آزمون آزمایشی خیلی سبز

رشته ریاضی

پایه دوازدهم	مرحله دهم
سال تحصیلی ۰۵-۱۴۰۴	۲۶/دی/۱۴۰۴

دفترچه شماره یک

پایه

مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخگویی	دوازدهم	یازدهم	دهم
حسابان و ریاضیات پایه	۱۸	۱	۱۸	۷۰ دقیقه	فصل ۱ تا ۳ صفحهٔ ۱ تا ۷۰	–	–
هندسه	۱۲	۱۹	۳۰		فصل ۱ و فصل ۲ (درس ۱ و ۲) صفحهٔ ۹ تا ۴۶	–	–
ریاضیات گسسته و آمار و احتمال	۱۰	۳۱	۴۰		فصل ۱ و فصل ۲ (درس ۱) صفحهٔ ۱ تا ۴۲	–	–
مجموع	۴۰ سؤال			۷۰ دقیقه			

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا	مسئول درس ـ گزینشگر
حسابان و ریاضیات پایه	طراحان: کاظم اجلالی ـ کوروش اسلامی ـ محمد گودرزی ـ حسین نادری محمدسجاد نقیه کارشناسان علمی: فرشاد حسن‌زاده ـ سروش موئینی	محمدسجاد نقیه
هندسه	طراحان: امیرحسین ابومحبوب ـ محمدحسین رحیمی ـ حمید گلزاری حسین نادری ـ حسین هاشمی طاهری کارشناس علمی: سید عباس حسینی	حمید گلزاری
ریاضیات گسسته و آمار و احتمال	طراحان: مصطفی دیداری ـ سوگند روشنی ـ عطا صادقی کارشناسان علمی: امیرحسین ابومحبوب ـ مریم نظری	مصطفی دیداری

مدیر تألیف آزمون: فاطمه آقاجانپور

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

این آزمون نمره منفی دارد.

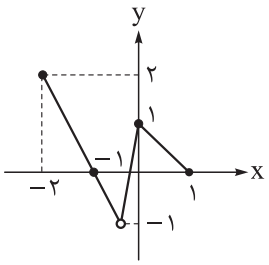
دفترچه سؤالات آزمون‌های خیلی سبز، از همه نظر (تعداد سؤال‌ها، زمان پاسخگویی، نوع چینش گزینه‌ها، نوع صفحه‌آرایی، فونت سؤالات، سایز کلمات و اعداد، جای خالی محل انجام محاسبات و ...) در شبیه ترین حالت به دفترچه سؤالات کنکور سراسری طراحی می‌شود.

ویژه کنکوری‌های ۱۴۰۵

Azmoon.kheilisabz.com

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱- اگر نمودار تابع $y = f(x)$ مطابق شکل زیر باشد، اشتراک دامنه و برد تابع $g(x) = -f(2x-1)$ شامل چند عدد صحیح است؟

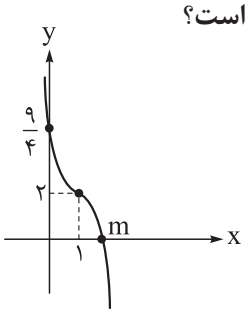


۱) صفر
۲) ۳
۳) ۲
۴) ۱

۲- اگر $g^{-1}(x) = 3f^{-1}(\frac{x+1}{2}) + 4$ و دامنهٔ تابع g بازهٔ $[1,7]$ باشد، دامنهٔ تابع $h(x) = 2f(\frac{x+2}{3}) - 1$ شامل چند عدد طبیعی است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۳- نمودار تابع $f(x) = a(x-b)^3 + c$ در شکل زیر رسم شده است. حاصل $f^{-1}(1-m)$ کدام است؟



۱) $2\sqrt[3]{2} - 1$
۲) $2\sqrt[3]{2} + 1$
۳) $\sqrt[3]{2} - 1$
۴) $\sqrt[3]{2} + 1$

۴- تابع $f(x) = \sqrt{\frac{x-3}{1-x}}$ روی بازهٔ (a, b) اکیداً نزولی است. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۲

۵- تابع $f(x) = (x - |x-3|)^2$ روی کدام بازه اکیداً صعودی است؟

۱) $[\frac{3}{2}, +\infty)$ ۲) $[1, +\infty)$ ۳) $[\frac{3}{2}, 3]$ ۴) $[0, 3]$

۶- باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $f(x) = x^{3n+1}$ بر چندجمله‌ای $x^2 + x + 1$ کدام است؟

۱) -1 ۲) ۱ ۳) $-x$ ۴) x

۷- نمودار تابع $f(x) = \sin^2 \frac{x}{2}$ را $\frac{\pi}{5}$ واحد به سمت چپ می‌بریم و سپس در راستای محور عمودی با ضریب ۲ منبسط و در راستای محور افقی با ضریب ۴ منقبض می‌کنیم تا نمودار تابع g به دست آید. دورهٔ تناوب تابع g نسبت به دورهٔ تناوب تابع f چه تغییری کرده است؟

۱) $\frac{\pi}{2}$ واحد کم‌تر شده است.
۲) $\frac{\pi}{2}$ واحد بیشتر شده است.
۳) $\frac{3\pi}{2}$ واحد کم‌تر شده است.
۴) $\frac{3\pi}{2}$ واحد بیشتر شده است.

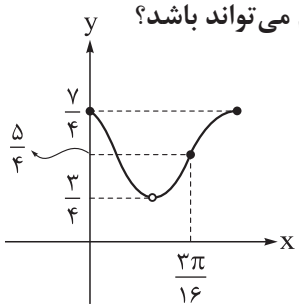
محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸- دورهٔ تناوب تابع $f(x)=\tan ax.\cot ax$ برابر $\frac{\pi}{8}$ است. مقدار مثبت a کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۱۶

۹- بخشی از نمودار تابع $f(x)=\frac{1}{1+\tan^2 ax}+b$ به صورت زیر است. حاصل $a\times b$ کدام می‌تواند باشد؟



۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

۱۰- اگر $\cot(\alpha+25^\circ)=2$ باشد، مقدار $\tan(110^\circ-\alpha)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $-\frac{1}{3}$ ۳) ۳ ۴) -3

۱۱- مجموع جواب‌های معادلهٔ $\cos 2x+\cos^2 x=0$ در بازهٔ $[0,2\pi]$ کدام است؟

۱) π ۲) 2π ۳) 3π ۴) 4π

۱۲- مجموع جواب‌های معادلهٔ $\sin^6 x+\cos^6 x=\frac{5}{8}$ در بازهٔ $[0,2\pi]$ کدام است؟

۱) 5π ۲) 7π ۳) 8π ۴) 9π

۱۳- حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty}[\frac{x}{[x]}]$ و حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty}[\frac{[x]}{x}]$ به ترتیب از راست به چپ کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

۱) ۱، حد ندارد. ۲) ۱، ۱ ۳) حد ندارد، حد ندارد. ۴) حد ندارد، ۱

۱۴- حاصل $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{[x]+\cos x}{\sin x}$ کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) $-\infty$ ۴) $+\infty$

۱۵- اگر $\lim\limits_{x\to 3}\frac{k[x]+[-x]}{x^2-9}=+\infty$ باشد، مجموعهٔ مقادیر k، بازهٔ (a,b) است. حاصل $a\times b$ کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{4}{3}$

۱۶- حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2(\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1-\frac{1}{2x})$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{8}$ ۲) $-\frac{1}{8}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $-\frac{1}{4}$

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۷- نمودار تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x^{۲}+۳x-۱۰}{ax^{۲}-(a+۱)x-۴}$ فقط یک خط مجانب قائم دارد. مجموعهٔ مقادیر قابل قبول برای a چند عضو دارد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۸- اگر $f(x)=\frac{x+۲}{x+۳}$ و $g(x)=\frac{x-۳}{x+۱}$ باشد، مساحت سطح محصور بین خطوط مجانب نمودار تابع $fog^{-۱}$ و محورهای مختصات کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) ۳ ۴) $\frac{۱}{۲}$

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۹- اگر ماتریس $A=\begin{bmatrix} a & a-۴ \\ ۰ & a+۱ \end{bmatrix}$ قطری باشد، دترمینان آن کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۳۰ ۳) ۱۲ ۴) ۲۰

۲۰- اگر $A=\begin{bmatrix} -۲ & ۳ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه حاصل $A^{۳۰}+A^{۲۰}+A^{۱۰}$ کدام است؟

۱) $۳A$ ۲) $۳I$ ۳) $A+۲I$ ۴) $\bar{O}$

۲۱- اگر A یک ماتریس وارون‌پذیر باشد و داشته باشیم $A^{۳}=A+I$، آن‌گاه وارون ماتریس $A^{۶}-A^{۵}$ کدام است؟

۱) A ۲) $A^{-۱}$ ۳) $-A$ ۴) $-A^{-۱}$

۲۲- اگر $A^{-۱}=\begin{bmatrix} ۴ & -۱ \\ ۱ & -\frac{۱}{۲} \end{bmatrix}$ و $۲I-A^{-۱}B^{-۱}=\begin{bmatrix} -۲ & -۴ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}$، آن‌گاه مجموع درایه‌های ستون اول ماتریس $A+B$ کدام است؟

۱) ۲/۵ ۲) ۲ ۳) ۱/۵ ۴) ۱

۲۳- اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه دترمینان ماتریس $\frac{۱}{۴}(A^{۱۰}-A^{۹})$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۰/۲۵ ۳) -۱ ۴) $-۰/۲۵$

۲۴- اگر $A=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & |A| \\ -۱ & ۱ & ۰ \\ -۲ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}$، آن‌گاه مجموع درایه‌های ستون دوم ماتریس $\frac{۱}{۲}A^{۳}+۲I$ کدام است؟

۱) ۰/۵ ۲) ۱ ۳) -۳ ۴) $-۱/۵$

۲۵- اگر دستگاه معادلات $\begin{cases} (m+۱)x+y=-n \\ ۳x+(m-۱)y=۶ \end{cases}$ دارای بی‌شمار جواب باشد، بیشترین مقدار ممکن برای $m+n$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۶

۲۶- دو نقطهٔ A و B و دو خط متقاطع d و d' در صفحه مفروض‌اند. تعداد نقاطی از صفحه که از A و B به یک فاصله و از دو خط d و d' نیز به یک فاصله باشند، کدام نمی‌تواند باشد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۷- معادلهٔ دایره‌ای به مرکز $(-۱,۲)$ که بر خط $۴x-۳y+۵=۰$ مماس است، به صورت $x^۲+y^۲+ax+by=c$ بیان شده است. حاصل $\frac{b+c}{a}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) -۲ ۳) ۳ ۴) -۴

۲۸- فاصلهٔ مراکز دو دایره‌ای که از نقطهٔ $(۱,۲)$ گذشته و بر هر دو محور مختصات مماس‌اند، کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۲}$ ۲) $۴\sqrt{۲}$ ۳) ۴ ۴) ۶

۲۹- خط به معادلهٔ $x-۳y+۶=۰$، دایره به معادلهٔ $x^۲+y^۲-۶x+۴y-۱۲=۰$ را در دو نقطهٔ A و B قطع می‌کند. اگر O' مرکز دایره باشد، تانژانت زاویهٔ $BO'A$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۴}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۳۰- دو دایره با شعاع یکسان در نقاط $(۲,۴)$ و $(۴,۲)$ همدیگر را قطع می‌کنند. اگر فاصلهٔ بین مراکز دو دایره برابر با فاصلهٔ نقاط تقاطع آن‌ها باشد، فاصلهٔ مرکز یکی از دو دایره تا مبدأ مختصات کدام است؟

۱) $۳\sqrt{۲}$ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) ۲ ۴) ۴

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۱- a_1، a_2 و a_3 اعداد صحیح و b_1، b_2 و b_3 همان اعداد، ولی با ترتیب دیگری هستند. اگر $A=(a_1-b_1)(a_2-b_2)(a_3-b_3)$ و $A+3 \mid B$، باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $2B^2+3(A-1)^2-11$ بر ۸ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۶

۳۲- دو عدد $5k+3$ و $k+2$ هر دو بر $a>1$ بخش‌پذیرند. عدد $a^{a!}$ به کدام دسته هم‌نهشتی تعلق دارد؟

۱) $[0]_9$ ۲) $[4]_9$ ۳) $[1]_9$ ۴) $[6]_9$

۳۳- در تقسیم عدد a بر عدد طبیعی b، باقی‌مانده از بیشترین مقدار خود ۲ واحد کم‌تر است. کدام عدد حتماً بر b بخش‌پذیر است؟

۱) a^2-4 ۲) $2a+4$ ۳) $3a-12$ ۴) a^2-9

۳۴- در یک سال، اول اردیبهشت‌ماه روز یکشنبه است. اگر $\overline{2a2}$ روز بگذرد، به سه‌شنبه می‌رسیم. a چند مقدار مختلف ممکن است داشته باشد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۱

۳۵- معادلهٔ هم‌نهشتی $143x+91y-7n=2$ جواب دارد. مجموع ارقام کوچک‌ترین مقدار دورقمی و طبیعی عدد n کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۶

۳۶- اگر $2a^3 \overset{m}{\equiv} m-1$ و عدد $3a-1$ بر m بخش‌پذیر باشد، مجموع ارقام عدد طبیعی $m>1$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۱ ۴) ۱۲

۳۷- در گراف منتظم G از مرتبهٔ ۱۲، رابطهٔ $(\Delta(G))^2-3\delta(G)=4$ برقرار است. اندازهٔ گراف کدام است؟

۱) ۳۶ ۲) ۴۸ ۳) ۲۸ ۴) ۲۴

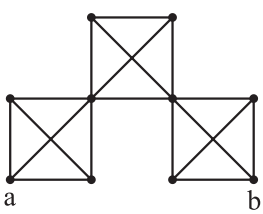
۳۸- اگر حاصل‌ضرب درجه‌های رأس‌های گراف G از مرتبهٔ ۶ برابر ۲۱۶ باشد، حاصل‌ضرب درجه‌های رأس‌های گراف $\overline{G}$ کدام است؟

۱) ۷۲ ۲) ۹۶ ۳) ۱۰۸ ۴) ۲۱۶

۳۹- در گرافی از مرتبهٔ ۱۰ رابطهٔ $\sum_{a \in V(G)} |N_G[a]| = 82$ برقرار است. این گراف حداکثر چند رأس از درجهٔ ۹ دارد؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۴۰- گراف مقابل چند a ـ b مسیر دارد؟



۱) ۱۲
۲) ۱۵
۳) ۶۴
۴) ۱۲۵

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ‌نامهٔ تشریحی آزمون را ساعت ۱۶ از صفحهٔ شخصی خودتان در سایت آزمون خیلی سبز دریافت کنید.

azmoon.kheilisabz.com

اساتید، مشاوران و دانش‌آموزان گرامی؛

نظرات، پیشنهادات، انتقادات و بازخوردهای خود نسبت به سؤالات این آزمون را می‌توانید از طریق آیدی Kheilisabz_edit@ در همهٔ پیام‌رسان‌ها با ما به اشتراک بگذارید.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

آزمون آزمایشی خیلی سبز

رشته ریاضی

پایه دوازدهم	مرحله دهم
سال تحصیلی ۰۵-۱۴۰۴	۱۴۰۴/دی/۲۶

دفترچه شماره دو

پایه

مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخگویی	دوازدهم	یازدهم	دهم
فیزیک	۳۵	۴۱	۷۵	۴۵ دقیقه	فصل ۱ و ۲ صفحهٔ ۱ تا ۶۰	–	–
شیمی	۳۰	۷۶	۱۰۵	۳۰ دقیقه	فصل ۱ و ۲ صفحهٔ ۱ تا ۶۶	–	–
مجموع	۶۵ سؤال			۷۵ دقیقه		–	

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا	مسئول درس ـ گزینشگر
فیزیک	طراحان: رضا سبزمیدانی ـ نوید شاهی کارشناسان علمی: علیرضا جباری ـ سعید محبی	رضا سبزمیدانی ـ نوید شاهی
شیمی	طراحان: مهدی براتی ـ پیمان خواجوی مجد ـ یاسر راش ـ هادی عبادی یاسر عبداللهی ـ امیر قاسمی‌پور ـ محسن مجنونی ـ محمد مرادی ـ عرفان نریمانی کارشناسان علمی: مرتضی نصیرزاده ـ یاشار ذریه	یاسر عبداللهی

مدیر تألیف آزمون: فاطمه آقاجانپور

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

این آزمون نمره منفی دارد.

دفترچه سؤالات آزمون‌های خیلی سبز، از همه نظر (تعداد سؤال‌ها،زمان پاسخگویی،نوع چینش گزینه‌ها،نوع صفحه‌آرایی، فونت سؤالات،سایز کلمات و اعداد، جای خالی محل انجام محاسبات و ...) در شبیه ترین حالت به دفترچه سؤالات کنکور سراسری طراحی می‌شود.

ویژه کنکوری‌های ۱۴۰۵

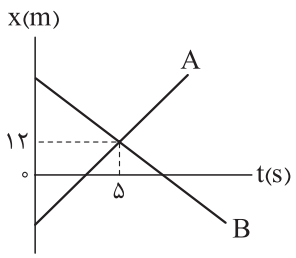
Azmoon.kheilisabz.com

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۱- متحرکی که با سرعت ثابت در راستای محور x حرکت می‌کند، در لحظه‌های $t_1 = 3\ s$ و $t_2 = 7\ s$ به ترتیب از مکان‌های $x_1 = 2\ m$ و $x_2 = 18\ m$ عبور می‌کند. در ۱۰ ثانیهٔ اول، چند ثانیه بردار مکان متحرک در جهت محور x است؟

۱) ۲/۵ ۲) ۵ ۳) ۷/۵ ۴) ۱۰

۴۲- نمودار مکان ـ زمان دو متحرک A و B که در راستای محور x حرکت می‌کنند، به شکل زیر است. فاصلهٔ دو متحرک در لحظهٔ $t_1 = 3\ s$ چند برابر فاصلهٔ دو متحرک در لحظهٔ $t_2 = 9\ s$ است؟

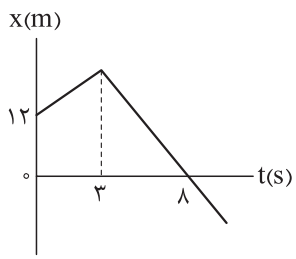


۱) ۳
۲) ۲
۳) $\frac{1}{3}$
۴) $\frac{1}{2}$

۴۳- متحرک A با سرعت ثابت در جهت محور x و متحرک B با سرعت ثابت در خلاف جهت محور x حرکت می‌کنند. تندی متحرک A، ۲ برابر تندی متحرک B است. اگر جهت بردار مکان دو متحرک A و B به ترتیب در لحظه‌های $t_1 = 8\ s$ و $t_2 = 20\ s$ تغییر کند، در چه لحظه‌ای برحسب ثانیه دو متحرک به هم می‌رسند؟

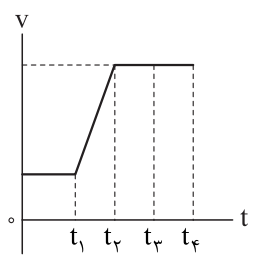
۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۵ ۴) ۱۶

۴۴- نمودار مکان ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. اگر در بازه‌ای که بردار مکان متحرک در جهت محور x است، تندی متوسط متحرک برابر $3\ m/s$ باشد، شتاب متوسط متحرک در این بازه، چند متر بر مربع ثانیه است؟



۱) $0/2\vec{i}$
۲) $-0/2\vec{i}$
۳) $0/7\vec{i}$
۴) $-0/7\vec{i}$

۴۵- نمودار سرعت ـ زمان متحرکی که روی مسیری مستقیم حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. اندازهٔ شتاب متوسط متحرک در کدام بازهٔ زمانی بیشتر است؟

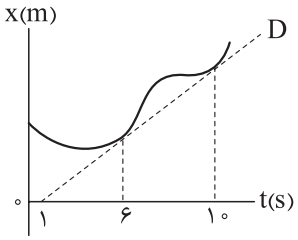


۱) صفر تا t_2
۲) صفر تا t_4
۳) t_1 تا t_2
۴) t_1 تا t_3

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۶- نمودار مکان ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. اگر فاصلهٔ متحرک از مبدأ در لحظهٔ $t_2 = 10\ s$ برابر $36\ m$ باشد، در لحظهٔ $t_1 = 6\ s$، تندی متحرک و فاصلهٔ متحرک از مبدأ، به ترتیب از راست به چپ، در SI کدام است؟ (خط D در لحظه‌های $t_1 = 6\ s$ و $t_2 = 10\ s$ بر نمودار مماس است.)



۱) ۲۰ ،۴
۲) ۲۰ ،۳/۶
۳) ۲۴ ،۴
۴) ۲۴ ،۳/۶

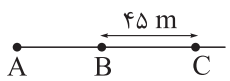
۴۷- معادلهٔ سرعت ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، در SI به صورت $v = -3t + 12$ است. اگر بردار مکان متحرک در مبدأ زمان برابر $(15\ m)\vec{i}$ باشد، در کدام لحظه برحسب ثانیه متحرک برای دومین بار از مکان $x = 33\ m$ می‌گذرد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۶

۴۸- معادلهٔ مکان ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند در SI به صورت $x = t^2 - 10t + 5$ است. در ۴ ثانیهٔ دوم، تندی متوسط متحرک چند برابر اندازهٔ سرعت متوسط آن است؟

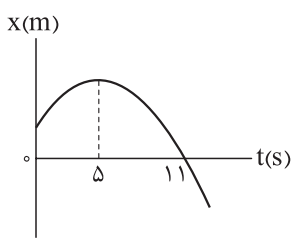
۱) ۱ ۲) $\frac{5}{4}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۲

۴۹- در شکل زیر، متحرکی از نقطهٔ A با شتاب ثابت $8\ m/s^2$ از حال سکون شروع به حرکت کرده و فاصلهٔ دو نقطهٔ B و C را در مدت $1/5\ s$ طی می‌کند. فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B چند متر است؟



۱) ۳۶ ۲) ۳۲
۳) ۴۵ ۴) ۲۵

۵۰- نمودار مکان ـ زمان متحرکی که با شتاب ثابت در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. اگر حداقل مسافت طی‌شده توسط متحرک در یک بازهٔ زمانی ۲ ثانیه‌ای برابر $6\ m$ باشد، بیشینهٔ فاصلهٔ متحرک از مبدأ چند متر است؟

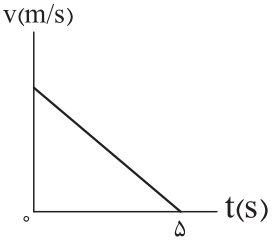


۱) ۷۵
۲) ۱۰۸
۳) ۱۵۰
۴) ۲۱۶

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۱- نمودار سرعت ـ زمان متحرکی که روی خط راست حرکت می‌کند، به شکل زیر است. اندازهٔ جابه‌جایی متحرک در ثانیهٔ دوم چند برابر اندازهٔ جابه‌جایی آن در ثانیهٔ سوم است؟



۱) $\frac{۷}{۵}$

۲) $\frac{۵}{۳}$

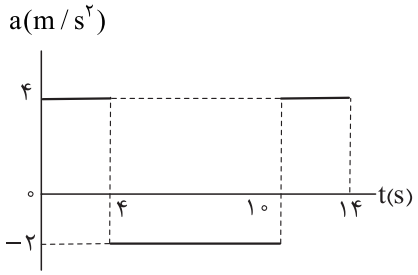
۳) $\frac{۳}{۲}$

۴) $\frac{۲۱}{۱۶}$

۵۲- رانندهٔ خودرویی که در مسیر مستقیم با تندی ثابت $۹۰\ km/h$ در حرکت است، مانعی را می‌بیند و ترمز می‌کند. اگر حرکت خودرو بعد از ترمز با شتاب ثابت به بزرگی $۵\ m/s^۲$ کند شود و خودرو بعد از دیده‌شدن مانع توسط راننده تا توقف کامل $۸۰\ m$ پیموده باشد، زمان واکنش راننده چند ثانیه است؟

۱) ۰/۳ ۲) ۰/۵ ۳) ۰/۷ ۴) ۰/۹

۵۳- نمودار شتاب ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر داده شده و سرعت متحرک در مبدأ زمان برابر $\vec{v}_۰ = (-۸\ m/s)\vec{i}$ است. سرعت متوسط متحرک از مبدأ زمان تا لحظه‌ای که جهت حرکت آن برای دومین مرتبه تغییر می‌کند، چند متر بر ثانیه است؟



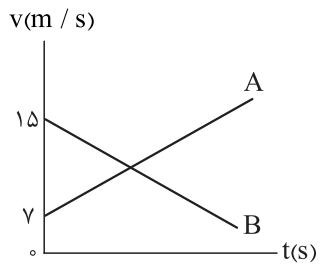
۱) $۲\vec{i}$

۲) $۴\vec{i}$

۳) $-۲\vec{i}$

۴) $-۴\vec{i}$

۵۴- نمودار سرعت ـ زمان دو متحرک A و B که در راستای محور x حرکت می‌کنند، به شکل زیر است. دو متحرک در مبدأ زمان در یک مکان قرار دارند و در لحظهٔ $t = ۱۲\ s$ دوباره به هم می‌رسند. فاصلهٔ بین دو متحرک در لحظهٔ $t = ۱۵\ s$ چند متر است؟



۱) ۱۲

۲) ۲۴

۳) ۳۰

۴) ۵۴

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۵- در مبدأ زمان دو متحرک A و B به ترتیب در مبدأ مکان و مکان $x = ۶۸\ m$ از حال سکون شروع به حرکت می‌کنند. متحرک A با شتاب $(۴\ m/s^۲)\vec{i}$ شروع به حرکت می‌کند و پس از ۶ s با سرعت ثابت به حرکت خود ادامه می‌دهد. متحرک B نیز ابتدا به مدت ۱۰ s با شتاب $(۲\ m/s^۲)\vec{i}$ و سپس با سرعت ثابت حرکت می‌کند. چند ثانیه فاصلهٔ دو متحرک کم‌تر یا مساوی ۱۲ m است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

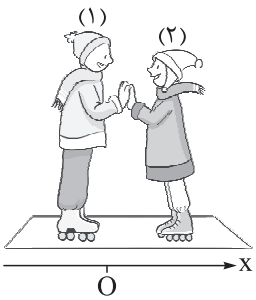
۵۶- در شرایط خلأ، گلوله‌ای از ارتفاع H نسبت به سطح زمین رها می‌شود. اگر گلوله در مدت ۱/۲ s از ارتفاع ۴۸متری سطح زمین به ارتفاع ۲۴متری سطح زمین برسد، H برابر چند متر است؟ $(g = ۱۰\ N/kg)$

۱) ۵۷/۸ ۲) ۵۶/۸ ۳) ۶۸/۶ ۴) ۶۷/۶

۵۷- در شرایط خلأ، دو گلوله به فاصلهٔ زمانی ۰/۸ s از یک نقطه بالای سطح زمین رها می‌شوند. در لحظه‌ای که فاصلهٔ دو گلوله از یکدیگر به ۳۲ m می‌رسد، مسافت طی‌شده توسط گلولهٔ اول چند متر است؟ $(g = ۱۰\ m/s^۲)$

۱) ۸۶/۸ ۲) ۸۸/۸ ۳) ۹۶/۸ ۴) ۹۸/۸

۵۸- دو شخص (۱) و (۲) به ترتیب به جرم‌های ۷۵ kg و ۶۰ kg با کفش‌های چرخ‌دار روی سطح بدون اصطکاکی روبه‌روی هم ایستاده‌اند. شخص (۱)، شخص (۲) را به سمت راست هل می‌دهد. اگر اندازهٔ شتاب شخص (۲) برابر $۲\ m/s^۲$ باشد، شتاب شخص (۱) در SI برابر کدام است؟



۱) $۲/۵\vec{i}$

۲) $-۲/۵\vec{i}$

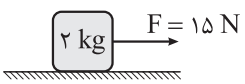
۳) $۱/۶\vec{i}$

۴) $-۱/۶\vec{i}$

۵۹- اگر جرم جسمی ۲۰ درصد و اندازهٔ نیروی خالص وارد بر آن ۴۰ درصد کاهش یابد، اندازهٔ شتاب جسم چند درصد و چگونه تغییر می‌کند؟

۱) ۲۰، افزایش می‌یابد.
۲) ۲۵، افزایش می‌یابد.
۳) ۲۰، کاهش می‌یابد.
۴) ۲۵، کاهش می‌یابد.

۶۰- در شکل زیر، نیروی افقی $F = ۱۵\ N$، جسمی به جرم ۲ kg را که روی سطح افقی به ضریب اصطکاک جنبشی ۰/۵ قرار دارد، از حال سکون به حرکت درمی‌آورد. اندازهٔ تکانهٔ جسم پس از ۱/۸ m جابه‌جایی به چند کیلوگرم متر بر ثانیه می‌رسد؟ $(\mu_s < ۰/۷۵ \text{ و } g = ۱۰\ N/kg)$



۱) ۳ ۲) ۶ ۳) $۳\sqrt{۳}$ ۴) $۶\sqrt{۳}$

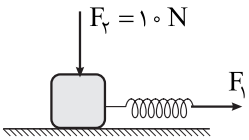
محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶۱- جسمی روی سطح افقی در حال سکون قرار دارد. نیروی افقی F بر آن وارد می‌شود و به تدریج افزایش می‌یابد. وقتی اندازهٔ نیروی F به $12\ N$ می‌رسد، جسم در آستانهٔ حرکت قرار می‌گیرد. زمانی که اندازهٔ F به $14\ N$ می‌رسد، شتاب جسم $1\ m/s^2$ و به ازای $F = 16\ N$، شتاب جسم $1/5\ m/s^2$ می‌شود. ضریب اصطکاک جنبشی بین جسم و سطح چند برابر ضریب اصطکاک ایستایی بین جسم و سطح است؟

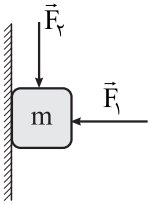
۱) $\frac{3}{10}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{5}{6}$

۶۲- در شکل زیر، جسمی به جرم $5\ kg$ توسط فنری افقی با شتاب ثابت به بزرگی $1/2\ m/s^2$ به صورت تندشونده روی سطح افقی کشیده می‌شود. اگر ضریب اصطکاک جنبشی بین جسم و سطح $0/4$ و ثابت فنر $20\ N/cm$ باشد، طول فنر نسبت به حالت عادی خود چند سانتی‌متر افزایش می‌یابد؟ $(g = 10\ m/s^2)$



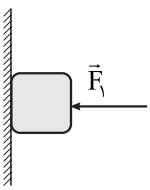
۱) ۱۵
۲) ۱۲
۳) ۱/۵
۴) ۱/۲

۶۳- در شکل زیر، به جسم تکیه داده شده به دیوار قائم، نیروی افقی $\vec{F}_1$ و نیروی قائم $\vec{F}_2$ وارد شده و جسم در آستانهٔ حرکت است. اگر $F_1 = 2\ mg$ و $F_2 = \frac{1}{2}\ mg$ باشد، به ترتیب، بزرگی نیرویی که جسم به دیوار وارد می‌کند، چند برابر وزن جسم است و ضریب اصطکاک ایستایی بین جسم و دیوار چه‌قدر است؟ (m جرم جسم و g شتاب گرانش زمین است.)



۱) $\frac{1}{4}$ ، $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ، $\frac{5}{2}$
۳) $\frac{3}{4}$ ، $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{3}{4}$ ، $\frac{5}{2}$

۶۴- در شکل زیر، اگر به جسم، نیروی افقی $\vec{F}_1$ وارد شود، جسم در آستانهٔ حرکت قرار می‌گیرد. پس از شروع حرکت، اگر به جسم نیروی افقی $\vec{F}_2$ وارد شود، جسم با سرعت ثابت حرکت می‌کند. اگر اندازهٔ نیرویی که دیوار قائم به جسم وارد می‌کند، در حالت اول و دوم به ترتیب R_1 و R_2 و زوایایی که این نیروها با نیروی وزن جسم می‌سازند، به ترتیب θ_1 و θ_2 باشد، کدام گزینه، درست است؟ (ضریب اصطکاک ایستایی و جنبشی دیوارهٔ قائم با جسم به ترتیب $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{3}$ است.)



۱) $R_1 = \sqrt{2}R_2, \theta_2 > \theta_1$ ۲) $R_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}R_2, \theta_2 > \theta_1$
۳) $R_1 = \sqrt{2}R_2, \theta_1 > \theta_2$ ۴) $R_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}R_2, \theta_1 > \theta_2$

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶۵- توپی را از سطح زمین در راستای قائم به سمت بالا پرتاب می‌کنیم. اگر اندازهٔ شتاب توپ هنگام بالارفتن، ۲ برابر اندازهٔ شتاب آن هنگام پایین‌آمدن باشد، اندازهٔ نیروی مقاومت هوای وارد بر توپ، با فرض ثابت‌بودن، چند برابر وزن جسم است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

۶۶- فنری به ثابت $۵۰\ N/m$ و طول $۳۰\ cm$ را از نقطه‌ای آویزان می‌کنیم. جسمی به جرم $۴۰۰\ g$ را به سر دیگر فنر بسته و رها می‌کنیم. در لحظه‌ای که طول فنر به $۴۲\ cm$ می‌رسد، شتاب جسم چند متر بر مربع ثانیه و در چه جهتی است؟ $(g = ۱۰\ N/kg)$

۱) ۵، به سمت بالا ۲) ۵، به سمت پایین ۳) ۱۵، به سمت بالا ۴) ۱۵، به سمت پایین

۶۷- جسمی به جرم $۵\ kg$ توسط یک ریسمان به سقف آسانسوری بسته شده و آسانسور با شتاب ثابتی به بزرگی $۲\ m/s^۲$ و به صورت کندشونده به سمت پایین در حال حرکت است. اگر کابل آسانسور پاره شده و آسانسور سقوط آزاد کند، نیروی کشش ریسمان چند نیوتون تغییر می‌کند؟ $(g = ۱۰\ m/s^۲)$

۱) ۶۰ ۲) ۵۰ ۳) ۴۰ ۴) ۱۰

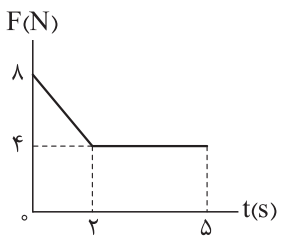
۶۸- اگر جرم گلوله‌ای برابر $۲۰\ g$ و اندازهٔ تکانهٔ آن برابر $۸۰۰\ \frac{g.m}{s}$ باشد، انرژی جنبشی گلوله چند ژول است؟

۱) ۳۲ ۲) ۱۶ ۳) ۳/۲ ۴) ۱/۶

۶۹- معادلهٔ تکانه ـ زمان متحرکی در SI به صورت $p = ۲t^۲ - ۵t + ۱$ است. نیروی خالص متوسط وارد بر متحرک در ۲ ثانیهٔ دوم چند نیوتون است؟

۱) $۱۴\vec{i}$ ۲) $-۱۴\vec{i}$ ۳) $۷\vec{i}$ ۴) $-۷\vec{i}$

۷۰- نمودار نیروی خالص وارد بر جسمی برحسب زمان به شکل زیر است. اگر جهت حرکت جسم در لحظهٔ $t = ۴\ s$ تغییر کند، تکانهٔ جسم در مبدأ زمان در SI کدام است؟



۱) $۲۰\vec{i}$
۲) $-۲۰\vec{i}$
۳) $۲۴\vec{i}$
۴) $-۲۴\vec{i}$

۷۱- اگر ماهواره‌ای از ارتفاع ۱۶۰۰کیلومتری سطح زمین به ارتفاع ۳۶۰۰کیلومتری سطح زمین منتقل شود، وزن آن چند درصد تغییر می‌کند؟ (شعاع کرهٔ زمین $۶۴۰۰\ km$ است.)

۱) ۲۰ ۲) ۲۵ ۳) ۳۶ ۴) ۵۶/۲۵

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷۲- جرم زمین و ماه به ترتیب $۶\times۱۰^{۲۴}\ kg$ و $۷/۲\times۱۰^{۲۲}\ kg$ است. در حالتی که فاصلهٔ مرکز ماه و مرکز زمین $۴\times۱۰^{۵}\ km$ باشد، اندازهٔ نیروی گرانشی که زمین و ماه به هم وارد می‌کنند، تقریباً چند نیوتون است؟ $\left(G=۶/۶۷\times۱۰^{-۱۱}\ \frac{N.m^{۲}}{kg^{۲}}\right)$

۱) $۱/۸\times۱۰^{۱۴}$ ۲) $۱/۸\times۱۰^{۲۰}$ ۳) $۷/۲\times۱۰^{۱۴}$ ۴) $۷/۲\times۱۰^{۲۰}$

۷۳- پرهٔ یک بالگرد با دورهٔ $۰/۰۸\ s$ به طور یکنواخت می‌چرخد. تعداد دور بر دقیقه (rpm) پرهٔ بالگرد، چه‌قدر است؟

۱) ۷۵۰ ۲) ۱۵۰۰ ۳) ۲۲۵۰ ۴) ۳۰۰۰

۷۴- خودرویی به جرم $۱۵۰۰\ kg$ در سطحی افقی روی محیط دایره‌ای به شعاع $۶\ m$ با تندی ثابت $۱۲\ m/s$ در حال حرکت است. اندازهٔ نیرویی که سطح افقی به خودرو وارد می‌کند، چند نیوتون است؟ $(g=۱۰\ m/s^{۲})$

۱) $۳/۶\times۱۰^{۳}$ ۲) $۳/۶\times۱۰^{۴}$

۳) $۳/۹\times۱۰^{۳}$ ۴) $۳/۹\times۱۰^{۴}$

۷۵- ماهواره‌ای روی مدار دایره‌ای به دور زمین می‌چرخد. اگر فاصلهٔ ماهواره از سطح زمین برابر $۱۶۰۰\ km$ باشد، دورهٔ گردش آن چند ثانیه است؟ (شتاب گرانش در سطح زمین $\pi^{۲}\ m/s^{۲}$ و شعاع کرهٔ زمین $۶۴۰۰\ km$ است.)

۱) $\sqrt{۲}\times۱۰^{۳}$ ۲) $۵\sqrt{۲}\times۱۰^{۳}$

۳) $\sqrt{۲}\times۱۰^{۴}$ ۴) $۵\sqrt{۲}\times۱۰^{۴}$

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷۶- کدام گزینه در مورد اوره نادرست است؟

۱) یک ترکیب آلی با مولکول‌های قطبی است.

۲) هر مولکول آن دارای ۸ پیوند اشتراکی بوده و در هگزان حل نمی‌شود.

۳) عدد اکسایش اتم کربن در آن با عدد اکسایش اتم کربن در متانول برابر است.

۴) همانند اتیلن گلیکول، توانایی برقراری پیوند هیدروژنی را دارد.

۷۷- کدام مورد، جزء مخلوط‌های ناهمگن اما پایدار است؟

۱) شربت معده ۲) آب قند ۳) شیر ۴) گلاب

۷۸- کدام موارد در رابطه با اولئیک اسید با فرمول مولکولی $C_{۱۷}H_{۳۳}COOH$، درست است؟

$(H=۱, C=۱۲, O=۱۶, Na=۲۳ : g.mol^{-۱})$

الف) در زنجیرهٔ هیدروکربنی این ترکیب، یک پیوند دوگانه وجود دارد.

ب) اگر ساختار این مولکول به صورت مقابل باشد، در بخش A، ۳ اتم وجود دارد.



ج) از واکنش هر مول از آن با ۴۰ گرم سدیم هیدروکسید، ۳۰۲ گرم صابون جامد حاصل می‌شود.

د) نیروی بین مولکولی غالب در این مولکول همانند روغن زیتون از نوع وان‌درووالس است.

۱) الف و ج ۲) الف و د ۳) ب و ج ۴) ب و د

۷۹- ۱۸/۸۷۵ گرم از یک صابون سدیم ۱۸کربنه را به ۲۰۰ میلی‌لیتر از یک نمونه آب سخت که غلظت کلسیم کلرید در آن ۰/۱۲۵ مولار است، وارد می‌کنیم. اگر ۸۰ درصد این صابون سبب شود تا سختی آب به طور کامل از بین برود، در فرمول ساختاری این صابون چند پیوند دوگانه وجود دارد؟ (صابون فاقد پیوند سه‌گانه است؛ $Na=۲۳, O=۱۶, C=۱۲, H=۱ : g.mol^{-۱}$)

$$۲RCOONa(aq)+CaCl_۲(aq)\rightarrow (RCOO)_۲Ca(s)+۲NaCl(aq)$$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۸۰- درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر، در کدام گزینه آمده است؟

- **اضافه‌کردن نمک خوراکی و شکر به آب، باعث تغییر pH آب نمی‌شود.**
- **شیمی‌دان‌ها پس از کشف ساختار اسید و باز، با ویژگی‌ها و برخی از واکنش‌های آن‌ها آشنا شدند.**
- **لوویس نخستین کسی بود که اسیدها و بازها را بر یک مبنای علمی توصیف کرد.**
- **آمونیاک، خاصیت بازی دارد و افزودن آن به آب در دمای ثابت، سبب افزایش حاصل $\frac{[OH^-]}{[H^+]}$ می‌شود.**

۱) درست ـ نادرست ـ نادرست ـ درست ۲) درست ـ نادرست ـ نادرست ـ نادرست

۳) نادرست ـ درست ـ درست ـ نادرست ۴) درست ـ درست ـ درست ـ نادرست

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸۱- شمار یون‌های حاصل از اضافه‌کردن x گرم دی‌نیتروژن پنتااکسید به آب با شمار یون‌های حاصل از اضافه‌کردن ۲/۰۸ گرم باریم کلرید به آب برابر است. x و مجموع pH این دو محلول در دمای $25\ ^\circ C$ کدام است؟ (حجم نهایی هر دو محلول را یک لیتر در نظر بگیرید؛ $g.mol^{-1}: N=14, O=16, Cl=35/5, Ba=137$)

۱) ۱/۸، ۰/۸۱ ۲) ۸/۸، ۰/۸۱ ۳) ۱/۸، ۰/۸ ۴) ۸/۸، ۱/۰۸

۸۲- اگر مادهٔ A، الکترولیت و مادهٔ B، غیرالکترولیت باشد، کدام مورد به یقین درست است؟

۱) مادهٔ A در آب، محلول و مادهٔ B در آب، نامحلول است.
۲) ذرات سازندهٔ A در حالت خالص، ذرات باردار هستند.
۳) مادهٔ B، توانایی برقراری پیوند هیدروژنی با مولکول‌های خود را دارد.
۴) با افزایش غلظت مولی محلول B، رسانایی الکتریکی آن تغییری نمی‌کند.

۸۳- با توجه به مطالب کتاب درسی، کدام مورد دربارهٔ پاک‌کنندهٔ غیرصابونی درست است؟

$(H=1, C=12, O=16, Na=23, S=32: g.mol^{-1})$

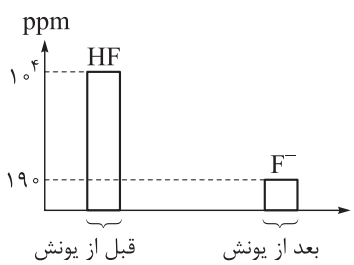
۱) با جایگزین‌کردن گروه CO_3^- ترکیب RCOONa با SO_3^- به دست می‌آید.
۲) واحدهای سازندهٔ آن با پیوند کووالانسی (اشتراکی) به یکدیگر متصل‌اند.
۳) عدد اکسایش گوگرد در آن با عدد اکسایش گوگرد در هیدروژن سولفید برابر است.
۴) اگر جرم مولی آن، $348\ g.mol^{-1}$ و زنجیر هیدروکربنی در آن سیرشده باشد، تفاوت شمار اتم‌های کربن و هیدروژن در فرمول شیمیایی آن برابر ۱۱ است.

۸۴- کدام مورد، جملهٔ زیر را به درستی کامل نمی‌کند؟

«در دمای یکسان، از بین اسیدهای .....، اسیدی با ..... ، K_a کوچک‌تری دارد.»

۱) فورمیک اسید و استیک اسید ـ جرم مولی بیشتر
۲) نیترواسید و نیتریک اسید ـ تعداد اکسیژن کم‌تر
۳) هیدروبرمیک اسید و هیدروفلوئوریک اسید ـ توانایی برقراری پیوند هیدروژنی
۴) هیدروسیانیک اسید و کربنیک اسید ـ عدد اکسایش بیشتر برای کربن

۸۵- نمودار زیر، غلظت برخی گونه‌ها را در محلول HF قبل و بعد از یونش آن در ۱ لیتر آب در دمای معین نمایش می‌دهد. کدام مورد نادرست است؟ (چگالی محلول را $1\ g.mL^{-1}$ در نظر بگیرید، $H=1, F=19: g.mol^{-1}$)



۱) رسانایی الکتریکی این محلول کم‌تر از رسانایی الکتریکی محلول HCl با غلظت مولی یکسان است.
۲) درصد یونش این اسید در آب برابر با ۲٪ است.
۳) مجموع شمار یون‌ها در محلول برابر با ۰/۰۲ مول است.
۴) ثابت یونش هیدروفلوئوریک اسید در شرایط آزمایش به تقریب برابر 2×10^{-3} است.

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸۶- دربارهٔ محلول‌هایی به حجم یکسان از آمونیاک (I) و باریم هیدروکسید (II) با pH برابر، کدام مورد درست است؟

۱) غلظت مولار محلول (II) دو برابر محلول (I) است.

۲) شمار یون‌های هیدروکسید در محلول (II)، نصف محلول (I) است.

۳) هر دو محلول، با حجم یکسانی از محلول ۰/۱ مولار هیدروکلریک اسید به طور کامل واکنش می‌دهند.

۴) غلظت مولار یون هیدروکسید در محلول (II) با غلظت مولار یون آمونیوم در محلول (I) برابر است.

۸۷- pH محلول ۰/۱ مولار باز BOH با ثابت یونش 10^{-5}، چند واحد با pH آب خالص تفاوت دارد و در این محلول، غلظت مولی یون هیدروکسید چند برابر غلظت مولی یون هیدرونیوم است؟ (دما را $25\ ^\circ C$ در نظر بگیرید.)

۱) ۴، 10^{4} ۲) ۴، 10^{8} ۳) ۳، 10^{3} ۴) ۳، 10^{9}

۸۸- در دو ظرف جداگانه، دو لیتر از محلول‌های نیترواسید و استیک اسید وجود دارد. اگر pH محلول نیترواسید برابر ۱/۴ و جرم NO_2^- در محلول نیترواسید، ۲/۵ گرم بیشتر از جرم CH_3COO^- در محلول استیک اسید باشد، غلظت تعادلی نیترواسید، چند برابر غلظت تعادلی استیک اسید است؟ $(H=1, C=12, N=14, O=16 : g.mol^{-1})$

اسید	نیترواسید	استیک اسید
ثابت یونش	4×10^{-4}	5×10^{-5}

۱) ۱/۲۵

۲) ۱/۷۵

۳) ۲/۰

۴) ۲/۵

۸۹- کدام مطلب درست است؟ $(Mg=24, Na=23, O=16, C=12, H=1 : g.mol^{-1})$

۱) پتاسیم هیدروکسید برخلاف آمونیاک بازی قوی است، زیرا یونش آن در آب به صورت کامل و برگشت‌ناپذیر است.

۲) در محلول ۰/۰۱ مولار متیل آمین همانند نیتریک اسید، غلظت مولکول‌های یونیده‌نشده بیشتر از غلظت یون‌های آب‌پوشیده است.

۳) یک گرم منیزیم هیدروکسید در مقایسه با دو گرم جوش‌شیرین، مقدار اسید معدهٔ بیشتری را خنثی می‌کند.

۴) افزودن جوش‌شیرین به پاک‌کنندهٔ صابونی، مشکل پاک‌کنندگی آن در آب سخت را برطرف می‌کند.

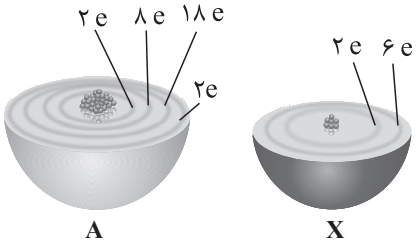
۹۰- مقدار کربن دی‌اکسید حاصل از واکنش ۴ لیتر محلول هیدروکلریک اسید با $pH=0/7$ با مقدار کافی سدیم هیدروژن کربنات، با مقدار گاز کربن دی‌اکسید حاصل از سوختن کامل چند مول بنزین برابر است؟

۱) ۰/۱ ۲) ۰/۴ ۳) ۰/۶ ۴) ۰/۸

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹۱- با توجه به شکل مقابل، کدام مطلب درست است؟



۱) به ازای تشکیل ۰/۵ مول فراورده از واکنش A و X، $۳/۰۱\times۱۰^{۲۳}$ الکترون بین گونه‌ها مبادله می‌شود.

۲) عنصر قبل از A در جدول دوره‌ای، خاصیت کاهندگی کم‌تری نسبت به A دارد و با محلول ۱ مولار هیدروکلریک اسید واکنش نمی‌دهد.

۳) X در واکنش با عناصر فلوئور و کلر، ترکیبات $XF_۲$ و $XCl_۲$ و با عدد اکسایش برابر تشکیل می‌دهد.

۴) امروزه از واکنش دومین عنصر دورهٔ سوم با X، در عکاسی به عنوان منبع نور استفاده می‌شود.

۹۲- تغییر عدد اکسایش اتم اکسنده در واکنش «ب»، چند برابر تغییر عدد اکسایش اتم کاهنده در واکنش «الف» است؟

الف) $H_۲SO_۴ + PbO_۲ + Pb \rightarrow PbSO_۴ + H_۲O$

ب) $CO_۲ + NH_۲OH \rightarrow CO + N_۲ + H_۲O$

۱) ۰/۲۵ ۲) ۰/۵ ۳) ۰/۷۵ ۴) ۱

۹۳- با توجه به نیم‌واکنش‌های زیر، پاسخ پرسش‌های (الف) و (ب) به ترتیب در کدام گزینه آمده است؟

الف) کدام فلز در محیط مرطوب و خنثی اکسایش نمی‌یابد، اما در محیط اسیدی اکسایش می‌یابد؟

ب) emf فرایند خوردگی آهن گالوانیزه بر اثر خراش در هوای مرطوب و خنثی کدام است؟

$O_۲(g) + ۴H^+(aq) + ۴e^- \rightarrow ۲H_۲O(l)$ $\quad E^\circ = +۱/۲۳V$

$O_۲(g) + ۲H_۲O(l) + ۴e^- \rightarrow ۴OH^-(aq)$ $\quad E^\circ = +۰/۴۰V$

$Zn^{۲+}(aq) + ۲e^- \rightarrow Zn(s)$ $\quad E^\circ = -۰/۷۶V$

$Fe^{۲+}(aq) + ۲e^- \rightarrow Fe(s)$ $\quad E^\circ = -۰/۴۴V$

$Ag^+(aq) + e^- \rightarrow Ag(s)$ $\quad E^\circ = +۰/۸V$

$Sn^{۲+}(aq) + ۲e^- \rightarrow Sn(s)$ $\quad E^\circ = -۰/۱۹V$

۱) نقره ـ ۰/۳۲V ۲) قلع ـ ۰/۳۲V ۳) قلع ـ ۱/۱۶V ۴) نقره ـ ۱/۱۶V

۹۴- کدام گزینه نادرست است؟

۱) سوخت‌های فسیلی رایج‌ترین سوخت برای خودروها و نیروگاه‌ها به شمار می‌روند.

۲) در سلول سوختی هیدروژن ـ اکسیژن به منظور تولید جریان برق، واکنش سوختن هیدروژن انجام می‌شود.

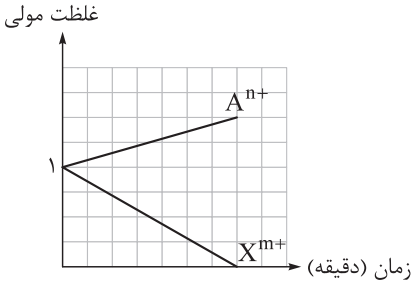
۳) تعداد مراحل تبدیل انرژی شیمیایی به الکتریکی در روش سنتی بیشتر از سلول سوختی است.

۴) در تولید انرژی الکتریکی، استفاده از هیدروژن در سلول سوختی، باعث افزایش بازده نسبت به سوختن آن در موتور درون‌سوز می‌شود.

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹۵- نمودار تغییرات غلظت یون‌ها در یک سلول گالوانی به صورت زیر است. کدام مطلب درست است؟



$$E^\circ(Zn^{2+}/Zn) = -0/76V \ , \ E^\circ(Cu^{2+}/Cu) = +0/34\,V$$
$$E^\circ(Fe^{2+}/Fe) = -0/44\,V \ , \ E^\circ(Ag^{+}/Ag) = +0/8\,V$$
$$E^\circ(K^{+}/K) = -2/90V \ , \ E^\circ(Al^{3+}/Al) = -1/66\,V$$

۱) نمودار می‌تواند مربوط به سلول گالوانی «پتاسیم ـ آهن» باشد که emf آن $2/46V$ است.

۲) نمودار می‌تواند مربوط به سلول گالوانی «مس ـ نقره» باشد که برای واکنش با هر مول عامل اکسنده، دو مول عامل کاهنده نیاز است.

۳) اگر X ، نقره باشد، A می‌تواند روی باشد و ولتاژ آن بیش از یک ولت است.

۴) اگر A ، آلومینیم باشد، X می‌تواند مس باشد و در این سلول آنیون‌ها از دیوارهٔ متخلخل به نیم‌سلول A وارد می‌شوند.

۹۶- در شرایط معین، در سلول گالوانی $Al - SHE$ ، $33/6$ میلی‌لیتر گاز هیدروژن در شرایط استاندارد تولید می‌شود. اگر تغییر جرم تیغهٔ آندی در این سلول، نصف تغییر جرم تیغهٔ کاتدی در سلول گالوانی «منیزیم ـ نقره» باشد، تعداد الکترون‌های مبادله‌شده در سلول «منیزیم ـ نقره» چه مضربی از 10^{20} است؟ $(Mg = 24 \ , \ Al = 27 \ , \ Ag = 108 : g.mol^{-1})$

۱) $1/505$ ۲) $3/01$ ۳) $4/515$ ۴) $6/02$

۹۷- با توجه به مطالب کتاب درسی، کدام مورد، جملهٔ داده‌شده را به درستی کامل می‌کند؟

«معادلهٔ واکنش کلی انجام‌شده در ..... به صورت ..... است.»

۱) سلول تهیهٔ فلز سدیم، $2NaCl(aq) \rightarrow 2Na(aq) + Cl_2(g)$

۲) باتری دکمه‌ای روی ـ نقره، $Ag(s) + ZnO(s) \rightarrow Ag_2O(s) + Zn(s)$

۳) سلول نور ـ الکتروشیمیایی، $SiO_2(s) + 2H_2O(l) \rightarrow Si(s) + 2H_2(g)$

۴) باتری لیتیمی استفاده‌شده در تلفن همراه، $Li(s) + MnO_2(s) \rightarrow LiMnO_2(s)$

۹۸- در کدام فرایند زیر، عدد اکسایش اتم کربن از کم‌ترین مقدار به بیشترین مقدار ممکن خود می‌رسد؟

۱) تبدیل اتن به اتیلن گلیکول

۲) تبدیل فرمالدهید (CH_2O) به فورمیک اسید

۳) سوختن کامل متان

۴) تجزیهٔ گرمایی کلسیم کربنات

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹۹- با توجه به عبارت‌های داده‌شده که مربوط به فلزهای X، Y و Z در دمای $25\ ^\circ C$ هستند، کدام مورد نادرست است؟

- **فلزهای X و Y با محلول ۰/۱ مولار هیدروکلریک اسید واکنش می‌دهند و گاز هیدروژن تولید می‌کنند.**
- **قدرمطلق پتانسیل الکترودی X از Y بزرگ‌تر است.**
- **در سلول گالوانی $Y-Z$، الکترود Z کاتد است.**

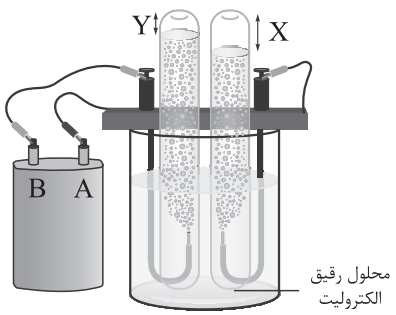
۱) در سلول گالوانی تشکیل‌شده از دو فلز X و Y، جهت جریان الکترون‌ها به سمت فلز Y است.

۲) در سلول گالوانی X و Z، جهت حرکت آنیون‌ها به سمت الکترود X است.

۳) اگر قطعه‌ای از فلز Z در داخل محلولی از کاتیون‌های X^{2+} قرار گیرد، پس از مدتی دمای محلول همان $25\ ^\circ C$ باقی خواهد ماند.

۴) ترتیب $X^{2+} > Z^{2+} > Y^{2+}$ را می‌توان به مقایسهٔ قدرت اکسندگی این گونه‌ها نسبت داد.

۱۰۰- با توجه به شکل زیر که مربوط به برقکافت آب است، کدام موارد از مطالب زیر درست است؟



الف) گاز X را می‌توان به عنوان سوخت وارد قطب منفی سلول سوختی هیدروژن ـ اکسیژن کرد.

ب) در این فرایند با گذشت زمان، غلظت مادهٔ حل‌شده در الکترولیت افزایش می‌یابد.

ج) واکنش کلی برقکافت آب، مانند واکنش کلی سلول سوختی هیدروژن ـ اکسیژن است.

د) B قطب مثبت باتری است و pH محلول الکترولیت در اطراف الکترود متصل به آن با گذشت زمان افزایش می‌یابد.

۱) الف و ج ۲) ب و د ۳) الف و ب ۴) ج و د

۱۰۱- کدام مورد نادرست است؟

۱) خوردگی آهن یک فرایند الکتروشیمیایی خودبه‌خودی است که در آن، آهن، کاهنده و گاز اکسیژن، اکسنده است.

۲) سرعت خوردگی آهن به عواملی نظیر رطوبت، دما و وجود مواد اکسیدکننده در محیط بستگی دارد.

۳) هر چه اختلاف پتانسیل کاهشی استاندارد بین آهن و مادهٔ اکسیدکننده بیشتر باشد، سرعت خوردگی کم‌تر خواهد بود.

۴) تشکیل زنگار سبز بر سطح مس، نمونه‌ای از فرایند خوردگی به شمار می‌آید.

۱۰۲- اگر در شرایط معین، شمار الکترون‌های مبادله‌شده در واکنش تجزیهٔ ۶/۱۲۵ گرم پتاسیم کلرات مطابق معادلهٔ $2KClO_3(s) \rightarrow 2KCl(s) + 3O_2(g)$، با شمار الکترون‌های مبادله‌شده در سلول برقکافت منیزیم کلرید مذاب برابر باشد، جرم فراوردهٔ تولیدشده در قطب منفی سلول، چند گرم است؟

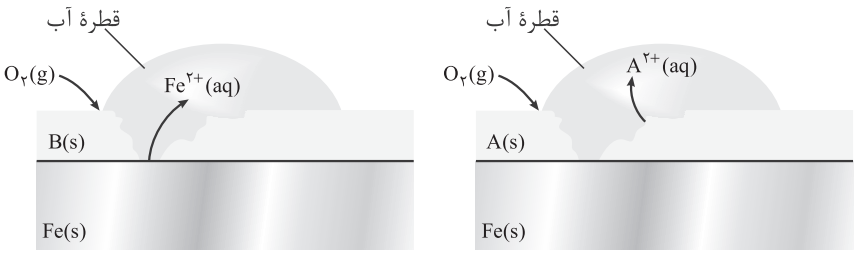
$(K = 39 , Cl = 35/5 , Mg = 24 , O = 16 : g.mol^{-1})$

۱) ۱/۸ ۲) ۳/۶ ۳) ۵/۳۲۵ ۴) ۱۰/۶۵

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۰۳- با توجه به شکل‌های زیر که دو قطعهٔ آهن را نشان می‌دهند که با لایهٔ نازکی از فلزهای A و B پوشیده شده‌اند، کدام موارد نادرست است؟



شکل (۲) شکل (۱)

الف) قدرت کاهندگی فلز A از فلز B بیشتر است.

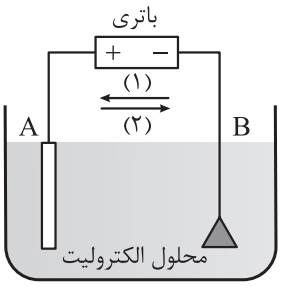
ب) مجموع ضرایب گونه‌ها در معادلهٔ موازنه‌شدهٔ نیم‌واکنش کاهش انجام‌شده در شکل (۲) برابر ۱۱ است.

ج) برای ساختن قوطی‌های روغن نباتی می‌توان از ورقهٔ آهنی مانند شکل (۱) استفاده کرد.

د) در شکل (۱)، آهن نقش کاتد را دارد و کاهش می‌یابد.

۱) الف و د ۲) ب و ج ۳) الف و ب ۴) ج و د

۱۰۴- اگر شکل زیر مربوط به فرایند آبکاری باشد، درستی یا نادرستی کدام گزینه با دیگر گزینه‌ها متفاوت است؟



۱) نیم‌واکنش کاهش بر روی الکترود B انجام می‌شود.

۲) پیکان (۱) جهت جابه‌جایی الکترون‌ها را در مدار بیرونی نشان می‌دهد.

۳) محلول الکترولیت شامل کاتیون‌های فلز A است.

۴) E° فلز A نسبت به B، می‌تواند کم‌تر یا بیشتر باشد.

۱۰۵- کدام مورد، نادرست است؟

۱) مجموع ضرایب مواد در واکنش موازنه‌شده مربوط به فرایند هال، ۴ برابر تغییر عدد اکسایش هر اتم آلومینیم است.

۲) تولید قوطی‌های آلومینیمی از قوطی‌های کهنه نسبت به تهیهٔ همان تعداد قوطی‌ها از فرایند هال، ۹۳ درصد در مصرف انرژی صرفه‌جویی می‌کند.

۳) در فرایند هال، با گذشت زمان از جرم آند کاسته می‌شود.

۴) فلز آلومینیم در مقابل اکسایش مقاوم بوده و وسایل تولیدی از آن، برای مدت طولانی استحکام خود را حفظ می‌کنند.

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ‌نامهٔ تشریحی آزمون را ساعت ۱۶ از صفحهٔ شخصی خودتان در سایت آزمون خیلی سبز دریافت کنید.

azmoon.kheilisabz.com

اساتید، مشاوران و دانش‌آموزان گرامی؛

نظرات، پیشنهادات، انتقادات و بازخوردهای خود نسبت به سؤالات این آزمون را می‌توانید از طریق آیدی Kheilisabz_edit@ در همهٔ پیام‌رسان‌ها با ما به اشتراک بگذارید.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ‌نامه آزمون آزمایشی خیلی سبز

رشته ریاضی

پایه دوازدهم	مرحله دهم
سال تحصیلی ۰۵-۱۴۰۴	۲۶/دی/۱۴۰۴

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا
حسابان و ریاضیات پایه	کاظم اجلالی ـ کوروش اسلامی ـ محمد گودرزی ـ حسین نادری ـ محمد سجاد نقیه
هندسه	امیرحسین ابومحبوب ـ محمدحسین رحیمی ـ حمید گلزاری ـ حسین هاشمی طاهری ـ حسین نادری
ریاضیات گسسته و آمار و احتمال	مصطفی دیداری ـ سوگند روشنی ـ عطا صادقی
فیزیک	رضا سبزمیدانی ـ نوید شاهی
شیمی	مهدی براتی ـ پیمان خواجوی مجد ـ یاسر راش ـ هادی عبادی ـ یاسر عبداللهی ـ امیر قاسمی‌پور محسن مجنونی ـ محمد مرادی ـ عرفان نریمانی

نام درس	مسئول درس	گزینشگر	مؤلف پاسخ‌نامه	کارشناسان علمی	ویراستاران به ترتیب حروف الفبا
حسابان و ریاضیات پایه	محمدسجاد نقیه	محمدسجاد نقیه	عادل حسینی	فرشاد حسن‌زاده سروش موئینی	منصور زرکش اصفهانی مرضیه فرشید
هندسه	حمید گلزاری	حمید گلزاری	امیرحسین ابومحبوب	سیدعباس حسینی	ماهان فنی‌فر ابوالفضل ناصری مریم نظری
ریاضیات گسسته و آمار و احتمال	مصطفی دیداری	مصطفی دیداری	مصطفی دیداری	امیرحسین ابومحبوب مریم نظری	منصور زرکش اصفهانی ماهان فنی‌فر ابوالفضل ناصری
فیزیک	رضا سبزمیدانی	نوید شاهی	مسعود خندانی	علیرضا جباری سعید محبی	پریسا سلامت پوریا علاقه‌مند امیر محمودی انزابی سعید محبی محمدرضا یاری
شیمی	یاسر عبداللهی	یاسر عبداللهی	وحید فارسیان	مرتضی نصیرزاده یاشار ذریه	هادی عبادی پارسا طاهری منزه پویا رستگاری حسن رحمتی کوکنده

مدیر تألیف آزمون: فاطمه آقاجانپور

ویژه کنکوری‌های ۱۴۰۵

Azmoon.kheilisabz.com

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

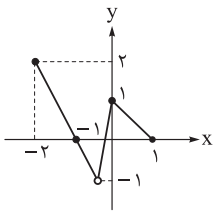
آزمون آزمایشی خیلی سبز

سرپرست تولید	الناز علی‌یاری‌زاده
ویراستاران فنی	نیلوفر اعتمادی ـ نیوشا پیمان ـ هدیه خسروی الهه صفری ـ زهرا صفری ـ فاطمه علی‌اکبری محیا غنی‌فرد ـ زهرا فرهادی‌مهر ـ نادره نازآوری ساعده نمازی
رسام	ندا فخاری سارا گنجی آزادپور
صفحه‌آرایی	صدف امام ـ مریم حسین‌زاده سپیده سخائی ـ الهام سهرابی ـ طاهره صادق‌نژاد مائده صبری ـ نیلوفر فرخجسته ـ فاطمه قیاسوند مهدیه گل‌پور ـ دریا لطفی

Azmoon.kheilisabz.com

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱ اگر نمودار تابع $y=f(x)$ مطابق شکل زیر باشد، اشتراک دامنه و برد تابع $g(x)=-f(2x-1)$ شامل چند عدد صحیح است؟



۱) صفر

۲) ۳

۳) ۲

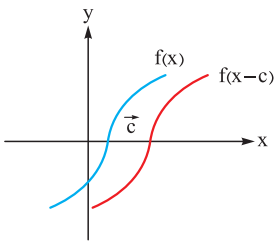
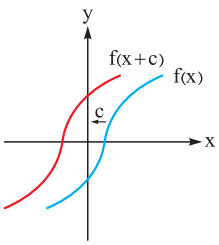
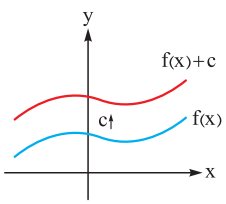
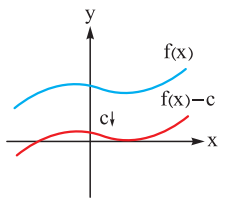
۴) ۱

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

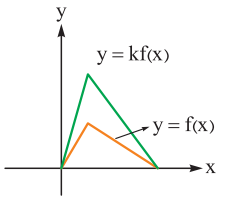
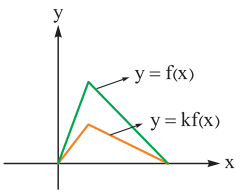
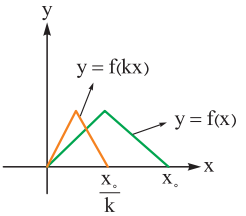
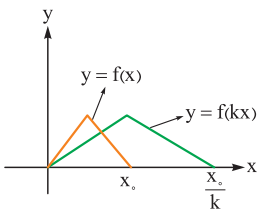
تبدیل نمودار توابع

انتقال:

ویژگی	نمودار	توضیح	تابع	نوع انتقال
نقطهٔ $A(x_\circ, y_\circ)$ روی نمودار تابع f به نقطهٔ $A'(x_\circ+c, y_\circ)$ روی نمودار تابع $y=f(x-c)$ تبدیل می‌شود. برد ثابت است، ولی دامنه تغییر می‌کند.		نمودار تابع f را c واحد به راست انتقال می‌دهیم.	$y=f(x-c)$	افقی
نقطهٔ $A(x_\circ, y_\circ)$ روی نمودار تابع f به نقطهٔ $A'(x_\circ-c, y_\circ)$ روی نمودار تابع $y=f(x+c)$ تبدیل می‌شود. برد ثابت است، ولی دامنه تغییر می‌کند.		نمودار تابع f را c واحد به چپ انتقال می‌دهیم.	$y=f(x+c)$	
نقطهٔ $A(x_\circ, y_\circ)$ روی نمودار تابع f به نقطهٔ $A'(x_\circ, y_\circ+c)$ روی نمودار تابع $y=f(x)+c$ تبدیل می‌شود. دامنه ثابت است، ولی برد تغییر می‌کند.		نمودار تابع f را c واحد به بالا انتقال می‌دهیم.	$y=f(x)+c$	عمودی
نقطهٔ $A(x_\circ, y_\circ)$ روی نمودار تابع f به نقطهٔ $A'(x_\circ, y_\circ-c)$ روی نمودار تابع $y=f(x)-c$ تبدیل می‌شود. دامنه ثابت است، ولی برد تغییر می‌کند.		نمودار تابع f را c واحد به پایین انتقال می‌دهیم.	$y=f(x)-c$	

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

انبساط / انقباض:

ویژگی	روش ترسیم	نمودار	تابع خواسته‌شده	
نقطهٔ $A(x_\circ, y_\circ)$ روی تابع f به نقطهٔ $A'(x_\circ, ky_\circ)$ روی تابع kf تبدیل می‌شود. در انبساط و انقباض عمودی، دامنهٔ تابع ثابت است، ولی برد تابع تغییر می‌کند. اگر دامنه و برد تابع f به ترتیب بازه‌های $[a,b]$ و $[c,d]$ باشند، آن‌گاه: $D_{kf} = D_f = [a,b]$ $R_{kf} = [kc, kd]$	عرض نقاط در k ضرب می‌شود.		$y = kf(x)\ ,\ k > 1$	انبساط و انقباض عمودی
			$y = kf(x)\ ,\ 0 < k < 1$	
نقطهٔ $A(x_\circ, y_\circ)$ روی تابع f به نقطهٔ $A'(\frac{x_\circ}{k}, y_\circ)$ روی تابع $y = f(kx)$ تبدیل می‌شود. در انبساط و انقباض افقی برد ثابت است، ولی دامنهٔ تابع تغییر می‌کند. $D_{y=f(kx)} = [\frac{a}{k}, \frac{b}{k}]$ $R_{y=f(kx)} = R_f = [c,d]$	طول نقاط بر k تقسیم می‌شود.		$y = f(kx)\ ,\ k > 1$	انبساط و انقباض افقی
			$y = f(kx)\ ,\ 0 < k < 1$	

نکته تبدیلات روی محور افقی تأثیری روی برد تابع ندارد.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: برد تابع f طبق نمودار، بازهٔ $(-1,2]$ و طبق نکتهٔ بالا، برد تابع g با برد تابع $-f$ که بازهٔ $[-2,1)$ باشد، برابر است؛ بنابراین:

$$R_g = [-2,1)$$

گام دوم: برای رسم نمودار تابع f باید تبدیلات زیر را در راستای محور افقی انجام دهیم:

$$y = f(x) \xrightarrow[x \to x-1]{\text{یک واحد به راست}} y = f(x-1) \xrightarrow{\text{طول نقاط تقسیم بر ۲}} y = f(2x-1)$$

حالا همین کار را بر روی بازهٔ دامنهٔ تابع f که برابر $[-2,1] - \{-\frac{1}{2}\}$ است، انجام می‌دهیم:

$$D_f = [-2,1] - \{-\frac{1}{2}\} \xrightarrow{\text{یک واحد به راست}} [-1,2] - \{\frac{1}{2}\} \xrightarrow{\text{تقسیم بر ۲}} D_g = [-\frac{1}{2},1] - \{\frac{1}{4}\}$$

گام سوم: حالا اشتراک D_g و R_g را حساب می‌کنیم:

$$D_g \cap R_g = ([-\frac{1}{2},1] - \{\frac{1}{4}\}) \cap [-2,1) = [-\frac{1}{2},1) - \{\frac{1}{4}\}$$

این مجموعه شامل یک عدد صحیح است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲ اگر $g^{-1}(x)=3f^{-1}(\frac{x+1}{2})+4$ و دامنهٔ تابع g بازهٔ $[1,7]$ باشد، دامنهٔ تابع $h(x)=2f(\frac{x+2}{3})-1$ شامل چند عدد طبیعی است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا ضابطهٔ تابع g را (برحسب تابع f) به دست می‌آوریم:

$$y=g^{-1}(x)=3f^{-1}(\frac{x+1}{2})+4 \Rightarrow \frac{y-4}{3}=f^{-1}(\frac{x+1}{2}) \Rightarrow \frac{x+1}{2}=f(\frac{y-4}{3}) \Rightarrow x=2f(\frac{y-4}{3})-1$$

$$\xrightarrow{\text{تعویض جای x و y}} g(x)=2f(\frac{x-4}{3})-1$$

گام دوم: طبق فرض، دامنهٔ تابع g بازهٔ $[1,7]$ است، پس داریم:

$$1\le x\le 7 \Rightarrow -3\le x-4\le 3 \Rightarrow -1\le \frac{x-4}{3}\le 1$$

یعنی دامنهٔ تابع f بازهٔ $[-1,1]$ است.

گام سوم: حالا دامنهٔ تابع h را پیدا می‌کنیم:

$$-1\le \frac{x+2}{3}\le 1 \Rightarrow -3\le x+2\le 3 \Rightarrow -5\le x\le 1$$

بازهٔ $[-5,1]$ فقط شامل یک عدد طبیعی است.

یه‌جور دیگه

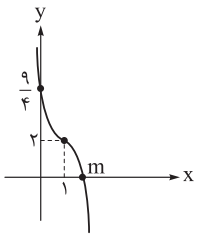
با توجه به این‌که D_g برابر $R_{g^{-1}}$ است، می‌توان به جای گام‌های اول و دوم نوشت:

$$R_{g^{-1}}=[1,7] \Rightarrow 1\le 3f^{-1}(\frac{x+1}{2})+4\le 7 \Rightarrow -1\le f^{-1}(\frac{x+1}{2})\le 1$$

این یعنی $R_{f^{-1}}=[-1,1]$ و در نتیجه $D_f=[-1,1]$ است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳ نمودار تابع $f(x)=a(x-b)^{۳}+c$ در شکل زیر رسم شده است. حاصل $f^{-۱}(۱-m)$ کدام است؟



۱) $۲\sqrt[۳]{۲}-۱$

۲) $۲\sqrt[۳]{۲}+۱$

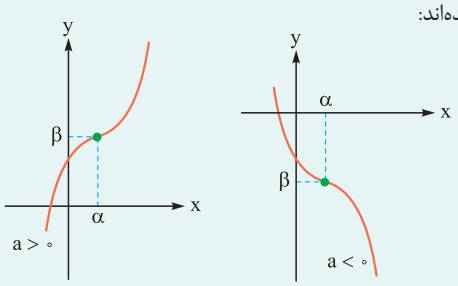
۳) $\sqrt[۳]{۲}-۱$

۴) $\sqrt[۳]{۲}+۱$

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

نمودار تابع درجه‌سوم $y=a(x-\alpha)^{۳}+\beta$ در شکل‌های زیر رسم شده‌اند:



نقطهٔ (α,β) در نمودارهای بالا، مرکز تقارن نمودار تابع است.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: با توجه به درس‌باکس، ضابطهٔ تابع f باید به صورت $f(x)=a(x-۱)^{۳}+۲$ باشد. مقدار a را به کمک عرض از مبدأ تابع پیدا می‌کنیم:

$$f(۰)=a(-۱)+۲=\frac{۹}{۴} \Rightarrow a=-\frac{۱}{۴}$$

گام دوم: پس ضابطهٔ تابع $f(x)=-\frac{۱}{۴}(x-۱)^{۳}+۲$ است و با صفر قرار دادن این ضابطه مقدار m را پیدا می‌کنیم:

$$f(m)=-\frac{۱}{۴}(m-۱)^{۳}+۲=۰ \Rightarrow (m-۱)^{۳}=۸ \Rightarrow m-۱=۲ \Rightarrow m=۳$$

گام سوم: خواستهٔ سؤال مقدار $f^{-۱}(-۲)$ است. فرض می‌کنیم این مقدار برابر b باشد:

$$f^{-۱}(-۲)=b \Rightarrow f(b)=-\frac{۱}{۴}(b-۱)^{۳}+۲=-۲ \Rightarrow (b-۱)^{۳}=۱۶ \Rightarrow b-۱=\sqrt[۳]{۱۶}=۲\sqrt[۳]{۲}$$

$$\Rightarrow b=۲\sqrt[۳]{۲}+۱$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

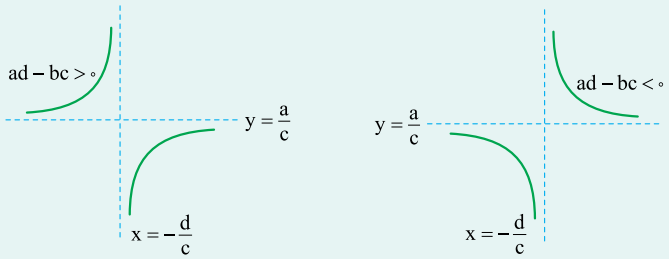
۴ تابع $f(x)=\sqrt{\frac{x-۳}{۱-x}}$ روی بازهٔ $(a\ ,\ b)$ اکیداً نزولی است. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۲

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

تابع $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ (با شرایط $c\neq ۰$ و $ad\neq bc$) هموگرافیک نامیده می‌شود و نمودار آن به یکی از حالت‌های زیر است:



بنابراین اگر $ad-bc>۰$ باشد، تابع روی هر بازه پیوسته از دامنه‌اش اکیداً صعودی و اگر $ad-bc<۰$ باشد، اکیداً نزولی است.

نکته وضعیت یکنوایی تابع $g(x)=\sqrt{f(x)}$ مانند وضعیت یکنوایی تابع f است.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا دامنهٔ تابع را به دست می‌آوریم:

$$\Rightarrow \frac{x-۳}{۱-x}\geq ۰ \Rightarrow \frac{x-۳}{x-۱}\leq ۰ \xrightarrow{\text{بین ریشه‌ها}} ۱<x\leq ۳ \Rightarrow D_f=(۱,۳]$$

گام دوم: حالا چون $(-۳)(-۱)-۱\times ۱>۰$ است، تابع $y=\frac{x-۳}{-x+۱}$ روی بازهٔ $(۱,۳]$ اکیداً نزولی است و طبق نکتهٔ گفته‌شده تابع f نیز روی این بازه اکیداً نزولی است، پس بیشترین مقدار $b-a$ برابر $۳-۱=۲$ است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵ تابع $f(x) = (x - |x-۳|)^۲$ روی کدام بازه اکیداً صعودی است؟

۱) $[\frac{۳}{۲}, +\infty)$ ۲) $[۱, +\infty)$

۳) $[\frac{۳}{۲}, ۳]$ ۴) $[۰, ۳]$

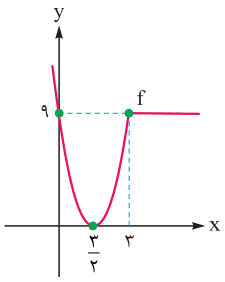
پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: تابع f را به صورت دوضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x) = \begin{cases} (x-(-x+۳))^۲ & ; \quad x < ۳ \\ (x-(x-۳))^۲ & ; \quad x \geq ۳ \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} (۲x-۳)^۲ & ; \quad x < ۳ \\ ۹ & ; \quad x \geq ۳ \end{cases}$$

گام دوم: نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



همان‌طور که مشاهده می‌شود، تابع f روی بازهٔ $[\frac{۳}{۲}, ۳]$ و هر زیرمجموعه از آن اکیداً صعودی است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶ باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $f(x)=x^{3n+1}$ بر چندجمله‌ای x^2+x+1 کدام است؟

۱) -1 ۲) 1 ۳) $-x$ ۴) x

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

- اگر چندجمله‌ای $p(x)$ را بر چندجمله‌ای $b(x)$ تقسیم کنیم، خارج قسمت چندجمله‌ای $q(x)$ و باقی‌مانده چندجمله‌ای $r(x)$ می‌شود. داریم:

$$p(x)=b(x)q(x)+r(x)$$

- درجهٔ چندجمله‌ای $r(x)$ همواره از درجهٔ چندجمله‌ای $b(x)$ کوچک‌تر است.
- برای محاسبهٔ $r(x)$، مقدار چندجمله‌ای $p(x)$ را در ریشه‌های چندجمله‌ای $b(x)$ حساب می‌کنیم.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: رابطهٔ تقسیم را می‌نویسیم:

$$x^{3n+1}=(x^2+x+1)q(x)+r(x)$$

عبارت x^2+x+1 ریشهٔ حقیقی ندارد، پس برای این‌که بتوانیم از ریشه‌های مقسوم‌علیه استفاده کنیم، طرفین تساوی بالا را در $x-1$ ضرب می‌کنیم:

$$\xrightarrow{x\neq 1} (x-1)x^{3n+1}=(x^3-1)q(x)+(x-1)r(x) \Rightarrow x^{3n+2}-x^{3n+1}=(x^3-1)q(x)+(x-1)r(x)$$

گام دوم: ریشهٔ مقسوم‌علیه $x^3=1$ است، پس باید مقسوم را برحسب x^3 بسط دهیم:

$$x^{3n+2}-x^{3n+1}=(x^3)^n x^2-(x^3)^n x$$

و سپس به جای x^3 مقدار ۱ قرار دهیم:

$$\Rightarrow x^2-x=(x-1)r(x) \Rightarrow r(x)=x$$

تیزبازی

مقدار $n=1$ را تست کنیم:

$$\begin{array}{r|l} x^4 & x^2+x+1 \\ \hline -(x^4+x^3+x^2) & x^2-x \\ \hline -x^3-x^2 & \\ -(-x^3-x^2-x) & \\ \hline x & \end{array}$$

$$\Rightarrow x^4=(x^2+x-1)(\underbrace{x^2-x}_{\text{خارج قسمت}})+\underbrace{x}_{\text{باقی مانده}}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷ نمودار تابع $f(x)=\sin^{۲}\frac{x}{۲}$ را $\frac{\pi}{۵}$ واحد به سمت چپ می‌بریم و سپس در راستای محور عمودی با ضریب ۲ منبسط و در راستای محور افقی با ضریب ۴ منقبض می‌کنیم تا نمودار تابع g به دست آید. دورهٔ تناوب تابع g نسبت به دورهٔ تناوب تابع f چه تغییری کرده است؟

۱) $\frac{\pi}{۲}$ واحد کم‌تر شده است.
۲) $\frac{\pi}{۲}$ واحد بیشتر شده است.
۳) $\frac{۳\pi}{۲}$ واحد کم‌تر شده است.
۴) $\frac{۳\pi}{۲}$ واحد بیشتر شده است.

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

دورهٔ تناوب‌های توابع مهم:

۱) $\begin{cases} y=a\sin bx+c \\ y=a\cos bx+c \end{cases} \Rightarrow T=\frac{۲\pi}{|b|}$

۲) $\begin{cases} y=\sin^{۲n}bx \text{ یا } y=\cos^{۲n}bx \\ y=|\sin bx| \text{ یا } y=|\cos bx| \end{cases} \Rightarrow T=\frac{\pi}{|b|}$

۳) $y=|\sin bx|+|\cos bx| \Rightarrow T=\frac{\pi}{۲|b|}$

۴) $y=a\tan bx+c \Rightarrow T=\frac{\pi}{|b|}$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: ابتدا دورهٔ تناوب تابع f را پیدا می‌کنیم:

$$\xrightarrow{\text{درس باکس}} T_f=\frac{\pi}{\frac{۱}{۲}}=۲\pi$$

گام دوم: سپس ضابطهٔ تابع g را پیدا می‌کنیم:

$$f(x)=\sin^{۲}\frac{x}{۲} \xrightarrow[x\to x+\frac{\pi}{۵}]{\text{به چپ }\frac{\pi}{۵}} y=\sin^{۲}\frac{x+\frac{\pi}{۵}}{۲}=\sin^{۲}(\frac{x}{۲}+\frac{\pi}{۱۰}) \xrightarrow[\text{انقباض افقی با ضریب ۴}]{\text{انبساط عمودی با ضریب ۲}} g(x)=۲\sin^{۲}(۲x+\frac{\pi}{۱۰})$$

دورهٔ تناوب این تابع نیز برابر است با:

$$T_g=\frac{\pi}{۲}$$

گام سوم: همان‌طور که مشاهده می‌شود، T_g، $\frac{۳\pi}{۲}$ واحد از T_f کم‌تر است.

تیزپازی

می‌دانیم تنها چیزی که روی دورهٔ تناوب تابع اثرگذار است، انسباط / انقباض افقی است، پس وقتی نمودار تابع f را با ضریب ۴ منقبض می‌کنیم، دورهٔ تناوب آن $\frac{۱}{۴}$ برابر می‌شود:

$$T_f=۲\pi \Rightarrow T_g=\frac{۲\pi}{۴}=\frac{\pi}{۲}$$

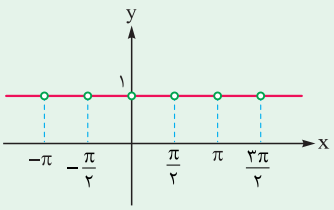
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸ دورهٔ تناوب تابع $f(x)=\tan ax.\cot ax$ برابر $\frac{\pi}{8}$ است. مقدار مثبت a کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۱۶

پاسخ: گزینهٔ ۲

نکته تابع خاص $y=\tan x.\cot x$: این تابع با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{\frac{k\pi}{2}\,|\,k\in\mathbb{Z}\}$ ثابت است:



یعنی دورهٔ تناوب آن $\frac{\pi}{2}$ است.

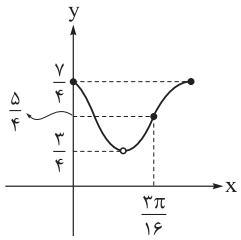
پس دورهٔ تناوب تابع $f(x)=\tan ax.\cot ax$ برابر $\frac{\pi}{2|a|}$ است؛ زیرا با تقسیم طول نقاط روی نمودار تابع $y=\tan x.\cot x$ به عدد a، به دست می‌آید.

پاسخ خیلی تشریحی طبق نتیجهٔ نکتهٔ بالا داریم:

$$\frac{\pi}{2|a|}=\frac{\pi}{8}\Rightarrow 2|a|=8\Rightarrow |a|=4\Rightarrow a=\pm 4$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹ بخشی از نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{۱+\tan^۲ ax}+b$ به صورت زیر است. حاصل $a\times b$ کدام می‌تواند باشد؟

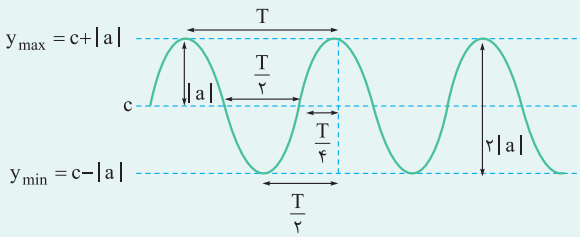


۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

نمودار توابع $y=a\sin bx+c$ یا $y=a\cos bx+c$:



۱) بیشترین مقدار تابع $y_{max}=c+|a|$ و کم‌ترین مقدار آن $y_{min}=c-|a|$ است.

۲) فاصلهٔ دو ماکزیمم متوالی یا فاصلهٔ دو مینیمم متوالی برابر دورهٔ تناوب است.

۳) فاصلهٔ افقی هر ماکزیمم با مینیمم متوالی‌اش نصف دورهٔ تناوب است.

پاسخ خیلی تشریحی

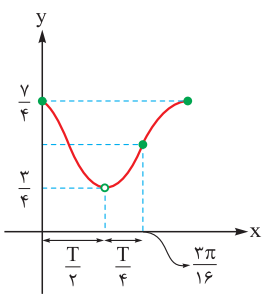
گام اول: ابتدا ضابطهٔ تابع را به صورت استاندارد می‌نویسیم:

$$f(x)=\frac{۱}{\frac{۱}{\cos^۲ ax}}+b=\cos^۲ ax+b=\frac{\cos ۲ax+۱}{۲}+b \Rightarrow f(x)=\frac{۱}{۲}\cos ۲ax+\frac{۲b+۱}{۲}$$

گام دوم: خط وسط نمودار $y=\frac{۵}{۴}$ است؛ زیرا $\frac{\frac{۷}{۴}+\frac{۳}{۴}}{۲}=\frac{۵}{۴}$ است، بنابراین داریم:

$$\frac{۲b+۱}{۲}=\frac{۵}{۴} \Rightarrow ۴b+۲=۵ \Rightarrow b=\frac{۳}{۴}$$

گام سوم: مطابق شکل زیر، $\frac{۳T}{۴}$ برابر $\frac{۳\pi}{۱۶}$ است.



$$\Rightarrow \frac{۳T}{۴}=\frac{۳\pi}{۱۶} \Rightarrow T=\frac{\pi}{۴}$$

و با توجه به رابطهٔ دورهٔ تناوب داریم:

$$\frac{۲\pi}{۲|a|}=\frac{\pi}{۴} \Rightarrow |a|=۴ \Rightarrow a=\pm ۴$$

در نهایت خواستهٔ سؤال برابر است با:

$$a\times b=\pm ۴\times\frac{۳}{۴}=\pm ۳$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۰ اگر $\cot(\alpha+۲۵^\circ)=۲$ باشد، مقدار $\tan(۱۱۰^\circ-\alpha)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $-\frac{۱}{۳}$ ۳) ۳ ۴) -۳

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

اتحاد تانژانت مجموع کمان:

$$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan(\alpha)\pm\tan\beta}{۱\mp\tan\alpha\tan\beta}\Rightarrow\tan ۲\theta=\frac{۲\tan\theta}{۱-\tan^۲\theta}$$

نکته

$$\tan(۴۵^\circ+\theta)=\frac{۱+\tan\theta}{۱-\tan\theta}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: متمم زاویهٔ $\alpha+۲۵^\circ$ زاویهٔ $۶۵^\circ-\alpha$ است؛ زیرا:

$$۹۰^\circ-(\alpha+۲۵^\circ)=۶۵^\circ-\alpha$$

پس داریم:

$$\tan(۶۵^\circ-\alpha)=۲$$

گام دوم: مطلوب مسئله $\tan(۱۱۰^\circ-\alpha)$ است که کمان آن ۴۵° بیشتر از کمان $۶۵^\circ-\alpha$ است، بنابراین طبق نکته داریم:

$$\tan(۱۱۰^\circ-\alpha)=\tan(۴۵^\circ+(۶۵^\circ-\alpha))=\frac{۱+\tan(۶۵^\circ-\alpha)}{۱-\tan(۶۵^\circ-\alpha)}=\frac{۱+۲}{۱-۲}=-۳$$

کنکور اگر $\tan(\alpha+۱۲^\circ)=\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ باشد، مقدار $\cot(۱۸^\circ-\alpha)$ کدام است؟ (سؤال ۱۳ کنکور ریاضی ۱۴۰۴ ـ نوبت دوم)

۱) $۵\sqrt{۳}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۵}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۱۵}$ ۴) $\frac{۵\sqrt{۳}}{۳}$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۱ مجموع جواب‌های معادلهٔ $\cos 2x + \cos^2 x = 0$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$ کدام است؟

۱) π ۲) 2π ۳) 3π ۴) 4π

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

معادلهٔ مثلثاتی: معادله‌ای که مجهول مسئله در کمان یک نسبت مثلثاتی باشد، معادلهٔ مثلثاتی است. برای حل چنین معادلاتی، به روش‌های تجزیه، تغییر متغیر و ... باید به یکی از سه معادلهٔ زیر برسیم:

۱) $\sin \square = \sin \theta_0 \Rightarrow \begin{cases} \square = 2k\pi + \theta_0 \\ \square = 2k\pi + \pi - \theta_0 \end{cases} ; \ k \in \mathbb{Z}$

۲) $\cos \square = \cos \theta_0 \Rightarrow \square = 2k\pi \pm \theta_0$

۳) $\tan \square = \tan \theta_0 \Rightarrow \square = k\pi + \theta_0$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

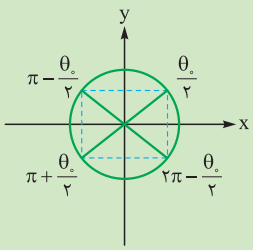
گام اول: $\cos^2 x$ را برحسب $\cos 2x$ می‌نویسیم:

$$\xrightarrow{\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}} \cos 2x + \frac{1+\cos 2x}{2} = 0 \Rightarrow \cos 2x = -\frac{1}{3}$$

گام دوم: فرض کنید θ_0 کمانی باشد که کسینوس آن برابر $-\frac{1}{3}$ است؛ در این صورت داریم:

$$\cos 2x = \cos \theta_0 \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \theta_0 \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\theta_0}{2}$$

گام سوم: جواب‌های بازهٔ $[0, 2\pi]$ عبارت‌اند از $\frac{\theta_0}{2}$، $\pi - \frac{\theta_0}{2}$، $\pi + \frac{\theta_0}{2}$ و $2\pi - \frac{\theta_0}{2}$ که مجموع آن‌ها برابر 4π است. این کمان‌ها روی دایرهٔ مثلثاتی مطابق شکل زیر هستند:



امتحان نهایی

معادلهٔ مثلثاتی $2\cos^2 x + \cos x = 0$ را حل کنید. (سؤال ۷ امتحان نهایی شهریور ۱۴۰۱)

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۲ مجموع جواب‌های معادلهٔ $\sin^۶ x + \cos^۶ x = \frac{۵}{۸}$ در بازهٔ $[۰, ۲\pi]$ کدام است؟

۱) ۵π ۲) ۷π ۳) ۸π ۴) ۹π

پاسخ: گزینهٔ ۳

نکته

اتحادهای جانبی:

$$\sin^۴\theta + \cos^۴\theta = ۱ - \frac{۱}{۲}\sin^۲ ۲\theta = \frac{۳}{۴} + \frac{۱}{۴}\cos ۴\theta$$

$$\sin^۶\theta + \cos^۶\theta = ۱ - \frac{۳}{۴}\sin^۲ ۲\theta = \frac{۵}{۸} + \frac{۳}{۸}\cos ۴\theta$$

معادلات خاص:

$$\sin(\quad) = ۰ , \tan(\quad) = ۰ \Rightarrow (\quad) = k\pi$$

$$\cos(\quad) = ۰ \Rightarrow (\quad) = k\pi + \frac{\pi}{۲} \quad ; k \in \mathbb{Z}$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا از اتحادهای بالا استفاده می‌کنیم و معادله را ساده‌تر می‌نویسیم:

$$\frac{۵}{۸} + \frac{۳}{۸}\cos ۴x = \frac{۵}{۸} \Rightarrow \frac{۳}{۸}\cos ۴x = ۰ \Rightarrow \cos ۴x = ۰$$

بنابراین داریم:

$$۴x = k\pi + \frac{\pi}{۲} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{۴} + \frac{\pi}{۸} ; k \in \mathbb{Z}$$

گام سوم: جواب‌های معادله در بازهٔ $[۰ , ۲\pi]$ عبارت‌اند از:

$$\frac{\pi}{۸} , \frac{۳\pi}{۸} , \frac{۵\pi}{۸} , \frac{۷\pi}{۸} , \frac{۹\pi}{۸} , \frac{۱۱\pi}{۸} , \frac{۱۳\pi}{۸} , \frac{۱۵\pi}{۸}$$

که مجموع همهٔ آن‌ها برابر ۸π است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۳ حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty}[\frac{x}{[x]}]$ و حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty}[\frac{[x]}{x}]$ به ترتیب از راست به چپ کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

۱) ۱، حد ندارد.
۲) ۱، ۱
۳) حد ندارد، حد ندارد.
۴) حد ندارد، ۱

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: می‌دانیم که $x-1<[x]\leq x$ است، پس داریم:

$$\frac{x-1}{x}<\frac{[x]}{x}\leq 1$$

هم‌چنین $[x]\leq x<[x]+1$ است، بنابراین:

$$1\leq\frac{x}{[x]}<\frac{[x]+1}{[x]}$$

حواسمان هست که وقتی $x\to+\infty$ عبارت $\frac{x-1}{x}$ عضو بازهٔ $(0,1)$ و عبارت $\frac{[x]+1}{[x]}$ عضو بازهٔ $(1,2)$ است.

گام دوم: حالا حاصل حدها را می‌یابیم:

$$\lim_{x\to+\infty}[\frac{x}{[x]}]=[1^+]=1$$

$$\lim_{x\to+\infty}[\frac{[x]}{x}]=\begin{cases}1 & ; \quad x\in\mathbb{Z}\\ 0 & ; \quad x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$

بنابراین حاصل حد دوم وجود ندارد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۴ حاصل $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{[x]+\cos x}{\sin x}$ کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) $-\infty$ ۴) $+\infty$

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: در یک همسایگی چپ $x=0$، مقدار $[x]$ برابر -1 است و داریم:

$$L=\lim_{x\to 0^-}\frac{[x]+\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-1+\cos x}{\sin x}$$

گام دوم: به کمک اتحادهای دو برابر کمان، صورت و مخرج را تجزیه می‌کنیم:

$$L=\lim_{x\to 0^-}\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=-\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}=\frac{0}{-1}=0$$

یه‌جور دیگه

با استفاده از اتحاد $\dfrac{1-\cos x}{\sin x}=\dfrac{\sin x}{1+\cos x}=\tan\dfrac{x}{2}$ به سادگی داریم:

$$L=\lim_{x\to 0^-}\tan\frac{x}{2}=\tan 0^\circ=0$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۵ اگر $\lim\limits_{x\to ۳}\frac{k[x]+[-x]}{x^۲-۹}=+\infty$ باشد، مجموعهٔ مقادیر k، بازهٔ $(a\ ,\ b)$ است. حاصل $a\times b$ کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

حد دو طرفه است.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۴}{۳}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

در حد توابع کسری که حد مخرج صفر، اما حد صورت مخالف صفر باشد، حاصل حد $+\infty$ یا $-\infty$ می‌شود. برای تعیین علامت حد، از جدول زیر کمک می‌گیریم:

		حد مخرج	
		۰^-	۰^+
حد صورت	مثبت	$-\infty$	$+\infty$
	منفی	$+\infty$	$-\infty$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: هر دو حد چپ و راست تابع در $x=۳$ برابر $+\infty$ شده است. این دو حد را جداگانه بررسی می‌کنیم:

حد چپ: $x\to ۳^-\ \Rightarrow\ \begin{cases}[x]=۲\\ [-x]=-۳\end{cases}$

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۳^-}\frac{k[x]+[-x]}{x^۲-۹}=\lim_{x\to ۳^-}\frac{۲k-۳}{x^۲-۹}=\frac{۲k-۳}{۰^-}=+\infty\ \Rightarrow\ ۲k-۳<۰\ \Rightarrow\ k<\frac{۳}{۲}\qquad (۱)$$

حد راست: $x\to ۳^+\ \Rightarrow\ \begin{cases}[x]=۳\\ [-x]=-۴\end{cases}$

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۳^+}\frac{k[x]+[-x]}{x^۲-۹}=\lim_{x\to ۳^+}\frac{۳k-۴}{x^۲-۹}=\frac{۳k-۴}{۰^+}=+\infty\ \Rightarrow\ ۳k-۴>۰\ \Rightarrow\ k>\frac{۴}{۳}\qquad (۲)$$

گام دوم: این یعنی مجموعهٔ مقادیر قابل قبول برای k بازهٔ $(\frac{۴}{۳}\ ,\ \frac{۳}{۲})$ است.

$$\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{۴}{۳}\\ b=\frac{۳}{۲}\end{cases}\Rightarrow a\times b=۲$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۶ حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{۲}(\sqrt{۱+\frac{۱}{x}}-۱-\frac{۱}{۲x})$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۸}$ ۲) $-\frac{۱}{۸}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $-\frac{۱}{۴}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint از اتحاد مزدوج استفاده کن.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** عبارت را در مزدوج عبارت $\sqrt{۱+\frac{۱}{x}}-(۱+\frac{۱}{۲x})$ ضرب و بر آن تقسیم می‌کنیم:

$$\Rightarrow x^{۲}(\sqrt{۱+\frac{۱}{x}}-۱-\frac{۱}{۲x})=x^{۲}\frac{۱+\frac{۱}{x}-(۱+\frac{۱}{۴x^{۲}}+\frac{۱}{x})}{\sqrt{۱+\frac{۱}{x}}+۱+\frac{۱}{۲x}}=x^{۲}\frac{-۱}{۴x^{۲}(\sqrt{۱+\frac{۱}{x}}+۱+\frac{۱}{۲x})}=-\frac{۱}{۴}\frac{۱}{\sqrt{۱+\frac{۱}{x}}+۱+\frac{۱}{۲x}}$$

گام دوم: حالا حاصل حد را پیدا می‌کنیم:

$$L=\lim_{x\to+\infty}-\frac{۱}{۴}\left(\frac{۱}{\sqrt{\underbrace{۱+\frac{۱}{x}}_{\downarrow}}+۱+\underbrace{\frac{۱}{۲x}}_{\downarrow}}\right)=-\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۲}=-\frac{۱}{۸}$$

حد در بی‌نهایت برابر صفر است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۷ نمودار تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x^۲+۳x-۱۰}{ax^۲-(a+۱)x-۴}$ فقط یک خط مجانب قائم دارد. مجموعهٔ مقادیر قابل قبول برای a چند عضو دارد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

- اگر $\lim\limits_{x\to x_۰} f(x)=\pm\infty$ باشد (در مورد حدهای چپ و راست هم صادق است.)، خط $x=x_۰$ مجانب قائم نمودار تابع f است.
- در توابع کسری، مجانب‌های قائم از بین ریشه‌های مخرج انتخاب می‌شود. ریشه‌ای از مخرج معادله، مجانب قائم است که ریشهٔ صورت نباشد.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: در سه حالت، نمودار تابع f فقط یک خط مجانب قائم دارد:

الف) عبارت مخرج درجه‌یک باشد؛ یعنی $a=۰$ باشد. در این شرط ضابطهٔ تابع f به صورت $f(x)=-\frac{(x+۵)(x-۲)}{(x+۴)}$ خواهد بود که نمودار آن فقط یک خط مجانب دارد.

گام دوم: ب) مخرج فقط یک ریشه داشته باشد؛ چون عبارت مخرج درجه‌دو است، Δ آن باید برابر صفر باشد:

$$\Rightarrow \Delta=(a+۱)^۲-۴(-۴)a=a^۲+۱۸a+۱=۰$$

این معادله دو جواب دارد که با ریشه‌های صورت متفاوت است، پس فعلاً دو مقدار برای a قابل قبول است.

گام سوم:

پ) یکی از ریشه‌های مخرج، با یکی از ریشه‌های صورت مشترک باشد:

$$f(x)=\frac{(x+۵)(x-۲)}{ax^۲-(a+۱)x-۴}$$

پس $x=۲$ و $x=-۵$ را در عبارت مخرج امتحان می‌کنیم:

$$x=۲: ۴a-۲a-۲-۴=۰ \Rightarrow a=۳$$

$$x=-۵: ۲۵a+۵a+۵-۴=۰ \Rightarrow ۳۰a=-۱ \Rightarrow a=-\frac{۱}{۳۰}$$

در نتیجه مجموعهٔ مقادیر قابل قبول برای a شامل ۵ عضو است.

کنکور برای چند مقدار a، تابع $f(x)=\frac{۳x^۲-۸x-۳}{ax^۲+(۱-a)x+a+۱}$ یک مجانب قائم دارد؟ *(سؤال ۱۶ کنکور ریاضی ۱۴۰۳ ـ نوبت دوم)*

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۷

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۸ اگر $f(x)=\frac{x+۲}{x+۳}$ و $g(x)=\frac{x-۳}{x+۱}$ باشد، مساحت سطح محصور بین خطوط مجانب نمودار تابع $fog^{-۱}$ و محورهای مختصات کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) ۳ ۴) $\frac{۱}{۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

اگر $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=y_۰$ باشد، خط $y=y_۰$ مجانب افقی نمودار تابع f است.

نکته

تابع وارون تابع $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$، تابع $f^{-۱}(x)=\frac{-dx+b}{cx-a}$ است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

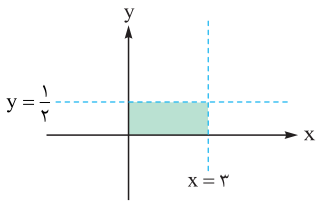
گام اول: ابتدا ضابطهٔ تابع $fog^{-۱}$ را به دست می‌آوریم:

$$\xrightarrow{\text{نکته}} g^{-۱}(x)=\frac{-x-۳}{x-۱} \Rightarrow (fog^{-۱})(x)=\frac{g^{-۱}(x)+۲}{g^{-۱}(x)+۳}=\frac{\frac{-x-۳}{x-۱}+۲}{\frac{-x-۳}{x-۱}+۳}=\frac{x-۵}{۲x-۶}$$

گام دوم: خط $x=۳$ مجانب قائم نمودار تابع $fog^{-۱}$ و خط $y=\frac{۱}{۲}$ مجانب افقی آن است، زیرا:

$$\lim_{x\to\pm\infty}(fog^{-۱})(x)=\frac{۱}{۲}$$

گام سوم: خط $x=۳$ و خط $y=\frac{۱}{۲}$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:



مستطیل رنگ‌شدهٔ شکل بالا سطح مورد نظر است که مساحت آن برابر $\frac{۳}{۲}$ است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

مشابه امتحان نهایی

۱۹ اگر ماتریس $A=\begin{bmatrix} a & a-۴ \\ ۰ & a+۱ \end{bmatrix}$ قطری باشد، دترمینان آن کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۳۰

۳) ۱۲ ۴) ۲۰

مشاوره این سؤال مشابه سؤال ۱، قسمت پ، امتحان نهایی هندسه (۳) شهریور ۱۴۰۴ طراحی شده است.

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint با توجه به تعریف ماتریس قطری، مقدار a را پیدا کنید.

درس Box

۱) ماتریس قطری: ماتریسی است مربعی که تمام درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی آن صفر باشند. (درایه‌های واقع بر قطر می‌توانند صفر باشند یا نباشند.)

۲) دترمینان ماتریس‌های ۲×۲:

اگر $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه دترمینان ماتریس A برابر است با:

$$|A|=ad-bc$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: ماتریس A قطری است؛ بنابراین درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی آن همگی صفر هستند و در نتیجه داریم:

$$a-۴=۰ \Rightarrow a=۴$$

گام دوم: با جای‌گذاری مقدار a، ماتریس A را بازنویسی کرده و دترمینان آن را محاسبه می‌کنیم.

$$A=\begin{bmatrix} ۴ & ۰ \\ ۰ & ۵ \end{bmatrix} \Rightarrow |A|=۴\times۵-۰=۲۰$$

امتحان نهایی

الف) برای هر دو ماتریس دلخواه A و B، تساوی $AB=BA$ برقرار می‌باشد. (درست ــ نادرست)

ب) اگر $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$ و $a_{ij}=۲i-j^۲$، در این صورت درایهٔ $a_{۲۳}$ برابر ۵− است. (درست ــ نادرست)

پ) $A=\begin{bmatrix} a & a-۴ \\ ۰ & a+۱ \end{bmatrix}$ ماتریسی قطری است، در این صورت مقدار a برابر ..... می‌باشد.

ت) اگر A یک ماتریس ۳×۳ و $|A|=۱$، در این صورت $|-۲A|$ برابر ..... است.

(سؤال ۱ (قسمت پ) ـ امتحان نهایی شهریور ۱۴۰۴)

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۰ اگر $A=\begin{bmatrix}-۲ & ۳\\ -۱ & ۱\end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه حاصل $A^{۱۰}+A^{۲۰}+A^{۳۰}$ کدام است؟

۱) $۳A$ ۲) $۳I$ ۳) $A+۲I$ ۴) $\bar{O}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint ماتریس‌های $A^۲$ و $A^۳$ را پیدا کنید تا به یک الگو دست پیدا کنید یا مضربی از ماتریس واحد حاصل شود.

درس Box

روش‌های متعددی برای پیداکردن توان‌های بزرگ ماتریس‌ها وجود دارد که بعضی از این روش‌ها عبارت‌اند از:

۱) گاهی اوقات می‌توان از روی ماتریس‌های $A^۲$، $A^۳$ و ... به یک الگو دست پیدا کرد و ماتریس A^n را حدس زد.

مثال اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$ باشد، ماتریس $A^{۱۴۰۵}$ را پیدا کنید.

ماتریس‌های $A^۲$ و $A^۳$ را محاسبه می‌کنیم:

$$A^۲=A\times A=\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$$

$$A^۳=A^۲\times A=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۳\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$$

با توجه به ماتریس‌های A، $A^۲$ و $A^۳$، ماتریس A^n از رابطهٔ $A^n=\begin{bmatrix}۱ & n\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$ به دست می‌آید؛ بنابراین داریم:

$$A^{۱۴۰۵}=\begin{bmatrix}۱ & ۱۴۰۵\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$$

۲) در بعضی از موارد، یکی از توان‌های ماتریس A مانند $A^۲$ یا $A^۳$، مضربی از ماتریس I می‌شود و با توجه به این موضوع می‌توان ماتریس A^n را به سادگی پیدا کرد.

مثال اگر $A=\begin{bmatrix}۲ & -۱\\ ۳ & -۲\end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه ماتریس $A^{۱۴۰۴}$ را به دست آورید.

ابتدا ماتریس $A^۲$ را پیدا می‌کنیم:

$$A^۲=A\times A=\begin{bmatrix}۲ & -۱\\ ۳ & -۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲ & -۱\\ ۳ & -۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}=I$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$A^{۱۴۰۴}=(A^۲)^{۷۰۲}=I^{۷۰۲}=I=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا ماتریس $A^۲$ و در صورت لزوم ماتریس $A^۳$ را محاسبه می‌کنیم:

$$A^۲=A\times A=\begin{bmatrix}-۲ & ۳\\ -۱ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۲ & ۳\\ -۱ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & -۳\\ ۱ & -۲\end{bmatrix}$$

$$A^۳=A^۲\times A=\begin{bmatrix}۱ & -۳\\ ۱ & -۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۲ & ۳\\ -۱ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}=I$$

گام دوم: حال ماتریس‌های $A^{۱۰}$، $A^{۲۰}$ و $A^{۳۰}$ را برحسب ماتریس $A^۳$ می‌نویسیم:

$$A^{۱۰}+A^{۲۰}+A^{۳۰}=(A^۳)^۳A+(A^۳)^۶A^۲+(A^۳)^{۱۰}=I^۳\times A+I^۶\times A^۲+I^{۱۰}$$

$$=A+A^۲+I=\begin{bmatrix}-۲ & ۳\\ -۱ & ۱\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۱ & -۳\\ ۱ & -۲\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰ & ۰\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}=\bar{O}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۱ اگر A یک ماتریس وارون‌پذیر باشد و داشته باشیم $A^۳ = A + I$، آن‌گاه وارون ماتریس $A^۶ - A^۵$ کدام است؟

۱) A ۲) $A^{-۱}$

۳) $-A$ ۴) $-A^{-۱}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint ماتریس‌های $A^۶$ و $A^۵$ را برحسب ماتریس $A^۳$ بنویسید.

درس Box ماتریس I با هر ماتریس مربعی هم‌مرتبه‌اش تعویض‌پذیر است، یعنی داریم:

$$A \times I = I \times A = A$$

بنابراین اتحادهای جبری برای ماتریس I و هر ماتریس مربعی هم‌مرتبه‌اش همواره برقرار است. به عنوان مثال می‌توان نوشت:

$$(A+I)^۲ = A^۲ + ۲A + I$$

$$(A+I)^۳ = A^۳ + ۳A^۲ + ۳A + I$$

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** ماتریس‌های $A^۵$ و $A^۶$ را برحسب ماتریس $A^۳$ نوشته و سپس از تساوی $A^۳ = A + I$ استفاده می‌کنیم:

$$A^۶ = (A^۳)^۲ = (A+I)^۲ = A^۲ + ۲A + I$$

$$A^۵ = A^۳ \times A^۲ = (A+I) \times A^۲ = A^۳ + A^۲ = A + I + A^۲$$

گام دوم: مقادیر به‌دست‌آمده را جای‌گذاری کرده و ماتریس $A^۶ - A^۵$ را به دست می‌آوریم:

$$A^۶ - A^۵ = (A^۲ + ۲A + I) - (A + I + A^۲) = A$$

گام سوم: با توجه به نتیجهٔ گام دوم، وارون ماتریس $A^۶ - A^۵$ برابر است با:

$$(A^۶ - A^۵)^{-۱} = A^{-۱}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۲ اگر $A^{-1}=\begin{bmatrix}۴ & -۱\\ ۱ & -\frac{۱}{۲}\end{bmatrix}$ و $۲I-A^{-۱}B^{-۱}=\begin{bmatrix}-۲ & -۴\\ ۱ & -۱\end{bmatrix}$، آن‌گاه مجموع درایه‌های ستون اول ماتریس $A+B$ کدام است؟

۱) ۲/۵ ۲) ۲ ۳) ۱/۵ ۴) ۱

مشاوره این سؤال مشابه سؤال ۳۲ کنکور ریاضی داخل نوبت دوم ۱۴۰۳ طراحی شده است.

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint با محاسبهٔ ماتریس $A^{-۱}B^{-۱}$ و داشتن ماتریس $A^{-۱}$، ماتریس $B^{-۱}$ را به دست آورید.

درس Box **حل معادلهٔ ماتریسی:** برای پیداکردن ماتریس X از روابط $AX=B$ و $XA=B$، کافی است طرفین این دو رابطه را به ترتیب از چپ و از راست در وارون ماتریس A ضرب کنیم.

$$AX=B \Rightarrow A^{-۱}(AX)=A^{-۱}B \Rightarrow X=A^{-۱}B$$
$$XA=B \Rightarrow (XA)A^{-۱}=BA^{-۱} \Rightarrow X=BA^{-۱}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول:** ابتدا ماتریس $A^{-۱}B^{-۱}$ را پیدا می‌کنیم.

$$۲I-A^{-۱}B^{-۱}=\begin{bmatrix}-۲ & -۴\\ ۱ & -۱\end{bmatrix} \Rightarrow A^{-۱}B^{-۱}=۲I-\begin{bmatrix}-۲ & -۴\\ ۱ & -۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲ & ۰\\ ۰ & ۲\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-۲ & -۴\\ ۱ & -۱\end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow A^{-۱}B^{-۱}=\begin{bmatrix}۴ & ۴\\ -۱ & ۳\end{bmatrix}$$

گام دوم: ابتدا ماتریس A و سپس به کمک آن ماتریس $B^{-۱}$ را به دست می‌آوریم:

$$A^{-۱}=\begin{bmatrix}۴ & -۱\\ ۱ & -\frac{۱}{۲}\end{bmatrix} \xrightarrow{\text{وارون}} A=\frac{۱}{-۱}\begin{bmatrix}-\frac{۱}{۲} & ۱\\ -۱ & ۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۲} & -۱\\ ۱ & -۴\end{bmatrix}$$

$$A(A^{-۱}B^{-۱})=A\begin{bmatrix}۴ & ۴\\ -۱ & ۳\end{bmatrix} \Rightarrow B^{-۱}=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۲} & -۱\\ ۱ & -۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۴ & ۴\\ -۱ & ۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳ & -۱\\ ۸ & -۸\end{bmatrix}$$

گام سوم: ماتریس B و سپس ماتریس $A+B$ را محاسبه می‌کنیم.

$$B^{-۱}=\begin{bmatrix}۳ & -۱\\ ۸ & -۸\end{bmatrix} \xrightarrow{\text{وارون}} B=\frac{۱}{-۱۶}\begin{bmatrix}-۸ & ۱\\ -۸ & ۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۲} & -\frac{۱}{۱۶}\\ \frac{۱}{۲} & -\frac{۳}{۱۶}\end{bmatrix}$$

$$A+B=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۲} & -۱\\ ۱ & -۴\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{۱}{۲} & -\frac{۱}{۱۶}\\ \frac{۱}{۲} & -\frac{۳}{۲}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & \dots\\ ۱/۵ & \dots\end{bmatrix} \Rightarrow \text{مجموع ستون اول} = ۲/۵$$

کنکور اگر $A^{-۱}=\begin{bmatrix}۴ & -۱\\ ۱ & -\frac{۱}{۲}\end{bmatrix}$ و $۲I-۳A^{-۱}B^{-۱}=\begin{bmatrix}-۲ & -۴\\ ۱ & -۱\end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس $۲A-۳B^{-۱}$ کدام است؟ (سؤال ۳۲ کنکور ریاضی ۱۴۰۳ ـ نوبت دوم)

۱) ۱− ۲) ۲− ۳) ۳− ۴) ۴−

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۳ اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۲ & ۳\end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه دترمینان ماتریس $\frac{۱}{۴}(A^{۱۰}-A^{۹})$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۰/۲۵
۳) -۱
۴) $-۰/۲۵$

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint نیازی به محاسبهٔ ماتریس‌های $A^{۹}$ و $A^{۱۰}$ نیست.

درس Box

۱) اگر A و B دو ماتریس مربعی هم‌مرتبه باشند، آن‌گاه $|AB|=|A||B|$

۲) اگر A یک ماتریس مربعی و n عددی طبیعی باشد، آن‌گاه: $|A^{n}|=|A|^{n}$

۳) اگر A یک ماتریس مربعی از مرتبهٔ n و k عددی حقیقی باشد، آن‌گاه: $|kA|=k^{n}|A|$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: برای محاسبهٔ خواستهٔ سؤال، از ماتریس $A^{۹}$ فاکتور می‌گیریم:

$$|\frac{۱}{۴}(A^{۱۰}-A^{۹})|=|\frac{۱}{۴}A^{۹}(A-I)|=\frac{۱}{۱۶}|A^{۹}||A-I|=\frac{۱}{۱۶}|A|^{۹}|A-I|$$

گام دوم: باید $|A|$ و $|A-I|$ را محاسبه کنیم.

$$A=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۲ & ۳\end{bmatrix}\Rightarrow |A|=۳-۴=-۱$$

$$A-I=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۲ & ۳\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰ & ۲\\ ۲ & ۲\end{bmatrix}\Rightarrow |A-I|=۰-۴=-۴$$

گام سوم: با جای‌گذاری مقادیر به‌دست‌آمده از گام دوم در عبارت گام اول، داریم:

$$|\frac{۱}{۴}(A^{۱۰}-A^{۹})|=\frac{۱}{۱۶}(-۱)^{۹}(-۴)=\frac{۱}{۴}=۰/۲۵$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۴ اگر $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & |A| \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$، آن‌گاه مجموع درایه‌های ستون دوم ماتریس $\frac{1}{2}A^3+2I$ کدام است؟

۱) ۰/۵

۲) ۱

۳) −۳

۴) −۱/۵

مشاوره نمونهٔ مشابه این سؤال برای محاسبهٔ $|A|$ در امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۲ دیده می‌شود. هم‌چنین نمونه‌های آن برای ماتریس 2×2، یکی از مدل‌های پرتکرار سؤالات امتحان نهایی است.

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint از طرفین تساوی داده‌شده، دترمینان بگیرید تا $|A|$ به دست آید.

درس Box

دستور ساروس برای محاسبهٔ دترمینان ماتریس‌های 3×3

در این روش، ستون‌های اول و دوم ماتریس را در کنارش می‌نویسیم، سپس درایه‌های قطر اصلی و دو قطر موازی آن را مشخص می‌کنیم. درایه‌های روی هر قطر را در هم ضرب کرده و سپس اعداد حاصل را با هم جمع می‌کنیم. سپس همین کار را برای قطر فرعی و دو قطر موازی آن انجام می‌دهیم و در نهایت اعداد حاصل را از هم کم می‌کنیم تا دترمینان به دست آید.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}\begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix} = (aei+bfg+cdh)-(ceg+afh+bdi)$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: از طرفین تساوی دترمینان می‌گیریم:

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & |A| \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A|=(0+0+0)-(-2|A|+0+1) \Rightarrow |A|=1$$

گام دوم: ماتریس A را بازنویسی کرده و ستون دوم ماتریس‌های A^2 و A^3 را محاسبه می‌کنیم.

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 \text{ ستون دوم} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$A^3 \text{ ستون دوم} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

گام سوم: در این مرحله ستون دوم ماتریس $\frac{1}{2}A^3+2I$ را پیدا می‌کنیم.

$$\frac{1}{2}A^3+2I=\begin{bmatrix} \vdots & -1 & \vdots \\ \vdots & -\frac{1}{2} & \vdots \\ \vdots & 0 & \vdots \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \vdots & 0 & \vdots \\ \vdots & 2 & \vdots \\ \vdots & 0 & \vdots \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \vdots & -1 & \vdots \\ \vdots & 1/5 & \vdots \\ \vdots & 0 & \vdots \end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های ستون دوم این ماتریس برابر است با: $-1+1/5+0=0/5$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۵ اگر دستگاه معادلات $\begin{cases}(m+1)x+y=-n\\ 3x+(m-1)y=6\end{cases}$ دارای بی‌شمار جواب باشد، بیشترین مقدار ممکن برای $m+n$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۶

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint شرط وجود بی‌شمار جواب را نوشته و به ازای هر مقدار m، مقدار مناسب n را پیدا کنید.

درس Box

دستگاه معادلات $\begin{cases}ax+by=c\\ a'x+b'y=c'\end{cases}$:

۱) یک جواب منحصربه‌فرد دارد، هرگاه: $\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}$

۲) فاقد جواب است، هرگاه: $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$

۳) بی‌شمار جواب دارد، هرگاه: $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** دستگاه معادلات بی‌شمار جواب دارد، پس ابتدا شرط $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$ را بررسی می‌کنیم:

$$\frac{m+1}{3}=\frac{1}{m-1}\Rightarrow m^2-1=3\Rightarrow m^2=4\Rightarrow m=\pm2$$

گام دوم: به ازای هر یک از دو مقدار m و از شرط $\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$، مقدار n را محاسبه می‌کنیم.

$$m=2\Rightarrow\frac{1}{1}=\frac{-n}{6}\Rightarrow n=-6\Rightarrow m+n=-4$$

$$m=-2\Rightarrow\frac{1}{-3}=\frac{-n}{6}\Rightarrow n=2\Rightarrow m+n=0$$

بنابراین بیشترین مقدار $m+n$ برابر صفر است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۶ دو نقطهٔ A و B و دو خط متقاطع d و d' در صفحه مفروض‌اند. تعداد نقاطی از صفحه که از A و B به یک فاصله و از دو خط d و d' نیز به یک فاصله باشند، کدام نمی‌تواند باشد؟

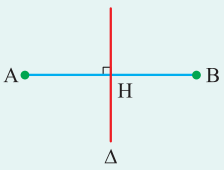
۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) بی‌شمار

مشاوره این سؤال براساس تعاریف ارائه‌شده در متن صفحهٔ ۳۸ و تمرین ۱ (قسمت الف) صفحهٔ ۳۹ کتاب درسی طراحی شده است.

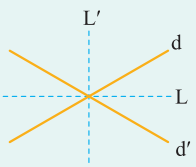
پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint
هر یک از دو مکان هندسی را به طور جداگانه تعیین کرده و اشتراک آن‌ها را مشخص کنید.

درس Box
۱) مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو نقطهٔ A و B در آن صفحه به یک فاصله هستند، عمودمنصف پاره‌خط AB است.



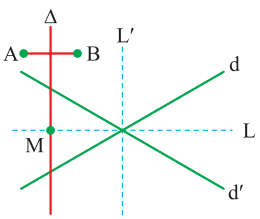
۲) مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو خط متقاطع d و d' در آن صفحه به یک فاصله هستند، نیمسازهای زوایای بین این دو خط است.



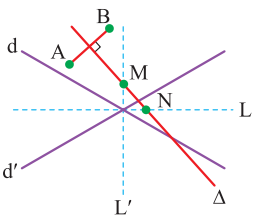
پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: مطابق درس‌باکس مکان هندسی نقاطی از صفحه که از نقاط A و B به یک فاصله باشند، عمودمنصف پاره‌خط AB و مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو خط متقاطع d و d' به یک فاصله باشند، نیمسازهای زوایای بین این دو خط است. محل برخورد این دو مکان هندسی جواب مسئله است.

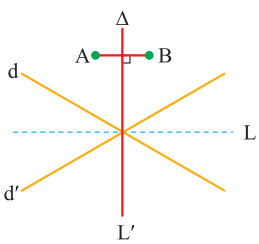
گام دوم: در صورتی که عمودمنصف پاره‌خط AB با یکی از دو نیمساز موازی بوده و دیگری را قطع کند، مسئله یک جواب دارد.



گام سوم: در صورتی که عمودمنصف پاره‌خط AB با هر دو نیمساز متقاطع باشد، مسئله دو جواب دارد.



گام چهارم: در صورتی که عمودمنصف پاره‌خط AB بر یکی از این دو نیمساز منطبق باشد، مسئله بی‌شمار جواب دارد.



SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

مشابه امتحان نهایی

۲۷ معادلهٔ دایره‌ای به مرکز $(-۱,۲)$ که بر خط $۴x-۳y+۵=۰$ مماس است، به صورت $x^۲+y^۲+ax+by=c$ بیان شده است. حاصل $\frac{b+c}{a}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) -۲ ۳) ۳ ۴) -۴

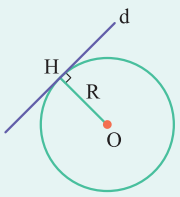
مشاوره این سؤال مشابه سؤال ۱۰ امتحان نهایی هندسه (۳) خرداد ۱۴۰۴ طراحی شده است.

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint معادلهٔ استاندارد دایره را نوشته و با استفاده از اتحادها، آن را به صورت معادلهٔ ضمنی بنویسید.

درس Box

۱) می‌دانیم شعاع گذرنده از نقطهٔ تماس بر خط مماس بر دایره عمود است؛ بنابراین فاصلهٔ مرکز دایره از خط مماس بر دایره، برابر اندازهٔ شعاع دایره است.



۲) فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_۰,y_۰)$ از خط d به معادلهٔ $ax+by+c=۰$، از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$D=\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: فاصلهٔ مرکز دایره از خط را پیدا می‌کنیم. این فاصله برابر شعاع دایره است:

$$R=\frac{|۴(-۱)-۳(۲)+۵|}{\sqrt{۴^۲+(-۳)^۲}}=\frac{۵}{۵}=۱$$

گام دوم: معادلهٔ استاندارد دایره را نوشته و آن را به معادلهٔ ضمنی تبدیل می‌کنیم.

$$(x+۱)^۲+(y-۲)^۲=۱ \Rightarrow x^۲+۲x+۱+y^۲-۴y+۴=۱$$

$$\Rightarrow x^۲+y^۲+۲x-۴y=-۴$$

گام سوم: با مقایسهٔ معادلهٔ به‌دست‌آمده در گام دوم با معادلهٔ صورت سؤال، مقادیر a، b و c را پیدا کرده و حاصل عبارت خواسته‌شده را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases}a=۲\\b=c=-۴\end{cases} \Rightarrow \frac{b+c}{a}=\frac{-۴-۴}{۲}=-۴$$

امتحان نهایی

معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که نقطهٔ $O(-۱,۲)$ مرکز آن بوده و بر خط $۴x-۳y+۵=۰$ مماس باشد.

(سؤال ۱۰ ـ امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۴)

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۸ فاصلهٔ مراکز دو دایره‌ای که از نقطهٔ $(۱,۲)$ گذشته و بر هر دو محور مختصات مماس‌اند، کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۲}$

۲) $۴\sqrt{۲}$

۳) ۴

۴) ۶

مشاوره محاسبهٔ شعاع یا نوشتن معادلهٔ دایرهٔ مماس بر هر دو محور مختصات از سؤالات پرتکرار کنکور در سال‌های گذشته است.

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint نقطهٔ داده‌شده در ناحیهٔ اول محورهای مختصات است، پس مرکز آن روی نیمساز ربع اول و سوم قرار دارد.

درس Box معادلهٔ دایره‌ای به شعاع R که بر هر دو محور مختصات مماس است، براساس ناحیه‌ای که دایره قرار می‌گیرد، به صورت زیر است:

۱) ناحیهٔ اول: $(x-R)^۲+(y-R)^۲=R^۲$

۲) ناحیهٔ دوم: $(x+R)^۲+(y-R)^۲=R^۲$

۳) ناحیهٔ سوم: $(x+R)^۲+(y+R)^۲=R^۲$

۴) ناحیهٔ چهارم: $(x-R)^۲+(y+R)^۲=R^۲$

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** نقطهٔ $(۱,۲)$ در ناحیهٔ اول محورهای مختصات است، پس معادلهٔ دایرهٔ مماس بر هر دو محور مختصات در این ناحیه را نوشته و نقطه را در آن جای‌گذاری می‌کنیم.

$$(x-R)^۲+(y-R)^۲=R^۲ \xrightarrow{(۱,۲)} (۱-R)^۲+(۲-R)^۲=R^۲$$

$$\Rightarrow ۱-۲R+R^۲+۴-۴R+R^۲=R^۲ \Rightarrow R^۲-۶R+۵=۰$$

$$\Rightarrow (R-۱)(R-۵)=۰ \Rightarrow \begin{cases} R=۱ \\ R=۵ \end{cases}$$

گام دوم: مختصات مرکز دایره‌ای به شعاع R که در ناحیهٔ اول بر هر دو محور مختصات مماس است، به صورت (R,R) می‌باشد؛ بنابراین مراکز دو دایره عبارت‌اند از:

$$O_۱(۱,۱) \quad و \quad O_۲(۵,۵)$$

گام سوم: فاصلهٔ مراکز این دو دایره برابر است با:

$$O_۱O_۲=\sqrt{(۵-۱)^۲+(۵-۱)^۲}=\sqrt{۳۲}=۴\sqrt{۲}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۹ خط به معادلهٔ $x-۳y+۶=۰$، دایره به معادلهٔ $x^۲+y^۲-۶x+۴y-۱۲=۰$ را در دو نقطهٔ A و B قطع می‌کند. اگر O' مرکز دایره باشد، تانژانت زاویهٔ $BO'A$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۴}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

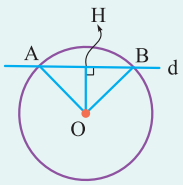
پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint

طول وتر AB و فاصلهٔ مرکز دایره از این وتر را محاسبه کنید.

درس Box

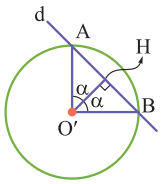
هرگاه فاصلهٔ مرکز دایره از یک خط، کم‌تر از شعاع دایره باشد، خط و دایره دو نقطهٔ مشترک دارند که از وصل‌کردن آن دو نقطه، یک وتر حاصل می‌شود.



از طرفی عمودی که از مرکز دایره بر وتری از دایره رسم می‌شود، آن وتر را نصف می‌کند. به عبارت دیگر اگر $OH \perp AB$، آن‌گاه $AH = BH$.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا مختصات مرکز و اندازهٔ شعاع دایره را تعیین می‌کنیم.



مرکز: $O(۳,-۲)$

شعاع: $R=\frac{۱}{۲}\sqrt{(-۶)^۲+۴^۲-۴(-۱۲)}=۵$

گام دوم: فاصلهٔ مرکز دایره از خط را محاسبه می‌کنیم:

$$O'H=\frac{|۳-۳(-۲)+۶|}{\sqrt{۱^۲+(-۳)^۲}}=\frac{۱۵}{\sqrt{۱۰}}$$

گام سوم: مثلث $O'AB$ متساوی‌الساقین است، پس ارتفاع $O'H$، نیمساز زاویهٔ $AO'B$ است. مطابق شکل داریم:

$$\cos\alpha=\frac{O'H}{OA}=\frac{\frac{۱۵}{\sqrt{۱۰}}}{۵}=\frac{۳}{\sqrt{۱۰}} \Rightarrow \cos ۲\alpha=۲\cos^۲\alpha-۱=۲(\frac{۳}{\sqrt{۱۰}})^۲-۱$$

$$\Rightarrow \cos ۲\alpha=\frac{۹}{۵}-۱=\frac{۴}{۵}$$ (زاویهٔ ۲α حاده است.)

گام چهارم: با توجه به رابطهٔ بین کسینوس و تانژانت داریم:

$$۱+\tan^۲ ۲\alpha=\frac{۱}{\cos^۲ ۲\alpha}=\frac{۲۵}{۱۶} \Rightarrow \tan^۲ ۲\alpha=\frac{۹}{۱۶} \Rightarrow \tan ۲\alpha=\frac{۳}{۴}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۰ **دو دایره با شعاع یکسان در نقاط (۲,۴) و (۴,۲) همدیگر را قطع می‌کنند. اگر فاصلهٔ بین مراکز دو دایره برابر با فاصلهٔ نقاط تقاطع آن‌ها باشد، فاصلهٔ مرکز یکی از دو دایره تا مبدأ مختصات کدام است؟**

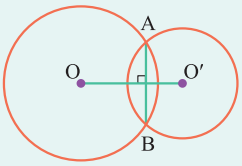
۱) $۳\sqrt{۲}$ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) ۲ ۴) ۴

مشاوره این سؤال مشابه سؤال ۳۱ کنکور ریاضی داخل نوبت اول ۱۴۰۲ طراحی شده است.

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

هرگاه دو دایره متقاطع باشند، خط‌المرکزین دو دایره، عمودمنصف پاره‌خطی است که نقاط تقاطع دو دایره را به هم وصل می‌کند؛ یعنی در شکل، خط گذرنده از نقاط O و O'، عمودمنصف پاره‌خط AB است.



پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: مطابق درس‌باکس می‌دانیم خط‌المرکزین دو دایره، عمودمنصف پاره‌خطی است که دو سر آن نقاط تقاطع دو دایره قرار دارند. با فرض $A(۲,۴)$ و $B(۴,۲)$، داریم:

$$m_{AB} = \frac{۲-۴}{۴-۲} = -۱$$

$$(\text{وسط } AB)\ M = \frac{(۲,۴)+(۴,۲)}{۲} = (۳,۳)$$

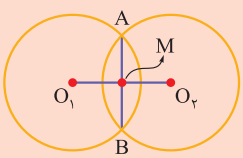
اگر خط گذرنده از مراکز دو دایره را d بنامیم، آن‌گاه داریم:

$$m_d = \frac{-۱}{m_{AB}} = ۱ \Rightarrow \text{معادلهٔ خط d: } y-۳ = ۱(x-۳) \Rightarrow y = x$$

$$AB = \sqrt{(۴-۲)^۲ + (۲-۴)^۲} = ۲\sqrt{۲}$$

گام دوم: فاصلهٔ نقاط تقاطع دو دایره برابر است با:

از طرفی فاصلهٔ مراکز دو دایره برابر فاصلهٔ نقاط تقاطع است و شعاع دو دایره یکسان است، پس:



$$O_۱M = O_۲M = \frac{AB}{۲} = \sqrt{۲}$$

$$O_۱M = \sqrt{۲} \Rightarrow \sqrt{(x-۳)^۲ + (x-۳)^۲} = \sqrt{۲} \Rightarrow ۲(x-۳)^۲ = ۲$$

$$\Rightarrow (x-۳)^۲ = ۱ \Rightarrow x-۳ = \pm ۱ \Rightarrow \begin{cases} x = ۴ \Rightarrow O_۱(۴,۴) \\ x = ۲ \Rightarrow O_۲(۲,۲) \end{cases}$$

گام سوم: با توجه به مختصات مراکز دو دایره، فاصلهٔ آن‌ها از مبدأ مختصات برابر است با:

$$OO_۱ = \sqrt{۴^۲ + ۴^۲} = ۴\sqrt{۲} \quad \text{و} \quad OO_۲ = \sqrt{۲^۲ + ۲^۲} = ۲\sqrt{۲}$$

کنکور

دو دایره با شعاع یکسان در نقاط (۱,۴) و (۳,۲) همدیگر را قطع می‌کنند. اگر فاصلهٔ بین مراکز دو دایره، برابر فاصلهٔ بین نقاط تقاطع باشد، فاصلهٔ بین نقاط برخورد یکی از دایره‌ها با محور x کدام است؟

(سؤال ۳۱ کنکور ریاضی ۱۴۰۲ ـ نوبت اول)

۱) ۸ ۲) ۶

۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) $۴\sqrt{۲}$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۱ a_1، a_2 و a_3 اعداد صحیح و b_1، b_2 و b_3 همان اعداد، ولی با ترتیب دیگری هستند. اگر $A=(a_1-b_1)(a_2-b_2)(a_3-b_3)$ و $B \mid A+3$، باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $2B^2+3(A-1)^2-11$ بر ۸ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۶

مشاوره باقی‌مانده بر ۸ باید شما را یاد این نکته بندازه که مربع هر عدد فرد به صورت $8k+1$ است.

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint A زوج است.

درس Box

بررسی یک تمرین مهم کتاب درسی:

تمرین مهمی در کتاب درسی وجود دارد که می‌گوید: «اگر a_1، a_2 و a_3 سه عدد صحیح و b_1، b_2 و b_3 همان اعداد، ولی با ترتیب متفاوتی باشند، آن‌گاه $(a_1-b_1)(a_2-b_2)(a_3-b_3)$ عددی زوج است».

اثبات با برهان خلف: فرض می‌کنیم $(a_1-b_1)(a_2-b_2)(a_3-b_3)$ زوج نباشد، پس فرد است. از طرفی می‌دانیم حاصل‌ضرب چند عدد، فقط وقتی فرد می‌شود که تک‌تک آن اعداد فرد باشند، پس (a_1-b_1)، (a_2-b_2) و (a_3-b_3) فرد هستند. جمع ۳ عدد فرد، فرد است، ولی جمع این ۳ عدد صفر می‌شود، چون:

$$(a_1-b_1)+(a_2-b_2)+(a_3-b_3)=(a_1+a_2+a_3)-\overbrace{(b_1+b_2+b_3)}^{(\text{همون } a_1+a_2+a_3)}=0 \quad (\text{تناقض})$$

در مورد این تمرین خوب است نکات زیر را به یاد داشته باشید:

۱) این قضیه برای اعداد $a_1, a_2, \ldots, a_n$ و $b_1, b_2, \ldots, b_n$ که b_i ها همان اعداد، ولی با ترتیب دیگری هستند نیز برقرار است، به شرطی که n (تعداد اعداد) فرد باشد.

۲) اگر b_i در پرانتزها را جابه‌جا کنیم، باز هم قضیه برقرار است؛ مثلاً عدد $(a_1-b_3)(a_2-b_2)(a_3-b_1)$ نیز زوج است.

۳) $a_1+a_2+\ldots+a_n=b_1+b_2+\ldots+b_n$ (چون فقط ترتیب اعداد فرق دارد، پس مجموع اعداد یکسان می‌شود). تناقض حاصل در روش برهان خلف نیز از همین‌جا می‌آید.

۴) تساوی زیر همواره درست است:

$$a_1a_2\ldots a_n=b_1b_2\ldots b_n$$

۵) اگر k فرد باشد عبارت $(ka_1-b_1)(ka_2-b_2)\ldots(ka_n-b_n)$ نیز زوج است.

۶) عبارت $(a_1+b_1)(a_2+b_2)\ldots(a_n+b_n)$ نیز زوج است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: طبق درس‌باکس عدد A زوج است.

گام دوم: $A+3$ فرد است و چون B مقسوم‌علیه عددی فرد است، پس B نیز فرد است. مربع عدد فرد B به صورت $8k+1$ است، پس $B^2 \overset{8}{\equiv} 1$.

گام سوم: $A-1$ نیز فرد است، پس شبیه بالا $(A-1)^2 \overset{8}{\equiv} 1$، پس داریم:

$$2B^2+3(A-1)^2-11 \overset{8}{\equiv} \underbrace{2(1)+3(1)-11}_{-6} \overset{8}{\equiv} 2$$

کتاب درسی

اگر a عددی صحیح و فرد باشد و $b \mid a+2$ در این صورت باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد (a^2+b^2+3) بر ۸ را بیابید.

(ریاضیات گسسته ـ تمرین ۱۰ صفحهٔ ۱۶ کتاب درسی)

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۲ دو عدد $۵k+۳$ و $k+۲$ هر دو بر $a>۱$ بخش‌پذیرند. عدد $a^{a!}$ به کدام دسته هم‌نهشتی تعلق دارد؟

۱) $[۰]_۹$ ۲) $[۴]_۹$ ۳) $[۱]_۹$ ۴) $[۶]_۹$

مشاوره سؤال مهم، مشابه ۱۴۰۴ حتماً آن را تحلیل کنید.

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint اول a را به دست آورید و بعد از هم‌نهشتی به پیمانهٔ ۹ استفاده کنید.

درس Box

دسته‌های هم‌نهشتی:

مجموعهٔ اعدادی را که باقی‌ماندهٔ تقسیم آن‌ها بر عدد m، مساوی با عدد r باشد با نماد $[r]_m$ نشان می‌دهیم و به آن دستهٔ هم‌نهشتی r به پیمانهٔ m می‌گوییم. مثلاً در هم‌نهشتی به پیمانهٔ ۵، دسته‌های هم‌نهشتی به صورت $[۰]_۵$، $[۱]_۵$،... و $[۴]_۵$ بوده و هر کدام شامل اعداد زیر هستند:

$$[۰]_۵ = ۵k\ ,\ [۱]_۵ = ۵k+۱\ ,\ \dots\ ,\ [۴]_۵ = ۵k+۴$$

نکته اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم x بر m برابر r باشد، داریم:

$$x \overset{m}{\equiv} r \Leftrightarrow m \mid x-r \Leftrightarrow x = mq+r \Leftrightarrow x \in [r]_m$$

پیداکردن باقی‌مانده با استفاده از هم‌نهشتی: مهم‌ترین کاربرد هم‌نهشتی، پیداکردن باقی‌ماندهٔ اعداد بزرگ در تقسیم بر m است. مراحل کار به صورت زیر است:

۱) یک هم‌نهشتی اولیه می‌نویسیم. اگر این هم‌نهشتی جوری باشد که سمت راست، ۱ یا -۱ باشد بهتر است.

۲) با توان‌رسانی و ضرب و جمع، مقسوم را می‌سازیم.

۳) اگر سمت راست منفی باشد یا بزرگ‌تر از پیمانه باشد، آن‌قدر از پیمانه به آن اضافه یا کم می‌کنیم تا در محدودهٔ باقی‌مانده $(۰ \le r < m)$ قرار گیرد.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: اول باید a را به دست آوریم:

$$\begin{matrix} a \mid ۵k+۳ & \longrightarrow & a \mid ۵k+۳ \\ a \mid k+۲ & \xrightarrow{\times(-۵)} & a \mid -۵k-۱۰ \end{matrix} \xrightarrow{+} a \mid -۷ \to a \mid ۷ \xrightarrow{a>۱} a = ۷$$

گام دوم: کافی است باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $۷^{۷!}$ را بر ۹ به دست آوریم (در گزینه‌ها دستهٔ هم‌نهشتی به پیمانهٔ ۹ داده شده است):

$$۷^{۷!} \overset{۹}{\equiv} (-۲)^{۷!} \xrightarrow{۷! \text{ زوج}} (-۲)^{۷!} = ۲^{۷!}$$

گام سوم: ۷! مضرب ۳ است، یعنی $۷! = ۳k$ (که k زوج است). حالا داریم:

$$۲^{۳k} = (۲^۳)^k \overset{۹}{\equiv} (-۱)^k = ۱$$

کنکور

اگر عدد طبیعی $a>۳$ اعداد $۷m+۲$ و $۱۱m+۴$ را عاد کند، کدام مورد نمی‌تواند عدد اول بزرگ‌تر از ۳ باشد؟

(سؤال ۳۷ کنکور ریاضی ۱۴۰۴ ـ نوبت دوم)

۱) $ak+۱$ ۲) $ak+۳$ ۳) $ak+۵$ ۴) $ak+۷$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۳ در تقسیم عدد a بر عدد طبیعی b، باقی‌مانده از بیشترین مقدار خود ۲ واحد کم‌تر است. کدام عدد حتماً بر b بخش‌پذیر است؟

۱) a^2-4 ۲) $2a+4$ ۳) $3a-12$ ۴) a^2-9

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint بیشترین مقدار باقی‌مانده $b-1$ است.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** باقی‌ماندهٔ r همواره در شرط $0 \le r < b$ صدق می‌کند، پس بیشترین مقدار باقی‌مانده برابر $b-1$ است.

گام دوم: طبق قضیهٔ تقسیم داریم:

$$a = bq + \overbrace{b-1-2}^{r} \Rightarrow a+3 = b(q+1)$$

گام سوم: به زبان عادکردن داریم:

$$b \mid a+3 \xrightarrow[a-3 \text{ ضرب می‌کنیم.}]{\text{سمت راست را در}} b \mid (a+3)(a-3) \rightarrow b \mid a^2-9$$

پس a^2-9 همواره بر b بخش‌پذیر است.

تیزهوشی در تقسیم عدد a مثلاً بر ۵ بیشترین مقدار باقی‌مانده برابر ۴ می‌تواند باشد، پس اگر باقی‌مانده ۲ واحد از بیشترین مقدار کم‌تر باشد، می‌توانیم آن را ۲ در نظر بگیریم. با این مثال می‌توانیم $a=7$ بگیریم. با جای‌گذاری a در گزینه‌ها در گزینهٔ (۱) عدد ۴۵ و در گزینهٔ (۲) عدد ۱۸، در گزینهٔ (۳) عدد ۹ و در گزینهٔ (۴) عدد ۴۰ به دست می‌آید که فقط گزینه‌های (۱) و (۴) بر ۵ بخش‌پذیرند (گزینه‌های (۲) و (۳) رد می‌شوند). با امتحان عددی دیگر، می‌توانیم گزینهٔ (۱) را نیز رد کنیم.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۴ **در یک سال، اول اردیبهشت‌ماه روز یکشنبه است. اگر $\overline{۲a۲}$ روز بگذرد، به سه‌شنبه می‌رسیم. a چند مقدار مختلف ممکن است داشته باشد؟**

۱) ۲ ۲) ۳

۳) ۴ ۴) ۱

مشاوره سؤال ترکیبی از تقویم‌نگاری و بخش‌پذیری بر اعداد خاص. مشابه این سؤال را در سال‌های آینده خواهید دید.

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint اختلاف روزها به پیمانهٔ ۷، برابر ۲ است.

درس Box

تقویم‌نگاری:

فرض کنید تاریخی از سال در یک روز مشخص هفته باشد، می‌خواهیم بدانیم تاریخ دیگر چندشنبه است.

۱) اختلاف روزهای دو تاریخ را به دست می‌آوریم.

۲) باقی‌ماندهٔ عدد بالا را در تقسیم بر ۷ محاسبه می‌کنیم.

۳) اگر تاریخ جلوتر را بخواهیم به اندازهٔ باقی‌مانده از آن روز هفته، جلو می‌رویم و اگر تاریخ عقب‌تر را بخواهیم به اندازهٔ باقی‌مانده عقب می‌رویم.

ویژگی تقسیم دو طرف هم‌نهشتی و رقم یکان:

ویژگی تقسیم	ریاضی	توضیح
۱	$ca \overset{m}{\equiv} cb \;,\; (c,m)=۱ \Rightarrow a \overset{m}{\equiv} b$	اگر عدد c که قرار است از دو طرف ساده شود با پیمانه، عامل اول مشترک نداشته باشد، آن را ساده می‌کنیم.
۲	$ca \overset{m}{\equiv} cb \;,\; (c,m)=d \Rightarrow a \overset{\frac{m}{d}}{\equiv} b$	اگر عدد c با پیمانه، عامل d داشته باشد، c را از دو طرف ساده می‌کنیم، ولی پیمانه بر d تقسیم می‌شود.

پاسخ خیلی تشریحی اگر یکشنبه را صفر بگیریم، سه‌شنبه متناظر ۲ می‌شود، پس باقی‌ماندهٔ $\overline{۲a۲}$ بر ۷ برابر ۲ باید باشد:

$$\overline{۲a۲} \overset{۷}{\equiv} ۲ \Rightarrow ۲۰۰+۱۰a+۲ \overset{۷}{\equiv} ۲ \Rightarrow ۱۰a \overset{۷}{\equiv} -۲۰۰ \xrightarrow[(۱۰,۷)=۱]{\div ۱۰} a \overset{۷}{\equiv} -۲۰ \overset{۷}{\equiv} ۱ \xrightarrow{۰\le a\le ۹} a = ۱,۸$$

پس a دو مقدار دارد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۵ معادلهٔ هم‌نهشتی $۱۴۳x+۹۱y-۷n=۲$ جواب دارد. مجموع ارقام کوچک‌ترین مقدار دورقمی و طبیعی عدد n کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۶

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint شرط وجود جواب این است که $(۱۴۳,۹۱) \mid ۷n+۲$.

درس Box

معادلهٔ هم‌نهشتی و روش حل آن:

برای حل معادلهٔ هم‌نهشتی $ax \overset{m}{\equiv} b$ مراحل زیر را طی می‌کنیم:

۱) اگر a و b اعداد بزرگی هستند، به جایشان یک عدد هم‌نهشت با آن‌ها به پیمانهٔ m را قرار می‌دهیم.

۲) با اضافه‌کردن مضارب پیمانه به b، کاری می‌کنیم تا دو طرف بر a بخش‌پذیر باشند.

۳) با استفاده از ویژگی تقسیم، دو طرف را به a ساده می‌کنیم تا x به دست آید. (البته می‌توانیم با ضرب دو طرف هم‌نهشتی در عددی که نسبت به پیمانه، اول است ضرایب را ساده‌تر کنیم.)

شرط جواب معادلهٔ سیالهٔ خطی:

معادلهٔ $ax+by=c$ وقتی جواب دارد که $(a,b) \mid c$.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: معادله را به صورت $۱۴۳x+۹۱y=۷n+۲$ می‌نویسیم. شرط جواب‌داشتن معادله این است که $(۱۴۳,۹۱) \mid ۷n+۲$.

گام دوم: $(۱۴۳,۹۱)=(۱۱\times ۱۳,۷\times ۱۳)=۱۳$، پس معادله وقتی جواب دارد که $۱۳ \mid ۷n+۲$.

گام سوم: به زبان هم‌نهشتی داریم:

$$۷n+۲ \overset{۱۳}{\equiv} ۰ \Rightarrow ۷n \overset{۱۳}{\equiv} -۲ \xrightarrow{\times ۲} ۱۴n \overset{۱۳}{\equiv} -۴ \xrightarrow{۱۴ \overset{۱۳}{\equiv} ۱} n \overset{۱۳}{\equiv} -۴ \Rightarrow n=۱۳k-۴$$

گام چهارم: به ازای $k=۲$ کوچک‌ترین عدد دورقمی، $n=۲۲$ به دست می‌آید که مجموع ارقام آن برابر ۴ است.

کنکور

به ازای برخی مقادیر طبیعی n، معادلهٔ سیالهٔ $۵۷x+۱۳۳y=۲۲n-۱$ دارای جواب است. مجموع ارقام کوچک‌ترین عدد دورقمی n، کدام است؟

(سؤال ۳۸ کنکور ریاضی ۱۴۰۳ ـ نوبت دوم)

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۳ ۴) ۴

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۶ اگر $۲a^{۳} \overset{m}{\equiv} m-۱$ و عدد $۳a-۱$ بر m بخش‌پذیر باشد، مجموع ارقام عدد طبیعی $m>۱$ کدام است؟

۱) ۹

۲) ۱۰

۳) ۱۱

۴) ۱۲

مشاوره از فصل نظریهٔ اعداد حداقل دو سؤال در کنکور می‌آید که بیشتر آن‌ها در سال‌های اخیر از هم‌نهشتی بوده است.

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint سعی کنید از دو رابطهٔ داده‌شده a را حذف کنید.

درس Box

ویژگی‌های هم‌نهشتی:

از رابطهٔ $a \overset{m}{\equiv} b$ چه نتایجی می‌توانیم بگیریم؟	
$a \pm c \overset{m}{\equiv} b \pm c$	دو طرف را با عدد صحیح یکسان جمع یا تفریق کنیم.
$ca \overset{m}{\equiv} cb$	دو طرف را در عدد صحیح c ضرب کنیم.
$a^{n} \overset{m}{\equiv} b^{n}$	دو طرف را به توان عدد طبیعی n برسانیم.
$a \overset{m}{\equiv} b \pm mk$	مضارب پیمانه را به هر طرف که بخواهیم اضافه یا کم کنیم.
$k \mid m$ که $a \overset{k}{\equiv} b$	به جای پیمانه، مقسوم‌علیه آن را قرار دهیم.
$m \mid a-b$	پیمانه اختلاف دو طرف را عاد می‌کند.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: $m \overset{m}{\equiv} ۰$، پس $۲a^{۳} \overset{m}{\equiv} -۱$. از طرفی $۳a-۱ \overset{m}{\equiv} ۰$ پس $۳a \overset{m}{\equiv} ۱$.

گام دوم: از دو رابطهٔ به‌دست‌آمده سعی می‌کنیم a را حذف کنیم:

$$\begin{cases} ۲a^{۳} \overset{m}{\equiv} -۱ \xrightarrow{\times ۲۷} ۵۴a^{۳} \overset{m}{\equiv} -۲۷ \\ ۳a \overset{m}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\text{توان } ۳} ۲۷a^{۳} \overset{m}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\times ۲} ۵۴a^{۳} \overset{m}{\equiv} ۲ \end{cases}$$

گام سوم: هر دو عدد -۲۷ و ۲ با عدد $۵۴a^{۳}$ به پیمانهٔ m هم‌نهشت هستند، پس هر دو عدد نیز به پیمانهٔ m هم‌نهشت هستند:

$$-۲۷ \overset{m}{\equiv} ۲ \Rightarrow m \mid ۲-(-۲۷)=۲۹ \xrightarrow{m>۱} m=۲۹$$

مجموع ارقام m برابر ۱۱ است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۷ در گراف منتظم G از مرتبهٔ ۱۲، رابطهٔ $\Delta(G))^{۲} - ۳\delta(G) = ۴$ برقرار است. اندازهٔ گراف کدام است؟

۱) ۳۶

۲) ۴۸

۳) ۲۸

۴) ۲۴

مشاوره از فصل گراف یک سؤال در کنکور می‌آید. روی تعاریف مقدماتی گراف و انواع گراف (کامل، منتظم و مکمل) مسلط باشید.

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint

درجهٔ همهٔ رأس‌ها برابر k است.

درس Box

در گراف $k-$ منتظم درجهٔ هر رأس برابر k است. در این گراف‌ها سه رابطه وجود دارد:

۱) $kp = ۲q$

۲) $۰ \le k \le p - ۱$

۳) k و p هم‌زمان فرد نیستند.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: اگر G گراف k ـ منتظم باشد، درجهٔ همهٔ رأس‌ها برابر k است، پس $\delta(G) = \Delta(G) = k$، پس داریم:

$$k^{۲} - ۳k = ۴ \Rightarrow k^{۲} - ۳k - ۴ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} k = -۱ & \times \\ k = ۴ & \checkmark \end{cases}$$

گام دوم: گراف ۴ ـ منتظم مرتبهٔ ۱۲ است. در گراف k ـ منتظم رابطهٔ $kp = ۲q$ برقرار است، پس داریم:

$$۴ \times ۱۲ = ۲q \Rightarrow q = ۲۴$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۸ اگر حاصل‌ضرب درجه‌های رأس‌های گراف G از مرتبهٔ ۶ برابر ۲۱۶ باشد، حاصل‌ضرب درجه‌های رأس‌های گراف $\overline{G}$ کدام است؟

۱) ۷۲ ۲) ۹۶

۳) ۱۰۸ ۴) ۲۱۶

مشاوره سؤال بسیار مهمی است که مشابه آن بارها در کنکور آمده است. حتماً آن را خوبِ خوب یاد بگیرید.

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint ۲۱۶ را به ضرب ۶ عدد که تعداد اعداد فرد، زوج باشد تجزیه کنید.

درس Box

گراف مکمل:

اسم	نماد	تعریف	ویژگی‌ها
گراف مکمل G	$\overline{G}$	رأس‌های $\overline{G}$ همان رأس‌های G است. یال‌های $\overline{G}$ یال‌هایی هستند که در G وجود ندارد.	۱) $q(G)+q(\overline{G})=\frac{p(p-1)}{2}$ ۲) $deg_G(a)+deg_{\overline{G}}(a)=p-1$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: باید عدد ۲۱۶ را به حاصل‌ضرب ۶ عدد تجزیه کنیم:

$$۲۱۶=۳\times۳\times۳\times۲\times۲\times۲$$

گام دوم: امکان ندارد که درجهٔ رأس‌ها به صورت بالا باشد، چون تعداد رأس‌های فرد باید زوج باشد، پس ۲۱۶ را به صورت زیر می‌نویسیم:

(دقت کنید درجهٔ هر رأس حداکثر می‌تواند ۵ باشد) $۲۱۶=۴\times۳\times۳\times۳\times۲\times۱$

گام سوم: مجموع درجهٔ یک رأس در خود گراف و درجهٔ آن رأس در گراف مکمل باید برابر $p-1$ یا ۵ باشد، پس اگر $deg_G(a)=۴$ باشد، $deg_{\overline{G}}(a)=۱$ می‌شود. شبیه همین، درجهٔ رأس‌ها در $\overline{G}$ به دست می‌آید:

ضرب درجه‌ها در $\overline{G}=۱\times۲\times۲\times۲\times۳\times۴=۹۶$

کنکور

حاصل‌ضرب درجهٔ رأس‌های گراف G، ۴۸ است. اگر تعداد رأس‌ها با درجهٔ رأس یک حداقل باشد، حاصل $\Delta(\overline{G})+q(\overline{G})$ کدام است؟ *(سؤال ۴۰ کنکور ریاضی ۱۴۰۲ ـ نوبت دوم)*

۱) ۱۷ ۲) ۱۱ ۳) ۱۹ ۴) ۱۳

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۹ در گرافی از مرتبهٔ ۱۰ رابطهٔ $\sum_{a\in V(G)} |N_G[a]| = ۸۲$ برقرار است. این گراف حداکثر چند رأس از درجهٔ ۹ دارد؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint

$$\sum_{a\in V} |N_G[a]| = d(a) + ۱$$

درس Box

گراف کامل:

اسم	نماد	تعریف	ویژگی‌ها
گراف کامل مرتبهٔ p	k_p	گرافی که هر دو رأس آن مجاورند (به هم وصل‌اند).	۱) درجهٔ همهٔ رأس‌ها $p-۱$ است. ۲) گراف $(p-۱)$ ـ منتظم است. ۳) $q = \frac{p(p-۱)}{۲}$ ۴) بیشترین یال را در بین گراف‌های هم‌مرتبهٔ خود دارد.

نکته

تعداد عضوهای همسایگی $a = |N_G(a)| = d(a)$

تعداد عضوهای همسایگی بستهٔ $a = |N_G[a]| = ۱ + d(a)$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: همسایگی باز یک رأس به تعداد درجهٔ آن رأس عضو دارد، ولی در همسایگی بستهٔ رأس a، چون خود a نیز اضافه می‌شود به تعداد $۱ + d(a)$ عضو دارد، پس داریم:

$$۱ + d(a_۱) + ۱ + d(a_۲) + ... + ۱ + d(a_{۱۰}) = ۸۲ \Rightarrow ۱۰ + \underbrace{d(a_۱) + ... + d(a_{۱۰})}_{\text{مجموع درجات}} = ۸۲$$

گام دوم: مجموع درجات برابر $۲q$ است، پس:

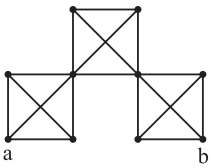
$$۱۰ + ۲q = ۸۲ \Rightarrow q = ۳۶$$

گام سوم: در گراف کامل مرتبهٔ ۱۰، درجه‌ها برابر ۹ بوده و $\frac{۱۰\times ۹}{۲} = ۴۵$ یال وجود دارد. ۹ یال را باید طوری حذف کنیم که تا حد امکان از رأس‌های کم‌تری برداشته شود تا رأس‌های درجهٔ ۹ بیشتری باقی بمانند.

گام چهارم: برای برداشتن ۹ یال حداقل ۵ رأس درگیر می‌شوند (چون در ۴ رأس حداکثر ۶ یال جا می‌گیرد)، پس حداکثر $۱۰ - ۵ = ۵$ رأس، می‌توانند از درجهٔ ۹ باقی بمانند.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۰ گراف مقابل چند a ـ b مسیر دارد؟



۱) ۱۲

۲) ۱۵

۳) ۶۴

۴) ۱۲۵

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint برای رسیدن از a به b ببینید از چه رأس‌هایی حتماً باید عبور کنید.

درس Box

تعریف مسیر: فرض کنید u و v دو رأس از گراف G باشند. یک مسیر از u به v (که به آن v ـ u مسیر می‌گوییم) در G دنباله‌ای متشکل از رأس‌های دوبه‌دو متمایز در G است که از u شروع و به v ختم می‌شود، به طوری که هر دو رأس متوالی در این مسیر، مجاور هستند. طول مسیر، همان تعداد یال‌های طی‌شده است که یکی کم‌تر از تعداد رأس‌ها است.

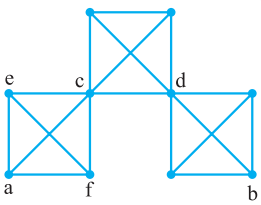
۱) هر رأس به تنهایی، یک مسیر به طول صفر از خودش به خودش است؛ پس تعداد مسیرهای به طول صفر، برابر تعداد رأس‌های (مرتبهٔ گراف) است.

۲) تعداد مسیرهای به طول ۱ همان تعداد یال‌های گراف (اندازهٔ گراف) می‌شود.

۳) در مسیر، رأس تکراری وجود ندارد.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: برای این‌که از a به b برسیم اول باید از a به c و بعد از c به d و بعد از d به b برسیم:



گام دوم: از a به c دقیقاً ۵ مسیر به صورت زیر داریم:

ac / aec / afc / aefc / afec

گام سوم: شبیه گام دوم از c به d نیز ۵ مسیر و از d به b نیز ۵ مسیر داریم.

گام چهارم: طبق اصل ضرب، ۵×۵×۵ = ۱۲۵ مسیر از a به b وجود دارد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

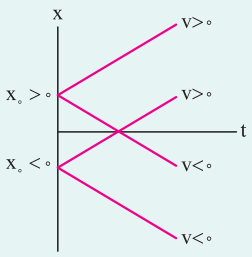
۴۱ متحرکی که با سرعت ثابت در راستای محور x حرکت می‌کند، در لحظه‌های $t_1 = ۳\ s$ و $t_2 = ۷\ s$ به ترتیب از مکان‌های $x_1 = ۲\ m$ و $x_2 = ۱۸\ m$ عبور می‌کند. در ۱۰ ثانیهٔ اول، چند ثانیه بردار مکان متحرک در جهت محور x است؟

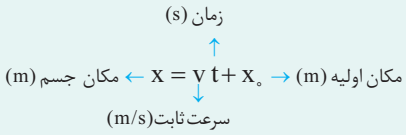
۱) ۲/۵ ۲) ۵ ۳) ۷/۵ ۴) ۱۰

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

حرکت با سرعت ثابت: حرکتی است که در آن اندازه و جهت بردار سرعت همواره ثابت است.





در این نوع حرکت سرعت لحظه‌ای (v) و سرعت متوسط (v_{av}) برابر هستند. $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$

v ← شیب نمودار مکان ـ زمان است.

$x_۰$ ← محل تقاطع نمودار و محور مکان است و مکان متحرک در لحظهٔ $t = ۰$ را نشان می‌دهد.

بردار مکان: برداری است که مبدأ محور را به مکان جسم در هر لحظه وصل می‌کند.

هرگاه متحرک از مبدأ مکان عبور کند یعنی $x = ۰$ است و بردار مکان، تغییر جهت می‌دهد.

در هر نوع حرکت روی محور x می‌توان نوشت:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_۲ - x_۱}{t_۲ - t_۱}$$

v_{av} = سرعت متوسط (m/s)

$x_۱$ = مکان متحرک در لحظهٔ $t_۱$ (m)

$x_۲$ = مکان متحرک در لحظهٔ $t_۲$ (m)

پاسخ خیلی تشریحی

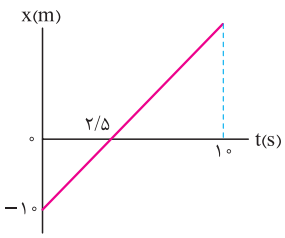
گام اول: با توجه به داده‌های مسئله، $x_۰$ و v را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_۲ - x_۱}{t_۲ - t_۱} = \frac{۱۸ - ۲}{۷ - ۳} = \frac{۱۶}{۴} = ۴\ m/s \\ x = vt + x_۰ \Rightarrow ۱۸ = ۴(۷) + x_۰ \Rightarrow x_۰ = -۱۰\ m \end{cases}$$

گام دوم: لحظه‌ای را که متحرک از مبدأ مکان $(x = ۰)$ عبور می‌کند به دست می‌آوریم:

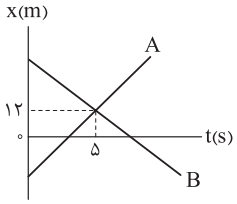
$$x = ۴t - ۱۰ = ۰ \Rightarrow ۴t = ۱۰ \Rightarrow t = ۲/۵\ s$$

گام سوم: نمودار مکان ـ زمان متحرک را رسم می‌کنیم. با توجه به این نمودار، بردار مکان متحرک از لحظهٔ $t = ۰$ تا $t = ۲/۵\ s$ در خلاف جهت محور x و از لحظهٔ $t = ۲/۵\ s$ تا $t = ۱۰\ s$ در جهت محور x است، بنابراین بردار مکان متحرک به مدت $۷/۵\ s$ در جهت محور x است.



SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۲ نمودار مکان ـ زمان دو متحرک A و B که در راستای محور x حرکت می‌کنند، به شکل زیر است. فاصلهٔ دو متحرک در لحظهٔ $t_1 = ۳\ s$ چند برابر فاصلهٔ دو متحرک در لحظهٔ $t_2 = ۹\ s$ است؟



۱) ۳

۲) ۲

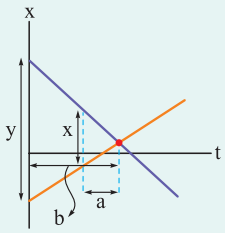
۳) $\frac{۱}{۳}$

۴) $\frac{۱}{۲}$

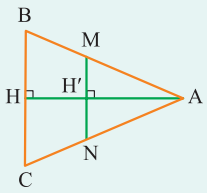
پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

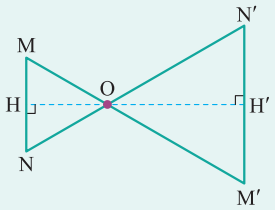
در سؤالات حرکت‌شناسی و به‌ویژه مبحث نمودارهای مکان ـ زمان حرکت با سرعت ثابت، لازم است که هر دانش‌آموز بتواند از تشابه مثلث‌ها استفاده کند:



$\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$ (۱)



$\frac{AH'}{AH} = \frac{MN}{BC}$ (۲)



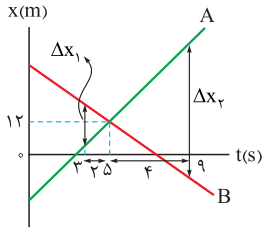
$\frac{MN}{M'N'} = \frac{OH}{OH'}$ (۳)

پاسخ خیلی تشریحی ✔

با توجه به نمودار دو متحرک و شکل (۳) درس‌باکس که تشابه دو مثلث $\overset{\Delta}{MON}$ و $\overset{\Delta}{M'ON'}$ را نشان می‌دهد می‌توان نوشت:

$\Delta x_1 =$ فاصلهٔ دو متحرک در لحظهٔ $t_1 = ۳\ s$

$\Delta x_2 =$ فاصلهٔ دو متحرک در لحظهٔ $t_2 = ۹\ s$



$\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2} = \frac{۵-۳}{۹-۵} = \frac{۲}{۴} = \frac{۱}{۲}$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۳ متحرک **A** با سرعت ثابت در جهت محور **x** و متحرک **B** با سرعت ثابت در خلاف جهت محور **x** حرکت می‌کنند. تندی متحرک **A**، ۲ برابر تندی متحرک **B** است. اگر جهت بردار مکان دو متحرک **A** و **B** به ترتیب در لحظه‌های $t_1 = 8\,s$ و $t_2 = 20\,s$ تغییر کند، در چه لحظه‌ای برحسب ثانیه دو متحرک به هم می‌رسند؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۵ ۴) ۱۶

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint با توجه به وضعیت گفته‌شده در سؤال، نمودار x ـ t دو متحرک A و B را رسم کنید و لحظهٔ به هم رسیدن دو متحرک را به دست آورید.

درس Box

۱) هرگاه متحرک از مبدأ مکان یا مبدأ محور $(x = 0)$ عبور کند، x تغییر علامت می‌دهد و جهت بردار مکان آن عوض می‌شود.

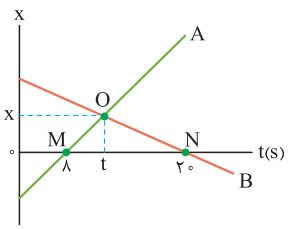
۲) وقتی دو متحرک A و B به هم می‌رسند یعنی در مکان یکسانی قرار دارند: $x_A = x_B$

۳) در حرکت با سرعت ثابت، اندازهٔ شیب خط نمودار مکان ـ زمان متحرک برابر است با تندی متحرک.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: با توجه به داده‌های سؤال، نمودار مکان ـ زمان دو متحرک A و B را رسم می‌کنیم.

گام دوم: به کمک رابطهٔ بین تندی متحرک‌های A و B، زمان به هم رسیدن آن‌ها را به دست می‌آوریم:

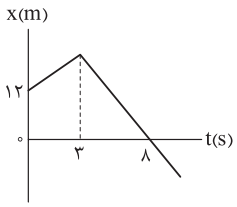


$$v_A = 2|v_B| \Rightarrow |\text{شیب } MO| = 2\times|\text{شیب } ON| \Rightarrow \frac{x}{t-8} = 2\times\frac{x}{20-t}$$

$$\Rightarrow 2t-16 = 20-t \Rightarrow 3t = 36 \Rightarrow t = 12\,s$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۴ نمودار مکان ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. اگر در بازه‌ای که بردار مکان متحرک در جهت محور x است، تندی متوسط متحرک برابر ۳ m/s باشد، شتاب متوسط متحرک در این بازه، چند متر بر مربع ثانیه است؟



۱) $0/2\vec{i}$

۲) $-0/2\vec{i}$

۳) $0/7\vec{i}$

۴) $-0/7\vec{i}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint

ابتدا مکان متحرک در لحظهٔ $t=3\,s$ را به دست آورید، سپس سرعت متوسط $(v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t})$ در بازه‌های قبل و بعد از آن را محاسبه و در نهایت شتاب متوسط را از رابطهٔ $a_{av}=\frac{v_2-v_1}{\Delta t}$ به دست آورید.

درس Box

شتاب متوسط $(\vec{a}_{av})$:

شتاب متوسط برابر تغییرات سرعت در واحد زمان است.

$$\vec{a}_{av}=\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=\frac{\vec{v}_2-\vec{v}_1}{t_2-t_1}$$

$\vec{a}_{av}=$ شتاب متوسط (m/s^2)

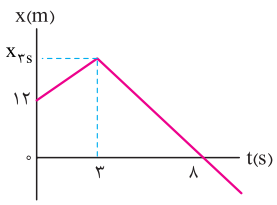
$\vec{v}_1=$ سرعت متحرک در لحظهٔ t_1 (m/s)

$\vec{v}_2=$ سرعت متحرک در لحظهٔ t_2 (m/s)

شتاب متوسط کمیتی برداری و هم‌جهت با بردار تغییر سرعت $(\Delta\vec{v})$ است، زیرا Δt همواره مثبت است.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: با توجه به این‌که $s_{av}=3\,m/s$ و بردار مکان در ۸ ثانیهٔ اول در جهت محور x است، داریم:



$$s_{av}=\frac{(x_{3s}-12)+(x_{3s}-0)}{8}=3 \Rightarrow \frac{2x_{3s}-12}{8}=3$$

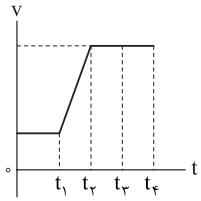
$$\Rightarrow x_{3s}=18\,m$$

گام دوم: سرعت متحرک در ۲ مرحلهٔ $(0\,s$ تا $3\,s)$ و $(3\,s$ تا $8\,s)$ و سپس شتاب متوسط را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} v_1=v_{(0\to 3\,s)}=\frac{18-12}{3}=2\,m/s \\ v_2=v_{(3s\to 8\,s)}=\frac{0-18}{8-3}=-3/6\,m/s \end{cases} \Rightarrow \vec{a}_{av}=\frac{\vec{v}_2-\vec{v}_1}{\Delta t}=\frac{(-3/6-2)\vec{i}}{8} \Rightarrow \vec{a}_{av}=(-0/7\,m/s^2)\vec{i}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۵ **نمودار سرعت ـ زمان متحرکی که روی مسیری مستقیم حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. اندازهٔ شتاب متوسط متحرک در کدام بازهٔ زمانی بیشتر است؟**



۱) صفر تا t_2

۲) صفر تا t_4

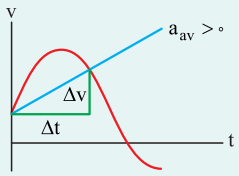
۳) t_1 تا t_2

۴) t_1 تا t_3

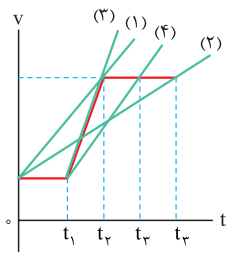
پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint شیب خط قاطع نمودار در بازه‌های زمانی ذکرشده در گزینه‌ها را با هم مقایسه کنید.

درس Box شتاب متوسط بین دو لحظه، برابر شیب خطی است که نمودار سرعت ـ زمان را در آن دو لحظه قطع می‌کند.



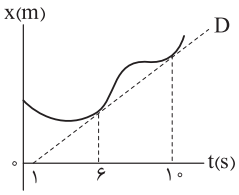
پاسخ خیلی تشریحی شیب خط نمودار سرعت ـ زمان را در هر یک از بازه‌های زمانی گزینه‌های داده‌شده رسم می‌کنیم:



با توجه به خطوط رسم‌شده، شتاب متوسط در بازهٔ t_1 تا t_2 بیشتر است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۶ نمودار مکان ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. اگر فاصلهٔ متحرک از مبدأ در لحظهٔ $t_۲ = ۱۰\ s$ برابر $۳۶\ m$ باشد، در لحظهٔ $t_۱ = ۶\ s$، تندی متحرک و فاصلهٔ متحرک از مبدأ، به ترتیب از راست به چپ، در SI کدام است؟ (خط D در لحظه‌های $t_۱ = ۶\ s$ و $t_۲ = ۱۰\ s$ بر نمودار مماس است.)



۱) ۲۰ ،۴

۲) ۲۰ ،۳ / ۶

۳) ۲۴ ،۴

۴) ۲۴ ،۳ / ۶

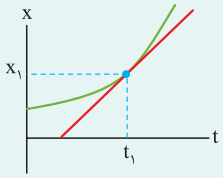
پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint

با استفاده از این‌که شیب خط مماس بر نمودار در لحظات $t_۱ = ۶\ s$ و $t_۲ = ۱۰\ s$ برابر تندی‌های $v_{۶\,s}$ و $v_{۱۰\,s}$ است که با هم برابرند، خواسته‌های مسئله را به دست بیاورید.

درس Box

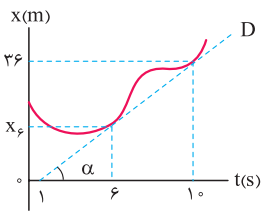
در نمودار x ـ t، شیب خط مماس بر نمودار در هر لحظه برابر سرعت لحظه‌ای در آن لحظه است.



علامت سرعت همان علامت شیب است.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: شیب خط D (خط مماس در لحظات $t_۱$ و $t_۲$) همان تندی متحرک در لحظات ۶ s و ۱۰ s است:



$$\text{شیب خط D} = v_{۶\,s} = v_{۱۰\,s} = \frac{۳۶ - ۰}{۱۰ - ۱} = \frac{۳۶}{۹} = ۴$$

$$\Rightarrow v_{۶\,s} = ۴\ m/s$$

گام دوم: با نوشتن شیب خط D در مثلث کوچک‌تر، $x_{۶\,s}$ را به دست می‌آوریم:

$$\text{شیب خط D} = \frac{x_{۶\,s} - ۰}{۶ - ۱} \Rightarrow ۴ = \frac{x_{۶\,s}}{۵} \Rightarrow x_{۶\,s} = ۲۰\ m$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۷ معادلهٔ سرعت ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، در SI به صورت $v = -3t + 12$ است. اگر بردار مکان متحرک در مبدأ زمان برابر $(15\ m)\vec{i}$ باشد، در کدام لحظه برحسب ثانیه متحرک برای دومین بار از مکان $x = 33\ m$ می‌گذرد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint ابتدا معادلهٔ مکان ـ زمان متحرک ($x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$) را با توجه به معادلهٔ سرعت بنویسید و سپس با قراردادن $x = 33\ m$ در آن، لحظهٔ مورد نظر را به دست آورید.

درس Box معادلات حرکت با شتاب ثابت روی محور x به صورت زیر می‌باشد:

$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$ $\quad$ $\Delta x = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2a}$

$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t$ $\quad$ $\Delta x = -\frac{1}{2}at^2 + vt$

$\Delta x = (\frac{v_1 + v_2}{2})\Delta t$ $\quad$ $v = at + v_0$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول:** با توجه به داشتن معادلهٔ سرعت ـ زمان می‌توان نوشت:

$$\left.\begin{matrix} v = -3t + 12 \\ v = at + v_0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a = -3\ m/s^2\ ,\ v_0 = 12\ m/s$$

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \xrightarrow{x_0 = 15\ m} x = \frac{1}{2}(-3)t^2 + 12t + 15 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}t^2 + 12t + 15$$

گام دوم: با قراردادن $x = 33\ m$، لحظهٔ مورد نظر را به دست می‌آوریم:

$$-\frac{3}{2}t^2 + 12t + 15 = 33$$

$$\Rightarrow -\frac{3}{2}t^2 + 12t - 18 = 0 \xrightarrow{\Delta = 144 - 4(-\frac{3}{2})(-18) = 36} \begin{cases} t_1 = \frac{-12 + 6}{-3} = \frac{-6}{-3} = 2\ s \\ t_2 = \frac{-12 - 6}{-3} = \frac{-18}{-3} = 6\ s \ \checkmark \end{cases}$$

کنکور متحرکی روی محور x حرکت می‌کند و معادلهٔ سرعت ـ زمان آن به صورت $v = -3t + 24$ است. اگر متحرک در مبدأ زمان، از مکان $x = +18$ بگذرد، در کدام لحظه برای اولین بار، از مکان $x = +90$ می‌گذرد؟ (اندازه‌ها در SI است.)

(سؤال ۱۶۱ کنکور ریاضی مجد ۱۴۰۱)

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

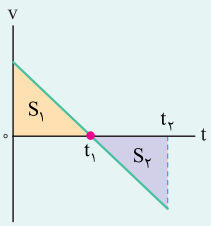
۴۸ معادلهٔ مکان ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند در SI به صورت $x = t^۲ - ۱۰t + ۵$ است. در ۴ ثانیهٔ دوم، تندی متوسط متحرک چند برابر اندازهٔ سرعت متوسط آن است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۵}{۴}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۲

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint ابتدا معادلهٔ سرعت ـ زمان ($v = at + v_۰$) را از معادلهٔ مکان ـ زمان داده‌شده به دست آورید. سپس با رسم نمودار سرعت ـ زمان و با استفاده از سطح زیر نمودار، خواستهٔ مسئله را به دست آورید.

درس Box در نمودار v ـ t، سطح زیر نمودار ابزار مفیدی برای محاسبهٔ موارد زیر است:



$$v_{av} = \frac{S_۱ - S_۲}{t_۲} \qquad \Delta x = S_۱ - S_۲$$

$$s_{av} = \frac{S_۱ + S_۲}{t_۲} \qquad \ell = S_۱ + S_۲$$

v_{av} = سرعت متوسط (m/s)

s_{av} = تندی متوسط (m/s)

Δx = جابه‌جایی (m)

ℓ = مسافت (m)

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** به کمک معادلهٔ مکان ـ زمان، معادلهٔ سرعت ـ زمان را به دست می‌آوریم:

$$\left.\begin{array}{l} x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t + x_۰ \\ x = t^۲ - ۱۰t + ۵ \end{array}\right\} \Rightarrow a = ۲\ m/s^۲ ,\ v_۰ = -۱۰\ m/s ,\ x_۰ = ۵\ m$$

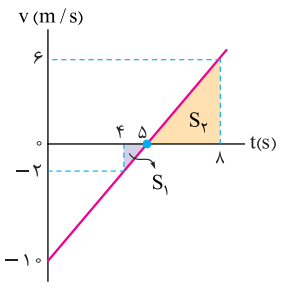
$$v = at + v_۰ \Rightarrow v = ۲t - ۱۰$$

گام دوم: نمودار سرعت ـ زمان را رسم می‌کنیم:

$$v = ۰ \Rightarrow ۲t - ۱۰ = ۰ \Rightarrow t = \frac{۱۰}{۲} = ۵\ s$$

$$t = ۸\ s \Rightarrow v_۸ = ۲(۸) - ۱۰ = ۶\ m/s$$

$$t = ۴\ s \Rightarrow v_۴ = ۲(۴) - ۱۰ = -۲\ m/s$$

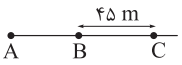


$$\begin{cases} S_۱ = \frac{۱}{۲}(۱)(۲) = ۱ \\ S_۲ = \frac{۱}{۲}(۶)(۳) = ۹ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{s_{av(۴\,s \to ۸\,s)}}{v_{av(۴\,s \to ۸\,s)}} = \frac{\frac{S_۱ + S_۲}{۴}}{\frac{S_۲ - S_۱}{۴}} = \frac{S_۱ + S_۲}{S_۲ - S_۱} = \frac{۱۰}{۸} = \frac{۵}{۴}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۹ در شکل زیر، متحرکی از نقطهٔ A با شتاب ثابت $8\ m/s^2$ از حال سکون شروع به حرکت کرده و فاصلهٔ دو نقطهٔ B و C را در مدت $1/5\ s$ طی می‌کند. فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B چند متر است؟



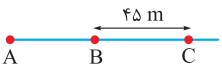
۱) ۳۶ ۲) ۳۲

۳) ۴۵ ۴) ۲۵

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint ابتدا معادلهٔ $\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t$ را بین B و C به کار ببرید تا v_B را به دست آورید، سپس با نوشتن رابطهٔ مستقل از زمان بین A و B، Δx_{AB} را محاسبه کنید.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** از داشته‌های مسئله و به کمک معادلات شتاب ثابت، v_B را به دست می‌آوریم:



$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t$$

$$\xrightarrow[v_0 = v_B\ ,\ t = 1/5\ s]{a = 8\ m/s^2\ ,\ \Delta x_{BC} = 45\ m} 45 = \frac{1}{2}(8)\left(\frac{3}{2}\right)^2 + v_B\left(\frac{3}{2}\right)$$

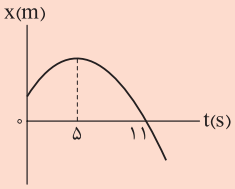
$$\Rightarrow 9 + \frac{3}{2}v_B = 45 \Rightarrow 3 + \frac{v_B}{2} = 15 \Rightarrow v_B = 24\ m/s$$

گام دوم: Δx_{AB} را به کمک رابطهٔ مستقل از زمان بین A و B به دست می‌آوریم:

$$v_B^2 - v_A^2 = 2a\Delta x_{AB} \xrightarrow[a = 8\ m/s^2]{v_A = 0\ ,\ v_B = 24\ m/s} \Delta x_{AB} = \frac{v_B^2}{2a} = \frac{\overset{12}{\cancel{24}} \times \overset{3}{\cancel{24}}}{2 \times \cancel{8}} = 36\ m$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۰ نمودار مکان ـ زمان متحرکی که با شتاب ثابت در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. اگر حداقل مسافت طی‌شده توسط متحرک در یک بازهٔ زمانی ۲ ثانیه‌ای برابر ۶ m باشد، بیشینهٔ فاصلهٔ متحرک از مبدأ چند متر است؟



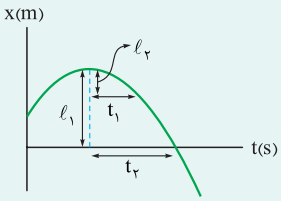
۱) ۷۵
۲) ۱۰۸
۳) ۱۵۰
۴) ۲۱۶

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

در نمودار x ـ t حرکت با شتاب ثابت، می‌توان از رابطهٔ زیر در مقایسه با رأس سهمی استفاده کرد:

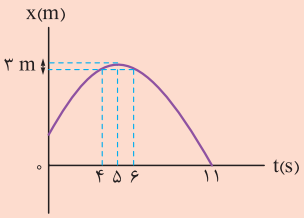
$$\ell_1 = \frac{1}{2}at_1^2 \quad و \quad \ell_2 = \frac{1}{2}at_2^2$$



$$\frac{\ell_2}{\ell_1} = (\frac{t_2}{t_1})^2$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

با توجه به نمودار x ـ t و روابط سهمی گفته‌شده در درس‌باکس، می‌توان نوشت:



حداقل مسافت در بازهٔ ۲ ثانیه، در ۲ بازهٔ ۱ ثانیه‌ای اطراف لحظهٔ تغییر جهت $(t = 5\,s)$ صورت گرفته است و جابه‌جایی در ۱ ثانیهٔ اطراف آن ۳ m بوده است.

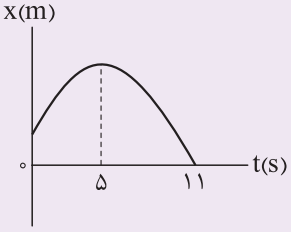
حداکثر فاصله از مبدأ در $t = 5\,s$ رخ می‌دهد:

$$\frac{\ell_{(5\,s \to 11\,s)}}{\ell_{(5\,s \to 6\,s)}} = (\frac{6}{1})^2 \Rightarrow \Delta x_{(5\,s \to 11\,s)} = 3 \times 36 = 108\,m$$

کنکور

شکل زیر، نمودار مکان ـ زمان متحرکی است که با شتاب ثابت روی محور x حرکت می‌کند. یک بازهٔ زمانی ۲ ثانیه‌ای را چنان انتخاب می‌کنیم که تندی متوسط در آن بازه حداقل باشد. اگر این تندی متوسط ۳ m/s باشد، در لحظهٔ $t = 9\,s$، متحرک در چند متری مبدأ محور است؟

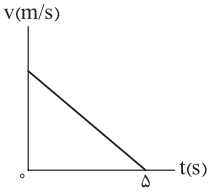
(سؤال ۱۸۹ کنکور تجربی مجدد ۱۴۰۱)



۱) ۳۳
۲) ۴۸
۳) ۶۰
۴) ۷۵

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۱ نمودار سرعت ـ زمان متحرکی که روی خط راست حرکت می‌کند، به شکل زیر است. اندازهٔ جابه‌جایی متحرک در ثانیهٔ دوم چند برابر اندازهٔ جابه‌جایی آن در ثانیهٔ سوم است؟



۱) $\frac{۷}{۵}$
۲) $\frac{۵}{۳}$
۳) $\frac{۳}{۲}$
۴) $\frac{۲۱}{۱۶}$

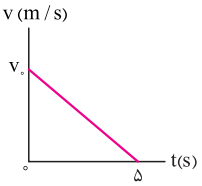
پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint با استفاده از نمودار سرعت ـ زمان متحرک، سرعت اولیهٔ آن را برحسب a به دست آورید و سپس نسبت اندازهٔ جابه‌جایی‌های خواسته‌شده را حساب کنید.

درس Box جابه‌جایی متحرک در ثانیهٔ n اُم:

$$\Delta x_n = (n - ۰/۵)a + v_۰$$

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** به کمک نمودار سرعت ـ زمان متحرک می‌توان نوشت:



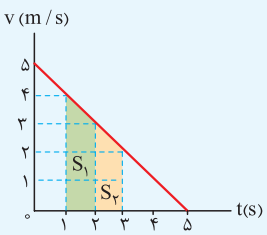
$$v = at + v_۰ \xrightarrow[v=۰]{t=۵\,s} ۰ = ۵a + v_۰ \Rightarrow v_۰ = -۵a$$

گام دوم: نسبت جابه‌جایی متحرک در ثانیهٔ دوم به جابه‌جایی آن در ثانیهٔ سوم را حساب می‌کنیم:

$$\Delta x = (n - ۰/۵)a + v_۰$$

$$\frac{\Delta x_۲}{\Delta x_۳} = \frac{(۲ - ۰/۵)a + (-۵a)}{(۴ - ۰/۵)a + (-۵a)} = \frac{-۳/۵a}{-۱/۵a} = \frac{۷}{۵}$$

یه‌جور دیگه چون سؤال از ما نسبت جابه‌جایی‌ها را خواسته، می‌توانیم $v_۰$ را هر عدد دلخواه مثبتی (مثلاً ۵) در نظر بگیریم:



$$\frac{\Delta x_۲}{\Delta x_۳} = \frac{S_۱}{S_۲} = \frac{(\frac{۴+۳}{۲})\times ۱}{(\frac{۳+۲}{۲})\times ۱} = \frac{۷}{۵}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

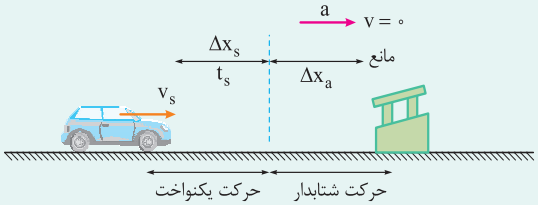
۵۲ راننده‌ٔ خودرویی که در مسیر مستقیم با تندی ثابت $90\ km/h$ در حرکت است، مانعی را می‌بیند و ترمز می‌کند. اگر حرکت خودرو بعد از ترمز با شتاب ثابت به بزرگی $5\ m/s^2$ کند شود و خودرو بعد از دیده‌شدن مانع توسط راننده تا توقف کامل $80\ m$ پیموده باشد، زمان واکنش راننده چند ثانیه است؟

۱) ۰/۳ ۲) ۰/۵ ۳) ۰/۷ ۴) ۰/۹

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

در مسائل متحرک با تندی ثابت که راننده با تأخیر (زمان واکنش t_s) ترمز می‌کند، روابط زیر حاکم است:

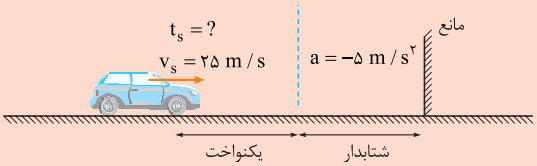


$$\Delta x_s = v_s t_s \qquad \Delta x_{کل} = \Delta x_s + \Delta x_a$$

$$\Delta x_a = \frac{1}{2} a\, t_a^2 + v_s t_a \qquad v^2 - v_\circ^2 = 2a\Delta x \Rightarrow \Delta x = \frac{v^2 - v_\circ^2}{2a}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: با توجه به اطلاعات مسئله، شکل مناسبی رسم می‌کنیم:



$$\Delta x_s + \Delta x_a = 80\ m \quad (1)$$

گام دوم: Δx_s و Δx_a را برحسب داده‌های مسئله می‌نویسیم:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta x_s = 25 t_s \\ \Delta x_a = \dfrac{v^2 - v_\circ^2}{2a} \xrightarrow[a=-5\,m/s^2]{v=0} \Delta x_a = \dfrac{0 - 25^2}{2(-5)} = \dfrac{125}{2}\ m \end{array}\right\} \xrightarrow{(1)} 25 t_s + \frac{125}{2} = 80$$

$$\Rightarrow 25 t_s = 17/5 \Rightarrow t_s = 0/7\ s$$

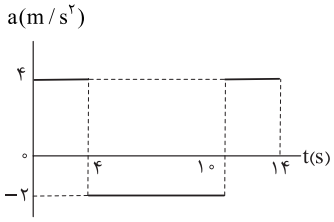
کنکور

راننده‌ای که در مسیر مستقیم با تندی ثابت $72\ km/h$ در حرکت است، مانعی را می‌بیند و ترمز می‌کند. اگر حرکت خودرو بعد از ترمز با شتاب ثابت به بزرگی $5\ m/s^2$ کند شود و خودرو بعد از دیدن مانع تا توقف کامل $56\ m$ پیموده باشد، زمان واکنش چند ثانیه است؟ (سؤال ۱۶۳ کنکور ریاضی مجدد ۱۴۰۱)

۱) ۰/۶ ۲) ۰/۸ ۳) ۱/۲ ۴) ۱/۶

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۳ نمودار شتاب ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر داده شده و سرعت متحرک در مبدأ زمان برابر $\vec{v}_{\circ} = (-8\ m/s)\vec{i}$ است. سرعت متوسط متحرک از مبدأ زمان تا لحظه‌ای که جهت حرکت آن برای دومین مرتبه تغییر می‌کند، چند متر بر ثانیه است؟



۱) $2\vec{i}$

۲) $4\vec{i}$

۳) $-2\vec{i}$

۴) $-4\vec{i}$

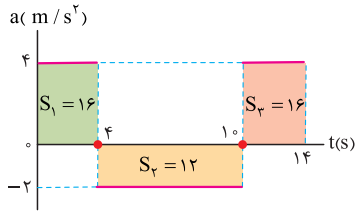
پاسخ: گزینهٔ ۱

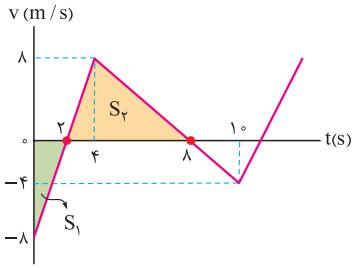
Hint ابتدا نمودار v ـ t متحرک را رسم کنید و با توجه به سطوح زیر این نمودار، v_{av} را در بازهٔ خواسته‌شده به دست آورید.

درس Box در نمودارهای a ـ t که به صورت چندمرحله‌ای هستند، یکی از بهترین و سریع‌ترین گزینه‌ها برای شروع حل مسائل، رسم نمودار v ـ t براساس نمودار a ـ t است:

- وقتی نمودار v ـ t محور زمان را قطع می‌کند، جهت حرکت عوض می‌شود.
- سطح زیر نمودار v ـ t برابر جابه‌جایی متحرک است.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** با توجه به این‌که سطح زیر نمودار a ـ t برابر Δv است، نمودار v ـ t را رسم می‌کنیم:





همان‌گونه که ملاحظه می‌شود، در لحظهٔ $t = 8\ s$ جهت حرکت متحرک برای دومین بار تغییر کرده است.

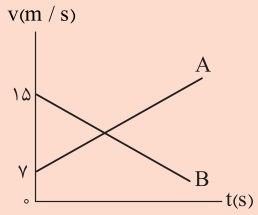
گام دوم: با توجه به سطح زیر نمودار v ـ t خواستهٔ مسئله را به دست می‌آوریم:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$\xrightarrow{\Delta x = (-S_1) + S_2} \vec{v}_{av} = \frac{(-S_1) + S_2}{8}\vec{i} = \frac{-(\frac{1}{2} \times 8 \times 2) + (\frac{1}{2} \times 6 \times 8)}{8}\vec{i} = (2\ m/s)\vec{i}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۴ نمودار سرعت ـ زمان دو متحرک A و B که در راستای محور x حرکت می‌کنند، به شکل زیر است. دو متحرک در مبدأ زمان در یک مکان قرار دارند و در لحظهٔ $t = ۱۲\,s$ دوباره به هم می‌رسند. فاصلهٔ بین دو متحرک در لحظهٔ $t = ۱۵\,s$ چند متر است؟



۱) ۱۲
۲) ۲۴
۳) ۳۰
۴) ۵۴

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint با استفاده از به هم رسیدن دو متحرک در لحظهٔ $t = ۱۲\,s$، سرعت نسبی و شتاب نسبی دو متحرک A و B را حساب کنید و سپس فاصلهٔ دو متحرک A و B را به کمک آن‌ها به دست آورید.

درس Box **روش سرعت نسبی:** جهت ساده‌سازی محاسبات می‌توان از این روش در مسائل استفاده کرد.



$$\begin{cases} \vec{a}_{\text{نسبی}} = \vec{a}_A - \vec{a}_B \\ \vec{v}_{\text{نسبی}} = \vec{v}_A - \vec{v}_B \end{cases}$$

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** با توجه به داده‌های نمودار سرعت ـ زمان، در لحظهٔ $t = ۱۲\,s$ داریم:

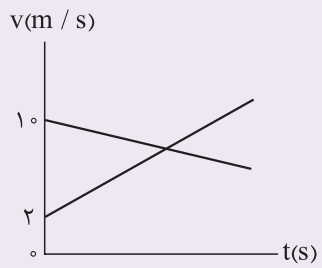
$$\xrightarrow[v_{۰B}=۱۵\,m/s]{x_A=x_B} \frac{۱}{۲}a_A(۱۲)^۲ + ۷(۱۲) = \frac{۱}{۲}a_B(۱۲)^۲ + ۱۵(۱۲) \Rightarrow a_A - a_B = \frac{۴}{۳}\,m/s^۲$$

گام دوم: پس از $t = ۱۲\,s$ که دو متحرک به هم رسیده‌اند، از هم فاصله می‌گیرند:

$$d = x_A - x_B = (\frac{۱}{۲}a_A t^۲ + v_A t) - (\frac{۱}{۲}a_B t^۲ + v_B t) = \frac{۱}{۲}(a_A - a_B)t^۲ + (v_A - v_B)t$$

$$\xrightarrow[\substack{a_A - a_B = \frac{۴}{۳}\,m/s \\ v_A - v_B = ۸\,m/s}]{\Delta t = ۱۵ - ۱۲ = ۳\,s} d = \frac{۲}{۳}t^۲ + ۸t \xrightarrow{t=۳\,s} d = ۶ + ۲۴ = ۳۰\,m$$

کنکور **شکل زیر، نمودار سرعت ـ زمان دو متحرک است که روی محور x در لحظهٔ $t_۱ = ۰\,s$ از یک نقطه با سرعت اولیه‌های نشان‌داده‌شده، می‌گذرند و در لحظهٔ $t_۲ = ۲۰\,s$ دوباره به هم می‌رسند. فاصلهٔ بین آن‌ها در لحظهٔ $t_۳ = ۳۰\,s$، چند متر است؟** *(سؤال ۱۶۴ کنکور ریاضی مجد ۱۴۰۱)*



۱) ۲۰
۲) ۴۰
۳) ۸۰
۴) ۱۲۰

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۵ در مبدأ زمان دو متحرک A و B به ترتیب در مبدأ مکان و مکان $x = ۶۸\ m$ از حال سکون شروع به حرکت می‌کنند. متحرک A با شتاب $(۴\ m/s^۲)\vec{i}$ شروع به حرکت می‌کند و پس از $۶\ s$ با سرعت ثابت به حرکت خود ادامه می‌دهد. متحرک B نیز ابتدا به مدت $۱۰\ s$ با شتاب $(۲\ m/s^۲)\vec{i}$ و سپس با سرعت ثابت حرکت می‌کند. چند ثانیه فاصلهٔ دو متحرک کم‌تر یا مساوی $۱۲\ m$ است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint ابتدا وضعیت حرکت و فاصلهٔ دو جسم تا لحظهٔ $۶\ s$ را مشخص کنید و سپس وضعیت حرکت را پس از $۶\ s$ تعیین کنید.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** معادلهٔ مکان هر یک از دو متحرک را می‌نویسیم:

$$\begin{cases} x_A = \frac{۱}{۲}a_A t^۲ + \cancel{v_{۰A}}\, t + \cancel{x_{۰A}} \Rightarrow x_A = \frac{۱}{۲}(۴)t^۲ = ۲t^۲ & : t \le ۶\ s \\ t = ۶\ s \Rightarrow x_{t=۶\ s} = ۲(۶^۲) = ۷۲\ m & \\ v_A = a_A t + \cancel{v_{۰A}} = ۴ \times ۶ = ۲۴\ m/s & \\ x_A = v_A(t-۶) + x_{t=۶s} \Rightarrow x_A = ۲۴(t-۶) + ۷۲ & : t > ۶\ s \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_B = \frac{۱}{۲}a_B t^۲ + \cancel{v_{۰B}}\, t + x_{۰B} \Rightarrow x_B = \frac{۱}{۲}(۲)t^۲ + ۶۸ = t^۲ + ۶۸ & : t \le ۱۰\ s \\ t = ۱۰\ s \Rightarrow x_{t=۱۰\ s} = ۱۰^۲ + ۶۸ = ۱۶۸\ m & \\ v_B = a_B t + \cancel{v_{۰B}} = ۲ \times ۱۰ = ۲۰\ m/s & \\ x_B = v_B(t-۱۰) + x_{t=۱۰\ s} \Rightarrow x_B = ۲۰(t-۱۰) + ۱۶۸ & : t > ۱۰\ s \end{cases}$$

گام دوم: مکان هر یک از دو متحرک را در لحظه‌های $t = ۶\ s$ و $t = ۱۰\ s$ به دست می‌آوریم:

$$t = ۶\ s \Rightarrow x_A = ۷۲\ m$$

$$t = ۶\ s \Rightarrow x_B = t^۲ + ۶۸ = ۶^۲ + ۶۸ = ۱۰۴ m$$

پس اولین بار که $x_B - x_A = ۱۲\ m$ می‌شود، بعد از $t = ۶\ s$ است.

$$t = ۱۰\ s \Rightarrow x_A = ۲۴(t-۶) + ۷۲ = ۲۴(۱۰-۶) + ۷۲ = ۹۶ + ۷۲ = ۱۶۸\ m$$

$$t = ۱۰\ s \Rightarrow x_B = ۱۶۸\ m$$

یعنی دو متحرک در لحظهٔ $t = ۱۰\ s$ به یکدیگر می‌رسند. بنابراین اولین بار که دو متحرک به هم می‌رسند، در بازهٔ زمانی $۶\ s < t < ۱۰\ s$ قرار دارند و دومین بار که فاصلهٔ آن‌ها از هم به $۱۲\ m$ می‌رسد، بعد از $t = ۱۰\ s$ است.

گام سوم: اگر در لحظهٔ $۶\ s < t_۱ < ۱۰\ s$ برای اولین بار فاصلهٔ دو متحرک از یکدیگر به $۱۲\ m$ برسد، داریم:

$$x_B - x_A = ۱۲\ m \Rightarrow t_۱^۲ + ۶۸ - (۲۴(t_۱ - ۶) + ۷۲) = ۱۲$$

$$\Rightarrow t_۱^۲ + ۶۸ - ۲۴t_۱ + ۱۴۴ - ۷۲ = ۱۲ \Rightarrow t_۱ = ۸\ s$$

اگر در لحظهٔ $t_۲ > ۱۰\ s$ برای دومین بار فاصلهٔ دو متحرک از یکدیگر به $۱۲\ m$ برسد، داریم:

$$x_A - x_B = ۱۲ \Rightarrow ۲۴(t_۲ - ۶) + ۷۲ - (۲۰(t_۲ - ۱۰) + ۱۶۸) = ۱۲$$

$$\Rightarrow ۲۴t_۲^۲ - ۱۴۴ + ۷۲ - ۲۰t_۲ + ۲۰۰ - ۱۶۸ = ۱۲ \Rightarrow t_۲ = \frac{۵۲}{۴} = ۱۳\ s$$

بنابراین در بازهٔ زمانی $t_۱ = ۸\ s$ تا $t_۲ = ۱۳\ s$ یعنی به مدت $۵\ s$ فاصلهٔ این دو متحرک از یکدیگر کم‌تر یا مساوی با $۱۲\ m$ است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۶ در شرایط خلأ، گلوله‌ای از ارتفاع H نسبت به سطح زمین رها می‌شود. اگر گلوله در مدت ۱/۲ s از ارتفاع ۴۸متری سطح زمین به ارتفاع ۲۴متری سطح زمین برسد، H برابر چند متر است؟ $(g = ۱۰\ N/kg)$

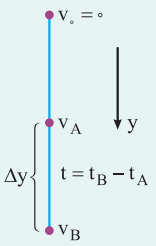
۱) ۵۷/۸ ۲) ۵۶/۸ ۳) ۶۸/۶ ۴) ۶۷/۶

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint سوی مثبت محور y را رو به پایین بگیرید و از رابطهٔ $\Delta y = \frac{۱}{۲}gt^۲ + v_۰t$ سرعت گلوله در ارتفاع ۴۸ m از سطح زمین را به دست آورید؛ سپس با نوشتن رابطهٔ مستقل از زمان، ارتفاع $\Delta y_۱$ را به دست آورید و آن را با ۴۸ m جمع کنید و H را به دست آورید.

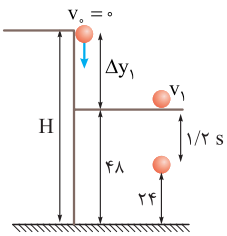
درس Box سقوط آزاد نوعی حرکت با شتاب ثابت است که در آن، جسم تنها تحت تأثیر نیروی وزن خود، رو به پایین حرکت می‌کند. به جای x در معادلات از y استفاده می‌کنیم و اگر جهت رو به پایین (↓) را مثبت فرض کنیم، $a = g$ است.

هنگام نوشتن معادلات حرکت سقوط آزاد بین دو نقطهٔ دلخواه A و B در طول مسیر، سرعت اولیه (v_A)، صفر نیست.



$$\Delta y = \frac{۱}{۲}gt^۲ + v_At$$
$$v_B = gt + v_A$$
$$v_B^۲ - v_A^۲ = ۲g\Delta y$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول:** سرعت گلوله را در ارتفاع ۴۸ m از سطح زمین، به دست می‌آوریم:



$$\Delta y = ۲۴ = \frac{۱}{۲}g(۱/۲)^۲ + v_۱(۱/۲) \Rightarrow v_۱ = ۱۴\ m/s$$

به کمک رابطهٔ مستقل از زمان، فاصلهٔ $\Delta y_۱$ را حساب می‌کنیم:

$$v_۱^۲ - v_۰^۲ = ۲g\Delta y_۱ \Rightarrow \Delta y_۱ = \frac{(۱۴)^۲}{۲۰} = ۹/۸\ m$$

گام دوم: مقدار H را به دست می‌آوریم:

$$H = ۴۸ + ۹/۸ = ۵۷/۸\ m$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

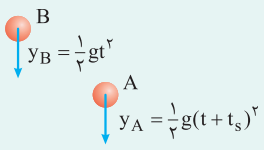
۵۷ در شرایط خلأ، دو گلوله به فاصلهٔ زمانی $0/8\ s$ از یک نقطه بالای سطح زمین رها می‌شوند. در لحظه‌ای که فاصلهٔ دو گلوله از یکدیگر به $32\ m$ می‌رسد، مسافت طی‌شده توسط گلولهٔ اول چند متر است؟ $(g = 10\ m/s^2)$

۱) $86/8$ ۲) $88/8$ ۳) $96/8$ ۴) $98/8$

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

هنگامی که ۲ گلوله از ارتفاعی با اختلاف زمانی t_s رها شوند، چون حرکت هر دو گلوله با شتاب ثابت g است، می‌توان گفت که فاصلهٔ آن‌ها پس از سقوط گلولهٔ دوم مانند حرکت با سرعت ثابت تغییر می‌کند:



$$d = y_A - y_B = \frac{1}{2}g(t+t_s)^2 - \frac{1}{2}gt^2$$

$$\Rightarrow d = \frac{1}{2}g(t_s^2 + 2t_s t)$$

که در آن d برحسب t، تابعی درجه ۱ است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: از رابطهٔ درس‌باکس، زمان سقوط گلولهٔ اول را به دست می‌آوریم:

$$d = \frac{1}{2}g(t_s^2 + 2t_s t)$$

$$\xrightarrow[d=32m]{g=10\ m/s^2,\ t_s=0/8\ s} \frac{1}{2}(10)(0/8^2 + 2(0/8)t) = 32 \Rightarrow 5(0/64 + 1/6t) = 32 \Rightarrow 1/6t = 5/76$$

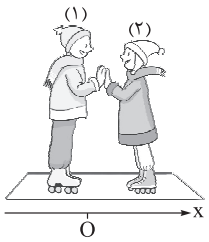
$$\Rightarrow t = 3/6\ s \Rightarrow t_A = t + t_s = 3/6 + 0/8 = 4/4\ s$$

گام دوم: مسافت طی‌شده توسط گلولهٔ اول را به دست می‌آوریم:

$$\Delta y_A = \frac{1}{2}gt_A^2 = \frac{1}{2}g(4/4)^2 = 5(4/4)^2 = 96/8\ m$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۸ دو شخص (۱) و (۲) به ترتیب به جرم‌های ۷۵ kg و ۶۰ kg با کفش‌های چرخ‌دار روی سطح بدون اصطکاکی روبه‌روی هم ایستاده‌اند. شخص (۱)، شخص (۲) را به سمت راست هل می‌دهد. اگر اندازهٔ شتاب شخص (۲) برابر $۲\ m/s^۲$ باشد، شتاب شخص (۱) در SI برابر کدام است؟



۱) $۲/۵\vec{i}$

۲) $-۲/۵\vec{i}$

۳) $۱/۶\vec{i}$

۴) $-۱/۶\vec{i}$

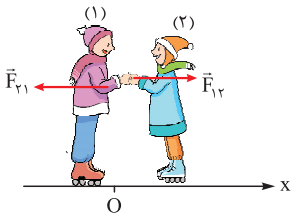
پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint با توجه به هم‌اندازه‌بودن نیروهای کنش و واکنش $(m_۲a_۲ = m_۱a_۱)$، شتاب شخص (۱) را به دست آورید.

درس Box مطابق قانون سوم نیوتون، اگر جسم A نیرویی بر جسم B وارد کند، جسم B نیز نیرویی بر جسم A وارد می‌کند. این دو نیرو هم‌اندازه و در خلاف جهت یکدیگرند:

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ طبق قانون سوم نیوتون داریم:



شتاب شخص (۱) یعنی $\vec{a}_۱$ در جهت نیروی $\vec{F}_{۲۱}$ است، یعنی به طرف چپ.

$$\vec{F}_{۲۱} = -\vec{F}_{۱۲} \Rightarrow m_۱\vec{a}_۱ = -m_۲\vec{a}_۲$$

$$\Rightarrow \vec{a}_۱ = -\frac{m_۲}{m_۱}\vec{a}_۲ \xrightarrow[\vec{a}_۲=(۲\ m/s^۲)\,\vec{i}]{m_۲=۶۰kg\ ,\ m_۱=۷۵kg} \vec{a}_۱ = -\frac{۶۰}{۷۵}(۲)\vec{i} = (-۱/۶\ m/s^۲)\vec{i}$$

تیزبازی چون شخص (۱) جرم بیشتری دارد، شتاب کم‌تری پیدا می‌کند، یعنی گزینه‌های (۱) و (۲) رد می‌شوند. از طرفی نیروی خالص وارد بر شخص (۱) به طرف چپ است؛ بنابراین شتاب آن نیز به طرف چپ است، یعنی گزینهٔ (۳) نیز رد می‌شود.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۹ **اگر جرم جسمی ۲۰ درصد و اندازهٔ نیروی خالص وارد بر آن ۴۰ درصد کاهش یابد، اندازهٔ شتاب جسم چند درصد و چگونه تغییر می‌کند؟**

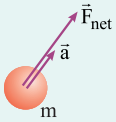
۱) ۲۰، افزایش می‌یابد.
۲) ۲۵، افزایش می‌یابد.
۳) ۲۰، کاهش می‌یابد.
۴) ۲۵، کاهش می‌یابد.

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

قانون دوم نیوتون:

هرگاه نیروهای وارد بر جسمی متوازن نباشند، یعنی بر جسم نیروی خالصی وارد شود، جسم تحت تأثیر آن نیرو، شتاب می‌گیرد که این شتاب با نیروی خالص وارد بر جسم نسبت مستقیم دارد و در همان جهت نیروی خالص است، اما با جرم جسم نسبت وارون دارد.



$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_{net}}{m} \Rightarrow \vec{F}_{net} = m\vec{a}$$

$\vec{a}$ = شتاب (m/s^2)

m = جرم (kg)

$\vec{F}_{net}$ = نیروی خالص (N)

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: جرم جسم و نیروی خالص وارد بر آن را در حالت دوم برحسب مقادیر اولیهٔ آن‌ها می‌نویسیم:

$$m_2 = m_1 - 0/2m_1 = 0/8m_1$$

$$F_2 = F_1 - 0/4F_1 = 0/6F_1$$

گام دوم: با توجه به قانون دوم نیوتون و مقایسهٔ دو حالت، داریم:

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{m_2}{m_1} \times \frac{a_2}{a_1} \Rightarrow \frac{0/6\,F_1}{F_1} = \frac{0/8\,m_1}{m_1} \times \frac{a_2}{a_1}$$

$$\Rightarrow \frac{a_2}{a_1} = \frac{3}{4}$$

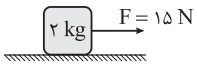
گام سوم: رابطهٔ درصد تغییرات شتاب را می‌نویسیم:

$$\frac{a_2 - a_1}{a_1} \times 100 \Rightarrow \frac{\frac{3}{4}a_1 - a_1}{a_1} \times 100 = -\%25$$

علامت منفی نشان‌دهندهٔ کاهش شتاب است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶۰ در شکل زیر، نیروی افقی $F = ۱۵\ N$، جسمی به جرم $۲\ kg$ را که روی سطح افقی به ضریب اصطکاک جنبشی $۰/۵$ قرار دارد، از حال سکون به حرکت درمی‌آورد. اندازهٔ تکانهٔ جسم پس از $۱/۸\ m$ جابه‌جایی به چند کیلوگرم متر بر ثانیه می‌رسد؟ $(\mu_s < ۰/۷۵ \text{ و } g = ۱۰\ N/kg)$



۱) ۳
۲) ۶
۳) $۳\sqrt{۳}$
۴) $۶\sqrt{۳}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint

ابتدا از قانون دوم نیوتون $(a = \frac{F_{net}}{m})$ شتاب حرکت را به دست آورید و در نهایت با نوشتن رابطهٔ مستقل از زمان، سرعت و تکانهٔ جسم را پس از $۱/۸\ m$ جابه‌جایی، به دست آورید.

درس Box

حاصل‌ضرب جرم یک جسم در سرعت آن را «تکانه» یا «اندازهٔ حرکت» می‌نامند و آن را با نماد $\vec{p}$ نشان می‌دهند.

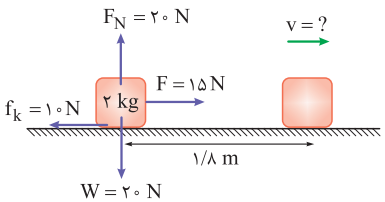
$$\vec{p} = m\vec{v}$$

تکانه یک کمیت برداری و هم‌جهت با بردار سرعت متحرک است و یکای آن در SI، $\frac{kg.m}{s}$ می‌باشد.

$\Delta\vec{p}$ = تغییر تکانه $(\frac{kg.m}{s})$ $\qquad \Delta\vec{p} = \vec{p}_۲ - \vec{p}_۱ = m\Delta\vec{v}$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: با استفاده از قانون دوم نیوتون، شتاب حرکت را به دست می‌آوریم. برای این کار، ابتدا نیروی اصطکاک جنبشی را حساب می‌کنیم:



$$f_k = \mu_k F_N \xrightarrow[\mu_k = ۰/۵]{F_N = mg = ۲\times۱۰ = ۲۰N} f_k = ۰/۵(۲۰) = ۱۰\ N$$

$$a = \frac{F_{net}}{m} = \frac{F - f_k}{m} = \frac{۱۵ - ۱۰}{۲} = \frac{۵}{۲} = ۲/۵\ m/s^۲$$

گام دوم: به کمک رابطهٔ مستقل از زمان، سرعت و از آن‌جا تکانه را به دست می‌آوریم:

$$v^۲ - v_۰^۲ = ۲a\Delta x \xrightarrow[\Delta x = ۱/۸\ m]{a = ۲/۵\ m/s^۲} v = \sqrt{۲\times۲/۵\times۱/۸} = \sqrt{۹} = ۳\ m/s$$

$$p = mv \xrightarrow[v = ۳\ m/s]{m = ۲\ kg} p = ۲(۳) = ۶\ \frac{kg.m}{s}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶۱ جسمی روی سطح افقی در حال سکون قرار دارد. نیروی افقی F بر آن وارد می‌شود و به تدریج افزایش می‌یابد. وقتی اندازهٔ نیروی F به $12\ N$ می‌رسد، جسم در آستانهٔ حرکت قرار می‌گیرد. زمانی که اندازهٔ F به $14\ N$ می‌رسد، شتاب جسم $1\ m/s^2$ و به ازای $F = 16\ N$، شتاب جسم $1/5\ m/s^2$ می‌شود. ضریب اصطکاک جنبشی بین جسم و سطح چند برابر ضریب اصطکاک ایستایی بین جسم و سطح است؟

۱) $\frac{3}{10}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{5}{6}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

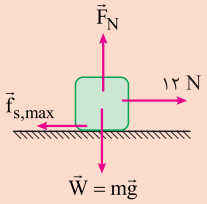
درس Box

نیروی اصطکاک

- ایستایی (f_s): نیروی اصطکاکی که وقتی دو جسم نسبت به هم ساکن هستند، بین آن‌ها ایجاد می‌شود و بیشینهٔ مقدار آن زمانی است که در آستانهٔ حرکت قرار گیرند: $f_{s,max} = \mu_s F_N$ (ضریب اصطکاک ایستایی)
- جنبشی (f_k): نیروی اصطکاکی که وقتی دو جسم نسبت به هم در حرکت باشند، بین آن‌ها ایجاد می‌شود و دارای مقدار ثابت $f_k = \mu_k F_N$ است. (μ_k: ضریب اصطکاک جنبشی)

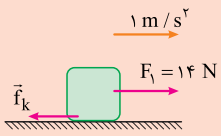
پاسخ خیلی تشریحی ✔

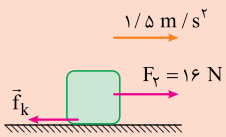
گام اول: حالت آستانهٔ حرکت را بررسی می‌کنیم:



$$F_{net} = 0 \Rightarrow f_{s,max} = 12 \Rightarrow \mu_s F_N = 12 \Rightarrow \mu_s = \frac{12}{F_N}$$

گام دوم: حالت‌های شتاب‌دار را بررسی می‌کنیم:





$$\left.\begin{aligned} F_{net} = ma_1 &\Rightarrow F_1 - f_k = ma_1 \Rightarrow 14 - f_k = m \\ F'_{net} = ma_2 &\Rightarrow F_2 - f_k = ma_2 \Rightarrow 16 - f_k = 1/5\ m \end{aligned}\right\} \Rightarrow 2 = 0/5\ m$$

$$\Rightarrow m = 4\ kg$$

$$14 - f_k = 4 \Rightarrow f_k = 10\ N$$

$$f_k = \mu_k F_N \Rightarrow 10 = \mu_k \times F_N \Rightarrow \mu_k = \frac{10}{F_N}$$

$$\frac{\mu_k}{\mu_s} = \frac{\frac{10}{F_N}}{\frac{12}{F_N}} = \frac{5}{6}$$

کنکور

جسمی روی سطح افقی در حال سکون قرار دارد. نیروی افقی F بر آن وارد می‌شود و به تدریج افزایش می‌یابد. وقتی اندازهٔ نیروی F به $12\ N$ می‌رسد، جسم در آستانهٔ حرکت قرار می‌گیرد. زمانی که اندازهٔ F به $14\ N$ می‌رسد، شتاب جسم $1\ m/s^2$ و به ازای $F = 16\ N$، شتاب جسم $1/5\ m/s^2$ می‌شود. جرم جسم چند کیلوگرم است و ضریب اصطکاک جنبشی چه‌قدر است؟ $(g = 10\ m/s^2)$ (سؤال ۱۶۶ کنکور ریاضی مجدد ۱۴۰۱)

۱) ۴ و ۰/۲۵ ۲) ۴ و ۰/۳ ۳) ۲ و ۰/۲۵ ۴) ۲ و ۰/۳

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

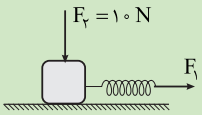
۶۲ در شکل زیر، جسمی به جرم $5\ kg$ توسط فنری افقی با شتاب ثابت به بزرگی $1/2\ m/s^2$ به صورت تندشونده روی سطح افقی کشیده می‌شود. اگر ضریب اصطکاک جنبشی بین جسم و سطح $0/4$ و ثابت فنر $20\ N/cm$ باشد، طول فنر نسبت به حالت عادی خود چند سانتی‌متر افزایش می‌یابد؟ $(g = 10\ m/s^2)$

۱) ۱۵

۲) ۱۲

۳) ۱/۵

۴) ۱/۲



پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint ابتدا F_N و سپس f_k را به دست آورید، سپس با داشتن شتاب $(a = 1/2\ m/s^2)$ و به کمک قانون دوم نیوتون $(F_{net} = ma)$، نیروی فنر (F_e) و در نهایت x را محاسبه کنید.

درس Box

نیروی کشش فنر متناسب با تغییر طول فنر (نسبت به طول طبیعی‌اش) است و از رابطهٔ زیر که به قانون هوک معروف است، به دست می‌آید:

$$F_e = -kx$$

F_e = نیروی کشسانی فنر (N)

k = ثابت فنر (N/cm)

$x = \Delta L$ = تغییر طول فنر (cm)

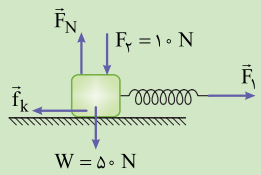
علامت منفی در رابطهٔ قانون هوک به این معنی است که $\vec{F}_e$ در خلاف جهت $\vec{x}$ است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: ابتدا F_N و f_k را محاسبه می‌کنیم:

f_k = نیروی اصطکاک جنبشی (N)

F_N = نیروی عمودی سطح (N)



$$F_{net,y} = 0 \Rightarrow F_N = F_2 + W = 10 + 50 = 60\ N$$
$$\Rightarrow f_k = \mu_k F_N = (0/4)(60) = 24\ N$$

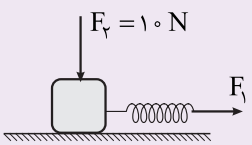
گام دوم: از قانون دوم نیوتون در راستای x داریم:

$$F_{net,x} = ma_x \Rightarrow F_1 - f_k = ma \Rightarrow F_1 - 24 = 5(1/2) \Rightarrow F_1 = 30\ N$$
$$\Rightarrow kx = 30 \Rightarrow 20x = 30 \Rightarrow x = 1/5\ cm$$

امتحان نهایی

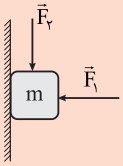
مطابق شکل زیر، جسمی به جرم $4\ kg$ توسط فنری با سرعت ثابت روی سطح افقی کشیده می‌شود. اگر ضریب اصطکاک جنبشی بین جسم و سطح $0/3$ و ثابت فنر $10\ N/cm$ باشد، طول فنر چند سانتی‌متر افزایش می‌یابد؟ $(g = 10\ m/s^2)$

(سؤال ۶ ـ امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۴ رشتهٔ ریاضی)



SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶۳ در شکل زیر، به جسم تکیه داده شده به دیوار قائم، نیروی افقی $\vec{F}_1$ و نیروی قائم $\vec{F}_2$ وارد شده و جسم در آستانهٔ حرکت است. اگر $F_1 = 2\,mg$ و $F_2 = \frac{1}{2}\,mg$ باشد، به ترتیب، بزرگی نیرویی که جسم به دیوار وارد می‌کند، چند برابر وزن جسم است و ضریب اصطکاک ایستایی بین جسم و دیوار چه‌قدر است؟ (m جرم جسم و g شتاب گرانش زمین است.)



۱) $\frac{1}{4}$ ، $\frac{3}{2}$
۲) $\frac{1}{4}$ ، $\frac{5}{2}$
۳) $\frac{3}{4}$ ، $\frac{3}{2}$
۴) $\frac{3}{4}$ ، $\frac{5}{2}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint

نیروهای F_N و $f_{s,max}$ را برحسب mg محاسبه کرده و سپس نیروی واکنش سطح را از رابطهٔ $R = \sqrt{F_N^2 + f_{s,max}^2}$ به دست آورید.

در نهایت $\frac{R}{mg}$ و $\mu_s = \frac{f_{s,max}}{F_N}$ را محاسبه کنید.

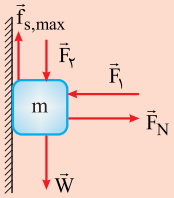
درس Box

دو نیروی اصطکاک $(\vec{f})$ و نیروی عمودی تکیه‌گاه $(\vec{F}_N)$ از طرف سطح بر جسم وارد می‌شوند که در واقع دو مؤلفه از نیروی $\vec{R}$ هستند:

نیروی واکنش سطح $R = \sqrt{F_N^2 + f^2}$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: با توجه به آن‌که جسم در آستانهٔ حرکت است، اصطکاک $f_{s,max}$ بر آن اثر دارد:



$$\begin{cases} F_{net,x} = 0 \Rightarrow F_N = F_1 = 2\,mg \quad (I) \\ F_{net,y} = 0 \Rightarrow f_{s,max} = F_2 + W = \frac{1}{2}\,mg + mg = \frac{3}{2}\,mg \quad (II) \end{cases}$$

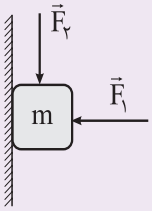
گام دوم: با توجه به مقادیر F_N و $f_{s,max}$، خواسته‌های مسئله را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} R = \sqrt{f_{s,max}^2 + F_N^2} = \sqrt{(\frac{3}{2}mg)^2 + (2mg)^2} = \frac{5}{2}\,mg \Rightarrow \frac{R}{mg} = \frac{5}{2} \\ f_{s,max} = \mu_s F_N \Rightarrow \frac{3}{2}\,mg = \mu_s(2mg) \Rightarrow \mu_s = \frac{3}{4} \end{cases}$$

کنکور

در شکل زیر، جسم با نیروی افقی F_1 و نیروی قائم F_2 در تماس با دیوار، به حالت سکون قرار دارد. اگر $F_1 = 2\,mg$ و $F_2 = \frac{1}{2}\,mg$ باشد، بزرگی نیرویی که جسم به دیوار وارد می‌کند، چند برابر وزن جسم است؟

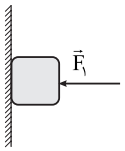
(سؤال ۱۹۳ کنکور تجربی مجدد ۱۴۰۱)



۱) ۲
۲) ۲/۵
۳) ۳
۴) ۳/۵

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶۴ در شکل زیر، اگر به جسم، نیروی افقی $\vec{F}_1$ وارد شود، جسم در آستانهٔ حرکت قرار می‌گیرد. پس از شروع حرکت، اگر به جسم نیروی افقی $\vec{F}_2$ وارد شود، جسم با سرعت ثابت حرکت می‌کند. اگر اندازهٔ نیرویی که دیوار قائم به جسم وارد می‌کند، در حالت اول و دوم به ترتیب R_1 و R_2 و زوایایی که این نیروها با نیروی وزن جسم می‌سازند، به ترتیب θ_1 و θ_2 باشد، کدام گزینه، درست است؟ (ضریب اصطکاک ایستایی و جنبشی دیوارهٔ قائم با جسم به ترتیب $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{3}$ است.)



۱) $R_1 = \sqrt{2}R_2, \theta_2 > \theta_1$

۲) $R_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}R_2, \theta_2 > \theta_1$

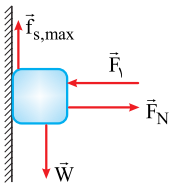
۳) $R_1 = \sqrt{2}R_2, \theta_1 > \theta_2$

۴) $R_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}R_2, \theta_1 > \theta_2$

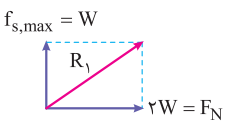
پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: جسم در آستانهٔ حرکت به طرف پایین است:

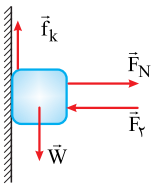


$$\begin{cases} F_{net,x} = 0 \Rightarrow F_N = F_1 \quad (1) \\ F_{net,y} = 0 \Rightarrow f_{s,max} = W \Rightarrow \mu_s F_N = W \end{cases} \Rightarrow F_N = \frac{W}{\mu_s} = \frac{W}{\frac{1}{2}} = 2W \xrightarrow{(1)} F_1 = 2W$$

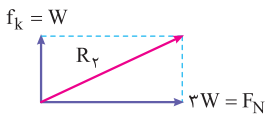


$$\Rightarrow R_1 = \sqrt{F_N^2 + f_{s,max}^2} = \sqrt{(2W)^2 + W^2} = \sqrt{5W^2} = W\sqrt{5}$$

گام دوم: جسم با سرعت ثابت پایین می‌آید:



$$\begin{cases} F_{net,x} = 0 \Rightarrow F_2 = F_N \\ F_{net,y} = 0 \Rightarrow f_k = W \end{cases} \Rightarrow \mu_k F_N = W \Rightarrow F_N = \frac{W}{\frac{1}{3}} = 3W$$

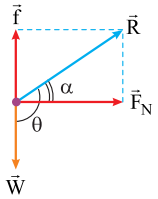


$$\Rightarrow R_2 = \sqrt{F_N^2 + f_k^2} = \sqrt{(3W)^2 + W^2} = W\sqrt{10}$$

گام سوم: نسبت $\frac{R_1}{R_2}$ را به راحتی محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{W\sqrt{5}}{W\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow R_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}R_2$$

R در حالت دوم (θ_2) با راستای قائم زاویهٔ بزرگ‌تری می‌سازد.



$$\frac{\tan\alpha_1}{\tan\alpha_2} = \frac{\frac{W}{2W}}{\frac{W}{3W}} = \frac{3}{2} \Rightarrow \alpha_1 > \alpha_2 \Rightarrow \alpha_1 + 90 > \alpha_2 + 90 \Rightarrow \theta_1 > \theta_2$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶۵ **توپی را از سطح زمین در راستای قائم به سمت بالا پرتاب می‌کنیم. اگر اندازهٔ شتاب توپ هنگام بالارفتن، ۲ برابر اندازهٔ شتاب آن هنگام پایین‌آمدن باشد، اندازهٔ نیروی مقاومت هوای وارد بر توپ، با فرض ثابت‌بودن، چند برابر وزن جسم است؟**

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint ابتدا شتاب بالارفتن و پایین‌آمدن را برحسب نیروی مقاومت هوا و جرم جسم به دست آورید و با داشتن رابطهٔ $a_{down} = ۲a_{up}$، $\frac{f_D}{mg}$ را به دست آورید.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** ابتدا شتاب بالارفتن و پایین‌آمدن را به دست می‌آوریم:

بالارفتن: $a_{up} = \frac{mg + f_D}{m} = g + \frac{f_D}{m}$ (۱)

پایین‌آمدن: $a_{down} = \frac{mg - f_D}{m} = g - \frac{f_D}{m}$ (۲)

گام دوم: اکنون از ترکیب رابطه‌های به‌دست‌آمده می‌توان نوشت:

$$\xrightarrow[(۱),(۲)]{a_{up}=۲a_{down}} g + \frac{f_D}{m} = ۲g - \frac{۲f_D}{m} \Rightarrow \frac{۳f_D}{m} = g \Rightarrow f_D = \frac{۱}{۳}mg$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶۶ **فنری به ثابت $50\ N/m$ و طول $30\ cm$ را از نقطه‌ای آویزان می‌کنیم. جسمی به جرم $400\ g$ را به سر دیگر فنر بسته و رها می‌کنیم. در لحظه‌ای که طول فنر به $42\ cm$ می‌رسد، شتاب جسم چند متر بر مربع ثانیه و در چه جهتی است؟ $(g = 10\ N/kg)$**

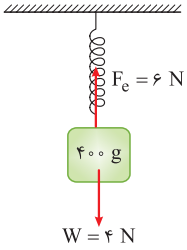
۱) ۵، به سمت بالا
۲) ۵، به سمت پایین
۳) ۱۵، به سمت بالا
۴) ۱۵، به سمت پایین

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint با توجه به قانون دوم نیوتون $(F_{net} = ma)$ و محاسبهٔ نیروی فنر و وزن، مقدار و جهت شتاب جسم را به دست آورید.

درس Box **محیط کشسان**: محیط‌هایی مانند فنر و آب هستند که کوچک‌ترین تغییر شکلی در آن‌ها باعث می‌شود نیروهای بازگرداننده‌ای ایجاد شود که تمایل به برگشتن محیط به وضعیت اولیه را دارند.

پاسخ خیلی تشریحی با توجه به توضیحات سؤال و شکل زیر، قانون دوم نیوتون را می‌نویسیم:



$$\begin{cases} F_e = kx \xrightarrow[k=50\ N/m]{x=\Delta L=42-30=12cm=0/12\ m} F_e = 50\times(0/12) = 6\ N \\ W = mg = 0/4\times 10 = 4\ N \end{cases}$$

$$F_{net} = ma \Rightarrow F_e - W = ma \Rightarrow 6-4 = 0/4a$$

$$\Rightarrow 2 = 0/4a \Rightarrow a = 5\ m/s^2 \uparrow \text{بالا}$$

چون جهت نیروی خالص $(\vec{F}_{net})$ رو به بالاست، شتاب نیز رو به بالا است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

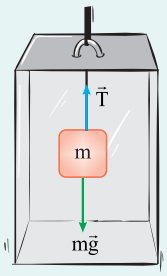
۶۷ جسمی به جرم $5\ kg$ توسط یک ریسمان به سقف آسانسوری بسته شده و آسانسور با شتاب ثابتی به بزرگی $2\ m/s^2$ و به صورت کندشونده به سمت پایین در حال حرکت است. اگر کابل آسانسور پاره شده و آسانسور سقوط آزاد کند، نیروی کشش ریسمان چند نیوتون تغییر می‌کند؟ $(g = 10\ m/s^2)$

۱) ۶۰ ۲) ۵۰ ۳) ۴۰ ۴) ۱۰

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

اگر جسمی به جرم m توسط یک ریسمان از سقف آسانسوری آویخته شده و آسانسور با شتاب ثابتی به بزرگی a در راستای قائم حرکت نماید، با توجه به قانون دوم نیوتون داریم:



$$\vec{F}_{net} = m\vec{a}$$
$$\Rightarrow T - mg = ma$$
$$\Rightarrow T = m(g + a)$$

کند شونده: شتاب رو به پایین ($v > 0$, $a < 0$) — تند شونده: ($v < 0$, $a < 0$)

یکنواخت: ($a = 0$)

تند شونده: شتاب رو به بالا ($v > 0$, $a > 0$) — کند شونده: ($v < 0$, $a > 0$)

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: نیروی کشش ریسمان را در حالتی که با شتاب $2\ m/s^2$ به صورت کندشونده رو به پایین می‌آید، به دست می‌آوریم:

$$T = m(g + a) \xrightarrow[a=2\ m/s^2]{m=5kg,\ g=10\ m/s^2} T = 5(10 + 2) = 60\ N$$

گام دوم: نیروی کشش ریسمان را در حالتی که کابل آسانسور پاره شده است، به دست می‌آوریم. در این حالت $a = -g$ بوده و نیروی کشش نخ به صفر می‌رسد.

$$T' = m(g + a) \xrightarrow[m=5kg]{a=-g} T = 0$$

بنابراین تغییر نیروی کشش ریسمان بین دو حالت برابر است با:

$$T - T' = 60 - 0 = 60\ N$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶۸ اگر جرم گلوله‌ای برابر ۲۰ g و اندازهٔ تکانهٔ آن برابر $800\ \frac{g.m}{s}$ باشد، انرژی جنبشی گلوله چند ژول است؟

۱) ۳۲ ۲) ۱۶ ۳) ۳/۲ ۴) ۱/۶

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

با توجه به روابط تکانه و انرژی جنبشی داریم:

$$\begin{cases} p = mv \\ K = \frac{1}{2}mv^2 \end{cases} \Rightarrow K = \frac{(mv)^2}{2m} = \frac{p^2}{2m}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

با توجه به اطلاعات داده‌شده در سؤال و رابطهٔ تکانه و انرژی جنبشی، می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} m = 20\ g = 20\times10^{-3}\ kg \\ p = 800\ g.m/s = 800\times10^{-3}\ \frac{kg.m}{s} \\ K = ?\ (J) \end{cases}$$

$$K = \frac{p^2}{2m} = \frac{800\times800\times10^{-6}}{2\times20\times10^{-3}} = 16\ J$$

امتحان نهایی

اندازهٔ تکانهٔ یک گلوله برابر $0/05\ \frac{kg.m}{s}$ است. اگر جرم گلوله برابر ۱۰ g باشد، انرژی جنبشی آن چند ژول است؟

(سؤال ۱۰ ـ امتحان نهایی شهریور ۱۴۰۴ رشتهٔ تجربی)

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶۹ معادلهٔ تکانه ـ زمان متحرکی در SI به صورت $p = ۲t^۲ - ۵t + ۱$ است. نیروی خالص متوسط وارد بر متحرک در ۲ ثانیهٔ دوم چند نیوتون است؟

۱) $۱۴\vec{i}$ ۲) $-۱۴\vec{i}$ ۳) $۷\vec{i}$ ۴) $-۷\vec{i}$

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

نیروی خالص متوسط وارد بر جسم، برابر آهنگ تغییرات تکانهٔ وارد بر جسم است:

$$F_{av} = \frac{\Delta p}{\Delta t}$$

پاسخ خیلی تشریحی

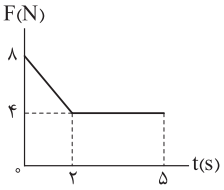
۲ ثانیهٔ دوم یعنی از $t_۱ = ۲\,s$ تا $t_۲ = ۴\,s$. تکانهٔ جسم در این بازهٔ زمانی را از معادلهٔ داده‌شده به دست می‌آوریم:

$$\text{۲ ثانیهٔ دوم} \begin{cases} p = ۲t^۲ - ۵t + ۱ \\ t_۱ = ۲\,s \Rightarrow p_۱ = ۲(۲)^۲ - ۵(۲) + ۱ = -۱ \\ t_۲ = ۴\,s \Rightarrow p_۲ = ۲(۴)^۲ - ۵(۴) + ۱ = ۱۳ \end{cases}$$

$$\Rightarrow F_{av} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{p_۲ - p_۱}{t_۲ - t_۱} = \frac{۱۳ - (-۱)}{۴ - ۲} = \frac{۱۴}{۲} = ۷ \Rightarrow \vec{F}_{av} = (۷\,N)\vec{i}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷۰ نمودار نیروی خالص وارد بر جسمی برحسب زمان به شکل زیر است. اگر جهت حرکت جسم در لحظهٔ $t = ۴\ s$ تغییر کند، تکانهٔ جسم در مبدأ زمان در SI کدام است؟



۱) $۲۰\vec{i}$

۲) $-۲۰\vec{i}$

۳) $۲۴\vec{i}$

۴) $-۲۴\vec{i}$

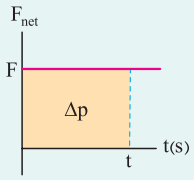
پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint

ابتدا سطح زیر نمودار تا لحظهٔ $t = ۴\ s$ را به دست آورید $(\Delta p_{(۰\to ۴)})$ و سپس با داشتن $p_{۴\,s} = ۰$، تکانهٔ جسم در مبدأ زمان را حساب کنید.

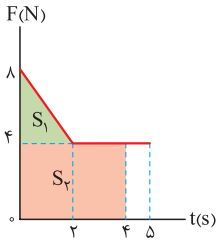
درس Box

سطح زیر نمودار نیروی خالص ـ زمان، برابر تغییرات تکانه است.



پاسخ خیلی تشریحی

سطح زیر نمودار تا لحظهٔ $t = ۴\ s$ را به دست می‌آوریم، چون در لحظهٔ $t = ۴\ s$ جهت حرکت تغییر کرده است، یعنی سرعت در این لحظه، صفر بوده و تکانه نیز برابر صفر است.



$$\Delta p = S_۱ + S_۲ = \frac{۱}{۲}(۲)(۴) + ۴(۴) = ۲۰\ \frac{kg.m}{s}$$

$$p_{۴\,s} - p_۰ = ۲۰ \xrightarrow{p_{۴\,s}=۰} p_۰ = -۲۰\ \frac{kg.m}{s} \Rightarrow \vec{p}_۰ = (-۲۰\ \frac{kg.m}{s})\vec{i}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷۱ **اگر ماهواره‌ای از ارتفاع ۱۶۰۰کیلومتری سطح زمین به ارتفاع ۳۶۰۰کیلومتری سطح زمین منتقل شود، وزن آن چند درصد تغییر می‌کند؟ (شعاع کرهٔ زمین $6400\ km$ است.)**

۱) ۲۰ ۲) ۲۵ ۳) ۳۶ ۴) ۵۶ / ۲۵

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

نیروی گرانشی (وزن) که از طرف زمین بر هر جسم در ارتفاع h از سطح زمین وارد می‌شود، برابر است با:

$$W = G\frac{M_e m}{(R_e + h)^2}$$

(W: وزن (N)، G: ثابت جهانی گرانش، M_e: جرم زمین (kg)، m: جرم جسم (kg)، R_e: شعاع زمین (m)، h: فاصله از سطح زمین (m))

$$G = 6/67\times10^{-11}\ \frac{N.m^2}{kg^2}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

با توجه به رابطهٔ وزن $(W = G\frac{M_e m}{(R_e+h)^2})$ می‌توان نوشت:

$$\frac{W_2}{W_1} = \left(\frac{R_e + h_1}{R_e + h_2}\right)^2 = \left(\frac{6400+1600}{6400+3600}\right)^2 = \left(\frac{8000}{10000}\right)^2 = 0/64$$

اکنون درصد تغییرات نیروی وزن را به دست می‌آوریم:

$$\frac{W_2 - W_1}{W_1}\times100 = \frac{-0/64W_1 - W_1}{W_1}\times100 = \frac{-0/36\,W_1}{W_1}\times100 = -\%36 \Rightarrow$$

۳۶ درصد کاهش می‌یابد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷۲ جرم زمین و ماه به ترتیب 6×10^{24} kg و $7/2\times10^{22}$ kg است. در حالتی که فاصلهٔ مرکز ماه و مرکز زمین 4×10^{5} km باشد، اندازهٔ نیروی گرانشی که زمین و ماه به هم وارد می‌کنند، تقریباً چند نیوتون است؟ $(G=6/67\times10^{-11}\ \frac{N.m^2}{kg^2})$

۱) $1/8\times10^{14}$

۲) $1/8\times10^{20}$

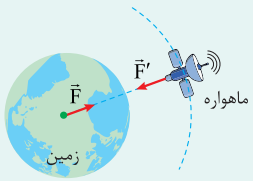
۳) $7/2\times10^{14}$

۴) $7/2\times10^{20}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint با جای‌گذاری صحیح مقادیر در رابطهٔ $F=G\frac{m_1m_2}{r^2}$، نیروی گرانشی بین ماه و زمین را به دست آورید.

درس Box طبق قانون سوم نیوتون، نیروی گرانشی بین هر ۲ جسم، هم‌اندازه و در خلاف جهت یکدیگرند.



$$F=F'$$
$$\vec{F}=-\vec{F}'$$

قانون گرانش عمومی نیوتون

نیروی گرانشی میان دو ذره، با حاصل‌ضرب جرم دو ذره نسبت مستقیم و با مربع فاصلهٔ آن‌ها از یکدیگر نسبت وارون دارد.

$$F=G\frac{m_1m_2}{r^2}$$
$$F=F_{12}=F_{21}$$

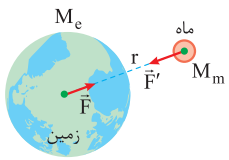
F = بزرگی نیروی گرانشی میان دو ذره (N)

G = ثابت گرانش عمومی $=6/67\times10^{-11}(\frac{N.m^2}{kg^2})$

m_1 و m_2 = جرم‌های دو ذره (kg)

r = فاصلهٔ دو ذره از یکدیگر (m)

پاسخ خیلی تشریحی طبق رابطهٔ گرانش عمومی $F=G\frac{m_1m_2}{r^2}$ می‌توان نوشت:



$$F=G\frac{M_eM_m}{r^2}=6/67\times10^{-11}\times\frac{6\times10^{24}\times7/2\times10^{22}}{16\times10^{16}}\simeq1/8\times10^{20}\,N$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷۳ پرهٔ یک بالگرد با دورهٔ $0/08\ s$ به طور یکنواخت می‌چرخد. تعداد دور بر دقیقه (rpm) پرهٔ بالگرد، چه‌قدر است؟

۱) ۷۵۰ ۲) ۱۵۰۰ ۳) ۲۲۵۰ ۴) ۳۰۰۰

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

می‌توانیم با استفاده از دورهٔ T، تعداد دور بر دقیقه (rpm) را به دست آوریم:

$$rpm = \frac{60}{T}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ تعداد دور بر دقیقه پرهٔ بالگرد برابر است با:

$$rpm = \frac{60}{T} = \frac{60}{0/08} = 750 \text{ دور/دقیقه}$$

کنکور

پرهٔ یک بالگرد با دورهٔ $0/04\ s$ به طور یکنواخت می‌چرخد. تعداد دور بر دقیقه (rpm) پرهٔ بالگرد، چه‌قدر است؟

(سؤال ۱۶۹ کنکور ریاضی مجدد ۱۴۰۱)

۱) ۶۰۰۰ ۲) ۴۵۰۰ ۳) ۳۰۰۰ ۴) ۱۵۰۰

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷۴ خودرویی به جرم $۱۵۰۰\ kg$ در سطحی افقی روی محیط دایره‌ای به شعاع $۶\ m$ با تندی ثابت $۱۲\ m/s$ در حال حرکت است. اندازهٔ نیرویی که سطح افقی به خودرو وارد می‌کند، چند نیوتون است؟ $(g = ۱۰\ m/s^۲)$

۱) $۳/۶\times۱۰^۳$

۲) $۳/۶\times۱۰^۴$

۳) $۳/۹\times۱۰^۳$

۴) $۳/۹\times۱۰^۴$

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint ابتدا نیروی $F_N = mg$ را محاسبه کنید، سپس نیروی $f_s = m\frac{v^۲}{r}$ را به دست آورید و در آخر نیروی واکنش سطح $R = \sqrt{f_s^۲ + F_N^۲}$ را حساب کنید.

درس Box **نیروی مرکزگرا**: در حرکت دایره‌ای یکنواخت، یک نیروی خالص رو به مرکز، سبب ایجاد شتاب مرکزگرا می‌شود. به این نیروی خالص که منجر به حرکت دایره‌ای می‌شود، نیروی مرکزگرا می‌گوییم. با توجه به قانون دوم نیوتون، می‌توان نوشت:

$$F_c = ma_c$$

$$\Rightarrow F_c = m\frac{v^۲}{r}$$

F_c = اندازهٔ نیروی مرکزگرا (N)

m = جرم (kg)

v = تندی (m/s)

r = شعاع مسیر (m)

نکته نیروی مرکزگرا به شکل‌های مختلف می‌تواند تأمین شود، مانند نیروی کشش نخ، نیروی اصطکاک، نیروی گرانشی، نیروی الکتریکی و ... .

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول**: اصطکاک ایستایی بین لاستیک و جاده، نقش نیروی مرکزگرا را ایفا می‌کند:

$$F_N = mg \xrightarrow[g=۱۰\ N/kg]{m=۱۵۰۰kg} F_N = ۱۵۰۰۰\ N$$

$$F_c = ma_c \Rightarrow f_s = m\frac{v^۲}{r} \xrightarrow[r=۶m]{m=۱۵۰۰kg,\ v=۱۲\ m/s} f_s = \frac{۱۵۰۰\times۱۴۴}{۶} = ۳۶۰۰۰\ N$$

گام دوم: اکنون نیروی واکنش سطح را محاسبه می‌کنیم:

$$R = \sqrt{f_s^۲ + F_N^۲} = \sqrt{(۳۶۰۰۰)^۲ + (۱۵۰۰۰)^۲} = ۳/۹\times۱۰^۴\ N$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷۵ ماهواره‌ای روی مدار دایره‌ای به دور زمین می‌چرخد. اگر فاصلهٔ ماهواره از سطح زمین برابر $1600\ km$ باشد، دورهٔ گردش آن چند ثانیه است؟ (شتاب گرانش در سطح زمین $\pi^2\ m/s^2$ و شعاع کرهٔ زمین $6400\ km$ است.)

۱) $\sqrt{2}\times10^3$

۲) $5\sqrt{2}\times10^3$

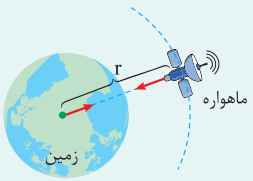
۳) $\sqrt{2}\times10^4$

۴) $5\sqrt{2}\times10^4$

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

هنگامی که ماهواره‌ای به دور زمین می‌چرخد، نیروی گرانشی وارد بر آن، نقش نیروی مرکزگرا را دارد. تندی حرکت ماهواره و دورهٔ چرخش آن به صورت زیر است:



$$F=G\frac{M_e\,m}{r^2}=\frac{m v^2}{r}\Rightarrow v^2=\frac{GM_e}{r}\Rightarrow v=\sqrt{\frac{GM_e}{r}}$$

$$T=\frac{2\pi r}{v}\xrightarrow{v=\sqrt{\frac{GM_e}{r}}}T=\frac{2\pi r\sqrt{r}}{\sqrt{GM_e}}\xrightarrow{GM_e=gR_e^2}T=\frac{2\pi\sqrt{r^3}}{\sqrt{gR_e^2}}\Rightarrow T=\frac{2\pi}{R_e}\sqrt{\frac{r^3}{g}}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ با توجه به رابطهٔ اثبات‌شده در درس‌باکس می‌توان نوشت:

$$T=\frac{2\pi}{R_e}\sqrt{\frac{r^3}{g}}$$

$$\xrightarrow[R_e=6400\,km=64\times10^5\,m\ ,\ g=\pi^2\,m/s^2]{r=R_e+h=(6400+1600)\times10^3\,m=8\times10^6\,m}T=\frac{2\pi}{64\times10^5}\sqrt{\frac{(8\times10^6)^3}{\pi^2}}=\frac{10^{-5}}{32}\sqrt{8^3\times10^{18}}=\frac{10^4}{32}\sqrt{8^2\times8}$$

$$\Rightarrow T=5\sqrt{2}\times10^3\,s$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷۶ کدام گزینه در مورد اوره نادرست است؟ $CO(NH_2)_2$

۱) یک ترکیب آلی با مولکول‌های قطبی است.

۲) هر مولکول آن دارای ۸ پیوند اشتراکی بوده و در هگزان حل نمی‌شود.

۳) عدد اکسایش اتم کربن در آن با عدد اکسایش اتم کربن در متانول برابر است.

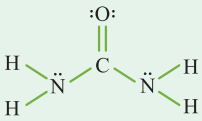
۴) همانند اتیلن گلیکول، توانایی برقراری پیوند هیدروژنی را دارد.

پاسخ: گزینهٔ ۳

نکته

ویژگی‌های اوره:

- فرمول شیمیایی آن $CO(NH_2)_2$ است.
- ساختار لوویس آن به صورت روبه‌رو است:

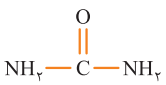


(۸ جفت‌الکترون پیوندی و ۴ جفت‌الکترون ناپیوندی)

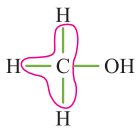
- مولکولی قطبی است و در حلال‌های قطبی مانند آب حل می‌شود.
- توانایی برقراری پیوند هیدورژنی با مولکول‌های خود یا آب را دارد.
- در ساختار آن گروه عاملی آمیدی $(-\overset{\overset{O}{\|}}{C}-N-)$ وجود دارد.
- جرم مولی آن $60\ g.mol^{-1}$ است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

فرمول مولکولی اوره و متانول به ترتیب $CO(NH_2)_2$ و CH_4O است.



$\Rightarrow$ عدد اکسایش کربن در اوره $= 4 - 0 = +4$



$\Rightarrow$ عدد اکسایش کربن در متانول $= 4 - 6 = -2$

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): وجود گروه عاملی آمیدی $(-\overset{\overset{O}{\|}}{C}-N-)$ در ساختار اوره باعث قطبیت آن می‌شود.

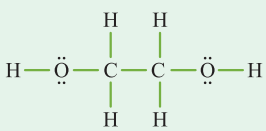
گزینهٔ (۲): اوره یک مولکول قطبی است و در حلال‌های ناقطبی مانند هگزان (C_6H_{14}) حل نمی‌شود.

گزینهٔ (۴): فرمول مولکولی اتیلن گلیکول به صورت $C_2H_6O_2$ است و در ساختار آن پیوند $O-H$ وجود دارد. اتیلن گلیکول و اوره به ترتیب به دلیل داشتن پیوندهای $O-H$ و $N-H$، توانایی تشکیل پیوند هیدروژنی را دارند.

نکته

ویژگی‌های اتیلن گلیکول:

- فرمول شیمیایی آن به صورت $C_2H_4(OH)_2$ یا $C_2H_6O_2$ است.
- ساختار لوویس آن به صورت روبه‌رو است:



- یک دی‌الکل است و در تهیهٔ پلی‌استرها کاربرد دارد.
- مولکولی قطبی است و با تشکیل پیوند هیدروژنی در آب حل می‌شود.
- به عنوان ضدیخ در رادیاتور خودروها کاربرد دارد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷۷ کدام مورد، جزء **مخلوط‌های ناهمگن اما پایدار** است؟

کلوئید

۱) شربت معده
۲) آب قند
۳) شیر
۴) گلاب

پاسخ: گزینهٔ ۳

نکته

مقایسهٔ ویژگی انواع مخلوط‌ها:

نوع مخلوط / ویژگی	سوسپانسیون	کلوئید	محلول
رفتار در برابر نور	نور را پخش می‌کند.	نور را پخش می‌کند.	نور را عبور می‌دهد.
همگن‌بودن	ناهمگن	ناهمگن (به ظاهر همگن)	همگن
پایداری	ناپایدار است؛ ته‌نشین می‌شود.	پایدار است؛ ته‌نشین نمی‌شود.	پایدار است؛ ته‌نشین نمی‌شود.
ذره‌های سازنده	ذره‌های ریزماده	توده‌های مولکولی با اندازه‌های متفاوت	یون‌ها یا مولکول‌های مجزا
نمونه‌های مهم	آب گل‌آلود، شربت معده، شربت خاکشیر	هوای آلوده، مه، چسب، شیر، ژله، سس مایونز، رنگ، مخلوط آب، روغن و صابون	مخلوط مس (II) سولفات و آب، آب قند، آب نمک

پاسخ خیلی تشریحی

در میان مواد داده‌شده، آب قند و گلاب، محلول‌اند و شربت معده و شیر، مخلوط ناهمگن‌اند. پس تا این‌جا گزینه‌های (۲) و (۴) پَر! شربت معده و شیر به ترتیب سوسپانسیون و کلوئید هستند. کلوئیدها برخلاف سوسپانسیون‌ها، پایدارند و ذرات سازندهٔ آن‌ها با گذشت زمان ته‌نشین نمی‌شوند. (درستی گزینهٔ (۳))

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷۸ کدام موارد در رابطه با اولئیک اسید با فرمول مولکولی $C_{۱۷}H_{۳۳}COOH$، درست است؟

$(H = ۱, C = ۱۲, O = ۱۶, Na = ۲۳ : g.mol^{-۱})$

الف) در زنجیرهٔ هیدروکربنی این ترکیب، یک پیوند دوگانه وجود دارد.

ب) اگر ساختار این مولکول به صورت مقابل باشد، در بخش A، ۳ اتم وجود دارد.



ج) از واکنش هر مول از آن با ۴۰ گرم سدیم هیدروکسید، ۳۰۲ گرم صابون جامد حاصل می‌شود.

د) نیروی بین مولکولی غالب در این مولکول همانند روغن زیتون از نوع وان‌دروالس است.

۱) الف و ج ۲) الف و د

۳) ب و ج ۴) ب و د

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✔ عبارت‌های «الف» و «د» درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

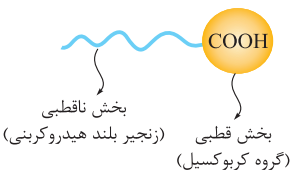
الف)

نکته فرمول مولکولی اسیدهای چرب با ساختار $R-\overset{\overset{O}{\|}}{C}-OH$ و با زنجیرهٔ هیدروکربنی سیرشده به صورت $C_nH_{۲n}O_۲$ است.

از آن‌جا که فرمول مولکولی اولیهٔ اسید به صورت $C_{۱۸}H_{۳۴}O_۲$ است پس یک پیوند دوگانه در بخش هیدروکربنی (R) آن وجود دارد.

ب) الگوی اسیدهای چرب به صورت زیر است:

در بخش قطبی این مولکول، گروه کربوکسیل $(-COOH)$ که حاوی ۴ اتم است، وجود دارد.



ج) از واکنش اسید چرب با $NaOH$، صابون جامد طی معادلهٔ واکنش زیر حاصل می‌شود:

$$RCOOH + NaOH \rightarrow RCOO^{-}Na^{+} + H_۲O$$

همان‌طور که مشخص است، برای تولید صابون، یک اتم H از گروه کربوکسیل اسید چرب حذف شده و Na^{+} به ساختار اضافه می‌شود، بنابراین خواهیم داشت:

$$\underbrace{C_{۱۷}H_{۳۳}COOH}_{\text{اسید چرب}} + NaOH \rightarrow \underbrace{C_{۱۷}H_{۳۳}COO^{-}Na^{+}}_{\text{صابون}} + H_۲O$$

$$\text{۱ mol اسید چرب} \times \frac{\text{۱ mol صابون}}{\text{۱ mol اسید چرب}} \times \frac{\text{۳۰۴ g صابون}}{\text{۱ mol صابون}} = \text{۳۰۴ g صابون}$$

د) نیروی بین مولکولی غالب در روغن زیتون و اسیدهای چرب که مولکول‌هایی ناقطبی هستند، از نوع جاذبهٔ وان‌دروالسی است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷۹ **۱۸ / ۸۷۵ گرم از یک صابون سدیم‌دار کربنه را به ۲۰۰ میلی‌لیتر از یک نمونه آب سخت که غلظت کلسیم کلرید در آن ۰ / ۱۲۵ مولار است، وارد می‌کنیم. اگر ۸۰ درصد این صابون سبب شود تا سختی آب به طور کامل از بین برود، در فرمول ساختاری این صابون چند پیوند دوگانه وجود دارد؟ (صابون فاقد پیوند سه‌گانه است؛ $Na = ۲۳ , O = ۱۶ , C = ۱۲ , H = ۱ : g.mol^{-۱}$)**

$$۲RCOONa(aq) + CaCl_۲(aq) \rightarrow (RCOO)_۲Ca(s) + ۲NaCl(aq)$$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔ با توجه به این‌که ۸۰ درصد از صابون توانسته با تمام کلسیم کلرید ($CaCl_۲$) موجود در محلول واکنش دهد و یون کلسیم را از محلول خارج کند، جرم مولی صابون (M) را به دست می‌آوریم.

استفاده از کسر تبدیل:

$$\text{صابون } ۱۸/۸۷۵g = \frac{۱۰۰}{۸۰} \times \frac{M\,g \text{ صابون}}{۱mol \text{ صابون}} \times \frac{۲mol \text{ صابون}}{۱mol\,CaCl_۲} \times \frac{۰/۱۲۵mol\,CaCl_۲}{۱L \text{ آب سخت}} \times \frac{۱L \text{ آب سخت}}{۱۰۰۰mL \text{ آب سخت}} \times ۲۰۰\,mL \text{ آب سخت}$$

$$\Rightarrow \frac{۰/۲ \times ۰/۱۲۵ \times ۲ \times M \times ۱۰۰}{۸۰} = ۱۸/۸۷۵ \Rightarrow ۵M = ۱۵۱۰ \Rightarrow M = ۳۰۲\ g.mol^{-۱}$$

به‌جور دیگه استفاده از کسر تناسب:

$$\frac{\text{جرم} \times \frac{\text{یازده درصدی}}{۱۰۰}}{\underbrace{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}_{\text{صابون}}} = \frac{\text{حجم} \times \text{غلظت مولی}}{\underbrace{\text{ضریب}}_{CaCl_۲}} \Rightarrow \frac{۱۸/۸۷۵ \times \frac{۸۰}{۱۰۰}}{۲ \times M} = \frac{۰/۱۲۵ \times ۰/۲}{۱} \Rightarrow M = ۳۰۲\ g.mol^{-۱}$$

نکته اگر R گروه آلکیل (زنجیرهٔ هیدروکربنی سیرشده) باشد، خواهیم داشت:

صابون سدیم یا پتاسیم : $RCOOX \Rightarrow C_mH_{۲m+۱}COOX \xrightarrow{m+۱=n} C_nH_{۲n-۱}O_۲X$

صابون آمونیوم : $RCOONH_۴ \Rightarrow C_mH_{۲m+۱}COONH_۴ \xrightarrow{m+۱=n} C_nH_{۲n+۳}O_۲N$

حالا فرمول صابون جامد مورد نظر را در صورتی که R، زنجیرهٔ هیدروکربنی سیرشده (آلکیل) باشد، می‌نویسیم و جرم مولی آن را می‌سنجیم:

فرمول عمومی صابون سدیم : $C_nH_{۲n-۱}O_۲Na \xrightarrow{n=۱۸} C_{۱۸}H_{۳۵}O_۲Na$

جرم مولی صابون $= (۱۸ \times ۱۲) + (۳۵ \times ۱) + (۲ \times ۱۶) + ۲۳ = ۳۰۶\ g.mol^{-۱}$

هر پیوند دوگانه سبب کم‌شدن دو اتم هیدروژن از ساختار صابون می‌شود؛ با توجه به اختلاف جرم مولی صابون با زنجیرهٔ هیدروکربنی سیرشده و محاسبه‌شده ($۳۰۶ - ۳۰۲ = ۴$)، صابون مورد نظر ۲ پیوند دوگانه در زنجیر هیدروکربنی (R) خود دارد. *هواستون باشه* که علاوه بر زنجیر هیدروکربنی، در بخش قطبی صابون (گروه $-\overset{\overset{:O:}{\|}}{C}-\ddot{O}:$) نیز یک پیوند دوگانه وجود دارد، پس در صابون مورد نظر، ۳ پیوند دوگانه (دوتا در زنجیر هیدروکربنی و یکی در بخش قطبی صابون) وجود دارد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸۰ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر، در کدام گزینه آمده است؟

- **اضافه‌کردن نمک خوراکی و شکر به آب، باعث تغییر pH آب نمی‌شود.**
- **شیمی‌دان‌ها پس از کشف ساختار اسید و باز، با ویژگی‌ها و برخی از واکنش‌های آن‌ها آشنا شدند.**
- **لوویس نخستین کسی بود که اسیدها و بازها را بر یک مبنای علمی توصیف کرد.**
- **آمونیاک، خاصیت بازی دارد و افزودن آن به آب در دمای ثابت، سبب افزایش حاصل $\frac{[OH^-]}{[H^+]}$ می‌شود.**

۱) درست ـ نادرست ـ نادرست ـ درست
۲) درست ـ نادرست ـ نادرست ـ نادرست
۳) نادرست ـ درست ـ درست ـ نادرست
۴) درست ـ درست ـ درست ـ نادرست

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✔

عبارت‌های اول و چهارم، درست و عبارت‌های دوم و سوم نادرست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

عبارت اول، نمک خوراکی $(NaCl)$ و شکر $(C_{12}H_{22}O_{11})$، اسید یا باز آرنیوس نیستند، زیرا با حل‌شدن در آب غلظت یون هیدرونیوم $[H^+]$ یا یون هیدروکسید $[OH^-]$ را تغییر نمی‌دهند؛ بنابراین pH آب تغییری نمی‌کند.

عبارت دوم: قبل از آن‌که ساختار اسید و بازها شناخته شود، شیمی‌دان‌ها علاوه بر ویژگی‌های اسیدها و بازها، با برخی واکنش‌های آن‌ها نیز آشنا بودند.

عبارت سوم: آرنیوس (نه لوویس!) نخستین کسی بود که اسیدها و بازها را بر یک مبنای علمی توصیف کرد.

عبارت چهارم: آمونیاک یک باز ضعیف است که با حل‌شدن در آب، سبب افزایش غلظت OH^- و کاهش غلظت H^+ می‌شود.

$$\frac{[OH^-]\uparrow}{[H^+]\downarrow} \Rightarrow \uparrow$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸۱ شمار یون‌های حاصل از اضافه کردن x گرم دی‌نیتروژن پنتااکسید به آب با شمار یون‌های حاصل از اضافه کردن ۲/۰۸ گرم باریم کلرید به آب برابر است. x و مجموع pH این دو محلول در دمای $25\ ^\circ C$ کدام است؟ (حجم نهایی هر دو محلول را یک لیتر در نظر بگیرید؛ $N=14, O=16, Cl=35/5, Ba=137 : g.mol^{-1}$)

۱) ۱/۸ ،۰/۸۱
۲) ۸/۸ ،۰/۸۱
۳) ۱/۸ ،۱/۰۸
۴) ۸/۸ ،۱/۰۸

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی ابتدا معادلهٔ انحلال دی‌نیتروژن پنتااکسید (N_2O_5) و باریم کلرید ($BaCl_2$) را می‌نویسیم:

$$N_2O_5(s)+H_2O(l)\rightarrow 2H^+(aq)+2NO_3^-(aq)$$

$$BaCl_2(s)\rightarrow Ba^{2+}(aq)+2Cl^-(aq)$$

حالا شمار یون‌ها در ۲/۰۸ گرم $BaCl_2$ را به دست می‌آوریم؛ از انحلال هر مول $BaCl_2$ در آب، ۳ مول یون تولید می‌شود:

$$2/08\ g\ BaCl_2\times\frac{1\ mol\ BaCl_2}{208\ g\ BaCl_2}\times\frac{3\ mol\ \text{یون}}{1\ mol\ BaCl_2}=0/03\ mol\ \text{یون}$$

حالا حساب می‌کنیم در چند گرم (x) دی‌نیتروژن پنتااکسید (N_2O_5)، ۰/۰۳ مول یون وجود دارد. *هواستون باشه* که از انحلال هر مول N_2O_5 در آب، ۴ مول یون تولید می‌شود:

$$0/03mol\ \text{یون}\times\frac{1\ mol\ N_2O_5}{4\ mol\ \text{یون}}\times\frac{108\ g\ N_2O_5}{1\ mol\ N_2O_5}=0/81\ g\ N_2O_5$$

یه‌جور دیگه استفاده از کسر تناسب:

$$\frac{\text{جرم}}{\text{ضریب}\times\text{جرم مولی}}=\frac{\text{مول}}{\text{ضریب}}$$

$1\ BaCl_2 \sim 3\ \text{یون}$ $\quad \frac{2/08}{208}=\frac{x}{3}\Rightarrow x=0/03\ mol$

$N_2O_5 \sim 4\ \text{یون}$ $\quad \frac{x}{108}=\frac{0/03}{4}\Rightarrow x=0/81g$

بریم سراغ قسمت دوم سؤال:

باریم کلرید ($BaCl_2$) یک ترکیب یونی است که انحلال آن در آب غلظت یون H^+ یا OH^- موجود در آب و در نتیجه pH آب را تغییر نمی‌دهد؛ پس pH محلول حاوی آن برابر با ۷ (خنثی) است، اما دی‌نیتروژن پنتااکسید (N_2O_5)، اسید آرنیوس است و با توجه به معادلهٔ انحلال آن در آب ۲ مول H^+ تولید می‌کند؛ بنابراین غلظت H^+ و در نهایت pH آن را محاسبه می‌کنیم:

$$0/81\ g\ N_2O_5\times\frac{1\ mol\ N_2O_5}{108\ g\ N_2O_5}\times\frac{2\ mol\ H^+}{1\ mol\ N_2O_5}=0/015\ mol\ H^+$$

$$[H^+]=\frac{\text{مول } H^+}{\text{حجم محلول (L)}}=\frac{0/015\ mol}{1\ L}=15\times10^{-3}\ mol.L^{-1}$$

$$pH=-\log[H^+]=-\log 15\times10^{-3}=-(\log3+\log5-3\log10)=-(0/5+0/7-3)=1/8$$

پس مجموع pH هر دو محلول برابر $8/8=1/8+7$ است.

تیزبازی محلول N_2O_5 در آب، اسیدی ($pH<7$) و محلول $BaCl_2$ در آب، خنثی ($pH=7$) است؛ پس مجموع pH و محلول قطعاً بیشتر از ۷ است، یعنی قسمت دوم سؤال، نیازی به حل نداشت.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸۲ اگر مادهٔ A، الکترولیت و مادهٔ B، غیرالکترولیت باشد، کدام مورد به یقین درست است؟

در محلول یون ایجاد می‌کند.

در محلول آن، یون وجود ندارد.

۱) مادهٔ A در آب، محلول و مادهٔ B در آب، نامحلول است.

۲) ذرات سازندهٔ A در حالت خالص، ذرات باردار هستند.

یعنی یونی است؟

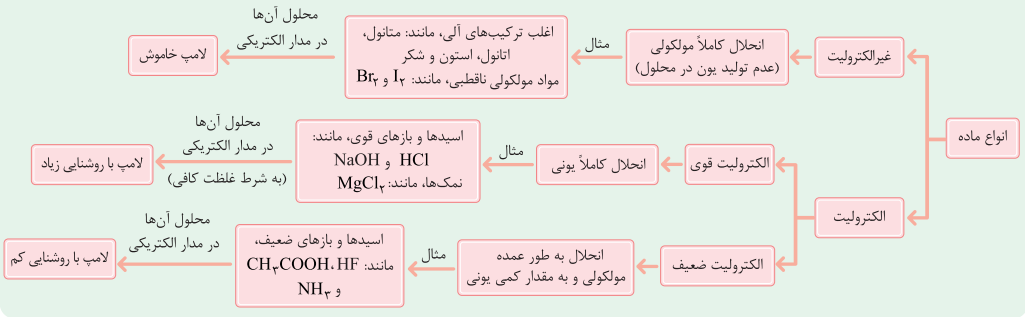
۳) مادهٔ B، توانایی برقراری پیوند هیدروژنی با مولکول‌های خود را دارد.

۴) با افزایش غلظت مولی محلول B، رسانایی الکتریکی آن تغییری نمی‌کند.

پاسخ: گزینهٔ ۴

نکته

انواع مواد از نظر نوع انحلال در آب:



پاسخ خیلی تشریحی

مواد غیرالکترولیت (B) به صورت مولکولی در آب حل می‌شوند و محلول آن‌ها رسانای جریان برق نیست؛ بنابراین با افزایش غلظت این مواد در آب، رسانایی الکتریکی محلول آن‌ها تغییری نمی‌کند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): مادهٔ A (الکترولیت) می‌تواند یک مادهٔ نامحلول در آب مثل AgCl باشد. این ترکیب یونی اگرچه به مقدار بسیار کم در آب حل می‌شود، اما همان مقدار ناچیز حل‌شده هم تقریباً به طور کامل به یون تفکیک می‌شود. در ضمن مواد غیرالکترولیت (B) در آب به صورت مولکولی حل می‌شوند نه این‌که در آب نامحلول باشند!

گزینهٔ (۲): برخی الکترولیت‌ها (A) مانند HCl، یک مادهٔ مولکولی هستند و ذرات تشکیل‌دهندهٔ آن‌ها یون‌ها نیستند!

گزینهٔ (۳): مادهٔ B ممکن است استون ($H_3C-\overset{\overset{O}{\|}}{C}-CH_3$) باشد که توانایی تشکیل پیوند هیدروژنی با مولکول‌های خود را ندارد. (H متصل به FON *ندارد*!)

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸۳ با توجه به مطالب کتاب درسی، کدام مورد دربارهٔ پاک‌کنندهٔ غیرصابونی درست است؟

$RC_6H_4SO_3Na$

$(H=1, C=12, O=16, Na=23, S=32 : g.mol^{-1})$

۱) با جایگزین‌کردن گروه CO_2^- ترکیب RCOONa با SO_3^- به دست می‌آید.

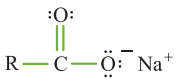
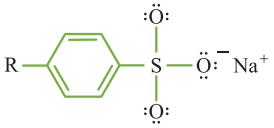
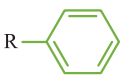
۲) واحدهای سازندهٔ آن با پیوند کووالانسی (اشتراکی) به یکدیگر متصل‌اند.

۳) عدد اکسایش گوگرد در آن با عدد اکسایش گوگرد در هیدروژن سولفید برابر است.

۴) اگر جرم مولی آن، $348\ g.mol^{-1}$ و زنجیر هیدروکربنی در آن سیرشده باشد، تفاوت شمار اتم‌های کربن و هیدروژن در فرمول شیمیایی آن برابر ۱۱ است.

پاسخ: گزینهٔ ۴

نکته مقایسهٔ صابون و پاک‌کنندهٔ غیرصابونی

ویژگی / پاک‌کننده	صابونی با فرمول RCOONa	غیرصابونی با فرمول $RC_6H_4SO_3Na$
ساختار	 (۵ جفت ناپیوندی)	 (۹ جفت ناپیوندی)
بخش ناقطبی (آب‌گریز و چربی‌دوست)	R	
بخش قطبی (آب‌دوست و چربی‌گریز)	$-COO^-$	$-SO_3^-$
حلقهٔ بنزن	ندارد	دارد
نحوهٔ تولید	از واکنش چربی یا روغن‌های مختلف با سدیم هیدروکسید	طی واکنش‌های پیچیده، از بنزن و دیگر مواد اولیه در صنایع پتروشیمی
واکنش با یون‌های موجود در آب سخت	واکنش می‌دهد و رسوب می‌کند.	واکنش نمی‌دهد و رسوبی تشکیل نمی‌شود.
قدرت پاک‌کنندگی	کم‌تر	بیشتر

پاسخ خیلی تشریحی ابتدا به کمک فرمول عمومی پاک‌کننده‌های غیرصابونی $(RC_6H_4SO_3Na)$، تکلیف گروه R که یک زنجیرهٔ هیدروکربنی سیرشده است و در نتیجه شمار اتم‌های کربن و هیدروژن را معلوم می‌کنیم.

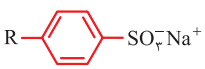
$$\text{جرم مولی } C_nH_{2n+1}C_6H_4SO_3Na = 12n+2n+1+(6\times12)+(4\times1)+32+(3\times16)+23 = 14n+180$$

$$\Rightarrow 14n+180=348 \Rightarrow n=12$$

بنابراین فرمول کلی پاک‌کنندهٔ غیرصابونی مورد نظر به صورت $C_{12}H_{25}C_6H_4SO_3Na$ یا $C_{18}H_{29}SO_3Na$ می‌باشد و اختلاف شمار اتم‌های هیدروژن و کربن آن برابر با $18-29=11$ است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): تنها پاک‌کنندهٔ غیرصابونی که در کتاب درسی بررسی شده، علاوه بر $-SO_3^-$، حلقهٔ بنزنی نیز دارد.

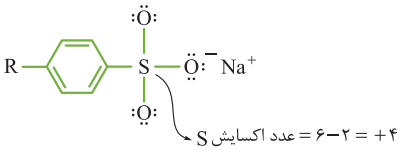


گزینهٔ (۲): پیوند میان کاتیون (Na^+) و آنیون، از نوع پیوند یونی است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

گزینهٔ (۳): فرمول مولکولی هیدروژن سولفید به صورت H_2S است.

عدد اکسایش S در H_2S $\Rightarrow 2(+1)+S=0 \Rightarrow S=-2$



SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸۴ کدام مورد، جملهٔ زیر را به درستی کامل نمی‌کند؟

«در دمای یکسان، از بین اسیدهای ....., اسیدی با ..... ، K_a کوچک‌تری دارد.»

۱) فورمیک اسید و استیک اسید ـ جرم مولی بیشتر

۲) نیترواسید و نیتریک اسید ـ تعداد اکسیژن کم‌تر

۳) هیدروبرمیک اسید و هیدروفلوئوریک اسید ـ توانایی برقراری پیوند هیدروژنی

۴) هیدروسیانیک اسید و کربنیک اسید ـ عدد اکسایش بیشتر برای کربن

پاسخ: گزینهٔ ۴

نکته

مقایسهٔ قدرت چند اسید ضعیف رو به خاطر بسپارید:

مقایسهٔ K_a و قدرت اسیدی: $\underset{\text{هیدروسیانیک اسید}}{HCN} < \underset{\text{کربنیک اسید}}{H_2CO_3} < \underset{\text{استیک اسید}}{CH_3COOH} < \underset{\text{فورمیک اسید}}{HCOOH} < \underset{\text{نیترو اسید}}{HNO_2} < \underset{\text{هیدروفلوئوریک اسید}}{HF}$

پاسخ خیلی تشریحی

کربنیک اسید (H_2CO_3)، اسید قوی‌تری نسبت به هیدروسیانیک اسید (HCN) است و K_a بیشتری دارد.

عدد اکسایش کربن در H_2CO_3: $2(+1)+C+3(-2)=0 \Rightarrow C=+4$

عدد اکسایش کربن در HCN: $H-C\equiv N:$ ، $4-2=+2$

بنابراین عدد اکسایش کربن در H_2CO_3 که K_a بزرگ‌تری دارد، بیشتر است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱):

نکته

در کربوکسیلیک اسیدها، با افزایش تعداد اتم‌های کربن، قدرت اسیدی کاهش می‌یابد.

قدرت اسیدی (K_a): $\underset{\text{متانوئیک (فورمیک) اسید}}{HCOOH} > \underset{\text{اتانوئیک (استیک) اسید}}{CH_3COOH} > \underset{\text{پروپانوئیک اسید}}{CH_3CH_2COOH} > \dots$

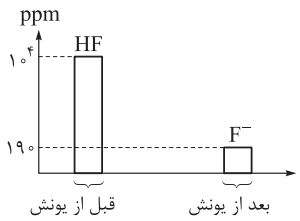
با توجه به این‌که CH_3COOH شمار اتم‌های کربن و هیدروژن بیشتری نسبت به $HCOOH$ دارد، جرم مولی آن بیشتر است، اما K_a و قدرت اسیدی کم‌تری دارد.

گزینهٔ (۲): نیترواسید (HNO_2) برخلاف نیتریک اسید (HNO_3)، یک اسید ضعیف است و K_a کوچک‌تری دارد.

گزینهٔ (۳): هیدروفلوئوریک اسید (HF) برخلاف هیدروبرمیک اسید (HBr)، پیوند $H-F$ داشته و توانایی تشکیل پیوند هیدروژنی را دارد. هم‌چنین HF اسید ضعیف‌تری نسبت به HBr است و K_a کوچک‌تری دارد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸۵ **نمودار زیر، غلظت برخی گونه‌ها را در محلول HF قبل و بعد از یونش آن در ۱ لیتر آب در دمای معین نمایش می‌دهد. کدام مورد نادرست است؟ (چگالی محلول را $1\ g.mL^{-1}$ در نظر بگیرید، $H=1, F=19 : g.mol^{-1}$)**



۱) رسانایی الکتریکی این محلول کم‌تر از رسانایی الکتریکی محلول HCl با غلظت مولی یکسان است.

۲) درصد یونش این اسید در آب برابر با ٪۲ است.

۳) مجموع شمار یون‌ها در محلول برابر با ۰/۰۲ مول است.

۴) ثابت یونش هیدروفلوئوریک اسید در شرایط آزمایش به تقریب برابر 2×10^{-3} است.

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): HF، یک اسید ضعیف و HCl، یک اسید قوی است. در غلظت‌های مولی برابر، به یقین رسانایی الکتریکی HCl بیشتر از HF است، چون مجموع غلظت یون‌ها در نمونهٔ HCl بیشتر بوده و این اسید به طور کامل یونیده می‌شود.

گزینهٔ (۲): ابتدا از طریق فرمول زیر، غلظت مولی اولیهٔ اسید را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{غلظت مولی (M)} = \frac{10\,ad}{\text{جرم مولی}} \xrightarrow{a=ppm\times10^{-4}} M_{HF} = \frac{10\times10^{4}\times10^{-4}\times1}{20} = 0/5\ mol.L^{-1}$$

غلظت مولی F^- را نیز محاسبه می‌کنیم:

$$M_{F^-} = \frac{10\times a\times d}{\text{جرم مولی}} \xrightarrow{a=ppm\times10^{-4}} M_{F^-} = \frac{10\times19\times10^{-4}\times1}{19} = 0/01\ mol.L^{-1}$$

غلظت مولی H^+ و F^- برابر است:

$$[H^+] = [F^-] = 0/01\ mol.L^{-1}$$

مقدار درصد یونش (α) برابر است با:

$$\text{درصد یونش} = \frac{[H^+] \text{ یا } [F^-]}{\text{غلظت اولیهٔ اسید}}\times100 = \frac{0/01}{0/5}\times100 = ٪2$$

گزینهٔ (۳): با توجه به این‌که غلظت مولی هر یک از یون‌های H^+ و F^- برابر ۰/۰۱ مولار است و حجم محلول نیز ۱ لیتر است، بنابراین مجموع شمار یون‌های موجود در محلول برابر ۰/۰۲ مول خواهد بود.

گزینهٔ (۴):

$$K_a = \frac{[H^+][F^-]}{[HA]} = \frac{0/01\times0/01}{0/5-0/01} \simeq \frac{0/01\times0/01}{0/5} = 2\times10^{-4}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸۶ دربارهٔ محلول‌هایی به حجم یکسان از آمونیاک (I) و باریم هیدروکسید (II) با pH برابر، کدام مورد درست است؟

(NH_3 (باز ضعیف) ← آمونیاک (I)، $Ba(OH)_2$ (باز قوی) ← باریم هیدروکسید (II))

۱) غلظت مولار محلول (II) دو برابر محلول (I) است.

۲) شمار یون‌های هیدروکسید در محلول (II)، نصف محلول (I) است.

۳) هر دو محلول، با حجم یکسانی از محلول ۰/۱ مولار هیدروکلریک اسید به طور کامل واکنش می‌دهند.

۴) غلظت مولار یون هیدروکسید در محلول (II) با غلظت مولار یون آمونیوم در محلول (I) برابر است.

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔

با توجه به برابربودن pH محلول، $[H^+]$ و در نتیجه $[OH^-]$ دو محلول با هم برابر است. در محلول NH_3، $[OH^-]$ با $[NH_4^+]$ برابر است.

$$I)\ NH_3 + H_2O \rightleftharpoons NH_4^+ + OH^-$$

$$II)\ Ba(OH)_2 \rightarrow Ba^{2+} + 2OH^-$$

$$pH_I = pH_{II} \Rightarrow [OH^-]_I = [OH^-]_{II} \Rightarrow [NH_4^+] = [OH^-]_I = [OH^-]_{II}$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱):

نکته

در بازهای ضعیف: $[OH^-] = M\alpha$

در بازهای قوی دوظرفیتی: $[OH^-] = 2M$

آمونیاک (NH_3) یک باز ضعیف و باریم هیدروکسید ($Ba(OH)_2$) یک باز قوی ($\alpha \cong 1$) دوظرفیتی است. با توجه به pH و در نتیجه $[OH^-]$ برابر، داریم:

$$NH_3 \Rightarrow [OH^-] = M_I\alpha$$

$$Ba(OH)_2 \Rightarrow [OH^-] = 2M_{II}$$

$$[OH^-]_I = [OH^-]_{II} \Rightarrow M_I\alpha = 2M_{II} \Rightarrow M_{II} = \frac{M_I\alpha}{2}$$

بنابراین نسبت غلظت مولی دو محلول به درجهٔ یونش باز ضعیف نیز بستگی دارد.

گزینهٔ (۲): با توجه به برابر بودن $[OH^-]$ دو محلول، در حجم یکسان، شمار یون‌های OH^- نیز در دو محلول یکسان است.

گزینهٔ (۳): وقتی pH یک باز ضعیف (NH_3) و یک باز قوی ($Ba(OH)_2$) *برابره*، قطعاً غلظت اولیهٔ باز ضعیف بیشتر بوده است.

با توجه به این‌که غلظت اولیهٔ دو باز یکسان نیست، پس حجم متفاوتی از آن‌ها با محلول HCl واکنش می‌دهند.

$$n_a \cdot M_a \cdot V_a = n_b \cdot M_b \cdot V_b$$

(n_a: ظرفیت اسید × غلظت اسید × حجم اسید؛ n_b: ظرفیت باز × غلظت باز × حجم باز)

گول نخوری ✘

در مسائل خنثی‌شدن اسید و باز، از غلظت اولیهٔ اسید و باز (M) استفاده می‌کنیم و نه غلظت یون‌های H^+ و OH^-!

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸۷ **pH محلول ۰/۱ مولار باز BOH با ثابت یونش $۱۰^{-۵}$، چند واحد با pH آب خالص تفاوت دارد و در این محلول، غلظت مولی یون هیدروکسید چند برابر غلظت مولی یون هیدرونیوم است؟ (دما را $۲۵^{\circ}C$ در نظر بگیرید.)**

۱) $۴، ۱۰^{۴}$ ۲) $۴، ۱۰^{۸}$

۳) $۳، ۱۰^{۳}$ ۴) $۳، ۱۰^{۹}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی با استفاده از رابطهٔ ثابت یونش، غلظت OH^- و در نتیجه H^+ را به دست می‌آوریم؛ *هواستون باشه* که در این‌جا چون K_b مقدار کوچکی است، می‌توان از $[OH^-]$ در مخرج کسر ثابت یونش صرف نظر کرد:

$$K_b = \frac{[OH^-]^۲}{M-[OH^-]} \simeq \frac{[OH^-]^۲}{M} \Rightarrow [OH^-]^۲ = K_bM \Rightarrow [OH^-] = \sqrt{K_bM} = \sqrt{۱۰^{-۵} \times ۱۰^{-۱}} = ۱۰^{-۳}$$

$$[H^+] = \frac{۱۰^{-۱۴}}{[OH^-]} = \frac{۱۰^{-۱۴}}{۱۰^{-۳}} = ۱۰^{-۱۱}$$

pH محلول برابر است با:

$$pH = -\log[H^+] = -\log ۱۰^{-۱۱} = ۱۱$$

pH آب خالص در دمای $۲۵^{\circ}C$ برابر ۷ است؛ بنابراین خواهیم داشت:

$$\Delta pH = ۱۱ - ۷ = ۴$$

برای قسمت دوم سؤال هم داریم:

$$\frac{[OH^-]}{[H^+]} = \frac{۱۰^{-۳}}{۱۰^{-۱۱}} = ۱۰^{۸}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸۸ در دو ظرف جداگانه، دو لیتر از محلول‌های نیتروواسید و استیک اسید وجود دارد. اگر pH محلول نیتروواسید برابر ۱/۴ و جرم NO_2^- در محلول نیتروواسید، ۲/۵ گرم بیشتر از جرم CH_3COO^- در محلول استیک اسید باشد، غلظت تعادلی نیتروواسید، چند برابر غلظت تعادلی استیک اسید است؟ $(H=1, C=12, N=14, O=16 : g.mol^{-1})$

اسید	نیتروواسید	استیک اسید
ثابت یونش	4×10^{-4}	5×10^{-5}

۱) ۱/۲۵
۲) ۱/۷۵
۳) ۲/۰
۴) ۲/۵

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint

با استفاده از مقدار pH محلول اسید HNO_2، $[H^+]$ و در نتیجه $[NO_2^-]$ را به دست بیار و تبدیل به جرم کن و از طریق فرمول $K_a=\frac{[H^+]^2}{M_{\text{تعادلی}}}$، غلظت تعادلی HNO_2 رو به دست بیار. از طرفی با توجه به داده‌های سؤال، جرم CH_3COO^- و در نتیجه غلظت مولی آن را حساب کن و از طریق فرمول ثابت یونش، غلظت تعادلی CH_3COOH را به دست بیار. بر این اساس نسبت مورد نظر محاسبه می‌شه!

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: به دست آوردن جرم NO_2^- و غلظت تعادلی HNO_2:

$$HNO_2(aq) \rightleftharpoons H^+(aq) + NO_2^-(aq)$$

$$HNO_2 \text{ در } [H^+]=10^{-pH}=10^{-1/4}=10^{-2+0/6}=10^{-2}\times\underbrace{10^{0/6}}_{(10^{0/3})^2}=2^2\times10^{-2}=0/04\ mol.L^{-1}$$

$$[H^+]=[NO_2^-]=0/04\ mol.L^{-1}$$

$$NO_2^- \text{ جرم : } 2L \text{ محلول} \times\frac{0/04\ mol\ NO_2^-}{1\ L \text{ محلول}}\times\frac{46\ g\ NO_2^-}{1\ mol\ NO_2^-}=3/68\ g\ NO_2^-$$

$$K_a=\frac{[H^+][NO_2^-]}{[HNO_2]_{\text{تعادلی}}}\Rightarrow 4\times10^{-4}=\frac{0/04\times0/04}{[HNO_2]_{\text{تعادلی}}}\Rightarrow [HNO_2]_{\text{تعادلی}}=4\ mol.L^{-1}$$

گام دوم: با توجه به فرض سؤال، جرم CH_3COO^- برابر با $3/68-2/5=1/18$ گرم است؛ بنابراین غلظت تعادلی CH_3COOH را حساب می‌کنیم:

$$CH_3COOH(aq) \rightleftharpoons CH_3COO^-(aq)+H^+(aq)$$

$$CH_3COO^- \text{ غلظت مولار}=\frac{\text{مول حل‌شونده}}{\text{حجم محلول (L)}}=\frac{\frac{1/18\ g}{59\ g.mol^{-1}}}{2\ L}=0/01=10^{-2}\ mol.L^{-1}$$

$$K_a=\frac{[H^+][CH_3COO^-]}{[CH_3COOH]_{\text{تعادلی}}}\Rightarrow 5\times10^{-5}=\frac{10^{-2}\times10^{-2}}{[CH_3COOH]_{\text{تعادلی}}}\Rightarrow [CH_3COOH]_{\text{تعادلی}}=2\ mol.L^{-1}$$

گام سوم: در نهایت خواهیم داشت:

$$\frac{[HNO_2]_{\text{تعادلی}}}{[CH_3COOH]_{\text{تعادلی}}}=\frac{4}{2}=2$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

کنکور

اگر در دمای معین و در دو ظرف جداگانه، غلظت تعادلی HF در محلول، دو برابر غلظت تعادلی استیک اسید در محلول و pH محلول هیدروفلوئوریک اسید، برابر ۱/۳ باشد، تفاوت جرم دو آنیون در محلول آن‌ها، برابر چند گرم است؟ (حجم هر یک از محلول‌ها، برابر یک لیتر است.) $(F=19, O=16, C=12, H=1: g.mol^{-1})$

$HF(aq) \rightleftharpoons H^+(aq) + F^-(aq) \quad , \quad K_a = 5\times10^{-4}$

$CH_3COOH(aq) \rightleftharpoons H^+(aq) + CH_3COO^-(aq) \quad , \quad K_a = 1/6\times10^{-6}$

(سؤال ۹۵ کنکور تجربی ۱۴۰۳ - نوبت اول)

۱) ۰/۸۳۲
۲) ۰/۸۶۲
۳) ۰/۸۸۰
۴) ۰/۷۸۰

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸۹ کدام مطلب درست است؟ $(Mg = ۲۴ , Na = ۲۳ , O = ۱۶ , C = ۱۲ , H = ۱ : g.mol^{-۱})$

۱) پتاسیم هیدروکسید برخلاف آمونیاک بازی قوی است، زیرا یونش آن در آب به صورت کامل و برگشت‌ناپذیر است.

۲) در محلول ۰/۰۱ مولار متیل آمین همانند نیتریک اسید، غلظت مولکول‌های یونیده‌نشده بیشتر از غلظت یون‌های آب‌پوشیده است.

۳) یک گرم منیزیم هیدروکسید در مقایسه با دو گرم جوش‌شیرین، مقدار اسید معدهٔ بیشتری را خنثی می‌کند.

۴) افزودن جوش‌شیرین به پاک‌کنندهٔ صابونی، مشکل پاک‌کنندگی آن در آب سخت را برطرف می‌کند.

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔

اسید معده همان هیدروکلریک اسید ($HCl(aq)$) است. باید تعداد مول HCl خنثی‌شده توسط هر یک از بازهای $Mg(OH)_۲$ و $NaHCO_۳$ را حساب کنیم:

$$Mg(OH)_۲ + ۲HCl \rightarrow MgCl_۲ + ۲H_۲O$$

$$۱\ g\ Mg(OH)_۲ \times \frac{۱\ mol\ Mg(OH)_۲}{۵۸\ g\ Mg(OH)_۲} \times \frac{۲\ mol\ HCl}{۱\ mol\ Mg(OH)_۲} = \frac{۱}{۲۹}\ mol\ HCl$$

$$NaHCO_۳ + HCl \rightarrow NaCl + CO_۲ + H_۲O$$

$$۲\ g\ NaHCO_۳ \times \frac{۱\ mol\ NaHCO_۳}{۸۴\ g\ NaHCO_۳} \times \frac{۱\ mol\ HCl}{۱\ mol\ NaHCO_۳} = \frac{۱}{۴۲}\ mol\ HCl$$

با توجه به اعداد به‌دست‌آمده *تابلوئه که!* ۱ گرم $Mg(OH)_۲$ مقدار بیشتری HCl را نسبت به ۲ گرم $NaHCO_۳$ خنثی می‌کند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

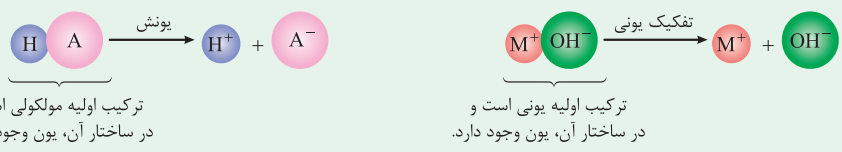
گزینهٔ (۱):

نکته

تفاوت یونش و تفکیک:

یونش: فرایندی است که در آن یک **ترکیب مولکولی**، به یون‌های مثبت و منفی تبدیل می‌شود، یعنی وقتی ترکیب مورد نظر (مثل HCl) در ابتدا به صورت مولکولی بوده و در ساختار آن یون وجود ندارد، اما بر اثر حل‌شدن در آب به یون‌های مثبت و منفی تبدیل می‌شود، برای آن واژهٔ «یونش» را به کار می‌بریم.

تفکیک یونی: فرایندی است که در آن یک **ترکیب یونی** به یون‌های سازندهٔ خود تبدیل می‌شود؛ پس *هواستون باشه* که حق نداریم برای ترکیب‌های یونی از واژهٔ «یونش» استفاده کنیم، *به باش* برای این ترکیب‌ها، از واژهٔ «تفکیک یونی» استفاده می‌کنیم. بدین معنی که ترکیب مورد نظر (مانند NaOH) از ابتدا در ساختار خود دارای یون بوده است و بر اثر حل‌شدن در آب، یون‌ها فقط از یکدیگر تفکیک شده‌اند.



پتاسیم هیدروکسید (KOH) یک ترکیب یونی است و حق نداریم برای ترکیب‌های یونی از واژهٔ «یونش» استفاده کنیم!

گزینهٔ (۲): نیتریک اسید ($HNO_۳$) یک اسید قوی است و در محلول آن، خبری از مولکول‌های یونیده‌نشدهٔ اسید نیست.

گزینهٔ (۴): جوش‌شیرین ($NaHCO_۳$) با یون‌های $Ca^{۲+}$ و $Mg^{۲+}$ موجود در آب سخت واکنش نمی‌دهد؛ پس نمی‌تواند قدرت پاک‌کنندگی صابون در آب سخت را افزایش دهد!

نکته

بد نیست بدانید که $Mg(HCO_۳)_۲$ و $Ca(HCO_۳)_۲$ مانند $NaHCO_۳$، در آب محلول‌اند؛ بنابراین اضافه‌کردن جوش‌شیرین به شوینده‌ها نمی‌تواند به دلیل واکنش آن با یون‌های کلسیم و منیزیم باشد.

اضافه‌کردن جوش‌شیرین به شوینده‌ها با هدف افزایش قدرت پاک‌کنندگی به دلیل واکنش آن با چربی‌ها و تولید صابون است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹۰ **مقدار کربن دی‌اکسید حاصل از واکنش ۴ لیتر محلول هیدروکلریک اسید با $pH = ۰/۷$ با مقدار کافی سدیم هیدروژن کربنات، با مقدار گاز کربن دی‌اکسید حاصل از سوختن کامل چند مول بنزین برابر است؟**

۱) ۰/۱ ۲) ۰/۴

۳) ۰/۶ ۴) ۰/۸

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint اول با استفاده از pH، غلظت HCl را به دست بیار و با توجه به واکنش HCl و $NaHCO_۳$، مول $CO_۲$ تولیدشده را حساب کن. در نهایت با توجه به مول $CO_۲$ به‌دست‌آمده، مول بنزین $(C_۸H_{۱۸})$ را محاسبه کن.

پاسخ خیلی تشریحی غلظت مولی محلول HCl را حساب می‌کنیم:

$$[HCl] = [H^+] = ۱۰^{-pH} = ۱۰^{-۰/۷} = ۱۰^{-۱} \times \underbrace{۱۰^{+۰/۳}}_{۲} = ۰/۲ \ mol.L^{-۱}$$

معادلهٔ واکنش HCl با $NaHCO_۳$ را نوشته و مول کربن دی‌اکسید $(CO_۲)$ را حساب می‌کنیم:

$$NaHCO_۳(s) + HCl(aq) \rightarrow NaCl(aq) + CO_۲(g) + H_۲O(l)$$

$$۴L\ HCl(aq) \times \frac{۰/۲\ mol\ HCl}{۱\ L\ HCl(aq)} \times \frac{۱\ mol\ CO_۲}{۱\ mol\ HCl} = ۰/۸\ mol\ CO_۲$$

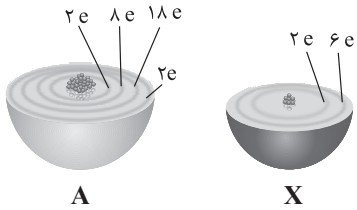
حالا باید حساب کنیم چند مول بنزین، ۰/۸ مول کربن دی‌اکسید تولید می‌کند. از سوختن کامل ۱ مول بنزین $(C_۸H_{۱۸})$، ۸ مول کربن دی‌اکسید تولید می‌شود.

$$C_۸H_{۱۸} \sim ۸\ CO_۲$$

$$۰/۸\ mol\ CO_۲ \times \frac{۱\ mol\ C_۸H_{۱۸}}{۸\ mol\ CO_۲} = ۰/۱\ mol\ C_۸H_{۱۸}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹۱ **با توجه به شکل مقابل، کدام مطلب درست است؟**



۱) به‌ازای تشکیل ۰/۵ مول فراورده از واکنش A و X، $3/01\times10^{23}$ الکترون بین گونه‌ها مبادله می‌شود.

۲) عنصر قبل از A در جدول دوره‌ای، خاصیت کاهندگی کم‌تری نسبت به A دارد و با محلول ۱ مولار هیدروکلریک اسید واکنش نمی‌دهد.

۳) X در واکنش با عناصر فلوئور و کلر، ترکیبات XF_2 و XCl_2 و با عدد اکسایش برابر تشکیل می‌دهد.

۴) امروزه از واکنش دومین عنصر دورهٔ سوم با X، در عکاسی به عنوان منبع نور استفاده می‌شود.

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✔ اول بیایید تکلیف اتم‌های A و X را مشخص کنیم:

$$\text{عدد اتمی A}: \underbrace{2}_{\text{لایهٔ اول}} + \underbrace{8}_{\text{لایهٔ دوم}} + \underbrace{18}_{\text{لایهٔ سوم}} + \underbrace{2}_{\text{لایهٔ چهارم}} = 30 \Rightarrow A: {}_{30}Zn$$

$$\text{عدد اتمی X}: \underbrace{2}_{\text{لایهٔ اول}} + \underbrace{6}_{\text{لایهٔ دوم}} = 8 \Rightarrow X: {}_{8}O$$

عنصر قبل از $_{30}Zn$ (A)، $_{29}Cu$ است که خاصیت کاهندگی کم‌تری نسبت به Zn داشته و نمی‌تواند با محلول هیدروکلریک اسید (HCl) واکنش دهد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): معادلهٔ موازنه‌شدهٔ واکنش به صورت زیر است:

$$2Zn + O_2 \rightarrow 2ZnO$$

در این واکنش، Zn کاهنده است و عدد اکسایش آن، از صفر به ۲+ رسیده است:

۴=۲×۱×۲= تغییر عدد اکسایش در کاهنده × شمار اتم‌های اکسایش‌یافته در کاهنده × ضریب کاهنده = شمار الکترون‌های مبادله‌شده

به‌ازای تشکیل ۲ مول فراورده (ZnO)، ۴ مول الکترون مبادله شده است؛ بنابراین به‌ازای تشکیل ۰/۵ مول از آن، ۱ مول ($6/02\times10^{23}$) الکترون مبادله می‌شود.

گزینهٔ (۳): در واکنش $_{8}O$ با $_{9}F$ و $_{17}Cl$، مولکول‌های OF_2 و OCl_2 تشکیل می‌شود. با توجه به مقایسهٔ خصلت نافلزی عنصرها (F > O > Cl)، عدد اکسایش اکسیژن در OF_2 و OCl_2 به ترتیب برابر ۲+ و ۲− است.

گزینهٔ (۴): منیزیم ($_{12}Mg$)، دومین عنصر دورهٔ سوم است. در گذشته (*نه امروزه!*) از واکنش $_{12}Mg$ و $_{8}O$ در عکاسی به عنوان منبع نور استفاده می‌شد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹۲ تغییر عدد اکسایش اتم اکسنده در واکنش «ب»، چند برابر تغییر عدد اکسایش اتم کاهنده در واکنش «الف» است؟

الف) $H_2SO_4 + PbO_2 + Pb \rightarrow PbSO_4 + H_2O$

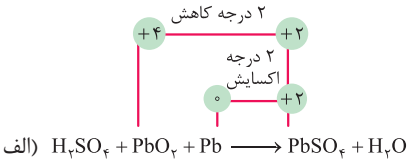
ب) $CO_2 + NH_2OH \rightarrow CO + N_2 + H_2O$

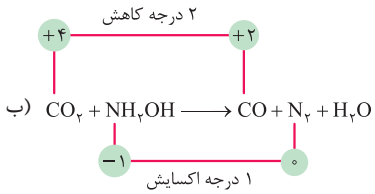
۱) ۰/۲۵ ۲) ۰/۵ ۳) ۰/۷۵ ۴) ۱

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی

ابتدا تغییر عدد اکسایش اتم‌ها را ببینیم:





اتم C که در واکنش «ب» کاهش یافته، اکسنده و اتم Pb که در واکنش «الف» اکسایش یافته، کاهنده است.

$$\frac{\text{تغییر عدد اکسایش C}}{\text{تغییر عدد اکسایش Pb}} = \frac{۲}{۲} = ۱$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹۳ با توجه به نیم‌واکنش‌های زیر، پاسخ پرسش‌های (الف) و (ب) به ترتیب در کدام گزینه آمده است؟

الف) کدام فلز در محیط مرطوب و خنثی اکسایش نمی‌یابد، اما در محیط اسیدی اکسایش می‌یابد؟

ب) emf فرایند خوردگی آهن گالوانیزه بر اثر خراش در هوای مرطوب و خنثی کدام است؟

آهن با روکش Zn

$O_2(g)+4H^+(aq)+4e^- \rightarrow 2H_2O(l)$	$E^\circ = +1/23V$
$O_2(g)+2H_2O(l)+4e^- \rightarrow 4OH^-(aq)$	$E^\circ = +0/40V$
$Zn^{2+}(aq)+2e^- \rightarrow Zn(s)$	$E^\circ = -0/76V$
$Fe^{2+}(aq)+2e^- \rightarrow Fe(s)$	$E^\circ = -0/44V$
$Ag^+(aq)+e^- \rightarrow Ag(s)$	$E^\circ = +0/8V$
$Sn^{2+}(aq)+2e^- \rightarrow Sn(s)$	$E^\circ = -0/19V$

۱) نقره ـ $0/32V$ ۲) قلع ـ $0/32V$

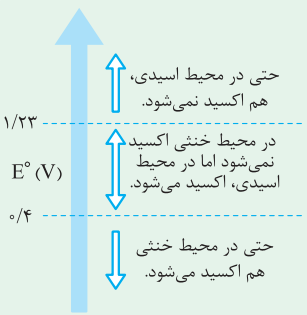
۳) قلع ـ $1/16V$ ۴) نقره ـ $1/16V$

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔ بررسی سؤالات:

الف)

نکته E° اکسیژن در محیط خنثی، $+0/4V$ و در محیط اسیدی، $+1/23V$ است؛ بنابراین فلزهایی که E° آن‌ها بین این دو عدد است، در محیط‌های خنثی اکسید نمی‌شوند، اما در محیط‌های اسیدی اکسایش می‌یابند.



E° نقره (Ag) بین $0/4V$ و $1/23V$ قرار دارد؛ بنابراین در محیط خنثی اکسید نمی‌شود، اما در محیط اسیدی، اکسید می‌شود.

پس گزینه‌های (۲) و (۳) پَر!

ب) در آهن گالوانیزه، سطح آهن با فلز روی (Zn) پوشیده می‌شود و در اثر خراش در محیط مرطوب، فلز روی اکسایش می‌یابد (آند) و فلز آهن محافظت می‌شود. دقت کنید که نیم‌واکنش کاهش مربوط به مولکول‌های اکسیژن است.

نیم‌واکنش اکسایش: $2Zn(s) \rightarrow 2Zn^{2+}(aq)+4e^-$

نیم‌واکنش کاهش: $O_2(g)+2H_2O(l)+4e^- \rightarrow 4OH^-(aq)$

واکنش کلی: $2Zn(s)+O_2(g)+2H_2O(l) \rightarrow 2Zn^{2+}(aq)+4OH^-(aq)$

$emf = E^\circ(\text{کاتد}) - E^\circ(\text{آند}) = 0/4-(-0/76) = 1/16\ V$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹۴ کدام گزینه نادرست است؟

۱) سوخت‌های فسیلی رایج‌ترین سوخت برای خودروها و نیروگاه‌ها به شمار می‌روند.

۲) در سلول سوختی هیدروژن ـ اکسیژن به منظور تولید جریان برق، واکنش سوختن هیدروژن انجام می‌شود.

۳) تعداد مراحل تبدیل انرژی شیمیایی به الکتریکی در روش سنتی بیشتر از سلول سوختی است.

۴) در تولید انرژی الکتریکی، استفاده از هیدروژن در سلول سوختی، باعث افزایش بازده نسبت به سوختن آن در موتور درون‌سوز می‌شود.

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✔

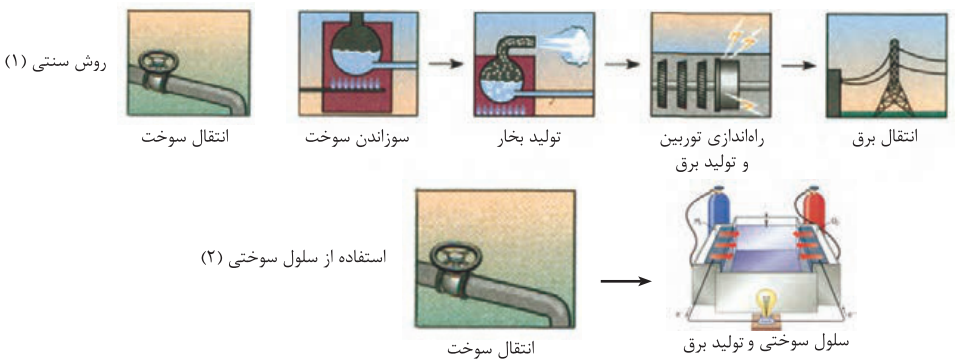
در سلول سوختی هیدروژن ـ اکسیژن، گاز هیدروژن به آرامی و به صورت کنترل‌شده اکسید می‌شود.

(واکنش از نوع اکسایش است نه سوختن!)

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): *کاملاً درسته!*

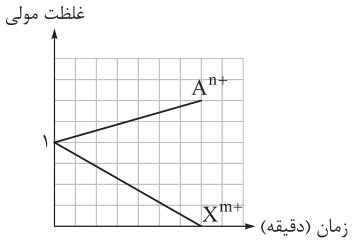
گزینهٔ (۳): با توجه به تصویر کتاب درسی، مراحل تبدیل انرژی شیمیایی موجود در یک سوخت به انرژی الکتریکی در روش سنتی نسبت به استفاده از سلول سوختی، بیشتر است.



گزینهٔ (۴): سوزاندن گاز هیدروژن در موتور درون‌سوز بازدهی نزدیک به ۲۰ درصد دارد، در حالی که اکسایش آن در سلول سوختی بازده را تا سه برابر افزایش می‌دهد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹۵ نمودار تغییرات غلظت یون‌ها در یک سلول گالوانی به صورت زیر است. کدام مطلب درست است؟



$$E^\circ(Zn^{2+}/Zn) = -0/76V \ , \ E^\circ(Cu^{2+}/Cu) = +0/34\ V$$
$$E^\circ(Fe^{2+}/Fe) = -0/44\ V \ , \ E^\circ(Ag^{+}/Ag) = +0/8\ V$$
$$E^\circ(K^{+}/K) = -2/90V \ , \ E^\circ(Al^{3+}/Al) = -1/66\ V$$

۱) نمودار می‌تواند مربوط به سلول گالوانی «پتاسیم ـ آهن» باشد که emf آن ۲/۴۶V است.

۲) نمودار می‌تواند مربوط به سلول گالوانی «مس ـ نقره» باشد که برای واکنش با هر مول عامل اکسنده، دو مول عامل کاهنده نیاز است.

۳) اگر X، نقره باشد، A می‌تواند روی باشد و ولتاژ آن بیش از یک ولت است.

۴) اگر A، آلومینیم باشد، X می‌تواند مس باشد و در این سلول آنیون‌ها از دیوارهٔ متخلخل به نیم‌سلول A وارد می‌شوند.

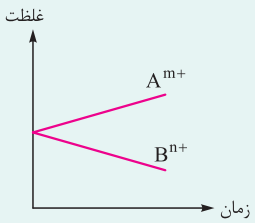
پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

معادلهٔ کلی واکنش انجام‌شده در یک سلول گالوانی را که از دو الکترود فلزی تشکیل شده است، می‌توان به صورت زیر نشان داد:

$$nA + mB^{n+} \rightarrow nA^{m+} + mB$$

طبق این واکنش، الکترود A نقش آند (E° کم‌تر) و الکترود B، نقش کاتد (E° بیشتر) را دارد.



هم‌چنین با تولید یون A^{m+} (یون الکترود آندی)، غلظت آن در محلول افزایش یافته و با مصرف یون B^{n+} (یون الکترود کاتدی) غلظت آن در محلول کاهش می‌یابد.

نسبت تغییرات غلظت این دو یون در یک بازهٔ زمانی مشخص برابر با نسبت ضریب استوکیومتری آن‌ها در معادلهٔ کلی واکنش است.

$$\frac{\Delta[A^{m+}]}{\Delta[B^{n+}]} = \frac{\text{ضریب } A^{m+}}{\text{ضریب } B^{n+}} = \frac{n}{m}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

با توجه به نمودار داده‌شده، در یک بازهٔ زمانی مشخص، غلظت A^{n+}، ۲ واحد افزایش و غلظت X^{m+}، ۴ واحد کاهش یافته است.

بنابراین در سلول مورد نظر، A نقش آند و X نقش کاتد را دارد و معادلهٔ واکنش کلی انجام‌شده به صورت زیر است:

$$A + 2X^{m+} \rightarrow A^{n+} + 2X \xrightarrow{m=1,\ n=2} A + 2X^{+} \Rightarrow A^{2+} + 2X$$

در سلول نقره (X) ـ روی (A)، Ag با E° بیشتر، نقش کاتد و Zn با E° کم‌تر، نقش آند را دارد.

$$Zn + 2Ag^{+} \rightarrow Zn^{2+} + 2Ag$$
$$emf = E^\circ(\text{کاتد}) - E^\circ(\text{آند}) = 0/8 - (-0/76) = 1/56V$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): در شکل، شیب تغییرات غلظت یون آند، نصف تغییرات غلظت یون کاتد است؛ یعنی بار یون آند دو برابر بار کاتیون کاتد است. در این‌جا *قضیه برعکسه!* K، آند و کاتیون آن K^{+} و Fe، کاتد و کاتیون آن Fe^{2+} است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

گزینهٔ (۲): در سلول گالوانی مس ـ نقره، یون نقره گونهٔ اکسنده و مس گونهٔ کاهنده است.

$$\underbrace{Cu}_{\text{کاهنده}} + \underbrace{2Ag^{+}}_{\text{اکسنده}} \rightarrow Cu^{2+} + 2Ag$$

در این سلول به ازای مصرف ۱ مول کاهنده، ۲ مول اکسنده مصرف می‌شود.

گزینهٔ (۴): نمودار نمی‌تواند مربوط به سلول گالوانی مس ـ آلومینیم باشد، زیرا نسبت بار کاتیون در آند به کاتیون در کاتد برابر با ۲ نیست.

$$2Al + 3Cu^{2+} \rightarrow 2Al^{3+} + 3Cu$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹۶ در شرایط معین، در سلول گالوانی Al ـ SHE، ۳۳/۶ میلی‌لیتر گاز هیدروژن در شرایط استاندارد تولید می‌شود. اگر تغییر جرم تیغهٔ آندی در این سلول، نصف تغییر جرم تیغهٔ کاتدی در سلول گالوانی «منیزیم ـ نقره» باشد، تعداد الکترون‌های مبادله‌شده در سلول «میزیم ـ نقره» چه مضربی از 10^{20} است؟

$(Mg = 24 , Al = 27 , Ag = 108 : g.mol^{-1})$

۱) ۱/۵۰۵ ۲) ۳/۰۱
۳) ۴/۵۱۵ ۴) ۶/۰۲

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی در سلول Al-SHE، آلومینیم نقش آند و SHE، نقش کاتد را دارد و معادلهٔ موازنه‌شدهٔ واکنش کلی سلول به صورت زیر است:

$$2Al + 6H^+ \rightarrow 2Al^{3+} + 3H_2$$

جرم آلومینیم مصرف‌شده را به دست می‌آوریم:

استفاده از کسر تبدیل:

$$33/6\ mLH_2 \times \frac{1\ mol\ H_2}{22400\ mLH_2} \times \frac{2\ molAl}{3\ mol\ H_2} \times \frac{27\ g\ Al}{1\ mol\ Al} = 0/027\ g\ Al$$

یه‌جور دیگه استفاده از کسر تناسب:

$$\frac{\text{جرم}}{\underbrace{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}_{Al}} = \frac{\text{حجم}}{\underbrace{\text{حجم مولی} \times \text{ضریب}}_{H_2}} \Rightarrow \frac{x}{2\times27} = \frac{33/6}{1000\times3\times22/4} \Rightarrow x = 0/027\ g\ Al$$

در سلول منیزیم ـ نقره، Mg نقش آند و Ag نقش کاتد را دارد.

$$\text{تغییر جرم کاتد } (Ag) = 2\times0/027 = 0/054\ g$$

در این سلول با مصرف ۱ مول نقره، ۱ مول الکترون مبادله می‌شود؛ پس خواهیم داشت:

$$Mg + 2Ag^+ \rightarrow Mg^{2+} + 2Ag$$

استفاده از کسر تبدیل:

$$0/054\ g\ Ag \times \frac{1\ mol\ Ag}{108\ g\ Ag} \times \frac{1\ mol\ e^-}{1\ mol\ Ag} \times \frac{6/02\times10^{23}\ e^-}{1\ mol\ e^-} = 3/01\times10^{20}\ e^-$$

یه‌جور دیگه

$$Ag \sim 1\ e^-$$

$$\frac{\text{جرم}}{\underbrace{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}_{Ag}} = \frac{\text{تعداد ذره}}{\underbrace{6/02\times10^{23} \times \text{ضریب}}_{e^-}} \Rightarrow \frac{0/054}{108} = \frac{x}{6/02\times10^{23}} \Rightarrow x = 3/01\times10^{20}$$

کنکور اگر تغییر جرم آند، در سلول گالوانی استاندارد «منیزیم ـ نقره»، نصف تغییر جرم کاتد در سلول گالوانی استاندارد «منگنز ـ کروم» باشد و ۳/۲۴ گرم به جرم کاتد در سلول «منیزیم ـ نقره» اضافه شود، به تقریب چند الکترون در سلول «منگنز ـ کروم» مبادله شده است؟ (بازه‌های زمانی انجام واکنش‌ها، متفاوت در نظر گرفته شود.)

$(Mg = 24, Cr = 52, Mn = 55, Ag = 108 : g.mol^{-1})$

$E^\circ(Ag^+ / Ag) = +0/80\ V$, $E^\circ(Cr^{3+} / Cr) = -0/74\ V$

$E^\circ(Mn^{2+} / Mn) = -1/18\ V$, $E^\circ(Mg^{2+} / Mg) = -2/37\ V$

(سؤال ۱۰۳ کنکور تجربی ۱۴۰۴ ـ نوبت دوم)

۱) $2/5\times10^{22}$ ۲) $1/5\times10^{23}$
۳) $5/0\times10^{22}$ ۴) $2/0\times10^{23}$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹۷ **با توجه به مطالب کتاب درسی، کدام مورد، جملهٔ داده‌شده را به درستی کامل می‌کند؟**

«معادلهٔ واکنش کلی انجام‌شده در ..... به صورت ..... است.»

۱) سلول تهیهٔ فلز سدیم، $2NaCl(aq) \rightarrow 2Na(aq) + Cl_2(g)$

۲) باتری دکمه‌ای روی ـ نقره، $Ag(s) + ZnO(s) \rightarrow Ag_2O(s) + Zn(s)$

۳) سلول نور ـ الکتروشیمیایی، $SiO_2(s) + 2H_2O(l) \rightarrow Si(s) + 2H_2(g)$

۴) باتری لیتیمی استفاده‌شده در تلفن همراه، $Li(s) + MnO_2(s) \rightarrow LiMnO_2(s)$

مشاوره آشنایی با انواع سلول‌های الکتروشیمیایی معرفی‌شده در کتاب درسی و شناسایی گونه‌های اکسنده و کاهنده و همچنین نیم‌واکنش‌های کاهش و اکسایش در آن‌ها، از مهم‌ترین و پرتکرارترین مباحث در کنکور سراسری است.

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔ در باتری‌های لیتیمی، لیتیم اکسایش یافته و Li^+ و e^- تولید می‌شود؛ سپس این گونه‌های تولیدشده در نیم‌واکنش کاتدی مصرف می‌شوند.

نیم‌واکنش آندی : $Li(s) \rightarrow Li^+(s) + e^-$

نیم واکنش کاتدی : $MnO_2(s) + Li^+(s) + e^- \rightarrow LiMnO_2(s)$

واکنش کلی : $Li(s) + MnO_2(s) \rightarrow LiMnO_2(s)$

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): برای تهیهٔ سدیم، NaCl مذاب (l) را برقکافت می‌کنند (نه (aq)!) همچنین Na تولیدشده نیز به حالت مذاب (l) است.

نیم‌واکنش آندی (در قطب مثبت) : $2Cl^-(l) \rightarrow Cl_2(g) + 2e^-$

نیم واکنش کاتدی (در قطب منفی) : $2Na^+(l) + 2e^- \rightarrow 2Na(l)$

واکنش کلی سلول : $2NaCl(l) \rightarrow 2Na(l) + Cl_2(g)$

گزینهٔ (۲): در باتری روی ـ نقره، فلز روی (Zn) نقش آند و نقره اکسید (Ag_2O) نقش کاتد را دارد.

$$\overset{\text{کاهنده}}{Zn(s)} + \overset{\text{اکسنده}}{Ag_2O(s)} \rightarrow ZnO(s) + 2Ag(s)$$

اکسایش

کاهش

گزینهٔ (۳): در سلول نور الکتروشیمیایی، Si در آند، اکسایش و H_2O در کاتد کاهش می‌یابد.

نیم‌واکنش اکسایش: $Si(s) + 2H_2O(l) \rightarrow SiO_2(s) + 4H^+(aq) + 4e^-$

نیم واکنش کاهش: $4H_2O(l) + 4e^- \rightarrow 2H_2(g) + 4OH^-(aq)$

واکنش کلی: $Si(s) + 2H_2O(l) \rightarrow SiO_2(s) + 2H_2(g)$

با یه نگاه به معادله هم می‌شه فهمید گزینهٔ (۳) غلطه! چون در سمت راست، اصلاً اکسیژن وجود نداره! طبق قانون پایستگی جرم، چنین چیزی امکان‌پذیر نیست.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹۸ در کدام فرایند زیر، عدد اکسایش اتم کربن از کم‌ترین مقدار به بیشترین مقدار ممکن خود می‌رسد؟

۱) تبدیل اتن به اتیلن گلیکول (−۴ ← +۴)

۲) تبدیل فرمالدهید (CH_2O) به فورمیک اسید

۳) سوختن کامل متان

۴) تجزیهٔ گرمایی کلسیم کربنات

پاسخ: گزینهٔ ۳

نکته دامنهٔ تغییرات عدد اکسایش عنصرها:

۱) هیدروژن دارای عدد اکسایش صفر (در حالت آزاد)، ۱+ (در ترکیب‌های دوتایی با نافلزها و ترکیب‌های آلی) یا ۱− (در ترکیب‌های دوتایی با فلزها) است. (از ۱− تا ۱+)

۲) برای فلزهای گروه ۱ و ۲، پایین‌ترین عدد اکسایش، صفر و بالاترین عدد اکسایش، برابر با شمارهٔ گروه عنصر است.

به طور کلی در همهٔ فلزها، پایین‌ترین عدد اکسایش برابر با صفر است (عدد اکسایش عنصر در حالت آزاد)، زیرا فلزها هیچ‌وقت نمی‌توانند الکترون بگیرند و به یون منفی تبدیل شوند. در ضمن خواندیم که برخی فلزها در ترکیب‌هایشان، فقط یک نوع عدد اکسایش دارند:

عنصر	فلزهای گروه ۱	فلزهای گروه ۲	آلومینیم ($_{13}Al$)	اسکاندیم ($_{21}Sc$)	روی ($_{30}Zn$)	نقره ($_{47}Ag$)
عدد اکسایش در ترکیب‌ها	+۱	+۲	+۳	+۳	+۲	+۱

۳) فلزهای واسطه اعداد اکسایش متنوعی دارند. بهتر است بالاترین عدد اکسایش چند فلز واسطهٔ مهم را بلد باشید:

عنصر	$_{23}V$	$_{24}Cr$	$_{25}Mn$	$_{26}Fe$	$_{29}Cu$
بالاترین عدد اکسایش	+۵	+۶	+۷	+۳	+۲

۴) برای عنصرهای گروه ۱۴ تا ۱۷ (به‌جز اکسیژن و فلوئور)، پایین‌ترین و بالاترین عدد اکسایش از رابطه‌های زیر به دست می‌آید: (از چپ به راست بخوانید.)

دامنهٔ تغییرات عدد اکسایش در گروه‌های ۱۴ تا ۱۷ (به‌جز اکسیژن و فلوئور)

- شمارهٔ گروه − ۱۸ = پایین‌ترین عدد اکسایش
- شمارهٔ گروه − ۱۰ = (عدد یکان شمارهٔ گروه) + بالاترین عدد اکسایش

مثال

شمارهٔ گروه	۱۴ (C, Si, ...)	۱۵ (N, P, ...)	۱۶ (S, ...)	۱۷ (Cl, ...)
پایین‌ترین عدد اکسایش	۱۴ − ۱۸ = −۴	۱۵ − ۱۸ = −۳	۱۶ − ۱۸ = −۲	۱۷ − ۱۸ = −۱
بالاترین عدد اکسایش	+۴	+۵	+۶	+۷

توجه در مورد دامنهٔ تغییرات عدد اکسایش، استثناهایی هم به چشم می‌خورد. مواردی که دانستن آن‌ها برای شما اجباری است، عبارت‌اند از:

الف) دامنهٔ تغییرات عدد اکساش اکسیژن (متعلق به گروه ۱۶) از ۲− تا ۲+ است.

ب) عدد اکسایش فلوئور تنها می‌تواند اعداد صفر (در F_2) و ۱− (در ترکیب‌ها) باشد.

پاسخ خیلی تشریحی در واکنش سوختن کامل متان (CH_4) عدد اکسایش اتم کربن، از ۴− به ۴+ می‌رسد.

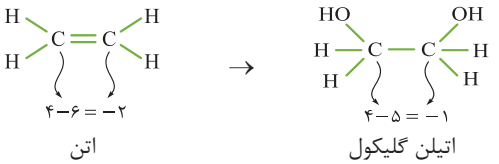
۸ درجه اکسایش

$$CH_4 + O_2 \rightarrow CO_2 + H_2O$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

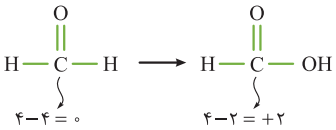
بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): تبدیل اتن به اتیلن گلیکول *این‌هوریاس*؛



اتن ← اتیلن گلیکول

گزینهٔ (۲): در این تبدیل عدد اکسایش کربن از ۰ به ۲+ تغییر می‌کند.



فرمالدهید ← فورمیک اسید

گزینهٔ (۴): در این واکنش، عدد اکسایش کربن تغییری نمی‌کند.

$$CaCO_3(s) \rightarrow CaO(s) + CO_2(g)$$

$$CaCO_3 = 2 + C + 3(-2) = 0 \Rightarrow C = +4$$

$$CO_2 = C + 2(-2) = 0 \Rightarrow C = +4$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹۹ **با توجه به عبارت‌های داده‌شده که مربوط به فلزهای X، Y و Z در دمای ۲۵ °C هستند، کدام مورد نادرست است؟**

- **فلزهای X و Y با محلول ۱/۰ مولار هیدروکلریک اسید واکنش می‌دهند و گاز هیدروژن تولید می‌کنند.**
- **قدرمطلق پتانسیل الکترودی X از Y بزرگ‌تر است.**
- **در سلول گالوانی Y – Z ، الکترود Z کاتد است.**

۱) در سلول گالوانی تشکیل‌شده از دو فلز X و Y، جهت جریان الکترون‌ها به سمت فلز Y است.

۲) در سلول گالوانی X و Z، جهت حرکت آنیون‌ها به سمت الکترود X است.

۳) اگر قطعه‌ای از فلز Z در داخل محلولی از کاتیون‌های X^{2+} قرار گیرد، پس از مدتی دمای محلول همان ۲۵ °C باقی خواهد ماند.

۴) ترتیب $X^{2+} > Z^{2+} > Y^{2+}$ را می‌توان به مقایسهٔ قدرت اکسندگی این گونه‌ها نسبت داد.

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ‌خیلی‌تشریحی✔

اول ببینیم از هر داده چه نتیجه‌ای می‌گیریم:

- E° فلزهای X و Y منفی است و در سری الکتروشیمیایی پایین‌تر از هیدروژن $(E^\circ = 0)$ قرار دارند.

H_2
X
Y

یا

H_2
Y
X

- با توجه به این‌که E° هر دو منفی است، X در سری الکتروشیمیایی پایین‌تر از Y قرار دارد.

H_2
Y
X

- در سلول‌های گالوانی، E° مثبت‌تر، کاتد است پس فلز Z بالاتر از Y و X در سری الکتروشیمیایی جای دارد.

H_2
Z
Y
X

یا

Z
H_2
Y
X

مقایسهٔ قدرت کاهندگی فلزها برخلاف قدرت اکسندگی کاتیون‌های آن‌هاست:

$X^{2+} < Y^{2+} < Z^{2+}$:قدرت اکسندگی $\Rightarrow$ $X > Y > Z$: قدرت کاهندگی

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): در سلول‌های گالوانی جهت حرکت الکترون‌ها در مدار بیرونی از آند به کاتد است. در این‌جا X آند و Y کاتد سلول گالوانی را تشکیل می‌دهد؛ پس جهت حرکت الکترون‌ها به سمت Y است.

گزینهٔ (۲): در یک سلول گالوانی، کاتیون‌ها با عبور از دیوارهٔ متخلخل به سمت کاتد و آنیون‌ها با عبور از دیوارهٔ متخلخل به سمت آند می‌روند. در سلول گالوانی X و Z، X نقش آند و Z نقش کاتد را دارد. پس در این‌جا آنیون‌های نیم‌سلول Z (نیم‌سلول کاتدی)، به سمت نیم‌سلول X می‌روند.

گزینهٔ (۳):

نکته

پیش‌بینی انجام‌پذیری واکنش‌ها:

گونهٔ سمت راست از نیم‌واکنش پایین‌تر (E° کم‌تر) در سری الکتروشیمیایی، می‌تواند با گونهٔ سمت چپ از نیم‌واکنش بالاتر (E° بیشتر)، به طور خودبه‌خودی واکنش دهد.

واکنش انجام‌پذیر است. $\rightarrow$ چپ بالاتر (اکسندهٔ قوی‌تر) + راست پایین‌تر (کاهندهٔ قوی‌تر)

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

از آن‌جا که Z در سری الکتروشیمیایی بالاتر از X است، X نسبت به Z کاهندهٔ قوی‌تری است و در نتیجه نمی‌تواند X^{2+} را به صورت فلزی آزاد کند و واکنش انجام نمی‌شود و دما نیز تغییر نمی‌کند.

$Z^{2+} + 2e^- \rightarrow Z$ انجام‌ناپذیر

$X^{2+} + 2e^- \rightarrow X$

امتحان نهایی

عبارت‌های داده‌شدهٔ زیر مربوط به فلزهای X، Y و Z در دمای $25^\circ C$ هستند. *(سؤال ۱۱ ـ امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۴)*

- **فلزهای X و Y با محلول $0/1\ M$ هیدروکلریک اسید واکنش می‌دهند و گاز هیدروژن تولید می‌کنند.**
- **قدرمطلق پتانسیل الکترودی X از Y بزرگ‌تر است.**
- **در سلول گالوانی $Y-Z$ الکترود Z کاتد است.**

الف) در سلول گالوانی تشکیل‌شده از دو فلز X و Y جهت جریان الکترون‌ها به سمت کدام فلز است؟

ب) در سلول گالوانی X و Z جهت حرکت آنیون‌ها به سمت کدام الکترود (X یا Z) است؟

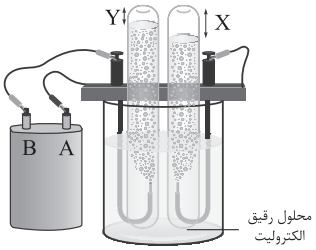
پ) قطعه‌ای از فلز Z در داخل محلولی از کاتیون‌های X^{2+} قرار می‌گیرد، پس از مدتی دمای محلول کدام‌یک از اعداد (۲۳ یا ۲۵ یا ۲۷) است؟ چرا؟

ت) با گذشت زمان در سلول X و Z جرم تیغهٔ X چه تغییری می‌کند؟

ث) اگر بخواهیم در فرایند آبکاری، ظرفی از جنس فلز X را با فلز Z روکش دهیم، در این‌صورت فلز X به کدام قطب باتری متصل می‌شود؟ در این فرایند محلول الکترولیت حاوی کاتیون‌های کدام فلز است؟

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۰۰ با توجه به شکل زیر که مربوط به برقکافت آب است، کدام موارد از مطالب زیر درست است؟



الف) گاز X را می‌توان به عنوان سوخت وارد قطب منفی سلول سوختی هیدروژن ـ اکسیژن کرد. (هیدروژن ← قطب منفی ← آند)

ب) در این فرایند با گذشت زمان، غلظت مادهٔ حل‌شده در الکترولیت افزایش می‌یابد.

ج) واکنش کلی برقکافت آب، مانند واکنش کلی سلول سوختی هیدروژن ـ اکسیژن است.

د) B قطب مثبت باتری است و pH محلول الکترولیت در اطراف الکترود متصل به آن با گذشت زمان افزایش می‌یابد.

۱) الف و ج
۲) ب و د
۳) الف و ب
۴) ج و د

مشاوره در تست‌هایی از این سبک، حتماً عبارت‌ها را با توجه به گزینه‌ها بررسی کنین و هم‌چنین ابتدا عبارت‌های ساده‌تر را خوانده و با رد گزینه، سایر عبارت‌ها را بررسی کنین، زیرا در اغلب این تست‌ها نیاز به بررسی همهٔ عبارت‌ها نیست!

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

برقکافت آب

یکی از کاربردهای سلول‌های الکترولیتی، برقکافت مواد است. برقکافت آب فرایندی است که در آن، جریان برق از آب عبور داده می‌شود و طی آن، آب به عنصرهای سازنده‌اش (H_2 و O_2) تجزیه می‌شود. نیم‌واکنش‌های انجام‌شده در سلول الکترولیتی برقکافت آب به صورت زیر است:

نیم‌واکنش کاهش در کاتد (قطب منفی): $4H_2O(l) + 4e^- \rightarrow 2H_2(g) + 4OH^-(aq)$

نیم‌واکنش اکسایش در آند (قطب مثبت): $2H_2O(l) \rightarrow O_2(g) + 4H^+(aq) + 4e^-$

برقکافت آب:
- آند (قطب مثبت): اسید و اکسیژن $\Rightarrow O_2 , H^+$
- کاتد (قطب منفی): باز و هیدروژن $\Rightarrow H_2 , OH^-$

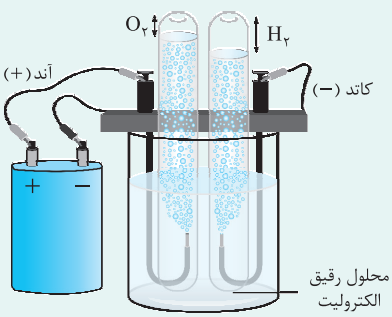
با جمع‌کردن نیم‌واکنش‌های اکسایش و کاهش، واکنش کلی برقکافت آب به دست می‌آید:

واکنش کلی: $2H_2O(l) \rightarrow 2H_2(g) + O_2(g)$

۱) مقدار یون‌های H^+ و OH^- در آب خالص بسیار کم است؛ به همین دلیل آب خالص رسانایی الکتریکی ناچیزی دارد؛ بنابراین برای برقکافت آب، باید اندکی الکترولیت (مانند KNO_3 ، H_2SO_4 و ...) به آب اضافه کرد.

۲) در برقکافت آب، در کاتد یون OH^- و در آند یون H^+ تولید می‌شود. پس محیط پیرامون کاتد، بازی ($pH > 7$) و محیط پیرامون آند، اسیدی ($pH < 7$) می‌شود؛ بنابراین کاغذ pH در محلول پیرامون کاتد به رنگ آبی و در محلول پیرامون آند، به رنگ سرخ درمی‌آید. ولی *هواستون باشه* که pH کل الکترولیت تغییری نمی‌کند، زیرا ضرایب H^+ و OH^- در نیم‌واکنش‌ها با هم برابر است.

۳) در برقکافت آب، گاز هیدروژن در کاتد و گاز اکسیژن در آند، تولید می‌شود. با توجه به ضرایب استوکیومتری در واکنش کلی، حجم گاز هیدروژن تولیدشده در کاتد، دو برابر حجم گاز اکسیژن تولیدشده در آند است.



$$2H_2O(l) \rightarrow \underbrace{2H_2(g)}_{\text{در کاتد (−)}\ 2\ \text{مول}} + \underbrace{O_2(g)}_{\text{در آند (+)}\ 1\ \text{مول}}$$

$$\underbrace{2\times 2 = 4\ g \quad 1\times 32 = 32\ g}$$

$$\frac{\text{حجم گاز آند}}{\text{حجم گاز کاتد}} = \frac{1}{2} \quad , \quad \frac{\text{جرم گاز آند}}{\text{جرم گاز کاتد}} = \frac{32}{4} = 8$$

پاسخ خیلی تشریحی

عبارت‌های «الف» و «ب» درست‌اند.

در برقکافت آب، حجم گاز هیدروژن تولیدشده در کاتد، دو برابر حجم گاز اکسیژن تولیدشده در آند است؛ پس در این‌جا، گاز X که حجم بیشتری دارد، H_2 و گاز Y با حجم کم‌تر، O_2 است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

بررسی عبارت‌ها:

الف) در سلول سوختی هیدروژن، گاز H_2 در آند (قطب منفی) اکسایش می‌یابد.

ب) با عبور جریان برق از درون آب، مولکول‌های آب تجزیه شده و به گازهای H_2 و O_2 تبدیل و از آب خارج می‌شوند؛ بنابراین با گذشت زمان در این سلول، مقدار مولکول آب کاهش و غلظت ماده‌ای که به عنوان الکترولیت به آب اضافه شده، افزایش می‌یابد.

ج) واکنش کلی برقکافت آب، وارونهٔ واکنش کلی سلول سوختی هیدروژن است.

برقکافت آب: $2H_2O \rightarrow 2H_2 + O_2$

سلول سوختی هیدروژن: $2H_2 + O_2 \rightarrow 2H_2O$

د) دیدیم که گاز Y همان O_2 است که در آند تولید می‌شود. از طرفی می‌دانیم که در سلول‌های الکترولیتی، آند به قطب مثبت باتری متصل می‌شود؛ پس B قطب مثبت باتری است. نیم‌واکنش انجام‌شده در اطراف قطب مثبت این سلول به صورت زیر است:

$$2H_2O(l) \rightarrow O_2(g) + 4H^+(aq) + 4e^-$$

اما دقت کنید که با تولید H^+، pH محلول در اطراف قطب مثبت، **کاهش** می‌یابد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۰۱ کدام مورد نادرست است؟

۱) خوردگی آهن یک فرایند الکتروشیمیایی خودبه‌خودی است که در آن، آهن، کاهنده و گاز اکسیژن، اکسنده است.

۲) سرعت خوردگی آهن به عواملی نظیر رطوبت، دما و وجود مواد اکسیدکننده در محیط بستگی دارد.

۳) هر چه اختلاف پتانسیل کاهشی استاندارد بین آهن و مادهٔ اکسیدکننده بیشتر باشد، سرعت خوردگی کم‌تر خواهد بود.

۴) تشکیل زنگار سبز بر سطح مس، نمونه‌ای از فرایند خوردگی به شمار می‌آید.

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔

هر چه تفاوت E° نیم‌سلول‌ها بیشتر باشد، emf سلول و در نتیجه قدرت آن بیشتر خواهد بود؛ از آن‌جا که اکسیژن در محیط اسیدی قدرت اکسندگی و E° بزرگ‌تری نسبت به محیط خنثی دارد، سرعت خوردگی آهن در محیط اسیدی بیشتر خواهد بود.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): در فرایند خوردگی آهن، بخشی از سطح فلز آهن به عنوان آند عمل کرده و Fe در ابتدا به Fe^{2+} و سپس Fe^{3+} تبدیل می‌شود. در این فرایند، Fe کاهنده و O_2 اکسنده است.

گزینهٔ (۲): *کاملاً درسته!*

گزینهٔ (۴): زنگار سبز بر سطح مس و زنگ‌زدن آهن، نمونه‌هایی از خوردگی هستند.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۰۲ اگر در شرایط معین، شمار الکترون‌های مبادله‌شده در واکنش تجزیهٔ ۶/۱۲۵ گرم پتاسیم کلرات مطابق معادلهٔ $2KClO_3(s) \rightarrow 2KCl(s) + 3O_2(g)$، با شمار الکترون‌های مبادله‌شده در سلول برقکافت منیزیم کلرید مذاب برابر باشد، جرم فراوردهٔ تولیدشده در قطب منفی سلول (کاتد)، چند گرم است؟

$(K = 39 , Cl = 35/5 , Mg = 24 , O = 16 : g.mol^{-1})$

۱) ۱/۸ ۲) ۳/۶
۳) ۵/۳۲۵ ۴) ۱۰/۶۵

پاسخ: گزینهٔ ۲

نکته

برای تعیین شمار الکترون‌های مبادله‌شده در یک واکنش اکسایش ـ کاهش می‌توانیم از رابطهٔ زیر استفاده کنیم:

تغییر عدد اکسایش اتم در اکسنده × ضریب اکسنده × شمار اتم‌های کاهش‌یافته در اکسنده = شمار الکترون‌های مبادله‌شده براساس معادلهٔ موازنه‌شده

تغییر عدد اکسایش اتم در کاهنده × ضریب کاهنده × شمار اتم‌های اکسایش‌یافته در کاهنده = شمار الکترون‌های مبادله‌شده براساس معادلهٔ موازنه‌شده

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: ابتدا شمار الکترون‌های مبادله‌شده در واکنش تجزیهٔ پتاسیم کلرات و برقکافت منیزیم کلرید مذاب را به دست می‌آوریم:

$2KClO_3(s) \longrightarrow 2KCl(s) + 3O_2(g)$

۲ درجه اکسایش: $-2 \rightarrow 0$

شمار الکترون‌های مبادله‌شده = تغییر عدد اکسایش کاهنده × ضریب کاهنده × شمار اتم‌های کاهنده = تغییر عدد اکسایش هر اتم O × تعداد اتم O در $KClO_3$ × ضریب $KClO_3$

$= 3 \times 2 \times 2 = 12$

$MgCl_2(l) \longrightarrow Mg(l) + Cl_2(g)$

۲ درجه کاهش: $+2 \rightarrow 0$

شمار الکترون‌های مبادله‌شده = تغییر عدد اکسایش اکسنده × ضریب اکسنده × شمار اتم‌ها در اکسنده = تغییر عدد اکسایش هر اتم Mg × تعداد اتم Mg در $MgCl_2$ × ضریب $MgCl_2$

$= 1 \times 1 \times 2 = 2$

گام دوم: شمار الکترون‌های مبادله‌شده در اثر تجزیهٔ ۶/۱۲۵ گرم پتاسیم کلرات را به دست می‌آوریم:

استفاده از کسر تبدیل:

$$6/125\ g\ KClO_3 \times \frac{1\ mol\ KClO_3}{122/5\ g\ KClO_3} \times \frac{12\ mol\ e^-}{2\ mol\ KClO_3} = 0/3\ mol\ e^-$$

یه‌جور دیگه

استفاده از کسر تناسب:

$2KClO_3 \sim 12\ e^-$

$$\frac{\text{جرم}}{\underbrace{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}_{KClO_3}} = \frac{\text{مول}}{\underbrace{\text{ضریب}}_{e^-}} \Rightarrow \frac{6/125}{2 \times 122/5} = \frac{x}{12} \Rightarrow x = \frac{6}{20} = 0/3\ mol\ e^-$$

(20 و 6 زیر مخرج‌ها)

گام سوم: شمار الکترون‌های مبادله‌شده در تجزیهٔ «پتاسیم کلرات» با «سلول برقکافت منیزیم کلرید مذاب» برابر است؛ از طرفی در قطب منفی سلول برقکافت منیزیم کلرید مذاب، منیزیم تولید می‌شود؛ بنابراین از مول الکترون به جرم منیزیم تولیدشده می‌رسیم:

$$0/3\ mol\ e^- \times \frac{1\ mol\ Mg}{2\ mol\ e^-} \times \frac{24\ g\ Mg}{1\ mol\ Mg} = 3/6\ g\ Mg$$

یه‌جور دیگه

استفاده از کسر تناسب:

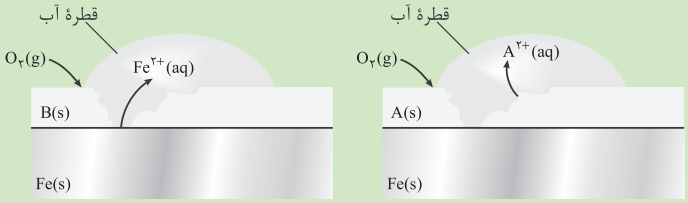
$Mg \sim 2\ e^-$

$$\frac{\text{جرم}}{\underbrace{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}_{Mg}} = \frac{\text{مول}}{\underbrace{\text{ضریب}}_{e^-}} \Rightarrow \frac{x}{24} = \frac{0/3}{2} \Rightarrow x = 3/6\ g\ Mg$$

(12 زیر مخرج)

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۰۳ با توجه به شکل‌های زیر که دو قطعهٔ آهن را نشان می‌دهند که با لایهٔ نازکی از فلزهای A و B پوشیده شده‌اند، کدام موارد نادرست است؟



شکل (۲) شکل (۱)

الف) قدرت کاهندگی فلز A از فلز B بیشتر است.

ب) مجموع ضرایب گونه‌ها در معادلهٔ موازنه‌شدهٔ نیم‌واکنش کاهش انجام‌شده در شکل (۲) برابر ۱۱ است.

ج) برای ساختن قوطی‌های روغن نباتی می‌توان از ورقهٔ آهنی مانند شکل (۱) استفاده کرد.

د) در شکل (۱)، آهن نقش کاتد را دارد و کاهش می‌یابد.

۱) الف و د
۲) ب و ج
۳) الف و ب
۴) ج و د

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔ عبارت‌های «ج» و «د» نادرست‌اند.

شکل (۱) مربوط به حفاظت کاتدی آهن است و در شکل (۲) آهن خورده می‌شود.

بررسی عبارت‌ها:

الف) در شکل (۱)، فلز A اکسید شده است؛ یعنی قدرت کاهندگی فلز A از آهن بیشتر است. از طرفی در شکل (۲)، فلز آهن خورده شده است؛ یعنی قدرت کاهندگی فلز آهن از B بیشتر است.

قدرت کاهندگی: $A > Fe > B$

ب) نیم‌واکنش کاهش در شکل (۲)، مربوط به مولکول‌های اکسیژن به صورت زیر است:

$$O_2(g) + 2H_2O(l) + 4e^- \rightarrow 4OH^-(aq) \Rightarrow \text{مجموع ضرایب} = 1+2+4+4 = 11$$

ج) برای ساخت قوطی روغن نباتی از حلبی استفاده می‌شود. در حلبی روکشی از جنس قلع روی آهن ایجاد می‌شود و با توجه به این‌که قدرت کاهندگی فلز آهن از قلع بیشتر است، در صورت خراشیده‌شدن حلبی، آهن زنگ می‌زند؛ بنابراین شکل (۲) می‌تواند نشان‌دهندهٔ آن باشد.

د) *درست که* در شکل (۱) آهن نقش کاتد را دارد، اما نیم‌واکنش کاهش مربوط به مولکول‌های اکسیژن است.

نکته آند، کاتد و نیم‌واکنش‌های انجام‌شده در سه فرایند مهم کتاب درسی:

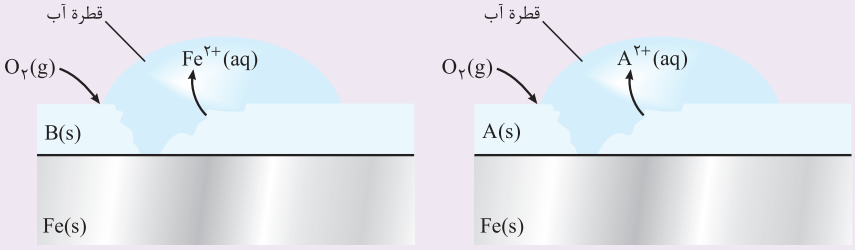
فرایند	آند	نیم‌واکنش اکسایش	کاتد	نیم‌واکنش کاهش
خوردگی آهن	آهن	$Fe \rightarrow Fe^{2+} + 2e^-$	آهن	$O_2(g) + 2H_2O(l) + 4e^- \rightarrow 4OH^-(aq)$
آهن سفید (گالوانیزه) خراش‌دیده	روی	$Zn \rightarrow Zn^{2+} + 2e^-$	آهن	$O_2(g) + 2H_2O(l) + 4e^- \rightarrow 4OH^-(aq)$
حلبی خراش‌دیده	آهن	$Fe \rightarrow Fe^{2+} + 2e^-$	قلع	$O_2(g) + 2H_2O(l) + 4e^- \rightarrow 4OH^-(aq)$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

امتحان نهایی

شکل زیر دو قطعهٔ آهن را نشان می‌دهد که با لایهٔ نازکی از فلز A و B پوشیده شده است. با توجه به آن پاسخ دهید.

(سؤال ۶ ـ امتحان نهایی دی ۱۴۰۲)



شکل (۲) شکل (۱)

الف) کدام فلز (A) یا (B)، قدرت کاهندگی بیشتری دارد؟ چرا؟

ب) نیم‌واکنش موازنه‌شدهٔ کاهش را بنویسید.

پ) برای ساختن قوطی‌های روغن نباتی، ورقه‌های آهن را با لایهٔ نازکی از کدام فلز (روی یا قلع) می‌پوشانند؟ دلیل بنویسید.

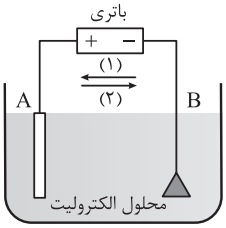
$E^\circ(Fe^{2+} / Fe) = -0/44\ V$

$E^\circ(Sn^{2+} / Sn) = -0/14\ V$

$E^\circ(Zn^{2+} / Zn) = -0/76\ V$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۰۴ **اگر شکل زیر مربوط به فرایند آبکاری باشد، درستی یا نادرستی کدام گزینه با دیگر گزینه‌ها متفاوت است؟**



۱) نیم‌واکنش کاهش بر روی الکترود B انجام می‌شود.

۲) پیکان (۱) جهت جابه‌جایی الکترون‌ها را در مدار بیرونی نشان می‌دهد.

۳) محلول الکترولیت شامل کاتیون‌های فلز A است.

۴) E° فلز A نسبت به B، می‌تواند کم‌تر یا بیشتر باشد.

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی

گزینهٔ (۲) برخلاف سایر گزینه‌ها، نادرست است.

نکته

- اگر در آبکاری، هدف، پوشش فلز X بر روی یک جسم باشد، آن جسم در کاتد و فلز X در آند قرار می‌گیرد و از نمک محلول فلز X به عنوان الکترولیت استفاده می‌شود.

جسم مورد آبکاری ← نقش کاتد ← متصل‌شدن به قطب منفی باتری ← پس از مدتی جرم آن افزایش می‌یابد.

فلز پوشاننده ← نقش آند ← متصل‌شدن به قطب مثبت باتری ← پس از مدتی جرم آن کاهش می‌یابد.

الکترولیت سلول ← نمکی از فلز پوشاننده یعنی همان آند

- در فرایند آبکاری، نیم‌واکنش‌های آندی و کاتدی هر دو مربوط به فلز پوشاننده هستند.

نیم‌واکنش‌های آبکاری یک جسم با فلز X:

نیم‌واکنش اکسایش: $X \rightarrow X^{m+} + me^-$

نیم‌واکنش کاهش: $X^{m+} + me^- \rightarrow X$

در شکل نشان‌داده‌شده، A نقش آند (قطب مثبت) و B نقش کاتد (قطب منفی) را دارد.

در فرایند آبکاری، جهت حرکت الکترون‌ها از آند به کاتد (پیکان ۲) است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): جسم B نقش کاتد را دارد و در آن، کاتیون‌های موجود در الکترولیت کاهش می‌یابند.

گزینهٔ (۳): الکترولیت باید حاوی یون‌های فلز پوشانندهٔ A باشد.

گزینهٔ (۴): در سلول‌های الکترولیتی، **بدون توجه** به موقعیت فلزها در سری الکتروشیمیایی و E° آن‌ها، فلزی که به قطب مثبت باتری متصل باشد، آند و فلزی که به قطب منفی باتری متصل باشد، کاتد است، یعنی در سلول‌های الکترولیتی برخلاف سلول‌های گالوانی، تنها نوع اتصال تیغه‌ها به قطب‌های مثبت و منفی باتری، تعیین‌کنندهٔ آند و کاتد است؛ **بنابراین در آبکاری، E° فلز پوشاننده می‌تواند کوچک‌تر یا بزرگ‌تر از E° فلز سازندهٔ جسم مورد نظر باشد.**

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۰۵ کدام مورد، نادرست است؟

۱) مجموع ضرایب مواد در واکنش موازنه‌شده مربوط به فرایند هال، ۴ برابر تغییر عدد اکسایش هر اتم آلومینیم است.

۲) تولید قوطی‌های آلومینیمی از قوطی‌های کهنه نسبت به تهیهٔ همان تعداد قوطی‌ها از فرایند هال، ۹۳ درصد در مصرف انرژی صرفه‌جویی می‌کند.

۳) در فرایند هال، با گذشت زمان از جرم آند کاسته می‌شود.

۴) فلز آلومینیم در مقابل اکسایش مقاوم بوده و وسایل تولیدی از آن، برای مدت طولانی استحکام خود را حفظ می‌کنند.

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

فرایند هال

آلومینیم در طبیعت به شکل ترکیب یافت می‌شود. در صنعت این فلز را از برقکافت Al_2O_3 مذاب در یک سلول الکترولیتی به دست می‌آورند. تولید آلومینیم به این روش به افتخار شیمی‌دان آمریکایی جناب «چارلز مارتین هال»، **فرایند هال** نامیده می‌شود.

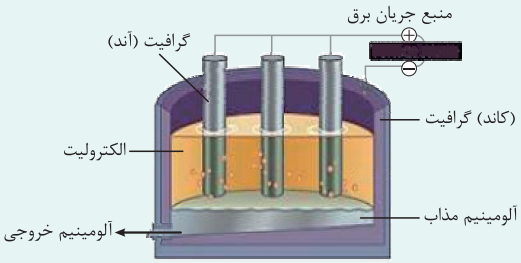
بریم سراغ نکات سلول الکترولیتی مربوط به فرایند هال:

۱) الکترولیت مورد استفاده در این سلول، حاوی Al_2O_3 **مذاب** است.

۲) آند و کاتد این سلول، هر دو از جنس گرافیت هستند. دیواره‌ها و کف این سلول، نقش کاتد (قطب منفی) را دارند، در حالی که میله‌های گرافیتی بالای سلول، نقش آند (قطب مثبت) را دارند.

۳) در کاتد این سلول، نیم‌واکنش $Al^{3+}(l) + 3e^- \rightarrow Al(l)$ انجام می‌شود.

۴) در آند این سلول، ابتدا نیم‌واکنش $2O^{2-}(l) \rightarrow O_2(g) + 4e^-$ انجام می‌شود سپس گرافیت موجود در آند با گاز اکسیژن تولیدشده واکنش داده و طبق معادلهٔ $C\,(\text{گرافیت}) + O_2(g) \rightarrow CO_2(g)$، گاز کربن دی‌اکسید تولید می‌کند.



با ضرب نیم‌واکنش‌های نوشته‌شده در عدد مناسب و جمع‌کردن آن‌ها، واکنش کلی سلول به دست می‌آید:

در کاتد : $4Al^{3+} + 12e^- \rightarrow 4Al$

در آند :
$$\begin{cases} 6O^{2-} \rightarrow 2O_2 + 12e^- \\ 3C + 3O_2 \rightarrow 3CO_2 \end{cases}$$

واکنش نهایی : $\underbrace{4Al^{3+} + 6O^{2-}}_{2Al_2O_3} + 3C \rightarrow 4Al + 3CO_2 \sim 12e^-$

۵) در سلول الکترولیتی مربوط به فرایند هال، گرافیت کاتد نقشی در نیم‌واکنش کاتدی ندارد، اما گرافیت آند، نقش واکنش‌دهنده را هم بازی می‌کند، به همین دلیل *رفته رفته!* از جرم آن کم می‌شود.

۶) با توجه به این‌که چگالی آلومینیم مذاب تولیدشده در کاتد بیشتر از الکترولیت موجود در سلول است، آلومینیم مذاب پایین‌تر از الکترولیت مذاب، بر روی کاتد گرافیتی (ته ظرف) ته‌نشین می‌شود و به کمک یک لوله از قسمت پایینی سلول جمع‌آوری می‌شود. (*شکل رو ببینید!*)

۷) فرایند هال به علت مصرف مقدار زیادی انرژی **الکتریکی**، هزینهٔ بالایی دارد. از طرفی فلز آلومینیم یکی از مهم‌ترین منابع تجدیدناپذیر طبیعت است، بنابراین با بازیافت فلز آلومینیم می‌توان علاوه بر افزایش عمر این منبع، برخی از هزینه‌های تولید آن را کاهش داد.

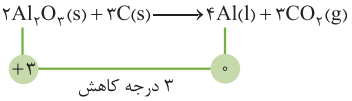
توجه تولید قوطی‌های آلومینیمی از قوطی‌های کهنه، فقط به ۷ درصد از انرژی لازم برای تهیهٔ همان تعداد قوطی از فرایند هال نیاز دارد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ خیلی تشریحی ✔ آلومینیم فلزی فعال است و به سرعت در هوا اکسایش می‌یابد! این فلز در مقابل خوردگی مقاوم است نه اکسایش!

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): واکنش کلی فرایند هال به صورت زیر است:



مجموع ضرایب $= 2 + 3 + 4 + 3 = 12$

گزینهٔ (۲): تولید قوطی‌های آلومینیمی از قوطی‌های کهنه فقط به ۷ درصد از انرژی لازم برای تهیهٔ همان تعداد قوطی از فرایند هال نیاز دارد و ۹۳ درصد در انرژی صرفه‌جویی می‌شود.

گزینهٔ (۳): میله‌های گرافیتی در این سلول نقش آند را دارند و با گاز اکسیژن واکنش داده و مصرف می‌شوند؛ بنابراین با گذشت زمان، جرم آن کاهش می‌یابد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir