خیلی سبز! آزمون
تجربی | ریاضی | انسانی

سال تحصیلی
۱۴۰۳ـ۱۴۰۲

آزمون هشتم حضوری

دفترچه شماره ۱

ویژهٔ کنکوری‌های ۱۴۰۳

۱۴۰۲/۱۰/۲۹

حسابان و ریاضیات پایه	آمار و احتمال و ریاضیات گسسته	هندسه
حسابان دوازدهم فصل اول: تابع + فصل دوم: مثلثات + فصل سوم: حدهای نامتناهی ـ حد در بی‌نهایت صفحهٔ ۱ تا ۷۰	**ریاضیات گسسته** فصل اول: آشنایی با نظریهٔ اعداد + فصل دوم: گراف و مدل‌سازی (تا ابتدای مدل‌سازی با گراف) صفحهٔ ۱ تا ۴۲	**هندسهٔ دوازدهم** هندسه (۳): فصل اول: ماتریس و کاربردها + فصل دوم: آشنایی با مقاطع مخروطی (تا ابتدای سهمی + تمرین‌های مرتبط انتهای درس ۳) صفحهٔ ۹ تا ۵۰

آزمون آزمایشی خیلی سبز

گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی

• نام و نام خانوادگی: • شماره داوطلبی:

عنوان مواد امتحانی آزمون، تعداد، شماره سؤالات و مدت پاسخ‌گویی

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخ‌گویی	ملاحظات
۱	ریاضیات	۴۰	۱	۴۰	۷۵ دقیقه	۴۰ سؤال ۷۵ دقیقه

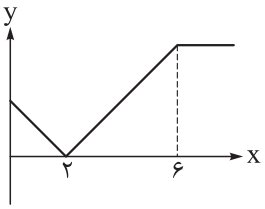
اساتید، مشاوران و دانش‌آموزان گرامی؛
نظرات، پیشنهادات، انتقادات و بازخوردهای خود نسبت به سؤالات این آزمون را می‌توانید از طریق آیدی Kheilisabz_edit@ در همهٔ پیام‌رسان‌ها با ما به اشتراک بگذارید.

Azmoon.kheilisabz.com

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

حسابان (۲): صفحه‌های ۱ تا ۷۰

۱- نمودار تابع $y=-f(4-x)$ به صورت روبه‌رو است. تابع $y=f(\frac{x}{2}-a)$ فقط در بازهٔ $[-6,b]$ صعودی اکید است. حداکثر مقدار $a+b$ کدام است؟



۱) ۱　　۲) ۲

۳) ۳　　۴) ۴

۲- تابع f با دامنهٔ $\mathbb{R}$، نزولی اکید است؛ به طوری که $f(-3)=0$. اگر $g(x)=\sqrt{(ax-20)f(2-x)}$ تابعی با دامنهٔ $\mathbb{R}$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۴　　۲) -4　　۳) ۵　　۴) -5

۳- نمودار تابع $g(x)=2-f(1-\frac{x}{3})$ را نسبت به مبدأ مختصات قرینه می‌کنیم، سپس ۳ واحد به راست انتقال می‌دهیم. با کدام تبدیل روی تابع جدید، به تابع f می‌رسیم؟

۱) طول نقاط تابع را ۳ برابر کنیم و ۲ واحد به پایین انتقال دهیم.

۲) طول نقاط را $\frac{1}{3}$ برابر کنیم و تابع را ۲ واحد به پایین انتقال دهیم.

۳) طول نقاط را $\frac{1}{3}$ برابر کنیم و تابع را ۲ واحد به بالا انتقال دهیم.

۴) طول نقاط تابع را ۳ برابر کنیم و ۲ واحد به بالا انتقال دهیم.

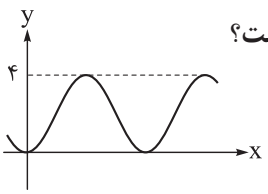
۴- اگر $f(x)=5x^4+4x^3+3x^2-x-2$، تابع $g(x)$ کدام باشد تا چندجمله‌ای $f(x)+g(x)$ بر $x+1$ بخش‌پذیر باشد؟

۱) x^3-2x　　۲) x^5+4x　　۳) x^7-2x^2　　۴) x^2+x

۵- اگر باقی‌ماندهٔ چندجمله‌ای $f(x)$ بر x^2-3x+1 برابر $4x-1$ باشد، باقی‌ماندهٔ $f^2(\frac{x}{4})-2xf(3x-5)$ بر $x-2$ چه عددی است؟

۱) -3　　۲) -2　　۳) -12　　۴) -11

۶- بخشی از نمودار $f(x)=2a\sin^2(\frac{\pi}{a}x)$ به صورت شکل مقابل است. مقدار $f(\frac{1}{a})$ کدام است؟



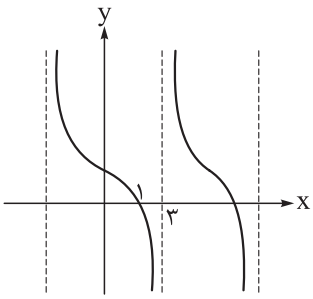
۱) ۱　　۲) ۲

۳) ۳　　۴) ۴

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷- بخشی از نمودار تابع $f(x)=۱-a\tan(\frac{\pi}{b}x)$ در شکل روبه‌رو رسم شده است. مقدار ab کدام است؟



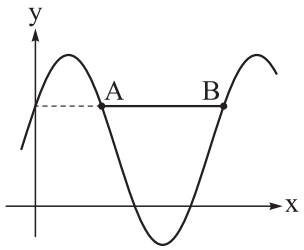
۱) $۴\sqrt{۳}$　　۲) $۲\sqrt{۳}$

۳) $۶\sqrt{۲}$　　۴) $۶\sqrt{۳}$

۸- نمودار تابع $f(x)=-۲\cos(\frac{\pi}{۸}-\frac{\pi}{۳}x)$ در بازهٔ $(۰,\alpha)$ در دو نقطه دارای بیشترین مقدار است. حداکثر مقدار α چه عددی است؟

۱) $\frac{۵۹}{۸}$　　۲) $\frac{۹۴}{۸}$　　۳) $\frac{۷۵}{۸}$　　۴) $\frac{۱۲۳}{۸}$

۹- قسمتی از نمودار $f(x)=۲\cos(bx-\frac{\pi}{۳})$ به صورت شکل زیر است. هرگاه $AB=\frac{\pi}{۲}$، مقدار b کدام است؟



۱) $\frac{۴}{۳}$　　۲) $\frac{۸}{۳}$

۳) $\frac{۸}{۹}$　　۴) $\frac{۴}{۹}$

۱۰- تعداد جواب‌های معادلهٔ $-۴\sin^۲x+۱۲\cos^۲x+\tan^۲x=۳$ در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ کدام است؟

۱) ۸　　۲) ۴　　۳) ۶　　۴) ۱۲

۱۱- جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\sin(۲x).\tan(x+\frac{\pi}{۶})=\cos(۲x)$ کدام است؟ $(k\in\mathbb{Z})$

۱) $\frac{k\pi}{۳}+\frac{\pi}{۱۲}$　　۲) $\frac{k\pi}{۶}+\frac{\pi}{۹}$　　۳) $\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۱۲}$　　۴) $\frac{k\pi}{۳}+\frac{\pi}{۹}$

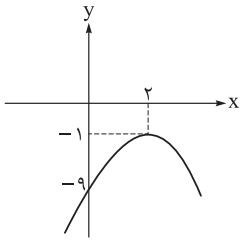
۱۲- جمع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\tan(۲x)-\tan(x-\frac{\pi}{۴})=۱$ در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ چه عددی است؟

۱) $\frac{۵\pi}{۲}$　　۲) π　　۳) ۳π　　۴) $\frac{۳\pi}{۲}$

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۳- نمودار سهمی $y = f(x)$ در شکل روبه‌رو آمده است. اگر $\lim\limits_{x\to ۴} \frac{۱}{a - f(x+b)} = +\infty$ مقدار $a+b$ کدام است؟



۱) -۱　　۲) ۳

۳) -۳　　۴) -۵

۱۴- اگر f یک چندجمله‌ای باشد به طوری که $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(۲x-۱)}{۴x+f(x)} = \frac{۱}{۲}$، مقدار $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{۱}{x} f(۳x)$ چه عددی است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$　　۲) $\frac{۱}{۴}$

۳) ۴　　۴) $\frac{۹}{۴}$

۱۵- هرگاه $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۶}} \frac{a[\frac{\pi}{x}]+b}{\sin x + a\cos ۲x} = +\infty$ مقدار $[b]$ چه عددی است؟ ($[\,]$، نماد جزء صحیح است.)

۱) ۶　　۲) ۵　　۳) ۵ یا ۶　　۴) ۵ یا ۴

۱۶- هرگاه $\lim\limits_{x\to ۲} \frac{۳a - ۲x(-۱)^{[x]}}{۲x+b} = -\infty$، برای $a+b$ چند مقدار صحیح به دست می‌آید؟ ($[\,]$، نماد جزء صحیح است.)

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) هیچ

۱۷- هرگاه $f(x) = \frac{۲x+۳}{x-۲}$ به طوری که $g(x) = x(a - f(x))$ دارای مجانب افقی $y = b$ باشد، مقدار $a-b$ کدام است؟

۱) ۹　　۲) ۵　　۳) ۷　　۴) ۱۱

۱۸- اگر $A(۲,-۱)$ نقطهٔ تلاقی مجانب‌های $f(x) = \frac{bx^۲ - x + ۱}{-x^۲ + ax - a}$ باشد، مقدار $\lim\limits_{x\to +\infty} (\sqrt{ax^۲+bx} - ۲x)$ چه عددی است؟

۱) $-\frac{۱}{۲}$　　۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{۱}{۴}$　　۴) صفر

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

ریاضیات گسسته: صفحه‌های ۱ تا ۴۲

۱۹- در یک تقسیم، مقسوم‌علیه، کوچک‌ترین عدد دورقمی ممکن و باقی‌مانده، برابر ۱ است. اگر مقسوم‌علیه را ۲ واحد بیشتر کنیم، باقی‌مانده برابر ۲ می‌شود. مجموع مقادیر قابل قبول برای مقسوم‌های سه‌رقمی چند است؟

۱) ۳۴۰۵ ۲) ۳۴۰۶ ۳) ۳۴۰۷ ۴) ۳۴۰۸

۲۰- اگر $a-b \mid a$، آن‌گاه کدام گزینه همواره درست نیست؟

۱) $a-b \mid a+b$ ۲) $b \mid a^2$ ۳) $a-b \mid b$ ۴) $b-a \mid 2a-b^2$

۲۱- کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد، ۶ برابر بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک آن‌ها است. اگر تفاضل مربع این دو عدد برابر ۱۲۸۰ باشد، مجموع ارقام عدد بزرگ‌تر چند است؟

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

۲۲- قرار است شش تیم والیبال با یکدیگر مسابقه بدهند، به‌گونه‌ای که هر دو تیم دقیقاً یک بار روبه‌روی هم قرار بگیرند. تا این‌جای مسابقات، تنها یک تیم با سه بازی، بیشترین مسابقه را برگزار کرده است. اگر بقیهٔ تیم‌ها لااقل یک بازیِ انجام‌شده داشته باشند، حداکثر چند بازی تا پایان مسابقات باقی مانده است؟

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۱ ۴) ۱۲

۲۳- باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد 2^{89} بر ۲۱ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۱۲ ۴) ۱۹

۲۴- یک گراف منتظم از مرتبهٔ ۶، چند شکل مختلف دارد؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۲۵- عدد $n=\overline{abcd}$ بر ۱۳ و عدد n^2 بر ۱۶۸ بخش‌پذیر است. اگر n، کوچک‌ترین مقدار ممکن باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $(\overline{dcba})^{(\overline{badc})}$ بر ۶۳ کدام است؟

۱) ۲۷ ۲) ۲۸ ۳) ۲۹ ۴) صفر

۲۶- در گرافی ناهمبند از مرتبهٔ ۱۰، اندازهٔ گراف برابر ۳۵ است. درجهٔ رئوس در این گراف، چند عدد مختلف است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۶

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۲۷- مجموع طول‌های همهٔ نقاط با مختصات طبیعی که روی خط $y = -\frac{۱۴}{۱۵}x + \frac{۲۰۰}{۳}$ قرار دارند، کدام است؟

۱) ۱۷۰ ۲) ۱۸۰ ۳) ۱۷۵ ۴) ۱۸۵

۲۸- در گراف G، $\forall u \in V(G) : |N_G(u)| = ۵$. اگر در گراف $\bar{G}$، $۴p - ۵q = ۲۴$ باشد، در گراف G چند مسیر وجود دارد؟

۱) ۱۶۰ ۲) ۱۶۵ ۳) ۹۷۵ ۴) ۹۸۱

هندسهٔ (۳): صفحه‌های ۹ تا ۵۰

۲۹- دایره‌ای به مرکز $(-۲,۳)$ از مبدأ مختصات می‌گذرد. کدام نقطه بر این دایره واقع نیست؟

۱) $(۱,۵)$ ۲) $(۱,۱)$

۳) $(-۶,۰)$ ۴) $(۰,۶)$

۳۰- اگر $A = \begin{bmatrix} ۴ & a \\ b & ۱ \end{bmatrix}$، $B = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$ و ماتریس AB قطری باشد، آن‌گاه حاصل $a - b$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) ۷ ۴) -۷

۳۱- دستگاه $\begin{cases} kx + ۳y = ۴ \\ x - ۲y = ۳ \end{cases}$ فاقد جواب است. اگر $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ماتریس مجهولات و A ماتریس ضرایب این دستگاه باشد، دترمینان ماتریس $A - kI$ کدام است؟

۱) -۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

۳۲- اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ -۱ & -۱ & -۱ \\ -۱ & -۱ & -۱ \end{bmatrix}$، آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس $A^{۲۰۲۴}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) -۲ ۳) ۳ ۴) -۳

۳۳- اگر درایهٔ سطر اول و ستون سوم ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & a \\ -۱ & ۱ & ۳ \\ ۴ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ را نصف کنیم، ماتریس B به دست می‌آید، به طوری که $|B| = \left|\frac{۱}{۲}A\right|$؛ دترمینان ماتریس A کدام است؟

۱) -۳۶ ۲) $-۴/۵$ ۳) ۳۶ ۴) ۴/۵

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۳۴- برای دو ماتریس A و B داریم $A^{-1}+B^{-1}=\begin{bmatrix}۳ & ۶\\ ۹ & ۱۲\end{bmatrix}$ و $A^{۲}+۴AB=\bar{O}$. مجموع درایه‌های ماتریس B کدام است؟

۱) -۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $-\frac{۱}{۴}$ ۴) صفر

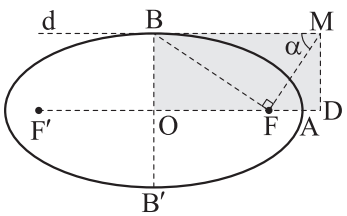
۳۵- مربع $ABCD$ به طول ضلع ۴ مفروض است. مساحت مکان هندسی نقاطی از صفحه که بیرون این مربع قرار داشته و فاصلهٔ این نقاط از هر کدام از قطرهای مربع کم‌تر از $۲\sqrt{۲}$ باشد، کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۳۲ ۴) ۱۶

۳۶- خط گذرنده از دو نقطهٔ $(۰,۵)$ و $(۲,-۱)$ دایره به معادلهٔ $x^{۲}+y^{۲}-۲۲x-۴y+۲۵=۰$ را در دو نقطهٔ A و B قطع می‌کند. طول پاره‌خط AB کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۵}$ ۲) $۲\sqrt{۱۰}$ ۳) ۷ ۴) $۲\sqrt{۲}$

۳۷- در شکل زیر، خط d در یک سر قطر کوچک بیضی با کانون‌های F و F'، بر آن مماس است. اگر چهارضلعی رنگ‌شده مستطیل باشد و $B\hat{F}M=۹۰^\circ$، آن‌گاه نسبت $\frac{AF}{AD}$ برابر با کدام است؟



۱) $\sin\alpha$ ۲) $\cos\alpha$ ۳) $\frac{۱}{\sin\alpha}$ ۴) $\frac{۱}{\cos\alpha}$

۳۸- اگر F و F' کانون‌ها و B یک سر قطر کوچک بیضی با خروج از مرکز $\sqrt{\frac{۲}{۳}}$ باشد، سینوس زاویهٔ FBF' کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۴) $\frac{\sqrt{۶}}{۶}$

۳۹- دایره‌ای بر خط $۴x+۳y=۰$ مماس است و دوتا از قطرهای آن بر خط‌های $x+y=۱$ و $x-y=۳$ واقع‌اند. مرکز این دایره کانون یک بیضی افقیِ مماس بر دایره است. اگر خروج از مرکز بیضی برابر $\frac{۵}{۹}$ باشد، طول قطر بزرگ آن کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۴/۲۵ ۳) ۴/۵ ۴) ۴/۷۵

۴۰- دایرهٔ C به مرکز $O(\alpha,\beta)$ بر دو خط به معادله‌های $۸x+۱۵y=\pm۱۷$ مماس و با دایرهٔ C' به معادلهٔ $x^{۲}+y^{۲}-۲۵۶=۰$ مماس‌خارج است. حاصل $\alpha+\beta$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۵

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

دوستان عزیز خیلی‌سبز، سلام؛

فایل پاسخ‌نامهٔ این آزمون را که شامل درس‌نامه، نکات کنکوری، پاسخ تشریحی و ... است، ساعت ۱۴ امروز از صفحهٔ شخصی خودتان در سایت آزمون خیلی‌سبز دریافت کنید.

هم‌چنین شما می‌توانید همین امشب کارنامهٔ اولیهٔ آزمونتان را در صفحهٔ شخصی خود مشاهده بفرمایید.

برای دسترسی به صفحهٔ شخصی خود وارد سایت آزمون خیلی‌سبز به آدرس: azmoon.kheilisabz.com شوید و کدی را که توسط مدرسه و یا نمایندگی‌های آزمون‌های خیلی‌سبز به شما داده شده، در محل مشخص‌شده در سایت ثبت بفرمایید.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

خیلی سبز! آزمون
تجربی | ریاضی | انسانی

سال تحصیلی
۱۴۰۳ـ۱۴۰۲

آزمون هشتم حضوری

دفترچه شماره ۲

ویژهٔ کنکوری‌های ۱۴۰۳

۱۴۰۲/۱۰/۲۹

فیزیک	شیمی
فیزیک دوازدهم فیزیک (۳): فصل اول: حرکت بر خط راست + فصل دوم: دینامیک و حرکت دایره‌ای + فصل سوم: نوسان و موج (تا ابتدای موج طولی و مشخصه‌های آن) صفحهٔ ۱ تا ۷۷	**شیمی دوازدهم** شیمی (۳): فصل اول: مولکول‌ها در خدمت تندرستی + فصل دوم: آسایش و رفاه در سایهٔ شیمی صفحهٔ ۱ تا ۶۶

آزمون آزمایشی خیلی سبز

گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی

• نام و نام خانوادگی: • شماره داوطلبی:

عنوان مواد امتحانی آزمون، تعداد، شماره سؤالات و مدت پاسخ‌گویی

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخ‌گویی	ملاحظات
۱	فیزیک	۳۵	۴۱	۷۵	۴۵ دقیقه	۶۵ سؤال ۸۰ دقیقه
۲	شیمی	۳۰	۷۶	۱۰۵	۳۵ دقیقه	

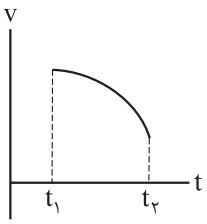
اساتید، مشاوران و دانش‌آموزان گرامی؛
نظرات، پیشنهادات، انتقادات و بازخوردهای خود نسبت به سؤالات این آزمون را می‌توانید از طریق آیدی Kheilisabz_edit@ در همهٔ پیام‌رسان‌ها با ما به اشتراک بگذارید.

Azmoon.kheilisabz.com

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

فیزیک (۳): صفحه‌های ۱ تا ۷۷

۴۱- نمودار سرعت ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. کدام‌یک از موارد زیر دربارهٔ این متحرک در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 درست است؟



الف) متحرک در خلاف جهت محور x جابه‌جا شده است.

ب) اندازهٔ شتاب متحرک در حال افزایش است.

پ) شتاب متوسط متحرک در خلاف جهت محور x است.

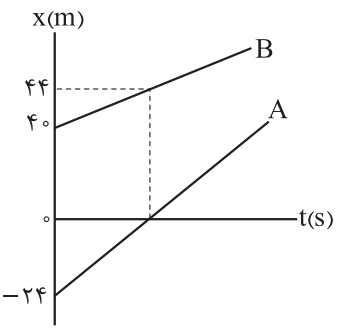
ت) سرعت متوسط متحرک در خلاف جهت محور x است.

۱) الف و پ ۲) الف و ت ۳) ب و پ ۴) ب و ت

۴۲- بردار مکان متحرکی که در راستای محور x با سرعت ثابت حرکت می‌کند، در لحظهٔ t برابر با $(-۱۲\,m)\vec{i}$ و ۴ s پس از آن برابر با $(-۳۶\,m)\vec{i}$ است. اگر بردار مکان متحرک فقط به مدت ۸ s در جهت محور x باشد، t برحسب ثانیه کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

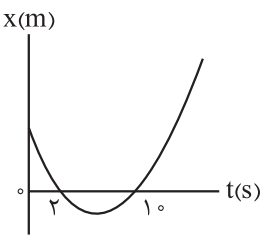
۴۳- نمودار مکان ـ زمان دو متحرک A و B که در راستای محور x حرکت می‌کنند، به شکل مقابل است. اگر به مدت ۹ s فاصلهٔ دو متحرک از یکدیگر کم‌تر از ۶ m باشد، تندی متحرک A چند متر بر ثانیه است؟



۱) $\frac{۴}{۵}$ ۲) $\frac{۸}{۵}$

۳) $\frac{۸}{۹}$ ۴) $\frac{۱۶}{۹}$

۴۴- نمودار مکان ـ زمان متحرکی که با شتاب ثابت در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. اگر تندی متحرک در لحظهٔ عبور از مبدأ مکان برابر با $۱۶\,m/s$ باشد، در فاصلهٔ چند متری از مکان اولیهٔ متحرک، جهت حرکت آن تغییر می‌کند؟

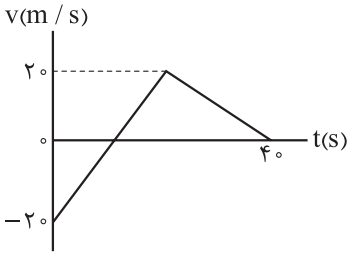


۱) ۷۲
۲) ۴۸
۳) ۳۶
۴) ۲۴

محل انجام محاسبات

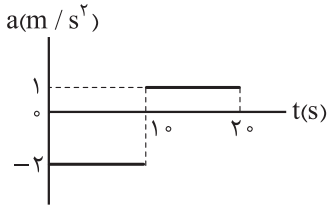
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۵- نمودار سرعت ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. تندی متوسط این متحرک در بازهٔ زمانی $t_1 = 0$ تا $t_2 = 40s$ چند متر بر ثانیه است؟



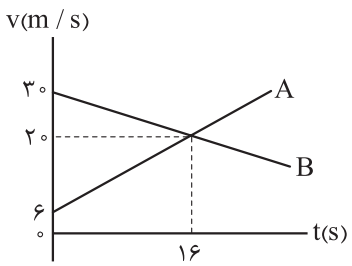
۱) ۵
۲) ۱۰
۳) ۱۵
۴) ۲۰

۴۶- نمودار شتاب ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. اگر در مبدأ زمان، بردار مکان متحرک برابر با $(4m)\vec{i}$ و سرعت آن برابر با $(12m/s)\vec{i}$ باشد، در بازهٔ زمانی صفر تا ۲۰s، در چه لحظه‌ای برحسب ثانیه، جهت بردار مکان متحرک تغییر می‌کند؟



۱) ۱۲
۲) ۱۴
۳) ۱۶
۴) ۱۸

۴۷- نمودار سرعت ـ زمان دو متحرک A و B که روی یک خط راست در حال حرکتند، به شکل زیر است. اگر در مبدأ زمان، متحرک A از متحرک B به اندازهٔ ۸۴m جلوتر باشد، در چه لحظه‌ای برحسب ثانیه، دو متحرک برای دومین مرتبه از کنار یکدیگر عبور می‌کنند؟



۱) ۲۰
۲) ۲۴
۳) ۲۸
۴) ۳۲

۴۸- خودرویی با سرعت ۲۰m/s در یک مسیر مستقیم در حال حرکت است. در لحظه‌ای، رانندهٔ خودرو در فاصلهٔ ۵۰متری مقابل خود، موتورسواری را می‌بیند که با شتاب ثابتی به بزرگی a، در جهت حرکت خودرو، شروع به حرکت می‌کند. اگر در همین لحظه رانندهٔ خودرو ترمز کند و تندی خودرو با شتاب ثابتی به بزرگی a کاهش یابد؛ a حداقل چند متر بر مربع ثانیه باشد تا خودرو از موتورسوار سبقت نگیرد؟

۱) ۱/۵　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) ۴

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۹- در شرایط خلأ گلوله‌ای از ارتفاع ۴۵متری سطح زمین رها می‌شود. تندی متوسط گلوله در $15\,m$ دوم حرکت، از تندی متوسط گلوله در $15\,m$ اول حرکت، چند متر بر ثانیه بیشتر است؟ $(g = 10\ m/s^2)$

۱) $5\sqrt{3}$　　۲) $5\sqrt{6}$　　۳) $3\sqrt{5}$　　۴) $6\sqrt{5}$

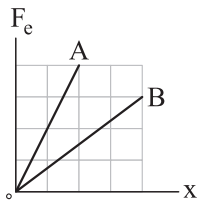
۵۰- در شرایط خلأ، گلولهٔ A از ارتفاع h نسبت به سطح زمین و $2\,s$ پس از آن، گلولهٔ B از ارتفاع $\frac{4}{9}h$ نسبت به سطح زمین رها می‌شوند. اگر دو گلوله با هم به سطح زمین برسند، h برابر چند متر است؟ $(g = 10\ m/s^2)$

۱) ۸۰　　۲) ۱۲۵　　۳) ۱۸۰　　۴) ۲۴۵

۵۱- اگر اندازهٔ تکانهٔ جسمی به جرم $5\,kg$، در SI به اندازهٔ ۲ واحد افزایش یابد، انرژی جنبشی آن $2\,J$ تغییر می‌کند. انرژی جنبشی اولیهٔ جسم چند ژول است؟

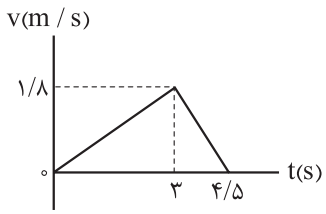
۱) ۱/۶　　۲) ۳/۶　　۳) ۴　　۴) ۶

۵۲- نمودار اندازهٔ نیروی کشسانی فنری برحسب تغییر طول آن نسبت به حالت عادی، به شکل زیر است. اگر ثابت فنر A برابر با $24\,N/cm$ باشد، ثابت فنر B در SI کدام است؟



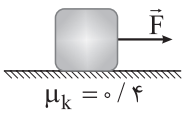
۱) ۶۴۰
۲) ۱۸۰۰
۳) ۹۰۰
۴) ۳۲۰۰

۵۳- جسمی به جرم $5\,kg$ توسط ریسمانی از سقف اتاقک یک آسانسور آویزان است و آسانسور به سمت بالا حرکت می‌کند. اگر نمودار سرعت ـ زمان آسانسور به شکل زیر باشد، اختلاف اندازهٔ نیروی کشش ریسمان در دو لحظهٔ $t_1 = 2\,s$ و $t_2 = 4\,s$ برابر با چند نیوتون است؟ $(g = 9/8\ N/kg)$



۱) ۱
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۹

۵۴- در شکل زیر جسمی روی سطح افقی ساکن است و نیروی افقی $\vec{F}$ به آن وارد می‌شود. اندازهٔ نیروی $\vec{F}$ از صفر به طور پیوسته و به تدریج افزایش می‌یابد. اگر پس از حرکت جسم، اندازهٔ شتاب آن حداقل برابر با $1\,m/s^2$ باشد، ضریب اصطکاک ایستایی بین جسم و سطح کدام است؟ $(g = 10\ N/kg)$

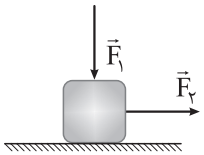


۱) ۰/۴۵
۲) ۰/۵۰
۳) ۰/۵۵
۴) ۰/۶۰

محل انجام محاسبات

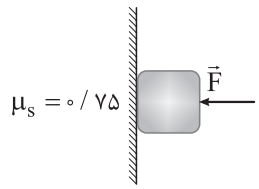
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۵- در شکل زیر، نیروی افقی $F_۲ = ۹۰\,N$ و نیروی قائم $F_۱ = ۳۰\,N$ به جسمی به جرم $۱۲\,kg$ وارد شده‌اند و جسم روی سطح افقی با سرعت ثابت در حال حرکت است. اگر نیروی $\vec{F}_۱$ حذف شود، اندازهٔ شتاب جسم به چند متر بر مربع ثانیه می‌رسد؟ $(g = ۱۰\,N/kg)$



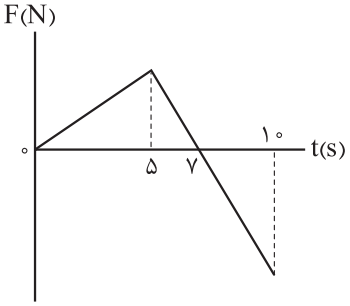
۱) ۱　　۲) ۱/۵
۳) ۲　　۴) ۲/۵

۵۶- در شکل زیر، جسمی به جرم $۱/۵\,kg$ توسط نیروی افقی $\vec{F}$ به دیوار قائمی تکیه داده شده و در آستانهٔ حرکت است. اگر اندازهٔ نیروی $\vec{F}$، $۱۶\,N$ افزایش یابد، اندازهٔ نیرویی که جسم به دیوار وارد می‌کند، چند درصد افزایش می‌یابد؟ $(g = ۱۰\,N/kg)$



۱) ۲۰
۲) ۸۰
۳) ۴۴
۴) ۵۶

۵۷- نمودار نیروی خالص وارد بر جسمی برحسب زمان به شکل مقابل است. اگر اندازهٔ نیروی خالص متوسط وارد بر جسم در $۱۰\,s$ اول، برابر $۳\,N$ باشد اندازهٔ نیروی خالص متوسط وارد بر جسم در $۷\,s$ اول، چند نیوتون است؟

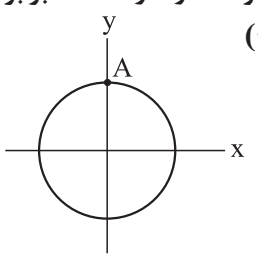


۱) ۲۴　　۲) ۱۲
۳) ۱۸　　۴) ۹

۵۸- جسمی با تندی $۲۰\,m/s$ از سطح زمین و در راستای قائم به سمت بالا پرتاب می‌شود. اگر جسم با تندی $۱۵\,m/s$ به سطح زمین برخورد کند، اندازهٔ نیروی مقاومت هوای وارد بر جسم، با فرض ثابت‌بودن، چند برابر وزن جسم است؟

۱) $\frac{۹}{۱۶}$　　۲) $\frac{۷}{۲۵}$　　۳) $\frac{۳}{۴}$　　۴) $\frac{۹}{۲۵}$

۵۹- در شکل زیر، ذره‌ای با تندی ثابت روی محیط دایره‌ای به شعاع $۲\,m$ در حال حرکت است. اگر سرعت ذره در نقطهٔ A برابر $(-\pi\,m/s)\vec{i}$ باشد، شتاب ذره $۳\,s$ بعد از این لحظه برحسب متر بر مربع ثانیه کدام است؟ $(\pi^۲ = ۱۰)$



۱) $۲/۵\vec{i}$
۲) $-۲/۵\vec{i}$
۳) $۵\vec{i}$
۴) $-۵\vec{i}$

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶۰- تندی چرخش ماهوارهٔ A به دور زمین، ۴ برابر تندی چرخش ماهوارهٔ B است. اگر مدار ماهوارهٔ A هم‌گام با زمین باشد، دورهٔ گردش ماهوارهٔ B چند شبانه‌روز است؟

۱) ۸　　۲) ۱۶　　۳) ۳۲　　۴) ۶۴

۶۱- یک انتهای فنر سبکی به طول $30\,cm$ و ثابت $500\,N/m$ را از نقطهٔ ثابتی آویزان کرده و به انتهای دیگر آن وزنه‌ای ۲ کیلوگرمی می‌بندیم. وزنه را در حالتی که طول فنر $30\,cm$ است، رها می‌کنیم تا در راستای قائم شروع به نوسان هماهنگ ساده کند. به ترتیب از راست به چپ، دامنهٔ نوسان‌های وزنه چند سانتی‌متر و تندی بیشینهٔ آن چند سانتی‌متر بر ثانیه است؟ $(g = 10\,m/s^2)$

۱) $20\sqrt{10}\,,\,4$　　۲) $40\sqrt{10}\,,\,4$　　۳) $20\sqrt{10}\,,\,8$　　۴) $40\sqrt{10}\,,\,8$

۶۲- نوسانگر هماهنگ ساده‌ای حول مبدأ مکان در حال حرکت است. در بازه‌ای که حرکت نوسانگر کندشونده است، کدام‌یک از موارد زیر الزاماً درست است؟

الف) بردارهای مکان و سرعت نوسانگر هم‌جهت هستند.　　ب) بردارهای تکانه و نیروی خالص هم‌جهت هستند.

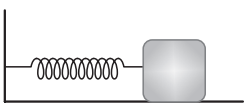
پ) بردارهای تکانه و مکان در خلاف جهت یکدیگرند.　　ت) بردارهای سرعت و شتاب در خلاف جهت یکدیگرند.

۱) الف و پ　　۲) الف و ت　　۳) ب و پ　　۴) پ و ت

۶۳- طول یک آونگ ساده چند سانتی‌متر و چگونه تغییر کند تا بسامد نوسان‌های آن از $1\,Hz$ به $2\,Hz$ برسد؟ $(g = \pi^2\,m/s^2)$

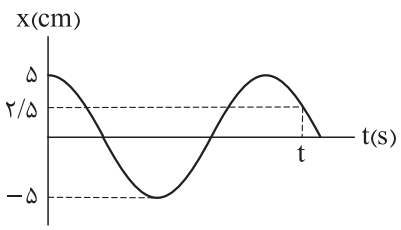
۱) ۲۵ / ۶، کاهش یابد.　　۲) ۲۵ / ۶، افزایش یابد.　　۳) ۷۵ / ۱۸، کاهش یابد.　　۴) ۷۵ / ۱۸، افزایش یابد.

۶۴- در شکل زیر، جسمی به جرم $1\,kg$ به انتهای فنری با ثابت $4\,N/cm$ متصل و روی سطح افقی بدون اصطکاکی در حال نوسان است. اگر بیشینه و کمینهٔ طول فنر در حین نوسان $34\,cm$ و $28\,cm$ باشد، به ترتیب از راست به چپ بیشینهٔ تندی و بیشینهٔ شتاب جسم برحسب یکاهای SI کدام است؟



۱) ۲۴ , ۰/۶　　۲) ۱۲ , ۰/۶
۳) ۲۴ , ۱/۲　　۴) ۱۲ , ۱/۲

۶۵- نمودار مکان ـ زمان نوسانگر هماهنگ ساده‌ای به جرم $40\,g$ به شکل زیر است. اگر انرژی مکانیکی این نوسانگر $0/2\,J$ باشد، لحظهٔ t برحسب ثانیه کدام است؟ $(\pi^2 = 10)$

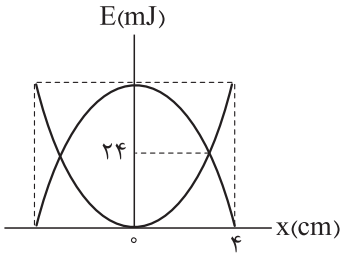


۱) $\frac{7}{60}$　　۲) $\frac{9}{80}$
۳) $\frac{13}{120}$　　۴) $\frac{1}{10}$

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶۶- نمودار انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل نوسانگر هماهنگ ساده‌ای به شکل زیر است. بیشینهٔ اندازهٔ نیروی خالص وارد بر این نوسانگر چند نیوتون است؟



۱) ۲/۴
۲) ۰/۲۴
۳) ۴/۸
۴) ۰/۴۸

۶۷- دورهٔ تناوب نوسانگر هماهنگ ساده‌ای برابر با ۶s است. بیشترین تندی متوسط متحرک در یک بازهٔ زمانی ۱ثانیه‌ای، چند برابر کم‌ترین تندی متوسط آن در یک بازهٔ زمانی ۲ثانیه‌ای است؟

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) $\sqrt{۳}$　　۴) $۲\sqrt{۳}$

۶۸- معادلهٔ مکان ـ زمان نوسانگر هماهنگ ساده‌ای در SI به صورت $x = ۰/۰۶\cos(۴\pi t)$ است. اگر در لحظه‌ای معین، بردار مکان نوسانگر برابر با $(۳\,cm)\vec{i}$ و تندی آن در حال افزایش باشد، ۰/۱۲۵s بعد از آن، بردار مکان متحرک برحسب سانتی‌متر کدام است؟

۱) $۳\vec{i}$　　۲) $-۳\vec{i}$　　۳) $۳\sqrt{۳}\,\vec{i}$　　۴) $-۳\sqrt{۳}\,\vec{i}$

۶۹- معادلهٔ مکان ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، در SI به صورت $x = ۰/۲\cos(۲۰\pi t)$ است. اندازهٔ شتاب متوسط متحرک در بازهٔ زمانی $t_۱ = ۰/۰۲۵s$ تا $t_۲ = ۰/۱s$، چند برابر اندازهٔ شتاب بیشینهٔ آن است؟

۱) $\frac{۲}{۳\pi}$　　۲) $\frac{۲}{\pi}$　　۳) $\frac{۱}{۳\pi}$　　۴) $\frac{۱}{\pi}$

۷۰- معادلهٔ مکان ـ زمان حرکت هماهنگ ساده‌ای در SI به صورت $x = ۰/۰۲\cos(\omega t)$ است. اگر تندی متوسط نوسانگر در بازهٔ زمانی $t_۱ = ۰/۰۵s$ تا $t_۲ = ۰/۰۷s$ برابر $۲\,m/s$ باشد، نوسانگر در هر دقیقه چند مرتبه از مبدأ مکان عبور می‌کند؟

۱) ۱۵۰　　۲) ۱۵۰۰　　۳) ۳۰۰　　۴) ۳۰۰۰

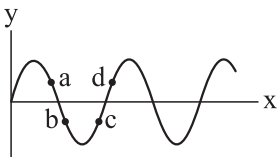
۷۱- در یک طناب، موجی عرضی منتشر شده است. اگر تندی انتشار موج در طناب برابر با $۶\,m/s$ و طول موج برابر با $۳۰\,cm$ باشد، هر یک از ذرات طناب در مدت یک دقیقه چند نوسان کامل انجام می‌دهند؟

۱) ۱۲۰۰　　۲) ۱۲۰　　۳) ۳۰　　۴) ۳

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

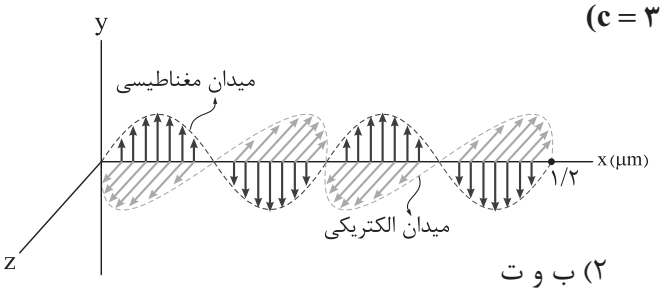
۷۲- تصویر موج منتشرشده در یک طناب در یک لحظهٔ معین به شکل زیر است. چه تعداد از موارد زیر دربارهٔ ذرات مشخص‌شده از طناب در این لحظه الزاماً درست است؟



الف) سرعت ذرهٔ a در جهت محور y است.
ب) شتاب ذرهٔ b در جهت محور y است.
پ) انرژی جنبشی ذرهٔ c در حال کاهش است.
ت) انرژی پتانسیل ذرهٔ d در حال کاهش است.

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) ۴

۷۳- شکل زیر یک موج الکترومغناطیسی را که در خلأ منتشر شده است، در یک لحظهٔ معین نشان می‌دهد. کدام‌یک از موارد زیر، دربارهٔ این موج درست است؟ ($c = ۳\times۱۰^{۸}\ m/s$)



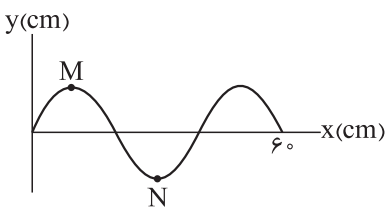
الف) بسامد موج $۲/۵\times۱۰^{۱۴}\ Hz$ است.
ب) دورهٔ موج $۱۰^{-۱۵}\ s$ است.
پ) موج در جهت محور x در حال پیشروی است.
ت) موج در ناحیهٔ نور مرئی قرار دارد.

۱) الف و پ
۲) ب و ت
۳) پ
۴) ت

۷۴- جرم دو طناب A و B برابر با هم و طول طناب B، ۴ برابر طول طناب A است. اگر در لحظه‌ای، در یک انتهای هر طناب تپی عرضی ایجاد کنیم، دو تپ هم‌زمان به انتهای دیگر طناب‌ها می‌رسند. اندازهٔ نیروی کشش طناب A چند برابر اندازهٔ نیروی کشش طناب B است؟

۱) ۴　　۲) ۲　　۳) $\frac{۱}{۲}$　　۴) $\frac{۱}{۴}$

۷۵- تصویر یک موج عرضی منتشرشده در یک تار در لحظهٔ $t = ۰$ به شکل زیر است. در لحظهٔ $t = ۰/۰۲\ s$، تندی ذرهٔ M از تار برای اولین بار بیشینه و برابر $۳\ m/s$ می‌شود. در مدتی که ذرهٔ N مسافت $۱۲\ cm$ را طی می‌کند، موج چند متر پیشروی می‌کند؟ ($\pi = ۳$)



۱) ۰/۳
۲) ۰/۴
۳) ۰/۶
۴) ۰/۸

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

شیمی دوازدهم: صفحه‌های ۱ تا ۶۶

۷۶- بر اثر آبکافت یک استر سنگین و واکنش اسید چرب حاصل از آن با مقداری محلول سود، تنها یک نوع صابون جامد با فرمول $C_{19}H_{33}O_2Na$ به دست می‌آید. فرمول استر سنگین اولیه کدام است؟

۱) $C_{57}H_{104}O_6$ ۲) $C_{57}H_{110}O_6$ ۳) $C_{60}H_{104}O_6$ ۴) $C_{60}H_{110}O_6$

۷۷- کدام مطلب درست است؟

۱) مولکول‌های سازندهٔ عسل به دلیل داشتن شمار زیادی گروه کربوکسیل، قطبی به حساب می‌آیند.

۲) نسبت شمار اتم‌های هیدروژن به کربن در فرمول شیمیایی وازلین، بیشتر از این نسبت در روغن زیتون است.

۳) عدد اکسایش اتم کربن در اوره با عدد اکسایش کربن در متان برابر است.

۴) سدیم کلرید مانند سایر ترکیب‌های یونی با برقراری جاذبهٔ یون ـ دوقطبی در آب حل می‌شود.

۷۸- با توجه به نیم‌واکنش‌های کاهشی زیر، در چه تعداد از سلول‌های گالوانی ممکن حاصل از این الکترودها، نیم‌سلول D نقش آند را ایفا می‌کند؟

$$A^{n+}(aq) + ne^- \rightarrow A(s) \ , \ E^\circ = -0/9\ V$$
$$B^{n+}(aq) + ne^- \rightarrow B(s) \ , \ E^\circ = +1/2\ V$$
$$C^{n+}(aq) + ne^- \rightarrow C(s) \ , \ E^\circ = -0/76\ V$$
$$D^{n+}(aq) + ne^- \rightarrow D(s) \ , \ E^\circ = -0/25\ V$$

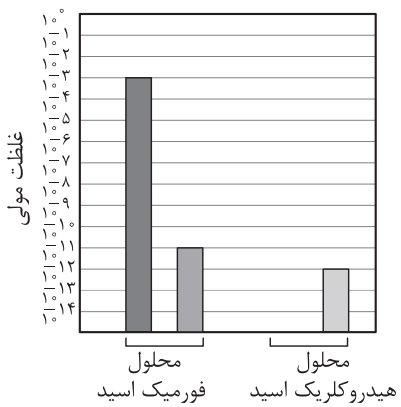
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۷۹- اگر مادهٔ A اسید آرنیوس و مادهٔ B باز آرنیوس باشد، چند مطلب زیر به یقین درست است؟

- **در ساختار مادهٔ A، اتم هیدروژن وجود دارد.**
- **کاغذ pH در محلول مادهٔ B به رنگ سرخ درمی‌آید.**
- **رسانایی الکتریکی محلول B از محلول A بیشتر است.**
- **مادهٔ A یک ترکیب مولکولی و مادهٔ B یک ترکیب یونی است.**
- **حالت فیزیکی مواد A و B در دمای اتاق، نمی‌تواند گاز باشد.**

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۸۰- نمودار روبه‌رو، غلظت یون‌های هیدرونیوم و هیدروکسید را به صورت ناقص در محلول‌هایی اسیدی شامل یک مول حل‌شونده نشان می‌دهد. اگر حجم محلول اسید ضعیف، ۴ برابر حجم محلول اسید قوی باشد، درجهٔ یونش اسید ضعیف کدام است؟



۱) ۰/۰۲۵
۲) ۰/۲۵
۳) ۰/۰۴
۴) ۰/۴

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۸۱- با توجه به جدول زیر که مربوط به محلول‌هایی از گلوکز، آمونیاک، استیک اسید و پتاسیم هیدروکسید با غلظت مولی یکسان است، کدام محلول، گلوکز است و با توجه به این داده‌ها، درصد یونش استیک اسید در محلول کدام است؟

شمارهٔ محلول	(۱)	(۲)	(۳)	(۴)
رسانایی الکتریکی	زیاد	ندارد	کم	کم
pH	۱۳	۷	۴/۳	۱۰/۶

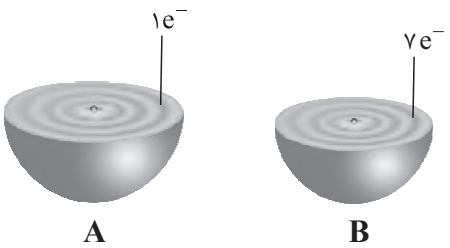
۱) محلول (۲) ـ ۰/۰۵

۲) محلول (۲) ـ ۰/۱

۳) محلول (۱) ـ ۰/۰۵

۴) محلول (۱) ـ ۰/۱

۸۲- با توجه به شکل‌های مقابل که برشی از اتم دو عنصر مختلف را نشان می‌دهد، کدام گزینه نادرست است؟ (شمار نوترون‌های هر یک از این دو عنصر یکی بیشتر از شمار پروتون‌های آن‌ها است. مقدار جرم اتمی و عدد جرمی را تقریباً یکسان در نظر بگیرید.)



۱) بیشترین عدد اکسایش ممکن برای عنصر B، ۷+ است.

۲) در واکنش بین A و B به ازای مصرف ۱۰/۵ گرم از عنصر اکسنده، ۹/۶ گرم عنصر کاهنده مصرف می‌شود.

۳) در واکنش بین A و B، شمار الکترون‌ها در نیم‌واکنش اکسایش برابر ۱ است.

۴) یون‌های پایدار هر دو عنصر، به آرایش الکترونی گاز نجیب رسیده‌اند.

۸۳- چند مورد از مطالب زیر، درست است؟ $(H=1, C=12, O=16, S=32 : g.mol^{-1})$

- **اگر گروه R در ساختار صابون‌های جامد و پاک‌کننده‌های غیرصابونی سدیم‌دار یکسان باشد، تفاوت جرم مولی دو پاک‌کننده ۵۲ گرم است.**
- **در صنعت برای زدودن رسوب تشکیل‌شده بر روی دیوارهٔ دیگ‌های بخار از پاک‌کننده‌های غیرصابونی استفاده می‌شود.**
- **پاک‌کننده‌های غیرصابونی، ترکیب‌هایی سیرشده به شمار می‌آیند و در ساختار آن‌ها ۹ جفت الکترون ناپیوندی وجود دارد.**
- **واکنش مخلوط آلومینیم و سدیم هیدروکسید با آب، گرماده است و طی آن، گاز اکسیژن تولید می‌شود.**

۱) ۴

۲) ۳

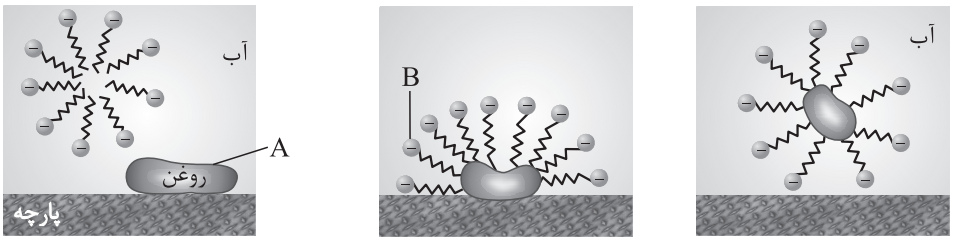
۳) ۲

۴) صفر

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۸۴- با توجه به شکل‌های داده‌شده که مراحل پاک‌شدن یک لکهٔ روغن با صابون را نشان می‌دهد، چند مورد از مطالب زیر درست‌اند؟



(۱) (۲) (۳)

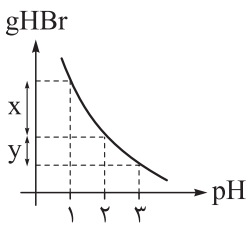
- **در شکل (۱)، نوع جاذبهٔ غالب در A از نوع وان‌دروالسی است.**
- **در شکل (۲)، B جاذبهٔ یون ـ دوقطبی میان اتم‌های هیدروژن مولکول آب و قسمت $-COO^-$ جزء آنیونی صابون را نشان می دهد.**
- **طی این فرایند، بخش آب‌گریز صابون وارد لکهٔ روغن شده و بخش آب‌دوست آن، باعث پخش‌شدن ذرات ریز روغن در آب می‌شود.**
- **شکل (۳) یک مخلوط ناهمگن از نوع کلوئید است که می‌تواند باعث پخش نور شود.**

۱) یک ۲) دو ۳) سه ۴) چهار

۸۵- در یک نمونه آب سخت، غلظت یون‌های منیزیم و کلسیم یکسان و برابر ۰/۰۱ مولار است. اگر در ۲۰ لیتر از این نمونه آب، ۸۰۰ گرم صابون با جرم مولی $250\ g.mol^{-1}$ وارد کنیم، چند درصد از صابون رسوب می‌کند؟ (یون‌های منیزیم و کلسیم به طور کامل مصرف می‌شوند.)

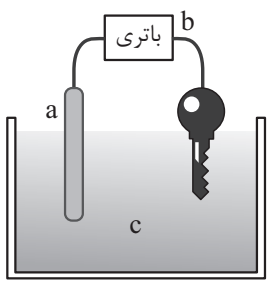
۱) ۲۵ ۲) ۷۵ ۳) ۴۰ ۴) ۶۰

۸۶- نمودار روبه‌رو، تغییرات pH محلول آبی هیدروبرمیک اسید را نسبت به تغییرات جرم HBr نشان می‌دهد. نسبت x به y کدام است؟ (حجم محلول ثابت و برابر یک لیتر و جرم مولی HBr برابر $81\ g.mol^{-1}$ است.)



۱) ۹ ۲) ۹۰
۳) ۱۰ ۴) ۱

۸۷- با توجه به شکل مقابل که فرایند آبکاری یک کلید آهنی را با استفاده از فلز مس نشان می‌دهد، کدام مطلب نادرست است؟



۱) در این سلول، واکنش در خلاف جهت طبیعی پیش می‌رود و کاتیون‌ها در آن به سمت کاتد حرکت می‌کنند.
۲) b، قطب منفی باتری را نشان می‌دهد و الکترون‌ها از آن‌جا به سمت کلید می‌روند.
۳) a، تیغهٔ مس بوده و نقش آند را دارد و به مرور زمان از جرم آن کاسته می‌شود.
۴) c می‌تواند محلول مس (II) سولفات باشد که به مرور زمان به دلیل رسوب مس روی کلید، از غلظت Cu^{2+} در آن کاسته می‌شود.

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۸۸- چند مورد از موارد زیر در ارتباط با جوش‌شیرین، درست است؟

- **یک ترکیب یونی دوتایی است و عدد اکسایش اتم مرکزی در آنیون آن برابر ۴+ است.**
- **ترکیبی با خاصیت بازی است و برای افزایش قدرت پاک‌کنندگی، به شوینده‌ها اضافه می‌شود.**
- **بر اثر واکنش آن با اسید معده، دو فراورده تولید می‌شود که یکی از آن‌ها یونی است.**
- **در ساختار لوویس آنیون سازندهٔ آن، یک پیوند دوگانه و یک پیوند (C − H) وجود دارد.**

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۳

۸۹- باالکترون‌های تولیدشده در اثر اکسایش ۹ گرم منیزیم، چند گرم یون پرمنگنات (MnO_4^-) را می‌توان به منگنز (IV) اکسید کاهش داد؟ ($Mn = ۵۵ , Mg = ۲۴ , O = ۱۶ : g.mol^{-1}$)

۱) ۱۴ / ۸۷۵ ۲) ۲۹ / ۷۵
۳) ۴۴ / ۶۲۵ ۴) ۵۹ / ۵

۹۰- اگر در سلول گالوانی آهن ـ نقره، نیم‌سلول کاتدی را با SHE جایگزین کنیم، کدام مطلب نادرست است؟

۱) مقدار نیروی الکتروموتوری سلول گالوانی کاهش می‌یابد.
۲) جهت حرکت الکترون‌ها در مدار خارجی و جهت حرکت آنیون‌ها در نیم‌سلول آهن، بدون تغییر باقی می‌ماند.
۳) در هر دو سلول گالوانی، الکترود آهن نقش آند را ایفا می‌کند.
۴) به ازای مبادلهٔ مقدار معینی الکترون در این دو سلول، تعداد مول یکسانی فراورده در نیم‌سلول کاتدی تولید می‌شود.

۹۱- کدام مطلب درست است؟

۱) در محلول‌هایی با غلظت یکسان از سود و آمونیاک، شمار مول‌های یون هیدروکسید در محلول سود، بیشتر از شمار مول این یون‌ها در محلول آمونیاک است.
۲) در دمای یکسان، در محلول‌هایی با غلظت مولی یکسان از پتاس سوزآور و آمونیاک، غلظت مولی یون هیدرونیوم در محلول آمونیاک بیشتر است.
۳) هر ماده‌ای که به خوبی در آب حل می‌شود را می‌توان یک الکترولیت قوی در نظر گرفت.
۴) pH محلول آبی ۱ مولار هر سه ترکیب HF، HCl و HBr، یکسان است.

۹۲- تیغه‌هایی به جرم یکسان از جنس فلز آلومینیم و فلز منیزیم را در دو ظرف جداگانه درون مقدار کافی محلول مس (II) سولفات با غلظت مشخص و دمای $۲۰^\circ C$ قرار می‌دهیم. کدام موارد برای ظرف حاوی تیغهٔ آلومینیمی پس از انجام کامل واکنش‌ها، بیشتر است؟ ($Al = ۲۷ , Mg = ۲۴ : g.mol^{-1}$)

الف) دمای محلول
ب) شمار الکترون‌های مبادله‌شده
پ) شمار مول‌های مس تولیدشده
ت) شمار مول‌های کاتیون تولیدشده

۱) الف ـ ب ۲) ب ـ پ ۳) الف ـ ت ۴) پ ـ ت

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۹۳- جدول زیر، نیروی الکتروموتوری چند سلول گالوانی را نشان می‌دهد. کدام موارد از مطالب زیر درست است؟

	B^{2+}/B	C^{2+}/C
A^{2+}/A	۰/۵۹V	xV
B^{2+}/B	-	۰/۷۸V

الف) اگر B^{2+}، اکسنده‌تر از A^{2+} و C^{2+} باشد، پتانسیل کاهشی A از C بزرگ‌تر است.

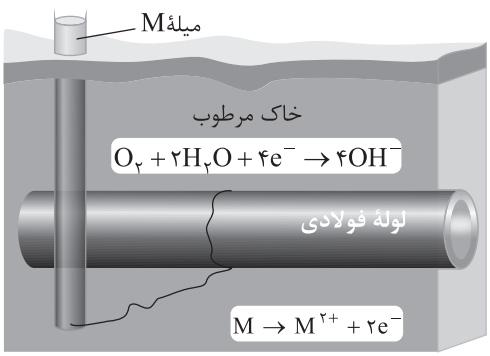
ب) اگر فلز B با محلول $ASO_4(aq)$ واکنش ندهد، قطعاً فلز B با محلول $CSO_4(aq)$ واکنش می‌دهد.

پ) اگر فلزهای A و C برخلاف فلز B با محلول $HCl(aq)$ واکنش دهند، x برابر ۰/۱۹ است.

ت) اگر فلز C با محلول $A^{2+}(aq)$ واکنش دهد، پتانسیل کاهشی فلز B از A بیشتر است.

۱) الف ـ پ ۲) ب ـ پ ۳) ب ـ ت ۴) الف ـ ت

۹۴- شکل مقابل روشی برای حفاظت لوله‌های فولادی (Fe) انتقال گاز در برابر خوردگی را نشان می‌دهد. کدام موارد از مطالب زیر، درست است؟



الف) پتانسیل کاهشی استاندارد فلز M از آهن منفی‌تر است.

ب) در این فرایند مولکول آب به عنوان عامل اکسنده، ایفای نقش می‌کند.

پ) به ازای اکسایش هر مول عامل کاهنده، نیم‌مول اکسنده مصرف می‌شود.

ت) فلز M، می‌تواند هر یک از فلزهای روی یا آلومینیم باشد.

۱) الف ـ پ ـ ت ۲) ب ـ ت ۳) پ ـ ت ۴) الف ـ پ

۹۵- دو قطعهٔ یکسان فلز منیزیم را به صورت جداگانه در محلول‌های نیترواسید (محلول I) و نیتریک اسید (محلول II)، با دما، حجم و غلظت برابر قرار می‌دهیم. چند مورد از مطالب زیر دربارهٔ این محلول‌ها درست است؟

- قبل از شروع واکنش، خاصیت اسیدی محلول (II) از محلول (I) بیشتر است.
- در لحظهٔ شروع واکنش، سرعت خروج گاز هیدروژن در محلول (II) از (I) بیشتر است، ولی حجم نهایی گاز هیدروژن خارج‌شده در پایان واکنش دو اسید برابر است.
- قبل از شروع واکنش، مجموع غلظت گونه‌ها در محلول (I) از (II) بیشتر و غلظت مولکول‌ها در محلول (I) از محلول (II) کم‌تر است.
- اگر در این دو محلول به جای فلز منیزیم، فلز آهن قرار دهیم، سرعت خروج گاز هیدروژن افزایش خواهد یافت.

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۹۶- در یک دسی‌لیتر آب خالص در دمای $25^\circ C$، a میلی‌گرم دی‌نیتروژن پنتااکسید حل می‌کنیم تا pH محلول به عدد ۲ برسد. اگر برای خنثی‌کردن این محلول به b میلی‌گرم لیتیم اکسید نیاز باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟ (از تغییر حجم محلول بر اثر اضافه‌کردن مواد صرف نظر کنید.) $(O=16, N=14, Li=7 : g.mol^{-1})$

۱) ۶۹ ۲) ۱۳۸ ۳) ۰/۰۶۹ ۴) ۰/۱۳۸

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۹۷- سلول سوختی متانول ـ اکسیژن، زیرمجموعه‌ای از سلول‌های مبادله‌کنندهٔ یون هیدرونیوم است. با توجه به نیم‌واکنش‌های انجام‌شده در این سلول، کدام مطلب نادرست است؟ (نیم‌واکنش‌ها موازنه شوند.)

۱) $O_2(g) + H^+(aq) + e^- \rightarrow H_2O(l)$ $\quad E^\circ_{\text{کاهشی}} = +1/230V$

۲) $CH_4O(l) + H_2O(l) \rightarrow H^+(aq) + CO_2(g) + e^-$ $\quad E^\circ_{\text{کاهشی}} = +0/016V$

۱) در نیم‌واکنش موازنه‌شدهٔ اکسایش این سلول، نسبت ضریب الکترون به آب برابر ۲ است.

۲) emf این سلول برابر ۱/۲۱۴ ولت است.

۳) براساس معادلهٔ موازنه‌شدهٔ کلی، ۱۲ الکترون بین اکسنده و کاهنده مبادله می‌شود.

۴) از دید محیط زیست، سلول سوختی هیدروژن نسبت به این سلول ارجحیت دارد.

۹۸- چند مورد از مطالب زیر دربارهٔ سلول‌های گالوانی و الکترولیتی، درست است؟

- **در هر دو سلول، جهت حرکت الکترون‌ها از قطب منفی به قطب مثبت است.**
- **باتری دگمه‌ای نمونه‌ای از سلول‌های گالوانی و سلول فرایند هال، نمونه‌ای از سلول‌های الکترولیتی است.**
- **در سلول گالوانی، دادوستد الکترون بین اکسنده و کاهنده به صورت غیرمستقیم انجام می‌شود.**
- **در سلول‌های الکترولیتی، گونهٔ کاهنده در مجاورت قطب منفی و گونهٔ اکسنده در مجاورت قطب مثبت، مصرف می‌شود.**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۹۹- یک لولهٔ آب با ۷۰/۵ گرم اسید چرب با فرمول $C_{17}H_{33}COOH$ $(M = 282\ g.mol^{-1})$ دچار گرفتگی شده است. اگر برای بازکردن این لوله از ۴۰۰ میلی‌لیتر محلول ۰/۵ مولار سود استفاده شود، چند درصد اسید چرب را می‌توان توسط صابون تولیدشده پاکسازی کرد؟ (در این فرایند سود به طور کامل مصرف شده است.)

$$C_{17}H_{33}COOH(s) + NaOH(aq) \rightarrow C_{17}H_{33}COONa(aq) + H_2O(l)$$

۱) ۲۰ ۲) ۲۵ ۳) ۷۵ ۴) ۸۰

۱۰۰- با توجه به نیم‌واکنش‌های کاهشی زیر، چند مورد از مطالب زیر دربارهٔ سلول‌های نور الکتروشیمیایی درست است؟

(I) $SiO_2(s) + 4H^+(aq) + 4e^- \rightarrow Si(s) + 2H_2O(l)$ $\quad E^\circ = -0/84\ V$

(II) $2H_2O(l) + 2e^- \rightarrow H_2(g) + 2OH^-(aq)$ $\quad E^\circ = -0/83\ V$

- **نیم‌واکنش (II) در نیم‌سلول کاتد انجام شده و به ازای مصرف یک مول الکترون، ۱۱/۲ لیتر گاز هیدروژن در شرایط STP تولید می‌شود.**
- **$Si(s)$ آند سلول را تشکیل می‌دهد و کاغذ pH در محیط پیرامون آن به رنگ قرمز درمی‌آید.**
- **علی‌رغم پایین‌بودن emf، بازده و سرعت انجام واکنش کلی این سلول، برخی پژوهشگران آن را برای تهیهٔ گاز هیدروژن مناسب می‌دانند.**
- **واکنش کلی این سلول به صورت $SiO_2(s) + 2H_2(g) \rightarrow Si(s) + 2H_2O(l)$ است.**

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) ۱

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۱۰۱- اگر بر اثر حل‌شدن مقداری فلز قلع در ۵۰۰ میلی‌لیتر محلول اسیدی حاوی $HCl(aq)$ و $HNO_3(aq)$ با $pH = 0/3$، ۱/۱۲ لیتر گاز در شرایط STP آزاد شود، pH محلول به چند می‌رسد و چند مول الکترون از کاهنده به اکسنده منتقل می‌شود؟ (از خاصیت اسیدی فراورده‌ها صرف نظر کنید.)

(معادلهٔ واکنش موازنه شود.) $HNO_3(aq) + HCl(aq) + Sn(s) \rightarrow H_2SnCl_6(aq) + NO_2(g) + H_2O(l)$

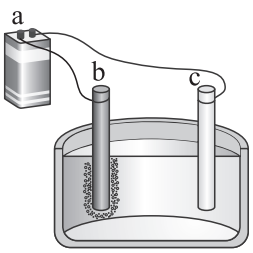
۱) ۰/۶ ـ ۰/۰۶ ۲) ۰/۷ ـ ۰/۰۶ ۳) ۰/۶ ـ ۰/۰۵ ۴) ۰/۷ ـ ۰/۰۵

۱۰۲- چند مورد از مطالب زیر، درست است؟

- در اطراف کاتد سلول تشکیل‌شده به هنگام خوردگی آهن، رسوبی «قرمز ـ قهوه‌ای» رنگ تولید می‌شود.
- پتانسیل کاهشی بالای فلز طلا، درخشندگی و عدم اکسایش آن در محلول‌های آبی حتی با خصلت اسیدی را توجیه می‌کند.
- در فرایند خوردگی آهن، emf سلول تشکیل‌شده در محیط اسیدی بیشتر از محیط خنثی است.
- اختلاف مجموع ضرایب گونه‌ها در نیم‌واکنش مرحلهٔ اول اکسایش خوردگی آهن با نیم‌واکنش کاهش آن برابر ۶ است.

۱) یک ۲) دو ۳) سه ۴) چهار

۱۰۳- یک روش برای تهیهٔ فلزاتی که کاهندهٔ قوی هستند، برقکافت نمک مذاب آن‌هاست. با توجه به شکل زیر که برای تهیهٔ فلز سدیم استفاده می‌شود، چند مورد از مطالب زیر درست است؟



- a قطب مثبت باتری و الکترودهای b و c، به ترتیب آند و کاتد این سلول را نشان می‌دهند.
- افزودن کلسیم کلرید به سدیم کلرید خالص، نقطهٔ ذوب آن را به اندازهٔ $214^\circ C$ کاهش داده و این امر باعث صرفه‌جویی در انرژی می‌شود.
- بر اثر انجام نیم‌واکنش کاهش در کاتد، شعاع گونهٔ اکسنده افزایش خواهد یافت.
- مواد شرکت‌کننده در واکنش کلی این سلول، سه حالت فیزیکی متفاوت دارند.

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۱۰۴- با توجه به واکنش زیر، چند مورد از موارد داده‌شده درست است؟ (معادلهٔ واکنش موازنه شود.)

$I_2 + ClO_3^- + H_2O \rightarrow IO_3^- + H^+ + Cl^-$

- گونهٔ کاهنده در این واکنش، یک یون چنداتمی است.
- به ازای مصرف $3/612 \times 10^{23}$ الکترون توسط گونهٔ اکسنده، ۰/۵ مول یون کلرید تولید می‌شود.
- با انجام این فرایند، pH محیط افزایش می‌یابد.
- مجموع ضرایب استوکیومتری مواد شرکت‌کننده در واکنش برابر ۲۸ است.

۱) یک ۲) دو ۳) سه ۴) چهار

۱۰۵- در سلول فرایند هال، جنس آند و کاتد به‌کاررفته یکسان و از گرافیت است. با گذشت زمان، از جرم گرافیت ..... کاسته شده و به ازای مصرف ۳/۶ گرم از آن، ..... گرم آلومینیم تولید می‌شود. $(C = 12, Al = 27 : g.mol^{-1})$

۱) آند ـ ۱۰/۸ ۲) کاتد ـ ۱۰/۸ ۳) کاتد ـ ۵/۴ ۴) آند ـ ۵/۴

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

دوستان عزیز خیلی‌سبز، سلام؛

فایل پاسخ‌نامهٔ این آزمون را که شامل درس‌نامه، نکات کنکوری، پاسخ تشریحی و ... است، ساعت ۱۴ امروز از صفحهٔ شخصی خودتان در سایت آزمون خیلی‌سبز دریافت کنید.

هم‌چنین شما می‌توانید همین امشب کارنامهٔ اولیهٔ آزمونتان را در صفحهٔ شخصی خود مشاهده بفرمایید.

برای دسترسی به صفحهٔ شخصی خود وارد سایت آزمون خیلی‌سبز به آدرس: azmoon.kheilisabz.com شوید و کدی را که توسط مدرسه و یا نمایندگی‌های آزمون‌های خیلی‌سبز به شما داده شده، در محل مشخص‌شده در سایت ثبت بفرمایید.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

خیلی سبز! آزمون
تجربی | ریاضی | انسانی

سال تحصیلی
۱۴۰۳ - ۱۴۰۲

دفترچه پاسخ آزمون هشتم حضوری

علوم ریاضی و فنی

ویژهٔ کنکوری‌های ۱۴۰۳

۱۴۰۲/۱۰/۲۹

آزمون آزمایشی خیلی سبز

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا
حسابان	حسین شفیع‌زاده - مهرداد کیوان
ریاضیات گسسته و آمار و احتمال	علیرضا شریف‌خطیبی - عطا صادقی - حمید گلزاری - سروش موئینی
هندسه	امیرحسین ابومحبوب - محمدرضا حسینی‌فرد - محمدطاهر شعاعی - کیوان صارمی - حمید گلزاری
فیزیک	محمد باغبان - محسن توانا - علیرضا جباری - مجید ساکی - رضا سبزمیدانی - محمدجواد سورچی - نوید شاهی - علیرضا عبداللهی - علیرضا علینقی - حمید فدائی فرد - حامد نبی‌منصور
شیمی	اسلام آب‌روشن - حسین ایروانی - ایمان حسین‌نژاد - پیمان خواجوی مجد - یاسر راش - یاسر عبداللهی - سیدعلی ناظمی

نام درس	مسئول درس	گزینشگر	مولف پاسخ‌نامه	کارشناسان علمی ـ محتوایی به ترتیب حروف الفبا	ویراستاران به ترتیب حروف الفبا
حسابان	حسین شفیع‌زاده - مهرداد کیوان	حسین شفیع‌زاده - مهرداد کیوان	عاطفه خان‌محمدی	امیرحسین ابومحبوب	ماهان فنی‌فر - بنیامین یعقوبی
ریاضیات گسسته و آمار و احتمال	حمید گلزاری	حمید گلزاری	مسعود شفیعی	محمدحسین رحیمی	ماهان فنی‌فر - ابوالفضل ناصری - بردیا نصیری
هندسه	حمید گلزاری	حمید گلزاری	فرزاد زمانی‌نژاد	محمدحسین رحیمی	زهرا جالینوسی - ماهان فنی‌فر - ابوالفضل ناصری
فیزیک	رضا سبزمیدانی	نوید شاهی	محمد باغبان - علیرضا جباری - محمدجواد سورچی	علیرضا جباری	محمد احمدبیکی - مهدی بابائی - احسان محمدی - امیر محمودی انزابی
شیمی	یاسر عبداللهی	حسین ایروانی	حمید ذبحی	محمد مرادی - فاطمه صیقلی	سیدعلی حسین‌زاده - احسان رحیمی - حسین شکوه - مهدی فائق - علی طهانی

سرپرست محتوایی: فاطمه آقاجانپور

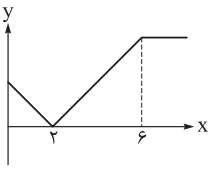
Azmoon.kheilisabz.com

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

حسابان (۲): صفحه‌های ۱ تا ۷۰

تست و پاسخ ۱

نمودار تابع $y=-f(۴-x)$ به صورت روبه‌رو است. تابع $y=f(\frac{x}{۲}-a)$ فقط در بازهٔ $[-۶,b]$ صعودی اکید است. حداکثر مقدار $a+b$ کدام است؟



صعودی اکید: $x_۱ > x_۲ \Rightarrow f(x_۱) > f(x_۲)$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس‌نامه ۱. انتقال، انبساط و انقباض نمودارهای توابع

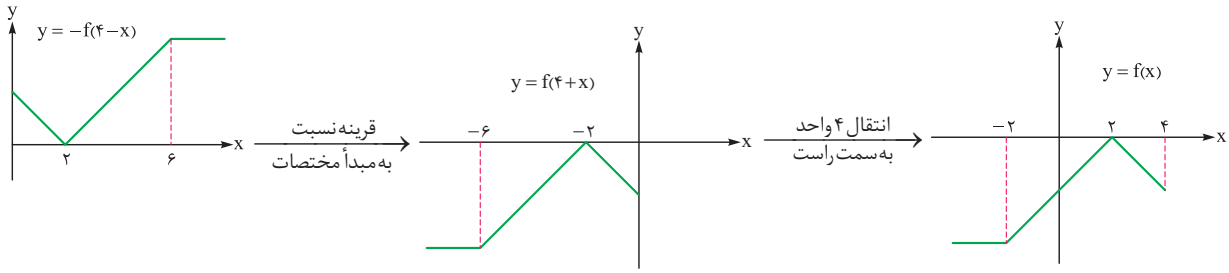
	نمودار چه می‌شود؟	نماد ریاضی	اتفاقی که برای ضابطه می‌افتد.
انتقال	a واحد راست	$f(x-a)$	به جای xها، $x-a$ می‌گذاریم.
	a واحد چپ	$f(x+a)$	به جای xها، $x+a$ می‌گذاریم.
	b واحد بالا	$f(x)+b$	bتا به ضابطه اضافه می‌کنیم.
	b واحد پایین	$f(x)-b$	bتا از ضابطه کم می‌کنیم.
انبساط و انقباض افقی	انبساط با ضریب ۲	$f(\frac{x}{۲})$	به جای xها، $\frac{x}{۲}$ می‌گذاریم.
	انقباض با ضریب ۲	$f(۲x)$	به جای xها، $۲x$ می‌گذاریم.
انبساط و انقباض عمودی	انبساط با ضریب ۲	$۲f(x)$	کل ضابطه ضرب در ۲ می‌شود.
	انقباض با ضریب ۲	$\frac{۱}{۲}f(x)$	کل ضابطه ضرب در $\frac{۱}{۲}$ می‌شود.

درس‌نامه ۲. قرینه‌یابی

نمودار چه می‌شود؟	نماد ریاضی	اتفاقی که برای ضابطه می‌افتد.
قرینه نسبت به محور xها	$-f(x)$	به جای yها، $-y$ می‌گذاریم.
قرینه نسبت به محور yها	$f(-x)$	به جای xها، $-x$ می‌گذاریم.
قرینه نسبت به مبدأ	$-f(-x)$	هر دو کار بالا با هم!
قرینه نسبت به خط $x=k$	$f(۲k-x)$	به جای xها، $۲k-x$ می‌گذاریم.
قرینه نسبت به خط $y=k$	$۲k-f(x)$	به جای yها، $۲k-y$ می‌گذاریم.

پاسخ تشریحی **گام اول:** عبارت $\frac{x}{۲}-a$ یک عبارت صعودی اکید است. از طرفی در سؤال گفته‌شده که تابع $y=f(\frac{x}{۲}-a)$ نیز در بازهٔ $[-۶,b]$ صعودی اکید است؛ بنابراین باید بازه‌ای از f را در نظر بگیریم که خودش صعودی اکید باشد تا ترکیب تابع f با عبارت $\frac{x}{۲}-a$، یک تابع ترکیبی را تشکیل دهد که صعودی اکید است.

گام دوم: برای این‌که مشخص شود تابع f در چه بازه‌ای، صعودی اکید است، ابتدا از روی نمودار تابع داده‌شده، نمودار تابع f را پیدا می‌کنیم:



SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

گام سوم: از نمودار تابع f مشخص است که این تابع در بازهٔ $x \in [-۲,۲]$ صعودی اکید است، پس باید داشته باشیم:

$$-۲ \le \frac{x}{۲} - a \le ۲ \Rightarrow a-۲ \le \frac{x}{۲} \le a+۲ \Rightarrow ۲a-۴ \le x \le ۲a+۴$$

گام چهارم: نتیجه می‌گیریم که بازهٔ $[-۶,b]$ زیرمجموعه‌ای از بازهٔ $[۲a-۴, ۲a+۴]$ است. برای این‌که حداکثر مقدار $a+b$ را پیدا کنیم، باید این دو بازه با هم برابر باشند. داریم:

$$\begin{cases} ۲a-۴=-۶ \\ ۲a+۴=b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-۱ \\ b=۲ \end{cases} \Rightarrow \max(a+b)=۱$$

تست و پاسخ ۲

تابع f با دامنهٔ $\mathbb{R}$، نزولی اکید است؛ به طوری که $f(-۳)=۰$. اگر $g(x)=\sqrt{(ax-۲۰)f(۲-x)}$ تابعی با دامنهٔ $\mathbb{R}$ باشد، مقدار a کدام است؟

$x_۱ < x_۲ \Rightarrow f(x_۱) > f(x_۲)$

۱) ۴
۲) -۴
۳) ۵
۴) -۵

پاسخ: گزینهٔ ۱

نکته اگر هر دو تابع f و g هر دو صعودی یا هر دو نزولی باشند، آن‌گاه ترکیب دو تابع، صعودی خواهد بود (fog و gof) و اگر یکی صعودی و دیگری نزولی باشد، ترکیب آن‌ها نزولی خواهد بود.

پاسخ تشریحی **گام اول:** تابع f نزولی اکید است و از طرفی $f(-۳)=۰$ می‌باشد، پس این تابع فقط در $x=-۳$ دارای صفر است.

گام دوم: عبارت $۲-x$ در $\mathbb{R}$، نزولی اکید است و با توجه به نکته، $f(۲-x)$، یک تابع صعودی اکید است.

با توجه به صفر تابع f، صفر تابع $f(۲-x)$ را پیدا می‌کنیم:

$$f(۲-x)=۰ \Rightarrow ۲-x=-۳ \Rightarrow x=۵$$

پس جدول تعیین علامت تابع $y_۱=f(۲-x)$ با توجه به صعودی اکید بودن آن به صورت مقابل می‌باشد:

x		۵	
$y_۱=f(۲-x)$	−	۰	+

گام سوم: برای این‌که تابع g، دارای دامنهٔ $\mathbb{R}$ باشد، باید جدول تعیین علامت آن، به صورت مقابل شود:

x		۵	
عبارت زیر رادیکال	+	۰	+

نتیجه می‌گیریم که $y_۲=ax-۲۰$ باید در $x=۵$ ریشه داشته باشد و جدول تعیین علامت آن به صورت زیر شود:

x		۵	
$y_۲=۵a-۲۰$	−	۰	+

$$۵a-۲۰=۰ \Rightarrow a=۴$$

پس داریم:

می‌بینیم که با مقدار $a=۴$ دامنهٔ تابع $g(x)=\sqrt{(۴x-۲۰)f(۲-x)}$ برابر با $\mathbb{R}$ است.

تست و پاسخ ۳

نمودار تابع $g(x)=۲-f(۱-\frac{x}{۳})$ را نسبت به مبدأ مختصات قرینه می‌کنیم، سپس ۳ واحد به راست انتقال می‌دهیم. با کدام تبدیل روی تابع جدید، به تابع f می‌رسیم؟

$g(x) \Rightarrow -g(-x)$

۱) طول نقاط تابع را ۳ برابر کنیم و ۲ واحد به پایین انتقال دهیم.
۲) طول نقاط را $\frac{۱}{۳}$ برابر کنیم و تابع را ۲ واحد به پایین انتقال دهیم.
۳) طول نقاط را $\frac{۱}{۳}$ برابر کنیم و تابع را ۲ واحد به بالا انتقال دهیم.
۴) طول نقاط تابع را ۳ برابر کنیم و ۲ واحد به بالا انتقال دهیم.

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ تشریحی **گام اول:** ابتدا قرینهٔ تابع g نسبت به مبدأ مختصات را به دست می‌آوریم:

$$g(x) \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به مبدأ مختصات}} h_۱(x)=-g(-x)=-(۲-f(۱-\frac{(-x)}{۳}))=-۲+f(۱+\frac{x}{۳})$$

گام دوم: حالا تابع $h_۱(x)$ به‌دست‌آمده را ۳ واحد به راست انتقال می‌دهیم:

$$h_۱(x) \xrightarrow{\text{۳ واحد انتقال به راست}} h_۲(x)=h_۱(x-۳)=-۲+f(۱+\frac{x-۳}{۳})=-۲+f(\frac{x}{۳})$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

گام سوم: برای این‌که از تابع $h_2(x)$ به‌دست‌آمده به تابع $f(x)$ برسیم باید نمودار تابع $h_2(x)$ را ۲ واحد به بالا انتقال دهیم و هم‌چنین طول نقاط را $\frac{1}{3}$ برابر کنیم؛ یعنی به عبارتی تابع $h_2(x)$ را باید با ضریب ۳، در راستای افقی منقبض کنیم:

$$h_2(x) \xrightarrow[\text{به بالا}]{\text{۲ واحد انتقال}} h_3(x) = -2 + f(\frac{x}{3}) + 2 = f(\frac{x}{3}) \xrightarrow{\text{انقباض افقی با ضریب ۳}} h_3(3x) = f(\frac{3x}{3}) = f(x)$$

تست و پاسخ ۴

اگر $f(x) = 5x^4 + 4x^3 + 3x^2 - x - 2$، تابع $g(x)$ کدام باشد تا چندجمله‌ای $f(x)+g(x)$ بر $x+1$ بخش‌پذیر باشد؟

۱) $x^3 - 2x$ ۲) $x^5 + 4x$ ۳) $x^7 - 2x^2$ ۴) $x^2 + x$

پاسخ: گزینهٔ ۳

مشاوره هر چند سال یک بار از بحث باقی‌مانده در کنکور سؤال آمده است. مطلب ساده‌ای است، پس حتماً سعی کنید بر آن مسلط باشید.

درس‌نامه

۱) **قضیهٔ تقسیم برای چندجمله‌ای‌ها:** اگر $f(x)$ و $p(x)$ توابع چندجمله‌ای باشند و درجهٔ $p(x)$ از صفر بزرگ‌تر باشد، آن‌گاه توابع چندجمله‌ای منحصربه‌فرد $q(x)$ و $r(x)$ وجود دارند، به طوری که:

$$f(x) = p(x)\,q(x) + r(x) \quad (\text{مقسوم} = \text{مقسوم‌علیه} \times \text{خارج قسمت} + \text{باقی‌مانده})$$

که در آن $r(x) = 0$ است یا درجهٔ $r(x)$ از درجهٔ $p(x)$ کم‌تر است.

۲) **به دست آوردن باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$:**

الف) بر $ax+b$:

۱) ریشهٔ مقسوم علیه را به دست می‌آوریم:

$$ax + b = 0 \Rightarrow x = \frac{-b}{a}$$

۲) ریشه را در f قرار می‌دهیم تا باقی‌مانده که یک عدد است به دست آید؛ پس $R = f(\frac{-b}{a})$ می‌شود.

ب) بر $ax^2 + bx + c$:

$$\begin{array}{r|l} f(x) & ax^2+bx+c \\ \hline & Q(x) \\ \hline mx+n & \end{array}$$

۱) باقی‌مانده را به صورت چندجمله‌ای درجه‌اول $mx+n$ می‌گیریم.

۲) رابطهٔ تقسیم را می‌نویسیم:

$$f(x) = (ax^2 + bx + c)Q(x) + mx + n$$

۳) ریشهٔ مقسوم‌علیه را در دو طرف رابطهٔ تقسیم مرحلهٔ (۲) قرار می‌دهیم و با حل دستگاه، n و m را پیدا می‌کنیم.

پاسخ تشریحی **گام اول:** ابتدا ریشهٔ مقسوم‌علیه را پیدا می‌کنیم:

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

باید رابطهٔ مقابل برقرار باشد، تا چندجمله‌ای $f(x)+g(x)$ بر $x+1$ بخش‌پذیر باشد (باقی‌مانده برابر با صفر):

$$R = f(-1) + g(-1) = 0 \quad (I)$$

گام دوم: مقدار $f(-1)$ را پیدا می‌کنیم:

$$f(x) = 5x^4 + 4x^3 + 3x^2 - x - 2 \Rightarrow f(-1) = 5 - 4 + 3 + 1 - 2 = 3 \quad (II)$$

گام سوم: از (I) و (II) نتیجه می‌گیریم که باید $g(-1) = -3$ باشد؛ پس هر یک از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) $y = -1 + 2 = 1 \neq g(-1)$

۲) $y = -1 - 4 = -5 \neq g(-1)$

۳) $y = -1 - 2 = -3 = g(-1)$

۴) $y = 1 - 1 = 0 \neq g(-1)$

پس $g(x) = x^7 - 2x^2$ می‌تواند باشد.

تست و پاسخ ۵

اگر باقی‌ماندهٔ چندجمله‌ای $f(x)$ بر $2x^2 - 3x + 1$ برابر $4x - 1$ باشد، باقی‌ماندهٔ $f^2(\frac{x}{4}) - 2xf(3x-5)$ بر $x-2$ چه عددی است؟

۱) -3 ۲) -2 ۳) -12 ۴) -11

پاسخ: گزینهٔ ۴

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

مشاوره حواستان باشد اگر مقسوم‌علیه درجه‌دوم باشد، باید رابطهٔ تقسیم را بنویسید.

خودت حل کنی بهتره ریشه‌های مقسوم‌علیه را در رابطهٔ تقسیم قرار دهید.

پاسخ تشریحی **گام اول:** رابطهٔ تقسیم را می‌نویسیم:

$$f(x)=\underbrace{(2x^2-3x+1)}_{(2x-1)(x-1)}Q(x)+(4x-1)$$

گام دوم: از رابطهٔ گام اول، می‌توانیم مقادیر $f(1)$ و $f(\frac{1}{2})$ را بیابیم:

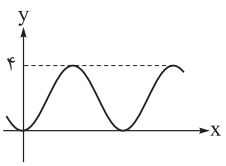
$$\begin{cases} f(1)=4\times 1-1=3 \\ f(\frac{1}{2})=4\times\frac{1}{2}-1=1 \end{cases} \quad (*)$$

گام سوم: باقی‌ماندهٔ عبارت $f^2(\frac{x}{4})-2xf(3x-5)$ را بر $x-2$ پیدا می‌کنیم:

$$x-2=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow R=f^2(\frac{2}{4})-2\times 2f(3\times 2-5)=f^2(\frac{1}{2})-4f(1) \overset{(*)}{=} 1-4\times 3=-11$$

تست و پاسخ ۶

بخشی از نمودار $f(x)=2a\sin^2(\frac{\pi}{a}x)$ به صورت شکل مقابل است. مقدار $f(\frac{1}{a})$ کدام است؟

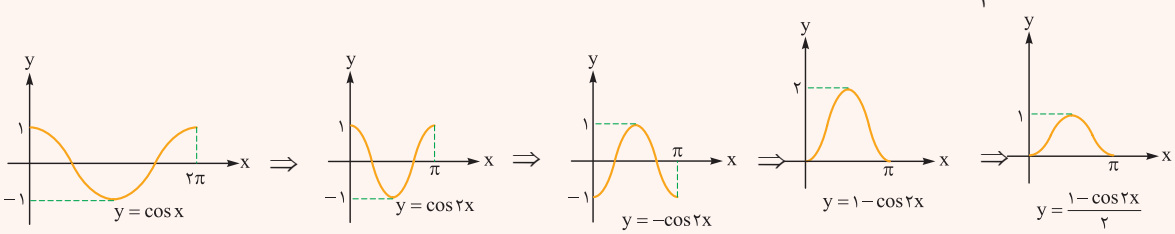


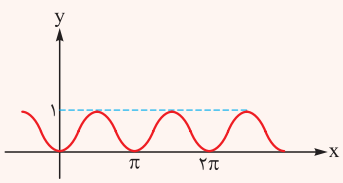
۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس‌نامه بررسی نمودار تابع $y=\sin^2 x$

با توجه به اتحاد $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$، برای رسم تابع $y=\sin^2 x$، کافی است مراحل زیر را طی کنیم:





پس نمودار تابع $y=\sin^2 x$ به صورت مقابل درمی‌آید:

دورهٔ تناوب این تابع برابر π، $\min=0$ و $\max=1$ است.

در حالت کلی دورهٔ تناوب تابع $y=a\sin^2 bx$ برابر $T=\frac{\pi}{|b|}$ است. $(a>0)$

پاسخ تشریحی **گام اول:** می‌دانیم که همواره $-1\le\sin\alpha\le 1$ و در نتیجه $0\le\sin^2\alpha\le 1$ است. از طرفی مقدار ماکزیمم تابع f، برابر با ۴ است. مقدار ماکزیمم به ازای $\sin^2\frac{\pi}{a}x=1$ به دست می‌آید؛ پس داریم:

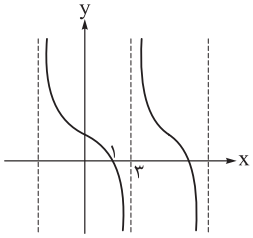
$$4=2a \Rightarrow a=2$$

گام دوم: مقدار $f(\frac{1}{2})=f(\frac{1}{a})$ را به دست می‌آوریم:

$$f(x)=4\sin^2(\frac{\pi}{2}x) \Rightarrow f(\frac{1}{2})=4\sin^2(\frac{\pi}{2}\times\frac{1}{2})=4(\frac{\sqrt{2}}{2})^2=4\times\frac{1}{2}=2$$

تست و پاسخ ۷

بخشی از نمودار تابع $f(x)=1-a\tan(\frac{\pi}{b}x)$ در شکل روبه‌رو رسم شده است. مقدار ab کدام است؟



۱) $4\sqrt{3}$
۲) $2\sqrt{3}$
۳) $6\sqrt{2}$
۴) $6\sqrt{3}$

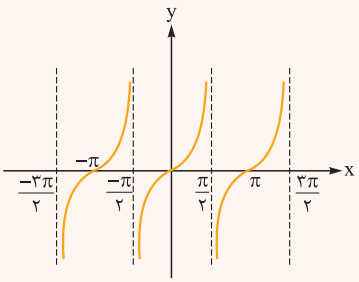
پاسخ: گزینهٔ ۴

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

مشاوره در نمودارهای تانژانت، توجه به خطوط مجانب قائم و صعودی یا نزولی بودن تابع مهم است.

درس‌نامه ●● **بررسی تابع تانژانت**

نمودار تابع $y = \tan x$ به صورت مقابل است:



با توجه به نمودار، نکات زیر به دست می‌آید:

۱) دورهٔ تناوب تابع $T = \pi$ است.

۲) $y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$، از طرفی ریشه‌های معادلهٔ $\cos x = 0$ به صورت $x = \frac{(2k+1)\pi}{2}$ است. این خطوط عمودی، همان مجانب‌های قائم تابع در نمودار هستند. تابع در فاصلهٔ بین دو مجانب قائم، اکیداً صعودی است.

۳) اگر بازه‌ای شامل مجانب قائم باشد، تابع در آن بازه یکنوا نیست.

۴) دورهٔ تناوب تابع $y = \tan(ax + b)$ به صورت $T = \frac{\pi}{|a|}$ است. اگر $a > 0$ هر شاخهٔ تابع اکیداً صعودی و اگر $a < 0$ هر شاخهٔ تابع اکیداً نزولی می‌شود. تابع در فاصلهٔ دو مجانب قائم که یک دورهٔ تناوب را تشکیل می‌دهد، اکیداً یکنواست. (دقت کنید که تابع در کل دامنه‌اش غیریکنواست).

پاسخ تشریحی **گام اول:** از روی نمودار تابع f مشخص است که اولین مجانب قائم تابع با طول مثبت در $x = 3$ است.

بنابراین مقدار $\frac{\pi}{b}x$ به ازای $x = 3$ برابر با $\frac{\pi}{2}$ می‌شود:

$$x = 3 \Rightarrow \frac{3\pi}{b} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow b = 6$$

گام دوم: از طرفی $x = 1$ اولین ریشهٔ مثبت تابع است. داریم:

$$x = 1 \Rightarrow f(1) = 1 - a\tan(\frac{\pi}{6} \times 1) = 0 \Rightarrow 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}a = 0 \Rightarrow a = \sqrt{3}$$

گام سوم: مقدار ab برابر با $6\sqrt{3}$ می‌شود.

تست و پاسخ ۸

نمودار تابع $f(x) = -2\cos(\frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{3}x)$ در بازهٔ $(0, \alpha)$ در دو نقطه دارای بیشترین مقدار است. حداکثر مقدار α چه عددی است؟

۱) $\frac{59}{8}$ ۲) $\frac{94}{8}$ ۳) $\frac{75}{8}$ ۴) $\frac{123}{8}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ تشریحی **گام اول:** زمانی تابع f به بیشترین مقدار خود می‌رسد که $\cos(\frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{3}x) = -1$ شود. این معادله را حل می‌کنیم تا جواب عمومی برای x به دست بیاید.

$$\frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{3}x = (2k+1)\pi \Rightarrow \frac{\pi}{3}x = \frac{\pi}{8} - (2k+1)\pi \Rightarrow x = \frac{3}{8} - 3(2k+1) = -6k - \frac{21}{8}\ ,\ k \in \mathbb{Z}$$

گام دوم: تابع f در بازهٔ $(0, \alpha)$ دارای دو نقطه با بیشترین مقدار است؛ پس $x > 0$ است. مقادیری از k را در رابطهٔ x به‌دست‌آمده جای‌گذاری می‌کنیم تا xهای مثبت به دست آید:

$$k = -1 \Rightarrow x = 6 - \frac{21}{8} = \frac{27}{8}$$

$$k = -2 \Rightarrow x = 12 - \frac{21}{8} = \frac{75}{8}$$

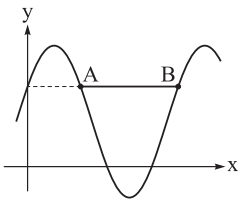
$$k = -3 \Rightarrow x = 18 - \frac{21}{8} = \frac{123}{8}$$

دقت کنید که به ازای $x = \frac{27}{8}, \frac{75}{8}$، f به مقدار ماکزیمم خود می‌رسد؛ چون انتهای بازهٔ داده‌شده باز است، حداکثر مقدار برای α برابر با $x = \alpha = \frac{123}{8}$ می‌شود.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

تست و پاسخ ۹

قسمتی از نمودار $f(x)=2\cos(bx-\frac{\pi}{3})$ به صورت شکل زیر است. هرگاه $AB=\frac{\pi}{2}$، مقدار b کدام است؟



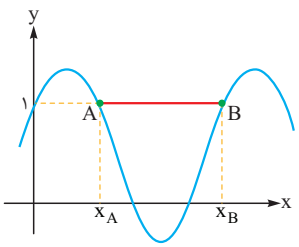
۱) $\frac{۴}{۳}$
۲) $\frac{۸}{۳}$
۳) $\frac{۸}{۹}$
۴) $\frac{۴}{۹}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ تشریحی **گام اول:** ابتدا محل برخورد نمودار تابع f با محور yها را می‌یابیم:

$$x=۰ \Rightarrow f(۰)=۲\cos(-\frac{\pi}{۳})=۲\times\frac{۱}{۲}=۱$$

پس شکل نمودار به صورت زیر است:



گام دوم: مقدار تابع f در نقاط A و B برابر با ۱ است. xهایی را که در آن مقدار تابع برابر با ۱ می‌شود، می‌یابیم:

$$۲\cos(bx-\frac{\pi}{۳})=۱ \Rightarrow \cos(bx-\frac{\pi}{۳})=\frac{۱}{۲}=\cos\frac{\pi}{۳}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۱)\ bx-\frac{\pi}{۳}=۲k\pi+\frac{\pi}{۳} \Rightarrow bx=۲k\pi+\frac{۲\pi}{۳} \Rightarrow x=\frac{۲k}{b}\pi+\frac{۲\pi}{۳b},\ k\in\mathbb{Z} \\ ۲)\ bx-\frac{\pi}{۳}=۲k\pi-\frac{\pi}{۳} \Rightarrow x=\frac{۲k}{b}\pi,\ k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

گام سوم: با توجه به نمودار تابع، مقدار x_A از رابطهٔ (۱) و مقدار x_B از رابطهٔ (۲) به دست می‌آید (خودتان دلیلش را پیدا کنید! راهنمایی: به شکل نمودار حول $x=۰$ توجه کنید و با شکل نمودار حول $x=x_B$ مقایسه کنید). داریم:

$$\begin{matrix} ۱)\ k=۰ \Rightarrow x_A=\frac{۲\pi}{۳b} \\ ۲)\ k=۱ \Rightarrow x_B=\frac{۲\pi}{b} \end{matrix} \Rightarrow AB=|x_A-x_B|=\frac{۲\pi}{b}-\frac{۲\pi}{۳b}=\frac{۴\pi}{۳b}=\frac{\pi}{۲} \Rightarrow b=\frac{۸}{۳}$$

تست و پاسخ ۱۰

تعداد جواب‌های معادلهٔ $-۴\sin^۲x+۱۲\cos^۲x+\tan^۲x=۳$ در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ کدام است؟

۱) ۸
۲) ۴
۳) ۶
۴) ۱۲

پاسخ: گزینهٔ ۲

مشاوره مسلط‌بودن به اتحادهای مثلثاتی در حل معادله‌های مثلثاتی ضروری است. حتماً بر روی اتحادهای مثلثاتی کار کنید، در کنکور پرتکرار است.

پاسخ تشریحی **گام اول:** از اتحادها استفاده می‌کنیم و معادله را برحسب $\cos x$ می‌نویسیم:

$$\begin{cases} \sin^۲x=۱-\cos^۲x \\ \tan^۲x=\frac{۱}{\cos^۲x}-۱ \end{cases} \xrightarrow[\cos x\neq ۰]{\text{جای‌گذاری در معادله}} -۴(۱-\cos^۲x)+۱۲\cos^۲x+\frac{۱}{\cos^۲x}-۱=۳$$

$$\Rightarrow -۴+۴\cos^۲x+۱۲\cos^۲x+\frac{۱}{\cos^۲x}-۴=۰ \Rightarrow ۱۶\cos^۲x+\frac{۱}{\cos^۲x}-۸=۰$$

$$\xrightarrow{\text{مخرج مشترک می‌گیریم.}} \frac{۱۶\cos^۴x-۸\cos^۲x+۱}{\cos^۲x}=۰$$

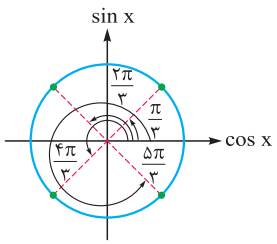
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

گام دوم: معادلهٔ به‌دست‌آمده از گام اول را با فرض $\cos x \neq 0$ حل می‌کنیم. از تغییر متغیر $\cos^2 x = t$ استفاده می‌کنیم:

$$16t^2 - 8t + 1 = 0 \Rightarrow (4t-1)^2 = 0 \Rightarrow 4t - 1 = 0$$

$$\Rightarrow t = \frac{1}{4} = \cos^2 x \Rightarrow \cos x = \pm\frac{1}{2} \quad (*)$$

گام سوم: باید جواب‌های معادلهٔ $(*)$ را در بازهٔ $(0, 2\pi)$ پیدا کنیم. از دایرهٔ مثلثاتی کمک می‌گیریم:



پس در کل ۴ جواب قابل قبول در بازهٔ $(0, 2\pi)$، برای x داریم.

نکته می‌توانستید برای تعیین تعداد جواب‌ها، از نمودار $y = \cos x$ نیز استفاده کنید و نمودار تابع را با $y_1 = \frac{1}{2}$ و $y_2 = \frac{-1}{2}$ قطع دهید.

تست و پاسخ ۱۱

جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\sin(2x).\tan(x+\frac{\pi}{6}) = \cos(2x)$ کدام است؟ $(k \in \mathbb{Z})$

۱) $\frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{12}$ ۲) $\frac{k\pi}{6} + \frac{\pi}{9}$ ۳) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{12}$ ۴) $\frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{9}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس‌نامه حل معادلهٔ مثلثاتی

برای حل معادلات مثلثاتی با استفاده از روابط مثلثاتی، به یکی از حالت‌های زیر رسیده و از فرمول دسته‌جواب‌ها استفاده می‌کنیم:

۱) $\sin x = \sin\alpha \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = (2k+1)\pi - \alpha \end{cases}$

۲) $\cos x = \cos\alpha \Rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha$

۳) $\begin{cases} \tan x = \tan\alpha \\ \cot x = \cot\alpha \end{cases} \Rightarrow x = k\pi + \alpha$

پاسخ تشریحی **گام اول:** طرفین معادله را بر $\sin 2x$ تقسیم می‌کنیم:

$$\tan(x + \frac{\pi}{6}) = \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \cot(2x) = \tan(\frac{\pi}{2} - 2x)$$

گام دوم: جواب کلی معادلهٔ $\tan\alpha = \tan\beta$ به صورت $\alpha = k\pi + \beta$ است، پس برای معادلهٔ به‌دست‌آمده داریم:

$$x + \frac{\pi}{6} = k\pi + (\frac{\pi}{2} - 2x) \Rightarrow 3x = k\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{k}{3}\pi + \frac{\pi}{9}$$

تست و پاسخ ۱۲

جمع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\tan(2x) - \tan(x - \frac{\pi}{4}) = 1$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$ چه عددی است؟

۱) $\frac{5\pi}{2}$ ۲) π ۳) 3π ۴) $\frac{3\pi}{2}$

پاسخ: گزینهٔ ۳

مشاوره فرمول بسط تانژانت در کتاب دوازدهم مطرح شده است که نتایج مهمی از آن گرفته می‌شود. این سؤال خاص نیز ترکیبی از معادلهٔ مثلثاتی و بسط تانژانت است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

درس‌نامه فرمول بسط و دو برابر کمان تانژانت

$$۱)\ \tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{۱-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$۲)\ \tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{۱+\tan\alpha\tan\beta}$$

نتایج:

$$۱)\ \tan(\alpha+\alpha)=\tan ۲\alpha=\frac{۲\tan\alpha}{۱-\tan^{۲}\alpha}$$

$$۲)\ \tan(\alpha+\frac{\pi}{۴})=\frac{\tan\alpha+۱}{۱-\tan\alpha}$$

$$۳)\ \tan(\alpha-\frac{\pi}{۴})=\frac{\tan\alpha-۱}{۱+\tan\alpha}$$

پاسخ تشریحی **گام اول:** از بسط توابع مثلثاتی استفاده می‌کنیم و در معادله جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\tan ۲x-\tan(x-\frac{\pi}{۴})=۱\Rightarrow\frac{۲\tan x}{۱-\tan^{۲}x}-\frac{\tan x-۱}{۱+\tan x}=۱$$

$$\Rightarrow\frac{۲\tan x}{(۱-\tan x)(۱+\tan x)}+\frac{۱-\tan x}{۱+\tan x}=۱\xrightarrow[\text{می‌گیریم}]{\text{مخرج مشترک}}\frac{۲\tan x+(۱-\tan x)^{۲}}{(۱-\tan x)(۱+\tan x)}=۱$$

$$\Rightarrow\frac{۲\tan x+۱-۲\tan x+\tan^{۲}x}{۱-\tan^{۲}x}=۱\xrightarrow[\text{می‌کنیم}]{\text{طرفین وسطین}}۱+\tan^{۲}x=۱-\tan^{۲}x$$

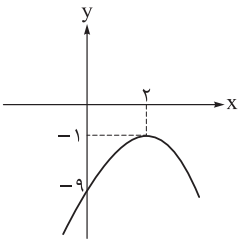
$$\Rightarrow ۲\tan^{۲}x=۰\Rightarrow\tan x=۰\ (*)$$

گام دوم: معادلهٔ $(*)$، در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ دارای جواب‌های $x=۰,\pi,۲\pi$ است.

مجموع این جواب‌ها برابر با ۳π می‌شود. دقت کنید این جواب‌ها همگی قابل قبول هستند و مخرج عبارت‌ها را صفر نمی‌کنند.

تست و پاسخ ۱۳

نمودار سهمی $y=f(x)$ در شکل روبه‌رو آمده است. اگر $\lim\limits_{x\to۴}\frac{۱}{a-f(x+b)}=+\infty$ مقدار $a+b$ کدام است؟



۱) -۱

۲) ۳

۳) -۳

۴) -۵

پاسخ: گزینهٔ ۳

مشاوره این تیپ سؤال‌ها بسیار مهم هستند و بارها در کنکور آمده‌اند. در واقع حد از مباحث بسیار مهم کنکور است که حداقل ۳ سؤال در کنکور دارد: ۱) حد $\frac{۰}{۰}$ که معمولاً با هوپیتال رفع ابهام می‌شود، ۲) حد در بی‌نهایت که از هم‌ارزی توان استفاده می‌کنیم و ۳) حد بی‌نهایت $(\frac{\text{عدد}}{\text{صفر}})$ همانند این سؤال.

درس‌نامه ۱) مفهوم حد بی‌نهایت

اگر در بررسی حد، حد صورت عدد غیرصفر و حد مخرج صفر شود (۰ حدی یعنی به ۰ نزدیک شود)، حاصل حد بی‌نهایت می‌شود؛ یعنی $\frac{\text{عدد}}{\text{صفر}}=\pm\infty$.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

برای به دست آوردن نوع بی‌نهایت باید علامت صفر مخرج را تعیین کنیم. در بررسی این حدود، یکی از حالت‌های زیر به وجود می‌آید:

۱) $\frac{\oplus}{0^-} = -\infty$ ۲) $\frac{\ominus}{0^-} = +\infty$

۳) $\frac{\oplus}{0^+} = +\infty$ ۴) $\frac{\ominus}{0^+} = -\infty$

۲) بررسی تیپ مهم حدود بی‌نهایت

به تابع $f(x)=\frac{1}{x-2}$ دقت کنید. اگر از دو طرف به عدد ۲ نزدیک شویم، دو نوع بی‌نهایت مختلف به وجود می‌آید؛ چون $x=2$ ریشهٔ سادهٔ مخرج بوده و علامت صفر در دو طرف $x=2$ فرق می‌کند:

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{x-2}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{1}{x-2}=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

اما در تابع $f(x)=\frac{1}{(x-2)^2}$ داریم:

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x-2)^2}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

یعنی اگر از هر دو طرف به ۲ نزدیک شویم، یک نوع بی‌نهایت به وجود می‌آید، چون $x=2$ ریشهٔ مضاعف مخرج است.

نکته در تابع گویای $y=\frac{1}{ax^2+bx+c}$، اگر حاصل حد وقتی $x\to k$ برابر یک نوع بی‌نهایت $(+\infty$ یا $-\infty)$ شود، $x=k$ ریشهٔ مضاعف مخرج بوده و مخرج به صورت مربع کامل $a(x-k)^2$ است.

پاسخ تشریحی **گام اول:** ابتدا با توجه به نمودار سهمی f داده‌شده، تابع f را به دست می‌آوریم. نقطهٔ $(2,-1)$ رأس سهمی است:

$$f(x)=k(x-2)^2-1 \xrightarrow{(0,-9)\in f} -9=4k-1 \Rightarrow k=-2$$

بنابراین $f(x)=-2(x-2)^2-1$ است.

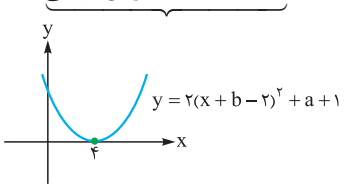
گام دوم: حاصل حد $\lim_{x\to 4}\frac{1}{a-f(x+b)}$ برابر با $+\infty$ شده است؛ پس نتیجه می‌گیریم که $x=4$ ریشهٔ مخرج است. این ریشه مضاعف است،

چون به ازای $x\to 4^+$ و $x\to 4^-$ برابر با $+\infty$ شده است.

در نتیجه داریم:

$$a-f(x+b)=a-(-2(x+b-2)^2-1)=a+2(x+b-2)^2+1=\underbrace{2(x+b-2)^2+a+1}_{\text{سهمی }(*)}=0$$

$$\xrightarrow[\text{ریشهٔ مضاعف معادله است.}]{x=4} (*)\ \underbrace{\text{رأس سهمی}:(2-b,a+1)}=(4,0) \Rightarrow \begin{cases}2-b=4\\ a+1=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}b=-2\\ a=-1\end{cases}$$



گام سوم: حاصل عبارت خواسته‌شده، $a+b=-3$ است.

تست و پاسخ ۱۴

اگر f یک چندجمله‌ای باشد به طوری که $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(2x-1)}{4x+f(x)}=\frac{1}{2}$، مقدار $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}f(3x)$ چه عددی است؟

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) ۴ ۴) $\frac{9}{4}$

پاسخ: گزینهٔ ۳

مشاوره سؤال دشواری است که حل آن نیاز به دقت و خلاقیت دارد. اگر آن را حل کردید، آفرین!

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ تشریحی **گام اول:** با توجه به این‌که حاصل حد در بی‌نهایت برابر با $\frac{۱}{۲}$ شده است، نتیجه می‌گیریم که تابع f حتماً از درجهٔ اول است، زیرا اگر f از درجهٔ بالاتر باشد، مقدار حد حتماً برابر با $\frac{۱}{۲}$ نخواهد شد. آن به این دلیل است که اگر f از درجهٔ اول نباشد، با در نظر گرفتن ضرایب xهای پرتوان در صورت و مخرج، توان x در صورت بزرگ‌تر از توان x در مخرج خواهد شد ($f(۲x-۱)$ را با $f(x)$ مقایسه کنید).

گام دوم: تابع f را به صورت $f(x)=ax+b$ در نظر می‌گیریم و در حد داده‌شده، جای‌گذاری می‌کنیم.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(۲x-۱)}{۴x+f(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{a(۲x-۱)+b}{۴x+ax+b}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۲ax+b-a}{(۴+a)x+b}=\frac{۲a}{۴+a}=\frac{۱}{۲}$$

$$\xrightarrow[\text{می‌کنیم.}]{\text{طرفین‌وسطین}} ۴a=۴+a \Rightarrow a=\frac{۴}{۳}$$

پس $f(x)=\frac{۴}{۳}x+b$ می‌شود.

گام سوم: حالا حاصل حد خواسته‌شده را به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{۱}{x}f(۳x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{۱}{x}(۴x+b)=\lim_{x\to+\infty}۴+\frac{b}{x}=۴$$

تست و پاسخ ۱۵

هرگاه $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۶}}\frac{a[\frac{\pi}{x}]+b}{\sin x+a\cos ۲x}=+\infty$ مقدار $[b]$ چه عددی است؟ ($[\,]$، نماد جزء صحیح است.)

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۵ یا ۶ ۴) ۵ یا ۴

پاسخ: گزینهٔ ۲

مشاوره در به دست آوردن حد، ابتدا تکلیف جزء صحیح و قدرمطلق را مشخص کنید.

پاسخ تشریحی **گام اول:** با توجه به این‌که حاصل حد داده‌شده، برابر با $+\infty$ شده است، نتیجه می‌گیریم که $x=\frac{\pi}{۶}$ ریشهٔ مخرج است:

$$\sin x+a\cos ۲x=۰ \xrightarrow{x=\frac{\pi}{۶}} \frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}a=۰ \Rightarrow a=-۱$$

گام دوم: پس $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۶}}\frac{-[\frac{\pi}{x}]+b}{\sin x-\cos ۲x}=+\infty$ است.

گام سوم: برای $x\to\frac{\pi}{۶}^+$، حد را ساده می‌کنیم. ابتدا تکلیف جزء صحیح را مشخص می‌کنیم:

$$x\to\frac{\pi}{۶}^+ \Rightarrow x>\frac{\pi}{۶} \Rightarrow \frac{۱}{x}<\frac{۶}{\pi} \Rightarrow \frac{\pi}{x}<۶ \Rightarrow [\frac{\pi}{x}]=۵$$

در نتیجه:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۶}^+}\frac{-۵+b}{\sin x-(۱-۲\sin^۲ x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۶}^+}\frac{b-۵}{\underbrace{(۲\sin x-۱)}_{۰^+}\underbrace{(\sin x+۱)}_{+}}=+\infty$$

مقدار عبارت $۲\sin x-۱$ به ازای $x\to\frac{\pi}{۶}^+$، برابر با ۰^+ می‌شود، پس مخرج عبارت، $+$ است؛ بنابراین صورت هم باید مثبت باشد. داریم:

$$b-۵>۰ \Rightarrow b>۵$$

گام چهارم: حالا برای $x\to\frac{\pi}{۶}^-$ حد را ساده می‌کنیم:

$$x\to\frac{\pi}{۶}^- \Rightarrow x<\frac{\pi}{۶} \Rightarrow \frac{۱}{x}>\frac{۶}{\pi} \Rightarrow \frac{\pi}{x}>۶ \Rightarrow [\frac{\pi}{x}]=۶$$

پس خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۶}^-}\frac{-۶+b}{\underbrace{(۲\sin x-۱)}_{۰^-}\underbrace{(\sin x+۱)}_{+}}=+\infty$$

با توجه به علامت مخرج، صورت باید منفی باشد، پس $-۶+b<۰ \Rightarrow b<۶$.

گام پنجم: از اشتراک بازه‌های به‌دست‌آمده برای b نتیجه می‌گیریم که $۵<b<۶$ و $[b]=۵$ است.

تست و پاسخ ۱۶

هرگاه $\lim\limits_{x\to۲}\frac{۳a-۲x(-۱)^{[x]}}{۲x+b}=-\infty$، برای $a+b$ چند مقدار صحیح به دست می‌آید؟ ($[\,]$، نماد جزء صحیح است.)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) هیچ

پاسخ: گزینهٔ ۳

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ تشریحی **گام اول:** چون حاصل حد، $-\infty$ شده، نتیجه می‌گیریم که $x=۲$ ریشهٔ مخرج است:

$$۲x+b=۰ \Rightarrow x=\frac{-b}{۲}=۲ \Rightarrow b=-۴$$

گام دوم: چون جزء صحیح داریم، اول حاصل حد را برای $x\to ۲^+$ به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to ۲^+}\frac{۳a-۲x(-۱)^{[x]}}{۲x-۴}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{۳a-۲x(-۱)^{۲}}{۰^+}=\frac{۳a-۴}{۰^+}=-\infty$$

نتیجه می‌گیریم که صورت باید منفی باشد.

$$۳a-۴<۰ \Rightarrow a<\frac{۴}{۳}$$

گام سوم: حالا حاصل حد را برای $x\to ۲^-$ به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to ۲^-}\frac{۳a-۲x(-۱)^{[x]}}{۲x-۴}=\lim_{x\to ۲^-}\frac{۳a-۲x(-۱)^{۱}}{۰^-}=\frac{۳a+۴}{۰^-}=-\infty$$

نتیجه می‌گیریم که صورت باید مثبت باشد، پس:

$$۳a+۴>۰ \Rightarrow a>\frac{-۴}{۳}$$

گام چهارم: از محدوده‌هایی که برای a به دست آمده است، اشتراک می‌گیریم:

$$\frac{-۴}{۳}<a<\frac{۴}{۳} \quad , \quad b=-۴$$

گام پنجم: برای عبارت $a+b$ داریم:

$$-\frac{۱۶}{۳}<a+b<-\frac{۸}{۳}$$

پس ۳ مقدار صحیح $\{-۵,-۴,-۳\}$ برای $a+b$ می‌تواند وجود داشته باشد.

تست و پاسخ ۱۷

هرگاه $f(x)=\frac{۲x+۳}{x-۲}$ به طوری که $g(x)=x(a-f(x))$ دارای مجانب افقی $y=b$ باشد، مقدار $a-b$ کدام است؟

۱) ۹
۲) ۵
۳) ۷
۴) ۱۱

$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty} g(x)=b$

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس‌نامه بررسی $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ (f و g دو چندجمله‌ای هستند.)

هر چندجمله‌ای در $\pm\infty$ هم‌ارز جمله با بزرگ‌ترین توان است؛ یعنی $\lim_{x\to\pm\infty}(a_nx^n+a_{n-۱}x^{n-۱}+\cdots)\sim a_nx^n$. برای رفع ابهام از $\frac{\infty}{\infty}$ این هم‌ارزی استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-۱}x^{n-۱}+\cdots}{b_mx^m+b_{m-۱}x^{m-۱}+\cdots}=\frac{a_nx^n}{b_mx^m}=\begin{cases}\pm\infty & m<n\\ \frac{a_n}{b_m} & m=n\\ ۰ & m>n\end{cases}$$

نکته برای به دست آوردن معادلات مجانب‌های افقی، یک بار $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ و بار دیگر $\lim_{x\to-\infty}f(x)$ (در صورت متفاوت‌بودن) را حساب می‌کنیم. اگر حاصل عدد حقیقی b شود، $y=b$ مجانب افقی است. یک تابع حداکثر دو مجانب افقی دارد.

نکته در تابع $f(x)=\frac{a_nx^n+a_{n-۱}x^{n-۱}+\cdots}{b_nx^n+b_{n-۱}x^{n-۱}+\cdots}$ (صورت و مخرج هم‌درجه هستند)، خط $y=\frac{a_n}{b_n}$ مجانب افقی تابع است.

پاسخ تشریحی **گام اول:** با جای‌گذاری تابع f، تابع g را تشکیل می‌دهیم:

$$g(x)=x(a-f(x))=x(a-\frac{۲x+۳}{x-۲})=x(\frac{ax-۲a-۲x-۳}{x-۲})=x(\frac{(a-۲)x-۲a-۳}{x-۲})=\frac{(a-۲)x^۲-(۲a+۳)x}{x-۲}$$

گام دوم: تابع g دارای مجانب افقی برابر با b است، یعنی:

$$\lim_{x\to\infty}g(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{(a-۲)x^۲-(۲a+۳)x}{x-۲}=b \quad (*)$$

چون درجهٔ صورت از مخرج بزرگ‌تر است، تنها در صورتی حاصل حد برابر با b است که ضریب $x^۲$ صفر باشد:

$$a-۲=۰ \Rightarrow a=۲$$

گام سوم: عبارت (*) را بازنویسی می‌کنیم:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-۷x}{x-۲}=-۷=b$$

گام چهارم: مقدار $a-b=۲-(-۷)=۹$ به دست می‌آید.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

نکته دقت کنید که تابع g، فقط دارای یک مجانب افقی است، پس $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ می‌باشد.

تست و پاسخ ۱۸

اگر $A(۲,-۱)$ نقطهٔ تلاقی مجانب‌های $f(x)=\frac{bx^۲-x+۱}{-x^۲+ax-a}$ باشد، مقدار $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{ax^۲+bx}-۲x)$ چه عددی است؟

مجانب قائم: x_A و مجانب افقی: y_A

۱) $-\frac{۱}{۲}$
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{۱}{۴}$
۴) صفر

پاسخ: گزینهٔ ۳

مشاوره سؤال بسیار مهم مشابه کنکور سراسری که محل تلاقی مجانب‌ها را داده است.

درس‌نامه

۱) مجانب‌های قائم تابع



$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$ $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$ $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$

در این صورت به خط $x=a$ مجانب قائم تابع می‌گوییم.

نکته ۱) برای به دست آوردن معادلات مجانب‌های قائم ابتدا تابع را ساده می‌کنیم.

۲) ریشه‌های مخرج که ریشه‌های صورت نباشند، معادلات مجانب‌های قائم هستند (البته به شرطی که حداقل در یک طرف آن دامنه داشته باشیم).

۳) اگر ریشهٔ مخرج، ریشهٔ صورت هم باشد، باید رفع ابهام کنیم. اگر بعد از رفع ابهام حاصل ∞ شود، آن ریشه مجانب قائم است و در غیر این صورت خیر.

۲) به دست آوردن مجانب‌های افقی:

اگر $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$ یا $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$، خط $y=b$ را مجانب افقی تابع می‌گوییم.

نکته

$$\sqrt[n]{ax^n+bx^{n-۱}+\cdots}\sim\begin{cases}\sqrt[n]{a}\,(x+\frac{b}{na}) & ،\ n\text{ فرد}\\ \sqrt[n]{a}\,|x+\frac{b}{na}| & ،\ n\text{ زوج}\end{cases},\quad n\in\mathbb{N},\ x\to\infty$$

پاسخ تشریحی **گام اول:** ابتدا مجانب افقی تابع f را می‌یابیم:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{bx^۲-x+۱}{-x^۲+ax-a}=\frac{b}{-۱}=y_A=-۱\Rightarrow b=۱$$

گام دوم: $x_A=۲$ مجانب قائم تابع f است؛ پس این نقطه، ریشهٔ مخرج است:

$$-x^۲+ax-a=۰\xrightarrow{x=۲}-۴+۲a-a=۰\Rightarrow a=۴$$

گام سوم: حاصل حد خواسته‌شده را به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{ax^۲+bx}-۲x)=\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{۴x^۲+x}-۲x)\overset{\text{مزدوج صورت}}{=\!=}\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{۴x^۲+x}-۲x)(\sqrt{۴x^۲+x}+۲x)}{(\sqrt{۴x^۲+x}+۲x)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{۴x^۲+x-۴x^۲}{(\sqrt{۴x^۲+x}+۲x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{۴x^۲+x}+۲x}\overset{\text{هم‌ارزی}}{=\!=}\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt[۲]{۴}\,|x+\frac{۱}{۸}|+۲x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{۲x+\frac{۱}{۴}+۲x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{۴x+\frac{۱}{۴}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{۴x}=\frac{۱}{۴}$$

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

ریاضیات گسسته: صفحه‌های ۱ تا ۴۲

تست و پاسخ ۱۹

در یک تقسیم، مقسوم‌علیه، کوچک‌ترین عدد دورقمی ممکن و باقی‌مانده، برابر ۱ است. اگر مقسوم‌علیه را ۲ واحد بیشتر کنیم، باقی‌مانده برابر ۲ می‌شود. مجموع مقادیر قابل قبول برای مقسوم‌های سه‌رقمی چند است؟

۱) ۳۴۰۵ ۲) ۳۴۰۶ ۳) ۳۴۰۷ ۴) ۳۴۰۸

پاسخ: گزینهٔ ۱

خودت حل کنی بهتره کافیه به این موضوع توجه کنید که کوچک‌ترین عدد دورقمی ممکن برای مقسوم‌علیه، ۱۱ هست.

درس نامه

۱) اگر باقیماندهٔ تقسیم a به b برابر r باشد، می‌توانیم بنویسیم:

$$a \overset{b}{\equiv} r$$

۲) بعضی از ویژگی‌های همنهشتی به صورت زیر است:

الف) $a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow a = mt + b$

ب) $a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow a \pm mg \overset{m}{\equiv} b \pm mt$ (می‌توانیم هر مضرب دلخواهی از پیمانه را به طرفین اضافه کنیم.)

پ) $\begin{cases} a \overset{m}{\equiv} b \\ a \overset{n}{\equiv} b \end{cases} \Rightarrow a \overset{[m,n]}{\equiv\equiv} b$

۳) اگر اعضای مجموعهٔ A، تشکیل یک تصاعد عددی (دنبالهٔ حسابی) دهند، مجموع اعضای آن برابر است با:

$$\text{تعداد اعضا} \times \frac{\text{بزرگ‌ترین عضو} + \text{کوچک‌ترین عضو}}{۲}$$

پاسخ تشریحی **گام اول:** فرض کنید مقسوم‌علیه برابر b و مقسوم برابر a باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم a به b برابر ۱ است، پس:

$$a \overset{b}{\equiv} ۱$$

گام دوم: اگر مقسوم‌علیه (یعنی b) را ۲ واحد بیشتر کنیم، باقی‌مانده، ۲ می‌شود، یعنی:

$$a \overset{b+۲}{\equiv} ۲$$

گام سوم: مقسوم‌علیه برابر کوچک‌ترین عدد دورقمی است؛ حالا اگر $b = ۱۰$ باشد، داریم:

$$\begin{cases} a \overset{b}{\equiv} ۱ \\ a \overset{b+۲}{\equiv} ۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \overset{۱۰}{\equiv} ۱ \\ a \overset{۱۲}{\equiv} ۲ \end{cases}$$

چنین چیزی غیرممکن است، چون از $a \overset{۱۰}{\equiv} ۱$، $a = ۱۰t + ۱$ می‌شود که عددی فرد است، ولی از $a \overset{۱۲}{\equiv} ۲$، $a = ۱۲q + ۲$ می‌شود که عددی زوج است؛ بنابراین b نمی‌تواند برابر ۱۰ باشد.

گام چهارم: حالا فرض می‌کنیم $b = ۱۱$ است:

$$\begin{cases} a \overset{b}{\equiv} ۱ \\ a \overset{b+۲}{\equiv} ۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \overset{۱۱}{\equiv} ۱ \xrightarrow{+۶\times۱۱} a \overset{۱۱}{\equiv} ۱+۶۶ \\ a \overset{۱۳}{\equiv} ۲ \xrightarrow{+۵\times۱۳} a \overset{۱۳}{\equiv} ۲+۶۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \overset{۱۱}{\equiv} ۶۷ \\ a \overset{۱۳}{\equiv} ۶۷ \end{cases} \Rightarrow a \overset{[۱۱,۱۳]}{\equiv} ۶۷ \Rightarrow a \overset{۱۴۳}{\equiv} ۶۷ \Rightarrow a = ۱۴۳t + ۶۷$$

گام پنجم: مقادیر سه‌رقمی a را می‌خواهیم:

$$۱۰۰ \le a \le ۹۹۹ \Rightarrow ۱۰۰ \le ۱۴۳t + ۶۷ \le ۹۹۹$$

$$\Rightarrow t = ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

$$\Rightarrow a=\begin{cases}۱۴۳+۶۷=۲۱۰\\ ۲\times۱۴۳+۶۷=۳۵۳\\ ۳\times۱۴۳+۶۷=۴۹۶\\ ۴\times۱۴۳+۶۷=۶۳۹\\ ۵\times۱۴۳+۶۷=۷۸۲\\ ۶\times۱۴۳+۶۷=۹۲۵\end{cases}$$

مجموع این مقادیر را می‌خواهیم. این ۶ عدد تشکیل یک تصاعد عددی (دنبالهٔ حسابی) می‌دهند؛ پس طبق مورد ۳ درس‌نامه داریم:

$$\text{جمع این ۶ عدد}=\frac{۲۱۰+۹۲۵}{۲}\times۶=۳۴۰۵$$

تست و پاسخ ۲۰

اگر $a-b\mid a$، آن‌گاه کدام گزینه همواره درست نیست؟

۱) $a-b\mid a+b$ ۲) $b\mid a^۲$ ۳) $a-b\mid b$ ۴) $b-a\mid ۲a-b^۲$

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس‌نامه بعضی از قوانین عادکردن به صورت زیر است:

الف) $a\mid a$

ب) $\begin{cases}a\mid b\\ a\mid c\end{cases}\Rightarrow a\mid b\pm c$

پ) $a\mid b\Rightarrow \pm a\mid \pm b$

ت) $a\mid b\Rightarrow a\mid bt$

پاسخ تشریحی روش اول: **گام اول**: می‌دانیم هر عدد، خودش را می‌شمارد، پس:

$$\begin{cases}a-b\mid a-b\\ a-b\mid a\end{cases}\xrightarrow{\text{تفاضل}} a-b\mid a-(a-b)\Rightarrow a-b\mid b\Rightarrow \text{درست}\ ۳$$

گام دوم: حالا با توجه به این‌که $a-b\mid a$ و $a-b\mid b$، می‌توانیم بگوییم $a-b\mid a+b$، پس ۱ هم درست است.

گام سوم: حالا داریم:

$$\begin{cases}a-b\mid a\\ a-b\mid b\end{cases}\xrightarrow[\times b]{\times ۲}\begin{cases}a-b\mid ۲a\\ a-b\mid b^۲\end{cases}\xrightarrow{\text{تفاضل}} a-b\mid ۲a-b^۲\Rightarrow b-a\mid ۲a-b^۲$$

پس ۴ هم درست و ۲ نادرست می‌شود.

روش دوم: معادلهٔ $a-b\mid a$ به ازای $a=۳$ و $b=۲$ درست است. حالا گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) $a-b\mid a+b\Rightarrow ۱\mid ۵$ ✓

۲) $b\mid a^۲\Rightarrow ۲\mid ۹$ ✗

۳) $a-b\mid b\Rightarrow ۱\mid ۲$ ✓

۴) $b-a\mid ۲a-b^۲\Rightarrow -۱\mid ۲$ ✓

پس ۲ نادرست است.

تست و پاسخ ۲۱

کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد، ۶ برابر بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک آن‌ها است. اگر تفاضل مربع این دو عدد برابر ۱۲۸۰ باشد، مجموع ارقام عدد بزرگ‌تر چند است؟

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

پاسخ: گزینهٔ ۳

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

مشاوره متباین‌سازی جزء مباحث پرتکرار در کنکور سراسری است که متأسفانه اکثر دانش‌آموزان با آن مشکل دارند، برای همین پیشنهاد می‌کنیم به درس‌نامه و روند حل این سؤال توجه ویژه‌ای داشته باشید.

درس‌نامه متباین‌سازی

هر وقت در سؤالی، معادله‌ای برحسب ب.م.م یا ک.م.م داشتیم، از متباین‌سازی استفاده می‌کنیم؛ به این صورت که ابتدا فرض می‌کنیم ب.م.م دو عدد d است، یعنی: $(a,b)=d$

حالا مقادیر دو عدد برابر $a=da_1$ و $b=db_1$ می‌شوند که a_1 و b_1 نسبت به هم اول هستند؛ از طرفی مقدار ک.م.م دو عدد، برابر است با: $[a,b]=da_1b_1$

پاسخ تشریحی **گام اول:** ک.م.م دو عدد، ۶ برابر ب.م.م آن دو عدد است، پس:

$$[a,b]=6(a,b) \quad *$$

گام دوم: از متباین‌سازی کمک می‌گیریم، یعنی اگر فرض کنیم ب.م.م دو عدد d است، داریم:

$$(a,b)=d \Rightarrow \begin{cases} a=da_1 \\ b=db_1 \\ [a,b]=da_1b_1 \end{cases}$$

گام سوم: در * به جای (a,b) و $[a,b]$، به ترتیب d و da_1b_1 را قرار می‌دهیم:

$$da_1b_1=6d \Rightarrow a_1b_1=6 \Rightarrow \begin{cases} a_1=6,b_1=1 \\ a_1=3,b_1=2 \end{cases}$$

بنابراین برای مقادیر دو عدد a و b، دو حالت داریم:

$$a=da_1,b=db_1 \Rightarrow \begin{cases} a=6d,b=d \\ a=3d,b=2d \end{cases}$$

گام چهارم: تفاضل مربع این دو عدد ۱۲۸۰ است، حالا اگر این دو عدد $a=6d$ و $b=d$ باشند، داریم:

$$a^2-b^2=1280 \Rightarrow 36d^2-d^2=1280 \Rightarrow 35d^2=1280 \Rightarrow d^2=\frac{256}{7}$$ غ‌ق‌ق

و اگر این دو عدد $a=3d$ و $b=2d$ باشند، داریم:

$$a^2-b^2=1280 \Rightarrow 9d^2-4d^2=1280 \Rightarrow 5d^2=1280 \Rightarrow d^2=256 \Rightarrow d=16$$

گام پنجم: حالا به ازای $d=16$، مقادیر دو عدد به صورت زیر می‌شوند:

$$\begin{cases} a=3d \\ b=2d \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a=48 \\ b=32 \end{matrix}$$

پس مجموع ارقام عدد بزرگ‌تر (یعنی a) برابر $12=8+4$ می‌شود.

دقت کنید شاید بپرسید چرا از $a_1b_1=6$ نتیجه‌های دیگه، مثل $a_1=2$ و $b_1=3$ و ... رو در نظر نگرفتیم؟ جواب اینه که اصلاً اهمیتی نداره، چون توی بقیهٔ حالت‌ها باز هم به همین جواب می‌رسیدیم.

تست و پاسخ ۲۲

قرار است شش تیم والیبال با یکدیگر مسابقه بدهند، به‌گونه‌ای که هر دو تیم دقیقاً یک بار روبه‌روی هم قرار بگیرند. تا این‌جای مسابقات، تنها یک تیم با سه بازی، بیشترین مسابقه را برگزار کرده است. اگر بقیهٔ تیم‌ها لااقل یک بازیِ انجام‌شده داشته باشند، حداکثر چند بازی تا پایان مسابقات باقی مانده است؟

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۱ ۴) ۱۲

پاسخ: گزینهٔ ۳

مشاوره بسیاری از سؤال‌های گراف کنکور چند سال اخیر، به این صورت طرح شده‌اند که برای رسیدن به جواب، باید حتماً شکل گراف را رسم کنیم، برای همین پیشنهاد می‌کنیم روی رسم یک گراف، تمرکز کافی بگذارید.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

خودت حل کنی بهتره ۶ تیم والیبال را ۶ رأس یک گراف در نظر بگیرید به طوری که اگر دو تیم با هم مسابقه دادند، یال بین آن دو رأس را رسم کنید. حالا یک گراف با $P=6$ و $\Delta=3$ داریم که ادامهٔ روند حل، بسیار ساده است.

درس نامه ۱) اندازهٔ گراف کامل P رأسی برابر است با:

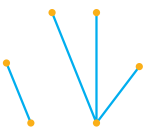
$$q_{k_P}=\frac{P(P-1)}{2}$$

۲) در یک گراف، بزرگ‌ترین درجه رأس را با Δ و کوچک‌ترین درجه رأس را با δ نمایش می‌دهیم.

پاسخ تشریحی **گام اول:** ۶ تیم والیبال را ۶ رأس یک گراف در نظر بگیرید به طوری که اگر دو تیم با هم مسابقه دادند، یال بین آن دو رأس را رسم کنید.

گام دوم: در این سری مسابقات، تنها یک تیم با سه بازی، بیشترین مسابقه را برگزار کرده، پس در این گراف، فقط یک رأس با درجهٔ $\Delta=3$ داریم.

گام سوم: هر تیم حداقل یک بازی انجام داده، یعنی در این گراف، رأس ایزوله نداریم، حالا برای این‌که ببینیم تا پایان مسابقات، حداکثر چند بازی باقی مانده، باید حداقل اندازهٔ گراف را به دست آوریم که به شکل مقابل است:



گام چهارم: اندازهٔ گراف کامل ۶ رأسی، $\frac{6\times5}{2}=15$ است، یعنی تعداد کل مسابقات ۱۵ تا است که تا این‌جا ۴ بازی برگزار شده، پس حداکثر ۱۱ بازی تا پایان مسابقات باقی مانده است.

تست و پاسخ ۲۳

باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد 2^{89} بر ۲۱ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۱۲ ۴) ۱۹

پاسخ: گزینهٔ ۱

خودت حل کنی بهتره کافیه باقی‌ماندهٔ تقسیم این عدد بر ۳ و ۷ را به دست بیاورید و سپس ک.م.م بگیرید. برای به دست آوردن باقی‌ماندهٔ تقسیم 2^{89} بر ۷، باید باقی‌ماندهٔ توان، یعنی 8^9 را بر ۳ به دست آورید.

پاسخ تشریحی **گام اول:** باقی‌ماندهٔ این عدد بر ۳ و ۷ را به دست می‌آوریم و ک.م.م می‌گیریم.

برای به دست آوردن باقی‌ماندهٔ تقسیم این عدد بر ۳ داریم:

$$2\overset{3}{\equiv}-1 \Rightarrow 2^{89}\overset{3}{\equiv}(-1)^{\overset{\text{زوج}}{89}} \Rightarrow 2^{89}\overset{3}{\equiv}1\overset{3}{\equiv}4$$

گام دوم: باقی‌ماندهٔ تقسیم این عدد بر ۷ را به دست می‌آوریم. ابتدا دقت کنید $2^3\overset{7}{\equiv}1$ است، از طرفی:

$$8\overset{3}{\equiv}-1 \Rightarrow 8^9\overset{3}{\equiv}-1 \xrightarrow{+3} 8^9\overset{3}{\equiv}2 \Rightarrow 8^9=3t+2$$

در عدد 2^{89}، به جای 8^9 قرار می‌دهیم $3t+2$، پس:

$$2^3\overset{7}{\equiv}1 \xrightarrow{\text{توان } t} 2^{3t}\overset{7}{\equiv}1 \xrightarrow{\times 2^2} 2^{3t+2}\overset{7}{\equiv}4 \Rightarrow 2^{89}\overset{7}{\equiv}4$$

گام سوم: بنابراین:

$$\begin{cases}2^{89}\overset{3}{\equiv}4\\ 2^{89}\overset{7}{\equiv}4\end{cases} \Rightarrow 2^{89}\overset{[3,7]}{\equiv}4 \Rightarrow 2^{89}\overset{21}{\equiv}4$$

تست و پاسخ ۲۴

یک گراف منتظم از مرتبهٔ ۶، چند شکل مختلف دارد؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

پاسخ: گزینهٔ ۴

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

خودت حل کنی بهتره فقط کافیه تعداد گراف‌های ۰، ۱ و ۲ منتظم مرتبهٔ ۶ را پیدا کنید، چون گراف‌های ۳، ۴ و۵ منتظم مرتبهٔ ۶، مکمل این گراف‌ها هستند.

درس نامه تعداد شکل‌های یک گراف و تعداد شکل‌های مکمل آن گراف با هم برابرند، برای مثال تعداد شکل‌های گرافی با $P=3$ و $q=1$، یکی است.



حالا مکمل این گراف، گرافی با $P=3$ و $q=2$ می‌شود که تعداد شکل‌های آن هم یکی است.



۱) تعداد یال‌های گراف کامل P رأسی، برابر است با: $q_{k_P}=\frac{P(P-1)}{2}$

۲) تعداد یال‌های مکمل گراف G (که آن را با نماد $\overline{G}$ نمایش می‌دهیم)، برابر است با: (تعداد رأس‌ها P تا است.) $q_{\overline{G}}=\frac{P(P-1)}{2}-q_G$

۳) در یک گراف rـ منتظم، درجهٔ همهٔ رئوس r است.

۴) مکمل یک گراف rـ منتظم مرتبهٔ P، یک گراف $P-r-1$ـ منتظم مرتبهٔ P است.

پاسخ تشریحی **گام اول:** تعداد گراف‌های ۰ ـ منتظم مرتبهٔ ۶ یکی است.

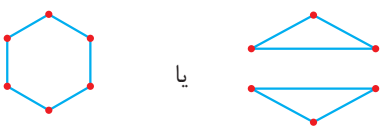


حالا گراف ۵ ـ منتظم مرتبهٔ ۶ مکمل این گراف است، پس تعداد شکل‌های آن هم یکی می‌شود.

گام دوم: تعداد گراف‌های ۱ـ منتظم مرتبهٔ ۶ یکی است.

گراف ۴ـ منتظم مرتبهٔ ۶ مکمل این گراف است، پس تعداد شکل‌های آن هم یکی می‌شود.

گام سوم: تعداد گراف‌های ۲ـ منتظم مرتبهٔ ۶ دوتا است.



گراف۳ـ منتظم مرتبهٔ ۶ مکمل این گراف است، پس تعداد شکل‌های آن هم ۲تا می‌شود.

گام چهارم: بنابراین جواب برابر است با:

$$\underset{\text{۵ـمنتظم}}{1}+\underset{\text{۴ـمنتظم}}{1}+\underset{\text{۳ـمنتظم}}{2}+\underset{\text{۲ـمنتظم}}{2}+\underset{\text{۱ـمنتظم}}{1}+\underset{\text{۰ـمنتظم}}{1}=8$$

تست و پاسخ ۲۵

عدد $n=\overline{abcd}$ بر ۱۳ و عدد n^2 بر ۱۶۸ بخش‌پذیر است. اگر n، کوچک‌ترین مقدار ممکن باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $(\overline{dcba})^{(\overline{badc})}$ بر ۶۳ کدام است؟

۱) ۲۷ ۲) ۲۸ ۳) ۲۹ ۴) صفر

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس نامه برای به دست آوردن باقی‌ماندهٔ تقسیم یک عدد توان‌دار مثل n بر یک عدد مرکب، مثلاً ab، می‌توانیم ابتدا باقی‌ماندهٔ n بر a و b را به دست آوریم و سپس با استفاده از ک.م.م پیمانه‌ها، باقی‌ماندهٔ n بر ab را محاسبه کنیم. دقت کنید منظورمان از ک.م.م پیمانه‌ها این است:

$$\begin{cases} n\overset{a}{\equiv}c \\ n\overset{b}{\equiv}c \end{cases} \Rightarrow n\overset{[a,b]}{\equiv}c$$

(دقت کنید در این روش باید a,b را طوری انتخاب کنید تا نسبت به هم اول باشند و $[a,b]=ab$ شود.)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

پاسخ تشریحی **گام اول:** $n^۲$ بر $۱۶۸ = ۳ \times ۷ \times ۸$ بخش‌پذیر است، پس:

$$۱۶۸ \mid n^۲ \Rightarrow ۳ \times ۷ \times ۸ \mid n^۲ \Rightarrow \begin{cases} ۳ \mid n^۲ \\ ۷ \mid n^۲ \\ ۸ \mid n^۲ \end{cases}$$

گام دوم: $۳ \mid n^۲$، پس n باید مضرب ۳ باشد، $۷ \mid n^۲$ پس n باید مضرب ۷ باشد و $۸ \mid n^۲$، پس n باید مضرب ۴ باشد.

گام سوم: n مضرب ۱۳ هم هست، پس n باید مضرب ۳، ۴، ۷ و ۱۳ باشد، یعنی:

$$n = ۳ \times ۴ \times ۷ \times ۱۳t \Rightarrow n = ۱۰۹۲t$$

گام چهارم: کوچک‌ترین مقدار n را می‌خواهیم که به ازای $t = ۱$ برابر ۱۰۹۲ می‌شود، پس:

$$\overline{abcd} = ۱۰۹۲ \Rightarrow \begin{cases} a = ۱ \\ b = ۰ \\ c = ۹ \\ d = ۲ \end{cases}$$

گام پنجم: باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $۲۹۰۱^{۱۲۹} = \overline{(dcba)}^{\overline{badc}}$ بر ۶۳ را می‌خواهیم.

ابتدا به جای ۲۹۰۱، باقی‌ماندهٔ آن بر ۶۳ را قرار می‌دهیم:

$$\begin{array}{r|l} ۲۹۰۱ & ۶۳ \\ - \quad ۴۶ & \\ \hline ۳ & \end{array}$$

پس باید باقی‌ماندهٔ $۳^{۱۲۹}$ بر ۶۳ را به دست آوریم.

گام ششم: باقی‌ماندهٔ $۳^{۱۲۹}$ بر ۹ و ۷ را به دست آوریم و ک.م.م می‌گیریم: $۳^{۱۲۹}$ مضرب ۹ است، پس باقی‌ماندهٔ تقسیم آن بر ۹ برابر صفر می‌شود. حالا برای به دست آوردن باقی‌ماندهٔ $۳^{۱۲۹}$ بر ۷ داریم:

$$۳^۳ \overset{۷}{\equiv} -۱ \xrightarrow{\text{توان } ۴۳} ۳^{۱۲۹} \overset{۷}{\equiv} -۱ \overset{۷}{\equiv} ۶$$

گام هفتم: در آخر داریم:

$$\begin{cases} ۳^{۱۲۹} \overset{۹}{\equiv} ۰ \overset{۹}{\equiv} ۲۷ \xrightarrow{+۳\times۹} \\ ۳^{۱۲۹} \overset{۷}{\equiv} ۶ \overset{۷}{\equiv} ۲۷ \xrightarrow{+۳\times۷} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۳^{۱۲۹} \overset{۹}{\equiv} ۲۷ \\ ۳^{۱۲۹} \overset{۷}{\equiv} ۲۷ \end{cases} \Rightarrow ۳^{۱۲۹} \overset{[۹,۷]}{\equiv} ۲۷ \Rightarrow ۳^{۱۲۹} \overset{۶۳}{\equiv} ۲۷$$

پس جواب برابر ۲۷ می‌شود.

تست و پاسخ ۲۶

در گرافی ناهمبند از مرتبهٔ ۱۰، اندازهٔ گراف برابر ۳۵ است. درجهٔ رئوس در این گراف، چند عدد مختلف است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ: گزینهٔ ۲

خودت حل کنی بهتره کافیه یکی از رأس‌های گراف رو بذاری کنار، با ۹ رأس دیگه یه گراف کامل ۹رأسی تشکیل دهید و یکی از یال‌های آن را حذف کنید تا جواب حاصل شود.

درس‌نامه ۱) **گراف همبند:** به گرافی که بین هر دو رأس دلخواه آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد، گراف همبند می‌گوییم.

۲) **گراف ناهمبند:** به گرافی که همبند نباشد، ناهمبند می‌گوییم.

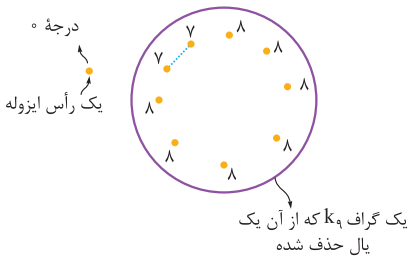
۳) در گراف کامل P رأسی تعداد یال‌ها برابر $\frac{P(P-۱)}{۲}$ و درجهٔ هر رأس $P-۱$ است.

پاسخ تشریحی **گام اول:** ابتدا برای این‌که گراف ناهمبند شود، یکی از رأس‌های گراف را کنار می‌گذاریم. حالا با ۹ رأس دیگر یک گراف کامل ۹رأسی تشکیل می‌دهیم که اندازهٔ آن $\frac{۹ \times ۸}{۲} = ۳۶$ است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

گام دوم: گراف ما ۳۵ یال دارد، پس باید از گراف قبلی یک یال حذف کنیم، به شکل روبه‌رو:

(یال حذف‌شده را با نقطه‌چین نمایش داده‌ایم.)



گام سوم: حالا با توجه به گراف رسم‌شده، درجهٔ رئوس این گراف صفر، ۷ و ۸ یعنی سه مقدار متمایزند.

تست و پاسخ ۲۷

مجموع طول‌های همهٔ نقاط با مختصات طبیعی که روی خط $y=-\frac{۱۴}{۱۵}x+\frac{۲۰۰}{۳}$ قرار دارند، کدام است؟

۱) ۱۷۰ ۲) ۱۸۰ ۳) ۱۷۵ ۴) ۱۸۵

پاسخ: گزینهٔ ۳

خودت حل کنی بهتره کافیه معادلهٔ خط رو به معادلهٔ سیالهٔ خطی تبدیل کنی و جواب‌های صحیحش رو به دست بیاری!

مشاوره **معادلهٔ سیاله خطی جزء پای ثابت‌های کنکورهای سراسری است، به خاطر همین پیشنهاد می‌کنیم به درس‌نامهٔ این سؤال توجه کافی داشته باشید.**

درس‌نامه به معادله‌هایی به شکل $ax+by=c$ (a، b و c اعدادی صحیح‌اند)، معادلهٔ سیاله خطی می‌گوییم. هدف از حل این معادلات این است که مجموعه‌جواب‌های صحیح (البته بعضی وقت‌ها هم مجموعه‌جواب‌های نامنفی و یا مجموعه‌جواب‌های طبیعی) برای x و y که در این معادله صدق می‌کنند را بیابیم، برای مثال در معادلهٔ $۳x+۵y=۷$، یکی از جواب‌ها $x=-۱$ و $y=۲$ است، یک جواب دیگر $x=۴$ و $y=-۱$ است و ... .

حالا برای به دست آوردن مجموعه‌جواب‌های این معادله، ابتدا معادلهٔ $ax+by=c$ را به یکی از معادله‌های همنهشتی $ax\overset{b}{\equiv}c$ یا $by\overset{a}{\equiv}c$ تبدیل کرده و یکی از این دو معادله را حل می‌کنیم تا فرم x یا y به دست آید، سپس با قراردادن این فرم در معادلهٔ اصلی، فرم متغیر دیگر نیز به دست می‌آید، برای مثال برای به دست آوردن مجموعه‌جواب‌های $۳x+۵y=۷$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$۳x+۵y=۷ \Rightarrow ۵y\overset{۳}{\equiv}۷ \xrightarrow[۷\equiv+۱]{۵\equiv-۱} -y\overset{۳}{\equiv}۱ \Rightarrow y\overset{۳}{\equiv}-۱ \Rightarrow y=۳t-۱$$

حالا در معادلهٔ $۳x+۵y=۷$، به جای y قرار می‌دهیم $۳t-۱$:

$$۳x+۵(۳t-۱)=۷ \Rightarrow ۳x+۱۵t-۵=۷ \Rightarrow ۳x+۱۵t=۱۲ \Rightarrow x=۴-۵t$$

با قراردادن مقادیر صحیح به جای t، جواب‌های معادله حاصل می‌شود. دقت کنید اگر از ما جواب‌های حسابی x و y را بخواهند، باید شرط $x\geq ۰$ و $y\geq ۰$ را نیز در نظر بگیریم و اگر جواب‌های طبیعی x و y را بخواهند، باید شرط $x\geq ۱$ و $y\geq ۱$ را در نظر بگیریم.

پاسخ تشریحی **گام اول:** ابتدا خط را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$y=-(\frac{۱۴}{۱۵})x+\frac{۲۰۰}{۳} \xrightarrow{\times ۱۵} ۱۵y=-۱۴x+۱۰۰۰ \Rightarrow ۱۴x+۱۵y=۱۰۰۰$$

گام دوم: معادلهٔ سیالهٔ خطی بالا را به یک معادلهٔ همنهشتی برحسب y تبدیل می‌کنیم:

$$\Rightarrow ۱۵y\overset{۱۴}{\equiv}۱۰۰۰ \xrightarrow[۱۰۰۰\equiv۶]{۱۵\equiv۱} y\overset{۱۴}{\equiv}۶ \Rightarrow y=۱۴t+۶$$

گام سوم: در معادلهٔ اصلی به جای y قرار می‌دهیم $۱۴t+۶$ تا فرم x به دست آید:

$$\Rightarrow ۱۴x+۱۵(۱۴t+۶)=۱۰۰۰ \Rightarrow ۱۴x+۱۵\times ۱۴t+۹۰=۱۰۰۰$$

$$\Rightarrow ۱۴x+۱۵\times ۱۴t=۹۱۰ \xrightarrow{\div ۱۴} x+۱۵t=۶۵ \Rightarrow x=۶۵-۱۵t$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

گام چهارم: جواب‌های طبیعی این معادله را می‌خواهیم، پس شرط $x \geq 1$ و $y \geq 1$ را داریم:

$$\begin{cases} x \geq 1 \Rightarrow 65 - 15t \geq 1 \Rightarrow 15t \leq 64 \xrightarrow{t \in \mathbb{Z}} t \leq 4 \\ y \geq 1 \Rightarrow 14t + 6 \geq 1 \Rightarrow 14t \geq -5 \xrightarrow{t \in \mathbb{Z}} t \geq 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} t = 0, 1, 2, 3, 4$$

گام پنجم: حالا برای به دست آوردن طول نقاط با مختصات صحیح، کافی است در $x = 65 - 15t$، به جای t، صفر، ۱، ۲، ۳ و ۴ را قرار دهیم:

$$\left.\begin{array}{l} 65 - 15 \times 0 = 65 \\ 65 - 15 \times 1 = 50 \\ 65 - 15 \times 2 = 35 \\ 65 - 15 \times 3 = 20 \\ 65 - 15 \times 4 = 5 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{جمع}} 175$$

تست و پاسخ ۲۸

در گراف G، $\forall u \in V(G) : |N_G(u)| = 5$. اگر در گراف $\bar{G}$، $4p - 5q = 24$ باشد، در گراف G چند مسیر وجود دارد؟

۱) ۱۶۰ ۲) ۱۶۵ ۳) ۹۷۵ ۴) ۹۸۱

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ تشریحی

گام اول: $\forall u \in V(G) : |N_G(u)| = 5$، یعنی تعداد اعضای همسایگی باز هر رأس ۵ است؛ به عبارت دیگر، درجهٔ هر رأس ۵ است، بنابراین می‌توانیم بگوییم گرافی ۵ـ منتظم داریم.

گام دوم: می‌دانیم جمع تعداد یال‌های یک گراف و مکمل آن گراف برابر تعداد یال‌های گراف کامل است، پس: $q_{\bar{G}} = \frac{p(p-1)}{2} - q_G$

گام سوم: در معادلهٔ $4p - 5q = 24$، به جای q می‌گذاریم $\frac{p(p-1)}{2} - q$:

$$\Rightarrow 4p - 5\left(\frac{p(p-1)}{2} - q\right) = 24 \quad *$$

گام چهارم: این گراف ۵ـ منتظم است، پس:

$$rp = 2q \Rightarrow 5p = 2q \Rightarrow q = \frac{5}{2}p \quad (I)$$

در $*$ به جا q قرار می‌دهیم $\frac{5}{2}p$:

$$\Rightarrow 4p - 5\left(\frac{p(p-1)}{2} - \frac{5}{2}p\right) = 24 \Rightarrow 4p - 5\left(\frac{p^2 - p - 5p}{2}\right) = 24$$

$$\xrightarrow{\times 2} 8p - 5(p^2 - 6p) = 48 \Rightarrow 8p - 5p^2 + 30p = 48$$

$$\Rightarrow 5p^2 - 38p + 48 = 0 \xrightarrow{\Delta = 22^2} \begin{cases} p = \frac{38 + 22}{10} = 6 \checkmark \\ p = \frac{38 - 22}{10} = 1/6 \times \end{cases}$$

گام پنجم: با توجه به (I)، $q = \frac{5}{2}p = \frac{5}{2} \times 6 = 15$ می‌شود؛ پس گراف ما، یک گراف ۶رأسی با ۱۵ یال یعنی k_6 است.

گام ششم: تعداد مسیرهای این گراف را می‌شماریم:

$$\left.\begin{array}{l} \text{مسیر به طول صفر}: 6 \\ \text{مسیر به طول ۱}: \frac{6 \times 5}{2} = 15 \\ \text{مسیر به طول ۲}: \frac{6 \times 5 \times 4}{2} = 60 \\ \text{مسیر به طول ۳}: \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3}{2} = 180 \\ \text{مسیر به طول ۴}: \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2}{2} = 360 \\ \text{مسیر به طول ۵}: \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2} = 360 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{جمع}} 981$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

هندسهٔ (۳): صفحه‌های ۹ تا ۵۰

تست و پاسخ ۲۹

دایره‌ای به مرکز $(-۲,۳)$ از مبدأ مختصات می‌گذرد. کدام نقطه بر این دایره واقع نیست؟

۱) $(۱,۵)$ ۲) $(۱,۱)$ ۳) $(-۶,۰)$ ۴) $(۰,۶)$

پاسخ: گزینهٔ ۳

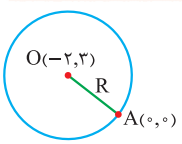
مشاوره یک سؤال آسان و پایه‌ای از مبحث «معادلهٔ دایره»

خودت حل کنی بهتره شعاع دایره، برابر است با فاصلهٔ مرکز دایره، از نقطه‌ای واقع بر آن.

درس نامه ۱) دایره، مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از یک نقطهٔ ثابت (مرکز)، به فاصله‌ای ثابت (شعاع) قرار دارند؛ پس اگر A نقطه‌ای واقع بر دایره‌ای به مرکز O و شعاع R باشد، داریم $OA = R$.

۲) معادلهٔ استاندارد دایره‌ای به مرکز $O(\alpha,\beta)$ و شعاع R، به صورت مقابل است: $(x-\alpha)^۲ + (y-\beta)^۲ = R^۲$

پاسخ تشریحی **گام اول (محاسبهٔ شعاع دایره):** چون نقطهٔ $A(۰,۰)$ (مبدأ مختصات) روی دایره قرار دارد، فاصلهٔ آن تا مرکز دایره، برابر با طول شعاع دایره است. بنابراین:



$$R = OA = \sqrt{(۰+۲)^۲ + (۰-۳)^۲} = \sqrt{۴+۹} = \sqrt{۱۳}$$

گام دوم (نوشتن معادلهٔ دایره): با داشتن مرکز دایره و شعاع آن، معادلهٔ دایره را می‌نویسیم:

$$O = (\underbrace{-۲}_{\alpha}, \underbrace{۳}_{\beta}),\ R = \sqrt{۱۳} \Rightarrow \text{دایره: } (x+۲)^۲ + (y-۳)^۲ = ۱۳$$

گام سوم (بررسی گزینه‌ها): مختصات نقاط داده‌شده در گزینه‌ها را در معادلهٔ دایره جای‌گذاری می‌کنیم تا معلوم شود کدام نقطه، روی دایره قرار ندارد:

۳) $(-۶+۲)^۲ + (۰-۳)^۲ \neq ۱۳ \Rightarrow (-۶,۰) \notin$ دایره

تست و پاسخ ۳۰

اگر $A = \begin{bmatrix} ۴ & a \\ b & ۱ \end{bmatrix}$، $B = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$ و ماتریس AB قطری باشد، آن‌گاه حاصل $a-b$ کدام است؟

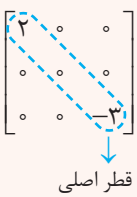
۱) -۱ ۲) ۱ ۳) ۷ ۴) -۷

پاسخ: گزینهٔ ۱

مشاوره یک سؤال ساده و در عین حال مهم که مشابه آن، در کتاب درسی، کنکورهای گذشته و امتحانات نهایی هم مطرح شده است.

خودت حل کنی بهتره ابتدا حاصل‌ضرب دو ماتریس را یافته و سپس شرط قطری‌بودن ماتریس حاصل را اعمال کنید.

درس نامه ۱) ماتریس مربعی A را قطری گوییم هرگاه تمام درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی آن، صفر باشند، مانند:



۲) دو ماتریس $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ و $B = [b_{ij}]_{n\times p}$ مفروض‌اند، در این صورت، $A.B$ ماتریسی مانند $C = [c_{ij}]_{m\times p}$ است که درایه‌های آن، به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$c_{ij} = a_{i۱}b_{۱j} + a_{i۲}b_{۲j} + \ldots + a_{in}b_{nj} = [\text{سطر } i \text{ ام A}] \begin{bmatrix} \text{ستون} \\ j \text{ ام} \\ B \end{bmatrix}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ تشریحی **گام اول (محاسبهٔ ماتریس AB)**: حاصل‌ضرب دو ماتریس را می‌یابیم:

$$AB=\begin{bmatrix}۴ & a\\ b & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۳ & ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴+۳a & ۸+۲a\\ b+۳ & ۲b+۲\end{bmatrix}$$

گام دوم (اعمال شرط قطری‌بودن AB و محاسبهٔ خواستهٔ سؤال): چون ماتریس AB قطری است، درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی آن را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases}۸+۲a=۰\\ b+۳=۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-۴\\ b=-۳\end{cases}\Rightarrow a-b=-۴+۳=-۱$$

تست و پاسخ ۳۱

دستگاه $\begin{cases}kx+۳y=۴\\ x-۲y=۳\end{cases}$ فاقد جواب است. اگر $\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$ ماتریس مجهولات و A ماتریس ضرایب این دستگاه باشد، دترمینان ماتریس $A-kI$ کدام است؟

۱) -۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

پاسخ: گزینهٔ ۱

مشاوره یک سؤال ساده و پایه‌ای از مبحث «حل دستگاه دو معادله ـ دو مجهول»

خودت حل کنی بهتره شرط آن را که دستگاه دو معادله ـ دو مجهول جواب نداشته باشد اعمال کنید و مقدار k را به دست آورید.

درس نامه دستگاه دو معادله ـ دو مجهول $\begin{cases}ax+by=c\\ a'x+b'y=c'\end{cases}$ را در نظر بگیرید، با شرط بامعنابودن همهٔ کسرهای زیر، داریم:

۱) $\Leftrightarrow \frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ (دستگاه بی‌شمار جواب دارد.)

۲) $\Leftrightarrow \frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$ (دستگاه فاقد جواب است.)

۳) $\Leftrightarrow \frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}$ (دستگاه جواب منحصربه‌فرد دارد.)

تذکر اگر دستگاه فوق را به صورت ماتریس $AX=B$ بنویسیم که $A=\begin{bmatrix}a & b\\ a' & b'\end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب، $X=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$ ماتریس مجهولات و $B=\begin{bmatrix}C\\ C'\end{bmatrix}$ ماتریس مقادیر ثابت باشند، آن‌گاه می‌توان گفت:

$AX=B$ ؛ $|A|\neq ۰$ ← جواب منحصربه‌فرد $(X=A^{-۱}B)$

$AX=B$ ؛ $|A|=۰$ ← فاقد جواب یا بی‌شمار جواب

پاسخ تشریحی **گام اول (محاسبهٔ مقدار k)**: به کمک مطالب درس‌نامه، مقدار k را می‌یابیم:

$$|A|=\begin{vmatrix}k & ۳\\ ۱ & -۲\end{vmatrix}=۰\Rightarrow -۲k-۳=۰\Rightarrow -۲k=۳\Rightarrow k=\frac{-۳}{۲}$$

دستگاه فاقد جواب است.

گام دوم (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال): ماتریس $A-kI$ و سپس دترمینان آن را می‌یابیم:

$$A=\begin{bmatrix}k & ۳\\ ۱ & -۲\end{bmatrix}\xrightarrow{k=-\frac{۳}{۲}}A-kI=\begin{bmatrix}-\frac{۳}{۲} & ۳\\ ۱ & -۲\end{bmatrix}-(-\frac{۳}{۲})\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{۳}{۲} & ۳\\ ۱ & -۲\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{۳}{۲} & ۰\\ ۰ & \frac{۳}{۲}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰ & ۳\\ ۱ & -\frac{۱}{۲}\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |A-kI|=(۰)(-\tfrac{۱}{۲})-(۳)(۱)=-۳$$

تست و پاسخ ۳۲

اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۱ & ۱\\ -۱ & -۱ & -۱\\ -۱ & -۱ & -۱\end{bmatrix}$، آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس $A^{۲۰۲۴}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) -۲ ۳) ۳ ۴) -۳

پاسخ: گزینهٔ ۳

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

مشاوره یک سؤال نسبتاً سخت از مبحث «توان‌های ماتریس‌های مربعی»

خودت حل کنی بهتره ماتریس A^2 را یافته و با A مقایسه کنید تا الگویی برای توان‌های بزرگ‌تر A بیابید.

درس نامه اگر A یک ماتریس مربعی باشد، توان‌های طبیعی آن به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$A^1 = A \ , \ A^2 = AA \ , \ A^3 = A^2A \ , \ldots \ , \ A^n = A^{n-1}A \quad (n \geq 2)$$

پاسخ تشریحی راه اول: **گام اول (محاسبهٔ ماتریس A^2 و مقایسهٔ آن با A)**: ماتریس A^2 را یافته و با A مقایسه می‌کنیم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = (-1)^1 A \quad (*)$$

گام دوم (به دست آوردن الگوی توان‌های ماتریس): به کمک رابطهٔ $(*)$ الگویی برای توان‌های بالاتر ماتریس A می‌یابیم:

$$A^3 = A^2A \overset{(*)}{=\!=} (-A)A = -A^2 \overset{(*)}{=\!=} -(-A) = A \Rightarrow A^3 = (-1)^2 A$$

$$A^4 = A^3A = AA = A^2 = -A \ \Rightarrow \ A^4 = (-1)^3 A$$

به همین ترتیب نتیجه می‌گیریم $A^n = (-1)^{n-1}A$ و بنابراین: $A^{2024} = (-1)^{2023}A = -A$

$$\Rightarrow (A^{2024} \text{ درایه‌های }) = -(\text{مجموع درایه‌های } A) = -(-3) = 3$$

راه دوم:

نکته اگر A ماتریسی مربعی و k عددی حقیقی باشد به طوری که $A^2 = kA$، آن‌گاه $A^n = k^{n-1}A$.

پس از یافتن $A^2 = (-1)A$، به کمک نکتهٔ فوق نتیجه می‌گیریم $A^{2024} = (-1)^{2023}A = -A$.

ادامهٔ راه حل، همانند روش اول است.

تست و پاسخ ۳۳

اگر درایهٔ سطر اول و ستون سوم ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & a \\ -1 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ را نصف کنیم، ماتریس B به دست می‌آید، به طوری که $|B| = \left|\frac{1}{2}A\right|$؛ دترمینان ماتریس A کدام است؟

۱) -36 ۲) $-4/5$ ۳) 36 ۴) $4/5$

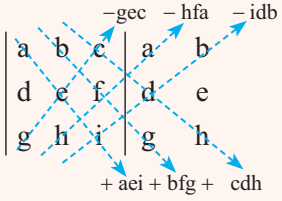
پاسخ: گزینهٔ ۱

مشاوره یک سؤال سطح متوسط از مبحث «دترمینان و ویژگی‌های آن»، این مدل سؤال‌ها بسیار مهم هستند، چون در کنکور و آزمون‌های آزمایشی پرتکرار هستند.

خودت حل کنی بهتره دترمینان هر یک از ماتریس‌های A و B را بیابید و حواستان باشد که $\left|\frac{1}{2}A\right| = \frac{1}{8}|A|$.

درس نامه ۱) روش ساروس برای محاسبهٔ دترمینان ماتریس‌های 3×3: در این روش، ابتدا ستون‌های اول و دوم دترمینان را در سمت راست آن نوشته و سپس مطابق زیر، عمل می‌کنیم:

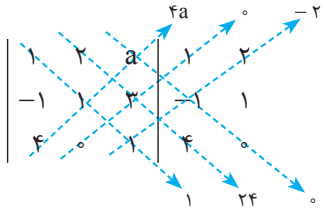
$$\text{دترمینان} = (aei + bfg + cdh) - (gec + hfa + idb)$$



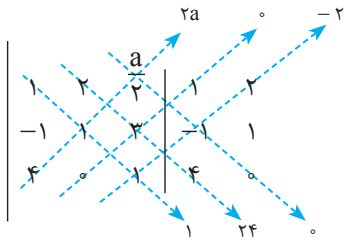
۲) اگر A یک ماتریس مربعی $n\times n$ و k عددی حقیقی باشد، آن‌گاه: $|kA| = k^n|A|$.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ تشریحی **گام اول (محاسبهٔ دترمینان ماتریس‌های A و B)**: دترمینان هریک از ماتریس‌های A و B را به روش ساروس می‌یابیم:



$$|A| = (۱+۲۴+۰) - (۴a+۰-۲) = ۲۷ - ۴a$$



$$|B| = (۱+۲۴+۰) - (۲a+۰-۲) = ۲۷ - ۲a$$

گام دوم (محاسبهٔ مقدار a و خواستهٔ سؤال): ابتدا توجه کنید که چون A ماتریسی ۳×۳ است، بنا به قسمت ۲ درس‌نامه، داریم $\left|\frac{۱}{۲}A\right| = (\frac{۱}{۲})^{۳}|A|$،

پس طبق فرض سؤال $|A| = \frac{۱}{۸}|B|$. با جای‌گذاری مقادیر $|A|$ و $|B|$ در رابطهٔ $|B| = \frac{۱}{۸}|A|$، مقدار a و سپس $|A|$ را می‌یابیم:

$$۲۷-۲a = \frac{۱}{۸}(۲۷-۴a) \Rightarrow ۸\times۲۷-۱۶a = ۲۷-۴a \Rightarrow ۷\times۲۷ = ۱۲a \Rightarrow a = \frac{۷\times۲۷}{۴\times۳} = \frac{۶۳}{۴} \Rightarrow |A| = ۲۷-۴(\frac{۶۳}{۴}) = -۳۶$$

تست و پاسخ ۳۴

برای دو ماتریس A و B داریم $A^{-۱}+B^{-۱} = \begin{bmatrix} ۳ & ۶ \\ ۹ & ۱۲ \end{bmatrix}$ و $A^{۲}+۴AB = \bar{O}$. مجموع درایه‌های ماتریس B کدام است؟

۱) -۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $-\frac{۱}{۴}$ ۴) صفر

پاسخ: گزینهٔ ۴

مشاوره یک تست سطح متوسط و ترکیبی از مبحث «وارون یک ماتریس و ویژگی‌های آن». معمولاً حل چنین سؤال‌هایی نیاز به تمرین قبلی دارد، پس پاسخ سؤال را به دقت بخوانید تا روش حل این تیپ سؤال‌ها دستتان بیاید.

خودت حل کنی بهتره طرفین تساوی $A^{۲}+۴AB = \bar{O}$ را از سمت چپ در $A^{-۱}$ ضرب کنید.

درس‌نامه ۱) ماتریس مربعی A را وارون‌پذیر گوییم، هرگاه ماتریسی مانند B وجود داشته باشد که $AB = BA = I$، در این صورت، B را وارون A نامیده و می‌نویسیم: $A^{-۱} = B$.

نتیجه $(A^{-۱})^{-۱} = A$

۲) ماتریس مربعی A وارون‌پذیر است، هرگاه $|A| \neq ۰$.

۳) اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ وارون‌پذیر باشد، آن‌گاه $A^{-۱} = \frac{۱}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

۴) اگر A ماتریسی وارون‌پذیر و k عددی حقیقی و ناصفر باشد، ماتریس kA هم وارون‌پذیر است و $(kA)^{-۱} = \frac{۱}{k}A^{-۱}$.

پاسخ تشریحی **گام اول (به دست آوردن رابطهٔ بین دو ماتریس A و B)**: چون A وارون‌پذیر است، وارون آن را از سمت چپ در رابطهٔ $A^{۲}+۴AB = \bar{O}$ ضرب می‌کنیم تا رابطه‌ای بین A و B بیابیم:

$$A^{-۱}(A^{۲}+۴AB) = A^{-۱}O \Rightarrow A+۴B = \bar{O} \Rightarrow A = -۴B$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

گام دوم (به دست آوردن ماتریس B^{-1}): از طرفین تساوی بالا وارون می‌گیریم تا رابطه‌ای بین A^{-1} و B^{-1} یافته و در فرض سؤال جای‌گذاری می‌کنیم تا B^{-1} را بیابیم:

$$A^{-1}=(-4B)^{-1} \Rightarrow A^{-1}=-\frac{1}{4}B^{-1} \quad (*)$$

$$A^{-1}+B^{-1}=\begin{bmatrix}3 & 6\\ 9 & 12\end{bmatrix} \xrightarrow{(*)} -\frac{1}{4}B^{-1}+B^{-1}=\begin{bmatrix}3 & 6\\ 9 & 12\end{bmatrix} \Rightarrow \frac{3}{4}B^{-1}=\begin{bmatrix}3 & 6\\ 9 & 12\end{bmatrix} \xrightarrow{\times\frac{4}{3}} B^{-1}=\begin{bmatrix}4 & 8\\ 12 & 16\end{bmatrix}$$

گام سوم (به دست آوردن خواستهٔ سؤال): از طرفین رابطهٔ فوق وارون می‌گیریم تا B را بیابیم:

$$(B^{-1})^{-1}=\begin{bmatrix}4 & 8\\ 12 & 16\end{bmatrix}^{-1} \Rightarrow B=\frac{1}{64-96}\begin{bmatrix}16 & -8\\ -12 & 4\end{bmatrix}=-\frac{1}{32}\begin{bmatrix}16 & -8\\ -12 & 4\end{bmatrix} \Rightarrow (\text{مجموع درایه‌های } B)=-\frac{1}{32}(16-8-12+4)$$

$$=-\frac{1}{32}(0)=0$$

تست و پاسخ ۳۵

مربع ABCD به طول ضلع ۴ مفروض است. مساحت مکان هندسی نقاطی از صفحه که بیرون این مربع قرار داشته و فاصلهٔ این نقاط از هر کدام از قطرهای مربع کم‌تر از $2\sqrt{2}$ باشد، کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۳۲ ۴) ۱۶

پاسخ: گزینهٔ ۴

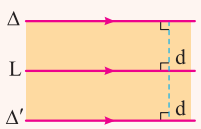
مشاوره یک تست ترکیبی و نسبتاً سخت از مبحث «مکان هندسی»

خودت حل کنی بهتره مکان هندسی نقطه‌ای که از یک خط ثابت، به فاصله‌ای ثابت باشد، چیست؟

درس نامه ۱) یک مجموعه از نقاط را «مکان هندسی» گوییم هرگاه:

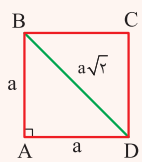
۱) همهٔ آن‌ها ویژگی مشترکی داشته باشند. ۲) هر نقطه که آن ویژگی را دارد، عضو آن مجموعه باشد.

۲) مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط ثابت L، به فاصلهٔ ثابت d هستند، دو خط به موازات L و در طرفین آن است (خطوط Δ و Δ').



نتیجه مکان هندسی نقاطی از صفحه که فاصلهٔ آن‌ها از خط L، کم‌تر از d باشد، ناحیهٔ بین دو خط Δ و Δ' است (شکل قبل).

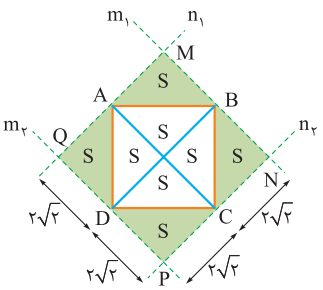
۳) طول قطر مربعی به ضلع a، برابر است با $a\sqrt{2}$.



پاسخ تشریحی **گام اول (تحلیل سؤال)**: مکان هندسی نقاطی از صفحه که فاصلهٔ آن‌ها از قطر AC، کم‌تر از $2\sqrt{2}$ باشد، ناحیهٔ بین دو خط m_1 و m_2 به موازات AC و به فاصلهٔ $2\sqrt{2}$ از آن است و به همین ترتیب، مکان هندسی نقاطی از صفحه که فاصلهٔ آن‌ها از قطر BD، کم‌تر از $2\sqrt{2}$ باشد، ناحیهٔ بین دو خط n_1 و n_2 به موازات BD و به فاصلهٔ $2\sqrt{2}$ از آن است. پس باید مساحت ناحیه‌ای بیرون مربع را بیابیم که به خطوط m_1، m_2، n_1 و n_2 محدود شده است.

گام دوم (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال): طول قطر مربع را می‌یابیم تا وضعیت این خطوط نسبت به مربع، معلوم شود:

چون طول ضلع مربع ۴ واحد است، طول قطر مربع $4\sqrt{2}$ واحد است؛ پس فاصلهٔ هر یک از خطوط m_1، m_2، n_1 و n_2 تا قطر نظیرشان، نصف قطر مربع $(2\sqrt{2})$ است پس این خطوط از رئوس مربع ABCD می‌گذرند.



از برخورد این خطوط، مربع MNPQ ایجاد می‌شود و رئوس مربع ABCD، وسط‌های اضلاع مربع MNPQ هستند؛ بنابراین با توجه به شکل، داریم: $S_{\text{رنگی}}=4S=S_{ABCD}=4^2=16$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

تست و پاسخ ۳۶

خط گذرنده از دو نقطهٔ $(۰,۵)$ و $(۲,-۱)$ دایره به معادلهٔ $x^۲+y^۲-۲۲x-۴y+۲۵=۰$ را در دو نقطهٔ A و B قطع می‌کند. طول پاره‌خط AB کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۵}$ ۲) $۲\sqrt{۱۰}$ ۳) ۷ ۴) $۲\sqrt{۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

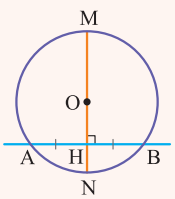
مشاوره یک تست سطح متوسط از مبحث «وضعیت خط و دایره» که مشابه آن در تمرین‌های کتاب درسی و کنکورهای گذشته هم مطرح شده است.

خودت حل کنی بهتره از مرکز دایره بر وتر AB عمود کنید و از ویژگی‌های قطر عمود بر وتر استفاده کنید.

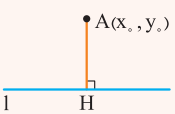
درس نامه ۱) اگر معادلهٔ ضمنی (گسترده) یک دایره به صورت $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ باشد، مختصات مرکز و طول شعاع آن از روابط مقابل به دست می‌آیند:

مرکز دایره: $O(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲})$ ، شعاع دایره: $R=\sqrt{(\frac{a}{۲})^۲+(\frac{b}{۲})^۲-c}$

۲) در هر دایره، قطر عمود بر یک وتر، آن وتر را نصف می‌کند.



۳) فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_۰,y_۰)$ از خط $l: ax+by+c=۰$ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:



$$|AH|=\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

پاسخ تشریحی **گام اول (محاسبهٔ مختصات مرکز و طول شعاع دایره)**: مختصات مرکز و طول شعاع دایره را می‌یابیم:

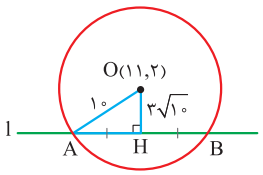
دایره: $x^۲+y^۲-۲۲x-۴y+۲۵=۰ \Rightarrow O(\frac{-(-۲۲)}{۲},\frac{-(-۴)}{۲})=(۱۱,۲)$

$$R=\sqrt{(\frac{-۲۲}{۲})^۲+(-\frac{۴}{۲})^۲-۲۵}=\sqrt{۱۲۱+۴-۲۵}=\sqrt{۱۰۰}=۱۰$$

گام دوم (نوشتن معادلهٔ خط گذرنده از دو نقطهٔ $((۰,۵),(۲,-۱))$): معادلهٔ خط l گذرنده از نقاط $(۰,۵)$ و $(۲,-۱)$ را می‌یابیم:

$$m=\frac{۵-(-۱)}{۰-۲}=-۳ \xrightarrow{(۰,۵)\in l} y-۵=-۳(x-۰) \Rightarrow l: ۳x+y-۵=۰$$

گام سوم (رسم شکل فرضی و به دست آوردن خواستهٔ سؤال): از مرکز دایره بر خط l عمود می‌کنیم.



پس $AH=HB$ و چون $OA=۱۰$، کافی است طول OH (فاصلهٔ مرکز تا خط l) را بیابیم.

که بتوانیم از قضیهٔ فیثاغورس در مثلث OHA استفاده کنیم و طول AH را به دست آوریم.

$$OH=\frac{|۳(۱۱)+۲-۵|}{\sqrt{۳^۲+۱^۲}}=\frac{۳۰}{\sqrt{۱۰}}=۳\sqrt{۱۰}$$

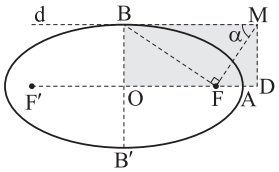
$$\overset{\Delta}{OHA} \text{ فیثاغورس در } \Rightarrow AH^۲+(۳\sqrt{۱۰})^۲=۱۰^۲ \Rightarrow AH^۲+۹۰=۱۰۰ \Rightarrow AH^۲=۱۰ \Rightarrow AH=\sqrt{۱۰} \Rightarrow AB=۲AH=۲\sqrt{۱۰}$$

توجه می‌توانستیم معادلهٔ خط l و دایره را در یک دستگاه قرار دهیم تا ابتدا مختصات نقاط برخورد آن‌ها یعنی نقاط A و B و سپس طول وتر حاصل (AB) را بیابیم، اما این روش ممکن است نیاز به محاسبات طولانی داشته باشد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

تست و پاسخ ۳۷

در شکل زیر، خط d در یک سر قطر کوچک بیضی با کانون‌های F و F′، بر آن مماس است. اگر چهارضلعی رنگ‌شده مستطیل باشد و $\hat{BFM} = 90^\circ$، آن‌گاه نسبت $\frac{AF}{AD}$ برابر با کدام است؟



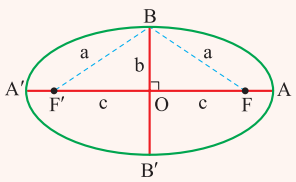
۱) $\sin\alpha$
۲) $\cos\alpha$
۳) $\frac{1}{\sin\alpha}$
۴) $\frac{1}{\cos\alpha}$

پاسخ: گزینهٔ ۱

مشاوره یک سؤال نسبتاً سخت از مبحث «بیضی»، مشابه یکی از تمرین‌های کتاب درسی. با توجه به این‌که بارها سؤالات کنکور، از تمرین‌های کتاب درسی برگرفته شده‌اند و این سؤال هنوز در کنکور مطرح نشده، آن را بسیار جدی بگیرید.

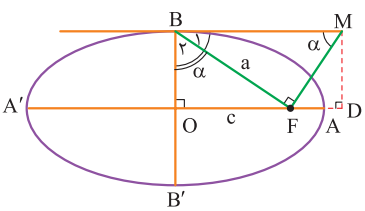
خودت حل کنی بهتره طول BM و OF را برحسب a، b، c و نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ α بیابید.

درس نامه در بیضی به قطر بزرگ $AA' = 2a$، قطر کوچک $BB' = 2b$ و فاصلهٔ کانونی $FF' = 2C$، داریم:



۱) $BF = BF' = a$
۲) $AF = OA - OF = a - c$

پاسخ تشریحی **گام اول (محاسبهٔ AD برحسب a و α):** چون $AD = OD - OA$ و $OA = a$، کافی است طول OD را برحسب a، b، c و نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ α بیابیم تا طول AD معلوم شود. حال داریم:



$OBMD$ مستطیل است. $\Rightarrow OD = BM$

$$\overset{\Delta}{MFB}: \sin\alpha = \frac{a}{BM} \Rightarrow BM = \frac{a}{\sin\alpha} \Rightarrow OD = \frac{a}{\sin\alpha}$$

$$AD = OD - OA = \frac{a}{\sin\alpha} - a = a\left(\frac{1}{\sin\alpha} - 1\right) \quad (*)$$

گام دوم (محاسبهٔ AF برحسب a و α): چون $AF = a - c$ و طول OD را برحسب a و $\sin\alpha$ یافتیم، مقدار c را هم برحسب a و $\sin\alpha$ می‌یابیم:

$$\overset{\Delta}{BOF}: \sin\alpha = \frac{c}{a} \Rightarrow c = a\sin\alpha$$

$$\overset{\Delta}{BFM}: \hat{B}_1 + \alpha = 90^\circ \xrightarrow{\hat{B}_1 + \hat{B}_2 = 90^\circ} \hat{B}_2 = \alpha$$

$$AF = a - c \Rightarrow AF = a - a\sin\alpha = a(1 - \sin\alpha) \quad (**)$$

گام سوم (محاسبهٔ خواسته سؤال): از دو تساوی (*) و (**)، داریم:

$$\frac{AF}{AD} = \frac{a(1-\sin\alpha)}{a\left(\frac{1}{\sin\alpha} - 1\right)} = \frac{1-\sin\alpha}{\frac{1-\sin\alpha}{\sin\alpha}} = \sin\alpha$$

تست و پاسخ ۳۸

اگر F و F′ کانون‌ها و B یک سر قطر کوچک بیضی با خروج از مرکز $\sqrt{\frac{2}{3}}$ باشد، سینوس زاویهٔ FBF′ کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$
۲) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$
۳) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
۴) $\frac{\sqrt{6}}{6}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

مشاوره یک سؤال سطح متوسط و مهم از مبحث «خروج از مرکز بیضی» که مشابهٔ آن در کنکورهای گذشته هم مطرح شده است.

خودت حل کنی بهتره اگر O مرکز بیضی باشد، ابتدا سینوس و کسینوس $\hat{OBF}$ را به دست بیاورید، ضمن آن‌که حواستان به $\hat{FBF'} = 2\hat{OBF}$ باشد.

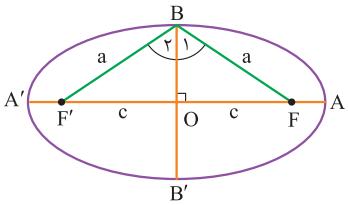
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

درس‌نامه ۱) در هر بیضی، به مرکز O و کانون‌های F و F′، اگر BB′ کوتاه‌ترین قطر باشد، داریم: $BF = BF' = a$ و $OF = OF' = c$

۲) در هر بیضی، نسبت $e = \frac{c}{a}$ را «خروج از مرکز» بیضی گوییم که مقدار آن همواره بین ۰ و ۱ است و میزان کشیدگی بیضی را نشان می‌دهد؛ بدین معنا که هر چه مقدار آن به صفر نزدیک‌تر باشد، بیضی گردتر است و هر چه به ۱ نزدیک شود، بیضی کشیده‌تر است.

۳) از حسابان سال قبل می‌دانیم $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$.

پاسخ تشریحی **گام اول (رسم شکل مناسب و تحلیل آن)**: چون مثلث BFF′ متساوی‌الساقین است، ارتفاع BO، نیمساز زاویهٔ B هم هست؛ پس $F\hat{B}F' = 2\hat{B}_1$ و در نتیجه:



$$\sin F\hat{B}F' = \sin(2\hat{B}_1) = 2\sin\hat{B}_1\cos\hat{B}_1 \quad (*)$$

گام دوم (محاسبهٔ سینوس و کسینوس $O\hat{B}F$): مقادیر سینوس و کسینوس $\hat{B}_1$ را می‌یابیم: در مثلث قائم‌الزاویهٔ BOF، داریم:

از طرفی داریم:

$$\sin\hat{B}_1 = \frac{c}{a} \xrightarrow{e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{2}{3}}} \sin\hat{B}_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\sin^2\hat{B}_1 + \cos^2\hat{B}_1 = 1 \Rightarrow \frac{2}{3} + \cos^2\hat{B}_1 = 1 \Rightarrow \cos^2\hat{B}_1 = \frac{1}{3} \xrightarrow{0^\circ < \hat{B}_1 < 90^\circ} \cos\hat{B}_1 = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

گام سوم: مقادیر سینوس و کسینوس $\hat{B}_1$ را در رابطهٔ (*) جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\sin(F\hat{B}F') = 2\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

تست و پاسخ ۳۹

دایره‌ای بر خط $4x + 3y = 0$ مماس است و دوتا از قطرهای آن بر خط‌های $x + y = 1$ و $x - y = 3$ واقع‌اند. مرکز این دایره کانون یک بیضی افقیِ مماس بر دایره است. اگر خروج از مرکز بیضی برابر $\frac{5}{9}$ باشد، طول قطر بزرگ آن کدام است؟

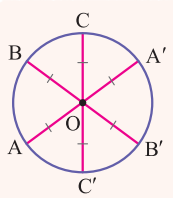
۱) ۴ ۲) ۴/۲۵ ۳) ۴/۵ ۴) ۴/۷۵

پاسخ: گزینهٔ ۳

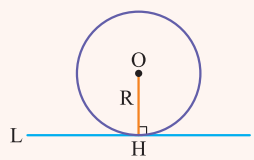
مشاوره یک سؤال ترکیبی نسبتاً سخت از مباحث «دایره» و «بیضی»

خودت حل کنی بهتره ابتدا مرکز و شعاع دایره را بیابید، سپس بیضی را مماس‌داخل با دایره رسم کنید.

درس‌نامه ۱) قطر دایره، وتری از دایره است که از مرکز آن می‌گذرد.



۲) یک خط بر یک دایره مماس است، هرگاه فاصلهٔ مرکز دایره تا آن خط، برابر با طول شعاع دایره باشد.



۳) در بیضی به قطر بزرگ $AA' = 2a$، قطر کوچک $BB' = 2b$ و فاصلهٔ کانونی $FF' = 2c$، داریم:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

پاسخ تشریحی **گام اول (پیداکردن مرکز دایره)**: مرکز دایره را می‌یابیم: چون خطوط $x + y = 1$ و $x - y = 3$ شامل دو قطر از دایره‌اند، محل برخورد آن‌ها، مرکز دایره است.

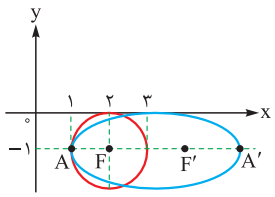
$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow O(2, -1)$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

گام دوم (محاسبهٔ شعاع دایره): طول شعاع دایره را می‌یابیم: چون دایره بر خط $۴x+۳y=۰$ مماس است، فاصلهٔ مرکز دایره تا این خط، برابر طول شعاع دایره است.

$$R=OH=\frac{|۴(۲)+۳(-۱)|}{\sqrt{۴^۲+۳^۲}}=\frac{۵}{۵}=۱$$

گام سوم (رسم شکل مناسب): شکل دایره را در دستگاه مختصات رسم می‌کنیم تا نقاط تماس معلوم شوند: چون بیضی افقی است و کانون آن منطبق بر مرکز دایره است، محل تماس آن با دایره، یکی از نقاط $(۱,-۱)$ یا $(۳,-۱)$ است که چون انتخاب هر یک از این دو نقطه تغییری در پاسخ ایجاد نمی‌کند، آن را $(۱,-۱)$ فرض می‌کنیم؛ پس نقطهٔ $A(۱,-۱)$ یک رأس کانونی بیضی است.



گام چهارم (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال): مقدار a را می‌یابیم: می‌دانیم در بیضی، $AF=a-c$، پس $a-c=۱$. از طرف دیگر، طبق فرض، $e=\frac{c}{a}=\frac{۵}{۹}$، بنابراین:

$$c=\frac{۵}{۹}a \Rightarrow a-\frac{۵}{۹}a=۱ \Rightarrow \frac{۴}{۹}a=۱ \Rightarrow a=\frac{۹}{۴}$$

$$\text{طول قطر بزرگ بیضی}=۲a=۲(\frac{۹}{۴})=\frac{۹}{۲}=۴/۵$$

تست و پاسخ ۴۰

دایرهٔ C به مرکز $O(\alpha,\beta)$ بر دو خط به معادله‌های $۸x+۱۵y=\pm ۱۷$ مماس و با دایرهٔ C' به معادلهٔ $x^۲+y^۲-۲۵۶=۰$ مماس‌خارج است. حاصل $\alpha+\beta$ کدام است؟

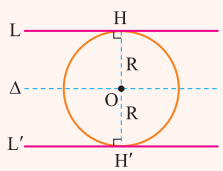
۱) ۸ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۵

پاسخ: گزینهٔ ۳

مشاوره یک سؤال ترکیبی و نسبتاً سخت از مباحث «وضعیت خط و دایره» و «وضعیت دو دایره» که مشابه آن در کنکورهای گذشته هم مطرح شده است.

خودت حل کنی بهتره دو خط $۸x+۱۵y=\pm ۱۷$ با هم موازی‌اند، پس مرکز دایره، روی خطی است که از هر دوی آن‌ها به یک فاصله است.

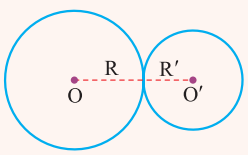
درس‌نامه ۱) اگر دایره‌ای بر دو خط موازی L و L' مماس باشد، مرکز آن از هر دو خط به یک فاصله است، در نتیجه روی خطی مانند Δ به موازات آن‌ها و وسط آن‌ها قرار دارد که معادلهٔ Δ و فاصلهٔ L و L' از یکدیگر (قطر دایره) را به صورت زیر می‌توان یافت:



$$\left.\begin{matrix}L:ax+by+c=۰\\ L':ax+by+c'=۰\end{matrix}\right\}\Rightarrow \Delta:ax+by+\frac{c+c'}{۲}=۰$$

$$۲R=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

۲) دو دایره با یکدیگر مماس‌خارج‌اند، هرگاه طول خط‌المرکزین آن‌ها، برابر با مجموع شعاع‌های آن‌ها باشد.



$$OO'=R+R'$$

پاسخ تشریحی **گام اول (تحلیل سؤال و پیداکردن رابطهٔ بین α و β)**: رابطه‌ای بین α و β می‌یابیم:

با توجه به درس‌نامه، چون دایره بر دو خط $L:۸x+۱۵y=۱۷$ و $L':۸x+۱۵y=-۱۷$ مماس است، مرکز آن روی خط $\Delta:۸x+۱۵y=۰$ است و داریم:

$$O(\alpha,\beta)\in\Delta \Rightarrow ۸\alpha+۱۵\beta=۰ \Rightarrow \beta=-\frac{۸}{۱۵}\alpha \Rightarrow O(\alpha,-\frac{۸}{۱۵}\alpha)$$

گام دوم (محاسبهٔ شعاع دایرهٔ C): شعاع دایره را می‌یابیم:

اگر شعاع دایره برابر R باشد، طبق مطالب درس‌نامه داریم:

$$۲R=\frac{|۱۷-(-۱۷)|}{\sqrt{۸^۲+۱۵^۲}}=\frac{۳۴}{۱۷}=۲\Rightarrow R=۱$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

گام سوم (پیداکردن مرکز و شعاع دایرهٔ C'): مرکز و شعاع دایرهٔ C' را می‌یابیم:

$$C': x^۲ + y^۲ = ۲۵۶ \Rightarrow O'(۰,۰)\ ,\ R' = ۱۶$$

گام چهارم (اعمال شرط مماس‌خارج‌بودن): شرط مماس‌خارج بودن دو دایره را می‌نویسیم:

$$OO' = R + R' \Rightarrow \sqrt{(۰-\alpha)^۲ + (۰+\frac{۸}{۱۵}\alpha)^۲} = ۱+۱۶$$

$$\Rightarrow \sqrt{\alpha^۲ + \frac{۶۴}{۲۲۵}\alpha^۲} = ۱۷ \Rightarrow \sqrt{\frac{۲۸۹}{۲۲۵}\alpha^۲} = ۱۷ \Rightarrow \frac{۱۷}{۱۵}\alpha = ۱۷ \Rightarrow \alpha = ۱۵$$

گام پنجم (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال): با توجه به این‌که $\beta = -\frac{۸}{۱۵}\alpha$، مقدار خواسته‌شده در صورت سؤال را می‌یابیم:

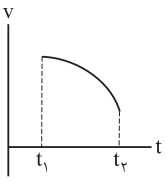
$$\alpha + \beta = \alpha - \frac{۸}{۱۵}\alpha = \frac{۷}{۱۵}\alpha = \frac{۷}{۱۵}(۱۵) = ۷$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

فیزیک (۳): صفحه‌های ۱ تا ۷۷

تست و پاسخ ۴۱

نمودار سرعت ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. کدام‌یک از موارد زیر دربارهٔ این متحرک در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 درست است؟



الف) متحرک در خلاف جهت محور x جابه‌جا شده است.

ب) اندازهٔ شتاب متحرک در حال افزایش است.

پ) شتاب متوسط متحرک در خلاف جهت محور x است.

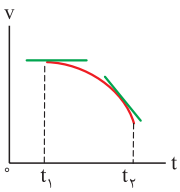
ت) سرعت متوسط متحرک در خلاف جهت محور x است.

۱) الف و پ ۲) الف و ت ۳) ب و پ ۴) ب و ت

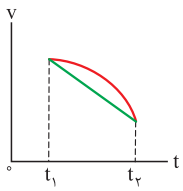
پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ تشریحی بررسی عبارت‌ها:

الف) اگر نمودار سرعت ـ زمان، در بالای محور t باشد، یعنی $v > 0$ است و حرکت آن در جهت محور x است، حتی اگر v در حال کاهش باشد؛ بنابراین عبارت «الف» نادرست است.



ب) شیب خط مماس بر نمودار سرعت ـ زمان، شتاب حرکت را نشان می‌دهد. در این‌جا گرچه شیب خط مذکور منفی است، اما اندازهٔ آن در حال افزایش است؛ یعنی عبارت «ب» درست است.



پ) شتاب متوسط بین دو لحظه، برابر شیب خطی است که نمودار سرعت ـ زمان را در آن دو لحظه، قطع می‌کند. در این‌جا شیب خط مذکور منفی است؛ یعنی شتاب متوسط در خلاف جهت محور x است و عبارت «پ» درست است.

ت) از آن‌جاکه در تمام بازهٔ زمانی t_1 تا t_2، سرعت متحرک مثبت است؛ پس سرعت متوسط آن نیز در این بازه، مثبت است و عبارت «ت» نادرست است.

جمع‌بندی بررسی عبارت‌ها نشان می‌دهد که ۳ درست است.

تست و پاسخ ۴۲

بردار مکان متحرکی که در راستای محور x با سرعت ثابت حرکت می‌کند، در لحظهٔ t برابر با $(-۱۲\,m)\vec{i}$ و ۴s پس از آن برابر با $(-۳۶\,m)\vec{i}$ است. اگر بردار مکان متحرک فقط به مدت ۸s در جهت محور x باشد، t برحسب ثانیه کدام است؟

$x_2 = -۳۶\,m$ $\Delta t = ۴\,s$

$x_1 = -۱۲\,m$

۱) ۴ ۲) ۶

۳) ۱۰ ۴) ۱۲

پاسخ: گزینهٔ ۳

خودت حل کنی بهتره ابتدا سرعت متحرک و جهت حرکت آن را مشخص کنید، سپس بازهٔ زمانی‌ای را که طول می‌کشد تا متحرک از مبدأ محور به مکان $x = -۱۲m$ برسد، محاسبه کنید و با ۸s جمع کنید تا t به دست آید.

درس نامه

۱) **بردار مکان ($\vec{r}$)**: برداری است که مبدأ محور را به مکان جسم در هر لحظه وصل می‌کند. اگر بردار مکان در جهت محور x باشد، یعنی متحرک در سمت راست مبدأ محور قرار دارد و اگر بردار مکان در خلاف جهت محور x باشد، یعنی متحرک در سمت چپ مبدأ محور قرار دارد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲) برای متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، رابطهٔ سرعت متوسط به صورت زیر است:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}$$

(v_{av}: سرعت متوسط (m/s)، Δx: جابه‌جایی (m)، Δt: بازهٔ زمانی (s))

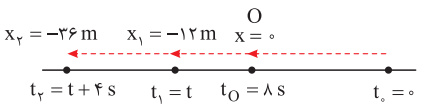
تذکر اگر متحرکی با سرعت ثابت حرکت کند، سرعت لحظه‌ای و سرعت متوسط آن در هر بازهٔ زمانی، با هم برابرند.

پاسخ تشریحی **گام اول:** سرعت متحرک را به دست می‌آوریم:

$$t_1=t \Rightarrow x_1=-12\,m$$

$$t_2=t+4 \Rightarrow x_2=-36\,m$$

$$v=v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1} \Rightarrow v=\frac{-36-(-12)}{t+4-t}=\frac{-24}{4}=-6\,m/s$$



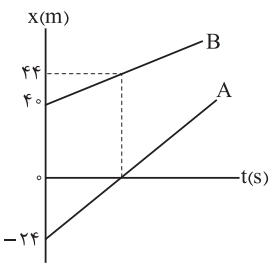
پس حرکت در جهت منفی است و ۸s پس از شروع حرکت، متحرک از مبدأ محور (نقطهٔ O) می‌گذرد.

گام دوم: با استفاده از رابطهٔ سرعت متوسط، لحظهٔ عبور متحرک از مکان x_1 را حساب می‌کنیم:

$$v=\frac{x_1-x_0}{t_1-t_0} \xrightarrow[t_1=t\ ,\ t_0=8s]{v=-6\,m/s\ ,\ x_1=-12m\ ,\ x_0=0} -6=\frac{-12-0}{t-8} \Rightarrow t-8=2 \Rightarrow t=10s$$

تست و پاسخ ۴۳

نمودار مکان ـ زمان دو متحرک A و B که در راستای محور x حرکت می‌کنند، به شکل مقابل است. اگر به مدت ۹s فاصلهٔ دو متحرک از یکدیگر کم‌تر از ۶m باشد، تندی متحرک A چند متر بر ثانیه است؟



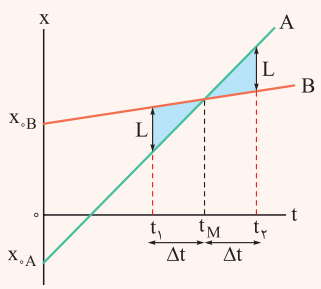
۱) $\frac{۴}{۵}$
۲) $\frac{۸}{۵}$
۳) $\frac{۸}{۹}$
۴) $\frac{۱۶}{۹}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

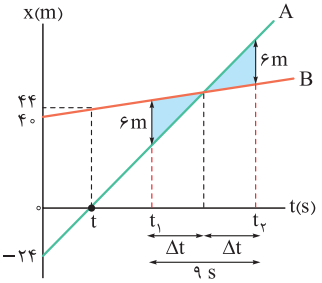
مشاوره این تست مشابه یکی از سؤال‌های کنکور ۱۴۰۱ (تیرماه) رشتهٔ ریاضی است.

درس‌نامه هرگاه دو متحرک A و B با سرعت‌های ثابت v_A و v_B روی محور x به‌گونه‌ای حرکت کنند که به یکدیگر نزدیک و سپس از هم دور شوند، در لحظه‌ای مانند t_M از کنار یکدیگر عبور می‌کنند. اگر در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 فاصلهٔ دو متحرک کم‌تر از L باشد، با توجه به همنهشتی دو مثلث رنگی در نمودار روبه‌رو می‌توان نوشت:

$$t_M=\frac{t_1+t_2}{2}$$



پاسخ تشریحی **گام اول:** در بازهٔ زمانی صفر تا t ثانیه، فاصلهٔ دو متحرک از $64\,m\ (=(-24)-(-40))$ به $44\,m\ (=-0-(-44))$ می‌رسد، یعنی ۲۰ متر کاهش می‌یابد. حال ببینیم چه مدت طول می‌کشد تا فاصلهٔ دو متحرک از ۶m به صفر برسد.



SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

با یک تناسب ساده داریم:

$$\frac{t}{\Delta t}=\frac{۲۰}{۶} \Rightarrow \Delta t=\frac{۳}{۱۰}t$$

توجه کنید که چون سرعت‌ها ثابت هستند، می‌توانیم از تناسب و رابطهٔ خطی استفاده کنیم.

گام دوم: $\frac{۳}{۱۰}t$ نیز طول می‌کشد تا فاصلهٔ دو متحرک از صفر به $۶\,m$ برسد؛ بنابراین مدت‌زمانی که فاصلهٔ دو متحرک، کم‌تر از $۶\,m$ می‌شود، شامل ۲ تا $\frac{۳}{۱۰}t$ است، به این ترتیب زمان t به دست می‌آید:

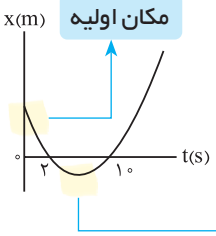
$$۲\times\frac{۳}{۱۰}t=۹ \Rightarrow t=۱۵\,s$$

گام سوم: اکنون با معلوم‌بودن زمان t، تندی متحرک A که همان سرعت آن است، به دست می‌آید:

$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow v_A=\frac{۰-(-۲۴)}{۱۵-۰}=\frac{۲۴}{۱۵}=\frac{۸}{۵}\,m/s$$

تست و پاسخ ۴۴

نمودار مکان ـ زمان متحرکی که با شتاب ثابت در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. اگر تندی متحرک در لحظهٔ عبور از مبدأ مکان برابر با $۱۶\,m/s$ باشد، در فاصلهٔ چند متری از مکان اولیهٔ متحرک، جهت حرکت آن تغییر می‌کند؟



نمودار مکان ـ زمان متحرک سهمی است.

لحظهٔ تغییر جهت حرکت

مکان‌هایی که نمودار $x-t$ محور t را قطع می‌کند.

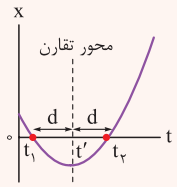
۱) ۷۲
۲) ۴۸
۳) ۳۶
۴) ۲۴

پاسخ: گزینهٔ ۱

مشاوره *توی این سؤال، کاربرد ریاضی در فیزیک کاملاً مشهوده. تابع درجه ۲ و نمودارش رو خوب بلد باش، چون توی فیزیک فیلی به کارت میاد.*

خودت حل کنی بهتره *اول لحظهٔ تغییر جهت حرکت رو از روی نمودار پیدا کن. بعدش با توجه به نقاط روی نمودار، شتاب و سرعت اولیه رو به دست بیار تا به معادلهٔ $x-t$ برسی. در نهایت فاصلهٔ نقطهٔ تغییر جهت رو از $x_۰$ به دست بیار.*

درس نامه به شکل مقابل توجه کنید. نمودار مکان ـ زمان متحرکی که با شتاب ثابت روی خط راست حرکت می‌کند، به صورت سهمی بوده و دارای تقارن است. نقاطی که فاصلهٔ زمانی یکسانی تا رأس سهمی دارند، مکان و تندی (مقدار شیب خط مماس) یکسانی دارند.



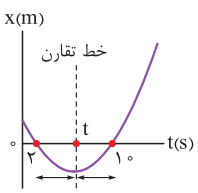
$$t'=\frac{t_۱+t_۲}{۲} \Rightarrow |v_۱|=|v_۲|$$

برای متحرکی که با شتاب ثابت a و سرعت اولیهٔ $v_۰$ از مکان $x_۰$ شروع به حرکت می‌کند، معادلهٔ مکان ـ زمان و سرعت ـ زمان به صورت زیر است:

$$x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰$$

$$v=at+v_۰$$

پاسخ تشریحی روش اول: **گام اول:** لحظهٔ تغییر جهت حرکت را با توجه به تقارن نمودار $x-t$ در حرکت با شتاب ثابت روی خط راست، مطابق شکل روبه‌رو به دست می‌آوریم:



$$t=\frac{۲+۱۰}{۲}=\frac{۱۲}{۲}=۶\,s$$

گام دوم: شتاب حرکت را محاسبه می‌کنیم:

(با توجه به نمودار مکان ـ زمان در می‌یابیم که شیب نمودار در لحظهٔ $t=۲\,s$ منفی و در لحظهٔ $t=۱۰\,s$ مثبت است.)

$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t=۱۰-۲=۸\,s]{\Delta v=v_{۱۰s}-v_{۲s}=۱۶-(-۱۶)=۳۲\,m/s} a=\frac{۳۲}{۸}=۴\,m/s^۲$$

گام سوم: سرعت اولیهٔ متحرک را به دست می‌آوریم:

$$v=at+v_۰ \xrightarrow[a=۴\,m/s^۲]{t=۲s\,,\,v=-۱۶\,m/s} -۱۶=۴(۲)+v_۰ \Rightarrow v_۰=-۲۴\,m/s$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

گام چهارم: با استفاده از معادلهٔ مکان ـ زمان، در حرکت با شتاب ثابت روی خط راست، فاصلهٔ متحرک در لحظهٔ تغییر جهت $(t=۶s)$ را از مکان اولیه $(x_۰)$ به دست می‌آوریم:

$$x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰ \xrightarrow[v_۰=-۲۴m/s]{a=۴m/s^۲,\ t=۶s} x_{۶s}=\frac{۱}{۲}(۴)(۶)^۲+(-۲۴)(۶)+x_۰ \Rightarrow x_{۶s}=-۷۲+x_۰ \Rightarrow |x_{۶s}-x_۰|=۷۲m$$

بنابراین فاصلهٔ متحرک در لحظهٔ تغییر جهت تا مکان اولیه برابر با $۷۲m$ است.

روش دوم: با توجه به نمودار مکان ـ زمان و محاسبهٔ شتاب می‌توانیم معادلهٔ مکان ـ زمان را به دست آوریم:

ریشه‌های نمودار: $t=۲s\ ,\ t=۱۰s\ ,\ v_{۲s}=-۱۶m/s\ ,\ v_{۱۰s}=۱۶m/s$

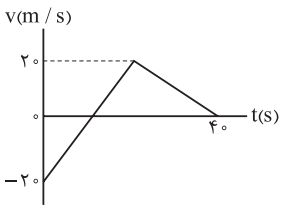
$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{۱۶-(-۱۶)}{۱۰-۲}=\frac{۳۲}{۸}=۴m/s^۲$$

$$x=K(t-۲)(t-۱۰) \xrightarrow{K=\frac{۱}{۲}a=۲} x=۲(t-۲)(t-۱۰) \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{t=۰} x_۰=۲(-۲)(-۱۰)=۴۰m \\ \xrightarrow{t=۶s} x_{۶s}=۲(۴)(-۴)=-۳۲m \end{cases}$$

$$|x_{۶s}-x_۰|=۷۲m$$

تست و پاسخ ۴۵

نمودار سرعت ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. تندی متوسط این متحرک در بازهٔ زمانی $t_۱=۰$ تا $t_۲=۴۰s$ چند متر بر ثانیه است؟



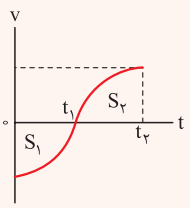
۱) ۵
۲) ۱۰
۳) ۱۵
۴) ۲۰

پاسخ: گزینهٔ ۲

خودت حل کنی بهتره *اول به کمک نمودار $v-t$ و مساحت محصورش، مسافت طی‌شده رو حساب کن. بعدش با استفاده از رابطهٔ تندی متوسط، جواب رو به دست بیار.*

درس نامه اندازهٔ سطح محصور بین نمودار سرعت ـ زمان با محور زمان، برابر با مسافت پیموده شده است.

با توجه به شکل مقابل داریم:



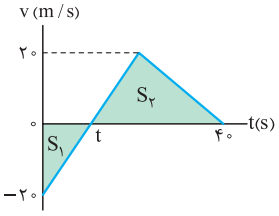
$\ell = S_۱ + S_۲$ (مسافت طی‌شده از صفر تا $t_۲$)

تندی متوسط از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}$$

(s_{av}: تندی متوسط (m/s)، ℓ: مسافت طی‌شده (m)، Δt: زمان (s))

پاسخ تشریحی **گام اول:** با توجه به نمودار سرعت ـ زمان، مسافت طی‌شده را حساب می‌کنیم:



$$\ell_۱=S_۱+S_۲ \Rightarrow \ell=\left(\frac{t\times ۲۰}{۲}\right)+\left(\frac{(۴۰-t)\times ۲۰}{۲}\right) \Rightarrow \ell=۱۰t+۴۰۰-۱۰t=۴۰۰m$$

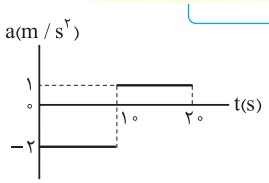
گام دوم: طبق رابطهٔ زیر تندی متوسط را به دست می‌آوریم:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t=۴۰s]{\ell=۴۰۰m} s_{av}=\frac{۴۰۰}{۴۰}=۱۰m/s$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

تست و پاسخ ۴۶

نمودار شتاب ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. اگر در مبدأ زمان، بردار مکان متحرک برابر با $(۴m)\vec{i}$ و سرعت آن برابر با $(۱۲\,m/s)\vec{i}$ باشد، در بازهٔ زمانی صفر تا ۲۰s، در چه لحظه‌ای برحسب ثانیه، جهت بردار مکان متحرک تغییر می‌کند؟



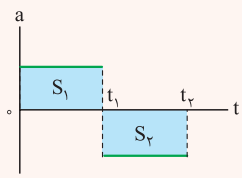
$t=۰$ ← متحرک از مکان $x=۰$ عبور می‌کند.

۱) ۱۲
۲) ۱۴
۳) ۱۶
۴) ۱۸

پاسخ: گزینهٔ ۲

خودت حل کنی بهتره *سعی کن به کمک نمودار شتاب ـ زمان و سرعت اولیه، خودت نمودار سرعت ـ زمان رو رسم کنی و اطلاعات رو روش پیاده کنی.*

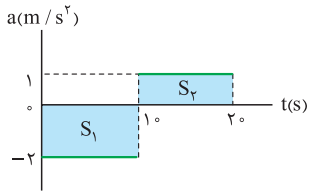
درس نامه مهم‌ترین موضوعی که می‌توانیم از نمودار شتاب ـ زمان استخراج کنیم، تغییرات سرعت متحرک است که از مساحت محصور بین نمودار شتاب ـ زمان با محور زمان به دست می‌آید. با توجه به شکل روبه‌رو داریم:



- اگر نمودار $a-t$ بالای محور t باشد، علامت تغییر سرعت مثبت است.
- اگر نمودار $a-t$ پایین محور t باشد، علامت تغییر سرعت منفی است.

$$\Delta v_{(۰-t_۱)}=S_۱$$
$$\Delta v_{(t_۱-t_۲)}=-S_۲ \Rightarrow \Delta v_{(۰-t_۲)}=S_۱-S_۲$$

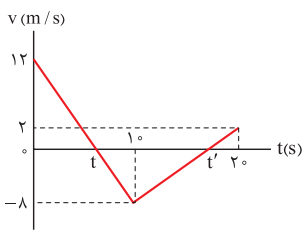
پاسخ تشریحی **گام اول:** با استفاده از نمودار شتاب ـ زمان و سرعت اولیه، نمودار سرعت ـ زمان متحرک را رسم می‌کنیم. مطابق شکل مقابل داریم:



$$S_۱=۱۰\times۲=۲۰$$
$$S_۲=(۲۰-۱۰)\times۱=۱۰$$
$$\Rightarrow \begin{cases} ۰\text{ تا }۱۰s: \Delta v_۱=-S_۱=-۲۰\,m/s \\ ۱۰\text{ تا }۲۰s: \Delta v_۲=S_۲=۱۰\,m/s \end{cases}$$

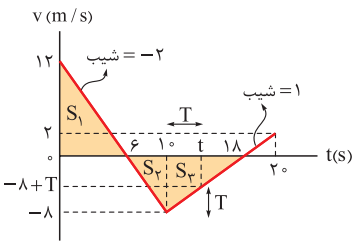
$$\xrightarrow[\Delta v_۱=-۲۰m/s\,,\,\Delta v_۲=۱۰m/s]{v_۰=۱۲m/s} \begin{cases} v_{۱۰}=۱۲-۲۰=-۸\,m/s \\ v_{۲۰}=-۸+۱۰=۲\,m/s \end{cases}$$

اکنون با استفاده از شتاب هر قسمت، لحظه‌های t و t' را به دست می‌آوریم:



$$a_۱=-۲m/s^۲ \Rightarrow -۲=\frac{۰-۱۲}{t-۰} \Rightarrow t=۶s$$
$$a_۲=۱m/s^۲ \Rightarrow ۱=\frac{۰-(-۸)}{t'-۱۰} \Rightarrow t'=۱۸s$$

گام دوم: با توجه به نمودار سرعت ـ زمان شکل زیر، لحظهٔ تغییر جهت بردار مکان (عبور متحرک از مکان $x=۰$) را به دست می‌آوریم:
(متحرک باید به اندازهٔ ۴m در خلاف جهت محور x جابه‌جا شود.)



$$\begin{cases} S_۱=\frac{۶\times۱۲}{۲}=۳۶ \\ S_۲=\frac{(۱۰-۶)\times۸}{۲}=۱۶ \end{cases}$$

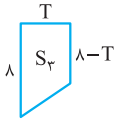
از صفر تا ۱۰s: $\Delta x_۱=S_۱-S_۲=۳۶-۱۶=۲۰m$

$$\Delta x=\Delta x_۱+\Delta x_۲ \Rightarrow -۴=۲۰+\Delta x_۲$$
$$\Rightarrow \Delta x_۲=-۲۴\,m=-S_۳ \Rightarrow S_۳=۲۴$$

جابه‌جایی از ۱۰s تا t

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

با داشتن $S_۳$، لحظهٔ t را به دست می‌آوریم. برای این کار بازهٔ زمانی $t-۱۰$ را برابر با T فرض می‌کنیم. با توجه به این‌که $S_۳$ مساحت یک ذوزنقه است، مطابق شکل داریم:

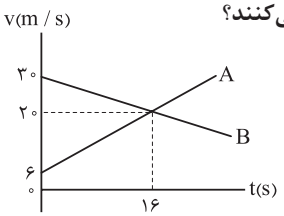


$$S_۳ = ۲۴ = \frac{(۸+۸-T)T}{۲} \Rightarrow T^۲ - ۱۶T + ۴۸ = ۰ \Rightarrow T \begin{cases} T = ۴\,s \checkmark \\ T = ۱۲\,s \times \end{cases}$$

بنابراین متحرک در لحظهٔ $t = ۱۰ + ۴ = ۱۴\,s$ از مکان $x = ۰$ عبور می‌کند.

تست و پاسخ ۴۷

نمودار سرعت ـ زمان دو متحرک A و B که روی یک خط راست در حال حرکتند، به شکل زیر است. اگر در مبدأ زمان، متحرک A از متحرک B به اندازهٔ ۸۴ m جلوتر باشد، در چه لحظه‌ای برحسب ثانیه، دو متحرک برای دومین مرتبه از کنار یکدیگر عبور می‌کنند؟



$t = ۰$

$x_{۰A} = x_{۰B} + ۸۴$

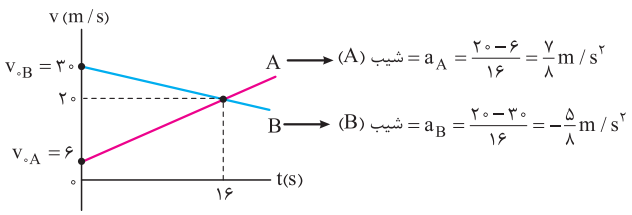
۱) ۲۰
۲) ۲۴
۳) ۲۸
۴) ۳۲

پاسخ: گزینهٔ ۳

مشاوره *انقدر طراحای کنکور در سال‌های اخیر به حرکت دو متحرک علاقه نشون دادن که دیگه نمی‌شه ازش گذشت. سعی کن توی ذهنت یه سناریوی خوب از حرکت دو متحرک داشته باشی و بتونی تصورش کنی.*

خودت حل کنی بهتره *اول از روی نمودار سرعت ـ زمان، شتاب و سرعت اولیهٔ هر دو متحرک رو به دست بیار. بعدش معادلهٔ مکان ـ زمان هر دو متحرک رو به دست بیار. آخرشم دو معادلهٔ $x-t$ رو با هم برابر قرار بده و دومین باری که به هم می‌رسن رو حساب کن.*

پاسخ تشریحی **گام اول:** با توجه به نمودار سرعت ـ زمان دو متحرک، سرعت اولیهٔ $(v_۰)$ و شتاب (a) دو متحرک را به دست می‌آوریم:



گام دوم: معادلهٔ مکان ـ زمان دو متحرک را به دست می‌آوریم:

$$x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t + x_۰ \Rightarrow \begin{cases} x_A = \frac{۱}{۲}(\frac{۷}{۸})t^۲ + ۶t + x_{۰A} \\ x_B = \frac{۱}{۲}(-\frac{۵}{۸})t^۲ + ۳۰t + x_{۰B} \end{cases} \xrightarrow{x_{۰A} = x_{۰B} + ۸۴} \begin{cases} x_A = \frac{۷}{۱۶}t^۲ + ۶t + x_{۰B} + ۸۴ \\ x_B = -\frac{۵}{۱۶}t^۲ + ۳۰t + x_{۰B} \end{cases}$$

گام سوم: لحظه‌های عبور دو متحرک از کنار هم را به دست می‌آوریم:

$$x_A = x_B \Rightarrow \frac{۷}{۱۶}t^۲ + ۶t + x_{۰B} + ۸۴ = -\frac{۵}{۱۶}t^۲ + ۳۰t + x_{۰B} \Rightarrow \frac{۳}{۴}t^۲ - ۲۴t + ۸۴ = ۰$$

$$\Rightarrow t^۲ - ۳۲t + ۱۱۲ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} t_۱ = ۴\,s \\ t_۲ = ۲۸\,s \end{cases}$$

بنابراین در لحظهٔ $t_۲ = ۲۸\,s$ دو متحرک برای بار دوم از کنار هم عبور می‌کنند.

تست و پاسخ ۴۸

خودرویی با سرعت $۲۰\,m/s$ در یک مسیر مستقیم در حال حرکت است. در لحظه‌ای، رانندهٔ خودرو در فاصلهٔ ۵۰متری مقابل خود، موتورسواری را می‌بیند که با شتاب ثابتی به بزرگی a، در جهت حرکت خودرو، شروع به حرکت می‌کند. اگر در همین لحظه رانندهٔ خودرو ترمز کند و تندی خودرو با شتاب ثابتی به بزرگی a کاهش یابد؛ a حداقل چند متر بر مربع ثانیه باشد تا خودرو از موتورسوار سبقت نگیرد؟

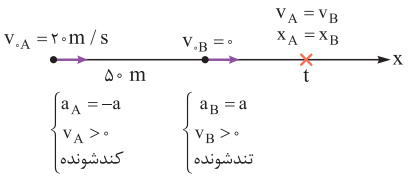
۱) ۱/۵ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۲

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

خودت حل کنی بهتره معادلهٔ سرعت دو متحرک در لحظهٔ t را با هم برابر قرار دهید و at را حساب کنید. سپس معادلهٔ مکان خودرو و موتورسوار را بنویسید و آن‌ها را برابر با هم قرار دهید. از آن‌جا زمان به هم رسیدن و شتاب a را به دست آورید.

پاسخ تشریحی **گام اول:** حداقل شتاب a باید آن‌قدر باشد که وقتی خودرو به موتورسوار می‌رسد و مکان آن‌ها یکسان می‌شود، سرعت آن‌ها نیز یکسان شود تا موتورسوار با حرکت تندشوندهٔ خود از خودرو فاصله بگیرد. خودرو را متحرک A و موتورسوار را متحرک B فرض می‌کنیم:



گام دوم: معادلهٔ سرعت دو متحرک را در لحظهٔ t با هم برابر قرار می‌دهیم:

$$v=at+v_\circ \Rightarrow \begin{cases} v_A=a_At+v_{\circ A} \Rightarrow v_A=-at+۲۰ \\ v_B=a_Bt+v_{\circ B} \Rightarrow v_B=at \end{cases} \xrightarrow{v_A=v_B} -at+۲۰=at \Rightarrow ۲۰=۲at \Rightarrow at=۱۰$$

گام سوم: معادلهٔ مکان دو متحرک را در لحظهٔ t با هم برابر قرار می‌دهیم:

$$x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_\circ t+x_\circ \Rightarrow \begin{cases} x_A=\frac{۱}{۲}a_At^۲+v_{\circ A}t+\overset{\circ}{\cancel{x_{\circ A}}} \Rightarrow x_A=-\frac{۱}{۲}at^۲+۲۰t \\ x_B=\frac{۱}{۲}a_Bt^۲+\overset{\circ}{\cancel{v_{\circ B}}}t+x_{\circ B} \Rightarrow x_B=\frac{۱}{۲}at^۲+۵۰ \end{cases}$$

$$x_A=x_B \Rightarrow -\frac{۱}{۲}at^۲+۲۰t=\frac{۱}{۲}at^۲+۵۰ \Rightarrow ۲۰t=at^۲+۵۰ \xrightarrow{at=۱۰}$$

$$۲۰t=۱۰t+۵۰ \Rightarrow ۱۰t=۵۰ \Rightarrow t=۵s$$

$$at=۱۰ \Rightarrow a\times ۵=۱۰ \Rightarrow a=۲m/s^۲$$

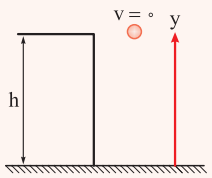
تست و پاسخ ۴۹

در شرایط خلأ گلوله‌ای از ارتفاع ۴۵متری سطح زمین رها می‌شود. تندی متوسط گلوله در ۱۵ m دوم حرکت، از تندی متوسط گلوله در ۱۵ m اول حرکت، چند متر بر ثانیه بیشتر است؟ $(g=۱۰\,m/s^۲)$

۱) $۵\sqrt{۳}$ ۲) $۵\sqrt{۶}$ ۳) $۳\sqrt{۵}$ ۴) $۶\sqrt{۵}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

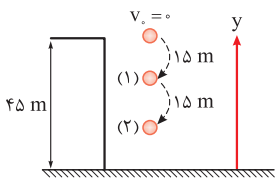
درس‌نامه مطابق شکل اگر جسمی، در شرایط خلأ از ارتفاع h رها شود، تندی جسم پس از جابه‌جایی Δy با استفاده از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:



$$v^۲=-۲g\Delta y$$

جسم با شتاب $-g$ به سمت پایین و در خلاف جهت محور y حرکت می‌کند.

پاسخ تشریحی **گام اول:** شکل زیر وضعیت گلوله را نمایش می‌دهد. اندازهٔ سرعت گلوله در نقاط (۱) و (۲) را به کمک رابطهٔ $v_۲^۲-v_۱^۲=-۲g\Delta y$ به دست می‌آوریم.



$$v_۱^۲-v_\circ^۲=-۲g\Delta y_۱ \Rightarrow v_۱^۲-\circ^۲=-۲(۱۰)(-۱۵) \Rightarrow v_۱^۲=+۳۰۰ \Rightarrow v_۱=۱۰\sqrt{۳}\,m/s$$

$$v_۲^۲-v_\circ^۲=-۲g\Delta y_۲ \Rightarrow v_۲^۲-\circ^۲=-۲(۱۰)(-۳۰) \Rightarrow v_۲^۲=۶۰۰ \Rightarrow v_۲=۱۰\sqrt{۶}\,m/s$$

گام دوم: حرکت سقوط آزاد، نوعی حرکت با شتاب ثابت است؛ بنابراین سرعت متوسط در یک بازهٔ زمانی برابر میانگین سرعت در ابتدا و انتهای بازهٔ مورد مطالعه است. حال اندازهٔ سرعت متوسط در ۱۵ متر اول و ۱۵ متر دوم را به دست می‌آوریم.

$$\text{سرعت متوسط در ۱۵ متر اول} \Rightarrow v_{av(۱)}=\frac{v_\circ+v_۱}{۲}=\frac{\circ+۱۰\sqrt{۳}}{۲}=۵\sqrt{۳}\,m/s$$

$$\text{سرعت متوسط در ۱۵ متر دوم} \Rightarrow v_{av(۲)}=\frac{v_۱+v_۲}{۲}=\frac{۱۰\sqrt{۳}+۱۰\sqrt{۶}}{۲}=۵\sqrt{۳}+۵\sqrt{۶}\,m/s$$

چون گلوله تغییر جهت نداده؛ بنابراین تندی متوسط و اندازهٔ سرعت متوسط برابر است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

گام سوم: اختلاف تندی متوسط در ۱۵ متر دوم و ۱۵ متر اول را به دست می‌آوریم:

$$v_{av(۲)} - v_{av(۱)} = (۵\sqrt{۳} + ۵\sqrt{۶}) - (۵\sqrt{۳}) = ۵\sqrt{۶}\ m/s$$

تست و پاسخ ۵۰

در شرایط خلأ، گلولهٔ A از ارتفاع h نسبت به سطح زمین و ۲s پس از آن، گلولهٔ B از ارتفاع $\frac{۴}{۹}h$ نسبت به سطح زمین رها می‌شوند. اگر دو گلوله با هم به سطح زمین برسند، h برابر چند متر است؟ ($g = ۱۰\ m/s^۲$)

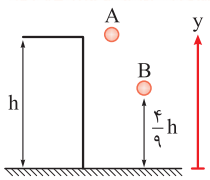
۱) ۸۰ ۲) ۱۲۵ ۳) ۱۸۰ ۴) ۲۴۵

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس‌نامه اگر جسمی در شرایط خلأ در راستای قائم رها شود، جابه‌جایی جسم پس از t ثانیه از رابطهٔ زیر به دست می‌آید.

$$\Delta y = -\frac{۱}{۲}gt^۲$$

پاسخ تشریحی **گام اول:** شکل زیر وضعیت دو گلولهٔ A و B را هنگام رهاشدن نشان می‌دهد. اگر مدت‌زمان رسیدن گلولهٔ A تا سطح زمین را t فرض کنیم، چون گلولهٔ B، ۲s بعد از رهاشدن گلولهٔ A رها شده و هر دو هم‌زمان به سطح زمین می‌رسند، مدت‌زمان رسیدن گلولهٔ B تا سطح زمین $(t-۲)$ ثانیه است.



گام دوم: به کمک رابطهٔ $\Delta y = -\frac{۱}{۲}gt^۲$، مدت‌زمان جابه‌جایی گلوله‌های A و B را با هم مقایسه می‌کنیم:

$$\text{گلولهٔ A}: \Delta y = -\frac{۱}{۲}gt^۲ \Rightarrow -h = \frac{-۱}{۲}gt^۲ \quad (I)$$

$$\text{گلولهٔ B}: \Delta y = -\frac{۱}{۲}g(t-۲)^۲ \Rightarrow \frac{-۴}{۹}h = -\frac{۱}{۲}g(t-۲)^۲ \quad (II)$$

از تقسیم رابطهٔ (I) بر (II) داریم:

$$\frac{h}{\frac{۴}{۹}h} = \frac{\frac{۱}{۲}gt^۲}{\frac{۱}{۲}g(t-۲)^۲} \Rightarrow \frac{۹}{۴} = \frac{t^۲}{(t-۲)^۲} \xrightarrow{\text{جذر}} \frac{۳}{۲} = \frac{t}{t-۲}$$

$$\Rightarrow ۳t - ۶ = ۲t \Rightarrow t = ۶s$$

گام سوم: به کمک رابطهٔ (I) در گام دوم، ارتفاع h به دست می‌آید.

$$h = \frac{۱}{۲}gt^۲ = \frac{۱}{۲}(۱۰)(۶)^۲ = ۱۸۰\ m$$

تست و پاسخ ۵۱

اگر اندازهٔ تکانهٔ جسمی به جرم ۵kg، در SI به اندازهٔ ۲ واحد افزایش یابد، انرژی جنبشی آن ۲J تغییر می‌کند. انرژی جنبشی اولیهٔ جسم چند ژول است؟

وقتی تکانه زیاد می‌شود، انرژی جنبشی هم زیاد می‌شود.

۱) ۱/۶ ۲) ۳/۶
۳) ۴ ۴) ۶

پاسخ: گزینهٔ ۱

خودت حل کنی بهتره *با استفاده از رابطهٔ انرژی جنبشی با تکانه و به کمک اختلاف انرژی جنبشی و تکانه در دو حالت، تکانهٔ اولیه رو حساب کن، بعدش انرژی جنبشی اولیه رو به دست بیار.*

درس‌نامه رابطهٔ انرژی جنبشی یک جسم با تکانهٔ آن به صورت زیر است:

$$K = \frac{p^۲}{۲m}$$

K: انرژی جنبشی (J)، p: تکانه $(\frac{kg.m}{s})$، m: جرم (kg)

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

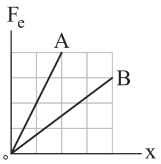
پاسخ تشریحی با توجه رابطهٔ انرژی جنبشی و تکانهٔ جسم داریم:

$$K=\frac{p^2}{2m} \xrightarrow{\text{m ثابت}} K_2-K_1=\frac{1}{2m}\underbrace{(p_2^2-p_1^2)}_{(p_2-p_1)(p_2+p_1)} \xrightarrow[p_2=p_1+2\frac{kg.m}{s},\ m=5kg]{K_2-K_1=2J} 2=\frac{1}{2(5)}(2)(2p_1+2)$$

$$\Rightarrow 2p_1+2=10 \Rightarrow p_1=4\frac{kg.m}{s} \Rightarrow K_1=\frac{p_1^2}{2m}=\frac{(4)^2}{2(5)}=1/6J$$

تست و پاسخ ۵۲

نمودار اندازهٔ نیروی کشسانی فنری برحسب تغییر طول آن نسبت به حالت عادی، به شکل زیر است. اگر ثابت فنر A برابر با $24\,N/cm$ باشد، ثابت فنر B در SI کدام است؟



شیب این نمودار همان ثابت فنر است.

۱) ۶۴۰
۲) ۱۸۰۰
۳) ۹۰۰
۴) ۳۲۰۰

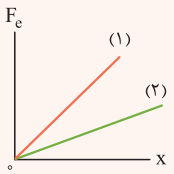
پاسخ: گزینهٔ ۳

تذکر *توی نمودار این سؤال، عدد نمی‌بینی. باید خودت مربع‌ها رو بشماری و نسبت شیب‌ها رو به دست بیاری. این مدلی توی کنکور هم اومده.*

خودت حل کنی بهتره *اول به کمک نمودار، نسبت شیب‌ها رو به دست بیار که همون نسبت ثابت فنرهاست، بعدش ثابت فنر B رو حساب کن.*

درس‌نامه شیب نمودار اندازهٔ نیروی کشسانی فنر برحسب تغییر طول فنر برابر با ثابت فنر (k) است.

با توجه به شکل مقابل داریم:

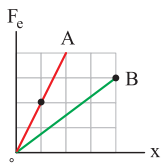


$$\text{شیب خط }(1)=k_1,\ \text{شیب خط }(2)=k_2 \Rightarrow \frac{k_1}{k_2}=\frac{\text{شیب خط }(1)}{\text{شیب خط }(2)}$$

یکای ثابت فنر در SI، N/m است. یکی دیگر از یکاهای متداول ثابت فنر N/cm است که برای تبدیل به یکای N/m به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$1N/cm=100N/m$$

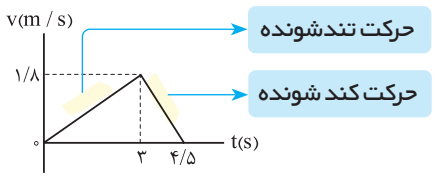
پاسخ تشریحی با توجه به نمودار اندازهٔ نیروی کشسانی فنر برحسب تغییر طول فنر، مطابق شکل مقابل داریم:



$$\frac{k_B}{k_A}=\frac{\text{شیب خط }(B)}{\text{شیب خط }(A)} \xrightarrow{k_A=24N/cm} \frac{k_B}{24}=\frac{\frac{3}{4}}{\frac{2}{1}} \Rightarrow k_B=\frac{3}{8}\times 24=9N/cm \xrightarrow{1N/cm=100N/m} k_B=900N/m$$

تست و پاسخ ۵۳

جسمی به جرم $5\,kg$ توسط ریسمانی از سقف اتاقک یک آسانسور آویزان است و آسانسور به سمت بالا حرکت می‌کند. اگر نمودار سرعت ـ زمان آسانسور به شکل زیر باشد، اختلاف اندازهٔ نیروی کشش ریسمان در دو لحظهٔ $t_1=2s$ و $t_2=4s$ برابر با چند نیوتون است؟ $(g=9/8\,N/kg)$



۱) ۱
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۹

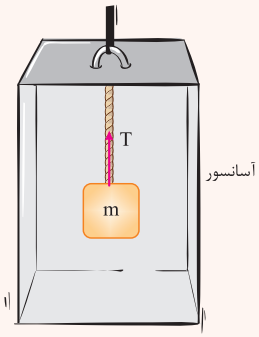
پاسخ: گزینهٔ ۴

خودت حل کنی بهتره *اول مقدار و جهت شتاب رو با توجه به نمودار $v-t$ به دست بیار. بعد نیروی کشش طناب در هر دو حالت رو حساب کن و اختلافشون رو به‌دست بیار.*

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

درس‌نامه



برای محاسبهٔ نیروی کشش طناب در حالتی که مطابق شکل زیر، جسم توسط طنابی از سقف یک آسانسور آویزان است، از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

$$T = m(g \pm a)$$

T: نیروی کشش طناب (N)، m: جرم (kg)، g: شتاب گرانشی (m/s^2)، a: مقدار شتاب آسانسور (m/s^2)

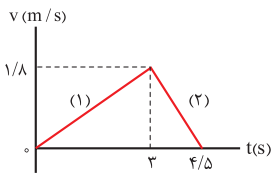
اگر جهت شتاب آسانسور رو به بالا باشد (حرکت تندشونده رو به بالا یا کندشونده رو به پایین) $\Leftarrow T = m(g+a)$

اگر جهت شتاب آسانسور رو به پایین باشد (حرکت تندشونده رو به پایین یا کندشونده رو به بالا) $\Leftarrow T = m(g-a)$

اگر آسانسور ساکن یا در حال حرکت با سرعت ثابت باشد $\Leftarrow T = mg$

پاسخ تشریحی

گام اول: با توجه به نمودار سرعت ـ زمان زیر، جهت و مقدار شتاب آسانسور در هر دو حالت را حساب می‌کنیم:



$$|a_1| = |\text{شیب خط } (1)| \Rightarrow |a_1| = \frac{1/8-0}{3} = 0/6\ m/s^2$$

$$|a_2| = |\text{شیب خط } (2)| \Rightarrow |a_2| = \left|\frac{0-1/8}{4/5-3}\right| = \frac{1/8}{1/5} = 1/2\ m/s^2$$

چون آسانسور در حالت (۱) تندشونده رو به بالا و در حالت (۲) کندشونده رو به بالا حرکت کرده است، جهت شتاب در حالت اول رو به بالا و در حالت دوم رو به پایین است.

گام دوم: اندازهٔ نیروی کشش ریسمان را در لحظهٔ $t_1 = 2s$ (حالت اول) و لحظهٔ $t_2 = 4s$ (حالت دوم) به دست می‌آوریم:

$$\xrightarrow[\text{جهت شتاب رو به بالا}]{t_1=2s} T_1 = m(g+a_1) \Rightarrow T_1 = 5(9/8+0/6) = 52\ N$$

$$\xrightarrow[\text{جهت شتاب رو به پایین}]{t_2=4s} T_2 = m(g-a_2) \Rightarrow T_2 = 5(9/8-1/2) = 43\ N$$

گام سوم: اختلاف نیروی کشش ریسمان در دو لحظه را حساب می‌کنیم:

$$T_1 - T_2 = 52 - 43 = 9\ N$$

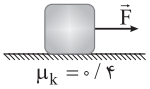
تکنیک تغییر نیروی کشش طناب در آسانسور از رابطهٔ $\Delta F = m.\Delta a$ به دست می‌آید. فقط باید حواسمان به علامت شتاب‌ها باشد:

$$|\Delta F| = m|a_2 - a_1| = 5 \times |-1/2 - 0/6| = 9\ N$$

تست و پاسخ ۵۴

در شکل زیر جسمی روی سطح افقی ساکن است و نیروی افقی $\vec{F}$ به آن وارد می‌شود. اندازهٔ نیروی $\vec{F}$ از صفر به طور پیوسته و به تدریج افزایش می‌یابد. اگر پس از حرکت جسم، اندازهٔ شتاب آن حداقل برابر با $1\ m/s^2$ باشد، ضریب اصطکاک ایستایی بین جسم و سطح کدام است؟ $(g = 10\ N/kg)$

۱) ۰/۴۵
۲) ۰/۵۰
۳) ۰/۵۵
۴) ۰/۶۰



این شتاب به ازای نیرویی است که بر $f_{s,max}$ غلبه کرده است.

پاسخ: گزینهٔ ۲

مشاوره *تا حالا این مدلی مقایسهٔ $f_{s,max}$ و f_k مطرح نشده بود. پیشنهاد می‌دم حتماً درس‌نامه رو بخون تا یه طبقه‌بندی خوب توی ذهنت داشته باشی.*

درس‌نامه

مطابق شکل زیر برای جسمی که در حال سکون بر روی سطح افقی قرار دارد و نیروی افقی $\vec{F}$ به آن وارد می‌شود تا آن را وادار به حرکت کند، چگونه می‌توان نیروی اصطکاک را به دست آورد؟

ابتدا دو نیروی اصطکاک ایستایی بیشینه $(f_{s,max})$ و اصطکاک جنبشی (f_k) را به دست می‌آورید.



$$f_{s,max} = \mu_s F_N \quad , \quad f_k = \mu_k F_N$$

F_N: نیروی عمودی سطح

μ_s: ضریب اصطکاک ایستایی، μ_k: ضریب اصطکاک جنبشی

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

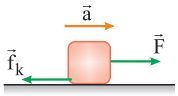
۳ حالت داریم:

۱) تا زمانی‌که نیروی F از $f_{s,max}$ بزرگ‌تر نشود، جسم ساکن است و نیروی اصطکاک با F برابر است. $(f_s = F)$

۲) وقتی نیروی F با $f_{s,max}$ برابر شود، جسم در آستانهٔ لغزش قرار می‌گیرد و با یک ضربهٔ کوچک شروع به حرکت می‌کند. در این حالت نیروی اصطکاک برابر با بیشینهٔ مقدار خود یعنی $f_{s,max} = \mu_s F_N$ است.

۳) وقتی نیروی F از $f_{s,max}$ بزرگ‌تر باشد، جسم شروع به حرکت می‌کند. وقتی جسم حرکت کرد، نیروی اصطکاک دیگر به F بستگی ندارد و مقدارش همیشه ثابت و برابر با $f_k = \mu_k F_N$ است.

پاسخ تشریحی **گام اول:** نیروی F را وقتی شتاب برابر با $1\,m/s^2$ است، به دست می‌آوریم. با توجه به شکل مقابل داریم:



$$F_{net} = ma \xrightarrow{F_{net}=F-f_k} F - f_k = ma \xrightarrow{f_k=\mu_k F_N=\mu_k mg} F - (\mu_k mg) = ma$$

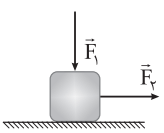
$$\xrightarrow{\mu_k=0/4\ ,\ a=1m/s^2} F - (0/4 \times m \times 10) = m \times 1 \Rightarrow F - 4m = m \Rightarrow F = 5m$$

گام دوم: با توجه به این‌که نیروی اصطکاک ایستایی بیشینه با F برابر است، ضریب اصطکاک ایستایی (μ_s) را به دست می‌آوریم:

$$f_{s,max} = \mu_s F_N \xrightarrow[f_{s,max}=F=5m]{F_N=mg} 5m = \mu_s \times m \times 10 \Rightarrow \mu_s = 0/5$$

تست و پاسخ ۵۵

در شکل زیر، نیروی افقی $F_2 = 90\,N$ و نیروی قائم $F_1 = 30\,N$ به جسمی به جرم $12\,kg$ وارد شده‌اند و جسم روی سطح افقی با سرعت ثابت در حال حرکت است. اگر نیروی $\vec{F}_1$ حذف شود، اندازهٔ شتاب جسم به چند متر بر مربع ثانیه می‌رسد؟ $(g = 10\,N/kg)$



۱) ۱
۲) ۱/۵
۳) ۲
۴) ۲/۵

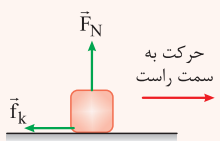
پاسخ: گزینهٔ ۲

خودت حل کنی بهتره ابتدا ضریب اصطکاک جنبشی را حساب کنید. سپس به کمک قانون دوم نیوتون، شتاب جسم را در حالتی که نیروی $\vec{F}_1$ حذف شده است به دست آورید.

درس نامه زمانی‌که مطمئن باشیم جسم حرکت می‌کند، نیروی اصطکاک جسم با سطحی که در تماس با آن است، از نوع جنبشی است و اندازهٔ آن از رابطهٔ $f_k = \mu_k F_N$ به دست می‌آید:

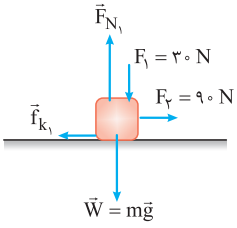
نیروی اصطکاک جنبشی (N) ← $f_k = \mu_k F_N$ → نیروی عمودی سطح (N)

ضریب اصطکاک جنبشی



$f_k = \mu_k F_N$

پاسخ تشریحی **گام اول:** شکل زیر، وضعیت جسم را در حالتی‌که دو نیروی $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ بر جسم اثر می‌کنند، نمایش می‌دهد. به کمک قانون اول نیوتون، ضریب اصطکاک جنبشی را به دست می‌آوریم:



توجه کنید که چون جسم با سرعت ثابت حرکت می‌کند، شتاب و نیروی خالص وارد بر آن صفر است.

$$F_{net,y} = 0 \Rightarrow F_{N_1} - F_1 - mg = 0 \Rightarrow F_{N_1} - 30 - 12(10) = 0 \Rightarrow F_{N_1} = 150\,N$$

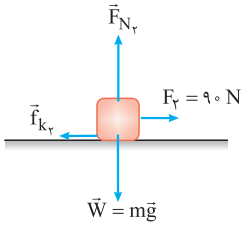
$$F_{net,x} = 0 \Rightarrow F_2 - f_{k_1} = 0 \Rightarrow 90 - f_{k_1} = 0 \Rightarrow f_{k_1} = 90\,N$$

$$\Rightarrow \mu_k F_{N_1} = 90 \Rightarrow \mu_k \times 150 = 90 \Rightarrow \mu_k = \frac{90}{150} = \frac{3}{5}$$

توجه کنید که در این حالت، جسم با سرعت ثابت حرکت می‌کند؛ بنابراین شتاب جسم صفر است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

گام دوم: به کمک قانون دوم نیوتون، شتاب جسم را در حالتی که نیروی $\vec{F}_1$ حذف شده است، به دست می‌آوریم:



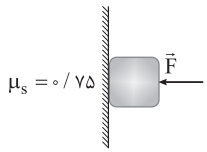
$$F_{net,y} = 0 \Rightarrow F_{N_2} - mg = 0 \Rightarrow F_{N_2} - 120 = 0 \Rightarrow F_{N_2} = 120N$$

$$F_{net,x} = ma \Rightarrow F_2 - f_{k_2} = ma$$

$$\Rightarrow 90 - \mu_k (F_{N_2}) = ma \Rightarrow 90 - \frac{3}{5}(120) = ma \Rightarrow 18 = 12a \Rightarrow a = 1/5\, m/s^2$$

تست و پاسخ ۵۶

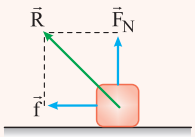
در شکل زیر، جسمی به جرم $1/5\,kg$ توسط نیروی افقی $\vec{F}$ به دیوار قائمی تکیه داده شده و در آستانهٔ حرکت است. اگر اندازهٔ نیروی $\vec{F}$، $16\,N$ افزایش یابد، اندازهٔ نیرویی که جسم به دیوار وارد می‌کند، چند درصد افزایش می‌یابد؟ $(g = 10\,N/kg)$



۱) ۲۰
۲) ۸۰
۳) ۴۴
۴) ۵۶

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس‌نامه به جسمی که در تماس با یک سطح یا تکیه‌گاهی، ساکن یا در حال حرکت است، دو نیروی عمودی سطح $(\vec{F}_N)$ و اصطکاک $(\vec{f})$ از طرف سطح یا تکیه‌گاه وارد می‌شود. به برایند آن‌ها نیروی سطح بر جسم گفته می‌شود و آن را با $\vec{R}$ نمایش می‌دهیم.



$$R = \sqrt{F_N^2 + f^2}$$
(نیروی سطح بر جسم ← R، F_N: نیروی عمودی سطح، f: نیروی اصطکاک)

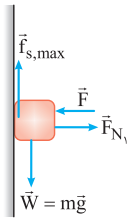
نکته اگر جسم در آستانهٔ حرکت باشد، R از رابطهٔ مقابل به دست می‌آید:

$$R = F_N\sqrt{1+\mu_s^2}$$

نکته اگر جسم در حال حرکت باشد، R از رابطهٔ مقابل به دست می‌آید:

$$R = F_N\sqrt{1+\mu_k^2}$$

پاسخ تشریحی **گام اول:** در حالت اول جسم در آستانهٔ حرکت قرار دارد (نیروی اصطکاک وارد بر جسم بیشینه است).



نیرویی که جسم به دیوار وارد می‌کند را در این حالت به دست می‌آوریم:

در راستای افقی $\Rightarrow F_{N_1} = F$

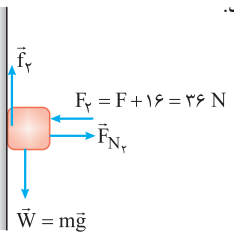
در راستای قائم $\Rightarrow f_{s,max} = mg \Rightarrow \mu_s F_{N_1} = mg \xrightarrow{F_{N_1}=F} \mu_s F = mg$

$$\Rightarrow 0/75 \times F = 1/5(10) \Rightarrow F = 20\,N$$

طبق قانون سوم نیوتون، اندازهٔ نیرویی که جسم به دیوار وارد می‌کند، با اندازهٔ نیرویی که دیوار به جسم وارد می‌کند برابر است؛ بنابراین اندازهٔ نیرویی که جسم به دیوار وارد می‌کند را به کمک رابطهٔ $R = \sqrt{f^2 + F_N^2}$ به دست می‌آوریم:

$$R_1 = \sqrt{F_{N_1}^2 + f_1^2} \xrightarrow[f_1 = f_{s,max} = mg = 15\,N]{F_{N_1} = F = 20\,N} R_1 = \sqrt{(20)^2 + (15)^2} = 25N$$

گام دوم: شکل زیر وضعیت جسم را در حالتی‌که بزرگی نیروی $\vec{F}$ به اندازهٔ $16\,N$ افزایش یافته است، نشان می‌دهد.



در راستای افقی $\Rightarrow F_{N_2} = F_2 \Rightarrow F_{N_2} = 36N$

نیروی اصطکاک بیشینه را به دست می‌آوریم و سپس نیروی وزن را با آن مقایسه می‌کنیم تا وضعیت سکون و یا حرکت جسم مشخص شود:

$$f'_{s,max} = \mu_s F_{N_2} = 0/75(36) = 27N$$

از آن‌جاکه اندازهٔ نیروی وزن (mg) کم‌تر از اندازهٔ نیروی اصطکاک بیشینه $(f'_{s,max})$ است، جسم ساکن است و حرکت نمی‌کند.

$$mg < f'_{s,max} \Rightarrow f_2 = mg = 15N$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

حال اندازهٔ نیروی وارد بر دیوار از طرف جسم را به کمک رابطهٔ $R=\sqrt{F_N^2+f^2}$ به دست می‌آوریم:

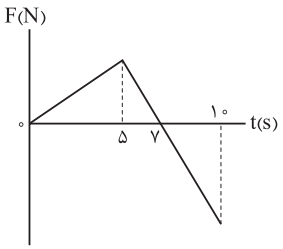
$$R_2=\sqrt{F_{N_2}^2+f_2^2}=\sqrt{(36)^2+(15)^2}=3\sqrt{12^2+5^2}=39N$$

گام سوم: درصد تغییرات اندازهٔ نیروی وارد بر دیوار از طرف جسم را به دست می‌آوریم:

$$\text{درصد تغییرات } R=\frac{\Delta R}{R_1}\times 100=\frac{(39-25)}{25}\times 100=\%56$$

تست و پاسخ ۵۷

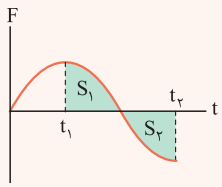
نمودار نیروی خالص وارد بر جسمی برحسب زمان به شکل مقابل است. اگر اندازهٔ نیروی خالص متوسط وارد بر جسم در ۱۰s اول، برابر ۳N باشد اندازهٔ نیروی خالص متوسط وارد بر جسم در ۷s اول، چند نیوتون است؟



۱) ۲۴
۲) ۱۲
۳) ۱۸
۴) ۹

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس‌نامه مساحت محدود به نمودار $F-t$ با محور زمان، بیانگر تغییر تکانه است.



$$\Delta p_{(t_1-t_2)}=S_1-S_2$$

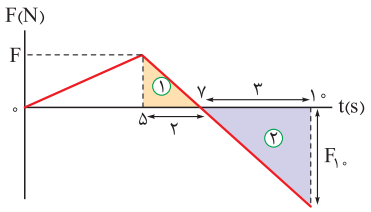
↓ تغییر تکانه در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2

نیروی متوسط خالص $(F_{av,net})$ از نسبت تغییر تکانه به مدت‌زمانی که تکانه تغییر کرده است، به دست می‌آید.

$$\vec{F}_{av,net}=\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$$

پاسخ تشریحی **گام اول:** نیروی وارد بر جسم در لحظهٔ $t=5s$ را، F در نظر می‌گیریم.

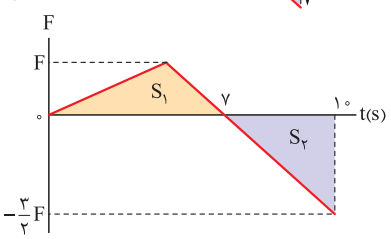
نیروی وارد بر جسم در لحظهٔ $t=10s$ را به کمک تشابه دو مثلث (۱) و (۲) به دست می‌آوریم:



$$\Rightarrow \frac{F}{2}=\frac{F_{10}}{3}\Rightarrow F_{10}=\frac{3F}{2}$$

گام دوم: مساحت محدود به نمودار و محور زمان را در مدت‌زمان ۱۰s به دست می‌آوریم.

(به عبارتی داریم تغییرات تکانه را به دست می‌آوریم.)



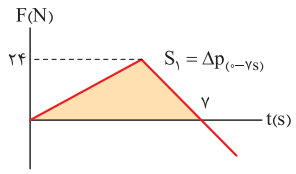
$$\Delta p_{(0-10s)}=s_1-s_2\Rightarrow \Delta p_{(0-10s)}=\frac{7\times F}{2}-\frac{3(\frac{3F}{2})}{2}$$

$$\Rightarrow \Delta p_{(0-10s)}=\frac{7F}{2}-\frac{9F}{4}=\frac{5F}{4}$$

گام سوم: نیروی خالص متوسط در مدت‌زمان ۱۰ ثانیه، برابر با ۳N است؛ بنابراین داریم:

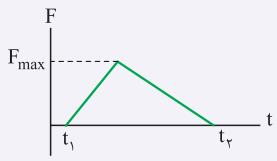
$$F_{av,net(0-10s)}=\frac{\Delta p_{(0-10s)}}{\Delta t}=\frac{\frac{5F}{4}}{10}=\frac{5F}{40}=3\Rightarrow F=24N$$

گام چهارم: نیروی خالص متوسط وارد بر جسم را در ۷ ثانیهٔ اول به دست می‌آوریم:



$$F_{av,net\,(0-7s)}=\frac{\Delta p_{(0-7s)}}{\Delta t}=\frac{\frac{24\times 7}{2}}{7}=12N$$

تکنیک نیروی خالص متوسط در نمودار $F-t$ای که به‌صورت مثلث است، برابر با نصف مقدار بیشینهٔ نیرو است.



$$F_{av,net\,(t_1-t_2)}=\frac{F_{max}}{2}$$

در گام چهارم می‌توانیم به راحتی، $F_{av,net}$ را از این تکنیک به دست آوریم.

$$F_{av,net(0-7s)}=\frac{24}{2}=12N$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

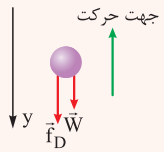
تست و پاسخ ۵۸

جسمی با تندی $20\,m/s$ از سطح زمین و در راستای قائم به سمت بالا پرتاب می‌شود. اگر جسم با تندی $15\,m/s$ به سطح زمین برخورد کند، اندازهٔ نیروی مقاومت هوای وارد بر جسم، با فرض ثابت‌بودن، چند برابر وزن جسم است؟

۱) $\frac{9}{16}$ ۲) $\frac{7}{25}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{9}{25}$

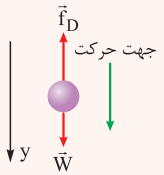
پاسخ: گزینهٔ ۲

درس‌نامه ۱) زمانی‌که جسمی به جرم m به سمت بالا پرتاب می‌شود، نیروی مقاومت هوا و نیروی وزن، به سمت پایین هستند، در این حالت رابطهٔ قانون دوم نیوتون به صورت زیر درمی‌آید:



$$F_{net} = ma$$
$$\Rightarrow W + f_D = ma \xrightarrow{W=mg} mg + f_D = ma$$

زمانی که جسمی به جرم m به سمت پایین رها می‌شود، نیروی مقاومت هوا به سمت بالا و نیروی وزن به سمت پایین است. در این حالت می‌توانیم رابطهٔ قانون دوم نیوتون را به صورت زیر بنویسیم:



$$F_{net} = ma$$
$$\Rightarrow W - f_D = ma \Rightarrow mg - f_D = ma$$

۲) در یک حرکت با شتاب ثابت و در بازهٔ زمانی Δt، جابه‌جایی در راستای محور y از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

(v_1: سرعت در لحظهٔ t_1، v_2: سرعت در لحظهٔ t_2)

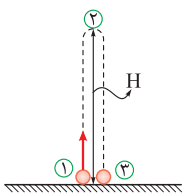
$$\Delta y = \left(\frac{v_1 + v_2}{2}\right)\Delta t \quad (\Delta t = t_2 - t_1)$$

۳) در یک حرکت با شتاب ثابت، شتاب حرکت از رابطهٔ مقابل به دست می‌آید:

$$a = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t}$$

v_1 و v_2 سرعت جسم در ابتدا و انتهای بازه هستند.

پاسخ تشریحی **گام اول:** با توجه به این‌که اندازهٔ نیروی مقاومت هوا ثابت است؛ بنابراین حرکت چه در مسیر رفت و چه در مسیر برگشت، با شتاب ثابت است. رابطهٔ $\Delta y = \left(\frac{v_1 + v_2}{2}\right)\Delta t$ را برای مسیر رفت و مسیر برگشت به کار می‌بریم:



مسیر رفت: $\Delta y = \left(\frac{v_1 + v_2}{2}\right)\Delta t \Rightarrow H = \left(\frac{20+0}{2}\right)t_1 \Rightarrow H = 10t_1$

مسیر برگشت: $\Delta y' = \left(\frac{v_2 + v_3}{2}\right)\Delta t' \Rightarrow H = \left(\frac{0+15}{2}\right)t_2 \Rightarrow H = 7/5\,t_2$

مدت‌زمان حرکت جسم در مسیر رفت را t_1 و در مسیر برگشت t_2 در نظر گرفتیم.

گام دوم: به کمک معادله‌های به‌دست‌آمده در گام اول، رابطهٔ بین t_1 و t_2 را پیدا می‌کنیم.

$$\begin{cases} H = 10t_1 \\ H = 7/5\,t_2 \end{cases} \Rightarrow 10t_1 = 7/5\,t_2 \Rightarrow t_2 = \frac{4}{3}t_1$$

گام سوم: رابطهٔ قانون دوم نیوتون را برای مسیر رفت و مسیر برگشت می‌نویسیم:

مسیر رفت: $mg + f_D = ma_1 \xrightarrow{a_1 = \frac{|v_2 - v_1|}{t_1}} mg + f_D = m\frac{|0-20|}{t_1} \Rightarrow mg + f_D = \frac{20m}{t_1}$ رابطهٔ (I)

مسیر برگشت: $mg - f_D = ma_2 \xrightarrow{a_2 = \frac{v_3 - v_2}{t_2}} mg - f_D = m\frac{15-0}{t_2} \xrightarrow{t_2 = \frac{4}{3}t_1} mg - f_D = \frac{15m}{\frac{4}{3}t_1}$

$\Rightarrow mg - f_D = \frac{45m}{4t_1}$ رابطهٔ (II)

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

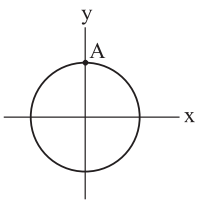
گام چهارم: حالا رابطه‌های (I) و (II) را بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{mg+f_D}{mg-f_D}=\frac{۲۰\frac{m}{t_۱}}{\frac{۴۵}{۴}\times\frac{m}{t_۱}} \Rightarrow \frac{mg+f_D}{mg-f_D}=\frac{۱۶}{۹}$$

$$\frac{\text{مخرج}-\text{صورت}}{\text{مخرج}+\text{صورت}} \Rightarrow \frac{mg+f_D-(mg-f_D)}{mg+f_D+mg-f_D}=\frac{۱۶-۹}{۱۶+۹} \Rightarrow \frac{f_D}{mg}=\frac{۷}{۲۵}$$

تست و پاسخ ۵۹

در شکل زیر، ذره‌ای با تندی ثابت روی محیط دایره‌ای به شعاع ۲m در حال حرکت است. اگر سرعت ذره در نقطهٔ A برابر $(-\pi\,m/s)\vec{i}$ باشد، شتاب ذره ۳s بعد از این لحظه برحسب متر بر مربع ثانیه کدام است؟ $(\pi^۲=۱۰)$



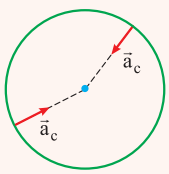
۱) $۲/۵\vec{i}$
۲) $-۲/۵\vec{i}$
۳) $۵\vec{i}$
۴) $-۵\vec{i}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس‌نامه در حرکت دایره‌ای با تندی ثابت، جسم محیط دایره $(۲\pi r)$ را در مدت‌زمان T طی می‌کند؛ بنابراین تندی از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\text{تندی (m/s)} \leftarrow v=\frac{\text{شعاع دایره (m)}\rightarrow ۲\pi r}{\text{دورهٔ تناوب (s)}\rightarrow T}$$

در حرکت دایره‌ای با تندی ثابت، شتاب همواره در راستای شعاع دایره و به سمت مرکز دایره است و مقدار آن از رابطهٔ مقابل به دست می‌آید:

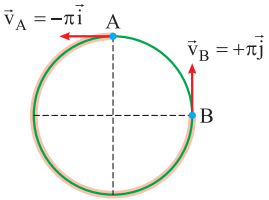


$$\text{شتاب } (m/s^۲) \leftarrow a_c=\frac{\text{تندی (m/s)}\rightarrow v^۲}{\text{شعاع دایره (m)}\rightarrow r}$$

پاسخ تشریحی **گام اول:** به کمک رابطهٔ $T=\frac{۲\pi r}{v}$، دورهٔ تناوب ذره را به دست می‌آوریم:

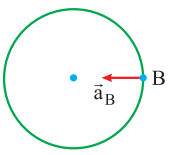
$$T=\frac{۲\pi r}{v}=\frac{۲\pi(۲)}{\pi}=۴s$$

گام دوم: وضعیت ذره را پس از $\Delta t=۳s$، مشخص می‌کنیم.



ذره $\frac{۳}{۴}$ محیط دایره را پیموده و مطابق شکل مقابل به نقطهٔ B می‌رسد. $\Rightarrow \frac{\Delta t}{T}=\frac{۳}{۴}$

گام سوم: جهت شتاب لحظه‌ای در حرکت دایره‌ای یکنواخت به سمت مرکز است و مقدار آن ثابت و از رابطهٔ $a_c=\frac{v^۲}{r}$ به دست می‌آید؛ بنابراین داریم:



$$a=\frac{v^۲}{r}=\frac{\pi^۲}{۲}=\frac{۱۰}{۲}=۵\,m/s^۲ \Rightarrow \vec{a}_B=(-۵\,m/s^۲)\vec{i}$$

تست و پاسخ ۶۰

تندی چرخش ماهوارهٔ A به دور زمین، ۴ برابر تندی چرخش ماهوارهٔ B است. اگر مدار ماهوارهٔ A هم‌گام با زمین باشد، دورهٔ گردش ماهوارهٔ B چند شبانه‌روز است؟

۱) ۸ ۲) ۱۶ ۳) ۳۲ ۴) ۶۴

پاسخ: گزینهٔ ۴

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

درس‌نامه

- تندی ماهواره‌ای به جرم m که در فاصلهٔ r از مرکز زمین به دور آن می‌چرخد، از رابطهٔ مقابل به دست می‌آید: $v=\sqrt{\frac{GM_e}{r}}$
  توجه کنید که تندی ماهواره به جرم ماهواره وابسته نیست.
- دورهٔ تناوب ماهواره‌ای که در فاصلهٔ r از مرکز زمین به دور آن می‌چرخد، از رابطهٔ مقابل به دست می‌آید: $T^2=(\frac{4\pi^2}{GM_e})r^3$

پاسخ تشریحی **گام اول:** تندی ماهواره با جذر شعاع چرخش ماهواره رابطهٔ عکس دارد؛ بنابراین داریم:

$$\frac{v_A}{v_B}=\sqrt{\frac{r_B}{r_A}} \xrightarrow{\frac{v_A}{v_B}=4} 4=\sqrt{\frac{r_B}{r_A}} \Rightarrow \frac{r_B}{r_A}=16$$

گام دوم: مربع دورهٔ تناوب ماهواره با مکعب شعاع چرخش ماهواره رابطهٔ مستقیم دارد؛ بنابراین داریم:

$$(\frac{T_B}{T_A})^2=(\frac{r_B}{r_A})^3 \xrightarrow{\frac{r_B}{r_A}=16} (\frac{T_B}{T_A})^2=(16)^3 \xrightarrow{\text{جذر}} \frac{T_B}{T_A}=64$$

مدار ماهوارهٔ A هم‌گام با زمین است؛ بنابراین دورهٔ تناوب آن ۲۴ ساعت است.

$$\frac{T_B}{T_A}=64 \xrightarrow{T_A=24h=1\text{شبانه‌روز}} \frac{T_B}{1}=64 \Rightarrow T_B=64 \text{ شبانه‌روز}$$

تست و پاسخ ۶۱

یک انتهای فنر سبکی به طول $30cm$ و ثابت $500N/m$ را از نقطهٔ ثابتی آویزان کرده و به انتهای دیگر آن وزنه‌ای ۲کیلوگرمی می‌بندیم. وزنه را در حالتی که طول فنر $30cm$ است، رها می‌کنیم تا در راستای قائم شروع به نوسان هماهنگ ساده کند. به ترتیب از راست به چپ، دامنهٔ نوسان‌های وزنه چند سانتی‌متر و تندی بیشینهٔ آن چند سانتی‌متر بر ثانیه است؟ $(g=10m/s^2)$

۱) $20\sqrt{10}$ ، ۴ ۲) $40\sqrt{10}$ ، ۴ ۳) $20\sqrt{10}$ ، ۸ ۴) $40\sqrt{10}$ ، ۸

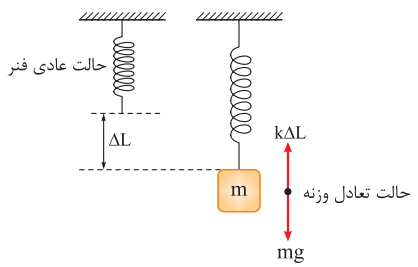
پاسخ: گزینهٔ ۱

درس‌نامه بسامد زاویه‌ای سامانهٔ جرم ـ فنر (چه به صورت قائم و چه به صورت افقی) به جرم جسم و ثابت فنر بستگی دارد و از رابطهٔ مقابل به دست می‌آید.

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}} \leftarrow \text{بسامد زاویه‌ای } (rad/s)$$
k: ثابت فنر (N/m) — m: جرم (kg)

بیشینهٔ تندی نوسانگر هماهنگ ساده، در هنگام عبور از نقطهٔ تعادل رخ می‌دهد که برابر با $A\omega$ است. (A: دامنه (m))

پاسخ تشریحی **گام اول:** اگر وزنهٔ ۲کیلوگرمی را به انتهای فنر بیاویزیم و به آرامی پایین بیاوریم تا به حالت تعادل برسد، تغییر طول آن ΔL است؛ اما اگر وزنه را به انتهای فنر بیاویزیم و رها کنیم تا به نوسان درآید، ΔL همان دامنهٔ نوسان خواهد بود.



$$mg=k\Delta L \xrightarrow[m=2kg]{k=500N/m} 2\times10=500\times\Delta L$$
$$\Rightarrow \Delta L=0/04m=4cm$$

بیشترین جابه‌جایی فنر نسبت به حالت تعادل، $4cm$ است؛ بنابراین دامنهٔ نوسان $4cm$ است.

حواستون باشه طول مسیر نوسان برابر با $2A$، یعنی برابر با $8cm$ است و ۳ و ۴ دام آموزشی هستند.

گام دوم: بسامد زاویه‌ای نوسانگر جرم ـ فنر را به دست می‌آوریم.

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{500}{2}}=\sqrt{250}=5\sqrt{10}\,rad/s$$

گام سوم: بیشینهٔ تندی نوسانگر هماهنگ ساده از رابطهٔ $v_{max}=A\omega$ به دست می‌آید؛ بنابراین داریم:

$$v_{max}=A\omega=0/04\times5\sqrt{10}=0/2\sqrt{10}\,m/s=20\sqrt{10}\,cm/s$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

تست و پاسخ ۶۲

نوسانگر هماهنگ ساده‌ای حول مبدأ مکان در حال حرکت است. در بازه‌ای که حرکت نوسانگر کندشونده است، کدام‌یک از موارد زیر الزاماً درست است؟

الف) بردارهای مکان و سرعت نوسانگر هم‌جهت هستند.
ب) بردارهای تکانه و نیروی خالص هم‌جهت هستند.
پ) بردارهای تکانه و مکان در خلاف جهت یکدیگرند.
ت) بردارهای سرعت و شتاب در خلاف جهت یکدیگرند.

۱) الف و پ ۲) الف و ت ۳) ب و پ ۴) پ و ت

پاسخ: گزینهٔ ۲

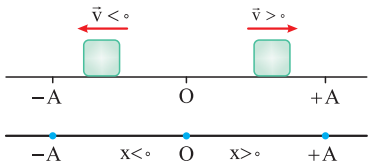
درس‌نامه در حرکت هماهنگ ساده، روابط نیرو و شتاب، برحسب مکان به صورت زیر است:

$$F = -m\omega^2 x \quad (F: \text{نیرو (N)},\ m: \text{جرم (kg)},\ x: \text{مکان نوسانگر نسبت به نقطهٔ تعادل (m)},\ \omega: \text{بسامد زاویه‌ای (rad/s)})$$

$$a = -\omega^2 x \quad (a: \text{شتاب (m/s}^2\text{)})$$

نتیجه علامت شتاب و نیرو، خلاف علامت مکان نوسانگر نسبت به نقطهٔ تعادل است.

پاسخ تشریحی در حرکت هماهنگ ساده، زمانی‌که نوسانگر به نقاط بازگشت نزدیک می‌شود، حرکت کندشونده است و به یکی از دو صورت مقابل می‌تواند باشد:



$x<0 \quad x>0 \Rightarrow$ بردارهای مکان و سرعت هم‌جهت هستند.

$\vec{p}=m\vec{v}<0 \quad \vec{p}=m\vec{v}>0$ بردارهای تکانه و مکان هم‌جهت هستند.

$F>0 \quad F<0$ بردارهای تکانه و نیرو خلاف جهت هم هستند.

$a>0 \quad a<0$ بردارهای سرعت و شتاب در خلاف جهت هم هستند.

بنابراین گزاره‌های «الف» و «ت»، صحیح هستند.

تست و پاسخ ۶۳

طول یک آونگ ساده چند سانتی‌متر و چگونه تغییر کند تا بسامد نوسان‌های آن از ۱Hz به ۲Hz برسد؟ ($g=\pi^2\ m/s^2$)

۱) ۲۵ / ۶، کاهش یابد. ۲) ۲۵ / ۶، افزایش یابد. ۳) ۷۵ / ۱۸، کاهش یابد. ۴) ۷۵ / ۱۸، افزایش یابد.

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس‌نامه اگر یک آونگ ساده (آونگی با نخ سبک که به گلوله‌ای کوچک متصل است) به طول L را به اندازهٔ خیلی کم از حالت تعادل خارج و سپس رها کنیم، حرکت آونگ از نوع هماهنگ ساده است. در این صورت بسامد زاویه‌ای، دورهٔ تناوب و بسامد نوسانگر از رابطه‌های زیر به دست می‌آیند:

$$\omega=\sqrt{\frac{g}{L}} \qquad T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \qquad f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}}$$

پاسخ تشریحی **گام اول:** به کمک رابطهٔ $f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}}$، طول آونگ ساده را زمانی که بسامد آن ۱Hz است، به دست می‌آوریم:

$$f_1=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L_1}} \Rightarrow 1=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L_1}} \xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم.}} 1=\frac{1}{4\pi^2}\times\frac{g}{L_1} \xrightarrow{g=\pi^2\,(m/s^2)} 1=\frac{1}{4\pi^2}\times\frac{\pi^2}{L_1} \Rightarrow L_1=\frac{1}{4}m=0/25\,m=25\,cm$$

گام دوم: به کمک رابطهٔ $f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}}$، طول آونگ ساده را در حالتی که بسامد نوسان‌های آن ۲Hz است، به دست می‌آوریم:

$$f_2=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L_2}} \Rightarrow 2=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L_2}} \xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم.}} 4=\frac{1}{4\pi^2}\times\frac{g}{L_2}$$

$$\xrightarrow{g=\pi^2\,m/s^2} 4=\frac{1}{4\pi^2}\times\frac{\pi^2}{L_2} \Rightarrow L_2=\frac{1}{16}m=0/0625\,m=6/25\,cm$$

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

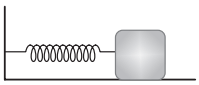
گام سوم: تغییرات طول آونگ را به دست می‌آوریم:

$$\Delta L = L_2 - L_1 = 6/25 - 25 = -18/75\,cm$$

↓ طول آونگ ساده باید کاهش یابد.

تست و پاسخ ۶۴

در شکل زیر، جسمی به جرم ۱kg به انتهای فنری با ثابت ۴ N / cm متصل و روی سطح افقی بدون اصطکاکی در حال نوسان است. اگر بیشینه و کمینهٔ طول فنر در حین نوسان ۳۴cm و ۲۸cm باشد، به ترتیب از راست به چپ بیشینهٔ تندی و بیشینهٔ شتاب جسم برحسب یکاهای SI کدام است؟

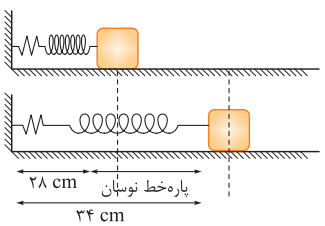


۱) ۲۴ ,۰/۶
۲) ۱۲ ,۰/۶
۳) ۲۴ ,۱/۲
۴) ۱۲ ,۱/۲

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس‌نامه بیشینهٔ تندی نوسانگر هماهنگ ساده، هنگام عبور از نقطهٔ تعادل است و از رابطهٔ $v_{max} = A\omega$ به دست می‌آید.
بیشینهٔ شتاب نوسانگر هماهنگ ساده، در نقاط بازگشت $(x = \pm A)$ است و از رابطهٔ $a_{max} = A\omega^2$ به دست می‌آید.

پاسخ تشریحی **گام اول:** شکل زیر، وضعیت فنر را در بیشینه و کمینهٔ حالت طول فنر نشان می‌دهد. دامنهٔ نوسان را به دست می‌آوریم:



$$\text{طول پاره‌خط نوسان} = 2A \Rightarrow 2A = 34 - 28 \Rightarrow 2A = 6 \Rightarrow A = 3cm = 0/03\,m$$

گام دوم: بسامد زاویه‌ای نوسانگر را به دست می‌آوریم:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \xrightarrow{k=4N/cm=400N/m} \omega = \sqrt{\frac{400}{1}} = 20\,rad/s$$

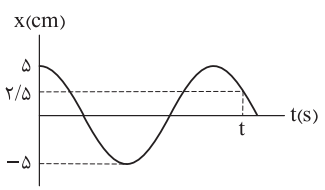
گام سوم: بیشینهٔ تندی و بیشینهٔ شتاب نوسانگر را به دست می‌آوریم:

$$v_{max} = A\omega = 0/03 \times 20 = 0/6\,m/s$$

$$a_{max} = A\omega^2 = 0/03(20)^2 = 12\,m/s^2$$

تست و پاسخ ۶۵

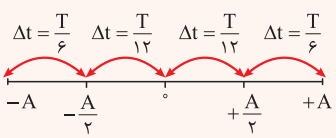
نمودار مکان ـ زمان نوسانگر هماهنگ ساده‌ای به جرم ۴۰g به شکل زیر است. اگر انرژی مکانیکی این نوسانگر ۰/۲J باشد، لحظهٔ t برحسب ثانیه کدام است؟ $(\pi^2 = 10)$



۱) $\frac{7}{60}$
۲) $\frac{9}{80}$
۳) $\frac{13}{120}$
۴) $\frac{1}{10}$

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس‌نامه یکی از مکان‌های معروف در حرکت هماهنگ ساده، $x = \pm\frac{A}{2}$ است که بازهٔ زمانی بین این مکان تا نقطهٔ تعادل و نقاط بازگشت در شکل مقابل نشان داده شده است:



به مجموع انرژی جنبشی و پتانسیل یک نوسانگر، انرژی مکانیکی گفته می‌شود که از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$E = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 \xrightarrow{\omega=2\pi f} E = 2\pi^2 mA^2 f^2$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ تشریحی **گام اول:** با توجه به نمودار، بیشترین فاصله‌ای که نوسانگر از مرکز تعادل $(x=0)$ دارد، برابر $5\,cm$ است $(A=0/05\,m)$.

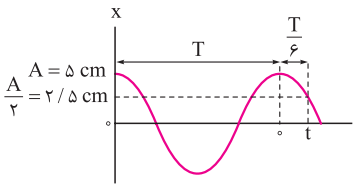
به کمک رابطهٔ $E=2\pi^2 mA^2f^2$ بسامد نوسانگر را به دست می‌آوریم:

$$E=2\pi^2 mA^2f^2 \xrightarrow{\pi^2=10} 0/2=2\times10\times40\times10^{-3}\times(0/05)^2\times f^2$$

$$\Rightarrow f^2=\frac{2\times10^{-1}}{8\times10^{-1}\times25\times10^{-4}}=100 \Rightarrow f=10\,Hz$$

بنابراین طبق رابطهٔ $T=\frac{1}{f}$، دورهٔ تناوب برابر $0/1\,s$ است.

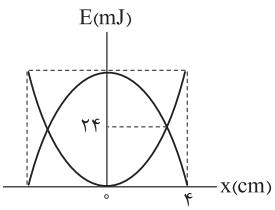
گام دوم: در یک حرکت هماهنگ ساده، کم‌ترین بازهٔ زمانی از مکان $x=\pm\frac{A}{2}$ تا انتهای مسیر، $\frac{T}{6}$ است؛ بنابراین مطابق نمودار مکان ـ زمان زیر داریم:



$$t=T+\frac{T}{6}=\frac{7T}{6}\xrightarrow{T=0/1s} t=\frac{7(0/1)}{6}=\frac{7}{60}s$$

تست و پاسخ ۶۶

نمودار انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل نوسانگر هماهنگ ساده‌ای به شکل زیر است. بیشینهٔ اندازهٔ نیروی خالص وارد بر این نوسانگر چند نیوتون است؟



۱) $2/4$

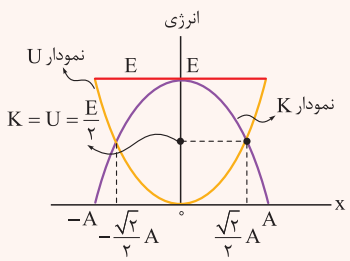
۲) $0/24$

۳) $4/8$

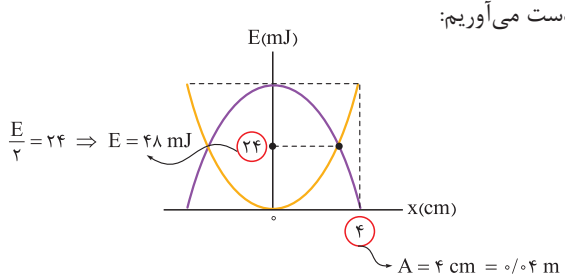
۴) $0/48$

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس‌نامه نمودار شکل مقابل، تغییرات انرژی نوسانگر را برحسب مکان نمایش می‌دهد.



پاسخ تشریحی **گام اول:** با توجه به شکل، انرژی مکانیکی نوسانگر را به دست می‌آوریم:



گام دوم: به کمک رابطهٔ $E=\frac{1}{2}mA^2\omega^2$، مقدار عددی $m\omega^2$ را برحسب واحدهای SI به دست می‌آوریم:

$$E=\frac{1}{2}mA^2\omega^2 \Rightarrow 48\times10^{-3}=\frac{1}{2}\times m\times(0/04)^2\times\omega^2 \Rightarrow m\omega^2=\frac{48\times10^{-3}}{\frac{1}{2}\times16\times10^{-4}}=60\,N/m$$

گام سوم: اندازهٔ نیروی بیشینهٔ وارد بر نوسانگر را از رابطهٔ $F_{max}=m\omega^2A$ به‌دست می‌آوریم.

$$F_{max}=m\omega^2A \xrightarrow{m\omega^2=60\,N/m,\ A=0/04\,m} F_{max}=60\times4\times10^{-2}=2/4\,N$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

تست و پاسخ ۶۷

دورهٔ تناوب نوسانگر هماهنگ ساده‌ای برابر با ۶s است. بیشترین تندی متوسط متحرک در یک بازهٔ زمانی ۱ثانیه‌ای، چند برابر کم‌ترین تندی متوسط آن در یک بازهٔ زمانی ۲ثانیه‌ای است؟

(۶s ← T) (بیشترین تندی متوسط ← در طرفین مرکز نوسان) (کم‌ترین تندی متوسط ← در رفت و برگشت از یک انتهای مسیر)

۱) ۱
۲) ۲
۳) $\sqrt{۳}$
۴) $۲\sqrt{۳}$

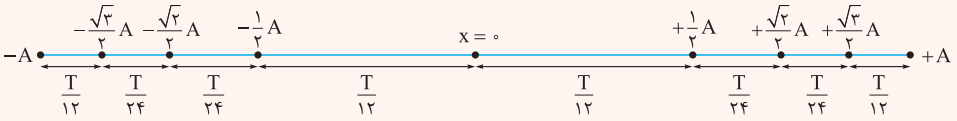
پاسخ: گزینهٔ ۲

مشاوره در درس‌نامهٔ این تست، شکلی که مسیر حرکت نوسانگر را نشان می‌دهد، به خوبی به‌خاطر بسپارید؛ زیرا در حل این تست و تست‌های مشابه، کمک زیادی به ما می‌کند و دامنهٔ کاربرد آن، فراتر از این سؤال است.

خودت حل کنی بهتره بیشترین تندی متوسط نوسانگر در بازهٔ زمانی $\frac{T}{۶}$ را به صورت متقارن (دوتا $\frac{T}{۱۲}$) در طرفین نقطهٔ وسط مسیر در نظر بگیرید. هم‌چنین کم‌ترین تندی متوسط نوسانگر در بازهٔ زمانی $\frac{T}{۳}$ را به صورت متقارن (دوتا $\frac{T}{۶}$) در رفت و برگشت به یکی از دو انتهای مسیر در نظر بگیرید.

درس نامه

۱) نوسانگری که با دامنهٔ A و دورهٔ T حرکت هماهنگ ساده انجام می‌دهد، در مسیر حرکت خود، فاصلهٔ بین مکان‌های نشان داده شده در شکل زیر را در بازه‌های زمانی معینی برحسب دوره می‌پیماید.



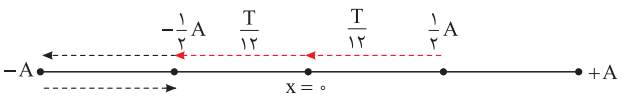
۲) رابطهٔ تندی متوسط:

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t}$$

(s_{av}: تندی متوسط (m/s)، ℓ: مسافت (m)، Δt: بازهٔ زمانی (s))

پاسخ تشریحی **گام اول:** با توجه به این‌که دورهٔ تناوب نوسانگر ۶s است، بازهٔ زمانی ۱s معادل $\frac{T}{۶}$ و بازهٔ زمانی ۲s معادل $\frac{T}{۳}$ است.

گام دوم: از آن‌جاکه بیشترین تندی نوسانگر در وسط مسیر نوسانی است، بیشترین تندی متوسط آن در بازهٔ زمانی $\frac{T}{۶}$ را به صورت متقارن (دوتا $\frac{T}{۱۲}$) در طرفین نقطهٔ وسط مسیر در نظر می‌گیریم.



$$(s_{av})_{max} = \frac{\ell_۱}{\Delta t_۱} \xrightarrow[\Delta t_۱ = \frac{T}{۶} = ۱s]{\ell_۱ = |-\frac{۱}{۲}A - \frac{۱}{۲}A| = A} (s_{av})_{max} = \frac{A}{۱} = A$$

گام سوم: می‌دانیم تندی نوسانگر در دو انتهای مسیر نوسانی آن صفر است؛ بنابراین کم‌ترین تندی متوسط آن در بازهٔ زمانی $\frac{T}{۳}$ را به صورت متقارن (دوتا $\frac{T}{۶}$) در رفت و برگشت به یکی از دو انتهای مسیر نوسانی در نظر می‌گیریم.

$$(s_{av})_{min} = \frac{\ell_۲}{\Delta t_۲} \xrightarrow[\Delta t_۲ = \frac{T}{۳} = ۲s]{\ell_۲ = |-\frac{۱}{۲}A| + \frac{۱}{۲}A = A} (s_{av})_{min} = \frac{A}{۲}$$

گام چهارم: نسبت تندی‌های خواسته‌شده را حساب می‌کنیم:

$$\frac{(s_{av})_{max}}{(s_{av})_{min}} = \frac{A}{\frac{A}{۲}} = ۲$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

تست و پاسخ ۶۸

معادلهٔ مکان ـ زمان نوسانگر هماهنگ ساده‌ای در SI به صورت $x = ۰/۰۶\cos(۴\pi t)$ است. اگر در لحظه‌ای معین، بردار مکان نوسانگر برابر با $(۳\,cm)\vec{i}$ و تندی آن در حال افزایش باشد، $۰/۱۲۵\,s$ بعد از آن، بردار مکان متحرک برحسب سانتی‌متر کدام است؟

$A = ۰/۰۶\,m, \omega = ۴\pi\ rad/s$ ← Δt ← $x_۱ = +۳\,cm$

۱) $۳\vec{i}$ ۲) $-۳\vec{i}$ ۳) $۳\sqrt{۳}\,\vec{i}$ ۴) $-۳\sqrt{۳}\,\vec{i}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

خودت حل کنی بهتره با استفاده از معادلهٔ داده‌شده، دامنه و دورهٔ حرکت را پیدا کنید، سپس روی مسیر نوسانی، مکان نوسانگر را در لحظهٔ $t_۱$ و $۰/۱۲۵\,s$ بعد از آن مشخص کنید.

درس‌نامه

۱) **معادلهٔ مکان ـ زمان حرکت هماهنگ ساده، در SI:**

$x = A\cos\omega t$ ← مکان نوسانگر (m)، دامنه (m)، زمان (s)، بسامد زاویه‌ای (rad/s)

البته می‌توانیم هر دو کمیت دامنه و مکان نوسانگر را برحسب سانتی‌متر نیز بنویسیم.

۲) **رابطهٔ بسامد زاویه‌ای نوسانگر:**

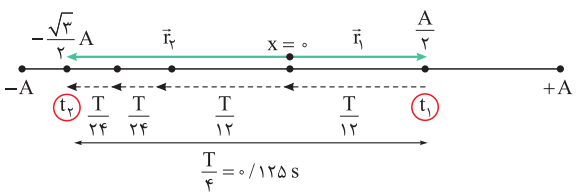
$\omega = \frac{۲\pi}{T}$ ← بسامد زاویه‌ای (rad/s)، دوره (s)

پاسخ تشریحی **گام اول:** از مقایسهٔ معادلهٔ مکان ـ زمان در حرکت هماهنگ ساده با معادلهٔ داده‌شده در این سؤال، داریم: $A = ۰/۰۶\,m = ۶\,cm$

$$\omega = \frac{۲\pi}{T} \xrightarrow{\omega = ۴\pi\,rad/s} ۴\pi = \frac{۲\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{۱}{۲}\,s$$

بنابراین زمان $۰/۱۲۵\,s$ یا $\frac{۱}{۸}\,s$ که در این سؤال داده شده، معادل $\frac{T}{۴}$ است.

گام دوم: شروع و پایان حرکت را در بازهٔ زمانی داده‌شده مشخص می‌کنیم: (در لحظهٔ $t_۱$، نوسانگر در سمت راست مبدأ مکان و تندی آن در حال افزایش است. پس به طرف چپ حرکت می‌کند.)



$$\vec{r}_۱ = (۳\,cm)\vec{i}$$

$$\vec{r}_۲ = (-\frac{\sqrt{۳}}{۲}A)\vec{i} \xrightarrow{A=۶\,cm} \vec{r}_۲ = (-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times ۶)\vec{i} = (-۳\sqrt{۳}\,cm)\vec{i}$$

تست و پاسخ ۶۹

معادلهٔ مکان ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، در SI به صورت $x = ۰/۲\cos(۲۰\pi t)$ است. اندازهٔ شتاب متوسط متحرک در بازهٔ زمانی $t_۱ = ۰/۰۲۵\,s$ تا $t_۲ = ۰/۱\,s$، چند برابر اندازهٔ شتاب بیشینهٔ آن است؟

$A = ۰/۲\,m$ ، $\omega = ۲۰\pi\ rad/s$ ← $A\omega^۲$

۱) $\frac{۲}{۳\pi}$ ۲) $\frac{۲}{\pi}$ ۳) $\frac{۱}{۳\pi}$ ۴) $\frac{۱}{\pi}$

پاسخ: گزینهٔ ۱

مشاوره مطالب حرکت‌شناسی، این قابلیت را دارند که با مباحثی همچون دینامیک، نوسان، کار و انرژی و ... ترکیب شوند. مثلاً این تست به صورت ترکیبی، بین فصل‌های حرکت‌شناسی و نوسان مطرح شده است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

خودت حل کنی بهتره با استفاده از معادلهٔ داده‌شده، دورهٔ حرکت را به دست آورید و t_1 و t_2 را برحسب دوره بنویسید، سپس سرعت متحرک را در این دو لحظه پیدا کنید و شتاب متوسط متحرک را به دست آورید.

درس‌نامه

۱) **رابطه‌های بیشینهٔ سرعت و بیشینهٔ شتاب نوسانگر، در حرکت هماهنگ ساده:**

$$v_{max} = \pm A\omega$$

(v_{max}: بیشینهٔ سرعت (m/s)، A: دامنه (m)، ω: بسامد زاویه‌ای (rad/s)؛ سرعت در جهت محور / سرعت در خلاف جهت محور)

$$a_{max} = \pm A\omega^2$$

(a_{max}: بیشینهٔ شتاب (m/s^2)، A: دامنه (m)، ω: بسامد زاویه‌ای (rad/s)؛ شتاب در جهت محور / شتاب در خلاف جهت محور)

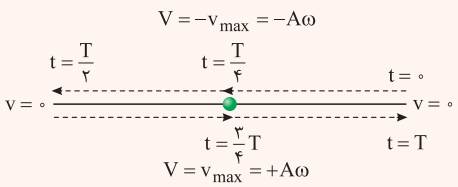
۲) **رابطهٔ شتاب متوسط:**

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

(a_{av}: شتاب متوسط (m/s^2)، Δv: تغییر سرعت (m/s)، Δt: بازهٔ زمانی (s))

- v_1: سرعت در لحظهٔ t_1 (m/s)
- v_2: سرعت در لحظهٔ t_2 (m/s)

۳) در شکل مقابل و در مدت یک دوره، وضعیت سرعت نوسانگر را در وسط و دو انتهای مسیر نوسانی مشاهده می‌کنید:



پاسخ تشریحی **گام اول:** با استفاده از معادلهٔ مکان ـ زمان داده‌شده، دامنه و دورهٔ حرکت را پیدا می‌کنیم و t_1 و t_2 را برحسب دوره می‌نویسیم تا ببینیم در چه مکان‌هایی از یک نوسان کامل هستند.

$$\begin{cases} x = A\cos\omega t \\ x = 0/2\cos(20\pi t) \end{cases} \Rightarrow A = 0/2\,m \ , \ \omega = 20\pi\ rad/s$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow 20\pi = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{1}{10}s$$

$$t_1 = 0/025\,s = \frac{1}{40}s = \frac{T}{4}$$

$$t_2 = 0/1\,s = T$$

بنابراین در لحظهٔ t_1 نوسانگر در حال عبور از مرکز نوسان و در خلاف جهت محور است؛ یعنی:

$$v_1 = -A\omega \xrightarrow[\omega=20\pi\,rad/s]{A=0/2\,m} v_1 = -0/2\times 20\pi = -4\pi\,m/s$$

هم‌چنین در لحظهٔ t_2 نوسانگر در دامنهٔ مثبت خود است و $v_2 = 0$ می‌باشد.

گام دوم: شتاب متوسط نوسانگر را بین دو لحظهٔ t_1 و t_2 محاسبه می‌کنیم:

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \xrightarrow[t_2=0/1\,s\ ,\ t_1=0/025\,s]{v_2=0\ ,\ v_1=-4\pi\,m/s} a_{av} = \frac{0-(-4\pi)}{0/1-0/025} = \frac{4\pi}{0/075}\ m/s^2$$

گام سوم: اندازهٔ شتاب بیشینهٔ نوسانگر را به دست می‌آوریم:

$$|a_{max}| = A\omega^2 \xrightarrow[\omega=20\pi\,rad/s]{A=0/2\,m} |a_{max}| = 0/2\times(20\pi)^2 = 0/2\times 400\pi^2 = 80\pi^2\ m/s^2$$

گام چهارم: نسبت اندازهٔ شتاب متوسط متحرک در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 به اندازهٔ شتاب بیشینه را حساب می‌کنیم:

$$\frac{|a_{av}|}{|a_{max}|} = \frac{\frac{4\pi}{0/075}}{\frac{80\pi^2}{1}} = \frac{4}{0/075\times 80\pi} = \frac{2}{3\pi}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

تست و پاسخ ۷۰

معادلهٔ مکان ـ زمان حرکت هماهنگ ساده‌ای در SI به صورت $x = ۰/۰۲\cos(\omega t)$ است. اگر تندی متوسط نوسانگر در بازهٔ زمانی $t_۱ = ۰/۰۵s$ تا $t_۲ = ۰/۰۷s$ برابر $۲m/s$ باشد، نوسانگر در هر دقیقه چند مرتبه از مبدأ مکان عبور می‌کند؟

$A = ۰/۰۲m$

۱) ۱۵۰ ۲) ۱۵۰۰ ۳) ۳۰۰ ۴) ۳۰۰۰

پاسخ: گزینهٔ ۴

خودت حل کنی بهتره ابتدا مسافت پیموده‌شده توسط نوسانگر را در بازهٔ زمانی داده‌شده به دست آورید و بررسی کنید که بازهٔ زمانی داده‌شده، چه کسری از دوره است، سپس با داشتن دوره، تعداد نوسان‌ها و تعداد مرتبهٔ عبور از مبدأ مکان را حساب کنید.

درس‌نامه

۱) **رابطهٔ دوره و تعداد نوسان:**

کل زمان نوسان‌ها (s)

تعداد نوسان ← $N = \frac{t}{T}$

دوره (s)

۲) اگر مسافت طی‌شده توسط نوسانگر، به اندازهٔ $۲A$ باشد، بازهٔ زمانی این حرکت همواره $\frac{T}{۲}$ خواهد بود.

پاسخ تشریحی **گام اول:** با توجه به معادلهٔ مکان ـ زمان داده‌شده، دامنهٔ حرکت را به دست می‌آوریم:

$$\left.\begin{matrix} x = A\cos\omega t \\ x = ۰/۰۲\cos\omega t \end{matrix}\right\} \Rightarrow A = ۰/۰۲m = ۲cm$$

گام دوم: با داشتن تندی متوسط، مسافت طی‌شده در بازهٔ زمانی داده‌شده را حساب می‌کنیم:

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t = t_۲ - t_۱ = ۰/۰۷ - ۰/۰۵ = ۰/۰۲s]{s_{av} = ۲m/s} ۲ = \frac{\ell}{۰/۰۲} \Rightarrow \ell = ۰/۰۴m = ۴cm$$

مسافت طی‌شده، ۲ برابر دامنه است؛ پس بازهٔ زمانی داده‌شده، $\frac{T}{۲}$ است.

$$t_۲ - t_۱ = \frac{T}{۲} \Rightarrow ۰/۰۷ - ۰/۰۵ = \frac{T}{۲} \Rightarrow T = ۰/۰۴s$$

گام سوم: تعداد نوسان‌ها در هر دقیقه را به دست می‌آوریم:

$$N = \frac{t}{T} \xrightarrow[T = ۰/۰۴s]{t = ۱min = ۶۰s} N = \frac{۶۰}{۰/۰۴} = ۱۵۰۰$$

از طرفی می‌دانیم که نوسانگر در هر دوره، دو بار از مبدأ مکان عبور می‌کند؛ بنابراین در هر دقیقه، ۳۰۰۰ (= ۲×۱۵۰۰) مرتبه از مبدأ مکان عبور می‌کند.

تست و پاسخ ۷۱

در یک طناب، موجی عرضی منتشر شده است. اگر تندی انتشار موج در طناب برابر با $۶ m/s$ و طول موج برابر با $۳۰ cm$ باشد، هر یک از ذرات طناب در مدت یک دقیقه چند نوسان کامل انجام می‌دهند؟

۱) ۱۲۰۰ ۲) ۱۲۰ ۳) ۳۰ ۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس‌نامه به مسافتی که یک موج در مدت یک دورهٔ تناوب طی می‌کند، طول موج گفته می‌شود و از رابطهٔ روبه‌رو به دست می‌آید:

دوره (s)

طول موج (m) ← $\lambda = Tv$ → تندی انتشار موج (m/s)

طول موج هم به ویژگی‌های محیط و هم ویژگی‌های چشمهٔ موج وابسته است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ تشریحی **گام اول:** به کمک رابطهٔ $\lambda = Tv$، دورهٔ تناوب ذرات موج را به دست می‌آوریم:

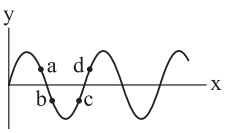
$$\lambda = Tv \Rightarrow ۰/۳ = T \times ۶ \Rightarrow T = \frac{۰/۳}{۶} = \frac{۱}{۲۰}s$$

گام دوم: به کمک رابطهٔ $TN = \Delta t$، تعداد نوسان‌های کامل هر یک از ذرات طناب را در مدت‌زمان $۱min$ به دست می‌آوریم:

$$TN = \Delta t \Rightarrow \frac{۱}{۲۰} \times N = ۶۰ \Rightarrow N = ۱۲۰۰$$

تست و پاسخ ۷۲

تصویر موج منتشرشده در یک طناب در یک لحظهٔ معین به شکل زیر است. چه تعداد از موارد زیر دربارهٔ ذرات مشخص‌شده از طناب در این لحظه الزاماً درست است؟



الف) سرعت ذرهٔ a در جهت محور y است.

ب) شتاب ذرهٔ b در جهت محور y است.

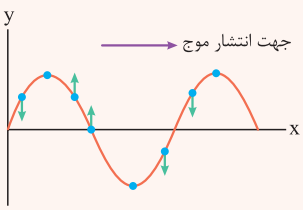
پ) انرژی جنبشی ذرهٔ c در حال کاهش است.

ت) انرژی پتانسیل ذرهٔ d در حال کاهش است.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس‌نامه برای مشخص‌کردن جهت ارتعاش ذرات یک موج در یک نقش موج به این نکته توجه کنید که هر نقطه از محیط، حرکت نقاط قبلی خودش را تقلید می‌کند. در نقش موج روبه‌رو، موج در جهت محور x منتشر می‌شود و جهت ارتعاش ذرات در این لحظه مشخص شده است.



پاسخ تشریحی تک‌تک گزاره‌ها را بررسی می‌کنیم:

الف) برای تشخیص جهت حرکت ذرهٔ a، باید در مورد جهت حرکت موج اطلاع داشته باشیم، در صورتی که جهت انتشار موج در جهت محور x باشد، ذرهٔ a در این لحظه در جهت محور y حرکت خواهد کرد؛ پس لزوماً این گزاره درست نیست.

ب) با توجه به این‌که ذرهٔ b در مکان‌های منفی قرار دارد، جهت شتاب ذرهٔ b با توجه به رابطهٔ $a = -\omega^۲ y$ در جهت محور y است و ربطی به جهت انتشار موج ندارد.

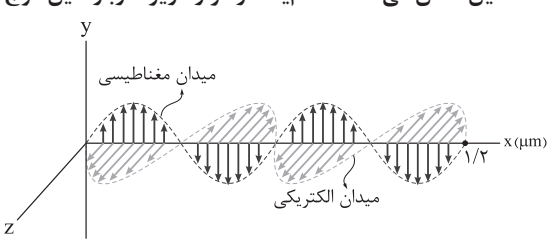
پ) اگر ذره‌ای به نقاط بازگشت $(y = \pm A)$ نزدیک شود، تندی و انرژی جنبشی آن کاهش می‌یابد و تنها در صورتی این اتفاق در این لحظه برای ذره (c) می‌افتد که موج در جهت محور x منتشر شود.

ت) در صورتی انرژی پتانسیل ذره در حال کاهش است که به مرکز نوسان $(y = ۰)$ نزدیک شود و این اتفاق تنها زمانی برای ذرهٔ d در این لحظه رخ می‌دهد که موج در جهت محور x منتشر شود.

بنابراین تنها گزارهٔ «ب» الزاماً درست است که ربطی به جهت انتشار موج ندارد.

تست و پاسخ ۷۳

شکل زیر یک موج الکترومغناطیسی را که در خلأ منتشر شده است، در یک لحظهٔ معین نشان می‌دهد. کدام‌یک از موارد زیر، دربارهٔ این موج درست است؟ $(c = ۳ \times ۱۰^۸ m/s)$



الف) بسامد موج $۲/۵ \times ۱۰^{۱۴} Hz$ است.

ب) دورهٔ موج $۱۰^{-۱۵} s$ است.

پ) موج در جهت محور x در حال پیشروی است.

ت) موج در ناحیهٔ نور مرئی قرار دارد.

۱) الف و پ ۲) ب و ت ۳) پ ۴) ت

پاسخ: گزینهٔ ۴

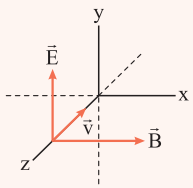
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

درس‌نامه برای تعیین جهت انتشار موج الکترومغناطیسی از قاعدهٔ دست راست استفاده می‌کنیم:

چهار انگشت دست راست در جهت میدان الکتریکی $(\vec{E})$ قرار می‌گیرد، به گونه‌ای که میدان مغناطیسی $(\vec{B})$ از کف دست بیرون بیاید.

در این صورت انگشت شست جهت انتشار موج (انرژی) $(\vec{v})$ را نشان می‌دهد.

در شکل مقابل جهت انتشار موج الکترومغناطیسی در یک لحظه نشان داده شده است.

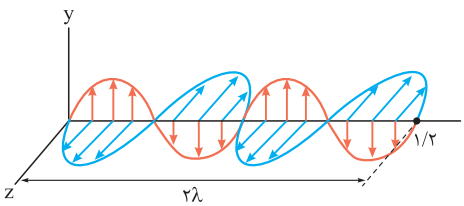


$\vec{E}$ (در جهت محور y): چهار انگشت دست راست

$\vec{B}$ (در جهت محور x): کف دست

$\vec{v}$ (خلاف جهت محور z): انگشت شست دست راست

پاسخ تشریحی **گام اول:** با توجه به شکل موج، طول موج آن را به دست می‌آوریم:



$$۲\lambda = ۱/۲\,\mu m \Rightarrow \lambda = ۰/۶\,\mu m = ۶۰۰\,nm$$

با توجه به این‌که طول موج در محدودهٔ ۴۰۰ nm تا ۷۰۰ nm است، موج در ناحیهٔ نور مرئی است. (درستی «ت»)

گام دوم: به کمک رابطه‌های $\lambda = \frac{c}{f}$ و $\lambda = Tc$، بسامد موج و دورهٔ تناوب آن را به دست می‌آوریم:

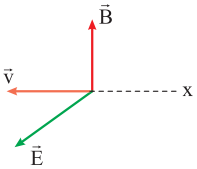
نادرستی «الف»:

$$\lambda = \frac{c}{f} \Rightarrow ۰/۶\times۱۰^{-۶} = \frac{۳\times۱۰^{۸}}{f} \Rightarrow f = \frac{۳\times۱۰^{۸}}{۰/۶\times۱۰^{-۶}} = ۵\times۱۰^{۱۴}\,Hz$$

نادرستی «ب»:

$$\lambda = Tc \Rightarrow ۰/۶\times۱۰^{-۶} = T\times۳\times۱۰^{۸} \Rightarrow T = \frac{۰/۶\times۱۰^{-۶}}{۳\times۱۰^{۸}} = ۲\times۱۰^{-۱۵}\,s$$

گام سوم: جهت انتشار موج را به کمک قاعدهٔ دست راست مشخص می‌کنیم. چهار انگشت دست راست را در جهت میدان الکتریکی $(\vec{E})$ و کف دست را در جهت میدان مغناطیسی $(\vec{B})$ قرار می‌دهیم. مطابق شکل، موج در خلاف جهت محور x پیشروی می‌کند. (نادرستی «پ»)



تست و پاسخ ۷۴

جرم دو طناب A و B برابر با هم و طول طناب B، ۴ برابر طول طناب A است. اگر در لحظه‌ای، در یک انتهای هر طناب تپی عرضی ایجاد کنیم، دو تپ هم‌زمان به انتهای دیگر طناب‌ها می‌رسند. اندازهٔ نیروی کشش طناب A چند برابر اندازهٔ نیروی کشش طناب B است؟

۱) ۴
۲) ۲
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) $\frac{۱}{۴}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس‌نامه

تندی انتشار موج‌های عرضی از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \leftarrow \text{تندی انتشار موج (m/s)} \quad F \rightarrow \text{نیروی کشش (N)} \quad \mu \rightarrow \text{چگالی خطی جرم (kg/m)}$$

$$\mu = \frac{m}{L} \quad m \rightarrow \text{جرم ریسمان یا فنر (kg)} \quad L \rightarrow \text{طول ریسمان یا فنر (m)}$$

پاسخ تشریحی **گام اول:** تندی انتشار موج عرضی در طناب ثابت است و از آن‌جا که هر دو تپ هم‌زمان به انتهای دیگر طناب می‌رسند؛ بنابراین نسبت $\frac{L}{v}$ برای هر دو موج یکسان است.

$$L = v\Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{L}{v} \Rightarrow \Delta t_A = \Delta t_B \Rightarrow \frac{L_A}{v_A} = \frac{L_B}{v_B}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

گام دوم: یکی از روابط برای محاسبهٔ تندی انتشار موج عرضی در طناب، $v=\sqrt{\frac{FL}{m}}$ است؛ بنابراین داریم:

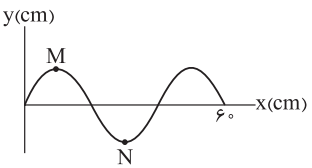
$$\frac{L_A}{v_A}=\frac{L_B}{v_B}\Rightarrow\frac{L_A}{\sqrt{\frac{F_AL_A}{m_A}}}=\frac{L_B}{\sqrt{\frac{F_BL_B}{m_B}}}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم.}}\frac{L_A^2}{\frac{F_AL_A}{m_A}}=\frac{L_B^2}{\frac{F_BL_B}{m_B}}\Rightarrow\frac{m_AL_A}{F_A}=\frac{m_BL_B}{F_B}$$

$$\xrightarrow{m_A=m_B\ ,\ L_B=4L_A}\frac{m_A\times L_A}{F_A}=\frac{m_A\times 4L_A}{F_B}\Rightarrow F_A=\frac{1}{4}F_B\Rightarrow\frac{F_A}{F_B}=\frac{1}{4}$$

تست و پاسخ ۷۵

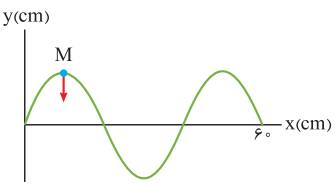
تصویر یک موج عرضی منتشرشده در یک تار در لحظهٔ $t=0$ به شکل زیر است. در لحظهٔ $t=0/02s$، تندی ذرهٔ M از تار برای اولین بار بیشینه و برابر $3m/s$ می‌شود. در مدتی که ذرهٔ N مسافت $12cm$ را طی می‌کند، موج چند متر پیشروی می‌کند؟ $(\pi=3)$



۱) ۰/۳
۲) ۰/۴
۳) ۰/۶
۴) ۰/۸

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ تشریحی

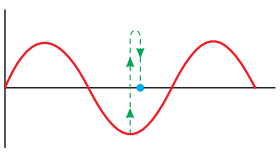


گام اول: شکل مقابل، جهتی را که ذرهٔ M می‌خواهد حرکت کند، در لحظهٔ $t=0$ نشان می‌دهد.

ذرهٔ M پس از مدت‌زمان $\Delta t=\frac{T}{4}$ برای اولین بار به مرکز نوسان می‌رسد و تندی آن بیشینه می‌شود؛ بنابراین داریم: $\Delta t=\frac{T}{4}=0/02\Rightarrow T=0/08s$

گام دوم: با توجه به این‌که تندی بیشینهٔ ذرات موج، $3m/s$ است، دامنهٔ ارتعاش ذرات موج را به دست می‌آوریم:

$$v_{max}=A\omega=A(\frac{2\pi}{T})\Rightarrow 3=A\times\frac{6}{0/08}\Rightarrow A=0/04m=4cm$$



گام سوم: ذرهٔ N در نقطهٔ بازگشت قرار دارد و با پیمودن مسافت $12cm$ به مرکز نوسان می‌رسد و این مسافت را در مدت‌زمان $\frac{3T}{4}$ طی می‌کند.

گام چهارم: با توجه به شکل سؤال، برای به دست آوردن طول موج داریم:

$$\frac{3}{2}\lambda=60\Rightarrow\lambda=40cm$$

گام پنجم: چون موج در مدت T به اندازهٔ λ پیشروی می‌کند، مقدار پیشروی آن در مدت $\frac{3}{4}T$ برابر است با: $\Delta x=\frac{3}{4}\lambda=\frac{3}{4}\times 40=30cm=0/3m$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

شیمی دوازدهم: صفحه‌های ۱ تا ۶۶

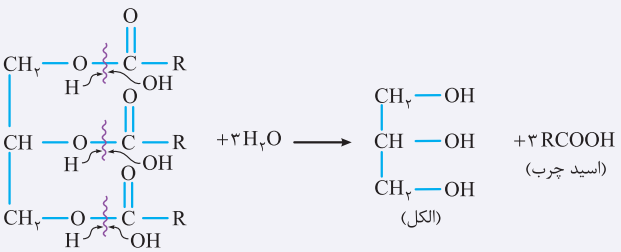
تست و پاسخ ۷۶

بر اثر آبکافت یک استر سنگین و واکنش اسید چرب حاصل از آن با مقداری محلول سود، تنها یک نوع صابون جامد با فرمول $C_{19}H_{33}O_2Na$ به دست می‌آید. فرمول استر سنگین اولیه کدام است؟

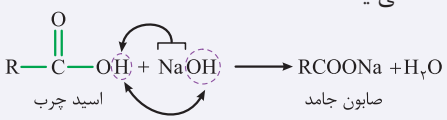
۱) $C_{57}H_{104}O_6$ ۲) $C_{57}H_{110}O_6$ ۳) $C_{60}H_{104}O_6$ ۴) $C_{60}H_{110}O_6$

پاسخ: گزینهٔ ۳

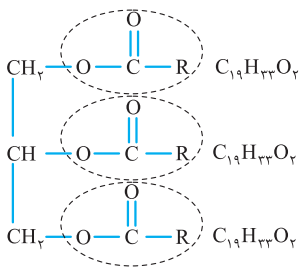
نکته معادلهٔ واکنش آبکافت استر سنگین (استر سه‌عاملی با زنجیر بلند کربنی) را می‌توان به صورت زیر نوشت:



از واکنش اسید چرب با محلول سدیم هیدروکسید مطابق معادلهٔ زیر، صابون جامد به دست می‌آید:



پاسخ تشریحی روش اول: با توجه به فرمول شیمیایی صابون در صورت سؤال ($C_{19}H_{33}O_2Na$) و مقایسهٔ آن با فرمول کلی صابون‌های جامد ($RCOONa$) نتیجه می‌گیریم که فرمول بخش RCOO همان $C_{19}H_{33}O_2$ است؛ پس ساختار استر سنگین اولیه به صورت زیر خواهد بود:



$\Rightarrow$ فرمول استر سنگین اولیه $= C_{60}H_{104}O_6$

روش دوم: اگر اسیدهای چرب سازندهٔ یک استر یکسان باشند، برای پیداکردن فرمول این اسیدهای چرب می‌توان از رابطهٔ زیر استفاده کرد.

$$\text{فرمول اسید چرب سازندهٔ استر سنگین} = \frac{\text{فرمول مولکولی استر سنگین} - C_3H_2}{3}$$

اگر به جای Na صابون، H قرار دهیم، فرمول اسید چرب به دست می‌آید. به این ترتیب خواهیم داشت: $C_{19}H_{33}O_2Na \rightarrow C_{19}H_{34}O_2$

فرمول استر سنگین $= 3(C_{19}H_{34}O_2) + C_3H_2 = C_{60}H_{104}O_6 \Rightarrow$ فرمول اسید چرب)۳ $+ C_3H_2$ (فرمول استر سنگین

تست و پاسخ ۷۷

کدام مطلب درست است؟

۱) مولکول‌های سازندهٔ عسل به دلیل داشتن شمار زیادی گروه کربوکسیل، قطبی به حساب می‌آیند.

۲) نسبت شمار اتم‌های هیدروژن به کربن در فرمول شیمیایی وازلین، بیشتر از این نسبت در روغن زیتون است.

۳) عدد اکسایش اتم کربن در اوره با عدد اکسایش کربن در متان برابر است.

۴) سدیم کلرید مانند سایر ترکیب‌های یونی با برقراری جاذبهٔ یون ـ دوقطبی در آب حل می‌شود.

$C_{57}H_{104}O_6$ $C_{25}H_{52}$ COOH CH_4 $CO(NH_2)_2$

پاسخ: گزینهٔ ۲

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

مشاوره جدول خود را بیازمایید صفحهٔ ۴ فصل اول شیمی دوازدهم، یکی از قسمت‌های مهم کتاب درسی هست. حتماً فرمول مواد آورده‌شده در این جدول و نکات مربوط به ساختار آن‌ها و نوع نیروهای جاذبهٔ بین ذره‌ای‌شان با آب یا هگزان را به خاطر بسپارید.

نکته نام، فرمول شیمیایی و حلال مناسب برخی مواد مهم در جدول زیر آورده شده است:

نام ماده	فرمول شیمیایی	محلول در آب	محلول در هگزان
اتیلن گلیکول (مولکول قطبی)	CH_2OHCH_2OH $(C_2H_6O_2)$	✓	×
نمک خوراکی (ترکیب یونی)	$NaCl$	✓	×
بنزین (مولکول ناقطبی)	C_8H_{18}	×	✓
اوره (مولکول قطبی)	$CO(NH_2)_2$	✓	×
روغن زیتون (مولکول ناقطبی)	$C_{57}H_{104}O_6$	×	✓
وازلین (مولکول ناقطبی)	$C_{25}H_{52}$	×	✓

پاسخ تشریحی بررسی گزینه‌ها:

۱) در ساختار مولکول‌های سازندهٔ عسل، شمار زیادی گروه عاملی هیدروکسیل $(-OH)$ وجود دارد، نه کربوکسیل $(-COOH)$!!!

۲) فرمول شیمیایی وازلین $C_{25}H_{52}$ و فرمول شیمیایی روغن زیتون $C_{57}H_{104}O_6$ است.

وازلین: $\frac{\text{شمار اتم H}}{\text{شمار اتم C}} = \frac{52}{25} > 2$

روغن زیتون: $\frac{\text{شمار اتم H}}{\text{شمار اتم C}} = \frac{104}{57} < 2$

۳)

نکته **برای محاسبهٔ عدد اکسایش:**

الف) الکترون‌های پیوندی بین دو اتم یکسان را به طور یکسان میان آن دو اتم تقسیم می‌کنیم.

ب) الکترون‌های پیوندی بین دو اتم غیریکسان را به اتمی نسبت می‌دهیم که خصلت نافلزی بیشتری دارد.

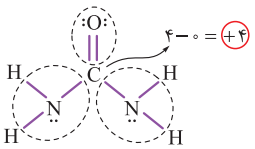
پ) الکترون‌های ناپیوندی هر اتم را به خودش نسبت می‌دهیم.

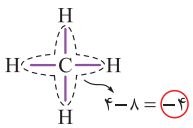
ت) در نهایت با فرمول زیر عدد اکسایش اتم مورد نظر را محاسبه می‌کنیم:

عدد اکسایش = شمار الکترون‌های ظرفیتی اتم − شمار الکترون‌های نسبت داده شده

ترتیب خصلت نافلزی N، C، H و O به صورت زیر است:

$O > N > C > H$





۴) سدیم کلرید با برقراری نیروهای جاذبهٔ یون ـ دوقطبی در آب حل می‌شود؛ اما برخی از ترکیب‌های یونی مانند نقره کلرید $(AgCl)$، باریم سولفات $(BaSO_4)$ و ... در آب نامحلول هستند.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

تست و پاسخ ۷۸

با توجه به نیم‌واکنش‌های کاهشی زیر، در چه تعداد از سلول‌های گالوانی ممکن حاصل از این الکترودها، نیم‌سلول D نقش آند را ایفا می‌کند؟

$A^{n+}(aq)+ne^- \rightarrow A(s)\ ,\ E^\circ = -0/9\ V$

$B^{n+}(aq)+ne^- \rightarrow B(s)\ ,\ E^\circ = +1/2\ V$

$C^{n+}(aq)+ne^- \rightarrow C(s)\ ,\ E^\circ = -0/76\ V$

$D^{n+}(aq)+ne^- \rightarrow D(s)\ ,\ E^\circ = -0/25\ V$

نیم‌سلول با E° کم‌تر

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

پاسخ: گزینهٔ ۱

نکته در سلول‌های گالوانی، نیم‌سلول آند، نیم‌سلولی است که پتانسیل کاهشی استاندارد (E°) آن منفی‌تر است: $E^\circ_{\text{آند}} < E^\circ_{\text{کاتد}}$

پاسخ تشریحی با توجه به E° نیم‌سلول‌های داده‌شده، E° نیم‌سلول D^{n+}/D، فقط از E° نیم‌سلول B^{n+}/B کوچک‌تر (منفی‌تر) است؛ پس فقط در سلول گالوانی B ـ D، نیم‌سلول D در نقش آند خواهد بود. در سایر سلول‌های گالوانی ممکن، نیم‌سلول D نقش کاتد را ایفا خواهد کرد.

تست و پاسخ ۷۹

اگر مادهٔ A اسید آرنیوس و مادهٔ B باز آرنیوس باشد، چند مطلب زیر به یقین درست است؟

- **در ساختار مادهٔ A، اتم هیدروژن وجود دارد.**
- **کاغذ pH در محلول مادهٔ B به رنگ سرخ درمی‌آید.**
- **رسانایی الکتریکی محلول B از محلول A بیشتر است.**
- **مادهٔ A یک ترکیب مولکولی و مادهٔ B یک ترکیب یونی است.**
- **حالت فیزیکی مواد A و B در دمای اتاق، نمی‌تواند گاز باشد.**

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس‌نامه ●● اسید و باز آرنیوس

	اسید آرنیوس	باز آرنیوس
تعریف	با حل‌شدن در آب، سبب افزایش غلظت یون هیدرونیوم (H_3O^+) می‌شود.	با حل‌شدن در آب، سبب افزایش غلظت یون هیدروکسید (OH^-) می‌شود.
مثال	HCN، HF، HCl، HNO_3، H_2SO_4، H_3PO_4، کربوکسیلیک اسیدها (مانند HCOOH و CH_3COOH) و اغلب اکسیدهای نافلزی (مانند SO_3، N_2O_5 و CO_2)	KOH، NaOH، $Ba(OH)_2$، آمونیاک (NH_3)، آمین‌ها (مانند متیل آمین) و اغلب اکسیدهای فلزی (مانند Li_2O، Na_2O، BaO و CaO)
pH محلول آبی آن‌ها در دمای اتاق	کوچک‌تر از ۷ ($pH < 7$)	بزرگ‌تر از ۷ ($pH > 7$)
رنگ کاغذ pH در محلول آن‌ها	سرخ	آبی

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ تشریحی همهٔ عبارت‌های داده‌شده نادرست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

عبارت اول: در ساختار اکسیدهای نافلزی مانند SO_3 و CO_2 که اسید آرنیوس محسوب می‌شوند، اتم هیدروژن وجود ندارد.

عبارت دوم: رنگ کاغذ pH در محلول حاصل از مادهٔ B (باز آرنیوس) آبی خواهد بود.

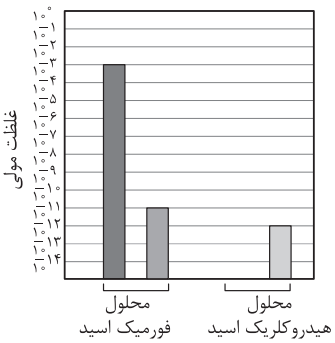
عبارت سوم: رسانایی الکتریکی یک محلول به غلظت یون‌های موجود در آن بستگی دارد و غلظت این یون‌ها نیز به غلظت اولیهٔ محلول اسیدی یا بازی و میزان یونش آن (قدرت اسیدی یا بازی) بستگی دارد؛ پس بدون اطلاع از غلظت محلول‌ها، نمی‌توان رسانایی الکتریکی محلول اسیدها و بازهای آرنیوس را با هم مقایسه کرد.

عبارت چهارم: به عنوان نمونه، آمونیاک (NH_3) یک باز آرنیوس و مادهٔ مولکولی است.

عبارت پنجم: حالت فیزیکی اسیدها و بازها *هر چیزی می‌تونه باشه!* مهم این است که مادهٔ مورد نظر در آب حل شود و یون H^+ یا OH^- را تولید یا آزاد کند؛ به عنوان نمونه گاز کربن دی‌اکسید، اسید آرنیوس و گاز آمونیاک باز آرنیوس است.

تست و پاسخ ۸۰

نمودار روبه‌رو، غلظت یون‌های هیدرونیوم و هیدروکسید را به صورت ناقص در محلول‌هایی اسیدی شامل یک مول حل‌شونده نشان می‌دهد. اگر حجم محلول اسید ضعیف، ۴ برابر حجم محلول اسید قوی باشد، درجهٔ یونش اسید ضعیف کدام است؟



۱) ۰/۰۲۵

۲) ۰/۲۵

۳) ۰/۰۴

۴) ۰/۴

پاسخ: گزینهٔ ۴

خودت حل کنی بهتره ابتدا از روی غلظت OH^- محلول هیدروکلریک اسید، غلظت HCl و حجم محلول HCl را محاسبه کن و سپس با محاسبهٔ حجم و غلظت محلول فورمیک اسید، درجهٔ یونش اسید را به دست بیار. حواست باشه که HCl یک اسید قوی تک‌ظرفیتی است و غلظت آن با غلظت H^+ موجود در محلول برابر است.

پاسخ تشریحی **گام اول:** ابتدا حجم محلول هیدروکلریک اسید (اسید قوی) را حساب می‌کنیم.

$$[H^+]=\frac{10^{-14}}{[OH^-]}=\frac{10^{-14}}{10^{-12}}=10^{-2} \Rightarrow M_{HCl}=10^{-2}\,mol.L^{-1}$$

$$M_{HCl}=\frac{n_{HCl}}{V_{محلول}} \Rightarrow 10^{-2}=\frac{1}{V} \Rightarrow V_{محلول}=100\,L$$

گام دوم: غلظت اولیهٔ محلول فورمیک اسید را حساب کنیم (حجم محلول اسید ضعیف ۴ برابر حجم محلول هیدروکلریک اسید، یعنی برابر ۴۰۰ لیتر است):

$$M_{اسید\ فورمیک}=\frac{1}{400}\,mol.L^{-1}$$

گام سوم: درجهٔ یونش فورمیک اسید را حساب می‌کنیم:

$$\alpha=\frac{[H^+]}{M_{اسید}}=\frac{10^{-3}}{\frac{1}{400}}=0/4$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

تست و پاسخ ۸۱

با توجه به جدول زیر که مربوط به محلول‌هایی از گلوکز، آمونیاک، استیک اسید و پتاسیم هیدروکسید با غلظت مولی یکسان است، کدام محلول، گلوکز است و با توجه به این داده‌ها، درصد یونش استیک اسید در محلول کدام است؟

$C_6H_{12}O_6$ ← گلوکز
NH_3 ← آمونیاک
CH_3COOH ← استیک اسید
KOH ← پتاسیم هیدروکسید

شمارهٔ محلول	(۱)	(۲)	(۳)	(۴)
رسانایی الکتریکی	زیاد	ندارد	کم	کم
pH	۱۳	۷	۴/۳	۱۰/۶

۱) محلول (۲) ـ ۰/۰۵
۲) محلول (۲) ـ ۰/۱
۳) محلول (۱) ـ ۰/۰۵
۴) محلول (۱) ـ ۰/۱

پاسخ: گزینهٔ ۱

مشاوره این سبک سؤال اولین بار در آزمون نهایی شیمی دوازدهم سال تحصیلی ۱۴۰۲ـ۱۴۰۱ (دی‌ماه) مطرح شد و احتمال زیادی داره که از این تیپ مفاهیم، در کنکور هم مطرح شود!

پاسخ تشریحی گلوکز ($C_6H_{12}O_6$) به صورت مولکولی در آب حل می‌شود و در محلول آن یون وجود ندارد؛ بنابراین محلول آن رسانای جریان برق نیست! *با این اوصاف*، محلول (۲) همان محلول گلوکز است.

محلول‌های (۱) و (۴) که pH بزرگ‌تر از ۷ دارند، محلول‌های بازی هستند. از طرفی می‌دانیم که پتاسیم هیدروکسید (KOH) یک باز قوی و آمونیاک (NH_3) یک باز ضعیف است؛ بنابراین محلول (۱) با pH بیشتر، محلول KOH و محلول (۴) همان محلول NH_3 است. در آخر، محلول (۳) با pH کم‌تر از ۷، محلول استیک اسید می‌باشد. با توجه به صورت سؤال، غلظت مولی همهٔ محلول‌ها یکسان است؛ پس می‌توانیم با استفاده از pH محلول KOH، غلظت مولی همهٔ محلول‌ها را حساب کنیم و بعدش با غلظت و pH محلول استیک اسید، درصد یونش این اسید را به دست آوریم.

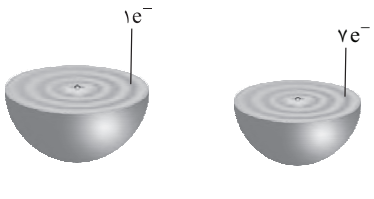
$$\text{محلول KOH: } [H^+]=10^{-pH}=10^{-13} \xrightarrow{[H^+][OH^-]=10^{-14}} [OH^-]=10^{-1} \xrightarrow{\text{KOH باز قوی است.}} M=10^{-1}\,mol.L^{-1}$$

$$\text{محلول استیک اسید: } [H^+]=10^{-pH}=10^{-4/3}=10^{-5}\times 10^{0/7}=5\times 10^{-5}\,mol.L^{-1}$$

$$\text{درصد یونش}=\frac{[H^+]}{M}\times 100=\frac{5\times 10^{-5}}{10^{-1}}\times 100=5\times 10^{-2}=0/05$$

تست و پاسخ ۸۲

با توجه به شکل‌های مقابل که برشی از اتم دو عنصر مختلف را نشان می‌دهد، کدام گزینه نادرست است؟ (شمار نوترون‌های هر یک از این دو عنصر یکی بیشتر از شمار پروتون‌های آن‌ها است. مقدار جرم اتمی و عدد جرمی را تقریباً یکسان در نظر بگیرید.)



۱) بیشترین عدد اکسایش ممکن برای عنصر B، ۷+ است.
۲) در واکنش بین A و B به ازای مصرف ۱۰/۵ گرم از عنصر اکسنده، ۹/۶ گرم عنصر کاهنده مصرف می‌شود.
کاهش‌یافته ← اکسایش‌یافته
۳) در واکنش بین A و B، شمار الکترون‌ها در نیم‌واکنش اکسایش برابر ۱ است.
۴) یون‌های پایدار هر دو عنصر، به آرایش الکترونی گاز نجیب رسیده‌اند.

پاسخ: گزینهٔ ۲

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ تشریحی ابتدا عدد اتمی و عدد جرمی دو عنصر A و B را تعیین می‌کنیم:

عنصر A در لایهٔ سوم خود یک الکترون دارد، یعنی آرایش الکترونی آن به $3s^1$ ختم می‌شود، پس همان $_{11}Na$ است:

$$_{11}Na: 1s^2 2s^2 2p^6 3s^1$$

و چون تعداد نوترون آن یک واحد بیشتر از تعداد پروتون‌های آن است، عدد جرمی آن برابر $11+12=23$ خواهد بود.

عنصر B در لایهٔ سوم خود ۷ الکترون دارد، یعنی آرایش لایهٔ سوم آن به صورت $3s^2 3p^5$ است، پس همان $_{17}Cl$ می‌باشد:

$$_{17}Cl: 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^5$$

و عدد جرمی آن برابر $17+18=35$ است.

بررسی گزینه‌ها:

۱) در اغلب عناصر اصلی (عناصر گروه‌های ۱ و ۲ و ۱۳ تا ۱۷) بالاترین عدد اکسایش با عدد یکان شمارهٔ گروه برابر است. کلر در گروه ۱۷ جدول تناوبی قرار دارد و بالاترین عدد اکسایش آن، $+7$ است.

۲) **گام اول:** ابتدا معادلهٔ موازنه‌شدهٔ واکنش بین A و B را می‌نویسیم:

$$2Na(s) + Cl_2(g) \rightarrow 2NaCl(s)$$

گام دوم: از روی جرم گونهٔ اکسنده (Cl_2)، جرم گونهٔ کاهنده (Na) را محاسبه می‌کنیم:

روش اول: استفاده از کسر تبدیل:

$$10/5\,g\,Cl_2 \times \frac{1\,mol\,Cl_2}{70\,g\,Cl_2} \times \frac{2\,mol\,Na}{1\,mol\,Cl_2} \times \frac{23\,g\,Na}{1\,mol\,Na} = 6/9\,g\,Na$$

روش دوم: استفاده از کسر تناسب:

$$\frac{\text{جرم}}{\underbrace{\text{جرم مولی}\times\text{ضریب}}_{Na}} = \frac{\text{جرم}}{\underbrace{\text{جرم مولی}\times\text{ضریب}}_{Cl_2}} \Rightarrow \frac{x}{2\times 23} = \frac{10/5}{1\times 70} \Rightarrow x = 6/9\,g\,Na$$

۳) نیم‌واکنش اکسایش: $Na \rightarrow Na^+ + e^-$

نیم‌واکنش کاهش: $Cl_2 + 2e^- \rightarrow 2Cl^-$

۴) هر دو یون Na^+ و Cl^- به آرایش گاز نجیب می‌رسند:

$$_{11}Na^+: 1s^2 2s^2 2p^6 = {}_{10}Ne$$

$$_{17}Cl^-: 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 = {}_{18}Ar$$

تست و پاسخ ۸۳

چند مورد از مطالب زیر، درست است؟ $(H=1, C=12, O=16, S=32 : g.mol^{-1})$

$RC_6H_4SO_3Na$ $RCOONa$

- **اگر گروه R در ساختار صابون‌های جامد و پاک‌کننده‌های غیرصابونی سدیم‌دار یکسان باشد، تفاوت جرم مولی دو پاک‌کننده ۵۲ گرم است.**
- **در صنعت برای زدودن رسوب تشکیل‌شده بر روی دیوارهٔ دیگ‌های بخار از پاک‌کننده‌های غیرصابونی استفاده می‌شود.**
- **پاک‌کننده‌های غیرصابونی، ترکیب‌هایی سیرشده به شمار می‌آیند و در ساختار آن‌ها ۹ جفت الکترون ناپیوندی وجود دارد.**
- **واکنش مخلوط آلومینیم و سدیم هیدروکسید با آب، گرماده است و طی آن، گاز اکسیژن تولید می‌شود.**

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) صفر

پاسخ: گزینهٔ ۴

همهٔ عبارت‌های داده‌شده نادرست‌اند.

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

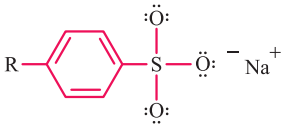
پاسخ تشریحی بررسی عبارت‌ها:

عبارت اول: فرمول کلی صابون جامد به صورت $RCOONa$ و فرمول کلی پاک‌کنندهٔ غیرصابونی سدیم‌دار به صورت $RC_6H_4SO_3Na$ است؛ پس اگر زنجیر آلکیل (R) آن‌ها یکسان باشد، اختلاف جرم مولی آن‌ها مربوط به قسمت COO صابون جامد و $C_6H_4SO_3$ پاک‌کنندهٔ غیرصابونی خواهد بود.

$$C_6H_4SO_3 - CO_2 = C_5H_4SO = 112\ g$$

عبارت دوم: در صنعت برای زدودن رسوب تشکیل‌شده بر روی دیوارهٔ دیگ‌های بخار از پاک‌کننده‌های خورنده استفاده می‌شود.

عبارت سوم: در ساختار حلقهٔ بنزنی پاک‌کنندهٔ غیرصابونی، پیوند دوگانهٔ کربن ـ کربن وجود دارد؛ به همین دلیل این ترکیب‌ها سیرنشده به حساب می‌آیند، از طرفی زنجیر آلکیل (R) آن‌ها نیز می‌تواند دارای پیوند دوگانهٔ کربن ـ کربن باشد.

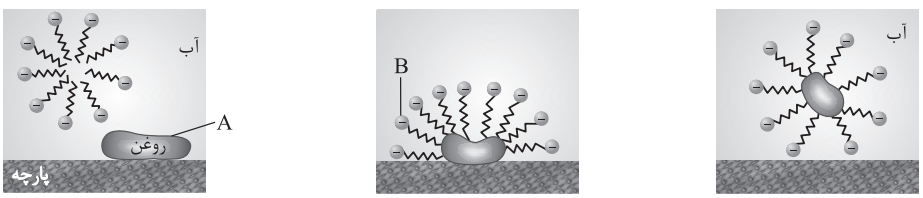


عبارت چهارم: از واکنش مخلوط آلومینیم و سدیم هیدروکسید با آب، گاز هیدروژن تولید می‌شود.



تست و پاسخ ۸۴

با توجه به شکل‌های داده‌شده که مراحل پاک‌شدن یک لکهٔ روغن با صابون را نشان می‌دهد، چند مورد از مطالب زیر درست‌اند؟



(۱) (۲) (۳)

- **در شکل (۱)، نوع جاذبهٔ غالب در A از نوع وان‌درواسی است.**
- **در شکل (۲)، B جاذبهٔ یون ـ دوقطبی میان اتم‌های هیدروژن مولکول آب و قسمت $-COO^-$ جزء آنیونی صابون را نشان می دهد.**
- **طی این فرایند، بخش آب‌گریز صابون وارد لکهٔ روغن شده و بخش آب‌دوست آن، باعث پخش‌شدن ذرات ریز روغن در آب می‌شود.**
- **شکل (۳) یک مخلوط ناهمگن از نوع کلوئید است که می‌تواند باعث پخش نور شود.**

۱) یک ۲) دو ۳) سه ۴) چهار

پاسخ: گزینهٔ ۴

همهٔ عبارت‌های داده‌شده درست‌اند.

پاسخ تشریحی بررسی عبارت‌ها:

عبارت اول: نیروی جاذبهٔ بین مولکولی غالب در مولکول‌های روغن از نوع وان‌درواسی است.

عبارت دوم: نیروی جاذبهٔ یون ـ دوقطبی، بین یک یون با مولکول‌های قطبی برقرار می‌شود؛ در نتیجه نیروی B، همان نیروی جاذبهٔ یون ـ دوقطبی میان قسمت $-COO^-$ جزء آنیونی صابون با مولکول‌های آب (سر مثبت مولکول‌های آب یعنی اتم‌های هیدروژن) را نشان می‌دهد.

عبارت سوم: قسمت ناقطبی (آب‌گریز) صابون (زنجیر آلکیل: R) با مولکول‌های روغن نیروی جاذبهٔ وان‌درواسی برقرار می‌کند و باعث کنده‌شدن لکهٔ چربی از سطح می‌شود و قسمت قطبی (آب‌دوست) صابون $(-COO^-)$ با مولکول‌های آب نیروی جاذبهٔ یون ـ دوقطبی برقرار می‌کند و باعث پخش‌شدن ذرات ریز روغن در آب می‌شود.

عبارت چهارم: مخلوط آب، روغن و صابون، یک مخلوط کلوئیدی ناهمگن است و می‌تواند نور را پخش کند.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

تست و پاسخ ۸۵

در یک نمونه آب سخت، غلظت یون‌های منیزیم و کلسیم یکسان و برابر ۰/۰۱ مولار است. اگر در ۲۰ لیتر از این نمونه آب، ۸۰۰ گرم صابون با جرم مولی $250\ g.mol^{-1}$ وارد کنیم، چند درصد از صابون رسوب می‌کند؟ (یون‌های منیزیم و کلسیم به طور کامل مصرف می‌شوند.)

۱) ۲۵ ۲) ۷۵ ۳) ۴۰ ۴) ۶۰

پاسخ: گزینهٔ ۱

خودت حل کنی بهتره کافیه واکنش صابون با یون‌های کلسیم و منیزیم را به صورت موازنه‌شده بنویسی و مجموع جرم صابون مصرف‌شده در هر دو واکنش را محاسبه کنی و در نهایت با تقسیم بر جرم اولیهٔ صابون و ضرب در ۱۰۰، به جواب سؤال برسی.

پاسخ تشریحی **گام اول:** واکنش موازنه‌شدهٔ صابون با یون‌های کلسیم و منیزیم را می‌نویسیم (جزء کاتیونی صابون را M فرض می‌کنیم، چون در صورت سؤال به نوع کاتیون اشاره نشده است).

واکنش ۱: $2RCOOM(s)+Ca^{2+}(aq)\rightarrow (RCOO)_2Ca(s)+2M^{+}(aq)$

واکنش ۲: $2RCOOM(s)+Mg^{2+}(aq)\rightarrow (RCOO)_2Mg(s)+2M^{+}(aq)$

گام دوم: با توجه به این‌که غلظت یون‌ها یکسان است، کافی است جرم صابون مصرف‌شده در یکی از واکنش‌ها را حساب کنیم:

روش اول: استفاده از کسر تبدیل:

$$20\,L\ \text{محلول}\times\frac{0/01\,mol\,Ca^{2+}}{1\,L\ \text{محلول}}\times\frac{2\,mol\,RCOOM}{1\,mol\,Ca^{2+}}\times\frac{250\,g\,RCOOM}{1\,mol\,RCOOM}=100\ g$$

روش دوم: استفاده از کسر تناسب:

$$\frac{\text{جرم}}{\underbrace{\text{جرم مولی}\times\text{ضریب}}_{\text{صابون}}}=\frac{\text{حجم}\times\text{غلظت مولی}}{\underbrace{1\times\text{ضریب}}_{\text{یون کلسیم یا منیزیم}}}\Rightarrow\frac{x}{2\times250}=\frac{0/01\times20}{1\times1}\Rightarrow x=100\ g\ \text{صابون}$$

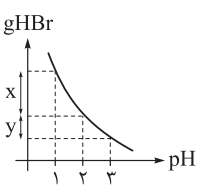
$$\text{جرم کلی صابون رسوب‌کرده}=100+100=200\ g$$

گام سوم: درصد صابون رسوب داده شده را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{درصد صابون رسوب داده شده}=\frac{\text{جرم صابون مصرف‌شده}}{\text{جرم اولیهٔ صابون}}\times100=\frac{200}{800}\times100=\%25$$

تست و پاسخ ۸۶

نمودار روبه‌رو، تغییرات pH محلول آبی هیدروبرمیک اسید را نسبت به تغییرات جرم HBr نشان می‌دهد. نسبت x به y کدام است؟ (حجم محلول ثابت و برابر یک لیتر و جرم مولی HBr برابر $81\ g.mol^{-1}$ است.)



۱) ۹ ۲) ۹۰
۳) ۱۰ ۴) ۱

پاسخ: گزینهٔ ۳

خودت حل کنی بهتره اول از همه، در همهٔ pHهای داده‌شده، غلظت یون هیدرونیوم و غلظت اسید و در نهایت جرم اسید حل‌شونده را حساب کن، سپس با کم‌کردن مقادیر جرم اسیدها از یکدیگر، x و y را پیدا کن!

پاسخ تشریحی **گام اول:** ابتدا غلظت H^{+} اسید را در هر ۳ مقدار pH داده‌شده حساب می‌کنیم.

$$pH_1=1\Rightarrow[H^{+}]_1=10^{-pH}=10^{-1}\,mol.L^{-1}\xrightarrow[\text{تک‌پروتون‌دار است.}]{\text{HBr یک اسید قوی}}M_{(HBr)_1}=[H^{+}]=10^{-1}\,mol.L^{-1}$$

$$pH_2=2\Rightarrow[H^{+}]_2=10^{-2}\,mol.L^{-1}\Rightarrow M_{(HBr)_2}=10^{-2}\,mol.L^{-1}$$

$$pH_3=3\Rightarrow[H^{+}]_3=10^{-3}\,mol.L^{-1}\Rightarrow M_{(HBr)_3}=10^{-3}\,mol.L^{-1}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

گام دوم: حال جرم اسید حل‌شده در هر ۳ محلول را حساب می‌کنیم.

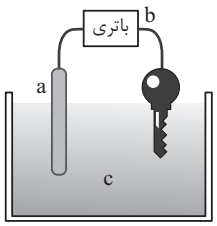
$$M_{HBr}(mol.L^{-1})=\frac{\text{جرم حل‌شونده (g)}}{\text{جرم مولی (g.mol}^{-1})\times\text{حجم محلول (L)}}\Rightarrow\begin{cases}10^{-1}=\dfrac{\frac{m_1}{81}}{1}\Rightarrow m_1=8/1\,g\\ 10^{-2}=\dfrac{\frac{m_2}{81}}{1}\Rightarrow m_2=0/81\,g\\ 10^{-3}=\dfrac{\frac{m_3}{81}}{1}\Rightarrow m_3=0/081\,g\end{cases}\begin{cases}x=m_1-m_2=8/1-0/81=7/29\\ y=m_2-m_3=0/81-0/081=0/729\end{cases}$$

$$\frac{x}{y}=\frac{7/29}{0/729}=10$$

تکنیک y مقدار HBr لازم برای تغییر pH از ۳ به ۲ و x مقدار HBr لازم برای تغییر pH از ۲ به ۱ است. می‌دانیم که pH یک مقیاس لگاریتمی در مبنای ۱۰ است و با ۱۰ برابر شدن غلظت H^+، pH یک واحد کاهش می‌یابد؛ پس می‌توان گفت که مقدار HBr لازم برای تغییر pH از ۲ به ۱، ۱۰ برابر مقدار HBr لازم برای تغییر pH از ۳ به ۲ خواهد بود.

تست و پاسخ ۸۷

با توجه به شکل مقابل که فرایند آبکاری یک کلید آهنی را با استفاده از فلز مس نشان می‌دهد، کدام مطلب نادرست است؟



۱) در این سلول، واکنش در خلاف جهت طبیعی پیش می‌رود و کاتیون‌ها در آن به سمت کاتد حرکت می‌کنند.

۲) b، قطب منفی باتری را نشان می‌دهد و الکترون‌ها از آن‌جا به سمت کلید می‌روند.

۳) a، تیغهٔ مس بوده و نقش آند را دارد و به مرور زمان از جرم آن کاسته می‌شود.

۴) c می‌تواند محلول مس (II) سولفات باشد که به مرور زمان به دلیل رسوب مس روی کلید، از غلظت Cu^{2+} در آن کاسته می‌شود.

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس‌نامه ●● آبکاری

۱) اگر در آبکاری هدف پوشش فلز X بر روی یک جسم باشد، آن جسم در کاتد و فلز X در آند قرار می‌گیرد و از نمک محلول فلز X به عنوان الکترولیت استفاده می‌شود.

جسم مورد آبکاری ← نقش کاتد ← متصل‌شدن به قطب منفی باتری ← پس از مدتی، جرم آن افزایش می‌یابد.

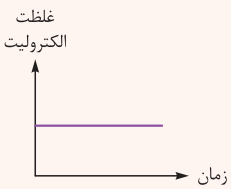
فلز پوشاننده ← نقش آند ← متصل‌شدن به قطب مثبت باتری ← پس از مدتی، جرم آن کاهش می‌یابد.

الکترولیت سلول ← نمکی از فلز پوشاننده یعنی همان آند

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲) در فرایند آبکاری، نیم‌واکنش‌های آندی و کاتدی هر دو مربوط به فلز پوشاننده هستند.

نیم‌واکنش‌های آبکاری یک جسم با فلز X
- نیم‌واکنش اکسایش: $X \rightarrow X^{m+} + me^-$
- نیم‌واکنش کاهش: $X^{m+} + me^- \rightarrow X$



همان‌طور که می‌بینید در فرایند آبکاری، هر چه‌قدر یون X^{m+} در آند تولید می‌شود، به همان مقدار در کاتد مصرف می‌شود، **بنابراین غلظت محلول الکترولیت طی فرایند آبکاری، ثابت است.**

پاسخ تشریحی بررسی گزینه‌ها: ۱) آبکاری در سلول الکترولیتی انجام می‌شود و واکنش انجام‌شده در سلول‌های الکترولیتی در خلاف جهت طبیعی پیش می‌رود. هم‌چنین در همهٔ سلول‌ها، کاتیون‌ها به سمت کاتد و آنیون‌ها به سمت آند مهاجرت می‌کنند.

۲) در آبکاری، جسم آبکاری‌شونده (کلید آهنی) به قطب منفی باتری (به عنوان کاتد) متصل می‌شود و الکترون‌ها از آند به سمت کاتد حرکت می‌کنند.

۳) فلز آبکاری‌کننده (تیغهٔ مسی) به عنوان آند، به قطب مثبت باتری متصل می‌شود و به دلیل اکسایش اتم‌های $Cu(s)$ و تبدیل آن‌ها به یون‌های مس $(Cu^{2+}(aq))$، رفته‌رفته از جرم تیغهٔ مسی کاسته می‌شود.

۴) محلول c باید دارای کاتیون‌های مس باشد (مانند محلول مس (II) سولفات)، اما غلظت کاتیون‌های Cu^{2+} محلول تغییری نمی‌کند، زیرا هر مقدار که از این یون‌ها در آند تولید می‌شوند، به همان مقدار نیز در کاتد مصرف می‌شوند.

نیم‌واکنش آندی: $Cu(s) \rightarrow Cu^{2+}(aq) + 2e^-$

نیم‌واکنش کاتدی: $Cu^{2+}(aq) + 2e^- \rightarrow Cu(s)$

تست و پاسخ ۸۸

چند مورد از موارد زیر در ارتباط با جوش‌شیرین، درست است؟

$NaHCO_3$

HCO_3^-

- **یک ترکیب یونی دوتایی است و عدد اکسایش اتم مرکزی در آنیون آن برابر ۴+ است.**
- **ترکیبی با خاصیت بازی است و برای افزایش قدرت پاک‌کنندگی، به شوینده‌ها اضافه می‌شود.**
- **بر اثر واکنش آن با اسید معده، دو فراورده تولید می‌شود که یکی از آن‌ها یونی است.**
- **در ساختار لوویس آنیون سازندهٔ آن، یک پیوند دوگانه و یک پیوند (C – H) وجود دارد.**

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۳

فقط عبارت دوم درست است.

پاسخ تشریحی بررسی عبارت‌ها:

عبارت اول: فرمول شیمیایی سدیم هیدروژن کربنات (جوش‌شیرین)، $NaHCO_3$ است و از ۴ نوع اتم تشکیل شده است (Na، H، C و O)، پس یک ترکیب یونی چندتایی (۴تایی) محسوب می‌شود.

$$\underset{\downarrow +1}{Na}\ \underset{\downarrow +1}{H}\ \underset{\downarrow x}{C}\underset{\downarrow -2}{O_3} : (+1) + (+1) + x + 3(-2) = 0 \Rightarrow x = +4$$

عبارت دوم: سدیم هیدروژن کربنات به دلیل خاصیت بازی، با اسیدهای چرب واکنش می‌دهد و صابون تولید می‌کند و قدرت پاک‌کنندگی شوینده‌ها را افزایش می‌دهد.

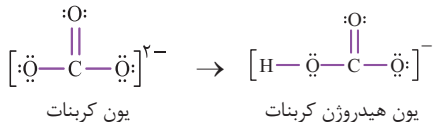
$$NaHCO_3(aq) + RCOOH(s) \rightarrow RCOONa(aq) + CO_2(g) + H_2O(l)$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

عبارت سوم: بر اثر واکنش جوش‌شیرین با اسید معده، ۳ نوع فراورده تولید می‌شود.

$$NaHCO_3(aq) + HCl(aq) \rightarrow \underbrace{NaCl(aq)}_{\text{یونی}} + \underbrace{CO_2(g)}_{\text{مولکولی}} + \underbrace{H_2O(l)}_{\text{مولکولی}}$$

عبارت چهارم: برای رسم ساختار لوویس یون HCO_3^-، کافی است ساختار لوویس یون کربنات (CO_3^{2-}) را رسم کرده و اتم هیدروژن را به یکی از اتم‌های اکسیژنی که یک پیوند اشتراکی تشکیل داده وصل کنید.



همان‌طور که می‌بینید در ساختار یون HCO_3^-، پیوند $C-H$ وجود ندارد.

توجه هرچند رسم ساختار لوویس یون‌هایی مانند HCO_3^- جزء اهداف کتاب درسی نیست، اما با توجه به این‌که در شکل تمرین‌های دوره‌ای پایان فصل اول، مدل فضاپرکن این یون آورده شده، ممکنه برخی طراحان از شما توقع داشته باشن که ساختار لوویس این یون را رسم کنید و ما هم به خاطر محکم‌کاری براتون آوردیم!

تست و پاسخ ۸۹

با الکترون‌های تولیدشده در اثر اکسایش ۹ گرم منیزیم، چند گرم یون پرمنگنات (MnO_4^-) را می‌توان به منگنز (IV) اکسید کاهش داد؟

$(Mn = 55 , Mg = 24 , O = 16 : g.mol^{-1})$

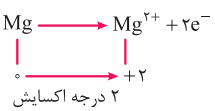
۱) ۱۴/۸۷۵ ۲) ۲۹/۷۵ ۳) ۴۴/۶۲۵ ۴) ۵۹/۵

پاسخ: گزینهٔ ۲

مشاوره یکی از تیپ سؤالات مهم در مبحث واکنش‌های اکسایش ـ کاهش، محاسبهٔ تعداد الکترون‌های مبادله‌شده و ترکیب آن با محاسبات استوکیومتری است. حتماً انواع تیپ مسائل مشابه این سؤال را بررسی کنید.

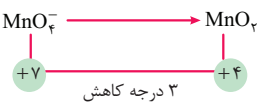
خودت حل کنی بهتره کافیه تغییر عدد اکسایش اتم منیزیم در نیم‌واکنش اکسایش آن و تغییر عدد اکسایش منگنز را در تبدیل MnO_4^- به منگنز (IV) اکسید پیدا کنیم و با ضرب‌کردن در عدد مناسب، تعداد الکترون‌های مبادله‌شده در هر دو فرایند را برابر کنیم، سپس از روی جرم منیزیم، جرم MnO_4^- را حساب کنیم.

پاسخ تشریحی روش اول: **گام اول:** نیم‌واکنش اکسایش منیزیم را به صورت موازنه‌شده می‌نویسیم.



عدد اکسایش Mg، دو واحد تغییر می‌کند.

گام دوم: تغییر عدد اکسایش اتم‌های Mn را در تبدیل MnO_4^- به منگنز (IV) اکسید حساب می‌کنیم.



عدد اکسایش Mn، ۳ واحد تغییر می‌کند.

گام سوم: با ضرب‌کردن نیم‌واکنش‌ها در عدد مناسب، تعداد الکترون‌های مبادله‌شده در دو فرایند را برابر می‌کنیم:

$$3\times(Mg \rightarrow Mg^{2+} + 2e^-) \Rightarrow 3Mg \rightarrow 3Mg^{2+} + 6e^-$$

$$2\times(MnO_4^- + 3e^- \rightarrow MnO_2) \Rightarrow 2MnO_4^- + 6e^- \rightarrow 2MnO_2$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

گام چهارم: با هم‌ارز قراردادن $3Mg$ با $2MnO_4^-$، جرم یون پرمنگنات را حساب می‌کنیم:

$$\frac{\text{جرم}}{\underbrace{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}_{Mg}} = \frac{\text{جرم}}{\underbrace{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}_{MnO_4^-}} \Rightarrow \frac{9}{3\times 24} = \frac{x}{2\times 119} \Rightarrow x = 29/75\ g\ MnO_4^-$$

روش دوم: می‌توانستیم ابتدا تعداد مول الکترون تولیدشده در اثر اکسایش ۹ گرم منیزیم را حساب کنیم و سپس ببینیم این مقدار الکترون، چند گرم MnO_4^- را کاهش می‌دهد:

$$9\,g\,Mg \times \frac{1\,mol\,Mg}{24\,g\,Mg} \times \frac{2\,mol\,e^-}{1\,mol\,Mg} = 0/75\,mol\,e^-$$

$$0/75\,mol\,e^- \times \frac{1\,mol\,MnO_4^-}{3\,mol\,e^-} \times \frac{119\,g\,MnO_4^-}{1\,mol\,MnO_4^-} = 29/75\ g\ MnO_4^-$$

تست و پاسخ ۹۰

یعنی سلول تبدیل بشه به Fe ـ SHE!

اگر در سلول گالوانی آهن ـ نقره، نیم‌سلول کاتدی را با SHE جایگزین کنیم، کدام مطلب نادرست است؟

۱) مقدار نیروی الکتروموتوری سلول گالوانی کاهش می‌یابد.

۲) جهت حرکت الکترون‌ها در مدار خارجی و جهت حرکت آنیون‌ها در نیم‌سلول آهن، بدون تغییر باقی می‌ماند.

۳) در هر دو سلول گالوانی، الکترود آهن نقش آند را ایفا می‌کند.

۴) به ازای مبادلهٔ مقدار معینی الکترون در این دو سلول، تعداد مول یکسانی فراورده در نیم‌سلول کاتدی تولید می‌شود.

پاسخ: گزینهٔ ۴

مشاوره برای پاسخ‌دادن به این تیپ سؤالات، باید اجزای سلول گالوانی را بشناسیم و ترتیب قدرت اکسندگی و کاهندگی گونه‌ها را در جدول سری الکتروشیمیایی حفظ باشیم.

نکته ترتیب چند عنصر مهم در سری الکتروشیمیایی به صورت مقابل است:

Pt	$E^\circ > 0$
Ag	
Cu	
SHE	$E^\circ = 0$
Fe	$E^\circ < 0$
Zn	
Al	
Mg	
Li	

پاسخ تشریحی بررسی گزینه‌ها:

۱) در سلول گالوانی آهن ـ نقره، نقره با قدرت کاهندگی کم‌تر، نقش کاتد را ایفا می‌کند. با جایگزینی نقره با SHE، ولتاژ یا نیروی الکتروموتوری سلول کاهش می‌یابد؛ زیرا در سری الکتروشیمیایی، فاصلهٔ Fe و SHE، کم‌تر از فاصلهٔ Fe و Ag است.

۲) با تغییر نیم‌سلول کاتدی با SHE، SHE نقش کاتد گرفته و آهن همچنان در نقش آند باقی می‌ماند؛ پس جهت حرکت الکترون‌ها در مدار خارجی و جهت حرکت یون‌ها در محلول الکترولیت تغییری نمی‌کند.

۳) قدرت کاهندگی آهن از نقره و H_2 بیشتر است و در هر دو سلول، در نقش آند می‌باشد.

۴) در نیم‌سلول نقره، به ازای مصرف یک مول الکترون، یک مول $Ag(s)$ تولید می‌شود، ولی در نیم‌سلول SHE به ازای مصرف یک مول الکترون، نیم مول H_2 تولید می‌شود.

$$2H^+(aq) + 2e^- \rightarrow H_2(g)$$

$$Ag^+(aq) + e^- \rightarrow Ag(s)$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

تست و پاسخ ۹۱

کدام مطلب درست است؟

باز قوی — باز ضعیف

۱) در محلول‌هایی با غلظت یکسان از سود و آمونیاک، شمار مول‌های یون هیدروکسید در محلول سود، بیشتر از شمار مول این یون‌ها در محلول آمونیاک است.

۲) در دمای یکسان، در محلول‌هایی با غلظت مولی یکسان از پتاس سوزآور و آمونیاک، غلظت مولی یون هیدرونیوم در محلول آمونیاک بیشتر است.

۳) هر ماده‌ای که به خوبی در آب حل می‌شود را می‌توان یک الکترولیت قوی در نظر گرفت.

۴) pH محلول آبی ۱ مولار هر سه ترکیب HF، HCl و HBr، یکسان است.

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ تشریحی پتاس سوزآور (KOH) باز قوی‌تری نسبت به آمونیاک (NH_3) است؛ بنابراین در غلظت مولی یکسان، غلظت یون هیدروکسید در محلول KOH، بیشتر از غلظت این یون در محلول NH_3 است؛ از طرفی در دمای یکسان، در همهٔ محلول‌ها حاصل $[H^+][OH^-]$ یکسان است؛ در نتیجه غلظت یون هیدرونیوم در محلول آمونیاک باید بیشتر باشد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) چون حجم محلول‌های سود و آمونیاک در صورت سؤال ذکر نشده، نمی‌توان در مورد شمار مول یون‌های هیدروکسید این دو محلول اظهار نظر کرد. امکان دارد حجم محلول آمونیاک به قدری زیاد باشد که شمار مول یون هیدروکسید تولیدشده در محلول آن از محلول سود سوزآور ($NaOH$) بیشتر باشد.

۳) طبقه‌بندی الکترولیت‌ها براساس میزان انحلال‌پذیری آن‌ها در آب نیست؛ مثلاً متانول به هر نسبتی در آب حل می‌شود، اما غیرالکترولیت است. الکترولیت قوی به ماده‌ای گفته می‌شود که به هنگام حل‌شدن در آب، به طور کامل به یون‌های مثبت و منفی یونیده یا تفکیک شود.

۴) قدرت اسیدی HF کم‌تر از HCl و HBr است، پس در غلظت یکسان، HF به میزان کم‌تری یونیده می‌شود و pH محلول آن، بیشتر از PH محلول‌های HCl و HBr است.

تست و پاسخ ۹۲

تیغه‌هایی به جرم یکسان از جنس فلز آلومینیم و فلز منیزیم را در دو ظرف جداگانه درون مقدار کافی محلول مس (II) سولفات با غلظت مشخص و دمای $20^\circ C$ قرار می‌دهیم. کدام موارد برای ظرف حاوی تیغهٔ آلومینیمی پس از انجام کامل واکنش‌ها، بیشتر است؟ ($Al = 27 , Mg = 24 : g.mol^{-1}$)

الف) دمای محلول

ب) شمار الکترون‌های مبادله‌شده

پ) شمار مول‌های مس تولیدشده

ت) شمار مول‌های کاتیون تولیدشده

۱) الف ـ ب
۲) ب ـ پ
۳) الف ـ ت
۴) پ ـ ت

پاسخ: گزینهٔ ۲

موارد «ب» و «پ» درست‌اند.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ تشریحی بررسی موارد:

الف) قدرت کاهندگی منیزیم از آلومینیم بیشتر است، پس دمای محلول حاصل از واکنش منیزیم با مس (II) سولفات بیشتر خواهد بود.

ب) در ظرف حاوی آلومینیم، به ازای هر مول آلومینیم، ۳ مول الکترون و در ظرف حاوی منیزیم، به ازای هر مول منیزیم، ۲ مول الکترون مبادله می‌شود. برای راحتی جرم Al و Mg را ۱ گرم در نظر می‌گیریم:

$$Al \rightarrow Al^{3+} + 3e^-$$

$$Mg \rightarrow Mg^{2+} + 2e^-$$

$$\frac{\text{جرم}}{\underbrace{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}_{Mg \text{ یا } Al}} = \frac{\text{مول}}{\underbrace{1 \times \text{ضریب}}_{e^-}} \rightarrow \begin{cases} \text{ظرف Al}: \frac{1}{1\times 27} = \frac{x}{3\times 1} \Rightarrow x = \frac{1}{9}\,mole^- \\ \text{ظرف Mg}: \frac{1}{1\times 24} = \frac{x'}{2\times 1} \Rightarrow x' = \frac{1}{12}\,mole^- \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{9} > \frac{1}{12}$$

پ) به کمک معادلهٔ موازنه‌شدهٔ واکنش‌ها، شمار مول‌های مس تولیدشده را به ازای جرم یکسان از آلومینیم و منیزیم (مثلاً ۱ گرم) حساب می‌کنیم:

$$2Al + 3CuSO_4 \rightarrow Al_2(SO_4)_3 + 3Cu$$

$$Mg + CuSO_4 \rightarrow MgSO_4 + Cu$$

$$\frac{\text{جرم}}{\underbrace{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}_{Mg \text{ یا } Al}} = \frac{\text{مول}}{\underbrace{1 \times \text{ضریب}}_{Cu}} \rightarrow \begin{cases} \text{ظرف Al}: \frac{1}{2\times 27} = \frac{x}{3\times 1} \Rightarrow x = \frac{1}{18}\,molCu \\ \text{ظرف Mg}: \frac{1}{1\times 24} = \frac{x'}{1} \Rightarrow x' = \frac{1}{24}\,molCu \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{18} > \frac{1}{24}$$

ت) با توجه به معادلهٔ اکسایش آلومینیم و منیزیم، شمار مول کاتیون‌های Al^{3+} و Mg^{2+} تولیدشده را به ازای جرم یکسان از Al و Mg (مثلاً ۱ گرم) حساب می‌کنیم:

$$Al \rightarrow Al^{3+} + 3e^-$$

$$Mg \rightarrow Mg^{2+} + 2e^-$$

$$\frac{\text{جرم}}{\underbrace{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}_{Mg \text{ یا } Al}} = \frac{\text{مول}}{\underbrace{1 \times \text{ضریب}}_{Mg^{2+} \text{ یا } Al^{3+}}} \rightarrow \begin{cases} \text{ظرف Al}: \frac{1}{1\times 27} = \frac{x}{1\times 1} \Rightarrow x = \frac{1}{27}\,molAl^{3+} \\ \text{ظرف Mg}: \frac{1}{1\times 24} = \frac{x'}{1\times 1} \Rightarrow x' = \frac{1}{24}\,molMg^{2+} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{24} > \frac{1}{27}$$

تست و پاسخ ۹۳

جدول زیر، نیروی الکتروموتوری چند سلول گالوانی را نشان می‌دهد. کدام موارد از مطالب زیر درست است؟

	B^{2+}/B	C^{2+}/C
A^{2+}/A	۰/۵۹V	xV
B^{2+}/B	—	۰/۷۸V

الف) اگر B^{2+}، اکسنده‌تر از A^{2+} و C^{2+} باشد، پتانسیل کاهشی A از C بزرگ‌تر است. ← E° فلز B بیشتر از A و C باشد.

ب) اگر فلز B با محلول $ASO_4(aq)$ واکنش ندهد، قطعاً فلز B با محلول $CSO_4(aq)$ واکنش می‌دهد. ← E° فلز B بیشتر از A باشد.

پ) اگر فلزهای A و C برخلاف فلز B با محلول HCl(aq) واکنش دهند، x برابر ۰/۱۹ است. ← E° فلزهای A و C برخلاف B، منفی باشد.

ت) اگر فلز C با محلول $A^{2+}(aq)$ واکنش دهد، پتانسیل کاهشی فلز B از A بیشتر است. ← E° فلز C کم‌تر از A باشد.

۱) الف ـ پ
۲) ب ـ پ
۳) ب ـ ت
۴) الف ـ ت

پاسخ: گزینهٔ ۱

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

مشاوره این مدل سؤال‌ها یکی از سؤال‌های جدیدی است که به تمرین‌های دوره‌ای کتاب درسی اضافه شده و احتمال مطرح‌شدن آن‌ها در کنکور سراسری بسیار زیاد است.

عبارت‌های «الف» و «پ» درست‌اند.

پاسخ تشریحی بررسی عبارت‌ها:

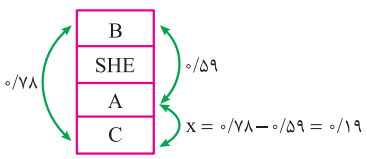
الف) می‌دانیم در سری الکتروشیمیایی، هر چه نیم‌سلولی در مکان بالاتری قرار داشته باشد، گونهٔ سمت چپ آن اکسندهٔ قوی‌تری است؛ پس B^{2+} در سری الکتروشیمیایی بالاتر از A^{2+} و C^{2+} قرار دارد. از طرفی با توجه به جدول، emf سلول گالوانی حاصل از B و C بیشتر از emf سلول گالوانی حاصل از A و B است؛ بنابراین با فرض قسمت «الف»، ترتیب عنصرها در سری الکتروشیمیایی به صورت زیر است:

emf بیشتر ⟸ B / A / C ⟹ ترتیب E° : $B > A > C$

ب) از این‌که فلز B با محلول ASO_4 واکنش نمی‌دهد، نتیجه می‌گیریم که قدرت کاهندگی B از A کم‌تر بوده و B در سری الکتروشیمیایی بالاتر از A قرار دارد. با توجه به این اطلاعات نمی‌توان قدرت کاهندگی B و C را مقایسه کرد.



پ) فلزهای A و C با محلول هیدروکلریک اسید واکنش می‌دهند؛ بنابراین E° آن‌ها منفی است و در سری الکتروشیمیایی پایین‌تر از SHE قرار دارند. فلز B با محلول هیدروکلریک اسید واکنش نمی‌دهد و در سری الکتروشیمیایی، بالاتر از SHE قرار دارد؛ از طرفی با توجه به این‌که emf سلول حاصل از B و C بیشتر از B و A است، فاصلهٔ B و C در سری باید بیشتر از فاصلهٔ B و A باشد؛ پس ترتیب فلزها در سری به صورت مقابل است:

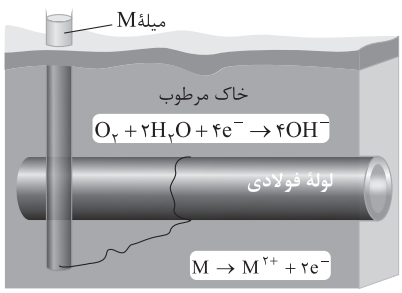


ت) با توجه به انجام واکنش بین فلز C با محلول A^{2+}، فلز C در سری الکتروشیمیایی پایین‌تر از A قرار دارد، اما با این اطلاعات نمی‌توان E° فلزهای A و B را با هم مقایسه کرد، زیرا چند حالت امکان‌پذیر است:



تست و پاسخ ۹۴

شکل مقابل روشی برای حفاظت لوله‌های فولادی (Fe) انتقال گاز در برابر خوردگی را نشان می‌دهد. کدام موارد از مطالب زیر، درست است؟



الف) پتانسیل کاهشی استاندارد فلز M از آهن منفی‌تر است.

ب) در این فرایند مولکول آب به عنوان عامل اکسنده، ایفای نقش می‌کند.

پ) به ازای اکسایش هر مول عامل کاهنده، نیم‌مول اکسنده مصرف می‌شود.

ت) فلز M، می‌تواند هر یک از فلزهای روی یا آلومینیم باشد.

۱) الف ـ پ ـ ت ۲) ب ـ ت ۳) پ ـ ت ۴) الف ـ پ

پاسخ: گزینهٔ ۴

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

نکته برای جلوگیری از زنگ‌زدن آهن، دو روش کلی وجود دارد:

روش	توضیح	چگونگی عملکرد	مثال
حفاظت فیزیکی	ایجاد پوشش محافظ	جلوگیری از رسیدن اکسیژن و رطوبت به آهن	رنگ‌کردن، قیراندودکردن و روکش‌دارکردن (مانند حلبی)
حفاظت کاتدی (حفاظت الکتروشیمیایی)	استفاده از فلزهای کاهنده‌تر از آهن (فلزهای با E° کوچک‌تر از آهن) در تماس با آن	در سلول گالوانی تشکیل‌شده، فلز با E° کوچک‌تر در نقش آند، اکسید و خورده می‌شود، در حالی که از آهن به عنوان کاتد محافظت می‌شود.	حفاظت از آهن با منیزیم (در بدنهٔ کشتی و لوله‌های نفتی)، حفاظت از آهن با فلز روی (آهن گالوانیزه)

عبارت‌های «الف» و «پ» درست‌اند.

پاسخ تشریحی الف) هنگامی که دو فلز در هوای مرطوب با هم در تماس باشند، برای اکسایش‌یافتن با یکدیگر رقابت می‌کنند. بدیهی است که فلز کاهنده‌تر در این رقابت برنده می‌شود. با توجه به شکل مشاهده می‌کنیم که فلز M اکسایش یافته و آهن محافظت شده است؛ پس قدرت کاهندگی M از Fe بیشتر بوده و پتانسیل کاهشی استاندارد آن از آهن، کوچک‌تر (منفی‌تر) است.

ب) عامل اکسنده در نیم‌واکنش کاهش، مولکول‌های O_2 هستند. مولکول‌های آب در نقش واکنش‌دهنده هستند، اما عدد اکسایش هیچ‌یک از اتم‌های آن تغییر نمی‌کند.

پ) نیم‌واکنش‌های موازنه‌شده را نوشته و با ضرب‌کردن نیم‌واکنش اکسایش در عدد ۲، تعداد الکترون‌های دو نیم‌واکنش را برابر می‌کنیم.

نیم‌واکنش اکسایش: $2\times(M(s)\rightarrow M^{2+}(aq)+2e^-)$

نیم‌واکنش کاهش: $O_2(g)+2H_2O(l)+4e^-\rightarrow 4OH^-(aq)$

$$\underbrace{2M(s)}_{\text{۲ مول کاهنده}}+\underbrace{O_2(g)}_{\text{۱ مول اکسنده}}+2H_2O(l)\rightarrow \underbrace{2M^{2+}(aq)+4OH^-(aq)}_{2M(OH)_2(s)}$$

به ازای اکسایش هر مول فلز M، نیم مول گاز اکسیژن کاهش می‌یابد.

ت) قدرت کاهندگی فلزهای روی و آلومینیم از فلز آهن بیشتر است و از هر دو فلز می‌توان برای محافظت از خوردگی آهن استفاده کرد؛ اما با توجه به این‌که کاتیون فلز M به صورت M^{2+} و کاتیون فلز آلومینیم به صورت Al^{3+} است، فلز M نمی‌تواند آلومینیم باشد.

تست و پاسخ ۹۵

دو قطعهٔ یکسان فلز منیزیم را به صورت جداگانه در محلول‌های نیترواسید (محلول I) و نیتریک اسید (محلول II)، با دما، حجم و غلظت برابر قرار می‌دهیم. چند مورد از مطالب زیر دربارهٔ این محلول‌ها درست است؟

- **قبل از شروع واکنش، خاصیت اسیدی محلول (II) از محلول (I) بیشتر است.** (HNO_2 (اسید ضعیف) — HNO_3 (اسید قوی))
- **در لحظهٔ شروع واکنش، سرعت خروج گاز هیدروژن در محلول (II) از (I) بیشتر است، ولی حجم نهایی گاز هیدروژن خارج‌شده در پایان واکنش دو اسید برابر است.** ($[H^+]$ وابسته به — وابسته به مول اولیهٔ اسید)
- **قبل از شروع واکنش، مجموع غلظت گونه‌ها در محلول (I) از (II) بیشتر و غلظت مولکول‌ها در محلول (I) از محلول (II) کم‌تر است.**
- **اگر در این دو محلول به جای فلز منیزیم، فلز آهن قرار دهیم، سرعت خروج گاز هیدروژن افزایش خواهد یافت.**

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

پاسخ: گزینهٔ ۳

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

درس‌نامه مقایسهٔ قدرت اسیدی اسیدهای مطرح‌شده در کتاب درسی به صورت زیر است:

مقایسهٔ قدرت اسیدی (K_a):

$$HI, HBr, HCl, H_2SO_4 > HNO_3 > HF > HNO_2 > HCOOH > CH_3COOH > H_2CO_3 > HCN$$

اسید قوی‌تر ← در شرایط یکسان از نظر دما و غلظت:
- K_a بزرگ‌تر
- یونش بیشتر
- $[H^+]$ بیشتر
- pH کم‌تر
- سرعت واکنش با قطعهٔ یکسانی از فلز فعالی مانند منیزیم، بیشتر

- اغلب فلزها با محلول اسیدها واکنش می‌دهند و گاز هیدروژن آزاد می‌کنند. سرعت این واکنش‌ها به غلظت *یون هیدرونیوم* موجود در محلول بستگی دارد. هر چه اسید قوی‌تر باشد، غلظت یون هیدرونیوم در محلول آن بیشتر و در نتیجه سرعت واکنش آن با فلز بیشتر خواهد بود.
- معادلهٔ واکنش فلز منیزیم با محلول اسیدهای تک‌پروتون‌دار را می‌توان به صورت زیر نشان داد. اگر جرم نوار منیزیم و حجم و غلظت محلول‌های اسیدی یکسان باشد، با توجه به استوکیومتری واکنش *می‌شه فهمید* که در پایان واکنش جرم و حجم گاز H_2 آزادشده در واکنش‌ها بدون در نظر گرفتن قدرت اسیدی اسیدها، یکسان خواهد بود.

$$Mg + 2HA \rightarrow MgA_2 + H_2$$

با توجه به واکنش، چه اسید قوی باشد، چه ضعیف، به ازای مصرف ۱ مول Mg و یا ۲ مول اسید یک‌ظرفیتی، در نهایت ۱ مول گاز H_2 تولید می‌شود. هر چند تا قبل از پایان واکنش، سرعت تولید گاز در ظرف حاوی اسید قوی‌تر، بیشتر است.

عبارت‌های اول و دوم درست‌اند.

پاسخ تشریحی بررسی عبارت‌ها:

عبارت اول: نیتریک اسید (HNO_3) یک اسید قوی و نیتروواسید (HNO_2) یک اسید ضعیف می‌باشد، پس قدرت اسیدی نیتریک اسید از نیتروواسید بیشتر است. خاصیت اسیدی محلول به غلظت یون هیدرونیوم موجود در محلول بستگی دارد؛ با توجه به این‌که غلظت اولیهٔ محلول هر دو اسید برابر است، غلظت یون هیدرونیوم تولیدشده در محلول نیتریک اسید (محلول II) بیشتر خواهد بود (نیتریک اسید به طور کامل یونیده می‌شود، ولی نیتروواسید اندکی یونیده می‌شود).

$$HNO_3(aq) \rightarrow H^+(aq) + NO_3^-(aq) \quad , \quad HNO_2(aq) \rightleftharpoons H^+(aq) + NO_2^-(aq)$$

عبارت دوم: سرعت خروج گاز هیدروژن در شروع واکنش به غلظت یون هیدرونیوم موجود در محلول اسیدی بستگی دارد، پس سرعت خروج این گاز در محلول نیتریک اسید بیشتر است؛ ولی حجم نهایی گاز خارج‌شده به غلظت اولیهٔ اسید و حجم محلول اسیدی (یا می‌توان گفت مول اسید حل‌شده در محلول) بستگی دارد که هر دو محلول اسیدی، غلظت و حجم اولیهٔ برابری دارند.

عبارت سوم:

$$HNO_2(aq) \rightleftharpoons H^+(aq) + NO_2^-(aq)$$

	HNO_2	H^+	NO_2^-
قبل از یونش:	M	۰	۰
پس از یونش:	۰M − x	x	x

غلظت کل گونه‌ها: $M - x + x + x = M + x$

$$HNO_3(aq) \rightarrow H^+(aq) + NO_3^-(aq)$$

	HNO_3	H^+	NO_3^-
قبل از یونش:	M	۰	۰
پس از یونش:	۰	M	M

غلظت کل گونه‌ها: $0 + M + M = 2M$

چون اسید ضعیف اندکی یونیده می‌شود، مقدار x به مراتب کوچک‌تر از M است؛ پس غلظت گونه‌ها در محلول نیتریک اسید، بیشتر از محلول نیتروواسید است.

عبارت چهارم: قدرت کاهندگی فلز آهن کم‌تر از فلز منیزیم است؛ پس با قراردادن فلز آهن در محلول اسیدی، سرعت خروج گاز هیدروژن کاهش می‌یابد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

تست و پاسخ ۹۶

۰/۱ لیتر

در یک دسی‌لیتر آب خالص در دمای $25^\circ C$، a میلی‌گرم دی‌نیتروژن پنتااکسید حل می‌کنیم تا pH محلول به عدد ۲ برسد. اگر برای خنثی‌کردن این محلول به b میلی‌گرم لیتیم اکسید نیاز باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟ (از تغییر حجم محلول بر اثر اضافه‌کردن مواد صرف نظر کنید.)

$(O=16, N=14, Li=7 : g.mol^{-1})$

۱) ۶۹ ۲) ۱۳۸

۳) ۰/۰۶۹ ۴) ۰/۱۳۸

پاسخ: گزینهٔ ۱

خودت حل کنی بهتره واکنش دی‌نیتروژن پنتااکسید و لیتیم اکسید با آب را جداگانه بنویس و موازنه کن؛ سپس از روی pH محلول اولیه، غلظت اسید و در نهایت جرم دی‌نیتروژن پنتااکسید را حساب کن. دقت داشته باش، مول اسید تولیدشده با مول باز تولیدشده برابر است. پس می‌تونی جرم لیتیم اکسید را هم از روی مول باز محاسبه کنی!

پاسخ تشریحی روش اول: ابتدا واکنش موازنه‌شدهٔ دی‌نیتروژن پنتااکسید و لیتیم اکسید با آب را می‌نویسیم:

واکنش (۱): $N_2O_5(s)+H_2O(l)\rightarrow 2HNO_3(aq)$

واکنش (۲): $Li_2O(s)+H_2O(l)\rightarrow 2LiOH(aq)$

جرم N_2O_5 حل‌شده (a) را حساب می‌کنیم (واکنش ۱).

$$pH=2 \Rightarrow [H^+]=10^{-2}\,mol.L^{-1} \xrightarrow{\text{نیتریک اسید یک اسید قوی تک‌پروتون‌دار است.}} M_{HNO_3}=[H^+]=10^{-2}\,mol.L^{-1}$$

۱ دسی لیتر = ۰/۱ لیتر

$$?\,mgN_2O_5=0/1\,L\ \text{محلول}\ HNO_3\times\frac{10^{-2}\,molHNO_3}{1\,L\ \text{محلول}\ HNO_3}\times\frac{1\,molN_2O_5}{2\,molHNO_3}\times\frac{108\,gN_2O_5}{1\,molN_2O_5}\times\frac{1000\,mg}{1\,g}=54 \Rightarrow a=54$$

از روی غلظت و حجم محلول نیتریک اسید، مول لیتیم هیدروکسید را محاسبه می‌کنیم.

$$HNO_3(aq)+LiOH(aq)\rightarrow LiNO_3(aq)+H_2O(l)$$

$$?\,molLiOH=0/1\,L\ \text{محلول}\ HNO_3\times\frac{10^{-2}\,mol\,HNO_3}{1\,L\ \text{محلول}\ HNO_3}\times\frac{1\,molLiOH}{1\,mol\,HNO_3}=10^{-3}$$

از روی مول لیتیم هیدروکسید، جرم لیتیم اکسید (b) را حساب می‌کنیم (واکنش ۲).

$$?\,mgLi_2O=10^{-3}\,mol\,LiOH\times\frac{1\,molLi_2O}{2\,mol\,LiOH}\times\frac{30\,gLi_2O}{1\,mol\,Li_2O}\times\frac{1000\,mgLi_2O}{1\,gLi_2O}=15 \Rightarrow b=15$$

روش دوم:

$$\underbrace{\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی}\times\text{ضریب}}}_{N_2O_5}=\underbrace{\frac{\text{حجم}\times\text{غلظت مولی}}{1\times\text{ضریب}}}_{HNO_3}=\underbrace{\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی}\times\text{ضریب}}}_{Li_2O}$$

$$N_2O_5\sim 2HNO_3\sim 2LiOH\sim Li_2O$$

$$\underbrace{\frac{a\times10^{-3}}{1\times108}}_{N_2O_5}=\underbrace{\frac{0/1\times10^{-2}}{2\times1}}_{HNO_3}=\underbrace{\frac{b\times10^{-3}}{1\times30}}_{Li_2O} \Rightarrow a=54 \text{ و } b=15$$

بنابراین حاصل $a+b$ برابر $69=15+54$ است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

تست و پاسخ ۹۷

سلول سوختی متانول ـ اکسیژن، زیرمجموعه‌ای از سلول‌های مبادله‌کنندهٔ یون هیدرونیوم است. با توجه به نیم‌واکنش‌های انجام‌شده در این سلول، کدام مطلب نادرست است؟ (نیم واکنش‌ها موازنه شوند.)

۱) $O_2(g)+H^+(aq)+e^-\rightarrow H_2O(l)$ $\quad E^\circ_{\text{کاهشی}}=+۱/۲۳۰V$

۲) $CH_4O(l)+H_2O(l)\rightarrow H^+(aq)+CO_2(g)+e^-$ $\quad E^\circ_{\text{کاهشی}}=+۰/۰۱۶V$

۱) در نیم‌واکنش موازنه‌شدهٔ اکسایش این سلول، نسبت ضریب الکترون به آب برابر ۲ است.

۲) emf این سلول برابر ۱/۲۱۴ ولت است.

۳) براساس معادلهٔ موازنه‌شدهٔ کلی، ۱۲ الکترون بین اکسنده و کاهنده مبادله می‌شود.

۴) از دید محیط زیست، سلول سوختی هیدروژن نسبت به این سلول ارجحیت دارد.

پاسخ: گزینهٔ ۱

مشاوره موازنهٔ نیم‌واکنش‌های اکسایش ـ کاهش برای حل تیپ سؤالات مختلف فصل ۲ دوازدهم بسیار ضروری است. حتماً با نحوهٔ موازنهٔ این نیم‌واکنش‌ها آشنا باشید.

پاسخ تشریحی برای موازنهٔ نیم‌واکنش‌ها، ابتدا تعداد اتم‌های هر عنصر را در دو طرف معادله یکسان کرده و سپس با دادن ضریب مناسب به الکترون، نیم‌واکنش‌ها را از نظر بار موازنه می‌کنیم.

۱) نیم‌واکنش کاهش: $O_2+4H^++4e^-\rightarrow 2H_2O$

۲) نیم‌واکنش اکسایش: $CH_4O+H_2O\rightarrow 6H^++CO_2+6e^-$

با ضرب‌کردن هر نیم‌واکنش در عدد مناسب، تعداد الکترون‌های دو نیم‌واکنش را برابر می‌کنیم (در این‌جا نیم‌واکنش اول را ضرب در ۳ و نیم‌واکنش دوم را ضرب در ۲ می‌کنیم)، سپس نیم‌واکنش‌های به‌دست‌آمده را با هم جمع کرده تا معادلهٔ کلی واکنش به دست آید.

۱) $3O_2+12H^++12e^-\rightarrow 6H_2O$ (۴H_2O)

۲) $2CH_4O+2H_2O\rightarrow 12H^++2CO_2+12e^-$

$$2CH_4O+3O_2\rightarrow 2CO_2+4H_2O$$

بررسی گزینه‌ها:

۱ در نیم‌واکنش موازنه‌شدهٔ اکسایش، نسبت ضریب الکترون به آب برابر ۶ است.

۲ سلول سوختی جزء سلول‌های گالوانی است: $emf=E^\circ(\text{کاتد})-E^\circ(\text{آند})=۱/۲۳-۰/۰۱۶=۱/۲۱۴\ V$

۳ در معادلهٔ کلی موازنه‌شده، ۱۲ الکترون بین گونهٔ اکسنده و کاهنده مبادله می‌شود.

۴ در سلول سوختی هیدروژن، فراوردهٔ تولیدشده فقط آب است، اما در سلول متانول، گاز کربن دی‌اکسید نیز تولید می‌شود که آلایندهٔ هوا محسوب می‌شود.

تست و پاسخ ۹۸

چند مورد از مطالب زیر دربارهٔ سلول‌های گالوانی و الکترولیتی، درست است؟

- **در هر دو سلول، جهت حرکت الکترون‌ها از قطب منفی به قطب مثبت است.**
- **باتری دگمه‌ای نمونه‌ای از سلول‌های گالوانی و سلول فرایند هال، نمونه‌ای از سلول‌های الکترولیتی است.**
- **در سلول گالوانی، دادوستد الکترون بین اکسنده و کاهنده به صورت غیرمستقیم انجام می‌شود.**
- **در سلول‌های الکترولیتی، گونهٔ کاهنده در مجاورت قطب منفی و گونهٔ اکسنده در مجاورت قطب مثبت، مصرف می‌شود.**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۲

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

عبارت‌های دوم و سوم درست‌اند.

درس‌نامه

مقایسهٔ بین سلول‌های گالوانی و الکترولیتی

	سلول گالوانی	سلول الکترولیتی
تفاوت‌ها	انرژی شیمیایی به انرژی الکتریکی تبدیل می‌شود.	انرژی الکتریکی به انرژی شیمیایی تبدیل می‌شود.
	یک واکنش شیمیایی در جهت طبیعی پیش می‌رود.	با اعمال یک ولتاژ بیرونی، یک واکنش اکسایش ـ کاهش در خلاف جهت طبیعی انجام می‌شود.
	دارای دو الکترولیت است که توسط دیواره‌ای متخلخل از هم جدا شده‌اند (الکترولیت‌ها حاوی کاتیون‌هایی از جنس الکترودها هستند).	دو الکترود درون یک الکترولیت قرار گرفته‌اند (الکترولیت، یک محلول یونی یا یک ترکیب یونی مذاب است).
	آند، قطب منفی و کاتد، قطب مثبت است.	آند، قطب مثبت و کاتد، قطب منفی است.
	معمولاً الکترودهای آند و کاتد در واکنش شرکت می‌کنند.	معمولاً الکترودهای آند و کاتد بی‌اثرند و در واکنش شرکت نمی‌کنند.
شباهت‌ها	اکسایش در آند و کاهش در کاتد انجام می‌شود.	
	جهت حرکت الکترون‌ها در مدار بیرونی از آند به کاتد است.	
	کاتیون‌ها به سمت کاتد و آنیون‌ها به سمت آند مهاجرت می‌کنند.	

پاسخ تشریحی بررسی عبارت‌ها:

عبارت اول: در سلول‌های گالوانی و الکترولیتی، جهت حرکت الکترون‌ها از آند به سمت کاتد است، اما *هواستون باشه* که علامت آند و کاتد در سلول‌های گالوانی و الکترولیتی، *برعکسه!* بدین معنی که الکترون‌ها در سلول‌های گالوانی از قطب منفی به سمت قطب مثبت و در سلول‌های الکترولیتی از قطب مثبت به سمت قطب منفی حرکت می‌کنند.

عبارت دوم: باتری‌ها جزء سلول‌های گالوانی هستند و فرایند هال در یک سلول الکترولیتی با مصرف انرژی الکتریکی انجام می‌شود.

عبارت سوم: در سلول‌های گالوانی گونهٔ کاهنده در سطح آند الکترون از دست می‌دهد و این الکترون‌ها از طریق مدار خارجی به سمت کاتد حرکت می‌کنند و گونهٔ اکسنده در سطح کاتد، این الکترون‌ها را مصرف می‌کند.

عبارت چهارم: در سلول‌های الکترولیتی، گونهٔ کاهنده در آند (قطب مثبت) اکسایش می‌یابد و گونهٔ اکسنده در کاتد (قطب منفی) کاهش می‌یابد.

تست و پاسخ ۹۹

یک لولهٔ آب با ۷۰/۵ گرم اسید چرب با فرمول $C_{17}H_{33}COOH$ ($M = 282\ g.mol^{-1}$) دچار گرفتگی شده است. اگر برای بازکردن این لوله از ۴۰۰ میلی‌لیتر محلول ۰/۵ مولار سود استفاده شود، چند درصد اسید چرب را می‌توان توسط صابون تولیدشده پاکسازی کرد؟ (در این فرایند سود به طور کامل مصرف شده است.)

$$C_{17}H_{33}COOH(s) + NaOH(aq) \rightarrow C_{17}H_{33}COONa(aq) + H_2O(l)$$

۱) ۲۰ ۲) ۲۵ ۳) ۷۵ ۴) ۸۰

پاسخ: گزینهٔ ۱

خودت حل کنی بهتره ابتدا به کمک اطلاعات داده‌شده در مورد NaOH و معادلهٔ واکنش، مقدار اسید چرب مصرف‌شده در واکنش آن با سود را به دست بیار! اگر این مقدار را از جرم کل اسید چرب کم کنی، مقدار اسید چربی که توسط صابون، پاکسازی شده به دست می‌آید.

پاسخ تشریحی **گام اول:** جرم اسید چرب مصرف‌شده در واکنش آن با سود را حساب می‌کنیم:

روش اول: استفاده از کسر تبدیل:

$$\text{اسید چرب } 56/4\,g = 0/4\,L \text{ محلول } NaOH \times \frac{0/5\,mol\,NaOH}{1\,L \text{ محلول } NaOH} \times \frac{1\,mol \text{ اسید چرب}}{1\,mol\,NaOH} \times \frac{282\,g \text{ اسید چرب}}{1\,mol \text{ اسید چرب}}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

روش دوم: استفاده از کسر تناسب:

$$\frac{\text{جرم}}{\underbrace{\text{جرم مولی}\times\text{ضریب}}_{\text{اسیدچرب}}}=\frac{\underbrace{\text{حجم}\times\text{غلظت مولی}}_{\text{سدیم هیدروکسید}}}{\text{ضریب}\times 1}\Rightarrow\frac{x}{1\times 282}=\frac{0/5\times 0/4}{1\times 1}\Rightarrow x=56/4\,g \text{ اسید چرب}$$

گام دوم: جرم اسید چرب پاک‌شده توسط صابون را حساب می‌کنیم:

$$\text{جرم اسید چرب پاک‌شده توسط صابون}=\text{جرم کل اسید چرب}-\text{جرم اسید چرب مصرف‌شده در واکنش با سود}=70/5-56/4=14/1\,g$$

گام سوم: درصد اسید چرب پاک‌شده توسط صابون را حساب می‌کنیم:

$$\text{درصد اسید پاک‌شده توسط صابون}=\frac{\text{جرم اسید پاک‌شده با صابون}}{\text{جرم کل اسید چرب}}\times 100=\frac{14/1}{70/5}\times 100=\%20$$

تست و پاسخ ۱۰۰

با توجه به نیم‌واکنش‌های کاهشی زیر، چند مورد از مطالب زیر دربارهٔ سلول‌های نور الکتروشیمیایی درست است؟

$$(I)\ SiO_2(s)+4H^+(aq)+4e^-\rightarrow Si(s)+2H_2O(l)\quad E^\circ=-0/84\,V$$

$$(II)\ 2H_2O(l)+2e^-\rightarrow H_2(g)+2OH^-(aq)\quad E^\circ=-0/83\,V$$

- **نیم‌واکنش (II) در نیم‌سلول کاتد انجام شده و به ازای مصرف یک مول الکترون، ۱۱/۲ لیتر گاز هیدروژن در شرایط STP تولید می‌شود.**
- **$Si(s)$ آند سلول را تشکیل می‌دهد و کاغذ pH در محیط پیرامون آن به رنگ قرمز درمی‌آید.**
- **علی‌رغم پایین‌بودن emf، بازده و سرعت انجام واکنش کلی این سلول، برخی پژوهشگران آن را برای تهیهٔ گاز هیدروژن مناسب می‌دانند.**
- **واکنش کلی این سلول به صورت $SiO_2(s)+2H_2(g)\rightarrow Si(s)+2H_2O(l)$ است.**

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) ۱

پاسخ: گزینهٔ ۱

عبارت‌های اول، دوم و سوم درست‌اند.

پاسخ تشریحی بررسی عبارت‌ها:

عبارت اول: در این سلول، نیم‌واکنش (I) E° کم‌تری دارد؛ بنابراین وارونهٔ آن در آند انجام می‌شود و نیم‌واکنش (II)، همان نیم‌واکنش کاتدی است:

نیم‌واکنش آندی: $Si(s)+2H_2O(l)\rightarrow SiO_2(s)+4H^+(aq)+4e^-$

نیم‌واکنش کاتدی: $2H_2O(l)+2e^-\rightarrow H_2(g)+2OH^-(aq)$

$$1\,mol\,e^-\times\frac{1\,mol\,H_2}{2\,mol\,e^-}\times\frac{22/4\,L\,H_2}{1\,mol\,H_2}=11/2\,L\,H_2$$

عبارت دوم: $Si(s)$ آند سلول را تشکیل می‌دهد و به دلیل تولید $H^+(aq)$ در آن، محلول اطراف آند اسیدی خواهد بود و کاغذ pH در تماس با آن به رنگ قرمز درمی‌آید.

عبارت سوم: به دلیل این‌که گاز هیدروژن یک سوخت پاک می‌باشد، اغلب پژوهشگران علی‌رغم پایین‌بودن emf، بازده و سرعت این سلول، آن را برای تهیهٔ گاز هیدروژن مناسب می‌دانند.

عبارت چهارم: نیم‌واکنش کاهش (II) را در ۲ ضرب می‌کنیم تا تعداد الکترون‌های مبادله‌شده در دو نیم‌واکنش برابر شود، سپس با نیم‌واکنش اکسایش جمع می‌کنیم تا معادلهٔ کلی سلول به دست آید.

نیم‌واکنش آندی: $Si(s)+2H_2O(l)\rightarrow SiO_2(s)+\cancel{4H^+(aq)}+\cancel{4e^-}$

نیم‌واکنش کاتدی (×۲): $\cancel{4H_2O(l)}+\cancel{4e^-}\rightarrow 2H_2(g)+\cancel{4OH^-(aq)}$

واکنش کلی: $Si(s)+2H_2O(l)\rightarrow SiO_2(s)+2H_2(g)$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

تست و پاسخ ۱۰۱

اگر بر اثر حل‌شدن مقداری فلز قلع در ۵۰۰ میلی‌لیتر محلول اسیدی حاوی $HCl(aq)$ و $HNO_3(aq)$ با $pH = 0/3$، ۱/۱۲ لیتر گاز در شرایط STP آزاد شود، pH محلول به چند می‌رسد و چند مول الکترون از کاهنده به اکسنده منتقل می‌شود؟ (از خاصیت اسیدی فراورده‌ها صرف نظر کنید.)

(معادلهٔ واکنش موازنه شود.) $HNO_3(aq) + HCl(aq) + Sn(s) \rightarrow H_2SnCl_6(aq) + NO_2(g) + H_2O(l)$

۱) ۰/۰۶ ـ ۰/۶

۲) ۰/۰۶ ـ ۰/۷

۳) ۰/۰۵ ـ ۰/۶

۴) ۰/۰۵ ـ ۰/۷

پاسخ: گزینهٔ ۳

خودت حل کنی بهتره معادلهٔ واکنش را موازنه کن و از روی حجم گاز تولیدشده، مجموع غلظت اسیدهای مصرف‌شده را به دست بیار. سپس با کم‌کردن غلظت اسید مصرف‌شده از غلظت اولیهٔ اسیدها، pH نهایی محلول را محاسبه کن!

پاسخ تشریحی **گام اول:** واکنش داده‌شده را موازنه می‌کنیم.

$$4HNO_3(aq) + 6HCl(aq) + Sn(s) \rightarrow H_2SnCl_6(aq) + 4NO_2(g) + 4H_2O(l)$$

گام دوم: با توجه به حجم گاز تولیدشده، غلظت H^+ مصرف‌شده در واکنش را حساب می‌کنیم. چون هر دو اسید HNO_3 و HCl، قوی و تک‌پروتون‌دار هستند، مجموع غلظت H^+ مصرف‌شده با مجموع غلظت دو اسید مصرف‌شده برابر است:

روش اول:

$$1/12\ L\,NO_2 \times \frac{1\ mol\ NO_2}{22/4\ L\ NO_2} \times \frac{1\ mol\ H^+}{4\ mol\ NO_2} = 0/125\ mol\ H^+$$

$$[H^+] = \frac{0/125\ mol}{0/5\ L} = 0/25\ mol.L^{-1}$$

روش دوم:

$$\underbrace{\frac{\text{حجم} \times \text{غلظت مولی}}{\text{ضریب} \times 1}}_{HNO_3+HCl} = \underbrace{\frac{\text{حجم}}{\text{حجم مولی} \times \text{ضریب}}}_{NO_2} \Rightarrow \frac{x \times 0/5}{(4+6)\times 1} = \frac{1/12}{4 \times 22/4} \Rightarrow x = 0/25\ mol.L^{-1}$$

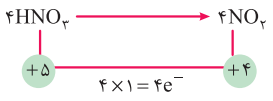
گام سوم: با توجه به $[H^+]$ اولیه و $[H^+]$ مصرف‌شده، $[H^+]$ نهایی را به دست آورده و pH نهایی محلول را حساب کنیم:

$$pH_{\text{اولیه}} = 0/3 \Rightarrow [H^+]_{\text{اولیه}} = 10^{-0/3} = 10^{-1+0/7} = 10^{-1} \times 10^{0/7} = 0/5\ mol.L^{-1}$$

$$[H^+]_{\text{نهایی}} = [H^+]_{\text{اولیه}} - [H^+]_{\text{مصرف‌شده}} = 0/5 - 0/25 = 0/25\ mol.L^{-1}$$

$$pH_{\text{نهایی}} = -\log[H^+]_{\text{نهایی}} = -\log 0/25 = -\log 25 \times 10^{-2} = 2 - 2\log 5 = 2 - (2 \times 0/7) = 0/6$$

گام چهارم: برای قسمت دوم سؤال، با توجه به عدد اکسایش نیتروژن در HNO_3 و NO_2، می‌شه فهمید که ۴ الکترون در واکنش مبادله می‌شود:



$$\underbrace{\frac{\text{حجم}}{\text{حجم مولی} \times \text{ضریب}}}_{NO_2} = \underbrace{\frac{\text{مول}}{\text{ضریب} \times 1}}_{e^-} \Rightarrow \frac{1/12}{4 \times 22/4} = \frac{x}{4 \times 1} \Rightarrow x = 0/05\ mol\ e^-$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

تست و پاسخ ۱۰۲

چند مورد از مطالب زیر، درست است؟

- **در اطراف کاتد سلول تشکیل‌شده به هنگام خوردگی آهن، رسوبی «قرمز ـ قهوه‌ای» رنگ تولید می‌شود.**
- **پتانسیل کاهشی بالای فلز طلا، درخشندگی و عدم اکسایش آن در محلول‌های آبی حتی با خصلت اسیدی را توجیه می‌کند.**
- **در فرایند خوردگی آهن، emf سلول تشکیل‌شده در محیط اسیدی بیشتر از محیط خنثی است.**
- **اختلاف مجموع ضرایب گونه‌ها در نیم‌واکنش مرحلهٔ اول اکسایش خوردگی آهن با نیم‌واکنش کاهش آن برابر ۶ است.**

۱) یک ۲) دو
۳) سه ۴) چهار

$O_2 + 2H_2O + 4e^- \rightarrow 4OH^-$

$Fe \rightarrow Fe^{2+} + 2e^-$

پاسخ: گزینهٔ ۳

عبارت‌های اول تا سوم درست‌اند.

پاسخ تشریحی بررسی عبارت‌ها:

عبارت اول: زنگ آهن $(Fe(OH)_3(s))$ یک رسوب قرمز ـ قهوه‌ای است که در فرایند خوردگی آهن در اطراف ناحیهٔ کاتدی تشکیل می‌شود.

عبارت دوم: مثبت‌تربودن پتانسیل کاهشی فلز طلا از پتانسیل کاهشی اکسیژن در محیط خنثی و حتی محیط اسیدی، باعث عدم واکنش این فلز با محلول اسیدی می‌شود.

نکته نیم‌واکنش کاهشی اکسیژن در محیط خنثی و محیط اسیدی به صورت زیر است:

نیم‌واکنش کاهش اکسیژن در محیط خنثی: $O_2(g) + 2H_2O(l) + 4e^- \rightarrow 4OH^-(aq)$ $\quad E^\circ = +0/4V$

نیم‌واکنش کاهش اکسیژن در محیط اسیدی: $O_2(g) + 4H^+(aq) + 4e^- \rightarrow 2H_2O(l)$ $\quad E^\circ = +1/23V$

توجه با توجه به E° اکسیژن در محیط خنثی $(0/4V)$ و محیط اسیدی $(1/23V)$ می‌توان نوشت:

انواع فلزها از نظر اکسایش

- $E^\circ < 0/4V$ ← حتی در محیط خنثی هم اکسید می‌شود. ← مثال ← آهن $E^\circ = -0/44V$
- $0/4V < E^\circ < 1/23V$ ← در محیط خنثی اکسید نمی‌شود، اما در محیط اسیدی اکسید می‌شود. ← مثال ← نقره $E^\circ = +0/8V$
- $E^\circ > 1/23V$ ← در محیط اسیدی هم اکسید نمی‌شود. ← مثال ← طلا $E^\circ = +1/5V$

عبارت سوم: پتانسیل کاهشی اکسیژن در محیط اسیدی نسبت به محیط خنثی بیشتر است؛ بنابراین با توجه به رابطهٔ: $emf = E^\circ$ (کاتد) $- E^\circ$ (آند)، emf سلول گالوانی تشکیل‌شده در محیط اسیدی بیشتر است.

عبارت چهارم: نیم‌واکنش‌های موازنه‌شدهٔ اکسایش (مرحلهٔ اول) و کاهش مربوط به خوردگی آهن به صورت زیر است:

نیم‌واکنش اکسایش: $Fe(s) \rightarrow Fe^{2+}(aq) + 2e^-$
مجموع ضرایب $= 1 + 1 + 2 = 4$
نیم‌واکنش کاهش: $O_2(g) + 2H_2O(l) + 4e^- \rightarrow 4OH^-(aq)$
مجموع ضرایب $= 1 + 2 + 4 + 4 = 11$

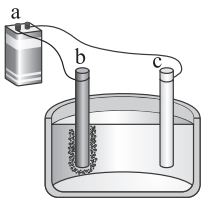
$\Rightarrow 11 - 4 = 7$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز

تست و پاسخ ۱۰۳

یک روش برای تهیهٔ فلزاتی که کاهندهٔ قوی هستند، برقکافت نمک مذاب آن‌هاست. با توجه به شکل زیر که برای تهیهٔ فلز سدیم استفاده می‌شود، چند مورد از مطالب زیر درست است؟



- **a قطب مثبت باتری و الکترودهای b و c، به ترتیب آند و کاتد این سلول را نشان می‌دهند.**
- **افزودن کلسیم کلرید به سدیم کلرید خالص، نقطهٔ ذوب آن را به اندازهٔ $214^\circ C$ کاهش داده و این امر باعث صرفه‌جویی در انرژی می‌شود.**
- **بر اثر انجام نیم‌واکنش کاهش در کاتد، شعاع گونهٔ اکسنده افزایش خواهد یافت.**
- **مواد شرکت‌کننده در واکنش کلی این سلول، سه حالت فیزیکی متفاوت دارند.**

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

پاسخ: گزینهٔ ۲

به‌جز عبارت چهارم، بقیهٔ عبارت‌ها درست‌اند.

پاسخ تشریحی بررسی عبارت‌ها:

عبارت اول: در سلول الکترولیتی برقکافت سدیم کلرید مذاب، کاتد به قطب منفی باتری و آند به قطب مثبت باتری متصل می‌شود. در آند این سلول، یون‌های کلرید با از دست دادن الکترون به گاز کلر تبدیل می‌شوند و در کاتد آن، یون‌های سدیم با گرفتن الکترون به فلز سدیم تبدیل می‌شوند.

نیم‌واکنش کاهش: $Na^+(l) + e^- \rightarrow Na(l) \xrightarrow{\times 2} 2Na^+(l) + 2e^- \rightarrow 2Na(l)$

نیم‌واکنش اکسایش: $2Cl^-(l) \rightarrow Cl_2(g) + 2e^- \Rightarrow 2Cl^-(l) \rightarrow Cl_2(g) + 2e^-$

معادلهٔ کلی موازنه‌شده: $2NaCl(l) \rightarrow 2Na(l) + Cl_2(g)$

حباب‌های گاز در اطراف الکترود b، نشان‌دهندهٔ گاز کلر هستند که در آند (قطب مثبت) تولید شده‌اند.

عبارت دوم: سدیم کلرید خالص در $801^\circ C$ ذوب می‌شود. افزودن مقداری کلسیم کلرید به آن، دمای ذوب را تا حدود $587^\circ C$ پایین می‌آورد (نقطهٔ ذوب به اندازهٔ $801 - 587 = 214^\circ C$ کم‌تر می‌شود) که این امر باعث صرفه‌جویی در مصرف انرژی می‌شود.

عبارت سوم: همواره شعاع اتم خنثی (Na) از شعاع کاتیون آن (Na^+) بزرگ‌تر است.

عبارت چهارم: مواد شرکت‌کننده در واکنش کلی، تنها دو حالت فیزیکی گازی (g) و مذاب (l) دارند.

تست و پاسخ ۱۰۴

با توجه به واکنش مقابل، چند مورد از موارد داده‌شده درست است؟ (معادلهٔ واکنش موازنه شود.)

$$I_2 + ClO_3^- + H_2O \rightarrow IO_3^- + H^+ + Cl^-$$

- **گونهٔ کاهنده در این واکنش، یک یون چنداتمی است.**
- **به ازای مصرف $3/612 \times 10^{23}$ الکترون توسط گونهٔ اکسنده، ۰/۵ مول یون کلرید تولید می‌شود.**
- **با انجام این فرایند، pH محیط افزایش می‌یابد.**
- **مجموع ضرایب استوکیومتری مواد شرکت‌کننده در واکنش برابر ۲۸ است.**

۱) یک ۲) دو ۳) سه ۴) چهار

پاسخ: گزینهٔ ۱

فقط عبارت چهارم درست است.

پاسخ تشریحی بررسی عبارت‌ها:

عبارت اول: در این واکنش عدد اکسایش اتم‌های یُد از صفر به $+5$ افزایش می‌یابد، پس گونهٔ کاهنده در واکنش، I_2 است، نه ClO_3^-!!!

$I_2 \rightarrow$ عنصر آزاد $\rightarrow$ عدد اکسایش = صفر

$IO_3^- \rightarrow x + 3(-2) = -1 \Rightarrow x = +5$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

عبارت دوم: معادلهٔ واکنش را موازنه می‌کنیم.

نکته به طور کلی برای موازنهٔ واکنش‌های اکسایش ـ کاهش، ابتدا تغییر عدد اکسایش اتم‌ها را حساب می‌کنیم، سپس مقدار تغییر عدد اکسایش گونهٔ کاهنده را ضریب گونهٔ اکسنده و مقدار تغییر عدد اکسایش گونهٔ اکسنده را ضریب کاهنده قرار می‌دهیم و در آخر، با توجه به ضرایبی که معلوم هستند، ضرایب بقیهٔ گونه‌ها را تعیین می‌کنیم، حواستون باشه که اگر عنصری که عدد اکسایش آن تغییر کرده است، دارای زیروند باشد، باید تغییر عدد اکسایش آن را در زیروندش ضرب کنیم و سپس جابه‌جایی تغییر عدد اکسایش را انجام بدهیم.

در واکنش مورد نظر عدد اکسایش ید از ۰ به ۵+ رسیده است. چون در سمت چپ، ۲ اتم ید داریم، تغییر عدد اکسایش آن را در ۲ ضرب می‌کنیم:

$$۲\times۵=۱۰$$

عدد اکسایش کلر از ۵+ به ۱− رسیده یعنی ۶ واحد تغییر کرده است. اعداد ۱۰ و ۶ به ۲ ساده می‌شوند؛ پس در مرحلهٔ اول باید ضریب $ClO_۳^-$ را برابر ۵ و ضریب $I_۲$ را برابر ۳ قرار دهیم. با مشخص‌شدن ضریب این دو گونه، ضرایب بقیهٔ مواد نیز مشخص خواهد شد:

$$۳I_۲ + ۵ClO_۳^- + ۳H_۲O \rightarrow ۶IO_۳^- + ۶H^+ + ۵Cl^-$$

$$۶\times۰=۰ \xrightarrow{\text{۳۰ درجه اکسایش}} ۶\times(+۵)=۳۰$$

$$۳/۶۱۲\times۱۰^{۲۳}\,e^- \times \frac{۱\,mol\,e^-}{۶/۰۲\times۱۰^{۲۳}\,e^-} \times \frac{۵\,mol\,Cl^-}{۳۰\,mol\,e^-} = ۰/۱\,mol\,Cl^-$$

عبارت سوم: در این واکنش H^+ تولید می‌شود و pH محیط کاهش می‌یابد.

عبارت چهارم: مجموع ضرایب استوکیومتری کل مواد شرکت‌کننده در واکنش برابر ۲۸ است.

تست و پاسخ ۱۰۵

در سلول فرایند هال، جنس آند و کاتد به‌کاررفته یکسان و از گرافیت است. با گذشت زمان، از جرم گرافیت ..... کاسته شده و به ازای مصرف ۳/۶ گرم از آن، ..... گرم آلومینیم تولید می‌شود. ($C=۱۲, Al=۲۷ : g.mol^{-۱}$)

۱) آند ـ ۱۰/۸ ۲) کاتد ـ ۱۰/۸ ۳) کاتد ـ ۵/۴ ۴) آند ـ ۵/۴

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ تشریحی در سلول هال، گرافیت کاتد در واکنش شرکت نمی‌کند، اما در این فرایند، گاز اکسیژن تولیدشده در اطراف آند، با گرافیت واکنش می‌دهد و گاز $CO_۲$ تولید شده و از جرم گرافیت آند کاسته می‌شود.

$$۲Al_۲O_۳(s) + ۳C(s) \rightarrow ۴Al(l) + ۳CO_۲(g)$$

روش اول: استفاده از کسر تبدیل:

$$۳/۶\,g\,C \times \frac{۱\,mol\,C}{۱۲\,g\,C} \times \frac{۴\,mol\,Al}{۳\,mol\,C} \times \frac{۲۷\,g\,Al}{۱\,mol\,Al} = ۱۰/۸\,g\,Al$$

روش دوم: استفاده از کسر تناسب:

$$\frac{\text{جرم}}{\underbrace{\text{جرم مولی}\times\text{ضریب}}_{C}} = \frac{\text{جرم}}{\underbrace{\text{جرم مولی}\times\text{ضریب}}_{Al}} \Rightarrow \frac{۳/۶}{۳\times۱۲} = \frac{x}{۴\times۲۷} \Rightarrow x=۱۰/۸\,g\,Al$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir