

آزمون آزمایشی ۳ بهمن ۱۴۰۴

گروه آزمایشی علوم ریاضی

ویژه داوطلبان آزمون سراسری ۱۴۰۵

B

دفترچه شماره ۱

وقت پیشنهادی	تا شماره	از شماره	تعداد پرسش	مواد امتحانی
۷۰ دقیقه	۴۰	۱	۴۰	ریاضیات
مدت پاسخ گویی: ۷۰ دقیقه		تعداد کل پرسش ها: ۴۰		

دفترچه پاسخ تشریحی



داوطلب گرامی، جهت استفاده از خدمات اختصاصی خود مانند کارنامه هوشمند بعد از آزمون، بانک سؤال گزینه دو، آزمونک ها، رفع اشکال هوشمند و ... با استفاده از نام کاربری و رمز عبور وارد سایت gozine2.ir شوید. در ثبت نام اینترنتی نام کاربری کد ملی شماست و رمز عبور توسط خودتان تعیین شده است. در ثبت نام انفرادی و مدرسه ای، نام کاربری و رمز عبور خود را از مدرسه یا نمایندگی شهر خود دریافت نمایید.

پاسخ تشریحی تصویری



۱- حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 3x}{(2x-1)^2}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $-\infty$

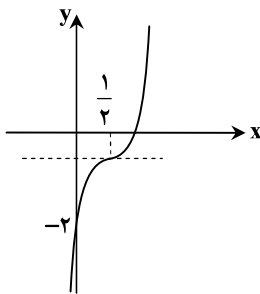
۲- حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 4}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $+\infty$ (۴) $-\infty$

۳- نقطه $A(-2, 3)$ محل برخورد دو تا از مجانب‌های تابع $f(x) = \frac{ax^3 - 2x + 1}{x(x^2 - b)}$ است. مقدار $b - a$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۱۱ (۳) -۱ (۴) ۷

۴- نمودار تابع $f(x) = 8x^3 + ax^2 + bx + c$ به صورت مقابل است. باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $x + c$ کدام است؟



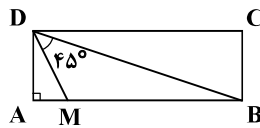
(۱) ۸

(۲) ۷

(۳) ۲۷

(۴) ۲۶

۵- در مستطیل شکل مقابل، طول مستطیل سه برابر عرض آن است. نقطه M ضلع AB را با چه نسبتی تقسیم می‌کند؟



(۱) یک به پنج

(۲) یک به شش

(۳) یک به سه

(۴) یک به چهار

۶- دامنه و برد تابع $y = f(x)$ برابر بازه $[-2, 1]$ است. اگر عدد مثبت a و عدد منفی b به گونه‌ای باشند که برد تابع $y = af(x) + 2$ با دامنه تابع $y = f(bx + 2)$ برابر باشد، مقدار ab کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) $-\frac{9}{4}$ (۳) $-\frac{4}{9}$ (۴) -۲

۷- تابع $f(x) = 3x^2 - 12x + 16$ مفروض است. اگر تابع $y = -f(\frac{3-2x}{4})$ در بازه $[a, b]$ اکیداً نزولی باشد، آنگاه کدام گزینه درست است؟

- (۱) $\max(b) = -\frac{5}{2}$ (۲) $\max(b) = -\frac{1}{4}$ (۳) $\min(a) = -\frac{1}{4}$ (۴) $\min(a) = -\frac{5}{2}$

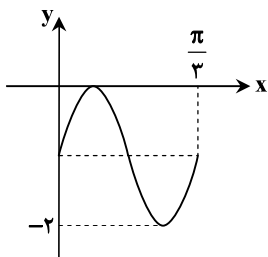
محل انجام محاسبات:

۸- چند جمله‌ای $f(x) = x^3 + mx^2 + x - 4$ بر $x - 1$ بخش پذیر است. مجموع ضرایب خارج قسمت تقسیم چند جمله‌ای

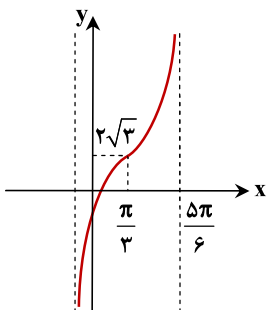
$$g(x) = f(x^2) + f^2(x) \text{ بر } x + 1 \text{ کدام است؟}$$

- (۱) -۴ (۲) -۸ (۳) ۸ (۴) ۴

۹- نمودار تابع $f(x) = a \cos^2(bx - \frac{\pi}{4})$ در یک دوره تناوب به صورت مقابل است. دوره تناوب تابع $y = \sin(\frac{ax}{b+1})$ کدام است؟

(۱) π (۲) 2π (۳) 3π (۴) $\frac{2\pi}{3}$

۱۰- شکل مقابل، قسمتی از نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = 2 \tan(bx - \frac{\pi}{3}) + c$ است. اگر $b > 0$ ، مقدار bc^2 کدام است؟



(۱) ۶

(۲) ۱۲

(۳) ۳

(۴) ۴

۱۱- تعداد جواب‌های معادله $\tan(2x - \frac{\pi}{3}) + \tan(2x - \frac{\pi}{4}) = 0$ که در بازه $(0, \pi)$ قرار دارند، کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۲- حداقل اختلاف بین دو مقدار از جواب‌های متمایز معادله $\frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} = \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x}$ چقدر است؟

- (۱) $\frac{3\pi}{2}$ (۲) $\frac{\pi}{2}$ (۳) π (۴) 2π

۱۳- حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{2 \tan x - 2}{\sin x + \cos x}$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) $2\sqrt{2}$ (۳) $+\infty$ (۴) $-\infty$

محل انجام محاسبات:

۱۴- اگر $f(x) = \frac{1}{a}x^2$ و $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ ، حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) -2 (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) 2

۱۵- اگر $f(x) = \frac{2x^2}{x+1} - ax + b$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$ ، حاصل $2a - 2b$ کدام است؟

- (۱) 4 (۲) -4 (۳) -6 (۴) صفر

۱۶- تابع $f(x) = \frac{2}{x^2 - 1} + \frac{a}{x - 1}$ فقط دو مجانب در راستای محورهای مختصات دارد. نمودار f در مجاورت مجانب قائم خود چگونه است؟



۱۷- اگر $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 + k[-x]}{x^2 - 1} = -\infty$ ، حدود عبارت $P = 2 \cos\left(\frac{2\pi}{3}k\right)$ کدام است؟

- (۱) $-2 \leq P < -1$ (۲) $-1 < P < 1$ (۳) $-2 \leq P < 0$ (۴) $-1 \leq P < 2$

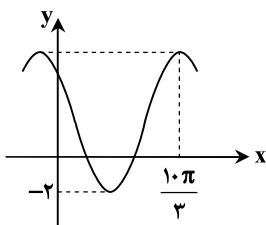
۱۸- اگر $f(x) = x + 2\sqrt{x+1}$ باشد، مجانب افقی تابع $\frac{f}{f-1}$ کدام است؟

- (۱) $y = 1$ (۲) $y = 2$ (۳) $y = \frac{1}{2}$ (۴) $y = -1$

۱۹- نمودار تابع $f(x) = x^2 - 6x + 2$ را ۳ واحد به بالا انتقال می‌دهیم، سپس نسبت به محور عرض‌ها قرینه می‌کنیم و در نهایت آن را k واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم. اگر بازه $(-\infty, 1)$ ، بزرگ‌ترین بازه‌ای باشد که در آن نمودار به‌دست آمده از نمودار f پایین‌تر است، مقدار k کدام است؟

- (۱) 3 یا 1 (۲) 2 یا 5 (۳) 3 یا 5 (۴) 4 یا 2

۲۰- قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a + b \sin\left(\frac{x}{a} - \frac{\pi}{6}\right)$ به صورت مقابل است. مقدار $a - b$ کدام است؟



(۱) 2

(۲) -2

(۳) 6

(۴) -6

محل انجام محاسبات:

۲۱- اگر $A = \begin{bmatrix} 4 & x \\ y & -1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ و AB ماتریسی قطری باشد، آنگاه ماتریس $\begin{bmatrix} x-1 & 0 & y^2-9 \\ 0 & x+y-4 & 0 \\ y-3 & 0 & y \end{bmatrix}$ چه نوع ماتریسی است؟

(۱) همانی (۲) قطری غیر اسکالر (۳) اسکالر (۴) صفر

۲۲- مکان هندسی نقاطی از صفحه که از آن‌ها بتوان دو مماس به طول ۸ بر دایره $C(O, 6)$ رسم کرد، کدام است؟

(۱) دایره‌ای به شعاع ۱۰ (۲) مربعی به ضلع ۱۲ (۳) دایره‌ای به شعاع ۹ (۴) مستطیلی به طول و عرض ۸ و ۶

۲۳- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -5 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $\frac{|A^2 B^3|}{|C^4|}$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) $\frac{1}{6}$ (۳) $\frac{3}{8}$ (۴) $\frac{3}{4}$

۲۴- نقاط ثابت A و B مفروض‌اند. تعداد نقاطی از صفحه که از پاره خط AB به فاصله $\frac{AB}{2}$ و از وسط AB به فاصله AB باشند، کدام است؟

(۱) ۲ نقطه (۲) حداکثر ۲ نقطه (۳) ۴ نقطه (۴) حداکثر ۴ نقطه

۲۵- اگر $A(A+I) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل A^{201} کدام است؟

(۱) A (۲) I (۳) $-A$ (۴) $\bar{O}$

۲۶- اگر $(A+I)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های ماتریس $(A+3I)^{-1}$ کدام است؟

(۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{4}{5}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{5}{4}$

۲۷- از نقطه $M(2, 2)$ مماس بر دایره $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 12 = 0$ رسم کرده‌ایم. فاصله نقطه $A(6, 3)$ از خط مماس کدام است؟

(۱) برابر شعاع دایره (۲) دو برابر شعاع دایره (۳) نصف شعاع دایره (۴) سه برابر شعاع دایره

۲۸- ماتریس $A = |A| \times \begin{bmatrix} \frac{1}{|A|} & |A| \\ 1 & 2|A| \end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب دستگاه $AX = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ است. مجموع جواب‌های این دستگاه کدام است؟

(۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

۲۹- در دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & 1 & 3 \\ 0 & 2 & m \\ 5 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ هر مقداری به درایه a اضافه کنیم، حاصل دترمینان تغییر نمی‌کند. مقدار $|A|$ کدام است؟

(۱) 2.4 (۲) -4.4 (۳) -2.4 (۴) 4.4

۳۰- دایره‌ای از مبدأ مختصات، نقطه $A(4, 4)$ و نقطه B می‌گذرد. اگر مرکز این دایره روی نیمساز ربع اول و سوم باشد، محل تلاقی دایره با محور طول‌ها کدام می‌تواند باشد؟

(۱) $(2, 0)$ (۲) $(4, 0)$ (۳) $(5, 0)$ (۴) $(6, 0)$

محل انجام محاسبات:

۳۱- اگر x و y دو عدد حقیقی باشند، برای اثبات درستی نامساوی $5x^2 + y^2 + 4xy \geq 4x - 6$ به کمک روش اثبات بازگشتی، از کدام گزاره همواره درست استفاده می‌شود؟

$$(1) \quad (x+y)^2 + (x+2)^2 + 1 \geq 0$$

$$(2) \quad (2x-y)^2 + (x+2)^2 + 2 \geq 0$$

$$(3) \quad (2x+y)^2 + (x-1)^2 + 1 \geq 0$$

$$(4) \quad (2x+y)^2 + (x-2)^2 + 2 \geq 0$$

۳۲- منحنی $y = \frac{15}{x+3}$ از چند نقطه با مختصات صحیح در ربع اول دستگاه مختصات می‌گذرد؟

$$(1) \quad \text{صفر} \quad (2) \quad 1 \quad (3) \quad 2 \quad (4) \quad 3$$

۳۳- گرافی از مرتبه ۱۲ دارای ۲۴ یال است. مجموع درجات رئوس در گراف $\bar{G}$ کدام است؟

$$(1) \quad 48 \quad (2) \quad 76 \quad (3) \quad 24 \quad (4) \quad 84$$

۳۴- باقی‌مانده تقسیم عدد طبیعی a که $a < 120$ است بر ۹ و ۷ به ترتیب ۵ و ۳ است. باقی‌مانده تقسیم این عدد بر ۱۳ کدام است؟

$$(1) \quad 6 \quad (2) \quad 7 \quad (3) \quad 12 \quad (4) \quad 5$$

۳۵- به ازای کدام مقدار x ، عدد چهاررقمی $954x$ به کلاس هم‌نهشتی $8[6]$ تعلق دارد؟

$$(1) \quad 2 \quad (2) \quad 6 \quad (3) \quad 3 \quad (4) \quad 4$$

۳۶- در گرافی $p = 10$ و $q = 9$ است. اگر این گراف رأسی از درجه ۲ داشته باشد، حداکثر رئوس با درجه یک آن چقدر است؟

$$(1) \quad 7 \quad (2) \quad 8 \quad (3) \quad 9 \quad (4) \quad 6$$

۳۷- اگر $(a, 315) = 45$ و $(b, 245) = 35$ باشد، آنگاه مقدار $(a \times b, 735)$ کدام است؟

$$(1) \quad 105 \quad (2) \quad 150 \quad (3) \quad 275 \quad (4) \quad 315$$

۳۸- اگر p عدد اول بزرگ‌تر از ۲ باشد و $a \mid p + 2^{100}$ ، آنگاه باقی‌مانده تقسیم $3 + a^{10} + p^{10}$ بر ۸ کدام است؟

$$(1) \quad \text{صفر} \quad (2) \quad 3 \quad (3) \quad 4 \quad (4) \quad 5$$

۳۹- گراف همبند G از مرتبه ۱۳ و ماکزیمم درجه ۵ با حذف هریک از یال‌هایش، ناهمبند می‌شود. این گراف با افزودن چند یال تبدیل به یک گراف k منتظم می‌شود که k حداقل مقدار ممکن را دارد؟

$$(1) \quad 25 \quad (2) \quad 29 \quad (3) \quad 27 \quad (4) \quad 20$$

۴۰- رقم یکان عدد $1^{1755} + (2473)^1 + (2473)^5 + \dots + (2473)^{3!} + (2473)^{1!}$ کدام است؟

$$(1) \quad 8 \quad (2) \quad 9 \quad (3) \quad 4 \quad (4) \quad 7$$

محل انجام محاسبات:

آزمون آزمایشی ۳ بهمن ۱۴۰۴

گروه آزمایشی علوم ریاضی

ویژه داوطلبان آزمون سراسری ۱۴۰۵

B

دفترچه شماره ۲

وقت پیشنهادی	تا شماره	از شماره	تعداد پرسش	مواد امتحانی
۴۵ دقیقه	۷۵	۴۱	۳۵	فیزیک
۳۰ دقیقه	۱۰۵	۷۶	۳۰	شیمی
مدت پاسخ‌گویی: ۷۵ دقیقه		تعداد کل پرسش‌ها: ۶۵		

دفترچه پاسخ تشریحی



داوطلب گرامی، جهت استفاده از خدمات اختصاصی خود مانند کارنامه هوشمند بعد از آزمون، بانک سؤال گزینه دو، آزمونک‌ها، رفع اشکال هوشمند و ... با استفاده از نام کاربری و رمز عبور وارد سایت gozine2.ir شوید. در ثبت نام اینترنتی نام کاربری کد ملی شماست و رمز عبور توسط خودتان تعیین شده است. در ثبت نام انفرادی و مدرسه‌ای، نام کاربری و رمز عبور خود را از مدرسه یا نمایندگی شهر خود دریافت نمایید.

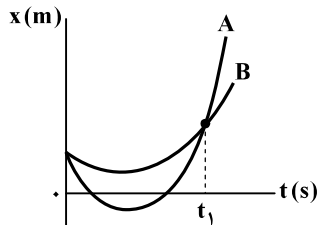
پاسخ تشریحی تصویری



۴۱- متحرکی با تندی ثابت در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند و در لحظه‌های $t_1 = 10\text{ s}$ و $t_2 = 20\text{ s}$ ، فاصله آن از مبدأ مکان 100 متر است. معادله مکان- زمان این متحرک در SI کدام است؟

(۱) $x = -10t - 150$ (۲) $x = -20t + 300$ (۳) $x = -10t + 150$ (۴) $x = -20t - 100$

۴۲- با توجه به نمودار مکان- زمان دو متحرک A و B که روی یک خط راست حرکت می‌کنند، کدام یک از جمله‌های زیر در مورد آن‌ها در بازه زمانی $t = 0$ تا $t = t_1$ الزاماً درست است؟



(الف) تندی متوسط متحرک A بیشتر است.

(ب) شتاب متوسط متحرک A بیشتر است.

(پ) سرعت متوسط متحرک A بیشتر است.

(۱) «الف»، «ب» و «پ»

(۲) «الف» و «ب»

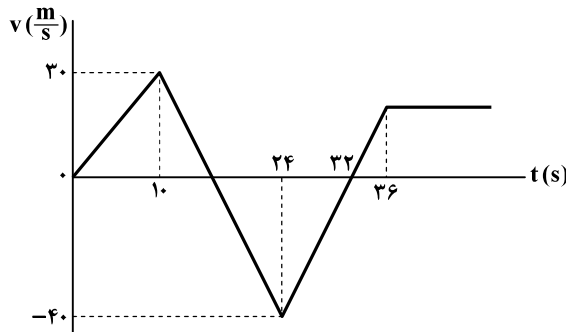
(۳) فقط «الف»

(۴) فقط «ب»

۴۳- معادله سرعت- زمان متحرکی که روی خط راست حرکت می‌کند، در SI به صورت $v = -4t + 20$ است. در لحظه‌ای که متحرک 78 متر با محل شروع حرکت فاصله دارد، تندی آن چند متر بر ثانیه است؟

(۱) 16 (۲) 28 (۳) 32 (۴) 44

۴۴- نمودار سرعت- زمان متحرکی که روی خط راست حرکت می‌کند، به شکل مقابل است. این متحرک چند متر مسافت را به صورت تندشونده طی می‌کند؟



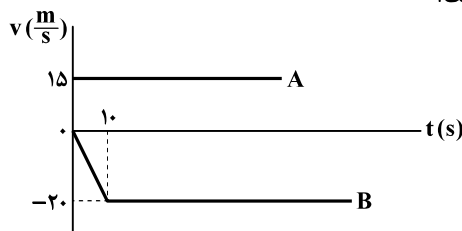
(۱) 350

(۲) 250

(۳) 300

(۴) 400

۴۵- دو متحرک A و B در لحظه $t = 0$ به ترتیب از مکان‌های $x_{0,A} = -200\text{ m}$ و $x_{0,B}$ عبور می‌کنند و نمودارهای سرعت- زمان آن‌ها به شکل مقابل است. این دو متحرک در لحظه $t = 20\text{ s}$ به هم می‌رسند. $x_{0,B}$ کدام است؟



(۱) $x_{0,B} = 200\text{ m}$

(۲) $x_{0,B} = 400\text{ m}$

(۳) $x_{0,B} = 300\text{ m}$

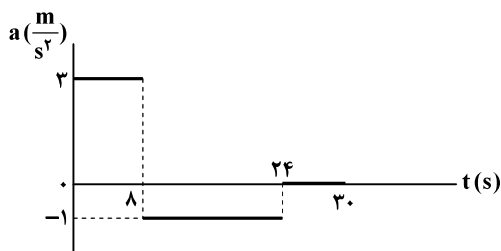
(۴) $x_{0,B} = 600\text{ m}$

۴۶- معادله مکان- زمان متحرکی که روی خط راست حرکت می‌کند در SI به صورت $x = t^2 - 4t + 3$ است. تندی متوسط متحرک در بازه زمانی $t_1 = 1\text{ s}$ تا $t_2 = 5\text{ s}$ چند متر بر ثانیه است؟

(۱) 3 (۲) $2/5$ (۳) 6 (۴) 5

محل انجام محاسبات:

۴۷- متحرکی روی محور x حرکت می‌کند و نمودار شتاب- زمان آن مطابق شکل است. اگر سرعت متوسط متحرک در بازه زمانی $t = 0$ تا $t = 25$ s برابر ۱۱ متر بر ثانیه باشد، سرعت متحرک در لحظه $t = 5$ s چند متر بر ثانیه است؟



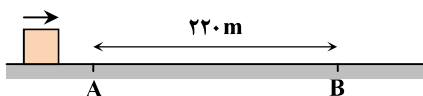
(۱) $11/6$

(۲) $14/6$

(۳) ۱۵

(۴) ۹

۴۸- مطابق شکل، متحرکی روی خط راست با شتاب ثابت و در یک جهت حرکت می‌کند. اگر تندی متحرک در نقاط A و B به ترتیب $12 \frac{m}{s}$ و $32 \frac{m}{s}$ باشد، ۴ ثانیه قبل از رسیدن متحرک به نقطه B، فاصله آن از نقطه A چند متر است؟



(۱) ۱۳۲

(۲) ۸۱

(۳) ۱۲۴

(۴) ۱۰۸

۴۹- متحرک A با سرعت ثابت $20 \frac{m}{s}$ و متحرک B با سرعت اولیه $4 \frac{m}{s}$ و شتاب ثابت $2 \frac{m}{s^2}$ هم‌زمان از یک محل و در یک جهت به حرکت درمی‌آیند. چند ثانیه بعد از اینکه که سرعت‌های دو متحرک برابر می‌شود، فاصله آن‌ها از یکدیگر به ۸۰ متر می‌رسد؟

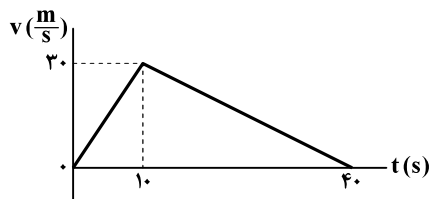
(۴) ۱۵

(۳) ۱۴

(۲) ۱۲

(۱) ۱۰

۵۰- با توجه به نمودار سرعت- زمان داده‌شده، اگر سرعت متوسط و شتاب متوسط در بازه زمانی $t = 5$ s تا $t = 10$ s را v_1 و a_1 و سرعت متوسط و شتاب متوسط در بازه زمانی $t = 10$ s تا $t = 25$ s را v_2 و a_2 بنامیم، کدام یک از گزینه‌های زیر درست است؟



(۱) $a_1 = -a_2$ و $v_1 = v_2$

(۲) $a_1 = -a_2$ و $v_1 = 3v_2$

(۳) $a_1 = -3a_2$ و $v_1 = v_2$

(۴) $a_1 = -3a_2$ و $v_1 = 3v_2$

۵۱- گلوله‌ای را از یک ارتفاع مشخص نسبت به سطح زمین رها می‌کنیم و گلوله با تندی $14 \frac{m}{s}$ به سطح زمین می‌رسد. اگر مقاومت هوا ناچیز باشد، ارتفاع سقوط گلوله چند متر است؟ ($g = 10 \frac{m}{s^2}$)

(۴) $10/2$

(۳) $9/8$

(۲) $8/5$

(۱) $7/8$

۵۲- سنگی از ارتفاع ۱۲۵ متری زمین به‌طور آزادانه سقوط می‌کند. بزرگی سرعت متوسط سنگ در ۲ ثانیه پایانی رسیدن به زمین چند متر بر ثانیه است؟ ($g = 10 \frac{m}{s^2}$)

(۴) ۵۰

(۳) ۴۵

(۲) ۴۰

(۱) ۳۵

محل انجام محاسبات:

۵۳- در شکل مقابل، جسم با نیروی افقی $F = 80 \text{ N}$ ، روی سطح افقی از حال سکون به سمت راست کشیده می‌شود. پس از ۵ ثانیه، تندی آن به

$$15 \frac{\text{m}}{\text{s}} \text{ می‌رسد. ضریب اصطکاک جنبشی جسم با سطح افقی کدام است؟ } (g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2})$$



(۱) $0/8$

(۲) $0/7$

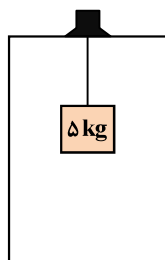
(۳) $0/6$

(۴) $0/5$

۵۴- یک وزنه به جرم ۵ کیلوگرم توسط نخ‌ها با جرم ناچیز از سقف یک آسانسور آویخته شده است. آسانسور از حال سکون به سمت بالا حرکت می‌کند و

در مدت ۳ ثانیه با شتاب ثابت به تندی $12 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ می‌رسد. سپس ۲ ثانیه با سرعت ثابت به حرکت خود ادامه می‌دهد و در پایان در مدت ۴ ثانیه با شتاب

ثابت متوقف می‌شود. اختلاف بیشترین و کمترین مقدار نیروی کشش طناب در این مدت چند نیوتون می‌شود؟ $(g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2})$



(۱) ۵۵

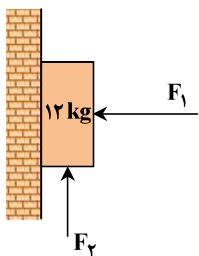
(۲) ۲۵

(۳) ۳۵

(۴) ۴۵

۵۵- در شکل مقابل، اگر $F_1 = 200 \text{ N}$ و $F_2 = 50 \text{ N}$ باشد، جسم در آستانه لغزیدن روی دیوار است. در صورتی که بزرگی نیروی F_1 برابر ۱۰۰

نیوتون شود، بزرگی نیروی F_2 حداکثر چند نیوتون باشد تا جسم باز هم در آستانه لغزیدن روی دیوار باشد؟ $(g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2})$



(۱) ۱۹۰

(۲) ۱۵۵

(۳) ۱۴۵

(۴) ۱۸۵

۵۶- بزرگی تکانه جسمی به جرم $4/5 \text{ kg}$ برابر با $15 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$ است. انرژی جنبشی جسم چند ژول است؟

(۴) ۳۰

(۳) ۲۵

(۲) ۲۰

(۱) ۱۵

۵۷- پره یک پنکه به‌طور یکنواخت در هر دقیقه ۱۵۰ دور می‌گردد. یک ذره روی این پره و در فاصله ۱۰ سانتی‌متر از محور پره (مرکز دایره) قرار

دارد. تندی لحظه‌ای ذره v و بزرگی شتاب لحظه‌ای آن a است. مقدار کسر $\frac{v}{a}$ بر حسب یکای SI کدام است؟

(۴) $\frac{1}{5\pi}$

(۳) $\frac{2}{5\pi}$

(۲) $\frac{2\pi}{5}$

(۱) $\frac{\pi}{5}$

محل انجام محاسبات:

۵۸- یک خودرو به جرم ۱۸۰۰ کیلوگرم در جاده‌ای افقی، پیچ مسطحی به شعاع ۱۰۰ متر را با تندی ثابت $90 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ طی می‌کند. شتاب مرکزگرا برای این خودرو توسط نیروی تأمین می‌شود و ضریب اصطکاک میان چرخ‌های خودرو و سطح جاده باید حداقل باشد تا

خودرو بتواند این پیچ را بدون آنکه بلغزد، طی کند. $(g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2})$

(۱) اصطکاک جنبشی - $\frac{5}{8}$ (۲) اصطکاک ایستایی - $\frac{3}{5}$ (۳) اصطکاک جنبشی - $\frac{3}{5}$ (۴) اصطکاک ایستایی - $\frac{5}{8}$

۵۹- تویی به جرم ۶۵۰ گرم را به صورت عمودی به طرف بالا در هوا پرتاب می‌کنیم. جسم به مدت ۲ ثانیه بالا می‌رود و سپس در مدت ۳ ثانیه به محل پرتاب برمی‌گردد. با فرض اینکه بزرگی نیروی مقاومت هوا در هنگام بالا رفتن و پایین آمدن توپ ثابت و یکسان باشد، بزرگی این نیرو

چند نیوتون است؟ $(g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2})$

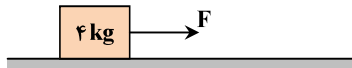
(۱) ۵ (۲) $\frac{5}{2}$ (۳) $\frac{5}{3}$ (۴) $\frac{5}{4}$

۶۰- وزن یک جسم در سطح زمین ۱۴۷ N است. اگر وزن آن در سطح یک سیاره ۵۴ N باشد، بزرگی شتاب گرانشی در سطح این سیاره چند

نیوتون بر کیلوگرم است؟ $(g = 9.8 \frac{\text{N}}{\text{kg}})$

(۱) $\frac{2}{5}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{3}{6}$ (۴) $\frac{4}{5}$

۶۱- در شکل مقابل، جسم روی سطح افقی ساکن است و بزرگی نیرویی که سطح تکیه‌گاه به آن وارد می‌کند، ۵۰ نیوتون است. اگر بزرگی نیروی F دو برابر شود، شتاب حرکت جسم



چند متر بر مربع ثانیه می‌شود؟ $(g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \mu_k = 0.7, \mu_s = 0.9)$

(۱) ۷ (۲) ۶

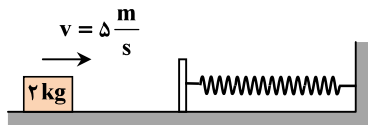
(۳) ۵ (۴) ۸

۶۲- مطابق شکل، اصطکاک وزنه با سطح افقی و جرم فنر و صفحه فلزی بسته شده به آن ناچیز و ثابت فنر $2000 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ است. وزنه‌ای به جرم ۲ kg

با تندی $5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ به طرف راست فرستاده شده و در برخورد با فنر، آن را حداکثر ۱۵ cm فشرده می‌کند و در بازگشت با تندی $4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ از فنر جدا

می‌شود. اگر مدت تماس وزنه با فنر ۸۰ میلی‌ثانیه باشد، بیشترین مقدار نیروی فنر در این مدت (F_1) و بزرگی نیروی متوسطی که فنر در این

مدت بر وزنه وارد می‌کند (F_2) چند نیوتون است؟



(۱) $F_1 = 450 \text{ N}, F_2 = 150 \text{ N}$

(۲) $F_1 = 450 \text{ N}, F_2 = 225 \text{ N}$

(۳) $F_1 = 300 \text{ N}, F_2 = 150 \text{ N}$

(۴) $F_1 = 300 \text{ N}, F_2 = 225 \text{ N}$

۶۳- نیروی افقی F در لحظه $t = 0$ وزنه را از حال سکون به طرف راست به حرکت درمی‌آورد و تا

لحظه $t = 5 \text{ s}$ به آن وارد می‌شود و در این لحظه نیروی F قطع می‌شود. از لحظه قطع شدن

نیروی F تا توقف کامل، وزنه مسافت چند متر را طی می‌کند؟ $(g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \mu_k = 0.4)$

$(\mu_s = 0.5)$

(۱) $7/5$ (۲) $12/5$

(۳) ۱۵ (۴) ۱۰



محل انجام محاسبات:

۶۴- اگر جرم ماهواره نصف و شعاع گردش آن به دور زمین ۲ برابر شود، کدام یک از عبارات‌های زیر در مورد آن درست است؟

الف) بزرگی شتاب مرکزگرای ماهواره $\frac{1}{4}$ برابر می‌شود. ب) انرژی جنبشی ماهواره $\frac{1}{4}$ برابر می‌شود.

(۱) «الف» و «ب» درست هستند.

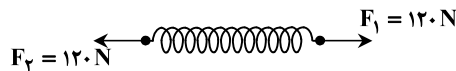
(۲) «الف» درست و «ب» نادرست است.

(۳) «الف» و «ب» نادرست هستند.

(۴) «الف» نادرست و «ب» درست است.

۶۵- هنگامی که یک وزنه ۵ کیلوگرمی را از حال سکون با شتاب ثابت $\frac{2}{3} \frac{m}{s}$ توسط یک فنر با طول اولیه ۴۰ سانتی‌متر بالا می‌کشیم، طول این فنر ۴۳

سانتی‌متر می‌شود. اگر از همین فنر به ترتیب شکل زیر استفاده کنیم، طول فنر چند سانتی‌متر می‌شود؟ (جرم فنر ناچیز است و $g = 10 \frac{m}{s^2}$)

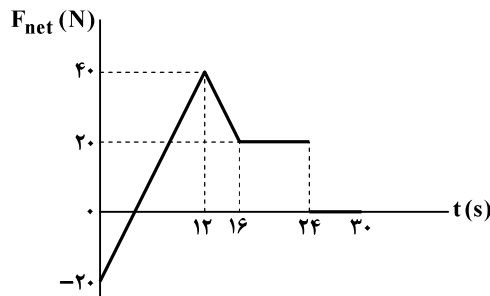


(۱) ۴۹

(۲) ۴۶

(۳) ۵۲

(۴) ۴۳



۶۶- جسمی به جرم ۱۶ کیلوگرم روی محور x حرکت می‌کند و نمودار نیروی خالص وارد بر آن بر حسب زمان مطابق شکل است. اگر در لحظه $t = 0$

سرعت جسم $(-2 \frac{m}{s}) \hat{i}$ باشد، در لحظه $t = 30 s$ سرعت جسم در SI

کدام است؟

(۱) $23 \hat{i}$

(۲) $20 \hat{i}$

(۳) $28 \hat{i}$

(۴) $25 \hat{i}$

۶۷- چند مورد از عبارات‌های زیر، در مورد هر حرکت هماهنگ ساده، درست است؟

الف) با افزایش انرژی جنبشی نوسانگر، بزرگی شتاب آن کاهش می‌یابد.

ب) بزرگی نیروی خالص وارد بر نوسانگر در وضع تعادل صفر است.

پ) هرگاه سرعت و مکان نوسانگر خلاف جهت هم باشند، حرکت آن تندشونده است.

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۶۸- بسامد یک حرکت نوسانی دوره‌ای ۱۰ kHz است. دوره تناوب این نوسان چند میلی‌ثانیه است؟

(۱) ۰/۰۱ (۲) ۰/۱ (۳) ۱ (۴) ۱۰

۶۹- معادله حرکت هماهنگ ساده‌ای در SI به صورت $x = 0.04 \cos(50\pi t)$ است. حداقل زمان لازم برای اینکه شتاب بیشینه نوسانگر به صفر برسد، برابر چند ثانیه است؟

(۱) $\frac{1}{50}$ (۲) $\frac{1}{100}$ (۳) $\frac{3}{200}$ (۴) $\frac{3}{100}$

۷۰- در یک حرکت هماهنگ ساده در لحظه‌ای که تندی متحرک $\frac{2}{3} \frac{m}{s}$ است، انرژی جنبشی متحرک دو برابر انرژی پتانسیل آن است. در

لحظه‌ای که انرژی پتانسیل متحرک دو برابر انرژی جنبشی آن شود، تندی متحرک چند متر بر ثانیه می‌شود؟

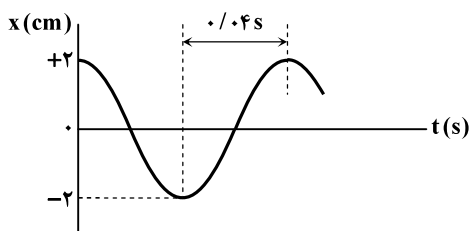
(۱) $\sqrt{2}$ (۲) $2\sqrt{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

۷۱- در حرکت هماهنگ ساده وزنه- فنر اگر جرم وزنه نصف، دامنه نوسان ۲ برابر و ثابت فنر ۳ برابر شود، انرژی جنبشی وزنه در وضع تعادل و

بسامد نوسان به ترتیب از راست به چپ چند برابر می‌شود؟

(۱) $\sqrt{3}$ ، ۱۲ (۲) $\sqrt{6}$ ، ۶ (۳) $\sqrt{3}$ ، ۶ (۴) $\sqrt{6}$ ، ۱۲

محل انجام محاسبات:



۷۲- وزنه‌ای به جرم ۸۰۰ گرم به انتهای یک فنر بسته شده و حرکت هماهنگ ساده انجام می‌دهد. اگر نمودار مکان- زمان این وزنه به شکل زیر باشد.

ثابت فنر چند نیوتون بر متر است؟ ($\pi = \sqrt{10}$)

(۱) ۱۲۵۰

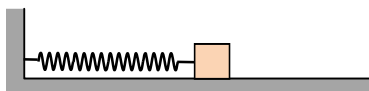
(۲) ۲۵۰۰

(۳) ۳۷۵۰

(۴) ۵۰۰۰

۷۳- مطابق شکل، وزنه روی سطح افقی با اصطکاک ناچیز نوسان می‌کند و کوتاه‌ترین فاصله زمانی بین عوض شدن جهت حرکت و عوض شدن جهت شتاب آن ۲۰۰ میلی‌ثانیه است. اگر بیشترین و کمترین طول فنر در حین نوسان وزنه ۶۸ cm و ۶۲ cm باشد، جرم وزنه چند گرم باشد

تا در هر یک از دو انتهای مسیر، انرژی پتانسیل آن ۴۵ میلی‌ژول شود؟ ($\pi^2 = 10$)



(۱) ۸۰۰

(۲) ۱۲۰۰

(۳) ۱۶۰۰

(۴) ۴۰۰

۷۴- اگر طول یک آونگ ساده را ۴۴ سانتی‌متر تغییر دهیم، تعداد نوسان‌های آن در هر دقیقه ۲۰ درصد زیاد می‌شود. تعداد نوسان‌های آونگ در

حالت اول (قبل از تغییر طول) در هر دقیقه کدام است؟ ($g = \pi^2 \frac{m}{s^2}$)

(۴) ۱۵

(۳) ۳۰

(۲) ۲۰

(۱) ۲۵

۷۵- نمودار مکان- زمان در یک حرکت هماهنگ ساده مطابق شکل است. تندی

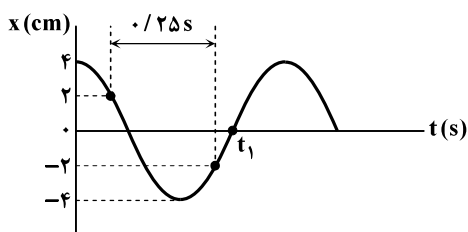
متوسط نوسانگر در مدت $t = 0$ تا $t = t_1$ چند سانتی‌متر بر ثانیه است؟

(۱) ۳۶

(۲) ۳۲

(۳) ۳۰

(۴) ۲۴

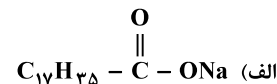
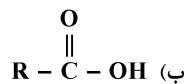
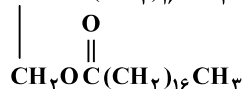
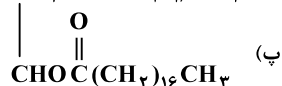
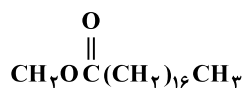


مرحله ۶ | داوطلب ریاضی | شیمی

محدوده: شیمی ۳: فصل‌های ۱ و ۲ (ص ۶۶ تا)

وقت پیشنهادی: ۳۰ دقیقه

۷۶- با توجه به ساختارهای زیر، کدام مطلب نادرست است؟ ($H = 1, C = 12, O = 16, Na = 23 : g \cdot mol^{-1}$)



(۱) اگر ترکیب (ب) یکی از محصولات آبکافت ترکیب (پ) باشد، گروه R را به صورت $\text{C}_{17}\text{H}_{35}$ می‌توان نمایش داد.

(۲) از صابونی شدن ترکیب اسیدی حاصل از آبکافت ترکیب (پ)، ترکیب (الف) با حالت فیزیکی جامد به دست می‌آید.

(۳) برای تولید ۶۱/۲ گرم ترکیب (الف) با بازده ۸۰ درصد به ۷۵ گرم اسید چرب سازنده آن نیاز است.

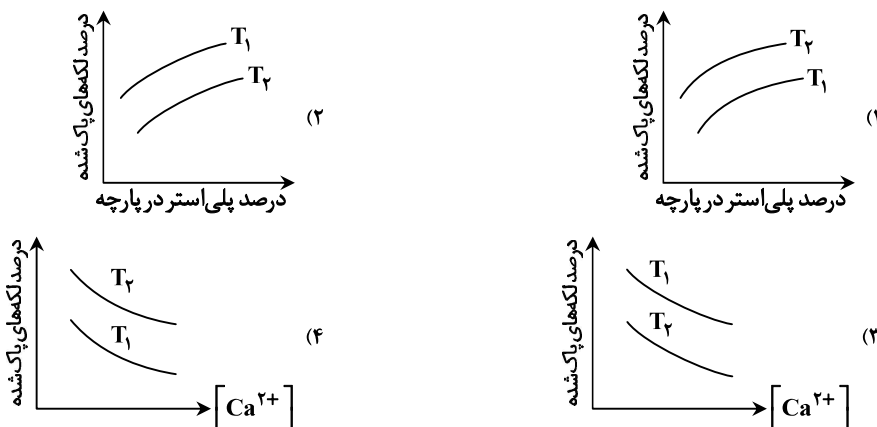
(۴) از آبکافت ۰/۲۵ مول ترکیب (پ)، ۲۳ گرم الکل سه عاملی تولید می‌شود.

محل انجام محاسبات:

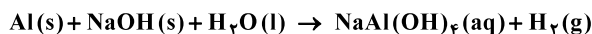
۷۷- کلونیدها و سوسپانسیون‌ها از نظر با یکدیگر داشته و از نظر با یکدیگر دارند.

- (۱) پایداری - شباهت - همگن بودن - تفاوت
(۲) رفتار در برابر نور - تفاوت - پایداری - شباهت
(۳) ناهمگن بودن - شباهت - ذره‌های سازنده - تفاوت
(۴) ذره‌های سازنده - تفاوت - پایداری - شباهت

۷۸- در کدام گزینه تأثیر عوامل مختلف بر درصد لکه‌های پاک‌شده در دماهای مختلف T_1 و T_2 به هنگام استفاده از یک صابون جامد را به درستی نشان می‌دهد؟ ($T_1 > T_2$)



۷۹- کدام عبارت زیر در رابطه با پودر لوله‌بازکن درست است؟ (معادله موازنه شود.)



(۱) نسبت ضریب استوکیومتری عنصر تولیدشده به عنصر مصرف شده در معادله موازنه شده واکنش برابر با ۱/۵ است.

(۲) در صورت استفاده از ورقه آلومینیمی و دانه‌های سدیم هیدروکسید به جای پودر، عملکرد آن بهتر می‌شود.

(۳) این واکنش گرماگیر متجر به باز شدن مسیر لوله‌ها و مجاری مسدود شده توسط چربی‌های جامد می‌گردد.

(۴) گاز حاصل می‌تواند باعث اسیدی شدن محتویات داخل لوله‌ها گردد.

۸۰- یک استر طبیعی سنگین دارای ۵۴ اتم کربن است. اگر هر سه زنجیر هیدروکربنی این استر هم‌اندازه و سیرشده باشند، کدام عبارت‌های زیر نادرست بیان شده‌اند؟

(الف) از آبکافت هر مول از آن ۳ مول اسید چرب با فرمول $C_{17}H_{33}COOH$ حاصل می‌شود.

(ب) در ساختار آن پیوند اشتراکی وجود دارد.

(پ) در هر مول از صابون ایجادشده از این استر همواره ۳۳ اتم هیدروژن وجود دارد.

(ت) شمار جفت الکترون‌های ناپیوندی در ساختار آن، سه برابر شمار اتم هیدروژن در مولکول اوره است.

(۱) «الف» و «ب» (۲) «ب» و «پ» (۳) «ب» و «ت» (۴) «الف» و «پ»

۸۱- در جدول زیر تمام داده‌های کدام ردیف درست است؟

ردیف	فرمول شیمیایی	$\frac{[H^+]}{[OH^-]}$	شمار مول یون‌های حاصل از انحلال یک مول ماده در آب
۱	N_2O_5	بزرگ‌تر از ۱	۳
۲	CaO	بزرگ‌تر از ۱	۳
۳	Li_2O	کمتر از ۱	۴
۴	SO_3	بزرگ‌تر از ۱	۴

(۴) ردیف ۴

(۳) ردیف ۳

(۲) ردیف ۲

(۱) ردیف ۱

محل انجام محاسبات:

۸۲- مقدار $1/25$ گرم از یک اسید تک پروتون دار ضعیف در آب مقطر حل شده و محلولی به حجم 15 لیتر با pH برابر $4/1$ حاصل شده است. درصد یونش مولکول های اسید در محلول کدام است؟ (جرم مولی اسید را 50 گرم بر مول در نظر بگیرید.)

(۱) 24 (۲) $2/4$ (۳) 48 (۴) $4/8$

۸۳- محلولی آبی از اسید ضعیف HA دارای pH برابر با $3/7$ و درجه یونش $0/1$ است. اگر بر اثر افزایش دما، درجه یونش آن 20 درصد نسبت به مقدار اولیه افزایش یابد، pH محلول به چه عددی خواهد رسید؟

(۱) $3/6$ (۲) $3/5$ (۳) $3/4$ (۴) $3/3$

۸۴- $0/05$ مول مخلوطی از اکسیدهای دو فلز قلیایی و قلیایی خاکی که در دوره چهارم جدول تناوبی قرار دارند را در 40 متر مکعب آب حل می کنیم. pH آب چند واحد تغییر می کند؟

(۱) $1/8$ (۲) $0/4$ (۳) $1/4$ (۴) $0/8$

۸۵- اگر در غلظت برابر، pH اسید ضعیف HX ، به اندازه $1/3$ واحد از pH اسید ضعیف HY کمتر باشد، نسبت ثابت یونش HX به ثابت یونش HY کدام است؟ (درجه یونش هر دو اسید کمتر از $0/1$ است.)

(۱) 400 (۲) 100 (۳) 3600 (۴) 2500

۸۶- به 400 mL محلول HNO_3 با $pH = 0/3$ ، 600 mL محلول $0/25$ مولار کلسیم هیدروکسید می افزائیم. محلول حاصل توسط چند میلی لیتر گاز SO_3 در شرایط STP خنثی می شود؟ (از تغییر حجم محلول چشم پوشی شود.)

(۱) 1120 (۲) 11200 (۳) 2240 (۴) 22400

۸۷- کدام مطلب در مورد محلول های بازی درست است؟

(۱) در دمای اتاق، pH محلول آمونیاک کوچک تر از pH محلول سدیم هیدروکسید است.

(۲) بازها نیز همانند اسیدها یونش می یابند و ثابت یونش آن ها را با K_b نمایش می دهند.

(۳) در محلول $0/1$ مولار باز ضعیف BOH ، $[BOH] = [B^+] = 0/1\text{ mol}\cdot\text{L}^{-1}$ است.

(۴) بازهای قوی خاصیت خوردندگی دارند و درجه تفکیک یونی آن ها برابر یک است.

۸۸- اگر به 300 میلی لیتر محلول پتاسیم هیدروکسید که در آن غلظت یون هیدروکسید 9×10^5 برابر غلظت یون هیدرونیوم است، 100 میلی لیتر محلول هیدروکلریک اسید با pH برابر $3/7$ اضافه کنیم، pH محلول نهایی در دمای اتاق چند خواهد شد؟

(۱) $4/6$ (۲) $9/25$ (۳) $3/2$ (۴) $10/5$

۸۹- کدام مطلب در مورد جوش شیرین نادرست است؟

(۱) نسبت شمار کاتیون به آنیون آن با همین نسبت در صابون جامد برابر است.

(۲) عدد اکسایش اتم کربن در آن با عدد اکسایش اتم مرکزی در مولکول اوره برابر است.

(۳) نسبت شمار جفت الکترون های ناپیوندی به پیوندی در ساختار بخش آنیونی آن برابر $2/25$ است.

(۴) در واکنش خنثی شدن اسید معده با جوش شیرین، مجموع ضرایب استوکیومتری فراورده ها برابر 3 است و هر سه فراورده حالت فیزیکی متفاوتی دارند.

۹۰- تیغه ای از جنس فلز روی را در محلولی از کلرید فلز X با فرمول $XCl(aq)$ وارد می کنیم. اگر پس از گذشت مدت زمانی معین، جرم تیغه کاهش یابد، بر این اساس کدام عبارت درست است؟ (فرض کنید طی انجام واکنش، تمام اتم های X بر سطح تیغه نشستند.)

(۱) جرم مولی فلز X به یقین کمتر از جرم مولی فلز Zn بوده و با گذشت زمان غلظت مولی محلول افزایش یافته است.

(۲) قدرت کاهندگی فلز روی کمتر از قدرت کاهندگی فلز X است.

(۳) در سری الکتروشیمیایی، موقعیت فلز Zn بالاتر از فلز X بوده و پتانسیل کاهشی استاندارد فلز X کمیتی مثبت است.

(۴) اگر پتانسیل کاهشی استاندارد فلز X مقداری منفی باشد، هر دو فلز X و M با محلول اسیدی واکنش می دهند.

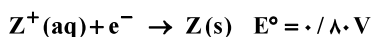
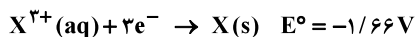
محل انجام محاسبات:

۹۱- با توجه به پتانسیل کاهش استاندارد نیم سلول های فلزی A و Z، کدام دو مورد درست هستند؟

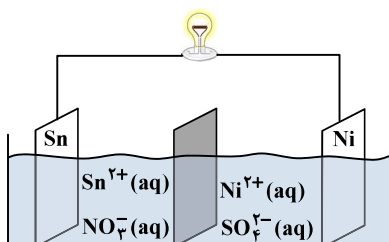
$$E^\circ_{(A^+/A)} = -0.24V, E^\circ_{(Z^{2+}/Z)} = 0.28V$$

- (الف) در سلول گالوانی حاصل از اتصال این دو نیم سلول، با گذشت زمان جرم الکترود A برخلاف جرم الکترود Z کاهش می یابد.
 (ب) در سلول گالوانی حاصل از نیم سلول استاندارد A و SHE، با گذشت زمان، غلظت یون هیدرونیوم در محلول SHE افزایش می یابد.
 (پ) اگر تیغه ای از جنس A در محلول $Z^{2+}(aq)$ وارد شود، جرم تیغه تغییر نمی کند.
 (ت) در سلول گالوانی تشکیل شده از نیم سلول استاندارد Z و SHE مانند سلول گالوانی تشکیل شده از نیم سلول های استاندارد A و Z، نیم سلول Z کاتد است.

- (۱) «الف» و «ت» (۲) «الف» و «ب» (۳) «ب» و «ت» (۴) «پ» و «ت»
 ۹۲- با توجه به مقادیر $E^\circ(V)$ داده شده برای سه فلز X، Y و Z کدام مقایسه درست است؟

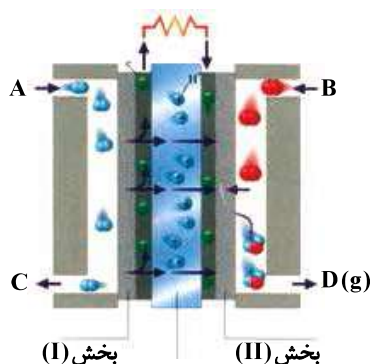


- (الف) اکسندگی: $X < Y < Z$ (ب) کاهشگی: $Y^{2+} > X^{2+} > Z^+$
 (پ) اکسندگی: $Z^+ > X^{2+} > Y^{2+}$ (ت) کاهشگی: $Y > X > Z$
 (۱) «الف»، «ب» و «ت» (۲) «الف» و «پ» (۳) «ب» و «ت» (۴) «پ» و «ت»
 ۹۳- با توجه به اطلاعات داده شده، کدام یک از عبارات زیر در رابطه با سلول گالوانی رسم شده درست است؟
 $(Ni = 58, Sn = 119 : g \cdot mol^{-1}) \quad (E^\circ(Sn^{2+}/Sn) = -0.14V, E^\circ(Ni^{2+}/Ni) = -0.25V)$



- (۱) با افزودن مقداری از نمک نیکل (II) نیترات به محلول کاتدی یک واکنش الکتروشیمیایی انجام می گیرد.
 (۲) برخی از یون های قلع با عبور از دیواره متخلخل وارد نیم سلول نیکل خواهند شد.
 (۳) اگر محلول اولیه در هر دو نیم سلول دارای غلظت و حجم یکسانی باشند، تغییر جرم تیغه آندی به تقریب دو برابر تغییر جرم تیغه کاتدی خواهد بود.
 (۴) جهت حرکت الکترون ها در مدار بیرونی از نیم سلول نیکل به نیم سلول قلع و در خلاف جهت حرکت آنیون های نیترات است.

۹۴- با توجه به شکل زیر که مربوط به سلول سوختی «هیدروژن-اکسیژن» است کدام مطلب درست بیان شده است؟



- (۱) از قسمت A گاز اکسند وارد شده و از قسمت C مولکول های گازی واکنش نداده خارج می شود.
 (۲) دربخش (I) نیم واکنش: $O_2 + 4H^+ + 4e^- \rightarrow 2H_2O$ انجام می شود.
 (۳) به ازای تولید هر مول ماده D(g)، چهار مول الکترون در این دستگاه بین آند و کاتد جابه جا می شود.
 (۴) بخش (II) کاتد این دستگاه است که یون های هیدرونیوم به سمت آن حرکت می کنند.

محل انجام محاسبات:

۹۵- با توجه به مفهوم عدد اکسایش کدام مطلب درست است؟

- (۱) عدد اکسایش اتم کربن در هیدروکربن‌ها از $+۴$ تا -۴ متغیر است.
- (۲) عدد اکسایش اتم مرکزی در نیترو اسید با عدد اکسایش کربن در مولکول کربن مونوکسید برابر است.
- (۳) عدد اکسایش اسکاندیم در نمک حاوی فسفات، سولفات و نیترات این فلز به ترتیب $+۳$ ، $+۲$ و $+۱$ است.
- (۴) حاصل جمع عدد اکسایش اتم‌های کربن الکل سه عاملی به دست آمده از آبکافت استرهای طبیعی سنگین برابر -۲ است.

۹۶- کدام توصیف نادرست است؟ ($Al = ۲۷, Ag = ۱۰۸ : g \cdot mol^{-1}$)

- (۱) در سلول گالوانی $Al - Ag$ تغییر جرم تیغه کاتدی بیشتر از تغییر جرم تیغه آندی است.
 - (۲) در سلول گالوانی $Zn - Fe$ آنیون‌ها از طریق دیواره متخلخل وارد نیم‌سلول روی می‌شوند.
 - (۳) واکنش کلی سلول گالوانی $Mg - Ag$ به صورت $Mg(s) + Ag^+(aq) \rightarrow Mg^{2+}(aq) + Ag(s)$ است.
 - (۴) اگر emf سلول گالوانی $Zn - Ag$ برابر $۱/۵۶ V$ باشد، emf سلول گالوانی $Fe - Ag$ کمتر خواهد بود.
- ۹۷- با توجه به واکنش: $CH_3OH + Cr_2O_7^{2-} + H^+ \rightarrow Cr^{3+} + CO_2 + H_2O$ کدام مطلب پس از موازنه آن نادرست است؟

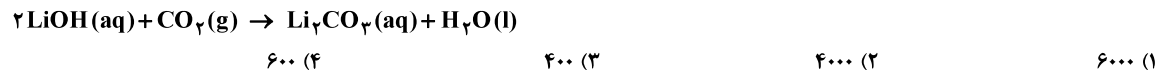
- (۱) با انجام واکنش، pH محلول افزایش می‌یابد.
 - (۲) به ازای تشکیل هر مول کربن دی‌اکسید یک مول الکل مصرف می‌شود.
 - (۳) مجموع تغییرات عدد اکسایش اتم‌های کربن با مجموع تغییرات عدد اکسایش اتم‌های کروم برابر است.
 - (۴) هر مول کاهنده ۶ مول الکترون از دست می‌دهد و هر مول اکسنده ۳ مول الکترون می‌گیرد.
- ۹۸- کدام مطلب درباره فرایند برقکافت آب درست است؟
- (۱) آب خالص رسانایی الکتریکی ندارد از این رو برای انجام برقکافت، باید مقدار کمی الکترولیت به آب افزود.
 - (۲) کاغذ pH در محلول پیرامون آند به رنگ قرمز در می‌آید.
 - (۳) گاز هیدروژن در قطب مثبت تولید می‌شود.
 - (۴) مجموع ضرایب استوکیومتری تمام گونه‌های شرکت‌کننده در نیم‌واکنش آندی برابر ۱۰ است.

۹۹- اگر در فرایند برقکافت منیزیم کلرید مذاب، ۳۰ لیتر گاز با چگالی $۰/۸۵۲$ گرم بر لیتر تولید شود، چند مول الکترون از آند به کاتد جاری شده است و جرم فراورده آندی چند برابر جرم فراورده کاتدی است؟ ($Mg = ۲۴, Cl = ۳۵/۵ : g \cdot mol^{-1}$)

- (۱) $۰/۳۶$ ، $۰/۳۳$ (۲) $۲/۹۵$ ، $۰/۳۶$ (۳) $۲/۹۵$ ، $۰/۷۲$ (۴) $۰/۷۲$ ، $۰/۳۳$

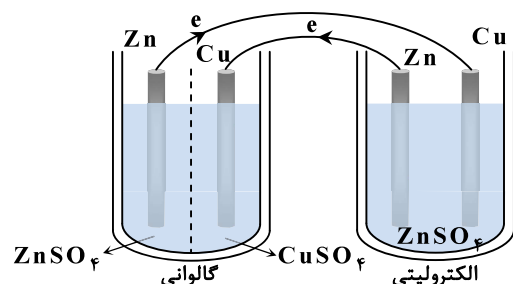
۱۰۰- در یک کارگاه صنعتی با انجام فرایند هال ۱۸۰ کیلوگرم آلومینیم تولید شده است. اگر گاز حاصل از این فرایند مطابق معادله زیر به طور کامل

با محلول $۲/۵$ مولار لیتیم هیدروکسید واکنش دهد، حجم محلول مورد نیاز در این واکنش چند لیتر خواهد بود؟ ($Al = ۲۷ : g \cdot mol^{-1}$)



۱۰۱- با توجه به شکل زیر که استفاده از یک سلول گالوانی برای تولید انرژی الکتریکی لازم برای انجام واکنش در یک سلول الکترولیتی را نشان

می‌دهد، کدام مطلب درست است؟



(الف) در هر دو سلول الکترودهای روی آند هستند.

(ب) الکترودهای به هم متصل شده در دو سلول، هم علامت نیستند.

(پ) در لحظه اتصال دو سلول به یکدیگر، واکنش‌ها در دو سلول به

شکل خودبه‌خودی انجام می‌شوند.

(ت) هدف از انجام این فرایند، آبکاری یک میله مسی با روکشی از فلز

روی است.

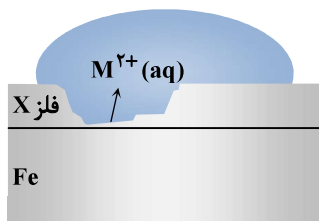
(۱) «الف» و «ت» (۲) «ب» و «پ»

(۳) «الف» و «پ» (۴) «ب» و «ت»

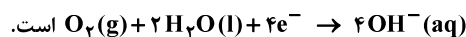
محل انجام محاسبات:

- ۱-۲- با توجه به فرایند زنگ زدن آهن، کدام گزینه در ارتباط با مراحل تشکیل زنگ آهن به درستی بیان شده است؟
 (۱) اتم‌های آهن پس از اکسایش به آهن (II) با یون‌های هیدروکسید حاصل از یونیده شدن مولکول‌های آب واکنش داده و به رسوب سبز رنگ آهن (II) هیدروکسید تبدیل می‌شوند.
 (۲) یون‌های Fe^{2+} در مجاورت آب و اکسیژن به یون‌های Fe^{3+} اکسید شده و از واکنش آن‌ها با یون‌های هیدروکسید حاصل از کاهش یافتن مولکول‌های اکسیژن، زنگ آهن را تولید می‌کنند.
 (۳) مولکول‌های آب از یک سو در نقش کاتالیزگر، سرعت نیم‌واکنش کاتدی را افزایش می‌دهند و از سویی با گرفتن الکترون از اتم‌های آهن نقش اکسندگی دارند.
 (۴) تمام مراحل تشکیل زنگ آهن از نوع واکنش‌های «اکسایش-کاهش» به شمار می‌آیند و در هر مرحله نیم‌واکنش‌های آندی و کاتدی متفاوتی رخ می‌دهد.

۱-۳- با توجه به شکل مقابل کدام مطلب نادرست بیان شده است؟



- (۱) اگر X فلز روی باشد، آنگاه M^{2+} یون Zn^{2+} است.
 (۲) اگر X فلز قلع باشد، در محل خراش آهن خورده می‌شود.
 (۳) اگر X فلز قلع باشد، نام قطعه حلبی است و در سلول گالوانی تشکیل شده، فلز قلع در نیم‌واکنش کاتدی شرکت می‌کند.
 (۴) اگر X فلز روی باشد، واکنش کاتدی به صورت



۱-۴- در آبکاری یک تیغه آهنی با روکشی از فلز نیکل، چند جمله داده شده درست است؟

- فلز نیکل به عنوان آند به قطب منفی منبع جریان مستقیم وصل می‌شود.
- محلول الکترولیت به کار رفته باید حاوی نمک‌های آهن باشد.
- نیم‌واکنش کاتدی به صورت $Fe^{2+}(aq) + 2e^- \rightarrow Fe(s)$ است.
- با گذشت زمان از جرم تیغه کاتدی کاسته می‌شود.

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۱-۵- چند مورد از مطالب زیر درست است؟

- اکسندترین عنصر و کاهنده ترین فلز در جدول تناوبی هم‌دوره هستند.
- برای تهیه صنعتی فلز سدیم از برق‌کافت $NaCl(aq)$ بهره می‌برند.
- در سلول‌های الکترولیتی، جهت حرکت الکترون با جهت حرکت کاتیون در سلول همسو و از آند به کاتد است.
- نیم‌واکنش کاتدی در نمونه‌ای از سلول نور الکتروشیمیایی که برای تهیه گاز هیدروژن از آب به کار می‌رود مشابه نیم‌واکنش کاتدی در برق‌کافت آب است.

(۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

محل انجام محاسبات:

اسامی هیأت علمی آزمون‌های ویژه داوطلبان کنکور ۱۴۰۵ گروه علوم ریاضی

مدیر گروه	عنوان درس	مستول درس	طراحان	دستیار مستول درس
سید شاکری سیدابراهیم محمد	حسابان و ریاضی پایه	علی افضل زاده	حسین شفیع زاده- ایمان اردستانی	عباس سعیدی- وحید جعفری
	هندسه	سعید اکبرزاده	سید محسن میراسلامی- فرهاد فرزامی- سعید اکبرزاده	هادی کاظم نژاد
	ریاضیات گسسته	سعید اکبرزاده	علیرضا شریف خطیبی- سعید اکبرزاده- امیدرضا پورحسینی	فرهاد فرزامی
محمد حسینی کشتانی	فیزیک	منصور داودوندی	علی نعیمی- بهمن شاهمرادی- احمد رضوانی منصور داودوندی- جمال خم خاجی	ساناز دریگوندی
	شیمی	شهرام شاه پرویزی	ماشاءالله سلیمانی- بهنام ابراهیم پور- مهداد ملاصالحی- سید صمد صفوی حسین شرانلو- رضا بخشیان- محمد رضا پورجاوید- یاسر راش	حنانه شریف خطیبی

معاون تولید محتوا: علی الفتی

مدیر واحد آموزش تخصصی: محمد رضا محمد هاشمی

B

دفترچه پاسخ تشریحی

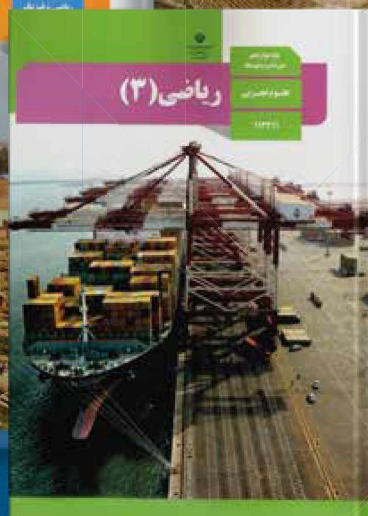
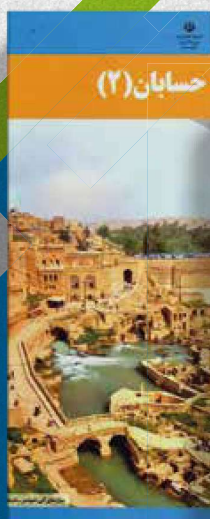
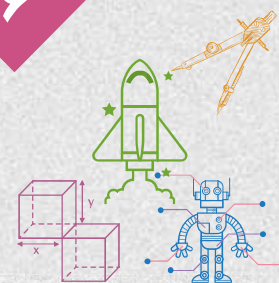
گروه آزمایشی علوم ریاضی

آزمون آزمایشی ۳ بهمن ۱۴۰۴

ویژه داوطلبان آزمون سراسری ۱۴۰۵

پایه
دوازدهم

مرحله
۶



۱۴۰۴-۱۴۰۵



تذکرات مهم ↓

➤ آزمون آزمایشی مرحله ۷ گزینه دو، در روز جمعه ۱۷ بهمن ۱۴۰۴ برگزار می گردد.

➤ داوطلب گرامی، جهت استفاده از خدمات طلایی خود مانند کارنامه های هوشمند بعد از آزمون، آزمونک ها، بانک سؤال گزینه دو، رفع اشکال هوشمند، آرشیو آزمون های گزینه دو و ... ، با استفاده از شماره داوطلبی (به عنوان نام کاربری) و کد ملی خود (به عنوان رمز عبور) وارد وبسایت گزینه دو به آدرس www.gozine2.ir شوید.

➤➤ در صورتی که اینترنتی ثبت نام کرده اید، رمز عبور شما همان رمزی است که خودتان انتخاب نموده اید.

➤ کارنامه های آزمون آزمایشی مرحله ۶ به صورت کامل، با فاصله زمانی کوتاهی پس از آزمون مطابق اطلاعیه اعلام شده، بر روی پایگاه اینترنتی گزینه دو به آدرس www.gozine2.ir قرار می گیرد. در صورت بروز اشکال در دریافت کارنامه، موضوع را از طریق نمایندگی شهر خود پیگیری نمایید.



داوطلب گرامی، شما می توانید با اسکن تصویر بالا به وسیله گوشی هوشمند و یا تبلت خود، به صفحه اینستاگرام مؤسسه گزینه دو وارد شوید.

📷 gozine2.ir

● مدیر واحد آموزش تخصصی: محمدرضا محمدهاشمی

● معاون تولید محتوا: علی الفتی

کارشناسان

طراحان

سید مهدی عابدی ● سید علی موسوی راد	حسین شفیع زاده ● ایمان اردستانی	مسئول درس: علی افضل زاده دستیاران: عباس سعیدی - وحید جعفری	حسابان و ریاضی پایه
علی صادقی ● مانی خدابنده	سید محسن میراسلامی ● سعید اکبرزاده	مسئول درس: سعید اکبرزاده دستیار: هادی کاظم نژاد	هندسه
حسین خواجوند ● مانی خدابنده	علیرضا شریف خطیبی ● امیدرضا پورحسینی	مسئول درس: سعید اکبرزاده دستیار: فرهاد فرزانی	ریاضیات گسسته
پوپک مقدم	مهرداد کیوان ● ایمان اردستانی	مسئول درس: ایمان اردستانی دستیاران: وحید جعفری - مهدی پوررضایی	ریاضی تجربی
امیرحسین حریری ● ایمان حسین زاده	وحید رباعی ● حسین افسری	مسئول درس: حسین افسری دستیاران: مهدی پوررضایی - عباس مالکی	ریاضی انسانی

گروه ریاضی

مدیر: سید محمد شاکری
معاون: سید علی الفتی

کارشناسان

طراحان

بیتول خواجهرپور ● علی حاجی محمدزاده رضا پنهانی	امیر کبیری راد ● علی بنای شایق بهرام میرحبیبی ● منصور کهن دل مسعود حدادی ● محمد شاملو	مسئول درس: امیر کبیری راد دستیار: پرسا کامکار	زیست شناسی
مریم گلی حسن لو	بهمن شاهمرادی ● منصور داودوندی	مسئول درس: منصور داودوندی دستیار: ساناز دریگوندی	فیزیک
مرتضی قدیانی ● حسین ایمانی پور	بهنام ابراهیم پور ● سید صمد صفوی رضا بخشیان ● یاسر راش	مسئول درس: شهرام شاه پرویزی دستیار: حنا شریف خطیبی	شیمی
فرزانه صاعدی ● حسن علیمحمدی روزبه اسحاقیان	فرزانه رجایی ● عباس روزبهانی	مسئول درس: شکبیا کریمی	زمین شناسی

گروه علوم

مدیر: محمد حسین کشانی
معاون: سید علی الفتی

کارشناسان

طراحان

محمدصادق حسام زاده ● محمدصدرا حسینی علیرضا حیدری	محمد رضا لمسه چی ● طاهره موسی زاده امیرمهدی اسفندی	ابوالفضل قاضی ● علی عطری محمد رضا پیرو	علوم و فنون ادبی
مهتاب شیرازی ● هستی ناصح	فروغ تیموریان ● محمدزمان کبیر	آریتا بیدقی ● علیرضا مختاری محمود حسن پور	جامعه شناسی
علی شکری ● فاطمه یاری	سیده ضحی سکاکی	سیمین زاهدی ● حمیدرضا توکلی	روان شناسی
فاطمه نظری ● سارا حمزه مهتاب شیرازی ● صبا پهلوان	اسرافیل قربانیپور ● پدرام علیمرادی عرفان جالبیزی	کاظم غلامی ● حمید جوهری مجد پویا رضاداد	زبان عربی
مهتاب شیرازی ● محمدصدرا حسینی رضا کرپلاهی	بهروز یحیی ● مریم قلی پور	شهرام امامی ● نگار مروتی	تاریخ
مهتاب شیرازی ● محمدصدرا حسینی رضا کرپلاهی	بهروز یحیی	شهرام امامی ● نگار مروتی	جغرافیا
سپهر علی پور ● ابوالفضل میرمحمدی امیررضا علیزاده	علی اکبر آخوندی ● مهدی لاجوردی ناصر آزادجو	حمید سودیان طهرانی ● سعید رحیمیان فرهاد قاسمی نژاد	فلسفه و منطق
کوثر رعدی	میترا چینی ساز ● محمد رضا مبارکی ش بدری	حسین خاکساری	اقتصاد

گروه انسانی

مدیر: گروه علی اکبر آخوندی
معاون: سید علی الفتی

ریاضیات



۱- حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 3x}{(2x-1)^2}$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) $-\infty$

۱- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۲ (فصل ۳، درس ۲)



- اگر $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a$ و $g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b$ ، آنگاه داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n x^{n-m}}{b_m}$$



تابع موردنظر را ساده کرده و حاصل حد را به دست می آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 3x}{(2x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 3x}{4x^2 - 4x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{4x^2} = \frac{1}{2}$$

۲- حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 4}$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) $-\infty$

۲- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۲ (فصل ۳، درس ۱)



- اگر $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \neq 0$ ، آنگاه:

■ اگر $L > 0$ و مقادیر $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a منفی باشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$



حد صورت و مخرج در $x = 2$ برابر صفر است؛ بنابراین حد مبهم است. با تجزیه صورت و مخرج، عامل صفرکننده را از صورت و مخرج ساده می کنیم و حاصل حد را به دست می آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 4} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-1}{x-2} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

دقت کنید وقتی x با مقادیر کمتر از ۲ به آن نزدیک می شود، $x - 2$ با مقادیر کمتر از صفر به صفر نزدیک می شود؛ در نتیجه علامت مخرج منفی است.

۳- نقطه $A(-2, 3)$ محل برخورد دو تا از مجانب های تابع $f(x) = \frac{ax^3 - 2x + 1}{x(x^2 - b)}$ است. مقدار $b - a$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۷

▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۲ (فصل ۳، درس‌های ۱ و ۲)

۳- پاسخ: گزینه ۱



- خط $x = a$ را مجانب قائم نمودار تابع $f(x)$ گویند هرگاه حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد.

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$

- خط $y = L$ را مجانب افقی نمودار $y = f(x)$ می‌نامیم به شرطی که حداقل یکی از دو شرط $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ برقرار باشد.



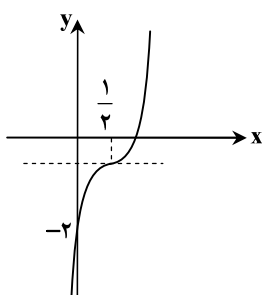
وقتی نقطه $A(-2, 3)$ محل برخورد مجانب‌های تابع $f(x) = \frac{ax^3 - 2x + 1}{x(x^2 - b)}$ است؛ یعنی $x = -2$ مجانب قائم تابع f و $y = 3$ مجانب افقی تابع f است؛ بنابراین:

$$x(x^2 - b) = 0 \xrightarrow{x=-2} -2(4 - b) = 0 \Rightarrow 4 - b = 0 \Rightarrow b = 4$$

$$y = 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax^3 - 2x + 1}{x^3 - bx} = 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax^3}{x^3} = 3 \Rightarrow a = 3$$

بنابراین $b - a$ برابر $4 - 3 = 1$ است.

۴- نمودار تابع $f(x) = \lambda x^3 + ax^2 + bx + c$ به صورت مقابل است. باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $x + c$ کدام است؟



۸ (۱)

۷ (۲)

۲۷ (۳)

۲۶ (۴)

▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۲ (فصل ۱، درس ۲)

۴- پاسخ: گزینه ۴



- باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر دوجمله‌ای درجه اول $ax + b$ برابر است با $r = f\left(\frac{-b}{a}\right)$.



تابع f با کمک تبدیلات از تابع $y = x^3$ به دست آمده است؛ پس با توجه به اینکه ضریب x^3 در تابع f برابر ۸ بوده و نقطه‌ای با طول $\frac{1}{2}$ مرکز تقارن تابع f است، ضابطه f را می‌نویسیم.

$$f(x) = (2x - 1)^3 + k$$

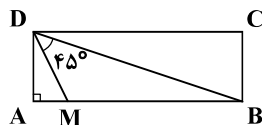
مطابق نمودار داده شده، تابع محور عرض‌ها را در نقطه با عرض -2 قطع می‌کند؛ بنابراین:

$$f(0) = -2 \Rightarrow (-1)^3 + k = -2$$

$$\Rightarrow k = -1 \Rightarrow f(x) = (2x - 1)^3 - 1$$

باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $x + c$ برابر $f(-c)$ است؛ همچنین c برابر $f(0)$ یعنی -2 است؛ پس باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $x + c$ برابر است با:

$$r = f(-c) = f(2) = (4 - 1)^3 - 1 = 26$$



۵- در مستطیل شکل مقابل، طول مستطیل سه برابر عرض آن است. نقطه M ضلع AB را با چه نسبتی تقسیم می کند؟

- (۱) یک به پنج
(۲) یک به شش
(۳) یک به سه
(۴) یک به چهار

۵- پاسخ: گزینه ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۲، درس ۲)



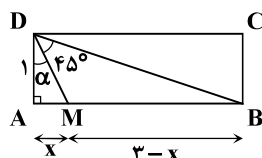
$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

- رابطه تانژانت مجموع دو زاویه به صورت زیر است:



با توجه به اینکه هدف، محاسبه نسبت طول دو پاره خط است، پس می توانیم عرض مستطیل را برابر یک فرض کنیم. یعنی $AD = 1$ ؛ پس $AB = 3$. اگر طول AM را برابر x فرض کنیم، طول MB برابر $3 - x$ است.

در مثلث قائم الزاویه $\triangle ABD$ ، با استفاده از نسبت مثلثاتی تانژانت، داریم:



$$\tan(\alpha + 45^\circ) = \frac{\tan \alpha + 1}{1 - \tan \alpha} \Rightarrow \frac{3}{1} = \frac{1 + \frac{x}{3-x}}{1 - \frac{x}{3-x}} \Rightarrow 3 - 3x = x + 1 \Rightarrow 4x = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$\frac{AM}{BM} = \frac{x}{3-x} = \frac{\frac{1}{2}}{3-\frac{1}{2}} = \frac{1}{5}$$

می خواهیم بدانیم نقطه M ضلع AB را با چه نسبتی قطع می کند؛ پس نسبت $\frac{AM}{BM}$ را پیدا می کنیم:

بنابراین نقطه M پاره خط AB را با نسبت یک به پنج قطع می کند.

۶- دامنه و برد تابع $y = f(x)$ برابر بازه $[-2, 1]$ است. اگر عدد مثبت a و عدد منفی b به گونه ای باشند که برد تابع $y = af(x) + 2$ با دامنه تابع $y = f(bx + 2)$ برابر باشد، مقدار ab کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) $-\frac{9}{4}$ (۳) $-\frac{4}{9}$ (۴) -۲

۶- پاسخ: گزینه ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۱، درس ۱)



ابتدا به محاسبه برد تابع $y = af(x) + 2$ می پردازیم:

$$R_f = [-2, 1] \Rightarrow -2 \leq f(x) \leq 1 \xrightarrow{a>0} -2a \leq af(x) \leq a \Rightarrow -2a + 2 \leq af(x) + 2 \leq a + 2$$

پس برد تابع خواسته شده، بازه $[-2a + 2, a + 2]$ است.

اکنون به محاسبه تابع دامنه $y = f(bx + 2)$ می پردازیم:

$$D_f = [-2, 1] \Rightarrow -2 \leq bx + 2 \leq 1 \Rightarrow -4 \leq bx \leq -1 \xrightarrow{b<0} \frac{-1}{b} \leq x \leq \frac{-4}{b}$$

پس دامنه تابع خواسته شده، بازه $\left[\frac{-1}{b}, \frac{-4}{b}\right]$ است.

طبق فرض سؤال دو بازه به دست آمده با یکدیگر برابر هستند؛ پس:

$$\Rightarrow \begin{cases} -2a + 2 = \frac{-1}{b} \\ a + 2 = \frac{-4}{b} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a - 2 = \frac{1}{b} \\ a + 2 = \frac{-4}{b} \end{cases} \Rightarrow 2a - 2 = \frac{a + 2}{-4} \Rightarrow -8a + 8 = a + 2 \Rightarrow 9a = 6 \Rightarrow a = \frac{2}{3} \Rightarrow b = -\frac{3}{2}$$

بنابراین مقدار خواسته شده یعنی ab برابر -۱ است.

پاسخ تشریحی آزمون ۳ بهمن ۱۴۰۴

۷- تابع $f(x) = 3x^2 - 12x + 16$ مفروض است. اگر تابع $y = -f\left(\frac{3-2x}{4}\right)$ در بازه $[a, b]$ اکیداً نزولی باشد، آنگاه کدام گزینه درست است؟

$\min(a) = -\frac{5}{2}$ (۴) $\min(a) = -\frac{1}{4}$ (۳) $\max(b) = -\frac{1}{4}$ (۲) $\max(b) = -\frac{5}{2}$ (۱)

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۱، درس ۲)

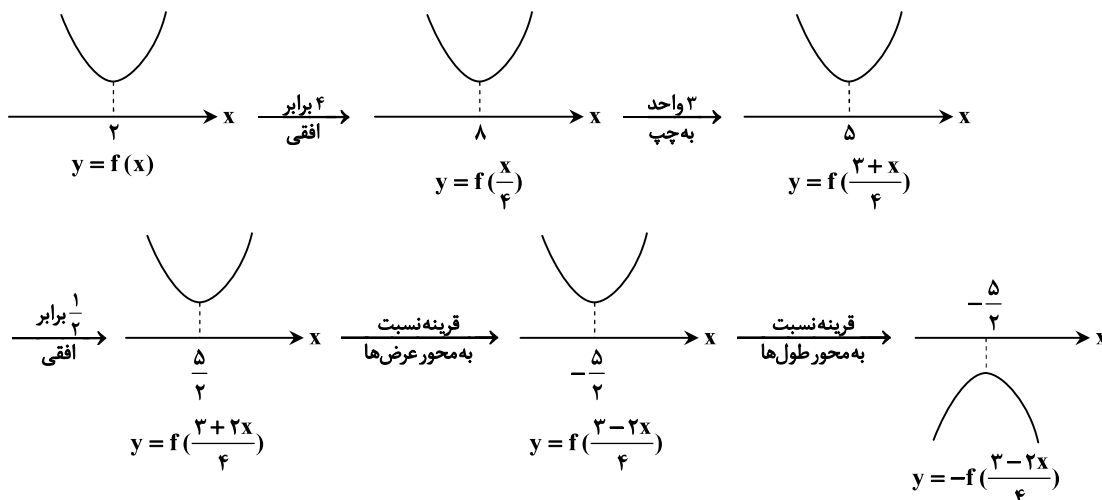
۷- پاسخ: گزینه ۴



- تابع f را در یک مجموعه، اکیداً نزولی می‌گوییم، اگر برای هر دو مقدار a و b در این مجموعه که $a < b$ ، آنگاه: $f(a) > f(b)$ - در فاصله‌ای که یک تابع اکیداً نزولی است، با حرکت روی نمودار (از چپ به راست)، همواره روبه پایین خواهیم رفت.



رأس سهمی $f(x) = 3x^2 - 12x + 16$ ، نقطه‌ای به طول ۲ $\frac{12}{6} = 2$ است. با انجام مراحل زیر، نمودار تابع جدید را به دست می‌آوریم.



رأس سهمی $y = f(x)$ ، نقطه‌ای به طول ۲ است؛ پس طول رأس سهمی $y = -f\left(\frac{3-2x}{4}\right)$ از حل معادله زیر به دست می‌آید:

$$\frac{3-2x}{4} = 2 \Rightarrow 3-2x = 8 \Rightarrow 2x = -5 \Rightarrow x = -\frac{5}{2}$$

همچنین با توجه به اینکه سهمی f روبه بالا بوده و در نمودار جدید، سهمی نسبت به محور طول‌ها قرینه شده است؛ پس سهمی جدید روبه پایین است؛ پس در بازه $\left[-\frac{5}{2}, +\infty\right)$ نمودار نهایی، اکیداً نزولی است؛ پس اگر تابع در بازه $[a, b]$ اکیداً نزولی باشد، حداقل مقدار a برابر $-\frac{5}{2}$ است و b دارای حداقل مقدار یا حداکثر مقدار نیست.

۸- چندجمله‌ای $f(x) = x^3 + mx^2 + x - 4$ بر $x-1$ بخش‌پذیر است. مجموع ضرایب خارج قسمت تقسیم چندجمله‌ای

$$g(x) = f(x^2) + f^2(x)$$

بر $x+1$ کدام است؟

-4 (۱) -8 (۲) 8 (۳) 4 (۴)

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۱، درس ۲)

۸- پاسخ: گزینه ۲



- باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر دوجمله‌ای درجه اول $ax+b$ برابر است با $r = f\left(\frac{-b}{a}\right)$.



باقی مانده تقسیم $f(x)$ بر $x-1$ برابر $f(1)$ است. از طرفی $f(x)$ بر $x-1$ بخش پذیر است؛ پس:

$$r=0 \Rightarrow f(1)=0 \Rightarrow 1+m+1-4=0 \Rightarrow m=2$$

اکنون قضیه تقسیم را برای تقسیم $g(x)$ بر $x+1$ می نویسیم. خارج قسمت این تقسیم را $h(x)$ می نامیم. باقی مانده تقسیم نیز برابر $g(-1)$ است؛ بنابراین:

$$g(x) = (x+1) \cdot h(x) + g(-1)$$

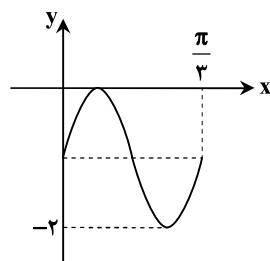
مجموع ضرایب خارج قسمت یعنی $h(x)$ همان $h(1)$ است؛ پس با جای گذاری $x=1$ در رابطه فوق مقدار $h(1)$ را پیدا می کنیم:

$$g(1) = 2h(1) + g(-1) \Rightarrow h(1) = \frac{g(1) - g(-1)}{2} \Rightarrow h(1) = \frac{f(1)^2 + f^2(1) - f((-1)^2) - f^2(-1)}{2}$$

$$\Rightarrow h(1) = \frac{f^2(1) - f^2(-1)}{2}$$

$$\xrightarrow{f(1)=0} h(1) = -\frac{1}{2}f^2(-1) \Rightarrow h(1) = -\frac{1}{2}(-1+2-1-4)^2 \Rightarrow h(1) = -8$$

۹- نمودار تابع $f(x) = a \cos^2(bx - \frac{\pi}{4})$ در یک دوره تناوب به صورت مقابل است. دوره تناوب تابع $y = \sin(\frac{ax}{b+1})$ کدام است؟

(۱) π (۲) 2π (۳) 3π (۴) $\frac{2\pi}{3}$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۲، درس ۱)

۹- پاسخ: گزینه ۲



- توابع $y = a \sin bx + c$ و $y = a \cos bx + c$ دارای مقدار ماکزیمم $|a| + c$ و مقدار مینیمم $-|a| + c$ و دوره تناوب $\frac{2\pi}{|b|}$ است.



از رابطه $\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$ استفاده می کنیم و ضابطه تابع f را ساده می کنیم:

$$f(x) = a \cos^2(bx - \frac{\pi}{4}) = \frac{a}{2}(1 + \cos(2bx - \frac{\pi}{2})) = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \sin 2bx$$

از آنجا که $f(0) = \frac{a}{2}$ و با توجه به عرض از مبدأ تابع، a عددی منفی است. از طرفی در $x=0$ تابع f صعودی است؛ پس ab عددی مثبت بوده

و b عددی منفی است.

با توجه به نمودار تابع f ، مینیمم تابع برابر -2 است؛ پس:

$$\min = -2 \Rightarrow \frac{a}{2} - \left| \frac{a}{2} \right| = -2 \xrightarrow{a < 0} \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = -2 \Rightarrow a = -2$$

همچنین دوره تناوب تابع f با توجه به نمودار آن برابر $\frac{\pi}{3}$ است؛ پس:

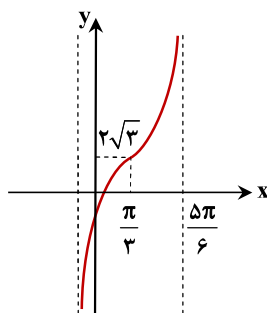
$$T = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{2\pi}{|2b|} = \frac{\pi}{3} \xrightarrow{b < 0} -\frac{\pi}{b} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow b = -3$$

$$y = \sin\left(\frac{ax}{b+1}\right) = \sin(x)$$

بنابراین با توجه به اینکه $a = -2$ و $b = -3$ ، ضابطه تابع موردنظر به صورت زیر است:

دوره تناوب تابع $y = \sin(x)$ برابر 2π است.

۱۰- شکل مقابل، قسمتی از نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = 3 \tan(bx - \frac{\pi}{3}) + c$ است. اگر $b > 0$ ، مقدار bc^2 کدام است؟



(۱) ۶

(۲) ۱۲

(۳) ۳

(۴) ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۲، درس ۱)

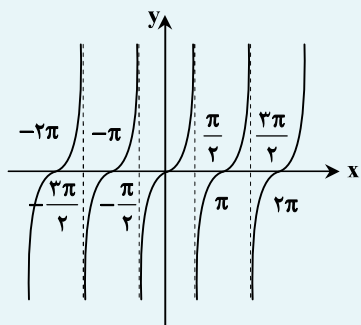
۱۰- پاسخ: گزینه ۲



- دامنه تابع $y = \tan x$ مجموعه $D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$ است و برد آن مجموعه اعداد حقیقی است. تابع $y = \tan x$ تابعی

متناوب است و دوره تناوب آن π است.

- نمودار تابع $y = \tan x$ به صورت زیر است:



برای رسم نمودار $y = \tan(bx - \frac{\pi}{3})$ باید ابتدا طول نقاط نمودار $y = \tan x$ را $\frac{\pi}{3}$ واحد به راست انتقال داده و سپس آن‌ها را در $\frac{1}{b}$ ضرب

کنیم. از طرفی با توجه به نمودار تابع $y = \tan x$ ، اولین مجانب قائم این تابع در سمت راست محور طول‌ها، $x = \frac{\pi}{2}$ است.

با توجه به مثبت بودن b ، بعد از تبدیل‌های ذکر شده، این مجانب به $x = \frac{5\pi}{6}$ تبدیل شده است؛ بنابراین:

$$\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) \frac{1}{b} = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow \frac{5\pi}{6} \times \frac{1}{b} = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow b = 1$$

بنابراین ضابطه تابع به صورت $f(x) = 3 \tan(x - \frac{\pi}{3}) + c$ است. اکنون با توجه به نمودار، داریم:

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\sqrt{3} \Rightarrow 3 \tan(0) + c = 2\sqrt{3} \Rightarrow c = 2\sqrt{3}$$

$$bc^2 = 1 \times (2\sqrt{3})^2 = 12$$

بنابراین خواسته مسئله برابر است با:

۱۱- تعداد جواب‌های معادله $\tan(2x - \frac{\pi}{3}) + \tan(3x - \frac{\pi}{3}) = 0$ که در بازه $(0, \pi)$ قرار دارند، کدام است؟

(۴) ۴

(۳) ۳

(۲) ۶

(۱) ۵

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۲، درس ۲)

۱۱- پاسخ: گزینه ۱



- اگر $\tan x = \tan \alpha$ ، آنگاه $x = k\pi + \alpha$.

- جواب‌های کلی معادله $\tan x = \tan \alpha$ به صورت $x = k\pi + \alpha$ می‌باشد که در آن $k \in \mathbb{Z}$.



دو طرف معادله را به صورت یک تانژانت نوشته و با حل معادله، جواب کلی معادله را پیدا می کنیم:

$$\tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\tan\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow \tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(-3x + \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow 2x - \frac{\pi}{3} = -3x + \frac{\pi}{3} + k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{5}$$

جواب های به دست آمده به ازای $k = 0, 1, 2, 3, 4$ در بازه $(0, \pi)$ قرار می گیرند. ضمناً تمامی جواب ها در دامنه معادله قرار دارند، پس معادله در بازه $(0, \pi)$ ، ۵ جواب دارد.

۱۲- حداقل اختلاف بین دو مقدار از جواب های متمایز معادله $\frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} = \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x}$ چقدر است؟

(۱) $\frac{3\pi}{2}$ (۲) $\frac{\pi}{2}$ (۳) π (۴) 2π

۱۲- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۲، درس ۲)



- جواب های کلی معادله $\cos x = \cos \alpha$ به صورت $x = 2k\pi \pm \alpha$ می باشد که در آن $k \in \mathbb{Z}$.



معادله کسری داده شده را طرفین وسطین کرده و معادله را در بازه $[0, 2\pi)$ حل می کنیم:

$$\frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} = \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} \Rightarrow (\sin^2 x)^2 = (1 - \cos x)^2 \Rightarrow \sin^2 x = |1 - \cos x| \xrightarrow{1 - \cos x \geq 0} 1 - \cos^2 x = 1 - \cos x$$

$$\Rightarrow \cos x(1 - \cos x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \\ \cos x = 1 \Rightarrow \text{غیر قابل قبول است؛ زیرا مخرج صفر می شود} \end{cases}$$

پس حداقل فاصله بین دو جواب متمایز برابر π است.

۱۳- حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{2 \tan x - 2}{\sin x + \cos x}$ کدام است؟

(۱) صفر (۲) $2\sqrt{2}$ (۳) $+\infty$ (۴) $-\infty$

۱۳- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۳، درس ۱)



۱- اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \neq 0$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ ، آنگاه:

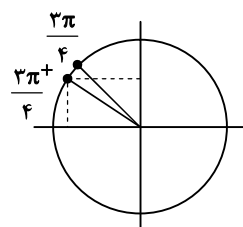
■ اگر $L < 0$ و مقادیر $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a منفی باشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$



$$\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{2 \tan x - 2}{\sin x + \cos x} = \frac{2(-1) - 2}{0} = \frac{-4}{0}$$

با جای گذاری $x = \frac{3\pi}{4}$ در صورت و مخرج کسر، داریم:

یعنی حد صورت کسر برابر عددی ناصفر بوده و حد مخرج کسر برابر صفر است؛ پس حاصل حد نامتناهی است. اکنون با رسم دایره مثلثاتی، باید مشخص کنیم که مخرج با مقادیر بیشتر از صفر به صفر نزدیک می شود یا با مقادیر کمتر از صفر:



$$x \rightarrow \frac{3\pi}{4} \Rightarrow x > \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} \sin x < \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos x < -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \sin x + \cos x < 0$$

بنابراین حاصل حد برابر است با:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}^+} \frac{2 \tan x - 2}{\sin x + \cos x} = \frac{-4}{-1} = +\infty$$

۱۴- اگر $f(x) = \frac{\frac{1}{2}x^2}{(x-a)(bx+2)}$ و $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ ، حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) -2 (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) 2

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۳، درس ۲)

۱۴- پاسخ: گزینه ۳



- اگر $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a$ و $g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b$ ، آنگاه داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n x^{n-m}}{b_m} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n}{b_m} x^{n-m}$$



با توجه به اینکه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ ، پس در نقطه‌ای به طول a حد چپ و حد راست، هر دو برابر $-\infty$ است؛ پس $x = a$ ریشه مضاعف مخرج است و در همسایگی محذوف $x = a$ ، مقدار f منفی است؛ بنابراین دو ریشه مخرج برابر یکدیگر هستند:

$$(x-a)(bx+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = a \\ x = -\frac{2}{b} \end{cases} \Rightarrow \frac{-2}{b} = a \Rightarrow ab = -2$$

بنابراین حاصل حد خواسته شده برابر است با:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{2}x^2}{(x-a)(bx+2)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{abx^2} = \frac{1}{ab} = -\frac{1}{2}$$

۱۵- اگر $f(x) = \frac{2x^2}{x+1} - ax + b$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$ ، حاصل $3a - 2b$ کدام است؟

(۱) 4 (۲) -4 (۳) -6 (۴) صفر

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۳، درس ۲)

۱۵- پاسخ: گزینه ۲



- اگر $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a$ و $g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b$ ، آنگاه داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n x^{n-m}}{b_m} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n}{b_m} x^{n-m}$$



ابتدا با مخرج مشترک‌گیری، ضابطه تابع را بازنویسی می‌کنیم.

$$f(x) = \frac{2x^2}{x+1} - ax + b = \frac{2x^2 - ax^2 - ax + bx + b}{x+1} = \frac{(2-a)x^2 + (b-a)x + b}{x+1}$$

با توجه به فرض مسئله $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$ ؛ پس باید صورت و مخرج هم‌درجه باشند تا حاصل حد برابر عددی ناصفر باشد. از آنجاکه مخرج

کسر عبارتی درجه اول است؛ پس صورت کسر هم باید درجه اول باشد؛ بنابراین ضریب x^2 باید برابر صفر باشد:

$$2-a=0 \Rightarrow a=2 \Rightarrow f(x) = \frac{(b-2)x+b}{x+1}$$

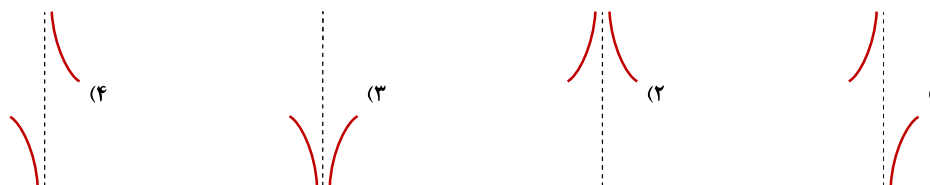
اکنون با استفاده از قاعده محاسبه حد در بی نهایت، داریم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(b-2)x+b}{x+1} = 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(b-2)(x)}{x} = 3 \Rightarrow b-2=3 \Rightarrow b=5$$

$$3a-2b = 3(2) - 2(5) = -4$$

بنابراین خواسته مسئله برابر است با:

۱۶- تابع $f(x) = \frac{2}{x^2-1} + \frac{a}{x-1}$ فقط دو مجانب در راستای محورهای مختصات دارد. نمودار f در مجاورت مجانب قائم خود چگونه است؟



▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۳، درس ۲)

۱۶- پاسخ: گزینه ۱



- خط $y = L$ را مجانب افقی نمودار $y = f(x)$ می‌نامیم به شرطی که حداقل یکی از دو شرط $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ برقرار باشد.

- خط $x = a$ را مجانب قائم نمودار تابع $f(x)$ گویند هرگاه حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد.

$$\begin{array}{ll} \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty & \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty & \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty \end{array}$$



$$f(x) = \frac{2+a(x+1)}{x^2-1}$$

ابتدا ضابطه تابع را با مخرج مشترک گرفتن ساده می‌کنیم:

$$\text{اگر } a \text{ برابر صفر باشد، آنگاه تابع } f(x) = \frac{2}{x^2-1} \text{ دارای ۳ مجانب است؛ پس } a \neq 0.$$

$$\text{از آنجاکه } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \text{؛ پس خط } y = 0 \text{ مجانب افقی تابع } f \text{ است.}$$

$$\text{ضمناً چون } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \pm\infty \text{؛ پس خط } x = -1 \text{ حتماً مجانب قائم تابع } f \text{ است و از آنجاکه تعداد مجانب‌های افقی و قائم مجموعاً برابر ۲}$$

است؛ در نتیجه خط $x = 1$ نباید مجانب قائم باشد.

$$\lim_{x \rightarrow 1} (2+a(x+1)) = 0 \Rightarrow 2+2a = 0 \Rightarrow a = -1$$

حد صورت، وقتی $x \rightarrow 1$ ، برابر صفر است؛ پس:

اکنون ضابطه تابع را ساده کرده و حد تابع را وقتی $x \rightarrow -1$ پیدا می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{2-x-1}{x^2-1} = \frac{1-x}{x^2-1} = \frac{-1}{x+1} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$$

$$17- \text{اگر } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2+k[-x]}{x^2-1} = -\infty \text{، حدود عبارت } P = 2 \cos\left(\frac{2\pi}{3}k\right) \text{ کدام است؟}$$

$$(1) -2 \leq P < -1 \quad (2) -1 < P < 1 \quad (3) -2 \leq P < 0 \quad (4) -1 \leq P < 2$$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۲ (فصل ۳، درس ۱)

۱۷- پاسخ: گزینه ۱



- اگر $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \neq 0$ ، آنگاه:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty \text{ اگر } L < 0 \text{ و مقادیر } g(x) \text{ در یک همسایگی محذوف } a \text{ مثبت باشد، آنگاه}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty \text{ اگر } L > 0 \text{ و مقادیر } g(x) \text{ در یک همسایگی محذوف } a \text{ منفی باشد، آنگاه}$$



حد چپ و حد راست را جداگانه بررسی می‌کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2+k[-x]}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2+k[-1^-]}{x^2-1} = \frac{2-2k}{0^+} = -\infty \Rightarrow 2-2k < 0 \Rightarrow k > 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2+k[-x]}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2+k[-1^+]}{x^2-1} = \frac{2-k}{0^-} = -\infty \Rightarrow 2-k > 0 \Rightarrow k < 2$$

پس محدوده قابل قبول برای k به صورت $1 < k < 2$ است. اکنون محدوده P را به دست می‌آوریم:

$$1 < k < 2 \Rightarrow \frac{2\pi}{3} < \frac{2\pi}{3}k < \frac{4\pi}{3} \Rightarrow -1 \leq \cos\left(\frac{2\pi}{3}k\right) < -\frac{1}{2} \Rightarrow -2 \leq 2\cos\left(\frac{2\pi}{3}k\right) < -1 \Rightarrow -2 \leq P < -1$$

۱۸- اگر $f(x) = x + 2\sqrt{x+1}$ باشد، مجانب افقی تابع $\frac{f}{f-1}$ کدام است؟

$y = 1$ (۱) $y = 2$ (۲) $y = \frac{1}{2}$ (۳) $y = -1$ (۴)

۱۸- پاسخ: گزینه ۱ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۲ (فصل ۳، درس ۲)



- خط $y = L$ را مجانب افقی نمودار $y = f(x)$ می‌نامیم به شرطی که حداقل یکی از دو شرط $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ برقرار باشد.



ابتدا وارون تابع f را محاسبه می‌کنیم.

$$y = x + 2\sqrt{x+1} \Rightarrow y = (\sqrt{x+1}+1)^2 - 2 \Rightarrow \sqrt{x+1}+1 = \sqrt{y+2} \Rightarrow x+1 = (\sqrt{y+2}-1)^2 \Rightarrow x = y - 2\sqrt{y+2} + 2$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = x - 2\sqrt{x+2} + 2; x \geq -1$$

اکنون حد تابع $\frac{f}{f-1}$ را در بی‌نهایت محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{f^{-1}(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 2\sqrt{x+1}}{x - 2\sqrt{x+2} + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1$$

بنابراین خط $y = 1$ مجانب افقی تابع $\frac{f}{f-1}$ است.

۱۹- نمودار تابع $f(x) = x^2 - 6x + 2$ را ۳ واحد به بالا انتقال می‌دهیم، سپس نسبت به محور عرض‌ها قرینه می‌کنیم و در نهایت آن را k واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم. اگر بازه $(-\infty, 1)$ ، بزرگ‌ترین بازه‌ای باشد که در آن نمودار به دست آمده از نمودار f پایین‌تر است، مقدار k کدام است؟

3 یا 1 (۱) 2 یا 5 (۲) 3 یا 5 (۳) 4 یا 2 (۴)

۱۹- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۲ (فصل ۱، درس ۱)



- برای رسم نمودار $y = f(x) + k$ ، اگر $k > 0$ ، کافی است نمودار تابع $y = f(x)$ را k واحد در راستای قائم به سمت بالا انتقال دهیم و برای $k < 0$ این انتقال به اندازه $|k|$ واحد به سمت پایین انجام می‌شود.

- برای رسم نمودار $y = f(x + k)$ ، اگر $k > 0$ ، کافی است نمودار تابع $y = f(x)$ را k واحد در جهت افقی به سمت چپ انتقال دهیم و برای $k < 0$ این انتقال به اندازه $|k|$ واحد به سمت راست انجام می‌شود.

- اگر طول نقاط تابع $y = f(x)$ را قرینه کنیم، نقاط تابع $y = f(-x)$ به دست می‌آیند. بنابراین نمودار تابع $y = f(-x)$ قرینه نمودار تابع $y = f(x)$ نسبت به محور عرض‌ها است.



اگر نمودار f را ۳ واحد به بالا انتقال دهیم، $y = f(x) + 3$ به دست می آید. اگر نسبت به محور عرض ها قرینه کنیم تابع $y = f(-x) + 3$ به دست می آید و اگر k واحد به سمت راست انتقال دهیم تابع $g(x) = f(-(x-k)) + 3$ به دست می آید.

$$y = f(-x+k) + 3 = (-x+k)^2 - 6(-x+k) + 5 = x^2 - 2kx + k^2 + 6x - 6k + 5 = x^2 + (6-2k)x + (k^2 - 6k + 5)$$

نمودار حاصل از نمودار f پایین تر است؛ پس:

$$x^2 + (6-2k)x + k^2 - 6k + 5 < x^2 - 6x + 2 \Rightarrow (12-2k)x < -k^2 + 6k - 3$$

با توجه به گزینه ها و توجه به جهت نامساوی، می توان گفت $12-2k > 0$ ؛ پس:

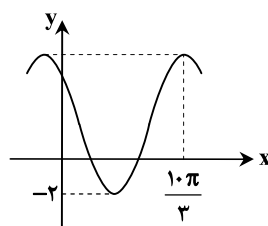
$$12-2k > 0 \Rightarrow x < \frac{-k^2 + 6k - 3}{12-2k} \xrightarrow{x < 1} \frac{-k^2 + 6k - 3}{12-2k} = 1 \Rightarrow k^2 - 8k + 15 = 0 \Rightarrow k = 5 \text{ یا } 3$$



توجه کنید مقدار k را می توان با توجه به اینکه $x = 1$ نقطه برخورد f و g است، نیز به دست آورد:

$$f(1) = g(1) \Rightarrow -3 = k^2 - 8k + 12 \Rightarrow k = 3 \text{ یا } 5$$

۲۰- قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a + b \sin(\frac{x}{a} - \frac{\pi}{6})$ به صورت مقابل است. مقدار $a-b$ کدام است؟



(۱) ۲

(۲) -۲

(۳) ۶

(۴) -۶

۲۰- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۲ (فصل ۲، درس ۱)



- توابع $y = a \sin bx + c$ و $y = a \cos bx + c$ دارای مقدار ماکزیمم $|a| + c$ و مقدار مینیمم $-|a| + c$ و دوره تناوب $\frac{2\pi}{|b|}$ است.



ابتدا با توجه به نمودار علامت a و b را تشخیص می دهیم:

روش اول:

خط $y = a$ از وسط نمودار عبور می کند؛ پس $a > 0$ و چون f در $x = 0$ اکیدا نزولی است؛ پس $b < 0$.

روش دوم:

چون f در $x = 0$ اکیدا نزولی است؛ پس $ab < 0$. از طرفی $f(0) = a - \frac{b}{3}$ باید مثبت باشد؛ پس $a > \frac{b}{3}$ و $b < 0$ و $a > 0$.

حال مقادیر a و b را محاسبه می کنیم. با توجه به مقدار مینیمم تابع، داریم:

$$\min = -2 \Rightarrow a - |b| = -2 \xrightarrow{b < 0} a + b = -2 \quad (1)$$

ضمناً تابع در نقطه ای به طول $\frac{10\pi}{3}$ ماکزیمم دارد. ضمناً این ماکزیمم اولین ماکزیمم در سمت راست محور عرض ها برای تابع است؛ پس:

$$\max = f\left(\frac{10\pi}{3}\right) \Rightarrow a + |b| = a + b \sin\left(\frac{10\pi}{3a} - \frac{\pi}{6}\right) \xrightarrow{b < 0} a - b = a + b \sin\left(\frac{10\pi}{3a} - \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \sin\left(\frac{10\pi}{3a} - \frac{\pi}{6}\right) = -1$$

$$\Rightarrow \frac{10\pi}{3a} - \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \frac{10}{3a} = \frac{3}{2} + \frac{1}{6} \Rightarrow a = 2 \xrightarrow{(1)} b = -4$$

بنابراین مقدار خواسته شده برابر است با:

$$a - b = 2 - (-4) = 6$$

۲۱- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: ساده * هندسه ۳ (فصل ۱، درس ۱)

(۱) همانی (۲) قطری غیر اسکالر (۳) اسکالر (۴) صفر

۲۱- اگر $A = \begin{bmatrix} 4 & x \\ y & -1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ و AB ماتریسی قطری باشد، آنگاه ماتریس $\begin{bmatrix} x-1 & 0 & y^2-9 \\ 0 & x+y-4 & 0 \\ y-3 & 0 & y \end{bmatrix}$ چه نوع ماتریسی است؟



- ضرب ماتریس در ماتریس: اگر A ماتریسی $m \times p$ و B ماتریسی $p \times n$ باشد (تعداد ستون‌های ماتریس A با تعداد سطرهای B برابر باشد)، در این صورت $A_{m \times p} \times B_{p \times n} = C_{m \times n} = [c_{ij}]$ ماتریس C ماتریسی $m \times n$ بوده که درایه روی سطر i ام و ستون j ام در آن یعنی، c_{ij} از ضرب سطر i ام A در ستون j ام B به دست می‌آید، یعنی:

ستون j ام $B \times$ سطر i ام $A = c_{ij}$

$$\Rightarrow c_{ij} = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ip} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{pj} \end{bmatrix} = a_{i1} \times b_{1j} + a_{i2} \times b_{2j} + \dots + a_{ip} \times b_{pj}$$

- ماتریس قطری: ماتریس مربعی که تمام درایه‌های غیر از قطر اصلی آن برابر صفر باشند، ماتریس قطری است.

$$\text{ماتریس قطری مرتبه ۳} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

- اگر ماتریسی قطری باشد و تمام درایه‌های روی قطر اصلی آن با هم برابر باشند، آن را یک ماتریس اسکالر می‌نامیم.

$$\text{ماتریس اسکالر مرتبه ۳} = \begin{bmatrix} K & 0 & 0 \\ 0 & K & 0 \\ 0 & 0 & K \end{bmatrix}$$



$$AB = \begin{bmatrix} 4 & x \\ y & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+3x & 2x-8 \\ y-3 & -2y-2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x-8=0 \Rightarrow x=4 \\ y-3=0 \Rightarrow y=3 \end{cases}$$

ماتریس AB را یافته و با توجه به قطری بودن آن داریم:

درایه‌های ماتریس خواسته شده را تعیین می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} x-1 & 0 & y^2-9 \\ 0 & x+y-4 & 0 \\ y-3 & 0 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

این ماتریس، اسکالر است.

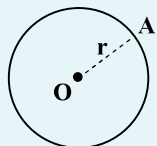
۲۲- مکان هندسی نقاطی از صفحه که از آن‌ها بتوان دو مماس به طول ۸ بر دایره $C(O, 6)$ رسم کرد، کدام است؟

(۱) دایره‌ای به شعاع ۱۰ (۲) مربعی به ضلع ۱۲ (۳) دایره‌ای به شعاع ۹ (۴) مستطیلی به طول و عرض ۸ و ۶

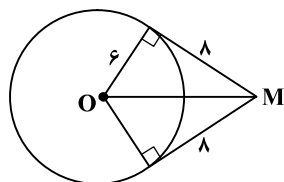
۲۲- پاسخ: گزینه ۱ ▲ مشخصات سؤال: ساده * هندسه ۳ (فصل ۲، درس ۱)



- مکان هندسی نقاطی که از نقطه ثابت O به فاصله ثابت r قرار دارند، دایره‌ای به مرکز O و به شعاع r است.



$$A \text{ روی دایره } \Leftrightarrow OA = r$$



اگر M نقطه‌ای از مکان هندسی مورد نظر باشد، داریم:

$$OM = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$$

چون فاصله M تا O همواره برابر ۱۰ است، پس مکان هندسی نقطه M دایره‌ای به مرکز O و شعاع ۱۰ است.

۲۳- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -5 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $\frac{|A^T B^3|}{|C^6|}$ کدام است؟

۱ (۱) $\frac{1}{6}$ (۲) $\frac{3}{8}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{3}{4}$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۳ (فصل ۱، درس ۲)

۲۳- پاسخ: گزینه ۳



- اگر A ماتریسی مربعی از مرتبه n باشد، ($1 \leq n \leq 3$) در این صورت دترمینان ماتریس A را با نماد $\det(A) = |A|$ نمایش می‌دهیم و داریم:

$$I) A = [k]_{1 \times 1} \Rightarrow |A| = k$$

$$II) A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = ad - bc$$

$$III) A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = a_{11} \times (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \times (-1)^{1+2} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \times (-1)^{1+3} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$|A| = a_{11} \times \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

(برای هر ماتریس 3×3 دلخواه می‌توان دترمینان A را برحسب هر سطر یا ستونی به‌دست آورد که حاصل در همه حالت‌ها یکسان خواهد بود.)

- دترمینان ماتریس‌های قطری برابر با حاصل ضرب درایه‌های روی قطر اصلی است.

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc$$

- برای ماتریس مربعی A داریم:

$$|A^n| = |A|^n$$

- برای دو ماتریس مربعی هم‌مرتبه A و B داریم:

$$|AB| = |BA| = |A||B|$$



ابتدا دترمینان ماتریس‌های داده‌شده را می‌یابیم:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \times 2 \times 3 = 6$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = (-1)(-6) = 6$$

$$|C| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -5 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \times 6 = 12$$

خواسته سؤال برابر است با:

$$\frac{|A^2 B^3|}{|C^4|} = \frac{|A^2| |B^3|}{|C^4|} = \frac{|A|^2 |B|^3}{|C|^4} = \frac{6^2 \times 6^3}{12^4} = \frac{6^5}{6^4 \times 2^4} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

۲۴- نقاط ثابت A و B مفروض اند. تعداد نقاطی از صفحه که از پاره خط AB به فاصله $\frac{AB}{2}$ و از وسط AB به فاصله AB باشند، کدام است؟

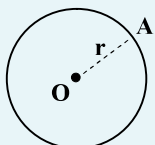
- (۱) ۲ نقطه (۲) حداکثر ۲ نقطه (۳) ۴ نقطه (۴) حداکثر ۴ نقطه

▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۳ (فصل ۲، درس ۱)

۲۴- پاسخ: گزینه ۳

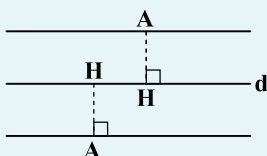


- مکان هندسی نقاطی که از نقطه ثابت O به فاصله ثابت r قرار دارند، دایره‌ای به مرکز O و به شعاع r است.

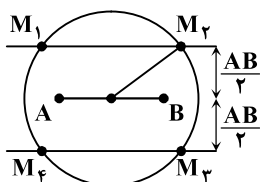


$$A \text{ روی دایره} \Leftrightarrow OA = r$$

- مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط d به فاصله ثابت k قرار دارند، دو خط موازی d، به فاصله k از آن و در دو طرف آن است.



$$AH = k$$

مکان هندسی نقاطی از صفحه که از پاره خط AB به فاصله $\frac{AB}{2}$ باشند، دو خط موازی ABدر طرفین آن و به فاصله $\frac{AB}{2}$ از آن است و مکان هندسی نقاطی از صفحه که از وسط AB به

فاصله AB باشند، دایره‌ای به مرکز وسط AB و شعاع AB است. محل تلاقی این دو مکان نقاط جواب است.

مطابق شکل، چون $AB > \frac{AB}{2}$ ، پس دایره دو خط موازی را در ۴ نقطه قطع می‌کند و ۴ نقطه جواب داریم.

$$A(A+I) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ اگر } A^2 \text{!} \text{ کدام است؟}$$

- (۱) A (۲) I (۳) -A (۴) $\bar{O}$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۳ (فصل ۱، درس ۱)

۲۵- پاسخ: گزینه ۲



- برای ماتریس مربعی A و همانی I هم‌مرتبه با آن، اتحادها برقرار است.

$$(A-I)(A^2 + A + I) = A^3 - I$$



از فرض سؤال، داریم:

$$A(A+I) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = -I \Rightarrow A^2 + A + I = \bar{O}$$

دو طرف این تساوی را در $A - I$ ضرب می‌کنیم:

$$(A - I)(A^3 + A + I) = (A - I) \times \bar{O} \Rightarrow A^3 - I^3 = \bar{O} \Rightarrow A^3 = I$$

اگر طرفین این تساوی را به توان n برسانیم، داریم: $A^{3n} = I$

یعنی تمام توان‌های مضرب ۳ در این ماتریس برابر I است. چون $20!$ مضرب ۳ است. داریم: $A^{20!} = I$

۲۶- اگر $(A + I)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های ماتریس $(A + 3I)^{-1}$ کدام است؟

(۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{4}{5}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{5}{4}$

۲۶- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۳ (فصل ۱، درس ۲)



۱- اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ، در این صورت وارون ماتریس A یعنی A^{-1} از تساوی زیر به دست می‌آید:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

- برای ماتریس وارون پذیر A داریم: $(A^{-1})^{-1} = A$



ابتدا وارون ماتریس $(A + I)^{-1}$ را می‌یابیم تا ماتریس $A + I$ به دست آید.

$$(A + I)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A + I = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

حال ماتریس $A + 3I$ را محاسبه می‌کنیم:

$$A + 3I = A + I + 2I = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 3 \end{bmatrix}$$

وارون ماتریس $A + 3I$ را به دست می‌آوریم:

$$(A + 3I)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\frac{15}{2} - 0} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix} = \frac{2}{15} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

$$\frac{2}{15} \left(3 + \frac{1}{2} + \frac{5}{2} \right) = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$$

مجموع درایه‌های این ماتریس برابر است با:

۲۷- از نقطه $M(2, 2)$ مماس بر دایره $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 12 = 0$ رسم کرده‌ایم. فاصله نقطه $A(6, 3)$ از خط مماس کدام است؟

(۱) برابر شعاع دایره (۲) دو برابر شعاع دایره (۳) نصف شعاع دایره (۴) سه برابر شعاع دایره

۲۷- پاسخ: گزینه ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۳ (فصل ۲، درس ۲)



- با داشتن مختصات مرکز و طول شعاع دایره، می‌توان معادله آن را تعیین کرد و برعکس با داشتن معادله دایره می‌توان مختصات مرکز و طول شعاع آن را به دست آورد.

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2 \Rightarrow \text{شعاع دایره } O'(\alpha, \beta) : \text{مرکز دایره}$$

$$AH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

- فاصله نقطه $A(x_0, y_0)$ از خط $ax + by + c = 0$ برابر است با:



مرکز و شعاع دایره را تعیین می‌کنیم:

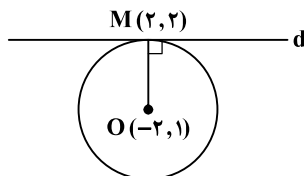
$$x^2 + y^2 + 4x - 2y - 12 = 0 \Rightarrow (x+2)^2 - 4 + (y-1)^2 - 1 - 12 = 0 \Rightarrow (x+2)^2 + (y-1)^2 = 17$$

$$\Rightarrow O(-2, 1), R = \sqrt{17}$$

مختصات نقطه $M(2, 2)$ در معادله دایره صدق می‌کند.

$$(2+2)^2 + (2-1)^2 = 16 + 1 = 17$$

پس طبق شکل، داریم:



$$m_{OM} = \frac{2-1}{2-(-2)} = \frac{1}{4} \Rightarrow m_d = -4$$

$$d: y-2 = -4(x-2) \Rightarrow y+4x-10=0$$

فاصله نقطه $A(6, 3)$ را از این خط محاسبه می‌کنیم:

$$AH = \frac{|3+4 \times 6-10|}{\sqrt{1+16}} = \frac{17}{\sqrt{17}} = \sqrt{17} = R$$

۲۸- ماتریس $A = |A| \times \begin{bmatrix} \frac{1}{|A|} & |A| \\ 1 & 2|A| \end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب دستگاه $AX = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ است. مجموع جواب‌های این دستگاه کدام است؟

۷ (۴) ۶ (۳) ۵ (۲) ۴ (۱)

▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۳ (فصل ۱، درس ۲)

۲۸- پاسخ: گزینه ۲



- در حالت کلی اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب و $B = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$ ماتریس مقادیر معلوم و $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ماتریس مجهولات دستگاه دو معادله و

دو مجهول $\begin{cases} ax + by = e_1 \\ cx + dy = e_2 \end{cases}$ باشند، در این صورت دستگاه مذکور به شکل معادله ماتریسی $AX = B$ نوشته شده و در صورتی که

ماتریس A وارون پذیر باشد یا $|A| \neq 0$ با ضرب A^{-1} از چپ در معادله فوق می‌توان مجهولات را به صورت زیر به دست آورد:

$$AX = B \Rightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}B$$

$$\Rightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B \Rightarrow IX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B$$



$$A = |A| \begin{bmatrix} \frac{1}{|A|} & |A| \\ 1 & 2|A| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & |A|^2 \\ |A| & 2|A|^2 \end{bmatrix}$$

ماتریس ضرایب را به صورت زیر می‌نویسیم:

از طرفین این تساوی دترمینان می‌گیریم:

$$\begin{vmatrix} 1 & |A|^2 \\ |A| & 2|A|^2 \end{vmatrix} = |A| \Rightarrow 2|A|^3 - |A|^3 = |A| \Rightarrow |A|^3 - 2|A|^2 + |A| = 0 \Rightarrow |A|(|A|^2 - 2|A| + 1) = 0$$

$$\Rightarrow |A|(|A|-1)^2 = 0 \Rightarrow |A| = 0 \text{ یا } |A| = 1$$

اگر دترمینان ماتریس ضرایب دستگاه مخالف صفر باشد، دستگاه جواب دارد. پس $|A| \neq 0$

$$|A| = 1 \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, AX = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+y=5 \\ x+2y=6 \end{cases}$$

مجموع جواب‌های این دستگاه، در معادله اول دستگاه وجود دارد: $x+y=5$

۲۹- در دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & 1 & 3 \\ 0 & 2 & m \\ 5 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ هر مقداری به درایه a اضافه کنیم، حاصل دترمینان تغییر نمی کند. مقدار $|A|$ کدام است؟

(۱) 20^4 (۲) -40^4 (۳) -20^4 (۴) 40^4

۲۹- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * هندسه ۳ (فصل ۱، درس ۲)



- اگر A ماتریسی مربعی از مرتبه n باشد، $(1 \leq n \leq 3)$ در این صورت دترمینان ماتریس A را با نماد $\det(A) = |A|$ نمایش می دهیم و داریم:

$$I) A = [k]_{1 \times 1} \Rightarrow |A| = k$$

$$II) A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = ad - bc$$

$$III) A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = a_{11} \times (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \times (-1)^{1+2} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \times (-1)^{1+3} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$|A| = a_{11} \times \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

(برای هر ماتریس 3×3 دلخواه می توان دترمینان A را برحسب هر سطر یا ستونی به دست آورد که حاصل در همه حالت ها یکسان خواهد بود.)

- برای ماتریس A و عدد حقیقی k داریم:

$$|kA_{n \times n}| = k^n |A_{n \times n}| \text{ و } |A^n| = |A|^n$$



دترمینان ماتریس A را برحسب سطر اول بسط می دهیم:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 3 \\ 0 & 2 & m \\ 5 & -1 & 1 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 2 & m \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & m \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}$$

با اضافه کردن x به درایه a داریم:

$$|A'| = \begin{vmatrix} a+x & 1 & 3 \\ 0 & 2 & m \\ 5 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (a+x) \begin{vmatrix} 2 & m \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & m \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}$$

با توجه به فرض، دو دترمینان فوق، برابرند، پس:

$$|A| = |A'| \Rightarrow a \begin{vmatrix} 2 & m \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = (a+x) \begin{vmatrix} 2 & m \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & m \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2+m=0 \Rightarrow m=-2$$

حال دترمینان ماتریس A را می یابیم:

$$|A| = a \times 0 - \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -10 - 30 = -40$$

$$||A|A| = |A|^3 |A| = |A|^4 = (-40)^4 = 40^4$$

خواسته سؤال برابر است با:

۳۰- دایره ای از مبدأ مختصات، نقطه $A(4,4)$ و نقطه B می گذرد. اگر مرکز این دایره روی نیمساز ربع اول و سوم باشد، محل تلاقی دایره با محور طول ها کدام می تواند باشد؟

(۱) $(2,0)$ (۲) $(4,0)$ (۳) $(5,0)$ (۴) $(6,0)$

۳۰- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * هندسه ۳ (فصل ۲، درس ۲)



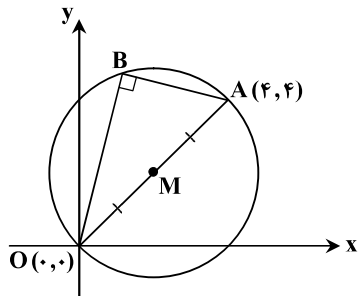
- معادله دایره: اگر $O'(\alpha, \beta)$ مرکز دایره با شعاع r باشد، معادله دایره به صورت زیر است:

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$$



از بین مثلث‌ها، فقط مثلث قائم‌الزاویه است که مرکز دایره محیطی آن روی ضلع مثلث قرار دارد. نقطه وسط وتر، مرکز دایره محیطی مثلث قائم‌الزاویه است.

طبق شکل، خط گذرنده از O و A همان خط $y = x$ است و چون مرکز این دایره روی $y = x$ است، پس مثلث OAB قائم‌الزاویه است و مرکز دایره نقطه وسط OA می‌باشد:



$$\text{مرکز دایره: } M = \frac{O+A}{2} = (2,2), \quad R = OM = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{معادله دایره: } (x-2)^2 + (y-2)^2 = 8$$

$$y=0 \Rightarrow (x-2)^2 + 4 = 8 \Rightarrow (x-2)^2 = 4 \Rightarrow x-2 = \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=4 \end{cases}$$

۳۱- اگر x و y دو عدد حقیقی باشند، برای اثبات درستی نامساوی $5x^2 + y^2 + 4xy \geq 4x - 6$ به کمک روش اثبات بازگشتی، از کدام گزاره همواره درست استفاده می‌شود؟

$$(2) \quad (2x-y)^2 + (x+2)^2 + 2 \geq 0$$

$$(1) \quad (x+y)^2 + (x+2)^2 + 1 \geq 0$$

$$(4) \quad (2x+y)^2 + (x-2)^2 + 2 \geq 0$$

$$(3) \quad (2x+y)^2 + (x-1)^2 + 1 \geq 0$$

۳۱- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: ساده * ریاضیات گسسته (فصل ۱، درس ۱)



- (اثبات بازگشتی): در اثبات برخی نامساوی‌های ریاضی، ابتدا عبارت را تا حد امکان ساده می‌کنیم تا به یک عبارت همیشه درست برسیم. آنگاه با بازگشت از مسیر طی شده به نامساوی اولیه می‌رسیم و از آنجایی که همه عملیات مسیر رفت، بازگشت‌پذیرند به این نوع اثبات، اثبات بازگشتی می‌گوییم.



به کمک اثبات بازگشتی داریم:

$$5x^2 + y^2 + 4xy \geq 4x - 6 \Leftrightarrow 5x^2 + y^2 + 4xy - 4x + 6 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + 4x^2 + 4xy + y^2 + 2 \geq 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (2x+y)^2 + 2 \geq 0$$

رابطه فوق همواره درست است.

$$۳۲- \text{منحنی } y = \frac{15}{x+3} \text{ از چند نقطه با مختصات صحیح در ربع اول دستگاه مختصات می‌گذرد؟}$$

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

۳۲- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: ساده * ریاضیات گسسته (فصل ۱، درس ۲)



- عدد صحیح a ، که مخالف صفر است، شمارنده عدد b است - یا a را می‌شمارد (a, b را عادی می‌کند) یا $a | b$ بر b بخش‌پذیر است.
- هرگاه عددی صحیح چون q وجود داشته باشد به طوری که $b = aq$.
- اگر عدد b بر عدد a بخش‌پذیر نباشد یا عدد a عدد b را عادی نکند، می‌نویسیم، $a \nmid b$



چون x و y اعداد صحیح هستند، پس ۱۵ بر $x+3$ بخش‌پذیر است.

$$\frac{15}{x+3} \in \mathbb{Z} \Rightarrow x+3 | 15$$

$x + 3$ مقسوم علیه های ۱۵ است.

$$\begin{aligned} x + 3 = \pm 1 &\Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -4 \end{cases} \\ x + 3 = \pm 3 &\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -6 \end{cases} \\ x + 3 = \pm 5 &\Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -8 \end{cases} \\ x + 3 = \pm 15 &\Rightarrow \begin{cases} x = 12 \\ x = -18 \end{cases} \end{aligned}$$

چون نقطه در ربع اول قرار دارد، پس فقط مقادیر $x = 2$ و $x = 12$ قابل قبول هستند.

$$x = 2 \Rightarrow y = \frac{15}{5} = 3, \quad x = 12 \Rightarrow y = \frac{15}{15} = 1$$

بنابراین دو نقطه در ربع اول وجود دارد.

۳۳- گرافی از مرتبه ۱۲ دارای ۲۴ یال است. مجموع درجات رئوس در گراف $\bar{G}$ کدام است؟

۴۸ (۱) ۷۶ (۲) ۲۴ (۳) ۸۴ (۴)

۳۳- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (فصل ۲، درس ۱)



- اگر G یک گراف با مرتبه p و اندازه q و $V = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ مجموعه رئوس آن باشند، آنگاه:

$$\sum_{i=1}^p \deg(v_i) = 2q \Rightarrow \deg(v_1) + \deg(v_2) + \dots + \deg(v_p) = 2q$$

- (مکمل یک گراف): مکمل گرافی مانند G که آن را با G^c یا $\bar{G}$ نمایش می دهیم گرافی است که مجموعه رئوس آن همان مجموعه رئوس G است و بین دو رأس از $\bar{G}$ یک یال است اگر و تنها اگر بین همان دو رأس در G یالی وجود نداشته باشد.

- اگر G یک گراف n رأسی باشد، مقدار $q(G) + q(\bar{G})$ برابر است با:

$$q(G) + q(\bar{G}) = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$



اگر G و $\bar{G}$ مکمل یکدیگر باشند، داریم:

$$q(G) + q(\bar{G}) = \frac{p(p-1)}{2} \Rightarrow 24 + q(\bar{G}) = \frac{12 \times 11}{2} \Rightarrow q(\bar{G}) = 66 - 24 = 42$$

می دانیم مجموع درجات رئوس در هر گراف ساده، دو برابر تعداد یال هاست، پس:

$$\bar{G} \text{ مجموع درجات } = 2 \times 42 = 84$$

بنابراین گزینه ۴ پاسخ است.

۳۴- باقی مانده تقسیم عدد طبیعی a که $a < 120$ است بر ۹ و ۷ به ترتیب ۵ و ۳ است. باقی مانده تقسیم این عدد بر ۱۳ کدام است؟

۶ (۱) ۷ (۲) ۱۲ (۳) ۵ (۴)

۳۴- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (فصل ۱، درس ۲)



- قضیه تقسیم: اگر a عددی صحیح و b عددی طبیعی باشد در این صورت، اعدادی صحیح و منحصر به فرد مانند q و r یافت می شوند به قسمی که $a = bq + r$ و $0 \leq r < b$.



با توجه به اطلاعات مسئله و به کمک قضیه تقسیم، داریم:

$$\left. \begin{aligned} a = 9q + 5 &\xrightarrow{\times 7} 7a = 63q + 35 \\ a = 7q' + 3 &\xrightarrow{\times 9} 9a = 63q' + 27 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 9a - 7a = 63q' + 27 - 63q - 35 \Rightarrow 2a = 63(q' - q) - 8$$

با توجه به اینکه $2a$ و 8 زوج هستند و 63 فرد است، بایستی $q' - q$ زوج باشد، پس در نظر می‌گیریم:

$$q' - q = 2k$$

$$2a = 126k - 8 \Rightarrow a = 63k - 4$$

اگر $k = 1$ باشد، $a = 59$ خواهد بود که باقی‌مانده تقسیم آن بر 13 برابر است با:

$$k = 1 \Rightarrow a = 59 \Rightarrow 59 = 13 \times 4 + 7 \Rightarrow \text{باقی‌مانده} = 7$$

اگر $k = 2$ باشد، $a = 122$ خواهد بود که از 120 بزرگ‌تر و غیرقابل قبول است.

بنابراین گزینه ۲ پاسخ است.

۳۵- به‌ازای کدام مقدار x ، عدد چهاررقمی $954x$ به کلاس هم‌نهشتی $[6]_8$ تعلق دارد؟

- | | |
|-------|-------|
| ۶ (۲) | ۲ (۱) |
| ۴ (۴) | ۳ (۳) |

▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (فصل ۱، درس ۳)

۳۵- پاسخ: گزینه ۱



- مجموعه اعدادی را که باقی‌مانده تقسیم آن‌ها بر عدد m ، مساوی عدد r باشد، با نماد $[r]_m$ نمایش می‌دهیم و به آن کلاس هم‌نهشتی r به پیمانه m می‌گوییم.

$$[r]_m = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv r \pmod{m} \right\} = \{ x \in \mathbb{Z} \mid x = mk + r \}$$



چون عدد $954x$ به کلاس هم‌نهشتی $[6]_8$ تعلق دارد، پس باقی‌مانده تقسیم این عدد بر 8 برابر 6 است.

$$\overline{954x} \equiv 6 \pmod{8}$$

$$x + 40 + 500 + 9000 \equiv 6 \pmod{8}$$

با بسط عدد $954x$ داریم:

اعداد 40 و 9000 مضرب 8 هستند و باقی‌مانده تقسیم 500 بر 8 برابر 4 است، پس:

$$x + 0 + 4 + 0 \equiv 6 \pmod{8} \Rightarrow x \equiv 2 \pmod{8} \Rightarrow x = 8k + 2$$

$$k = 0 \Rightarrow x = 2$$

چون x رقم است، پس:

۳۶- در گرافی $p = 10$ و $q = 9$ است. اگر این گراف رأسی از درجه ۲ داشته باشد، حداکثر رئوس با درجه یک آن چقدر است؟

- | | |
|-------|-------|
| ۸ (۲) | ۷ (۱) |
| ۶ (۴) | ۹ (۳) |

▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (فصل ۲، درس ۱)

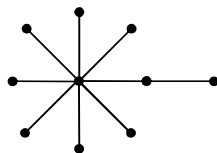
۳۶- پاسخ: گزینه ۲



- (درجه یک رأس): درجه رأس v در گراف G برابر است با تعداد یال‌هایی از گراف G که به رأس v متصل‌اند و آن را با $\deg_G(v)$ یا به‌طور ساده‌تر با $\deg(v)$ یا $d(v)$ نمایش می‌دهیم. اگر درجه یک رأس فرد باشد، آن را رأس فرد و اگر زوج باشد، آن را رأس زوج می‌گوییم.



گراف مورد نظر، رأسی از درجه ۲ دارد و چون حداکثر رئوس با درجه یک را می‌خواهیم، گراف به صورت زیر است.



بنابراین گراف حداکثر ۸ رأس با درجه یک دارد.

۳۷- اگر $(a, 315) = 45$ و $(b, 245) = 35$ باشد، آنگاه مقدار $(a \times b, 735)$ کدام است؟

۱۰۵ (۱) ۱۵۰ (۲) ۲۷۵ (۳) ۳۱۵ (۴)

۳۷- پاسخ: گزینه ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (فصل ۱، درس ۲)



- عدد طبیعی d را ب.م.م دو عدد صحیح a و b می‌نامیم (a و b هر دو با هم صفر نیستند) و می‌نویسیم $(a, b) = d$. هرگاه دو شرط «الف» و «ب» برقرار باشد.

الف) $d | a, d | b$

ب) $\forall m > 0; m | a, m | b \Rightarrow m \leq d$



با تجزیه اعداد و به کمک تعریف ب.م.م دو عدد، داریم:

$$a \Rightarrow a = 3^2 \times 5 \times k \Rightarrow a \text{ حداقل دو عامل ۳ و حداقل یک عامل ۵ دارد. } (a, 3^2 \times 5 \times 7) = 3^2 \times 5$$

$$b \Rightarrow b = 5 \times 7 \times t \Rightarrow b \text{ فقط یک عامل ۷ و حداقل یک عامل ۵ دارد. } (b, 5 \times 7^2) = 5 \times 7$$

توجه کنید که در روابط فوق، t و k عامل ۷ ندارند.

خواسته سؤال برابر است با:

$$(a \times b, 735) = (3^2 \times 5^2 \times 7 \times t \times k, 3 \times 5 \times 7^2) = 3 \times 5 \times 7 = 105$$

۳۸- اگر p عدد اول بزرگ‌تر از ۲ باشد و $a | p + 2^{10}$ ، آنگاه باقی‌مانده تقسیم $3 + p^{10} + a^{10}$ بر ۸ کدام است؟

صفر (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴)

۳۸- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (فصل ۱، درس‌های ۲ و ۳)



- مربع هر عدد فرد به صورت $8k + 1$ است، یعنی باقی‌مانده تقسیم مربع هر عدد فرد بر ۸ برابر یک است. $a \Rightarrow a^2 = 8k + 1$ فرد

- دو طرف یک رابطه هم‌نهشتی را می‌توان به توان n رساند. ($n \in \mathbb{N}$)

$$a \equiv b \Rightarrow a^m \equiv b^m$$

- دو طرف دو رابطه هم‌نهشتی را که پیمانه‌های یکسان داشته باشند، می‌توان با هم جمع یا از هم منها و یا در هم ضرب کرد.

$$a \equiv b, c \equiv d \Rightarrow \begin{cases} ac \equiv bd & (1) \\ a + c \equiv b + d & (2) \\ a - c \equiv b - d & (3) \end{cases}$$

- برای یافتن باقی‌مانده تقسیم هر عدد صحیح مانند a بر عدد طبیعی b ، باید هم‌نهشت a را به پیمانه b چنان بیابیم که از b کوچک‌تر و نامنفی باشد، یعنی:

$$a \equiv r, 0 \leq r < b \Rightarrow r \text{ باقی‌مانده } a \text{ بر } b$$



p عدد اول بزرگتر از ۲ است. پس p عددی فرد است. عدد 2^{100} عددی زوج است و می‌دانیم مجموع یک عدد فرد و یک عدد زوج، عددی فرد است. پس $2^{100} + p$ عددی فرد است و چون $2^{100} + p$ بر a بخش‌پذیر است، پس a نیز فرد است و طبق نکته بالا، داریم:

$$a^2 = 8q + 1 \Rightarrow a^2 \equiv 1 \xrightarrow{\text{توان } 5} (a^2)^5 \equiv 1^5 \Rightarrow a^{10} \equiv 1$$

$$p^2 = 8q' + 1 \Rightarrow p^2 \equiv 1 \xrightarrow{\text{توان } 5} (p^2)^5 \equiv 1^5 \Rightarrow p^{10} \equiv 1$$

خواسته سؤال برابر است با:

$$a^{10} + p^{10} + 3 \equiv 1 + 1 + 3 \equiv 5$$

باقی‌مانده برابر ۵ است.

۳۹- گراف همبند G از مرتبه ۱۳ و ماکزیمم درجه ۵ با حذف هریک از یال‌هایش، ناهمبند می‌شود. این گراف با افزودن چند یال تبدیل به یک گراف k منتظم می‌شود که k حداقل مقدار ممکن را دارد؟

۲۹ (۲)	۲۵ (۱)
۲۰ (۴)	۲۷ (۳)

▲ مشخصات سؤال: دشوار * ریاضیات گسسته (فصل ۲، درس ۱)

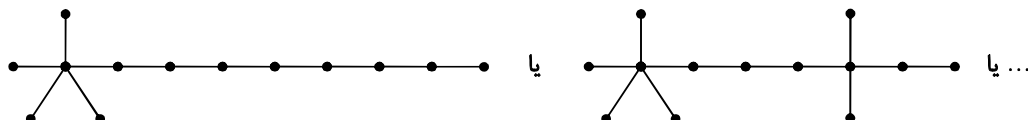
۳۹- پاسخ: گزینه ۳



- (گراف k -منتظم): گرافی را که درجه تمام رئوس آن با هم مساوی و برابر با عدد k باشند، گراف k -منتظم می‌نامیم.
- در گراف k -منتظم مرتبه p با اندازه q داریم: $kp = 2q$
- (همبندی و ناهمبندی یک گراف): گراف G را «همبند» می‌نامیم هرگاه بین هر دو رأس آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد، در غیر این صورت آن را «ناهمبند» می‌نامیم.



با توجه به اطلاعات مسئله و اینکه گراف با حذف هریک از یال‌هایش، ناهمبند می‌شود، شکل گراف می‌تواند به صورت زیر باشد:



اولاً در این گراف‌ها $q = 12$ است.

ثانیاً چون $\Delta = 5$ است پس گراف باید تبدیل به یک گراف ۵-منتظم مرتبه ۱۳ شود که امکان ندارد؛ زیرا تعداد رئوس فرد نمی‌تواند فرد باشد پس گراف باید تبدیل به ۶-منتظم مرتبه ۱۳ شود که اندازه آن برابر است با:

$$2q = pk \Rightarrow 2q = 13 \times 6 = 78 \Rightarrow q = 39$$

پس تعداد $27 = 39 - 12$ یال نیاز داریم تا گراف تبدیل به یک گراف منتظم شود.

بنابراین گزینه ۳ پاسخ است.

۴۰- رقم یکان عدد $1! + (2473) + (2473)^2 + (2473)^3 + \dots + (2473)^{1755}$ کدام است؟

۹ (۲)	۸ (۱)
۷ (۴)	۴ (۳)

▲ مشخصات سؤال: دشوار * ریاضیات گسسته (فصل ۱، درس ۳)

۴۰- پاسخ: گزینه ۱



- دو طرف یک رابطه هم‌نهشتی را می‌توان به توان n رساند. ($n \in \mathbb{N}$)
- برای محاسبه رقم یکان یک عدد باید آن عدد را به هم‌نهشتی به پیمانه ۱۰ ببریم؛ یعنی باقی‌مانده آن عدد بر ۱۰ را بیابیم.

$$a^m \equiv b \Rightarrow a^n \equiv b^n$$



ابتدا توجه کنید که رقم یکان ۲۴۷۳ برابر ۳ است.

$$2473 \equiv 3 \xrightarrow{\text{توان } 2} (2473)^2 \equiv 9 \Rightarrow (2473)^2 \equiv 9 - 10 \equiv -1$$

$$(2473)^{4n} \equiv (-1)^{2n} \Rightarrow (2473)^{4n} \equiv 1$$

طرفین را به توان $2n$ می‌رسانیم.

رقم یکان توان‌های مضرب ۴ عدد ۲۴۷۳ برابر ۱ است.

دقت کنید که از ۵! به بعد همگی مضرب ۴ هستند، زیرا حداقل یک عامل ۴ دارند. حال تعداد اعداد فرد ۱ تا ۱۷۵۵ را می‌یابیم.

$$2k - 1 = 1755 \Rightarrow 2k = 1756 \Rightarrow k = 878$$

رقم یکان عدد داده شده برابر است با:

$$(2473)^1 + (2473)^3 + (2473)^5 + \dots + (2473)^{1755} \equiv 3^1 + 3^3 + \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{878} \equiv 3 + 3^3 + 878 \equiv 3 + (3^4 \times 3^2) + 6$$

$$\equiv 3 + 1 \times 9 + 6 \equiv 18 \equiv 8$$

فیزیک



۴۱- متحرکی با تندی ثابت در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند و در لحظه‌های $t_1 = 10s$ و $t_2 = 20s$ ، فاصله آن از مبدأ مکان ۱۰۰ متر است.

معادله مکان-زمان این متحرک در SI کدام است؟

(۴) $x = -20t - 100$

(۳) $x = -10t + 150$

(۲) $x = -20t + 300$

(۱) $x = -10t - 150$

▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۳ (فصل ۱)

۴۱- پاسخ: گزینه ۲



فاصله از مبدأ مکان یعنی $|x|$: پس این متحرک در دو زمان گفته شده از $x = +100m$ و $x = -100m$ می‌گذرد. ضمناً چون متحرک در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند، از مکان $x_1 = +100m$ به مکان $x_2 = -100m$ رفته است.

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{-100 - 100}{20 - 10} = \frac{-200}{10} = -20 \frac{m}{s}$$

$$x = vt + x_0 \Rightarrow x = -20t + x_0$$

$$\xrightarrow{x(10) = +100} -20 \times 10 + x_0 = +100 \Rightarrow x_0 = +300m$$

پس معادله مکان-زمان متحرک در SI به صورت $x = -20t + 300$ می‌شود.

۴۲- با توجه به نمودار مکان-زمان دو متحرک A و B که روی یک خط راست حرکت می‌کنند،

کدام یک از جمله‌های زیر در مورد آن‌ها در بازه زمانی $t = 0$ تا $t = t_1$ الزاماً درست است؟

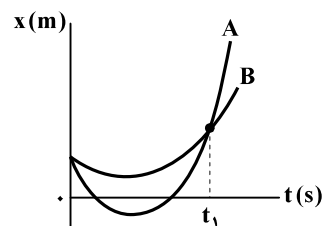
(الف) تندی متوسط متحرک A بیشتر است.

(ب) شتاب متوسط متحرک A بیشتر است.

(پ) سرعت متوسط متحرک A بیشتر است.

(۱) «الف»، «ب» و «پ» (۲) «الف» و «ب»

(۳) فقط «الف» (۴) فقط «ب»

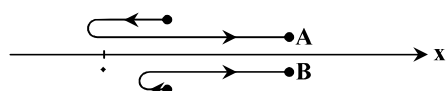


▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)

۴۲- پاسخ: گزینه ۲



■ متحرک A مسافت بیشتری طی می‌کند، پس تندی متوسط آن $(s_{av} = \frac{l}{\Delta t})$ بیشتر است. (عبارت «الف» درست است)



پاسخ تشریحی آزمون ۳ بهمن ۱۴۰۴

■ شتاب متوسط از رابطه $a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ محاسبه می‌شود. سرعت لحظه‌ای برابر است با شیب خط مماس بر نمودار مکان-زمان؛ بنابراین داریم:
(عبارت «ب» درست است)

$$\begin{cases} v_{o,A} < v_{o,B} < 0 \\ v_A(t_1) > v_B(t_1) > 0 \end{cases} \Rightarrow \Delta v_A > \Delta v_B \Rightarrow a_{av,A} > a_{av,B}$$

■ مکان اولیه و نهایی دو متحرک یکسان است، پس جابه‌جایی ($\Delta x = x(t_1) - x(0)$) برای آن‌ها یکسان است و سرعت متوسط آن‌ها برابر است. ($v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$) (عبارت «پ» نادرست است)

۴۳- معادله سرعت-زمان متحرکی که روی خط راست حرکت می‌کند، در SI به صورت $v = -4t + 20$ است. در لحظه‌ای که متحرک ۷۸ متر با محل شروع حرکت فاصله دارد، تندى آن چند متر بر ثانیه است؟

۴۴ (۴)

۳۲ (۳)

۲۸ (۲)

۱۶ (۱)

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)

۴۳- پاسخ: گزینه ۳



متحرک با شتاب ثابت حرکت می‌کند:

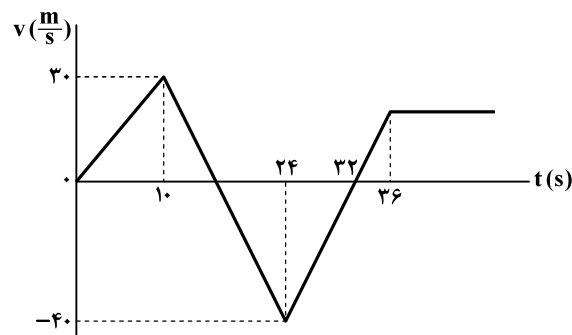
$$\begin{cases} v = at + v_0 \\ v = -4t + 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -4 \frac{m}{s^2} \\ v_0 = 20 \frac{m}{s} \end{cases}$$

$$v_f^2 - v_i^2 = 2a\Delta x \Rightarrow v^2 - 20^2 = 2 \times (-4) \times \Delta x$$

متحرک ۷۸ متر با مکان اولیه فاصله دارد؛ پس ممکن است در لحظه مورد نظر ۷۸ متر جلوتر و یا ۷۸ متر عقب‌تر از مکان اولیه باشد. هر دو حالت را بررسی می‌کنیم:

$$\begin{cases} \Delta x = 78m \Rightarrow v^2 - 400 = -8 \times 78 \Rightarrow v^2 = 400 - 624 = -224 \text{ غق ق} \\ \Delta x = -78m \Rightarrow v^2 - 400 = -8 \times (-78) \Rightarrow v^2 = 1024 \Rightarrow |v| = 32 \frac{m}{s} \end{cases}$$

۴۴- نمودار سرعت-زمان متحرکی که روی خط راست حرکت می‌کند، به شکل مقابل است. این متحرک چند متر مسافت را به صورت تندشونده طی می‌کند؟



۳۵۰ (۱)

۲۵۰ (۲)

۳۰۰ (۳)

۴۰۰ (۴)

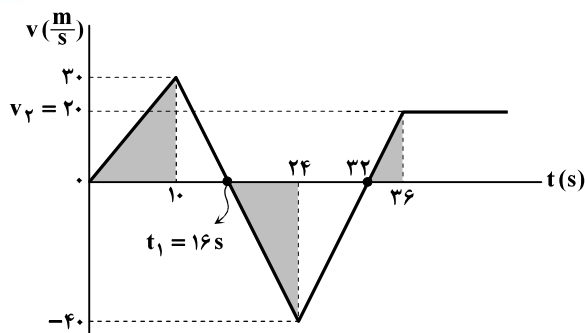
▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)

۴۴- پاسخ: گزینه ۱



در سه بازه زمانی (۰,۱۰s)، (۱۶s,۲۴s) و (۳۲s,۳۶s) حرکت متحرک تندشونده است. مسافت طی‌شده در کل این سه بازه زمانی، برابر با مجموع مساحت مثلث‌های رنگی است:

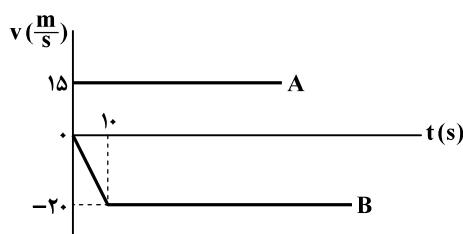
$$I = \frac{10 \times 30}{2} + \frac{8 \times 40}{2} + \frac{20 \times 4}{2} = 150 + 160 + 40 = 350m$$



زمان‌های $t_1 = 16s$ و سرعت $v_2 = 20 \frac{m}{s}$ با توجه به تشابه مثلث‌ها به دست آمده است:

$$\frac{-30}{-40-30} \mid \frac{t_1-10}{24-10} \Rightarrow \frac{t_1-10}{14} = \frac{3}{7} \Rightarrow t_1 = 16s$$

$$\frac{0-(-40)}{v_2-0} \mid \frac{32-24}{36-32} \Rightarrow \frac{40}{v_2} = \frac{8}{4} \Rightarrow v_2 = 20 \frac{m}{s}$$



۴۵- دو متحرک A و B در لحظه $t=0$ به ترتیب از مکان‌های $x_{0,A} = -200m$ و $x_{0,B}$ عبور می‌کنند و نمودارهای سرعت-زمان آن‌ها به شکل مقابل است. این دو متحرک در لحظه $t=20s$ به هم می‌رسند. $x_{0,B}$ کدام است؟

$$\begin{aligned} x_{0,B} &= 400m \quad (2) & x_{0,B} &= 200m \quad (1) \\ x_{0,B} &= 600m \quad (4) & x_{0,B} &= 300m \quad (3) \end{aligned}$$

▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۳ (فصل ۱)

۴۵- پاسخ: گزینه ۲



مساحت ناحیه بین نمودار سرعت-زمان و محور افقی برابر جابه‌جایی (Δx) است:

$$\Delta x_A = 15 \times 20 = 300m \Rightarrow x_A - (-200) = 300 \Rightarrow x_A = 100m$$

در لحظه $t=20s$ متحرک A در مکان $x=100m$ است؛ پس متحرک B نیز در همین مکان است.

$$\Delta x_B = \frac{-20 \times 10}{2} - 10 \times 20 = -300m \Rightarrow x_B - x_{0,B} = -300 \Rightarrow 100 - x_{0,B} = -300 \Rightarrow x_{0,B} = 400m$$

۴۶- معادله مکان-زمان متحرکی که روی خط راست حرکت می‌کند در SI به صورت $x = t^2 - 4t + 3$ است. تندی متوسط متحرک در بازه زمانی $t_1 = 1s$ تا $t_2 = 5s$ چند متر بر ثانیه است؟

$$\begin{aligned} 3 \quad (1) & \quad 2/5 \quad (2) & \quad 6 \quad (3) & \quad 5 \quad (4) \end{aligned}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)

۴۶- پاسخ: گزینه ۲



- اگر معادله مکان-زمان یک متحرک به صورت $x = At^2 + Bt + C$ باشد، نمودار آن به شکل یک سهمی است که لحظه $t_S = \frac{-B}{2A}$ لحظه تغییر جهت متحرک (رأس سهمی) را نشان می‌دهد.



$$t_S = \frac{-B}{2A} = \frac{-(-4)}{2 \times 1} = 2s$$

با استفاده از نکته بالا، لحظه تغییر جهت متحرک را می‌یابیم:

حالا مکان متحرک را در لحظه‌های $t_1 = 1s$ ، $t_2 = 5s$ و $t_S = 2s$ به دست می‌آوریم:

$$t_1 = 1s : x_1 = (1)^2 - 4(1) + 3 = 0$$

$$t_S = 2s : x_S = (2)^2 - 4(2) + 3 = -1m$$

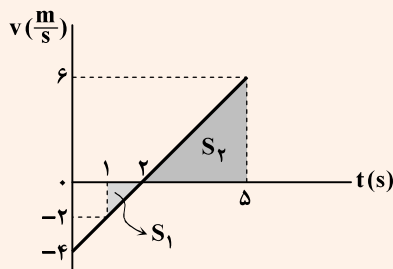
$$t_2 = 5s : x_2 = (5)^2 - 4(5) + 3 = +8m$$

مسافت طی شده توسط متحرک در بازه زمانی $t_1 = 1s$ تا $t_2 = 5s$ برابر است با:

$$\ell = |x_2 - x_S| + |x_S - x_1| = |8 - (-1)| + |-1 - 0| \Rightarrow \ell = 9 + 1 = 10m$$

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{10}{5-1} = 2.5 \frac{m}{s}$$

تندی متوسط در بازه زمانی مورد نظر برابر است با:

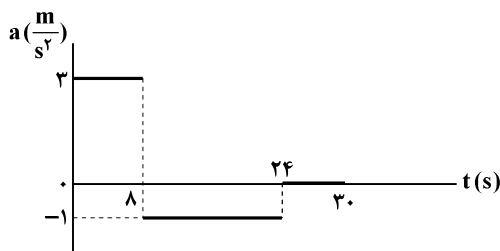


معادله مکان- زمان متحرک به صورت $x = t^2 - 4t + 3$ است؛ بنابراین حرکت متحرک با شتاب ثابت است و معادله سرعت- زمان آن در SI به صورت $v = 2t - 4$ می شود. با رسم نمودار $v-t$ داریم:

$$\begin{cases} |S_1| = \frac{1 \times 2}{2} = 1 \text{ m} \\ |S_2| = \frac{3 \times 6}{2} = 9 \text{ m} \end{cases} \Rightarrow \ell = |S_1| + |S_2| = 1 + 9 = 10 \text{ m}$$

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{10}{5-1} = 2.5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

۴۷- متحرکی روی محور x حرکت می کند و نمودار شتاب- زمان آن مطابق شکل است. اگر سرعت متوسط متحرک در بازه زمانی $t = 0$ تا $t = 25 \text{ s}$ برابر ۱۱ متر بر ثانیه باشد، سرعت متحرک در لحظه $t = 5 \text{ s}$ چند متر بر ثانیه است؟



(۱) ۱۱/۶

(۲) ۱۴/۶

(۳) ۱۵

(۴) ۹

▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۳ (فصل ۱)

۴۷- پاسخ: گزینه ۱



در بازه $t = 0$ تا $t = 8 \text{ s}$ شتاب متحرک ثابت و برابر $3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ است:

$$\Delta v = a \cdot \Delta t \Rightarrow v(8) = 3 \times 8 + v_0 = v_0 + 24 \quad (1) \text{ رابطه}$$

$$\Delta x_1 = \frac{v_1 + v_2}{2} \cdot \Delta t = \frac{v_0 + v_0 + 24}{2} \times 8 = (v_0 + 12) \times 8$$

در بازه $t = 8 \text{ s}$ تا $t = 24 \text{ s}$ شتاب متحرک ثابت و برابر $-1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ است:

$$\Delta v = a \cdot \Delta t \Rightarrow v(24) = -16 + v(8) \xrightarrow{\text{رابطه (۱)}} v(24) = -16 + v_0 + 24 \Rightarrow v(24) = v_0 + 8$$

$$\Delta x_2 = \frac{v_1 + v_2}{2} \cdot \Delta t = \frac{v_0 + 24 + v_0 + 8}{2} \times 16 = (v_0 + 16) \times 16$$

$$\Delta x_3 = v \Delta t = (v_0 + 8) \times 1$$

در بازه $t = 24 \text{ s}$ تا $t = 30 \text{ s}$ شتاب حرکت صفر است و سرعت ثابت است:

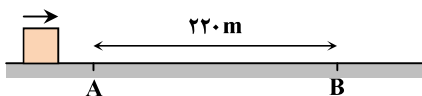
جابه جایی در بازه $t = 0$ تا $t = 25 \text{ s}$ برابر است با حاصل جمع این سه جابه جایی:

$$\Delta x = 8(v_0 + 12) + 16(v_0 + 16) + (v_0 + 8) = 25v_0 + 96 + 256 + 8 = 25v_0 + 360$$

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{25v_0 + 360}{25} = v_0 + 14.4 = 11 \Rightarrow v_0 = -3.4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v(5) = 5 \times 3 - 3.4 = 11.6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

۴۸- مطابق شکل، متحرکی روی خط راست با شتاب ثابت و در یک جهت حرکت می کند. اگر تندی متحرک در نقاط A و B به ترتیب $12 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ و $32 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ باشد، ۴ ثانیه قبل از رسیدن متحرک به نقطه B ، فاصله آن از نقطه A چند متر است؟



(۱) ۱۳۲

(۲) ۸۱

(۳) ۱۲۴

(۴) ۱۰۸

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)

۴۸- پاسخ: گزینه ۴



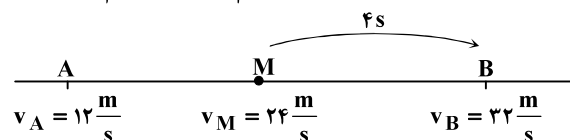
$$v_B^2 - v_A^2 = 2a\Delta x \Rightarrow 32^2 - 12^2 = 2a \times 220 \Rightarrow (32-12)(32+12) = 2a \times 220$$

$$\Rightarrow a = \frac{20 \times 44}{2 \times 220} = \frac{2 \times 10 \times 2 \times 22}{2 \times 10 \times 22} = 2 \frac{m}{s^2}$$

$$\Delta v = a \cdot \Delta t \Rightarrow 32 - v_1 = 2 \times 4 \Rightarrow v_1 = 24 \frac{m}{s}$$

۴ ثانیه قبل از رسیدن متحرک به نقطه B، سرعت متحرک $24 \frac{m}{s}$ شده است.

$$\Delta x = \frac{v_1 + v_2}{2} \Delta t = \frac{24 + 32}{2} \times 4 = 112 m \Rightarrow MB = 112 m \Rightarrow AM = 220 - 112 = 108 m$$



۴۹- متحرک A با سرعت ثابت $20 \frac{m}{s}$ و متحرک B با سرعت اولیه $4 \frac{m}{s}$ و شتاب ثابت $2 \frac{m}{s^2}$ هم‌زمان از یک محل و در یک جهت به حرکت درمی‌آیند. چند ثانیه بعد از اینکه که سرعت‌های دو متحرک برابر می‌شود، فاصله آن‌ها از یکدیگر به ۸۰ متر می‌رسد؟

۱۰ (۱) ۱۲ (۲) ۱۴ (۳) ۱۵ (۴)

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)

۴۹- پاسخ: گزینه ۲



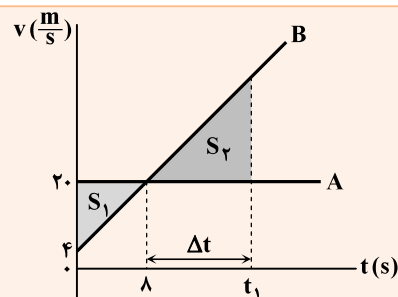
معادله مکان - زمان دو متحرک را می‌نویسیم:

$$\begin{cases} x_A = 20t \\ x_B = t^2 + 4t \end{cases} \Rightarrow x_B - x_A = t^2 - 16t = 80 \Rightarrow t^2 - 16t - 80 = 0 \Rightarrow (t-20)(t+4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 20s \\ t = -4s \text{ غق} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_A = 20 \frac{m}{s} \\ v_B = 2t + 4 \end{cases} \xrightarrow{v_A = v_B} 2t + 4 = 20 \Rightarrow t = 8s$$

$$\Delta t = 20 - 8 = 12s$$

اختلاف زمانی مورد نظر برابر است با:

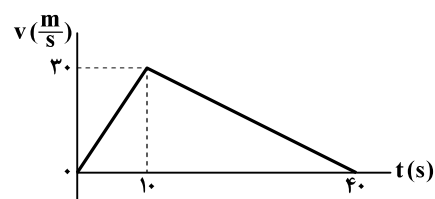


می‌توانیم نمودار سرعت - زمان دو متحرک را رسم کنیم. برای آنکه فاصله دو متحرک از هم ۸۰ متر شود، می‌بایست:

$$\begin{cases} S_2 - S_1 = 80 \\ S_1 = \frac{8 \times 16}{2} = 64 \end{cases} \Rightarrow S_2 = 144$$

$$\Rightarrow \frac{S_2}{S_1} = \left(\frac{\Delta t}{8}\right)^2 \Rightarrow \frac{144}{64} = \left(\frac{\Delta t}{8}\right)^2 \Rightarrow \Delta t = 12s$$

۵۰- با توجه به نمودار سرعت - زمان داده‌شده، اگر سرعت متوسط و شتاب متوسط در بازه زمانی $t = 10s$ تا $t = 10s$ و v_1 و a_1 و سرعت متوسط و شتاب متوسط در بازه زمانی $t = 10s$ تا $t = 25s$ و v_2 و a_2 بنامیم، کدام یک از گزینه‌های زیر درست است؟



$$a_1 = -a_2 \text{ و } v_1 = v_2 \quad (1)$$

$$a_1 = -a_2 \text{ و } v_1 = 3v_2 \quad (2)$$

$$a_1 = -3a_2 \text{ و } v_1 = v_2 \quad (3)$$

$$a_1 = -3a_2 \text{ و } v_1 = 3v_2 \quad (4)$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)

۵۰- پاسخ: گزینه ۳



در بازه زمانی $t = 0$ تا $t = 10$ s شتاب متحرک ثابت است. پس در هر قسمت از این بازه زمانی شتاب متوسط و شتاب لحظه‌ای برابر است.

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{30 - 0}{10} = 3 \frac{m}{s^2}$$

$$a_1 = a_{av}(\Delta s, 10s) = 3 \frac{m}{s^2}$$

در بازه زمانی $t = 10$ s تا $t = 40$ s نیز شتاب ثابت است.

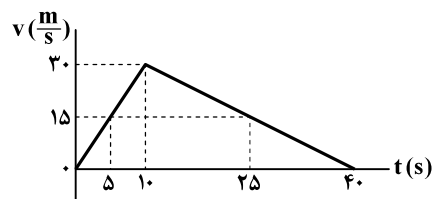
$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0 - 30}{40 - 10} = -1 \frac{m}{s^2}$$

$$a_2 = a_{av}(10s, 25s) = -1 \frac{m}{s^2}$$

$$\begin{cases} a_1 = a_{av}(\Delta s, 10s) = 3 \frac{m}{s^2} \\ a_2 = a_{av}(10s, 25s) = -1 \frac{m}{s^2} \end{cases} \Rightarrow a_1 = -3a_2$$

در بازه زمانی $(0, 10s)$ شیب نمودار $v-t$ ثابت است؛ بنابراین: $v(t = 5s) = 15 \frac{m}{s}$

همچنین در بازه زمانی $(10s, 40s)$ نیز شیب نمودار $v-t$ ثابت است؛ بنابراین: $v(t = 25s) = 15 \frac{m}{s}$



$$\begin{cases} v_1 = v_{av}(\Delta s, 10s) = \frac{v(5) + v(10)}{2} = \frac{15 + 30}{2} \\ v_2 = v_{av}(10s, 25s) = \frac{v(10) + v(25)}{2} = \frac{30 + 15}{2} \end{cases} \Rightarrow v_1 = v_2$$

۵۱- گلوله‌ای را از یک ارتفاع مشخص نسبت به سطح زمین رها می‌کنیم و گلوله با تندی $14 \frac{m}{s}$ به سطح زمین می‌رسد. اگر مقاومت هوا ناچیز

باشد، ارتفاع سقوط گلوله چند متر است؟ ($g = 10 \frac{m}{s^2}$)

۱۰ / ۲ (۴)

۹ / ۸ (۳)

۸ / ۵ (۲)

۷ / ۸ (۱)

▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۳ (فصل ۱)

۵۱- پاسخ: گزینه ۳



جهت مثبت محور حرکت را رو به پایین فرض می‌کنیم:

$$v^2 = 2g\Delta y \Rightarrow (14)^2 = 2 \times 10 \Delta y \Rightarrow \Delta y = \frac{14 \times 14}{20} = 9.8 m$$

۵۲- سنگی از ارتفاع ۱۲۵ متری زمین به‌طور آزادانه سقوط می‌کند. بزرگی سرعت متوسط سنگ در ۲ ثانیه پایانی رسیدن به زمین چند متر بر

ثانیه است؟ ($g = 10 \frac{m}{s^2}$)

۵۰ (۴)

۴۵ (۳)

۴۰ (۲)

۳۵ (۱)

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)

۵۲- پاسخ: گزینه ۲



جهت مثبت محور حرکت را رو به پایین در نظر می‌گیریم:

$$y = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow 125 = \frac{1}{2} \times 10 \cdot t^2 \Rightarrow t^2 = 25 \Rightarrow t = 5s$$

دو ثانیه پایانی رسیدن به زمین یعنی از لحظه $t_1 = 3s$ تا $t_2 = 5s$ ؛ بنابراین داریم:

$$v = gt \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 3s \Rightarrow v_1 = 10 \times 3 = 30 \frac{m}{s} \\ t_2 = 5s \Rightarrow v_2 = 10 \times 5 = 50 \frac{m}{s} \end{cases}$$

در حرکت با شتاب ثابت، سرعت متوسط متحرک در یک بازه زمانی معین برابر با میانگین سرعت‌های ابتدا و انتهای بازه زمانی است:

$$v_{av} = \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{30 + 50}{2} = 40 \frac{m}{s}$$



برای محاسبه سرعت متوسط سنگ در بازه زمانی $t_1 = 3s$ تا $t_2 = 5s$ می‌توانستیم سرعت لحظه وسط این بازه یعنی $t = 4s$ را حساب کنیم:

$$v_{av}(3-5) = v_{t=4s} \xrightarrow{v=gt} v_{av} = 10 \times 4 = 40 \frac{m}{s}$$

۵۳- در شکل مقابل، جسم با نیروی افقی $F = 80N$ ، روی سطح افقی از حال سکون به سمت راست کشیده می‌شود. پس از ۵ ثانیه، تندی آن

به $15 \frac{m}{s}$ می‌رسد. ضریب اصطکاک جنبشی جسم با سطح افقی کدام است؟ ($g = 10 \frac{m}{s^2}$)



(۲) ۰/۷

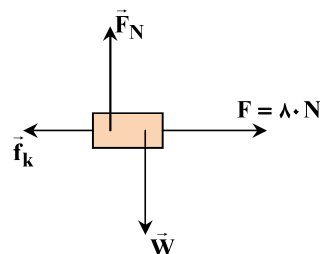
(۱) ۰/۸

(۴) ۰/۵

(۳) ۰/۶

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل‌های ۱ و ۲)

۵۳- پاسخ: گزینه ۲



$$v = at + v_0 \Rightarrow 15 = 5a \Rightarrow a = 3 \frac{m}{s^2}$$

$$\text{در راستای عمودی: } F_{net} = 0 \Rightarrow F_N = W = mg \Rightarrow F_N = 8 \times 10 = 80N$$

$$\text{در راستای افقی: } F_{net} = ma \Rightarrow F - f_k = ma \Rightarrow F - \mu_k F_N = ma$$

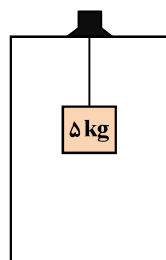
$$\Rightarrow 80 - 80\mu_k = 8 \times 3 \Rightarrow \mu_k = \frac{56}{80} = 0.7$$

۵۴- یک وزنه به جرم ۵ کیلوگرم توسط نخ‌ی با جرم ناچیز از سقف یک آسانسور آویخته شده است. آسانسور

از حال سکون به سمت بالا حرکت می‌کند و در مدت ۳ ثانیه با شتاب ثابت به تندی $12 \frac{m}{s}$ می‌رسد. سپس ۲

ثانیه با سرعت ثابت به حرکت خود ادامه می‌دهد و در پایان در مدت ۴ ثانیه با شتاب ثابت متوقف می‌شود.

اختلاف بیشترین و کمترین مقدار نیروی کشش طناب در این مدت چند نیوتون می‌شود؟ ($g = 10 \frac{m}{s^2}$)



(۲) ۲۵

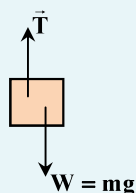
(۱) ۵۵

(۴) ۴۵

(۳) ۳۵

▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۳ (فصل ۲)

۵۴- پاسخ: گزینه ۳



$$T - mg = 0 \Rightarrow T = mg$$

- اگر آسانسور ساکن باشد یا با سرعت ثابت حرکت کند:

- اگر آسانسور با شتاب ثابت به بزرگی a حرکت کند و جهت شتاب رو به بالا باشد:

$$T - mg = ma \Rightarrow T = m(g + a), \quad T > mg$$

- اگر بزرگی شتاب آسانسور a و جهت شتاب آن به طرف پایین باشد:

$$mg - T = ma \Rightarrow T = m(g - a), \quad T < mg$$



در قسمت اول که آسانسور به صورت تندشونده بالا می‌رود:

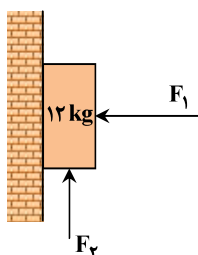
$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{12-0}{3} = 4 \frac{m}{s^2} \Rightarrow T_1 = 5(10+4) = 70 N$$

در قسمت سوم که آسانسور به صورت کندشونده بالا می‌رود:

$$|a| = \frac{|\Delta v|}{\Delta t} = \frac{12}{4} = 3 \frac{m}{s^2} \Rightarrow T_2 = 5(10-3) = 35 N$$

$$|\Delta T| = T_1 - T_2 = 70 - 35 = 35 N$$

۵۵- در شکل مقابل، اگر $F_1 = 200 N$ و $F_2 = 50 N$ باشد، جسم در آستانه لغزیدن روی دیوار است. در صورتی که بزرگی نیروی F_1 برابر ۱۰۰ نیوتون شود، بزرگی نیروی F_2 حداکثر چند نیوتون باشد تا جسم باز هم در آستانه لغزیدن روی دیوار باشد؟ ($g = 10 \frac{m}{s^2}$)



(۱) ۱۹۰

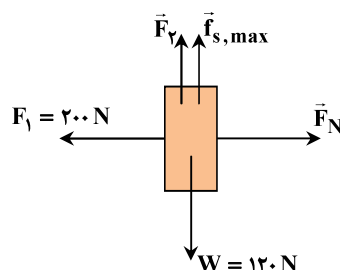
(۲) ۱۵۵

(۳) ۱۴۵

(۴) ۱۸۵

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

۵۵- پاسخ: گزینه ۲



در حالت اول که F_2 برابر ۵۰ نیوتون (کمتر از وزن جسم) است، جهت f_s وارد بر جسم به طرف بالا است.

$$F_N - F_1 = 0 \Rightarrow F_N = 200 N$$

$$F_2 + f_{s,max} - W = 0 \Rightarrow 50 + f_{s,max} - 120 = 0 \Rightarrow f_{s,max} = 70 N$$

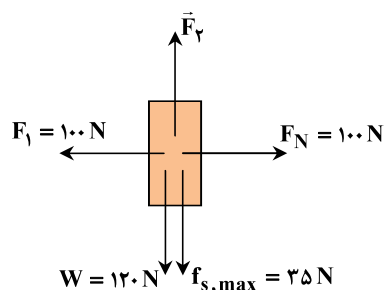
$$f_{s,max} = \mu_s F_N \Rightarrow \mu_s = \frac{70}{200} = 0.35$$

اگر بزرگی نیروی F_1 برابر ۱۰۰ نیوتون شود، بزرگی نیروی F_N نیز ۱۰۰ نیوتون می‌شود.

$$f_{s,max} = \mu_s F_N = 0.35 \times 100 = 35 N$$

بیشترین مقدار F_2 در حالی که وزنه ساکن بماند، مربوط به حالتی است که وزنه در آستانه لغزیدن به طرف بالا باشد:

$$F_2 - W - f_{s,max} = 0 \Rightarrow F_2 = 120 + 35 = 155 N$$



۵۶- بزرگی تکانه جسمی به جرم $4/5 kg$ برابر با $15 \frac{kg \cdot m}{s}$ است. انرژی جنبشی جسم چند ژول است؟

(۴) ۳۰

(۳) ۲۵

(۲) ۲۰

(۱) ۱۵

▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۳ (فصل ۲)

۵۶- پاسخ: گزینه ۳



$$K = \frac{p^2}{2m} \Rightarrow K = \frac{(15)^2}{2 \times 4/5} = \frac{225}{9} = 25 J$$

۵۷- پره یک پنکه به طور یکنواخت در هر دقیقه ۱۵۰ دور می‌گردد. یک ذره روی این پره و در فاصله ۱۰ سانتی‌متر از محور پره (مرکز دایره) قرار

دارد. تندی لحظه‌ای ذره v و بزرگی شتاب لحظه‌ای آن a است. مقدار کسر $\frac{v}{a}$ بر حسب یکای SI کدام است؟

(۱) $\frac{\pi}{5}$ (۲) $\frac{2\pi}{5}$ (۳) $\frac{2}{5\pi}$ (۴) $\frac{1}{5\pi}$

۵۷- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)



در حرکت دایره‌ای یکنواخت، شتاب لحظه‌ای همان شتاب مرکزگرا و بزرگی آن $\frac{v^2}{R}$ است.

$$\frac{v}{a} = \frac{v}{\frac{v^2}{R}} = \frac{R}{v} \xrightarrow{v = \frac{2\pi R}{T}} \frac{v}{a} = \frac{RT}{2\pi R} = \frac{T}{2\pi} \quad (۱) \text{ رابطه}$$

T دوره حرکت است.

$$T = \frac{60}{150} = \frac{2}{5} \text{ s} \xrightarrow{\text{رابطه (۱)}} \frac{v}{a} = \frac{T}{2\pi} = \frac{\frac{2}{5}}{2\pi} = \frac{1}{5\pi} \text{ s}$$

۵۸- یک خودرو به جرم ۱۸۰۰ کیلوگرم در جاده‌ای افقی، پیچ مسطحی به شعاع ۱۰۰ متر را با تندی ثابت $90 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ طی می‌کند. شتاب مرکزگرا

برای این خودرو توسط نیروی تأمین می‌شود و ضریب اصطکاک میان چرخ‌های خودرو و سطح جاده باید حداقل باشد تا

خودرو بتواند این پیچ را بدون آنکه بلغزد، طی کند. $(g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2})$

(۱) اصطکاک جنبشی - $\frac{5}{8}$ (۲) اصطکاک ایستایی - $\frac{3}{5}$
(۳) اصطکاک جنبشی - $\frac{3}{5}$ (۴) اصطکاک ایستایی - $\frac{5}{8}$

۵۸- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)



می‌توانیم خودرو را به صورت یک ذره در نظر بگیریم که حرکت دایره‌ای یکنواخت دارد. در راستای عمود بر سطح جاده، نیروی وزن و نیروی عمودی سطح بر خودرو وارد می‌شوند که برابند آن‌ها صفر است. در راستای موازی با سطح جاده، نیروی اصطکاک ایستایی (که عمود بر راستای حرکت است) مانع لغزش خودرو شده و به طرف مرکز پیچ بر خودرو وارد می‌شود. این نیرو شتاب لازم را برای دور زدن تأمین می‌کند.

$$90 \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{90}{3.6} = 25 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\begin{cases} F_N = mg \\ f_{s, \max} = \mu_s \cdot F_N = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow \mu_s mg = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow \mu_s = \frac{v^2}{Rg} = \frac{25 \times 25}{100 \times 10} = \frac{5}{8} \end{cases}$$

۵۹- توبی به جرم ۶۵۰ گرم را به صورت عمودی به طرف بالا در هوا پرتاب می‌کنیم. جسم به مدت ۲ ثانیه بالا می‌رود و سپس در مدت ۳ ثانیه به محل پرتاب برمی‌گردد. با فرض اینکه بزرگی نیروی مقاومت هوا در هنگام بالا رفتن و پایین آمدن توپ ثابت و یکسان باشد، بزرگی این نیرو

چند نیوتون است؟ $(g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2})$

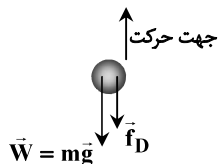
(۱) ۵ (۲) $\frac{5}{2}$ (۳) $\frac{5}{3}$ (۴) $\frac{5}{4}$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۳ (فصل‌های ۱ و ۲)

۵۹- پاسخ: گزینه ۲

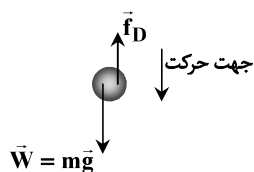


در مسیر بالا رفتن جهت $\vec{f}_D$ به طرف پایین و در مسیر پایین آمدن جهت $\vec{f}_D$ به طرف بالا است. (نیروی مقاومت هوا همیشه در خلاف جهت حرکت بر جسم وارد می‌شود).



$$\text{رابطه (۱): } mg + f_D = ma_1 \quad \text{هنگام بالا رفتن}$$

a_1 بزرگی شتاب توپ هنگام بالا رفتن است.

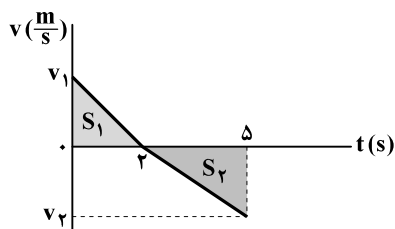


$$\text{رابطه (۲): } mg - f_D = ma_2 \quad \text{هنگام پایین آمدن}$$

a_2 بزرگی شتاب توپ هنگام پایین آمدن است.

می‌توانیم از نمودار سرعت- زمان کمک بگیریم و توجه کنیم که مساحت زیر

نمودار در مسیر رفت و برگشت هم‌اندازه است.



$$S_1 = S_2 \Rightarrow |v_1 t_1| = |v_2 t_2|$$

$$\Rightarrow 2 \times (2a_1) = 3 \times (3a_2) \Rightarrow 4a_1 = 9a_2$$

$$\xrightarrow{\text{روابط (۱) و (۲)}} 4 \left(\frac{mg + f_D}{m} \right) = 9 \left(\frac{mg - f_D}{m} \right)$$

$$\Rightarrow 4(mg + f_D) = 9(mg - f_D) \Rightarrow 5mg = 13f_D$$

$$\Rightarrow f_D = \frac{5}{13} mg = \frac{5}{13} \times 0.65 \times 10 = \frac{5}{2} \text{ N}$$

۶۰- وزن یک جسم در سطح زمین 147 N است. اگر وزن آن در سطح یک سیاره 54 N باشد، بزرگی شتاب گرانشی در سطح این سیاره چند

نیوتون بر کیلوگرم است؟ ($g = 9.8 \frac{\text{N}}{\text{kg}}$)

$$3/2 \quad (2)$$

$$2/5 \quad (1)$$

$$4/5 \quad (4)$$

$$3/6 \quad (3)$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

۶۰- پاسخ: گزینه ۳



جرم جسم عدد ثابتی است، پس به کمک وزن جسم روی زمین، جرم را به دست می‌آوریم:

$$W_{\text{زمین}} = mg_{\text{زمین}} \Rightarrow 147 = m(9.8) \Rightarrow m = \frac{147}{9.8} \text{ kg}$$

حالا شتاب گرانش سیاره را محاسبه می‌کنیم:

$$W_{\text{سیاره}} = mg_{\text{سیاره}} \Rightarrow 54 = \frac{147}{9.8} g_{\text{سیاره}} \Rightarrow g_{\text{سیاره}} = \frac{9.8 \times 54}{147} = 3.6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

۶۱- در شکل مقابل، جسم روی سطح افقی ساکن است و بزرگی نیرویی که سطح تکیه‌گاه به آن وارد می‌کند، 50 نیوتون است. اگر بزرگی نیروی

$$F \text{ دو برابر شود، شتاب حرکت جسم چند متر بر مربع ثانیه می‌شود؟ } (\mu_s = 0.9 \text{ و } \mu_k = 0.7, g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2})$$



$$7 \quad (1)$$

$$6 \quad (2)$$

$$5 \quad (3)$$

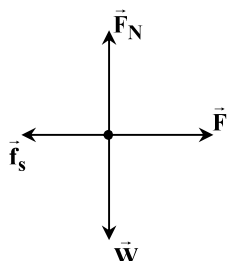
$$8 \quad (4)$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

۶۱- پاسخ: گزینه ۴



در حالت اول:



$$F_N - W = 0 \Rightarrow F_N = mg = 40 \text{ N}$$

$$R = \sqrt{F_N^2 + f_s^2} \Rightarrow 50 = \sqrt{40^2 + f_s^2} \Rightarrow f_s = 30 \text{ N}$$

$$F - f_s = 0 \Rightarrow F = 30 \text{ N}$$

در حالت دوم بزرگی نیروی F برابر ۶۰ نیوتون می‌شود که از $f_{s, \max}$ بیشتر است: پس جسم حرکت می‌کند:

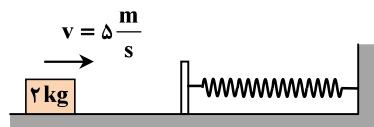
$$f_{s, \max} = \mu_s F_N = 0.9 \times 40 = 36 \text{ N}$$

$$F_{\text{net}} = F - f_k = ma \Rightarrow 60 - (\mu_k F_N) = 4a$$

$$\Rightarrow 60 - (0.7 \times 40) = 4a \Rightarrow a = \frac{22}{4} = \frac{m}{s^2}$$

۶۲- مطابق شکل، اصطکاک وزنه با سطح افقی و جرم فنر و صفحه فلزی بسته شده به آن ناچیز و ثابت فنر $\frac{N}{m}$ ۲۰۰۰ است. وزنه‌ای به جرم

2 kg با تندی $\frac{m}{s}$ ۵ به طرف راست فرستاده شده و در برخورد با فنر، آن را حداکثر 15 cm فشرده می‌کند و در بازگشت با تندی $\frac{m}{s}$ ۴ از فنر جدا می‌شود. اگر مدت تماس وزنه با فنر ۸۰ میلی‌ثانیه باشد، بیشترین مقدار نیروی فنر در این مدت (F_1) و بزرگی نیروی متوسطی که فنر در این مدت بر وزنه وارد می‌کند (F_2) چند نیوتون است؟



$$F_1 = 450 \text{ N}, F_2 = 150 \text{ N} \quad (1)$$

$$F_1 = 450 \text{ N}, F_2 = 225 \text{ N} \quad (2)$$

$$F_1 = 300 \text{ N}, F_2 = 150 \text{ N} \quad (3)$$

$$F_1 = 300 \text{ N}, F_2 = 225 \text{ N} \quad (4)$$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۳ (فصل ۲)

۶۲- پاسخ: گزینه ۴



$$F_e = kx = 2000 \times \frac{15}{100} = 300 \text{ N}$$

بیشترین نیروی فنر در حالتی است که فنر کاملاً فشرده شده است:

نیروی که فنر به‌طور متوسط بر وزنه وارد می‌کند، از رابطه $F_{av} = \frac{\Delta p}{\Delta t}$ محاسبه می‌شود:

$$F_{av} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{m \Delta v}{\Delta t} = \frac{2 \times (4 - (-5))}{80 \times 10^{-3}} = \frac{2 \times 9 \times 10^3}{80} = \frac{1800}{8} = 225 \text{ N}$$

بنابراین $F_1 = 300 \text{ N}$ و $F_2 = 225 \text{ N}$ است.



- ممکن است این سؤال مطرح شود که با وجود ناچیز بودن اصطکاک چطور ممکن است انرژی جنبشی وزنه در پایان کمتر از انرژی جنبشی اولیه آن باشد. این انرژی می‌تواند در برخورد وزنه با صفحه فلزی به انرژی درونی تبدیل شده باشد. علاوه بر این فنر هم می‌تواند در اثر جمع و باز شدن گرم شده باشد، یعنی در مجموع بخشی از انرژی مکانیکی وزنه به گرما تبدیل شده است.

۶۳- نیروی افقی F در لحظه $t = 0$ وزنه را از حال سکون به طرف راست به حرکت درمی‌آورد و تا

لحظه $t = 5 \text{ s}$ به آن وارد می‌شود و در این لحظه نیروی F قطع می‌شود. از لحظه قطع شدن

نیروی F تا توقف کامل، وزنه مسافت چند متر را طی می‌کند؟ ($g = 10 \frac{m}{s^2}$ ، $\mu_k = 0.4$ و $\mu_s = 0.5$)



$$(\mu_s = 0.5)$$

$$12/5 \quad (2)$$

$$7/5 \quad (1)$$

$$10 \quad (4)$$

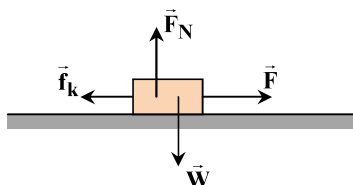
$$15 \quad (3)$$

۶۳- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل‌های ۱ و ۲)



در ۵ ثانیه نخست وضعیت نیروهای وارد بر وزنه به صورت مقابل است:



$$F_N - W = 0 \Rightarrow F_N = mg = 20 \text{ N}$$

$$f_k = \mu_k F_N = 0.4 \times 20 = 8 \text{ N}$$

$$F - f_k = ma \Rightarrow 12 - 8 = 2a \Rightarrow a = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$v = at + v_0 = 2 \times 5 + 0 = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

در پایان ۵ ثانیه، تندی وزنه به $10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ می‌رسد:از لحظه $t = 5 \text{ s}$ به بعد، نیروی F حذف شده ولی سه نیروی دیگر همچنان به وزنه وارد می‌شوند:

$$a = -\frac{f_k}{m} = -\frac{mg\mu_k}{m} = -g\mu_k = -4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$v_f^2 - v_i^2 = 2a\Delta x \Rightarrow 0 - 10^2 = 2 \times (-4) \times \Delta x \Rightarrow \Delta x = \frac{100}{8} = 12.5 \text{ m}$$

۶۴- اگر جرم ماهواره نصف و شعاع گردش آن به دور زمین ۲ برابر شود، کدام یک از عبارات زیر در مورد آن درست است؟

الف) بزرگی شتاب مرکزگرای ماهواره $\frac{1}{4}$ برابر می‌شود. ب) انرژی جنبشی ماهواره $\frac{1}{4}$ برابر می‌شود.

(۱) «الف» و «ب» درست هستند.

(۲) «الف» درست و «ب» نادرست است.

(۳) «الف» و «ب» نادرست هستند.

(۴) «الف» نادرست و «ب» درست است.

▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۳ (فصل ۲)

۶۴- پاسخ: گزینه ۱



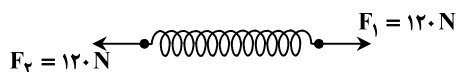
$$F_{\text{net}} = ma \Rightarrow \frac{GMm}{r^2} = ma \Rightarrow a = \frac{GM}{r^2}$$

 r دو برابر شده؛ پس a یک‌چهارم برابر می‌شود؛ بنابراین مورد «الف» درست است.

$$\frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \xrightarrow{K = \frac{1}{2}mv^2} K = \frac{1}{2} \frac{GMm}{r}$$

 m نصف و r دو برابر شده؛ پس K یک‌چهارم برابر می‌شود؛ بنابراین مورد «ب» نیز درست است.۶۵- هنگامی که یک وزنه ۵ کیلوگرمی را از حال سکون با شتاب ثابت $2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ توسط یک فنر با طول اولیه ۴۰ سانتی‌متر بالا می‌کشیم، طول این فنر ۴۳ سانتی‌متر می‌شود. اگر از همین فنر به ترتیب شکل زیر استفاده کنیم، طول فنر چند سانتی‌متر می‌شود؟ (جرم فنر ناچیز است و $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$)

$$(g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2})$$



(۱) ۴۹

(۲) ۴۶

(۳) ۵۲

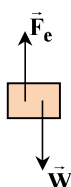
(۴) ۴۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

۶۵- پاسخ: گزینه ۲

وزنه از حال سکون به حرکت درمی‌آید، پس حرکت آن تندشونده رو به بالا است، بنابراین $\vec{F}_{\text{net}}$ رو به بالا و $F_e > W$ است.

$$F_e - W = ma \Rightarrow F_e = mg + ma = m(g + a) \Rightarrow F_e = 5 \times 12 = 60 \text{ N}$$

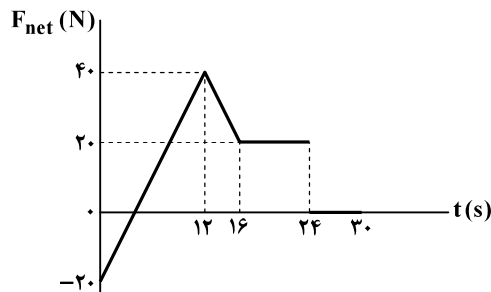


وقتی این فنر ۳ سانتی متر کشیده شده باشد، نیروی آن ۶۰ نیوتون است.

$$F_e = kx \Rightarrow \frac{F_{e,2}}{F_{e,1}} = \frac{x_2}{x_1} \Rightarrow \frac{120}{60} = \frac{x}{3} \Rightarrow x = 6 \text{ cm}$$

$$\ell = 40 + 6 = 46 \text{ cm}$$

دقت کنید وقتی فنر از دو سر با نیروی ۱۲۰ N کشیده می‌شود، بزرگی نیروی کشش فنر ۱۲۰ N است.



۶۶- جسمی به جرم ۱۶ کیلوگرم روی محور x حرکت می‌کند و نمودار نیروی خالص وارد بر آن بر حسب زمان مطابق شکل است. اگر در لحظه

$t = 0$ سرعت جسم $(-2 \frac{\text{m}}{\text{s}})\vec{i}$ باشد، در لحظه $t = 30 \text{ s}$ سرعت جسم در SI کدام است؟

(۱) $23\vec{i}$

(۲) $20\vec{i}$

(۴) $25\vec{i}$

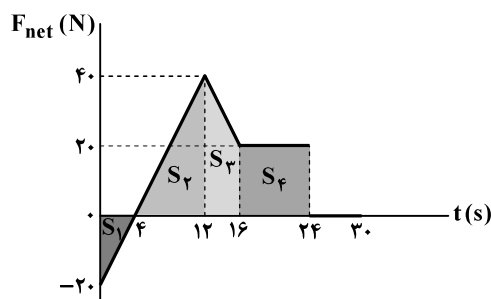
(۳) $28\vec{i}$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

۶۶- پاسخ: گزینه ۱



از تشابه دو مثلث قائم‌الزاویه با مساحت‌های S_1 و S_2 می‌توان دریافت که در لحظه $t = 4 \text{ s}$ ، نیروی خالص وارد بر جسم صفر شده است.



مساحت زیر نمودار $F_{\text{net}} - t$ با تغییر تکانه (Δp) جسم برابر است:

$$m\Delta v = \Delta p = -S_1 + S_2 + S_3 + S_4$$

$$= -\frac{20 \times 4}{2} + \frac{8 \times 40}{2} + 4 \times \frac{20 + 40}{2} + 8 \times 20$$

$$\Rightarrow 16(v_f - (-2)) = -40 + 160 + 120 + 160$$

$$\Rightarrow v_f + 2 = \frac{400}{16} = 25 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_f = (23 \frac{\text{m}}{\text{s}})\vec{i}$$

۶۷- چند مورد از عبارت‌های زیر، در مورد هر حرکت هماهنگ ساده، درست است؟

(الف) با افزایش انرژی جنبشی نوسانگر، بزرگی شتاب آن کاهش می‌یابد.

(ب) بزرگی نیروی خالص وارد بر نوسانگر در وضع تعادل صفر است.

(پ) هرگاه سرعت و مکان نوسانگر خلاف جهت هم باشند، حرکت آن تندشونده است.

(۴) صفر

(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) ۱

▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۳ (فصل ۳)

۶۷- پاسخ: گزینه ۳



(الف) درست؛ هرگاه نوسانگر به وضع تعادل نزدیک می‌شود، تندی و در نتیجه انرژی جنبشی آن افزایش یافته و بزرگی شتاب و انرژی پتانسیل آن کاهش می‌یابند.

(ب) درست؛ بزرگی $\vec{a}$ ، $\vec{F}_{\text{net}}$ در وضع تعادل (نقطه وسط مسیر نوسان) صفر است.

(پ) درست؛ وقتی متحرک به وضع تعادل نزدیک می‌شود، سرعت و مکان در خلاف جهت هم بوده و حرکت تندشونده است.

۶۸- بسامد یک حرکت نوسانی دوره‌ای ۱۰ kHz است. دوره تناوب این نوسان چند میلی‌ثانیه است؟

(۴) ۱۰

(۳) ۱

(۲) ۰/۱

(۱) ۰/۰۱

▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۳ (فصل ۳)

۶۸- پاسخ: گزینه ۲



$$T = \frac{1}{f} \xrightarrow{f=10 \times 10^3 \text{ Hz}} T = \frac{1}{10^4} \text{ s} = 0/1 \text{ ms}$$

دوره تناوب، معکوس (وارون) بسامد نوسان است:

پاسخ تشریحی آزمون ۳ بهمن ۱۴۰۴

۶۹- معادله حرکت هماهنگ ساده‌ای در SI به صورت $x = 0.04 \cos(50\pi t)$ است. حداقل زمان لازم برای اینکه شتاب بیشینه نوسانگر به صفر برسد، برابر چند ثانیه است؟

- (۱) $\frac{1}{50}$ (۲) $\frac{1}{100}$ (۳) $\frac{3}{200}$ (۴) $\frac{3}{100}$

۶۹- پاسخ: گزینه ۲ **▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۳ (فصل ۳)**



همواره در حرکت نوسانی در نقاط بازگشتی ($x = \pm A$)، شتاب بیشینه و در نقطه تعادل ($x = 0$) نیز مقدار آن حداقل و برابر صفر است. بنابراین حداقل زمان لازم برای این اتفاق برابر $\frac{T}{4}$ است:

$$\begin{cases} \omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \frac{2\pi}{T} = 50\pi \Rightarrow T = \frac{1}{25} s \\ \omega = 50\pi \end{cases}$$

$$t = \frac{T}{4} = \frac{\frac{1}{25}}{4} = \frac{1}{100} s$$

۷۰- در یک حرکت هماهنگ ساده در لحظه‌ای که تندی متحرک $\frac{2}{5} \frac{m}{s}$ است، انرژی جنبشی متحرک دو برابر انرژی پتانسیل آن است. در لحظه‌ای که انرژی پتانسیل متحرک دو برابر انرژی جنبشی آن شود، تندی متحرک چند متر بر ثانیه می‌شود؟

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $2\sqrt{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

۷۰- پاسخ: گزینه ۱ **▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۳)**



در حرکت هماهنگ ساده، انرژی مکانیکی (مجموع انرژی‌های جنبشی و پتانسیل) ثابت است.

$$E = U + K \Rightarrow \begin{cases} U_1 = \frac{1}{2} K_1 \Rightarrow E = \frac{1}{2} K_1 + K_1 = \frac{3}{2} K_1 \Rightarrow K_1 = \frac{2}{3} E \\ U_2 = 2K_2 \Rightarrow E = 2K_2 + K_2 = 3K_2 \Rightarrow K_2 = \frac{1}{3} E \end{cases} \Rightarrow K_2 = \frac{1}{3} K_1$$

$$K = \frac{1}{2} mv^2 \Rightarrow v_2 = \frac{v_1}{\sqrt{2}} = \frac{\frac{2}{5}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{5} \frac{m}{s}$$

۷۱- در حرکت هماهنگ ساده وزنه-فنر اگر جرم وزنه نصف، دامنه نوسان ۲ برابر و ثابت فنر ۳ برابر شود، انرژی جنبشی وزنه در وضع تعادل و بسامد نوسان به ترتیب از راست به چپ چند برابر می‌شود؟

- (۱) $\sqrt{3}$ ، ۱۲ (۲) $\sqrt{6}$ ، ۶ (۳) $\sqrt{3}$ ، ۶ (۴) $\sqrt{6}$ ، ۱۲

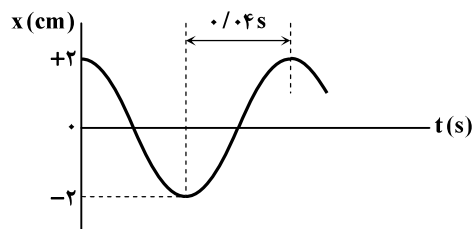
۷۱- پاسخ: گزینه ۴ **▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۳)**



انرژی جنبشی وزنه در وضع تعادل، بیشینه است و با انرژی مکانیکی وزنه برابر است:

$$\begin{cases} A_2 = 2A_1 \\ k_2 = 3k_1 \Rightarrow \frac{E_2}{E_1} = \frac{k_2}{k_1} \times \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2 \Rightarrow \frac{E_2}{E_1} = \frac{3k_1}{k_1} \times \left(\frac{2A_1}{A_1}\right)^2 \Rightarrow \frac{E_2}{E_1} = 3 \times 2^2 \Rightarrow E_2 = 12E_1 \\ E = \frac{1}{2} kA^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_2 = 3k_1 \\ m_2 = \frac{1}{2} m_1 \Rightarrow \frac{f_2}{f_1} = \sqrt{\frac{k_2}{k_1}} \times \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} = \sqrt{\frac{3k_1}{k_1}} \times \sqrt{\frac{m_1}{\frac{1}{2}m_1}} \Rightarrow f_2 = \sqrt{6} f_1 \\ f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \end{cases}$$



۷۲- وزنه‌ای به جرم ۸۰۰ گرم به انتهای یک فنر بسته شده و حرکت هماهنگ ساده انجام می‌دهد. اگر نمودار مکان- زمان این وزنه به شکل زیر باشد، ثابت فنر چند نیوتون بر متر است؟ ($\pi = \sqrt{10}$)

(۱) ۱۲۵۰

(۲) ۲۵۰۰

(۳) ۳۷۵۰

(۴) ۵۰۰۰

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۳)

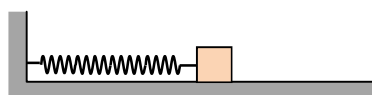
۷۲- پاسخ: گزینه ۴



$$\frac{T}{2} = 0.4 \Rightarrow T = 0.8 \text{ s}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow 0.8 = 2\pi \sqrt{\frac{0.8}{k}} \Rightarrow (0.8)^2 = \frac{4\pi^2 \times 0.8}{k} \Rightarrow k = \frac{4\pi^2 \times 0.8}{0.8 \times 0.8} = \frac{400}{0.8} = 500 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

۷۳- مطابق شکل، وزنه روی سطح افقی با اصطکاک ناچیز نوسان می‌کند و کوتاه‌ترین فاصله زمانی بین عوض شدن جهت حرکت و عوض شدن جهت شتاب آن ۲۰۰ میلی‌ثانیه است. اگر بیشترین و کمترین طول فنر در حین نوسان وزنه ۶۸ cm و ۶۲ cm باشد، جرم وزنه چند گرم باشد تا در هر یک از دو انتهای مسیر، انرژی پتانسیل آن ۴۵ میلی‌ژول شود؟ ($\pi^2 = 10$)



(۲) ۱۲۰۰

(۱) ۸۰۰

(۴) ۴۰۰

(۳) ۱۶۰۰

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۳)

۷۳- پاسخ: گزینه ۳



$$A = \frac{68 - 62}{2} = 3 \text{ cm} = 0.03 \text{ m}$$

دامنه نوسان وزنه برابر است با:

جهت شتاب در وضع تعادل عوض می‌شود و جهت حرکت در دو انتهای مسیر؛ بنابراین کمترین فاصله زمانی میان تغییر جهت حرکت و تغییر جهت شتاب برابر $\frac{T}{4}$ است.

$$\frac{T}{4} = 0.2 \text{ s} \Rightarrow T = 0.8 \text{ s} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0.8} = \frac{5\pi}{2} \text{ rad/s}$$

$$U_{\max} = E = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \Rightarrow 45 \times 10^{-3} = \frac{1}{2} m \times \left(\frac{5\pi}{2}\right)^2 \times \left(\frac{3}{100}\right)^2$$

$$\Rightarrow m = \frac{45 \times 10^{-3} \times 2}{\frac{25\pi^2}{4} \times 9 \times 10^{-4}} = \frac{45 \times 2 \times 4}{25 \times 9} = \frac{2 \times 4}{5} \text{ kg} = 1600 \text{ g}$$

۷۴- اگر طول یک آونگ ساده را ۴۴ سانتی‌متر تغییر دهیم، تعداد نوسان‌های آن در هر دقیقه ۲۰ درصد زیاد می‌شود. تعداد نوسان‌های آونگ در

حالت اول (قبل از تغییر طول) در هر دقیقه کدام است؟ ($g = \pi^2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$)

(۴) ۱۵

(۳) ۳۰

(۲) ۲۰

(۱) ۲۵

▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۳ (فصل ۳)

۷۴- پاسخ: گزینه ۱



تعداد نوسان‌های آونگ در یک مدت معین، با بسامد حرکت نسبت مستقیم دارد. پس در اینجا بسامد ۲۰ درصد زیاد شده است.

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}} \Rightarrow \frac{f_2}{f_1} = \sqrt{\frac{l_1}{l_2}} \Rightarrow \frac{120}{100} = \sqrt{\frac{l_1}{l_2}} \Rightarrow \sqrt{\frac{l_1}{l_2}} = \frac{6}{5} \quad (۱) \text{ رابطه}$$

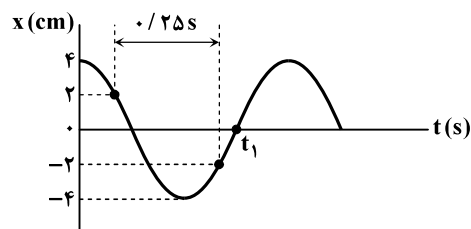
پاسخ تشریحی آزمون ۳ بهمن ۱۴۰۴

با توجه به افزایش تعداد نوسان‌ها، طول آونگ کاهش می‌یابد. می‌دانیم اختلاف l_1 و l_2 ۴۴ سانتی‌متر است؛ بنابراین داریم:

$$l_1 - 44 = l_2 \quad (2) \text{ رابطه}$$

$$(2) \text{ روابط (1) و (2): } \sqrt{\frac{l_1}{l_1 - 44}} = \frac{6}{5} \Rightarrow \frac{l_1}{l_1 - 44} = \frac{36}{25} \Rightarrow l_1(25 - 36) = 36 \times 44 \Rightarrow l_1 = 36 \times 4 = 144 \text{ cm} = 1/44 \text{ m}$$

$$N = f \cdot \Delta t = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}} \times \Delta t = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi^2}{1/44}} \times 60 = \frac{60}{2 \times 1/2} = 25$$



۷۵- نمودار مکان- زمان در یک حرکت هماهنگ ساده مطابق شکل است.

تندی متوسط نوسانگر در مدت $t = 0$ تا $t = t_1$ چند سانتی‌متر بر ثانیه

است؟

۳۶ (۱)

۳۲ (۲)

۳۰ (۳)

۲۴ (۴)

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۳)

۷۵- پاسخ: گزینه ۲



$$A = 4 \text{ cm} = 0.04 \text{ m}$$

$$\frac{T}{2} = 0.25 \text{ s} \Rightarrow T = 0.5 \text{ s}$$

توجه کنید اگر فاصله زمانی دو نقطه روی نمودار $\frac{T}{4}$ باشد، مکان آن‌ها قرینه هم و جهت حرکت متحرک در این دو زمان در خلاف جهت

یکدیگر است.

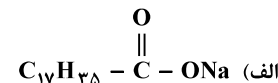
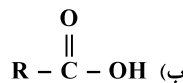
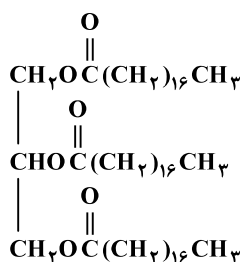
$$t_1 = \frac{3}{4}T = \frac{3}{8}s$$

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{4 + 4 + 4}{\frac{3}{8}} = \frac{12}{\frac{3}{8}} = \frac{8 \times 12}{3} = 32 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

شیمی



۷۶- با توجه به ساختارهای زیر، کدام مطلب نادرست است؟ ($H = 1, C = 12, O = 16, Na = 23 : g \cdot mol^{-1}$)



(۱) اگر ترکیب (ب) یکی از محصولات آبکافت ترکیب (پ) باشد، گروه R را به‌صورت $\text{C}_{17}\text{H}_{35}$ می‌توان نمایش داد.

(۲) از صابونی شدن ترکیب اسیدی حاصل از آبکافت ترکیب (پ)، ترکیب (الف) با حالت فیزیکی جامد به‌دست می‌آید.

(۳) برای تولید ۶۱/۲ گرم ترکیب (الف) با بازده ۸۰ درصد به ۷۵ گرم اسید چرب سازنده آن نیاز است.

(۴) از آبکافت ۰/۲۵ مول ترکیب (پ)، ۲۳ گرم الکل سه عاملی تولید می‌شود.

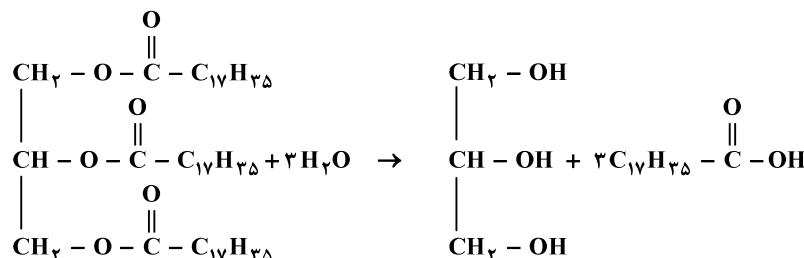
۷۶- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۱)

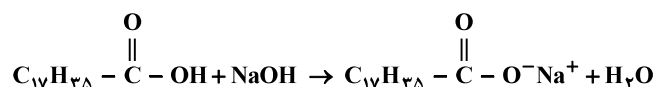


بررسی همه گزینه‌ها:

گزینه ۱: درست؛ معادله آبکافت ترکیب (پ) به صورت زیر است:

بنابراین گروه R را به صورت $\text{C}_{17}\text{H}_{35}$ می‌توان نمایش داد.

گزینه ۲: درست؛ معادله صابونی شدن اسید حاصل از آبکافت ترکیب (پ) به صورت زیر است:



صابون جامد دارای کاتیون سدیم است.

گزینه ۳: نادرست؛ برای تولید صابونی با فرمول شیمیایی $\text{C}_{17}\text{H}_{35}\text{COONa}$ ، اسید چربی با فرمول شیمیایی $\text{C}_{17}\text{H}_{35}\text{COOH}$ مصرف می‌شود؛ بنابراین می‌توان نوشت:



$$\frac{x \text{ g C}_{17}\text{H}_{35}\text{COOH} \times \frac{100}{100}}{1 \times 284 \text{ g}} = \frac{61/2 \text{ g C}_{17}\text{H}_{35}\text{COONa}}{1 \times 306 \text{ g}} \Rightarrow x = 71 \text{ g C}_{17}\text{H}_{35}\text{COOH}$$

گزینه ۴: درست؛ با توجه به معادله واکنش که در پاسخ گزینه ۱ نوشتیم:

$$\frac{0/25 \text{ mol استر}}{1 \text{ mol}} = \frac{x \text{ g C}_3\text{H}_8\text{O}_3}{1 \times 92 \text{ g}} \Rightarrow x = 23 \text{ g C}_3\text{H}_8\text{O}_3$$

۷۷- کلوئیدها و سوسپانسیون‌ها از نظر با یکدیگر داشته و از نظر با یکدیگر دارند.

- (۱) پایداری - شباهت - همگن بودن - تفاوت
- (۲) رفتار در برابر نور - تفاوت - پایداری - شباهت
- (۳) ناهمگن بودن - شباهت - ذره‌های سازنده - تفاوت
- (۴) ذره‌های سازنده - تفاوت - پایداری - شباهت

۷۷- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۳ (فصل ۱)



بررسی همه گزینه‌ها:

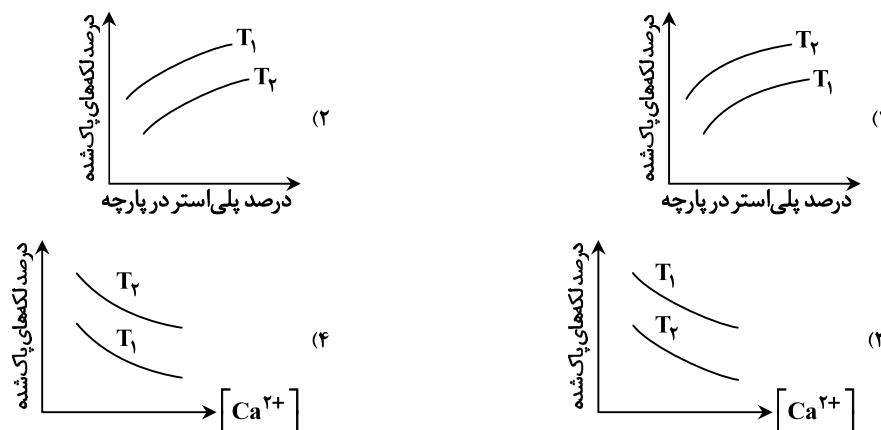
گزینه ۱: نادرست؛ کلوئیدها مخلوط‌هایی پایدار بوده و ته‌نشین نمی‌شوند. در حالی که سوسپانسیون‌ها ناپایدار هستند و با گذشت زمان ته‌نشین می‌شوند. ضمن آنکه هر دو مخلوط ناهمگن به‌شمار می‌روند.

گزینه ۲: نادرست؛ رفتار کلوئیدها و سوسپانسیون‌ها در برابر نور مشابه (پخش نور) بوده ولی از نظر پایداری با یکدیگر تفاوت دارند.

گزینه ۳: درست؛ کلوئیدها و سوسپانسیون‌ها مخلوط‌هایی ناهمگن هستند ولی از نظر نوع ذره‌های سازنده متفاوت هستند.

گزینه ۴: نادرست؛ کلوئیدها از توده‌های مولکولی با اندازه‌های متفاوت ساخته شده‌اند در حالی که سوسپانسیون‌ها از ذره‌های ریز ماده تشکیل شده‌اند؛ بنابراین هم از نظر نوع ذره‌های سازنده و هم از نظر پایداری با یکدیگر تفاوت دارند.

۷۸- در کدام گزینه تأثیر عوامل مختلف بر درصد لکه‌های پاک‌شده در دماهای مختلف T_1 و T_2 به هنگام استفاده از یک صابون جامد را به درستی نشان می‌دهد؟ ($T_1 > T_2$)



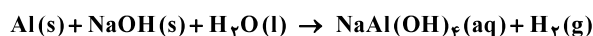
▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۱)

۷۸- پاسخ: گزینه ۳



با افزایش غلظت یون کلسیم، قدرت پاک‌کنندگی صابون و درصد لکه‌های پاک شده کاهش می‌یابد (گزینه‌های ۳ و ۴) و هر چه دما بیشتر باشد، درصد لکه‌های پاک شده بیشتر خواهد بود. (گزینه‌های ۲ و ۳) همچنین با افزایش درصد پلی‌استر در پارچه، درصد لکه‌های پاک شده کاهش می‌یابد. پس گزینه‌های ۱ و ۲ نادرست هستند.

۷۹- کدام عبارت زیر در رابطه با پودر لوله‌بازکن درست است؟ (معادله موازنه شود.)



- (۱) نسبت ضریب استوکیومتری عنصر تولیدشده به عنصر مصرف شده در معادله موازنه شده واکنش برابر با ۱/۵ است.
- (۲) در صورت استفاده از ورقه آلومینیمی و دانه‌های سدیم هیدروکسید به جای پودر، عملکرد آن بهتر می‌شود.
- (۳) این واکنش گرماگیر منجر به باز شدن مسیر لوله‌ها و مجاری مسدود شده توسط چربی‌های جامد می‌گردد.
- (۴) گاز حاصل می‌تواند باعث اسیدی شدن محتویات داخل لوله‌ها گردد.

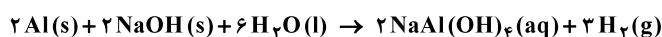
▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)

۷۹- پاسخ: گزینه ۱



بررسی همه گزینه‌ها:

گزینه ۱: درست؛ با توجه به معادله موازنه شده، نسبت ضریب عنصر تولیدشده (H_2) به عنصر مصرف شده (Al) در واکنش برابر $\frac{3}{5}$ است:



- گزینه ۲: نادرست: استفاده از پودر Al و NaOH به دلیل افزایش سطح تماس آن‌ها منجر به بهبود کارایی خواهد شد.
- گزینه ۳: نادرست: این واکنش گرماده (و نه گرماگیر) است و برای باز کردن لوله‌ها و مجاری مسدود شده توسط چربی‌های جامد از آن استفاده می‌شود.
- گزینه ۴: نادرست: گاز H_2 تولیدشده با ضربه زدن به جامدات مسدودکننده لوله و ایجاد فشار مکانیکی موجب تکان دادن (حل دادن) وقتی خرد شدن آن‌ها می‌شود و در نتیجه سبب باز شدن لوله خواهد شد. توجه داشته باشید که گاز هیدروژن خاصیت اسیدی یا بازی ندارد.

۸۰- یک استر طبیعی سنگین دارای ۵۴ اتم کربن است. اگر هر سه زنجیر هیدروکربنی این استر هم‌اندازه و سیر شده باشند، کدام عبارت‌های زیر نادرست بیان شده‌اند؟

(الف) از آبکافت هر مول از آن ۳ مول اسید چرب با فرمول $\text{C}_{17}\text{H}_{33}\text{COOH}$ حاصل می‌شود.

(ب) در ساختار آن ۱۶۶ پیوند اشتراکی وجود دارد.

(پ) در هر مول از صابون ایجادشده از این استر همواره ۳۳ اتم هیدروژن وجود دارد.

(ت) شمار جفت الکترون‌های ناپیوندی در ساختار آن، سه برابر شمار اتم هیدروژن در مولکول اوره است.

(۴) «الف» و «پ»

(۳) «ب» و «ت»

(۲) «ب» و «پ»

(۱) «الف» و «ب»

۸۰- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۱)



فرمول مولکولی استرهای طبیعی سنگین با زنجیرهای هیدروکربنی سیرشده به صورت $C_nH_{2n-4}O_6$ است، پس فرمول مولکولی این استر $C_{54}H_{104}O_6$ است.

بررسی همه عبارت‌ها:

الف) نادرست؛ برای محاسبه شمار اتم‌های کربن در اسید چرب حاصل از آبکافت استرهای طبیعی سنگین از فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

$$C_{16}H_{33}COOH \text{ یا } C_{17}H_{34}O_2: \text{ فرمول اسید چرب} \Rightarrow 17 = \frac{54-3}{3} = \frac{\text{شمار کل کربن‌ها} - 3}{3} = \text{شمار کربن‌های اسید چرب}$$

ب) درست؛ برای محاسبه شمار پیوندها در ترکیب‌های آلی از فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

$$\text{شمار پیوندهای اشتراکی} = \frac{(C \times 4) + (H \times 1) + (O \times 2) + (N \times 3) + (Cl \times 1)}{2} \Rightarrow \text{شمار پیوند} = \frac{(54 \times 4) + (104 \times 1) + (6 \times 2)}{2} = 166$$

پ) نادرست؛ یکی از صابون‌های حاصل از این استر $C_{17}H_{33}O_2NH_4$ است که افزون بر ۳۳ اتم هیدروژن در بخش آلکیل، ۴ اتم هیدروژن در بخش کاتیونی نیز دارد.

ت) درست؛ در مولکول‌های آلی همواره هر اتم اکسیژن ۲ جفت الکترون ناپیوندی دارد، پس شمار جفت الکترون‌های ناپیوندی در این استر برابر ۱۲ است. از سویی فرمول مولکولی اوره $CO(NH_2)_2$ و شمار اتم‌های هیدروژن در آن برابر ۴ است، پس:

$$\frac{12}{4} = 3$$

۸۱- در جدول زیر تمام داده‌های کدام ردیف درست است؟

ردیف	فرمول شیمیایی	$\frac{[H^+]}{[OH^-]}$	شمار مول یون‌های حاصل از انحلال یک مول ماده در آب
۱	N_2O_5	بزرگ‌تر از ۱	۳
۲	CaO	بزرگ‌تر از ۱	۳
۳	Li_2O	کمتر از ۱	۴
۴	SO_3	بزرگ‌تر از ۱	۴

(۴) ردیف ۴

(۳) ردیف ۳

(۲) ردیف ۲

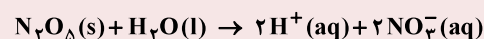
(۱) ردیف ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)

۸۱- پاسخ: گزینه ۳

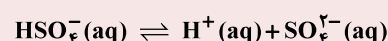
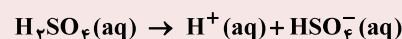
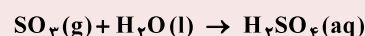


گزینه ۱: نادرست؛ از انحلال هر مول N_2O_5 در آب ۴ مول یون حاصل می‌شود.



گزینه ۲: نادرست؛ کلسیم اکسید، اکسید بازی است و در محلول آبی این ماده $\frac{[H^+]}{[OH^-]}$ کوچک‌تر از یک است.

گزینه ۴: نادرست؛ از انحلال هر مول گاز گوگرد تری اکسید در آب، یک مول سولفوریک اسید تولید می‌شود و از یونش هر مول سولفوریک اسید اندکی بیشتر از ۲ مول یون ایجاد می‌شود.



۸۲- مقدار ۱/۲۵ گرم از یک اسید تک پروتون‌دار ضعیف در آب مقطر حل شده و محلولی به حجم ۱۵ لیتر با pH برابر ۴/۱ حاصل شده است. درصد یونش مولکول‌های اسید در محلول کدام است؟ (جرم مولی اسید را ۵۰ گرم بر مول در نظر بگیرید.)

(۴) ۴/۸

(۳) ۴۸

(۲) ۲/۴

(۱) ۲۴

۸۲- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)



با توجه به جرم مولی و حجم محلول، غلظت مولی محلول اسید (M) برابر است با:

$$1/25 \text{ g} \times \frac{1 \text{ mol}}{50 \text{ g}} = 0.025 \text{ mol} \Rightarrow M = \frac{0.025 \text{ mol}}{15 \text{ L}} = \left(\frac{0.005}{3}\right) \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$\text{pH} = 4/1 \Rightarrow [\text{H}^+] = 10^{-\text{pH}} = 10^{-4/1} = 10^{-5} \times 10^{0/9} = 10^{-5} \times 8 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$\alpha = \frac{[\text{H}^+]}{M} = \frac{8 \times 10^{-5}}{\left(\frac{0.005}{3}\right)} = \frac{24 \times 10^{-5}}{5 \times 10^{-3}} = 4/8 \times 10^{-2} \Rightarrow \% \alpha = \alpha \times 100 = 4/8$$

۸۳- محلولی آبی از اسید ضعیف HA، دارای pH برابر با ۳/۷ و درجه یونش ۰/۱ است. اگر بر اثر افزایش دما، درجه یونش آن ۲۰ درصد نسبت به مقدار اولیه افزایش یابد، pH محلول به چه عددی خواهد رسید؟

۳/۳ (۴)

۳/۴ (۳)

۳/۵ (۲)

۳/۶ (۱)

▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۱)

۸۳- پاسخ: گزینه ۱



ابتدا غلظت یون هیدرونیوم در محلول اولیه را حساب می‌کنیم:

$$[\text{H}^+]_1 = 10^{-\text{pH}_1} = 10^{-3/7} = 10^{-4} \times 10^{0/3} = 2 \times 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

حالا با استفاده از غلظت یون هیدرونیوم و درجه یونش (قبل از افزایش دما)، غلظت محلول اسید را به دست می‌آوریم:

$$[\text{H}^+]_1 = M\alpha_1 \Rightarrow 2 \times 10^{-4} = 0.1 \times M \Rightarrow M = 2 \times 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

بر اثر افزایش ۲۰ درصدی درجه یونش اسید به دلیل افزایش دما، مقدار آن به $100 \times (1 + 0.2)$ یا ۱۲۰ می‌رسد. حالا با استفاده از درجه یونش در دمای بالاتر (α_2) و غلظت به دست آمده از محلول اسید، غلظت یون هیدرونیوم در دمای بالاتر را حساب می‌کنیم:

$$[\text{H}^+]_2 = M\alpha_2 \Rightarrow [\text{H}^+]_2 = 0.12 \times 2 \times 10^{-3} = 24 \times 10^{-5} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

در نهایت می‌توان pH محلول اسید در دمای بالاتر را با استفاده از غلظت یون هیدرونیوم در این شرایط حساب کرد:

$$\text{pH}_2 = -\log [\text{H}^+]_2 = -\log (24 \times 10^{-5}) = 5 - \log (3 \times 2^3)$$

$$= 5 - (\log 3 + 3 \log 2) = 5 - (0.5 + 3(0.3)) = 3/6$$

۸۴- ۰/۰۵ مول مخلوطی از اکسیدهای دو فلز قلیایی و قلیایی خاکی که در دوره چهارم جدول تناوبی قرار دارند را در ۴۰ متر مکعب آب حل می‌کنیم. pH آب چند واحد تغییر می‌کند؟

۰/۸ (۴)

۱/۴ (۳)

۰/۴ (۲)

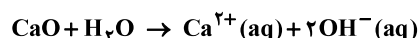
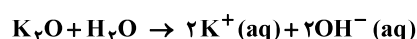
۱/۸ (۱)

▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۱)

۸۴- پاسخ: گزینه ۳



هر مول اکسید فلز قلیایی و قلیایی خاکی دو مول یون هیدروکسید در آب ایجاد می‌کند، پس ۰/۰۵ مول از مخلوط این دو اکسید با هر

درصدی که مخلوط شده باشند، مقدار ۰/۱ مول OH^- در آب ایجاد می‌شود.

ابتدا غلظت OH^- و سپس pH محلول را محاسبه می‌کنیم:

$$[\text{OH}^-] = \frac{0.1 \text{ mol}}{4.0 \times 10^{-3} \text{ L}} = 25 \times 10^{-7} \frac{\text{mol}}{\text{L}} \Rightarrow \text{pOH} = -\log[\text{OH}^-]$$

$$= -\log(25 \times 10^{-7}) = 7 - \log 25 = 7 - 1/4 = 5/6$$

$$\text{pH} + \text{pOH} = 14 \Rightarrow \text{pH} = 14 - 5/6 = 8/4$$

در انتها میزان تغییر pH آب را تعیین می‌کنیم:

$$\Delta \text{pH} = 8/4 - 7 = 1/4$$

۸۵- اگر در غلظت برابر، pH اسید ضعیف HX، به اندازه ۱/۳ واحد از pH اسید ضعیف HY کمتر باشد، نسبت ثابت یونش HX به ثابت یونش HY کدام است؟ (درجه یونش هر دو اسید کمتر از ۰/۰۱ است.)

۲۵۰۰ (۴)

۳۶۰۰ (۳)

۱۰۰ (۲)

۴۰۰ (۱)

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)

۸۵- پاسخ: گزینه ۱



اگر pH اسیدی نسبت به اسید دیگر ۱/۳ واحد کمتر باشد، پس غلظت $\text{H}^+(\text{aq})$ در آن باید ۲۰ برابر اسید دیگر باشد؛ زیرا pH مقیاسی لگاریتمی است یعنی:

$$10^{1/3} = 10^1 \times 10^{-2/3} = 10^1 \times 2 = 20$$

برای اسیدهای خیلی ضعیف که غلظت اولیه برابر دارند می‌توان از روابط زیر استفاده کرد:

$$K_a = \frac{[\text{H}^+]}{M - [\text{H}^+]} \xrightarrow{\text{تقریب}} [\text{H}^+] = \sqrt{K_a \cdot M} \Rightarrow \frac{[\text{H}^+]_{\text{HX}}}{[\text{H}^+]_{\text{HY}}} = \sqrt{\frac{K_a(\text{HX}) \cdot M(\text{HX})}{K_a(\text{HY}) \cdot M(\text{HY})}}$$

چشم‌پوشی

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{K_a(\text{HX})}{K_a(\text{HY})}} = \frac{[\text{H}^+]_{\text{HX}}}{[\text{H}^+]_{\text{HY}}} \Rightarrow \sqrt{\frac{K_a(\text{HX})}{K_a(\text{HY})}} = 20 \Rightarrow \frac{K_a(\text{HX})}{K_a(\text{HY})} = 400$$

۸۶- به ۴۰۰ mL محلول HNO_3 با $\text{pH} = 0.2$ ، ۶۰۰ mL محلول ۰/۲۵ مولار کلسیم هیدروکسید می‌افزاییم. محلول حاصل توسط چند میلی‌لیتر گاز SO_3 در شرایط STP خنثی می‌شود؟ (از تغییر حجم محلول چشم‌پوشی شود.)

۲۲۴۰۰ (۴)

۲۲۴۰ (۳)

۱۱۲۰۰ (۲)

۱۱۲۰ (۱)

▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۱)

۸۶- پاسخ: گزینه ۱



$$\text{HNO}_3 : \text{pH} = 0.2 \Rightarrow M = [\text{H}^+] = 10^{-\text{pH}} = 10^{-0.2} = 10^{-1} \times 10^{0.2} = 0.5 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$\Rightarrow \text{mol H}^+ = 0.5 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \times 0.4 \text{ L} = 0.2$$

$$\text{mol OH}^- = 0.25 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \times 0.6 \text{ L} \times \frac{2 \text{ mol OH}^-}{1 \text{ mol Ca(OH)}_2} = 0.3$$

با وارد شدن $\text{SO}_3(\text{g})$ در آب، سولفوریک اسید تولید می‌شود که هر مول از آن ۲ مول H^+ تولید می‌کند، پس در واکنش خنثی شدن هر مول $\text{SO}_3(\text{g})$ با یک مول کلسیم هیدروکسید یا ۲ مول OH^- واکنش می‌دهد.

$$\text{mol(OH)}^- \text{ باقی‌مانده} = 0.3 - 0.2 = 0.1$$

$$? \text{ mL SO}_3(\text{g}) = 0.1 \text{ mol OH}^- \times \frac{1 \text{ mol H}^+}{1 \text{ mol OH}^-} \times \frac{1 \text{ mol SO}_3}{2 \text{ mol H}^+} \times \frac{22400 \text{ mL SO}_3}{1 \text{ mol SO}_3} = 1120 \text{ mL SO}_3$$

۸۷- کدام مطلب در مورد محلول‌های بازی درست است؟

- (۱) در دمای اتاق، pH محلول آمونیاک کوچک‌تر از pH محلول سدیم هیدروکسید است.
 (۲) بازها نیز همانند اسیدها یونش می‌یابند و ثابت یونش آن‌ها را با K_b نمایش می‌دهند.
 (۳) در محلول ۰/۱ مولار باز ضعیف BOH، $[BOH] = [B^+] = 0.1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ است.
 (۴) بازهای قوی خاصیت خوردندگی دارند و درجه تفکیک یونی آن‌ها برابر یک است.

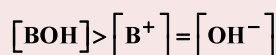
۸۷- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)



گزینه ۱: نادرست؛ pH محلول افزون بر قدرت اسیدی با بازی به غلظت آن نیز وابسته است. یعنی ممکن است pH محلول رقیقی از سدیم هیدروکسید، کوچک‌تر از pH محلولی از آمونیاک باشد.

گزینه ۲: نادرست؛ بازهای قوی یونش نمی‌یابند بلکه تفکیک می‌شوند، یونش برای مولکول‌ها تعریف می‌شود ولی بازهای قوی ترکیب‌های یونی هستند.

گزینه ۳: نادرست؛ در محلول باز ضعیف، غلظت تعادلی باز یونش نیافته به مراتب بیشتر از غلظت یون‌های حاصل از یونش است، پس:



۸۸- اگر به ۳۰۰ میلی‌لیتر محلول پتاسیم هیدروکسید که در آن غلظت یون هیدروکسید 9×10^{-5} برابر غلظت یون هیدرونیوم است، ۱۰۰ میلی‌لیتر محلول هیدروکلریک اسید با pH برابر ۳/۷ اضافه کنیم، pH محلول نهایی در دمای اتاق چند خواهد شد؟

۹/۲۵ (۲)

۴/۶ (۱)

۱۰/۵ (۴)

۳/۲ (۳)

۸۸- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۱)



$$\text{KOH} : [OH^-] = 9 \times 10^{-5} [H^+] \xrightarrow{[H^+][OH^-] = 10^{-14}} [OH^-] = \sqrt{9 \times 10^{-9}} = 3 \times 10^{-4.5} = 3 \times 10^{-5} \times 10^{0.5}$$

$$= 9 \times 10^{-5} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

پس در محلول اولیه شمار مول یون هیدروکسید برابر است با:

$$? \text{ mol OH}^- = 9 \times 10^{-5} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \times 0.3 \text{ L} = 2.7 \times 10^{-5} \text{ mol}$$

در ۱۰۰ میلی‌لیتر محلول هیدروکلریک اسید با pH برابر ۳/۷ شمار مول یون هیدرونیوم برابر است:

$$[H^+] = 10^{-\text{pH}} = 10^{-3.7} = 10^{-4} \times 10^{0.3} = 2 \times 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \Rightarrow ? \text{ mol H}^+ = 2 \times 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \times 0.1 \text{ L} = 2 \times 10^{-5} \text{ mol}$$

در اثر افزودن این دو محلول به یکدیگر، واکنش خنثی شدن رخ داده و غلظت یون هیدروکسید اضافی برابر است با:

$$[OH^-] = \frac{(2.7 \times 10^{-5}) - (2 \times 10^{-5}) \text{ mol}}{0.4 \text{ L}} = \frac{0.7}{4} \times 10^{-5} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$\Rightarrow \text{pOH} = -\log[OH^-] - \log\left(\frac{0.7}{4} \times 10^{-5}\right) = 5 + 0.6 - 0.85 = 4.75$$

$$\Rightarrow \text{pH} = 14 - \text{pOH} = 14 - 4.75 = 9.25$$

۸۹- کدام مطلب در مورد جوش شیرین نادرست است؟

- (۱) نسبت شمار کاتیون به آنیون آن با همین نسبت در صابون جامد برابر است.
 (۲) عدد اکسایش اتم کربن در آن با عدد اکسایش اتم مرکزی در مولکول اوره برابر است.
 (۳) نسبت شمار جفت الکترون‌های ناپیوندی به پیوندی در ساختار بخش آنیونی آن برابر ۲/۲۵ است.
 (۴) در واکنش خنثی شدن اسید معده با جوش شیرین، مجموع ضرایب استوکیومتری فراورده‌ها برابر ۳ است و هر سه فراورده حالت فیزیکی متفاوتی دارند.

▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل های ۱ و ۲)

۸۹- پاسخ: گزینه ۳

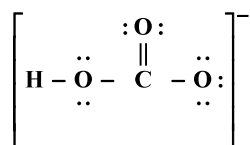


بررسی همه گزینه ها:

گزینه ۱: درست؛ فرمول شیمیایی جوش شیرین و صابون جامد به ترتیب $\text{Na}^+\text{HCO}_3^-$ و RCOO^-Na^+ است که در هر دو فرمول نسبت شمار کاتیون به آنیون یکسان و برابر ۱ است.

گزینه ۲: درست؛ عدد اکسایش اتم کربن در آنیون HCO_3^- و در مولکول اوره با فرمول $\text{CO}(\text{NH}_2)_2$ یکسان و برابر +۴ است.

گزینه ۳: نادرست؛ ساختار لوویس آنیون HCO_3^- چنین است.



$$\frac{7}{5} \neq \frac{2}{25}$$

در این ساختار شمار جفت الکترون های ناپیوندی برابر ۷ و شمار جفت الکترون های پیوندی برابر ۵ است، پس:

گزینه ۴: درست



هر فراورده از حالت فیزیکی متفاوتی برخوردار است.

- ۹۰- تیغه ای از جنس فلز روی را در محلولی از کلرید فلز X با فرمول $\text{XCl}(\text{aq})$ وارد می کنیم. اگر پس از گذشت مدتی معین، جرم تیغه کاهش یابد، بر این اساس کدام عبارت درست است؟ (فرض کنید طی انجام واکنش، تمام اتم های X بر سطح تیغه نشستند.)
- (۱) جرم مولی فلز X به یقین کمتر از جرم مولی فلز Zn بوده و با گذشت زمان غلظت مولی محلول افزایش یافته است.
- (۲) قدرت کاهندگی فلز روی کمتر از قدرت کاهندگی فلز X است.
- (۳) در سری الکتروشیمیایی، موقعیت فلز Zn بالاتر از فلز X بوده و پتانسیل کاهشی استاندارد فلز X کمیتی مثبت است.
- (۴) اگر پتانسیل کاهشی استاندارد فلز X مقداری منفی باشد، هر دو فلز X و M با محلول اسیدی واکنش می دهند.

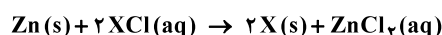
▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۲)

۹۰- پاسخ: گزینه ۴



بررسی همه گزینه ها:

گزینه ۱: نادرست؛ تغییر جرم تیغه نشانه انجام واکنش است:



با توجه به اینکه جرم تیغه کاهش یافته است، پس می توان گفت، جرم ۲ مول فلز X کمتر از جرم یک مول فلز Zn بوده است، یعنی جرم مولی X به یقین از جرم مولی Zn کوچک تر است و با مصرف شدن ۲ مول نمک موجود در محلول (X^+) ، یک مول نمک (Zn^{2+}) تولید می شود، پس با گذشت زمان محلول رقیق تر می شود و غلظت مولی محلول کاهش می یابد.

گزینه ۲: نادرست؛ فلز Zn از فلز X کاهنده قوی تر است.

گزینه ۳: نادرست؛ با توجه به اینکه فلز Zn در مقایسه با فلز X از قدرت کاهندگی بیشتری برخوردار است، پس در سری الکتروشیمیایی فلز Zn در مقایسه با فلز X در موقعیت پایین تر قرار دارد.

پتانسیل کاهشی فلز روی مقداری منفی است ولی در مورد مثبت یا منفی بودن پتانسیل کاهشی فلز X به یقین نمی توان پیش بینی درستی انجام داد.

گزینه ۴: درست؛ فلزهایی با پتانسیل کاهشی منفی با محلول اسیدی واکنش می دهند.

۹۱- با توجه به پتانسیل کاهشی استاندارد نیم سلول های فلزی A و Z، کدام دو مورد درست هستند؟

$$E^\circ_{(\text{A}^+/\text{A})} = -0.24 \text{ V}, \quad E^\circ_{(\text{Z}^{2+}/\text{Z})} = 0.28 \text{ V}$$

(الف) در سلول گالوانی حاصل از اتصال این دو نیم سلول، با گذشت زمان جرم الکترود A برخلاف جرم الکترود Z کاهش می یابد.

(ب) در سلول گالوانی حاصل از نیم سلول استاندارد A و SHE، با گذشت زمان، غلظت یون هیدرونیوم در محلول SHE افزایش می یابد.

(پ) اگر تیغه ای از جنس A در محلول $\text{Z}^{2+}(\text{aq})$ وارد شود، جرم تیغه تغییری نمی کند.

(ت) در سلول گالوانی تشکیل شده از نیم سلول استاندارد Z و SHE مانند سلول گالوانی تشکیل شده از نیم سلول های استاندارد Z و A، نیم سلول Z کاتد است.

(۴) «پ» و «ت»

(۳) «ب» و «ت»

(۲) «الف» و «ب»

(۱) «الف» و «ت»

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۲)

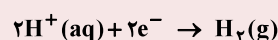
۹۱- پاسخ: گزینه ۱



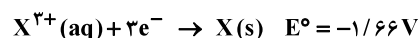
(الف) درست: فلز A کاهنده تر از فلز Z است، پس در سلول گالوانی A-Z تیغه A در نقش آند خورده می شود و جرم آن کاهش می یابد.
(ت) درست: پتانسیل کاهشی استاندارد نیم سلول SHE برابر صفر است، پس در سلول گالوانی تشکیل شده نیم سلول Z با داشتن پتانسیل مثبت در برابر نیم سلول A و نیم سلول SHE نقش کاتد را دارد.



(ب) نادرست: در سلول گالوانی حاصل از نیم سلول استاندارد A و SHE، با گذشت زمان، غلظت یون هیدرونیوم در محلول نیم سلول هیدروژن کاهش می یابد؛ زیرا SHE نقش کاتد را دارد و یون های H^+ با گرفتن الکترون به گاز هیدروژن کاهشی می یابد.



(پ) نادرست: اگر تیغه ای از جنس A در محلول $Z^{2+}(aq)$ وارد شود، جرم تیغه در اثر انجام واکنش تغییر می کند؛ زیرا اتم های A به شکل A^+ از تیغه جدا شده و اتم های Z بر سطح تیغه می نشینند.

۹۲- با توجه به مقادیر $E^\circ(V)$ داده شده برای سه فلز X، Y و Z کدام مقایسه درست است؟(الف) اکسندگی: $X < Y < Z$ (ب) اکسندگی: $Y^{2+} > X^{3+} > Z^+$ (ت) اکسندگی: $Y > X > Z$ (پ) اکسندگی: $Z^+ > X^{3+} > Y^{2+}$

(۴) «پ» و «ت»

(۳) «ب» و «ت»

(۲) «الف» و «پ»

(۱) «الف»، «ب» و «ت»

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۲)

۹۲- پاسخ: گزینه ۴



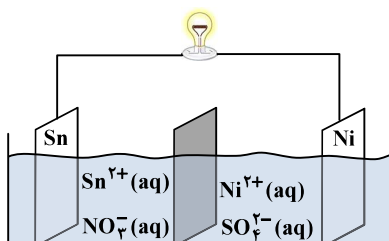
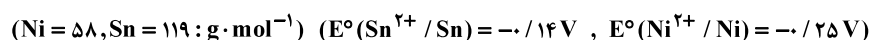
نیم واکنش	E°
$Z^+ + e^- \rightarrow Z$	$0/80$
$X^{3+} + 3e^- \rightarrow X$	$-1/66$
$Y^{2+} + 2e^- \rightarrow Y$	$-2/37$

↑ اکسندگی قوی

↓ کاهنده قوی

اگر جدول پتانسیل کاهشی را با توجه به مقادیر E° مرتب کنیم در می یابیم که Y کاهنده ترین گونه و Z^+ اکسندگی ترین گونه است. توجه داشته باشید که قدرت کاهندگی برای سه فلز تعریف می شود و کاتیون ها فقط نقش اکسندگی دارند.

۹۳- با توجه به اطلاعات داده شده، کدام یک از عبارات زیر در رابطه با سلول گالوانی رسم شده درست است؟



(۱) با افزودن مقداری از نمک نیکل (II) نیترات به محلول کاتدی یک واکنش الکتروشیمیایی انجام می گیرد.

(۲) برخی از یون های قلع با عبور از دیواره متخلخل وارد نیم سلول نیکل خواهند شد.

(۳) اگر محلول اولیه در هر دو نیم سلول دارای غلظت و حجم یکسانی باشند، تغییر جرم تیغه آندی به تقریب دو برابر تغییر جرم تیغه کاتدی خواهد بود.

(۴) جهت حرکت الکترون ها در مدار بیرونی از نیم سلول نیکل به نیم سلول قلع و در خلاف جهت حرکت آنیون های نیترات است.

۹۳- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۲)



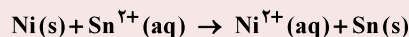
با توجه به اینکه E° نیم سلول نیکل منفی تر و یا کمتر از E° نیم سلول قلع است، پس در سلول گالوانی داده شده، نیکل به عنوان آند و قلع به عنوان کاتد عمل می کند؛ بنابراین جهت حرکت الکترون ها در مدار بیرونی از آند (Ni) به کاتد (Sn) و در خلاف جهت حرکت آنیون های نترات از سمت محلول کاتدی به سمت محلول آندی است.



گزینه ۱: نادرست؛ با توجه به اینکه فلز Sn از Ni کاهنده ضعیف تری است؛ بنابراین با افزودن نمک $Ni(NO_3)_2$ به محلول کاتدی، واکنشی بین تیغه Sn و $Ni^{2+}(aq)$ انجام نخواهد شد.

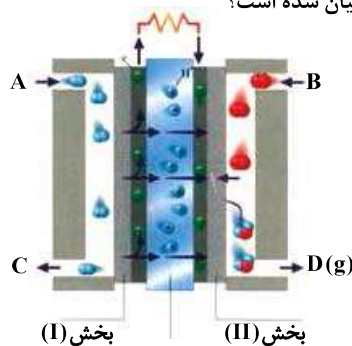
گزینه ۲: نادرست؛ با گذشت زمان غلظت Ni^{2+} در نیم سلول آندی افزایش یافته و مقداری از آن با عبور از دیواره متخلخل وارد نیم سلول قلع می شود. از این رو، در دیواره متخلخل برای جلوگیری از تجمع بارها آنیون ها به سمت آند و کاتیون ها به سمت کاتد حرکت می کنند.

گزینه ۳: نادرست؛ پس به ازای مصرف شدن یک مول نیکل با جرم مولی ۵۸ گرم در آند، یک مول قلع با جرم مولی ۱۱۹ گرم در کاتد حاصل می شود و در نتیجه نسبت تغییر جرم این دو تیغه به یکدیگر عبارت است از:



$$\frac{\text{تغییر جرم آند}}{\text{تغییر جرم کاتد}} = \frac{58}{119} = 0.48 \approx 0.5$$

۹۴- با توجه به شکل زیر که مربوط به سلول سوختی «هیدروژن-اکسیژن» است کدام مطلب درست بیان شده است؟



(۱) از قسمت A گاز اکسند وارد شده و از قسمت C مولکول های گازی واکنش نداده خارج می شود.

(۲) در بخش (I) نیم واکنش: $O_2 + 4H^+ + 4e^- \rightarrow 2H_2O$ انجام می شود.

(۳) به ازای هر مول ماده D(g)، چهار مول الکترون در این دستگاه بین آند و کاتد تولید جابه جا می شود.

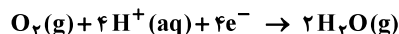
(۴) بخش (II) کاتد این دستگاه است که یون های هیدرونیوم به سمت آن حرکت می کنند.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۲)

۹۴- پاسخ: گزینه ۴



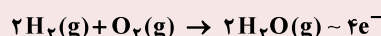
نیم واکنش کاهش در کاتد (بخش II):



گزینه ۱: نادرست؛ از قسمت A گاز H_2 و از قسمت B گاز O_2 وارد می شود. گاز هیدروژن اکسایش یافته و کاهنده است.

گزینه ۲: نادرست؛ در بخش (I) نیم واکنش $H_2 \rightarrow 2H^+ + 2e^-$ انجام می شود.

گزینه ۳: نادرست؛ معادله واکنش کلی انجام شده در سلول چنین است:



بنابراین به ازای تولید هر مول بخار آب دو مول الکترون میان آند و کاتد مبادله می شود.

۹۵- با توجه به مفهوم عدد اکسایش کدام مطلب درست است؟

(۱) عدد اکسایش اتم کربن در هیدروکربن ها از +۴ تا -۴ متغیر است.

(۲) عدد اکسایش اتم مرکزی در نیترو اسید با عدد اکسایش کربن در مولکول کربن مونوکسید برابر است.

(۳) عدد اکسایش اسکاندیم در نمک حاوی فسفات، سولفات و نترات این فلز به ترتیب +۳، +۲ و +۱ است.

(۴) حاصل جمع عدد اکسایش اتم های کربن الکل سه عاملی به دست آمده از آنکافت استرهای طبیعی سنگین برابر -۲ است.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۲)

۹۵- پاسخ: گزینه ۴



بررسی همه گزینه‌ها:

گزینه ۱: نادرست: عدد اکسایش اتم کربن در هیدروکربن‌ها از ۴- تا صفر متغیر است.

گزینه ۲: نادرست: عدد اکسایش اتم N در HNO_3 برابر ۳+ است ولی عدد اکسایش اتم C در CO برابر ۲+ است.

گزینه ۳: نادرست: عدد اکسایش اسکاندیم در همه نمک‌های این فلز برابر ۳+ است.

گزینه ۴: درست: از آبکافت استرهای طبیعی سنگین، الکل سه عاملی با فرمول $\text{C}_7\text{H}_{14}\text{O}_2$ به دست می‌آید که مجموع عدد اکسایش اتم‌های کربن در آن برابر ۲- است.

$$2\text{C} + 8(+1) + 2(-2) = 0 \Rightarrow 2\text{C} = -2$$

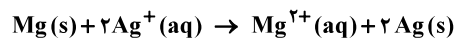
۹۶- کدام توصیف نادرست است؟ ($\text{Al} = 27, \text{Ag} = 108 : \text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$)(۱) در سلول گالوانی $\text{Al}-\text{Ag}$ تغییر جرم تیغه کاتدی بیشتر از تغییر جرم تیغه آندی است.(۲) در سلول گالوانی $\text{Zn}-\text{Fe}$ آنیون‌ها از طریق دیواره متخلخل وارد نیم‌سلول روی می‌شوند.(۳) واکنش کلی سلول گالوانی $\text{Mg}-\text{Ag}$ به صورت $\text{Mg}(\text{s}) + \text{Ag}^+(\text{aq}) \rightarrow \text{Mg}^{2+}(\text{aq}) + \text{Ag}(\text{s})$ است.(۴) اگر emf سلول گالوانی $\text{Zn}-\text{Ag}$ برابر $1/56\text{V}$ باشد، emf سلول گالوانی $\text{Fe}-\text{Ag}$ کمتر خواهد بود.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۲)

۹۶- پاسخ: گزینه ۳



گزینه ۳: نادرست: واکنش کلی در سلول گالوانی باید موازنه باشد، بنابراین شکل درست واکنش کلی به صورت زیر است.

گزینه ۱: درست: در سلول گالوانی « $\text{Al}-\text{Ag}$ » به ازای اکسید شدن هر مول Al و تولید Al^{3+} در آند، ۳ مول Ag^+ با گرفتن الکترون بر سطح تیغه کاتدی می‌نشینند، پس تغییر جرم تیغه آندی برابر ۲۷ گرم ولی تغییر جرم تیغه کاتدی برابر $3 \times 108 = 324$ گرم است.گزینه ۲: درست: در سلول گالوانی « $\text{Zn}-\text{Fe}$ » تیغه Zn نقش آند را دارد و آنیون‌ها از نیم‌سلول آهن (کاتد) و از طریق دیواره متخلخل به سمت نیم‌سلول روی (آند) حرکت می‌کنند.گزینه ۴: درست: آهن در مقایسه با Zn از قدرت کاهندگی کمتری برخوردار است؛ بنابراین اختلاف پتانسیل (emf) در نیم‌سلول Zn و Ag بیشتر از Fe و Ag است.۹۷- با توجه به واکنش: $\text{CH}_3\text{OH} + \text{Cr}_2\text{O}_7^{2-} + \text{H}^+ \rightarrow \text{Cr}^{3+} + \text{CO}_2 + \text{H}_2\text{O}$ کدام مطلب پس از موازنه آن نادرست است؟

(۱) با انجام واکنش، pH محلول افزایش می‌یابد.

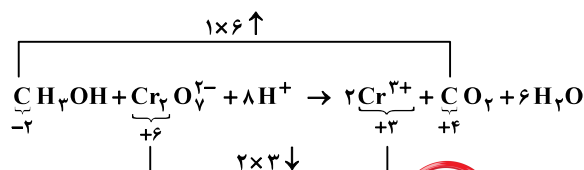
(۲) به ازای تشکیل هر مول کربن دی‌اکسید یک مول الکل مصرف می‌شود.

(۳) مجموع تغییرات عدد اکسایش اتم‌های کربن با مجموع تغییرات عدد اکسایش اتم‌های کروم برابر است.

(۴) هر مول کاهنده ۶ مول الکترون از دست می‌دهد و هر مول اکسنده ۳ مول الکترون می‌گیرد.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۲)

۹۷- پاسخ: گزینه ۴



بررسی همه گزینه‌ها:

- گزینه ۱: درست؛ انجام واکنش و مصرف شدن H^+ سبب افزایش pH و کاهش خاصیت اسیدی محلول می‌شود.
- گزینه ۲: درست؛ ضریب استوکیومتری CO_2 و متانول (الکل) برابر است.
- گزینه ۳: درست؛ مجموع تغییرات عدد اکسایش اتم‌های کربن برابر ۶ واحد و برای اتم‌های کروم نیز برابر ۶ است.
- گزینه ۴: نادرست؛ هر مول کاهنده (CH_3OH) ۶ مول الکترون از دست می‌دهد و هر مول اکسنده $(Cr_2O_7^{2-})$ ۶ مول الکترون می‌گیرد.

۹۸- کدام مطلب درباره فرایند برقکافت آب درست است؟

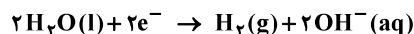
- (۱) آب خالص رسانایی الکتریکی ندارد از این رو برای انجام برقکافت، باید مقدار کمی الکترولیت به آب افزود.
- (۲) کاغذ pH در محلول پیرامون آند به رنگ قرمز در می‌آید.
- (۳) گاز هیدروژن در قطب مثبت تولید می‌شود.
- (۴) مجموع ضرایب استوکیومتری تمام گونه‌های شرکت‌کننده در نیم‌واکنش آندی برابر ۱۰ است.

۹۸- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۳ (فصل ۲)

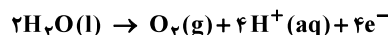


بررسی همه گزینه‌ها:

- گزینه ۱: نادرست؛ آب خالص رسانایی الکتریکی ناچیزی دارد ولی مقدار آن برابر صفر نیست.
- گزینه ۲: درست؛ در نیم‌واکنش آندی، یون H^+ همراه با گاز اکسیژن تولید می‌شود؛ بنابراین کاغذ pH در اطراف آند به دلیل تولید اسید به رنگ قرمز در می‌آید.
- گزینه ۳: نادرست؛ گاز هیدروژن در کاتد و یا قطب منفی تولید می‌شود.



گزینه ۴: نادرست؛ مجموع ضرایب استوکیومتری تمام گونه‌های شرکت‌کننده در نیم‌واکنش آندی برابر ۱۱ است.



۹۹- اگر در فرایند برقکافت منبذیم کلرید مذاب، ۳۰ لیتر گاز با چگالی ۰/۸۵۲ گرم بر لیتر تولید شود، چند مول الکترون از آند به کاتد جاری

شده است و جرم فراورده آندی چند برابر جرم فراورده کاتدی است؟ ($Mg = 24, Cl = 35.5 : g \cdot mol^{-1}$)

$$2/95, 0/36 \quad (2)$$

$$0/33, 0/36 \quad (1)$$

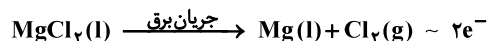
$$0/33, 0/72 \quad (4)$$

$$2/95, 0/72 \quad (3)$$

۹۹- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۲)



واکنش انجام شده در سلول برقکافت منبذیم کلرید مذاب به صورت زیر است:



در این فرایند به ازای تولید هر مول گاز کلر در آند، ۲ مول الکترون میان آند و کاتد مبادله می‌شود، پس:

$$? \text{ mole}^- : 30 \text{ L } Cl_2 \times \frac{0/852 \text{ g } Cl_2}{1 \text{ L } Cl_2} \times \frac{1 \text{ mol } Cl_2}{71 \text{ g } Cl_2} \times \frac{2 \text{ mole}^-}{1 \text{ mol } Cl_2} = 0/72 \text{ mole}^-$$



$$\frac{30 \times 0/852 \text{ g}}{71 \text{ g}} = \frac{x \text{ mol}}{2} \Rightarrow x = 0/72 \text{ mole}^-$$

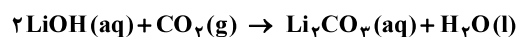
نسبت جرم فراورده آندی یا گاز کلر به جرم فراورده کاتدی یا فلز منبذیم برابر است با:

$$\frac{71}{24} \approx 2/95$$

پاسخ تشریحی آزمون ۳ بهمن ۱۴۰۴

۱۰۰- در یک کارگاه صنعتی با انجام فرایند هال ۱۸۰ کیلوگرم آلومینیم تولید شده است. اگر گاز حاصل از این فرایند مطابق معادله زیر به طور کامل با

محلول ۲/۵ مولار لیتیم هیدروکسید واکنش دهد، حجم محلول مورد نیاز در این واکنش چند لیتر خواهد بود؟ ($Al = 27 : g \cdot mol^{-1}$)



۶۰۰ (۴)

۴۰۰ (۳)

۴۰۰۰ (۲)

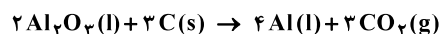
۶۰۰۰ (۱)

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۲)

۱۰۰- پاسخ: گزینه ۲



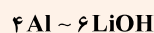
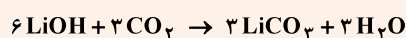
در فرایند هال طبق واکنش زیر گاز CO_2 حاصل می شود:



$$180 \times 10^3 \text{ g Al} \times \frac{1 \text{ mol Al}}{27 \text{ g Al}} \times \underbrace{\frac{3 \text{ mol } CO_2}{4 \text{ mol Al}}}_{\text{واکنش اول}} \times \underbrace{\frac{2 \text{ mol LiOH}}{1 \text{ mol } CO_2}}_{\text{واکنش دوم}} \times \frac{1 \text{ L}}{2/5 \text{ mol LiOH}} = 4000 \text{ L}$$

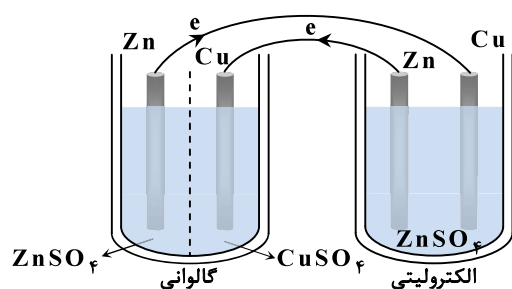


برای اینکه ضریب ماده مشترک (CO_2) یکسان شود لازم است واکنش اول را در ۳ ضرب کرده و سپس به صورت زیر عمل می کنیم:



$$\frac{180 \times 10^3}{27 \times 4} = \frac{2/5 \times V}{6} \Rightarrow V = 4000 \text{ L}$$

۱۰۱- با توجه به شکل زیر که استفاده از یک سلول گالوانی برای تولید انرژی الکتریکی لازم برای انجام واکنش در یک سلول الکترولیتی را نشان می دهد، کدام مطلب درست است؟



(الف) در هر دو سلول الکترودهای روی آند هستند.

(ب) الکترودهای به هم متصل شده در دو سلول، هم علامت نیستند.

(پ) در لحظه اتصال دو سلول به یکدیگر، واکنش ها در دو سلول به شکل خودبه خودی انجام می شوند.

(ت) هدف از انجام این فرایند، آبکاری یک میله مسی با روکشی از فلز روی است.

(۱) «الف» و «ت» (۲) «ب» و «پ»

(۳) «الف» و «پ» (۴) «ب» و «ت»

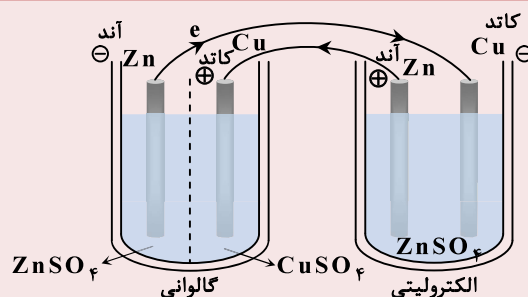
▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۲)

۱۰۱- پاسخ: گزینه ۱



(ب) الکترودهای به هم متصل شده در دو سلول هم علامت هستند.

(پ) واکنش انجام شده در سلول گالوانی خودبه خودی ولی در سلول الکترولیتی، غیر خودبه خودی است.



۱۰۲- با توجه به فرایند زنگ زدن آهن، کدام گزینه در ارتباط با مراحل تشکیل زنگ آهن به درستی بیان شده است؟

- ۱) اتم‌های آهن پس از اکسایش به آهن (II) با یون‌های هیدروکسید حاصل از یونیده شدن مولکول‌های آب واکنش داده و به رسوب سبزرنگ آهن (II) هیدروکسید تبدیل می‌شوند.
- ۲) یون‌های Fe^{2+} در مجاورت آب و اکسیژن به یون‌های Fe^{3+} اکسید شده و از واکنش آن‌ها با یون‌های هیدروکسید حاصل از کاهش یافتن مولکول‌های اکسیژن، زنگ آهن را تولید می‌کنند.
- ۳) مولکول‌های آب از یک سو در نقش کاتالیزگر، سرعت نیم‌واکنش کاتدی را افزایش می‌دهند و از سویی با گرفتن الکترون از اتم‌های آهن نقش اکسندگی دارند.
- ۴) تمام مراحل تشکیل زنگ آهن از نوع واکنش‌های «اکسایش-کاهش» به‌شمار می‌آیند و در هر مرحله نیم‌واکنش‌های آنودی و کاتدی متفاوتی رخ می‌دهد.

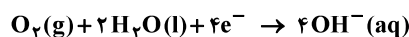
▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۲)

۱۰۲- پاسخ: گزینه ۲



بررسی همه گزینه‌ها:

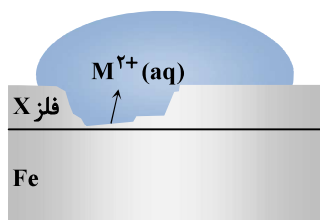
- گزینه ۱: نادرست؛ یون‌های $Fe^{2+}(aq)$ با یون‌های هیدروکسید حاصل از کاهش یافتن مولکول‌های اکسیژن در نیم‌واکنش کاتدی به رسوب سبزرنگ $Fe(OH)_2(s)$ تبدیل می‌شوند.
- گزینه ۲: درست
- گزینه ۳: نادرست؛ مولکول‌های آب نقش الکترولیت را دارند و سبب جابه‌جا شدن یون‌ها می‌شود. مولکول‌های آب در نیم‌واکنش کاتدی به‌عنوان واکنش‌دهنده نقش دارند ولی کاهش نمی‌یابند.



همچنین مولکول‌های آب نقش کاتالیزگری ندارند!

- گزینه ۴: نادرست؛ تبدیل اتم‌های آهن به یون‌های $Fe^{2+}(aq)$ و یا تبدیل $Fe^{2+}(aq)$ به $Fe^{3+}(aq)$ از نوع واکنش‌های اکسایش و تبدیل مولکول‌های آب و اکسیژن به یون‌های هیدروکسید از نوع واکنش‌های کاهش است ولی تولید رسوب $Fe(OH)_2$ و یا $Fe(OH)_3$ از نوع اکسایش-کاهش نیست.

۱۰۳- با توجه به شکل مقابل کدام مطلب نادرست بیان شده است؟



- ۱) اگر X فلز روی باشد، آنگاه M^{2+} یون Zn^{2+} است.
- ۲) اگر X فلز قلع باشد، در محل خراش آهن خورده می‌شود.
- ۳) اگر X فلز قلع باشد، نام قطعه حلبی است و در سلول گالوانی تشکیل شده، فلز قلع در نیم‌واکنش کاتدی شرکت می‌کند.
- ۴) اگر X فلز روی باشد، واکنش کاتدی به‌صورت $O_2(g) + 2H_2O(l) + 4e^- \rightarrow 4OH^-(aq)$ است.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۲)

۱۰۳- پاسخ: گزینه ۳



- اگر X فلز قلع باشد، در سلول گالوانی تشکیل شده، واکنش کاتدی به‌صورت $O_2(g) + 2H_2O(l) + 4e^- \rightarrow 4OH^-(aq)$ انجام می‌شود. توجه داشته باشید که در خوردگی حلبی فلز قلع در نیم‌واکنش‌های آنودی و کاتدی شرکت نمی‌کند.

۱۰۴- در آبیاری یک تیغه آهنی با روکشی از فلز نیکل، چند جمله داده‌شده درست است؟

- فلز نیکل به‌عنوان آند به قطب منفی منبع جریان مستقیم وصل می‌شود.
- محلول الکترولیت به‌کار رفته باید حاوی نمک‌های آهن باشد.
- نیم‌واکنش کاتدی به‌صورت $Fe^{2+}(aq) + 2e^- \rightarrow Fe(s)$ است.
- با گذشت زمان از جرم تیغه کاتدی کاسته می‌شود.

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۲)

۱۰۴- پاسخ: گزینه ۱



جمله «اول»: نادرست؛ سلول به کار رفته برای آبکاری تیغه آهنی سلول الکترولیتی است. در این سلول روکش فلزی به عنوان آند به قطب مثبت منبع جریان مستقیم یا باتری بیرونی وصل می شود.

جمله «دوم»: نادرست؛ محلول به کار رفته باید حاوی کاتیون های فلز آند یعنی نمک های نیکل باشد.

جمله «سوم»: نادرست؛ نیم واکنش کاتدی به صورت $\text{Ni}^{2+}(\text{aq}) + 2\text{e}^- \rightarrow \text{Ni}(\text{s})$ است.

جمله «چهارم»: نادرست؛ در کاتد، قاشق آهنی قرار می گیرد و با گذشت زمان به دلیل کاهش کاتیون های Ni^{2+} و نشست اتم های نیکل بر سطح قاشق، تیغه کاتدی با افزایش جرم همراه است.

۱۰۵- چند مورد از مطالب زیر درست است؟

- اکسندترین عنصر و کاهنده ترین فلز در جدول تناوبی هم دوره هستند.
- برای تهیه صنعتی فلز سدیم از برقکافت $\text{NaCl}(\text{aq})$ بهره می برند.
- در سلول های الکترولیتی، جهت حرکت الکترون با جهت حرکت کاتیون در سلول همسو و از آند به کاتد است.
- نیم واکنش کاتدی در نمونه ای از سلول نور الکتروشیمیایی که برای تهیه گاز هیدروژن از آب به کار می رود مشابه نیم واکنش کاتدی در برقکافت آب است.

۱ (۴)

۲ (۳)

۳ (۲)

۴ (۱)

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۲)

۱۰۵- پاسخ: گزینه ۲



مورد «اول»: درست؛ عنصر فلونور (F) اکسندترین عنصر و فلز لیتیم (Li) کاهنده ترین فلز است که هر دو عنصر در دوره دوم جدول تناوبی قرار دارند.

مورد «دوم»: نادرست؛ برای تهیه صنعتی فلز سدیم از برقکافت سدیم کلرید مذاب (I) استفاده می شود.

مورد «سوم»: درست

مورد «چهارم»: درست

نیم واکنش کاتدی در هر دو سلول چنین است:

