آزمون‌های آزمایشی خیلی سبز

سال تحصیلی ۰۵-۱۴۰۴

رشتهٔ ریاضی

پایه دوازدهم | مرحله اول

آزمون تکمیلی سطح

جامع پایه یازدهم

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخ‌گویی
۱	حسابان	۲۰	۱	۲۰	۳۵ دقیقه
۲	هندسه	۱۰	۲۱	۳۰	۲۰ دقیقه
۳	آمار و احتمال	۱۰	۳۱	۴۰	۲۰ دقیقه
۴	فیزیک	۲۵	۴۱	۶۵	۳۵ دقیقه
۵	شیمی	۲۵	۶۶	۹۰	۲۵ دقیقه
مجموع		۹۰ سؤال			۱۳۵ دقیقه

ویژه کنکوری‌های ۱۴۰۵

Azmoon.kheilisabz.com

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

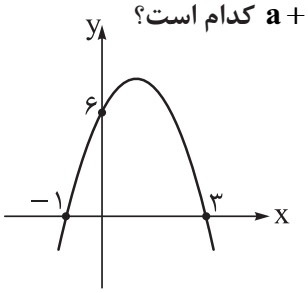
۱- مجموع ده جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی $۱,۳,۹,\ldots$ چند برابر $\log_{۴} ۲$ است؟

۱) $۹\log ۳ - ۱$
۲) $۱ - ۹\log ۱۰$
۳) $۳^{\log ۱۰^{۱۰}} - \frac{۱}{۲}\log_{۵} ۲۵$
۴) $۳^{\log ۱۰} + \frac{۱}{۲}\log_{۵} ۲۵$

۲- معادلهٔ $(x-۲)^{۲} + ۲(x-۲)(x+۳) + (x+۳)^{۲} = ۰$ ..... .

۱) یک جواب مثبت دارد
۲) دو جواب غیرهم‌علامت دارد
۳) یک جواب منفی دارد
۴) جواب حقیقی ندارد

۳- نمودار تابع $f(x) = ax^{۲} + bx + c$ در شکل زیر رسم شده است. حاصل $a + b + c + f(۴)$ کدام است؟



۱) -۲
۲) ۲
۳) -۶
۴) ۶

۴- مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $\frac{|۲-x| + |۳x-۲|}{۱+|x-۲|} \leq ۱$ کدام است؟

۱) $[\frac{۱}{۳}, ۱]$
۲) $[\frac{۲}{۳}, ۲]$
۳) $(-\infty, \frac{۷}{۵}]$
۴) $\varnothing$

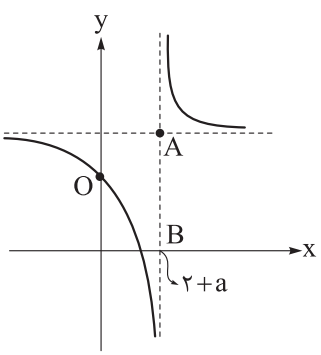
۵- اگر دو خط $۳x + ۴y - ۱۱ = ۰$ و $۶x + ۸y - ۲ = ۰$ بر دایره‌ای به مرکز $O(-\frac{۱}{۸}, \beta)$ مماس باشند، مساحت دایره کدام است؟

۱) π
۲) ۲π
۳) ۴π
۴) ۱۶π

۶- اگر اشتراک دامنه و برد تابع $f(x) = \sqrt{۴ - \sqrt{x-۱}}$ بازهٔ $[a,b]$ باشد، حاصل $b - a$ کدام است؟

۱) ۱۶
۲) ۱۵
۳) ۲
۴) ۱

۷- نمودار تابع $f(x) = \frac{b - ۲ax}{x + a}$ به صورت زیر است. مساحت مثلث OAB کدام است؟



۱) ۱
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) ۲
۴) ۳

۸- اگر $f^{-۱}(x) = -f(۲)x + ۱۱$ و $R_f = (۰, \frac{۱۱}{۳})$ باشد، حاصل $f^{-۱}(۱)$ کدام است؟

۱) ۴
۲) ۶
۳) ۸
۴) ۱۰

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

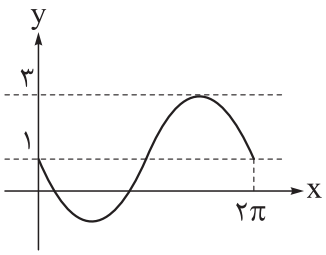
۹- توابع $f(x)=\frac{۱-x}{۱+x}$ و $h(x)=f(x)+g(x)$ مفروض‌اند. اگر $(f^{-۱}oh)(x)=\frac{۲}{x}$ باشد، مقدار $g(۳)$ کدام است؟

۱) $۰/۲$ ۲) $۰/۷$ ۳) $-۰/۲$ ۴) $-۰/۳$

۱۰- حاصل عبارت $\frac{\sin ۲۳۰^\circ \cot(-۲۰^\circ)\cos ۱۲۰^\circ}{\cos ۴۰۰^\circ \tan ۲۵۰^\circ}$ کدام است؟

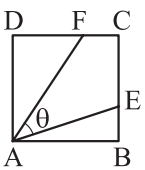
۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $-\frac{۳}{۲}$ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

۱۱- اگر بخشی از نمودار تابع $f(x)=a+b\sin x$ به صورت زیر باشد، حاصل $a+b$ کدام است؟



۱) ۱
۲) -۱
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) $-\frac{۱}{۲}$

۱۲- در مربع شکل روبه‌رو، اگر $\frac{CE}{EB}=\frac{DF}{FC}=۲$ باشد، مقدار $\cot\theta$ کدام است؟



۱) ۱
۲) $\frac{۹}{۷}$
۳) $\frac{۴}{۳}$
۴) $\sqrt{۲}+۱$

۱۳- اگر $\sin ۱۷^\circ = x$ باشد، مقدار $\sin ۵۶^\circ$ برحسب x کدام است؟

۱) $۱-۲x^۲$ ۲) $۲x^۲-۱$ ۳) $۱+x^۲$ ۴) $۱-x^۲$

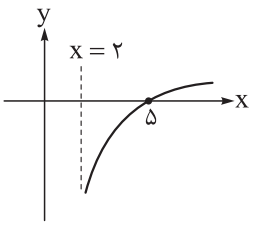
۱۴- اگر $۲^{a^۲-b^۲}=x$ و $۲^{a-b}=y$ باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) $\log_y(x-۱)$ ۲) $\log_x(y-۱)$ ۳) $\log_x y$ ۴) $\log_y x$

۱۵- اگر $x=\alpha$، جواب معادلهٔ $x^۳+x^۲+۲x-۷=۱۶^{\log_۲\sqrt{x+۱}}$ باشد، حاصل $\log_{\sqrt[۳]{۲}}(\alpha^۳-۴)$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) ۶ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۱۲

۱۶- نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. ضابطهٔ این تابع، کدام می‌تواند باشد؟



۱) $\log_۳(x-۲)-۱$
۲) $\log_۳(x-۲)+۱$
۳) $\log_۲(x-۲)+۱$
۴) $\log_۲(x-۲)-۱$

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۷- اگر $f(x)=\begin{cases} x-|x-۲| & ; x<۲ \\ ۲x-۱ & ; x=۲ \\ ۲-\log_۲(x^۳-۴) & ; x>۲ \end{cases}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)+\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) -۲

۱۸- حد تابع $f(x)=\dfrac{x-۱}{x^۲-۳x+۲}$ زمانی‌که $x\to ۱$، با حاصل کدام حد برابر است؟

۱) $\lim\limits_{x\to ۴}\cos\dfrac{\pi}{۲}x$ ۲) $\lim\limits_{x\to\frac{۷\pi}{۳}}\sin(۳x-\dfrac{\pi}{۲})$

۳) $\lim\limits_{x\to ۱}۲^{x-۱}$ ۴) $\lim\limits_{x\to ۱}\tan(\dfrac{۳۵\pi x}{۴})$

۱۹- اگر مجموع حدهای چپ و راست تابع $f(x)=[\dfrac{۲}{-x^۲}]+(-m)[\dfrac{-x}{۲}]$ در $x=۱$ برابر ۱ باشد، مقدار m کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۰- اگر $a\in A\subseteq(۰,۶)$، آن‌گاه تابع با ضابطهٔ $f(x)=[x+a]$ در $x=a$ ناپیوسته است. حداکثر تعداد اعضای مجموعهٔ A کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

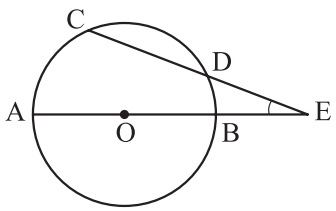
محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۱- کدام چهارضلعی هم محاطی و هم محیطی است؟

۱) لوزی ۲) کایت قائم‌الزاویه ۳) مستطیل ۴) ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین

۲۲- مطابق شکل، امتداد قطر AB و وتر CD از دایرهٔ $C(O,۴)$ در نقطهٔ E متقاطع‌اند. اگر $\hat{E}=۱۵^\circ$ و $DE=۴$ باشد، آن‌گاه طول کمان AC چند برابر π است؟



۱) ۱
۲) ۰/۷۵
۳) ۰/۵
۴) ۰/۲۵

۲۳- طول مماس‌مشترک خارجی دو دایرهٔ مماس‌خارج، ۳ برابر طول شعاع دایرهٔ کوچک‌تر است. نسبت طول شعاع دایرهٔ بزرگ به طول شعاع دایرهٔ کوچک کدام است؟

۱) ۲/۲۵ ۲) ۲/۵ ۳) ۲/۷۵ ۴) ۲

۲۴- در مثلثی به طول اضلاع ۳، ۴ و ۶، نقطهٔ تماس دایرهٔ محاطی خارجی نظیر بزرگ‌ترین ضلع، این ضلع را به دو قسمت تقسیم کرده است. نسبت طول قسمت بزرگ‌تر به طول قسمت کوچک‌تر کدام است؟

۱) ۱/۲ ۲) ۱/۳ ۳) ۱/۴ ۴) ۱/۵

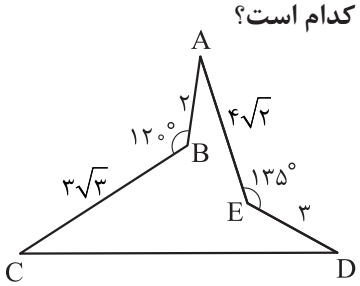
۲۵- دو خط d و d' در نقطهٔ O متقاطع‌اند و زاویهٔ بین آن‌ها برابر ۶۰° است. بازتاب نقطهٔ A نسبت به خط d، نقطهٔ A' و بازتاب نقطهٔ A' نسبت به خط d'، نقطهٔ A'' است. اگر $OA'=۴$ باشد، مساحت مثلث OAA'' کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۳}$ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) $۴\sqrt{۳}$

۲۶- از بین مثلث‌هایی، مانند ABC که در ضلع $BC=۱۴$ مشترک‌اند و در آن‌ها $AB\times AC\times \sin\hat{A}=۳۳۶$ است، کم‌ترین مقدار محیط کدام است؟

۱) ۳۶ ۲) ۷۲ ۳) ۴۸ ۴) ۶۴

۲۷- بیشترین میزان افزایش مساحت شکل زیر بدون تغییر در محیط و تعداد اضلاع کدام است؟



۱) ۱۹
۲) ۲۰
۳) ۲۱
۴) ۲۲

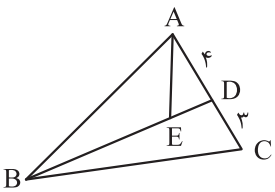
محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۸- اگر در مثلث ABC داشته باشیم $۲a^۲ + ۳bc = ۲b^۲ + ۲c^۲$، آن‌گاه $\tan \hat{A}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۷}$ ۲) $\frac{\sqrt{۷}}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۷}}{۳}$ ۴) $\frac{\sqrt{۷}}{۴}$

۲۹- در شکل زیر، AE نیمساز زاویهٔ A و BD نیمساز زاویهٔ B است. اگر $BE = ۲DE$، $AD = ۴$ و $DC = ۳$ باشد، محیط مثلث ABC کدام است؟



۱) ۲۰ ۲) ۲۱
۳) ۲۲ ۴) ۲۳

۳۰- در مثلثی با اضلاع ۳، ۲۵ و ۲۶، طول بلندترین ارتفاع کدام است؟

۱) $\frac{۳۶}{۱۳}$ ۲) ۲۰ ۳) ۲۴ ۴) ۲۵

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۱- p گزاره‌ای درست، q گزاره‌ای نادرست و r گزاره‌ای دلخواه است.
ارزش گزاره‌های $[(q \Rightarrow r) \Rightarrow p]$ و $[p \wedge r \Leftrightarrow q \vee \sim r]$ به ترتیب به کدام صورت است؟

۱) مانند r ـ مانند $\sim r$
۲) T ـ F
۳) مانند r ـ F
۴) مانند r ـ T

۳۲- یکی از زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $\{1,2,...,6\}$ را به تصادف انتخاب می‌کنیم. اگر اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عضو زیرمجموعه برابر ۴ باشد، با کدام احتمال، زیرمجموعه ۳عضوی است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{۳}{۸}$
۴) $\frac{۷}{۱۶}$

۳۳- A، B، X و Y مجموعه‌هایی هستند که $X \times Y \subseteq A \cap (A - B)'$ و $X \times Y \subseteq A' \cup B'$. کدام نتیجه‌گیری الزاماً درست است؟ ($\times$ علامت ضرب دکارتی است.)

۱) $(X = U) \vee (Y = U)$
۲) $(X = \varnothing) \vee (Y = \varnothing)$
۳) $(X = U) \wedge (Y = U)$
۴) $(X = \varnothing) \wedge (Y = \varnothing)$

۳۴- ۳ نفر می‌خواهند بین خودشان تک بیاورند (هر فرد رو یا پشت دست خود را نشان بدهد). چند پیشامد در این آزمایش تصادفی می‌توان تعریف کرد؟

۱) ۶
۲) ۸
۳) ۶۴
۴) ۲۵۶

۳۵- فضای نمونهٔ یک آزمایش تصادفی به‌صورت $S = \{a,b,c,d,e\}$ است. اگر $۱۰P(\{a,b,c,d\}) = ۱۰P(\{a,b,d,e\}) = ۷$ و $P(\{b,c,d,e\}) = ۰/۹$ باشد، احتمال آن‌که هیچ‌کدام از b و d رخ ندهد کدام است؟

۱) ۰/۷
۲) ۰/۶
۳) ۰/۴
۴) ۰/۳

۳۶- کیسه‌ای دارای ۳ مهرهٔ آبی و ۳ مهرهٔ قرمز است. یک کارت به تصادف از بین شماره‌های ۱ تا ۴ خارج می‌کنیم و به همان تعداد، مهره از کیسه خارج می‌کنیم. با کدام احتمال، همهٔ مهره‌ها هم‌رنگ هستند؟

۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) $\frac{۱}{۴}$
۳) $\frac{۲}{۵}$
۴) $\frac{۳}{۸}$

۳۷- احتمال قبولی زهرا و ارشیا در آزمون رانندگی به ترتیب برابر ۰/۴۵ و ۰/۶ است. احتمال آن‌که فقط زهرا در آزمون قبول شود چه‌قدر است؟

۱) ۰/۴۵
۲) ۰/۱۸
۳) ۰/۲۷
۴) ۰/۱۵

۳۸- میانهٔ داده‌های $۱۰,۱۵,۱۶,۱۱,a,۶$ برابر ۱۲/۵ است. میانگین داده‌ها کدام است؟

۱) ۱۰
۲) ۱۱
۳) ۱۲
۴) ۱۳

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۹- داده‌های اولیهٔ $x_1, x_2, ..., x_5$ در اختیار است. اگر واریانس داده‌های $x_5, x_4, x_3 - 1, x_2 - 1, x_1 + 1$. مقدار $\frac{1}{5}$ کم‌تر از واریانس داده‌های قبلی باشد، $x_1 - x_2$ کدام است؟

۱) $-1/5$ ۲) $1/5$ ۳) $0/5$ ۴) $-0/5$

۴۰- در یک نمونه‌گیری اگر اندازهٔ نمونه را ۳۹تا بیشتر کنیم نسبت طول بازهٔ اطمینان ۹۵٪ میانگین به‌دست‌آمده با نمونهٔ بیشتر، $\frac{5}{8}$ طول بازهٔ قبلی است. اندازهٔ نمونهٔ اولیه چه‌قدر بوده است؟

۱) ۲۵ ۲) ۶۲۵ ۳) ۸ ۴) ۱۶

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۱- مساحت هر یک از صفحه‌های خازن تختی، $۱۰\ cm^۲$ و فاصلهٔ دو صفحه از هم $۰/۵\ mm$ است. عایقی با ثابت دی‌الکتریک ۴ بین دو صفحه قرار داده شده است. ظرفیت این خازن چند پیکوفاراد است؟ $(\varepsilon_۰ = ۹\times۱۰^{-۱۲}\ F/m)$

۱) ۷/۲ ۲) ۷۲ ۳) ۱/۸ ۴) ۱۸

۴۲- کدام‌یک از موارد زیر درست است؟

۱) با افزایش دمای رساناها، مقاومت الکتریکی آن‌ها کاهش می‌یابد.

۲) با افزایش دمای نیم‌رساناها، مقاومت الکتریکی آن‌ها افزایش می‌یابد.

۳) با افزایش شدت نور تابیده به یک LDR، مقاومت الکتریکی آن افزایش می‌یابد.

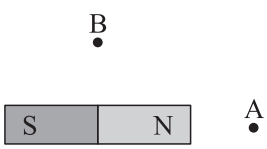
۴) در پدیدهٔ ابررسانایی، با کاهش دمای برخی مواد، مقاومت ویژهٔ آن‌ها به صورت ناگهانی به صفر افت می‌کند.

۴۳- اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر لامپی $۴\ V$ و مقاومت الکتریکی آن $۵\ \Omega$ است. در مدت ۵ دقیقه چه تعداد الکترون از این لامپ می‌گذرد؟ $(e = ۱/۶\times۱۰^{-۱۹}\ C)$

۱) $۲/۵\times۱۰^{۲۰}$ ۲) $۲/۵\times۱۰^{۲۱}$

۳) $۱/۵\times۱۰^{۲۰}$ ۴) $۱/۵\times۱۰^{۲۱}$

۴۴- در شکل زیر، دو عقربهٔ مغناطیسی در دو نقطهٔ A و B قرار می‌گیرند. جهت‌گیری این دو عقربه به ترتیب از راست به چپ کدام است؟



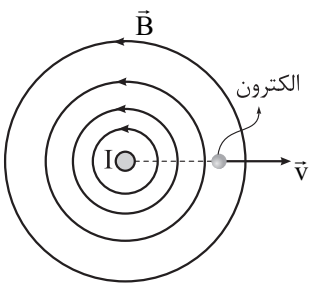
۱) ⟶ و ⟶

۲) ⟵ و ⟶

۳) ⟶ و ⟵

۴) ⟵ و ⟵

۴۵- خطوط میدان مغناطیسی در اطراف سیم مستقیم حامل جریان و عمود بر صفحهٔ کاغذ، به شکل زیر است. به ترتیب، از راست به چپ جهت جریان عبوری از این سیم و جهت نیروی مغناطیسی وارد بر الکترونی که در جهت نشان داده‌شده پرتاب شده، کدام است؟



۱) ⊗ ، ⊗

۲) ⊙ ، ⊗

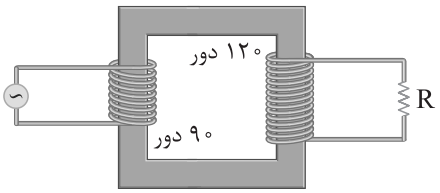
۳) ⊗ ، ⊙

۴) ⊙ ، ⊙

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۶- در مبدل آرمانی شکل زیر، بیشینهٔ ولتاژ دو سر مقاومت R برابر ۷/۲ V است. بیشینهٔ ولتاژ مولد برحسب ولت و نوع این مبدل، به ترتیب کدام است؟



۱) ۵/۴، افزاینده

۲) ۵/۴، کاهنده

۳) ۹/۶، افزاینده

۴) ۹/۶، کاهنده

۴۷- دو بار الکتریکی نقطه‌ای $q_1 = 16\ nC$ و $q_2 = 12\ nC$ در فاصلهٔ ۱۰ سانتی‌متری از هم قرار دارند. اندازهٔ میدان الکتریکی خالص حاصل از این دو بار، در نقطه‌ای به فاصلهٔ $8\ cm$ از بار q_1 و $6\ cm$ از بار q_2 چند نیوتون بر کولن است؟ $(k = 9\times10^9\ \frac{N.m^2}{C^2})$

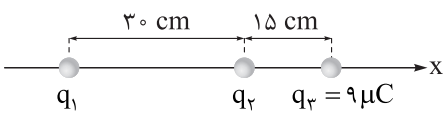
۱) $3/75\times10^3$

۲) $3/75\times10^4$

۳) $7/5\times10^3$

۴) $7/5\times10^4$

۴۸- در شکل زیر نیروی الکتریکی خالص وارد بر هر یک از بارهای الکتریکی نقطه‌ای برابر صفر است. بار q_3 را به اندازهٔ $15\ cm$ در جهت محور x جابه‌جا می‌کنیم. در این حالت، نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار q_3 برحسب نیوتون کدام است؟ $(k = 9\times10^9\ \frac{N.m^2}{C^2})$



۱) $4/5\vec{i}$

۲) $-4/5\vec{i}$

۳) $11/7\vec{i}$

۴) $-11/7\vec{i}$

۴۹- در یک میدان الکتریکی یکنواخت به بزرگی $5\times10^5\ N/C$ که جهت آن قائم و رو به پایین است، ذرهٔ بارداری به جرم $2\ g$ معلق و به حال سکون قرار دارد. این ذره چند الکترون و چگونه مبادله کند تا بار الکتریکی آن خنثی شود؟ $(e = 1/6\times10^{-19}\ C$ و $g = 10\ N/kg)$

۱) $2/5\times10^{11}$، دریافت کند.

۲) $2/5\times10^{11}$، از دست دهد.

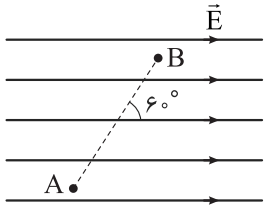
۳) $2/5\times10^{13}$، دریافت کند.

۴) $2/5\times10^{13}$، از دست دهد.

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۰- در شکل زیر، در میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{E}$ به بزرگی $۴\times۱۰^{۳}\ N/C$، ذره‌ای به بار الکتریکی $-۵\ \mu C$ از نقطهٔ A تا نقطهٔ B جابه‌جا می‌شود. اگر $AB = ۶۰\ cm$ باشد، کدام‌یک از موارد زیر درست است؟



الف) در این جابه‌جایی، کار انجام‌شده توسط نیروی الکتریکی برابر $-۶\ mJ$ است.

ب) در این جابه‌جایی، انرژی پتانسیل الکتریکی ذره $۱۲\ mJ$ افزایش می‌یابد.

پ) پتانسیل الکتریکی نقطهٔ A از پتانسیل الکتریکی نقطهٔ B، $۲۴۰۰\ V$ بیشتر است.

ت) پتانسیل الکتریکی نقطهٔ A از پتانسیل الکتریکی نقطهٔ B، $۱۲۰۰\ V$ کم‌تر است.

۱) الف
۲) الف و ت
۳) ب
۴) ب و پ

۵۱- بار الکتریکی کرهٔ رسانایی به شعاع $۱۰\ cm$ برابر $۶۰\ \mu C$ است. چگالی سطحی بار الکتریکی این کره در SI کدام است؟ $(\pi = ۳)$

۱) ۵×۱۰^{-۳}
۲) ۵×۱۰^{-۴}
۳) ۲×۱۰^{-۳}
۴) ۲×۱۰^{-۴}

۵۲- اگر اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر خازنی به ظرفیت $۵\ \mu F$، ۳ برابر شود، انرژی ذخیره‌شده در آن $۰/۵\ mJ$ تغییر می‌کند. بار الکتریکی ذخیره‌شده در خازن در حالت اول چند میکروکولن است؟

۱) ۲۵
۲) ۵۰
۳) ۷۵
۴) ۱۰۰

۵۳- مقاومت الکتریکی میله‌ای مسی به طول $۴۰\ cm$ و جرم $۸۰۰\ g$ چند اهم است؟ (چگالی مس $۹\ g/cm^{۳}$ و مقاومت ویژهٔ آن $۱/۷\times۱۰^{-۸}\ \Omega.m$ است.)

۱) $۳/۰۶\times۱۰^{-۳}$
۲) $۳/۰۶\times۱۰^{-۴}$
۳) $۳/۰۶\times۱۰^{-۵}$
۴) $۳/۰۶\times۱۰^{-۶}$

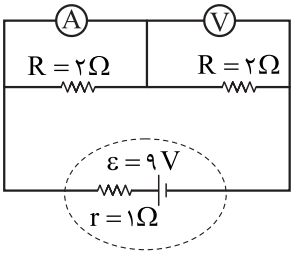
۵۴- اگر جریان الکتریکی عبوری از یک منبع نیروی محرکه از $۵\ A$ به $۷\ A$ برسد، توان خروجی آن از $۹/۵\ W$ به $۱۲/۶\ W$ می‌رسد. در حالتی که از این منبع نیروی محرکه، جریان الکتریکی $۶\ A$ عبور می‌کند، توان خروجی آن چند وات است؟

۱) ۱۱/۰۵
۲) ۱۱/۱
۳) ۱۲/۰۵
۴) ۱۲/۱

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۵- در مدار شکل زیر، به ترتیب از راست به چپ، ولت‌سنج آرمانی چند ولت و آمپرسنج آرمانی چند آمپر را نشان می‌دهد؟



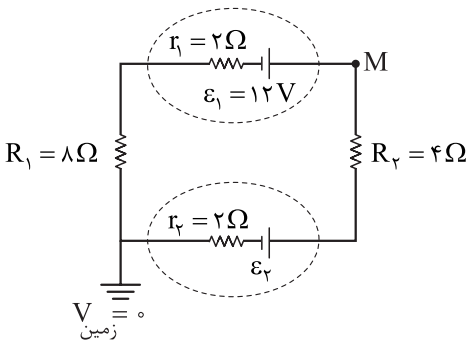
۱) ۳/۶ ، ۱/۸

۲) ۶ ، ۱/۸

۳) ۳/۶ ، ۳

۴) ۶ ، ۳

۵۶- در مدار شکل زیر، اگر پتانسیل الکتریکی نقطهٔ M برابر ۷ V باشد، توان ورودی باتری ۲، برابر چند وات است؟



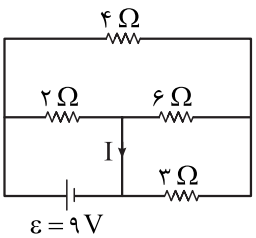
۱) ۱/۵

۲) ۲/۵

۳) ۳

۴) ۵

۵۷- در مدار شکل زیر، I چند آمپر است؟



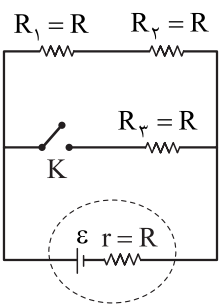
۱) ۵/۵

۲) ۴/۵

۳) ۵

۴) ۴

۵۸- در مدار شکل زیر، با بستن کلید K، توان مصرفی مقاومت R_1 چند برابر می‌شود؟



۱) $\frac{۹}{۲۵}$

۲) $\frac{۲۵}{۹}$

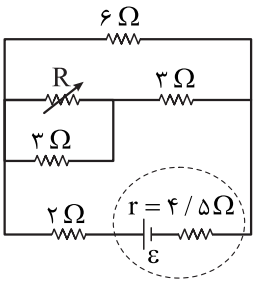
۳) $\frac{۱}{۲۵}$

۴) ۲۵

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۹- در مدار شکل زیر، اگر مقاومت متغیر به تدریج از صفر تا مقدار بسیار بزرگ افزایش یابد، توان خروجی باتری چگونه تغییر می‌کند؟



۱) به طور پیوسته افزایش می‌یابد.

۲) به طور پیوسته کاهش می‌یابد.

۳) ابتدا افزایش و سپس کاهش می‌یابد و در نهایت به مقداری کم‌تر از مقدار اولیه می‌رسد.

۴) ابتدا افزایش و سپس کاهش می‌یابد و در نهایت به مقداری بیشتر از مقدار اولیه می‌رسد.

۶۰- سیم مستقیمی به طول $۲/۴\ m$ حامل جریان $۲/۵\ A$ از شرق به غرب است. اندازهٔ میدان مغناطیسی زمین در محل این سیم $۰/۴۵\ G$ و جهت آن از جنوب به شمال است. نیروی مغناطیسی وارد بر این سیم چند نیوتون و در چه جهتی است؟

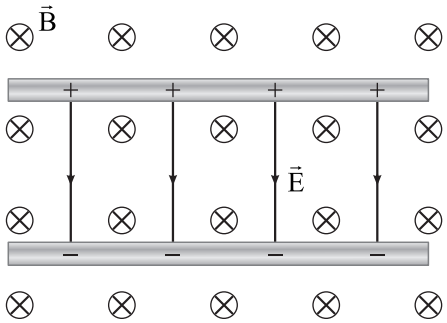
۱) $۲/۷\times۱۰^{-۴}$، بالا

۲) $۲/۷\times۱۰^{-۳}$، بالا

۳) $۲/۷\times۱۰^{-۴}$، پایین

۴) $۲/۷\times۱۰^{-۳}$، پایین

۶۱- در شکل زیر، اندازهٔ میدان الکتریکی یکنواخت $E = ۴۵۰\ N/C$ و اندازهٔ میدان مغناطیسی یکنواخت $B = ۰/۱۸\ T$ است. ذره‌ای به بار $q = +۲۰\ mC$ با سرعت $۲/۵\ km/s$ در جهت میدان الکتریکی پرتاب می‌شود. اندازهٔ نیروی خالص وارد بر این ذره بلافاصله پس از پرتاب‌شدن چند نیوتون است؟ (وزن و نیروی مقاومت هوا ناچیز است.)



۱) $۹\sqrt{۲}$

۲) $۱۸\sqrt{۲}$

۳) ۱۸

۴) صفر

۶۲- با استفاده از سیمی به طول $۵\ m$، پیچهٔ مسطحی به قطر $۲۰\ cm$ ساخته شده است. جریان الکتریکی $۴\ A$ از پیچه عبور می‌کند. بزرگی میدان مغناطیسی در مرکز این پیچه چند گاوس است؟ $(\mu_۰ = ۴\pi\times۱۰^{-۷}\ \frac{T.m}{A})$

۱) ۲۰

۲) ۵

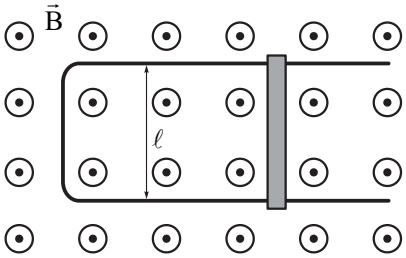
۳) ۲

۴) ۰/۵

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶۳- شکل زیر، رسانای U‌شکلی را درون میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ به اندازهٔ $0/15\,T$ نشان می‌دهد. میدان $\vec{B}$ عمود بر صفحهٔ شکل و رو به بیرون است. میله‌ای فلزی (سیم لغزنده) به طول $\ell = 20\,cm$ بین دو بازوی رسانا قرار دارد و مداری را تشکیل می‌دهد. میله در مدت $0/2\,s$ به اندازهٔ $40\,cm$ به سمت راست جابه‌جا می‌شود. در این مدت، نیروی محرکهٔ الکتریکی القایی متوسط در مدار چند ولت و جریان الکتریکی القایی متوسط در آن در چه جهتی است؟



۱) ۰/۰۶، ساعتگرد

۲) ۰/۰۶، پادساعتگرد

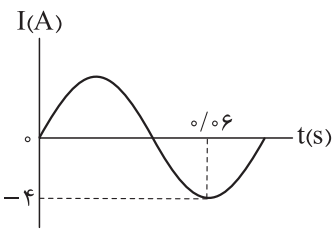
۳) ۰/۶، ساعتگرد

۴) ۰/۶، پادساعتگرد

۶۴- از یک القاگر به ضریب القاوری $8\,mH$ و مقاومت الکتریکی ناچیز، جریان الکتریکی پایای $5\,A$ عبور می‌کند. انرژی الکتریکی مصرف‌شده در این القاگر در هر ثانیه چند ژول است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱ ۳) ۰/۱ ۴) صفر

۶۵- نمودار جریان متناوب سینوسی عبوری از یک مولد جریان متناوب برحسب زمان به شکل زیر است. اندازهٔ جریان الکتریکی عبوری از این مولد در لحظهٔ $t = 0/03\,s$ چند آمپر است؟



۱) $2\sqrt{3}$

۲) $2\sqrt{2}$

۳) ۲

۴) صفر

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶۶- در میان عنصرهای پنج دورهٔ اول جدول تناوبی، چند عنصر فلزی با ۴ الکترون ظرفیتی وجود دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۶۷- با افزایش عدد اتمی در گروه هفدهم جدول تناوبی، چه تعداد از موارد زیر برای عنصرهای این گروه افزایش می‌یابد؟

- **تمایل به تشکیل یون هالید در واکنش با فلزها**
- **شمار الکترون‌های ظرفیت**
- **تعداد لایه‌های الکترونی اشغال‌شده در اتم آن‌ها**
- **دمای لازم برای واکنش با گاز هیدروژن**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۶۸- با توجه به واکنش زیر که به طور طبیعی انجام می‌شود، کدام مورد نادرست است؟

$$Zn(s) + CuSO_4(aq) \rightarrow ZnSO_4(aq) + Cu(s)$$

۱) آرایش الکترونی کاتیون‌های موجود در دو طرف معادله به زیرلایهٔ $3d$ ختم می‌شود.

۲) تأمین شرایط نگهداری فلز روی، دشوارتر از مس است.

۳) با استفاده از فلز آهن به جای روی، واکنش با سرعت و شدت بیشتری انجام خواهد شد.

۴) با گذشت زمان و کاهش غلظت $Cu^{2+}(aq)$، از شدت رنگ آبی محلول کاسته می‌شود.

۶۹- با توجه به اطلاعات داده‌شده، مقایسهٔ شعاع اتمی عنصرهای A، X، D و E به کدام صورت است؟

عنصر	توضیح
A	بیشترین خصلت نافلزی را در جدول دوره‌ای دارد.
X	نخستین نافلز دورهٔ سوم است.
D	آرایش الکترونی اتم آن به $3p^2$ ختم می‌شود.
E	سومین عنصر اصلی دورهٔ چهارم است.

۱) $E > X > D > A$ ۲) $E < A < X < D$

۳) $D > E > A > X$ ۴) $A < X < D < E$

۷۰- واکنش زیر برای تهیهٔ فسفر به کار می‌رود. اگر به ازای مصرف ۹ گرم کربن ناخالص، ۷/۴۴ گرم فسفر تولید شود، نسبت جرم کربن خالص به جرم ناخالصی‌ها در نمونهٔ اولیهٔ کربن کدام است؟ $(C = 12 , P = 31 : g.mol^{-1})$

$$Ca_3(PO_4)_2(s) + SiO_2(s) + C(s) \rightarrow CaSiO_3(s) + P_4(s) + CO(g)$$ (معادلهٔ واکنش، موازنه شود.)

۱) ۱/۵ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷۱- مجموع اعداد در نام آلکان زیر طبق قواعد آیوپاک، کدام است؟

$(CH_3)_2CH(CH_2)_2CH(C_2H_5)C(C_2H_5)_3$

۱) ۱۴ ۲) ۱۵ ۳) ۱۷ ۴) ۱۹

۷۲- به ازای سوختن کامل نیم مول از یک آلکان راست‌زنجیر، ۷۸/۴ لیتر گاز در شرایط STP تولید می‌شود. جرم مولی این آلکان، چند گرم بر مول بوده و گرانروی آن نسبت به اوکتان چگونه است؟ $(H=1, C=12 : g.mol^{-1})$

۱) ۴۴، کم‌تر ۲) ۱۰۰، بیشتر

۳) ۱۰۰، کم‌تر ۴) ۴۴، بیشتر

۷۳- اگر تفاوت شمار الکترون‌ها و نوترون‌ها در $^{58}X^{2+}$ برابر عدد اتمی اولین فلز قلیایی خاکی جدول باشد، عنصر X چندمین فلز واسطهٔ جدول دوره‌ای محسوب می‌شود و شمار نوترون‌های آن، چند برابر شمار پروتون‌های دومین گاز نجیب جدول است؟

۱) هفتمین ـ ۳ ۲) هفتمین ـ ۲/۷

۳) هشتمین ـ ۳ ۴) هشتمین ـ ۲/۷

۷۴- کدام مورد درست است؟ $(H=1, C=12, O=16 : g.mol^{-1})$

۱) هر هیدروکربنی که همهٔ پیوندهای اشتراکی بین اتم‌های آن، یگانه (ساده) باشد، به یقین یک آلکان است.

۲) در ساختار یک هیدروکربن، ممکن نیست همهٔ اتم‌های کربن به دو اتم هیدروژن متصل باشند.

۳) جرم CO_2 حاصل از سوختن ۱ گرم از همهٔ آلکن‌ها، یکسان بوده و به شمار اتم‌های کربن آلکن وابسته نیست.

۴) در تعداد اتم‌های کربن یکسان، تعداد اتم‌های هیدروژن یک هیدروکربن حلقوی به یقین کم‌تر از یک هیدروکربن زنجیره‌ای است.

۷۵- کدام مورد درست است؟

۱) طلا یکی از فلزاتی است که به شکل کلوخه‌ها یا رگه‌های زردرنگ، لابه‌لای خاک یافت می‌شود.

۲) غلظت گونه‌های فلزی موجود در ذخایر زمینی نسبت به کف اقیانوس، بیشتر است.

۳) در فرایند استخراج فلز از سنگ معدن، مقدار قابل توجهی از سنگ معدن به فلز تبدیل می‌شود.

۴) روش گیاه‌پالایی برای استخراج فلزهایی مانند طلا و مس برخلاف نیکل و روی، مقرون‌به‌صرفه است.

۷۶- کدام مورد، جملهٔ زیر را از نظر علمی به درستی کامل می‌کند؟

«گرما را می‌توان هم‌ارز با آن مقدار ..... دانست که به دلیل تفاوت در ..... جاری می‌شود.»

۱) انرژی گرمایی، انرژی گرمایی ۲) دمایی، انرژی گرمایی

۳) انرژی گرمایی، دما ۴) دمایی، دما

۷۷- با توجه به داده‌های زیر، گرمای ویژهٔ روغن زیتون $(C_{57}H_{104}O_6)$، برحسب $J.g^{-1}.K^{-1}$ کدام است؟

$(H=1, C=12, O=16 : g.mol^{-1})$

۰/۲۵ مول روغن زیتون $(75^\circ C) \xrightarrow{22/1\,kJ}$ ۰/۲۵ مول روغن زیتون $(25^\circ C)$

۱) ۱/۸۴ ۲) ۲/۰۰

۳) ۲/۲۱ ۴) ۲/۴۶

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷۸- کدام واکنش با آزادشدن گرما همراه است و مجموع ضرایب استوکیومتری مواد در معادلهٔ موازنه‌شدهٔ آن بیشتر می‌باشد؟

۱) واکنش فتوسنتز

۲) تجزیهٔ هیدروژن پراکسید

۳) تجزیهٔ آمونیاک به گازهای نیتروژن و هیدروژن

۴) واکنش گاز کربن مونوکسید با گاز نیتروژن مونوکسید

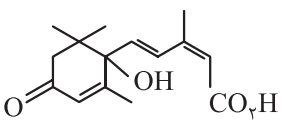
۷۹- اگر در واکنش: $N_2(g)+2H_2(g)\rightarrow N_2H_4(g)$، به ازای مصرف ۸/۴ لیتر گاز در شرایط استاندارد، ۱۱/۲۵ کیلوژول گرما از محیط گرفته شود، میانگین آنتالپی پیوند $N-H$ برحسب کیلوژول بر مول کدام است؟

پیوند	N—N	N≡N	H—H
آنتالپی پیوند ($kJ.mol^{-1}$)	۱۶۳	۹۴۵	۴۳۶

۱) ۳۵۱ ۲) ۳۹۱

۳) ۳۱۹ ۴) ۳۱۵

۸۰- دربارهٔ ترکیبی با ساختار روبه‌رو، کدام مورد نادرست است؟



۱) شمار پیوندهای دوگانه در آن با شمار پیوندهای دوگانه در مولکول نفتالن برابر است.

۲) یکی از گروه‌های عاملی موجود در ساختار آن، در ۲- هپتانون نیز وجود دارد.

۳) شمار اتم‌های هیدروژن آن با شمار این اتم‌ها در یک آلکین ۱۰کربنه برابر است.

۴) ۴۰ درصد از اتم‌های کربن آن به هیچ اتم هیدروژنی متصل نیستند.

۸۱- با توجه به واکنش‌های زیر، تفاوت ارزش سوختی متان در حالت مایع و گاز، چند کیلوژول بر گرم است و برای تبدیل ۰/۲ مول متان مایع به متان گازی (در نقطهٔ جوش)، به چند کیلوژول گرما نیاز است؟ $(H=1, C=12: g.mol^{-1})$

$$CH_4(g)+2O_2(g)\rightarrow CO_2(g)+2H_2O(l) \qquad \Delta H=-890\ kJ$$

$$CH_4(l)+2O_2(g)\rightarrow CO_2(g)+2H_2O(l) \qquad \Delta H=-854/8\ kJ$$

۱) ۷/۰۴ ـ ۲/۲ ۲) ۴/۰۷ ـ ۲/۲

۳) ۴/۰۷ ـ ۳/۵۲ ۴) ۷/۰۴ ـ ۳/۵۲

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸۲- در کدام موارد زیر، اثر عوامل مؤثر بر سرعت واکنش‌ها به درستی بیان شده است؟

الف) قاووت زودتر از مغز آفتاب‌گردان، پسته و ... فاسد می‌شود. ← اثر نوع مواد واکنش‌دهنده

ب) محلول هیدروژن پراکسید در دمای اتاق به کندی تجزیه شده و گاز اکسیژن تولید می‌کند، در حالی که افزودن دو قطره از محلول پتاسیم یدید، سرعت واکنش را به طور چشمگیری افزایش می‌دهد. ← اثر غلظت

پ) بیمارانی که مشکلات تنفسی دارند، در شرایط اضطراری نیاز به تنفس از کپسول اکسیژن دارند. ← اثر غلظت

ت) برای نگهداری طولانی‌مدت فراورده‌های گوشتی و پروتئینی، آن‌ها را به حالت منجمد ذخیره می‌کنند. ← اثر دما

۱) پ و ت
۲) الف و ب
۳) الف و ت
۴) ب و پ

۸۳- ۲/۵ گرم کلسیم کربنات را به یک ظرف سرباز حاوی ۱۰۰ میلی‌لیتر محلول هیدروکلریک اسید با چگالی $1/1\,g.mL^{-1}$ اضافه می‌کنیم. اگر سرعت متوسط تولید گاز کربن دی‌اکسید در این واکنش برابر $0/03\,mol.min^{-1}$ باشد، پس از گذشت چند ثانیه، جرم مخلوط واکنش به ۱۰۱/۵ گرم می‌رسد؟ $(C=12, O=16 : g.mol^{-1})$

$$CaCO_3(s)+2HCl(aq)\rightarrow CaCl_2(aq)+CO_2(g)+H_2O(l)$$

۱) ۲۰۰
۲) ۴۰۰
۳) ۵۰۰
۴) ۸۰۰

۸۴- اگر در یک واکنش فرضی، رابطهٔ زیر بین تغییرات غلظت مواد شرکت‌کننده در واکنش برقرار باشد، مجموع ضرایب مواد در معادلهٔ موازنه‌شدهٔ واکنش کدام است؟

$$2\frac{\Delta[B]}{\Delta t}=-3\frac{\Delta[A]}{\Delta t}=\frac{\Delta[D]}{2\Delta t}=\frac{\Delta[C]}{\Delta t}$$

۱) ۷
۲) ۸
۳) ۱۹
۴) ۲۳

۸۵- درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر به ترتیب در کدام گزینه آمده است؟ $(H=1, C=12, O=16 : g.mol^{-1})$

- نقطهٔ ذوب بالا و حل‌شدن در حلال‌های آلی را می‌توان از جمله ویژگی‌های بارز تفلون دانست.
- استیرن، هیدروکربنی سیرنشده است و جرم مولی کم‌تری نسبت به بنزآلدهید دارد.
- نشاسته، مونوساکاریدی است که از اتصال مولکول‌های گلوکز به یکدیگر تشکیل شده است.
- پلی‌پروپن به دلیل داشتن ساختاری شبیه به آلکان‌ها، زیست‌تخریب‌ناپذیر است.

۱) نادرست ـ درست ـ درست ـ درست
۲) نادرست ـ درست ـ نادرست ـ درست
۳) درست ـ درست ـ درست ـ درست
۴) درست ـ نادرست ـ نادرست ـ نادرست

۸۶- مخلوطی به جرم یک کیلوگرم از ترکیب‌های C_2H_3Cl و C_2H_5Cl را در شرایط مناسب در ظرفی قرار می‌دهیم تا واکنش پلیمری‌شدن انجام شود. اگر پس از انجام واکنش، ۴۰۰ گرم پلی‌وینیل کلرید تولید شود، نسبت جرم ترکیب سنگین‌تر به ترکیب سبک‌تر در مخلوط اولیه کدام است؟ (بازده واکنش پلیمری‌شدن را ۶۴ درصد در نظر بگیرید.)

۱) ۰/۶
۲) ۰/۸
۳) ۱/۲
۴) ۱/۵

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸۷- کدام مطلب نادرست است؟

۱) کولار در تهیهٔ تایر اتومبیل، ساخت قایق‌های بادبانی و جلیقه‌های ضدگلوله کاربرد دارد.

۲) بافندگی، مرحله‌ای در صنعت نساجی است که در آن الیاف به نخ‌های قابل استفاده تبدیل می‌شوند.

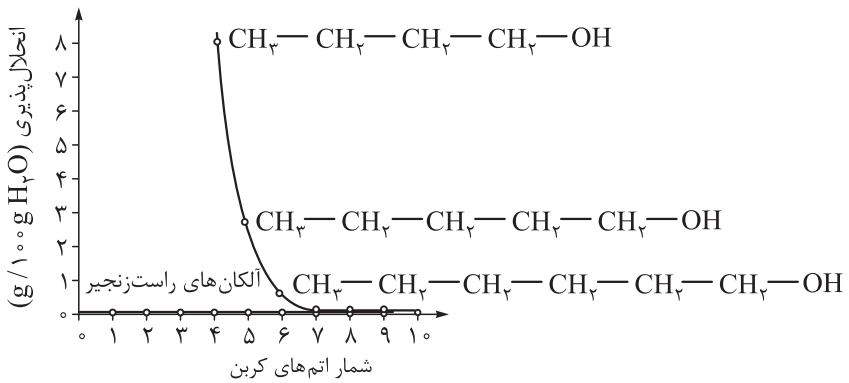
۳) سطح تماس مولکول‌های پلی‌اتن سبک با یکدیگر کم بوده؛ از این‌رو استحکام و نقطهٔ ذوب آن از پلی‌اتن سنگین کم‌تر است.

۴) برای تهیهٔ پلی‌لاکتیک اسید، نخست باید نشاستهٔ موجود در برخی از فراورده‌های کشاورزی را به لاکتیک اسید تبدیل کرد.

۸۸- در شرایط یکسان، انحلال‌پذیری کدام‌یک از مواد زیر در آب بیشتر است؟

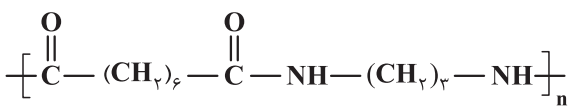
۱) پروپیل استات
۲) ۳- پنتانون
۳) ۱- پنتانول
۴) پنتانوئیک اسید

۸۹- از واکنش ۷/۰۴ گرم از یک الکل یک‌عاملی سیرشده با مقدار کافی از استیک اسید، ۱۰/۴ گرم ترکیب آلی به دست آمده است. با توجه به نمودار زیر، در ۵۰ گرم آب به تقریب چند گرم از این الکل باید حل شود تا یک محلول سیرشده ایجاد شود؟ ($H=1, C=12, O=16 : g.mol^{-1}$)



۱) ۰/۵
۲) ۱/۴
۳) ۲/۸
۴) ۴

۹۰- کدام موارد زیر دربارهٔ ترکیبی با ساختار داده‌شده درست است؟ ($H=1, C=12, N=14, O=16 : g.mol^{-1}$)



الف) دارای گروه‌های عاملی کتونی، آمیدی و آمینی است.

ب) از واکنش آن با آب، ترکیبی نیتروژن‌دار با جرم مولی $74\ g.mol^{-1}$ به دست می‌آید.

پ) فرمول مولکولی دی‌اسید سازندهٔ آن، $C_8H_{14}O_4$ است.

ت) از واکنش یکی از مونومرهای سازندهٔ آن با اتانول، می‌توان پلی‌استر تهیه کرد.

۱) الف و ب
۲) پ و ت
۳) ب و پ
۴) الف و ت

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ‌نامهٔ تشریحی آزمون را ساعت ۱۶ از صفحهٔ شخصی خودتان در سایت آزمون خیلی سبز دریافت کنید.

azmoon.kheilisabz.com

اساتید، مشاوران و دانش‌آموزان گرامی؛

نظرات، پیشنهادات، انتقادات و بازخوردهای خود نسبت به سؤالات این آزمون را می‌توانید از طریق آیدی Kheilisabz_edit@ در همهٔ پیام‌رسان‌ها با ما به اشتراک بگذارید.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ‌نامه آزمون آزمایشی خیلی سبز

رشته ریاضی

پایه دوازدهم | مرحله اول

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا
حسابان	فرشاد حسن‌زاده ـ مصطفی دیداری ـ محمدرضا راسخ ـ محمد گودرزی ـ سروش موئینی حسین نادری ـ جهانبخش نیکنام
ریاضیات گسسته و آمار و احتمال	مصطفی دیداری ـ علیرضا شریف‌خطیبی ـ عطا صادقی ـ سروش موئینی
هندسه	محمدطاهر شعاعی ـ حمید گلزاری ـ حسین هاشمی طاهری
فیزیک	علیرضا جباری ـ رضا سبزمیدانی ـ نوید شاهی
شیمی	یاسر عبدالهی ـ محدثه ملک‌پور ـ مرتضی نصیرزاده

نام درس	مسئول درس	گزینشگر	مولف پاسخ‌نامه	کارشناسان علمی	ویراستاران به ترتیب حروف الفبا
حسابان	محمدسجاد نقیه	محمدسجاد نقیه	عادل حسینی	فرشاد حسن‌زاده	وحید جعفری منصور زرکش فرامرز سلطان کریمی
ریاضیات گسسته و آمار و احتمال	مصطفی دیداری	مصطفی دیداری	مصطفی دیداری	فرزانه خاکپاش	منصور زرکش اصفهانی بیان صیادی‌فر علیرضا کاظمی‌بقا
هندسه	حمید گلزاری	حمید گلزاری	امیرحسین ابومحبوب	امیرحسین ابومحبوب	زهرا جالینوسی محمد خندان ماهان فنی‌فر ابوالفضل ناصری
فیزیک	رضا سبزمیدانی	نوید شاهی	امین امینی	امین امینی	مسعود خندانی پوریا علاقه‌مند مریم گلی حسن‌لو احسان محمدی امیر محمودی انزابی
شیمی	یاسر عبدالهی	یاسر عبدالهی	یاسر عبدالهی محدثه ملک‌پور	مرتضی نصیرزاده	رامین آزادی امیر قاسمی‌پور متین قنبری

سرپرست محتوایی: فاطمه آقاجانپور

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

ویژه کنکوری‌های ۱۴۰۵

Azmoon.kheilisabz.com

آزمون آزمایشی خیلی سبز

سرپرست تولید	الناز علی‌یاری‌زاده
ویراستاران فنی	نیلوفر اعتمادی ـ نیوشا پیمان ـ هدیه خسروی زهرا صفری ـ فاطمه علی اکبری ـ محیا غنی‌فرد زهرا فرهادی‌مهر ـ مریم مسلمی‌زاده ـ نادره نازآوری ساعده نمازی
رسام	مونا آندستا ندا فخاری سارا گنجی آزادپور
صفحه‌آرایی	صدف امام ـ مریم حسین‌زاده سپیده سخائی ـ الهام سهرابی ـ طاهره صادق نژاد مائده صبری ـ نیلوفر فرخجسته ـ فاطمه قیاسوند مهدیه گل‌پور ـ دریا لطفی

Azmoon.kheilisabz.com
SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۱ مجموع ده جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی ۱,۳,۹,... چند برابر $\log_{۴} ۲$ است؟

۱) $۹\log ۳ - ۱$

۲) $۱ - ۹\log ۱۰$

۳) $۳^{\log ۱۰^{۱۰}} - \frac{۱}{۲}\log_{۵} ۲۵$

۴) $۳^{\log ۱۰} + \frac{۱}{۲}\log_{۵} ۲۵$

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

دنباله‌ای که در آن هر جمله، q برابر جملهٔ قبلی باشد، دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت q است:

$$a_۱, a_۱q, a_۱q^۲, ..., a_۱q^{n-۱}$$

$a_n = a_۱q^{n-۱}$ را جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی در نظر می‌گیریم.

مجموع n جملهٔ اول این دنباله از روابط زیر به دست می‌آید:

$$S_n = \frac{a_۱(q^n - ۱)}{q - ۱} = \frac{qa_n - a_۱}{q - ۱}$$

نکته

ویژگی‌های لگاریتم:

$$\log_{b^n} a^m = \frac{m}{n}\log_b a$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: ابتدا مجموع ده جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول ۱ و قدرنسبت ۳ را حساب می‌کنیم:

$$S_{۱۰} = \frac{۱ \times (۳^{۱۰} - ۱)}{۳ - ۱} = \frac{۳^{۱۰} - ۱}{۲}$$

گام دوم: طبق نکته، $\log_{۴} ۲$ برابر است با:

$$\log_{۲^۲} ۲^۱ = \frac{۱}{۲}\log_{۲} ۲ = \frac{۱}{۲}$$

حالا نسبت $S_{۱۰}$ را به این مقدار می‌یابیم:

$$\frac{S_{۱۰}}{\log_{۴} ۲} = \frac{\frac{۳^{۱۰} - ۱}{۲}}{\frac{۱}{۲}} = ۳^{۱۰} - ۱$$

گام سوم: در بین گزینه‌ها، فقط عبارت گزینهٔ (۳) است که با $۳^{۱۰} - ۱$ برابر است:

$$۳^{\log ۱۰^{۱۰}} - \frac{۱}{۲}\log_{۵} ۲۵ = ۳^{۱۰^{\overbrace{\log ۱۰}^{۱}}} - \frac{۱}{۲}\log_{۵} ۵^۲ = ۳^{۱۰} - ۱$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲ معادلهٔ $(x-2)^2+2(x-2)(x+3)+(x+3)^2=0$ ..... .

۱) یک جواب مثبت دارد
۲) دو جواب غیرهم‌علامت دارد
۳) یک جواب منفی دارد
۴) جواب حقیقی ندارد

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔ با دقت در معادله می‌بینیم که عبارت جبری آن به صورت مربع دوجمله‌ای نوشته شده است:

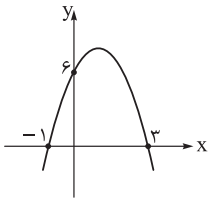
$$((x-2)+(x+3))^2=(x-2)^2+2(x-2)(x+3)+(x+3)^2$$

پس در اصل با معادلهٔ سادهٔ $(2x+1)^2=0$ مواجه هستیم که فقط یک جواب منفی دارد:

$$(2x+1)^2=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳ نمودار تابع $f(x)=ax^۲+bx+c$ در شکل زیر رسم شده است. حاصل $a+b+c+f(۴)$ کدام است؟



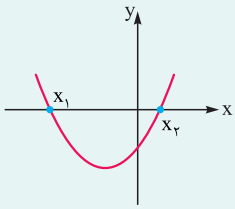
همان $f(۱)$ است.

۱) -۲
۲) ۲
۳) -۶
۴) ۶

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

پیداکردن معادلهٔ سهمی با داشتن صفرهای آن:



اگر صفرهای یک تابع درجه‌دوم مشخص باشد، ضابطهٔ آن را به فرم زیر می‌نویسیم:

$$y=a(x-x_۱)(x-x_۲)$$

و در آن ضریب a را با داشتن مختصات نقطه‌ای دیگر از نمودار تابع (که غالباً عرض از مبدأ آن است) به دست می‌آوریم:

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: صفرهای تابع f مشخص هستند و طبق درس‌باکس می‌توانیم ضابطهٔ تابع f را به صورت زیر بنویسیم:

$$f(x)=a(x+۱)(x-۳)$$

با استفاده از عرض از مبدأ تابع هم داریم:

$$f(۰)=-۳a=۶ \Rightarrow a=-۲$$

گام دوم: پس ضابطهٔ تابع f به صورت زیر است:

$$f(x)=-۲(x+۱)(x-۳)$$

از آن‌جا که مجموع ضرایب a ، b و c برابر $f(۱)$ است، داریم:

$$a+b+c+f(۴)=f(۱)+f(۴)=۸-۱۰=-۲$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴ مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $\frac{|۲-x|+|۳x-۲|}{۱+|x-۲|} \leq ۱$ کدام است؟

۱) $[\frac{۱}{۳},۱]$ ۲) $[\frac{۲}{۳},۲]$ ۳) $(-\infty,\frac{۷}{۵}]$ ۴) $\varnothing$

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint از ظاهر ترسناکش نترسید و طرفین‌وسطین کنید.

درس Box **ویژگی‌های قدرمطلق:**

۱) $|\text{☁}| = \begin{cases} \text{☁} & ; \ \text{☁} \geq ۰ \\ -\text{☁} & ; \ \text{☁} < ۰ \end{cases}$

۲) $|\text{☁}| = |-\text{☁}|$

۳) $|\text{☁}| \geq ۰$

۴) $|\text{☁}| = k \Rightarrow \text{☁} = \pm k$

۵) $|\text{☁}| = |\bigcirc| \Rightarrow \text{☁} = \pm \bigcirc$

۶) $|\text{☁}| \leq k \xrightarrow{k \geq ۰} -k \leq \text{☁} \leq k$

۷) $|\text{☁}| \geq k \xrightarrow{k \geq ۰} \text{☁} \leq -k$ یا $\text{☁} \geq k$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول:** در نامعادلات کسری، فقط هنگامی حق طرفین‌وسطین داریم که از علامت عبارت‌های مخرج مطلع و مطمئن باشیم.

در این‌جا عبارت $۱+|x-۲|$ همواره مثبت است، پس طرفین نامساوی را در این عبارت ضرب می‌کنیم:

$$\Rightarrow |۲-x|+|۳x-۲| \leq ۱+|x-۲|$$

از طرفی عبارت‌های $|x-۲|$ و $|۲-x|$ برابر هستند و داریم:

$$|۳x-۲| \leq ۱$$

گام دوم: در نهایت طبق ویژگی ۶ درس‌باکس داریم:

$$-۱ \leq ۳x-۲ \leq ۱ \xrightarrow{+۲} ۱ \leq ۳x \leq ۳ \xrightarrow{\div ۳} \frac{۱}{۳} \leq x \leq ۱$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵ اگر دو خط $۳x+۴y-۱۱=۰$ و $۶x+۸y-۲=۰$ بر دایره‌ای به مرکز $O(-\frac{۱}{۸},\beta)$ مماس باشند، مساحت دایره کدام است؟

۱) π
۲) ۲π
۳) ۴π
۴) ۱۶π

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint

دو خط موازی‌اند.

درس Box

- دو خط موازی هستند، اگر و فقط اگر شیب‌های آن‌ها با هم برابر باشند.
- در فرم نوشتاری معادلهٔ خط به صورت $ax+by+c=۰$، شیب آن برابر $-\frac{a}{b}$ است.
- فاصلهٔ دو خط موازی $ax+by+c=۰$ و $ax+by+c'=۰$ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

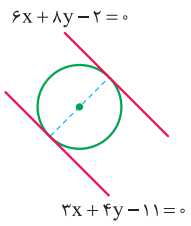
$$d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: شیب‌های دو خط با هم برابرند:

$$-\frac{۳}{۴}=-\frac{۶}{۸}$$

پس موازی‌اند و شکل زیر را برای این مسئله داریم:



گام دوم: مطابق شکل، فاصلهٔ این دو خط موازی برابر قطر دایره است. حال برای این‌که فاصلهٔ این دو خط را حساب کنیم، باید ضریب x و y در معادلهٔ آن‌ها یکسان باشد؛ بنابراین معادلهٔ خط دوم را بر ۲ تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{cases}۳x+۴y-۱۱=۰\\۳x+۴y-۱=۰\end{cases}\Rightarrow d=\frac{|۱۱-۱|}{\sqrt{۳^۲+۴^۲}}=\frac{۱۰}{۵}=۲$$

گام سوم: قطر دایره برابر ۲ و شعاع آن برابر ۱ است، در نتیجه مساحت دایره برابر $\pi\times۱^۲=\pi$ می‌شود.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

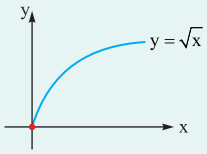
۶ اگر اشتراک دامنه و برد تابع $f(x)=\sqrt{۴-\sqrt{x-۱}}$ بازهٔ $[a,b]$ باشد، حاصل $b-a$ کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۵ ۳) ۲ ۴) ۱

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

تابعی را که در آن عبارت رادیکالی دیده شود، تابع رادیکالی می‌نامیم که ساده‌ترین ضابطهٔ آن $y=\sqrt{x}$ است.



همان‌طورکه مشاهده می‌شود، دامنه و برد این تابع، هر دو بازهٔ $[۰,+\infty)$ است.

در حالت کلی دامنهٔ تابع $g(x)=\sqrt{f(x)}$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$D_g=\{x\in D_f \mid f(x)\geq ۰\}$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا دامنهٔ تابع را به دست می‌آوریم. برای به دست آوردن دامنه نیز لازم داریم دو عبارت رادیکالی قابل مشاهده در ضابطه را نامنفی کنیم:

$$\begin{cases}\sqrt{x-۱}: x-۱\geq ۰ \Rightarrow x\geq ۱\\ \sqrt{۴-\sqrt{x-۱}}: ۴-\sqrt{x-۱}\geq ۰ \Rightarrow \sqrt{x-۱}\leq ۴ \Rightarrow x-۱\leq ۱۶ \Rightarrow x\leq ۱۷\end{cases}$$

از اشتراک دو جواب بالا، دامنهٔ تابع f، بازهٔ $[۱,۱۷]$ به دست می‌آید.

گام دوم: حالا براساس این دامنه و ضابطهٔ تابع، برد را می‌یابیم:

$$۱\leq x\leq ۱۷ \Rightarrow ۰\leq x-۱\leq ۱۶ \Rightarrow ۰\leq \sqrt{x-۱}\leq ۴ \Rightarrow -۴\leq -\sqrt{x-۱}\leq ۰ \Rightarrow ۰\leq ۴-\sqrt{x-۱}\leq ۴$$

$$\Rightarrow ۰\leq \sqrt{۴-\sqrt{x-۱}}\leq ۲$$

یعنی برد تابع f، بازهٔ $[۰,۲]$ است.

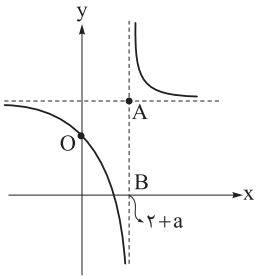
گام سوم: اشتراک دامنه و برد تابع f را حساب می‌کنیم:

$$[۱,۱۷]\cap[۰,۲]=[۱,۲]$$

پس $a=۱$ و $b=۲$ و در نتیجه $b-a=۱$ است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷ نمودار تابع $f(x)=\frac{b-۲ax}{x+a}$ به صورت زیر است. مساحت مثلث OAB کدام است؟



۱) ۱

۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) ۲

۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی

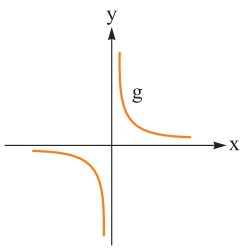
گام اول: ابتدا ضابطهٔ تابع f را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

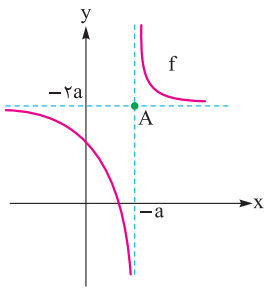
$$f(x)=\frac{-۲a(x+a)+۲a^۲+b}{x+a}=-۲a+\frac{۲a^۲+b}{x+a}$$

این یعنی اگر تابع $g(x)=\frac{۱}{x}$ را فرض کنیم، ضابطهٔ تابع f به صورت $f(x)=(۲a^۲+b)g(x+a)-۲a$ نوشته می‌شود.

گام دوم: این تساوی یعنی نمودار تابع g را باید a واحد به چپ ببریم، عرض نقاط روی آن را در $۲a^۲+b$ ضرب کنیم و در انتها $-۲a$ واحد در راستای عمودی جابه‌جا کنیم.

با مقایسهٔ این فرایند و نمودار تابع f در صورت سؤال، متوجه می‌شویم که نمودار تابع g را $-a$ واحد به راست و $-۲a$ واحد به بالا برده‌ایم:





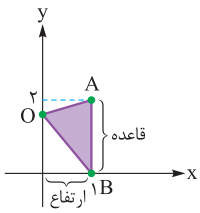
دقت کنید که در این سؤال مقدار ضریب $۲a^۲+b$ اهمیتی ندارد، بلکه فقط باید مثبت باشد.

گام سوم: با مقایسهٔ نمودار بالا و نمودار صورت سؤال داریم:

$$-a=۲+a\Rightarrow ۲a=-۲\Rightarrow a=-۱$$

پس مختصات نقطهٔ A به صورت $A(۱,۲)$ به دست می‌آید.

گام چهارم: حال مساحت مثلث OAB را پیدا می‌کنیم:



$$\begin{cases}\text{قاعدهٔ مثلث}=۲\\ \text{ارتفاع مثلث}=۱\end{cases}\Rightarrow \text{مساحت}=\frac{۲\times ۱}{۲}=۱$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸ اگر $f^{-1}(x) = -f(۲)x + ۱۱$ و $R_f = (۰, \frac{۱۱}{۳})$ باشد، حاصل $f^{-1}(۱)$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

فرض کنید تابع f یک‌به‌یک باشد، آن‌گاه اگر جای ورودی (x) و خروجی (y) این تابع را عوض کنیم، به تابع وارون آن می‌رسیم و آن را با نماد $f^{-۱}$ نمایش می‌دهیم.

- اگر نمودار تابع f را نسبت به خط $y = x$ قرینه کنیم، نمودار تابع $f^{-۱}$ به دست می‌آید.
- از تعریف وارون این نتیجه می‌شود که $D_f = R_{f^{-۱}}$ و $R_f = D_{f^{-۱}}$.

یکی از ویژگی‌های مهم تابع وارون، همان‌طور که از تعریف آن برمی‌آید، به شرح زیر است:

$$\begin{cases} (\alpha,\beta) \in f \Leftrightarrow (\beta,\alpha) \in f^{-۱} \\ \text{یا} \\ f(\alpha) = \beta \Leftrightarrow f^{-۱}(\beta) = \alpha \end{cases}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: ما برای تکمیل ضابطهٔ تابع $f^{-۱}$ به مقدار $f(۲)$ نیاز داریم. فرض می‌کنیم $f(۲) = a$ باشد، حال طبق درس‌باکس داریم:

$$f^{-۱}(a) = ۲$$

پس اگر در تساوی صورت سؤال، $x = a$ را جای‌گذاری کنیم داریم:

$$\underbrace{f^{-۱}(a)}_{۲} = -\underbrace{f(۲)}_{a}(a) + ۱۱ \Rightarrow ۲ = -a^۲ + ۱۱ \Rightarrow a^۲ = ۹ \Rightarrow a = \pm ۳$$

با توجه به R_f که برد تابع f است، مقادیر تابع f مثبت هستند و در نتیجه مقدار $a = ۳$ قابل قبول است.

گام دوم: پس داریم:

$$f^{-۱}(x) = -۳x + ۱۱ \Rightarrow f^{-۱}(۱) = -۳ + ۱۱ = ۸$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹ توابع $f(x)=\frac{۱-x}{۱+x}$ و $h(x)=f(x)+g(x)$ مفروض‌اند. اگر $(f^{-۱}oh)(x)=\frac{۲}{x}$ باشد، مقدار $g(۳)$ کدام است؟

۱) $۰/۲$
۲) $۰/۷$
۳) $-۰/۲$
۴) $-۰/۳$

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

وارون توابع: در تابع یک‌به‌یک f، اگر جای ورودی (x) و خروجی (y) را عوض کنیم، تابع وارون f را که با نماد $f^{-۱}$ نشان می‌دهیم، به دست آورده‌ایم.

$$y=f(x) \Leftrightarrow x=f^{-۱}(y)$$

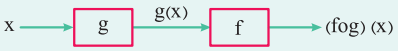
ویژگی‌های تابع وارون:

۱) دامنهٔ تابع $f^{-۱}$، برد تابع f است.

۲) وارون، وضعیت یکنوایی را عوض نمی‌کند.

۳) در توابع اکیداً صعودی، محل برخورد نمودار تابع با وارونش (در صورت وجود)، قطعاً روی خط $y=x$ قرار دارد.

ترکیب توابع: تابع fog را تابع مرکب حاصل از توابع f و g می‌نامیم، به صورتی که خروجی تابع g به عنوان ورودی تابع f در نظر گرفته می‌شود:



یعنی $(fog)(x)$ همان $f(g(x))$ است و به معنای آن است که به جای هر x ضابطهٔ تابع f، ضابطهٔ تابع g قرار داده شود.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا در تساوی $(f^{-۱}oh)(x)=\frac{۲}{x}$، $x=۳$ را جای‌گذاری می‌کنیم تا $h(۳)$ را به دست آوریم:

$$f^{-۱}(h(۳))=\frac{۲}{۳} \Rightarrow h(۳)=f(\frac{۲}{۳})=\frac{۱-\frac{۲}{۳}}{۱+\frac{۲}{۳}}=\frac{۱}{۵}=۰/۲$$

گام دوم: حالا در تساوی $h(x)=f(x)+g(x)$، $x=۳$ را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$h(۳)=f(۳)+g(۳)$$

$$\begin{cases} h(۳)=۰/۲ \\ f(۳)=\frac{۱-۳}{۱+۳}=\frac{-۲}{۴}=-۰/۵ \end{cases} \Rightarrow ۰/۲=-۰/۵+g(۳) \Rightarrow g(۳)=۰/۷$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۰ حاصل عبارت $\frac{\sin ۲۳۰^\circ \cot(-۲۰^\circ)\cos ۱۲۰^\circ}{\cos ۴۰۰^\circ \tan ۲۵۰^\circ}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) $\frac{۳}{۲}$
۳) $-\frac{۳}{۲}$
۴) $-\frac{۱}{۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

روش محاسبهٔ نسبت‌های مثلثاتی زوایا با استفاده از زوایای مرتبط

برای به دست آوردن نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه، می‌توانیم از روش گام‌به‌گام زیر پیروی کنیم:

۱) تبدیل زاویه: ابتدا زاویهٔ مورد نظر را به شکل $k\frac{\pi}{۲}\pm\alpha$ بازنویسی می‌کنیم، به طوری که k یک عدد صحیح باشد (زوج یا فرد بودن k مهم است.)

۲) تعیین ربع دایرهٔ مثلثاتی: با فرض این‌که α یک زاویهٔ تند (حاده) است، مشخص می‌کنیم که انتهای کمان مربوط به زاویهٔ اصلی $(k\frac{\pi}{۲}\pm\alpha)$ در کدام ربع (ناحیه) دایرهٔ مثلثاتی قرار می‌گیرد.

۳) تعیین علامت نسبت: با توجه به ربعی که در مرحلهٔ قبل مشخص شد، علامتِ $(+$ یا $-)$ نسبت مثلثاتی مورد نظر (سینوس، کسینوس، تانژانت یا کتانژانت) را برای آن ربع تعیین می‌کنیم.

۴) حذف مضرب $\frac{\pi}{۲}$: بخش $k\frac{\pi}{۲}$ را از عبارت $k\frac{\pi}{۲}\pm\alpha$ حذف می‌کنیم.

۵) تبدیل یا حفظ نسبت:

- اگر k در مرحلهٔ ۱ زوج بود، نوع نسبت مثلثاتی تغییر نمی‌کند (سینوس به سینوس، کسینوس به کسینوس و ...).
- اگر k در مرحلهٔ ۱ فرد بود، نوع نسبت مثلثاتی به نسبت همنام خود تبدیل می‌شود (سینوس به کسینوس، کسینوس به سینوس، تانژانت به کتانژانت و کتانژانت به تانژانت).

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا نسبت‌های داده‌شده را برحسب زوایای حاده می‌نویسیم:

$$\sin ۲۳۰^\circ = \sin(۱۸۰^\circ + ۵۰^\circ) = -\sin ۵۰^\circ$$
$$\cot(-۲۰^\circ) = -\cot ۲۰^\circ$$
$$\cos ۱۲۰^\circ = \cos(۱۸۰^\circ - ۶۰^\circ) = -\cos ۶۰^\circ = -\frac{۱}{۲}$$
$$\cos ۴۰۰^\circ = \cos(۳۶۰^\circ + ۴۰^\circ) = \cos ۴۰^\circ$$
$$\tan ۲۵۰^\circ = \tan(۲۷۰^\circ - ۲۰^\circ) = \cot ۲۰^\circ$$

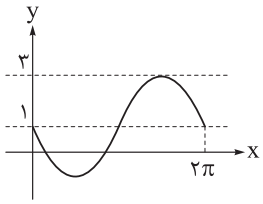
گام دوم: پس عبارت به صورت زیر تکمیل می‌شود:

$$\frac{(-\sin ۵۰^\circ)(-\cot ۲۰^\circ)(-\frac{۱}{۲})}{\cos ۴۰^\circ \cot ۲۰^\circ} = -\frac{۱}{۲}\frac{\sin ۵۰^\circ}{\cos ۴۰^\circ}$$

و از آن‌جا که ۵۰° و ۴۰° متمم هستند، $\sin ۵۰^\circ$ و $\cos ۴۰^\circ$ با هم برابرند و حاصل عبارت برابر $-\frac{۱}{۲}$ می‌شود.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۱ اگر بخشی از نمودار تابع $f(x)=a+b\sin x$ به صورت زیر باشد، حاصل $a+b$ کدام است؟



۱) ۱

۲) -1

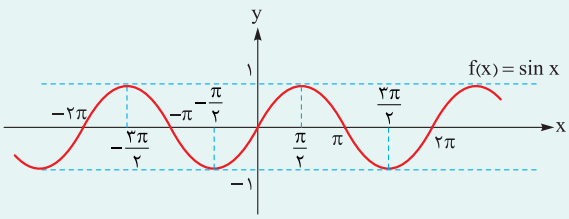
۳) $\frac{1}{2}$

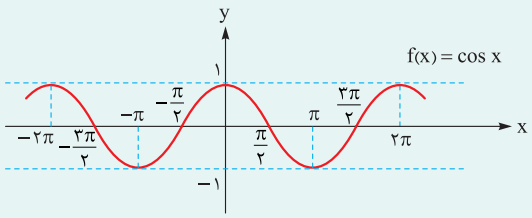
۴) $-\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint از روی بیشترین مقدار $y=\sin x$، بیشترین مقدار $f(x)=a+b\sin x$ رو پیدا کن و یک نقطه هم روی نمودار داری: کار تمومه!

درس Box نمودار توابع $y=\sin x$ و $y=\cos x$ به صورت زیر است:



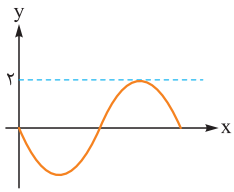


با توجه به نمودارها مشخص است که $-1\le \sin x\le 1$ و $-1\le \cos x\le 1$.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** عرض از مبدأ تابع برابر ۱ است، پس داریم:

$$f(0)=a+b\sin 0=a=1$$

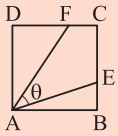
گام دوم: پس ضابطهٔ تابع $f(x)=1+b\sin x$ است. حال اگر نمودار تابع f را ۱ واحد به پایین منتقل کنیم، مطابق شکل زیر به نمودار تابع $y=b\sin x$ می‌رسیم:



که این همان نمودار $y=-2\sin x$ است. پس $b=-2$ و در نتیجه $a+b=-1$ است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۲ در مربع شکل روبه‌رو، اگر $\frac{CE}{EB}=\frac{DF}{FC}=۲$ باشد، مقدار $\cot\theta$ کدام است؟



۱) ۱
۲) $\frac{۹}{۷}$
۳) $\frac{۴}{۳}$
۴) $\sqrt{۲}+۱$

پاسخ: گزینهٔ ۲

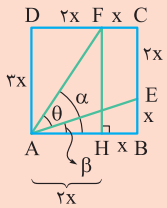
درس Box

نسبت‌های مثلثاتی مجموع و تفاضل کمان:

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: برای محاسبهٔ $\cot\theta$، به $\sin\theta$ و $\cos\theta$ نیاز داریم. برای این کار از F، عمودی بر AB رسم می‌کنیم:



با توجه به فرض مسئله، اندازه‌های روی شکل را داریم و می‌توانیم بنویسیم:

$$\cos\theta=\cos(\alpha-\beta)\ ,\ \sin\theta=\sin(\alpha-\beta)$$

گام دوم: در مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ ADF و ABE طبق قضیهٔ فیثاغورس می‌نویسیم:

$$\begin{cases}AF=\sqrt{AD^۲+DF^۲}=\sqrt{۹x^۲+۴x^۲}=\sqrt{۱۳}x\\ AE=\sqrt{AB^۲+BE^۲}=\sqrt{۹x^۲+x^۲}=\sqrt{۱۰}x\end{cases}$$

هم‌چنین در مثلث‌های AHF و ABE نسبت‌های مثلثاتی زوایای α و β را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\overset{\Delta}{AHF}:\begin{cases}\cos\alpha=\frac{AH}{AF}=\frac{۲x}{\sqrt{۱۳}x}=\frac{۲}{\sqrt{۱۳}}\\ \sin\alpha=\frac{FH}{AF}=\frac{۳x}{\sqrt{۱۳}x}=\frac{۳}{\sqrt{۱۳}}\end{cases}$$

$$\overset{\Delta}{ABE}:\begin{cases}\cos\beta=\frac{AB}{AE}=\frac{۳x}{\sqrt{۱۰}x}=\frac{۳}{\sqrt{۱۰}}\\ \sin\beta=\frac{BE}{AE}=\frac{x}{\sqrt{۱۰}x}=\frac{۱}{\sqrt{۱۰}}\end{cases}$$

گام سوم: مطابق درس‌باکس و گام اول، $\sin\theta$ و $\cos\theta$ را حساب می‌کنیم:

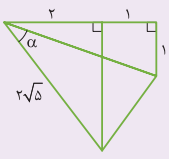
$$\cos\theta=\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\ \Rightarrow\ \cos\theta=\frac{۲}{\sqrt{۱۳}}\times\frac{۳}{\sqrt{۱۰}}+\frac{۳}{\sqrt{۱۳}}\times\frac{۱}{\sqrt{۱۰}}=\frac{۹}{\sqrt{۱۳۰}}$$

$$\sin\theta=\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\ \Rightarrow\ \sin\theta=\frac{۳}{\sqrt{۱۳}}\times\frac{۳}{\sqrt{۱۰}}-\frac{۲}{\sqrt{۱۳}}\times\frac{۱}{\sqrt{۱۰}}=\frac{۷}{\sqrt{۱۳۰}}$$

و در نهایت داریم:

$$\cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{۹}{۷}$$

در شکل زیر مقدار $\cos\alpha$ چه‌قدر است؟ (سؤال ۱۱ کنکور ریاضی ۱۴۰۲ ـ نوبت اول)



۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$
۳) $-\frac{\sqrt{۳}}{۱۰}$
۴) $-\frac{\sqrt{۲}}{۱۰}$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۳ اگر $\sin ۱۷^\circ = x$ باشد، مقدار $\sin ۵۶^\circ$ برحسب x کدام است؟

۱) $۱-۲x^۲$

۲) $۲x^۲-۱$

۳) $۱+x^۲$

۴) $۱-x^۲$

مشاوره در چنین سؤالاتی سعی کنید رابطه‌ای بین زوایا پیدا کنید که ترکیبی خطی از آن‌ها برابر مضارب ۹۰° شود. مثلاً در این‌جا ۲ برابر ۱۷° و ۵۶° متمم هستند.

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

اتحادهای مثلثاتی دو برابر کمان:

$$\sin ۲\theta = ۲\sin\theta\cos\theta$$

$$\cos ۲\theta = \cos^۲\theta - \sin^۲\theta = ۲\cos^۲\theta - ۱ = ۱ - ۲\sin^۲\theta$$

از اتحاد $\cos ۲\theta$، دو رابطهٔ مهم به دست می‌آید که به روابط طلایی معروف‌اند:

$$\sin^۲\theta = \frac{۱-\cos ۲\theta}{۲} \quad , \quad \cos^۲\theta = \frac{۱+\cos ۲\theta}{۲}$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: متمم زاویهٔ ۵۶°، زاویهٔ ۳۴° است که دو برابر ۱۷° است. این یعنی $\sin ۵۶^\circ$ برابر $\cos ۳۴^\circ$ است.

گام دوم: حالا باید رابطهٔ $\cos ۳۴^\circ$ را برحسب $\sin ۱۷^\circ$ بنویسیم:

$$\cos ۲\theta = ۱ - ۲\sin^۲\theta \Rightarrow \cos ۳۴^\circ = ۱ - ۲\sin^۲ ۱۷^\circ = ۱ - ۲x^۲$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۴ اگر $x = ۲^{a^۲-b^۲}$ و $y = ۲^{a-b}$ باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) $\log_y (x-۱)$
۲) $\log_x (y-۱)$
۳) $\log_x y$
۴) $\log_y x$

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint از اتحاد مزدوج کمک بگیر تا بتونی x رو برحسب y بنویسی.

درس Box

ویژگی‌های لگاریتم

۱) $\log_a ۱ = ۰$
۲) $\log_a a = ۱$
۳) $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$
۴) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
۵) $\log_{a^m} x^n = \frac{n}{m}\log_a x$
۶) $\log_a x = \frac{۱}{\log_x a}$
۷) $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$
۸) $a^{\log_a x} = x$
۹) $b^{\log_a x} = x^{\log_a b}$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا به کمک اتحاد مزدوج بین x و y یک رابطه پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases} ۲^{a-b} = y \\ (۲^{a-b})^{a+b} = x \end{cases} \Rightarrow x = y^{a+b}$$

گام دوم: حال از طرفین رابطهٔ اخیر لگاریتم می‌گیریم و با توجه به ویژگی‌های لگاریتم، حاصل $a+b$ را مشخص می‌کنیم:

$$\log x = \log y^{a+b} \Rightarrow \log x = (a+b)\log y \Rightarrow a+b = \frac{\log x}{\log y} = \log_y x$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۵ اگر $x = \alpha$، جواب معادلهٔ $16^{\log_2 \sqrt{x+1}} = x^3 + x^2 + 2x - 7$ باشد، حاصل $\log_{\sqrt[3]{2}}(\alpha^3 - 4)$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) ۶ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۱۲

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

ویژگی‌های لگاریتم:

۱) $\log_x a + \log_x b = \log_x ab$

۲) $\log_x a - \log_x b = \log_x \frac{a}{b}$

۳) $\log_{b^n} a^m = \frac{m}{n}\log_b a$

۴) $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$

۵) $\log_b a = \frac{\log_x a}{\log_x b}$

۶) $a^{\log_x b} = b^{\log_x a}$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: طبق ویژگی ۶ درس‌باکس داریم:

$$16^{\log_2 \sqrt{x+1}} = (\sqrt{x+1})^{\log_2 16} = (\sqrt{x+1})^4 = (x+1)^2$$

گام دوم: پس عملاً معادلهٔ زیر را داریم:

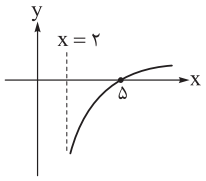
$$(x+1)^2 = x^3 + x^2 + 2x - 7 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = x^3 + x^2 + 2x - 7 \Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x = 2$$

گام سوم: $\alpha = 2$ جواب معادله است و داریم:

$$\log_{\sqrt[3]{2}}(\alpha^3 - 4) = \log_{\sqrt[3]{2}} 4 = \log_{2^{\frac{1}{3}}} 2^2 = \frac{2}{\frac{1}{3}}\log_2 2 = 6$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۶ نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. ضابطهٔ این تابع، کدام می‌تواند باشد؟



۱) $\log_{۳}(x-۲)-۱$

۲) $\log_{۳}(x-۲)+۱$

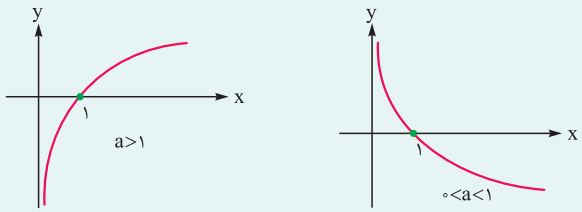
۳) $\log_{۲}(x-۲)+۱$

۴) $\log_{۲}(x-۲)-۱$

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

ضابطهٔ وارون تابع نمایی $y=a^x$ را به صورت $y=\log_a x$ نمایش می‌دهیم که با تقارن نمودار تابع نمایی، نسبت به خط $y=x$، نمودار آن به صورت‌های زیر خواهد شد:



در حالت کلی دامنهٔ تابع $g(x)=\log_a f(x)$ با شرط $a\in(۰,+\infty)$ برابر است با:

$$D_g=\{x\in D_f \mid f(x)>۰\}$$

که در حالت خاصِ $y=\log_a(x-x_۰)$، دامنه بازهٔ $(x_۰,+\infty)$ است.

پاسخ خیلی تشریحی

$f(۵)$ برابر صفر است و فقط در ضابطهٔ گزینهٔ (۱)، به ازای $x=۵$ حاصل عبارت صفر می‌شود:

$$\xrightarrow{x=۵} \log_{۳}(۵-۲)-۱=\log_{۳}۳-۱=۱-۱=۰$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۷ اگر $f(x)=\begin{cases} x-|x-۲| & ; x<۲ \\ ۲x-۱ & ; x=۲ \\ ۲-\log_۲(x^۳-۴) & ; x>۲ \end{cases}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)+\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) -۲

پاسخ: گزینهٔ ۳

نکته

توابعی هستند که حدشان با مقدارشان در یک نقطهٔ خاص برابر است (پیوسته هستند)، پس برای محاسبهٔ حد در نقطه‌ای خاص، کافی است آن طول خاص را در ضابطهٔ تابع جای‌گذاری کنیم. این توابع به شرح زیر هستند:

۱) توابع چندجمله‌ای

۲) توابع قدرمطلق

۳) توابع گویا در دامنه‌شان

۴) توابع رادیکالی در دامنه‌شان

۵) توابع مثلثاتی

۶) توابع نمایی

۷) توابع لگاریتمی در دامنه‌شان

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: حدهای چپ و راست تابع f را در $x=۲$ باید حساب کنیم:

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x)=\lim_{x\to ۲^-}(x-|x-۲|)=۲-|۲-۲|=۲$$

گام دوم: حد راست را هم حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x)=\lim_{x\to ۲^+}(۲-\log_۲(x^۳-۴))=۲-\log_۲(\lim_{x\to ۲^+}(x^۳-۴))=۲-\log_۲ ۴=۲-۲=۰$$

و در نهایت، خواستهٔ سؤال برابر $۲+۰=۲$ است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۸ حد تابع $f(x)=\frac{x-1}{x^2-3x+2}$ زمانی‌که $x\to 1$، با حاصل کدام حد برابر است؟

۱) $\lim_{x\to 4}\cos\frac{\pi}{2}x$

۲) $\lim_{x\to\frac{7\pi}{3}}\sin(3x-\frac{\pi}{2})$

۳) $\lim_{x\to 1}2^{x-1}$

۴) $\lim_{x\to 1}\tan(\frac{35\pi x}{4})$

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

روش رفع ابهام $\frac{0}{0}$ در حدهای گویا از طریق تجزیهٔ عامل مشترک

برای محاسبهٔ حد توابع گویا به فرم $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$، حالتی که ممکن است پیش بیاید، حالت ابهام $\frac{0}{0}$ است. این حالت زمانی رخ می‌دهد که هم حد صورت و هم حد مخرج برابر صفر باشند!

$$\lim_{x\to a}f(x)=0\quad,\quad\lim_{x\to a}g(x)=0$$

یا به طور معادل $f(a)=0$ و $g(a)=0$.

در چنین شرایطی، اگر توابع f و g (مانند چندجمله‌ای‌ها) خاصیت تجزیه‌پذیری داشته باشند، می‌توان از «قضیهٔ عامل» استفاده کرد. این قضیه بیان می‌کند که اگر $f(a)=0$، آن‌گاه $(x-a)$ یکی از عامل‌های $f(x)$ است (و مشابه برای $g(x)$).

بنابراین، می‌توانیم $f(x)$ و $g(x)$ را به صورت زیر تجزیه کنیم:

$$f(x)=(x-a)F(x)$$
$$g(x)=(x-a)G(x)$$

که در آن $F(x)$ و $G(x)$ بخش‌های باقی‌مانده پس از تجزیه هستند.

حال، حد اولیه را می‌توان به این شکل بازنویسی کرد:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)F(x)}{(x-a)G(x)}$$

چون در فرایند حدگیری، x به a میل می‌کند ولی دقیقاً برابر a نیست $(x\neq a\ \Rightarrow\ x-a\neq 0)$، می‌توانیم عامل مشترک $(x-a)$ را از صورت و مخرج ساده کنیم:

$$\lim_{x\to a}\frac{F(x)}{G(x)}$$

با محاسبهٔ این حد نهایی (در صورت وجود)، ابهام $\frac{0}{0}$ اولیه برطرف می‌شود.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا حد تابع f را وقتی $x\to 1$، به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-2}=-1$$

گام دوم: حالا براساس نکتهٔ سؤال قبل، حد هر گزینه را حساب می‌کنیم:

(۱) گزینهٔ: $\lim_{x\to 4}\cos\frac{\pi}{2}x=\cos 2\pi=1$

(۲) گزینهٔ: $\lim_{x\to\frac{7\pi}{3}}\sin(3x-\frac{\pi}{2})=\sin(7\pi-\frac{\pi}{2})=1$

(۳) گزینهٔ: $\lim_{x\to 1}2^{x-1}=2^0=1$

(۴) گزینهٔ: $\lim_{x\to 1}\tan\frac{35\pi x}{4}=\tan\frac{35\pi}{4}=\tan(9\pi-\frac{\pi}{4})=-1$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۹ اگر مجموع حدهای چپ و راست تابع $f(x)=[\frac{۲}{-x^۲}]+(-m)[\frac{-x}{۲}]$ در $x=۱$ برابر ۱ باشد، مقدار m کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

تعریف حد چپ و حد راست تابع

حد چپ

گفته می‌شود حد چپ تابع f در نقطهٔ $x_۰$ برابر با عدد L است، اگر بتوان مقادیر $f(x)$ را با انتخاب مقادیر x به قدر کافی نزدیک به $x_۰$ و کوچک‌تر از $x_۰$ $(x<x_۰)$، به میزان دلخواه به L نزدیک کرد. این تعریف مستلزم آن است که تابع f حداقل در یک بازهٔ باز در سمت چپ $x_۰$ (مثلاً به شکل $(x_۰-\delta_۰, x_۰)$ برای $\delta>۰$) تعریف‌شده باشد. نماد ریاضی این تعریف به صورت زیر است:

$$\lim_{x\to x_۰^-} f(x)=L$$

حد راست

به طور مشابه، گفته می‌شود حد راست تابع f در نقطهٔ $x_۰$ برابر با عدد L است، اگر بتوان مقادیر $f(x)$ را با انتخاب مقادیر x به قدر کافی نزدیک به $x_۰$ و بزرگ‌تر از $x_۰$ $(x>x_۰)$، به میزان دلخواه به L نزدیک کرد. این تعریف نیازمند آن است که تابع f حداقل در یک بازهٔ باز در سمت راست $x_۰$ (مثلاً به شکل $(x_۰, x_۰+\delta)$ برای $\delta>۰$) تعریف‌شده باشد. نماد ریاضی این تعریف به صورت زیر است:

$$\lim_{x\to x_۰^+} f(x)=L$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: توجه کنید که وقتی $x\to ۱^+$، به معنای آن است که $x>۱$، پس داریم:

$$x>۱ \Rightarrow \begin{cases} x^۲>۱ \Rightarrow -x^۲<-۱ \Rightarrow -\frac{۱}{x^۲}>-۱ \Rightarrow \frac{-۲}{x^۲}>-۲ \Rightarrow [-\frac{۲}{x^۲}]=-۲ \\ -x<-۱ \Rightarrow -\frac{x}{۲}<-\frac{۱}{۲} \Rightarrow [-\frac{x}{۲}]=-۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۱^+} f(x)=\lim_{x\to ۱^+}\left([\frac{۲}{-x^۲}]+(-m)[\frac{-x}{۲}]\right)=-۲+m$$

گام دوم: هم‌چنین وقتی $x\to ۱^-$، آن‌گاه $\frac{۲}{-x^۲}<-۲$ و $\frac{-x}{۲}>\frac{-۱}{۲}$، در نتیجه:

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x)=\lim_{x\to ۱^-}\left([\frac{۲}{-x^۲}]+(-m)[-\frac{x}{۲}]\right)=-۳+m$$

گام سوم: حال مجموع حد چپ و راست تابع f را در $x=۱$، برابر ۱ قرار می‌دهیم:

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x)+\lim_{x\to ۱^-} f(x)=-۲+m+m-۳=۲m-۵=۱ \Rightarrow m=۳$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۰ **اگر $a \in A \subseteq (0,6)$، آن‌گاه تابع با ضابطهٔ $f(x)=[x+a]$ در $x=a$ ناپیوسته است. حداکثر تعداد اعضای مجموعهٔ A کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)**

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

پاسخ: گزینهٔ ۴

نکته

۱) تابع $f(x)=[x]$ در اعداد صحیح، پیوسته نیست.

۲) فرض کنید تابع f در نقطهٔ $x=a$ پیوسته و $f(a)$ عددی صحیح باشد. اگر مقادیر تابع f در اطراف این نقطه بزرگ‌تر یا مساوی $f(a)$ باشند، آن‌گاه تابع $g(x)=[f(a)]$ در نقطهٔ $x=a$ پیوسته است و در غیر این صورت تابع g در نقطهٔ $x=a$ ناپیوسته است.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: با توجه به این‌که توابع شامل براکت، در نقاطی که داخل براکت عددی صحیح شود، ناپیوسته است داریم:

$$f(a)=[a+a]=[2a] \Rightarrow 2a \in \mathbb{Z}$$

گام دوم: حال با توجه به محدودهٔ داده‌شده، اگر a هر یک از اعضای مجموعهٔ $\{\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},\ldots,\frac{11}{2}\}$ باشد، تابع f در $x=a$ ناپیوسته است و حداکثر تعداد اعضای مجموعهٔ A برابر ۱۱ است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۱ کدام چهارضلعی هم محاطی و هم محیطی است؟

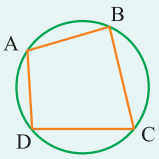
۱) لوزی
۲) کایت قائم‌الزاویه
۳) مستطیل
۴) ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint

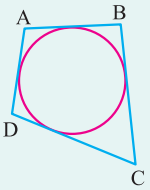
دقت کنید که ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین لزوماً یک چهارضلعی محیطی نیست.

درس Box



چهارضلعی محاطی: یک چهارضلعی محاطی است اگر و فقط اگر دو زاویهٔ مقابل آن مکمل باشند. به عبارت دیگر، چهارضلعی $ABCD$ محاطی است اگر و فقط اگر: $\hat{A}+\hat{C}=\hat{B}+\hat{D}=۱۸۰^\circ$

چهارضلعی‌های محاطی مهم عبارت‌اند از: مربع، مستطیل و ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین.

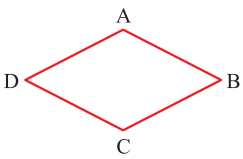


چهارضلعی محیطی: یک چهارضلعی محیطی است اگر و فقط اگر مجموع اندازه‌های دو ضلع مقابل، برابر مجموع اندازه‌های دو ضلع مقابل دیگر باشد. به عبارت دیگر چهارضلعی $ABCD$ محیطی است اگر و فقط اگر: $AB+CD=AD+BC$

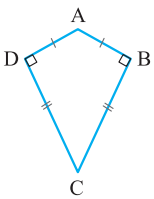
چهارضلعی‌های محیطی مهم عبارت‌اند از: مربع، لوزی، کایت و ذوزنقه‌ای که در آن مجموع قاعده‌ها با مجموع ساق‌ها برابر باشد.

پاسخ خیلی تشریحی

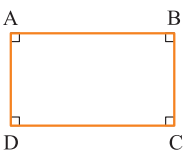
گزینه‌ها را به طور جداگانه مورد بررسی قرار می‌دهیم:



گزینهٔ (۱): در لوزی در حالت کلی، زوایای مقابل مکمل یکدیگر نیستند؛ پس لوزی چهارضلعی محاطی نیست.

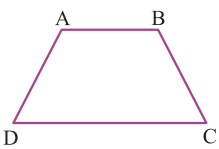


گزینهٔ (۲): در کایت $ABCD$ مطابق شکل $AB=AD$ و $BC=CD$ است؛ پس $AB+CD=AD+BC$ و در نتیجه کایت چهارضلعی محیطی است. از طرفی، در کایت قائم‌الزاویهٔ $ABCD$، $\hat{B}=\hat{D}=۹۰^\circ$ پس $\hat{B}+\hat{D}=\hat{A}+\hat{C}=۱۸۰^\circ$ و چهارضلعی محاطی است.



گزینهٔ (۳): در مستطیل در حالت کلی، مجموع اندازه‌های طول‌ها با مجموع اندازه‌های عرض‌ها برابر نیست، پس مستطیل چهارضلعی محیطی نیست.

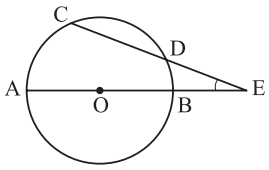
گزینهٔ (۴): در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین، زوایای مقابل مکمل یکدیگرند، یعنی هر ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین یک چهارضلعی محاطی است، ولی تنها در صورتی یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین می‌تواند چهارضلعی محیطی باشد که اندازهٔ هر ساق، میانگین اندازه‌های دو قاعده باشد. در این صورت داریم:



$$AD=\frac{AB+CD}{۲}\Rightarrow ۲AD=AB+CD\xrightarrow{AD=BC}AD+BC=AB+CD$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۲ مطابق شکل، امتداد قطر AB و وتر CD از دایرهٔ $C(O,۴)$ در نقطهٔ E متقاطع‌اند. اگر $\hat{E}=۱۵^\circ$ و $DE=۴$ باشد، آن‌گاه طول کمان AC چند برابر π است؟



۱) ۱

۲) ۰/۷۵

۳) ۰/۵

۴) ۰/۲۵

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint

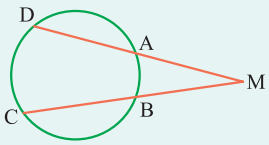
به تفاوت طول کمان و اندازهٔ کمان دقت کنید. اندازهٔ کمان همان اندازهٔ زاویهٔ مرکزی مقابل به آن کمان است و واحد آن درجه (یا رادیان) است، ولی طول کمان برحسب متر یا سانتی‌متر است.

درس Box

۱) طول کمان روبه‌رو به زاویهٔ α در دایرهٔ $C(O,R)$ برابر است با: (a بر حسب درجه)

$$L=\frac{\pi R\alpha}{۱۸۰^\circ}$$

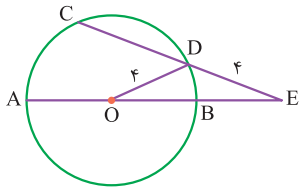
۲) اگر امتداد دو وتر AD و BC در نقطهٔ M خارج از دایره متقاطع باشند، آن‌گاه داریم:



$$\hat{M}=\frac{\overset{\frown}{CD}-\overset{\frown}{AB}}{۲}$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: از مرکز دایره به نقطهٔ D وصل می‌کنیم. مثلث ODE متساوی‌الساقین است، چون $OD=DE=۴$ و در نتیجه داریم:



$$D\hat{O}B=\hat{E}=۱۵^\circ$$

زاویهٔ $D\hat{O}B$ زاویهٔ مرکزی روبه‌رو به کمان BD است، پس $\overset{\frown}{BD}=۱۵^\circ$.

گام دوم: طبق رابطهٔ زاویهٔ بین امتداد دو وتر داریم:

$$\hat{E}=\frac{\overset{\frown}{AC}-\overset{\frown}{BD}}{۲}\Rightarrow ۱۵^\circ=\frac{\overset{\frown}{AC}-۱۵^\circ}{۲}\Rightarrow \overset{\frown}{AC}-۱۵^\circ=۳۰^\circ\Rightarrow \overset{\frown}{AC}=۴۵^\circ$$

گام سوم: طبق مورد اول درس‌باکس، طول کمان AC را محاسبه می‌کنیم:

$$L=\frac{\pi\times ۴\times ۴۵^\circ}{۱۸۰^\circ}=\pi$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۳ **طول مماس‌مشترک خارجی دو دایرهٔ مماس‌خارج، ۳ برابر طول شعاع دایرهٔ کوچک‌تر است. نسبت طول شعاع دایرهٔ بزرگ به طول شعاع دایرهٔ کوچک کدام است؟**

۱) ۲/۲۵ ۲) ۲/۵ ۳) ۲/۷۵ ۴) ۲

مشاوره این سؤال مشابه سؤالی از کنکور ریاضی خارج ۱۴۰۱ طراحی شده است.

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint در دو دایرهٔ مماس‌خارج، طول خط‌المرکزین برابر مجموع طول‌های دو شعاع است.

درس Box دو دایرهٔ $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ را در نظر بگیرید. اگر طول خط‌المرکزین دو دایره برابر $OO'=d$ باشد، آن‌گاه داریم:

طول مماس‌مشترک خارجی دو دایره $=\sqrt{d^2-(R-R')^2}$

طول مماس‌مشترک داخلی دو دایره $=\sqrt{d^2-(R+R')^2}$

اگر دو دایرهٔ C و C' مماس‌خارج باشند، آن‌گاه $d=R+R'$ است و طول مماس‌مشترک خارجی دو دایره از رابطهٔ $TT'=2\sqrt{RR'}$ نیز قابل محاسبه است.

پاسخ خیلی تشریحی فرض کنید شعاع دایره‌های بزرگ و کوچک به ترتیب برابر R و r باشد. در این صورت طول مماس‌مشترک خارجی دو دایره برابر $2\sqrt{Rr}$ است و در نتیجه طبق فرض داریم:

$$2\sqrt{Rr}=3r \xrightarrow{\text{توان ۲}} 4Rr=9r^2 \Rightarrow 4R=9r \Rightarrow \frac{R}{r}=\frac{9}{4}=2/25$$

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۲۴ در مثلثی به طول اضلاع ۳، ۴ و ۶، نقطهٔ تماس دایرهٔ محاطی خارجی نظیر بزرگ‌ترین ضلع، این ضلع را به دو قسمت تقسیم کرده است. نسبت طول قسمت بزرگ‌تر به طول قسمت کوچک‌تر کدام است؟

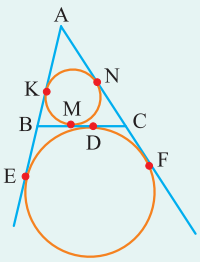
۱) ۱/۲ ۲) ۱/۳

۳) ۱/۴ ۴) ۱/۵

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint روابط مربوط به اندازهٔ قطعات ایجادشده توسط دایره‌های محاطی داخلی و خارجی روی اضلاع مثلث را به خاطر داشته باشید.

درس Box اگر نصف محیط مثلث ABC را با P نمایش دهیم، آن‌گاه اندازهٔ قطعاتی که دایرهٔ محاطی داخلی و دایرهٔ محاطی خارجی نظیر ضلع BC روی اضلاع مثلث یا امتداد آن‌ها ایجاد می‌کنند، از روابط زیر به دست می‌آیند $(BC = a\ ,\ AC = b\ ,\ AB = c)$:



۱) $AK = AN = P - a$

۲) $BK = BM = P - b$

۳) $CM = CN = P - c$

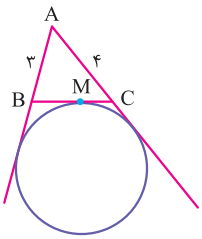
۴) $AE = AF = P$

۵) $BD = BE = P - c$

۶) $CD = CF = P - b$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: فرض کنید در مثلث ABC، $a = ۶$، $b = ۴$ و $c = ۳$ باشد. در این صورت داریم:



$$P = \frac{۳+۴+۶}{۲} = \frac{۱۳}{۲}$$

طبق توضیحات درس‌باکس، اندازهٔ قطعاتی را که دایرهٔ محاطی خارجی نظیر ضلع BC روی این ضلع پدید می‌آورد، محاسبه می‌کنیم:

$$BM = P - c = \frac{۱۳}{۲} - ۳ = \frac{۷}{۲}\ ,\ CM = P - b = \frac{۱۳}{۲} - ۴ = \frac{۵}{۲}$$

گام دوم: نسبت طول قسمت بزرگ‌تر به طول قسمت کوچک‌تر برابر است با:

$$\frac{BM}{CM} = \frac{\frac{۷}{۲}}{\frac{۵}{۲}} = \frac{۷}{۵} = ۱/۴$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۵ **دو خط d و d' در نقطهٔ O متقاطع‌اند و زاویهٔ بین آن‌ها برابر 60° است. بازتاب نقطهٔ A نسبت به خط d، نقطهٔ A' و بازتاب نقطهٔ A' نسبت به خط d'، نقطهٔ A'' است. اگر $OA' = 4$ باشد، مساحت مثلث OAA'' کدام است؟**

۱) $2\sqrt{3}$
۲) ۲
۳) ۴
۴) $4\sqrt{3}$

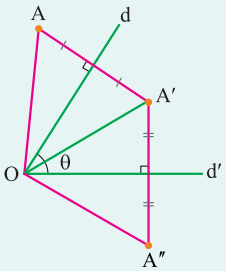
مشاوره این سؤال براساس تمرین ۵ صفحهٔ ۴۳ کتاب درسی طراحی شده است و به ترکیب دو بازتاب با محورهای متقاطع اختصاص دارد.

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint تبدیل بازتاب طولپا است و اندازهٔ پاره‌خط‌ها را ثابت نگه می‌دارد.

درس Box

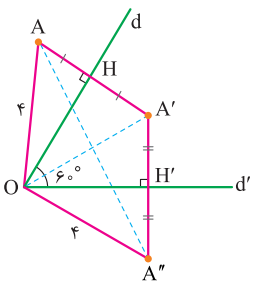
ترکیب دو بازتاب با محورهای متقاطع یک دوران است. به عبارت دیگر ترکیب دو بازتاب متوالی نسبت به خط‌های d و d' که در نقطهٔ O متقاطع‌اند و با یکدیگر زاویهٔ θ می‌سازند، دورانی به مرکز O و زاویهٔ 2θ است $(A\hat{O}A'' = 2\theta)$.



نکته مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصل‌ضرب دو ضلع در سینوس زاویهٔ بین آن‌ها.

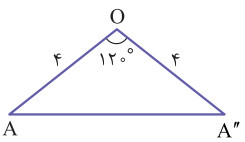
پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: طرحی برای مسئله رسم می‌کنیم. مطابق شکل نقطهٔ A را ابتدا نسبت به خط d بازتاب می‌دهیم تا نقطهٔ A' حاصل شود و سپس نقطهٔ A' را نسبت به خط d' بازتاب می‌دهیم تا نقطهٔ A'' به دست آید.



طبق توضیحات ارائه‌شده در درس‌باکس، ترکیب این دو بازتاب، دورانی به مرکز نقطهٔ O (محل تلاقی d و d') و زاویهٔ $A\hat{O}A'' = 2\times 60^\circ = 120^\circ$ است. از طرفی بازتاب تبدیلی طولپا است؛ پس $OA = OA' = OA'' = 4$.

گام دوم: مساحت مثلث OAA'' را با فرض $OA = OA'' = 4$ و $A\hat{O}A'' = 120^\circ$ از رابطهٔ سینوسی مساحت مثلث محاسبه می‌کنیم:



$$S_{\triangle OAA''} = \frac{1}{2}OA\times OA''\times \sin A\hat{O}A'' = \frac{1}{2}\times 4\times 4\times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۶ از بین مثلث‌هایی، مانند ABC که در ضلع $BC=۱۴$ مشترک‌اند و در آن‌ها $AB\times AC\times \sin\hat{A}=۳۳۶$ است، کم‌ترین مقدار محیط کدام است؟

۱) ۳۶ ۲) ۷۲

۳) ۴۸ ۴) ۶۴

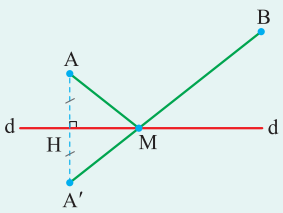
مشاوره این سؤال مشابه سؤالی از کنکور ریاضی داخل نوبت دوم ۱۴۰۲ طراحی شده است.

پاسخ: گزینهٔ ۴

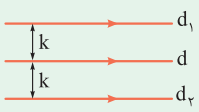
Hint با توجه به روابط داده‌شده، طول ارتفاع وارد بر ضلع BC را محاسبه کنید.

درس Box

مسئلهٔ هرون: فرض کنید دو نقطهٔ A و B در یک طرف خط d باشند و بخواهیم از نقطهٔ A به نقطه‌ای مانند M روی خط d رفته و از آن‌جا به نقطهٔ B برویم. برای پیداکردن کوتاه‌ترین طول ممکن برای خط شکستهٔ AMB، کافی است بازتاب نقطهٔ A را نسبت به خط d پیدا کنیم (نقطهٔ A') و سپس از A' به B وصل کنیم تا خط d را در نقطه‌ای مانند M قطع کند. نقطهٔ M همان نقطهٔ مورد نظر مسئله است.

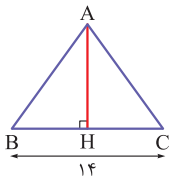


نکته مجموعهٔ نقاطی از یک صفحه که از یک خط ثابت مانند d در آن صفحه به فاصلهٔ ثابت k باشند، دو خط مانند $d_۱$ و $d_۲$ در طرفین خط d و موازی با آن و به فاصلهٔ k از خط d هستند.



پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: ابتدا مساحت مثلث ABC و سپس طول ارتفاع وارد بر ضلع BC را محاسبه می‌کنیم:

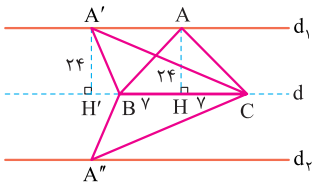


$$S_{\triangle ABC}=\frac{۱}{۲}\underbrace{AB\times AC\times \sin\hat{A}}_{۳۳۶}=\frac{۱}{۲}\times ۳۳۶=۱۶۸$$

$$S_{\triangle ABC}=\frac{۱}{۲}AH\times BC\Rightarrow ۱۶۸=\frac{۱}{۲}AH\times ۱۴\Rightarrow AH=۲۴$$

بنابراین رأس سوم مثلث ABC به فاصلهٔ ۲۴ واحد از پاره‌خط BC قرار دارد که در نتیجه روی یکی از دو خط موازی با BC و به فاصلهٔ ۲۴ واحد از آن واقع است.

گام دوم: برای این‌که محیط مثلث ABC کم‌ترین مقدار ممکن باشد، باید $AB+AC$ مینیمم شود؛ یعنی نقطهٔ A را روی خط $d_۱$ چنان می‌یابیم که مجموع فواصل آن از دو نقطهٔ ثابت B و C مینیمم باشد (مسئلهٔ هرون).



گام سوم: چون فاصلهٔ نقاط B و C از خط $d_۱$ برابر است، پس محل برخورد عمود منصف BC و خط $d_۱$ یعنی نقطهٔ A جواب مسئله است.

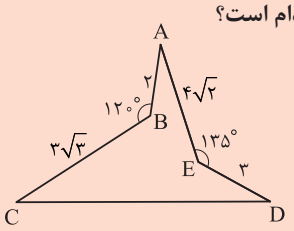
$$\triangle ABH: AB^۲=AH^۲+BH^۲=۲۴^۲+۷^۲=۲۵^۲\Rightarrow AB=۲۵\Rightarrow AC=۲۵$$

$$\min(\text{محیط}\triangle ABC)=AB+AC+BC=۲۵+۲۵+۱۴=۶۴$$

نکته در بین مثلث‌هایی که در آن‌ها طول یک ضلع و ارتفاع وارد بر آن ضلع مشخص است، کم‌ترین مقدار محیط زمانی رخ می‌دهد که مثلث متساوی‌الساقین باشد. (دو ضلع دیگر با هم برابر باشند.)

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۷ بیشترین میزان افزایش مساحت شکل زیر بدون تغییر در محیط و تعداد اضلاع کدام است؟



۱) ۱۹
۲) ۲۰
۳) ۲۱
۴) ۲۲

مشاوره این سؤال مشابه سؤالی از کنکور ریاضی داخل نوبت دوم ۱۴۰۳ طراحی شده است.

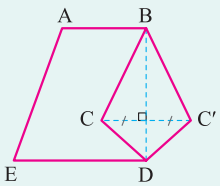
پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint بازتاب نقاط B و E را نسبت به خطوط گذرنده از دو رأس مجاور هر کدام از آن‌ها بیابید.

درس Box

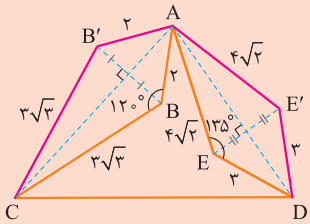
مسائل هم‌پیرامونی یا هم‌محیطی:

هرگاه بخواهیم مساحت یک چندضلعی را که یک یا چند زاویه در آن بزرگ‌تر از ۱۸۰° هستند بدون تغییر در محیط و تعداد اضلاع آن تا حد امکان افزایش دهیم، کافی است بازتاب هر کدام از رأس‌هایی که زاویهٔ آن‌ها بزرگ‌تر از ۱۸۰° است را نسبت به خط گذرنده از دو رأس مجاورشان رسم کنیم. مطابق شکل بیشترین میزان افزایش مساحت چندضلعی مقعر ABCDE بدون تغییر در تعداد اضلاع و محیط این چندضلعی، برابر مساحت چندضلعی $BCDC'$ خواهد بود که C' بازتاب C نسبت به خط BD است.



پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: مطابق شکل، بازتاب رأس B را نسبت به خط گذرنده از رئوس A و C رسم کرده و آن را B' می‌نامیم. به طور مشابه بازتاب رأس E را نسبت به خط گذرنده از رئوس A و D رسم کرده و آن را E' می‌نامیم.



میزان افزایش مساحت چندضلعی ABCDE بدون تغییر در محیط و تعداد اضلاع آن برابر مجموع مساحت‌های دو چهارضلعی $ABCB'$ و $AEDE'$ است.

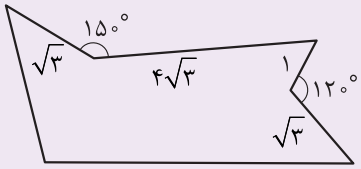
گام دوم: مقدار افزایش مساحت را محاسبه می‌کنیم:

$$S_{ABCB'} + S_{AEDE'} = ۲S_{ABC} + ۲S_{ADE} = ۲\times\frac{۱}{۲}AB\times BC\times\sin\hat{B} + ۲\times\frac{۱}{۲}AE\times ED\times\sin\hat{E}$$

$$= ۲\times\frac{۱}{۲}\times۲\times۳\sqrt{۳}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲} + ۲\times\frac{۱}{۲}\times۴\sqrt{۲}\times۳\times\frac{\sqrt{۲}}{۲} = ۹+۱۲ = ۲۱$$

میزان افزایش مساحت شکل زیر، بدون تغییر در محیط و تعداد اضلاع، کدام است؟

(سؤال ۳۱ کنکور ریاضی ۱۴۰۳ ـ نوبت دوم)



۱) ۱۵
۲) ۹
۳) ۷/۵
۴) ۴/۵

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۸ اگر در مثلث ABC داشته باشیم $۲a^۲ + ۳bc = ۲b^۲ + ۲c^۲$، آن‌گاه $\tan \hat{A}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۷}$

۲) $\frac{\sqrt{۷}}{۲}$

۳) $\frac{\sqrt{۷}}{۳}$

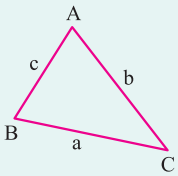
۴) $\frac{\sqrt{۷}}{۴}$

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint رابطهٔ داده‌شده از نظر ظاهری به قضیهٔ کسینوس‌ها نزدیک است؛ پس از این قضیه استفاده کنید.

درس Box

قضیهٔ کسینوس‌ها



در هر مثلث، مربع اندازهٔ هر ضلع برابر است با مجموع مربعات اندازه‌های دو ضلع دیگر، منهای دوبرابر حاصل‌ضرب اندازهٔ آن دو ضلع در کسینوس زاویهٔ بین آن‌ها.

به عنوان مثال در مثلث ABC می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} a^۲ = b^۲ + c^۲ - ۲bc.\cos \hat{A} \\ b^۲ = a^۲ + c^۲ - ۲ac.\cos \hat{B} \\ c^۲ = a^۲ + b^۲ - ۲ab.\cos \hat{C} \end{cases}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: طبق قضیهٔ کسینوس‌ها در مثلث ABC داریم: $a^۲ = b^۲ + c^۲ - ۲bc \cos \hat{A}$

رابطهٔ فوق را در عبارت صورت سؤال قرار می‌دهیم:

$$۲a^۲ + ۳bc = ۲b^۲ + ۲c^۲ \Rightarrow ۲(b^۲ + c^۲ - ۲bc \cos A) + ۳bc = ۲b^۲ + ۲c^۲$$

$$\Rightarrow ۲b^۲ + ۲c^۲ - ۴bc \cos \hat{A} + ۳bc = ۲b^۲ + ۲c^۲ \Rightarrow -۴bc \cos A + ۳bc = ۰ \Rightarrow \cos \hat{A} = \frac{۳bc}{۴bc} = \frac{۳}{۴}$$

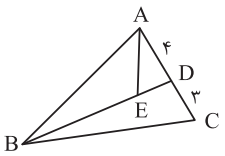
با توجه به مثبت‌بودن مقدار $\cos \hat{A}$، بدیهی است که زاویهٔ $\hat{A}$ حاده است.

گام دوم: مقدار $\tan \hat{A}$ را به کمک $\cos A$ محاسبه می‌کنیم:

$$۱ + \tan^۲ \hat{A} = \frac{۱}{\cos^۲ \hat{A}} = \frac{۱}{(\frac{۳}{۴})^۲} = \frac{۱۶}{۹} \Rightarrow \tan^۲ \hat{A} = \frac{۷}{۹} \xrightarrow{\text{A حاده است.}} \tan \hat{A} = \frac{\sqrt{۷}}{۳}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۹ در شکل زیر، AE نیمساز زاویهٔ A و BD نیمساز زاویهٔ B است. اگر $BE = ۲DE$، $AD = ۴$ و $DC = ۳$ باشد، محیط مثلث ABC کدام است؟



۱) ۲۰
۲) ۲۱
۳) ۲۲
۴) ۲۳

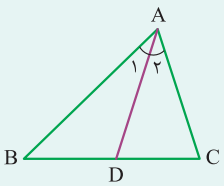
پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint از قضیهٔ نیمسازها به ترتیب در مثلث‌های ABD و ABC استفاده کنید.

درس Box

قضیهٔ نیمسازهای زوایای داخلی

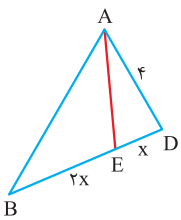
در هر مثلث، نیمساز هر زاویهٔ داخلی، ضلع روبه‌رو به آن زاویه را به نسبت اندازه‌های دو ضلع آن زاویه تقسیم می‌کند.



$$\hat{A}_۱ = \hat{A}_۲ \Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: طبق فرض $BE = ۲DE$. بنابراین می‌توان نوشت:

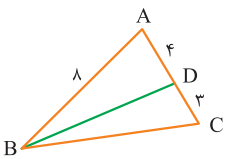


$$\begin{cases} BE = ۲x \\ DE = x \end{cases}$$

طبق قضیهٔ نیمسازهای زوایای داخلی در مثلث ABD داریم:

$$AE \text{ نیمساز است} \Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{BE}{DE} \Rightarrow \frac{AB}{۴} = \frac{۲x}{x} \Rightarrow AB = ۸$$

گام دوم: این بار قضیهٔ نیمسازهای زوایای داخلی را برای مثلث ABC می‌نویسیم:



$$BD \text{ نیمساز است} \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC} \Rightarrow \frac{۸}{BC} = \frac{۴}{۳} \Rightarrow BC = ۶$$

گام سوم: محیط مثلث ABC برابر است با:

$$AB + AC + BC = ۸ + ۷ + ۶ = ۲۱$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۰ در مثلثی با اضلاع ۳، ۲۵ و ۲۶، طول بلندترین ارتفاع کدام است؟

۱) $\frac{۳۶}{۱۳}$ ۲) ۲۰ ۳) ۲۴ ۴) ۲۵

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint در صورتی که طول سه ضلع مثلث را در اختیار داشته باشیم و این مقادیر اعداد رادیکالی نباشند، برای محاسبهٔ مساحت مثلث از قضیهٔ هرون استفاده می‌کنیم.

درس Box **قضیهٔ هرون:** مثلث ABC به طول اضلاع $BC = a$، $AC = b$ و $AB = c$ را در نظر بگیرید. اگر S و P به ترتیب مساحت و نصف محیط این مثلث باشند، آن‌گاه داریم:

$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$$

نکته بلندترین ارتفاع مثلث بر کوچک‌ترین ضلع مثلث وارد می‌شود.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** فرض کنید در مثلث ABC، $a = ۳$، $b = ۲۵$ و $c = ۲۶$ باشد. طبق قضیهٔ هرون داریم:

$$P = \frac{۳+۲۵+۲۶}{۲} = ۲۷$$

$$S = \sqrt{۲۷(۲۷-۳)(۲۷-۲۵)(۲۷-۲۶)} = \sqrt{۲۷\times۲۴\times۲\times۱} = ۳۶$$

گام دوم: ضلع به طول $a = ۳$ کوچک‌ترین ضلع مثلث است؛ پس ارتفاع نظیر این ضلع، بلندترین ارتفاع مثلث است:

$$S = \frac{۱}{۲}a\times h_a \Rightarrow ۳۶ = \frac{۱}{۲}\times۳\times h_a \Rightarrow h_a = \frac{۷۲}{۳} = ۲۴$$

مثلثی به طول اضلاع ۶، ۱۰ و ۱۴ را در نظر بگیرید. *(هندسه (۲) ـ سؤال ۱۶ (قسمت (ب)) ـ امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۴)*

الف) با استفاده از قضیهٔ کسینوس‌ها، اندازهٔ زاویهٔ مقابل به بزرگ‌ترین ضلع مثلث را محاسبه کنید.

ب) به کمک دستور هرون، طول ارتفاع وارد بر کوچک‌ترین ضلع مثلث را به دست آورید.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۱ p گزاره‌ای درست، q گزاره‌ای نادرست و r گزاره‌ای دلخواه است.

ارزش گزاره‌های $[(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)]$ و $[p \wedge r \Leftrightarrow q \vee \sim r]$ به ترتیب به کدام صورت است؟

۱) مانند r ـ مانند $\sim r$

۲) T ـ F

۳) مانند r ـ F

۴) مانند r ـ T

مشاوره از موضوع منطق معمولاً یک سؤال در کنکور می‌آید که حتماً باید حل شود.

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint

ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ فقط در حالت «ن $\Rightarrow$ د» نادرست است و ترکیب دوشرطی $p \Leftrightarrow q$ فقط وقتی درست است که p و q هم‌ارزش باشند.

درس Box

ارزش گزاره‌های ترکیبی: نقیض ـ فصلی ـ عطفی ـ شرطی ـ دوشرطی

نقیض: نقیض گزارهٔ p به صورت $\sim p$ نوشته می‌شود و آن را «چنین نیست که p» می‌خوانیم. ارزش گزارهٔ $\sim p$ برعکس ارزش گزارهٔ p است.

ترکیب فصلی دو گزاره: گزارهٔ مرکب $(p \vee q)$ به صورت p یا q خوانده می‌شود. این ترکیب فقط وقتی غلط است که هر دو غلط باشند.

ترکیب عطفی دو گزاره: گزارهٔ مرکب $(p \wedge q)$ به صورت p و q خوانده می‌شود. این ترکیب فقط وقتی درست است که هر دو درست باشند.

ترکیب شرطی: گزارهٔ مرکب $(p \Rightarrow q)$ به صورت «اگر p آن‌گاه q» خوانده می‌شود. جدول ارزشی آن به صورت زیر است:

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	ن	د
ن	د	د

← ترکیب شرطی به انتفای مقدم درست است.

عکس و عکس نقیض ترکیب شرطی: گزارهٔ $(q \Rightarrow p)$ عکس ترکیب شرطی $(p \Rightarrow q)$ و گزارهٔ $\sim q \Rightarrow \sim p$ عکس نقیض ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ است.

ترکیب دوشرطی دو گزاره: گزارهٔ مرکب $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ را به صورت $(p \Leftrightarrow q)$ می‌نویسیم و آن را ترکیب دوشرطی p و q می‌نامیم. گزارهٔ $(p \Leftrightarrow q)$ را به صورت «اگر p، آن‌گاه q و برعکس»، «p شرط لازم و کافی برای q است» می‌خوانیم. این ترکیب وقتی درست است که ارزش q و p مانند هم باشند.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: چون q نادرست است، پس $q \Rightarrow r$ به انتفای مقدم درست است. p هم درست است؛ بنابراین گزارهٔ اول به صورت «د $\Rightarrow$ د» درمی‌آید که درست است.

گام دوم: p درست است، پس $p \wedge r \equiv r$ چون اگر r درست باشد $p \wedge r$ درست و اگر r نادرست باشد $p \wedge r$ نادرست است.

گام سوم: q نادرست است، پس $q \vee \sim r$ دقیقاً هم‌ارز $\sim r$ است، یعنی $q \vee \sim r \equiv \sim r$.

گام چهارم: $r \Leftrightarrow \sim r$ نادرست است، چون ارزش r و $\sim r$ قطعاً نقیض هم است، پس گزارهٔ دوم نادرست است.

گام پنجم: گزارهٔ اول همواره T و گزارهٔ دوم همواره F است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۲ یکی از زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $\{1,2,...,6\}$ را به تصادف انتخاب می‌کنیم. اگر اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عضو زیرمجموعه برابر ۴ باشد، با کدام احتمال، زیرمجموعه ۳عضوی است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{2}$

۳) $\frac{3}{8}$ ۴) $\frac{7}{16}$

مشاوره این سؤال دشوارشدهٔ سؤال کنکور ۱۴۰۳ است که در قالب احتمال شرطی مطرح شده است. حتماً آن را تحلیل کنید.

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint

ببینید در چه مجموعه‌هایی اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عضو، برابر ۴ است.

درس Box

تعداد زیرمجموعه‌ها:

تعداد کل زیرمجموعه‌های مجموعهٔ n عضوی: 2^n

تعداد کل زیرمجموعه‌های مجموعهٔ n عضوی شامل یا فاقد k عضو خاص: 2^{n-k}

تعداد کل زیرمجموعه‌های r عضوی مجموعهٔ n عضوی: $\binom{n}{r}$

تعداد کل زیرمجموعه‌های r عضوی مجموعهٔ n عضوی شامل k عضو خاص: $\binom{n-k}{r-k}$

تعداد کل زیرمجموعه‌های r عضوی مجموعهٔ n عضوی فاقد k عضو خاص: $\binom{n-k}{r}$

نکته $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n$

احتمال شرطی:

احتمال شرطی: می‌دانیم A رخ داده است و احتمال B را می‌خواهیم: $P(B|A)$.

ادبیات دیگر: احتمال B به شرط آن‌که بدانیم A رخ داده است.

فرمول احتمال شرطی: $P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)} \xrightarrow{\text{در فضای هم‌شانس}} P(B|A)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: با توجه به صورت سؤال می‌فهمیم با احتمال شرطی مواجه هستیم. پیشامد آن‌که اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عضو برابر ۴ باشد را A و پیشامد این‌که زیرمجموعهٔ ۳عضوی باشد را B می‌گیریم، پس باید $P(B|A)$ را به دست آوریم.

گام دوم: داریم: $P(B|A)=\frac{n(B\cap A)}{n(A)}$.

گام سوم: در دو حالت، ممکن است اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عضو زیرمجموعه برابر ۴ باشد:

حالت اول: $\{1,\bigcirc,\bigcirc,\bigcirc,5\}$ ، حالت دوم: $\{2,\bigcirc,\bigcirc,\bigcirc,6\}$

حالت اول: ۲حالت × ۲حالت × ۲حالت = ۸ ، حالت دوم: $2\times2\times2=8$

گام چهارم: در حالت اول، هر کدام از عضوهای بین ۱ و ۵ یعنی اعداد ۲ و ۳ و ۴ دو حالت دارند؛ ممکن است عضو زیرمجموعه باشند یا نباشند (شبیه همین حالت دوم)، پس: $n(A)=8+8=16$.

گام پنجم: از بین عضوهای A، عضوهایی که شرط B را دارند جدا می‌کنیم. مثلاً در حالت $\{1,\bigcirc,\bigcirc,\bigcirc,5\}$ برای این‌که زیرمجموعه، ۳عضوی باشد کافی است یکی از ۳ عدد ۲ و ۳ و۴، را انتخاب کنیم، پس:

$$n(B\cap A)=\binom{3}{1}+\binom{3}{1}=3+3=6$$

گام ششم: داریم:

$$P(B|A)=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$$

در چند زیرمجموعه از مجموعهٔ $\{12,13,15,18,23,24,25,26\}$ حاصل‌ضرب کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عضو، مضرب ۱۰ است؟ *(سؤال ۲۷ کنکور ریاضی ۱۴۰۳ ـ نوبت دوم)*

۱) ۵۹ ۲) ۶۰ ۳) ۶۱ ۴) ۶۲

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۳ **A، B، X و Y مجموعه‌هایی هستند که $X\times Y\subseteq A\cap(A-B)'$ و $X\times Y\subseteq A'\cup B'$. کدام نتیجه‌گیری الزاماً درست است؟ ($\times$ علامت ضرب دکارتی است.)**

۱) $(X=U)\vee(Y=U)$

۲) $(X=\varnothing)\vee(Y=\varnothing)$

۳) $(X=U)\wedge(Y=U)$

۴) $(X=\varnothing)\wedge(Y=\varnothing)$

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint اگر $X\subseteq A$ و $X\subseteq A'$ باشد، آن‌گاه $X=\varnothing$.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:**

$$A\cap(A-B)'=A\cap(A\cap B')'=A\cap(A'\cup B)$$

$$=\underbrace{(A\cap A')}_{\varnothing}\cup(A\cap B)=A\cap B$$

پس: $X\times Y\subseteq A\cap B$

گام دوم: طبق قانون دمورگان $A'\cup B'=(A\cap B)'$، پس $X\times Y\subseteq(A\cap B)'$.

گام سوم: اگر $\square\subseteq A$ و $\square\subseteq A'$ باشد، $\square\subseteq A\cap A'=\varnothing$، پس داریم:

$$X\times Y\subseteq(A\cap B)\cap(A\cap B)'=\varnothing$$

گام چهارم: $X\times Y=\varnothing$، پس X یا Y باید تهی باشد. یعنی:

$$Y=\varnothing\vee X=\varnothing$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۴ ۳ نفر می‌خواهند بین خودشان تک بیاورند (هر فرد رو یا پشت دست خود را نشان بدهد). چند پیشامد در این آزمایش تصادفی می‌توان تعریف کرد؟

۱) ۶

۲) ۸

۳) ۶۴

۴) ۲۵۶

مشاوره از مبحث احتمال دو سؤال در کنکور می‌آید که معمولاً یکی از مبحث احتمال هم‌شانس و غیرهم‌شانس و دیگری از احتمال شرطی و نتایج آن یا پیشامدهای مستقل و وابسته است.

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint از اصل ضرب استفاده کنید.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: هر فرد دو حالت برای بازی دارد، پس ۳ نفر به $۲\times۲\times۲=۸$ حالت می‌توانند رو یا پشت دست خود را نشان دهند.

گام دوم: پیشامد، زیرمجموعهٔ فضای نمونه است، پس $۲^۸=۲۵۶$ پیشامد می‌توانیم تعریف کنیم.

احمد و عباس با هم یک مرتبه سنگ، کاغذ، قیچی بازی می‌کنند. فضای نمونه برای این بازی چیست؟ فضای نمونه چند عضو دارد؟ در چه تعداد از برآمدها احمد برندهٔ بازی است؟ *(آمار و احتمال ـ تمرین ۱ صفحهٔ ۴۳ کتاب درسی)*

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۵ فضای نمونهٔ یک آزمایش تصادفی به صورت $S=\{a,b,c,d,e\}$ است. اگر $P(\{a,b,d,e\})=۷۰P(\{a,b,c,d\})=۱۰$ و $P(\{b,c,d,e\})=۰/۹$ باشد، احتمال آن‌که هیچ‌کدام از b و d رخ ندهد کدام است؟

۱) ۰/۷ ۲) ۰/۶

۳) ۰/۴ ۴) ۰/۳

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint اگر A و A' دو زیرمجموعهٔ فضای نمونه باشند، $P(A)+P(A')=۱$.

درس Box

احتمال غیر هم‌شانس:

فضای نمونهٔ غیر هم‌شانس: هرگاه حداقل دو پیشامد تک‌عضوی از فضای نمونه‌ای $S=\{s_۱,s_۲,...,s_n\}$ احتمال نابرابر داشته باشند، S را فضای نمونه‌ای با احتمال غیرهم‌شانس می‌گوییم.

در فضای نمونه‌ای متناهی با احتمال غیرهم‌شانس،اگر $S=\{s_۱,s_۲,...,s_n\}$ فضای نمونه‌ای و $A=\{a_۱,a_۲\}$ یک زیرمجموعه از S باشد، همواره داریم:

$$P(S)=P(s_۱)+P(s_۲)+\cdots+P(s_n)=۱$$

نتیجه

$$P(A)=P(a_۱)+P(a_۲)$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: مجموع تک‌تک احتمال‌ها برابر یک است، پس داریم:

$$\underbrace{P(\overbrace{\{b,c,d,e\}}^{A})}_{۰/۹}+P(a)=۱ \Rightarrow P(a)=۰/۱$$

گام دوم: $P(\{a,b,c,d\})=۰/۷$، پس شبیه گام اول $P(e)=۰/۳$.

گام سوم: شبیه بالا $P(\{a,b,d,e\})=۰/۷$، پس $P(c)=۰/۳$.

گام چهارم: احتمال آن‌که هیچ‌کدام از b و d رخ ندهد یعنی a یا c یا e رخ بدهد که برابر مجموع احتمال آن‌ها می‌شود:

$$P(a)+P(c)+P(e)=۰/۱+۰/۳+۰/۳=۰/۷$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۶ **کیسه‌ای دارای ۳ مهرهٔ آبی و ۳ مهرهٔ قرمز است. یک کارت به تصادف از بین شماره‌های ۱ تا ۴ خارج می‌کنیم و به همان تعداد، مهره از کیسه خارج می‌کنیم. با کدام احتمال، همهٔ مهره‌ها هم‌رنگ هستند؟**

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۲}{۵}$ ۴) $\frac{۳}{۸}$

مشاوره طراحان کنکور قانون احتمال کل (یا بیز) را خیلی دوست دارند. حتماً آن را بلد باشید.

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint از قانون احتمال شاخه‌ای استفاده کنید.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: از قانون احتمال کل (احتمال شاخه‌ای) استفاده می‌کنیم. هر شماره با احتمال $\frac{۱}{۴}$ خارج می‌شود. اگر کارت ۱ خارج شود ۱ مهره، اگر کارت ۲ خارج شود ۲ مهره خارج می‌کنیم و ... .

گام دوم:

$$\xrightarrow{\frac{۱}{۴}} \text{۱ مهره خارج می‌کنیم} \Rightarrow \frac{\binom{۳}{۱}+\binom{۳}{۱}}{\binom{۶}{۱}} = \frac{۶}{۶} = ۱ \quad \text{(یکی آبی یا یکی قرمز)}$$

$$\xrightarrow{\frac{۱}{۴}} \text{۲ مهره خارج می‌کنیم} \Rightarrow \frac{\binom{۳}{۲}+\binom{۳}{۲}}{\binom{۶}{۲}} = \frac{۳+۳}{۱۵} = \frac{۲}{۵} \quad \text{(هر دو آبی یا هر دو قرمز)}$$

$$\xrightarrow{\frac{۱}{۴}} \text{۳ مهره خارج می‌کنیم} \Rightarrow \frac{\binom{۳}{۳}+\binom{۳}{۳}}{\binom{۶}{۳}} = \frac{۱+۱}{۲۰} = \frac{۱}{۱۰} \quad \text{(هر سه آبی یا هر سه قرمز)}$$

$$\xrightarrow{\frac{۱}{۴}} \text{۴ مهره خارج می‌کنیم} \Rightarrow \text{(امکان ندارد هر ۴ مهره، هم‌رنگ باشند) صفر}$$

گام سوم: از قانون احتمال کل داریم:

$$P(A) = (\frac{۱}{۴}\times ۱) + (\frac{۱}{۴}\times\frac{۲}{۵}) + (\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۱۰}) + (\frac{۱}{۴}\times ۰)$$

$$= \frac{۱}{۴}(۱+\frac{۲}{۵}+\frac{۱}{۱۰}) = \frac{۱}{۴}\times\frac{۱۰+۴+۱}{۱۰} = \frac{۱}{۴}\times\frac{۱۵}{۱۰} = \frac{۳}{۸}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۷ احتمال قبولی زهرا و ارشیا در آزمون رانندگی به ترتیب برابر ۰/۴۵ و ۰/۶ است. احتمال آن‌که فقط زهرا در آزمون قبول شود چه‌قدر است؟

۱) ۰/۴۵ ۲) ۰/۱۸

۳) ۰/۲۷ ۴) ۰/۱۵

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint

دو پیشامد، مستقل هستند.

درس Box

A و B را دو پیشامد مستقل می‌گوییم؛ هرگاه رخداد یا عدم رخداد یکی تأثیری در محاسبهٔ احتمال دیگری نداشته باشد.

تعریف ریاضی مستقل‌بودن دو پیشامد:

$$A, B \text{ مستقل‌اند} \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

نکته

- اگر A و B مستقل نباشند (تساوی بالا برقرار نباشد)، دو پیشامد را وابسته گوییم.
- اگر A و B مستقل باشند، رخداد یا عدم رخداد A، تأثیری در محاسبهٔ احتمال B ندارد؛ یعنی:

$$P(B|A) = P(B|A') = P(B) \qquad (P(A) \neq ۰)$$

- اگر A و B مستقل باشند:

الف) $\underbrace{A, B' \text{ مستقل}}_{P(A \cap B') = P(A) \times P(B')}$

ب) $\underbrace{B, A' \text{ مستقل}}_{P(B \cap A') = P(B) \times P(A')}$

پ) $\underbrace{A', B' \text{ هم‌مستقل هستند}}_{P(A' \cap B') = P(A') \times P(B')}$

(یعنی احتمال اشتراک هر دوتایی از آن‌ها برابر ضرب احتمال آن‌ها می‌شود.)

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: پیشامد قبولی زهرا و ارشیا مستقل از هم است. پیشامد قبولی زهرا و ارشیا را به ترتیب A و B در نظر می‌گیریم، پس کافی است $P(A \cap B')$ را به دست آوریم.

گام دوم: چون دو پیشامد A و B مستقل‌اند A و B' هم مستقل‌اند و داریم:

$$P(A \cap B') = P(A) \times P(B')$$

$$= P(A) \times (۱ - P(B))$$

$$= ۰/۴۵ \times \underbrace{(۱ - ۰/۶)}_{۰/۴} = ۰/۱۸$$

احتمال قبولی زهرا در درس فیزیک، ۹۰ درصد و احتمال قبولی ریحانه در این درس، ۷۰ درصد است. احتمال این‌که حداقل یکی از آن‌ها در این درس قبول شود، را به دست آورید. *(آمار و احتمال ـ مثال (۲) صفحهٔ ۶۴ کتاب درسی)*

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۸ میانهٔ داده‌های $۶, a, ۱۱, ۱۶, ۱۵, ۱۰$ برابر $۱۲/۵$ است. میانگین داده‌ها کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint ببینید a بین کدام دو عدد می‌تواند باشد.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** برای به دست آوردن میانه، اول باید داده‌ها را مرتب کنیم. ترتیب داده‌های غیر از a به صورت زیر است:

$۶, ۱۰, ۱۱, ۱۵, ۱۶$

گام دوم: چون ۶ داده داریم، پس دو داده در وسط قرار می‌گیرند که میانگین آن‌ها همان میانه است. عدد a به دو صورت (الف) و (ب) می‌تواند در بین داده‌های مرتب‌شده باشد تا میانگین دو عدد وسط برابر $۱۲/۵$ شود. (دقت دارید که اگر $a < ۱۰$ یا $a > ۱۵$ باشد میانگین دو عددی که در وسط قرار می‌گیرند، $۱۲/۵$ نمی‌شود.)

الف: $۶, ۱۰, \underbrace{a, ۱۱}, ۱۵, ۱۶$

$$\text{میانه} = \frac{a+۱۱}{۲} = ۱۲/۵ \Rightarrow a = ۱۴$$

ب: $۶, ۱۰, \underbrace{۱۱, a}, ۱۵, ۱۶$

$$\text{میانه} = \frac{۱۱+a}{۲} = ۱۲/۵ \Rightarrow a = ۱۴$$

گام سوم: ترتیب داده‌ها به صورت (ب) است چون $۱۱ < ۱۴$ است.

گام چهارم: میانگین داده‌ها را به دست می‌آوریم:

$$\bar{x} = \frac{۶+۱۰+۱۱+۱۴+۱۵+۱۶}{۶} = \frac{۷۲}{۶} = ۱۲$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۹ داده‌های اولیهٔ $x_1, x_2, \ldots, x_5$ در اختیار است. اگر واریانس داده‌های $x_1, x_2-1, x_3, x_4, x_5$ و $x_1+1, x_2-1, x_3, x_4, x_5$ مقدار $\frac{1}{5}$ کم‌تر از واریانس داده‌های قبلی باشد، $x_1 - x_2$ کدام است؟

۱) $-1/5$
۲) $1/5$
۳) $0/5$
۴) $-0/5$

مشاوره در سال‌های اخیر تنها سؤال آمار معمولاً از مبحث واریانس بوده است مثل این سؤال که دشوارشدهٔ سؤال کنکور ۱۴۰۳ است.

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint میانگین، ثابت می‌ماند. حالا از فرمول واریانس استفاده کنید.

درس Box

شاخص‌های پراکندگی:

۱) **دامنهٔ تغییرات:**

$$R = x_{max} - x_{min}$$

۲) **واریانس جامعه:**

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

۳) **انحراف معیار:** برابر با جذر واریانس است.

- واریانس پنج عدد متوالی، همواره ۲ است.
- اگر n داده، تشکیل دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت d بدهند واریانس برابر است با: $\sigma^2 = \frac{n^2-1}{12}d^2$.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: میانگین داده‌های دستهٔ دوم برابر است با:

$$\frac{x_1+1+x_2-1+x_3+x_4+x_5}{5} = \frac{x_1+\cdots+x_5}{5}$$

پس میانگین دو دسته برابر است. فرض کنیم میانگین دو دسته برابر $\bar{x}$ باشد.

گام دوم: واریانس دو گروه را می‌نویسیم:

$$(\text{دستهٔ اول})\ \sigma_1^2 = \frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_5-\bar{x})^2}{5}$$

$$(\text{دستهٔ دوم})\ \sigma_2^2 = \frac{\overbrace{(x_1+1-\bar{x})^2}^{(x_1-\bar{x}+1)^2}+\overbrace{(x_2-1-\bar{x})^2}^{(x_2-\bar{x}-1)^2}+(x_3-\bar{x})^2+\cdots+(x_5-\bar{x})^2}{5}$$

$$= \frac{(x_1-\bar{x})^2+2(x_1-\bar{x})+1+(x_2-\bar{x})^2-2(x_2-\bar{x})+1+\cdots}{5}$$

گام سوم: در صورت هر دو کسر، $\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2$ وجود دارد که اگر آن را A فرض کنیم داریم:

$$\frac{A}{5} - \frac{1}{5} = \frac{2(x_1-\bar{x})+1-2(x_2-\bar{x})+1+A}{5}$$

$$\xrightarrow{\times 5} A-1 = 2(x_1-x_2)+2+A \Rightarrow x_1-x_2 = -\frac{3}{2} = -1/5$$

میانگین دستهٔ اول با ۵ دادهٔ مختلف برابر میانگین دستهٔ دوم با ۶ داده است. به طوری که تنها دادهٔ متفاوت بین دو دسته، دادهٔ a است. اگر واریانس دستهٔ اول $\frac{2}{3}$ از واریانس دستهٔ دوم بیشتر باشد، واریانس دستهٔ اول کدام است؟

(سؤال ۲۳ کنکور ریاضی ۱۴۰۳ ـ نوبت دوم)

۱) ۱
۲) $2/25$
۳) ۴
۴) $6/25$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۰ در یک نمونه‌گیری اگر اندازهٔ نمونه را ۳۹تا بیشتر کنیم نسبت طول بازهٔ اطمینان ۹۵٪ میانگین به‌دست‌آمده با نمونهٔ بیشتر، $\frac{۵}{۸}$ طول بازهٔ قبلی است. اندازهٔ نمونهٔ اولیه چه‌قدر بوده است؟

۱) ۲۵ ۲) ۶۲۵
۳) ۸ ۴) ۱۶

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint طول بازهٔ اطمینان برابر $\frac{۴\sigma}{\sqrt{n}}$ است.

درس Box **برآورد بازه‌ای برای میانگین جامعه:** اگر نمونه‌ای تصادفی به اندازهٔ n با میانگین $\bar{x}$ در اختیار داشته باشیم، با اطمینان بیش از ۹۵٪ می‌توانیم بگوییم:

$$\bar{x}-\frac{۲\sigma}{\sqrt{n}}\le\mu\le\bar{x}+\frac{۲\sigma}{\sqrt{n}}$$

دقت کنید که μ میانگین جامعه و σ انحراف معیار جامعه است.

- اگر برآورد میانگین، بازهٔ (a,b) باشد دو نکتهٔ مهم می‌فهمیم:

$$\text{طول بازه}=b-a=\frac{۴\sigma}{\sqrt{n}} \qquad \text{وسط بازه}=\frac{b+a}{۲}=\bar{x}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول:** طول بازهٔ اطمینان ۹۵٪ میانگین، برابر $\frac{۴\sigma}{\sqrt{n}}$ است.

گام دوم: فرض کنیم نمونهٔ اولیه به اندازهٔ n باشد، پس اندازهٔ نمونهٔ جدید $n+۳۹$ می‌شود.

گام سوم:

$$\frac{\text{طول بازهٔ جدید}}{\text{طول بازهٔ قدیم}}=\frac{\frac{۴\sigma}{\sqrt{n+۳۹}}}{\frac{۴\sigma}{\sqrt{n}}}=\frac{۵}{۸}\Rightarrow\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+۳۹}}=\frac{۵}{۸}$$

$$\Rightarrow\frac{n}{n+۳۹}=\frac{۲۵}{۶۴}\Rightarrow ۶۴n=۲۵n+۲۵\times۳۹$$

$$\Rightarrow ۳۹n=۲۵\times۳۹\Rightarrow n=۲۵$$

برای برآورد میانگین درآمد افراد یک جامعه، از دو نمونهٔ تصادفی استفاده کرده‌ایم. اندازهٔ نمونهٔ دوم را طوری انتخاب می‌کنیم که انحراف معیار برآورد میانگین با نمونهٔ دوم، $\frac{۲}{۳}$ برابر مقدار محاسبه‌شده با نمونهٔ اول باشد، اندازهٔ نمونهٔ دوم، چند برابر نمونهٔ اول است؟ *(سؤال ۱۲۸ کنکور ریاضی ۱۴۰۱ - نوبت دوم)*

۱) ۱/۵ ۲) ۲/۲۵
۳) ۲/۷۵ ۴) ۳/۵

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۱ مساحت هر یک از صفحه‌های خازن تختی، $10\ cm^2$ و فاصلهٔ دو صفحه از هم $0/5\ mm$ است. عایقی با ثابت دی‌الکتریک ۴ بین دو صفحه قرار داده شده است. ظرفیت این خازن چند پیکوفاراد است؟ $(\varepsilon_0 = 9\times10^{-12}\ F/m)$

۱) ۷/۲ ۲) ۷۲ ۳) ۱/۸ ۴) ۱۸

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint رابطهٔ ظرفیت خازن تخت را بنویسید و با یک جای‌گذاری ساده به جواب برسید.

درس Box ظرفیت خازن تختی که با دی‌الکتریکی با ثابت κ کاملاً پر شده است، از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$C = \kappa\varepsilon_0 \frac{A}{d}$ (A: مساحت هر یک از صفحه‌های خازن، d: فاصلهٔ بین صفحه‌های خازن، κ: ثابت دی‌الکتریک)

$\varepsilon_0 = 8/85\times10^{-12}\ F/m$: ضریب گذردهی الکتریکی خلأ

پاسخ خیلی تشریحی ✓ ظرفیت خازن به صورت زیر به دست می‌آید:

$$C = \kappa\varepsilon_0 \frac{A}{d} \xrightarrow[d=0/5\ mm=0/5\times10^{-3}\ m]{A=10\ cm^2=10\times10^{-4}\ m^2} C = 4\times9\times10^{-12}\times\frac{10\times10^{-4}}{0/5\times10^{-3}} = 72\times10^{-12}\ F$$

$$\xrightarrow{10^{-12}\ F=1\ pF} C = 72\ pF$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۲ **کدام‌یک از موارد زیر درست است؟**

۱) با افزایش دمای رساناها، مقاومت الکتریکی آن‌ها کاهش می‌یابد.

۲) با افزایش دمای نیم‌رساناها، مقاومت الکتریکی آن‌ها افزایش می‌یابد.

۳) با افزایش شدت نور تابیده به یک LDR، مقاومت الکتریکی آن افزایش می‌یابد.

۴) در پدیدهٔ ابررسانایی، با کاهش دمای برخی مواد، مقاومت ویژهٔ آن‌ها به صورت ناگهانی به صفر افت می‌کند.

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

۱) در رساناهای فلزی، با افزایش دما، تعداد حامل‌های بار (این‌جا الکترون‌های آزاد) تقریباً ثابت می‌ماند، ولی ارتعاشات کاتوره‌ای اتم‌ها و یون‌ها افزایش می‌یابد. این عامل موجب افزایش برخورد حامل‌های بار با شبکهٔ اتمی رسانای فلزی می‌شود و به این ترتیب، مقاومت الکتریکی رسانا افزایش می‌یابد.

۲) در نیم‌رساناها، در دماهای پایین، تعداد حامل‌های بار ناچیز است و نیم‌رسانا، مانند یک نارسانا رفتار می‌کند. با افزایش دما، نشان داده می‌شود بر تعداد این حامل‌های بار افزوده می‌گردد. اگرچه با افزایش دما، تعداد برخوردهای کاتوره‌ای حامل‌های بار با شبکهٔ اتمی افزایش می‌یابد، اما تأثیر افزایش تعداد حامل‌های بار بیشتر از افزایش این برخوردهای کاتوره‌ای است. به این ترتیب، مقاومت ویژهٔ نیم‌رساناها با افزایش دما کاهش می‌یابد.

۳) **مقاومت‌های نوری (LDR)**: مقاومت نوری، نوعی مقاومت است که مقاومت الکتریکی آن به نور تابیده‌شده به آن بستگی دارد، به طوری‌که با افزایش شدت نور، از مقاومت الکتریکی آن کاسته می‌شود.

۴) **پدیدهٔ ابررسانایی**: در برخی مواد، مانند **جیوه** و **قلع** با کاهش دما، مقاومت ویژه در دمای خاصی **به صورت ناگهانی** به صفر افت می‌کند و در دماهای پایین‌تر، هم‌چنان صفر می‌ماند.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ با توجه به درس‌باکس بالا، گزینهٔ (۴) درست است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۳ اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر لامپی $۴\,V$ و مقاومت الکتریکی آن $۵\,\Omega$ است. در مدت ۵ دقیقه چه تعداد الکترون از این لامپ می‌گذرد؟ $(e = ۱/۶\times۱۰^{-۱۹}\,C)$

۱) $۲/۵\times۱۰^{۲۰}$
۲) $۲/۵\times۱۰^{۲۱}$
۳) $۱/۵\times۱۰^{۲۰}$
۴) $۱/۵\times۱۰^{۲۱}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint ابتدا به کمک رابطهٔ مقاومت الکتریکی، جریان عبوری از لامپ را به دست آورید. سپس به کمک رابطهٔ جریان الکتریکی، تعداد الکترون‌های عبوری از لامپ در مدت ۵ دقیقه را حساب کنید.

درس Box

۱) **رابطهٔ مقاومت الکتریکی:**

$$R = \frac{V}{I}$$

(V: اختلاف پتانسیل الکتریکی، I: جریان الکتریکی)

۲) **رابطهٔ جریان الکتریکی:**

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{ne}{\Delta t}$$

(Δq: بار الکتریکی، Δt: مدت زمان، n: تعداد الکترون، e: بار الکترون: $e = ۱/۶\times۱۰^{-۱۹}\,C$)

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: جریان الکتریکی عبوری از لامپ را حساب می‌کنیم:

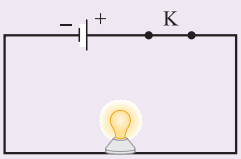
$$R = \frac{V}{I} \Rightarrow ۵ = \frac{۴}{I} \Rightarrow I = ۰/۸\,A$$

گام دوم: تعداد الکترون‌های عبوری از لامپ در مدت ۵ دقیقه برابر است با:

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{ne}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t = ۵\,min = ۵\times۶۰\,s} ۰/۸ = \frac{n\times۱/۶\times۱۰^{-۱۹}}{۵\times۶۰} \Rightarrow n = \frac{۰/۸\times۵\times۶۰}{۱/۶\times۱۰^{-۱۹}} = ۱/۵\times۱۰^{۲۱}$$

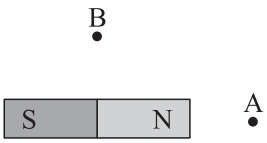
در مدار شکل زیر اختلاف پتانسیل دو سر لامپ $۴/۰\,V$ و مقاومت آن $۵/۰\,\Omega$ است. در مدت ۵ دقیقه چه تعداد الکترون از لامپ می‌گذرد؟

(فیزیک (۲) ـ تمرین ۲ صفحهٔ ۷۹ کتاب درسی)



SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۴ در شکل زیر، دو عقربهٔ مغناطیسی در دو نقطهٔ A و B قرار می‌گیرند. جهت‌گیری این دو عقربه به ترتیب از راست به چپ کدام است؟



۱) → و →
۲) → و ←
۳) ← و →
۴) ← و ←

پاسخ: گزینهٔ ۲

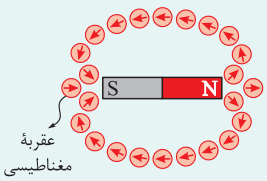
Hint

برای تعیین جهت عقربهٔ مغناطیسی قرارگرفته در نقاط A و B، کافیست خطوط میدان مغناطیسی آهنربای میله‌ای را در اطراف آن رسم کنید.

درس Box

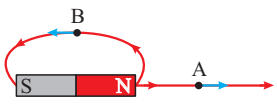
۱) خطوط میدان مغناطیسی در اطراف آهنربا، از قطب N خارج و به قطب S وارد می‌شوند.

۲) بردار میدان مغناطیسی در هر نقطه، در جهت عقربهٔ مغناطیسی است.



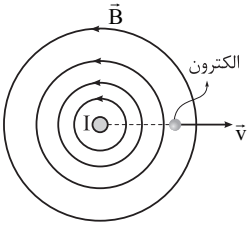
پاسخ خیلی تشریحی ✔

اگر مانند شکل زیر، دو تا از خط‌های میدان مغناطیسی آهنربا که از نقاط A و B عبور می‌کنند را رسم کنیم، جهت میدان مغناطیسی که همان جهت عقربهٔ مغناطیسی قرارگرفته در این نقاط است، تعیین می‌شود.



SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۵ خطوط میدان مغناطیسی در اطراف سیم مستقیم حامل جریان و عمود بر صفحهٔ کاغذ، به شکل زیر است. به ترتیب، از راست به چپ جهت جریان عبوری از این سیم و جهت نیروی مغناطیسی وارد بر الکترونی که در جهت نشان داده‌شده پرتاب شده، کدام است؟



۱) ⊗ ، ⊗

۲) ⊙ ، ⊗

۳) ⊗ ، ⊙

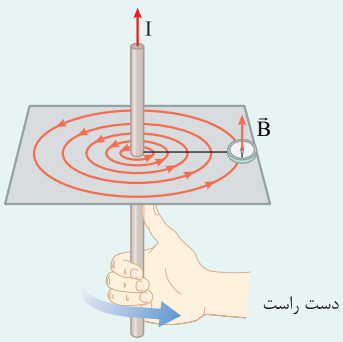
۴) ⊙ ، ⊙

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

۱) تعیین جهت میدان مغناطیسی حاصل از یک سیم مستقیم حامل جریان:

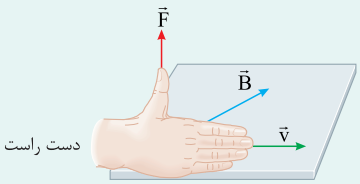
با استفاده از قاعدهٔ دست راست، می‌توان این جهت را تعیین کرد؛ مطابق این قاعده، اگر سیم را در دست راست خود بگیرید به گونه‌ای که انگشت شست در جهت جریان الکتریکی باشد، جهت خم‌شدن چهار انگشت دست راست شما جهت خط‌های میدان مغناطیسی را در اطراف سیم نشان می‌دهد (شکل الف).



(الف)

۲) قاعدهٔ دست راست برای تعیین جهت نیروی مغناطیسی وارد بر ذرهٔ باردار:

طبق این قاعده، اگر چهار انگشت باز دست راست را طوری در جهت بردار سرعت ذره ($\vec{v}$) قرار دهیم که بردار میدان مغناطیسی ($\vec{B}$) از کف دست خارج شود، شست دست جهت نیروی مغناطیسی وارد بر ذره با بار مثبت را نشان می‌دهد (شکل ب) را ببینید.



(ب)

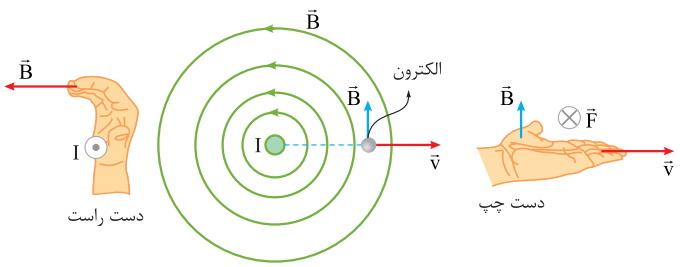
نکته اگر بار ذره منفی باشد، این قاعده را با دست چپ اجرا می‌کنیم.

علامت بار ذره	جهت نیروی مغناطیسی وارد بر ذره
مثبت	قاعدهٔ دست راست
منفی	قاعدهٔ دست راست را با دست چپ اجرا می‌کنیم.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: مطابق شکل زیر، براساس قاعدهٔ دست راست، جریان عبوری از سیم مستقیم، برون‌سو (⊙) است.

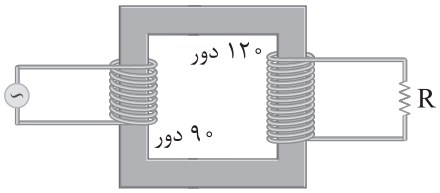
گام دوم: با توجه به خطوط میدان مغناطیسی، میدان مغناطیسی در محل الکترون به سمت بالا است. حالا مطابق شکل زیر، با توجه به بار منفی الکترون، از دست چپ کمک می‌گیریم تا جهت نیروی مغناطیسی وارد بر الکترون تعیین شود. همان‌طور که می‌بینید، این نیرو درون‌سو (⊗) است.



گول نخوری اگر برای تعیین جهت نیروی مغناطیسی وارد بر الکترون، به منفی‌بودن بار الکترون توجه نکنید، راهتان به گزینهٔ نادرست (۴) ختم می‌شود.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۶ در مبدل آرمانی شکل زیر، بیشینهٔ ولتاژ دو سر مقاومت R برابر ۷/۲ V است. بیشینهٔ ولتاژ مولد برحسب ولت و نوع این مبدل، به ترتیب کدام است؟



۱) ۴/۵، افزاینده

۲) ۴/۵، کاهنده

۳) ۶/۹، افزاینده

۴) ۶/۹، کاهنده

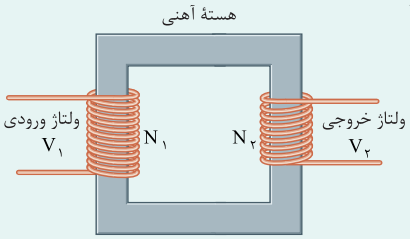
پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint

به کمک رابطهٔ مبدل آرمانی، بیشینهٔ ولتاژ مبدل (بیشینهٔ ولتاژ ورودی) را به دست آورید و با مقایسهٔ ولتاژهای ورودی و خروجی، نوع مبدل را تعیین کنید.

درس Box

برای یک مبدل آرمانی که مقاومت پیچه‌های آن ناچیز است، رابطهٔ زیر برقرار است:



$$\frac{\text{ولتاژ خروجی } V_2}{\text{ولتاژ ورودی } V_1} = \frac{\text{تعداد دور پیچهٔ ثانویه } N_2}{\text{تعداد دور پیچهٔ اولیه } N_1}$$

- اگر ولتاژ خروجی بیشتر از ولتاژ ورودی باشد، مبدل افزاینده است.
- اگر ولتاژ خروجی کم‌تر از ولتاژ ورودی باشد، مبدل کاهنده است.

پاسخ خیلی تشریحی

بیشینهٔ ولتاژ مولد همان بیشینهٔ ولتاژ ورودی است که به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{N_2}{N_1} \Rightarrow \frac{۷/۲}{V_1} = \frac{۱۲۰}{۹۰} \Rightarrow V_1 = \frac{۹۰ \times ۷/۲}{۱۲۰} = ۵/۴\ V$$

چون مبدل، ولتاژ ورودی را افزایش داده است، از نوع افزاینده است.

تیزبازی

از روی شکل مبدل مشخص است که تعداد دورهای پیچهٔ ثانویه بیشتر از تعداد دورهای پیچهٔ اولیه است؛ بنابراین مبدل افزاینده است *(ردگزینه‌های (۲) و (۴))* و ولتاژ ورودی باید کم‌تر از ولتاژ خروجی باشد *(ردگزینهٔ (۳))*.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۷ دو بار الکتریکی نقطه‌ای $q_1 = 16\ nC$ و $q_2 = 12\ nC$ در فاصلهٔ ۱۰ سانتی‌متری از هم قرار دارند. اندازهٔ میدان الکتریکی خالص حاصل از این دو بار، در نقطه‌ای به فاصلهٔ $8\ cm$ از بار q_1 و $6\ cm$ از بار q_2 چند نیوتون بر کولن است؟ $(k = 9\times10^9\ \frac{N.m^2}{C^2})$

۱) $3/75\times10^3$
۲) $3/75\times10^4$
۳) $7/5\times10^3$
۴) $7/5\times10^4$

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint
با استفاده از اطلاعات صورت سؤال، شکلی از مکان بارها و نقطهٔ مورد نظر رسم کنید، سپس میدان الکتریکی حاصل از هر یک از بارها را در نقطهٔ مورد نظر رسم و اندازهٔ آن را به دست آورید. در پایان اندازهٔ برایند این دو بردار را حساب کنید.

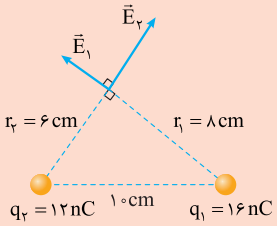
درس Box
۱) اندازهٔ میدان الکتریکی در فاصلهٔ r از بار نقطه‌ای q از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$E = k\frac{|q|}{r^2} \qquad (\text{ثابت کولن: } k = 9\times10^9\ \frac{N.m^2}{C^2})$$

۲) مطابق شکل‌های زیر، خطوط میدان الکتریکی از بار مثبت خارج و به بار منفی وارد می‌شوند.



پاسخ خیلی تشریحی
گام اول: محل قرارگیری بارهای الکتریکی و نقطهٔ مورد نظر مطابق شکل زیر است. همان‌طور که می‌بینید، ساختار به صورت مثلث قائم‌الزاویه (۶، ۸ و ۱۰) است. میدان الکتریکی حاصل از هر یک از بارها در رأس قائمه را به صورت زیر رسم کرده و اندازهٔ هر کدام را به دست می‌آوریم:



$$E_1 = k\frac{|q_1|}{r_1^2} = 9\times10^9\times\frac{16\times10^{-9}}{(8\times10^{-2})^2} = 2/25\times10^4\ N/C$$

$$E_2 = k\frac{|q_2|}{r_2^2} = 9\times10^9\times\frac{12\times10^{-9}}{(6\times10^{-2})^2} = 3\times10^4\ N/C$$

گام دوم: اندازهٔ میدان الکتریکی خالص در رأس قائمه برابر است با:

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} = \sqrt{(2/25\times10^4)^2 + (3\times10^4)^2} = 10^4\sqrt{\underset{\downarrow}{2/25}^2 + \underset{\downarrow}{3}^2}$$

$2/25 \to 0/75\times3$ ، $3 \to 0/75\times4$

$$= 10^4\times(5\times0/75) = 3/75\times10^4\ N/C$$

تیزبازی
اندازهٔ میدان الکتریکی خالص در رأس قائمه که برایند دو بردار عمود بر هم $\vec{E}_1$ و $\vec{E}_2$ است، باید از E_2 بزرگ‌تر و از $E_1 + E_2$ کوچک‌تر باشد، یعنی عددی بین $3\times10^4\ N/C$ و $5/25\times10^4\ N/C$. با نگاهی به گزینه‌ها، گزینهٔ (۲) جواب تست است.

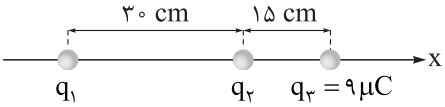
بارهای الکتریکی $q_1 = 3/0\times10^{-8}\ C$ و $q_2 = 1/6\times10^{-7}\ C$ در فاصلهٔ ۵ سانتی‌متری از یکدیگر قرار دارند. اندازهٔ میدان الکتریکی خالص در نقطه‌ای به فاصلهٔ $3\ cm$ از بار q_1 و $4\ cm$ از بار q_2، چند نیوتون بر کولن است؟ $(k = 9\times10^9\ \frac{N.m^2}{C^2})$

(سؤال ۶۵ کنکور تجربی ۱۴۰۴ ـ نوبت اول)

۱) $5\sqrt{3}\times10^5$
۲) $3\sqrt{10}\times10^5$
۳) $2\sqrt{5}\times10^5$
۴) $2\sqrt{2}\times10^5$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۸ در شکل زیر نیروی الکتریکی خالص وارد بر هر یک از بارهای الکتریکی نقطه‌ای برابر صفر است. بار $q_۳$ را به اندازهٔ ۱۵ cm در جهت محور x جابه‌جا می‌کنیم. در این حالت، نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار $q_۳$ برحسب نیوتون کدام است؟ $(k = ۹\times۱۰^۹ \frac{N.m^۲}{C^۲})$



۱) $۴/۵\vec{i}$

۲) $-۴/۵\vec{i}$

۳) $۱۱/۷\vec{i}$

۴) $-۱۱/۷\vec{i}$

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint

با بررسی صفرشدن نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار $q_۲$، بار $q_۱$ به دست می‌آید. هم‌چنین با بررسی صفرشدن نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار $q_۳$، بار $q_۲$ به دست می‌آید. در ادامه، بار $q_۳$ را به مکان جدید منتقل کرده و به کمک قانون کولن، اندازهٔ نیروهای الکتریکی که بارهای $q_۱$ و $q_۲$ به آن وارد می‌کنند را حساب می‌کنیم. در پایان، نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار $q_۳$ به راحتی محاسبه می‌شود.

درس Box

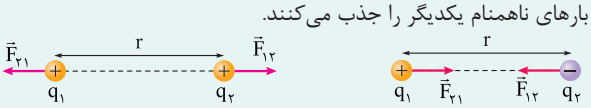
۱) **قانون کولن**: دو بار نقطه‌ای $q_۱$ و $q_۲$ که در فاصلهٔ r از یکدیگر قرار دارند، به هم نیروی الکتریکی وارد می‌کنند که اندازهٔ آن از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$F = k\frac{|q_۱||q_۲|}{r^۲} \quad (\text{ثابت کولن: } k = ۹\times۱۰^۹ \frac{N.m^۲}{C^۲})$$

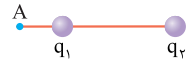
تکنیک محاسباتی ۹۰: چون در بیشتر سؤال‌های این مبحث، بارها را برحسب میکروکولن و فاصله‌ها را برحسب سانتی‌متر می‌دهند، می‌توانید در رابطهٔ بالا، کمیت‌ها را با همین یکاها جای‌گذاری کرده و به جای k، ۹۰ را قرار دهید تا F برحسب نیوتون به دست آید.

$$F = ۹۰\times\frac{|q_۱||q_۲|}{r^۲}$$
(بارها برحسب μC، r برحسب cm)

۲) مطابق شکل زیر، بارهای همنام یکدیگر را دفع و بارهای ناهمنام یکدیگر را جذب می‌کنند.



۳) دو بار الکتریکی $q_۱$ و $q_۲$ در فاصلهٔ معینی از یکدیگر، روی محوری قرار دارند. بار سوم $q_۳$ در چه نقطه‌ای روی این محور قرار بگیرد تا نیروی الکتریکی خالص وارد بر آن برابر صفر شود؟ برای پاسخ به این سؤال، جدول زیر به کارتان می‌آید:

	موقعیت نقطهٔ مورد نظر (نقطهٔ A)	شکل (فرض: $\|q_۱\| < \|q_۲\|$)
$q_۱$ و $q_۲$ همنام باشند.	حد فاصل بین دو بار و نزدیک‌تر به بار با اندازهٔ کم‌تر	
$q_۱$ و $q_۲$ ناهمنام باشند.	خارج از فاصلهٔ بین دو بار و نزدیک‌تر به بار با اندازهٔ کم‌تر	

پاسخ خیلی تشریحی ✔

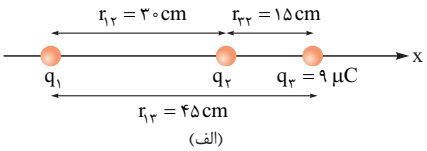
گام اول: صفرشدن نیروی الکتریکی خالص وارد بر با $q_۲$ را بررسی می‌کنیم تا بار $q_۱$ به دست آید. چون بار $q_۲$ بین بارهای $q_۱$ و $q_۳$ قرار دارد، بارهای $q_۱$ و $q_۳$ باید همنام باشند، پس $q_۱ > ۰$ است. با توجه به شکل (الف)، اندازهٔ $q_۱$ هم به صورت زیر به دست می‌آید:

$$F_{net(۲)} = ۰ \Rightarrow F_{۱۲} = F_{۳۲} \Rightarrow k\frac{|q_۱||q_۲|}{r_{۱۲}^۲} = k\frac{|q_۳||q_۲|}{r_{۳۲}^۲}$$

$$\Rightarrow \frac{|q_۱|}{۳۰^۲} = \frac{۹}{۱۵^۲} \Rightarrow |q_۱| = ۲^۲\times۹ = ۳۶\ \mu C \xrightarrow{q_۱>۰} q_۱ = ۳۶\ \mu C$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

گام دوم: با بررسی صفرشدن نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار q_3، بار q_2 هم به دست می‌آید. چون بار q_3 خارج از فاصلهٔ بین بارهای q_1 و q_2 است، بارهای q_1 و q_2 باید ناهمنام باشند، پس $q_2 < 0$ است. با توجه به شکل (الف)، اندازهٔ q_2 را حساب می‌کنیم:

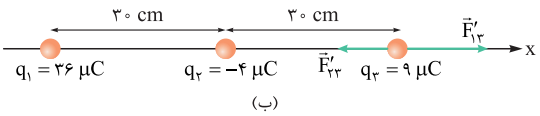


(الف)

$$F_{net(3)} = 0 \Rightarrow F_{13} = F_{23} \Rightarrow k\frac{|q_1||q_3|}{r_{13}^2} = k\frac{|q_2||q_3|}{r_{23}^2}$$

$$\Rightarrow \frac{36}{45^2} = \frac{|q_2|}{15^2} \Rightarrow |q_2| = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times 36 = 4\,\mu C \xrightarrow{q_2<0} q_2 = -4\,\mu C$$

گام سوم: حالا مطابق شکل (ب)، بار q_3 را $15\,cm$ در جهت محور x جابه‌جا و نیروهای وارد بر آن را رسم می‌کنیم. نیروی الکتریکی خالص وارد بر q_3 حساب می‌کنیم:



(ب)

$$F'_{13} = k\frac{|q_1||q_3|}{(r'_{13})^2} \xrightarrow{\text{تکنیک محاسباتی ۹۰}} F'_{13} = 90 \times \frac{36 \times 9}{60^2} = 8/1\,N \xrightarrow{\vec{F}'_{13}\text{ در جهت محور x}} \vec{F}'_{13} = (8/1\,N)\vec{i}$$

$$F'_{23} = k\frac{|q_2||q_3|}{(r'_{23})^2} \xrightarrow{\text{تکنیک محاسباتی ۹۰}} F'_{13} = 90 \times \frac{4 \times 9}{30^2} = 3/6\,N \xrightarrow{\vec{F}'_{23}\text{ در خلاف جهت محور x}} \vec{F}'_{23} = (-3/6\,N)\vec{i}$$

$$\vec{F}'_{net(3)} = \vec{F}'_{13} + \vec{F}'_{23} = (8/1\,N)\vec{i} + (-3/6\,N)\vec{i} = (4/5\,N)\vec{i}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۹ در یک میدان الکتریکی یکنواخت به بزرگی $۵\times۱۰^{۵}\ N/C$ که جهت آن قائم و رو به پایین است، ذرهٔ بارداری به جرم $۲\ g$ معلق و به حال سکون قرار دارد. این ذره چند الکترون و چگونه مبادله کند تا بار الکتریکی آن خنثی شود؟ $(e=۱/۶\times۱۰^{-۱۹}\ C \text{ و } g=۱۰\ N/kg)$

نیروی خالص وارد بر ذره، برابر صفر است.

۱) $۲/۵\times۱۰^{۱۱}$، دریافت کند.

۲) $۲/۵\times۱۰^{۱۱}$، از دست دهد.

۳) $۲/۵\times۱۰^{۱۳}$، دریافت کند.

۴) $۲/۵\times۱۰^{۱۳}$، از دست دهد.

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint

ابتدا با بررسی تعادل ذره، علامت و اندازهٔ بار ذره به دست می‌آید، سپس با توجه به علامت بار ذره و به کمک اصل کوانتیده‌بودن بار الکتریکی، خواستهٔ تست تعیین می‌شود.

درس Box

۱) ذره‌ای با بار q در میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{E}$ قرار دارد:

- **اندازهٔ نیروی الکتریکی وارد بر این ذره:** $F=E|q|$
- **جهت نیروی الکتریکی وارد بر این ذره:**

علامت بار ذره	جهت نیروی الکتریکی وارد بر ذره
مثبت	هم‌جهت با میدان الکتریکی
منفی	در خلاف جهت میدان الکتریکی

۲) **اصل کوانتیده‌بودن بار الکتریکی:** بار الکتریکی هر جسم، همواره مضرب درستی از بار الکتریکی پایه است:

$Q=\pm ne \quad (n=۱, ۲, ۳, \ldots$ و بار الکتریکی پایه: $e=۱/۶\times۱۰^{-۱۹}\ C)$

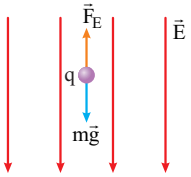
پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: مطابق شکل زیر، به ذره نیروی رو به پایین وزن وارد می‌شود؛ بنابراین برای این‌که ذره معلق و به حال سکون باشد، لازم است که نیروی الکتریکی وارد بر آن رو به بالا و هم‌اندازه با نیروی وزن باشد.

$\vec{F}_E$ و $\vec{E}$ در خلاف جهت یکدیگرند، در نتیجه بار ذره منفی است. داریم:

$$F_E=mg \Rightarrow E|q|=mg \xrightarrow[g=۱۰\ N/kg]{m=۲\times۱۰^{-۳}\ kg} ۵\times۱۰^{۵}\times|q|=۲\times۱۰^{-۳}\times۱۰$$

$$\Rightarrow |q|=\frac{۲\times۱۰^{-۲}}{۵\times۱۰^{۵}}=۴\times۱۰^{-۸}\ C \xrightarrow{q<۰} q=-۴\times۱۰^{-۸}\ C$$

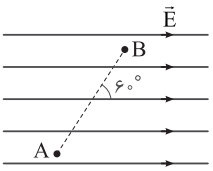


گام دوم: بار ذره منفی است؛ بنابراین برای این‌که بار الکتریکی آن خنثی شود، باید تعدادی الکترون از دست بدهد. این تعداد برابر است با:

$$q=-ne \Rightarrow -۴\times۱۰^{-۸}=-n\times۱/۶\times۱۰^{-۱۹} \Rightarrow n=\frac{۴\times۱۰^{-۸}}{۱/۶\times۱۰^{-۱۹}}=۲/۵\times۱۰^{۱۱}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۰ در شکل زیر، در میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{E}$ به بزرگی $۴\times۱۰^{۳}\ N/C$، ذره‌ای به بار الکتریکی $-۵\ \mu C$ از نقطهٔ A تا نقطهٔ B جابه‌جا می‌شود. اگر $AB = ۶۰\ cm$ باشد، کدام‌یک از موارد زیر درست است؟



الف) در این جابه‌جایی، کار انجام‌شده توسط نیروی الکتریکی برابر $-۶\ mJ$ است.

ب) در این جابه‌جایی، انرژی پتانسیل الکتریکی ذره $۱۲\ mJ$ افزایش می‌یابد.

پ) پتانسیل الکتریکی نقطهٔ A از پتانسیل الکتریکی نقطهٔ B، $۲۴۰۰\ V$ بیشتر است.

ت) پتانسیل الکتریکی نقطهٔ A از پتانسیل الکتریکی نقطهٔ B، $۱۲۰۰\ V$ کم‌تر است.

۱) الف

۲) الف و ت

۳) ب

۴) ب و پ

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

۱) اگر ذره‌ای با بار q، از نقطهٔ A تا B جابه‌جا شود و کار نیروی میدان در این جابه‌جایی برابر W_E باشد:

- تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی ذره در این جابه‌جایی برابر است با: $\Delta U_E = -W_E$
- اختلاف پتانسیل الکتریکی بین دو نقطهٔ A و B از رابطهٔ زیر به دست می‌آید: $\Delta V = V_B - V_A = \frac{\Delta U_E}{q}$

دقت کنید که در رابطهٔ بالا، q با علامتش جای‌گذاری می‌شود.

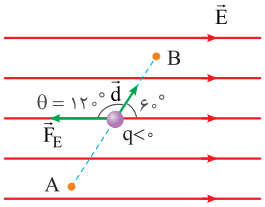
۲) **تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی ذرهٔ باردار q:**

$$\Delta U_E = -E\,|q|\,d\cos\theta$$

(E: میدان الکتریکی، d: جابه‌جایی، θ: زاویهٔ بین بردارهای نیروی الکتریکی و جابه‌جایی)

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: با توجه به شکل زیر، تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی ذره را به دست می‌آوریم:



$$\Delta U_E = -E\,|q|\,d\cos\theta \xrightarrow[d=۶۰\ cm=۰/۶\ m]{q=-۵\ \mu C=-۵\times۱۰^{-۶}\ C} \Delta U_E = -۴\times۱۰^{۳}\times۵\times۱۰^{-۶}\times۰/۶\times\underbrace{\cos۱۲۰^{\circ}}_{-\frac{۱}{۲}}$$

$$\Rightarrow \Delta U_E = ۶\times۱۰^{-۳}\ J \xrightarrow{۱۰^{-۳}\ J=۱\ mJ} \Delta U_E = ۶\ mJ$$ (نادرستی گزینهٔ «پ»)

کار نیروی الکتریکی برابر است با:

$$W_E = -\Delta U_E = -۶\ mJ$$ (درستی گزینهٔ «الف»)

گام دوم: اختلاف پتانسیل الکتریکی بین نقاط A و B به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\Delta V_{AB} = V_B - V_A = \frac{\Delta U_E}{q} = \frac{۶\times۱۰^{-۳}}{-۵\times۱۰^{-۶}} = -۱۲۰۰\ V$$

یعنی پتانسیل الکتریکی نقطهٔ A، از پتانسیل الکتریکی نقطهٔ B، $۱۲۰۰\ V$ بیشتر است (نادرستی گزینه‌های «پ» و «ت»).

گول نخوری

در رابطهٔ $\Delta V = \frac{\Delta U_E}{q}$ حتماً باید علامت q را هم در نظر بگیرید. بی‌دقتی در این موضوع، می‌تواند باعث شود که گزینهٔ (۲) را انتخاب کنید.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۱ بار الکتریکی کرهٔ رسانایی به شعاع $10\ cm$ برابر $60\ \mu C$ است. چگالی سطحی بار الکتریکی این کره در SI کدام است؟ $(\pi = 3)$

۱) 5×10^{-3}
۲) 5×10^{-4}
۳) 2×10^{-3}
۴) 2×10^{-4}

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint کافی است رابطهٔ چگالی سطحی بار الکتریکی را نوشته و اطلاعات صورت سؤال را جای‌گذاری کنید تا به جواب برسید.

درس Box اگر روی سطحی به مساحت A، بار الکتریکی Q توزیع شده باشد، چگالی سطحی بار از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\sigma = \frac{Q}{A}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ رابطهٔ چگالی سطحی بار الکتریکی ما را به جواب می‌رساند:

$$\sigma = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{4\pi r^2} \xrightarrow[r=10\ cm=0/1\ m]{Q=60\ \mu C=60\times10^{-6}\ C} \sigma = \frac{60\times10^{-6}}{4\times3\times(0/1)^2} = \frac{60}{12}\times10^{-4} = 5\times10^{-4}\ C/m^2$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۲ اگر اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر خازنی به ظرفیت $۵\ \mu F$، ۳ برابر شود، انرژی ذخیره‌شده در آن $۰/۵\ mJ$ تغییر می‌کند. بار الکتریکی ذخیره‌شده در خازن در حالت اول چند میکروکولن است؟

۱) ۲۵ ۲) ۵۰

۳) ۷۵ ۴) ۱۰۰

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint

رابطهٔ تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی ذخیره‌شده در خازن را بنویسید تا اختلاف پتانسیل دو صفحهٔ خازن در حالت اول به دست آید، سپس به کمک رابطهٔ ظرفیت خازن، بار الکتریکی خازن را در حالت اول حساب کنید.

درس Box

۱) اگر بار الکتریکی روی صفحه‌های خازنی برابر Q و اختلاف پتانسیل بین صفحه‌های آن برابر V باشد، ظرفیت خازن برابر است با:

$$C = \frac{Q}{V}$$

۲) انرژی ذخیره‌شده در خازنی به ظرفیت C که اختلاف پتانسیل بین صفحه‌های آن V است، از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$U = \frac{۱}{۲}CV^۲$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: با افزایش اختلاف پتانسیل دو سر خازن، انرژی پتانسیل الکتریکی ذخیره‌شده در آن افزایش می‌یابد. با این فرض که اختلاف پتانسیل الکتریکی اولیهٔ دو سر خازن برابر $V_۱$ باشد، اختلاف پتانسیل الکتریکی ثانویهٔ دو سر خازن برابر $۳V_۱$ است؛ بنابراین:

$$\Delta U = \frac{۱}{۲}C(V_۲^۲ - V_۱^۲) \xrightarrow[C=۵\ \mu F=۵\times۱۰^{-۶}\ F]{\Delta U=۰/۵\ mJ=۰/۵\times۱۰^{-۳}\ J} ۰/۵\times۱۰^{-۳} = \frac{۱}{۲}\times۵\times۱۰^{-۶}\times((۳V_۱)^۲ - V_۱^۲)$$

$$\Rightarrow ۸V_۱^۲ = \frac{۱۰^{-۳}}{۵\times۱۰^{-۶}} \Rightarrow V_۱^۲ = ۲۵ \xrightarrow{\text{جذر}} V_۱ = ۵\ V$$

گام دوم: به کمک رابطهٔ ظرفیت خازن، خواستهٔ سؤال به دست می‌آید:

$$C = \frac{Q_۱}{V_۱} \Rightarrow ۵ = \frac{Q_۱}{۵} \Rightarrow Q_۱ = ۲۵\ \mu C$$

حواستون باشه! گزینهٔ (۳) بار الکتریکی ذخیره‌شده در خازن در حالت دومه.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۳ مقاومت الکتریکی میله‌ای مسی به طول $40\ cm$ و جرم $800\ g$ چند اهم است؟ (چگالی مس $9\ g/cm^3$ و مقاومت ویژهٔ آن $1/7\times10^{-8}\ \Omega.m$ است.)

۱) $3/06\times10^{-3}$
۲) $3/06\times10^{-4}$
۳) $3/06\times10^{-5}$
۴) $3/06\times10^{-6}$

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint

ابتدا به کمک رابطهٔ چگالی، مساحت مقطع سیم را حساب کنید، سپس به کمک رابطهٔ مقاومت الکتریکی، خواستهٔ سؤال به دست می‌آید.

درس Box

۱) **رابطهٔ مقاومت الکتریکی یک رسانا:**

$$R=\rho\frac{L}{A}$$

(ρ: مقاومت ویژهٔ رسانا، L: طول رسانا، A: مساحت مقطع رسانا)

۲) **چگالی:**

$$\rho=\frac{m}{V}$$

(ρ: چگالی، m: جرم، V: حجم)

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: به کمک رابطهٔ چگالی، مساحت مقطع سیم را حساب می‌کنیم:

$$\rho'=\frac{m}{V}=\frac{m}{AL}\Rightarrow 9=\frac{800}{A\times40}\Rightarrow A=\frac{20}{9}\ cm^2$$

گام دوم: مقاومت الکتریکی سیم را به دست می‌آوریم:

$$R=\rho\frac{L}{A}=1/7\times10^{-8}\times\frac{0/4}{\frac{20}{9}\times10^{-4}}=\frac{1/7\times3/6}{20}\times10^{-4}=3/06\times10^{-5}\ \Omega$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۴ اگر جریان الکتریکی عبوری از یک منبع نیروی محرکه از ۵ A به ۷ A برسد، توان خروجی آن از ۹/۵ W به ۱۲/۶ W می‌رسد. در حالتی که از این منبع نیروی محرکه، جریان الکتریکی ۶ A عبور می‌کند، توان خروجی آن چند وات است؟

۱) ۱۱/۰۵ ۲) ۱۱/۱

۳) ۱۲/۰۵ ۴) ۱۲/۱

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint

رابطهٔ توان خروجی باتری را به ازای دو جریان الکتریکی داده‌شده بنویسید و با حل دستگاه دو معادله ـ دو مجهول، نیروی محرکه و مقاومت درونی باتری را حساب کنید. در پایان، رابطهٔ توان خروجی باتری را برای جریان ۶ A بنویسید و خواستهٔ سؤال را به دست آورید.

درس Box

توان خروجی باتری:

$$P_{\text{خروجی}} = \varepsilon I - rI^2$$

(ε: نیروی محرکهٔ باتری، I: جریان عبوری از باتری، r: مقاومت درونی باتری)

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: رابطهٔ توان خروجی باتری را برای هر یک از جریان‌ها می‌نویسیم و با حل دستگاه دو معادله ـ دو مجهول، نیروی محرکه و مقاومت درونی باتری را حساب می‌کنیم:

$$P_{\text{خروجی}} = \varepsilon I - rI^2 \Rightarrow \begin{cases} ۹/۵ = \varepsilon \times ۵ - r \times (۵)^2 \Rightarrow ۵\varepsilon - ۲۵r = ۹/۵ \\ ۱۲/۶ = \varepsilon \times ۷ - r \times (۷)^2 \Rightarrow ۷\varepsilon - ۴۹r = ۱۲/۶ \xrightarrow{\times \frac{۵}{۷}} \end{cases} \begin{cases} ۵\varepsilon - ۲۵r = ۹/۵ \\ ۵\varepsilon - ۳۵r = ۹ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{رابطهٔ بالا} - \text{رابطهٔ پایین}} ۱۰r = ۰/۵ \Rightarrow r = ۰/۰۵\ \Omega$$

$$\xrightarrow{\text{جای‌گذاری در یکی از رابطه‌ها}} ۵\varepsilon - ۲۵ \times ۰/۰۵ = ۹/۵ \Rightarrow ۵\varepsilon = ۹/۵ + ۱/۲۵ \Rightarrow \varepsilon = \frac{۱۰/۷۵}{۵} = ۲/۱۵\ \text{V}$$

گام دوم: توان خروجی باتری به ازای عبور جریان ۶ A به صورت زیر حساب می‌شود:

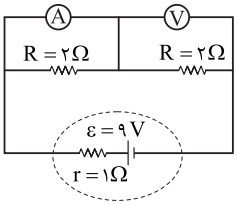
$$P_{\text{خروجی}} = ۲/۱۵I - ۰/۰۵I^2 \xrightarrow{I=۶\ \text{A}} P_{\text{خروجی}} = ۲/۱۵ \times ۶ - ۰/۰۵ \times ۶^2 = ۱۲/۹ - ۱/۸ = ۱۱/۱\ \text{W}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۵ در مدار شکل زیر، به ترتیب از راست به چپ، ولت‌سنج آرمانی چند ولت و آمپرسنج آرمانی چند آمپر را نشان می‌دهد؟

جریانی از ولت‌سنج عبور نمی‌کند.

همهٔ جریان از آمپرسنج عبور می‌کند و مقاومت موازی با آن اتصال کوتاه می‌شود.

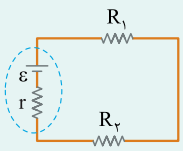


۱) ۳/۶ ، ۱/۸
۲) ۶ ، ۱/۸
۳) ۳/۶ ، ۳
۴) ۶ ، ۳

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

در مدار شکل روبه‌رو:



- **جریان کل مدار (جریان عبوری از باتری):**

$$I = \frac{\varepsilon}{R_1 + R_2 + r}$$

- **اختلاف پتانسیل دو سر هر یک از مقاومت‌ها:**

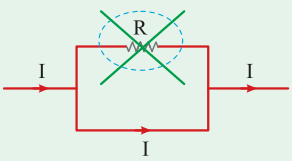
$$V_1 = R_1 I \ , \ V_2 = R_2 I$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

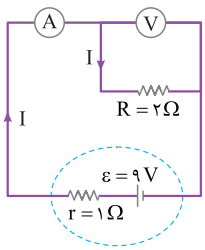
گام اول:

نکته

مطابق شکل روبه‌رو، اگر دو سر یک مقاومت، با سیم (بدون مقاومت) به یکدیگر متصل شوند، از این مقاومت جریانی عبور نمی‌کند و این مقاومت اصطلاحاً اتصال کوتاه شده و از مدار حذف می‌شود. در این حالت، همهٔ جریان ورودی به گره، از سیم عبور خواهد کرد.



مقاومت الکتریکی آمپرسنج آرمانی تقریباً صفر است؛ بنابراین با توجه به نکتهٔ بالا، مقاومت ۲ اُهمی سمت چپ اتصال کوتاه شده و از مدار حذف می‌شود. با توجه به شکل روبه‌رو، جریان عبوری از آمپرسنج که همان جریان عبوری از باتری است به صورت زیر محاسبه می‌شود:



$$I = \frac{\varepsilon}{R + r} = \frac{۹}{۲+۱} = ۳\ A$$

گام دوم: ولت‌سنج آرمانی، اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت ۲ اُهمی را نشان می‌دهد، پس:

$$V = RI = ۲ \times ۳ = ۶\ V$$

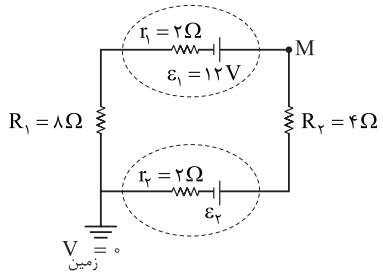
گول‌نخوری ✘

گزینهٔ (۱) می‌تواند تاوان کسانی باشد که اتصال کوتاه‌شدن مقاومت ۲ اُهمی را در نظر نمی‌گیرند.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۶ در مدار شکل زیر، اگر پتانسیل الکتریکی نقطهٔ M برابر ۷ V باشد، توان ورودی باتری ۲، برابر چند وات است؟

۱) ۱/۵
۲) ۲/۵
۳) ۳
۴) ۵



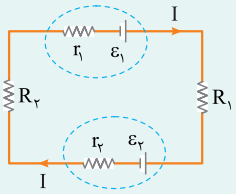
پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint

ابتدا قانون اختلاف پتانسیل‌ها را برای مسیر M تا A بررسی کنید تا جریان الکتریکی عبوری از مدار به دست آید، سپس به کمک رابطهٔ جریان عبوری از مدار، ε_2 را حساب کنید. در پایان همه چیز برای محاسبهٔ توان ورودی به باتری ۲ آماده است.

درس Box

۱) مدار شکل روبه‌رو، شامل دو باتری ε_1 و ε_2 $(\varepsilon_1 > \varepsilon_2)$ است که در جهت‌های مخالف بسته شده‌اند. در مورد این مدار باید موارد زیر را بدانید:



- تعیین جهت جریان عبوری از مدار به عهدهٔ باتری ε_1 (که نیروی محرکهٔ الکتریکی بزرگ‌تری دارد) است.
- مقدار جریان عبوری از مدار برابر است با:

$$I = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{R_{eq} + r_1 + r_2}$$

- باتری ε_1 تولیدکنندهٔ انرژی است:

اختلاف پتانسیل دو سر باتری ε_1: $V_1 = \varepsilon_1 - r_1 I$

توان تولیدی باتری ε_1: $P_{\varepsilon_1} = V_1 I = \varepsilon_1 I - r_1 I^2$

- باتری ε_2 مصرف‌کنندهٔ انرژی است:

اختلاف پتانسیل دو سر باتری ε_2: $V_2 = \varepsilon_2 + r_2 I$

توان مصرفی باتری ε_2: $P_{\varepsilon_2} = V_2 I = \varepsilon_2 I + r_2 I^2$

۲) **قانون اختلاف پتانسیل‌ها:**

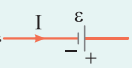
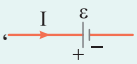
در هر حلقهٔ بسته، مجموع جبری اختلاف پتانسیل‌ها صفر است.

$$\sum V = 0 \Rightarrow \sum \varepsilon - \sum RI = 0$$

در به کار بردن این قانون به نکات زیر توجه کنید:

الف) یک جهت چرخش اختیاری در نظر می‌گیریم.

ب) جهت جریان را در هر حلقه به دلخواه انتخاب می‌کنیم.

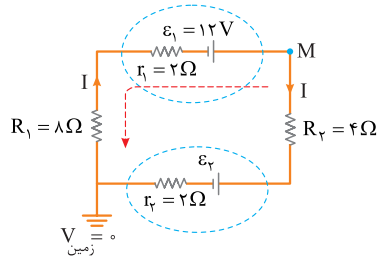
پ) برای نوشتن εها، با توجه به چرخش در مدار، اگر از پایانهٔ مثبت باتری خارج شویم  ، نیروی محرکهٔ باتری را مثبت $(+\varepsilon)$ و اگر از پایانهٔ منفی باتری خارج شویم  ، نیروی محرکهٔ باتری را منفی $(-\varepsilon)$ در نظر می‌گیریم.

ت) برای نوشتن RI ها، اگر در جهت جریان از مقاومت R عبور کنیم، چون پتانسیل الکتریکی در حال کاهش است، RI را منفی $(-RI)$ و اگر در خلاف جهت جریان از مقاومت R عبور کنیم، چون پتانسیل الکتریکی در حال افزایش است، RI را مثبت $(+RI)$ در نظر می‌گیریم.

- اگر علامت جریان مثبت به دست آید، یعنی جهت انتخابی درست است و اگر منفی به دست آمد، فقط جهت جریان را در شاخهٔ مورد نظر برعکس می‌کنیم.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: چون باتری (۲) مصرف‌کنندهٔ انرژی است، باتری ۱ باید تولیدکنندهٔ انرژی باشد؛ بنابراین جریان الکتریکی از پایانهٔ مثبت باتری ۱ خارج می‌شود و مطابق شکل روبه‌رو، درون مدار ساعتگرد است. در مسیر نشان‌داده در شکل روبه‌رو حرکت می‌کنیم و با نوشتن تغییر پتانسیل اجزای مدار، جریان عبوری از مدار را به دست می‌آوریم:



$$V_M - \varepsilon_1 + r_1 I + R_1 I = V_{زمین} \Rightarrow 7 - 12 + 2I + 8I = 0 \Rightarrow 10I = 5 \Rightarrow I = 0/5\ A$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

گام دوم: رابطهٔ جریان را می‌نویسیم تا ε_2 به دست آید:

$$I=\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{R_1+R_2+r_1+r_2} \Rightarrow 0/5=\frac{12-\varepsilon_2}{8+4+2+2} \Rightarrow 12-\varepsilon_2=8 \Rightarrow \varepsilon_2=4\ V$$

گام سوم: توان ورودی باتری ۲ برابر است با:

$$P_2=\varepsilon_2 I+r_2 I^2=4\times 0/5+2\times(0/5)^2=2+0/5=2/5\ W$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

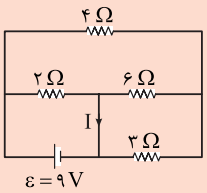
۵۷ در مدار شکل زیر، I چند آمپر است؟

۱) ۵ / ۵

۲) ۴ / ۵

۳) ۵

۴) ۴



پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint

ابتدا مقاومت معادل مدار و سپس جریان کل عبوری از مدار را به دست آورید. مرحله‌به‌مرحله جریان عبوری از مقاومت‌ها را حساب کنید تا جریان عبوری از مقاومت‌های ۲ Ω و ۶ Ω به دست آید. جریان I برابر با مجموع جریان عبوری از این دو مقاومت است.

درس Box

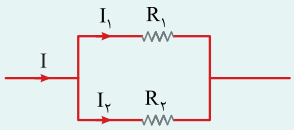
۱) مطابق شکل روبه‌رو، دو مقاومت R_1 و R_2 به صورت متوالی (سری) به هم متصل‌اند:



مقاومت معادل این دو مقاومت:

$$R_{eq} = R_1 + R_2$$

۲) مطابق شکل روبه‌رو، دو مقاومت R_1 و R_2 به صورت موازی به هم متصل‌اند:



مقاومت معادل این دو مقاومت:

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

اگر مقاومت بزرگ‌تر، n برابر مقاومت کوچک‌تر باشد:

$$R_{eq} = \frac{\text{مقاومت بزرگ‌تر}}{n+1}$$

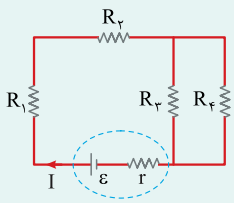
نسبت جریان عبوری از مقاومت‌ها برابر با وارون نسبت مقاومت‌ها است:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

اصل پایستگی بار الکتریکی:

$$I = I_1 + I_2$$

۳) در مدار شکل روبه‌رو:



جریان کل عبوری از مدار (جریان عبوری از باتری):

$$I = \frac{\varepsilon}{R_{eq} + r}$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: مطابق شکل‌های (الف) تا (پ)، مقاومت معادل مدار را حساب می‌کنیم:

R_1: ۶ Ω و ۳ Ω موازی‌اند. $R_1 = \frac{6\times3}{6+3} = \frac{18}{9} = 2\,\Omega$ (یا: $6 = \overset{n}{(2)}\times 3 \Rightarrow R_1 = \frac{6}{n+1} = \frac{6}{2+1} = 2\,\Omega$)

R_2: R_1 و ۴ Ω متوالی‌اند. $R_2 = R_1 + 4 = 2 + 4 = 6\,\Omega$

R_{eq}: R_2 و ۲ Ω موازی‌اند. $R_{eq} = \frac{2R_2}{2+R_2} = \frac{2\times6}{2+6} = \frac{12}{8} = 1/5\,\Omega$ (یا: $6 = \overset{n}{(3)}\times 2 \Rightarrow R_{eq} = \frac{6}{n+1} = \frac{6}{3+1} = 1/5\,\Omega$)

جریان کل عبوری از مدار (جریان عبوری از باتری) برابر است با:

$$I_{کل} = \frac{\varepsilon}{R_{eq}} = \frac{9}{1/5} = 6\ A$$

گام دوم: با توجه به شکل (پ)، I_1 و I_2 را حساب می‌کنیم:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{6}{2} \Rightarrow I_1 = 3I_2$$

$$I_1 + I_2 = I_{کل} \Rightarrow 3I_2 + I_2 = 6 \Rightarrow I_2 = \frac{6}{4} = 1/5\ A \text{ و } I_1 = 4/5\ A$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

جریان عبوری از مقاومت $R_۲$، همان جریان عبوری از مقاومت‌های $۴\,\Omega$ و $R_۱ = ۲\,\Omega$ (شکل ب) است؛ بنابراین به مجموعهٔ مقاومت‌های موازی $۶\,\Omega$ و $۳\,\Omega$ (شکل الف) جریان $I_۲ = ۱/۵\,A$ وارد می‌شود. $I_۳$ و $I_۴$ را حساب می‌کنیم:

$$\frac{I_۴}{I_۳} = \frac{۶}{۳} \Rightarrow I_۴ = ۲I_۳$$

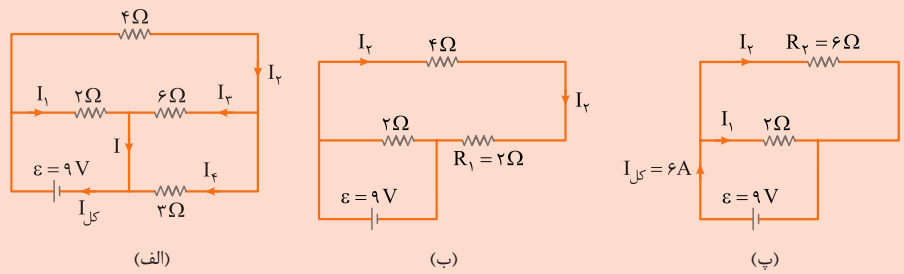
$$I_۳ + I_۴ = I_۲ \Rightarrow I_۳ + ۲I_۳ = ۱/۵ \Rightarrow ۳I_۳ = ۱/۵ \Rightarrow I_۳ = ۰/۵\,A \text{ و } I_۴ = ۱\,A$$

گام سوم: با توجه به شکل (الف)، جریان I را به صورت زیر می‌توانید حساب کنید:

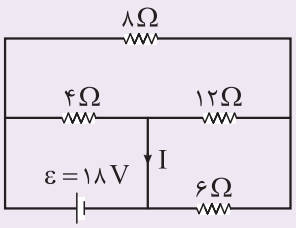
$$I = I_۱ + I_۳ = ۴/۵ + ۰/۵ = ۵\,A$$

$$I + I_۴ = I_{کل} \Rightarrow I + ۱ = ۶ \Rightarrow I = ۵\,A$$

یه‌جور دیگه



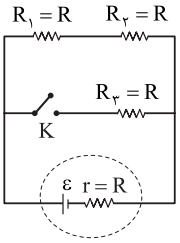
در مدار شکل زیر، I چند آمپر است؟ *(سؤال ۶۷ کنکور تجربی ۱۴۰۴ ـ نوبت اول)*



۱) ۵/۵
۲) ۴/۵
۳) ۵
۴) ۴

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۸ در مدار شکل زیر، با بستن کلید K، توان مصرفی مقاومت R_1 چند برابر می‌شود؟



۱) $\frac{۹}{۲۵}$
۲) $\frac{۲۵}{۹}$
۳) $\frac{۱}{۲۵}$
۴) ۲۵

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint

در هر حالت (کلید باز و کلید بسته)، ابتدا مقاومت معادل مدار و جریان کل عبوری از مدار و سپس جریان عبوری از مقاومت R_1 و در ادامه توان مصرفی مقاومت R_1 را حساب کنید. در پایان نسبت خواسته‌شده را به دست آورید.

درس Box

۱) درس باکس سؤال ۵۷ را بخوانید.

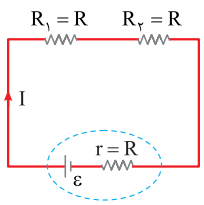
۲) اگر جریان عبوری از مقاومت R، برابر I باشد، توان مصرفی در این مقاومت از رابطهٔ مقابل به دست می‌آید: $P = RI^2$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: در حالت اول (قبل از بستن کلید K) مدار به صورت شکل (الف) است. جریان کل عبوری از مدار (جریان عبوری از باتری) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$I_1 = \frac{\varepsilon}{R_1 + R_2 + r} = \frac{\varepsilon}{R + R + R} = \frac{\varepsilon}{3R}$$

گام دوم: در این حالت، جریان عبوری از مقاومت R_1 برابر I است. توان مصرفی این مقاومت برابر است با:



(الف)

$$P_1 = R_1 I^2 = R \times (\frac{\varepsilon}{3R})^2 = \frac{\varepsilon^2}{9R}$$

گام سوم: در حالت دوم (بعد از بستن کلید K) مدار به شکل (ب) در می‌آید. مقاومت معادل مدار را محاسبه می‌کنیم:

مقاومت‌های R_1 و R_2 متوالی‌اند: $R' = R_1 + R_2 = R + R = 2R$

مقاومت‌های R' و R_3 موازی‌اند: $R_{eq(2)} = \frac{R_3 \times R'}{R_3 + R'} = \frac{R \times 2R}{R + 2R} = \frac{2}{3}R$

(یا: $R' = \overset{n}{2}R_3 \Rightarrow R_{eq(2)} = \frac{R'}{n+1} = \frac{2R}{2+1} = \frac{2}{3}R$)

جریان کل عبوری از مدار (جریان عبوری از باتری) در این حالت برابر است با:

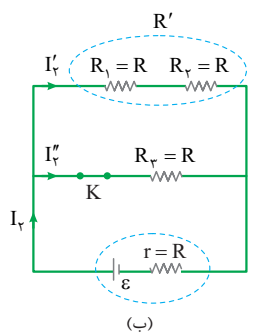
$$I_2 = \frac{\varepsilon}{R_{eq(2)} + r} = \frac{\varepsilon}{\frac{2}{3}R + R} = \frac{\varepsilon}{\frac{5}{3}R} = \frac{3}{5}\frac{\varepsilon}{R}$$

گام چهارم: جریان عبوری از شاخهٔ بالایی را به دست می‌آوریم:

$$\frac{I'_2}{I''_2} = \frac{R_3}{R'} = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2} \Rightarrow I''_2 = 2I'_2$$

$$I'_2 + I''_2 = I_2 \Rightarrow I'_2 + 2I'_2 = \frac{3}{5}\frac{\varepsilon}{R} \Rightarrow I'_2 = \frac{1}{5}\frac{\varepsilon}{R}$$

توان مصرفی مقاومت R_1 در این حالت برابر است با:



(ب)

$$P_2 = R_1 I'^2_2 = R \times (\frac{1}{5}\frac{\varepsilon}{R})^2 = \frac{1}{25}\frac{\varepsilon^2}{R}$$

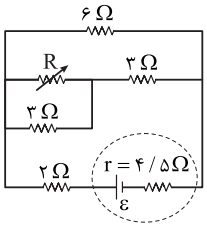
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

گام پنجم: نسبت خواسته‌شده را به دست می‌آوریم:

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{\frac{1}{25}\frac{\varepsilon^{2}}{R}}{\frac{1}{9}\frac{\varepsilon^{2}}{R}} = \frac{9}{25}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۹ در مدار شکل زیر، اگر مقاومت متغیر به تدریج از صفر تا مقدار بسیار بزرگ افزایش یابد، توان خروجی باتری چگونه تغییر می‌کند؟



۱) به طور پیوسته افزایش می‌یابد.

۲) به طور پیوسته کاهش می‌یابد.

۳) ابتدا افزایش و سپس کاهش می‌یابد و در نهایت به مقداری کم‌تر از مقدار اولیه می‌رسد.

۴) ابتدا افزایش و سپس کاهش می‌یابد و در نهایت به مقداری بیشتر از مقدار اولیه می‌رسد.

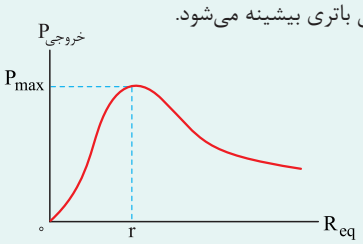
پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

۱) درس باکس سؤال ۵۷ را بخوانید.

۲) نمودار توان خروجی مولد برحسب مقاومت معادل مدار به صورت زیر است.

در حالتی که مقاومت معادل مدار برابر با مقاومت درونی باتری است، توان خروجی باتری بیشینه می‌شود.

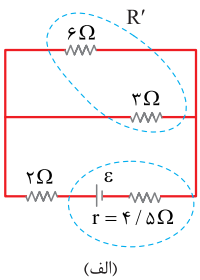


پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: در ابتدا که مقاومت متغیر برابر صفر است، مقاومت ۳ اُهمی موازی با آن، اتصال کوتاه شده و از مدار حذف می‌شود. در این حالت مدار مطابق شکل (الف) است و مقاومت معادل مدار به صورت زیر به دست می‌آید:

مقاومت‌های ۳ Ω و ۶ Ω موازی‌اند: $R' = \frac{۳\times۶}{۳+۶} = \frac{۱۸}{۹} = ۲\,\Omega$ (یا: $\frac{n}{۲}\times۳ \Rightarrow R_۱ = \frac{۶}{n+۱} = \frac{۶}{۲+۱} = ۲\,\Omega$:یا ۶ =)

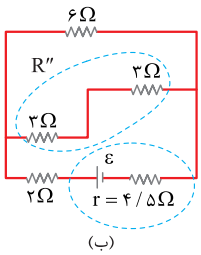
مقاومت‌های R' و ۲ Ω متوالی‌اند: $R_{eq} = R' + ۲ = ۲ + ۲ = ۴\,\Omega$



(الف)

گام دوم: در ابتدا مقاومت معادل شاخهٔ مقاومت‌های موازی R و ۳ Ω صفر بود؛ بنابراین با افزایش مقاومت متغیر R، دیگر مقاومت این شاخه صفر نخواهد بود. در نتیجه مقاومت این شاخه نسبت به حالت اولیه افزایش می‌یابد. همین موضوع باعث می‌شود که مقاومت کل مدار نیز افزایش یابد.

گام سوم: در ادامه و در حالتی که مقاومت متغیر R دارای مقادیر بسیار بزرگ شود، این مقاومت تقریباً اجازهٔ عبور جریان از خود را نمی‌دهد و همهٔ جریان ورودی به این شاخه از مقاومت ۳ اُهمی موازی با آن عبور می‌کند. با توجه به شکل (ب)، مقاومت معادل مدار در این حالت به صورت زیر به دست می‌آید:



(ب)

مقاومت‌های ۳ اُهمی متوالی‌اند: $R'' = ۳ + ۳ = ۶\,\Omega$

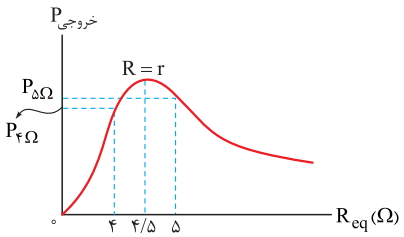
مقاومت‌های R'' و ۶ Ω موازی‌اند: $R''' = \frac{۶}{۲} = ۳\,\Omega$

مقاومت‌های R''' و ۲ Ω متوالی‌اند: $R'_{eq} = ۳ + ۲ = ۵\,\Omega$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

گام چهارم: مقاومت معادل کل مدار از $4\ \Omega$ به $5\ \Omega$ می‌رسد. می‌دانیم توان خروجی باتری در حالتی که $R = r = 4/5\ \Omega$ باشد، بیشینه است؛ بنابراین توان خروجی باتری ابتدا افزایش (از $R = 4\ \Omega$ تا $R = 4/5\ \Omega$) و سپس کاهش (از $R = 4/5\ \Omega$ تا $R = 5\ \Omega$) می‌یابد.

حالا برای این‌که بفهمید مقدار نهایی توان خروجی باتری در مقایسه با مقدار اولیهٔ آن کم‌تر است یا بیشتر، باید با نمودار توان خروجی باتری برحسب مقاومت معادل مدار، که در زیر آمده، آشنا باشید. همان‌طور که می‌بینید، شیب نمودار بعد از $R = 4/5\ \Omega$ کم‌تر از شیب آن قبل از $4/5\ \Omega$ است؛ بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که توان خروجی باتری به ازای مقاومت $5\ \Omega$ $(5/0 + 4/5)$ بیشتر از توان خروجی به ازای مقاومت $4\ \Omega$ $(5/0 - 4/5)$ است.



SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶۰ سیم مستقیمی به طول $2/4\ m$ حامل جریان $2/5\ A$ از شرق به غرب است. اندازهٔ میدان مغناطیسی زمین در محل این سیم $0/45\ G$ و جهت آن از جنوب به شمال است. نیروی مغناطیسی وارد بر این سیم چند نیوتون و در چه جهتی است؟ (درون‌سو)

۱) $2/7\times10^{-4}$، بالا
۲) $2/7\times10^{-3}$، بالا
۳) $2/7\times10^{-4}$، پایین
۴) $2/7\times10^{-3}$، پایین

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint

به کمک قاعدهٔ دست راست، جهت نیروی مغناطیسی و به کمک رابطهٔ نیروی مغناطیسی وارد بر سیم حامل جریان، اندازهٔ این نیرو را به دست آورید.

درس Box

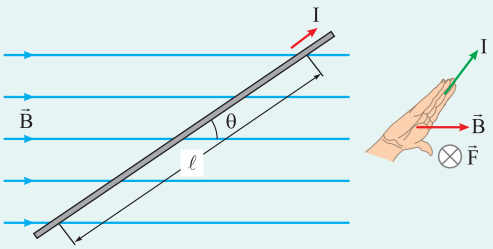
نیروی مغناطیسی وارد بر سیم حامل جریان در میدان مغناطیسی یکنواخت:

اندازه:

$F = I\ell B\sin\theta$

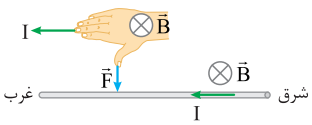
- I: جریان عبوری از سیم
- B: بزرگی میدان مغناطیسی
- ℓ: طول بخشی از سیم که در میدان مغناطیسی قرار دارد.
- θ: زاویهٔ بین راستای سیم و میدان مغناطیسی

جهت: به کمک قاعدهٔ دست راست تعیین می‌شود. همان‌طور که در شکل زیر می‌بینید، اگر چهار انگشت باز دست راست را طوری در جهت جریان الکتریکی عبوری از سیم قرار دهیم که میدان مغناطیسی از کف دست خارج شود، شست دست جهت نیروی مغناطیسی وارد بر سیم را نشان می‌دهد.



پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: براساس شکل زیر و به کمک قاعدهٔ دست راست، جهت نیروی مغناطیسی وارد بر سیم را تعیین می‌کنیم. همان‌طور که در شکل می‌بینید، این نیرو رو به پایین است.



گام دوم: اندازهٔ این نیرو به صورت زیر به دست می‌آید:

$$F = I\ell B\sin\theta \xrightarrow{B=0/45\ G=0/45\times10^{-4}\ T} F = 2/5\times2/4\times0/45\times10^{-4}\times\underbrace{\sin90^\circ}_{1} = 2/7\times10^{-4}\ N$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

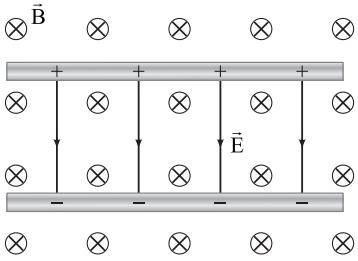
۶۱ در شکل زیر، اندازهٔ میدان الکتریکی یکنواخت $E = ۴۵۰\ N/C$ و اندازهٔ میدان مغناطیسی یکنواخت $B = ۰/۱۸\ T$ است. ذره‌ای به بار $q = +۲۰\ mC$ با سرعت $۲/۵\ km/s$ در جهت میدان الکتریکی پرتاب می‌شود. اندازهٔ نیروی خالص وارد بر این ذره بلافاصله پس از پرتاب‌شدن چند نیوتون است؟ (وزن و نیروی مقاومت هوا ناچیز است.)

۱) $۹\sqrt{۲}$

۲) $۱۸\sqrt{۲}$

۳) ۱۸

۴) صفر



پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint

ابتدا اندازهٔ نیروهای الکتریکی و مغناطیسی وارد بر بار الکتریکی را حساب کنید؛ سپس جهت نیروی الکتریکی وارد بر بار و به کمک قاعدهٔ دست راست، جهت نیروی مغناطیسی وارد بر آن را تعیین کنید. در پایان اندازهٔ برایند این دو نیرو جواب سؤال است.

درس Box

۱) ذره‌ای با بار q در میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{E}$ قرار دارد:

- **اندازهٔ نیروی الکتریکی وارد بر این ذره:** $F = E|q|$
- **جهت نیروی الکتریکی وارد بر این ذره:**

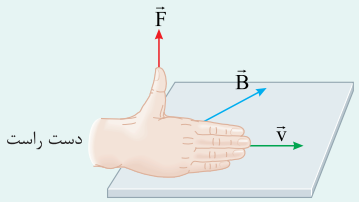
علامت بار ذره	جهت نیروی الکتریکی وارد بر ذره
مثبت	هم‌جهت با میدان الکتریکی
منفی	در خلاف جهت میدان الکتریکی

۲) ذره‌ای با بار q در میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ در حال حرکت با سرعت $\vec{v}$ است:

- **اندازهٔ نیروی مغناطیسی وارد بر این ذره:** $F = |q|vB\sin\theta$

در رابطهٔ بالا، θ زاویهٔ بین جهت حرکت بار الکتریکی (بردار $\vec{v}$) و جهت میدان مغناطیسی (بردار $\vec{B}$) است.

- **جهت نیروی مغناطیسی وارد بر این ذره:** به کمک قاعدهٔ دست راست تعیین می‌شود. طبق این قاعده، اگر چهار انگشت دست راست را طوری در جهت بردار سرعت ذره $(\vec{v})$ قرار دهیم که بردار میدان مغناطیسی $(\vec{B})$ از کف دست خارج شود، شست دست جهت نیروی مغناطیسی وارد بر ذره با بار مثبت را نشان می‌دهد (شکل مقابل را ببینید).



نکته

اگر بار ذره منفی باشد، این قاعده را با دست چپ اجرا می‌کنیم.

علامت بار ذره	جهت نیروی الکتریکی وارد بر ذره
مثبت	قاعدهٔ دست راست
منفی	قاعدهٔ دست راست را با دست چپ اجرا می‌کنیم.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: اندازهٔ نیروهای الکتریکی و مغناطیسی وارد بر ذره را محاسبه می‌کنیم:

$$F_E = E|q| \xrightarrow{|q| = ۲۰\ mC = ۲۰\times۱۰^{-۳}\ C} F_E = ۴۵۰\times۲۰\times۱۰^{-۳} = ۹\ N$$

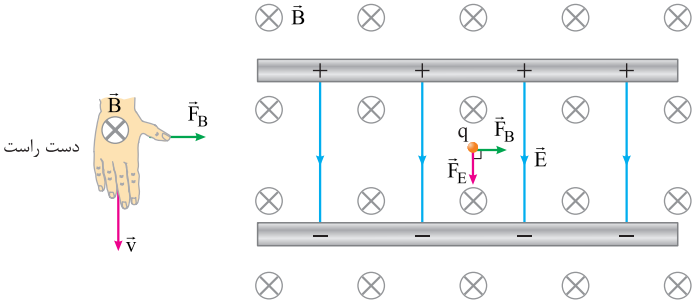
$$F_B = |q|vB\sin\theta \xrightarrow{v = ۲/۵\ km/s = ۲/۵\times۱۰^{۳}\ m/s} F_B = ۲۰\times۱۰^{-۳}\times۲/۵\times۱۰^{۳}\times۰/۱۸\times\underbrace{\sin۹۰^\circ}_{۱} = ۹\ N$$

گام دوم: با بار مثبت سروکار داریم؛ بنابراین مطابق شکل زیر، نیروی الکتریکی وارد بر ذره $(\vec{F}_E)$ هم‌جهت با $\vec{E}$، یعنی به طرف پایین و نیروی مغناطیسی وارد بر ذره $(\vec{F}_B)$ به کمک قاعدهٔ دست راست به سمت راست خواهد بود.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

گام سوم: دو نیروی $\vec{F}_E$ و $\vec{F}_B$ بر هم عمودند؛ بنابراین اندازهٔ نیروی خالص وارد بر ذره بلافاصله پس از پرتاب‌شدن برابر است با:

$$F_{net} = \sqrt{F_E^2 + F_B^2} \xrightarrow{F_E = F_B = 9\ N} F_{net} = 9\sqrt{2}\ N$$



SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶۲ با استفاده از سیمی به طول $5\ m$، پیچهٔ مسطحی به قطر $20\ cm$ ساخته شده است. جریان الکتریکی $4\ A$ از پیچه عبور می‌کند. بزرگی میدان مغناطیسی در مرکز این پیچه چند گاوس است؟ $(\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \frac{T.m}{A})$

۱) ۲۰
۲) ۵
۳) ۲
۴) ۰/۵

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint

ابتدا با استفاده از طول سیم و محیط هر حلقه، تعداد حلقه‌های پیچه را حساب کنید؛ سپس به کمک رابطهٔ بزرگی میدان مغناطیسی در مرکز پیچهٔ مسطح، خواستهٔ تست را به دست آورید.

درس Box

اندازهٔ میدان مغناطیسی در مرکز پیچهٔ مسطح حامل جریان:

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2R}$$

(N: تعداد حلقه‌ها، I: جریان عبوری از پیچه، R: شعاع حلقه‌های پیچه)

(μ_0: تراوایی مغناطیسی خلأ: $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \frac{T.m}{A}$)

تعداد حلقه‌های پیچه:

$$N = \frac{\text{طول سیم}}{\text{محیط هر حلقه}} = \frac{L}{2\pi R}$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: تعداد دورهای پیچه را لازم داریم که با تقسیم طول سیم بر محیط هر حلقه به دست می‌آید:

$$N = \frac{L}{2\pi R} \xrightarrow{R = \frac{D}{2} = \frac{20}{2} = 10\ cm = 0/1\ m} N = \frac{5}{2\pi \times 0/1} = \frac{25}{\pi}$$

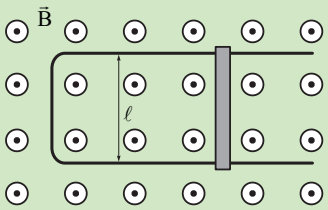
گام دوم: بزرگی میدان مغناطیسی در مرکز پیچه برابر است با:

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2R} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times \frac{25}{\pi} \times 4}{2 \times 0/1} = 2 \times 10^{-4}\ T \xrightarrow{10^{-4}\ T = 1\ G} B = 2\ G$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶۳ شکل زیر، رسانای Uشکلی را درون میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ به اندازهٔ $0/15\,T$ نشان می‌دهد. میدان $\vec{B}$ عمود بر صفحهٔ شکل و رو به بیرون است. میله‌ای فلزی (سیم لغزنده) به طول $\ell = 20\,cm$ بین دو بازوی رسانا قرار دارد و مداری را تشکیل می‌دهد. میله در مدت $0/2\,s$ به اندازهٔ $40\,cm$ به سمت راست جابه‌جا می‌شود. در این مدت، نیروی محرکهٔ الکتریکی القایی متوسط در مدار چند ولت و جریان الکتریکی القایی متوسط در آن در چه جهتی است؟

۱) ۰/۰۶، ساعتگرد
۲) ۰/۰۶، پادساعتگرد
۳) ۰/۶، ساعتگرد
۴) ۰/۶، پادساعتگرد



پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint
قانون القای الکترومغناطیسی فاراده، بزرگی نیروی محرکهٔ القایی متوسط و قانون لنز، جهت جریان الکتریکی القایی را می‌دهد.

درس Box
۱) **قانون القای الکترومغناطیسی فاراده:** با تغییر شار مغناطیسی عبوری از یک مدار بسته، نیروی محرکه‌ای در آن القا می‌شود. نیروی محرکهٔ القایی متوسط در این مدار از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

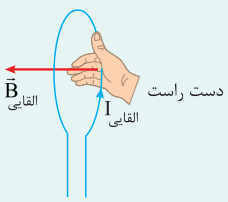
$$\varepsilon_{av} = -N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \xrightarrow[\text{فقط مساحت تغییر کند.}]{\Phi = BA\cos\theta} \varepsilon_{av} = -NB\frac{\Delta A}{\Delta t}\cos\theta$$

بزرگی میدان مغناطیسی — تعداد حلقه‌ها — آهنگ تغییر مساحت حلقه — زاویهٔ بین بردار میدان مغناطیسی و نیم‌خط عمود بر سطح حلقه

۲) **قانون لنز:** با تغییر شار مغناطیسی عبوری از یک حلقه (یا پیچه یا سیملوله)، میدان مغناطیسی القایی در داخل حلقه به وجود می‌آید که جهت آن طبق جدول زیر تعیین می‌شود:

چگونگی تغییر شار مغناطیسی	جهت میدان مغناطیسی القایی
افزایش	در خلاف جهت میدان مغناطیسی اصلی
کاهش	هم‌جهت با میدان مغناطیسی اصلی

۳) **قاعدهٔ دست راست برای تعیین جهت جریان القایی:** اگر چهار انگشت دست راست را در جهت میدان مغناطیسی در داخل حلقه قرار دهیم، شست دست جهت جریان القایی در حلقه را نشان می‌دهد (شکل مقابل).

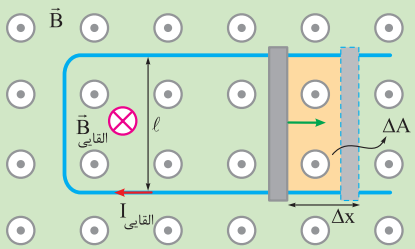


پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: به کمک قانون القای الکترومغناطیسی فاراده، بزرگی نیروی محرکهٔ القایی را به دست می‌آوریم:

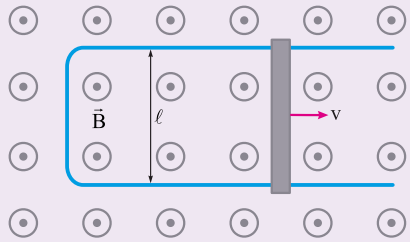
$$|\varepsilon_{av}| = |-NB\frac{\Delta A}{\Delta t}\cos\theta| = |-NB\frac{\ell\Delta x}{\Delta t}\cos\theta| \xrightarrow[\Delta x = 40\,cm = 0/4\,m]{\ell = 20\,cm = 0/2\,m} |\varepsilon_{av}| = |-1\times 0/15\times\frac{0/2\times 0/4}{0/2}\underbrace{\cos 0^\circ}_{1}| = 0/06\,V$$

گام دوم: با حرکت میله به طرف راست، مساحت قاب و در نتیجه شار مغناطیسی عبوری از آن در حال افزایش است؛ بنابراین طبق قانون لنز، میدان مغناطیسی القایی ($\vec{B}_{\text{القایی}}$) باید در خلاف جهت $\vec{B}$ باشد، یعنی درون‌سو. با توجه به شکل زیر و به کمک قاعدهٔ دست راست، جهت $I_{\text{القایی}}$ در قاب، ساعتگرد است.



SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

شکل روبه‌رو، رسانای U شکلی را درون میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ به اندازهٔ $۱۸/۰\ T$ نشان می‌دهد. میدان $\vec{B}$ عمود بر صفحهٔ شکل و رو به بیرون است. میله‌ای فلزی (سیم لغزنده) به طول $\ell = ۲۰\ cm$ بین دو بازوی رسانا قرار دارد و مداری را تشکیل می‌دهد. میله را با تندی ثابت $v = ۲۰\ m/s$ به طرف راست حرکت می‌دهیم. بزرگی نیروی محرکهٔ القایی متوسط را پیدا کنید.



(فیزیک (۲) ـ مثال ۴ ـ ۴ صفحهٔ ۱۱۵ کتاب درسی)

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶۴ **از یک القاگر به ضریب القاوری ۸ mH و مقاومت الکتریکی ناچیز، جریان الکتریکی پایای ۵ A عبور می‌کند. انرژی الکتریکی مصرف‌شده در این القاگر در هر ثانیه چند ژول است؟**

۱) ۱۰ ۲) ۱ ۳) ۰/۱ ۴) صفر

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

رفتار القاگر آرمانی (با مقاومت صفر) هنگام عبور جریان الکتریکی از آن:

الف) اگر جریان عبوری در حال افزایش باشد: انرژی الکتریکی به القاگر وارد و در میدان مغناطیسی آن ذخیره می‌شود.

ب) اگر جریان عبوری پایا (ثابت) باشد: انرژی الکتریکی به القاگر وارد یا از آن خارج نمی‌شود.

پ) اگر جریان عبوری در حال کاهش باشد: انرژی الکتریکی ذخیره‌شده از القاگر خارج و در آن مصرف می‌شود.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ هنگام عبور جریان پایا از یک القاگر آرمانی، انرژی به آن وارد یا از آن خارج نمی‌شود؛ بنابراین انرژی الکتریکی مصرفی در القاگر صورت سؤال، برابر صفر است.

گول نخوری ✘ آن‌هایی که بدون توجه به پایابودن جریان الکتریکی، از رابطهٔ $U = \frac{1}{2}LI^2$ استفاده می‌کنند، به گزینهٔ نادرست (۳) می‌رسند.

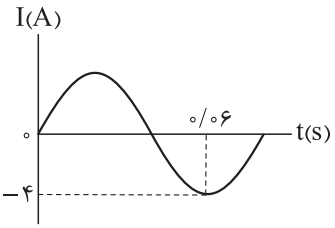
از یک القاگر آرمانی به ضریب القاوری ۰/۰۴ هانری جریان الکتریکی پایای $I = 2A$ می‌گذرد. انرژی الکتریکی مصرف‌شده در آن در هر دقیقه چند ژول است؟ *(سؤال ۴۴ کنکور ریاضی ۱۴۰۳ (خارج از کشور))*

۱) صفر ۲) ۰/۰۸

۳) ۲/۴ ۴) ۴/۸

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶۵ نمودار جریان متناوب سینوسی عبوری از یک مولد جریان متناوب برحسب زمان به شکل زیر است. اندازهٔ جریان الکتریکی عبوری از این مولد در لحظهٔ $t = ۰/۰۳\ s$ چند آمپر است؟



۱) $۲\sqrt{۳}$

۲) $۲\sqrt{۲}$

۳) ۲

۴) صفر

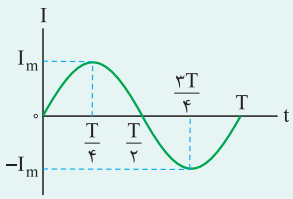
پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint

ابتدا از روی مقادیر داده‌شده روی نمودار، دورهٔ تناوب و بیشینهٔ جریان متناوب را به دست آورید؛ سپس معادلهٔ جریان متناوب را بنویسید و با جای‌گذاری $t = ۰/۰۳\ s$ در این معادله، جریان الکتریکی عبوری از مولد در این لحظه را حساب کنید.

درس Box

معادله و نمودار جریان متناوب برحسب زمان به صورت زیر است:



$$I = I_m \sin(\frac{۲\pi}{T} t)$$

I: جریان متناوب — I_m: بیشینهٔ جریان متناوب — T: دورهٔ تناوب

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: مقدار نشان‌داده‌شده روی محور زمان برابر با $\frac{۳T}{۴}$ است؛ بنابراین:

$$\frac{۳T}{۴} = ۰/۰۶ \Rightarrow T = \frac{۰/۲۴}{۳} = ۰/۰۸\ s$$

گام دوم: مقدار نشان‌داده‌شده روی محور جریان برابر با بیشینهٔ جریان متناوب عبوری از مولد است؛ بنابراین معادلهٔ جریان متناوب به صورت زیر خواهد بود:

$$I = I_m \sin\frac{۲\pi}{T} t \xrightarrow[T=۰/۰۸\ s]{I_m=۴\ A} I = ۴\sin\frac{۲\pi}{۰/۰۸} t$$

با جای‌گذاری $t = ۰/۰۳\ s$ در معادلهٔ بالا، جریان الکتریکی عبوری از مولد در این لحظه به دست می‌آید:

$$I = ۴\sin\frac{۲\pi}{۰/۰۸} \times ۰/۰۳ = ۴\sin\frac{۳\pi}{۴} \xrightarrow{\sin\frac{۳\pi}{۴}=\sin(\pi-\frac{\pi}{۴})=\sin\frac{\pi}{۴}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}} I = ۴\times\frac{\sqrt{۲}}{۲} = ۲\sqrt{۲}\ A$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶۶ در میان عنصرهای پنج دورهٔ اول جدول تناوبی، چند عنصر فلزی با ۴ الکترون ظرفیتی وجود دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ: گزینهٔ ۲

نکته برای عنصرهای گروه ۱ تا ۱۲، شمار الکترون‌های ظرفیتی با شمارهٔ گروه، برابر و برای عنصرهای گروه‌های ۱۳ تا ۱۸ (به‌جز هلیم)، شمار الکترون‌های ظرفیتی با عدد یکان شمارهٔ گروه برابر است.

پاسخ خیلی تشریحی عنصرهای گروه‌های ۴ و ۱۴ جدول دوره‌ای، دارای ۴ الکترون ظرفیتی هستند. عنصرهای گروه ۴ همگی فلزند، اما در گروه ۱۴، سه عنصر اول، (${}_{6}C$ ، ${}_{14}Si$ و ${}_{32}Ge$) فلز نیستند؛ بنابراین در بین عنصرهای ۵ دورهٔ اول، ۳ فلز در گروه‌های ۴ و ۱۴ وجود دارد: ۲ فلز در گروه ۴ (در دوره‌های چهارم و پنجم) و ۱ فلز در گروه ۱۴ (فلز قلع ${}_{50}Sn$) در دورهٔ پنجم).

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶۷ **با افزایش عدد اتمی در گروه هفدهم جدول تناوبی، چه تعداد از موارد زیر برای عنصرهای این گروه افزایش می‌یابد؟**

- **تمایل به تشکیل یون هالید در واکنش با فلزها**
- **شمار الکترون‌های ظرفیت**
- **تعداد لایه‌های الکترونی اشغال‌شده در اتم آن‌ها**
- **دمای لازم برای واکنش با گاز هیدروژن**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی

موارد سوم و چهارم درست‌اند.

بررسی موارد:

- **تمایل به تشکیل یون هالید**: با افزایش عدد اتمی در گروه ۱۷ (هالوژن‌ها)، واکنش‌پذیری عنصرها کاهش می‌یابد؛ بنابراین تمایل آن‌ها به تشکیل یون هالید (X^-) در واکنش با فلزها کم‌تر می‌شود.

نکته

در فلزهای اصلی هم‌گروه یا هم‌دوره، واکنش‌پذیری با شعاع اتمی رابطهٔ مستقیم دارد، به طوری که هر چه شعاع اتمی فلز بیشتر باشد، جاذبهٔ هسته روی الکترون‌های ظرفیت فلز کم‌تر شده و در نتیجه فلز راحت‌تر الکترون از دست می‌دهد و واکنش‌پذیری آن افزایش می‌یابد، اما در نافلزها، *قضیه برعکسه!* یعنی با افزایش شعاع اتمی، واکنش‌پذیری نافلزها کاهش می‌یابد.

در گروه فلزهای قلیایی و قلیایی خاکی ← با افزایش عدد اتمی عنصرها، واکنش‌پذیری افزایش می‌یابد.

در گروه هالوژن‌ها ← با افزایش عدد اتمی عنصرها، واکنش‌پذیری کاهش می‌یابد.

- **شمار الکترون‌های ظرفیت**: همهٔ عنصرهای گروه ۱۷، ۷ الکترون ظرفیتی دارند.
- **تعداد لایه‌های الکترونی اشغال‌شده**: با افزایش عدد اتمی عنصرها در یک گروه، تعداد لایه‌های الکترونی اشغال‌شدهٔ اتم آن‌ها افزایش می‌یابد. مثلاً در گروه ۱۷، $_{9}F$ دارای دو لایهٔ الکترونی و $_{17}Cl$ دارای سه لایهٔ الکترونی اشغال‌شده است.

نکته

تعداد لایه‌های الکترونی **اشغال‌شده** در اتم همهٔ عنصرهای یک دوره، یکسان است. به طور مثال، همهٔ عنصرهای دورهٔ چهارم دارای ۴ لایهٔ الکترونی اشغال‌شده هستند (بزرگ‌ترین ضریب در آرایش الکترونی آن‌ها برابر ۴ است). در عنصرهای یک گروه، تعداد لایه‌های الکترونی اشغال‌شده متفاوت است، اما همهٔ آن‌ها تعداد **الکترون‌های ظرفیتی** یکسانی دارند (البته به‌جز هلیم در گروه ۱۸).

به طور مثال، همهٔ عنصرهای گروه ۱۶ دارای ۶ الکترون ظرفیتی هستند؛ پس می‌توان نوشت:

تشابه عنصرها در یک دوره ← یکسان‌بودن تعداد لایه‌های الکترونی اشغال‌شده

تشابه عنصرها در یک گروه ← برابری تعداد الکترون‌های ظرفیتی (به‌جز هلیم در گروه ۱۸)

- **دمای لازم برای واکنش با گاز هیدروژن**: با توجه به این‌که در گروه ۱۷، از بالا به پایین، واکنش‌پذیری عنصرها کاهش می‌یابد، دمای لازم برای انجام واکنش آن‌ها با گاز هیدروژن افزایش می‌یابد.

نکته

شرایط واکنش هالوژن‌ها با گاز هیدروژن در جدول زیر آورده شده است.

نام هالوژن	شرایط واکنش با گاز هیدروژن
فلوئور	حتی در دمای $-۲۰۰^\circ C$ به سرعت واکنش می‌دهد.
کلر	در دمای اتاق به آرامی واکنش می‌دهد.
برم	در دمای $۲۰۰^\circ C$ واکنش می‌دهد.
ید	در دمای بالاتر از $۴۰۰^\circ C$ واکنش می‌دهد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶۸ با توجه به واکنش زیر که به طور طبیعی انجام می‌شود، کدام مورد نادرست است؟

$$Zn(s) + CuSO_4(aq) \rightarrow ZnSO_4(aq) + Cu(s)$$

۱) آرایش الکترونی کاتیون‌های موجود در دو طرف معادله به زیرلایهٔ $3d$ ختم می‌شود.

۲) تأمین شرایط نگهداری فلز روی، دشوارتر از مس است.

۳) با استفاده از فلز آهن به جای روی، واکنش با سرعت و شدت بیشتری انجام خواهد شد.

۴) با گذشت زمان و کاهش غلظت $Cu^{2+}(aq)$، از شدت رنگ آبی محلول کاسته می‌شود.

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

مقایسهٔ واکنش‌پذیری عنصرها

در هر واکنش شیمیایی که به طور طبیعی انجام می‌شود، واکنش‌پذیری فراورده‌ها از واکنش‌دهنده‌ها کم‌تر است. پس اگر یک واکنش به ما بدهند که در دو طرفش یک عنصر آزاد وجود داشته باشد و *بگن به طور طبیعی انجام می‌شه، ما فیلی سریع می‌تونیم* واکنش‌پذیری دو عنصر آزاد در دو طرف معادله را با هم مقایسه کنیم.

$$\underset{\text{ترکیب}}{AB} + \underset{\text{عنصر}}{C} \rightarrow \underset{\text{ترکیب}}{AC} + \underset{\text{عنصر}}{B} \Rightarrow \text{واکنش‌پذیری} : B < C$$

در معادلهٔ کلی بالا، واکنش‌پذیری C از B بیشتر بوده است؛ به همین دلیل میل بیشتری به تشکیل ترکیب داشته و از این‌رو *جاش رو با* B *عوض کرده!*

توجه مقایسهٔ واکنش‌پذیری برخی عنصرهای مهم به صورت زیر است:

$$\text{واکنش‌پذیری} : Al > Zn > Fe > Cu > Ag$$

پاسخ خیلی تشریحی

واکنش‌پذیری فلز آهن کم‌تر از فلز روی است؛ بنابراین در صورت استفاده از فلز آهن، سرعت واکنش کاهش می‌یابد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): در سمت چپ و راست معادلهٔ واکنش، به ترتیب یون‌های Cu^{2+} و Zn^{2+} وجود دارد:

$$_{29}Cu : [_{18}Ar]\,3d^{10}4s^1 \Rightarrow {}_{29}Cu^{2+} : [_{18}Ar]\,3d^9$$

$$_{30}Zn : [_{18}Ar]\,3d^{10}4s^2 \Rightarrow {}_{30}Zn^{2+} : [_{18}Ar]\,3d^{10}$$

گزینهٔ (۲): با توجه به انجام‌پذیری واکنش، نتیجه می‌گیریم که واکنش‌پذیری فلز روی از مس بیشتر است. واکنش‌پذیرتر بودن یک فلز به معنای دشوارتربودن نگهداری آن است.

گزینهٔ (۴): محلول مس (II) سولفات به دلیل وجود یون $Cu^{2+}(aq)$ آبی‌رنگ است. با انجام واکنش و کاهش غلظت این یون، شدت رنگ آبی محلول نیز کم می‌شود.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶۹ با توجه به اطلاعات داده‌شده، مقایسهٔ شعاع اتمی عنصرهای A، X، D و E به کدام صورت است؟

عنصر	توضیح
A	بیشترین خصلت نافلزی را در جدول دوره‌ای دارد.
X	نخستین نافلز دورهٔ سوم است.
D	آرایش الکترونی اتم آن به $3p^2$ ختم می‌شود.
E	سومین عنصر اصلی دورهٔ چهارم است.

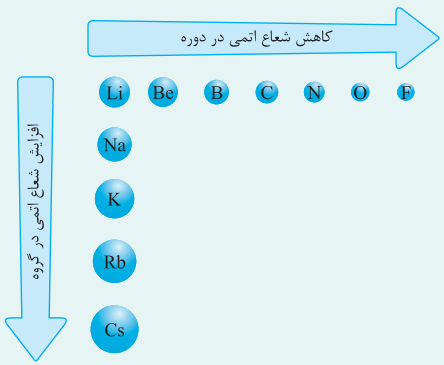
۱) $E > X > D > A$
۲) $E < A < X < D$
۳) $D > E > A > X$
۴) $A < X < D < E$

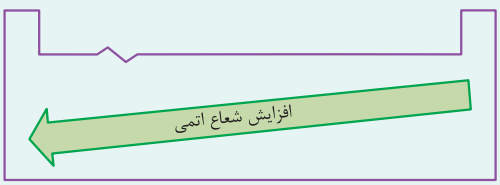
پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

روند تغییر شعاع اتمی در جدول دوره‌ای

در یک دوره از چپ به راست، شعاع اتمی عنصرها کاهش و در یک گروه از بالا به پایین، شعاع اتمی عنصرها افزایش می‌یابد.





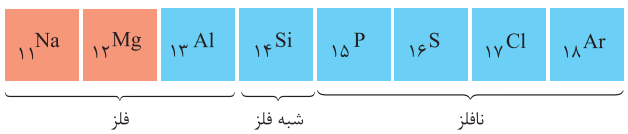
با توجه به روند تغییر شعاع اتمی در یک گروه و دوره، هر چه عنصری در جدول دوره‌ای، سمت چپ‌تر و پایین‌تر باشد، شعاع آن بیشتر است و برعکس، هر چه عنصری، سمت راست‌تر و بالاتر باشد، شعاع آن کم‌تر است.

پاسخ خیلی تشریحی

ابتدا باید عنصرها را شناسایی کنیم:

A: در میان همهٔ عنصرهای جدول دوره‌ای، فلوئور ($_9F$) بیشترین خصلت نافلزی را دارد.

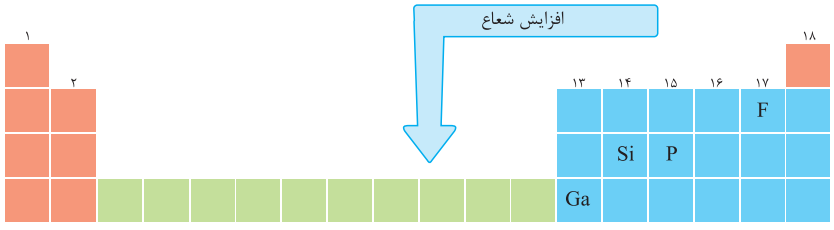
X: نخستین نافلز دورهٔ سوم، فسفر ($_{15}P$) است.



D: عنصر مورد نظر، سیلیسیم ($_{14}Si : [_{10}Ne]3s^2 3p^2$) است.

E: منظور از عنصرهای اصلی، عنصرهای دسته‌های s و p یعنی گروه‌های ۱، ۲ و ۱۳ تا ۱۸ جدول دوره‌ای هستند؛ بنابراین سومین عنصر اصلی دورهٔ چهارم، عنصر گروه ۱۳ یعنی $_{31}Ga$ است.

با توجه به جایگاه این چهار عنصر در جدول خواهیم داشت:



شعاع: $_{31}Ga > _{14}Si > _{15}P > _9F$
(E) (D) (X) (A)

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷۰ واکنش زیر برای تهیهٔ فسفر به کار می‌رود. اگر به ازای مصرف ۹ گرم کربن ناخالص، ۷/۴۴ گرم فسفر تولید شود، نسبت جرم کربن خالص به جرم ناخالصی‌ها در نمونهٔ اولیهٔ کربن کدام است؟ $(C = ۱۲ , P = ۳۱ : g.mol^{-1})$

$$Ca_۳(PO_۴)_۲(s) + SiO_۲(s) + C(s) \rightarrow CaSiO_۳(s) + P_۴(s) + CO(g)$$ (معادلهٔ واکنش، موازنه شود.)

۱) ۱/۵ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی

معادلهٔ موازنه‌شدهٔ واکنش به صورت زیر است:

$$۲Ca_۳(PO_۴)_۲(s) + ۶SiO_۲(s) + ۱۰C(s) \rightarrow ۶CaSiO_۳(s) + P_۴(s) + ۱۰CO(g)$$

استفاده از کسر تبدیل: ابتدا با استفاده از جرم فسفر، جرم کربن خالص را حساب می‌کنیم:

$$۷/۴۴\ g\ P_۴ \times \frac{۱\ mol\ P_۴}{(۴\times ۳۱)\ g\ P_۴} \times \frac{۱۰\ mol\ C}{۱\ mol\ P_۴} \times \frac{۱۲\ g\ C}{۱\ mol\ C} = ۷/۲\ g\ C \quad \text{خالص}$$

جرم کل نمونهٔ ناخالص ۹ گرم است؛ بنابراین خواهیم داشت:

$$\text{جرم ناخالصی‌ها} = \text{جرم کل نمونه} - \text{جرم مادهٔ خالص} = ۹ - ۷/۲ = ۱/۸\ g$$

$$\frac{\text{جرم خالص کربن}}{\text{جرم ناخالصی‌ها}} = \frac{۷/۲}{۱/۸} = ۴$$

یه‌جور دیگه

استفاده از کسر تناسب

ابتدا درصد خلوص کربن را حساب کرده و سپس نسبت جرم مادهٔ خالص به ناخالصی‌ها را تعیین می‌کنیم:

$$\frac{\underbrace{\frac{\text{درصد خلوص}}{۱۰۰}\times \text{جرم ناخالص}}_{C}}{\underbrace{\text{جرم مولی}\times \text{ضریب}}_{C}} = \frac{\text{جرم}}{\underbrace{\text{جرم مولی}\times \text{ضریب}}_{P_۴}} \Rightarrow \frac{۹\times \frac{x}{۱۰۰}}{۱۰\times ۱۲} = \frac{۰/۲۴}{۱\times ۴\times ۳۱} \Rightarrow x = \frac{۲۴\times ۳\times ۱۰}{۹} = ۸۰٪$$

درصد خلوص کربن ۸۰٪ و در نتیجه درصد ناخالصی‌ها، ۲۰٪ است؛ بنابراین می‌توان گفت، نسبت جرم مادهٔ خالص به ناخالصی‌ها در نمونه برابر $\frac{۸۰}{۲۰} = ۴$ است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

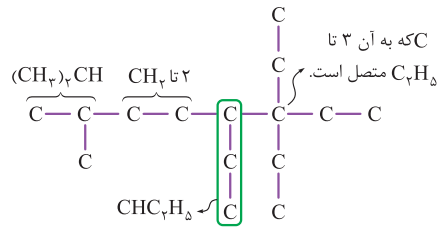
۷۱ مجموع اعداد در نام آلکان زیر طبق قواعد آیوپاک، کدام است؟

$(CH_3)_2CH(CH_2)_2CH(C_2H_5)C(C_2H_5)_3$

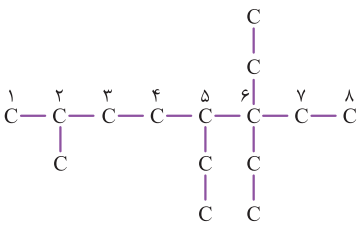
۱) ۱۴ ۲) ۱۵ ۳) ۱۷ ۴) ۱۹

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔ باید ساختار گستردهٔ ترکیب را کشیده و آن را نام‌گذاری کنیم. برای سادگی، اتم‌های هیدروژن را نشان نمی‌دهیم. در ضمن، برای این‌که در تشخیص زنجیر اصلی دچار اشتباه نشویم، گروه C_2H_5 را به صورت $-C-C$ نمایش می‌دهیم:



شماره‌گذاری زنجیر اصلی را باید از سمت چپ انجام دهیم، زیرا در این حالت، عدد حاصل از قرارگرفتن شماره‌های شاخه‌های فرعی کنار هم، کوچک‌تر خواهد شد.



۵، ۶، ۶ ـ تری‌اتیل ـ ۲ ـ متیل اوکتان

مجموع اعداد $= ۵+۶+۶+۲=۱۹$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷۲ به ازای سوختن کامل نیم مول از یک آلکان راست‌زنجیر، ۷۸/۴ لیتر گاز در شرایط STP تولید می‌شود. جرم مولی این آلکان، چند گرم بر مول بوده و گرانروی آن نسبت به اوکتان چگونه است؟ $(H=1, C=12 : g.mol^{-1})$

۱) ۴۴، کم‌تر
۲) ۱۰۰، بیشتر
۳) ۱۰۰، کم‌تر
۴) ۴۴، بیشتر

(C_8H_{18})

(C_nH_{2n+2})

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔ فراورده‌های سوختن کامل آلکان‌ها، CO_2 و H_2O هستند که در شرایط STP (دمای $0^\circ C$ و فشار $1\ atm$)، فقط CO_2 به حالت گاز است. اگر فرمول مولکولی آلکان را C_nH_{2n+2} در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$C_nH_{2n+2} \sim nCO_2$$

$$\frac{\text{مول ضریب}}{C_nH_{2n+2}} = \frac{\text{حجم}}{\underbrace{\text{حجم مولی} \times \text{ضریب}}_{CO_2}} \Rightarrow \frac{0/5}{1} = \frac{78/4}{n \times 22/4} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{78/4}{n \times 22/4}$$

$$\Rightarrow n = \frac{78/4}{11/2} = 7 \Rightarrow \text{فرمول آلکان} : C_7H_{16}$$

$$\Rightarrow \text{جرم مولی} = (7 \times 12) + 16 = 100\ g.mol^{-1}$$

در آلکان‌های راست‌زنجیر، با افزایش جرم مولی، گران‌روی بیشتر می‌شود؛ بنابراین گران‌روی آلکان مورد نظر (C_7H_{16}) از اوکتان (C_8H_{18}) کم‌تر است.

نکته

با افزایش شمار اتم‌های کربن در آلکان‌های راست‌زنجیر
- قدرت نیروهای وان‌درووالسی، نقطهٔ جوش، گران‌روی و چسبندگی ← افزایش می‌یابد.
- میزان فرّاربودن ← کاهش می‌یابد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷۳ اگر تفاوت شمار الکترون‌ها و نوترون‌ها در $^{58}X^{2+}$ برابر عدد اتمی اولین فلز قلیایی خاکی جدول باشد، عنصر X چندمین فلز واسطهٔ جدول دوره‌ای محسوب می‌شود و شمار نوترون‌های آن، چند برابر شمار پروتون‌های دومین گاز نجیب جدول است؟

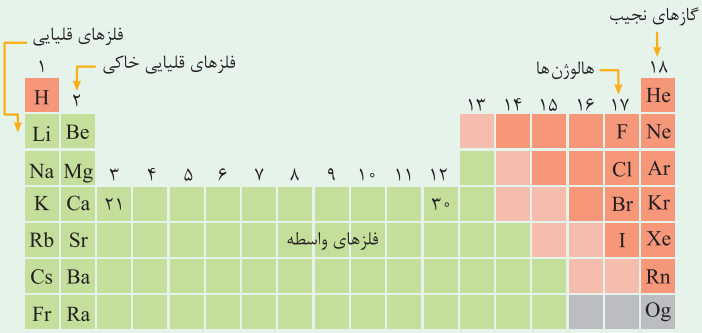
($_{10}Ne$) ($_4Be$)

۱) هفتمین ـ ۳
۲) هفتمین ـ ۲/۷
۳) هشتمین ـ ۳
۴) هشتمین ـ ۲/۷

پاسخ: گزینهٔ ۳

نکته

نام‌های اختصاصی برخی از عنصرها و گروه‌های جدول



پاسخ خیلی تشریحی

فلزهای قلیایی خاکی در گروه ۲ جدول دوره‌ای قرار دارند و نخستین عضو آن‌ها بریلیم ($_4Be$) است؛ پس تفاوت شمار الکترون‌ها و نوترون‌ها در $^{58}X^{2+}$ برابر ۴ است. حالا باید عدد اتمی X را به دست آوریم.

$$^{58}X^{2+} \Rightarrow \begin{cases} n+p=58 \\ e=p-2 \\ n-e=4 \Rightarrow n-(p-2)=4 \Rightarrow n-p=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n+p=58 \\ n-p=2 \end{cases}$$

$$2n=60 \Rightarrow n=30 \Rightarrow p=28$$

یه‌جور دیگه

می‌توان از فرمول زیر استفاده کرد:

$$\text{عدد اتمی } (Z) = \frac{\text{عدد جرمی } (A) - \text{تفاوت شمار نوترون‌ها و الکترون‌ها در یون با علامت}}{2}$$

$$Z=\frac{58-4+2}{2}=28$$

شمار پروتون‌ها و در نتیجه عدد اتمی X برابر ۲۸ است. با توجه به این‌که عدد اتمی اولین فلز واسطهٔ جدول برابر ۲۱ است، عنصر $_{28}X$ هشتمین فلز واسطه محسوب می‌شود.

از طرفی، دیدیم که شمار نوترون‌های X برابر ۳۰ است:

$$\frac{\text{شمار نوترون‌های X}}{\text{شمار پروتون‌های دومین گاز نجیب } (_{10}Ne)}=\frac{30}{10}=3$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷۴ کدام مورد درست است؟ $(H=1, C=12, O=16 : g.mol^{-1})$

۱) هر هیدروکربنی که همهٔ پیوندهای اشتراکی بین اتم‌های آن، یگانه (ساده) باشد، به یقین یک آلکان است.

۲) در ساختار یک هیدروکربن، ممکن نیست همهٔ اتم‌های کربن به دو اتم هیدروژن متصل باشند.

۳) جرم CO_2 حاصل از سوختن ۱ گرم از همهٔ آلکن‌ها، یکسان بوده و به شمار اتم‌های کربن آلکن وابسته نیست.

۴) در تعداد اتم‌های کربن یکسان، تعداد اتم‌های هیدروژن یک هیدروکربن حلقوی به یقین کم‌تر از یک هیدروکربن زنجیره‌ای است.

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): اگر می‌گفت هیدروکربن زنجیره‌ای، درست بود! مثلاً در سیکلوآلکان‌ها (از خانوادهٔ هیدروکربن‌های حلقوی) نیز همهٔ پیوندهای اشتراکی بین اتم‌ها، یگانه است.

گزینهٔ (۲): *چرا ممکن نباشه؟* مثلاً در سیکلوهگزان ()، همهٔ اتم‌های کربن به دو اتم هیدروژن متصل‌اند.

گزینهٔ (۳): از سوختن هر مول آلکن (C_nH_{2n})، n مول CO_2 تولید می‌شود:

$$C_nH_{2n} \sim nCO_2$$

$$1gC_nH_{2n} \times \frac{1molC_nH_{2n}}{14ngC_nH_{2n}} \times \frac{n\,molCO_2}{1molC_nH_{2n}} = \frac{1}{14}molCO_2$$

همان‌طور که دیدید، n از محاسبات حذف می‌شود و این نشان می‌دهد که مقدار CO_2 تولیدشده در سوختن کامل ۱ گرم از همهٔ آلکن‌ها برابر است و به شمار اتم‌های کربن آن‌ها بستگی ندارد.

گزینهٔ (۴): *نه لزوماً!* زیرا ممکن است در ساختار هیدروکربن زنجیره‌ای، پیوند دوگانه یا سه‌گانه وجود داشته باشد؛ چند مقایسه ببینید.

تعداد اتم‌های هیدروژن: هگزن (C_6H_{12}) دارای ۱ پیوند دوگانه $-$ ۱ = سیکلوهگزان (C_6H_{12}) دارای ۱ حلقه

تعداد اتم‌های هیدروژن: هگزین (C_6H_{10}) دارای ۱ پیوند سه‌گانه $-$ ۱ < سیکلوهگزان (C_6H_{12}) دارای ۱ حلقه

کدام مورد درست است؟ *(سؤال ۹۱ کنکور تجربی ۱۴۰۲ (خارج از کشور))*

۱) فقط در ساختار هیدروکربن‌های سیرنشده، جفت‌الکترون ناپیوندی می‌تواند وجود داشته باشد.

۲) در هیدروکربن‌های حلقوی، فقط اتم‌های کربن می‌توانند تشکیل‌دهندهٔ حلقهٔ اصلی ساختار مولکول باشند.

۳) دلیل زیاد بودن ترکیب‌های شناخته‌شده از کربن، توانایی اتم آن در تشکیل پیوندهای اشتراکی با سایر اتم‌هاست.

۴) در هیدروکربن‌هایی با شمار اتم کربن برابر، شمار اتم‌های هیدروژن ساختار حلقوی، به یقین، کم‌تر از شمار این اتم‌ها در ساختار راست‌زنجیر است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷۵ کدام مورد درست است؟

۱) طلا یکی از فلزاتی است که به شکل کلوخه‌ها یا رگه‌های زردرنگ، لابه‌لای خاک یافت می‌شود.

۲) غلظت گونه‌های فلزی موجود در ذخایر زمینی نسبت به کف اقیانوس، بیشتر است.

۳) در فرایند استخراج فلز از سنگ معدن، مقدار قابل توجهی از سنگ معدن به فلز تبدیل می‌شود.

۴) روش گیاه‌پالایی برای استخراج فلزهایی مانند طلا و مس برخلاف نیکل و روی، مقرون‌به‌صرفه است.

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔

با توجه به متن کتاب درسی، روش گیاه‌پالایی برای استخراج طلا و مس به‌صرفه است، اما برای استخراج فلزهای روی و نیکل، مقرون‌به‌صرفه نیست.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): طلا **تنها** فلزی است که به شکل کلوخه‌ها یا رگه‌های زردرنگ لابه‌لای خاک یافت می‌شود.

گزینهٔ (۲): غلظت گونه‌های فلزی موجود در کف اقیانوس نسبت به ذخایر زمینی، بیشتر است.

گزینهٔ (۳): در استخراج فلز، تنها **درصد کمی** از سنگ معدن به فلز تبدیل می‌شود.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷۶ کدام مورد، جملهٔ زیر را از نظر علمی به درستی کامل می‌کند؟

«گرما را می‌توان هم‌ارز با آن مقدار ..... دانست که به دلیل تفاوت در ..... جاری می‌شود.»

۱) انرژی گرمایی، انرژی گرمایی
۲) دمایی، انرژی گرمایی
۳) انرژی گرمایی، دما
۴) دمایی، دما

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی گرما را می‌توان هم‌ارز با آن مقدار **انرژی گرمایی** دانست که به دلیل تفاوت در **دما** جاری می‌شود.

۱- یک استکان چای با دمای $90^\circ C$ درون اتاقی با دمای $25^\circ C$ قرار دارد. با گذشت زمان، دما و انرژی گرمایی آن چه تغییری می‌کند؟ چرا؟

۲- با خط‌زدن واژهٔ نادرست در هر مورد، عبارت زیر را کامل کنید.

گرما را می‌توان هم‌ارز با مقدار $\frac{\text{انرژی گرمایی}}{\text{دمایی}}$ دانست که به دلیل تفاوت در $\frac{\text{انرژی گرمایی}}{\text{دما}}$ جاری می‌شود.

۳- تکه‌ای نان و تکه‌ای سیب‌زمینی را با جرم و سطح یکسان در دمای $60^\circ C$ در نظر بگیرید. اگر آن‌ها را هم‌زمان در محیطی با دمای $20^\circ C$ قرار دهیم کدام‌یک زودتر با محیط هم‌دما می‌شود؟ درستی پاسخ خود را در منزل بررسی کنید.

(شیمی (۲) - خود را بیازمایید صفحهٔ ۶۰ کتاب درسی)

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷۷ با توجه به داده‌های زیر، گرمای ویژهٔ روغن زیتون $(C_{۵۷}H_{۱۰۴}O_۶)$، برحسب $J.g^{-۱}.K^{-۱}$ کدام است؟

$(H=۱, C=۱۲, O=۱۶ : g.mol^{-۱})$

۰/۲۵ مول روغن زیتون $(۷۵^\circ C) \xrightarrow{۲۲/۱\,kJ}$ ۰/۲۵ مول روغن زیتون $(۲۵^\circ C)$

۱) ۱/۸۴ ۲) ۲/۰۰

۳) ۲/۲۱ ۴) ۲/۴۶

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: جرم ۰/۲۵ مول روغن زیتون را حساب می‌کنیم:

$$\text{جرم مولی روغن زیتون } (C_{۵۷}H_{۱۰۴}O_۶) = (۵۷\times۱۲)+۱۰۴+(۶\times۱۶)=۸۸۴\ g.mol^{-۱}$$

$$\text{جرم روغن زیتون} = ۰/۲۵\ mol\times\frac{۸۸۴\ g}{۱\ mol}=\frac{۸۸۴}{۴}=۲۲۱\ g$$

گام دوم: از رابطهٔ $Q=mc\Delta\theta$ استفاده می‌کنیم:

$$۲۲/۱\times۱۰۰۰=۲۲۱\times c\times(۷۵-۲۵) \Rightarrow c=\frac{۲۲۱\times۱۰۰}{۲۲۱\times۵۰}=۲\ J.g^{-۱}.^\circ C^{-۱}$$

نکته با توجه به این‌که مقدار تغییر دما در مقیاس سلسیوس و کلوین با هم برابرند $(\Delta\theta=\Delta T)$، مقدار گرمای ویژه با یکای $J.g^{-۱}.^\circ C^{-۱}$ با مقدار آن با یکای $J.g^{-۱}.K^{-۱}$، یکسان است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷۸ کدام واکنش با آزادشدن گرما همراه است و مجموع ضرایب استوکیومتری مواد در معادلهٔ موازنه‌شدهٔ آن بیشتر می‌باشد؟

۱) واکنش فتوسنتز (یعنی گرماده است)

۲) تجزیهٔ هیدروژن پراکسید

۳) تجزیهٔ آمونیاک به گازهای نیتروژن و هیدروژن

۴) واکنش گاز کربن مونوکسید با گاز نیتروژن مونوکسید

پاسخ: گزینهٔ ۴

نکته فرایندهای گرماگیر و گرماده کتاب درسی

فرایندهای گرماگیر ($\Delta H > 0$)	فرایندهای گرماده ($\Delta H < 0$)
۱) تغییر حالت‌های فیزیکی در فرایندهای ذوب، تبخیر و تصعید(فرازش)	۱) تغییر حالت‌های فیزیکی در فرایندهای انجماد، میعان و چگالش
۲) واکنش فتوسنتز: $۶CO_۲(g)+۶H_۲O(l)\rightarrow C_۶H_{۱۲}O_۶(s)+۶O_۲(g)$	۲) همهٔ واکنش‌های سوختن (مانند سوختن گاز هیدروژن، کربن، هیدروکربن‌ها و ...)
۳) انحلال آمونیوم نیترات در آب: $NH_۴NO_۳(s)\xrightarrow{\text{آب}}NH_۴^+(aq)+NO_۳^-(aq)$	۳) انحلال کلسیم کلرید در آب: $CaCl_۲(s)\xrightarrow{\text{آب}}Ca^{۲+}(aq)+۲Cl^-(aq)$
۴) تجزیه $N_۲O_۴$ به $NO_۲$: $N_۲O_۴(g)\rightarrow ۲NO_۲(g)$	۴) واکنش فلزهای گروه اول با گاز کلر: $۲M(s)+Cl_۲(g)\rightarrow ۲MCl(s)$ (M: گروه اول)
۵) تولید اوزون از گاز اکسیژن: $۳O_۲(g)\rightarrow ۲O_۳(g)$	۵) تشکیل گاز HCl از گازهای $H_۲$ و $Cl_۲$: $H_۲(g)+Cl_۲(g)\rightarrow ۲HCl(g)$
۶) تشکیل گاز NO از گازهای $N_۲$ و $O_۲$: $N_۲(g)+O_۲(g)\rightarrow ۲NO(g)$	۶) تهیهٔ متان از گرافیت و گاز هیدروژن: $C(s,\text{گرافیت})+۲H_۲(g)\rightarrow CH_۴(g)$
۷) تشکیل $N_۲H_۴$ (هیدرازین) از $N_۲$ و $H_۲$: $N_۲(g)+۲H_۲(g)\rightarrow N_۲H_۴(g)$	۷) تشکیل گاز $NH_۳$ از گازهای $H_۲$ و $N_۲$ (فرایند هابر): $N_۲(g)+۳H_۲(g)\rightarrow ۲NH_۳(g)$
۸) تشکیل گاز هیدروژن یدید از گاز هیدروژن و ید جامد: $H_۲(g)+I_۲(s)\rightarrow ۲HI(g)$	۸) تشکیل آمونیاک از هیدرازین و هیدروژن: $N_۲H_۴(g)+H_۲(g)\rightarrow ۲NH_۳(g)$
	۹) تجزیهٔ هیدروژن پراکسید: $۲H_۲O_۲(aq)\rightarrow ۲H_۲O(l)+O_۲(g)$
	۱۰) واکنش گازهای CO و NO: $۲CO(g)+۲NO(g)\rightarrow ۲CO_۲(g)+N_۲(g)$
	۱۱) تشکیل گاز هیدروژن یدید از گاز هیدروژن و ید گازی: $H_۲(g)+I_۲(g)\rightarrow ۲HI(g)$

پاسخ خیلی تشریحی واکنش‌های گزینه‌های (۲) و (۴)، گرماده بوده و با آزادشدن انرژی همراه‌اند:

۵ = مجموع ضرایب استوکیومتری مواد $\Rightarrow$ $۲H_۲O_۲(l)\rightarrow ۲H_۲O(l)+O_۲(g)$:تجزیهٔ هیدروژن پراکسید :گزینهٔ (۲) $(H_۲O_۲)$

۷ = مجموع ضرایب استوکیومتری مواد $\Rightarrow$ $۲CO(g)+۲NO(g)\rightarrow ۲CO_۲(g)+N_۲(g)$:واکنش گاز کربن مونوکسید با گاز نیتروژن مونوکسید :گزینهٔ (۴)

کدام واکنش با جذب گرما و کاهش شمار مول های گازی فراورده(ها) نسبت به واکنش‌دهنده(ها) همراه است؟
(سؤال ۹۲ کنکور ریاضی ۱۴۰۴ ـ نوبت اول)

۱) تجزیهٔ هیدروژن پراکسید به آب و گاز اکسیژن

۲) تشکیل هیدرازین از عنصرهای سازنده

۳) تجزیهٔ آمونیاک به عنصرهای سازنده

۴) تشکیل متان از گرافیت و هیدروژن

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷۹ اگر در واکنش: $N_2(g)+2H_2(g)\rightarrow N_2H_4(g)$، به ازای مصرف ۸/۴ لیتر گاز در شرایط استاندارد، ۱۱/۲۵ کیلوژول گرما از محیط گرفته شود، میانگین آنتالپی پیوند $N-H$ برحسب کیلوژول بر مول کدام است؟

پیوند	N—N	N≡N	H—H
آنتالپی پیوند ($kJ.mol^{-1}$)	۱۶۳	۹۴۵	۴۳۶

۱) ۳۵۱ ۲) ۳۹۱
۳) ۳۱۹ ۴) ۳۱۵

پاسخ: گزینهٔ ۲

نکته برای محاسبهٔ ΔH یک واکنش گازی به کمک آنتالپی‌های پیوند از رابطهٔ زیر استفاده می‌شود:

ΔH (واکنش) = [مجموع آنتالپی پیوندهای مواد فراورده] − [مجموع آنتالپی پیوندهای مواد واکنش‌دهنده]

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: از آن‌جایی‌که برای انجام واکنش مورد نظر، گرما از محیط گرفته می‌شود؛ بنابراین واکنش مورد نظر گرماگیر است و ΔH آن، مثبت می‌باشد. با توجه به معادلهٔ موازنه‌شدهٔ واکنش، حجم گازهای نیتروژن (N_2) و هیدروژن (H_2) مصرف‌شده در شرایط STP و مقدار گرمای مبادله‌شده با محیط، آنتالپی واکنش را به دست می‌آوریم:

$$N_2(g)+2H_2(g)\rightarrow N_2H_4(g)$$

$$3\ mol\ \text{گاز}\times\frac{22/4\ L\ \text{گاز}}{1\ mol\ \text{گاز}}\times\frac{11/25\ kJ}{8/4\ L\ \text{گاز}}=\frac{3\times22/4\times11/25}{8/4}=90\ kJ$$

گام دوم: با توجه به ساختار مواد شرکت‌کننده در واکنش مورد نظر و آنتالپی پیوندهای داده‌شده، میانگین آنتالپی پیوند $N-H$ را محاسبه می‌کنیم:

$$:N\equiv N:+2H-H\rightarrow \begin{matrix}H\\ H\end{matrix}\!\!>\!N-N\!<\!\!\begin{matrix}H\\ H\end{matrix}$$

$$\Delta H_{\text{واکنش}}=[\Delta H(N\equiv N)+2\Delta H(H-H)]-[\Delta H(N-N)+4\Delta H(N-H)]$$

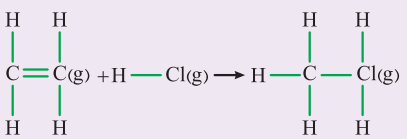
$$\Rightarrow 90=[945+(2\times436)]-[163+4\Delta H(N-H)]$$

$$\Rightarrow 4\Delta H(N-H)=1654-90=1564\ \Rightarrow\ \Delta H(N-H)=\frac{1564}{4}=391\ kJ.mol^{-1}$$

گاز کلرواتان در افشانه‌های بی‌حس‌کنندهٔ موضعی کاربرد دارد و از واکنش گاز اتن با گاز هیدروژن‌کلرید (HCl) به دست می‌آید. اگر مجموع آنتالپی پیوند واکنش‌دهنده‌ها در واکنش زیر برابر با (+۲۷۰۵) کیلوژول و آنتالپی واکنش (−۵۹) کیلوژول باشد، با توجه به جدول داده‌شده، آنتالپی پیوند $C-H$ را محاسبه کنید.

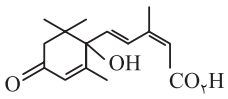
(سؤال ۸ ـ امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۳)

پیوند	C—C	C—Cl
میانگین انرژی پیوند ($kJ.mol^{-1}$)	۳۴۸	۳۳۹



SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸۰ دربارهٔ ترکیبی با ساختار روبه‌رو، کدام مورد نادرست است؟



۱) شمار پیوندهای دوگانه در آن با شمار پیوندهای دوگانه در مولکول نفتالن برابر است.

۲) یکی از گروه‌های عاملی موجود در ساختار آن، در ۲- هپتانون نیز وجود دارد.

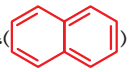
۳) شمار اتم‌های هیدروژن آن با شمار این اتم‌ها در یک آلکین ۱۰کربنه برابر است.

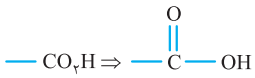
۴) ۴۰ درصد از اتم‌های کربن آن به هیچ اتم هیدروژنی متصل نیستند.

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): در ساختار مولکول داده‌شده مانند نفتالن ()، ۵ پیوند دوگانه وجود دارد. دقت کنید که علاوه بر ۴ پیوند دوگانه‌ای که در شکل کاملاً واضح است، یک پیوند دوگانه نیز در گروه CO_2H وجود دارد.

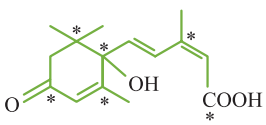


گزینهٔ (۲): در ساختار ۲-هپتانون (نوعی کتون)، گروه عاملی  وجود دارد که در ساختار مولکول داده‌شده نیز دیده می‌شود.

گزینهٔ (۳): فرمول مولکولی ترکیب داده‌شده به صورت $C_{15}H_{20}O_4$ است؛ یعنی در هر مولکول آن، ۲۰ اتم هیدروژن وجود دارد، در حالی که یک آلکین ۱۰کربنه $(C_{10}H_{18})$ دارای ۱۸ اتم هیدروژن می‌باشد.

گزینهٔ (۴): از ۱۵ اتم کربن مولکول، ۶ اتم کربن آن که در شکل زیر با ستاره مشخص شده‌اند، به هیچ اتم هیدروژنی متصل نیستند:

$$\frac{\overset{2}{\cancel{6}}}{\underset{5}{\cancel{15}}} \times 100 = 40\%$$



SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸۱ با توجه به واکنش‌های زیر، تفاوت ارزش سوختی متان در حالت مایع و گاز، چند کیلوژول بر گرم است و برای تبدیل ۰/۲ مول متان مایع به متان گازی (در نقطهٔ جوش)، به چند کیلوژول گرما نیاز است؟ $(H=1, C=12 : g.mol^{-1})$

$$CH_4(g)+2O_2(g)\rightarrow CO_2(g)+2H_2O(l) \quad \Delta H=-890\ kJ$$

$$CH_4(l)+2O_2(g)\rightarrow CO_2(g)+2H_2O(l) \quad \Delta H=-854/8\ kJ$$

۱) ۲/۲ ـ ۷/۰۴
۲) ۲/۲ ـ ۴/۰۷
۳) ۳/۵۲ ـ ۴/۰۷
۴) ۳/۵۲ ـ ۷/۰۴

پاسخ: گزینهٔ ۱

نکته رابطهٔ بین ارزش سوختی و آنتالپی سوختن یک ترکیب به صورت زیر است:

$$\text{ارزش سوختی } (kJ.g^{-1}) = \frac{|\text{آنتالپی سوختن } (kJ.mol^{-1})|}{\text{جرم مولی } (g.mol^{-1})}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ با توجه به معادله‌های داده‌شده، آنتالپی سوختن متان در حالت مایع و گاز به ترتیب برابر ۸۹۰ و ۸۵۴/۸ کیلوژول بر مول است؛ بنابراین خواهیم داشت:

$$\text{ارزش سوختی} = \frac{|\text{آنتالپی سوختن}|}{\text{جرم مولی}} \begin{cases} \text{ارزش سوختی متان در حالت گاز:} = \frac{890}{16}\ kJ.g^{-1} \\ \text{ارزش سوختی متان در حالت مایع:} = \frac{854/8}{16}\ kJ.g^{-1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{تفاوت ارزش سوختی متان در حالت مایع و گاز} = \frac{890}{16}-\frac{854/8}{16}=\frac{35/2}{16}=\frac{32}{16}+\frac{3/2}{16}=2/2$$

اگر معادلهٔ اول را وارونه کرده و با معادلهٔ دوم جمع کنیم، معادلهٔ فرایند تبخیر متان به دست می‌آید. طبق قانون هس خواهیم داشت:

$$CH_4(l)\rightarrow CH_4(g) \quad \Delta H=-(-890)-854/8=35/2\ kJ$$

$$0/2\ mol\ \text{متان} \times \frac{35/2\ kJ}{1\ mol\ \text{متان}} = 7/04\ kJ$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸۲ در کدام موارد زیر، اثر عوامل مؤثر بر سرعت واکنش‌ها به درستی بیان شده است؟

الف) قاووت زودتر از مغز آفتاب‌گردان، پسته و ... فاسد می‌شود. ← اثر نوع مواد واکنش‌دهنده

ب) محلول هیدروژن پراکسید در دمای اتاق به کندی تجزیه شده و گاز اکسیژن تولید می‌کند، در حالی که افزودن دو قطره از محلول پتاسیم یدید، سرعت واکنش را به طور چشمگیری افزایش می‌دهد. ← اثر غلظت

پ) بیمارانی که مشکلات تنفسی دارند، در شرایط اضطراری نیاز به تنفس از کپسول اکسیژن دارند. ← اثر غلظت

ت) برای نگهداری طولانی‌مدت فراورده‌های گوشتی و پروتئینی، آن‌ها را به حالت منجمد ذخیره می‌کنند. ← اثر دما

۱) پ و ت
۲) الف و ب
۳) الف و ت
۴) ب و پ

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

عوامل مؤثر بر سرعت واکنش

عامل	توضیح	مثال
نوع مواد واکنش‌دهنده (واکنش‌پذیری)	با تغییر مواد واکنش‌دهنده و ماهیت آن‌ها، سرعت واکنش تغییر می‌کند.	• در شرایط یکسان، سرعت واکنش سدیم با آب با سرعت واکنش پتاسیم با آب متفاوت است. • دمای لازم برای انجام واکنش هالوژن‌های مختلف با گاز هیدروژن متفاوت است.
سطح تماس میان ذره‌های واکنش‌دهنده	هر چه سطح تماس میان ذره‌های واکنش‌دهنده بیشتر باشد، سرعت واکنش بیشتر است.	• قاووت زودتر از مغز خوراکی‌های تهیه‌شده از آن، فاسد می‌شود. • شعلهٔ آتش، گرد آهن موجود در کپسول چینی را داغ و سرخ می‌کند، در حالی که پاشیدن و پخش کردن گرد آهن بر روی شعله، سبب سوختن آن می‌شود. • تراشه‌های چوب سریع‌تر از تکه‌های چوب می‌سوزند.
دما	افزایش دما، سرعت واکنش را زیاد می‌کند.	• برای نگهداری طولانی‌مدت فراورده‌های گوشتی و پروتئینی، آن‌ها را به حالت منجمد ذخیره می‌کنند. • محلول بنفش‌رنگ پتاسیم پرمنگنات با یک اسید آلی در دمای اتاق به کندی واکنش می‌دهد، اما با گرم‌شدن، محلول به سرعت بی‌رنگ می‌شود.
غلظت	در اغلب واکنش‌ها، با افزایش غلظت واکنش‌دهنده‌ها، سرعت واکنش افزایش می‌یابد.	• برای نگهداری سالم برخی خوراکی‌ها، آن‌ها را با خالی کردن هوای درون ظرف، بسته‌بندی می‌کنند. • بیمارانی که مشکلات تنفسی دارند، در شرایط اضطراری نیاز به تنفس از کپسول گاز اکسیژن خالص دارند. • الیاف آهن داغ و سرخ‌شده در هوا نمی‌سوزد، در حالی که همان مقدار الیاف آهن داغ و سرخ‌شده در یک ارلن پر از اکسیژن می‌سوزد.
فشار یا حجم	تغییر فشار یا حجم، فقط روی سرعت واکنش‌هایی مؤثر است که حداقل یکی از مواد واکنش‌دهنده در آن به حالت گاز باشد. در این حالت، افزایش فشار (کاهش حجم) باعث افزایش سرعت می‌شود.	• با افزایش فشار، سرعت واکنش $NH_3(g) + HCl(g) \rightarrow NH_4Cl(s)$ افزایش می‌یابد، در حالی که تغییر فشار، اثری بر سرعت واکنش زیر ندارد: $CaCO_3(s) \rightarrow CaO(s) + CO_2(g)$ • کاهش حجم سامانه در واکنش گازی $2SO_2(g) + O_2(g) \rightarrow 2SO_3(g)$، باعث افزایش غلظت گونه‌ها و در نتیجه افزایش سرعت واکنش می‌شود.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

عامل	توضیح	مثال
کاتالیزگر	کاتالیزگر باعث افزایش سرعت واکنش می‌شود.	• واکنش سوختن قند آغشته به خاک باغچه، سریع‌تر انجام می‌شود. • برخی افراد با مصرف کلم و حبوبات دچار نفخ می‌شوند، زیرا در بدن آن‌ها، آنزیم (کاتالیزگر) لازم برای هضم کامل و سریع آن‌ها وجود ندارد. • با اضافه‌کردن چند قطره محلول پتاسیم یدید به محلول هیدروژن پراکسید، سرعت تجزیهٔ این محلول به طور قابل توجهی افزایش می‌یابد.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ موارد (پ) و (ت) درست‌اند.

بررسی موارد نادرست:

الف) فاسدشدن زودتر قاووت نسبت به مغز آفتاب‌گردان، پسته و ... بیانگر اثر سطح تماس میان ذره‌های واکنش‌دهنده بر سرعت واکنش است.

ب) محلول هیدروژن پراکسید در دمای اتاق به کندی تجزیه شده و گاز اکسیژن تولید می‌کند، در حالی که با اضافه‌کردن دو قطره از محلول پتاسیم یدید ($KI(aq)$) به عنوان کاتالیزگر، سرعت واکنش به طور قابل توجهی افزایش می‌یابد؛ بنابراین مورد گفته‌شده بیانگر اثر کاتالیزگر بر سرعت واکنش است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸۳ ۲/۵ گرم کلسیم کربنات را به یک ظرف سرباز حاوی ۱۰۰ میلی‌لیتر محلول هیدروکلریک اسید با چگالی $1/1\ g.mL^{-1}$ اضافه می‌کنیم. اگر سرعت متوسط تولید گاز کربن دی‌اکسید در این واکنش برابر $0/03\ mol.min^{-1}$ باشد، پس از گذشت چند ثانیه، جرم مخلوط واکنش به ۱۰۱/۵ گرم می‌رسد؟ $(C=12, O=16 : g.mol^{-1})$

$$CaCO_3(s)+2HCl(aq)\rightarrow CaCl_2(aq)+CO_2(g)+H_2O(l)$$

۱) ۲۰۰ ۲) ۴۰۰

۳) ۵۰۰ ۴) ۸۰۰

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی

کاهش جرم مخلوط واکنش به دلیل خروج گاز CO_2 تولیدشده از ظرف است:

$$\text{جرم اولیهٔ مخلوط} = \text{جرم } CaCO_3 + \text{جرم محلول } HCl = 2/5 + (100\ mL \times \frac{1/1\ g}{1\ mL}) = 112/5\ g$$

$$\text{جرم } CO_2 \text{ تولیدشده} = \text{کاهش جرم مخلوط} = 112/5 - 101/5 = 11\ g$$

$$\Rightarrow \text{مول } CO_2 \text{ تولیدشده} = 11\ g \times \frac{1\ mol}{44\ g} = \frac{1}{4}\ mol$$

حالا با توجه به سرعت متوسط تولید CO_2، زمان لازم برای تولید $\frac{1}{4}$ مول از آن را به دست می‌آوریم:

$$\bar{R}(CO_2)=\frac{\Delta n(CO_2)}{\Delta t} \Rightarrow 0/03=\frac{\frac{1}{4}}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{100}{12}\ min \times \frac{60\ s}{1\ min} = 500\ s$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸۴ اگر در یک واکنش فرضی، رابطهٔ زیر بین تغییرات غلظت مواد شرکت‌کننده در واکنش برقرار باشد، مجموع ضرایب مواد در معادلهٔ موازنه‌شدهٔ واکنش کدام است؟

$$۲\frac{\Delta[B]}{\Delta t} = -۳\frac{\Delta[A]}{\Delta t} = \frac{\Delta[D]}{۲\Delta t} = \frac{\Delta[C]}{\Delta t}$$

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۱۹ ۴) ۲۳

پاسخ: گزینهٔ ۴

نکته

در یک واکنش، نسبت قدرمطلق تغییر غلظت مواد با نسبت ضریب استوکیومتری آن‌ها در معادلهٔ موازنه‌شدهٔ واکنش برابر است. هم‌چنین اگر سرعت تولید یا مصرف هر یک از مواد را بر ضریب استوکیومتری آن‌ها تقسیم کنیم، سرعت واکنش به دست می‌آید:

$$aA + bB \rightarrow cC + dD$$

$$\bar{R}(\text{واکنش}) = \frac{\bar{R}(A)}{a} = \frac{\bar{R}(B)}{b} = \frac{\bar{R}(C)}{c} = \frac{\bar{R}(D)}{d}$$

اگر سرعت مواد را برحسب تغییرات غلظت بیان کنیم، می‌توان نوشت:

$$\bar{R} = \left|\frac{\Delta[\ ]}{\Delta t}\right|$$

$$\bar{R}(\text{واکنش}) = \frac{-\Delta[A]}{a\Delta t} = \frac{-\Delta[B]}{b\Delta t} = \frac{\Delta[C]}{c\Delta t} = \frac{\Delta[D]}{d\Delta t}$$

دقت کنید که غلظت مواد واکنش‌دهنده با گذشت زمان، کاهش می‌یابد؛ به همین دلیل در رابطه سرعت آن‌ها، در کنار تغییرات غلظت، باید علامت منفی قرار گیرد.

پاسخ خیلی تشریحی

می‌دانیم که در رابطهٔ کلی بین تغییرات غلظت مواد، ضریب استوکیومتری در مخرج کسرها نوشته می‌شود، در واقع اعداد ۲ و ۳ در دو کسر اول، به صورت $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۳}$ در مخرج کسرها بوده‌اند:

$$\frac{\Delta[B]}{\frac{۱}{۲}\Delta t} = -\frac{\Delta[A]}{\frac{۱}{۳}\Delta t} = \frac{\Delta[D]}{۲\Delta t} = \frac{\Delta[C]}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۳}A \rightarrow \frac{۱}{۲}B + ۲D + C \Rightarrow ۲A \rightarrow ۳B + ۱۲D + ۶C \Rightarrow \text{مجموع ضرایب} = ۲ + ۳ + ۱۲ + ۶ = ۲۳$$

البته در معادلهٔ واکنش، جای مواد واکنش‌دهنده و فراورده می‌تواند جابه‌جا باشد که تأثیری در جواب نهایی سؤال ندارد.

رابطهٔ زیر، برای تغییر غلظت مولی مواد گازی شرکت‌کننده در یک واکنش در یک بازهٔ زمانی معین برقرار است. اگر این رابطه، معادل سرعت واکنش باشد، معادلهٔ موازنه‌نشدهٔ این واکنش و مجموع ضرایب استوکیومتری فراورده‌های آن، کدام است؟ *(سؤال ۹۱ کنکور ریاضی (خارج از کشور))*

$$\frac{\Delta[N_۲]}{\Delta t} = -\frac{۱}{۲}\frac{\Delta[NO]}{\Delta t} = \frac{۱}{۲}\frac{\Delta[H_۲O]}{\Delta t} = -\frac{۱}{۲}\frac{\Delta[H_۲]}{\Delta t}$$

۱) $N_۲ + H_۲O \rightarrow NO + H_۲$، ۴

۲) $NO + H_۲ \rightarrow N_۲ + H_۲O$، ۳

۳) $N_۲ + H_۲ \rightarrow NO + H_۲O$، ۴

۴) $NO + H_۲O \rightarrow N_۲ + H_۲$، ۳

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸۵ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر به ترتیب در کدام گزینه آمده است؟ $(H=۱, C=۱۲, O=۱۶ : g.mol^{-۱})$

- **نقطهٔ ذوب بالا و حل‌شدن در حلال‌های آلی را می‌توان از جمله ویژگی‌های بارز تفلون دانست.**
- **استیرن، هیدروکربنی سیرنشده است و جرم مولی کم‌تری نسبت به بنزآلدهید دارد.**
- **نشاسته، مونوساکاریدی است که از اتصال مولکول‌های گلوکز به یکدیگر تشکیل شده است.**
- **پلی‌پروپن به دلیل داشتن ساختاری شبیه به آلکان‌ها، زیست‌تخریب‌ناپذیر است.**

۱) نادرست ـ درست ـ درست ـ درست
۲) نادرست ـ درست ـ نادرست ـ درست
۳) درست ـ درست ـ درست ـ درست
۴) درست ـ نادرست ـ نادرست ـ نادرست

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✔

عبارت‌های اول و سوم، نادرست و عبارت‌های دوم و چهارم، درست‌اند.

- تفلون در حلال‌های آلی حل نمی‌شود.
- در ساختار استیرن ($H_۲C=CH$)، پیوند $C=C$ وجود دارد؛ از این‌رو هیدروکربنی سیرنشده محسوب می‌شود. جرم مولی



استیرن، ۲ گرم کم‌تر از بنزآلدهید است.

$$\text{جرم مولی } C_۸H_۸ = (۸\times۱۲)+۸ = ۱۰۴\, g.mol^{-۱}$$

$$\text{جرم مولی } C_۷H_۶O = (۷\times۱۲)+۶+۱۶ = ۱۰۶\, g.mol^{-۱}$$

- نشاسته یک پلی‌ساکارید است و نه مونوساکارید!
- *کاملاً درسته!* پلی‌پروپن مانند آلکان‌ها، سیرشده است و تمایلی به انجام واکنش ندارد؛ به همین دلیل پلیمری زیست‌تخریب‌ناپذیر و ماندگار محسوب می‌شود.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸۶ مخلوطی به جرم یک کیلوگرم از ترکیب‌های C_2H_3Cl و C_2H_5Cl را در شرایط مناسب در ظرفی قرار می‌دهیم تا واکنش پلیمری‌شدن انجام شود. اگر پس از انجام واکنش، ۴۰۰ گرم پلی‌وینیل کلرید تولید شود، نسبت جرم ترکیب سنگین‌تر به ترکیب سبک‌تر در مخلوط اولیه کدام است؟ (بازده واکنش پلیمری‌شدن را ۶۴ درصد در نظر بگیرید.)

۱) ۰/۶ ۲) ۰/۸

۳) ۱/۲ ۴) ۱/۵

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✔ C_2H_3Cl همان وینیل کلرید ($H_2C=\underset{Cl}{\underset{|}{CH}}$) است که طی واکنش پلیمری‌شدن به پلی‌وینیل کلرید تبدیل می‌شود، اما C_2H_5Cl (کلرواتان) یک ترکیب سیرشده می‌باشد و در واکنش پلیمری‌شدن شرکت نمی‌کند.

نکته با توجه به این‌که در ترکیب‌های آلی، هالوژن‌ها مانند اتم هیدروژن یک پیوند تشکیل می‌دهند، در این‌گونه موارد می‌توان به جای اتم‌های هالوژن، هیدروژن قرار داد و سپس سیرشده یا سیرنشده‌بودن ترکیب را بررسی کرد.

$$C_2H_5Cl \xrightarrow{Cl\to H} C_2H_6 \rightarrow \text{سیرشده}$$

ترکیب‌هایی که از فرمول آلکان‌ها (C_nH_{2n+2}) پیروی می‌کنند، سیرشده‌اند و نمی‌توانند نقش مونومر را ایفا کنند.

از روی جرم پلی‌وینیل کلرید تولیدشده، ابتدا جرم وینیل کلرید و سپس جرم C_2H_5Cl در مخلوط اولیه را به دست می‌آوریم:

$$nC_2H_3Cl \rightarrow \{C_2H_3Cl\}_n$$

با توجه به این‌که پلی‌وینیل کلرید، تنها فراوردهٔ واکنش پلیمری‌شدن است، اگر بازده واکنش ۱۰۰ درصد باشد، جرم پلی وینیل کلرید تولیدشده با جرم وینیل کلرید اولیه برابر خواهد بود. حالا که بازده، ۱۰۰ درصد نیست، جرم وینیل کلرید اولیه باید بیشتر از جرم پلی‌وینیل کلرید تولیدشده باشد.

$$\underbrace{x}_{\text{جرم وینیل کلرید}} \times \frac{64}{100} = \underbrace{400}_{\text{جرم پلی وینیل کلرید}} \Rightarrow x = \frac{4 \times 10000}{64} = 625\ g$$

یه جور دیگه

$$\frac{\text{جرم} \times \frac{\text{بازده درصدی}}{100}}{\underbrace{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}_{C_2H_3Cl}} = \frac{\text{جرم}}{\underbrace{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}_{\{C_2H_3Cl\}_n}} \Rightarrow \frac{x \times \frac{64}{100}}{n \times C_2H_3Cl \text{ جرم مولی}} = \frac{400}{1 \times (n \times C_2H_3Cl \text{ جرم مولی})} \Rightarrow x = 625\ g$$

با توجه به جرم اولیهٔ مخلوط داریم:

$$\frac{C_2H_5Cl \text{ جرم}}{C_2H_3Cl \text{ جرم}} = \frac{1000-625}{625} = \frac{375}{625} = \frac{3\times125}{5\times125} = 0/6$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸۷ **کدام مطلب نادرست است؟**

۱) کولار در تهیهٔ تایر اتومبیل، ساخت قایق‌های بادبانی و جلیقه‌های ضدگلوله کاربرد دارد.

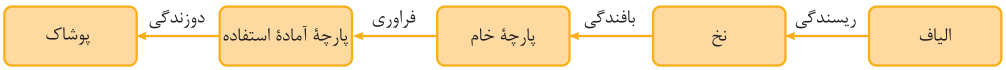
۲) بافندگی، مرحله‌ای در صنعت نساجی است که در آن الیاف به نخ‌های قابل استفاده تبدیل می‌شوند.

۳) سطح تماس مولکول‌های پلی‌اتن سبک با یکدیگر کم بوده؛ از این‌رو استحکام و نقطهٔ ذوب آن از پلی‌اتن سنگین کم‌تر است.

۴) برای تهیهٔ پلی‌لاکتیک اسید، نخست باید نشاستهٔ موجود در برخی از فراورده‌های کشاورزی را به لاکتیک اسید تبدیل کرد.

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✔ بافندگی، مرحله‌ای در صنعت نساجی است که در آن نخ‌ها به پارچهٔ خام تبدیل می‌شوند.



بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): از کولار در تهیهٔ تایر اتومبیل، قایق بادبانی، لباس‌های مخصوص مسابقات موتورسواری و جلیقه‌های ضدگلوله استفاده می‌شود. پوشاک دوخته‌شده از کولار، سبک و بسیار محکم بوده و در برابر ضربه، خراش و بریدگی مقاوم است.

گزینهٔ (۳): پلی‌اتن سنگین در مقایسه با پلی‌اتن سبک، بدون شاخه است. چون این رشته‌های بدون شاخه می‌توانند به صورت موازی در کنار هم قرار گیرند، سطح تماس بین آن‌ها بیشتر بوده و در نتیجه پلی‌اتن سنگین، ساختار منظم‌تری دارد و استحکام آن نسبت به پلی‌اتن سبک بیشتر است. از طرفی با توجه به قوی‌تربودن نیروهای بین‌مولکولی در پلی‌اتن سنگین نسبت به پلی‌اتن سبک، می‌توان نتیجه گرفت که نقطهٔ ذوب پلی‌اتن سنگین از پلی‌اتن سبک، بیشتر است.

گزینهٔ (۴): پلیمرهای سبز را از فراورده‌های کشاورزی مانند سیب‌زمینی، ذرت و نیشکر تهیه می‌کنند، به طوری که نخست نشاستهٔ موجود در این مواد را به لاکتیک اسید تبدیل کرده و سپس از واکنش پلیمری‌شدن آن در شرایط مناسب، **پلی لاکتیک اسید** تولید می‌کنند.

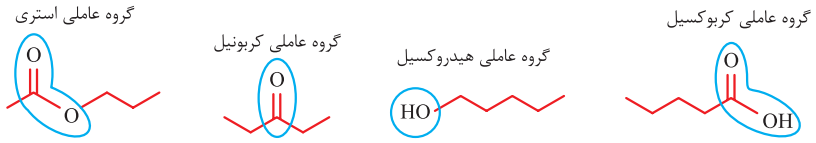
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸۸ در شرایط یکسان، انحلال‌پذیری کدام‌یک از مواد زیر در آب بیشتر است؟

۱) پروپیل استات
۲) ۳- پنتانون
۳) ۱- پنتانول
۴) پنتانوئیک اسید

پاسخ: گزینهٔ ۴

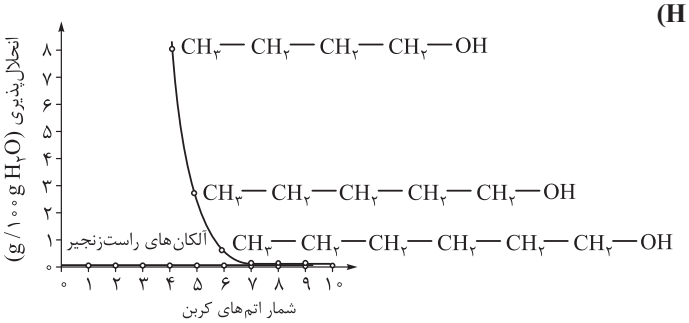
پاسخ خیلی تشریحی ✔ همهٔ ترکیب‌های داده‌شده، ۵کربنی هستند که در بین آن‌ها، ترکیب‌های گزینه‌های (۳) و (۴) به دلیل داشتن پیوند O — H، توانایی تشکیل پیوند هیدروژنی با آب را دارند. بین این دو ترکیب، پنتانوئیک اسید با داشتن اتم اکسیژن بیشتر، قطبیت بیشتر و انحلال‌پذیری بیشتری نسبت به ۱- پنتانول دارد.



پروپیل استات	۳-پنتانون	۱-پنتانول	پنتانوئیک اسید
$(C_5H_{10}O_2)$	$(C_5H_{10}O)$	$(C_5H_{12}O)$	$(C_5H_{10}O_2)$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸۹ از واکنش ۷/۰۴ گرم از یک الکل یک‌عاملی سیرشده با مقدار کافی از استیک اسید، ۱۰/۴ گرم ترکیب آلی به دست آمده است. با توجه به نمودار زیر، در ۵۰ گرم آب به تقریب چند گرم از این الکل باید حل شود تا یک محلول سیرشده ایجاد شود؟ $(H=1, C=12, O=16 : g.mol^{-1})$



۱) ۰/۵ ۲) ۱/۴ ۳) ۲/۸ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint با استفاده از روابط استوکیومتری برای واکنش الکل با اسید و تولید استر، تعداد اتم‌های کربن الکل را به دست بیار و به کمک نمودار و مقدار انحلال‌پذیری الکل در ۱۰۰ گرم آب، جرم الکل را به ازای ۵۰ گرم آب محاسبه کن!

درس Box

تولید استرها

از واکنش کربوسیلیک اسیدها با الکل‌ها در شرایط مناسب، استر و آب به دست می‌آید:

$$\underset{\text{اسید آلی}}{RCOOH} + \underset{\text{الکل}}{R'OH} \rightarrow \underset{\text{استر}}{RCOOR'} + \underset{\text{آب}}{H_2O}$$

۱) ضرایب همهٔ مواد در واکنش استری‌شدن برابر با ۱ است؛ پس در مسائل استوکیومتری واکنش استری‌شدن، *خوشبختانه! اصلاً دغدغهٔ ضریب مواد رو نداریم.*

۲) طبق قانون پایستگی جرم، مجموع جرم الکل و اسید مصرف‌شده در واکنش با مجموع جرم استر و آب تولیدشده برابر است.

جرم آب + جرم استر = جرم الکل + جرم اسید

۳) ما بیشتر با الکل و اسیدهای سیرشدهٔ یک‌عاملی سروکار داریم. اگر گروه هیدروکربنی در این اسیدها و الکل‌ها، گروه آلکیل باشد، فرمول عمومی آن‌ها به ترتیب به صورت $C_nH_{2n}O_2$ و $C_mH_{2m+2}O$ خواهد بود؛ بنابراین در این حالت معادلهٔ واکنش استری‌شدن را می‌توان به صورت زیر نشان داد:

$$C_nH_{2n}O_2 + C_mH_{2n+2}O \rightarrow C_{n+m}H_{2(n+m)}O_2 + H_2O$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول (پیداکردن فرمول الکل): اگر شمار اتم‌های کربن الکل را m در نظر بگیریم، با توجه به این‌که استیک اسید، یک اسید دوکربنی با فرمول $C_2H_4O_2$ است، معادلهٔ واکنش انجام‌شده به صورت زیر خواهد بود:

$$C_2H_4O_2 + C_mH_{2m+2}O \rightarrow C_{2+m}H_{2(2+m)}O_2 + H_2O$$

با نوشتن تناسب بین جرم الکل و استر، m را به دست می‌آوریم:

$$(C_mH_{2m+2}O) \text{ جرم مولی الکل} = 12m + 2m + 2 + 16 = (14m + 18)\ g.mol^{-1}$$

$$(C_{2+m}H_{2(2+m)}O_2) \text{ جرم مولی استر} = 12(2+m) + 2(2+m) + (2\times16) = (14m + 60)\ g.mol^{-1}$$

$$\frac{\text{جرم}}{\underbrace{\text{جرم مولی}\times\text{ضریب}}_{\text{الکل}}} = \frac{\text{جرم}}{\underbrace{\text{جرم مولی}\times\text{ضریب}}_{\text{استر}}} \Rightarrow \frac{7/04}{14m+18} = \frac{10/4}{14m+60}$$

$$\xrightarrow{\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a-c}{b-d}} \frac{10/4-7/04}{(14m+60)-(14m+18)} = \frac{10/4}{14m+60} \Rightarrow \frac{\cancel{3/36}^{\,0/04}}{\cancel{42}^{\,1}} = \frac{\cancel{10/4}^{\,5/2}}{14m+60}$$

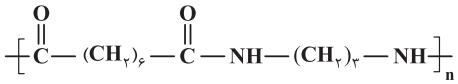
$$0/56m + 2/4 = 5/2 \Rightarrow 0/56m = 2/8 \Rightarrow m = 5 \Rightarrow$$ الکل اولیه، ۵کربنی است.

گام دوم: با توجه به نمودار و انحلال‌پذیری الکل در ۱۰۰ g آب، جرم الکل به ازای ۵۰ g آب را حساب می‌کنیم.

با توجه به نمودار، انحلال‌پذیری الکل ۵کربنی در ۱۰۰ گرم آب، به تقریب برابر ۲/۸ گرم است؛ بنابراین اگر در ۵۰ گرم آب، ۱/۴ گرم الکل ۵کربنی حل کنیم، یک محلول سیرشده تشکیل خواهد شد.

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۹۰ کدام موارد زیر دربارهٔ ترکیبی با ساختار داده‌شده درست است؟ $(H=1, C=12, N=14, O=16 : g.mol^{-1})$



الف) دارای گروه‌های عاملی کتونی، آمیدی و آمینی است.

ب) از واکنش آن با آب، ترکیبی نیتروژن‌دار با جرم مولی $74\ g.mol^{-1}$ به دست می‌آید.

پ) فرمول مولکولی دی‌اسید سازندهٔ آن، $C_8H_{14}O_4$ است.

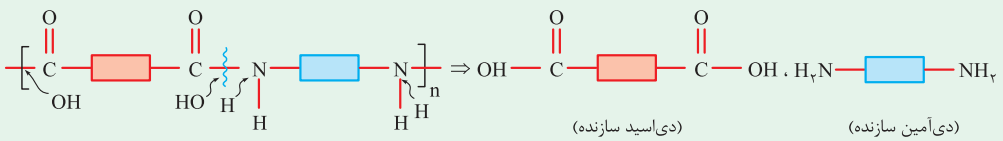
ت) از واکنش یکی از مونومرهای سازندهٔ آن با اتانول، می‌توان پلی‌استر تهیه کرد.

۱) الف و ب ۲) پ و ت

۳) ب و پ ۴) الف و ت

پاسخ: گزینهٔ ۳

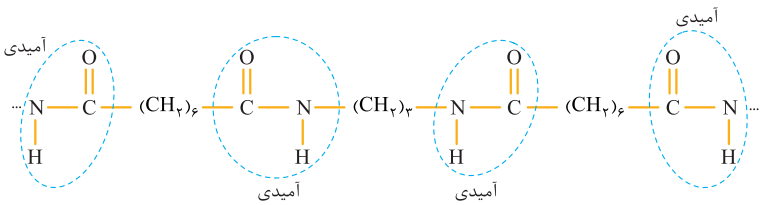
نکته برای تعیین دی‌اسید و دی‌آمین سازندهٔ یک پلی‌آمید، پیوند بین اتم‌های کربن و نیتروژن را شکسته و به صورت زیر عمل می‌کنیم:



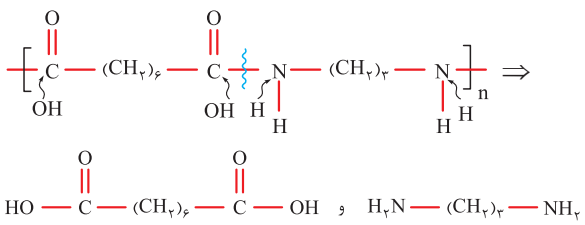
پاسخ خیلی تشریحی عبارت‌های «ب» و «پ» درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

الف) ترکیب داده‌شده، یک پلی‌آمید است و فقط دارای گروه عاملی آمیدی ($-\overset{O}{\overset{\|}{C}}-N(H)-$) است. دقت کنید که وجود گروه‌های $\overset{O}{\overset{\|}{C}}$ و NH در واحد تکرارشوندهٔ پلیمر به معنی داشتن گروه‌های عاملی کربونیل و آمین نیست. اگر ساختار گسترده‌تر پلیمر را رسم کنیم، می‌بینیم که گروه $\overset{O}{\overset{\|}{C}}$ دوباره به گروه NH و گروه NH دوباره به گروه $\overset{O}{\overset{\|}{C}}$ متصل شده و گروه عاملی آمیدی ایجاد خواهد شد.



ب و پ) واکنش پلی‌آمید با آب در واقع آبکافت پلیمر را نشان می‌دهد. از آبکافت پلی‌آمیدها، مونومرهای سازندهٔ آن‌ها حاصل می‌شود:



دی‌آمین سازنده $(C_4H_{10}N_2)$ دی‌اسید سازنده $(C_8H_{14}O_4)$

جرم مولی دی‌آمین سازنده، ۷۴ گرم بر مول است:

$$C_4H_{10}N_2 \Rightarrow (4\times12)+10+(2\times14)=74\ g.mol^{-1}$$

ت) اتانول (C_2H_5OH) یک الکل یک‌عاملی است و نمی‌تواند برای تولید پلی‌استر به کار رود. پلی‌استرها از واکنش الکل‌های دوعاملی با اسیدهای دوعاملی و یا بسپارش ترکیبی که هر دو گروه عاملی الکلی و اسیدی را دارد، تهیه می‌شوند.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir