



ویژه
کنکوری های
۱۴۰۲

۱۴۰۲/۰۱/۱۸

آزمون
هشتم
حضورى

دفترچه شماره ۱

خيلي سبز!
آزمون
تجربى | رياضى | انسانى

سال تحصيلى
۱۴۰۱-۱۴۰۲

آزمون آزمایشی خیلی سبز

گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی

نام و نام خانوادگی: شماره داوطلبی:

تعداد سؤال: ۵۰ مدت پاسخ گویی: ۹۰ دقیقه

عنوان مواد امتحانی آزمون، تعداد، شماره سؤالات و مدت پاسخ گویی

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخ گویی
۱	حسابان	۲۰	۱	۲۰	۳۵ دقیقه
۲	آمار و احتمال	۱۵	۲۱	۳۵	۲۸ دقیقه
۳	هندسه	۱۵	۳۶	۵۰	۲۷ دقیقه

داوطلب گرامی، در این آزمون، حذفیات کنکور ۱۴۰۲ (حذفیات کرونا) در تمام دروس مربوطه، اعمال شده است.

Azmoon.kheilisabz.com

حسابان و ریاضی پایه (مباحث مستقل): حسابان (۱): صفحه‌های ۱ تا ۳۶ و ۷۱ تا ۹۰، ریاضی (۱): صفحه‌های ۱۴ تا ۲۷ و ۴۷ تا ۹۳

۱- حاصل $A = \frac{\sqrt{20}}{10-2\sqrt{5}} \times (\sqrt{4}-\sqrt{12}-\sqrt{\sqrt{12}+4})$ کدام است؟

(۲) $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

(۱) $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

(۴) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

(۳) $-\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

۲- هرگاه $a^3 - \frac{1}{a^3} = 1$ مقدار عددی $A = \left(\frac{1}{a^3 - a\sqrt{a+1}} + \frac{1}{a^3 + a\sqrt{a+1}} \right)^3$ کدام است؟

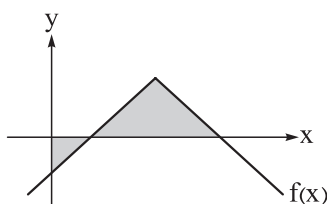
(۴) $-\frac{1}{8}$

(۳) $\frac{1}{8}$

(۲) ۸

(۱) ۱

۳- نمودار تابع $f(x) = 2a - |x - 3a|$ مطابق شکل است. نسبت مساحت دو تکه سایه‌خورده کدام است؟



(۱) ۶

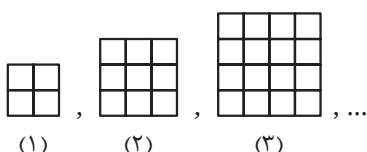
(۲) ۸

(۳) ۴/۵

(۴) ۶/۵

۴- ضلع هر مربع کوچک را واحد فرض می‌کنیم. اگر دنباله t_n تعداد مربع‌ها با ضلع ۲ واحد در مرحله n ام باشد، مقدار t_{15}

کدام است؟



(۲) ۲۲۵

(۱) ۱۲۵

(۴) ۶۴

(۳) ۴۹

۵- $a_n = 4n + a$ دنباله خطی و S_n مجموع n جمله ابتدایی آن است. اگر $S_{2n} = 4S_n$ باشد، مقدار a_{20} کدام است؟

(۴) ۸۴

(۳) ۷۸

(۲) ۷۶

(۱) ۸۲

۶- اعداد طبیعی را به گونه‌ای در مجموعه‌هایی دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد اعضای هر دسته اعداد فرد متوالی باشد،

مثلاً $\{1\}, \{2, 3, 4\}, \dots$. مجموع اعضای مجموعه دهم کدام است؟

(۴) ۱۷۲۹

(۳) ۱۸۱۰

(۲) ۱۸۲۰

(۱) ۱۷۴۹

محل انجام محاسبات

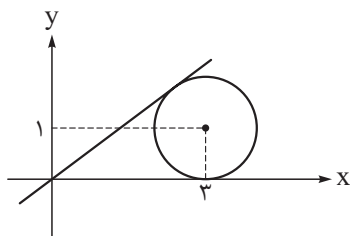
۷- اگر $t_n = 3 \times 2^{n-2}$ یک دنباله هندسی باشد، حاصل $A = t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_3 t_4 + \dots + t_9 t_{10}$ کدام است؟

$\frac{9}{2}(2^{18} - 1)$ (۱) $\frac{3}{2}(2^{18} - 1)$ (۲) $\frac{3}{2}(2^{16} - 1)$ (۳) $\frac{9}{2}(2^{16} - 1)$ (۴)

۸- مختصات دو نقطه $A(-2, 4)$ و $B(\alpha, 0)$ داده شده است. اگر خط $y = 2x + k$ عمودمنصف AB باشد، مقدار k

کدام است؟

3 (۱) 2 (۲) -2 (۳) -3 (۴)



۹- خط داده شده بر نمودار دایره، مطابق شکل مماس است. شیب خط کدام است؟

$\frac{3}{4}$ (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴)

۱۰- مجموعه جواب نامعادله $|2x - 1| \leq 1$ بازه $(-\infty, \alpha]$ است. مقدار α کدام است؟

1 (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) -2 (۴)

۱۱- عدد x در نامعادله $4 < \frac{4x+3}{x+2} < -1$ صدق می کند. مجموعه مقادیر $\left[\frac{x}{3}\right]$ شامل چند عضو است؟

4 (۱) 5 (۲) 6 (۳) 4 بی شمار (۴)

۱۲- مجموعه جواب های نامعادله $37 \leq (x^2 + 12)(x + 6)$ به صورت $(-\infty, \alpha]$ است. مقدار $\sqrt{2\alpha + 19}$ کدام است؟

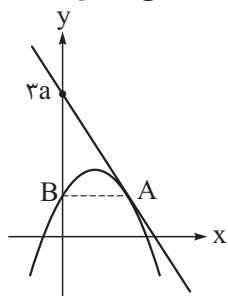
5 (۱) 4 (۲) 3 (۳) 2 (۴)

۱۳- اگر ریشه های معادله $ax^3 + x^2 - 5x + a = 0$ اعداد $1, \alpha, \beta$ باشند، معادله درجه دوم با ریشه های $\left\{\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\beta}{\alpha}\right\}$ به صورت $4x^2 + kx + 4 = 0$ است. مقدار k کدام است؟

-17 (۱) 19 (۲) 17 (۳) -19 (۴)

۱۴- نمودار تابع $f(x) = -x^2 + 4x + a$ و خط مماس بر آن در نقطه A که هم عرض نقطه B است، مطابق شکل است.

مقدار a کدام است؟

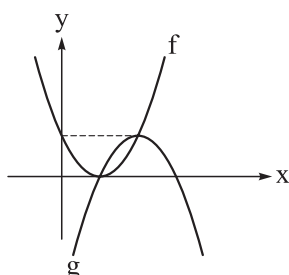


8 (۱) 2 (۲) 3 (۳) 4 (۴)

محل انجام محاسبات

۱۵- α و β ریشه‌های معادله درجه دوم $x^2 - (2m+1)x + 2m = 0$ بوده و اعداد α, m, β تشکیل دنباله هندسی می‌دهند. اگر $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ تعریف شده باشد، مقدار آن کدام است؟

- (۱) $\frac{4}{3}$ (۲) $\frac{5}{4}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{3}{2}$



۱۶- نمودار سهمی $f(x) = x^2 + 2mx + m + 2$ مطابق شکل است. اگر $y = g(x)$

نیز یک سهمی با ریشه‌های α و β باشد، مقدار $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{4}{3}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) ۳ (۴) $\frac{5}{2}$

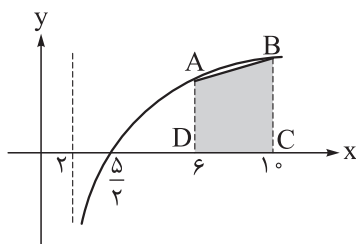
۱۷- یک سکه ۱۲ گرمی داریم که ۴ گرم آن طلا و ۸ گرم آن نقره است. n گرم آن را برمی‌داریم و به جای آن n گرم طلا جایگزین می‌کنیم؛ در این حالت ۸ گرم طلا و ۴ گرم نقره در سکه مانده است. n کدام است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۶ (۳) ۹ (۴) ۸

۱۸- اگر $\log_{18} 12 = \alpha$ ، حاصل $\log_{36} 24$ بر حسب α کدام است؟

- (۱) $\frac{5\alpha - 1}{2\alpha + 2}$ (۲) $\frac{7\alpha + 1}{6\alpha + 2}$ (۳) $\frac{5\alpha + 1}{4\alpha + 2}$ (۴) $\frac{7\alpha - 2}{2\alpha - 1}$

۱۹- بخشی از نمودار تابع $f(x) = \log_p(ax+b)$ مطابق شکل است. مساحت ذوزنقه ABCD کدام است؟



- (۱) ۱۲ (۲) ۱۴ (۳) ۸ (۴) ۱۰

۲۰- در یک ظرف ۱۰۰ کیلوگرم گلاب داریم. شخصی هر ده روز یک بار ۴ کیلوگرم آن را برداشته و دقیقاً به همان میزان آب خالص درون ظرف جایگزین می‌کند. بعد از گذشت تقریباً چند روز غلظت گلاب به $\frac{1}{5}$ غلظت روز اول می‌رسد؟

$$(\log 2 = 0.3, \log 3 = 0.47)$$

- (۱) ۲۳۷ (۲) ۲۳۴ (۳) ۳۱۲ (۴) ۱۱۷

محل انجام محاسبات

آمار و احتمال: آمار و احتمال: صفحه‌های ۱ تا ۱۲۷، ریاضی (۱): صفحه‌های ۱ تا ۱۳ و ۱۱۸ تا ۱۷۰

۲۱- در سه گزاره p ، q و r اگر گزاره $(q \wedge r) \Rightarrow p$ نادرست باشد، با کدام احتمال گزاره $r \Rightarrow q$ درست است؟

- (۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{1}{3}$

۲۲- اگر دو عضو جدید به مجموعه A اضافه کنیم، تعداد زیرمجموعه‌های این مجموعه جدید از ۳ برابر تعداد

زیرمجموعه‌های ناتهی A ، ۱۹ تا بیشتر است. در مورد تعداد عضوهای A کدام گزینه درست است؟

- (۱) دورقمی (۲) مربع کامل (۳) عدد اول (۴) مضرب ۳

۲۳- اگر A و B دو مجموعه باشند، متمم مجموعه $(B' - A') \cup (A - B')$ نسبت به مجموعه مرجع U کدام است؟

- (۱) A' (۲) B' (۳) B (۴) A

۲۴- اگر $A = [-1, 2]$ و $B = [-3, 1]$ ، مساحت ناحیه $A \times B - B \times A$ کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

۲۵- از میان مریم، نیما، سیمین و ۷ نفر دیگر به چند طریق می‌توان سه نفر انتخاب کرد، به شرط آن که مریم و نیما با

هم انتخاب نشوند و مریم و سیمین یا با هم انتخاب شوند یا هیچ‌کدام انتخاب نشوند؟

- (۱) ۶۳ (۲) ۷۰ (۳) ۷۷ (۴) ۸۴

۲۶- یک عدد طبیعی ۳ رقمی به تصادف انتخاب می‌شود، با کدام احتمال شامل رقم صفر و فاقد رقم تکراری است؟

- (۱) $0/25$ (۲) $0/16$ (۳) $0/17$ (۴) $0/18$

۲۷- در یک آزمایش با فضای نمونه‌ای $S = \{a_1, a_2, \dots, a_5\}$ اگر $P(a_i) = m(i^2 + 1)$ ، $(i = 1, 2, 3, 4)$ و $P(a_5) = \frac{2}{19}$

باشد، احتمال رخ دادن پیشامد $\{a_3, a_5\}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{7}{19}$ (۲) $\frac{8}{19}$ (۳) $\frac{11}{38}$ (۴) $\frac{13}{38}$

۲۸- سه تاس آبی، سبز و قرمز را با هم پرتاب می‌کنیم. اگر بدانیم تاس آبی حداقل ۳ آمده است، با کدام احتمال مجموع

اعداد روبروده سه تاس برابر ۹ است؟

- (۱) $\frac{5}{36}$ (۲) $\frac{1}{8}$ (۳) $\frac{13}{216}$ (۴) $\frac{7}{72}$

۲۹- سه کیسه داریم. در کیسه اول ۵ کارت به شماره‌های ۱ تا ۵، در کیسه دوم سه توپ آبی و دو توپ سفید و در کیسه

سوم ۴ توپ آبی و ۶ توپ سفید وجود دارد. از کیسه اول ۲ کارت به تصادف خارج می‌کنیم. اگر حاصل جمع عددهای دو

کارت فرد بود؛ از کیسه دوم ۲ توپ و اگر حاصل جمع عددهای دو کارت، زوج بود؛ از کیسه سوم ۲ توپ خارج می‌کنیم.

با کدام احتمال توپ‌های خارج شده هم‌رنگند؟

- (۱) $\frac{7}{25}$ (۲) $\frac{6}{25}$ (۳) $\frac{32}{75}$ (۴) $\frac{14}{75}$

محل انجام محاسبات

۳۰- اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند به طوری که $P(A \cap B) = ۰/۱$ و $P(A \cap B') = ۰/۴$ حاصل $P(A \cup B')$ کدام است؟

- (۱) $۰/۶$ (۲) $۰/۹$ (۳) $۰/۴$ (۴) $۰/۲$

۳۱- دسته‌ای کارت شامل ۲ کارت دورو قرمز و ۸ کارت یک‌رو سبز و یک‌رو قرمز و ۲ کارت دورو سبز است. کارتی را به تصادف از این دسته انتخاب می‌کنیم و فقط یک روی آن را مشاهده می‌کنیم و می‌بینیم که قرمز است. احتمال این که روی دیگر کارت نیز قرمز باشد، چه قدر است؟

- (۱) $\frac{۲}{۵}$ (۲) $\frac{۱}{۲}$ (۳) $\frac{۱}{۳}$ (۴) $\frac{۲}{۳}$

۳۲- در نمودار میله‌ای مربوط به فراوانی چهار داده x_1, x_2, x_3, x_4 اگر طول میله مربوط به x_1 دو واحد اضافه شود و طول بقیه میله‌ها ثابت بماند، در نمودار دایره‌ای مربوط به این داده‌ها، زاویه مربوط به x_1 به اندازه ۴۸° اضافه می‌شود، تعداد داده‌ها کدام است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۵ (۳) ۱۲ (۴) ۲۴

۳۳- در ۱۵ داده آماری اگر کم‌ترین داده برابر ۱، $Q_1 = ۴$ ، $Q_2 = ۱۰$ ، $Q_3 = ۱۵$ و بیشترین داده برابر ۱۸ باشد، بیشترین مقدار میانگین داده‌ها کدام است؟

- (۱) $\frac{۱۵۷}{۱۵}$ (۲) $\frac{۱۵۹}{۱۵}$ (۳) $\frac{۱۶۱}{۱۵}$ (۴) $\frac{۱۶۷}{۱۵}$

۳۴- در ۲۰ داده آماری انحراف معیار برابر ۲ است. با افزودن ۵ داده مساوی با میانگین، ضریب تغییرات چند برابر می‌شود؟

- (۱) $\frac{۲\sqrt{۵}}{۵}$ (۲) $\frac{\sqrt{۵}}{۵}$ (۳) $\frac{۳\sqrt{۵}}{۵}$ (۴) $\frac{۴\sqrt{۵}}{۵}$

۳۵- با یک نمونه ۳۶ عضوی، میانگین جامعه با اطمینان ۹۵٪ در بازه $(۸/۲, ۱۲/۶)$ قرار دارد. انحراف معیار برآورد میانگین با همین تعداد نمونه کدام است؟

- (۱) $۱/۱$ (۲) $۲/۲$ (۳) $۳/۳$ (۴) $۶/۶$

هندسه: هندسه (۲): صفحه‌های ۹ تا ۷۷، هندسه (۱): صفحه‌های ۹ تا ۹۶

۳۶- پاره خط $AB = ۴$ در یک صفحه مفروض است. در این صفحه چند نقطه وجود دارد که از A به فاصله ۱ و از وسط AB به فاصله ۳ باشد؟

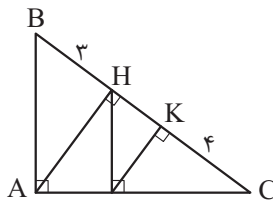
- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) صفر (۴) بی‌شمار

۳۷- برای آن که متوازی الاضلاعی به طول قطرهای a و ۶ که طول یک ضلع آن a است قابل رسم باشد، a کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

محل انجام محاسبات

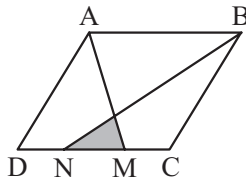
۳۸- مطابق شکل ارتفاع‌های مثلث‌های قائم‌الزاویه رسم شده‌اند. اگر $BH = 3$ و $CK = 4$ ، آن‌گاه طول پاره خط AH کدام است؟



$$\begin{aligned} & 3\sqrt{2} \quad (2) \\ & \frac{3\sqrt{6}}{2} \quad (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 2\sqrt{3} \quad (1) \\ & \sqrt{6} \quad (3) \end{aligned}$$

۳۹- در شکل رسم شده M وسط CN و N وسط DM است. مساحت متوازی‌الاضلاع $ABCD$ چند برابر مساحت مثلث سایه خورده است؟



$$\begin{aligned} & 21 \quad (2) \\ & 27 \quad (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 18 \quad (1) \\ & 24 \quad (3) \end{aligned}$$

۴۰- طول قاعده‌های یک دوزنقه ۱ و ۷ و طول ساق‌های آن ۵ و ۶ است. با رسم نیمساز زاویه بین دو ضلع کوچک‌تر، این دوزنقه به یک چهارضلعی و یک مثلث تقسیم می‌شود. نسبت مساحت مثلث به مساحت چهارضلعی ایجادشده کدام است؟

$$\frac{5}{3} \quad (4)$$

$$\frac{5}{8} \quad (3)$$

$$\frac{8}{5} \quad (2)$$

$$\frac{1}{3} \quad (1)$$

۴۱- لوزی به طول ضلع ۶ و زاویه 30° مفروض است. نقطه M قطر کوچک این لوزی را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم کرده است. کم‌ترین فاصله نقطه M از نقاط واقع بر محیط لوزی کدام است؟

$$2 \quad (4)$$

$$1 \quad (3)$$

$$\sqrt{3} \quad (2)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (1)$$

۴۲- خط d و دو صفحه P و Q را در نظر بگیرید. اگر $d \perp P$ و $d \cap Q = \emptyset$ ، آن‌گاه در مورد وضعیت P و Q کدام گزینه درست است؟

(۲) P بر Q عمود است.

(۱) P و Q موازی‌اند.

(۴) هر وضعیتی امکان‌پذیر است.

(۳) P و Q متقاطع‌اند ولی بر هم عمود نیستند.

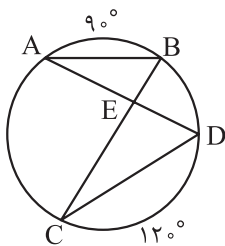
۴۳- مثلث متساوی‌الساقینی را اگر حول قاعده‌اش دوران دهیم حجم شکل حاصل 12π و اگر حول ارتفاع وارد بر قاعده‌اش دوران دهیم، حجم شکل حاصل 4π می‌شود. مساحت این مثلث کدام است؟

$$12 \quad (4)$$

$$10 \quad (3)$$

$$8 \quad (2)$$

$$6 \quad (1)$$



۴۴- در شکل رسم‌شده، اگر $\widehat{AB} = 90^\circ$ و $\widehat{CD} = 120^\circ$ ، آن‌گاه نسبت مساحت مثلث CDE به مساحت مثلث ABE کدام است؟

$$\begin{aligned} & \frac{4}{3} \quad (2) \\ & \frac{9}{4} \quad (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{3}{2} \quad (1) \\ & \frac{16}{9} \quad (3) \end{aligned}$$

محل انجام محاسبات

۴۵- در مثلث قائم‌الزاویه به طول اضلاع قائم ۵ و ۱۲، نیمساز خارجی زاویه قائمه و نیمساز داخلی زاویه کوچک‌تر در نقطه O متقاطع‌اند. فاصله O از ضلع کوچک‌تر کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۶ (۴) ۷

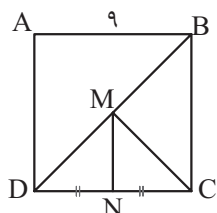
۴۶- دو دایره به شعاع‌های r و $2r$ مماس داخل‌اند. طول وتر AB از دایره بزرگ که از نقطه تماس دو دایره می‌گذرد و فاصله آن از مرکز دایره کوچک $\frac{1}{4}r$ می‌باشد، چند برابر r است؟

- (۱) $\sqrt{15}$ (۲) $2\sqrt{3}$ (۳) ۳ (۴) $3\frac{1}{4}$

۴۷- اگر دوران یافته نقطه A را در دوران به مرکز O و زاویه 40° با $R(A)$ نمایش دهیم و بدانیم فاصله A از $R(R(R(A)))$ برابر با ۲ واحد است، طول OA چند واحد است؟

- (۱) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (۲) $\sqrt{3}$ (۳) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ (۴) $\sqrt{6}$

۴۸- در شکل رسم شده، N وسط ضلع مربع و M نقطه‌ای روی قطر آن است به طوری که محیط مثلث MCN کم‌ترین مقدار ممکن است. طول DM کدام است؟

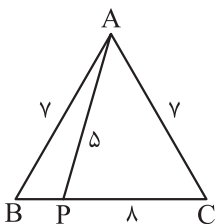


- (۱) $6\sqrt{2}$ (۲) $\frac{9\sqrt{2}}{2}$ (۳) $3\sqrt{2}$ (۴) $\frac{9}{2}$

۴۹- در مثلث ABC به اضلاع $AB = 3$ ، $AC = 6$ و $BC = 3\sqrt{3}$ ، نیمساز داخلی زاویه A را رسم می‌کنیم تا BC را در D قطع کند و نقطه E را روی امتداد آن چنان در نظر می‌گیریم که $BE = CE$. طول DE کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{3}$ (۳) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ (۴) ۲

۵۰- نقطه P روی قاعده BC از مثلث متساوی‌الساقین ABC به طول ساق ۷ به ترتیب از A و C به فاصله ۵ و ۸ است. مساحت مثلث ABP کدام است؟



- (۱) $2/5\sqrt{5}$ (۲) $4/25\sqrt{3}$ (۳) $3/5\sqrt{3}$ (۴) $3/75\sqrt{3}$

محل انجام محاسبات



ویژه
کنکوری های
۱۴۰۲

۱۴۰۲/۰۱/۱۸

آزمون
هشتم
حضور

دفترچه شماره ۲



سال تحصیلی
۱۴۰۱-۱۴۰۲

آزمون آزمایشی خیلی سبز

گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی

شماره داوطلبی:

نام و نام خانوادگی:

مدت پاسخ گویی: ۹۰ دقیقه

تعداد سؤال: ۷۰

عنوان مواد امتحانی آزمون، تعداد، شماره سؤالات و مدت پاسخ گویی

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخ گویی
۱	فیزیک	۴۰	۵۱	۹۰	۵۵ دقیقه
۲	شیمی	۳۰	۹۱	۱۲۰	۳۵ دقیقه

داوطلب گرامی، در این آزمون، حذفیات کنکور ۱۴۰۲ (حذفیات کرونا) در تمام دروس مربوطه، اعمال شده است.

Azmoon.kheilisabz.com



SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

داوطلب گرامی، در این آزمون، در درس فیزیک، زوج درس نداریم و سؤال‌ها از مباحث کتاب‌های فیزیک دهم و یازدهم طرح شده است؛ بنابراین پاسخگویی به تمام سؤالات این درس اجباری است.

فیزیک: فیزیک (۲): صفحه‌های ۱ تا ۱۳۰، فیزیک (۱): صفحه‌های ۱ تا ۱۴۹

۵۱- بالگردی در ارتفاع ۸۰۰۰ پا (فوت) در حال حرکت است. این ارتفاع بر حسب کیلومتر کدام است؟ ($1 \text{ ft} = 12 \text{ in}$, $1 \text{ in} = 2/5 \text{ cm}$)

- (۱) $2/4$ (۲) 24 (۳) $1/5$ (۴) 15

۵۲- یکای ظرفیت گرمایی بر حسب یکاهای اصلی SI، کدام است؟

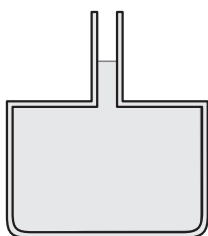
- (۱) $\frac{\text{m}^2}{^\circ\text{C}\cdot\text{s}}$ (۲) $\frac{\text{m}^2}{\text{K}\cdot\text{s}}$ (۳) $\frac{\text{kg}\cdot\text{m}^2}{^\circ\text{C}\cdot\text{s}}$ (۴) $\frac{\text{kg}\cdot\text{m}^2}{\text{K}\cdot\text{s}^2}$

۵۳- درون یک ظرف استوانه‌ای به مساحت قاعده 20 cm^2 ، حجم یکسانی از آب و روغن ریخته شده است. اگر فشار ناشی از دو مایع در کف ظرف 3600 Pa باشد، حجم روغن درون ظرف چند سانتی‌متر مکعب است؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$)

$$(\rho_{\text{آب}} = 1 \text{ g/cm}^3, \rho_{\text{روغن}} = 0/8 \text{ g/cm}^3)$$

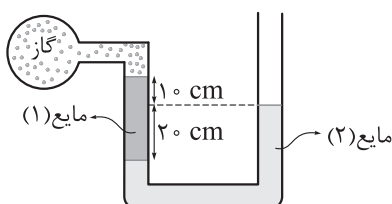
- (۱) 640 (۲) 800 (۳) 320 (۴) 400

۵۴- در شکل زیر، سطح مقطع کف ظرف 400 cm^2 و سطح مقطع دهانه آن 6 cm^2 است. اگر آب به مایع درون لوله اضافه کنیم، به ترتیب، نیرویی که مایع به کف ظرف وارد می‌کند و نیرویی که ظرف به سطح افقی وارد می‌کند، چند نیوتون افزایش می‌یابد؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$)



- (۱) $100, 100$
(۲) $1/5, 100$
(۳) $100, 1/5$
(۴) $1/5, 1/5$

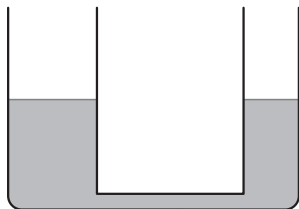
۵۵- در شکل زیر، فشار پیمانه‌ای گاز 400 Pa است و مایع‌ها در تعادل‌اند. اگر چگالی مایع (۱)، 1 g/cm^3 باشد، چگالی مایع (۲)، چند گرم بر سانتی‌متر مکعب است؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$)



- (۱) $1/3$
(۲) $1/7$
(۳) $2/6$
(۴) $3/4$

محل انجام محاسبات

۵۶- در شکل زیر، آب در تعادل و سطح مقطع شاخه سمت چپ و راست لوله به ترتیب 3 cm^2 و 2 cm^2 است. با اضافه کردن 30 g نفت به شاخه سمت چپ، سطح آزاد آب در شاخه سمت راست، پس از رسیدن به تعادل، چند سانتی متر جابه جا می شود؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$ ، $\rho_{\text{نفت}} = 0.8 \text{ g/cm}^3$ و $\rho_{\text{آب}} = 1 \text{ g/cm}^3$)



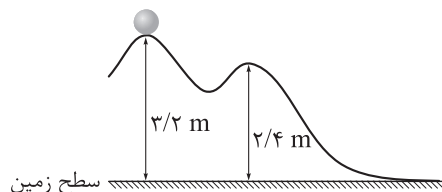
۶ (۲)

۱۰ (۱)

۲ / ۵ (۴)

۴ (۳)

۵۷- در شکل زیر، جسمی از ارتفاع $3/2$ متری سطح زمین و روی مسیری بدون اصطکاک، از حال سکون شروع به حرکت می کند. تندی جسم در ارتفاع $2/4$ متری سطح زمین، چند برابر تندی آن هنگامی که به سطح زمین می رسد، است؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$)

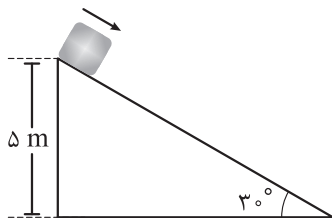

 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲)

 $\frac{\sqrt{2}}{4}$ (۱)

 $\frac{1}{2}$ (۴)

 $\frac{1}{4}$ (۳)

۵۸- در شکل زیر، جسمی به جرم 400 g از بالای سطح شیب دار با تندی 8 m/s در امتداد سطح شیب دار رو به پایین پرتاب می شود. اگر تندی جسم در پایین سطح شیب دار به 12 m/s برسد، اندازه نیروی اصطکاک وارد بر جسم، با فرض ثابت بودن در طول مسیر حرکت، چند نیوتون است؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$)



۴ (۱)

۰ / ۴ (۲)

۳ / ۶ (۳)

۳۶ (۴)

۵۹- هواپیمایی به جرم 15 تن روی باند پرواز از حال سکون به حرکت درمی آید و پس از 1 min با تندی 216 km/h از ارتفاع 600 متری سطح زمین عبور می کند. توان متوسط موتور این هواپیما حداقل چند اسب بخار است؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$) و $1 \text{ hp} = 750 \text{ W}$

 $1/95 \times 10^4$ (۴)

 $1/95 \times 10^3$ (۳)

 $2/6 \times 10^4$ (۲)

 $2/6 \times 10^3$ (۱)

۶۰- طول یک پل فولادی در دمای 50°F برابر 1200 m است. اگر دمای این پل به 85°F برسد، طول آن چند سانتی متر تغییر می کند؟ (ضریب انبساط طولی فولاد $\frac{1}{K} \times 10^{-5}$ است.)

۱۰۸ (۴)

۱۰ / ۸ (۳)

۱۹۴ / ۴ (۲)

۱۹ / ۴۴ (۱)

محل انجام محاسبات

۶۱- یک قطعه یخ با دمای -32°C را درون یک استخر بزرگ آب با دمای 0°C می‌اندازیم. پس از برقراری تعادل گرمایی، چند درصد به جرم یخ افزوده می‌شود؟ ($c_{\text{یخ}} = 2100 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot ^{\circ}\text{C}}$ ، $L_F = 336000 \text{ J/kg}$ و تبادل گرما با محیط ناچیز است).

(۱) ۱۰ (۲) ۲۰ (۳) ۱۶ (۴) ۳۲

۶۲- در شکل زیر، اگر میدان الکتریکی حاصل از بار الکتریکی q_1 در محل بار الکتریکی q_2 ، $\vec{E}_1$ و میدان الکتریکی حاصل از بار الکتریکی q_2 در محل بار الکتریکی q_1 ، $\vec{E}_2$ باشد، کدام رابطه درست است؟



$$\vec{E}_2 = -2\vec{E}_1 \quad (2)$$

$$\vec{E}_2 = 2\vec{E}_1 \quad (1)$$

$$\vec{E}_1 = -2\vec{E}_2 \quad (4)$$

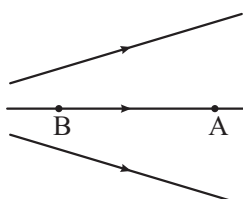
$$\vec{E}_1 = 2\vec{E}_2 \quad (3)$$

۶۳- در شکل زیر، اندازه نیروی الکتریکی خالص وارد بر بارهای الکتریکی q_2 و q_3 برابر است. اندازه نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار الکتریکی q_1 چند نیوتون است؟ ($k = 9 \times 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2}$)



(۱) صفر (۲) ۱/۸ (۳) ۳/۶ (۴) ۵/۴

۶۴- شکل زیر آرایش خطوط میدان الکتریکی را در ناحیه‌ای از فضا نشان می‌دهد. الکترونی را از نقطه A به سمت نقطه B پرتاب می‌کنیم. در مورد جابه‌جایی الکترون از نقطه A تا نقطه B کدام یک از موارد زیر درست است؟



(الف) انرژی پتانسیل الکتریکی الکترون کاهش می‌یابد.

(ب) اندازه نیروی الکتریکی وارد بر الکترون کاهش می‌یابد.

(پ) کار انجام شده توسط میدان الکتریکی روی الکترون منفی است.

(ت) انرژی جنبشی الکترون افزایش می‌یابد.

(۱) ب و پ (۲) الف و ب (۳) پ و ت (۴) الف و ت

۶۵- یک ذره به جرم $4 \times 10^{-30} \text{ kg}$ و بار الکتریکی $-2 \mu\text{C}$ در یک میدان الکتریکی، با تندی 4 m/s از نقطه A پرتاب شده و با تندی 2 m/s از نقطه B عبور می‌کند. اگر پتانسیل الکتریکی نقطه A، برابر 100 V باشد، پتانسیل الکتریکی نقطه B چند ولت است؟ (ذره فقط تحت تأثیر نیروی ناشی از میدان الکتریکی است).

(۱) ۲۰ (۲) -۲۰ (۳) ۲۲۰ (۴) -۲۲۰

محل انجام محاسبات

۶۶- خازنی که دی‌الکتریک آن هوا است را پس از پرشدن از باتری جدا کرده، سپس فاصله بین صفحه‌های آن را با عایقی به ثابت دی‌الکتریک ۵ پر می‌کنیم. با انجام این کار کدام یک از تغییرات زیر رخ می‌دهد؟

الف) ظرفیت خازن $\frac{1}{5}$ برابر می‌شود.

ب) اختلاف پتانسیل الکتریکی بین صفحات خازن ۵ برابر می‌شود.

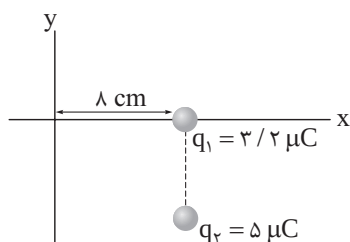
پ) انرژی ذخیره‌شده در خازن $\frac{1}{5}$ برابر می‌شود.

ت) اندازه میدان الکتریکی بین صفحات خازن $\frac{1}{5}$ برابر می‌شود.

(۱) الف و ب (۲) الف و ت (۳) ب و پ (۴) پ و ت

۶۷- در شکل زیر، میدان الکتریکی خالص در مبدأ مختصات در SI برابر $\vec{E} = (-81 \text{ N/C} \hat{i} + 27 \text{ N/C} \hat{j}) \times 10^5$ است.

اندازه نیروی الکتریکی‌ای که دو بار الکتریکی q_1 و q_2 به یکدیگر وارد می‌کنند، چند نیوتون است؟ $(k = 9 \times 10^9 \frac{\text{N.m}^2}{\text{C}^2})$



(۱) ۱۴ / ۴

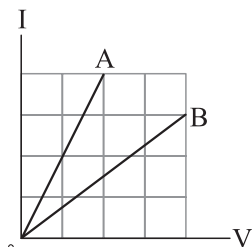
(۲) ۳۲

(۳) ۴۰

(۴) ۱۶

۶۸- نمودار جریان عبوری از دو مقاومت A و B به شکل زیر است. اگر این دو مقاومت به اختلاف پتانسیل یکسانی وصل

باشند، توان مصرفی مقاومت A چند برابر توان مصرفی مقاومت B است؟



(۲) $\frac{2}{3}$

(۱) $\frac{3}{2}$

(۴) $\frac{8}{3}$

(۳) $\frac{3}{8}$

۶۹- در ماشین‌های چمن‌زنی برقی، برای مسافت‌های حداکثر تا ۳۵ m از سیم‌های مسی با قطر ۸ mm و برای

مسافت‌های طولانی‌تر، از سیم‌های مسی با قطر ۱/۲ mm استفاده می‌شود. مقاومت الکتریکی یک سیم ماشین

چمن‌زنی به طول ۲۰ m چند برابر مقاومت الکتریکی یک سیم ماشین چمن‌زنی به طول ۶۰ m است؟

(۴) $\frac{4}{27}$

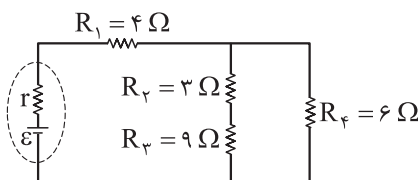
(۳) $\frac{27}{4}$

(۲) $\frac{4}{3}$

(۱) $\frac{3}{4}$

محل انجام محاسبات

۷۰- در مدار شکل روبه‌رو، توان مصرفی مقاومت R_1 ، چند برابر توان مصرفی مقاومت R_3 است؟



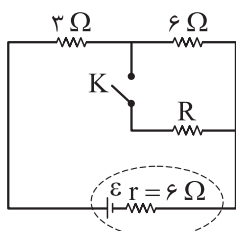
$$\frac{4}{3} \quad (2)$$

$$\frac{1}{4} \quad (1)$$

$$4 \quad (4)$$

$$1 \quad (3)$$

۷۱- در مدار شکل روبه‌رو، اگر با بستن کلید K ، توان خروجی باتری تغییری نکند، مقاومت R چند اهم است؟



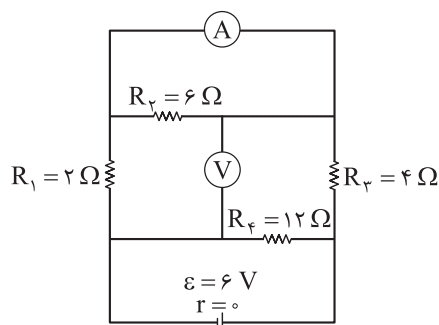
$$2/4 \quad (2)$$

$$1/2 \quad (1)$$

$$6 \quad (4)$$

$$3 \quad (3)$$

۷۲- در مدار شکل روبه‌رو، ولت‌سنج آرمانی و آمپرسنج آرمانی، به ترتیب در SI چه مقادیری را نشان می‌دهند؟



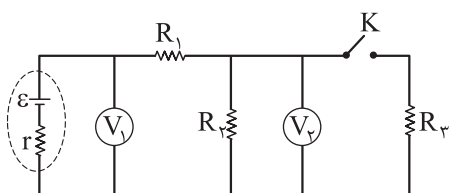
$$1, 8 \quad (1)$$

$$1/5, 1 \quad (2)$$

$$1, 2 \quad (3)$$

$$0/5, 1 \quad (4)$$

۷۳- در مدار شکل زیر، با بستن کلید K ، به ترتیب مقدارهایی که دو ولت‌سنج آرمانی V_1 و V_2 نشان می‌دهند، چگونه تغییر می‌کنند؟



(۱) افزایش می‌یابد، کاهش می‌یابد.

(۲) کاهش می‌یابد، افزایش می‌یابد.

(۳) افزایش می‌یابد، افزایش می‌یابد.

(۴) کاهش می‌یابد، کاهش می‌یابد.

۷۴- یک سیم راست حامل جریان $A \ 5/0$ به طول 80 cm ، در میدان مغناطیسی یکنواختی به بزرگی $G \ 400$ قرار دارد. اگر راستای سیم با خطوط میدان مغناطیسی زاویه 30° بسازد، اندازه نیروی مغناطیسی وارد بر سیم چند نیوتون است؟

$$1/6 \times 10^{-2} \quad (4)$$

$$1/6 \times 10^{-3} \quad (3)$$

$$8 \times 10^{-2} \quad (2)$$

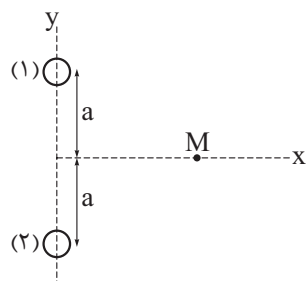
$$8 \times 10^{-3} \quad (1)$$

محل انجام محاسبات

۷۵- در ناحیه‌ای که میدان مغناطیسی یکنواختی به بزرگی 400 G ، به سمت جنوب وجود دارد، ذره‌ای به جرم 40 mg و بار الکتریکی $10\text{ }\mu\text{C}$ با سرعت $2 \times 10^5\text{ m/s}$ به سمت بالا پرتاب می‌شود. بلافاصله پس از پرتاب ذره، شتاب آن ناشی از میدان مغناطیسی چند متر بر مربع ثانیه و در چه جهتی است؟ (از نیروی گرانش وارد بر ذره چشم‌پوشی کنید).

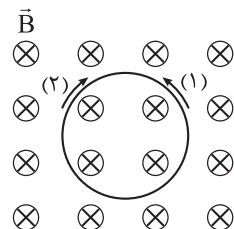
- (۱) 2000 ، در جهت شرق (۲) 2000 ، در جهت غرب (۳) 2 ، در جهت شرق (۴) 2 ، در جهت غرب

۷۶- در شکل زیر دو سیم راست حامل جریان هم‌اندازه (۱) و (۲)، عمود بر صفحه قرار دارند. اگر میدان مغناطیسی حاصل از دو سیم در نقطه M در جهت محور y باشد، میدان مغناطیسی حاصل از سیم (۲) در محل سیم (۱) و نیروی مغناطیسی وارد بر سیم (۲) از طرف سیم (۱)، به ترتیب در چه جهتی هستند؟



- (۱) در جهت محور x ، در جهت محور y
 (۲) در جهت محور x ، در خلاف جهت محور y
 (۳) در خلاف جهت محور x ، در جهت محور y
 (۴) در خلاف جهت محور x ، در خلاف جهت محور y

۷۷- در شکل زیر، حلقه‌ی رسانا به مساحت 200 cm^2 و مقاومت الکتریکی $4\text{ }\Omega$ ، عمود بر خطوط میدان مغناطیسی یکنواختی به بزرگی 4 T قرار دارد. اگر در مدت 2 s ، اندازه میدان مغناطیسی به 2 T برسد و جهت آن قرینه شود، در این مدت جریان الکتریکی متوسط القا شده در حلقه چند میلی آمپر و در چه جهتی است؟



- (۱) 5 ، (۱) (۲) 15 ، (۱)
 (۲) 5 ، (۳) (۴) 15 ، (۲)

۷۸- اگر جریان الکتریکی عبوری از القاگری به ضریب خود القاوری 2 H ، 2 A افزایش یابد، انرژی ذخیره شده در آن 80 میلی ژول تغییر می‌کند. جریان الکتریکی عبوری از این القاگر در حالت اول چند آمپر است؟

- (۱) $5/0$ (۲) 1 (۳) 2 (۴) 4

۷۹- معادله جریان متناوبی بر حسب زمان در SI به صورت $I = 5 \sin(20\pi t)$ است. در چه لحظه‌ای بر حسب ثانیه، جریان الکتریکی برای اولین بار بیشینه می‌شود؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{8}$ (۳) $\frac{1}{80}$ (۴) $\frac{1}{40}$

محل انجام محاسبات

۸۰- اگر دمای ۲ mol گاز کامل، در حجم ثابت ۲۰ L، از ۳۰۰ K به ۴۰۰ K برسد، فشار پیمانه‌ای آن چند برابر می‌شود؟

$$(P_0 = 10^5 \text{ Pa}, R = 8 \frac{\text{J}}{\text{mol.K}})$$

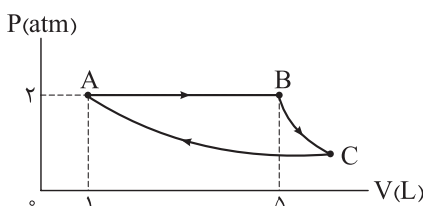
$$\frac{3}{4} \quad (4)$$

$$\frac{4}{3} \quad (3)$$

$$\frac{7}{11} \quad (2)$$

$$\frac{11}{7} \quad (1)$$

۸۱- شکل زیر، چرخه‌ای متشکل از سه فرایند هم‌فشار، هم‌دما و بی‌دررو را نشان می‌دهد که توسط مقدار معینی از یک گاز آرمانی طی می‌شود. اگر اندازه گرمای مبادله‌شده در فرایند هم‌فشار ۲۰۰۰ J باشد، کاری که محیط در فرایند بی‌دررو بر روی گاز انجام می‌دهد، چند ژول است؟



$$-800 \quad (2)$$

$$+800 \quad (1)$$

$$-1200 \quad (4)$$

$$+1200 \quad (3)$$

۸۲- بازده یک ماشین گرمایی، ۲۵ درصد و توان خروجی آن ۳ kW است. اگر این ماشین در هر چرخه، ۶۰۰ J گرما به منبع دما پایین بدهد، در هر دقیقه چند چرخه را می‌پیماید؟

$$900 \quad (4)$$

$$600 \quad (3)$$

$$3000 \quad (2)$$

$$1500 \quad (1)$$

۸۳- شعاع دو کره فلزی مشابه ۵ cm و بار الکتریکی آن‌ها ۱۸ μC و -۶ μC است. اگر دو کره با یک سیم به هم وصل شوند، چگالی سطحی هر کره بعد از برقراری تعادل الکتروستاتیکی در SI، به چند واحد می‌رسد؟ ($\pi = 3$)

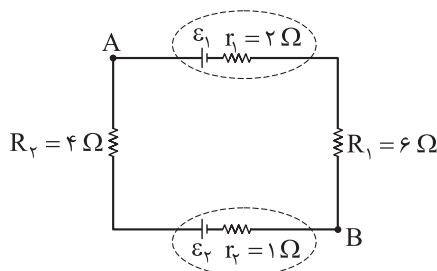
$$4 \times 10^{-3} \quad (4)$$

$$4 \times 10^{-4} \quad (3)$$

$$2 \times 10^{-3} \quad (2)$$

$$2 \times 10^{-4} \quad (1)$$

۸۴- در مدار شکل زیر، توان خروجی باتری $\mathcal{E}_1$ برابر ۹ W و توان ورودی باتری $\mathcal{E}_2$ برابر ۶/۵ W است. اختلاف پتانسیل الکتریکی دو نقطه A و B ($V_A - V_B$)، چند ولت است؟



$$15 \quad (1)$$

$$-15 \quad (2)$$

$$21 \quad (3)$$

$$-21 \quad (4)$$

۸۵- توسط سیمی به طول L، پیچۀ مسطحی به قطر ۲۰ cm می‌سازیم. اگر از این پیچه جریان الکتریکی ۲ A عبور کند، اندازه میدان مغناطیسی در مرکز آن به ۳ G می‌رسد. L برحسب متر کدام است؟ ($\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{\text{T.m}}{\text{A}}$)

$$6 \quad (4)$$

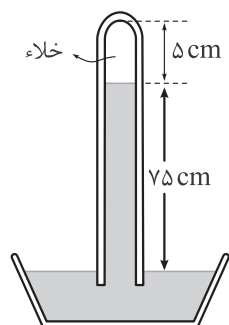
$$1/5 \quad (3)$$

$$60 \quad (2)$$

$$15 \quad (1)$$

محل انجام محاسبات

۸۶- در شکل زیر، ارتفاع ستون جیوه درون لوله جوسنج (بارومتر) ۷۵ cm است. فشار هوای محیط چند «بار» است؟



$$(g = 10 \text{ N/kg} \text{ و } \rho_{\text{جیوه}} = 13.6 \text{ g/cm}^3)$$

$$1/0.88 \text{ (۱)}$$

$$1/0.2 \text{ (۲)}$$

$$10/88 \text{ (۳)}$$

$$10/2 \text{ (۴)}$$

۸۷- شخصی گلوله‌ای برفی به جرم ۲۰۰ g را از روی زمین برمی‌دارد و تا ارتفاع ۱۶۰ cm بالا می‌برد، سپس آن را با تندى

10 m/s پرتاب می‌کند. کار انجام شده توسط شخص روی گلوله برفی چند ژول است؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$)

$$13/2 \text{ (۴)}$$

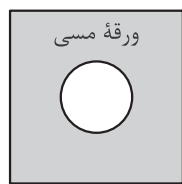
$$10 \text{ (۳)}$$

$$6/8 \text{ (۲)}$$

$$3/2 \text{ (۱)}$$

۸۸- مطابق شکل، بر روی یک ورقه مسی، حفره‌ای دایره‌ای به مساحت 200 cm^2 ایجاد کرده‌ایم. اگر دمای این ورقه را

90° F افزایش دهیم، مساحت حفره چند سانتی‌متر مربع افزایش می‌یابد؟ ($\alpha_{\text{مسی}} = 1/7 \times 10^{-5} / ^\circ \text{C}$)



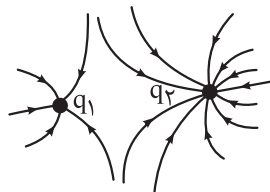
$$0/34 \text{ (۱)}$$

$$3/4 \text{ (۲)}$$

$$0/17 \text{ (۳)}$$

$$1/7 \text{ (۴)}$$

۸۹- میدان الکتریکی حاصل از دو ذره باردار الکتریکی q_1 و q_2 مطابق شکل است. کدام گزینه درباره q_1 و q_2 درست است؟



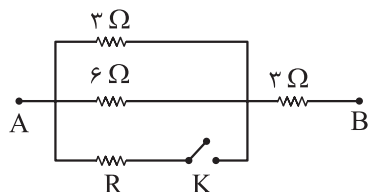
$$q_2 > q_1, \text{ هر دو مثبت (۱)}$$

$$|q_2| > |q_1|, \text{ هر دو منفی (۲)}$$

$$q_2 < q_1, \text{ هر دو مثبت (۳)}$$

$$|q_2| < |q_1|, \text{ هر دو منفی (۴)}$$

۹۰- در مدار شکل زیر، اگر کلید K را ببندیم، مقاومت معادل بین دو نقطه A و B، ۲۰ درصد کاهش می‌یابد. R چند اهم است؟



$$2 \text{ (۲)}$$

$$1 \text{ (۱)}$$

$$6 \text{ (۴)}$$

$$3 \text{ (۳)}$$

محل انجام محاسبات

داوطلب گرامی، در این آزمون، در درس شیمی، زوج درس نداریم و سؤال‌ها از مباحث کتاب‌های شیمی دهم و یازدهم طرح شده است؛ بنابراین پاسخ‌گویی به تمام سوالات این درس اجباری است.

شیمی: شیمی (۱): صفحه‌های ۱ تا ۱۲۲، شیمی (۲): صفحه‌های ۱ تا ۱۲۱

۹۱- با توجه به جدول داده‌شده، شعاع اتمی کدام عنصر بزرگ‌تر است؟

M^+	D^-	X^{2+}	A^{2-}	یون
$3p^6$	$3p^6$	$2p^6$	$2p^6$	آرایش الکترونی بیرونی‌ترین زیرلایه

M (۴)

D (۳)

X (۲)

A (۱)

۹۲- نسبت شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی به پیوندی در ساختار لوویس یون نیترات، کدام است؟

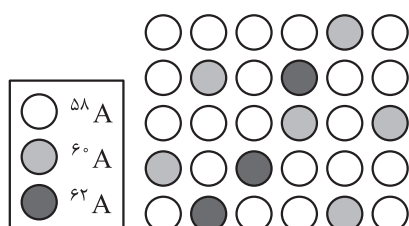
۳ / ۳ (۴)

۳ (۳)

۲ / ۲۵ (۲)

۲ (۱)

۹۳- با توجه به شکل زیر که توزیع نسبی اتم‌های A را در یک نمونه طبیعی آن نشان می‌دهد، کدام مطلب نادرست است؟



(۱) در این نمونه طبیعی عنصر A، همانند هیدروژن، سبک‌ترین

ایزوتوپ، فراوانی بیشتری دارد.

(۲) جرم اتمی میانگین A، $3/4$ واحد از جرم اتمی سنگین‌ترین

ایزوتوپ آن کم‌تر است.

(۳) شمار نوترون‌های سبک‌ترین ایزوتوپ A، ۲۶ واحد کم‌تر از شمار نوترون‌های $^{99}_{43}\text{Tc}$ است.

(۴) چگالی ایزوتوپ‌های عنصر A برخلاف شمار الکترون‌های آن‌ها، با هم متفاوت است.

۹۴- اگر در واکنش زیر به جای فلز کروم در واکنش‌دهنده‌ها، فلز نقره قرار گیرد و فرمول ترکیب یونی تولیدشده به

طور مناسب تغییر کند، ضریب H_2SO_4 و مجموع ضرایب مواد در معادله موازنه‌شده، به ترتیب از راست به چپ، چگونه

تغییر می‌کند؟ $\text{Cr(s)} + \text{H}_2\text{SO}_4(\text{aq}) \rightarrow \text{Cr}_2(\text{SO}_4)_3(\text{s}) + \text{SO}_2(\text{g}) + \text{H}_2\text{O(l)}$

(۱) تغییری نمی‌کند - ۱۰ واحد کم می‌شود.

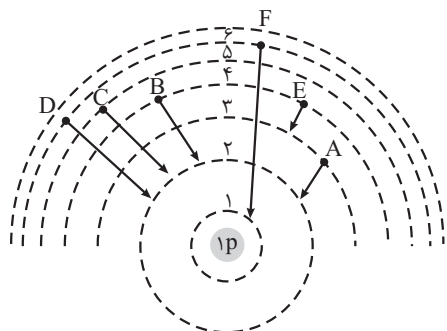
(۲) تغییری نمی‌کند - تغییری نمی‌کند.

(۳) $\frac{1}{3}$ برابر می‌شود - ۸ واحد کم می‌شود.

(۴) $\frac{1}{3}$ برابر می‌شود - ۱۰ واحد کم می‌شود.

محل انجام محاسبات

۹۵- با توجه به شکل زیر که انرژی لایه‌های الکترونی در اتم هیدروژن و شماری از انتقال‌های الکترونی در آن را نشان می‌دهد، چند مورد از مطالب زیر درست است؟



- رنگ‌های سرخ و نیلی طیف نشری خطی هیدروژن، به ترتیب مربوط به انتقال‌های A و C هستند.
- تنها انتقال F، بازگشت به حالت پایه اتم هیدروژن را نشان می‌دهد.
- تفاوت طول موج نورهای حاصل از انتقال‌های B و C بیشتر از تفاوت طول موج نورهای حاصل از انتقال‌های A و B است.

• انتقال‌های E و F در طیف نشری خطی قابل مشاهده نیست ولی با آشکارساز فرسرخ می‌توان نور حاصل از انتقال F را مشاهده کرد.

- | | |
|--------|----------|
| (۱) یک | (۲) دو |
| (۳) سه | (۴) چهار |

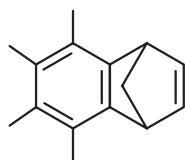
۹۶- از واکنش کامل ۹۰۰ میلی‌لیتر محلول ۱/۰ مولار سدیم هیدروکسید با مقدار کافی از محلول A، ۰/۰۳ مول رسوب تشکیل می‌شود. محلول A کدام است؟

- | | |
|--------------------------------|--|
| (۱) HBr(aq) | (۲) $\text{FeCl}_3(\text{aq})$ |
| (۳) $\text{MgCl}_2(\text{aq})$ | (۴) $\text{K}_3\text{PO}_4(\text{aq})$ |

۹۷- کدام مطلب درست است؟ ($\text{O} = 16 \text{ g.mol}^{-1}$)

- (۱) در شرایط یکسان، گاز اوزون سخت‌تر از گاز اکسیژن به مایع تبدیل می‌شود.
- (۲) در دما و فشار اتاق، مخلوطی از گازهای هیدروژن و نیتروژن در حضور کاتالیزگر یا جرقه، در یک واکنش سریع و شدید، منفجر می‌شود.
- (۳) جرم ۷ لیتر از گاز اوزون در شرایط استاندارد برابر ۱۵ گرم است.
- (۴) گاز نیتروژن واکنش‌پذیری بسیار زیادی دارد و در صنعت، مواد گوناگونی را از آن تهیه می‌کنند.

۹۸- از سوختن کامل ۲/۰ مول از هیدروکربن زیر، چند مول فراورده تولید می‌شود؟



- | | |
|-----------|-----------|
| (۱) ۴ / ۴ | (۲) ۴ / ۶ |
| (۳) ۴ / ۸ | (۴) ۵ |

محل انجام محاسبات

۹۹- کدام موارد از مطالب زیر، درست‌اند؟ ($\text{Na} = ۲۳, \text{O} = ۱۶, \text{H} = ۱: \text{g.mol}^{-1}$)

الف) اگر از ۲۵ گرم محلول ۱۰ درصد جرمی شکر در آب، ۲۵ گرم آب تبخیر شود، درصد جرمی محلول ۱/۲۵ برابر می‌شود.

ب) در دمای ۲۵°C ، سولفات سومین فلز قلیایی خاکی جدول دوره‌ای، جزء مواد کم محلول در آب محسوب می‌شود.

پ) غلظت محلول ۲۰ درصد جرمی سدیم هیدروکسید با چگالی $۱/۲ \text{ g.mL}^{-1}$ برابر با ۶ مولار است.

ت) در فشار یک اتمسفر و در هر دمایی، انحلال پذیری گاز قطبی NO در آب بیشتر از گاز ناقطبی CO_2 است.

(۱) ب - پ (۲) الف - ت (۳) الف - پ (۴) ب - ت

۱۰۰- ۱۰۰ میلی لیتر محلول فسفریک اسید با مقدار کافی نیکل (II) کربنات، مطابق معادله زیر به طور کامل واکنش

می‌دهد. اگر حجم گاز تولیدشده در این واکنش در شرایط STP برابر با ۶/۷۲ میلی لیتر باشد، غلظت محلول

اسید چند ppm بوده است؟ (بازده واکنش را ۸۰ درصد و چگالی محلول اسید را ۱ g.mL^{-1} در نظر بگیرید؛

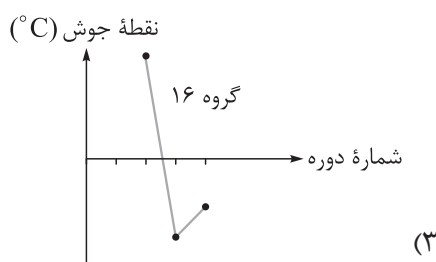
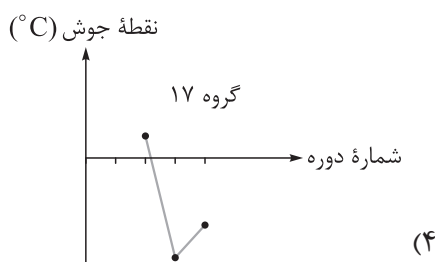
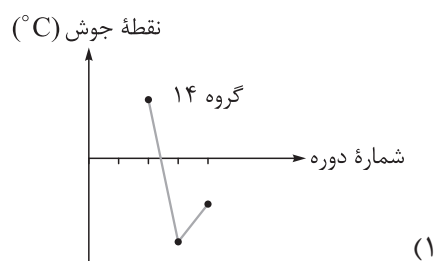
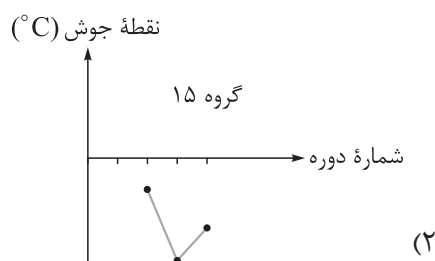
($\text{P} = ۳۱, \text{O} = ۱۶, \text{H} = ۱: \text{g.mol}^{-1}$)



(۱) ۴۹۰ (۲) ۱۵۶/۸ (۳) ۲۴۵ (۴) ۳۱۳/۶

۱۰۱- کدام نمودار در مورد نقطه جوش ترکیب‌های هیدروژن دار دوتایی سه عنصر اول گروه‌های ۱۴ تا ۱۷ جدول دوره‌ای

نادرست است؟



محل انجام محاسبات

۱۰۲- اگر ۵۹۰ گرم محلول سیرشده نمک A را از دمای 80°C تا 30°C سرد کنیم، چند گرم از آن در کف ظرف رسوب می‌کند؟ (انحلال پذیری نمک A در دماهای 10°C و 40°C به ترتیب برابر ۸۰ و ۱۰۴ گرم است؛ معادله انحلال پذیری نمک A به صورت خطی است.)

(۱) ۴۰ (۲) ۶۰ (۳) ۸۰ (۴) ۱۰۰

۱۰۳- با توجه به جدول داده شده، چند مورد از مطالب زیر نادرست است؟

شرایط واکنش با گاز هیدروژن	هالوژن‌ها
در دمای 200°C واکنش می‌دهد.	A_2
در دمای اتاق به آرامی واکنش می‌دهد.	B_2
حتی در دمای 200°C به سرعت واکنش می‌دهد.	C_2
در دمای بالاتر از 400°C واکنش می‌دهد.	D_2

- نقطه جوش فراورده واکنش میان C_2 با گاز هیدروژن، در مقایسه با هر دو واکنش دهنده بیشتر است.
- A_2 در دمای اتاق، به حالت مایع است و از آن می‌توان برای تشخیص هیدروکربن‌های سیرنشده از سیرشده استفاده کرد.

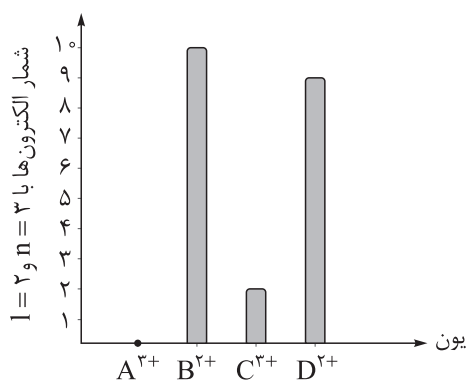
- در هر سه روش تقطیر، اسمز معکوس و صافی کربنی برای تصفیه آب، از B_2 برای از بین بردن میکروب‌ها استفاده می‌شود.
- یون پایدار حاصل از عنصر D، با یون حاوی تکنسیم مورد استفاده در تصویربرداری غده تیروئید، اندازه مشابهی دارد.

(۱) دو (۲) سه (۳) یک (۴) صفر

۱۰۴- کدام واکنش زیر به طور طبیعی انجام می‌شود و پس از موازنه، بیش از ۵۰ درصد مولی فراورده‌های آن را یک ترکیب دوتایی تشکیل می‌دهد؟



۱۰۵- نمودار داده شده، شمار الکترون‌های با $l = 2$ و $n = 3$ چند یون پایدار از عنصرهای دوره چهارم جدول تناوبی را



نشان می‌دهد. با توجه به آن، چند مورد از مطالب زیر درست است؟

- عنصر A در وسایل مثل تلویزیون رنگی وجود دارد.
- شمار الکترون‌های بیرونی‌ترین زیرلایه اتم D با شمار الکترون‌های بیرونی‌ترین زیرلایه اتم نخستین عنصر اصلی بعد از آن در دوره چهارم، برابر است.
- B، آخرین فلز واسطه دوره چهارم است.
- اتم C علاوه بر کاتیون C^{3+} ، دارای کاتیون پایدار C^{2+} نیز است.

(۱) یک (۲) دو (۳) سه (۴) چهار

محل انجام محاسبات

۱۰۶- اگر ۱۷/۱ گرم آلومینیم سولفات با خلوص ۵۰ درصد، مطابق واکنش زیر تجزیه شود، درصد جرمی اکسیژن در توده جامد برجای مانده به تقریب کدام است؟ (در ناخالصی‌ها اکسیژن وجود ندارد؛ $O = ۱۶, Al = ۲۷, S = ۳۲$: $g.mol^{-1}$)
 (معادله واکنش موازنه شود.) $Al_2(SO_4)_3(s) \rightarrow Al_2O_3(s) + SO_3(g)$

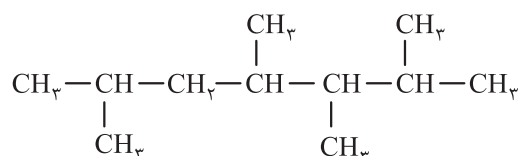
۵۴/۱ (۴)

۴۳/۲ (۳)

۱۰/۸ (۲)

۳/۶ (۱)

۱۰۷- اگر همه شاخه‌های فرعی موجود در ساختار آلکان زیر با شاخه اتیل جایگزین شوند،



(۱) تعداد و نوع شاخه‌های فرعی تغییر می‌کنند.

(۲) مجموع اعداد در نام ترکیب، ۴ واحد افزایش می‌یابد.

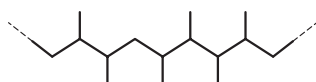
(۳) شمار کربن‌ها در زنجیر اصلی ترکیب، ۱ واحد افزایش می‌یابد.

(۴) در نام ترکیب نهایی برخلاف ترکیب اولیه، واژه «متیل» وجود ندارد.

۱۰۸- چند مورد از مطالب زیر درباره پروپن (A) و پروپین (B)، درست است؟

• فرمول فراورده حاصل از واکنش A با گاز کلر، به صورت $C_3H_6Cl_2$ است.

• در ساختار B، نسبت به سومین عضو خانواده آلکین‌ها، ۲ پیوند $C-H$ کم‌تر وجود دارد.



• ساختار فراورده حاصل از بسپارش A را می‌توان به صورت شکل مقابل نشان داد.

• مجموع شمار اتم‌ها در فرمول مولکولی B، نصف مجموع شمار اتم‌ها در فرمول مولکولی بنزالدهید است.

یک (۴)

دو (۳)

سه (۲)

چهار (۱)

۱۰۹- با توجه به شکل داده‌شده که مربوط به دو ظرف محتوی آب خالص است، همه گزینه‌های زیر درست‌اند؛ به جز

(۱) میانگین تندی مولکول‌های آب در هر دو ظرف یکسان است.

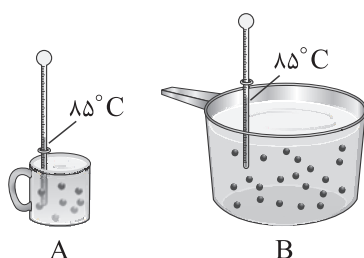
(۲) برای افزایش دمای یک گرم از آب موجود در دو ظرف به

اندازه یک درجه سلسیوس، گرمای یکسانی لازم است.

(۳) انرژی گرمایی آب موجود در ظرف B، از ظرف A بیشتر است.

(۴) به دلیل یکسان بودن دمای آب موجود در هر دو ظرف، مجموع

انرژی جنبشی ذره‌های سازنده آن‌ها با هم یکسان است.



محل انجام محاسبات

۱۰- به کمک گرمای تولید شده به ازای تولید دو مول گاز نیتروژن درواکنش: $\text{NH}_3(\text{g}) + \text{Cl}_2(\text{g}) \rightarrow \text{N}_2(\text{g}) + \text{HCl}(\text{g})$

(معادله موازنه شود)، دمای چند کیلوگرم نقره را می‌توان به اندازه 40°C افزایش داد؟

$$(c_{Ag} = 0.235 \text{ J.g}^{-1} \cdot \text{C}^{-1}, \Delta H_{(N-H)} = 390, \Delta H_{(Cl-Cl)} = 240, \Delta H_{(N \equiv N)} = 944, \Delta H_{(H-Cl)} = 431: \text{kJ.mol}^{-1})$$

120 (F) 10 (R) 100 (Y) 75 (I)

۱۱۱- با توجه به واکنش زیر، کدام مطلب نادرست است؟ ($O = ۱۶, C = ۱۲, H = ۱: g.mol^{-1}$)



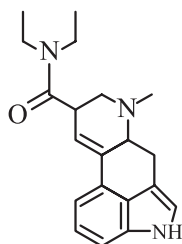
(۱) علامت ΔH آن با علامت ΔH واکنش تبدیل اوزون به اکسیژن، یکسان است.

(۲) ارزش سوختی، متان به تقریب برابر با $۵۵/۶ \text{ kJ.g}^{-1}$ است.

(۳) اغلب مواد شرکت کننده در واکنش، ناقطبی اند و در میدان الکتریکی، جهت گیری نمی کنند.

(۴) به ازای تشکیل ۸/۱۰ گرم آب در سوختن کامل مقدار معینی متان، ۲۷۶ کیلوژول گرما آزاد می‌شود.

۱۱۲- کدام گزینه در رابطه با ترکیب زیر، نادرست است؟



(۱) در ساختار آن، حلقهٔ بنزنی و گروه‌های عاملی آمین، و آمیدی وجود دارند.

(۲) شمار پیوندهای اشتراکی در ساختار آن برابر با ۵۷ است.

(۳) شمار جفت الکترون‌های ناپیوندی موجود در این ترکیب، $\frac{1}{25}$ برابر بنزوئیک اسید است.

(۴) در فرمول مولکولی آن، مجموع شماره اتم‌های هیدروژن و کربن، ۱۵ برابر شماره اتم‌های

نیٹروژن است.

۱۱۳- اگر آنتالپی واکنش موازنه‌شده تولید آمونیاک به روش هابر برابر $a \text{ kJ}$ ، آنتالپی سوختن هیدروژن برابر

kJ.mol^{-1} b و آنتالپی واکنش موازنه شده تولید آمونیاک از گازهای هیدرازین و هیدروژن برابر c kJ باشد، آنتالپی

واکنش موازنه شده سوختن هیدرازین که فراورده‌های آن گاز نیتروژن و بخار آب است، چند کیلوژول است؟ (حالت

فیزیکی همهٔ مواد شرکت کننده در واکنش‌ها را گاز در نظر بگیرید.)

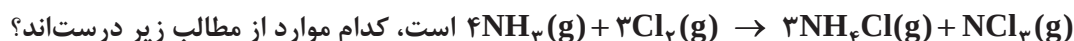
$$a - c + 2b \quad a + b - c$$

$$c + b - a \text{ (€)} \qquad \qquad \qquad 2b + c - a \text{ (₹)}$$

۱۱۴- در واکنش فلز روی با محلول هیدروکلریک اسید، کدام عامل سبب افزایش سرعت تولید گاز نمی‌شود؟

- (۱) افزایش دمای محلول
- (۲) استفاده از محلول ۲ مولار به جای محلول ۱ مولار
- (۳) استفاده از پودر روی به جای تکه‌ای از فلز روی
- (۴) استفاده از ۲۰۰ میلی‌لیتر محلول ۱ مولار به جای ۱۰۰ میلی‌لیتر محلول ۱ مولار

۱۱۵- با توجه به داده‌های جدول زیر که مربوط به تغییرات غلظت دو ماده موجود در واکنش:



غلظت مولی	زمان (دقیقه)				
	۰	۳	۶	۹	۱۲
[A]	۰	۰/۳۵	۰/۶۰	۰/۷۵	۰/۸۰
[B]	۱/۲۰	۰/۸۵	۰/۶۰	۰/۴۵	۰/۴۰

- (الف) در نام‌گذاری ترکیب A طبق قواعد آیوپاک، از پیشوند (تری) استفاده می‌شود.
- (ب) سرعت متوسط واکنش در سه دقیقه سوم واکنش برابر با یک مولار بر ساعت است.
- (پ) شیب نمودار تغییرات مول - زمان B از دیگر مواد شرکت‌کننده در واکنش بیشتر است.
- (ت) سرعت متوسط مصرف آمونیاک در ۳ دقیقه دوم واکنش برابر با $\frac{1}{9}$ مولار بر دقیقه است.

- (۱) الف - پ
- (۲) ب - ت
- (۳) الف - ب
- (۴) پ - ت

۱۱۶- اگر در واکنش سوختن ناقص اوکتان در شرایط معین مطابق معادله زیر، سرعت متوسط مصرف گاز اکسیژن، $2/2$ برابر

سرعت متوسط تولید کربن دی‌اکسید باشد، حاصل $\frac{\bar{R}(\text{H}_2\text{O})}{\bar{R}(\text{CO}_2)}$ و $\frac{\bar{R}(\text{CO})}{\bar{R}(\text{CO}_2)}$ به ترتیب از راست به چپ کدام است؟



- (۱) $1/8, 0/6$
- (۲) $1/2, 0/6$
- (۳) $1/2, 0/8$
- (۴) $1/8, 0/8$

محل انجام محاسبات

۱۱۷- درستی یا نادرستی مطالب زیر، به ترتیب کدام است؟ ($C = 12, H = 1: g.mol^{-1}$)

- اگر به جای گروه X در $\left[\begin{array}{c} H & H \\ | & | \\ -C & -C- \\ | & | \\ H & X \end{array} \right]_n$ ، حلقه بنزنی، فلئور و کلر قرار گیرد، به ترتیب پلی استیرن، تفلون و پلی وینیل کلرید حاصل می شود.
- یک مولکول از پلیمر سازنده پتو که شامل n واحد تکرارشونده در ساختار خود می باشد، دارای $3n$ اتم کربن است.
- جرم مولی استیرن با جرم مولی ۲، ۴-دی متیل پنتان، برابر است.
- شمار پیوندهای اشتراکی موجود در هر مولکول بنزن، $2/5$ برابر شمار پیوندهای اشتراکی در هر مولکول وینیل کلرید است.

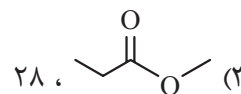
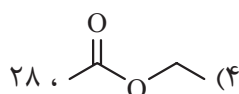
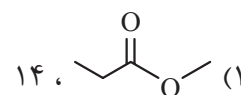
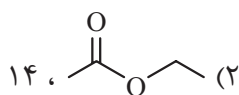
(۱) درست - درست - نادرست - نادرست

(۲) نادرست - درست - درست - درست

(۳) نادرست - نادرست - درست - درست

(۴) نادرست - درست - نادرست - درست

۱۱۸- اگر ترکیب A، اسید سازنده اتیل پروپانوات و ترکیب B، الکل سازنده متیل استات باشد؛ ساختار استر حاصل از واکنش ترکیبهای A و B کدام بوده و تفاوت جرم مولی آن با پروپیل اتانوات چند گرم است؟ ($O = 16, C = 12, H = 1: g.mol^{-1}$)



۱۱۹- کدام مطلب نادرست است؟

- (۱) پلی لاکتیک اسید از جمله پلیمرهای سبز است و امکان تبدیل شدن به کود را دارد.
- (۲) کولار یکی از معروفترین پلی آمیدهای طبیعی است و از فولاد هم جرم خود، پنج برابر مقاوم تر است.
- (۳) نایلون از جمله پلیمرهای ساختگی است و نیروهای بین مولکولی قوی تری نسبت به استون دارد.
- (۴) سلولز و نشاسته هر دو جزء پلیمرهای طبیعی هستند و مونومر سازنده آنها یکسان است.

محل انجام محاسبات

۱۲۰- در اثر آبکافت ۰/۱ مول از یک استر یک عاملی با زنجیرهای هیدروکربنی سیرشده، ۶ گرم کربوکسیلیک اسید حاصل می‌شود. اگر الکل تولیدشده در این فرایند را بتوان از واکنش آب با گاز اتن در مجاورت سولفوریک اسید نیز تهیه کرد، چند مورد از مطالب زیر درست‌اند؟ ($O = ۱۶, C = ۱۲, H = ۱: g.mol^{-1}$)

• استر مورد نظر با بوتانوئیک اسید همپار است.

• اسید حاصل پرکاربردترین اسید در زندگی روزانه است.

• الکل حاصل به هر نسبتی در آب حل می‌شود.

• درصد جرمی کربن در اسید حاصل، برابر ۴۰ است.

• تفاوت جرم مولی این استر با دی‌اسید تشکیل‌دهنده پلیمر $\left[\text{C}(=\text{O})-\text{C}_6\text{H}_4-\text{C}(=\text{O})-\text{O}-\text{CH}_2-\text{CH}_2-\text{O} \right]_n$ برابر ۷۸ گرم است.

(۴) دو

(۳) چهار

(۲) سه

(۱) پنج

محل انجام محاسبات

دوستان عزیز خیلی سبز، سلام؛

فایل پاسخنامه این آزمون را که شامل درسنامه، نکات کنکوری، پاسخ تشریحی و ... است، ساعت ۱۴ امروز از صفحه شخصی خودتان در سایت آزمون خیلی سبز دریافت کنید.

همچنین شما می‌توانید همین امشب کارنامه اولیه آزمونتان را در صفحه شخصی خود مشاهده بفرمایید.

برای دسترسی به صفحه شخصی خود وارد سایت آزمون خیلی سبز به آدرس: azmoon.kheilisabz.com شوید و کدی را که توسط مدرسه و یا نمایندگی‌های آزمون‌های خیلی سبز به شما داده شده، در محل مشخص شده در سایت ثبت بفرمایید.

محل انجام محاسبات



آزمون آزمایشی خیلی سبز

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا
حسابان	حسین شفیع زاده - مهرداد کیوان
آمار و احتمال	مصطفی دیداری - علیرضا شریف خطیبی - عطا صادقی - سروش موئینی
هندسه	امیرحسین ابومحبوب - محمدرضا حسینی فرد - محمدحسین حشمت الواعظین - کیوان صارمی - محسن محمدکرمی - حمید گلزاری - محسن میراسلامی
فیزیک	محمد باغبان - محسن توانا - علیرضا جباری - محمدرضا زارع - مجید ساکی - رضا سبزمیدانی - محمدرضا سورچی - نوید شاهی - علیرضا عبداللہی - علیرضا علینقی - حمید فدائی فرد - احمد مصلائی - فرزاد نامی
شیمی	مجتبی ابراهیمی - حسن رحمتی کوکندہ - مبینا شرافتی پور - علی طہانی - سروش عبادی - یاسر عبداللہی - علیرضا عبداللہی - میلاد قاسمی

نام درس	مسئول درس	گزینشگر	مؤلف پاسخ نامه	کارشناسان علمی - محتوایی به ترتیب حروف الفبا	ویراستاران به ترتیب حروف الفبا
حسابان	حسین شفیع زاده - مهرداد کیوان	حسین شفیع زاده - مهرداد کیوان	مصطفی دیداری	علی شہرایی - حمید گلزاری	الما احسانیان - زہرا جالینوسی - عادل حسینی - شقایق راہبری
آمار و احتمال	علیرضا شریف خطیبی	مصطفی دیداری	مصطفی دیداری	سروش موئینی	پیام ابراہیم نژاد - الما احسانیان - زہرا جالینوسی - عاطفہ خان محمدی - محمدحسین رحیمی - زہرا فتحی
هندسه	حمید گلزاری	حمید گلزاری	حمید گلزاری	محسن میراسلامی	الما احسانیان - زہرا جالینوسی - محمدحسین رحیمی - ندا صالح پور - زہرا فتحی
فیزیک	رضا سبزمیدانی	نوید شاهی	علیرضا جباری - علیرضا گونہ	علیرضا جباری - علیرضا عبداللہی - سعید فرہادی	مہدی بابائی - نرجس تیمناک - محمدرضا زارع - محمدرضا فضلی - مریم گلی حسن لو - علیرضا گونہ - امیر محمودی انزلی
شیمی	یاسر عبداللہی	یاسر عبداللہی	سروش عبادی	پارسا فراہانی	یاسر راش - احسان رحیمی - علی حیدری - معصومہ سعیدی

مدیر آزمون: مہدی ہاشمی
سرپرست محتوایی: فاطمہ آقاچانیپور



حسابان و ریاضی پایه (مباحث مستقل): حسابان (۱): صفحه‌های ۱ تا ۳۶ و ۷۱ تا ۹۰، ریاضی (۱): صفحه‌های ۹۳ تا ۱۴ و ۲۷ تا ۴۷

تست و پاسخ (۱)

حاصل $A = \frac{\sqrt{20}}{10-2\sqrt{5}} \times (\sqrt{4-\sqrt{12}} - \sqrt{\sqrt{12}+4})$ کدام است؟

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2} \quad (۲)$$

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad (۴)$$

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad (۱)$$

$$-\frac{\sqrt{5}+1}{2} \quad (۳)$$

پاسخ: گزینه ۳

مشاوره سؤال مهمی است که مشابه آن بارها در کنکور آمده است. یکی از مفاهیم پایه، رادیکال و اعمال روی آن‌ها است که علاوه بر سؤال مستقیم در بسیاری از سؤال‌ها به صورت غیر مستقیم هم حضور دارد.

خودت حل کنی بهتره $\sqrt{4-\sqrt{12}} - \sqrt{\sqrt{12}+4}$ را برابر با B قرار داده و به توان ۲ برسانید.

درس نامه •• ساده کردن رادیکال‌های مرکب $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$

(۱) سعی می‌کنیم زیر رادیکال را مربع کامل کنیم یعنی دو عدد b و a را طوری پیدا کنیم که $\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{(a \pm b)^2} = |a \pm b|$
 $\downarrow \quad \downarrow$
 $a^2 + b^2 \quad 2ab$
مثلاً برای ساده کردن $\sqrt{8-2\sqrt{7}}$ دو عدد طوری پیدا می‌کنیم که $a^2 + b^2 = 8$ و $2ab = 2\sqrt{7}$ باشد، این دو عدد $a = \sqrt{7}$ و $b = 1$ است. داریم:
 $(\sqrt{7}-1)^2 = 7+1-2\sqrt{7} = 8-2\sqrt{7} \Rightarrow \sqrt{8-2\sqrt{7}} = \sqrt{(\sqrt{7}-1)^2} = |\sqrt{7}-1| = \sqrt{7}-1$
 $\oplus$

(۲) ابتدا $C = \sqrt{A^2 - B}$ را به دست می‌آوریم و سپس از فرمول روبه‌رو استفاده می‌کنیم:
 $\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}}$

مثلاً برای ساده کردن $\sqrt{9-\sqrt{32}}$ داریم:
 $A = 9, B = 32 \Rightarrow C = \sqrt{9^2 - 32} = \sqrt{49} = 7$

$$\sqrt{9-\sqrt{32}} = \sqrt{\frac{9+7}{2}} - \sqrt{\frac{9-7}{2}} = \sqrt{8} - 1 = 2\sqrt{2} - 1$$

نکته برای ساده کردن عبارتهایی به صورت $\sqrt{A+\sqrt{B}} - \sqrt{A-\sqrt{B}}$ می‌توانیم دو رادیکال مرکب را از روش‌های بالا ساده کنیم یا این که کل عبارت را برابر با مقداری فرض کرده و دو طرف را به توان دو برسانیم. (مثل این سؤال)

پاسخ تشریحی گام اول: B را برابر با عبارت داخل پرانتز گرفته و دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$B = \sqrt{4-\sqrt{12}} - \sqrt{4+\sqrt{12}} \Rightarrow B^2 = 4 - \sqrt{12} + 4 + \sqrt{12} - 2\sqrt{(4-\sqrt{12})(4+\sqrt{12})} = 8 - 2\sqrt{16-12} = 8 - 4 = 4$$

$$B^2 = 4 \Rightarrow B = \pm 2$$

گام دوم: $4 + \sqrt{12} < 4 - \sqrt{12}$ ؛ پس B عددی منفی بوده و $B = -2$ قابل قبول است.

گام سوم: می‌توانیم مخرج عبارت $\frac{\sqrt{20}}{10-2\sqrt{5}}$ را گویا کنیم، اما بهتر است ابتدا آن را ساده کنیم و بعد گویا کنیم. اگر $10 = 2\sqrt{5}\sqrt{5}$ بنویسیم،

$$\frac{\sqrt{20}}{10-2\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)} = \frac{1}{\sqrt{5}-1} \times \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{5}+1}{5-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

 داریم:

$$A = -2 \times \frac{\sqrt{5}+1}{4} = -\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

گام چهارم:



تست و پاسخ ۲

هرگاه $a^3 - \frac{1}{a^3} = 1$ مقدار عددی $A = \left(\frac{1}{a^3 - a\sqrt{a} + 1} + \frac{1}{a^3 + a\sqrt{a} + 1} \right)^3$ کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) $\frac{1}{8}$ (۳) $\frac{1}{8}$ (۴) $-\frac{1}{8}$

پاسخ: گزینه ۱

خود حل کنی بهتره در داخل پرانتز مخارج مشترک بگیرد و رابطه داده شده را نیز در a^3 ضرب کنید تا به هم مرتبط بشوند.

پاسخ تشریحی گام اول: در A مخارج مشترک می گیریم. دقت کنید که از اتحاد مزدوج داریم:

$$(a^3 - a\sqrt{a} + 1)(a^3 + a\sqrt{a} + 1) = (a^3 + 1 - a\sqrt{a})(a^3 + 1 + a\sqrt{a}) = (a^3 + 1)^2 - (a\sqrt{a})^2$$

$$\left(\frac{a^3 + a\sqrt{a} + 1 + a^3 - a\sqrt{a} + 1}{(a^3 + 1)^2 - (a\sqrt{a})^2} \right)^3 = \left(\frac{2a^3 + 2}{a^6 + 2a^3 + 1 - a^3} \right)^3 = \left(\frac{2a^3 + 2}{a^6 + a^3 + 1} \right)^3$$

گام دوم: A را ساده می کنیم:

$$a^3 - \frac{1}{a^3} = 1 \xrightarrow{\times a^3} a^6 - 1 = a^3 \Rightarrow a^6 = a^3 + 1$$

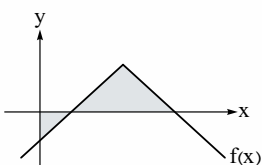
گام سوم: از فرض داده شده داریم:

$$\left(\frac{2a^3 + 2}{a^3 + 1 + a^3 + 1} \right)^3 = \left(\frac{2a^3 + 2}{2a^3 + 2} \right)^3 = 1^3 = 1$$

گام چهارم: a^6 را در A جایگزین می کنیم:

تست و پاسخ ۳

نمودار تابع $f(x) = 2a - |x - 3a|$ مطابق شکل است. نسبت مساحت دو تکه سایه خورده کدام است؟



گزینه ها بزرگ تر از یک هستند؛
پس نسبت مساحت بزرگ تر به
کوچک تر را می خواهد.

- (۱) ۶
(۲) ۸
(۳) ۴/۵
(۴) ۶/۵

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره هر چه قدر روی نمودار توابع سرمایه گذاری کنید، ضرر نمی کنید. کتاب های درسی به نمودار توابع مختلف توجه زیادی کرده اند. علاوه بر این سوال ها بدر نظر گرفتن نمودار، راحت تر حل می شوند.

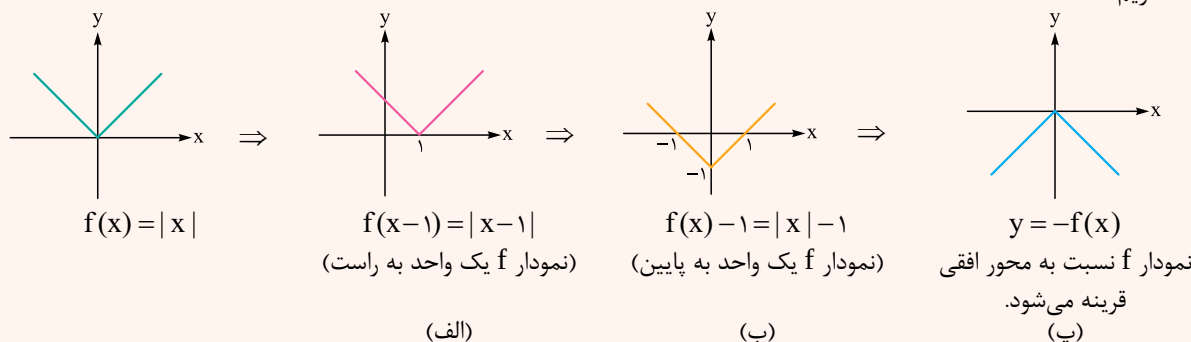
خود حل کنی بهتره رأس و محل برخورد نمودار با محور ها را به دست آورید.

درس نامه •• انتقال افقی و عمودی توابع

تابع $f(x)$ را داریم، $(k > 0)$:

عملیات	به جای x قرار دهیم $x - k$	به جای x قرار دهیم $x + k$	k جمع کنیم. کل تابع را با	منهای k کنیم. کل تابع را	کل تابع قرینه شود.
ضابطه	$y = f(x - k)$	$y = f(x + k)$	$y = f(x) + k$	$y = f(x) - k$	$y = -f(x)$
نمودار	نمودار f را k واحد به راست می بریم.	نمودار f را k واحد به چپ می بریم.	نمودار f را k واحد بالا می بریم.	نمودار f را k واحد پایین می بریم.	نمودار f نسبت به محور x ها قرینه می شود.

مثلاً داریم:



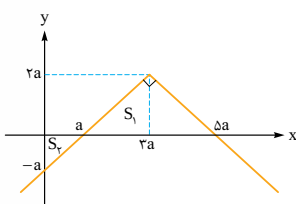
پاسخ تشریحی گام اول: برای رسم نمودار تابع f کافی است $y = |x|$ را $3a$ به سمت راست برده،

نسبت به محور x ها قرینه کنیم و سپس $2a$ واحد بالا ببریم. ($a > 0$)

گام دوم: نقاط برخورد نمودار با محور x ها را به دست می‌آوریم:

$$2a - |x - 3a| = 0 \Rightarrow |x - 3a| = 2a \Rightarrow \begin{cases} x - 3a = 2a \Rightarrow x = 5a \\ x - 3a = -2a \Rightarrow x = a \end{cases}$$

گام سوم: مساحت مثلث بزرگ‌تر و کوچک‌تر را به دست می‌آوریم:



$$S_1 = \frac{1}{2} \times 4a \times 2a = 4a^2$$

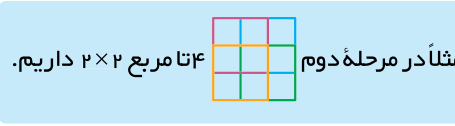
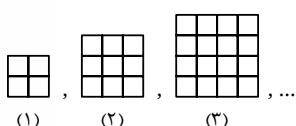
$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{4a^2}{\frac{a^2}{2}} = 8$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \times a \times a = \frac{a^2}{2}$$

گام چهارم:

تست و پاسخ ۴

ضلع هر مربع کوچک را واحد فرض می‌کنیم. اگر دنباله t_n تعداد مربع‌ها با ضلع ۲ واحد در مرحله n ام باشد، مقدار t_{15} کدام است؟



- (۱) ۱۲۵
- (۲) ۲۲۵
- (۳) ۴۹
- (۴) ۶۴

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ تشریحی گام اول: در شکل اول دقیقاً یک مربع به ضلع ۲ داریم:



گام دوم: در شکل دوم دقیقاً چهار مربع به ضلع ۲ داریم:

گام سوم: تعداد مربع‌ها به ضلع ۲ به ترتیب ۱، ۴، ۹، ۱۶، ... است، پس خود یک دنباله مربعی $t_n = n^2$ است:

بنابراین در مرحله پانزدهم $t_{15} = 15^2 = 225$ است.

تست و پاسخ ۵

$a_n = 4n + a$ دنباله خطی و S_n مجموع n جمله ابتدایی آن است. اگر $S_{2n} = 4S_n$ باشد، مقدار a_2 کدام است؟

مجموع $2n$ جمله اول چهار برابر مجموع n جمله اول است.

- (۲) ۷۶
- (۴) ۸۴

- (۱) ۸۲
- (۳) ۷۸

پاسخ: گزینه ۳



مشاوره دنباله خطی همان دنباله حسابی است. هر کدام که در صورت سؤال گفته شده باشد می‌توانید از فرمول‌های دنباله حسابی (S_n, a_n) استفاده کنید.

خودت حل کنی بهتره مجموع n جمله اول دنباله حسابی از رابطه $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$ به دست می آید.

درس نامه •• بررسی نکات دنباله حسابی

ویژگی	توضیح فارسی	مثال
دنباله حسابی	هر جمله با عدد ثابت (d یا قدرنسبت) جمع شده و عدد بعدی به دست می‌آید.	$\begin{array}{c} +6 \quad +6 \quad +6 \\ \curvearrowright \quad \curvearrowright \quad \curvearrowright \\ -1, 5, 11, 17, \dots \\ a_1 = -1, d = 6 \end{array}$
$a_n = a_1 + (n-1)d$	جمله عمومی دنباله	$a_n = -1 + (n-1)6 = 6n - 7$
$a_n - a_m = (n-m)d$	اختلاف جمله nام و mام، (n-m) برابر قدرنسبت است.	$a_{15} - a_7 = 8d$
$\underbrace{a, b, c}_{\text{دنباله حسابی}} \Rightarrow b = \frac{a+c}{2}$	اگر سه عدد تشکیل دنباله حسابی بدهند، عدد وسط (واسطه حسابی) میانگین دو عدد کناری است.	$\underbrace{-15, x, 20}_{\text{دنباله حسابی}} \Rightarrow x = \frac{-15+20}{2} = \frac{5}{2}$
$a, \underbrace{\square, \dots, \square}_n, b$ واسطه حسابی n $d = \frac{b-a}{n+1}$	اگر بین دو عدد a و b بخواهیم n واسطه حسابی درج کنیم، d از رابطه داده شده به دست می‌آید.	$\begin{array}{c} -11, \square, \square, \square, 29 \\ d = \frac{29 - (-11)}{3+1} = \frac{40}{4} = 10 \\ \Rightarrow -11, -1, 9, 19, 29 \\ \quad \quad \quad \curvearrowright \\ \quad \quad \quad +10 \end{array}$
$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$	S_n برابر با مجموع n جمله ابتدایی دنباله حسابی است.	$-1, 5, 11, \dots$ $S_{100} = \frac{100}{2}(-2 + 99 \times 6) = 29600$
$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$	فرمول دوم S_n	$1 + 2 + \dots + n = \frac{n}{2}(1+n)$

پاسخ تشریحی **گام اول:** از $a_n = 4n + a$ درمی یابیم $a_1 = 4 + a$ و $a_2 = 8 + a$ و $a_3 = 12 + a$ و ... است؛ پس $a_1 = a + 4$ بوده و قدرنست دنباله برابر 4 است.

گام دوم: از فرمول مجموع جملات دنباله حسابی داریم:

$$S_{r_n} = r S_n \Rightarrow \frac{r n}{2} (\underbrace{r(a+r) + (r n - 1)(r)}_{\text{ان} + \text{ر} \times \text{ا} + \text{ر}}) = r \times \frac{n}{2} (\underbrace{r(a+r) + (n - 1)(r)}_{\text{ر} \times \text{ا} + \text{ر} + \text{ان}})$$

$$\xrightarrow{\div n} (\lambda n + \gamma a + \mathfrak{f}) = \gamma(\mathfrak{f}n + \gamma a + \mathfrak{f}) \Rightarrow \gamma a = \mathfrak{f}a + \mathfrak{f} \Rightarrow a = -\gamma$$

$$a_n = \mathfrak{f}n - \mathfrak{r} \Rightarrow a_{\mathfrak{r}_\circ} = \mathfrak{f}(\mathfrak{r}_\circ) - \mathfrak{r} = \mathfrak{v}\lambda$$

گام سوم:

تست و پاسخ

اعداد طبیعی را به گونه‌ای در مجموعه‌هایی دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد اعضای هر دسته اعداد فرد متوالی باشد، مثلاً $\{1\}, \{2, 3\}, \{4, 5, 6\}, \dots$.
مجموعه اعضای مجموعه دهم کدام است؟

مجموعه اول ۱ عضو، مجموعه دوم ۳ عضو، مجموعه سوم ۵ عضو و ... دارد.

1729 (P)

۱۸۱۰ (۳)

1820 (2)

1749 (1)

پاسخ: گزینه

مشاوره سؤال بسیار مهمی است که در این چند سال در کنکور مُد شده است. حتماً آن را تحلیل کنید.



خودت حل کنی بهتره ببینید تا انتهای دسته نهم چند عدد جلو رفته ایم. هم چنین $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$.

$\{1\}$ $\{2, 3, 4\}$ $\{5, 6, 7, 8, 9\}$...

عدد ۱ عدد ۳ عدد ۵

پاسخ تشریحی روش اول: گام اول: به مجموعه ها دقت کنید:

گام دوم: تعداد عضوهای مجموعه ها به ترتیب $1, 3, 5, \dots$ (یعنی دنباله اعداد فرد) هستند؛ پس مجموعه نهم تعداد $17 = 1 + 9 - 1 = 9 \times 2 - 1$ عدد دارد.

گام سوم: $1 + 3 + 5 + \dots + 17 = \frac{9}{2}(2(1) + (9-1)(2)) = 81$ ، یعنی تا دسته نهم، ۸۱ عدد جلو رفته ایم، یعنی آخرین عدد دسته نهم برابر ۸۱ بوده است.

گام چهارم: دسته دهم به صورت $\{82, \dots\}$ که تعداد ۱۹ عضو دارد؛ پس:

$$1729 = \frac{19}{2}(2(82) + (19-1)(1)) = \frac{19}{2}(182) = 19 \times 91 = 1729$$

روش دوم: به آخرین عدد هر مجموعه توجه کنید. بزرگ ترین عدد هر دسته اعداد مربع کامل است، یعنی در دسته دهم اعداد به صورت $\{82, 83, \dots, 100\}$

هستند؛ پس از فرمول مجموع جملات دنباله حسابی داریم:

$$S = \frac{\text{تعداد}}{2} (\text{اولی} + \text{آخری}) = \frac{19}{2} (82 + 100) = \frac{19}{2} \times 182 = 19 \times 91 = 1729$$

تست و پاسخ ۷

اگر $t_n = 3 \times 2^{n-2}$ یک دنباله هندسی باشد، حاصل $A = t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_3 t_4 + \dots + t_9 t_{10}$ کدام است؟

$$(1) \frac{9}{2}(2^{18} - 1) \quad (2) \frac{3}{2}(2^{16} - 1) \quad (3) \frac{3}{2}(2^{18} - 1) \quad (4) \frac{9}{2}(2^{16} - 1)$$

پاسخ: گزینه ۳

مشاوره جمله عمومی دنباله های هندسی به صورت $t_n = ar^{n+c}$ هستند. با قرار دادن $n=1, 2$ دو جمله اول و قدر نسبت به دست می آید.

خودت حل کنی بهتره $t_1 t_2$ و $t_2 t_3$ و $t_3 t_4$ و ... را به دست آورده و ببینید چه ارتباطی با هم دارند.

درس نامه •• دنباله هندسی

ویژگی	توضیح فارسی	مثال
دنباله هندسی	هر جمله، در یک عدد ثابت (قدرنسبت یا q) ضرب شده و جمله بعدی به دست می آید.	$3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \dots$ $\times \frac{1}{2} \quad \times \frac{1}{2}$
$a_n = a_1 r^{n-1}$	جمله عمومی	$a_n = 3 \times (\frac{1}{2})^{n-1}$
$\frac{a_m}{a_n} = q^{m-n}$	نسبت جمله m ام به n ام	$\frac{a_{15}}{a_7} = q^8$
$a, b, c \Rightarrow b^2 = ac$ دنباله هندسی	اگر سه عدد تشکیل دنباله هندسی بدهند، مربع وسطی برابر ضرب دو جمله کناری است.	-
$a, \boxed{\quad}, \boxed{\quad}, \boxed{\quad}, b$ n واسطه هندسی $q^{n+1} = \frac{b}{a}$	اگر بین دو عدد a و b بخواهیم n واسطه هندسی قرار دهیم، q از این رابطه اشاره شده به دست می آید.	$10, \boxed{\quad}, \boxed{\quad}, \boxed{\quad}, 1000$ 3 واسطه هندسی $q^4 = \frac{1000}{10} = 100 \Rightarrow q = \pm \sqrt[4]{100} = \pm \sqrt{10}$
$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$	مجموع n جمله اول دنباله	$3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \dots \Rightarrow S_{10} = \frac{3(1-(\frac{1}{2})^{10})}{1-\frac{1}{2}}$
$-1 < q < 1 \Rightarrow S_{\infty} = \frac{a_1}{1-q}$	اگر قدر نسبت بین -1 و 1 باشد، مجموع بی نهایت جمله یک عدد حقیقی است.	$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$



پاسخ تشریحی گام اول: $t_1 = 3 \times 2^{-1} = \frac{3}{2}$ و $t_2 = 3 \times 2^0 = 3 \times 1 = 3$ است؛ پس $t_1 t_2 = \frac{9}{2}$.

گام دوم: $t_2 = 3 \times 2^1 = 6$ ؛ پس $t_2 t_3 = 3 \times 6 = 18$.

گام سوم: $t_3 = 3 \times 2^2 = 12$ ؛ پس $t_3 t_4 = 6 \times 12 = 72$.

گام چهارم: اعداد $t_1 t_2$ و $t_2 t_3$ و $t_3 t_4$ و ... یک دنباله هندسی جدید با قدرنسبت 4 هستند:

گام پنجم: کافی است مجموع 9 جمله اول دنباله هندسی جدید را به دست آوریم:

$$\frac{9}{2}, 18, 72, \dots$$

$$S_9 = t_1 \times \frac{1-q^9}{1-q} = \frac{9}{2} \times \frac{1-(4)^9}{1-4} = \frac{3}{2} (4^9 - 1) = \frac{3}{2} (2^{18} - 1)$$

$$t_n t_{n+1} = 3 \times 2^{n-2} \times 3 \times 2^{n-1} = 9 \times 2^{2n-3}$$

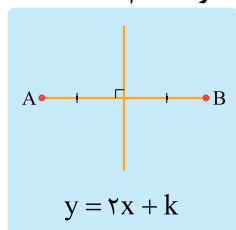
حواستون باشه اگر حاصل ضرب هر جمله در جمله بعدی را حساب کنیم، داریم:

$$\begin{aligned} n=1 &\Rightarrow 9 \times 2^{-1} = \frac{9}{2} \\ n=2 &\Rightarrow 9 \times 2^1 = 18 \\ n=3 &\Rightarrow 9 \times 2^3 = 72 \\ &\vdots \end{aligned}$$

یعنی $t_n t_{n+1}$ یک دنباله هندسی با جمله اول $\frac{9}{2}$ و قدرنسبت $q=4$ است.

تست و پاسخ ۸

مختصات دو نقطه $A(-2, 4)$ و $B(\alpha, 0)$ داده شده است. اگر خط $y = 2x + k$ عمودمنصف AB باشد، مقدار k کدام است؟

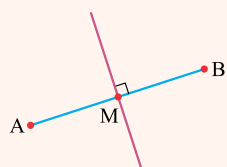


- ۱) 3
- ۲) 2
- ۳) -2
- ۴) -3

پاسخ: گزینه ۳

درس نامه •• معادله عمود منصف

برای نوشتن معادله عمودمنصف AB :



۱) مختصات نقطه M ، وسط پاره خط AB را به دست می آوریم:

۲) از رابطه $m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ شیب AB را به دست آورده و قرینه معکوس می کنیم تا شیب عمودمنصف (m') به دست آید.

۳) از فرمول معادله خط، خطی که از نقطه M گذشته و شیب آن m' است را می نویسیم: $y - y_M = m'(x - x_M)$

پاسخ تشریحی گام اول: مختصات وسط AB را به دست می آوریم:

$$\begin{matrix} A \\ -2 \\ 4 \end{matrix} \quad \begin{matrix} B \\ \alpha \\ 0 \end{matrix} \Rightarrow \text{وسط } AB: M \begin{matrix} \frac{\alpha - 2}{2} \\ 2 \end{matrix}$$

گام دوم: شیب عمودمنصف، قرینه و معکوس شیب AB است؛ پس:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0 - 4}{\alpha - (-2)} = \frac{-4}{\alpha + 2} \Rightarrow \text{شیب عمودمنصف} = \frac{\alpha + 2}{4}$$



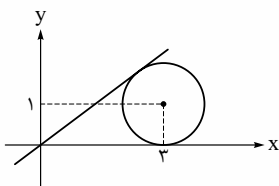
گام سوم: با توجه به این که شیب خط y که عمودمنصف AB است، برابر ۲ است، پس $\frac{\alpha+2}{4} = 2$ ؛ در نتیجه $\alpha = 6$.

گام چهارم: مختصات نقطه $M(\frac{6-2}{2}, 2)$ ، یعنی $(2, 2)$ می شود که در معادله عمودمنصف صدق می کند، چون عمودمنصف از آن عبور می کند؛ پس:

$$y = 2x + k \Rightarrow 2 = 2(2) + k \Rightarrow k = -2$$

تست و پاسخ ۹

خط داده شده بر نمودار دایره، مطابق شکل مماس است. شیب خط کدام است؟



$$\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$\frac{1}{3} \quad (4)$$

$$\frac{3}{4} \quad (1)$$

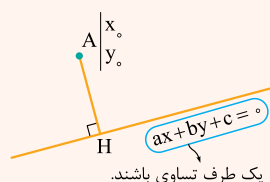
$$\frac{2}{3} \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۱

مشاوره فاصله هر رأس مثلث از ضلع مقابل (طول ارتفاع)، فاصله هر رأس مربع یا مستطیل از ضلع مقابل و فاصله مرکز دایره از خط مماس و ... همگی با فرمول فاصله نقطه از خط به دست می آیند.

خودت حل کنی بهتره معادله خط مماس را $y = mx$ گرفته و از فرمول فاصله نقطه از خط استفاده کنید.

درس نامه برای به دست آوردن فاصله نقطه $A(x_0, y_0)$ از خط $ax + by + c = 0$ داریم:



همه باید یک طرف تساوی باشند.

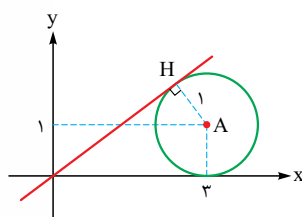
نقطه را در معادله خط جای گذاری می کنیم.

$$AH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

فاصله نقطه از خط

پاسخ تشریحی گام اول: خط مماس از مبدأ عبور می کند؛ پس معادله خط مماس $y - 0 = m(x - 0)$ ، یعنی $y = mx$ است.

گام دوم: اگر مرکز دایره را A بنامیم، فاصله نقطه A از خط برابر شعاع دایره (یعنی $r = 1$) است؛ پس از فرمول فاصله نقطه از خط داریم:



$$A(3, 1), y - mx = 0 \Rightarrow AH = \frac{|1 - 3m|}{\sqrt{1 + m^2}} = 1 \Rightarrow |1 - 3m| = \sqrt{1 + m^2}$$

$$(1 - 3m)^2 = 1 + m^2 \Rightarrow 1 + 9m^2 - 6m = 1 + m^2$$

گام سوم: دو طرف را به توان دو می رسانیم:

$$8m^2 - 6m = 0 \Rightarrow 2m(4m - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ 4m - 3 = 0 \Rightarrow m = \frac{3}{4} \end{cases}$$

شیب خط صفر نیست؛ پس $m = \frac{3}{4}$ قابل قبول است.

تست و پاسخ ۱۰

مجموعه جواب نامعادله $|2x - 1| \leq 1$ بازه $[-\infty, \alpha]$ است. مقدار α کدام است؟

$$-2 \quad (4)$$

$$-\frac{1}{2} \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۱

مشاوره روی قدر مطلق، شرط گذاری و برداشتن قدر مطلق خیلی کار کنید. در بسیاری از تست ها وجود دارد.



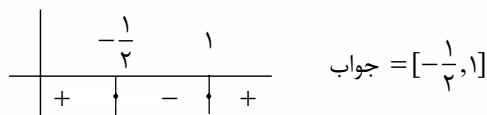
خودت حل کنی بهتره یک بار $x < \frac{1}{2}$ و بار دیگر $x \geq \frac{1}{2}$ گرفته و نامعادله را حل کنید.

پاسخ تشریحی **روش اول:** گام اول: برای برداشتن قدرمطلق دو حالت در نظر می گیریم:

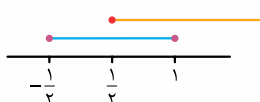
$$2x - 1 \geq 0 \text{ یا } 2x - 1 < 0$$

$$\underbrace{(x \geq \frac{1}{2})}_{2x - 1 \geq 0} \Rightarrow x(2x - 1) \leq 1 \Rightarrow 2x^2 - x - 1 \leq 0 \Rightarrow (x - 1)(2x + 1) \leq 0$$

گام دوم:



$$\text{جواب} = [-\frac{1}{2}, 1]$$



اگر جواب به دست آمده را با شرط اولیه (یعنی $x \geq \frac{1}{2}$) اشتراک بگیریم، جواب نهایی در این حالت بازه $[\frac{1}{2}, 1]$ می شود.

$$\underbrace{(x < \frac{1}{2})}_{2x - 1 < 0} \Rightarrow -x(2x - 1) \leq 1 \Rightarrow -2x^2 + x \leq 1 \Rightarrow 2x^2 - x + 1 \geq 0$$

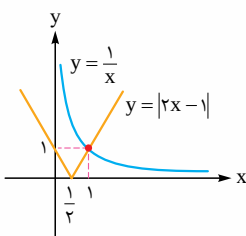
گام سوم:

در عبارت درجه دوم $2x^2 - x + 1$ ، $\Delta = (-1)^2 - 4(2)(1) = -7 < 0$ ، و $a > 0$ ، پس این عبارت همواره مثبت است؛ این یعنی جواب این نامعادله $\mathbb{R}$ بوده که با اشتراک با شرط اولیه تمام $x < \frac{1}{2}$ جواب هستند.

گام چهارم: دو جواب $[\frac{1}{2}, 1]$ و $(-\infty, \frac{1}{2})$ قابل قبول هستند، پس اجتماع آن ها، یعنی $(-\infty, 1]$ جواب نامعادله است؛ پس $\alpha = 1$.

روش دوم: گام اول: اگر $x \leq 0$ باشد، سمت چپ نامعادله، منفی یا صفر بوده و نامعادله همواره برقرار است؛ پس فرض می کنیم $x > 0$:

$$x|2x - 1| \leq 1 \xrightarrow{\div x} |2x - 1| \leq \frac{1}{x}$$



گام دوم: از روش هندسی نمودار دو طرف را رسم می کنیم:

در $0 < x \leq 1$ نمودار $\frac{1}{x}$ بالاتر یا مساوی است؛ پس این بازه جواب است.

گام سوم: $x \leq 0$ جواب نامعادله بوده و بازه $0 < x \leq 1$ نیز جواب نامعادله است، پس اجتماع آن ها، یعنی $x \leq 1$ جواب نامعادله است؛ پس $\alpha = 1$.

تست و پاسخ ۱۱

عدد x در نامعادله $4 < \frac{4x+3}{x+2} < -1$ صدق می کند. مجموعه مقادیر $[\frac{x}{2}]$ شامل چند عضو است؟

(۴) بی شمار

(۳) ۶

(۲) ۵

(۱) ۴

پاسخ: گزینه ۴

مشاوره سؤال مهمی است که مشابه آن در کنکور آمده است. دقت کنید که چون جواب نامعادله در تست داده نشده است، از عددگذاری نمی توانید استفاده کنید؛ پس خود را برای راه حل اصلی آماده کنید.

خودت حل کنی بهتره نامعادله دو گانه حل کنید یا مخرج را در صورت ایجاد کرده و کسر را ساده کنید.

پاسخ تشریحی **روش اول:** گام اول: ابتدا نامعادله را تبدیل به دو نامعادله می کنیم:

$$\frac{4x+3}{x+2} < 4 \Rightarrow \frac{4x+3}{x+2} - 4 < 0 \Rightarrow \frac{-5}{x+2} < 0 \Rightarrow x+2 > 0 \Rightarrow x > -2$$

$$\frac{4x+3}{x+2} > -1 \Rightarrow \frac{4x+3}{x+2} + 1 > 0 \Rightarrow \frac{5x+5}{x+2} > 0 \xrightarrow{x+2>0} 5x+5 > 0 \Rightarrow x > -1$$





$$x > -1 \Rightarrow \frac{x}{2} > -\frac{1}{2} \Rightarrow \left[\frac{x}{2}\right] = -1, 0, 1, 2, \dots$$

گام دوم: با اشتراک بین دو جواب، جواب نهایی $(-1, +\infty)$ ؛ پس:

گام سوم: مجموعه $\left[\frac{x}{2}\right]$ بی شمار عدد صحیح ممکن است داشته باشد.

$$\frac{4x+3}{x+2} = \frac{4x+8-5}{x+2} = \frac{4(x+2)-5}{x+2} = 4 - \frac{5}{x+2}$$

روش دوم: گام اول: مخرج را در صورت ایجاد می کنیم:

$$-1 < 4 - \frac{5}{x+2} < 4 \xrightarrow{-4} -5 < -\frac{5}{x+2} < 0 \xrightarrow{\times(-1)} 0 < \frac{5}{x+2} < 5 \xrightarrow{\div 5} 0 < \frac{1}{x+2} < 1 \quad (I)$$

گام دوم:

گام سوم: اگر $\frac{1}{x+2} > 0$ باید $x+2 > 0$ و در نتیجه باید $x > -2$ باشد.

گام چهارم: اگر $x+2 > 0$ باشد، با ضرب طرفین (I) در $x+2$ داریم $x+2 > 1$ ؛ پس $x > -1$.

ادامه راه حل مشابه گام دوم و سوم روش اول است.

تست و پاسخ ۱۲

مجموعه جواب های نامعادله $(x^2+12)(x+6) \leq 37$ به صورت $(-\infty, \alpha]$ است. مقدار $\sqrt{2\alpha+19}$ کدام است؟

۲ (۴)

۳ (۳)

۴ (۲)

۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

درس نامه • اتحاد مکعب و نتایج آن

$$1) (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \Rightarrow \begin{cases} (x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \\ (x+2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8 \end{cases}$$

$$2) (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \Rightarrow \begin{cases} (x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \\ (x-2)^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8 \end{cases}$$

$$x^3 + 6x^2 + 12x + 72 \leq 37$$

پاسخ تشریحی: گام اول: ابتدا نامعادله را ساده می کنیم:

گام دوم: $(x+2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$ می شود؛ پس $72 = 8 + 64$ می نویسیم:

$$\underbrace{x^3 + 6x^2 + 12x + 8 + 64}_{(x+2)^3} \leq 37 \Rightarrow (x+2)^3 \leq -27$$

$$x+2 \leq -3 \Rightarrow x \leq -5 \quad \text{یا} \quad (-\infty, -5] \Rightarrow \alpha = -5$$

گام سوم: با ریشه سوم گرفتن از دو طرف نامعادله داریم:

$$\sqrt{2\alpha+19} = \sqrt{-10+19} = 3$$

گام چهارم:

تست و پاسخ ۱۳

اگر ریشه های معادله $ax^2 + x^2 - 5x + a = 0$ اعداد $\alpha, \beta, 1$ باشند، معادله درجه دوم با ریشه های $\left\{\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\beta}{\alpha}\right\}$ به صورت $4x^2 + kx + 4 = 0$ است. مقدار k کدام است؟

۱۹ (۲)

-۱۷ (۱)

-۱۹ (۴)

۱۷ (۳)

پاسخ: گزینه ۳

مشاوره: سؤال مهمی است. تجربه این چند ساله نشان داده است که بسیاری از سؤال های کنکور های جدید، ترکیب شده سؤال های کنکور های قبل هستند. مثل همین سؤال که ترکیب شده بحث S و P درجه دوم با موضوع بخش پذیری است.

خودت حل کنی بهتره: a را به دست آورده و عبارت درجه سوم را تجزیه کنید.



درس نامه روابط ریشه‌های (α, β) معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ($\Delta > 0$)

$$\text{جمع ریشه‌ها} = S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$$

$$\text{ضرب ریشه‌ها} = P = \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

$$\text{قدرمطلق تفاضل ریشه‌ها} = |\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

نکته اگر $x = k$ ریشه یک چندجمله‌ای باشد، چندجمله‌ای بر $x - k$ بخش پذیر است.

پاسخ تشریحی گام اول: یکی از ریشه‌های معادله $x = 1$ است؛ پس در معادله صدق می‌کند:

$$a + 1 - 5 + a = 0 \Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow 2x^3 + x^2 - 5x + 2 = 0$$

گام دوم: عبارت $2x^3 + x^2 - 5x + 2 = 0$ را تجزیه می‌کنیم. چون $x = 1$ ریشه است؛ پس عبارت حتماً بر $x - 1$ بخش پذیر است:

$$2x^3 + x^2 - 5x + 2 = (x - 1)(2x^2 + bx - 2)$$

ضرب $+2$
ضرب $2x^3$

برای تجزیه بدون تقسیم داریم:

$$bx^2 - 2x^2 = (b - 2)x^2 = x^2 \Rightarrow b - 2 = 1 \Rightarrow b = 3$$

$$2x^3 + x^2 - 5x + 2 = (x - 1)(2x^2 + 3x - 2)$$

پس:

$$P = \alpha\beta = -1, S = \alpha + \beta = -\frac{3}{2}$$

گام سوم: α و β ریشه‌های $2x^2 + 3x - 2 = 0$ هستند.

$$S_{\text{معادله جدید}} = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} = \frac{S^2 - 2P}{P} = \frac{\frac{9}{4} - 2(-1)}{-1} = -\frac{17}{4}$$

گام چهارم:

$$-\frac{17}{4} = -\frac{k}{4} \Rightarrow k = 17$$

گام پنجم: S معادله جدید برابر $-\frac{k}{4}$ است؛ پس:

تست و پاسخ ۱۴

نمودار تابع $f(x) = -x^2 + 4x + a$ و خط مماس بر آن در نقطه A که هم‌عرض نقطه B است، مطابق شکل است.

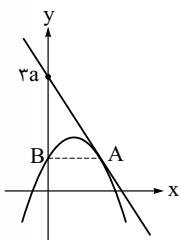
مقدار a کدام است؟

۲ (۲)

۸ (۱)

۴ (۴)

۳ (۳)



پاسخ: گزینه ۱

خود حل کنی بهتره عرض نقطه A همان $f(0)$ است. $x_s = 2$ وسط x_A و صفر است.

پاسخ تشریحی گام اول: عرض از مبدأ سهمی به ازای $x = 0$ به دست می‌آید؛ یعنی $f(0) = a$ عرض نقطه A برابر a است.

$$\text{گام دوم: } x_s = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{-2} = 2. \text{ از طرفی } x_s \text{ وسط دو نقطه با عرض یکسان است؛ یعنی } x_A = 4.$$

گام سوم: نقطه‌ای که خط بر منحنی مماس شده است $A \left(\frac{4}{a} \right)$ است.

گام چهارم: شیب خط مماس را در نقطه $x = 4$ به دست می‌آوریم:

$$f'(x) = -2x + 4 \Rightarrow f'(4) = -4$$

$$y - a = -4(x - 4) \Rightarrow y = -4x + 16 + a$$

گام پنجم: معادله خط مماس را می‌نویسیم:

$$16 + a = 3a \Rightarrow 16 = 2a \Rightarrow a = 8$$

گام ششم: عرض از مبدأ خط مماس برابر $3a$ است؛ پس:





تست و پاسخ ۱۵

α و β ریشه‌های معادله درجه دوم $x^2 - (2m+1)x + 2m = 0$ بوده و اعداد α, m, β تشکیل دنباله هندسی می‌دهند. اگر $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ تعریف شده باشد، مقدار آن کدام است؟

$$\frac{3}{2} \quad (4)$$

$$\frac{2}{3} \quad (3)$$

$$\frac{5}{4} \quad (2)$$

$$\frac{4}{3} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره سؤال‌های S و P معمولاً سایر موضوعات (مثل همین سؤال) ترکیب می‌شوند. سؤال‌های کنکور سال‌های قبل را به دقت بررسی کنید.

خودت حل کنی بهتره α, m, β و $P = m^2$ تشکیل دنباله هندسی می‌دهند، پس $\alpha\beta = m^2$ ؛ پس $P = m^2$.

پاسخ تشریحی گام اول: α, m, β تشکیل دنباله هندسی می‌دهند، پس $\alpha\beta = m^2$ می‌شود.

گام دوم: $\frac{1}{\alpha}$ تعریف نشده می‌شود. غلطی $\alpha = 0, \beta = 1$ $\Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow m = 0$ یا $\alpha = 1, \beta = 4$ $\Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow m = 2$ $\Rightarrow \alpha\beta = m^2 \Rightarrow \alpha\beta = 4$ $\Rightarrow \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{5}{4}$

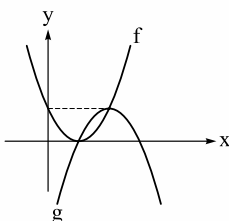
گام سوم: α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 5x + 4 = 0$ هستند.

پس $\alpha + \beta = \frac{-b}{a} = 5$ و $\alpha\beta = \frac{c}{a} = 4$ ؛ حالا داریم:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 5 \\ \alpha\beta = 4 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{5}{4}$$

تست و پاسخ ۱۶

نمودار سهمی $f(x) = x^2 + 2mx + m + 2$ مطابق شکل است. اگر $y = g(x)$ نیز یک سهمی با ریشه‌های α و β باشد، مقدار $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ کدام است؟



$$\frac{3}{2} \quad (2)$$

$$\frac{5}{2} \quad (4)$$

$$\frac{4}{3} \quad (1)$$

$$3 \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۱

درس نامه معادله سهمی به صورت‌های گوناگون

معادله سهمی	نمودار تابع	
	$a > 0$	$a < 0$
شکل استاندارد $f(x) = ax^2 + bx + c$ (عرض از مبدأ)		
شکل مربع کامل $f(x) = a(x - x_s)^2 + y_s$		
شکل تجزیه شده $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ (صفه‌های تابع (ریشه‌ها))		



نکات ۱ سهمی به هر صورتی که باشد، $f(0)$ همان عرض از مبدأ سهمی است.

۲ اگر رأس سهمی داده شده باشد، بهتر است معادله سهمی را به صورت مربع کامل بگیریم و با جای گذاری یک نقطه غیر از ریشه‌ها، a را به دست آوریم.

۳ اگر برخورد(های) سهمی با محور x ها داده شده باشد، بهتر است معادله سهمی را به صورت تجزیه شده بگیریم.

۴ اگر سه نقطه عادی از سهمی داده شده باشد، بهتر است از صورت استاندارد سهمی استفاده کرده و نقاط را جایگزین کنیم تا a ، b و c را به دست آوریم.

۵ اگر $a > 0$ ، عرض رأس سهمی یا y_s همان کمترین مقدار تابع و اگر $a < 0$ ، عرض رأس سهمی یا y_s بیشترین مقدار تابع است.

درس نامه •• ارتباط Δ تابع درجه دوم با نمودار سهمی

	$a > 0$	$a < 0$	شکل تابع
$\Delta > 0$			$y = a(x - x_1)(x - x_2)$ در دو نقطه، محور x ها را قطع می کند.
$\Delta = 0$			در $y = a(x - x_1)^2 = a(x - x_1)(x - x_1)$ نقطه x_1 بر محور x ها مماس می شود.
$\Delta < 0$			فرم $y = ax^2 + bx + c$ تجزیه نمی شود.

پاسخ تشریحی گام اول: سهمی $f(x)$ بر محور x ها مماس است؛ پس داریم:

$$\Delta_f = 0 \Rightarrow 4m^2 - 4(m+2) = 0 \Rightarrow m^2 - m - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = -1 \checkmark \\ m = 2 \text{ غلط} \end{cases}$$

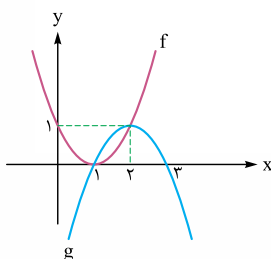
گام دوم: اگر $m = -1$ باشد، $f(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ و اگر $m = 2$ باشد، $f(x) = x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$ می شود.

در حالت اول ریشه $x = 1$ و در حالت دوم $x = -2$ نقطه مماس بودن سهمی بر محور x ها است، اما از روی نمودار معلوم می شود که سهمی در نقطه ای به طول مثبت بر محور x ها مماس است؛ پس $m = -1$ قابل قبول بوده و $f(x) = (x-1)^2$.

گام سوم: مختصات رأس سهمی f به صورت $(1, 0)$ است که روی $g(x)$ نیز قرار دارد؛ پس $g(1) = 0$.

گام چهارم: عرض رأس سهمی $g(x)$ همان عرض از مبدأ $f(x)$ یا $f(0) = 1$ است، از طرفی $f(2) = 1$ ؛ پس مختصات رأس سهمی $g(x)$ به صورت $(2, 1)$ است.

گام پنجم: $x_s = 2$ وسط ریشه های $g(x)$ است، پس ریشه دیگر $g(x)$ ، $x = 3$ است؛ پس $\alpha = 1$ و $\beta = 3$.



$$\Rightarrow \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

تست و پاسخ ۱۷

یک سکه ۱۲ گرمی داریم که ۴ گرم آن طلا و ۸ گرم آن نقره است. n گرم آن را برمی داریم و به جای آن n گرم طلا جایگزین می کنیم؛ در این حالت ۸ گرم طلا و ۴ گرم نقره در سکه مانده است. n کدام است؟

۸ (۴)

۹ (۳)

۶ (۲)

۱۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره هر چند این سوال ظاهر دشواری دارد، اما مشابه تمرین کتاب درسی است. در بحث معادلات گویا، کتاب درسی تمرین های مهمی دارد که حتماً باید بررسی شوند.



خودت حل کنی بهتره وقتی n گرم برمی داریم، $\frac{n}{3}$ طلا و $\frac{2n}{3}$ نقره برداشته ایم.

پاسخ تشریحی **گام اول:** نسبت طلا به نقره ۱ به ۲ است. وقتی n گرم از سکه را حذف می کنیم، $\frac{1}{3}$ آن طلا و $\frac{2}{3}$ آن نقره است، پس $\frac{n}{3}$ طلا و $\frac{2n}{3}$ نقره حذف کرده ایم؛ پس $4 - \frac{n}{3}$ طلا در سکه می ماند.

گام دوم: وقتی n گرم طلا جایگزین می کنیم مقدار طلا به $4 - \frac{n}{3} + n$ در ۱۲ گرم می رسد؛ پس نسبت طلا به کل وزن برابر $\frac{4 - \frac{n}{3} + n}{12}$ می شود. از طرفی نسبت طلا به کل در حالت دوم برابر $\frac{8}{4+8} = \frac{2}{3}$ است؛ پس داریم:

$$\frac{4 - \frac{n}{3} + n}{12} = \frac{4 + \frac{2n}{3}}{12} = \frac{2}{3} \Rightarrow 12 + \frac{6n}{3} = 24 \Rightarrow 2n = 12 \Rightarrow n = 6$$

تست و پاسخ ۱۸

اگر $\log_{18} 12 = \alpha$ ، حاصل $\log_{36} 24$ بر حسب α کدام است؟

$$\frac{7\alpha - 2}{2\alpha - 1} \quad (4)$$

$$\frac{5\alpha + 1}{4\alpha + 2} \quad (3)$$

$$\frac{7\alpha + 1}{6\alpha + 2} \quad (2)$$

$$\frac{5\alpha - 1}{2\alpha + 2} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۱

مشاوره سؤال مهم و مشابه سؤال های کنکور است. از ویژگی های لگاریتم حتماً سؤال در کنکور می آید که با توجه به حجم کم آن بهتر است آن را حل کنید.

خودت حل کنی بهتره $\log_{36} 24 = \frac{\log_{18} 24}{\log_{18} 36}$

درس نامه •• ویژگی های لگاریتم

ویژگی	توضیح
$y = a^x \Leftrightarrow \log_a y = x$	رابطه های لگاریتمی را می توانیم به صورت توانی بنویسیم و برعکس.
$y = \log_b a \xrightarrow{D} \begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \\ b \neq 1 \end{cases}$	برای تعیین دامنه توابع لگاریتمی بین سه شرط اشتراک می گیریم.
$\log_b 1 = 0, \log_a a = 1$	لگاریتم ۱ در هر پایه ای صفر و لگاریتم هر عدد در پایه خودش برابر یک می شود.
$\log_b a^n = n \log_b a$	توان عبارت جلوی لگاریتم به پشت لگاریتم می رود. ($a > 0$)
$\log_{b^n} a = \frac{1}{n} \log_b a$	توان پایه لگاریتم، معکوس شده و به پشت لگاریتم می رود.
$\log_c ab = \log_c a + \log_c b$	لگاریتم ضرب دو عدد تبدیل به جمع لگاریتم ها می شود.
$\log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b$	لگاریتم تقسیم دو عدد تبدیل به تفاضل لگاریتم ها می شود.
$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$	ویژگی تغییر پایه
$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$	اگر جای a و b عوض شود، حاصل معکوس می شود، مثلاً $\log_3 2$ و $\log_2 3$ معکوس هم هستند.



پاسخ تشریحی

گام اول: لگاریتم داده شده در مبنای ۱۸ است در صورتی که لگاریتم خواسته شده در مبنای ۳۶ است؛ پس از قانون تغییر پایه (مبنا)، لگاریتم داده شده را در مبنای ۱۰ می نویسیم (لگاریتم خواسته شده را نیز در مبنای ۱۰ می بریم):

$$\log_{18} 12 = \frac{\log 12}{\log 18} = \frac{\log(2^2 \times 3)}{\log(2^2 \times 3^2)} = \frac{2\log 2 + \log 3}{2\log 2 + \log 3^2} = \alpha \Rightarrow 2\log 2 + \log 3 = 2\alpha \log 3 + \alpha \log 2$$

$$\Rightarrow (2 - \alpha)\log 2 = (2\alpha - 1)\log 3 \Rightarrow \frac{\log 2}{\log 3} = \frac{2\alpha - 1}{2 - \alpha}$$

$$\log_{36} 24 = \frac{\log 24}{\log 36} = \frac{\log(2^3 \times 3)}{\log(2^2 \times 3^2)} = \frac{3\log 2 + \log 3}{2\log 2 + 2\log 3}$$

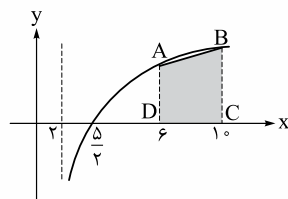
گام دوم:

گام سوم: صورت و مخرج را بر $\log 3$ تقسیم می کنیم تا عبارت ها بر حسب α به دست آید:

$$\frac{3 \times \frac{\log 2}{\log 3} + 1}{2 \times \frac{\log 2}{\log 3} + 2} = \frac{3 \left(\frac{2\alpha - 1}{2 - \alpha} \right) + 1}{2 \left(\frac{2\alpha - 1}{2 - \alpha} \right) + 2} = \frac{\frac{6\alpha - 3 + 2 - \alpha}{2 - \alpha}}{\frac{4\alpha - 2 + 4 - 2\alpha}{2 - \alpha}} = \frac{5\alpha - 1}{2\alpha + 2}$$

تست و پاسخ ۱۹

بخشی از نمودار تابع $f(x) = \log_2(ax+b)$ مطابق شکل است. مساحت دوزنقه ABCD کدام است؟



۱۴ (۲)

۱۲ (۱)

۱۰ (۴)

۸ (۳)

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره: سؤال جدید و خلاقانه ای است. ترکیب نمودار ویژگی های لگاریتم! احتمالاً از این تیپ سؤال هادر آینده کنکور بیشتر خواهید دید.

خودت حل کنی بهتره: $x=2$ عبارت جلوی لگاریتم را صفر می کند.

درس نامه: نمودار تابع های لگاریتمی $y = \log_a x$

نکات	نمودار	
(۱) اگر پایه بزرگ تر از یک باشد، نمودار تابع لگاریتم اکیداً صعودی است. (۲) دامنه تابع برابر $(0, +\infty)$ و برد آن برابر $\mathbb{R}$ است. (۳) محور yها مجانب قائم تابع است.		$a > 1$
(۱) اگر پایه بین صفر و یک باشد، نمودار تابع لگاریتم اکیداً نزولی است. (۲) دامنه تابع برابر $(0, +\infty)$ و برد آن برابر $\mathbb{R}$ است. (۳) محور yها مجانب قائم تابع است.		$0 < a < 1$

نکته: برای رسم تابع $y = \log_c(ax+b)$ می توانیم از انتقال، انقباض و انبساط تابع لگاریتمی استفاده کنیم.

ریشه عبارت جلوی لگاریتم $(ax+b=0)$ همان محور مجانب قائم تابع است.



پاسخ تشریحی گام اول: $x = 2$ مجانب قائم تابع است؛ پس عبارت جلوی لگاریتم را صفر می‌کند: $2a + b = 0$.

گام دوم: $f\left(\frac{5}{2}\right) = 0$ ، پس $\log_2\left(\frac{5a}{2} + b\right) = 0$ ؛ پس $\frac{5a}{2} + b = 2^0 = 1$.

گام سوم: با حل دستگاه به دست آمده داریم: $\frac{5a}{2} + b = 1 \xrightarrow{b=-2a} \frac{5a}{2} - 2a = 1 \Rightarrow \frac{a}{2} = 1 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow b = -4$

$$f(x) = \log_2(2x - 4)$$

گام چهارم: با جای گذاری a و b در ضابطه تابع داریم:

$$AD = f(6) = \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3 \log_2 2 = 3 \times 1 = 3$$

$$BC = f(10) = \log_2 16 = \log_2 2^4 = 4$$

$$S_{\text{دورنگه}} = \frac{(AD + BC) \times CD}{2} = \frac{(3 + 4) \times 4}{2} = 14$$

گام پنجم:

تست و پاسخ ۲۰

در یک ظرف ۱۰۰ کیلوگرم گلاب داریم. شخصی هر ده روز یک بار ۴ کیلوگرم آن را برداشته و دقیقاً به همان میزان آب خالص درون ظرف جایگزین می‌کند. بعد از گذشت تقریباً چند روز غلظت گلاب به $\frac{1}{5}$ غلظت روز اول می‌رسد؟ ($\log 2 = 0.3, \log 3 = 0.47$)

۲۳۴ (۲)

۲۳۷ (۱)

۱۱۷ (۴)

۳۱۲ (۳)

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره درست است که از کاربردی‌های لگاریتم کمتر سؤال آمده است، اما مشابه این سؤال چندین بار در کنکور مطرح شده است. حتماً درس‌نامه را مطالعه کنید.

خودت حل کنی بهتره پس از ۱۰ روز غلظت گلاب به $\frac{96}{100}$ مقدار اولیه می‌رسد؛ پس از ۲۰ روز به $\left(\frac{96}{100}\right)^2$ مقدار اولیه و ...

درس‌نامه: الگوهای رشد یا زوال

فرض کنید مقداری برابر A_0 باشد، اگر پس از گذشت هر t سال:

الف) r درصد افزایش یابد، مقدار آن پس از n سال برابر $A_0 \left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$ می‌شود.

ب) r درصد کاهش یابد، مقدار آن پس از n سال برابر $A_0 \left(1 - \frac{r}{100}\right)^n$ می‌شود.

پاسخ تشریحی گام اول: هر ۱۰ روز یک بار غلظت گلاب ۴٪ کاهش می‌یابد؛ پس:

$$A_0 \left(1 - \frac{4}{100}\right)^{\frac{n}{10}} = A_0 \left(\frac{96}{100}\right)^{\frac{n}{10}}$$

طبق درس‌نامه غلظت گلاب پس از n روز برابر می‌شود با:

$$A_0 \left(\frac{96}{100}\right)^{\frac{n}{10}} = \frac{1}{5} A_0$$

گام دوم: باید n را طوری پیدا کنیم که:

$$\Rightarrow \left(\frac{96}{100}\right)^{\frac{n}{10}} = \frac{1}{5} \xrightarrow[\text{لگاریتم می‌گیریم}]{\text{در پایه ۱۰}} \log\left(\frac{96}{100}\right)^{\frac{n}{10}} = \log\left(\frac{1}{5}\right) \Rightarrow \frac{n}{10} (\log 96 - \log 100) = \log 1 - \log 5 = -\log 5$$

$$\log 96 = \log(3^5 \times 2) = 5 \log 2 + \log 3 = 5(0.3) + 0.47 = 1.97$$

گام سوم:

$$\log 100 = \log 10^2 = 2, \log 5 = 1 - \log 2 = 0.7$$

گام چهارم:

$$\frac{n}{10} (1.97 - 2) = -0.7 \Rightarrow \frac{n}{10} (-0.03) = -0.7 \Rightarrow n = \frac{7}{0.03} = \frac{700}{3} \approx 234$$

گام پنجم:

تقریباً ۲۳۴ روز طول می‌کشد.



آمار و احتمال: آمار و احتمال: صفحه‌های ۱ تا ۱۲۷، ریاضی (۱): صفحه‌های ۱ تا ۱۳ و ۱۱۸ تا ۱۷۰

تست و پاسخ ۲۱

در سه گزاره p ، q و r اگر گزاره $(q \wedge r) \Rightarrow p$ نادرست باشد، با کدام احتمال گزاره $r \Rightarrow q$ درست است؟

فضای نمونه، کاهش یافته
حالت‌هایی می‌شود که
 $p \Rightarrow q \wedge r$ نادرست است.

$$\frac{1}{4} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{3} \quad (۴)$$

$$\frac{3}{4} \quad (۱)$$

$$\frac{2}{3} \quad (۳)$$

پاسخ گزینه ۳

مشاوره سؤال خوبی است که مشابه آن در کنکورهای قبل مطرح شده است. ببینید که منطق چگونه می‌تواند با احتمال ترکیب شود!

خودت حل کنی بهتره ببینید در جدول ارزش سه گزاره در چند حالت $(q \wedge r) \Rightarrow p$ نادرست است و از بین آن‌ها حالت‌هایی که $r \Rightarrow q$ درست است را انتخاب کنید.

درس نامه •• ترکیب گزاره‌ها

ارزش	فارسی	ریاضی	ترکیب گزاره‌ها
وقتی درست است که حداقل یکی از گزاره‌های p یا q درست باشد.	p یا q	$p \vee q$	ترکیب فصلی
وقتی درست است که p و q هر دو درست باشند.	p و q	$p \wedge q$	ترکیب عطفی
فقط در حالت «ن $\Rightarrow$ د» نادرست است و در بقیه حالت‌ها درست است.	اگر p آن‌گاه q	$p \Rightarrow q$	ترکیب شرطی
وقتی درست است که p و q هم‌ارزش باشند.	p اگر و فقط اگر q	$p \Leftrightarrow q$	ترکیب دوشروطی
ارزش آن برعکس p است.	نقیض p	$\sim p$	نقیض

پاسخ تشریحی گام اول: درست است که جدول ارزش سه گزاره $2 \times 2 \times 2 = 8$ ردیف دارد؛ اما چون می‌دانیم گزاره $p \Rightarrow q \wedge r$ نادرست است فقط باید ردیف‌هایی را در نظر بگیریم که این گزاره نادرست باشد.

گام دوم: گزاره شرطی فقط وقتی نادرست است که فرض (p) درست و حکم ($q \wedge r$) نادرست باشد.

$q \wedge r$ نیز وقتی نادرست است که هر دو نادرست یا یکی نادرست باشد؛ پس در سه حالت مقابل گزاره $p \Rightarrow q \wedge r$ نادرست است.

p	q	r
د	د	ن
د	ن	د
د	ن	ن

p	q	r	$q \Rightarrow r$
د	د	ن	ن
د	ن	د	د
د	ن	ن	د

گام سوم: ارزش گزاره $q \Rightarrow r$ را در ۳ حالت بررسی می‌کنیم:

پس در دو حالت ارزش $q \Rightarrow r$ درست است.

گام چهارم: از ۳ حالت ممکن (فضای نمونه کاهش یافته) دو حالت مطلوب است؛ پس احتمال برابر $\frac{2}{3}$ می‌شود.



تست و پاسخ ۲۲

$$2^n - 1$$

اگر دو عضو جدید به مجموعه A اضافه کنیم، تعداد زیرمجموعه‌های این مجموعه جدید از ۳ برابر تعداد زیرمجموعه‌های ناتهی A، ۱۹ تا بیشتر است. در مورد تعداد عضوهای A کدام گزینه درست است؟

$$2^{n+2}$$

$n(A) = n$ بوده پس 2^n زیرمجموعه داشته است.

(۲) مربع کامل

(۴) مضرب ۳

(۱) دورقمی

(۳) عدد اول

پاسخ گزینه ۲

مشاوره کتاب درسی، اهمیت زیادی به موضوع زیرمجموعه داده است. این سؤال مهم در مورد تعداد زیرمجموعه‌ها که مشابه تمرین کتاب درسی هم هست قطعاً در سال‌های آینده مطرح خواهد شد.

خودت حل کنی بهتره تعداد عضوهای A را n بگیرد؛ پس تعداد عضوهای مجموعه جدید $n + 2$ می‌شود، حالا معادله مناسب را بنویسید.

درس نامه ••• تعداد زیرمجموعه‌ها

فرض کنیم مجموعه A دارای n عضو باشد. تعداد زیرمجموعه‌ها با شرایط خاص از روابط زیر به دست می‌آید:

تعداد کل زیرمجموعه‌ها	زیرمجموعه‌های ناتهی	زیرمجموعه‌های غیرخودش (سره)	زیرمجموعه‌های شامل k عضو خاص (فاقد k عضو خاص)	زیرمجموعه‌های k عضوی
2^n	$2^n - 1$	$2^n - 1$	2^{n-k}	$\binom{n}{k}$

زیرمجموعه‌های k عضوی شامل x عضو خاص	زیرمجموعه‌های k عضوی فاقد x عضو خاص
$\binom{n-x}{k-x}$	$\binom{n-x}{k}$

پاسخ تشریحی گام اول: اگر A دارای n عضو باشد 2^n زیرمجموعه دارد. یکی از این‌ها تهی است؛ پس مجموعه A دارای $2^n - 1$ زیرمجموعه ناتهی است.

گام دوم: اگر دو عضو به A اضافه شود؛ دارای $n + 2$ عضو و 2^{n+2} زیرمجموعه می‌شود.

گام سوم: 2^{n+2} تعداد ۱۹ تا بیشتر از سه برابر $2^n - 1$ است؛ پس:

$$2^{n+2} = 19 + 3(2^n - 1) = 19 + 3 \times 2^n - 3 \Rightarrow 2^{n+2} - 3 \times 2^n = 16$$

$$4 \times 2^n - 3 \times 2^n = 2^n$$

$$2^n = 16 \Rightarrow n = 4$$

گام چهارم: اگر $2^{n+2} = 2^2 \times 2^n = 4 \times 2^n$ بنویسیم داریم:

گام پنجم: $n = 4$ مربع کامل است. بنابراین (۲) درست است

تست و پاسخ ۲۳

اگر A و B دو مجموعه باشند، متمم مجموعه $(A - B') \cup (B' - A')$ نسبت به مجموعه مرجع U کدام است؟

A (۴)

B (۳)

B' (۲)

A' (۱)

پاسخ گزینه ۱

مشاوره مشابه این سؤال هر سال در کنکور مطرح می‌شود. علاوه بر جبر مجموعه‌ها حواستان به روش شماره‌گذاری هم باشد.

خودت حل کنی بهتره از قانون تبدیل تفاضل به اشتراک استفاده کنید.



درس نامه •• جبر مجموعه ها

فرقی نمی کند کدام دو تا را اول اجتماع بگیریم. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$
فرقی نمی کند کدام دو تا را اول اشتراک بگیریم. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$

قوانین پخشی (عکس آن فاکتورگیری):

$$\begin{cases} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{cases}$$

قوانین زیرمجموعه $A \subseteq B$:

- $A \cup B = B$
- $A \cap B = A$ (تمامی روابط دوطرفه هستند.)
- $A - B = \emptyset$

قوانین دمورگان:

$$\begin{cases} (A \cup B)' = A' \cap B' \\ (A \cap B)' = A' \cup B' \end{cases}$$

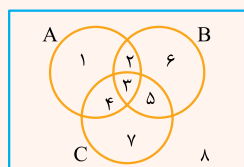
قانون تبدیل تفاضل به اشتراک: $A - B = A \cap B'$

قوانین جذب:

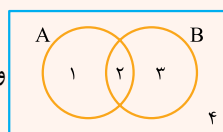
$$\begin{cases} A \cup (A \cap B) = A & (A \cap B \subseteq A \text{ چون}) \\ A \cap (A \cup B) = A & (A \subseteq A \cup B \text{ چون}) \end{cases}$$

نکته برای ساده سازی عبارت های مجموعه ای می توانیم از نمودار ون هم کمک بگیریم.

درس نامه •• روش شماره گذاری برای به دست آوردن عبارت های مجموعه ای



و اگر سه مجموعه داشته باشیم، شکلی به صورت



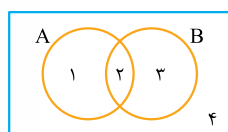
اگر دو مجموعه داشته باشیم، شکلی به صورت

رسم کرده و نواحی را شماره گذاری می کنیم. حاصل عبارت داده شده را به دست آورده و بررسی می کنیم که با کدام گزینه برابر است.

پاسخ تشریحی روش اول: گام اول: از قانون تبدیل تفاضل به اشتراک داریم:

$$(A - B') \cup (B' - A') = (A \cap (B')') \cup (B' \cap (A')') = (A \cap B) \cup (B' \cap A)$$

$$A \cap (B \cup B') = A$$



$$(A - B') \cup (B' - A') = (\{1, 2\} - \{1, 4\}) \cup (\{1, 4\} - \{3, 4\}) = \{2\} \cup \{1\} = \{1, 2\} = A$$

گام سوم: متمم A همان A' می شود.

تست و پاسخ ۲۴

نقاطی در صفحه که $x \in A$ و $y \in B$

اگر $A = [-1, 2]$ و $B = [-3, 1]$ ، مساحت ناحیه $B \times A - A \times B$ کدام است؟

۸ (۴)

۷ (۳)

۶ (۲)

۵ (۱)

پاسخ گزینه ۴



مشاوره از فصل اول آمار و احتمال معمولاً دو سؤال در کنکور مطرح می‌شود. تجربه نشان داده است که یک سال در میان معمولاً از موضوع ضرب دکارتی سؤال آمده است.

خودت حل کنی بهتره $A \times B$ و $B \times A$ هر کدام یک سطح در صفحه مختصات می‌شوند.

درس نامه ●● نمودار حاصل ضرب دکارتی

برای رسم نمودار $A \times B$ ، A را روی محور x ها و B را روی محور y ها مشخص می‌کنیم:

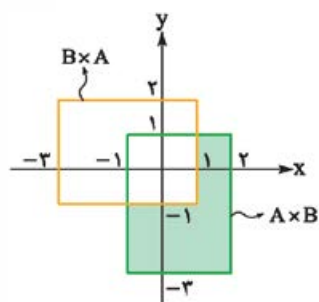
زوج مرتب‌هایی (نقاطی) که مؤلفه اول آن‌ها از A و مؤلفه دوم از B می‌آید. $A \times B = \{(x, y) | x \in A, y \in B\}$

$n(A) = k, n(B) = m \Rightarrow n(A \times B) = km$ (زوج مرتب km)

نمودار، سطح یک مستطیل می‌شود که $x \in A, y \in B$ هستند. $\Rightarrow A$ و B هر دو بازه

نمودار، k خط یا پاره‌خط یا نیم‌خط عمودی می‌شود. $\Rightarrow B$ بازه، $n(A) = k$

نمودار، m خط یا پاره‌خط یا نیم‌خط افقی می‌شود. $\Rightarrow A$ بازه، $n(B) = m$



پاسخ تشریحی **گام اول:** برای رسم $A \times B$ بازه $[-1, 2]$ را روی محور x ها و بازه $[-3, 1]$ را روی محور y ها مشخص می‌کنیم. برای رسم $B \times A$ نیز بازه $[-3, 1]$ را روی محور x ها و بازه $[-1, 2]$ را روی محور y ها مشخص می‌کنیم.

گام دوم: هر دو ناحیه را در دستگاه رسم کنیم:

گام سوم: $A \times B - B \times A$ قسمتی می‌شود که فقط در $A \times B$ هستند. (قسمت سبزرنگ)

گام چهارم: $\text{مساحت ناحیه رنگی} = \underbrace{3 \times 4}_{\text{مساحت } A \times B} - \underbrace{2 \times 2}_{\text{مربع مشترک}} = 12 - 4 = 8$

تست و پاسخ ۲۵

از میان مریم، نیما، سیمین و ۷ نفر دیگر به چند طریق می‌توان سه نفر انتخاب کرد، به شرط آن که مریم و نیما با هم انتخاب نشوند و مریم و سیمین یا با هم انتخاب شوند یا هیچ کدام انتخاب نشوند؟

فقط یکی از آن‌ها انتخاب شود یا هیچ کدام.

۸۴ (۴) ۷۷ (۳) ۷۰ (۲) ۶۳ (۱)

پاسخ گزینه ۱

مشاوره تسلط روی فصل ۶ ریاضی دهم (شمارش بدون شمردن) بسیار مهم است. معمولاً یک سؤال مستقیم دارد، به علاوه آن‌که در بسیاری از سؤال‌های احتمال و گسسته به صورت غیر مستقیم وجود دارد.

خودت حل کنی بهتره دو حالت در نظر بگیرید که مریم انتخاب می‌شود یا خیر.

درس نامه ●● ۱. انتخاب

تعداد انتخاب‌های r شیء از n شیء متمایز (ترکیب r شیء از n شیء):

$$C(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \quad (0 \leq r \leq n)$$

دقت کنید ترتیب بین اشیای انتخاب شده اهمیتی ندارد.



درس نامه •• ۲. محاسبه ساده تر فرمول انتخاب

مثال	فرمول
$\binom{5}{0} = 1, \binom{7}{7} = 1$	$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
$\binom{10}{1} = 10$	$\binom{n}{1} = n$
$\binom{10}{2} = \frac{10 \times 9}{2} = 45, \binom{8}{2} = \frac{8 \times 7}{2} = 28$	$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$
$\binom{7}{3} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 35$	$\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \times 2 \times 1}$
$\binom{8}{4} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 70$	$\binom{n}{4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$
$\binom{5}{3} = \binom{5}{5-3} = \binom{5}{2} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$	$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$

پاسخ تشریحی گام اول: دو حالت در نظر می گیریم: (۱) مریم انتخاب نشود. (۲) مریم انتخاب شود.

گام دوم: (۱) مریم انتخاب نشود: سیمین هم نباید انتخاب بشود؛ بنابراین کافی است ۳ تا از ۸ نفر (نیما به علاوه ۷ نفر دیگر) باقی مانده را به روش انتخاب کنیم. دقت کنید نیما ممکن است انتخاب بشود یا نشود.

گام سوم: (۲) مریم انتخاب بشود: سیمین هم باید انتخاب بشود و نیما نیز نباید انتخاب بشود پس نیما را کنار می گذاریم (۷ نفر می ماند)؛ پس کافی است ۱ نفر از ۷ نفر باقی مانده را به روش انتخاب کنیم.

گام چهارم: طبق اصل جمع $\binom{8}{3} + \binom{7}{1} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 56 + 7 = 63$

تست و پاسخ ۲۶

یک عدد طبیعی ۳ رقمی به تصادف انتخاب می شود، با کدام احتمال شامل رقم صفر و فاقد رقم تکراری است؟

۰ / ۱۶ (۲)

۰ / ۲۵ (۱)

۰ / ۱۸ (۴)

۰ / ۱۷ (۳)

پاسخ گزینه ۲

مشاوره سؤال بسیار مهمی است. ظاهر آن احتمال ولی باطن آن روش های شمارش است. سؤال روش های شمارش معمولاً در قالب احتمال مطرح می شوند هر چند سؤال مستقیم هم از آن ها ممکن است در کنکور بیاید.

خودت حل کنی بهتره یکان یا دهگان باید صفر باشد.

درس نامه •• احتمال پیشامد A در فضای هم شانسی

اگر احتمال رخ دادن هر کدام از عضوهای فضای نمونه یکسان باشد، فضای نمونه را هم شانسی می گوئیم.



نکته خط اول مسئله معمولاً کل حالت‌ها یا همان مخرج کسر را بیان می‌کند. از جمله بعد از «احتمال آن که ...» یا «مطلوب است ...» نیز حالت‌های مطلوب یا صورت کسر را به دست می‌آوریم.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\text{تعداد مطلوب}}{\text{کل حالت‌ها}}$$

$$n(S) = \frac{9}{\text{غیر صفر}} \times \frac{10}{\text{صفر}} \times \frac{10}{\text{صفر}} = 900$$

پاسخ تشریحی گام اول: تعداد کل اعداد سه‌رقمی برابر است با:

گام دوم: تعداد اعداد مطلوب را به دست می‌آوریم: صفر در یکان یا دهگان ممکن است قرار داشته باشد:

$$\left. \begin{array}{l} 1) \frac{9}{\text{غیر صفر}} \times \frac{1}{\{0\}} \times \frac{8}{\text{صفر و صدگان}} = 72 \\ 2) \frac{9}{\text{صفر}} \times \frac{8}{\text{صفر و صدگان}} \times \frac{1}{\{0\}} = 72 \end{array} \right\} \xrightarrow{\oplus} n(A) = 72 + 72 = 144$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{144}{900} = \frac{16}{100} = 0.16$$

گام سوم:

تست و پاسخ ۲۷

در یک آزمایش با فضای نمونه‌ای $S = \{a_1, a_2, \dots, a_5\}$ اگر $P(a_i) = m(i^2 + 1)$ ، $(i = 0, 1, 2, 3, 4)$ و $P(a_5) = \frac{2}{19}$ باشد، احتمال رخ دادن پیشامد $\{a_3, a_5\}$ کدام است؟

در این رابطه‌ها اعداد ۱ تا ۴ می‌توانید قرار بدهید.

$$\frac{13}{38} \quad (4)$$

$$\frac{11}{38} \quad (3)$$

$$\frac{8}{19} \quad (2)$$

$$\frac{7}{19} \quad (1)$$

پاسخ گزینه ۱

مشاوره در احتمال غیرهم‌شانس فقط حواستان به این نکته باشد که جمع تک‌تک احتمال‌ها برابر یک است.

$$\dots, P(a_4) = 5m, P(a_3) = 2m$$

خودت حل کنی بهتره

درس‌نامه ●● احتمال غیرهم‌شانس

اگر احتمال رخ دادن حداقل دو عضو فضای نمونه متفاوت باشد؛ می‌گوییم فضای نمونه غیرهم‌شانس است.

نکته در فضای نمونه غیرهم‌شانس S ، سعی می‌کنیم کوچک‌ترین احتمال را X در نظر بگیریم و بقیه را برحسب آن بنویسیم:

S	s_1	s_2	...	s_n
احتمال	$P(s_1)$	$P(s_2)$	...	$P(s_n)$

$$1) \text{ جمع احتمال‌ها } 1 \Rightarrow P(s_1) + \dots + P(s_n) = 1$$

$$2) P(\{s_1, s_2\}) = P(s_1) + P(s_2)$$

احتمال s_1 یا s_2

$$3) P(s_1) = 1 - P(\text{بقیه}) \quad \text{یا} \quad P(\{s_1, s_2\}) = 1 - P(\text{بقیه})$$

پاسخ تشریحی گام اول: $P(a_i) = m(i^2 + 1)$ را در $i = 1, 2, 3, 4$ قرار می‌دهیم:

$$P(a_1) = 2m, \quad P(a_2) = 5m, \quad P(a_3) = 10m, \quad P(a_4) = 17m$$

گام دوم: $P(a_5) = \frac{2}{19}$ است. از طرفی مجموع احتمال‌ها برابر یک است پس:

$$2m + 5m + 10m + 17m + \frac{2}{19} = 1 \Rightarrow 34m = \frac{17}{19} \Rightarrow m = \frac{1}{38}$$

$$P(\{a_3, a_5\}) = P(a_3) + P(a_5) = 10m + \frac{2}{19} = \frac{10}{38} + \frac{2}{19} = \frac{5}{19} + \frac{2}{19} = \frac{7}{19}$$

گام سوم:



تست و پاسخ ۲۸

سه تاس آبی، سبز و قرمز را با هم پرتاب می‌کنیم. اگر بدانیم تاس آبی حداقل ۳ آمده است، با کدام احتمال مجموع اعداد رو شده سه تاس برابر ۹ است؟

$$\begin{aligned} (1) \quad & \frac{5}{36} \\ (2) \quad & \frac{1}{8} \\ (3) \quad & \frac{13}{216} \\ (4) \quad & \frac{7}{72} \end{aligned}$$

(قرمز، سبز، حداقل ۳ آبی)

پاسخ گزینه ۴

مشاوره سؤال بسیار مهم ترکیب احتمال شرطی و پرتاب سه تاس! طراحان کنکور در حرکت رو به جلو از پرتاب دو تاس عبور کرده و به پرتاب سه تاس روی آورده‌اند.

خودت حل کنی بهتره از بین حالت‌هایی که تاس آبی (مثلاً تاس اول) حداقل ۳ آمده حالت‌هایی که مجموع برابر ۹ می‌شود را پیدا کنید.

درس‌نامه •• احتمال شرطی و روش کاهش فضای نمونه

← شرط رخ داده را دوم می‌نویسیم.

اگر A رخ داده، B را می‌خواهیم = می‌دانیم A رخ داده و احتمال B را می‌خواهیم. = احتمال B به شرط $P(B|A)$ در فضای هم‌شانس برای محاسبه $P(B|A)$ ، ابتدا تعداد حالت‌های A را می‌نویسیم (مخرج کسر) و حالت‌های B را از بین آن‌ها (صورت کسر) جدا می‌کنیم. به عبارت دیگر وقتی می‌دانیم A رخ داده، فضای نمونه به A کاهش پیدا می‌کند. حالا پیشامد مطلوب را از A جدا می‌کنیم.

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

فرمول احتمال شرطی:

$$P(B|A) = \frac{n(B \cap A)}{n(A)} = \frac{\text{تعداد عضوهای } A \cap B}{\text{تعداد عضوهای } A}$$

اگر فضا هم‌شانس باشد می‌توانیم بگوییم:

پاسخ تشریحی گام اول: شرط مسئله حداقل ۳ آمدن تاس آبی است؛ پس اگر پیشامد A را حداقل ۳ آمدن تاس آبی و پیشامد B را مجموع سه تاس برابر ۹ در نظر بگیریم باید $P(B|A)$ را به دست آوریم.

تاس آبی حداقل ۳ و مجموع برابر ۹ باشد.

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{n(B \cap A)}{n(A)}$$

گام دوم: از فرمول احتمال شرطی داریم:

$$\text{تاس قرمز} \times \text{تاس سبز} \times \text{تاس آبی} = \frac{6}{4} \times \frac{6}{3} \times \frac{4}{3} = 8$$

تاس آبی حداقل ۳ بیاید: $\{3, 4, 5, 6\}$

گام سوم: $n(A)$ را به دست می‌آوریم:

گام چهارم: $n(B \cap A)$ را به دست می‌آوریم:

$$\Rightarrow \text{مجموع دو تاس سبز و قرمز باید ۶ باشد} \Rightarrow (3, 1, 5), (3, 5, 1), (3, 4, 2), (3, 2, 4), (3, 3, 3)$$

$$\Rightarrow \text{مجموع دو تاس سبز و قرمز باید ۵ باشد} \Rightarrow (4, 1, 4), (4, 4, 1), (4, 2, 3), (4, 3, 2)$$

$$\Rightarrow \text{مجموع دو تاس سبز و قرمز باید ۴ باشد} \Rightarrow (5, 1, 3), (5, 3, 1), (5, 2, 2)$$

$$\Rightarrow \text{مجموع دو تاس سبز و قرمز باید ۳ باشد} \Rightarrow (6, 1, 2), (6, 2, 1)$$

$$n(B \cap A) = 14$$

پس:

$$\text{احتمال} = \frac{14}{4 \times 6 \times 6} = \frac{7}{72}$$

گام پنجم:



تست و پاسخ ۲۹

سه کیسه داریم. در کیسه اول ۵ کارت به شماره‌های ۱ تا ۵، در کیسه دوم سه توپ آبی و دو توپ سفید و در کیسه سوم ۴ توپ آبی و ۶ توپ سفید وجود دارد. از کیسه اول ۲ کارت به تصادف خارج می‌کنیم. اگر حاصل جمع عددهای دو کارت فرد بود؛ از کیسه دوم ۲ توپ و اگر حاصل جمع عددهای دو کارت، زوج بود؛ از کیسه سوم ۲ توپ خارج می‌کنیم. با کدام احتمال توپ‌های خارج شده هم‌رنگند؟

$$\frac{14}{75} \quad (۴)$$

$$\frac{32}{75} \quad (۳)$$

$$\frac{6}{25} \quad (۲)$$

$$\frac{7}{25} \quad (۱)$$

پاسخ گزینه ۳

مشاوره احتمال، فصل دوم درس آمار و احتمال و مهم‌ترین فصل آن است که معمولاً ۳ سؤال از آن (تا ۴ تا هم آمده) در کنکور می‌آید.

خودت حل کنی بهتره از احتمال شاخه‌ای استفاده کنید. جمع دو عدد وقتی فرد می‌شود که یکی فرد و دیگری زوج باشد.

درس نامه •• قانون احتمال کل

برخی از مواقع برای به دست آوردن یک احتمال مجبوریم چند حالت در نظر بگیریم (نمودار شاخه‌ای)، در هر شاخه احتمال‌ها را ضرب کرده و سپس آن‌ها را با هم جمع می‌کنیم.

پاسخ تشریحی گام اول: در بین کارت‌های ۱ تا ۵، سه عدد فرد و دو عدد زوج داریم؛ پس اگر دو کارت خارج کنیم به احتمال

$$\frac{\binom{3}{1}\binom{2}{1}}{\binom{5}{2}} = \frac{3 \times 2}{10} = 0/6$$

یکی فرد و یکی زوج (در نتیجه جمع دو کارت فرد) می‌شود و به احتمال متمم آن (یعنی ۰/۴) جمع دو کارت زوج می‌شود.

گام دوم: طبق قانون احتمال کل داریم:

$$\frac{\binom{2}{2} + \binom{3}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{1+3}{10} = \frac{4}{10}$$

از کیسه دوم هر دو سفید یا هر دو آبی. جمع دو کارت فرد

$$\frac{\binom{4}{2} + \binom{6}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{6+15}{45} = \frac{7}{15}$$

از کیسه سوم هر دو آبی یا هر دو سفید. جمع دو کارت زوج

$$P(\text{هم‌رنگ}) = \frac{6}{10} \times \frac{4}{10} + \frac{4}{10} \times \frac{7}{15} = \frac{6}{25} + \frac{14}{75} = \frac{18+14}{75} = \frac{32}{75}$$

تست و پاسخ ۳۰

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند به طوری که $P(A \cap B) = 0/1$ و $P(A \cap B') = 0/4$ ، حاصل $P(A \cup B')$ کدام است؟

$$0/2 \quad (۴)$$

$$0/4 \quad (۳)$$

$$0/9 \quad (۲)$$

$$0/6 \quad (۱)$$

پاسخ گزینه ۲

مشاوره این سؤال دقیقاً یکی از تمرین‌های کتاب درسی است که بالآخره در سال‌های آینده در کنکور خواهد آمد. از آن غافل نشوید!

خودت حل کنی بهتره اگر A و B مستقل باشند، احتمال اشتراک A و B یا اشتراک A و B' یا اشتراک A' و B یا اشتراک A' و B'

B' برابر ضرب احتمال آن‌ها می‌شود.



درس نامه •• قوانین احتمال

(۱) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ احتمال رخ دادن A یا B

(۲) $P(A \cap B') = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$ احتمال رخداد A و عدم رخداد B

(۳) $P(A') = 1 - P(A)$ احتمال آن که A رخ ندهد

(۴) $P(A - B) \cup P(B - A) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$ احتمال آن که فقط یکی از A و B رخ بدهد

(۵) $P(A' \cap B') = P(A \cup B)' = 1 - P(A \cup B)$ احتمال آن که نه A رخ بدهد و نه B

درس نامه •• پیشامدهای مستقل و وابسته

A و B را دو پیشامد مستقل می‌گوییم؛ هرگاه رخداد یا عدم رخداد یکی تأثیری در محاسبه احتمال دیگری نداشته باشد.
تعریف ریاضی مستقل بودن دو پیشامد: $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \Leftrightarrow A \text{ و } B \text{ مستقل‌اند.}$

نکات ۱ اگر A و B مستقل نباشند (تساوی بالا برقرار نباشد)، دو پیشامد را وابسته می‌گوییم.

۲ اگر A و B مستقل باشند، رخداد یا عدم رخداد A تأثیری در محاسبه احتمال B ندارد؛ یعنی:

$P(B|A) = P(B|A') = P(B) \quad (P(A) \neq 0)$

۳ اگر A و B مستقل باشند: الف) $P(A' \cap B') = P(A) \times P(B')$ ب) $P(B \cap A') = P(B) \times P(A')$ و پ) $P(A' \cap B) = P(A') \times P(B)$ و $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ یعنی احتمال اشتراک هر دوتایی از آن‌ها برابر ضرب احتمال آن‌ها می‌شود.

پاسخ تشریحی گام اول: A و B مستقل‌اند، پس $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

گام دوم: طبق درس‌نامه B' و A نیز مستقل‌اند و $P(A \cap B') = P(A) \times P(B')$

گام سوم: طبق داده‌های تست داریم:

$$\begin{cases} P(A)P(B) = 0/1 \\ P(A)P(B') = 0/4 \end{cases} \xrightarrow{\text{تقسیم}} \frac{P(B)}{P(B')} = \frac{0/1}{0/4} = \frac{1}{4}$$

گام چهارم:

$$\xrightarrow{P(B')=1-P(B)} \frac{P(B)}{1-P(B)} = \frac{1}{4} \Rightarrow 4P(B) = 1 - P(B) \Rightarrow P(B) = \frac{1}{5} \Rightarrow P(B') = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5} = 0/8$$

گام پنجم:

$$P(A) \times \frac{1}{5} = 0/1 \Rightarrow P(A) = 0/5$$

$$P(A \cup B') = P(A) + P(B') - P(A \cap B') = 0/5 + 0/8 - 0/4 = 0/9$$

تست و پاسخ ۳۱

دو کارت که هر دو طرف آن قرمز است.

دسته‌ای کارت شامل ۲ کارت دورو قرمز و ۸ کارت یک‌رو سبز و یک‌رو قرمز و ۲ کارت دورو سبز است. کاردی را به تصادف از این دسته انتخاب می‌کنیم و فقط یک روی آن را مشاهده می‌کنیم و می‌بینیم که قرمز است. احتمال این که روی دیگر کارت نیز قرمز باشد، چه قدر است؟

(۲) $\frac{1}{2}$

(۴) $\frac{2}{3}$

(۱) $\frac{2}{5}$

(۳) $\frac{1}{3}$

پاسخ گزینه ۳



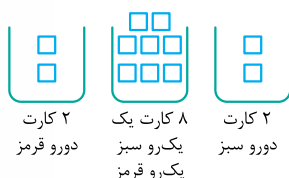
مشاوره تمرین مهم کتاب درسی که باید آماده آمدن آن در سال های آینده کنکور باشید.

خودت حل کنی بهتره فضای نمونه کاهش یافته، روهایی می شود که ممکن است مشاهده کرده باشیم. از بین آن ها مطلوب ها را جدا کنید.

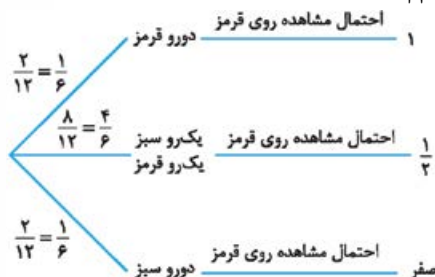
درس نامه •• قانون بیز

اگر در یک مسئله شاخه ای، احتمال شرطی را بخواهیم (یعنی احتمال کل رخ داده و یکی از شاخه ها را بخواهیم)، از قانون بیز استفاده می کنیم. در این قانون سهم احتمال یک شاخه را بر مجموع شاخه ها (احتمال کل) تقسیم می کنیم.

پاسخ تشریحی روش اول: گام اول: سه دسته کارت به صورت مقابل داریم:



گام دوم: ۱۲ کارت داریم پس کارت انتخابی به احتمال $\frac{2}{12}$ از دسته اول، $\frac{8}{12}$ از دسته دوم و $\frac{2}{12}$ از دسته سوم است.



گام سوم: طبق قانون بیز احتمال آن که روی دیگر قرمز باشد، همان شاخه اول است؛ پس داریم:

$$P(\text{مشاهده قرمز} | \text{دو رو قرمز}) = \frac{\frac{1}{6} \times 1}{\frac{1}{6} \times 1 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \times 0} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + 0} = \frac{1}{2}$$

روش دوم: گام اول: ۱۲ کارت داریم که ۲۴ تا رو (همان رو و پشت) دارند. از بین این ها ۸ + ۲ + ۲ = ۱۲ تا قرمز است؛ پس فضای نمونه کاهش یافته همان ۱۲ است (ممکن است هر کدام از این ۱۲ روی قرمز را مشاهده کرده باشیم).

گام دوم: از بین این ۱۲ روی قرمز مشاهده شده، ۴ رو وجود دارند که طرف دیگر هم قرمز است (در کارت های دورو قرمز هر طرف را که ببینیم طرف دیگر قرمز است)؛ پس حالت های مطلوب برابر ۴ تا است؛ بنابراین احتمال برابر $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ می شود.

تست و پاسخ ۳۳

در نمودار میله ای مربوط به فراوانی چهار داده x_1, x_2, x_3, x_4 اگر طول میله مربوط به x_1 دو واحد اضافه شود و طول بقیه میله ها ثابت بماند،

در نمودار دایره ای مربوط به این داده ها، زاویه مربوط به x_1 به اندازه 48° اضافه می شود، تعداد داده ها کدام است؟

۱۵ (۲) ۱۲ (۳) ۲۴ (۴) ۱۰ (۱)

پاسخ گزینه ۱

مشاوره متأسفانه کتاب درسی در موضوع آمار توصیفی تمرین های قابل توجهی مطرح نکرده است؛ اما تجربه چندساله نشان می دهد

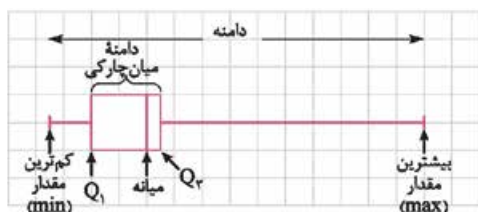
که طراحان کنکور فراتر از کتاب درسی عمل می کنند.

خودت حل کنی بهتره زاویه اولیه در نمودار دایره ای برابر $360^\circ \times \frac{f}{n}$ و در حالت بعدی $360^\circ \times \frac{f+2}{n+2}$ می شود.



درس نامه •• بررسی انواع نمودارهای آماری

نمودار بافت نگاشت (مستطیلی یا هیستوگرام)	نمودار میله‌ای
(۱) روی محور افقی دسته‌ها را مشخص می‌کنیم. (۲) روی محور عمودی فراوانی یا درصد فراوانی را مشخص می‌کنیم. (۳) به ارتفاع مناسب در هر کدام یک مستطیل با ارتفاع فراوانی رسم می‌کنیم. (نکات ۱) اگر طول هر دسته L باشد، مساحت مستطیل برابر (فراوانی آن دسته $\times L$) است. (۲) اگر طول دسته‌ها (عرض مستطیل‌ها) برابر L و تعداد داده‌ها برابر n باشد مجموع مساحت مستطیل‌ها برابر nL است.	(۱) روی محور افقی متغیرها را مشخص می‌کنیم. (۲) روی محور عمودی فراوانی یا درصد فراوانی را مشخص می‌کنیم. (۳) در هر کدام یک میله با ارتفاع فراوانی رسم می‌کنیم. (نکات ۱) اگر محور عمودی فراوانی باشد، مجموع ارتفاع میله‌ها (مجموع فراوانی‌ها)، همان تعداد کل داده‌ها است. (۲) اگر فراوانی میله f_i باشد درصد فراوانی آن برابر است با: $\frac{f_i}{\text{مجموع فراوانی‌ها}} \times 100$ (۳) اگر مقایسه میله‌ها مد نظر باشد، بهتر است محور عمودی را درصد فراوانی در نظر بگیریم.
نمودار جعبه‌ای	نمودار دایره‌ای
(۱) داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم. (۲) کم‌ترین مقدار، بیشترین مقدار، میانه و چارک اول و سوم را به دست می‌آوریم. (۳) نموداری به صورت زیر با پنج مقدار فوق رسم می‌کنیم.	(۱) اگر تعداد کل داده‌ها برابر n و فراوانی داده شماره iام برابر f_i باشد، زاویه مرکزی مربوط به این داده را به دست می‌آوریم: $\text{زاویه} = \frac{f_i}{n} \times 360^\circ$ فراوانی نسبی (۲) زاویه‌ها را به دست آورده و در یک دایره رسم می‌کنیم.



(نکات ۱) دامنه $\text{max} - \text{min}$

(۲) دامنه میان چارکی $Q_3 - Q_1$

پاسخ تشریحی گام اول: اگر فراوانی داده X_1 را f بگیریم، زاویه مربوط به آن در نمودار دایره‌ای برابر $36^\circ \times \frac{f}{n}$ می‌شود.

گام دوم: با اضافه شدن دو واحدی میله X_1 فراوانی آن $f + 2$ و فراوانی کل $n + 2$ می‌شود؛ پس زاویه جدید آن در نمودار دایره‌ای $36^\circ \times \frac{f+2}{n+2}$ می‌شود.

گام سوم:

$$\frac{f+2}{n+2} \times 36^\circ - \frac{f}{n} \times 36^\circ = 48^\circ \Rightarrow 36^\circ \left(\frac{f+2}{n+2} - \frac{f}{n} \right) = 48^\circ \Rightarrow \frac{fn+2n-fn-2f}{n(n+2)} = \frac{48}{36^\circ} = \frac{2}{15} \Rightarrow \frac{2(n-f)}{n(n+2)} = \frac{2}{15}$$

$$\Rightarrow 15(n-f) = n(n+2) \Rightarrow 15n - 15f = n^2 + 2n \Rightarrow 15f = -n^2 + 13n \Rightarrow f = \frac{13n - n^2}{15} = \frac{n(13-n)}{15}$$

گام چهارم: فراوانی (f) عددی نامنفی و صحیح است، پس باید $0 \leq n \leq 13$ (رد ۲ و ۴) و $n(13-n)$ بر ۱۵ بخش پذیر باشد.

گام پنجم: با امتحان گزینه‌ها فقط به ازای $n = 10$ داریم:

$$f = \frac{10 \times (13-10)}{15} = \frac{30}{15} = 2$$



۳۳

تست و پاسخ

در ۱۵ داده آماری اگر کمترین داده برابر ۱، $Q_1 = 4$ ، $Q_2 = 10$ ، $Q_3 = 15$ و بیشترین داده برابر ۱۸ باشد، بیشترین مقدار میانگین داده‌ها کدام است؟

چارک سوم

میانه

چارک اول

$$\frac{159}{15} \quad (2)$$

$$\frac{167}{15} \quad (4)$$

$$\frac{157}{15} \quad (1)$$

$$\frac{161}{15} \quad (3)$$

پاسخ گزینه ۴

مشاوره از آمار توصیفی معمولاً یک سؤال در کنکور می‌آید. تجربه ۱۰ سال اخیر نشان می‌دهد که طراحان کنکور علاقه عجیبی به ترکیب نمودار جعبه‌ای با سایر موضوعات این فصل دارند. این سؤال مهم نیز یکی از همین‌هاست!

خودت حل کنی بهتره شماره داده‌های چارک اول، دوم و سوم را پیدا کنید و اعداد بین آن‌ها را بیشترین حالت ممکن در نظر بگیرید.

درس نامه •• میانه

عددی که بعد از مرتب کردن داده‌ها، در وسط قرار می‌گیرد.

فرض کنید n داده داریم. دو حالت ممکن است پیش بیاید:

(۱) n فرد باشد: در این جا فقط یک عدد در وسط قرار می‌گیرد که همان میانه است. شماره این داده (نه خودش) $\frac{n+1}{2}$ می‌شود؛ مثلاً می‌خواهیم میانه اعداد ۳، ۱، ۷، ۲ را به دست آوریم. اول با مرتب‌سازی به ۱، ۲، ۳، ۷ می‌رسیم. ۵ تا عدد داریم. داده شماره ۳ $= \frac{5+1}{2}$ ؛ یعنی سومی که عدد ۲ باشد، میانه است.

(۲) n زوج باشد: در این جا دو عدد در وسط قرار می‌گیرند. شماره‌های این دو عدد $\frac{n}{2}$ و $\frac{n}{2} + 1$ است؛ مثلاً اگر ده تا عدد داشته باشیم، پنجمی و ششمی در وسط می‌افتند. معدل این دو عدد را میانه در نظر می‌گیریم؛ مثلاً میانه اعداد ۱، ۱، ۲، ۵، ۷، ۱۰ معدل داده‌های سوم و چهارم؛ یعنی $\frac{2+5}{2} = 3.5$ می‌شود.

چارک اول و سوم

میانه داده‌های قبل از چارک اول و میانه داده‌های بعد از چارک سوم می‌گوییم. چارک اول و سوم را به ترتیب با Q_1 و Q_3 نمایش می‌دهیم. چارک دوم همان میانه است پس میانه را با Q_2 نمایش می‌دهیم؛ مثلاً برای محاسبه چارک‌های داده‌های زیر داریم:

داده‌های قبل از میانه: ۱، ۲، ۳، ۴
داده‌های بعد از میانه: ۴، ۵، ۶، ۷، ۹
 $Q_1 = 2.5$ Q_2 $Q_3 = 6.5$

نکته برای محاسبه چارک اول و سوم میانه را کنار بگذارید و فقط داده‌های قبل و بعد را در نظر بگیرید.

پاسخ تشریحی گام اول: داده‌های مرتب شده را در نظر می‌گیریم. در ۱۵ عدد داده شماره ۸ $= \frac{15+1}{2}$ (هشتمی) که در وسط می‌افتد میانه است. با توجه به چارک اول و سوم داده‌ها به صورت زیر هستند:

۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸

گام دوم: بزرگ‌ترین مقدار دایره‌ها را در نظر می‌گیریم تا میانگین به بیشترین مقدار خودش برسد!

۱، ۴، ۴، ۴، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۵، ۱۵، ۱۵، ۱۵، ۱۸، ۱۸، ۱۸

$$\bar{x} = \frac{1+3 \times 4+4 \times 10+4 \times 15+3 \times 18}{15} = \frac{1+12+40+60+54}{15} = \frac{167}{15}$$

گام سوم:



۳۴

تست و پاسخ

$$\frac{CV_2}{CV_1} = ?$$

در ۲۰ داده آماری انحراف معیار برابر ۲ است. با افزودن ۵ داده مساوی با میانگین، ضریب تغییرات چند برابر می شود؟

$$\frac{4\sqrt{5}}{5} \quad (۴)$$

$$\frac{3\sqrt{5}}{5} \quad (۳)$$

$$\frac{\sqrt{5}}{5} \quad (۲)$$

$$\frac{2\sqrt{5}}{5} \quad (۱)$$

پاسخ گزینه ۱

مشاوره درس سوم آمار توصیفی (شاخص های پراکندگی) از بقیه موضوعات فصل مهم تر است و سؤال های بیشتری از آن نسبت به شاخص های مرکزی در کنکور آمده است.

خودت حل کنی بهتره افزودن یا کاستن تعدادی داده مساوی با میانگین صورت کسر فرمول انحراف معیار یا واریانس را تغییر نمی دهد.

درس نامه •• شاخص های پراکندگی

شاخص	فرمول	توضیح فارسی
واریانس	$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}$ یا $\sigma^2 = \frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n} - (\bar{x})^2$	هر داده را منهای میانگین کرده به توان ۲ می رسانیم، سپس با هم جمع کرده و تقسیم بر تعداد می کنیم. به زبان دیگر واریانس برابر میانگین مربع انحراف از میانگین هاست.
انحراف معیار	$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}}$	جذر واریانس است.
ضریب تغییرات	$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$	انحراف معیار میانگین
واریانس ۵ عدد متوالی	۲	-
واریانس n عدد حسابی با قدرنسبت d	$\sigma^2 = \left(\frac{n^2 - 1}{12}\right)d^2$	اگر اعداد تشکیل دنباله حسابی بدهند، این فرمول راحت تر از تعریف واریانس است.

بررسی یک تیپ مهم: اضافه یا حذف کردن تعدادی داده مساوی میانگین (یا دو گروه با میانگین مساوی)

(۱) فرض کنید واریانس تعدادی عدد برابر σ^2 باشد. می دانیم $\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}$

اگر k داده مساوی با میانگین اضافه کنیم، صورت کسر تغییر نمی کند و واریانس جدید برابر $\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n+k}$ می شود.

اگر k داده مساوی با میانگین حذف کنیم صورت کسر تغییر نمی کند و واریانس جدید برابر $\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-k}$ می شود.

(۲) فرض کنید میانگین گروهی از داده ها مساوی $\bar{x}$ باشد و $\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}$. اگر میانگین اعداد a و b و c نیز همان $\bar{x}$ باشد با اضافه کردن (یا حذف کردن) آن ها میانگین تغییری نمی کند.

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 + (a - \bar{x})^2 + (b - \bar{x})^2 + (c - \bar{x})^2}{n+3}$$

واریانس کل اعداد با هم برابر است با:

اگر سه عدد a, b, c از بین داده ها حذف شود، واریانس کل داده ها با هم می شود:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 - (a - \bar{x})^2 - (b - \bar{x})^2 - (c - \bar{x})^2}{n-3}$$



حواستون باشه اگر به جای a, b, c چندین عدد هم باشد، به همین ترتیب عمل می‌کنیم.

پاسخ تشریحی گام اول: واریانس برابر $\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}$ است. اگر داده x_j مساوی با میانگین اضافه کنیم میانگین کل تغییری نکرده

و $\bar{x} - x_j$ نیز مساوی صفر می‌شود؛ پس اگر $\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{25}}$ انحراف معیار اولیه باشد، با افزودن ۵ عدد مساوی میانگین، انحراف معیار

جدید $\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{25}}$ می‌شود. گام دوم:

$$\sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{25}} = 2 \Rightarrow \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{25} = 4 \Rightarrow \sum (x_i - \bar{x})^2 = 100$$

گام سوم: انحراف معیار جدید $= \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{25}} = \sqrt{\frac{100}{25}} = \sqrt{4} = 2$

گام چهارم: ضریب تغییرات یا CV برابر $\frac{\sigma}{\bar{x}}$ است. با افزودن چند داده مساوی با میانگین $\bar{x}$ تغییری نمی‌کند؛ پس:

$$\frac{CV_{\text{جدید}}}{CV_{\text{اولیه}}} = \frac{\frac{\sigma_2}{\bar{x}}}{\frac{\sigma_1}{\bar{x}}} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{2}{5} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

تست و پاسخ ۳۵

با یک نمونه ۲۶ عضوی، میانگین جامعه با اطمینان ۹۵٪ در بازه $(\frac{8}{2}, \frac{12}{6})$ قرار دارد. انحراف معیار برآورد میانگین با همین تعداد نمونه کدام است؟

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$6/6 (4)$$

$$3/3 (3)$$

$$2/2 (2)$$

$$1/1 (1)$$

پاسخ گزینه ۱

مشاوره در سال‌های اخیر از آمار استنباطی کمتر سؤال آمده است. برآورد بازه‌ای یک فرمول دارد که خیلی مهم است. دیر یا زود آن را در کنکور خواهید دید.

$$\bar{x} - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$$

خودت حل کنی بهتره

درس‌نامه •• انحراف معیار برآورد میانگین

از هر نمونه به اندازه n ، میانگین نمونه $\bar{x}$ به دست می‌آید. هر میانگین نمونه، برآوردی از میانگین جامعه (یا همان پارامتر جامعه یا μ) است.

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{\text{انحراف معیار جامعه}}{\sqrt{\text{اندازه نمونه}}}$$

انحراف معیار این برآوردها از رابطه زیر به دست می‌آید:

(دقت کنید در این رابطه تعداد عضوهای جامعه بسیار زیاد است.)

درس‌نامه •• برآورد بازه‌ای

برآورد بازه‌ای یا بازه اطمینان پارامتر جامعه عبارت است از: بازه‌ای عددی برای پارامتر به همراه یک درصد اطمینان که به ضریب اطمینان شهرت دارد.

برآورد بازه‌ای برای میانگین جامعه: اگر نمونه‌ای تصادفی به اندازه n در اختیار داشته باشیم، با اطمینان بیش از ۹۵٪ می‌توانیم بگوییم:

$$\bar{x} - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$$

که μ میانگین جامعه و σ انحراف معیار جامعه است.



نکات ۱) وسط بازه اطمینان همان میانگین نمونه ($\bar{X}$) است.

۲) طول بازه اطمینان برابر با $\frac{4\sigma}{\sqrt{n}}$ است.

پاسخ تشریحی گام اول: $n = 36$ و بازه اطمینان به صورت $(\bar{X} - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}})$ است؛ پس داریم:

$$\begin{cases} \bar{X} - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} = 8/2 \\ \bar{X} + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} = 12/6 \end{cases} \xrightarrow{+} 2\bar{X} = 20/8 \Rightarrow \bar{X} = 10/4$$

$$10/4 - \frac{2\sigma}{\sqrt{36}} = 8/2 \Rightarrow 2/2 = \frac{2\sigma}{6} = \frac{\sigma}{3} \Rightarrow \sigma = 6/6$$

گام دوم: $\bar{X}$ را جای گذاری می کنیم:

$$\text{انحراف معیار برآورد میانگین} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{6/6}{\sqrt{36}} = \frac{6/6}{6} = 1/6$$

گام سوم:



هندسه: هندسه (۲): صفحه‌های ۹ تا ۷۷، هندسه (۱): صفحه‌های ۹ تا ۹۶

تست و پاسخ ۳۶

پاره خط $AB = ۴$ در یک صفحه مفروض است. در این صفحه چند نقطه وجود دارد که از A به فاصله ۱ و از وسط AB به فاصله ۳ باشد؟

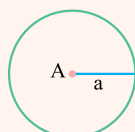
- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ بی شمار

پاسخ: گزینه ۱

مشاوره سؤال ساده‌ای که نباید از دستش بدهید، نمونه این سؤال را حتماً در کتاب تست‌تان دیده‌اید.

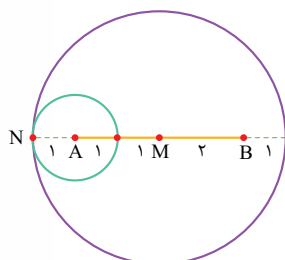
خودت حل کنی بهتره نقاط متساوی‌الفاصله از یک نقطه، روی چه شکلی قرار می‌گیرند؟

درس‌نامه



- تمام نقاطی که از نقطه ثابت A به فاصله a هستند، روی دایره‌ای به مرکز A و شعاع a قرار دارند.
- در مسائل یافتن نقطه مجهول دارای دو یا چند شرط، شکل حاصل از هر شرط مسئله را رسم می‌کنیم؛ نقطه مورد نظر، نقطه مشترک این شکل‌هاست.

پاسخ تشریحی گام اول (تحلیل سؤال): در این سؤال، نقطه مورد نظر دو شرط دارد: (۱) از A به فاصله ۱ باشد. (۲) از وسط AB به فاصله ۳ باشد.



گام دوم (یافتن شکل متناظر هر شرط و پاسخ سؤال): نقاطی که از A به فاصله ۱ هستند، روی دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۱ و نقاطی که از M (وسط AB) به فاصله ۳ هستند، روی دایره‌ای به مرکز M و شعاع ۳ قرار دارند. سؤال گفته $AB = ۴$ ، پس $AM = BM = \frac{۴}{۲} = ۲$. با توجه به شکل رسم‌شده، این دو دایره تنها در نقطه N مشترک‌اند.

تست و پاسخ ۳۷

برای آن که متوازی‌الاضلاع به طول قطرهای $۴a$ و ۶ که طول یک ضلع آن a است قابل رسم باشد، a کدام می‌تواند باشد؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

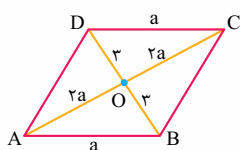
مشاوره در مسائل ترسیم، اول باید مسئله را حل‌شده فرض کنید، یعنی یک شکل فرضی رسم کنید و با توجه به آن شکل فرضی، مسئله را تحلیل کنید.

خودت حل کنی بهتره شکل فرضی را رسم کرده، مثلی در آن پیدا کنید که طول سه ضلع آن را دارید.

درس‌نامه

- در متوازی‌الاضلاع، قطرها همدیگر را نصف می‌کنند.
- در هر مثلث، مجموع طول هر دو ضلع، از طول ضلع سوم بیشتر است.

پاسخ تشریحی گام اول (رسم شکل فرضی و تحلیل آن): سؤال گفته طول قطرهای متوازی‌الاضلاع $۴a$ و ۶ است. در متوازی‌الاضلاع قطرها



همدیگر را نصف می‌کنند، پس با توجه به شکل، طول هر سه ضلع مثلث OAB را داریم.



گام دوم (استفاده از نامساوی مثلثی در مثلث OAB):

در مثلث OAB، باید مجموع طول هر دو ضلع از طول ضلع سوم بیشتر باشد، یعنی:

$$OA + OB > AB \Rightarrow 2a + 3 > a \Rightarrow a > -3 \quad (1)$$

$$OA + AB > OB \Rightarrow 2a + a > 3 \Rightarrow 3a > 3 \Rightarrow a > 1 \quad (2)$$

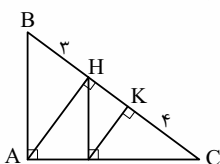
$$AB + OB > OA \Rightarrow a + 3 > 2a \Rightarrow a < 3 \quad (3)$$

گام سوم (یافتن پاسخ سؤال):

برای رسم متوازی الاضلاع ABCD، باید اول مثلث OAB را رسم کنیم (هر چند که در این سؤال نیازی به آن نداریم، ولی برای رسم ABCD بعد از رسم OAB، ضلع OA را به اندازه خود از طرف O امتداد می‌دهیم تا C به دست آید و OB را هم به اندازه خود تا D امتداد می‌دهیم تا D به دست آید. به این ترتیب چهار رأس متوازی الاضلاع معلوم می‌شوند و با وصل کردن آن‌ها به هم، متوازی الاضلاع ABCD رسم می‌شود). برای آن که مثلث OAB قابل رسم باشد، باید هر سه شرط (1)، (2) و (3) که در گام دوم به دست آوردیم، برقرار باشند؛ پس بین آن‌ها اشتراک می‌گیریم که در این صورت داریم $1 < a < 3$ ، پس با توجه به گزینه‌ها a می‌تواند 2 باشد.

تست و پاسخ ۳۸

مطابق شکل ارتفاع‌های مثلث‌های قائم‌الزاویه رسم شده‌اند. اگر $BH = 3$ و $CK = 4$ ، آن‌گاه طول پاره خط AH کدام است؟



$$3\sqrt{2} \quad (2)$$

$$2\sqrt{3} \quad (1)$$

$$\frac{3\sqrt{6}}{2} \quad (4)$$

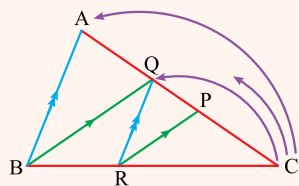
$$\sqrt{6} \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره این سؤال مشابه یکی از سؤال‌های کنکورهای قبل است؛ ترکیب دو مبحث مهم «قضیه تالس» و «روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه». تجربه نشان داده که ممکن است سؤال‌های مشابه کنکورهای قبل را در کنکورهای بعدی هم داشته باشیم.

خودت حل کنی بهتره اول باید طول HK را حساب کنید.

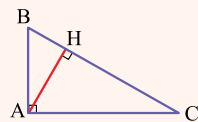
درس‌نامه



(۱) در شکل روبه‌رو که دو جفت پاره‌خط موازی وجود دارد، طول CQ واسطه هندسی طول‌های CP و CA است، یعنی $CQ^2 = CP \cdot CA$.

(۲) در مثلث قائم‌الزاویه، با رسم ارتفاع وارد بر وتر، وتر به دو پاره‌خط تقسیم می‌شود که طول ارتفاع وارد بر وتر، واسطه هندسی طول‌های این دو پاره‌خط است، یعنی:

$$AH^2 = BH \cdot CH$$



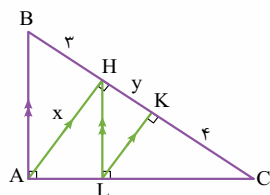
گام اول (محاسبه طول HK):

دو پاره‌خط BA و HL هر دو بر AC عمودند، پس با هم موازی‌اند. به دلیل مشابه AH و LK هم با هم موازی‌اند، پس همان‌طور که در قسمت (۱) درس‌نامه گفتیم، داریم:

$$CH^2 = CK \cdot CB$$

$$(4 + y)^2 = 4(3 + y + 4) \Rightarrow 16 + 8y + y^2 = 28 + 4y \Rightarrow y^2 + 4y - 12 = 0 \quad \text{پس:}$$

$$\Rightarrow (y - 2)(y + 6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = -6 \text{ (غیرقابل قبول)} \\ y = 2 \end{cases}$$





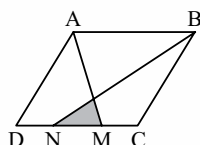
گام دوم (محاسبه طول AH):

در مثلث قائم الزاویه ABC، ارتفاع وارد بر وتر است، پس:

$$AH^2 = BH \cdot CH \Rightarrow x^2 = 3(2+4) \Rightarrow x^2 = 3 \times 6 \Rightarrow x = 3\sqrt{2}$$

تست و پاسخ ۳۹

در شکل رسم شده M وسط CN و N وسط DM است. مساحت متوازی الاضلاع ABCD چند برابر مساحت مثلث سایه خورده است؟



۲۱ (۲)

۱۸ (۱)

۲۷ (۴)

۲۴ (۳)

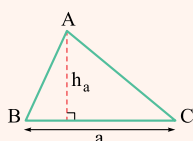
پاسخ: گزینه ۳

مشاوره استفاده از قضیه تالس و تشابه مثلث‌ها در محاسبه نسبت مساحت‌ها، از تیپ سؤال‌های پرتکرار در کنکور بوده است.

خودت حل کنی بهتره نسبت ارتفاع مثلث مشخص شده را به ارتفاع متوازی الاضلاع به دست آورید.

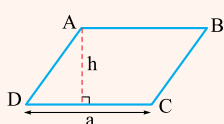
درس نامه

(۱) مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصل ضرب طول یک ضلع در ارتفاع وارد بر آن ضلع.



$$S = \frac{1}{2} a \cdot h_a$$

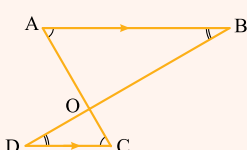
(۲) مساحت هر متوازی الاضلاع، برابر است با حاصل ضرب طول یک ضلع در ارتفاع وارد بر آن ضلع.



$$S = h \cdot a$$

(۳) اگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ، آن‌گاه $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ (خاصیت ترکیب در صورت).

(۴) اگر دو زاویه از یک مثلث با دو زاویه از مثلث دیگری برابر باشد، حتماً زاویه سوم آن‌ها هم با هم برابر است و آن دو مثلث متشابه‌اند. مثلاً در شکل رسم شده که AB با CD موازی است، بنا به قضیه



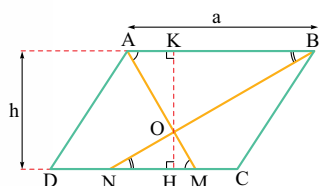
موازی - مورب، داریم: $\hat{A} = \hat{C}$ و $\hat{B} = \hat{D}$ و در نتیجه $\triangle AOB \sim \triangle COD$.

(۵) در دو مثلث متشابه، نسبت اجزای فرعی (ارتفاع‌ها، میانه، نیمسازها) متناظر، برابر با نسبت تشابه (همان نسبت اضلاع متناظر) است.

پاسخ تشریحی گام اول (تحلیل شکل):

سؤال می‌گوید M وسط CN و N وسط DM است، یعنی M و N پاره خط CD را به سه قسمت برابر تقسیم کرده‌اند؛ پس اگر $AB = CO = a$

آن‌گاه $MN = \frac{a}{3}$ و داریم:



$$\frac{S(ABCD)}{S(OMN)} = \frac{AB \cdot HK}{\frac{1}{2} MN \cdot OH} = \frac{a \cdot HK}{\frac{1}{2} (\frac{a}{3}) \cdot OH} = 6 \left(\frac{HK}{OH} \right)$$

گام دوم (تشخیص مثلث‌های متشابه):

به دلیل موازی بودن AB و CD، دو مثلث OAB و OMN متشابه‌اند. نسبت ارتفاع‌های متناظر در این دو مثلث متشابه، برابر با نسبت تشابه

است، یعنی:

$$\frac{OK}{OH} = \frac{AB}{MN} = \frac{a}{\frac{a}{3}} \Rightarrow \frac{OK}{OH} = 3$$



گام سوم (محاسبه خواسته سؤال):

در گام اول دانستیم که خواسته سؤال برابر با $6\left(\frac{HK}{OH}\right)$ است. از تناسب $\frac{OK}{OH} = \frac{3}{1}$ بنا به خاصیت ترکیب در صورت، داریم:

$$\frac{OK + OH}{OH} = \frac{3 + 1}{1} \Rightarrow \frac{HK}{OH} = 4 \Rightarrow 6\left(\frac{HK}{OH}\right) = 24 = \frac{S(ABCD)}{S(OMN)}$$

تست و پاسخ ۴۰

طول قاعده‌های یک دوزنقه ۱ و ۷ و طول ساق‌های آن ۵ و ۶ است. با رسم نیمساز زاویه بین دو ضلع کوچک‌تر، این دوزنقه به یک چهارضلعی و یک مثلث تقسیم می‌شود. نسبت مساحت مثلث به مساحت چهارضلعی ایجادشده کدام است؟

$\frac{5}{3}$ (۴)

$\frac{5}{8}$ (۳)

$\frac{8}{5}$ (۲)

$\frac{1}{3}$ (۱)

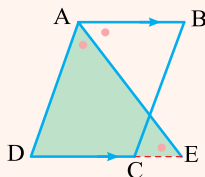
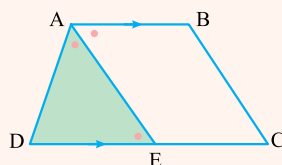
پاسخ: گزینه ۴

مشاوره سؤال ترکیبی از «خواص نیمساز زاویه»، «مساحت» و «دوزنقه». طبیعتاً سؤال ترکیبی از سه بحث، سؤال مهمی است.

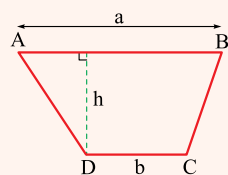
خودت حل کنی بهتره مثلث ایجادشده، متساوی‌الساقین است.

درس‌نامه

(۱) مطابق شکل اگر در چهارضلعی ABCD، دو ضلع AB و CD با هم موازی باشند و نیمساز زاویه A را رسم کنیم تا CD (یا امتداد آن) را در E قطع کند، مثلث ADE متساوی‌الساقین است (در شکل سمت راست ABCD متوازی‌الاضلاع و در شکل سمت چپ ABCD دوزنقه است).



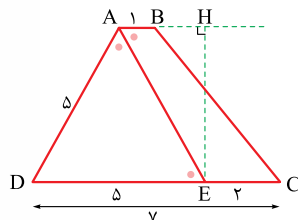
(۲) مساحت هر دوزنقه، برابر است با نصف حاصل ضرب ارتفاع در مجموع دو قاعده



$$S = \frac{1}{2} h \cdot (a + b)$$

پاسخ تشریحی گام اول (رسم شکل مناسب):

همان‌طور که در قسمت (۱) درس‌نامه گفتیم، اگر در دوزنقه ABCD نیمساز زاویه A را رسم کنیم تا CD در E قطع کند، مثلث ADE متساوی‌الساقین است؛ پس $DE = AD = 5$ و بنابراین $CE = CD - DE = 2$.



گام دوم (محاسبه خواسته سؤال): حالا با چیزهایی که در گام اول گفتیم، داریم:

$$\frac{S(ADE)}{S(ABCE)} = \frac{\frac{1}{2} DE \cdot HE}{\frac{1}{2} (AB + CE) \cdot HE} = \frac{DE}{AB + CE} = \frac{5}{1 + 2} = \frac{5}{3}$$

همان‌طور که دیدید، این‌که طول ساق بزرگ دوزنقه ۶ است، در حل سؤال کاربردی نداشت.



تست و پاسخ ۴۱

لوزی به طول ضلع ۶ و زاویه 30° مفروض است. نقطه M قطر کوچک این لوزی را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم کرده است. کمترین فاصله نقطه M از نقاط واقع بر محیط لوزی کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۲) $\sqrt{3}$ (۳) ۱ (۴) ۲

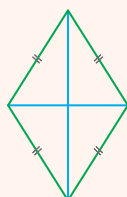
پاسخ: گزینه ۳

مشاوره از موضوع «مجموع فاصله‌های نقطه روی قاعده مثلث متساوی الساقین، از دو ساق، چند سالی است که در کنکور تست نداشته‌ایم و این تیپ سوال‌ها می‌توانند کاندید خوبی برای کنکورهای بعدی باشند.

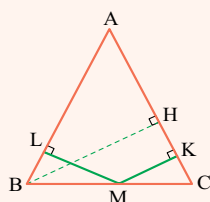
خودت حل کنی بهتره نقطه M ، نقطه‌ای واقع بر قاعده یک مثلث متساوی الساقین است.

درس نامه

(۱) در لوزی، طول ضلع‌ها با هم برابر است، قطر بزرگ روبه‌روی زاویه‌های بزرگ و قطر کوچک روبه‌روی زاویه‌های کوچک است و قطرهای نیمساز زاویه‌ها هستند.



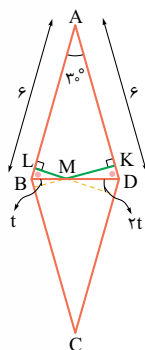
(۲) مجموع فاصله‌های هر نقطه روی قاعده یک مثلث متساوی الساقین از دو ساق آن، برابر است با طول ارتفاع وارد بر ساق؛ یعنی در شکل رسم شده اگر $AB = AC$ ، آن‌گاه $MK + ML = BH$.



(۳) اگر دو مثلث قائم‌الزاویه، یک زاویه حاده برابر داشته باشند، با هم متشابه‌اند.

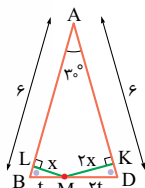
پاسخ تشریحی گام اول (رسم شکل مناسب):

همان‌طور که در شکل می‌بینید، در لوزی $ABCD$ داریم $\hat{A} = 30^\circ$ و BD قطر کوچک است که نقطه M آن را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم کرده است و هدف، پیدا کردن طول ML است. دقت کنید که M نقطه‌ای واقع بر قاعده مثلث متساوی الساقین ABD است.



گام دوم (پیدا کردن رابطه بین طول ML و MK):

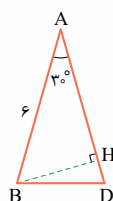
دو مثلث قائم‌الزاویه MDK و MBL دارای یک زاویه حاده برابر هستند، پس با هم متشابه‌اند، پس ML و MK هم به نسبت ۱ و ۲ هستند؛ پس فرض می‌کنیم $ML = x$ و $MK = 2x$.



گام سوم (محاسبه x):

همان‌طور که در قسمت (۲) درس‌نامه گفتیم $MK + ML = BH$ ؛ در مثلث قائم‌الزاویه ABH داریم:

$$\sin 30^\circ = \frac{BH}{AB} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{BH}{6} \Rightarrow BH = 3$$



$$MK + ML = 3 \Rightarrow 2x + x = 3 \Rightarrow x = 1$$

پس:



تست و پاسخ ۴۲

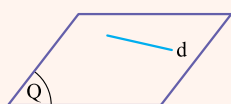
- خط d و دو صفحه P و Q را در نظر بگیرید. اگر $d \perp P$ و $d \cap Q = \emptyset$ ، آن گاه در مورد وضعیت P و Q کدام گزینه درست است؟
- (۱) P و Q موازی اند.
 (۲) P بر Q عمود است.
 (۳) P و Q متقاطع اند ولی بر هم عمود نیستند.
 (۴) هر وضعیتی امکان پذیر است.

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره گزاره‌های مهمی را که در مورد هندسه فضایی در کتاب درسی آمده است، به طور دقیق یاد بگیرید. مثلاً قسمت (۲) درس‌نامه این سؤال، نتیجه تمرین ۹، صفحه ۸۶ کتاب درسی هندسه (۱) است.

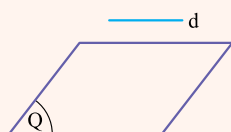
خودت حل کنی بهتره $d \cap Q = \emptyset$ یعنی خط d با صفحه Q موازی است.

درس‌نامه

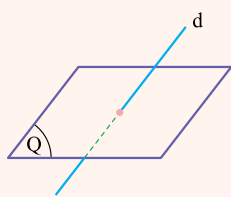


(۱) خط d و صفحه Q ، سه وضع نسبت به هم می‌توانند داشته باشند:

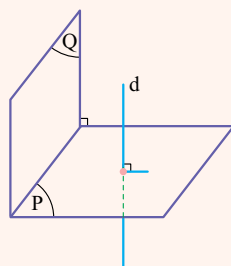
الف) اگر $d \cap Q = d$ ، آن گاه می‌گوییم خط d به تمامی در صفحه Q واقع است.



ب) اگر $d \cap Q = \emptyset$ ، آن گاه می‌گوییم خط d با صفحه Q موازی است.



پ) اگر اشتراک d و Q یک نقطه باشد، آن گاه می‌گوییم خط d با صفحه Q متقاطع است.



(۲) اگر دو صفحه بر هم عمود باشند، هر خط غیرواحد در آن دو که بر یکی از دو صفحه عمود باشد، با دیگری موازی است و برعکس.

پاسخ تشریحی از این که $d \cap Q = \emptyset$ ، نتیجه می‌گیریم خط d با صفحه Q موازی است. حالا اگر خط d بر صفحه P عمود باشد، بنا به قسمت (۲) درس‌نامه، صفحه Q هم که با d موازی است، بر P عمود است.

تست و پاسخ ۴۳

مثلث متساوی‌الساقینی را اگر حول قاعده‌اش دوران دهیم حجم شکل حاصل 12π و اگر حول ارتفاع وارد بر قاعده‌اش دوران دهیم، حجم شکل حاصل 4π می‌شود. مساحت این مثلث کدام است؟

(۴) ۱۲

(۳) ۱۰

(۲) ۸

(۱) ۶

پاسخ: گزینه ۱

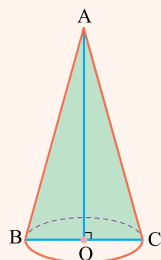
مشاوره معمولاً سؤال‌هایی که از دوران در کنکور و آزمون‌های آزمایشی می‌آیند، راحت‌تر از این سؤال هستند. اگر این سؤال را نتوانستید حل کنید، بی‌خیال موضوع دوران نشوید. چون دوران از قسمت‌هایی است که معمولاً با کمی مطالعه، سؤال آن را از دست نمی‌دهید!



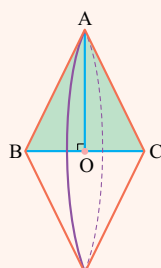
خودت حل کنی بهتره ارتفاع وارد بر قاعده را برابر با h و قاعده را a در نظر بگیرید و حجم‌های حاصل از دوران‌ها را برحسب h و a حساب کنید.

درس نامه

(۱) از دوران مثلث متساوی‌الساقین حول ارتفاع وارد بر قاعده آن، یک مخروط به دست می‌آید که ارتفاع آن با ارتفاع مثلث برابر و قطر قاعده آن برابر با قاعده مثلث است.

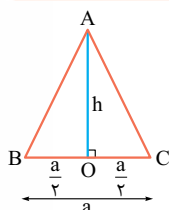


(۲) از دوران مثلث متساوی‌الساقین حول قاعده آن، دو مخروط یکسان هم‌قاعده ایجاد می‌شود که ارتفاع هر کدام از آن‌ها نصف طول قاعده مثلث و شعاع قاعده آن‌ها برابر با ارتفاع مثلث است.



(۳) حجم مخروطی به ارتفاع H و شعاع قاعده R برابر است با $\frac{1}{3}\pi R^2 H$.

پاسخ تشریحی گام اول (محاسبه حجم حاصل از دوران حول ارتفاع وارد بر قاعده):



با توجه به شکل و قسمت (۱) درس‌نامه، حجم شکل حاصل از دوران مثلث حول ارتفاع وارد بر قاعده، برابر است با:

$$V_1 = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 (h) = \frac{1}{12} \pi a^2 h$$

$$V_1 = 4\pi \Rightarrow \frac{1}{12} \pi a^2 h = 4\pi \Rightarrow a^2 h = 48$$

گام دوم (محاسبه حجم حاصل از دوران حول قاعده):

با توجه به شکل گام اول و قسمت (۲) درس‌نامه، حجم حاصل از دوران مثلث حول قاعده برابر است با:

$$V_2 = 2 \left(\frac{1}{3} \pi h^2 \left(\frac{a}{2}\right) \right) = \frac{1}{3} \pi h^2 a$$

$$V_2 = 12\pi \Rightarrow \frac{1}{3} \pi h^2 a = 12\pi \Rightarrow h^2 a = 36$$

گام سوم (محاسبه خواسته سؤال): مساحت مثلث ABC برابر است با $S(ABC) = \frac{1}{2} ah$ ؛ از طرفی:

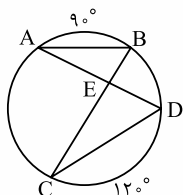
$$\begin{cases} a^2 h = 48 = 6 \times 2^3 \\ h^2 a = 36 = 6 \times 6 \end{cases} \Rightarrow (a^2 h)(h^2 a) = (6 \times 2^3)(6 \times 6) \Rightarrow a^3 h^3 = 6^3 \times 2^3$$

$$\Rightarrow ah = 6 \times 2 = 12 \Rightarrow S(ABC) = \frac{1}{2} \times 12 = 6$$



تست و پاسخ ۴۴

در شکل رسم شده، اگر $\widehat{AB} = 90^\circ$ و $\widehat{CD} = 120^\circ$ ، آن گاه نسبت مساحت مثلث CDE به مساحت مثلث ABE کدام است؟



$$\frac{4}{3} \quad (2)$$

$$\frac{3}{2} \quad (1)$$

$$\frac{9}{4} \quad (4)$$

$$\frac{16}{9} \quad (3)$$

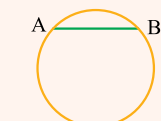
پاسخ: گزینه ۱

مشاوره سؤال ترکیبی از «دایره» و «تشابه مثلث ها». می دانیم که در کنکور هم احتمال طرح سؤال های ترکیبی به خصوص در سؤال های هندسه پایه بالاست.

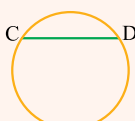
خودت حل کنی بهتره دو مثلی که سؤال گفته، با هم متشابه اند.

درس نامه

(۱) در دایره ای به شعاع R، طول وترهایی که از دایره کمان های 90° و 120° جدا می کنند، به ترتیب برابر با R، $R\sqrt{2}$ و $R\sqrt{3}$ است و بالعکس.



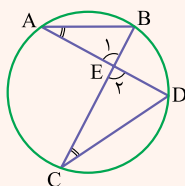
$$\widehat{AB} = 60^\circ \Leftrightarrow AB = R$$



$$\widehat{CD} = 90^\circ \Leftrightarrow CD = R\sqrt{2}$$



$$\widehat{EF} = 120^\circ \Leftrightarrow EF = R\sqrt{3}$$



(۲) مطابق شکل، اگر وترهای AD و BC در یک دایره، در نقطه E متقاطع باشند، دو مثلث EAB و ECD بنا به حالت تساوی دو زاویه متشابه اند ($\widehat{BD} = \widehat{AC} = \widehat{A} = \widehat{C}$ و $\widehat{E}_1 = \widehat{E}_2$).

(۳) نسبت مساحت های دو مثلث متشابه، برابر با مجذور نسبت تشابه آن هاست.

پاسخ تشریحی گام اول (محاسبه طول وترهای AB و CD بر حسب شعاع دایره):

با توجه به آن چه در قسمت (۱) درس نامه گفتیم، اگر شعاع دایره را R در نظر بگیریم، داریم $AB = R\sqrt{2}$ و $CD = R\sqrt{3}$.

گام دوم (محاسبه خواسته سؤال):

با توجه به آن چه در قسمت (۲) درس نامه گفتیم، دو مثلث ABE و CDE متشابه اند و نسبت تشابه آن ها برابر است با: $k = \frac{CD}{AB} = \frac{R\sqrt{3}}{R\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

و با توجه به قسمت (۳) درس نامه، نسبت مساحت های این دو مثلث متشابه، برابر است با:

$$\frac{S(CDE)}{S(ABE)} = k^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{3}{2}$$

تست و پاسخ ۴۵

در مثلث قائم الزاویه به طول اضلاع قائم ۵ و ۱۲، نیمساز خارجی زاویه قائمه و نیمساز داخلی زاویه کوچک تر در نقطه O متقاطع اند. فاصله O از ضلع کوچک تر کدام است؟

$$7 \quad (4)$$

$$6 \quad (3)$$

$$2 \quad (2)$$

$$3 \quad (1)$$

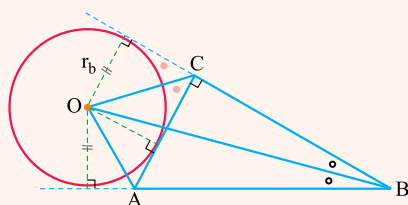
پاسخ: گزینه ۱

مشاوره برای حل این سؤال، باید با ویژگی های دایره های محاطی خارجی مثلث آشنا باشید؛ اگر آشنایی کافی ندارید، درس نامه را حتماً بخوانید، چون موضوع مهمی است.



خودت حل کنی بهتره نقطه O مرکز یکی از دایره‌های محاطی خارجی مثلث است.

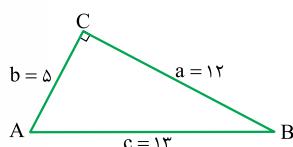
درس نامه



(۱) در هر مثلث، هر دو نیمساز خارجی با نیمساز داخلی زاویه سوم هم‌سازند و نقطه هم‌رسی آن‌ها از ضلع روبه‌روی زاویه سوم و امتدادهای دو ضلع دیگر به یک فاصله است؛ پس اگر مطابق شکل در مثلث ABC، نیمسازهای خارجی $\hat{A}$ و $\hat{C}$ و نیمساز داخلی $\hat{B}$ را رسم کنیم و نقطه هم‌رسی را O و فاصله O از AC و امتدادهای AB و BC را r_b در نظر بگیریم، دایره‌ای به مرکز O و شعاع r_b بر ضلع AC و امتدادهای AB و BC مماس است؛ این دایره را دایره محاطی خارجی نظیر ضلع AC می‌نامیم.

(۲) اگر مساحت مثلث ABC برابر با S و محیط آن برابر با ۲p باشد، داریم $r_b = \frac{S}{p-b}$.

پاسخ تشریحی گام اول (تحلیل سؤال):



اولین چیزی که از سؤال می‌فهمیم این است که طول وتر این مثلث ۱۳ است، چون $13^2 = 5^2 + 12^2$.

مطلب دومی که می‌فهمیم این است که O مرکز دایره محاطی خارجی مماس بر ضلع کوچک یعنی $b = 5$ است و مطلب سوم این است که خواسته سؤال (یعنی فاصله O از ضلع کوچک‌تر) همان شعاع دایره محاطی خارجی مماس بر ضلع $b = 5$ و امتدادهای دو ضلع دیگر است.

گام دوم (محاسبه خواسته سؤال):

$$\begin{cases} S = \frac{1}{2} AC \cdot BC \Rightarrow S = \frac{1}{2} \times 5 \times 12 = 30 \\ p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{12+5+13}{2} = 15 \end{cases} \Rightarrow r_b = \frac{30}{15-5} = 3$$

می‌دانیم $r_b = \frac{S}{p-b}$ پس:

تست و پاسخ ۴۶

دو دایره به شعاع‌های r و ۲r مماس داخل‌اند. طول وتری از دایره بزرگ که از نقطه تماس دو دایره می‌گذرد و فاصله آن از مرکز دایره کوچک $\frac{1}{4}r$ می‌باشد، چند برابر r است؟

$3\frac{1}{4}$ (۴)

۳ (۳)

$2\sqrt{3}$ (۲)

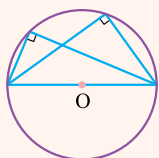
$\sqrt{15}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

مشاوره سؤال ترکیبی از «قضیه فیثاغورس»، «تالس» و «دایره» که با ایده‌گرفتن از سؤال‌های کنکورهای قبل طرح شده است. سؤال بسیار مهمی است.

خودت حل کنی بهتره نقطه تقاطع این وتر با دایره کوچک، وسط وتر است.

درس نامه

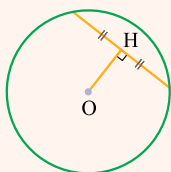


(۱) اگر دو دایره مماس داخل داشته باشیم که شعاع یکی نصف دیگری باشد، دایره کوچک از مرکز دایره بزرگ می‌گذرد.

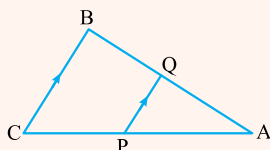
(۲) زاویه محاطی روبه‌روی قطر هر دایره، قائمه است.



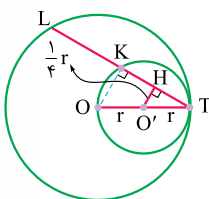
(۳) اگر از مرکز هر دایره به یک وتر آن عمود کنیم، پای عمود، وتر را نصف می کند.



(۴) قضیه تالس: در شکل رسم شده که PQ با BC موازی است، داریم: $\frac{AP}{AC} = \frac{PQ}{BC} = \frac{AQ}{AB}$



پاسخ تشریحی گام اول (رسم شکل مناسب):



دو دایره مماس داخل داریم که شعاع یکی، دو برابر دیگری است؛ پس دایره کوچک از مرکز دایره بزرگ می گذرد.

وتر TL را در دایره بزرگ طوری رسم می کنیم که فاصله آن از مرکز دایره کوچک برابر با $O'H = \frac{1}{4}r$ باشد.

اگر این وتر، دایره کوچک را در k قطع کند، با وصل کردن O به K، یک زاویه محاطی روبه روی قطر در دایره کوچک ایجاد می شود، پس $\angle OKT = 90^\circ$.

بنابراین طبق قسمت (۳) درس نامه، K وسط TL خواهد بود؛ یعنی $TL = 2TK$.

گام دوم (محاسبه طول OK بر حسب r):

با توجه به شکل گام اول، $O'H$ و OK هر دو بر TL عمودند، پس با هم موازی اند و بنا به قضیه تالس در مثلث OKT داریم:

$$\frac{O'H}{OK} = \frac{O'T}{OT} \Rightarrow \frac{\frac{1}{4}r}{OK} = \frac{r}{2r} \Rightarrow OK = \frac{1}{2}r$$

گام سوم (محاسبه خواسته سؤال):

$$KT = \sqrt{OT^2 - OK^2} \Rightarrow KT = \sqrt{r^2 - \left(\frac{1}{2}r\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}r^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}r$$

$$TL = 2TK = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}r\right) = \sqrt{3}r$$

تست و پاسخ ۴۷

اگر دوران یافته نقطه A را در دوران به مرکز O و زاویه 40° ، با $R(A)$ نمایش دهیم و بدانیم فاصله A از $R(R(R(A)))$ برابر با ۲ واحد است، طول OA چند واحد است؟

(۱) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (۲) $\sqrt{3}$ (۳) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ (۴) $\sqrt{6}$

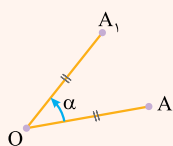
پاسخ: گزینه ۱

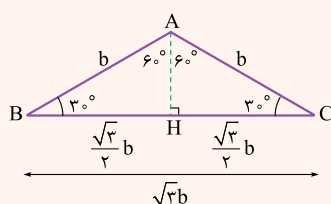
مشاوره سؤال سختی نیست، فقط کافی است مفهوم دوران را بدانید و بعد از آن بتوانید رابطه بین طول اضلاع را در مثلی که زاویه های آن 120° ، 30° و 30° هستند، به دست آورید.

خودت حل کنی بهتره مثلی که O، A و $R(R(R(A)))$ رأس های آن هستند، متساوی الساقین، با زاویه $120^\circ = 3 \times 40^\circ$ است.

درس نامه

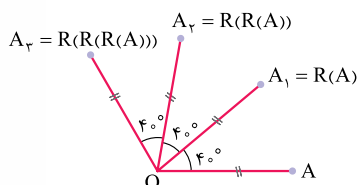
(۱) مطابق شکل، دوران یافته نقطه A در دوران به مرکز O و زاویه α ، نقطه ای مانند A_1 است، به طوری که $OA = OA_1$ و $\angle OA_1A = \alpha$.





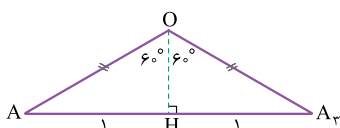
۲ در مثلث متساوی الساقینی که زاویه های آن 30° ، 30° و 120° هستند، با رسم ارتفاع وارد بر قاعده، دو مثلث قائم الزاویه با زاویه های حاده 30° و 60° ایجاد می شود که با این کار می توانید رابطه بین طول اضلاع مثلث متساوی الساقین را به دست آورید. اصلاً بد نیست این را حفظ باشید که در چنین مثلثی طول قاعده، $\sqrt{3}$ برابر طول هر یک از ساق ها است.

پاسخ تشریحی گام اول (رسم شکل مناسب):



همان طور که در شکل می بینید O, A, A_3 سه رأس یک مثلث متساوی الساقین هستند که زاویه روبه روی قاعده آن $120^\circ = 3 \times 40^\circ$ است.

گام دوم (محاسبه خواسته سؤال):

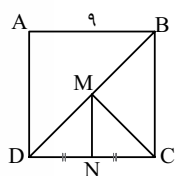


مثلث متساوی الساقین OAA_3 را جداگانه ببینید. می دانیم $AA_3 = 2$ ، پس: $AH = HB = 1$. اگر ارتفاع وارد بر قاعده آن را که میانه هم هست رسم کنیم، در مثلث قائم الزاویه OAH داریم:

$$\sin 60^\circ = \frac{AH}{OA} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{OA} \Rightarrow OA = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

تست و پاسخ ۴۸

در شکل رسم شده، N وسط ضلع مربع و M نقطه ای روی قطر آن است به طوری که محیط مثلث MCN ، کمترین مقدار ممکن است. طول DM کدام است؟



$$\frac{9\sqrt{2}}{2} \quad (2)$$

$$\frac{9}{2} \quad (4)$$

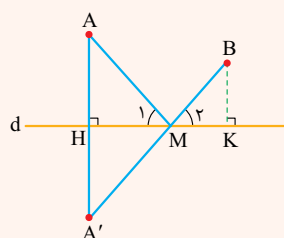
$$6\sqrt{2} \quad (1)$$

$$3\sqrt{2} \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۳

مشاوره مبحث «پیدا کردن کوتاه ترین مسیر با استفاده از بازتاب» از مباحثی است که در نظام جدید به کتاب درسی افزوده شده و در کنکورهای نظام جدید چند بار سؤال داشته است.

خودت حل کنی بهتره باید $MN + MC$ مینیمم باشد، که روش پیدا کردن M با استفاده از بازتاب است.



درس نامه

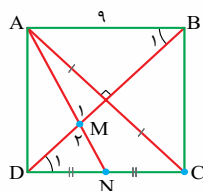
۱ اگر دو نقطه A و B در یک طرف خط d واقع باشند، برای پیدا کردن نقطه ای مانند M روی خط d به طوری که $MA + MB$ مینیمم باشد (یا به بیان دیگر، محیط مثلث MAB مینیمم باشد) یکی از نقاط A یا B ، مثلاً A را نسبت به خط d قرینه می کنیم تا A' به دست آید. M محل تقاطع $A'B$ با خط d است.

۲ طول قطرهای مربعی به طول ضلع a برابر با $a\sqrt{2}$ است، ضمن آن که قطرهای هر هم عمودند و همدیگر را نصف می کنند.



پاسخ تشریحی

گام اول (تحلیل شکل و یافتن نقطه M):



همان طور که می بینید، دو نقطه C و N در یک طرف BD واقع اند و برای پیدا کردن نقطه ای مانند M روی BD که محیط مثلث MCN مینیمم باشد، از روشی که در قسمت (۱) درس نامه گفتیم استفاده می کنیم. برای این منظور، C را نسبت به BD قرینه می کنیم که قرینه آن می شود A. نقطه تقاطع AN با BD، همان M مورد نظر است.

گام دوم (محاسبه طول DM):

در شکل گام اول، دو مثلث MAB و MND متشابه اند (چون دو زاویه برابر دارند $\hat{B}_1 = \hat{D}_1$ و $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$) و داریم:

$$\frac{DM}{BM} = \frac{DN}{AB} \Rightarrow \frac{DM}{BM} = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} DM = x \\ BM = 2x \end{cases}$$

از طرفی طول ضلع مربع ۹ است، پس طول قطر آن $9\sqrt{2}$ است، یعنی:

$$BD = 9\sqrt{2} \Rightarrow DM + BM = 9\sqrt{2} \Rightarrow x + 2x = 9\sqrt{2} \Rightarrow 3x = 9\sqrt{2} \Rightarrow x = 3\sqrt{2}$$

تست و پاسخ ۴۹

در مثلث ABC به اضلاع $AB = 3$ ، $AC = 6$ و $BC = 3\sqrt{3}$ ، نیمساز داخلی زاویه A را رسم می کنیم تا BC را در D قطع کند و نقطه E را روی امتداد آن چنان در نظر می گیریم که $BE = CE$. طول DE کدام است؟

۲ (۴)

$\frac{\sqrt{6}}{2}$ (۳)

$\sqrt{3}$ (۲)

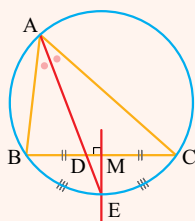
$\sqrt{2}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره سؤال ترکیبی از موضوعات «قضیه نیمساز داخلی»، «محاسبه طول نیمساز داخلی» و «روابط طولی در دایره». ضمن آن که دانستن این که نقطه تقاطع عمود منصف یک ضلع مثلث و نیمساز زاویه روبه روی آن ضلع کجاست، قبلاً هم مورد توجه کنکور بوده است.

خودت حل کنی بهتره نقطه E روی عمود منصف ضلع BC قرار دارد.

درس نامه



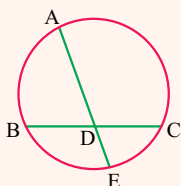
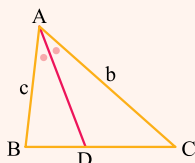
(۱) هر نقطه که از دو سر یک پاره خط به یک فاصله باشد، بر عمود منصف آن واقع است.

(۲) در مثلث ABC نقطه تقاطع عمود منصف ضلع BC و نیمساز زاویه داخلی A، وسط کمان BC در دایره محیطی مثلث ABC است.

(۳) در مثلث ABC اگر نیمساز داخلی زاویه A، ضلع BC را در D قطع کند، داریم:

$$(۱) \frac{BD}{CD} = \frac{c}{b} \Rightarrow \begin{cases} BD = ck \\ CD = bk \end{cases}$$

$$(۲) AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot CD$$



(۴) اگر مطابق شکل، دو وتر AE و BC از یک دایره در نقطه D متقاطع باشند، آن گاه $AD \cdot DE = BD \cdot CD$.



پاسخ تشریحی گام اول (تحلیل سؤال):

از این که $BE = CE$ ، یعنی نقطه E از دو سر پاره خط BC به یک فاصله است، نتیجه می گیریم که E بر عمود منصف پاره خط BC واقع است، ضمن آن که سؤال گفته که E روی نیمساز زاویه A واقع است؛ پس بنا به قسمت (۲) درس نامه، E که نقطه تقاطع عمود منصف BC با نیمساز داخلی A است، همان نقطه وسط کمان BC در دایره محیطی مثلث ABC است.

گام دوم (محاسبه طول های BD ، CD ، و AD):

بنا به آن چه در قسمت (۳) درس نامه گفتیم، داریم:

$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{6} \Rightarrow \begin{cases} BD = 3k \\ CD = 6k \end{cases}$$

از طرفی $BC = 3\sqrt{3}$ ، پس:

$$3k + 6k = 3\sqrt{3} \Rightarrow 9k = 3\sqrt{3} \Rightarrow k = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \begin{cases} BD = \sqrt{3} \\ CD = 2\sqrt{3} \end{cases}$$

$$AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot CD = 3 \times 6 - \sqrt{3} \times 2\sqrt{3} = 12 \Rightarrow AD = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

بنابراین:

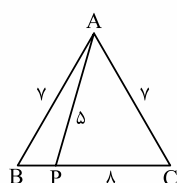
گام سوم (محاسبه طول DE):

حالا با استفاده از روابط طولی در دایره محیطی مثلث ABC ، طول DE را به دست می آوریم:

$$AD \cdot DE = BD \cdot CD \Rightarrow DE = \frac{BD \cdot CD}{AD} \Rightarrow DE = \frac{(\sqrt{3})(2\sqrt{3})}{2\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

تست و پاسخ ۵۰

نقطه P روی قاعده BC از مثلث متساوی الساقین ABC به طول ساق 7 به ترتیب از A و C به فاصله 5 و 8 است. مساحت مثلث ABP کدام است؟



(۱) $2/5\sqrt{5}$

(۲) $4/25\sqrt{3}$

(۳) $3/5\sqrt{3}$

(۴) $3/75\sqrt{3}$

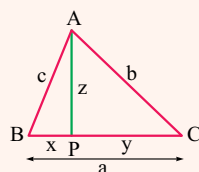
پاسخ: گزینه ۴

مشاوره سؤال ترکیبی از دو موضوع «قضیه استوارت» و «رابطه هرون برای محاسبه مساحت مثلث» که هر دو موضوع مهم هستند و در همین چند سال کنکور نظام جدید، سؤال داشته اند.

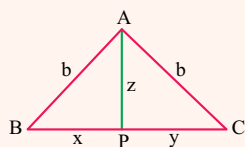
خودت حل کنی بهتره با استفاده از قضیه استوارت در مثلث ABC ، طول BP را محاسبه کنید.

درس نامه

(۱) قضیه استوارت: مطابق شکل اگر نقطه P واقع بر ضلع BC از مثلث ABC ، این ضلع را به دو پاره خط $BP = x$ و $CP = y$ تقسیم کند، داریم:



$$xb^2 + yc^2 = a(z^2 + xy)$$



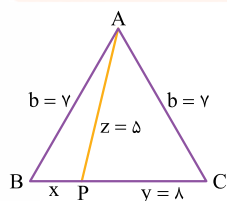
$$b^2 = z^2 + xy$$

در حالت خاص، اگر مثلث ABC مثلث متساوی الساقینی به طول ساق b باشد، آن گاه:

۲) قضیه هرون برای محاسبه مساحت مثلث: اگر محیط مثلثی به طول اضلاع a ، b و c برابر با $2p$ باشد (یعنی $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$)، آن گاه مساحت این مثلث برابر است با:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

رابطه هرون برای تمام مثلث ها برقرار است، اما در تست ها زمانی از رابطه هرون استفاده می کنیم که a ، b و c اعداد رادیکالی نباشند.



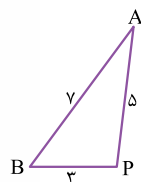
$$b^2 = z^2 + xy \Rightarrow 49 = 25 + 8x \Rightarrow x = 3$$

پاسخ تشریحی گام اول (محاسبه طول BP):

با استفاده از قضیه استوارت در مثلث متساوی الساقین ABC، داریم:

گام دوم (محاسبه مساحت مثلث ABP):

طول اضلاع مثلث ABP رادیکالی نیستند، پس با استفاده از رابطه هرون، مساحت آن را به دست می آوریم:



$$p = \frac{7 + 5 + 3}{2} = \frac{15}{2}$$

$$\Rightarrow S = \sqrt{\frac{15}{2} \left(\frac{15}{2} - 3 \right) \left(\frac{15}{2} - 5 \right) \left(\frac{15}{2} - 7 \right)} = \sqrt{\frac{15}{2} \times \frac{9}{2} \times \frac{5}{2} \times \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{5^2 \times 3^2 \times 3}{2^4}} = \frac{5 \times 3}{2^2} \sqrt{3} = \frac{15}{4} \sqrt{3} = 3 / 75 \sqrt{3}$$



فیزیک پایه: فیزیک (۲): صفحه‌های ۱ تا ۱۳۰، فیزیک (۱): صفحه‌های ۱ تا ۱۴۹

تست و پاسخ ۵۱

بالگردی در ارتفاع ۸۰۰۰ پا (فوت) در حال حرکت است. این ارتفاع بر حسب کیلومتر کدام است؟ (۱ ft = ۱۲ in, ۱ in = ۲/۵ cm)

- ۲/۴ (۱) ۲۴ (۲) ۱/۵ (۳) ۱۵ (۴)

پاسخ: گزینه ۱

پاسخ تشریحی: تنها کافی است که از تبدیلات زنجیره‌ای استفاده کنیم:

$$\text{ارتفاع} = 8000 \text{ ft} \times \frac{12 \text{ in}}{1 \text{ ft}} \times \frac{2/5 \text{ cm}}{1 \text{ in}} \times \frac{10^{-2} \text{ m}}{1 \text{ cm}} \times \frac{1 \text{ km}}{10^3 \text{ m}} = 2/4 \text{ km}$$

تست و پاسخ ۵۲

یکای ظرفیت گرمایی بر حسب یکاهای اصلی SI، کدام است؟

- $\frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{K} \cdot \text{s}^2}$ (۴) $\frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{^\circ \text{C} \cdot \text{s}}$ (۳) $\frac{\text{m}^2}{\text{K} \cdot \text{s}}$ (۲) $\frac{\text{m}^2}{^\circ \text{C} \cdot \text{s}}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ تشریحی: یکای ظرفیت گرمایی را می‌توانیم با استفاده از رابطه $Q = C\Delta T$ به دست آوریم:

$$J = [C] \cdot K \Rightarrow [C] = \frac{J}{K}$$

برای این که یکای ژول (J) را بر حسب یکاهای اصلی (SI) به دست بیاوریم، باید از یکی از رابطه‌های انرژی استفاده کنیم. مثلاً انرژی جنبشی:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow [K] = \text{kg} \cdot \left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 \Rightarrow [K] = \text{kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$$

حالا می‌توانیم یکای ظرفیت گرمایی را بر حسب یکاهای اصلی (SI) بنویسیم.

$$[C] = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{K} \cdot \text{s}^2}$$

تست و پاسخ ۵۳

درون یک ظرف استوانه‌ای به مساحت قاعده 20 cm^2 ، حجم یکسانی از آب و روغن ریخته شده است. اگر فشار ناشی از دو مایع در کف ظرف

3600 Pa باشد، حجم روغن درون ظرف چند سانتی‌متر مکعب است؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$ و $\rho_{\text{آب}} = 1 \text{ g/cm}^3$ ، $\rho_{\text{روغن}} = 0.8 \text{ g/cm}^3$)

- ۶۴۰ (۱) ۸۰۰ (۲) ۳۲۰ (۳) ۴۰۰ (۴)

پاسخ: گزینه ۴

خودت حل کنی بهتره ابتدا ارتفاع آب و روغن را نسبت به هم به دست آورید؛ سپس با استفاده از رابطه $P = \rho gh$ ارتفاع روغن را محاسبه کنید و در آخر حجم روغن را با توجه به رابطه $V = Ah$ به دست آورید.

درس‌نامه... فشار ناشی از مایع در یک نقطه درون آن از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\begin{array}{c} \text{چگالی مایع } (\text{kg/m}^3) \\ \uparrow \\ \text{عمق نقطه از سطح مایع } (m) \leftarrow P = \rho gh \rightarrow \text{فشار حاصل از مایع } (Pa) \\ \downarrow \\ \text{شتاب گرانش } (m/s^2) \end{array}$$

پاسخ تشریحی: گام اول: با توجه به این که حجم یکسانی از آب و روغن درون ظرف ریخته شده است، داریم:

$$V_{\text{آب}} = V_{\text{روغن}} \Rightarrow A_{\text{آب}} h_{\text{آب}} = A_{\text{روغن}} h_{\text{روغن}} \xrightarrow{A_{\text{آب}} = A_{\text{روغن}} = A_{\text{ظرف}}} h_{\text{آب}} = h_{\text{روغن}}$$



گام دوم: فشار ناشی از دو مایع بر کف ظرف، برابر با مجموع فشارهای حاصل از دو مایع آب و روغن بر کف ظرف است؛ بنابراین با استفاده از رابطه $P = \rho gh$ می‌توانیم بنویسیم:

$$P_{\text{روغن}} gh + \rho_{\text{آب}} gh = P_{\text{کل}} = P_{\text{آب}} + P_{\text{روغن}} \Rightarrow P_{\text{کل}} = \rho_{\text{آب}} gh + \rho_{\text{روغن}} gh$$

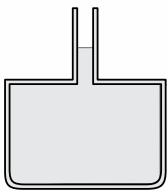
$$\frac{h_{\text{آب}} = h_{\text{روغن}} = h, \rho_{\text{روغن}} = 800 \text{ kg/m}^3}{P_{\text{کل}} = 3600 \text{ Pa}, \rho_{\text{آب}} = 1000 \text{ kg/m}^3} \rightarrow 3600 = 1000 \times 10 \times h + 800 \times 10 \times h \Rightarrow 3600 = 1800 h \Rightarrow h = \frac{2}{1} \text{ m یا } h = 20 \text{ cm}$$

گام سوم: حالا حجم روغن درون ظرف را با استفاده از رابطه $V = A.h$ به دست می‌آوریم:

$$V = 20 \times 20 = 400 \text{ cm}^3$$

تست و پاسخ ۵۴

در شکل زیر، سطح مقطع کف ظرف 400 cm^2 و سطح مقطع دهانه آن 6 cm^2 است. اگر 150 g آب به مایع درون لوله اضافه کنیم، به ترتیب، نیرویی که مایع به کف ظرف وارد می‌کند و نیرویی که ظرف به سطح افقی وارد می‌کند، چند نیوتون افزایش می‌یابد؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$)



۱) ۱۰۰، ۱۰۰

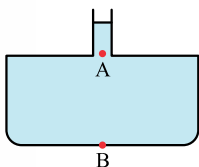
۲) ۱/۵، ۱۰۰

۳) ۱۰۰، ۱/۵

۴) ۱/۵، ۱/۵

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره حتماً توجه کنید که سؤال از شما کدام نیرو را می‌خواهد؟ نیرویی که مایع بر کف ظرف وارد می‌کند یا نیرویی که ظرف به سطح افقی؟ این دو نیرو با هم فرق دارند!



وقتی آب به مایع درون ظرف اضافه می‌شود، فشار در کف ظرف و دهانه آن به یک اندازه افزایش می‌یابد؛ بنابراین با توجه به شکل مقابل می‌توانیم بنویسیم:

$$\Delta P_A = \Delta P_B \Rightarrow P'_A - P_A = P'_B - P_B$$

در ادامه با استفاده از رابطه $P = \frac{F}{A}$ داریم:

$$\frac{F'_A}{A_A} - \frac{F_A}{A_A} = \frac{F'_B}{A_B} - \frac{F_B}{A_B} \Rightarrow \frac{\Delta F_A}{A_A} = \frac{\Delta F_B}{A_B}$$

تغییر نیرو در دهانه ظرف (A) برابر با وزن آب اضافه شده است. ($\Delta F_A = mg$)

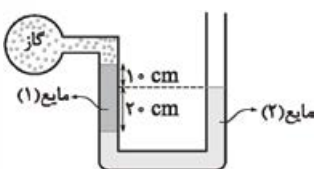
$$\frac{mg}{A_A} = \frac{\Delta F_B}{A_B} \xrightarrow{m=0.15 \text{ kg}, g=10 \text{ N/kg}} \xrightarrow{A_A=6 \text{ cm}^2, A_B=400 \text{ cm}^2} \frac{0.15 \times 10}{6} = \frac{\Delta F_B}{400} \Rightarrow \Delta F_B = 100 \text{ N}$$

بنابراین وقتی 150 g آب به مایع اضافه می‌کنیم، نیرویی که مایع به کف ظرف وارد می‌کند، به اندازه 100 نیوتون افزایش می‌یابد. (رد ۳ و ۴)
از طرفی، نیرویی که ظرف به سطح افقی وارد می‌کند، برابر با مجموع وزن ظرف و مایع درون آن است، پس وقتی آب به مایع درون ظرف اضافه می‌کنیم، نیرویی که ظرف به سطح افقی وارد می‌کند، به اندازه وزن آب اضافه شده، افزایش می‌یابد، پس:

$$\Delta F = mg \xrightarrow{m=0.15 \text{ kg}} \xrightarrow{g=10 \text{ N/kg}} \Delta F = 0.15 \times 10 = 1.5 \text{ N}$$

تست و پاسخ ۵۵

در شکل زیر، فشار پیمانه‌ای گاز 400 Pa است و مایع‌ها در تعادل‌اند. اگر چگالی مایع (۱)، 1 g/cm^3 باشد، چگالی مایع (۲)، چند گرم بر سانتی‌متر مکعب است؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$)



۱) ۷/۱

۲) ۳/۱

۳) ۴/۳

۴) ۶/۲

پاسخ: گزینه ۱

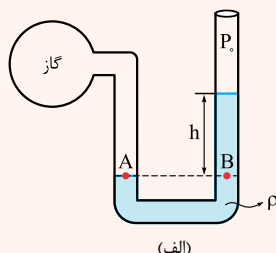
مشاوره لوله U شکل از مباحث پرتکرار در کنکور سراسری است. سؤالات لوله U شکل را جدی بگیرید.



درس نامه فشار پیمانه‌ای در گازها

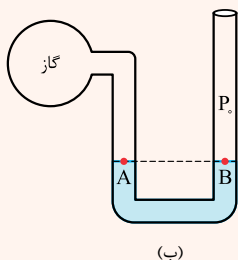
اختلاف فشار مطلق گاز و فشار هوا ($P - P_0$) را فشار پیمانه‌ای می‌گویند. فشار پیمانه‌ای می‌تواند مثبت، صفر یا منفی باشد.

(۱) اگر فشار مطلق گاز بیشتر از فشار هوا باشد، فشار پیمانه‌ای مثبت است. (شکل «الف»)



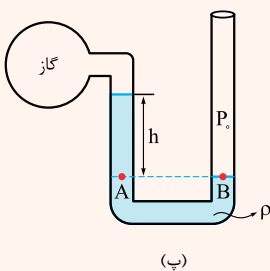
$$P_A = P_B \Rightarrow P_{\text{گاز}} = \rho gh + P_0 \Rightarrow \underbrace{P_{\text{گاز}} - P_0}_{\text{فشار پیمانه‌ای}} = \rho gh$$

(۲) اگر فشار مطلق گاز با فشار هوا برابر باشد، فشار پیمانه‌ای صفر است. (شکل «ب»)



$$P_A = P_B \Rightarrow P_{\text{گاز}} = P_0 \Rightarrow \underbrace{P_{\text{گاز}} - P_0}_{\text{فشار پیمانه‌ای}} = 0$$

(۳) اگر فشار مطلق گاز از فشار هوا کمتر باشد، فشار پیمانه‌ای منفی است. (شکل «پ»)



$$P_A = P_B \Rightarrow P_{\text{گاز}} + \rho gh = P_0 \Rightarrow \underbrace{P_{\text{گاز}} - P_0}_{\text{فشار پیمانه‌ای}} = -\rho gh$$

پاسخ تشریحی با توجه به شکل مقابل، تساوی فشار در نقاط هم‌تراز (A و B) را می‌نویسیم:

$$P_A = P_B \Rightarrow P_{\text{گاز}} + \rho_1 gh_1 = P_0 + \rho_2 gh_2$$

حالا با توجه به فشار پیمانه‌ای گاز، چگالی مایع (۲) را به دست می‌آوریم.

$$P_{\text{گاز}} - P_0 = -400 \Rightarrow \rho_2 gh_2 - \rho_1 gh_1 = -400$$

$$\frac{\rho_1 = 1000 \text{ kg/m}^3}{h_1 = 30 \text{ cm}, h_2 = 20 \text{ cm}} \rightarrow \rho_2 \times 10 \times \frac{2}{10} - 1000 \times 10 \times \frac{3}{10} = -400 \Rightarrow 2\rho_2 = 2600 \Rightarrow \rho_2 = 1300 \text{ kg/m}^3 \text{ یا } \rho_2 = 1/3 \text{ g/cm}^3$$

تست و پاسخ ۵۶

در شکل زیر، آب در تعادل و سطح مقطع شاخه سمت چپ و راست لوله به ترتیب 3 cm^2 و 2 cm^2 است. با اضافه کردن 30 g نفت به شاخه سمت چپ، سطح آزاد آب در شاخه سمت راست، پس از رسیدن به تعادل، چند سانتی‌متر جابه‌جا می‌شود؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$ ، $\rho_{\text{نفت}} = 0.8 \text{ g/cm}^3$)

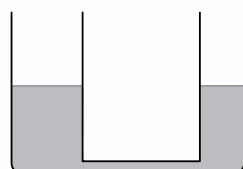
$$(\rho_{\text{آب}} = 1 \text{ g/cm}^3)$$

۱۰ (۱)

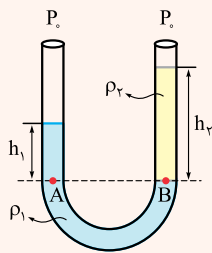
۶ (۲)

۴ (۳)

۲/۵ (۴)



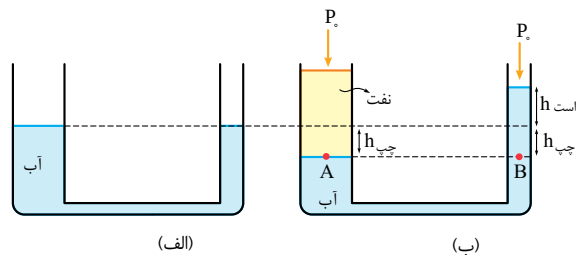
پاسخ: گزینه ۲



درس نامه در شکل مقابل، درون لوله U شکل دو مایع مخلوط‌نشدنی قرار دارند. با توجه به این که فشار در نقاط هم‌تراز در یک مایع با هم برابر است، می‌توانیم بنویسیم:

$$P_A = P_B \xrightarrow{P = \rho gh + P_0} \rho_1 gh_1 + P_0 = \rho_2 gh_2 + P_0 \Rightarrow \rho_1 h_1 = \rho_2 h_2$$

پاسخ تشریحی وقتی مقداری نفت در شاخه سمت چپ اضافه می‌کنیم، تعادل به هم می‌خورد و مقداری آب از شاخه سمت چپ پایین آمده و در شاخه سمت راست بالا می‌رود، اما می‌دانیم که حجم آب تغییری نکرده است، یعنی تغییر حجم آب در شاخه سمت چپ با تغییر حجم آب در شاخه سمت راست برابر است؛ بنابراین با توجه به شکل (الف) می‌توانیم شکل (ب)، یعنی شکل نهایی را رسم کنیم.



$$V_{\text{چپ}} = V_{\text{راست}} \xrightarrow{V = Ah} A_{\text{چپ}} h_{\text{چپ}} = A_{\text{راست}} h_{\text{راست}} \xrightarrow{\frac{A_{\text{چپ}} = 3 \text{ cm}^2}{A_{\text{راست}} = 2 \text{ cm}^2}} 3h_{\text{چپ}} = 2h_{\text{راست}} \Rightarrow h_{\text{راست}} = \frac{3}{2} h_{\text{چپ}}$$

با توجه به شکل (ب)، تساوی فشار نقاط هم‌تراز (A و B) را می‌نویسیم:

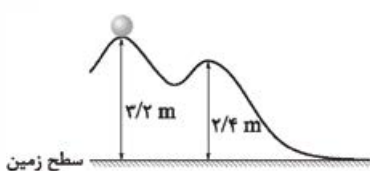
$$P_A = P_B \Rightarrow \frac{m_{\text{نفت}} g}{A_A} + P_0 = \rho_{\text{آب}} gh_{\text{آب}} + P_0 \Rightarrow \frac{30 \times 10^{-3} \times 10}{3 \times 10^{-4}} = 1000 \times 10 \times (h_{\text{چپ}} + \frac{3}{2} h_{\text{چپ}}) \Rightarrow \frac{1}{10} = \frac{5}{2} h_{\text{چپ}}$$

$$\Rightarrow h_{\text{چپ}} = \frac{1}{25} m \text{ یا } h_{\text{چپ}} = 4 \text{ cm}$$

بنابراین با توجه به شکل (ب)، سطح آزاد آب پس از رسیدن به تعادل به اندازه $6 \text{ cm} (\frac{3}{2} \times 4)$ جابه‌جا می‌شود.

تست و پاسخ ۵۷

در شکل زیر، جسمی از ارتفاع $3/2$ متری سطح زمین و روی مسیری بدون اصطکاک، از حال سکون شروع به حرکت می‌کند. تندی جسم در ارتفاع $2/4$ متری سطح زمین، چند برابر تندی آن هنگامی که به سطح زمین می‌رسد، است؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$)



$$\frac{\sqrt{2}}{2} (2)$$

$$\frac{1}{2} (4)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{4} (1)$$

$$\frac{1}{4} (3)$$

پاسخ: گزینه ۴

خودت حل کنی بهتره تندی جسم وقتی در ارتفاع $2/4$ متری سطح زمین و نیز وقتی به سطح زمین می‌رسد را با استفاده از پایستگی انرژی مکانیکی به دست آورد و در آخر نسبت آن‌ها را محاسبه کنید.

درس نامه انرژی جنبشی جسمی با جرم m که با تندی v در حال حرکت است، از رابطه زیر به دست می‌آید.

جرم جسم (kg)

$$K = \frac{1}{2} m v^2 \rightarrow \text{تندی جسم (m/s)}$$

انرژی جنبشی (J)



۲) انرژی پتانسیل گرانشی: اگر جسمی با جرم m در ارتفاع h نسبت به سطح زمین قرار بگیرد، آن گاه انرژی پتانسیل گرانشی آن از رابطه زیر به دست می آید:

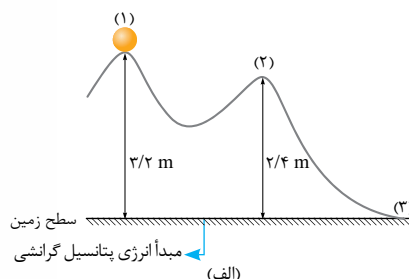
جرم (kg)
↑
 $U = mgh \rightarrow$ ارتفاع (m)
↓ ↓
شتاب گرانش انرژی پتانسیل
(m/s^2) (J)

۳) به مجموع انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل جسم، انرژی مکانیکی می گوئیم. اگر از نیروهای تلف کننده انرژی مانند نیروی مقاومت هوا یا نیروی اصطکاک صرف نظر کنیم، انرژی مکانیکی جسم ثابت می ماند.

$$E_1 = E_2 \Rightarrow K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

پاسخ تشریحی

با توجه به شکل (الف)، پایداری انرژی مکانیکی را برای جسم می نویسیم تا تندی آن را در نقطه های (۱) و (۲) به دست بیاوریم.



$$E_1 = E_2 \xrightarrow{E=K+U} K_1 + U_1 = K_2 + U_2 \xrightarrow{K_1=0} mgh_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgh_2$$

$$\Rightarrow 10 \times 3/2 = \frac{1}{2}v_2^2 + 10 \times 2/4 \Rightarrow v_2^2 = 16 \Rightarrow v_2 = 4 \text{ m/s}$$

هم چنین، پایداری انرژی مکانیکی را برای نقطه های (۱) و (۳) می نویسیم تا تندی جسم را در نقطه (۳) محاسبه کنیم.

$$E_1 = E_3 \Rightarrow K_1 + U_1 = K_3 + U_3 \xrightarrow{K_1=0, U_3=0} U_1 = K_3 \Rightarrow mgh_1 = \frac{1}{2}mv_3^2 \Rightarrow 10 \times 3/2 = \frac{1}{2}v_3^2$$

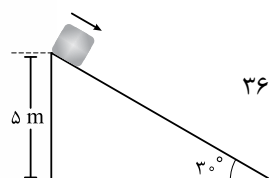
$$\Rightarrow v_3^2 = 64 \Rightarrow v_3 = 8 \text{ m/s}$$

$$\frac{v_2}{v_3} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

حالا می توانیم نسبت تندی جسم در نقطه (۲) به نقطه (۳) را به دست آوریم:

تست و پاسخ ۵۸

در شکل زیر، جسمی به جرم 400 g از بالای سطح شیبدار با تندی 8 m/s در امتداد سطح شیبدار رو به پایین پرتاب می شود. اگر تندی جسم در پایین سطح شیبدار به 12 m/s برسد، اندازه نیروی اصطکاک وارد بر جسم، با فرض ثابت بودن در طول مسیر حرکت، چند نیوتون است؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$)



۳۶ (۴)

۳ / ۶ (۳)

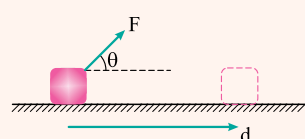
۰ / ۴ (۲)

۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

خودت حل کنی بهتره با استفاده از تساوی کار نیروی اصطکاک با اختلاف انرژی مکانیکی در پایین و بالای سطح شیبدار، نیروی اصطکاک را به دست آورید.

درس نامه به شکل زیر نگاه کنید. اگر به جسم نیروی F را وارد کنیم و جسم به اندازه d بر روی سطح جابه جا شود، آن گاه کاری که نیروی F انجام می دهد از رابطه زیر به دست می آید:



جابه جایی (m)
↑
 $W_F = Fd \cos \theta \rightarrow$ زاویه بین نیروی F و جابه جایی d (rad)
↓
نیروی وارد بر جسم (N)
← کار نیروی F (J)

انرژی مکانیکی یک جسم، پس از مدتی توسط نیروهای اتلافی (مانند نیروی اصطکاک) کم می شود. اختلاف انرژی مکانیکی جسم در ابتدا و انتهای مسیر حرکت جسم، برابر با کار نیروی اصطکاک است.

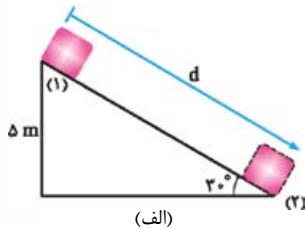
$$W_f = E_1 - E_2$$



کافی است اختلاف انرژی مکانیکی جسم را در پایین و بالای سطح شیبدار به دست آوریم؛ بنابراین با توجه به شکل (الف)

پاسخ تشریحی

می توانیم بنویسیم:



$$E_2 - E_1 = W_{f_k} \xrightarrow{E=K+U, W_{f_k}=-f_k d} (K_2 + U_2) - (K_1 + U_1) = -f_k d$$

$$\xrightarrow{U_2=0} \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 - mgh_1 = -f_k d \Rightarrow \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) - mgh_1 = -f_k d$$

$$\xrightarrow{\sin 30^\circ = \frac{h}{d} \Rightarrow d=10 \text{ m}} \frac{1}{2} \times \frac{4}{10} \times [(12)^2 - (8)^2] - \frac{4}{10} \times 10 \times 5 = -f_k \times 10 \Rightarrow 16 - 20 = -f_k \times 10 \Rightarrow f_k = 0.4 \text{ N}$$

تست و پاسخ ۵۹

هواپیمایی به جرم ۱۵ تن روی باند پرواز از حال سکون به حرکت درمی آید و پس از ۱ min با تندی ۲۱۶ km/h از ارتفاع ۶۰۰ متری سطح زمین عبور می کند. توان متوسط موتور این هواپیما حداقل چند اسب بخار است؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$ و $1 \text{ hp} = 745 \text{ W}$)

$$1/95 \times 10^4 \text{ (۴)}$$

$$1/95 \times 10^3 \text{ (۳)}$$

$$2/6 \times 10^4 \text{ (۲)}$$

$$2/6 \times 10^3 \text{ (۱)}$$

پاسخ: گزینه ۱

توان متوسط یک دستگاه، برابر مقدار کاری است که در یک بازه زمانی صرف می کند و از رابطه زیر به دست می آید.

$$P_{av} = \frac{W}{t}$$

مقدار انرژی مصرفی هواپیما برابر است با:

پاسخ تشریحی

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgh \xrightarrow{m=15 \times 10^3 \text{ kg}, h=600 \text{ m}, g=10 \text{ N/kg}, v=\frac{216}{3.6}=60 \text{ m/s}} E = \frac{1}{2} \times 15 \times 10^3 \times 3600 + 15 \times 10^3 \times 10 \times 600$$

$$\Rightarrow E = 27 \times 10^6 + 90 \times 10^6 \Rightarrow E = 117 \times 10^6 \text{ J}$$

حالا می توانیم توان متوسط موتور این هواپیما را با استفاده از رابطه $P_{av} = \frac{E}{t}$ محاسبه کنیم:

$$P_{av} = \frac{E}{t} \Rightarrow P_{av} = \frac{117 \times 10^6}{60} = 1/95 \times 10^6 \text{ W}$$

در آخر با یک تناسب ساده، توان موتور هواپیما را بر حسب اسب بخار (hp) به دست می آوریم:

hp	W
۱	۷۴۵
P_{av}	$1/95 \times 10^6$

$$\Rightarrow P_{av} = \frac{1/95 \times 10^6}{745} = 2600 \text{ hp یا } P_{av} = 2/6 \times 10^3 \text{ hp}$$

تست و پاسخ ۶۰

طول یک پل فولادی در دمای 50°F برابر ۱۲۰۰ m است. اگر دمای این پل به 85°F برسد، طول آن چند سانتی متر تغییر می کند؟ (ضریب

انبساط طولی فولاد $\frac{1}{K} \times 10^{-5}$ است.)

$$108 \text{ (۴)}$$

$$10/8 \text{ (۳)}$$

$$194/4 \text{ (۲)}$$

$$19/44 \text{ (۱)}$$

پاسخ: گزینه ۴

مشاوره جدیداً در کنکور سراسری، دماها را بر حسب فارنهایت می دهند که شما بر حسب نیاز به کلوین یا درجه سلسیوس باید تبدیل کنید.

خودت حل کنی بهتره ابتدا تغییر دما را بر حسب کلوین (یا درجه سلسیوس) به دست بیاورید، سپس تغییر طول پل فولادی را با استفاده

از رابطه $\Delta L = \alpha L \Delta T$ محاسبه کنید.



پاسخ تشریحی

گام اول: ابتدا تغییر دما را با استفاده از رابطه $\Delta F = \frac{9}{5} \Delta \theta$ بر حسب درجه سلسیوس به دست می آوریم:

$$\Delta F = \frac{9}{5} \Delta \theta \Rightarrow ۸۵ - (-۵۰) = \frac{9}{5} \Delta \theta \Rightarrow ۱۳۵ = \frac{9}{5} \Delta \theta \Rightarrow \Delta \theta = ۷۵^{\circ} \text{C}$$

گام دوم: حالا می توانیم تغییر طول این پل فولادی را محاسبه کنیم:

$$\Delta L = \alpha L_1 \Delta \theta \Rightarrow \Delta L = ۱/۲ \times ۱۰^{-۵} \times ۱۲۰۰ \times ۷۵ \Rightarrow \Delta L = ۱/۰۸ \text{ m یا } \Delta L = ۱۰۸ \text{ cm}$$

تست و پاسخ ۶۱

یک قطعه یخ با دمای ۳۲°C را درون یک استخر بزرگ آب با دمای ۰°C می اندازیم. پس از برقراری تعادل گرمایی، چند درصد به جرم یخ

افزوده می شود؟ ($c_{\text{یخ}} = ۲۱۰۰ \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot ^{\circ} \text{C}}$ ، $L_F = ۳۳۶۰۰۰ \text{ J/kg}$ و تبادل گرما با محیط ناچیز است.)

۳۲ (۴)

۱۶ (۳)

۲۰ (۲)

۱۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره: تا حالا بیشتر سؤالاتی را که دیدید که یخ ذوب می شود، حالا در این سوال، آب منجمد می شود. (برعکس)

درس نامه ۱۰۰۰۱) گرما: مقدار انرژی ای که به دلیل اختلاف دما بین دو جسم، از جسم گرم تر به جسم سردتر منتقل می شود و رابطه آن به صورت مقابل است:

$$Q = mc \Delta \theta \rightarrow \text{تغییرات دما (K)}$$

ظرفیت گرمایی ویژه
(J / kg. °C)

تغییرات دما (K)

جرم (kg) گرما (J)

تغییرات دما (°C)

۲) گرمای نهان ذوب: مقدار انرژی ای که باید به یک کیلوگرم از جسم جامد در نقطه ذوب بدهیم تا در همان دما تبدیل به مایع شود.

$$Q = m L_F \rightarrow \text{گرمای نهان ذوب (J / kg)}$$

جرم (kg)

گرمای نهان ذوب (J)

پاسخ تشریحی: آب درون استخر در دمای ۰°C (نقطه انجماد) قرار دارد؛ بنابراین وقتی یک قطعه یخ با دمای ۳۲°C را درون استخر

می اندازیم، چون دمای آب بیشتر از دمای قطعه یخ است، پس آب گرما از دست می دهد و مقداری از آن منجمد می شود و یخ نیز همان گرما را می گیرد و دمای آن به ۰°C می رسد. پس داریم:

$$|Q| = Q_{\text{یخ}} \Rightarrow |-m_{\text{انجماد}} L_F| = m_{\text{یخ}} c_{\text{یخ}} \Delta \theta \Rightarrow m_{\text{انجماد}} \times ۳۳۶۰۰۰ = m_{\text{یخ}} \times ۲۱۰۰ \times (۰ - (-۳۲))$$

$$\Rightarrow \frac{m_{\text{انجماد}}}{m_{\text{یخ}}} = \frac{۲۱۰۰ \times ۳۲}{۳۳۶۰۰۰} \Rightarrow \frac{m_{\text{انجماد}}}{m_{\text{یخ}}} = \frac{۲}{۱۰}$$

یعنی به اندازه ۲۰ درصد جرم اولیه یخ به آن اضافه می شود.

تست و پاسخ ۶۲

در شکل زیر، اگر میدان الکتریکی حاصل از بار الکتریکی q_1 در محل بار الکتریکی q_2 ، $\vec{E}_1$ و میدان الکتریکی حاصل از بار الکتریکی q_2 در محل بار الکتریکی q_1 ، $\vec{E}_2$ باشد، کدام رابطه درست است؟

$$q_1 \quad q_2 = ۲q_1$$

$$\vec{E}_1 = -۲\vec{E}_2 \quad (۴)$$

$$\vec{E}_1 = ۲\vec{E}_2 \quad (۳)$$

$$\vec{E}_2 = -۲\vec{E}_1 \quad (۲)$$

$$\vec{E}_2 = ۲\vec{E}_1 \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۲

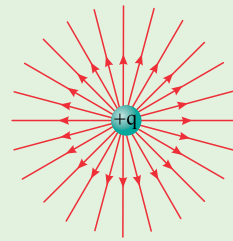
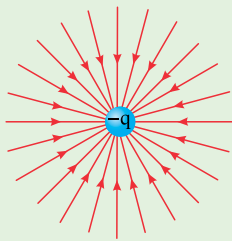
درس نامه •• میدان الکتریکی

بزرگی میدان الکتریکی بار q در فاصله r از آن از رابطه زیر به دست می آید:

$$E = k \frac{|q|}{r^2} \rightarrow (C) \text{ بزرگی بار الکتریکی} \quad \text{و} \quad k = 9 \times 10^9 \frac{N.m^2}{C^2} \rightarrow (m) \text{ فاصله از بار الکتریکی}$$

بزرگی میدان الکتریکی (N/C) ثابت کولن

شکل نامه



(الف) خطوط میدان الکتریکی ذره باردار $+q$ در جهت دور شدن از آن است. (ب) خطوط میدان الکتریکی ذره باردار $-q$ به سمت آن است.

پاسخ تشریحی

با توجه به شکل (الف)، میدان الکتریکی حاصل از بار الکتریکی q_1 را در محل بار الکتریکی q_2 به دست می آوریم (ما بار الکتریکی q_1 را مثبت فرض کردیم، شما می توانید منفی فرض کنید! فقط مواظبتون باشه که دو بار الکتریکی q_1 و q_2 همنام هستند):

$$E_1 = \frac{kq_1}{r^2}$$

(الف)

هم چنین با توجه به شکل (ب)، میدان الکتریکی حاصل از بار الکتریکی q_2 را در محل بار الکتریکی q_1 به دست می آوریم:

$$E_2 = \frac{k(2q_1)}{r^2}$$

(ب)

حالا می توانیم E_1 و E_2 را با یکدیگر مقایسه کنیم. برای این کار داریم:

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{\frac{2kq_1}{r^2}}{\frac{kq_1}{r^2}} \Rightarrow E_2 = 2E_1$$

چون بردار میدان الکتریکی $\vec{E}_1$ خلاف جهت بردار میدان الکتریکی $\vec{E}_2$ است. پس:

$$\vec{E}_2 = -2\vec{E}_1$$

تست و پاسخ ۶۳

در شکل زیر، اندازه نیروی الکتریکی خالص وارد بر بارهای الکتریکی q_2 و q_3 برابر است. اندازه نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار الکتریکی

q_1 چند نیوتون است؟ ($k = 9 \times 10^9 \frac{N.m^2}{C^2}$)



(۲) ۱/۸

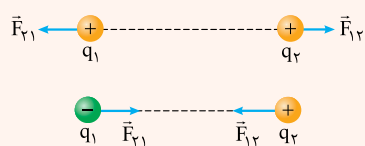
(۴) ۵/۴

(۱) صفر

(۳) ۳/۶

پاسخ: گزینه ۱

مشاوره این سؤال علاوه بر دانش شما، مدیریت زمان شما در جلسه آزمون را هم می سنجد.



$$\begin{cases} F_{12} = F_{21} \\ \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \end{cases}$$

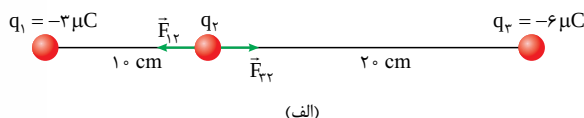
درس نامه ۱) برای تعیین جهت نیروهای الکتریکی وارد بر بارها، باید جاذبه یا دافعه بودن نیروها را بررسی کنیم. توجه داشته باشید که مطابق شکل‌های روبه‌رو، بارهای همانا یکدیگر را دفع و بارهای ناهمنام یکدیگر را جذب می‌کنند. هم‌چنین نیروی الکتریکی‌ای که بارهای q_1 و q_2 به یکدیگر وارد می‌کنند، کنش و واکنش هستند؛ بنابراین طبق قانون سوم نیوتون، این نیروها هم‌اندازه، هم‌راستا و در خلاف جهت یکدیگرند.

۲) قانون کولن: اگر بارهای q_1 و q_2 در فاصله r از یکدیگر قرار بگیرند، اندازه نیروی الکتریکی‌ای که به یکدیگر وارد می‌کنند، از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$F = k \frac{|q_1| |q_2|}{r^2} \quad \text{و} \quad k = 9 \times 10^9 \frac{\text{N.m}^2}{\text{C}^2}$$

بزرگی بار q_1 (C) بزرگی بار q_2 (C) اندازه نیروی الکتریکی وارد بر هر بار (N) فاصله بین دو بار (m) ثابت کولن

گام اول: با توجه به شکل (الف) و با استفاده از قانون کولن، نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار الکتریکی q_2 را به دست می‌آوریم.



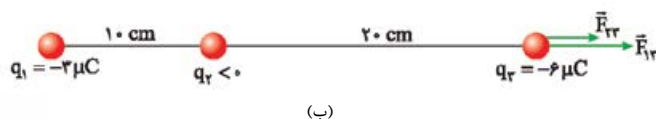
$$F_{12} = k \frac{|q_1| |q_2|}{r_{12}^2} = \frac{9 \times 10^9 \times 3 \times 10^{-6} \times q_2}{(10 \times 10^{-2})^2} = 27 q_2 \times 10^5$$

$$F_{23} = k \frac{|q_3| |q_2|}{r_{23}^2} = \frac{9 \times 10^9 \times 6 \times 10^{-6} \times q_2}{(20 \times 10^{-2})^2} = 13.5 q_2 \times 10^5$$

$$F_{T_2} = F_{12} - F_{23} \Rightarrow F_{T_2} = 27 q_2 \times 10^5 - 13.5 q_2 \times 10^5 \Rightarrow F_{T_2} = 13.5 q_2 \times 10^5$$

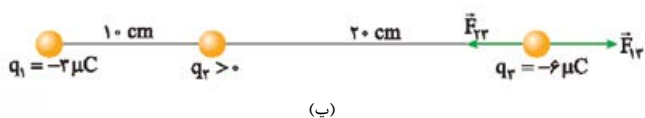
مثبت و منفی بودن بار q_2 تأثیری در اندازه نیروی وارد بر بار q_2 ندارد.

گام دوم: برای محاسبه نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار q_3 ، باید F_{13} و F_{23} را حساب کنیم. چون علامت بار q_2 را نمی‌دانیم، پس یک بار، بار q_2 را مثبت (شکل ب) و بار دیگر منفی (شکل پ) فرض می‌کنیم.



$$F_{13} = k \frac{|q_1| |q_3|}{r_{13}^2} = \frac{9 \times 10^9 \times 3 \times 10^{-6} \times 6 \times 10^{-6}}{(30 \times 10^{-2})^2} = 1/8 \text{ N}, \quad F_{23} = k \frac{|q_2| |q_3|}{r_{23}^2} = \frac{9 \times 10^9 \times q_2 \times 6 \times 10^{-6}}{(20 \times 10^{-2})^2} = 13.5 q_2 \times 10^5$$

$$F_{T_3} = F_{13} + F_{23} = 1/8 + 13.5 q_2 \times 10^5$$



$$F_{13} = 1/8 \text{ N} \quad \Rightarrow \quad F'_{T_3} = |F_{13} - F_{23}| = |1/8 - 13.5 q_2 \times 10^5|$$

$$F_{T_3} = 13.5 q_2 \times 10^5$$



گام سوم: نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار الکتریکی q_2 برابر با نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار q_3 است؛ بنابراین داریم:

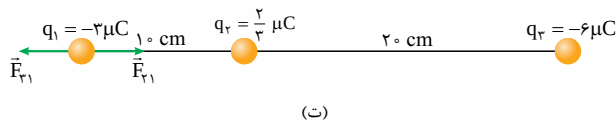
$$F_{T_r} = F_{T_r'} \Rightarrow 13/5 q_2 \times 10^{-5} = 1/8 + 13/5 q_2 \times 10^{-5}$$

$$F_{T_r} = F_{T_r'} \Rightarrow 13/5 q_2 \times 10^{-5} = |1/8 - 13/5 q_2 \times 10^{-5}| \Rightarrow \begin{cases} 13/5 q_2 \times 10^{-5} = 13/5 q_2 \times 10^{-5} - 1/8 \\ 13/5 q_2 \times 10^{-5} = 1/8 - 13/5 q_2 \times 10^{-5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 27 q_2 \times 10^{-5} = 1/8 \Rightarrow q_2 = \frac{2}{3} \mu C$$

بنابراین بار q_2 مثبت و مقدار آن برابر با $q_2 = \frac{2}{3} \mu C$ است.

گام چهارم: در آخر نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار الکتریکی q_1 را با توجه به شکل (ت) به دست می آوریم:

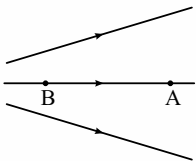


$$F_{r_1} = F_{r_3} = 1/8 \text{ N}, F_{r_1} = k \frac{|q_2| |q_1|}{r_{12}^2} = \frac{9 \times 10^9 \times \frac{2}{3} \times 10^{-6} \times 3 \times 10^{-6}}{(10 \times 10^{-2})^2} = 1/8 \text{ N}, F_{T_1} = F_{r_1} - F_{r_3} = 1/8 - 1/8 = 0$$

تست و پاسخ ۶۴

شکل زیر آرایش خطوط میدان الکتریکی را در ناحیه‌ای از فضا نشان می‌دهد. الکترونی را از نقطه A به سمت نقطه B پرتاب می‌کنیم. در مورد

جابه‌جایی الکترون از نقطه A تا نقطه B کدام یک از موارد زیر درست است؟



(الف) انرژی پتانسیل الکتریکی الکترون کاهش می‌یابد.

(ب) اندازه نیروی الکتریکی وارد بر الکترون کاهش می‌یابد.

(پ) کار انجام‌شده توسط میدان الکتریکی روی الکترون منفی است.

(ت) انرژی جنبشی الکترون افزایش می‌یابد.

(۴) الف و ت

(۳) پ و ت

(۲) الف و ب

(۱) ب و پ

پاسخ: گزینه ۴

مشاوره: تست‌های چند موردی (الف، ب و ...) جدیداً در کنکور سراسری دیده می‌شود. در حقیقت در این جور سؤال‌ها، چهار سؤال را در یک سؤال از شما می‌پرسند که سبک خوبی برای سنجش دانش شما است.

پاسخ تشریحی: عبارت‌ها را بررسی می‌کنیم.

(الف) اگر بار الکتریکی با بار منفی در جهت میدان الکتریکی حرکت کند، انرژی پتانسیل الکتریکی آن افزایش و اگر در خلاف جهت میدان الکتریکی حرکت کند، انرژی پتانسیل الکتریکی آن کاهش می‌یابد. ✓

(ب) چون تراکم خطوط میدان الکتریکی در نقطه B بیشتر از A است، پس بزرگی میدان الکتریکی در نقطه B بیشتر از نقطه A است؛ بنابراین با توجه به رابطه $F = qE$ ، با حرکت الکترون از نقطه A تا نقطه B، با افزایش میدان الکتریکی، نیروی الکتریکی وارد بر الکترون نیز افزایش می‌یابد. ✗

(پ) نیروی الکتریکی وارد بر بار منفی خلاف جهت میدان الکتریکی است؛ بنابراین با توجه به رابطه $W_E = Fd \cos \theta$ ، کار میدان الکتریکی بر روی الکترون در حرکت از A تا B مثبت است. ✗

(ت) نیروی الکتریکی وارد بر بار منفی خلاف جهت میدان الکتریکی است؛ بنابراین در حرکت الکترون از نقطه A تا نقطه B، نیروی الکتریکی در جهت جابه‌جایی به آن وارد شده و تندی و در نتیجه انرژی جنبشی الکترون افزایش می‌یابد. ✓



تست و پاسخ ۶۵

یک ذره به جرم $4 \times 10^{-6} \text{ g}$ و بار الکتریکی $2 \mu\text{C}$ در یک میدان الکتریکی، با تندی 4 m/s از نقطه A پرتاب شده و با تندی 2 m/s از نقطه B عبور می کند. اگر پتانسیل الکتریکی نقطه A، برابر 100 V باشد، پتانسیل الکتریکی نقطه B چند ولت است؟ (ذره فقط تحت تأثیر نیروی ناشی از میدان الکتریکی است.)

(۴) -220

(۳) 220

(۲) -20

(۱) 20

پاسخ: گزینه ۴

درس نامه •• اختلاف پتانسیل الکتریکی بین دو نقطه از رابطه زیر به دست می آید:

$$\Delta V = \frac{\Delta U_E}{q} \rightarrow (J) \leftarrow \text{اختلاف پتانسیل الکتریکی (V)}$$

$$\rightarrow (C) \leftarrow \text{بار الکتریکی}$$

تذکر در رابطه بالا، بار q با علامتش جای گذاری می شود.

اگر بر ذره باردار فقط نیروی الکتریکی وارد شود، طبق اصل پایستگی انرژی مکانیکی، تغییرات انرژی مکانیکی آن صفر است و در نتیجه داریم:

$$\Delta E = 0 \rightarrow \Delta U_E + \Delta K = 0 \rightarrow \Delta U_E = -\Delta K$$

یعنی تغییرات انرژی پتانسیل الکتریکی یک ذره باردار که فقط تحت تأثیر میدان الکتریکی است برابر منفی تغییرات انرژی جنبشی آن است.

پاسخ تشریحی چون تندی ذره در نقطه B کم تر از تندی آن در نقطه A و بار الکتریکی آن منفی است، پس می توانیم نتیجه بگیریم که ذره از نقطه A تا نقطه B در جهت میدان الکتریکی جابه جا شده است. (پهن نیروی الکتریکی بر بار منفی در خلاف جهت میدان الکتریکی وارد می شه). بنابراین انرژی جنبشی ذره در جابه جایی از نقطه A تا نقطه B کاهش و انرژی پتانسیل الکتریکی آن افزایش می یابد. از طرفی چون ذره فقط تحت تأثیر نیروی ناشی از میدان الکتریکی است، طبق اصل پایستگی انرژی مکانیکی همان مقداری که از انرژی جنبشی دارد کم می شود، همان مقدار به انرژی پتانسیل الکتریکی آن افزوده می شود. یعنی داریم:

$$\Delta K = -\frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) \Rightarrow \Delta K = -\frac{1}{2} \times 4 \times 10^{-6} (2^2 - 4^2) = -2/4 \times 10^{-6} \text{ J} \Rightarrow \Delta U = 2/4 \times 10^{-6} \text{ J}$$

حالا با استفاده از رابطه $\Delta V = \frac{\Delta U}{q}$ می توانیم بنویسیم:

$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q} \Rightarrow V_B - V_A = \frac{\Delta U}{q} \Rightarrow V_B - (-100) = \frac{2/4 \times 10^{-6}}{-2 \times 10^{-6}} \Rightarrow V_B = -120 - 100 = -220 \text{ V}$$

تکنیک چون تندی بار منفی کم شده، پس باید در جهت خطوط میدان الکتریکی جابه جا شده باشد. یعنی پتانسیل الکتریکی نقطه B از 100 V کم تر است که تنها $\checkmark$ صحیح است.

تست و پاسخ ۶۶

خازنی که دی الکتریک آن هوا است را پس از پر شدن از باتری جدا کرده، سپس فاصله بین صفحه های آن را با عایقی به ثابت دی الکتریک ۵ پر می کنیم. با انجام این کار کدام یک از تغییرات زیر رخ می دهد؟

$K = 1$

(الف) ظرفیت خازن $\frac{1}{5}$ برابر می شود.

(ب) اختلاف پتانسیل الکتریکی بین صفحات خازن ۵ برابر می شود.

(پ) انرژی ذخیره شده در خازن $\frac{1}{5}$ برابر می شود.

(ت) اندازه میدان الکتریکی بین صفحات خازن $\frac{1}{5}$ برابر می شود.

(۴) پ و ت

(۳) ب و پ

(۲) الف و ت

(۱) الف و ب

پاسخ: گزینه ۴



پاسخ تشریحی

وقتی خازنی را پس از پر شدن از باتری جدا می کنیم، بار الکتریکی روی صفحات آن ثابت می ماند. با توجه به این موضوع عبارت ها را بررسی می کنیم:

الف) ابتدا دی الکتریک بین صفحات خازن هوا است، سپس دی الکتریکی با ثابت ϵ بین صفحات قرار می گیرد؛ بنابراین با استفاده از رابطه

$$C = \frac{\kappa \epsilon_0 A}{d} \quad \text{داریم:}$$

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \xrightarrow{\kappa_1=1, \kappa_2=\epsilon} \frac{C_2}{C_1} = \epsilon \quad \times$$

ب) با استفاده از رابطه $V = \frac{Q}{C}$ می توانیم بنویسیم:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{Q_2}{Q_1} \times \frac{C_1}{C_2} \xrightarrow{Q_1=Q_2, \frac{C_2}{C_1}=\epsilon} \frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{\epsilon} \quad \times$$

پ) چون بار الکتریکی روی صفحات خازن ثابت است، می توانیم از رابطه $U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$ برای مقایسه انرژی ذخیره شده در خازن استفاده کنیم.

$$\frac{U_2}{U_1} = \left(\frac{Q_2}{Q_1}\right)^2 \times \frac{C_1}{C_2} \xrightarrow{Q_1=Q_2, \frac{C_2}{C_1}=\epsilon} \frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{\epsilon} \quad \checkmark$$

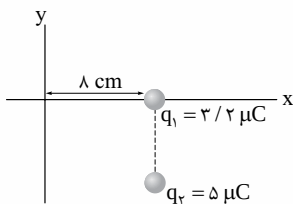
ت) با توجه به رابطه $E = \frac{|\Delta V|}{d}$ داریم:

$$\frac{E_2}{E_1} = \left| \frac{\Delta V_2}{\Delta V_1} \right| \times \frac{d_1}{d_2} \xrightarrow{\frac{\Delta V_2}{\Delta V_1} = \frac{1}{\epsilon}} \frac{E_2}{E_1} = \frac{1}{\epsilon} \quad \checkmark$$

تست و پاسخ ۶۷

در شکل زیر، میدان الکتریکی خالص در مبدأ مختصات در SI برابر $\vec{E} = (-81 \text{ N/C} \hat{i} + 27 \text{ N/C} \hat{j}) \times 10^5$ است. اندازه نیروی الکتریکی ای

که دو بار الکتریکی q_1 و q_2 به یکدیگر وارد می کنند، چند نیوتون است؟ $(k = 9 \times 10^9 \frac{\text{N.m}^2}{\text{C}^2})$



۱۴ / ۴ (۱)

۳۲ (۲)

۴۰ (۳)

۱۶ (۴)

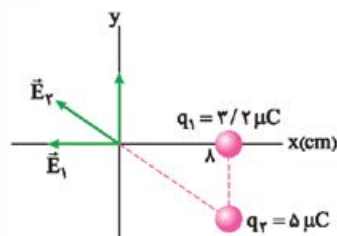
پاسخ: گزینه ۳

درس نامه •• میدان الکتریکی در فاصله r از بار q از رابطه $E = \frac{k|q|}{r^2}$ به دست می آید، برای مشخص کردن جهت میدان الکتریکی از بار آزمون مثبت در آن نقطه استفاده می کنیم.

پاسخ تشریحی میدان الکتریکی حاصل از بار الکتریکی q_1 در مبدأ مختصات را محاسبه می کنیم:

$$E_1 = k \frac{|q_1|}{r_1^2} \xrightarrow{q_1 = 3/2 \times 10^{-6} \text{ C}, r_1 = 8 \times 10^{-2} \text{ m}} \xrightarrow{k = 9 \times 10^9 \frac{\text{N.m}^2}{\text{C}^2}} E_1 = 9 \times 10^9 \times \frac{3/2 \times 10^{-6}}{64 \times 10^{-4}} = 45 \times 10^5 \text{ N/C}$$

حالا با توجه به شکل «الف»، میدان الکتریکی خالص در مبدأ مختصات را می نویسیم:



(الف)

$$\begin{aligned} \vec{E}_T &= \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \Rightarrow -81 \times 10^5 \hat{i} + 27 \times 10^5 \hat{j} = -45 \times 10^5 \hat{i} + \vec{E}_2 \\ \Rightarrow \vec{E}_2 &= -36 \times 10^5 \hat{i} + 27 \times 10^5 \hat{j} \end{aligned}$$



حالا می‌توانیم اندازه میدان الکتریکی ناشی از بار الکتریکی q_2 در مبدأ مختصات را به دست آوریم:

$$E_2 = \sqrt{(36 \times 10^5)^2 + (27 \times 10^5)^2} = 10^5 \sqrt{(4 \times 9)^2 + (3 \times 9)^2} = 9 \times 10^5 \sqrt{16 + 9} = 45 \times 10^5 \text{ N/C}$$

در ادامه با استفاده از رابطه $E_2 = \frac{k|q_2|}{r_2^2}$ می‌توانیم فاصله بار q_2 تا مبدأ مختصات را محاسبه کنیم:

$$45 \times 10^5 = 9 \times 10^9 \times \frac{5 \times 10^{-6}}{r_2^2} \Rightarrow r_2 = 0.1 \text{ m یا } r_2 = 10 \text{ cm}$$

$$10^2 = 8^2 + r_1^2 \Rightarrow r_1 = 6 \text{ cm}$$

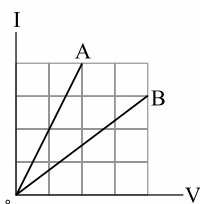
با توجه به شکل «الف» فاصله بین دو بار q_1 و q_2 برابر است با:

در نهایت با استفاده از قانون کولن، نیروی الکتریکی بین دو بار q_1 و q_2 را محاسبه می‌کنیم.

$$F_{12} = k \frac{|q_1||q_2|}{r_{12}^2} \Rightarrow F_{12} = 9 \times 10^9 \times \frac{3/2 \times 10^{-6} \times 5 \times 10^{-6}}{(6 \times 10^{-2})^2} = 40 \text{ N}$$

تست و پاسخ ۶۸

نمودار جریان عبوری از دو مقاومت A و B به شکل زیر است. اگر این دو مقاومت به اختلاف پتانسیل یکسانی وصل باشند، توان مصرفی مقاومت A چند برابر توان مصرفی مقاومت B است؟



توان مصرفی با مقاومت رابطه عکس دارد.

- (۱) $\frac{3}{2}$
(۲) $\frac{2}{3}$
(۳) $\frac{3}{8}$
(۴) $\frac{8}{3}$

پاسخ: گزینه ۴

$$P = \frac{V^2}{R}$$

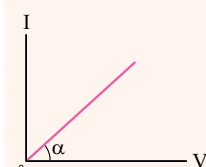
درس‌نامه (۱) توان مصرفی در یک مقاومت خارجی R از رابطه مقابل به دست می‌آید:

$$R = \text{مقاومت الکتریکی } (\Omega)$$

$$V = \text{اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت (V)}$$

$$P = \text{توان مصرفی (W)}$$

(۲) اگر نمودار جریان الکتریکی بر حسب اختلاف پتانسیل دو سر یک مقاومت الکتریکی R را رسم کنیم، به صورت یک خط است که از مبدأ مختصات می‌گذرد و شیب این خط، عکس مقاومت الکتریکی را نشان می‌دهد.



$$\text{شیب} = \frac{1}{R}$$

خواستون باشه شیب خط نمودار V بر حسب I، مقاومت الکتریکی را نشان می‌دهد.

نسبت توان الکتریکی مصرفی دو مقاومت را می‌نویسیم:

$$\frac{P_A}{P_B} = \frac{\frac{V_A^2}{R_A}}{\frac{V_B^2}{R_B}} \xrightarrow{V_A=V_B} \frac{P_A}{P_B} = \frac{R_B}{R_A} = \frac{\text{شیب خط A}}{\text{شیب خط B}} = \frac{4/2}{3/4} = \frac{8}{3}$$

تست و پاسخ ۶۹

در ماشین‌های چمن‌زنی برقی، برای مسافت‌های حداکثر تا ۳۵ m از سیم‌های مسی با قطر ۸ mm و برای مسافت‌های طولانی‌تر، از سیم‌های مسی با قطر ۱/۲ mm استفاده می‌شود. مقاومت الکتریکی یک سیم ماشین چمن‌زنی به طول ۲۰ m چند برابر مقاومت الکتریکی یک سیم ماشین چمن‌زنی به طول ۶۰ m است؟

$$\frac{4}{27} \text{ (۴)}$$

$$\frac{27}{4} \text{ (۳)}$$

$$\frac{4}{3} \text{ (۲)}$$

$$\frac{3}{4} \text{ (۱)}$$

پاسخ: گزینه ۱



مشاوره در فصل جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم، در کنار تست‌های مربوط به مدارها، تست‌هایی از این تیپ نیز مطرح می‌شوند.

خودت حل کنی بهتره نسبت مقاومت‌های دو سیم در دمای ثابت را بنویسید و به راحتی جواب را به دست آورید.

درس‌نامه ●● مقاومت الکتریکی یک سیم در دمای ثابت، با طول و جنس آن نسبت مستقیم دارد، ولی با مساحت سطح مقطع آن، رابطه عکس دارد.

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \times \frac{L_1}{L_2} \times \frac{A_2}{A_1} \xrightarrow{A = \pi \frac{D^2}{4}} \frac{R_1}{R_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \times \frac{L_1}{L_2} \times \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2$$

L = طول سیم (m)

ρ = مقاومت ویژه ($\Omega \cdot m$)

R = مقاومت الکتریکی (Ω)

D = قطر مقطع سیم (m)

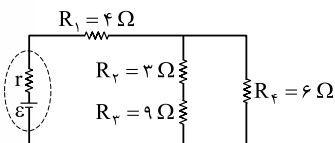
A = مساحت مقطع سیم (m^2)

پاسخ تشریحی نسبت مقاومت الکتریکی سیم اول به سیم دوم را به دست می‌آوریم. با توجه به یکسان بودن جنس دو سیم، $\rho_1 = \rho_2$ است.

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \times \frac{L_1}{L_2} \times \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2 = 1 \times \frac{2}{6} \times \left(\frac{1/2}{1/8}\right)^2 = \frac{1}{3} \times \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$$

تست و پاسخ ۷۰

در مدار شکل روبه‌رو، توان مصرفی مقاومت R_1 ، چند برابر توان مصرفی مقاومت R_3 است؟



$$\frac{4}{3} \quad (2)$$

$$\frac{1}{4} \quad (1)$$

$$4 \quad (4)$$

$$1 \quad (3)$$

R_1 و R_3 نه متوالی هستند و نه موازی.

پاسخ: گزینه ۴

درس‌نامه ●● (۱) مقاومت معادل، حاصل از دو مقاومت متوالی، برابر با مجموع آن‌هاست و هم‌چنین جریان عبوری از آن‌ها یکسان است.

(۲) اختلاف پتانسیل بین دو سر شاخه‌های موازی مدار، یکسان است.

(۳) جمع جریان‌های ورودی به هر گره با جمع جریان‌های خروجی از آن گره، برابر است.

(۴) یکی از روابط محاسبه توان مصرفی در مقاومت خارجی R به صورت زیر است:

$$P = RI^2$$

I = جریان الکتریکی (A)

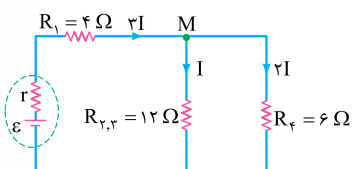
R = مقاومت الکتریکی (Ω)

P = توان مصرفی (W)

خودت حل کنی بهتره ابتدا بین جریان‌های دو مقاومت R_1 و R_3 ، رابطه‌ای پیدا کنید، سپس نسبت توان‌ها را بنویسید.

پاسخ تشریحی **گام اول:** اگر جریان عبوری از مقاومت R_3 را برابر I در نظر بگیریم، جریان عبوری از شاخه شامل دو مقاومت متوالی R_2 و R_3 نیز همان I است.

$$R_{2,3} = R_2 + R_3 = 3 + 9 = 12 \Omega$$



گام دوم: اختلاف پتانسیل بین دو شاخه موازی، یکسان است. پس داریم:

$$V_{2,3} = V_4 \Rightarrow R_{2,3} \times I_{2,3} = R_4 I_4 \Rightarrow 12 \times I = 6 I_4 \Rightarrow I_4 = 2I$$

$$I_1 = I + 2I = 3I$$

گام سوم: با توجه به تقسیم جریان در گره M ، جریان عبوری از مقاومت R_1 به دست می‌آید:

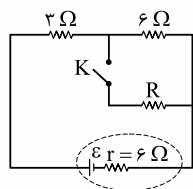
$$\frac{P_1}{P_3} = \frac{R_1 I_1^2}{R_3 I_3^2} = \frac{4(3I)^2}{9I^2} = \frac{4 \times 9}{9} = 4$$

گام چهارم: نسبت توان مصرفی مقاومت R_1 را به R_3 به دست می‌آوریم:



تست و پاسخ ۷۱

در مدار شکل روبه‌رو، اگر با بستن کلید K، توان خروجی باتری تغییری نکند، مقاومت R چند اهم است؟



$$r' = R_{eq} \times R'_{eq}$$

$$2/4 (2)$$

$$6 (4)$$

$$1/2 (1)$$

$$3 (3)$$

پاسخ: گزینه ۱

مشاوره در کنکور، منتظر حداقل ۲ تست از مدارها باشید.

درس‌نامه ●● (۱) اگر به ازای دو مقاومت خارجی معادل، R_{eq} و R'_{eq} ، توان خروجی مولد یکسان شود، می‌توان نوشت:

$$r' = R_{eq} \times R'_{eq}$$

r = مقاومت درونی مولد (Ω)

(۲) بهتر است برای دو مقاومت موازی R_1 و R_2 ، مقاومت معادل را از رابطه روبه‌رو به دست آوریم:

$$R_{1,2} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

$$R_{eq} = 3 + 6 = 9 \Omega$$

پاسخ تشریحی **گام اول:** در حالتی که کلید باز است، مقاومت معادل مدار را به دست می‌آوریم:

(مقاومت‌های 3Ω و 6Ω به طور متوالی بسته شده‌اند.)

$$r' = R_{eq} \times R'_{eq} \Rightarrow 6' = 9 \times R'_{eq} \Rightarrow R'_{eq} = 4 \Omega$$

گام دوم: با توجه به یکسان بودن توان خروجی باتری در دو حالت، داریم:

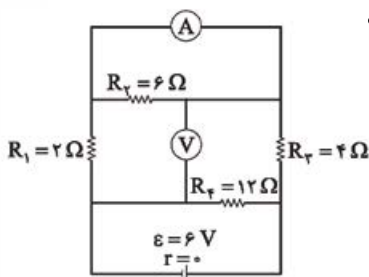
گام سوم: در حالت کلید بسته، مقاومت ۶ اهمی با مقاومت R موازی و مجموعه آن‌ها با مقاومت ۳ اهمی، متوالی هستند.

$$R'_{eq} = \frac{6 \times R}{6 + R} + 3$$

$$4 = \frac{6R}{6 + R} + 3 \Rightarrow 1 = \frac{6R}{6 + R} \Rightarrow 6R = 6 + R \Rightarrow R = \frac{6}{5} = 1.2 \Omega$$

تست و پاسخ ۷۲

در مدار شکل روبه‌رو، ولت‌سنج آرمانی و آمپر سنج آرمانی، ترتیب در SI چه مقادیری را نشان می‌دهند؟



مقاومت بسیار کم

مقاومت بسیار زیاد

$$1, 8 (1)$$

$$1/5, 1 (2)$$

$$1, 2 (3)$$

$$0/5, 1 (4)$$

پاسخ: گزینه ۳

مشاوره اخیراً این تیپ سؤال که آمپر سنج در شاخه‌ای بدون مقاومت قرار می‌گیرد، در اغلب آزمون‌ها و حتی کنکور سراسری دیده می‌شود.

خودت حل کنی بهتره بهتر است در ابتدا، با نقطه‌گذاری، شکل ساده‌تری از مدار را رسم کنید. سپس مقاومت معادل مدار و جریان گذرنده

از R_1 و R_2 را به دست آورید، سپس V_1 را محاسبه کنید.

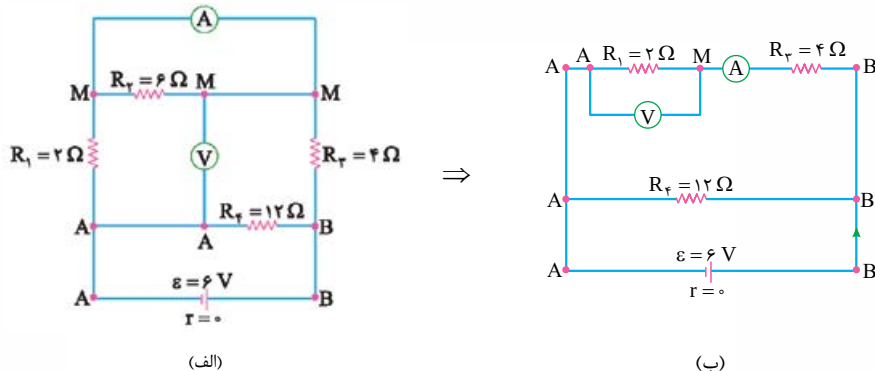
درس‌نامه ●● هرگاه دو سر یک مقاومت، به وسیله یک رسانا با مقاومت ناچیز (مثلاً یک آمپر سنج آرمانی) به هم متصل شوند، تمام جریان

از درون آن رسانا گذشته و از مقاومت، هیچ جریانی نمی‌گذرد. در این حالت می‌گوییم آن مقاومت، اتصال کوتاه شده و از مدار حذف می‌گردد.

به عبارت دیگر، به جای آن مقاومت، یک قطعه سیم رابط قرار می‌گیرد.



پاسخ تشریحی گام اول: مقاومت آمپرسنج آرمانی، صفر است، پس R_p ، اتصال کوتاه شده و از مدار حذف می شود. به کمک نام گذاری نقاط هم پتانسیل شکل مدار را از (الف) به (ب) ساده می کنیم:



$$R_{1,3} = R_1 + R_3 = 2 + 4 = 6\Omega$$

گام دوم: مقاومت معادل و جریان اصلی مدار را به دست می آوریم:

$$R_{eq} = \frac{R_{1,3} \times R_4}{R_{1,3} + R_4} = \frac{6 \times 12}{6 + 12} = 4\Omega$$

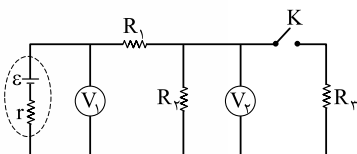
$$I_{1,3} = \frac{V_{1,3}}{R_{1,3}} = \frac{\mathcal{E}}{R_{1,3}} = \frac{6}{6} = 1A$$

گام سوم: آمپرسنج، جریان عبوری از دو مقاومت متوالی R_3 و R_1 را نشان می دهد:

گام چهارم: ولت سنج، اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت R_1 را نشان می دهد. پس با توجه به قانون اهم می توان نوشت: $V_1 = R_1 I_1 = 2 \times 1 = 2V$

تست و پاسخ ۷۳

در مدار شکل زیر، با بستن کلید K ، به ترتیب مقدارهایی که دو ولت سنج آرمانی V_1 و V_2 نشان می دهند، چگونه تغییر می کنند؟



مقاومت بسیار زیادی دارند.

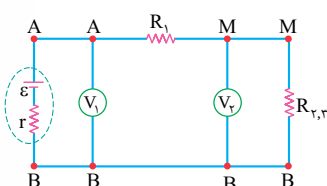
- (۱) افزایش می یابد، کاهش می یابد.
- (۲) کاهش می یابد، افزایش می یابد.
- (۳) افزایش می یابد، افزایش می یابد.
- (۴) کاهش می یابد، کاهش می یابد.

پاسخ: گزینه ۴

درس نامه ۱ هرگاه یک شاخه مقاومت دار، به طور موازی به یک مدار اضافه شود، مقاومت معادل آن مدار کاهش می یابد.

(۲) بین دو مقاومت موازی، اختلاف پتانسیل یکسان است.

(۳) برای دو مقاومت متوالی، اختلاف پتانسیل کل برابر با مجموع اختلاف پتانسیل های هر یک از آن هاست.



پاسخ تشریحی گام اول: با وصل کلید K ، دو مقاومت R_3 و R_4 موازی شده و مقاومت معادل مدار کاهش می یابد؛ در نتیجه جریانی که از مولد می گذرد، افزایش می یابد.

$$\uparrow I = \frac{\mathcal{E}}{R_{eq} + r}$$

گام دوم: ولت سنج V_1 ، اختلاف پتانسیل دو سر مولد و ولت سنج V_2 اختلاف پتانسیل های R_3 و R_4 را نشان می دهد.

$$\downarrow V_{AB} = \mathcal{E} - rI \uparrow$$

ولت سنج V_1 عدد کمتری را نشان می دهد.

$$\uparrow V_{AM} = R_1 I \uparrow$$

گام سوم: با توجه به قانون اهم می توان نوشت:

$$\downarrow V_{AB} = \uparrow V_{AM} + V_{MB} \downarrow$$

پس حتماً V_{MB} کاهش می یابد.

یعنی ولت سنج V_2 عدد کمتری را نشان می دهد.



حواستون باشه در یک مدار وقتی با قطع و وصل کلیدها، مقاومت‌های خارجی به مدار اضافه یا از مدار کم می‌شوند، هیچ تأثیری روی نیروی محرکه و مقاومت درونی مولد نمی‌گذارند.

تست و پاسخ ۷۴

یک سیم راست حامل جریان $A \ 5/0$ به طول $cm \ 80$ ، در میدان مغناطیسی یکنواختی به بزرگی $G \ 400$ قرار دارد. اگر راستای سیم با خطوط میدان مغناطیسی زاویه 30° بسازد، اندازه نیروی مغناطیسی وارد بر سیم چند نیوتون است؟

$$|G| = 10^{-4} T$$

$$1/6 \times 10^{-2} (4)$$

$$1/6 \times 10^{-3} (3)$$

$$8 \times 10^{-2} (2)$$

$$8 \times 10^{-3} (1)$$

پاسخ: گزینه ۱

مشاوره این تست از سؤال‌های ساده مبحث مغناطیس است. به هیچ وجه آن را از دست ندهید.

خودت حل کنی بهتره مقادیر داده‌شده در متن سؤال را با یکای مناسب (SI)، در فرمول نیروی مغناطیسی وارد بر سیم حامل جریان قرار دهید.

درس‌نامه هرگاه سیمی به طول l در میدان مغناطیسی یکنواخت B قرار گیرد و جریان I از آن بگذرد، نیروی F ناشی از میدان مغناطیسی بر آن وارد می‌شود.

$$F = BIl \sin \alpha$$

$$I = \text{جریان الکتریکی (A)}$$

$$F = \text{اندازه نیرو (N)}$$

$$B = \text{اندازه میدان مغناطیسی یکنواخت (T)}$$

$$l = \text{طول سیم (m)}$$

$$\alpha = \text{زاویه بین امتداد سیم و میدان مغناطیسی}$$

$$B = 400 \times 10^{-4} = 4 \times 10^{-2} T$$

پاسخ تشریحی هر گاوس، معادل 10^{-4} تسلا است.

$$F = BIl \sin \alpha = 4 \times 10^{-2} \times 0/5 \times 0/8 \times \sin 30^\circ \Rightarrow F = 4 \times 10^{-2} \times 0/4 \times \frac{1}{2} = 8 \times 10^{-3} N$$

تست و پاسخ ۷۵

در ناحیه‌ای که میدان مغناطیسی یکنواختی به بزرگی $G \ 400$ ، به سمت جنوب وجود دارد، ذره‌ای

به جرم $mg \ 40$ و بار الکتریکی $\mu C \ 10-$ با سرعت $m/s \ 2 \times 10^5$ به سمت بالا پرتاب می‌شود.

بلافاصله پس از پرتاب ذره، شتاب آن ناشی از میدان مغناطیسی چند متر بر مربع ثانیه و در چه

جهتی است؟ (از نیروی گرانش وارد بر ذره چشم‌پوشی کنید.)

برای تعیین جهت نیرو توجه داشته باشید که بار منفی است.

$$1/2, (4) \text{ در جهت غرب}$$

$$1/2, (3) \text{ در جهت شرق}$$

$$2000, (2) \text{ در جهت غرب}$$

$$2000, (1) \text{ در جهت شرق}$$

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره این تست به صورت ترکیبی از دو مبحث مغناطیس و قانون دوم نیوتون است.

خودت حل کنی بهتره ابتدا اندازه نیروی مغناطیسی وارد بر ذره و جهت آن را تعیین کنید، سپس با استفاده از قانون دوم نیوتون، اندازه و جهت شتاب را به دست آورید.

درس‌نامه هرگاه ذره باردار q با سرعت $\vec{v}$ از میدان مغناطیسی $\vec{B}$ بگذرد، نیروی $\vec{F}$ بر آن وارد خواهد شد.

$$F = |q| v B \sin \theta$$

$$|q| = \text{بزرگی بار الکتریکی (C)}$$

$$F = \text{اندازه نیرو (N)}$$

$$\theta = \text{زاویه بین سرعت و میدان مغناطیسی}$$

$$v = \text{اندازه سرعت ذره (m/s)}$$



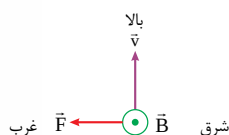
جهت این نیرو به کمک قاعده دست راست تعیین می‌شود، به طوری که برای ذرات دارای بار مثبت از دست راست و برای ذرات با بار منفی، از دست چپ استفاده می‌کنیم؛ به عنوان مثال، برای یک ذره دارای بار منفی، اگر دست چپ خود را طوری نگه داریم که انگشتان باز شده ما در جهت $\vec{v}$ باشند و آن‌ها را به طرف B ببندیم، انگشت شست، جهت نیرو را نشان می‌دهد.

۲) طبق قانون دوم نیوتون، اگر جرمی به جرم m ، تحت تأثیر نیروی $\vec{F}$ شتابی بگیرد، طبق رابطه $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$ ، این شتاب با نیرو متناسب و با آن هم جهت است.

پاسخ تشریحی گام اول: اندازه نیروی وارد بر ذره را به دست می‌آوریم:

$$F = |q| v B \sin \theta = 10^{-6} \times 10^{-6} \times 2 \times 10^{-5} \times 400 \times 10^{-4} \times \sin 90^\circ \Rightarrow F = 8 \times 10^{-22} \text{ N}$$

گام دوم: با توجه به قاعده دست چپ، جهت این نیرو به طرف غرب است.



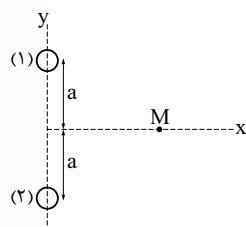
$$a = \frac{F}{m} = \frac{8 \times 10^{-22}}{400 \times 10^{-6}} = 2000 \text{ m/s}^2$$

گام سوم: $\vec{a}$ و $\vec{F}$ هم جهت‌اند، بنابراین جهت شتاب نیز به طرف غرب است.

تست و پاسخ ۷۶

بردار میدان مغناطیسی آن‌ها در صفحه قرار می‌گیرند.

در شکل زیر دو سیم راست حامل جریان هم‌اندازه (۱) و (۲)، عمود بر صفحه قرار دارند. اگر میدان مغناطیسی حاصل از دو سیم در نقطه M در جهت محور Y باشد، میدان مغناطیسی حاصل از سیم (۲) در محل سیم (۱) و نیروی مغناطیسی وارد بر سیم (۲) از طرف سیم (۱)، به ترتیب در چه جهتی هستند؟



(۱) در جهت محور X، در جهت محور Y

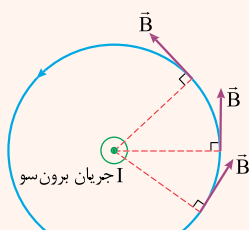
(۲) در جهت محور X، در خلاف جهت محور Y

(۳) در خلاف جهت محور X، در جهت محور Y

(۴) در خلاف جهت محور X، در خلاف جهت محور Y

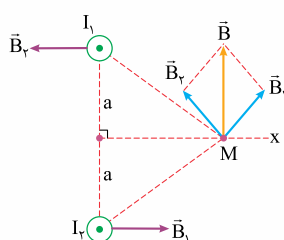
پاسخ: گزینه ۳

مشاوره برای پاسخگویی به این نوع سؤال‌ها، زمان زیادی صرف نمی‌شود، زیرا ما را درگیر محاسبات عددی نمی‌کنند.



درس‌نامه ۷۷ (۱) اگر سیم حامل جریان، بر صفحه کاغذ عمود باشد، بردار میدان مغناطیسی در هر نقطه از صفحه، بر خطی که آن نقطه را به سیم وصل می‌کند، عمود است. جهت میدان مغناطیسی به کمک قاعده دست راست تعیین می‌گردد.

(۲) سیم‌های مستقیم و موازی حامل جریان‌های همسو، یکدیگر را می‌ربایند و سیم‌های حامل جریان‌های ناهمسو، یکدیگر را می‌رانند.



پاسخ تشریحی گام اول: میدان مغناطیسی خالص (برایند) در نقطه M روی عمود منصف دو سیم، در جهت قائم است؛ پس میدان‌های مغناطیسی $\vec{B}_1$ و $\vec{B}_2$ ناشی از دو سیم ۱ و ۲ باید به گونه‌ای باشند که مؤلفه‌های افقی آن‌ها، یکدیگر را خنثی کرده و مؤلفه قائم هر دو، رو به بالا باشد.

توجه جریان سیم‌ها، هم‌اندازه و فاصله آن‌ها از نقطه M به یک اندازه است؛ پس $B_1 = B_2$ است.



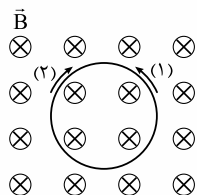
گام دوم: $\vec{B}_2$ یعنی میدان مغناطیسی حاصل از سیم ۲ در محل سیم ۱ که به طرف چپ است؛ یعنی در خلاف جهت X.
گام سوم: $\vec{F}_{12}$ یعنی نیروی مغناطیسی وارد بر سیم ۲ از طرف سیم ۱ به صورت ریاضی و رو به بالا است؛ پس در جهت +y است.

۷۷

تست و پاسخ

$\theta = 0$

در شکل زیر، حلقهٔ رسانا به مساحت 200 cm^2 و مقاومت الکتریکی 4Ω ، عمود بر خطوط میدان مغناطیسی یکنواختی به بزرگی 4 T قرار دارد. اگر در مدت 2 s ، اندازهٔ میدان مغناطیسی به 2 T برسد و جهت آن قرینه شود، در این مدت جریان الکتریکی متوسط القاشده در حلقه چند میلی آمپر و در چه جهتی است؟



(۱)، ۱۵ (۲)

(۱)، ۵ (۱)

(۲)، ۱۵ (۴)

(۲)، ۵ (۳)

پاسخ: گزینه ۴

خودت حل کنی بهتره ابتدا نیروی محرکه القایی متوسط و جریان القایی متوسط را به دست آورید، سپس با استفاده از قانون لنز، جهت جریان القایی را مشخص کنید.

درس نامه ۱۱ با توجه به قانون القای الکترومغناطیسی فاراده، هرگاه میدان مغناطیسی تغییر کند، نیروی محرکه متوسط القاشده در مدار به صورت مقابل است:

$$\bar{\varepsilon} = -NA \cos \theta \frac{\Delta B}{\Delta t}$$

N = تعداد حلقه‌ها

$\bar{\varepsilon}$ = نیروی محرکه القایی متوسط (V)

θ = زاویه بین بردار میدان مغناطیسی و نیم خط عمود بر سطح حلقه

A = مساحت هر حلقه (m^2)

$$\frac{\Delta B}{\Delta t} = \text{آهنگ تغییر میدان مغناطیسی } \left(\frac{\text{T}}{\text{s}} \right)$$

$$\bar{I} = \frac{\bar{\varepsilon}}{R}$$

(۲) جریان الکتریکی متوسط القاشده در مدار ($\bar{I}$)، از رابطهٔ مقابل به دست می آید:

R = مقاومت الکتریکی مدار (Ω)

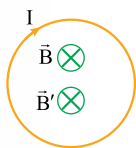
(۳) قانون لنز: جریان حاصل از نیروی محرکه القایی در یک مدار، در جهتی است که آثار مغناطیسی ناشی از آن، با عامل به وجود آورندهٔ جریان القایی، یعنی تغییر شار مغناطیسی، مخالفت می کند.

پاسخ تشریحی گام اول: نیروی محرکه القایی متوسط را به دست می آوریم:

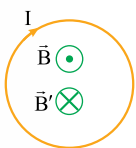
$$\bar{\varepsilon} = -NA \cos \theta \frac{\Delta B}{\Delta t} = -1 \times 200 \times 10^{-4} \times 1 \times \frac{-0/2 - 0/4}{0/2} = 6 \times 10^{-2} \text{ V}$$

$$\bar{I} = \frac{\bar{\varepsilon}}{R} = \frac{6 \times 10^{-2}}{4} = 1/5 \times 10^{-2} \text{ A} = 15 \text{ mA}$$

گام دوم: جریان القایی متوسط را محاسبه می کنیم:



گام سوم: ابتدا میدان مغناطیسی B در حال کاهش است؛ پس طبق قانون لنز، میدان مغناطیسی القایی B' نیز درون سو است تا با کاهش شار مغناطیسی مخالفت کند و جریان حاصل از آن ساعتگرد است. جهت این جریان با قاعدهٔ دست راست تعیین می شود.



بعد از وارونه شدن جهت میدان مغناطیسی نیز میدان مغناطیسی القایی B' درون سو است تا با افزایش میدان مغناطیسی B مخالفت کند و جریان القایی حاصل ساعتگرد باقی می ماند.





تست و پاسخ ۷۸

اگر جریان الکتریکی عبوری از القاگر به ضریب خود القاوری 2 H ، 2 A افزایش یابد، انرژی ذخیره شده

L

$$80 \times 10^{-3} \text{ J}$$

در آن 80 میلی ژول تغییر می کند. جریان الکتریکی عبوری از این القاگر در حالت اول چند آمپر است؟

۴ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

۰/۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

خود حل کنی بهتره اختلاف انرژی ذخیره شده در القاگر را بین دو حالت بنویسید. با حل یک دستگاه دو معادله و دو مجهولی، جریان الکتریکی

در هر دو حالت به دست می آید.

$$U = \frac{1}{2} LI^2$$

درس نامه انرژی ذخیره شده در القاگر:

$$U = \text{انرژی ذخیره شده در القاگر (J)}$$

$$L = \text{ضریب القاوری (H)}$$

$$I = \text{جریان عبوری از القاگر (A)}$$

پاسخ تشریحی اختلاف جریان الکتریکی در دو حالت، 2 A است؛ یعنی $I' - I = 2 \text{ A}$ ؛ اختلاف انرژی ذخیره شده در القاگر را بین دو

حالت می نویسیم:

$$U' - U = \frac{1}{2} LI'^2 - \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} L(I'^2 - I^2) = \frac{1}{2} L(I' - I)(I' + I)$$

$$80 \times 10^{-3} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{1000} (2)(I' + I) \Rightarrow \frac{80}{1000} = \frac{2}{1000} (I' + I) \Rightarrow I' + I = 4 \xrightarrow{I' = I + 2} 2I + 2 = 4 \Rightarrow I = 1 \text{ A}$$

تست و پاسخ ۷۹

معادله جریان متناوبی بر حسب زمان در SI به صورت $I = 5 \sin(20\pi t)$ است. در چه لحظه ای بر حسب ثانیه، جریان الکتریکی برای اولین بار

بیشینه می شود؟

پس از $\frac{T}{4}$

$\frac{1}{40}$ (۴)

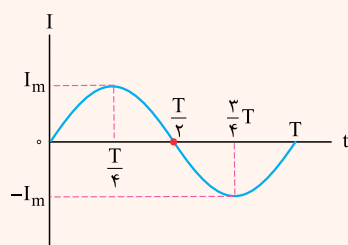
$\frac{1}{80}$ (۳)

$\frac{1}{8}$ (۲)

$\frac{1}{4}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

خود حل کنی بهتره با استفاده از معادله جریان متناوب، دوره حرکت را به دست آورید و $\frac{T}{4}$ را محاسبه کنید.



درس نامه شکل کلی معادله جریان متناوب به صورت $I = I_m \sin \frac{2\pi}{T} t$ است و

نمودار این جریان الکتریکی بر حسب زمان به شکل مقابل است:

$$I_m = \text{بیشینه جریان (A)}$$

$$T = \text{دوره یا زمان تناوب (s)}$$

پاسخ تشریحی گام اول: با توجه به معادله جریان داده شده می توان نوشت:

$$\frac{2\pi}{T} = 20\pi \Rightarrow T = \frac{2}{20} = \frac{1}{10} \text{ s}$$

گام دوم: در لحظه $t = \frac{T}{4}$ ، جریان الکتریکی، برای اولین بار بیشینه می شود، پس:

$$t = \frac{T}{4} = \frac{\frac{1}{10}}{4} = \frac{1}{40} \text{ s}$$



تست و پاسخ ۸۰

اگر دمای ۲ mol گاز کامل، در حجم ثابت ۲۰ L، از ۳۰۰ K به ۴۰۰ K برسد، فشار پیمانه‌ای آن چند برابر می‌شود؟ ($P_0 = 10^5 \text{ Pa}$, $R = 8 \frac{\text{J}}{\text{mol.K}}$)

اختلاف فشار گاز
با هوای محیط

$$\frac{3}{4} \quad (4)$$

$$\frac{4}{3} \quad (3)$$

$$\frac{7}{11} \quad (2)$$

$$\frac{11}{7} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۱

خودت حل کنی بهتره معادله حالت گاز را در دو حالت بنویسید و در هر حالت، فشار پیمانه‌ای گاز را به دست آورید و در انتها نسبت آن‌ها را محاسبه کنید.

درس نامه معادله حالت یک گاز کامل به صورت زیر است:

$$PV = nRT$$

$$P = \text{فشار گاز (Pa)} \quad V = \text{حجم (m}^3\text{)}$$

$$n = \text{تعداد مول (mol)} \quad R = \text{ثابت گازها (} \frac{\text{J}}{\text{mol.K}} \text{)}$$

$$T = \text{دمای مطلق (K)}$$

توجه فشار پیمانه‌ای یک گاز (P_g)، اختلاف فشار آن گاز (P)، با فشار هوای محیط (P_0) است.

$$P_g = P - P_0$$

پاسخ تشریحی گام اول: معادله حالت گاز را در حالت اول می‌نویسیم:

$$P_1 V_1 = nRT_1 \Rightarrow P_1 \times 20 \times 10^{-3} = 2 \times 8 \times 300 \Rightarrow P_1 = \frac{16 \times 300}{2 \times 10^{-2}} = 2 / 4 \times 10^5 \text{ Pa}$$

$$P_g = P_1 - P_0 \Rightarrow P_g = 2 / 4 \times 10^5 - 10^5 = 1 / 4 \times 10^5 \text{ Pa}$$

فشار پیمانه‌ای گاز در حالت اول را به دست می‌آوریم:

گام دوم: معادله حالت گاز را در حالت دوم می‌نویسیم:

$$P_2 V_2 = nRT_2 \Rightarrow P_2 \times 20 \times 10^{-3} = 2 \times 8 \times 400 \Rightarrow P_2 = \frac{16 \times 400}{2 \times 10^{-2}} = 3 / 2 \times 10^5 \text{ Pa}$$

$$P_{2g} = P_2 - P_0 = 3 / 2 \times 10^5 - 10^5 = 2 / 2 \times 10^5 \text{ Pa}$$

فشار پیمانه‌ای گاز در حالت دوم را نیز به دست می‌آوریم:

$$\frac{P_{2g}}{P_g} = \frac{2 / 2 \times 10^5}{1 / 4 \times 10^5} = \frac{22}{14} = \frac{11}{7}$$

گام سوم: نسبت فشار پیمانه‌ای در دو حالت را محاسبه می‌کنیم:

حواستون باشه ۱ اگر به جای فشار پیمانه‌ای، فشار گاز را در نظر می‌گرفتیم، به اشتباه ۳ را به دست می‌آوردیم.

۲ با توجه به افزایش دمای گاز در حجم ثابت باید $\frac{P_{2g}}{P_g}$ بزرگ‌تر از یک باشد، یعنی ۲ و ۴ از ابتدا حذف می‌شوند.

تست و پاسخ ۸۱

شکل زیر، چرخه‌ای متشکل از سه فرایند هم‌فشار، هم‌دما و بی‌دررو را نشان می‌دهد که توسط مقدار معینی از یک گاز آرمانی طی می‌شود. اگر اندازه گرمای مبادله‌شده در فرایند هم‌فشار ۲۰۰۰ J باشد، کاری که محیط در فرایند بی‌دررو بر روی گاز انجام می‌دهد، چند ژول است؟

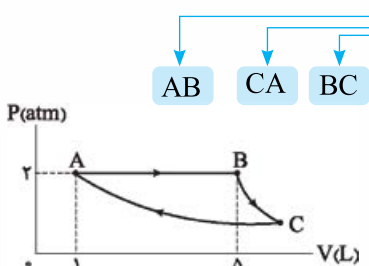
$$-800 \quad (2)$$

$$+800 \quad (1)$$

$$-1200 \quad (4)$$

$$+1200 \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۴





خودت حل کنی بهتره قانون اول ترمودینامیک را برای کل چرخه و همچنین برای هر قسمت آن بنویسید. از این معادله کار در فرایند بی دررو به دست می آید.

درس نامه (۱) براساس قانون اول ترمودینامیک، اگر دستگاه گرمای Q را بگیرد و کار W روی آن انجام شود، تغییر انرژی درونی آن برابر است با مجموع کار و گرمای مبادله شده بین دستگاه و محیط.

$$\Delta U = Q + W$$

$$\Delta U = \text{تغییر انرژی درونی (J)}$$

(۲) در یک چرخه کامل $\Delta U = 0$ است.

(۳) در یک فرایند هم دما $\Delta U = 0$ است.

(۴) در یک فرایند بی دررو $Q = 0$ است.

(۵) در یک فرایند هم فشار $W = -P\Delta V$ است.

پاسخ تشریحی گام اول: به ازای یک تغییر فشار معین، تغییرات حجم فرایند بی دررو کم تر از تغییرات حجم فرایند هم دما است؛ بنابراین فرایند BC بی دررو و فرایند CA هم دما هستند.

$$\Delta U = \Delta U_{AB} + \Delta U_{BC} + \Delta U_{CA}$$

تغییر انرژی درونی را برای چرخه می نویسیم:

$$0 = Q_{AB} + W_{AB} + Q_{BC} + W_{BC} \quad (1)$$

گام دوم: با استفاده از قانون اول ترمودینامیک داریم:

$$W_{AB} = -P\Delta V = -2 \times 10^5 \times (5-1) \times 10^{-3} = -800 \text{ J} \quad (2)$$

توجه در فرایند AB گاز منبسط می شود، پس $W < 0$ است و در فرایند هم فشار علامت گرما و کار قرینه هستند.

$$(1) \text{ و } (2) \Rightarrow 0 = 2000 - 800 + W_{BC} \Rightarrow W_{BC} = -1200 \text{ J}$$

حواستون باشه با توجه به این که فرایند BC از نوع انبساط است، پس $W_{BC} < 0$ است و از ابتدا (۱) و (۳) حذف می شوند.

تست و پاسخ ۸۲

توان مفید

بازده یک ماشین گرمایی، ۲۵ درصد و توان خروجی آن ۳ kW است. اگر این ماشین در هر چرخه، ۶۰۰ J گرما به منبع دما پایین بدهد، در هر دقیقه چند چرخه را می پیماید؟

$$|Q_L| = 600 \text{ J}$$

۹۰۰ (۴)

۶۰۰ (۳)

۳۰۰۰ (۲)

۱۵۰۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

خودت حل کنی بهتره ابتدا کار ماشین گرمایی را در هر چرخه به دست آورید، سپس کار ماشین گرمایی در هر دقیقه را بر آن تقسیم کنید.

درس نامه

(۱) بازده یک ماشین گرمایی (η) از رابطه مقابل به دست می آید:

$$|W| = \text{اندازه کار ماشین گرمایی روی محیط (J)}$$

$$Q_H = \text{گرمایی که ماشین گرمایی از منبع با دمای بالا می گیرد. (J)}$$

$$|Q_L| = \text{اندازه گرمایی که ماشین گرمایی به منبع با دمای پایین می دهد. (J)}$$

$$\eta = \frac{|W|}{Q_H}$$

$$Q_H = |Q_L| + |W|$$

$$P = \frac{|W|}{\Delta t}$$

(۲) توان مفید (خروجی) یک ماشین گرمایی، از رابطه زیر به دست می آید:

$$\Delta t = \text{بازه زمانی (s)}$$

$$P = \text{توان خروجی (W)}$$



پاسخ تشریحی گام اول: با داشتن بازده، می‌توانیم کار ماشین گرمایی روی محیط را در هر چرخه، به دست آوریم:

$$\eta = \frac{|W|}{Q_H} = \frac{|W|}{|Q_L| + |W|} \Rightarrow 0.25 = \frac{|W|}{600 + |W|} \Rightarrow |W| = 150 + 0.25|W| \Rightarrow 0.75|W| = 150 \Rightarrow |W| = 200 \text{ J}$$

گام دوم: کار کل ماشین گرمایی در هر دقیقه را محاسبه می‌کنیم:

$$P = \frac{|W_t|}{\Delta t} \Rightarrow 3000 = \frac{|W_t|}{60} \Rightarrow |W_t| = 180000 \text{ J}$$

گام سوم: تعداد چرخه‌ها را تعیین می‌کنیم:

$$N = \frac{|W_t|}{|W|} = \frac{180000}{200} = 900$$

حواستون باشه گرمای ورودی یک ماشین گرمایی، مثبت است ($Q_H > 0$)، اما خروجی‌های آن منفی هستند ($W < 0, Q_L < 0$).

تست و پاسخ ۸۳

بار الکتریکی کل به طور مساوی بین آن‌ها تقسیم می‌شود.

شعاع دو کره فلزی مشابه ۵ cm و بار الکتریکی آن‌ها $18 \mu\text{C}$ و $-6 \mu\text{C}$ است. اگر دو کره با یک سیم به هم وصل شوند، چگالی سطحی هر کره بعد از برقراری تعادل الکتروستاتیکی در SI، به چند واحد می‌رسد؟ ($\pi = 3$)

$$2 \times 10^{-3} \quad (2)$$

$$2 \times 10^{-4} \quad (1)$$

$$4 \times 10^{-3} \quad (4)$$

$$4 \times 10^{-4} \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۱

مشاوره تست‌های مربوط به چگالی سطحی بار الکتریکی در سطح دایره‌ای فقط در مورد رسانای کروی بررسی می‌شوند.

خودت حل کنی بهتره بار الکتریکی هر کره و سپس چگالی سطحی آن‌ها را بعد از اتصال به دست آورید.

درس نامه ۰۰۱ اگر دو کره رسانای مشابه، دارای بارهای Q_1 و Q_2 را با یک رسانا به هم وصل کنیم، بار جدید هر کره $\frac{Q_1 + Q_2}{2}$ خواهد بود.

تراکم بار الکتریکی در سطح یک جسم رسانا را، چگالی سطحی بار الکتریکی می‌گوییم و از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$\sigma = \frac{Q}{A}$$

$$\sigma = \text{چگالی سطحی بار } \left(\frac{C}{m^2}\right)$$

$$Q = \text{بار الکتریکی موجود در سطح (C)}$$

$$A = \text{مساحت سطحی که بار الکتریکی روی آن توزیع شده است. (m^2)}$$

پاسخ تشریحی گام اول: بار الکتریکی هر کره را پس از اتصال به دست می‌آوریم:

$$Q = \frac{Q_1 + Q_2}{2} = \frac{-6 + 18}{2} = 6 \mu\text{C}$$

گام دوم: چگالی سطحی بار هر کره را پس از اتصال، محاسبه می‌کنیم:

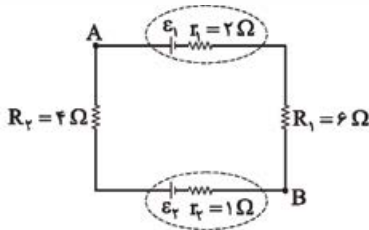
$$\sigma = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{4\pi r^2} = \frac{6 \times 10^{-6}}{4 \times 3 \times (5 \times 10^{-2})^2} = \frac{6 \times 10^{-6}}{12 \times 25 \times 10^{-4}} = \frac{10^{-2}}{50} = 2 \times 10^{-4} \text{ C/m}^2$$

حواستون باشه چون کره‌های رسانا، مشابه هستند، پس از تماس حتماً بار الکتریکی و چگالی سطحی یکسانی خواهند داشت.



تست و پاسخ ۸۴

در مدار شکل زیر، توان خروجی باتری $\mathcal{E}_1$ برابر 9 W و توان ورودی باتری $\mathcal{E}_2$ برابر $6/5\text{ W}$ است. اختلاف پتانسیل الکتریکی دو نقطه A و B ، $(V_A - V_B)$ ، چند ولت است؟



$$\mathcal{E}_1 I + r_1 I^2$$

$$\mathcal{E}_1 I - r_1 I^2$$

$$15 \quad (1)$$

$$-15 \quad (2)$$

$$21 \quad (3)$$

$$-21 \quad (4)$$

پاسخ: گزینه ۱

درس نامه (۱) در مدارهایی که بیش از یک باتری دارند، قبل از هر چیز، مولد یا ضد مولد بودن آن‌ها را مشخص کنید. هر باتری‌ای مولد نیست.

(۲) توان خروجی یک باتری مولد از رابطه $P = \mathcal{E}I - rI^2$ به دست می‌آید.

(۳) توان ورودی یک باتری ضد مولد از رابطه $P = \mathcal{E}I + rI^2$ به دست می‌آید.

پاسخ تشریحی گام اول: توان خروجی باتری (۱) به عنوان مولد، به باتری (۲) و مقاومت‌های خارجی مدار داده می‌شود. توجه کنید که در این جا، باتری (۲) به عنوان مصرف کننده و ضد مولد است.

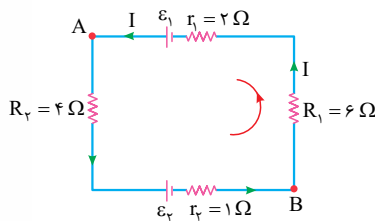
$$P_1 = P_2 + R_1 I^2 + R_2 I^2$$

$$9 = 6/5 + 6I^2 + 4I^2 \Rightarrow 2/5 = 10I^2 \Rightarrow I^2 = 0/25 \Rightarrow I = 0/5\text{ A}$$

گام دوم: نیروی محرکه باتری ۱ را به دست می‌آوریم:

$$P_1 = \mathcal{E}_1 I - r_1 I^2 \Rightarrow 9 = \mathcal{E}_1 \times 0/5 - 2 \times 0/25 \Rightarrow \mathcal{E}_1 = 19\text{ V}$$

گام سوم: روی مدار به طور ذهنی از نقطه B و در جهت جریان به طرف نقطه A حرکت می‌کنیم تا اختلاف پتانسیل میان دو نقطه A و B را محاسبه کنیم:



$$V_B - IR_1 - Ir_2 + \mathcal{E}_1 = V_A \Rightarrow V_B - 0/5 \times 6 - 0/5 \times 2 + 19 = V_A \Rightarrow V_B + 15 = V_A \Rightarrow V_A - V_B = 15\text{ V}$$

حواستون باشه می‌توانستیم $\mathcal{E}_2$ را به دست آوریم و در جهت جریان به طور ذهنی از A به طرف B حرکت کنیم و اختلاف پتانسیل بین A و B را به دست آوریم.

تست و پاسخ ۸۵

توسط سیمی به طول L ، پیچۀ مسطحی به قطر 20 cm می‌سازیم. اگر از این پیچه جریان الکتریکی 2 A عبور کند، اندازه میدان مغناطیسی در مرکز آن به 3 G می‌رسد. L بر حسب متر کدام است؟ ($\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{\text{T.m}}{\text{A}}$)

$$1\text{ G} = 10^{-4}\text{ T}$$

$$6 \quad (4)$$

$$1/5 \quad (3)$$

$$60 \quad (2)$$

$$15 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۱

خودت حل کنی بهتره ابتدا تعداد حلقه‌های پیچه را به دست آورید، سپس طول سیم را تعیین کنید.



درس نامه ۱۱ اندازه میدان مغناطیسی در مرکز پیچهای به شعاع r که دارای N حلقه است و جریان I از آن می گذرد به صورت زیر به دست می آید:

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2r}$$

$$\mu_0 = \text{تراوایی مغناطیسی خلأ} = \frac{T.m}{A} = 4\pi \times 10^{-7}$$

B = اندازه میدان مغناطیسی (T)

N = تعداد حلقه ها

r = شعاع حلقه ها (m)

I = جریان الکتریکی (A)

۲) اگر سیمی به طول L را به صورت یک پیچۀ مسطح به شعاع r درآوریم، تعداد حلقه های حاصل، از رابطه $N = \frac{L}{2\pi r}$ محاسبه می شود.

پاسخ تشریحی **گام اول:** با معلوم بودن اندازه میدان مغناطیسی در مرکز پیچه، تعداد حلقه ها را به دست می آوریم:

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2r} \Rightarrow 3 \times 10^{-4} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times N \times 2}{2 \times 10^{-1}} \Rightarrow N = \frac{300}{4\pi} = \frac{75}{\pi}$$

$$N = \frac{L}{2\pi r} \Rightarrow \frac{75}{\pi} = \frac{L}{2\pi \times 10^{-1}} \Rightarrow L = 15 \text{ m}$$

گام دوم: با داشتن تعداد حلقه ها، طول سیم اولیه را محاسبه می کنیم:

توجه در سؤال های مربوط به فصل مغناطیسی و القای مغناطیسی که مقدار عددی π داده نمی شود، نگران نباشید. احتمالاً در طول محاسبات π ساده می شود.

تست و پاسخ ۸۶

در شکل زیر، ارتفاع ستون جیوه درون لوله جوسنج (بارومتر) 75 cm است. فشار هوای محیط چند «بار» است؟ ($\rho_{\text{جیوه}} = 13.6 \text{ g/cm}^3$) و $g = 10 \text{ N/kg}$

۱/۰۸۸ (۱)

۱/۰۲ (۲)

۱۰/۸۸ (۳)

۱۰/۲ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ تشریحی با توجه به این که انتهای لوله خلأ است، فشار هوای محیط برابر با فشار ناشی از ستون جیوه درون لوله بارومتر می شود. پس داریم:

$$P_0 = \rho_{\text{جیوه}} gh_{\text{جیوه}} = 13600 \times 10 \times \frac{75}{100} = 102000 \text{ Pa}$$

$$P_0 = \frac{102000}{10^5} = 1.02 \text{ bar}$$

هر «بار»، معادل 10^5 Pa است، پس داریم:

تست و پاسخ ۸۷

شخصی گلوله ای برفی به جرم 200 g را از روی زمین برمی دارد و تا ارتفاع 160 cm بالا می برد، سپس آن را با تندی 10 m/s پرتاب می کند. کار انجام شده توسط شخص روی گلوله برفی چند ژول است؟ ($g = 10 \text{ N/kg}$)

۱۳/۲ (۴)

۱۰ (۳)

۶/۸ (۲)

۳/۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ تشریحی شخص دو کار بر روی گلوله برفی انجام می دهد: اول؛ انرژی پتانسیل گرانشی گلوله را افزایش می دهد و دوم؛ انرژی جنبشی آن را زیاد می کند. پس می توانیم با محاسبه تغییرات انرژی مکانیکی، کاری را که شخص انجام داده است، حساب کنیم.

$$W_{\text{شخص}} = \Delta E = \Delta U + \Delta K = (mgh - 0) + \left(\frac{1}{2}mv^2 - 0\right) = mgh + \frac{1}{2}mv^2$$

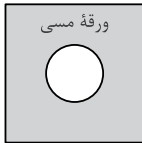
$$= (0.2 \times 10 \times 1.6) + \left(\frac{1}{2} \times 0.2 \times 10^2\right) = 3.2 + 10 = 13.2 \text{ J}$$



۸۸

تست و پاسخ

مطابق شکل، بر روی یک ورقه مسی، حفره‌ای دایره‌ای به مساحت 200 cm^2 ایجاد کرده‌ایم. اگر دمای این ورقه را 90° F افزایش دهیم،



مساحت حفره چند سانتی متر مربع افزایش می‌یابد؟ ($\alpha_{\text{مس}} = 1/7 \times 10^{-5} / ^\circ \text{C}$)

$$3/4 \quad (2)$$

$$0/34 \quad (1)$$

$$1/7 \quad (4)$$

$$0/17 \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۱

توجه: مساحت حفره همانند مساحت بقیه ورقه با فرمول $\Delta A = 2\alpha A_1 \Delta T$ تغییر می‌کند.

پاسخ تشریحی: گام اول: ابتدا تغییر دما را از مقیاس فارنهایت به مقیاس سلسیوس (یا کلونین) تغییر می‌دهیم:

$$\Delta \theta = \Delta T = \frac{\Delta F}{1/8} \Rightarrow \Delta T = \frac{90}{1/8} = 50^\circ \text{C}$$

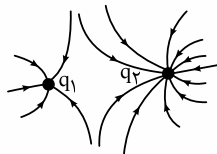
$$\Delta A = 2 \times 1/7 \times 10^{-5} \times 200 \times 50 = 0/34 \text{ cm}^2$$

گام دوم: حالا رابطه $\Delta A = 2\alpha A_1 \Delta T$ را برای حفره می‌نویسیم:

۸۹

تست و پاسخ

میدان الکتریکی حاصل از دو ذره باردار الکتریکی q_1 و q_2 مطابق شکل است. کدام گزینه درباره q_1 و q_2 درست است؟



$$|q_2| > |q_1|, \text{ هر دو منفی, } (2)$$

$$q_2 > q_1, \text{ هر دو مثبت, } (1)$$

$$|q_2| < |q_1|, \text{ هر دو منفی, } (4)$$

$$q_2 < q_1, \text{ هر دو مثبت, } (3)$$

پاسخ: گزینه ۲

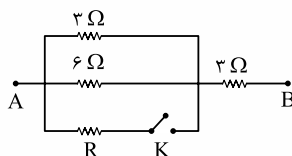
پاسخ تشریحی: اول این که خط‌های میدان به هر دو بار q_1 و q_2 وارد شده‌اند، پس هر دو بار q_1 و q_2 منفی‌اند.

دوم این که به بار q_2 خط‌های میدان بیشتری وارد شده است و در عین حال، برد خط‌های میدان وارد شده به q_2 از برد خط‌های میدان وارد شده به q_1 بیشتر است؛ بنابراین $|q_2| > |q_1|$ است.

۹۰

تست و پاسخ

در مدار شکل زیر، اگر کلید K را ببندیم، مقاومت معادل بین دو نقطه A و B، ۲۰ درصد کاهش می‌یابد. R چند اهم است؟



$$2 \quad (2)$$

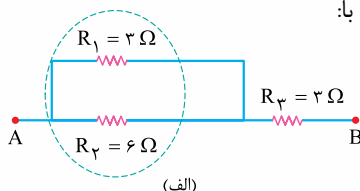
$$1 \quad (1)$$

$$6 \quad (4)$$

$$3 \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ تشریحی: گام اول: مطابق شکل «الف»، وقتی کلید K باز است، مقاومت معادل برابر می‌شود با:

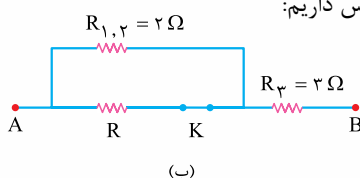


$$R_{eq1} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3 = \frac{3 \times 6}{3 + 6} + 3 = 5 \Omega$$

گام دوم: با بستن کلید K، مقاومت معادل ۲۰ درصد کم می‌شود؛ یعنی مقاومت معادل حالت دوم (R_{eq2}) برابر $\frac{4}{5}$ برابر حالت قبل (R_{eq1}) می‌شود.

$$R_{eq2} = \frac{4}{5} R_{eq1} = \frac{4}{5} \times 5 = 4 \Omega$$

گام سوم: با توجه به شکل «ب»، در حالت بسته‌بودن کلید K، باید مقاومت معادل برابر 4Ω بشود. پس داریم:



$$R_{eq2} = \frac{R_{1,2} \times R}{R_{1,2} + R} + R_3 \Rightarrow 4 = \frac{2 \times R}{2 + R} + 3 \Rightarrow 2 + R = 2R \Rightarrow R = 2 \Omega$$



شیمی (۱): صفحه‌های ۱ تا ۱۲۲، شیمی (۲): صفحه‌های ۱ تا ۱۲۱

تست و پاسخ ۹۱

با توجه به جدول داده‌شده، شعاع اتمی کدام عنصر بزرگ‌تر است؟

یون	A^{2-}	X^{2+}	D^{-}	M^{+}
آرایش الکترونی بیرونی‌ترین زیرلایه	$2p^6$	$2p^6$	$2p^6$	$3p^6$

A (۱)

X (۲)

D (۳)

M (۴)

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ تشریحی

نخست باید با توجه به آرایش الکترونی یون‌ها، به آرایش الکترونی اتم برسیم و در نهایت هر کدام از عناصر را تشخیص دهیم.

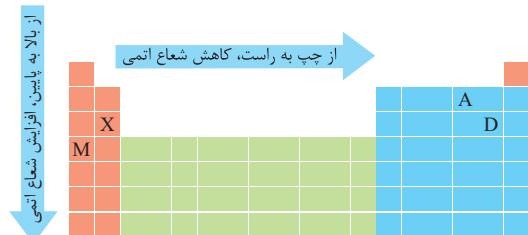
گروه ۱۶، دوره دوم: (عنصر اکسیژن) $A^{2-}: [He] \dots 2p^6 \rightarrow {}_8A: [He] 2s^2 2p^4 \rightarrow {}_8A$

گروه ۲، دوره سوم: (عنصر منیزیم) $X^{2+}: [He] \dots 2p^6 \rightarrow {}_{12}X: [Ne] 3s^2 \rightarrow {}_{12}X$

گروه ۱۷، دوره سوم: (عنصر کلر) $D^{-}: [Ne] \dots 3p^6 \rightarrow {}_{17}D: [Ne] 3s^2 3p^5 \rightarrow {}_{17}D$

گروه ۱، دوره چهارم: (عنصر پتاسیم) $M^{+}: [Ne] \dots 3p^6 \rightarrow {}_{19}M: [Ar] 4s^1 \rightarrow {}_{19}M$

می‌دانیم که در جدول دوره‌های عناصر، هر چه عنصری در سمت چپ‌تر و پایین‌تر جدول دوره‌ای باشد (یعنی شماره گروه آن کم‌تر و شماره دوره آن بیشتر باشد)، شعاع اتمی آن بزرگ‌تر است. برای مقایسه شعاع اتمی عناصر ابتدا با بررسی شماره دوره (تعداد لایه‌های الکترونی) و سپس در عناصر یک دوره با مقایسه شماره گروه عناصر، شعاع اتمی آن‌ها را مقایسه می‌کنیم. در بین این چهار عنصر، عنصر M به دلیل شماره دوره بیشتر (داشتن چهار لایه الکترونی) و شماره گروه کم‌تر، دارای بیشترین شعاع اتمی می‌باشد.



تست و پاسخ ۹۲

نسبت شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی به پیوندی در ساختار لوویس یون نیترات، کدام است؟

۳/۳ (۴)

۳ (۳)

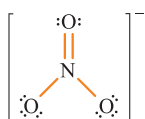
۲/۲۵ (۲)

۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

پاسخ تشریحی

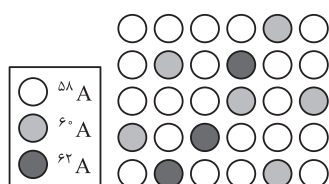
فرمول یون نیترات، NO_3^- و ساختار آن به صورت زیر است:



$$\frac{\text{شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی}}{\text{شمار جفت‌الکترون‌های پیوندی}} = \frac{8}{4} = 2$$

تست و پاسخ ۹۳

با توجه به شکل زیر که توزیع نسبی اتم‌های A را در یک نمونه طبیعی آن نشان می‌دهد، کدام مطلب نادرست است؟



(۱) در این نمونه طبیعی عنصر A ، همانند هیدروژن، سبک‌ترین ایزوتوپ، فراوانی بیشتری دارد.

(۲) جرم اتمی میانگین A ، $3/4$ واحد از جرم اتمی سنگین‌ترین ایزوتوپ آن کم‌تر است.

(۳) شمار نوترون‌های سبک‌ترین ایزوتوپ A ، 26 واحد کم‌تر از شمار نوترون‌های ${}^{99}_{43}Tc$ است.

(۴) چگالی ایزوتوپ‌های عنصر A برخلاف شمار الکترون‌های آن‌ها، با هم متفاوت است.

پاسخ: گزینه ۲





پاسخ تشریحی مطابق شکل، در نمونه عنصر A، سه ایزوتوپ A^{58} ، A^{60} و A^{62} به ترتیب با فراوانی ۲۱، ۶ و ۳ (از ۳۰ اتم موجود) وجود دارد. جرم اتمی میانگین این عنصر را از دو روش، می‌تونیم محاسبه کنیم:

روش اول:

$$M = \frac{M_1F_1 + M_2F_2 + \dots}{F_1 + F_2 + \dots} = \frac{(58 \times 21) + (60 \times 6) + (62 \times 3)}{21 + 6 + 3} = \frac{1764}{30} = 58.8$$

روش دوم:

$$M = M_1 + [(M_2 - M_1) \times \frac{F_2}{F}] + [(M_3 - M_1) \times \frac{F_3}{F}] + \dots = 58 + (2 \times \frac{6}{30}) + (4 \times \frac{3}{30}) = 58 + 0.4 + 0.4 = 58.8$$

اختلاف جرم اتمی میانگین A با جرم اتمی سنگین‌ترین ایزوتوپ آن (A^{62})، برابر $3/2$ واحد است. بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) در این نمونه طبیعی از عنصر A، سه ایزوتوپ وجود دارد. عنصر هیدروژن نیز دارای سه ایزوتوپ طبیعی (${}^1_1H$ ، ${}^2_1H$ ، ${}^3_1H$) است. در هر دو عنصر A و H، سبک‌ترین ایزوتوپ (${}^1_1H$ ، A^{58})، بیشترین فراوانی را دارد.

۲) شمار نوترون‌های سبک‌ترین ایزوتوپ عنصر A: 28

عدد اتمی

$$A = Z + N \Rightarrow 58 = 28 + N \Rightarrow N = 30$$

شمار نوترون‌ها عدد جرمی

$$A = Z + N \Rightarrow 99 = 43 + N \Rightarrow N = 56$$

شمار نوترون‌های ${}^{99}_{43}Tc$:

اختلاف این دو عدد، برابر ۲۶ است.

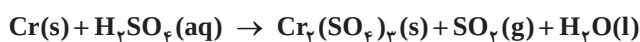
۳) ایزوتوپ‌های یک عنصر دارای عدد اتمی و در نتیجه شمار الکترون‌های یکسانی هستند؛ بنابراین خواص شیمیایی مشابهی دارند اما به دلیل شمار نوترون‌ها و جرم اتمی متفاوت، ایزوتوپ‌ها در خواص فیزیکی وابسته به جرم مانند چگالی با یکدیگر متفاوت‌اند.

نکته از جدول زیر، می‌توانید برای مقایسه ویژگی‌های ایزوتوپ‌ها استفاده کنید:

شباهت ایزوتوپ‌ها	تفاوت ایزوتوپ‌ها
(۱) عدد اتمی (Z)	(۱) عدد جرمی (A)
(۲) تعداد پروتون‌ها	(۲) تعداد نوترون‌ها
(۳) تعداد الکترون‌ها	(۳) جرم اتمی
(۴) آرایش الکترونی	(۴) نیم‌عمر (برای ایزوتوپ‌های پرتوزا)
(۵) خواص شیمیایی	(۵) خواص فیزیکی وابسته به جرم
(۶) موقعیت در جدول دوره‌ای	(۶) خواص فیزیکی ترکیب‌های حاصل از آن‌ها
	(۷) درصد فراوانی

تست و پاسخ ۹۴

اگر در واکنش زیر به جای فلز کروم در واکنش‌دهنده‌ها، فلز نقره قرار گیرد و فرمول ترکیب یونی تولیدشده به طور مناسب تغییر کند، ضریب H_2SO_4 و مجموع ضرایب مواد در معادله موازنه‌شده، به ترتیب از راست به چپ، چگونه تغییر می‌کند؟



(۱) تغییری نمی‌کند - ۱۰ واحد کم می‌شود. (۲) تغییری نمی‌کند - تغییری نمی‌کند.

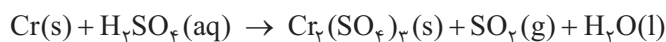
(۳) $\frac{1}{3}$ برابر می‌شود - ۸ واحد کم می‌شود. (۴) $\frac{1}{3}$ برابر می‌شود - ۱۰ واحد کم می‌شود.

پاسخ: گزینه ۴

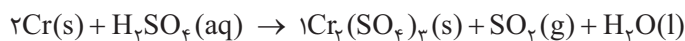




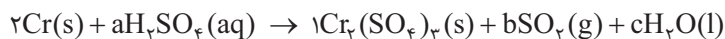
پاسخ تشریحی



برای موازنه معادله، در گام اول به ماده با بیشترین تنوع و تعداد اتم $(\text{Cr}_2(\text{SO}_4)_3)$ ضریب ۱ می‌دهیم و برای موازنه اتم Cr، در سمت چپ به Cr، ضریب ۲ می‌دهیم:



برای ادامه فرایند موازنه، باید از روش ضرایب مجهول استفاده کنیم؛ زیرا هر سه عنصر S، O و H در ساختار حداقل دو ماده دیگر با ضریب نامشخص وجود دارند:



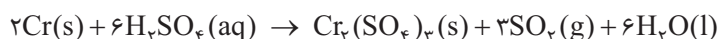
H موازنه: $2a = 2c \Rightarrow a = c$

S موازنه: $a = 3 + b$

O موازنه: $4a = 12 + 2b + c$

$$\Rightarrow 4(3 + b) = 12 + 2b + (3 + b) \Rightarrow 12 + 4b = 15 + 3b \Rightarrow b = 3, a = 6, c = 6$$

بنابراین معادله موازنه شده واکنش انجام شده، به صورت زیر است:



حالا با جایگزین شدن فلز نقره به جای فلز کروم در معادله، چون کاتیون نقره به صورت یون Ag^+ است، معادله واکنش به صورت زیر تغییر می‌کند:

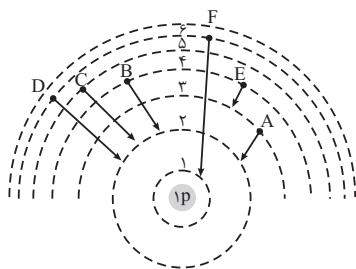


(این معادله رو هم باید به همون شیوه استفاده از ضرایب مجهول موازنه کنید!)

ضریب استوکیومتری سولفوریک اسید (H_2SO_4) در معادله واکنش اول برابر ۶ و در معادله واکنش دوم برابر ۲ است. مجموع ضرایب استوکیومتری مواد شرکت کننده در معادله واکنش اول برابر ۱۸ و در معادله واکنش دوم برابر ۸ است.

تست و پاسخ ۹۵

با توجه به شکل زیر که انرژی لایه‌های الکترونی در اتم هیدروژن و شماری از انتقال‌های الکترونی در آن را نشان می‌دهد، چند مورد از مطالب زیر، درست است؟



• رنگ‌های سرخ و نیلی طیف نشری خطی هیدروژن، به ترتیب مربوط به انتقال‌های A و C هستند.

• تنها انتقال F، بازگشت به حالت پایه اتم هیدروژن را نشان می‌دهد.

• تفاوت طول موج نورهای حاصل از انتقال‌های B و C بیشتر از تفاوت طول موج نورهای حاصل از انتقال‌های A و B است.

• انتقال‌های E و F در طیف نشری خطی قابل مشاهده نیست ولی با آشکارساز فروسرخ می‌توان نور حاصل از انتقال F را مشاهده کرد.

(۴) چهار

(۳) سه

(۲) دو

(۱) یک

پاسخ: گزینه ۲

عبارت‌های اول و دوم درست‌اند.

پاسخ تشریحی بررسی عبارت‌ها:

• در طیف نشری خطی هیدروژن، ۴ خط رنگی وجود دارد.

• حالت پایه اتم هیدروژن، لایه اول ($n=1$) است. فقط انتقال F بازگشت الکترون به لایه

اول را نشان می‌دهد.

• با توجه به جدول عبارت اول، تفاوت طول موج نورهای انتقال‌های B و C (تفاوت طول موج نورهای آبی و نیلی) کمتر از تفاوت طول موج نورهای انتقال‌های A و B (تفاوت طول موج نورهای آبی و سرخ) است.





● ابتدا جدول زیر را ببینید:

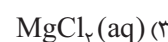
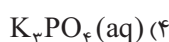
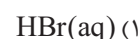
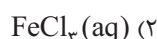
انتقال‌های الکترونی در اتم هیدروژن	بازگشت الکترون از لایه‌های سوم تا ششم به لایه دوم ← نشر پرتوی مرئی
	بازگشت الکترون از لایه هفتم به لایه دوم ← بازگشت الکترون از لایه‌های بالاتر به لایه اول ← نشر پرتوی فرابنفش
	بازگشت الکترون از لایه‌های بالاتر به لایه‌های سوم تا پنجم ← نشر پرتوی فروسرخ

انتقال E ($n=3$ به $n=4$): می‌دانیم که انتقال الکترون از $n=4$ به $n=2$ در ناحیه مرئی قرار دارد. تفاوت انرژی بین $n=3$ و $n=4$ کمتر از $n=4$ و $n=2$ می‌باشد؛ بنابراین موج حاصل، نسبت به ناحیه مرئی دارای انرژی کمتر و طول موج بیشتر است؛ یعنی می‌تواند مربوط به ناحیه فروسرخ باشد.

انتقال F ($n=6$ به $n=1$): تفاوت انرژی بین $n=6$ و $n=1$ بیشتر از $n=6$ و $n=2$ است؛ بنابراین طول موج حاصل نسبت به ناحیه مرئی (رنگ بنفش) دارای انرژی بیشتر و طول موج کمتر است؛ یعنی می‌تواند مربوط به ناحیه فرابنفش باشد.

تست و پاسخ ۹۶

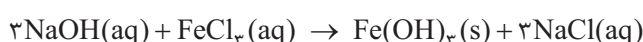
از واکنش کامل ۹۰۰ میلی لیتر محلول ۰/۱ مولار سدیم هیدروکسید با مقدار کافی از محلول A، ۰/۰۳ مول رسوب تشکیل می‌شود. محلول A کدام است؟



پاسخ: گزینه ۲

ترکیب A نمی‌تواند HBr و K_3PO_4 باشد، زیرا ترکیب‌های NaBr ، Na_3PO_4 و KOH همگی محلول در آب هستند. سدیم هیدروکسید در واکنش با FeCl_3 و MgCl_2 به ترتیب رسوب‌های $\text{Fe}(\text{OH})_3$ و $\text{Mg}(\text{OH})_2$ تشکیل می‌دهد. حالا باید ببینیم در کدام یک از این واکنش‌ها به ازای مصرف ۹۰۰ میلی لیتر محلول ۰/۱ مولار سدیم هیدروکسید، ۰/۰۳ مول رسوب ایجاد می‌شود:

$$\text{NaOH} \text{ مول} = \frac{۹۰۰}{۱۰۰۰} \text{ L} \times ۰/۱ \text{ mol.L}^{-۱} = ۰/۰۹ \text{ mol}$$



$$\text{مول رسوب} = ۰/۰۹ \text{ mol NaOH} \times \frac{۱ \text{ mol Fe}(\text{OH})_3}{۳ \text{ mol NaOH}} = ۰/۰۳ \text{ mol Fe}(\text{OH})_3 \quad \checkmark$$



$$\text{مول رسوب} = ۰/۰۹ \text{ mol NaOH} \times \frac{۱ \text{ mol Mg}(\text{OH})_2}{۲ \text{ mol NaOH}} = ۰/۰۴۵ \text{ mol Mg}(\text{OH})_2$$

تست و پاسخ ۹۷

کدام مطلب درست است؟ ($\text{O} = ۱۶ \text{ g.mol}^{-۱}$)

- (۱) در شرایط یکسان، گاز اوزون سخت‌تر از گاز اکسیژن به مایع تبدیل می‌شود.
- (۲) در دما و فشار اتاق، مخلوطی از گازهای هیدروژن و نیتروژن در حضور کاتالیزگر یا جرقه، در یک واکنش سریع و شدید، منفجر می‌شود.
- (۳) جرم ۷ لیتر از گاز اوزون در شرایط استاندارد برابر ۱۵ گرم است.
- (۴) گاز نیتروژن واکنش‌پذیری بسیار زیادی دارد و در صنعت، مواد گوناگونی را از آن تهیه می‌کنند.

پاسخ: گزینه ۳





پاسخ تشریحی: جرم مولی گاز اوزون (O_3)، ۴۸ گرم و حجم مولی گازها در شرایط استاندارد برابر ۲۲/۴ لیتر است؛ بنابراین خواهیم داشت:

$$V_{O_3} \times \frac{1 \text{ mol } O_3}{22.4 \text{ L } O_3} \times \frac{48 \text{ g } O_3}{1 \text{ mol } O_3} = \frac{1}{22.4} \times 48 = 2.14 \text{ g}$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

- ۱) گاز اوزون نقطه جوش بالاتری نسبت به گاز اکسیژن دارد؛ بنابراین در شرایط یکسان، آسان‌تر به مایع تبدیل می‌شود.
- ۲) در دما و فشار اتاق، گازهای نیتروژن و هیدروژن حتی در حضور کاتالیزگر یا جرقه با هم واکنش نمی‌دهند.
- ۳) گاز نیتروژن واکنش‌پذیری بسیار کمی دارد ولی در صنعت، با تغییر شرایط واکنش و ایجاد شرایط بهینه می‌توان از آن مواد گوناگونی تهیه کرد.

تست و پاسخ ۹۸

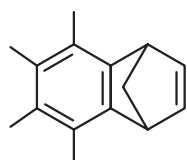
از سوختن کامل ۲/۰ مول از هیدروکربن روبه‌رو، چند مول فراورده تولید می‌شود؟

۴/۶ (۲)

۴/۴ (۱)

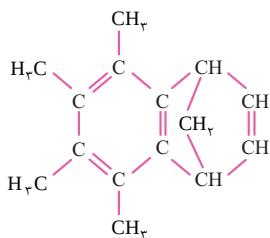
۵ (۴)

۴/۸ (۳)



پاسخ: گزینه ۳

پاسخ تشریحی: گام اول: نخست باید فرمول مولکولی هیدروکربن داده‌شده را تشخیص دهیم. فرمول مولکولی ترکیب داده‌شده به صورت $C_{15}H_{18}$ است.



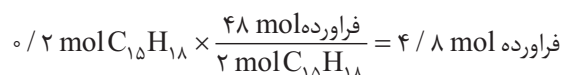
نکته: برای تعیین شمار اتم‌های هیدروژن در هیدروکربنی با n اتم کربن می‌توان از فرمول زیر استفاده کرد:

$$(\text{تعداد پیوندهای سه‌گانه} \times 4) - (\text{تعداد حلقه‌ها} + \text{تعداد پیوندهای دوگانه}) \times 2 = (2n + 2) - \text{تعداد اتم‌های هیدروژن}$$

۳ حلقه و ۴ پیوند دوگانه در ساختار ترکیب وجود دارد که به ازای هر کدام، ۲ اتم هیدروژن از فرمول مولکولی کم و تعداد اتم‌های هیدروژن به صورت مقابل محاسبه می‌شود:

توجه: اگر در ترکیبی، تعیین تعداد حلقه‌ها برایتان دشوار بود، می‌توانید با استفاده از ساختار گسترده ترکیب، با خیال راحت! تعداد هیدروژن‌ها را بشمارید.

گام دوم: معادله موازنه‌شده واکنش سوختن کامل این ترکیب به صورت مقابل است:



$$0.2 \text{ mol } C_{15}H_{18} \times \frac{48 \text{ mol فراورده}}{2 \text{ mol } C_{15}H_{18}} = 4.8 \text{ mol فراورده}$$

تست و پاسخ ۹۹

کدام موارد از مطالب زیر، درست‌اند؟ ($Na = 23, O = 16, H = 1: g.mol^{-1}$)



الف) اگر از ۲۵ گرم محلول ۱۰ درصد جرمی شکر در آب، ۲۵ گرم آب تبخیر شود، درصد جرمی محلول ۱/۲۵ برابر می‌شود.

ب) در دمای $25^\circ C$ ، سولفات سومین فلز قلیایی خاکی جدول دوره‌ای، جزء مواد کم‌محلول در آب محسوب می‌شود.

پ) غلظت محلول ۲۰ درصد جرمی سدیم هیدروکسید با چگالی 1.2 g.mL^{-1} برابر با ۶ مولار است.

ت) در فشار یک اتمسفر و در هر دمایی، انحلال‌پذیری گاز قطبی NO در آب بیشتر از گاز ناقطبی CO_2 است.

۴) ب - ت

۳) الف - پ

۲) الف - ت

۱) ب - پ

پاسخ: گزینه ۱



عبارت‌های «ب» و «پ» درست‌اند.

پاسخ تشریحی بررسی عبارت‌ها:

الف) اول باید مقدار حلال و حل‌شونده را در محلول اولیه محاسبه کنیم:

$$\text{حلال } 225 \text{ g} = 250 - 25 \Rightarrow \text{حل‌شونده } 25 \text{ g} \times \frac{100 \text{ g محلول}}{10 \text{ g حل‌شونده}} = 250 \text{ g محلول}$$

حالا اگر ۲۵ گرم آب (حلال) تبخیر شود، جرم حلال باقی‌مانده برابر ۲۰۰ گرم می‌شود؛ پس درصد جرمی حل‌شونده در محلول جدید برابر است با:

$$\text{درصد جرمی نهایی} = \frac{11/1}{10} = 11/11 \neq 1/25 \Rightarrow \frac{25}{225} \times 100 \approx 11/1 \Rightarrow \text{درصد جرمی اولیه} = \frac{\text{جرم حل‌شونده}}{\text{جرم محلول}} \times 100 = \text{درصد جرمی حل‌شونده}$$

ب) سومین فلز قلیایی خاکی جدول دوره‌ای، کلسیم بوده و فرمول سولفات آن به صورت CaSO_4 است. کلسیم سولفات جزو مواد کم‌محلول در آب محسوب می‌شود.

پ) رابطه میان غلظت مولار یک محلول با درصد جرمی (a) و چگالی آن (d) به صورت زیر است:

$$\text{غلظت مولی} = \frac{10 \text{ ad}}{\text{جرم مولی حل‌شونده}} = \frac{10 \times 20 \times 1/2}{40} = 6 \text{ mol.L}^{-1}$$

ت) در فشار یکسان و در هر دمایی، انحلال‌پذیری گاز CO_2 از گاز NO بیشتر است؛ زیرا اگرچه مولکول‌های CO_2 ناقطبی هستند ولی به علت واکنش با مولکول‌های آب، انحلال‌پذیری بیشتری نسبت به NO دارند. (گاز NO در آب به صورت مولکولی حل شده و با آب واکنش نمی‌دهد).

تست و پاسخ ۱۰۰

۱۰۰ میلی‌لیتر محلول فسفریک اسید با مقدار کافی نیکل (II) کربنات، مطابق معادله زیر به طور کامل واکنش می‌دهد. اگر حجم گاز تولیدشده در این واکنش در شرایط STP برابر با ۶/۷۲ میلی‌لیتر باشد، غلظت محلول اسید چند ppm بوده است؟ (بازده واکنش را ۸۰ درصد و چگالی محلول اسید را 1 g.mL^{-1} در نظر بگیرید: $P = 31, O = 16, H = 1; \text{g.mol}^{-1}$)



۳۱۳/۶ (۴)

۲۴۵ (۳)

۱۵۶/۸ (۲)

۴۹۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ تشریحی گام اول: با توجه به معادله موازنه‌شده واکنش، جرم H_3PO_4 در محلول را به دست می‌آوریم:

$$\frac{\text{بازده درصدی} \times \text{جرم}}{100} = \frac{\text{حجم (mL)}}{\text{ضریب} \times 22400} \Rightarrow \frac{x \times 80}{2 \times 98} = \frac{24/5}{3 \times 22400} \Rightarrow x = \frac{2 \times 98 \times 10}{10000 \times 3} = 0.0245 \text{ g}$$

گام دوم: با توجه به جرم حل‌شونده و جرم محلول، غلظت محلول را به دست می‌آوریم:

$$\text{جرم محلول} = 100 \text{ mL} \times \frac{1 \text{ g}}{1 \text{ mL}} = 100 \text{ g}$$

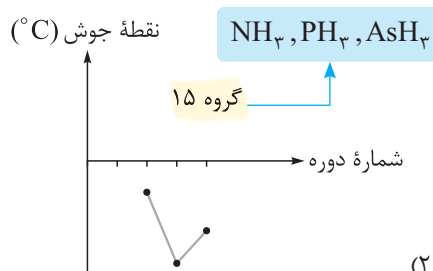
$$\text{ppm} = \frac{\text{جرم حل‌شونده}}{\text{جرم محلول}} \times 10^6 = \frac{0.0245}{100} \times 10^6 = 245$$



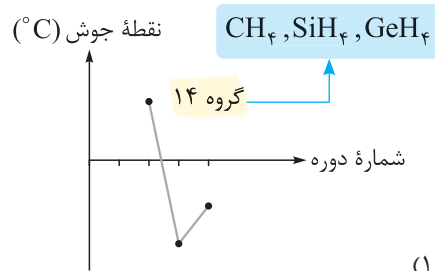


تست و پاسخ ۱۰۱

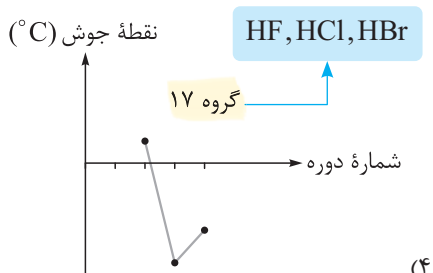
کدام نمودار در مورد نقطه جوش ترکیب‌های هیدروژن‌دار دوتایی سه عنصر اول گروه‌های ۱۴ تا ۱۷ جدول دوره‌ای نادرست است؟



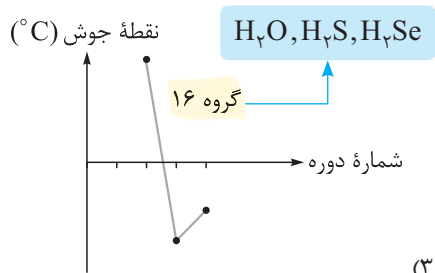
(۲)



(۱)



(۴)



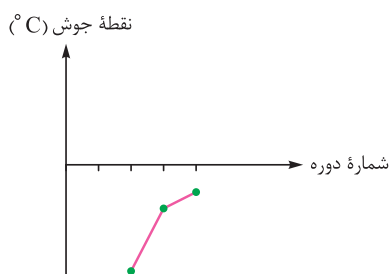
(۳)

پاسخ: گزینه ۱

پاسخ تشریحی

با افزایش جرم مولی عنصرهای گروه ۱۴، نقطه جوش ترکیب‌های هیدروژن‌دار آن‌ها، افزایش می‌یابد؛ زیرا همه این ترکیب‌ها ناقطبی‌اند و هیچ کدام توانایی برقراری پیوند هیدروژنی با مولکول‌های خود را ندارند.

نقطه جوش: $\text{CH}_4 < \text{SiH}_4 < \text{GeH}_4$



در بین ترکیب‌های هیدروژن‌دار سه عنصر اول گروه‌های ۱۴، ۱۵ و ۱۶، ترکیب هیدروژن‌دار اولین عنصر هر سه گروه ($\text{HF}, \text{H}_2\text{O}, \text{NH}_3$) به دلیل توانایی برقراری پیوند هیدروژنی، نقطه جوش بالاتری نسبت به ترکیب‌های هیدروژن‌دار دو عنصر بعدی هم‌گروه خود را دارند.

گروه ۱۷: نقطه جوش: $\text{HF} > \text{HCl} > \text{HBr}$ جرم مولی جرم مولی جرم مولی
کم‌تر بیشتر هیدروژنی پیوند کم‌تر بیشتر هیدروژنی پیوند کم‌تر بیشتر هیدروژنی پیوند

تست و پاسخ ۱۰۲

اگر ۵۹۰ گرم محلول سیرشده نمک A را از دمای ۸۰ °C تا ۳۰ °C سرد کنیم، چند گرم از آن در کف ظرف رسوب می‌کند؟ (انحلال پذیری نمک A در دماهای ۱۰ °C و ۴۰ °C به ترتیب برابر ۸۰ و ۱۰۴ گرم است؛ معادله انحلال پذیری نمک A به صورت خطی است.)

۱۰۰ (۴)

۸۰ (۳)

۶۰ (۲)

۴۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ تشریحی

گام اول: معادله انحلال پذیری نمک A به صورت خطی است، بنابراین اول باید این معادله رو به دست بیاریم:

$$S - S_1 = \frac{S_2 - S_1}{\theta_2 - \theta_1} (\theta - \theta_1) \Rightarrow S - 80 = \frac{104 - 80}{40 - 10} (\theta - 10) \Rightarrow S - 80 = 0.8 (\theta - 10) \Rightarrow S = 0.8\theta + 72$$

گام دوم: انحلال پذیری نمک A را در دماهای ۸۰ و ۳۰ درجه سلسیوس محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \text{در دمای } 80^\circ \text{C: } S &= 0.8(80) + 72 = 136 \\ \text{در دمای } 30^\circ \text{C: } S &= 0.8(30) + 72 = 96 \end{aligned} \Rightarrow \text{جرم رسوب} = 136 - 96 = 40 \text{ g}$$





گام سوم: اگر ۲۳۶ گرم محلول سیرشده نمک A (۱۰۰ + ۱۳۶ = ۲۳۶) را از دمای ۸۰ °C تا دمای ۳۰ °C سرد کنیم، ۴۰ گرم رسوب A تشکیل می‌شود؛ بنابراین خواهیم داشت:

$$\text{رسوب } ۱۰۰ \text{ g A} = \frac{\text{رسوب } ۴۰ \text{ g A}}{\text{محلول سیرشده نمک A } ۲۳۶ \text{ g}} \times \text{محلول سیرشده نمک A } ۵۹۰ \text{ g}$$

تست و پاسخ ۱۰۳

با توجه به جدول داده‌شده، چند مورد از مطالب زیر نادرست است؟

شرایط واکنش با گاز هیدروژن	هالوژن‌ها
در دمای ۲۰۰ °C واکنش می‌دهد.	A _۲ → Br _۲
در دمای اتاق به آرامی واکنش می‌دهد.	B _۲ → Cl _۲
حتی در دمای ۲۰۰ °C - به سرعت واکنش می‌دهد.	C _۲ → F _۲
در دمای بالاتر از ۴۰۰ °C واکنش می‌دهد.	D _۲ → I _۲

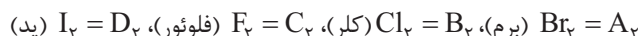
- نقطه جوش فراورده واکنش میان C_۲ با گاز هیدروژن، در مقایسه با هر دو واکنش‌دهنده بیشتر است.
- A_۲ در دمای اتاق، به حالت مایع است و از آن می‌توان برای تشخیص هیدروکربن‌های سیرنشده از سیرشده استفاده کرد.
- در هر سه روش تقطیر، اسمز معکوس و صافی کربنی برای تصفیه آب، از B_۲ برای از بین بردن میکروب‌ها استفاده می‌شود.
- یون پایدار حاصل از عنصر D، با یون حاوی تکنسیم مورد استفاده در تصویربرداری غده تیروئید، اندازه مشابهی دارد.

I ⁻	۴ (صفر)	۳ (یک)	۲ (سه)	۱ (دو)
----------------	---------	--------	--------	--------

پاسخ: گزینه ۴

همه عبارت‌های داده‌شده درست‌اند.

پاسخ تشریحی: در گروه هالوژن‌ها از بالا به پایین، واکنش‌پذیری کاهش می‌یابد و واکنش آن‌ها با گاز هیدروژن در دماهای بالاتری قابل انجام است؛ بنابراین با توجه به جدول داریم:



بررسی عبارت‌ها:

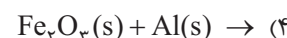
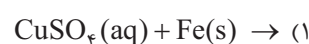
عبارت اول: در واکنش گاز F_۲ با گاز H_۲، مولکول HF تشکیل می‌شود. این ماده به دلیل توانایی تشکیل پیوند هیدروژنی، دارای نقطه جوش بالاتری نسبت به گازهای H_۲ و F_۲ می‌باشد.

عبارت دوم: برم (Br_۲) در دمای اتاق به حالت مایع می‌باشد که از آن برای تشخیص هیدروکربن‌های سیرنشده از سیرشده استفاده می‌کنند. بی‌رنگ شدن برم (از بین رفتن رنگ قرمز آن) در حضور هیدروکربن‌های سیرنشده، یکی از روش‌های شناسایی هیدروکربن‌های سیرنشده از سیرشده است. عبارت سوم: آب تصفیه‌شده در روش‌های تقطیر، اسمز معکوس و صافی کربنی، هنوز دارای میکروب‌ها است؛ بنابراین باید آن‌ها را پیش از مصرف کلرزنی کرد. عبارت چهارم: یون یدید (I⁻) با یون حاوی تکنسیم که برای تصویربرداری غده تیروئید استفاده می‌شود، اندازه مشابهی دارد، به طوری که غده تیروئید هنگام جذب یون یدید، یون حاوی تکنسیم را نیز جذب می‌کند.

تست و پاسخ ۱۰۴

کدام واکنش زیر به طور طبیعی انجام می‌شود و پس از موازنه، بیش از ۵۰ درصد مولی فراورده‌های آن را یک ترکیب دوتایی تشکیل می‌دهد؟

یعنی ضریب ترکیب دوتایی (ترکیبی که از دو عنصر ساخته شده)، بیشتر از فراورده دیگر باشد.



پاسخ: گزینه ۳

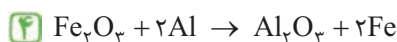
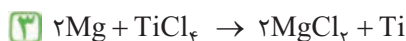
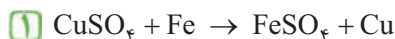




پاسخ تشریحی

نخست باید ببینیم کدام واکنش به طور خودبه خودی و طبیعی انجام پذیر نیست. در معادله واکنش (۲)، چون عنصر کربن دارای واکنش پذیری کمتری نسبت به فلز سدیم می باشد، نمی تواند جایگزین آن در ترکیب یونی آن شود؛ بنابراین واکنش مورد نظر به صورت خودبه خودی انجام پذیر نیست.

معادله موازنه شده واکنش های انجام شده در سایر گزینه ها به صورت زیر است:



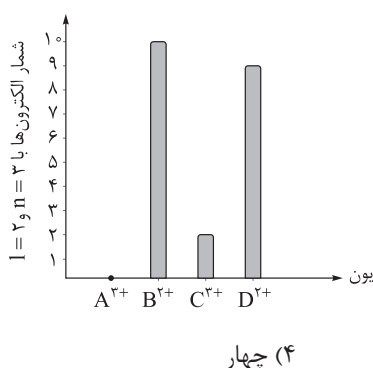
در معادله موازنه شده واکنش موجود در ①، ترکیب یونی موجود در فراورده، چندتایی بوده (نه دوتایی!) و علاوه بر آن، ضرایب دو فراورده یکسان است.

در معادله موازنه شده واکنش موجود در ③، $\frac{2}{3}$ مول های فراورده ها را MgCl_2 به عنوان ترکیب یونی دوتایی تشکیل می دهد.

در معادله موازنه شده واکنش موجود در ④، $\frac{1}{3}$ مول های فراورده ها را Al_2O_3 به عنوان ترکیب یونی دوتایی تشکیل می دهد.

تست و پاسخ ۱۰۵

نمودار داده شده، شمار الکترون های با $l = 2$ و $n = 3$ چند یون پایدار از عنصرهای دوره چهارم جدول تناوبی را نشان می دهد. با توجه به آن،



شمار الکترون های موجود در زیر لایه ۳d

عنصرهای دسته p و s

^{30}Zn

چند مورد از مطالب زیر درست است؟

• عنصر A در وسایل خانه مثل تلویزیون رنگی وجود دارد.

• شمار الکترون های بیرونی ترین زیر لایه ۳d با شمار الکترون های بیرونی ترین زیر لایه ۴s

اتم نخستین عنصر اصلی بعد از آن در دوره چهارم، برابر است.

• B، آخرین فلز واسطه دوره چهارم است.

• اتم C علاوه بر کاتیون C^{3+} ، دارای کاتیون پایدار C^{2+} نیز است.

یک (۱)

دو (۲)

سه (۳)

چهار (۴)

پاسخ: گزینه ۴

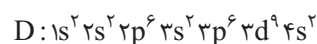
همه عبارت های داده شده درست اند.

پاسخ تشریحی

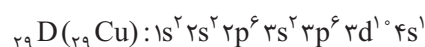
زیر لایه با اعداد کوانتومی $n = 3$ و $l = 2$ ، زیر لایه ۳d است. می دانیم که برای تبدیل آرایش الکترونی کاتیون به آرایش الکترونی اتم آن، کافی است به تعداد بار و به ترتیب پر شدن زیر لایه ها به آن الکترون اضافه کنیم.

دقت کنید که اگر آرایش الکترونی کاتیون ها به زیر لایه d ختم شود، برای نوشتن آرایش الکترونی اتم های آن ها، ابتدا باید زیر لایه ns را پر کنیم و سپس باقی مانده الکترون ها را به زیر لایه $(n-1)d$ بدهیم! و در نهایت اگر نیاز بود تغییراتی در آرایش الکترونی اتم ایجاد کنیم؛ یعنی مثلاً در عناصر واسطه دوره چهارم جدول دوره ای باید الکترون ها را ابتدا به زیر لایه ۴s داده، آن را پر کرده و سپس اگر الکترونی باقی ماند آن را به زیر لایه ۳d اضافه کنیم.

برای مثال، آرایش الکترونی یون D^{2+} به زیر لایه ۳d^۹ ختم می شود؛ پس ابتدا دو الکترون را به زیر لایه ۴s می دهیم و آرایش الکترونی اتم این عنصر را می نویسیم:

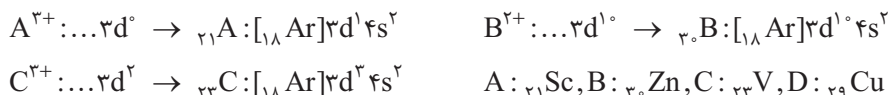


می دانیم که این آرایش الکترونی، مربوط به اتم مس و جزو استثنائات قاعده آفباست و آرایش الکترونی درست آن به صورت زیر است:



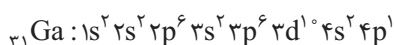


به همین ترتیب اتم چهار عنصر داده شده را به صورت زیر مشخص می‌کنیم:



بررسی عبارت‌ها:

عبارت اول: اسکندیم (${}_{21}Sc$) نخستین فلز واسطه در جدول دوره‌ای است که در وسایل خانه مانند تلویزیون رنگی و برخی شیشه‌ها وجود دارد.
عبارت دوم: منظور از عنصرهای اصلی، عنصرهای دسته S و p هستند. اولین عنصر اصلی بعد از مس در جدول دوره‌ای، عنصر ${}_{31}Ga$ است.
آرایش الکترونی اتم دو عنصر ${}_{29}Cu$ و ${}_{31}Ga$ به صورت زیر است:



شمار الکترون‌های زیرلایه 4s در اتم مس و زیرلایه 4p در اتم گالیم، برابر ۱ است.

عبارت سوم: عنصر روی (${}_{29}Zn$) که در دوره ۴ و گروه ۱۲ جدول دوره‌ای قرار دارد، به عنوان آخرین فلز واسطه دوره چهارم می‌باشد.

عبارت چهارم: عنصر وانادیم دو یون پایدار V^{2+} و V^{3+} دارد که هیچ کدام به آرایش الکترونی گاز نجیب نمی‌رسند.

تست و پاسخ ۱۰۶

اگر ۱۷/۱ گرم آلومینیم سولفات با خلوص ۵۰ درصد، مطابق واکنش زیر تجزیه شود، درصد جرمی اکسیژن در توده جامد برجای مانده به تقریب کدام است؟ (در ناخالصی‌ها اکسیژن وجود ندارد؛ $S = 32, Al = 27, O = 16 : g.mol^{-1}$)

جرم Al_2O_3 تولیدی + جرم ناخالصی‌های آلومینیم سولفات



$$54/1(4)$$

$$43/2(3)$$

$$10/8(2)$$

$$3/6(1)$$

پاسخ: گزینه ۲



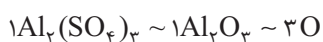
گام اول: معادله واکنش انجام شده را موازنه می‌کنیم:

گام دوم: برای به دست آوردن جرم توده جامد برجای مانده در انتهای واکنش (جرم Al_2O_3 تولید شده و جرم ناخالصی‌های موجود در آلومینیم سولفات) به کمک قانون پایستگی جرم، ابتدا باید جرم گاز SO_2 تولیدی را محاسبه کنیم:

$$\frac{\text{درصد خلوص} \times \text{جرم}}{100} = \frac{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} \Rightarrow \frac{17/1 \times 50}{100} = \frac{x}{3 \times 80} \Rightarrow x = \frac{3 \times 80 \times 50 \times 17/1}{100 \times 342} \Rightarrow x = 6 \text{ g } SO_2$$

$$17/1 \text{ g} = \text{جرم گاز تولید شده} - \text{جرم اولیه} = \text{جرم توده برجای مانده}$$

گام سوم: از آنجا که در ناخالصی‌ها، اکسیژن وجود ندارد، جرم اکسیژن موجود در توده برجای مانده، برابر است با جرم اکسیژن در Al_2O_3 تولیدی:



$$\frac{17/1 \times 50}{342 \times 1} = \frac{x}{3 \times 16} \Rightarrow x = 1/2 \text{ g O}$$

گام چهارم: محاسبه درصد جرمی اکسیژن موجود در توده جامد:

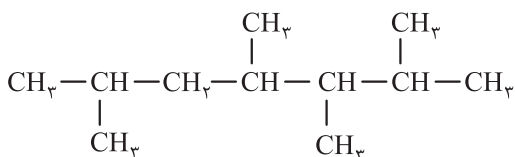
$$\text{درصد جرمی اکسیژن موجود در توده} = \frac{\text{جرم اکسیژن موجود در توده}}{\text{جرم توده}} \times 100 \Rightarrow \frac{1/2}{11/1} \times 100 \approx 10/8$$





تست و پاسخ ۱۰۷

اگر همه شاخه‌های فرعی موجود در ساختار آلکان زیر با شاخه اتیل جایگزین شوند،



(۱) تعداد و نوع شاخه‌های فرعی تغییر می‌کنند.

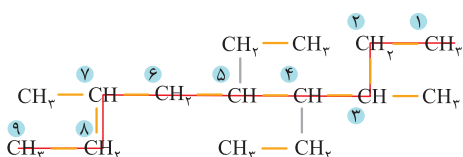
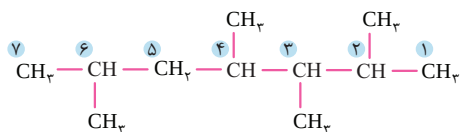
(۲) مجموع اعداد در نام ترکیب، ۴ واحد افزایش می‌یابد.

(۳) شمار کربن‌ها در زنجیر اصلی ترکیب، ۱ واحد افزایش می‌یابد.

(۴) در نام ترکیب نهایی برخلاف ترکیب اولیه، واژه «متیل» وجود ندارد.

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ تشریحی



نام آلکان موجود در سؤال، ۲، ۳، ۴، ۶- تترا متیل هپتان است. باید ۴ شاخه فرعی

متیل را با شاخه اتیل جایگزین کنیم که به ساختار مقابل می‌رسیم:

نام ترکیب حاصل، ۴، ۵- دی اتیل - ۳، ۷- دی متیل نونان می‌باشد.

همان‌طور که مشخص است مجموع اعداد در نام ترکیب اولیه، برابر ۱۵ و در نام ترکیب نهایی، برابر ۱۹ است؛ پس مجموع اعداد در نام ترکیب،

۴ واحد افزایش داشته است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

(۱) در ترکیب نهایی، نوع دوتا از شاخه‌های فرعی تغییر می‌کنند اما در این ترکیب نیز مشابه ترکیب اولیه، ۴ شاخه فرعی وجود دارد.

(۳) شمار کربن‌ها در زنجیر اصلی ترکیب اولیه، ۷ و در زنجیر اصلی ترکیب نهایی، برابر ۹ است.

(۴) در نام ترکیب نهایی همانند ترکیب اولیه، واژه «متیل» وجود دارد.

تست و پاسخ ۱۰۸

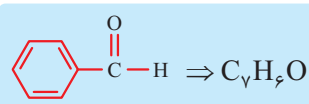
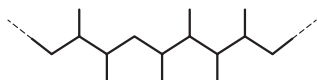
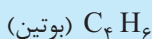
چند مورد از مطالب زیر درباره پروپین (A) و پروپین (B)، درست است؟

• فرمول فراورده حاصل از واکنش A با گاز کلر، به صورت $\text{C}_3\text{H}_6\text{Cl}_2$ است.

• در ساختار B، نسبت به سومین عضو خانواده آلکین‌ها، ۲ پیوند $\text{C}-\text{H}$ کم‌تر وجود دارد.

• ساختار فراورده حاصل از بسپارش A را می‌توان به صورت شکل مقابل نشان داد.

• مجموع شمار اتم‌ها در فرمول مولکولی B، نصف مجموع شمار اتم‌ها در فرمول مولکولی بنز آلدهید است.



(۲) سه

(۴) یک

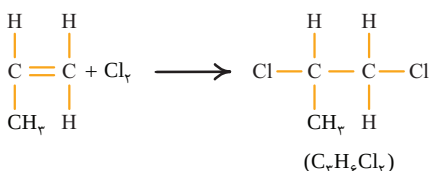
(۱) چهار

(۳) دو

پاسخ: گزینه ۲

عبارت‌های اول، دوم و چهارم درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:



عبارت اول: در ساختار پروپین $(\text{CH}_3 - \text{CH} = \text{CH}_2)$ ، یک پیوند دوگانه

وجود دارد. گاز کلر می‌تواند به این پیوند دوگانه اضافه شده و با پروپین واکنش

دهد. فراورده حاصل دارای فرمول مولکولی $\text{C}_3\text{H}_6\text{Cl}_2$ است.



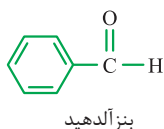
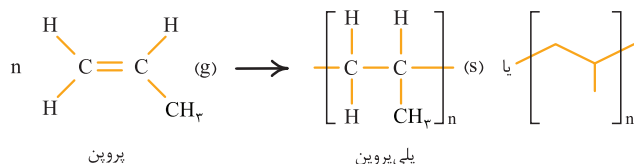


عبارت دوم: در پروپین (C_3H_4) با ساختار مقابل، ۴ پیوند $\text{C} - \text{H}$ وجود دارد:

سومین عضو خانواده آلکین‌ها، بوتین با فرمول مولکولی C_4H_6 است که در ساختار آن ۶ پیوند $\text{C} - \text{H}$ وجود دارد.

نکته در ساختار هیدروکربن‌ها، شمار پیوندهای $\text{C} - \text{H}$ برابر با شمار اتم‌های هیدروژن در آن‌ها است.

عبارت سوم: ساختار حاصل از بسپارش پروپن ($\text{CH}_3 - \text{CH} = \text{CH}_2$)، به صورت زیر است:



عبارت چهارم: مجموع شمار اتم‌ها در فرمول مولکولی پروپین (C_3H_4)، برابر ۷ است. فرمول مولکولی بنزآلدهید، $\text{C}_7\text{H}_6\text{O}$ و مجموع شمار اتم‌ها در فرمول مولکولی آن، برابر ۱۴ است.

تست و پاسخ ۱۰۹

با توجه به شکل داده شده که مربوط به دو ظرف محتوی آب خالص است، همه گزینه‌های زیر درست‌اند؛ به جز

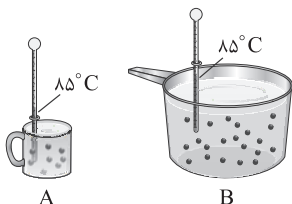
دمای آب

(۱) میانگین تندی مولکول‌های آب در هر دو ظرف یکسان است.

(۲) برای افزایش دمای یک گرم از آب موجود در دو ظرف به اندازه یک درجه سلسیوس، گرمای یکسانی لازم است.

(۳) انرژی گرمایی آب موجود در ظرف B، از ظرف A بیشتر است.

(۴) به دلیل یکسان بودن دمای آب موجود در هر دو ظرف، مجموع انرژی جنبشی ذره‌های سازنده آن‌ها با هم یکسان است.



به دما و جرم ماده وابسته است.

انرژی گرمایی

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ تشریحی مجموع انرژی جنبشی ذره‌های سازنده یک نمونه ماده، هم‌ارز با انرژی گرمایی آن می‌باشد و به دلیل بیشتر بودن شمار مولکول‌های آب در ظرف B، انرژی گرمایی در ظرف B بیشتر است. بررسی سایر گزینه‌ها:

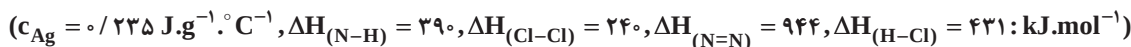
(۱) زیرا دمای آب هر دو ظرف یکسان است.

(۲) زیرا گرمای ویژه یک نوع ماده (آب)، در دما و فشار ثابت، مقداری ثابت بوده و در دو ظرف یکسان است.

(۳) زیرا جرم آب موجود در ظرف B بیشتر است. انرژی گرمایی هم به دما و هم به تعداد ذرات سازنده (جرم) ماده بستگی دارد. اگر دمای دو نمونه از یک ماده برابر باشد، نمونه‌ای با تعداد ذرات سازنده (جرم) بیشتر (در این جا ظرف B)، انرژی گرمایی بیشتری دارد.

تست و پاسخ ۱۱۰

به کمک گرمای تولید شده به ازای تولید دو مول گاز نیتروژن در واکنش: $\text{NH}_3(\text{g}) + \text{Cl}_2(\text{g}) \rightarrow \text{N}_2(\text{g}) + \text{HCl}(\text{g})$ (معادله موازنه شود)، دمای چند کیلوگرم نقره را می‌توان به اندازه 40°C افزایش داد؟



۱۲۰ (۴)

۸۰ (۳)

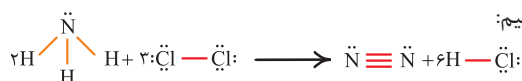
۱۰۰ (۲)

۷۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ تشریحی

گام اول: معادله واکنش انجام شده را به صورت زیر موازنه می‌کنیم:





گام دوم: با استفاده از آنتالپی‌های پیوند مواد، آنتالپی واکنش را محاسبه می‌کنیم:

$\Delta H_{\text{واکنش}} = [\text{مجموع آنتالپی پیوندها در مواد واکنش دهنده}] - [\text{مجموع آنتالپی پیوندها در مواد فراورده}]$

$$\Delta H_{\text{واکنش}} = [6\Delta H_{(N-H)} + 3\Delta H_{(Cl-Cl)}] - [\Delta H_{(N\equiv N)} + 6\Delta H_{(H-Cl)}] = [6(390) + 3(240)] - [1(944) + 6(431)]$$

$$= -470 \text{ kJ}$$

گام سوم: ۴۷۰ کیلوژول، گرمای آزاد شده به ازای تولید ۱ مول N_2 است؛ در نتیجه گرمای تولید شده به ازای تولید ۲ مول از آن، برابر ۹۴۰ کیلوژول است؛ پس داریم:

$$Q = mc\Delta\theta \Rightarrow m = \frac{Q}{c\Delta\theta} = \frac{940}{\frac{23}{5} \times 4} = 100 \text{ kg Ag}$$

تست و پاسخ ۱۱۱

با توجه به واکنش زیر، کدام مطلب نادرست است؟ ($O = 16, C = 12, H = 1: g.mol^{-1}$)



واکنش گرماده ($\Delta H < 0$)

(۱) علامت ΔH آن با علامت ΔH واکنش تبدیل اوزون به اکسیژن، یکسان است.

(۲) ارزش سوختی متان به تقریب برابر با $55/6 \text{ kJ.g}^{-1}$ است.

(۳) اغلب مواد شرکت کننده در واکنش، ناقطبی اند و در میدان الکتریکی جهت گیری نمی کنند.

(۴) به ازای تشکیل ۱۰/۸ گرم آب در سوختن کامل مقدار معینی متان، ۲۷۶ کیلوژول گرما آزاد می شود.

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ تشریحی: گرمای آزاد شده به ازای تشکیل ۱۰/۸ گرم آب، برابر است با: $10/8 \text{ g H}_2\text{O} \times \frac{1 \text{ mol H}_2\text{O}}{18 \text{ g H}_2\text{O}} \times \frac{890 \text{ kJ}}{2 \text{ mol H}_2\text{O}} = 247 \text{ kJ}$

بررسی سایر گزینه ها:

(۱) چون واکنش سوختن متان گرماده است، علامت ΔH در این واکنش، منفی است. اوزون دارای واکنش پذیری بیشتری نسبت به اکسیژن است؛ بنابراین نسبت به اکسیژن ناپایدارتر و دارای سطح انرژی بالاتری است؛ بنابراین واکنش تبدیل اوزون به اکسیژن، گرماده بوده و علامت ΔH در آن منفی است.

(۲) ارزش سوختی یا همان گرمای حاصل از سوختن ۱ گرم ماده را می توان از رابطه زیر به دست آورد:

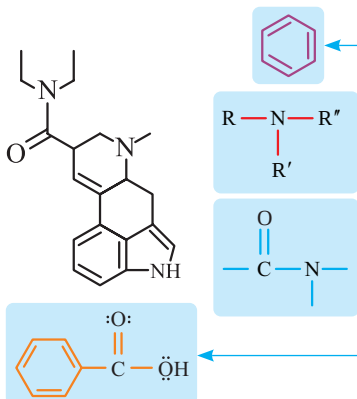
$$| \text{آنتالپی سوختن} | (\text{kJ.mol}^{-1}) = \frac{\text{ارزش سوختی} (\text{kJ.g}^{-1})}{\text{جرم مولی} (\text{g.mol}^{-1})}$$

ارزش سوختی متان برابر است با: $\frac{890}{16} = 55/625 \sim 55/6 \text{ kJ.g}^{-1}$

(۳) از بین مواد شرکت کننده در معادله واکنش سوختن کامل متان، تنها آب، مولکول های قطبی دارد و در میدان الکتریکی جهت گیری می کند ولی سه ماده دیگر ناقطبی هستند.

تست و پاسخ ۱۱۲

کدام گزینه در رابطه با ترکیب مقابل، نادرست است؟



(۱) در ساختار آن، حلقه بنزنی و گروه های عاملی آمینی و آمیدی وجود دارند.

(۲) شمار پیوندهای اشتراکی در ساختار آن برابر با ۵۷ است.

(۳) شمار جفت الکترون های ناپیوندی موجود در این ترکیب، ۱/۲۵ برابر بنزوتیک اسید است.

(۴) در فرمول مولکولی آن، مجموع شمار اتم های هیدروژن و کربن، ۱۵ برابر شمار اتم های نیتروژن است.

پاسخ: گزینه ۲

نکات ۱ فرمول به دست آوردن تعداد اتم‌های هیدروژن در یک ترکیب آلی با n اتم کربن به صورت زیر است:

$$\text{تعداد اتم‌های هیدروژن} = (\text{تعداد اتم‌های نیتروژن} \times 1) + (\text{تعداد حلقه‌ها} \times 2) - (\text{تعداد پیوندهای سه‌گانه} \times 4) - (\text{تعداد پیوندهای دوگانه} \times 2) - (2n + 2)$$

در ترکیبی با n کربن

۲ تعداد پیوندهای اشتراکی در یک ترکیب آلی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\frac{(\text{تعداد اتم‌های نیتروژن} \times 3) + (\text{تعداد اتم‌های اکسیژن} \times 2) + (\text{تعداد اتم‌های هیدروژن} \times 1) + (\text{تعداد اتم‌های کربن} \times 4)}{2} = \text{تعداد پیوندهای اشتراکی}$$

در یک ترکیب آلی

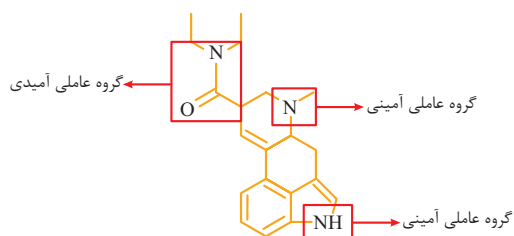
پاسخ تشریحی ترکیب مورد نظر دارای ۲۰ اتم کربن، ۳ اتم نیتروژن و یک اتم اکسیژن است. همچنین در ساختار آن، ۶ پیوند دوگانه و ۴ حلقه وجود دارد؛ بنابراین شمار اتم‌های هیدروژن آن برابر است با:

$$C_{20}H_{25}N_3O \Rightarrow \text{فرمول ترکیب} = \underbrace{20}_{\text{اتم‌های نیتروژن}} + \underbrace{4}_{\text{حلقه‌ها و پیوند دوگانه}} + \underbrace{2}_{\text{اتم‌های اکسیژن}} + \underbrace{1}_{\text{اتم‌های هیدروژن}} - \underbrace{12}_{\text{اتم‌های کربن}} = 25$$

به این ترتیب، شمار پیوندهای اشتراکی در ترکیب مورد نظر برابر با ۵۸ است:

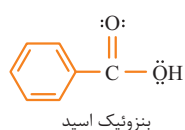
$$C_{20}H_{25}N_3O \text{ در شمار پیوندها} = \frac{(20 \times 4) + (25 \times 1) + (3 \times 3) + (1 \times 2)}{2} = 58$$

بررسی سایر گزینه‌ها:



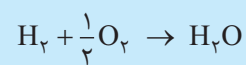
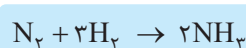
۱ گروه‌های عاملی نشان داده شده در شکل، ۲ گروه عاملی آمینی و یک گروه عاملی آمیدی هستند. همچنین با توجه به وجود حلقه ۶ عضوی بنزنی، این ترکیب آروماتیک است.

۲ در ساختار این ترکیب ۳ اتم N و ۱ اتم O وجود دارد. بر روی هر اتم N، ۱ جفت و بر روی هر اتم O، ۲ جفت الکترون ناپیوندی قرار می‌گیرد؛ بنابراین در ساختار ترکیب مورد نظر در مجموع ۵ جفت الکترون ناپیوندی وجود دارد. در ساختار بنزوئیک اسید ($C_6H_5O_2$)، ۲ اتم O و بر روی هر اتم O، ۲ جفت الکترون ناپیوندی و در مجموع ۴ جفت الکترون ناپیوندی وجود دارد و $\frac{5}{4} = 1.25$.



۳ فرمول مولکولی ترکیب داده شده به صورت $C_{20}H_{25}N_3O$ است. مجموع شمار اتم‌های هیدروژن و کربن در فرمول مولکولی این ماده برابر با ۴۵ و شمار اتم‌های نیتروژن در فرمول مولکولی آن برابر ۳ است و $\frac{45}{3} = 15$.

تست و پاسخ ۱۱۳



اگر آنتالپی واکنش موازنه شده تولید آمونیاک به روش هابر برابر $a \text{ kJ}$ ، آنتالپی سوختن هیدروژن برابر $b \text{ kJ.mol}^{-1}$ و آنتالپی واکنش موازنه شده تولید آمونیاک از گازهای هیدرازین و هیدروژن برابر $c \text{ kJ}$ باشد، آنتالپی واکنش موازنه شده سوختن هیدرازین که فراورده‌های آن گاز نیتروژن و بخار آب است، چند کیلوژول است؟ (حالت فیزیکی همه مواد شرکت کننده در واکنش‌ها را گاز در نظر بگیرید.)

$$c + b - a \quad (۴)$$

$$2b + c - a \quad (۳)$$

$$a - c + 2b \quad (۲)$$

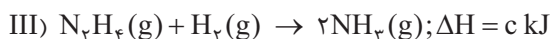
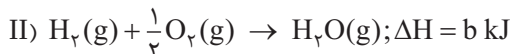
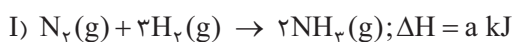
$$a + b - c \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۲

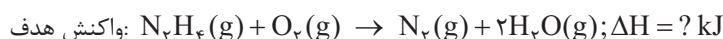


پاسخ تشریحی

گام اول: نخست باید معادله موازنه شده واکنش های انجام شده را به همراه آنتالپی این واکنش ها بنویسیم:



گام دوم: باید معادله موازنه شده واکنش هدف را نوشته و سپس با استفاده از قانون هس، آنتالپی آن را محاسبه کنیم:



برای رسیدن به این واکنش، واکنش (I) را باید معکوس کرده، واکنش (II) را در ۲ ضرب کنیم و واکنش (III) را تغییر ندهیم!

$\Delta H_{\text{هدف}} = -a + 2b + c$

تست و پاسخ ۱۱۴

در واکنش فلز روی با محلول هیدروکلریک اسید، کدام عامل سبب افزایش سرعت تولید گاز نمی شود؟

(۱) افزایش دمای محلول

(۲) استفاده از محلول ۲ مولار به جای محلول ۱ مولار

(۳) استفاده از پودر روی به جای تکه ای از فلز روی

(۴) استفاده از ۲۰۰ میلی لیتر محلول ۱ مولار به جای ۱۰۰ میلی لیتر محلول ۱ مولار

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ تشریحی

حجم محلول تأثیری بر سرعت واکنش ندارد. افزایش غلظت محلول، سبب افزایش سرعت واکنش می شود.

تست و پاسخ ۱۱۵

با توجه به داده های جدول زیر که مربوط به تغییرات غلظت دو ماده موجود در واکنش: $4NH_3(g) + 3Cl_2(g) \rightarrow 3NH_4Cl(g) + NCl_3(g)$

است، کدام موارد از مطالب زیر درست اند؟

غلظت مولی		زمان (دقیقه)				
۱۲	۹	۶	۳	۰		
۰/۸۰	۰/۷۵	۰/۶۰	۰/۳۵	۰	[A]	فرآورده
۰/۴۰	۰/۴۵	۰/۶۰	۰/۸۵	۱/۲۰	[B]	واکنش دهنده

الف) در نام گذاری ترکیب A طبق قواعد آیوپاک، از پیشوند (تری) استفاده می شود.

ب) سرعت متوسط واکنش در سه دقیقه سوم واکنش برابر با یک مولار بر ساعت است.

پ) شیب نمودار تغییرات مول - زمان B از دیگر مواد شرکت کننده در واکنش بیشتر است.

ت) سرعت متوسط مصرف آمونیاک در ۳ دقیقه دوم واکنش برابر با $\frac{1}{4}$ مولار بر دقیقه است.

(۴) پ - ت

(۳) الف - ب

(۲) ب - ت

(۱) الف - پ

پاسخ: گزینه ۲

عبارت های «ب» و «ت» درست اند.

پاسخ تشریحی

نخست باید مواد A و B را با توجه به مقدار تغییر غلظت آن ها در واکنش به دست آوریم. در یک واکنش مقدار تغییر غلظت هر یک از مواد شرکت کننده در واکنش متناسب با ضریب استوکیومتری آن هاست.





مقدار اولیه غلظت ماده A صفر است و به مرور غلظت آن در طول انجام واکنش، افزایش یافته است؛ بنابراین ماده A یکی از فراورده‌ها است. مقدار اولیه غلظت ماده B صفر نبوده و به مرور غلظت آن در طول انجام واکنش کاهش پیدا می‌کند؛ بنابراین ماده B یکی از واکنش‌دهنده‌ها است. از آن‌جا که در هر بازه مشخص، مقدار تغییر غلظت این دو ماده با هم برابر است، در نتیجه ضریب استوکیومتری این دو ماده در معادله موازنه شده واکنش با هم برابر است؛ پس ماده A، NH_4Cl و ماده B، Cl_2 است.

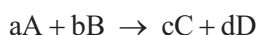
بررسی عبارت‌ها:

الف) ماده A، آمونیوم کلرید (یک ترکیب یونی) است و در نام‌گذاری آن از پیشوند «تری» استفاده نمی‌شود.

ب) سه دقیقه سوم، یعنی از دقیقه ۶ تا ۹. سرعت متوسط واکنش در سه دقیقه سوم واکنش برابر است با:

$$\bar{R}_{\text{واکنش}} = \frac{\bar{R}(\text{Cl}_2)}{3} = \frac{\bar{R}(\text{NH}_4\text{Cl})}{3} = \frac{3 \text{ min} \times \frac{1 \text{ h}}{60 \text{ min}}}{3} = 1 \text{ mol.L}^{-1} \cdot \text{h}^{-1}$$

پ) شیب نمودار تغییرات مول-زمان، متناسب با ضریب استوکیومتری مواد در معادله موازنه شده واکنش است؛ پس از آن‌جا که بیشترین ضریب استوکیومتری را در بین مواد شرکت‌کننده در واکنش دارد، بیشترین شیب را در نمودار مول-زمان به خود اختصاص می‌دهد.



ت) می‌توان رابطه میان سرعت مواد شرکت‌کننده در واکنش را به صورت مقابل نوشت:

$$\bar{R}_{\text{واکنش}} = \frac{\bar{R}_A}{a} = \frac{\bar{R}_B}{b} = \frac{\bar{R}_C}{c} = \frac{\bar{R}_D}{d}$$

سه دقیقه دوم، یعنی از دقیقه ۳ تا ۶. سرعت متوسط مصرف آمونیاک در سه دقیقه دوم واکنش برابر است با:

$$\frac{\bar{R}_{\text{NH}_3}}{4} = \frac{\bar{R}_{\text{Cl}_2}}{3} \Rightarrow \frac{\bar{R}_{\text{NH}_3}}{4} = \frac{-(0/6 - 0/85)}{3} \Rightarrow \bar{R}_{\text{NH}_3} = \frac{4 \times 0/25}{3 \times 3} = \frac{1}{9} \text{ mol.L}^{-1} \cdot \text{min}^{-1}$$

تست و پاسخ ۱۱۶

اگر در واکنش سوختن ناقص اوکتان در شرایط معین مطابق معادله زیر، سرعت متوسط مصرف گاز اکسیژن، $2/2$ برابر سرعت متوسط تولید

کربن دی‌اکسید باشد، حاصل $\frac{\bar{R}(\text{H}_2\text{O})}{\bar{R}(\text{CO}_2)}$ و $\frac{\bar{R}(\text{CO})}{\bar{R}(\text{CO}_2)}$ به ترتیب از راست به چپ کدام است؟



$$1/8, 0/8 (4)$$

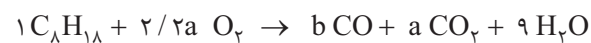
$$1/2, 0/8 (3)$$

$$1/2, 0/6 (2)$$

$$1/8, 0/6 (1)$$

پاسخ: گزینه ۱

نسبت سرعت متوسط تولید با مصرف مواد در یک واکنش متناسب با نسبت ضرایب استوکیومتری آن‌ها است؛ بنابراین در معادله موازنه شده، ضریب O_2 برابر $2/2$ برابر ضریب CO_2 است.



$$\text{C موازنه: } 8 = a + b$$

$$\text{O موازنه: } 2 \times 2/2 a = b + 2a + 9 \Rightarrow 2/4 a - b = 9$$

$$\xrightarrow{b=8-a} 2/4 a - 8 + a = 9 \Rightarrow 3/4 a = 17 \Rightarrow a = 5 \Rightarrow b = 8 - 5 = 3$$



$$\frac{\bar{R}(\text{CO})}{\bar{R}(\text{CO}_2)} = \frac{3}{5} = 0/6 \quad \frac{\bar{R}(\text{H}_2\text{O})}{\bar{R}(\text{CO}_2)} = \frac{9}{5} = 1/8$$

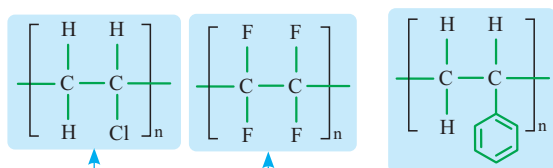




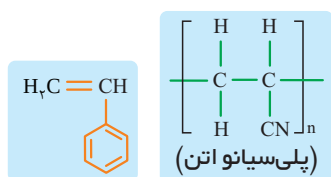
تست و پاسخ ۱۱۷

درستی یا نادرستی مطالب زیر، به ترتیب کدام است؟

$$(C = 12, H = 1 : g.mol^{-1})$$



• اگر به جای گروه X در $\left[\begin{array}{c} H & H \\ | & | \\ -C & -C- \\ | & | \\ H & X \end{array} \right]_n$ ، حلقه بنزنی، فلئور و کلر قرار گیرد، به ترتیب پلی استیرن، تفلون و پلی وینیل کلرید حاصل می شود.



• یک مولکول از پلیمر سازنده پتو که شامل n واحد تکرار شونده در ساختار خود می باشد، دارای ۳n اتم کربن است.

• جرم مولی استیرن با جرم مولی ۲، ۴-دی متیل پنتان، برابر است.



آلکان ۷ کربنه

• شمار پیوندهای اشتراکی موجود در هر مولکول بنزن، ۲/۵ برابر شمار پیوندهای اشتراکی در هر مولکول وینیل کلرید است.

(۲) نادرست - درست - درست - درست

(۱) درست - درست - نادرست - نادرست

(۴) نادرست - درست - درست - درست

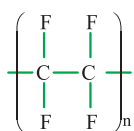
(۳) نادرست - نادرست - درست - درست

پاسخ: گزینه ۴

عبارت های اول و سوم نادرست و عبارت های دوم و چهارم درست اند.

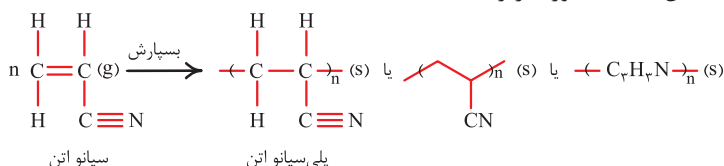
پاسخ تشریحی بررسی عبارت ها:

• دقت کنید که تفلون دارای ساختار روبهرو است:

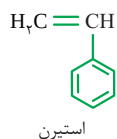


همان طور که در ساختار تفلون مشخص است، با جایگزین کردن تمام اتم های هیدروژن در ساختار پلی اتن، با اتم های فلئور می توان به ساختار تفلون رسید.

• از پلی سیانو اتن در تولید پتو استفاده می شود. واکنش تولید این ماده به صورت زیر است:



در واحد تکرار شونده پلی سیانو اتن، سه اتم کربن وجود دارد؛ بنابراین یک مولکول از این پلیمر که شامل n واحد تکرار شونده در ساختار مولکولی خود است، دارای ۳n اتم کربن است.



• جرم مولی استیرن (C_8H_8) برابر ۱۰۴ و جرم مولی ۲، ۴-دی متیل پنتان (C_7H_{16}) برابر ۱۰۰ گرم بر مول است.

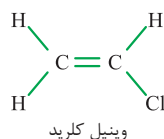
• در هر مولکول بنزن (C_6H_6)، ۱۵ پیوند اشتراکی و در هر مولکول وینیل کلرید (C_2H_3Cl)، ۶ پیوند اشتراکی بین اتم ها برقرار است و

$$\frac{15}{6} = 2.5$$

ساختار بنزن و وینیل کلرید به صورت زیر است:



بنزن

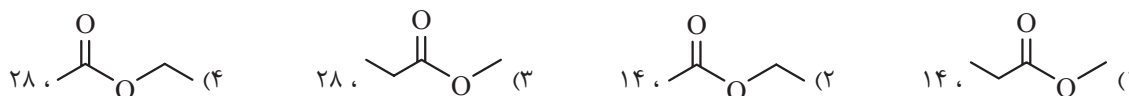


وینیل کلرید



تست و پاسخ ۱۱۸

اگر ترکیب A، اسید سازنده اتیل پروپانوات و ترکیب B، الکل سازنده متیل استات باشد؛ ساختار استر حاصل از واکنش ترکیب‌های A و B کدام بوده و تفاوت جرم مولی آن با پروپیل اتانوات چند گرم است؟ ($O = 16, C = 12, H = 1: g.mol^{-1}$)



پاسخ: گزینه ۱

درس نامه تشخیص الکل و اسید سازنده استر با استفاده از نام یا فرمول ساختاری آن

(۱) برای تشخیص اسید و الکل سازنده یک استر با نام عمومی آلکیل آلکانوات، به روش زیر عمل می‌کنیم:

آلکیل | آلکانوات

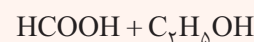
آلکانول + آلکانوئیک اسید

(الکل سازنده) + (اسید سازنده)

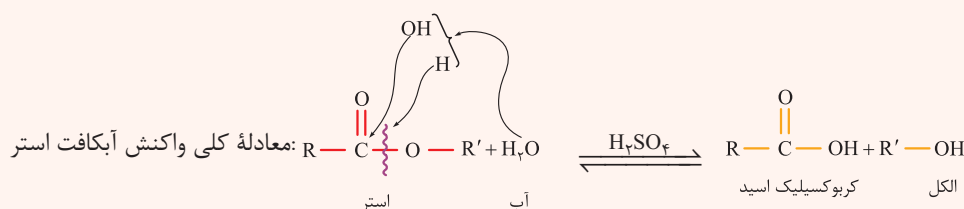
مثال:

اتیل | فورمات

اتانول + فورمیک اسید



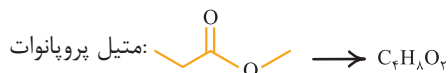
(۲) برای به دست آوردن الکل و اسید سازنده یک استر با استفاده از فرمول ساختاری استر، کافی است پیوند یگانه بین عامل (—C=O) و اکسیژن در ساختار استر را شکسته و به کربن پیوند شکسته شده، OH و به اکسیژن پیوند شکسته شده، H اضافه کنیم تا به ترتیب اسید و الکل سازنده استر به دست آید.



نکته فرمول عمومی استرهای یک عاملی با n اتم کربن که زنجیرهای هیدروکربنی آن سیر شده است، به صورت $\text{C}_n\text{H}_{2n}\text{O}_2$ می‌باشد.

پاسخ تشریحی اسید سازنده اتیل پروپانوات، پروپانوئیک اسید و الکل سازنده متیل استات، متانول است. استر حاصل از واکنش پروپانوئیک

اسید و متانول، یک استر ۴ کربنی به نام متیل پروپانوات می‌باشد.



$$\text{C}_5\text{H}_{10}\text{O}_2 - \text{C}_4\text{H}_8\text{O}_2 = \text{CH}_2 \Rightarrow \text{جرم مولی} = 14 \text{ g}$$

پروپیل اتانوات، یک استر ۵ کربنی با فرمول $\text{C}_5\text{H}_{10}\text{O}_2$ است:

تست و پاسخ ۱۱۹

کدام مطلب نادرست است؟

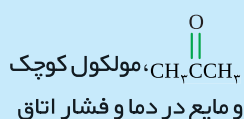
بسیار ساختگی و جامد

(۱) پلی لاکتیک اسید از جمله پلیمرهای سبز است و امکان تبدیل شدن به کود را دارد.

(۲) کولار یکی از معروف‌ترین پلی آمیدهای طبیعی است و از فولاد هم جرم خود، پنج برابر مقاوم‌تر است.

(۳) نایلون از جمله پلیمرهای ساختگی است و نیروهای بین مولکولی قوی‌تری نسبت به استون دارد.

(۴) سلولز و نشاسته هر دو جزء پلیمرهای طبیعی هستند و مونومر سازنده آن‌ها یکسان است.



گلوکز

پاسخ: گزینه ۲



پاسخ تشریحی: کولار، جز پلی آمیدهای ساختگی است و نه طبیعی!

تست و پاسخ ۱۲۰

در اثر آبکافت ۱/۰ مول از یک استر یک عاملی با زنجیره‌های هیدروکربنی سیر شده، ۶ گرم کربوکسیلیک اسید حاصل می‌شود. اگر الکل تولید شده در این فرایند را بتوان از واکنش آب با گاز اتن در مجاورت سولفوریک اسید نیز تهیه کرد، چند مورد از مطالب زیر درست‌اند؟

$$(O = 16, C = 12, H = 1: g.mol^{-1})$$

اتانول

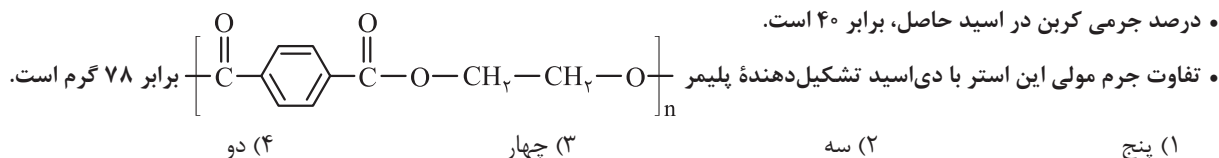
استیک اسید

• استر مورد نظر با بوتانوئیک اسید همپار است.

• اسید حاصل پرکاربردترین اسید در زندگی روزانه است.

• الکل حاصل به هر نسبتی در آب حل می‌شوند.

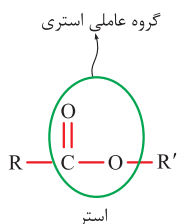
• درصد جرمی کربن در اسید حاصل، برابر ۴۰ است.



پاسخ: گزینه ۱

همه عبارت‌های داده شده درست‌اند.

پاسخ تشریحی: ساختار استر مورد نظر، به صورت مقابل است که در آن R و R'، زنجیره‌های هیدروکربنی سیر شده هستند.



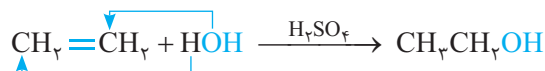
در اثر آبکافت استر، یک اسید و یک الکل تولید می‌شود که در معادله این واکنش ضرایب استوکیومتری همه مواد برابر ۱ است؛ پس جرم مولی کربوکسیلیک اسید حاصل برابر است با:

$$\frac{1 \text{ mol اسید}}{1 \text{ mol استر}} \times \frac{X \text{ g اسید}}{1 \text{ mol اسید}} = 6 \text{ g اسید} \Rightarrow X = 60 \text{ g.mol}^{-1}$$

فرمول عمومی کربوکسیلیک اسیدهای یک عاملی با n اتم کربن که زنجیر هیدروکربنی آن سیر شده است، به صورت $C_nH_{2n}O_2$ می‌باشد؛ بنابراین کربوکسیلیک اسید مورد نظر برابر است با:

$$C_nH_{2n}O_2 \text{ (استیک) (اتانوئیک) (اسید)} \Rightarrow C_4H_8O_2 \Rightarrow n = 2 \Rightarrow C_2H_4O_2$$

الکل حاصل از آبکافت استر، اتانول است؛ زیرا از واکنش گاز اتن با آب در مجاورت سولفوریک اسید، اتانول به دست می‌آید:



پس اسید حاصل، استیک اسید (CH_3COOH) و الکل حاصل، اتانول (C_2H_5OH) و استر اولیه، اتیل استات (اتیل اتانوات) با فرمول $CH_3-COO-C_2H_5$ می‌باشد.

بررسی عبارت‌ها:

عبارت اول: بوتانوئیک اسید با استر مورد نظر، فرمول مولکولی یکسانی ($C_4H_8O_2$) دارد؛ بنابراین، این دو ترکیب با هم ایزومر یا همپار هستند.

عبارت دوم: استیک اسید، یک اسید دوکربنی است که در سرکه خوراکی وجود دارد و یکی از پرکاربردترین اسیدها در زندگی روزانه است.

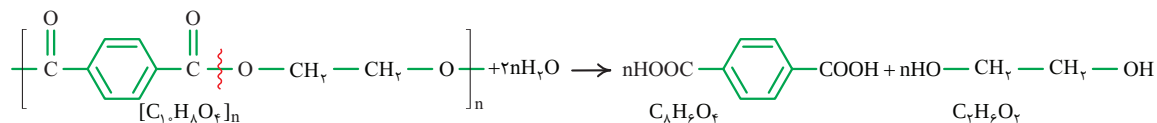
عبارت سوم: اتانول به هر نسبتی در آب حل می‌شود؛ به طوری که نمی‌توان محلول سیر شده‌ای از آن در آب تهیه کرد.



عبارت چهارم: درصد جرمی کربن در استیک اسید برابر است با:

$$\text{درصد جرمی C در } C_2H_4O_2 = \frac{2(12)}{2(12) + 4 + 2(16)} \times 100 = \frac{2 \times 12}{60} \times 100 = 40\%$$

عبارت پنجم: دی‌اسید و دی‌الکل سازنده پلی‌استر داده‌شده، به صورت زیر هستند:



جرم مولی استر $(C_8H_6O_4)$ موجود در صورت سؤال برابر با ۸۸ گرم است و جرم مولی دی‌اسید سازنده پلی‌استر فوق $(C_8H_6O_4)$ ، برابر با ۱۶۶ گرم و اختلاف آن‌ها برابر ۷۸ گرم است.

