خیلی سبز!
آزمون
تجربی | ریاضی | انسانی

آزمون آزمایشی خیلی سبز

رشته ریاضی

پایه دوازدهم	مرحله دهم
سال تحصیلی ۰۴-۱۴۰۳	تاریخ برگزاری: ۲۸/دی/۱۴۰۳

دفترچه شماره یک

حسابان و ریاضیات پایه	هندسه	ریاضیات گسسته
حسابان (۲) فصل ۱ تا فصل ۳ صفحهٔ ۱ تا ۶۹	هندسه (۳) فصل ۱ و فصل ۲ (درس ۱ و ۲) صفحهٔ ۹ تا ۴۶	ریاضیات گسسته فصل ۱ و فصل ۲ (درس ۱) صفحهٔ ۱ تا ۴۲

بودجه‌بندی دروس

مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخگویی
ریاضیات	۴۰	۱	۴۰	۷۵ دقیقه
مجموع	۴۰ سؤال			۷۵ دقیقه

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

این آزمون نمره منفی دارد.

دفترچه سؤالات آزمون‌های خیلی سبز، از همه نظر (تعداد سؤال‌ها، زمان پاسخگویی، نوع چینش گزینه‌ها، نوع صفحه‌آرایی، فونت سؤالات، سایز کلمات و اعداد، جای خالی محل انجام محاسبات و...) در شبیه‌ترین حالت به دفترچه سؤالات کنکور سراسری طراحی می‌شود.

ویژه کنکوری‌های ۱۴۰۴

جمع‌بندی نیم‌سال اول

Azmoon.kheilisabz.com

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱- حاصل $\lim\limits_{x\to(-1)^+}\frac{x^2-[-x]}{1+x}$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) $+\infty$ ۲) صفر ۳) -1 ۴) $-\infty$

۲- چندجمله‌ای $f(x)=x^{13}-16x^9+x^3+ax+b$ بر x^2-3x+2 بخش‌پذیر است. باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)+f(2x+1)$ بر $x+1$ کدام است؟

۱) ۷۲ ۲) ۱۴۴ ۳) ۳۶ ۴) ۱۰۸

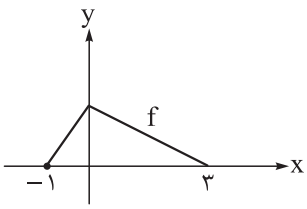
۳- نمودار تابع $f(x)=\frac{2x-a}{x+2}$ را دو واحد به راست انتقال می‌دهیم، سپس نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم، تا نمودار تابع g به دست می‌آید. نقطهٔ برخورد نمودار تابع $g^{-1}of$ با محورyها چه عرضی دارد؟ $(a\neq -4)$

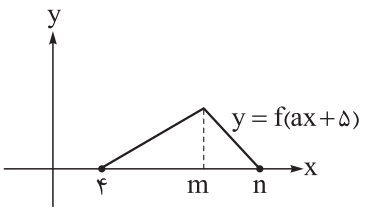
۱) -1 ۲) ۲ ۳) -2 ۴) ۱

۴- نمودار تابع $y=2(x-a)^2-a$ را ۴ واحد به راست و ۴ واحد به پایین انتقال می‌دهیم و سپس نسبت به مبدأ مختصات قرینه می‌کنیم و به تابع $y=-2(x-a)^2-a$ می‌رسیم. مقدار a کدام است؟

۱) ۲ ۲) -2 ۳) ۶ ۴) -6

۵- نمودار دو تابع $y=f(x)$ و $y=f(ax+5)$ به صورت زیر است. حاصل $a+m+n$ کدام است؟



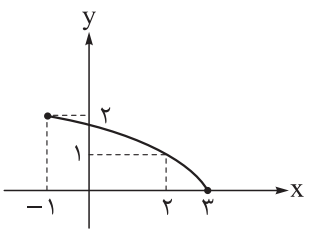


۱) ۲۱/۵
۲) ۱۱/۵
۳) ۲۴
۴) ۱۲

۶- تابع $f(x)=ax^2-4ax$ مفروض است. اگر بازهٔ $[-2,+\infty)$ بزرگ‌ترین بازه‌ای باشد که تابع $g(x)=-2f(a-\frac{x}{3})$ روی آن بازه اکیداً نزولی است، مقدار a کدام است؟

۱) $\frac{4}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $-\frac{4}{3}$ ۴) $-\frac{2}{3}$

۷- نمودار تابع f به صورت زیر است. مجموعه‌جواب‌های نامعادلهٔ $(fof)(x)\geq 1$ شامل چند عدد صحیح است؟

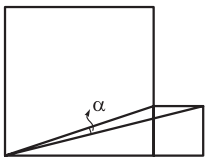


۱) ۵
۲) ۴
۳) ۳
۴) ۲

محل انجام محاسبات

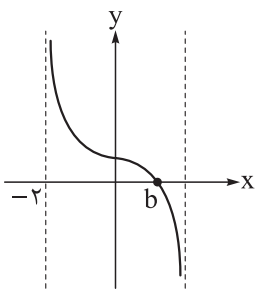
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸- در شکل مقابل دو مربع با ابعاد ۱ و ۳ رسم شده است. مقدار $\tan\alpha$ کدام است؟



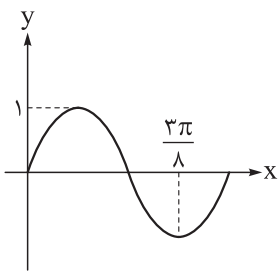
۱) $\frac{۱}{۷}$
۲) $\frac{۱}{۸}$
۳) $\frac{۱}{۱۰}$
۴) $\frac{۱}{۱۳}$

۹- نمودار تابع $y = ۱ + \tan(\frac{a\pi}{۲}x)$ به صورت زیر است. دورهٔ تناوب تابع $y = a - b\cos(\frac{\pi}{a-b}x)$ کدام است؟



۱) $\frac{۴}{۳}$
۲) $\frac{۳}{۲}$
۳) ۳
۴) ۶

۱۰- بخشی از نمودار تابع $f(x) = c + a\cos^۲(bx - \frac{\pi}{۴})$ در یک دورهٔ تناوب آن به صورت زیر است. حاصل $c + ab$ کدام است؟ $(b > ۰)$



۱) ۵
۲) ۴
۳) ۲
۴) ۳

۱۱- در معادلهٔ مثلثاتی $\frac{۱+\cos ۲x}{\sin x} = ۳$ مجموع جواب‌ها در بازهٔ $(۰, ۲\pi)$ کدام است؟

۱) $\frac{۷\pi}{۶}$
۲) $\frac{۳\pi}{۴}$
۳) $\frac{۳\pi}{۲}$
۴) π

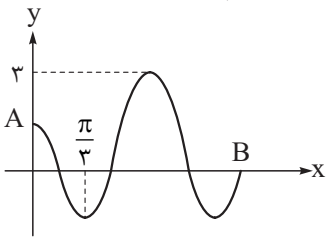
۱۲- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $\sin x + \cos x = ۱/۴$ در بازهٔ $(۰, \pi)$ باشند به طوری که $\alpha < \beta$، حاصل $\tan(\alpha - \beta)$ کدام است؟

۱) $-\frac{۷}{۲۴}$
۲) $-\frac{۷}{۲۵}$
۳) $-\frac{۲۴}{۷}$
۴) $\frac{۷}{۲۴}$

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۳- قسمتی از نمودار $f(x)=a+۲\sin(\frac{b}{a}x+\frac{\pi}{۶})$ به صورت زیر است. شیب پاره‌خط AB کدام است؟



۱) $-\frac{۶}{۵\pi}$
۲) $-\frac{۴}{۳\pi}$
۳) $-\frac{۷}{۳\pi}$
۴) $-\frac{۱۲}{۵\pi}$

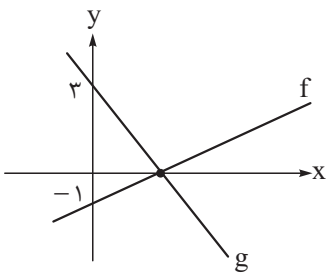
۱۴- نمودار تابع $y=\frac{a\cos\frac{\pi}{۶}x-۲b}{۲a-\sin\frac{\pi x}{۱۲}}$ در مجاورت $x=۲$ به صورت زیر است. حداکثر مقدار $[۱۶b]$ کدام است؟



([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) ۱
۲) -۱
۳) -۲
۴) صفر

۱۵- نمودار توابع f و g به صورت زیر است. اگر $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(f+۲g^{-۱})(x)}{(f^{-۱}-g)(x)}=-\frac{۱}{۲}$ باشد، مقدار $f^{-۱}(۰)$ کدام است؟



۱) $\sqrt{۷}$
۲) $\sqrt{۱۵}$
۳) $۲\sqrt{۲}$
۴) $۲\sqrt{۳}$

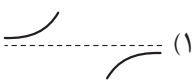
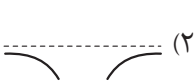
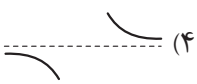
۱۶- اگر $f(x)=\sqrt{x^۲+۴}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty}(۲x-f(۲x))(x+f(x))$ کدام است؟

۱) ۲
۲) -۲
۳) ۴
۴) -۴

۱۷- نمودار تابع $f(x)=\frac{\tan ۲x}{۱+\cos x}$ در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ چند خط مجانب قائم دارد؟

۱) ۱
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

۱۸- اگر $x=۳$ تنها مجانب قائم نمودار تابع $f(x)=\frac{bx^۲+b}{۲x^۲+ax+b}$ باشد، نمودار تابع f در مجاورت مجانب افقی آن کدام است؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۹- اگر $A=[a_{ij}]_{۳\times ۳}$ که در آن $a_{ij}=\begin{cases}۴ & ; i+j=۴\\ -۱ & ; i+j\neq ۴\end{cases}$، آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس $۱۸I-A^۲$ چند برابر مجموع درایه‌های ماتریس A است؟

۱) ۳/۵ ۲) ۷ ۳) ۴ ۴) ۴/۵

۲۰- اگر A و B دو ماتریس مربعی هم‌مرتبه و غیرصفر باشند، به طوری که $BA=B$ و $AB^۲=A$، آن‌گاه کدام گزینه ممکن است نادرست باشد؟ $(n\in\mathbb{N})$

۱) $B^{۳n}=B^n$ ۲) $A^n=A$

۳) $AB=B^۲$ ۴) $(AB)^۲=A$

۲۱- اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ -۱ & ۰\end{bmatrix}$، آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس $A^{۱۰۰}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) −۱ ۳) −۲ ۴) ۲

۲۲- اگر $A=\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ ۴ & ۳\end{bmatrix}$، آن‌گاه از معادلهٔ ماتریسی $AX=A-۲A^{-۱}$ مجموع درایه‌های ستون اول ماتریس X کدام است؟

۱) −۰/۵ ۲) ۷ ۳) ۴/۵ ۴) −۳

۲۳- اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & -۱ & ۱\\ ۲ & ۱ & -۳\\ ۱ & ۱ & ۱\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}۴ & ۲ & ۲\\ -۵ & ۰ & \alpha\\ ۱ & -۲ & ۳\end{bmatrix}$ و $BA=\beta I$، آن‌گاه دترمینان ماتریس $A+\frac{\alpha}{\beta}B$ کدام است؟

۱) ۴/۵ ۲) ۱۰ ۳) ۲/۵ ۴) ۵

۲۴- اگر $\begin{bmatrix}|A| & ۰ & -۲\\ ۴ & |A| & ۳\\ ۰ & |A| & ۳\end{bmatrix}A+A=|A|A$، آن‌گاه دترمینان ماتریس وارون‌پذیر A برابر با کدام گزینه است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) −۲ ۴) −۳

۲۵- شکل حاصل از تقاطع یک سطح مخروطی و صفحه‌ای که با محور آن موازی است، کدام است؟

۱) دایره ۲) بیضی

۳) سهمی ۴) هذلولی

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۶- مکان هندسی رأس سوم مثلث‌هایی از صفحه، که در ضلع AB مشترک هستند و تمام آن‌ها مساحت برابر دارند، کدام است؟

۱) دایره‌ای به مرکز وسط AB
۲) یک خط موازی با AB
۳) یک خط عمود بر راستای AB
۴) دو خط موازی با راستای AB

۲۷- دو نقطهٔ $(-۱,۲)$ و $(-۶,۳)$ دو سر قطری از دایرهٔ به معادلهٔ $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ هستند، حاصل $a+b+c$ کدام است؟

۱) -۱۳
۲) -۱۷
۳) ۱۱
۴) ۱۵

۲۸- طول وتری از دایرهٔ $x^۲+y^۲-۴x-۸y-۱۶=۰$ که مختصات وسط آن وتر، $(-۲,۱)$ است، کدام است؟

۱) $\sqrt{۱۱}$
۲) ۳
۳) $۲\sqrt{۱۱}$
۴) ۶

۲۹- دو خط به معادله‌های $x-۲y+۱=۰$ و $۲x+y-۱=۰$ بر دایره‌ای که مرکز آن روی نیمساز ناحیهٔ دوم و چهارم قرار دارد، مماس‌اند. حاصل‌ضرب مقادیر قابل قبول برای شعاع این دایره کدام است؟

۱) ۰/۲
۲) ۰/۴
۳) ۰/۶
۴) ۰/۸

۳۰- دو دایره به معادله‌های $x^۲+y^۲-۴x-۱۰y-۳۵=۰$ و $(x+۳)^۲+(y+۷)^۲=R^۲$ متقاطع‌اند. بیشترین مقدار صحیح R کدام است؟

۱) ۱۹
۲) ۲۰
۳) ۲۱
۴) ۲۲

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۱- اگر a مضرب ۷ باشد ولی مضرب ۱۴ نباشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم $a^3 - a - 7$ بر ۸ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۷

۳۲- کدام گزینه را نمی‌توان با مثال نقض رد کرد؟

۱) مجموع دو عدد گنگ، عددی گنگ است.

۲) مجموع یک عدد گویا و یک عدد گنگ، عددی گنگ است.

۳) حاصل‌ضرب دو عدد گنگ، عددی گنگ است.

۴) حاصل‌ضرب یک عدد گویا و یک عدد گنگ، عددی گنگ است.

۳۳- برای $k \in \mathbb{Z}$، اگر $7 \mid 4k+3$، آن‌گاه می‌توان نتیجه گرفت $49 \mid 12k^2 - 3k + x$، مقدار x کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۱۹ ۲) ۲۶ ۳) ۳۳ ۴) ۴۰

۳۴- در عدد سه‌رقمی $\overline{abc}$ می‌دانیم $a > c$. حاصل $\overline{abc} - \overline{cba}$ را به شکل عدد سه‌رقمی $\overline{xyz}$ بنویسید. اگر $A = \overline{xyz} + \overline{zyx}$ و $d \mid A$، آن‌گاه d چند مقدار مختلف صحیح دارد؟

۱) ۶ ۲) ۹ ۳) ۱۲ ۴) ۱۸

۳۵- در گرافی k ـ منتظم از مرتبهٔ ۶، k حداکثر مقدار ممکن را دارد. اندازهٔ این گراف کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۲ ۳) ۹ ۴) ۶

۳۶- در گراف G مرتبهٔ گراف ۹ و اندازهٔ آن ۱۰ است. در گراف $\bar{G}$، حداکثر چند رأس با درجهٔ ۷ داریم؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۳۷- در معادلهٔ سیالهٔ خطی $4x + 14y = 22$، حداقل مقدار طبیعیِ سه‌رقمی برای x کدام است؟

۱) ۱۰۳ ۲) ۱۰۲ ۳) ۱۰۱ ۴) ۱۰۰

۳۸- اگر ۱۴ فروردین در یک سال، روز سه‌شنبه باشد؛ دومین دوشنبهٔ شهریور همان سال، چندمِ شهریور است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

۳۹- باقی‌ماندهٔ تقسیم $7^{1000} + 7!$ بر ۲۴ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۱۱ ۴) ۱۷

۴۰- عدد $2x^2 + 7x + 3$؛ $(x \in \mathbb{N})$ مضرب ۱۷ است و p مجموع ارقام بزرگ‌ترین عدد دورقمی x است. برای گراف G از مرتبهٔ p که یکی از رئوس آن a است، حاصل $\left|N_G(a)\right| + \left|N_{\bar{G}}(a)\right|$ کدام است؟

۱) ۱۷ ۲) ۱۶ ۳) ۱۵ ۴) ۱۴

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ‌نامهٔ تشریحی آزمون را ساعت ۱۶ از صفحهٔ شخصی خودتان در سایت آزمون خیلی سبز دریافت کنید.

azmoon.kheilisabz.com

اساتید، مشاوران و دانش‌آموزان گرامی؛
نظرات، پیشنهادات، انتقادات و بازخوردهای خود نسبت به سؤالات این آزمون را می‌توانید از طریق آیدی Kheilisabz_edit@ در همهٔ پیام‌رسان‌ها با ما به اشتراک بگذارید.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

آزمون آزمایشی خیلی سبز

رشته ریاضی

پایه دوازدهم	مرحله دهم
سال تحصیلی ۰۴-۱۴۰۳	تاریخ برگزاری: ۱۴۰۳/دی/۲۸

دفترچه شماره دو

فیزیک	شیمی
فیزیک (۳) فصل ۱ تا فصل ۳ (تا ابتدای موج و انواع آن) صفحهٔ ۱ تا ۶۹	شیمی (۳) فصل ۱ و فصل ۲ صفحهٔ ۱ تا ۶۶

بودجه‌بندی دروس

مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخگویی
فیزیک	۳۵	۴۱	۷۵	۸۰ دقیقه
شیمی	۳۰	۷۶	۱۰۵	
مجموع	۶۵ سؤال			۸۰ دقیقه

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

این آزمون نمره منفی دارد.

دفترچه سؤالات آزمون‌های خیلی سبز، از همه نظر (تعداد سؤال‌ها، زمان پاسخگویی، نوع چینش گزینه‌ها، نوع صفحه‌آرایی، فونت سؤالات، سایز کلمات و اعداد، جای خالی محل انجام محاسبات و...) در شبیه‌ترین حالت به دفترچه سؤالات کنکور سراسری طراحی می‌شود.

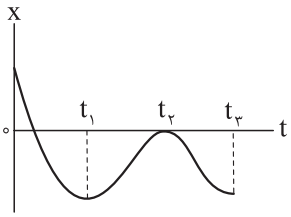
ویژه کنکوری‌های ۱۴۰۴

جمع‌بندی نیم‌سال اول

Azmoon.kheilisabz.com

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۱- نمودار مکان ــ زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. کدام موارد دربارهٔ حرکت این متحرک درست است؟



الف) در بازهٔ زمانی صفر تا t_3، جهت حرکت متحرک دو مرتبه تغییر می‌کند.

ب) در بازهٔ زمانی صفر تا t_3، جهت بردار مکان متحرک دو مرتبه تغییر می‌کند.

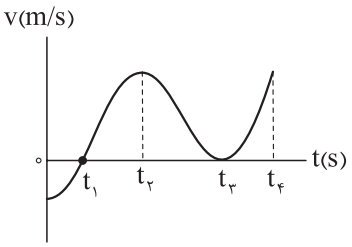
پ) در بازهٔ زمانی صفر تا t_2، شتاب متوسط متحرک در خلاف جهت محور x است.

ت) در بازهٔ زمانی صفر تا t_1، اندازهٔ بردار مکان متحرک ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد.

۱) الف و پ ۲) ب و ت

۳) الف و ت ۴) ب و پ

۴۲- نمودار سرعت ــ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. چه تعداد از موارد زیر دربارهٔ حرکت این متحرک الزاماً درست است؟



الف) در لحظهٔ t_3، جهت حرکت و جهت شتاب متحرک تغییر می‌کند.

ب) در بازه‌ای که شتاب متحرک در خلاف جهت محور x است، متحرک در جهت محور x حرکت می‌کند.

پ) در بازهٔ زمانی صفر تا t_2، جهت بردار مکان متحرک یک مرتبه تغییر می‌کند.

ت) در بازهٔ زمانی صفر تا t_1، متحرک به صورت کندشونده در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۴۳- شتاب متوسط متحرکی در ۴ ثانیهٔ اول حرکت برابر $(-2\,m/s^2)\vec{i}$ و در ۱۰ ثانیهٔ اول حرکت برابر $(1\,m/s^2)\vec{i}$ است. اگر سرعت متحرک در لحظهٔ $t_1 = 4\,s$ برابر $\vec{v}_1 = (8\,m/s)\vec{i}$ باشد، سرعت متحرک در لحظهٔ $t_2 = 10\,s$ برابر چند متر بر ثانیه است؟

۱) $10\vec{i}$ ۲) $-10\vec{i}$

۳) $26\vec{i}$ ۴) $-26\vec{i}$

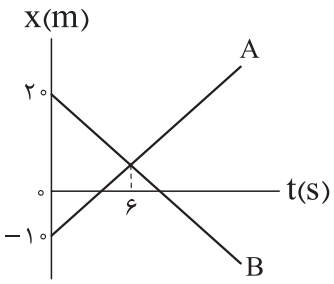
۴۴- متحرک A با سرعت ثابت $(10\,m/s)\vec{i}$ و متحرک B با سرعت ثابت $(12\,m/s)\vec{i}$ در راستای محور x در حال حرکت هستند. اگر دو متحرک به ترتیب در لحظه‌های $t_1 = 0$ و $t_2 = 2\,s$ از مبدأ مکان عبور کنند، در چه لحظه‌ای برحسب ثانیه هر دو از یک مکان عبور می‌کنند؟

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴

محل انجام محاسبات

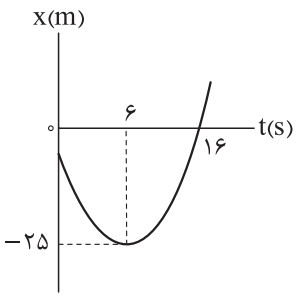
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۵- نمودار مکان ـ زمان دو متحرک A و B که با سرعت ثابت روی محور x حرکت می‌کنند، به شکل زیر است. در طی حرکت دو متحرک، چند ثانیه فاصلهٔ آن‌ها کم‌تر از ۵۰ m و بیشتر از ۱۰ m است؟



۱) ۱۶
۲) ۱۲
۳) ۸
۴) ۴

۴۶- نمودار مکان ـ زمان متحرکی که با شتاب ثابت در راستای محور x حرکت می‌کند، به صورت سهمی شکل زیر است. سرعت متوسط متحرک در ۸ s اول چند متر بر ثانیه است؟

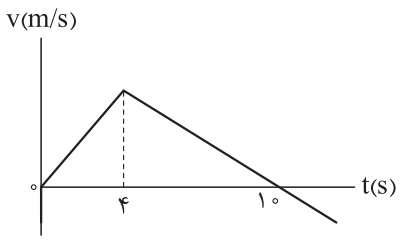


۱) $-\vec{i}$
۲) $\vec{i}$
۳) $-۲\vec{i}$
۴) $۲\vec{i}$

۴۷- متحرکی با شتاب ثابت $۲\ m/s^۲$ از حال سکون شروع به حرکت می‌کند و پس از مدتی با شتابی ثابت به بزرگی $۳\ m/s^۲$ حرکتش کند می‌شود تا متوقف شود. اگر اندازهٔ سرعت متوسط متحرک از لحظهٔ شروع حرکت تا توقف آن برابر $۱۵\ m/s$ باشد، مسافت طی‌شده توسط متحرک در ۱۰ ثانیهٔ دوم حرکت چند متر است؟

۱) ۱۵۰
۲) ۲۲۵
۳) ۱۶۷/۵
۴) ۲۳۷/۵

۴۸- نمودار سرعت ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. تندی متوسط متحرک در ۴ ثانیهٔ سوم، چند برابر اندازهٔ سرعت متوسط آن در بازهٔ زمانی $t_۱ = ۲\ s$ تا $t_۲ = ۶\ s$ است؟

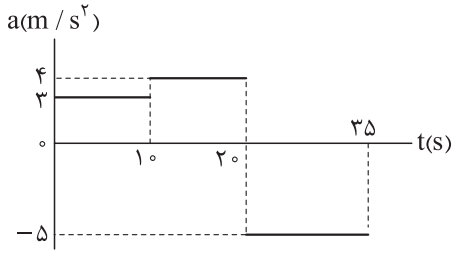


۱) $\frac{۱}{۹}$
۲) $\frac{۲}{۹}$
۳) $\frac{۲}{۱۹}$
۴) $\frac{۴}{۱۹}$

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۹- نمودار شتاب ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. اگر متحرک در مبدأ زمان با تندی $۱۵\ m/s$، در خلاف جهت محور x از مبدأ مکان عبور کند، بیشترین فاصلهٔ متحرک از مبدأ مکان در بازهٔ زمانی $t_۱ = ۰$ تا $t_۲ = ۳۵\ s$ برابر چند متر است؟



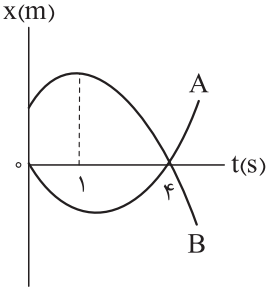
۱) ۳۵۰

۲) ۶۵۲/۵

۳) ۳۸۷/۵

۴) ۶۹۰

۵۰- نمودار مکان ـ زمان دو متحرک A و B که با شتاب ثابت روی محور x حرکت می‌کنند، به شکل زیر است. اگر در لحظهٔ $t = ۳\ s$، تندی دو متحرک به ترتیب $۲\ m/s$ و $۴\ m/s$ باشد، بیشترین فاصلهٔ دو متحرک از یکدیگر در ۴ ثانیهٔ نخست چند متر است؟



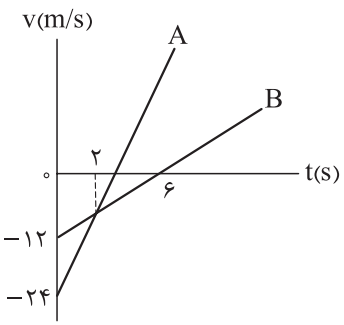
۱) ۱۲/۵

۲) ۱۲

۳) ۱۱/۵

۴) ۱۴

۵۱- نمودار سرعت ـ زمان دو متحرک A و B که در راستای محور x حرکت می‌کنند، به شکل زیر است. در مبدأ زمان، دو متحرک به ترتیب در مکان‌های $x_۱ = ۰$ و $x_۲ = -۱۰\ m$ قرار دارند. در بازهٔ زمانی‌ای که دو متحرک در خلاف جهت هم حرکت می‌کنند، فاصلهٔ بین آن‌ها چند متر و چگونه تغییر می‌کند؟



۱) ۴۵، کاهش می‌یابد.

۲) ۴۵، افزایش می‌یابد.

۳) ۲۷، کاهش می‌یابد.

۴) ۲۷، افزایش می‌یابد.

۵۲- در شرایط خلأ، گلوله‌ای از ارتفاع H نسبت به سطح زمین رها می‌شود. اگر تندی متوسط گلوله در ابتدای مسیر، برابر $۱۰\ m/s$ باشد، تندی گلوله در لحظهٔ برخورد به زمین چند متر بر ثانیه است؟ $(g = ۱۰\ m/s^۲)$

۱) $۱۰\sqrt{۲}$ ۲) $۲۰\sqrt{۲}$ ۳) ۲۰ ۴) ۴۰

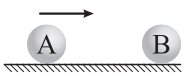
محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۳- در شرایط خلأ، از یک بلندی، ابتدا گلولهٔ A و پس از مدتی گلولهٔ B رها می‌شوند. اگر از لحظهٔ رهاشدن گلولهٔ B تا ۲s پس از آن، فاصلهٔ بین دو گلوله ۵۰ m افزایش یابد، فاصلهٔ بین این دو گلوله در لحظهٔ رهاشدن گلولهٔ B، چند متر بوده است؟ $(g = ۱۰\ m/s^۲)$

۱) ۲۵ ۲) ۲۷/۵ ۳) ۳۱/۲۵ ۴) ۳۲/۲۵

۵۴- در شکل زیر، گوی A به جرم ۴۰۰ g که روی سطح افقی بدون اصطکاکی در حال حرکت است، با تندی ۱۲ m/s به گوی ساکن B برخورد کرده و با تندی ۴ m/s در همان راستا باز می‌گردد. اگر جرم گوی B برابر ۸۰۰ g باشد، تندی آن پس از برخورد، به چند متر بر ثانیه می‌رسد؟

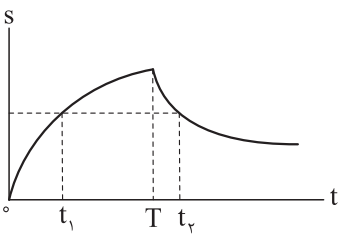


۱) ۸ ۲) ۴ ۳) ۱۶ ۴) ۲

۵۵- گلوله‌ای را در راستای قائم رو به بالا پرتاب می‌کنیم. اگر بزرگی شتاب گلوله هنگام بالارفتن ۴ برابر بزرگی شتاب آن، هنگام پایین‌آمدن باشد، اندازهٔ نیروی مقاومت هوای وارد بر گلوله در طی این حرکت، با فرض ثابت‌بودن، چند برابر وزن گلوله است؟

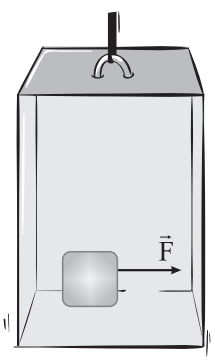
۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۲}{۵}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

۵۶- نمودار تندی ـ زمان چتربازی که در مبدأ زمان از یک بلندی رها شده و در لحظهٔ T چتر خود را باز کرده، به شکل زیر است. اگر اندازهٔ نیروی مقاومت هوای وارد بر چترباز در دو لحظهٔ $t_۱$ و $t_۲$، به ترتیب برابر $f_۱$ و $f_۲$ باشد، کدام مقایسه درست است؟ (وزن چترباز به همراه تجهیزات او برابر W است.)



۱) $f_۱ < W < f_۲$ ۲) $f_۱ = f_۲ < W$
۳) $W < f_۱ = f_۲$ ۴) $f_۲ < W < f_۱$

۵۷- در شکل زیر، نیروی افقی $\vec{F}$ به جسمی که درون آسانسور قرار دارد، وارد می‌شود. آسانسور در حالت اول با شتاب رو به پایین به بزرگی $۱\ m/s^۲$ و در حالت دوم با شتاب رو به بالا به بزرگی $۲\ m/s^۲$ حرکت می‌کند. حداقل مقدار F برای به حرکت درآمدن جسم در کف آسانسور، در حالت اول چند برابر حالت دوم است؟ ($g = ۱۰\ N/kg$ و $\mu_s \neq ۰$)



۱) $\frac{۱۱}{۸}$
۲) $\frac{۱۱}{۱۲}$
۳) $\frac{۹}{۸}$
۴) $\frac{۳}{۴}$

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

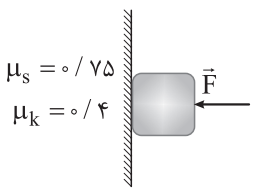
۵۸- یک انتهای فنر سبکی به طول $۳۰\ cm$ و ثابت $۵۱۰\ N/m$ به سقف آسانسوری بسته شده و از انتهای دیگر آن جسمی به جرم $۱۲۰۰\ g$ آویزان است. در حالتی که شتاب آسانسور، رو به پایین و اندازهٔ آن برابر $۱/۵\ m/s^۲$ است، طول فنر به چند سانتی‌متر می‌رسد؟ $(g = ۱۰\ m/s^۲)$

۱) ۲۶ ۲) ۲۸ ۳) ۳۲ ۴) ۳۴

۵۹- دو جسم مکعب‌شکل A و B با تندی‌های اولیهٔ $v_A = v$ و $v_B = ۲v$ مماس بر یک سطح افقی پرتاب شده و به ترتیب پس از طی مسافت‌های ℓ_A و ℓ_B متوقف می‌شوند. اگر جرم جسم B، ۳ برابر جرم جسم A و ضریب اصطکاک جنبشی جسم A، $\frac{۳}{۲}$ برابر ضریب اصطکاک جنبشی جسم B باشد، $\frac{\ell_A}{\ell_B}$ کدام است؟

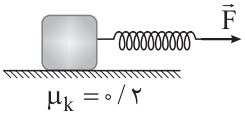
۱) ۶ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۳}{۸}$ ۴) $\frac{۸}{۳}$

۶۰- در شکل زیر، وزن جسم $۱۰\ N$ و اندازهٔ نیروی افقی $\vec{F}$ برابر $۲۴\ N$ است. اندازهٔ نیرویی که جسم به دیوار قائم وارد می‌کند، چند نیوتون است؟ (جسم در ابتدا ساکن است.)



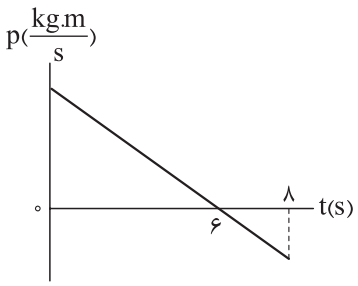
۱) ۲۶
۲) ۳۰
۳) ۲۴
۴) ۳۴

۶۱- جسمی به جرم $۵\ kg$ از انتهای فنر سبک و قائمی آویزان است و در حالت تعادل، تغییر طول فنر نسبت به حالت عادی آن $۱۲\ cm$ است. اگر مطابق شکل زیر، این جسم را توسط همین فنر، روی یک سطح افقی، با شتاب $۳\ m/s^۲$ به حرکت در آوریم، طول فنر نسبت به حالت عادی چند سانتی‌متر افزایش می‌یابد؟ $(g = ۱۰\ N/kg)$



۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

۶۲- نمودار تکانه ـ زمان جسمی به جرم $۵۰۰\ g$، به شکل زیر است. اگر در ۸ ثانیهٔ اول، انرژی جنبشی جسم $۳۲\ J$ تغییر کند، بزرگی نیروی خالص متوسط وارد بر جسم در این مدت چند نیوتون است؟

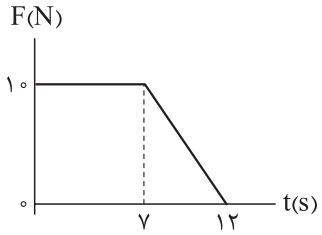


۱) ۱
۲) ۱/۵
۳) ۲
۴) ۴

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶۳- نمودار نیروی خالص وارد بر جسمی به جرم $6\ kg$ که در راستای محور x حرکت می‌کند، برحسب زمان، به شکل مقابل است. اگر تکانهٔ جسم در لحظهٔ $t = 10\ s$ برابر $(145\ \frac{kg.m}{s})\vec{i}$ باشد، سرعت اولیهٔ جسم چند متر بر ثانیه است؟

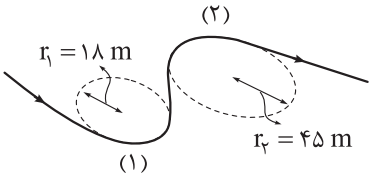


۱) $-9\vec{i}$
۲) $-8\vec{i}$
۳) $8\vec{i}$
۴) $9\vec{i}$

۶۴- وزن ماهواره‌ای به جرم $75\ kg$ در ارتفاع چندکیلومتری از سطح زمین برابر $480\ N$ است؟ ($g = 10\ N/kg$ و شعاع کرهٔ زمین $6400\ km$ است.)

۱) ۸۰۰
۲) ۱۶۰۰
۳) ۲۴۰۰
۴) ۳۲۰۰

۶۵- مسیر حرکت یک سورتمه در سطحی افقی به شکل مقابل و تندی سورتمه در تمام مسیر $30\ m/s$ است. اگر اندازهٔ شتاب مرکزگرای سورتمه در پیچ‌های (۱) و (۲) به ترتیب a_1 و a_2 باشد، $a_2 - a_1$ برحسب متر بر مربع ثانیه کدام است؟ (r_1 و r_2 به‌ترتیب شعاع پیچ (۱) و پیچ (۲) هستند.)



۱) ۲۷
۲) -27
۳) ۳۰
۴) -30

۶۶- دو متحرک A و B روی محیط دایره‌ای با تندی ثابت حرکت می‌کنند. اگر جرم جسم A، ۲ برابر جرم جسم B و اندازهٔ نیروی مرکزگرای وارد بر جسم A، نصف اندازهٔ نیروی مرکزگرای وارد بر جسم B باشد، به ترتیب دورهٔ تناوب جسم A چند برابر دورهٔ تناوب جسم B و انرژی جنبشی جسم A چند برابر انرژی جنبشی جسم B است؟

۱) $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{2}$
۲) $\frac{1}{2}$ و ۱
۳) ۲ و ۱
۴) ۲ و $\frac{1}{2}$

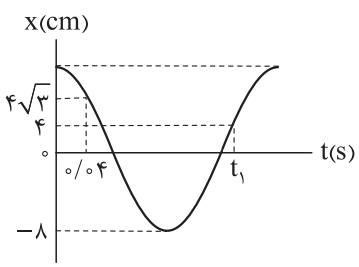
۶۷- فاصلهٔ ماهوارهٔ A از سطح زمین به اندازهٔ نصف شعاع زمین و فاصلهٔ ماهوارهٔ B از سطح زمین ۵ برابر شعاع زمین است. دورهٔ گردش ماهوارهٔ A چند برابر دورهٔ گردش ماهوارهٔ B است؟

۱) $\frac{1}{8}$
۲) ۸
۳) $\frac{1}{4}$
۴) ۴

۶۸- اگر جرم نوسانگر یک سامانهٔ جرم ـ فنر، ۳۶ درصد کاهش یابد، بسامد نوسان‌های آن چند درصد و چگونه تغییر می‌کند؟

۱) ۲۰، کاهش می‌یابد.
۲) ۲۰، افزایش می‌یابد.
۳) ۲۵، کاهش می‌یابد.
۴) ۲۵، افزایش می‌یابد.

۶۹- نمودار مکان ـ زمان نوسانگر هماهنگ ساده‌ای که در راستای محور x نوسان می‌کند، به شکل زیر است. تندی متوسط این نوسانگر در بازهٔ زمانی صفر تا t_1 چند سانتی‌متر بر ثانیه است؟

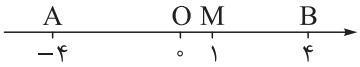


۱) ۱۰
۲) ۵۰
۳) ۷۰
۴) ۸۵

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷۰- در شکل زیر، نوسانگری به جرم ۱۰۰ g روی پاره‌خط AB حرکت هماهنگ ساده انجام می‌دهد. اگر نوسانگر در هر دقیقه ۳۰۰ مرتبه طول پاره‌خط AB را طی کند، نیروی خالص وارد بر آن در نقطهٔ M برحسب نیوتون کدام است؟ ($\pi^2 = 10$)

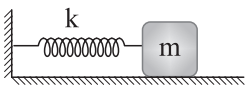


۱) $0/25\,\vec{i}$
۲) $-0/25\,\vec{i}$
۳) $\vec{i}$
۴) $-\vec{i}$

۷۱- معادلهٔ مکان ـ زمان نوسانگر هماهنگ ساده‌ای در SI به صورت $x = 0/1\cos(10\pi t)$ است. در لحظهٔ t_1 نوسانگر به صورت کندشونده از مکان $x_1 = 2\ cm$ عبور می‌کند. چند ثانیه بعد از لحظهٔ t_1 شتاب نوسانگر برای اولین بار برابر $(20\ m/s^2)\vec{i}$ می‌شود؟ ($\pi^2 = 10$)

۱) ۰/۱
۲) ۰/۲
۳) ۰/۰۵
۴) ۰/۴

۷۲- در شکل زیر، بیشینه و کمینهٔ طول فنر در حین نوسانِ جسم متصل به آن روی سطح افقی بدون اصطکاک، به ترتیب ۲۴ cm و ۳۲ cm است. اگر در لحظه‌ای که طول فنر به ۲۸ cm می‌رسد، انرژی جنبشی جسم ۲۰۰ mJ باشد، ثابت فنر چند نیوتون بر متر است؟

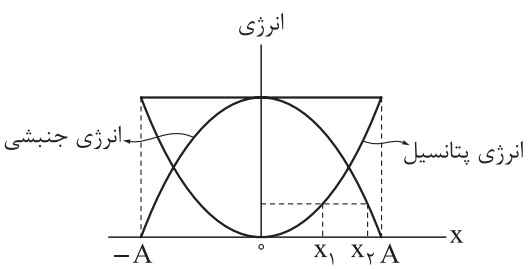


۱) ۵۰۰
۲) ۲۵۰
۳) ۵۰
۴) ۲۵

۷۳- انرژی مکانیکی نوسانگر هماهنگ ساده‌ای ۰/۱ J و اندازهٔ بیشینهٔ نیروی خالص وارد بر آن ۵ N است. مسافتی که نوسانگر در هر دورهٔ تناوب طی می‌کند، چند سانتی‌متر است؟

۱) ۴
۲) ۸
۳) ۱۶
۴) ۳۲

۷۴- نمودار انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل نوسانگر هماهنگ ساده‌ای برحسب مکان آن به شکل مقابل است. اگر تندی نوسانگر در مکان‌های x_1 و x_2 به ترتیب $1/2\ m/s$ و $0/5\ m/s$ باشد، تندی نوسانگر در مبدأ مکان چند متر بر ثانیه است؟



۱) ۱/۳
۲) ۱/۵
۳) ۱/۷
۴) ۱/۹

۷۵- اختلاف طول دو آونگ سادهٔ A و B برابر ۴۵ cm است. اگر در مدتی که آونگ A ، ۵ نوسان انجام می‌دهد، تعداد نوسان‌های آونگ B برابر ۴ باشد، طول آونگ A برابر چند سانتی‌متر است؟

۱) ۸۰
۲) ۱۸۰
۳) ۱۲۵
۴) ۲۲۵

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷۶- کدام موارد زیر، نادرست است؟ $(H=1, C=12, N=14, O=16, Na=23, K=39: g.mol^{-1})$

الف) نقطهٔ ذوب صابون حاصل از واکنش روغن زیتون و سود سوزآور، پایین‌تر از $25^{\circ}C$ است.

ب) تفاوت جرم مولی روغن زیتون و چربی کوهان شتر، ۳ برابر تفاوت جرم مولی اوره و اتیلن گلیکول است.

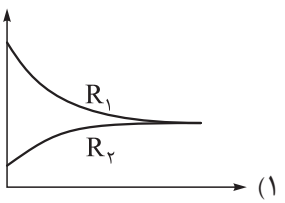
پ) تفاوت شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی در یک پاک‌کنندهٔ صابونی و یک پاک‌کنندهٔ غیرصابونی، برابر ۵ است.

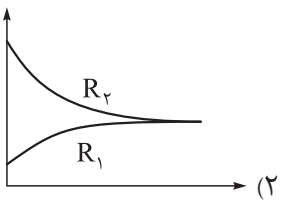
ت) حالت فیزیکی صابونی با زنجیر هیدروکربنی سیرشده و جرم مولی ۲۸۷ گرم بر مول، به یقین به صورت مایع است.

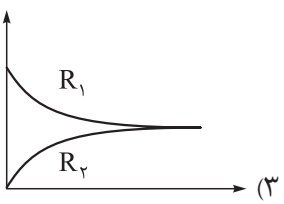
۱) الف ـ پ ۲) الف ـ ت ۳) ب ـ ت ۴) ب ـ پ

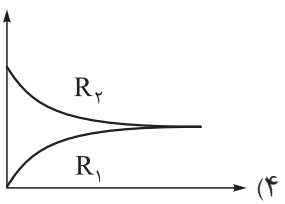
۷۷- ۲ مول گاز N_2O_4 و ۱ مول گاز NO_2 را در ظرفی به حجم ۲ لیتر وارد می‌کنیم تا مطابق واکنش زیر به تعادل برسند. اگر فشار گازهای موجود در ظرف واکنش پس از برقراری تعادل، نسبت به حالت اولیه، ۱/۵ برابر شده باشد، کدام نمودار تغییرات سرعت واکنش‌های رفت (R_1) و برگشت (R_2) را به درستی نشان می‌دهد؟

$$N_2O_4(g) \underset{R_2}{\overset{R_1}{\rightleftharpoons}} 2NO_2(g)$$

۱)


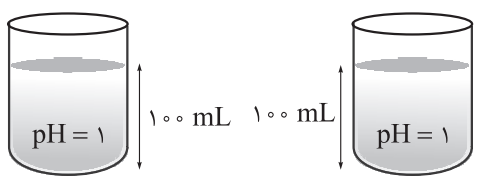
۲)


۳)


۴)


۷۸- چند مورد از مقایسه‌های زیر در ارتباط با محلول‌های A و B، درست است؟ $(H=1, C=12, O=16: g.mol^{-1})$

- سرعت واکنش با فلز منیزیم: $A = B$
- حجم گاز هیدروژن تولیدشده در واکنش با مقدار کافی فلز منیزیم: $A < B$
- مقدار سدیم هیدروکسید مورد نیاز برای خنثی کردن محلول: $A < B$
- جرم آنیون موجود در محلول: $A < B$



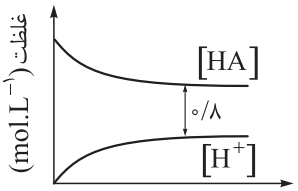
HCl (محلول A) CH_3COOH (محلول B)

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷۹- با توجه به نمودار زیر که نشان‌دهندهٔ تغییرات غلظت برخی گونه‌ها در واکنش یونش ۲ مول از اسید ضعیف HA در محلولی به حجم ۵۰۰ mL است، ثابت یونش این اسید کدام است؟



۱) $\frac{۱۶}{۱۵}$

۲) $\frac{۴}{۱۵}$

۳) ۰/۳

۴) ۰/۶

۸۰- چند مورد از مطالب زیر، نادرست است؟

- **در کربوکسیلیک اسیدها با افزایش تعداد اتم‌های کربن، قدرت اسیدی افزایش می‌یابد.**
- **سدیم هیدروکسید یک باز بسیار قوی است و به طور کامل در آب یونش می‌یابد.**
- **در محلول اسیدهای ضعیف، میان اندک یون‌های حاصل از یونش و مولکول‌های یونیده‌نشده، تعادل برقرار می‌شود.**
- **در محلول‌های آبی، هر چه‌قدر غلظت یون هیدرونیوم افزایش یابد، به همان اندازه از غلظت یون هیدروکسید کاسته می‌شود.**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۸۱- HX و HY دو اسید ضعیف هستند. اگر ۱۲ گرم از HX و ۸ گرم از HY جداگانه در ۳۰۰ میلی‌لیتر آب حل شوند، pH محلول HX، ۰/۵ واحد بیشتر از pH محلول HY خواهد شد. با توجه به آن نسبت $\frac{\alpha_{HY}}{\alpha_{HX}}$ کدام است؟ $(HY = ۵۰ , HX = ۱۵۰ : g.mol^{-1})$

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) ۳ ۳) ۱/۵ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۸۲- چند مورد از موارد زیر، دربارهٔ محلول‌های ۰/۲ مولار هیدروفلوئوریک اسید و ۰/۱ مولار نیترو اسید، در دمای ثابت درست است؟

- **دو محلول ممکن است pH یکسانی داشته باشند.**
- **دو محلول می‌توانند با مقدار یکسانی پتاسیم هیدروکسید به طور کامل واکنش دهند.**
- **با افزایش غلظت هر دو محلول، ثابت یونش هر دو اسید افزایش می‌یابد.**
- **با رقیق‌کردن هر دو محلول، درجهٔ یونش هر دو اسید کاهش می‌یابد.**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸۳- چند مورد از عبارت‌های زیر، همواره درست است؟

- در واکنش دو اسید با حجم و غلظت یکسان با فلز روی، میزان حجم گاز هیدروژن تولیدی برابر است.
- در واکنش دو اسید با حجم و pH یکسان با مقدار زیادی سدیم هیدروکسید، میزان آب تولیدشده برابر است.
- دو اسید با حجم و pH یکسان در واکنش با یک واکنش‌دهندهٔ مشخص، سرعت یکسانی داشته و زمان واکنش آن‌ها نیز برابر است.
- اگر pH دو اسید قوی یکسان باشد، غلظت مولی هر دو اسید برابر است.
- سرعت واکنش محلول اسید قوی با فلز آهن، بیشتر از سرعت واکنش محلول اسید ضعیف با همان فلز است.

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۸۴- اگر مجموع pH محلول ۰/۲ مولار اسید HA و محلول ۰/۱ مولار باز BOH، برابر ۱۲/۴ باشد، نسبت درجهٔ یونش اسید HA به درجهٔ یونش باز BOH کدام است؟

۱) ۰/۰۵ ۲) ۰/۱ ۳) ۲۰ ۴) ۱۰

۸۵- ۱/۳۶ گرم گاز NH_3 را وارد ۱۰۰ میلی‌لیتر محلول ۰/۱ مولار آن می‌کنیم. اگر حجم و دمای محلول تغییری نکند، pH محلول حاصل به تقریب ..... . $(K_b = 2/56\times10^{-5}, H=1, N=14 : g.mol^{-1})$

۱) یک واحد افزایش می‌یابد. ۲) ۰/۵ واحد افزایش می‌یابد.
۳) یک واحد کاهش می‌یابد. ۴) ۰/۵ واحد کاهش می‌یابد.

۸۶- جرم‌های برابری از سدیم اکسید ناخالص و دی‌نیتروژن پنتااکسید ناخالص را در آب حل کرده و حجم محلول را با افزودن آب به ۵ لیتر می‌رسانیم. اگر pH محلول حاصل برابر ۷ باشد، نسبت درصد خلوص سدیم اکسید به درصد خلوص دی‌نیتروژن پنتااکسید، به تقریب کدام است؟ (ناخالصی‌ها باعث تغییر غلظت آب نمی‌شوند.) $(N=14, O=16, Na=23 : g.mol^{-1})$

۱) ۱/۱۴ ۲) ۳/۴ ۳) ۰/۵۷ ۴) ۱/۷

۸۷- ۲۰۰ میلی‌لیتر محلول باریم هیدروکسید که غلظت مولی یون هیدروکسید در آن، ۰/۳ مولار است، با چند میلی‌لیتر محلول آهن (III) کلرید که مجموع غلظت مولی یون‌ها در آن، ۰/۸ مولار است، مطابق معادلهٔ موازنه‌نشدهٔ زیر به طور کامل واکنش داده و در پایان، چند گرم رسوب آهن (III) هیدروکسید تشکیل می‌شود؟ $(H=1, O=16, Fe=56 : g.mol^{-1})$

$$FeCl_3(aq) + Ba(OH)_2(aq) \rightarrow Fe(OH)_3(s) + BaCl_2(aq)$$

۱) ۲/۱۴ ـ ۱۰۰ ۲) ۲/۱۴ ـ ۵۰ ۳) ۴/۲۸ ـ ۱۰۰ ۴) ۴/۲۸ ـ ۵۰

۸۸- برای خنثی‌کردن ۱۰۰ میلی‌لیتر محلول ۰/۰۲ مولار هیدروفلوئوریک اسید با درجهٔ یونش ۰/۲، چند گرم سدیم هیدروکسید با درصد خلوص ۵۰٪ نیاز است؟ $(H=1, O=16, Na=23 : g.mol^{-1})$

۱) ۰/۳۲ ۲) ۰/۱۶ ۳) ۰/۰۱۶ ۴) ۰/۰۳۲

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸۹- کدام مورد، نادرست است؟

۱) باتری، مولدی است که در آن واکنش شیمیایی با سفر الکترون رخ می‌دهد تا بخشی از انرژی شیمیایی مواد به انرژی الکتریکی تبدیل شود.

۲) در واکنش‌های اکسایش ـ کاهش، ماده‌ای که با گرفتن الکترون سبب اکسایش گونهٔ دیگر می‌شود را اکسنده می‌نامند.

۳) در گذشته برای عکاسی از سوختن $Mg(s)$ به عنوان منبع نور استفاده می‌شد که در این واکنش، منیزیم با نور خیره‌کننده‌ای به $MgO(s)$ تبدیل می‌شود.

۴) در واکنش تیغهٔ آهن با محلول مس (II) سولفات، مخلوط واکنش گرم‌تر می‌شود، زیرا سامانهٔ واکنش بخشی از انرژی را به شکل گرما از محیط می‌گیرد.

۹۰- کدام گزینه، عبارت زیر را به درستی تکمیل می‌کند؟

«معادلهٔ نیم‌واکنش ..... با معادلهٔ نیم‌واکنش ..... یکسان است.»

۱) کاتدی در سلول برقکافت آب ـ کاتدی در فرایند خوردگی آهن در محیط خنثی

۲) آندی در سلول نور ـ الکتروشیمیایی سیلیسیم ـ آندی در سلول برقکافت آب

۳) کاهش نیم‌سلول SHE در کاتد سلول گالوانی ـ آندی در سلول سوختی هیدروژن

۴) کاتدی در سلول سوختی هیدروژن ـ کاتدی در فرایند خوردگی آهن در محیط اسیدی

۹۱- کدام موارد زیر، نادرست است؟

الف) در تمام سلول‌های گالوانی با گذشت زمان، جرم تیغهٔ آندی کاهش و جرم تیغهٔ کاتدی افزایش می‌یابد.

ب) emf واکنش‌های اکسایش ـ کاهش، مستقل از ضرایب استوکیومتری مواد شرکت‌کننده در آن‌ها است.

پ) در همهٔ باتری‌ها با انجام نیم‌واکنش‌های آندی و کاتدی، جریان الکتریکی در مدار بیرونی برقرار می‌شود.

ت) با توجه به چگالی و E° کم فلز لیتیم، در ساخت همهٔ باتری‌های دگمه‌ای از آن استفاده می‌شود.

۱) الف ـ پ ۲) الف ـ ت ۳) ب ـ پ ۴) ب ـ ت

۹۲- با توجه به پتانسیل‌های کاهشی استاندارد زیر، کدام‌گونه اکسندهٔ قوی‌تری است؟

$E^\circ(Cl_2 / 2Cl^-) = +1/36V$ $E^\circ(MnO_4^- / Mn^{2+}) = +1/51V$

$E^\circ(O_2 / 2H_2O) = +1/23V$ $E^\circ(Cr_2O_7^{2-} / 2Cr^{3+}) = +1/33V$

۱) Cl_2 ۲) $Cr_2O_7^{2-}$

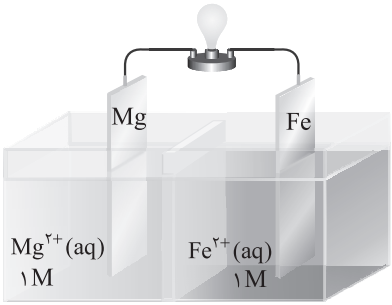
۳) H_2O ۴) Mn^{2+}

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹۳- با توجه به شکل و E° نیم‌واکنش‌ها، چند مورد از موارد زیر، نادرست است؟

$$E^\circ(Mg^{2+}(aq)/Mg(s)) = -2/37\,V \quad , \quad E^\circ(Fe^{2+}(aq)/Fe(s)) = -0/44\,V$$



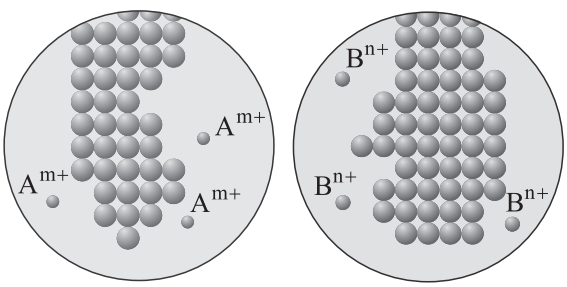
- در این سلول، الکترون‌ها در مدار بیرونی، از الکترود منیزیم به سمت الکترود آهن جریان می‌یابند.
- یون‌های منیزیم از طریق دیوارهٔ متخلخل به سمت نیم‌سلول آهن حرکت می‌کنند.
- با جایگزین کردن آند این سلول با فلز روی، جهت حرکت الکترون‌ها در مدار خارجی تغییر می‌کند.
- با جایگزین کردن کاتد این سلول با یک فلز کاهنده‌تر، emf سلول کاهش می‌یابد.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۹۴- اگر در سلول گالوانی استاندارد $Mg-SHE$، pH محلول کاتدی به ۰/۴۵ برسد، کاهش جرم تیغهٔ آندی برابر چند گرم است؟ (حجم محلول‌های آندی و کاتدی برابر با ۱ لیتر است؛ $Mg = 24\,g.mol^{-1}$)

۱) ۱۶/۸ ۲) ۱۵/۶
۳) ۸/۴ ۴) ۷/۸

۹۵- با توجه به شکل‌های مقابل که نشان‌دهندهٔ تیغه‌های فلزی یک سلول گالوانی در محلول‌های آندی و کاتدی است، چند مورد از مطالب زیر درست است؟



- اگر آلیاژی از فلزهای A و B در محلول هیدروکلریک اسید با $pH = 1$ به طور کامل حل شود، قدرت کاهندگی فلزهای A و B، بیشتر از Cu است.
- اگر تیغه‌های A و B به ترتیب مربوط به فلزهای روی و مس باشند، مجموع شمار اتم‌های تیغه‌های فلزی با گذشت زمان ثابت باقی می‌ماند.
- با قراردادن تیغه‌ای از جنس فلز A درون محلولی از نمک فلز B، جرم تیغه افزایش می‌یابد.
- اگر با قراردادن تیغه‌ای از جنس فلز B درون محلول ۱ مولار آهن (II) سولفات، دمای محلول تغییری نکند، مقایسهٔ قدرت کاهندگی این سه فلز به صورت $B < Fe < A$ می‌باشد.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹۶- ولت‌سنجِ سلول گالوانی $Fe-Cu$ که واکنش زیر در آن انجام می‌شود، اختلاف پتانسیل میان دو نیم‌سلول را برابر ۰/۶۵ ولت نشان می‌دهد. اگر در این سلول گالوانی، ۴/۲ گرم از جرم تیغهٔ آند کاسته شود، چند گرم بر جرم تیغهٔ کاتد افزوده خواهد شد؟ (۷۵ درصد رسوب تولیدشده روی تیغه قرار می‌گیرد؛ $Cu=64, Fe=56: g.mol^{-1}$)

$$Fe(s)+Cu^{2+}(aq)\rightarrow Cu(s)+Fe^{2+}(aq)$$

$$E^{\circ}(Cu^{2+}/Cu)=+0/34\,V \quad , \quad E^{\circ}(Fe^{2+}/Fe)=-0/44\,V$$

۱) ۲ ۲) ۲/۵ ۳) ۳ ۴) ۴

۹۷- اطلاعات چند ردیف از جدول زیر، دربارهٔ مقایسهٔ سلول‌های گالوانی و الکترولیتی، کاملًا درست است؟

ردیف	مؤلفه	سلول گالوانی	سلول الکترولیتی
۱	علامت الکترود آند	منفی	مثبت
۲	علامت الکترود کاتد	مثبت	منفی
۳	علامت emf	مثبت	مثبت
۴	انجام‌شدن واکنش	غیرخودبه‌خودی	خودبه‌خودی
۵	جهت حرکت الکترون‌ها	از قطب منفی به مثبت	از قطب منفی به مثبت
۶	جهت حرکت یون‌ها	به سوی الکترود با بار همنام	به سوی الکترود با بار ناهمنام

۱) ۵
۲) ۴
۳) ۳
۴) ۲

۹۸- درستی یا نادرستی مطالب زیر، به ترتیب کدام است؟

- قدرت اکسندگی هالوژن‌ها، بیشتر از قدرت اکسندگی کاتیون فلزهای قلیایی هم‌دوره با آن‌ها است.
- اگر ترکیب HXO_3 در واکنش‌ها تنها به عنوان عامل اکسنده شرکت کند، عنصر X متعلق به گروه ۱۷ جدول دوره‌ای است.
- افزایش ولتاژ اعمال‌شده به سلول الکترولیتی برقکافت آب می‌تواند باعث افزایش سرعت برقکافت شود.
- الکترولیت مورد استفاده در سلول برقکافت آب باید رسانایی الکتریکی داشته باشد.
- یکی از کاربردهای برقکافت آب، تولید گاز هیدروژن است که به عنوان سوخت در سلول سوختی هیدروژن ـ اکسیژن کاربرد دارد.

۱) درست ـ نادرست ـ درست ـ درست ـ نادرست
۲) نادرست ـ درست ـ درست ـ نادرست ـ نادرست
۳) نادرست ـ درست ـ نادرست ـ درست ـ درست
۴) درست ـ نادرست ـ درست ـ درست ـ درست

۹۹- مجموع ضرایب استوکیومتری فراورده‌ها در معادلهٔ واکنش زیر پس از موازنه، کدام است و بر اثر مبادلهٔ ۱/۲ مول الکترون در این واکنش، چند مول سرب (IV) اکسید تولید می‌شود؟

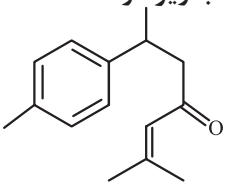
$$Pb_3O_4(s)+HNO_3(aq)\rightarrow Pb(NO_3)_2(aq)+PbO_2(s)+H_2O(l)$$

۱) ۰/۷۵، ۵ ۲) ۰/۹، ۵ ۳) ۰/۷۵، ۶ ۴) ۰/۹، ۶

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۰۰- با توجه به ساختار زیر که ترکیب آلی موجود در زردچوبه را نشان می‌دهد، چند مورد از مطالب زیر درست است؟



- عدد اکسایش همهٔ اتم‌های کربنی که به هیچ اتم هیدروژنی متصل نیستند، برابر صفر است.
- ۴۰ درصد از اتم‌های کربن، دارای عدد اکسایش ۱− هستند.
- اتم‌های کربن دارای عدد اکسایش ۳−، حداکثر با یک اتم کربن پیوند دارند.
- حداقل و حداکثر عدد اکسایش اتم‌های کربن شرکت‌کننده در پیوند دوگانه، به ترتیب برابر صفر و ۱− است.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۰۱- در واکنش موازنه‌نشدهٔ زیر، گونهٔ ..... نقش کاهنده داشته و با مصرف ۱۴/۲۸ گرم MnO_4^-، ..... گرم Fe^{3+} تولید می‌شود.

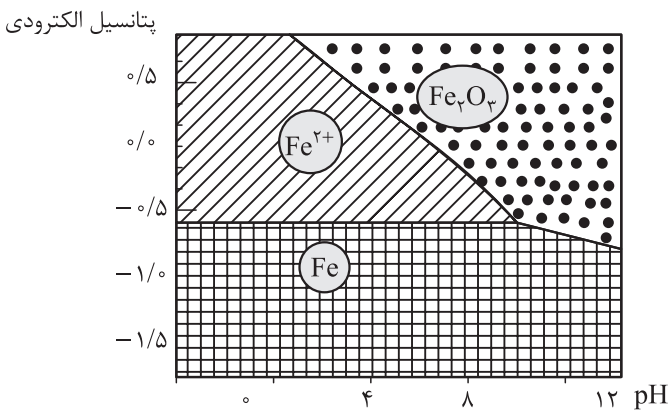
$(O=16, Mn=55, Fe=56 : g.mol^{-1})$

$$MnO_4^-(aq) + H^+(aq) + Fe^{2+}(aq) \rightarrow Mn^{2+}(aq) + H_2O(l) + Fe^{3+}(aq)$$

۱) ۲۶/۸۸ ـ $Fe^{2+}(aq)$ ۲) ۳۳/۶ ـ $Fe^{2+}(aq)$

۳) ۲۶/۸۸ ـ $MnO_4^-(aq)$ ۴) ۳۳/۶ ـ $MnO_4^-(aq)$

۱۰۲- نمودار پوربه (شکل زیر)، رابطهٔ بین پتانسیل الکترودی (E°)، pH محلول و گونه‌های شیمیایی پایدار آهن را نشان می‌دهد. با استفاده از این نمودار می‌توان رفتار خوردگی آهن را در شرایط مختلف پیش‌بینی کرد. تفسیر نواحی مختلف این نمودار به صورت زیر است:



در این ناحیه، آهن تمایل به اکسیدشدن و تشکیل یون‌های آهن دارد.

ناحیه‌ای که در آن آهن به صورت فلز پایدار باقی می‌ماند و خوردگی رخ نمی‌دهد.

در این ناحیه، اکسیدهای آهن پایدار هستند و ممکن است لایه‌های محافظتی روی سطح آهن تشکیل شوند.

با توجه به اطلاعات کتاب درسی و شکل مقابل، کدام موارد در رابطه با خوردگی آهن درست است؟

الف) یک لولهٔ فولادی در محیطی با $pH = 3$ و پتانسیل الکترودی ۰/۵ ولت، در معرض خوردگی شدید قرار دارد.

ب) با انتقال یک قطعهٔ فولادی از محیطی با $pH = 7$ به محیطی با $pH = 2$، سرعت خوردگی کاهش می‌یابد.

پ) در محیط‌های بازی و پتانسیل‌های الکترودی بالا، تشکیل اکسید آهن، سرعت خوردگی سازه‌های آهنی را کاهش می‌دهد.

ت) بر اثر قرارگیری قطعه‌های فولادی در معرض رطوبت محیط در دمای $25^\circ C$ و فشار ۱ atm، خوردگی قطعه‌ها انجام نمی‌پذیرد.

ث) برای حفاظت از یک لولهٔ فولادی در محیطی اسیدی، می‌توان از اعمال یک جریان الکتریکی برای کاهش پتانسیل لوله یا گالوانیزه کردن قطعه استفاده کرد.

۱) الف ـ ب ـ پ ۲) الف ـ ت ـ ث ۳) ب ـ ت ۴) الف ـ پ ـ ث

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۰۳- دو قاشق فلزی یکسان را در سلول‌های آبکاری (۱) و (۲) به ترتیب با فلزهای مس و نقره می‌پوشانیم. اگر شمار مول الکترون‌های مصرفی در سلول آبکاری (۱)، ۴ برابر سلول دیگر باشد، نسبت تفاوت جرم دو قاشق پس از انجام آبکاری برحسب گرم به شمار مول الکترون‌های مصرفی در سلول آبکاری (۲) برابر کدام است؟ $(Cu = ۶۴, Ag = ۱۰۸ : g.mol^{-۱})$

۱) ۱۶ ۲) ۱۸ ۳) ۲۰ ۴) ۲۲

۱۰۴- سه گوی فولادی مشابه را با فلزهای نقره، مس و طلا آبکاری می‌کنیم. پاسخ درست دو پرسش زیر، به ترتیب در کدام گزینه آمده است؟ $(Cu = ۶۴ , Ag = ۱۰۸ , Au = ۱۹۷ : g.mol^{-۱})$

$Ag^{+}(aq) + e^{-} \rightarrow Ag(s)$

$Cu^{۲+}(aq) + ۲e^{-} \rightarrow Cu(s)$

$Au^{۳+}(aq) + ۳e^{-} \rightarrow Au(s)$

الف) اگر شمار الکترون‌های مبادله‌شده در فرایندهای آبکاری یکسان باشد، در آبکاری با کدام فلز، جرم گوی به میزان بیشتری افزایش می‌یابد؟

ب) اگر جرم گوی‌ها به یک‌اندازه افزایش یافته باشد، شمار الکترون‌های مبادله‌شده در آبکاری با کدام فلز بیشتر است؟

۱) Cu ـ Ag ۲) Ag ـ Au ۳) Au ـ Ag ۴) Cu ـ Au

۱۰۵- در سلول گالوانی «آهن ـ مس» جرم اولیهٔ تیغه‌های آندی و کاتدی برابر است. اگر پس از گذشت مدتی، تفاوت جرم تیغه‌های آندی و کاتدی به ۱۴۴۰ گرم برسد، شمار الکترون‌های مبادله‌شده برابر چند است و در صورت مصرف این تعداد الکترون در فرایند هال، چند میلی‌لیتر آلومینیم مذاب تولید می‌شود؟ (چگالی فلز آلومینیم را $۲/۷ g.cm^{-۳}$ در نظر بگیرید؛ $(Cu = ۶۴ , Fe = ۵۶ , Al = ۲۷ : g.mol^{-۱})$

۱) $۸۰ ـ ۱/۴۴۴۸ \times ۱۰^{۲۵}$ ۲) $۸۰ ـ ۲/۷۰۹ \times ۱۰^{۲۵}$

۳) $۱۵۰ ـ ۱/۴۴۴۸ \times ۱۰^{۲۵}$ ۴) $۱۵۰ ـ ۲/۷۰۹ \times ۱۰^{۲۵}$

پاسخ‌نامهٔ تشریحی آزمون را ساعت ۱۶ از صفحهٔ شخصی خودتان در سایت آزمون خیلی سبز دریافت کنید.
azmoon.kheilisabz.com

اساتید، مشاوران و دانش‌آموزان گرامی؛
نظرات، پیشنهادات، انتقادات و بازخوردهای خود نسبت به سؤالات این آزمون را می‌توانید از طریق آیدی Kheilisabz_edit@ در همهٔ پیام‌رسان‌ها با ما به اشتراک بگذارید.

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ‌نامه آزمون آزمایشی خیلی سبز

رشته ریاضی

پایه دوازدهم | **مرحله دهم**

سال تحصیلی ۰۴-۱۴۰۳ | **تاریخ برگزاری: ۲۸/دی/۱۴۰۳**

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا
حسابان	حسین شفیع‌زاده ـ مهرداد کیوان
هندسه	محمدطاهر شعاعی ـ حمید گلزاری ـ محمد گودرزی ـ صبا مهدوی ـ حسین هاشمی طاهری
ریاضیات گسسته	علیرضا شریف‌خطیبی ـ عطا صادقی ـ حمید گلزاری ـ سروش موئینی
فیزیک	امین امینی ـ یاشار انگوتی ـ علیرضا جباری ـ مجید ساکی ـ رضا سبزمیدانی نوید شاهی ـ علیرضا عبداللهی ـ حامد نبی منصور ـ محمدرضا یاری
شیمی	یاسر راش ـ عباس سرمایه ـ حسین شرانلو ـ اکبر فروزان‌فر ـ متین قنبری

نام درس	مسئول درس	گزینشگر	مولف پاسخ‌نامه	کارشناسان علمی	ویراستاران به ترتیب حروف الفبا
حسابان	حسین شفیع‌زاده مهرداد کیوان	حسین شفیع‌زاده مهرداد کیوان	شمیم پهلوان‌شریف	محمدسجاد نقیه عادل حسینی سجاد داوطلب	محمدرضا راسخ منصور زرکش اصفهانی
هندسه	حمید گلزاری	حمید گلزاری	الما احسانیان	امیرحسین ابومحبوب	زهرا جالینوسی فرزانه خاکپاش ماهان فنی‌فر
ریاضیات گسسته	حمید گلزاری	حمید گلزاری	مریم نظری	امیرحسین ابومحبوب سعید قندچی مریم نظری	فرزانه خاکپاش علیرضا کاظمی‌بقا ابوالفضل ناصری
فیزیک	رضا سبزمیدانی	نوید شاهی	علیرضا جباری محمدجواد سورچی علیرضا عبداللهی	علیرضا جباری	مریم حسن‌لو مهدی خوشنویس مدیا عیدی احسان محمدی امیر محمودی انزابی
شیمی	عباس سرمایه	عباس سرمایه	سروش عبادی یاسر راش	محمد مرادی سروش عبادی	یاسر راش هومن زندی حسین شکوه آرمین عظیمی متین قنبری

سرپرست محتوایی: فاطمه آقاجانپور

Azmoon.kheilisabz.com
SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

آزمون آزمایشی خیلی سبز

سرپرست تولید	الناز علی‌یاری‌زاده
ویراستاران فنی	راضیه سادات خلدی‌نسب ـ زهرا صفری محیا غنی‌فرد ـ زهرا فرهادی‌مهر مریم مسلمی‌زاده ـ ساعده نمازی
رسام	مونا آندستا ندا فخاری سارا گنجی آزادپور
صفحه‌آرایی	سحر ازلی تاش ـ مریم حسین‌زاده سارا حاتمی ـ سپیده سخایی مائده صبری ـ نیلوفر فرخجسته مهدیه گل‌پور ـ لیلا نعمت‌پور

Azmoon.kheilisabz.com

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱ حاصل $\lim\limits_{x\to(-1)^+}\frac{x^۲-[-x]}{۱+x}$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) $+\infty$ ۲) صفر ۳) -۱ ۴) $-\infty$

Hint از شر براکت خلاص شو و بعد یه حد ساده رو حل کن.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** ابتدا باید به دست آوریم که در یک همسایگی راست $x=-۱$ عبارت $[-x]$ برابر چه عددی است:

$$x\to(-۱)^+; x>-۱ \Rightarrow -x<۱ \Rightarrow [-x]=۰$$

گام دوم: پس داریم:

$$\lim_{x\to(-۱)^+}\frac{x^۲-[-x]}{۱+x}=\lim_{x\to(-۱)^+}\frac{x^۲}{۱+x}=\frac{\text{عدد مثبت}}{۰^+}=+\infty$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲ چندجمله‌ای $f(x)=x^{۱۳}-۱۶x^{۹}+x^{۳}+ax+b$ بر $x^{۲}-۳x+۲$ بخش‌پذیر است. باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)+f(۲x+۱)$ بر $x+۱$ کدام است؟

$f(۱)=f(۲)=۰$

۱) ۷۲ ۲) ۱۴۴ ۳) ۳۶ ۴) ۱۰۸

Hint با جای‌گذاری $x=۱$ و $x=۲$ در $f(x)$ مقادیر مجهول a و b در ضابطهٔ تابع f رو به دست بیار و بعد برو سراغ خواستهٔ سؤال.

درس Box اگر چندجمله‌ای $f(x)$ را بر چندجمله‌ای $p(x)$ تقسیم کنیم و خارج قسمت و باقی‌ماندهٔ به‌دست‌آمده را $q(x)$ و $r(x)$ در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$\underbrace{f(x)}_{\text{مقسوم}} = \underbrace{p(x)}_{\text{مقسوم‌علیه}}\underbrace{q(x)}_{\text{خارج‌قسمت}}+\underbrace{r(x)}_{\text{باقی‌مانده}}$$

برای به دست آوردن باقی‌ماندهٔ $f(x)$ بر $p(x)=ax+b$ به جای x، مقدار $x=-\frac{b}{a}$ (ریشهٔ مقسوم‌علیه) را جای‌گذاری می‌کنیم تا $r=f(\frac{-b}{a})$ به دست آید و اگر باقی‌مانده صفر باشد، در واقع $r=۰$ است. اگر چندجمله‌ای $f(x)$ بر چندجمله‌ای $p(x)$ بخش‌پذیر باشد، بر همهٔ عامل‌های $p(x)$ بخش‌پذیر است. به عنوان مثال:

۱) اگر چندجمله‌ای $f(x)$ بر چندجمله‌ای $p(x)=x-a$ بخش‌پذیر باشد، در این صورت:

$$f(x)=(x-a)q(x)+r \Rightarrow f(a)=۰$$

۲) اگر چندجمله‌ای $f(x)$ بر $p(x)=(x-a)(x-b)$ بخش‌پذیر باشد، در این صورت:

$$f(x)=(x-a)(x-b)q(x)+r \Rightarrow \begin{cases} f(a)=۰ \\ f(b)=۰ \end{cases}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول (به دست آوردن مقادیر مجهول a و b):**

از آن‌جا که $f(x)$ (مقسوم) بر $x^{۲}-۳x+۲$ (مقسوم‌علیه) بخش‌پذیر است، پس بر همهٔ عامل‌های $x^{۲}-۳x+۲$ یعنی $(x-۲)$ و $(x-۱)$ بخش‌پذیر است و در واقع داریم:

$$f(۱)=۰$$
$$f(۲)=۰$$

پس:

$$f(۱)=۰ \Rightarrow ۱^{۱۳}-۱۶(۱)^{۹}+۱^{۳}+a(۱)+b=۰ \Rightarrow -۱۴+a+b=۰ \Rightarrow a+b=۱۴$$

$$f(۲)=۰ \Rightarrow ۲^{۱۳}-\underbrace{۱۶}_{۲^{۴}}\times(۲)^{۹}+۲^{۳}+۲a+b=۰ \Rightarrow ۲^{۱۳}-۲^{۱۳}+۸+۲a+b=۰ \Rightarrow ۲a+b=-۸$$

که با حل دستگاه معادلهٔ زیر می‌توانیم مقادیر a و b را به دست آوریم:

$$-\begin{cases} a+b=۱۴ \\ ۲a+b=-۸ \end{cases}$$

$$(a-۲a)+(b-b)=۱۴-(-۸) \Rightarrow -a=۲۲ \Rightarrow a=-۲۲$$

که با جای‌گذاری $a=-۲۲$ در $a+b=۱۴$ مقدار b به دست می‌آید.

$$a+b=۱۴ \xrightarrow{a=-۲۲} -۲۲+b=۱۴ \Rightarrow b=۳۶$$

بنابراین ضابطهٔ تابع f برابر است با:

$$f(x)=x^{۱۳}-۱۶x^{۹}+x^{۳}-۲۲x+۳۶$$

گام دوم (محاسبهٔ باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)+f(۲x+۱)$ بر $x+۱$):

برای به دست آوردن باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)+f(۲x+۱)$ بر $x+۱$، باید مقدار $f(x)+f(۲x+۱)$ به ازای $x=-۱$ را به دست آوریم:

$$f(-۱)+f(۲(-۱)+۱)=f(-۱)+f(-۱)=۲f(-۱)$$

$$\xrightarrow{f(-۱)=(-۱)^{۱۳}-۱۶(-۱)^{۹}+(-۱)^{۳}-۲۲(-۱)+۳۶=۷۲} \text{باقی‌مانده}=۲(۷۲)=۱۴۴$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳ نمودار تابع $f(x)=\frac{۲x-a}{x+۲}$ را دو واحد به راست انتقال می‌دهیم، سپس نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم، تا نمودار تابع g به دست می‌آید. نقطهٔ برخورد نمودار تابع $g^{-۱}of$ با محور yها چه عرضی دارد؟ $(a\neq -۴)$

$f(x-۲)\to f(-x-۲)$

$f(x)\to f(x-۲)$

$(g^{-۱}of)(۰)$

۱) -۱

۲) ۲

۳) -۲

۴) ۱

Hint با x لجبازی کن و انتقال افقی رو انجام بده. بعد برو سراغ قرینه‌کردن نسبت به محور y تابع g به دست میاد. حالا $g^{-۱}of$ رو بساز و ... .

درس Box

برای این‌که از تابع $y=f(x)$ به تابع $y=kf(cx+a)+d$ برسیم، اعمال تغییرات با ترتیب زیر انجام می‌شود:

تغییرات در راستای x عملیات وارونه
۱) با جمع و منها به چپ و راست می‌کنیم (a)
۲) با ضرب و تقسیم منبسط و منقبض می‌کنیم. (c)

جدول زیر را ببینید:

نحوهٔ اعمال تغییرات	نمودار جدید (با فرض $a>۰$)
نمودار تابع f را به اندازهٔ a واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم.	$f(x+a)$
نمودار تابع f را به اندازهٔ a واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم.	$f(x-a)$
انقباض طولی: نمودار تابع f را در راستای محور xها با ضریب $\frac{۱}{c}$ فشرده می‌کنیم.	$f(cx), c>۱$
انبساط طولی: نمودار تابع f را در راستای محور xها با ضریب $\frac{۱}{c}$ منبسط می‌کنیم.	$f(cx), ۰<c<۱$

تغییرات در راستای y عملیات مستقیم
۱) ابتدا ضرب و تقسیم را مستقیم اعمال می‌کنیم (k).
۲) سپس جمع و منها را اعمال می‌کنیم (d).

نحوهٔ اعمال تغییرات	نمودار جدید (با فرض $k,a>۰$)
انبساط عرضی: نمودار تابع f را در راستای محور yها با ضریب k منبسط می‌کنیم.	$kf(x), k>۱$
انقباض عرضی: نمودار تابع f را در راستای محور yها با ضریب k منقبض می‌کنیم.	$kf(x), ۰<k<۱$
نمودار تابع f را به اندازهٔ d واحد به سمت بالا منتقل می‌کنیم.	$f(x)+d$
نمودار تابع f را به اندازهٔ d واحد به سمت پایین منتقل می‌کنیم.	$f(x)-d$

و برای رسیدن به $f(-x)$ و $-f(x)$ و $-f(-x)$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$f(-x)$: نمودار تابع f را نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم.

$-f(x)$: نمودار تابع f را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم.

$-f(-x)$: نمودار تابع f را نسبت به مبدأ مختصات قرینه می‌کنیم.

نکته وارون تابع $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ به صورت $f^{-۱}(x)=\frac{-dx+b}{cx-a}$ است.

ترکیب توابع

فرض کنید دو تابع f و g را داشته باشیم؛ ترکیب این توابع به صورت مقابل تعریف می‌شود: $fog(x)=f(g(x))$

که در آن ابتدا x به عنوان ورودی وارد تابع g می‌شود. خروجی تابع g (یعنی $g(x)$) به عنوان ورودی وارد تابع f می‌شود؛ یعنی:

$$x \xrightarrow{g} \boxed{g(x)} \xrightarrow{f} f(g(x))$$

و دامنهٔ آن به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول (اعمال انتقال افقی)**: ابتدا باید تابع $f(x)$ را ۲ واحد به سمت راست انتقال دهیم، یعنی $f(x-2)$؛ پس داریم:

$$f(x-2)=\frac{2(x-2)-a}{x-2+2}=\frac{2x-4-a}{x}$$

گام دوم (قرینه نسبت به محور yها): برای این‌که نمودار را نسبت به محور yها قرینه کنیم باید به جای x، $(-x)$ را قرار دهیم؛ یعنی:

$$g(x)=f(-x-2)=\frac{-2x-4-a}{-x}$$

که این ضابطهٔ تابع g است.

گام سوم (به دست آوردن تابع وارون $g^{-1}(x)$): با توجه به نکته، وارون تابع $g(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ به صورت $g^{-1}(x)=\frac{-dx+b}{cx-a}$ است؛ پس داریم:

$$g(x)=\frac{-2x-4-a}{-x}\xrightarrow[c=-1,d=0]{a=-2,b=-4-a}g^{-1}(x)=\frac{0(x)-4-a}{-x-(-2)}=\frac{-4-a}{-x+2}=\frac{4+a}{x-2}$$

گام چهارم (به دست آوردن نقطهٔ برخورد $g^{-1}of$ با محور yها): برای به دست آوردن محل برخورد با محور yها کافی است $(g^{-1}of)(0)$ را به دست آوریم؛ پس داریم:

$$x=0\xrightarrow{f(x)=\frac{2x-a}{x+2}}\boxed{\overset{f(0)}{-\frac{a}{2}}}\xrightarrow{g^{-1}(x)=\frac{4+a}{x-2}}g^{-1}(-\frac{a}{2})=\frac{4+a}{-\frac{a}{2}-2}=\frac{4+a}{\frac{-a-4}{2}}=-2$$

تیزبازی برای پیداکردن مقدار $g^{-1}of(0)$ داریم:

$$f(0)=\frac{-a}{2}\Rightarrow g^{-1}of(0)=g^{-1}(\frac{-a}{2})$$

$$\Rightarrow g(t)=\frac{-a}{2}\Rightarrow f(-t-2)=\frac{-a}{2}\Rightarrow\frac{-2t-4-a}{-t}=\frac{-a}{2}\Rightarrow -4t-8-2a=at$$

$$\Rightarrow -(2a+8)=(a+4)t\Rightarrow t=\frac{-2(a+4)}{a+4}=-2$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴ نمودار تابع $y = ۲(x-a)^۲ - a$ را ۴ واحد به راست و ۴ واحد به پایین انتقال می‌دهیم و سپس نسبت به مبدأ مختصات قرینه می‌کنیم و به تابع $y = -۲(x-a)^۲ - a$ می‌رسیم. مقدار a کدام است؟

۱) ۲ ۲) -۲ ۳) ۶ ۴) -۶

Hint از مختصات رأس سهمی استفاده کن!

نکته ۱) گاهی مختصات نقطه‌ای از تابع $y = f(x)$ را داریم و مختصات نقطهٔ نظیر آن در $y = kf(cx+a)+d$ را می‌خواهیم. برای این کار باید همهٔ کارهایی را که برای رسم نمودار $y = kf(cx+a)+d$ طبق ترتیب مراحل انتقال انجام می‌دادیم، روی این نقطه انجام دهیم.

۲) اگر (x_S, y_S) مختصات رأس سهمی باشند، ضابطهٔ سهمی برابر است با:

$$y = a(x-x_S)^۲ + y_S$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول (مشخص‌کردن رأس سهمی در تابع اولیه):** در $y = ۲(x-a)^۲ - a$ مختصات رأس سهمی برابر است با: $S(a,-a)$

گام دوم (اعمال انتقال‌ها): اگر بخواهیم مختصات نقطهٔ نظیر $S(a,-a)$ را در تابع جدید (تابع انتقال‌یافته) به دست آوریم، باید انتقال‌های گفته‌شده در صورت سؤال را به ترتیب روی آن لحاظ کنیم.

انتقال افقی: در ابتدا آن را ۴ واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم؛ پس یعنی: $x \to x-۴ , a \to a+۴$ (طول رأس سهمی) تبدیل می‌شود.

انتقال عمودی: و بعد آن را ۴ واحد به سمت پایین می‌بریم؛ بنابراین داریم:

$-a \to -a-۴$ (عرض رأس سهمی)

قرینه نسبت به مبدأ مختصات: در نهایت آن را نسبت به مبدأ مختصات قرینه می‌کنیم؛ پس داریم:

$$(a+۴,-a-۴) \xrightarrow{(x,y) \to (-x,-y)} (-a-۴,a+۴)$$

بنابراین مختصات رأس سهمی تابع جدید برابر است با: $S'(-a-۴,a+۴)$

گام سوم (به دست آوردن مقدار a):

ضابطهٔ تابع جدید (تابع انتقال‌یافته) با توجه به صورت سؤال $y = -۲(x-a)^۲ - a$ است که مختصات رأس سهمی آن $S'(a,-a)$ است؛

بنابراین $S'(-a-۴,a+۴)$ است، پس داریم:

$$a = -a-۴ \Rightarrow ۲a = -۴ \Rightarrow a = -۲$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

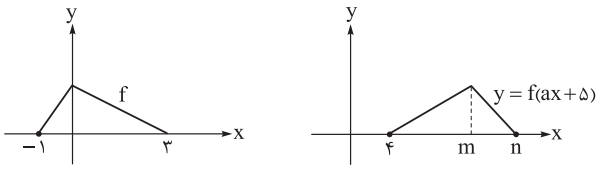
۵ نمودار دو تابع $y=f(x)$ و $y=f(ax+۵)$ به صورت زیر است. حاصل $a+m+n$ کدام است؟

۱) ۲۱/۵

۲) ۱۱/۵

۳) ۲۴

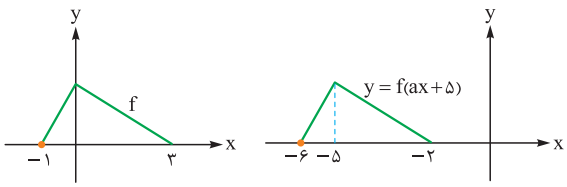
۴) ۱۲



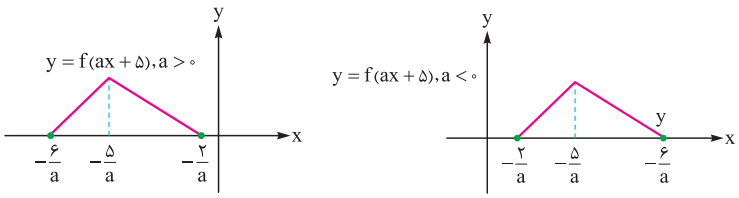
Hint انتقال‌ها رو مرحله‌به‌مرحله انجام بده و مقایسه کن! حواست باشه ضریب انبساط افقی برعکسه!

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول (اعمال تغییرات):** برای این‌که از نمودار تابع $y=f(x)$ به نمودار تابع $y=f(ax+۵)$ برسیم، ابتدا نمودار f را ۵ واحد به چپ انتقال می‌دهیم:

پس داریم:

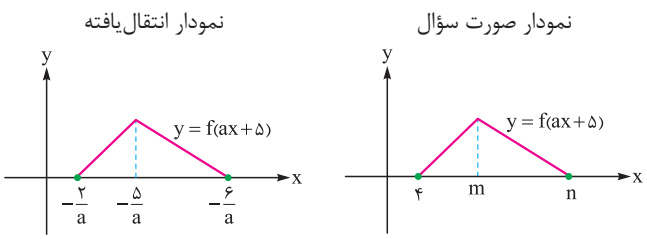


حالا نمودار به‌دست‌آمده را با ضریب $\frac{۱}{a}$ منبسط می‌کنیم که با توجه به علامت a (این‌که مثبت باشد یا منفی) یکی از نمودارهای زیر حاصل می‌شود.



که با توجه به نمودار تابع $y=f(ax+۵)$ صورت سؤال، نمودار (۲) مد نظر است، پس $a<۰$ است.

گام دوم (مشخص‌کردن مقادیر a، m و n):



که با توجه به دو نمودار: $-\frac{۲}{a}=۴$ است؛ پس $a=-\frac{۱}{۲}$. از طرفی $m=-\frac{۵}{a}$ و $n=-\frac{۶}{a}$ است؛ پس:

$$m=-\frac{۵}{-\frac{۱}{۲}}=۱۰$$

$$n=-\frac{۶}{-\frac{۱}{۲}}=۱۲$$

بنابراین حاصل $a+m+n$ برابر است با: $-\frac{۱}{۲}+۱۰+۱۲=۲۱/۵$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

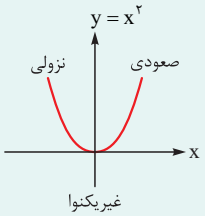
۶ تابع $f(x)=ax^۲-۴ax$ مفروض است. اگر بازهٔ $[-۲,+\infty)$ بزرگ‌ترین بازه‌ای باشد که تابع $g(x)=-۲f(a-\frac{x}{۳})$ روی آن بازه اکیداً نزولی است، مقدار a کدام است؟

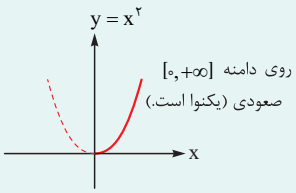
۱) $\frac{۴}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$

۳) $-\frac{۴}{۳}$ ۴) $-\frac{۲}{۳}$

Hint ابتدا $y=-۲f(a-\frac{x}{۳})$ را بساز، حالا رأس سهمی رو به دست بیار و ... .

درس Box در توابعی مانند $|x|$ و $x^۲$ که در دامنه‌شان غیریکنوا هستند، می‌توانیم با محدودکردن دامنه، تابع یکنوا داشته باشیم. مثلاً $x^۲$ روی $\mathbb{R}$ (اعداد حقیقی) غیریکنوا است، اما قبل یا بعد از رأس سهمی یکنوا است. در واقع سهمی $f(x)=ax^۲+bx+c$ روی قسمت‌هایی از دامنه‌اش که رأس سهمی در آن باشد، غیریکنواست.





روی دامنهٔ $[۰,+\infty)$ صعودی (یکنوا است).

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول (ساختن $g(x)=-۲f(a-\frac{x}{۳})$):**

$$f(x)=ax^۲-۴ax=a(x-۲)^۲-۴a \xrightarrow{x\to(a-\frac{x}{۳})} f(a-\frac{x}{۳})=a(a-\frac{x}{۳}-۲)^۲-۴a$$

$$\xrightarrow{\times(-۲)} g(x)=-۲a(\frac{x}{۳}-a+۲)^۲+۸a=-\frac{۲a}{۹}(x-(۳a-۶))^۲+۸a$$

گام دوم (به دست آوردن مقدار a): با توجه به این‌که سهمی با محدودکردن دامنه‌اش (قبل یا بعد رأس سهمی) یکنواست؛ پس از آن‌جا که $[-۲,+\infty)$ بزرگ‌ترین بازه‌ای است که تابع در آن اکیداً نزولی است، پس $x=-۲$ طول رأس سهمی است؛ پس:

$$x_s=۳a-۶=-۲ \Rightarrow ۳a=۴ \Rightarrow a=\frac{۴}{۳}$$

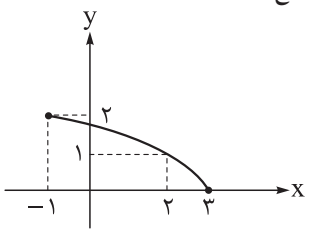
تیزپاری به جای مشخص‌کردن ضابطهٔ تابع $g=-۲f(a-\frac{x}{۳})$ رأس سهمی f رو مشخص کن و انتقال‌ها رو انجام بده.

$$f(x)=ax^۲-۴ax \Rightarrow x_s=۲$$

$$۲ \xrightarrow[\text{چپ}]{a\text{ واحد}} ۲-a \xrightarrow[\text{و ۳ برابر}]{\text{قرینه نسبت به محور y}} -۳(۲-a)=-۲ \Rightarrow ۳a-۶=-۲ \Rightarrow a=\frac{۴}{۳}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷ نمودار تابع f به صورت زیر است. مجموعه‌جواب‌های نامعادلهٔ $(fof)(x) \geq 1$ شامل چند عدد صحیح است؟



۱) ۵
۲) ۴
۳) ۳
۴) ۲

Hint طبق شکل داری می‌بینی $f(۲) = ۱$ هست؛ پس طرف راست تساوی بنویس $f(۲)$ و با توجه به نزولی‌بودن تابع شروع کن به حل نامعادله. (حواست به دامنهٔ fof هم باشه.)

درس Box

یکنوایی

- اگر تابع f اکیداً صعودی باشد:

$$x_۲ > x_۱ \Leftrightarrow f(x_۲) > f(x_۱)$$

که می‌توان از این نکته در حل نامساوی‌ها استفاده کرد و گفت اگر تابع f اکیداً صعودی باشد و آن را از دو طرف نامساوی حذف کنیم، جهت نامساوی تغییر نمی‌کند:

$$\underbrace{f(u) > f(v) \xrightarrow{f\text{ اکیداً صعودی}} u > v}_{\text{جهت علامت تغییر نکرد}}$$

- اگر تابع f اکیداً نزولی باشد:

$$x_۲ > x_۱ \Leftrightarrow f(x_۲) < f(x_۱)$$

اگر تابع f اکیداً نزولی باشد در یک نامساوی اگر آن را از طرفین نامساوی حذف کنیم، جهت نامساوی تغییر می‌کند:

$$\underbrace{f(u) > f(v) \xrightarrow{f\text{ اکیداً نزولی}} u < v}_{\text{جهت علامت تغییر کرد}}$$

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول (حل نامساوی):**

$$(fof)(x) \geq ۱ \xrightarrow{\text{طبق شکل } f(۲)=۱} (fof)(x) \geq f(۲)$$

با توجه به شکل می‌بینیم $f(x)$ اکیداً نزولی است؛ پس:

$$f(\underbrace{f(x)}_{u}) \geq f(\underbrace{۲}_{v}) \xrightarrow{f(u)>f(v)} \xrightarrow{f\text{ نزولی اکیداً}} u<v \quad f(x) \leq ۲$$

از طرفی با توجه به شکل $f(-۱) = ۲$ است؛ پس داریم:

$$f(x) \leq ۲ \Rightarrow f(x) \leq f(-۱)$$

که با توجه به اکیداً نزولی‌بودن تابع f:

$$f(x) \leq f(-۱) \xrightarrow{\text{جهت علامت عوض می‌شود.}} x \geq -۱$$

گام دوم (به دست آوردن دامنهٔ تابع fof): باید حواسمان باشد که xهای به‌دست‌آمده باید در دامنهٔ تابع fof حضور داشته باشند؛ پس نیاز به دامنهٔ تابع fof داریم.

$$D_{fof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_f\}$$

طبق شکل دامنهٔ تابع f برابر $[-۱,۳]$ است؛ پس:

$$D_{fof} = \{x \in [-۱,۳] \mid f(x) \in [-۱,۳]\} = [-۱,۳]$$

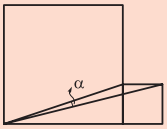
گام سوم (به دست آوردن جواب نامعادله): با توجه به بازه‌های به‌دست‌آمده در گام اول و دوم داریم:

$$\left.\begin{array}{l} x \geq -۱ : \text{گام اول} \\ -۱ \leq x \leq ۳ : \text{گام دوم} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{اشتراک می‌گیریم}} -۱ \leq x \leq ۳$$

پس جواب نامعادله، $-۱ \leq x \leq ۳$ است که اعداد صحیح ۰،۱،۲،۳ و -۱ که تعداد آن‌ها برابر ۵ است در این بازه هستند.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸ در شکل مقابل دو مربع با ابعاد ۱ و ۳ رسم شده است. مقدار $\tan\alpha$ کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۷}$ ۲) $\frac{۱}{۸}$

۳) $\frac{۱}{۱۰}$ ۴) $\frac{۱}{۱۳}$

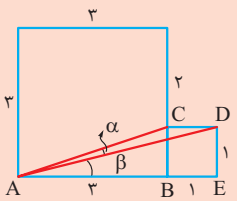
Hint به کمک رابطهٔ تانژانت مجموع دو کمان و در نظر گرفتن زاویه‌ای دیگر کنار زاویهٔ α، مقدار $\tan\alpha$ رو به دست بیار.

درس Box برای دو کمان α و β داریم:

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{۱-\tan\alpha\tan\beta} \xrightarrow{\text{اگر } \beta=a \text{ باشد.}} \tan ۲\alpha=\frac{۲\tan\alpha}{۱-\tan^{۲}\alpha}$$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{۱+\tan\alpha\tan\beta}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول (مشخص کردن زاویهٔ β و به دست آوردن مقدار $\tan\beta$ و $\tan(\alpha+\beta)$):** با در نظر گرفتن زاویه‌ای مانند β در شکل مقابل و در مثلث ADE داریم:



$$\tan\beta=\frac{\text{ضلع مقابل}(DE)}{\text{ضلع مجاور}(AE)}=\frac{۱}{۱+۳}=\frac{۱}{۴}$$

و در مثلث ABC برای زاویه $(\alpha+\beta)$ داریم:

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\text{ضلع مقابل}(BC)}{\text{ضلع مجاور}(AB)}=\frac{۱}{۳}$$

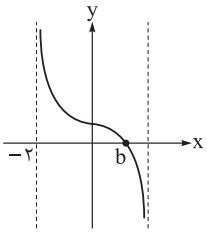
گام دوم (به دست آوردن مقدار $\tan\alpha$ از رابطهٔ تانژانت مجموع دو کمان):

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{۱-\tan\alpha\tan\beta} \xrightarrow[\tan\beta=\frac{۱}{۴}]{\tan(\alpha+\beta)=\frac{۱}{۳}} \frac{۱}{۳}=\frac{\tan\alpha+\frac{۱}{۴}}{۱-\frac{۱}{۴}\tan\alpha}$$

$$\Rightarrow ۳\tan\alpha+\frac{۳}{۴}=۱-\frac{۱}{۴}\tan\alpha \Rightarrow \frac{۱}{۴}=\frac{۱۳}{۴}\tan\alpha \Rightarrow \tan\alpha=\frac{۱}{۱۳}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹ نمودار تابع $y=۱+\tan(\frac{a\pi}{۲}x)$ به صورت زیر است. دورهٔ تناوب تابع $y=a-b\cos(\frac{\pi}{a-b}x)$ کدام است؟



۱) $\frac{۴}{۳}$

۲) $\frac{۳}{۲}$

۳) ۳

۴) ۶

Hint ابتدا به کمک دورهٔ تناوب، مجهول a رو به دست بیار و بعد از نقطهٔ $(b,۰)$ کمک بگیر تا مجهول b هم به دست بیاد. حالا راحت می‌تونی دورهٔ متناوب $y=a-b\cos(\frac{\pi}{a-b}x)$ رو به دست بیاری.

درس Box

در توابع $y=a\tan(bx)$ و $y=a\cot(bx)$ داریم:

۱) این توابع متناوب هستند و فاصلهٔ بین هر دو مجانب قائم متوالی برابر دورهٔ تناوب است که مقدار آن برابر است با:

$$T=\frac{\pi}{|b|}$$

۲) در نقاط $\frac{-\frac{\pi}{۲}}{b}$ ، $\frac{\frac{\pi}{۲}}{b}$ ، $\frac{\frac{۳\pi}{۲}}{b}$ و ... تعریف نشده‌اند.

۳) برد تابع برابر $\mathbb{R}$ (اعداد حقیقی) است.

نکته دورهٔ تناوب $y=\cos ax$ به صورت $T=\frac{۲\pi}{|a|}$ است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول (به دست آوردن مقدار a): با توجه به نمودار رسم‌شده، دورهٔ تناوب (فاصلهٔ بین دو مجانب رسم‌شده) برابر است با:

$$۲(۲)=۴$$

که این مقدار برابر است با: $T=\frac{\pi}{|\frac{a\pi}{۲}|}$

با توجه به این‌که تابع نزولی است، پس $a<۰$ است؛ بنابراین:

$$T=\frac{\pi}{|\frac{a\pi}{۲}|}=\frac{۲}{|a|}\xrightarrow{a<۰}T=\frac{۲}{-a}$$

پس:

$$T=\frac{۲}{-a}=۴\Rightarrow a=-\frac{۱}{۲}$$

تا این‌جا با جای‌گذاری $a=-\frac{۱}{۲}$ داریم: $y=۱+\tan(-\frac{\pi}{۴}x)$

گام دوم (به دست آوردن مقدار b): با توجه به شکل، تابع tan در $x=b$ اولین برخورد را با محور xها دارد، پس به ازای $x=b$ تابع tan داده‌شده برابر صفر است:

$$y(b)=۱+\tan(-\frac{\pi}{۴}b)=۰\Rightarrow\tan(\frac{\pi}{۴}b)=۱\frac{\pi}{۴}b=\frac{\pi}{۴}\Rightarrow b=۱$$

گام سوم (به دست آوردن دورهٔ تناوب $y=a-b\cos(\frac{\pi}{a-b}x)$): با جای‌گذاری مقادیر a و b داریم:

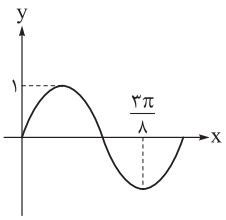
$$y=-\frac{۱}{۲}-\cos(\frac{\pi}{-\frac{۱}{۲}-۱}x)=-\frac{۱}{۲}-\cos(-\frac{۲\pi}{۳}x)$$

که دورهٔ تناوب آن برابر است با:

$$T=\frac{۲\pi}{|-\frac{۲\pi}{۳}|}=\frac{۲\pi}{\frac{۲\pi}{۳}}=۳$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۰ بخشی از نمودار تابع $f(x)=c+a\cos^{۲}(bx-\frac{\pi}{۴})$ در یک دورهٔ تناوب آن به صورت زیر است. حاصل $c+ab$ کدام است؟ $(b>۰)$



۱) ۵

۲) ۴

۳) ۲

۴) ۳

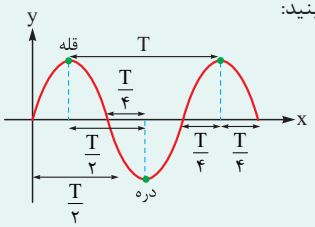
Hint

ابتدا ضابطهٔ تابع رو به کمک روابط مثلثاتی ساده‌تر بنویس!

درس Box

به دست آوردن پارامترهای a، b و c در $y=a\sin bx+c$ و $y=a\cos bx+c$

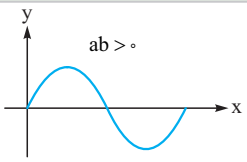
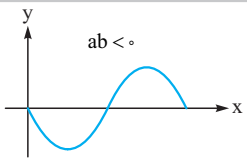
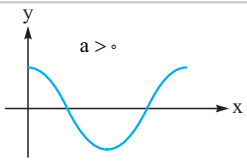
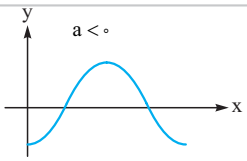
- برای به دست آوردن پارامتر b می‌توان از دورهٔ تناوب استفاده کرد. $T=\frac{۲\pi}{|b|}$
- در یک تابع سینوسی یا کسینوسی فاصلهٔ دو قلهٔ متوالی = فاصلهٔ دو درهٔ متوالی = T (دورهٔ تناوب) می‌باشد.
- فاصلهٔ یک دره و قلهٔ متوالی برابر $\frac{T}{۲}$ است.
- فاصلهٔ محل برخورد با محور xها تا دره یا قلهٔ نزدیک آن برابر $\frac{T}{۴}$ است. شکل زیر را ببینید:



- برای به دست آوردن پارامتر a و c از مقدار ماکزیمم یا مینیمم تابع می‌توان استفاده کرد. در تابع‌های $y=a\sin bx+c$ و $y=a\cos bx+c$ مقدار ماکزیمم و مینیمم تابع برابر است با:

$$\left.\begin{matrix}max=|a|+c\\min=-|a|+c\end{matrix}\right\}\Rightarrow\begin{matrix}|a|=\frac{max-min}{۲}\\c=\frac{max+min}{۲}\end{matrix}$$

- علامت ضرایب a و b نیز بستگی به این دارند که نمودار شبیه sin یا $-\sin$، cos یا $-\cos$ باشد.

تابع	شکل نمودار	توضیحات
$a\sin(bx)$		شبیه $\sin x$ است. (شیب نمودار در محل برخورد با محور yها مثبت است)
		شبیه $-\sin x$ است. (شیب نمودار در محل برخورد با محور yها منفی است)
$a\cos bx$		شبیه $\cos x$ است. (نمودار در $x=۰$ قله دارد)
		شبیه $-\cos x$ است. (نمودار در $x=۰$ دره دارد)

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول (ساده‌سازی عبارت)**: می‌دانیم $\cos ۲\alpha = ۲\cos^۲\alpha - ۱$ است، پس داریم:

$$\cos^۲(bx-\frac{\pi}{۴}) = \frac{۱+\cos(۲bx-\frac{\pi}{۲})}{۲}$$

بنابراین:

$$f(x) = c+\frac{a}{۲}(۱+\cos(۲bx-\frac{\pi}{۲})) = c+\frac{a}{۲}+\frac{a}{۲}\cos(۲bx-\frac{\pi}{۲})$$

$$\xrightarrow{\cos(\frac{\pi}{۲}-۲bx)=\sin ۲bx} f(x) = c+\frac{a}{۲}+\frac{a}{۲}\sin(۲bx)$$

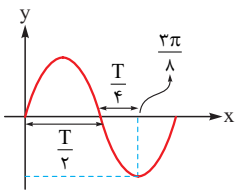
گام دوم (به دست آوردن مقادیر a و c): با توجه به نمودار، مقدار ماکزیمم برابر ۱ است و $f(۰)=۰$. از طرفی نمودار رسم‌شده در صورت سوال شبیه نمودار $\sin x$ است؛ پس باید $ab>۰$ باشد. با توجه به فرض سؤال $b>۰$ است پس a نیز مثبت است $(a>۰)$.

$$\begin{cases} f(۰)= \Rightarrow c+\frac{a}{۲}+۰=۰ \Rightarrow a=-۲c \quad (*) \\ y_{max}=۱ \Rightarrow \left|\frac{a}{۲}\right|+c+\frac{a}{۲}=۱ \xrightarrow{a>۰} \frac{a}{۲}+\frac{a}{۲}+c=۱ \Rightarrow a+c=۱ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(*)\ a=-۲c} -۲c+c=۱ \Rightarrow c=-۱$$

پس طبق $(*)$، $a=-۲c=۲$ است.

گام سوم (به دست آوردن مقدار b): با توجه به شکل $\frac{T}{۲}+\frac{T}{۴}$ برابر $\frac{۳\pi}{۸}$ است؛ پس:



$$\frac{۳}{۴}T=\frac{۳\pi}{۸} \Rightarrow T=\frac{\pi}{۲}$$

که این مقدار برابر است با $T=\frac{۲\pi}{|۲b|}$؛ بنابراین:

$$T=\frac{۲\pi}{|۲b|}=\frac{\pi}{۲} \xrightarrow{b>۰} b=۲$$

گام چهارم (به دست آوردن خواستهٔ سؤال (حاصل $c+ab$)):

$$c+ab=-۱+۲(۲)=۳$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۱ در معادلهٔ مثلثاتی $\frac{۱+\cos ۲x}{\sin x}=۳$ مجموع جواب‌ها در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ کدام است؟

۱) $\frac{۷\pi}{۶}$ ۲) $\frac{۳\pi}{۴}$

۳) $\frac{۳\pi}{۲}$ ۴) π

Hint ابتدا به کمک اتحادهای مثلثاتی این معادله را ساده کن و بعد معادلهٔ به‌دست‌آمده بر حسب $\sin x$ رو حل کن و تمام.

درس Box

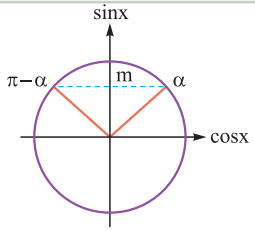
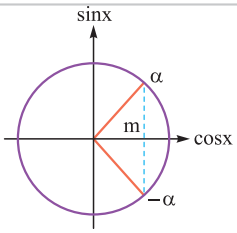
اتحادهای مثلثاتی

پیشنهاد می‌کنم چند اتحاد مهم زیر و نتایج آن‌ها را یاد بگیری:

- $\sin^۲\theta+\cos^۲\theta=۱ \Rightarrow \begin{cases}\sin^۲\theta=۱-\cos^۲\theta\\ \cos^۲\theta=۱-\sin^۲\theta\end{cases}$
- $۱+\tan^۲\theta=\frac{۱}{\cos^۲\theta}$ ، $۱+\cot^۲\theta=\frac{۱}{\sin^۲\theta}$
- $(\sin x\pm\cos x)^۲=۱\pm ۲\sin x\cos x$
- $\tan x+\cot x=\frac{۱}{\sin x\cos x}$
- $\sin^۴x+\cos^۴x=۱-۲\sin^۲x\cos^۲x$
- $\sin^۶x+\cos^۶x=۱-۳\sin^۲x\cos^۲x$
- $\cos^۲\alpha=\cos^۲\alpha-\sin^۲\alpha \Rightarrow \begin{cases}\cos^۲\alpha=۲\cos^۲\alpha-۱ \Rightarrow ۱+\cos^۲\alpha=۲\cos^۲\alpha\\ \cos^۲\alpha=۱-۲\sin^۲\alpha \Rightarrow ۱-\cos^۲\alpha=۲\sin^۲\alpha\end{cases}$
- $\sin^۲\alpha=۲\sin\alpha\cos\alpha$

معادلات $\sin x=m$ و $\cos x=m$

دقت کنید که باید $-۱\le m\le ۱$ باشد.

نمودار وِن	جواب‌ها	جواب‌ها روی دایرهٔ مثلثاتی
$\sin x=m$	$x=۲k\pi+\alpha$ $x=۲k\pi+(\pi-\alpha)$	
$\cos x=m$	$x=۲k\pi+\alpha$ $x=۲k\pi-\alpha$	

پاسخ خیلی تشریحی گام اول (ساده‌کردن معادله):

$$\frac{۱+\cos ۲x}{\sin x}=۳ \xrightarrow{۱+\cos ۲x=۲\cos^۲x} \frac{۲\cos^۲x}{\sin x}=۳ \xrightarrow{\cos^۲x=۱-\sin^۲x} \frac{۲(۱-\sin^۲x)}{\sin x}=۳$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

گام دوم (حل معادلهٔ مثلثاتی):

$$۲-۲\sin^۲ x = ۳\sin x \Rightarrow ۲\sin^۲ x + ۳\sin x - ۲ = ۰$$

$$\Rightarrow (۲\sin x + ۴)(\sin x - \frac{۱}{۲}) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \sin x = -۲ : \text{ نمی‌تواند کوچک‌تر از } -۱ \text{ باشد.} \\ \sin x = \frac{۱}{۲} \end{cases}$$

$$\sin x = \frac{۱}{۲} \xrightarrow{\sin\frac{\pi}{۶}=\frac{۱}{۲}} \sin x = \sin\frac{\pi}{۶} \Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶} \\ x = ۲k\pi + (\pi - \frac{\pi}{۶}) = ۲k\pi + \frac{۵\pi}{۶} \end{cases} ; k \in \mathbb{Z}$$

که در بازهٔ $(۰, ۲\pi)$ تنها $\frac{\pi}{۶}$ و $\frac{۵\pi}{۶}$ جواب‌های معادله هستند که حاصل‌جمع آن‌ها برابر است با:

$$\frac{\pi}{۶} + \frac{۵\pi}{۶} = \pi$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۲ اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $\sin x+\cos x=۱/۴$ در بازهٔ $(۰,\pi)$ باشند به طوری که $\alpha<\beta$، حاصل $\tan(\alpha-\beta)$ کدام است؟

۱) $-\frac{۷}{۲۴}$ ۲) $-\frac{۷}{۲۵}$ ۳) $-\frac{۲۴}{۷}$ ۴) $\frac{۷}{۲۴}$

Hint رابطه‌ای بین α و β پیدا کن!

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول (ساده‌سازی عبارت به کمک اتحادها):**

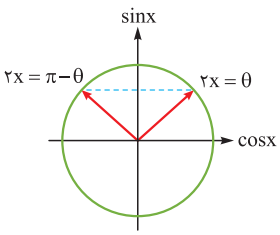
با توجه به صورت سؤال $\sin x+\cos x=۱/۴$ است. ابتدا طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\sin x+\cos x=۱/۴=\frac{۷}{۵}\xrightarrow{\text{به توان ۲}}(\sin x+\cos x)^۲=(\frac{۷}{۵})^۲=\frac{۴۹}{۲۵}$$

$$\sin^۲x+\cos^۲x+۲\sin x\cos x=\frac{۴۹}{۲۵}\xrightarrow[۲\sin x\cos x=\sin ۲x]{\sin^۲x+\cos^۲x=۱}۱+\sin ۲x=\frac{۴۹}{۲۵}\Rightarrow \sin ۲x=\frac{۴۹}{۲۵}-۱=\frac{۴۹}{۲۵}-\frac{۲۵}{۲۵}=\frac{۲۴}{۲۵}$$

گام دوم (به دست آوردن α و β (جواب‌های معادله)):

در معادلهٔ $\sin ۲x=\frac{۲۴}{۲۵}$، دنبال $۲x$هایی هستیم که sin آن‌ها $\frac{۲۴}{۲۵}$ باشد، اگر زاویه‌ای حاده مثل θ پیدا کنیم که $\sin\theta=\frac{۲۴}{۲۵}$ باشد هم θ جواب معادله است و هم $\pi-\theta$. ببینید:



پس $۲x=\theta$ و در نتیجه $x=\frac{\theta}{۲}$ یا $۲x=\pi-\theta$ و در نتیجه $x=\frac{\pi}{۲}-\frac{\theta}{۲}$ است؛ بنابراین α و β که برابر با $\frac{\theta}{۲}$ و $\frac{\pi}{۲}-\frac{\theta}{۲}$ هستند، جواب‌های معادله هستند.

گام سوم (به دست آوردن حاصل $\tan(\alpha-\beta)$):

$$\tan(\alpha-\beta)\xrightarrow{\alpha=\frac{\theta}{۲},\beta=\frac{\pi}{۲}-\frac{\theta}{۲}}\tan(\frac{\theta}{۲}-(\frac{\pi}{۲}-\frac{\theta}{۲}))=\tan(-\frac{\pi}{۲}+\theta)$$

$$=-\tan(\frac{\pi}{۲}-\theta)=-\cot\theta\xrightarrow{\cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}\tan(\alpha-\beta)=-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$\xrightarrow{\theta=۲x}\tan(\alpha-\beta)=-\frac{\cos ۲x}{\sin ۲x}\ (*)$$

با توجه به گام اول $\sin ۲x=\frac{۲۴}{۲۵}$ است؛ پس داریم:

$$\cos^۲ ۲x+\sin^۲ ۲x=۱\xrightarrow{\sin ۲x=\frac{۲۴}{۲۵}}\cos^۲ ۲x+\frac{۵۷۶}{۶۲۵}=۱$$

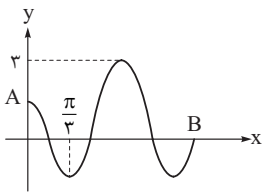
$$\cos^۲ ۲x=۱-\frac{۵۷۶}{۶۲۵}=\frac{۴۹}{۶۲۵}\Rightarrow \cos ۲x=\frac{۷}{۲۵}$$

که با جای‌گذاری در تساوی (*) خواهیم داشت:

$$\tan(\alpha-\beta)=-\frac{\frac{۷}{۲۵}}{\frac{۲۴}{۲۵}}=-\frac{۷}{۲۴}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۳ قسمتی از نمودار $f(x)=a+۲\sin(\frac{b}{a}x+\frac{\pi}{۶})$ به صورت مقابل است. شیب پاره‌خط **AB** کدام است؟



۱) $-\frac{۶}{۵\pi}$

۲) $-\frac{۴}{۳\pi}$

۳) $-\frac{۷}{۳\pi}$

۴) $-\frac{۱۲}{۵\pi}$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول (به دست آوردن مقدار a): با توجه به نمودار ماکزیمم تابع برابر ۳ است. از طرفی در تابع $y=a\sin(bx)+c$ ماکزیمم برابر است با:

$$\max=|a|+c$$

که در تابع $f(x)$ داریم:

$$\max=|۲|+a=۳ \Rightarrow ۲+a=۳ \Rightarrow a=۱$$

گام دوم (به دست آوردن مقدار b): از آن‌جایی‌که نمودار رسم‌شده شبیه $-\sin x$ است، پس باید $ab<۰$ باشد (a و b ناهم‌علامت باشند)؛ پس $b>۰$ است.

$$f(x)=۱+۲\sin(bx+\frac{\pi}{۶}) \xrightarrow{\sin u=-\sin(-u)} f(x)=۱-۲\sin(-bx-\frac{\pi}{۶})$$

از آن‌جایی که نمودارمان شبیه $-\sin x$ است، پس درمکانی برابر $\frac{\pi}{۲}$ به جای آن‌که اولین ماکزیمم را داشته باشیم اولین مینیمم را داریم؛ پس باید $-bx-\frac{\pi}{۶}=\frac{\pi}{۲}$ باشد که با توجه به نمودار می‌بینیم در $x=\frac{\pi}{۳}$ این اتفاق می‌افتد:

$$-bx-\frac{\pi}{۶}=\frac{\pi}{۲} \xrightarrow{x=\frac{\pi}{۳}} -b(\frac{\pi}{۳})-\frac{\pi}{۶}=\frac{\pi}{۲}$$

$$-b(\frac{\pi}{۳})=\frac{\pi}{۲}+\frac{\pi}{۶}=\frac{۴\pi}{۶}=\frac{۲\pi}{۳} \Rightarrow b=-۲$$

بنابراین ضابطهٔ $f(x)$ برابر است با:

$$f(x)=۱-۲\sin(۲x-\frac{\pi}{۶})$$

گام سوم (به دست آوردن مختصات نقطهٔ A): نقطهٔ A محل برخورد تابع $f(x)$ با محور yهاست یعنی جایی که $x=۰$ است؛ پس:

$$A=f(۰)=۱-۲\sin(-\frac{\pi}{۶})=۱+۲\sin\frac{\pi}{۶}=۱+۱=۲$$

پس مختصات نقطهٔ A به صورت $A(۰,۲)$ است.

گام چهارم (به دست آوردن مختصات نقطهٔ B): نقطهٔ B چهارمین محل برخورد تابع $f(x)$ با محور xهاست؛ پس داریم:

$$f(x)=۱-۲\sin(۲x-\frac{\pi}{۶})=۰ \Rightarrow \frac{۱}{۲}=\sin(۲x-\frac{\pi}{۶})$$

$$\sin(۲x-\frac{\pi}{۶})=\sin\frac{\pi}{۶} \Rightarrow \begin{cases} ۲x-\frac{\pi}{۶}=۲k\pi+\frac{\pi}{۶} \xrightarrow{k=۰,۱} ۲x-\frac{\pi}{۶}=\underbrace{\frac{\pi}{۶}}_{\text{اولین}},\underbrace{\frac{۱۳\pi}{۶}}_{\text{سومین}} \\ ۲x-\frac{\pi}{۶}=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۶}=۲k\pi+\frac{۵\pi}{۶} \xrightarrow{k=۰,۱} ۲x-\frac{\pi}{۶}=\underbrace{\frac{۵\pi}{۶}}_{\text{دومین}},\underbrace{\frac{۱۷\pi}{۶}}_{\text{چهارمین}} \end{cases}$$

بنابراین چهارمین محل برخورد تابع $f(x)$ با محور xها برابر $\frac{۱۷\pi}{۶}$ است؛ پس:

$$۲x_B-\frac{\pi}{۶}=\frac{۱۷\pi}{۶} \Rightarrow x_B=\frac{۱۸\pi}{۱۲}=\frac{۳\pi}{۲}$$

پس مختصات نقطهٔ B به صورت $B(\frac{۳\pi}{۲},۰)$ است.

گام پنجم (محاسبهٔ شیب پاره‌خط AB):

$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A} \xrightarrow{A(۰,۲),B(\frac{۳\pi}{۲},۰)} \frac{۰-۲}{\frac{۳\pi}{۲}-۰}=\frac{-۲}{\frac{۳\pi}{۲}}=\frac{-۴}{۳\pi}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۴ نمودار تابع $y=\dfrac{a\cos\frac{\pi}{۶}x-۲b}{۲a-\sin\frac{\pi x}{۱۲}}$ در مجاورت $x=۲$ به صورت مقابل است. حداکثر مقدار $[۱۶b]$ کدام است؟

($[\,]$، نماد جزء صحیح است.)

۱) ۱

۲) ۱−

۳) ۲−

۴) صفر

Hint

اول با توجه به مجانب قائم مقدار a رو به دست بیار. بعد با توجه به شکل تابع وقتی $x\to ۲^+$ رو بررسی کن و اون رو برابر $-\infty$ قرار بده، مقدار b به دست میاد و ... .

درس Box

اگر $\lim\limits_{x\to a}f(x)=L\neq ۰$ ، $\lim\limits_{x\to a}g(x)=۰$ و g در یک همسایگی چپ یا راست مخالف صفر باشد، در این صورت $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\pm\infty$ ؛ بنابراین خط $x=a$ مجانب قائم تابع $\dfrac{f}{g}$ است که با بررسی حد تابع $\dfrac{f}{g}$ در مجاورت مجانب قائم می‌توانیم نمودار آن را در همسایگی مجانب قائم تعیین کنیم.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول (به دست آوردن مقدار a): از آن‌جا که $x=۲$ مجانب قائم است، پس $x=۲$ ریشهٔ مخرج است؛ بنابراین:

$$۲a-\sin\frac{\pi(۲)}{۱۲}=۰\Rightarrow ۲a-\sin\frac{\pi}{۶}=۰\Rightarrow ۲a=\frac{۱}{۲}\Rightarrow a=\frac{۱}{۴}$$

گام دوم (محاسبهٔ مقدار b): با توجه به شکل وقتی $x\to ۲^+$ ، نمودار به سمت $-\infty$ می‌رود (در همسایگی راست نمودار به سمت $-\infty$ می‌رود)؛ بنابراین:

$$\lim_{x\to ۲^+}\frac{\frac{۱}{۴}\cos\frac{\pi}{۶}x-۲b}{\frac{۱}{۲}-\sin\frac{\pi x}{۱۲}}=\frac{\frac{۱}{۴}\cos(\frac{\pi}{۳})-۲b}{۲(\frac{۱}{۴})-\sin(\frac{\pi}{۶})^+}=\frac{\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۲}-۲b}{\frac{۱}{۲}-(\frac{۱}{۲})^+}=\frac{\frac{۱}{۸}-۲b}{۰^-}=-\infty$$

$$\frac{۱}{۸}-۲b>۰\Rightarrow b<\frac{۱}{۱۶}$$

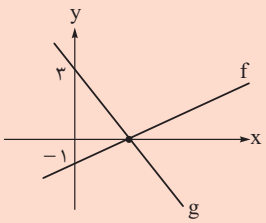
گام سوم (محاسبهٔ $[۱۶b]$):

$$b<\frac{۱}{۱۶}\xrightarrow{\times ۱۶}۱۶b<۱۶\times\frac{۱}{۱۶}\Rightarrow ۱۶b<۱\Rightarrow [۱۶b]\leq ۰$$

بنابراین حداکثر مقدار $[۱۶b]$ برابر صفر است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۵ نمودار توابع f و g به صورت زیر است. اگر $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(f+2g^{-1})(x)}{(f^{-1}-g)(x)}=-\frac{1}{2}$ باشد، مقدار $f^{-1}(0)$ کدام است؟



۱) $\sqrt{7}$

۲) $\sqrt{15}$

۳) $2\sqrt{2}$

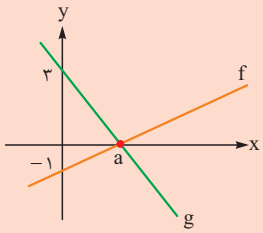
۴) $2\sqrt{3}$

Hint شیب خطوط رو به دست بیار، از اون‌جایی که تو صورت و مخرج همه ضرایبی از x هستن، پس توان صورت و مخرج یکیه و راحت با داشتن شیب‌ها می‌تونی حد رو بررسی کنی.

درس Box اگر $f(x)=ax+b$ و $(a\neq 0)$ باشد، وارون آن $f^{-1}(x)=\frac{x-b}{a}$ است؛ پس شیب یک خط و وارون آن معکوس یکدیگر هستند.

نکته اگر (α,β) در تابع f قرار داشته باشد، (β,α) روی وارون آن (یعنی f^{-1}) قرار دارد.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول (به دست آوردن شیب خطوط f و g):**



اگر محل تلاقی دو خط با محور xها را a فرض کنیم، داریم:

$$(0,3),(a,0)\in g \xrightarrow{\text{محاسبهٔ شیب خط } g} m_g=\frac{3-0}{0-a}=-\frac{3}{a}$$

$$(0,-1),(a,0)\in f \xrightarrow{\text{محاسبهٔ شیب خط } f} m_f=\frac{-1-0}{0-a}=\frac{1}{a}$$

گام دوم (به دست آوردن شیب خطوط f^{-1} و g^{-1}): با توجه به نکته، شیب وارون یک خط، معکوس شیب خط است، پس:

$$m_{g^{-1}}=-\frac{a}{3}$$
$$m_{f^{-1}}=a$$

گام سوم (محاسبهٔ مقدار a): توان صورت و مخرج هر دو یکی است؛ پس فقط با داشتن مقادیر شیب می‌توان حد را بررسی کرد:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f+2g^{-1}}{f^{-1}-g}=\frac{\frac{1}{a}+2(-\frac{a}{3})}{a-(-\frac{3}{a})}=\frac{\frac{1}{a}-\frac{2a}{3}}{a+\frac{3}{a}}=\frac{\frac{3-2a^2}{3a}}{\frac{a^2+3}{a}}=\frac{3-2a^2}{3a^2+9}$$

که در این مقدار باید طبق صورت سوال برابر $-\frac{1}{2}$ باشد؛ پس:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f+2g^{-1}}{f^{-1}-g}=\frac{3-2a^2}{3a^2+9}=-\frac{1}{2}\Rightarrow -3a^2-9=6-4a^2\Rightarrow a^2=15\Rightarrow a=\pm\sqrt{15}$$

از آن‌جا که a در قسمت مثبت محورxهاست، پس $a=\sqrt{15}$ قابل قبول بوده و $a=-\sqrt{15}$ غیر قابل قبول است.

گام چهارم (محاسبهٔ مقدار $f^{-1}(0)$): با توجه به شکل $f(a)=0$ است، پس طبق نکته، $f^{-1}(0)=a$ است:

$$f^{-1}(0)=\sqrt{15}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۶ اگر $f(x)=\sqrt{x^۲+۴}$ باشد حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty}(۲x-f(۲x))(x+f(x))$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) -۲ ۳) ۴ ۴) -۴

Hint ابتدا $f(۲x)$ رو بساز در $(۲x-f(۲x))(x+f(x))$ جای‌گذاری کن. حالا حد در بی‌نهایت رو حساب کن.

نکته اگر در جمع یا تبدیل رادیکال‌ها جمله‌های پرتوان قرینه باشند و با هم حذف بشوند، نمی‌توانیم بگوییم حد صفر است.

مثلاً در $\lim\limits_{x\to+\infty} x-\sqrt{x^۲-۲x}$ با انتخاب‌های پرتوان به $x-x=۰$ می‌رسیم، در صورتی که حد، صفر نمی‌باشد.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول (ساخت $f(۲x)$ و جای‌گذاری در $(۲x-f(۲x))(x+f(x))$):**

$$f(۲x)=\sqrt{(۲x)^۲+۴}=\sqrt{۴x^۲+۴}=۲\sqrt{x^۲+۱}$$

$$\Rightarrow (۲x-f(۲x))(x+f(x))=(۲x-۲\sqrt{x^۲+۱})(x+\sqrt{x^۲+۴})$$

گام دوم (محاسبهٔ حد):

حواسمان هست که حد صفر نیست.

$$\lim_{x\to+\infty}\overbrace{((۲x-۲\sqrt{x^۲+۱})}(x+\sqrt{x^۲+۴}))=\lim_{x\to+\infty}((۲x-۲\sqrt{x^۲+۱})\times\frac{۲x+۲\sqrt{x^۲+۱}}{۲x+۲\sqrt{x^۲+۱}}(x+\sqrt{x^۲+۴}))$$

$$\lim_{x\to+\infty}(\frac{۴x^۲-(۴x^۲+۴)}{۲x+۲\sqrt{x^۲+۱}}(x+\sqrt{x^۲+۴}))\xrightarrow{\text{استفاده از پرتوان}}\lim_{x\to+\infty}(\frac{-۴}{۲x+|۲x|}(x+|x|))$$

$$=\lim_{x\to+\infty}(\underbrace{\frac{-۴}{۲x+۲x}}_{۴x}\underbrace{(x+x)}_{۲x})=-۲$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۷ نمودار تابع $f(x)=\frac{\tan ۲x}{۱+\cos x}$ در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ چند خط مجانب قائم دارد؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

Hint ابتدا به کمک اتحادهای مثلثاتی تابع رو ساده کن، بعد شروع کن به بررسی تعداد مجانب‌های قائم (ببین مخرج چند ریشه داره).

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول (ساده‌سازی تابع $f(x)$ به کمک اتحادهای مثلثاتی)**: می‌دانیم $\sin ۲\alpha = ۲\sin\alpha\cos\alpha$ و $۱+\cos ۲\alpha = ۲\cos^۲\alpha$ است؛ پس داریم:

$$f(x)=\frac{\tan ۲x}{۱+\cos x} \xrightarrow{\tan ۲x=\frac{\sin ۲x}{\cos ۲x}} f(x)=\frac{\sin ۲x}{\cos ۲x(۱+\cos x)}$$

گام دوم (به دست آوردن ریشه‌های مخرج): برای به دست آوردن تعداد مجانب‌های قائم باید تعداد ریشه‌های مخرج را به دست آوریم:

$$\cos ۲x = ۰ \xrightarrow{\text{جواب‌ها در بازهٔ } (۰,۲\pi)} ۲x=\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲},\frac{۵\pi}{۲},\frac{۷\pi}{۲} \Rightarrow x=\frac{\pi}{۴},\frac{۳\pi}{۴},\frac{۵\pi}{۴},\frac{۷\pi}{۴}$$

$$۱+\cos x = ۰ \Rightarrow \cos x=-۱ \xrightarrow{\text{جواب‌ها در بازهٔ } (۰,۲\pi)} x=\pi$$

پس $f(x)$، ۵ مجانب قائم π و $\frac{\pi}{۴}$ و $\frac{۳\pi}{۴}$، $\frac{۵\pi}{۴}$، $\frac{۷\pi}{۴}$ را دارد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۸ اگر $x=۳$ تنها مجانب قائم نمودار تابع $f(x)=\frac{bx^۲+b}{۲x^۲+ax+b}$ باشد، نمودار تابع f در مجاورت مجانب افقی آن کدام است؟

ریشهٔ مضاعف مخرج

۱)

۲)

۳)

۴)

Hint ابتدا به کمک مجانب قائم پارامتر a و b رو به دست بیار. بعد برو سراغ مجانب افقی و نحوهٔ نزدیک‌شدن به مجانب افقی.

درس Box

مجانب افقی

خط $y=k$ مجانب افقی نمودار تابع f است هرگاه $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=k$ و یا $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=k$ باشد.

نمودار تابع می‌تواند از بالا یا پایین مجانب افقی به مجانب خودش نزدیک شود که برای تشخیص این موضوع کافی است مجانب را از معادلهٔ تابع کم کنیم و بعد مثبت یا منفی بودن عبارت حاصل رو بررسی کنیم.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول (به دست آوردن ضرایب a و b):** از آن‌جایی که تنها مجانب قائم نمودار تابع $f(x)$ برابر $x=۳$ است، پس $x=۳$ ریشهٔ مضاعف مخرج است؛ بنابراین مخرج به صورت $۲(x-۳)^۲$ است.

$$۲(x-۳)^۲=۲(x^۲-۶x+۹)=۲x^۲-۱۲x+۱۸$$

پس $a=-۱۲$ و $b=۱۸$ است؛ بنابراین ضابطهٔ $f(x)$ به صورت $f(x)=\frac{۱۸x^۲+۱۸}{۲x^۲-۱۲x+۱۸}=\frac{۹x^۲+۹}{x^۲-۶x+۹}$ است.

گام دوم (مجانب افقی و چگونگی نزدیک‌شدن به آن): ابتدا مجانب افقی را به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۹x^۲+۹}{x^۲-۶x+۹}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۹x^۲}{x^۲}=۹$$

حال با تشکیل $f(x)-۹$ مشخص می‌کنیم مقادیر در $+\infty$ یا $-\infty$ مثبت است یا منفی. اگر مثبت بود، تابع f بالای مجانب خود است و اگر منفی بود، تابع f زیر مجانب خود است:

$$f(x)-۹=\frac{۹x^۲+۹}{x^۲-۶x+۹}-۹=\frac{۹x^۲+۹-۹x^۲+۵۴x-۸۱}{x^۲-۶x+۹}=\frac{۵۴x-۷۲}{x^۲-۶x+۹}=\frac{۱۸(۳x-۴)}{(x-۳)^۲}$$

این تابع در مجموعهٔ $(\frac{۴}{۳},+\infty)-\{۳\}$ مثبت است و در بازهٔ $(-\infty,\frac{۴}{۳})$ منفی است؛ بنابراین در $+\infty$ تابع بالاتر از مجانب افقی است و در $-\infty$ پایین‌تر از آن است.

در نتیجه شکل آن به صورت ⌒⌒⌒⌒⌒ است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۹ اگر $A=[a_{ij}]_{۳\times ۳}$ که در آن $a_{ij}=\begin{cases}۴ & ; i+j=۴\\ -۱ & ; i+j\neq ۴\end{cases}$، آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس $۱۸I-A^۲$ چند برابر مجموع درایه‌های ماتریس A است؟

۱) ۳/۵ ۲) ۷ ۳) ۴ ۴) ۴/۵

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول (پیداکردن ماتریس A): با توجه به روابط داده‌شده در صورت سؤال ابتدا ماتریس A را به دست می‌آوریم.

$$A=[a_{ij}]_{۳\times ۳}=\begin{bmatrix}a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳}\\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳}\\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳}\end{bmatrix}\Rightarrow A=\begin{bmatrix}-۱ & -۱ & ۴\\ -۱ & ۴ & -۱\\ ۴ & -۱ & -۱\end{bmatrix}$$

گام دوم (محاسبهٔ ماتریس $۱۸I-A^۲$): ماتریس A را به توان ۲ می‌رسانیم و سپس $۱۸I-A^۲$ را محاسبه می‌کنیم.

$$A^۲=\begin{bmatrix}-۱ & -۱ & ۴\\ -۱ & ۴ & -۱\\ ۴ & -۱ & -۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱ & -۱ & ۴\\ -۱ & ۴ & -۱\\ ۴ & -۱ & -۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱۸ & -۷ & -۷\\ -۷ & ۱۸ & -۷\\ -۷ & -۷ & ۱۸\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow ۱۸I-A^۲=\begin{bmatrix}۰ & ۷ & ۷\\ ۷ & ۰ & ۷\\ ۷ & ۷ & ۰\end{bmatrix}$$

گام سوم (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال):

مجموع درایه‌های $۱۸I-A^۲$، ۴۲ و مجموع درایه‌های ماتریس A، ۶ است؛ پس خواستهٔ سؤال برابر است با:

$$\frac{۴۲}{۶}=۷$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۰ اگر A و B دو ماتریس مربعی هم‌مرتبه و غیرصفر باشند، به طوری که $BA = B$ و $AB^2 = A$، آن‌گاه کدام گزینه ممکن است نادرست باشد؟ $(n \in \mathbb{N})$

۱) $B^{3n} = B^n$

۲) $A^n = A$

۳) $AB = B^2$

۴) $(AB)^2 = A$

درس Box

خواص ضرب ماتریس‌ها

اگر A، B و C سه ماتریس و r و s دو عدد حقیقی باشند به طوری که ضرب‌های ماتریسی بین آن‌ها قابل انجام باشد، آن‌گاه:

۱) خاصیت شرکت‌پذیری:

$$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$$

۲) اگر $A = B$، آن‌گاه:

$$A \times C = B \times C \ , \ C \times A = C \times B$$

۳) اگر A ماتریسی مربعی باشد به طوری که $A^2 = A$، آن‌گاه می‌توان نتیجه گرفت که به ازای همهٔ nهای طبیعی، داریم $A^n = A$.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ گزینه‌ها را تک‌تک بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ (۱): طرفین تساوی $AB^2 = A$ را از چپ در B ضرب می‌کنیم، داریم:

$$BAB^2 = BA \xrightarrow{BA=B} BB^2 = B \Rightarrow B^3 = B \Rightarrow (B^3)^n = B^n \Rightarrow B^{3n} = B^n$$

پس گزینهٔ (۱) صحیح است.

گزینهٔ (۲):

$$A^2 = AA = AB^2A = AB(BA) = ABB = AB^2 = A \Rightarrow A^n = A$$

گزینهٔ (۳): اگر $A = I$ و $B = -I$ باشد، آن‌گاه عبارت گزینهٔ (۳) نادرست است.

$$AB = I \times -I = -I$$

$$B^2 = (-I)^2 = I$$

گزینهٔ (۴):

$$(AB)^2 = ABAB = ABB = AB^2 = A$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۱ اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ -۱ & ۰\end{bmatrix}$، آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس $A^{۱۰۰}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) -۲ ۴) ۲

درس Box

توان ماتریس‌ها:

اگر A ماتریس مربعی باشد، داریم:

$$A^{۱}=A\ ,\ A^{۲}=A.A\ ,\ A^{۳}=A.A^{۲}=A^{۲}.A\ ,\ \ldots,\ A^{n}=A.A^{n-۱}=A^{n-۱}.A$$

توجه: اگر A ماتریس مربعی و m و n اعداد طبیعی باشند، آن‌گاه:

$$A^{m}.A^{n}=A^{m+n}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول (محاسبهٔ ماتریس $A^{۲}$ و $A^{۳}$): ابتدا ماتریس $A^{۲}$ را محاسبه می‌کنیم و سپس ماتریس $A^{۳}$ را محاسبه می‌کنیم تا به یک ماتریس ساده برسیم.

$$A^{۲}=\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ -۱ & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ -۱ & ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰ & ۱\\ -۱ & -۱\end{bmatrix}$$

$$A^{۳}=A^{۲}.A=\begin{bmatrix}۰ & ۱\\ -۱ & -۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ -۱ & ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱ & ۰\\ ۰ & -۱\end{bmatrix}=-I$$

گام دوم (محاسبهٔ $A^{۱۰۰}$): $A^{۱۰۰}$ را به صورت $A^{۹۹}.A$ می‌نویسیم:

$$A^{۱۰۰}=A^{۹۹}.A=(\underbrace{-I}_{A^{۳}})^{۳۳}A=-A=\begin{bmatrix}-۱ & -۱\\ ۱ & ۰\end{bmatrix}$$

گام سوم (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال): مجموع درایه‌های ماتریس $A^{۱۰۰}$ برابر است با:

$$-۱-۱+۱+۰=-۱$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۲ اگر $A=\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ ۴ & ۳\end{bmatrix}$، آن‌گاه از معادلهٔ ماتریسی $AX=A-۲A^{-۱}$ مجموع درایه‌های ستون اول ماتریس X کدام است؟

۱) $-۰/۵$ ۲) ۷ ۳) $۴/۵$ ۴) -۳

درس Box

وارون (معکوس) ماتریس: برای هر ماتریس مربعی مانند A، وارون ماتریس A (در صورت وجود) ماتریسی چون B است، به طوری که $AB=BA=I$ در این صورت B را وارون A می‌نامیم و آن را با $A^{-۱}$ نشان می‌دهیم.

وارون ماتریس مربعی $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ در صورت وجود برابر است با: $A^{-۱}=\frac{۱}{ad-bc}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول (یافتن معادلهٔ ماتریس X):

طرفین معادلهٔ $AX=A-۲A^{-۱}$ را از سمت چپ در $A^{-۱}$ ضرب می‌کنیم:

$$A^{-۱}(AX)=A^{-۱}(A-۲A^{-۱}) \Rightarrow X=I-۲(A^{-۱})^{۲}$$

گام دوم (محاسبهٔ ماتریس $(A^{-۱})^{۲}$): ماتریس وارون ماتریس A را به دست می‌آوریم و آن را به توان ۲ می‌رسانیم.

$$A=\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ ۴ & ۳\end{bmatrix} \Rightarrow A^{-۱}=\frac{۱}{۶-۴}\begin{bmatrix}۳ & -۱\\ -۴ & ۲\end{bmatrix}=\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix}۳ & -۱\\ -۴ & ۲\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (A^{-۱})^{۲}=\frac{۱}{۴}\begin{bmatrix}۳ & -۱\\ -۴ & ۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳ & -۱\\ -۴ & ۲\end{bmatrix}=\frac{۱}{۴}\begin{bmatrix}۱۳ & -۵\\ -۲۰ & ۸\end{bmatrix}$$

گام سوم (محاسبهٔ ماتریس X): با توجه به رابطهٔ به دست آمده برای ماتریس X در گام اول، آن را محاسبه می‌کنیم.

$$X=I-۲(A^{-۱})^{۲} \Rightarrow X=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}-\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix}۱۳ & -۵\\ -۲۰ & ۸\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۵/۵ & ۲/۵\\ ۱۰ & -۳\end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های ستون اول ماتریس X:

$$۱۰+(-۵/۵)=۴/۵$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۳ اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & -۱ & ۱\\ ۲ & ۱ & -۳\\ ۱ & ۱ & ۱\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}۴ & ۲ & ۲\\ -۵ & ۰ & \alpha\\ ۱ & -۲ & ۳\end{bmatrix}$ و $BA=\beta I$، آن‌گاه دترمینان ماتریس $A+\frac{\alpha}{\beta}B$ کدام است؟

۱) ۴/۵ ۲) ۱۰ ۳) ۲/۵ ۴) ۵

درس Box

دترمینان ماتریس ۳×۳

۱) درایهٔ سطر iاُم و ستون jاُم ماتریس AB برابر است با حاصل‌ضرب سطر iاُم ماتریس A در ستون jاُم با ماتریس B

۲) اگر، $A=\begin{bmatrix}a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳}\\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳}\\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳}\end{bmatrix}$، آن‌گاه دترمینان این ماتریس به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$|A|=a_{۱۱}\times(-۱)^{۱+۱}\times\begin{vmatrix}a_{۲۲} & a_{۲۳}\\ a_{۳۲} & a_{۳۳}\end{vmatrix}+a_{۱۲}\times(-۱)^{۱+۲}\times\begin{vmatrix}a_{۲۱} & a_{۲۳}\\ a_{۳۱} & a_{۳۳}\end{vmatrix}+a_{۱۳}\times(-۱)^{۱+۳}\times\begin{vmatrix}a_{۲۱} & a_{۲۲}\\ a_{۳۱} & a_{۳۲}\end{vmatrix}$$

پس دترمینان برحسب سطر اول به صورت:

$$|A|=a_{۱۱}\times\begin{vmatrix}a_{۲۲} & a_{۲۳}\\ a_{۳۲} & a_{۳۳}\end{vmatrix}-a_{۱۲}\times\begin{vmatrix}a_{۲۱} & a_{۲۳}\\ a_{۳۱} & a_{۳۳}\end{vmatrix}+a_{۱۳}\times\begin{vmatrix}a_{۲۱} & a_{۲۲}\\ a_{۳۱} & a_{۳۲}\end{vmatrix}$$

توجه: در یک ماتریس ۳×۳ دلخواه می‌توان دترمینان را برحسب هر سطر یا ستونی به دست آورد که حاصل همواره عددی حقیقی و منحصربه‌فرد است، ولی بهتر است براساس سطر یا ستونی بسط دهیم که بیشترین صفر را دارا می‌باشد (تا محاسبات ساده‌تر شود). به طور کلی علامت هر درایه از ماتریس ۳×۳ برای محاسبهٔ دترمینان به صورت زیر است.

$$\begin{bmatrix}+ & - & +\\ - & + & -\\ + & - & +\end{bmatrix}$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول (محاسبهٔ α و β): مطابق فرض سؤال داریم:

$$BA=\beta I\Rightarrow\begin{bmatrix}۴ & ۲ & ۲\\ -۵ & ۰ & \alpha\\ ۱ & -۲ & ۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & -۱ & ۱\\ ۲ & ۱ & -۳\\ ۱ & ۱ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\beta & ۰ & ۰\\ ۰ & \beta & ۰\\ ۰ & ۰ & \beta\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}۱۰ & ۰ & ۰\\ -۵+\alpha & ۵+\alpha & -۵+\alpha\\ ۰ & ۰ & ۱۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\beta & ۰ & ۰\\ ۰ & \beta & ۰\\ ۰ & ۰ & \beta\end{bmatrix}$$

درایهٔ سطر اول و ستون اول ماتریس BA برابر است با $۱۰=۲+۴+۴$؛ پس:

$$\beta=۱۰$$

درایهٔ سطر دوم و ستون اول ماتریس BA برابر است با: $-۵+۰+\alpha=\alpha-۵$؛ پس:

$$\alpha-۵=۰\Rightarrow\alpha=۵$$

گام دوم (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال): با تشکیل ماتریس $A+\frac{۱}{۲}B$، دترمینان آن را حساب می‌کنیم.

$$A+\frac{۱}{۲}B=\begin{bmatrix}۱ & -۱ & ۱\\ ۲ & ۱ & -۳\\ ۱ & ۱ & ۱\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۲ & ۱ & ۱\\ -۲/۵ & ۰ & ۲/۵\\ ۰/۵ & -۱ & ۱/۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳ & ۰ & ۲\\ -۰/۵ & ۱ & -۰/۵\\ ۱/۵ & ۰ & ۲/۵\end{bmatrix}$$

دترمینان برحسب ستون دوم برابر است با:

$$\left|A+\frac{۱}{۲}B\right|=۱((۳\times۲/۵)-(۲\times۱/۵))=۴/۵$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۴ اگر $|A|A+A=\begin{bmatrix}|A| & ۰ & -۲\\ ۴ & |A| & ۳\\ ۰ & |A| & ۳\end{bmatrix}$، آن‌گاه دترمینان ماتریس وارون‌پذیر A برابر با کدام گزینه است؟

۱) ۲ ۲) ۳

۳) -۲ ۴) -۳

مشاوره این سؤال، نمونهٔ دشواری از سؤالی است که نمونهٔ آن را در کتاب درسی و امتحان‌های نهایی گذشته هم داشته‌ایم.

درس Box

اگر A ماتریسی $n\times n$، k عددی حقیقی و m عددی طبیعی باشد، آن‌گاه:

الف) $|kA|=k^n|A|$ ب) $|A^m|=|A|^m$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول (دترمینان‌گیری از طرفین تساوی):

از تساوی داده‌شده در صورت سؤال، نتیجه می‌گیریم:

$$(|A|+۱)A=\begin{bmatrix}|A| & ۰ & -۲\\ ۴ & |A| & ۳\\ ۰ & |A| & ۳\end{bmatrix}\Rightarrow |(|A|+۱)A|=\begin{vmatrix}|A| & ۰ & -۲\\ ۴ & |A| & ۳\\ ۰ & |A| & ۳\end{vmatrix}\quad (*)$$

گام دوم (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال):

با توجه به درس‌باکس و نیز بسط دترمینان سمت راست تساوی نسبت به سطر اول، از تساوی $(*)$ داریم:

$$(|A|+۱)^۳|A|=|A|(۳|A|-۳|A|)-۰-۲(۴|A|-۰)\Rightarrow (|A|+۱)^۳|A|=-۸|A|$$

$$\xrightarrow{|A|\neq ۰}(|A|+۱)^۳=-۸\Rightarrow |A|+۱=-۲\Rightarrow |A|=-۳$$

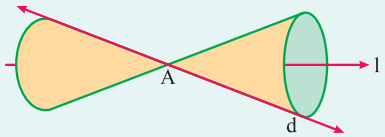
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۵ شکل حاصل از تقاطع یک سطح مخروطی و صفحه‌ای که با محور آن موازی است، کدام است؟

۱) دایره
۲) بیضی
۳) سهمی
۴) هذلولی

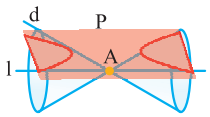
درس Box

دو خط d و l در نقطه‌ای مثل A متقاطع‌اند. اگر خط d را حول خط l دوران کامل دهیم، شکل حاصل یک سطح مخروطی نامیده می‌شود. در این حالت خط l محور، نقطهٔ A رأس و خط d مولد این سطح مخروطی است.



اگر صفحهٔ P سطح مخروطی را هم در قسمت بالایی و هم در قسمت پایینی قطع کند و از رأس آن عبور نکند، شکل حاصل را هذلولی می‌نامیم.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ مطابق شکل، صفحهٔ P با خط l که همان محور سطح مخروطی است موازی است، پس حتماً این صفحه شامل خط l نیست، پس هر دو تکهٔ بالایی و پایینی سطح مخروطی را قطع می‌کند؛ پس شکل حاصل هذلولی است.



SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

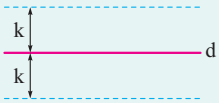
۲۶ مکان هندسی رأس سوم مثلث‌هایی از صفحه، که در ضلع **AB** مشترک هستند و تمام آن‌ها مساحت برابر دارند، کدام است؟

۱) دایره‌ای به مرکز وسط AB
۲) یک خط موازی با AB
۳) یک خط عمود بر راستای AB
۴) دو خط موازی با راستای AB

درس Box

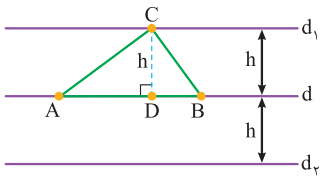
۱) اگر دو مثلث با مساحت‌های برابر، قاعده‌های مساوی داشته باشند، ارتفاع آن‌ها با هم برابر است.

۲) مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط d به فاصلهٔ ثابت k قرار دارند، دو خط موازی d، به فاصلهٔ k از آن و در دو طرف آن هستند.



پاسخ خیلی تشریحی

گام اول (پیداکردن ارتفاع مثلث): اگر مساحت تمام مثلث‌ها را S بگیریم، چنان‌چه رأس سوم یکی از مثلث‌ها C باشد، آن‌گاه چون ضلع AB در همهٔ مثلث‌ها مشترک است، برای برابربودن مساحت تمام مثلث‌ها باید ارتفاع آن‌ها نیز یکسان باشد؛ یعنی:



$$S=\frac{AB.h}{۲} \Rightarrow h=\frac{۲S}{AB}=\text{مقداری ثابت}$$

گام دوم (پیداکردن مکان هندسی): طبق گام اول متوجه شدیم که فاصلهٔ نقطهٔ C از راستای AB مقداری ثابت است؛ پس مکان هندسی آن، دو خط موازی با راستای AB و به فاصلهٔ h از آن است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۷ دو نقطهٔ $(-۱,۲)$ و $(۳,-۶)$ دو سر قطری از دایرهٔ به معادلهٔ $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ هستند، حاصل $a+b+c$ کدام است؟

۱) -۱۳ ۲) -۱۷

۳) ۱۱ ۴) ۱۵

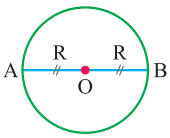
مشاوره سؤال ساده‌ای که مشابه آن را هم در کتاب درسی داریم و هم در امتحان نهایی داشته‌ایم، طبیعتاً باید سعی کنید که چنین سؤال‌هایی را از دست ندهید.

درس Box

معادلهٔ دایره‌ای به مرکز (α,β) و شعاع R به صورت $(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=R^۲$ است.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول (تعیین مختصات مرکز و طول شعاع دایره): با توجه به شکل فرضی مقابل، اگر دو نقطهٔ A و B دو سر قطر یک دایره باشند، وسط پاره‌خط AB مرکز دایره و شعاع دایره $r=\frac{۱}{۲}AB$ است. پس اگر $A(-۱,۲)$ و $B(۳,-۶)$، آن‌گاه:



$$O\left(\frac{x_A+x_B}{۲},\frac{y_A+y_B}{۲}\right)=(۱,-۲)$$

$$R=\frac{۱}{۲}\sqrt{(x_A-x_B)^۲+(y_A-y_B)^۲}=\frac{۱}{۲}\sqrt{(-۱-۳)^۲+(۲+۶)^۲}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۶+۶۴}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۸۰}=\sqrt{\frac{۱}{۴}\times ۸۰}$$

گام دوم (نوشتن معادلهٔ دایره): با معلوم‌بودن مختصات مرکز و طول شعاع، معادلهٔ دایره را می‌نویسیم:

$$(x-۱)^۲+(y+۲)^۲=۲۰$$

گام سوم (یافتن خواستهٔ سؤال): با تبدیل معادلهٔ استاندارد به معادلهٔ گسترده، داریم:

$$(x^۲-۲x+۱)+(y^۲+۴y+۴)=۲۰ \Rightarrow x^۲+y^۲-۲x+۴y-۱۵=۰ \Rightarrow a=-۲,b=۴,c=-۱۵$$

$$a+b+c=-۲+۴-۱۵=-۱۳$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۸ طول وتری از دایرهٔ $x^۲+y^۲-۴x-۸y-۱۶=۰$ که مختصات وسط آن وتر، $(-۲,۱)$ است، کدام است؟

۱) $\sqrt{۱۱}$ ۲) ۳ ۳) $۲\sqrt{۱۱}$ ۴) ۶

درس Box

معادلهٔ گستردهٔ دایره (معادلهٔ ضمنی)

۱) اگر معادلهٔ استاندارد دایره را باز کنیم، معادلهٔ ضمنی یا گستردهٔ دایره به صورت زیر خواهد بود:

$$x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$$

که در آن:

مختصات مرکز: $O(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲})$ **و شعاع**: $R=\sqrt{\frac{a^۲+b^۲-۴c}{۴}}=\sqrt{x_O^۲+y_O^۲-c}$

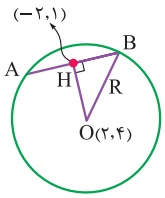
۲) اگر از مرکز دایره‌ای عمودی بر یک وتر از همان دایره رسم شود، وتر را نصف می‌کند و برعکس؛ اگر مرکز دایره‌ای را به وسط یک وتر از همان دایره وصل کنیم، بر آن وتر عمود است.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول (محاسبهٔ مختصات مرکز و شعاع دایره): طبق فرمول گستردهٔ دایره، مختصات مرکز دایره $O(۲,۴)$ و شعاع آن برابر است با:

$$R=\sqrt{۲^۲+۴^۲-(-۱۶)}=۶$$

گام دوم (محاسبهٔ فاصلهٔ وسط وتر از مرکز دایره): مطابق شکل، داریم:



$$OH=\sqrt{(۲-(-۲))^۲+(۴-۱)^۲}=۵$$

گام سوم (محاسبهٔ طول وتر): می‌دانیم اگر مرکز دایره‌ای را به وسط یک وتر از همان دایره وصل کنیم، بر آن وتر عمود است؛ پس در مثلث قائم‌الزاویهٔ OHB بنابر قضیهٔ فیثاغورس نتیجه می‌شود:

$$BH^۲=R^۲-OH^۲=۳۶-۲۵=۱۱\Rightarrow BH=\sqrt{۱۱}\Rightarrow AB=۲BH=۲\sqrt{۱۱}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۹ دو خط به معادله‌های $x-۲y+۱=۰$ و $۲x+y-۱=۰$ بر دایره‌ای که مرکز آن روی نیمساز ناحیهٔ دوم و چهارم قرار دارد، مماس‌اند. حاصل‌ضرب مقادیر قابل قبول برای شعاع این دایره کدام است؟

۱) ۰/۲ ۲) ۰/۴

۳) ۰/۶ ۴) ۰/۸

درس Box

۱) شعاع دایره بر خط مماس در نقطهٔ تماس عمود است؛ در نتیجه فاصلهٔ مرکز دایره از خط مماس با شعاع دایره برابر است.

۲) فاصلهٔ نقطه از خط:

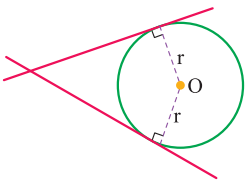
فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_۰,y_۰)$ از خط به معادلهٔ $ax+by+c=۰$ برابر است با:

$$d=\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول (محاسبهٔ مختصات مرکز دایره):

مرکز دایره روی خط $y=-x$ (نیمساز ناحیهٔ دوم و چهارم) قرار دارد، پس $O(\alpha,-\alpha)$ مرکز دایره است. حالا چون دو خط داده‌شده بر دایره مماس هستند، فاصلهٔ مرکز دایره از هر دوی آن‌ها برابر شعاع دایره است؛ پس داریم:



$$r=\frac{|۲\alpha-\alpha-۱|}{\sqrt{۵}}=\frac{|\alpha+۲\alpha+۱|}{\sqrt{۵}}\Rightarrow|\alpha-۱|=|۳\alpha+۱|\Rightarrow\begin{cases}\alpha-۱=۳\alpha+۱\Rightarrow\alpha=-۱\\ \text{یا}\\ \alpha-۱=-۳\alpha-۱\Rightarrow\alpha=۰\end{cases}$$

پس مختصات مرکز دایره $(-۱,۱)$ یا $(۰,۰)$ است.

گام دوم (محاسبهٔ شعاع دایره): با توجه به مقادیر قابل قبول برای مختصات مرکز دایره، مقادیر ممکن برای شعاع دایره را به دست می‌آوریم.

$$r=\frac{|۲\alpha-\alpha-۱|}{\sqrt{۵}}\Rightarrow\begin{cases}r=\frac{|-۲+۱-۱|}{\sqrt{۵}}=\frac{۲}{\sqrt{۵}}\\ r=\frac{|۰-۰-۱|}{\sqrt{۵}}=\frac{۱}{\sqrt{۵}}\end{cases}\Rightarrow\frac{۲}{\sqrt{۵}}\times\frac{۱}{\sqrt{۵}}=\frac{۲}{۵}=۰/۴$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۰ دو دایره به معادله‌های $x^۲+y^۲-۴x-۱۰y-۳۵=۰$ و $(x+۳)^۲+(y+۷)^۲=R^۲$ متقاطع‌اند. بیشترین مقدار صحیح R کدام است؟

۱) ۱۹ ۲) ۲۰ ۳) ۲۱ ۴) ۲۲

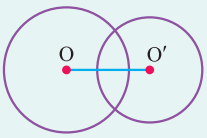
درس Box

۱) معادلهٔ استاندارد (کلاسیک) دایره:

معادلهٔ دایره‌ای که مرکزش نقطهٔ $O(\alpha,\beta)$ و شعاعش برابر R باشد، به صورت زیر است:

$$(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=R^۲$$

۲) اگر دو دایرهٔ $C(O,r)$ و $C'(O',r')$ با یکدیگر متقاطع باشند، آن‌گاه داریم:



$$|r-r'|<OO'<r+r'$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول (محاسبهٔ مختصات مرکز و شعاع دو دایره): با توجه به معادلات داده‌شده، مختصات مرکز و شعاع هر دایره را محاسبه می‌کنیم.

$$x^۲+y^۲-۴x-۱۰y-۳۵=۰ \Rightarrow O_۱(-\frac{-۴}{۲},-\frac{-۱۰}{۲})=(۲,۵), R_۱=\sqrt{۴+۲۵+۳۵}$$

$$\Rightarrow R_۱=\sqrt{۶۴}=۸$$

$$(x+۳)^۲+(y+۷)^۲=R^۲ \Rightarrow O_۲(-۳,-۷) \ , \ R_۲=R$$

گام دوم (محاسبهٔ بازهٔ ممکن برای R): شرط این‌که دو دایره متقاطع باشند، این است که:

$$|R_۲-R_۱|<O_۱O_۲<R_۲+R_۱$$

پس فاصلهٔ بین مراکز دایره‌ها $(O_۱O_۲)$ را به دست می‌آوریم.

$$O_۱O_۲=\sqrt{(۲+۳)^۲+(۵+۷)^۲}=\sqrt{۱۶۹}=۱۳$$

بنابراین داریم:

$$|R-۸|<۱۳<R+۸$$

گام سوم (محاسبهٔ خواستهٔ صورت سؤال): با توجه به نامعادلهٔ به دست آمده در گام دوم بازهٔ مقادیر ممکن برای R را به دست می‌آوریم.

$$\begin{cases}|R-۸|<۱۳ \Rightarrow -۱۳<R-۸<۱۳ \Rightarrow -۵<R<۲۱ \\ ۱۳<R+۸ \Rightarrow R>۵\end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} ۵<R<۲۱$$

بنابراین بزرگ‌ترین مقدار صحیح ممکن برای R، ۲۰ است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۱ اگر a مضرب ۷ باشد ولی مضرب ۱۴ نباشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم $a^۳ - a - ۷$ بر ۸ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۷

Hint در تقسیم بر ۸، برید سراغ زوج یا فرد بودن.

نکته باقی‌ماندهٔ تقسیم مربع هر عدد فرد بر ۸، مساوی با ۱ است.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: می‌دانیم a مضرب ۷ است، اگر a زوج باشد، مضرب ۱۴ می‌شود که با گفتهٔ سؤال در تناقض است؛ پس a فرد است.

گام دوم: طبق نکته، باقی‌ماندهٔ تقسیم مربع هر عدد فرد بر ۸، مساوی با ۱ است؛ بنابراین:

$$a^۲ \overset{۸}{\equiv} ۱ \Rightarrow a^۳ \overset{۸}{\equiv} a$$

گام سوم:

$$a^۳ - a - ۷ \overset{۸}{\equiv} a - a - ۷ \overset{۸}{\equiv} -۷ \overset{۸}{\equiv} ۱$$

تیزبازی $a = ۷$ را در عبارت داده‌شده جاگذاری می‌کنیم:

$$a^۳ - a - ۷ = (۷)^۳ - ۷ - ۷ = ۳۲۹$$

$$\begin{array}{r|l} ۳۲۹ & ۸ \\ \hline -۳۲ & ۴۱ \\ \hline ۰۹ & \\ -\ ۸ & \\ \hline \boxed{۱} \leftarrow \text{باقی‌مانده} & \end{array}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۲ کدام گزینه را نمی‌توان با مثال نقض رد کرد؟

۱) مجموع دو عدد گنگ، عددی گنگ است.

۲) مجموع یک عدد گویا و یک عدد گنگ، عددی گنگ است.

۳) حاصل‌ضرب دو عدد گنگ، عددی گنگ است.

۴) حاصل‌ضرب یک عدد گویا و یک عدد گنگ، عددی گنگ است.

Hint برو سراغ مثال نقض برای رد گزینه‌ها.

نکته

۱) حاصل‌جمع یک عدد گویا و یک عدد گنگ، عددی گنگ است.

۲) حاصل‌ضرب هر عدد گویای ناصفر در یک عدد گنگ، عددی گنگ است.

۳) اگر x یک عدد گنگ باشد، $\frac{۱}{x}$ نیز گنگ است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ رد گزینه‌ها با مثال نقض:

گزینهٔ (۱): $\alpha=\sqrt{۳}\ ,\ \beta=-\sqrt{۳} \Rightarrow \alpha+\beta=\sqrt{۳}+(-\sqrt{۳})=۰\in Q$

گزینهٔ (۳): $\alpha=\sqrt{۵}\ ,\ \beta=\sqrt{۵} \Rightarrow \alpha\beta=\sqrt{۵}.\sqrt{۵}=۵\in Q$

گزینهٔ (۴): $\alpha=۰\ ,\ \beta=\sqrt{۳} \Rightarrow \alpha\beta=۰\times\sqrt{۳}=۰\in Q$

عبارت گزینهٔ (۲) را با برهان خلف ثابت می‌کنیم.

فرض کنیم α یک عدد گویا و β یک عدد گنگ باشد. می‌خواهیم ثابت کنیم $\alpha+\beta$ گنگ است. فرض خلف: $\alpha+\beta$ گنگ نباشد. بنابراین گویا است. از طرفی می‌دانیم تفاضل دو عدد گویا عددی گویا است. پس تفاضل $\alpha+\beta$ و α گویا است؛ یعنی $\alpha+\beta-\alpha$ گویا است و از آن‌جا $\beta\in Q$ که با فرض، یعنی گنگ‌بودن β در تناقض است؛ در نتیجه فرض خلف باطل و حکم اثبات می‌گردد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۳ برای $k \in \mathbb{Z}$، اگر $۷ \mid ۴k+۳$، آن‌گاه می‌توان نتیجه گرفت $۴۹ \mid ۱۲k^۲ - ۳k + x$، مقدار x کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۱۹ ۲) ۲۶ ۳) ۳۳ ۴) ۴۰

درس Box

ویژگی‌های رابطهٔ عادکردن

۱) $a \mid b \Rightarrow a \mid mb \quad (m \in \mathbb{Z})$

۲) $a \mid b \wedge a \mid c \Rightarrow a \mid b \pm c$

۳) $a \mid b \Rightarrow a^n \mid b^n$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول:

$$۷ \mid ۴k+۳ \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} ۷^۲ \mid (۴k+۳)^۲ \Rightarrow ۴۹ \mid ۱۶k^۲ + ۲۴k + ۹ \quad (*)$$

گام دوم:

$$۷ \mid ۴k+۳ \xrightarrow[\times ۷]{\text{طرفین}} ۴۹ \mid ۲۸k+۲۱ \xrightarrow[k \in \mathbb{Z}]{\text{طبق ویژگی (۱)}} ۴۹ \mid (۲۸k+۲۱)k \Rightarrow ۴۹ \mid ۲۸k^۲ + ۲۱k \quad (**)$$

گام سوم: با استفاده از ویژگی (۲) داریم:

$$(*), (**) \Rightarrow \begin{cases} ۴۹ \mid ۱۶k^۲ + ۲۴k + ۹ \\ ۴۹ \mid ۲۸k^۲ + ۲۱k \end{cases} \xrightarrow{(-)} ۴۹ \mid ۱۲k^۲ - ۳k - ۹$$

$$\xrightarrow{۴۹ \mid ۴۹} ۴۹ \mid ۱۲k^۲ - ۳k - ۹ + ۴۹ \Rightarrow ۴۹ \mid ۱۲k^۲ - ۳k + ۴۰$$

تیزبازی

عدد $k = ۱$ در رابطه $۷ \mid ۴k+۳$ صدق می‌کند، پس داریم:

$$۴۹ \mid ۱۲(۱)^۲ - ۳(۱) + x \Rightarrow ۴۹ \mid x + ۹$$

در بین گزینه‌ها فقط $x = ۴۰$ در این رابطه صدق می‌کند.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۴ در عدد سه‌رقمی $\overline{abc}$ می‌دانیم $a > c$. حاصل $\overline{abc} - \overline{cba}$ را به شکل عدد سه‌رقمی $\overline{xyz}$ بنویسید. اگر $A = \overline{xyz} + \overline{zyx}$ و $d \mid A$، آن‌گاه d چند مقدار مختلف صحیح دارد؟

۱) ۶ ۲) ۹ ۳) ۱۲ ۴) ۱۸

درس Box

- باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد nرقمی $A = \overline{a_{n-1}...a_2a_1a_0}$ بر ۹:

$$A \overset{9}{\equiv} a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_{n-1}$$

- باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد nرقمی $A = \overline{a_{n-1}...a_2a_1a_0}$ بر ۱۱:

$$A \overset{11}{\equiv} a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + ... + (-1)^{n-1}a_{n-1}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول:**

$$\overline{xyz} = \overline{abc} - \overline{cba} = (100a + 10b + c) - (100c + 10b + a)$$

$$\Rightarrow \overline{xyz} = 99a - 99c = 99(a - c)$$

پس $\overline{xyz}$ مضرب ۹۹ است، یعنی بر ۹ و ۱۱ بخش‌پذیر است و به صورت $\overline{x9z}$ نوشته می‌شود که $x + z = 9$ است.

دقت کنید که اگر $a - c$ را عددی مثل n در نظر بگیریم $(1 \le n \le 9)$، $\overline{xyz}$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\overline{n00} - n = n9(9 - n) = \overline{x9z}$$

گام دوم: حال عدد A را تشکیل می‌دهیم:

$$A = \overline{x9z} + \overline{z9x} = 100x + 90 + z + 100z + 90 + x$$

$$= 101(x + z) + 180 = 909 + 180 = 1089$$

گام سوم: یعنی عدد A در هر صورت برابر ۱۰۸۹ است و عدد ۱۰۸۹ دارای ۹ مقسوم‌علیه مثبت است:

$$1089 = 99 \times 11 = 3^2 \times 11^2 \Rightarrow \text{تعداد مقسوم‌علیه‌ها} = (2+1)(2+1) = 9$$

و در نتیجه ۱۸ مقسوم‌علیه صحیح دارد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۵ در گرافی k ـ منتظم از مرتبهٔ ۶، k حداکثر مقدار ممکن را دارد. اندازهٔ این گراف کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۲ ۳) ۹ ۴) ۶

درس Box

گراف kـ منتظم: گرافی را که درجهٔ تمام رئوس آن با هم مساوی و برابر با عدد k باشند، گراف k ـ منتظم می‌نامیم.

گراف کامل: گرافی را که هر رأس آن با تمام رئوس دیگر، مجاور باشد، گراف کامل می‌نامیم. گراف کاملِ nرأسی را با K_n نمایش می‌دهیم. می‌توان گفت K_n یک گراف nرأسی و $n-1$ ـ منتظم است.

در گراف G با n رأس، درجهٔ هر رأس حداکثر $n-1$ است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: در گرافی از مرتبهٔ ۶، درجهٔ هر رأس حداکثر ۵ است؛ پس $k=5$.

گام دوم: در گراف ۵ ـ منتظم مرتبهٔ ۶ داریم:

$$۲q = ۶\times۵ \Rightarrow q = \frac{۶\times۵}{۲} = ۱۵$$

در ضمن گراف ۵ ـ منتظم مرتبهٔ ۶، همان گراف کامل $K_۶$ است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۶ در گراف G مرتبهٔ گراف ۹ و اندازهٔ آن ۱۰ است. در گراف $\bar{G}$، حداکثر چند رأس با درجهٔ ۷ داریم؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

درس Box

اگر G یک گراف nرأسی باشد، آن‌گاه:

$$q(G)+q(\bar{G})=q(K_n)=\frac{n(n-1)}{2}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

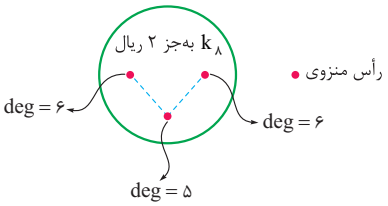
گام اول: تعداد یال‌های گراف کامل مرتبهٔ ۹ را به دست می‌آوریم:

$$q(K_9)=\frac{9\times 8}{2}=36 \Rightarrow q(G)+q(\bar{G})=36$$

گراف G دارای ۱۰ یال می‌باشد؛ بنابراین:

$$q(G)+q(\bar{G})=36 \Rightarrow 10+q(\bar{G})=36 \Rightarrow q(\bar{G})=26$$

گام دوم: گراف $\bar{G}$ دارای ۹ رأس و ۲۶ یال می‌باشد، دنبال حداکثر تعداد رأس درجهٔ ۷ هستیم. از طرفی، می‌دانیم گراف K_8 دارای ۸ رأس درجهٔ ۷ و ۲۸ یال است، یعنی ۲ یال بیشتر از گراف $\bar{G}$. برای آن‌که بیشترین رأس درجهٔ ۷ را داشته باشیم دو یال مجاور را حذف می‌کنیم:



گام سوم: از ۸ رأس گراف کامل، سه رأس کم شده و ۵ رأس درجهٔ ۷ باقی می‌ماند.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۷ در معادلهٔ سیالهٔ خطی $۴x+۱۴y=۲۲$، حداقل مقدار طبیعیِ سه‌رقمی برای x کدام است؟

۱) ۱۰۳ ۲) ۱۰۲ ۳) ۱۰۱ ۴) ۱۰۰

Hint معادلهٔ سیاله رو ساده کن و یک جواب اولیه برای آن حدس بزن.

درس Box

- فرم کلی معادلهٔ سیاله با دو مجهول x و y به صورت $ax+by=c$ است که در آن $a,b,c\in\mathbb{Z}$ هستند.
- شرط لازم و کافی برای آن‌که معادلهٔ سیالهٔ $ax+by=c$ دارای جواب باشد، آن است که $(a,b)\mid c$.
- **روش حل معادلهٔ سیاله:**

۱) تبدیل معادلهٔ سیاله به معادلهٔ هم‌نهشتی

معادلهٔ سیالهٔ $ax+by=c$ را به دو صورت می‌توان به یک معادلهٔ هم‌نهشتی (با مجهول x و y) تبدیل کرد:

$$ax+by=c \Rightarrow \begin{cases} ax\overset{b}{\equiv}c \\ by\overset{a}{\equiv}c \end{cases}$$

یکی از معادله‌ها را حل کرده و یک متغیر را به دست می‌آوریم. سپس در معادلهٔ سیاله قرار داده و متغیر دیگر را به دست می‌آوریم.

۲) حدس جواب اولیه و فرمول

فرض کنیم $(x_۰,y_۰)$ جواب اولیهٔ معادلهٔ سیالهٔ $ax+by=c$ باشد، جواب کلی معادلهٔ سیاله به صورت زیر است:

$$\begin{cases} x=x_۰+\frac{b}{d}k \\ y=y_۰-\frac{a}{d}k \end{cases},\ d=(a,b)$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: ابتدا معادلهٔ سیالهٔ $۴x+۱۴y=۲۲$ را ساده می‌کنیم:

$$۴x+۱۴y=۲۲ \xrightarrow{\div ۲} ۲x+۷y=۱۱$$

گام دوم: یک جواب اولیه برای معادلهٔ سیاله حدس می‌زنیم:

$$۲x+۷y=۱۱ \Rightarrow \begin{cases} x_۰=۲ \\ y_۰=۱ \end{cases}$$

گام سوم: جواب‌های کلی معادلهٔ سیاله را از فرمول به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} x=۷k+۲ \\ y=۱-۲k \end{cases}$$

گام چهارم: دنبال کوچک‌ترین عدد طبیعی سه‌رقمی برای x هستیم:

$$x\geq ۱۰۰ \Rightarrow ۷k+۲\geq ۱۰۰ \Rightarrow ۷k\geq ۹۸ \Rightarrow k\geq ۱۴$$

کم‌ترین مقدار k برابر ۱۴ است، بنابراین:

$$k_{min}=۱۴ \Rightarrow x=۷\times ۱۴+۲=۱۰۰$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۸ اگر ۱۴ فروردین در یک سال، روز سه‌شنبه باشد؛ دومین دوشنبهٔ شهریور همان سال، چندمِ شهریور است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

Hint

اختلاف دو تاریخ داده‌شده را به دست می‌آوریم و هم‌نهشتی به پیمانهٔ ۷ را حساب می‌کنیم.

درس Box

یکی از کاربردهای هم‌نهشتی در تقویم‌نگاری و محاسبهٔ روزهای هفته، برحسب تاریخ داده‌شده است. برای محاسبهٔ تاریخ داده‌شده کافی است باقی‌ماندهٔ تقسیم اختلاف دو تاریخ داده‌شده را بر ۷ به دست آوریم. اگر تاریخ جلوتر از تاریخ داده‌شده را می‌خواستیم باید به اندازهٔ باقی‌مانده از روز داده‌شده جلو برویم و اگر تاریخ عقب‌تر را می‌خواستیم باید به عقب برویم.

در تقویم‌نگاری به نکات زیر دقت کنید:

- هر روز از روزهای هفته، پس از گذشت ۷ روز دوباره تکرار می‌شود.
- شش ماه اول سال همگی ۳۱روزه و شش ماه دومِ سال غیر از اسفند (که به‌جز سال کبیسه ۲۹ روز است) همگی ۳۰روزه می‌باشند.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا ببینیم روز اول شهریور چه روزی از هفته است:

$$d = \underset{\text{فروردین}}{۱۷} + \underset{\text{اردیبهشت تا مرداد}}{۴\times۳۱} + \underset{\text{شهریور}}{۱} = ۱۴۲ \quad :\text{۱ شهریور}$$

$$۱۴۲ \overset{۷}{\equiv} ۲$$

از سه‌شنبه دو روز جلو می‌رویم؛ پس اول شهریور پنج‌شنبه است.

گام دوم: اول شهریور پنج‌شنبه است، اولین دوشنبه شهریور ۴ روز بعد یعنی $۴+۱=۵$ شهریور است.

بنابراین دومین دوشنبه، ۷ روز بعد (یک هفته) یعنی $۷+۵=۱۲$ شهریور است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۹ باقی‌ماندهٔ تقسیم $۷^{۱۰۰۰}+۷!$ بر ۲۴ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۱۱ ۴) ۱۷

نکته

$$\begin{cases} a \overset{m}{\equiv} b \\ a \overset{n}{\equiv} b \end{cases} \Rightarrow a \overset{[m,n]}{\equiv} b$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: $۷!$ بر ۲۴ بخش‌پذیر است؛ پس:

$$۷! \overset{۲۴}{\equiv} ۰$$

گام دوم: برای به دست آوردن باقی‌ماندهٔ تقسیم $۷^{۱۰۰۰}$ بر ۲۴، باقی‌مانده تقسیم را یک بار بر ۳ و بار دیگر بر ۸ به دست می‌آوریم:

$$\left.\begin{array}{l} ۷ \overset{۳}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۷^{۱۰۰۰} \overset{۳}{\equiv} ۱ \\ ۷ \overset{۸}{\equiv} -۱ \Rightarrow ۷^{۱۰۰۰} \overset{۸}{\equiv} ۱ \end{array}\right\} \Rightarrow ۷^{۱۰۰۰} \overset{[۳,۸]}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۷^{۱۰۰۰} \overset{۲۴}{\equiv} ۱$$

در نتیجه:

$$۷^{۱۰۰۰}+۷! \overset{۲۴}{\equiv} ۱$$

یه‌جور دیگه

$$۷^{۲} \overset{۲۴}{\equiv} ۴۹ \overset{۲۴}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\text{به توان ۵۰۰}} (۷^{۲})^{۵۰۰} \overset{۲۴}{\equiv} ۱^{۵۰۰} \Rightarrow ۷^{۱۰۰۰} \overset{۲۴}{\equiv} ۱$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۰ عدد $۲x^۲+۷x+۳$؛ $(x\in\mathbb{N})$ مضرب ۱۷ است و p مجموع ارقام بزرگ‌ترین عدد دورقمی x است. برای گراف G از مرتبهٔ p که یکی از رئوس آن a است، حاصل $|N_G(a)|+|N_{\bar{G}}(a)|$ کدام است؟

۱) ۱۷ ۲) ۱۶ ۳) ۱۵ ۴) ۱۴

همسایگی باز رأس v: مجموعهٔ رأس‌هایی از گراف G که به رأس v متصل هستند، «همسایگی باز رأس v» می‌گوییم و با $N_G(v)$ نمایش می‌دهیم؛ بنابراین:

$$|N_G(v)|=\deg(v)$$

اگر G یک گراف با n رأس و v یک رأس آن باشد و $d_G(v)$ و $d_{\bar{G}}(v)$ به ترتیب درجهٔ رأس v در گراف‌های G و $\bar{G}$ باشند، آن‌گاه:

$$d_G(v)+d_{\bar{G}}(v)=n-۱$$

نکته فرض کنیم p عددی اول باشد، آن‌گاه:

$$ab\overset{p}{\equiv}۰\Rightarrow\begin{cases}a\overset{p}{\equiv}۰\\ b\overset{p}{\equiv}۰\end{cases}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: عدد $۲x^۲+۷x+۳$ مضرب ۱۷ است، چون ۱۷ عددی اول است، داریم:

$$۲x^۲+۷x+۳\overset{۱۷}{\equiv}۰\Rightarrow(۲x+۱)(x+۳)\overset{۱۷}{\equiv}۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}۲x+۱\overset{۱۷}{\equiv}۰\Rightarrow ۲x\overset{۱۷}{\equiv}-۱\overset{۱۷}{\equiv}۱۶\xrightarrow{(۲,۱۷)=۱}x\overset{۱۷}{\equiv}۸\Rightarrow x=۱۷k+۸\\ x+۳\overset{۱۷}{\equiv}۰\Rightarrow x\overset{۱۷}{\equiv}-۳\overset{۱۷}{\equiv}۱۴\Rightarrow x=۱۷t+۱۴\end{cases}$$

گام دوم: به دنبال بزرگ‌ترین عدد دورقمی x هستیم:

$$x=۱۷k+۸\xrightarrow{k=۵}x=۱۷\times۵+۸=۹۳$$

$$x=۱۷t+۱۴\xrightarrow{t=۵}x=۱۷\times۵+۱۴=۹۹\ ✓$$

گام سوم: بزرگ‌ترین عدد دورقمی x برابر ۹۹ و مجموع ارقام آن برابر است با:

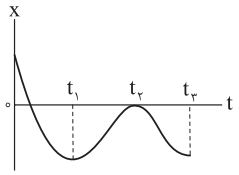
$$p=۹+۹=۱۸$$

گام چهارم: در گراف G از مرتبهٔ p داریم:

$$|N_G(a)|+|N_{\bar{G}}(a)|=d_G(a)+d_{\bar{G}}(a)=p-۱=۱۸-۱=۱۷$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۱ نمودار مکان ـ زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. کدام موارد دربارهٔ حرکت این متحرک درست است؟



الف) در بازهٔ زمانی صفر تا t_3، جهت حرکت متحرک دو مرتبه تغییر می‌کند.

ب) در بازهٔ زمانی صفر تا t_3، جهت بردار مکان متحرک دو مرتبه تغییر می‌کند.

پ) در بازهٔ زمانی صفر تا t_2، شتاب متوسط متحرک در خلاف جهت محور x است.

ت) در بازهٔ زمانی صفر تا t_1، اندازهٔ بردار مکان متحرک ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد.

۱) الف و پ ۲) ب و ت

۳) الف و ت ۴) ب و پ

درس Box

علامت سرعت هر متحرک نشان‌دهندهٔ جهت حرکت آن است. شیب خط مماس بر نمودار مکان ـ زمان، سرعت آن را نمایش می‌دهد. هر جا که شیب نمودار صعودی است، سرعت مثبت و هر جا نزولی است، سرعت منفی است. برای تغییر جهت حرکت، ابتدا باید سرعت متحرک (شیب نمودار مکان ـ زمان) صفر و سپس علامت آن عوض شود.

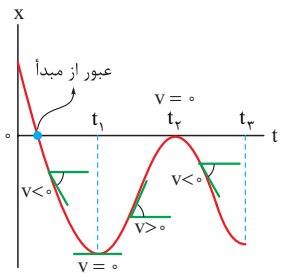
در نمودار مکان ـ زمان هر متحرک جهت بردار مکان، زمانی تغییر می‌کند که متحرک از مبدأ مکان عبور کند؛ یعنی محور t را قطع کرده و علامت آن قرینه شود.

شتاب متوسط هر متحرک از رابطهٔ $a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ به دست می‌آید که در آن Δv، تغییرات سرعت متحرک و Δt مدت‌زمان آن است.

در نمودار مکان ـ زمان، اندازهٔ بردار مکان، زمانی افزایش می‌یابد که نمودار از محور t (مبدأ مکان) دور شود و زمانی کاهش می‌یابد که نمودار به محور t نزدیک شود.

پاسخ خیلی تشریحی

درستی و نادرستی تک‌تک عبارت‌ها را بررسی می‌کنیم:



الف) درست؛ برای تغییر جهت متحرک ابتدا باید سرعت آن صفر شود (که در لحظه‌های t_1 و t_2 این اتفاق افتاده است). سپس باید علامت سرعت تغییر کند (یعنی علامت سرعت قبل و بعد از توقف یکسان نباشد). همان‌طور که می‌بینید در هر دو لحظهٔ t_1 و t_2 علامت سرعت (جهت حرکت) تغییر کرده است.

ب) نادرست؛ جهت بردار مکان، زمانی تغییر می‌کند که نمودار از مبدأ مکان عبور کند و با توجه به نمودار، متحرک فقط یک مرتبه از مبدأ عبور کرده است.

پ) نادرست؛ بین لحظه‌های ۰ و t_2 داریم:

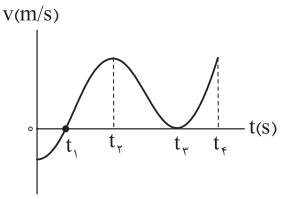
$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_0}{t_2 - t_0} \xrightarrow[v_0 < 0]{v_2 = 0} a_{av} > 0$$

یعنی شتاب متوسط متحرک در جهت محور x است.

ت) درست؛ در بازهٔ زمانی ۰ تا t_1 متحرک ابتدا به مبدأ نزدیک می‌شود، پس اندازهٔ بردار مکان کاهش می‌یابد و سپس از مبدأ دور می‌شود که اندازهٔ بردار مکان افزایش می‌یابد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۲ نمودار سرعت ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. چه تعداد از موارد زیر دربارهٔ حرکت این متحرک الزاماً درست است؟



الف) در لحظهٔ t_3، جهت حرکت و جهت شتاب متحرک تغییر می‌کند.

ب) در بازه‌ای که شتاب متحرک در خلاف جهت محور x است، متحرک در جهت محور x حرکت می‌کند.

پ) در بازهٔ زمانی صفر تا t_2، جهت بردار مکان متحرک یک مرتبه تغییر می‌کند.

ت) در بازهٔ زمانی صفر تا t_1، متحرک به صورت کندشونده در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

درس Box

در نمودار سرعت ـ زمان متحرک، هنگامی که نمودار با محور t برخورد کند سرعت صفر می‌شود. اگر محور t را قطع کرده و از آن عبور کند متحرک تغییر جهت می‌دهد زیرا علامت سرعت عوض شده است.

در این نمودار، شیب خط مماس بر نمودار، شتاب لحظه‌ای متحرک است که اگر صعودی باشد (شیب مثبت)، شتاب مثبت و اگر نزولی باشد (شیب منفی)، شتاب منفی است.

در نمودار سرعت ـ زمان هنگامی که نمودار به محور t نزدیک می‌شود (تندی در حال کاهش است)، حرکت کندشونده بوده و زمانی که نمودار از محور t دور می‌شود (تندی در حال افزایش است)، حرکت تندشونده است.

پاسخ خیلی تشریحی

درستی و نادرستی عبارت‌ها را بررسی می‌کنیم.

الف) نادرست؛ در لحظهٔ t_3 سرعت متحرک صفر شده است یعنی شرط اولیهٔ تغییر جهت را دارد اما علامت سرعت تغییر نکرده، یعنی قبل از این لحظه سرعت مثبت و پس از آن هم‌چنان سرعت مثبت است و چون جهت حرکت همان علامت سرعت است متحرک تغییر جهت نداده است. اما جهت شتاب در این لحظه تغییر کرده زیرا قبل از t_3 شتاب (شیب خط مماس) منفی است، در لحظهٔ t_3 شتاب صفر و پس از آن شتاب مثبت است.

ب) درست؛ در بازهٔ زمانی t_2 تا t_3 شیب نمودار منفی است، در نتیجه در این بازه شتاب خلاف جهت محور x است و همان‌طور که از نمودار مشخص است، در این بازه سرعت مثبت است؛ بنابراین متحرک در جهت محور x حرکت می‌کند.

پ) نادرست؛ از روی نمودار کیفی سرعت ـ زمان نمی‌توان در مورد بردار مکان و تغییر جهت آن به طور دقیق اظهار نظر کرد.

ت) درست؛ در بازهٔ زمانی ۰ تا t_1 نمودار سرعت ـ زمان متحرک به محور t نزدیک می‌شود هم‌چنین می‌توان گفت که سرعت متحرک منفی و شتاب آن مثبت است؛ بنابراین حرکت کندشونده بوده و متحرک خلاف جهت محور x حرکت می‌کند.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۳ شتاب متوسط متحرکی در ۴ ثانیهٔ اول حرکت برابر $(-۲\,m/s^۲)\vec{i}$ و در ۱۰ ثانیهٔ اول حرکت برابر $(۱\,m/s^۲)\vec{i}$ است. اگر سرعت متحرک در لحظهٔ $t_۱ = ۴\,s$ برابر $\vec{v}_۱ = (۸\,m/s)\vec{i}$ باشد، سرعت متحرک در لحظهٔ $t_۲ = ۱۰\,s$ برابر چند متر بر ثانیه است؟

۱) $۱۰\vec{i}$ ۲) $-۱۰\vec{i}$

۳) $۲۶\vec{i}$ ۴) $-۲۶\vec{i}$

Hint

از رابطهٔ $a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ تغییرات سرعت را در دو بازهٔ زمانی داده‌شده محاسبه کرده و سپس یک دستگاه تشکیل دهید تا اختلاف سرعت در بازهٔ $t_۱ = ۴\,s$ تا $t_۲ = ۱۰\,s$ به دست آید. حال می‌توانید سرعت را در $t_۲ = ۱۰\,s$ به دست آورید.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: تغییرات سرعت در دو بازهٔ زمانی ۰ تا ۴ s و ۰ تا ۱۰ s را محاسبه می‌کنیم:

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow \begin{cases} -۲ = \frac{v_۴ - v_۰}{۴} \Rightarrow v_۴ - v_۰ = -۸ \\ ۱ = \frac{v_{۱۰} - v_۰}{۱۰} \Rightarrow v_{۱۰} - v_۰ = ۱۰ \end{cases} \xrightarrow{\text{با تفریق دو رابطه از هم}} v_{۱۰} - v_۴ = ۱۸$$

گام دوم: سرعت در لحظهٔ $t_۲ = ۱۰\,s$ را به دست می‌آوریم:

$$v_{۱۰} - v_۴ = ۱۸ \xrightarrow{v_۴ = ۸\,m/s} v_{۱۰} = ۲۶\,m/s \Rightarrow \vec{v}_{۱۰} = (۲۶\,m/s)\vec{i}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۴ متحرک **A** با سرعت ثابت $\vec{i}(۱۰\ m/s)$ و متحرک **B** با سرعت ثابت $\vec{i}(۱۲\ m/s)$ در راستای محور **x** در حال حرکت هستند. اگر دو متحرک به ترتیب در لحظه‌های $t_۱ = ۰$ و $t_۲ = ۲\ s$ از مبدأ مکان عبور کنند، در چه لحظه‌ای برحسب ثانیه هر دو از یک مکان عبور می‌کنند؟

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴

درس Box

در حرکت متحرک با سرعت ثابت، معادلهٔ مکان ـ زمان (معادلهٔ حرکت) آن به صورت زیر یک معادلهٔ درجه۱ است که در این معادله، v سرعت ثابت متحرک برحسب m/s، $x_۰$ مکان شروع حرکت (مکان متحرک در مبدأ زمان)، t و x هم متغیرهای آن هستند:

$$x = vt + x_۰$$

در لحظه‌ای‌که متحرک از مبدأ عبور می‌کند $(x = ۰)$ معادلهٔ حرکت آن برابر با صفر می‌شود:

$$vt + x_۰ = ۰$$

در حرکت‌های دارای دو متحرک، برای محاسبهٔ لحظهٔ به هم رسیدن متحرک‌ها یا همان لحظه‌ای‌که دو متحرک از یک مکان عبور می‌کنند، باید معادلهٔ مکان ـ زمان آن‌ها را مساوی یکدیگر قرار دهیم:

$$x_۱ = x_۲$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا معادلهٔ حرکت هر متحرک را می‌نویسیم و لحظهٔ عبور از مبدأ را در هر معادله قرار می‌دهیم:

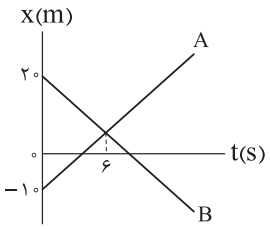
$$x = vt + x_۰ \Rightarrow \begin{cases} x_A = ۱۰t + x_{۰A} \Rightarrow ۰ = ۰ + x_{۰A} \Rightarrow x_{۰A} = ۰ \\ x_B = ۱۲t + x_{۰B} \Rightarrow ۰ = ۲۴ + x_{۰B} \Rightarrow x_{۰B} = -۲۴\ m \end{cases}$$

گام دوم: معادلهٔ حرکت دو متحرک را مساوی هم قرار می‌دهیم تا لحظهٔ به هم رسیدن آن‌ها را به دست آوریم:

$$x_A = x_B \Rightarrow ۱۰t = ۱۲t - ۲۴ \Rightarrow ۲t = ۲۴ \Rightarrow t = ۱۲s$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۵ نمودار مکان ـ زمان دو متحرک **A** و **B** که با سرعت ثابت روی محور **x** حرکت می‌کنند، به شکل زیر است. در طی حرکت دو متحرک، چند ثانیه فاصلهٔ آن‌ها کم‌تر از **۵۰ m** و بیشتر از **۱۰ m** است؟



۱) ۱۶

۲) ۱۲

۳) ۸

۴) ۴

درس Box

در مسائل دومتحرکه می‌توانیم فرض کنیم که یکی از متحرک‌ها ساکن است و دیگری به جای هر دوی آن‌ها حرکت می‌کند. به عبارت دیگر، یکی از آن‌ها را ساکن در نظر گرفته و کمیت‌هایی مثل جابه‌جایی، سرعت و ... را برای دیگری نسبت به متحرک ساکن می‌سنجیم.

در این شرایط اگر متحرک‌ها خلاف جهت یکدیگر حرکت کنند $v_{\text{نسبی}} = |v_1| + |v_2|$ و اگر متحرک‌ها هم‌جهت حرکت کنند: $v_{\text{نسبی}} = |v_1| - |v_2|$.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: با توجه به نمودار، سرعت متحرک A مثبت و سرعت متحرک B منفی است و در لحظهٔ $t = ۶\ s$ به هم می‌رسند:

$$x = vt + x_0 \Rightarrow \begin{cases} x_A = v_A t - ۱۰ \\ x_B = -v_B t + ۲۰ \end{cases}$$

$$\xrightarrow[x_A = x_B]{t = ۶\ s} ۶v_A + ۶v_B = ۳۰ \Rightarrow v_A + v_B = ۵$$

گام دوم: با توجه به این‌که سرعت نسبی متحرک‌ها را $۵\ m/s$ به دست آوردیم، فرض می‌کنیم متحرک B ساکن است و متحرک A با سرعت $۵\ m/s$ به سمت آن در حال حرکت است. فاصلهٔ اولیهٔ متحرک‌ها ۳۰ متر است، پس متحرک A باید ۲۰ متر حرکت کند تا فاصله به ۱۰ متر برسد:

$$\Delta x = v\Delta t \Rightarrow \Delta t_1 = \frac{۲۰}{۵} = ۴\ s$$

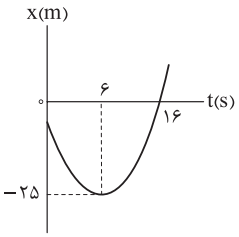
بازهٔ بعدی مورد توجه سؤال، بازه‌ای است که دو متحرک پس از عبور از کنار هم تا فاصلهٔ ۱۰ متری هم رفته‌اند و مجدداً فاصله بیشتر از ۱۰ است تا لحظه‌ای‌که فاصله به ۵۰ متر برسد، یعنی متحرک A باید ۴۰ متر را طی کند.

$$\Delta t_2 = \frac{۴۰}{۵} = ۸\ s$$

بنابراین کل زمانی‌که فاصله کم‌تر از $۵۰\ m$ و بیشتر از $۱۰\ m$ بوده است $\Delta t = ۴ + ۸ = ۱۲\ s$ می‌باشد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۶ نمودار مکان ـ زمان متحرکی که با شتاب ثابت در راستای محور x حرکت می‌کند، به صورت سهمی شکل زیر است. سرعت متوسط متحرک در ۸ s اول چند متر بر ثانیه است؟



۱) $-\vec{i}$

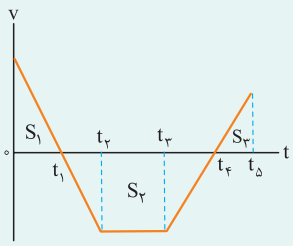
۲) $\vec{i}$

۳) $-۲\vec{i}$

۴) $۲\vec{i}$

درس Box

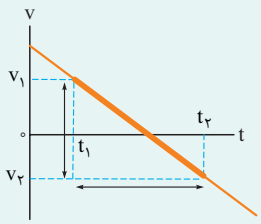
مساحت محصور بین نمودار سرعت ـ زمان و محور t در یک بازهٔ زمانی برابر جابه‌جایی متحرک است. به این صورت که مساحت‌های زیر محور t را با علامت منفی و مساحت‌های بالای محور t را با علامت مثبت قرار داده و آن‌ها را با یکدیگر جمع جبری می‌کنیم. هم‌چنین برای محاسبهٔ مسافت طی‌شده در این بازه، تمامی مساحت‌ها را (چه زیر محور t و چه بالای محور t) به صورت مثبت با یکدیگر جمع می‌کنیم:



$$\Delta x = S_۱ - S_۲ + S_۳$$

$$\ell = S_۱ + S_۲ + S_۳$$

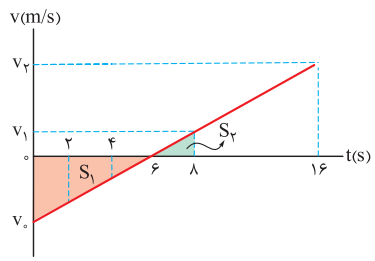
در نمودار سرعت ـ زمان، شیب نمودار بین دو نقطه $(\frac{v_۲ - v_۱}{t_۲ - t_۱})$ بیانگر شتاب متحرک است. اگر نمودار صعودی باشد، شتاب مثبت و اگر نزولی باشد، شتاب منفی است.



$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ روش اول:

گام اول: نمودار سرعت ـ زمان متحرک را رسم می‌کنیم. دقت کنید که با توجه به نمودار مکان ـ زمان، سرعت اولیه منفی و شتاب متحرک مثبت است و متحرک در لحظهٔ $t = ۶\ s$ تغییر جهت داده است. در بازهٔ زمانی $t = ۶\ s$ تا $t = ۱۶\ s$ جابه‌جایی متحرک و در نتیجه مساحت محصور بین نمودار $v - t$ و محور t برابر با ۲۵ m است.



$$\Delta x = S_{\text{مثلث}} = ۲۵ \Rightarrow ۲۵ = \frac{۱۰ \times v_۲}{۲} \Rightarrow v_۲ = ۵ m/s$$

$$a = \text{شیب نمودار} \Rightarrow a = \frac{۵}{۱۰} = \frac{۱}{۲} m/s^۲$$

گام دوم: حال می‌توانیم با محاسبهٔ سرعت در لحظه‌های $t = ۸\ s$ و $t = ۰$، جابه‌جایی متحرک در بازهٔ زمانی ۰ تا ۸ s را به دست آوریم:

$$a = \frac{v_۱}{۲} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow v_۱ = ۱ m/s \ , \ a = \frac{-v_۰}{۶} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow v_۰ = -۳ m/s$$

$$\underset{۰ \to ۸}{\Delta x} = -S_۱ + S_۲ = -(\frac{۳ \times ۶}{۲}) + (\frac{۱ \times ۲}{۲}) = -۸ m$$

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{-۸}{۸} = -۱ m/s \Rightarrow \vec{v}_{av} = (-۱ m/s)\vec{i}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

یه‌جور دیگه

گام اول: معادلهٔ جابه‌جایی در حرکت با شتاب ثابت را بین دو لحظهٔ ۶ s تا ۱۶ s می‌نویسیم و شتاب حرکت را به دست می‌آوریم:

$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_6 t \xrightarrow[v_6 = 0\,,\ t = 16-6 = 10\,s]{\Delta x = 0-(-25) = 25\,m} 25 = \frac{1}{2}a(10)^2 \Rightarrow a = \frac{1}{2}\,m/s^2$$

گام دوم: معادلهٔ سرعت را بین دو لحظهٔ ۰ s تا ۶ s می‌نویسیم و سرعت اولیه را به دست می‌آوریم:

$$v = at + v_0 \xrightarrow[t = 6-0 = 6\,s]{v = 0\,,\ a = \frac{1}{2}\,m/s^2} 0 = \frac{1}{2}\times 6 + v_0 \Rightarrow v_0 = -3\,m/s$$

گام سوم: معادلهٔ سرعت را بین دو لحظهٔ ۶ s تا ۸ s می‌نویسیم و سرعت متحرک در لحظهٔ $t = 8\,s$ را پیدا می‌کنیم:

$$v_8 = at + v_6 \xrightarrow[t = 8-6 = 2\,s]{v_6 = 0\,,\ a = \frac{1}{2}\,m/s^2} v_8 = \frac{1}{2}\times 2 + 0 \Rightarrow v_8 = 1\,m/s$$

گام چهارم: سرعت متوسط متحرک در ۸ s اول حرکت را حساب می‌کنیم:

$$v_{av} = \frac{v_0 + v_8}{2} \xrightarrow[v_8 = 1\,m/s]{v_0 = -3\,m/s} v_{av} = \frac{-3+1}{2} = -1\,m/s \Rightarrow \vec{v}_{av} = (-1\,m/s)\vec{i}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

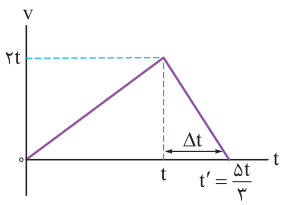
۴۷ متحرکی با شتاب ثابت $۲\ m/s^۲$ از حال سکون شروع به حرکت می‌کند و پس از مدتی با شتابی ثابت به بزرگی $۳\ m/s^۲$ حرکتش کند می‌شود تا متوقف شود. اگر اندازهٔ سرعت متوسط متحرک از لحظهٔ شروع حرکت تا توقف آن برابر $۱۵\ m/s$ باشد، مسافت طی‌شده توسط متحرک در ۱۰ ثانیهٔ دوم حرکت چند متر است؟

۱) ۱۵۰ ۲) ۲۲۵

۳) ۱۶۷/۵ ۴) ۲۳۷/۵

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا نمودار سرعت ـ زمان متحرک را با توجه به توضیحات صورت سؤال رسم می‌کنیم. اگر مدت‌زمان مرحلهٔ اول حرکت را t در نظر بگیریم، سرعت نهایی مرحلهٔ اول و سرعت اولیه مرحلهٔ دوم برابر $۲t$ خواهد بود (زیرا شتاب مرحلهٔ اول $a = ۲\ m/s^۲$ است). لحظه t' نیز روی نمودار با توجه به شیب نمودار $(a = -۳\ m/s^۲)$ به دست می‌آید:

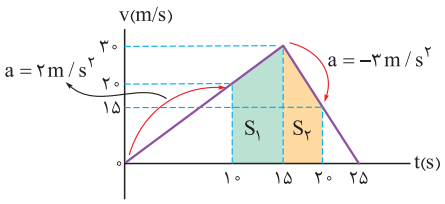


$$|a| = \text{شیب نمودار} = ۳ \Rightarrow ۳ = \frac{۲t}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{۲t}{۳} \Rightarrow t' = t + \frac{۲t}{۳} = \frac{۵t}{۳}$$

گام دوم: با توجه به این‌که سرعت متوسط در کل حرکت $۱۵\ m/s$ است می‌توانیم t را به دست آوریم:

$$\Delta x_{۰\to t'} = v_{av} t' \Rightarrow \Delta x_{۰\to t'} = ۱۵ \times \frac{۵t}{۳} \xrightarrow{\Delta x_{۰\to t'} = \text{مساحت زیر نمودار}} \frac{\frac{۵t}{۳} \times ۲t}{۲} = ۱۵ \times \frac{۵t}{۳} \Rightarrow t = ۱۵\ s$$

گام سوم: حال نمودار را به صورت زیر تکمیل می‌کنیم و مساحت زیر نمودار را در بازهٔ زمانی $t = ۱۰\ s$ تا $t = ۲۰\ s$ محاسبه می‌کنیم:

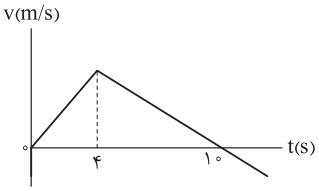


$$\ell = S_۱ + S_۲$$

$$\ell = \left(\frac{۲۰ + ۳۰}{۲} \times ۵\right) + \left(\frac{۱۵ + ۳۰}{۲} \times ۵\right) = ۲۳۷/۵\ m$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۸ نمودار سرعت ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. تندی متوسط متحرک در ۴ ثانیهٔ سوم، چند برابر اندازهٔ سرعت متوسط آن در بازهٔ زمانی $t_1 = ۲\,s$ تا $t_2 = ۶\,s$ است؟



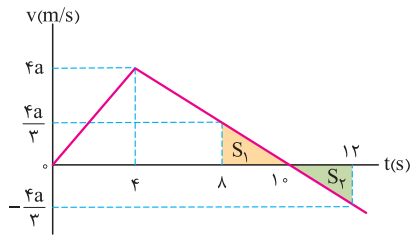
۱) $\frac{۱}{۹}$

۲) $\frac{۲}{۹}$

۳) $\frac{۲}{۱۹}$

۴) $\frac{۴}{۱۹}$

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** در بازهٔ زمانی ۰ تا ۴ s، اگر شتاب متحرک a باشد، ابتدا روی محور v نقاطی را برحسب a مشخص می‌کنیم تا تندی متوسط در ۴ ثانیهٔ سوم را به دست آوریم. خواهیم داشت:



$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow \underset{۴\,s \to ۱۰\,s}{a} = \frac{۰ - ۴a}{۱۰ - ۴} = -\frac{۴a}{۶} = -\frac{۲a}{۳}$$

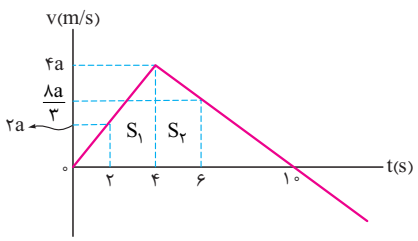
$$v_{۸s} = ۴a - ۴(\frac{۲a}{۳}) = \frac{۴a}{۳}$$

$$v_{۱۲s} = ۰ - ۲(\frac{۲a}{۳}) = -\frac{۴a}{۳}$$

$$\ell = S_۱ + S_۲ = (\frac{۲ \times \frac{۴a}{۳}}{۲}) + (\frac{۲ \times \frac{۴a}{۳}}{۲}) = \frac{۸a}{۳}$$

$$\underset{۸s \to ۱۲s}{s_{av}} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{\frac{۸a}{۳}}{۴} = \frac{۲a}{۳}$$

گام دوم: حال سرعت متوسط در بازهٔ زمانی ۲ s تا ۶ s را به صورت زیر به دست می‌آوریم:



$$v_{۲s} = ۰ + ۲(a) = ۲a$$

$$v_{۶s} = ۴a - ۲(\frac{۲a}{۳}) = \frac{۸a}{۳}$$

$$\Delta x = S_۱ + S_۲ = (\frac{۲a + ۴a}{۲} \times ۲) + (\frac{\frac{۸a}{۳} + ۴a}{۲} \times ۲) = \frac{۳۸a}{۳}$$

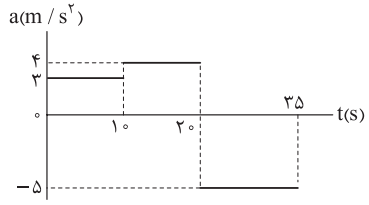
$$\underset{۲s \to ۶s}{v_{av}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\frac{۳۸a}{۳}}{۴} = \frac{۱۹a}{۶}$$

گام سوم: نسبت تندی متوسط در ۴ ثانیهٔ سوم به سرعت متوسط در بازهٔ زمانی $t = ۲\,s$ تا $t = ۶\,s$ به صورت زیر است:

$$\frac{\underset{۸s \to ۱۲s}{s_{av}}}{\underset{۲s \to ۶s}{v_{av}}} = \frac{\frac{۲a}{۳}}{\frac{۱۹a}{۶}} = \frac{۴}{۱۹}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۹ نمودار شتاب ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. اگر متحرک در مبدأ زمان با تندی $15\ m/s$، در خلاف جهت محور x از مبدأ مکان عبور کند، بیشترین فاصلهٔ متحرک از مبدأ مکان در بازهٔ زمانی $t_1 = 0$ تا $t_2 = 35\ s$ برابر چند متر است؟



۱) ۳۵۰

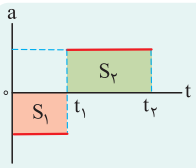
۲) ۶۵۲/۵

۳) ۳۸۷/۵

۴) ۶۹۰

درس Box

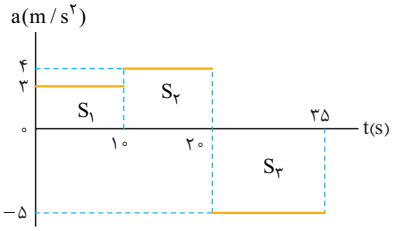
مساحت محصور بین نمودار شتاب ـ زمان و محور t در هر بازهٔ زمانی بیانگر تغییرات سرعت در آن بازهٔ زمانی است. اگر این مساحت زیر محور t باشد، تغییرات سرعت، منفی و اگر بالای محور t باشد، تغییرات سرعت، مثبت است.



$$\Delta v = -S_1 + S_2$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا با استفاده از نمودار شتاب ـ زمان، نمودار سرعت ـ زمان متحرک را رسم می‌کنیم:

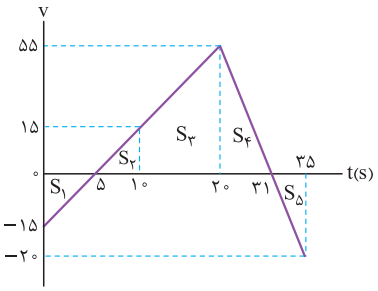


$$\underset{0\to10}{\Delta v} = S_1 = 3\times10 = 30\ m/s$$

$$\underset{10\to20}{\Delta v} = S_2 = 4\times10 = 40\ m/s$$

$$\underset{20\to35}{\Delta v} = -S_3 = -5\times15 = -75\ m/s$$

گام دوم: مساحت زیر نمودار سرعت ـ زمان که بیانگر جابه‌جایی متحرک است را در بازه‌های زمانی متوالی محاسبه می‌کنیم و مسیر حرکت متحرک را روی محور x مشخص می‌کنیم تا بیشترین فاصله از مبدأ را تعیین کنیم:



$$v = a\Delta t + v_0 \Rightarrow 0 = -5\Delta t + 55 \Rightarrow \Delta t = 11\ s$$

$$\Rightarrow t = 20 + 11 = 31\ s$$

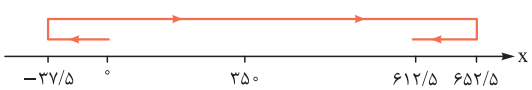
$$\underset{0\to5}{\Delta x} = -S_1 = -\frac{15\times5}{2} = -37/5\ m$$

$$\underset{5\to10}{\Delta x} = S_2 = \frac{15\times5}{2} = 37/5\ m$$

$$\underset{10\to20}{\Delta x} = S_3 = \frac{15+55}{2}\times10 = 350\ m$$

$$\underset{20\to31}{\Delta x} = S_4 = \frac{55\times11}{2} = 302/5\ m$$

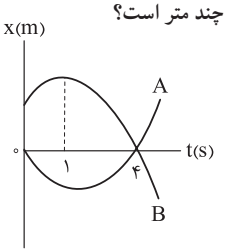
$$\underset{31\to35}{\Delta x} = -S_5 = -\frac{4\times20}{2} = -40\ m$$



همان‌طور که مشاهده می‌کنید، بیشترین فاصله از مبدأ $x = 652/5\ m$ است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۰ نمودار مکان ـ زمان دو متحرک **A** و **B** که با شتاب ثابت روی محور **x** حرکت می‌کنند، به شکل زیر است. اگر در لحظهٔ $t = ۳\ s$، تندی دو متحرک به ترتیب $۲\ m/s$ و $۴\ m/s$ باشد، بیشترین فاصلهٔ دو متحرک از یکدیگر در ۴ ثانیهٔ نخست چند متر است؟



۱) ۱۲/۵

۲) ۱۲

۳) ۱۱/۵

۴) ۱۴

درس Box

معادله‌های مکان و سرعت در حرکت با شتاب ثابت:

$x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t + x_۰$

x = مکان متحرک (m)

$x_۰$ = مکان اولیهٔ متحرک (m)

a = شتاب $(m/s^۲)$

$v = at + v_۰$

$v_۰$ = سرعت اولیه (m/s)

t = زمان (s)

v = سرعت متحرک در لحظهٔ t (m/s)

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: رأس سهمی A در لحظهٔ t_A است. در این لحظه، سرعت متحرک A صفر می‌شود:

$$t_A = \frac{۰+۴}{۲} = ۲\ s$$

$$v_A = a_A t + v_{۰A} \xrightarrow[v_A=۰]{t=t_A=۲s} ۰ = a_A \times ۲ + v_{۰A} \Rightarrow v_{۰A} = -۲a_A$$

از طرفی در لحظهٔ $t = ۳\ s$ تندی متحرک A برابر $۲m/s$ است. شیب خط مماس بر نمودار A در این لحظه مثبت است؛ پس سرعت متحرک A نیز در لحظهٔ $t = ۳\ s$ برابر با $۲m/s$ است:

$$v_A = a_A t + v_{۰A} \xrightarrow[v_A=۲m/s]{t=۳s, v_{۰A}=-۲a_A} ۲ = a_A \times ۳ - ۲a_A \Rightarrow a_A = ۲\ m/s^۲$$

$$\Rightarrow v_{۰A} = -۲ \times ۲ = -۴ m/s$$

بنابراین می‌توانیم معادلهٔ مکان متحرک A را بنویسیم:

$$x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t + x_۰$$

$$x_A = \frac{۱}{۲}a_A t^۲ + v_{۰A}t + x_{۰A} \Rightarrow x_A = \frac{۱}{۲} \times ۲t^۲ - ۴t + ۰ \Rightarrow x_A = t^۲ - ۴t$$

گام دوم: رأس سهمی B در لحظهٔ $t_B = ۱\ s$ قرار دارد. در این لحظه سرعت متحرک B صفر می‌شود:

$$v_B = a_B t + v_{۰B} \xrightarrow[v_B=۰]{t=t_B=۱s} ۰ = a_B \times ۱ + v_{۰B} \Rightarrow v_{۰B} = -a_B$$

در لحظهٔ $t = ۳\ s$ تندی متحرک B برابر $۴\ m/s$ است. ولی از آن‌جا که شیب خط مماس بر نمودار B در این لحظه، منفی است، سرعت متحرک B در لحظهٔ $t = ۳\ s$ برابر با $-۴\ m/s$ است:

$$v_B = a_B t + v_{۰B} \xrightarrow[v_B=-۴m/s]{t=۳s, v_{۰B}=-a_B} -۴ = a_B \times ۳ - a_B$$

$$\Rightarrow -۴ = ۲a_B \Rightarrow a_B = -۲\ m/s^۲ \Rightarrow v_{۰B} = -(-۲) = ۲\ m/s$$

گام سوم: با توجه به این‌که مکان متحرک B در لحظهٔ $t = ۴\ s$ به صفر می‌رسد، می‌توان نوشت:

$$x_B = \frac{۱}{۲}a_B t^۲ + v_{۰B}t + x_{۰B} \xrightarrow[a_B=-۲\ m/s^۲, v_{۰B}=۲\ m/s]{t=۴s, x_B=۰} ۰ = \frac{۱}{۲}(-۲)۴^۲ + ۲ \times ۴ + x_{۰B}$$

$$\Rightarrow ۰ = -۱۶ + ۸ + x_{۰B} \Rightarrow x_{۰B} = ۸\ m$$

اکنون می‌توانیم معادلهٔ مکان متحرک B را نیز بنویسیم:

$$x_B = \frac{۱}{۲}a_B t^۲ + v_{۰B}t + x_{۰B} \Rightarrow x_B = \frac{۱}{۲}(-۲)t^۲ + ۲t + ۸$$

$$\Rightarrow x_B = -t^۲ + ۲t + ۸$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

گام چهارم: بیشترین فاصلهٔ دو متحرک زمانی اتفاق می‌افتد که سرعت آن دو یکسان شود:

$$v_A = v_B \Rightarrow a_A t + v_{\circ A} = a_B t + v_{\circ B} \Rightarrow ۲t - ۴ = -۲t + ۲$$

$$\Rightarrow ۴t = ۶ \Rightarrow t = ۱/۵\ s$$

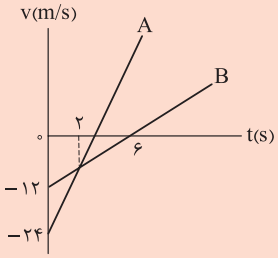
در این لحظه، مکان دو متحرک A و B را به دست آورده و فاصلهٔ آن‌ها از یکدیگر را تعیین می‌کنیم:

$$t = ۱/۵ s \Rightarrow \begin{cases} x_A = t^۲ - ۴t = (۱/۵)^۲ - ۴(۱/۵) = ۲/۲۵ - ۶ = -۳/۷۵\ m \\ x_B = -t^۲ + ۲t + ۸ = -(۱/۵)^۲ + ۲(۱/۵) + ۸ = ۸/۷۵\ m \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_B - x_A = ۸/۷۵ - (-۳/۷۵) = ۱۲/۵\ m$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۱ نمودار سرعت ـ زمان دو متحرک **A** و **B** که در راستای محور **x** حرکت می‌کنند، به شکل زیر است. در مبدأ زمان، دو متحرک به ترتیب در مکان‌های $x_1 = 0$ و $x_2 = -10\ m$ قرار دارند. در بازهٔ زمانی‌ای که دو متحرک در خلاف جهت هم حرکت می‌کنند، فاصلهٔ بین آن‌ها چند متر و چگونه تغییر می‌کند؟



۱) ۴۵، کاهش می‌یابد.

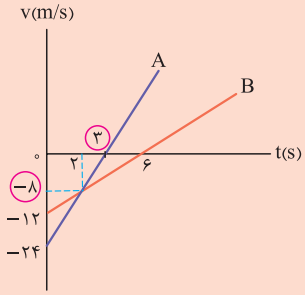
۲) ۴۵، افزایش می‌یابد.

۳) ۲۷، کاهش می‌یابد.

۴) ۲۷، افزایش می‌یابد.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: با کمک شیب نمودار متحرک B و معادلهٔ سرعت ـ زمان آن، لحظهٔ تغییر جهت متحرک A و شتاب متحرک A را به دست می‌آوریم:



$$a_B = \frac{۱۲}{۶} = ۲\ m/s^۲ \Rightarrow v_B = ۲t - ۱۲ \xrightarrow{t=۲\ s} v_B = -۸\ m/s$$

$$a_A = \frac{۱۶}{۲} = ۸\ m/s^۲ \Rightarrow v_A = ۸t - ۲۴ \xrightarrow{v_A = ۰} t = ۳\ s$$

گام دوم: معادلهٔ حرکت هر یک از متحرک‌ها را می‌نویسیم و فاصلهٔ آن‌ها را به دست می‌آوریم:

$$x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t + x_۰$$

$$x_A = \frac{۱}{۲}(۸)t^۲ - ۲۴t + ۰ \Rightarrow x_A = ۴t^۲ - ۲۴t$$

$$x_B = \frac{۱}{۲}(۲)t^۲ - ۱۲t - ۱۰ \Rightarrow x_B = t^۲ - ۱۲t - ۱۰$$

$$|x_B - x_A| = |t^۲ - ۱۲t - ۱۰ - ۴t^۲ + ۲۴t| = |-۳t^۲ + ۱۲t - ۱۰|$$

گام سوم: حال در بازهٔ زمانی‌ای که دو متحرک خلاف جهت هم حرکت می‌کنند، یعنی $t = ۳\ s$ تا $t = ۶\ s$ فاصلهٔ آن‌ها را به دست می‌آوریم:

$$t = ۳s \Rightarrow |x_B - x_A| = |-۳(۹) + ۳۶ - ۱۰| = ۱\ m$$

$$x = ۶s \Rightarrow |x_B - x_A| = |-۳(۳۶) + ۷۲ - ۱۰| = ۴۶\ m$$

بنابراین فاصلهٔ بین آن‌ها ۴۵ متر افزایش یافته است.

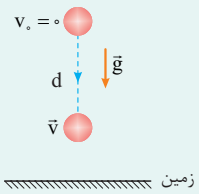
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۲ در شرایط خلأ، گلوله‌ای از ارتفاع H نسبت به سطح زمین رها می‌شود. اگر تندی متوسط گلوله در $\frac{H}{۲}$ ابتدای مسیر، برابر $۱۰\ m/s$ باشد، تندی گلوله در لحظهٔ برخورد به زمین چند متر بر ثانیه است؟ $(g = ۱۰\ m/s^۲)$

۱) $۱۰\sqrt{۲}$ ۲) $۲۰\sqrt{۲}$ ۳) ۲۰ ۴) ۴۰

درس Box

مطابق شکل زیر، اگر گلوله‌ای در شرایط خلأ رها شود و به اندازهٔ d جابه‌جا شده باشد، برای محاسبهٔ تندی گلوله در انتهای مسیر، از معادلهٔ مستقل از زمان استفاده می‌کنیم؛ بنابراین داریم:



$$v^۲ - v_۰^۲ = ۲ad \xrightarrow[a=g]{v_۰=۰} v = \sqrt{۲gd}$$

v: تندی در انتهای مسیر (m/s)، g: شتاب گرانش $(m/s^۲)$، d: مقدار جابه‌جایی از لحظهٔ رهاشدن (m)

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: تندی متوسط گلوله در $\frac{H}{۲}$ ابتدای مسیر برابر $۱۰\ m/s$ است. پس تندی گلوله در ارتفاع $\frac{H}{۲}$ برابر می‌شود با: (v' تندی گلوله در ارتفاع $\frac{H}{۲}$ است.)

$$v_{av} = \frac{v' + v_۰}{۲} \xrightarrow[v_۰ = ۰]{v_{av} = ۱۰\ m/s} ۱۰ = \frac{v' + ۰}{۲} \Rightarrow v' = ۲۰\ m/s$$

گام دوم: حالا مقدار H را حساب می‌کنیم:

$$v = \sqrt{۲gd} \xrightarrow[v' = ۲۰\ m/s]{d = \frac{H}{۲},\ g = ۱۰\ m/s^۲} ۲۰ = \sqrt{۲۰ \times \frac{H}{۲}} \Rightarrow ۱۰H = ۴۰۰ \Rightarrow H = ۴۰\ m$$

گام سوم: تندی گلوله در لحظهٔ برخورد به زمین (پس از جابه‌جایی به اندازهٔ H) را حساب می‌کنیم:

$$v = \sqrt{۲gd} \xrightarrow[d = H = ۴۰\ m]{g = ۱۰\ m/s^۲} v = \sqrt{۲ \times ۱۰ \times ۴۰} = ۲۰\sqrt{۲}\ m/s$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۳ در شرایط خلأ، از یک بلندی، ابتدا گلولهٔ **A** و پس از مدتی گلولهٔ **B** رها می‌شوند. اگر از لحظهٔ رهاشدن گلولهٔ **B** تا **۲ s** پس از آن، فاصلهٔ بین دو گلوله **۵۰ m** افزایش یابد، فاصلهٔ بین این دو گلوله در لحظهٔ رهاشدن گلولهٔ **B**، چند متر بوده است؟ **($g = ۱۰ \, m/s^۲$)**

۱) ۲۵ ۲) ۲۷/۵

۳) ۳۱/۲۵ ۴) ۳۲/۲۵

درس Box

اگر جسمی در شرایط خلأ از یک نقطه بالای سطح زمین رها شود، تندی جسم در لحظهٔ t از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$v = g t$$

v: تندی جسم (m/s) ← t: زمان (s) → g: شتاب گرانش $(m/s^۲)$

اگر جسمی در شرایط خلأ از یک نقطه بالای سطح زمین رها شود، مقدار جابه‌جایی جسم از لحظهٔ رهاشدن تا لحظهٔ t طبق رابطهٔ مقابل به دست می‌آید:

$$d = \frac{۱}{۲} g t^۲$$

d: مقدار جابه‌جایی (m) ← t: زمان (s) → g: شتاب گرانش $(m/s^۲)$

اگر دو جسم در شرایط خلأ با اختلاف زمانی t از یک نقطه بالای سطح زمین رها شوند، نسبت به هم شتاب ندارند و مقدار سرعت نسبی دو جسم (تندی جسم اول در لحظهٔ رهاشدن جسم دوم) طبق رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$v_{نسبی} = g t$$

$v_{نسبی}$: سرعت نسبی دو جسم (m/s) ← t: اختلاف زمانی رهاشدن دو جسم (s) → g: شتاب گرانش $(m/s^۲)$

از طرفی فاصلهٔ دو جسم در هر ثانیه به اندازهٔ $v_{نسبی}$ تغییر می‌کند؛ بنابراین اگر از لحظهٔ رهاشدن جسم دوم مدت‌زمان Δt گذشته باشد، داریم:

$$d_{نسبی} = v_{نسبی} \Delta t$$

$d_{نسبی}$: جابه‌جایی نسبی دو جسم (m) ← Δt: مدت زمان سپری‌شده از لحظهٔ رهاشدن جسم دوم (s) → $v_{نسبی}$: سرعت نسبی دو جسم (m/s)

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: سرعت نسبی دو جسم را به دست می‌آوریم. با توجه به این‌که دو ثانیه پس از رهاشدن گلولهٔ **B**، فاصلهٔ دو گلوله ۵۰ متر افزایش یافته است، داریم:

$$d_{نسبی} = v_{نسبی} \Delta t \xrightarrow[\Delta t = ۲ s]{d_{نسبی} = ۵۰ m} ۵۰ = v_{نسبی} \times ۲ \Rightarrow v_{نسبی} = ۲۵ \, m/s$$

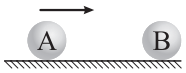
بنابراین در لحظهٔ رهاشدن گلولهٔ **B**، تندی گلولهٔ **A** (سرعت نسبی) $۲۵ \, m/s$ بوده است.

گام دوم: مقدار جابه‌جایی گلولهٔ **A** از لحظهٔ رهاشدن تا لحظهٔ رهاشدن گلولهٔ **B** (فاصلهٔ دو گلوله در لحظهٔ رهاشدن گلولهٔ **B**) را حساب می‌کنیم. با توجه به تندی گلولهٔ **A** در لحظهٔ رهاشدن گلولهٔ **B** داریم:

$$v = \sqrt{۲gd} \xrightarrow[g = ۱۰ m/s^۲]{v = ۲۵ m/s} ۲۵ = \sqrt{۲ \times ۱۰ \times d} \Rightarrow ۲۰ d = ۶۲۵ \Rightarrow d = ۳۱/۲۵ \, m$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۴ در شکل زیر، گوی **A** به جرم ۴۰۰ g که روی سطح افقی بدون اصطکاکی در حال حرکت است، با تندی ۱۲ m / s به گوی ساکن **B** برخورد کرده و با تندی ۴ m / s در همان راستا باز می‌گردد. اگر جرم گوی **B** برابر ۸۰۰ g باشد، تندی آن پس از برخورد، به چند متر بر ثانیه می‌رسد؟



۱) ۸ ● ۲) ۴

۳) ۱۶ ۴) ۲

درس Box

طبق قانون دوم نیوتون، شتاب یک جسم با نیروی خالص وارد بر آن رابطهٔ مستقیم و با جرم جسم رابطهٔ معکوس دارد؛ بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$\text{شتاب } (m/s^2) \leftarrow a = \frac{F_{net}}{m} \quad \begin{matrix} \uparrow \text{ نیروی خالص } (N) \\ \downarrow \text{ جرم } (kg) \end{matrix}$$

طبق قانون سوم نیوتون، اگر جسم (۱) بر جسم (۲) نیرویی وارد کند (کنش)، جسم (۲) بر جسم (۱) همان مقدار نیرو را در خلاف جهت وارد می‌کند؛ بنابراین داریم:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ طبق قانون سوم نیوتون می‌توانیم بنویسیم:

$$F_{AB} = F_{BA}$$

از طرفی طبق قانون دوم نیوتون داریم:

$$a = \frac{F_{net}}{m} \Rightarrow \frac{a_B}{a_A} = \frac{F_B}{F_A} \times \frac{m_A}{m_B} \xrightarrow[m_A = 0/4\ kg\ ,\ m_B = 0/8\ kg]{F_B = F_A} \frac{a_B}{a_A} = 1 \times \frac{0/4}{0/8} = \frac{1}{2}$$

در نهایت می‌توانیم بنویسیم:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \xrightarrow{\text{یکسان } \Delta t} \frac{|a_B|}{|a_A|} = \frac{|\Delta v_B|}{|\Delta v_A|} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{v_B - 0}{|-4-12|} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{v_B}{16} \Rightarrow v_B = 8\ m/s$$

یه‌جور دیگه

با توجه به این‌که اصطکاک نداریم، درمی‌یابیم انرژی مکانیکی پایسته است؛ بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$E_1 = E_2 \Rightarrow K_{1A} + \cancel{K_{1B}^{0}} = K_{2A} + K_{2B} \Rightarrow K_{1A} - K_{2A} = K_{2B} \xrightarrow{K = \frac{1}{2}mv^2} \frac{1}{2}m_A(v_{1A}^2 - v_{2A}^2) = \frac{1}{2}m_B v_{2B}^2$$

$$\xrightarrow[v_{2B} = 4\ m/s\ ,\ m_B = 0/8\ kg]{m_A = 0/4\ kg\ ,\ v_{1A} = 12\ m/s} \frac{1}{2} \times 0/4 \underbrace{(12^2 - 4^2)}_{128} = \frac{1}{2} \times 0/8 \times v_{2B}^2 \Rightarrow 25/6 = 0/4 \times v_{2B}^2 \Rightarrow v_{2B}^2 = \frac{256}{4}$$

$$\Rightarrow v_{2B} = \frac{16}{2} = 8\ m/s$$

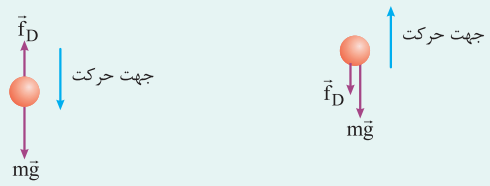
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۵ گلوله‌ای را در راستای قائم رو به بالا پرتاب می‌کنیم. اگر بزرگی شتاب گلوله هنگام بالارفتن ۴ برابر بزرگی شتاب آن، هنگام پایین‌آمدن باشد، اندازهٔ نیروی مقاومت هوای وارد بر گلوله در طی این حرکت، با فرض ثابت‌بودن، چند برابر وزن گلوله است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۲}{۵}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

درس Box

نیروی مقاومت هوا، همواره در خلاف جهت حرکت جسم است؛ بنابراین اگر جسمی رو به بالا حرکت کند، نیروی مقاومت هوا به سمت پایین و اگر جسم رو به پایین حرکت کند، نیروی مقاومت هوا رو به بالا خواهد بود. مطابق شکل زیر داریم:



$F_{net} = mg - f_D$ $\qquad$ $F_{net} = mg + f_D$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ با توجه به یکسان‌بودن جرم جسم در هر دو حالت، طبق قانون دوم نیوتون، نسبت مقدار نیروی خالص در دو حالت همان نسبت مقدار شتاب در دو حالت است؛ بنابراین داریم:

$$\frac{F_{net_{\text{بالا}}}}{F_{net_{\text{پایین}}}} = \frac{a_{\text{بالا}}}{a_{\text{پایین}}} \xrightarrow{a_{\text{بالا}} = ۴a_{\text{پایین}}} \frac{F_{net_{\text{بالا}}}}{F_{net_{\text{پایین}}}} = ۴$$

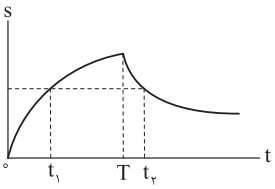
حال نسبت نیروی مقاومت هوا به وزن گلوله را حساب می‌کنیم:

$$\begin{cases} F_{net_{\text{بالا}}} = mg + f_D \\ F_{net_{\text{پایین}}} = mg - f_D \end{cases}$$

$$\frac{F_{net_{\text{بالا}}}}{F_{net_{\text{پایین}}}} = ۴ \Rightarrow \frac{mg + f_D}{mg - f_D} = ۴ \Rightarrow ۴mg - ۴f_D = mg + f_D \Rightarrow ۳mg = ۵f_D \Rightarrow f_D = \frac{۳}{۵}mg$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۶ نمودار تندی ـ زمان چتربازی که در مبدأ زمان از یک بلندی رها شده و در لحظهٔ T چتر خود را باز کرده، به شکل زیر است. اگر اندازهٔ نیروی مقاومت هوای وارد بر چترباز در دو لحظهٔ t_1 و t_2، به ترتیب برابر f_1 و f_2 باشد، کدام مقایسه درست است؟ (وزن چترباز به همراه تجهیزات او برابر W است.)



۱) $f_1 < W < f_2$

۲) $f_1 = f_2 < W$

۳) $W < f_1 = f_2$

۴) $f_2 < W < f_1$

درس Box

اگر جسمی به صورت تندشونده در حال حرکت باشد، برایند نیروهای همسو با حرکت جسم بزرگ‌تر از برایند نیروهای خلاف جهت حرکت است ولی اگر جسمی به صورت کندشونده در حال حرکت باشد، برایند نیروهای خلاف جهت حرکت بزرگ‌تر از برایند نیروهای همسو با حرکت است. به عنوان مثال در حرکت چترباز به سمت پایین، اگر چترباز تندشونده رو به پایین حرکت کند، نیروی همسوی حرکت (وزن) بزرگ‌تر از نیروی خلاف جهت حرکت (مقاومت هوا) است و اگر کندشونده رو به پایین حرکت کند، نیروی خلاف جهت حرکت (مقاومت هوا) بزرگ‌تر از نیروی همسوی حرکت (وزن) است؛ بنابراین طبق الگوی زیر داریم:

حرکت رو به پایین چترباز:
تندشونده $\Leftarrow mg > f_D$
کندشونده $\Leftarrow f_D > mg$

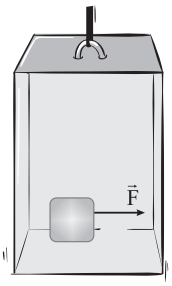
پاسخ خیلی تشریحی

طبق درس‌باکس و با توجه به این‌که در لحظهٔ t_1 چترباز به صورت تندشونده (نمودار تندی ـ زمان در حال دورشدن از محور زمان) حرکت می‌کند، در می‌یابیم $f_1 < W$ است. از طرفی در لحظهٔ t_2 با توجه به این‌که چترباز به صورت کندشونده (نمودار تندی ـ زمان در حال نزدیک‌شدن به محور زمان) رو به پایین حرکت می‌کند، در می‌یابیم $f_2 > W$ است؛ بنابراین داریم:

$$f_1 < W < f_2$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۷ در شکل زیر، نیروی افقی $\vec{F}$ به جسمی که درون آسانسور قرار دارد، وارد می‌شود. آسانسور در حالت اول با شتاب رو به پایین به بزرگی $1\ m/s^2$ و در حالت دوم با شتاب رو به بالا به بزرگی $2\ m/s^2$ حرکت می‌کند. حداقل مقدار F برای به حرکت درآمدن جسم در کف آسانسور، در حالت اول چند برابر حالت دوم است؟ ($g = 10\ N/kg$ و $\mu_s \neq 0$)



همان نیروی اصطکاک ایستایی بیشینه $(f_{s,max})$ است.

۱) $\frac{11}{8}$

۲) $\frac{11}{12}$

۳) $\frac{9}{8}$

۴) $\frac{3}{4}$

درس Box

برای محاسبهٔ نیروی عمودی سطح وارد بر جسمی که بر روی کف آسانسور قرار دارد، از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

$F_N = m(g \pm a)$

F_N: نیروی عمودی سطح کف آسانسور (N)، m: جرم (kg)، g: شتاب گرانش (m/s^2)، a: مقدار شتاب آسانسور (m/s^2)

جهت شتاب آسانسور: رو به بالا ↑ (+)، رو به پایین ↓ (−)

بیشینهٔ نیروی اصطکاک ایستایی از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$f_{s,max} = \mu_s F_N$

$f_{s,max}$: بیشینهٔ نیروی اصطکاک ایستایی (N)، μ_s: ضریب اصطکاک ایستایی، F_N: نیروی عمودی سطح (N)

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: نیروی عمودی سطح کف آسانسور را در دو حالت حساب می‌کنیم:

حالت اول: آسانسور با شتاب رو به پایین $1\ m/s^2$ حرکت می‌کند:

$$F_{N_1} = m(g - a_1) \xrightarrow[a_1 = 1\ m/s^2]{g = 10\ m/s^2} F_{N_1} = m(10 - 1) = 9\ m$$

حالت دوم: آسانسور با شتاب رو به بالای $2\ m/s^2$ حرکت می‌کند:

$$F_{N_2} = m(g + a_2) \xrightarrow[a_2 = 2\ m/s^2]{g = 10\ m/s^2} F_{N_2} = m(10 + 2) = 12\ m$$

گام دوم: نسبت حداقل نیروی لازم برای به حرکت درآمدن جسم $(f_{s,max})$ را در دو حالت به دست می‌آوریم:

$$F_{min} = f_{s,max} = \mu_s F_N \xrightarrow{\mu_{s_1} = \mu_{s_2}} \frac{F_{min_1}}{F_{min_2}} = \frac{F_{N_1}}{F_{N_2}} \xrightarrow[F_{N_2} = 12\ m]{F_{N_1} = 9\ m} \frac{F_{min_1}}{F_{min_2}} = \frac{9m}{12m} = \frac{3}{4}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۸ یک انتهای فنر سبکی به طول $۳۰\ cm$ و ثابت $۵۱۰\ N/m$ به سقف آسانسوری بسته شده و از انتهای دیگر آن جسمی به جرم $۱۲۰۰\ g$ آویزان است. در حالتی که شتاب آسانسور، رو به پایین و اندازهٔ آن برابر $۱/۵\ m/s^۲$ است، طول فنر به چند سانتی‌متر می‌رسد؟ $(g = ۱۰\ m/s^۲)$

۱) ۲۶ ۲) ۲۸ ۳) ۳۲ ۴) ۳۴

درس Box

اگر جسمی از فنر متصل به سقف آسانسور، آویزان باشد، نیروی کشسانی فنر وارد بر جسم از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$F_e = m(g \pm a)$

F_e: نیروی کشسانی فنر (N)، m: جرم (kg)، g: مقدار شتاب آسانسور $(m/s^۲)$، a: مقدار شتاب جسم $(m/s^۲)$

جهت شتاب: شتاب گرانش رو به پایین، شتاب رو به بالا

اگر طول فنری نسبت به حالت عادی به اندازهٔ x تغییر کند، نیروی کشسانی فنر طبق رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$F_e = kx$

F_e: نیروی کشسانی فنر (N)، x: تغییر طول (m)، k: ثابت فنر (N/m)

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: نیروی کشسانی فنر را حساب می‌کنیم. طبق رابطه‌ای که در درس‌باکس آوردیم، می‌توانیم بنویسیم:

$$F_e = m(g-a) \xrightarrow[g=۱۰\ m/s^۲\ ,\ a=۱/۵\ m/s^۲]{m=۱۲۰۰\ g=۱/۲\ kg} F_e = ۱/۲\underbrace{(۱۰-۱/۵)}_{۸/۵} = ۱۰/۲\ N$$

جهت شتاب آسانسور رو به پایین:

گام دوم: تغییر طول فنر را به دست می‌آوریم:

$$F_e = kx \xrightarrow[k=۵۱۰\ N/m]{F_e=۱۰/۲\ N} ۱۰/۲ = ۵۱۰ \times x \Rightarrow x = ۰/۰۲\ m = ۲\ cm$$

گام سوم: طول نهایی فنر را به دست می‌آوریم:

$$x = L_۲ - L_۱ \xrightarrow[L_۱=۳۰\ cm]{x=۲\ cm} ۲ = L_۲ - ۳۰ \Rightarrow L_۲ = ۳۲\ cm$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۹ دو جسم مکعب شکل **A** و **B** با تندی‌های اولیهٔ $v_A = v$ و $v_B = ۲v$ مماس بر یک سطح افقی پرتاب شده و به ترتیب پس از طی مسافت‌های ℓ_A و ℓ_B متوقف می‌شوند. اگر جرم جسم **B**، ۳ برابر جرم جسم **A** و ضریب اصطکاک جنبشی جسم **A**، $\frac{۳}{۲}$ برابر ضریب اصطکاک جنبشی جسم **B** باشد، $\frac{\ell_A}{\ell_B}$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۳}{۸}$ ۴) $\frac{۸}{۳}$

درس Box

اگر جسمی روی یک سطح افقی دارای اصطکاک پرتاب شود، مسافت توقف جسم از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\ell = \frac{v_۰^۲}{۲\mu_k g}$$

$v_۰$: تندی اولیه (m/s)، g: شتاب گرانش (m/s²)، μ_k: ضریب اصطکاک جنبشی، ℓ: مسافت توقف (m)

$$F_{net} = ma \Rightarrow -f_k = -\mu_k F_N = -\mu_k mg = ma \Rightarrow a = -\mu_k g$$

$$v^۲ - v_۰^۲ = ۲a\Delta x \xrightarrow[v=۰]{a=-\mu_k g} -v_۰^۲ = ۲(-\mu_k g)\Delta x \xrightarrow{\Delta x=\ell} v_۰^۲ = ۲\mu_k g\ell \Rightarrow \ell = \frac{v_۰^۲}{۲\mu_k g}$$

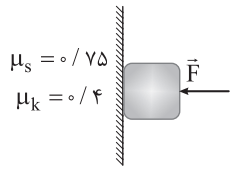
با توجه به رابطهٔ بالا درمی‌یابیم که مسافت توقف جسم به جرم جسم ربطی ندارد.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ طبق رابطهٔ $\ell = \frac{v_۰^۲}{۲\mu_k g}$، نسبت $\frac{\ell_A}{\ell_B}$ را به دست می‌آوریم:

$$\frac{\ell_A}{\ell_B} = \left(\frac{v_{۰A}}{v_{۰B}}\right)^۲ \times \frac{\mu_{k_B}}{\mu_{k_A}} \xrightarrow[\mu_{k_A} = \frac{۳}{۲}\mu_{k_B}]{v_{۰A}=v\ ,\ v_{۰B}=۲v} \frac{\ell_A}{\ell_B} = \left(\frac{v}{۲v}\right)^۲ \times \frac{\mu_{k_B}}{\frac{۳}{۲}\mu_{k_B}} \Rightarrow \frac{\ell_A}{\ell_B} = \left(\frac{۱}{۲}\right)^۲ \times \frac{۱}{\frac{۳}{۲}} = \frac{۱}{۴} \times \frac{۲}{۳} = \frac{۱}{۶}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶۰ در شکل زیر، وزن جسم ۱۰ N و اندازهٔ نیروی افقی $\vec{F}$ برابر ۲۴ N است. اندازهٔ نیرویی که جسم به دیوار قائم وارد می‌کند، چند نیوتون است؟ (جسم در ابتدا ساکن است.)



۱) ۲۶ ۲) ۳۰ ۳) ۲۴ ۴) ۳۴

Hint

اول نیروی عمودی سطح وارد بر جسم رو حساب کن. بعدش نیروی $f_{s,max}$ رو به دست بیار و با مقایسهٔ نیروی محرک (یعنی در این‌جا وزن) با $f_{s,max}$ ببین جسم ساکن می‌مونه یا حرکت می‌کنه. بعدش نیروی اصطکاک رو حساب کن. در نهایت با داشتن نیروی اصطکاک و F_N نیروی جسم به سطح دیوار رو به دست بیار.

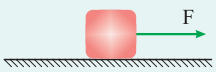
درس Box

بیشینهٔ نیروی اصطکاک ایستایی که سطح بر جسم وارد می‌کند، از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$f_{s,max} = \mu_s F_N$$

ضریب اصطکاک ایستایی — بیشینهٔ نیروی اصطکاک ایستایی (N) — نیروی عمودی سطح N

اگر به جسمی ساکن نیرویی وارد شود که جسم را تحریک به حرکت کند، مطابق شکل زیر، دو حالت داریم:



۱) اگر $F \le f_{s,max}$ باشد، جسم همچنان ساکن می‌ماند؛ بنابراین اصطکاک از نوع ایستایی بوده و مقدار آن برابر است با:

$$f_s = F$$

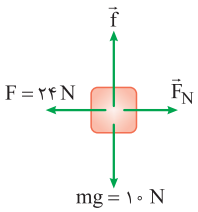
۲) اگر $F > f_{s,max}$ باشد، جسم حرکت می‌کند؛ بنابراین اصطکاک از نوع جنبشی بوده و مقدار آن برابر است با:

$$f_k = \mu_k F_N$$

ضریب اصطکاک جنبشی — نیروی اصطکاک جنبشی (N) — نیروی عمودی سطح (N)

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم و مقدار نیروی عمودی سطح را به دست می‌آوریم:



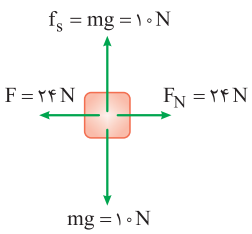
$$F_N = F = ۲۴\ N$$

گام دوم: نیروی اصطکاک ایستایی بیشینه را حساب می‌کنیم:

$$f_{s,max} = \mu_s F_N \xrightarrow[F_N = ۲۴\,N]{\mu_s = ۰/۷۵} f_{s,max} = ۰/۷۵ \times ۲۴ = ۱۸\ N$$

گام سوم: باید تعیین کنیم جسم ساکن است یا حرکت می‌کند. با توجه به این‌که نیروی محرک که در این‌جا نیروی وزن $(mg = ۱۰\ N)$ است، کوچک‌تر از نیروی $f_{s,max}$ است، در می‌یابیم جسم همچنان ساکن می‌ماند.

گام چهارم: نیروی اصطکاک وارد بر جسم را حساب می‌کنیم. با توجه به این‌که جسم ساکن است، داریم:



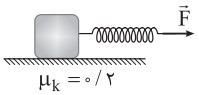
$$F_s = mg = ۱۰N$$

گام پنجم: نیروی جسم بر دیوار را که طبق قانون سوم نیوتون مقدار آن با مقدار نیروی دیوار بر جسم برابر است، به دست می‌آوریم:

$$R = \sqrt{F_N^۲ + f_s^۲} \xrightarrow[f_s = ۱۰\,N]{F_N = ۲۴\,N} R = \sqrt{۲۴^۲ + ۱۰^۲} = ۲\underbrace{\sqrt{۱۲^۲ + ۵^۲}}_{۱۳} = ۲ \times ۱۳ = ۲۶\ N$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶۱ جسمی به جرم $5\ kg$ از انتهای فنر سبک و قائمی آویزان است و در حالت تعادل، تغییر طول فنر نسبت به حالت عادی آن $12\ cm$ است. اگر مطابق شکل مقابل، این جسم را توسط همین فنر، روی یک سطح افقی، با شتاب $3\ m/s^2$ به حرکت در آوریم، طول فنر نسبت به حالت عادی چند سانتی‌متر افزایش می‌یابد؟ $(g = 10\ N/kg)$



$F_e = mg$

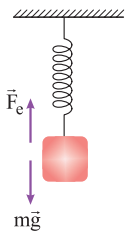
۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

Hint

با توجه به تعادل جسم، نیروی کشسانی فنر رو به دست بیار و با داشتن نیروی کشسانی و تغییر طول فنر، ثابت فنر رو حساب کن. بعدش نیروی اصطکاک جنبشی و نیروی خالص را در حالت دوم حساب کن و پس از آن نیروی کشسانی فنر را در حالت جدید به دست بیار. در نهایت با داشتن نیروی کشسانی فنر و ثابت فنر، تغییر طول فنر رو حساب کن.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: نیروی کشسانی فنر را در حالت اول به دست می‌آوریم. با توجه به تعادل جسم آویزان از فنر، داریم:



تعادل: $F_e = mg = 50\ N$

گام دوم: ثابت فنر را حساب می‌کنیم:

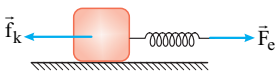
$$F_e = kx \xrightarrow[x=12\ cm]{F_e=50\ N} 50 = k \times 12 \Rightarrow k = \frac{50}{12} = \frac{25}{6}\ N/cm$$

گام سوم: نیروی اصطکاک و نیروی خالص را در حالت دوم حساب می‌کنیم:

$$f_k = \mu_k F_N \xrightarrow{F_N=mg} f_k = \mu_k mg \xrightarrow[\mu_k=0/2]{mg=50\ N} f_k = 0/2 \times 50 = 10\ N$$

$$F_{net} = ma \xrightarrow[a=3\ m/s^2]{m=5\ kg} F_{net} = 5 \times 3 = 15\ N$$

گام چهارم: با داشتن f_k و F_{net}، نیروی کشسانی فنر را در حالت دوم حساب می‌کنیم:



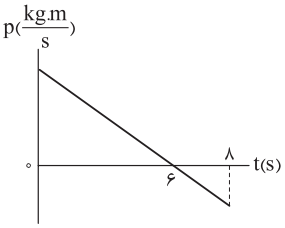
$$F_{net} = F_e - f_k \xrightarrow[f_k=10\ N]{F_{net}=15\ N} 15 = F_e - 10 \Rightarrow F_e = 25\ N$$

گام پنجم: تغییر طول فنر را در حالت دوم حساب می‌کنیم:

$$F_e = kx \xrightarrow[k=\frac{25}{6}\ N/cm]{F_e=25\ N} 25 = \frac{25}{6} \times x \Rightarrow x = 6\ cm$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶۲ نمودار تکانه ـ زمان جسمی به جرم ۵۰۰ g، به شکل زیر است. اگر در ۸ ثانیهٔ اول، انرژی جنبشی جسم ۳۲ J تغییر کند، بزرگی نیروی خالص متوسط وارد بر جسم در این مدت چند نیوتون است؟



۱) ۱

۲) ۱/۵

۳) ۲

۴) ۴

درس Box

شیب خط واصل دو نقطه از نمودار تکانه ـ زمان برابر است با نیروی خالص متوسط در آن بازهٔ زمانی و داریم:

$$F_{av} = \frac{\Delta p}{\Delta t}$$

اگر جسمی به جرم m دارای تکانهٔ p باشد، انرژی جنبشی جسم از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$K = \frac{p^2}{2m}$$

(J) انرژی جنبشی ← K

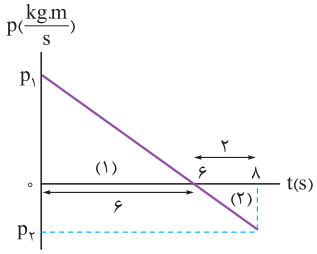
تکانه $(\frac{kg.m}{s})$ ↑ p

↓ جرم (kg) m

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: نسبت تکانهٔ جسم در دو لحظهٔ $t_1 = 0$ و $t_2 = 8s$ را با توجه به نمودار $p-t$ زیر و از تشابه دو مثلث به دست می‌آوریم:

مثلث‌های (۱) و (۲) متشابه‌اند: $\frac{|p_2|}{p_1} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \xrightarrow{p_2<0} p_2 = -\frac{1}{3}p_1$



گام دوم: مقادیر p_1 و p_2 را طبق رابطهٔ $K = \frac{p^2}{2m}$ به دست می‌آوریم:

$$K_2 - K_1 = \frac{p_2^2}{2m} - \frac{p_1^2}{2m} = \frac{p_2^2 - p_1^2}{2m} \xrightarrow[p_2=-\frac{1}{3}p_1,\ m=500g=0/5kg]{K_2-K_1=-32J} -32 = \frac{\frac{1}{9}p_1^2 - p_1^2}{2\times 0/5}$$

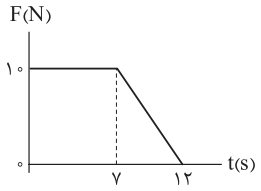
$$\Rightarrow -32 = -\frac{8}{9}p_1^2 \Rightarrow p_1^2 = 36 \Rightarrow p_1 = 6\frac{kg.m}{s},\ p_2 = -\frac{1}{3}p_1 = -\frac{1}{3}\times 6 = -2\frac{kg.m}{s}$$

گام سوم: نیروی خالص متوسط در بازهٔ زمانی $t_1 = 0$ تا $t_2 = 8s$ را حساب می‌کنیم:

$$F_{net_{av}} = \frac{\Delta p}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t=8s]{\Delta p=p_2-p_1=-2-6=-8\frac{kg.m}{s}} F_{net_{av}} = -\frac{8}{8} = -1N \Rightarrow |F_{net_{av}}| = 1N$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶۳ نمودار نیروی خالص وارد بر جسمی به جرم ۶ kg که در راستای محور x حرکت می‌کند، برحسب زمان، به شکل زیر است. اگر تکانهٔ جسم در لحظهٔ $t = ۱۰\ s$ برابر $(۱۴۵\ \frac{kg.m}{s})\vec{i}$ باشد، سرعت اولیهٔ جسم چند متر بر ثانیه است؟



۱) $-۹\vec{i}$

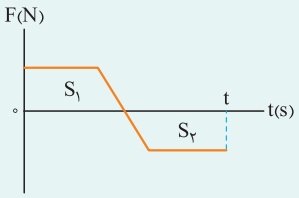
۲) $-۸\vec{i}$

۳) $۸\vec{i}$

۴) $۹\vec{i}$

درس Box

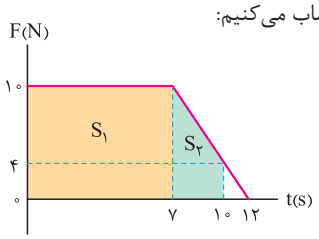
مساحت محصور به نمودار نیروی خالص برحسب زمان برابر است با تغییر تکانهٔ جسم در آن بازهٔ زمانی. مطابق شکل زیر داریم:



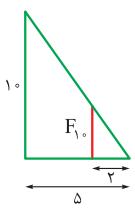
$$\Delta p_{(۰-t)} = S_۱ - S_۲$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: با توجه به نمودار $F-t$، تغییر تکانه در بازهٔ زمانی $t_۱ = ۰$ تا $t_۲ = ۱۰\ s$ را حساب می‌کنیم:



تشابه:



$$\frac{F_{۱۰}}{۱۰} = \frac{۲}{۵} \Rightarrow F_{۱۰} = ۴\ N$$

$$S_۱ = ۷ \times ۱۰ = ۷۰$$

$$S_۲ = \frac{(۱۰+۴)\times ۳}{۲} = ۲۱$$

$$\Delta p_{(۰-۱۰)} = S_۱ + S_۲ = ۷۰ + ۲۱ = ۹۱\ \frac{kg.m}{s}$$

گام دوم: تکانهٔ جسم در لحظهٔ $t_۱ = ۰$ را حساب می‌کنیم.

$$\Delta p = p_۲ - p_۱ \xrightarrow[p_۲ = ۱۴۵\ \frac{kg.m}{s}]{\Delta p = ۹۱\ \frac{kg.m}{s}} ۹۱ = ۱۴۵ - p_۱ \Rightarrow p_۱ = ۱۴۵ - ۹۱ = ۵۴\ \frac{kg.m}{s}$$

گام سوم: سرعت اولیهٔ جسم را حساب می‌کنیم:

$$\vec{p}_۱ = m.\vec{v} \xrightarrow[m = ۶\ kg]{\vec{p}_۱ = ۵۴(\frac{kg.m}{s})\vec{i}} ۵۴\vec{i} = ۶ \times \vec{v}_۱ \Rightarrow \vec{v}_۱ = ۹\ m/s\,\vec{i}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶۴ وزن ماهواره‌ای به جرم $75\ kg$ در ارتفاع چند کیلومتری از سطح زمین برابر $480\ N$ است؟ ($g = 10\ N/kg$ و شعاع کرهٔ زمین $6400\ km$ است.)

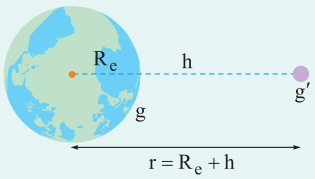
۱) ۸۰۰ ۲) ۱۶۰۰

۳) ۲۴۰۰ ۴) ۳۲۰۰

مشاوره این تیپ سؤال، در کنکورهای اخیر به شکل‌های متنوعی مطرح شده که آخرین نمونهٔ آن در کنکور سراسری تجربی ۱۴۰۳ نوبت دوم است.

درس Box

هر چه یک جسم، از کرهٔ زمین دورتر شود، جرم آن ثابت می‌ماند؛ اما وزن آن کاهش می‌یابد، زیرا شتاب گرانش در اطراف کرهٔ زمین، با مربع فاصله از مرکز زمین نسبت وارون دارد.



$$\frac{W'}{W} = \frac{mg'}{mg} = \left(\frac{R_e}{r}\right)^2$$

R_e: شعاع زمین $= 6400\ km$

g: شتاب گرانش در سطح زمین (m/s^2)

g': شتاب گرانش در ارتفاع h از سطح زمین یا به فاصلهٔ r از مرکز زمین (m/s^2)

W: وزن جسمی به جرم m روی سطح زمین (N)

W': وزن جسم در فاصلهٔ h از سطح زمین (N)

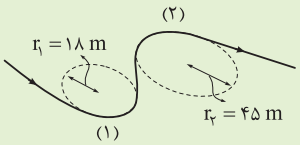
پاسخ خیلی تشریحی ✔ وزن ماهواره در سطح زمین و هم‌چنین در ارتفاع h از سطح زمین معلوم است. پس می‌توان نوشت:

$$\frac{W'}{W} = \left(\frac{R_e}{r}\right)^2 \xrightarrow[W = mg = 75 \times 10 = 750\ N]{W' = 480\ N} \frac{480}{750} = \left(\frac{R_e}{r}\right)^2 \Rightarrow \frac{16}{25} = \left(\frac{R_e}{r}\right)^2 \Rightarrow \frac{4}{5} = \frac{R_e}{r}$$

$$\xrightarrow[r = R_e + h]{R_e = 6400\ km} \frac{4}{5} = \frac{6400}{6400 + h} \Rightarrow 5 \times 6400 = 4 \times 6400 + 4h \Rightarrow 6400 = 4h \Rightarrow h = 1600\ km$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶۵ مسیر حرکت یک سورتمه در سطحی افقی به شکل زیر و تندی سورتمه در تمام مسیر $۳۰\ m/s$ است. اگر اندازهٔ شتاب مرکزگرای سورتمه در پیچ‌های (۱) و (۲) به ترتیب $a_۱$ و $a_۲$ باشد، $a_۲ - a_۱$ برحسب متر بر مربع ثانیه کدام است؟ ($r_۱$ و $r_۲$ به ترتیب شعاع پیچ (۱) و پیچ (۲) هستند.)



۱) ۲۷

۲) -۲۷

۳) ۳۰

۴) -۳۰

مشاوره این سؤال، یکی از تمرین‌های فصل ۲ کتاب درسی فیزیک (۳) رشتهٔ ریاضی است که با تغییر اندکی در اعداد آن، در این‌جا مطرح شده است. تمرین‌های کتاب درسی را جدی بگیرید.

درس Box

در حرکت دایره‌ای یکنواخت، با آن‌که اندازهٔ سرعت (تندی) ثابت است، اما جهت آن که همواره بر مسیر حرکت دایره‌ای مماس است تغییر می‌کند و حرکتی شتابدار محسوب می‌شود. این شتاب به طرف مرکز دایره است و آن را شتاب مرکزگرا می‌نامند:

$$a = \frac{v^۲}{r}$$

a: اندازهٔ شتاب مرکزگرا $(m/s^۲)$

v: تندی متحرک (m/s)

r: شعاع مسیر (m)

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول:** به کمک رابطهٔ شتاب مرکزگرا در حرکت دایره‌ای یکنواخت، $a_۱$ و $a_۲$ را به دست می‌آوریم:

$$a_۱ = \frac{v_۱^۲}{r_۱} \xrightarrow[r_۱ = ۱۸\ m]{v_۱ = ۳۰\ m/s} a_۱ = \frac{۳۰^۲}{۱۸} = \frac{۹۰۰}{۱۸} = ۵۰\ m/s^۲$$

$$a_۲ = \frac{v_۲^۲}{r_۲} \xrightarrow[r_۲ = ۴۵\ m]{v_۲ = ۳۰\ m/s} a_۲ = \frac{۳۰^۲}{۴۵} = \frac{۹۰۰}{۴۵} = ۲۰\ m/s^۲$$

گام دوم: اکنون می‌توانیم حاصل $a_۲ - a_۱$ را به دست آوریم:

$$a_۲ - a_۱ = ۲۰ - ۵۰ = -۳۰\ m/s^۲$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶۶ دو متحرک **A** و **B** روی محیط دایره‌ای با تندی ثابت حرکت می‌کنند. اگر جرم جسم **A**، ۲ برابر جرم جسم **B** و اندازهٔ نیروی مرکزگرای وارد بر جسم **A**، نصف اندازهٔ نیروی مرکزگرای وارد بر جسم **B** باشد، به ترتیب دورهٔ تناوب جسم **A** چند برابر دورهٔ تناوب جسم **B** و انرژی جنبشی جسم **A** چند برابر انرژی جنبشی جسم **B** است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۲}$

۲) $\frac{۱}{۲}$ و ۱

۳) ۲ و ۱

۴) ۲ و $\frac{۱}{۲}$

Hint

ابتدا رابطه‌ای بین نیروی مرکزگرا با جرم و دورهٔ حرکت آن به دست آورید. سپس رابطه‌ای بین انرژی جنبشی با جرم و دورهٔ حرکت پیدا کنید. در نهایت به کمک روابط به دست آمده، نسبت‌های خواسته‌شده را محاسبه کنید.

درس Box

۱) در حرکت دایره‌ای یکنواخت، یک نیروی خالص رو به مرکز، سبب ایجاد شتاب مرکزگرا می‌شود. این نیروی مرکزگرا از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$F = m\frac{v^۲}{r}$$

F: نیروی مرکزگرا (N)

m: جرم جسم (kg)

v: تندی جسم (m/s)

r: شعاع مسیر (m)

۲) در حرکت دایره‌ای یکنواخت، مدت زمان لازم برای پیمودن یک دور محیط دایره را دورهٔ تناوب می‌نامیم و یکای آن ثانیه است.

$$v = \frac{۲\pi r}{T}$$

v: تندی حرکت جسم (m/s)

r: شعاع مسیر (m)

T: دورهٔ تناوب (s)

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: رابطه‌ای بین نیروی مرکزگرا با جرم و دورهٔ حرکت به دست می‌آوریم:

$$F = m\frac{v^۲}{r} \xrightarrow{v=\frac{۲\pi r}{T}} F = m\left(\frac{۴\pi^۲ r^۲}{T^۲}\right)\times\frac{۱}{r} \Rightarrow F = \frac{m۴\pi^۲ r}{T^۲}$$

با توجه به این‌که هر دو متحرک، روی محیط یک دایره می‌چرخند، پس شعاع چرخش آن‌ها یکسان است و می‌توان نوشت:

$$\frac{F_B}{F_A} = \frac{m_B}{m_A}\times\left(\frac{T_A}{T_B}\right)^۲ \xrightarrow[F_A=\frac{۱}{۲}F_B]{m_A=۲m_B} \frac{F_B}{\frac{۱}{۲}F_B} = \frac{m_B}{۲m_B}\times\left(\frac{T_A}{T_B}\right)^۲ \Rightarrow ۲ = \frac{۱}{۲}\times\left(\frac{T_A}{T_B}\right)^۲ \Rightarrow \left(\frac{T_A}{T_B}\right)^۲ = ۴$$

$$\Rightarrow \frac{T_A}{T_B} = ۲$$ (رد گزینه‌های (۱) و (۲))

گام دوم: رابطه‌ای بین انرژی جنبشی با جرم و دورهٔ حرکت پیدا می‌کنیم:

$$K = \frac{۱}{۲}mv^۲ \xrightarrow{v=\frac{۲\pi r}{T}} K = \frac{۱}{۲}m\times\frac{۴\pi^۲ r^۲}{T^۲}$$

با توجه به یکسان‌بودن شعاع چرخش دو متحرک داریم:

$$\frac{K_A}{K_B} = \frac{m_A}{m_B}\times\left(\frac{T_B}{T_A}\right)^۲ \xrightarrow[\frac{T_B}{T_A}=\frac{۱}{۲}]{m_A=۲m_B} \frac{K_A}{K_B} = \frac{۲m_B}{m_B}\times\left(\frac{۱}{۲}\right)^۲ = ۲\times\frac{۱}{۴} = \frac{۱}{۲}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶۷ فاصلهٔ ماهوارهٔ **A** از سطح زمین به اندازهٔ نصف شعاع زمین و فاصلهٔ ماهوارهٔ **B** از سطح زمین ۵ برابر شعاع زمین است. دورهٔ گردش ماهوارهٔ **A** چند برابر دورهٔ گردش ماهوارهٔ **B** است؟

۱) $\frac{۱}{۸}$

۲) ۸

۳) $\frac{۱}{۴}$

۴) ۴

مشاوره مشابه این سؤال قبلاً در کنکور سراسری تجربی ۹۱ مطرح شده است. توجه داشته باشید که در آن زمان، مبحث حرکت دایره‌ای و محاسبهٔ دورهٔ حرکت ماهواره‌ها در کتاب‌های رشتهٔ تجربی نیز وجود داشته است.

درس Box

اگر یک ماهواره روی مدار تقریباً دایره‌شکل به شعاع r به دور زمین بچرخد و دورهٔ حرکت آن T باشد، می‌توان نوشت:

$$T = ۲\pi\sqrt{\frac{r^۳}{GMe}} \Rightarrow T^۲ \propto r^۳$$

یعنی مربع دورهٔ گردش ماهواره، با توان سوم شعاع چرخش آن متناسب است؛ بنابراین برای دو ماهوارهٔ A و B که به دور زمین می‌چرخند داریم:

$$(\frac{T_A}{T_B})^۲ = (\frac{r_A}{r_B})^۳$$

T_A: دورهٔ گردش ماهوارهٔ A

T_B: دورهٔ گردش ماهوارهٔ B

r_A: شعاع گردش ماهوارهٔ A

r_B: شعاع گردش ماهوارهٔ B

پاسخ خیلی تشریحی ✔

$$(\frac{T_A}{T_B})^۲ = (\frac{r_A}{r_B})^۳ \xrightarrow[r_B = R_e + h_B = R_e + ۵R_e = ۶R_e]{r_A = R_e + h_A = R_e + \frac{R_e}{۲} = \frac{۳}{۲}R_e} (\frac{T_A}{T_B})^۲ = (\frac{\frac{۳R_e}{۲}}{۶R_e})^۳ = (\frac{۱}{۴})^۳$$

$$\Rightarrow (\frac{T_A}{T_B})^۲ = \frac{۱}{۶۴} \Rightarrow \frac{T_A}{T_B} = \frac{۱}{۸}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶۸ اگر جرم نوسانگر یک سامانهٔ جرم ـ فنر، ۳۶ درصد کاهش یابد، بسامد نوسان‌های آن چند درصد و چگونه تغییر می‌کند؟

۱) ۲۰، کاهش می‌یابد.

۲) ۲۰، افزایش می‌یابد.

۳) ۲۵، کاهش می‌یابد.

۴) ۲۵، افزایش می‌یابد.

مشاوره تحلیل سؤال‌های کنکور چند سال اخیر، نشان می‌دهد که حدود $\frac{۱}{۳}$ این سؤال‌ها در حد ساده هستند و با راه‌حل‌های معمولی، به راحتی به جواب می‌رسند.

درس Box

وقتی یک سامانهٔ جرم ـ فنر، حرکت هماهنگ ساده انجام می‌دهد، بسامد نوسان‌های آن از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$f = \frac{۱}{۲\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

f: بسامد (Hz)

k: ثابت فنر (N/m)

m: جرم (kg)

پاسخ خیلی تشریحی ✔ در این‌جا فقط جرم نوسانگر تغییر کرده و ثابت فنر در دو حالت مطرح‌شده، یکسان است؛ بنابراین می‌توان نوشت:

$$\frac{f_۲}{f_۱} = \sqrt{\frac{m_۱}{m_۲}} \xrightarrow{m_۲ = m_۱ - ۰/۳۶m_۱ = ۰/۶۴m_۱} \frac{f_۲}{f_۱} = \sqrt{\frac{m_۱}{۰/۶۴m_۱}} \Rightarrow \frac{f_۲}{f_۱} = \sqrt{\frac{۱۰۰}{۶۴}} = \frac{۱۰}{۸} = ۱/۲۵$$

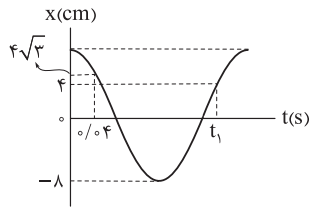
اکنون می‌توانیم درصد تغییر بسامد نوسانگر را به دست آوریم:

$$\frac{\Delta f}{f_۱} \times ۱۰۰ = \frac{۱/۲۵f_۱ - f_۱}{f_۱} \times ۱۰۰ = \frac{۰/۲۵f_۱}{f_۱} \times ۱۰۰ = ٪۲۵$$

چون درصد به دست آمده مثبت است، پس بسامد نوسان‌ها افزایش یافته است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶۹ نمودار مکان ـ زمان نوسانگر هماهنگ ساده‌ای که در راستای محور x نوسان می‌کند، به شکل زیر است. تندی متوسط این نوسانگر در بازهٔ زمانی صفر تا t_1 چند سانتی‌متر بر ثانیه است؟



۱) ۱۰

۲) ۵۰

۳) ۷۰

۴) ۸۵

Hint دورهٔ نوسان را حساب کنید و به کمک آن، لحظهٔ t_1 را به دست آورید. سپس با محاسبهٔ مسافت طی‌شده، تندی متوسط در بازهٔ زمانی صفر تا t_1 را پیدا کنید.

درس Box

۱) اگر نوسانگر در لحظهٔ $t = ۰$ در مکان $x = +A$ باشد، معادلهٔ مکان ـ زمان آن در حرکت هماهنگ ساده به صورت زیر است:

$$x = A\cos\omega t$$

$$\omega = \frac{۲\pi}{T}$$

x : مکان نوسانگر (m)

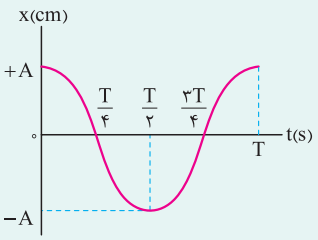
A : دامنه (m)

ω : بسامد زاویه‌ای (rad/s)

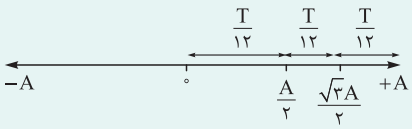
t : زمان (s)

T : دورهٔ نوسان (s)

۲) نمودار مکان ـ زمان در حرکت هماهنگ ساده:



۳) وقتی نوسانگر روی محور حرکت هماهنگ ساده انجام می‌دهد، داریم:



۴) رابطهٔ تندی متوسط به صورت زیر است:

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t}$$

s_{av} : تندی متوسط (m/s)

ℓ : مسافت طی‌شده (m)

Δt : بازهٔ زمانی (s)

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** با توجه به نمودار داده‌شده، دامنهٔ نوسان $۸\ cm$ است و نوسانگر در لحظهٔ $t = ۰/۰۴\ s$ از مکان $x = ۴\sqrt{۳}\ cm$ می‌گذرد. با استفاده از معادلهٔ مکان ـ زمان در حرکت هماهنگ ساده، دورهٔ حرکت را حساب می‌کنیم:

$$x = A\cos\omega t \xrightarrow[A=۸\ cm]{x=۴\sqrt{۳}cm\ ,\ t=۰/۰۴\ s} ۴\sqrt{۳} = ۸\cos\omega\times ۰/۰۴$$

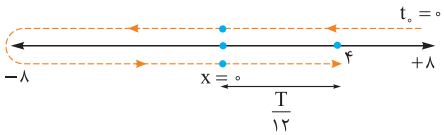
$$\Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \cos\omega\times\frac{۴}{۱۰۰} \xrightarrow{\omega=\frac{۲\pi}{T}} \frac{\pi}{۶} = \frac{۲\pi}{T}\times\frac{۴}{۱۰۰} \Rightarrow T = ۰/۴۸\ s$$

توجه: به کمک قسمت سوم درس‌باکس نیز می‌توانستیم مستقیماً دورهٔ حرکت را به دست آوریم:

$$x = ۴\sqrt{۳} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}A \Rightarrow ۰/۰۴ = \frac{T}{۱۲} \Rightarrow T = ۰/۴۸\ s$$

گام دوم: با توجه به شکل زیر، وقتی نوسانگر برای دومین بار از مکان $x = ۴\ cm$ می‌گذرد، زمان سپری‌شده برابر است با:

$$t_۱ = ۳\frac{T}{۴} + \frac{T}{۱۲} \xrightarrow{T=۰/۴۸\ s} t_۱ = ۳\times ۰/۱۲ + ۰/۰۴ = ۰/۴\ s$$



SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

گام سوم: مسافت طی‌شده توسط نوسانگر از لحظهٔ $t = ۰$ تا لحظهٔ $t_۱ = ۰/۴\ s$ را حساب می‌کنیم:

$$\ell = ۸ + ۸ + ۸ + ۴ = ۲۸\ cm$$

اکنون می‌توانیم تندی متوسط در بازهٔ زمانی ۰ تا $t_۱$ را پیدا کنیم:

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t = ۰/۴\ s]{\ell = ۲۸\ cm} s_{av} = \frac{۲۸}{۰/۴} = ۷۰\ cm/s$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷۰ در شکل زیر، نوسانگری به جرم ۱۰۰ g روی پاره‌خط **AB** حرکت هماهنگ ساده انجام می‌دهد. اگر نوسانگر در هر دقیقه ۳۰۰ مرتبه طول پاره‌خط **AB** را طی کند، نیروی خالص وارد بر آن در نقطهٔ **M** برحسب نیوتون کدام است؟ ($\pi^2 = 10$)



۱) $0/25\,\vec{i}$

۲) $-0/25\,\vec{i}$

۳) $\vec{i}$

۴) $-\vec{i}$

Hint دورهٔ حرکت و بسامد زاویه‌ای را به دست آورید. سپس اندازه و جهت نیروی خالص وارد بر نوسانگر را در مکان $x = 1\,cm$ تعیین کنید.

درس Box

۱) در هر نوسان کامل، نوسانگر دو بار طول پاره‌خط نوسان را طی می‌کند.

۲) دورهٔ نوسان با توجه به تعداد نوسان‌ها از رابطهٔ مقابل به دست می‌آید:

$$T = \frac{\Delta t}{N}$$

T : دوره (s)

Δt : بازهٔ زمانی نوسان‌ها (s)

N : تعداد نوسان‌ها در مدت Δt

۳) نیروی خالص وارد بر نوسانگر، همواره به طرف مرکز نوسان (نقطهٔ تعادل) است و از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\vec{F} = -(m\omega^2 x)\vec{i}$$

F : نیرو (N)

m : جرم (kg)

ω : بسامد زاویه‌ای (rad/s)

x : مکان نوسانگر (m)

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول:** وقتی نوسانگر ۳۰۰ بار طول پاره‌خط AB را طی می‌کند، یعنی ۱۵۰ نوسان کامل انجام داده است. با توجه به این موضوع، دورهٔ نوسانگر را حساب می‌کنیم:

$$T = \frac{\Delta t}{N} \xrightarrow[N=150]{\Delta t = 1\,min = 60\,s} T = \frac{60}{150} = 0/4\,s$$

بسامد زاویه‌ای نیز به دست می‌آید:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \xrightarrow{T = 0/4\,s} \omega = \frac{2\pi}{0/4} = 5\pi\,rad/s$$

گام دوم: اکنون می‌توانیم نیروی وارد بر نوسانگر را در نقطهٔ M به دست آوریم:

$$\vec{F} = -(m\omega^2 x)\vec{i} \xrightarrow[x = 1\,cm = 0/01\,m]{m = 100\,g = 0/1\,kg\ ,\ \omega = 5\pi\,rad/s} \vec{F} = -(0/1 \times 25\pi^2 \times 0/01)\vec{i}$$

$$\xrightarrow{\pi^2 = 10} \vec{F} = -(2/5 \times 10 \times 0/01)\vec{i} = (-0/25\,N)\vec{i}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷۱ معادلهٔ مکان ـ زمان نوسانگر هماهنگ ساده‌ای در SI به صورت $x = ۰/۱\cos(۱۰\pi t)$ است. در لحظهٔ $t_۱$ نوسانگر به صورت کندشونده از مکان $x_۱ = ۲\ cm$ عبور می‌کند. چند ثانیه بعد از لحظهٔ $t_۱$ شتاب نوسانگر برای اولین بار برابر $(۲۰\ m/s^۲)\vec{i}$ می‌شود؟ $(\pi^۲ = ۱۰)$

۱) ۰/۱ ۲) ۰/۲ ۳) ۰/۰۵ ۴) ۰/۴

Hint

ابتدا دورهٔ نوسان را به دست آورید. سپس در لحظهٔ $t_۲$ مکانی را که شتاب نوسانگر در آن‌جا $(۲۰\ m/s^۲)\vec{i}$ می‌شود، پیدا کنید. در پایان نیز فاصلهٔ زمانی $t_۱$ تا $t_۲$ را حساب کنید.

درس Box

۱) نوسانگر در هر نصف دوره $(\frac{۱}{۲}T)$ مسافتی به اندازهٔ ۲ برابر دامنه $(۲A)$ را می‌پیماید.

۲) وقتی نوسانگر به طرف نقاط بازگشتی می‌رود، حرکت آن کندشونده و وقتی به طرف نقطهٔ تعادل می‌رود، حرکت آن تندشونده است.

۳) شتاب نوسانگر برحسب مکان آن، از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\vec{a} = -(\omega^۲ x)\vec{i}$$

a: اندازهٔ شتاب $(m/s^۲)$

ω: بسامد زاویه‌ای (rad/s)

x: مکان نوسانگر (m)

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: به کمک معادلهٔ مکان داده‌شده، دامنه و دورهٔ حرکت را حساب می‌کنیم:

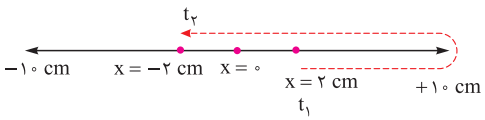
$$\begin{cases} x = A\cos(\omega t) \\ x = ۰/۱\cos(۱۰\pi t) \end{cases} \Rightarrow A = ۰/۱ m = ۱۰\ cm\ ,\ \omega = ۱۰\pi\ rad/s$$

$$\omega = \frac{۲\pi}{T} \xrightarrow{\omega = ۱۰\pi\ rad/s} ۱۰\pi = \frac{۲\pi}{T} \Rightarrow T = ۰/۲\ s$$

گام دوم: با استفاده از معادلهٔ شتاب نوسانگر برحسب مکان، می‌توانیم مکانی را که در آن برای اولین بار، شتاب نوسانگر به $(۲۰\ m/s^۲)\vec{i}$ می‌رسد، تعیین کنیم:

$$\vec{a} = -(\omega^۲ x)\vec{i} \xrightarrow[\omega^۲ = (۱۰\pi)^۲ = ۱۰۰\pi^۲ = ۱۰^۳\ rad/s]{\vec{a} = (۲۰\ m/s^۲)\vec{i}} ۲۰\vec{i} = -۱۰^۳ x\vec{i} \Rightarrow x = -۲\times ۱۰^{-۲} m \Rightarrow x = -۲\ cm$$

گام سوم: با توجه به شکل زیر، در بازهٔ زمانی $t_۱$ تا $t_۲$ نوسانگر نصف کل نوسان یعنی مسافتی به اندازهٔ دو برابر دامنه را پیموده است:

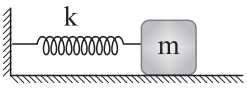


بنابراین زمان سپری‌شده برابر است با:

$$\Delta t = \frac{T}{۲} = \frac{۰/۲}{۲} = ۰/۱\ s$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷۲ در شکل زیر، بیشینه و کمینهٔ طول فنر در حین نوسانِ جسم متصل به آن روی سطح افقی بدون اصطکاک، به ترتیب **۲۴ cm** و **۳۲ cm** است. اگر در لحظه‌ای که طول فنر به **۲۸ cm** می‌رسد، انرژی جنبشی جسم **۲۰۰ mJ** باشد، ثابت فنر چند نیوتون بر متر است؟



۱) ۵۰۰
۲) ۲۵۰
۳) ۵۰
۴) ۲۵

Hint

دامنهٔ نوسان را به دست آورید و تشخیص دهید زمانی که انرژی جنبشی نوسانگر ۲۰۰ mJ است در حال عبور از نقطهٔ تعادل خود است. سپس این انرژی را با انرژی مکانیکی نوسانگر برابر قرار داده و ثابت فنر را حساب کنید.

درس Box

۱) در حرکت هماهنگ سادهٔ سامانهٔ جرم ـ فنر، فاصلهٔ بین بیشینه و کمینهٔ طول فنر، همان طول پاره‌خط نوسانی یا دو برابر دامنه است.

۲) هنگام عبور نوسانگر از نقطهٔ تعادل خود، انرژی جنبشی آن بیشینه بوده و با انرژی مکانیکی برابر است.

۳) انرژی مکانیکی (کل) یک نوسانگر، از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$E = \frac{1}{2}kA^2$$

E: انرژی مکانیکی (J)

k: ثابت فنر (N/m)

A: دامنه (m)

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: طول پاره‌خط نوسان و دامنهٔ حرکت را به دست می‌آوریم:

$$L_{max} - L_{min} = 2A \Rightarrow 32 - 24 = 2A \Rightarrow A = 4\ cm$$

از طرفی وقتی طول فنر ۲۸ cm است یعنی در وسط بین دو انتهای مسیر نوسانی یا همان نقطهٔ تعادل است. در این مکان نوسانگر بیشترین تندی و بیشترین انرژی جنبشی را دارد:

$$K_{max} = 200\ mJ$$

گام دوم: بیشینهٔ انرژی جنبشی با انرژی مکانیکی نوسانگر برابر است؛ بنابراین داریم:

$$E = K_{max} \xrightarrow{K_{max}=200\ mJ} E = 200\ mJ$$

$$E = \frac{1}{2}kA^2 \xrightarrow[A=4\ cm=4\times10^{-2}\ m]{E=200\ mJ=200\times10^{-3}\ J} 200\times10^{-3} = \frac{1}{2}k(4\times10^{-2})^2$$

$$\Rightarrow 4\times10^{-1} = k\times16\times10^{-4} \Rightarrow k = \frac{4000}{16} = 250\ N/m$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷۳ انرژی مکانیکی نوسانگر هماهنگ ساده‌ای $0/1\ J$ و اندازهٔ بیشینهٔ نیروی خالص وارد بر آن $5\ N$ است. مسافتی که نوسانگر در هر دورهٔ تناوب طی می‌کند، چند سانتی‌متر است؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۱۶ ۴) ۳۲

درس Box

۱) در یک حرکت هماهنگ ساده، مسافت طی‌شده، ۴ برابر دامنه است.

۲) نیروی وارد بر نوسانگر در دو انتهای پاره‌خط نوسانی، بیشینه است و اندازهٔ آن از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$F_{max} = kA$$

F_{max}: اندازهٔ نیروی بیشینهٔ وارد بر نوسانگر (N)

k: ثابت فنر (N/m)

A: دامنهٔ نوسان (m)

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: انرژی مکانیکی نوسانگر را برحسب بیشینهٔ نیروی خالص وارد بر آن می‌نویسیم و به کمک آن، دامنهٔ حرکت را به دست می‌آوریم:

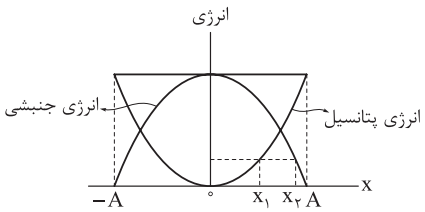
$$E=\frac{1}{2}kA^2 \xrightarrow{F_{max}=kA} E=\frac{1}{2}(kA)A=\frac{1}{2}(F_{max})A \xrightarrow[F_{max}=5\,N]{E=0/1\,J} 0/1=\frac{1}{2}\times 5A \Rightarrow A=\frac{0/2}{5}=0/04\,m=4\,cm$$

گام دوم: مسافتی که نوسانگر در هر دورهٔ تناوب طی می‌کند، ۴ برابر دامنه است:

$$\ell = 4A \xrightarrow{A=4\,cm} \ell = 4\times 4 = 16\,cm$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷۴ نمودار انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل نوسانگر هماهنگ ساده‌ای برحسب مکان آن به شکل زیر است. اگر تندی نوسانگر در مکان‌های x_1 و x_2 به ترتیب $1/2\ m/s$ و $0/5\ m/s$ باشد، تندی نوسانگر در مبدأ مکان چند متر بر ثانیه است؟



۱) ۱/۳

۲) ۱/۵

۳) ۱/۷

۴) ۱/۹

مشاوره این تیپ سؤال که نمودارهای انرژی جنبشی و پتانسیل، در حرکت هماهنگ ساده روی یک دستگاه مختصات رسم می‌شوند در کتاب درسی هم مطرح شده است. نمونهٔ این نوع سؤال در کنکور تجربی ۹۹ و کنکور ریاضی ۹۸ دیده می‌شود.

درس Box

انرژی مکانیکی (کل) یک نوسانگر، مجموع انرژی‌های جنبشی و پتانسیل آن است.

$$E = K + U$$

E: انرژی مکانیکی (J)

K: انرژی جنبشی (J)

U: انرژی پتانسیل (J)

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: اگر انرژی‌های جنبشی و پتانسیل در مکان x_1 را با K_1 و U_1 و انرژی‌های جنبشی و پتانسیل در مکان x_2 را با K_2 و U_2 نشان دهیم، با توجه به نمودار داده‌شده می‌توان نوشت:

$$K_1 = U_2 \ , \ U_1 = K_2$$

گام دوم: رابطهٔ انرژی مکانیکی نوسانگر را در مکان x_1 می‌نویسیم:

$$E = K_1 + U_1 \xrightarrow{U_1 = K_2} E = K_1 + K_2 \xrightarrow{K = \frac{1}{2}mv^2} \frac{1}{2}mv_{max}^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 \Rightarrow v_{max}^2 = v_1^2 + v_2^2$$

$$\xrightarrow[v_2 = 0/5\ m/s]{v_1 = 1/2\ m/s} v_{max}^2 = (1/2)^2 + (0/5)^2 = 1/44 + 0/25 = 1/69 \Rightarrow v_{max} = 1/3\ m/s$$

تندی نوسانگر در مبدأ مکان، همان تندی بیشینه است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷۵ اختلاف طول دو آونگ سادهٔ **A** و **B** برابر **۴۵ cm** است. اگر در مدتی که آونگ **A**، ۵ نوسان انجام می‌دهد، تعداد نوسان‌های آونگ **B** برابر ۴ باشد، طول آونگ **A** برابر چند سانتی‌متر است؟

۱) ۸۰

۲) ۱۸۰

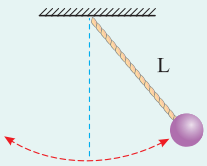
۳) ۱۲۵

۴) ۲۲۵

مشاوره سؤال‌هایی که در سال‌های اخیر از آونگ ساده در کنکور مطرح شده‌اند، همگی به این شکل هستند که نوسانات آونگ در دو حالت مختلف و با دو طول متفاوت مقایسه شده و تعداد نوسانات نیز در این دو حالت، دخالت دارند.

درس Box

دورهٔ نوسان‌های یک آونگ ساده، از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:



$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

T: دوره (s)

L: طول آونگ (m)

g: شتاب گرانش زمین (m/s^2)

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا نسبت دورهٔ آونگ‌های A و B را به دست می‌آوریم:

$$T = \frac{t}{N} \xrightarrow{t_A = t_B} \frac{T_A}{T_B} = \frac{N_B}{N_A} \xrightarrow[N_A = 5]{N_B = 4} \frac{T_A}{T_B} = \frac{4}{5}$$

گام دوم: با توجه به رابطهٔ $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ نسبت دوره‌های دو آونگ A و B را برحسب طول آن‌ها می‌نویسیم:

$$\frac{T_A}{T_B} = \sqrt{\frac{L_A}{L_B}} \Rightarrow \frac{4}{5} = \sqrt{\frac{L_A}{L_B}} \Rightarrow \frac{L_A}{L_B} = \frac{16}{25}$$

بنابراین $L_A < L_B$ بوده و می‌توان نوشت:

$$L_B - L_A = 45\ cm$$

اکنون می‌توانیم طول آونگ A را حساب کنیم:

$$L_B - L_A = 45 \xrightarrow{L_B = \frac{25}{16}L_A} \frac{25}{16}L_A - L_A = 45 \Rightarrow \frac{9}{16}L_A = 45 \Rightarrow L_A = 45 \times \frac{16}{9} = 80\ cm$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷۶ کدام موارد زیر، نادرست است؟ $(H=1, C=12, N=14, O=16, Na=23, K=39: g.mol^{-1})$

الف) نقطهٔ ذوب صابون حاصل از واکنش روغن زیتون و سود سوزآور، پایین‌تر از $25^\circ C$ است. ← حالت فیزیکی صابون ⇐ مایع

ب) تفاوت جرم مولی روغن زیتون و چربی کوهان شتر، ۳ برابر تفاوت جرم مولی اوره و اتیلن گلیکول است. $C_{57}H_{110}O_6$ — $C_{57}H_{104}O_6$

پ) تفاوت شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی در یک پاک‌کنندهٔ صابونی و یک پاک‌کنندهٔ غیرصابونی، برابر ۵ است. $CO(NH_2)_2$ — $C_2H_6O_2$

ت) حالت فیزیکی صابونی با زنجیر هیدروکربنی سیرشده و جرم مولی ۲۸۷ گرم بر مول، به یقین به صورت مایع است.

۱) الف ـ پ

۲) الف ـ ت

۳) ب ـ ت

۴) ب ـ پ

صابون: $RCOO^-Na^+$ ← جامد — $RCOO^-K^+$ ← مایع — $RCOO^-NH_4^+$ ← مایع

پاسخ خیلی تشریحی ✔ عبارت‌های (الف) و (پ) نادرست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

الف) صابون‌های حاصل از هر دو نوع چربی در واکنش با سود سوزآور، دارای حالت فیزیکی جامد هستند؛ پس دمای ذوب آن‌ها بالاتر از $25^\circ C$ می‌باشد.

ب) تفاوت جرم مولی روغن زیتون با فرمول مولکولی $C_{57}H_{104}O_6$ $(g.mol^{-1}: 884$ = جرم‌مولی) و چربی کوهان شتر با فرمول مولکولی $C_{57}H_{110}O_6$ $(g.mol^{-1}: 890$ = جرم‌مولی)، برابر ۶ بوده و ۳ برابر تفاوت جرم مولی اوره با فرمول مولکولی $CO(NH_2)_2$ $(g.mol^{-1}: 60$ = جرم‌مولی) و اتیلن گلیکول با فرمول مولکولی $C_2H_6O_2$ $(g.mol^{-1}: 62$ = جرم‌مولی) می‌باشد.

پ) تفاوت شمار جفت‌الکترون ناپیوندی در یک پاک‌کنندهٔ صابونی ($RCOO^-Na^+$، ۵ زوج ناپیوندی) و یک پاک‌کنندهٔ غیرصابونی ($RC_6H_4SO_3^-Na^+$، ۹ زوج ناپیوندی) برابر ۴ است.

نکته تفاوت‌های پاک‌کننده‌های غیرصابونی و صابونی جامد

	تفاوت‌ها	پاک‌کننده‌های صابونی	پاک‌کننده‌های غیرصابونی
۱	فرمول بسته	$RCOO^-Na^+$	$RC_6H_4SO_3^-Na^+$
۲	فرمول گسترده	R—C(=O)—O⁻ Na⁺ ۵ جفت ناپیوندی	R—C₆H₄—S(=O)(=O)—O⁻ Na⁺ ۹ جفت ناپیوندی
۳	بخش ناقطبی آبگریز و چربی‌دوست	R	R—C₆H₄—
۴	بخش قطبی آب‌دوست و چربی‌گریز	$-COO^-$	$-SO_3^-$
۵	قدرت پاک‌کنندگی در آب سخت	در آب سخت رسوب می‌دهد و قدرت پاک‌کنندگی کاهش می‌یابد.	در آب سخت واکنش نمی‌دهد و رسوب نمی‌کند، خاصیت پاک‌کنندگی حفظ می‌شود.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

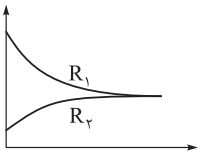
	تفاوت‌ها	پاک‌کننده‌های صابونی	پاک‌کننده‌های غیرصابونی
۶	نحوهٔ ساخت	از چربی (روغن‌های گیاهی یا جانوری) ساخته می‌شود.	از بنزن و مواد پتروشیمیایی دیگر، طی واکنش‌های پیچیده تولید می‌شود.
۷	حلقهٔ بنزن	ندارد و آروماتیک نیست.	دارد و آروماتیک است.
۸	سیرشدگی قسمت هیدروکربنی	سیرشده است.	با سه مولکول H_2 سیر می‌شود.
۹	کربن بدون هیدروژن	یک کربن	دو کربن
۱۰	تعداد اکسیژن	دو اکسیژن	سه اکسیژن
۱۱	قدرت پاک‌کنندگی	کم‌تر	بیشتر

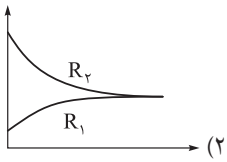
ت) *هواستون باشه که* با زنجیر هیدروکربنی سیرشده، جرم مولی صابون‌های با فرمول RCOONa و RCOOK، عددی زوج است، ولی جرم مولی صابون با فرمول $RCOONH_4$، عددی فرد است؛ *پس صابون مورد نظر حتماً مایعست!*

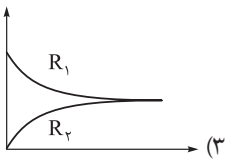
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

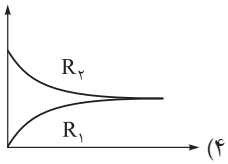
۷۷ ۲ مول گاز N_2O_4 و ۱ مول گاز NO_2 را در ظرفی به حجم ۲ لیتر وارد می‌کنیم تا مطابق واکنش زیر به تعادل برسند. اگر فشار گازهای موجود در ظرف واکنش پس از برقراری تعادل، نسبت به حالت اولیه، ۱/۵ برابر شده باشد، کدام نمودار تغییرات سرعت واکنش‌های رفت (R_1) و برگشت (R_2) را به درستی نشان می‌دهد؟ تعادل در مجموع در جهت رفت جابه‌جا شده است.

$$N_2O_4(g) \underset{R_2}{\overset{R_1}{\rightleftharpoons}} 2NO_2(g)$$

۱)


۲)


۳)


۴)


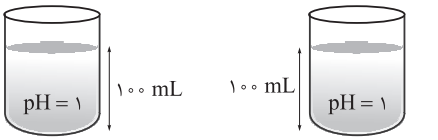
پاسخ خیلی تشریحی ✔ با توجه به این‌که مقدار اولیهٔ هر دو گاز N_2O_4 و NO_2، مخالف صفر است، می‌توان نتیجه گرفت که R_1 و R_2 در آغاز واکنش نیز مخالف صفر می‌باشند. (گزینه‌های (۳) و (۴) پر!)

از سوی دیگر افزایش فشار گازهای موجود در ظرف پس از برقراری تعادل نسبت به حالت اولیه، بیانگر افزایش تعداد مول‌های گازی‌شکل درون ظرف است. همین موضوع نشان می‌دهد که تعادل در مجموع در جهت رفت جابه‌جا شده است؛ یعنی در ابتدای واکنش، سرعت واکنش رفت (R_1) بیشتر از سرعت واکنش برگشت (R_2) بوده است ($R_1 > R_2$).

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷۸ چند مورد از مقایسه‌های زیر در ارتباط با محلول‌های **A** و **B**، درست است؟ $(H = ۱, C = ۱۲, O = ۱۶ : g.mol^{-۱})$

- سرعت واکنش با فلز منیزیم: **A = B**
- حجم گاز هیدروژن تولیدشده در واکنش با مقدار کافی فلز منیزیم: **A < B**
- مقدار سدیم هیدروکسید مورد نیاز برای خنثی‌کردن محلول: **A < B**
- جرم آنیون موجود در محلول: **A < B**



HCl (محلول **A**) — **$CH_۳COOH$** (محلول **B**)

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

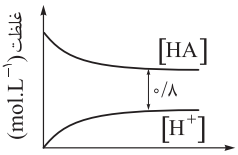
پاسخ خیلی تشریحی ✔ همهٔ عبارت‌های داده‌شده درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

- سرعت واکنش فلز منیزیم با محلول‌های اسیدی به غلظت H^+ در آن‌ها وابسته است. در هر دو محلول به دلیل یکسان‌بودن pH، غلظت یون H^+ با هم برابر است؛ در نتیجه سرعت واکنش دو محلول با فلز منیزیم *نیز با هم برابره!*
- حجم گاز هیدروژن تولیدشده به تعداد مول اسید مصرفی وابسته است. دو محلول دارای pH یکسان هستند و چون اسید موجود در محلول B، *ضعیفه!* در نتیجه شمار مول‌های اسید موجود در این محلول، *بیشتره!* و به همین دلیل، حجم گاز $H_۲$ تولیدشده در اثر واکنش فلز منیزیم با محلول B، بیشتر از محلول A خواهد بود.
- مقدار سدیم هیدروکسید مور د نیاز برای خنثی‌کردن دو محلول به تعداد مول اسید مصرفی بستگی دارد. *همون‌طور که گفتیم* در محلول B، غلظت و مول اسید بیشتر است؛ در نتیجه مقدار NaOH مورد نیاز برای خنثی‌کردن محلول B، بیشتر از محلول A خواهد بود.
- با توجه به یکسان‌بودن غلظت یون‌ها و حجم دو محلول، تعداد مول آنیون‌ها در آن‌ها برابر است و از آن‌جا که آنیون موجود در محلول B $(CH_۳COO^-)$، جرم مولی بیشتری نسبت به آنیون موجود در محلول A (Cl^-) دارد؛ بنابراین می‌توان گفت که جرم آنیون موجود در ظرف B، بیشتر از ظرف A می‌باشد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷۹ با توجه به نمودار زیر که نشان‌دهندهٔ تغییرات غلظت برخی گونه‌ها در واکنش یونش ۲ مول از اسید ضعیف **HA** در محلولی به حجم ۵۰۰ mL است، ثابت یونش این اسید کدام است؟



۱) $\frac{۱۶}{۱۵}$
۲) $\frac{۴}{۱۵}$
۳) ۰/۳
۴) ۰/۶

Hint

ابتدا غلظت مولی اولیهٔ اسید HA را در محلول محاسبه کن، سپس معادلهٔ یونش این اسید را بنویس. در نهایت با توجه به تفاوت غلظت تعادلی اسید HA یونیده‌نشده و یون H^+ در محلول، غلظت تعادلی هر کدام را به دست بیاور و *فیلی راحت!* ثابت یونش (K_a) این اسید را حساب کن.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: غلظت اولیهٔ اسید HA را در محلول محاسبه می‌کنیم:

$$\text{غلظت مولی} = \frac{\text{مول}}{\text{حجم}} = \frac{۲}{۰/۵} = ۴\ mol.L^{-۱}$$

گام دوم: معادله یونش این اسید را نوشته و با توجه به نمودار، غلظت تعادلی گونه‌ها را در آن به دست می‌آوریم:

	$HA \rightleftharpoons H^+ + A^-$		
غلظت اولیه	۴	۰	۰
تغییرات غلظت	$-x$	$+x$	$+x$
غلظت نهایی (تعادلی)	$۴-x$	x	x

طبق نمودار، تفاوت غلظت‌های تعادلی اسید HA و یون H^+، برابر ۰/۸ مول بر لیتر است؛ بنابراین می‌توان گفت که:

$$(۴-x)-(x)=۰/۸ \Rightarrow ۴-۲x=۰/۸ \Rightarrow x=۱/۶\ mol.L^{-۱}$$

گام سوم: ثابت یونش اسید HA را محاسبه می‌کنیم:

هواستون باشه که در محلول HA(aq)، غلظت H^+ با غلظت A^- برابره! پس محاسبه K_a، *این‌جوریاست!*

$$K=\frac{[H^+][A^-]}{[HA]}=\frac{\overset{۲}{\cancel{۱/۶}}\times ۱/۶}{\underset{۳}{\cancel{۲/۴}}}=\frac{۳/۲}{۳}=\frac{۳۲}{۳۰}=\frac{۱۶}{۱۵}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸۰ چند مورد از مطالب زیر، نادرست است؟

- در کربوکسیلیک اسیدها با افزایش تعداد اتم‌های کربن، قدرت اسیدی افزایش می‌یابد.
- سدیم هیدروکسید یک باز بسیار قوی است و به طور کامل در آب یونش می‌یابد.
- در محلول اسیدهای ضعیف، میان اندک یون‌های حاصل از یونش و مولکول‌های یونیده‌نشده، تعادل برقرار می‌شود.
- در محلول‌های آبی، هر چه‌قدر غلظت یون هیدرونیوم افزایش یابد، به همان اندازه از غلظت یون هیدروکسید کاسته می‌شود.

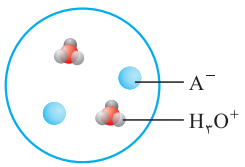
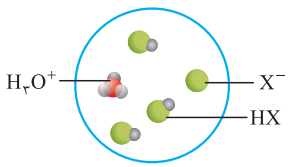
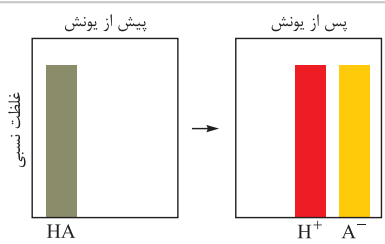
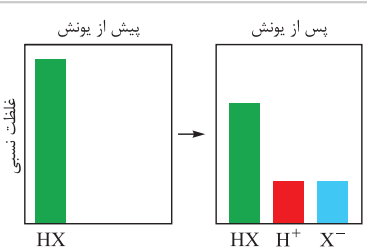
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔ به‌جز عبارت سوم، سایر عبارت‌های داده‌شده نادرست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

- *مواستون کجاست!!* در کربوکسیلیک اسیدها با افزایش تعداد اتم‌های کربن، قدرت اسیدی **کاهش** می‌یابد. مثلاً قدرت اسیدی استیک (اتانوئیک) اسید (CH_3COOH) از فورمیک (متانوئیک) اسید، *کم‌تره!*
- سدیم هیدروکسید یک باز قوی است، ولی به دلیل آن‌که یک ترکیب یونی است، تبدیل آن به یون‌های مثبت و منفی **تفکیک یونی** نامیده می‌شود؛ نه یونش!
- در محلول اسیدهای ضعیف، میان اندک یون‌های حاصل از یونش و مولکول‌های یونیده‌نشده تعادل برقرار می‌شود.

نکته

اسید	قوی (HA)	ضعیف (HX)
میزان یونش در آب	تقریباً به طور کامل یونش می‌یابد ($\alpha \simeq 1$).	به طور جزئی یونش می‌یابد ($\alpha < 1$).
گونه‌های موجود در محلول آبی (به‌جز مولکول‌های آب)	فقط یون‌های آبپوشیده	یون‌های آبپوشیده و مولکول‌های اسید یونیده‌نشده
نمای ذره‌ای محلول آبی		
نمودار یونش		
رسانایی الکتریکی محلول آبی	رسانای قوی (لامپ کاملاً روشن در مدار الکتریکی)	رسانای ضعیف (لامپ نیمه‌روشن در مدار الکتریکی)
ثابت یونش	بسیار بزرگ: HI, HBr, HCl, H_2SO_4 بزرگ: HNO_3	یک عدد مشخص $HF > HNO_2 > HCOOH > CH_3COOH > H_2CO_3 > HCN$
سرعت واکنش با یک فلز در شرایط یکسان	سریع‌تر	آهسته‌تر

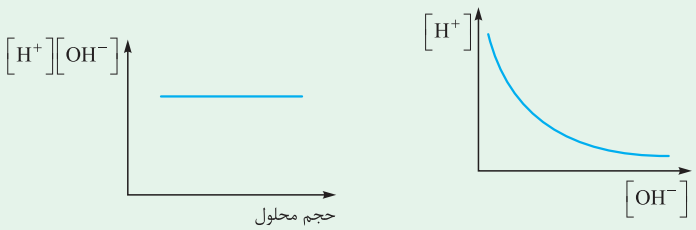
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

اسید	قوی (HA)	ضعیف (HX)
خاصیت اسیدی محلول و غلظت یون هیدرونیوم در محلول در غلظت اولیهٔ یکسان	بیشتر	کم‌تر
pH در غلظت اولیهٔ یکسان	کم‌تر	بیشتر

- در محلول‌های آبی، هر چه‌قدر غلظت یون هیدرونیوم افزایش یابد، **به همان نسبت** (نه همان اندازه!) از غلظت یون هیدروکسید کاسته می‌شود تا حاصل‌ضرب آن‌ها در دمای معین، ثابت بماند.

نکته

- با توجه به رابطهٔ $[H^+][OH^-] = 10^{-14}$ نتیجه می‌گیریم که در دمای اتاق غلظت یون‌های H^+ و OH^- با یکدیگر نسبت عکس دارند، یعنی اگر غلظت یون H^+ در یک محلول آبی افزایش یابد، به همان نسبت غلظت یون OH^- کاهش می‌یابد تا همواره حاصل‌ضرب غلظت آن‌ها برابر با یک عدد ثابت شود.



- دقت کنید حاصل‌ضرب $[H^+][OH^-]$ فقط به دما بستگی دارد و با تغییر حجم محلول و ... تغییر نمی‌کند.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸۱ **HX و HY دو اسید ضعیف هستند. اگر ۱۲ گرم از HX و ۸ گرم از HY جداگانه در ۳۰۰ میلی‌لیتر آب حل شوند، pH محلول HX، ۰/۵ واحد بیشتر از pH محلول HY خواهد شد. با توجه به آن نسبت $\frac{\alpha_{HY}}{\alpha_{HX}}$ کدام است؟ $(HY = 50, HX = 150 : g.mol^{-1})$**

۱) $\frac{1}{3}$
۲) ۳
۳) ۱/۵
۴) $\frac{2}{3}$

مشاوره در کنکورهای اخیر، سؤال‌ها و تمرین‌های کتاب درسی اهمیت ویژه‌ای پیدا کرده است؛ پس *برما واجبه* که این سؤال‌ها رو خوب بررسی کنیم.

Hint اختلاف pH دو محلول، نسبت $[H^+]$ را در دو محلول نشان می‌دهد. با توجه به آن و هم‌چنین رابطهٔ $[H^+] = \alpha M$، می‌توانی نسبت درجهٔ یونش دو محلول را حساب کنی.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: pH محلول HX، ۰/۵ واحد بیشتر از HY است؛ پس $[H^+]$ در محلول HY بیشتر است:

$$pH_{HX} - pH_{HY} = 0/5 \Rightarrow -\log[H^+]_{HX} - (-\log[H^+]_{HY}) = 0/5$$

$$\Rightarrow \log[H^+]_{HY} - \log[H^+]_{HX} = 0/5 \Rightarrow \log\left(\frac{[H^+]_{HY}}{[H^+]_{HX}}\right) = 0/5 \Rightarrow \frac{[H^+]_{HY}}{[H^+]_{HX}} = 10^{0/5} = 3$$

گام دوم: در محلول اسیدهای ضعیف، غلظت یون هیدرونیوم را می‌توانیم با استفاده از غلظت اولیه و درجهٔ یونش اسید محاسبه کنیم؛ بدین ترتیب نسبت درجه یونش دو اسید را می‌نویسیم:

$$\frac{[H^+]_{HY}}{[H^+]_{HX}} = \frac{\alpha_{HY} M_{HY}}{\alpha_{HX} M_{HX}} = 3 \Rightarrow \frac{\alpha_{HY}}{\alpha_{HX}} = 3 \times \frac{M_{HX}}{M_{HY}}$$

گام سوم: *بلا!* نسبت غلظت اولیهٔ این دو اسید را حساب می‌کنیم. با استفاده از جرم، جرم مولی و حجم هر محلول، غلظت مولی آن‌ها قابل محاسبه است؛ بنابراین داریم:

$$\text{غلظت مولی محلول HX} = \frac{\text{مول}}{\text{حجم}} = \frac{\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی}}}{\text{حجم}} = \frac{12}{150 \times 0/3} = \frac{12}{45}\ mol.L^{-1}$$

$$\text{غلظت مولی محلول HY} = \frac{\text{مول}}{\text{حجم}} = \frac{\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی}}}{\text{حجم}} = \frac{8}{50 \times 0/3} = \frac{8}{15}\ mol.L^{-1}$$

گام چهارم: *بلا بازم!* نسبت درجهٔ یونش این دو اسید رو می‌سنجیم:

$$\frac{\alpha_{HY}}{\alpha_{HX}} = 3 \times \frac{M_{HX}}{M_{HY}} = 3 \times \frac{\frac{12}{45}}{\frac{8}{15}} = \frac{3 \times 12 \times 15}{45 \times 8} = \frac{12}{8} = 1/5$$

HX و HY دو اسید ضعیف هستند. اگر ۱۲ گرم از HX و ۸ گرم از HY جداگانه در یک لیتر آب حل شوند، pH این دو محلول برابر خواهد شد. با مقایسهٔ درجه یونش آن‌ها مشخص کنید کدام اسید قوی‌تری است؟ چرا؟ *(تمرین‌های دوره‌ای ـ صفحهٔ ۳۵ کتاب درسی)*

$(1 mol\ HX = 150 g, 1 mol\ HY = 50 g)$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸۲ چند مورد از موارد زیر، دربارهٔ محلول‌های ۰/۲ مولار هیدروفلوئوریک اسید و ۰/۱ مولار نیترو اسید، در دمای ثابت درست است؟

- دو محلول ممکن است pH یکسانی داشته باشند.
- دو محلول می‌توانند با مقدار یکسانی پتاسیم هیدروکسید به طور کامل واکنش دهند.
- با افزایش غلظت هر دو محلول، ثابت یونش هر دو اسید افزایش می‌یابد.
- با رقیق‌کردن هر دو محلول، درجهٔ یونش هر دو اسید کاهش می‌یابد.

K_a فقط به دما وابسته است و با تغییر غلظت محلول، ثابت باقی می‌ماند.

α به دما و غلظت محلول وابسته است و با تغییر غلظت محلول، تغییر می‌کند.

۱) ۱　　۲) ۲

۳) ۳　　۴) ۴

پاسخ خیلی تشریحی

تنها عبارت دوم درست است.

بررسی عبارت‌ها:

- غلظت یون H^+ در محلول هیدروفلوئوریک اسید به دلیل غلظت بیشتر و هم‌چنین قوی‌تربودن نسبت به نیترو اسید، بیشتر است؛ در نتیجه نمی‌تواند pH برابری با محلول نیترو اسید داشته باشد.
- مقدار پتاسیم هیدروکسید مصرفی به تعداد مول اسید وابسته است. بدین ترتیب اگر حجم محلول نیترو اسید، ۲ برابر حجم محلول هیدروفلوئوریک اسید باشد، مقدار KOH مورد نیاز برای خنثی‌کردن کامل دو محلول، برابر خواهد بود.
- *هواستون باشه که* ثابت یونش فقط تابعی از دماست و با تغییر غلظت، ثابت باقی می‌ماند.
- در اسیدهای ضعیف، درجهٔ یونش با غلظت رابطهٔ عکس دارد و با رقیق‌کردن محلول، درجهٔ یونش آن‌ها افزایش می‌یابد.

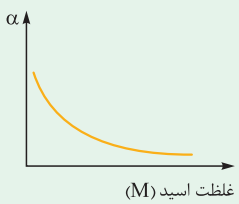
نکته

برای اسیدهای ضعیف با K_a خیلی کوچک، رابطهٔ $K_a = M.\alpha^2$ برقرار است. ثابت یونش تنها تابع دماست؛ بنابراین در دمای معین، K_a ثابت بوده و می‌توان گفت در اسیدهای ضعیف، اگر غلظت مولی (M) کاهش یابد، درجهٔ یونش (α) افزایش می‌یابد تا K_a ثابت بماند (در واقع با رقیق‌تر شدن محلول اسیدهای ضعیف، درجهٔ یونش اسید افزایش می‌یابد).

$$K_a = M \downarrow .\alpha^2 \uparrow \Rightarrow \text{در دمای ثابت}: \alpha^2 \propto \frac{1}{M} \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \sqrt{\frac{M_1}{M_2}}\right)$$

ثابت　کاهش　افزایش

بنابراین نمودار درجهٔ یونش یک اسید ضعیف برحسب تغییرات غلظت آن به صورت روبه‌رو است:



SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸۳ چند مورد از عبارت‌های زیر، همواره درست است؟

- در واکنش دو اسید با حجم و غلظت یکسان با فلز روی، میزان حجم گاز هیدروژن تولیدی برابر است.
- در واکنش دو اسید با حجم و pH یکسان با مقدار زیادی سدیم هیدروکسید، میزان آب تولیدشده برابر است.
- دو اسید با حجم و pH یکسان در واکنش با یک واکنش‌دهندهٔ مشخص، سرعت یکسانی داشته و زمان واکنش آن‌ها نیز برابر است.
- اگر pH دو اسید قوی یکسان باشد، غلظت مولی هر دو اسید برابر است.
- سرعت واکنش محلول اسید قوی با فلز آهن، بیشتر از سرعت واکنش محلول اسید ضعیف با همان فلز است.

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ خیلی تشریحی

متأسفانه! نمی‌توانیم دربارهٔ هیچ‌کدام از عبارت‌های داده‌شده *بگیم که* همواره درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

- ممکن است ظرفیت اسیدها متفاوت باشد. اسید با ظرفیت بیشتر (در حجم و غلظت یکسان) فراوردهٔ بیشتری تولید می‌کند.
- میزان فراوردهٔ تولیدی به pH محلول ربطی ندارد؛ بلکه به غلظت اولیهٔ اسید، ظرفیت اسید و حجم محلول اسید بستگی دارد. ممکن است یک اسید ضعیف با غلظتی زیاد، pH یکسانی با یک اسید قوی داشته باشد، ولی میزان آب تولیدشدهٔ آن در واکنش با مقدار کافی سدیم هیدروکسید بیشتر خواهد بود.
- سرعت آغازی واکنش‌ها به واسطهٔ غلظت H^+ برابر مشابه بوده، اما عواملی مانند قدرت اسید و غلظت اولیهٔ اسید باعث می‌شوند زمان اتمام واکنش آن‌ها یکسان نباشد؛ یعنی مثل مورد بالا، ممکن است مقدار فراورده‌ها یکسان نباشد.
- اگر ظرفیت اسیدها متفاوت باشد، غلظت مولی آن‌ها نیز متفاوت خواهد بود. به عبارتی اسیدی که ظرفیت بیشتری دارد، غلظت مولی کم‌تری خواهد داشت.
- سرعت واکنش به $[H^+]$ یعنی pH وابسته است و ممکن است اسید ضعیف با داشتن pH کم‌تر (مثلاً داشتن غلظت اولیهٔ خیلی بیشتر) سرعت واکنش بیشتری داشته باشد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸۴ اگر مجموع pH محلول ۰/۲ مولار اسید HA و محلول ۰/۱ مولار باز BOH، برابر ۱۲/۴ باشد، نسبت درجهٔ یونش اسید HA به درجهٔ یونش باز BOH کدام است؟

۱) ۰/۰۵ ۲) ۰/۱ ۳) ۲۰ ۴) ۱۰

Hint

با توجه به مجموع pH دو محلول، حاصل‌ضرب غلظت یون H^+ در دو محلول را حساب کن و با توجه به این‌که در محلول بازی، $[H^+].[OH^-]=10^{-14}$ است، نسبت غلظت یون H^+ در محلول اسیدی به غلظت یون OH^- در محلول بازی را به دست بیاور. در نهایت با توجه به غلظت دو محلول، نسبت درجه یونش اسید HA به درجه یونش باز BOH را محاسبه کن.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: محلول‌های ۰/۲ مولار اسید HA و ۰/۱ مولار باز BOH را به ترتیب محلول‌های (۱) و (۲) در نظر می‌گیریم؛ بدین ترتیب می‌توانیم با توجه به مجموع pH دو محلول، حاصل‌ضرب غلظت یون H^+ را در آن‌ها حساب کنیم:

$$pH_1+pH_2=12/4 \longrightarrow -\log[H^+]_1+(-\log[H^+]_2)=12/4 \longrightarrow \log[H^+]_1+\log[H^+]_2=-12/4$$

$$\rightarrow \log[H^+]_1\times[H^+]_2=-12/4 \longrightarrow [H^+]_1\times[H^+]_2=10^{-12/4}=10^{0/6}\times10^{-13}=(10^{0/3})^2\times10^{-13}=4\times10^{-13}$$

گام دوم: در محلول (۲)، $[H^+]\times[OH^-]=10^{-14}$ است؛ در نتیجه می‌توانیم با محاسبهٔ نسبت غلظت یون H^+ در محلول (۱) به غلظت یون OH^- در محلول (۲) و هم‌چنین با توجه به غلظت در محلول، *فیلی راحت!* نسبت $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ *رو بحسابیم:*

$$[H^+]_1\times[H^+]_2=4\times10^{-13} \xrightarrow{[H^+]_2=\frac{10^{-14}}{[OH^-]_2}} [H^+]_1\times\frac{10^{-14}}{[OH^-]_2}=4\times10^{-13} \longrightarrow \frac{[H^+]_1}{[OH^-]_2}=40$$

$$\longrightarrow \frac{M_1\alpha_1}{M_2\alpha_2}=40 \longrightarrow \frac{0/2\times\alpha_1}{0/1\times\alpha_2}=40 \longrightarrow \frac{\alpha_1}{\alpha_2}=20$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸۵ ۱/۳۶ گرم گاز NH_3 را وارد ۱۰۰ میلی‌لیتر محلول ۰/۱ مولار آن می‌کنیم. اگر حجم و دمای محلول تغییری نکند، **pH** محلول حاصل به تقریب ..... . $(K_b = 2/56\times10^{-5}\ ,\ H=1\ ,\ N=14 : g.mol^{-1})$

۱) یک واحد افزایش می‌یابد.
۲) ۰/۵ واحد افزایش می‌یابد.
۳) یک واحد کاهش می‌یابد.
۴) ۰/۵ واحد کاهش می‌یابد.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: با توجه به این‌که *واضحاً* مقدار $\frac{K_b}{M} < 0/002$ است؛ در نتیجه می‌توانیم غلظت یون OH^- و pH محلول اولیه (رقیق) *رو خیلی راحت با استفاده از رابطهٔ تقریبی بحسابیم!*

$$\text{محلول اولیه (رقیق)} \Rightarrow \begin{cases} [OH^-] \simeq \sqrt{K_b \times M} \simeq \sqrt{2/56\times10^{-5}\times10^{-1}} = 1/6\times10^{-3}\ mol.L^{-1} \Rightarrow [H^+] = \frac{10^{-14}}{[OH^-]} = \frac{10^{-14}}{1/6\times10^{-3}} = \frac{10^{-10}}{16} \\ pH = -\log[H^+] = -\log10^{-10} + \log16 = 10 + 4\log2 = 11/2 \end{cases}$$

($\log2 \simeq 1/2$)

گام دوم: غلظت مولی محلول نهایی (غلیظ) را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} \text{تعداد مول } NH_3 \text{ افزوده‌شده} = 1/36\ g\ NH_3 \times \frac{1\ mol\ NH_3}{17\ g\ NH_3} = 0/08\ mol\ NH_3 \\ \text{تعداد مول } NH_3 \text{ موجود در محلول اولیه} = 100\ mL \times \frac{1\ L}{1000\ mL} \times \frac{0/1\ mol\ NH_3}{1\ L} = 0/01\ mol\ NH_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{تعداد مول } NH_3 \text{ در محلول نهایی} = 0/08 + 0/01 = 0/09\ mol$$

$$\text{غلظت مولی } NH_3 \text{ در محلول نهایی} = \frac{0/09\ mol}{0/1\ L} = 0/9\ mol.L^{-1}$$

گام سوم: pH محلول نهایی (غلیظ) را حساب می‌کنیم:

$$[OH^-] \simeq \sqrt{K_b \times M} \simeq \sqrt{2/56\times10^{-5}\times9\times10^{-1}} = 4/8\times10^{-3}\ mol.L^{-1} \Rightarrow [H^+] = \frac{10^{-14}}{4/8\times10^{-3}} = \frac{10^{-10}}{48}$$

$$pH = -\log[H^+] = -\log10^{-10} + \log48 = 10 + \log3 + \log16 = 10 + 0/5 + 4\log2 = 11/7$$

($\log2 \simeq 1/2$)

گام چهارم: تفاوت pH محلول اولیه (رقیق) و محلول نهایی (غلیظ) را به دست می‌آوریم.

$$\Rightarrow \Delta pH = 11/7 - 11/2 = 0/5$$

بنابراین pH محلول به اندازهٔ ۰/۵ واحد افزایش می‌یابد.

تیزبازی

تعداد مول‌های محلول اولیه و ثانویه را تعیین کرده و در رابطهٔ زیر قرار می‌دهیم. *هواستون باشه که* این رابطه به شرط ثابت‌بودن حجم محلول اولیه و ثانویه برای اسیدها و بازهای ضعیف صادق است:

$$\Delta pH = \frac{1}{2}\log\frac{n_{\text{غلیظ}}}{n_{\text{رقیق}}} = \frac{1}{2}\log\frac{0/09\ mol}{0/01\ mol} = \frac{1}{2}\log9 = \frac{1}{2}(2\log3) = 0/5$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸۶ جرم‌های برابری از سدیم اکسید ناخالص و دی‌نیتروژن پنتااکسید ناخالص را در آب حل کرده و حجم محلول را با افزودن آب به ۵ لیتر می‌رسانیم. اگر pH محلول حاصل برابر ۷ باشد، نسبت درصد خلوص سدیم اکسید به درصد خلوص دی‌نیتروژن پنتااکسید، به تقریب کدام است؟ (ناخالصی‌ها باعث تغییر غلظت آب نمی‌شوند.) $(N = ۱۴ , O = ۱۶ , Na = ۲۳ : g.mol^{-۱})$

دو محلول، به طور کامل با هم واکنش داده و یکدیگر را خنثی کرده‌اند.

۱) ۱/۱۴ ۲) ۳/۴

۳) ۰/۵۷ ۴) ۱/۷

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: از آن‌جایی که pH محلول حاصل برابر ۷ است، یعنی غلظت یون‌های H^+ و OH^- در محلول حاصل با هم برابر است و در واقع محلول به‌دست‌آمده، خنثی می‌باشد؛ بنابراین محلول‌های حاصل از سدیم اکسید $(Na_۲O)$ و دی‌نیتروژن پنتااکسید $(N_۲O_۵)$ به طور کامل با یکدیگر واکنش داده‌اند.

یادتون هست که با حل‌شدن هر مول $N_۲O_۵$ در آب، ۲ مول H^+ و ۲ مول $NO_۳^-$ تولید می‌شود:

$$N_۲O_۵(s) + H_۲O(l) \rightarrow \underbrace{۲H^+(aq) + ۲NO_۳^-(aq)}_{۲HNO_۳(aq)}$$

هم‌چنین اینم می‌دونین که با حل‌شدن هر مول اکسید فلز قلیایی در آب، ۲ مول کاتیون آن فلز و ۲ مول یون هیدروکسید تولید می‌شود:

$$Na_۲O(s) + H_۲O(l) \longrightarrow \underbrace{۲Na^+(aq) + ۲OH^-(aq)}_{۲NaOH(aq)}$$

خلاصه! این دو محلول طبق معادلهٔ زیر با هم واکنش می‌دهند:

$$HNO_۳(aq) + NaOH(aq) \rightarrow NaNO_۳(aq) + H_۲O(l)$$

با توجه به معادلات بالا می‌توان گفت که $Na_۲O$ و $N_۲O_۵$ با نسبت مولی یک‌به‌یک با هم واکنش می‌دهند:

$$\left.\begin{array}{l} N_۲O_۵ \sim ۲HNO_۳ \\ Na_۲O \sim ۲NaOH \\ HNO_۳ \sim NaOH \end{array}\right\} \rightarrow N_۲O_۵ \sim Na_۲O$$

گام دوم: جرم اولیه دو ترکیب $Na_۲O$ و $N_۲O_۵$ را برابر x و درصد خلوص آن‌ها را به ترتیب برابر $P_۱ , P_۲$ در نظر گرفته و با توجه به نسبت مولی و واکنش کامل آن‌ها با یکدیگر، نسبت $\frac{P_۱}{P_۲}$ را حساب می‌کنیم:

$$\frac{\text{جرم} \times \frac{\text{درصد خلوص}}{۱۰۰}}{\underbrace{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}_{Na_۲O}} = \frac{\text{جرم} \times \frac{\text{درصد خلوص}}{۱۰۰}}{\underbrace{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}_{N_۲O_۵}} \rightarrow \frac{x \times \frac{P_۱}{۱۰۰}}{۱ \times ۶۲} = \frac{x \times \frac{P_۲}{۱۰۰}}{۱ \times ۱۰۸} \rightarrow \frac{P_۱}{P_۲} = \frac{۶۲}{۱۰۸} \xrightarrow[\text{طبق گزینه‌ها}]{\frac{P_۱}{P_۲} < ۱} ۰/۵۷$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸۷ ۲۰۰ میلی‌لیتر محلول باریم هیدروکسید که غلظت مولی یون هیدروکسید در آن، ۰/۳ مولار است، با چند میلی‌لیتر محلول آهن (III) کلرید که مجموع غلظت مولی یون‌ها در آن، ۰/۸ مولار است، مطابق معادلهٔ موازنه‌نشدهٔ زیر به طور کامل واکنش داده و در پایان، چند گرم رسوب آهن (III) هیدروکسید تشکیل می‌شود؟ $(H=1, O=16, Fe=56 : g.mol^{-1})$

$$FeCl_3(aq) + Ba(OH)_2(aq) \rightarrow Fe(OH)_3(s) + BaCl_2(aq)$$

۱) ۲/۱۴ ـ ۱۰۰

۲) ۲/۱۴ ـ ۵۰

۳) ۴/۲۸ ـ ۱۰۰

۴) ۴/۲۸ ـ ۵۰

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: غلظت‌های مولی باریم هیدروکسید ($Ba(OH)_2$) و آهن (III) کلرید ($FeCl_3$) را در محلول‌های اولیه آن‌ها حساب می‌کنیم:

$$Ba(OH)_2 \begin{cases} n_{OH^-} = 2 \Rightarrow [OH^-] = M.n.\alpha \Rightarrow 0/3 = M \times 2 \times 1 \Rightarrow M_{Ba(OH)_2} = 0/15\ mol.L^{-1} \\ \alpha = 1 \end{cases}$$

$$FeCl_3 \left\{ M_{FeCl_3} = \frac{\text{مجموع غلظت مولی یون‌ها}}{4} = \frac{0/8}{2} = 0/2\ mol.L^{-1} \right.$$

گام دوم: معادلهٔ واکنش انجام‌شده را موازنه می‌کنیم:

$$2FeCl_3(aq) + 3Ba(OH)_2(aq) \rightarrow 2Fe(OH)_3(s) + 3BaCl_2(aq)$$

گام سوم: با توجه به غلظت و حجم محلول $Ba(OH)_2$، حجم محلول $FeCl_3$ مصرف شده و جرم رسوب $Fe(OH)_3$ تولیدشده را به دست می‌آوریم:

استفاده از کسر تبدیل:

$$200\ mL\ Ba(OH)_2\ \text{محلول} \times \frac{1\ L}{1000\ mL} \times \frac{0/15\ mol\ Ba(OH)_2}{1\ L\ Ba(OH)_2\ \text{محلول}} \times \frac{2\ mol\ FeCl_3}{3\ mol\ Ba(OH)_2}$$

$$\times \frac{1\ L\ FeCl_3\ \text{محلول}}{0/2\ mol\ FeCl_3} \times \frac{1000\ mL}{1\ L} = 100\ mL\ FeCl_3\ \text{محلول}$$

$$200\ mL\ Ba(OH)_2\ \text{محلول} \times \frac{1\ L}{1000\ mL} \times \frac{0/15\ mol\ Ba(OH)_2}{1\ L\ Ba(OH)_2\ \text{محلول}} \times \frac{2\ mol\ Fe(OH)_3}{3\ mol\ Ba(OH)_2} \times \frac{107\ g\ Fe(OH)_3}{1\ mol\ Fe(OH)_3}$$

$$= 2/14\ g\ Fe(OH)_3$$

یه‌جور دیگه

استفاده از کسر تناسب:

$$\underbrace{\frac{\text{حجم} \times \text{غلظت مولی}}{\text{ضریب}}}_{Ba(OH)_2} = \underbrace{\frac{\text{حجم} \times \text{غلظت مولی}}{\text{ضریب}}}_{FeCl_3} \longrightarrow \frac{\overset{0/5}{\cancel{0/15}} \times 200}{3} = \frac{\overset{0/1}{\cancel{0/2}} \times x}{2} \longrightarrow x = 100\ mL\ FeCl_3\ \text{محلول}$$

$$\underbrace{\frac{\text{حجم} \times \text{غلظت مولی}}{\text{ضریب}}}_{Ba(OH)_2} = \underbrace{\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}}_{Fe(OH)_3} \longrightarrow \frac{\overset{0/5}{\cancel{0/15}} \times 200}{3} = \frac{x}{2 \times 107} \longrightarrow x = 2/14\ g\ Fe(OH)_3$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸۸ برای خنثی کردن ۱۰۰ میلی‌لیتر محلول ۰/۰۲ مولار هیدروفلوئوریک اسید با درجهٔ یونش ۰/۲، چند گرم سدیم هیدروکسید با درصد خلوص ۵۰٪ نیاز است؟ $(H=1, O=16, Na=23 : g.mol^{-1})$

۱) ۰/۳۲

۲) ۰/۱۶

۳) ۰/۰۱۶

۴) ۰/۰۳۲

مشاوره مسائل خنثی‌شدن اسید ـ باز، پای ثابت هر دوره از سؤالات کنکور سراسری است، پس *لازمه که* به خوبی به این مبحث مسلط شوید تا بتوانید به *راحتی!* یک تست از کنکورتان را تضمین کنید.

Hint ابتدا شمار مول‌های HF را در محلول اولیهٔ آن محاسبه کن، سپس معادلهٔ واکنش انجام‌شده را بنویس. در نهایت جرم سدیم هیدروکسید مورد نیاز برای خنثی‌کردن کامل محلول اسید HF را با توجه به درصد خلوص آن به دست بیاور.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** شمار مول‌های اسید HF را در محلول اولیهٔ آن حساب می‌کنیم.

$$\text{مول HF} : \overset{1}{\cancel{100}}\ \text{mL} \times \frac{1\text{L}}{\underset{10}{\cancel{1000}}\ \text{mL}} \times \frac{0/02\ \text{mol}}{1\text{L}} = 0/002\ \text{mol}$$

گام دوم: *حالا باید بسنجیم که* ۰/۰۰۲ مول HF با چند گرم سدیم هیدروکسید با خلوص ۵۰ درصد واکنش می‌دهد:

$$NaOH + HF \longrightarrow NaF + H_2O$$

$$\underbrace{\frac{\text{مول}}{\text{ضریب}\times 1}}_{HF} = \frac{\text{درصد خلوص}}{100} \times \underbrace{\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی}\times\text{ضریب}}}_{NaOH} \longrightarrow \frac{0/002}{1} = \frac{x \times \frac{50}{100}}{1\times 40} \longrightarrow x = 0/16\ \text{g NaOH}$$

گول نخوری *خواستون باشه که* به درجه یونش اسید، در حل این تست، نیازی نداشیم و *در واقع یه جور دیتای اضافی محسوب می‌شه!*

اگر pH محلول اسید HA $(\alpha = 0/2)$، برابر ۱/۴ باشد، در ۲۰۰ میلی لیتر از آن، چند مول اسید وجود دارد و این محلول با چند گرم سدیم هیدروژن کربنات با خلوص ۸۰ درصد واکنش می‌دهد؟ $(Na=23, O=16, C=12, H=1 : g.mol^{-1})$ *(تجربی داخل ۹۹)*

$$NaHCO_3(s) + HA(aq) \rightarrow NaA(aq) + CO_2(g) + H_2O(l)$$

۱) ۰/۰۴ ، ۳/۳۶

۲) ۰/۰۲ ، ۴/۲۰

۳) ۰/۰۲ ، ۳/۳۶

۴) ۰/۰۴ ، ۴/۲۰

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸۹ کدام مورد، نادرست است؟

۱) باتری، مولدی است که در آن واکنش شیمیایی با سفر الکترون رخ می‌دهد تا بخشی از انرژی شیمیایی مواد به انرژی الکتریکی تبدیل شود.

۲) در واکنش‌های اکسایش ـ کاهش، ماده‌ای که با گرفتن الکترون سبب اکسایش گونهٔ دیگر می‌شود را اکسنده می‌نامند.

۳) در گذشته برای عکاسی از سوختن $Mg(s)$ به عنوان منبع نور استفاده می‌شد که در این واکنش، منیزیم با نور خیره‌کننده‌ای به $MgO(s)$ تبدیل می‌شود. $2Mg(s)+O_2(g) \rightarrow 2MgO(s)$

۴) در واکنش تیغهٔ آهن با محلول مس (II) سولفات، مخلوط واکنش گرم‌تر می‌شود، زیرا سامانهٔ واکنش بخشی از انرژی را به شکل گرما از محیط می‌گیرد.

واکنش به طور خودبه‌خودی انجام می‌شود.

گرماگیر بودن واکنش و کاهش دما!

پاسخ خیلی تشریحی ✔

وقتی واکنش آهن $(Fe(s))$ با مس (II) سولفات $(CuSO_4(aq))$ انجام می‌شود، مخلوط واکنش گرم‌تر می‌شود:

$$Fe(s)+Cu^{2+}(aq) \rightarrow Fe^{2+}(aq)+Cu(s) \quad , \quad \Delta H<0$$

دلیل آن این است که در واکنش‌هایی از این دست، سطح انرژی فراورده‌ها پایین‌تر از واکنش‌دهنده‌ها بوده و در واقع واکنش، گرماده است؛ بنابراین در این واکنش‌ها سامانهٔ واکنش بخشی از انرژی خود را به شکل گرما به محیط می‌دهد؛ نه این‌که از محیط گرما بگیرد!

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): *آره والا! متن کتاب که یادتون نرفته احیاناً؟!*

گزینهٔ (۲):

کاهنده ← الکترون از دست می‌دهد (اکسایش می‌یابد) و سبب کاهش گونهٔ دیگر می‌شود.

اکسنده ← الکترون می‌گیرد (کاهش می‌یابد) و سبب اکسایش گونهٔ دیگر می‌شود.

گزینهٔ (۳): در گذشته برای عکاسی، از سوختن منیزیم به عنوان منبع نور استفاده می‌شد. در این واکنش $Mg(s)$ با نور خیره‌کننده‌ای در $O_2(g)$ می‌سوزد و به $MgO(s)$ تبدیل می‌شود. نیم‌واکنش‌های اکسایش و کاهش در این فرآیند را می‌توان به صورت زیر نشان داد:

نیم‌واکنش اکسایش: $Mg(s) \rightarrow Mg^{2+}(s)+2e^-$

نیم‌واکنش کاهش: $O_2(g)+4e^- \rightarrow 2O^{2-}(s)$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹۰ کدام گزینه، عبارت زیر را به درستی تکمیل می‌کند؟

«معادلهٔ نیم‌واکنش ..... با معادلهٔ نیم‌واکنش ..... یکسان است.»

۱) کاتدی در سلول برقکافت آب ـ کاتدی در فرایند خوردگی آهن در محیط خنثی

۲) آندی در سلول نور ـ الکتروشیمیایی سیلیسیم ـ آندی در سلول برقکافت آب

۳) کاهش نیم‌سلول SHE در کاتد سلول گالوانی ـ آندی در سلول سوختی هیدروژن

۴) کاتدی در سلول سوختی هیدروژن ـ کاتدی در فرایند خوردگی آهن در محیط اسیدی

مشاوره تسلط به نیم‌واکنش‌های اکسایش و کاهش در انواع سلول الکتروشیمیایی، *فیلی اهمیت داره!* در این سؤال، *میزان تسلطی که به این نیم‌واکنش‌ها دارین مشخص می‌شه.*

درس Box

همهٔ نیم‌واکنش‌های مهم رو یک‌جا ببینید و یک بار برای همیشه پروندهٔ این موضوع رو ببندید:

سلول سوختی هیدروژن ـ اکسیژن	
اکسایش	$H_2(g) \rightarrow 2H^+(aq) + 2e^-$
کاهش	$O_2(g) + 4H^+(aq) + 4e^- \rightarrow 2H_2O(l)$
کلی	$2H_2(g) + O_2(g) \rightarrow 2H_2O(l)$

خوردگی آهن	
اکسایش	$Fe(s) \rightarrow Fe^{2+}(aq) + 2e^-$
کاهش	در محیط غیراسیدی: $O_2(g) + 2H_2O(l) + 4e^- \rightarrow 4OH^-(aq)$ در محیط اسیدی: $O_2(g) + 4H^+(aq) + 4e^- \rightarrow 2H_2O(l)$
کلی	$4Fe(s) + 6H_2O(l) + 3O_2(g) \rightarrow 4Fe(OH)_3(s)$

سلول سوختی متان ـ اکسیژن	
اکسایش	$CH_4(g) + 2H_2O(l) \rightarrow CO_2(g) + 8H^+(aq) + 8e^-$
کاهش	$2O_2(g) + 8H^+(aq) + 8e^- \rightarrow 4H_2O(l)$
کلی	$CH_4(g) + 2O_2(g) \rightarrow CO_2(g) + 2H_2O(l)$

ورق گالوانیزه	
اکسایش	$Zn(s) \rightarrow Zn^{2+}(aq) + 2e^-$
کاهش	$O_2(g) + 2H_2O(l) + 4e^- \rightarrow 4OH^-(aq)$
کلی	$2Zn(s) + O_2(g) + 2H_2O(l) \rightarrow 2Zn^{2+}(aq) + 4OH^-(aq)$

سلول نور الکتروشیمیایی	
اکسایش	$Si(s) + 2H_2O(l) \rightarrow SiO_2(s) + 4H^+(aq) + 4e^-$
کاهش	$2H_2O(l) + 2e^- \rightarrow H_2(g) + 2OH^-(aq)$
کلی	$Si(s) + 2H_2O(l) \rightarrow SiO_2(s) + 2H_2(g)$

حلبی	
اکسایش	$Fe(s) \rightarrow Fe^{2+}(aq) + 2e^-$
کاهش	$O_2(g) + 2H_2O(l) + 4e^- \rightarrow 4OH^-(aq)$
کلی	$2Fe(s) + O_2(g) + 2H_2O(l) \rightarrow 2Fe^{2+}(aq) + 4OH^-(aq)$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

سلول الکترولیتی برقکافت آب	
اکسایش	$2H_2O(l) \rightarrow O_2(g) + 4H^+(aq) + 4e^-$
کاهش	$2H_2O(l) + 2e^- \rightarrow H_2(g) + 2OH^-(aq)$
کلی	$2H_2O(l) \rightarrow 2H_2(g) + O_2(g)$
سلول الکترولیتی برقکافت سدیم کلرید مذاب	
اکسایش	$2Cl^-(l) \rightarrow Cl_2(g) + 2e^-$
کاهش	$2Na^+(l) + 2e^- \rightarrow 2Na(l)$
کلی	$2Na^+(l) + 2Cl^-(l) \rightarrow 2Na(l) + Cl_2(g)$
سلول هال	
اکسایش	$2O^{-2}(l) \rightarrow O_2(g) + 4e^-$
کاهش	$Al^{3+} + 3e^- \rightarrow Al$
کلی	$2Al_2O_3(s) + 3C(s) \rightarrow 4Al(l) + 3CO_2(g)$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ با توجه به نیم‌واکنش‌های ارائه‌شده، فقط در گزینهٔ (۴) دو نیم‌واکنش مورد نظر با هم یکسان هستند.

گول نخوری ✘ *حالا نیم‌واکنش‌هایی که شبیه به هم هستند و ممکنه تو ذهنتون قاطی پاتی بشه رو تو جدول زیر براتون آوردیم:*

نیم‌واکنش	توضیح
$O_2(g) + 4H^+(aq) + 4e^- \rightarrow 2H_2O(l)$	● نیم‌واکنش کاهش اکسیژن در سلول سوختی هیدروژن ـ اکسیژن ● نیم‌واکنش کاهش اکسیژن در محیط اسیدی
$2H_2O(l) \rightarrow O_2(g) + 4H^+(aq) + 4e^-$ *(برعکس بالایی)*	نیم‌واکنش اکسایش آب
$2H_2O(l) + 2e^- \rightarrow H_2(g) + 2OH^-(aq)$	نیم‌واکنش کاهش آب
$O_2(g) + 2H_2O(l) + 4e^- \rightarrow 4OH^-(aq)$	نیم‌واکنش کاهش اکسیژن در محیط خنثی (نیم‌واکنش کاهش در زنگ‌زدن آهن، خراشیده‌شدن آهن گالوانیزه و حلبی)

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹۱ کدام موارد زیر، نادرست است؟

الف) در تمام سلول‌های گالوانی با گذشت زمان، جرم تیغهٔ آندی کاهش و جرم تیغهٔ کاتدی افزایش می‌یابد.

ب) **emf** واکنش‌های اکسایش ـ کاهش، مستقل از ضرایب استوکیومتری مواد شرکت‌کننده در آن‌ها است.

پ) در همهٔ باتری‌ها با انجام نیم‌واکنش‌های آندی و کاتدی، جریان الکتریکی در مدار بیرونی برقرار می‌شود.

ت) با توجه به چگالی و E° کم فلز لیتیم، در ساخت همهٔ باتری‌های دگمه‌ای از آن استفاده می‌شود.

۱) الف ـ پ　　۲) الف ـ ت

۳) ب ـ پ　　۴) ب ـ ت

کم‌ترین چگالی و E° را در میان فلزها داشته و در واقع قوی‌ترین کاهنده است.

پاسخ خیلی تشریحی

عبارت‌های «الف» و «ت» نادرست‌اند.

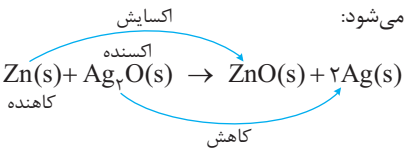
بررسی عبارت‌ها:

الف) در سلول گالوانی با کاتد SHE، $H_2(g)$ در نیم‌سلول کاتدی تولید می‌شود، اما جرم الکترود پلاتینی آن تغییری نمی‌کند.

ب) *هواستون باشه که* emf سلول گالوانی، به پتانسیل کاهشی نیم‌سلول‌های آندی و کاتدی بستگی دارد و مستقل از ضرایب استوکیومتری مواد شرکت‌کننده در واکنش اکسایش ـ کاهش مربوطه می‌باشد.

پ) باتری‌ها در شکل، اندازه و کارایی با یکدیگر تفاوت آشکاری دارند، اما در همهٔ آن‌ها با انجام‌شدن نیم‌واکنش‌های آندی و کاتدی، جریان الکتریکی در مدار بیرونی برقرار می‌شود.

ت) در همهٔ باتری‌های دگمه‌ای از لیتیم استفاده نمی‌شود. در تمرین‌های دوره‌ای صفحهٔ ۶۳ کتاب درسی می‌خوانیم که باتری‌های روی ـ نقره از جمله باتری‌های دگمه‌ای هستند که در آن‌ها واکنش زیر انجام می‌شود:



در این باتری‌ها، اتم روی در آند اکسایش یافته و نقش کاهنده را دارد، نقره اکسید هم در کاتد کاهش یافته و نقش اکسنده را ایفا می‌کند.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹۲ با توجه به پتانسیل‌های کاهشی استاندارد زیر، کدام‌گونه اکسندهٔ قوی‌تری است؟

$E^\circ(Cl_2/2Cl^-) = +1/36V$ $\quad E^\circ(MnO_4^-/Mn^{2+}) = +1/51V$

$E^\circ(O_2/2H_2O) = +1/23V$ $\quad E^\circ(Cr_2O_7^{2-}/2Cr^{3+}) = +1/33V$

۱) Cl_2 $\quad$ ۲) $Cr_2O_7^{2-}$

۳) H_2O $\quad$ ۴) Mn^{2+}

درس Box

- پتانسیل‌های الکترودی استاندارد همواره به صورت پتانسیل کاهشی استاندارد، به صورت زیر گزارش می‌شوند:

گونهٔ کاهنده $\rightarrow$ گونهٔ اکسنده $+ne^-$

- اگر پتانسیل کاهشی استاندارد این نیم‌واکنش برابر x ولت باشد، گزارش پتانسیل کاهشی استاندارد به فرمت زیر صورت می‌گیرد:

E (گونهٔ کاهنده/گونهٔ اکسنده) $= xV$

- می‌دانید که هر چه E° بزرگ‌تر یا مثبت‌تر باشد، قدرت گونهٔ اکسنده به دریافت الکترون بیشتر و قدرت گونهٔ کاهنده به الکترون‌دهی کم‌تر می‌شود و *بالعکس!*

هر چه E° منفی‌تر یا کم‌تر
- قدرت کاهندگی گونهٔ کاهنده ↑
- قدرت اکسندگی گونهٔ اکسنده ↓

- پس هنگامی که از شما پرسیدند: «کدام گونه بهتر کاهش می‌یابد (اکسندهٔ قوی‌تری است)؟» شما باید گونه‌های سمت چپ نیم‌واکنش‌های کاهشی را مقایسه کنید. هر چه E° مثبت‌تر باشد، گونهٔ سمت چپ بهتر کاهش می‌یابد و اکسندهٔ قوی‌تری است.

به همین صورت اگر از شما بپرسند: «کدام گونه بهتر اکسید می‌شود (کاهندهٔ قوی‌تری است)؟» باید گونه‌های سمت راست نیم‌واکنش‌های کاهشی را مقایسه کنید.

مقایسهٔ قدرت کاهش‌یافتن یا اکسندگی ← نگاه به چپی‌ها

مقایسهٔ قدرت اکسیدشدن یا کاهندگی ← نگاه به راستی‌ها

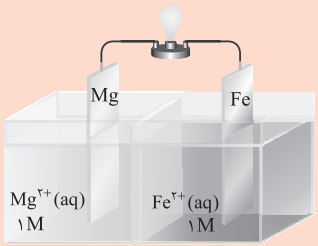
پاسخ خیلی تشریحی ✔

برای پیداکردن گونه با قدرت اکسندگی بیشتر، باید به دنبال **گونهٔ اکسنده‌ای** (گونهٔ سمت چپ نیم‌واکنش کاهش) باشیم که پتانسیل کاهشی استاندارد آن (E°) بزرگ‌تر باشد. در بین گونه‌های ارائه‌شده در صورت سؤال، قدرت اکسندگی گونهٔ MnO_4^- از *بقیه بیشتره*، اما MnO_4^- در بین گزینه‌ها *نظاره نمی‌شه!* بنابراین به سراغ دومین گونهٔ اکسندهٔ قوی یعنی Cl_2 می‌رویم که *از قضا* توگزینهٔ (۱) *اومده!*

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹۳ با توجه به شکل و E° نیم‌واکنش‌ها، چند مورد از موارد زیر، نادرست است؟

$E^\circ(Mg^{2+}(aq)/Mg(s)) = -2/37\,V$ ، $E^\circ(Fe^{2+}(aq)/Fe(s)) = -0/44\,V$



- در این سلول، الکترون‌ها در مدار بیرونی، از الکترود منیزیم به سمت الکترود آهن جریان می‌یابند.
  - کاتیون مربوط به آند ← از آند به سمت کاتد
- یون‌های منیزیم از طریق دیوارهٔ متخلخل به سمت نیم‌سلول آهن حرکت می‌کنند.
- با جایگزین‌کردن آند این سلول با فلز روی، جهت حرکت الکترون‌ها در مدار خارجی تغییر می‌کند.
  - نیم‌سلول کاتد
- با جایگزین‌کردن کاتد این سلول با یک فلز کاهنده‌تر، emf سلول کاهش می‌یابد.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

درس Box سلول گالوانی در یک نگاه!

نیم‌سلول آند	نیم‌سلول کاتد
قطب منفی	قطب مثبت
در آن نیم‌واکنش اکسایش صورت می‌گیرد.	در آن نیم‌واکنش کاهش صورت می‌گیرد.
E° آن نسبت به E° کاتد، کوچک‌تر است.	E° آن نسبت به E° آند، بزرگ‌تر است.
با گذشت زمان، غلظت کاتیون مربوط به آند در آن زیاد می‌شود.	با گذشت زمان، غلظت کاتیون مربوط به کاتد در آن کم می‌شود.
به طور معمول جرم تیغه کاهش می‌یابد. *(لاغر می‌شود)*.	به طور معمول جرم تیغه افزایش می‌یابد. *(چاق می‌شود)*.
آنیون‌ها با عبور از دیوارهٔ متخلخل وارد آن می‌شوند.	کاتیون‌ها با عبور از دیوارهٔ متخلخل وارد آن می‌شوند.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ تنها عبارت سوم نادرست است.

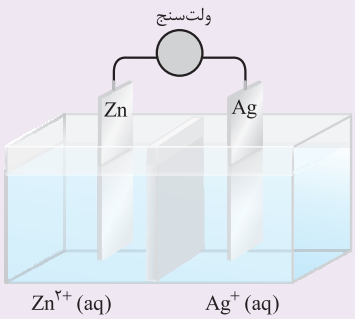
E° نیم‌سلول (Mg^{2+}/Mg) کم‌تر از E° نیم‌سلول (Fe^{2+}/Fe) است؛ بنابراین در سلول گالوانی حاصل از این دو نیم‌سلول، الکترود Mg نقش آند و الکترود Fe نقش کاتد را دارد.

بررسی عبارت‌ها:

- جهت حرکت الکترون‌ها در مدار بیرونی (سیم) از آند (منیزیم) به سمت کاتد (آهن) است.
- کاتیون‌های موجود در نیم‌سلول آند $(Mg^{2+}(aq))$، از طریق دیوارهٔ متخلخل به سمت نیم‌سلول کاتد (نیم‌سلول آهن) حرکت می‌کنند.
- *نه والا!* با جایگزین‌کردن آند سلول (Mg) با فلزی روی، الکترود آهن همچنان نقش کاتد را داشته و همچنان الکترون‌ها به سمت آن حرکت خواهند کرد؛ پس **جهت حرکت الکترون‌ها تغییر نخواهد کرد.**
- اگر کاتد یک سلول گالوانی را با یک فلز کاهنده‌تر (با E° کم‌تر) جایگزین کنیم، تفاوت E° کاتد و آند و در نتیجه emf سلول کم‌تر خواهد شد.

با توجه به شکل و E° نیم‌واکنش‌ها، کدام عبارت درست است؟ $(Zn = 65, Ag = 108 : g \cdot mol^{-1})$ *(تجربی خارج ۹۴)*

$E^\circ(Zn^{2+}(aq)/Zn(s)) = -0/76\,V$ ، $E^\circ(Ag^{+}(aq)/Ag(s)) = +0/80\,V$



۱) اگر میلهٔ روی به طور مستقیم وارد محلول نقره نیترات شود، $[Ag^+]$ به تدریج افزایش می‌یابد.

۲) برخی از یون‌های روی از دیوارهٔ متخلخل عبور کرده و وارد نیم سلول نقره می‌شوند.

۳) با اضافه‌کردن $ZnSO_4(s)$ به محلول کاتدی، یک واکنش الکتروشیمیایی انجام می‌شود.

۴) اگر محلول اولیهٔ آندی و کاتدی حجم و غلظت یکسانی از سولفات فلز مربوطه را داشته باشند، مقدار تغییر جرم تیغهٔ کاتدی دو برابر تیغهٔ آندی خواهد بود.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹۴ اگر در سلول گالوانی استاندارد $Mg-SHE$، pH محلول کاتدی به ۰/۴۵ برسد، کاهش جرم تیغهٔ آندی برابر چند گرم است؟ (حجم محلول‌های آندی و کاتدی برابر با ۱ لیتر است؛ $Mg = 24\ g.mol^{-1}$)

۱) ۱۶/۸

۲) ۱۵/۶

۳) ۸/۴

۴) ۷/۸

مشاوره سؤالات ترکیبی، *رفته‌رفته!* در کنکورهای سراسری پرتکرار و محبوب‌تر *دارن می‌شن!* بنابراین اگر به همچین سؤالاتی برخورد کردین، *ازشون رد نشید و اتفاقاً با هون و دل برین استقبالش!*

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: معادلهٔ واکنش انجام‌شده در این سلول گالوانی را نوشته و موازنه می‌کنیم:

$$Mg(s) + 2H^+(aq) \rightarrow Mg^{2+}(aq) + H_2(g)$$

گام دوم: تفاوت غلظت اولیه و نهایی یون H^+ را که معادل یون H^+ مصرفی در این واکنش است، را حساب می‌کنیم:

غلظت نهایی یون H^+ از محلول کاتدی سلول، برابر است با:

$$[H^+]_{\text{نهایی}} = 10^{-pH} = 10^{-0/45} = 10^{-2} \times 10^{1/55} = 10^{-2} \times 10^{0/85} \times 10^{0/7} = 10^{-2} \times 7 \times 5 = 0/35\ mol.L^{-1}$$

با توجه به این‌که غلظت اولیهٔ یون H^+، ۱ مولار است، تفاوت غلظت اولیه و نهایی آن برابر است با:

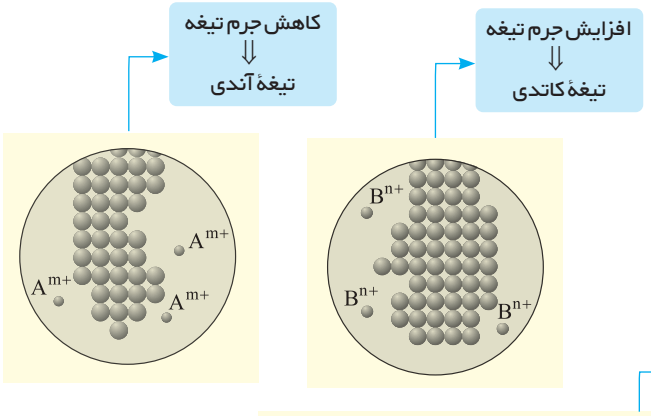
$$\Delta[H^+] = 1 - 0/35 = 0/65\ mol.L^{-1}$$

گام سوم: با توجه به حجم نیم‌سلول‌ها و هم‌چنین مقدار تغییر غلظت یون H^+، جرم Mg مصرفی در این فرایند را که معادل با کاهش تیغهٔ آندی است، می‌*سنجیم*:

$$\underbrace{\frac{\text{حجم} \times \text{غلظت مولی}}{\text{ضریب}}}_{H^+} = \underbrace{\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}}_{Mg} \Rightarrow \frac{0/65 \times 1}{2} = \frac{x}{1 \times 24} \Rightarrow x = 7/8\ g\ Mg$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹۵ با توجه به شکل‌های زیر که نشان‌دهندهٔ تیغه‌های فلزی یک سلول گالوانی در محلول‌های آندی و کاتدی است، چند مورد از مطالب زیر درست است؟



$E^\circ(A^{m+}/A), E^\circ(B^{n+}/B) < 0$

- اگر آلیاژی از فلزهای **A** و **B** در محلول هیدروکلریک اسید با **pH = ۱** به طور کامل حل شود، قدرت کاهندگی فلزهای **A** و **B**، بیشتر از **Cu** است.
- اگر تیغه‌های **A** و **B** به ترتیب مربوط به فلزهای روی و مس باشند، مجموع شمار اتم‌های تیغه‌های فلزی با گذشت زمان ثابت باقی می‌ماند.
- با قراردادن تیغه‌ای از جنس فلز **A** درون محلولی از نمک فلز **B**، جرم تیغه افزایش می‌یابد.
- اگر با قراردادن تیغه‌ای از جنس فلز **B** درون محلول ۱ مولار آهن (II) سولفات، دمای محلول تغییری نکند، مقایسهٔ قدرت کاهندگی این سه فلز به صورت $B < Fe < A$ می‌باشد.

قدرت کاهندگی فلز B، کم‌تر از Fe است.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔ عبارت‌های اول و دوم درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

عبارت اول: اگر فلزهای A و B در محلولی از $HCl(aq)$ به طور کامل حل شوند، یعنی پتانسیل کاهشی استاندارد (E°) آن‌ها کم‌تر از صفر (منفی) است و از آن‌جایی که فلز مس دارای E° بزرگ‌تر از صفر (مثبت) است؛ بنابراین می‌توان گفت که قدرت کاهندگی فلزهای A و B، بیشتر از فلز Cu می‌باشد.

عبارت دوم: اگر تیغه‌های آندی و کاتدی به ترتیب روی و مس باشند، معادلهٔ واکنش به صورت زیر خواهد بود:

$$Zn(s) + Cu^{2+}(aq) \rightarrow Cu(s) + Zn^{2+}(aq)$$

مشفصه که به ازای اکسایش هر اتم روی در این واکنش، یک یون Cu^{2+} کاهش می‌یابد. در واقع به ازای هر اتمی که از آند جدا می‌شود، یک اتم به کاتد اضافه می‌شود؛ بنابراین مجموع شمار اتم‌های تیغه‌های فلزی با گذشت زمان ثابت باقی می‌ماند.

عبارت سوم: *نه به خدا! مثلاً اگه* فلزهای A و B به ترتیب روی و مس باشند، با انجام واکنش، اگر به اندازهٔ یک مول یا ۶۵ گرم از جرم تیغهٔ روی کم شود، با فرض این‌که همهٔ Cu تولیدشده روی تیغه می‌نشینند، به اندازهٔ یک مول Cu یعنی ۶۴ گرم به جرم تیغه اضافه می‌شود؛ پس با گذشت زمان و انجام واکنش، جرم تیغه کاهش خواهد یافت.

عبارت چهارم: اگر فلز B، طلا باشد، با واردکردن تیغه‌ای از آن به درون محلول مس (II) سولفات، دمای محلول تغییری نخواهد کرد. از طرفی فلز A *می‌تونه* روی، منیزیم یا ... *باشه* که در این صورت قدرت کاهندگی آن از آهن *بیشتره!* در این حالت، مقایسهٔ قدرت کاهندگی این سه فلز به صورت $B < Fe < A$ می‌باشد، *اما هواستون باشه که* فلز A هم‌چنین *می‌تونه* مس، نقره، قلع یا ... هم *باشه* که در این صورت قدرت کاهندگی آن از آهن *کم‌تره!* در این حالت، مقایسهٔ قدرت کاهندگی این سه فلز به صورت $B < A < Fe$ خواهد بود. *پس این عبارت لزوماً درست نیست!*

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹۶ ولت‌سنجِ سلول گالوانی $Fe-Cu$ که واکنش زیر در آن انجام می‌شود، اختلاف پتانسیل میان دو نیم‌سلول را برابر ۰/۶۵ ولت نشان می‌دهد. اگر در این سلول گالوانی، ۴/۲ گرم از جرم تیغهٔ آند کاسته شود، چند گرم بر جرم تیغهٔ کاتد افزوده خواهد شد؟ (۷۵ درصد رسوب تولیدشده روی تیغه قرار می‌گیرد؛ $Cu = 64 , Fe = 56 : g.mol^{-1}$)

$$Fe(s) + Cu^{2+}(aq) \rightarrow Cu(s) + Fe^{2+}(aq)$$

$$E^\circ(Cu^{2+}/Cu) = +0/34\ V \ , \ E^\circ(Fe^{2+}/Fe) = -0/44\ V$$

۱) ۲ ۲) ۲/۵ ۳) ۳ ۴) ۴

Hint

ابتدا با استفاده از عدد نشان داده شده توسط ولت‌سنج و پتانسیل‌های کاهشی استاندارد دو نیم‌سلول آندی و کاتدی، بازده سلول *رو به دست بیار*، سپس با استفاده از تغییر جرم تیغهٔ آندی، مقدار افزایش جرم تیغهٔ کاتدی را با توجه به این که ۷۵٪ رسوب تولیدشده روی تیغه قرار می‌گیرد، محاسبه کن.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: تیغه‌های آندی و کاتدی در این سلول گالوانی، به ترتیب آهن و مس هستند؛ زیرا پتانسیل کاهشی استاندارد مس بزرگ‌تر از پتانسیل کاهشی استاندارد آهن است.

خب! باید بازده سلول گالوانی مورد نظر را حساب کنیم:

اگر بازده برابر ۱۰۰ درصد باشد، emf سلول برابر است با:

$$emf = E^\circ(\text{کاتد}) - E^\circ(\text{آند}) = +0/34 - (-0/44) = +0/78\ V$$

از آن‌جایی که ولت‌سنج، اختلاف پتانسیل آند و کاتد را برابر ۰/۶۵ ولت نشان می‌دهد، پس بازده سلول گالوانی مورد نظر برابر است با:

$$\text{بازده سلول} = \frac{\text{عدد نشان داده شده توسط ولت‌سنج}}{\text{سلول } emf} \times 100 = \frac{0/65}{0/78} \times 100 = \frac{500}{6}\,\%$$

گام دوم: با توجه به تغییر جرم تیغهٔ آندی (Fe) و معادلهٔ واکنش، جرم فلز مس تولیدشده را حساب می‌کنیم:

$$4/2\ g\ Fe \times \frac{1\ mol\ Fe}{56\ g\ Fe} \times \frac{64\ g\ Cu}{1\ mol\ Cu} \times \frac{\left(\frac{500}{6}\right)}{100} = 4\ g\ Cu$$

(بازده سلول)

حواستون باشه که از این میزان مس تولیدشده، فقط ۷۵ درصد بر روی تیغهٔ کاتدی رسوب کرده و باعث افزایش جرم آن می‌شود:

$$\text{افزایش جرم تیغهٔ کاتدی} = 4 \times \frac{75}{100} = 3\ g$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹۷ اطلاعات چند ردیف از جدول زیر، دربارهٔ مقایسهٔ سلول‌های گالوانی و الکترولیتی، کاملاً درست است؟

ردیف	مؤلفه	سلول گالوانی	سلول الکترولیتی
۱	علامت الکترود آند	منفی	مثبت
۲	علامت الکترود کاتد	مثبت	منفی
۳	علامت **emf**	مثبت	مثبت
۴	انجام‌شدن واکنش	غیر خودبه‌خودی	خودبه‌خودی
۵	جهت حرکت الکترون‌ها	از قطب منفی به مثبت	از قطب منفی به مثبت
۶	جهت حرکت یون‌ها	به سوی الکترود با بار همنام	به سوی الکترود با بار ناهمنام

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲

پاسخ خیلی تشریحی اطلاعات ردیف‌های «۱»، «۲» و «۶» دربارهٔ مقایسهٔ سلول‌های گالوانی و الکترولیتی، کاملاً درست‌اند.

نسخهٔ درست و کامل جدول، این‌طور است:

ردیف	مؤلفه	سلول گالوانی	سلول الکترولیتی
۱	علامت الکترود آند	منفی	مثبت
۲	علامت الکترود کاتد	مثبت	منفی
۳	علامت emf	مثبت	منفی
۴	انجام‌شدن واکنش	خودبه‌خودی	غیرخودبه‌خودی
۵	جهت حرکت الکترون‌ها	از آند به کاتد (از قطب منفی به قطب مثبت)	از آند به کاتد (از قطب مثبت به قطب منفی)
۶	جهت حرکت یون‌ها	کاتیون‌ها (بار مثبت) به سمت کاتد (قطب مثبت) آنیون‌ها (بار منفی) به سمت الکترود با بار همنام (آند (قطب منفی))	کاتیون‌ها (بار مثبت) به سمت کاتد (قطب منفی) آنیون‌ها (بار منفی) به سمت الکترود با بار ناهمنام (آند (قطب مثبت))

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹۸ درستی یا نادرستی مطالب زیر، به ترتیب کدام است؟

- قدرت اکسندگی هالوژن‌ها، بیشتر از قدرت اکسندگی کاتیون فلزهای قلیایی هم‌دوره با آن‌ها است.
- اگر ترکیب HXO_3 در واکنش‌ها تنها به عنوان عامل اکسنده شرکت کند، عنصر X متعلق به گروه ۱۷ جدول دوره‌ای است.
- افزایش ولتاژ اعمال‌شده به سلول الکترولیتی برقکافت آب می‌تواند باعث افزایش سرعت برقکافت شود.
- الکترولیت مورد استفاده در سلول برقکافت آب باید رسانایی الکتریکی داشته باشد.
- یکی از کاربردهای برقکافت آب، تولید گاز هیدروژن است که به عنوان سوخت در سلول سوختی هیدروژن ـ اکسیژن کاربرد دارد.

۱) درست ـ نادرست ـ درست ـ درست ـ نادرست

۲) نادرست ـ درست ـ درست ـ نادرست ـ نادرست

۳) نادرست ـ درست ـ نادرست ـ درست ـ درست

۴) درست ـ نادرست ـ درست ـ درست ـ درست

مشاوره *خواستون باشه که در این سبک تست‌ها، نیازی به بررسی همهٔ عبارت‌ها نیست و بهتره که با نگاه به گزینه‌ها عبارت‌ها رو بفوئین. مثلاً تو این تست، تنها با بررسی عبارت‌های اول و آخر می‌شه به پاسخ تست رسید.*

پاسخ خیلی تشریحی همه عبارت‌های داده‌شده، به‌جز عبارت دوم درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

فلزهای قلیایی تمایل دارند با از دست دادن الکترون، اکسایش یابند و به آرایش گاز نجیب پیش از خود برسند و نافلزها (مثل هالوژن‌ها) تمایل دارند با گرفتن الکترون، کاهش یابند و به آرایش گاز نجیب هم‌دوره خود دست یابند؛ بنابراین به طور کلی در یک دوره از جدول دوره‌ای، قدرت اکسندگی هالوژن‌ها، بیشتر از قدرت اکسندگی کاتیون فلز قلیایی هم‌دوره با آن است.

نکته بهتر است دامنهٔ تغییرات عدد اکسایش برخی عنصرها را بلد باشین:

شمارهٔ گروه	۱	۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷
پایین‌ترین عدد اکسایش	۰	۰	۰	−۴	−۳	−۲	−۱
بالاترین عدد اکسایش	+۱	+۲	+۳	+۴	+۵	+۶	+۷

به طور کلی در همهٔ فلزها، پایین‌ترین عدد اکسایش برابر با صفر است (در حالت آزاد). برای عنصرهای گروه ۱۴ تا ۱۷ (به‌جز اکسیژن و فلوئور)، پایین‌ترین و بالاترین عدد اکسایش از رابطه‌های زیر به دست می‌آید:

پایین‌ترین عدد اکسایش = شمارهٔ گروه − ۱۸

بالاترین عدد اکسایش = شمارهٔ گروه − ۱۰ = یکان شمارهٔ گروه

ابتدا عدد اکسایش عنصر X را در این ترکیب، حساب می‌کنیم:

$$HXO_3 \rightarrow 1 + X + 3(-2) = 0 \Rightarrow X = +5$$

با توجه به این‌که ترکیب HXO_3 تنها می‌تواند به عنوان عامل اکسنده در واکنش‌های شیمیایی شرکت کند؛ بنابراین بیشترین مقدار عدد اکسایش عنصر X در آن، برابر ۵ بوده و در واقع عنصر X حداکثر دارای ۵ الکترون ظرفیتی بوده و متعلق به گروه ۱۵ جدول دوره‌ای است؛ پس این عنصر نمی‌تواند متعلق به گروه ۱۷ جدول دوره‌ای باشد؛ زیرا عنصرهای گروه ۱۷ دارای ۷ الکترون ظرفیتی هستند و بیشترین مقدار عدد اکسایش آن‌ها برابر (+۷) است. (البته به‌جز فلوئور که عدد اکسایش آن تنها می‌تواند اعداد صفر (در F_2) و −۱ (در بقیهٔ گونه‌ها) باشد.)

افزایش ولتاژ اعمال‌شده به سلول الکترولیتی برقکافت آب می‌تواند سرعت تحرک یون‌ها و در نتیجه سرعت برقکافت را افزایش دهد.

الکترولیت، نقش انتقال بار الکتریکی در محلول را ایفا می‌کند و باید رسانای الکتریسیته باشد؛ *به همین دلیله که پون* آب خالص رسانایی الکتریکی ناچیزی دارد، برای برقکافت آن باید اندکی الکترولیت به آب افزود.

معادلهٔ واکنش فرایند برقکافت آب به صورت زیر است:

$$2H_2O(l) \rightarrow 2H_2(g) + O_2(g)$$

یکی از فراورده‌های این فرایند، گاز هیدروژن است که می‌توان از آن به عنوان سوخت در سلول سوختی هیدروژن ـ اکسیژن بهره برد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹۹ مجموع ضرایب استوکیومتری فراورده‌ها در معادلهٔ واکنش زیر پس از موازنه، کدام است و بر اثر مبادلهٔ ۱/۲ مول الکترون در این واکنش، چند مول سرب (IV) اکسید تولید می‌شود؟

$$Pb_3O_4(s) + HNO_3(aq) \rightarrow Pb(NO_3)_2(aq) + PbO_2(s) + H_2O(l)$$

۱) ۵، ۰/۷۵

۲) ۵، ۰/۹

۳) ۶، ۰/۷۵

۴) ۶، ۰/۹

مشاوره در کنکورهای اخیر، موازنه به روش اکسایش ـ کاهش، *بسی ترند و مورد علاقهٔ طراحای کنکور بوده!* در نتیجه این مبحث، جزء مباحث بسیار مهم بوده و *نمی‌تونین ازش قصر در برین!* رمز موفقیت در این تست‌ها، داشتن دقت زیاد در تمامی مراحل *حل تسته! راستی! حتماً درس‌باکس و پاسخ رو خوب بررسی کنین!*

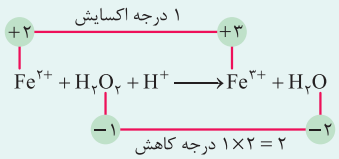
درس Box

موازنه به روش تغییر عدد اکسایش

به طور کلی برای موازنهٔ واکنش‌های اکسایش ـ کاهش، ابتدا تغییر عدد اکسایش اتم‌ها را حساب می‌کنیم، سپس مقدار تغییر عدد اکسایش گونهٔ کاهنده را ضریب گونهٔ اکسنده و مقدار تغییر عدد اکسایش گونهٔ اکسنده را ضریب کاهنده قرار می‌دهیم و در آخر، با توجه به ضرایبی که معلوم هستند، ضرایب بقیهٔ گونه‌ها را تعیین می‌کنیم. *هواستون باشه* که اگر عنصری که عدد اکسایش آن تغییر کرده است، دارای زیروند باشد، باید تغییر عدد اکسایش آن را در زیروندش ضرب کنیم و سپس جابه‌جایی تغییر عدد اکسایش‌ها را انجام بدهیم.

مثل: در این واکنش، عدد اکسایش آهن و اکسیژن تغییر کرده است:

$$Fe^{2+} + H_2O_2 + H^+ \rightarrow Fe^{3+} + H_2O$$



چون در سمت چپ معادله، ۲ اتم اکسیژن در H_2O_2 داشتیم، تغییر عدد اکسایش آن را در ۲ ضرب کردیم. حالا ۲ (تغییر عدد اکسایش O) را ضریب Fe^{2+} و ۱ (تغییر عدد اکسایش Fe) را ضریب H_2O_2 قرار می‌دهیم:

$$\frac{2}{-}Fe^{2+} + \frac{1}{-}H_2O_2 + -H^+ \rightarrow -Fe^{3+} + -H_2O$$

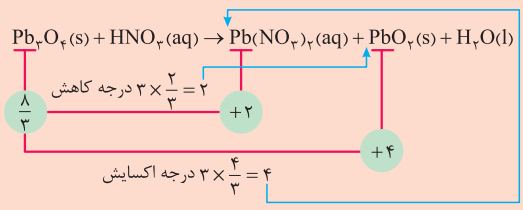
به منظور برابرشدن تعداد اتم‌های Fe و O در دو سمت معادله، ضریب Fe^{3+} و H_2O را برابر با ۲ قرار می‌دهیم:

$$\frac{2}{-}Fe^{2+} + \frac{1}{-}H_2O_2 + -H^+ \rightarrow \frac{2}{-}Fe^{3+} + \frac{2}{-}H_2O$$

در آخر، به منظور موازنه‌شدن اتم‌های H و موازنهٔ بار، ضریب H^+ را هم برابر با ۲ قرار می‌دهیم:

$$2Fe^{2+} + H_2O_2 + 2H^+ \rightarrow 2Fe^{3+} + 2H_2O$$

پاسخ خیلی تشریحی *اول بریم سراغ موازنهٔ معادلهٔ واکنش!* در موازنه به روش اکسایش ـ کاهش، تغییر عدد اکسایش کاهنده را ضریب اکسنده و تغییر عدد اکسایش اکسنده را ضریب کاهنده قرار می‌دهیم:



ضریب سایر مواد را به روش وارسی تعیین می‌کنیم:

$$Pb_3O_4(s) + 4HNO_3(aq) \rightarrow 2Pb(NO_3)_2(aq) + PbO_2(s) + 2H_2O(l)$$

بنابراین مجموع ضرایب استوکیومتری فراورده‌ها در معادلهٔ موازنه‌شدهٔ این واکنش، برابر ۵ است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

حالا! باید شمار مول‌های PbO_2 تولیدشده در این واکنش را به ازای مبادلهٔ ۱/۲ مول الکترون، محاسبه کنیم:

به ازای مبادلهٔ $\frac{4}{3}$ مول الکترون، در این واکنش، یک مول سرب (IV) اکسید (PbO_2) تولید می‌شود؛ بنابراین می‌توان گفت که:

$$PbO_2 \sim \frac{4}{3}e^-$$

استفاده از کسر تبدیل:

$$1/2\,mol\,e^- \times \frac{1\,mol\,PbO_2}{\frac{4}{3}\,mol\,e^-} = 0/9\,mol\,PbO_2$$

یه‌جور دیگه استفاده از کسر تناسب:

$$\frac{\underbrace{\text{مول}}_{e^-}}{\underbrace{\text{ضریب}}_{e^-}} = \frac{\underbrace{\text{مول}}_{PbO_2}}{\underbrace{\text{ضریب}}_{PbO_2}} \rightarrow \frac{1/2}{\frac{4}{3}} = \frac{x}{1} \rightarrow x = 0/9\,mol\,PbO_2$$

(۰/۳)

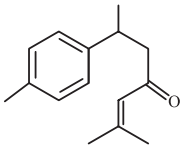
مجموع ضریب‌های استوکیومتری مواد در واکنش اکسایش ـ کاهش زیر، کدام است و در نیم‌واکنش کاهش آن، به ازای هر مول گونهٔ اکسنده، چند مول الکترون مبادله می‌شود؟ (گزینه‌ها را از راست به چپ بخوانید.) *(ریاضی داخل ۹۹)*

$$Ag(s) + NO_3^-(aq) + H^+(aq) \rightarrow Ag^+(aq) + NO(g) + H_2O(l)$$

۱) ۱۴، ۳
۲) ۱۴، ۴
۳) ۱۵، ۴
۴) ۱۵، ۳

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۰۰ با توجه به ساختار زیر که ترکیب آلی موجود در زردچوبه را نشان می‌دهد، چند مورد از مطالب زیر درست است؟



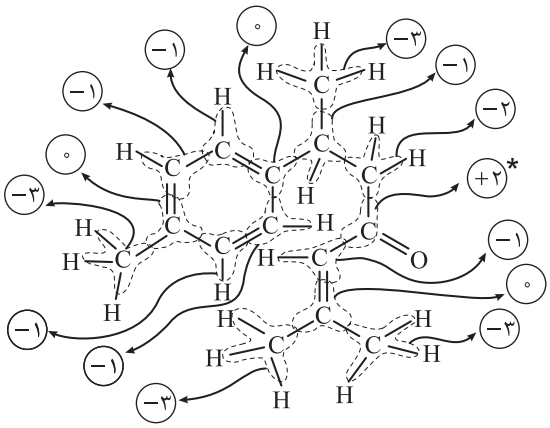
- عدد اکسایش همهٔ اتم‌های کربنی که به هیچ اتم هیدروژنی متصل نیستند، برابر صفر است.
- ۴۰ درصد از اتم‌های کربن، دارای عدد اکسایش ۱− هستند.
- اتم‌های کربن دارای عدد اکسایش ۳−، حداکثر با یک اتم کربن پیوند دارند.
- حداقل و حداکثر عدد اکسایش اتم‌های کربن شرکت‌کننده در پیوند دوگانه، به ترتیب برابر صفر و ۱− است.

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

مشاوره تشخیص عدد اکسایش اتم‌های کربن در یک ترکیب آلی با ساختار پیچیده، تقریباً پای ثابت تمامی کنکورهای برگزارشدهٔ اخیر است. به این سؤال به چشم یک تمرین خوب نگاه کنید *تا سرعت عملتون توی به دست آوردن عدد اکسایش اتم‌ها بیشتر شه.*

پاسخ خیلی تشریحی ✔ با توجه به ساختار زیر که در آن عدد اکسایش همهٔ اتم‌های کربن مشخص شده است، عبارت‌های دوم و سوم درست‌اند.



بررسی عبارت‌ها:

عبارت‌های اول و چهارم: *نه والا!* اتم کربن ستاره‌دار (*) مشخص‌شده در ساختار بالا، به هیچ اتم هیدروژنی متصل نیست، هم‌چنین در پیوند دوگانه شرکت کرده است، *اما متأسفانه عدد اکسایش اون، برابر ۲+ هستش و به تنهایی باعث نادرست‌بودن این دو عبارته!*

عبارت دوم: با توجه به ساختار بالا، *مشخصه که* ۶ اتم کربن دارای عدد اکسایش ۱− هستند، از طرفی در این ساختار، در مجموع ۱۵ اتم کربن وجود دارد؛ بنابراین داریم:

$$\frac{۶}{۱۵} \times ۱۰۰ = ٪۴۰$$

عبارت سوم: اتم‌های کربن دارای عدد اکسایش ۳− در این ساختار، *همون* اتم‌های کربن گروه‌های متیل هستند که حداکثر با یک اتم کربن پیوند دارند.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۰۱ در واکنش موازنه‌نشدهٔ زیر، گونهٔ ..... نقش کاهنده داشته و با مصرف ۱۴/۲۸ گرم MnO_4^-، .....گرم Fe^{3+} تولید می‌شود.

$(O = 16, Mn = 55, Fe = 56 : g.mol^{-1})$

$$MnO_4^-(aq) + H^+(aq) + Fe^{2+}(aq) \rightarrow Mn^{2+}(aq) + H_2O(l) + Fe^{3+}(aq)$$

گونه‌ای که خودش اکسایش یافته و گونه(های) دیگر را کاهش می‌دهد.

۱) $Fe^{2+}(aq)$ ـ ۲۶/۸۸

۲) $Fe^{2+}(aq)$ ـ ۳۳/۶

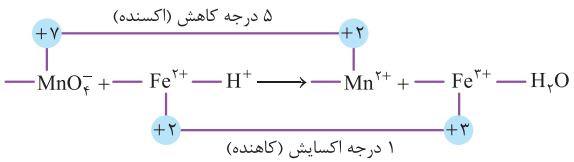
۳) $MnO_4^-(aq)$ ـ ۲۶/۸۸

۴) $MnO_4^-(aq)$ ـ ۳۳/۶

پاسخ خیلی تشریحی ✔ گونهٔ کاهنده، گونه‌ای است که اکسایش می‌یابد؛ یعنی عدد اکسایش آن بالاتر می‌رود. در این واکنش، $Fe^{2+}(aq)$ کاهنده است؛ چون عدد اکسایش آن یک واحد (از ۲+ در Fe^{2+} به ۳+ در Fe^{3+}) افزایش یافته است.

هم‌چنین $MnO_4^-(aq)$ اکسنده است؛ چون عدد اکسایش Mn در آن ۵ واحد (از ۷+ در MnO_4^- به ۲+ در Mn^{2+}) کاهش یافته است.

حالا! واکنش داده‌شده را موازنه می‌کنیم. برای این کار باید گونه‌های اکسنده و کاهنده را مشخص کنیم:



پس در سمت چپ به Fe^{2+} ضریب ۵ و به MnO_4^- ضریب ۱ می‌دهیم؛ به این ترتیب باید در سمت راست هم به Fe^{3+} ضریب ۵ و به Mn^{2+} ضریب ۱ بدهیم:

$$1MnO_4^- + 5Fe^{2+} + \text{—}H^+ \rightarrow 1Mn^{2+} + 5Fe^{3+} + \text{—}H_2O$$

الان در سمت راست، ۱۷ بار مثبت داریم و در سمت چپ *فعلاً* ۹ بار مثبت؛ پس به H^+ ضریب ۸ می‌دهیم تا بارها هم موازنه شوند، سپس ضریب H_2O را برابر ۴ قرار می‌دهیم تا موازنه کامل شود:

$$MnO_4^- + 5Fe^{2+} + 8H^+ \rightarrow Mn^{2+} + 5Fe^{3+} + 4H_2O$$

در نهایت ما توجه به معادلهٔ موازنه‌شدهٔ واکنش، جرم یون Fe^{3+} تولیدشده را به ازای مصرف ۱۴/۲۸ گرم MnO_4^-، *می‌سنجیم*:

استفاده از کسر تبدیل:

$$14/28\,g\,MnO_4^- \times \frac{1\,mol\,MnO_4^-}{119\,g\,MnO_4^-} \times \frac{5\,mol\,Fe^{3+}}{1\,mol\,MnO_4^-} \times \frac{56\,g\,Fe^{3+}}{1\,mol\,Fe^{3+}} = 33/6\,g\,Fe^{3+}$$

یه‌جور دیگه ✔ استفاده از کسر تناسب:

$$\frac{\text{جرم}}{\underbrace{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}_{MnO_4^-}} = \frac{\text{جرم}}{\underbrace{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}_{Fe^{3+}}} \rightarrow \frac{14/28}{1 \times 119} = \frac{x}{5 \times 56} \rightarrow x = 33/6\,g\,Fe^{3+}$$

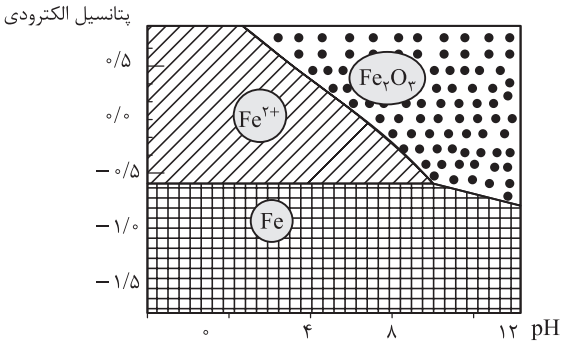
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۰۲ نمودار پوربه (شکل زیر)، رابطهٔ بین پتانسیل الکترودی (E°)، pH محلول و گونه‌های شیمیایی پایدار آهن را نشان می‌دهد. با استفاده از این نمودار می‌توان رفتار خوردگی آهن را در شرایط مختلف پیش‌بینی کرد. تفسیر نواحی مختلف این نمودار به صورت زیر است:

در این ناحیه، آهن تمایل به اکسیدشدن و تشکیل یون‌های آهن دارد.

ناحیه‌ای که در آن آهن به صورت فلز پایدار باقی می‌ماند و خوردگی رخ نمی‌دهد.

در این ناحیه، اکسیدهای آهن پایدار هستند و ممکن است لایه‌های محافظتی روی سطح آهن تشکیل شوند.



با توجه به اطلاعات کتاب درسی و شکل مقابل، کدام موارد در رابطه با خوردگی آهن درست است؟

الف) یک لولهٔ فولادی در محیطی با $pH = 3$ و پتانسیل الکترودی ۰/۵ ولت، در معرض خوردگی شدید قرار دارد.

ب) با انتقال یک قطعهٔ فولادی از محیطی با $pH = 7$ به محیطی با $pH = 2$، سرعت خوردگی کاهش می‌یابد.

پ) در محیط‌های بازی و پتانسیل‌های الکترودی بالا، تشکیل اکسید آهن، سرعت خوردگی سازه‌های آهنی را کاهش می‌دهد.

ت) بر اثر قرارگیری قطعه‌های فولادی در معرض رطوبت محیط در دمای $25^\circ C$ و فشار $1\,atm$، خوردگی قطعه‌ها انجام نمی‌پذیرد.

ث) برای حفاظت از یک لولهٔ فولادی در محیطی اسیدی، می‌توان از اعمال یک جریان الکتریکی برای کاهش پتانسیل لوله یا گالوانیزه‌کردن قطعه استفاده کرد.

۱) الف ـ ب ـ پ
۲) الف ـ ت ـ ث
۳) ب ـ ت
۴) الف ـ پ ـ ث

پاسخ خیلی تشریحی ✔ عبارت‌های «الف»، «پ» و «ث» درست هستند.

بررسی همهٔ عبارت‌ها:

الف) با توجه به نمودار، نقطه‌ای با $pH = 3$ و پتانسیل الکترودی $0/5\,V$، در ناحیهٔ قرار دارد. در این ناحیه اتم‌های فلزی Fe تمایل به تشکیل یون‌های آهن دارند و در واقع قطعهٔ فولادی دچار خوردگی شدید می‌شود.

ب) با انتقال قطعهٔ فولادی از محیطی خنثی به محیطی اسیدی، نیم‌واکنش کاتدی زیر با پتانسیل الکترودی بالا انجام می‌شود.

$$O_2(g) + 4H^+(aq) + 4e \rightarrow 2H_2O(l) \quad E^\circ = +1/23\,V$$

در نتیجه در محیط‌های اسیدی، سرعت خوردگی سازه‌های فولادی افزایش می‌یابد.

پ) با توجه به نمودار، در محیط‌های بازی و پتانسیل‌های الکترودی بالا (یعنی ناحیهٔ)، اکسید آهن (Fe_2O_3) تشکیل می‌شود. تشکیل اکسید آهن در لایهٔ بیرونی قطعه‌های فولادی، به دلیل کاهش سطح تماس اتم‌های فلزی آهن با محیط بیرونی و عوامل اکسنده، سرعت واکنش خوردگی را کاهش می‌دهد.

ت) در دمای $25^\circ C$، فشار یک اتمسفر و غلظت یک مولار الکترولیت، پتانسیل کاهشی استاندارد نیم‌واکنش کاتدی: $O_2(g) + 2H_2O(l) + 4e^- \rightarrow 4OH^-(aq)$ برابر $+0/4\,V$ است. با توجه به نمودار، بر اثر قرارگیری قطعه‌های آهنی در معرض رطوبت در این شرایط، یون‌های آهن تشکیل شده و خوردگی قطعه‌های فولادی انجام می‌پذیرد.

ث) در محیط‌های اسیدی، آهن تمایل بالایی به تشکیل یون‌های آهن و خوردگی دارد؛ بنابراین با توجه به نمودار، اگر بتوان با اعمال یک جریان الکتریکی، پتانسیل الکترودی لولهٔ فولادی را کاهش داد، لوله در ناحیهٔ قرار می‌گیرد و از خوردگی *نجات پیدا می‌کند!*

از طرفی با گالوانیزه‌کردن لوله نیز می‌توان از خوردگی اتم‌های آهن جلوگیری کرد، زیرا اتم‌های فلز روی، کاهنده‌تر از اتم‌های فلز آهن هستند و از آن محافظت فیزیکی و کاتدی می‌کنند.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۰۳ دو قاشق فلزی یکسان را در سلول‌های آبکاری (۱) و (۲) به ترتیب با فلزهای مس و نقره می‌پوشانیم. اگر شمار مول الکترون‌های مصرفی در سلول آبکاری (۱)، ۴ برابر سلول دیگر باشد، نسبت تفاوت جرم دو قاشق پس از انجام آبکاری برحسب گرم به شمار مول الکترون‌های مصرفی در سلول آبکاری (۲) برابر کدام است؟ $(Cu = ۶۴, Ag = ۱۰۸ : g.mol^{-۱})$

۱) ۱۶ ۲) ۱۸ ۳) ۲۰ ۴) ۲۲

پاسخ خیلی تشریحی

تعداد مول الکترون‌های مصرف‌شده در سلول‌های آبکاری (۱) و (۲) را به ترتیب برابر با $۴x$ و x در نظر می‌گیریم.

نیم‌واکنش کاتدی سلول آبکاری (۱) به صورت زیر است:

$$Cu^{۲+}(aq) + ۲e^- \rightarrow Cu(s)$$

$$\text{میزان افزایش جرم قاشق} = ۴x\,mol\,e^- \times \frac{۱\,mol\,Cu}{۲\,mol\,e^-} \times \frac{۶۴\,g\,Cu}{۱\,mol\,Cu} = ۱۲۸x\,g$$

هم‌چنین نیم‌واکنش کاتدی سلول آبکاری (۲) *این‌پوریاست*:

$$Ag^+(aq) + e^- \rightarrow Ag(s)$$

$$\text{میزان افزایش جرم قاشق} = x\,mol\,e^- \times \frac{۱\,mol\,Ag}{۱\,mol\,e^-} \times \frac{۱۰۸\,g\,Ag}{۱\,mol\,Ag} = ۱۰۸x\,g$$

بنابراین با توجه به یکسان‌بودن قاشق‌های اولیه و برابری جرم آن‌ها داریم:

$$\Delta_{\text{جرم قاشق‌ها}} = \Delta_{\text{افزایش جرم قاشق‌ها}} = ۱۲۸x - ۱۰۸x = ۲۰x\,g$$

و *در نهایت!* نسبت خواسته‌شده را به دست می‌آوریم:

$$\frac{\text{تفاوت جرم قاشق‌ها}}{\text{شمار } e^- \text{های مصرفی در سلول آبکاری (۲)}} = \frac{۲۰x\,g}{x\,mol\,e^-} = ۲۰$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۰۴ سه گوی فولادی مشابه را با فلزهای نقره، مس و طلا آبکاری می‌کنیم. پاسخ درست دو پرسش زیر، به ترتیب در کدام گزینه آمده است؟

$(Cu = ۶۴ , Ag = ۱۰۸ , Au = ۱۹۷ : g.mol^{-۱})$

$Ag^{+}(aq) + e^{-} \rightarrow Ag(s)$

$Cu^{۲+}(aq) + ۲e^{-} \rightarrow Cu(s)$

$Au^{۳+}(aq) + ۳e^{-} \rightarrow Au(s)$

الف) اگر شمار الکترون‌های مبادله‌شده در فرایندهای آبکاری یکسان باشد، در آبکاری با کدام فلز، جرم گوی به میزان بیشتری افزایش می‌یابد؟

ب) اگر جرم گوی‌ها به یک‌اندازه افزایش یافته باشد، شمار الکترون‌های مبادله‌شده در آبکاری با کدام فلز بیشتر است؟

۱) Cu _ Ag　　۲) Ag _ Au

۳) Au _ Ag　　۴) Cu _ Au

Hint برای قسمت «الف» ضریب الکترون در معادلهٔ نیم‌واکنش‌ها *رو یکی کن*، جرم فراورده‌ها را در نیم‌واکنش‌ها مقایسه کن. در قسمت «ب» نیز فرض کن جرم همهٔ گوی‌ها یک گرم افزایش پیدا کرده است، سپس شمار مول‌های الکترون مبادله‌شده در سلول‌ها را محاسبه و مقایسه کن.

پاسخ خیلی تشریحی الف) ضریب الکترون در معادلهٔ نیم‌واکنش‌ها را یکسان می‌کنیم:

$۶Ag^{+}(aq) + ۶e^{-} \rightarrow ۶Ag(s)$

$۳Cu^{۲+}(aq) + ۶e^{-} \rightarrow ۳Cu(s)$

$۲Au^{۳+}(aq) + ۶e^{-} \rightarrow ۲Au(s)$

حالا فقط کافیه جرم ۶ مول Ag، ۳ مول Cu و ۲ مول Au را با هم مقایسه کنیم:

$$\begin{cases} \text{جرم ۶ مول نقره} = ۶ \times ۱۰۸ = ۶۴۸\ g \\ \text{جرم ۳ مول مس} = ۳ \times ۶۴ = ۱۹۲\ g \\ \text{جرم ۲ مول طلا} = ۲ \times ۱۹۷ = ۳۹۴\ g \end{cases} \Rightarrow \text{مقایسهٔ میزان افزایش جرم} : Ag > Au > Cu$$

همان‌طور که دیدید، به ازای مبادلهٔ شمار الکترون‌های برابر (در این‌جا ۶ مول الکترون) در سلول‌ها، در سلول آبکاری با فلز نقره، جرم گوی به میزان بیشتری افزایش پیدا کرده است.

ب) به ازای رسوب یک گرم از فلزهای Ag، Cu و Au بر روی هر کدام از گوی‌ها، شمار مول‌های الکترون‌های مبادله‌شده را حساب و سپس مقایسه می‌کنیم. اگر شمار مول‌های الکترون‌های مبادله‌شده در سلول‌ها را با $x_۱$، $x_۲$ و $x_۳$ نشان دهیم، می‌توان نوشت:

$$Ag^{+}(aq) + e^{-} \rightarrow Ag(s) \Rightarrow \frac{۱g\,Ag}{۱ \times ۱۰۸} = \frac{x_۱\,mol\,e^{-}}{۱} \Rightarrow x_۱ = \frac{۱}{۱۰۸}\,mol\,e^{-}$$

$$Cu^{۲+}(aq) + ۲e^{-} \rightarrow Cu(s) \Rightarrow \frac{۱g\,Cu}{۱ \times ۶۴} = \frac{x_۲\,mol\,e^{-}}{۲} \Rightarrow x_۲ = \frac{۱}{۳۲}\,mol\,e^{-}$$

$$Au^{۳+}(aq) + ۳e^{-} \rightarrow Au(s) \Rightarrow \frac{۱g\,Au}{۱ \times ۱۹۷} = \frac{x_۳\,mol\,e^{-}}{۳} \Rightarrow x_۳ = \frac{۳}{۱۹۷}\,mol\,e^{-}$$

حالا سه عدد به‌دست‌آمده را مقایسه می‌کنیم. اگر صورت سه تا کسر را یکسان کنیم، مقایسه راحت‌تر می‌شود، زیرا در مقایسهٔ ۳ عدد کسری با صورت‌های یکسان، هر چه مخرج کسر بزرگ‌تر باشد، کل کسر کوچک‌تر است؛ یعنی:

$$x_۱ = \frac{۱}{۱۰۸} \ , \ x_۲ = \frac{۱}{۳۲} \ , \ x_۳ = \frac{۳}{۱۹۷} \simeq \frac{۱}{۶۶} \Rightarrow \text{ترتیب مقایسه} : \underset{\downarrow \text{Cu}}{x_۲} > \underset{\downarrow \text{Au}}{x_۳} > \underset{\downarrow \text{Ag}}{x_۱}$$

پس اگر جرم گوی‌ها بر اثر آبکاری به یک میزان (در این‌جا یک گرم) افزایش یافته باشد، شمار الکترون‌های مبادله‌شده در سلول آبکاری با فلز مس بیشتر از شمار الکترون‌های مبادله‌شده در دو سلول دیگر است.

تیزبازی هر چه نسبت «$\frac{\text{جرم مولی فلز}}{\text{ضریب الکترون در معادلهٔ نیم‌واکنش کاهش}}$» :

الف) بزرگ‌تر باشد ← به ازای مبادلهٔ شمار الکترون‌های برابر، جرم گوی به میزان بیشتری افزایش می‌یابد.

ب) کوچک‌تر باشد ← به ازای افزایش جرم گوی‌ها به میزان یکسان، شمار الکترون‌های مبادله‌شده در سلول بیشتر است.

حالا حل سؤال رو با این تیزبازی ببینید:

$$Ag = \frac{۱۰۸}{۱} , Cu = \frac{۶۴}{۲} = ۳۲ , Au = \frac{۱۹۷}{۳} \simeq ۶۶ \Rightarrow \begin{cases} \text{الف) مقایسهٔ میزان افزایش جرم گوی‌ها : } Ag > Au > Cu \\ \text{ب) مقایسهٔ شمار الکترون‌های مبادله‌شده در سلول‌ها : } Cu > Au > Ag \end{cases}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۰۵ در سلول گالوانی «آهن ـ مس» جرم اولیهٔ تیغه‌های آندی و کاتدی برابر است. اگر پس از گذشت مدتی، تفاوت جرم تیغه‌های آندی و کاتدی به ۱۴۴۰ گرم برسد، شمار الکترون‌های مبادله‌شده برابر چند است و در صورت مصرف این تعداد الکترون در فرایند هال، چند میلی‌لیتر آلومینیم مذاب تولید می‌شود؟ (چگالی فلز آلومینیم را $۲/۷ g.cm^{-۳}$ در نظر بگیرید؛ $Cu = ۶۴ , Fe = ۵۶ , Al = ۲۷ : g.mol^{-۱}$)

۱) $۱/۴۴۴۸ \times ۱۰^{۲۵}$ ـ ۸۰

۲) $۲/۷۰۹ \times ۱۰^{۲۵}$ ـ ۸۰

۳) $۱/۴۴۴۸ \times ۱۰^{۲۵}$ ـ ۱۵۰

۴) $۲/۷۰۹ \times ۱۰^{۲۵}$ ـ ۱۵۰

Hint

مطابق این واکنش، با مصرف هر مول فلز آهن، به اندازهٔ جرم مولی آهن (۵۶ g) از جرم تیغهٔ آندی کاسته شده و به اندازهٔ جرم مولی مس (۶۴g) به جرم تیغهٔ کاتدی افزوده می‌شود و با توجه به برابری جرم اولیهٔ این دو تیغه، به ازای مصرف هر مول فلز آهن، $۵۶ + ۶۴ = ۱۲۰ g$ تفاوت جرم میان تیغه‌ها ایجاد می‌شود. *حالا* با توجه به تفاوت جرم تیغه‌ها، شمار الکترون‌های مبادله‌شده را حساب کن. در نهایت *کافیه که* معادلهٔ واکنش فرایند هال را بنویسی و حجم فلز Al تولیدشده در این فرایند را در صورت مصرف این تعداد الکترون، محاسبه کنی.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

واکنش سلول گالوانی «آهن ـ مس» به صورت زیر است:

$$Fe(s) + Cu^{۲+}(aq) \rightarrow Cu(s) + Fe^{۲+}(aq) \sim ۲ mol\, e^-$$

حال با توجه به تفاوت جرم تیغه‌های کاتدی و آندی، شمار الکترون‌های مبادله‌شده در این سلول را حساب می‌کنیم:

$$۱۴۴۰ g \text{ تفاوت جرم} \times \frac{۱ mol\, Fe}{۱۲۰ g \text{ تفاوت جرم}} \times \frac{۲ mol\, e^-}{۱ mol\, Fe} \times \frac{۶/۰۲ \times ۱۰^{۲۳} e^-}{۱ mol\, e^-} = ۱/۴۴۴۸ \times ۱۰^{۲۵} e^-$$

هم*اکنون*؛ فرایند هال:

$$۲Al_۲O_۳(s) + ۳C(s) \rightarrow ۴Al(l) + ۳CO_۲(g) \sim ۱۲ mol\, e^-$$

حجم فلز Al تولیدشده در فرایند هال را به ازای مبادلهٔ $۱/۴۴۴۸ \times ۱۰^{۲۵}$ الکترون، محاسبه می‌کنیم:

$$۱/۴۴۴۸ \times ۱۰^{۲۵} e^- \times \frac{۱ mol\, e^-}{۶/۰۲ \times ۱۰^{۲۳} e^-} \times \frac{۴ mol\, Al}{۱۲ mol\, e^-} \times \frac{۲۷ g\, Al}{۱ mol\, Al\, g} \times \frac{۱ mL\, Al}{۲/۷ g\, Al} = ۸۰ mL\, Al$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir