{2n} \equiv 1$).

گام دوم: $n = 2k$ باید باشد؛ یعنی n باید زوج باشد. $4^{2k} \equiv 1^{15} \Rightarrow$ توان دلخواه k $4^2 \equiv 1$

$2n$ باید مضرب ۵ باشد یا n مضرب ۵ باشد. $2^{2n} \equiv 1^{31} \Rightarrow$ توان دلخواه k $2^5 \equiv 1$

گام سوم: n زوج و بر ۵ بخش پذیر است، پس n باید مضرب ۱۰ باشد؛ بنابراین $n = 10, 20, \dots, 90$ می تواند باشد. ۹ مقدار دورقمی برای n وجود دارد. راه دوم:

گام اول: اگر $15 = 4^2 - 1$ بنویسیم، $4^n - 1 \mid 4^2 - 1$ وقتی برقرار می شود که $\frac{n}{2}$ طبیعی باشد؛ یعنی n باید زوج باشد.

گام دوم: اگر $31 = 2^5 - 1$ بنویسیم، $2^{2n} - 1 \mid 2^5 - 1$ وقتی برقرار می شود که $\frac{2n}{5}$ طبیعی باشد؛ یعنی n باید مضرب ۵ باشد. پس n باید مضرب ۱۰ باشد.

تست و پاسخ ۲۹

$$|a - b|$$

عدد $a456b$ بر ۴۴ بخش پذیر است. اختلاف a و b کدام نمی تواند باشد؟

۴) صفر

۳) ۷

۲) ۳

۱) ۵

پاسخ: گزینه ۳

مشاوره سؤال بسیار مهمی است، مشابه سؤال های کنکور سراسری قانون بخش پذیری بر ۳، ۹، ۴ و ۱۱ مهم تر از بقیه اعداد است، حتماً آن ها را به خاطر داشته باشید.

خودت حل کنی بهتره از قانون بخش پذیری بر ۴ و ۱۱ استفاده کنید.

درس نامه قواعد بخش پذیری عدد $a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$ بر اعداد خاص

پیمانه	قاعده	توضیح فارسی
۳ یا ۹	$a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0 \equiv a_0 + a_1 + \dots + a_n$	هر عدد به پیمانه ۳ یا ۹، همنهشت مجموع ارقام خودش است.
۵ یا ۱۰ یا ۲	$a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0 \equiv a_0$	هر عدد، همنهشت رقم یکان خود به پیمانه ۵ یا ۱۰ یا ۲ است.
۴ یا ۲۰ یا ۲۵ یا ۵۰	$a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0 \equiv a_1 a_0$	هر عدد، همنهشت دو رقم آخر (یکان و دهگان) خود به پیمانه ۴ یا ۲۰ یا ۲۵ یا ۵۰ است.
۱۱	$a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0 \equiv a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots$	ارقام را از سمت راست یکی در میان + و - می گذاریم. هر عدد به پیمانه ۱۱ همنهشت آن است.

نکته اگر $a \equiv b^m$ و $n \mid m$ ، آن گاه $a \equiv b^n$ (به جای پیمانه می توانیم مقسوم علیه های آن را قرار دهیم).

پاسخ تشریحی

گام اول: عدد بر ۴۴ بخش پذیر است؛ پس بر ۴ و ۱۱ بخش پذیر است، از قانون بخش پذیری هر کدام داریم:

$$a456b \equiv 0 \Rightarrow 6b \equiv 0 \Rightarrow 6 + b \equiv 0 \Rightarrow b \equiv 0 \xrightarrow{0 \leq b \leq 9} \begin{cases} b = 0 \\ b = 4 \\ b = 8 \end{cases}$$

$$a456b \equiv 0 \Rightarrow b - 6 + 5 - 4 + a \equiv 0 \Rightarrow b + a \equiv 11$$



$$b=0 \Rightarrow a \equiv 5 \Rightarrow a=5 \Rightarrow a-b=5$$

گام دوم: a رقم است، پس $0 \leq a \leq 9$ باید باشد:

$$b=4 \Rightarrow 4+a \equiv 5 \Rightarrow a \equiv 1 \Rightarrow a=1 \Rightarrow b-a=3$$

$$b=8 \Rightarrow 8+a \equiv 5 \Rightarrow a \equiv -3 \equiv 8 \Rightarrow a=8 \Rightarrow a-b=0$$

پس اختلاف b و a برابر ۵، ۳ و ۰ می تواند باشد، ولی ۷ نمی تواند باشد.

تست و پاسخ (۳۰)

۳۰ ظرف ۱۵ لیتری و تعداد نامحدودی ظرف ۱۷ لیتری داریم. به چند طریق می توان ۸۰۰ لیتر بنزین را با این ظرف ها جابه جا کرد؟ (از هر ظرف با گنجایش کامل استفاده می شود.)

(۴) هیچ

(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) ۱

پاسخ: گزینه (۲)

مشاوره معادله سیاله هم در امتحان نهایی و هم در کنکور سراسری از اهمیت زیادی برخوردار است. حواستان باشد در امتحان نهایی فقط از راه معادله همنهشتی معادله را حل کنید، اما در کنکور از روش فرمولی هم می توانید بروید.

خودت حل کنی بهتره معادله $15x + 17y = 800$ را حل کنید.

درس نامه •• معادله سیاله خطی $ax + by = c$

جواب معادله: یعنی x و y که در معادله $ax + by = c$ صدق کنند.

شرط جواب: $c | (a, b)$ (یعنی ب.م.م ضرایب عدد ثابت c را عاد کند).

روش های حل: الف) همنهشتی ب) استفاده از فرمول

روش همنهشتی:

(۱) دو طرف را به پیمانه ضریب کوچک تر (علامت مهم نیست) ببریم، مثلاً اگر دو طرف را به پیمانه a ببریم می شود: $ax + by \equiv c \Rightarrow by \equiv c$

(۲) معادله همنهشتی را حل کرده و y را پیدا می کنیم.

(۳) با قراردادن y در معادله، x را پیدا می کنیم.

روش استفاده از فرمول: اگر بتوانیم با جست و جو، یک جواب معادله به صورت

(x_0, y_0) را پیدا کنیم؛ کل جواب ها از رابطه مقابل به دست می آید:

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{b}{d}k \\ y = y_0 - \frac{a}{d}k \end{cases} \quad d = (a, b)$$

تذکر قبل از حل معادله اگر دو طرف ساده می شوند، بهتر است اول معادله را ساده کنیم.

پاسخ تشریحی گام اول: تعداد ظرف های ۱۵ لیتری و ۱۷ لیتری را به ترتیب x و y می گیریم، پس $15x + 17y = 800$.

گام دوم: پیدا کردن یک جواب خصوصی دشوار به نظر می رسد، پس از روش معادله همنهشتی استفاده می کنیم. دو طرف را به پیمانه ۱۵ می ببریم:

$$15x + 17y \equiv 800 \xrightarrow{15} 15x \equiv 0 \Rightarrow 17y \equiv 5 \Rightarrow 2y \equiv 5 + 15 = 20$$

$$\xrightarrow{\div 2} y \equiv 10 \Rightarrow y = 15k + 10$$

$$15x + 17(15k + 10) = 800 \Rightarrow x = \frac{-17(15k) + 630}{15} = -17k + 42$$

گام سوم: y را در معادله اصلی جایگزین می کنیم:



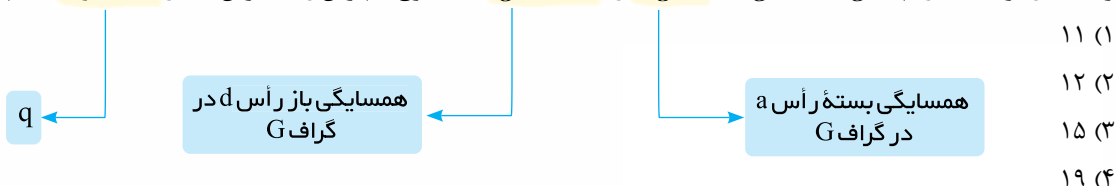
گام چهارم: x و y تعداد هستند، هم چنین 30° ظرف 15 لیتری بیشتر نداریم، پس باید جوابهایی را به دست آوریم که $0 \leq x \leq 30$ و $0 \leq y$ باشد. فقط به ازای $k = 1, 2$ هر دو شرط برقرار می شود، پس معادله دو جواب دارد:

$$\begin{aligned} \left| \begin{array}{l} x = -17k + 42 \\ y = 15k + 10 \end{array} \right. & \quad k = 1 \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x = 25 \\ y = 25 \end{array} \right. & \quad k = 2 \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x = 8 \\ y = 40 \end{array} \right. \end{aligned}$$

۳۱

تست و پاسخ

در گراف G از مرتبه ۶ داریم $N_G[a] = N_G[b] = N_G[c]$ و $N_G(d) = \{e\}$ ، مجموع کم ترین و بیشترین مقدار اندازه گراف کدام است؟



- ۱۱ (۱)
- ۱۲ (۲)
- ۱۵ (۳)
- ۱۹ (۴)

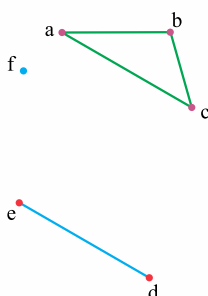
پاسخ: گزینه ۳

مشاوره مفهوم همسایگی رأس، جدیداً به کتاب درسی اضافه شده است. از این موضوع در کنکور ۱۴۰۱ هم سؤال آمد. این مطلب قابلیت ترکیب شدن با سایر موضوعات را دارد، پس از اهمیت آن غافل نشوید!

خودت حل کنی بهتره ببینید در چه صورتی همسایگی بسته رأس های a و b یکسان می شود، بعد کم ترین و بیشترین تعداد یال را به دست آورید.

درس نامه تعریف های مقدماتی گراف ساده

نماد	اسم	توضیح فارسی
$V(G)$	مجموعه رأس های گراف	—
$E(G)$	مجموعه یال های گراف	—
p	مرتبه گراف	تعداد رأس های گراف (که صفر نمی تواند باشد، چون گراف حتماً رأس دارد).
q	اندازه گراف	تعداد یال های گراف
$\deg_G(v)$	درجه رأس	تعداد یال هایی که به رأس v متصل است (در گراف G).
Δ	ماکزیمم درجه	بزرگ ترین درجه در بین کل درجه رأس ها
δ	مینیمم درجه	کوچک ترین درجه در بین کل درجه رأس ها
$N_G(a)$	همسایگی باز رأس a	مجموعه رأس هایی که به a وصل هستند (در گراف G).
$N_G[a]$	همسایگی بسته رأس a	مجموعه رأس هایی که به a وصل هستند، به علاوه خود a (در گراف G).

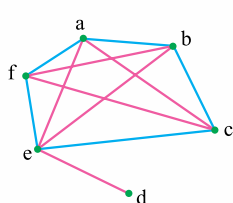


پاسخ تشریحی گام اول: هر رأس، عضو مجموعه همسایگی بسته خودش است؛ یعنی $a \in N_G[a]$ از شرط

داده شده $a \in N_G[b]$ و $a \in N_G[c]$. شبیه همین c و b نیز باید عضو مجموعه همسایگی بسته رأس a باشند و این یعنی c, b و a باید همگی به هم وصل باشند.

رأس d هم فقط به e متصل است. کم ترین تعداد یال وقتی به دست می آید که گراف به صورت زیر باشد؛ یعنی

$$q_{\min} = 4$$



گام دوم: بیشترین تعداد یال نیز وقتی به دست می‌آید که به غیر از d که فقط به e متصل است، سایر رأس‌ها همگی به هم وصل باشند که در این صورت هر دو شرط داده‌شده برقرار می‌شود، پس $q_{\max} = 11$.

بنابراین $q_{\min} + q_{\max} = 15$.



تست و پاسخ

حاصل ضرب درجه رأس‌های گرافی از مرتبه ۶ برابر ۴۰۰ است. تعداد رأس‌های درجه ۲ در این گراف، چند حالت مختلف ممکن است داشته باشد؟

(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) ۳

این‌که چندتا درجه ۲ داریم منظور نیست؛ بلکه درجه‌های ۲ چند حالت مختلف دارند.

ضرب ۶ عدد کمتر از ۶ برابر ۴۰۰



پاسخ: گزینه

مشاوره متأسفانه کتاب درسی درست و درمان به بحث درجه و شرایط آن نپرداخته است، اما شما این کار را نکنید و مسائل متنوع از آن حل کنید؛ چون سؤال‌های کنکور در این چندساله نشان داده است که طراحان کنکور علاقه زیادی به طراحی سؤال‌های دشوار از این موضوع دارند.

خودت حل کنی بهتره ۴۰۰ را تجزیه کنید.

درس‌نامه • شرایط درجه رأس‌های گراف

(۱) تعداد اعداد برابر تعداد رأس‌ها یا مرتبه گراف است.

(۲) مجموع درجات برابر با $2q$ است.

(۳) تعداد رأس‌های فرد (رأس‌های با درجه فرد)، عددی زوج است.

(۴) تعداد رأس‌های زوج (رأس‌های با درجه زوج) از نظر زوج و فردی مثل مرتبه گراف است.

(۵) $\Delta \leq p - 1$

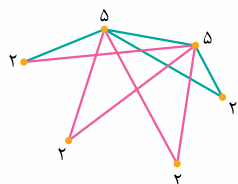
(۶) اگر k رأس از درجه $p - 1$ (رأس فول یا رأسی که به همه وصل است) داشته باشیم، $\delta \geq k$ باید باشد.

(۷) در بین درجه‌ها حتماً عدد تکراری وجود دارد.

نکته شرایط ۳، ۴، ۵، ۶ و ۷، شرایط لازم درجه رأس‌های گراف هستند؛ اما با وجود برقراری این شرایط ممکن است گرافی با آن درجه‌ها وجود نداشته باشد. برای اطمینان از گراف‌بودن درجه، دو راه وجود دارد: (۱) رسم (۲) الگوریتم هاول

الگوریتم هاول برای بررسی گرافی‌بودن درجه‌های داده‌شده (گرافی با درجه‌های داده‌شده موجود باشد).	
الگوریتم	مثال: ۶, ۴, ۵, ۵, ۳, ۲, ۱, ۱, ۱
(۱) درجه‌ها را از بزرگ به کوچک در هر مرحله مرتب می‌کنیم.	۶, ۵, ۵, ۴, ۳, ۲, ۱, ۱, ۱
(۲) به تعداد درجه ماکزیمم از هر کدام از رأس‌های جلویی یک واحد کم می‌کنیم. (خود درجه ماکزیمم یا اولین درجه از سمت چپ را حذف می‌کنیم).	$4, 4, 3, 2, 1, 0, 1, 1, 0 \xrightarrow[\text{مرتبه}]{\text{دوباره}} 4, 4, 3, 2, 1, 0, 1, 1, 0$ $3, 2, 1, 0, 1, 0 \Rightarrow 3, 2, 1, 1, 0, 0$
(۳) دوباره همین کار را انجام می‌دهیم.	$2, 1, 1, 0, 0 \Rightarrow 1, 0, 0, 0, 0$
(۴) هر کجا فهمیدیم که درجات گرافی هستند، درجات اصلی هم گرافی هستند و هر کجا فهمیدیم گرافی نیستند، درجات اصلی هم گرافی نیستند.	گرافی با درجه‌های ۱, ۰, ۰, ۰, ۰ وجود ندارد (تعداد رأس‌های فرد باید زوج باشد)، پس گرافی با درجه‌های اولیه هم وجود ندارد.





پاسخ تشریحی گام اول: $5^2 \times 2^4 = 400$ ، از طرفی $p-1=5$ است؛ پس ماکزیمم درجه برابر ۵ است. یک حالت این است که درجه‌ها به صورت ۵، ۵، ۲، ۲، ۲ باشند. واضح است که گراف با این درجه‌ها وجود دارد. مثلاً گراف مقابل:

گام دوم: ضرب ۶ عدد (درجه‌ها) برابر با ۴۰۰ شده است. می‌توانیم به جای 2×2 عدد ۴ قرار دهیم و یک رأس درجه ۱ قرار دهیم:

گرافی نیست، چون سه رأس فرد داریم. $\Rightarrow (5, 5, 4, 2, 2, 1)$

$(5, 5, 4, 4, 1, 1)$

گام سوم: شبیه گام دوم درجه‌ها را به صورت مقابل می‌گیریم:

اما گرافی با این درجه‌ها وجود ندارد، چون $p=6$ است و ۲ رأس درجه ۵ به همه رأس‌های دیگر وصل است؛ پس $\delta \geq 2$ (به هر رأس حداقل دو یال وصل می‌شود) که نیست چون $\delta=1$.

گام چهارم: پس تعداد رأس‌های درجه ۲ برابر ۴ بوده؛ یعنی فقط یک حالت دارد.

۳۳

تست و پاسخ

گراف مکمل گراف G با درجه رأس‌های ۵، ۵، ۵، ۳، ۳، ۳ چند زیرگراف ۳ یالی دارد؟

۱ (۴)

۲۴ (۳)

۸ (۲)

۱۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره گراف مکمل و زیرگراف تازه به کتاب درسی اضافه شده‌اند، اما در این چند سال سوال از آن‌ها در کنکور نیامده است؛ پس بعید نیست امسال از این دو مطلب سوال بیاید.

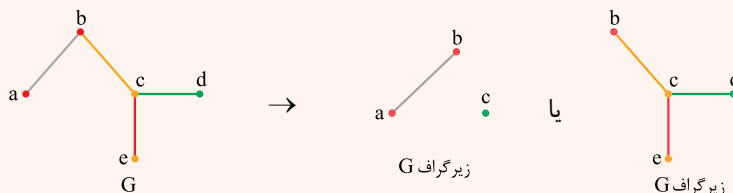
خودت حل کنی بهتره گراف مکمل را رسم کنید.

درس نامه مکمل گراف G

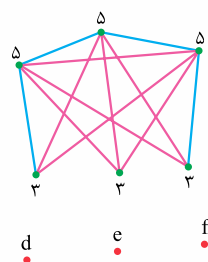
اسم	نماد	تعریف	ویژگی‌ها	مثال
گراف مکمل G	$\bar{G}$	رأس‌های $\bar{G}$ همان رأس‌های G است. یال‌های $\bar{G}$ یال‌هایی هستند که در G وجود ندارد.	$q(G) + q(\bar{G}) = \frac{p(p-1)}{2} \quad (1)$	
			$\deg_G(a) + \deg_{\bar{G}}(a) = p-1 \quad (2)$	

زیرگراف

زیرگراف گراف G، گرافی است که رأس‌های آن زیرمجموعه رأس‌های G و یال‌های آن نیز زیرمجموعه یال‌های G هستند. مثلاً:

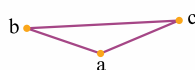


نکته تعداد زیرگراف‌ها در حالت کلی فرمول ندارد و باید به صورت مستقیم یا استفاده از اصل ضرب و انتخاب تعداد آن‌ها را به دست آوریم.



پاسخ تشریحی گام اول: $p = 6$ است؛ پس هر رأس درجه ۵ به تمام رأس‌های دیگر وصل است.

بنابراین گراف به صورت مقابل است:



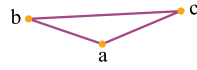
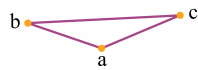
گام دوم: گراف مکمل به صورت مقابل می‌شود:

گام سوم: زیرگراف ۳ یالی باید شامل سه یال ab ، ac و bc باشد، اما هر کدام از رأس‌های d ، e و f ممکن است عضو رأس‌های زیرگراف باشند یا نباشند (یعنی هر کدام ۲ حالت دارند) پس در کل $2 \times 2 \times 2 = 8$ زیرگراف وجود دارد. مثلاً ۳ نمونه از آن‌ها به صورت زیر است:

d

d

f



۳۴

تست و پاسخ

گراف منتظمی ۲۰ یال دارد. اگر این گراف حداقل تعداد رأس را داشته باشد، برای تبدیل آن به گراف کامل هم مرتبه‌اش چند یال باید اضافه کنیم؟

- ۸ (۱)
۱۶ (۳)
۱۵ (۲)
۲۵ (۴)

همه رأس‌ها به هم وصل هستند.

درجه همه رأس‌ها برابر

پاسخ: گزینه ۱

مشاوره سوال بسیار مهمی است ترکیب گراف منتظم و کامل. حواستان به رابطه‌های بسیار مهم گراف منتظم و کامل باشد.

خود حل کنی بهتره در گراف‌های k - منتظم $kp = 2q$.

درس نامه گراف منتظم

اسم	نماد	تعریف	ویژگی‌ها
گراف k - منتظم	—	گرافی که درجه هر رأس برابر k است.	(۱) $kp = 2q$ که $0 \leq k \leq p-1$ (۲) گراف فرد منتظم مرتبه فرد نداریم (از بین p و k حداقل یکی زوج باید باشد).

گراف‌های منتظم خاص

مثال	ویژگی	
	گراف ۰ - منتظم (گراف تهی)	(۱) $q = 0$ (۲) از تعدادی رأس ایزوله تشکیل شده.
	گراف ۱ - منتظم	از تعدادی یال تشکیل شده است.
	گراف ۲ - منتظم	از اجتماع تعدادی چندضلعی تشکیل شده است.
	گراف کامل K_p	$(p-1)$ - منتظم هستند.



گراف کامل

اسم	نماد	تعریف	ویژگی‌ها
گراف کامل مرتبه p	K_p	گرافی که هر دو رأس آن مجاورند (به هم وصل‌اند).	(۱) درجهٔ همهٔ رأس‌ها $p-1$ است. (۲) گراف $(p-1)$ - منتظم است. (۳) $q = \frac{p(p-1)}{2}$ (۴) بیشترین یال را در بین گراف‌های هم‌مرتبهٔ خود دارد.

مثال:

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5
نمودار					

پاسخ تشریحی: گام اول: در گراف k - منتظم مرتبهٔ p رابطهٔ $kp = 2q$ برقرار است که $0 \leq k \leq p-1$ (یا ساده‌تر $k < p$) پس داریم:
 $kp = 2 \times 20 = 40$

گام دوم: اگر $k < p$ بوده و p کم‌ترین مقدار خود را داشته باشد، باید $p = 8$ و $k = 5$ بگیریم.

گام سوم: گراف کامل ۸ رأسی دارای $\frac{8 \times 7}{2} = 28$ یال است؛ پس با اضافه کردن ۸ یال گراف کامل می‌شود.

تست و پاسخ ۳۵

در یک گراف مرتبهٔ ۱۰ بین هر دو رأس یا مسیر وجود ندارد یا دقیقاً ۲ مسیر وجود دارد. این گراف به چند صورت قابل رسم است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

پاسخ: گزینه ۳

مشاوره: ساختار گراف‌های ۲ - منتظم در کنکور سراسری بسیار مهم است.

خودت حل کنی بهتره: ببینید چند گراف ۲ - منتظم مرتبهٔ ۱۰ داریم.

درس‌نامه مسیر در گراف

تعریف	مثال:
مسیر	دنباله‌ای از رأس‌های غیرتکراری که رأس‌های پشت سر هم به هم وصل‌اند.
طول مسیر	تعداد یال‌های طی شده (یا یکی کمتر از تعداد رأس‌های مسیر)
مسیر $abcd$	مسیر $abcde$ که طول آن ۳ است.



انواع گراف‌های ۲ - منتظم مرتبه p

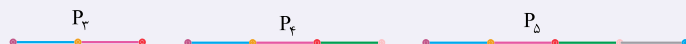
برابر با تعداد حالت‌هایی است که می‌توانیم p را به صورت جمع چند عدد بزرگ‌تر یا مساوی ۳ بنویسیم. مثلاً انواع گراف‌های ۲ - منتظم مرتبه ۹ به صورت زیر است:

$9 = 9$	$9 = 6 + 3$
$9 = 5 + 4$	$9 = 3 + 3 + 3$

نکات

- مسیر رأس تکراری ندارد.
- هر رأس یک مسیر به طول صفر به خودش است؛ پس تعداد مسیرهای به طول صفر برابر مرتبه گراف یا p است.
- تعداد مسیرهای به طول یک، برابر تعداد یال‌های گراف یا q است.
- تعداد مسیرهای به طول حداکثر یک، برابر $p + q$ است.
- برای به دست آوردن تعداد مسیرها از روی درجه‌ها ابتدا گراف را رسم و سپس به صورت مستقیم مسیرها را شمارش می‌کنیم.

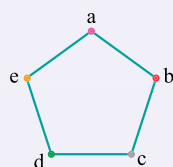
مسیر n رأسی را با P_n نمایش می‌دهیم. مثلاً:



دور در گراف

تعریف	مثال،	
دنباله‌ای از رأس‌های غیرتکراری (به غیر از اول و آخر) که رأس‌های پشت سر هم به هم وصل‌اند.		دور
تعداد یال‌های طی شده	دور acbda به طول ۴	طول دور
دور n رأسی به طول $n (n \geq 3)$		C_n

تنها گراف‌هایی که بین هر دو رأس آن دقیقاً دو مسیر وجود دارد، گراف‌های C_n هستند.



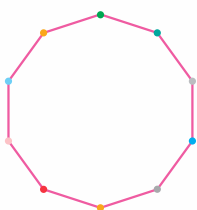
مثلاً در گراف C_5 به صورت مقابل بین دو رأس a و d دو مسیر aed و $abcd$ وجود دارد یا بین دو رأس b و d فقط دو مسیر bcd و $baed$ وجود دارد.



پاسخ تشریحی

گام اول: تنها گرافی که بین هر دو رأس آن دقیقاً دو مسیر وجود دارد، گراف‌های دوری C_n هستند.

مثلاً گراف C_1 (۱۰ ضلعی) به صورت مقابل که بین هر دو رأس دقیقاً دو مسیر وجود دارد:



گام دوم: اگر بین دو رأس مسیر وجود نداشته باشد، گراف ناهمبند می‌شود؛ پس صورت‌های دیگر گراف، مدل‌های ناهمبند مرتبه ۱۰ است که به صورت زیر است:

$10 = 7 + 3$	$10 = 5 + 5$
$10 = 6 + 4$	$10 = 4 + 3 + 3$

بنابراین گراف به ۵ صورت قابل رسم است.

هندسه: هندسه (۳): صفحه‌های ۹ تا ۵۰

۳۶

تست و پاسخ

معادله دایره به مرکز $(-2, 1)$ و گذرنده از نقطه $(2, 1)$ کدام است؟

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y = 5 \quad (2)$$

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0 \quad (1)$$

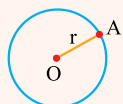
$$x^2 + y^2 + 2x - 4y = 5 \quad (4)$$

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0 \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۲

خود حل کنی بهتره شعاع دایره برابر با فاصله مرکز دایره از نقطه‌ای واقع بر آن است.

درس نامه



(۱) اگر نقطه A بر دایره‌ای به مرکز O و شعاع r واقع باشد، آن‌گاه $r = OA$.

(۲) معادله دایره به مرکز $O(\alpha, \beta)$ و شعاع r به صورت $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$ است.

پاسخ تشریحی گام اول (محاسبه شعاع دایره): با توجه به قسمت (۱) درس نامه داریم:

$$O(1, -2) \text{ و } A(2, 1) \Rightarrow r = OA = \sqrt{(2-1)^2 + (1+2)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$

گام دوم (نوشتن معادله دایره): با توجه به قسمت (۲) درس نامه، داریم:

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = (\sqrt{10})^2 \Rightarrow (x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) = 10 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x + 4y = 5$$



تست و پاسخ ۳۷

اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ، آن گاه درایهٔ سطر اول و ستون دوم وارون ماتریس A کدام است؟

$-\frac{5}{4}$ (۴)

$\frac{5}{4}$ (۳)

$-\frac{1}{4}$ (۲)

$\frac{1}{4}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

خودت حل کنی بهتره از فرمول محاسبهٔ وارون ماتریس 2×2 استفاده کنید.

درس نامه اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ، آن گاه با شرط $ad - bc \neq 0$ ، ماتریس A وارون پذیر است و داریم:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

پاسخ تشریحی با استفاده از فرمول محاسبهٔ وارون ماتریس 2×2 که در درس نامه گفتیم، داریم:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{1 \times 1 - 5 \times 1} \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{-1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

پس درایهٔ سطر اول و ستون دوم ماتریس A^{-1} می شود $\frac{5}{4}$.

تست و پاسخ ۳۸

اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ x & x \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 1 & y \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$ و بدانیم $AB + BA = 2I$ ، آن گاه حاصل $x + y$ کدام است؟

صفر (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

مشاوره سؤال ساده ای که نباید آن را از دست بدهید، برای حل این سؤال فقط باید حاصل ضرب ماتریس ها را به دست آورده و در تساوی صورت سؤال قرار دهید.

درس نامه

(۱) اگر A و B دو ماتریس باشند، به طوری که ماتریس AB قابل تعریف باشد، آن گاه درایهٔ سطر A م و ستون B م ماتریس AB برابر با حاصل ضرب سطر A م ماتریس A در ستون B م ماتریس B است.

(۲) منظور از ماتریس I ، عضو بی اثر عمل ضرب ماتریس هاست که ماتریس همانی نامیده می شود و داریم $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ و ...

پاسخ تشریحی گام اول (محاسبهٔ ماتریس های AB و BA):

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ x & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & y \\ -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3y - 6 \\ 0 & xy - 3x \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & y \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ x & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 + xy & 2 + xy \\ -3 - 3x & -2 - 3x \end{bmatrix}$$



گام دوم (استفاده از فرض سؤال و محاسبه خواسته آن):

$$\begin{bmatrix} 1 & 3y-6 \\ 0 & xy-3x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3+xy & 2+xy \\ -3-3x & -2-3x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

سؤال می گوید $AB + BA = 2I$ ، پس:

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 4+xy & xy+3y-4 \\ -3-3x & xy-6x-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

اگر دو ماتریس با هم برابر باشند، درایه های آنها نظیر به نظیر با هم برابر است، پس ابتدا درایه سطر دوم و ستون اول را در سمت راست و سمت چپ تساوی برابر قرار می دهیم:

$$-3-3x=0 \Rightarrow 3x=-3 \Rightarrow x=-1$$

$$4+xy=2 \xrightarrow{x=-1} 4-y=2 \Rightarrow y=2$$

و سپس یک درایه دیگر، مثلاً درایه سطر اول و ستون اول را برابر قرار می دهیم:

$$x+y=-1+2=1$$

پس داریم:

تست و پاسخ ۳۹

اگر A ماتریسی اسکالر باشد، به طوری که $A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ و $AB = \begin{bmatrix} 2 & 2-\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$ ، آن گاه مجموع درایه های ماتریس BA کدام است؟

(۴) صفر

(۳) ۵

(۲) $\pm 5\sqrt{2}$

(۱) $2 \pm \sqrt{2}$

پاسخ: گزینه ۳

مشاوره ماتریس های قطری (و در حالت خاص، اسکالر) خواصی دارند که گاهی در آزمون های تستی مورد پرسش قرار می گیرند. در کنکور هم سوال هایی در مورد این ماتریس ها داشته ایم. در درس نامه، به تعریف این ماتریس ها و خاصیتی که در حل این سوال به آنها نیاز داریم، پرداخته ایم.

خودت حل کنی بهتره اگر A یک ماتریس اسکالر و B یک ماتریس مربعی هم مرتبه با آن باشد، AB و BA با هم چه ارتباطی دارند؟

درس نامه

(۱) ماتریس قطری، ماتریس مربعی است که همه درایه های غیرواقع بر قطر اصلی آن صفر باشند. در حالت خاص، اگر تمام درایه های واقع بر قطر اصلی با هم برابر باشند، ماتریس را اسکالر می نامیم.

(۲) یکی از مهم ترین ویژگی های ماتریس های اسکالر این است که ماتریس های اسکالر با ماتریس های مربعی هم مرتبه خود تعویض پذیرند، یعنی اگر A یک ماتریس اسکالر و B ماتریسی هم مرتبه با A باشد، آن گاه $AB = BA$. دلیل ساده ای هم دارد، هر ماتریس اسکالر را

می توان به صورت ضربی از ماتریس همانی در نظر گرفت، مثلاً $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} = aI$. I عضو بی اثر عمل ضرب ماتریس هاست، پس داریم:

$$\left. \begin{array}{l} AB = aB = aB \\ BA = B(aI) = a(BI) = aB \end{array} \right\} \Rightarrow AB = BA$$

$$BA = AB = \begin{bmatrix} 2 & 2-\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$$

پاسخ تشریحی با توجه به قسمت ۲ درس نامه، نیازی به محاسبه ماتریس های A و B نداریم و می توان گفت:

پس مجموع درایه های ماتریس BA برابر است با:

$$2 + (2 - \sqrt{2}) + \sqrt{2} + 1 = 5$$



۴۰

تست و پاسخ

اگر $A = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}$ ، آن گاه ماتریس $(AB)^{1401}$ با کدام ماتریس برابر است؟

BA (۴)

$\bar{O}$ (۳)

AB (۲)

I (۱)

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره محاسبه توان های بزرگ ماتریس های مربعی از سؤال های پرتکرار در آزمون های آزمایشی هستند؛ البته نمونه کنکوری هم دارند، ضمن این که یکی از تمرین های کتاب درسی هم به آن پرداخته است (تمرین ۵ صفحه ۲ کتاب هندسه ۳)؛ پس درس نامه را خوب یاد بگیرید.

خودت حل کنی بهتره ماتریس $(AB)^2$ را حساب کنید. به روندی می رسید که براساس آن $(AB)^n$ قابل حدس است.

درس نامه برای محاسبه توان های بزرگ ماتریس مربعی A ، ابتدا ماتریس A^2 را به دست آورید. ممکن است حالت های زیر پیش بیاید:

۱) $A^2 = \bar{O} \Rightarrow A^n = \bar{O}$

۲) $A^2 = A \Rightarrow A^n = A$

۳) $A^2 = \lambda A \Rightarrow A^n = \lambda^{n-1} A$

۴) اگر $A^2 = I$ یا $A^2 = -I$ ، آن گاه باید A^n را برحسب A^2 بنویسید؛ مثلاً اگر به $A^2 = -I$ رسیدید و ماتریس A^{15} را می خواستید، این طور عمل کنید:

$$A^{15} = (A^2)^7 \cdot A = (-I)^7 A = (-1)^7 I^7 A = -IA = -A$$

اگر هیچ کدام از حالت های بالا اتفاق نیفتاد، باید ماتریس A^3 را هم حساب کنید؛ مثلاً ممکن است به $A^3 = \bar{O}$ برسید که در این صورت به ازای $n \geq 3$ داریم $A^n = \bar{O}$ یا این که به $A^3 = I$ برسید و مثلاً ماتریس A^{25} را بخواهید که در این صورت این طور باید عمل کنید:

$$A^{25} = A^{24} \cdot A = (A^3)^8 A = I^8 A = IA = A$$

البته ممکن است با محاسبه A^2 و A^3 هیچ کدام از حالت های بالا اتفاق نیفتد؛ بلکه در مورد A^n یک روند به دست آید، مثلاً

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ و } A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ در این صورت می توان حدس زد که } A^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

پاسخ تشریحی راه حل اول:

گام اول (محاسبه ماتریس $C = AB$):

$$C = AB = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 14 & -7 \end{bmatrix}$$

داریم $A = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}$ ، پس:

گام دوم (محاسبه ماتریس C^2):

$$C^2 = \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 14 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 14 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 14 & -7 \end{bmatrix} = C$$

داریم $C = \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 14 & -7 \end{bmatrix}$ ، پس:

گام سوم (محاسبه ماتریس $(C)^{1401}$):

با توجه به حالت (۲) درس نامه، از آن جا که $C^2 = C$ ، پس برای هر عدد طبیعی n داریم $C^n = C$ ، یعنی $(AB)^{1401} = AB$.

راه حل دوم:

$$BA = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$

بیابید اول ماتریس BA را حساب کنیم:

$$(AB)^{1401} = \underbrace{AB}_{[1]} \underbrace{AB}_{[1]} \underbrace{AB}_{[1]} \cdots \underbrace{AB}_{[1]} \underbrace{AB}_{[1]} = A[1]B = AB$$

حالا بنا به تعریف توان در ماتریس ها، داریم:



تست و پاسخ ۴۱

اگر از دستگاه $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ ax + 2y = 6 \end{cases}$ جوابی برای (x, y) حاصل نشود، آن گاه دستگاه $\begin{cases} ax - y = 9 \\ 3x + 6y = 12 \end{cases}$ چند جواب برای (x, y) دارد؟

- (۱) یک (۲) صفر یا بی شمار (۳) صفر (۴) بی شمار

پاسخ: گزینه ۱

مشاوره این تیپ سؤال‌ها، سؤال‌های پرتکراری در آزمون‌های آزمایشی هستند. پس درس‌نامه را حتماً بخوانید و روی حالت‌های مختلف تعداد جواب‌های دستگاه‌های دو معادله - دومجهولی مسلط باشید.

خود حل کنی بهتره در دستگاه دو معادله - دومجهولی خطی:

- ۱ اگر دو خط تشکیل دهنده آن بر هم منطبق باشند، بی شمار جواب دارد.
- ۲ اگر دو خط تشکیل دهنده آن متقاطع باشند، یک جواب دارد.
- ۳ اگر دو خط تشکیل دهنده آن موازی (فاقد نقطه مشترک) باشند، جواب ندارد.

درس‌نامه دستگاه دو معادله - دومجهولی $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ را در نظر بگیرید. می‌توان گفت جواب این دستگاه، نقطه مشترک دو خط $L: ax + by = c$ و $L': a'x + b'y = c'$ است؛ پس:

(۱) اگر این دو خط بر هم منطبق باشند، یعنی یکی از معادله‌ها ضربی از معادله دیگر باشد یا به عبارت دیگر $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ ، آن گاه دستگاه بی شمار جواب دارد.

(۲) اگر این دو خط متقاطع باشند، یعنی شیب‌های آن‌ها با هم برابر نباشد یا به عبارت دیگر $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ ، آن گاه دستگاه یک جواب (جواب منحصر به فرد) دارد.

(۳) اگر این دو خط موازی (فاقد نقطه مشترک) باشند، یعنی شیب‌های آن‌ها با هم برابر باشند یا به عبارت دیگر $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ ، آن گاه دستگاه جواب ندارد.

پاسخ تشریحی گام اول (تحلیل دستگاه اول):

برای آن که از دستگاه $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ ax + 2y = 6 \end{cases}$ جوابی برای (x, y) حاصل نشود، طبق حالت (۳) درس‌نامه باید:

$$\frac{2}{a} = \frac{-1}{2} \neq \frac{4}{6}$$

$$\frac{2}{a} = \frac{-1}{2} \Rightarrow a = -4$$

$-\frac{1}{2} \neq \frac{4}{6}$ که برقرار است، پس کافی است:

گام دوم (تحلیل دستگاه دوم):

به ازای $a = -4$ دستگاه دوم به صورت $\begin{cases} -4x - y = 9 \\ 3x + 6y = 12 \end{cases}$ است که از دو خط با شیب‌های متفاوت تشکیل شده است، به عبارت دیگر طبق حالت (۲) درس‌نامه، $-\frac{4}{3} \neq \frac{-1}{6}$ پس یک جواب دارد.

تست و پاسخ ۴۲

اگر A یک ماتریس وارون پذیر 2×2 باشد، به طوری که $||A|| A + A = ||A||$ ، آن گاه دترمینان ماتریس $\frac{1}{|A|} A$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه ۴



مشاوره این تیپ سؤال‌ها ممکن است قیافه‌های ترسناک داشته باشند، ولی صرفاً با دانستن یک ویژگی از دترمینان‌ها که در درس‌نامه آمده است، حل می‌شوند. دقت کنید که با $|A|$ باید مانند یک عدد ثابت برخورد کنید.

خودت حل کنی بهتره در داخل دترمینان سمت چپ تساوی، از ماتریس A فاکتور بگیرد.

درس‌نامه

اگر A یک ماتریس $n \times n$ و k عددی حقیقی باشد، آن‌گاه $|kA| = k^n |A|$. مثلاً برای ماتریس‌های 2×2 داریم $|kA| = k^2 |A|$.

پاسخ تشریحی گام اول (محاسبه $|A|$):

از تساوی $|A| + |A| = |A|$ ، داریم:

$$\begin{aligned} \overbrace{(|A| + 1)A}^{\text{عدد ثابت}} &= |A| \xrightarrow{A_{2 \times 2}} (|A| + 1)^2 \cdot |A| = |A| \Rightarrow (|A| + 1)^2 \cdot |A| - |A| = 0 \\ \Rightarrow ((|A| + 1)^2 - 1)|A| &= 0 \Rightarrow \begin{cases} (|A| + 1)^2 - 1 = 0 \Rightarrow (|A| + 1)^2 = 1 \Rightarrow |A| + 1 = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} |A| = 0 \\ |A| = -2 \end{cases} \\ |A| = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

چون سؤال گفته که A وارون‌پذیر است پس $|A| \neq 0$ و با توجه به مقادیر به دست آمده در بالا، فقط $|A| = -2$ را می‌پذیریم.

گام دوم (محاسبه خواسته سؤال):

برای محاسبه دترمینان ماتریس $\frac{1}{|A|}A$ هم از درس‌نامه استفاده می‌کنیم. از آن‌جا که A ماتریسی 2×2 است، داریم:

$$|\frac{1}{|A|}A| = (\frac{1}{|A|})^2 |A| = \frac{1}{|A|} = -\frac{1}{2}$$

تست و پاسخ ۴۳

اگر $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ ، آن‌گاه دترمینان ماتریس $2(I - \frac{1}{4}A)^2$ کدام است؟

۲ (۴)

۱ (۳)

۰/۵ (۲)

۰/۱۲۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره این مدل سؤال‌ها بسیار مهم و روتین کنکور هستند. البته پیچیدگی خاصی هم ندارند و صرفاً باید دقت کنید که در محاسبه دترمینان ماتریس‌های 3×3 اشتباه محاسباتی نکنید و حواستان باشد که بسط دترمینان را به طور مناسب انجام دهید تا در زمان صرفه‌جویی شود.

خودت حل کنی بهتره لازم نیست ماتریس $2(I - \frac{1}{4}A)^2$ را تشکیل دهید. دترمینان $I - \frac{1}{4}A$ را حساب کرده، از ویژگی‌های دترمینان استفاده کنید.

درس‌نامه ۱) بسط دترمینان 3×3 را نسبت به سطر یا ستونی که بیشترین درایه صفر را دارد، انجام دهید تا محاسباتتان کم شود.

۲) اگر A یک ماتریس مربعی و n عددی طبیعی باشد، آن‌گاه $|A^n| = |A|^n$ (البته این رابطه برای $n = -1$ هم معتبر است، یعنی $|A^{-1}| = |A|^{-1} = \frac{1}{|A|}$).

۳) اگر k عددی حقیقی و A ماتریس $n \times n$ باشد، آن‌گاه $|kA| = k^n |A|$.



پاسخ تشریحی گام اول (تشکیل ماتریس $I - \frac{1}{4}A$):

$$I - \frac{1}{4}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0/5 & 1 & 2/5 \\ 0 & 1/5 & 3 \\ -1 & 0/5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/5 & -1 & -2/5 \\ 0 & -0/5 & -3 \\ 1 & -0/5 & -1 \end{bmatrix}$$

داریم: $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ پس:

گام دوم (محاسبه $|I - \frac{1}{4}A|$):

در ستون اول (یا سطر دوم)، صفر داریم پس بهتر است برای سادگی محاسبات، بسط دترمینان را نسبت به یکی از آن‌ها انجام دهیم. نسبت به ستون اول انجام داده‌ایم:

$$|I - \frac{1}{4}A| = 1/5(0/5 - 1/5) - 0 + 1(3 - 1/25) = -1/5 + 1/25 = 0/25$$

گام سوم (محاسبه خواسته سؤال):

می‌خواهیم حاصل $|2(I - \frac{1}{4}A)|^2$ را به دست بیاوریم، با توجه به قسمت‌های (۲) و (۳) درس‌نامه داریم:

$$|2(I - \frac{1}{4}A)|^2 = 2^3 |(I - \frac{1}{4}A)|^2 = 8 |I - \frac{1}{4}A|^2$$

$$8 \times (\frac{1}{4})^2 = \frac{8}{16} = \frac{1}{2} = 0/5$$

از آن‌جا که $|I - \frac{1}{4}A| = 0/25 = \frac{1}{4}$ ، خواسته سؤال می‌شود:

تست و پاسخ ۴۴

ماتریس $A = \begin{bmatrix} y & 0 & 2 \\ x & -z & z \\ y & 2 & 0 \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. از درایه a_{11} ، دو واحد کم کرده و به درایه a_{22} ، سه واحد می‌افزاییم تا ماتریس B حاصل شود،

کدام گزینه درست است؟

(۴) $|A| = |B|$

(۳) $|A| = -6|B|$

(۲) $|A| = |B| - 1$

(۱) $|A| = |B| + 1$

پاسخ: گزینه ۴

مشاوره باز هم مثل سؤال قبل، تأکید می‌کنیم این‌گونه سؤال‌ها در کنکور بسیار رایج است. کلاً سؤال‌های دترمینان‌های 3×3 در کنکور، معمولاً مثل این سؤال پیچیدگی خاصی ندارند، فقط باید حواستان باشد که اشتباه محاسباتی نکنید.

خودت حل کنی بهتره دترمینان ماتریس A را حساب کنید.

درس‌نامه

بهتر است بسط دترمینان 3×3 را نسبت به سطر یا ستونی انجام دهید که بیشترین صفر را دارد.

پاسخ تشریحی

گام اول (محاسبه $|A|$):

با توجه به این‌که سطر اول صفر دارد، بسط دترمینان را نسبت به آن انجام می‌دهیم:

$$|A| = \begin{vmatrix} y & 0 & 2 \\ x & -z & z \\ y & 2 & 0 \end{vmatrix} = y(0 - 2z) - 0 + 2(2x + zy) = 4x$$

گام دوم (پیدا کردن خواسته سؤال):

همان‌طور که در گام اول دیدید، $|A| = 4x$ ، بنابراین $|A|$ به y و z وابسته نیست و تغییر آن‌ها روی حاصل دترمینان بی‌تأثیر است، پس $|B| = |A|$.



تست و پاسخ ۴۵

پاره خط $AB = 6$ را در نظر بگیرید. چند نقطه در صفحه وجود دارد که از حداقل یکی از دو نقطه A و B به فاصله ۶ و از خط گذرا بر A و B به فاصله $3\sqrt{3}$ باشد؟

۲ (۴)

۶ (۳)

۴ (۲)

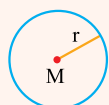
۸ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

مشاوره سؤال مکان هندسی که برای حل آن باید حواستان به خواصی از مثلث متساوی الاضلاع هم باشد.

خودت حل کنی بهتره آیا می توانید فاصله نقاط برخورد دایره های به مرکز A و B را از AB حساب کنید؟

درس نامه



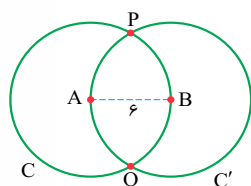
(۱) مکان هندسی نقاطی که از نقطه M به فاصله r هستند (r عددی مثبت است) دایره ای به مرکز M و شعاع r است.



(۲) مکان هندسی نقاطی که از خط d به فاصله x هستند (x عددی مثبت است) دو خط به موازات d و به فاصله x از آن است.

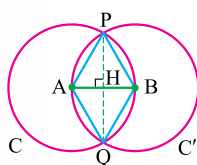
(۳) در مثلث متساوی الاضلاع، طول ارتفاع، $\frac{\sqrt{3}}{2}$ برابر طول ضلع است.

پاسخ تشریحی گام اول (پیدا کردن نقاطی که از حداقل یکی از دو نقطه A و B به فاصله ۶ باشند):



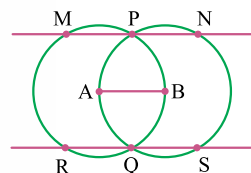
نقاطی که از A به فاصله ۶ هستند روی دایره $C(A, 6)$ و نقاطی که از B به فاصله ۶ هستند روی دایره $C'(B, 6)$ واقع اند. با توجه به این که $AB = 6$ ، این دو دایره از مرکزهای هم می گذرند و تمام نقاط واقع بر این دو دایره از حداقل یکی از دو نقطه A و B به یک فاصله اند، توجه کنید که P و Q که نقاط تقاطع این دو دایره اند، از هر دو نقطه A و B به فاصله ۶ هستند.

گام دوم (دقت روی P و Q):



شعاع دو دایره C و C' هر دو برابر با ۶ است. پس با وصل کردن P و Q به A و B پاره خطهایی به طول ۶ به دست می آید. طول AB هم که ۶ بود، پس مثلث های PAB و QAB هر دو متساوی الاضلاع به طول ۶ هستند، بنابراین طول PH و QH که ارتفاع های آنها هستند، می شود $PH = QH = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 6 = 3\sqrt{3}$

گام سوم (پیدا کردن خواسته سؤال):



نقاطی که از پاره خط AB به فاصله $3\sqrt{3}$ هستند، روی دو خط موازی با AB و به فاصله $3\sqrt{3}$ از AB قرار دارند. در گام قبل فهمیدیم که فاصله P و Q هم از AB برابر با $3\sqrt{3}$ است، پس P و Q هم روی این دو خط واقع اند. مطابق شکل، شش نقطه M, N, P, Q, R, S و نقاط مطلوب هستند.

تست و پاسخ ۴۶

دایره ای به مرکز $(4, 0)$ بر نیمساز ربع اول مماس است. کدام نقطه بر این دایره واقع است؟

(۴) $(4\sqrt{2}, 2)$

(۳) $(4\sqrt{2}, 1)$

(۲) $(6, 2)$

(۱) $(6, 1)$

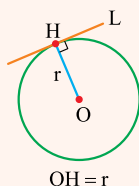
پاسخ: گزینه ۲

مشاوره سؤال آسان ولی بسیار مهم که حتماً نمونه آن را قبلاً حل کرده اید و نباید آن را از دست بدهید.



خودت حل کنی بهتره فاصله نقطه $(4, 0)$ را از خط $y = x$ به دست آورید.

درس نامه

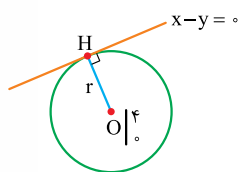


(۱) معادله دایره‌ای به مرکز (α, β) و شعاع r به صورت $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$ است.

(۲) اگر خطی بر یک دایره مماس باشد، شعاع دایره برابر با فاصله مرکز دایره تا آن خط است.

(۳) فاصله نقطه (x_0, y_0) از خط به معادله $ax + by + c = 0$ برابر با $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ است.

پاسخ تشریحی گام اول (محاسبه شعاع دایره):



معادله نیمساز ربع اول به صورت $y = x$ یا $x - y = 0$ است و شعاع دایره برابر با فاصله نقطه $O(4, 0)$ از این خط است، پس:

$$r = \frac{|4 - 0|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}}$$

گام دوم (نوشتن معادله دایره):

با معلوم بودن مرکز دایره و شعاع آن، معادله دایره را می‌نویسیم:

$$\begin{cases} O(4, 0) \\ r = \frac{4}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow (x - 4)^2 + (y - 0)^2 = \left(\frac{4}{\sqrt{2}}\right)^2 \Rightarrow (x - 4)^2 + y^2 = 8$$

گام سوم (پیدا کردن خواسته سؤال):

در بین گزینه‌ها، تنها مختصات نقطه $(2, 3)$ در معادله دایره به دست آمده صدق می‌کند.

تست و پاسخ ۴۷

دایره C از دو نقطه $(-1, 4)$ و $(2, 3)$ می‌گذرد. اگر دایره‌ای به معادله $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$ از مرکز دایره C بگذرد، آن گاه عرض نقطه مرکز دایره C کدام است؟

۲ / ۸ (۴)

۲ / ۶ (۳)

۲ / ۴ (۲)

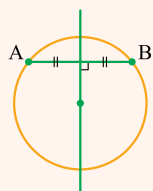
۲ / ۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

مشاوره رسم شکل در بسیاری از سؤال‌های هندسه کمک زیادی به حل می‌کند. اما حواستان باشد که در خیلی از سؤال‌ها، نیازی به کشیدن شکل دقیق ندارید و شکل فرضی کاملاً راهگشاست. برای این سؤال هم، یک شکل فرضی می‌کشیم و به کمک آن حل را انجام می‌دهیم.

خودت حل کنی بهتره اگر دایره‌ای از دو نقطه A و B بگذرد، مرکز آن بر عمودمنصف پاره خط AB واقع است.

درس نامه



(۱) اگر دایره $C(O, r)$ از نقطه O' بگذرد، آن گاه $OO' = r$.

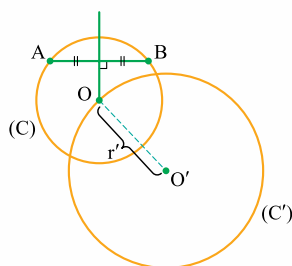
(۲) اگر دایره‌ای از دو نقطه A و B بگذرد، مرکز آن روی عمودمنصف پاره خط AB قرار دارد.

(۳) با معلوم بودن مختصات دو نقطه A و B ، می‌توان معادله عمودمنصف AB را نوشت. عمودمنصف AB خطی است که از نقطه وسط AB می‌گذرد و شیب آن قرینه معکوس شیب AB است (یادتان هست که اگر دو خط بر هم عمود باشند، حاصل ضرب شیب‌های آن‌ها (-1) می‌شود).

(۴) برای حل معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ می‌توانید معادله $x^2 + bx + ac = 0$ را حل کرده و ریشه‌های آن را بر a تقسیم کنید تا ریشه‌های معادله اول به دست آیند.



پاسخ تشریحی گام اول (تحلیل سؤال و رسم شکل فرضی):



با توجه به شکل، اگر O مرکز دایره C باشد، آن گاه:

(۱) O روی عمودمنصف AB واقع است.

(۲) فاصله O از مرکز دایره C' برابر با شعاع دایره C' است.

گام دوم (نوشتن معادله عمودمنصف AB):

اگر M وسط پاره خط AB باشد، آن گاه:

$$M = \frac{1}{2}(A + B) \xrightarrow{\frac{A(-1,4)}{B(2,3)}} M\left(\frac{-1+2}{2}, \frac{4+3}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$$

از طرفی شیب AB برابر با $m_{AB} = \frac{4-3}{-1-2} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$ است، پس شیب عمودمنصف می شود $m_{\Delta} = \frac{-1}{m_{AB}} = -3$.

$$\Delta: y - y_M = m_{\Delta}(x - x_M) \Rightarrow \Delta: y - \frac{7}{2} = -3\left(x - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \Delta: y = -3x + 7$$

با توجه به معادله Δ ، از آن جا که O بر Δ واقع است، می توانیم مختصات آن را به صورت $O(\alpha, 3\alpha + 7)$ در نظر بگیریم.

گام سوم (پیدا کردن مرکز و شعاع دایره C'):

معادله دایره C' به صورت $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$ داده شده است، پس اگر مرکز آن را O' و شعاع آن را r' بنامیم، داریم:

$$O' \begin{cases} -\frac{4}{2} = 2 \\ -\frac{4}{2} = 2 \end{cases}, r' = \sqrt{2^2 + 2^2 - 4/4} = \sqrt{3/6}$$

گام چهارم (پیدا کردن خواسته سؤال):

همان طور که در گام اول گفتیم، فاصله مرکز دایره C از مرکز دایره C' برابر با r' است، یعنی $OO' = r'$ ، حالا با در نظر گرفتن $O'(2, 2)$ و $O(\alpha, 3\alpha + 7)$ داریم:

$$OO' = r' \Rightarrow \sqrt{(\alpha - 2)^2 + (3\alpha + 7 - 2)^2} = \sqrt{3/6} \Rightarrow (\alpha - 2)^2 + (3\alpha + 5)^2 = 3/6 \Rightarrow 10\alpha^2 - 4\alpha + 4 = 3/6 \Rightarrow 10\alpha^2 - 4\alpha + 0 = 3/6 \quad (*)$$

حالا با توجه به قسمت (۴) درس نامه، معادله درجه دوم $10\alpha^2 - 4\alpha + 0 = 3/6$ را حل می کنیم و جواب های آن را بر ۱۰ تقسیم می کنیم تا جواب معادله (*) به دست آید:

$$10\alpha^2 - 4\alpha + 0 = 3/6 \Rightarrow (\alpha - 2)^2 = 0 \Rightarrow \alpha = 2 \xrightarrow{\text{جواب معادله (*)}} \alpha = \frac{2}{10} = 0/2$$

اگر $\alpha = 0/2$ آن گاه مختصات O به دست می آید:

$$O(\alpha, 3\alpha + 7) = (0/2, 2/6)$$

تست و پاسخ ۴۸

معادله کوچک ترین دایره های که بر هر دو دایره به معادله های $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$ و $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 6 = 0$ مماس خارج باشد، کدام است؟

$$x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0 \quad (۲)$$

$$x^2 + y^2 + x - 2y - 1 = 0 \quad (۱)$$

$$x^2 + y^2 - 2y = 0 \quad (۴)$$

$$x^2 + y^2 + x - 2y + 1 = 0 \quad (۳)$$

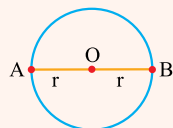
پاسخ: گزینه ۴

مشاوره در سؤال قبل گفتیم که خیلی جاها نیازی به رسم شکل دقیق نداریم، یعنی بعضی جاها نیاز به رسم شکل دقیق داریم! این سؤال، از آن سؤال هایی است که برای حل آن نیاز به رسم شکل دقیق داریم.



خودت حل کنی بهتره دو دایره داده شده را در دستگاه مختصات رسم کنید.

درس نامه



- (۱) معادله دایره‌ای به مرکز $O(\alpha, \beta)$ و شعاع r به صورت $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$ است.
- (۲) با معلوم بودن مختصات دو سر یکی از قطرهای دایره، می‌توان معادله آن را نوشت. با توجه به شکل، اگر AB قطر دایره باشد، مرکز این دایره وسط پاره خط AB و شعاع آن، نصف طول پاره خط AB است.

پاسخ تشریحی گام اول (پیدا کردن مرکز و شعاع دو دایره داده شده):

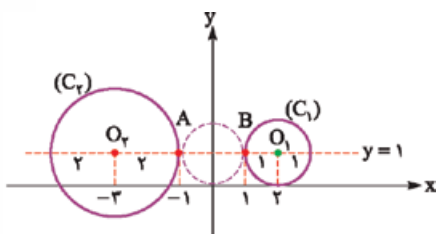
ابتدا مختصات مرکز و طول شعاع دو دایره داده شده را پیدا می‌کنیم:

$$C_1: (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1 \Rightarrow O_1(2, 1), r_1 = 1$$

$$C_2: x^2 + y^2 + 6x - 2y + 6 = 0 \Rightarrow O_2(-3, 1), r_2 = \sqrt{3^2 + 1^2 - 6} = 2$$

گام دوم (رسم دایره‌های C_1 و C_2 در دستگاه مختصات):

C_1 دایره‌ای به مرکز $(2, 1)$ و شعاع ۱ و C_2 دایره‌ای به مرکز $(-3, 1)$ و شعاع ۲ است؛
که نمودارهای آن‌ها در دستگاه مختصات، رسم شده است.



گام سوم (تحلیل شکل و پیدا کردن پاسخ سؤال):

با توجه به شکل، دایره‌ای به قطر AB کوچک‌ترین دایره‌ای است که بر هر دو دایره C_1 و C_2 مماس خارج است. مختصات A و B به راحتی به دست می‌آیند:

$$\begin{cases} x_A = x_{O_1} + r_1 = -3 + 2 = -1 \\ x_B = x_{O_2} - r_2 = 2 - 1 = 1 \end{cases} \xrightarrow{y_A = y_B = 1} \begin{cases} A(-1, 1) \\ B(1, 1) \end{cases}$$

پاره خط AB قطر دایره مورد نظر است، پس مرکز این دایره وسط AB و شعاع آن، نصف طول پاره خط AB است، پس:

$$\text{مرکز دایره } O = \frac{1}{2}(A + B) \Rightarrow O\left(\frac{-1+1}{2}, 1\right) = (0, 1)$$

$$\text{شعاع دایره } r = \frac{1}{2}AB \Rightarrow r = \frac{1}{2}(1 - (-1)) = 1$$

یعنی دایره مورد نظر، دایره‌ای به مرکز $(0, 1)$ و شعاع ۱ است که معادله آن می‌شود: $(x - 0)^2 + (y - 1)^2 = 1^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2y = 0$

تست و پاسخ ۴۹

در یک بیضی، طول کوچک‌ترین قطر، چهار برابر فاصله کانون تا نزدیک‌ترین رأس است. خروج از مرکز این بیضی کدام است؟

۰/۵ (۴)

۰/۸ (۳)

۰/۶ (۲)

۰/۴ (۱)

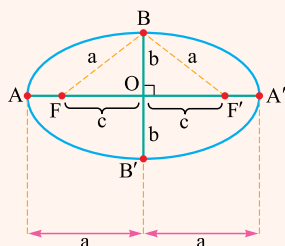
پاسخ: گزینه ۲

مشاوره معمولاً مهم‌ترین کاری که در سؤال‌های مبحث بیضی باید بتوانید انجام دهید؛ این است که مفروضات سؤال را برحسب پارامترهای a, b, c بیان کنید.

خودت حل کنی بهتره شکل را رسم کنید تا فاصله کانون تا نزدیک‌ترین رأس را برحسب پارامترهای بیضی به دست آورید.



درس نامه



(۱) در شکل رسم شده، F و F' کانون های بیضی و O مرکز آن است. نقاط A و A' رأس های کانونی و B و B' رأس های غیرکانونی نامیده می شوند. AA' بلندترین و BB' کوتاه ترین قطر بیضی است و طول پاره خطها برحسب پارامترهای a ، b و c مشخص شده اند. هم چنین توجه داشته باشید که با استفاده از قضیه فیثاغورس در مثلث BOF می توان نتیجه گرفت $a^2 = b^2 + c^2$.

(۲) با توجه به شکل، در هر بیضی فاصله هر کانون تا نزدیک ترین رأس برابر با $FA = A'F' = a - c$ است، طبیعتاً فاصله هر کانون تا دورترین رأس هم $FA' = F'A = a + c$ است.

(۳) میزان کشیدگی یا بازشدگی بیضی با پارامتری به نام خروج از مرکز (e) سنجیده می شود و بنا به تعریف داریم $e = \frac{c}{a}$ ، خروج از مرکز بیضی همیشه عددی بین صفر و یک است.

(۴) در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ اگر $a + b + c = 0$ ، آن گاه ریشه ها عبارتند از: $x = 1$ و $x = \frac{c}{a}$.

پاسخ تشریحی گام اول (پیدا کردن رابطه بین a ، b و c با توجه به فرض سؤال):

سؤال می گوید طول کوچک ترین قطر بیضی، چهار برابر فاصله کانون تا نزدیک ترین رأس است؛ یعنی:

$$BB' = 4FA \Rightarrow 2b = 4(a - c) \Rightarrow b = 2(a - c)$$

گام دوم (محاسبه خواسته سؤال با توجه به رابطه به دست آمده):

در گام اول فهمیدیم که در بیضی مورد نظر سؤال داریم $b = 2(a - c)$ ، از طرفی در هر بیضی داریم $a^2 = b^2 + c^2$ و در نهایت هدف ما پیدا کردن $e = \frac{c}{a}$ است. پس سعی می کنیم با استفاده از تساوی های (۱) و (۲) رابطه ای پیدا کنیم که در آن فقط a و c داشته باشیم. اگر طرفین

$$b^2 = 4(a - c)^2 \xrightarrow{a^2 = b^2 + c^2} a^2 - c^2 = 4(a - c)^2$$

تساوی (۱) را به توان دو برسانیم، داریم:

$$\Rightarrow a^2 - c^2 = 4(a^2 + c^2 - 2ac) \Rightarrow a^2 - c^2 = 4a^2 + 4c^2 - 8ac \Rightarrow 0 = 3a^2 + 5c^2 - 8ac$$

حالا طرفین معادله به دست آمده را بر a^2 تقسیم می کنیم:

$$5c^2 - 8ac + 3a^2 = 0 \xrightarrow{\div a^2} \frac{5c^2}{a^2} - \frac{8ac}{a^2} + \frac{3a^2}{a^2} = 0 \Rightarrow 5\left(\frac{c}{a}\right)^2 - 8\left(\frac{c}{a}\right) + 3 = 0 \Rightarrow 5e^2 - 8e + 3 = 0 \quad (*)$$

در معادله $5e^2 - 8e + 3 = 0$ ، مجموع ضرایب صفر است، پس:

$$\begin{cases} e = 1 & (\text{غیر قابل قبول}) \\ \text{یا} \\ e = \frac{3}{5} = 0.6 \end{cases}$$

تست و پاسخ ۵۰

فاصله بین دو نقطه F و F' که کانون های یک بیضی هستند، $2\sqrt{7}$ است. اگر نقطه M روی این بیضی طوری واقع باشد که $MF' = 3MF$ آن گاه $\angle FMF' = 60^\circ$. طول بلندترین قطر این بیضی کدام است؟

۴ (۴)

$2\sqrt{10}$ (۳)

۶ (۲)

۸ (۱)

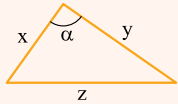
پاسخ: گزینه ۱

مشاوره سؤال ترکیبی است از موضوع «بیضی» و «قضیه کسینوس ها» که مشابه آن را در کنکور هم داشته ایم؛ سؤال مهمی است.

خودت حل کنی بهتره از قضیه کسینوس ها در مثلث FMF' استفاده کنی.



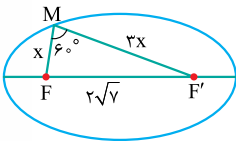
درس نامه



(۱) در هر مثلث به طول اضلاع x ، y و z ، اگر زاویه بین دو ضلع به طول های x و y برابر با α باشد، داریم

$$z^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha$$

(۲) مجموع فواصل نقاط واقع بر هر بیضی از دو کانون آن برابر با $2a$ است، ضمن آن که طول قطر بزرگ هر بیضی هم برابر با $2a$ است.



پاسخ تشریحی گام اول (استفاده از قضیه کسینوس ها در مثلث FMF'):

سؤال می گوید $MF' = 3MF$ ، پس در نظر می گیریم $MF = x$ و $MF' = 3x$ ، حالا با استفاده از

قضیه کسینوس ها در مثلث FMF' (قسمت (۱) درس نامه) داریم:

$$FF'^2 = MF^2 + MF'^2 - 2MF \cdot MF' \cdot \cos 60^\circ \Rightarrow 28 = x^2 + 9x^2 - 2x(3x)\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow 28 = 7x^2 \Rightarrow x = 2$$

گام دوم (محاسبه خواسته سؤال):

$$MF + MF' = 2a \Rightarrow 2a = 2 + (2 \times 3) = 8$$

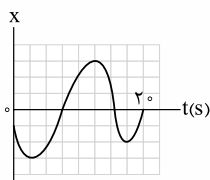
طول بلندترین قطر بیضی

با توجه به قسمت (۲) درس نامه، داریم:



فیزیک دوازدهم: فیزیک (۳): صفحه‌های ۱ تا ۷۷

تست و پاسخ (۵۱)



نمودار مکان - زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند به شکل مقابل است. تندی متوسط متحرک در کدام یک از بازه‌های زمانی زیر بیشتر است؟

(۲) صفر تا $17/5$ s

(۱) صفر تا $12/5$ s

(۴) $12/5$ s تا 20 s

(۳) $2/5$ s تا 20 s

پاسخ: گزینه (۴)

مشاوره در این جور سؤال‌ها باید حواستان به این باشد که سؤال از شما تندی متوسط متحرک را خواسته است یا سرعت متوسط! چون تندی متوسط به مسافت طی شده و سرعت متوسط به جابه‌جایی آن بستگی دارد.

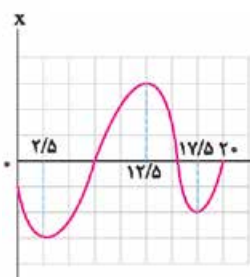
خودت حل کنی بهتره کافی است با توجه به نمودار مکان - زمان متحرک مقدار مسافت طی شده در بازه‌های زمانی مورد نظر را به دست آورید و تندی متوسط متحرک را با استفاده از رابطه $S_{av} = \frac{\ell}{\Delta t}$ محاسبه و با هم مقایسه کنید.

درس نامه تندی متوسط: نسبت مسافت پیموده شده به مدت زمان حرکت است و از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$S_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} \rightarrow \begin{matrix} \text{میدان} \\ \text{میدان} \end{matrix} \begin{matrix} \text{مسافت پیموده شده (m)} \\ \text{مدت زمان (s)} \end{matrix}$$

پاسخ تشریحی با توجه به نمودار مکان - زمان، هر واحد از محور t برابر با $\frac{20}{8}$ یا $2/5$ s است؛ بنابراین با استفاده از رابطه $S_{av} = \frac{\ell}{\Delta t}$

تندی متوسط متحرک را در بازه‌های زمانی داده شده به دست می‌آوریم (چون یکای x مشخص نیست، هر خانه روی محور قائم را ۱ واحد در نظر می‌گیریم):



$$(۱): S_{av,1} = \frac{\ell_1}{\Delta t_1} = \frac{۸ \text{ واحد}}{۱۲/۵} = ۰/۶۴ \text{ واحد / s}$$

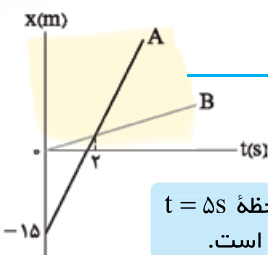
$$(۲): S_{av,2} = \frac{\ell_2}{\Delta t_2} = \frac{۱۳ \text{ واحد}}{۱۷/۵} = ۰/۷۴ \text{ واحد / s}$$

$$(۳): S_{av,3} = \frac{\ell_3}{\Delta t_3} = \frac{۱۳ \text{ واحد}}{۱۷/۵} = ۰/۷۴ \text{ واحد / s}$$

$$(۴): S_{av,4} = \frac{\ell_4}{\Delta t_4} = \frac{۷ \text{ واحد}}{۷/۵} = ۰/۹۳ \text{ واحد / s}$$

پس $S_{av,4}$ یعنی تندی متوسط متحرک در بازه زمانی $12/5$ s تا 20 s بیشتر از سایر بازه‌های زمانی است.

تست و پاسخ (۵۲)



نمودار مکان - زمان دو متحرک A و B که در راستای محور x حرکت می‌کنند، به شکل مقابل است. فاصله این دو متحرک در لحظه $t = 5$ s برابر چند متر است؟

(۲) ۲۰

(۱) ۱۰

(۴) $37/5$

(۳) $22/5$

فاصله دو متحرک در لحظه $t = 5$ s برابر $x_A - x_B$ است.

پاسخ: گزینه (۳)

مشاوره این سؤال را با کمک هندسه هم می‌توانیم پاسخ بدهیم. حتماً روش تکنیکی را ببینید.



خودت حل کنی بهتره معادله مکان - زمان دو متحرک A و B را بنویسید و با توجه به این که مکان دو متحرک در لحظه $t = 2$ s با هم برابر است، فاصله آن‌ها از هم را در لحظه $t = 5$ s به دست آورید.

درس نامه معادله مکان - زمان متحرکی که با سرعت ثابت حرکت می‌کند، به صورت زیر است:

$$\begin{array}{c} \text{سرعت متحرک} \\ \text{(m/s)} \\ \uparrow \\ \text{مکان اولیه (m)} \rightarrow x = v t + x_0 \rightarrow \text{مکان متحرک (m)} \\ \downarrow \\ \text{زمان} \\ \text{(s)} \end{array}$$

یادآوری برای تبدیل km/h به m/s و برعکس به صورت روبه‌رو عمل می‌کنیم:

$$\text{km/h} \xrightarrow[\times 3/6]{\div 3/6} \text{m/s}$$

پاسخ تشریحی چون شیب نمودار مکان - زمان دو متحرک A و B ثابت است، پس حرکت آن‌ها به صورت سرعت ثابت است؛ بنابراین

معادله مکان - زمان آن‌ها برابر است با:

$$x = vt + x_0 \Rightarrow \begin{cases} x_A = v_A t + x_{0A} \xrightarrow{x_{0A} = -15 \text{ m}} x_A = v_A t - 15 \\ x_B = v_B t + x_{0B} \xrightarrow{x_{0B} = 0 \text{ m}} x_B = v_B t + 0 \end{cases}$$

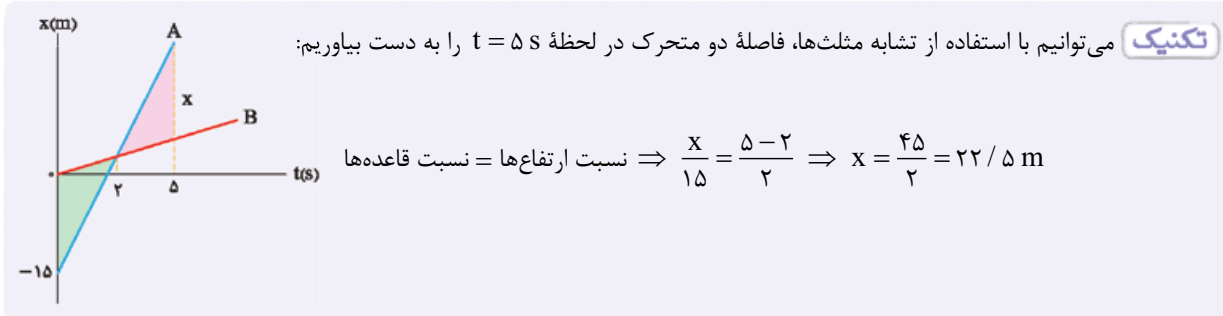
مکان دو متحرک A و B در لحظه $t = 2$ s یکسان است؛ بنابراین با توجه به معادله مکان - زمان آن‌ها داریم:

$$x_A = x_B \Rightarrow 2v_A - 15 = 2v_B \Rightarrow v_A - v_B = 7/5 \text{ m/s}$$

با توجه به نمودار مکان - زمان، مکان متحرک A در لحظه $t = 5$ s بیشتر از مکان متحرک B است؛ بنابراین فاصله آن‌ها در این لحظه برابر

است با:

$$x_A - x_B = 5v_A - 15 - 5v_B \xrightarrow{v_A - v_B = 7/5 \text{ m/s}} x_A - x_B = 37/5 - 15 = 22/5 \text{ m}$$



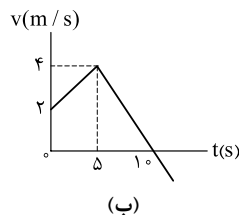
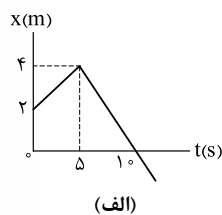
تست و پاسخ ۵۳

دو متحرک A و B در راستای محور x در حال حرکت هستند. نمودار مکان-زمان

متحرک A به شکل (الف) و نمودار سرعت - زمان متحرک B به شکل (ب)

است. در 10 ثانیه نخست، اندازه شتاب متوسط متحرک A چند برابر اندازه

شتاب متوسط متحرک B است؟



$$\frac{1}{5} (2)$$

$$5 (1)$$

$$\frac{5}{3} (4)$$

$$\frac{3}{5} (3)$$

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره شما باید ویژگی‌های هر نمودار را بلد باشید. این سؤال تمرین خوبی برای محک‌زدن مهارتتان در نمودارها است.



خودت حل کنی بهتره سرعت متحرک A را در دو لحظه $t = 0 \text{ s}$ و $t = 10 \text{ s}$ با استفاده از شیب نمودار مکان - زمان به دست بیاورید و

با استفاده از رابطه $a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ شتاب متوسط آن را محاسبه کنید. (سرعت متحرک B هم که معلومه!)

درس نامه شتاب متوسط: اگر سرعت متحرکی در لحظه t_1 برابر با v_1 و در لحظه t_2 برابر با v_2 باشد، آن گاه شتاب متوسط آن از رابطه زیر به دست می آید:

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

تغییرات سرعت
(m/s)

شتاب متوسط
(m/s²)

مدت زمان
(s)

پاسخ تشریحی شیب مماس بر نمودار مکان - زمان در هر لحظه بیانگر سرعت متحرک در آن لحظه است؛ بنابراین سرعت متحرک A در

$$v_{(t_1=0 \text{ s})} = \frac{4-2}{5-0} = \frac{2}{5} \text{ m/s}$$

لحظه های $t_1 = 0 \text{ s}$ و $t_2 = 10 \text{ s}$ برابر است با:

$$v_{(t_2=10 \text{ s})} = \frac{0-4}{10-5} = -\frac{4}{5} \text{ m/s}$$

حالا می توانیم شتاب متوسط متحرک A در 10 ثانیه اول را به دست آوریم: $a_{av,A} = \frac{\Delta v_A}{\Delta t} = \frac{-\frac{4}{5} - \frac{2}{5}}{10-0} \Rightarrow a_{av,A} = -\frac{3}{25} \text{ m/s}^2$ هم چنین با توجه به نمودار سرعت - زمان متحرک B، سرعت آن در لحظه های $t_1 = 0 \text{ s}$ و $t_2 = 10 \text{ s}$ برابر است با:

$$v_{(t_1=0 \text{ s})} = 2 \text{ m/s}, v_{(t_2=10 \text{ s})} = 0 \text{ m/s}$$

بنابراین شتاب متوسط متحرک B در 10 ثانیه اول را می توانیم به دست بیاوریم: $a_{av,B} = \frac{\Delta v_B}{\Delta t} = \frac{0-2}{10-0} \Rightarrow a_{av,B} = -\frac{2}{10} \text{ m/s}^2$

در آخر نسبت اندازه شتاب متوسط متحرک A به اندازه شتاب متوسط متحرک B را محاسبه می کنیم:

$$\left| \frac{a_{av,A}}{a_{av,B}} \right| = \left| \frac{-\frac{3}{25}}{-\frac{2}{10}} \right| = \frac{3}{5}$$

تست و پاسخ (۵۴)

متحرکی که با شتاب ثابت روی محور x حرکت می کند، در مدت 5 s سرعت خود را از $\vec{v}_1 = (-4 \text{ m/s})\hat{i}$ به $\vec{v}_2 = (6 \text{ m/s})\hat{i}$ می رساند. مسافت طی شده توسط متحرک در این مدت چند متر است؟

۹ (۲)

۵ (۱)

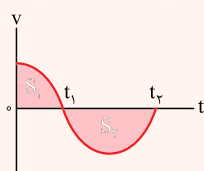
۲۵ (۴)

۱۳ (۳)

پاسخ: گزینه ۳

مشاوره بهترین روش برای محاسبه مسافت یا جابه جایی طی شده توسط متحرک، رسم نمودار سرعت - زمان متحرک است. پس نمودار سرعت - زمان متحرک را رسم کنید و سؤال را قلع و قمع کنید.

خودت حل کنی بهتره نمودار سرعت - زمان متحرک را رسم کنید و با استفاده از مساحت بین نمودار و محور t، مقدار مسافت طی شده در مدت 5 s را به دست آورید.



درس نامه • محاسبه جابه جایی و مسافت طی شده توسط متحرک به کمک نمودار سرعت - زمان $(v-t)$:

(۱) محاسبه جابه جایی: مساحت محصور بین نمودار و محور t در هر بازه زمانی بیانگر اندازه جابه جایی متحرک در آن بازه زمانی است.

اگر نمودار بالای محور t باشد، جابه جایی متحرک، مثبت و اگر نمودار زیر محور t باشد، جابه جایی متحرک، منفی است. برای مثال در نمودار بالا داریم:

نمودار بالای محور t

$$\Delta x_1 = +S_1 \Rightarrow \Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 = S_1 - S_2$$

نمودار پایین محور t

$$\Delta x_2 = -S_2$$

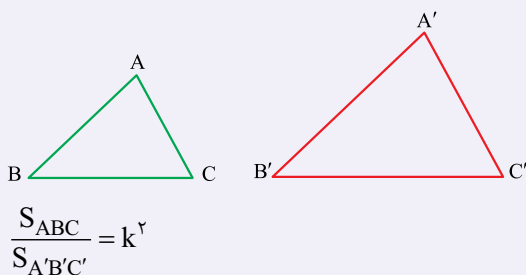
(۲) محاسبه مسافت طی شده:

مسافت طی شده توسط متحرک همواره مثبت است؛ بنابراین برای نمودار بالا داریم:

$$l_1 = +S_1 \Rightarrow l = l_1 + l_2 = S_1 + S_2$$

مسافت طی شده در بازه زمانی t_1 تا t_2 : $l_2 = +S_2$

یادآوری ریاضی اگر دو مثلث ABC و $A'B'C'$ با یکدیگر متشابه باشند، آن گاه نسبت اضلاع متناظر آنها با یکدیگر برابر است.



نسبت تشابه

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = k$$

همچنین نسبت مساحت دو مثلث متشابه، برابر با مربع نسبت تشابه است.

پاسخ تشریحی

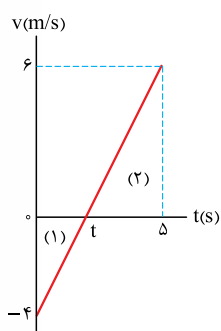
چون سرعت متحرک از -4 m/s به 6 m/s رسیده است، پس شتاب آن در این مدت مثبت بوده و نمودار سرعت - زمان به صورت مقابل است:

با استفاده از تشابه مثلث های (۱) و (۲)، مقدار t را به دست می آوریم:

$$\frac{5-t}{t} = \frac{6}{4} \Rightarrow 4t = 10 - 2t \Rightarrow 6t = 10 \Rightarrow t = \frac{5}{3} \text{ s}$$

برای محاسبه مسافت طی شده در این ۵ ثانیه، کافی است مساحت بین نمودار سرعت - زمان و محور t در این مدت را به دست بیاوریم:

$$l = \frac{4 \times 2}{2} + \frac{(5-2)(6)}{2} \Rightarrow l = 4 + 9 = 13 \text{ m}$$



تست و پاسخ ۵۵

متحرکی در راستای محور x با شتاب ثابت $\vec{a} = (-2 \text{ m/s}^2)$ در حال حرکت است. اگر در بازه زمانی صفر تا T ، مسافت طی شده توسط متحرک

250 m و جابه جایی آن برابر $\vec{a} = (200 \text{ m})$ باشد، اندازه سرعت متوسط متحرک در بازه زمانی صفر تا $\frac{T}{2}$ چند متر بر ثانیه است؟

متحرک تغییر جهت می دهد.

۳۰ (۴)

۲۰ (۳)

۱۵ (۲)

۱۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

مشاوره برای حل این سؤال باید حرکت متحرک را تحلیل و بررسی کنید. مثلاً متحرک تغییر جهت داده است و ابتدا در جهت محور x حرکت کرده است و



خودت حل کنی بهتره ابتدا مسیر حرکت رفت و برگشت متحرک را بر روی محور X رسم کنید، سپس با کمک معادله مکان - زمان در حرکت با شتاب ثابت، مدت زمان حرکت را محاسبه کنید و در آخر سرعت متوسط متحرک را با استفاده از رابطه $v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ به دست آورید.

درس نامه ۱) سرعت متوسط: نسبت جابه جایی به مدت زمان حرکت است و از رابطه زیر محاسبه می شود:

سرعت متوسط
(m/s)

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

جابه جایی (m) → Δx
مدت زمان (s) → Δt

۲) معادله مکان - زمان متحرکی که با شتاب ثابت بر روی مسیری مستقیم حرکت می کند، به صورت زیر است:

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \Rightarrow \Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t$$

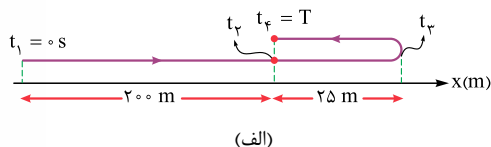
مکان اولیه متحرک (m) → x_0
 زمان (s) → t
 شتاب متحرک (m/s²) → a
 سرعت اولیه متحرک (m/s) → v_0
 جابه جایی متحرک (m) → Δx

۳) معادله جابه جایی زمان به شکل مستقل از سرعت اولیه:

$$\Delta x = -\frac{1}{2}at^2 + vt$$

سرعت متحرک در لحظه t (m/s) → v

پاسخ تشریحی چون مقدار مسافت طی شده توسط متحرک از اندازه جابه جایی آن بیشتر است، پس متحرک تغییر جهت داده است. از طرفی چون شتاب متحرک در خلاف جهت محور X است، پس متحرک باید در جهت محور X حرکت کند تا تغییر جهت رخ دهد. هم چنین با توجه به این که مسافت طی شده توسط متحرک ۲۵۰ m و اندازه جابه جایی آن ۲۰۰ m است. مسیر رفت و برگشت آن به صورت شکل «الف» است:



حالا با توجه به شکل (الف) و با استفاده از معادله جابه جایی - زمان در حرکت با شتاب ثابت، مدت زمان حرکت متحرک از لحظه t_1 تا لحظه t_3 را به دست می آوریم:

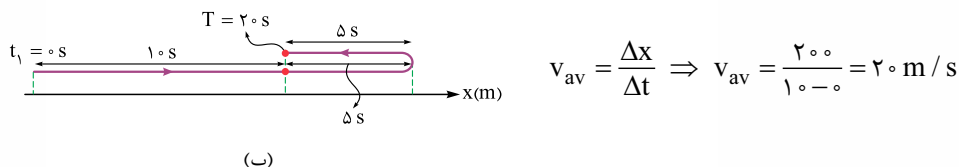
$$\Delta x_1 = \frac{1}{2}a\Delta t_1^2 + v_0\Delta t_1 \xrightarrow{v_0=0 \text{ m/s}, a=-2 \text{ m/s}^2} -25 = \frac{1}{2}(-2)\Delta t_1^2 \Rightarrow \Delta t_1 = 5 \text{ s}$$

چون از لحظه t_1 تا t_3 به اندازه ۵ ثانیه طول می کشد، پس از لحظه t_1 تا t_3 هم به اندازه ۵ ثانیه طول می کشد. حالا معادله جابه جایی - زمان به صورت مستقل از سرعت اولیه در حرکت با شتاب ثابت را از لحظه t_1 تا t_3 می نویسیم:

$$\Delta x_2 = \frac{1}{2}a\Delta t_2^2 + v\Delta t_2 \xrightarrow{v_0=0 \text{ m/s}, a=-2 \text{ m/s}^2} 225 = \frac{1}{2}(-2)\Delta t_2^2 \Rightarrow \Delta t_2 = 15 \text{ s}$$

بنابراین مدت زمان حرکت در طی مسیر، مطابق شکل «ب» است:

متحرک از لحظه $t_1 = 0 \text{ s}$ تا لحظه $T = 10 \text{ s}$ ، ۲۰۰ متر جابه جا شده است؛ بنابراین سرعت متوسط آن در این بازه زمانی برابر است با:





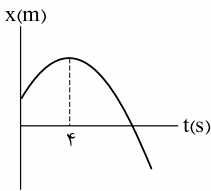
تست و پاسخ ۵۶

نمودار مکان - زمان متحرکی که با شتاب ثابت در راستای محور x حرکت می کند، به شکل زیر است. مسافت طی شده توسط متحرک در ۲ ثانیه سوم چند برابر اندازه جابه جایی آن در

$(4s, 6s)$

$(3s, 6s)$

۳ ثانیه دوم است؟



$\frac{5}{4} (4)$

$\frac{4}{5} (3)$

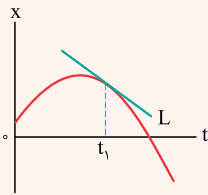
$\frac{3}{4} (2)$

$\frac{4}{3} (1)$

پاسخ: گزینه ۱

مشاوره با روش های مختلفی می توانید به این سوال پاسخ بدهید اما بهترین روش، رسم نمودار سرعت - زمان آن است.

خودت حل کنی بهتره نمودار سرعت - زمان متحرک را رسم کنید، سپس با استفاده از تشابه مثلث ها و مساحت بین نمودار و محور t ، مسافت و جابه جایی خواسته شده را به دست بیاورید.

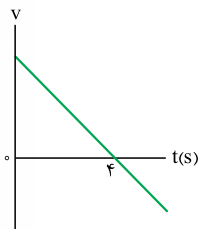


درس نامه ۵۴ ۱) شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان متحرک در هر لحظه بیانگر سرعت متحرک در آن لحظه است.

$$L \text{ شیب خط} = v(t_1)$$

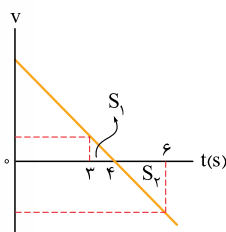
هم چنین می دانید که اندازه سرعت متحرک در هر لحظه همان تندی متحرک در آن لحظه است.

۲) درس نامه و یادآوری ریاضی تست ۵۴ را بخوانید.



(الف)

پاسخ تشریحی با توجه به شیب مماس بر نمودار مکان - زمان، سرعت متحرک در ۴ ثانیه اول مثبت، در لحظه $t = 4s$ برابر با صفر و پس از لحظه $t = 4s$ منفی است. هم چنین چون متحرک با شتاب ثابت حرکت می کند، پس نمودار سرعت - زمان آن به صورت یک خط شیبدار مطابق شکل «الف» است:



(ب)

۲ ثانیه سوم از لحظه $t_1 = 4s$ تا $t_2 = 6s$ و ۳ ثانیه دوم از لحظه $t_3 = 3s$ تا $t_4 = 6s$ است؛ بنابراین با توجه به شکل «ب» و با استفاده از تشابه مثلث ها برای این دو بازه زمانی می توانیم بنویسیم:

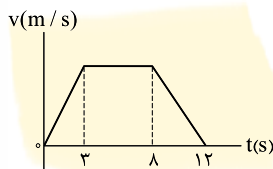
$$\frac{S_2}{S_1} = \left(\frac{6-4}{4-3}\right)^2 \Rightarrow S_2 = 4S_1$$

مسافت طی شده توسط متحرک در ۲ ثانیه سوم برابر با S_2 و جابه جایی آن در ۳ ثانیه دوم برابر با $S_1 - S_2$ یا $-3S_1$ است؛ پس داریم:

$$\frac{\ell}{|\Delta x|} = \frac{S_2}{3S_1} \xrightarrow{S_2=4S_1} \frac{\ell}{|\Delta x|} = \frac{4S_1}{3S_1} = \frac{4}{3}$$

تست و پاسخ ۵۷

نمودار سرعت - زمان متحرکی که روی محور x حرکت می کند، به شکل مقابل است. اگر تندی متوسط متحرک در بازه زمانی $t_1 = 2s$ تا $t_2 = 10s$ برابر 11 m/s باشد، شتاب متوسط متحرک در این بازه زمانی چند متر بر مربع ثانیه است؟



مساحت بین این نمودار و محور t برابر با جابه جایی متحرک است.

$-0.5 \vec{i} (2)$

$0.5 \vec{i} (1)$

$-0.25 \vec{i} (4)$

$0.25 \vec{i} (3)$

پاسخ: گزینه ۲



مشاوره اگر این سؤال را به درستی پاسخ دادید، یعنی به تسلط خوبی در این درس رسیدید.

خودت حل کنی بهتره شتاب متحرک در مرحله اول و آخر را با یکدیگر مقایسه کنید و سرعت آن را در دو لحظه $t_1 = 2\text{ s}$ و $t_2 = 10\text{ s}$ محاسبه کنید، سپس با استفاده از مساحت بین نمودار و محور t ، شتاب متحرک در مرحله اول حرکت را به دست بیاورید و به کمک آن، مقدار سرعت متحرک در دو لحظه $t_1 = 2\text{ s}$ و $t_2 = 10\text{ s}$ را پیدا کنید و در آخر با استفاده از رابطه $a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ شتاب متوسط متحرک در این بازه زمانی را به دست آورید.

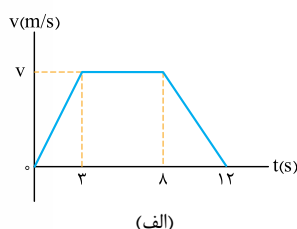
درس نامه ۱ درس نامه تست ۵۳ و درس نامه تست ۵۴ را بخوانید.

۲ معادله سرعت - زمان متحرکی که با شتاب ثابت بر روی خط راست حرکت می کند، به صورت روبه رو است:

$$v = at + v_0$$

زمان (s) در هر لحظه (m/s) سرعت متحرک
 سرعت اولیه شتاب متحرک (m/s) متحرک (m/s²)

پاسخ تشریحی ابتدا با توجه به شکل (الف) شتاب متحرک در مرحله اول و آخر را به دست می آوریم:



$$a_{av} = a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{v-0}{3-0} = \frac{v}{3} \\ a_2 = \frac{0-v}{12-8} = -\frac{v}{4} \end{cases} \Rightarrow a_2 = -\frac{3}{4}a_1$$

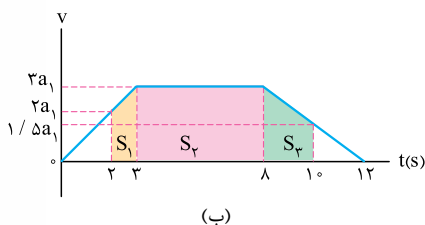
حالا سرعت متحرک در لحظه های $t_1 = 2\text{ s}$ و $t_2 = 10\text{ s}$ را با استفاده از معادله سرعت - زمان به دست می آوریم:

$$v = at + v_0 \Rightarrow \begin{cases} v_2 = a_1(2) + 0 \Rightarrow v_2 = 2a_1 \\ v_1 = a_2(10-8) + v \xrightarrow{a_2 = -\frac{3}{4}a_1, v=3a_1} v_1 = -\frac{3}{4}a_1 \times 2 + 3a_1 \Rightarrow v_1 = 1/5 a_1 \end{cases}$$

از طرفی تندی متوسط متحرک از لحظه $t_1 = 2\text{ s}$ تا لحظه $t_2 = 10\text{ s}$ برابر با 11 m/s است؛ بنابراین با استفاده از رابطه $s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t}$ می توانیم بنویسیم:

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} \xrightarrow{\frac{s_{av}=11\text{ m/s}}{\Delta t=10-2=8\text{ s}}} 11 = \frac{\ell}{8} \Rightarrow \ell = 88\text{ m}$$

با توجه به مساحت بین نمودار و محور t ، مسافت طی شده از لحظه $t_1 = 2\text{ s}$ تا $t_2 = 10\text{ s}$ را محاسبه می کنیم. (شکل ب)



$$\ell = S_1 + S_2 + S_3 \Rightarrow \ell = \frac{(2a_1 + 2a_1)(1)}{2} + (8-3)(2a_1) + \frac{(2a_1 + 1/5 a_1)(2)}{2}$$

$$\xrightarrow{\ell=88\text{ m}} 88 = 2/5 a_1 + 15 a_1 + 4/5 a_1 \Rightarrow 22 a_1 = 88 \Rightarrow a_1 = 4\text{ m/s}^2$$

حالا می توانیم سرعت در لحظه های $t_1 = 2\text{ s}$ و $t_2 = 10\text{ s}$ را به دست آوریم:

$$v_2 = 2a_1 \xrightarrow{a_1=4\text{ m/s}^2} v_2 = 2 \times 4 = 8\text{ m/s}$$

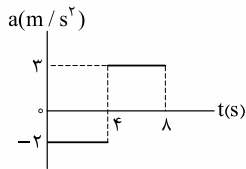
$$v_1 = 1/5 a_1 \xrightarrow{a_1=4\text{ m/s}^2} v_1 = 1/5 \times 4 = 0.8\text{ m/s}$$

در آخر شتاب متوسط متحرک در بازه زمانی $(2\text{ s}, 10\text{ s})$ را محاسبه می کنیم:

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow a_{av} = \frac{0.8-8}{10-2} \Rightarrow a_{av} = -0.92\text{ m/s}^2 \text{ یا } \vec{a}_{av} = (-0.92\text{ m/s}^2)\vec{i}$$



تست و پاسخ ۵۸



نمودار شتاب - زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می کند، به شکل روبه رو است. اگر در لحظه $t = 8 \text{ s}$ سرعت متحرک برابر $\vec{a} (3 \text{ m/s})$ باشد، تندی متوسط آن در بازه زمانی ای که به صورت کندشونده حرکت می کند، چند متر بر ثانیه است؟

- (۲) ۵
(۴) ۵/۲

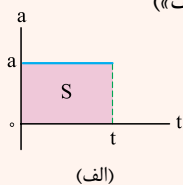
- (۱) ۵/۴
(۳) ۵/۱

پاسخ: گزینه ۱

مشاوره رسم نمودار سرعت - زمان از روی نمودار شتاب - زمان، کلید حل این جور تست ها است. تنها چالش این سؤال، به دست آوردن سرعت اولیه متحرک است که با کمک آن می توانید نمودار سرعت - زمان آن را رسم کنید.

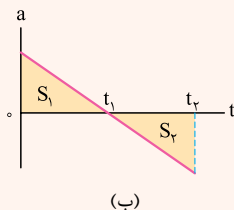
خودت حل کنی بهتره ابتدا سرعت اولیه متحرک را با توجه به نمودار شتاب - زمان به دست آورید، سپس نمودار سرعت - زمان متحرک را با استفاده از مساحت بین نمودار شتاب - زمان و محور t رسم کنید و در آخر تندی متوسط متحرک در بازه زمانی خواسته شده را با توجه به نمودار سرعت - زمان آن محاسبه کنید.

درس نامه ۱) مساحت محصور بین نمودار شتاب - زمان و محور t برابر با اندازه تغییرات سرعت است. (شکل «الف»)



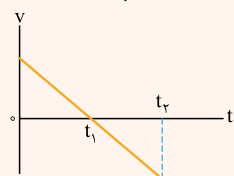
$$|\Delta v| = S$$

۲) اگر نمودار شتاب - زمان بالای محور t باشد، علامت تغییرات سرعت مثبت و اگر پایین محور t باشد، علامت تغییرات سرعت منفی است. (شکل «ب»)



$$\Delta v_1 = S_1 \quad \text{تغییرات سرعت در بازه زمانی } (0, t_1)$$

$$\Delta v_2 = -S_2 \quad \text{تغییرات سرعت در بازه زمانی } (t_1, t_2)$$



۳) تشخیص تندشونده یا کندشونده بودن حرکت به کمک نمودار سرعت - زمان

• اگر نمودار به محور زمان نزدیک شود $\Leftarrow$ تندی (اندازه سرعت) متحرک در حال کاهش است.
 $\Leftarrow$ حرکت متحرک کندشونده است.

برای مثال در نمودار بالا در بازه زمانی صفر تا t_1 حرکت متحرک کندشونده است.

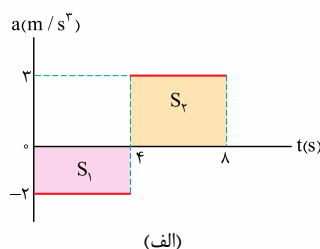
• اگر نمودار از محور زمان دور شود $\Leftarrow$ تندی (اندازه سرعت) متحرک در حال افزایش است. $\Leftarrow$ حرکت متحرک تندشونده است.
برای مثال در نمودار بالا در بازه زمانی t_1 تا t_2 حرکت متحرک تندشونده است.

پاسخ تشریحی

سرعت متحرک در لحظه $t = 8 \text{ s}$ برابر با 3 m/s است؛ بنابراین با توجه به

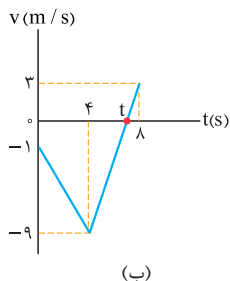
مساحت بین نمودار شتاب - زمان و محور t (شکل «الف») می توانیم سرعت اولیه آن را محاسبه کنیم:

$$\Delta v = v_8 - v_0 \Rightarrow -S_1 + S_2 = 3 - v_0 \Rightarrow v_0 - (2 \times 4) + (3 \times 4) = 3 \Rightarrow v_0 = -1 \text{ m/s}$$





حالا می‌توانیم نمودار سرعت - زمان متحرک را رسم کنیم (شکل «ب»):



متحرک از لحظه $t_1 = 4$ s تا لحظه $t_2 = t$ به صورت کندشونده در خلاف جهت محور X حرکت می‌کند؛ پس تندى متوسط آن در این بازه زمانی برابر است با:

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{9(t-4)}{2} = \frac{9}{2} \Rightarrow s_{av} = 4.5 \text{ m/s}$$

تست و پاسخ ۱۵۹

۲۵ m/s

۵ m/s

خودرویی با تندى ثابت 90 km/h در مسیر مستقیمی در حال حرکت است. راننده خودرو، مانع ساکنی را در فاصله 80 متری از خود می‌بیند و ترمز می‌کند. اگر زمان واکنش راننده 0.8 s باشد، خودرو با سرعت 18 km/h به مانع برخورد می‌کند. برای این که خودرو به مانع برخورد نکند، راننده باید زمان واکنش خود را حداقل چند ثانیه کاهش دهد؟ (اندازه شتاب خودرو در حین ترمز کردن، در دو حالت ثابت و یکسان است.)

۰/۷ (۴)

۰/۶ (۳)

۰/۲ (۲)

۰/۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

خودت حل کنی بهتره مقدار جابه‌جایی طی شده در مدت زمان واکنش راننده را محاسبه کنید، سپس با استفاده از رابطه مستقل از زمان، شتاب خودرو را به دست بیاورید. در آخر با استفاده از رابطه مستقل از زمان و معادله مکان - زمان در حرکت با سرعت ثابت، زمان واکنش راننده در حالت دوم را محاسبه کنید.

درس‌نامه ۱ رابطه مستقل از زمان: اگر متحرکی بر روی مسیر مستقیم و با شتاب ثابت a حرکت کند و با سرعت v_1 از مکان x_1 و با سرعت v_2 از مکان x_2 عبور کند، آن‌گاه رابطه زیر برقرار است (به این رابطه، مستقل از زمان می‌گویند، چون t توی رابطه نیست):

$$v_2^2 - v_1^2 = 2a(x_2 - x_1)$$

شتاب متحرک
(m/s²)

v_2^2
 v_1^2
 $2a$
 $(x_2 - x_1)$

سرعت ثانویه
سرعت اولیه
مکان ثانویه
مکان اولیه

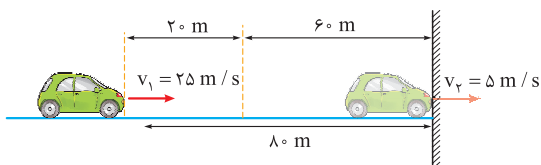
(m/s)
(m/s)
(m)
(m)

۲ درس‌نامه تست ۵۲ را بخوانید.

پاسخ تشریحی **گام اول:** مدت زمانی که طول می‌کشد تا راننده پس از دیدن مانع ترمز کند، برابر با 0.8 s ثانیه است؛ پس جابه‌جایی خودرو در این مدت را به دست می‌آوریم:

$$\Delta x = v \Delta t \quad \frac{v_1 = 90 \times \frac{10}{36} = 25 \text{ m/s}}{\Delta t = 0.8 \text{ s}} \rightarrow \Delta x = 25 \times 0.8 = 20 \text{ m}$$

گام دوم: از لحظه‌ای که راننده ترمز می‌کند تا لحظه‌ای که به مانع برخورد می‌کند، به اندازه 60 m ($80 - 20 = 60$) جابه‌جا می‌شود (شکل الف)؛ بنابراین می‌توانیم شتاب متحرک را با استفاده از رابطه مستقل از زمان به دست آوریم:



$$v_2^2 - v_1^2 = 2a\Delta x_1 \quad \frac{\Delta x_1 = 60 \text{ m}}{25^2 - 0^2 = 2a(60)} \rightarrow 25^2 - 0^2 = 2a(60) \Rightarrow a = -5 \text{ m/s}^2$$

گام سوم: برای این که خودرو به مانع برخورد نکند، باید در جلوی مانع بایستد ($v_2 = 0 \text{ m/s}$)، پس داریم:

$$v_2^2 - v_1^2 = 2a\Delta x_2 \Rightarrow 0^2 - 25^2 = 2(-5)\Delta x_2 \Rightarrow \Delta x_2 = 62.5 \text{ m}$$

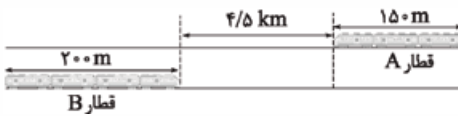


یعنی خودرو از لحظه ترمز تا لحظه توقف به اندازه $62/5 \text{ m}$ جابه‌جا می‌شود؛ بنابراین جابه‌جایی خودرو در مدت زمان واکنش راننده برابر با $(80 - 62/5)$ یعنی $17/5 \text{ m}$ است و مدت زمان واکنش راننده در این مدت برابر است با:

$$\Delta x = v_1 \Delta t_r \xrightarrow{\Delta x = 17/5 \text{ m}, v_1 = 25 \text{ m/s}} 17/5 = 25 \Delta t_r \Rightarrow \Delta t_r = 0/7 \text{ s}$$

گام چهارم: پس راننده حداقل باید $(0/7 - 0/8)$ یعنی $0/1 \text{ s}$ مدت زمان واکنش خود را کاهش دهد.

تست و پاسخ ۶۰



قطار A به طول 150 m با تندی ثابت 30 m/s روی یک ریل مستقیم در حال حرکت است. قطار B به طول 200 m روی ریل مستقیم مجاور ساکن است. مطابق شکل روبه‌رو، در لحظه‌ای که فاصله ابتدای دو قطار به $4/5 \text{ km}$ می‌رسد، قطار B با شتابی به بزرگی 2 m/s^2 به سمت قطار A شروع به حرکت کرده، تندی خود را به 40 m/s می‌رساند و با همان سرعت به حرکت خود ادامه می‌دهد. چند ثانیه پس از شروع حرکت قطار B، دو قطار به طور کامل از کنار هم عبور می‌کنند؟ (جهت حرکت قطارها مخالف یکدیگر است.)

۷۵ (۴)

۷۰ (۳)

۵۵ (۲)

۵۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

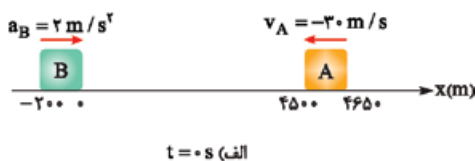
مشاوره سوالات مربوط به قطار، در کنکور سراسری چندین بار آمده است. پس به سادگی از این سؤال (و تمام سؤال‌های ذهنتان) رد نشوید!

خودت حل کنی بهتره وضعیت قطارها را بر روی محور X مشخص کنید، سپس مدت زمان و جابه‌جایی قطار B را هنگامی که با شتاب ثابت حرکت می‌کند، محاسبه کنید و در آخر با توجه به جابه‌جایی قطار A در این مدت و با استفاده از معادله مکان - زمان، خواسته سؤال را پیدا کنید.

درس نامه درس نامه تست ۵۲ و درس نامه تست ۵۳ را بخوانید.

پاسخ تشریحی

روش اول: ابتدا وضعیت قطارها را در لحظه $t = 0 \text{ s}$ بر روی محور X مشخص می‌کنیم (شکل «الف»):



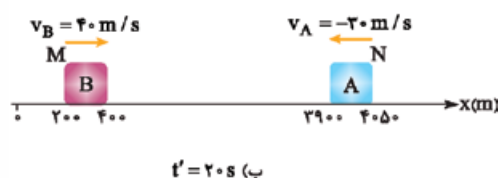
مدت زمانی را که طول می‌کشد تا سرعت قطار B به 40 m/s برسد،

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow 2 = \frac{40 - 0}{t' - 0} \Rightarrow t' = 20 \text{ s}$$

حالا جابه‌جایی قطارهای A و B را تا لحظه $t' = 20 \text{ s}$ محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta x_B = \frac{1}{2} a_B t'^2 + v_{B0} t' \xrightarrow{v_{B0} = 0 \text{ m/s}, a_B = 2 \text{ m/s}^2, t' = 20 \text{ s}} \Delta x_B = \frac{1}{2} \times 2 \times (20)^2 = 400 \text{ m}$$

$$\Delta x_A = v_A t' \xrightarrow{t' = 20 \text{ s}, v_A = -30 \text{ m/s}} \Delta x_A = -30 \times 20 = -600 \text{ m}$$



بنابراین وضعیت قطارها در لحظه $t' = 20 \text{ s}$ به صورت شکل «ب» است:

قطار B وقتی به طور کامل از قطار A عبور می‌کند که $x_M = x_N$ بشود.

با توجه به این که قطار B پس از لحظه $t' = 20 \text{ s}$ با سرعت ثابت 40 m/s

حرکت می‌کند، داریم:

$$x_M = x_N \Rightarrow v_B t + x_{B0} = v_A t + x_{A0} \xrightarrow{v_B = 40 \text{ m/s}, v_A = -30 \text{ m/s}, x_{A0} = 450 \text{ m}, x_{B0} = 200 \text{ m}} 40t + 200 = -30t + 450$$

$$\Rightarrow 70t = 250 \Rightarrow t = 55 \text{ s}$$

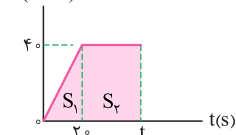


بنابراین مدت زمانی که طول می کشد تا قطار B پس از شروع حرکت از قطار A به طور کامل عبور کند، برابر است با:

$$t_{\text{کل}} = t' + t \xrightarrow[t=55\text{ s}]{t'=20\text{ s}} t_{\text{کل}} = 20 + 55 = 75\text{ s}$$

روش دوم: باید مجموع مسافت هایی که دو انتهای قطارها طی می کنند با مجموع اندازه مساحت های زیر نمودار سرعت - زمان آن ها برابر باشد.

$v(\text{m/s})$



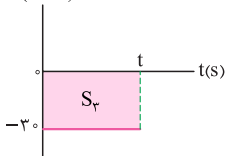
$$200 + 4500 + 150 = S_1 + S_2 + S_3$$

$$4850 = \frac{20 \times 40}{2} + 40(t - 20) + (30t)$$

$$\Rightarrow 4850 = 400 + 40t - 800 + 30t$$

$$5250 = 70t \rightarrow t = 75\text{ s}$$

$v(\text{m/s})$



مشابه روش اول $t' = 20\text{ s}$ را به دست می آوریم.

۶۱

تست و پاسخ

در شرایط خلأ، گلوله ای را از بالای برجی از حال سکون رها می کنیم. اگر در نیم ثانیه آخر سقوط، انرژی جنبشی گلوله ۴۴ درصد افزایش یابد، ارتفاع برج چند متر است؟ ($g = 9.8\text{ m/s}^2$)

$$K_2 = K_1 + \frac{44}{100} K_1 = \frac{144}{100} K_1$$

$$v_0 = 0$$

$$44/1 \quad (2)$$

$$88/2 \quad (4)$$

$$39/2 \quad (1)$$

$$78/4 \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره این سؤال با کنکور تجربی داخل ۸۹ و ریاضی داخل ۹۶ تشابه مفهومی دارد. اگر در این سؤال با $g = 9.8\text{ m/s}^2$ مشکل محاسباتی دارید، می توانید $g \approx 10\text{ m/s}^2$ را در نظر گرفته و جواب نهایی را با تقریب به دست آورید.

خودت حل کنی بهتره ابتدا به کمک معادله سرعت - زمان در حرکت سقوط آزاد، اختلاف سرعت گلوله در ابتدا و انتهای ۵ ثانیه آخر حرکت را به دست آورید. سپس به کمک رابطه انرژی جنبشی و نسبت سرعت گلوله در ابتدا و انتهای ۵ ثانیه آخر، سرعت گلوله را در این دو لحظه به دست آورید و در نهایت به کمک معادله مستقل از زمان، h را به دست آورید.

درس نامه ۱۱۱ اگر تنها نیرویی که بر جسم اثر می کند، نیروی گرانش باشد، جسم با شتاب $-g$ حرکت می کند و اصطلاحاً در حال سقوط آزاد است.

دو مورد از معادله های سقوط آزاد:

$$v = -gt + v_0$$

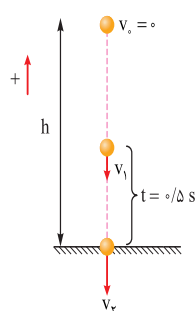
$$v^2 - v_0^2 = -2g\Delta y$$

(۲) انرژی جنبشی جسمی به جرم m که با تندی v حرکت می کند از رابطه $K = \frac{1}{2}mv^2$ به دست می آید.

پاسخ تشریحی

گام اول: ابتدا به کمک معادله سرعت - زمان در حرکت سقوط آزاد، رابطه سرعت گلوله در ابتدا و انتهای ۵ ثانیه آخر را به دست می آوریم:

$$v_2 = -gt + v_1 \Rightarrow v_2 = -9.8 \times 5 + v_1 \Rightarrow v_2 = v_1 - 49\text{ (m/s)}$$





گام دوم: با توجه به رابطه انرژی جنبشی، سرعت‌های v_1 و v_2 را به دست می‌آوریم:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \xrightarrow{\text{ثابت: } m} \frac{K_2}{K_1} = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 \xrightarrow{K_2 = K_1 + \frac{44}{100}K_1 = \frac{144}{100}K_1} \frac{144}{100} = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 \xrightarrow{v_2 = v_1 - 4/9 \text{ (m/s)}} \frac{12}{10} = \frac{v_1 - 4/9}{v_1}$$

$$\Rightarrow 12v_1 = 10v_1 - 49 \Rightarrow 2v_1 = -49 \Rightarrow v_1 = -24.5 \text{ m/s} \Rightarrow v_2 = -24.5 - 4/9 = -29.4 \text{ m/s}$$

گام سوم: با داشتن v_2 و v_0 ، به کمک معادله مستقل از زمان، h را به دست می‌آوریم:

$$v_2^2 - v_0^2 = -2g\Delta y \xrightarrow{\Delta y = -h, v_0 = 0, v_2 = -29.4 \text{ m/s}} (-29.4/4)^2 - 0 = -2(9.8)(-h) \Rightarrow h = \frac{29.4/4 \times 29.4/4}{2 \times 9.8} = 44/1 \text{ m}$$

تست و پاسخ ۶۲

در شرایط خلأ، دو گلوله به فاصله زمانی t از یک نقطه رها می‌شوند. اگر $2/5 \text{ s}$ پس از رها شدن گلوله دوم، فاصله دو گلوله به 70 m برسد، t چند ثانیه است؟ ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

گلوله اول به مدت $t + 2/5 \text{ (s)}$ حرکت کرده است.

۴/۵ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱/۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره این سؤال با کنکور ریاضی داخل ۹۱ تشابه مفهومی دارد. یکی از مواردی که ممکن است دانش آموز در پاسخ به این تست به اشتباه نادیده بگیرد، جابه‌جایی گلوله اول در مدتی است که گلوله دوم هنوز رها نشده است.

خودت حل کنی بهتره معادله جابه‌جایی - زمان در سقوط آزاد را برای هر دو گلوله نوشته و اختلاف آن‌ها را برابر فاصله دو گلوله نسبت به یکدیگر قرار دهید.

درس‌نامه معادله جابه‌جایی - زمان یک جسم در سقوط آزاد به صورت $\Delta y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t$ است، اگر جسم رها شده باشد، $v_0 = 0$ بوده و معادله فوق به صورت $\Delta y = -\frac{1}{2}gt^2$ به کار می‌رود.

پاسخ تشریحی معادله جابه‌جایی زمان را برای هر دو گلوله می‌نویسیم و آن‌ها را از هم کم می‌کنیم. باید توجه داشت که چون سوی مثبت محور y روبه بالا است، پس جابه‌جایی‌ها منفی هستند.

وقتی زمان سقوط گلوله دوم $2/5$ ثانیه است، زمان سقوط گلوله اول

$(t + 2/5)$ ثانیه است.

$$\Delta y_1 - \Delta y_2 = -70$$

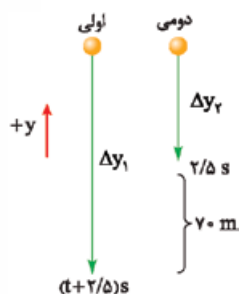
$$-\frac{1}{2}g(t + 2/5)^2 - \left(-\frac{1}{2}g(2/5)^2\right) = -70$$

$$-5(t + 2/5)^2 + 5 \times (2/5)^2 = -70$$

$$(t + 2/5)^2 - (2/5)^2 = 14$$

$$t^2 + 5t + (2/5)^2 - (2/5)^2 = 14$$

$$t^2 + 5t - 14 = 0 \rightarrow (t - 2)(t + 7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 2 & \checkmark \\ t = -7 & \times \end{cases}$$



تست و پاسخ ۶۳

به جسمی، تنها دو نیروی عمود بر هم، به اندازه‌های F_1 و F_2 وارد می‌شود. با حذف نیروی F_1 ، اندازه شتاب جسم 20% درصد کاهش می‌یابد. نسبت $\frac{F_1}{F_2}$ کدام است؟

فقط نیروی F_2 بر جسم وارد می‌شود.

۳/۴ (۴)

۴/۳ (۳)

۴/۵ (۲)

۵/۴ (۱)

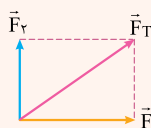
پاسخ: گزینه ۴



مشاوره برای بهتر فهمیدن سؤال، شکل مناسبی از آن را رسم کنید. این کار به شما کمک می‌کند تا راحت‌تر بتوانید به سؤال پاسخ بدهید.

درس نامه

(۱) اگر دو نیروی F_1 و F_2 بر هم عمود باشند، اندازهٔ برابری آن‌ها از رابطهٔ فیثاغورس به دست می‌آید:



$$F_T = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$$

(۲) **قانون دوم نیوتون:** اگر بر جسمی نیروی خالص غیر صفری وارد شود، جسم تحت تأثیر این نیرو شتاب می‌گیرد. این شتاب با نیروی خالص وارد بر جسم نسبت مستقیم و هم‌جهت با آن است، اما با جرم جسم نسبت وارون دارد.

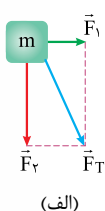
$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_{\text{net}}}{m}$$

نیروی خالص (N) جرم جسم (kg)

شتاب جسم (m/s^2)

پاسخ تشریحی

در حالت اول که دو نیروی عمود بر هم F_1 و F_2 بر جسم وارد می‌شود، جسم در جهت برابری این دو نیرو شتاب می‌گیرد: (شکل «الف»)



$$F_T = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} \quad (۱) , F_T = ma \quad (۲)$$

وقتی نیروی F_1 حذف می‌شود، فقط نیروی F_2 بر جسم اثر می‌کند و جسم در جهت نیروی F_2 شتاب می‌گیرد (شکل «ب»). با توجه به این که اندازهٔ شتاب جسم در این حالت ۲۰ درصد کاهش می‌یابد، می‌توانیم بنویسیم:



$$F_2 = ma_2 \xrightarrow{a_2 = a - \frac{20}{100}a = 0.8a} F_2 = 0.8ma \quad (۳)$$

از طرفی با استفاده از رابطه (۱)، (۲)، و (۳) می‌توانیم بنویسیم:

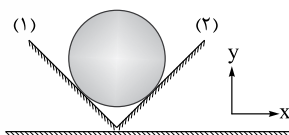
$$F_T^2 = F_1^2 + F_2^2 \xrightarrow{F_T = ma} m^2 a^2 = F_1^2 + 0.64 m^2 a^2 \Rightarrow F_1^2 = 0.36 m^2 a^2 \Rightarrow F_1 = 0.6ma$$

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{0.6ma}{0.8ma} = \frac{3}{4}$$

حالا نسبت $\frac{F_1}{F_2}$ را به دست می‌آوریم:

تست و پاسخ ۶۴

کرهٔ همگنی به جرم 25 kg مطابق شکل زیر درون یک ناوهٔ بدون اصطکاک قرار دارد. اگر نیرویی که کره به دیوارهٔ (۱) وارد می‌کند برابر $\vec{F} = (-120\text{N})\vec{i} + (-160\text{N})\vec{j}$ باشد، اندازهٔ نیرویی که کره به دیوارهٔ (۲) وارد می‌کند، چند نیوتون است؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$)



(۲) ۱۶۰

(۱) ۹۰

(۴) ۱۵۰

(۳) ۲۰۰

پاسخ: گزینه ۴

درس نامه

اگر جسم (۱) به جسم (۲) نیروی F را وارد کند، جسم (۲) نیز نیرویی هم‌اندازه و هم‌راستا اما در خلاف جهت نیروی F به جسم (۱) وارد می‌کند.

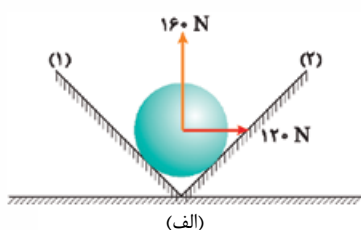
$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$



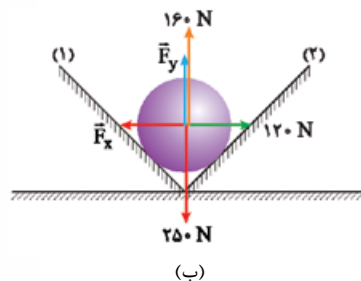
پاسخ تشریحی

طبق قانون سوم نیوتون، نیرویی که کره به دیواره (۱) وارد می کند، هم اندازه، هم راستا و در خلاف جهت نیرویی است که دیواره (۱) به کره وارد می کند (شکل «الف»؛ بنابراین بردار نیرویی که دیواره (۱) به کره وارد می کند، برابر است با:

$$\vec{F}'_1 = (120\text{ N})\vec{i} + (160\text{ N})\vec{j}$$



از طرفی دیواره (۲) نیز به کره نیرو وارد می کند که این نیرو از دو مؤلفه که یکی در خلاف جهت محور X و دیگری در جهت محور Y است، تشکیل شده است. هم چنین نیروی وزن نیز به کره وارد می شود که در خلاف جهت محور Y است. (شکل «ب»)
چون کره ساکن است، پس برابری نیروها در راستای X و Y باید صفر باشد؛ بنابراین داریم:



$$F_{\text{net},x} = 0 \Rightarrow 120 - F_x = 0 \Rightarrow F_x = 120\text{ N}$$

$$F_{\text{net},y} = 0 \Rightarrow F_y + 160 - 250 = 0 \Rightarrow F_y = 90\text{ N}$$

پس بردار نیرویی که دیواره (۲) به کره وارد می کند، برابر است با:

$$\vec{F}'_2 = (-120\text{ N})\vec{i} + (90\text{ N})\vec{j}$$

طبق قانون سوم نیوتون، بردار نیرویی که کره به دیواره (۲) وارد می کند، برابر است با:
در آخر اندازه نیرویی را که کره به دیواره (۲) وارد می کند به دست می آوریم:

$$F_2 = \sqrt{120^2 + 90^2} = \sqrt{(3 \times 40)^2 + (3 \times 30)^2} = 3 \times 50 = 150\text{ N}$$

تست و پاسخ ۶۵

ماهواره ای در فاصله h از سطح زمین قرار دارد. اگر فاصله ماهواره از سطح زمین ۳ برابر شود، نیروی وزن آن ۷۵ درصد کاهش می یابد. h چند برابر شعاع زمین است؟

۴ (۴)

$\frac{1}{2}$ (۳)

۲ (۲)

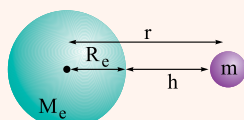
۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

مشاوره اگر چند سؤال از این مبحث حل کرده باشید، متوجه تکرارپذیر بودن سؤالات این مبحث می شوید. پس امتیاز این سؤالات را از دست ندهید.

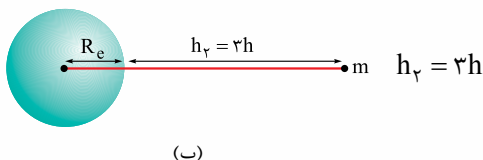
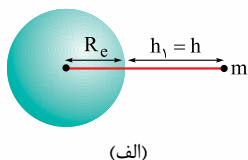
خودت حل کنی بهتره کافی است نسبت وزن جسم در دو حالت را به دست آورید.

درس نامه نیروی گرانشی که زمین به یک جسم وارد می کند، وزن نام دارد و از رابطه زیر به دست می آید:



$$W = \frac{GM_em}{r^2} = \frac{GM_em}{(R_e + h)^2}$$

پاسخ تشریحی در حالت اول، ماهواره در فاصله h از سطح زمین قرار دارد (شکل «الف»). در حالت دوم، فاصله ماهواره از سطح زمین ۳ برابر می شود (شکل «ب»؛ یعنی:





با توجه به شکل های «الف» و «ب»، نسبت وزن در حالت دوم به حالت اول را به دست می آوریم:

$$W = \frac{GM_e m}{(R_e + h)^2} \Rightarrow \frac{W_2}{W_1} = \left(\frac{R_e + h_1}{R_e + h_2}\right)^2 \xrightarrow[h_1=h, h_2=3h]{W_2=W_1 \cdot \frac{25}{100}, W_1=\frac{25}{100} W_2} \frac{25}{100} \frac{W_1}{W_1} = \left(\frac{R_e + h}{R_e + 3h}\right)^2$$

$$\Rightarrow R_e + 3h = 2R_e + 2h \Rightarrow h = R_e$$

تست و پاسخ ۶۶

گلوله ای به جرم 2 kg را در راستای قائم به سمت بالا پرتاب می کنیم. اگر اندازه شتاب گلوله در یک ارتفاع معین، در مسیر رفت و مسیر

برگشت به ترتیب 16 m/s^2 و a باشد، کدام مورد درباره a درست است؟ ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

$$a = 4 \text{ m/s}^2 \quad (2)$$

$$a < 4 \text{ m/s}^2 \quad (1)$$

$$a > 10 \text{ m/s}^2 \quad (4)$$

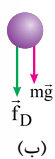
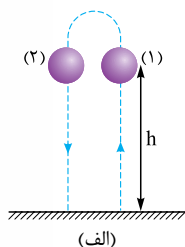
$$4 \text{ m/s}^2 < a < 10 \text{ m/s}^2 \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۳

مشاوره تا حالا به حرکت پرتابی جسم در راستای قائم فکر کرده بودید؟ در عین سادگی پر از پیچیدگی است. به قول هانتف امصفهانی: «دل هر ذره را که بشکافی، آفتابیش در میان بینی». ما هم در پاسخ نامه دل ذره را شکافتیم.

درس نامه زمانی که یک جسم داخل شاره (گاز یا مایع) حرکت می کند، به دلیل برخورد مولکول های شاره با جسم، نیرویی در خلاف جهت حرکت جسم به آن وارد می شود که آن را نیروی مقاومت شاره می نامیم و با $\vec{f}_D$ نمایش می دهیم.

شکل «الف» مسیر رفت (۱) و برگشت (۲) گلوله را نشان می دهد:



دو نیروی وزن و مقاومت هوا بر گلوله وارد می شود؛ بنابراین طبق قانون دوم نیوتون برای مسیر رفت گلوله می توانیم بنویسیم:

$$mg + f_D = ma \xrightarrow[a=16 \text{ m/s}^2, g=10 \text{ m/s}^2]{m=2 \text{ kg}} 2 \times 10 + f_D = 2 \times 16 \Rightarrow f_D = 12 \text{ N}$$

وقتی گلوله از ارتفاع h به نقطه اوج می رسد و مجدداً به ارتفاع h برمی گردد، مقداری از انرژی مکانیکی آن به گرما تبدیل می شود (به اصطلاح تلف می شود)؛ بنابراین چون انرژی پتانسیل گرانشی آن در دو حالت (۱) و (۲) یکسان و انرژی مکانیکی آن در حالت (۲) کمتر از حالت (۱) است، پس انرژی جنبشی آن در حالت (۲) کمتر از انرژی جنبشی آن در حالت (۱) بوده و در نتیجه تندی آن در حالت (۲) کمتر از تندی آن در حالت (۱) است. از طرفی چون نیروی مقاومت هوای وارد بر گلوله به تندی گلوله بستگی دارد، پس نیروی مقاومت هوا در حالت (۲) کمتر از حالت (۱) است؛ بنابراین با استفاده از قانون دوم نیوتون برای حالت (۲) می توانیم بنویسیم:



$$mg - f'_D = ma \xrightarrow[g=10 \text{ m/s}^2]{m=2 \text{ kg}} 2 \times 10 - f'_D = 2a \xrightarrow{f'_D < 12 \text{ N}} a > 4 \text{ m/s}^2 \quad (1)$$

از طرفی اگر گلوله در شرایط خلأ سقوط می کرد (مقاومت هوا وجود نداشت)، آن گاه شتاب گلوله برابر با شتاب جاذبه گرانش یعنی 10 m/s^2 بود؛ بنابراین $4 \text{ m/s}^2 < a < 10 \text{ m/s}^2$ است.



تست و پاسخ ۶۷

۴ N/cm

جسمی به جرم ۴ kg توسط یک فنر با ثابت ۴۰۰ N/m از سقف یک آسانسور آویزان است. وقتی آسانسور با شتابی به بزرگی ۲ m/s^۲ به صورت تندشونده به سمت پایین حرکت می‌کند، طول فنر به $\ell_۱$ و وقتی آسانسور با شتابی به بزرگی ۳ m/s^۲ به صورت کندشونده به سمت پایین حرکت می‌کند، طول فنر به $\ell_۲$ می‌رسد. $\ell_۱ - \ell_۲$ برحسب سانتی‌متر کدام است؟ ($g = ۱۰ \text{ N/kg}$)

۴) -۵

۳) ۵

۲) -۱

۱) ۱

پاسخ: گزینه ۴

خودت حل کنی بهتره قانون دوم نیوتون را با توجه به قانون هوک، برای هر دو حالت بنویسید و با یکدیگر مقایسه کنید.

ثابت فنر
(N/m)

$$|F_e| = k x$$

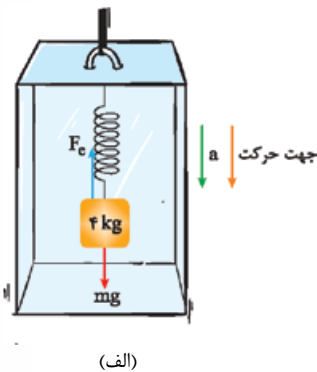
تغییر طول فنر
نسبت به طول
عادی (m)

نیروی کشسانی
فنر (N)

درس‌نامه: نیروی کشسانی فنر:

اگر فنری را به اندازه x نسبت به طول عادی آن بکشیم یا فشرده کنیم، آن‌گاه اندازه نیروی کشسانی فنر از رابطه مقابل به دست می‌آید (قانون هوک):

پاسخ تشریحی گام اول: با توجه به شکل «الف»، قانون دوم نیوتون را می‌نویسیم:

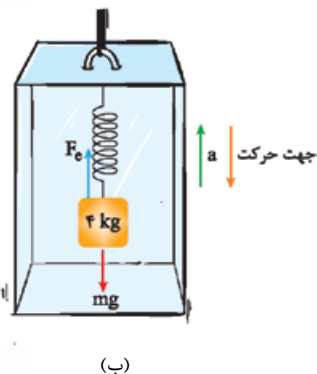


$$F_{\text{net}} = ma \Rightarrow mg - F_e = ma \xrightarrow{|F_e| = kx} kx = m(g - a)$$

$$\xrightarrow[k = 400 \text{ N/m} = 4 \text{ N/cm}]{a = 2 \text{ m/s}^2} 4(\ell_1 - \ell_0) = 4(10 - 2)$$

$$\Rightarrow \ell_1 - \ell_0 = 8 \text{ cm} \quad (۱)$$

گام دوم: با توجه به شکل «ب»، قانون دوم نیوتون را می‌نویسیم:



$$F_{\text{net}} = ma \Rightarrow mg - F_e = -ma \xrightarrow{|F_e| = kx} kx = m(g + a)$$

$$\xrightarrow[k = 4 \text{ N/cm}]{a = 3 \text{ m/s}^2} 4(\ell_2 - \ell_0) = 4(10 + 3)$$

$$\Rightarrow \ell_2 - \ell_0 = 13 \text{ cm} \quad (۲)$$

$$\begin{cases} \ell_1 - \ell_0 = 8 \\ \ell_2 - \ell_0 = 13 \end{cases} \Rightarrow \ell_1 - \ell_2 = 8 - 13 = -5 \text{ cm}$$

گام سوم: حالا با استفاده از دو رابطه (۱) و (۲) می‌توانیم بنویسیم:

$$\Delta F = ma_1 - ma_2 = 4 \times 2 - 4 \times (-3) = 20 \text{ N}$$

$$\Delta F = k \Delta \ell \rightarrow 20 = 400 \Delta \ell \rightarrow \Delta \ell = 0.05 \text{ m} = 5 \text{ cm}$$

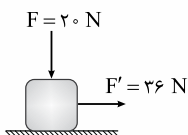
$$\ell_2 - \ell_1 = 5 \rightarrow \ell_1 - \ell_2 = -5 \text{ cm}$$

تکنیک



تست و پاسخ ۶۸

در شکل روبه‌رو، جسمی به جرم 3 kg روی یک سطح افقی با ضریب اصطکاک جنبشی ثابت در حال حرکت است. اگر اندازه نیروی F نصف شود، اندازه نیرویی که سطح به جسم وارد می‌کند چند برابر شده و زاویه بین این نیرو و سطح افقی چگونه تغییر می‌کند؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$)



$$R = \sqrt{f_k^2 + F_N^2}$$

$$\tan \theta = \frac{1}{\mu_k}$$

$\frac{2}{5}$ (۲)، تغییر نمی‌کند.

$\frac{4}{5}$ (۴)، تغییر نمی‌کند.

$\frac{2}{5}$ (۱)، کاهش می‌یابد.

$\frac{4}{5}$ (۳)، کاهش می‌یابد.

پاسخ: گزینه ۴

خودت حل کنی بهتره نیرویی که سطح به جسمی که در حال حرکت است، وارد می‌کند، از رابطه $R = \sqrt{f_k^2 + F_N^2}$ به دست می‌آید که ساده‌شده آن به صورت $R = F_N \sqrt{1 + \mu_k^2}$ است، این نیرو را در دو حالت مختلف بیان شده در صورت تست، به دست آورید، سپس زاویه‌ای که نیروی سطح (R) با سطح افقی ایجاد می‌کند را در دو حالت به دست آورید.

درس نامه ۱ نیروی اصطکاک آستانه حرکت یا بیشینه نیروی اصطکاک ایستایی از رابطه مقابل به دست می‌آید: $f_{s, \max} = \mu_s F_N$ فقط یک معیار برای تشخیص ساکن بودن یا حرکت کردن جسم است و هیچ‌گاه برای محاسبه شتاب از آن استفاده نمی‌کنیم:

اگر $F_{\text{محرك}} < f_{s, \max}$ $\Rightarrow$ جسم ساکن می‌ماند. $f_s = F_{\text{محرك}}$, $a = 0$

اگر $F_{\text{محرك}} = f_{s, \max}$ $\Rightarrow$ جسم ساکن می‌ماند (در آستانه حرکت است). $f_{s, \max} = F_{\text{محرك}}$, $a = 0$

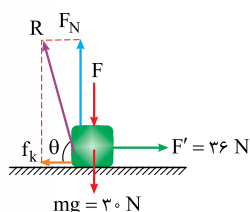
اگر $F_{\text{محرك}} > f_{s, \max}$ $\Rightarrow$ جسم حرکت می‌کند. $f_k = \mu_k F_N$

۲ نیروی واکنش سطح (R) در حالت کلی از رابطه $R = \sqrt{f^2 + F_N^2}$ به دست می‌آید که f بیانگر نیروی اصطکاک است.

جسم ساکن باشد و در آستانه حرکت نباشد: $R = \sqrt{f_s^2 + F_N^2}$

محاسبه نیروی سطح در حالت‌های مختلف: جسم در آستانه حرکت باشد: $R = F_N \sqrt{1 + \mu_s^2}$

جسم در حال حرکت باشد: $R = F_N \sqrt{1 + \mu_k^2}$



پاسخ تشریحی گام اول: مطابق شکل روبه‌رو، نیروهای وارد بر جسم را مشخص می‌کنیم و قانون دوم نیوتون را در راستای محور y می‌نویسیم: $(F_{\text{net}})_y = 0 \Rightarrow F_N - F - mg = 0 \Rightarrow F_N = F + 30$

گام دوم: اندازه نیرویی که سطح به جسم وارد می‌کند (R_1) را زمانی که $F = 20 \text{ N}$ است به دست می‌آوریم:

$$R_1 = \sqrt{f_k^2 + F_N^2} = \sqrt{(\mu_k F_N)^2 + (F_N)^2} = F_N \sqrt{1 + \mu_k^2} \xrightarrow{F_N = F + 30, F = 20 \text{ N}} R_1 = 50 \sqrt{1 + \mu_k^2}$$

گام سوم: اندازه نیرویی که سطح به جسم وارد می‌کند (R_2) را زمانی که $F = 10 \text{ N}$ است به دست می‌آوریم:

$$R_2 = F_N \sqrt{1 + \mu_k^2} \xrightarrow{F_N = F + 30, F = 10 \text{ N}} R_2 = 40 \sqrt{1 + \mu_k^2}$$

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{40 \sqrt{1 + \mu_k^2}}{50 \sqrt{1 + \mu_k^2}} = \frac{4}{5}$$

گام چهارم: نسبت نیروی سطح در حالت دوم به حالت اول را به دست می‌آوریم:

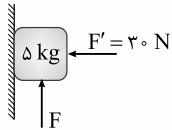


گام پنجم: زاویه‌ای که نیروی سطح با افق می‌سازد (θ) از رابطه زیر به دست می‌آید که فقط به ضریب اصطکاک جنبشی وابسته است، پس ثابت می‌ماند:

$$\tan \theta = \frac{F_N}{f_k} = \frac{F_N}{\mu_k F_N} = \frac{1}{\mu_k}$$

تست و پاسخ ۶۹

در شکل زیر جسم ساکن و ضریب اصطکاک ایستایی بین جسم و دیواره برابر $\frac{8}{10}$ است. اندازه نیروی F بر حسب نیوتون با چه تعداد از مقادیر زیر نمی‌تواند برابر باشد؟



۸۰ (ت)

۷۶ (پ)

۳۱ (ب)

۲۴ (الف)

۱ (۴)

۲ (۳)

۳ (۲)

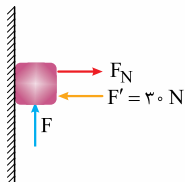
۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

خودت حل کنی بهتره ابتدا از بین نیروهای وارد بر جسم، نیروی وزن و نیروی عمودی تکیه‌گاه را به دست آورید، سپس در دو حالت جسم را در آستانه حرکت رو به بالا و رو به پایین تحلیل کنید و محدوده نیروی F را به دست آورید.

درس نامه در س نامۀ تست ۶۸ را بخوانید.

پاسخ تشریحی گام اول: حداقل و حداکثر نیروی F برای این که جسم ساکن باشد را به دست می‌آوریم، ابتدا نیروی اصطکاک ایستایی بیشینه را محاسبه می‌کنیم:

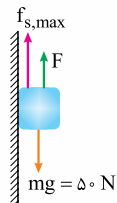


$$(F_{\text{net}})_x = 0$$

$$F_N = 30 \text{ N}$$

$$f_{s, \text{max}} = \mu_s F_N = \frac{8}{10} \times 30 = 24 \text{ N}$$

گام دوم: یک بار جسم را در آستانه حرکت رو به پایین بررسی می‌کنیم:



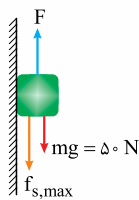
$$(F_{\text{net}})_y = 0$$

$$F + f_{s, \text{max}} - mg = 0$$

$$F + 24 - 50 = 0$$

$$F = 26 \text{ N}$$

گام سوم: جسم را در آستانه حرکت رو به بالا تحلیل می‌کنیم:



$$(F_{\text{net}})_y = 0$$

$$F - f_{s, \text{max}} - mg = 0$$

$$F - 24 - 50 = 0 \Rightarrow F = 74 \text{ N}$$

گام چهارم: برای این که جسم در حالت ساکن بماند، نیروی F باید بین 26 N و 74 N باشد؛ بنابراین مقادیر ارائه شده در قسمت‌های (الف)، (پ) و (ت) قابل قبول نیست.

تست و پاسخ ۷۰

جسمی به جرم 20 kg با سرعت ثابت $\vec{v} = (5 \text{ m/s})\vec{i}$ در حال حرکت است. نیروی خالص و ثابت $\vec{F}_{\text{net}} = (-4 \text{ N})\vec{i}$ به مدت چند ثانیه بر جسم اثر کند تا اندازه تکانه آن دو برابر شود؟

$$\left| \frac{p_2}{p_1} \right| = \left| \frac{v_2}{v_1} \right| = 2 \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \pm 2$$

۷۵ (۴)

۵۰ (۳)

۲۵ (۲)

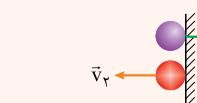
۱۰۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۴



خود حل کنی بهتره ابتدا تغییرات تکانه جسم را از رابطه $\Delta \vec{p} = m \Delta \vec{v}$ به دست آورید. از آنجا که نیروی خالص در خلاف جهت محور X است، شتاب هم در خلاف جهت محور X است، پس سرعت ثانویه منفی است. با استفاده از رابطه $\Delta \vec{p} = \vec{F}_{net} \Delta t$ ، مدت زمانی که نیروی خالص باید اثر کند را به دست آورید.

درس نامه •• تکانه کمیتی برداری است و از رابطه $\vec{p} = m \vec{v}$ به دست می آید. به برداری بودن کمیت تکانه در حل مسائل باید توجه کنیم؛ به عنوان مثال در شکل زیر که توپ با تندی v_1 به دیوار برخورد کرده و با تندی v_2 برمی گردد در محاسبات تغییرات تکانه داریم:



$$\Delta \vec{p} = m \Delta \vec{v} = m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$

$$\Delta p = m(-v_2 - v_1)$$

پاسخ تشریحی روش اول: گام اول: جسم تحت تأثیر نیروی ثابت و خالص $\vec{F}_{net} = (-4N)\hat{i}$ است، ابتدا شتاب جسم را به دست می آوریم:

$$\vec{F}_{net} = m\vec{a} \Rightarrow -4 = 2 \cdot a \Rightarrow a = -2 \text{ m/s}^2$$

گام دوم: برای آن که اندازه تکانه دو برابر شود، باید تندی جسم دو برابر شود (جرم جسم ثابت است)؛ بنابراین داریم:

$$\left| \frac{v_2}{v_1} \right| = 2 \Rightarrow |v_2| = 2 \times 5 = 10 \Rightarrow v_2 = \pm 10 \text{ m/s}$$

با توجه به این که شتاب جسم منفی است، تنها سرعت -10 m/s قابل قبول است.

گام سوم: مدت زمان رسیدن سرعت به -10 m/s را به دست می آوریم:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow -2 = \frac{(-10) - (5)}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{-15}{-2} = 7.5 \text{ s}$$

دام تستی اگر در محاسبات به علامت شتاب توجه نمی کردید و با علامت مثبت مسئله را حل می کردید، ۲ منتظر شما بود.

روش دوم: گام اول: برای دو برابر شدن اندازه تکانه، باید اندازه سرعت جسم، ۲ برابر شود؛ بنابراین:

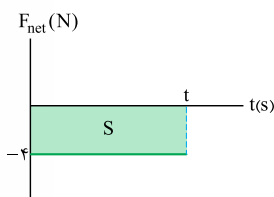
$$v_2 = 2v_1 \Rightarrow |v_2| = 2v_1 = 2 \times 5 = 10 \text{ m/s} \Rightarrow v_2 = \pm 10 \text{ m/s}$$

چون جهت نیرو در خلاف جهت محور X است، سرعت متحرک به 10 m/s نمی رسد و فقط -10 m/s قابل قبول است؛ بنابراین تغییر

تکانه جسم برابر است با:

$$\Delta p = m \Delta v = m(v_2 - v_1) = 2 \cdot (-10 - 5) = -30 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$$

گام دوم: نمودار $F_{net} - t$ متحرک را رسم می کنیم. با توجه به این که سطح زیر نمودار $F_{net} - t$ برابر با اندازه تغییر تکانه متحرک است، t را به دست می آوریم:



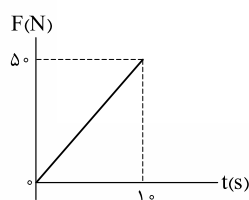
$$S = |\Delta p| \Rightarrow 4 \times t = 30 \Rightarrow t = \frac{30}{4} = 7.5 \text{ s}$$

تست و پاسخ ۷۱

جسمی به جرم 5 kg روی یک سطح افقی به ضریب اصطکاک ایستایی 0.8 و ضریب اصطکاک جنبشی 0.6

ساکن است. از مبدأ زمان نیروی افقی $\vec{F}$ به جسم وارد می شود. اگر نمودار اندازه این نیرو بر حسب زمان به

شکل مقابل باشد، در لحظه $t = 10 \text{ s}$ اندازه تکانه جسم در SI چند واحد است؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$)



۹۰ (۲)

۲۵۰ (۱)

۱۰۰ (۴)

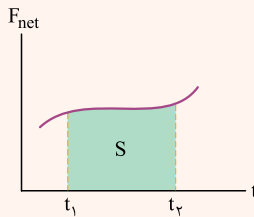
۳۰ (۳)

توجه کنیم مساحت محدود به نمودار نیروی خالص بر حسب زمان، برابر تغییرات تکانه جسم است، نه نمودار نیرو بر حسب زمان!

پاسخ: گزینه ۳



خودت حل کنی بهتره ابتدا نیروی اصطکاک ایستایی و جنبشی جسم را به دست آورید. سپس نمودار نیروی خالص وارد شده بر جسم را بر حسب زمان رسم کنید. مساحت محدود به نمودار نیروی خالص بر حسب زمان را تا لحظه 10 s محاسبه کنید تا تغییرات تکانه در 10 ثانیه ابتدایی را به دست آورید.

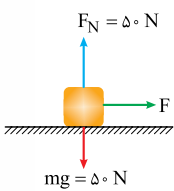


درس نامه ۱ مساحت محدود به نمودار نیروی خالص - زمان، برابر تغییرات تکانه است:

$$\Delta p_{(t_1-t_2)} = S$$

$$m(v_2 - v_1) = S$$

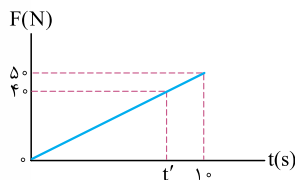
۲ درس نامه تست ۶۸ را بخوانید.



پاسخ تشریحی **گام اول:** نیروی اصطکاک ایستایی بیشینه ($f_{s, \max}$) و نیروی اصطکاک جنبشی را برای جسم به دست می آوریم، در شکل مقابل نیروهای وارد بر جسم مشخص شده است:

$$f_{s, \max} = \mu_s F_N = 0.8 \times 50 = 40\text{ N}$$

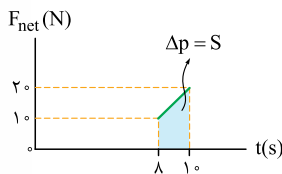
$$f_k = \mu_k F_N = 0.6 \times 50 = 30\text{ N}$$



گام دوم: نمودار نیروی خالص (F_{net}) بر حسب زمان را رسم می کنیم. حداقل نیروی افقی لازم برای به حرکت درآوردن جسم 40 N است، ابتدا زمانی که نیروی افقی به 40 N می رسد را به دست می آوریم (لحظه t' در نمودار):

$$\Rightarrow \frac{50}{10} = \frac{40}{t'} \Rightarrow t' = 8\text{ s}$$

پس از لحظه $t' = 8\text{ s}$ ، جسم شروع به حرکت می کند و نیروی اصطکاک جنبشی (f_k) خلاف جهت نیروی F به جسم وارد می شود. در این صورت نمودار نیروی خالص بر حسب زمان به صورت روبه رو خواهد شد:



گام سوم: مساحت محدود به نمودار ($F_{\text{net}} - t$)، برابر تغییرات تکانه است.

حال، تغییرات تکانه را تا 10 s به دست می آوریم:

$$\Delta p = S$$

$$\Delta p = \frac{(10 + 20) \times 2}{2} \Rightarrow \Delta p = 30 \frac{\text{kg.m}}{\text{s}}$$

$$p_2 - p_1 = 30 \xrightarrow{p_1=0} p_2 = 30 \frac{\text{kg.m}}{\text{s}}$$

تست و پاسخ ۷۲

- چتر بازی در مبدأ زمان از یک بلندی رها شده و در لحظه t_1 به تندی حدى خود مى رسد. سپس در لحظه t_2 چتر را باز کرده و در لحظه t_3 به تندی حدى در وضعیتی که چترش باز است مى رسد. چه تعداد از عبارتهای زیر درباره این چتر باز درست است؟
- (الف) در بازه زمانی t_2 تا t_3 اندازه نیروی مقاومت هوای وارد بر چتر باز در حال افزایش است.
- (ب) اندازه نیروی مقاومت هوای وارد بر چتر باز بعد از لحظه t_3 با اندازه این نیرو در بازه زمانی t_1 تا t_2 برابر است.
- (پ) شتاب چتر باز در بازه زمانی صفر تا t_1 رو به پایین و اندازه آن در حال کاهش است.
- (ت) حرکت چتر باز در بازه زمانی صفر تا t_1 تندشونده و در بازه زمانی t_2 تا t_3 کندشونده است.

$$(f_D)_1 = mg$$

$$(f_D)_2 = mg$$

آیا تندی یا مساحت مؤثر در حال افزایش است؟

$$av < 0$$

$$av > 0$$

۱ (۴)

۲ (۳)

۳ (۲)

۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۲



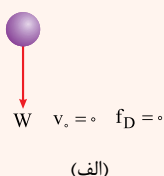
خودت حل کنی بهتره برای حل این تست، مرحله به مرحله نیروهای وارد شده بر جسم و وضعیت جسم را مشخص کنید.

درس نامه ۱. عوامل مؤثر بر نیروی مقاومت شاره

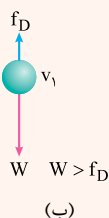
- (۱) تندی جسم: هر چه تندی جسم بیشتر باشد، مولکول‌های شاره مقاومت بیشتری از خود نشان می‌دهند.
- (۲) سطح مؤثر جسم: هر چه سطح بیشتری با تعداد مولکول‌های شاره برخورد داشته باشد، شاره مقاومت بیشتری از خود نشان می‌دهد.
- (۳) چگالی: هر چه چگالی شاره بیشتر باشد، تعداد مولکول‌های بیشتری با جسم برخورد دارند.

۲. تندی حدی

مطابق شکل زیر، فرض کنیم جسمی از ارتفاع بسیار زیاد رها می‌شود. در لحظه رها شدن، تندی جسم صفر است؛ بنابراین نیروی مقاومت هوا هم صفر است و تنها نیروی مؤثر، نیروی وزن است. (شکل «الف»)



پس از مدتی به دلیل نیروی وزن رو به پایین، حرکت جسم شتابدار شده و باعث افزایش تندی جسم می‌شود و در نتیجه نیروی مقاومت هوا افزایش می‌یابد. (شکل «ب»)



روند افزایش تندی به همین صورت ادامه دارد تا جایی که نیروی مقاومت هوا هم افزایش می‌یابد و برابر با نیروی وزن می‌شود. از این جا به بعد نیروهای وارد بر جسم متوازن شده و شتاب حرکت صفر می‌شود و تندی جسم به «تندی حدی» یا $v_{\text{حدی}}$ می‌رسد. (شکل «پ»)



شکل روبه‌رو مسیر حرکت چترباز و نیروهای وارد بر آن را نمایش می‌دهد.



$t = 0$

از $t = 0$ تا t_1 ، رفته‌رفته مقاومت هوا افزایش می‌یابد تا برابر با نیروی وزن شود.

شتاب از رابطه $a = g - \frac{f_D}{m}$ به دست می‌آید.



$mg = (f_D)_1$

$t_1 \leftarrow$ شخص به تندی حدی می‌رسد و از t_1 تا t_2 با تندی ثابت حرکت می‌کند.

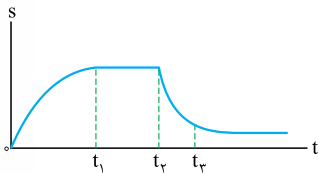


t_2 به بعد $\leftarrow$ با باز شدن چتر در این لحظه و افزایش سطح مؤثر، نیروی مقاومت هوا افزایش می‌یابد.

از t_2 تا t_3 رفته‌رفته مقاومت هوا کاهش می‌یابد تا در نهایت برابر نیروی وزن شود. شتاب از رابطه $a = g - \frac{f_D}{m}$ به دست می‌آید. $t_3 \leftarrow$ شخص با تندی ثابت حرکت می‌کند، اما نسبت به بازه t_1 تا t_2 تندی کم‌تری دارد، چون سطح مؤثر بیشتر است.



$$mg = (f_D)_r$$



نمودار تندی چتر باز بر حسب زمان به صورت روبه‌رو است.

پاسخ تشریحی: حال، تمامی عبارت‌ها را بررسی می‌کنیم:

عبارت (الف): در بازه t_2 تا t_3 ، اندازه نیروی مقاومت هوا در حال کاهش است. (نادرستی عبارت الف)

عبارت (ب): در بازه t_1 تا t_2 و بعد از لحظه t_3 ، شخص با تندی ثابت حرکت می‌کند (البته تندی حدی‌ها در این دو مرحله با هم برابر نیست)؛ بنابراین نیروی مقاومت هوا با نیروی وزن برابر است. (درستی عبارت ب)

عبارت (پ): در بازه صفر تا t_1 ، شتاب رو به پایین است و همان‌طور که دیدیم، شتاب از رابطه $a = g - \frac{f_D}{m}$ به دست می‌آید که در این بازه رفته‌رفته با افزایش نیروی مقاومت هوا، اندازه شتاب در حال کاهش است. (درستی عبارت پ)

عبارت (ت): در بازه صفر تا t_1 ، تندی چتر باز افزایش می‌یابد، پس حرکت در این بازه، تندشونده است و در بازه t_2 تا t_3 ، تندی چتر باز کاهش می‌یابد، پس حرکت در این بازه کندشونده است. (درستی عبارت ت)



۷۳

تست و پاسخ

مطابق شکل زیر، ذره‌ای روی مسیری دایره‌ای شکل و در جهت نشان داده شده با آهنگ 1200 rpm می‌چرخد. اگر بردار سرعت ذره در نقطه A

$\vec{v} = (4\pi \text{ m/s}) \hat{i}$ باشد، بردار شتاب آن در این نقطه کدام است؟ ($\pi^2 = 10$)

(۱) $(400 \text{ m/s}^2) \hat{i}$

(۲) $(-400 \text{ m/s}^2) \hat{j}$

(۳) $(1600 \text{ m/s}^2) \hat{i}$

(۴) $(-1600 \text{ m/s}^2) \hat{j}$

جهت حرکت به سمت راست

به صورت ساعتگرد

۱۲۰۰ دور بر دقیقه = ۲۰ دور بر ثانیه

پاسخ: گزینه ۴

مشاوره این سؤال با کنکور ریاضی داخل ۱۴۰۰ تشابه مفهومی دارد. یکی از مواردی که ممکن است دانش‌آموزان در حل این سؤال نادیده بگیرند، این است که جهت حرکت ذره بر روی دایره به صورت ساعتگرد است و اگر به این نکته دقت نکنند ممکن است (دام تستی) را به اشتباه انتخاب کنند.

خودت حل کنی بهتره ابتدا دوره تناوب ذره را به دست آورده و با داشتن دوره تناوب و تندی ذره، شعاع دوران آن را حساب کنید. در نهایت با داشتن r و v ، شتاب مرکزگرا را به دست آورید.

درس نامه ●● حرکت دایره‌ای یکنواخت

حرکتی است با تندی ثابت که در یک مسیر دایره‌ای انجام می‌شود.

دوره حرکت دایره‌ای

مدت زمان پیمودن یک دور کامل مسیر دایره‌ای:

$$T = \frac{2\pi r}{v} \rightarrow (m) \text{ شعاع دایره بر حسب } (m) \rightarrow (m/s) \text{ تندی ثابت حرکت دایره‌ای بر حسب } (m/s) \Rightarrow v = r \left(\frac{2\pi}{T} \right)$$

$$T = \frac{t}{n} \rightarrow (s) \text{ مدت زمان طی کردن } n \text{ دور بر حسب } (s) \rightarrow (s) \text{ دوره بر حسب } (s) \rightarrow (s) \text{ تعداد دور}$$

از طرفی:

rpm چیست؟ تعداد دور در یک دقیقه

برای به دست آوردن دوره تناوب از روی rpm داریم:

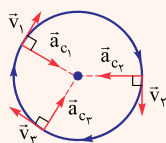
$$T = \frac{60}{\text{rpm}} \rightarrow (s) \text{ دوره بر حسب ثانیه}$$

شتاب مرکزگرا

بزرگی این شتاب در حرکت دایره‌ای یکنواخت، ثابت و جهت آن متغیر بوده و همواره به سمت مرکز دایره و عمود بر سرعت لحظه‌ای متحرک است:

$$a_c = \frac{v^2}{r} \xrightarrow{v=r\left(\frac{2\pi}{T}\right)} a_c = r \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2$$

در حرکت دایره‌ای یکنواخت، بردار سرعت مماس بر مسیر و بردار شتاب عمود بر بردار سرعت و به سمت مرکز دایره است.



پاسخ تشریحی گام اول: ابتدا دوره تناوب حرکت را به دست می‌آوریم:

$$T = \frac{t}{n} \xrightarrow{1200 \text{ rpm} \Rightarrow t=60 \text{ s}, n=1200} T = \frac{60}{1200} = \frac{1}{20} \text{ s}$$



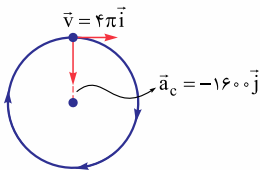
گام دوم: به کمک دوره تناوب و تندی متحرک، شعاع دوران را به دست می آوریم:

$$T = \frac{2\pi r}{v} \xrightarrow{T = \frac{1}{20} s, v = 4\pi m/s} \frac{1}{20} = \frac{2\pi r}{4\pi} \Rightarrow r = 0.1 m$$

گام سوم: به کمک r و تندی حرکت، شتاب مرکزگرا را به دست می آوریم:

$$a_c = \frac{v^2}{r} \xrightarrow{v = 4\pi m/s, r = 0.1 m} a_c = \frac{(4\pi)^2}{0.1} = 160\pi^2 \xrightarrow{\pi^2 = 10} a_c = 1600 m/s^2$$

گام چهارم: با داشتن بردار سرعت و این که می دانیم بردار شتاب در حرکت دایره ای عمود بر بردار سرعت و به سمت مرکز دایره است، داریم:



تست و پاسخ ۷۴

اگر جرم ماهواره A، ۴ برابر جرم ماهواره B و دوره تناوب ماهواره B، ۸ برابر دوره تناوب ماهواره A باشد، اندازه تکانه ماهواره A چند برابر اندازه تکانه ماهواره B است؟ (ماهواره های A و B در مدارهای ثابتی در حال چرخیدن به دور کره زمین اند.)

$$\frac{1}{2} (4)$$

$$2 (3)$$

$$\frac{1}{8} (2)$$

$$8 (1)$$

پاسخ: گزینه ۱

مشاوره در این سوال دانش آموز باید رابطه نسبی بین دوره تناوب و تندی ماهواره را بداند. در صورتی که نسبت $\frac{v_A}{v_B}$ را به اشتباه به جای ۲، $\frac{1}{2}$ به دست آورید در دام ۳ می افتید.

خودت حل کنی بهتره ابتدا با توجه به رابطه دوره تناوب با تندی ماهواره، نسبت تندی ماهواره ها را به دست آورده و سپس با داشتن نسبت تندی ها و جرم ها، نسبت تکانه دو ماهواره را به دست آورید.

درس نامه در حرکت دایره ای ماهواره، نیروی مرکزگرا همان نیروی گرانشی است، از طرفی رابطه تندی ماهواره با دوره تناوب حرکت آن به صورت روبه رو است:

$$T \propto \frac{1}{v^3} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^3$$

تکانه: حاصل ضرب جرم در سرعت جسم

جرم جسم بر حسب (kg)

$$\vec{P} = m \vec{v}$$

بردار تکانه (kg.m/s) بر حسب (m/s) بردار سرعت

$$\Rightarrow \frac{P_2}{P_1} = \frac{m_2}{m_1} \times \frac{v_2}{v_1}$$

پاسخ تشریحی گام اول: ابتدا با توجه به این که دوره تناوب ماهواره با مکعب (توان سوم) تندی حرکت آن رابطه معکوس دارد؛ داریم:

$$\frac{T_B}{T_A} = \left(\frac{v_A}{v_B}\right)^3 \xrightarrow{T_B = 8T_A} \frac{8}{1} = \left(\frac{v_A}{v_B}\right)^3 \Rightarrow \frac{v_A}{v_B} = 2$$

گام دوم: با داشتن نسبت تندی و جرم ماهواره ها، نسبت تکانه دو ماهواره را به دست می آوریم:

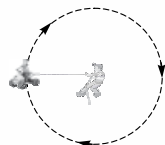
$$P = mv \Rightarrow \frac{P_A}{P_B} = \frac{m_A}{m_B} \times \frac{v_A}{v_B} \xrightarrow{m_A = 4m_B, v_A = 2v_B} \frac{P_A}{P_B} = \frac{4}{1} \times \frac{2}{1} = 8$$



تست و پاسخ ۷۵

شعاع دایره

در شکل زیر، شخص یک چهارچرخه را توسط طنابی به طول 2 m روی سطح افقی بدون اصطکاک، در یک مسیر دایره‌ای به طور یکنواخت می‌چرخاند. اگر نیروی کشش طناب 25 N باشد، انرژی جنبشی چهارچرخه چند ژول است؟



نیروی خالص (نیروی مرکزگرا)
نیروی کشش طناب است.

نیروی مرکزگرا

۲۵ (۲)

۱۰۰ (۴)

۱۲/۵ (۱)

۵۰ (۳)

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره این سؤال با کنکور ریاضی خارج ۹۳ تشابه مفهومی دارد. (۳) در این تست دام است برای کسانی که در محاسبات اشتباه می‌کنند و در رابطه انرژی جنبشی ضرب $\frac{1}{2}$ را فراموش می‌کنند.

خودت حل کنی بهتره ابتدا با داشتن طول طناب و نیروی کشش طناب، رابطه بین جرم و تندی را به دست آورده و سپس رابطه به دست آمده را در رابطه انرژی جنبشی جای گذاری کنید تا انرژی جنبشی چهارچرخه را به دست آورید.

درس نامه درس نامه تست ۷۳ را بخوانید.

نیروی مرکزگرا: در حرکت دایره‌ای یکنواخت نیروی خالص وارد بر جسم به سمت مرکز دایره است و با توجه به قانون دوم نیوتون داریم:

$$F_{\text{net}} = ma \xrightarrow{a=a_c=\frac{v^2}{r}} F_c = m \frac{v^2}{r} = mr \left(\frac{v}{T} \right)^2$$

نیروی مرکزگرا می‌تواند چه نیروهایی باشد؟

نیروی اصطکاک ایستایی ← در حرکت اتومبیل در پیچ جاده یا جسم بر روی یک دیسک گردان

نیروی کشش نخ ← جسمی که حول یک نقطه توسط طنابی می‌چرخد.

نیروی الکتریکی ← جاذبه هسته بر الکترون (چرخش الکترون دور هسته)

نیروی عمودی سطح ← حرکت دورانی استوانه قائم

نیروی گرانش ← حرکت ماهواره به دور زمین

پاسخ تشریحی با توجه به طول طناب و نیروی کشش طناب که همان نیروی مرکزگرا است، داریم:

$$F_c = \frac{mv^2}{r} \xrightarrow{F_c=T=25\text{ N}, r=L=2\text{ m}} 25 = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow mv^2 = 50\text{ N.m}$$

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \xrightarrow{mv^2=50} K = \frac{1}{2} \times 50 = 25\text{ J}$$

از طرفی طبق رابطه انرژی جنبشی داریم:

تست و پاسخ ۷۶

نوسانگر هماهنگ ساده‌ای روی محور x و حول مبدأ در حال نوسان است. کدام یک از عبارات‌های زیر درباره این نوسانگر درست است؟

(الف) در لحظه‌ای که جهت نیروی خالص وارد بر نوسانگر تغییر می‌کند، اندازه تکانه آن بیشینه است.

عبور از مبدأ (نقطه تعادل)

(ب) در بازه زمانی‌ای که انرژی پتانسیل کشسانی نوسانگر در حال افزایش است، اندازه شتاب آن کاهش می‌یابد.

دور شدن از نقطه تعادل

(پ) هنگامی که نوسانگر در حال دور شدن از نقطه تعادل است، انرژی جنبشی آن کاهش می‌یابد.

مبدأ (نقطه تعادل)

(ت) در لحظه‌ای که اندازه تکانه نوسانگر بیشینه است، جهت حرکت نوسانگر تغییر می‌کند.

(۴) پ و ت

(۳) ب و ت

(۲) الف و پ

(۱) الف و ب

پاسخ: گزینه ۲



درس نامه ● بررسی وضعیت کمیت‌ها در یک نوسان کامل:

پاسخ تشریحی

همه عبارت‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم:

بررسی عبارت (الف): با عبور نوسانگر از مرکز نوسان (نقطه تعادل)، جهت نیروی خالص تغییر می‌کند که در این لحظه اندازه سرعت و تکانه بیشینه است. (درست)

بررسی عبارت (ب): زمانی که نوسانگر به نقاط بازگشت ($x = \pm A$) نزدیک می‌شود، انرژی پتانسیل کشسانی نوسانگر افزایش می‌یابد، هم‌چنین طبق رابطه $a = -\omega^2 x$ با دور شدن از مرکز نوسان اندازه شتاب نیز افزایش می‌یابد. (نادرست)

بررسی عبارت (پ): زمانی که نوسانگر از نقطه تعادل ($x = 0$) دور می‌شود، تندی نوسانگر در حال کاهش است؛ بنابراین انرژی جنبشی هم در حال کاهش است. (درست)

بررسی عبارت (ت): اندازه تکانه نوسانگر مانند تندی، زمانی بیشینه است که نوسانگر از وضع تعادل عبور کند؛ در این نقطه جهت حرکت تغییر نمی‌کند. (نادرست)

با توجه به بررسی عبارت‌ها، ۲ صحیح است.

تست و پاسخ ۷۷

در مدت زمان معینی، آونگ‌های A و B به ترتیب ۳۶ و ۶۰ نوسان کامل انجام می‌دهند. به ترتیب از راست به چپ، بسامد و طول آونگ A چند برابر بسامد و طول آونگ B است؟

$$\frac{9}{25}, \frac{5}{3} \quad (۴)$$

$$\frac{25}{9}, \frac{3}{5} \quad (۳)$$

$$\frac{3}{5}, \frac{5}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{5}{3}, \frac{3}{5} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۲

خودت حل کنی بهتره با استفاده از رابطه $T \times N = \Delta t$ ، رابطه بین دوره تناوب و تعداد نوسان‌های انجام‌شده توسط آونگ‌های A و B

را مشخص کنید، سپس از رابطه $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ ، رابطه بین طول‌های آونگ‌های A و B را مشخص کنید.

درس نامه ● در یک نوسانگر ساده، با دوره تناوب T که در مدت زمان Δt ، N نوسان کامل انجام می‌دهد، رابطه روبه‌رو برقرار است: $T \times N = \Delta t$

به گلوله کوچک که از یک نخ سبک آویزان است، آونگ ساده می‌گوییم. اگر زاویه نخ آونگ با راستای قائم کم باشد، حرکت آونگ از نوع هماهنگ ساده است؛ در این صورت داریم:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{L}} \quad \leftarrow \text{بسامد (Hz)} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad \leftarrow \text{دوره تناوب (s)} \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \quad \leftarrow \text{بسامد زاویه‌ای (rad/s)}$$

پاسخ تشریحی گام اول: از رابطه $T_N = \Delta t$ ، نسبت بسامد دو آونگ A و B را به دست می‌آوریم:

$$T_A N_A = T_B N_B = \Delta t \Rightarrow T_A \times 36 = T_B \times 60 \Rightarrow \frac{T_B}{T_A} = \frac{36}{60} \xrightarrow{T \propto \frac{1}{f}} \frac{f_A}{f_B} = \frac{36}{60} = \frac{3}{5}$$

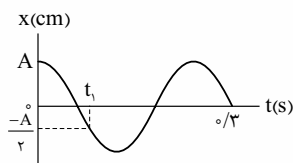
گام دوم: بسامد آونگ ساده با $\frac{1}{\sqrt{L}}$ متناسب است؛ بنابراین داریم:

$$\frac{f_A}{f_B} = \sqrt{\frac{L_B}{L_A}} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{L_B}{L_A} = \frac{9}{25} \Rightarrow \frac{L_A}{L_B} = \frac{25}{9}$$



تست و پاسخ ۷۸

نمودار مکان - زمان نوسانگر هماهنگ ساده‌ای به شکل مقابل است. لحظه t_1 بر حسب ثانیه کدام است؟



۰/۰۸ (۲)

۰/۰۴ (۱)

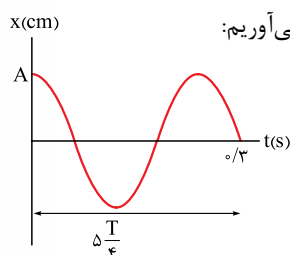
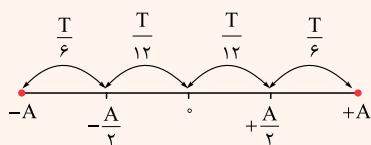
۰/۱۲ (۴)

۰/۰۶ (۳)

پاسخ: گزینه ۲

درس‌نامه • با استفاده از معادله $x = A \cos(\omega t)$ می‌توان نشان داد که نوسانگر

ساده حد فاصل $+A$ تا $+A/2$ را در مدت $T/6$ و فاصله $+A/2$ تا مبدأ را در مدت $T/12$ طی می‌کند. در شکل روبه‌رو این جابه‌جایی‌ها و زمان‌ها مشخص شده است:



پاسخ تشریحی گام اول: با توجه به نمودار مکان - زمان نوسانگر و زمان $T/3$ ، دوره تناوب را به دست می‌آوریم:

$$\frac{\Delta T}{4} = T/3 \Rightarrow T = \frac{1/2}{5} = 0.24 \text{ s}$$

گام دوم: مدت زمان لازم برای رسیدن نوسانگر تا $x = -2 \text{ cm}$ را به دست می‌آوریم:

$$t_1 = \frac{T}{4} + \frac{T}{12} = \frac{T}{3} = \frac{0.24}{3} = 0.08 \text{ s}$$

تکنیک با توجه به نمودار داده‌شده در سؤال باید: $0.06 < t_1 < 0.12$

تست و پاسخ ۷۹

نوسانگر هماهنگ ساده‌ای روی محور x و حول مبدأ (نقطه تعادل) با دامنه A نوسان می‌کند. نوسانگر در لحظه‌ای در خلاف جهت محور x از مکان

$x_1 = \frac{A}{2}$ عبور کرده و بعد از مدت Δt در جهت محور x از مکان $x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}A$ می‌گذرد. اگر کمینه Δt برابر $1/5 \text{ s}$ باشد، حداقل چند ثانیه طول می‌کشد تا نوسانگر از مبدأ به نقطه بازگشت برسد؟

$\frac{T}{4} = ?$

۱/۸ (۴)

۰/۹ (۳)

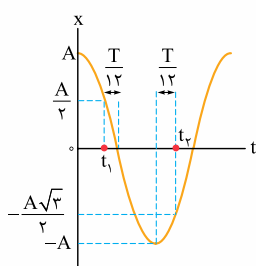
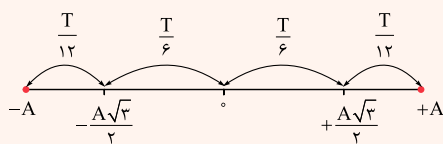
۳ (۲)

۱/۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

درس‌نامه • نوسانگر هماهنگ ساده مسافت $+A$ تا $+\frac{A\sqrt{3}}{2}$ را در مدت زمان $T/12$

و فاصله $\frac{A\sqrt{3}}{2}$ تا مبدأ را در مدت زمان $T/6$ طی می‌کند، در شکل مقابل این جابه‌جایی‌ها مشخص شده است.



پاسخ تشریحی گام اول: مطابق شکل، نمودار مکان - زمان نوسانگر ساده با دامنه نوسان A رسم شده است. لحظه‌های t_1 و t_2 را در نمودار مشخص می‌کنیم:

t_1 ← نوسانگر از مکان $x = \frac{A}{2}$ در خلاف جهت محور x عبور می‌کند.

t_2 ← نوسانگر برای اولین بار بعد از t_1 از مکان $x = -\frac{A\sqrt{3}}{2}$ در جهت محور x عبور می‌کند.



گام دوم: دوره تناوب حرکت نوسانگر را به دست می آوریم:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{T}{12} + \frac{T}{4} + \frac{T}{12} = 1/5 \Rightarrow \frac{5T}{12} = \frac{3}{2} \Rightarrow T = 3/6 \text{ s}$$

گام سوم: کمترین زمانی که لازم است تا نوسانگر از مبدأ به نقطه بازگشت برسد، $\frac{T}{4}$ است که برابر 0.75 s است.

تست و پاسخ ۸۰

نوسانگری روی محور x و حول مبدأ با دامنه 5 cm حرکت هماهنگ ساده انجام می دهد. این نوسانگر در هر دقیقه 30 بار پاره خط نوسان را طی می کند. در لحظه t_1 نوسانگر از مکان $x_1 = +3 \text{ cm}$ عبور کرده و انرژی پتانسیل کشسانی آن در حال افزایش است. در بازه زمانی t_1 تا $t_2 = t_1 + 2$ (بر حسب ثانیه) به ترتیب بزرگی سرعت متوسط و تندی متوسط نوسانگر چند سانتی متر بر ثانیه هستند؟

۱۰، ۳ (۴)

۵، ۳ (۳)

۱۰، صفر، ۲

۵، صفر، ۱

پاسخ: گزینه ۳

خودت حل کنی بهتره با استفاده از رابطه $T \times N = \Delta t$ ، دوره تناوب نوسانگر را به دست آورید، سپس وضعیت نوسانگر را از لحظه t_1 تا t_2 دنبال کنید تا در نهایت سرعت متوسط و تندی متوسط را به دست آورید.

درس نامه ۱۰۰ در حرکت هماهنگ ساده با دامنه نوسان A و دوره تناوب T ، مسافتی که نوسانگر در بازه $\Delta t = n \frac{T}{4}$ طی می کند، برابر $(2nA)$ است. تفاوت ندارد مکان ابتدایی نوسانگر در کجای پاره خط نوسان باشد.

$$\Delta t = \frac{T}{4} \Rightarrow \ell = 2A$$

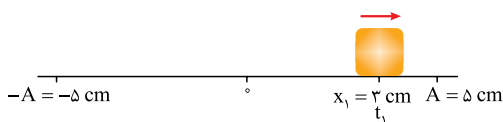
$$n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$\Delta t = 2\left(\frac{T}{4}\right) = T \Rightarrow \ell = 2 \times 2A = 4A$$

۲) درس نامه تست های ۵۱ و ۵۵ را بخوانید.

پاسخ تشریحی گام اول: نوسانگر در هر دقیقه (60 s) ، 30 بار پاره خط نوسان را طی می کند به عبارتی 15 نوسان کامل انجام می دهد؛ بنابراین دوره تناوب برابر است با:

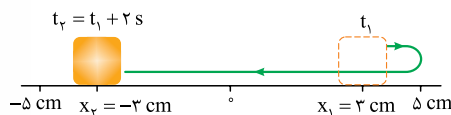
$$T \times N = \Delta t \xrightarrow{N=15, \Delta t=60 \text{ s}} T \times 15 = 60 \Rightarrow T = 4 \text{ s}$$



گام دوم: مکان و جهت حرکت نوسانگر را در لحظه t_1 مشخص می کنیم. انرژی پتانسیل کشسانی نوسانگر در حال افزایش است، پس نوسانگر به نقطه بازگشت نزدیک می شود:

گام سوم: مکان نوسانگر را در لحظه t_2 مشخص می کنیم.

از آن جا که $\Delta t = \frac{T}{4} = 1 \text{ s}$ است، نوسانگر در مدت $\Delta t = 1 \text{ s}$ مسافتی به اندازه $2A$ را طی خواهد کرد:



گام چهارم: سرعت متوسط و تندی متوسط را به دست می آوریم:

$$v_{av} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{(-3) - (3)}{2} = -3 \text{ cm/s} \Rightarrow |v_{av}| = 3 \text{ cm/s}$$

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{2A}{\left(\frac{T}{4}\right)} = \frac{2 \times 5}{1} = 10 \text{ cm/s}$$



تست و پاسخ (۸۱)

به سمت نقاط بازگشت حرکت می‌کند.

به مرکز نوسان نزدیک می‌شود.

دامنه نوسانگر هماهنگ ساده‌ای برابر A است. نوسانگر در لحظه t_1 به صورت کندشونده از مکان $x_1 = \frac{A}{2}$ و پس از یک بار عبور از مبدأ، در لحظه t_2 به صورت تندشونده از مکان $x_2 = -\frac{A}{2}$ عبور می‌کند. تندی متوسط نوسانگر در بازه زمانی t_1 تا t_2 چند برابر تندی بیشینه آن در این مدت است؟ (نوسانگر بر روی محور x و حول مبدأ نوسان می‌کند.)

$$\frac{3}{\pi} \quad (۴)$$

$$\frac{2}{\pi} \quad (۳)$$

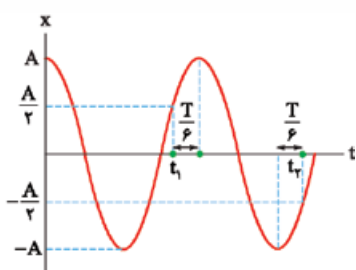
$$\frac{9}{4\pi} \quad (۲)$$

$$\frac{9}{5\pi} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه (۱)

مشاوره در سؤالات هماهنگ ساده‌ای، که حرف از مکان و زمان شده است یکی از بهترین کارها رسم نمودار مکان - زمان نوسانگر یا مشخص کردن مکان جسم بر روی محور مکان است تا به راحتی بتوانیم مسیر حرکت و وضعیت جسم را مشخص کنیم.

درس‌نامه در سؤالات تست‌های ۷۸ و ۷۹ را بخوانید.



پاسخ تشریحی **گام اول:** شکل مقابل، نمودار مکان - زمان نوسانگر هماهنگ ساده‌ای با دامنه A را نمایش می‌دهد. زمانی که متحرک به سمت نقاط بازگشت ($x = \pm A$) حرکت می‌کند، حرکت از نوع کندشونده و زمانی که متحرک به سمت مرکز نوسان ($x = 0$) حرکت می‌کند، حرکت از نوع تندشونده است. ابتدا لحظه t_1 و سپس لحظه t_2 که بلافاصله بعد از آن رخ داده است را مشخص می‌کنیم:

گام دوم: تندی متوسط نوسانگر را در بازه t_1 تا t_2 به دست می‌آوریم:

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{\frac{A}{2} + A + A + \frac{A}{2}}{\frac{T}{6} + \frac{T}{2} + \frac{T}{6}} = \frac{3A}{\frac{5T}{6}} = \frac{18}{5} \frac{A}{T}$$

$$\frac{s_{av}}{v_{max}} = \frac{\frac{18}{5} \frac{A}{T}}{A \times \frac{2\pi}{T}} = \frac{18}{10\pi} = \frac{9}{5\pi}$$

گام سوم: نسبت تندی متوسط در بازه t_1 تا t_2 را به تندی بیشینه ($v_{max} = A\omega$) محاسبه می‌کنیم:

تست و پاسخ (۸۲)

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

وزنه‌ای به جرم 2 kg به فنری با ثابت 180 N/m متصل است و روی سطح افقی بدون اصطکاک قرار دارد.

$$A = 8 \text{ cm}$$

اگر فنر را 8 cm کشیده و رها کنیم، وزنه به نوسان درمی‌آید. کم‌ترین مسافتی که این وزنه در یک بازه زمانی

دلخواه $\frac{1}{9}$ ثانیه‌ای طی می‌کند، چند سانتی‌متر است؟ ($\sqrt{2} \approx 1/4$ ، $\sqrt{3} \approx 1/2$ ، $\sqrt{10} \approx 3$) در اطراف نقطه بازگشت، مسافت به کم‌ترین مقدار خود می‌رسد.

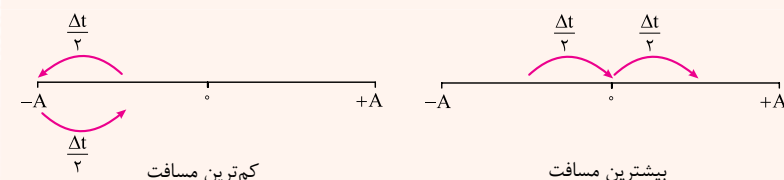
$$8 \quad (۴)$$

$$4 \quad (۳)$$

$$2/4 \quad (۲)$$

$$4/8 \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه (۲)



درس‌نامه در سؤالات نوسانگر هماهنگ ساده برای یافتن کم‌ترین مسافت و بیشترین مسافت طی شده در بازه Δt به صورت روبه‌رو رفتار می‌کنیم:



سامند طبیعی برای سامانه جرم - فنر به صورت روبه‌رو به دست می‌آید:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \text{سامانه جرم - فنر}$$

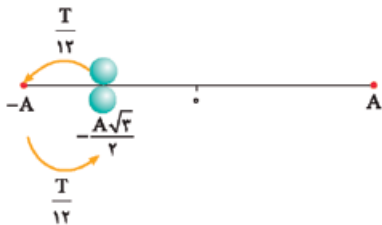
گام اول: دوره تناوب نوسانگر را به دست می‌آوریم:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{2}{180}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{10}} = \frac{2}{3} \text{ s}$$

گام دوم: بازه زمانی $\Delta t = \frac{1}{9} \text{ s}$ را برحسب دوره تناوب به دست می‌آوریم:

$$\frac{\Delta t}{T} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{6} \Rightarrow \Delta t = \frac{T}{6}$$

کم‌ترین مسافت طی شده توسط نوسانگر در بازه دلخواه $\Delta t = \frac{T}{6}$ ، قبل و بعد از نقطه بازگشت رخ می‌دهد، به طوری که نوسانگر $\frac{T}{12}$ را قبل از رسیدن به نقطه بازگشت و $\frac{T}{12}$ را بعد از نقطه بازگشت طی کند.



گام سوم: مسافت طی شده را به دست می‌آوریم. شکل مقابل مسیر حرکت مطلوب را در بازه زمانی

$$\Delta t = \frac{T}{6}$$

$$\text{مسافت} = 2(A - \frac{A\sqrt{3}}{2}) = 2A - A\sqrt{3} = (2 - \sqrt{3})A = 0.3A = 0.3 \times 8 = 2.4 \text{ cm}$$

تست و پاسخ ۸۳

در شکل زیر، نوسانگر ساده‌ای روی محور x حول نقطه O حرکت می‌کند. در جابه‌جایی نوسانگر از نقطه M تا نقطه N، انرژی پتانسیل نوسانگر ۸۰ درصد کاهش و انرژی جنبشی آن ۴۰ درصد افزایش می‌یابد. تندی نوسانگر در نقطه M چند برابر تندی بیشینه آن است؟

$$U_N = 0.2 U_M$$

$$K_N = 1.4 K_M$$

$$v_{\max} = A\omega$$



$$\sqrt{\frac{2}{3}} \quad (4)$$

$$\frac{\pi}{3} \quad (3)$$

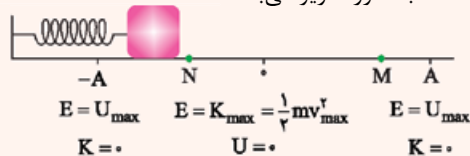
$$\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (2)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۴

خودت حل کنی بهتره انرژی مکانیکی در نقطه M و نقطه N با هم برابر است. با توجه به رابطه بین انرژی پتانسیل و انرژی جنبشی نقاط M و N، رابطه‌ای بین انرژی جنبشی نقطه N و انرژی جنبشی مرکز نوسانگر پیدا کنید.

درس نامه انرژی پتانسیل، انرژی جنبشی و انرژی مکانیکی در حرکت هماهنگ ساده به صورت زیر می‌باشد:



$$E_M = E_N \Rightarrow U_M + K_M = U_N + K_N$$

$$E = \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 = 2\pi^2 m A^2 f^2$$

گام اول: هرچه نوسانگر به مرکز نوسان نزدیک‌تر باشد، انرژی پتانسیل آن کمتر و انرژی جنبشی آن بیشتر می‌شود؛ بنابراین، انرژی پتانسیل در نقطه M بیشتر از نقطه N است ($U_M > U_N$) و انرژی جنبشی در نقطه N بیشتر از نقطه M است ($K_N > K_M$).

در نتیجه به صورت رابطه ریاضی روابط مقابل برقرار است:

$$U_N = U_M - \frac{80}{100} U_M = \frac{20}{100} U_M = 0.2 U_M$$

$$K_N = K_M + \frac{40}{100} K_M = \frac{140}{100} K_M = 1.4 K_M$$



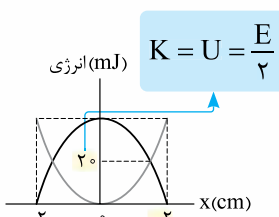
گام دوم: طبق قانون پایستگی انرژی مکانیکی، $E_M = E_N$ است:

$$E_M = E_N \Rightarrow U_M + K_M = U_N + K_N \Rightarrow U_M + K_M = 0 + \frac{1}{4}K_M \Rightarrow \frac{3}{4}U_M = \frac{1}{4}K_M \Rightarrow U_M = \frac{K_M}{3}$$

گام سوم: انرژی مکانیکی نوسانگر در طول مسیر ثابت و برابر $E = K_{\max}$ است:

$$E_M = K_{\max} \Rightarrow U_M + K_M = K_{\max} \xrightarrow{U_M = \frac{K_M}{3}} \frac{K_M}{3} + K_M = K_{\max}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3}K_M = K_{\max} \Rightarrow \frac{4}{3} \times \left(\frac{1}{2}mv_M^2\right) = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 \Rightarrow v_M = \sqrt{\frac{3}{4}}v_{\max}$$



دامنه نوسان

تست و پاسخ ۸۴
نمودار تغییرات انرژی نوسانگر ساده‌ای بر حسب مکان به شکل مقابل است. اگر در لحظه‌ای که انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل نوسانگر برابر هستند، تندی نوسانگر $4\pi\sqrt{2} \text{ cm/s}$ باشد، حداقل زمان لازم برای آن که انرژی جنبشی نوسانگر از صفر به 40 mJ برسد، چند ثانیه است؟

$$\frac{T}{4} = ?$$

$$\frac{1}{4} (2)$$

$$\frac{1}{8} (1)$$

$$1 (4)$$

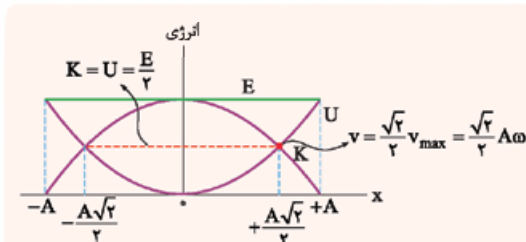
$$\frac{1}{2} (3)$$

پاسخ: گزینه ۱

خودت حل کنی بهتره زمانی که انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل نوسانگر برابر است، تندی نوسانگر $\frac{\sqrt{2}}{2}$ برابر تندی بیشینه ($v_{\max} = A\omega$) است، با استفاده از تندی $4\pi\sqrt{2} \text{ cm/s}$ که در صورت سؤال داده شده است و نمودار مطرح شده، بسامد زاویه‌ای و در نهایت دوره تناوب را به دست آورید تا به خواسته سؤال برسید.

مشاوره در نمودار انرژی پتانسیل و انرژی جنبشی بر حسب مکان نوسانگر، مهم‌ترین نقطه کلیدی برخورد این دو نمودار است، این نقطه سه ویژگی مهم دارد:

$$(1) \text{ مکان: } x = \pm \frac{A\sqrt{2}}{2} \quad (2) \text{ انرژی: } U = K = \frac{E}{2} = \frac{K_{\max}}{2} = \frac{U_{\max}}{2} \quad (3) \text{ تندی: } v = \frac{\sqrt{2}}{2}A\omega$$



درس نامه نمودار انرژی بر حسب مکان نوسانگر هماهنگ ساده:

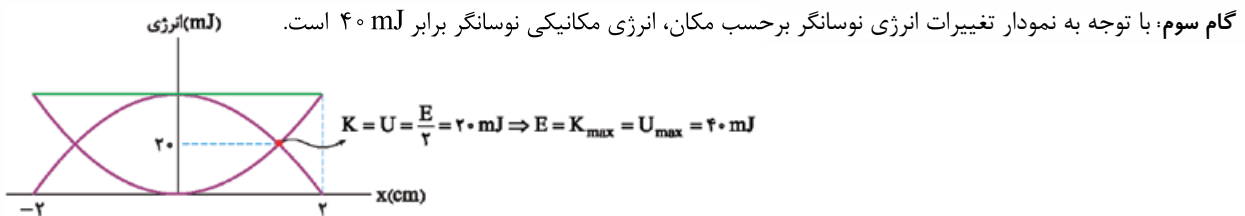
پاسخ تشریحی گام اول: در زمانی که انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل نوسانگر برابر می‌شوند، تندی نوسانگر $\frac{\sqrt{2}}{2}$ برابر تندی بیشینه است؛ بنابراین داریم:

$$v = 4\pi\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}v_{\max} \Rightarrow v_{\max} = 8\pi \text{ cm/s}$$

گام دوم: با توجه به نمودار تغییرات انرژی نوسانگر بر حسب مکان، دامنه نوسان 2 cm است؛ بنابراین بسامد زاویه‌ای و دوره تناوب را به دست می‌آوریم:

$$v_{\max} = 8\pi \text{ cm/s} \xrightarrow{v_{\max} = A\omega, A=2 \text{ cm}} 2 \times \omega = 8\pi \Rightarrow \omega = 4\pi \text{ rad/s}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow 4\pi = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{1}{2} \text{ s}$$



گام چهارم: کمترین زمان برای این که انرژی جنبشی از صفر به حداکثر مقدار خود (40 mJ) برسد، برابر $\frac{T}{4}$ است؛ بنابراین داریم: $\Delta t = \frac{T}{4} = \frac{1}{8} \text{ s}$

تست و پاسخ ۸۵

طول تعدادی آونگ ساده که از یک میله افقی آویزان هستند، عبارتند از: 4 m ، 8 m ، 12 m ، 16 m و 20 m . اگر میله با بسامد زاویه‌ای در گستره 2 rad/s تا 4 rad/s نوسان‌هایی افقی انجام دهد، برای چه تعداد از آونگ‌ها تشدید رخ می‌دهد؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$)

چه تعداد از آونگ‌ها، بسامد زاویه‌ای طبیعی در محدوده 2 rad/s تا 4 rad/s دارند؟

۳ (۲)

۱ (۴)

۴ (۱)

۲ (۳)

پاسخ: گزینه ۱

خودت حل کنی بهتره بسامد زاویه‌ای آونگ‌ها را به دست آورید و آن‌هایی که در محدوده 2 rad/s تا 4 rad/s را انتخاب کنید.

درس‌نامه ۱۰۰ بسامد طبیعی آونگ ساده از رابطه $f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{L}}$ و بسامد زاویه‌ای آن از رابطه $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$ به دست می‌آیند.

۲) اگر جسمی را که بتواند نوسان کند، از حالت تعادل خارج و رها کنیم، با یک بسامد معین به نام بسامد طبیعی (f_0) شروع به نوسان می‌کند. اگر بسامد واداشته با بسامد طبیعی برابر باشد، پدیده تشدید یا رزونانس به وجود می‌آید و نوسان با بیشترین حالت دامنه رخ می‌دهد.

پاسخ تشریحی گام اول: بسامد زاویه‌ای طبیعی هر یک از آونگ‌ها را از رابطه $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$ به دست می‌آوریم:

$$L_1 = 4 \text{ m} \Rightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{10}{4}} = 5 \text{ rad/s}$$

$$L_2 = 8 \text{ m} \Rightarrow \omega_2 = \sqrt{\frac{10}{8}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \text{ rad/s} \approx 3.5 \text{ rad/s}$$

$$L_3 = 12 \text{ m} \Rightarrow \omega_3 = \sqrt{\frac{10}{12}} = \frac{5\sqrt{3}}{3} \text{ rad/s} \approx 2.9 \text{ rad/s}$$

$$L_4 = 16 \text{ m} \Rightarrow \omega_4 = \sqrt{\frac{10}{16}} = 2.5 \text{ rad/s}$$

$$L_5 = 20 \text{ m} \Rightarrow \omega_5 = \sqrt{\frac{10}{20}} = \frac{5\sqrt{6}}{6} \text{ rad/s} \approx 2.04 \text{ rad/s}$$

گام دوم: از بین آونگ‌هایی که از میله آویزان هستند، ۴ آونگ بسامد زاویه‌ای در محدوده 2 rad/s تا 4 rad/s دارند و در نتیجه در این آونگ‌ها پدیده تشدید رخ می‌دهد.

روش دوم: می‌توانیم محدوده طول آونگ‌هایی را که با بسامد زاویه‌ای 2 rad/s تا 4 rad/s تشدید می‌شوند را حساب کنیم:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{L_1}} \Rightarrow L_1 = \frac{g}{\omega_1^2} = \frac{10}{(2)^2} = 2.5 \text{ m}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{L_2}} \Rightarrow L_2 = \frac{g}{\omega_2^2} = \frac{10}{(4)^2} = 0.625 \text{ m}$$

پس آونگ‌هایی که طول آن‌ها در محدوده 0.625 m تا 2.5 m قرار دارند، تشدید می‌شوند.



تست و پاسخ ۸۶

جرم دو طناب A و B برابر و طول طناب A، ۲۸ درصد کم تر از طول طناب B است. اگر نیروی کشش طناب A، ۲ برابر نیروی کشش طناب B باشد، مدتی که طول می کشد تا موج عرضی طول طناب A را طی کند، چند برابر مدتی است که موج عرضی طول طناب B را طی می کند؟

$$L_A = L_B - \frac{28}{100} L_B = \frac{72}{100} L_B$$

$$\frac{3}{5} \quad (۴)$$

$$\frac{5}{3} \quad (۳)$$

$$\frac{3}{10} \quad (۲)$$

$$\frac{10}{3} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۴

مشاوره در این سؤال یکی از مواردی که ممکن است دانش آموزان اشتباه کنند، این است که نسبت ها را جابه جا به دست آورند به همین دلیل **۳** دام تستی است.

خودت حل کنی بهتره ابتدا رابطه بین تندی انتشار موج دو طناب A و B را به دست آورید. سپس با داشتن نسبت تندی انتشار موج در طناب ها و طول طناب ها، نسبت مدت زمانی که موج عرضی طول طناب ها را طی می کند، به دست آورید.

درس نامه •• تندی انتشار موج عرضی در تار یا ریسمان یا فنر:

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

جرم تار بر حسب (kg) $\mu = \frac{m}{L}$ $\rightarrow$ طول تار بر حسب (m) $\rightarrow v = \sqrt{\frac{FL}{m}}$

نیروی کشش طناب بر حسب (N) $\rightarrow v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$

چگالی خطی جرم (جرم واحد طول یک تار) عرضی بر حسب (m/s) $\rightarrow$ بر حسب (kg / m)

تندی انتشار موج

نکته اگر جبهه موج در مدت Δt ، مسافت L را طی کند، تندی انتشار موج از رابطه $v = \frac{L}{\Delta t}$ به دست می آید.

پاسخ تشریحی **گام اول:** ابتدا تندی انتشار موج در دو طناب A و B را با هم مقایسه می کنیم:

$$v = \sqrt{\frac{F.L}{m}} \Rightarrow \frac{v_A}{v_B} = \sqrt{\frac{F_A}{F_B} \times \frac{L_A}{L_B} \times \frac{m_B}{m_A}} \quad \frac{F_A = 2F_B, L_A = L_B - \frac{28}{100} L_B = \frac{72}{100} L_B}{m_A = m_B} \rightarrow \frac{v_A}{v_B} = \sqrt{\frac{2}{1} \times \frac{72}{100} \times 1}$$

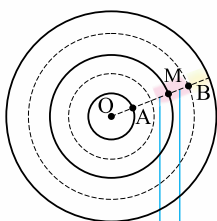
$$\Rightarrow \frac{v_A}{v_B} = \sqrt{\frac{144}{100}} = 1/2 \Rightarrow v_A = 1/2 v_B$$

گام دوم: با داشتن نسبت تندی انتشار موج در طناب های A و B و نیز نسبت طول طناب ها، نسبت مدت زمانی که موج عرضی طول طناب ها را می پیماید به دست می آوریم:

$$v = \frac{L}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{L}{v} \Rightarrow \frac{\Delta t_A}{\Delta t_B} = \frac{L_A}{L_B} \times \frac{v_B}{v_A} \quad \frac{L_A = \frac{72}{100} L_B}{v_A = 1/2 v_B} \rightarrow \frac{\Delta t_A}{\Delta t_B} = \frac{72}{100} \times \frac{1}{1/2} = \frac{3}{5}$$

تست و پاسخ ۸۷

در یک تشت موج، یک گوی با حرکت هماهنگ ساده در هر دقیقه ۸۰ نوسان عمود بر سطح آب انجام می دهد. شکل مقابل تصویری از امواج دایره ای تشکیل شده در سطح آب این تشت موج را در یک لحظه نشان می دهد. اگر تندی انتشار این موج 4 m/s باشد، فاصله دو نقطه A و B چند سانتی متر است؟ (دایره های ممتد جبهه های موج برآمده و دایره های خط چین جبهه های موج فرورفته سطح آب را نشان می دهد).



$$AM = \lambda \quad MB = \frac{\lambda}{2}$$

دوره به دست می آید.

مجموع فاصله بین دو برآمدگی متوالی و فاصله یک برآمدگی از فرورفتگی مجاور

پاسخ: گزینه ۲

$$۴۵ \quad (۲)$$

$$۲۲/۵ \quad (۱)$$

$$۹۰ \quad (۴)$$

$$۶۰ \quad (۳)$$



مشاوره یکی از اشتباهات دانش آموز در این سؤال این است که فاصله بین دو دایره با خطوط ممتد و نقطه چین را برابر با طول موج در نظر بگیرد و در نهایت به اشتباه (۴) دام تستی را انتخاب کند.

خودت حل کنی بهتره ابتدا دوره تناوب چشمه را به دست آورده و با کمک تندی انتشار موج، طول موج را به دست آورید. در انتها با توجه به نسبت فاصله A تا B بر حسب طول موج، فاصله A تا B را به دست آورید.

درس نامه اگر چشمه یا هر ذره از محیط انتشار یک موج مکانیکی، در مدت t ثانیه n نوسان کامل انجام دهد، داریم:

$$T = \frac{t}{n} \quad \text{دوره (s)}$$

به برآمدگی های ایجاد شده در موج، قله و به فرورفتگی های آن، دره می گوئیم.

$$v = \frac{\ell}{\Delta t} \xrightarrow{\ell = \lambda} v = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow \lambda = vT \quad \text{طول موج } (\lambda): \text{ مسافتی که موج در مدت زمان یک دوره تناوب چشمه طی می کند.}$$

فاصله بین دو برآمدگی (قله) مجاور یا دو فرورفتگی (دره) مجاور برابر با طول موج و فاصله یک قله از دره مجاور برابر با نصف طول موج است.

$$T = \frac{t}{n} \xrightarrow{\substack{t=6\text{ s} \\ n=4}} T = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \text{ s}$$

پاسخ تشریحی گام اول: ابتدا دوره تناوب چشمه را به دست می آوریم:

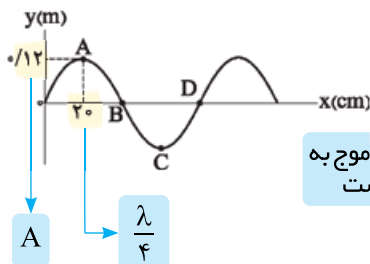
گام دوم: با داشتن دوره تناوب چشمه و تندی انتشار موج، طول موج را به دست می آوریم:

$$\lambda = vT \xrightarrow{\substack{v=0.4 \text{ m/s} \\ T=\frac{3}{2} \text{ s}}} \lambda = 0.4 \times \frac{3}{2} = 0.6 \text{ m}$$

گام سوم: با توجه به این که فاصله A تا B برابر است با مجموع فاصله دو قله مجاور (λ) و یک قله از دره مجاور ($\frac{\lambda}{2}$)، داریم:

$$d_{AB} = \lambda + \frac{\lambda}{2} = \frac{3}{2} \lambda \xrightarrow{\lambda=0.6 \text{ m}=60 \text{ cm}} d_{AB} = \frac{3}{2} \times 60 = 90 \text{ cm}$$

تست و پاسخ



شکل روبهرو تصویر لحظه ای موج سینوسی را که با سرعت $\vec{v} = (2 \text{ m/s})\vec{i}$ در طنابی منتشر شده است، در مبدأ زمان نشان می دهد. کدام یک از عبارت های زیر درباره نقاط A، B، C و D از

طناب درست است؟

این نقاط حرکت هماهنگ ساده انجام می دهند.

جهت انتشار موج به سمت راست

(الف) سرعت متوسط ذره A در ثانیه اول برابر $(0.12 \text{ m/s})\vec{j}$ است.

$$\Delta t = 1 \text{ s}$$

(ب) شتاب متوسط ذره B در ثانیه اول برابر $(-0.6\pi \text{ m/s}^2)\vec{j}$ است.

$$\Delta t = 1 \text{ s}$$

(پ) تندی متوسط ذره C در نیم ثانیه اول برابر $1/2 \text{ m/s}$ است.

$$\Delta t = 0.5 \text{ s}$$

(ت) در $1/5$ ثانیه اول، حرکت ذره D مجموعاً به مدت 0.7 s تندشونده است.

$$\Delta t = 1/5 \text{ s}$$

نزدیک شدن به وسط پاره خط

(۴) پ و ت

(۳) ب و ت

(۲) الف و پ

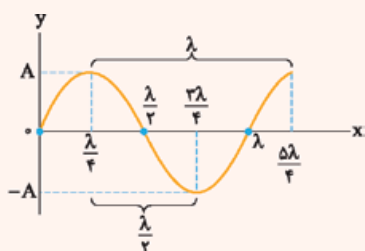
(۱) الف و ب

پاسخ: گزینه (۴)

مشاوره این سؤال یک تست زمانبر است و اگر می خواهید به این تست پاسخ دهید باید حواستان به زمان باقی مانده برای درس فیزیک باشد. تا حدودی با کنکور تجربی داخل ۱۴۰۱ تشابه مفهومی دارد.

خودت حل کنی بهتره ابتدا با توجه به شکل نمودار، طول موج و دوره تناوب را به دست آورده و سپس عبارت های داده شده را بررسی کنید.

درس نامه درس نامه تست های ۸۷ و ۵۱ و ۵۳ را بخوانید.



درس نامه نقش موج: شکل موج (طناب یا فنر یا ...) در هر لحظه انتشار موج

فاصله دو قله مجاور λ

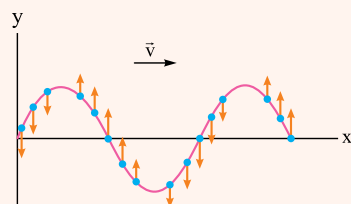
فاصله دو دره مجاور λ

فاصله یک قله از دره مجاور $\frac{\lambda}{2}$

فاصله یک قله یا دره از نقطه تعادل مجاور $\frac{\lambda}{4}$

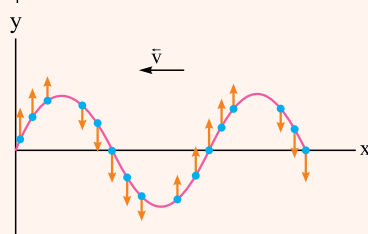
بیشینه تندی ذرات محیط در نقطه تعادل بوده و برابر است با:

$$v_{\max} = A\omega$$



تعیین جهت حرکت ذرات، در محیط انتشار موج عرضی:

اگر موج روی محور X به سمت راست حرکت کند، آشفته‌گی‌ها از سمت چپ به راست حرکت می‌کنند، یعنی هر ذره از محیط با گذشت زمان، وضعیت مشابه با نقاط سمت چپ خود را خواهد داشت.



اگر موج روی محور X به سمت چپ حرکت کند، آشفته‌گی‌ها از سمت راست به چپ حرکت می‌کنند، یعنی هر ذره از محیط با گذشت زمان، وضعیت مشابه با نقاط سمت راست خود را خواهد داشت.

پاسخ تشریحی با توجه به نمودار Y - X موج، درمی‌یابیم فاصله یک قله از نقطه تعادل مجاورش $(\frac{\lambda}{4})$ برابر با ۲۰ cm است، بنابراین با داشتن طول موج و تندی انتشار موج، دوره تناوب را به دست می‌آوریم:

$$\lambda = vT \Rightarrow T = \frac{\lambda}{v} \quad \frac{\lambda}{4} = 20 \text{ cm} \Rightarrow \lambda = 80 \text{ cm} = 0.8 \text{ m} \quad v = 2 \text{ m/s} \rightarrow T = \frac{0.8}{2} = 0.4 \text{ s}$$

از طرفی با توجه به این که جهت انتشار موج در جهت مثبت محور X است؛ بنابراین آشفته‌گی‌های موج از سمت چپ به راست منتشر می‌شود و هر ذره در لحظه بعد در موقعیت ذره سمت چپ خود قرار می‌گیرد.

بررسی عبارت‌ها:

عبارت «الف»: نادرست

با توجه به این که دوره تناوب هر ذره، ۰/۴ s است، بنابراین مدت زمان ۱ s برابر با $2.5T$ است، یعنی ذره A پس از ۲ دوره تناوب دوباره به محل اولیه‌اش برمی‌گردد و پس از آن به مدت $\frac{T}{4}$ به سمت پایین (وضعیت مشابه نقاط سمت چپ) حرکت می‌کند که در اثر آن از مکان A به مکان -A جابه‌جا می‌شود. داریم:

$$v_{av,A} = \frac{d}{\Delta t} \quad d = -A - A = -2A \Rightarrow d = -0.24 \text{ m} \quad \Delta t = 1 \text{ s} \rightarrow v_{av,A} = \frac{-0.24}{1} = -0.24 \text{ m/s}$$

عبارت «ب»: نادرست

با توجه به بررسی عبارت «الف»، مدت زمان ۱ s معادل با $2.5T$ است، بنابراین ذره پس از $2T$ به مکان اولیه بازگشته و در مدت زمان $\frac{T}{4}$ ، دوباره به محل تعادل می‌رسد با این تفاوت که جهت سرعت اولیه بوده و در خلاف جهت محور است. از طرفی می‌دانیم بیشینه تندی ذره در نقطه تعادل بوده و برابر با $v_{\max} = A\omega$ است. داریم:

$$a_{av,B} = \frac{v_{B2} - v_{B1}}{\Delta t} \quad v_{B1} = A\omega = 0.12 \times \frac{2\pi}{0.4} = 0.6\pi \text{ m/s} \quad v_{B2} = -v_{B1} = -0.6\pi \text{ m/s}, \Delta t = 1 \text{ s} \rightarrow a_{av,B} = \frac{-0.6\pi - 0.6\pi}{1} = -1.2\pi \text{ m/s}^2$$

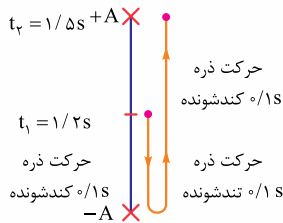
عبارت «پ»: درست

با توجه به این که $0.5 \text{ s} = 1.25T$ است؛ بنابراین ذره C پس از مدت T مسافت ۴A را طی کرده و به مکان اولیه می‌رسد و در مدت زمان $\frac{T}{4}$ نیز به اندازه A از انتهای پاره خط نوسان به نقطه تعادل می‌رسد. داریم:

$$s_{av,C} = \frac{\ell}{\Delta t} \quad \ell = \Delta A = 0.12 \times 0.6\pi = 0.072\pi \text{ m} \quad \Delta t = 0.5 \text{ s} \rightarrow s_{av,C} = \frac{0.072\pi}{0.5} = 0.144\pi \text{ m/s}$$



عبارت «ت» درست

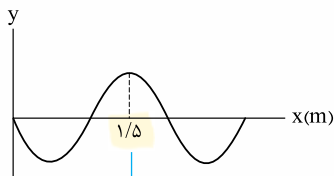


با توجه به این که مدت $1/5 s$ معادل $3/75 T$ است و این که در نصف هر دوره تناوب، ذره به صورت تندی حرکت می کند، در مدت $1/2 s$ که معادل $3T$ است، ذره D به مدت $0/6 s$ ثانیه تندی حرکت می کند. از طرفی با توجه به محور نوسان ذره D در $0/3 s$ آخر حرکت درمی یابیم که ذره $0/1 s$ تندی حرکت کرده است که در مجموع $0/7 s$ حرکت ذره D به صورت تندی بوده است.

تست و پاسخ ۸۹

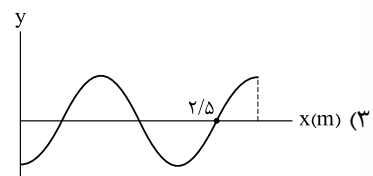
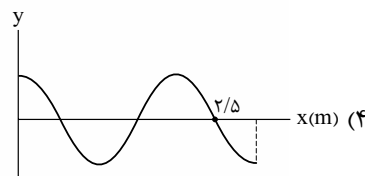
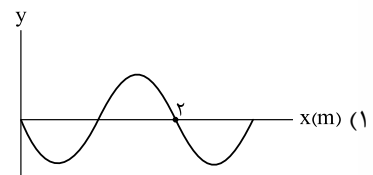
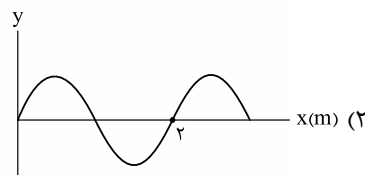
شکل روبه رو تصویر لحظه ای موج سینوسی را در لحظه t_1 نشان می دهد. اگر سرعت انتشار موج

$\vec{v} = -2/5 \text{ m/s}$ باشد، تصویر موج در لحظه $t_2 = t_1 + 0/6 s$ به کدام شکل است؟



بعد $0/6 s$

جهت انتشار به سمت چپ



پاسخ: گزینه ۴

مشاوره این سؤال با کنکور تجربی خارج ۱۴۰۰ تشابه مفهومی دارد. دقت کنید که تنها با بررسی نقطه مبدأ نمودار می توان به این سؤال پاسخ داد.

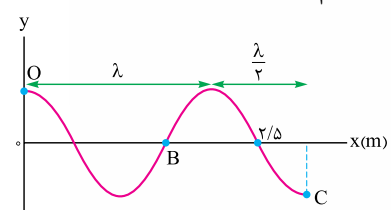
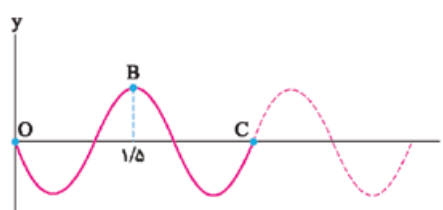
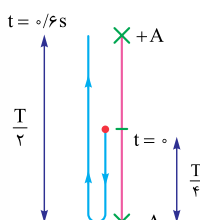
خود حل کنی بهتره ابتدا به کمک نمودار $y - x$ موج و تندی انتشار، دوره تناوب را به دست آورید. سپس به کمک جهت انتشار موج، شکل موج پس از $0/6 s$ را رسم کنید.

درس نامه درس نامه تست های ۸۷ و ۸۸ را بخوانید.

پاسخ تشریحی گام اول، ابتدا به کمک نمودار $y - x$ موج و تندی انتشار موج، دوره تناوب را به دست می آوریم:

$$\lambda = vT \Rightarrow T = \frac{\lambda}{v} = \frac{2/5 \text{ m}}{2/5 \text{ m/s}} = 0/8 \text{ s}$$

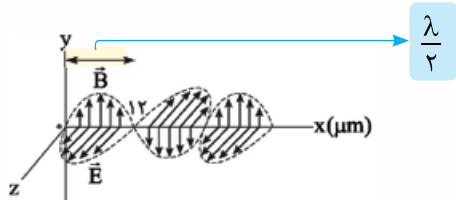
گام دوم: با توجه به این که مدت زمان $0/6 s$ معادل $3/4 T$ است و جهت انتشار موج در خلاف جهت محور x است، باید وضعیت مبدأ (نقطه O) پس از گذشت $3/4 T$ ، معلوم شود. (دقت کنید که حرکت آشفته از سمت راست به چپ است، پس ذره مبدأ باید شبیه ذره های سمت راست خود شود).





تست و پاسخ ۹۰

تصویر یک موج الکترومغناطیسی که در خلأ منتشر می شود در لحظه ای معین به شکل زیر است. بسامد این موج چند هرتز و جهت انتشار آن کدام است؟ (تندی انتشار موج الکترومغناطیسی در خلأ $3 \times 10^8 \text{ m/s}$ است.)



- (۱) $1/25 \times 10^{13}$ ، در جهت محور X
- (۲) $1/25 \times 10^{13}$ ، در خلاف جهت محور X
- (۳) $2/5 \times 10^{13}$ ، در جهت محور X
- (۴) $2/5 \times 10^{13}$ ، در خلاف جهت محور X

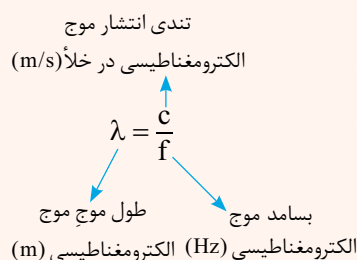
پاسخ: گزینه ۲

مشاوره این سؤال با کنکور ریاضی داخل ۹۷ تشابه مفهومی دارد. قاعده دست راست برای تعیین جهت انتشار موج الکترومغناطیسی موضوع مهمی برای طرح سؤال است.

خودت حل کنی بهتره ابتدا با توجه به نمودار موج الکترومغناطیسی، طول موج را به دست آورید. سپس به کمک تندی انتشار موج، بسامد را به دست آورید. از طرفی به کمک قاعده دست راست جهت انتشار موج را به دست آورید.

درس نامه •• امواج الکترومغناطیسی

امواجی که از رابطه متقابل میدان های الکتریکی و مغناطیسی و تغییرات همزمان این دو میدان به وجود می آیند. رابطه بین طول موج، بسامد و تندی انتشار امواج الکترومغناطیسی به صورت زیر است:



جهت انتشار موج الکترومغناطیسی

به کمک قاعده دست راست، جهت انتشار موج الکترومغناطیسی را به دست می آوریم: چهار انگشت دست راست را طوری در جهت میدان الکتریکی ($\vec{E}$) قرار می دهیم که میدان مغناطیسی ($\vec{B}$) از کف دست خارج شود. در این حالت شست دست راست، جهت انتشار موج الکترومغناطیسی را نشان می دهد.

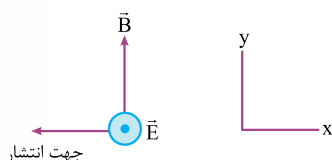
پاسخ تشریحی گام اول: ابتدا با توجه به نمودار موج الکترومغناطیسی، طول موج را به دست می آوریم:

$$\frac{\lambda}{2} = 12 \mu\text{m} \Rightarrow \lambda = 24 \mu\text{m} = 24 \times 10^{-6} \text{ m}$$

گام دوم: با داشتن طول موج و تندی انتشار موج الکترومغناطیسی، بسامد موج الکترومغناطیسی را به دست می آوریم:

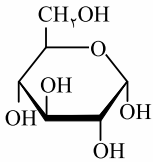
$$\lambda = \frac{c}{f} \Rightarrow f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \times 10^8 \text{ m/s}}{24 \times 10^{-6} \text{ m}} = \frac{1}{8} \times 10^{14} = 1/25 \times 10^{13} \text{ Hz}$$

گام سوم: به کمک قاعده دست راست، جهت انتشار موج الکترومغناطیسی را به دست می آوریم: بنابراین موج الکترومغناطیسی در خلاف جهت محور X منتشر می شود.





تست و پاسخ (۹۱)



عسل حاوی قندی به نام گلوکز است. با توجه به ساختار این ترکیب، کدام مطلب درباره آن نادرست است؟



$(O = 16, N = 14, C = 12, H = 1: g.mol^{-1})$

گروه عاملی $-OH$

(۱) شمار گروه‌های هیدروکسیل در آن، ۵ / ۲ برابر شمار این گروه‌ها در ساختار اتیلن گلیکول است.

(۲) همانند اتانول، توانایی تشکیل پیوند هیدروژنی با مولکول‌های آب را دارد.



(۳) جرم مولی آن، سه برابر جرم مولی اوره است.



(۴) شمار پیوندهای اشتراکی در آن با شمار پیوندهای اشتراکی در بنزین برابر است.

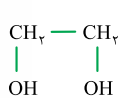


پاسخ: گزینه (۴)

مشاوره برای پاسخ به این سؤال، باید فرمول و ساختار ترکیب‌های جدیدی (اتیلن گلیکول، اوره و ...) که در صفحه‌های اولیه کتاب درسی شیمی دوازدهم اومده رو به خوبی بلد باشیم!

پاسخ تشریحی بررسی گزینه‌ها:

۱) اتیلن گلیکول ($C_2H_6O_2$) با ساختار زیر دارای ۲ گروه هیدروکسیل ($-OH$) و گلوکز ($C_6H_{12}O_6$) با ساختار داده شده دارای ۵ گروه



اتیلن گلیکول

هیدروکسیل ($-OH$) است؛ بنابراین شمار گروه‌های هیدروکسیل در گلوکز، $\frac{5}{2} = 2.5$ برابر شمار این گروه‌ها در اتیلن گلیکول است.

۲) اتانول (C_2H_5OH) و گلوکز، هر دو دارای پیوند $O-H$ هستند و می‌توانند با مولکول‌های آب، پیوند هیدروژنی برقرار کنند.

نکته در شیمی دهم خواندیم که بین مولکول‌هایی که در ساختار آن‌ها پیوند $O-H$ ، $N-H$ یا $F-H$ وجود دارد (یعنی H متصل به O ، N یا F دارند)، می‌تواند پیوند هیدروژنی برقرار شود.

$$C_6H_{12}O_6 \text{ جرم مولی گلوکز} = (6 \times 12) + (12 \times 1) + (6 \times 16) = 180 \text{ g.mol}^{-1}$$

$$CH_4N_2O \text{ یا } CO(NH_2)_2 \text{ جرم مولی اوره} = (1 \times 12) + (4 \times 1) + (2 \times 14) + (1 \times 16) = 60 \text{ g.mol}^{-1}$$

$$\Rightarrow \frac{\text{جرم مولی گلوکز}}{\text{جرم مولی اوره}} = \frac{180}{60} = 3$$

نکته برای تعیین شمار پیوندهای اشتراکی در ترکیب‌های آلی می‌توانید از فرمول زیر استفاده کنید:

$$\text{شمار پیوندهای اشتراکی} = \frac{(2 \times \text{شمار اتم‌های نیتروژن}) + (2 \times \text{شمار اتم‌های اکسیژن}) + (1 \times \text{شمار اتم‌های هیدروژن}) + (4 \times \text{شمار اتم‌های کربن})}{2}$$

N و O، H، C

با توجه به نکته بالا، شمار پیوندهای اشتراکی در بنزین با فرمول C_8H_{18} و گلوکز با فرمول $C_6H_{12}O_6$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$C_6H_{12}O_6 \text{ جرم مولی گلوکز} = \frac{\overbrace{(6 \times 4)}^C + \overbrace{(12 \times 1)}^H + \overbrace{(6 \times 2)}^O}{2} = \frac{48}{2} = 24$$

$$C_8H_{18} \text{ جرم مولی بنزین} = \frac{\overbrace{(8 \times 4)}^C + \overbrace{(18 \times 1)}^H}{2} = \frac{50}{2} = 25$$

بنابراین می‌توان گفت که شمار پیوندهای اشتراکی در گلوکز، کمتر از شمار پیوندهای اشتراکی در بنزین است.



تست و پاسخ ۹۲

RCOOK

C_nH_{2n+1}

$C_nH_{2n+1}COOH$

اگر جرم مولی یک صابون مایع حاوی اتم فلزی و با زنجیر هیدروکربنی سیر شده، برابر ۳۲۲

گرم بر مول باشد، مجموع عدد اکسایش اتم‌های کربن در اسید چرب سازنده این صابون

کدام است؟ ($K = ۳۹, Na = ۲۳, O = ۱۶, C = ۱۲, H = ۱: g.mol^{-1}$)

-۳۳ (۲)

-۳۵ (۱)

-۳۰ (۴)

-۳۲ (۳)

پاسخ: گزینه ۳

نکته صابون‌های سدیم، جامدند و صابون‌های پتاسیم یا آمونیوم، به حالت مایع هستند.



پاسخ تشریحی صابون‌های مایع، همان نمک پتاسیم یا آمونیوم اسیدهای چرب ($R-C(=O)O^-K^+$ و $R-C(=O)O^-NH_4^+$) هستند که فقط

در صابون پتاسیم‌دار، اتم فلزی وجود دارد. اگر گروه R، سیر شده (C_nH_{2n+1}) باشد، خواهیم داشت:

$$C_nH_{2n+1}COOK \text{ جرم مولی} = ۱۲n + ۲n + ۱ + ۱۲ + ۲(۱۶) + ۳۹ = ۱۴n + ۸۴ \Rightarrow ۱۴n + ۸۴ = ۳۲۲ \Rightarrow n = ۱۷$$

بنابراین فرمول شیمیایی صابون مورد نظر به صورت $C_{17}H_{35}COOK$ یا $C_{18}H_{35}O_2K$ است.

برای تبدیل فرمول صابون به فرمول اسید چرب سازنده آن، کافی است کاتیون موجود در فرمول شیمیایی صابون را با اتم هیدروژن جایگزین

کنیم؛ بنابراین فرمول اسید چرب سازنده صابون مورد نظر، $C_{17}H_{35}COOH$ یا $C_{18}H_{36}O_2$ است که ترکیبی خنثی است و مجموع عدد

اکسایش اتم‌ها در آن برابر صفر است؛ در نتیجه خواهیم داشت:

$$C_{18}H_{36}O_2: ۱۸C + ۳۶(+۱) + ۲(-۲) = ۰ \Rightarrow ۱۸C = -۳۲$$

تست و پاسخ ۹۳

چند مورد از مطالب زیر، دربارهٔ سوسپانسیون‌ها درست است؟

• همانند کلوئیدها، ناپایدارند و با گذشت زمان، ذرات سازندهٔ آن‌ها ته‌نشین می‌شوند.

• آب گل‌آلود و سس مایونز، نمونه‌هایی از این مخلوط‌ها هستند.

• برخلاف محلول‌ها، مسیر عبور نور از میان آن‌ها قابل دیدن است.

• رفتار آن‌ها را می‌توان رفتاری بین محلول‌ها و کلوئیدها در نظر گرفت.

نور را پخش می‌کنند.

(۴) چهار

(۳) سه

(۲) دو

(۱) یک

پاسخ: گزینه ۱

پاسخ تشریحی فقط عبارت سوم درست است.

بررسی عبارت‌ها:

عبارت اول: سوسپانسیون‌ها ناپایدارند و با گذشت زمان، ذرات سازندهٔ آن‌ها ته‌نشین می‌شوند. ولی کلوئیدها پایدارند و ذرات سازندهٔ آن‌ها ته‌نشین نمی‌شوند.

عبارت دوم: آب گل‌آلود، نمونه‌ای از سوسپانسیون‌ها و سس مایونز، نمونه‌ای از کلوئیدها است.

عبارت سوم: سوسپانسیون‌ها همانند کلوئیدها و برخلاف محلول‌ها، نور را پخش می‌کنند؛ یعنی مسیر عبور پرتوهای نور در آن‌ها قابل مشاهده است.

عبارت چهارم: از آن‌جا که کلوئیدها در برخی رفتارها شبیه محلول‌ها و در برخی دیگر شبیه سوسپانسیون‌ها هستند؛ می‌توان رفتار کلوئیدها را

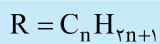
رفتاری بین محلول‌ها و سوسپانسیون‌ها در نظر گرفت.



خلاصه نکات

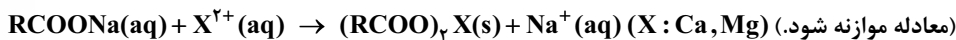
ویژگی / نوع مخلوط	سوسپانسیون	کلوتید	محلول
رفتار در برابر نور	نور را پخش می کنند.	نور را پخش می کنند.	نور را عبور می دهد.
همگن بودن	ناهمگن	ناهمگن	همگن
پایداری	ناپایدار است / ته نشین می شود.	پایدار است / ته نشین نمی شود.	پایدار است / ته نشین نمی شود.
ذره های سازنده	ذره های ریز ماده	توده های مولکولی با اندازه های متفاوت	یون ها یا مولکول ها
مثال	شربت معده، شربت خاکشیر، آب گل آلود	شیر، ژله، سس مایونز، رنگ های پوششی، مخلوط آب، روغن و صابون	مخلوط مس (II) سولفات و آب، آب قند

تست و پاسخ ۹۴



۸۰ درصد صابون رسوب می کند.

درصد جرمی اکسیژن در نوعی صابون جامد با زنجیر هیدروکربنی سیر شده برابر ۱۲/۸ است. اگر ۱۸ گرم از این صابون به ۲ لیتر آب سخت ($d = 1 \text{ g.mL}^{-1}$) که غلظت یون های منیزیم و کلسیم در آن بر حسب ppm با هم برابر است، اضافه شود، تنها ۲۰ درصد از صابون خاصیت پاک کنندگی خود را حفظ می کند. غلظت یون کلسیم در این نمونه آب، چند ppm است؟ ($\text{Ca} = 40, \text{Mg} = 24, \text{Na} = 23, \text{O} = 16, \text{C} = 12, \text{H} = 1; \text{g.mol}^{-1}$)



۲۱۶ (۴)

۶۱۲ (۳)

۲۶۱ (۲)

۶۲۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

مشاوره این تیپ سؤالات رسوب صابون در آب های سخت در کنکورهای سال های اخیر پرتکرار بوده است.

پاسخ تشریحی

گام اول: ابتدا به کمک درصد جرمی اکسیژن در صابون، فرمول شیمیایی صابون را به دست می آوریم. فرمول شیمیایی صابون جامد با زنجیر هیدروکربنی سیر شده به صورت $C_n H_{2n+1} COONa$ است:

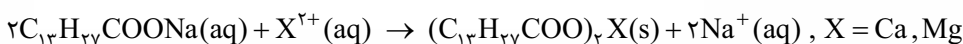
$$C_n H_{2n+1} COONa \text{ جرم مولی} = 12n + 2n + 1 + 12 + (2 \times 16) + 23 = (14n + 68) \text{ g.mol}^{-1}$$

$$\text{درصد جرمی اکسیژن} = \frac{\text{جرم اتم های اکسیژن}}{\text{جرم کل صابون}} \times 100 \Rightarrow \frac{2 \times 16}{14n + 68} \times 100 = 12/8$$

$$\Rightarrow \frac{32}{14n + 68} = \frac{128}{1000} \Rightarrow 14n + 68 = 250 \Rightarrow n = 13$$

$$\Rightarrow \text{فرمول صابون: } C_{13} H_{27} COONa$$

گام دوم: به کمک جرم صابون رسوب کرده ($\frac{18}{100} \times 18 = 14/4 \text{ g}$)، مجموع شمار مول های Ca^{2+} و Mg^{2+} در آب را حساب می کنیم:



$$14/4 \text{ g } C_{13} H_{27} COONa \times \frac{1 \text{ mol } C_{13} H_{27} COONa}{250 \text{ g } C_{13} H_{27} COONa} \times \frac{1 \text{ mol } \text{X}^{2+}}{2 \text{ mol } C_{13} H_{27} COONa} = 0.0288 \text{ mol } \text{X}^{2+}$$

$$\Rightarrow \text{Mg}^{2+} \text{ مول} + \text{Ca}^{2+} \text{ مول} = 0.0288$$



گام سوم: شمار مول‌های Ca^{2+} موجود در آب را حساب می‌کنیم. با توجه به این که غلظت ppm یون‌های منیزیم و کلسیم در آب برابر است، باید جرم آن‌ها در آب برابر باشد. اگر تعداد مول Mg^{2+} و Ca^{2+} را به ترتیب x و y در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$\left. \begin{aligned} x + y &= 0.288 \\ \text{جرم } \text{Mg}^{2+} &= \text{جرم } \text{Ca}^{2+} \Rightarrow 24x = 40y \Rightarrow x = \frac{5}{6}y = \frac{5}{3}y \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{5}{3}y + \frac{3}{3}y = 0.288$$

$$\Rightarrow y = \frac{3 \times 0.288}{8} = 0.108 \text{ mol Ca}^{2+}$$

گام چهارم: غلظت یون Ca^{2+} بر حسب ppm را حساب می‌کنیم:

$$\text{جرم } \text{Ca}^{2+} = 0.108 \text{ mol} \times \frac{40 \text{ g}}{1 \text{ mol}} = 4.32 \times 10^{-3} \text{ g}$$

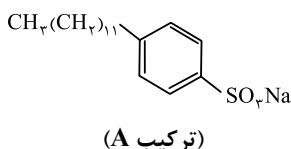
$$\text{جرم آب} = 2 \text{ L} \times \frac{1000 \text{ mL}}{1 \text{ L}} \times \frac{1 \text{ g}}{1 \text{ mL}} = 2000 \text{ g}$$

$$\text{ppm} = \frac{\text{جرم حل‌شونده}}{\text{جرم محلول}} \times 10^6 = \frac{4.32 \times 10^{-3}}{2 \times 10^3} \times 10^6 = 2.16$$

تست و پاسخ ۹۵

با توجه به ساختار پاک‌کننده داده شده (ترکیب A)، کدام مقایسه درست است؟

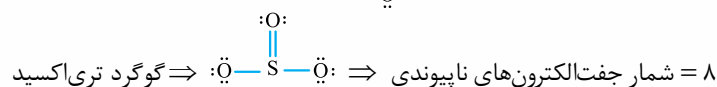
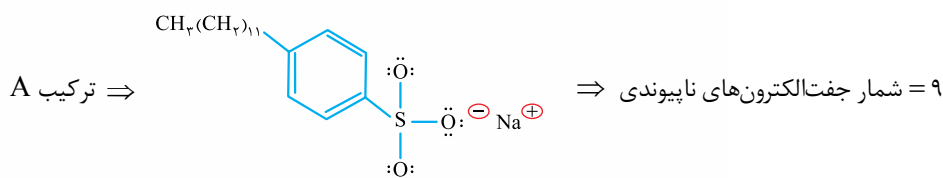
- (۱) شمار جفت الکترون‌های ناپیوندی: گوگرد تری‌اکسید = ترکیب A
- (۲) نسبت شمار اتم‌های هیدروژن به کربن: ترکیب A > وازلین
- (۳) عدد اکسایش گوگرد: هیدروژن سولفید < ترکیب A
- (۴) خاصیت خوردگی: ترکیب A < سدیم هیدروکسید



پاسخ: گزینه ۲

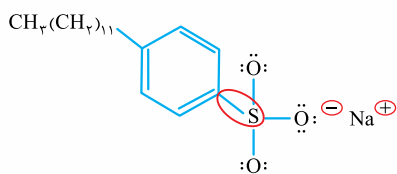
پاسخ تشریحی بررسی گزینه‌ها:

(۱) با توجه به ساختارهای زیر، در ترکیب A، ۹ جفت الکترون ناپیوندی و در گوگرد تری‌اکسید (SO_3)، ۸ جفت الکترون ناپیوندی وجود دارد.



نکته در همه ترکیب‌ها، لزوماً اتم اکسیژن، دو جفت الکترون ناپیوندی ندارد. مثلاً در این‌جا دیدید، هر اتم اکسیژن در پاک‌کننده‌های غیرصابونی، دارای ۳ جفت الکترون ناپیوندی است.

(۲) فرمول مولکولی ترکیب A، $\text{C}_{18}\text{H}_{35}\text{SO}_3\text{Na}$ و فرمول مولکولی وازلین، $\text{C}_{25}\text{H}_{52}$ است. حاصل $\frac{52}{25}$ (بزرگ‌تر از ۲) بیشتر از $\frac{29}{18}$ (کم‌تر از ۲) است.



$$+4 = 6 - 2 = \text{عدد اکسایش S در ترکیب A}$$

$$-2 = \text{عدد اکسایش S} \Rightarrow 2(+1) + \text{S} = 0 \Rightarrow \text{هیدروژن سولفید } (\text{H}_2\text{S})$$

(۴) ترکیب A (پاک‌کننده غیرصابونی) خاصیت خوردگی ندارد، در حالی که سدیم هیدروکسید یک باز قوی و خورنده است.



تست و پاسخ ۹۶

کدام مطلب درست است؟

(۱) pH محلول‌هایی به حجم یکسان از لیتیم اکسید و کلسیم اکسید که از انحلال مول‌های برابری از این دو ماده در آب به دست آمده، با هم برابر است.

(۲) در مقایسه دو محلول، محلولی اسیدی‌تر است که جرم یون هیدرونیوم در آن بیشتر باشد.

(۳) با انحلال ۵/۰ مول آهک همانند انحلال ۵/۰ مول دی‌نیتروژن پنتاکسید در آب، ۲ یون تولید می‌شود.

(۴) با انحلال گاز گوگرد تری‌اکسید همانند انحلال کربن دی‌اکسید در آب، یک اسید قوی حاصل می‌شود.

CaO

N₂O₅

CO₂

SO₃

پاسخ: گزینه ۱

در صورت انحلال یک مول لیتیم اکسید (Li₂O) در آب طبق واکنش $\text{Li}_2\text{O}(\text{s}) + \text{H}_2\text{O}(\text{l}) \rightarrow 2\text{Li}^+(\text{aq}) + 2\text{OH}^-(\text{aq})$ دو مول یون هیدروکسید (OH⁻) تولید می‌شود و در صورت انحلال یک مول کلسیم اکسید (CaO) در آب طبق واکنش $\text{CaO}(\text{s}) + \text{H}_2\text{O}(\text{l}) \rightarrow \text{Ca}^{2+}(\text{aq}) + 2\text{OH}^-(\text{aq})$ نیز دو مول یون هیدروکسید (OH⁻) تولید می‌شود؛ بنابراین محلول‌هایی با حجم یکسان، که از انحلال تعداد مول‌های برابری از این دو ماده در آب به دست می‌آیند؛ تعداد مول‌های برابری از یون هیدروکسید (OH⁻) تولید می‌کنند؛ بنابراین pH آن‌ها با هم برابر است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

(۲) در مقایسه دو محلول، محلولی اسیدی‌تر است که غلظت یون هیدرونیوم (H₃O⁺) در آن بیشتر باشد؛ پس علاوه بر جرم یون هیدرونیوم (H₃O⁺) موجود در محلول، حجم محلول نیز تأثیرگذار است.

(۳) در صورت انحلال یک مول آهک یا کلسیم اکسید (CaO) در آب طبق واکنش $\text{CaO}(\text{s}) + \text{H}_2\text{O}(\text{l}) \rightarrow \text{Ca}^{2+}(\text{aq}) + 2\text{OH}^-(\text{aq})$ ، ۲ مول یون و در صورت انحلال یک مول دی‌نیتروژن پنتاکسید (N₂O₅) در آب طبق واکنش $\text{N}_2\text{O}_5(\text{s}) + \text{H}_2\text{O}(\text{l}) \rightarrow 2\text{H}^+(\text{aq}) + 2\text{NO}_3^-(\text{aq})$ ، ۴ مول یون تولید می‌شود؛ بنابراین می‌توان گفت که به ازای انحلال تعداد مول‌های برابری از این دو ماده در آب، تعداد مول‌های یکسانی یون تولید نمی‌شود؛ پس عبارت داده‌شده نیز نادرست است.

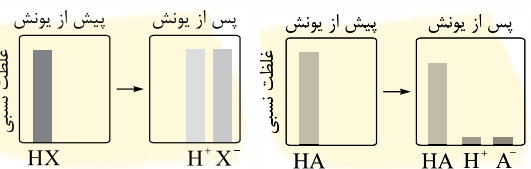
(۴) با انحلال گاز گوگرد تری‌اکسید (SO₃) در آب طبق واکنش $\text{SO}_3(\text{g}) + \text{H}_2\text{O}(\text{l}) \rightarrow \text{H}_2\text{SO}_4(\text{aq})$ ، سولفوریک اسید (H₂SO₄) تولید می‌شود که یک اسید قوی است ولی با انحلال گاز کربن دی‌اکسید (CO₂) در آب طبق واکنش $\text{CO}_2(\text{g}) + \text{H}_2\text{O}(\text{l}) \rightleftharpoons \text{H}_2\text{CO}_3(\text{aq})$ کربنیک اسید (H₂CO₃) تولید می‌شود که یک اسید ضعیف است.

تست و پاسخ ۹۷

با توجه به نمودارهای داده‌شده که غلظت نسبی گونه‌ها در

محلول دو اسید را پیش و پس از یونش نشان می‌دهند،

کدام موارد از مطالب زیر درست است؟



اسید ضعیف

اسید قوی

H₂SO₄

HBr

نارسانا

(الف) در دمای یکسان، ثابت یونش اسید HA از سولفوریک اسید کم‌تر و از هیدروبرمیک اسید بیشتر است.

(ب) در دما و غلظت یکسان، رسانایی الکتریکی محلول هر دو اسید از رسانایی الکتریکی محلول شکر در آب بیشتر است.

(پ) در دمای اتاق، تفاوت pH محلول‌های ۰/۱ مولار HA و ۰/۱ مولار سدیم هیدروکسید، کم‌تر از ۱۲ واحد است.

(ت) اگر حجم و غلظت دو محلول برابر باشد، با افزودن مقدار یکسانی آب خالص به آن‌ها، pH محلول‌ها به یک میزان افزایش می‌یابد.

(۲) ب - پ

(۴) ب - ت

(۱) الف - ت

(۳) الف - پ



پاسخ: گزینه ۲

پاسخ تشریحی عبارت‌های «ب» و «پ» درست هستند.

با توجه به نمودارهای داده شده، HA یک اسید ضعیف است؛ زیرا بر اثر حل شدن در آب به طور جزئی یونش می‌یابد و بیشتر مولکول‌های آن به صورت یونش نیافته در محلول باقی می‌مانند و فقط تعداد کمی از مولکول‌های آن به یون تبدیل می‌شوند. ولی HX یک اسید قوی است؛ زیرا مولکول‌های آن بر اثر حل شدن در آب، به طور کامل یونش می‌یابند و غلظت هر یک از یون‌های تولید شده در محلول اسید، با غلظت اولیه اسید برابر است.

بررسی عبارت‌ها:

الف) اسید HA یک اسید ضعیف است که به طور جزئی در آب یونش می‌یابد؛ پس در دمای یکسان، ثابت یونش آن از هر دو اسید قوی سولفوریک اسید (H_2SO_4) و هیدروبرمیک اسید (HBr) کم‌تر است.

ب) به طور کلی اسیدها و بازها (چه قوی و چه ضعیف) بر اثر انحلال در آب، یون ایجاد می‌کنند؛ بنابراین محلول آن‌ها، محلول الکترولیت بوده و رسانای الکتریکی هستند ولی انحلال شکر در آب، به صورت کاملاً مولکولی بوده و یون ایجاد نمی‌کند؛ بنابراین محلول آن، غیرالکترولیت بوده و رسانای الکتریکی نیست.

پ) سدیم هیدروکسید (NaOH) یک باز قوی است و غلظت یون هیدروکسید در محلول آن با غلظت اولیه محلول برابر است:

$$[NaOH] = [OH^-] = 0.1 \text{ mol.L}^{-1}$$

$$[H^+][OH^-] = 10^{-14} \Rightarrow [H^+] = \frac{10^{-14}}{[OH^-]} \Rightarrow [H^+] = \frac{10^{-14}}{0.1} = 10^{-13} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$pH = -\log[H^+] \Rightarrow pH = -\log(10^{-13}) = 13$$

HA یک اسید ضعیف است که با انحلال در آب به طور جزئی یونش می‌یابد و غلظت یون هیدرونیوم در محلول ۰/۱ مولار آن، کم‌تر از ۰/۱ مولار و در نتیجه pH آن بیشتر از ۱ است.

بنابراین تفاوت pH محلول ۰/۱ مولار سدیم هیدروکسید که برابر ۱۳ است با pH محلول ۰/۱ مولار اسید HA که بیشتر از ۱ است؛ کم‌تر از ۱۲ واحد می‌باشد.

ت) HX یک اسید قوی است (درجه یونش اسیدهای قوی برابر ۱ است). غلظت یون هیدرونیوم در اسید قوی، تنها به غلظت اولیه اسید بستگی دارد ($[H^+] = M$). با a برابر شدن حجم محلول اسید، غلظت اولیه اسید $\frac{1}{a}$ برابر و غلظت یون هیدرونیوم نیز $\frac{1}{a}$ برابر می‌شود. HA یک اسید ضعیف بوده و درجه یونش آن کم‌تر از ۱ است. غلظت یون هیدرونیوم در اسید ضعیف، به غلظت اولیه اسید و درجه یونش آن بستگی دارد. ($[H^+] = M\alpha$) با a برابر شدن حجم محلول اسید، غلظت اولیه اسید $\frac{1}{a}$ برابر می‌شود، اما درجه یونش اسید نیز تغییر می‌کند؛ پس غلظت یون هیدرونیوم در محلول $\frac{1}{a}$ برابر نمی‌شود. بنابراین با توجه به این که میزان تغییر $[H^+]$ در محلول دو اسید یکسان نیست، میزان تغییر pH آن‌ها نیز یکسان نخواهد بود.

تست و پاسخ ۹۸

اگر در محلول ۰/۱ مولار اسید ضعیف HA، نسبت شمار مولکول‌های یونیده نشده HA به شمار یون‌های حاصل از یونش برابر با ۱۹/۵ باشد، درصد یونش اسید در محلول و ثابت یونش آن به ترتیب کدام است؟

$$2/5 \times 10^{-4} - 5 \quad (2)$$

$$2/5 \times 10^{-4} - 2/5 \quad (4)$$

$$6/25 \times 10^{-5} - 2/5 \quad (1)$$

$$6/25 \times 10^{-5} - 5 \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۱



پاسخ تشریحی: هر مولکول اسید ضعیف HA که یونش می‌یابد؛ ۲ یون H^+ و A^- تولید می‌کند؛ از طرفی غلظت H^+ و A^- با هم برابر است؛ بنابراین خواهیم داشت:



غلظت اولیه: $\frac{0}{1}$ $\cdot$ $\cdot$

غلظت نهایی: $\frac{0}{1} - [H^+]$ $[H^+]$ $[H^+]$

$$\frac{\text{شمار مولکول‌های یونیده نشده HA}}{\text{شمار یون‌های حاصل از یونش HA}} = \frac{\text{غلظت نهایی HA}}{\text{مجموع غلظت یون‌ها}} = \frac{\frac{0}{1} - [H^+]}{[H^+] + [H^+]} = \frac{0}{1} - [H^+] = 19/5 \Rightarrow 39[H^+] = \frac{0}{1} - [H^+] \Rightarrow 40[H^+] = \frac{0}{1}$$

$$\Rightarrow [H^+] = \frac{0}{40} = 0.0025 \text{ mol.L}^{-1}$$

$$\% \alpha = \alpha \times 100 = \frac{[H^+]}{M} \times 100 = \frac{0.0025}{0.1} \times 100 = 2.5$$

$$K_a = \frac{[H^+][A^-]}{[HA]} = \frac{[H^+]^2}{\frac{0}{1} - [H^+]} = \frac{(0.0025)^2}{\frac{0}{1} - 0.0025} = \frac{6.25 \times 10^{-6}}{0.1} = 6.25 \times 10^{-5}$$

تست و پاسخ ۹۹

با توجه به نمودار داده شده که غلظت یون‌های هیدرونیوم و هیدروکسید را در دو محلول آبی در

دمای 25°C نشان می‌دهد، چند مورد از مطالب زیر درست است؟

اسیدی

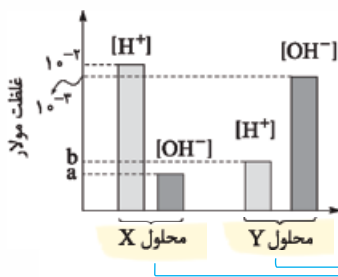
• از نظر خاصیت اسیدی و بازی، آب گازدار مانند محلول Y است.

• در محلول X، رابطه $\text{pH} - \log a = 14$ برقرار است.

• محلول X می‌تواند محلول 0.1 مولار سولفوریک اسید باشد.

• مجموع pH دو محلول، دو برابر pH آب خالص است.

۷



محلول بازی

محلول اسیدی

دو (۴)

چهار (۳)

سه (۲)

یک (۱)

پاسخ: گزینه ۱

پاسخ تشریحی: فقط عبارت دوم درست است.

بررسی عبارت‌ها:

عبارت اول: آب گازدار یک محلول اسیدی است. غلظت یون هیدرونیوم $[H^+]$ از غلظت یون هیدروکسید $[OH^-]$ در محلول X، بیشتر است؛ بنابراین محلول X مانند آب گازدار، خاصیت اسیدی دارد. در صورتی که غلظت یون هیدروکسید $[OH^-]$ از غلظت یون هیدرونیوم $[H^+]$ در محلول Y بیشتر است؛ پس محلول Y خاصیت بازی دارد.

عبارت دوم: در محلول X خواهیم داشت:

$$[H^+] = 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$\text{pH} = -\log[H^+] = -\log 10^{-2} = 2$$

$$a = [OH^-] = \frac{10^{-14}}{10^{-2}} = 10^{-12} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$\log a = \log 10^{-12} = -12 \Rightarrow \text{pH} - \log a = 2 - (-12) = 14$$

عبارت سوم: $[H^+]$ در محلول X برابر 10^{-2} مولار است. در محلول 0.1 مولار اسیدهای قوی تک پروتون دار (HA)، $[H^+]$ برابر 0.1 مولار است، اما سولفوریک اسید (H_2SO_4) یک اسید قوی دو پروتون دار است و غلظت H^+ در محلول آن، با غلظت اولیه اسید برابر نیست.



عبارت چهارم: pH آب خالص در دمای اتاق (25°C) برابر ۷ است. pH دو محلول X و Y به صورت زیر به دست می‌آید:

$$[\text{H}^+]_X = 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1} \Rightarrow \text{pH}_X = -\log[\text{H}^+]_X = -\log 10^{-2} = 2$$

$$[\text{OH}^-]_Y = 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1} \Rightarrow [\text{H}^+]_Y = \frac{10^{-14}}{[\text{OH}^-]_Y} = \frac{10^{-14}}{10^{-3}} = 10^{-11} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$\text{pH}_Y = -\log[\text{H}^+]_Y = -\log 10^{-11} = 11$$

$$\text{pH}_X + \text{pH}_Y = 2 + 11 = 13 \Rightarrow \underbrace{\text{pH}_X + \text{pH}_Y}_{13} \neq \underbrace{2\text{pH}_{\text{H}_2\text{O}}}_{2(7)=14}$$

تست و پاسخ ۱۰۰

۲۰۰ میلی‌لیتر محلول حاوی دو اسید HNO_3 و HBr موجود است. اگر غلظت مولی دو اسید در محلول یکسان و برابر ۱/۰ مولار باشد، با افزودن چند مول HNO_3 به محلول، pH نسبت به حالت آغازی ۴/۰ واحد تغییر می‌کند؟ (از تغییر حجم محلول در اثر اضافه شدن HNO_3 صرف نظر کنید).

۴/۰۸ (۴)

۳/۰۶ (۳)

۲/۰۴ (۲)

۱/۰۳ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ تشریحی: گام اول: pH آغازی و نهایی را حساب می‌کنیم:

$$[\text{H}^+]_{\text{اولیه}} = [\text{H}^+](\text{HNO}_3) + [\text{H}^+](\text{HBr}) = 0/1 + 0/1 = 0/2 \text{ mol.L}^{-1}$$

$$\text{pH}_{\text{اولیه}} = -\log[\text{H}^+] = -\log(2 \times 10^{-1}) = 1 - \log 2 = 1 - 0/3 = 0/7$$

با افزودن HNO_3 به محلول، غلظت H^+ افزایش و در نتیجه pH محلول کاهش می‌یابد؛ بنابراین pH نهایی برابر است با:

$$\text{pH}_{\text{نهایی}} = \text{pH}_{\text{اولیه}} - 0/4 = 0/7 - 0/4 = 0/3$$

گام دوم: با توجه به pH نهایی و حجم محلول، تعداد مول H^+ نهایی را به دست می‌آوریم:

$$[\text{H}^+]_{\text{نهایی}} = 10^{-\text{pH}} = 10^{-0/3} = 10^{-1} \times \underbrace{10^{0/7}}_5 = 0/5 \text{ mol.L}^{-1}$$

$$\text{مول } \text{H}^+ \text{ نهایی} = 0/5 \text{ mol.L}^{-1} \times 0/2 \text{ L} = 0/1 \text{ mol}$$

گام سوم: با توجه به تعداد مول H^+ اولیه و نهایی، مول H^+ و در نتیجه مول HNO_3 اضافه‌شده را حساب می‌کنیم:

$$\text{مول } \text{H}^+ \text{ اولیه} = 0/2 \text{ mol.L}^{-1} \times 0/2 \text{ L} = 0/04 \text{ mol}$$

$$\text{مول } \text{H}^+ \text{ نهایی} = \text{مول } \text{H}^+ \text{ اولیه} - \text{مول } \text{H}^+ \text{ اضافه‌شده} = 0/10 - 0/04 = 0/06 \text{ mol}$$

تست و پاسخ ۱۰۱

اگر pH محلول ۰/۰۰۱ مولار اسید قوی HX با pH محلول ۰/۰۲ مولار اسید ضعیف HA برابر باشد، ثابت یونش اسید HA کدام است؟

$$[\text{H}^+]_{\text{HX}} = [\text{H}^+]_{\text{HA}}$$

$$5 \times 10^{-6} \quad (2)$$

$$2/5 \times 10^{-6} \quad (1)$$

$$2/5 \times 10^{-5} \quad (4)$$

$$5 \times 10^{-5} \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ تشریحی: با توجه به این که pH دو محلول برابر است، غلظت یون هیدرونیوم در دو محلول یکسان است. در محلول ۰/۰۰۱ مولار اسید قوی HX، غلظت H^+ برابر ۰/۰۰۱ است. حالا رابطه ثابت یونش اسید HA را نوشته و غلظت H^+ در آن را برابر ۰/۰۰۱ یا همان 10^{-3} قرار می‌دهیم.

$$K_a = \frac{[\text{H}^+]^2}{M - [\text{H}^+]} = \frac{[\text{H}^+]^2}{M} = \frac{(10^{-3})^2}{2 \times 10^{-2}} = \frac{10^{-6}}{2 \times 10^{-2}} = 5 \times 10^{-5}$$



تست و پاسخ ۱۰۲

نسبت غلظت مولی یون هیدروکسید به هیدرونیوم در محلولی از باریم هیدروکسید، در دمای 25°C ، برابر $10^{-14}/25 \times 6$ است. pH این محلول کدام است و 200 میلی لیتر از آن با چند میلی لیتر محلول $6/3$ گرم بر لیتر نیتریک اسید به طور کامل واکنش می دهد؟
($\text{O} = 16, \text{N} = 14, \text{H} = 1: \text{g.mol}^{-1}$)

OH^- H_3O^+

Ba(OH)_2 HNO_3

$100 - 12/4 (2)$ $100 - 12/7 (1)$

$50 - 12/7 (4)$ $50 - 12/4 (3)$

پاسخ: گزینه ۳

خودت حل کنی بهتره ابتدا با توجه به نسبت $\frac{[\text{OH}^-]}{[\text{H}^+]}$ داده شده و رابطه $[\text{H}^+][\text{OH}^-] = 10^{-14}$ ، غلظت یون H^+ و سپس pH محلول را به دست بیاور! بعد با استفاده از رابطه خنثی شدن محلول های اسید و باز، حجم محلول HNO_3 را پیدا کن! البته حواست به ظرفیت های اسید (HNO_3) و باز (Ba(OH)_2) باشه!

پاسخ تشریحی

گام اول: ابتدا با توجه به نسبت غلظت مولی یون هیدروکسید (OH^-) به هیدرونیوم (H^+) در محلول، غلظت یون H^+ را به دست می آوریم:

$$\frac{[\text{OH}^-]}{[\text{H}^+]} = 6/25 \times 10^{-14} \Rightarrow [\text{OH}^-] = 6/25 \times 10^{-14} [\text{H}^+]$$

$$[\text{H}^+][\text{OH}^-] = 10^{-14} \Rightarrow 6/25 \times 10^{-14} [\text{H}^+][\text{H}^+] = 10^{-14} \Rightarrow [\text{H}^+]^2 = \frac{10^{-14}}{6/25 \times 10^{-14}} = \frac{10^{-26} \times 25}{6} = \frac{10^{-26} \times 16}{6/35}$$

$$\Rightarrow [\text{H}^+]^2 = 16 \times 10^{-26} \Rightarrow [\text{H}^+] = 4 \times 10^{-13} \text{ mol.L}^{-1}, [\text{OH}^-] = 6/25 \times 10^{-14} [\text{H}^+] \Rightarrow [\text{OH}^-] = 2/5 \times 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$$

گام دوم: حالا می توان با استفاده از غلظت یون های هیدرونیوم موجود در محلول باریم هیدروکسید (Ba(OH)_2)، pH محلول را محاسبه کرد:

$$\text{pH} = -\log[\text{H}^+] \Rightarrow \text{pH} = -\log(4 \times 10^{-13}) = 13 - \log 4 = 13 - 0/6 = 12/4$$

گام سوم: در انتها با توجه به رابطه زیر، حجم محلول باریم هیدروکسید برای خنثی شدن کامل محلول نیتریک اسید را، به دست می آوریم:

$$n_a \cdot M_a \cdot V_a = n_b \cdot M_b \cdot V_b$$

حجم غلظت طرفیت = حجم غلظت طرفیت
باز $\times$ باز اسید $\times$ اسید

$$(\text{HNO}_3) \text{ غلظت مولی محلول نیتریک اسید } = M_a = \frac{6/3 \text{ g HNO}_3}{1 \text{ L HNO}_3(\text{aq})} \times \frac{1 \text{ mol HNO}_3}{63 \text{ g HNO}_3} = 0/1 \frac{\text{mol}}{\text{L}}$$

$$(\text{Ba(OH)}_2) \text{ غلظت مولی محلول باریم هیدروکسید } = M_b = [\text{Ba(OH)}_2] = \frac{1}{2} [\text{OH}^-] \Rightarrow M_b = \frac{1}{2} \times 2/5 \times 10^{-2} = 1/25 \times 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$\Rightarrow n_{\text{HNO}_3} \cdot M_{\text{HNO}_3} \cdot V_{\text{HNO}_3} = n_{\text{Ba(OH)}_2} \cdot M_{\text{Ba(OH)}_2} \cdot V_{\text{Ba(OH)}_2} \Rightarrow 1 \times 0/1 \times V_{\text{HNO}_3} = 2 \times 1/25 \times 10^{-2} \times 200$$

$$\Rightarrow V_{\text{HNO}_3} = \frac{5}{0/1} = 50 \text{ mL}$$

دام تستی باید به این نکته توجه کرد که در رابطه $n_a \cdot M_a \cdot V_a = n_b \cdot M_b \cdot V_b$ ، باید غلظت مولی محلول باریم هیدروکسید

(Ba(OH)_2) لحاظ شود که این غلظت نصف غلظت مولی یون هیدروکسید (OH^-) در این محلول است؛ زیرا ظرفیت این باز برابر ۲

می باشد. اگر به جای M_b ، از غلظت یون هیدروکسید (OH^-) استفاده شود؛ پاسخ قسمت دوم سؤال، 100 میلی لیتر به دست می آید:

$$n_a \cdot M_a \cdot V_a = n_b \cdot [\text{OH}^-]_b \cdot V_b \Rightarrow 1 \times 0/1 \times V_a = 2 \times 2/5 \times 10^{-2} \times 200 \Rightarrow V_a = \frac{10}{0/1} = 100 \text{ mL}$$



تست و پاسخ ۱۰۳

اگر در دمای اتاق، درصد یونش آمونیاک در محلولی از آن با $pH = 11$ برابر $1/6$ باشد، کدام مطلب درست است؟

(۱) در 4 لیتر از این محلول، 0.5 مول آمونیاک حل شده است.

(۲) ثابت یونش آمونیاک در دمای اتاق برابر با 1.6×10^{-4} است.

(۳) دو لیتر از این محلول با 5 لیتر محلول 0.25 مولار اتانویک اسید به طور کامل واکنش می‌دهد.

(۴) pH محلول 0.25 مولار آمونیاک در دمای اتاق برابر با 10.7 است.



پاسخ: گزینه ۳

پاسخ تشریحی ابتدا با توجه به اطلاعات داده‌شده، غلظت مولی محلول آمونیاک را حساب می‌کنیم:

$$pH = 11 \Rightarrow [H^+] = 10^{-11} \Rightarrow [OH^-] = \frac{10^{-14}}{[H^+]} = \frac{10^{-14}}{10^{-11}} = 10^{-3}$$

$$\text{درصد یونش} = \frac{[OH^-]}{M} \times 100 \Rightarrow 1/6 = \frac{10^{-3}}{M} \times 100 \Rightarrow M = \frac{1}{16} \text{ mol.L}^{-1}$$

حالا گزینه‌ها را به ترتیب بررسی می‌کنیم:

$$4 \text{ L} \times \frac{1/16 \text{ mol NH}_3}{1 \text{ L}} = \frac{1}{4} = 0.25 \text{ mol NH}_3$$

(۱)

$$K_b = \frac{[OH^-]}{M - [OH^-]} = \frac{10^{-3}}{1/16 - 10^{-3}} = 16 \times 10^{-6} = 1.6 \times 10^{-5}$$

(۲)

$$n_a \cdot M_a \cdot V_a = n_b \cdot M_b \cdot V_b \Rightarrow \underbrace{1 \times 5 \times 0.25}_{\text{اسید}} = \underbrace{1 \times \frac{1}{16} \times 2}_{\text{باز}}$$

(۳) در واکنش بین اسیدها و بازها می‌توان از رابطه روبه‌رو استفاده کرد: ✓

(۴) pH محلول اولیه با غلظت $1/16$ مولار برابر با 11 بوده است؛ بنابراین pH محلول 0.25 مولار ($1/4$ مولار) آمونیاک که غلیظ‌تر از محلول اولیه است، قطعاً بیشتر از 11 است. برای محاسبه pH دقیق محلول، می‌توان از ثابت یونش آمونیاک استفاده کرد:

$$K_b = \text{ثابت} = 1.6 \times 10^{-5} = \frac{[OH^-]^2}{\frac{1}{4}} \Rightarrow [OH^-]^2 = 4 \times 10^{-6} \Rightarrow [OH^-] = 2 \times 10^{-3} \Rightarrow [H^+] = \frac{10^{-14}}{2 \times 10^{-3}} = 5 \times 10^{-12}$$

$$\Rightarrow pH = 12 - \log 5 = 12 - 0.7 = 11.3$$

تست و پاسخ ۱۰۴

با توجه به شکل داده‌شده که نمای ذره‌ای از واکنش جوش شیرین با محلول هیدروکلریک

اسید را نشان می‌دهد، کدام موارد از مطالب زیر نادرست است؟

سديم هيدروژن کربنات ($NaHCO_3$)



الف) در دمای $25^\circ C$ ، pH محلول A همانند pH مخلوط آب و

صابون، بزرگ‌تر از 7 است.



ب) محلول E یک محلول خنثی است و در آن، یون هیدرونیوم یا

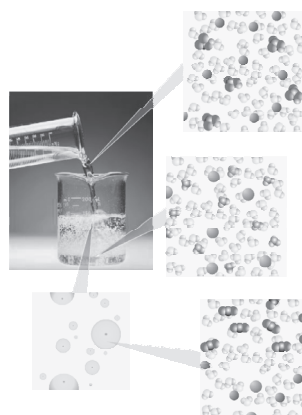
هیدروکسید وجود ندارد.



پ) عدد اکسایش کربن در مواد A با هم برابر است.



ت) برای تولید 56 میلی‌لیتر گاز D در شرایط STP ، به 50 میلی‌لیتر محلول X با $pH = 1$ نیاز است.



(۴) ب - پ - ت

(۳) الف - ت

(۲) الف - ب - پ

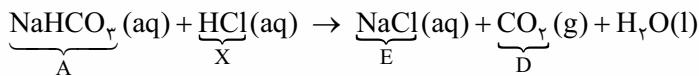
(۱) ب - ت



پاسخ: گزینه ۱

عبارت‌های «ب» و «ت» نادرست‌اند.

واکنش جوش شیرین یا همان سدیم هیدروژن کربنات با فرمول NaHCO_3 با محلول هیدروکلریک اسید (HCl) به صورت زیر است:



بررسی عبارت‌ها:

الف) محلول A همان محلول سدیم هیدروژن کربنات (NaHCO_3) یا محلول جوش شیرین است که نوعی ضد اسید است؛ بنابراین خاصیت بازی دارد و در دمای اتاق (25°C) pH آن همانند pH مخلوط آب و صابون، بزرگ‌تر از ۷ است.

ب) محلول E همان محلول سدیم کلرید (NaCl) است که یک محلول خنثی است، اما دقت کنید که در همه محلول‌های آبی، یون‌های هیدرونیوم و هیدروکسید وجود دارند.

پ) ماده A همان سدیم هیدروژن کربنات (NaHCO_3) و ماده D همان گاز CO_2 است؛ بنابراین خواهیم داشت:

$$\left. \begin{aligned} \text{NaHCO}_3 &= (+1) + (+1) + C + 3(-2) = 0 \Rightarrow C = +4 \\ \text{CO}_2 &= C + 2(-2) = 0 \Rightarrow C = +4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{NaHCO}_3 \text{ در کربن در } \text{CO}_2 = \text{عدد اکسایش کربن در } \text{CO}_2$$

ت) گاز D همان گاز CO_2 و محلول X همان محلول HCl است؛ بنابراین با توجه به معادله موازنه‌شده واکنش جوش شیرین با محلول هیدروکلریک اسید خواهیم داشت:

$$\text{HCl} \text{ تعداد مول‌های } \text{CO}_2 \times \frac{1 \text{ mol CO}_2}{22400 \text{ mL CO}_2} \times \frac{1 \text{ mol HCl}}{1 \text{ mol CO}_2} = 2/5 \times 10^{-3} \text{ mol}$$

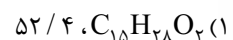
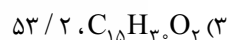
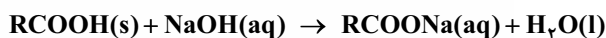
$$(\text{mol.L}^{-1}) \text{ HCl} = \frac{\text{HCl (mol) تعداد مول‌های}}{\text{حجم محلول (L)}} = \frac{2/5 \times 10^{-3} \text{ mol}}{50 \text{ mL} \times \frac{1 \text{ L}}{1000 \text{ mL}}} = 0/05 \text{ mol.L}^{-1}$$

$$[\text{H}^+] = [\text{HCl}] = 0/05 \text{ mol.L}^{-1}$$

$$\text{pH} = -\log[\text{H}^+] \Rightarrow \text{pH} = -\log(5 \times 10^{-2}) = 2 - \log 5 = 2 - 0/7 = 1/3 \neq 1$$

تست و پاسخ ۱۰۵

۴۸ گرم از یک اسید چرب با ۲۰۰ میلی‌لیتر محلول سدیم هیدروکسید با $\text{pH} = 14$ به طور کامل واکنش می‌دهد. فرمول مولکولی این اسید چرب کدام است و طی این فرایند، چند گرم صابون تولید می‌شود؟ ($\text{Na} = 23, \text{O} = 16, \text{C} = 12, \text{H} = 1: \text{g.mol}^{-1}$)



پاسخ: گزینه ۱

گام اول: شمار مول‌های سدیم هیدروکسید (NaOH) را به دست می‌آوریم.

$$[\text{H}^+] = 10^{-\text{pH}} \Rightarrow [\text{H}^+] = 10^{-14} \text{ mol.L}^{-1}$$

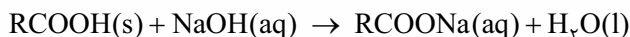
$$[\text{H}^+][\text{OH}^-] = 10^{-14} \Rightarrow [\text{OH}^-] = \frac{10^{-14}}{[\text{H}^+]} \Rightarrow [\text{OH}^-] = \frac{10^{-14}}{10^{-14}} = 1 \text{ mol.L}^{-1}$$

$$[\text{NaOH}] = [\text{OH}^-] = 1 \text{ mol.L}^{-1}$$

$$\text{NaOH} \text{ تعداد مول‌های} = 1 \frac{\text{mol}}{\text{L}} \times 0/2 \text{ L} = 0/2 \text{ mol}$$



گام دوم: با توجه به معادله موازنه شده واکنش تولید صابون، به ازای مصرف $\frac{1}{2}$ مول NaOH ، $\frac{1}{2}$ مول از RCOOH نیز مصرف می شود؛ بنابراین با توجه به جرم اسید چرب داده شده و شمار مول های آن، می توان جرم مولی آن را محاسبه و سپس با امتحان کردن گزینه ها به فرمول مولکولی آن دست یافت:



RCOOH تعداد مول های NaOH = تعداد مول های RCOOH = $\frac{1}{2}$ mol

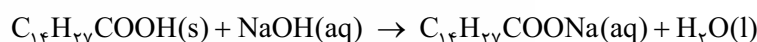
$$\frac{\text{جرم ماده}}{\text{جرم مولی ماده}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{48}{\text{جرم مولی RCOOH}} \Rightarrow \text{جرم مولی RCOOH} = \frac{48}{\frac{1}{2}} = 96 \text{ g.mol}^{-1}$$

حالا باید ببینیم جرم مولی کدام اسید چرب داده شده در گزینه ها، برابر با 96 g.mol^{-1} است.

$$\text{C}_{15}\text{H}_{31}\text{O}_2 \text{ جرم مولی} = (15 \times 12) + (31 \times 1) + (2 \times 16) = 269 \text{ g.mol}^{-1} (\checkmark)$$

$$\text{C}_{15}\text{H}_{31}\text{O}_2 \text{ جرم مولی} = (15 \times 12) + (31 \times 1) + (2 \times 16) = 269 \text{ g.mol}^{-1} (\times)$$

گام سوم: در انتها می توان جرم صابون تولید شده با مصرف $\frac{1}{2}$ مول سدیم هیدروکسید (NaOH) را با تکمیل واکنش تولید صابون از اسید چرب $\text{C}_{14}\text{H}_{27}\text{COOH}$ به دست آورد:



$$\frac{1}{2} \text{ mol NaOH} \times \frac{1 \text{ mol C}_{14}\text{H}_{27}\text{COONa}}{1 \text{ mol NaOH}} \times \frac{262 \text{ g C}_{14}\text{H}_{27}\text{COONa}}{1 \text{ mol C}_{14}\text{H}_{27}\text{COONa}} = 131 \text{ g C}_{14}\text{H}_{27}\text{COONa}$$

تست و پاسخ ۱۰۶

چند مورد از مطالب زیر، درست است؟

Cu

• درون معده یک محیط بسیار اسیدی است و حتی می تواند فلزهایی مانند مس را در خود حل کند.

H_2O^+

• اگر به 10 میلی لیتر از محلول هیدروکسیدیک اسید 80 میلی لیتر آب اضافه شود، غلظت یون هیدرونیوم در محلول به یک سوم مقدار اولیه خود می رسد.

HI(aq)

• در فرایند یونش نیترو اسید در آب، پس از مدتی میان مولکول های یونش نیافته اسید و یون های حاصل از یونش، تعادل برقرار می شود.

$\text{HNO}_3(\text{aq})$

• شیر منیزی به شکل سوسپانسیون مصرف می شود و ماده اصلی موجود در آن آلومینیم هیدروکسید است.

Al(OH)_3

(۲) دو

(۱) یک

(۴) چهار

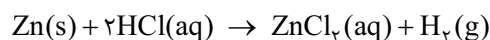
(۳) سه

پاسخ: گزینه ۱

پاسخ تشریحی فقط عبارت سوم درست است.

بررسی عبارت ها:

عبارت اول: درون معده یک محیط بسیار اسیدی است؛ به طوری که می تواند برخی از فلزها مانند فلز روی (Zn) را در خود حل کند ولی فلزهایی مانند مس (Cu) که در سری الکتروشیمیایی بالاتر از هیدروژن قرار دارند ($E^\circ(\text{Cu}^{2+}/\text{Cu}) > 0$) را نمی تواند در خود حل کند.



نکته در فصل دوم شیمی دوازدهم خواندیم که پتانسیل کاهشی استاندارد فلزهای پایین تر از هیدروژن، منفی است. این فلزها تمایل زیادی به از دست دادن الکترون و اکسید شدن دارند؛ بنابراین این فلزها می توانند با یون های H^+ واکنش دهند و به کاتیون های فلزی تبدیل شوند؛ بنابراین می توان نتیجه گرفت که به علت وجود یون های H^+ در معده، تمام فلزهای پایین تر از هیدروژن در سری الکتروشیمیایی (فلزهایی با E° منفی) می توانند در معده حل شوند.

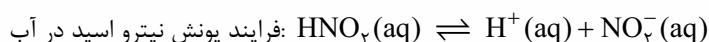


عبارت دوم: شمار مول‌های یون هیدرونیوم در محلول اولیه هیدرویدیک اسید با محلول رقیق شده آن با هم برابر است؛ بنابراین خواهیم داشت:

$$(n) \text{ تعداد مول‌های حل‌شونده} = \frac{(M) \text{ غلظت}}{(V) \text{ حجم محلول}}$$

$$\left. \begin{aligned} [H^+]_1 &= \frac{n}{10 \text{ mL}} \\ [H^+]_2 &= \frac{n}{(10 + 80) \text{ mL}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{[H^+]_2}{[H^+]_1} = \frac{n}{\frac{n}{10}} = \frac{1}{9}$$

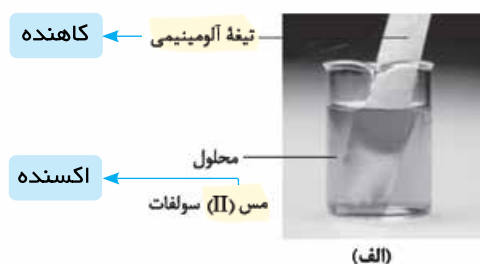
عبارت سوم: نیترو اسید (HNO_3) یک اسید ضعیف است؛ بنابراین انحلال آن در آب به صورت یک سامانه تعادلی می‌باشد؛ به طوری که پس از مدتی، غلظت (تعادلی) گونه‌های موجود در محلول ثابت می‌ماند؛ پس میان مولکول‌های یونش نیافته اسید و یون‌های حاصل از یونش آن تعادل برقرار می‌شود:



عبارت چهارم: شیر منیزی یکی از رایج‌ترین ضد اسیدها بوده و سوسپانسیون محسوب می‌شود. ماده اصلی موجود در آن، منیزیم هیدروکسید ($Mg(OH)_2$) است، نه آلومینیم هیدروکسید!

تست و پاسخ ۱۰۷

مطابق شکل‌های داده‌شده، در یک آزمایش، تیغه آلومینیمی درون محلول مس (II) سولفات قرار داده می‌شود و در آزمایشی دیگر، با استفاده از الکترودهای آلومینیم و مس یک سلول گالوانی ساخته می‌شود. چند مورد از مطالب زیر، درست است؟ ($Al = 27 \text{ g.mol}^{-1}$)



- در هر دو آزمایش، با مبادله ۳ / ۰ مول الکترون، جرم تیغه آلومینیمی ۲ / ۷ گرم کاهش می‌یابد.
 - در آزمایش (ب)، با گذشت زمان به شدت رنگ آبی محلول مس (II) سولفات افزوده می‌شود.
 - در هر دو آزمایش، اتم‌های آلومینیم نقش کاهنده و اتم‌های مس، نقش اکسنده را ایفا می‌کنند.
 - در آزمایش (الف)، شیب تغییرات غلظت یون‌های آلومینیم و مس (II)، ضمن انجام واکنش، قرینه یکدیگر است.
- (۱) صفر (۲) یک (۳) دو (۴) سه

پاسخ: گزینه ۱

پاسخ تشریحی همه عبارت‌ها نادرست هستند.

بررسی عبارت‌ها:

عبارت اول: در آزمایش قراردادن تیغه آلومینیمی درون محلول مس (II) سولفات (الف) همانند آزمایش سلول گالوانی آلومینیم - مس (ب)، واکنش کلی $2Al(s) + 3Cu^{2+}(aq) \rightarrow 2Al^{3+}(aq) + 3Cu(s)$ انجام می‌شود که در این واکنش، به ازای مصرف ۲ مول فلز آلومینیم، ۶ مول الکترون مبادله می‌شود؛ بنابراین در هر دو آزمایش با مبادله ۳ / ۰ مول الکترون، جرم فلز آلومینیم مصرف‌شده به صورت زیر به دست می‌آید:

$$0.3 \text{ mole}^- \times \frac{2 \text{ mol Al}}{6 \text{ mole}^-} \times \frac{27 \text{ g Al}}{1 \text{ mol Al}} = 2.7 \text{ g Al}$$

پس می‌توان گفت که در سلول گالوانی آلومینیم - مس (آزمایش ب) با مبادله ۳ / ۰ مول الکترون، جرم تیغه آلومینیمی ۲ / ۷ گرم کاهش می‌یابد ولی در آزمایش تیغه آلومینیمی درون محلول مس (II) سولفات (آزمایش الف)، مقداری فلز مس روی تیغه می‌نشیند و تغییر جرم تیغه آلومینیمی فقط مربوط به جرم فلز آلومینیم مصرف‌شده نمی‌باشد.



عبارت دوم: در سلول گالوانی آلومینیم - مس (ب)، در اثر مهاجرت الکترون‌های حاصل از اکسایش فلز آلومینیم به کاتد آن، کاتیون‌های مس موجود در محلول آبی رنگ مس (II) سولفات، کاهش می‌یابد و به فلز مس تبدیل می‌شوند؛ بنابراین با گذشت زمان، غلظت یون‌های مس کاهش می‌یابد و از شدت رنگ آبی محلول کاسته می‌شود؛ زیرا این یون‌ها باعث رنگ آبی محلول مس (II) سولفات هستند.

عبارت سوم: در هر دو آزمایش، اتم‌های فلز آلومینیم اکسایش می‌یابند و به کاتیون‌های آلومینیم تبدیل می‌شوند. از طرفی یون‌های مس ($\text{Cu}^{2+}(\text{aq})$)، کاهش می‌یابند و به اتم‌های فلز مس تبدیل می‌شوند؛ بنابراین اتم‌های آلومینیم، نقش کاهنده و یون‌های مس (نه اتم‌های مس!)، نقش اکسند را ایفا می‌کنند.

عبارت چهارم: در هر دو آزمایش، واکنش کلی $2\text{Al}(\text{s}) + 3\text{Cu}^{2+}(\text{aq}) \rightarrow 2\text{Al}^{3+}(\text{aq}) + 3\text{Cu}(\text{s})$ انجام می‌شود؛ بنابراین می‌توان گفت که به ازای مصرف ۳ مول از یون‌های Cu^{2+} ، ۲ مول از یون‌های Al^{3+} تولید می‌شود و شیب تغییرات غلظت یون‌های Cu^{2+} ، $-\frac{3}{2}$ برابر شیب تغییرات غلظت یون‌های Al^{3+} است.

تست و پاسخ ۱۰۸

با توجه به جدول داده شده، کدام موارد از مطالب زیر درست است؟

الف) گونه‌های A و B می‌توانند Cu^{2+} را اکسید کنند.

ب) مجموع ضرایب کاتیون‌ها در معادله موازنه شده واکنش بین نیم‌سلول‌های (B^{2+}/B) و $(\text{C}^{3+}/\text{C}^{2+})$ برابر ۵ است. نیم‌سلول کاتدی نیم‌سلول آندی

پ) محلول هیدروکلریک اسید را می‌توان در ظرفی از جنس فلزهای A و B نگه‌داری کرد. دارای E° مثبت

ت) با قراردادن تیغه‌ای از جنس B درون محلولی از نمک D^{3+} ، دمای محلول افزایش می‌یابد.

نیم‌واکنش کاهش	$E^\circ (\text{V})$
$\text{A}^+(\text{aq}) + \text{e}^- \rightarrow \text{A}(\text{s})$	+۱/۳۳
$\text{B}^{2+}(\text{aq}) + 2\text{e}^- \rightarrow \text{B}(\text{s})$	+۰/۸۷
$\text{C}^{3+}(\text{aq}) + \text{e}^- \rightarrow \text{C}^{2+}(\text{aq})$	-۰/۱۲
$\text{D}^{3+}(\text{aq}) + 3\text{e}^- \rightarrow \text{D}(\text{s})$	-۱/۵۹

↑ اکسند قوی‌تر

↓ کاهنده قوی‌تر

(۴) ب - ت

(۳) الف - پ

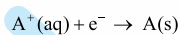
(۲) ب - پ

(۱) الف - ت

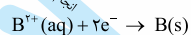
پاسخ: گزینه ۲

پاسخ تشریحی عبارت‌های «ب» و «پ» درست هستند.

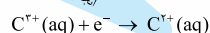
بررسی عبارت‌ها:



الف) در سری الکتروشیمیایی، گونه سمت راست (کاهنده) پایین‌تر می‌تواند با گونه سمت چپ (اکسند)

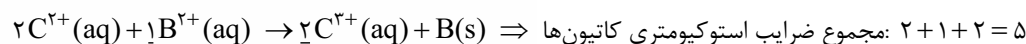


بالاتر واکنش دهد؛ بنابراین می‌توان گفت که با توجه به جدول داده شده، یون‌های A^+ و B^{2+} می‌توانند با



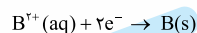
یون C^{2+} واکنش دهند و آن را به یون C^{3+} اکسید کنند.

ب) در سری الکتروشیمیایی، نیم‌سلول $(\text{C}^{3+}/\text{C}^{2+})$ پایین‌تر از نیم‌سلول (B^{2+}/B) قرار دارد؛ بنابراین یون C^{2+} در سمت راست پایین‌تر می‌تواند با یون B^{2+} در سمت چپ بالاتر واکنش دهد که معادله موازنه شده واکنش آن‌ها به صورت زیر است:

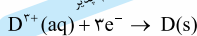


پ) فلزهای پایین هیدروژن در سری الکتروشیمیایی یا به عبارت دیگر، فلزهای دارای E° منفی می‌توانند با محلول اسیدها (دارای یون‌های H^+) واکنش دهند و گاز H_2 تولید کنند. فلزهای A و B در سری الکتروشیمیایی، بالای هیدروژن قرار دارند؛ زیرا E° آن‌ها مثبت است و با یون‌های H^+ واکنش نمی‌دهند؛ بنابراین می‌توان محلول هیدروکلریک اسید (دارای یون‌های H^+) را در ظرفی از جنس فلزهای A و B نگه‌داری کرد.

ت) در سری الکتروشیمیایی، گونه سمت راست بالاتر نمی‌تواند با گونه سمت چپ پایین‌تر واکنش دهد؛ بنابراین فلز بالاتر یا همان فلز B نمی‌تواند با کاتیون فلز پایین‌تر یا همان کاتیون D^{3+} واکنش دهد. در نتیجه با قراردادن تیغه‌ای از جنس B درون محلولی از نمک D^{3+} ،

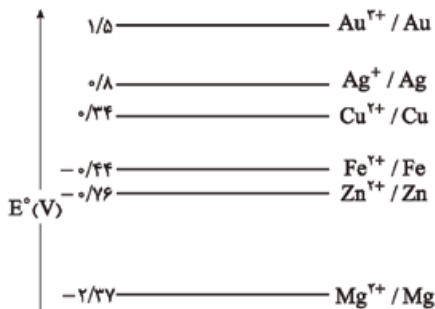


دمای محلول تغییری نمی‌کند.





تست و پاسخ ۱۰۹



نمودار داده شده پتانسیل کاهش استاندارد چند نیم سلول را نشان می دهد. اگر emf سلولی که واکنش $3M(s) + 2Au^{3+}(aq) \rightarrow 3M^{2+}(aq) + 2Au(s)$ در آن رخ می دهد برابر با $2/26$ ولت باشد، emf سلول گالوانی حاصل از الکترودهای M و نقره،

$$emf = E^{\circ}(\text{کاتد}) - E^{\circ}(\text{آند}) = E^{\circ}(\text{بیشتر}) - E^{\circ}(\text{کمتر})$$

چند ولت است؟

۰/۰۴ (۱)

۱/۲۴ (۲)

۱/۵۶ (۳)

۱/۶۱ (۴)

پاسخ: گزینه ۳

در واکنش $3M(s) + 2Au^{3+}(aq) \rightarrow 3M^{2+}(aq) + 2Au(s)$ فلز M الکترون از دست می دهد و به کاتیون M^{2+} اکسایش می یابد؛ بنابراین نیم سلول M^{2+}/M ، آند است. از طرفی کاتیون Au^{3+} الکترون می گیرد و به فلز Au کاهش می یابد؛ بنابراین نیم سلول Au^{3+}/Au ، کاتد است. پس در این سلول گالوانی خواهیم داشت:

$$emf = E^{\circ}(\text{کاتد}) - E^{\circ}(\text{آند})$$

$$emf = E^{\circ}(Au^{3+}/Au) - E^{\circ}(M^{2+}/M) \Rightarrow 2/26 = 1/5 - E^{\circ}(M^{2+}/M)$$

$$\Rightarrow E^{\circ}(M^{2+}/M) = 1/5 - 2/26 = -0/76 V$$

با توجه به نمودار داده شده و این که E° نیم سلول M^{2+}/M برابر $-0/76$ ولت است، می توان گفت که فلز M همان فلز Zn می باشد.

در سلول گالوانی نیم سلول با E° بزرگ تر، کاتد و نیم سلول با E° کوچک تر، آند است؛ پس در سلول گالوانی حاصل از الکترودهای Zn و Ag ، نیم سلول Ag^{+}/Ag ، کاتد و نیم سلول Zn^{2+}/Zn ، آند است. بنابراین emf این سلول به صورت زیر به دست می آید:

$$emf = E^{\circ}(\text{کاتد}) - E^{\circ}(\text{آند})$$

$$emf = E^{\circ}(Ag^{+}/Ag) - E^{\circ}(Zn^{2+}/Zn) = 0/8 - (-0/76) = 1/56 V$$

تست و پاسخ ۱۱۰

جرم اولیه هر یک از الکترودها در سلول گالوانی استاندارد مس - نقره برابر $5/2$ گرم است. اگر پس از مدتی 40% از جرم تیغه آندی خورده شود، غلظت کاتیون در نیم سلول کاتدی به چند مولار می رسد؟ (حجم اولیه الکترولیت را $250 mL$ در نظر بگیرید؛ $Ag = 108, Cu = 64 : g.mol^{-1}$)

[Ag^{+}]

۰/۲۶ (۲)

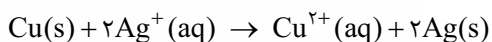
۰/۷۴ (۴)

۰/۱۸۵ (۱)

۰/۶۵ (۳)

پاسخ: گزینه ۴

در سری الکتروشیمیایی، فلز Cu پایین تر از فلز Ag قرار دارد؛ پس فلز Cu ، نقش آند و فلز Ag نقش کاتد را دارد و واکنش انجام شده به صورت مقابل است:



نیم سلول کاتدی در سلول گالوانی مس - نقره، $2Ag^{+}(aq) + 2e^{-} \rightarrow 2Ag(s)$ است؛ پس کاتیون موجود در این نیم سلول، Ag^{+} است. از آن جا که سلول گالوانی مورد نظر، استاندارد است؛ محلول های الکترولیت آن ها نیز استاندارد بوده و در نتیجه غلظت اولیه کاتیون Ag^{+} در

محلول الکترولیت آن برابر $1 \frac{mol}{L}$ می باشد.



با استفاده از جرم فلز Cu مصرف شده در آند، غلظت کاتیون Ag^+ مصرف شده را به دست می آوریم:

$$\text{جرم فلز Cu مصرف شده} = 5/2 \times \frac{4}{100} = 2/08 \text{ g Cu}$$

$$\text{تعداد مول های } Ag^+ \text{ مصرف شده} = 2/08 \text{ g Cu} \times \frac{1 \text{ mol Cu}}{64 \text{ g Cu}} \times \frac{2 \text{ mol Ag}^+}{1 \text{ mol Cu}} = 0/065 \text{ mol Ag}^+$$

$$\text{غلظت } Ag^+ \text{ مصرف شده} = \frac{\text{تعداد مول های } Ag^+ \text{ مصرف شده}}{\text{حجم محلول الکترولیت}} = \frac{0/065 \text{ mol}}{250 \text{ mL} \times \frac{1 \text{ L}}{1000 \text{ mL}}} = \frac{0/065}{0/25} = 0/26 \text{ mol.L}^{-1}$$

در انتها با توجه به غلظت اولیه و غلظت مصرف شده Ag^+ ، غلظت نهایی Ag^+ را محاسبه می کنیم:

$$\text{غلظت نهایی } Ag^+ = \text{غلظت اولیه } Ag^+ - \text{غلظت مصرف شده } Ag^+ = 1 - 0/26 = 0/74 \text{ mol.L}^{-1}$$

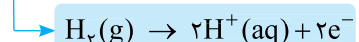
تست و پاسخ

با توجه به شکل داده شده که مربوط به نوعی سلول سوختی هیدروژن - اکسیژن است،

چند مورد از مطالب زیر درست است؟ ($O = 16, C = 12, H = 1: \text{g.mol}^{-1}$)

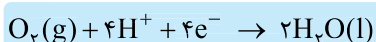
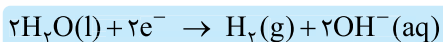
• b و c به ترتیب مربوط به آند و کاتد هستند که شامل کاتالیزگرند تا به نیم واکنش های اکسایش و کاهش سرعت ببخشند.

• در این سلول سوختی، همه فراورده های حاصل از نیم واکنش آندی به سمت تیغه کاتد حرکت می کنند.



• در صورت جایگزینی گاز هیدروژن با گاز متان، مقدار گاز اکسیژن مورد نیاز برای اکسایش هر گرم سوخت، کاهش می یابد.

• نیم واکنش کاهش در این سلول، مانند نیم واکنش کاهش آب در سلول برقکافت آن است.



(۲) دو

(۴) چهار

(۱) یک

(۳) سه

پاسخ: گزینه ۳

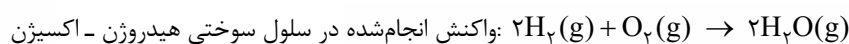
عبارت های اول، دوم و سوم درست هستند.

بررسی عبارت ها:

عبارت اول: در سلول سوختی هیدروژن - اکسیژن، گاز هیدروژن وارد آند و گاز اکسیژن وارد کاتد می شود؛ پس با توجه به شکل داده شده می توان گفت که b و c به ترتیب، آند و کاتد هستند. در این سلول سوختی، آند و کاتد دارای کاتالیزگرهایی هستند که به ترتیب سرعت نیم واکنش های اکسایش و کاهش را افزایش می دهند.

عبارت دوم: در سلول سوختی هیدروژن - اکسیژن، گاز هیدروژن در آند به صورت $H_2(g) \rightarrow 2H^+(aq) + 2e^-$ اکسایش می یابد. این سلول نوعی سلول گالوانی است و کاتیون ها در آن از آند به سمت کاتد مهاجرت می کنند، یعنی یون های H^+ تولید شده در نیم واکنش آندی از طریق غشای مبادله کننده یون هیدرونیوم (a) به سمت تیغه کاتدی حرکت می کنند. از طرفی الکترون های تولید شده در آند مانند هر سلول گالوانی دیگر در مدار بیرونی از آند به سمت کاتد حرکت می کنند؛ در نتیجه همه فراورده های حاصل از نیم واکنش آندی (الکترون ها و کاتیون های H^+) به سمت تیغه کاتد مهاجرت می کنند.

عبارت سوم: با توجه به محاسبات زیر، مقدار گاز O_2 مورد نیاز برای اکسایش هر گرم متان در سلول سوختی متان - اکسیژن، کمتر از مقدار گاز O_2 مورد نیاز برای اکسایش هر گرم هیدروژن در سلول سوختی هیدروژن - اکسیژن است:





$$\left. \begin{aligned} & \text{H}_2 \times \frac{1 \text{ mol H}_2}{2 \text{ g H}_2} \times \frac{1 \text{ mol O}_2}{2 \text{ mol H}_2} = 0.25 \text{ mol O}_2 \\ & \text{CH}_4(g) + 2\text{O}_2(g) \rightarrow \text{CO}_2(g) + 2\text{H}_2\text{O}(g) \\ & \text{CH}_4 \times \frac{1 \text{ mol CH}_4}{16 \text{ g CH}_4} \times \frac{2 \text{ mol O}_2}{1 \text{ mol CH}_4} = 0.125 \text{ mol O}_2 \end{aligned} \right\}$$

مقدار گاز O_2 مصرفی برای اکسایش هر گرم گاز H_2 : 0.25 mol O_2

واکنش انجام شده در سلول سوختی متان - اکسیژن:

مقدار گاز O_2 مصرفی برای اکسایش هر گرم گاز CH_4 : 0.125 mol O_2

$\Rightarrow 0.125 \text{ mol O}_2 < 0.25 \text{ mol O}_2$

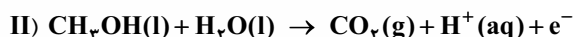
عبارت چهارم: در سلول سوختی هیدروژن - اکسیژن، در کاتد گاز O_2 با حضور یون‌های H^+ و e^- به صورت $\text{O}_2(g) + 4\text{H}^+(aq) + 4\text{e}^- \rightarrow 2\text{H}_2\text{O}(l)$ کاهش می‌یابد ولی نیم‌واکنش کاهش آب در کاتد سلول برق‌کافت آب به صورت $2\text{H}_2\text{O}(l) + 2\text{e}^- \rightarrow \text{H}_2(g) + 2\text{OH}^-(aq)$ است.

تست و پاسخ ۱۱۲

با توجه به واکنش‌های زیر، کدام مطلب درست است؟ ($\text{C} = 12, \text{N} = 14, \text{O} = 16 : \text{g.mol}^{-1}$)



(معادله واکنش‌ها موازنه شوند.)

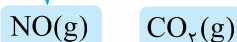


۱) با انجام هر دو واکنش، pH محیط کاهش می‌یابد.

۲) براساس معادله موازنه شده واکنش (I)، عدد اکسایش ۲۵ درصد از اتم‌های نیتروژن طی واکنش تغییری نکرده است.

۳) تغییر عدد اکسایش هر اتم کربن در واکنش (II)، با تغییر عدد اکسایش هر اتم مس در واکنش (I)، برابر است.

۴) به ازای شمار الکترون‌های برابر، جرم گاز تولید شده در واکنش (I) بیشتر از (II) است.

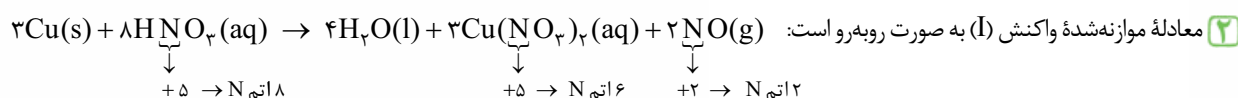


پاسخ: گزینه ۴

بررسی گزینه‌ها:

۱) در واکنش (I)، H^+ مصرف و در واکنش (II)، H^+ تولید می‌شود؛ بنابراین با انجام واکنش (I)، pH محیط افزایش و با انجام واکنش (II)،

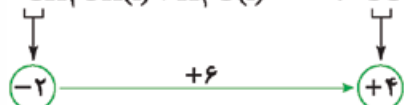
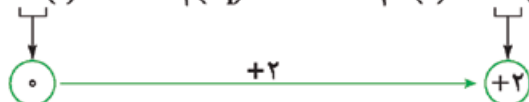
pH محیط کاهش می‌یابد. در ضمن در واکنش (I)، فرآورده‌های تولید شده خاصیت اسیدی یا بازی ندارند، در حالی که در واکنش (II)، CO_2 اکسید نافلز است و می‌تواند pH محیط را کاهش دهد.



$$\frac{\text{تعداد اتم‌های N بدون تغییر عدد اکسایش}}{\text{تعداد کل اتم‌های N در واکنش}} \times 100 = \frac{6}{8} \times 100 = 75$$

درصد اتم‌های N بدون تغییر عدد اکسایش

۳) عدد اکسایش هر اتم Cu در واکنش (I)، ۲ واحد و عدد اکسایش هر اتم C در واکنش (II)، ۶ واحد تغییر می‌کند:



۴) براساس معادله‌های موازنه شده، در هر دو واکنش، ۶ الکترون مبادله می‌شود:

$$\left. \begin{aligned} \text{I) } 2\text{NO} \sim 6\text{e}^- \\ \text{II) } \text{CO}_2 \sim 6\text{e}^- \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\text{جرم NO}}{\text{جرم CO}_2} = \frac{2 \times 30}{44} > 1$$



تست و پاسخ ۱۱۳

کدام مطلب نادرست است؟

- (۱) در همه سلول های الکتروشیمیایی، الکترودی که در آن فرایند اکسایش رخ می دهد، آند نامیده می شود.
 (۲) در سلول های الکترولیتی، قطب مثبت محل انجام نیم واکنش اکسایش است.
 (۳) در همه سلول های الکتروشیمیایی، الکترون ها در مدار بیرونی از قطب منفی به قطب مثبت جریان می یابند.
 (۴) در سلول های گالوانی، آنیون ها با عبور از دیواره متخلخل به سمت آند می روند.

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ تشریحی: در هر دو سلول گالوانی و الکترولیتی، الکترون ها در مدار بیرونی از آند به سمت کاتد جابه جا می شوند اما با توجه به این که قطب مثبت و منفی در این دو سلول با هم فرق می کنند؛ خواهیم داشت:

جهت حرکت الکترون ها در مدار بیرونی ← از آند به کاتد

در سلول گالوانی ← از قطب منفی به قطب مثبت سلول

در سلول الکترولیتی ← از قطب مثبت به قطب منفی سلول

بررسی سایر گزینه ها:

- ① در هر دو نوع سلول گالوانی و الکترولیتی، در الکتروکاتد، نیم واکنش اکسایش و در الکتروکاتد، نیم واکنش کاهش انجام می شود.
 ② در یک سلول الکترولیتی، الکترودی که به قطب مثبت منبع جریان مستقیم (باتری) متصل شده، آند است که محل انجام نیم واکنش اکسایش می باشد و الکترودی که به قطب منفی متصل شده، کاتد است که محل انجام نیم واکنش کاهش می باشد.
 ④ در سلول های گالوانی، آنیون ها از طریق دیواره متخلخل از نیم سلول کاتد به سمت نیم سلول آند مهاجرت می کنند.

تست و پاسخ ۱۱۴

حجم گاز تولید شده در قطب مثبت سلول الکترولیتی برقکافت آب، به ازای عبور $4 / 515 \times 10^{24}$ الکترون از مدار، در شرایط STP چند لیتر است؟

- آند ۶۷ / ۲ (۴) ۴۲ (۳) ۳۳ / ۶ (۲) ۲۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ تشریحی: در سلول های الکترولیتی، قطب مثبت همان آند است که در آن فرایند اکسایش انجام می شود. طبق نیم واکنش اکسایش آب $(2H_2O(l) \rightarrow O_2(g) + 4H^+(aq) + 4e^-)$ ، به ازای مبادله ۴ مول الکترون، ۱ مول گاز تولید می شود؛ بنابراین خواهیم داشت:

$$4 / 515 \times 10^{24} e^- \times \frac{1 \text{ mol } e^-}{6.02 \times 10^{23} e^-} \times \frac{1 \text{ mol } O_2}{4 \text{ mol } e^-} \times \frac{22.4 \text{ L } O_2}{1 \text{ mol } O_2} = 42 \text{ L } O_2$$

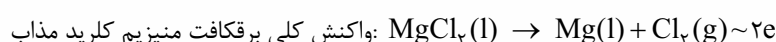
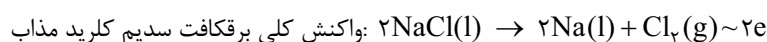
تست و پاسخ ۱۱۵

در دو سلول جداگانه، مقدار معینی سدیم کلرید مذاب و مقدار معینی منیزیم کلرید مذاب برقکافت می شوند. اگر از این دو سلول در مجموع ۵ مول الکترون عبور کند و جرم فراورده کاتدی سلول سدیم کلرید، ۴۵ گرم بیشتر از جرم فراورده کاتدی سلول منیزیم کلرید باشد، جرم سدیم کلرید اولیه چند گرم بوده است؟ $(Cl = 35.5, Mg = 24, Na = 23 : g \cdot mol^{-1})$

- فلز سدیم ۹۵ (۴) ۵۸ / ۵ (۳) ۱۴۲ / ۵ (۲) ۱۷۵ / ۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

پاسخ تشریحی: گام اول: ابتدا معادله موازنه شده واکنش های کلی برقکافت سدیم کلرید مذاب و منیزیم کلرید مذاب را می نویسیم:





گام دوم: طبق اطلاعات داده شده در سؤال، اگر فرض کنیم که در برقکافت سدیم کلرید مذاب، x مول الکترون عبور کند؛ در برقکافت منیزیم کلرید مذاب، $5 - x$ مول الکترون عبور می کند.

گام سوم: با توجه به واکنش های کلی، از آن جایی که در واکنش های برقکافت سدیم کلرید مذاب و برقکافت منیزیم کلرید مذاب، به ازای عبور ۲ مول الکترون از هر یک از این دو سلول، به ترتیب ۲ مول فراورده کاتدی یا همان فلز Na و یک مول فراورده کاتدی یا همان فلز Mg تولید می شود؛ بنابراین خواهیم داشت:

$$x \text{ mole}^- \times \frac{2 \text{ mol Na}}{2 \text{ mole}^-} \times \frac{23 \text{ g Na}}{1 \text{ mol Na}} = 23x \text{ g Na}$$

$$(5 - x) \text{ mole}^- \times \frac{1 \text{ mol Mg}}{2 \text{ mole}^-} \times \frac{24 \text{ g Mg}}{1 \text{ mol Mg}} = (60 - 12x) \text{ g Mg}$$

$$45 = 23x - (60 - 12x) \Rightarrow 23x - 60 + 12x = 45 \Rightarrow 35x = 105 \Rightarrow x = \frac{105}{35} = 3$$

$$\Rightarrow 23x - 60 + 12x = 45 \Rightarrow 35x = 105 \Rightarrow x = \frac{105}{35} = 3$$

گام چهارم: حالا می توانیم محاسبه کنیم که در واکنش برقکافت سدیم کلرید مذاب، به ازای عبور ۳ مول الکترون چه جرمی از سدیم کلرید مذاب مصرف می شود:

$$3 \text{ mole}^- \times \frac{2 \text{ mol NaCl}}{2 \text{ mole}^-} \times \frac{58.5 \text{ g NaCl}}{1 \text{ mol NaCl}} = 175.5 \text{ g NaCl}$$

تست و پاسخ ۱۱۶

کدام موارد از مطالب زیر، درست است؟

- (الف) فلز آلومینیم برخلاف آهن، در برابر اکسایش مقاوم است، به همین دلیل برای ساخت وسایل گوناگونی از آن استفاده می شود.
 (ب) قدرت اکسندگی مولکول های اکسیژن در محیطی با $\text{pH} < 7$ بیشتر از قدرت اکسندگی این مولکول ها در محیطی با $\text{pH} = 7$ است.
 (پ) فلز سدیم یک کاهنده قوی است و در طبیعت به حالت آزاد یافت نمی شود.
 (ت) سالانه حدود ۲ درصد از آهن تولیدی در جهان، برای جایگزینی قطعه های خورده شده مصرف می شود.

(۲) الف - ب - پ

(۱) ب - پ

(۴) الف - ب - ت

(۳) پ - ت

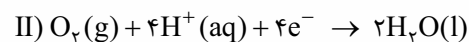
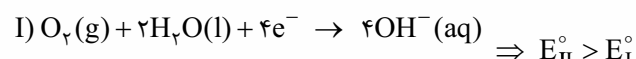
پاسخ: گزینه ۱

پاسخ تشریحی عبارت های «ب» و «پ» درست هستند.

بررسی عبارت ها:

(الف) فلز آلومینیم همانند فلز آهن در مجاورت هوا، اکسایش می یابد ولی فلز آلومینیم برخلاف فلز آهن خورده نمی شود. به همین علت از این فلز می توان برای ساخت وسایل گوناگونی بهره برد.

(ب) E° نیم واکنش کاهش گاز O_2 در محیط اسیدی بیشتر از E° نیم واکنش کاهش این گاز در محیط خنثی است و این یعنی گاز O_2 در محیط اسیدی راحت تر الکترون می گیرد و اکسندگی قوی تری است.



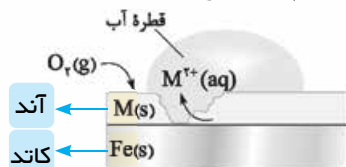
(پ) فلز سدیم بسیار واکنش پذیر بوده و یک کاهنده قوی است که در طبیعت به حالت آزاد یافت نمی شود. این عنصر در ترکیب های گوناگون و طبیعی خود، تنها به شکل یون سدیم وجود دارد.

(ت) سالانه حدود ۲۰ درصد از آهن تولیدی در جهان برای جایگزینی قطعه های خورده شده مصرف می شود.



تست و پاسخ ۱۱۷

شکل زیر مربوط به ورقه‌ای آهنی است که با لایه نازکی از فلز M پوشانده شده است. با توجه به شکل، کدام مطلب درست است؟



(۱) در سلول گالوانی تشکیل شده در محل خراش، آهن نقش کاتد را دارد و کاهش می‌یابد.

(۲) شکل داده شده می‌تواند مربوط به حلی به باشد که در ساخت قوطی کنسرو و روغن نباتی کاربرد دارد.

ورقه آهنی پوشیده شده با لایه نازک فلز قلع

(۳) قدرت اکسندگی M^{2+} از کاتیون‌های Fe^{2+} و Cu^{2+} بیشتر است.

(۴) جهت حرکت کاتیون‌های M^{2+} در قطره آب، هم‌سو با جهت حرکت الکترون‌ها در ورقه آهنی است.

به سمت کاتد

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ تشریحی: در سلول‌های گالوانی، کاتیون‌ها به سمت کاتد (اطراف قطره که غلظت اکسیژن زیاد است) حرکت می‌کنند و جهت حرکت الکترون‌ها از آند (زیر قطره که غلظت اکسیژن کم است) به کاتد است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

(۱) فلزها نمی‌توانند کاهش یابند و به یون منفی تبدیل شوند. در این‌جا کاتد یا فلز آهن چون خودش نمی‌تواند کاهش یابد؛ و تنها در نقش رسانای الکترونی، الکترون‌ها را به گاز اکسیژن می‌دهد و نیم‌واکنش $O_2(g) + 2H_2O(l) + 4e^- \rightarrow 4OH^-(aq)$ انجام می‌شود.

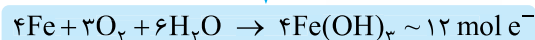
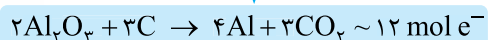
(۲) در حلی ورقه آهنی به وسیله لایه نازکی از فلز قلع پوشیده شده است و در صورت خراشیده شدن سطح آن، آهن اکسید و خورده می‌شود و فلز قلع حفاظتی در برابر آن انجام نمی‌دهد، ولی در این‌جا فلز M اکسید شده است.

(۳) با توجه به این‌که در رقابت برای اکسایش، بین M و آهن، فلز M برنده و اکسید شده است، می‌توان نتیجه گرفت که قدرت کاهندگی M از Fe بیشتر است. از طرفی می‌دانیم که قدرت کاهندگی آهن از مس بیشتر است؛ بنابراین خواهیم داشت:

$M^{2+} < Fe^{2+} < Cu^{2+}$: قدرت اکسندگی $\Rightarrow M > Fe > Cu$: قدرت کاهندگی

تست و پاسخ ۱۱۸

با توجه به معادله کلی واکنش مربوط به خوردگی آهن در محیط مرطوب (واکنش (I)) و تولید آلومینیم به روش هال (واکنش (II))، چند مورد از مطالب زیر درست است؟



• براساس معادله موازنه شده، شمار الکترون‌های مبادله شده در دو واکنش برابر است.

• تولید آلومینیم مطابق واکنش (II)، فقط به ۷ درصد از انرژی لازم برای تهیه همان تعداد قوطی از قوطی‌های کهنه نیاز دارد.

• مجموع ضرایب واکنش دهنده‌ها در معادله واکنش (I)، $2/6$ برابر مجموع ضرایب واکنش دهنده‌ها در معادله واکنش (II) است.

• نسبت شمار الکترون‌های مبادله شده در واکنش (I) به (II) به ازای مصرف ۱ مول آهن و ۱ مول کربن در این واکنش‌ها، برابر $4/3$ است.

• هر دو واکنش به طور طبیعی انجام می‌شوند اما بازده واکنش (II) بیشتر است.

(۴) پنج

(۳) چهار

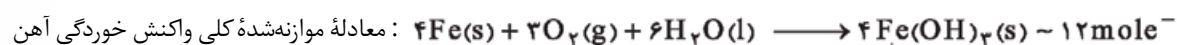
(۲) سه

(۱) دو

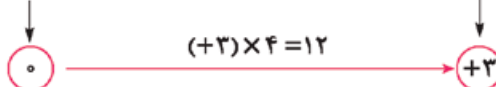
پاسخ: گزینه ۱

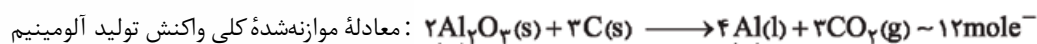
پاسخ تشریحی: عبارت‌های اول و سوم درست هستند.

معادله موازنه شده کلی واکنش‌های داده شده به صورت زیر است:

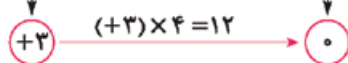


در محیط مرطوب (واکنش (I))





در روش هال (واکنش (II))



بررسی عبارت‌ها:

عبارت اول: با توجه به توضیحات بالا، این عبارت صحیح است و شمار الکترون‌های مبادله شده در واکنش‌های (I) و (II) برابر ۱۲ مول است.
عبارت دوم: تولید قوطی‌های آلومینیمی از قوطی‌های کهنه (بازیافت آلومینیم) تنها به ۷ درصد از انرژی لازم برای تهیه همان تعداد قوطی از فرایند هال یا واکنش (II) نیاز دارد.

عبارت سوم: با توجه به معادله موازنه شده کلی واکنش‌های (I) و (II) خواهیم داشت:

$$\frac{\text{مجموع ضرایب استوکیومتری واکنش‌دهنده‌ها در واکنش (I)}}{\text{مجموع ضرایب استوکیومتری واکنش‌دهنده‌ها در واکنش (II)}} = \frac{4+3+6}{2+3} = \frac{13}{5} = 2/6$$

عبارت چهارم: در واکنش (I)، به ازای مصرف ۴ مول فلز آهن، ۱۲ مول الکترون مبادله می‌شود؛ بنابراین در همین واکنش، به ازای مصرف یک مول فلز آهن، ۳ مول الکترون مبادله می‌شود. در صورتی که در واکنش (II)، به ازای مصرف ۳ مول کربن، ۱۲ مول الکترون مبادله می‌شود؛ بنابراین در همین واکنش، به ازای مصرف یک مول کربن، ۴ مول الکترون مبادله می‌شود؛ پس نسبت شمار الکترون‌های مبادله شده در واکنش (I) به (II) به ازای مصرف یک مول آهن و یک مول کربن در این واکنش‌ها برابر $\frac{3}{4}$ است.

عبارت پنجم: واکنش خوردگی آهن در محیط مرطوب یک واکنش خودبه‌خودی است که در طبیعت نیز اتفاق می‌افتد ولی واکنش تولید آلومینیم به روش هال به طور خودبه‌خودی و طبیعی اتفاق نمی‌افتد؛ فرایند هال در یک سلول الکترولیتی و توسط جریان برق انجام می‌شود.

تست و پاسخ ۱۱۹

کدام مطلب نادرست است؟

(۱) فلز منگنز (Mn) با بالاترین عدد اکسایش خود، می‌تواند یون چنداتی با فرمول MnO_4^- تشکیل دهد.

(۲) نقش کلسیم کلرید استفاده شده در برقکافت سدیم کلرید مذاب، کاهش نقطه ذوب سدیم کلرید و کاهش هزینه‌های اقتصادی این روش است.

(۳) عدد اکسایش کربن در فورمیک اسید و هیدروسیانیک اسید با هم برابر است.

(۴) عدد اکسایش عنصر اکسندتر در ترکیب OF_2 برابر +۲ است.

HCOOH

HCN

فلوئور

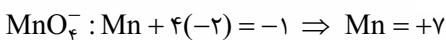
پاسخ: گزینه ۲

پاسخ تشریحی: فلوئور اکسندترین عنصر در جدول دوره‌ای است. عدد اکسایش این عنصر در همه ترکیب‌هایش برابر -۱ است.



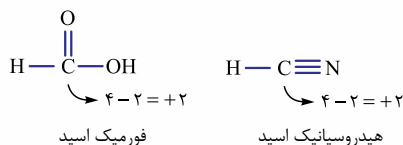
بررسی سایر گزینه‌ها:

(۱) منگنز (Mn : $[\text{Ar}] 3d^5 4s^2$) در گروه ۷ جدول دوره‌ای قرار دارد و بالاترین عدد اکسایش آن، +۷ است.



(۲) سدیم کلرید نقطه ذوب بالایی دارد که برای تأمین آن، انرژی بسیار زیادی نیاز است. با اضافه کردن کلسیم کلرید، نقطه ذوب و در نتیجه هزینه‌های اقتصادی فرایند برقکافت سدیم کلرید، کاهش می‌یابد.

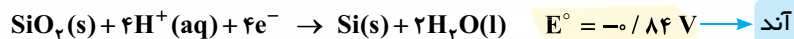
(۳) با توجه به مقایسه خلصت نافلزی عناصرها ($\text{O} > \text{N} > \text{C} > \text{H}$)، خواهیم داشت:





تست و پاسخ ۱۲۰

نیم‌واکنش‌های زیر مربوط به یک سلول نور الکتروشیمیایی هستند که برای تهیه گاز هیدروژن از آب به کار می‌رود. با توجه به این نیم‌واکنش‌ها، کدام موارد از مطالب زیر، درست است؟



الف) emf این سلول برابر با ۱۰ میلی‌ولت است.

ب) نسبت ضریب گونه اکسند به کاهنده در معادله واکنش کلی این سلول برابر ۲ است.

پ) برخلاف emf، بازده و سرعت انجام واکنش در این سلول، زیاد است.

ت) در آند این سلول، عدد اکسایش هر اتم سیلیسیم، ۴ واحد کاهش می‌یابد.

(۴) ب - ت

(۳) الف - پ

(۲) پ - ت

(۱) الف - ب

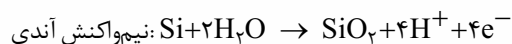
پاسخ: گزینه ۱

عبارت‌های «الف» و «ب» درست‌اند.

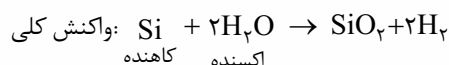
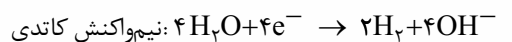
بررسی عبارت‌ها: **پاسخ تشریحی**

$$\text{emf} = E^\circ(\text{کاتد}) - E^\circ(\text{آند}) = E^\circ(\text{بیشتر}) - E^\circ(\text{کمتر}) = -0.83 - (-0.84) = 0.01 \text{ V} = 10 \text{ mV}$$

الف)



ب)



نسبت ضریب گونه اکسند به کاهنده برابر ۲ است.

پ) همانند emf، بازده و سرعت انجام واکنش در این سلول پایین است.

ت) در آند این سلول، سیلیسیم اکسایش یافته و عدد اکسایش آن، ۴ واحد افزایش می‌یابد.

