آزمون آزمایشی خیلی سبز

پیش آزمون Warm Up

پایه دوازدهم | مرحله هفتم

سال تحصیلی ۰۵-۱۴۰۴ | ۱۶/آبان/۱۴۰۴

رشته ریاضی

دفترچه شماره یک

پایه

مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخگویی	دوازدهم	یازدهم	دهم
حسابان و ریاضیات پایه	۱۸	۱	۱۸	۷۰ دقیقه	فصل ۱ صفحهٔ ۱ تا ۲۲	فصل ۲ صفحهٔ ۳۷ تا ۷۰	فصل ۵ صفحهٔ ۹۴ تا ۱۱۷
هندسه	۱۲	۱۹	۳۰		فصل ۱ صفحهٔ ۹ تا ۳۲	–	فصل ۲ صفحهٔ ۲۹ تا ۵۲
ریاضیات گسسته و آمار و احتمال	۱۰	۳۱	۴۰		فصل ۱ (درس ۱ و ۲) صفحهٔ ۱ تا ۱۷	فصل ۱ (درس ۲) صفحهٔ ۱۶ تا ۳۴	–
مجموع	۴۰ سؤال			۷۰ دقیقه			

پیش آزمون

تمرین واقعی، دقیق و حساب‌شده، قبل از آزمون اصلی، که دقیقاً از نظر مبحث، تعداد سؤال و سبک، شبیه آزمون اصلیه. این پیش‌آزمون قراره نقاط ضعف و قدرت شخصی هر دانش‌آموز رو مشخص و به اون کمک کنه خلأهای یادگیریش رو پر کنه. با کارنامه‌ای که برای این آزمون صادر می‌شه، هر شخصی می‌تونه استراتژی خودش رو برای جلسهٔ آزمون اصلی تنظیم کنه.

مدیر تألیف آزمون: فاطمه آقاجانپور

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

این آزمون نمره منفی دارد.

دفترچه سؤالات آزمون‌های خیلی سبز، از همه نظر (تعداد سؤال‌ها، زمان پاسخگویی، نوع چینش گزینه‌ها، نوع صفحه‌آرایی، فونت سؤالات، سایز کلمات و اعداد، جای خالی محل انجام محاسبات و ...) در شبیه ترین حالت به دفترچه سؤالات کنکور سراسری طراحی می‌شود.

ویژه کنکوری‌های ۱۴۰۵

Azmoon.kheilisabz.com

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

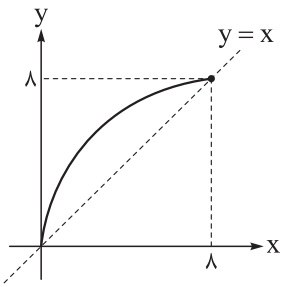
۱- تابع $f(x)=(2a-1)x+a-b$ ثابت و تابع $g(x)=(b-3)x+a+2c$ همانی است. تابع خطی $y=(2f-g)(x)$ از کدام ربع دستگاه مختصات عبور نمی‌کند؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

۲- تعداد جواب‌های معادلهٔ $[6x^2]=5x^2$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۹

۳- نمودار تابع f با دامنهٔ $[0,8]$ در شکل زیر رسم شده است. دامنهٔ تعریف تابع $g(x)=\sqrt{\frac{f(x)}{x-f^{-1}(2x)}}$ شامل چند عدد صحیح است؟



۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

۴- به ازای کدام مقدار a، نمودار وارون تابع $f(x)=4x+2\sqrt{x+3a}$، خط $3y-2x=1$ را در نقطه‌ای به عرض -1 قطع می‌کند؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{19}{4}$ ۳) $\frac{57}{4}$ ۴) $\frac{9}{4}$

۵- نمودار تابع $f(x)=\frac{mx+6}{x+m+3}$ نمودار وارون خودش را فقط در دو نقطه به طول‌های α و β قطع می‌کند. حاصل $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{m}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{m}{4}$

۶- نمودار تابع $f(x)=-\sqrt{2-\sqrt{4-x}}$، نمودار وارون خود را در چند نقطه قطع می‌کند؟

۱) هیچ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۷- توابع f و $g(x)=8-3x$ مفروض‌اند، به طوری که دامنه‌های دو تابع f و fog به ترتیب $D_f=[-4,a]$ و $D_{fog}=[-2,b]$ هستند. حاصل $a-b$ کدام است؟

۱) ۱۴ ۲) ۱۸ ۳) ۸ ۴) ۱۰

۸- اگر $f(2-x)=\sqrt{2x+1}$ و $g(x+3)=\sqrt{4-2x}$ باشد، دامنهٔ تعریف تابع gof شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۱۴ ۲) ۱۳ ۳) ۱۲ ۴) ۱۱

محل انجام محاسبات

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

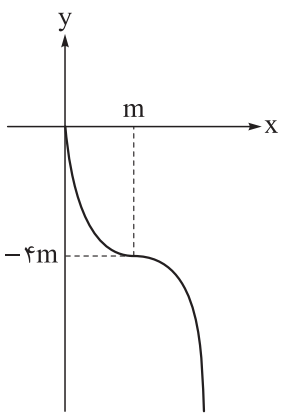
۹- با کدام تبدیل‌ها می‌توانیم از نمودار تابع $y = \frac{۴}{۳}f(\frac{۲}{۳}x)$ به نمودار تابع $y = f(x)$ برسیم؟

۱) انقباض افقی و عمودی
۲) انبساط افقی و انقباض عمودی
۳) انبساط افقی و عمودی
۴) انقباض افقی و انبساط عمودی

۱۰- نمودار تابع $y = g(x)$ را ۴ واحد به چپ انتقال می‌دهیم و طول نقاط آن را نصف می‌کنیم تا نمودار تابع f به دست آید. اگر $g(x) = f(ax + b)$ باشد، مقدار $b - a$ کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۲}$
۲) $-\frac{۵}{۲}$
۳) $\frac{۳}{۲}$
۴) $-\frac{۱}{۲}$

۱۱- نمودار تابع رسم‌شده در شکل زیر، صرفاً با انتقال و قرینه‌یابی، از روی نمودار تابع $y = x^۳$ به دست آمده است. مقدار این تابع به ازای $x = ۲m$ کدام است؟



۱) -۸
۲) -۱۶
۳) -۳۲
۴) -۶۴

۱۲- نمودار تابع $y = \frac{۱}{x+۱}$ را ۲ واحد به چپ انتقال می‌دهیم و سپس نمودار حاصل را نسبت به خط $y = x$ قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع f به دست آید. نمودار تابع $y = \frac{۱}{x+۱}$ را این‌بار ابتدا نسبت به خط $y = x$ قرینه می‌کنیم و سپس ۲ واحد به چپ انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع g به دست آید. در این صورت مقدار $(fog)(-۳)$ کدام است؟

۱) $-\frac{۸}{۳}$
۲) $-\frac{۱۰}{۳}$
۳) $-\frac{۵}{۲}$
۴) $-\frac{۷}{۲}$

۱۳- نمودار تابع $g(x) = ۳ - f(\frac{۲+x}{۳})$ را نسبت به مبدأ مختصات قرینه می‌کنیم و نمودار وارون تابع حاصل را رسم می‌کنیم. ضابطهٔ تابع مربوط به نمودار جدید کدام است؟ (تابع f با دامنه و برد $\mathbb{R}$، وارون‌پذیر است.)

۱) $y = ۲ + ۳f^{-۱}(x - ۳)$
۲) $y = ۳ - ۲f^{-۱}(x + ۳)$
۳) $y = ۲ - ۳f^{-۱}(x + ۳)$
۴) $y = ۳ + ۲f^{-۱}(x - ۳)$

محل انجام محاسبات

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۱۴- اگر نقطهٔ $A(-۳,۴)$ واقع بر نمودار تابع $y = ۲ + ۴f^{-۱}(\frac{x}{۲} - ۱)$ با نقطهٔ A' واقع بر نمودار تابع $y = ۳ - f(۵ + \frac{x}{۳})$ متناظر باشد، مجموع طول و عرض نقطهٔ A' کدام است؟

۱) -۸ ۲) $\frac{۴۱}{۲}$ ۳) $\frac{۳۱}{۲}$ ۴) ۱۱

۱۵- اگر چندجمله‌ای $p(x) = x^۳ + mx^۲ + x - ۲$ بر $x + ۲$ بخش‌پذیر باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $p(x)$ بر عبارت $x - ۱$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۶- اگر چندجمله‌ای $p(x) = x^۴ + ax^۳ + ۵x^۲ + bx + ۴$ بر $x^۲ + ۲x + ۴$ بخش‌پذیر باشد، حاصل $a - b$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) -۲ ۴) صفر

۱۷- توابع $f(x) = \frac{۳ - ۲x}{ax + ۱}$ و $g(x) = (b^۲ - ۱)x^۲ + bx - ۱$ هر دو روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی هستند. کدام تابع روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی است؟

۱) $f - ۲g$ ۲) $g - ۲f$ ۳) $f - g$ ۴) $f + g$

۱۸- اگر $f(x) = ۳x + |x - ۴|$ و $f(m^۲ - ۲m + ۱) < f(۴m - m^۲ - ۳)$ باشد، حدود m کدام است؟

۱) $(۱,۲)$ ۲) $(-۲,-۱)$ ۳) $(-۱,۲)$ ۴) $(-۲,۱)$

محل انجام محاسبات

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۱۹- در دستگاه $\begin{bmatrix} a & a+1 \\ a+1 & a+2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$، حاصل $x-y$ کدام است؟

۱) $2a+4$ ۲) -6 ۳) $-2(4a+3)$ ۴) $-a-4$

۲۰- اگر $A^3 = 9I$ باشد، حاصل $(A-2I)^{-1} - 17(A+2I)^{-1}$ کدام است؟

۱) I ۲) A ۳) $4(A+I)$ ۴) $4A$

۲۱- فرض کنید $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & a & 3 \\ 0 & 2a & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$. اگر مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس $2B^6A$ برابر با -9 باشد، کوچک‌ترین درایهٔ ماتریس A کدام است؟

۱) -3 ۲) -6 ۳) -5 ۴) -8

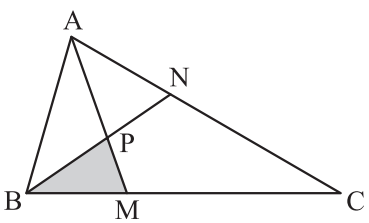
۲۲- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$، $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ و I ماتریس همانی باشد به طوری که $ACB = I$، آن‌گاه ماتریس مجموع درایه‌های سطر دوم C کدام است؟

۱) ۱۹ ۲) -19 ۳) -3 ۴) ۳

۲۳- در مثلثی به اضلاع $AB = 6$، $AC = 8$ و $BC = 10$ ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. اگر M، N و P به ترتیب وسط اضلاع BC، AC و AB باشند، آن‌گاه مساحت چهارضلعی $MNPH$ کدام است؟

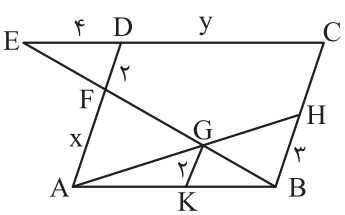
۱) ۷/۶۸ ۲) ۸/۷۸ ۳) ۶/۲۵ ۴) ۶/۷۵

۲۴- مطابق شکل زیر، اگر $\frac{AN}{AC} = \frac{BM}{MC} = \frac{1}{3}$، آن‌گاه مساحت BMP چه کسری از مساحت مثلث ABC است؟



۱) $\frac{1}{10}$ ۲) $\frac{1}{8}$ ۳) $\frac{1}{9}$ ۴) $\frac{1}{12}$

۲۵- در شکل زیر، $ABCD$ متوازی‌الاضلاع و $GK \parallel AD$ است. با توجه به اندازه‌های روی شکل، حاصل $x+2y$ کدام است؟

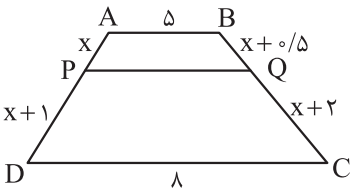


۱) ۲۴
۲) ۳۶
۳) ۳۰
۴) ۲۰

محل انجام محاسبات

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۲۶- مطابق شکل، پاره‌خط PQ با قاعده‌های ذوزنقهٔ ABCD موازی است. طول PQ کدام است؟



۱) ۶/۲۵
۲) ۶
۳) ۵/۷۵
۴) ۵/۵

۲۷- به ازای کدام مجموعه مقادیر k، دستگاه معادلات $\begin{cases}(k+۳)x+۳y=۹\\ ۴x+(k-۱)y=۶\end{cases}$ فاقد جواب است؟

۱) $\{۳\}$ ۲) $\{-۵\}$ ۳) $\{-۵,-۲\}$ ۴) $\{۴,-۲\}$

۲۸- مجموع درایه‌های ماتریس $\begin{bmatrix}۱ & -\tan\theta\\ \tan\theta & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & \tan\theta\\ -\tan\theta & ۱\end{bmatrix}^{-۱}$ کدام است؟

۱) $۲\cos ۲\theta$ ۲) $۲\sin ۲\theta$ ۳) $۲\tan ۲\theta$ ۴) $۲\cot ۲\theta$

۲۹- اگر $A-B=\begin{bmatrix}۳ & ۲\\ -۵ & ۳\end{bmatrix}$، $A^{-۱}B^{-۱}=\begin{bmatrix}-۵ & ۳\\ ۷ & -۴\end{bmatrix}$ و $B^{-۱}A^{-۱}=\begin{bmatrix}۴ & ۷\\ ۷ & ۱۲\end{bmatrix}$ باشند، مجموع درایه‌های ماتریس $A^۲+B^۲$ کدام است؟

۱) ۳- ۲) ۲- ۳) ۱- ۴) صفر

۳۰- اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۱\\ ۲ & -۱ & ۲\\ ۰ & ۲ & -۱\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۱ & ۱ & ۱\\ ۱ & ۰ & ۱\\ ۰ & ۳ & ۱\end{bmatrix}$، آن‌گاه با فرض $ACA+BCB=ACB+BCA+I$، دترمینان ماتریس C کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

محل انجام محاسبات

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۳۱- چه تعداد از گزاره‌های زیر را می‌توان با ارائهٔ مثال نقض رد کرد؟

الف) حاصل‌ضرب یک عدد گویای غیرصفر و یک عدد گنگ عددی گنگ است.

ب) اگر مجموع دو عدد گنگ گویای غیرصفر باشد، مجموع دو برابر عدد اول با سه برابر عدد دوم عددی گنگ است.

پ) حاصل‌ضرب جذرِ دو عدد حقیقی مثبت برابر است با جذرِ حاصل‌ضرب آن دو.

ت) هیچ عدد طبیعی فردی وجود ندارد که مربع و مکعب آن فرد نباشد.

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

۳۲- اگر $x \mid ۳m+۷$ و $x \mid ۵m+۱۲$، چند مقدار صحیح برای x وجود دارد؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

۳۳- به ازای چند مقدار دورقمی برای n، دو عدد $۳n+۵$ و $۳n^۲-۲n+۶$ نسبت به هم اول هستند؟

۱) ۸۸ ۲) ۷۲ ۳) ۵۶ ۴) ۴۰

۳۴- در تقسیم a بر ۴۳، باقی‌ماندهٔ دو واحد کوچک‌تر از خارج قسمت است. در چند حالت a مضرب ۳ است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۳ ۳) ۱۴ ۴) ۱۵

۳۵- نقطهٔ $A(\alpha,\beta)$ با مختصات صحیح، روی منحنی $y=\frac{۲x-۱۱}{x+۳}$ قرار دارد و $\alpha\beta>۰$. اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد زوج n بر $\alpha-\beta$ برابر ۹ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم $\frac{n}{۲}$ بر $\alpha-\beta$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۱ ۴) ۱۲

۳۶- در یک تقسیم، مقسوم‌علیه کوچک‌ترین عدد دورقمی ممکن و باقی‌مانده برابر ۳ است. اگر مقسوم‌علیه را ۴ واحد کم‌تر کنیم، باقی‌مانده برابر ۴ می‌شود. تعداد مقسوم‌های چهاررقمی کدام است؟

۱) ۱۱۴ ۲) ۱۱۵ ۳) ۱۱۶ ۴) ۱۱۷

۳۷- اگر $n(A-B)=۴n(B-A)=۵n(A\cup B)$ و $n(A\cap B)=۵۵$، تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ A چند برابر تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ B است؟

۱) ۳۲ ۲) ۱۲۸ ۳) ۵۱۲ ۴) ۲۰۴۸

۳۸- اگر $S=\{(x,y)\mid ۰\le y\le ۳x-x^۲\}$ مجموعهٔ $S\cap(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$ چند عضو دارد؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

محل انجام محاسبات

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۳۹- اگر U مجموعهٔ مرجع و $C = A \cap B'$، آن‌گاه مجموعهٔ $[(B' - A')' \cup C] \cup [A' - (B' - C)']$ برابر کدام است؟

۱) A' ۲) B ۳) U ۴) $\varnothing$

۴۰- تعداد افرازهای مجموعهٔ $A = \{2k - 1 \mid k \in \mathbb{Z}, a < x < b\}$ برابر ۱۵ است. بیشترین مقدار مساحت ناحیهٔ $(a, b) \times (a - b, b - a)$ کدام است؟

۱) ۳۲ ۲) ۵۰ ۳) ۷۲ ۴) ۹۸

محل انجام محاسبات

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

آزمون آزمایشی خیلی سبز

پیش آزمون Warm Up

پایه دوازدهم | مرحله هفتم

سال تحصیلی ۰۵-۱۴۰۴ | ۱۶/آبان/۱۴۰۴

رشته ریاضی

دفترچه شماره دو

پایه

مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخگویی	دوازدهم	یازدهم	دهم
فیزیک	۳۵	۴۱	۷۵	۴۵ دقیقه	فصل ۱ صفحهٔ ۱ تا ۲۸	–	فصل ۳ صفحهٔ ۵۳ تا ۸۲
شیمی	۳۰	۷۶	۱۰۵	۳۰ دقیقه	فصل ۱ صفحهٔ ۱ تا ۳۶	–	فصل ۱ (از ابتدای تبدیل اتم‌ها به یون‌ها) و فصل ۲ (تا ابتدای رفتار گازها) صفحهٔ ۳۸ تا ۷۵
مجموع	۶۵ سؤال			۷۵ دقیقه		–	

پیش آزمون

تمرین واقعی، دقیق و حساب‌شده، قبل از آزمون اصلی، که دقیقاً از نظر مبحث، تعداد سؤال و سبک، شبیه آزمون اصلیه. این پیش‌آزمون قراره نقاط ضعف و قدرت شخصی هر دانش‌آموز رو مشخص و به اون کمک کنه خلأهای یادگیریش رو پر کنه. با کارنامه‌ای که برای این آزمون صادر می‌شه، هر شخصی می‌تونه استراتژی خودش رو برای جلسهٔ آزمون اصلی تنظیم کنه.

مدیر تألیف آزمون: فاطمه آقاجانپور

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

این آزمون نمره منفی دارد.

دفترچه سؤالات آزمون‌های خیلی سبز، از همه نظر (تعداد سؤال‌ها، زمان پاسخگویی، نوع چینش گزینه‌ها، نوع صفحه‌آرایی، فونت سؤالات، سایز کلمات و اعداد، جای خالی محل انجام محاسبات و ...) در شبیه ترین حالت به دفترچه سؤالات کنکور سراسری طراحی می‌شود.

ویژه کنکوری‌های ۱۴۰۵

Azmoon.kheilisabz.com

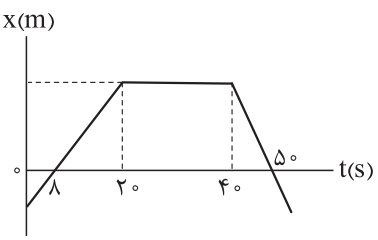
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۴۱- متحرکی روی محور x براساس اطلاعات جدول زیر از مکان A به مکان B جابه‌جا می‌شود. اگر متحرک حین جابه‌جایی تنها یک بار تغییر جهت داده باشد، بردار مکان متحرک در لحظهٔ تغییر جهت کدام می‌تواند باشد؟

بردار مکان A	بردار مکان B	سرعت متوسط	تندی متوسط
$(+۶m)\vec{i}$	$(-۸m)\vec{i}$	$(-۲\frac{m}{s})\vec{i}$	$۶\frac{m}{s}$

۱) $(-۲۰m)\vec{i}$ ۲) $(-۲۲m)\vec{i}$ ۳) $(۲۲m)\vec{i}$ ۴) $(۱۸m)\vec{i}$

۴۲- نمودار مکان ـ زمان متحرکی که روی خط راست حرکت می‌کند، مطابق شکل است. اگر تندی متوسط متحرک در بازهٔ زمانی صفر تا ۵۰ s برابر $۶/۴\frac{m}{s}$ باشد، بزرگی شتاب متوسط متحرک در بازهٔ زمانی $t_۱ = ۱۰\ s$ تا $t_۲ = ۵۰\ s$ چند متر بر مربع ثانیه است؟



۱) ۰/۰۵

۲) ۰/۱

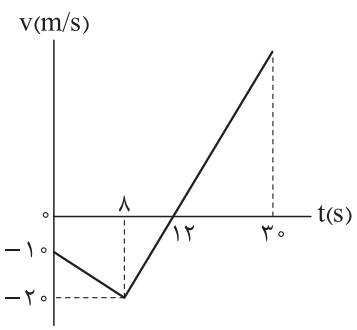
۳) ۰/۵۵

۴) ۰/۴۴

۴۳- موتورسواری فاصلهٔ ۴۰۰ کیلومتری بین دو شهر را با تندی ثابت $۱۲۰\frac{km}{h}$ رفته و پس از رسیدن به شهر دوم، با تندی ثابت $۱۰۰\frac{km}{h}$ به طرف شهر اول بازمی‌گردد. تندی متوسط موتورسوار از ابتدای حرکتش تا لحظه‌ای که مسافت ۶۰۰ کیلومتر را پیموده، چند کیلومتر بر ساعت است؟

۱) ۱۱۲/۵ ۲) ۱۱۰ ۳) ۵۲/۵ ۴) ۳۷/۵

۴۴- شکل زیر، نمودار سرعت ـ زمان متحرکی را نشان می‌دهد که روی خط راست حرکت می‌کند. در چه لحظه‌ای متحرک به نقطهٔ شروع حرکت خود بازمی‌گردد؟



۱) ۱۶

۲) ۲۰

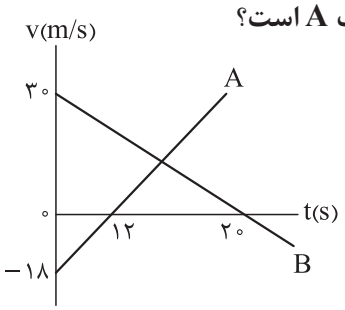
۳) ۲۴

۴) ۲۸

محل انجام محاسبات

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۴۵- نمودار سرعت ـ زمان دو متحرک A و B که از یک نقطه حرکت خود را شروع کرده‌اند، مطابق شکل است. در لحظه‌ای که دو متحرک به یکدیگر می‌رسند، تندی متحرک B چند برابر تندی متحرک A است؟

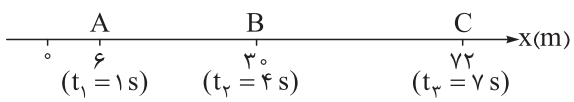


۱) ۱
۲) ۰/۸
۳) ۰/۶
۴) ۰/۵

۴۶- توپی که در امتداد یک خط راست حرکت می‌کند، با تندی $۶۳\frac{km}{h}$ به یک دیوار برخورد کرده و در همان امتداد اولیه با تندی $۲۷\frac{km}{h}$ بازمی‌گردد. اگر زمان برخورد توپ با دیوار ۰/۴ s باشد، شتاب متوسط توپ در مدت برخورد با دیوار چند متر بر مربع ثانیه است؟

۱) ۲۲۵ ۲) ۹۰ ۳) ۶۲/۵ ۴) ۲۵

۴۷- مسیر حرکت متحرکی که با شتاب ثابت در امتداد محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است و متحرک در لحظه‌های مشخص‌شده از نقاط A، B و C می‌گذرد. سرعت متحرک در لحظهٔ عبور از نقطهٔ B چند متر بر ثانیه است؟

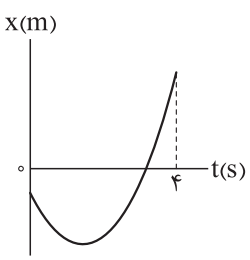


۱) ۴۲
۲) ۱۶
۳) ۱۵
۴) ۱۱

۴۸- معادلهٔ حرکت متحرکی که روی خط راست حرکت می‌کند، در SI به صورت $x = -\frac{۳}{۲}t^۲ + ۱۵t - ۲۴$ است. تندی متوسط متحرک در مدت‌زمانی که به صورت کندشونده از مبدأ مختصات دور می‌شود، چند متر بر ثانیه است؟

۱) ۱۲ ۲) ۶ ۳) ۹ ۴) ۴/۵

۴۹- نمودار مکان ـ زمان متحرکی به صورت سهمی شکل زیر است. اگر تندی متحرک در لحظهٔ t = ۴s، ۲ برابر تندی در لحظهٔ شروع حرکتش باشد، حرکت این متحرک چند ثانیه به صورت کندشونده بوده است؟



۱) $\frac{۲}{۳}$
۲) $\frac{۳}{۲}$
۳) $\frac{۴}{۳}$
۴) $\frac{۳}{۴}$

محل انجام محاسبات

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۵۰- معادلهٔ مکان ـ زمان متحرکی که بر روی محور x حرکت می‌کند، در SI به صورت $x = ۳t^۲ - ۱۲t + ۱۳$ است. در طی این حرکت، کم‌ترین طول بردار مکان متحرک چند متر است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲/۵ ۴) ۴

۵۱- بردار مکان متحرکی که با شتاب ثابت بر روی محور x حرکت می‌کند، در دو لحظهٔ $t_۱ = ۳\ s$ و $t_۲ = ۷\ s$ تغییر جهت می‌دهد. اگر متحرک در مکان $x = -۲۰\ m$ تغییر جهت دهد، تندی متوسط آن در ۴ ثانیهٔ دوم حرکتش چند متر بر ثانیه است؟

۱) ۲۰ ۲) ۱۰ ۳) ۱۵ ۴) ۱۲/۵

۵۲- متحرکی با شتاب ثابت $-۲\ m/s^۲$ روی خط راست در حال حرکت است. اگر بزرگی جابه‌جایی متحرک در ثانیهٔ دهم و ثانیهٔ یازدهم با هم برابر باشند، بزرگی جابه‌جایی آن در ثانیهٔ پنجم چند متر است؟

۱) ۹ ۲) ۱۱ ۳) ۲۱ ۴) ۷۵

۵۳- خودرویی با سرعت ثابت در مسیری مستقیم در حال حرکت است که راننده یک سرعت‌گیر را جلوی خود می‌بیند و از لحظه‌ای که در فاصلهٔ ۳۶ متری سرعت‌گیر قرار دارد، با شتاب ثابت ترمز می‌کند. اگر جابه‌جایی خودرو در ثانیه‌های دوم و سوم بعد از ترمز به ترتیب $۱۰/۵\ m$ و $۷/۵\ m$ باشد، کدام موارد درست است؟

الف) خودرو در ۲ ثانیهٔ قبل از رسیدن به سرعت‌گیر مسافت $۶\ m$ را می‌پیماید.

ب) تندی متوسط خودرو از $۲\ s$ قبل از ترمزکردن تا لحظهٔ رسیدن به سرعت‌گیر $۱۱\frac{m}{s}$ است.

پ) خودرو $۵\ s$ پس از ترمز به سرعت‌گیر می‌رسد.

ت) خودرو با تندی $۳\frac{m}{s}$ از روی سرعت‌گیر عبور می‌کند.

۱) الف و پ ۲) الف و ت ۳) ب و پ ۴) ب و ت

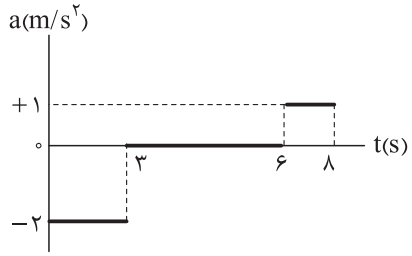
۵۴- خودرویی در مسیر مستقیم با سرعت $۳۰\frac{m}{s}$ در حرکت است که ناگهان راننده، موتورسیکلتی را پیش روی خود می‌بیند که از حال سکون و با شتاب $۲\frac{m}{s^۲}$ در جهت حرکت خودرو شروع به حرکت می‌کند. راننده بلافاصله با شتابی به اندازهٔ $۴\frac{m}{s^۲}$ ترمز می‌گیرد، اما با سرعت $۱۲\frac{m}{s}$ به موتورسیکلت برخورد می‌کند. فاصلهٔ موتورسیکلت از خودرو در لحظه‌ای که راننده شروع به ترمز می‌کند، چند متر است؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۱۴/۷۵ ۳) ۷۴/۲۵ ۴) ۹۴/۵

محل انجام محاسبات

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۵۵- نمودار شتاب ـ زمان متحرکی که روی خط راست حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. اگر بردار سرعت متحرک در $t_1 = 1\,s$ به صورت $(+2\frac{m}{s})\vec{i}$ باشد، تندی متوسط متحرک در ۸ ثانیهٔ اول حرکت چند متر بر ثانیه است؟



۱) $\frac{15}{8}$
۲) $\frac{13}{8}$
۳) $\frac{9}{8}$
۴) $\frac{5}{8}$

۵۶- خودرویی با سرعت ثابت $108\frac{km}{h}$ در یک مسیر مستقیم در حرکت است. در لحظهٔ گذشتن خودرو از کنار یک خودروی پلیس، خودروی پلیس با شتاب $5\frac{m}{s^2}$ شروع به حرکت می‌کند. فاصلهٔ میان دو خودرو در بازهٔ زمانی $5\,s$ تا $8\,s$ پس از شروع حرکت پلیس، چند متر تغییر می‌کند؟

۱) صفر
۲) ۲/۵
۳) ۵
۴) ۷/۵

۵۷- در شرایط خلأ سنگی را از بالای ساختمانی رها می‌کنیم. اگر سنگ در ثانیهٔ آخر حرکت خود ۳۴/۳ متر را طی کند، تندی سنگ در لحظهٔ رسیدن به زمین چند متر بر ثانیه است؟ $(g = 9/8\,m/s^2)$

۱) ۲۱/۶
۲) ۳۴/۹
۳) ۳۹/۲
۴) ۲۸/۹

۵۸- سنگی در شرایط خلأ از ارتفاع H رها می‌شود. اگر سرعت متوسط سنگ در Δt ثانیهٔ اول حرکت $8\,m/s$ و در Δt ثانیهٔ آخر حرکت $40\,m/s$ باشد، H چند متر است؟ $(g = 10\,m/s^2)$

۱) ۱۲۲/۴
۲) ۱۱۵/۲
۳) ۱۱۲/۴
۴) ۱۱۰/۲

۵۹- جسمی از یک بلندی رها می‌شود و در دو ثانیهٔ آخر سقوطش مسافت ۱۴۰ متر را طی می‌کند. تندی جسم هنگام رسیدن به نیمهٔ مسیر چند متر بر ثانیه است؟ $(g = 10\,N/kg)$

۱) $40\sqrt{2}$
۲) ۳۰
۳) $30\sqrt{2}$
۴) ۲۰

۶۰- دو جسم A و B با سرعت‌های ثابت بر روی محور x در حرکت‌اند و هر دو هم‌زمان در یک لحظه در مبدأ از کنار هم عبور می‌کنند. اگر معادلهٔ مکان ـ زمان A در SI، $x_A = 3t - 4$ باشد و متحرک B در لحظهٔ $t_1 = 5\,s$ از مکان $x_1 = -22\,m$ عبور کند، معادلهٔ مکان ـ زمان متحرک B در SI کدام است؟

۱) $x_B = 9t - 23$
۲) $x_B = -9t + 23$
۳) $x_B = 6t - 8$
۴) $x_B = -6t + 8$

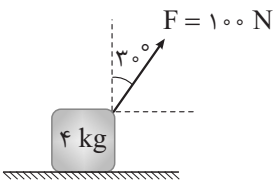
محل انجام محاسبات

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۶۱- جرم موشکی در اثر مصرف سوخت نصف می‌شود. تندی موشک چند درصد و چگونه تغییر کند تا انرژی جنبشی آن ۲۸ درصد کاهش یابد؟

۱) ۲۰، افزایش یابد. ۲) ۲۰، کاهش یابد. ۳) ۲۵، افزایش یابد. ۴) ۲۵، کاهش یابد.

۶۲- در شکل زیر، جسمی به جرم ۴ kg با انرژی جنبشی ثابت ۳۲J روی سطح افقی در حالت حرکت است. در یک بازهٔ زمانی ۲ثانیه‌ای، کاری که نیروی $\vec{F}$ بر روی جسم انجام می‌دهد، چند ژول است؟



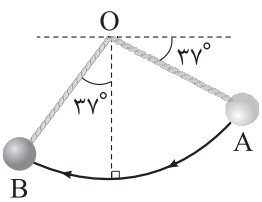
۱) $۸۰۰\sqrt{۳}$

۲) ۸۰۰

۳) $۴۰۰\sqrt{۳}$

۴) ۴۰۰

۶۳- در شکل زیر گلوله‌ای به جرم ۳۰۰ g به انتهای نخ سبکی به طول ۵۰ cm متصل شده و در حال حرکت است. طی جابه‌جایی گلوله از نقطهٔ A تا نقطهٔ B، کار نیروی وزن گلوله چند ژول است؟ ($\sin ۳۷^\circ = ۰/۶$ و $g = ۱۰\ N/kg$)



۱) ۳

۲) ۰/۳

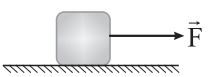
۳) −۳

۴) −۰/۳

۶۴- جسمی به جرم ۲kg از ارتفاع H نسبت به سطح زمین رها می‌شود. اگر انرژی پتانسیل گرانشی جسم، پس از ۱۲m جابه‌جایی، ۲۰ درصد کاهش یابد، انرژی پتانسیل گرانشی جسم در ارتفاع H چند کیلوژول است؟ ($g = ۱۰\ N/kg$ و سطح زمین مبدأ پتانسیل گرانشی است.)

۱) ۱۴/۴ ۲) ۱۲ ۳) ۱/۴۴ ۴) ۱/۲

۶۵- در شکل زیر، جسم ساکنی به جرم ۲۰ kg با نیروی افقی $\vec{F}$ روی سطح افقی با شتاب ثابت $۲\ m/s^۲$ به طرف راست به حرکت درمی‌آید. اگر نیرویی که سطح افقی به جسم وارد می‌کند ۲۵۰ N باشد، کار نیروی $\vec{F}$ در ثانیهٔ دوم چند ژول است؟ $(g = ۱۰ m/s^۲)$



۱) ۵۷۰ ۲) ۷۶۰

۳) ۸۷۰ ۴) ۱۱۶۰

محل انجام محاسبات

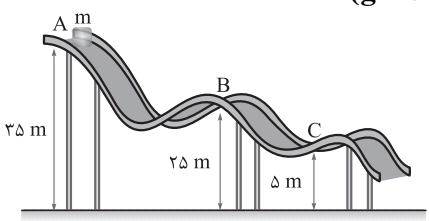
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۶۶- در شکل زیر، جسمی به جرم ۲kg روی سطح بدون اصطکاکی در امتداد سطح از نقطهٔ A با تندی ۵ m / s پرتاب می‌شود. از لحظهٔ پرتاب تا لحظه‌ای که تندی جسم به ۲ m / s می‌رسد، انرژی پتانسیل گرانشی آن چند ژول و چگونه تغییر می‌کند؟



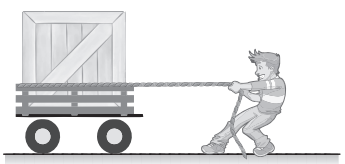
۱) ۲۱، کاهش می‌یابد.
۲) ۲۱، افزایش می‌یابد.
۳) ۲۹، کاهش می‌یابد.
۴) ۲۹، افزایش می‌یابد.

۶۷- در شکل زیر، جسمی روی سطح بدون اصطکاکی در حال حرکت است. اگر تندی جسم در نقطهٔ B، ۳ برابر تندی آن در نقطهٔ A باشد، تندی جسم در نقطهٔ C چند متر بر ثانیه است؟ $(g = ۱۰\ N / kg)$

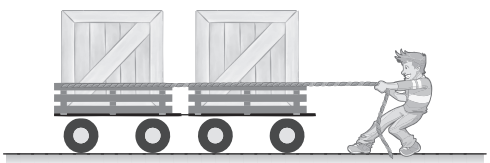


۱) ۵
۲) ۱۵
۳) ۲۵
۴) ۳۵

۶۸- شخصی با اعمال نیروی افقی، ثابت و یکسان $\vec{F}$ یک بار ارابهٔ شکل (۱) و بار دیگر ارابه‌های شکل (۲) را روی سطح افقی بدون اصطکاکی می‌کشد تا تندی ارابه‌ها از صفر به مقدار معین v برسد. دربارهٔ کار انجام‌شده توسط شخص (W) و مسافت طی‌شده توسط ارابه‌ها (d) در شکل‌های (۱) و (۲)، کدام درست است؟ (ارابه‌ها مشابه‌اند.)



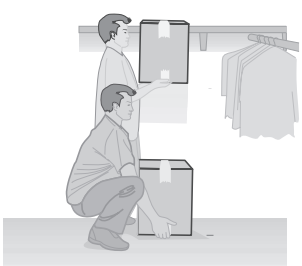
(۱)



(۲)

۱) $d_۱ = ۲d_۲ ، W_۲ = W_۱$
۲) $d_۱ = ۲d_۲ ، W_۲ = ۲W_۱$
۳) $d_۲ = ۲d_۱ ، W_۲ = W_۱$
۴) $d_۲ = ۲d_۱ ، W_۲ = ۲W_۱$

۶۹- در شکل زیر، شخصی با واردکردن نیروی قائم و ثابت ۶۰ N، جعبه‌ای به جرم ۵ kg را از روی سطح زمین و از حال سکون در امتداد قائم جابه‌جا می‌کند. تندی جعبه در ارتفاع ۱/۵ m از سطح زمین، چند متر بر ثانیه است؟ $(g = ۱۰\ N / kg)$



۱) $\sqrt{۳}$
۲) $\sqrt{۶}$
۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
۴) $\frac{\sqrt{۶}}{۲}$

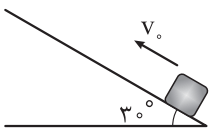
محل انجام محاسبات

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۷۰- چتربازی به جرم کل $100\ kg$ از بالونی در ارتفاع $500\ m$ از سطح زمین با سرعتی به بزرگی $1\ m/s$ به بیرون بالون می‌پرد. اگر او با سرعتی به بزرگی $5\ m/s$ به زمین برسد، در طول این مسیر اندازهٔ نیروی مقاومت هوای وارد بر چترباز با فرض ثابت‌بودن، چند نیوتون است؟ $(g = 10\ m/s^2)$

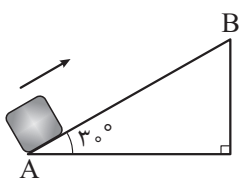
۱) ۹۹۵ / ۲
۲) ۹۹۷ / ۶
۳) ۱۰۰۲ / ۴
۴) ۱۰۰۴ / ۸

۷۱- در شکل زیر، جسمی با سرعت اولیهٔ $6\ m/s$ موازی با سطح رو به بالا پرتاب می‌شود. این جسم $90\ cm$ روی سطح جابه‌جا شده و می‌ایستد. چند درصد انرژی جنبشی اولیهٔ جسم توسط کار نیروی اصطکاک تلف شده است؟ $(g = 10\ N/kg)$



۱) ۳۶
۲) ۶۴
۳) ۵۰
۴) ۷۵

۷۲- در شکل زیر، بسته‌ای به جرم $2\ kg$ را از پایین سطح شیبدار با تندی $6\ m/s$ به بالا پرتاب می‌کنیم. این بسته تا ارتفاع معینی بالا رفته و سپس دوباره به محل اولیهٔ خود برمی‌گردد. اگر در این حرکت انرژی درونی جسم و محیط $20\ J$ افزایش یافته باشد، مسافت کلی که بسته طی می‌کند، چند متر است؟ $(g = 10\ m/s^2)$ و اندازهٔ نیروی اصطکاک جنبشی در مسیرهای رفت و برگشت یکسان است.)



۱) ۵ / ۲
۲) ۷ / ۲
۳) ۲ / ۶
۴) ۳ / ۶

۷۳- خودرویی به جرم $1500\ kg$ در مسیری افقی، در مدت $10\ s$ تندی خود را از $18\ km/h$ به $90\ km/h$ می‌رساند. در طی این حرکت توان متوسط خودرو حداقل چند اسب بخار است؟ $(1\ hp = 750W)$

۱) ۴ / ۵
۲) ۶
۳) ۴۵
۴) ۶۰

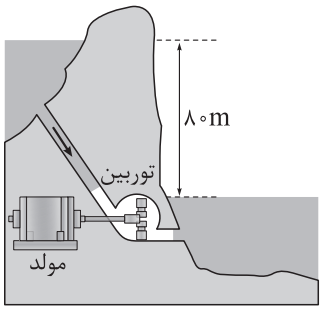
۷۴- پمپی با توان ورودی $8\ kW$ و بازده ۷۵ درصد، بنزین را از مخزنی در عمق ۹۰متری سطح زمین تا دهانهٔ مخزن در سطح زمین، با تندی ثابت بالا می‌آورد. اگر این پمپ $5\ min$ کار کند، چند متر مکعب بنزین از دهانهٔ مخزن خارج می‌کند؟ $(g = 10\ N/kg$ و $\rho_{\text{بنزین}} = 0/64\ g/cm^3)$

۱) ۴
۲) ۲
۳) ۶ / ۲۵
۴) ۳ / ۱۲۵

محل انجام محاسبات

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۷۵- در شکل زیر، آب ذخیره‌شده در پشت سد یک نیروگاه برق‌آبی، از ارتفاع ۸۰متری روی پره‌های توربینی می‌ریزد و آن را می‌چرخاند تا با چرخش آن، انرژی الکتریکی تولید شود. اگر ۹۰ درصد کار نیروی گرانشی به انرژی الکتریکی تبدیل شود، باید در هر دقیقه چند کیلوگرم آب روی توربین ریخته شود تا توان الکتریکی خروجی مولد نیروگاه به ۱۵۰ MW برسد؟ $(g = ۱۰\ m/s^۲)$



۱) $۱/۲۵ \times ۱۰^۶$

۲) $۱/۲۵ \times ۱۰^۷$

۳) $۲/۵ \times ۱۰^۶$

۴) $۲/۵ \times ۱۰^۷$

محل انجام محاسبات

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۷۶- کدام مورد درست است؟

۱) با استفاده از صابون آنزیم‌دار، نمی‌توان درصد لکه‌های چربی باقی‌مانده روی پارچه را به صفر رساند.

۲) از صابون طبیعی معروف به صابون مراغه، در تنور نان سنگک برای چرب‌کردن سطح سنگ‌ها استفاده می‌شود.

۳) شمار اتم‌های بخش قطبی پاک‌کننده‌های غیرصابونی از بخش قطبی پاک‌کننده‌های صابونی، یک واحد بیشتر است.

۴) مولکول‌های گازی که در اثر واکنش پودر آلومینیم و سدیم هیدروکسید با آب تولید می‌شود، دارای دو عنصر هستند.

۷۷- کدام موارد از عبارت‌های زیر درست است؟

الف) ذره‌های سازندهٔ یک نمونه ژله، از ذره‌های سازندهٔ مخلوط اتیلن‌گلیکول در آب بزرگ‌تر است.

ب) نمک اسید چرب دومین و سومین عنصرهای گروه دوم جدول تناوبی، همانند مس (II) سولفات در آب نامحلول هستند.

پ) صابون‌های جامد برخلاف صابون‌های مایع، نمی‌توانند فاقد عنصر فلزی باشند.

ت) به طور کلی، سرعت افزایش شاخص امید به زندگی در سال‌های اخیر، در نواحی برخوردار از نواحی کم‌برخوردار بیشتر است.

۱) الف ـ پ ۲) ب ـ پ ۳) الف ـ ت ۴) ب ـ ت

۷۸- مخلوطی از اسیدهای چرب لینولئیک اسید ($C_{18}H_{30}O_2$) و پالمیتیک اسید ($C_{16}H_{32}O_2$) به جرم ۱۵۸۰ گرم را با ۲۴۰ گرم سدیم هیدروکسید به طور کامل واکنش می‌دهیم. صابون تولیدشده با زنجیر هیدروکربنی سیرشده، با چند لیتر محلول کلسیم با غلظت ۰/۱ مولار، به طور کامل واکنش می‌دهد؟ ($Na = 23, O = 16, C = 12, H = 1 : g.mol^{-1}$)

۱) ۱۰۰ ۲) ۱۵۰ ۳) ۲۰۰ ۴) ۳۰۰

۷۹- چند مورد از موارد زیر درست است؟ ($C = 12, H = 1 : g.mol^{-1}$)

- **نسبت شمار جفت‌الکترون‌های پیوندی به ناپیوندی در مولکول اتیلن‌گلیکول، ۱/۱۲۵ برابر این نسبت در اوره است.**
- **فرمول مولکولی یک پاک‌کنندهٔ غیرصابونی ۱۸کربنی با سه پیوند دوگانه، به صورت $C_{18}H_{29}SO_3Na$ است.**
- **درصد جرمی کربن در وازلین از درصد جرمی این عنصر در بنزین، کم‌تر است.**
- **پس از ورود صابون به آب، سر آب‌دوست مولکول‌های آن با سر منفی مولکول‌های آب، نیروی جاذبهٔ یون ـ دوقطبی ایجاد می‌کنند.**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

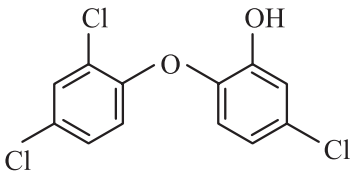
۸۰- شمار جفت‌الکترون‌های پیوندی موجود در اسید چرب حاصل از آبکافت ۲۲۱ گرم از یک استر بلندزنجیر با فرمول $C_{57}H_{104}O_6$، برابر با چند مول است و اگر این مقدار اسید چرب را به طور کامل بسوزانیم، چند لیتر گاز در شرایط STP تولید خواهد شد؟ (سه گروه هیدروکربنی در استر بلندزنجیر یکسان هستند. $O = 16, C = 12, H = 1 : g.mol^{-1}$)

۱) ۳۰۲/۴ ـ ۱۳/۷۵ ۲) ۳۰۲/۴ ـ ۴۱/۲۵ ۳) ۵۸۸ ـ ۱۳/۷۵ ۴) ۵۸۸ ـ ۴۱/۲۵

محل انجام محاسبات

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۸۱- تری‌کلوسان، ترکیب آروماتیکی است که در گذشته در شوینده‌ها استفاده می‌کردند، ولی به تازگی به دلیل عوارض جانبی برای انسان از شوینده‌ها حذف شده است. دلیل استفاده از این ماده در شوینده‌ها کدام مورد زیر بوده است؟



۱) از بین بردن جوش صورت و قارچ‌های پوستی
۲) خاصیت گندزدایی و میکروب‌کشی
۳) افزایش قدرت پاک‌کنندگی
۴) خاصیت بازی مناسب

۸۲- کدام مورد، نادرست است؟

۱) در یک واکنش برگشت‌پذیر که هم‌زمان واکنش‌های رفت و برگشت به طور پیوسته انجام می‌شوند، سرانجام مقدار واکنش‌دهنده‌ها و فراورده‌ها ثابت می‌ماند.
۲) در سامانهٔ تعادلی، مقدار و غلظت همهٔ ماده‌ها ثابت می‌شوند، ولی لزومی ندارد که با هم برابر شوند.
۳) در سامانهٔ تعادلی، سرعت مصرف و تولید همهٔ ماده‌ها ثابت و برابر می‌شود.
۴) اگر در یک واکنش مقدار و غلظت حداقل یکی از واکنش‌دهنده‌ها به صفر برسد، سامانه به یقین تعادلی نخواهد بود.

۸۳- کدام موارد از مطالب زیر درست است؟

الف) ثابت تعادل اسیدها فقط به دما بستگی داشته و در دمای معین با تغییر غلظت اولیهٔ اسید، تغییر نمی‌کند.
ب) هر چه ثابت یونش یک اسید بیشتر باشد، قوی‌تر بوده و در دمای معین غلظت یون هیدرونیوم در آن بیشتر خواهد بود.
پ) هر چه اسید ضعیف‌تر باشد، آنیون حاصل از آن، تمایل بیشتری به جذب یون هیدرونیوم دارد.
ت) در غلظت یکسان، میزان اسیدی‌بودن محلول شامل فورمیک اسید، به یقین بیشتر از محلول شامل استیک اسید خواهد بود.

۱) الف ـ ب ۲) الف ـ پ ۳) ب ـ پ ۴) ب ـ ت

۸۴- چند مورد از موارد زیر درست است؟

- **اسیدها و بازها با ثابت یونش بزرگ، الکترولیت قوی به شمار می‌روند.**
- **اغلب اسیدها و بازهای شناخته‌شده، قوی هستند.**
- **در محلول ۰/۱ مولار هیدرویدیک اسید در دمای اتاق، $[I^-] = 0/1\ mol.L^{-1}$ است.**
- **در محلول ۰/۰۱ مولار هیدروسیانیک اسید، $[H^+] > [HCN]$ است.**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۸۵- ۵/۶ لیتر هیدروژن سیانید، در شرایط STP را در ۵۰۰ میلی‌لیتر آب‌مقطر حل می‌کنیم. اگر درصد یونش هیدروسیانیک اسید برابر با ۰/۰۰۳ باشد، ثابت یونش آن به تقریب چند مول بر لیتر خواهد بود؟ (از تغییر حجم در اثر حل‌شدن گاز صرف نظر کنید.)

۱) $4/5\times10^{-6}$ ۲) $2/25\times10^{-6}$ ۳) $4/5\times10^{-10}$ ۴) $2/25\times10^{-10}$

محل انجام محاسبات

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۸۶- شکل‌های مقابل، واکنش دو قطعه نوار منیزیم با ظاهری یکسان را با محلول دو اسید متفاوت در دما و غلظت یکسان نشان می‌دهند. اگر جرم نوار منیزیم ظرف (الف) دو برابر ظرف (ب) باشد، کدام مورد دربارهٔ آن‌ها درست است؟


(الف)


(ب)

۱) سرعت واکنش در ظرف (الف) دو برابر ظرف (ب) است.
۲) ثابت یونش اسید موجود در ظرف (الف) دو برابر ظرف (ب) است.
۳) در پایان واکنش،حجم گاز آزادشده در ظرف (الف) دو برابر ظرف (ب) است.
۴) درجهٔ یونش اسید موجود در ظرف (ب) در شرایط یکسان، بیشتر از ظرف (الف) است.

۸۷- اگر غلظت تعادلی یون هیدرونیوم در محلول کربنیک اسید در دمای معین برابر با $۰/۰۰۰۳\ mol.L^{-1}$ بوده و غلظت تعادلی کربنیک اسید در این محلول برابر ۰/۲ مولار باشد، غلظت تعادلی یون هیدروژن کربنات (HCO_3^-) و ثابت تعادل یونش اسید در این دما، به ترتیب از راست به چپ کدام است؟

۱) $۱/۸\times۱۰^{-۸}$ ـ ۳×۱۰^{-۴}
۲) $۴/۵\times۱۰^{-۷}$ ـ ۳×۱۰^{-۴}
۳) $۱/۸\times۱۰^{-۸}$ ـ ۶×۱۰^{-۵}
۴) $۴/۵\times۱۰^{-۷}$ ـ ۶×۱۰^{-۵}

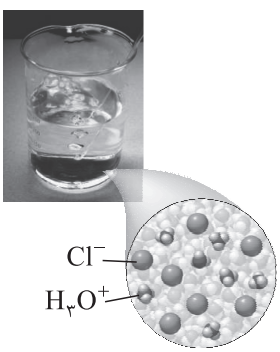
۸۸- کدام مورد، نادرست است؟

۱) دستگاه گردش خون انسان، یک سامانهٔ بازی محسوب می‌شود.
۲) تغییر رنگ کاغذ pH، معیاری برای تشخیص اسیدی یا بازی بودن محلول‌ها است.
۳) در یک سامانهٔ خنثی، غلظت یون‌های هیدرونیوم و هیدروکسید با یکدیگر یکسان بوده و برابر با $۱۰^{-۷}$ مول بر لیتر است.
۴) هر اندازه که غلظت یکی از یون‌های هیدرونیوم یا هیدروکسید در محلولی بیشتر شود، به همان نسبت از دیگری کاسته خواهد شد.

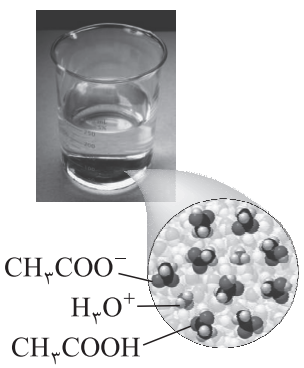
۸۹- اگر مخلوط a میلی‌لیتر از هیدروبرمیک اسید با $pH = ۱/۴$ و b میلی‌لیتر از محلول همان اسید با $pH = ۱/۷$، دارای ۰/۰۶ مول یون برمید باشد، $a + b$ می‌تواند برابر با چند میلی‌لیتر باشد؟

۱) ۲۰۰
۲) ۸۰۰
۳) ۱۲۰۰
۴) ۱۷۰۰

۹۰- شکل‌های مقابل محلول‌هایی از هیدروکلریک اسید و استیک اسید را نشان می‌دهد. اگر حجم هر یک از محلول‌ها برابر با ۳۱۵ میلی‌لیتر باشد، تفاوت pH این محلول‌ها در دمای $۲۵^\circ C$، کدام است؟ (هر ذره را معادل ۰/۰۱۵ مول در نظر بگیرید.)



(۱)



(۲)

۱) ۰/۴۸
۲) ۰/۵۵
۳) ۰/۸۷
۴) ۱/۰۲

محل انجام محاسبات

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۹۱- اگر pH محلول اسید قوی HX با pH محلول اسید ضعیف HY برابر باشد، چند مورد از موارد زیر به یقین درست است؟
$(HX = ۵۰ , HY = ۶۰ : g.mol^{-۱})$

- شمار مول‌های آغازی دو اسید برای تشکیل دو محلول، نابرابر است.
- اگر غلظت محلول HX برابر با ۰/۱ مولار بوده و حجم محلول یک لیتر باشد، تفاوت جرم دو اسید حل‌شده برابر با یک گرم خواهد بود.
- در شرایط یکسان، سرعت واکنش نوار منیزیم با این دو محلول برابر است.
- اگر حجم دو محلول برابر نباشد، رسانایی دو محلول متفاوت خواهد بود.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۹۲- اگر در دمای معین و در دو ظرف جداگانه، غلظت تعادلی $HNO_۲$ در محلول، دو برابر غلظت تعادلی فورمیک اسید در محلول و pH محلول نیترو اسید، برابر ۲/۱۵ باشد، تفاوت جرم دو آنیون در محلول آن‌ها، برابر چند گرم است؟ (حجم هر یک از محلول‌ها، برابر یک لیتر است، $O = ۱۶, N = ۱۴, C = ۱۲, H = ۱ : g.mol^{-۱}$)

$HNO_۲(aq) \rightleftharpoons H^+(aq) + NO_۲^-(aq) , K_a = ۴/۹ \times ۱۰^{-۴}$

$HCOOH(aq) \rightleftharpoons H^+(aq) + HCOO^-(aq) , K_a = ۱/۸ \times ۱۰^{-۴}$

۱) ۰/۱۱۳ ۲) ۰/۱۳۱ ۳) ۰/۱۷۸ ۴) ۰/۱۸۷

۹۳- غلظت یون هیدروکسید در محلول ۰/۰۵ مولار هیدروکلریک اسید، چند برابر غلظت یون هیدرونیوم در محلول ۰/۰۲ مولار هیپوکلرو اسید با $K_a = ۴/۵ \times ۱۰^{-۸} mol.L^{-۱}$ است؟

۱) $۵/۸۳ \times ۱۰^{-۹}$ ۲) $۶/۶۷ \times ۱۰^{-۹}$ ۳) $۱/۲۵ \times ۱۰^{۸}$ ۴) $۱/۵ \times ۱۰^{۸}$

۹۴- یک نمونهٔ مخلوط شامل سدیم هیدروکسید و سدیم کربنات داریم، به طوری‌که اگر سدیم هیدروکسید موجود در مخلوط را در آب حل کرده و حجم محلول را به ۸۰۰ میلی‌لیتر برسانیم، pH محلول، برابر با ۱۳/۴ خواهد بود. هم‌چنین در صورت واکنش این مخلوط با مقدار کافی هیدروکلریک اسید، x گرم سدیم کلرید و ۹ گرم آب تولید می‌شود. بدین ترتیب، مقدار x کدام است؟

(معادله‌ها موازنه شوند، $Na = ۲۳ , Cl = ۳۵/۵ , O = ۱۶ , C = ۱۲ , H = ۱ : g.mol^{-۱}$)

I) $NaOH(aq) + HCl(aq) \rightarrow NaCl(aq) + H_۲O(l)$

II) $Na_۲CO_۳(aq) + HCl(aq) \rightarrow NaCl(aq) + H_۲O(l) + CO_۲(g)$

۱) ۳۵/۱ ۲) ۲۳/۴ ۳) ۷۰/۲ ۴) ۴۶/۸

محل انجام محاسبات

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۹۵- با توجه به جدول زیر که مواد مؤثر موجود در چند ضداسید را نشان می‌دهد، کدام گزینه نادرست است؟

شمارهٔ ضداسید	۱	۲	۳
مادهٔ مؤثر	$Al(OH)_3, NaHCO_3$	$Al(OH)_3, Mg(OH)_2$	$NaHCO_3$

۱) مصرف این داروها، سبب افزایش pH اسید معده می‌شوند.
۲) مخلوط مواد مؤثر ضداسید شمارهٔ (۲) با آب، منجر به تشکیل یک سامانهٔ همگن می‌شود.
۳) دو مول ضداسید شمارهٔ (۱) که مواد مؤثر آن به نسبت مولی برابر مخلوط شده‌اند، می‌تواند چهار مول HCl را خنثی کند.
۴) ضداسید شمارهٔ (۳) به عنوان مادهٔ افزودنی در تهیهٔ شوینده‌ها نیز کاربرد دارد.

۹۶- کدام مورد، نادرست است؟

۱) جانداران ذره‌بینی، گاز نیتروژن هواکره را برای مصرف گیاهان در خاک تثبیت می‌کنند.
۲) در ساختار لوویس مواد، هرگاه اتم عنصرهای گروه ۱۷، اتم کناری باشند، تنها یک پیوند اشتراکی تشکیل می‌دهند.
۳) افزون بر فلزهایی مانند طلا و پلاتین که به حالت آزاد در طبیعت یافت می‌شوند، فلزهایی وجود دارند که با بیش از یک نوع اکسید در طبیعت شناخته شده‌اند.
۴) در آرایش الکترون ـ نقطه‌ای مواد مولکولی، الکترون‌های لایهٔ ظرفیت اتم‌ها طوری کنار آن‌ها چیده می‌شوند که همهٔ اتم‌های سازندهٔ ترکیب، از قاعدهٔ هشت‌تایی پیروی کنند.

۹۷- مطابق جدول زیر، کدام گزینه موارد a، b، c و d را به ترتیب از راست به چپ، به درستی نشان می‌دهد؟

نام ترکیب	مس (II) سولفید	b	c	سیلیسیم تترابرمید
فرمول شیمیایی	a	CS_2	CrO	d

۱) Cu_2S ـ کربن سولفید ـ کروم اکسید ـ $SiBr_4$
۲) Cu_2S ـ کربن سولفید ـ کروم (I) اکسید ـ SBr_4
۳) CuS ـ کربن دی‌سولفید ـ کروم اکسید ـ SBr_4
۴) CuS ـ کربن دی‌سولفید ـ کروم (II) اکسید ـ $SiBr_4$

۹۸- در کدام ردیف‌های جدول زیر، داده‌های مربوط به ترکیب، درست است؟ (منظور از p.e، جفت‌الکترون‌های پیوندی و n.e، جفت‌الکترون‌های ناپیوندی روی اتم‌ها است.)

ردیف	نام ترکیب	فرمول شیمیایی	شمار p.e	$\frac{p.e}{n.e}$
۱	فسفر تری‌کلرید	PCl_3	۳	$\frac{1}{3}$
۲	کربن مونوکسید	CO	۳	$\frac{3}{2}$
۳	گوگرد تری‌اکسید	SO_3	۳	$\frac{1}{2}$
۴	دی‌نیتروژن مونوکسید	N_2O	۴	۱

۱) ۱ و ۳
۲) ۱ و ۴
۳) ۲ و ۳
۴) ۲ و ۴

محل انجام محاسبات

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۹۹- نمونه‌ای به جرم ۳/۱۷۵ گرم از فلز X با ۰/۶۰۰ لیتر گاز اکسیژن با چگالی ۱/۳۴ گرم بر لیتر، اکسیدی با فرمول XO تشکیل می‌دهد، جرم مولی عنصر X چند گرم بر مول بوده و در این واکنش، چند گرم فراورده تولید می‌شود؟ ($O = 16\ g.mol^{-1}$)

۱) ۶۳/۵ و ۱/۹۸

۲) ۶۳/۵ و ۳/۹۹

۳) ۱۲۷ و ۱/۹۸

۴) ۱۲۷ و ۳/۹۹

۱۰۰- پس از موازنهٔ واکنش‌های زیر، کدام مورد درست است؟

a) $KSCN + H_2O + I_2 \rightarrow KHSO_4 + HI + ICN$

b) $ZnNH_4PO_4 \rightarrow Zn_2P_2O_7 + H_2O + NH_3$

c) $C_{57}H_{110}O_6 + O_2 \rightarrow CO_2 + H_2O$

d) $I_2 + HNO_3 \rightarrow HIO_3 + NO_2 + H_2O$

۱) در واکنش d، مجموع ضرایب مولکول‌های اکسیژن‌دار، برابر ۲۵ است.

۲) در واکنش‌هایی که نیتروژن دارند، تفاوت ضریب گونه‌های نیتروژن‌دار واکنش‌دهنده و فراورده‌ها صفر است.

۳) ضریب H_2O در سه واکنش یکسان است.

۴) در معادلهٔ c، مجموع ضرایب واکنش‌دهنده‌ها بیشتر از ۱/۵ برابر ضریب CO_2 است.

۱۰۱- جدول مقابل داده‌هایی را دربارهٔ خودروهای یک کشور توسعه‌یافته نشان می‌دهد. نوعی خودرو در این کشور به ازای طی یک کیلومتر، ۱۲۵ گرم گاز کربن دی‌اکسید منتشر می‌کند. برچسب این خودرو کدام بوده و اگر این خودرو به طور میانگین سالانه مسافتی حدود ۱۸۰۰۰ کیلومتر طی کند. بعد از ۵ سال چند کیلوگرم گاز کربن دی‌اکسید بر اثر استفاده از این خودرو وارد هواکره می‌شود؟

برچسب آلایندگی خودرو	گسترهٔ انتشار گاز کربن دی‌اکسید (گرم) به ازای طی یک کیلومتر
A	کم‌تر از ۱۲
B	۱۲۰ ـ ۱۴۰
C	۱۴۰ ـ ۱۵۵
D	۱۵۵ ـ ۱۷۰
E	۱۷۰ ـ ۱۹۰
F	۱۹۰ ـ ۲۲۵
G	بیشتر از ۲۲۵

۱) ۲۲۵۰ ـ A

۲) ۱۱۲۵۰ ـ A

۳) ۲۲۵۰ ـ B

۴) ۱۱۲۵۰ ـ B

محل انجام محاسبات

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۱۰۲- اوزون تروپوسفری طی واکنش‌های موازنه‌نشدهٔ زیر تولید می‌شود. اگر تمام نیتروژن دی‌اکسید تولیدشده، در مرحلهٔ آخر مصرف شده و منجر به تولید $۸/۴۲۸\times۱۰^{۲۴}$ مولکول اوزون شود، چند لیتر گاز نیتروژن با چگالی ۰/۷ گرم بر لیتر مصرف شده است؟ $(O=۱۶, N=۱۴ : g.mol^{-۱})$

۱) $N_۲(g)+O_۲(g)\rightarrow NO(g)$

۲) $NO(g)+O_۲(g)\rightarrow NO_۲(g)$

۳) $NO_۲(g)+O_۲(g)\xrightarrow{\text{نور خورشید}}NO(g)+O_۳(g)$

۱) ۱۵۶/۸ ۲) ۲۸۰ ۳) ۳۱۳/۶ ۴) ۵۶۰

۱۰۳- کدام مطلب، نادرست است؟ $(S=۳۲, O=۱۶, N=۱۴ : g.mol^{-۱})$

۱) اوزون و گوگرد دی‌اکسید از لحاظ ساختار لوویس مشابه هستند به همین دلیل رفتار شیمیایی آن‌ها نیز مشابه خواهد بود.

۲) در بررسی رفتار زمین در برابر پرتوی خورشیدی، حدود ۶۰ درصد پرتوی فروسرخ گسیل‌شده از زمین وارد فضا می‌شوند و بخش کوچکی از پرتوهای ارسالی خورشید به زمین توسط هواکره جذب می‌شود.

۳) اگر در دما و فشار یکسان، حجم ۱۲/۸ گرم $SO_۲$ برابر حجم ۱۵/۲ گرم $N_۲O_x$ باشد، x برابر ۳ می‌باشد.

۴) اوزون و اکسیژن هر دو در حالت مایع به رنگ آبی هستند و در ساختار لوویس اوزون ۱۲ الکترون ناپیوندی مشاهده می‌شود.

۱۰۴- کدام مورد درست است؟ $(Cl=۳۵/۵, P=۳۱ : g.mol^{-۱})$

۱) براساس شواهد، فصل بهار در نیمکرهٔ شمالی نسبت به ۵۰ سال گذشته حدود یک ماه زودتر آغاز می‌شود.

۲) به منظور تولید ۴۱۲/۵ گرم فسفر تری‌کلرید، باید ۱۸۶ گرم فسفر $(P_۴)$ با گاز کلر واکنش دهد.

۳) با افزایش ارتفاع در لایهٔ تروپوسفر، فشار گاز اکسیژن کاهش می‌یابد، اما درصد حجمی آن ثابت است.

۴) جاذبهٔ زمین، عامل توزیع گازها در سرتاسر هواکره است.

۱۰۵- پتاسیم پرمنگنات $(KMnO_۴)$ و آلومینیم سولفات $(Al_۲(SO_۴)_۳)$ طبق واکنش‌های موازنه‌نشدهٔ زیر، در ظرف درباز تجزیه می‌شوند. اگر جرم مادهٔ جامد به‌کاررفته در واکنش (I)، ۲ برابر واکنش (II) باشد، کاهش جرم واکنش (I) چند برابر واکنش (II) است و اگر تفاوت جرم فراورده‌های جامد در واکنش (I)، ۵۵ گرم باشد، جرم واکنش‌دهندهٔ (II) چند گرم بوده است؟ $(Mn=۵۵, K=۳۹, S=۳۲, Al=۲۷, O=۱۶ : g.mol^{-۱})$

I) $KMnO_۴(s)\rightarrow K_۲MnO_۴(s)+MnO_۲(s)+O_۲(g)$

II) $Al_۲(SO_۴)_۳(s)\rightarrow Al_۲O_۳(s)+SO_۳(g)$

۱) ۱۵۸،۰/۲۸۸ ۲) ۷۹،۰/۱۴۲

۳) ۱۵۸،۰/۱۴۲ ۴) ۷۹،۰/۲۸۸

محل انجام محاسبات

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

پاسخ‌نامه پیش آزمون خیلی سبز

پیش آزمون Warm Up

پایه دوازدهم | مرحله هفتم

سال تحصیلی ۰۵-۱۴۰۴ | ۱۶/آبان/۱۴۰۴

رشته ریاضی

ویژه کنکوری‌های ۱۴۰۵

Azmoon.kheilisabz.com

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

آزمون آزمایشی خیلی سبز

سرپرست تولید	الناز علی‌یاری‌زاده
ویراستاران فنی	نیلوفر اعتمادی ـ نیوشا پیمان ـ هدیه خسروی الهه صفری ـ زهرا صفری ـ فاطمه علی‌اکبری محیا غنی‌فرد ـ زهرا فرهادی‌مهر ـ مهرآسا قدیری نادره نازآوری ـ ساعده نمازی
رسام	مونا آندستا ندا فخاری سارا گنجی آزادپور
صفحه‌آرایی	صدف امام ـ مریم حسین‌زاده سپیده سخائی ـ الهام سهرابی ـ طاهره صادق‌نژاد مائده صبری ـ نیلوفر فرخجسته ـ فاطمه قیاسوند مهدیه گل‌پور ـ دریا لطفی

Azmoon.kheilisabz.com

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۱ تابع $f(x)=(۲a-۱)x+a-b$ ثابت و تابع $g(x)=(b-۳)x+a+۲c$ همانی است. تابع خطی $y=(۲f-g)(x)$ از کدام ربع دستگاه مختصات عبور نمی‌کند؟

(g همانی است ⇒ $y=x$) (f ثابت ⇒ در ضابطه‌اش هیچ x‌ای ندارد.)

۱) اول

۲) دوم

۳) سوم

۴) چهارم

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint تعاریف سادهٔ تابع ثابت و تابع همانی رو دنبال کن، دقت کن که به c احتیاجی نداری.

درس Box

تابع چندجمله‌ای، تابع خطی، تابع همانی و تابع ثابت

تابع چندجمله‌ای: هر تابع را که نمایش جبری آن، یک چندجمله‌ای جبری از یک متغیر باشد، تابع چندجمله‌ای می‌نامند:

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-۱}x^{n-۱}+\cdots+a_۱x+a_۰ \quad ; \quad a_n\neq ۰$$

هر تابعی را که بتوان ضابطهٔ آن را به شکل $f(x)=ax+b$ یا $y=ax+b$ نوشت یک تابع خطی می‌نامند. a شیب خط و b عرض از مبدأ آن است. طول از مبدأ نیز برابر $-\frac{b}{a}$ است. معمولاً دامنه و برد تابع خطی $\mathbb{R}$ است، اما اگر دامنه، بازهٔ $[x_۱,x_۲]$ باشد برد، یکی از بازه‌های $[f(x_۱),f(x_۲)]$ یا $[f(x_۲),f(x_۱)]$ است.

تابع همانی: اگر در یک تابع، هر عضو از دامنه، دقیقاً به همان عضو از برد نظیر شود، تابع همانی است. ضابطهٔ تابع همانی $f(x)=x$ است.

تابع ثابت: تابعی که برد آن فقط شامل یک عضو باشد، تابع ثابت می‌نامند. ضابطهٔ تابع ثابت $f(x)=k$ است.

پاسخ تشریحی

گام اول: تابع f ثابت است، پس ضابطهٔ آن باید فقط یک عدد حقیقی باشد یا به بیان دیگر ضریب x باید صفر باشد:

$$\Rightarrow ۲a-۱=۰ \Rightarrow a=\frac{۱}{۲}$$

گام دوم: از قبل می‌دانیم که ضابطهٔ g به صورت $g(x)=x$ است. اما برای تکمیل ضابطهٔ تابع f و در نتیجه به دست آوردن ضابطهٔ تابع $۲f-g$ به مقدار b نیاز داریم:

$$\Rightarrow b-۳=۱\Rightarrow b=۴$$

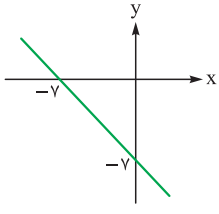
گام سوم: حال هر دو ضابطه را داریم:

$$f(x)=a-b=\frac{۱}{۲}-۴=-\frac{۷}{۲}$$
$$g(x)=x$$

پس ضابطهٔ تابع $۲f-g$ به صورت زیر است:

$$y=(۲f-g)(x)=۲f(x)-g(x)=۲(-\frac{۷}{۲})-x=-۷-x$$

گام چهارم: نمودار این تابع را رسم می‌کنیم و می‌بینیم که از ربع اول دستگاه مختصات نمی‌گذرد:



www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۲ تعداد جواب‌های معادلهٔ $[۶x^۲]=۵x^۲$ کدام است؟

$۵x^۲$ عددی صحیح است.

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۹

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint $۶x^۲$ رو به $۵x^۲+x^۲$ تبدیل کن. $۵x^۲$ صحیح نیست؟

درس Box

جزء صحیح یک عدد: جزء صحیح یک عدد صحیح برابر خود آن عدد و جزء صحیح هر عدد غیرصحیح، برابر اولین عدد صحیح سمت چپ آن عدد (کوچک‌تر از آن) بر روی محور اعداد است و برای عدد حقیقی a آن را با نماد $[a]$ نمایش می‌دهیم.

جزء صحیح یک عدد حقیقی را بزرگ‌ترین عدد صحیحی در نظر می‌گیریم که کوچک‌تر از یا مساوی با خود آن عدد است. هر عدد حقیقی بین دو عدد صحیح متوالی یا مساوی با یکی از آن‌هاست، پس برای هر عدد حقیقی x، عدد صحیح n وجود دارد به طوری که:

$$n\le x<n+۱ \xleftrightarrow{n\in\mathbb{Z}} [x]=n$$

ویژگی‌های جزء صحیح یک عدد:

نامساوی‌های جزء صحیح	تساوی‌های جزء صحیح
$(۱)\ [x]\le k \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} x<k+۱$	$(۱)\ [x]=k \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} k\le x<k+۱$
$(۲)\ [x]<a \xrightarrow{a\notin\mathbb{Z}} x<[a]+۱$	$(۲)\ x\in\mathbb{Z} \Rightarrow [x]=x$
$(۳)\ [x]\ge k \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} x\ge k$	$(۳)\ [x]+[-x]=\begin{cases}۰ & ;x\in\mathbb{Z}\\ -۱ & ;x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$
$(۴)\ [x]>a \xrightarrow{a\notin\mathbb{Z}} x\ge[a]+۱$	$(۴)\ [x+k]=[x]+k \quad , \quad k\in\mathbb{Z}$
$(۵)\ [x]\le x<[x]+۱ \quad , \quad x\in\mathbb{R}$	$(۵)\ [kx]=\sum_{i=۰}^{k-۱}[x+\frac{i}{k}] \quad , \quad k\in\mathbb{Z}$ در حالت خاص: $[۲x]=[x]+[x+\frac{۱}{۲}]$
$(۶)\ ۰\le x-[x]<۱ \quad , \quad x\in\mathbb{R}$	

پاسخ تشریحی

گام اول: حاصل براکت که یک عدد صحیح است، برابر $۵x^۲$ شده است، این یعنی $۵x^۲$ عدد صحیح است. حال اگر $۶x^۲$ را به یک $۵x^۲$ و یک $x^۲$ بشکنیم و معادله را به صورت زیر بازنویسی کنیم:

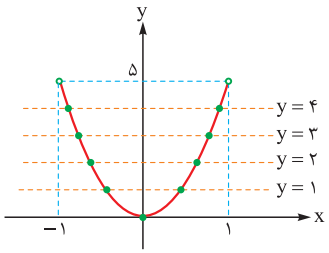
$$[\underbrace{۵x^۲}_{\text{عدد صحیح}}+x^۲]=۵x^۲$$

طبق ویژگی‌های براکت در درس‌نامه، عدد صحیح $۵x^۲$ از براکت بیرون می‌آید:

$$\Rightarrow ۵x^۲+[x^۲]=۵x^۲ \Rightarrow [x^۲]=۰ \xrightarrow{\text{تعریف جزء صحیح}} ۰\le x^۲<۱ \Rightarrow -۱<x<۱$$

گام دوم: اما همهٔ اعضای بازهٔ $(-۱,۱)$ جواب معادله نیستند، بلکه آن‌هایی قابل قبول‌اند که به ازای آن‌ها $۵x^۲$ عددی صحیح شود.

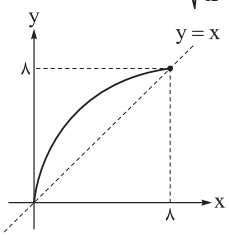
برای این‌کار نمودار تابع $y=۵x^۲$ را با دامنهٔ $(-۱,۱)$ رسم می‌کنیم:



با توجه به شکل می‌بینیم که در ۹ نقطهٔ مشخص‌شده، مقدار تابع $y=۵x^۲$ عددی صحیح است، در نتیجه معادلهٔ اصلی صورت سؤال ۹ جواب دارد.

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۳ نمودار تابع f با دامنهٔ $[۰,۸]$ در شکل مقابل رسم شده است. دامنهٔ تعریف تابع $g(x)=\sqrt{\frac{f(x)}{x-f^{-۱}(۲x)}}$ شامل چند عدد صحیح است؟



۱) ۲

۲) ۳

۳) ۴

۴) ۵

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint بپرداز به مخرج کسر.

پاسخ تشریحی

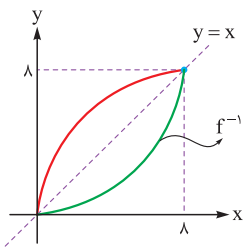
گام اول: دامنهٔ تابع g محدوده‌ای از x است که به ازای آن‌ها کسر $\frac{f(x)}{x-f^{-۱}(۲x)}$ نامنفی باشد:

$$\Rightarrow \frac{f(x)}{x-f^{-۱}(۲x)} \geq ۰$$

با توجه به نمودار، برد تابع f بازهٔ $[۰,۸]$ است. پس صورت کسر بالا همواره نامنفی است، در نتیجه مخرج کسر باید مثبت باشد:

$$\Rightarrow x-f^{-۱}(۲x)>۰ \Rightarrow f^{-۱}(۲x)<x$$

گام دوم: می‌دانیم برای رسم نمودار وارون هر تابع، نمودار آن را نسبت به خط $y=x$ قرینه می‌کنیم. در این سؤال نمودار $f^{-۱}$ را رسم می‌کنیم:



گام سوم: مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $f^{-۱}(x)<x$ حدودی از x است که به ازای آن‌ها نمودار تابع $f^{-۱}$ زیر خط $y=x$ است.

با توجه به شکل گام قبلی، این حدود بازهٔ $(۰,۸)$ است.

حال برای این‌که نمودار تابع $y=f^{-۱}(۲x)$ زیر خط $y=x$ قرار بگیرد، لازم است ۲x در بازهٔ $(۰,۸)$ باشد:

$$\Rightarrow ۰<۲x<۸ \Rightarrow ۰<x<۴$$

پس دامنهٔ تابع g بازهٔ $(۰,۴)$ است که شامل سه عدد صحیح است.

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۴ به ازای کدام مقدار a، نمودار وارون تابع $f(x)=۴x+۲\sqrt{x+۳a}$، خط $۳y-۲x=۱$ را در نقطه‌ای به عرض -۱ قطع می‌کند؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۱۹}{۴}$ ۳) $\frac{۵۷}{۴}$ ۴) $\frac{۹}{۴}$

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint کافیه مختصات نقطهٔ تقاطع رو به دست بیاری.

پاسخ‌تشریحی **گام اول:** طول نقطهٔ تقاطع را با توجه به معادلهٔ خط به دست می‌آوریم:

$$۳(-۱)-۲x=۱ \Rightarrow ۲x=-۴ \Rightarrow x=-۲$$

گام دوم: پس مختصات نقطهٔ تقاطع به صورت $(-۱,-۲)$ است و این نقطه در ضابطهٔ تابع $f^{-۱}$ صدق می‌کند:

$$f^{-۱}(-۲)=-۱ \Rightarrow f(-۱)=-۲$$

گام سوم: در ضابطهٔ تابع f به جای x عدد -۱ را قرار می‌دهیم:

$$f(-۱)=-۴+۲\sqrt{-۱+۳a}=-۲$$

$$\Rightarrow \sqrt{۳a-۱}=۱ \Rightarrow ۳a-۱=۱ \Rightarrow a=\frac{۲}{۳}$$

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۵ نمودار تابع $f(x)=\frac{mx+۶}{x+m+۳}$ نمودار وارون خودش را فقط در دو نقطه به طول‌های α و β قطع می‌کند. حاصل $\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{m}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{m}{۴}$

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint با خط $y=x$ قطع بده.

پاسخ تشریحی **گام اول:**

نکته تابع هموگرافیک $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ که در آن $a+d\neq ۰$ است، اگر وارون خود را قطع کند، نقاط تقاطع قطعاً روی خط $y=x$ هستند.

پس طبق نکته، بهتر است معادلهٔ $f(x)=x$ را حل کنیم:

$$\frac{mx+۶}{x+m+۳}=x \Rightarrow x^۲+(m+۳)x=mx+۶ \Rightarrow x^۲+۳x-۶=۰$$

گام دوم: جواب‌های معادلهٔ بالا، α و β هستند و در این معادلهٔ درجه‌دوم داریم:

$$S=\alpha+\beta=-۳ \quad , \quad P=\alpha\beta=-۶$$

گام سوم: خواستهٔ سؤال را حساب می‌کنیم:

$$\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{S}{P}=\frac{-۳}{-۶}=\frac{۱}{۲}$$

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۶ نمودار تابع $f(x)=-\sqrt{۲-\sqrt{۴-x}}$، نمودار وارون خود را در چند نقطه قطع می‌کند؟

۱) هیچ

۲) ۱

۳) ۲

۴) ۳

مشاوره یکی از سؤالات کنکور تیر امسال در رشتهٔ ریاضی را برایتان شبیه‌سازی کرده‌ایم تا با یادگیری این سؤال بتوانید هم به سؤال کنکور سراسری و هم به این تیپ مسائل مسلط شوید.

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint

معادله حل نکن، بلکه به دامنه و برد تابع توجه کن.

پاسخ تشریحی

گام اول: به دست آوردن ضابطهٔ تابع $f^{-۱}$ و بعد از آن حل معادلهٔ $f(x)=f^{-۱}(x)$ کاری بسیار وقت‌گیر، دشوار و برای این سؤال غیرمنطقی است. پس چاره چیست؟ می‌رویم سراغ دامنه و برد تابع f که ببینیم آیا اصلاً امکان برخورد دارند یا نه؟

ابتدا دامنه را حساب می‌کنیم:

$$D_f:\begin{cases}۴-x\geq ۰ \Rightarrow x\leq ۴\\ ۲-\sqrt{۴-x}\geq ۰ \Rightarrow \sqrt{۴-x}\leq ۲ \xrightarrow{\text{توان ۲}} ۴-x\leq ۴ \Rightarrow x\geq ۰\end{cases}$$

پس دامنهٔ تابع f و در نتیجه برد تابع $f^{-۱}$ بازهٔ $[۰,۴]$ است.

$$D_f=R_{f^{-۱}}=[۰,۴]$$

گام دوم: حال برد تابع f را حساب می‌کنیم:

$$۰\leq x\leq ۴ \Rightarrow ۰\leq ۴-x\leq ۴ \Rightarrow ۰\leq \sqrt{۴-x}\leq ۲$$

$$\Rightarrow ۰\leq ۲-\sqrt{۴-x}\leq ۲ \Rightarrow -\sqrt{۲}\leq -\sqrt{۲-\sqrt{۴-x}}\leq ۰$$

این یعنی برد تابع f که همان دامنهٔ تابع $f^{-۱}$ است، بازهٔ $[-\sqrt{۲},۰]$ است.

گام سوم: دامنهٔ تابع f بازهٔ $[۰,۴]$ و دامنهٔ تابع $f^{-۱}$ بازهٔ $[-\sqrt{۲},۰]$ است، این یعنی نمودارهای f و $f^{-۱}$ در صورت امکان فقط در $x=۰$ با هم برخورد می‌کنند. حال این نقطه را چک می‌کنیم:

$$f(۰)=-\sqrt{۲-\sqrt{۴}}=۰ \Rightarrow f^{-۱}(۰)=۰$$

پس تنها نقطهٔ برخورد مبدأ مختصات است.

تیزبازی

$$f^{-۱}(x)=x^{۲}(۴-x^{۲}) \quad ; \quad -\sqrt{۲}\leq x\leq ۰$$

پس باید معادلهٔ $\sqrt{۲-\sqrt{۴-x}}=x^{۲}(x^{۲}-۴)$ را حل کنیم.

البته این نکته هم وجود دارد که چون تابع f و در نتیجه تابع $f^{-۱}$ اکیداً نزولی هستند و هر دو از مبدأ مختصات می‌گذرند، کافی است معادلهٔ $f^{-۱}(x)=-x$ را حل کنیم.

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۷ توابع f و $g(x)=۸-۳x$ مفروض‌اند، به طوری که دامنه‌های دو تابع f و fog به ترتیب $D_f=[-۴,a]$ و $D_{fog}=[-۲,b]$ هستند. حاصل $a-b$ کدام است؟

۱) ۱۴ ۲) ۱۸ ۳) ۸ ۴) ۱۰

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint کافیه تعریف D_{fog} روبنویسی D_g که برابر $\mathbb{R}$ هستش، پس یه نامعادلهٔ ساده حل کن و تمام.

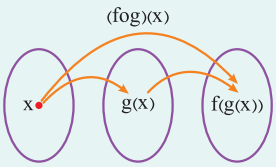
درس Box

ترکیب توابع

فرض کنید f و g دو تابع باشند، ترکیب دو تابع f و g به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(fog)(x)=f(g(x))$$

شرط تشکیل این تابع آن است که اشتراک برد تابع g و دامنهٔ تابع f تهی نباشد، در این صورت دامنهٔ تابع fog، زیرمجموعهٔ دامنهٔ تابع g خواهد بود و برد تابع fog نیز زیرمجموعهٔ برد تابع f خواهد بود و می‌نویسیم:



$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$$

نماد fog به این معنی است که در ضابطهٔ تابع f به جای x قرار دهیم $g(x)$.

نکته

الف) دامنهٔ تابع fog زیرمجموعهٔ دامنهٔ تابع g (تابع داخلی) است.

ب) برد تابع fog زیرمجموعهٔ برد تابع f (تابع بیرونی) است.

پاسخ تشریحی

گام اول: دامنهٔ تابع خطی g، کل اعداد حقیقی است: $D_g=\mathbb{R}$

و تعریف D_{fog} را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\{x\in\mathbb{R} \mid (۸-۳x)\in[-۴,a]\}$$

گام دوم: نامعادلهٔ تعریف بالا را حل می‌کنیم:

$$-۴\le ۸-۳x\le a \xrightarrow{\times(-۱)} -a\le ۳x-۸\le ۴ \xrightarrow{+۸} ۸-a\le ۳x\le ۱۲ \xrightarrow{\div ۳} \frac{۸-a}{۳}\le x\le ۴$$

گام سوم: این یعنی ما براساس تعریف، دامنهٔ تابع fog را بازهٔ $[\frac{۸-a}{۳},۴]$ به دست آورده‌ایم. پس طبق فرض سؤال، این بازه باید مساوی بازهٔ $[-۲,b]$ باشد:

$$\Rightarrow \begin{cases}\frac{۸-a}{۳}=-۲ \Rightarrow ۸-a=-۶ \Rightarrow a=۱۴\\ b=۴\end{cases}$$

گام چهارم: مطلوب مسئله برابر است با:

$$a-b=۱۴-۴=۱۰$$

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۸ اگر $f(۲-x)=\sqrt{۲x+۱}$ و $g(x+۳)=\sqrt{۴-۲x}$ باشد، دامنهٔ تعریف تابع gof شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۱۴ ۲) ۱۳ ۳) ۱۲ ۴) ۱۱

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint حدود x زیر رادیکال‌ها رو به دست بیارین، بعد حدود عبارت داخل پرانتزها رو، بعد از اون تعریف D_{gof} رو بنویسین.

درس Box

یافتن ضابطه

در سؤالات رایج ترکیب توابع، دو ضابطه از سه ضابطهٔ $f(x)$، $g(x)$ و $(fog)(x)$ معلوم است و ضابطهٔ سوم را از ما می‌خواهند.

جدول زیر ر وش‌های به دست آوردن ضابطهٔ سوم را به صورت خلاصه شرح می‌دهد:

ضابطه‌ها	f(x)	g(x)	(fog)(x)
روش	×	×	به جای xای که در ضابطهٔ $f(x)$ می‌بینیم، ضابطهٔ $g(x)$ را قرار دهیم.
	ضابطهٔ $g(x)$ را مساوی متغیر t قرار می‌دهیم و x را برحسب t به دست می‌آوریم (همان ضابطهٔ $g^{-۱}(x)$) و سپس در ضابطهٔ $(fog)(x)$ جای‌گذاری می‌کنیم.	×	×
	×	به جای هر x ضابطهٔ $f(x)$ عبارت $g(x)$ را قرار می‌دهیم. عبارت حاصل باید با ضابطهٔ $(fog)(x)$ برابر باشد. در این شرایط معادله‌ای باید حل کنیم که متغیر جدید آن $g(x)$ است.	×

پاسخ تشریحی

گام اول: با دو تابع رادیکالی با فرجهٔ زوج مواجه هستیم و این توابع زمانی قابل تعریف هستند که عبارت‌های زیر رادیکال نامنفی باشند:

$$\sqrt{۲x+۱}: ۲x+۱\geq ۰ \Rightarrow x\geq -\frac{۱}{۲}$$

$$\sqrt{۴-۲x}: ۴-۲x\geq ۰ \Rightarrow x\leq ۲$$

گام دوم: با توجه به حدود x، حدود عبارت‌های داخل پرانتزی را که ورودی‌های دو تابع هستند، به دست می‌آوریم:

$$f: x\geq -\frac{۱}{۲} \Rightarrow -x\leq \frac{۱}{۲} \Rightarrow ۲-x\leq \frac{۵}{۲} \Rightarrow D_f=(-\infty,\frac{۵}{۲}]$$

$$g: x\leq ۲ \Rightarrow x+۳\leq ۵ \Rightarrow D_g=(-\infty,۵]$$

گام سوم: برای محاسبهٔ دامنهٔ تابع gof به ضابطهٔ تابع f نیز نیاز داریم. طبق جدول ارائه‌شده در درسBox سؤال قبل عمل می‌کنیم:

$$f(۲-x)=\sqrt{۲x+۱} \xrightarrow[x=۲-t]{۲-x=t} f(t)=\sqrt{۲(۲-t)+۱}=\sqrt{۵-۲t}$$

پس ضابطهٔ تابع f به صورت $f(x)=\sqrt{۵-۲x}$ است.

گام چهارم: در این گام مطلوب مسئله، یعنی دامنهٔ تابع gof را حساب می‌کنیم:

$$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}=\{\underbrace{x\leq \frac{۵}{۲}}_{D_f} \mid \underbrace{\sqrt{۵-۲x}}_{f(x)}\leq \underbrace{۵}_{D_g}\}$$

نامساوی داخل تعریف را حل می‌کنیم:

$$\sqrt{۵-۲x}\leq ۵ \xrightarrow{\text{توان ۲}} ۵-۲x\leq ۲۵ \Rightarrow ۲x\geq -۲۰ \Rightarrow x\geq -۱۰$$

پس تعریف D_{gof} به شکل زیر تغییر می‌کند:

$$D_{gof}=\{x\leq \frac{۵}{۲} \mid x\geq -۱۰\}=[-۱۰,\frac{۵}{۲}]$$

این بازه شامل $۱۳=۱+(-۱۰)-۲$ عدد صحیح ۱۰−، ۹−، .... تا ۲ است.

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

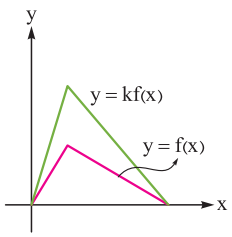
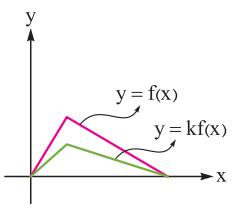
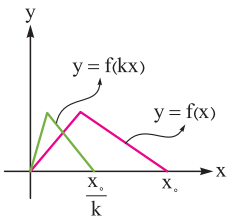
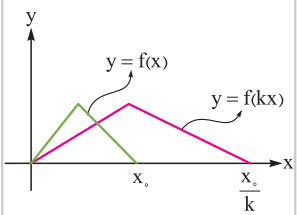
۹ با کدام تبدیل‌ها می‌توانیم از نمودار تابع $y=\frac{۴}{۳}f(\frac{۲}{۳}x)$ به نمودار تابع $y=f(x)$ برسیم؟

۱) انقباض افقی و عمودی
۲) انبساط افقی و انقباض عمودی
۳) انبساط افقی و عمودی
۴) انقباض افقی و انبساط عمودی

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

انقباض و انبساط

ویژگی‌ها	روش ترسیم	نمودار	تابع خواسته‌شده	نوع انتقال
نقطهٔ $A(x_۰,y_۰)$ روی تابع f به نقطهٔ $A'(x_۰,ky_۰)$ روی تابع kf تبدیل می‌شود. در انبساط و انقباض عمودی، دامنهٔ تابع ثابت است ولی برد تابع تغییر می‌کند. اگر دامنه و برد تابع f به ترتیب بازه‌های $[a,b]$ و $[c,d]$ باشند، آن‌گاه: $D_{kf}=D_f=[a,b]$ $R_{kf}=[kc,kd]$	عرض نقاط در k ضرب می‌شود		$y=kf(x),k>۱$ انبساط عمودی	انبساط و انقباض عمودی
			$y=kf(x),۰<k<۱$ انقباض عمودی	
نقطهٔ $A(x_۰,y_۰)$ روی تابع f به نقطه $A'(\frac{x_۰}{k},y_۰)$ روی $y=f(kx)$ تبدیل می‌شود. در انبساط و انقباض افقی، برد تابع ثابت است ولی دامنه تابع تغییر می‌کند. $D_{y=f(kx)}=[\frac{a}{k},\frac{b}{k}]$ $R_{y=f(kx)}=R_f$	طول نقاط بر k تقسیم می‌شود.		$y=f(kx),k>۱$ انقباض افقی	انبساط و انقباض افقی
			$y=f(kx),۰<k<۱$ انبساط افقی	

پاسخ تشریحی

اگر فرض کنیم $g(x)=\frac{۴}{۳}f(\frac{۲}{۳}x)$ باشد، آن‌گاه $f(x)=\frac{۳}{۴}g(\frac{۳}{۲}x)$ خواهد بود. در نتیجه برای تبدیل نمودار تابع g به نمودار تابع f باید xهای تابع g را به $\frac{۳}{۲}x$ تبدیل کنیم که معنای انقباض افقی است و همچنین کل ضابطهٔ تابع را در $\frac{۳}{۴}$ ضرب کنیم که به معنای انقباض عمودی است.

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۱۰ نمودار تابع $y=g(x)$ را ۴ واحد به چپ انتقال می‌دهیم و طول نقاط آن را نصف می‌کنیم تا نمودار تابع f به دست آید. اگر $g(x)=f(ax+b)$ باشد، مقدار $b-a$ کدام است؟

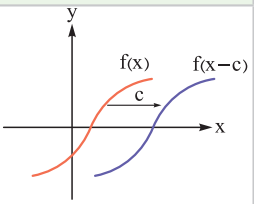
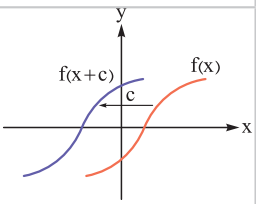
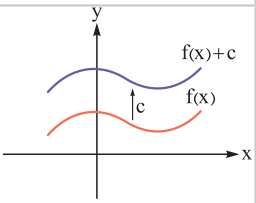
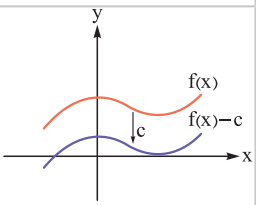
۱) $-\frac{۳}{۲}$ ۲) $-\frac{۵}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint ببین چه‌جوری f به g تبدیل می‌شه، تبدیلاتی رو که گفته عکس کن.

درس Box

انتقال

نوع انتقال	تابع	توضیح	نمودار	ویژگی
افقی	$y=f(x-c)$	نمودار تابع f را c واحد به راست انتقال می‌دهیم.		نقطهٔ $A(x_۰,y_۰)$ روی نمودار تابع f به نقطهٔ $A'(x_۰+c,y_۰)$ روی نمودار تابع $y=f(x-c)$ تبدیل می‌شود. برد تابع ثابت است ولی دامنه تغییر می‌کند.
	$y=f(x+c)$	نمودار تابع f را c واحد به چپ انتقال می‌دهیم.		نقطهٔ $A(x_۰,y_۰)$ روی نمودار تابع f به نقطهٔ $A'(x_۰-c,y_۰)$ روی نمودار تابع $y=f(x+c)$ تبدیل می‌شود. برد تابع ثابت است ولی دامنه تغییر می‌کند.
عمودی	$y=f(x)+c$	نمودار تابع f را c واحد به بالا انتقال می‌دهیم.		نقطهٔ $A(x_۰,y_۰)$ روی نمودار تابع f به نقطهٔ $A'(x_۰,y_۰+c)$ روی نمودار تابع $y=f(x)+c$ تبدیل می‌شود. دامنهٔ تابع ثابت است ولی برد تغییر می‌کند.
	$y=f(x)-c$	نمودار تابع f را c واحد به پایین انتقال می‌دهیم.		نقطهٔ $A(x_۰,y_۰)$ روی نمودار تابع f به نقطهٔ $A'(x_۰,y_۰-c)$ روی نمودار تابع $y=f(x)-c$ تبدیل می‌شود. دامنهٔ تابع ثابت است ولی برد تغییر می‌کند.

پاسخ تشریحی

گام اول: با توجه به تساوی $g(x)=f(ax+b)$، باید نمودار تابع f را به نمودار تابع g تبدیل کنیم.

گام دوم: برای این‌کار تبدیلات گفته‌شده را در مسیر عکس انجام می‌دهیم:

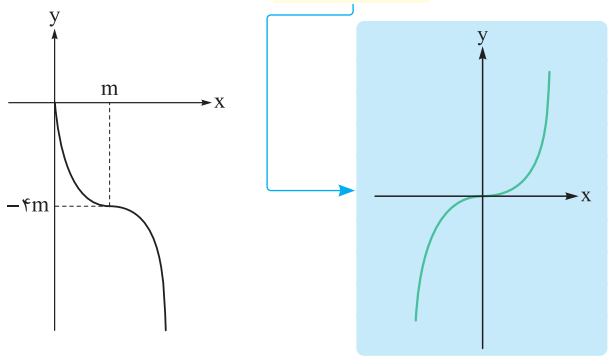
$$y=g(x) \xrightarrow[x\to x+۴]{\text{۴ واحد به چپ}} y=g(x+۴) \xrightarrow[x\to ۲x]{\text{طول نقاط تقسیم بر ۲}} f(x)=g(۲x+۴)$$

$$y=f(x) \xrightarrow[x\to \frac{x}{۲}]{\text{ضرب طول نقاط در ۲}} y=f(\frac{x}{۲}) \xrightarrow[x\to x-۴]{\text{۴ واحد به راست}} g(x)=f(\frac{x-۴}{۲})=f(\frac{x}{۲}-۲)$$

گام سوم: این یعنی $a=\frac{۱}{۲}$، $b=-۲$ و در نتیجه $b-a=-\frac{۵}{۲}$ است.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۱۱ نمودار تابع رسم‌شده در شکل مقابل، صرفاً با انتقال و قرینه‌یابی، از روی نمودار تابع $y = x^3$ به دست آمده است. مقدار این تابع به ازای $x = 2m$ کدام است؟



۱) -8

۲) -16

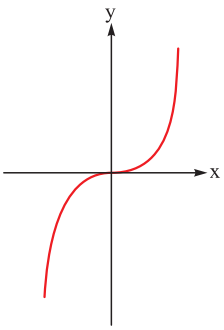
۳) -32

۴) -64

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint انتقال به راست و انتقال به پایین داری، به مبدأ مختصات هم فکر کن تا m به دست بیاد.

پاسخ تشریحی **گام اول:** نمودار تابع $y = x^3$ به صورت زیر است:



پس اگر قرار باشد که نمودار صورت سؤال، صرفاً با انتقال و قرینه‌یابی از روی نمودار بالا به دست آمده باشد، باید به گونهٔ زیر عمل کنیم:

$$y = x^3 \xrightarrow[y \to -y]{\text{قرینه نسبت به محور } x\text{ها}} y = -x^3 \xrightarrow[4m \text{ واحد به پایین}]{m \text{ واحد به راست}} y = -(x-m)^3 - 4m$$

گام دوم: پس نمودار صورت سؤال مربوط به تابع $y = -(x-m)^3 - 4m$ است که از مبدأ مختصات می‌گذرد، پس مختصات نقطه $(0,0)$ را در آن قرار می‌دهیم تا مقدار m به دست آید:

$$0 = -(-m)^3 - 4m \Rightarrow m^3 - 4m = m(m^2-4) = m(m+2)(m-2) = 0 \Rightarrow m = 0, \pm 2$$

حواسمان هست که m مثبت است، پس مقدار $m = 2$ قابل قبول است.

گام سوم: ضابطهٔ تابع مورد نظر $y = -(x-2)^3 - 8$ است و مقدار آن به ازای $x = 2m = 4$ برابر است با:

$$y = -(4-2)^3 - 8 = -8 - 8 = -16$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۱۲ نمودار تابع $y=\frac{۱}{x+۱}$ را ۲ واحد به چپ انتقال می‌دهیم و سپس نمودار حاصل را نسبت به خط $y=x$ قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع f به دست آید. نمودار تابع $y=\frac{۱}{x+۱}$ را این‌بار ابتدا نسبت به خط $y=x$ قرینه می‌کنیم و سپس ۲ واحد به چپ انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع g به دست آید. در این صورت مقدار $(fog)(-۳)$ کدام است؟

تابع وارون

۱) $-\frac{۸}{۳}$
۲) $-\frac{۱۰}{۳}$
۳) $-\frac{۵}{۲}$
۴) $-\frac{۷}{۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ تشریحی

گام اول: روی نمودار تابع $y=\frac{۱}{x+۱}$ دو تبدیل متفاوت بیان‌شده در صورت سؤال را اعمال می‌کنیم:

$$y=\frac{۱}{x+۱} \xrightarrow[x\to x+۲]{\text{۲ واحد به چپ}} y=\frac{۱}{x+۳} \xrightarrow{\text{وارون هموگرافیک}} f(x)=\frac{-۳x+۱}{x}$$

$$y=\frac{۱}{x+۱} \xrightarrow{\text{وارون هموگرافیک}} y=\frac{-x+۱}{x} \xrightarrow[x\to x+۲]{\text{۲ واحد به چپ}} g(x)=\frac{-x-۱}{x+۲}$$

گام دوم: $(fog)(-۳)$ را حساب می‌کنیم:

$$(fog)(-۳)=f(g(-۳))=f(\frac{۳-۱}{-۳+۲})=f(-۲)=\frac{-۳(-۲)+۱}{-۲}=-\frac{۷}{۲}$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۱۳ نمودار تابع $g(x)=۳-f(\frac{۲+x}{۳})$ را نسبت به مبدأ مختصات قرینه می‌کنیم و نمودار وارون تابع حاصل را رسم می‌کنیم. ضابطهٔ تابع مربوط به نمودار جدید کدام است؟ (تابع f با دامنه و برد $\mathbb{R}$، وارون‌پذیر است.)

$y=-g(-x)$

۱) $y=۲+۳f^{-۱}(x-۳)$

۲) $y=۳-۲f^{-۱}(x+۳)$

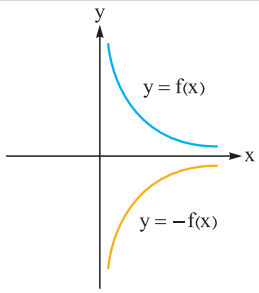
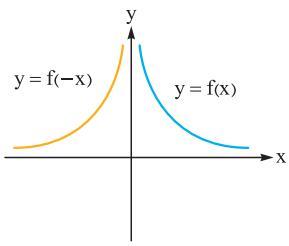
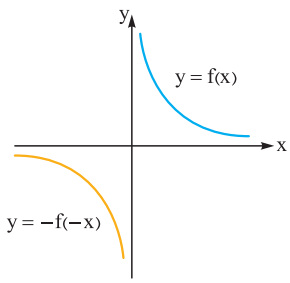
۳) $y=۲-۳f^{-۱}(x+۳)$

۴) $y=۳+۲f^{-۱}(x-۳)$

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

انعکاس (قرینه‌یابی)

ویژگی‌ها	روش ترسیم	نمودار	تابع خواسته‌شده
نقطهٔ $A(x_۰,y_۰)$ روی تابع f به نقطهٔ $A'(x_۰,-y_۰)$ روی تابع $y=-f(x)$ تبدیل می‌شود. دامنه ثابت است ولی برد تغییر می‌کند.	کافی است قرینهٔ تابع $y=f(x)$ را نسبت به محور xها رسم کنیم.		$y=-f(x)$
نقطهٔ $A(x_۰,y_۰)$ روی تابع f به نقطهٔ $A'(-x_۰,y_۰)$ روی تابع $y=f(-x)$ تبدیل می‌شود. برد ثابت است ولی دامنه تغییر می‌کند.	کافی است قرینهٔ تابع $y=f(x)$ را نسبت به محور yها رسم کنیم.		$y=f(-x)$
نقطهٔ $A(x_۰,y_۰)$ روی تابع f به نقطهٔ $A'(-x_۰,-y_۰)$ روی تابع $y=-f(-x)$ تبدیل می‌شود. دامنه و برد هر دو تغییر می‌کنند.	کافی است قرینهٔ تابع $y=f(x)$ را نسبت به مبدأ مختصات رسم کنیم.		$y=-f(-x)$

پاسخ تشریحی

گام اول: کافی است تبدیل لازم را روی نمودار تابع g اعمال کنیم:

$$g(x)=۳-f(\frac{۲+x}{۳}) \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به مبدأ}} y=-g(-x)=-۳+f(\frac{۲-x}{۳})$$

گام دوم: حال باید ضابطهٔ وارون تابع $y=-۳+f(\frac{۲-x}{۳})$ را به دست آوریم. کافی است x را برحسب y به دست آوریم و سپس جای آن‌ها را عوض کنیم:

$$y+۳=f(\frac{۲-x}{۳}) \Rightarrow f^{-۱}(y+۳)=\frac{۲-x}{۳} \Rightarrow x=۲-۳f^{-۱}(y+۳) \xrightarrow{\text{تعویض جای x و y}} y=۲-۳f^{-۱}(x+۳)$$

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۱۴ اگر نقطهٔ $A(-۳,۴)$ واقع بر نمودار تابع $y=۲+۴f^{-۱}(\frac{x}{۲}-۱)$ با نقطهٔ A' واقع بر نمودار تابع $y=۳-f(۵+\frac{x}{۳})$ متناظر باشد، مجموع طول و عرض نقطهٔ A' کدام است؟

۱) -۸ ۲) $\frac{۴۱}{۲}$ ۳) $\frac{۳۱}{۲}$ ۴) ۱۱

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint مختصات دو نقطه رو تو ضابطه‌هاشون جای‌گذاری کن، جفتشون باید به تساوی یکسان بهت بدن.

پاسخ تشریحی **گام اول:** مختصات نقطهٔ A را در ضابطهٔ مربوطه‌اش جای‌گذاری می‌کنیم:

$$A(-۳,۴): ۴=۲+۴f^{-۱}(\frac{-۳}{۲}-۱) \Rightarrow f^{-۱}(-\frac{۵}{۲})=\frac{۱}{۲} \xrightarrow{\text{ویژگی‌های وارون}} f(\frac{۱}{۲})=-\frac{۵}{۲}$$

گام دوم: مختصات نقطهٔ A' را به صورت $A'(\alpha,\beta)$ در نظر می‌گیریم و آن را در ضابطهٔ تابع دوم جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\beta=۳-f(۵+\frac{\alpha}{۳}) \Rightarrow f(۵+\frac{\alpha}{۳})=۳-\beta$$

گام سوم: برای تناظر نقاط A و A'، دو تساوی به‌دست‌آمده باید یکسان باشند:

$$\Rightarrow \begin{cases} ۵+\frac{\alpha}{۳}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{\alpha}{۳}=-\frac{۹}{۲} \Rightarrow \alpha=-\frac{۲۷}{۲} \\ ۳-\beta=-\frac{۵}{۲} \Rightarrow \beta=\frac{۱۱}{۲} \end{cases}$$

مجموع طول و عرض نقطهٔ A' برابر $\alpha+\beta=\frac{-۱۶}{۲}=-۸$ است.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۱۵ اگر چندجمله‌ای $p(x)=x^۳+mx^۲+x-۲$ بر $x+۲$ بخش‌پذیر باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $p(x)$ بر عبارت $x-۱$ کدام است؟

۱) ۳

۲) ۴

۳) ۵

۴) ۶

مشاوره این سؤال عیناً سؤال نهایی خرداد ۱۴۰۳ است که برای شما به صورت تستی طرح کرده‌ایم. سؤال ساده‌ای که در قالب کنکور سراسری هم می‌گنجد. این یعنی رویکردهای امتحانات نهایی تغییر کرده است و رفته‌رفته تفاوت‌های امتحانات نهایی و کنکور سراسری در تیپ و نگارش سؤال کم و کم‌تر می‌شود.

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint $p(-۲)$ رو صفر بذار و بعدش $p(۱)$ رو حساب کن.

درس Box

رابطهٔ تقسیم چندجمله‌ای $p(x)$ بر چندجمله‌ای درجه‌اول $x-a$ را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$p(x)=(x-a)\underbrace{q(x)}_{\text{خارج قسمت}}+\underbrace{r}_{\text{باقی‌مانده}}$$

که r برابر $p(a)$ است.

اگر $p(a)$ برابر صفر باشد، گوییم $p(x)$ بر $x-a$ بخش‌پذیر است.

پاسخ تشریحی

گام اول: $p(x)$ بر $x+۲$ بخش‌پذیر است، پس $p(-۲)$ را مساوی صفر قرار می‌دهیم تا مقدار m به دست آید:

$$p(-۲)=-۸+۴m-۲-۲=۴m-۱۲=۰ \Rightarrow m=۳$$

گام دوم: و باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $p(x)=x^۳+۳x^۲+x-۲$ بر $x-۱$ برابر $p(۱)$ است:

$$r=p(۱)=۱+۳+۱-۲=۳$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۱۶ اگر چندجمله‌ای $p(x)=x^۴+ax^۳+۵x^۲+bx+۴$ بر $x^۲+۲x+۴$ بخش‌پذیر باشد، حاصل $a-b$ کدام است؟

۱) ۴

۲) ۲

۳) -۲

۴) صفر

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ تشریحی

گام اول: چندجمله‌ای $p(x)=x^۴+ax^۳+۵x^۲+bx+۴$ بر $x^۲+۲x+۴$ بخش‌پذیر است، پس مقدار چندجمله‌ای $p(x)$ در ریشهٔ $x^۲+۲x+۴$ برابر صفر است. اما عبارت $x^۲+۲x+۴$ که ریشهٔ حقیقی ندارد. حال با دقت در این عبارت می‌بینیم که عبارت چاقِ $x-۲$ است، پس طرفین رابطهٔ تقسیم را در $x-۲$ ضرب می‌کنیم:

$$p(x)=(x^۲+۲x+۴)q(x) \xrightarrow{\times(x-۲)} (x-۲)p(x)=(x^۳-۸)q(x)$$

گام دوم: حالا می‌توانیم ریشهٔ $x^۳-۸=۰$ را در $p(x)$ جای‌گذاری کنیم. برای این کار هر $x^۳$ای که می‌بینیم، به جای آن ۸ قرار می‌دهیم:

$$p(x)=(x^۴+ax^۳+۵x^۲+bx+۴) \xrightarrow{x^۳=۸}$$

باقی‌مانده: $r=(x^۳)x+a(x^۳)+۵x^۲+bx+۴=۸x+۸a+۵x^۲+bx+۴$

$$=۵x^۲+(۸+b)x+۸a+۴$$

گام سوم: ریشهٔ غیرحقیقی معادلهٔ $x^۲+۲x+۴=۰$ جایی است که $x^۲$ مساوی $-۲x-۴$ است، پس در عبارت $۵x^۲+(۸+b)x+۸a+۴$ به جای $x^۲$ عبارت $-۲x-۴$ را قرار می‌دهیم:

$$\Rightarrow r=۵(-۲x-۴)+(۸+b)x+۸a+۴=(b-۲)x+۸a-۱۶$$

گام چهارم: باقی‌مانده باید همواره برابر صفر باشد، پس $b-۲$ و $۸a-۱۶$ هر دو باید صفر باشند:

$$\begin{cases} b-۲=۰ \Rightarrow b=۲ \\ ۸a-۱۶=۰ \Rightarrow a=۲ \end{cases} \Rightarrow a-b=۰$$

یه‌جور دیگه

از همان ابتدا می‌توانستیم به جای $x^۲$ها عبارت $-۲x-۴$ قرار دهیم، به صورت زیر:

$$p(x)=(x^۲)^۲+ax(x^۲)+۵(x^۲)+bx+۴$$

$$\Rightarrow r=(-۲x-۴)^۲+ax(-۲x-۴)+۵(-۲x-۴)+bx+۴$$

و دوباره اگر $x^۲$ دیدیم، به جای آن $-۲x-۴$ قرار می‌دهیم.

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۱۷ توابع $f(x)=\frac{۳-۲x}{ax+۱}$ و $g(x)=(b^۲-۱)x^۲+bx-۱$ هر دو روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی هستند. کدام تابع روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی است؟

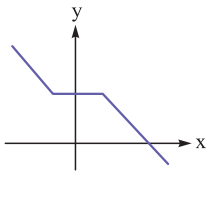
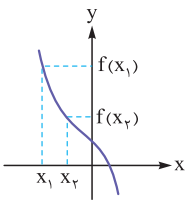
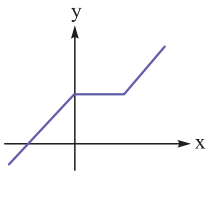
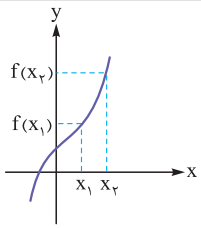
۱) $f-۲g$ ۲) $g-۲f$

۳) $f-g$ ۴) $f+g$

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint جفتشون باید خطی باشن.

درس Box مجموعهٔ A $(A\subseteq D_f)$ را در نظر بگیرید. به ازای هر $x_۱$ و $x_۲$ متعلق به مجموعهٔ A ، تابع f:

نزولی است.	اکیداً نزولی است.	صعودی است.	اکیداً صعودی است.
$x_۱<x_۲ \Rightarrow f(x_۱)\geq f(x_۲)$	$x_۱<x_۲ \Rightarrow f(x_۱)>f(x_۲)$	$x_۱<x_۲ \Rightarrow f(x_۱)\leq f(x_۲)$	$x_۱<x_۲ \Rightarrow f(x_۱)<f(x_۲)$
			
در بازه‌ای که تابع f نزولی است، با حرکت روی نمودار از چپ به راست، رو به بالا نخواهیم رفت.	در بازه‌ای که تابع f اکیداً نزولی است، با حرکت روی نمودار از چپ به راست، همواره رو به پایین خواهیم رفت.	در بازه‌ای که تابع f صعودی است، با حرکت روی نمودار از چپ به راست، رو به پایین نخواهیم رفت.	در بازه‌ای که تابع f اکیداً صعودی است، با حرکت روی نمودار از چپ به راست، همواره رو به بالا خواهیم رفت.

دقت کنید اگر بازهٔ مجموعهٔ A برابر دامنهٔ تابع باشد، گوییم تابع f روی دامنهٔ خود صعودی (اکیداً صعودی) یا نزولی (اکیداً نزولی) است. هم‌چنین اگر تابعی روی دامنهٔ خود صعودی (نزولی) باشد، آن‌گاه آن را یکنوا می‌نامیم.

الف) هر تابع اکیداً صعودی خود یک تابع صعودی است و به طریق مشابه هر تابع اکیداً نزولی خود یک تابع نزولی است.

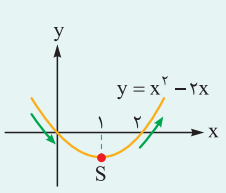
ب) تابع ثابت (روی یک بازه) را تابعی هم صعودی و هم نزولی در نظر می‌گیریم.

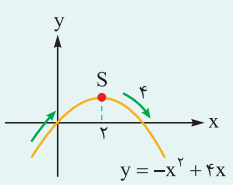
پ) اگر تابع f روی دامنهٔ خود صعودی یا نزولی نباشد، f را تابعی غیریکنوا می‌نامیم.

بعضی از توابع در دامنهٔ خود غیریکنوا هستند ولی با محدودکردن دامنه می‌توان تابعی یکنوا به دست آورد.

نمودار دو تابع مقابل را در نظر بگیرید. تابع شکل (۱) در دامنهٔ خود غیریکنوا ولی در بازهٔ $(-\infty,۱]$ نزولی و در بازهٔ $[۱,+\infty)$ صعودی است. هم‌چنین تابع شکل (۲) نیز در دامنهٔ خود غیریکنواست، ولی در بازهٔ $(-\infty,۲]$ صعودی و در بازهٔ $[۲,+\infty)$ نزولی است. بنابراین نتیجه می‌گیریم که:

(۱) (۲)





تابع درجه‌دوم $y=ax^۲+bx+c$ روی دامنهٔ خود غیریکنواست، ولی روی بازهٔ قبل از رأس و خود آن، یا بعد از رأس و خود آن یکنواست؛ به عبارت دیگر این تابع روی هر یک از بازه‌های $[\frac{-b}{۲a},+\infty)$ یا $(-\infty,\frac{-b}{۲a}]$ یکنوا است.

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

نکته تابع $y=\frac{Ax+B}{Cx+D}$ فقط در صورتی روی دامنه‌اش اکیداً یکنواست که $C=0$ باشد.

پاسخ‌تشریحی **گام اول:** طبق نکتهٔ درس‌باکس، a باید برابر صفر باشد تا تابع ظاهراً هموگرافیک $f(x)=\frac{3-2x}{ax+1}$ اکیداً یکنوا شود، که از قضا اکیداً نزولی است.

$$\xrightarrow{a=0} f(x)=-2x+3$$

گام دوم: طبق درس‌باکس، برای این‌که تابع ظاهراً درجه‌دوم g روی $\mathbb{R}$ اکیداً یکنوا باشد، لازم است که ضریب x^2 صفر شود:

$$\Rightarrow b^2-1=0 \Rightarrow b=\pm 1$$

می‌خواهیم که g نیز اکیداً نزولی شود، پس مقدار $b=-1$ را می‌پذیریم:

$$\Rightarrow g(x)=-x-1$$

گام سوم: حالا تابع داده‌شده در هر گزینه را می‌سازیم تا ببینیم کدام‌یک اکیداً صعودی است:

گزینهٔ (۱): $(f-2g)(x)=5$

گزینهٔ (۲): $(g-2f)(x)=3x-7$

گزینهٔ (۳): $(f-g)(x)=-x+4$

گزینهٔ (۴): $(f+g)(x)=-3x+2$

که فقط تابع گزینهٔ (۲) اکیداً صعودی است.

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۱۸ اگر $f(x)=۳x+|x-۴|$ و $f(m^۲-۲m+۱)<f(۴m-m^۲-۳)$ باشد، حدود m کدام است؟

۱) $(۱,۲)$
۲) $(-۲,-۱)$
۳) $(-۱,۲)$
۴) $(-۲,۱)$

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint تابع f اکیداً صعودیه.

پاسخ تشریحی **گام اول:** تابع $y=ax+|bx|$ با شرط $|a|>|b|$ اکیداً یکنواست. اگر $a>۰$ باشد، اکیداً صعودی و اگر $a<۰$ باشد، اکیداً نزولی است.

گام دوم: پس در این سؤال تابع f اکیداً صعودی است و به کمک درس‌باکس سؤال قبلی داریم:

$$f(m^۲-۲m+۱)<f(۴m-m^۲-۳) \xrightarrow{f\text{ اکیداً صعودی}} m^۲-۲m+۱<۴m-m^۲-۳ \Rightarrow ۲m^۲-۶m+۴<۰$$
$$\xrightarrow{\div ۲} m^۲-۳m+۲=(m-۱)(m-۲)<۰ \xrightarrow{\text{بین ریشه‌ها}} ۱<m<۲$$

یه‌جور دیگه عددگذاری کنیم. $m=۰$ را امتحان کنیم، زیرا گزینه‌های (۳) و (۴) شامل صفر هستند اما (۱) و (۲) نیستند:

$\xrightarrow{m=۰} f(۱)<f(-۳) \Rightarrow$ طبق ضابطه غلط است.

پس یکی از گزینه‌های (۱) یا (۲) پاسخ صحیح سؤال است. $m=-\frac{۱}{۲}$ را امتحان می‌کنیم:

$f(\frac{۹}{۴})<f(-\frac{۲۱}{۴}) \Rightarrow$ طبق ضابطه غلط است.

پس گزینهٔ (۱) پاسخ صحیح است.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۱۹ در دستگاه $\begin{bmatrix} a & a+1 \\ a+1 & a+2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$، حاصل $x-y$ کدام است؟

۱) $2a+4$
۲) -6
۳) $-2(4a+3)$
۴) $-a-4$

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

حل دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی به کمک ماتریس وارون:

در دستگاه $\begin{cases} ax+by=e_1 \\ cx+dy=e_2 \end{cases}$، $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب، $B=\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$ ماتریس مقادیر معلوم و $X=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ماتریس مجهولات دستگاه می‌باشد. در این صورت دستگاه به شکل معادلهٔ ماتریسی $AX=B$ نوشته می‌شود و در صورتی که ماتریس A وارون‌پذیر باشد (یا $|A|\neq 0$)، با ضرب A^{-1} از چپ در معادلهٔ فوق می‌توان مجهولات را به صورت زیر به دست آورد:

$$AX=B \Rightarrow A^{-1}(AX)=A^{-1}B \Rightarrow (A^{-1}A)X=A^{-1}B \Rightarrow IX=A^{-1}B \Rightarrow X=A^{-1}B$$

یعنی برای حل دستگاه، باید معکوس ماتریس ضرایب را از سمت چپ در ماتریس مقادیر معلوم ضرب کرد.

وارون (معکوس) ماتریس: برای هر ماتریس مربعی مانند A، وارون ماتریس A (در صورت وجود) ماتریسی چون B می‌باشد به طوری که $AB=BA=I$. در این صورت B را وارون A می‌نامیم و با A^{-1} نشان می‌دهیم.

وارون ماتریس مربعی $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ در صورت وجود به صورت $A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ می‌باشد.

پاسخ تشریحی

گام اول (محاسبهٔ وارون ماتریس ضرایب): ابتدا وارون ماتریس ضرایب را به دست می‌آوریم تا در مرحلهٔ بعد برای حل دستگاه معادلاتی از آن استفاده کنیم.

$$\begin{bmatrix} a & a+1 \\ a+1 & a+2 \end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{a(a+2)-(a+1)^2}\begin{bmatrix} a+2 & -a-1 \\ -a-1 & a \end{bmatrix}$$

گام دوم (حل دستگاه): با توجه به درس‌باکس، داریم:

$$\begin{bmatrix} a & a+1 \\ a+1 & a+2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & a+1 \\ a+1 & a+2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\frac{1}{a(a+2)-(a+1)^2}\begin{bmatrix} a+2 & -a-1 \\ -a-1 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\frac{1}{a^2+2a-a^2-2a-1}\begin{bmatrix} a+2+3a+3 \\ -a-1-3a \end{bmatrix}=-\begin{bmatrix} 4a+5 \\ -4a-1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -4a-5 \\ 4a+1 \end{bmatrix} \Rightarrow x=-4a-5,\ y=4a+1$$

گام سوم (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال): صورت سؤال مقدار $x+y$ را می‌خواهد. طبق آن‌چه در گام دوم به دست آوردیم، داریم:

$$x=-4a-5,\ y=4a+1 \Rightarrow x-y=-8a-6=-2(4a+3)$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۲۰ اگر $A^۳ = ۹I$ باشد، حاصل $(A-۲I)^{-۱} - ۱۷(A+۲I)^{-۱}$ کدام است؟

۱) I ۲) A ۳) $۴(A+I)$ ۴) $۴A$

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

۱) **توان ماتریس‌ها:** اگر A یک ماتریس مربعی باشد، داریم:

$$A^۱ = A, A^۲ = A.A, A^۳ = A.A^۲ = A^۲.A, \ldots, A^n = A.A^{n-۱} = A^{n-۱}.A$$

توجه: اگر A ماتریس مربعی و m و n اعداد طبیعی و k عددی حقیقی باشد، آن‌گاه:

۱) $I^n = I$ ۲) $(kA)^n = k^n A^n$ ۳) $A^m \times A^n = A^{m+n}$ ۴) $(A^m)^n = A^{mn}$

۲) ماتریس I با هر ماتریس مربعی هم‌مرتبه با آن مانند A تعویض‌پذیر است، یعنی $AI = IA = A$، پس اتحادهای جبری برای ماتریس‌های A و I برقرارند؛ مثلاً $(A-I)(A+I) = A^۲ - I^۲ = A^۲ - I$.

۳) اگر دو ماتریس مربعی A و B به گونه‌ای باشند که $AB = I$، آن‌گاه A و B وارون هم هستند و می‌نویسیم $A^{-۱} = B$ و $A = B^{-۱}$.

پاسخ‌تشریحی

گام اول (ایجاد $(A-۲I)$ و $(A+۲I)$): صورت سؤال اطلاعاتی دربارهٔ $A^۳$ به ما داده است؛ پس ما برای ساختن عبارت‌های $A-۲I$ و $A+۲I$ از اتحاد چاق و لاغر استفاده می‌کنیم. طبق فرض $A^۳ = ۹I$ پس $A^۳ - ۸I = I$ و حالا این عبارت را با استفاده از اتحاد چاق و لاغر تجزیه می‌کنیم:

$$\begin{cases} A^۳ = ۹I \xrightarrow{-۸I} A^۳ - ۸I = I \Rightarrow (A-۲I)(A^۲ + ۲A + ۴I) = I \Rightarrow (A-۲I)^{-۱} = A^۲ + ۲A + ۴I \\ A^۳ = ۹I \xrightarrow{+۸I} A^۳ + ۸I = ۱۷I \Rightarrow (A+۲I)(A^۲ - ۲A + ۴I) = ۱۷I \Rightarrow (A+۲I)^{-۱} = \frac{۱}{۱۷}(A^۲ - ۲A + ۴I) \\ \Rightarrow ۱۷(A+۲I)^{-۱} = A^۲ - ۲A + ۴I \end{cases}$$

گام دوم (محاسبهٔ خواستهٔ صورت سؤال): برای ایجاد عبارت خواسته‌شده باید طرفین دو عبارت به‌دست‌آمده در گام اول را از یکدیگر کم کنیم:

$$(A-۲I)^{-۱} - ۱۷(A+۲I)^{-۱} = (A^۲ + ۲A + ۴I) - (A^۲ - ۲A + ۴I) = ۴A$$

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۲۱ فرض کنید $A^{-1}=\begin{bmatrix}۱ & a & ۳\\ ۰ & ۲a & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۴ & ۲\\ ۱ & ۳\\ ۲ & ۰\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۲ & -۱\\ ۳ & -۲\end{bmatrix}$. اگر مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس $۲B^{۶}A$ برابر با -۹ باشد، کوچک‌ترین درایهٔ ماتریس A کدام است؟

۱) -۳ ۲) -۶ ۳) -۵ ۴) -۸

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ تشریحی

گام اول (محاسبهٔ ماتریس A): ماتریس A^{-1} را به دست آورده و آن را وارون می‌کنیم تا ماتریس A را به دست آوریم:

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}۱ & a & ۳\\ ۰ & ۲a & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۴ & ۲\\ ۱ & ۳\\ ۲ & ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۴+a+۶ & ۲+۳a+۰\\ ۰+۲a+۲ & ۰+۶a+۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a+۲ & ۳a+۲\\ ۲a+۲ & ۶a\end{bmatrix}$$

می‌دانیم $(A^{-1})^{-1}=A$؛ بنابراین داریم:

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}a+۲ & ۳a+۲\\ ۲a+۲ & ۶a\end{bmatrix}\Rightarrow(A^{-1})^{-1}=\begin{bmatrix}a+۲ & ۳a+۲\\ ۲a+۲ & ۶a\end{bmatrix}^{-1}\Rightarrow A=\underbrace{\frac{۱}{۶a(a+۲)-(۳a+۲)(۲a+۲)}}_{۲a-۴}\begin{bmatrix}۶a & -(۳a+۲)\\ -(۲a+۲) & a+۲\end{bmatrix}$$

گام دوم (محاسبهٔ ماتریس $B^{۶}$): ابتدا ماتریس $B^{۲}$ را به دست می‌آوریم:

$$B=\begin{bmatrix}۲ & -۱\\ ۳ & -۲\end{bmatrix}\Rightarrow B^{۲}=\begin{bmatrix}۲ & -۱\\ ۳ & -۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲ & -۱\\ ۳ & -۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}\Rightarrow B^{۲}=I\Rightarrow(B^{۲})^{۳}=I^{۳}\Rightarrow B^{۶}=I$$

گام سوم (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال): طبق گام دوم $۲B^{۶}A=۲IA=۲A$؛ پس:

$$۲B^{۶}A=۲A=۲\times\frac{۱}{۲a-۴}\begin{bmatrix}۶a & -(۳a+۲)\\ -(۲a+۲) & a+۲\end{bmatrix}=\frac{۱}{a-۲}\begin{bmatrix}۶a & -(۳a+۲)\\ -(۲a+۲) & a+۲\end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های قطر اصلی این ماتریس -۹ است؛ بنابراین داریم:

$$\frac{۶a}{a-۲}+\frac{a+۲}{a-۲}=-۹\Rightarrow\frac{۷a+۲}{a-۲}=-۹\Rightarrow ۷a+۲=۱۸-۹a\Rightarrow ۱۶a=۱۶\Rightarrow a=۱\Rightarrow A=-\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix}۶ & -۵\\ -۴ & ۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۳ & ۲/۵\\ ۲ & -۱/۵\end{bmatrix}$$

بنابراین کوچک‌ترین درایهٔ ماتریس A برابر -۳ است.

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۲۲ اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۳\\ ۲ & ۷\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}۲ & ۳\\ ۱ & ۲\end{bmatrix}$ و I ماتریس همانی باشد به طوری که $ACB=I$، آن‌گاه ماتریس مجموع درایه‌های سطر دوم C کدام است؟

۱) ۱۹ ۲) −۱۹ ۳) −۳ ۴) ۳

مشاوره محاسبهٔ ماتریس مجهول، به کمک ضرب تساوی ماتریس در وارون ماتریس‌ها، بارها در کنکور مورد سؤال بوده است.

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ تشریحی

گام اول (محاسبهٔ ماتریس $A^{-۱}$ و $B^{-۱}$): ماتریس‌های $A^{-۱}$ و $B^{-۱}$ را به دست می‌آوریم:

$$A^{-۱}=\begin{bmatrix}۱ & ۳\\ ۲ & ۷\end{bmatrix}^{-۱}=\frac{۱}{۷-۶}\begin{bmatrix}۷ & -۳\\ -۲ & ۱\end{bmatrix}$$

$$B^{-۱}=\begin{bmatrix}۲ & ۳\\ ۱ & ۲\end{bmatrix}^{-۱}=\frac{۱}{۴-۳}\begin{bmatrix}۲ & -۳\\ -۱ & ۲\end{bmatrix}$$

گام دوم (محاسبهٔ ماتریس C):

دو طرف رابطهٔ $ACB=I$ را از سمت چپ در $A^{-۱}$ و از سمت راست در $B^{-۱}$ ضرب می‌کنیم:

$$A^{-۱}(ACB)B^{-۱}=A^{-۱}\underbrace{IB^{-۱}}_{B^{-۱}} \Rightarrow \underbrace{(A^{-۱}A)}_{I}C\underbrace{(BB^{-۱})}_{I}=A^{-۱}B^{-۱} \Rightarrow C=A^{-۱}B^{-۱}$$

اکنون داریم:

$$A^{-۱}B^{-۱}=\begin{bmatrix}۷ & -۳\\ -۲ & ۱\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۲ & -۳\\ -۱ & ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱۷ & -۲۷\\ -۵ & ۸\end{bmatrix} \Rightarrow \text{خواستهٔ سؤال}=-۵+۸=۳$$

نکته اگر A و B دو ماتریس مربعی وارون‌پذیر باشند، آن‌گاه $(BA)^{-۱}=A^{-۱}B^{-۱}$.

یه جور دیگه به کمک نکتهٔ بالا، وقتی به $C=A^{-۱}B^{-۱}$ رسیدیم، می‌توانیم بگوییم:

$$C=A^{-۱}B^{-۱}=(BA)^{-۱}$$

$$BA=\begin{bmatrix}۲ & ۳\\ ۱ & ۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۳\\ ۲ & ۷\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۸ & ۲۷\\ ۵ & ۱۷\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (BA)^{-۱}=\frac{۱}{\underbrace{۸\times۱۷-۲۷\times۵}_{۱}}\begin{bmatrix}۱۷ & -۲۷\\ -۵ & ۸\end{bmatrix} \Rightarrow C=\begin{bmatrix}۱۷ & -۲۷\\ -۵ & ۸\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{خواستهٔ سؤال}=-۵+۸=۳$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۲۳ در مثلثی به اضلاع $AB = ۶$ ، $AC = ۸$ و $BC = ۱۰$ ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. اگر M، N و P به ترتیب وسط اضلاع BC، AC و AB باشند، آن‌گاه مساحت چهارضلعی MNPH کدام است؟

۱) ۷ / ۶۸ ۲) ۸ / ۷۸

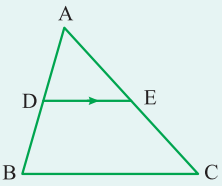
۳) ۶ / ۲۵ ۴) ۶ / ۷۵

مشاوره این سؤال، مشابه یکی از سؤال‌های کنکور ۱۴۰۰ طراحی شده است.

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

۱) قضیهٔ تالس در مثلث: هرگاه خطی موازی با یک ضلع مثلث، دو ضلع دیگر مثلث را قطع کند، روی آن‌ها پاره‌خط‌های متناسب ایجاد می‌کند.



$$DE \parallel BC \Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

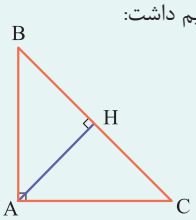
تعمیم قضیهٔ تالس:

$$DE \parallel BC \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

۲) عکس قضیهٔ تالس: هرگاه خطی دو ضلع مثلثی را قطع کند و روی آن‌ها پاره‌خط‌های متناسب ایجاد کند، آن‌گاه آن خط با ضلع سوم مثلث موازی است.

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow DE \parallel BC$$

۳) روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه: در هر مثلث قائم‌الزاویه با رسم ارتفاع وارد بر وتر روابط زیر را خواهیم داشت:

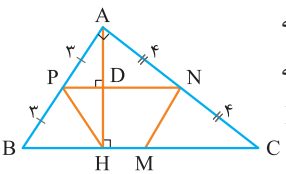


۱) $AB^۲ = BH \times BC$

۲) $AC^۲ = CH \times BC$

پاسخ تشریحی ✓

گام اول (رسم شکل مسئله): اضلاع مثلث، اعداد فیثاغورسی هستند و چون طبق فرض مسئله $AN = NC$ و $AP = PB$، با توجه به عکس قضیهٔ تالس $PN \parallel BC$ است و شکل مسئله به صورت مقابل رسم می‌شود و طبق تالس جزءبه‌کل داریم: $\frac{PN}{BC} = \frac{۱}{۲}$ و می‌دانیم $BC = ۱۰$ پس $PN = ۵$.



گام دوم (محاسبهٔ MH): می‌دانیم BM نصف BC و برابر با ۵ است.

برای محاسبهٔ MH ابتدا باید طول BH را محاسبه کنیم. ABC یک مثلث قائم‌الزاویه و AH ارتفاع وارد بر وتر آن است؛ پس بنا به رابطهٔ طولی در مثلث قائم‌الزاویه ABC داریم:

$$AB^۲ = BH \times BC \Rightarrow ۶^۲ = BH \times ۱۰ \Rightarrow BH = ۳/۶$$

و طول MH برابر است با:

$$MH = BM - BH = ۵ - ۳/۶ = ۱/۴$$

گام سوم (محاسبهٔ DH): طبق قضیهٔ تالس در مثلث ABH، $\frac{AP}{AB} = \frac{AD}{AH} = \frac{۱}{۲}$ پس $AD = DH = \frac{AH}{۲}$، حالا مساحت مثلث ABC را یک بار با اضلاع قائمه و یک بار با ارتفاع AH می‌نویسیم تا طول AH و بعد DH را به دست بیاوریم.

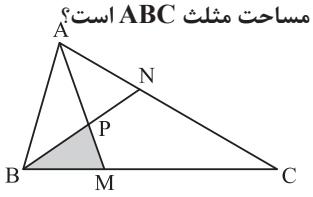
$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲} AB \times AC = \frac{۱}{۲} AH \times BC \Rightarrow AH = \frac{۶ \times ۸}{۱۰} = ۴/۸ \Rightarrow DH = \frac{۴/۸}{۲} = ۲/۴$$

گام چهارم (محاسبهٔ مساحت چهارضلعی): چهارضلعی MNPH یک ذوزنقه است؛ پس:

$$S_{MNPH} = \frac{۱}{۲} DH \times (MH + PN) = \frac{۱}{۲} \times ۲/۴ \times (۱/۴ + ۵) = ۱/۲ \times ۶/۴ = ۷/۶۸$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۲۴ مطابق شکل مقابل، اگر $\frac{AN}{AC}=\frac{BM}{MC}=\frac{۱}{۳}$، آن‌گاه مساحت BMP چه کسری از مساحت مثلث ABC است؟



۱) $\frac{۱}{۱۰}$
۲) $\frac{۱}{۸}$
۳) $\frac{۱}{۹}$
۴) $\frac{۱}{۱۲}$

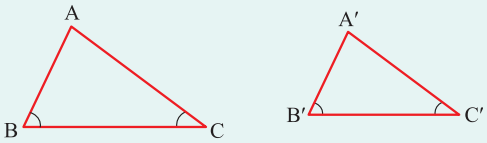
مشاوره در سؤال‌های تالس و تشابه، گاهی نیاز به رسم خط اضافه داریم. پاسخ سؤال را به دقت بخوانید تا برای حل سؤال‌های مشابه، ایده داشته باشید.

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

۱) هرگاه اندازه‌های ارتفاع‌های دو مثلث برابر باشند، نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر است با نسبت قاعده‌های نظیر آن ارتفاع‌ها.

۲) هرگاه دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلثی دیگر برابر باشند، آن دو مثلث متشابه‌اند.

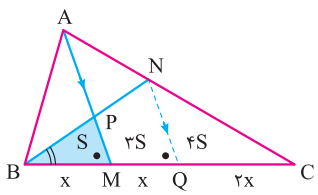


$$\begin{cases}\hat{B}=\hat{B}'\\ \hat{C}=\hat{C}'\end{cases}\Rightarrow \overset{\Delta}{ABC}\sim \overset{\Delta}{A'B'C'}$$

۳) نسبت مساحت‌ها در دو مثلث متشابه: در دو مثلث متشابه، نسبت مساحت‌ها برابر با مجذور نسبت تشابه است.

پاسخ تشریحی

گام اول (رسم خط موازی با AM): از نقطهٔ N موازی با AM رسم می‌کنیم تا BC را در Q قطع کند، طبق قضیهٔ تالس داریم:



$$NQ\parallel AM\Rightarrow \frac{AN}{NC}=\frac{MQ}{QC}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow QC=۲MQ$$

حالا برای راحت‌ترشدن محاسبات، فرض می‌کنیم $MQ=x$، پس $QC=۲x$؛ همچنین با توجه به فرض $\frac{BM}{MC}=\frac{۱}{۳}$ داریم $BM=x$.

گام دوم (محاسبهٔ نسبت مساحت مثلث‌ها): مثلث‌های BMP و BNQ طبق قضیهٔ اساسی تشابه متشابه‌اند؛ پس نسبت مساحت‌های آن‌ها، مجذور نسبت تشابه آن‌ها است:

$$\frac{S_{BMP}}{S_{BNQ}}=(\frac{BM}{BQ})^{۲}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow S_{BNQ}=۴S_{BMP}$$

و برای راحت‌ترشدن محاسبات، S_{BMP} را S در نظر می‌گیریم، پس S_{BNQ} برابر ۴S و S_{MPNQ} که اختلاف این دو مساحت است برابر ۳S می‌شود؛ همچنین مثلث‌های BNQ و CNQ قاعده و ارتفاع برابر دارند؛ پس مساحت‌های برابر نیز دارند:

$$S_{CNQ}=S_{BNQ}=۴S$$

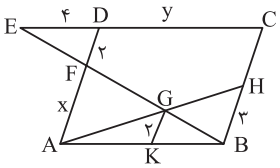
گام سوم (محاسبهٔ خواسته سؤال): در مثلث‌های ABN و BCN ارتفاع مشترک وجود دارد؛ بنابراین:

$$\frac{S_{ABN}}{S_{BCN}}=\frac{AN}{NC}=\frac{۱}{۲}=\frac{S_{ABN}}{۸S}\Rightarrow S_{ABN}=۴S\Rightarrow S_{ABC}=S_{ABN}+S_{BCN}=۴S+۸S=۱۲S$$

$$\Rightarrow \frac{S_{BMP}}{S_{ABC}}=\frac{S}{۱۲S}=\frac{۱}{۱۲}$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۲۵ در شکل زیر، **ABCD** متوازی‌الاضلاع و **GK || AD** است، با توجه به اندازه‌های روی شکل، حاصل **x + ۲y** کدام است؟



۱) ۲۴

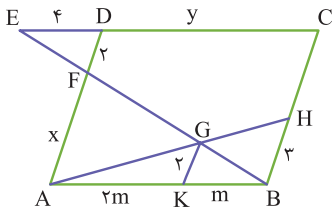
۲) ۳۶

۳) ۳۰

۴) ۲۰

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ‌تشریحی **گام اول (نوشتن تالس در مثلث ABH)**: در مثلث ABH قضیهٔ تالس را می‌نویسیم:



$$GK \parallel BH \Rightarrow \frac{AK}{AB} = \frac{GK}{BH} = \frac{۲}{۳}$$

بنابراین برای راحت‌ترشدن محاسبات در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} AK = ۲m \\ AB = ۳m \end{cases}$$

گام دوم (محاسبهٔ x): با توجه به قضیهٔ تالس در مثلث ABF داریم:

$$GK \parallel AF \Rightarrow \frac{GK}{AF} = \frac{BK}{AB} \Rightarrow \frac{۲}{x} = \frac{m}{۳m} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow x = ۲\times ۳ = ۶$$

گام سوم (محاسبهٔ y): دو مثلث AFB و DFE به دلیل برابری زاویه‌ها متشابه‌اند، نسبت تشابه را می‌نویسیم:

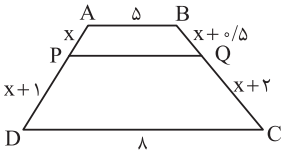
$$\overset{\Delta}{AFB} \sim \overset{\Delta}{DFE} \Rightarrow \frac{AB}{DE} = \frac{AF}{DF} \Rightarrow \frac{AB}{۴} = \frac{۶}{۲} \Rightarrow AB = ۱۲ \Rightarrow y = ۱۲$$

گام چهارم (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال):

$$۲y + x = ۲\times ۱۲ + ۶ = ۲۴ + ۶ = ۳۰$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۲۶ مطابق شکل، پاره‌خط PQ با قاعده‌های ذوزنقهٔ ABCD موازی است. طول PQ کدام است؟



۱) ۶ / ۲۵

۲) ۶

۳) ۵ / ۷۵

۴) ۵ / ۵

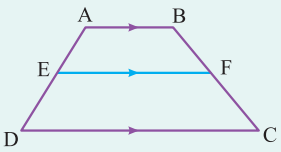
مشاوره یکی از روش‌های حل چنین سؤال‌هایی، رسم یکی از قطرهای ذوزنقه و استفاده از قضیهٔ تالس در دو مثلث ایجادشده است.

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint ابتدا با استفاده از تالس در ذوزنقه، x را به دست بیاور و برای محاسبهٔ طول PQ، یکی از قطرها را رسم کن.

درس Box

قضیهٔ تالس در ذوزنقه: اگر از نقطه‌ای روی یکی از ساق‌های ذوزنقه، خطی موازی قاعده‌ها رسم کنیم، این خط ساق‌ها را به یک نسبت تقسیم می‌کند:



$$\frac{AE}{ED}=\frac{BF}{FC}$$

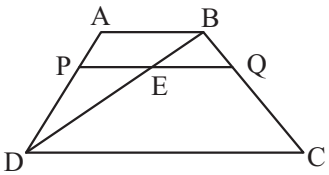
پاسخ تشریحی

گام اول (محاسبهٔ x): طبق تالس در ذوزنقه داریم:

$$AB \parallel PQ \parallel DC \Rightarrow \frac{AP}{PD}=\frac{BQ}{QC} \Rightarrow \frac{x}{x+۱}=\frac{x+۰/۵}{x+۲} \Rightarrow x(x+۲)=(x+۱)(x+۰/۵)$$

$$\Rightarrow x^۲+۲x=x^۲+۱/۵x+۰/۵ \Rightarrow ۰/۵x=۰/۵ \Rightarrow x=۱$$

گام دوم (محاسبهٔ PQ): برای محاسبهٔ PQ، ابتدا قطر BD را رسم می‌کنیم تا PQ را در E قطع کند، سپس با استفاده از تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث‌های به‌وجودآمده، PE و EQ را به دست می‌آوریم:



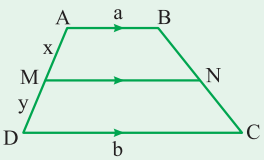
$$\overset{\Delta}{DAB}\text{ تعمیم تالس در } \Rightarrow \frac{PE}{۵}=\frac{۲}{۳} \Rightarrow PE=\frac{۱۰}{۳}$$

$$\overset{\Delta}{BCD}\text{ تعمیم تالس در } \Rightarrow \frac{EQ}{۸}=\frac{۱}{۳} \Rightarrow EQ=\frac{۸}{۳}$$

پس:

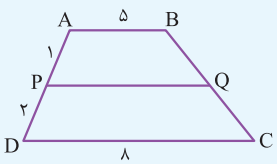
$$PQ=\frac{۱۰}{۳}+\frac{۸}{۳}=۶$$

نکته در شکل مقابل، MN با قاعده‌های ذوزنقه موازی است، داریم:



$$MN \parallel AB \parallel CD \Rightarrow MN=\frac{bx+aY}{x+y}$$

یه‌جور دیگه به کمک نکتهٔ بالا، وقتی x را پیدا کردیم، می‌توانیم بگوییم:



$$PQ=\frac{۱\times۸+۲\times۵}{۱+۲}=\frac{۱۸}{۳}=۶$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۲۷ به ازای کدام مجموعه مقادیر k، دستگاه معادلات $\begin{cases}(k+۳)x+۳y=۹\\ ۴x+(k-۱)y=۶\end{cases}$ فاقد جواب است؟

۱) $\{۳\}$

۲) $\{-۵\}$

۳) $\{-۵,-۲\}$

۴) $\{۴,-۲\}$

مشاوره درس‌باکس را حتماً بخوانید و روی حالت‌های مختلف تعداد جواب‌های دستگاه‌های دو معادله، دو مجهول خطی مسلط باشید. این تیپ سؤال‌ها، سؤال‌های پرتکراری در آزمون‌های آزمایشی هستند که تا پایان سال تحصیلی در آزمون‌های بعدی هم با آن‌ها مواجه خواهید شد.

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint

در دستگاه دو معادله، دو مجهول خطی:

۱) اگر دو خط تشکیل‌دهندهٔ آن بر هم منطبق باشند، بی‌شمار جواب دارد.

۲) اگر دو خط تشکیل‌دهندهٔ آن متقاطع باشند، یک جواب دارد.

۳) اگر دو خط تشکیل‌دهندهٔ آن موازی (غیرمنطبق) باشند، جواب ندارد.

درس Box

اگر دستگاه دو معادله، دو مجهولی $\begin{cases}ax+by=c\\ a'x+b'y=c'\end{cases}$ را در نظر بگیریم، می‌توان گفت جواب این دستگاه، نقطهٔ مشترک دو خط $L: ax+by=c$ و $L': a'x+b'y=c'$ است؛ پس:

۱) اگر این دو خط بر هم منطبق باشند، یعنی یکی از معادله‌ها ضریبی از معادلهٔ دیگر باشد، یا به عبارت دیگر $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$، آن‌گاه دستگاه بی‌شمار جواب دارد.

۲) اگر این دو خط متقاطع باشند، یعنی شیب‌های آن‌ها با هم برابر نباشد، یا به عبارت دیگر $\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}$، آن‌گاه دستگاه یک جواب (جواب منحصربه‌فرد) دارد.

۳) اگر این دو خط موازی باشند، یعنی شیب‌های آن‌ها با هم برابر باشد، ولی دو خط بر هم منطبق نباشند، یا به عبارت دیگر $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$، آن‌گاه دستگاه جواب ندارد.

پاسخ تشریحی

با توجه به درس‌باکس، باید این دستگاه معادلات نشان‌دهندهٔ دو خط موازی باشد؛ بنابراین داریم:

$$\underbrace{\frac{k+۳}{۴}=\frac{۳}{k-۱}}_{(*)}\neq\frac{۹}{۶}\xrightarrow{(*)}k^۲-k+۳k-۳=۱۲\Rightarrow k^۲+۲k-۱۵=۰$$

$$(k+۵)(k-۳)=۰\Rightarrow\begin{cases}k=-۵\Rightarrow\frac{۳}{k-۱}=\frac{۳}{-۶}\neq\frac{۹}{۶}\ \checkmark & \text{(موازی‌اند)}\\ k=۳\Rightarrow\frac{۳}{k-۱}=\frac{۳}{۲}=\frac{۹}{۶}\ \times & \text{(منطبق‌اند)}\end{cases}$$

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۲۸ مجموع درایه‌های ماتریس $\begin{bmatrix} ۱ & \tan\theta \\ -\tan\theta & ۱ \end{bmatrix}^{-۱}\begin{bmatrix} ۱ & -\tan\theta \\ \tan\theta & ۱ \end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) $۲\cos ۲\theta$
۲) $۲\sin ۲\theta$
۳) $۲\tan ۲\theta$
۴) $۲\cot ۲\theta$

مشاوره این سؤال ترکیبی از ماتریس و فرمول‌های مثلثاتی است. سؤال‌های ترکیبی بسیار مورد علاقهٔ طراحان کنکور است.

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint وارون ماتریس را به دست بیاور و سپس ماتریس مورد نظر را محاسبه کن، البته به شرطی شروع به حل این سؤال کن که روی فرمول‌های مثلثاتی ۲θ مسلط باشی!

درس Box

۱) اگر $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$، آن‌گاه:

الف) دترمینان ماتریس A به این صورت تعریف می‌شود: $|A|=ad-bc$

ب) با شرط $|A|\neq ۰$، ماتریس A وارون‌پذیر است و داریم:

$$A^{-۱}=\frac{۱}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

۲) اگر A و B دو ماتریس و r و s دو عدد حقیقی باشند به طوری که ضرب‌های ماتریسی بین آن‌ها قابل انجام باشد، آن‌گاه:

$$(rA)\times(sB)=(rs)A\times B=A\times(rs)B=(rs)(A\times B)$$

۳) یادآوری دو رابطهٔ مثلثاتی:

$$\sin ۲\theta=\frac{۲\tan\theta}{۱+\tan^۲\theta}\ ,\ \cos ۲\theta=\frac{۱-\tan^۲\theta}{۱+\tan^۲\theta}$$

پاسخ تشریحی

گام اول (محاسبهٔ ماتریس وارون):

$$\begin{bmatrix} ۱ & \tan\theta \\ -\tan\theta & ۱ \end{bmatrix}^{-۱}=\frac{۱}{۱+\tan^۲\theta}\begin{bmatrix} ۱ & -\tan\theta \\ \tan\theta & ۱ \end{bmatrix}$$

گام دوم (محاسبهٔ حاصل‌ضرب):

$$\begin{bmatrix} ۱ & -\tan\theta \\ \tan\theta & ۱ \end{bmatrix}\frac{۱}{۱+\tan^۲\theta}\begin{bmatrix} ۱ & -\tan\theta \\ \tan\theta & ۱ \end{bmatrix}=\frac{۱}{۱+\tan^۲\theta}\begin{bmatrix} ۱-\tan^۲\theta & -۲\tan\theta \\ ۲\tan\theta & ۱-\tan^۲\theta \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{۱-\tan^۲\theta}{۱+\tan^۲\theta} & \frac{-۲\tan\theta}{۱+\tan^۲\theta} \\ \frac{۲\tan\theta}{۱+\tan^۲\theta} & \frac{۱-\tan^۲\theta}{۱+\tan^۲\theta} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \cos ۲\theta & -\sin ۲\theta \\ \sin ۲\theta & \cos ۲\theta \end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های ماتریس برابر $۲\cos ۲\theta$ است.

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۲۹ اگر $A-B=\begin{bmatrix}۳ & ۲\\ -۵ & ۳\end{bmatrix}$، $A^{-۱}B^{-۱}=\begin{bmatrix}-۵ & ۳\\ ۷ & -۴\end{bmatrix}$ و $B^{-۱}A^{-۱}=\begin{bmatrix}۴ & ۷\\ ۷ & ۱۲\end{bmatrix}$ باشند، مجموع درایه‌های ماتریس $A^۲+B^۲$ کدام است؟

۱) -۳ ۲) -۲ ۳) -۱ ۴) صفر

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint ابتدا ماتریس‌های AB و BA را به دست بیاور و سپس با به توان دوم رساندن $A-B$، ماتریس حاصل $A^۲+B^۲$ را به دست بیاور.

درس Box

برای دو ماتریس وارون‌پذیر ۲×۲ داریم:

الف) $(A\times B)^{-۱}=B^{-۱}\times A^{-۱}$

ب) $(kA)^{-۱}=\frac{۱}{k}A^{-۱}$

پ) $(A^{-۱})^{-۱}=A$

ت) $(A^n)^{-۱}=(A^{-۱})^n$

پاسخ تشریحی

گام اول (محاسبهٔ AB و BA):

می‌دانیم $(AB)^{-۱}=B^{-۱}A^{-۱}$ و $(BA)^{-۱}=A^{-۱}B^{-۱}$ می‌باشند؛ بنابراین داریم:

$$A^{-۱}B^{-۱}=(BA)^{-۱}=\begin{bmatrix}۳ & -۵\\ -۴ & ۷\end{bmatrix}\Rightarrow BA=\begin{bmatrix}-۵ & ۳\\ ۷ & -۴\end{bmatrix}^{-۱}=\frac{۱}{۲۰-۲۱}\begin{bmatrix}-۴ & -۳\\ -۷ & -۵\end{bmatrix}\Rightarrow BA=\begin{bmatrix}۴ & ۳\\ ۷ & ۵\end{bmatrix}$$

$$B^{-۱}A^{-۱}=(AB)^{-۱}=\begin{bmatrix}۴ & ۷\\ ۷ & ۱۲\end{bmatrix}\Rightarrow AB=\begin{bmatrix}۴ & ۷\\ ۷ & ۱۲\end{bmatrix}^{-۱}=\frac{۱}{۴۸-۴۹}\begin{bmatrix}۱۲ & -۷\\ -۷ & ۴\end{bmatrix}\Rightarrow AB=\begin{bmatrix}-۱۲ & ۷\\ ۷ & -۴\end{bmatrix}$$

گام دوم (محاسبهٔ $A^۲+B^۲$):

چون $(A-B)^۲=A^۲-AB-BA+B^۲$ است، پس:

$$A-B=\begin{bmatrix}۳ & ۲\\ -۵ & ۳\end{bmatrix}\xrightarrow{(\dots)^۲=(\dots)^۲}(A-B)^۲=\begin{bmatrix}۳ & ۲\\ -۵ & ۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳ & ۲\\ -۵ & ۳\end{bmatrix}\Rightarrow A^۲-AB-BA+B^۲=\begin{bmatrix}-۱ & ۱۲\\ -۳۰ & -۱\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^۲-\begin{bmatrix}-۱۲ & ۷\\ ۷ & -۴\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۴ & ۳\\ ۷ & ۵\end{bmatrix}+B^۲=\begin{bmatrix}-۱ & ۱۲\\ -۳۰ & -۱\end{bmatrix}\Rightarrow A^۲+B^۲=\begin{bmatrix}-۱ & ۱۲\\ -۳۰ & -۱\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-۸ & ۱۰\\ ۱۴ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۹ & ۲۲\\ -۱۶ & ۰\end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های ماتریس $A^۲+B^۲$ برابر با $-۳=۰+۱۶-۹-۲۲$ است.

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۳۰ اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۱\\ ۲ & -۱ & ۲\\ ۰ & ۲ & -۱\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۱ & ۱ & ۱\\ ۱ & ۰ & ۱\\ ۰ & ۳ & ۱\end{bmatrix}$، آن‌گاه با فرض $ACA+BCB=ACB+BCA+I$، دترمینان ماتریس C کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

۱) خاصیت شرکت‌پذیری در ضرب ماتریس‌ها:

$$A\times(B\times C)=(A\times B)\times C$$

۲) خاصیت توزیع‌پذیری ضرب ماتریس‌ها (از راست و چپ):

$$A\times(B+C)=A\times B+A\times C\ ,\ (B+C)\times A=B\times A+C\times A$$

۳) اگر $A=B$، آن‌گاه: $A\times C=B\times C\ ,\ C\times A=C\times B$

۴) اگر $A_۱, A_۲, \dots, A_n$ ماتریس‌های مربعی هم‌مرتبه باشند، آن‌گاه $|A_۱A_۲\dots A_n|=|A_۱||A_۲|\dots|A_n|$

پاسخ‌تشریحی

گام اول (تبدیل عبارت صورت سؤال به یک عبارت ساده‌تر): با استفاده از خاصیت توزیع‌پذیری ضرب ماتریس، عبارت را ساده می‌کنیم و در نهایت از دو طرف تساوی دترمینان می‌گیریم.

$$ACA+BCB=ACB+BCA+I\Rightarrow ACA-ACB+BCB-BCA=I\Rightarrow AC(A-B)-BC(A-B)=I$$

$$\Rightarrow (AC-BC)(A-B)=I\ \Rightarrow\ (A-B)C(A-B)=I\ \Rightarrow\ |A-B||C||A-B|=|I|=۱$$

گام دوم (محاسبهٔ $|A-B|$):

$$A=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۱\\ ۲ & -۱ & ۲\\ ۰ & ۲ & -۱\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}۱ & ۱ & ۱\\ ۱ & ۰ & ۱\\ ۰ & ۳ & ۱\end{bmatrix}\Rightarrow A-B=\begin{bmatrix}۰ & -۱ & ۰\\ ۱ & -۱ & ۱\\ ۰ & -۱ & -۲\end{bmatrix}\Rightarrow |A-B|=۰-(-۱)\begin{vmatrix}۱ & ۱\\ ۰ & -۲\end{vmatrix}+۰=-۲$$

گام سوم (محاسبهٔ $|C|$): با توجه به گام اول و دوم داریم:

$$(-۲)|C|(-۲)=۱\ \Rightarrow\ |C|=\frac{۱}{۴}$$

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۳۱ چه تعداد از گزاره‌های زیر را می‌توان با ارائهٔ مثال نقض رد کرد؟

الف) حاصل‌ضرب یک عدد گویای غیرصفر و یک عدد گنگ عددی گنگ است.

ب) اگر مجموع دو عدد گنگ گویای غیرصفر باشد، مجموع دو برابر عدد اول با سه برابر عدد دوم عددی گنگ است.

پ) حاصل‌ضرب جذرِ دو عدد حقیقی مثبت برابر است با جذرِ حاصل‌ضرب آن دو.

ت) هیچ عدد طبیعی فردی وجود ندارد که مربع و مکعب آن فرد نباشد.

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

مشاوره تسلط بر مثال‌ها و تمرین‌های کتاب درسی در حل سؤالات این بخش بسیار به شما کمک می‌کند.

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint گزاره‌ها را بررسی کن و سعی کن آن‌ها را اثبات کنی. برای «الف» و «ب» می‌توانی از برهان خلف کمک بگیری.

پاسخ تشریحی گزاره‌ها را بررسی می‌کنیم.

الف) با برهان خلف این گزاره را اثبات می‌کنیم: اگر α یک عدد گویای غیرصفر و β یک عدد گنگ باشد، فرض می‌کنیم $\alpha\beta$ عددی گویاست. می‌دانیم حاصل تقسیم یک عدد گویا به یک عدد گویای دیگر حتماً عددی گویا می‌شود، پس $\frac{\alpha\beta}{\alpha}$ باید گویا باشد، پس β گویاست که این گزاره با فرض ما در تناقض است؛ پس $\alpha\beta$ نمی‌تواند گویا باشد.

ب) باز هم از برهان خلف کمک می‌گیریم: اگر α و β گنگ و $\alpha+\beta$ یک عدد گویای غیرصفر باشد، حاصل $2\alpha+3\beta$ عددی گویاست. طبق فرض مسئله $\alpha+\beta$ گویاست؛ پس $2\alpha+2\beta$ نیز گویاست. می‌دانیم اگر دو عدد گویا را از هم کم کنیم باز هم حاصل آن گویا می‌شود، پس $(2\alpha+3\beta)-(2\alpha+2\beta)$ که برابر است با β، باید عددی گویا باشد که با فرض مسئله در تناقض است؛ پس $2\alpha+3\beta$ نمی‌تواند گویا باشد.

پ) بسیار واضح است که $\sqrt{\alpha}\times\sqrt{\beta}=\sqrt{\alpha\beta}$. این ویژگی جذر را از قدیم می‌دانیم.

ت) این مورد هم بسیار واضح است که هر عدد طبیعی فرد به توان هر عدد طبیعی‌ای که برسد باز هم حاصل عددی فرد است.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۳۲ اگر $x \mid ۳m+۷$ و $x \mid ۵m+۱۲$، چند مقدار صحیح برای x وجود دارد؟

۱) ۲
۲) ۴
۳) ۶
۴) ۸

مشاوره یک سؤال پرتکرار از مبحث عادکردن که باید بتوانید چشم‌بسته حلش کنید.

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint مجهول m را با استفاده از ویژگی‌های عادکردن از سمت راست رابطه حذف کن.

درس Box

ویژگی‌های عادکردن

ردیف	نماد ریاضی	توضیح
۱	$a \mid b \Rightarrow ma \mid mb$	می‌توانیم دو طرف را در عدد صحیح m ضرب کنیم.
۲	$a \mid b \Rightarrow a \mid mb$	فقط سمت راست را در عدد صحیح دلخواه m ضرب کنیم.
۳	$a \mid b \Rightarrow a^n \mid b^n$	دو طرف را به توان عدد طبیعی n برسانیم.
۴	$a \mid b \Rightarrow a \mid b^n$	فقط سمت راست را به توان عدد طبیعی دلخواه برسانیم.
۵	$\pm a \mid \pm a$	هر عدد صحیح خودش را عاد می‌کند.
۶	$\pm ۱ \mid \pm a$	± ۱ هر عددی را عاد می‌کنند.

ردیف	نماد ریاضی	توضیح
۷	$a \mid ۰$	هر عدد صحیح، صفر را عاد می‌کند.
۸	$۰ \mid a \Rightarrow a = ۰$	صفر فقط خودش را عاد می‌کند.
۹	$\begin{cases} a \mid b \\ a \mid c \end{cases} \Rightarrow a \mid b \pm c$	اگر a دو عدد b و c را عاد کند، مجموع و تفاضل آن‌ها را هم عاد می‌کند.
	$\{ab \mid c \Rightarrow a \mid c, b \mid c\}$	سمت چپ را می‌توانیم لاغر کنیم و جای ab مقسوم‌علیه‌های آن یعنی a یا b را قرار دهیم.
۱۰	$a \mid b, b \mid c \Rightarrow a \mid c$	ویژگی تعدی عادکردن

پاسخ تشریحی

فرض مسئله $\begin{cases} x \mid (۳m+۷) \times ۵ \\ x \mid (۵m+۱۲) \times ۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \mid ۱۵m+۳۵ \\ x \mid ۱۵m+۳۶ \end{cases}$ طرفین را از یکدیگر کم می‌کنیم. $\rightarrow x \mid ۱ \Rightarrow x = \pm ۱$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۳۳ به ازای چند مقدار دورقمی برای n، دو عدد $۳n+۵$ و $۳n^۲-۲n+۶$ نسبت به هم اول هستند؟

۱) ۸۸ ۲) ۷۲

۳) ۵۶ ۴) ۴۰

مشاوره از کاربردهای بسیار مهم معادلهٔ همنهشتی محاسبهٔ ب.م.م دو عدد است.

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint ب.م.م‌های ممکن برای دو عدد را به دست بیاور و سپس مقادیری از n که به ازای آن‌ها ب.م.م ۱ می‌شود را بشمار.

درس Box

دوتا کاربرد مهم معادلهٔ همنهشتی

در ب.م.م سؤال‌هایی داریم که با معادلهٔ همنهشتی راحت‌تر حل می‌شوند.

در مسائل ب.م.م پارامتری:

یادتان هست که ب.م.م را d می‌گرفتیم و دوتا رابطهٔ عادکردن می‌نوشتیم و d به دست می‌آمد. حالا اگر سؤال بگوید مقدار n کدام است، d را جای‌گذاری می‌کنیم و عادکردن را به صورت همنهشتی درمی‌آوریم.

مثلاً ب.م.م دو عدد $۵n-۲$ و $۳n+۱$ با استفاده از روش ترکیب خطی برابر است با:

$$\left.\begin{matrix} d\mid ۳n+۱ \\ d\mid ۵n-۲ \end{matrix}\right\} \Rightarrow d\mid ۵(۳n+۱)-۳(۵n-۲) \Rightarrow d\mid ۱۱ \Rightarrow d=۱ \text{ یا } ۱۱$$

حالا سؤال می‌پرسد به ازای کدام مقادیر n، ب.م.م ۱۱ است.

$$\begin{matrix} ۱۱\mid ۳n+۱ \\ ۱۱\mid ۵n-۲ \end{matrix}$$

می‌نویسیم:

و یک رابطه را به صورت همنهشتی درمی‌آوریم:

$$۱۱\mid ۳n+۱ \xrightarrow{\text{تعریف همنهشتی}} ۳n\overset{۱۱}{\equiv}-۱ \xrightarrow[\text{اضافه می‌کنیم}]{\text{مضرب مناسب ۱۱ را به -۱}} ۳n\overset{۱۱}{\equiv}-۱\overset{۱۱}{\equiv}۲۱ \xrightarrow{\div ۳} n\overset{۱۱}{\equiv}۷$$

(۲×۱۱)

پس باید $n=۱۱q+۷$ باشد مثلاً $n=۷,۱۸,\dots$ مناسب است تا ب.م.م بشود ۱۱.

پاسخ تشریحی

گام اول (پیداکردن ب.م.م‌های ممکن برای هر دو عدد):

$$\left.\begin{matrix} d\mid ۳n^۲-۲n+۶ \\ d\mid ۳n+۵ \xrightarrow{\times n} d\mid ۳n^۲+۵n \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} \left.\begin{matrix} d\mid (۷n-۶)\times ۳ \Rightarrow d\mid ۲۱n-۱۸ \\ d\mid (۳n+۵)\times ۷ \Rightarrow d\mid ۲۱n+۳۵ \end{matrix}\right\} \Rightarrow d\mid ۵۳ \Rightarrow d=۱ \text{ یا } ۵۳$$

گام دوم (پیداکردن n):

ب.م.م باید ۱ باشد، پس حالت‌هایی از n که به ازای آن‌ها $d=۵۳$ باشد را به دست می‌آوریم و از اعداد دورقمی کم می‌کنیم.

$$۵۳\mid ۳n+۵ \Rightarrow ۳n\overset{۵۳}{\equiv}-۵\equiv ۴۸ \xrightarrow{\div ۳} n\overset{۵۳}{\equiv}۱۶$$

پس به ازای $n=۵۳q+۱۶$، ب.م.م دو عدد ۵۳ می‌شود.

nهای دورقمی ممکن را به دست می‌آوریم.

$$۹<۵۳q+۱۶<۱۰۰ \Rightarrow q=۰,۱$$

از بین ۹۰ عدد دورقمی ممکن فقط به ازای دو مقدار از n (که با $q=۰$ و $q=۱$ ساخته می‌شود) ب.م.م دو عدد ۵۳ می‌شود و به ازای ۸۸ عدد دورقمی دیگر ب.م.م دو عدد ۱ است.

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۳۴ در تقسیم a بر ۴۳، باقی‌ماندهٔ دو واحد کوچک‌تر از خارج قسمت است. در چند حالت a مضرب ۳ است؟

۱) ۱۲
۲) ۱۳
۳) ۱۴
۴) ۱۵

مشاوره در حل سؤالات قضیهٔ تقسیم حتماً به شرایط باقی‌مانده توجه کن.

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

قضیهٔ تقسیم

عدد صحیح a را بر عدد طبیعی b تقسیم می‌کنیم. خارج قسمت q و باقی‌مانده r است و داریم:

$$a = bq + r \quad , \quad 0 \le r < b$$

(a: مقسوم، مقسوم‌علیه: b، خارج قسمت: q، باقی‌مانده: r)

از قدیم یادتان هست که باید باقی‌مانده از مقسوم‌علیه کم‌تر باشد، یعنی $r < b$ و تأکید کنیم که r منفی نیست.

پاسخ تشریحی

قضیهٔ تقسیم مربوط به صورت سؤال را می‌نویسیم.

$$a = 43q + (q-2) = 44q - 2$$

$$q - 2 < 43 \Rightarrow q < 45$$

$$q - 2 \ge 0 \Rightarrow q \ge 2$$

حالا حالت‌هایی که a مضرب ۳ است را به دست می‌آوریم.

$$a \overset{3}{\equiv} 0 \Rightarrow 44q - 2 \overset{3}{\equiv} 2 \Rightarrow 2q \overset{3}{\equiv} 2 \Rightarrow q \overset{3}{\equiv} 1$$

$$\Rightarrow q = 3k + 1 \Rightarrow 2 \le 3k + 1 < 45$$

$$k = 1, \ldots, 14 \Rightarrow \text{۱۴ حالت}$$

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۳۵ نقطهٔ $A(\alpha,\beta)$ با مختصات صحیح، روی منحنی $y=\frac{2x-11}{x+3}$ قرار دارد و $\alpha\beta>0$. اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد زوج n بر $\alpha-\beta$ برابر ۹ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم $\frac{n}{2}$ بر $\alpha-\beta$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۱ ۴) ۱۲

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint معادلهٔ منحنی را به رابطهٔ عادکردن تبدیل کن و α و βهای مناسب را به دست بیاور.

پاسخ تشریحی

گام اول: A نقطه‌ای با مختصات صحیح روی $y=\frac{2x-11}{x+3}$ است، پس هم x صحیح است و هم y؛ بنابراین $\frac{2x-11}{x+3}$ صحیح است و می‌توانیم آن را به معادلهٔ عادکردنی تبدیل کنیم:

$$\Rightarrow x+3\,|\,2x-11 \xrightarrow[\text{روش تستی}]{\text{ریشهٔ عبارت چپ در عبارت راست}} x+3\,|\,2(-3)-11 \Rightarrow x+3\,|\,-17$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+3=1 \Rightarrow x=-2 \Rightarrow y=-15 \Rightarrow \begin{cases}\alpha=-2\\ \beta=-15\end{cases} \Rightarrow \alpha-\beta=13 \\ x+3=-1 \Rightarrow x=-4 \Rightarrow y=19 \text{ غ.ق.ق، چون } \alpha\beta>0 \text{ نمی‌شود} \\ x+3=17 \Rightarrow x=14 \Rightarrow y=1 \Rightarrow \begin{cases}\alpha=14\\ \beta=1\end{cases} \Rightarrow \alpha-\beta=13 \\ x+3=-17 \Rightarrow x=-20 \Rightarrow y=3 \text{ غ.ق.ق، چون } \alpha\beta>0 \text{ نمی‌شود} \end{cases}$$

گام دوم: باقی‌ماندهٔ n بر $\alpha-\beta=13$ برابر ۹ است؛ یعنی: $n=13q+9$

گام سوم: از آن‌جایی که n زوج و باقی‌مانده فرد است، پس خارج قسمت این تقسیم نیز فرد است و داریم:

$$n=13q+9 \xrightarrow{q=2x+1} n=13(2x+1)+9=26x+22$$

$$\Rightarrow \frac{n}{2}(3x+1) \Rightarrow \text{باقی‌ماندهٔ تقسیم } \frac{n}{2} \text{ بر } 13 \text{، برابر ۱۱ است}$$

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۳۶ **در یک تقسیم، مقسوم‌علیه کوچک‌ترین عدد دورقمی ممکن و باقی‌مانده برابر ۳ است. اگر مقسوم‌علیه را ۴ واحد کم‌تر کنیم، باقی‌مانده برابر ۴ می‌شود. تعداد مقسوم‌های چهاررقمی کدام است؟**

۱) ۱۱۴ ۲) ۱۱۵

۳) ۱۱۶ ۴) ۱۱۷

مشاوره سؤال دشواری است که برای حل آن ابتدا باید بتوانید مقدار مقسوم‌علیه را به دست آورید.

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint ابتدا قضیهٔ تقسیم را بنویس و سپس مقدار صحیح مقسوم‌علیه را به دست بیاور.

پاسخ تشریحی ابتدا برای روابط گفته‌شده قضیهٔ تقسیم را می‌نویسیم و b را به دست می‌آوریم.

$$a = bq + ۳$$
$$a = (b-۴)q' + ۴$$

b کوچک‌ترین عدد دورقمی است، اما ۱۰ نمی‌تواند باشد، چون به ازای $b = ۱۰$ ، a یک بار زوج و یک بار فرد می‌شود؛ پس $b = ۱۱$.

$$\left.\begin{array}{l} a = ۱۱q + ۳ \Rightarrow \overset{۱۱}{a} \equiv \overset{۱۱}{۳} \equiv ۲۵ \\ a = ۷q' + ۴ \Rightarrow \overset{۷}{a} \equiv \overset{۷}{۴} \equiv ۲۵ \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{۷۷}{a} \equiv ۲۵ \Rightarrow a = ۷۷k + ۲۵$$

حالا تعداد اعداد چهاررقمی a را محاسبه می‌کنیم.

$$۱۰۰۰ \le a \le ۹۹۹۹ \Rightarrow ۱۰۰۰ \le ۷۷k + ۲۵ \le ۹۹۹۹ \Rightarrow ۱۳ \le k \le ۱۲۹$$
$$\Rightarrow k = ۱۳, ۱۴, \ldots, ۱۲۹ \Rightarrow \text{تعداد } k = ۱۲۹ - ۱۳ + ۱ = ۱۱۷$$

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۳۷ **اگر $n(A\cup B)=۴n(A-B)=۵n(B-A)$ و $n(A\cap B)=۵۵$، تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ A چند برابر تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ B است؟**

۱) ۳۲
۲) ۱۲۸
۳) ۵۱۲
۴) ۲۰۴۸

مشاوره تعداد زیرمجموعه‌ها بارها در کنکور مورد سؤال قرار گرفته است. با توجه به حجم کم درس، حتماً ارزش وقت‌گذاشتن برای مطالعه را دارد.

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint با توجه به روابطی که بلدید و روابط صورت مسئله، معادلهٔ $n(A\cup B)$ را بنویسید.

درس Box تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ A برابر $۲^{n(A)}$ (دو به توان تعداد عضوهای مجموعهٔ A) است.

پاسخ تشریحی **گام اول:** $n(A\cup B)$ را مساوی x می‌گیریم. آن‌گاه با توجه به صورت سؤال داریم: $n(A-B)=\frac{x}{۴}$ و $n(B-A)=\frac{x}{۵}$.

گام دوم: معادلهٔ $n(A\cup B)$ را برحسب $n(A-B)$ و $n(B-A)$ می‌نویسیم.

$$n(A\cup B)=n(A-B)+n(B-A)+n(A\cap B)\Rightarrow x=\frac{x}{۴}+\frac{x}{۵}+۵۵\Rightarrow x=۱۰۰$$

گام سوم: با به‌دست‌آوردن $n(A-B)$ و $n(B-A)$ و داشتن $n(A\cap B)$؛ $n(A)$ و $n(B)$ را محاسبه می‌کنیم و تعداد زیرمجموعه‌هایشان را به دست می‌آوریم.

$$\begin{matrix}n(A)=n(A-B)+n(A\cap B)=۲۵+۵۵=۸۰\\ n(B)=n(B-A)+n(A\cap B)=۲۰+۵۵=۷۵\end{matrix}\Rightarrow \frac{۲^{۸۰}}{۲^{۷۵}}=۲^{۵}=۳۲$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۳۸ اگر $S=\{(x,y)\mid 0\le y\le 3x-x^2\}$ مجموعهٔ $S\cap(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$ چند عضو دارد؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint

با در نظر گرفتن این‌که زوج مرتب‌های (x,y) در نهایت باید هر دو مؤلفه‌شان صحیح باشند، با مقاردادن به x و y مقادیر قابل قبول را به دست آورید.

پاسخ تشریحی

گام اول: مجموعهٔ $S\cap(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$ شامل زوج مرتب‌هایی از S می‌باشد که هر دو مؤلفهٔ آن‌ها اعداد صحیح‌اند.

گام دوم: شروع به پیداکردن (x,y)هایی می‌کنیم که در رابطهٔ $0\le y\le 3x-x^2$ صدق کنند. $y\ge 0$ و $y\in z$ است، پس از $y=0$ شروع می‌کنیم و مقادیر قابل قبول x را به دست می‌آوریم.

$$y=0 \Rightarrow 3x-x^2\ge 0 \Rightarrow x=0\ ,\ x=1\ ,\ x=2\ ,\ x=3$$

$$\Rightarrow (0,0)\ ,\ (1,0)\ ,\ (2,0)\ ,\ (3,0)\in S$$

از $x=3$ به بعد حاصل $3x-x^2$ منفی می‌شود پس ادامه نمی‌دهیم.

$$y=1 \Rightarrow 3x-x^2\ge 1 \Rightarrow x=1\ ,\ x=2 \Rightarrow (1,1)\ ,\ (2,1)\in S$$

$$y=2 \Rightarrow 3x-x^2\ge 2 \Rightarrow x=1\ ,\ x=2 \Rightarrow (1,2)\ ,\ (2,2)\in S$$

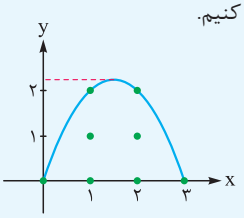
پس مجموعهٔ S به صورت زیر می‌شود:

$$S=\{(0,0)\ ,\ (1,0)\ ,\ (2,0)\ ,\ (3,0)\ ,\ (1,1)\ ,\ (2,1)\ ,\ (1,2)\ ,\ (2,2)\}$$

گام سوم: همهٔ اعضای S اعداد صحیح هستند، بنابراین $S\cap(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$ دارای ۸ عضو است.

یه‌جور دیگه

می‌توانیم برای مشخص‌کردن مجموعهٔ S نمودار مربوط به معادلهٔ $y=3x-x^2$ را به ازای $y\ge 0$ رسم کنیم. سپس با امتحان‌کردن نقطه‌ای خارج از نمودار معادله، محدودهٔ درست را مشخص و نقاط متعلق به اعداد صحیح را تعیین کنیم.



بنابراین مجموعهٔ $S\cap(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$ شامل ۸ عضو زیر است:

$$S\cap(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})=\{(0,0)\ ,\ (1,0)\ ,\ (2,0)\ ,\ (3,0)\ ,\ (1,1)\ ,\ (2,1)\ ,\ (1,2)\ ,\ (2,2)\}$$

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۳۹ اگر U مجموعهٔ مرجع و $C = A \cap B'$، آن‌گاه مجموعهٔ $[(B' - A')' \cup C] \cup [A' - (B' - C)']$ برابر کدام است؟

۱) A' ۲) B

۳) U ۴) $\varnothing$

مشاوره جبر مجموعه‌ها از سؤالات پای ثابت کنکور هر سال است.

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

جبر مجموعه‌ها

قوانین شرکت‌پذیری

$$\begin{cases} A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C & \text{(فرقی نمی‌کند کدام دو تا را اول اجتماع بگیریم.)} \\ A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C & \text{(فرقی نمی‌کند کدام دو تا را اول اشتراک بگیریم.)} \end{cases}$$

قوانین پخشی (عکس آن فاکتورگیری)

$$\begin{cases} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{cases}$$

(فاکتور)

قوانین زیرمجموعه $A \subseteq B$

$$A \cup B = B$$
$$A \cap B = A$$
$$A - B = \varnothing$$

(تمامی روابط دوطرفه هستند)

قوانین دمورگان

$$\begin{cases} (A \cup B)' = A' \cap B' \\ (A \cap B)' = A' \cup B' \end{cases}$$

قانون تفاضل به اشتراک $A - B = A \cap B'$

قوانین جذب

$$\begin{cases} A \cup (A \cap B) = A & (\text{چون } A \cap B \subseteq A) \\ A \cap (A \cup B) = A & (\text{چون } A \subseteq A \cup B) \end{cases}$$

نکته برای ساده‌سازی عبارت‌های مجموعه‌ای می‌توانیم از نمودار ون هم کمک بگیریم.

پاسخ تشریحی

$$(B' - A')' = (B' \cap A)' = C'$$
$$C' \cup C = U$$

پس قسمت اول عبارت U می‌شود.

اجتماع U و هر مجموعهٔ دلخواهی، U است.

$$U \cup X = U$$

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۴۰ تعداد افرازهای مجموعهٔ $A=\{2k-1 \mid k\in\mathbb{Z}, a<x<b\}$ برابر ۱۵ است. بیشترین مقدار مساحت ناحیهٔ $(a,b)\times(a-b,b-a)$ کدام است؟

۱) ۳۲ ۲) ۵۰

۳) ۷۲ ۴) ۹۸

مشاوره تعداد افرازها از موضوعات مهمی است که با فهم دقیق آن می‌توانید از پس سؤال‌هایش بر بیایید.

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

افراز یک مجموعه

افراز یعنی قسمت‌بندی. اگر مجموعهٔ A را به زیرمجموعه‌های ناتهی فاقد اشتراک که اجتماع آن‌ها مجموعهٔ A بشود تقسیم‌بندی کنیم، یک افراز انجام داده‌ایم. مثلاً $\{1\}\{2\}\{3,4\}$ یک افراز برای مجموعهٔ $\{1,2,3,4\}$ است.

به‌دست‌آوردن تعداد افراز: با انتخاب مناسب تعداد عضوها، تعداد افرازها را به دست می‌آوریم. مثلاً برای این‌که ببینیم مجموعهٔ چهارعضوی $\{1,2,3,4\}$ را به چند صورت می‌توانیم به زیرمجموعه‌های ۱،۱،۲ عضوی افراز کنیم به صورت زیر عمل می‌کنیم:

تعداد افراز $= \dfrac{\binom{4}{2}\times\binom{2}{1}\times\binom{1}{1}}{2!} = 6$

(انتخاب ۲ عضو از ۴ عضو — یکی از دو تای باقی‌مانده — یکی از یک عضو باقی‌مانده)

(۲! ← ۲ مجموعه با تعداد عضوهای برابر داشتیم)

نکته اگر k زیرمجموعه با تعداد عضوهای برابر داشته باشیم، تعداد انتخاب‌ها را بر $k!$ تقسیم می‌کنیم.

پاسخ تشریحی

گام اول: وقتی تعداد افرازهای یک مجموعه ۱۵ باشد، یعنی آن مجموعه ۴عضوی است.

گام دوم: اعضای مجموعه به صورت $2k-1$ هستند. پس باید ۴ مقدار مختلف صحیح برای k داشته باشیم تا ۴ عضو برای مجموعه به دست بیاید.

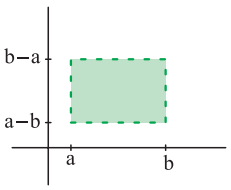
گام سوم:

$$n,n+1,n+2,n+3\in k \Rightarrow n-1<k<n+4$$

$$\Rightarrow \text{کم‌ترین مقدار } a = n-1 \text{ و بیشترین مقدار } b = n+4 \Rightarrow \text{Max}(b-a)=5$$

نکته حواستان باشد که برای بزرگ‌ترشدن $b-a$ باید b تا حد امکان بزرگ و a تا حد امکان کوچک باشد.

گام چهارم: مساحت ضرب دکارتی داده‌شده را حساب می‌کنیم.



$$b-a=5$$

$$(b-a)-(a-b)=2(b-a)=10$$

$$S=5\times10=50$$

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۴۱ متحرکی روی محور x براساس اطلاعات جدول زیر از مکان A به مکان B جابه‌جا می‌شود. اگر متحرک حین جابه‌جایی تنها یک بار تغییر جهت داده باشد، بردار مکان متحرک در لحظهٔ تغییر جهت کدام می‌تواند باشد؟

بردار مکان A	بردار مکان B	سرعت متوسط	تندی متوسط
$(+۶m)\vec{i}$	$(-۸m)\vec{i}$	$(-۲\frac{m}{s})\vec{i}$	$۶\frac{m}{s}$

۱) $(-۲۰m)\vec{i}$
۲) $(-۲۲m)\vec{i}$
۳) $(۲۲m)\vec{i}$
۴) $(۱۸m)\vec{i}$

مشاوره حرکت‌شناسی یکی از مباحث فیزیک است که دامنهٔ طرح سؤالات در آن بسیار وسیع است. این تست فیزیک از آن‌هاست که مشابه آن در کنکورهای سراسری کم‌تر دیده شده است.

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint ابتدا بازهٔ زمانی حرکت و مسافت پیموده‌شده توسط متحرک را به دست آورید؛ سپس دو حالت ممکن برای چنین حرکتی را تحلیل کنید.

درس Box

۱) در حرکت روی محور x، سرعت متوسط و تندی متوسط از روابط زیر به دست می‌آیند:

$$s_{av}=\frac{l}{\Delta t}$$ (مسافت (m)، تندی متوسط $(\frac{m}{s})$، بازهٔ زمانی (s))

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}$$ (جابه‌جایی (m)، سرعت متوسط $(\frac{m}{s})$، بازهٔ زمانی (s))

۲) در حرکت روی خط راست، متحرک در لحظه‌ای می‌تواند تغییر جهت دهد که متوقف شود.

۳) بردار مکان $(\vec{r})$، برداری است که مبدأ محور را به مکان جسم در هر لحظه وصل می‌کند.

پاسخ تشریحی

گام اول: ابتدا با استفاده از رابطهٔ سرعت متوسط، بازهٔ زمانی این حرکت را به دست می‌آوریم:

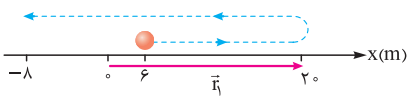
$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta x=x_B-x_A=-۸-۶=-۱۴m]{v_{av}=-۲\frac{m}{s}} -۲=\frac{-۱۴}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t=۷\,s$$

گام دوم: به کمک رابطهٔ تندی متوسط، مسافت طی‌شده توسط متحرک را حساب می‌کنیم:

$$s_{av}=\frac{l}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t=۷s]{s_{av}=۶\frac{m}{s}} ۶=\frac{l}{۷} \Rightarrow l=۴۲\,m$$

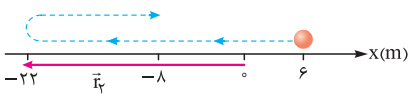
گام سوم: با توجه به اطلاعات موجود، دو حالت زیر می‌تواند وجود داشته باشد. در هر مورد، مسیر حرکت روی محور x به صورت خط‌چین نشان داده‌شده است.

حالت اول:



$$\vec{r}_1=(۲۰\,m)\vec{i}$$

حالت دوم:

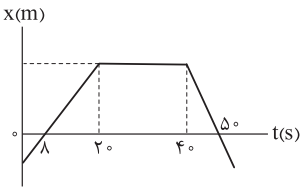


$$\vec{r}_2=(-۲۲m)\vec{i}$$

حالت اول در گزینه‌ها موجود نیست، اما حالت دوم مطابق گزینهٔ (۲) است.

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۴۲ نمودار مکان ـ زمان متحرکی که روی خط راست حرکت می‌کند، مطابق شکل است. اگر تندی متوسط متحرک در بازهٔ زمانی صفر تا ۵۰ s برابر $۶/۴\frac{m}{s}$ باشد، بزرگی شتاب متوسط متحرک در بازهٔ زمانی $t_۱ = ۱۰\,s$ تا $t_۲ = ۵۰\,s$ چند متر بر مربع ثانیه است؟



۱) ۰/۰۵

۲) ۰/۱

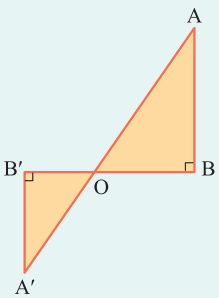
۳) ۰/۵۵

۴) ۰/۴۴

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint ابتدا مسافت طی‌شده توسط متحرک را به دست آورید؛ سپس مکان متحرک را در لحظه‌های $t_۱ = ۰\,s$ و $t' = ۲۰\,s$ مشخص کنید. در پایان نیز سرعت متحرک را در لحظه‌های $t_۱$ و $t_۲$ حساب کرده و شتاب متوسط در بازهٔ زمانی $t_۱$ تا $t_۲$ را به دست آورید.

درس Box ۱) در نمودارهای حرکت‌شناسی، نوشتن نسبت تشابه بین اضلاع مثلث‌های متشابه (رابطهٔ تالس) کاربرد فراوانی دارد. جهت یادآوری به شکل مقابل توجه کنید:



$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{OB'}{OB}$$

۲) وقتی در یک بازهٔ زمانی، سرعت متحرک ثابت است؛ سرعت متحرک در هر لحظه با سرعت متوسط در این بازهٔ زمانی برابر است.

۳) وقتی نمودار مکان ـ زمان متحرک در یک بازهٔ زمانی به صورت یک خط شیب‌دار با شیب ثابتی باشد، سرعت متحرک در این بازهٔ زمانی ثابت است.

۴) در هر بازهٔ زمانی دلخواه، نسبت تغییر سرعت به بازهٔ زمانی را شتاب متوسط می‌گوییم:

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_۲ - v_۱}{t_۲ - t_۱}$$

a_{av} = شتاب متوسط $(\frac{m}{s^۲})$

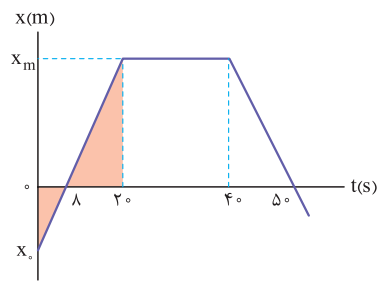
$v_۱$ = سرعت متحرک در لحظهٔ $t_۱$ $(\frac{m}{s})$

$v_۲$ = سرعت متحرک در لحظهٔ $t_۲$ $(\frac{m}{s})$

پاسخ تشریحی **گام اول:** با استفاده از رابطهٔ تندی متوسط، مسافت طی‌شده در مدت ۵۰ s را حساب می‌کنیم:

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t = ۵۰\,s]{s_{av} = ۶/۴\frac{m}{s}} ۶/۴ = \frac{l}{۵۰} \Rightarrow l = ۳۲۰\,m$$

گام دوم: به کمک رابطهٔ تالس و تشابه مثلث‌های رنگی، مکان متحرک را در لحظه‌های $t = ۰\,s$ و $t = ۲۰\,s$ مشخص می کنیم:



$$\frac{|x_۰|}{x_m} = \frac{۸-۰}{۲۰-۸} = \frac{۸}{۱۲} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow x_m = ۱/۵\,|x_۰|$$

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

از طرفی می‌دانیم مسافت طی‌شده برابر با طول مسیر حرکت است؛ بنابراین داریم:

$$l = |x_0| + x_m + x_m \xrightarrow[x_m = 1/5|x_0|]{l = 320\,m} 320 = |x_0| + 1/5|x_0| + 1/5|x_0|$$

$$\Rightarrow 320 = 4|x_0| \Rightarrow |x_0| = 80\,m \Rightarrow x_0 = -80\,m$$

$$x_m = 1/5|x_0| = 1/5 \times 80 = 120\,m$$

گام سوم: سرعت متحرک در لحظهٔ $t_1 = 10\,s$ همان سرعت متوسط در بازهٔ زمانی $0\,s$ تا $20\,s$ است:

$$v_1 = v_{av} = \frac{x_m - x_0}{t_m - t_0} = \frac{120 - (-80)}{20 - 0} = \frac{200}{20} = 10\,\frac{m}{s}$$

سرعت متحرک در لحظهٔ $t_2 = 50\,s$ همان سرعت متوسط در بازهٔ زمانی $40\,s$ تا $50\,s$ است:

$$v_2 = v'_{av} = \frac{0 - x_m}{50 - 40} = \frac{-120}{10} = -12\,\frac{m}{s}$$

گام چهارم: شتاب متوسط متحرک در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 را به دست آورده و بزرگی آن را تعیین می‌کنیم:

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{-12 - 10}{50 - 10} = -\frac{22}{40} = -0/55\,\frac{m}{s^2}$$

$$|a_{av}| = 0/55\,\frac{m}{s^2}$$

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۴۳ موتورسواری فاصلهٔ ۴۰۰ کیلومتری بین دو شهر را با تندی ثابت $۱۲۰\frac{km}{h}$ رفته و پس از رسیدن به شهر دوم، با تندی ثابت $۱۰۰\frac{km}{h}$ به طرف شهر اول بازمی‌گردد. تندی متوسط موتورسوار از ابتدای حرکتش تا لحظه‌ای که مسافت ۶۰۰ کیلومتر را پیموده، چند کیلومتر بر ساعت است؟

۱) ۱۱۲/۵ ۲) ۱۱۰

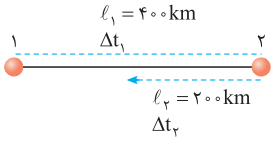
۳) ۵۲/۵ ۴) ۳۷/۵

مشاوره در بسیاری از تست‌های حرکت‌شناسی، تمام یا بخشی از حل سؤال به تفاوت بین مفاهیم مسافت و جابه‌جایی و هم‌چنین مفاهیم تندی متوسط و سرعت متوسط مربوط است.

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ تشریحی

گام اول: بازهٔ زمانی حرکت موتورسوار در مسیر رفت از شهر اول به شهر دوم را به دست می‌آوریم:



$$s_{av,1} = \frac{l_1}{\Delta t_1} \Rightarrow ۱۲۰ = \frac{۴۰۰}{\Delta t_1} \Rightarrow \Delta t_1 = \frac{۴۰۰}{۱۲۰} = \frac{۱۰}{۳}\,h$$

گام دوم: از آن‌جا که در متن سؤال، کل مسیر پیموده‌شده ۶۰۰ km است، مطابق شکل فوق، موتورسوار ۲۰۰ km به طرف شهر اول برگشته است. بازهٔ زمانی حرکت موتورسوار را در این مرحله نیز به دست می‌آوریم:

$$s_{av,2} = \frac{l_2}{\Delta t_2} \Rightarrow ۱۰۰ = \frac{۲۰۰}{\Delta t_2} \Rightarrow \Delta t_2 = ۲\,h$$

گام سوم: تندی متوسط موتورسوار از ابتدای حرکتش تا لحظه‌ای که مسافت ۶۰۰ km را پیموده است، به دست می‌آوریم:

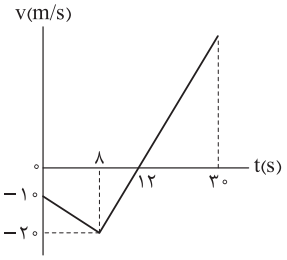
$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{l_1 + l_2}{\Delta t_1 + \Delta t_2} = \frac{۴۰۰ + ۲۰۰}{\frac{۱۰}{۳} + ۲} = \frac{۶۰۰}{\frac{۱۶}{۳}} = \frac{۱۸۰۰}{۱۶}\frac{km}{h}$$

$$\Rightarrow s_{av} = \frac{۲۲۵}{۲} = ۱۱۲/۵\frac{km}{h}$$

گول نخوری اگر در گام سوم به جای مسافت از جابه‌جایی استفاده کنید، به گزینهٔ نادرست (۴) می‌رسید.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۴۴ **شکل زیر، نمودار سرعت ـ زمان متحرکی را نشان می‌دهد که روی خط راست حرکت می‌کند. در چه لحظه‌ای متحرک به نقطهٔ شروع حرکت خود بازمی‌گردد؟**



۱) ۱۶

۲) ۲۰

۳) ۲۴

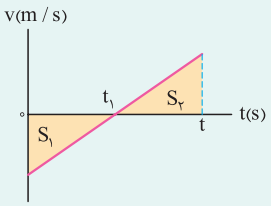
۴) ۲۸

مشاوره وقتی در یک تست حرکت‌شناسی نمودار سرعت ـ زمان مطرح می‌شود، به مساحت سطح محدود بین نمودار و محور زمان توجه خاصی داشته باشید.

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint برای آن‌که متحرک به نقطهٔ شروع حرکت خود بازگردد، باید جابه‌جایی آن صفر باشد؛ بنابراین باید مساحت سطح محدود بین نمودار سرعت ـ زمان با محور زمان، در قسمت‌های پایین و بالای محور t هم‌اندازه باشند.

درس Box در نمودار سرعت ـ زمان، مساحت سطح محدود بین این نمودار و محور زمان، در هر بازهٔ زمانی، برابر با جابه‌جایی (تغییر مکان) در آن بازه است. برای مساحت سطحی که زیر محور t است، $S = |\Delta x|$ و برای مساحت سطحی که بالای محور t است، $S = \Delta x$ به کار می‌رود. مثلاً در نمودار مقابل می‌توان نوشت:

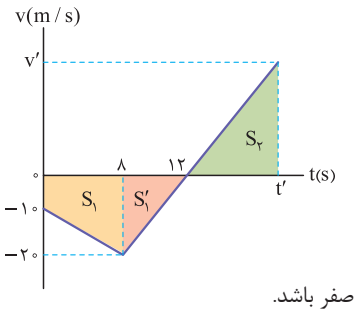


در بازهٔ زمانی ۰ تا t_1 : $S_1 = |\Delta x_1|$ ، $\Delta x_1 < 0$

در بازهٔ زمانی t_1 تا t : $S_2 = \Delta x_2$

در بازهٔ زمانی ۰ تا t : $\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2$

پاسخ تشریحی **گام اول:** مساحت سطح محدود بین نمودار سرعت ـ زمان و محور زمان در بازهٔ زمانی ۰ s تا ۱۲ s را حساب می‌کنیم:



$$S_1 + S_1' = \left[\frac{(10+20)8}{2} + \frac{(12-8)20}{2}\right] = 120 + 40 = 160\ \text{m}$$

$$\Rightarrow \Delta x_1 + \Delta x_1' = -160\ \text{m}$$

گام دوم: برای آن‌که متحرک به نقطهٔ شروع حرکت خود بازگردد، باید جابه‌جایی آن صفر باشد.

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_1' + \Delta x_2 = 0 \Rightarrow 0 = -160 + \Delta x_2 \Rightarrow \Delta x_2 = 160\text{m}$$

گام سوم: نسبت تشابه بین مثلث‌های S_1' و S_2 را می‌نویسیم:

$$\frac{v'}{20} = \frac{(t'-12)}{12-8} \Rightarrow v' = 5(t'-12)$$

از طرفی می‌دانیم که مساحت سطح مثلث S_2 با Δx_2 برابر است؛ بنابراین می‌توان نوشت:

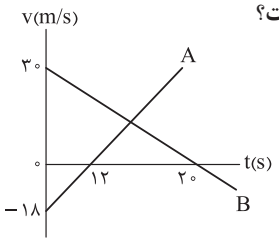
$$\Delta x_2 = \frac{(t'-12)\times v'}{2} \xrightarrow[v'=5(t'-12)]{\Delta x_2 = 160\text{m}} 160 = \frac{(t'-12)\times 5(t'-12)}{2}$$

$$\Rightarrow 64 = (t'-12)^2 \Rightarrow \begin{cases} t'-12 = 8 \Rightarrow t' = 20\ \text{s} \\ t'-12 = -8 \Rightarrow t' = 4\ \text{s} \end{cases}$$

چون از ۱۲s کوچک‌تر است، قابل قبول نیست.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۴۵ نمودار سرعت ـ زمان دو متحرک A و B که از یک نقطه حرکت خود را شروع کرده‌اند، مطابق شکل است. در لحظه‌ای که دو متحرک به یکدیگر می‌رسند، تندی متحرک B چند برابر تندی متحرک A است؟



۱) ۱

۲) ۰/۸

۳) ۰/۶

۴) ۰/۵

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

۱) هرگاه دو متحرک در لحظه‌ای به هم برسند، می‌توان در آن لحظه، معادلهٔ مکان آن‌ها را مساوی با هم قرار داد و مجهول مورد نظر را به دست آورد.

۲) معادله‌های مکان ـ زمان و سرعت ـ زمان در حرکت با شتاب ثابت روی محور x به صورت زیر است:

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 \quad \text{و} \quad v = at + v_0$$

x = مکان متحرک در لحظهٔ t (m)

x_0 = مکان متحرک در لحظهٔ $t = 0$ (m)

a = شتاب $(\frac{m}{s^2})$

v_0 = سرعت متحرک در لحظهٔ $t = 0$ $(\frac{m}{s})$

v = سرعت متحرک در لحظهٔ t $(\frac{m}{s})$

t = زمان (s)

پاسخ تشریحی

گام اول: متحرک A با شتاب ثابت a_A و متحرک B با شتاب ثابت a_B حرکت می‌کنند. شتاب هر یک از آن‌ها را به دست می‌آوریم:

$$a_A = \frac{\Delta v_A}{\Delta t_A} = \frac{0-(-18)}{12-0} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}\ \frac{m}{s^2}$$

$$a_B = \frac{\Delta v_B}{\Delta t_B} = \frac{0-30}{20-0} = -\frac{30}{20} = -\frac{3}{2}\ \frac{m}{s^2}$$

گام دوم: در لحظه‌ای که دو متحرک به یکدیگر می‌رسند، معادلهٔ مکان آن‌ها را مساوی با هم قرار می‌دهیم:

$$x_A = x_B \Rightarrow \frac{1}{2}a_A t^2 + v_{0A}t + x_{0A} = \frac{1}{2}a_B t^2 + v_{0B}t + x_{0B}$$

$$\xrightarrow[v_{0A}=-18\frac{m}{s},\ v_{0B}=30\frac{m}{s}]{x_{0A}=x_{0B}} \frac{1}{2}\times\frac{3}{2}t^2 - 18t = \frac{1}{2}(-\frac{3}{2})t^2 + 30t \Rightarrow \frac{3}{4}t^2 + \frac{3}{4}t^2 = 48t \Rightarrow \frac{3}{2}t^2 = 48t \Rightarrow \frac{3}{2}t = 48$$

$$\Rightarrow t = 32\ s$$

گام سوم: سرعت هر یک از دو متحرک را در لحظهٔ $t = 32s$ به دست می‌آوریم. برای این کار از معادلهٔ سرعت ـ زمان استفاده می‌کنیم:

$$v_A = a_A t + v_{0A} \xrightarrow[v_{0A}=-18\frac{m}{s}]{a_A=\frac{3}{2}\frac{m}{s^2},\ t=32s} v_A = \frac{3}{2}\times 32 - 18 = 30\frac{m}{s}$$

$$v_B = a_B t + v_{0B} \xrightarrow[v_{0B}=30\frac{m}{s}]{a_B=-\frac{3}{2}\frac{m}{s^2},\ t=32s} v_B = -\frac{3}{2}\times 32 + 30 = -18\frac{m}{s}$$

گام چهارم: نسبت تندی متحرک B به تندی متحرک A در لحظهٔ $t = 32s$ را حساب می‌کنیم.

$$\frac{|v_B|}{v_A} = \frac{18}{30} = 0/6$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

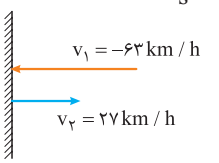
۴۶ توپی که در امتداد یک خط راست حرکت می‌کند، با تندی $۶۳\frac{km}{h}$ به یک دیوار برخورد کرده و در همان امتداد اولیه با تندی $۲۷\frac{km}{h}$ بازمی‌گردد. اگر زمان برخورد توپ با دیوار $۰/۴\,s$ باشد، شتاب متوسط توپ در مدت برخورد با دیوار چند متر بر مربع ثانیه است؟

۱) ۲۲۵ ۲) ۹۰ ۳) ۶۲/۵ ۴) ۲۵

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ‌تشریحی

گام اول: ابتدا تغییر سرعت توپ را برحسب $\frac{km}{h}$ به دست می‌آوریم، سپس این تغییر سرعت را برحسب $\frac{m}{s}$ می‌نویسیم:



$$\Delta v = v_۲ - v_۱ = ۲۷ - (-۶۳) = ۹۰\frac{km}{h}$$

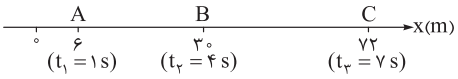
$$\Delta v = ۹۰ \times \frac{۱}{۳/۶} = ۲۵\frac{m}{s}$$

گام دوم: شتاب متوسط توپ در مدت برخورد با دیوار را حساب می‌کنیم:

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t = ۰/۴s]{\Delta v = ۲۵\frac{m}{s}} a_{av} = \frac{۲۵}{۰/۴} = \frac{۲۵۰}{۴} = ۶۲/۵\frac{m}{s^۲}$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۴۷ مسیر حرکت متحرکی که با شتاب ثابت در امتداد محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است و متحرک در لحظه‌های مشخص‌شده از نقاط A، B و C می‌گذرد. سرعت متحرک در لحظهٔ عبور از نقطهٔ B چند متر بر ثانیه است؟



۱) ۴۲

۲) ۱۶

۳) ۱۵

۴) ۱۱

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint معادلهٔ جابه‌جایی ـ زمان متحرک را یک بار برای فاصلهٔ AB و بار دیگر برای فاصلهٔ AC بنویسید و با استفاده از این دو معادله، شتاب متحرک و سرعت آن را در نقطهٔ A حساب کنید. سپس به کمک معادلهٔ سرعت ـ زمان، سرعت متحرک در نقطهٔ B را به دست آورید.

پاسخ تشریحی **گام اول:** معادلهٔ جابه‌جایی ـ زمان متحرک را یک بار برای فاصلهٔ AB و بار دیگر برای فاصلهٔ AC می‌نویسیم:

$$\Delta x_{AB} = \frac{1}{2}at_{AB}^2 + v_A t_{AB} \xrightarrow[t_{AB}=t_2-t_1=4-1=3s]{\Delta x_{AB}=30-6=24m} 24 = \frac{1}{2}a(3)^2 + v_A \times 3 \xrightarrow{\times(-2)} -48 = -9a - 6v_A$$

$$\Delta x_{AC} = \frac{1}{2}at_{AC}^2 + v_A t_{AC} \xrightarrow[t_{AC}=t_3-t_1=7-1=6s]{\Delta x_{AC}=72-6=66m} 66 = \frac{1}{2}a(6)^2 + v_A \times 6 \Rightarrow 66 = 18a + 6v_A$$

گام دوم: به کمک معادلات به‌دست‌آمده در گام اول، مقادیر a و v_A را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases} -48 = -9a - 6v_A \\ 66 = 18a + 6v_A \end{cases} \xrightarrow[\text{دو معادله}]{\text{مجموع}} 18 = 9a \Rightarrow a = 2\frac{m}{s^2}$$

$$66 = 18\times 2 + 6v_A \Rightarrow 30 = 6v_A \Rightarrow v_A = 5\frac{m}{s}$$

گام سوم: اکنون با استفاده از معادلهٔ سرعت ـ زمان، سرعت متحرک در لحظهٔ عبور از نقطهٔ B را حساب می‌کنیم:

$$v_B = at_{AB} + v_A \xrightarrow[v_A=5\frac{m}{s}]{a=2\frac{m}{s^2},\ t_{AB}=3s} v_B = 2\times 3 + 5 = 11\frac{m}{s}$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۴۸ معادلهٔ حرکت متحرکی که روی خط راست حرکت می‌کند، در SI به صورت $x=-\frac{۳}{۲}t^۲+۱۵t-۲۴$ است. تندی متوسط متحرک در مدت‌زمانی که به صورت کندشونده از مبدأ مختصات دور می‌شود، چند متر بر ثانیه است؟

۱) ۱۲ ۲) ۶ ۳) ۹ ۴) ۴/۵

مشاوره در حل بعضی از تست‌های حرکت‌شناسی، رسم نمودار مکان ـ زمان یا نمودار سرعت ـ زمان می‌تواند تا حد زیادی به ما کمک کند.

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint

ابتدا لحظه‌هایی را که متحرک از مبدأ مختصات می‌گذرد، به دست آورید. سپس به کمک ویژگی‌های نمودار مکان ـ زمان در حرکت با شتاب ثابت، محدودهٔ زمانی و مکانی حرکت کندشوندهٔ متحرک را وقتی از مبدأ مختصات دور می‌شود، تعیین کنید و تندی متوسط خواسته‌شده را حساب کنید.

درس Box

۱) نمودار مکان ـ زمان در حرکت با شتاب ثابت:

با توجه به این‌که معادلهٔ مکان ـ زمان، در این نوع حرکت از نوع درجهٔ دو می‌باشد، نمودار آن به صورت قسمتی از یک سهمی است و نقطهٔ شروع آن روی محور x، مکان اولیه $(x_۰)$ را نشان می‌دهد.

اگر گودی این سهمی رو به بالا باشد، شتاب مثبت است: $a>۰$

اگر گودی این سهمی رو به پایین باشد، شتاب منفی است: $a<۰$

۲) شیب خط مماس بر هر نقطه از نمودار مکان ـ زمان، سرعت متحرک در آن لحظه را نشان می‌دهد. مثلاً شیب خط مماس بر ابتدای این نمودار در لحظهٔ $t=۰$ بیانگر سرعت اولیهٔ متحرک $(v_۰)$ است.

۳) در محدوده‌ای از نمودار مکان ـ زمان که بزرگی شیب خط مماس بر نمودار، کاهش می‌یابد، می‌گوییم حرکت کندشونده است. در این محدوده، سرعت و شتاب متحرک، غیرهم‌علامت هستند $(av<۰)$. اما در محدوده‌ای از نمودار که بزرگی شیب خط مماس بر نمودار، افزایش می‌یابد، می‌گوییم حرکت تندشونده است. در این محدوده، سرعت و شتاب متحرک، هم‌علامت هستند $(av>۰)$.

پاسخ تشریحی

گام اول: ابتدا معادلهٔ مکان متحرک را برابر با صفر قرار می‌دهیم تا لحظه‌هایی را که متحرک از مبدأ مختصات می‌گذرد، به دست آوریم:

$$x=۰ \Rightarrow ۰=-\frac{۳}{۲}t^۲+۱۵t-۲۴ \xrightarrow{\times(-\frac{۲}{۳})} t^۲-۱۰t+۱۶=۰ \Rightarrow (t-۲)(t-۸)=۰ \Rightarrow t_۱=۲\,s,\ t_۲=۸\,s$$

گام دوم: با استفاده از معادلهٔ مکان متحرک، شتاب، سرعت اولیه و مکان اولیهٔ آن را حساب می‌کنیم و به کمک آن‌ها، معادلهٔ سرعت ـ زمان متحرک را می‌نویسیم:

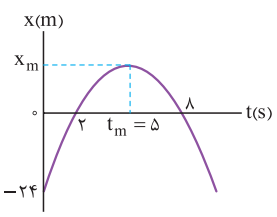
$$\begin{cases} x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰ \\ x=-\frac{۳}{۲}t^۲+۱۵t-۲۴ \end{cases} \Rightarrow \frac{۱}{۲}a=-\frac{۳}{۲} \Rightarrow a=-۳\frac{m}{s^۲},\ v_۰=۱۵\frac{m}{s},\ x_۰=-۲۴m$$

$$v=at+v_۰ \Rightarrow v=-۳t+۱۵$$

گام سوم: لحظه‌ای را که متحرک متوقف می‌شود، پیدا می‌کنیم:

$$v=-۳t+۱۵ \xrightarrow[t=t_m]{v=۰} ۰=-۳t_m+۱۵ \Rightarrow t_m=۵\,s$$

اکنون می‌توانیم نمودار مکان ـ زمان متحرک را رسم کنیم:



در بازهٔ زمانی ۲ s تا ۵ s حرکت متحرک کندشونده است و از مبدأ مختصات دور می‌شود.

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

گام چهارم: مکان متحرک در لحظهٔ $t_m = ۵\ s$ را به دست می‌آوریم:

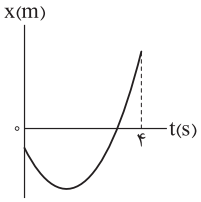
$$x_m = -\frac{۳}{۲}t_m^۲ + ۱۵t_m - ۲۴ \xrightarrow{t_m = ۵s} x_m = -\frac{۳}{۲}(۲۵) + ۱۵\times ۵ - ۲۴ = \frac{۷۵}{۲} - ۲۴ \Rightarrow x_m = ۱۳/۵\ m$$

گام پنجم: تندی متوسط متحرک در بازهٔ زمانی $۲\ s$ تا $۵\ s$ را حساب می‌کنیم:

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{x_m - ۰}{t_m - ۲} = \frac{۱۳/۵}{۵-۲} = ۴/۵\frac{m}{s}$$

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۴۹ نمودار مکان ـ زمان متحرکی به صورت سهمی شکل زیر است. اگر تندی متحرک در لحظهٔ $t = 4s$، ۲ برابر تندی در لحظهٔ شروع حرکتش باشد، حرکت این متحرک چند ثانیه به صورت کندشونده بوده است؟



۱) $\frac{۲}{۳}$

۲) $\frac{۳}{۲}$

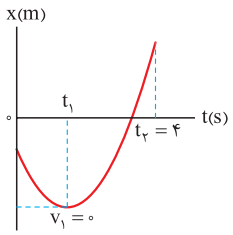
۳) $\frac{۴}{۳}$

۴) $\frac{۳}{۴}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box در حرکت با شتاب ثابت، نمودار مکان ـ زمان به صورت یک سهمی است. وقتی نمودار به رأس این سهمی نزدیک می‌شود، حرکت آن کندشونده و هنگامی که از رأس این سهمی دور می‌شود، حرکت آن تندشونده است.

پاسخ تشریحی اگر رأس سهمی، در لحظهٔ t_1 باشد، با توجه به ثابت‌بودن شتاب در کل حرکت و رابطهٔ $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$، برای دو بازهٔ صفر تا t_1 و صفر تا t_2 می‌توان نوشت:



$$\frac{\Delta v_1}{\Delta t_1} = \frac{\Delta v_2}{\Delta t_2} \Rightarrow \frac{v_1 - v_0}{t_1 - 0} = \frac{v_2 - v_0}{t_2 - 0} \xrightarrow[v_2 = -2v_0 ,\, v_2 > 0]{v_1 = 0 ,\, v_0 < 0} \frac{0 - v_0}{t_1} = \frac{-2v_0 - v_0}{4 - 0} \Rightarrow -\frac{v_0}{t_1} = -\frac{3v_0}{4} \Rightarrow t_1 = \frac{4}{3}\ s$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۵۰ **معادلهٔ مکان ـ زمان متحرکی که بر روی محور x حرکت می‌کند، در SI به صورت $x = ۳t^۲ - ۱۲t + ۱۳$ است. در طی این حرکت، کم‌ترین طول بردار مکان متحرک چند متر است؟**

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲/۵ ۴) ۴

مشاوره اگر پایهٔ ریاضی خوبی داشته باشید، تست‌های حرکت‌شناسی را با تسلط بیشتر و سریع‌تر پاسخ می‌دهید. پس حداقل‌های لازم در این حوزه را بلد باشید.

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box یادآوری ریاضی: در یک معادلهٔ درجه‌دوم مانند $x = At^۲ + Bt + C$، برای تعیین وضعیت ریشه‌های معادله، Δ را تشکیل می‌دهیم:

$$\Delta = B^۲ - ۴AC$$

اگر $\Delta > ۰$ باشد، معادله دارای دو ریشهٔ متفاوت است.

اگر $\Delta = ۰$ باشد، معادله دارای یک ریشهٔ مضاعف است.

اگر $\Delta < ۰$ باشد، معادله ریشه ندارد.

نکته کم‌ترین طول بردار مکان متحرک هنگامی است که مکان متحرک (x) کم‌ترین مقدار خود را داشته باشد.

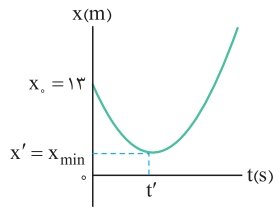
پاسخ تشریحی **گام اول:** با استفاده از شکل کلی معادلهٔ مکان ـ زمان در حرکت با شتاب ثابت، کمیت‌های a، $v_۰$ و $x_۰$ را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t + x_۰ \\ x = ۳t^۲ - ۱۲t + ۱۳ \end{cases} \Rightarrow \frac{۱}{۲}a = ۳ \Rightarrow a = ۶\frac{m}{s^۲} \ , \ v_۰ = -۱۲\frac{m}{s} \ , \ x_۰ = ۱۳\,m$$

گام دوم: با به دست آوردن Δ، وضعیت ریشه‌های معادله را مشخص می‌کنیم:

$$\Delta = B^۲ - ۴AC \xrightarrow[C=۱۳]{A=۳\,,\,B=-۱۲} \Delta = (-۱۲)^۲ - ۴\times۳\times۱۳ \Rightarrow \Delta = ۱۴۴ - ۱۵۶ = -۱۲$$

بنابراین معادلهٔ مکان ـ زمان داده‌شده در این سؤال، ریشه ندارد و محور t را قطع نمی‌کند. اکنون نمودار مکان ـ زمان آن را رسم می‌کنیم:



گام سوم: در لحظهٔ t' (رأس سهمی) سرعت متحرک صفر است. این لحظه را به دست می‌آوریم:

$$v = at + v_۰ \Rightarrow v' = at' + v_۰ \xrightarrow[v'=۰]{a=۶\frac{m}{s^۲}\,,\,v_۰=-۱۲\frac{m}{s}} ۰ = ۶t' - ۱۲ \Rightarrow ۶t' = ۱۲ \Rightarrow t' = ۲\,s$$

گام چهارم: در لحظهٔ $t' = ۲\,s$ متحرک کم‌ترین مکان خود را دارد و طول بردار مکان آن کم‌ترین مقدار خود را پیدا می‌کند. پس:

$$x_{min} = x' = ۳t'^۲ - ۱۲t' + ۱۳ \xrightarrow{t'=۲s} x_{min} = ۳(۲)^۲ - ۱۲(۲) + ۱۳ \Rightarrow x_{min} = ۱۲ - ۲۴ + ۱۳ = ۱\,m$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۵۱ بردار مکان متحرکی که با شتاب ثابت بر روی محور x حرکت می‌کند، در دو لحظهٔ $t_1 = 3\,s$ و $t_2 = 7\,s$ تغییر جهت می‌دهد. اگر متحرک در مکان $x = -20\,m$ تغییر جهت دهد، تندی متوسط آن در ۴ ثانیهٔ دوم حرکتش چند متر بر ثانیه است؟

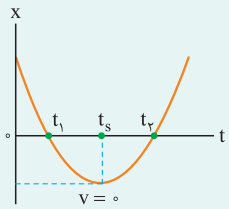
۱) ۲۰ ۲) ۱۰ ۳) ۱۵ ۴) ۱۲/۵

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

۱) در حرکت با شتاب ثابت روی محور x، هرگاه بردار مکان تغییر جهت دهد یعنی $x = 0$ است، اما در لحظه‌ای که متحرک تغییر جهت می‌دهد، سرعت آن صفر است.

۲) در نمودار مکان ـ زمان مربوط به حرکت روی خط راست و با شتاب ثابت، زمان رأس سهمی (t_s) روی محور تقارن سهمی قرار می‌گیرد و داریم:



$$t_s = \frac{t_1 + t_2}{2}$$

۳) در حرکت با شتاب ثابت روی محور x، با داشتن یک نقطه از نمودار مکان ـ زمان و ریشه‌های معادله $(\alpha$ و $\beta)$ می‌توانیم معادلهٔ مکان را بنویسیم.

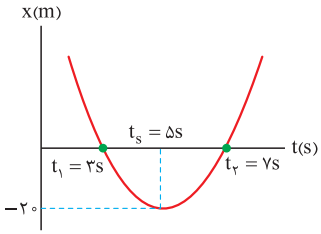
$$x = k(t-\alpha)(t-\beta)$$

با قراردادن مختصات نقطهٔ معلوم در معادلهٔ فوق، k به دست می‌آید و معادلهٔ مکان ـ زمان کامل می‌شود.

پاسخ تشریحی

گام اول: نمودار مکان ـ زمان این متحرک را رسم می‌کنیم. این نمودار در لحظه‌های $t_1 = 3\,s$ و $t_2 = 7\,s$ که بردار مکان متحرک تغییر جهت می‌دهد، محور t را قطع می‌کند. هم‌چنین مکان $x = -20\,m$ رأس سهمی است؛ زیرا متحرک در این مکان تغییر جهت می‌دهد و سرعت آن صفر می‌شود. از طرفی با توجه به قسمت دوم درس‌باکس داریم:

$$t_s = \frac{t_1 + t_2}{2} = \frac{3+7}{2} = 5\,s$$



گام دوم: اکنون می‌توانیم به کمک قسمت سوم درس‌باکس معادلهٔ مکان ـ زمان سهمی را بنویسیم:

$$x = k(t-\alpha)(t-\beta) \xrightarrow[t=t_s=5s \Rightarrow x=-20m]{\alpha=t_1=3s\,,\,\beta=t_2=7s} -20 = k(5-3)(5-7) \Rightarrow -20 = k(-4) \Rightarrow k = 5$$

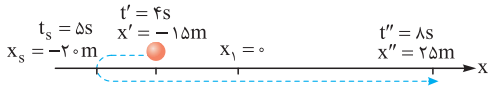
$$\Rightarrow x = 5(t-3)(t-7)$$

گام سوم: چهار ثانیهٔ دوم حرکت یعنی از لحظهٔ $t' = 4\,s$ تا لحظهٔ $t'' = 8\,s$. مکان متحرک در این دو لحظه را حساب می‌کنیم.

$$t' = 4s \Rightarrow x' = 5(4-3)(4-7) = -15m$$

$$t'' = 8s \Rightarrow x'' = 5(8-3)(8-7) = 25\,m$$

با توجه به مسیر حرکت متحرک که در شکل زیر با خط‌چین نشان داده‌شده است، مسافت طی‌شده در چهار ثانیهٔ دوم را به دست می‌آوریم:



$$l = |x_s - x'| + (x'' - x_s) = |-20+15| + (25-(-20)) = 5 + 45 = 50\,m$$

در پایان نیز تندی متوسط در ۴ ثانیهٔ دوم حرکت را پیدا می‌کنیم:

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{50}{8-4} = 12/5\,\frac{m}{s}$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۵۲ متحرکی با شتاب ثابت $-۲\ m/s^۲$ روی خط راست در حال حرکت است. اگر بزرگی جابه‌جایی متحرک در ثانیهٔ دهم و ثانیهٔ یازدهم با هم برابر باشند، بزرگی جابه‌جایی آن در ثانیهٔ پنجم چند متر است؟

۱) ۹ ۲) ۱۱ ۳) ۲۱ ۴) ۷۵

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

۱) در حرکت با شتاب ثابت روی خط راست، اگر بزرگی جابه‌جایی متحرک در دو بازهٔ زمانی یکسان و متوالی $(t'-t_۱)$ و $(t_۲-t')$ برابر باشد، یعنی متحرک در لحظهٔ t' متوقف شده است.

۲) در حرکت با شتاب ثابت a و سرعت اولیهٔ $v_۰$ روی محور x، جابه‌جایی متحرک در ثانیهٔ nام حرکت از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\Delta x_n = (n-۰/۵)a + v_۰$$

پاسخ تشریحی

گام اول: بزرگی جابه‌جایی متحرک در بازهٔ زمانی ۹ s تا ۱۰ s و ۱۰ s تا ۱۱ s یکسان است؛ بنابراین سرعت متحرک در لحظهٔ $t'=۱۰\ s$ برابر با صفر است. بنابراین می‌توانیم به کمک معادلهٔ سرعت ـ زمان، مقدار $v_۰$ را به دست آوریم:

$$v = at + v_۰ \Rightarrow ۰ = -۲\times ۱۰ + v_۰ \Rightarrow v_۰ = ۲۰\,\frac{m}{s}$$

گام دوم: با استفاده از قسمت دوم درس‌باکس، جابه‌جایی متحرک در ثانیهٔ پنجم حرکت را حساب می‌کنیم:

$$\Delta x_n = (n-۰/۵)a + v_۰ \xrightarrow[v_۰=۲۰\,\frac{m}{s}]{n=۵\ ,\ a=-۲\,\frac{m}{s^۲}} \Delta x_۵ = (۵-۰/۵)(-۲) + ۲۰ = -۹ + ۲۰ = ۱۱\ m$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۵۳ **خودرویی با سرعت ثابت در مسیری مستقیم در حال حرکت است که راننده یک سرعت‌گیر را جلوی خود می‌بیند و از لحظه‌ای که در فاصلهٔ ۳۶ متری سرعت‌گیر قرار دارد، با شتاب ثابت ترمز می‌کند. اگر جابه‌جایی خودرو در ثانیه‌های دوم و سوم بعد از ترمز به ترتیب $10/5\ m$ و $7/5\ m$ باشد، کدام موارد درست است؟**

الف) خودرو در ۲ ثانیهٔ قبل از رسیدن به سرعت‌گیر مسافت $6\ m$ را می‌پیماید.

ب) تندی متوسط خودرو از $2\ s$ قبل از ترمزکردن تا لحظهٔ رسیدن به سرعت‌گیر $11\frac{m}{s}$ است.

پ) خودرو $5\ s$ پس از ترمز به سرعت‌گیر می‌رسد.

ت) خودرو با تندی $3\frac{m}{s}$ از روی سرعت‌گیر عبور می‌کند.

۱) الف و پ ۲) الف و ت

۳) ب و پ ۴) ب و ت

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

۱) در یک حرکت کندشونده روی خط راست و با شتاب ثابت a، متحرک در هر ثانیه نسبت به ثانیهٔ قبل خود به اندازهٔ $|a|$ مسافت کم‌تری را می‌پیماید.

۲) در حرکت با شتاب ثابت روی خط راست، سرعت متوسط متحرک در یک بازهٔ زمانی، برابر است با سرعت لحظه‌ای در وسط همین بازهٔ زمانی.

پاسخ تشریحی

گام اول: اندازهٔ اختلاف جابه‌جایی‌های خودرو در ثانیه‌های دوم و سوم بعد از ترمز، به اندازهٔ قدرمطلق شتاب حرکت است.

$$|a| = 10/5 - 7/5 = 3\ \frac{m}{s^2}$$

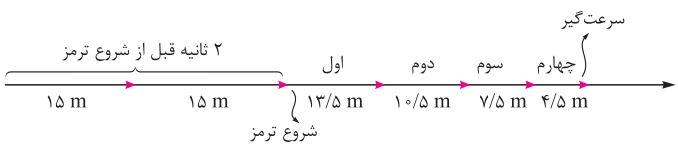
پس جابه‌جایی خودرو در ثانیهٔ اول پس از ترمز برابر است با:

$$\Delta x_1 - \Delta x_2 = |a| \Rightarrow \Delta x_1 - 10/5 = 3 \Rightarrow \Delta x_1 = 13/5\ m$$

حالا باید سرعت ثابتی که خودرو قبل از ترمزکردن داشت را به دست آوریم:

$$\Delta x_1 = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t \Rightarrow 13/5 = \frac{1}{2}\times(-3)\times(1)^2 + 1\times v_0 \Rightarrow v_0 = 15\ m/s$$

قبل از ترمز کردن، خودرو در هر ثانیه، به اندازهٔ $15\ m$ جابه‌جا می‌شود. شکل زیر جابه‌جایی خودرو در مدت $2\ s$ قبل از ترمز تا رسیدن به سرعت‌گیر را نشان می‌دهد:



گام دوم: عبارت‌های داده‌شده را به ترتیب بررسی می‌کنیم:

الف) نادرست. خودرو در۲ ثانیهٔ قبل از رسیدن به سرعت‌گیر مسافت $12m$ را می‌پیماید. $7/5 + 4/5 = 12m$

ب) درست. از $2\ s$ قبل از ترمز تا لحظهٔ رسیدن به سرعت‌گیر، مسافت طی‌شده توسط خودرو را به دست می‌آوریم:

$$l = 15 + 15 + 13/5 + 10/5 + 7/5 + 4/5 = 66\ m$$

تندی متوسط در این بازهٔ زمانی را حساب می‌کنیم:

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{66}{6} = 11\ \frac{m}{s}$$

پ) نادرست. خودرو ۴ ثانیه بعد از شروع ترمز به سرعت‌گیر می‌رسد.

ت) درست. تندی خودرو هنگام عبور از سرعت‌گیر برابر است با:

$$v = at + v_0 = -3\times 4 + 15 = 3\ \frac{m}{s}$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

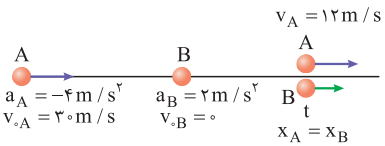
۵۴ خودرویی در مسیر مستقیم با سرعت $۳۰\frac{m}{s}$ در حرکت است که ناگهان راننده، موتورسیکلتی را پیش روی خود می‌بیند که از حال سکون و با شتاب $۲\frac{m}{s^۲}$ در جهت حرکت خودرو شروع به حرکت می‌کند. راننده بلافاصله با شتابی به اندازهٔ $۴\frac{m}{s^۲}$ ترمز می‌گیرد، اما با سرعت $۱۲\frac{m}{s}$ به موتورسیکلت برخورد می‌کند. فاصلهٔ موتورسیکلت از خودرو در لحظه‌ای که راننده شروع به ترمز می‌کند، چند متر است؟

۱) ۱۲۰
۲) ۱۱۴/۷۵
۳) ۷۴/۲۵
۴) ۹۴/۵

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ تشریحی

گام اول: به کمک معادلهٔ سرعت ـ زمان اتومبیل، زمان برخورد اتومبیل (A) به موتورسیکلت (B) را به دست می‌آوریم:



$$v_A = a_A t + v_{۰A} \Rightarrow ۱۲ = -۴t + ۳۰ \Rightarrow ۴t = ۱۸ \Rightarrow t = ۴/۵\ s$$

گام دوم: محل شروع ترمز اتومبیل را به عنوان مبدأ مختصات در نظر گرفته و معادلهٔ مکان ـ زمان هر دو متحرک را می‌نویسیم و با هم برابر قرار می‌دهیم تا لحظهٔ برخورد آن‌ها به دست آید.

$$x_A = x_B \Rightarrow \frac{۱}{۲}a_A t^۲ + v_{۰A}t + x_{۰A} = \frac{۱}{۲}a_B t^۲ + v_{۰B}t + x_{۰B}$$

$$\xrightarrow[a_B=۲\frac{m}{s^۲},\ v_{۰B}=۰]{x_{۰A}=۰,\ a_A=-۴\frac{m}{s^۲},\ v_{۰A}=۳۰\frac{m}{s}} \frac{۱}{۲}(-۴)t^۲ + ۳۰t = \frac{۱}{۲}(۲)t^۲ + x_{۰B}$$

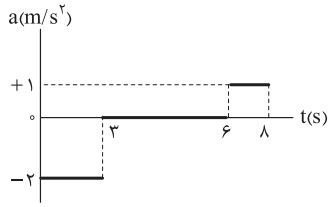
$$\Rightarrow -۲t^۲ + ۳۰t = t^۲ + x_{۰B} \Rightarrow x_{۰B} = -۳t^۲ + ۳۰t$$

$$\xrightarrow{t=۴/۵s} x_{۰B} = -۳(۴/۵)^۲ + ۳۰\times ۴/۵ = -۳(۲۰/۲۵) + ۱۳۵ = ۷۴/۲۵\ m$$

فاصلهٔ اولیهٔ موتورسیکلت از اتومبیل در لحظهٔ شروع ترمز، همین $x_{۰B}$ یعنی $۷۴/۲۵\ m$ است.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۵۵ نمودار شتاب ـ زمان متحرکی که روی خط راست حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. اگر بردار سرعت متحرک در $t_1 = 1\,s$ به صورت $(+2\frac{m}{s})\vec{i}$ باشد، تندی متوسط متحرک در ۸ ثانیهٔ اول حرکت چند متر بر ثانیه است؟



۱) $\frac{۱۵}{۸}$

۲) $\frac{۱۳}{۸}$

۳) $\frac{۹}{۸}$

۴) $\frac{۵}{۸}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

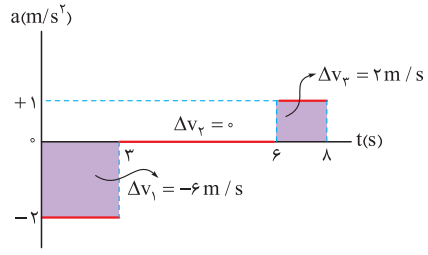
درس Box مساحت سطح محدود بین نمودار شتاب ـ زمان و محور زمان در هر بازهٔ زمانی، برابر با اندازهٔ تغییر سرعت متحرک در آن بازهٔ زمانی است.

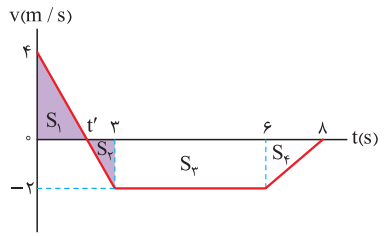
پاسخ تشریحی

گام اول: به کمک معادلهٔ سرعت ـ زمان، سرعت اولیهٔ متحرک (v_0) را به دست می‌آوریم:

$$v = at + v_0 \xrightarrow[a=-2\frac{m}{s^2}]{v=2\frac{m}{s},\ t_1=1\,s} 2 = -2(1) + v_0 \Rightarrow v_0 = 4\frac{m}{s}$$

گام دوم: با استفاده از مساحت سطح محدود بین نمودار شتاب ـ زمان و محور زمان، تغییرات سرعت در هر مرحله را محاسبه کرده و نمودار سرعت ـ زمان متحرک را رسم می کنیم.





به کمک رابطهٔ تالس، لحظهٔ t' را پیدا می‌کنیم:

$$\frac{4}{2} = \frac{t'-0}{3-t'} \Rightarrow t' = 6 - 2t' \Rightarrow 3t' = 6 \Rightarrow t' = 2\,s$$

گام سوم: قدرمطلق مساحت سطح محدود بین نمودار سرعت ـ زمان و محور زمان را که با مسافت طی‌شده برابر است، در بازهٔ زمانی ۸s به دست می‌آوریم:

$$l = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = \frac{2\times4}{2} + \frac{1\times2}{2} + 3\times2 + \frac{2\times2}{2} = 13\,m$$

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{13}{8}\frac{m}{s}$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۵۶ خودرویی با سرعت ثابت $۱۰۸\frac{km}{h}$ در یک مسیر مستقیم در حرکت است. در لحظهٔ گذشتن خودرو از کنار یک خودروی پلیس، خودروی پلیس با شتاب $۵\frac{m}{s^۲}$ شروع به حرکت می‌کند. فاصلهٔ میان دو خودرو در بازهٔ زمانی $۵\,s$ تا $۸\,s$ پس از شروع حرکت پلیس، چند متر تغییر می‌کند؟

۱) صفر
۲) ۲/۵
۳) ۵
۴) ۷/۵

مشاوره این تست براساس یکی از پرسش‌های دوره‌ای آخر فصل ۱ از کتاب فیزیک ۳ طرح شده و تغییراتی در آن دیده می‌شود.

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

معادلهٔ مکان ـ زمان در حرکت با سرعت ثابت به صورت مقابل است: $x = vt + x_۰$

x = مکان متحرک در لحظهٔ t (m)

$x_۰$ = مکان اولیه یا مبدأ حرکت (m)

v = سرعت متحرک $(\frac{m}{s})$

t = زمان (s)

پاسخ تشریحی

گام اول: لحظهٔ عبور خودرو (A) از کنار خودروی پلیس (B) را به عنوان مبدأ حرکت در نظر می‌گیریم و معادلهٔ مکان ـ زمان هر یک از آن‌ها را می‌نویسیم $(x_{۰A} = x_{۰B} = ۰)$

$$v_A = ۱۰۸\frac{km}{h} = \frac{۱۰۸}{۳/۶} = ۳۰\frac{m}{s}$$

$$x_A = v_A t + x_{۰A} \xrightarrow[x_{۰A}=۰]{v_A = ۳۰\frac{m}{s}} x_A = ۳۰t$$

$$x_B = \frac{۱}{۲}a_B t^۲ + v_{۰B}t + x_{۰B} \xrightarrow[a_B = ۵\frac{m}{s^۲},\ x_{۰B}=۰]{v_{۰B}=۰} x_B = \frac{۵}{۲}t^۲$$

گام دوم: جابه‌جایی هر دو متحرک A و B را در بازهٔ زمانی $t = ۵\,s$ تا $t' = ۸\,s$ به دست می‌آوریم و اختلاف آن‌ها را حساب می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} t = ۵\,s \Rightarrow x_A = ۳۰\times ۵ = ۱۵۰\,m \\ t' = ۸\,s \Rightarrow x'_A = ۳۰\times ۸ = ۲۴۰\,m \end{array}\right\} \Rightarrow x'_A - x_A = ۲۴۰ - ۱۵۰ \Rightarrow \Delta x_A = ۹۰\,m$$

$$\left.\begin{array}{l} t = ۵\,s \Rightarrow x_B = \frac{۵}{۲}\times ۵^۲ = ۶۲/۵\,m \\ t' = ۸\,s \Rightarrow x'_B = \frac{۵}{۲}\times ۸^۲ = ۱۶۰\,m \end{array}\right\} \Rightarrow x'_B - x_B = ۱۶۰ - ۶۲/۵ \Rightarrow \Delta x_B = ۹۷/۵\,m$$

$$\Delta x_B - \Delta x_A = ۹۷/۵ - ۹۰ = ۷/۵ m$$

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۵۷ در شرایط خلأ سنگی را از بالای ساختمانی رها می‌کنیم. اگر سنگ در ثانیهٔ آخر حرکت خود ۳۴/۳ متر را طی کند، تندی سنگ در لحظهٔ رسیدن به زمین چند متر بر ثانیه است؟ $(g = 9/8\ m/s^2)$

۱) ۲۱/۶ ۲) ۳۴/۹ ۳) ۳۹/۲ ۴) ۲۸/۹

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint ابتدا کل زمان سقوط که همان لحظهٔ رسیدن سنگ به زمین است را به دست آورید؛ سپس با استفاده از معادلهٔ سرعت ـ زمان، سرعت و تندی سنگ در لحظهٔ رسیدن به زمین را پیدا کنید.

درس Box ۱) وقتی جسمی از ارتفاعی رها شده و سقوط آزاد می‌کند، مسافت طی‌شده در ثانیهٔ آخر حرکت از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$l = \frac{1}{2}g(2t-1)$$

l = مسافت (m)

g = شتاب گرانش در سطح زمین $(\frac{m}{s^2})$

t = کل زمان سقوط (s)

۲) معادلهٔ سرعت ـ زمان در حرکت سقوط آزاد و بدون سرعت اولیه به صورت مقابل است: $v = -gt$

v = سرعت (m/s)

g = شتاب گرانش در سطح زمین $(\frac{m}{s^2})$

t = زمان سقوط (s)

نکته در تمام لحظات سقوط آزاد، تندی متحرک برابر با اندازهٔ سرعت آن است.

پاسخ تشریحی **گام اول:** وقتی سنگ رها می‌شود، یعنی سرعت اولیهٔ آن صفر بوده است $(v_0 = 0)$؛ بنابراین با استفاده از رابطهٔ زیر، کل زمان سقوط آن را به دست می‌آوریم:

$$l = \frac{1}{2}g(2t-1) \xrightarrow[g=9/8\frac{m}{s^2}]{l=34/3m} 34/3 = \frac{1}{2}\times 9/8(2t-1) \Rightarrow 7 = 2t-1 \Rightarrow t = 4\,s$$

گام دوم: اکنون با معلوم‌بودن زمان رسیدن سنگ به زمین، سرعت و تندی آن را در این لحظه پیدا می‌کنیم:

$$v = -gt \xrightarrow[g=9/8\frac{m}{s^2}]{t=4s} v = -9/8\times 4 = -39/2\frac{m}{s} \Rightarrow |v| = 39/2\ \frac{m}{s}$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۵۸ سنگی در شرایط خلأ از ارتفاع H رها می‌شود. اگر سرعت متوسط سنگ در Δt ثانیهٔ اول حرکت $8\ m/s$ و در Δt ثانیهٔ آخر حرکت $40\ m/s$ باشد، H چند متر است؟ $(g = 10\ m/s^2)$

۱) ۱۲۲/۴ ۲) ۱۱۵/۲ ۳) ۱۱۲/۴ ۴) ۱۱۰/۲

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

۱) رابطهٔ سرعت متوسط در حرکت سقوط آزاد، مشابه حرکت روی محور x به دست می‌آید:

$$v_{av} = \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

v_{av} = سرعت متوسط $(\frac{m}{s})$

Δy = جابه‌جایی (m)

Δt = بازهٔ زمانی (s)

۲) وقتی جسمی از ارتفاعی رها شده و سقوط آزاد انجام می‌دهد، جابه‌جایی آن در T ثانیهٔ اول حرکت (Δy) و جابه‌جایی آن در T ثانیهٔ آخر حرکت $(\Delta y')$ از روابط زیر به دست می‌آیند:

$$\Delta y = -\frac{1}{2}gT^2$$

$$\Delta y' = -\frac{1}{2}gT(2t - T)$$

t = کل زمان حرکت (s)

g = شتاب گرانش در سطح زمین $(\frac{m}{s^2})$

$T = \Delta t$ = بازهٔ زمانی (s)

پاسخ‌تشریحی

گام اول: در Δt ثانیهٔ اول حرکت $(\Delta t = T)$ رابطه‌های جابه‌جایی متحرک را می‌نویسیم و از آن‌جا T را به دست می‌آوریم.

$$\begin{cases} \Delta y = -\frac{1}{2}gT^2 \xrightarrow{g=10\frac{m}{s^2}} \Delta y = -5T^2 \\ \Delta y = v_{av} \times \Delta t \xrightarrow[v_{av}=-8\frac{m}{s}]{\Delta t = T} \Delta y = -8T \end{cases} \Rightarrow -5T^2 = -8T \Rightarrow T = \frac{8}{5} = 1/6\ s$$

گام دوم: جابه‌جایی سنگ در Δt ثانیهٔ آخر حرکت را به دست آورده و از آن‌جا کل زمان سقوط را پیدا می‌کنیم:

$$\Delta y' = v'_{av}\Delta t \xrightarrow[\Delta t = 1/6\,s]{v'_{av} = -40\frac{m}{s}} \Delta y' = -40 \times 1/6 = -64\,m$$

$$\Delta y' = -\frac{1}{2}gT(2t - T) \xrightarrow[g=10\frac{m}{s^2},\ T=1/6\,s]{\Delta y' = -64\ m} -64 = -\frac{1}{2} \times 10 \times 1/6(2t - 1/6) \Rightarrow 8 = 2t - 1/6$$

$$\Rightarrow 2t = 9/6 \Rightarrow t = 4/8\ s$$

گام سوم: اکنون می‌توانیم ارتفاع سقوط (H) را حساب کنیم:

$$H = \frac{1}{2}gt^2 \xrightarrow[t=4/8\,s]{g=10\frac{m}{s^2}} H = \frac{1}{2} \times 10\,(4/8)^2 = 115/2\ m$$

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۵۹ جسمی از یک بلندی رها می‌شود و در دو ثانیهٔ آخر سقوطش مسافت ۱۴۰ متر را طی می‌کند. تندی جسم هنگام رسیدن به نیمهٔ مسیر چند متر بر ثانیه است؟ $(g = 10\ N/kg)$

۱) $40\sqrt{2}$ ۲) ۳۰ ۳) $30\sqrt{2}$ ۴) ۲۰

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint ابتدا کل زمان سقوط و ارتفاع بلندی را به دست آورید، سپس با معلوم‌بودن جابه‌جایی در نیمهٔ مسیر، تندی جسم در آن‌جا را به دست آورید.

درس Box رابطهٔ مستقل از زمان برای جسمی که از یک بلندی رها می‌شود تا سقوط آزاد نماید، به صورت زیر است:

$$v^2 = -2g\Delta y$$

v = سرعت $(\frac{m}{s})$

g = شتاب گرانش در سطح زمین $(\frac{m}{s^2})$

Δy = جابه‌جایی (m)

پاسخ تشریحی **گام اول:** با استفاده از جابه‌جایی در دو ثانیهٔ آخر سقوط جسم، زمان سقوط آن را به دست می‌آوریم:

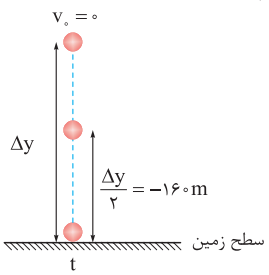
$$\Delta y' = -\frac{1}{2}gT(2t - T) \xrightarrow[T=2s]{g=10\frac{m}{s^2},\ \Delta y'=-140m} -140 = -\frac{1}{2}\times 10\times 2(2t-2) \Rightarrow 14 = 2t - 2$$

$$\Rightarrow 2t = 16 \Rightarrow t = 8\ s$$

گام دوم: کل ارتفاع سقوط (Δy) را حساب می‌کنیم:

$$\Delta y = -\frac{1}{2}gt^2 \xrightarrow[t=8s]{g=10\frac{m}{s^2}} \Delta y = -\frac{1}{2}\times 10\times 8^2 = -320\ m$$

گام سوم: به کمک رابطهٔ مستقل از زمان، سرعت و تندی جسم هنگام رسیدن به نیمهٔ مسیر $(\frac{\Delta y}{2})$ به دست می‌آید:



$$v^2 = -2g(\frac{\Delta y}{2}) \xrightarrow[\frac{\Delta y}{2}=-160\ m]{g=10\frac{m}{s^2}} v^2 = -2\times 10\times(-160) \Rightarrow v^2 = 3200 \Rightarrow v = -\sqrt{3200} = -40\sqrt{2}\frac{m}{s}$$

$$|v| = 40\sqrt{2}\frac{m}{s}$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۶۰ دو جسم A و B با سرعت‌های ثابت بر روی محور x در حرکت‌اند و هر دو هم‌زمان در یک لحظه در مبدأ از کنار هم عبور می‌کنند. اگر معادلهٔ مکان ـ زمان A در SI، $x_A = 3t - 4$ باشد و متحرک B در لحظهٔ $t_1 = 5\,s$ از مکان $x_1 = -22\,m$ عبور کند، معادلهٔ مکان ـ زمان متحرک B در SI کدام است؟

۱) $x_B = 9t - 23$

۲) $x_B = -9t + 23$

۳) $x_B = 6t - 8$

۴) $x_B = -6t + 8$

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

وقتی دو متحرک در لحظه‌ای به هم برسند یا از کنار هم بگذرند، می‌توان در آن لحظه، معادلهٔ مکان آن‌ها را مساوی با هم قرار داد و مجهول مورد نظر را به‌دست آورد.

پاسخ تشریحی

گام اول: لحظه‌ای را که متحرک A از مبدأ مکان عبور می‌کند به‌دست می‌آوریم؛ در این لحظه $x_A = 0$ است.

$$x_A = 3t - 4 \xrightarrow{x_A = 0} 0 = 3t - 4 \Rightarrow t = \frac{4}{3}s$$

گام دوم: متحرک B نیز در لحظهٔ $t = \frac{4}{3}s$ از مبدأ مکان عبور می‌کند و داریم:

$$t = \frac{4}{3}s \Rightarrow x_B = 0$$

اکنون می‌توانیم سرعت متحرک B را به‌دست آوریم:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow v_B = \frac{x_1 - x_B}{t_1 - t} \xrightarrow[t=\frac{4}{3}s\ ,\ t_1=5s]{x_B=0\ ,\ x_1=-22m} v_B = \frac{(-22) - 0}{5 - \frac{4}{3}} = \frac{-22}{\frac{11}{3}} = -6\frac{m}{s}$$

با توجه به معادلهٔ مکان ـ زمان متحرک B $(x_B = v_B t + x_{0B})$ فقط گزینهٔ (۴) می‌تواند درست باشد.

البته می‌توانیم x_{0B} را به صورت زیر، محاسبه کنیم:

$$x_B = v_B t + x_{0B} \xrightarrow{v_B = -6\frac{m}{s}} x_B = -6t + x_{0B}$$

$$\xrightarrow[x_B=0]{t=\frac{4}{3}s} 0 = -6 \times \frac{4}{3} + x_{0B} \Rightarrow x_{0B} = 8m$$

گول نخوری

می‌توانیم لحظهٔ $t_1 = 5s$ را در گزینه‌ها جای‌گذاری کنیم و ببینیم در کدام گزینه، $x_B = -22m$ به‌دست می‌آید. در این صورت، همان ابتدا گزینهٔ (۱) و گزینهٔ (۳) حذف می‌شوند.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۶۱ **جرم موشکی در اثر مصرف سوخت نصف می‌شود. تندی موشک چند درصد و چگونه تغییر کند تا انرژی جنبشی آن ۲۸ درصد کاهش یابد؟**

$K_۲ = K_۱ - \frac{۲۸}{۱۰۰}K_۱ = \frac{۷۲}{۱۰۰}K_۱$

۱) ۲۰، افزایش یابد.

۲) ۲۰، کاهش یابد.

۳) ۲۵، افزایش یابد.

۴) ۲۵، کاهش یابد.

مشاوره انرژی جنبشی از اون مبحث‌های راحته که معمولاً توی دفترچهٔ کنکور یک سؤال داره؛ پس حتماً حواست بهش باشه.

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

انرژی جنبشی جسمی به جرم m که با تندی v حرکت می‌کند، از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$K = \frac{۱}{۲}mv^۲$

(J) انرژی جنبشی — (kg) جرم — (m/s) تندی

طبق رابطهٔ بالا در می‌یابیم انرژی جنبشی یک جسم با جرم و مربع تندی جسم رابطهٔ مستقیم دارد؛ بنابراین می‌توانیم بنوسیم:

$\frac{K_۲}{K_۱} = \frac{m_۲}{m_۱} \times (\frac{v_۲}{v_۱})^۲$

پاسخ تشریحی طبق رابطهٔ مقایسه‌ای انرژی جنبشی داریم:

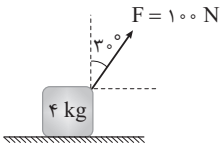
$\frac{K_۲}{K_۱} = \frac{m_۲}{m_۱} \times (\frac{v_۲}{v_۱})^۲ \xrightarrow[K_۲ = K_۱ - \frac{۲۸}{۱۰۰}K_۱ = \frac{۷۲}{۱۰۰}K_۱]{m_۲ = \frac{۱}{۲}m_۱} \frac{۷۲}{۱۰۰} = \frac{۱}{۲} \times (\frac{v_۲}{v_۱})^۲ \Rightarrow (\frac{v_۲}{v_۱})^۲ = \frac{۱۴۴}{۱۰۰} \Rightarrow \frac{v_۲}{v_۱} = \frac{۱۲}{۱۰} = ۱/۲$

درصد تغییر تندی $= \frac{v_۲ - v_۱}{v_۱} \times ۱۰۰ = \frac{۱/۲v_۱ - v_۱}{v_۱} \times ۱۰۰ = +٪۲$

بنابراین تندی موشک ۲۰ درصد افزایش می‌یابد.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۶۲ در شکل زیر، جسمی به جرم ۴ kg با انرژی جنبشی ثابت ۳۲J بر روی سطح افقی در حالت حرکت است. در یک بازهٔ زمانی ۲ثانیه‌ای، کاری که نیروی $\vec{F}$ بر روی جسم انجام می‌دهد، چند ژول است؟



جسم با سرعت ثابت حرکت می‌کند.

۱) $۸۰۰\sqrt{۳}$

۲) ۸۰۰

۳) $۴۰۰\sqrt{۳}$

۴) ۴۰۰

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint اول با داشتن جرم و انرژی جنبشی جسم، تندی جسم رو به دست بیار. بعدش با داشتن تندی و زمان، جابه‌جایی رو حساب کن، در نهایت کار نیروی F رو به دست بیار.

درس Box کار نیروی ثابت F بر روی یک جسم در جابه‌جایی d از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$W = Fd\cos\theta$$

W = کار (J)

F = اندازهٔ نیرو (N)

d = اندازهٔ جابه‌جایی (m)

θ = زاویهٔ بین نیرو و جابه‌جایی

نکته اگر جسمی با سرعت ثابت v حرکت کند، جابه‌جایی آن در بازهٔ زمانی Δt از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$d = v\Delta t$$

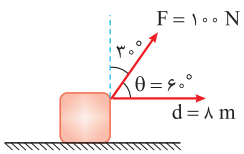
پاسخ تشریحی **گام اول:** تندی جسم را به دست می‌آوریم. طبق رابطهٔ انرژی جنبشی داریم:

$$K = \frac{۱}{۲}mv^۲ \xrightarrow[m=۴\ kg]{K=۳۲\ J} ۳۲ = \frac{۱}{۲}\times ۴ \times v^۲ \Rightarrow v^۲ = ۱۶ \Rightarrow v = ۴\ m/s$$

گام دوم: با داشتن سرعت و مدت زمان، جابه‌جایی جسم را حساب می‌کنیم:

$$d = v\Delta t \xrightarrow[\Delta t=۲\ s]{v=۴\ m/s} d = ۴\times ۲ = ۸m$$

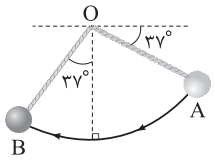
گام سوم: کار نیروی F را به دست می‌آوریم:



$$W = Fd\cos\theta \xrightarrow[\theta=۶۰^\circ]{F=۱۰۰\ N,\ d=۸\ m} W = ۱۰۰\times ۸\times \underbrace{\cos ۶۰^\circ}_{\frac{۱}{۲}} = ۴۰۰\ J$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۶۳ در شکل زیر گلوله‌ای به جرم ۳۰۰ g به انتهای نخ سبکی به طول ۵۰ cm متصل شده و در حال حرکت است. طی جابه‌جایی گلوله از نقطهٔ A تا نقطهٔ B، کار نیروی وزن گلوله چند ژول است؟ ($g = 10\ N/kg$ و $\sin 37^\circ = 0/6$)



$$\begin{cases} \cos 53^\circ = \sin 37^\circ = 0/6 \\ \cos 37^\circ = 0/8 \end{cases}$$

۱) ۳

۲) ۰/۳

۳) −۳

۴) −۰/۳

پاسخ: گزینهٔ ۲

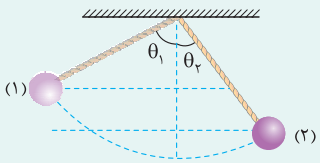
درس Box

کار نیروی وزن از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$W_{mg} = -m\,g\,\Delta h$

m: جرم (kg)، g: شتاب گرانش (m/s^2)، Δh: تغییر ارتفاع ($\Delta h>0$: رو به بالا، $\Delta h<0$: رو به پایین)، W_{mg}: کار نیروی وزن (J)

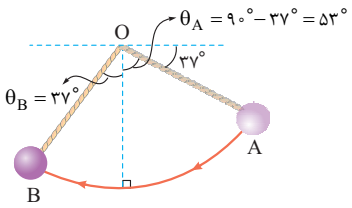
مطابق شکل زیر، کار نیروی وزن بر روی گلولهٔ آونگ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:



$$W_{mg} = mgL(\cos\theta_2 - \cos\theta_1)$$

پاسخ تشریحی

کار نیروی وزن را طبق رابطهٔ زیر حساب می‌کنیم. مطابق شکل زیر داریم:



$$W_{mg} = mgL(\cos\theta_B - \cos\theta_A)$$

$$\xrightarrow[L=50\ cm=0/5\ m]{m=300\ g=0/3kg} W_{mg} = 0/3\times10\times0/5\times0/2 = 0/3\,J$$

($\cos 37^\circ = 0/8$، $\cos 53^\circ = 0/6$)

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۶۴ جسمی به جرم ۲kg از ارتفاع H نسبت به سطح زمین رها می‌شود. اگر انرژی پتانسیل گرانشی جسم، پس از ۱۲m جابه‌جایی، ۲۰ درصد کاهش یابد، انرژی پتانسیل گرانشی جسم در ارتفاع H چند کیلوژول است؟ ($g = ۱۰\ N/kg$ و سطح زمین مبدأ پتانسیل گرانشی است.)

۱) ۱۴/۴ ۲) ۱۲ ۳) ۱/۴۴ ۴) ۱/۲

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

انرژی پتانسیل گرانشی جسمی به جرم m که در ارتفاع h نسبت به مبدأ پتانسیل گرانشی (معمولاً سطح زمین) قرار دارد، از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$U = mgh$$

U: انرژی پتانسیل گرانشی (J)، m: جرم (kg)، g: شتاب گرانشی (m/s^2)، h: ارتفاع از مبدأ پتانسیل گرانشی (m)

پاسخ تشریحی ✔ طبق رابطهٔ انرژی پتانسیل گرانشی می‌توانیم بنویسیم:

$$U = mgh \xrightarrow{\text{m ثابت}} \frac{U_۲}{U_۱} = \frac{h_۲}{h_۱} \xrightarrow[h_۱=H,\ h_۲=H-۱۲m]{U_۲=U_۱-\frac{۲۰}{۱۰۰}U_۱=۰/۸U_۱} ۰/۸ = \frac{H-۱۲}{H} \Rightarrow ۰/۸H = H-۱۲ \Rightarrow H = ۶۰m$$

حالا انرژی پتانسیل گرانشی در ارتفاع H را حساب می‌کنیم:

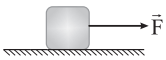
$$U = mgh \xrightarrow[h=H=۶۰\ m]{m=۲\ kg} U = ۲\times۱۰\times۶۰ = ۱۲۰۰\ J \times \frac{۱\ kJ}{۱۰۰۰\ J} = ۱/۲\ kJ$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۶۵ در شکل زیر، جسم ساکنی به جرم $۲۰\,kg$ با نیروی افقی $\vec{F}$ روی سطح افقی با شتاب ثابت $۲m/s^۲$ به طرف راست به حرکت درمی‌آید. اگر نیرویی که سطح افقی به جسم وارد می‌کند $۲۵۰\,N$ باشد، کار نیروی $\vec{F}$ در ثانیهٔ دوم چند ژول است؟ $(g = ۱۰m/s^۲)$

برایند نیروی عمودی سطح و اصطکاک

$t_۱ = ۱s$ تا $t_۲ = ۲s$



۱) ۵۷۰

۲) ۷۶۰

۳) ۸۷۰

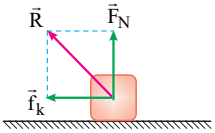
۴) ۱۱۶۰

مشاوره سؤالات ترکیبی دینامیک و کار و انرژی در کنکورهای اخیر جایگاه ویژه‌ای داشتن؛ پس ازشون غافل مشو ای جوان ... .

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ تشریحی

گام اول: نیروی اصطکاک وارد بر جسم را حساب می‌کنیم. طبق رابطهٔ نیروی سطح بر جسم داریم:



$$R = \sqrt{F_N^۲ + f_k^۲} \xrightarrow[R=۲۵۰\,N]{F_N = mg = ۲۰۰\,N} ۲۵۰ = \sqrt{۲۰۰^۲ + f_k^۲}$$

$$\Rightarrow f_k^۲ = ۲۵۰^۲ - ۲۰۰^۲ = ۵۰^۲(۵^۲ - ۴^۲) = ۵۰^۲ \times ۹ \Rightarrow f_k = ۵۰ \times ۳ = ۱۵۰\,N$$

گام دوم: نیروی خالص وارد بر جسم را حساب می‌کنیم:

$$F_{net} = ma \xrightarrow[a=۲\,m/s^۲]{m=۲۰\,kg} F_{net} = ۲۰ \times ۲ = ۴۰\,N$$

گام سوم: نیروی F را به دست می‌آوریم:

$$F_{net} = F - f_k \xrightarrow[f_k=۱۵۰\,N]{F_{net}=۴۰\,N} ۴۰ = F - ۱۵۰ \Rightarrow F = ۱۹۰\,N$$

گام چهارم: جابه‌جایی جسم در ثانیهٔ دوم ($t_۱ = ۱s$ تا $t_۲ = ۲s$) را حساب می‌کنیم:

$$v = at + v_۰ \xrightarrow[a=۲\,m/s^۲]{v_۰=۰} v = ۲t \Rightarrow \begin{cases} v_۱ = ۲(۱) = ۲\,m/s \\ v_۲ = ۲(۲) = ۴\,m/s \end{cases}$$

$$d = \left(\frac{v_۱ + v_۲}{۲}\right)\Delta t \Rightarrow d = \left(\frac{۲+۴}{۲}\right) \times ۱ = ۳\,m$$

گام پنجم: کار نیروی F را در ثانیهٔ دوم، حساب می‌کنیم:

$$W = Fd\cos\theta \xrightarrow[F=۱۹۰\,N,\ d=۳\,m]{\theta=۰ \Rightarrow \cos\theta=۱} W = ۱۹۰ \times ۳ \times ۱ = ۵۷۰\,J$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۶۶ **در شکل زیر، در مبدأ زمان، جسمی به جرم ۲kg روی سطح بدون اصطکاکی در امتداد سطح از نقطهٔ A با تندی ۵ m/s پرتاب می‌شود. از مبدأ زمان تا لحظه‌ای که تندی جسم به ۲ m/s می‌رسد، انرژی پتانسیل گرانشی آن چند ژول و چگونه تغییر می‌کند؟**



۱) ۲۱، کاهش می‌یابد.

۲) ۲۱، افزایش می‌یابد.

۳) ۲۹، کاهش می‌یابد.

۴) ۲۹، افزایش می‌یابد.

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

در شرایطی که نیروهای اتلافی (اصطکاک، مقاومت هوا و ...) نداشته باشیم، طبق اصل پایستگی انرژی مکانیکی، تغییر انرژی پتانسیل برابر است با منفی تغییر انرژی جنبشی و داریم:

$$\Delta U = -\Delta K$$

پاسخ تشریحی

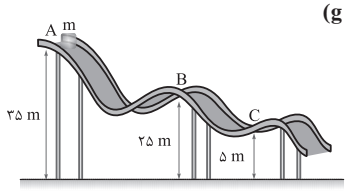
طبق اصل پایستگی انرژی مکانیکی داریم:

$$\Delta U = -\Delta K = -\frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) \xrightarrow[v_2=2\,m/s]{m=2\,kg\ ,\ v_1=5\,m/s} \Delta U = -\frac{1}{2}\times 2(2^2 - 5^2) \Rightarrow \Delta U = -(4-25) = 21\,J$$

بنابراین انرژی پتانسیل گرانشی، ۲۱ J افزایش می‌یابد.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۶۷ در شکل زیر، جسمی روی سطح بدون اصطکاکی در حال حرکت است. اگر تندی جسم در نقطهٔ B، ۳ برابر تندی آن در نقطهٔ A باشد، تندی جسم در نقطهٔ C چند متر بر ثانیه است؟ $(g = ۱۰\ N/kg)$



۱) ۵

۲) ۱۵

۳) ۲۵

۴) ۳۵

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

طبق قضیهٔ کار ـ انرژی جنبشی، کار کل انجام‌شده بر روی جسم برابر است با تغییر انرژی جنبشی؛ بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$W_t = \Delta K = \frac{۱}{۲} m (v_۲^۲ - v_۱^۲)$$

W_t: کار کل (J)، ΔK: تغییر انرژی جنبشی (J)، m: جرم (kg)، $v_۲$: تندی نهایی (m/s)، $v_۱$: تندی اولیه (m/s)

اگر در حرکت یک جسم، کار کل برابر با کار نیروی وزن باشد، داریم:

$$\frac{۱}{۲}mv^۲ - \frac{۱}{۲}mv'^۲ = mgh \Rightarrow v^۲ - v'^۲ = ۲gh \Rightarrow v^۲ = ۲gh + v'^۲ \Rightarrow v = \sqrt{۲gh + v'^۲}$$

v: تندی جسم در نقطهٔ پایین (m/s)

v': تندی جسم در نقطهٔ بالا (m/s)

h: اختلاف ارتفاع دو نقطه (m)

g: شتاب گرانش $(m/s^۲)$

پاسخ تشریحی ✔ طبق نکته‌ای که در درس‌باکس آوردیم، می‌توانیم بنویسیم:

$$\text{مسیر AB}: W_t = W_{mg} \Rightarrow v = \sqrt{۲gh + v'^۲} \xrightarrow[v'=v_A\ ,\ h=۳۵-۲۵=۱۰\ m]{v=v_B=۳v_A} ۳v_A = \sqrt{(۲\times۱۰\times۱۰) + v_A^۲}$$

$$\Rightarrow ۹v_A^۲ = ۲۰۰ + v_A^۲ \Rightarrow ۸v_A^۲ = ۲۰۰ \Rightarrow v_A^۲ = ۲۵ \Rightarrow v_A = ۵\ m/s$$

$$\text{مسیر AC}: W_t = W_{mg} \Rightarrow v = \sqrt{۲gh + v'^۲} \xrightarrow[v'=v_A=۵\ m/s\ ,\ h=۳۵-۵=۳۰\ m]{v=v_C} v_C = \sqrt{(۲\times۱۰\times۳۰) + ۵^۲}$$

$$\Rightarrow v_C = \sqrt{۶۲۵} = ۲۵\ m/s$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۶۸ شخصی با اعمال نیروی افقی، ثابت و یکسان $\vec{F}$ یک بار ارابهٔ شکل (۱) و بار دیگر ارابه‌های شکل (۲) را روی سطح افقی بدون اصطکاکی می‌کشد تا تندی ارابه‌ها از صفر به مقدار معین v برسد. دربارهٔ کار انجام‌شده توسط شخص (W) و مسافت طی‌شده توسط ارابه‌ها (d) در شکل‌های (۱) و (۲)، کدام درست است؟ (ارابه‌ها مشابه‌اند.)



(۱) (۲)

۱) $d_۱ = ۲d_۲ \,،\, W_۲ = W_۱$

۲) $d_۱ = ۲d_۲ \,،\, W_۲ = ۲W_۱$

۳) $d_۲ = ۲d_۱ \,،\, W_۲ = W_۱$

۴) $d_۲ = ۲d_۱ \,،\, W_۲ = ۲W_۱$

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ تشریحی

گام اول: کار انجام‌شده توسط شخص را در دو حالت مقایسه می‌کنیم. طبق قضیهٔ کار ـ انرژی جنبشی داریم:

$$W_{\text{شخص}} = W_t = \frac{۱}{۲}m(v^۲ - v_۰^۲) \xrightarrow{v_۰=۰} W_{\text{شخص}} = \frac{۱}{۲}mv^۲$$

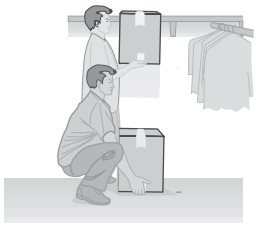
$$\Rightarrow \frac{W_۲}{W_۱} = \frac{m_۲}{m_۱} \times (\frac{v_۲}{v_۱})^۲ \xrightarrow[v_۲=v_۱=v]{m_۲=۲m_۱} \frac{W_۲}{W_۱} = ۲ \times (۱)^۲ = ۲ \Rightarrow W_۲ = ۲W_۱$$

گام دوم: جابه‌جایی را در دو حالت مقایسه می‌کنیم:

$$W = Fd \Rightarrow \frac{W_۲}{W_۱} = \frac{F_۲}{F_۱} \times \frac{d_۲}{d_۱} \xrightarrow[F_۲=F_۱]{W_۲=۲W_۱} ۲ = ۱ \times \frac{d_۲}{d_۱} \Rightarrow \frac{d_۲}{d_۱} = ۲ \Rightarrow d_۲ = ۲d_۱$$

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۶۹ در شکل زیر شخصی با واردکردن نیروی قائم و ثابت ۶۰ N، جعبه‌ای به جرم ۵ kg را از روی سطح زمین و از حال سکون در امتداد قائم جابه‌جا می‌کند، تندی جعبه در ارتفاع ۱/۵ m از سطح زمین، چند متر بر ثانیه است؟ $(g = ۱۰\ N/kg)$



۱) $\sqrt{۳}$

۲) $\sqrt{۶}$

۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۴) $\frac{\sqrt{۶}}{۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

کار کل برابر است با کار نیروی خالص و از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$W_t = F_{net} d \cos\theta$$

W_t = کار کل (J)

F_{net} = نیروی خالص (N)

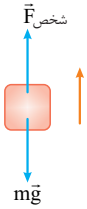
d = جابه‌جایی (m)

θ = زاویهٔ بین $\vec{F}_{net}$ و $\vec{d}$

نکته اگر جسمی از حال سکون شروع به حرکت کند، جابه‌جایی جسم با نیروی خالص وارد بر جسم هم‌جهت است.

پاسخ تشریحی

گام اول: نیروی خالص وارد بر جعبه را حساب می‌کنیم:



$$F_{net} = F_{شخص} - mg \xrightarrow[m=۵\ kg]{F_{شخص}=۶۰\ N} F_{net} = ۶۰ - ۵۰ = ۱۰\ N$$

گام دوم: کار کل را در ارتفاع ۱/۵ m (پس از ۱/۵ متر جابه‌جایی) حساب می‌کنیم:

$$W_t = F_{net} d \cos\theta \xrightarrow[d=۱/۵\ m,\ \cos\theta=۱]{F_{net}=۱۰\ N} W_t = ۱۰ \times ۱/۵ \times ۱ = ۱۵\ J$$

گام سوم: تندی جسم را در ارتفاع ۱/۵ m طبق قضیهٔ کار ـ انرژی جنبشی حساب می‌کنیم:

$$W_t = \frac{۱}{۲} m (v^۲ - v_۰^۲) \xrightarrow[m=۵\ kg,\ v_۰=۰]{W_t=۱۵\ J} ۱۵ = \frac{۱}{۲} \times ۵ (v^۲ - ۰) \Rightarrow v^۲ = ۶ \Rightarrow v = \sqrt{۶}\ m/s$$

یه جور دیگه اگر بخواهیم سؤال را با مفاهیم فصل دینامیک پاسخ دهیم، داریم:

ابتدا نیروی خالص را حساب می‌کنیم:

$$F_{net} = F - mg = ۶۰ - ۵۰ = ۱۰\ N$$

سپس شتاب را به دست می‌آوریم:

$$a = \frac{F_{net}}{m} \Rightarrow a = \frac{۱۰}{۵} = ۲\ m/s^۲$$

در نهایت تندی جسم را پس از ۱/۵ متر جابه‌جایی به دست می‌آوریم:

$$v^۲ - v_۰^۲ = ۲ad \xrightarrow[d=۱/۵\ m]{v_۰=۰,\ a=۲\ m/s^۲} v^۲ - ۰ = ۲ \times ۲ \times ۱/۵ \Rightarrow v = \sqrt{۶}\ m/s$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۷۰ **چتربازی به جرم کل ۱۰۰ kg از بالونی در ارتفاع ۵۰۰ m از سطح زمین با سرعتی به بزرگی ۱ m/s به بیرون بالون می‌پرد. اگر او با سرعتی به بزرگی ۵ m/s به زمین برسد، در طول این مسیر اندازهٔ نیروی مقاومت هوای وارد بر چترباز با فرض ثابت‌بودن، چند نیوتون است؟ ($g = ۱۰\ m/s^۲$)**

۱) ۹۹۵/۲ ۲) ۹۹۷/۶

۳) ۱۰۰۲/۴ ۴) ۱۰۰۴/۸

پاسخ: گزینهٔ ۲

گام اول: کار نیروی وزن را حساب می‌کنیم:

$$W_{mg} = -mg\Delta h \xrightarrow[\Delta h=-۵۰۰\,m]{m=۱۰۰\,kg} W_{mg} = -۱۰۰\times۱۰\times(-۵۰۰) = ۵\times۱۰^۵\,J$$

گام دوم: کار کل را به دست می‌آوریم. طبق قضیهٔ کار ـ انرژی جنبشی داریم:

$$W_t = \frac{۱}{۲}m(v_۲^۲ - v_۱^۲) \xrightarrow[v_۱=۱\,m/s\,,\,v_۲=۵\,m/s]{m=۱۰۰\,kg} W_t = \frac{۱}{۲}\times۱۰۰\underbrace{(۵^۲ - ۱^۲)}_{۲۴} = ۱۲۰۰\,J$$

گام سوم: کار نیروی مقاومت هوا را به دست می‌آوریم:

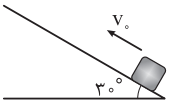
$$W_t = W_{mg} + W_{f_D} \xrightarrow[W_{mg}=۵\times۱۰^۵\,J]{W_t=۱۲۰۰\,J} ۱۲۰۰ = ۵\times۱۰^۵ + W_{f_D} \Rightarrow W_{f_D} = ۱۲۰۰ - ۵۰۰۰۰۰ = -۴۹۸۸۰۰\,J$$

گام چهارم: اندازهٔ نیروی مقاومت هوا را به دست می‌آوریم:

$$W_{f_D} = f_D d\cos\theta \xrightarrow[\cos ۱۸۰^\circ=-۱]{\theta=۱۸۰^\circ} W_{f_D} = -f_D\times d \Rightarrow -۴۹۸۸۰۰ = -f_D\times۵۰۰ \Rightarrow f_D = ۹۹۷/۶\,N$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۷۱ در شکل زیر، جسمی با سرعت اولیهٔ $۶\ m/s$ موازی با سطح رو به بالا پرتاب می‌شود. این جسم $۹۰\ cm$ روی سطح جابه‌جا شده و می‌ایستد. چند درصد انرژی جنبشی اولیهٔ جسم توسط کار نیروی اصطکاک تلف شده است؟ $(g = ۱۰\ N/kg)$



۱) ۳۶

۲) ۶۴

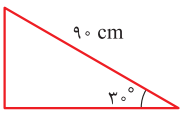
۳) ۵۰

۴) ۷۵

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ تشریحی

گام اول: کار نیروی وزن را در این جابه‌جایی حساب می‌کنیم. مطابق شکل زیر داریم:



$$\Delta h = ۹۰ \times \underbrace{\sin ۳۰^\circ}_{\frac{۱}{۲}} = ۴۵\ cm$$

$$W_{mg} = -mg\Delta h \xrightarrow{\Delta h = ۴۵\ cm = ۰/۴۵\ m} W_{mg} = -m \times ۱۰ \times ۰/۴۵ \Rightarrow W_{mg} = -۴/۵\ m$$

گام دوم: کار کل را طبق قضیهٔ کار ـ انرژی جنبشی حساب می‌کنیم:

$$W_t = \frac{۱}{۲}m(v_۲^۲ - v_۱^۲) \xrightarrow{v_۱ = ۶\ m/s\ ,\ v_۲ = ۰} W_t = \frac{۱}{۲}m(۰^۲ - ۶^۲) = -۱۸\ m$$

گام سوم: کار نیروی اصطکاک را حساب می‌کنیم:

$$W_t = W_{mg} + W_{f_k} \xrightarrow[W_{mg} = -۴/۵\ m]{W_t = -۱۸\ m} -۱۸m = -۴/۵\ m + W_{f_k} \Rightarrow W_{f_k} = -۱۳/۵\ m$$

گام چهارم: انرژی جنبشی اولیهٔ جسم را به دست می‌آوریم:

$$K_۱ = \frac{۱}{۲}mv_۱^۲ \xrightarrow{v_۱ = ۶\ m/s} K_۱ = \frac{۱}{۲} \times m \times (۶)^۲ = ۱۸\ m$$

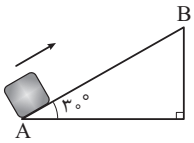
گام پنجم: درصد اتلاف انرژی را به دست می‌آوریم:

$$\frac{|W_{f_k}|}{K_۱} \times ۱۰۰ = \frac{۱۳/۵\ m}{۱۸\ m} \times ۱۰۰ = \frac{۳}{۴} \times ۱۰۰ = ٪۷۵$$

بنابراین ۷۵ درصد انرژی جنبشی اولیه توسط کار نیروی اصطکاک تلف می‌شود.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۷۲ در شکل زیر، بسته‌ای به جرم $2\ kg$ را از پایین سطح شیبدار با تندی $6\ m/s$ به بالا پرتاب می‌کنیم. این بسته تا ارتفاع معینی بالا رفته و سپس دوباره به محل اولیهٔ خود بر می‌گردد. اگر در این حرکت انرژی درونی جسم و محیط $20\ J$ افزایش یافته باشد، مسافت کلی که بسته طی می‌کند، چند متر است؟ ($g = 10\ m/s^2$ ، $\sin 37^\circ = 0/6$ و اندازهٔ نیروی اصطکاک جنبشی در مسیرهای رفت و برگشت یکسان است.)



۱) $5/2$
۲) $7/2$
۳) $2/6$
۴) $3/6$

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ تشریحی

گام اول: کار نیروی اصطکاک در مسیر رفت را به دست می‌آوریم. با توجه به این‌که در مسیر رفت و برگشت انرژی درونی جسم و محیط $20\ J$ افزایش یافته است، در می‌یابیم در مسیر رفت (نصف مسافت کل) انرژی درونی جسم و محیط $10\ J$ افزایش می‌یابد که ناشی از کار نیروی اصطکاک است؛ بنابراین کار نیروی اصطکاک در مسیر رفت برابر است با:

$$W_{f_k} = -10\ J$$

گام دوم: کار کل در مسیر رفت را به دست می‌آوریم. طبق قضیهٔ کار ـ انرژی جنبشی داریم:

$$W_t = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) \xrightarrow[v_2=0]{m=2\ kg\ ,\ v_1=6\ m/s} W_t = \frac{1}{2}\times 2\times(0^2 - 6^2) = -36\ J$$

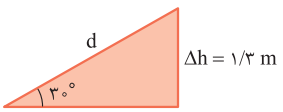
گام سوم: کار نیروی وزن در مسیر رفت را حساب می‌کنیم:

$$W_t = W_{mg} + W_{f_k} \xrightarrow[W_{f_k}=-10\ J]{W_t=-36\ J} -36 = W_{mg} - 10 \Rightarrow W_{mg} = -26J$$

گام چهارم: ارتفاع نقطهٔ توقف از نقطهٔ شروع حرکت را به دست می‌آوریم:

$$W_{mg} = -mg\Delta h \xrightarrow[m=2\ kg]{W_{mg}=-26\ J} -26 = -2\times 10\times \Delta h \Rightarrow \Delta h = 1/3\ m$$

گام پنجم: مسافت رفت و پس از آن مسافت کل (رفت و برگشت) را حساب می‌کنیم:



$$\sin 30^\circ = \frac{\Delta h}{d} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1/3}{d} \Rightarrow d = 2/6\ m$$

$$\text{رفت و برگشت} = 2d = 2\times 2/6 = 5/2\ m$$

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۷۳ خودرویی به جرم $1500\ kg$ در مسیری افقی، در مدت $10\ s$ تندی خود را از $18\ km/h$ به $90\ km/h$ می‌رساند. در طی این حرکت توان متوسط خودرو حداقل چند اسب بخار است؟ $(1\ hp = 750\ W)$

۱) ۴/۵
۲) ۶
۳) ۴۵
۴) ۶۰

برای حالتی که نیروهای اتلافی (اصطکاک و ...) نداشته باشیم.

$$90\ km/h \times \frac{1\ m/s}{3/6\ km/h} = 25\ m/s$$

$$18\ km/h \times \frac{1\ m/s}{3/6\ km/h} = 5\ m/s$$

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

توان یک وسیله برابر است با آهنگ انجام کار آن و توان متوسط از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$P_{av} = \frac{W}{\Delta t}$$

W: کار (J)، Δt: مدت زمان انجام کار (s)، P_{av}: توان متوسط (W)

نکته

از آن‌جا که حداقل توان متوسط خودرو خواسته شده، منظور حالتی است که نیروهای اتلافی نداریم.

پاسخ تشریحی

گام اول: حداقل کاری که خودرو انجام می‌دهد (با فرض این‌که اصطکاک نداشته باشیم) را به دست می‌آوریم. طبق قضیهٔ کار ـ انرژی جنبشی داریم:

$$W_{\text{خودرو}} = W_t = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) \xrightarrow[v_2 = 90\ km/h = \frac{90}{3/6}\ m/s = 25\ m/s]{m = 1500\ kg,\ v_1 = 18\ km/h = \frac{18}{3/6}\ m/s = 5\ m/s} W_{\text{خودرو}} = \frac{1}{2} \times 1500 (25^2 - 5^2) = 750 \times 600\ J$$

گام دوم: حداقل توان متوسط خودرو را حساب می‌کنیم:

$$P_{av} = \frac{W}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t = 10\ s]{W = 750 \times 600\ J} P_{av} = \frac{750 \times 600}{10} = 750 \times 60\ W \times \frac{1\ hp}{750\ W} = 60\ hp$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۷۴ پمپی با توان ورودی ۸ kW و بازده ۷۵ درصد، بنزین را از مخزنی در عمق ۹۰ متری سطح زمین تا دهانهٔ مخزن در سطح زمین، با تندی ثابت بالا می‌آورد. اگر این پمپ ۵ min کار کند، چند متر مکعب بنزین از دهانهٔ مخزن خارج می‌کند؟ ($g = ۱۰ \frac{N}{kg}$ و $\rho_{\text{بنزین}} = ۰/۶۴ \frac{g}{cm^3}$)

تغییر انرژی جنبشی بنزین صفر است.

۱) ۴
۲) ۲
۳) ۶/۲۵
۴) ۳/۱۲۵

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

کار مفید پمپ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$W_{\text{پمپ}} = \Delta K + \Delta U$$

ΔK: تغییر انرژی جنبشی مایع — ΔU: تغییر انرژی پتانسیل گرانشی مایع

بازده از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$Ra = \frac{P_{\text{مفید یا خروجی}}}{P_{\text{ورودی یا کل}}} = \frac{W_{\text{مفید}}}{W_{\text{کل}}}$$

پاسخ تشریحی ✔

گام اول: توان مفید پمپ را حساب می‌کنیم:

$$Ra = \frac{P_{\text{مفید}}}{P_{\text{ورودی}}} \xrightarrow[P_{\text{ورودی}}=۸\,kW]{Ra=\frac{۷۵}{۱۰۰}=\frac{۳}{۴}} \frac{۳}{۴} = \frac{P_{\text{مفید}}}{۸} \Rightarrow P_{\text{مفید}} = ۶kW$$

گام دوم: کار مفید پمپ را حساب می‌کنیم:

$$P = \frac{W}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t=۵\,min=۳۰۰\,s]{P=۶\,kW=۶۰۰۰\,W} ۶۰۰۰ = \frac{W}{۳۰۰} \Rightarrow W = ۶۰۰۰ \times ۳۰۰ = ۱۸ \times ۱۰^۵\,J$$

گام سوم: جرم بنزین خروجی در مدت ۵ دقیقه را حساب می‌کنیم:

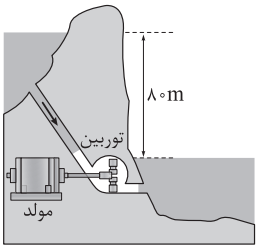
$$W_{\text{پمپ}} = \Delta K + \Delta U \xrightarrow{\Delta K = ۰,\ \Delta U = mg\Delta h} W_{\text{پمپ}} = mg\Delta h \xrightarrow[\Delta h=۹۰\,m]{W_{\text{پمپ}}=۱۸\times۱۰^۵\,J} ۱۸ \times ۱۰^۵ = m \times ۱۰ \times ۹۰ \Rightarrow m = ۲ \times ۱۰^۳\,kg$$

گام چهارم: حجم بنزین خروجی را حساب می‌کنیم:

$$\rho = \frac{m}{V} \xrightarrow[m=۲\times۱۰^۳\,kg]{\rho=۰/۶۴\,g/cm^3=۶۴۰\,kg/m^3} ۶۴۰ = \frac{۲ \times ۱۰^۳}{V} \Rightarrow V = \frac{۲۰۰۰}{۶۴۰} = ۳/۱۲۵\,m^3$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۷۵ در شکل زیر، آب ذخیره‌شده در پشت سد یک نیروگاه برق‌آبی، از ارتفاع ۸۰متری روی پره‌های توربینی می‌ریزد و آن را می‌چرخاند تا با چرخش آن، انرژی الکتریکی تولید شود. اگر ۹۰ درصد کار نیروی گرانشی به انرژی الکتریکی تبدیل شود، باید در هر دقیقه چند کیلوگرم آب روی توربین ریخته شود تا توان الکتریکی خروجی مولد نیروگاه به ۱۵۰ MW برسد؟ $(g = ۱۰\ m/s^۲)$



۱) $۱/۲۵\times۱۰^۶$

۲) $۱/۲۵\times۱۰^۷$

۳) $۲/۵\times۱۰^۶$

۴) $۲/۵\times۱۰^۷$

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ تشریحی

گام اول: انرژی الکتریکی خروجی در مدت یک دقیقه را حساب می‌کنیم:

$$P_{\text{خروجی}} = \frac{E_{\text{خروجی}}}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t = ۱\,min = ۶۰\,s]{P_{\text{خروجی}} = ۱۵۰\,MW = ۱۵۰\times۱۰^۶\,W} ۱۵۰\times۱۰^۶ = \frac{E_{\text{خروجی}}}{۶۰}$$

$$\Rightarrow E_{\text{خروجی}} = ۱۵۰\times۱۰^۶ \times ۶۰ = ۹\times۱۰^۹\,J$$

گام دوم: انرژی ورودی (کار نیروی گرانشی) مولد نیروگاه را حساب می‌کنیم:

$$Ra = \frac{E_{\text{خروجی}}}{E_{\text{ورودی}}} \xrightarrow[E_{\text{خروجی}} = ۹\times۱۰^۹\,J]{Ra = \frac{۹۰}{۱۰۰} = \frac{۹}{۱۰}} \frac{۹}{۱۰} = \frac{۹\times۱۰^۹}{E_{\text{ورودی}}} \Rightarrow E_{\text{ورودی}} = ۱۰^{۱۰}\,J \Rightarrow W_{mg} = E_{\text{ورودی}} = ۱۰^{۱۰}\,J$$

گام سوم: جرم آبی که در مدت یک دقیقه روی توربین می‌ریزد را حساب می‌کنیم:

$$W_{mg} = -mg\Delta h \xrightarrow[\Delta h = -۸۰\,m]{W_{mg} = ۱۰^{۱۰}\,J} ۱۰^{۱۰} = -m\times۱۰\times(-۸۰) \Rightarrow m = \frac{۱۰^{۱۰}}{۸۰۰} = \frac{۱۰۰۰}{۸۰۰}\times۱۰^۷ = ۱/۲۵\times۱۰^۷\,kg$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۷۶ کدام مورد درست است؟

۱) با استفاده از صابون آنزیم‌دار، نمی‌توان درصد لکه‌های چربی باقی‌مانده روی پارچه را به صفر رساند.

۲) از صابون طبیعی معروف به صابون مراغه، در تنور نان سنگک برای چرب‌کردن سطح سنگ‌ها استفاده می‌شود.

۳) شمار اتم‌های بخش قطبی پاک‌کننده‌های غیرصابونی از بخش قطبی پاک‌کننده‌های صابونی، یک واحد بیشتر است.

۴) مولکول‌های گازی که در اثر واکنش پودر آلومینیم و سدیم هیدروکسید با آب تولید می‌شود، دارای دو عنصر هستند.

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ تشریحی ✔ بخش قطبی پاک‌کننده‌های غیرصابونی گروه $-SO_3^-$ و بخش قطبی پاک‌کننده‌های صابونی گروه $-COO^-$ است؛ بنابراین شمار اتم‌های بخش قطبی پاک‌کننده‌های غیرصابونی $۴ - ۳ = ۱$ واحد بیشتر است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): با افزایش دما و استفاده از صابون‌های آنزیم‌دار، می‌توان درصد لکه‌های باقی‌مانده را بر روی پارچه‌هایی که الیاف آن‌ها گروه‌های قطبی قابل توجهی دارند، به صفر رساند. برای مثال درصد لکه‌های چربی باقی‌مانده روی پارچه‌های نخی، پس از استفاده از صابون آنزیم‌دار در دمای $۴۰^\circ C$، به صفر می‌رسد.

گزینهٔ (۲): از صابون مراغه به دلیل خاصیت بازی مناسب، برای موهای چرب استفاده می‌شود. در تنور نان سنگک از نوعی صابون سنتی (متفاوت با صابون مراغه) استفاده می شود.

گزینهٔ (۴): گازی که در اثر واکنش پودر آلومینیم (Al) و سدیم هیدروکسید $(NaOH)$ با آب تولید می‌شود، گاز هیدروژن (H_2) است که مولکول‌های آن دارای دو **اتم** است، نه دو عنصر!

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۷۷ کدام موارد از عبارت‌های زیر درست است؟

الف) ذره‌های سازندهٔ یک نمونه ژله، از ذره‌های سازندهٔ مخلوط اتیلن‌گلیکول در آب بزرگ‌تر است.

ب) نمک اسید چرب دومین و سومین عنصرهای گروه دوم جدول تناوبی، همانند مس (II) سولفات در آب نامحلول هستند.

پ) صابون‌های جامد برخلاف صابون‌های مایع، نمی‌توانند فاقد عنصر فلزی باشند.

ت) به طور کلی، سرعت افزایش شاخص امید به زندگی در سال‌های اخیر، در نواحی برخوردار از نواحی کم‌برخوردار بیشتر است.

۱) الف ـ پ
۲) ب ـ پ
۳) الف ـ ت
۴) ب ـ ت

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ تشریحی

عبارت‌های «الف» و «پ» درست‌اند.

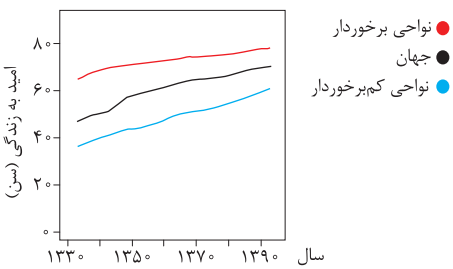
بررسی همهٔ عبارت‌ها:

الف) ژله و مخلوط اتیلن‌گلیکول در آب، به ترتیب کلوئید و محلول هستند. با توجه به این‌که ذره‌های سازندهٔ کلوئیدها، توده‌های مولکولی و ذره‌های سازندهٔ محلول‌ها، مولکول‌ها و یون‌ها هستند، اندازهٔ ذره‌های سازندهٔ ژله بزرگ‌تر است.

ب) دومین و سومین عنصرهای گروه دوم جدول تناوبی، منیزیم و کلسیم هستند. نمک‌های اسید چرب این دو عنصر یعنی $(RCOO)_2Mg$ و $(RCOO)_2Ca$ در آب نامحلول هستند، در حالی که مس (II) سولفات ($CuSO_4$) در آب محلول است.

پ) صابون‌های جامد، نمک سدیم اسید چرب ($RCOONa$) هستند، در حالی که صابون‌های مایع، نمک پتاسیم اسید چرب ($RCOOK$) یا نمک آمونیوم اسید چرب ($RCOONH_4$) هستند؛ بنابراین صابون‌های جامد، به یقین دارای عنصر فلزی (Na) هستند، در حالی که صابون‌های مایع، می‌توانند فاقد عنصر فلزی باشند و *اون زمانی است که نمک آمونیوم اسید چرب داشته باشیم!*

ت) سرعت افزایش شاخص امید به زندگی در سال‌های اخیر که در شکل زیر همان شیب نمودار است، در نواحی برخوردار از نواحی کم‌برخوردار کم‌تر است.



www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۷۸ مخلوطی از اسیدهای چرب لینولئیک اسید ($C_{۱۸}H_{۳۰}O_۲$) و پالمیتیک اسید ($C_{۱۶}H_{۳۲}O_۲$) به جرم ۱۵۸۰ گرم را با ۲۴۰ گرم سدیم هیدروکسید به طور کامل واکنش می‌دهیم. صابون تولیدشده با زنجیر هیدروکربنی سیرشده، با چند لیتر محلول کلسیم با غلظت ۰/۰۱ مولار، به طور کامل واکنش می‌دهد؟ $(Na=۲۳, O=۱۶, C=۱۲, H=۱ : g.mol^{-۱})$

۱) ۱۰۰ ۲) ۱۵۰

۳) ۲۰۰ ۴) ۳۰۰

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ تشریحی

گام اول: ابتدا باید واکنش میان دو اسید چرب با سدیم هیدروکسید را بنویسیم:

$$I)\ C_{۱۸}H_{۳۰}O_۲ + NaOH \rightarrow C_{۱۸}H_{۲۹}O_۲Na + H_۲O$$

$$II)\ C_{۱۶}H_{۳۲}O_۲ + NaOH \rightarrow C_{۱۶}H_{۳۱}O_۲Na + H_۲O$$

اگر مقدار مول مصرفی $C_{۱۸}H_{۳۰}O_۲$ و $C_{۱۶}H_{۳۲}O_۲$ را به ترتیب x و y در نظر بگیریم، با توجه به برابربودن ضریب همهٔ مواد در دو واکنش می‌توان گفت مقدار مول مصرفی NaOH در واکنش‌های (I) و (II) به ترتیب برابر با x و y خواهد بود.

$$x\,mol\,C_{۱۸}H_{۳۰}O_۲ \sim x\,mol\,NaOH$$

$$y\,mol\,C_{۱۶}H_{۳۲}O_۲ \sim y\,mol\,NaOH$$

گام دوم: در قدم بعدی با توجه به جرم مخلوط اسیدهای چرب و سدیم هیدروکسید مصرفی، دستگاه معادله تشکیل می‌دهیم و x و y را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} \underbrace{۲۷۸x}_{\text{جرم مصرفی } C_{۱۸}H_{۳۰}O_۲} + \underbrace{۲۵۶y}_{\text{جرم مصرفی } C_{۱۶}H_{۳۲}O_۲} = ۱۵۸۰ \\ \underbrace{۴۰x}_{\text{جرم مصرفی NaOH (I)}} + \underbrace{۴۰y}_{\text{جرم مصرفی NaOH (II)}} = ۲۴۰ \xrightarrow{\text{تقسیم طرفین به ۴۰}} x+y=۶ \Rightarrow x=۶-y \end{cases}$$

در معادلهٔ اول به جای x، $۶-y$ قرار می‌دهیم:

$$۲۷۸(۶-y)+۲۵۶y=۱۵۸۰ \Rightarrow ۱۶۶۸-۲۷۸y+۲۵۶y=۱۵۸۰$$

$$\Rightarrow ۲۲y=۸۸ \Rightarrow y=۴\ ,\ x=۶-۴=۲$$

نکته فرمول عمومی اسیدهای چرب با زنجیر هیدروکربنی سیرشده به صورت $C_nH_{۲n+۱}COOH$ یا $C_nH_{۲n}O_۲$ نوشته می‌شود.

گام سوم: با توجه به این‌که فرمول مولکولی پالمیتیک اسید ($C_{۱۶}H_{۳۲}O_۲$) برخلاف لینولئیک اسید از فرمول عمومی $C_nH_{۲n}O_۲$ پیروی می‌کند، می‌توان گفت پالمیتیک اسید، یک اسید چرب با زنجیر هیدروکربنی سیرشده است و صابون تولیدشده از آن ($C_{۱۶}H_{۳۱}O_۲Na$) نیز دارای زنجیر هیدروکربنی سیرشده خواهد بود. با توجه به این‌که در واکنش (II)، چهار مول $C_{۱۶}H_{۳۲}O_۲$ مصرف شده است، چهار مول صابون ($C_{۱۶}H_{۳۱}O_۲Na$) نیز تولید می‌شود.

در قدم بعدی باید واکنش میان صابون مورد نظر با محلول کلسیم کلرید ($CaCl_۲$) را بنویسیم:

$$\underbrace{۲C_{۱۶}H_{۳۱}O_۲Na(aq)}_{۲C_{۱۵}H_{۳۱}COONa(aq)} + CaCl_۲(aq) \rightarrow (C_{۱۵}H_{۳۱}COO)_۲Ca(s) + ۲\,NaCl(aq)$$

استفاده از کسر تبدیل:

$$L_{\text{محلول}} = ۴\,mol\,C_{۱۶}H_{۳۱}O_۲Na \times \frac{۱\,mol\,CaCl_۲}{۲\,mol\,C_{۱۶}H_{۳۱}O_۲Na} \times \frac{۱\,L_{\text{محلول}}}{۰/۰۱\,mol\,CaCl_۲} = ۲۰۰\,L$$

یه جور دیگه استفاده از کسر تناسب:

$$\frac{\underbrace{\frac{\text{مول}}{\text{ضریب}}}_{C_{۱۶}H_{۳۱}O_۲Na}}{} = \frac{\text{حجم محلول} \times \text{غلظت مولی}}{\underbrace{\text{ضریب}}_{CaCl_۲}} \Rightarrow \frac{۴}{۲} = \frac{۰/۰۱ \times V}{۱} \Rightarrow V = ۲ \times ۱۰۰ = ۲۰۰\,L$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۷۹ چند مورد از موارد زیر درست است؟ $(C=12, H=1: g.mol^{-1})$

- نسبت شمار جفت‌الکترون‌های پیوندی به ناپیوندی در مولکول اتیلن‌گلیکول، ۱/۱۲۵ برابر این نسبت در اوره است.
- فرمول مولکولی یک پاک‌کنندهٔ غیرصابونی ۱۸کربنی با سه پیوند دوگانه، به صورت $C_{18}H_{29}SO_3Na$ است.
- درصد جرمی کربن در وازلین از درصد جرمی این عنصر در بنزین، کم‌تر است.
- پس از ورود صابون به آب، سر آب‌دوست مولکول‌های آن با سر منفی مولکول‌های آب، نیروی جاذبهٔ یون ـ دوقطبی ایجاد می‌کنند.

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

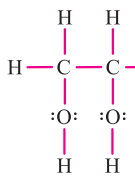
پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ تشریحی ✔ عبارت‌های اول و دوم درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

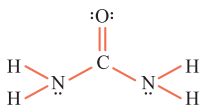
با توجه به ساختار مولکول‌های اتیلن‌گلیکول $(C_2H_6O_2)$ و اوره $(CO(NH_2)_2)$، می‌توان شمار جفت‌الکترون‌های پیوندی و ناپیوندی و نسبت آن‌ها را به دست آورد:

اتیلن‌گلیکول:



$$\Rightarrow \begin{cases} \text{شمار جفت‌الکترون پیوندی} = 9 \\ \text{شمار جفت‌الکترون ناپیوندی} = 4 \end{cases} \Rightarrow \frac{\text{شمار جفت‌الکترون پیوندی}}{\text{شمار جفت‌الکترون ناپیوندی}} = \frac{9}{4}$$

اوره:



$$\Rightarrow \begin{cases} \text{شمار جفت‌الکترون‌های پیوندی} = 8 \\ \text{شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی} = 4 \end{cases} \Rightarrow \frac{\text{شمار جفت‌الکترون‌های پیوندی}}{\text{شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی}} = \frac{8}{4} = 2$$

بنابراین نسبت مورد نظر در مولکول اتیلن‌گلیکول، $\frac{\frac{9}{4}}{2} = 1/125$ برابر مولکول اوره است.

با توجه به این‌که در حلقهٔ بنزن پاک‌کننده‌های غیرصابونی، سه پیوند دوگانه وجود دارد، می‌توان نتیجه گرفت زنجیر هیدروکربنی پاک‌کنندهٔ غیرصابونی مورد نظر، سیرشده است.

نکته فرمول عمومی پاک‌کننده‌های غیرصابونی بازنجیر هیدروکربنی سیرشده، به‌صورت $C_nH_{2n+1}C_6H_4SO_3Na$ یا $C_nH_{2n-7}SO_3Na$ نوشته می‌شود.

با توجه به ۱۸کربنی بودن مولکول این پاک‌کننده، می‌توان گفت تعداد اتم‌های H مولکول آن برابر $(2\times18)-7=29$ و فرمول مولکولی آن به صورت $C_{18}H_{29}SO_3Na$ است.

درصد جرمی کربن در وازلین $(C_{25}H_{52})$ و بنزین (C_8H_{18}) به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$\text{درصد جرمی C در ترکیب} = \frac{\text{تعداد اتم C} \times \text{جرم مولی C}}{\text{جرم مولی ترکیب}} \times 100$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{درصد جرمی C در } C_{25}H_{52} = \frac{25\times12}{(25\times12)+(52\times1)} \times 100 \simeq \%85/2 \\ \text{درصد جرمی C در } C_8H_{18} = \frac{8\times12}{(8\times12)+(18\times1)} \times 100 \simeq \%84/2 \end{cases}$$

بنابراین درصد جرمی کربن در وازلین از بنزین بیشتر است.

نکته با افزایش تعداد اتم‌های کربن در آلکان‌ها (با فرمول عمومی C_nH_{2n+2})، درصد جرمی اتم‌های کربن افزایش و درصد جرمی اتم‌های هیدروژن کاهش می‌یابد.

پس از ورود صابون به آب، سر آب‌دوست مولکول‌های آن یعنی $-COO^-$، با سر **مثبت** مولکول‌های آب که اتم‌های هیدروژن هستند، نیروی جاذبهٔ یون ـ دوقطبی برقرار می‌کنند.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

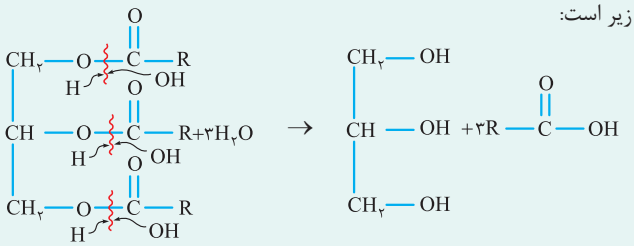
۸۰ شمار جفت‌الکترون‌های پیوندی موجود در اسید چرب حاصل از آبکافت ۲۲۱ گرم از یک استر بلندزنجیر با فرمول $C_{۵۷}H_{۱۰۴}O_۶$، برابر با چند مول است و اگر این مقدار اسید چرب را به طور کامل بسوزانیم، چند لیتر گاز در شرایط STP تولید خواهد شد؟ (سه گروه هیدروکربنی در استر بلندزنجیر یکسان هستند. $O=۱۶, C=۱۲, H=۱ : g.mol^{-۱}$)

۱) ۳۰۲/۴ ـ ۱۳/۷۵
۲) ۳۰۲/۴ ـ ۴۱/۲۵
۳) ۵۸۸ ـ ۱۳/۷۵
۴) ۵۸۸ ـ ۴۱/۲۵

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

معادلهٔ واکنش آبکافت استر بلندزنجیر به صورت زیر است:



همچنین با استفاده از دو رابطهٔ زیر می‌توان شمار اتم‌های C و H در اسید چرب را بدون نوشتن معادلهٔ واکنش محاسبه کرد و به فرمول مولکولی اسید چرب رسید (تعداد اتم‌های O در فرمول مولکولی اسید چرب برابر با ۲ است):

$$\text{تعداد اتم‌های C در اسید چرب} = \frac{\text{۳ − تعداد اتم‌های C در استر بلندزنجیر}}{۳}$$

$$\text{تعداد اتم‌های H در اسید چرب} = \frac{\text{۲ − تعداد اتم‌های H در استر بلندزنجیر}}{۳}$$

پاسخ تشریحی ✓

ابتدا شمار اتم‌های C و H و همچنین فرمول مولکولی اسید چرب حاصل از آبکافت $C_{۵۷}H_{۱۰۴}O_۶$ را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} \text{تعداد اتم‌های C در اسید چرب} = \frac{\text{۳ − تعداد اتم‌های C در استر بلندزنجیر}}{۳} = \frac{۵۷-۳}{۳} = ۱۸ \\ \text{تعداد اتم‌های H در اسید چرب} = \frac{\text{۲ − تعداد اتم‌های H در استر بلندزنجیر}}{۳} = \frac{۱۰۴-۲}{۳} = ۳۴ \end{cases} \Rightarrow \text{فرمول مولکولی اسید چرب: } C_{۱۸}H_{۳۴}O_۲$$

بنابراین معادلهٔ واکنش آبکافت استر $C_{۵۷}H_{۱۰۴}O_۶$ به صورت زیر خواهد بود:

$$C_{۵۷}H_{۱۰۴}O_۶ + ۳H_۲O \rightarrow C_۳H_۸O_۳ + ۳C_{۱۸}H_{۳۴}O_۲$$

نکته

شمار جفت‌الکترون‌های پیوندی در مواد آلی اکسیژن‌دار از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\text{شمار جفت‌الکترون‌های پیوندی} = \frac{(\text{C تعداد اتم} \times ۴) + (\text{H تعداد اتم} \times ۱) + (\text{O تعداد اتم} \times ۲)}{۲}$$

در قدم بعدی باید شمار جفت‌الکترون‌های پیوندی در هر مولکول $C_{۱۸}H_{۳۴}O_۲$ را محاسبه کنیم:

$$\text{شمار جفت‌الکترون‌های پیوندی در مولکول } C_{۱۸}H_{۳۴}O_۲ = \frac{(\text{C تعداد اتم} \times ۴) + (\text{H تعداد اتم} \times ۱) + (\text{O تعداد اتم} \times ۲)}{۲}$$

$$= \frac{(۱۸ \times ۴) + (۳۴ \times ۱) + (۲ \times ۲)}{۲} = ۵۵$$

در مرحلهٔ بعد باید با استفاده از روابط استوکیومتری، به شمار جفت‌الکترون‌های پیوندی در اسید چرب تولیدی برسیم:

استفاده از کسر تبدیل:

$$\text{جفت‌الکترون پیوندی} = ۲۲۱\text{g } C_{۵۷}H_{۱۰۴}O_۶ \times \frac{۱\text{mol } C_{۵۷}H_{۱۰۴}O_۶}{۸۸۴\text{g } C_{۵۷}H_{۱۰۴}O_۶} \times \frac{۳\text{mol } C_{۱۸}H_{۳۴}O_۲}{۱\text{mol } C_{۵۷}H_{۱۰۴}O_۶} \times$$

$$\frac{\text{۵۵mol جفت‌الکترون پیوندی}}{۱\text{mol } C_{۱۸}H_{۳۴}O_۲} = \frac{\overbrace{(۱۶۴+۱)}^{}}{۴} = \underbrace{\frac{۱۶۴}{۴}}_{۴۱} + \underbrace{\frac{۱}{۴}}_{۰/۲۵} = ۴۱/۲۵$$

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

توجه: در روش کسر تناسب، برای جفت‌الکترون‌های پیوندی $C_{18}H_{34}O_2$، باید کسر تناسب مول را نوشت و در مخرج کسر آن علاوه بر ضریب، عدد ۵۵ را نیز قرار داد. در واقع عدد ۵۵ برای جفت‌الکترون‌های پیوندی $C_{18}H_{34}O_2$، همانند زیروند عمل می‌کند.

یه‌جور دیگه استفاده از کسر تناسب:

$$\frac{\text{گرم}}{\underbrace{\text{جرم مولی}\times\text{ضریب}}_{C_{57}H_{104}O_6}}=\frac{\text{مول}}{\underbrace{\text{ضریب}\times 55}_{\substack{\text{جفت‌الکترون‌های}\\ \text{پیوندی } C_{18}H_{34}O_2}}}\Rightarrow\frac{221}{1\times 884}=\frac{x}{3\times 55}\Rightarrow x=\frac{165}{4}=41/25$$

برای حل قسمت دوم سؤال، ابتدا باید معادلهٔ سوختن کامل $C_{18}H_{34}O_2$ را بنویسیم و آن را موازنه کنیم:

$$2C_{18}H_{34}O_2+51O_2\Rightarrow 36CO_2+34H_2O$$

نکته با توجه به این‌که اسید چرب تولیدشده در واکنش اول، در واکنش دوم به طور کامل می‌سوزد، می‌توان با هم‌ضریب کردن آن در دو معادله، *بین دو واکنش پُل زد* و مستقیماً از مقدار استر بلندزنجیر به گاز تولیدی در واکنش دوم رسید. توجه داشته باشید که در شرایط STP، یعنی دمای $0^\circ C$ و فشار ۱atm، آب به حالت گاز نیست!

$$(C_{57}H_{104}O_6+3H_2O\rightarrow C_3H_8O_3+3C_{18}H_{34}O_2)\times 2$$
$$\Rightarrow 2C_{57}H_{104}O_6+6H_2O\rightarrow 2C_3H_8O_3+6C_{18}H_{34}O_2$$

$$(2C_{18}H_{34}O_2+51O_2\rightarrow 36CO_2+34H_2O)\times 3$$
$$\Rightarrow 6C_{18}H_{34}O_2+153O_2\Rightarrow 108CO_2+102H_2O$$

پس به ازای مصرف ۲ مول $C_{57}H_{104}O_6$، در نهایت، ۱۰۸ مول CO_2 تولید می‌شود.

تیزبازی به جای نوشتن کامل معادله‌ها و این همه کار طاقت‌فرسا، می‌توان هم‌ضریب کردن را راحت‌تر انجام داد. در واکنش سوختن کامل هیدروکربن‌ها و مواد آلی اکسیژن‌دار، در اثر سوختن یک مول از مادهٔ آلی، به تعداد کربن آن، CO_2 تولید می‌شود و می‌توان نوشت:

$$1\,mol\,C_{57}H_{104}O_6\sim 3\,mol\,C_{18}H_{34}O_2$$

$$1\,mol\,C_{18}H_{34}O_2\sim 18\,mol\,CO_2\xrightarrow{\times 3}3\,mol\,C_{18}H_{34}O_2\sim 54\,mol\,CO_2$$

پس به ازای مصرف هر یک مول $C_{57}H_{104}O_6$، در نهایت ۵۴ مول CO_2 تولید خواهد شد.

در قدم آخر، با نوشتن روابط استوکیومتری میان $C_{57}H_{104}O_6$ و CO_2، حجم گاز CO_2 را به دست می‌آوریم.

استفاده از کسر تبدیل:

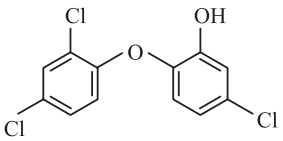
$$L\,CO_2=221g\,C_{57}H_{104}O_6\times\frac{1mol\,C_{57}H_{104}O_6}{884g\,C_{57}H_{104}O_6}\times\frac{54mol\,CO_2}{1mol\,C_{57}H_{104}O_6}\times\frac{22/4L\,CO_2}{1mol\,CO_2}=302/4\,L$$

یه‌جور دیگه استفاده از کسر تناسب:

$$\frac{\text{جرم}}{\underbrace{\text{جرم مولی}\times\text{ضریب}}_{C_{57}H_{104}O_6}}=\frac{\text{حجم}}{\underbrace{\text{حجم مولی}\times\text{ضریب}}_{CO_2}}\Rightarrow\frac{221}{1\times 884}=\frac{x}{54\times 22/4}\Rightarrow x=54\times 5/6=302/4\,L$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۸۱ **تری‌کلوسان، ترکیب آروماتیکی است که در گذشته در شوینده‌ها استفاده می‌کردند، ولی به تازگی به دلیل عوارض جانبی برای انسان از شوینده‌ها حذف شده است. دلیل استفاده از این ماده در شوینده‌ها کدام مورد زیر بوده است؟**



۱) از بین بردن جوش صورت و قارچ‌های پوستی

۲) خاصیت گندزدایی و میکروب‌کشی

۳) افزایش قدرت پاک‌کنندگی

۴) خاصیت بازی مناسب

پاسخ: گزینهٔ ۲

نکته **افزودنی‌های صابون‌ها:**

نوع افزودنی به صابون	ویژگی صابون
ترکیب‌های گوگرددار	از بین بردن جوش صورت و قارچ‌های پوستی
مواد شیمیایی کلردار	خاصیت ضدعفونی‌کنندگی و میکروب‌کشی بیشتر
نمک‌های فسفات	جلوگیری از تشکیل رسوب و ایجاد لکه (به دلیل واکنش این نمک‌ها با یون‌های کلسیم و منیزیم موجود در آب سخت)
جوش‌شیرین ($NaHCO_3$)	افزایش قدرت پاک‌کنندگی چربی‌ها (به دلیل خاصیت بازی جوش‌شیرین و در نتیجه واکنش آن با چربی و تولید صابون)

پاسخ تشریحی طبق معرفی سؤال، ترکیب داده‌شده در شوینده‌ها استفاده می‌شده و به دلیل وجود اتم‌های کلر (Cl) در این ترکیب، به یقین این ترکیب خاصیت ضدعفونی‌کنندگی و میکروب‌کشی دارد.

بچه‌ها هواستون باشه که نیاز نبود شما ساختار این ترکیب رو حفظ می‌کردین! با توجه به این‌که طراح *محترم* فرموده در شوینده‌ها استفاده می‌شده و در ساختارش هم اتم‌های کلر (Cl) را مشاهده می‌فرمایین، همین برای شما کافیه *بدونین* این مادهٔ شیمیایی کلردار است و خاصیت ضدعفونی‌کنندگی و میکروب‌کشی دارد.

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۸۲ کدام مورد، نادرست است؟

۱) در یک واکنش برگشت‌پذیر که هم‌زمان واکنش‌های رفت و برگشت به طور پیوسته انجام می‌شوند، سرانجام مقدار واکنش‌دهنده‌ها و فراورده‌ها ثابت می‌ماند.

۲) در سامانهٔ تعادلی، مقدار و غلظت همهٔ ماده‌ها ثابت می‌شوند، ولی لزومی ندارد که با هم برابر شوند.

۳) در سامانهٔ تعادلی، سرعت مصرف و تولید همهٔ ماده‌ها ثابت و برابر می‌شود.

۴) اگر در یک واکنش مقدار و غلظت حداقل یکی از واکنش‌دهنده‌ها به صفر برسد، سامانه به یقین تعادلی نخواهد بود.

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ تشریحی

در هنگام تعادل، سرعت واکنش‌های رفت و برگشت با هم برابر است، اما الزاماً سرعت مصرف واکنش‌دهنده(ها) و تولید فراورده(ها) با هم برابر نیست! سرعت واکنش‌های رفت یا برگشت از تقسیم سرعت تولید یا مصرف مواد شرکت‌کننده در واکنش بر ضریب استوکیومتری آن‌ها به دست می‌آید؛ مثلاً در واکنش تعادلی $A(g) \rightleftharpoons ۲B(g)$، ضرایب استوکیومتری مواد با هم برابر نیست؛ بنابراین خواهیم داشت:

$$\text{تعادل} \Rightarrow \bar{R}_{(\text{رفت})} = \bar{R}_{(\text{برگشت})}$$

$$\bar{R}_{(\text{رفت})} = \frac{\bar{R}(\text{A مصرف})}{۱} = \frac{\bar{R}(\text{B تولید})}{۲}$$

$$\bar{R}_{(\text{برگشت})} = \frac{\bar{R}(\text{B مصرف})}{۲} = \frac{\bar{R}(\text{A تولید})}{۱}$$

$$\Rightarrow \text{در لحظهٔ تعادل:} \quad \frac{\bar{R}\ (\text{A مصرف یا تولید})}{۱} = \frac{\bar{R}(\text{B مصرف یا تولید})}{۲}$$

بنابراین، در هنگام تعادل، با وجود برابربودن سرعت‌های رفت و برگشت، سرعت تولید یا مصرف B، دو برابر سرعت مصرف یا تولید A است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): اگر واکنش‌های برگشت‌پذیر در شرایط مناسبی انجام شوند، سرانجام لحظه‌ای فرا می‌رسد که سرعت واکنش رفت و برگشت برابر می‌شود و غلظت یا مقدار واکنش‌دهنده‌ها و فراورده‌ها ثابت می‌ماند. در این حالت می‌گوییم واکنش به تعادل رسیده است.

گزینهٔ (۲): *کاملاً درسته!* در هنگام تعادل، مقدار یا غلظت واکنش‌دهنده‌ها و فراورده‌ها لزوماً با هم برابر نیست و می‌تونه برابر باشه یا حتی برابر نباشه، اما *اون چیزی‌که مهمه اینه که* غلظت مواد ثابت می‌ماند.

گزینهٔ (۴): اگر مقدار واکنش‌دهنده‌ای به صفر برسد، یعنی عملاً واکنش‌دهنده‌ای باقی نمی‌ماند که تبدیل به فراورده شود و واکنش کامل و متوقف می‌شود. دقت کنید که در واکنش‌های تعادلی غلظت واکنش‌دهنده‌ها به هیچ عنوان صفر نمی‌شود!

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۸۳ کدام موارد از مطالب زیر درست است؟

الف) ثابت تعادل اسیدها فقط به دما بستگی داشته و در دمای معین با تغییر غلظت اولیهٔ اسید، تغییر نمی‌کند.

ب) هر چه ثابت یونش یک اسید بیشتر باشد، قوی‌تر بوده و در دمای معین غلظت یون هیدرونیوم در آن بیشتر خواهد بود.

پ) هر چه اسید ضعیف‌تر باشد، آنیون حاصل از آن، تمایل بیشتری به جذب یون هیدرونیوم دارد.

ت) در غلظت یکسان، میزان اسیدی‌بودن محلول شامل فورمیک اسید، به یقین بیشتر از محلول شامل استیک اسید خواهد بود.

۱) الف ـ ب
۲) الف ـ پ
۳) ب ـ پ
۴) ب ـ ت

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ تشریحی عبارت‌های «الف» و «پ» درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

الف) ثابت یونش اسیدها مانند هر ثابت تعادل دیگری فقط و فقط به دما بستگی دارد و با تغییر مقدار اولیهٔ واکنش‌دهنده‌ها و ... تغییری نمی‌کند. به عبارت دیگر می‌توان گفت که ثابت تعادل در دمای ثابت برای هر تعادل، مقداری ثابت است.

ب) در دمای معین، هر چه ثابت یونش اسیدی بزرگ‌تر باشد، آن اسید قوی‌تر است. به عبارت دیگر در دمای معین، هر چه ثابت یونش اسیدی بزرگ‌تر باشد آن اسید بیشتر یونیده شده است؛ اما برای بررسی و مقایسهٔ غلظت یون هیدرونیوم (میزان اسیدی‌بودن محلول) باید دما و غلظت اولیهٔ یکسان باشد، ولی در این عبارت صحبتی از غلظت اولیهٔ نشده است؛ یعنی ممکن است غلظت اولیهٔ یک اسید ضعیف‌تر زیاد باشد و باعث شود که محلول آن اسیدی‌تر باشد (غلظت یون هیدرونیوم در آن بیشتر باشد).

پ) آنیون حاصل از اسیدهای ضعیف‌تر به خوبی با یون هیدرونیوم (H^+) واکنش می‌دهد؛ زیرا یونش اسیدهای ضعیف‌تر (واکنش رفت) به سختی انجام می‌شود و تعداد کمی یونش می‌یابند، اما واکنش برگشت آن به راحتی انجام می‌شود و آنیون حاصل از اسید ضعیف‌تر تمایل بسیار زیادی برای جذب کاتیون موجود در محلول (یون هیدرونیوم) را دارد.

ت) ملاک خاصیت اسیدی، غلظت یون هیدرونیوم (H^+) و در نتیجه pH محلول است. می‌دانیم که طبق رابطهٔ زیر، دو عامل غلظت مولار اسید (M) و قدرت اسید (که رابطهٔ مستقیمی با درجهٔ یونش (α) دارد) در تعیین خاصیت اسیدی نقش دارند:

$$M \times \alpha = [H^+] = ۱۰^{-pH}$$

در این عبارت، به غلظت‌های یکسان هر اسید اشاره شده، اما به دمای آن که تأثیر بسیار مهمی روی قدرت اسیدی دارد، اشاره نشده است، بنابراین نمی‌توانیم مقایسه کنیم! اما اگر به جای عبارت «غلظت‌های یکسان» از شرایط یکسان یا غلظت و دمای برابر استفاده می‌شد، می‌توانستیم این عبارت را درست در نظر بگیریم!

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۸۴ چند مورد از موارد زیر درست است؟

- اسیدها و بازها با ثابت یونش بزرگ، الکترولیت قوی به شمار می‌روند.
- اغلب اسیدها و بازهای شناخته‌شده، قوی هستند.
- در محلول ۰/۱ مولار هیدرویدیک اسید در دمای اتاق، $[I^-] = ۰/۱ mol.L^{-۱}$ است.
- در محلول ۰/۰۱ مولار هیدروسیانیک اسید، $[HCN] > [H^+]$ است.

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ تشریحی

عبارت‌های اول، سوم و چهارم درست هستند.

بررسی عبارت‌ها:

- درسته! اسیدها و بازهای قوی، ثابت یونش بزرگی دارند و جزء الکترولیت‌های قوی محسوب می‌شوند.
- اغلب اسیدها و بازهایی که در زندگی روزانه با آن‌ها *سروکار داریم*، ضعیف هستند، زیرا خوراکی‌ها و داروها و همچنین بسیاری از پاک‌کننده‌های مختلفی که ما مصرف می‌کنیم، حاوی این مواد هستند.
- هیدرویدیک اسید $(HI(aq))$ یک اسید قوی است که به طور کامل یونش می‌یابد و در محلول ۰/۱ مولار آن، غلظت یون هیدرونیوم (H^+) و یون یدید (I^-) نیز ۰/۱ مولار است:

$$HI(aq) \rightarrow H^+(aq) + I^-(aq)$$

$$[H^+] = [I^-] = M = ۰/۱ mol.L^{-۱}$$

- هیدروسیانیک اسید، یک اسید ضعیف است و مقدار ثابت یونش بسیار کوچکی دارد؛ بنابراین غلظت H^+ و CN^- در محلول آن، بسیار کم‌تر از غلظت اولیهٔ اسید (۰/۰۱ مولار) است:

$$[H^+] = [CN^-] = M\alpha$$

$$[HCN] = M - M\alpha = (۱ - \alpha) \times M$$

از آن‌جا که در این اسید خیلی ضعیف، مقدار α بسیار کم است در محلول HCN ، رابطهٔ زیر را داریم:

$$[HCN] > [H^+] = [CN^-]$$

برای هر یک از موارد زیر دلیلی بیاورید. *(تمرین دوره‌ای ۱ ـ صفحهٔ ۳۳)*

الف) اسیدها و بازها با ثابت یونش کوچک، الکترولیت ضعیف به شمار می‌روند.

ب) اغلب اسیدها و بازهای شناخته‌شده، ضعیف هستند.

پ) در محلول ۰/۱ مولار نیتریک اسید در دمای اتاق، $[NO_۳^-] = ۰/۱ mol.L^{-۱}$ است.

ت) در محلول ۰/۰۱ مولار فورمیک اسید، $[HCOOH] > [H^+]$ است.

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۸۵ **۵/۶ لیتر هیدروژن سیانید، در شرایط STP را در ۵۰۰ میلی‌لیتر آب‌مقطر حل می‌کنیم. اگر درصد یونش هیدروسیانیک اسید برابر با ۰/۰۰۳ باشد، ثابت یونش آن به تقریب چند مول بر لیتر خواهد بود؟ (از تغییر حجم در اثر حل‌شدن گاز صرف نظر کنید.)**

۱) $۴/۵\times۱۰^{-۶}$ ۲) $۲/۲۵\times۱۰^{-۶}$

۳) $۴/۵\times۱۰^{-۱۰}$ ۴) $۲/۲۵\times۱۰^{-۱۰}$

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint ابتدا غلظت اولیهٔ اسید را با توجه به حجم $HCN(g)$ در شرایط STP و حجم آب حساب می‌کنیم، سپس با توجه به این‌که اسید خیلی ضعیفی است، با استفاده از رابطهٔ $K_a = m\alpha^۲$، ثابت یونش اسید را به دست می‌آوریم.

درس Box **رابطهٔ ثابت یونش و درجهٔ یونش:**

در این‌جا می‌خواهیم یک رابطه برای K_a اسید برحسب درجهٔ یونش (α) به شما معرفی کنیم:

اگر درجهٔ یونش اسید ضعیف HX برابر α و غلظت اولیهٔ اسید برابر M باشد، اسید به اندازهٔ $M\alpha$ یونیده شده و غلظت تعادلی آن برابر $M-M\alpha$ خواهد بود، پس می‌توان نوشت:

$$HX \rightleftharpoons H^+ + X^-$$

غلظت اولیه: $M \quad ۰ \quad ۰$

تغییر غلظت: $-M\alpha \quad +M\alpha \quad +M\alpha$

غلظت تعادلی: $M-M\alpha \quad M\alpha \quad M\alpha$

$$K_a = \frac{[H^+][X^-]}{[HX]} = \frac{(M\alpha)(M\alpha)}{M-M\alpha} = \frac{M^۲\alpha^۲}{M(۱-\alpha)} = \frac{M\alpha^۲}{۱-\alpha} \Rightarrow K_a = \frac{M\alpha^۲}{۱-\alpha}, K_a = \frac{[H^+]^۲}{M-[H^+]}$$

حالا اگر بخواهیم $[H^+]$ را برحسب K_a و α به دست آوریم، این‌جوری می‌شه:

$$K_a = \frac{M\alpha^۲}{۱-\alpha} \xrightarrow{\alpha=\frac{[H^+]}{M}} K_a = \frac{M\times\frac{[H^+]^۲}{M^۲}}{۱-\alpha} \Rightarrow K_a = \frac{[H^+]^۲}{M(۱-\alpha)} \Rightarrow [H^+] = \sqrt{K_a.M(۱-\alpha)}$$

توجه: اگر مقدار α (درجهٔ یونش) کم‌تر از ۰/۰۵ باشد، یعنی اسید ضعیف باشد و یا صورت سؤال بر تقریبی‌بودن جواب تأکید داشته باشد، می‌توان با دقت قابل قبولی در عبارت «$۱-\alpha$» از α صرف‌نظر کرد و «$۱-\alpha$» را با تقریب خوبی برابر ۱ در نظر گرفت؛ بنابراین روابط نوشته‌شده به این صورت خواهد شد:

$$K_a = M.\alpha^۲$$
$$[H^+] = \sqrt{K_a.M}$$

معمولاً برای اسیدهایی با K_a کوچک‌تر از $۱۰^{-۵}$ با *فیال رامت!* می‌توان از رابطهٔ تقریبی گفته‌شده استفاده کرد.

پاسخ تشریحی ابتدا باید غلظت اولیهٔ اسید (M) را حساب کنیم:

$$M = \frac{\text{مول}}{\text{حجم محلول}} \xrightarrow{\text{شرایط STP}} M = \frac{\text{حجم گاز برحسب لیتر}}{\text{حجم محلول}} = \frac{\frac{۵/۶}{۲۲/۴}}{۰/۵} = \frac{۰/۲۵}{۰/۵} = ۰/۵\,mol.L^{-۱}$$

پس با استفاده از درجهٔ یونش (α) هیدروسیانیک اسید در شرایط فرض‌شده و غلظت اولیهٔ اسید (M)، می‌توانیم با توجه به این‌که این اسید ضعیف $(\alpha < ۰/۰۵)$ و $K_a < ۱۰^{-۵}$ است، مقدار ثابت یونش هیدروسیانیک اسید را به دست آوریم:

$$\xrightarrow{\alpha<۰/۰۵\,,\,K_a<۱۰^{-۵}} K_a = M\alpha^۲ = ۰/۵\times(۳\times۱۰^{-۵})^۲ = ۴/۵\times۱۰^{-۱۰}$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۸۶ **شکل‌های مقابل، واکنش دو قطعه نوار منیزیم با ظاهری یکسان را با محلول دو اسید متفاوت در دما و غلظت یکسان نشان می‌دهند. اگر جرم نوار منیزیم ظرف (الف) دو برابر ظرف (ب) باشد، کدام مورد دربارهٔ آن‌ها درست است؟**


(الف)


(ب)

۱) سرعت واکنش در ظرف (الف) دو برابر ظرف (ب) است.

۲) ثابت یونش اسید موجود در ظرف (الف) دو برابر ظرف (ب) است.

۳) در پایان واکنش،حجم گاز آزادشده در ظرف (الف) دو برابر ظرف (ب) است.

۴) درجهٔ یونش اسید موجود در ظرف (ب) در شرایط یکسان، بیشتر از ظرف (الف) است.

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ‌تشریحی

معادلهٔ کلی واکنش انجام‌شده در دو ظرف را می‌توان به صورت $Mg + ۲HA \rightarrow MgA_۲ + H_۲$ نشان داد.

نکته

خواستون باشه که اگر حجم و غلظت محلول اسیدها و جرم نوارهای منیزیم مشابه باشد، در نهایت (پایان واکنش) حجم گاز آزاد شده در هر دو ظرف برابر خواهد بود، زیرا معادلهٔ کلی واکنش انجام‌شده در هر دو ظرف، کاملاً مشابه $(Mg + ۲HA \rightarrow MgA_۲ + H_۲)$ است و مثلاً می‌توان گفت به ازای مصرف ۱ مول منیزیم یا دو مول اسید ۱ مول $H_۲$ تولید می‌شود.

از آن‌جا که جرم نوار منیزیم در ظرف (الف) دو برابر ظرف (ب) بوده و حجم و غلظت اسیدها در دو ظرف با هم برابر است؛ در نتیجه در پایان واکنش، جرم و حجم گاز تولید شده در ظرف (الف)، دو برابر ظرف (ب) می‌باشد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه‌های (۱) و (۲): سرعت واکنش فلزها با محلول اسیدها به غلظت یون هیدرونیوم موجود در محلول بستگی دارد. با غلظت برابر، هر چه اسید قوی‌تر باشد، سرعت واکنش آن با فلز بیشتر خواهد بود. در این‌جا سرعت تولید گاز در محلول (الف) بیشتر است؛ بنابراین اسید موجود در محلول (الف) نسبت به محلول (ب) قدرت اسیدی و K_a بیشتری دارد و غلظت یون H^+ در محلول آن بیشتر است.

اما خواستون باشه که لزوماً نمی‌توان گفت که K_a اسید موجود در ظرف (الف)، دو برابر ظرف (ب) است. به عنوان مثال اگر اسید موجود در ظرف (الف)، هیدروکلریک اسید (HCl) و اسید موجود در ظرف (ب)، هیدروفلوئوریک (HF) باشد، K_a اسید موجود در ظرف (الف)، چندین و چند ده برابر اسید موجود در ظرف (ب) می‌باشد!

گزینهٔ (۴): سرعت تولید گاز $H_۲$ در ظرف (الف) بیشتر است؛ در نتیجه اسید موجود در این ظرف، قدرت اسیدی بیشتری داشته و غلظت یون H^+ در محلول آن بیشتر است. از آن‌جا که غلظت اسید در محلول موجود در دو ظرف (الف) و (ب) یکسان است، با توجه به رابطهٔ $[H^+] = M\alpha$ می‌توان گفت که درجهٔ یونش اسید موجود در ظرف (الف) در شرایط یکسان، بیشتر از اسید موجود در ظرف (ب) است.

نکته

در شرایط یکسان از نظر دما و غلظت برای دو یا چند محلول حاوی اسیدهای گوناگون ← محلول با خاصیت اسیدی بالاتر:

- حاوی اسید قوی‌تر است. ← K_a اسید بیشتر باشد.
- α اسید بیشتر باشد.
- رسانایی الکتریکی بالایی دارد.
- غلظت H^+ بیشتر دارد. ← غلظت OH^- در آن کم‌تر است.
- pH کم‌تری دارد.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۸۷ **اگر غلظت تعادلی یون هیدرونیوم در محلول کربنیک اسید در دمای معین برابر با $0/0003\ mol.L^{-1}$ بوده و غلظت تعادلی کربنیک اسید در این محلول برابر $0/2$ مولار باشد، غلظت تعادلی یون هیدروژن کربنات (HCO_3^-) و ثابت تعادل یونش اسید در این دما، به ترتیب از راست به چپ کدام است؟**

۱) $1/8\times10^{-8}$ ـ 3×10^{-4}
۲) $4/5\times10^{-7}$ ـ 3×10^{-4}
۳) $1/8\times10^{-8}$ ـ 6×10^{-5}
۴) $4/5\times10^{-7}$ ـ 6×10^{-5}

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ تشریحی ✓ معادلهٔ یونش کربنیک اسید به صورت زیر است:

$$H_2CO_3(aq) \rightleftharpoons H^+(aq) + HCO_3^-(aq)$$

با توجه به این‌که در محلول این اسید، غلظت تعادلی یون‌های H^+ و HCO_3^- با هم برابر است، در نتیجه می‌توان گفت:

$$[HCO_3^-] = [H^+] = 3\times10^{-4}\ mol.L^{-1}$$

بدین ترتیب می‌توانیم با استفاده از غلظت‌های تعادلی یون‌های H^+ و HCO_3^- و هم‌چنین غلظت تعادلی H_2CO_3 در محلول ثابت یونش کربنیک اسید را در دمای مورد نظر محاسبه کنیم:

$$K_a = \frac{[H^+][HCO_3^-]}{[H_2CO_3]} = \frac{[3\times10^{-4}]^2}{2\times10^{-1}} = \frac{9\times10^{-8}}{2\times10^{-1}} = 4/5\times10^{-7}\ mol.L^{-1}$$

اگر غلظت تعادلی یون هیدرونیوم در محلول استیک اسید در دمای معین برابر با $0/0006\ mol.L^{-1}$ باشد:

(باهم بیندیشیم ۲ ـ صفحهٔ ۲۳)

الف) غلظت تعادلی یون استات (CH_3COO^-) را تعیین کنید.

ب) اگر غلظت تعادلی استیک اسید در این محلول برابر با $0/02$ مولار باشد، ثابت تعادل را در این دما حساب کنید.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۸۸ کدام مورد، نادرست است؟

۱) دستگاه گردش خون انسان، یک سامانهٔ بازی محسوب می‌شود.

۲) تغییر رنگ کاغذ pH، معیاری برای تشخیص اسیدی یا بازی بودن محلول‌ها است.

۳) در یک سامانهٔ خنثی، غلظت یون‌های هیدرونیوم و هیدروکسید با یکدیگر یکسان بوده و برابر با $۱۰^{-۷}$ مول بر لیتر است.

۴) هر اندازه که غلظت یکی از یون‌های هیدرونیوم یا هیدروکسید در محلولی بیشتر شود، به همان نسبت از دیگری کاسته خواهد شد.

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ تشریحی

در هر دمایی، غلظت این دو یون در آب خالص برابر است ولی فقط در دمای اتاق (دمای $۲۵^\circ C$)، غلظت هر یک از این دو یون برابر $۱۰^{-۷}\ mol.L^{-۱}$ است.

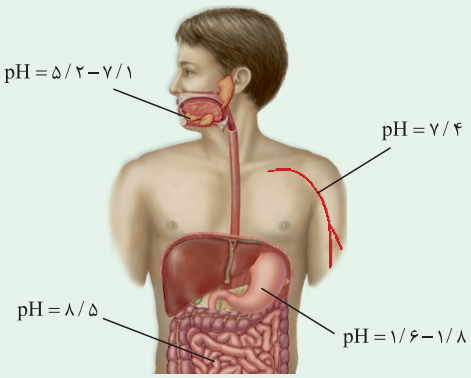
$$[H_۳O^+] = [OH^-] = \sqrt{۱۰^{-۱۴}} = ۱۰^{-۷}\ mol.L^{-۱}$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): pH خون انسان حدود ۷/۴ است که یک محدودهٔ بازی می‌باشد.

نکته

با توجه به شکل زیر از کتاب درسی، می‌توان به اسیدی یا بازی بودن برخی محیط‌های بدن پی برد:



بزاق ← $۵/۲ < pH < ۷/۱$ ← بیشتر مواقع اسیدی

اسید معده ← $۱/۶ < pH < ۱/۸$ ← محیط اسیدی

خون ← $pH = ۷/۴$ ← محیط بازی

رودهٔ کوچک ← $pH = ۸/۵$ ← محیط بازی

گزینهٔ (۲):

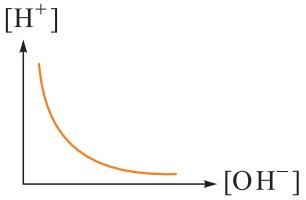
کاغذ pH

- تغییر رنگ کاغذ pH معیاری برای تشخیص **اسیدی یا بازی بودن** محلول‌هاست.
- به کمک رنگی که کاغذ pH در یک محلول به خود می‌گیرد، می‌توان **pH تقریبی (نه دقیق!)** آن محلول را تعیین کرد.
- رنگ کاغذ pH در محلول‌های اسیدی به رنگ قرمز، در محلول‌های خنثی به رنگ **زرد** و در محلول‌های بازی به رنگ **آبی تیره (بنفش)** است.

گزینهٔ (۴):

نکته

با توجه به این‌که حاصل‌ضرب $[H^+]$ و $[OH^-]$ در محلول‌های آبی در دمای اتاق همواره برابر ۱×۱۰^{-۱۴} است، می‌توان نتیجه گرفت هر اندازه غلظت یکی از یون‌های هیدرونیوم یا هیدروکسید در محلول بیشتر شود به همان نسبت از دیگری کاسته خواهد شد تا حاصل‌ضرب غلظت این یون‌ها در دمای اتاق برابر ۱×۱۰^{-۱۴} شود.



$$(۲۵^\circ C)\ \text{در دمای اتاق} \Rightarrow [H^+][OH^-] = ۱\times۱۰^{-۱۴} \Rightarrow [H^+] = \frac{۱\times۱۰^{-۱۴}}{[OH^-]} \Rightarrow \begin{cases} \downarrow [H^+] \Rightarrow \uparrow [OH^-] \\ \uparrow [H^+] \Rightarrow \downarrow [OH^-] \end{cases}$$

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۸۹ **اگر مخلوط a میلی‌لیتر از هیدروبرمیک اسید با $pH = ۱/۴$ و b میلی‌لیتر از محلول همان اسید با $pH = ۱/۷$، دارای ۰/۰۶ مول یون برمید باشد، $a + b$ می‌تواند برابر با چند میلی‌لیتر باشد؟**

۱) ۲۰۰ ۲) ۸۰۰

۳) ۱۲۰۰ ۴) ۱۷۰۰

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ تشریحی

گام اول: هیدروبرمیک اسید (HBr)، یک اسید قوی تک‌پروتون‌دار است که ابتدا باید معادلهٔ یونش آن در آب را بنویسیم:

$$HBr(aq) \rightarrow H^+(aq) + Br^-(aq)$$

غلظت یون‌های H^+ و Br^- در محلول این اسید یکسان و برابر با غلظت اولیه اسید است.

گام دوم: با توجه به pH هر یک از محلول‌ها، غلظت یون H^+ و در نتیجه غلظت یون Br^- را در آن‌ها محاسبه می‌کنیم:

$$pH = ۱/۴ \rightarrow [H^+] = ۱۰^{-pH} = ۱۰^{-۱/۴} = ۱۰^{۰/۶} \times ۱۰^{-۲} = (۱۰^{۰/۳})^۲ \times ۱۰^{-۲} = ۴ \times ۱۰^{-۲}\ mol.L^{-۱}$$

$$\rightarrow [Br^-] = ۴ \times ۱۰^{-۲}\ mol.L^{-۱}$$

$$pH = ۱/۷ \rightarrow [H^+] = ۱۰^{-pH} = ۱۰^{-۱/۷} = ۱۰^{۰/۳} \times ۱۰^{-۲} = ۲ \times ۱۰^{-۲}\ mol.L^{-۱}$$

$$\rightarrow [Br^-] = ۲ \times ۱۰^{-۲}\ mol.L^{-۱}$$

گام سوم: غلظت یون Br^- در محلول نهایی با حجم $(a+b)$ میلی‌لیتر، باید بین ۰/۰۲ و ۰/۰۴ باشد، بر این اساس می‌توانیم بازهٔ قابل قبول برای حجم محلول نهایی را بیابیم:

$$\text{غلظت یون } Br^- \text{ در محلول نهایی} = ۰/۰۲\ mol.L^{-۱} \Rightarrow ۰/۰۲ = \frac{\text{مول } Br^-}{\text{حجم محلول}} = \frac{۰/۰۶}{a+b}$$

$$\Rightarrow a + b = \frac{۰/۰۶}{۰/۰۲} = ۳\ L \times \frac{۱۰^۳\ mL}{۱\ L} = ۳۰۰۰\ mL$$

$$\text{غلظت یون } Br^- \text{ در محلول نهایی} = ۰/۰۴\ mol.L^{-۱} \Rightarrow ۰/۰۴ = \frac{\text{مول } Br^-}{\text{حجم محلول}} = \frac{۰/۰۶}{a+b}$$

$$\Rightarrow a + b = \frac{۰/۰۶}{۰/۰۴} = ۱/۵\ L \times \frac{۱۰^۳\ mL}{۱\ L} = ۱۵۰۰\ mL$$

بنابراین حجم محلول نهایی می‌تواند بین $۱۵۰۰ < a+b < ۳۰۰۰$ میلی‌لیتر باشد که از میان گزینه‌ها، فقط گزینهٔ (۴) در این بازه قرار دارد.

غلظت یون $Br^- = ۰/۰۲\ mol.L^{-۱}$ ، حجم محلول $(a+b) = ۳۰۰۰\ mL$

$\longleftrightarrow$ $۱۵۰۰\ mL < a+b < ۳۰۰۰\ mL$

غلظت یون $Br^- = ۰/۰۴\ mol.L^{-۱}$ ، حجم محلول $(a+b) = ۱۵۰۰\ mL$

مخلوط a میلی‌لیتر از محلول اسید قوی HA ($pH = ۱/۴$) و b میلی‌لیتر از محلول همان اسید ($pH = ۱/۷$) با ۲۰۰ میلی‌لیتر محلول ۰/۳ مولار سدیم هیدروکسید خنثی می‌شود. $a + b$، برابر چند میلی‌لیتر است؟

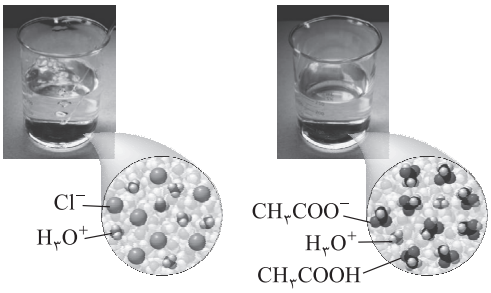
(ریاضی ـ داخل ـ ۱۴۰۳ ـ نوبت اول)

۱) ۵۰۰ ۲) ۱۰۰۰

۳) ۲۵۰ ۴) ۲۰۰۰

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۹۰ **شکل‌های مقابل محلول‌هایی از هیدروکلریک اسید و استیک اسید را نشان می‌دهد. اگر حجم هر یک از محلول‌ها برابر با ۳۱۵ میلی‌لیتر باشد، تفاوت pH این محلول‌ها در دمای $25^\circ C$، کدام است؟ (هر ذره را معادل ۰/۰۱۵ مول در نظر بگیرید.)**



(۲) (۱)

۱) ۰/۴۸
۲) ۰/۵۵
۳) ۰/۸۷
۴) ۱/۰۲

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint ابتدا با توجه به شکل، غلظت اولیهٔ اسید را محاسبه کرده و با توجه به غلظت اولیهٔ اسید و درجهٔ یونش آن، غلظت یون H^+ را در هر کدام از محلول‌ها به دست می‌آوریم. در نهایت می‌توانیم pH هر یک از محلول‌ها و تفاوت آن‌ها را محاسبه کنیم.

پاسخ تشریحی **گام اول:** در محلول استیک اسید (محلول ۲)، ۷ ذرهٔ یونیده‌نشده (مولکول CH_3COOH) وجود دارد و ۲ ذره نیز یونیده شده است (به یون‌های H^+ و CH_3COO^-)، در نتیجه غلظت اولیهٔ (M) و درجهٔ یونش (α) این محلول به همراه غلظت یون H^+ در آن را می‌توانیم به صورت زیر محاسبه کنیم:

$$M = \frac{\text{مول}}{\text{حجم}} = \frac{۹\times ۰/۰۱۵}{۳۱۵\times ۱۰^{-۳}} = \frac{۱۳۵}{۳۱۵} = \frac{۳}{۷}\ mol.L^{-۱}$$

$$\alpha = \frac{\text{شمار مولکول‌های یونیده‌شده}}{\text{شمار کل مولکول‌های حل‌شده}} = \frac{۲}{۹}$$

$$\Rightarrow [H^+] = M\alpha = \frac{۳}{۷}\times\frac{۲}{۹} = \frac{۲}{۲۱}$$

در محلول هیدروکلریک اسید (محلول ۱)، هر ۷ ذره یونیده شده‌اند (به یون‌های H^+ و Cl^-)؛ در نتیجه درجهٔ یونش این اسید قوی برابر $\alpha = ۱$ است و غلظت اولیهٔ (M) این محلول به همراه غلظت یون H^+ را می‌توانیم به صورت زیر محاسبه کنیم:

$$M = \frac{\text{مول}}{\text{حجم}} = \frac{۷\times ۰/۰۱۵}{۳۱۵\times ۱۰^{-۳}} = \frac{۱}{۳}\ mol.L^{-۱}\ ,\ \alpha = ۱$$

$$\Rightarrow [H^+] = M\alpha = \frac{۱}{۳}\ mol.L^{-۱}$$

تیزبازی برای حل این تست، *نیاز به چی داریم؟! آفرین!* برای محاسبهٔ pH هر دو محلول، فقط کافی است غلظت یون H^+ در دو محلول را به دست آوریم. در محلول (۱)، ۷ ذرهٔ H^+ و در محلول (۲)، دو ذرهٔ H^+ وجود دارد و حجم دو محلول، یکسان و برابر با ۳۱۵ میلی‌لیتر است. غلظت یون H^+ در این دو محلول برابر است با:

$$\text{محلول (۱):}\ [H^+] = \frac{\text{مول } H^+}{\text{حجم}} = \frac{۷\times ۰/۰۱۵}{۳۱۵\times ۱۰^{-۳}} = \frac{۱}{۳}\ mol.L^{-۱}$$

$$\text{محلول (۲):}\ [H^+] = \frac{\text{مول } H^+}{\text{حجم}} = \frac{۲\times ۱۵\times ۱۰^{-۳}}{۳۱۵\times ۱۰^{-۳}} = \frac{۲}{۲۱}\ mol.L^{-۱}$$

گام دوم: pH هر یک از این محلول‌ها و تفاوت pH آن‌ها را *مساب کتاب* می‌کنیم:

$$pH = -\log[H^+]$$

$$\Rightarrow \text{محلول استیک اسید:}\ pH = -\log\frac{۲}{۲۱} = \log ۲۱ - \log ۲ = \underbrace{\log ۳}_{۰/۵} + \underbrace{\log ۷}_{۰/۸۵} - \underbrace{\log ۲}_{۰/۳} = ۱/۰۵$$

$$\Rightarrow \text{محلول هیدروکلریک اسید:}\ pH = -\log\frac{۱}{۳} = \log ۳ = ۰/۵$$

تفاوت pH در محلول برابر است با:

$$\Delta pH = ۱/۰۵ - ۰/۵ = ۰/۵۵$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

تیزبازی

از همون اول، بدون توجه به مقدار مول هر ذره (۰/۰۱۵) و بدون توجه به حجم ظرف (۳۱۵ میلی‌لیتر) می‌توانستیم تفاوت pH دو محلول را به صورت زیر نیز خیلی تند و سریع حساب کنیم. کافی بود در نظر می‌گرفتیم که در ظرف (۲)، ۲ ذرهٔ H^+ و در ظرف (۱)، ۷ ذرهٔ H^+ داریم:

$$\Delta pH = pH_2 - pH_1 = -\log 2 - (-\log 7) = \log 7 - \log 2 = 0/85 - 0/3 = 0/55$$

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۹۱ **اگر pH محلول اسید قوی HX با pH محلول اسید ضعیف HY برابر باشد، چند مورد از موارد زیر به یقین درست است؟ $(HX = ۵۰ , HY = ۶۰ : g.mol^{-۱})$**

- **شمار مول‌های آغازی دو اسید برای تشکیل دو محلول، نابرابر است.**
- **اگر غلظت محلول HX برابر با ۰/۱ مولار بوده و حجم محلول یک لیتر باشد، تفاوت جرم دو اسید حل‌شده برابر با یک گرم خواهد بود.**
- **در شرایط یکسان، سرعت واکنش نوار منیزیم با این دو محلول برابر است.**
- **اگر حجم دو محلول برابر نباشد، رسانایی دو محلول متفاوت خواهد بود.**

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) صفر

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ تشریحی فقط عبارت سوم به یقین درست است.

بررسی عبارت‌ها:

- HX، یک اسید قوی و HY، یک اسید ضعیف است؛ در نتیجه برای این‌که pH دو محلول با هم برابر باشد، باید غلظت مولی محلول HX کم‌تر از محلول HY باشد. حال برای مقایسهٔ شمار مول‌های آغازی دو اسید برای تشکیل دو محلول، باید به حجم محلول نیز توجه داشته باشیم! ممکن است شمار مول‌های آغازی دو اسید HY و HX با هم برابر، اما حجم محلول HY کم‌تر باشد و در نتیجه غلظت مولی محلول HY بیشتر می‌شود.
- اگر غلظت محلول اسید HX برابر $۰/۱ mol.L^{-۱}$ باشد، چون این اسید قوی و تک‌پروتون‌دار است؛ در نتیجه غلظت یون H^+ نیز در این محلول برابر $۰/۱ mol.L^{-۱}$است و به دلیل pH یکسان دو اسید، غلظت یون H^+ در محلول اسید ضعیف HY نیز برابر $۰/۱ mol.L^{-۱}$ خواهد بود. در محلول اسید ضعیف HY داریم:

$$[H^+] = M\alpha$$

بنابراین غلظت اسید HY در محلول آن، به درجهٔ یونش آن در این شرایط بستگی دارد و لزوماً عدد مشخصی را نمی‌توان بدون دانستن درجهٔ یونش (α)، برای آن در نظر گرفت.

- سرعت واکنش فلزها با محلول اسیدها به غلظت یون هیدرونیوم موجود در محلول بستگی دارد و از آن‌جا که pH دو محلول و در نتیجه، غلظت یون H^+ در آن‌ها برابر است، می‌توان گفت که در شرایط یکسان، سرعت واکنش نوار منیزیم با محلول دو اسید HX و HY برابر می‌باشد.
- رسانایی الکتریکی محلول، به غلظت یون‌های موجود در آن بستگی دارد، به طوری که هر چه مجموع غلظت یون‌های موجود در یک محلول بیشتر باشد، رسانایی الکتریکی آن محلول بیشتر است. از آن‌جا که pH محلول‌های دو اسید با هم برابر است، می‌توان گفت که غلظت یون H^+ و در نتیجه غلظت آنیون‌ها (X^-, Y^-) نیز در دو محلول یکسان است؛ بنابراین حتی اگر حجم دو محلول متفاوت باشد، رسانایی الکتریکی آن‌ها یکسان خواهد بود.

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۹۲ اگر در دمای معین و در دو ظرف جداگانه، غلظت تعادلی HNO_2 در محلول، دو برابر غلظت تعادلی فورمیک اسید در محلول و pH محلول نیترو اسید، برابر ۲/۱۵ باشد، تفاوت جرم دو آنیون در محلول آن‌ها، برابر چند گرم است؟ (حجم هر یک از محلول‌ها، برابر یک لیتر است، $g.mol^{-1} : H=1, C=12, N=14, O=16$)

$HNO_2(aq) \rightleftharpoons H^+(aq) + NO_2^-(aq)\ ,\ K_a = 4/9\times10^{-4}$

$HCOOH(aq) \rightleftharpoons H^+(aq) + HCOO^-(aq)\ ,\ K_a = 1/8\times10^{-4}$

۱) ۰/۱۱۳ ۲) ۰/۱۳۱

۳) ۰/۱۷۸ ۴) ۰/۱۸۷

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint

ابتدا با استفاده از pH در محلول نیترو اسید، غلظت یون H^+ رو حساب کن که برابر با غلظت یون NO_2^- است و سپس با استفاده از غلظت یون H^+ در این محلول و K_a نیترو اسید، غلظت تعادلی HNO_2 را در محلول به دست بیار. در نهایت با توجه به این‌که غلظت تعادلی فورمیک اسید در محلول آن، نصف غلظت تعادلی HNO_2 است، با استفاده از غلظت تعادلی فورمیک اسید در محلول و هم‌چنین K_a آن، غلظت یون $HCOO^-$ را محاسبه کن. در نهایت با توجه به حجم محلول‌ها، تفاوت جرم آنیون‌ها را در محلولشان به دست بیار.

درس Box

۱) براساس این‌که در زمان برقراری تعادل، سرعت واکنش‌های رفت و برگشت برابر است، برای تعادل فرضی: $aA + bB \rightleftharpoons cC + dD$ که حروف کوچک همان ضرایب استوکیومتری و حروف بزرگ، فرمول شیمیایی مواد شرکت‌کننده در تعادل است، میان غلظت‌های تعادلی رابطهٔ زیر برقرار است:

$$K = \frac{[C]^c \times [D]^d}{[A]^a \times [B]^b}$$

۲) این کسر به عبارت ثابت تعادل و K به ثابت تعادل معروف است و یکای آن برابر است با: $(\frac{mol}{L})^{c+d-(a+b)}$

توجه: اگر مجموع ضرایب استوکیومتری دو سمت معادله برابر باشد و به عبارتی $a+b=c+d$ باشد، آن‌گاه K بدون یکا خواهد بود.

۳) در واقع می‌توان گفت که ثابت تعادل (K) نشان‌دهندهٔ نسبت حاصل‌ضرب غلظت فراورده‌ها به حاصل‌ضرب غلظت واکنش‌دهنده‌ها، به توان ضریب استوکیومتری‌شان است.

توجه: غلظت مواد خالص جامد (s) و مایع (l) ثابت است و با گذشت زمان تغییر نمی‌کند. از این‌رو در رابطهٔ K نوشته نمی‌شوند.

۴) هر چه مقدار عددی K بزرگ‌تر باشد. حاصل‌ضرب غلظت فراورده‌ها از حاصل‌ضرب غلظت واکنش‌دهنده‌ها بیشتر است که این موضوع نشان می‌دهد واکنش‌دهنده‌ها تمایل بیشتری برای تبدیل‌شدن به فراورده‌ها دارند و واکنش بیشتر در جهت رفت انجام می‌شود؛ اما هرچه K کوچک‌تر باشد، یعنی غلظت واکنش‌دهنده‌ها در مخلوط تعادلی بیشتر و تمایل آن‌ها برای تبدیل‌شدن به فراورده‌ها کم‌تر است.

توجه: ثابت تعادل فقط به دما بستگی دارد و با افزایش دما ممکن است کاهش و یا افزایش یابد.

۵) نمونه‌ای از سامانه‌های تعادلی، محلول اسیدهای ضعیف در آب است. در این محلول‌ها، میان اندک یون‌های حاصل از یونش و مولکول‌های یونیده‌نشدهٔ اسید، تعادل برقرار می‌شود:

$HA(aq) \rightleftharpoons H^+(aq) + A^-(aq)$

ثابت تعادل برای فرایند یونش اسیدهای ضعیف به ثابت یونش اسیدی معروف است و با K_a نشان داده می‌شود که a حرف اول واژهٔ acid است. بر این اساس K_a برای تعادل بیان‌شده چنین است:

$$K_a = \frac{[H^+][A^-]}{[HA]}$$

توجه: در رابطهٔ ثابت یونش اسیدی، $[HA]$ مربوط به غلظت اسید باقی‌مانده در لحظهٔ برقراری تعادل است.

پاسخ تشریحی

گام اول: با توجه به pH محلول نیترو اسید، غلظت یون H^+ را در این محلول حساب می‌کنیم که برابر با غلظت یون NO_2^- است:

$$pH = -\log[H^+] \Rightarrow [H^+] = 10^{-pH} = 10^{-2/15} = 10^{0/85}\times10^{-3} = 7\times10^{-3}\ mol.L^{-1}$$

$$\Rightarrow [H^+] = [NO_2^-] = 7\times10^{-3}\ mol.L^{-1}$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

گام دوم: با استفاده از رابطهٔ ثابت یونش نیترو اسید، غلظت تعادلی HNO_2 را در این محلول به دست می‌آوریم:

$$K_a = \frac{[H^+][NO_2^-]}{[HNO_2]} \xrightarrow{[H^+]=[NO_2^-]} ۴/۹\times۱۰^{-۴} = \frac{[۷\times۱۰^{-۳}]^۲}{[HNO_2]} = \frac{۴۹\times۱۰^{-۶}}{[HNO_2]}$$

$$\Rightarrow [HNO_2] = ۰/۱\,mol.L^{-۱}$$

گام سوم: غلظت تعادلی فورمیک اسید در محلول آن، نصف غلظت تعادلی نیترو اسید است؛ در نتیجه می‌توانیم با استفاده از غلظت تعادلی فورمیک اسید و ثابت یونش این اسید در محلول آن، غلظت تعادلی آنیون $HCOO^-$ را در آن حساب کنیم:

$$[HCOOH] = \frac{[HNO_2]}{۲} = \frac{۰/۱}{۲} = ۰/۰۵\,mol.L^{-۱}$$

$$K_a = \frac{[H^+][HCOO^-]}{[HCOOH]} \xrightarrow{[H^+]=[HCOO^-]} ۱/۸\times۱۰^{-۴} = \frac{[HCOO^-]^۲}{۰/۰۵}$$

$$\Rightarrow [HCOO^-]^۲ = ۹\times۱۰^{-۶}$$

$$\Rightarrow [HCOO^-] = ۳\times۱۰^{-۳}\,mol.L^{-۱}$$

گام چهارم: جرم آنیون‌های NO_2^- و $HCOO^-$ را در محلول‌هایشان و هم‌چنین تفاوت جرم آن‌ها را به دست می‌آوریم:

$$g\,NO_2^- = ۷\times۱۰^{-۳}\,\frac{mol\,NO_2^-}{۱L\,\text{محلول}} \times ۱L \times \frac{۴۶\,g\,NO_2^-}{۱\,mol\,NO_2^-} = ۰/۳۲۲\,g\,NO_2^-$$

$$g\,HCOO^- = ۳\times۱۰^{-۳}\,\frac{mol\,HCOO^-}{۱L\,\text{محلول}} \times ۱L \times \frac{۴۵g\,HCOO^-}{۱mol\,HCOO^-} = ۰/۱۳۵g\,HCOO^-$$

در نهایت تفاوت جرم آنیون‌ها در دو محلول برابر است با:

$$۰/۳۲۲ - ۰/۱۳۵ = ۰/۱۸۷\,g$$

اگر در دمای معین و در ظرف جداگانه، غلظت تعادلی HF در محلول، دو برابر غلظت تعادلی استیک اسید در محلول و pH محلول هیدروفلوئوریک اسید، برابر ۱/۳ باشد، تفاوت جرم دو آنیون در محلول آن‌ها، برابر چند گرم است؟ (حجم هر یک از محلول‌ها، برابر یک لیتر است، $C=۱۲$ ، $O=۱۶$ ، $F=۱۹ : g.mol^{-۱}$) *(تجربی داخل ۱۴۰۳ ـ نوبت اول)*

$$HF(aq) \rightleftharpoons H^+(aq) + F^-(aq) \;,\; K_a = ۵\times۱۰^{-۴}$$

$$CH_۳COOH(aq) \rightleftharpoons H^+(aq) + CH_۳COO^-(aq) \;,\; K_a = ۱/۶\times۱۰^{-۶}$$

۱) ۰/۸۳۲ ۲) ۰/۸۶۲

۳) ۰/۸۸۰ ۴) ۰/۷۸۰

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۹۳ غلظت یون هیدروکسید در محلول ۰/۰۵ مولار هیدروکلریک اسید، چند برابر غلظت یون هیدرونیوم در محلول ۰/۰۲ مولار هیپوکلرو اسید با $K_a = ۴/۵\times۱۰^{-۸}\ mol.L^{-۱}$ است؟

۱) $۵/۸۳\times۱۰^{-۹}$ ۲) $۶/۶۷\times۱۰^{-۹}$

۳) $۱/۲۵\times۱۰^{۸}$ ۴) $۱/۵\times۱۰^{۸}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ تشریحی

گام اول: هیدروکلریک اسید (HCl)، یک اسید قوی $(\alpha = ۱)$ تک‌پروتون‌دار است؛ در نتیجه در محلول این اسید، غلظت یون H^+ برابر با غلظت اولیه اسید است. بدین ترتیب می‌توانیم غلظت یون OH^- را در این محلول محاسبه کنیم:

$$[HCl] = [H^+] = ۰/۰۵\ mol.L^{-۱} \xrightarrow{[H^+][OH^-]=۱۰^{-۱۴}}$$

$$[OH^-] = \frac{۱۰^{-۱۴}}{[H^+]} = \frac{۱۰^{-۱۴}}{۰/۰۵} = ۲\times۱۰^{-۱۳}\ mol.L^{-۱}$$

گام دوم: هیپوکلرو اسید، با توجه به $K_a < ۱۰^{-۵}$ یک اسید ضعیف است؛ در نتیجه در محلول این اسید می‌توانیم غلظت یون H^+ را با استفاده از غلظت اولیهٔ اسید و ثابت یونش به صورت زیر محاسبه کنیم:

$$[H^+] = \sqrt{K_a.M} = \sqrt{۴/۵\times۱۰^{-۸}\times۰/۰۲} = \sqrt{۹\times۱۰^{-۱۰}} = ۳\times۱۰^{-۵}\ mol.L^{-۱}$$

گام سوم: نسبت خواسته‌شده را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{\text{غلظت یون } OH^- \text{ در محلول هیدروکلریک اسید}}{\text{غلظت یون } H^+ \text{ در محلول هیپوکلرو اسید}} = \frac{۲\times۱۰^{-۱۳}}{۳\times۱۰^{-۵}} = ۶/۶۷\times۱۰^{-۹}$$

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۹۴ یک نمونهٔ مخلوط شامل سدیم هیدروکسید و سدیم کربنات داریم، به طوری‌که اگر سدیم هیدروکسید موجود در مخلوط را در آب حل کرده و حجم محلول را به ۸۰۰ میلی‌لیتر برسانیم، pH محلول، برابر با ۱۳/۴ خواهد بود. هم‌چنین در صورت واکنش این مخلوط با مقدار کافی هیدروکلریک اسید، x گرم سدیم کلرید و ۹ گرم آب تولید می‌شود. بدین ترتیب، مقدار x کدام است؟

(معادله‌ها موازنه شوند، $Na=۲۳ , Cl=۳۵/۵ , O=۱۶ , C=۱۲ , H=۱: g.mol^{-۱}$)

I) $NaOH(aq)+HCl(aq) \rightarrow NaCl(aq)+H_۲O(l)$

II) $Na_۲CO_۳(aq)+HCl(aq) \rightarrow NaCl(aq)+H_۲O(l)+CO_۲(g)$

۱) ۳۵/۱ ۲) ۲۳/۴

۳) ۷۰/۲ ۴) ۴۶/۸

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint ابتدا با توجه به pH محلول حاصل از انحلال مخلوط در آب، شمار مول‌های یون OH^- و سپس شمار مول‌های NaOH رو محاسبه کن. هم‌چنین با توجه به جرم کل آب تولیدی حاصل از واکنش مخلوط با HCl، شمار مول‌های $Na_۲CO_۳$ رو به دست بیار. در نهایت با توجه به شمار مول‌های NaOH و $Na_۲CO_۳$، جرم سدیم کلرید تولیدی در این واکنش‌ها رو حساب کن.

پاسخ تشریحی **گام اول:** معادلهٔ واکنش‌های انجام‌شده را موازنه می‌کنیم:

$I) NaOH(aq)+HCl(aq) \rightarrow NaCl(aq)+H_۲O(l)$

$II) Na_۲CO_۳(aq)+۲HCl(aq) \rightarrow ۲NaCl(aq)+H_۲O(l)+CO_۲(g)$

گام دوم: شمار مول‌های یون OH^- و در نتیجه NaOH را با توجه به pH محلول حاصل از انحلال مخلوط در آب محاسبه می‌کنیم:

$$pH=۱۳/۴ \rightarrow [H^+]=۱۰^{-pH}=۱۰^{-۱۳/۴}=۱۰^{-۰/۶}\times۱۰^{-۱۴}=(۱۰^{-۰/۳})^۲\times۱۰^{-۱۴}=۴\times۱۰^{-۱۴}\ mol.L^{-۱}$$

$$[OH^-]=\frac{۱۰^{-۱۴}}{[H^+]}=\frac{۱۰^{-۱۴}}{۴\times۱۰^{-۱۴}}=۰/۲۵\ mol.L^{-۱} \rightarrow [NaOH]=[OH^-]=۰/۲۵\ mol.L^{-۱}$$

$$\rightarrow \text{مول NaOH}=۰/۲۵\ mol.L^{-۱}\times۰/۸L=۰/۲\ mol$$

گام سوم: با توجه به کل جرم آب تولیدی و جرم آب حاصل از واکنش (I)، شمار مول‌های $Na_۲CO_۳$ را به دست می‌آوریم:

$$\text{کل مول‌های آب تولیدی}=۹\ g\ H_۲O\times\frac{۱\ mol\ H_۲O}{۱۸g\ H_۲O}=۰/۵mol\ H_۲O$$

$$\text{I) مول آب حاصل از واکنش}=۰/۲mol\ NaOH\times\frac{۱\ mol\ H_۲O}{۱\ mol\ NaOH}=۰/۲\ mol\ H_۲O$$

$$\text{II) مول آب حاصل از واکنش}=۰/۵-۰/۲=۰/۳mol\ H_۲O$$

در واکنش (II)، ۰/۳ مول آب تولید شده است؛ در نتیجه شمار مول‌های $Na_۲CO_۳$ برابر است با:

$$۰/۳\ mol\ H_۲O\times\frac{۱\ mol\ Na_۲CO_۳}{۱\ mol\ H_۲O}=۰/۳mol\ Na_۲CO_۳$$

گام چهارم: جرم کل NaCl حاصل از دو واکنش را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{I) مول NaCl حاصل از واکنش}=۰/۲\ mol\ NaOH\times\frac{۱\ mol\ NaCl}{۱\ mol\ NaOH}=۰/۲\ mol\ NaCl$$

$$\text{II) مول NaCl حاصل از واکنش}=۰/۳\ mol\ Na_۲CO_۳\times\frac{۲mol\ NaCl}{۱mol\ Na_۲CO_۳}=۰/۶\ mol\ NaCl$$

بنابراین در مجموع ۰/۸ مول NaCl در این دو واکنش تولید شده است که جرم (مقدار x) آن برابر است با:

$$\text{جرم کل NaCl حاصل از واکنش‌های (I), (II)}: ۰/۸mol\ NaCl\times\frac{۵۸/۵g\ NaCl}{۱\ mol\ NaCl}=۴۶/۸\ g\ NaCl$$

$$\rightarrow x=۴۶/۸\ g$$

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۹۵ با توجه به جدول زیر که مواد مؤثر موجود در چند ضداسید را نشان می‌دهد، کدام گزینه نادرست است؟

شمارهٔ ضداسید	۱	۲	۳
مادهٔ مؤثر	$Al(OH)_3, NaHCO_3$	$Al(OH)_3, Mg(OH)_2$	$NaHCO_3$

۱) مصرف این داروها، سبب افزایش pH اسید معده می‌شوند.

۲) مخلوط مواد مؤثر ضداسید شمارهٔ (۲) با آب، منجر به تشکیل یک سامانهٔ همگن می‌شود.

۳) دو مول ضداسید شمارهٔ (۱) که مواد مؤثر آن به نسبت مولی برابر مخلوط شده‌اند، می‌تواند چهار مول HCl را خنثی کند.

۴) ضداسید شمارهٔ (۳) به عنوان مادهٔ افزودنی در تهیهٔ شوینده‌ها نیز کاربرد دارد.

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ تشریحی ✓ مخلوط آلومینیم هیدروکسید و منیزیم هیدروکسید با آب، یک مخلوط همگن نیست. هر دو ماده در آب، نامحلول‌اند. مخلوط این مواد با آب (شربت معده) را می‌توان سوسپانسیون در نظر گرفت.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): ضد اسیدها، اسید معده را خنثی کرده و سبب کاهش مقدار اسید معده و در نتیجه افزایش pH آن می‌شوند.

گزینهٔ (۳): *درسته!* زیرا یک مول $Al(OH)_3$، سه مول HCl و یک مول $NaHCO_3$، یک مول HCl را خنثی می‌کند.

$$Al(OH)_3 + 3HCl \rightarrow AlCl_3 + 3H_2O \quad , \quad NaHCO_3 + HCl \rightarrow NaCl + H_2O + CO_2$$

گزینهٔ (۴): با توجه به این‌که $NaHCO_3$ (جوش شیرین)، خاصیت بازی دارد، می‌تواند با چربی‌ها واکنش داده و صابون تولید کند، به همین دلیل، برای افزایش قدرت پاک‌کردن چربی‌ها، به شوینده‌ها جوش شیرین اضافه می‌کنند.

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۹۶ کدام مورد، نادرست است؟

۱) جانداران ذره‌بینی، گاز نیتروژن هواکره را برای مصرف گیاهان در خاک تثبیت می‌کنند.

۲) در ساختار لوویس مواد، هرگاه اتم عنصرهای گروه ۱۷، اتم کناری باشند، تنها یک پیوند اشتراکی تشکیل می‌دهند.

۳) افزون بر فلزهایی مانند طلا و پلاتین که به حالت آزاد در طبیعت یافت می‌شوند، فلزهایی وجود دارند که با بیش از یک نوع اکسید در طبیعت شناخته شده‌اند.

۴) در آرایش الکترون ـ نقطه‌ای مواد مولکولی، الکترون‌های لایهٔ ظرفیت اتم‌ها طوری کنار آن‌ها چیده می‌شوند که همهٔ اتم‌های سازندهٔ ترکیب، از قاعدهٔ هشت‌تایی پیروی کنند.

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ تشریحی

در آرایش الکترون ـ نقطه‌ای، همهٔ اتم‌های سازندهٔ ترکیب از قاعدهٔ هشت‌تایی پیروی نمی‌کنند. طبق متن کتاب درسی، اتم هیدروژن همواره یک پیوند تشکیل می‌دهد؛ از این‌رو به آرایش دوتایی می‌رسد.

(البته مواردی هم داریم که از قاعدهٔ هشت‌تایی پیروی نمی‌کنند؛ مثلاً اتم مرکزی در مولکول BeF_2 کم‌تر از هشت‌تایی است یا اتم مرکزی در مولکول SF_4 بیشتر از هشت‌تایی می‌شود.)

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): زندگی جانداران گوناگون در زیست‌کره با گازهای هواکره گره خورده است. جانداران ذره‌بینی گاز نیتروژن هواکره را برای مصرف گیاهان در خاک تثبیت می‌کنند.

گزینهٔ (۲): هرگاه اتم عنصرهای گروه ۱۷، اتم کناری باشند، فقط یک پیوند اشتراکی تشکیل می‌دهند.

گزینهٔ (۳): طلا و پلاتین از فلزاتی هستند که به صورت آزاد در طبیعت یافت می‌شوند، ولی فلزاتی دیگر مانند آهن داریم که در واکنش با اکسیژن دو نوع اکسید تولید می‌کنند (FeO و Fe_2O_3).

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۹۷ مطابق جدول زیر، کدام گزینه موارد a، b، c و d را به ترتیب از راست به چپ، به درستی نشان می‌دهد؟

نام ترکیب	مس (II) سولفید	b	c	سیلیسیم تترابرمید
فرمول شیمیایی	a	CS_2	CrO	d

۱) Cu_2S ـ کربن سولفید ـ کروم اکسید ـ $SiBr_4$

۲) Cu_2S ـ کربن سولفید ـ کروم (I) اکسید ـ SBr_4

۳) CuS ـ کربن دی‌سولفید ـ کروم اکسید ـ SBr_4

۴) CuS ـ کربن دی‌سولفید ـ کروم (II) اکسید ـ $SiBr_4$

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ تشریحی ✔

نام و فرمول شیمیایی موارد a تا d به صورت زیر است:

مورد a: مس (II) سولفید $\Leftarrow Cu^{2+}, S^{2-} \Leftarrow$ CuS

مورد b: کربن دی‌سولفید

مورد c: کروم (II) اکسید $\Leftarrow Cr^{2+}, O^{2-} \Leftarrow$ CrO

مورد d: $SiBr_4$

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۹۸ در کدام ردیف‌های جدول زیر، داده‌های مربوط به ترکیب، درست است؟ (منظور از **p.e**، جفت‌الکترون‌های پیوندی و **n.e**، جفت‌الکترون‌های ناپیوندی روی اتم‌ها است.)

ردیف	نام ترکیب	فرمول شیمیایی	شمار p.e	$\frac{p.e}{n.e}$
۱	فسفر تری‌کلرید	PCl_3	۳	$\frac{۱}{۳}$
۲	کربن مونوکسید	CO	۳	$\frac{۳}{۲}$
۳	گوگرد تری‌اکسید	SO_3	۳	$\frac{۱}{۲}$
۴	دی نیتروژن مونوکسید	N_2O	۴	۱

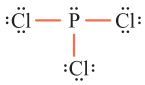
۱) ۱ و ۳ ۲) ۱ و ۴ ۳) ۲ و ۳ ۴) ۲ و ۴

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ تشریحی ردیف‌های ۲ و ۴ کاملاً درست‌اند.

بررسی همهٔ ردیف‌ها:

۱) فسفر تری‌کلرید: PCl_3



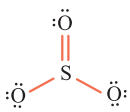
$\Rightarrow p.e = ۳ \quad , \quad \frac{p.e}{n.e} = \frac{۳}{۱۰}$

۲) کربن مونوکسید: CO



$\Rightarrow p.e = ۳ \quad , \quad \frac{p.e}{n.e} = \frac{۳}{۲}$

۳) گوگرد تری‌اکسید: SO_3



$\Rightarrow p.e = ۴ \quad , \quad \frac{p.e}{n.e} = \frac{۴}{۸} = \frac{۱}{۲}$

۴) دی نیتروژن مونوکسید: N_2O



$\Rightarrow p.e = ۴ \quad , \quad \frac{p.e}{n.e} = \frac{۴}{۴} = ۱$

در کدام ردیف‌های جدول زیر، داده‌های مربوط به ترکیب، درست است؟ (منظور از p.e، جفت‌الکترون‌های پیوندی و n.e، جفت‌الکترون‌های ناپیوندی روی اتم‌ها است.) *(تجربی داخل ۹۹)*

ردیف	نام ترکیب	فرمول شیمیایی	شمار p.e	$\frac{p.e}{n.e}$
۱	هیدروژن سیانید	HCN	۴	۴
۲	سیلیسیم تترافلوئورید	SiF_4	۴	$\frac{۱}{۱۲}$
۳	نیتروژن دی‌اکسید	N_2O	۳	$\frac{۲}{۳}$
۴	آرسنیک تری‌برمید	$AsBr_3$	۳	$\frac{۳}{۱۰}$

۱) ۱ و ۳ ۲) ۲ و ۴
۳) ۲ و ۳ ۴) ۱ و ۴

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۹۹ نمونه‌ای به جرم ۳/۱۷۵ گرم از فلز X با ۰/۶۰۰ لیتر گاز اکسیژن با چگالی ۱/۳۴ گرم بر لیتر، اکسیدی با فرمول XO تشکیل می‌دهد، جرم مولی عنصر X چند گرم بر مول بوده و در این واکنش، چند گرم فراورده تولید می‌شود؟ $(O = 16\,g.mol^{-1})$

۱) ۶۳/۵ و ۱/۹۸
۲) ۶۳/۵ و ۳/۹۹
۳) ۱۲۷ و ۱/۹۸
۴) ۱۲۷ و ۳/۹۹

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint ابتدا به کمک حجم گاز اکسیژن و چگالی آن، جرم مولی X را به دست بیار و برای قسمت دوم هم می‌توانی دوباره به کمک حجم گاز اکسیژن مصرف‌شده، جرم فراوردهٔ تولیدشده را به دست بیاری.

پاسخ تشریحی ابتدا معادلهٔ موازنه‌شدهٔ واکنش را می‌نویسیم:

$$2X(s) + O_2(g) \rightarrow 2XO(s)$$

استفاده از کسر تبدیل:

قسمت اول: به کمک حجم گاز اکسیژن، جرم مولی X را به دست می‌آوریم:

$$mol\,X = 0/6\,L\,O_2 \times \frac{1/34\,g\,O_2}{1\,L\,O_2} \times \frac{1\,mol\,O_2}{32\,g\,O_2} \times \frac{2\,mol\,X}{1\,mol\,O_2} \simeq 0/05\,mol\,X$$

$$\text{مول} = \frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی}} \Rightarrow 0/05 = \frac{3/175}{\text{جرم مولی}} \Rightarrow \text{جرم مولی} \simeq 63/5\,g.mol^{-1}$$

قسمت دوم: از طریق حجم گاز اکسیژن مصرف‌شده، جرم فراوردهٔ تولیدشده را می‌یابیم:

$$g\,XO = 0/6\,L\,O_2 \times \frac{1/34\,g\,O_2}{1\,L\,O_2} \times \frac{1\,mol\,O_2}{32\,g\,O_2} \times \frac{2\,mol\,XO}{1\,mol\,O_2} \times \frac{79/5\,g\,XO}{1\,mol\,XO} = 3/99\,g\,XO$$

یه جور دیگه استفاده از کسر تناسب:

$$\frac{\underbrace{\text{حجم} \times \text{چگالی}}_{O_2}}{\text{ضریب}} = \frac{\underbrace{\text{جرم}}_{X}}{\text{ضریب}} = \frac{\underbrace{\text{جرم مولی}}_{XO}}{\text{ضریب}} \Rightarrow \frac{0/6 \times 1/34}{1 \times 32} = \frac{3/175}{2 \times M} = \frac{x}{2 \times 79/5}$$

$$\Rightarrow M = 63/5\,g.mol^{-1}\,,\ x = 3/99\,g$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۱۰۰ پس از موازنهٔ واکنش‌های زیر، کدام مورد درست است؟

a) $KSCN + H_2O + I_2 \rightarrow KHSO_4 + HI + ICN$

b) $ZnNH_4PO_4 \rightarrow Zn_2P_2O_7 + H_2O + NH_3$

c) $C_{57}H_{110}O_6 + O_2 \rightarrow CO_2 + H_2O$

d) $I_2 + HNO_3 \rightarrow HIO_3 + NO_2 + H_2O$

۱) در واکنش d، مجموع ضرایب مولکول‌های اکسیژن‌دار، برابر ۲۵ است.

۲) در واکنش‌هایی که نیتروژن دارند، تفاوت ضریب گونه‌های نیتروژن‌دار واکنش‌دهنده و فراورده‌ها صفر است.

۳) ضریب H_2O در سه واکنش یکسان است.

۴) در معادلهٔ c، مجموع ضرایب واکنش‌دهنده‌ها بیشتر از ۱/۵ برابر ضریب CO_2 است.

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ تشریحی ابتدا هر چهار واکنش را موازنه می‌کنیم:

a) $KSCN + 4H_2O + 4I_2 \rightarrow KHSO_4 + 7HI + ICN$

b) $2ZnNH_4PO_4 \rightarrow Zn_2P_2O_7 + H_2O + 2NH_3$

c) $2C_{57}H_{110}O_6 + 163O_2 \rightarrow 114CO_2 + 110H_2O$

d) $I_2 + 10HNO_3 \rightarrow 2HIO_3 + 10NO_2 + 4H_2O$

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): مجموع ضرایب HNO_3، HIO_3، NO_2 و H_2O برابر $(26 = 4 + 10 + 2 + 10)$ است.

گزینهٔ (۲): *کاملاً درسته!*

گزینهٔ (۳): ضریب H_2O فقط در واکنش‌های a و d، یکسان است.

گزینهٔ (۴): مجموع ضرایب واکنش‌دهنده‌ها در واکنش c برابر $165 = 2 + 163$ بوده و کم‌تر از ۱/۵ برابر ضریب CO_2 است.

$(\frac{165}{114} \simeq 1/44)$

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۱۰۱ جدول مقابل داده‌هایی را دربارهٔ خودروهای یک کشور توسعه‌یافته نشان می‌دهد. نوعی خودرو در این کشور به ازای طی یک کیلومتر، ۱۲۵ گرم گاز کربن دی‌اکسید منتشر می‌کند. برچسب این خودرو کدام بوده و اگر این خودرو به طور میانگین سالانه مسافتی حدود ۱۸۰۰۰ کیلومتر طی کند. بعد از ۵ سال چند کیلوگرم گاز کربن دی‌اکسید بر اثر استفاده از این خودرو وارد هواکره می‌شود؟

۱) ۲۲۵۰ ـ A

۲) ۱۱۲۵۰ ـ A

۳) ۲۲۵۰ ـ B

۴) ۱۱۲۵۰ ـ B

برچسب آلایندگی خودرو	گسترهٔ انتشار گاز کربن دی‌اکسید (گرم) به ازای طی یک کیلومتر
A	کم‌تر از ۱۲
B	۱۲۰ ـ ۱۴۰
C	۱۴۰ ـ ۱۵۵
D	۱۵۵ ـ ۱۷۰
E	۱۷۰ ـ ۱۹۰
F	۱۹۰ ـ ۲۲۵
G	بیشتر از ۲۲۵

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ تشریحی با توجه به اطلاعات داده‌شده در جدول، برچسب این خودرو B است. حالا جرم CO_2 تولیدشده را در ۵ سال حساب می‌کنیم:

$$\text{kg } CO_2 = \text{۵ سال} \times \frac{18000\,\text{km}}{\text{۱ سال}} \times \frac{125\,\text{g } CO_2}{1\,\text{km}} \times \frac{1\,\text{kg}}{1000\,\text{g}} = 11250\,\text{kg } CO_2$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۱۰۲ اوزون تروپوسفری طی واکنش‌های موازنه‌نشدهٔ زیر تولید می‌شود. اگر تمام نیتروژن دی‌اکسید تولیدشده، در مرحلهٔ آخر مصرف شده و منجر به تولید $۸/۴۲۸\times۱۰^{۲۴}$ مولکول اوزون شود، چند لیتر گاز نیتروژن با چگالی ۰/۷ گرم بر لیتر مصرف شده است؟ $(O=۱۶, N=۱۴ : g.mol^{-1})$

۱) $N_۲(g)+O_۲(g)\rightarrow NO(g)$

۲) $NO(g)+O_۲(g)\rightarrow NO_۲(g)$

۳) $NO_۲(g)+O_۲(g)\xrightarrow{\text{نور خورشید}}NO(g)+O_۳(g)$

۱) ۱۵۶/۸ ۲) ۲۸۰ ۳) ۳۱۳/۶ ۴) ۵۶۰

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ تشریحی ابتدا هر سه واکنش را موازنه می‌کنیم:

۱) $N_۲+O_۲\rightarrow ۲NO$

۲) $۲NO+O_۲\rightarrow ۲NO_۲$

۳) $NO_۲+O_۲\rightarrow NO+O_۳$

چون $NO_۲$ تولیدشده در واکنش دوم، به طور کامل در واکنش سوم مصرف شده است، بنابراین ضرایب مواد در واکنش سوم را در عدد ۲ ضرب می‌کنیم تا $NO_۲$ در هر دو واکنش هم‌ضریب شود.

۳) $۲NO_۲+۲O_۲\rightarrow ۲NO+۲O_۳$

حال می‌توان به طور مستقیم از روی تعداد مولکول‌های $O_۳$، حجم $N_۲$ مصرفی را محاسبه کرد.

$N_۲ \sim ۲O_۳$

استفاده از کسر تبدیل:

$$LN_۲=۸/۴۲۸\times۱۰^{۲۴}O_۳\text{ مولکول}\times\frac{۱molO_۳}{۶/۰۲\times۱۰^{۲۳}O_۳\text{ مولکول}}\times\frac{۱molN_۲}{۲molO_۳}\times\frac{۲۸gN_۲}{۱molN_۲}\times\frac{۱LN_۲}{۰/۷gN_۲}=۲۸۰LN_۲$$

یه‌جور دیگه استفاده از کسر تناسب:

$$\frac{\underbrace{\text{حجم}\times\text{چگالی}}_{N_۲}}{\underbrace{\text{جرم مولی}\times\text{ضریب}}_{N_۲}}=\frac{\text{تعداد}}{\underbrace{۶/۰۲\times۱۰^{۲۳}\times\text{ضریب}}_{O_۳}}\Rightarrow\frac{۰/۷\times V}{۱\times۲۸}=\frac{۸/۴۲۸\times۱۰^{۲۴}}{۲\times۶/۰۲\times۱۰^{۲۳}}\Rightarrow V=۲۸۰L\,N_۲$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۱۰۳ کدام مطلب، نادرست است؟ $(S=۳۲, O=۱۶, N=۱۴ : g.mol^{-۱})$

۱) اوزون و گوگرد دی‌اکسید از لحاظ ساختار لوویس مشابه هستند به همین دلیل رفتار شیمیایی آن‌ها نیز مشابه خواهد بود.

۲) در بررسی رفتار زمین در برابر پرتوی خورشیدی، حدود ۶۰ درصد پرتوی فروسرخ گسیل‌شده از زمین وارد فضا می‌شوند و بخش کوچکی از پرتوهای ارسالی خورشید به زمین توسط هواکره جذب می‌شود.

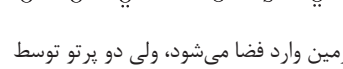
۳) اگر در دما و فشار یکسان، حجم ۱۲/۸ گرم $SO_۲$ برابر حجم ۱۵/۲ گرم $N_۲O_x$ باشد، x برابر ۳ می‌باشد.

۴) اوزون و اکسیژن هر دو در حالت مایع به رنگ آبی هستند و در ساختار لوویس اوزون ۱۲ الکترون ناپیوندی مشاهده می‌شود.

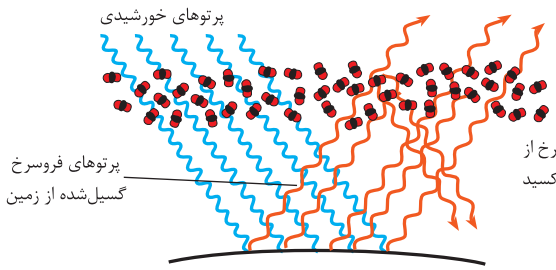
پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ تشریحی ✔ بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): ساختار لوویس $O_۳$ (اوزون) و $SO_۲$ (گوگرد دی‌اکسید) مشابه هم است، ولی رفتار شیمیایی متفاوتی دارند:



گزینهٔ (۲): با توجه به شکل کتاب درسی، از ۵ پرتوی تابشی به سطح زمین، سه پرتو از زمین وارد فضا می‌شود، ولی دو پرتو توسط گازهای گلخانه‌ای دوباره به زمین بازمی‌گردد.

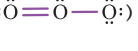


$\frac{۳}{۵} \times ۱۰۰ = ٪۶۰$

گزینهٔ (۳): در دما و فشار یکسان، حجم مولی گازها با هم برابر است، پس اگر حجم $SO_۲$ و $N_۲O_x$ برابر باشد، مول آن دو نیز برابر خواهد بود.

$$mol\,SO_۲ = ۱۲/۸\,g\,SO_۲ \times \frac{۱\,mol\,SO_۲}{۶۴\,g\,SO_۲} = ۰/۲\,mol$$

$$۰/۲\,mol\,N_۲O_x = ۱۵/۲\,g\,N_۲O_x \times \frac{۱\,mol\,N_۲O_x}{(۲۸+۱۶x)\,g\,N_۲O_x} \Rightarrow ۲۸+۱۶x = ۷۶ \Rightarrow x = ۳$$

گزینهٔ (۴): $O_۴$ و $O_۲$ هر دو در حالت مایع آبی‌رنگ هستند و در ساختار لوویس اوزون () ۱۲ الکترون ناپیوندی یا ۶ جفت‌الکترون ناپیوندی وجود دارد.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۱۰۴ کدام مورد درست است؟ $(Cl = ۳۵/۵, P = ۳۱ : g.mol^{-۱})$

۱) براساس شواهد، فصل بهار در نیمکرهٔ شمالی نسبت به ۵۰ سال گذشته حدود یک ماه زودتر آغاز می‌شود.

۲) به منظور تولید ۴۱۲/۵ گرم فسفر تری‌کلرید، باید ۱۸۶ گرم فسفر $(P_۴)$ با گاز کلر واکنش دهد.

۳) با افزایش ارتفاع در لایهٔ تروپوسفر، فشار گاز اکسیژن کاهش می‌یابد، اما درصد حجمی آن ثابت است.

۴) جاذبهٔ زمین، عامل توزیع گازها در سرتاسر هواکره است.

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ تشریحی

با افزایش ارتفاع، هم فشار گاز اکسیژن کاهش می‌یابد و هم فشار بقیهٔ گازها؛ بنابراین درصد حجمی گاز اکسیژن ثابت باقی می‌ماند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): فصل بهار در نیمکرهٔ شمالی نسبت به ۵۰ سال گذشته، حدود یک هفته زودتر آغاز می‌شود.

گزینهٔ (۲): ابتدا واکنش را نوشته و موازنه می‌کنیم:

$$P_۴(s) + ۶Cl_۲(g) \rightarrow ۴PCl_۳(l)$$

استفاده از کسر تبدیل:

$$g\,P_۴ = ۴۱۲/۵\,g\,PCl_۳ \times \frac{۱\,mol\,PCl_۳}{۱۳۷/۵\,g\,PCl_۳} \times \frac{۱\,mol\,P_۴}{۴\,mol\,PCl_۳} \times \frac{۱۲۴\,g\,P_۴}{۱\,mol\,P_۴} = ۹۳\,g\,P_۴$$

یه‌جور دیگه

استفاده از کسر تناسب:

$$\frac{\text{جرم}}{\underbrace{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}_{P_۴}} = \frac{\text{جرم}}{\underbrace{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}_{PCl_۳}} \Rightarrow \frac{x}{۱ \times ۱۲۴} = \frac{۴۱۲/۵}{۲ \times ۱۳۷/۵} \Rightarrow x = ۹۳\,g\,P_۴$$

گزینهٔ (۴): جاذبهٔ زمین باعث می‌شود که تراکم گازها در ارتفاعات پایین‌تر بیشتر از تراکم آن‌ها در ارتفاعات بالاتر باشد. عامل توزیع گازها در سرتاسر هواکره، جنبش پیوستهٔ مولکول‌هاست که ناشی از انرژی گرمایی آن‌ها می‌باشد.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۱۰۵ پتاسیم پرمنگنات ($KMnO_4$) و آلومینیم سولفات ($Al_2(SO_4)_3$) طبق واکنش‌های موازنه‌نشدهٔ زیر، در ظرف دربازِ تجزیه می‌شوند. اگر جرم مادهٔ جامد به‌کاررفته در واکنش (I)، ۲ برابر واکنش (II) باشد، کاهش جرم واکنش (I) چند برابر واکنش (II) است و اگر تفاوت جرم فراورده‌های جامد در واکنش (I)، ۵۵ گرم باشد، جرم واکنش‌دهندهٔ (II) چند گرم بوده است؟

$(Mn=55, K=39, S=32, Al=27, O=16 : g.mol^{-1})$

I) $KMnO_4(s) \rightarrow K_2MnO_4(s) + MnO_2(s) + O_2(g)$

II) $Al_2(SO_4)_3(s) \rightarrow Al_2O_3(s) + SO_3(g)$

۱) ۱۵۸ ، ۰/۲۸۸ ۲) ۷۹ ، ۰/۱۴۲ ۳) ۱۵۸ ، ۰/۱۴۲ ۴) ۷۹ ، ۰/۲۸۸

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ تشریحی ابتدا هر دو واکنش را موازنه می‌کنیم:

I) $2KMnO_4(s) \rightarrow K_2MnO_4(s) + MnO_2(s) + O_2(g)$

II) $Al_2(SO_4)_3(s) \rightarrow Al_2O_3(s) + 3SO_3(g)$

قسمت اول: جرم $KMnO_4$ را برابر $2m$ و جرم $Al_2(SO_4)_3$ را برابر m فرض می‌کنیم. از طرف دیگر بایستی دقت کنیم که کاهش جرم یعنی همان جرم گاز خارج‌شده از ظرف واکنش.

استفاده از کسر تبدیل:

$$gO_2 = 2m\,g\,KMnO_4 \times \frac{1\,mol\,KMnO_4}{158\,g\,KMnO_4} \times \frac{1\,mol\,O_2}{2\,mol\,KMnO_4} \times \frac{32\,g\,O_2}{1\,mol\,O_2} = \frac{32m}{158}\,g\,O_2$$

$$gSO_3 = m\,g\,Al_2(SO_4)_3 \times \frac{1\,mol\,Al_2(SO_4)_3}{342\,g\,Al_2(SO_4)_3} \times \frac{3\,mol\,SO_3}{1\,ml\,Al_2(SO_4)_3} \times \frac{80\,g\,SO_3}{1\,mol\,SO_3} = \frac{240m}{342}\,g\,SO_3$$

$$\frac{\frac{32m}{158}}{\frac{240m}{342}} = 0/288$$

یه جور دیگه استفاده از کسر تناسب:

$$\frac{\text{جرم}}{\underbrace{\text{جرم‌مولی} \times \text{ضریب}}_{KMnO_4}} = \frac{\text{جرم}}{\underbrace{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}_{O_2}} \Rightarrow \frac{2m}{2\times158} = \frac{x}{1\times32} \Rightarrow x = \frac{32m}{158}$$

$$\frac{\text{جرم}}{\underbrace{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}_{Al_2(SO_4)_3}} = \frac{\text{جرم}}{\underbrace{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}_{SO_3}} \Rightarrow \frac{m}{1\times342} = \frac{x}{3\times80} \Rightarrow x = \frac{240m}{342}$$

$$\frac{\frac{32m}{158}}{\frac{240m}{342}} = 0/288$$

قسمت دوم: تفاوت جرم MnO_2 و K_2MnO_4 برابر ۵۵ گرم داده شده است؛ پس داریم:

$$2KMnO_4 \sim K_2MnO_4(s) + MnO_2(s)$$

$$\frac{\text{جرم}}{\underbrace{\text{جرم‌مولی} \times \text{ضریب}}_{KMnO_4}} = \frac{\text{تفاوت جرم}}{\underbrace{(\text{جرم‌مولی}_A \times \text{ضریب}_A) - (\text{جرم‌مولی}_B \times \text{ضریب}_B)}_{K_2MnO_4 + MnO_2}}$$

$$\Rightarrow \frac{2m}{2\times158} = \frac{55}{(1\times197) - (1\times87)} \Rightarrow 2m = 158\,g$$

چون در ابتدا گفته شده بود که جرم $KMnO_4$ دو برابر جرم $Al_2(SO_4)_3$ است، بنابراین جرم $Al_2(SO_4)_3$ برابر است با:

$$m = \frac{158}{2} = 79\,g$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud