آزمون آزمایشی خیلی سبز

رشته ریاضی

پایه دوازدهم | آزمون جامع (مرحله بیست‌ودوم)

سال تحصیلی ۰۵-۱۴۰۴ | ۲۶/مرداد/۱۴۰۵

دفترچه شماره یک

پایه

مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخگویی	دوازدهم	یازدهم	دهم
حسابان و ریاضیات پایه	۱۸	۱	۱۸	۷۰ دقیقه	کل کتاب صفحهٔ ۱ تا ۱۴۴	کل کتاب صفحهٔ ۱ تا ۱۵۱	فصل ۱ تا ۵ صفحهٔ ۱ تا ۱۱۷
هندسه	۱۲	۱۹	۳۰		کل کتاب صفحهٔ ۹ تا ۸۶	کل کتاب صفحهٔ ۹ تا ۷۵	کل کتاب صفحهٔ ۹ تا ۹۶
ریاضیات گسسته و آمار و احتمال	۱۰	۳۱	۴۰		کل کتاب صفحهٔ ۱ تا ۸۴	کل کتاب صفحهٔ ۱ تا ۱۲۱	فصل ۶ و ۷ صفحهٔ ۱۱۸ تا ۱۷۰
مجموع	۴۰ سؤال			۷۰ دقیقه	–		

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا	مسئول درس ـ گزینشگر
حسابان و ریاضیات پایه	طراحان: کاظم اجلالی ـ کوروش اسلامی ـ فرشاد حسن‌زاده ـ عادل حسینی بابک سادات ـ علی شهرابی ـ مصطفی کرمی ـ محمد گودرزی ـ میلاد منصوری سروش موئینی ـ حسین نادری ـ محمدسجاد نقیه کارشناسان علمی: علی افضل‌زاده ـ سروش موئینی ـ مازیار احمدی‌ناو	محمدسجاد نقیه
هندسه	طراحان: امیرحسین ابومحبوب ـ سید محمدرضا حسینی‌فرد ـ محمدطاهر شعاعی حمید گلزاری ـ صبا مهدوی کارشناس علمی: سید عباس حسینی	حمید گلزاری
ریاضیات گسسته و آمار و احتمال	طراحان: مصطفی دیداری ـ سوگند روشنی ـ سعید قندچی کارشناس علمی: سعید قندچی	مصطفی دیداری

مدیر تألیف آزمون: دکتر فاطمه آقاجانپور

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

این آزمون نمره منفی دارد.

دفترچه سؤالات آزمون‌های خیلی سبز، از همه نظر (تعداد سؤال‌ها، زمان پاسخگویی، نوع چینش گزینه‌ها، نوع صفحه‌آرایی، فونت سؤالات، سایز کلمات و اعداد، جای خالی محل انجام محاسبات و ...) در شبیه ترین حالت به دفترچه سؤالات کنکور سراسری طراحی می‌شود.

ویژه کنکوری‌های ۱۴۰۵

Azmoon.kheilisabz.com

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱- توابع f و g با ضابطه‌های $f(x)=\sqrt{(x-a)(x^{۲}-۸x+۱۶)}$ و $g(x)=|x-۴|\sqrt{x-a}$ مساوی هستند. حدود a کدام است؟

۱) $a\in\mathbb{R}$ ۲) $a>۰$ ۳) $a\leq ۴$ ۴) $a\geq ۴$

۲- تابع همانی f و تابع ثابت g با دامنهٔ $\mathbb{R}$ مفروض‌اند. اگر $(gof)(۳x-۱)+f(۲x-۱)=۲x+۱$ باشد، مقدار $((f+g)of)(۱)$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۳- توابع f و g با ضابطه‌های $f(x)=\begin{cases}x-x^{۲} & ;\ x<-۱\\ x^{۲}-۲x & ;\ x\geq -۱\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}۴-x & ;\ f'(x)<۰\\ x^{۲} & ;\ f'(x)\geq ۰\end{cases}$ مفروض‌اند. حاصل $(gof)(۲)+(fog)(-۲)$ کدام است؟

۱) -۸ ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴

۴- تعداد جواب‌های معادلهٔ $(۱۳\cos x-۱۲)(۱۳\sin x+۵)=۰$ در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۵- حاصل عبارت $\tan(\frac{۱۰\pi}{۳})\cos(\frac{۱۷\pi}{۶})-\cos(\frac{۲۲\pi}{۳})$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۲

۶- اگر $۶\pi<۴\alpha<۷\pi$ و $\tan\alpha+\cot\alpha=-۴$ باشد، حاصل $\sin^{۳}\alpha-\cos^{۳}\alpha$ چند برابر $\sqrt{۶}$ است؟

۱) $-\frac{۵}{۸}$ ۲) $-\frac{۳}{۸}$ ۳) $\frac{۳}{۸}$ ۴) $\frac{۵}{۸}$

۷- حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cos(\frac{\pi}{۲}-\frac{\sqrt{۲}}{x})\sqrt{x}}{\sqrt{\sqrt{۲}+x}-\sqrt{x}}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) ۱ ۴) ۲

۸- اگر $f(x)=۴-\frac{۳}{۲}|x-۲|$ و $g(x)=\frac{|x-۲|}{۲}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)+g(-x)}{x}+\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)-g(-x)}{x}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) -۴ ۳) -۱ ۴) ۱

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹- تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}2x+1 & ; \ x\le a\\ \dfrac{bx^2-cx-1}{x-a} & ; \ x>a\end{cases}$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته است. اگر a عددی مثبت و $f(-\frac{a}{2})=0$ باشد، مقدار b کدام است؟

۱) $\frac{9}{2}$ ۲) ۳ ۳) $\frac{8}{9}$ ۴) ۲

۱۰- اگر $f(x)=\frac{1}{\sqrt[5]{x+2|x|}}$ و $g(x)=\frac{1}{2x^5+|x^5|}$ باشد، حاصل $(fog)'(\sqrt{5})+(gof)'(-\sqrt{5})$ کدام است؟

۱) $-\frac{2}{3}$ ۲) -1 ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{2}{3}$

۱۱- تابع f با ضابطهٔ $f(x)=x^3$ مفروض است. اگر خط مماس بر نمودار تابع f^{-1} در نقطهٔ $x=\alpha$ واقع بر نمودار آن، از نقطهٔ (۴,۰) بگذرد، مقدار α کدام است؟

۱) ۴ ۲) -1 ۳) -2 ۴) صفر

۱۲- ماکزیمم مطلق تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\sin x\sqrt[3]{\frac{3}{2}+\cos^2 x}$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt[3]{12}}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt[3]{6}}{2}$

۳) $\sqrt[3]{12}$ ۴) $\sqrt[3]{6}$

۱۳- نقطهٔ (۲,۴)، عطف نمودار تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\frac{ax+b}{x^2+1}$ است. حاصل $f(-3)$ کدام است؟

۱) $-\frac{5}{2}$ ۲) -3

۳) $-\frac{7}{2}$ ۴) -4

۱۴- حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ $(x^2-x-4)^2-x^3=26$، چند برابر مجموع آن‌ها است؟

۱) -10 ۲) ۱۰ ۳) ۵ ۴) -5

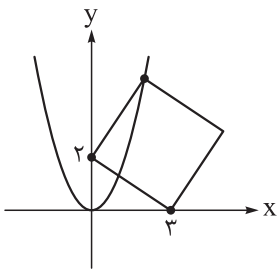
۱۵- نقاط متمایز A، B، C و D به ترتیب با طول‌های α، -4، -2 و ۵ روی محور x مفروض‌اند. اگر $AB>AC+AD$ باشد، مجموعه مقادیر قابل قبول برای α شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

محل انجام محاسبات

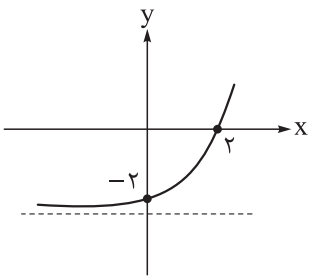
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۶- نمودار تابع f با ضابطهٔ $f(x)=kx^{۲}$ در شکل زیر رسم شده است. اگر چهارضلعی رسم‌شده مربع باشد، حاصل $\frac{۱}{f(k-۱)}$ کدام است؟



۱) ۱۲/۸
۲) ۱۳/۲
۳) ۱۳/۴
۴) ۱۳/۸

۱۷- شکل زیر، نمودار تابع f با ضابطهٔ $f(x)=a+b\times ۳^{x+c}$ را نمایش می‌دهد. حاصل $f(\frac{۱}{\log ۳})$ کدام است؟



۱) ۰/۱
۲) ۰/۱۲۵
۳) ۰/۲
۴) ۰/۲۵

۱۸- اعداد $\log\alpha$، $\log ۶$ و $\log(۲\alpha+۱۴)$، سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ حسابی و اعداد $\log_{\alpha} ۸$، α و $\log_{\beta}\alpha$، سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ هندسی‌اند. حاصل $\beta^{۲}\sqrt{\alpha}$ کدام است؟

۱) ۲
۲) $۲\sqrt{۲}$
۳) ۴
۴) $۴\sqrt{۲}$

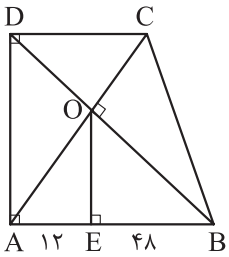
محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۹- شعاع بزرگ‌ترین دایره‌ای که بر خط‌های شامل اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین مماس است، برابر $\sqrt{۲}$ می‌باشد. برای رسم عمودمنصف یکی از ساق‌های این مثلث، باید دهانهٔ پرگار را حداقل بیشتر از کدام عدد زیر باز کرد؟

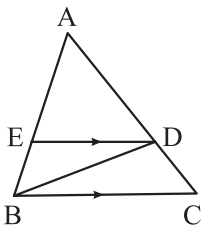
۱) $\sqrt{۲}+۱$ ۲) $۲\sqrt{۲}-۲$ ۳) $\sqrt{۲}-۱$ ۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۲۰- در شکل زیر، قطرهای ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه بر هم عمودند. طول پاره‌خط OC کدام است؟



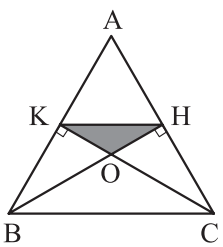
۱) $۲\sqrt{۳}$
۲) $۴\sqrt{۵}$
۳) $۳\sqrt{۵}$
۴) $۴\sqrt{۳}$

۲۱- در مثلث ABC مطابق شکل، DE با BC موازی است، اگر مساحت مثلث BDE، ۷۵ درصد مساحت مثلث BCD باشد، آن‌گاه نسبت مساحت مثلث ADE به مساحت ذوزنقه کدام است؟



۱) $\frac{۸}{۷}$ ۲) $\frac{۹}{۷}$ ۳) $\frac{۱۰}{۷}$ ۴) $\frac{۱۱}{۷}$

۲۲- در شکل زیر، BH و CK، دوتا از ارتفاع‌های مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به طول ضلع $۲\sqrt[۴]{۳}$ هستند. مساحت مثلث OKH کدام است؟

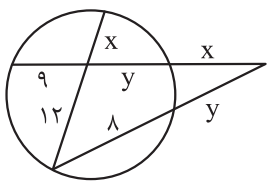


۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۶}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۹}$

۲۳- حجم شکل حاصل از دوران مثلثی به طول اضلاع ۲، ۳ و ۴، حول ضلع متوسط، چند برابر π است؟

۱) ۳/۷۵ ۲) ۳/۵ ۳) ۳/۲۵ ۴) ۳

۲۴- در شکل زیر حاصل $x+y$ کدام است؟



۱) ۵
۲) ۷
۳) ۸
۴) ۱۰

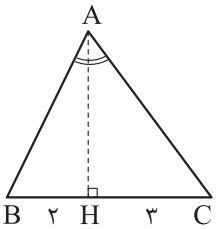
محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۵- نقطهٔ A'، بازتاب نقطهٔ A نسبت به خط d است به طوری که $AA' = ۴۸$. اگر O نقطه‌ای واقع بر d باشد، به طوری که $OA = ۲۵$، آن‌گاه فاصلهٔ A از OA' کدام است؟

۱) ۱۳/۴۴ ۲) ۱۴/۴۸ ۳) ۱۴/۲ ۴) ۱۶/۸

۲۶- در شکل مقابل اگر $B\hat{A}C = ۴۵^\circ$، آن‌گاه طول ارتفاع AH کدام است؟



۱) ۱

۲) $\sqrt{۶}$

۳) $۲\sqrt{۳}$

۴) ۶

۲۷- اگر $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۳ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ \frac{۳}{۲} & ۰ & \frac{۱}{۲} \end{bmatrix}$ باشند، دترمینان ماتریس $C = A^۳B^۲$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) ۴ ۴) -۴

۲۸- فواصل یکی از کانون‌های یک بیضی از دو سر قطر بزرگ و یک سر قطر کوچک آن، تشکیل یک دنبالهٔ حسابی می‌دهند. اگر قدرنسبت این دنباله، نصف طول قطر کوچک بیضی باشد، خروج از مرکز آن کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۵}}{۵}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۲۹- دایره‌ای که نقاط $A(۲,۴)$ و $B(-۶,-۲)$، دو سر قطری از آن هستند، یک سهمی با کانون $F(۱,۱)$ و خط هادی $x = -۳$ را در دو نقطه قطع می‌کند. فاصلهٔ این دو نقطه از یکدیگر کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۴

۳۰- اگر $\vec{a} = \vec{j} + ۱۰\vec{k}$، $\vec{b} = (۴,۱,۵)$ و $\vec{c} = (۱,-۲,۲)$ آن‌گاه مجموع مؤلفه‌های تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر امتداد بردار $\vec{b} + \vec{c}$، کدام است؟

۱) ۱۰/۱۲ ۲) ۱۰/۱۴

۳) ۱۰/۱۶ ۴) ۱۰/۱۸

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۱- گزارهٔ $[(p \Rightarrow q) \vee \sim r] \Rightarrow (p \wedge r)$ هم‌ارز کدام گزاره است؟

۱) $p \wedge q$ ۲) $p \wedge r$ ۳) $r \wedge q$ ۴) $p \wedge \sim r$

۳۲- مجموعهٔ $(A \cap B)' \cup [((A \cup B') - A) \cup (B - A')]$ با کدام مجموعه برابر است؟ (U مجموعهٔ مرجع است.)

۱) B ۲) A ۳) $\varnothing$ ۴) U

۳۳- در مراسمی فاطمه، آناهیتا، رضوانه، سارا، پرنیا و سارینا می‌خواهند سخنرانی کنند، ولی باید آناهیتا قبل از رضوانه و سارا بلافاصله بعد از سارینا سخنرانی کند. به چند حالت می‌توانیم ترتیب سخنرانی را برای آن‌ها مشخص کنیم؟

۱) ۳۰ ۲) ۴۰ ۳) ۶۰ ۴) ۱۲۰

۳۴- سکه‌ای به گونه‌ای ساخته شده است که احتمال آمدن رو در آن سه برابر احتمال آمدن پشت است. آن را پرتاب می‌کنیم. اگر رو بیاید دو تاس و اگر پشت بیاید سه تاس پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال مجموع اعداد روشدهٔ تاس‌ها حداکثر ۴ است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۵}{۲۷}$ ۴) $\frac{۷}{۵۴}$

۳۵- برآورد بازه‌ای میانگین جامعه با اطمینان بیش از ۹۵ درصد با استفاده از یک نمونهٔ ۱۶تایی به صورت $(۳ / ۵,۶ / ۵)$ برآورد شده است. اگر انحراف معیار جامعه و نمونه برابر باشد، چند دادهٔ برابر با ۵ به نمونه اضافه کنیم تا واریانس نمونه، ۳ واحد کاهش یابد؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) صفر

۳۶- a عددی اول است که $a \mid ۶k+۱$ و $a \mid ۳k+۴$. بزرگ‌ترین جواب دورقمی برای x در معادلهٔ هم‌نهشتی $۱۰۷x \equiv ۶۱ - x$ به پیمانهٔ a کدام است؟

۱) ۹۵ ۲) ۹۶ ۳) ۹۷ ۴) ۹۸

۳۷- حاصل‌ضرب درجهٔ رأس‌های گراف همبند G با کم‌ترین تعداد رأس از درجهٔ یک، برابر ۶۰ است. حاصل $\gamma(\bar{G}) + \Delta(\bar{G})$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۳۸- چند تابع پوشا $f : \{۱,۲,۳,۴,۵\} \to \{۱,۲,۳\}$ وجود دارد که $f(۱) \neq ۱$؟

۱) ۵۰ ۲) ۱۰۰ ۳) ۶۲ ۴) ۳۱

۳۹- از بین ۵ نوع گل مختلف می‌خواهیم دسته‌گلی شامل ۹ شاخه درست کنیم. این کار به چند طریق امکان‌پذیر است، هرگاه از گل نوع سوم فقط دو شاخه و از گل نوع پنجم حداقل دو شاخه در دسته‌گل به کار رفته باشد؟

۱) ۲۸ ۲) ۷۰ ۳) ۱۲۶ ۴) ۵۶

۴۰- در کیسه‌ای ۵ مهرهٔ سفید، ۳ مهرهٔ سبز، ۴ مهرهٔ قرمز و ۶ مهرهٔ آبی داریم. حداقل چند مهره خارج کنیم تا حداقل ۳ مهرهٔ سفید یا حداقل ۲ مهرهٔ سبز یا حداقل ۳ مهرهٔ قرمز خارج شود؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ‌نامهٔ تشریحی آزمون را ساعت ۱۶:۰۰ از صفحهٔ شخصی خودتان در سایت آزمون خیلی سبز دریافت کنید.

azmoon.kheilisabz.com

اساتید، مشاوران و دانش‌آموزان گرامی؛

نظرات، پیشنهادات، انتقادات و بازخوردهای خود نسبت به سؤالات این آزمون را می‌توانید از طریق آیدی Kheilisabz_edit@ در همهٔ پیام‌رسان‌ها با ما به اشتراک بگذارید.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

آزمون آزمایشی خیلی سبز

رشته ریاضی

پایه دوازدهم | آزمون جامع (مرحله بیست‌ودوم)

سال تحصیلی ۰۵-۱۴۰۴ | ۲۶/مرداد/۱۴۰۵

دفترچه شماره دو

پایه

مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخگویی	دوازدهم	یازدهم	دهم
فیزیک	۳۵	۴۱	۷۵	۴۵ دقیقه	کل کتاب صفحهٔ ۱ تا ۱۵۶	کل کتاب صفحهٔ ۱ تا ۱۳۰	کل کتاب صفحهٔ ۱ تا ۱۴۹
شیمی	۳۰	۷۶	۱۰۵	۳۰ دقیقه	کل کتاب صفحهٔ ۱ تا ۱۲۳	کل کتاب صفحهٔ ۱ تا ۱۲۳	کل کتاب صفحهٔ ۱ تا ۱۲۲
مجموع	۶۵ سؤال			۷۵ دقیقه	–		

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا	مسئول درس ـ گزینشگر
فیزیک	طراحان: یاشار انگوتی ـ هادی حمزه‌پور ـ علیرضا جباری ـ رضا سبزمیدانی ـ نوید شاهی کارشناسان علمی: علیرضا جباری ـ سعید محبی ـ هادی نجفی	رضا سبزمیدانی ـ نوید شاهی
شیمی	طراحان: عین‌الله ابوالفتحی ـ پیمان خواجوی‌مجد ـ یلدا رزاق‌زاده ـ سروش عبادی یاسر عبداللهی ـ محمد عظیمیان زواره ـ محمد قهرمانی‌نژاد ـ پارسا طاهری‌منزه محسن مجنونی ـ امیرحسین مسلمی ـ مرتضی نصیرزاده کارشناسان علمی: یاشار ذریه ـ محمدمهدی کریمیان ـ مرتضی نصیرزاده	یاسر عبداللهی

مدیر تألیف آزمون: دکتر فاطمه آقاجانپور

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

این آزمون نمره منفی دارد.

دفترچه سؤالات آزمون‌های خیلی سبز، از همه نظر (تعداد سؤال‌ها، زمان پاسخگویی، نوع چینش گزینه‌ها، نوع صفحه‌آرایی، فونت سؤالات، سایز کلمات و اعداد، جای خالی محل انجام محاسبات و ...) در شبیه ترین حالت به دفترچه سؤالات کنکور سراسری طراحی می‌شود.

ویژه کنکوری‌های ۱۴۰۵

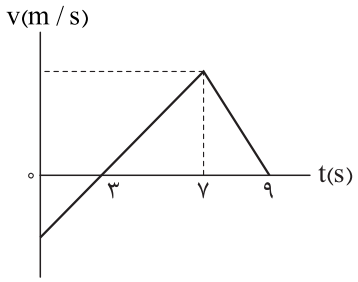
Azmoon.kheilisabz.com

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۱- بردار مکان متحرکی که با سرعت ثابت در راستای محور x حرکت می‌کند، در لحظه‌های $t_1 = ۲\ s$ و $t_2 = ۹\ s$ به ترتیب برابر $(۱۵\ m)\vec{i}$ و $(-۲۷\ m)\vec{i}$ است. بردار مکان متحرک در لحظهٔ $t = ۶\ s$ برحسب متر کدام است؟

۱) $۹\vec{i}$ ۲) $۳\vec{i}$ ۳) $-۳\vec{i}$ ۴) $-۹\vec{i}$

۴۲- نمودار سرعت ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. اگر اندازهٔ شتاب متوسط متحرک در ۸ ثانیهٔ اول برابر $۳\ m/s^2$ باشد، اندازهٔ سرعت متوسط متحرک در ۹ ثانیهٔ اول چند متر بر ثانیه است؟



۱) ۴
۲) ۴/۴
۳) ۸
۴) ۸/۸

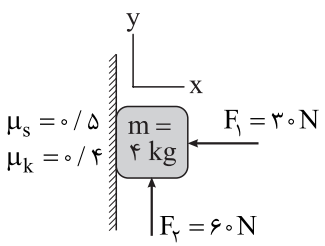
۴۳- سرعت متحرکی که با شتاب ثابت در راستای محور x حرکت می‌کند، در مبدأ زمان برابر $(۶\ m/s)\vec{i}$ است. اگر جابه‌جایی متحرک در ۲ ثانیهٔ دوم، ۷ برابر جابه‌جایی آن در ثانیهٔ اول باشد، شتاب متحرک برحسب متر بر مربع ثانیه کدام است؟

۱) $۷\vec{i}$ ۲) $-۷\vec{i}$ ۳) $۱۲\vec{i}$ ۴) $-۱۲\vec{i}$

۴۴- در شرایط خلأ، گلولهٔ A از ارتفاع ۵۰متری سطح زمین و ۱ ثانیهٔ بعد گلولهٔ B از ارتفاع ۲۰متری سطح زمین رها می‌شوند. از لحظهٔ سقوط گلولهٔ B تا لحظه‌ای که یکی از گلوله‌ها به سطح زمین می‌رسد، کم‌ترین فاصلهٔ دو گلوله برابر چند متر است؟ $(g = ۱۰\ m/s^2)$

۱) ۱۵ ۲) ۱۰ ۳) ۵ ۴) صفر

۴۵- در شکل زیر، به جسمی که به دیوار قائم تکیه داده شده، نیروی افقی F_1 و نیروی قائم F_2 وارد می‌شود. نیروی اصطکاک وارد بر جسم برحسب نیوتون کدام است؟ $(g = ۱۰\ N/kg)$



۱) $۱۵\vec{j}$ ۲) $-۱۵\vec{j}$
۳) $۱۲\vec{j}$ ۴) $-۱۲\vec{j}$

۴۶- یک انتهای فنر سبکی به طول ۳۰ cm و ثابت $۴۰۰\ N/m$ را به سقف آسانسوری بسته و از انتهای دیگر آن، وزنه‌ای به جرم ۲ kg آویزان می‌کنیم. اگر آسانسور با شتاب رو به بالایی به بزرگی $۲\ m/s^2$، به سمت پایین در حال حرکت باشد، طول فنر به چند سانتی‌متر می‌رسد؟ $(g = ۱۰\ N/kg)$

۱) ۲۴ ۲) ۲۶ ۳) ۳۴ ۴) ۳۶

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

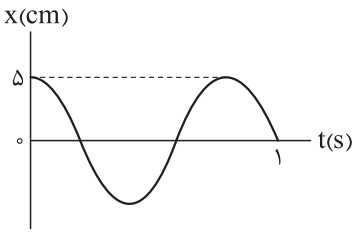
۴۷- معادلهٔ تکانه ـ زمان جسمی که در راستای محور x حرکت می‌کند، در SI به صورت $p = ۲t^۲ - ۸t + ۳$ است. نیروی خالص متوسط وارد بر جسم در بازهٔ زمانی $t_۱ = ۳\ s$ تا $t_۲ = ۵\ s$ برحسب نیوتون کدام است؟

۱) $۲\vec{i}$ ۲) $-۲\vec{i}$ ۳) $۸\vec{i}$ ۴) $-۸\vec{i}$

۴۸- دو ماهوارهٔ A و B روی مدارهای دایره‌ای‌شکلی به دور زمین می‌چرخند. اگر فاصلهٔ ماهوارهٔ A از سطح زمین ۸ برابر فاصلهٔ ماهوارهٔ B از سطح زمین و دورهٔ ماهوارهٔ A، ۸ برابر دورهٔ ماهوارهٔ B باشد، فاصلهٔ ماهوارهٔ A از سطح زمین چند مگامتر است؟ (شعاع کرهٔ زمین ۶۴۰۰ km است.)

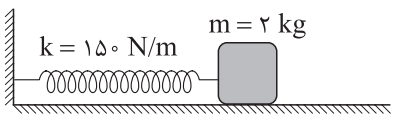
۱) ۳/۸۴ ۲) ۴/۸ ۳) ۳۸/۴ ۴) ۴۸

۴۹- نمودار مکان ـ زمان نوسانگری که در راستای محور x حرکت هماهنگ ساده انجام می‌دهد، به شکل زیر است. سرعت متحرک در لحظهٔ $t = ۰/۲\ s$ برحسب متر بر ثانیه کدام است؟



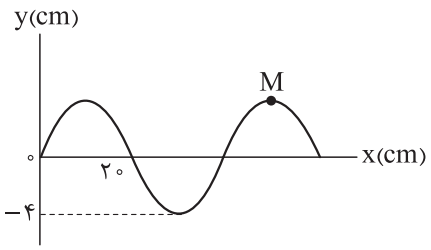
۱) $\frac{\pi}{۸}\vec{i}$ ۲) $-\frac{\pi}{۸}\vec{i}$ ۳) $\frac{\pi}{۱۶}\vec{i}$ ۴) $-\frac{\pi}{۱۶}\vec{i}$

۵۰- در شکل زیر، جسم متصل به فنر روی سطح افقی بدون اصطکاک با دامنهٔ ۱۰ cm نوسان می‌کند. در لحظه‌ای که تندی جسم برابر $۰/۵\ m/s$ است، انرژی پتانسیل سامانه برابر چند ژول است؟



۱) ۰/۲۵ ۲) ۰/۵ ۳) ۰/۷۵ ۴) ۱

۵۱- تصویر موج منتشرشده در تار کشیده‌ای در یک لحظه، به شکل زیر است. اگر تندی انتشار موج در تار برابر $۸۰\ m/s$ باشد، مسافت طی‌شده توسط ذرهٔ M از تار، در هر ثانیه برابر چند متر است؟



۱) ۸
۲) ۱۶
۳) ۳۲
۴) ۶۴

۵۲- اگر با کاهش دامنهٔ چشمهٔ صوتی، در یک فاصلهٔ معین از چشمه شدت صوت ۸۰ درصد کاهش یابد، تراز شدت آن چند دسی‌بل تغییر می‌کند؟

$(\log ۲ = ۰/۳)$

۱) ۷ ۲) ۱ ۳) ۰/۷ ۴) ۰/۱

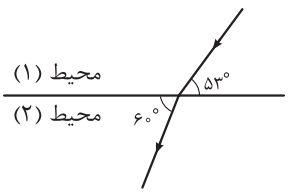
محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۳- بسامد امواج فراصوتی‌ای که وال برای مکان‌یابی پژواکی تولید می‌کند، ۱۰۰ kHz و طول موج آن در آب ۱/۵ cm است. زمان رفت و برگشت موج گسیل‌شده توسط وال برای مانعی که در فاصلهٔ ۷۵ m از آن قرار گرفته، برابر چند ثانیه است؟

۱) ۰/۰۵ ۲) ۰/۱ ۳) ۰/۵ ۴) ۱

۵۴- در شکل زیر، پرتو نوری از محیط شفاف (۱) وارد محیط شفاف (۲) شده است. اگر اختلاف تندی نور در این دو محیط برابر $۴/۵\times۱۰^{۷}\ m/s$ باشد، تندی نور در محیط (۱) برابر چند متر بر ثانیه است؟ $(\sin ۵۳^\circ = ۰/۸)$

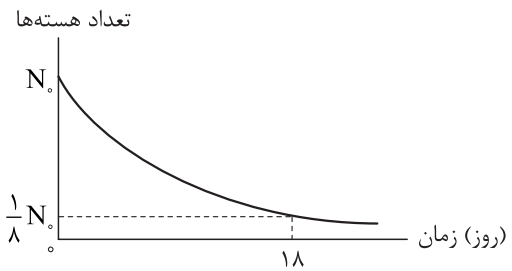


۱) $۲/۷\times۱۰^{۸}$
۲) $۱/۲\times۱۰^{۸}$
۳) $۲/۲۵\times۱۰^{۸}$
۴) $۷/۵\times۱۰^{۸}$

۵۵- در طیف اتمی هیدروژن، بلندترین طول موج گسیلی در ناحیهٔ فرابنفش، چند برابر بلندترین طول موج گسیلی در ناحیهٔ نور مرئی است؟

۱) $\frac{۴۹}{۸۱}$ ۲) $\frac{۸۱}{۴۹}$ ۳) $\frac{۲۷}{۵}$ ۴) $\frac{۵}{۲۷}$

۵۶- نمودار تعداد هسته‌های فعال یک مادهٔ پرتوزا برحسب زمان به شکل زیر است. چند درصد از هسته‌های یک نمونه از این ماده، پس از ۳۰ روز دچار واپاشی می‌شوند؟



۱) ۳/۱۲۵
۲) ۶/۲۵
۳) ۹۳/۷۵
۴) ۹۶/۸۷۵

۵۷- کدام‌یک از موارد زیر درست است؟

الف) در واپاشی β^+، یکی از پروتون‌های درون هسته به یک نوترون و یک پوزیترون تبدیل می‌شود و سپس این پوزیترون از هسته گسیل می‌شود.

ب) الکترون گسیل‌شده در واپاشی β^-، در هستهٔ مادر وجود ندارد و یکی از الکترون‌های مداری اتم است.

پ) در تمام فرایندهای واپاشی پرتوزا، تعداد نوکلئون‌های هستهٔ مادر با تعداد نوکلئون‌های هستهٔ دختر برابر است.

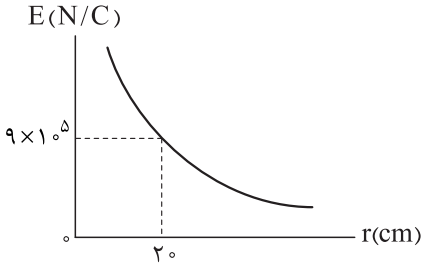
ت) اغلب هسته‌ها پس از واپاشی آلفا یا بتا، در حالت برانگیخته قرار می‌گیرند و با گسیل پرتو گاما به حالت پایه می‌رسند.

۱) پ ـ ت ۲) الف ـ پ ۳) الف ـ ب ۴) الف ـ ت

محل انجام محاسبات

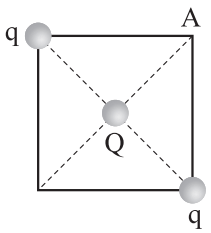
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۸- نمودار اندازهٔ میدان الکتریکی حاصل از بار الکتریکی نقطه‌ای q برحسب فاصله از آن به شکل زیر است. اگر بار الکتریکی نقطه‌ای $q' = ۵\ \mu C$ در فاصلهٔ ۳۰ cm از بار q قرار گیرد، اندازهٔ نیروی الکتریکی که این دو بار به هم وارد می‌کنند، چند نیوتون است؟ $(k = ۹\times ۱۰^۹\ \frac{N.m^۲}{C^۲})$



۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴/۵
۴) ۶

۵۹- در شکل زیر که دو بار الکتریکی نقطه‌ای q روی دو رأس مربع و بار الکتریکی نقطه‌ای Q در مرکز مربع قرار دارد، میدان الکتریکی خالص در نقطهٔ A برابر $\vec{E}_۱$ است. اگر با حذف بار Q، میدان الکتریکی خالص در نقطهٔ A برابر $\vec{E}_۲ = -۲\vec{E}_۱$ شود، $\frac{Q}{q}$ برابر کدام است؟



۱) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$
۲) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۴}$
۳) $\frac{-۳\sqrt{۲}}{۲}$
۴) $\frac{-۳\sqrt{۲}}{۴}$

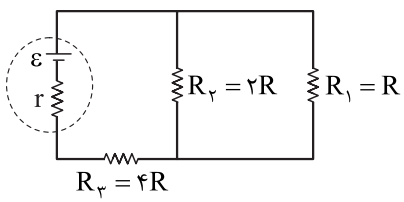
۶۰- خازنی به ظرفیت $۵\ \mu F$ توسط یک باتری ۶ولتی باردار شده است. خازن را از باتری جدا کرده و سپس عایق بین صفحه‌های خازن را برمی‌داریم. اگر ثابت دی‌الکتریک این عایق برابر ۳ باشد، انرژی ذخیره‌شده در خازن چند میلی‌ژول و چگونه تغییر می‌کند؟

۱) ۰/۰۶، کاهش می‌یابد.
۲) ۰/۰۶، افزایش می‌یابد.
۳) ۰/۱۸، کاهش می‌یابد.
۴) ۰/۱۸، افزایش می‌یابد.

۶۱- اگر جرم سیم مسی A با جرم سیم مسی B، برابر و قطر مقطع سیم A، ۲ برابر قطر مقطع سیم B باشد، مقاومت الکتریکی سیم A، چند برابر مقاومت الکتریکی سیم B است؟

۱) ۴
۲) $\frac{۱}{۴}$
۳) ۱۶
۴) $\frac{۱}{۱۶}$

۶۲- در مدار شکل زیر، توان مصرفی مقاومت $R_۱$، چند برابر توان خروجی باتری است؟

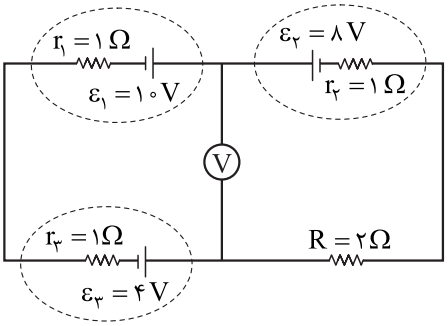


۱) $\frac{۱}{۲۱}$
۲) $\frac{۲}{۲۱}$
۳) $\frac{۱}{۷}$
۴) $\frac{۲}{۷}$

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶۳- در مدار شکل زیر، مقداری که ولت‌سنج آرمانی نشان می‌دهد، چند ولت است؟



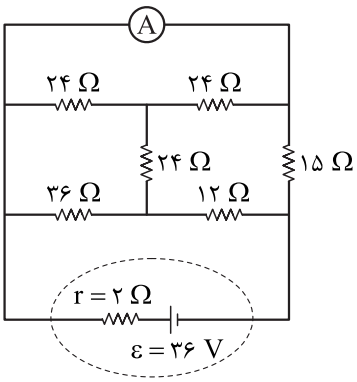
۱) ۶/۸

۲) ۷/۶

۳) ۸/۴

۴) ۹/۲

۶۴- در مدار شکل زیر، مقداری که آمپرسنج آرمانی نشان می‌دهد، چند آمپر است؟



۱) ۱/۷۵

۲) ۰/۷۵

۳) ۲/۲۵

۴) ۱/۲۵

۶۵- کدام مواد فاقد حوزهٔ مغناطیسی‌اند، اما اتم‌های آن‌ها به طور ذاتی دارای دوقطبی مغناطیسی هستند؟

۱) فرومغناطیسی نرم

۲) فرومغناطیسی سخت

۳) پارامغناطیسی

۴) دیامغناطیسی

۶۶- در فضایی که میدان مغناطیسی یکنواختی به بزرگی $25\,G$ در جهت شمال وجود دارد، یک ذرهٔ آلفا با تندی $4\times10^{3}\,m/s$ در راستای افقی و به سمت شرق در حال حرکت است. نیروی مغناطیسی وارد بر این ذره چند نیوتون و در چه جهتی است؟ $(e = 1/6\times10^{-19}\,C)$

۱) $1/6\times10^{-18}$، عمود بر سطح زمین و به طرف بالا

۲) $1/6\times10^{-18}$، عمود بر سطح زمین و به طرف پایین

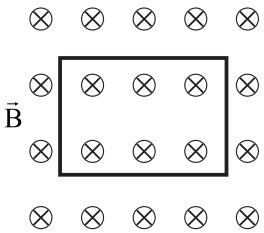
۳) $3/2\times10^{-18}$، عمود بر سطح زمین و به طرف بالا

۴) $3/2\times10^{-18}$، عمود بر سطح زمین و به طرف پایین

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶۷- در شکل زیر، سطح قابی به مساحت $400\ cm^2$ و مقاومت الکتریکی $2\ \Omega$، عمود بر میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ قرار دارد. اندازهٔ این میدان با آهنگ $300\ G/s$ افزایش می‌یابد. در این مدت، جریان الکتریکی القاشده در قاب، چند میلی‌آمپر و در چه جهتی است؟

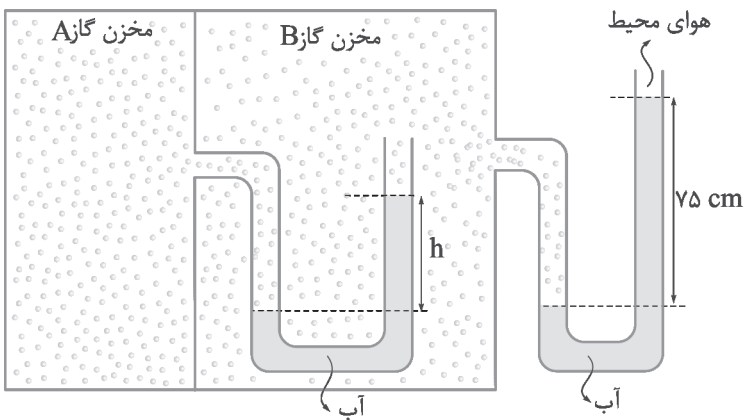


۱) ۰/۶، پادساعتگرد
۲) ۰/۶، ساعتگرد
۳) ۶، ساعتگرد
۴) ۶، پادساعتگرد

۶۸- در ظرفی استوانه‌ای به مساحت مقطع $50\ cm^2$، $4\ L$ مایع با چگالی $1/7\ g/cm^3$ ریخته شده است. اگر فشار هوای محیط $74\ cmHg$ باشد، فشار در کف ظرف چند کیلوپاسکال است؟ $(\rho_{جیوه} = 13/6\ g/cm^3 , g = 10\ N/kg)$

۱) ۱۱۴/۲۴
۲) ۱۰۳/۳۶
۳) ۱۰۴/۷۲
۴) ۱۰۲

۶۹- در شکل زیر، فشار گاز مخزن A برابر $110\ kPa$ و فشار هوای محیط $96\ kPa$ است. اگر چگالی آب $1\ g/cm^3$ باشد، مقدار h برابر چند سانتی‌متر است؟ $(g = 10\ N/kg)$



۱) ۳۵
۲) ۴۵
۳) ۵۵
۴) ۶۵

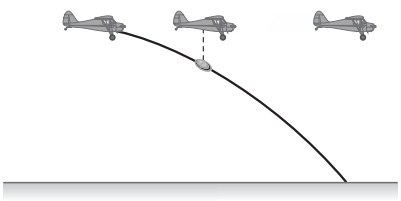
۷۰- خودرویی به جرم $1600\ kg$ در مسیری افقی، در مدت $5\ s$ تندی خود را از $18\ km/h$ به $54\ km/h$ می‌رساند. توان متوسط خودرو برای انجام این کار چند کیلووات است؟ (نیروهای اتلافی را نادیده بگیرید.)

۱) ۱۶
۲) ۳۲
۳) ۱۶۰
۴) ۳۲۰

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷۱- در شکل زیر، از هواپیمایی که در ارتفاع ۳۰۰ متری از سطح زمین و با تندی $50\ m/s$ پرواز می‌کند، بسته‌ای به جرم $200\ kg$ رها می‌شود. اگر تندی بسته هنگام برخورد به زمین برابر $60\ m/s$ باشد، کار نیروی مقاومت هوا بر روی بسته از لحظهٔ رهاشدن تا لحظهٔ رسیدن به سطح زمین، برابر چند کیلوژول است؟ $(g = 10\ N/kg)$



۱) -240

۲) 240

۳) -490

۴) 490

۷۲- درون گرماسنجی، $800\ g$ آب ریخته شده و دمای مجموعه برابر $25\ ^\circ C$ است. اگر $1/2\ kg$ آب با دمای $80\ ^\circ C$ به گرماسنج اضافه کنیم، پس از ایجاد تعادل گرمایی، دمای مجموعه به $55\ ^\circ C$ می‌رسد. ظرفیت گرمایی گرماسنج در SI کدام است؟ (گرمای ویژهٔ آب برابر $4200\ \frac{J}{kg.^\circ C}$ و اتلاف گرمایی، ناچیز است.)

۱) 700 ۲) 840 ۳) 7000 ۴) 8400

۷۳- درون ظرفی استوانه‌ای، تا ارتفاع $80\ cm$ بنزین ریخته شده است. اگر دمای بنزین $60\ ^\circ C$ افزایش یابد، ارتفاع بنزین در این ظرف چند میلی‌متر تغییر می‌کند؟ (ضریب انبساط حجمی بنزین $10^{-3}\ \frac{1}{K}$ و انبساط ظرف، ناچیز است و تبخیر بنزین در اثر افزایش دما را ناچیز فرض کنید.)

۱) $1/6$ ۲) $4/8$ ۳) 11 ۴) 48

۷۴- مخزنی به حجم $40\ L$، حاوی $25\ g$ گاز هیدروژن است. اگر فشار این گاز برابر $7\ bar$ باشد، دمای آن چند درجهٔ فارنهایت است؟ ($R = 8\ \frac{J}{mol.K}$ و جرم مولی گاز هیدروژن $2\ g/mol$ است.)

۱) 7 ۲) $44/6$ ۳) $54/6$ ۴) 280

۷۵- در چرخهٔ ماشین گرمایی درون‌سوز بنزینی، کدام فرایندها را می‌توان فرایند بی‌دررو در نظر گرفت؟

الف) ضربهٔ مکش
ب) ضربهٔ تراکم
پ) ضربهٔ قدرت
ت) ضربهٔ خروج گاز

۱) ب ـ پ ۲) ب ـ ت ۳) الف ـ پ ۴) الف ـ ت

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷۶- کدام مورد درست است؟

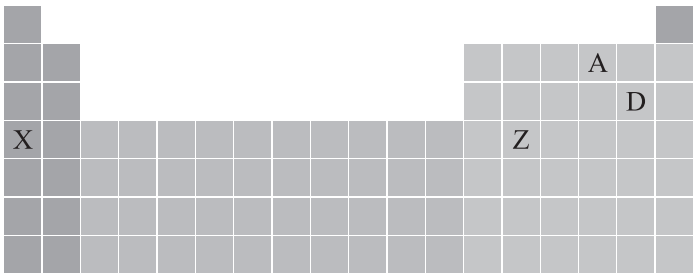
۱) عنصرهایی از جدول تناوبی با عددهای اتمی ۱ تا ۹۲، در طبیعت یافت می‌شوند.

۲) جرم یک نمونه طبیعی از عنصر هیدروژن با گذشت زمان ثابت باقی می‌ماند.

۳) زمین، یک سیارهٔ سنگی است و در بین ۸ عنصر فراوان‌تر آن، عنصر نافلزی وجود ندارد.

۴) امروزه با پیشرفت علم، تبدیل فلز پلاتین $(_{۷۸}Pt)$ به طلا $(_{۷۹}Au)$ امکان‌پذیر است.

۷۷- با در نظر گرفتن موقعیت عناصر A، D، X و Z در جدول دوره‌ای، کدام مطلب درست است؟



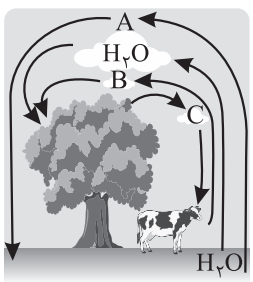
۱) عنصر A، فراوان‌ترین گاز سازندهٔ هواکره است که در اتم آن شمار الکترون‌هایی با $l=۰$ با شمار الکترون‌هایی با $l=۱$ برابر است.

۲) عنصر D، گازی زردرنگ با خاصیت رنگ‌بری است که فقط در دماهایی بالاتر از $۲۰۰\ ^\circ C$ می‌تواند با گاز هیدروژن واکنش دهد.

۳) عنصر X، تشکیل‌دهندهٔ یونی ضروری برای تنظیم عملکرد دستگاه عصبی بوده و بزرگ‌ترین شعاع اتمی را در بین ۳۶ عنصر اول جدول دارد.

۴) عنصر Z، دومین شبه‌فلز گروه ۱۴ جدول دوره‌ای و عنصر اصلی سازندهٔ سلول‌های خورشیدی است.

۷۸- با توجه به شکل زیر که برهم‌کنش هواکره با زیست‌کره را نشان می‌دهد، کدام موارد از مطالب زیر، درست است؟



الف) نسبت شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی به پیوندی در ساختار مولکول C، دو برابر این نسبت در ساختار مولکول B است.

ب) گاز A یکی از واکنش‌دهنده‌های فرایند هابر است.

پ) در هوای مایع با دمای $-۲۰۰\ ^\circ C$، هر سه مادهٔ A، B و C وجود دارند.

ت) گاز C دارای دگرشکلی است که در لایهٔ دوم هواکره، درصد حجمی بیشتری نسبت به C دارد.

۱) الف و ب
۲) پ و ت
۳) الف و پ
۴) ب و ت

۷۹- با توجه به معادله‌های موازنه‌شدهٔ زیر، Y کدام ترکیب است؟

$$۲Al + ۲NaOH + ۶H_۲O \rightarrow ۳H_۲ + ۲X$$
$$۲X + H_۲CO_۳ \rightarrow Y + Al_۲O_۳ + ۵H_۲O$$

۱) جوش شیرین
۲) سود سوزآور
۳) سدیم کربنات
۴) سدیم کربید

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸۰- برای تولید متان از عناصر سازنده‌اش، مقداری گرافیت را با مقدار کافی گاز هیدروژن وارد ظرف کرده‌ایم (واکنش I). اگر واکنش (II) نیز به عنوان واکنش جانبی انجام شود و جرم متان تولیدشده، ۱/۶ برابر جرم اتان تولیدی باشد، چند درصد از گرافیت اولیه در واکنش (I) شرکت کرده است؟ $(H=1, C=12 : g.mol^{-1})$

I) $C(s) + 2H_2(g) \rightarrow CH_4(g)$

II) $2C(s) + 3H_2(g) \rightarrow C_2H_6(g)$

۱) ۴۰ ۲) ۶۰ ۳) ۴۵ ۴) ۵۵

۸۱- اگر فرمول شیمیایی مس (II) منگنات و سدیم پرمنگنات به ترتیب به صورت $CuMnO_4$ و $NaMnO_4$ باشد، در هر واحد فرمولی از کلسیم پرمنگنات، ..... اتم وجود دارد و تبدیل یون پرمنگنات به منگنات، یک فرایند ..... به شمار می‌آید.

۱) ۷ ـ کاهش ۲) ۱۱ ـ اکسایش

۳) ۷ ـ اکسایش ۴) ۱۱ ـ کاهش

۸۲- کدام گزینه درست است؟ $(H=1, C=12, O=16 : g.mol^{-1})$

۱) در محلول ۵۰ درصد جرمی اتانول در آب برخلاف محلول ۵۰ درصد جرمی استون در آب، آب نقش حلال را دارد.

۲) چگالی هگزان از آب کم‌تر بوده و عامل بنفش‌رنگ‌بودن مخلوط همگن ید در هگزان، حلال آن است.

۳) هوا و آب دریا از جمله محلول‌هایی هستند که از یک حل‌شونده و چند حلال تشکیل شده‌اند.

۴) جاذبهٔ بین مولکولی ترکیبات هیدروژن‌دار عناصر دورهٔ دوم گروه‌های ۱۵ و ۱۷ جدول دوره‌ای، برخلاف گروه ۱۴، از نوع پیوند هیدروژنی است.

۸۳- در واکنش تخمیر یک کیلوگرم از محلول آبی گلوکز، ۲۲۰ گرم گاز CO_2 آزاد می‌شود. اگر در پایان واکنش غلظت مولی گلوکز به $\frac{1}{3}$ غلظت مولی اولیه‌اش برسد، درصد جرمی محلول به تقریب چند واحد تغییر می‌کند؟ (از تغییر حجم صرف نظر شود و $O=16, C=12, H=1 : g.mol^{-1}$)

$$C_6H_{12}O_6(aq) \rightarrow 2CO_2(g) + 2C_2H_5OH(aq)$$

۱) ۱۵ ۲) ۳۹

۳) ۴۵ ۴) ۶۲

۸۴- کدام مورد نادرست است؟

۱) اگر درصد جرمی محلول سیرشدهٔ نمک AB در دمای $40\ ^\circ C$ برابر ۳۷/۵ باشد، انحلال‌پذیری آن در آب در این دما برابر ۶۰ گرم است.

۲) موادی که انحلال‌پذیری آن‌ها در آب در دمای معین، کم‌تر از ۰/۱ گرم در ۱۰۰ گرم آب باشد، جزء مواد نامحلول محسوب می‌شوند.

۳) اگر مولکول‌های AB_2 و AD_4 در میدان الکتریکی جهت‌گیری نکنند، اتم مرکزی در آن‌ها فاقد جفت‌الکترون ناپیوندی است.

۴) جرم مولی استون از جرم مولی اتانول بیشتر بوده، اما نقطهٔ جوش اتانول بالاتر از استون است.

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸۵- اگر آرایش الکترونی یون پایدار M^{n+} به $3d^{10}$ ختم شود، کدام مورد به یقین درست است؟

۱) M، فلز واسطه است و به n، دو مقدار متفاوت می‌توان نسبت داد.

۲) در اتم M، شمار الکترون‌ها با $l=2$ و $n=3$، ۵ برابر شمار الکترون‌ها با $l=0$ و $n=4$ است.

۳) اگر در اتم M^{65}، تفاوت شمار نوترون‌ها و الکترون‌ها برابر ۵ باشد، واکنش $M(s)+FeSO_4(aq)\rightarrow$، به طور طبیعی انجام‌پذیر است.

۴) اگر M، فلزی اصلی باشد، تفاوت عدد اتمی آن با عنصر گروه ۷ در دورهٔ پنجم برابر ۱۱ است.

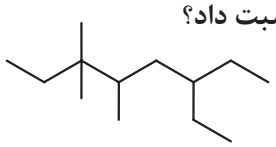
۸۶- از واکنش سوختن مقداری $C_xH_8O_2N_2$، ۰/۴ مول آب و ۱۷/۶ گرم کربن دی‌اکسید تولید شده است. چند گرم $C_xH_8O_2N_2$ در این واکنش مصرف شده است؟ ($H=1, C=12, N=14, O=16 : g.mol^{-1}$، بازده واکنش ۵۰ درصد است).

$$C_xH_8O_2N_2+O_2\rightarrow CO_2+H_2O+NO_2$$

۱) ۱۱/۶ ۲) ۲۳/۲ ۳) ۳۲/۸ ۴) ۴۶/۴

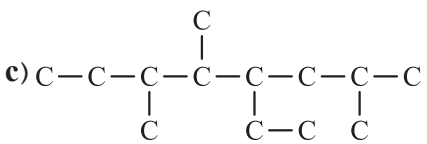
۸۷- کدام ساختارها را می‌توان به آلکانی با نام «۶- اتیل-۳، ۳، ۴- تری متیل اوکتان» نسبت داد؟

a)

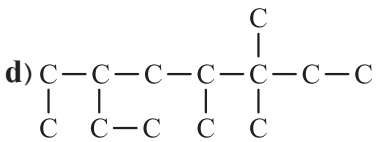


b) $CH_3CH_2CH(CH_3)C(CH_3)_2CH_2CH(C_2H_5)CH_2CH_3$

c)



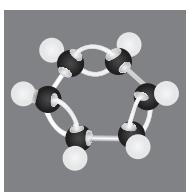
d)



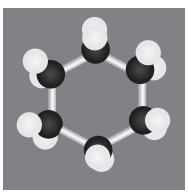
۱) a و b ۲) a و d

۳) b و c ۴) c و d

۸۸- کدام موارد داده‌شده در ارتباط با هیدروکربن‌های زیر، درست است؟



(A)



(B)

الف) A سرگروه خانوادهٔ مهمی از هیدروکربن‌های سیرشده به نام ترکیب‌های آروماتیک است.

ب) هر دو هیدروکربن A و B، در نفت خام وجود دارند.

پ) فرمول مولکولی B، مانند ششمین عضو خانوادهٔ آلکن‌ها است.

ت) نسبت شمار اتم‌های هیدروژن به شمار اتم‌های کربن در مولکول B، دو برابر این نسبت در مولکول A است.

۱) ب و پ ۲) الف و ت ۳) الف و پ ۴) ب و ت

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸۹- کدام مورد درست است؟

۱) انرژی گرمایی دو نمونه آب خالص با جرم یکسان و دمای متفاوت، قابل مقایسه نیست.

۲) در شرایط یکسان دما و فشار، گرمای ویژهٔ آب از روغن‌زیتون بیشتر است، اما ظرفیت گرمایی آن‌ها می‌تواند یکسان باشد.

۳) در دمای $25\ ^\circ C$ و فشار $1\ atm$، ظرفیت گرمایی ویژهٔ یک فلز در مقایسه با یک گاز به یقین بیشتر است.

۴) الماس و گرافیت، دگرشکل‌های طبیعی کربن هستند و پایداری الماس در مقایسه با گرافیت بیشتر است.

۹۰- یک یخچال صحرایی با ظرفیت گرمایی $1500\ J.\ ^\circ C^{-1}$ در محیطی با دمای $40\ ^\circ C$ قرار می‌گیرد. اگر حداکثر دمای لازم برای نگه‌داری نوعی روغن گیاهی $15\ ^\circ C$ باشد، حداقل چند گرم آب باید از سطح این یخچال تبخیر شود تا روغن فاسد نشود؟ (فرض کنید همهٔ گرمای مورد نیاز برای تبخیر آب از محتویات درون یخچال گرفته می‌شود و گرمای لازم برای تبخیر یک مول آب برابر $44\ kJ$ است و $H=1, O=16: g.mol^{-1}$)

۱) ۱۲ ۲) ۱۵/۳ ۳) ۱۸ ۴) ۲۱/۱

۹۱- کدام مورد جملهٔ زیر را به درستی کامل نمی‌کند؟

«نخستین عضو خانوادهٔ ..... با دومین عضو خانوادهٔ .....، همپار است.»

۱) اترها ـ الکل‌ها ۲) سیکلوآلکان‌ها ـ آلکن‌ها

۳) کتون‌ها ـ آلدهیدها ۴) استرها ـ کربوکسیلیک اسیدها

۹۲- در مورد واکنش تیغهٔ روی و محلول مس (II) سولفات، چند عبارت زیر درست است؟ $(Zn=65, Cu=64: g.mol^{-1})$

- **در طول انجام واکنش، غلظت یکی از یون‌ها ثابت است.**
- **با گذشت زمان، جرم مواد جامد کاهش می‌یابد.**
- **در طول انجام واکنش، سرعت تغییر رنگ محلول به مرور زمان کاهش می‌یابد.**
- **شیب نمودار غلظت ـ زمان برای تمام گونه‌ها در طول انجام واکنش یکسان است.**

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

۹۳- در شرایطی معین، یک مول پروپان با سرعت ثابت $0/01$ مول بر ثانیه در حال سوختن کامل است. پس از چند ثانیه، جرم کربن دی‌اکسید تولیدی با جرم پروپان باقی‌مانده برابر می‌شود؟ $(H=1, C=12, O=16: g.mol^{-1})$

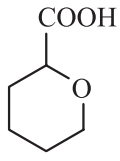
۱) ۲۵ ۲) ۵۰

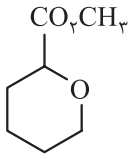
۳) ۷۵ ۴) ۱۲/۵

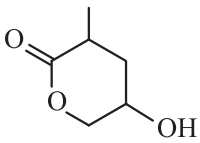
محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹۴- با توجه به ساختار ترکیب‌های زیر، کدام گزینه درست است؟ ($H=۱, C=۱۲, O=۱۶ : g.mol^{-1}$)


(I)

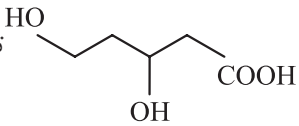

(II)


(III)

۱) از واکنش مادهٔ (II) با مقدار کافی آب، علاوه بر تولید مادهٔ (I)، ماده‌ای تولید می‌شود که در بازیافت PET نقش اساسی دارد.

۲) هر سه ترکیب، گروه عاملی اتری دارند و نیروی جاذبهٔ بین مولکولی در دو مورد از آن‌ها مشابه است.

۳) (I) و (III) ایزومرند و جرم مولی آن‌ها، ۲ گرم کم‌تر از (II) است.

۴) از واکنش (III) با مقدار کافی آب،  تولید می‌شود که دارای چهار نوع اتم کربن با عدد اکسایش متفاوت است.

۹۵- با توجه به مطالب کتاب درسی، اگر در ساختار یک پاک‌کنندهٔ غیرصابونی دارای ۲۲ اتم کربن در مجموع ۵ پیوند $C=C$ وجود داشته باشد، جرم مولی آن کدام است و اگر هیدروژن‌های حلقهٔ بنزنی آن را با گروه‌های متیل جایگزین کنیم، جرم مولی آن چند درصد افزایش می‌یابد؟ ($H=۱, C=۱۲, O=۱۶, Na=۲۳, S=۳۲ : g.mol^{-1}$)

۱) ۳۹۴، ۱۲ ۲) ۳۹۴، ۱۴ ۳) ۴۰۰، ۱۲ ۴) ۴۰۰، ۱۴

۹۶- با توجه به جدول زیر که اطلاعاتی دربارهٔ ۱ لیتر از محلول‌های ۰/۰۲۵ مولار دو اسید را در دمای $25\ ^\circ C$ نشان می‌دهد، کدام مورد درست است؟

محلول	$[OH^-]$	pH
HX		۲/۳
HY	۴×۱۰^{-۱۳}	

۱) X و Y به ترتیب می‌توانند دومین و سومین عنصر گروه ۱۷ جدول تناوبی باشند.

۲) HY برخلاف HX، اسیدی قوی است و حجم کم‌تری از محلول آن برای خنثی‌کردن ۱ لیتر محلول سود با $pH=۱۰$ نیاز است.

۳) تفاوت pH دو محلول با pH محلول ۰/۵ مولار نیتریک اسید برابر است.

۴) درصد یونش و ثابت یونش HX به ترتیب برابر با ۲۰٪ و $۱/۲۵\times۱۰^{-۳}$ است.

۹۷- کدام مورد دربارهٔ ضداسیدها درست است؟

۱) در واکنش مواد مؤثر در آن‌ها با اسید معده، تنها یک ترکیب یونی به همراه آب تولید می‌شود.

۲) داروهایی محلول در آب هستند که غلظت یون هیدروکسید در آن‌ها بیشتر از غلظت یون هیدرونیوم است.

۳) واکنش $H^+(aq)+OH^-(aq)\rightarrow H_۲O(l)$، مبنایی برای عملکرد آن‌ها است.

۴) مادهٔ مؤثر در آن‌ها را می‌توان برای افزایش خاصیت پاک‌کنندگی به شوینده‌ها نیز اضافه کرد.

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹۸- اگر در دمای معین، درجهٔ یونش باز BOH با $K_b = ۲\times۱۰^{-۵}$ برابر ۰/۰۴ باشد، به ۲۰۰ mL از این محلول چند میلی‌لیتر آب اضافه کنیم تا درجهٔ یونش باز به ۰/۱۲ برسد؟

۱) ۱۶۰۰
۲) ۱۸۰۰
۳) ۲۰۰۰
۴) ۲۲۰۰

۹۹- تفاوت جرم یون‌های تولیدشده در واکنش زیر به ازای مبادلهٔ $۹/۰۳\times۱۰^{۲۱}$ الکترون، چند گرم خواهد بود؟

$(I = ۱۲۷, Cu = ۶۴ : g.mol^{-۱})$

$AuI_۴^-(aq) + Cu(s) \rightarrow Au(s) + Cu^{۲+}(aq) + I^-(aq)$ (معادله موازنه شود.)

۱) ۰/۵۱۵
۲) ۱/۰۳
۳) ۲/۰۶
۴) ۴/۱۲

۱۰۰- در مورد سه سامانهٔ: a) رایج‌ترین سلول سوختی b) قطعهٔ آهن در حال خوردگی و c) سلول آبکاری قاشق آهنی با نقره، کدام گزینه درست است؟

۱) آند در هر سه سامانه، قطب منفی است.

۲) در سامانهٔ c، الکترولیت می‌تواند از جنس آهن (II) سولفات باشد.

۳) در سامانهٔ a برخلاف c، درکاتد، نیم‌واکنش کاهش رخ می‌دهد.

۴) بر اساس معادلهٔ کلی، شمار الکترون‌های مبادله‌شده در b، سه برابر a است.

۱۰۱- اگر در مولکول آب به جای اتم‌های هیدروژن، گروه‌های متیل جایگزین شود، به ترکیب A تبدیل می‌شود. کدام مطلب دربارهٔ این ترکیب درست است؟ $(H = ۱, C = ۱۲, O = ۱۶ : g.mol^{-۱})$

۱) اگر نقطهٔ جوش سومین آلکان برابر $\theta_۱$ و نقطهٔ جوش ترکیب A برابر $\theta_۲$ باشد، در فشار معین مقایسهٔ $\theta_۲ < \theta_۱$ درست است.

۲) ترکیب A دارای یک ایزومر الکلی بوده که دارای پیوند $C-C$ است و نسبت به ترکیب A، نقطهٔ جوش بالاتر و نیروی بین مولکولی قوی‌تری دارد.

۳) بیش از ۶۰ درصد جرمی ترکیب A را کربن تشکیل می‌دهد و شمار اتم‌های هیدروژن آن سه برابر شمار اتم‌های کربن آن است.

۴) ترکیب A مانند گوگرد تری‌اکسید در میدان الکتریکی جهت‌گیری می‌کند.

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۰۲- با توجه به فرمول‌ها و توضیحات داده‌شده، کدام گزینه درست است؟

$MgF_2, NaCl, CO_2, SiO_2, C(s, \text{الماس}), Fe$

I) عدد کوئوردیناسیون کاتیون و آنیون برای آن به ترتیب برابر ۶ و ۳ است.

II) اصطلاح شبکهٔ بلور برای این گونه استفاده می‌شود.

III) از آن، در ساخت منشورها و عدسی‌ها استفاده می‌شود.

IV) در حالت جامد، رسانای جریان برق است.

۱) گونهٔ مرتبط با عبارت (I)، آنتالپی فروپاشی شبکهٔ کم‌تری نسبت به LiF دارد.

۲) عبارت (II) برای ۴ مورد از گونه‌ها صادق است.

۳) تنها یکی از عناصر سازندهٔ گونهٔ مربوط به عبارت (III)، در ساختار یون سیلیکات وجود دارد.

۴) عبارت (IV)، فقط برای یک مورد از گونه‌ها صادق است.

۱۰۳- کدام مورد، درست است؟

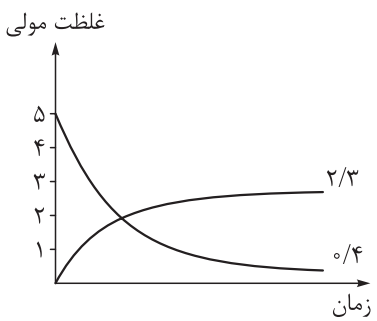
۱) E_a و $|\Delta H|$ واکنش حذف NO از واکنش حذف CO در خودروهای بنزینی بیشتر است.

۲) میزان تأثیر مبدل کاتالیستی خودروهای بنزینی بر کاهش جرم آلایندهٔ CO بیشتر از آلایندهٔ NO است.

۳) در واکنش حذف آلاینده‌های NO و NO_2 در خودروهای دیزلی، هر دو اکسید نقش اکسنده را دارند.

۴) در دمای اتاق، انرژی فعال‌سازی واکنش سوختن هیدروژن کم‌تر از واکنش سوختن فسفر سفید است.

۱۰۴- نمودار زیر را به کدام‌یک از واکنش‌های داده‌شده می‌توان نسبت داد و مقدار ثابت تعادل آن به تقریب کدام است؟



I واکنش) $2NO(g) \rightleftharpoons N_2(g) + O_2(g)$

II واکنش) $N_2O_4(g) \rightleftharpoons 2NO_2(g)$

۱) I ـ ۳۳

۲) I ـ ۱۳

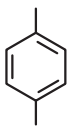
۳) II ـ ۱۳

۴) II ـ ۳۳

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۰۵- با توجه به ساختارهای داده‌شده، کدام مورد درست است؟

$+CH_2CH_2+_n$ **(A)**	CH_3-CH_3 **(B)**	$CH_2(OH)-CH_2(OH)$ **(X)**
CH_3CH_2OH **(D)**	$CH_2=CH_2$ **(E)**	 **(M)**

۱) E در واکنش با یک اکسنده، به D تبدیل می‌شود.

۲) تنها $\frac{۱}{۳}$ از این مواد در نفت خام وجود دارند.

۳) واکنش تبدیل E به A از نوع اکسایش ـ کاهش است.

۴) از واکنش X با فراوردهٔ حاصل از اکسایش M در حضور پتاسیم پرمنگنات، پلیمری با فرمول $+C_{10}H_8O_4+_n$ تولید می‌شود.

پاسخ‌نامهٔ تشریحی آزمون را ساعت ۱۶:۰۰ از صفحهٔ شخصی خودتان در سایت آزمون خیلی سبز دریافت کنید.

azmoon.kheilisabz.com

اساتید، مشاوران و دانش‌آموزان گرامی؛
نظرات، پیشنهادات، انتقادات و بازخوردهای خود نسبت به سؤالات این آزمون را می‌توانید از طریق آیدی Kheilisabz_edit@ در همهٔ پیام‌رسان‌ها با ما به اشتراک بگذارید.

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ‌نامه آزمون آزمایشی خیلی سبز

رشته ریاضی

پایه دوازدهم	آزمون جامع (مرحله بیست‌ودوم)
سال تحصیلی ۰۵-۱۴۰۴	۲۶/مرداد/۱۴۰۵

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا
حسابان و ریاضیات پایه	کاظم اجلالی ـ کوروش اسلامی ـ فرشاد حسن‌زاده ـ عادل حسینی ـ بابک سادات ـ علی شهرابی مصطفی کرمی ـ محمد گودرزی ـ میلاد منصوری ـ سروش موئینی ـ حسین نادری ـ محمدسجاد نقیه
هندسه	امیرحسین ابومحبوب ـ سید محمدرضا حسینی‌فرد ـ محمدطاهر شعاعی ـ حمید گلزاری ـ صبا مهدوی
ریاضیات گسسته و آمار و احتمال	مصطفی دیداری ـ سوگند روشنی ـ سعید قندچی
فیزیک	یاشار انگوتی ـ هادی حمزه‌پور ـ علیرضا جباری ـ رضا سبزمیدانی ـ نوید شاهی
شیمی	عین‌الله ابوالفتحی ـ پیمان خواجوی‌مجد ـ یلدا رزاق‌زاده ـ سروش عبادی ـ یاسر عبداللهی محمد عظیمیان زواره ـ محمد قهرمانی‌نژاد ـ پارسا طاهری‌منزه ـ محسن مجنونی امیرحسین مسلمی ـ مرتضی نصیرزاده

نام درس	مسئول درس	گزینشگر	مؤلف پاسخ‌نامه	کارشناسان علمی	ویراستاران به ترتیب حروف الفبا
حسابان و ریاضیات پایه	محمدسجاد نقیه	محمدسجاد نقیه	عادل حسینی	علی افضل‌زاده سروش موئینی مازیار احمدی‌ناو	عاطفه خان‌محمدی سهند محمدکریم‌نژاد ابوالفضل ناصری
هندسه	حمید گلزاری	حمید گلزاری	حمید گلزاری	سید عباس حسینی	منصور زرکش اصفهانی ماهان فنی‌فر ابوالفضل ناصری مریم نظری
ریاضیات گسسته و آمار و احتمال	مصطفی دیداری	مصطفی دیداری	علیرضا کاظمی‌بقا	سعید قندچی	عباس حسینی مریم نظری محمد خندان ماهان فنی‌فر
فیزیک	رضا سبزمیدانی	نوید شاهی	علیرضا جباری	علیرضا جباری سعید محبی هادی نجفی	احسان محمدی امیر محمودی انزابی فاطمه نجفی
شیمی	یاسر عبداللهی	یاسر عبداللهی	یاسر عبداللهی	یاشار ذریه محمدمهدی کریمیان مرتضی نصیرزاده	امیر بیات آرمین عظیمی مهدیس محبت‌پناه

مدیر تألیف آزمون: دکتر فاطمه آقاجانپور

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

ویژه کنکوری‌های ۱۴۰۵

Azmoon.kheilisabz.com

آزمون آزمایشی خیلی سبز

تیم اجرایی و تألیف آزمون	بیتا ابراهیمی ـ علیرضا جعفری ـ عادل حسینی ـ مینا کریم‌زاده

سرپرست تولید	الناز علی‌یاری‌زاده
ویراستاران فنی	نیلوفر اعتمادی ـ نیوشا پیمان ـ زهرا صفری الهه صفری ـ فاطمه علی‌اکبری ـ محیا غنی‌فرد نادره نازآوری ـ ساعده نمازی
رسام	ندا فخاری سارا گنجی آزادپور
صفحه‌آرایی	مریم حسین‌زاده ـ سپیده سخائی ـ الهام سهرابی طاهره صادق‌نژاد ـ مائده صبری ـ نیلوفر فرخجسته فاطمه قیاسوند ـ مهدیه گل‌پور ـ دریا لطفی

Azmoon.kheilisabz.com

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱ توابع f و g با ضابطه‌های $f(x)=\sqrt{(x-a)(x^2-8x+16)}$ و $g(x)=|x-4|\sqrt{x-a}$ مساوی هستند. حدود a کدام است؟

۱) $a\in\mathbb{R}$ ۲) $a>0$ ۳) $a\leq 4$ ۴) $a\geq 4$

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔ ضابطهٔ تابع f را بازنویسی می‌کنیم:

$$f(x)=\sqrt{(x-a)(x-4)^2}$$

دامنهٔ این تابع مجموعهٔ $D_f=[a,+\infty)\cup\{4\}$ و دامنهٔ تابع g نیز $D_g=[a,+\infty)$ است؛ بنابراین برای این‌که توابع f و g مساوی باشند، لازم است دامنه‌های آن‌ها مساوی باشند، در نتیجه $a\leq 4$ است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲ تابع همانی f و تابع ثابت g با دامنهٔ $\mathbb{R}$ مفروض‌اند. اگر $(gof)(3x-1)+f(2x-1)=2x+1$ باشد، مقدار $((f+g)of)(1)$ کدام است؟

$f(x)=x$

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint ضابطهٔ تابع f رو $f(x)=x$ و ضابطهٔ تابع g رو $g(x)=c$ بگیر.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** ضابطهٔ تابع f را $f(x)=x$ و ضابطهٔ تابع g را $g(x)=c$ می‌گیریم. تابع f همانی است؛ یعنی ورودی و خروجی تابع در هر صورت یکسان‌اند، یعنی:

$$f(3x-1)=3x-1\ ,\ f(2x-1)=2x-1$$

گام دوم: بنابراین داریم:

$$(gof)(3x-1)=g(f(3x-1))=c$$

$$f(2x-1)=2x-1$$

$$\Rightarrow (gof)(3x-1)+f(2x-1)=c+2x-1$$

گام سوم: که طبق فرض باید برابر $2x+1$ باشد:

$$\Rightarrow 2x+c-1=2x+1 \Rightarrow c=2$$

گام چهارم: خواستهٔ سؤال را به دست می‌آوریم:

$$(f+g)(x)=x+2 \Rightarrow (f+g)(f(x))=f(x)+2=x+2 \Rightarrow (f+g)(f(1))=1+2=3$$

اگر f تابع همانی و g تابع ثابت بوده و $g(3x)+2f(3+x)=3+2x$ باشد، مقدار $\frac{f(-1)}{g(4)}$ کدام است؟

(سؤال ۱۱۶ کنکور تجربی ۱۴۰۴ ـ نوبت دوم)

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{3}$

۳) $-\frac{1}{4}$ ۴) $-\frac{1}{3}$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳ توابع f و g با ضابطه‌های $f(x)=\begin{cases} x-x^۲ & ; \ x<-۱ \\ x^۲-۲x & ; \ x\geq -۱ \end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases} ۴-x & ; \ f'(x)<۰ \\ x^۲ & ; \ f'(x)\geq ۰ \end{cases}$ مفروض‌اند. حاصل $(gof)(۲)+(fog)(-۲)$ کدام است؟

۱) -۸ ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: برای محاسبهٔ مقادیر تابع g، لازم است که علامت مشتق تابع f را بدانیم، پس در ابتدا ضابطهٔ تابع f' را به دست می‌آوریم:

$$f'(x)=\begin{cases} ۱-۲x & ; \ x<-۱ \\ ۲(x-۱) & ; \ x>-۱ \end{cases}$$

گام دوم: حالا می‌توانیم، خواستهٔ سؤال را حساب کنیم:

$$\begin{cases} (gof)(۲)=g(f(۲))=g(۰) \xrightarrow{f'(۰)<۰} g(۰)=۴-۰=۴ \\ (fog)(-۲)=f(g(-۲)) \xrightarrow{f'(-۲)>۰} f(g(-۲))=f(۴)=۸ \end{cases}$$

$$\Rightarrow (gof)(۲)+(fog)(-۲)=۴+۸=۱۲$$

اگر $f(x)=\begin{cases} x+۱ & x>۲ \\ -۳x+۷ & x\leq ۲ \end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases} -x+۴ & f(x)\geq ۰ \\ x-۴ & f(x)<۰ \end{cases}$ باشد، مقدار $fog(-۴)$ کدام است؟

(سؤال ۹ کنکور ریاضی ۱۴۰۴ - نوبت دوم)

۱) ۱۹ ۲) ۹ ۳) -۱۵ ۴) -۵

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴ تعداد جواب‌های معادلهٔ $(۱۳\cos x - ۱۲)(۱۳\sin x + ۵) = ۰$ در بازهٔ $(۰, ۲\pi)$ کدام است؟

یک دور دایرهٔ مثلثاتی

۱) ۴ ۲) ۳
۳) ۲ ۴) ۱

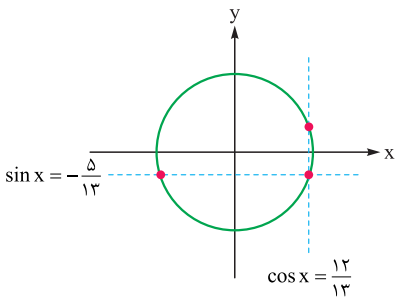
پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint از دایرهٔ مثلثاتی استفاده کن.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** حاصل‌ضرب دو عبارت صفر شده است، پس حداقل یکی از آن‌ها صفر است:

$$\Rightarrow \begin{cases} ۱۳\sin x + ۵ = ۰ \Rightarrow \sin x = -\frac{۵}{۱۳} \\ ۱۳\cos x - ۱۲ = ۰ \Rightarrow \cos x = \frac{۱۲}{۱۳} \end{cases}$$

گام دوم: انتهای کمان جواب‌های هر معادلهٔ بالا را روی دایرهٔ مثلثاتی مشخص می‌کنیم:



بنابراین تعداد جواب‌های معادله برابر ۳ است.

گول نخوری درست است که هر کدام از معادلات به‌دست‌آمده در بازهٔ $(۰, ۲\pi)$ دو جواب دارند، اما چون $(-\frac{۵}{۱۳})^۲ + (\frac{۱۲}{۱۳})^۲ = ۱$ است، یکی از جواب‌ها، مشترک است و معادله در مجموع ۳ جواب دارد. اگر به تساوی $(-\frac{۵}{۱۳})^۲ + (\frac{۱۲}{۱۳})^۲ = ۱$ دقت نشود، به اشتباه تعداد جواب‌های معادلهٔ ۴ به دست می‌آید.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵ حاصل عبارت $\tan(\frac{۱۰\pi}{۳})\cos(\frac{۱۷\pi}{۶})-\cos(\frac{۲۲\pi}{۳})$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

نسبت‌های مثلثاتی $k\pi+\alpha$؛ $(k\in\mathbb{Z})$:

$$\sin(k\pi+\alpha)=\begin{cases}\sin\alpha & ; \text{ زوج } k\\ -\sin\alpha & ; \text{ فرد } k\end{cases}$$

$$\cos(k\pi+\alpha)=\begin{cases}\cos\alpha & ; \text{ زوج } k\\ -\cos\alpha & ; \text{ فرد } k\end{cases}$$

$$\tan(k\pi+\alpha)=\tan\alpha\ ,\ \cot(k\pi+\alpha)=\cot\alpha$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: مقادیر نسبت‌های مثلثاتی عبارت داده‌شده را طبق درس‌باکس به دست می‌آوریم:

$$\tan(\frac{۱۰\pi}{۳})=\tan(۳\pi+\frac{\pi}{۳})=\tan\frac{\pi}{۳}=\sqrt{۳}$$

$$\cos(\frac{۱۷\pi}{۶})=\cos(۳\pi-\frac{\pi}{۶})=-\cos\frac{\pi}{۶}=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\cos(\frac{۲۲\pi}{۳})=\cos(۷\pi+\frac{\pi}{۳})=-\cos\frac{\pi}{۳}=-\frac{۱}{۲}$$

گام دوم: در نتیجه، حاصل عبارت صورت سؤال برابر است با:

$$\sqrt{۳}(-\frac{\sqrt{۳}}{۲})-(-\frac{۱}{۲})=-\frac{۳}{۲}+\frac{۱}{۲}=-۱$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶ اگر $۶\pi < ۴\alpha < ۷\pi$ و $\tan\alpha + \cot\alpha = -۴$ باشد، حاصل $\sin^۳\alpha - \cos^۳\alpha$ چند برابر $\sqrt{۶}$ است؟

α در ربع چهارم است.

۱) $-\frac{۵}{۸}$

۲) $-\frac{۳}{۸}$

۳) $\frac{۳}{۸}$

۴) $\frac{۵}{۸}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

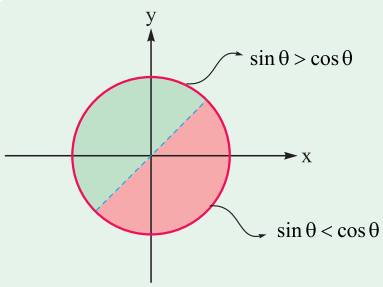
روابط بین نسبت‌های مثلثاتی:

$$\sin^۲\theta + \cos^۲\theta = ۱$$

$$\tan\theta.\cot\theta = ۱ \;;\; \theta \neq \frac{k\pi}{۲} \;;\; k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} ۱ + \tan^۲\theta = \frac{۱}{\cos^۲\theta} \\ ۱ + \cot^۲\theta = \frac{۱}{\sin^۲\theta} \end{cases}$$

نکته



پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: انتهای کمان α روی دایرهٔ مثلثاتی در ناحیهٔ چهارم دستگاه مختصاتی قرار گرفته است؛ بنابراین $\sin\alpha < ۰$ و $\cos\alpha > ۰$ و در نتیجه حاصل عبارت $\sin^۳\alpha - \cos^۳\alpha$ قطعاً عددی منفی است؛ بنابراین یکی از گزینه‌های (۱) یا (۲) پاسخ صحیح تست است.

گام دوم: از تساوی داده‌شده استفاده می‌کنیم:

$$\tan\alpha + \cot\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{۱}{\sin\alpha\cos\alpha} = -۴ \Rightarrow \sin\alpha\cos\alpha = -\frac{۱}{۴}$$

عبارت $\sin^۳\alpha - \cos^۳\alpha$ را به کمک اتحاد چاق و لاغر تجزیه می‌کنیم:

$$\sin^۳\alpha - \cos^۳\alpha = (\sin\alpha - \cos\alpha)(\underbrace{\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha}_{۱} + \underbrace{\sin\alpha\cos\alpha}_{-\frac{۱}{۴}})$$

$$\Rightarrow \sin^۳\alpha - \cos^۳\alpha = \frac{۳}{۴}(\sin\alpha - \cos\alpha) \qquad (*)$$

گام سوم: حالا کافی است حاصل عبارت $\sin\alpha - \cos\alpha$ را به کمک اتحاد مربع دوجمله‌ای به دست آوریم:

$$\xrightarrow{\alpha \text{ در ربع چهارم است.}} \sin\alpha - \cos\alpha = -|\sin\alpha - \cos\alpha| = -\sqrt{۱ - ۲\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$\Rightarrow \sin\alpha - \cos\alpha = -\sqrt{۱ + \frac{۱}{۲}} = -\sqrt{\frac{۳}{۲}} = -\frac{\sqrt{۶}}{۲}$$

و طبق عبارت $(*)$، حاصل عبارت $\sin^۳\alpha - \cos^۳\alpha$، $-\frac{۳}{۸}$ برابر $\sqrt{۶}$ خواهد شد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

یه‌جور دیگه از راه‌حل معادلهٔ مثلثاتی هم، می‌توانستیم سؤال را حل کنیم:

$$\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{۱}{۴}\Rightarrow ۲\sin\alpha\cos\alpha=\sin ۲\alpha=-\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}۲\alpha=۲k\pi-\frac{\pi}{۶}\xrightarrow{\alpha\text{ در ربع چهارم}}\alpha=-\frac{\pi}{۱۲}\\ ۲\alpha=۲k\pi-\frac{۵\pi}{۶}\xrightarrow{\alpha\text{ در ربع چهارم}}\alpha=-\frac{۵\pi}{۱۲}\end{cases}$$

اما طبق فرض، $\alpha=-\frac{۵\pi}{۱۲}$ قابل قبول است و حالا به کمک اتحادهای مثلثاتی دو برابر کمان، $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ را به دست می‌آوریم:

$$\alpha=-\frac{۵\pi}{۱۲}\Rightarrow\cos ۲\alpha=۲\cos^۲\alpha-۱=\cos(-\frac{۵\pi}{۶})=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{\sqrt{۲-\sqrt{۳}}}{۲}\Rightarrow\sin\alpha=-\frac{\sqrt{۲+\sqrt{۳}}}{۲}$$

$$\Rightarrow\sin^۳\alpha-\cos^۳\alpha=-\frac{۱}{۴}(\sqrt{۲+\sqrt{۳}}+\sqrt{۲-\sqrt{۳}})-\frac{\sqrt{۳}}{۸}(\sqrt{۲+\sqrt{۳}}-\sqrt{۲-\sqrt{۳}})=-\frac{۱}{۴}\sqrt{۶}-\frac{\sqrt{۳}}{۸}\sqrt{۲}=-\frac{۳}{۸}\sqrt{۶}$$

اگر $\tan x+\cot x=-۳$ و $۳\pi<۴x<۴\pi$ باشد، حاصل $\frac{۱}{\cos^۳x+\sin^۳x}$ کدام است؟

(سؤال ۱۱۹ کنکور تجربی ۱۴۰۲ ـ نوبت دوم)

۱) $-۰/۵\sqrt{۶}$
۲) $۰/۷۵\sqrt{۳}$
۳) $-۰/۷۵\sqrt{۳}$
۴) $۰/۵\sqrt{۶}$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷ حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cos(\frac{\pi}{۲}-\frac{\sqrt{۲}}{x})\sqrt{x}}{\sqrt{\sqrt{۲}+x}-\sqrt{x}}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** عبارت داده‌شده را بازنویسی می‌کنیم:

$$\frac{\overbrace{\cos(\frac{\pi}{۲}-\frac{\sqrt{۲}}{x})\sqrt{x}}^{\sin\frac{\sqrt{۲}}{x}}}{\sqrt{\sqrt{۲}+x}-\sqrt{x}}\times\frac{\sqrt{\sqrt{۲}+x}+\sqrt{x}}{\sqrt{\sqrt{۲}+x}+\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}(\sqrt{\sqrt{۲}+x}+\sqrt{x})\sin\frac{\sqrt{۲}}{x}}{\sqrt{۲}}$$

گام دوم: وقتی $x\to+\infty$، $\sqrt{\sqrt{۲}+x}\simeq\sqrt{x}$ است و می‌توان $\sin\frac{\sqrt{۲}}{x}$ را نیز هم‌ارز $\frac{\sqrt{۲}}{x}$ در نظر گرفت؛ زیرا $\frac{\sqrt{۲}}{x}\to۰$:

$$\Rightarrow L=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}\times۲\sqrt{x}\times\frac{\sqrt{۲}}{x}}{\sqrt{۲}}=۲$$

یه‌جور دیگه صورت و مخرج را بر $\sqrt{x}$ تقسیم می‌کنیم:

$$L=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos(\frac{\pi}{۲}-\frac{\sqrt{۲}}{x})}{\frac{\sqrt{\sqrt{۲}+x}-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos(\frac{\pi}{۲}-\frac{\sqrt{۲}}{x})}{\sqrt{\frac{\sqrt{۲}}{x}+۱}-۱}$$

حالا $\frac{\sqrt{۲}}{x}$ را متغیر جدید t می‌گیریم:

$$L=\lim_{t\to۰}\frac{\cos(\frac{\pi}{۲}-t)}{\sqrt{۱+t}-۱}=\lim_{t\to۰}\frac{\sin t}{۱+\frac{۱}{۲}t-۱}=۲\lim_{t\to۰}\frac{\sin t}{t}=۲$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸ اگر $f(x)=۴-\frac{۳}{۲}|x-۲|$ و $g(x)=\frac{|x-۲|}{۲}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)+g(-x)}{x}+\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)-g(-x)}{x}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) -۴ ۳) -۱ ۴) ۱

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی

در عبارت خواسته‌شده داریم:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)+g(-x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۴-\frac{۳}{۲}|x-۲|+\frac{|-x-۲|}{۲}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۴-\frac{۳}{۲}x+۳+\frac{x}{۲}+۱}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۸-x}{x}=-۱$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)-g(-x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۴-\frac{۳}{۲}|x-۲|-\frac{|x+۲|}{۲}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۴+\frac{۳}{۲}x-۳+\frac{x}{۲}+۱}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۲+۲x}{x}=۲$$

در نتیجه خواستهٔ سؤال $۱=۲+(-۱)$ است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹ تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}2x+1 & ; \ x\le a\\ \dfrac{bx^2-cx-1}{x-a} & ; \ x>a\end{cases}$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته است. اگر a عددی مثبت و $f(-\frac{a}{2})=0$ باشد، مقدار b کدام است؟

۱) $\frac{9}{2}$ ۲) ۳ ۳) $\frac{8}{9}$ ۴) ۲

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: اگر $a>0$ باشد، آن‌گاه $-\frac{a}{2}<0$ است، این یعنی صفر تابع که طبق فرض $x_0=-\frac{a}{2}$ است، در ضابطهٔ بالایی رخ می‌دهد:

$$2x_0+1=0 \Rightarrow x_0=-\frac{1}{2}=-\frac{a}{2} \Rightarrow a=1$$

تابع f در $x=1$ باید پیوسته باشد، پس ضابطهٔ زیر را برای تابع f داریم:

$$f(x)=\begin{cases}2x+1 & ; \ x\le 1\\ \dfrac{b(x-1)(x+\frac{1}{b})}{x-1} & ; \ x>1\end{cases} \Rightarrow f(x)=\begin{cases}2x+1 & ; \ x\le 1\\ bx+1 & ; \ x>1\end{cases}$$

در این بازنویسی، تساوی $c=b-1$ را داریم.

گام دوم: برای این‌که تابع f در $x=1$ پیوسته باشد، لازم است که $b=2$ باشد.

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^-} f(x) \Rightarrow 2+1=b+1 \Rightarrow b=2$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۰ اگر $f(x)=\frac{۱}{\sqrt[۵]{x+۲|x|}}$ و $g(x)=\frac{۱}{۲x^{۵}+|x^{۵}|}$ باشد، حاصل $(fog)'(\sqrt{۵})+(gof)'(-\sqrt{۵})$ کدام است؟

۱) $-\frac{۲}{۳}$ ۲) -۱ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint بهتره که ضابطهٔ دو تابع fog و gof رو به دست بیاری.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** ابتدا ضابطه‌های دو تابع f و g را بازنویسی می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}-\frac{۱}{\sqrt[۵]{x}} & ; \ x<۰\\ \frac{۱}{\sqrt[۵]{۳x}} & ; \ x>۰\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}\frac{۱}{x^{۵}} & ; \ x<۰\\ \frac{۱}{۳x^{۵}} & ; \ x>۰\end{cases}$$

بنابراین داریم:

$$(fog)(x)=\begin{cases}-x & ; \ x<۰\\ x & ; \ x>۰\end{cases}$$

$$(gof)(x)=\begin{cases}-\frac{۱}{۳}x & ; \ x<۰\\ x & ; \ x>۰\end{cases}$$

گام دوم: مشتق توابع fog و gof را به دست می‌آوریم:

$$(fog)'(x)=\begin{cases}-۱ & ; \ x<۰\\ ۱ & ; \ x>۰\end{cases} \Rightarrow (fog)'(\sqrt{۵})=۱$$

$$(gof)'(x)=\begin{cases}-\frac{۱}{۳} & ; \ x<۰\\ ۱ & ; \ x>۰\end{cases} \Rightarrow (gof)'(-\sqrt{۵})=-\frac{۱}{۳}$$

در نتیجه خواستهٔ سؤال برابر $-۱-\frac{۱}{۳}=\frac{۲}{۳}$ است.

اگر $f(x)=\frac{۱}{\sqrt[۳]{x-|x|}}$ و $g(x)=\frac{۱}{x^{۳}-|x^{۳}|}$ باشد، مقدار $g'(-\sqrt[۳]{۲})f'(g(-\sqrt[۳]{۲}))$ کدام است؟

(سؤال ۱۲۷ کنکور تجربی ۱۴۰۲ ـ نوبت دوم)

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) -۱

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۱ تابع f با ضابطهٔ $f(x)=x^{۳}$ مفروض است. اگر خط مماس بر نمودار تابع $f^{-۱}$ در نقطهٔ $x=\alpha$ واقع بر نمودار آن، از نقطهٔ $(۴,۰)$ بگذرد، مقدار α کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۱− ۳) ۲− ۴) صفر

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: تابع f وارون‌پذیر و روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است، بنابراین داریم:

$$f^{-۱}(x)=\sqrt[۳]{x} \Rightarrow (f^{-۱})'(x)=\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^{۲}}}$$

گام دوم: طبق فرض شیب خط گذرنده از نقاط $(\alpha,\sqrt[۳]{\alpha})$ و $(۴,۰)$ باید برابر $(f^{-۱})'(\alpha)$ باشد:

$$\frac{\sqrt[۳]{\alpha}-۰}{\alpha-۴}=\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{\alpha^{۲}}} \xrightarrow{\text{طرفین‌وسطین}} ۳\alpha=\alpha-۴ \Rightarrow \alpha=-۲$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۲ ماکزیمم مطلق تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\sin x\sqrt[۳]{\frac{۳}{۲}+\cos^۲ x}$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt[۳]{۱۲}}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt[۳]{۶}}{۲}$ ۳) $\sqrt[۳]{۱۲}$ ۴) $\sqrt[۳]{۶}$

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint $\sin x$ رو متغیر جدید t بگیر.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** با تغییر متغیر $t=\sin x$ ضابطهٔ تابع را ساده‌تر می‌نویسیم:

$$\sin x=t \Rightarrow \frac{۳}{۲}+\cos^۲ x=\frac{۳}{۲}+۱-t^۲=\frac{۵}{۲}-t^۲$$

پس برد تابع f با برد تابع $g(x)=x\sqrt[۳]{\frac{۵}{۲}-x^۲}$ در دامنهٔ $[-۱,۱]$ برابر است.

گام دوم: در تابع g داریم:

$$g(-۱)=-\sqrt[۳]{\frac{۳}{۲}} \quad , \quad g(۱)=\sqrt[۳]{\frac{۳}{۲}}$$

هم‌چنین:

$$g'(x)=\sqrt[۳]{\frac{۵}{۲}-x^۲}+\frac{-۲x^۲}{۳\sqrt[۳]{(\frac{۵}{۲}-x^۲)^۲}}=\frac{\frac{۱۵}{۲}-۵x^۲}{۳\sqrt[۳]{(\frac{۵}{۲}-x^۲)^۲}}$$

تابع g روی بازهٔ $[-۱,۱]$ اکیداً صعودی است؛ بنابراین برد آن بازهٔ $[-\sqrt[۳]{\frac{۳}{۲}},\sqrt[۳]{\frac{۳}{۲}}]$ است، یعنی ماکزیمم مطلق تابع f برابر $\sqrt[۳]{\frac{۳}{۲}}=\frac{\sqrt[۳]{۱۲}}{۲}$ است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۳ نقطهٔ $(۲,۴)$، عطف نمودار تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\frac{ax+b}{x^۲+۱}$ است. حاصل $f(-۳)$ کدام است؟

۱) $-\frac{۵}{۲}$ ۲) -۳ ۳) $-\frac{۷}{۲}$ ۴) -۴

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: در ابتدا داریم:

$$f(۲)=\frac{۲a+b}{۵}=۴ \Rightarrow ۲a+b=۲۰$$

گام دوم: ضابطهٔ تابع f'' را باید به دست بیاوریم:

$$f'(x)=-\frac{ax^۲+۲bx-a}{(x^۲+۱)^۲}$$

$$\Rightarrow f''(x)=-\frac{(۲ax+۲b)(x^۲+۱)^۲-۴x(x^۲+۱)(ax^۲+۲bx-a)}{(x^۲+۱)^۴}=\frac{۲(ax^۳+۳bx^۲-۳ax-b)}{(x^۲+۱)^۳}$$

گام سوم: $x=۲$ صفر تابع f'' باید باشد:

$$f''(۲)=۲\times\frac{۸a+۱۲b-۶a-b}{۵^۳}=۰ \Rightarrow ۲a+۱۱b=۰$$

گام چهارم: دستگاه معادلات زیر را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases}۲a+b=۲۰\\ ۲a+۱۱b=۰\end{cases} \Rightarrow ۱۰b=-۲۰ \Rightarrow b=-۲, a=۱۱$$

گام پنجم: در نتیجه $f(x)=\frac{۱۱x-۲}{x^۲+۱}$ است و داریم:

$$f(-۳)=\frac{-۳۵}{۱۰}=-\frac{۷}{۲}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۴ حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ $(x^۲-x-۴)^۲-x^۳=۲۶$، چند برابر مجموع آن‌ها است؟

۱) -۱۰ ۲) ۱۰ ۳) ۵ ۴) -۵

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: معادله را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$(x^۲-x-۴)^۲-۲۵=x^۳+۱$$

حالا در سمت چپ از اتحاد مزدوج و در سمت راست از اتحاد چاق و لاغر استفاده می‌کنیم:

$$\Rightarrow (x^۲-x-۴-۵)(x^۲-x-۴+۵)=(x+۱)(x^۲-x+۱) \Rightarrow (x^۲-x-۹)(x^۲-x+۱)=(x+۱)(x^۲-x+۱)$$

گام دوم: $x^۲-x+۱$ قطعاً مخالف صفر است، پس داریم:

$$x^۲-x-۹=x+۱ \Rightarrow x^۲-۲x-۱۰=۰$$

مجموع جواب‌های این معادله ۲ و حاصل‌ضرب آن‌ها -۱۰ است.

بنابراین خواستهٔ سؤال برابر $-\frac{۱۰}{۲}=-۵$ است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۵ نقاط متمایز A، B، C و D به ترتیب با طول‌های α، -۴، -۲ و ۵ روی محور x مفروض‌اند. اگر $AB > AC + AD$ باشد، مجموعه مقادیر قابل قبول برای α شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint نامعادلهٔ قدرمطلقیه.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** مختصات نقاط داده شده $A(\alpha,۰)$، $B(-۴,۰)$، $C(-۲,۰)$ و $D(۵,۰)$ است و داریم:

$$AB=|\alpha+۴|\ ,\ AC=|\alpha+۲|\ ,\ AD=|\alpha-۵|$$

بنابراین نامعادلهٔ زیر را باید حل کنیم:

$$|\alpha+۴|>|\alpha+۲|+|\alpha-۵|$$

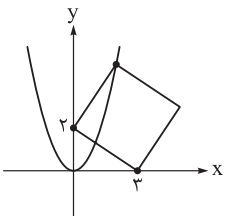
گام دوم: به کمک بازه‌بندی، نامعادلهٔ بالا را حل می‌کنیم:

جواب	نامعادله	حدود α
ندارد	$-\alpha-۴>-\alpha-۲-\alpha+۵ \Rightarrow \alpha>۷$	$\alpha<-۴$
ندارد	$\alpha+۴>-\alpha-۲-\alpha+۵ \Rightarrow ۳\alpha>-۱ \Rightarrow \alpha>-\frac{۱}{۳}$	$-۴\le\alpha<-۲$
$(۳,۵)$	$\alpha+۴>\alpha+۲-\alpha+۵ \Rightarrow \alpha>۳$	$-۲\le\alpha<۵$
$[۵,۷)$	$\alpha+۴>\alpha+۲+\alpha-۵ \Rightarrow \alpha<۷$	$\alpha\ge۵$

گام سوم: از اجتماع جواب‌های به‌دست‌آمده، مجموعهٔ مقادیر برای α، بازهٔ $(۳,۷)$ به دست می‌آید ولی $\alpha=۵$ قابل قبول نیست، چون در این صورت نقاط D و A متمایز نمی‌شوند. پس مقادیر قابل قبول برای α شامل ۲ عدد صحیح است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۶ نمودار تابع f با ضابطهٔ $f(x)=kx^{۲}$ در شکل زیر رسم شده است. اگر چهارضلعی رسم‌شده مربع باشد، حاصل $\frac{۱}{f(k-۱)}$ کدام است؟



۱) ۱۲/۸
۲) ۱۳/۲
۳) ۱۳/۴
۴) ۱۳/۸

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: رأس مربع را که روی سهمی قرار گرفته است، $(\alpha,k\alpha^{۲})$ در نظر می‌گیریم. شیب خط گذرنده از نقاط $(\alpha,k\alpha^{۲})$ و $(۰,۲)$ باید قرینه و معکوس شیب خط گذرنده از نقاط $(۰,۲)$ و $(۳,۰)$ باشد:

$$\begin{cases}(۰,۲),(\alpha,k\alpha^{۲}) \Rightarrow m=\dfrac{k\alpha^{۲}-۲}{\alpha}\\(۰,۲),(۳,۰) \Rightarrow m'=-\dfrac{۲}{۳}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{k\alpha^{۲}-۲}{\alpha}\left(-\frac{۲}{۳}\right)=-۱ \Rightarrow \frac{k\alpha^{۲}-۲}{\alpha}=\frac{۳}{۲}$$

گام دوم: هم‌چنین فاصلهٔ نقاط $(\alpha,k\alpha^{۲})$ و $(۰,۲)$ از یکدیگر باید برابر $\sqrt{۱۳}$ باشد:

$$\Rightarrow (k\alpha^{۲}-۲)^{۲}+(\alpha-۰)^{۲}=۱۳$$

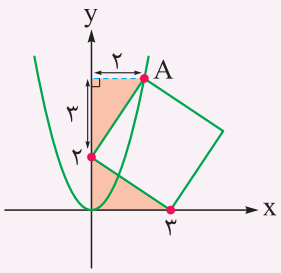
$$\xrightarrow{k\alpha^{۲}=\frac{۳}{۲}\alpha+۲} \frac{۹\alpha^{۲}}{۴}+\alpha^{۲}=۱۳ \Rightarrow \alpha^{۲}=۴ \xrightarrow{\alpha>۰} \alpha=۲$$

در نتیجه مقدار k به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\frac{۴k-۲}{۲}=\frac{۳}{۲} \Rightarrow ۲k-۱=\frac{۳}{۲} \Rightarrow k=\frac{۵}{۴}$$

تیزپازی

دو مثلث قائم‌الزاویهٔ مشخص‌شده در شکل زیر، باید هم‌نهشت باشند، بنابراین مختصات نقطهٔ A باید $A(۲,۵)$ باشد، پس داریم:



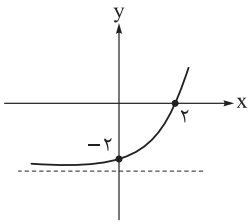
$$\xrightarrow{f(x)=kx^{۲}} ۵=k\times ۴ \Rightarrow k=\frac{۵}{۴}$$

گام سوم: در نهایت $f(x)=\frac{۵}{۴}x^{۲}$ است و داریم:

$$\frac{۱}{f(k-۱)}=\frac{۱}{f(\frac{۱}{۴})}=\frac{۱}{\frac{۵}{۴}\times\frac{۱}{۱۶}}=\frac{۶۴}{۵}=۱۲/۸$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۷ شکل زیر، نمودار تابع f با ضابطهٔ $f(x)=a+b\times ۳^{x+c}$ را نمایش می‌دهد. حاصل $f(\frac{۱}{\log ۳})$ کدام است؟



۱) ۰/۱

۲) ۰/۱۲۵

۳) ۰/۲

۴) ۰/۲۵

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ضابطهٔ تابع را بازنویسی می‌کنیم:

$$f(x)=a+(b\times ۳^{c})\times ۳^{x} \Rightarrow f(x)=a+k\times ۳^{x}$$

گام دوم: نمودار تابع از نقاط $(۲,۰)$ و $(۰,-۲)$ می‌گذرد:

$$\begin{cases} f(۰)=a+k=-۲ \\ f(۲)=a+۹k=۰ \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} k=\frac{۱}{۴}\ ,\ a=-\frac{۹}{۴}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{۳^{x}-۹}{۴}$$

گام سوم: خواستهٔ سؤال را حساب می‌کنیم:

$$f(\frac{۱}{\log ۳})=f(\log_{۳}۱۰)=\frac{۳^{\log_{۳}۱۰}-۹}{۴}=\frac{۱۰-۹}{۴}=۰/۲۵$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۸ اعداد $\log\alpha$، $\log ۶$ و $\log(۲\alpha+۱۴)$، سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ حسابی و اعداد $\log_\alpha ۸$، α و $\log_\beta \alpha$، سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ هندسی‌اند. حاصل $\beta^۲\sqrt{\alpha}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $۲\sqrt{۲}$

۳) ۴ ۴) $۴\sqrt{۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: با توجه به ویژگی‌های جملات متوالی دنبالهٔ حسابی داریم:

$$\log\alpha+\log(۲\alpha+۱۴)=۲\log ۶=\log ۳۶$$

$$\Rightarrow \alpha(۲\alpha+۱۴)=۳۶ \Rightarrow \alpha^۲+۷\alpha-۱۸=(\alpha+۹)(\alpha-۲)=۰ \xrightarrow{\alpha>۰} \alpha=۲$$

گام دوم: حالا براساس ویژگی جملات متوالی دنبالهٔ هندسی داریم:

$$\log_\alpha ۸\times\log_\beta \alpha=\alpha^۲ \xrightarrow{\alpha=۲} ۳\log_\beta ۲=۴ \Rightarrow \log_۲\beta=\frac{۳}{۴} \Rightarrow \beta=\sqrt[۴]{۲^۳}$$

گام سوم: خواستهٔ سؤال را به دست می‌آوریم:

$$\beta^۲\sqrt{\alpha}=\sqrt{۲^۳}\times\sqrt{۲}=\sqrt{۱۶}=۴$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۹ **شعاع بزرگ‌ترین دایره‌ای که بر خط‌های شامل اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین مماس است، برابر $\sqrt{۲}$ می‌باشد. برای رسم عمودمنصف یکی از ساق‌های این مثلث، باید دهانهٔ پرگار را حداقل بیشتر از کدام عدد زیر باز کرد؟**

۱) $\sqrt{۲}+۱$ ۲) $۲\sqrt{۲}-۲$

۳) $\sqrt{۲}-۱$ ۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

مشاوره این سؤال، مشابه سؤال ۲۶ کنکور ریاضی اردیبهشت ۱۴۰۴ طراحی شده است.

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint دایره‌ای که در سؤال گفته شده است، دایرهٔ محاطی خارجی مماس بر بزرگ‌ترین ضلع (وتر مثلث قائم‌الزاویه) است.

درس Box

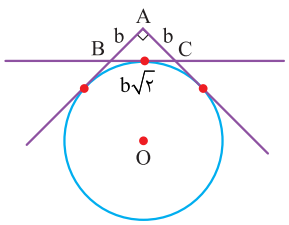
۱) هر مثلث، یک دایرهٔ محاطی داخلی و سه دایرهٔ محاطی خارجی دارد. دایرهٔ محاطی داخلی، داخل مثلث قرار می‌گیرد و بر سه ضلع آن مماس است. هر کدام از دایره‌های محاطی خارجی، بیرون مثلث قرار می‌گیرند و بر یک ضلع و امتداد دو ضلع دیگر مماس هستند.

۲) در مثلثی به طول اضلاع a، b و c، شعاع دایرهٔ محاطی خارجی نظیر ضلع a (مماس بر ضلع a و امتداد اضلاع b و c) برابر است با $r_a=\frac{S}{P-a}$ که در آن S مساحت و P نصف محیط مثلث است، پس هر چه طول ضلع بزرگ‌تر باشد، شعاع دایرهٔ محاطی نظیر آن نیز بزرگ‌تر است، ضمن آن‌که شعاع هر سه دایرهٔ محاطی خارجی، از شعاع دایرهٔ محاطی داخلی بزرگ‌تر است.

۳) برای رسم عمودمنصف پاره‌خط AB، باید دو کمان به مرکزهای A و B و شعاع R رسم کنیم، به طوری که $R>\frac{AB}{۲}$. خط گذرنده از نقاط تقاطع این دو کمان، عمودمنصف AB است.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: بزرگ‌ترین دایره‌ای که بر خط‌های شامل اضلاع یک مثلث متساوی‌الساقین قائم‌الزاویه مماس است، دایرهٔ محاطی خارجی نظیر وتر آن می‌باشد:



گام دوم: طول ساق مثلث را b در نظر می‌گیریم، بنا به فرض داریم:

$$r_a=\sqrt{۲}\Rightarrow\frac{S}{P-a}=\sqrt{۲}\Rightarrow\frac{\frac{b\times b}{۲}}{\frac{۲b+b\sqrt{۲}}{۲}-b\sqrt{۲}}=\sqrt{۲}\Rightarrow\frac{b}{۲-\sqrt{۲}}=\sqrt{۲}\Rightarrow b=۲\sqrt{۲}-۲$$

گام سوم: پس برای رسم عمودمنصف یکی از ساق‌ها باید دهانهٔ پرگار حداقل بیشتر از نصف طول ساق، یعنی $\frac{b}{۲}=\frac{۲\sqrt{۲}-۲}{۲}=\sqrt{۲}-۱$ باز شود.

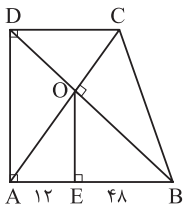
مثلث متساوی‌الساقین قائم‌الزاویه‌ای بر دایره‌ای به شعاع $\sqrt{۲}$ محیط شده است. برای رسم عمودمنصف یکی از ساق‌های این مثلث، باید دهانهٔ پرگار را حداقل بیشتر از کدام عدد زیر باز کرد؟ *(سؤال ۲۶ کنکور ریاضی ۱۴۰۴ ـ نوبت اول)*

۱) $۲-\sqrt{۲}$ ۲) $۲+\sqrt{۲}$

۳) $\sqrt{۲}-۱$ ۴) $\sqrt{۲}+۱$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۰ در شکل زیر، قطرهای ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه بر هم عمودند. طول پاره‌خط OC کدام است؟

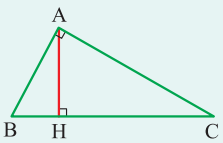


۱) $۲\sqrt{۳}$
۲) $۴\sqrt{۵}$
۳) $۳\sqrt{۵}$
۴) $۴\sqrt{۳}$

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

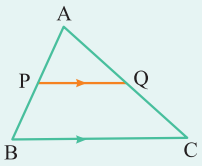
۱) **روابط طولی ارتفاع وارد بر وتر در مثلث قائم‌الزاویه:**



۱) $AH \times BC = AB \times AC$
۲) $AH^۲ = BH \times CH$
۳) $AB^۲ = BH \times BC$
۴) $AC^۲ = CH \times BC$

۲) **قضیهٔ تالس و تعمیم آن در مثلث:**

مطابق شکل در مثلث ABC، نقاط P و Q به ترتیب بر AB و AC چنان واقع‌اند که $PQ \parallel BC$، داریم:

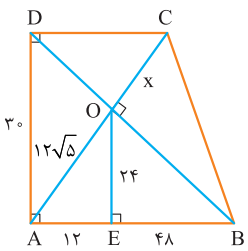


۱) $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$ (قضیهٔ تالس)

۲) $\frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC} = \frac{PQ}{BC}$ (تعمیم قضیهٔ تالس)

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: مطابق شکل، بنا به رابطهٔ طولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ AOB داریم:



$$OE^۲ = AE \times BE = ۱۲ \times ۴۸ = ۱۲^۲ \times ۴ \Rightarrow OE = ۲۴$$
$$OA^۲ = AE \times AB = ۱۲ \times ۶۰ \Rightarrow OA = ۱۲\sqrt{۵}$$

گام دوم: در مثلث ABD، بنا به تعمیم قضیهٔ تالس، داریم:

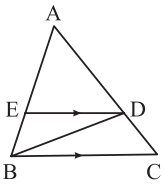
$$\overset{\Delta}{ABD}: OE \parallel AD \Rightarrow \frac{OE}{AD} = \frac{BE}{AB} \Rightarrow \frac{۲۴}{AD} = \frac{۴۸}{۶۰} \Rightarrow AD = \frac{۶۰ \times ۲۴}{۴۸} = ۳۰$$

گام سوم: بنا به رابطهٔ طولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ ACD نتیجه می‌شود:

$$AD^۲ = OA \times AC \Rightarrow ۳۰^۲ = ۱۲\sqrt{۵} \times AC \Rightarrow AC = \frac{۹۰۰}{۱۲\sqrt{۵}} = \frac{۹۰۰}{۶۰}\sqrt{۵} = ۱۵\sqrt{۵}$$
$$\Rightarrow x + ۱۲\sqrt{۵} = ۱۵\sqrt{۵} \Rightarrow x = ۳\sqrt{۵}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۱ در مثلث ABC مطابق شکل، DE با BC موازی است، اگر مساحت مثلث BDE، ۷۵ درصد مساحت مثلث BCD باشد، آن‌گاه نسبت مساحت مثلث ADE به مساحت ذوزنقه کدام است؟

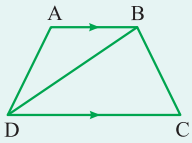


۱) $\frac{۸}{۷}$
۲) $\frac{۹}{۷}$
۳) $\frac{۱۰}{۷}$
۴) $\frac{۱۱}{۷}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

۱) با رسم هر قطر یک ذوزنقه، دو مثلث ایجاد می‌شود که نسبت مساحت‌های آن‌ها، با نسبت قاعده‌های ذوزنقه برابر است، یعنی در شکل مقابل داریم:



$$\frac{S_{ABD}}{S_{BCD}} = \frac{AB}{CD}$$

۲) اگر $\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$، آن‌گاه می‌توانیم در نظر بگیریم $a = xk$ و $b = yk$.

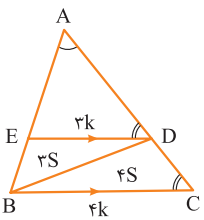
۳) اگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$، آن‌گاه $\frac{a}{b-a} = \frac{c}{d-c}$.

۴) اگر دو زاویه از یک مثلث، با دو زاویه از مثلث دیگری برابر باشند، آن دو مثلث متشابه‌اند.

۵) نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه، برابر با مجذور نسبت اضلاع متناظر آن‌ها است.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: قطر هر ذوزنقه، آن را به دو مثلث تقسیم می‌کند که نسبت مساحت آن‌ها برابر نسبت قاعده‌های ذوزنقه است:



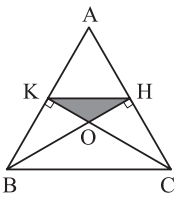
$$\frac{S_{BDE}}{S_{BCD}} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow \frac{DE}{BC} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow \begin{cases} DE = ۳k \\ BC = ۴k \end{cases}$$

گام دوم: با توجه به این‌که طبق قضیهٔ موازی ـ مورب $A\hat{D}E = A\hat{C}B$، دو مثلث AED و ABC متشابه‌اند و داریم:

$$\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = (\frac{DE}{BC})^۲ \Rightarrow \frac{S_{ADE}}{S_{ADE} + S_{BCDE}} = (\frac{۳}{۴})^۲ = \frac{۹}{۱۶} \xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}} \frac{S_{ADE}}{S_{BCDE}} = \frac{۹}{۷}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۲ در شکل زیر، BH و CK، دوتا از ارتفاع‌های مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به طول ضلع $۲\sqrt[۴]{۳}$ هستند. مساحت مثلث OKH کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۴}$

۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۶}$

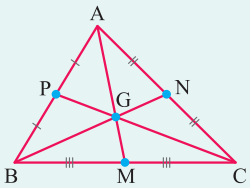
۳) $\frac{۱}{۳}$

۴) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۹}$

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

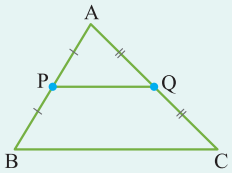
۱) میانه‌های هر مثلث همرس هستند و با رسم سه میانه، مثلث اصلی به شش مثلث هم‌مساحت تقسیم می‌شود، پس در شکل زیر، داریم:



$$S_{GBC} = S_{GAC} = S_{GAB} = \frac{۱}{۳}S_{ABC}$$

۲) اگر وسط‌های دو ضلع مثلثی را به هم وصل کنیم، پاره‌خطی حاصل می‌شود که با ضلع سوم مثلث موازی و طول آن، نصف طول ضلع سوم است:

مثلاً در شکل مقابل داریم:

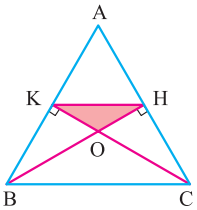


$$PQ \parallel BC \quad و \quad PQ = \frac{۱}{۲}BC$$

۳) مساحت مثلث متساوی‌الاضلاعی به طول ضلع a، برابر است با $\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲$.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: از آن‌جا که BH و CK، میانه‌های مثلث ABC هم هستند، O نقطهٔ همرسی میانه‌های آن است و داریم:



$$S_{OBC} = \frac{۱}{۳}S_{ABC}$$

گام دوم: از آن‌جا که H و K به ترتیب وسط‌های AC و AB هستند، داریم $HK = \frac{۱}{۲}BC$ و از آن‌جا که HK با BC موازی است، دو مثلث OHK و OBC بنا به حالت تساوی زاویه، متشابه‌اند و در نتیجه:

$$\frac{S_{OHK}}{S_{OBC}} = \left(\frac{HK}{BC}\right)^۲ \Rightarrow \frac{S_{OHK}}{\frac{۱}{۳}S_{ABC}} = \left(\frac{۱}{۲}\right)^۲ \Rightarrow S_{OHK} = \frac{۱}{۱۲}S_{ABC} \quad (*)$$

گام سوم: داریم:

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}(۲\sqrt[۴]{۳})^۲ = ۳$$

پس:

$$\xrightarrow{(*)} S_{OHK} = \frac{۱}{۱۲} \times ۳ = \frac{۱}{۴}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۳ حجم شکل حاصل از دوران مثلثی به طول اضلاع ۲، ۳ و ۴، حول ضلع متوسط، چند برابر π است؟

۱) ۳/۷۵

۲) ۳/۵

۳) ۳/۲۵

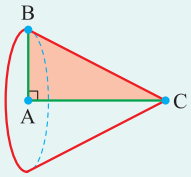
۴) ۳

مشاوره این سؤال، به صورت ترکیبی از مبحث دوران (فصل چهارم هندسه (۱)) و قضیهٔ هرون (فصل سوم هندسه (۲)) مطرح شده است.

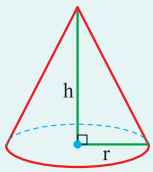
پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

۱) از دوران هر مثلث قائم‌الزاویه حول یکی از اضلاع زاویهٔ قائمهٔ آن، یک مخروط قائم به دست می‌آید.



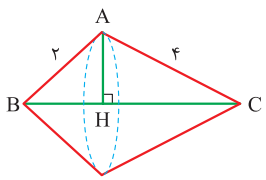
۲) حجم مخروط قائمی به شعاع قاعدهٔ r و ارتفاع h، برابر است با $\frac{1}{3}\pi r^2 h$.



۳) مساحت مثلثی به طول اضلاع a، b و c برابر است با $S=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$ که در آن P نصف محیط مثلث است $(P=\frac{a+b+c}{2})$.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ارتفاع وارد بر ضلع به طول ۳ را رسم می‌کنیم، همان‌طور که در شکل می‌بینید، شکل حاصل از این دوران، از دو مخروط قائم که در قاعده به هم چسبیده هستند، تشکیل شده است:



گام دوم: حجم شکل حاصل از این دوران، برابر است با:

$$V=\frac{1}{3}\pi\times AH^2\times BH+\frac{1}{3}\pi\times AH^2\times CH=\frac{1}{3}\pi\times AH^2\times(BH+CH)=\frac{1}{3}\pi\times AH^2\times BC \quad (*)$$

گام سوم: مساحت مثلث ABC را به دست می‌آوریم:

$$P=\frac{2+3+4}{2}=\frac{9}{2} \Rightarrow S_{ABC}=\sqrt{\frac{9}{2}(\frac{9}{2}-3)(\frac{9}{2}-4)(\frac{9}{2}-2)}=\frac{3}{4}\sqrt{15}$$

از طرفی $S_{ABC}=\frac{1}{2}AH\times BC$، پس:

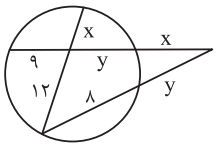
$$\frac{3}{4}\sqrt{15}=\frac{1}{2}AH\times 3 \Rightarrow AH=\frac{1}{2}\sqrt{15}$$

گام چهارم: از $(*)$ نتیجه می‌شود:

$$V=\frac{1}{3}\pi(\frac{1}{4}\times 15)\times 3=\frac{15}{4}\pi=3/75\pi$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۴ در شکل زیر حاصل $x+y$ کدام است؟



۱) ۵

۲) ۷

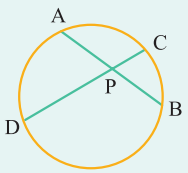
۳) ۸

۴) ۱۰

پاسخ: گزینهٔ ۲

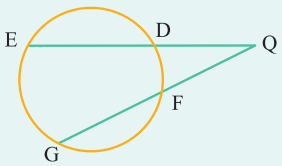
درس Box

۱) مطابق شکل، برای دو وتر AB و CD که در نقطهٔ P درون دایره متقاطع‌اند، داریم:



$$PA\times PB = PC\times PD$$

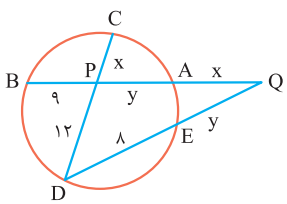
۲) مطابق شکل، برای دو وتر DE و FG که امتدادهای آن‌ها در نقطهٔ Q، بیرون دایره متقاطع‌اند، داریم:



$$QD\times QE = QF\times QG$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: برای دو وتر AB و CD که در نقطهٔ P درون دایره متقاطع‌اند، داریم:



$$PC\times PD = PA\times PB \Rightarrow x\times ۱۲ = y\times ۹ \Rightarrow y = \frac{۴}{۳}x$$

گام دوم: برای دو وتر AB و DE که امتدادهای آن‌ها در نقطهٔ Q، بیرون دایره متقاطع‌اند، داریم:

$$QA\times QB = QE\times QD \Rightarrow x(x+y+۹) = y(y+۸) \xrightarrow{y=\frac{۴}{۳}x} x(x+\frac{۴}{۳}x+۹) = \frac{۴}{۳}x(\frac{۴}{۳}x+۸)$$

$$\Rightarrow (\frac{۷}{۳}x+۹) = \frac{۴}{۳}(\frac{۴}{۳}x+۸) \Rightarrow ۲۱x+۸۱ = ۱۶x+۹۶ \Rightarrow x = ۳ \xrightarrow{y=\frac{۴}{۳}x} y = ۴$$

$$\Rightarrow x+y = ۳+۴ = ۷$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۵ نقطهٔ A'، بازتاب نقطهٔ A نسبت به خط d است به طوری که $AA' = ۴۸$. اگر O نقطه‌ای واقع بر d باشد، به طوری که $OA = ۲۵$، آن‌گاه فاصلهٔ A از OA' کدام است؟

۱) ۱۳ / ۴۴ ۲) ۱۴ / ۴۸

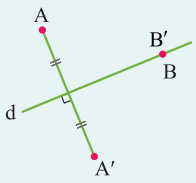
۳) ۱۴ / ۲ ۴) ۱۶ / ۸

مشاوره این سؤال مشابه تمرین ۷، صفحهٔ ۴۳ کتاب درسی هندسه (۲) طراحی شده است.

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

۱) بازتاب نسبت به خط d:



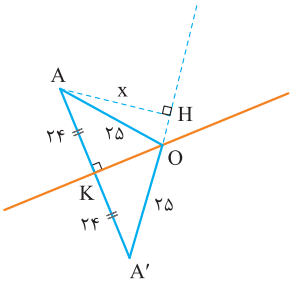
بازتاب نقطهٔ A غیرواقع بر خط d، نقطه‌ای مانند A' است به طوری که d عمودمنصف AA' باشد.

بازتاب نقطهٔ B واقع بر خط d، همان نقطهٔ B است.

۲) بازتاب، یک تبدیل ایزومتری است، یعنی طول پاره‌خط‌ها را حفظ می‌کند.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: شکل مناسب را رسم می‌کنیم، با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس، در مثلث OAK، داریم:



$$OK^۲ = OA^۲ - AK^۲ \Rightarrow OK^۲ = ۲۵^۲ - ۲۴^۲$$

$$\xrightarrow{\text{مزدوج}} OK^۲ = (۲۵+۲۴)(۲۵-۲۴) = ۴۹ \Rightarrow OK = ۷$$

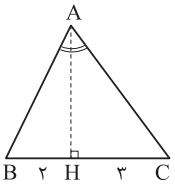
گام دوم: مساحت مثلث OAA' را از دو روش محاسبه کرده و با هم برابر قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} S_{OAA'} = \frac{۱}{۲} OK \times AA' \\ S_{OAA'} = \frac{۱}{۲} AH \times OA' \end{cases} \Rightarrow \frac{۱}{۲} OK \times AA' = \frac{۱}{۲} AH \times OA' \Rightarrow ۷ \times ۴۸ = x \times ۲۵ \Rightarrow x = \frac{۷ \times ۴۸}{۲۵} = ۱۳ / ۴۴$$

نقطهٔ A'، تصویر نقطهٔ A در بازتاب نسبت به خط l است. اگر $AA' = ۱۶$ و نقطهٔ O روی خط l و $OA = ۱۰$ باشد، فاصلهٔ نقطهٔ A از خط OA' چه‌قدر است؟ (هندسه (۲) ـ تمرین ۷ صفحهٔ ۴۳ کتاب درسی)

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۶ در شکل مقابل اگر $B\hat{A}C = ۴۵^\circ$، آن‌گاه طول ارتفاع AH کدام است؟



۱) ۱

۲) $\sqrt{۶}$

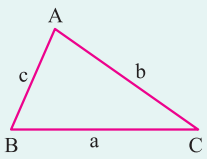
۳) $۲\sqrt{۳}$

۴) ۶

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

مساحت هر مثلث، برابر است با نصف حاصل‌ضرب دو ضلع در سینوس زاویهٔ بین آن دو ضلع:

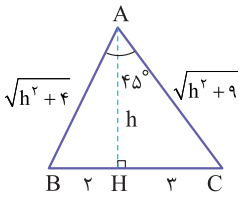


$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲}b\times c\times \sin A = \frac{۱}{۲}a\times c\times \sin B = \frac{۱}{۲}a\times b\times \sin C$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: اگر $AH = h$ باشد، آن‌گاه بنا به قضیهٔ فیثاغورس در مثلث ABH داریم $AB = \sqrt{h^۲ + ۴}$ و بنا به قضیهٔ فیثاغورس در مثلث ACH، داریم $AC = \sqrt{h^۲ + ۹}$.

گام دوم: برای محاسبهٔ مساحت مثلث ABC از دو روش استفاده می‌کنیم:



$$S = \frac{۱}{۲}AH\times BC = \frac{h\times ۵}{۲}$$

$$S = \frac{۱}{۲}AB\times AC\times \sin A = \frac{۱}{۲}\sqrt{h^۲+۹}\sqrt{h^۲+۴}\sin ۴۵$$

گام سوم: مقادیری را که در گام دوم برای مساحت مثلث ABC به دست آوردیم، برابر قرار می‌دهیم:

$$\frac{h\times ۵}{۲} = \frac{\sqrt{h^۲+۴}\sqrt{h^۲+۹}\times\sqrt{۲}}{۴} \Rightarrow ۵h = \sqrt{h^۲+۹}\sqrt{h^۲+۴}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\Rightarrow ۵۰\times h^۲ = (h^۲+۹)(h^۲+۴) \Rightarrow h^۴ - ۳۷h^۲ + ۳۶ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} h^۲ = ۱ & \text{غ ق ق} \\ h^۲ = ۳۶ \Rightarrow h = ۶ \end{cases}$$

توجه کنید که اگر $h = ۱$، آن‌گاه $\cos B\hat{A}H = \frac{۱}{\sqrt{۵}}$ و $\cos C\hat{A}H = \frac{۱}{\sqrt{۱۰}}$، یعنی در این حالت $B\hat{A}H$ و $C\hat{A}H$ از ۴۵° بیشتر هستند، پس این مقدار قابل قبول نیست.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۷ اگر $A=\begin{bmatrix}۲ & ۰ & ۳\\ ۰ & -۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۲\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۲} & ۰ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۰\\ \frac{۳}{۲} & ۰ & \frac{۱}{۲}\end{bmatrix}$ باشند، دترمینان ماتریس $C=A^{۳}B^{۲}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$

۳) ۴ ۴) -۴

مشاوره این سؤال مشابه سؤال ۳۴ کنکور ریاضی خارج از کشور ۱۴۰۴ طراحی شده است و به نکاتی مانند دترمینان حاصل‌ضرب دو ماتریس و تأثیر توان ماتریس در دترمینان آن می‌پردازد.

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

۱) اگر A و B دو ماتریس مربعی هم‌مرتبه باشند، آن‌گاه: $|AB|=|A||B|$

۲) اگر A یک ماتریس مربعی و n عددی طبیعی باشد، آن‌گاه: $|A^{n}|=|A|^{n}$

۳) دترمینان ماتریس‌های قطری برابر حاصل‌ضرب درایه‌های واقع بر قطر اصلی آن‌ها است.

$$A=\begin{bmatrix}a & ۰ & ۰\\ ۰ & b & ۰\\ ۰ & ۰ & c\end{bmatrix}\Rightarrow |A|=abc$$

تذکر: اگر در یک ماتریس مربعی، تنها یکی از درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی، عددی غیرصفر باشد، آن‌گاه دترمینان آن ماتریس برابر حاصل‌ضرب درایه‌های واقع بر قطر اصلی آن است:

$$B=\begin{bmatrix}a & ۰ & d\\ ۰ & b & ۰\\ ۰ & ۰ & c\end{bmatrix}\Rightarrow |B|=abc$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: در ماتریس‌های مربعی A و B، تنها یکی از درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی مخالف صفر است، پس طبق تذکر ارائه‌شده در درس‌باکس داریم:

$$|A|=۲\times(-۱)\times ۲=-۴ \quad \text{و} \quad |B|=\frac{۱}{۲}\times ۱\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۴}$$

گام دوم: با توجه به (۱) و (۲) درس‌باکس، دترمینان ماتریس C برابر است با:

$$|C|=|A^{۳}B^{۲}|=|A^{۳}||B^{۲}|=|A|^{۳}\times|B|^{۲}=(-۴)^{۳}\times(\frac{۱}{۴})^{۲}=(-۴)\times(-۴\times\frac{۱}{۴})^{۲}=-۴$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۸ فواصل یکی از کانون‌های یک بیضی از دو سر قطر بزرگ و یک سر قطر کوچک آن، تشکیل یک دنبالهٔ حسابی می‌دهند. اگر قدرنسبت این دنباله، نصف طول قطر کوچک بیضی باشد، خروج از مرکز آن کدام است؟

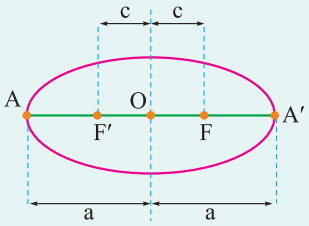
۱) $\frac{\sqrt{۵}}{۵}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

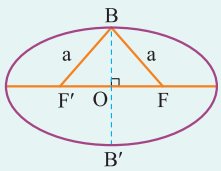
درس Box

فرض کنید طول قطر بزرگ یک بیضی $۲a$ و فاصلهٔ بین کانون‌های آن $۲c$ است:

الف) فاصلهٔ هر کانون از دو سر قطر بزرگ $a-c$ و $a+c$ است.



ب) فاصلهٔ هر کانون از دو سر قطر کوچک، برابر با a است.



پ) اگر طول قطر کوچک برابر با $۲b$ باشد، آن‌گاه: $a^۲=b^۲+c^۲$

ت) خروج از مرکز بیضی برابر است با: $e=\frac{c}{a}$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: مقادیر $a-c, a, a+c$ ($+c$، $+c$) تشکیل یک دنبالهٔ حسابی می‌دهند که قدرنسبت آن برابر با c است.

گام دوم: طبق فرض سؤال، قدرنسبت دنبالهٔ مطرح‌شده در گام اول، برابر با $\frac{۲b}{۲}=b$ است، پس در این بیضی:

$$c=b \xrightarrow{a^۲=b^۲+c^۲} a^۲=c^۲+c^۲ \Rightarrow a^۲=۲c^۲ \Rightarrow a=\sqrt{۲}c \quad (*)$$

گام سوم: خروج از مرکز بیضی، برابر است با:

$$e=\frac{c}{a} \xrightarrow{(*)} e=\frac{c}{\sqrt{۲}c}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۹ دایره‌ای که نقاط $A(۲,۴)$ و $B(-۶,-۲)$، دو سر قطری از آن هستند، یک سهمی با کانون $F(۱,۱)$ و خط هادی $x=-۳$ را در دو نقطه قطع می‌کند. فاصلهٔ این دو نقطه از یکدیگر کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۴

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint معادلات دایره و سهمی را با توجه به اطلاعات داده‌شده بنویسید و با حل دستگاه، مختصات نقاط تلاقی را به دست آورید.

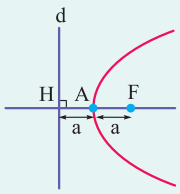
درس Box

۱) اگر نقطهٔ M وسط پاره‌خط AB باشد، آن‌گاه مختصات نقطهٔ M از روابط زیر حاصل می‌شود:

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{۲}\ ,\ y_M=\frac{y_A+y_B}{۲}$$

۲) معادلهٔ دایره‌ای به مرکز (α,β) و شعاع R به صورت $(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=R^۲$ است.

۳) معادلهٔ یک سهمی که رأس آن نقطهٔ $A(h,k)$ و فاصلهٔ کانونی آن برابر a باشد و دهانهٔ آن به سمت راست باز شود، به صورت $(y-k)^۲=۴a(x-h)$ است. مختصات کانون و معادلهٔ خط هادی این سهمی عبارت‌اند از:



کانون: $F(h+a,k)$

خط هادی: $x=h-a$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا معادلهٔ دایره را به دست می‌آوریم. نقطهٔ O مرکز دایره دقیقاً وسط قطر AB قرار دارد، پس داریم:

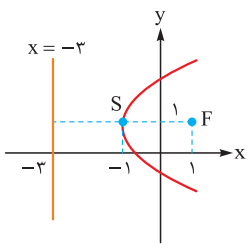
$$\begin{cases}x_O=\frac{۲-۶}{۲}=-۲\\ y_O=\frac{۴-۲}{۲}=۱\end{cases}\Rightarrow O(-۲,۱)$$

شعاع این دایره برابر است با:

$$OA=\sqrt{(۲+۲)^۲+(۴-۱)^۲}=۵$$

پس معادلهٔ این دایره به صورت $(x+۲)^۲+(y-۱)^۲=۲۵$ است.

گام دوم: با داشتن مختصات کانون و معادلهٔ خط هادی، معادلهٔ سهمی را می‌نویسیم. مطابق شکل رأس سهمی دقیقاً وسط خط هادی و کانون سهمی قرار دارد، پس $S(-۱,۱)$، رأس سهمی و $a=۲$، فاصلهٔ کانونی سهمی است و سهمی رو به راست باز می‌شود، پس معادلهٔ آن به صورت زیر است:



$$(y-۱)^۲=۸(x+۱)$$

گام سوم: معادلات دایره و سهمی را در یک دستگاه حل می‌کنیم:

$$\begin{cases}(x+۲)^۲+(y-۱)^۲=۲۵\\ (y-۱)^۲=۸(x+۱)\end{cases}\Rightarrow (x+۲)^۲+۸(x+۱)=۲۵\Rightarrow x^۲+۱۲x-۱۳=۰$$

$$\xrightarrow{\text{مجموع ضرایب = صفر}}\begin{cases}x=۱\\ x=-۱۳\ \text{غ ق ق}\end{cases}$$

$$x=۱\Rightarrow (y-۱)^۲=۸\times۲=۱۶\Rightarrow y-۱=\pm۴\Rightarrow y=۵\ ,\ -۳$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

در این صورت فاصلهٔ دو نقطه برابر است با:

$$۵-(-۳)=۸$$

توجه $x=-۱۳$ غیر قابل قبول است، زیرا طول نقاط واقع بر این سهمی از (-۱) کم‌تر نیست.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۰ اگر $\vec{a}=\vec{j}+۱۰\vec{k}$، $\vec{b}=(۴,۱,۵)$ و $\vec{c}=(۱,-۲,۲)$ آن‌گاه مجموع مؤلفه‌های تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر امتداد بردار $\vec{b}+\vec{c}$، کدام است؟

۱) ۱۰/۱۲ ۲) ۱۰/۱۴ ۳) ۱۰/۱۶ ۴) ۱۰/۱۸

مشاوره مشابه تمرین ۴، صفحهٔ ۸۴ کتاب درسی

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

۱) طول بردار $\vec{v}=(v_۱,v_۲,v_۳)$ برابر است با: $|\vec{v}|=\sqrt{v_۱^۲+v_۲^۲+v_۳^۲}$.

۲) حاصل‌ضرب داخلی دو بردار $\vec{u}=(u_۱,u_۲,u_۳)$ و $\vec{v}=(v_۱,v_۲,v_۳)$ برابر است با: $\vec{u}.\vec{v}=u_۱v_۱+u_۲v_۲+u_۳v_۳$

۳) تصویر قائم بردار $\vec{u}$ بر $\vec{v}$، برابر است با: $\vec{u}'=\frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{v}|^۲}\vec{v}$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: اگر $\vec{b}=(۴,۱,۵)$ و $\vec{c}=(۱,-۲,۲)$، آن‌گاه $\vec{v}=\vec{b}+\vec{c}=(۵,-۱,۷)$.

گام دوم: اگر $\vec{v}=(۵,-۱,۷)$، آن‌گاه $|\vec{v}|=\sqrt{۲۵+۱+۴۹}=\sqrt{۷۵}=۵\sqrt{۳}$.

گام سوم: تصویر قائم بردار $a=(۰,۱,۱۰)$ بر امتداد بردار $\vec{v}=(۵,-۱,۷)$، برابر است با:

$$\vec{a}'=\frac{\vec{a}.\vec{v}}{|\vec{v}|^۲}\vec{v}=\frac{۰-۱+۷۰}{۲۵\times۳}(۵,-۱,۷)=\frac{۲۳}{۲۵}(۵,-۱,۷)$$

پس خواستهٔ سؤال، برابر است با:

$$\frac{۲۳}{۲۵}(۵-۱+۷)=\frac{۲۳\times۱۱}{۲۵}=۱۰/۱۲$$

اگر $\vec{c}=(-۱,۱,۴)$، $\vec{b}=(۳,-۴,۲)$ و $\vec{a}=(۱,-۳,۴)$ باشند، آن‌گاه تصویر قائم a بر امتداد $\vec{b}+\vec{c}$ را به دست آورید.

(هندسه (۳) ـ تمرین ۴ صفحهٔ ۸۴ کتاب درسی)

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۱ گزارهٔ $[(p \Rightarrow q) \vee \sim r] \Rightarrow (p \wedge r)$ هم‌ارز کدام گزاره است؟

۱) $p \wedge q$

۲) $p \wedge r$

۳) $r \wedge q$

۴) $p \wedge \sim r$

مشاوره از منطق ریاضی یک سؤال در کنکور می‌آید که بیشتر، همان سؤال‌های اول است. در سؤال‌هایی مثل این، سعی کنید با انتخاب ردیف مناسب از جدول ارزش، رد گزینه کنید.

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint حالتی رو بگیرین که فرض نادرست بشه یا از هم‌ارزی ترکیب شرطی استفاده کنید.

درس Box

ترکیب گزاره‌ها:

ترکیب گزاره‌ها	ریاضی	فارسی	ارزش
ترکیب فصلی	$p \vee q$	p یا q	وقتی درست است که حداقل یکی از گزاره‌های p یا q درست باشد.
ترکیب عطفی	$p \wedge q$	p و q	وقتی درست است که p و q هر دو درست باشند.
ترکیب شرطی	$p \Rightarrow q$	اگر p آن‌گاه q	فقط در حالت «ن $\Rightarrow$ د» نادرست است و در بقیهٔ حالت‌ها درست است.
ترکیب دوشرطی	$p \Leftrightarrow q$	p اگر و فقط اگر q	وقتی درست است که p و q هم‌ارزش باشند.

جبر مجموعه‌ها و گزاره‌ها:

اسم قانون	مجموعه	گزاره
قوانین شرکت‌پذیری	$\begin{cases} A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \\ A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \end{cases}$	$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$ $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$
قوانین پخشی (عکس آن فاکتورگیری)	$\begin{cases} A \cup (B \cap C) = \underbrace{(A \cup B) \cap (A \cup C)}_{\text{فاکتور}} \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{cases}$	$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
قوانین زیرمجموعه	$A \subseteq B \Leftrightarrow \begin{cases} A \cup B = B \\ A \cap B = A \\ A - B = \varnothing \end{cases}$ (تمامی روابط، دوطرفه هستند.)	-
قوانین دمورگان	$\begin{cases} (A \cup B)' = A' \cap B' \\ (A \cap B)' = A' \cup B' \end{cases}$	$\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$ $\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$
قانون تبدیل تفاضل به اشتراک	$A - B = A \cap B'$	-
قوانین جذب	$\begin{cases} A \cup (A \cap B) = A \quad (\text{چون } A \cap B \subseteq A) \\ A \cap (A \cup B) = A \quad (\text{چون } A \subseteq A \cup B) \end{cases}$	$p \vee (p \wedge q) \equiv p$ $p \wedge (p \vee q) \equiv p$
ترکیب شرطی	-	$p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$
مقدماتی	$A \cup A' = U \quad A \cup U = U \quad A \cup \varnothing = A$ $A \cap A' = \varnothing \quad A \cap U = A \quad A \cap \varnothing = \varnothing$	$p \vee \sim p \equiv T \quad p \vee T \equiv T \quad p \vee F \equiv p$ $p \wedge \sim p \equiv F \quad p \wedge T \equiv p \quad p \wedge F \equiv F$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ خیلی تشریحی ✔ اگر حالتی از جدول ارزش که فرض گزارهٔ داده‌شده نادرست درمی‌آید (و در نتیجه، کل گزاره درست می‌شود) را در نظر بگیریم، داریم:

p	q	r	$(p \Rightarrow q) \vee \sim r$	کل گزاره	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$r \wedge q$	$p \wedge \sim r$
د	ن	د	ن	د	ن	د	ن	ن

می‌بینیم که در این حالت ارزش گزینه‌های (۱)، (۳) و (۴) مثل گزارهٔ داده‌شده نیستند، پس پاسخ، گزینهٔ (۲) است.

یه جور دیگه با استفاده از جبر گزاره، می‌دانیم $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$، حالا داریم:

$$[\sim p \vee q \vee \sim r] \Rightarrow (p \wedge r) \overset{\text{هم‌ارزی ترکیب شرطی}}{\equiv}$$

$$\sim [\sim p \vee q \vee \sim r] \vee (p \wedge r) \overset{\text{دمورگان}}{\equiv}$$

$$[p \wedge \sim q \wedge r] \vee (p \wedge r) \equiv$$

$$[(p \wedge r) \wedge \sim q] \vee (p \wedge r) \overset{\text{جذب}}{\equiv} p \wedge r$$

گزارهٔ $(p \wedge q) \Rightarrow r$ هم‌ارز منطقی کدام گزاره است؟ *(سؤال ۴ کنکور ریاضی ۱۴۰۴ ـ نوبت دوم)*

۱) $p \Rightarrow (\sim r \Rightarrow \sim q)$

۲) $r \Rightarrow (\sim p \Rightarrow \sim q)$

۳) $\sim p \Rightarrow (\sim r \Rightarrow \sim q)$

۴) $\sim r \Rightarrow (p \Rightarrow q)$

گزارهٔ $p \Leftrightarrow q \sim$ هم‌ارز منطقی کدام گزاره است؟ *(سؤال ۴ کنکور ریاضی ۱۴۰۴ ـ نوبت اول)*

۱) $(\sim p \wedge q) \wedge (\sim p \vee q)$

۲) $\sim [\sim (\sim p \vee q) \vee (\sim p \wedge q)]$

۳) $(\sim p \vee q) \vee (\sim p \wedge q)$

۴) $\sim [\sim (\sim p \wedge q) \wedge (\sim p \vee q)]$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۲ مجموعهٔ $(A \cap B)' \cup [((A \cup B') - A) \cup (B - A')]$ با کدام مجموعه برابر است؟ (U مجموعهٔ مرجع است.)

۱) B

۲) A

۳) $\varnothing$

۴) U

مشاوره یک سؤال از مجموعه‌ها معمولاً به این شکل می‌آید. حواستان باشد با نمودار ون این سؤال راحت حل می‌شود، نکند از آن عبور کنید.

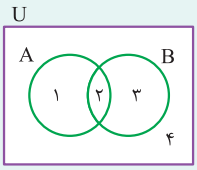
پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint یک نمودار ون بکشین و نواحی رو شماره‌گذاری کنید و ببینین حاصل مجموعه کدوم ناحیه می‌شه.

درس Box

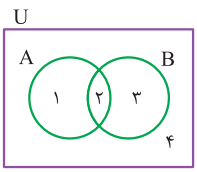
روش شماره‌گذاری (نمودار ون) برای ساده‌سازی مجموعه‌ها:

برای دو مجموعهٔ A و B نمودار ون را به صورت زیر رسم کرده و ناحیه‌ها را شماره‌گذاری می‌کنیم. مجموعهٔ داده‌شده را ساده می‌کنیم و می‌بینیم کدام ناحیه (یا مجموعه) در پایان به دست می‌آید.



پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: یک نمودار ون به صورت مقابل رسم کرده و نواحی را شماره‌گذاری می‌کنیم:



گام دوم:

$$\underbrace{(A \cap B)'}_{1,3,4} \cup [\underbrace{(\underbrace{(A \cup B')}_{1,2,4} - A)}_{4} \cup \underbrace{(B - A')}_{2}] = \{1,3,4\} \cup \{4,2\} = \{1,2,3,4\} = U$$

ساده‌شدهٔ عبارت $[(B \cap A) - B') \cap (B \cup A)] \cup (A' \cap B)$ کدام است؟ *(سؤال ۳ کنکور ریاضی ۱۴۰۴ ـ نوبت دوم)*

۱) $A - B$ ۲) $B - A$ ۳) B ۴) A

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۳ **در مراسمی فاطمه، آناهیتا، رضوانه، سارا، پرنیا و سارینا می‌خواهند سخنرانی کنند، ولی باید آناهیتا قبل از رضوانه و سارا بلافاصله بعد از سارینا سخنرانی کند. به چند حالت می‌توانیم ترتیب سخنرانی را برای آن‌ها مشخص کنیم؟**

۱) ۳۰

۲) ۴۰

۳) ۶۰

۴) ۱۲۰

مشاوره در سال‌های گذشته، سؤال شمارش چه در کنکور ریاضی و چه در کنکور تجربی بیشتر از بحث جایگشت بوده است.

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint

سارا و سارینا رو در یک دسته قرار بدین و یک شیء بگیرید.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: سارا و سارینا را در یک دسته قرار می‌دهیم. دقت کنید چون سارا بلافاصله بعد از سارینا است، پس دسته را به صورت سارا و سارینا در نظر می‌گیریم که جایگشت نیز ندارند.

گام دوم: باید جایگشت‌های ۵ شیء سارا و سارینا، فاطمه، آناهیتا، رضوانه و پرنیا را به دست آوریم که رضوانه جلوتر از آناهیتا باشد. ۵ جایگاه مانند زیر داریم، اول به $\binom{۵}{۲}$ روش دو جایگاه انتخاب می‌کنیم. رضوانه را در مکان جلوتر و آناهیتا را در مکان عقب‌تر قرار می‌دهیم:

__ __ __ __ __

گام سوم: ۳ شیء باقی‌مانده $۳!$ جایگشت دارند، پس تعداد حالت‌های سخنرانی برابر است با: $\binom{۵}{۲} \times ۳! = ۱۰ \times ۶ = ۶۰$

یه جور دیگه

بعد از قراردادن سارا و سارینا در یک بسته دقت کنید که ۵ شیء داریم که در نصف حالت‌ها رضوانه جلوتر و در نصف حالت‌ها آناهیتا جلوتر است، پس تعداد جایگشت‌های مطلوب برابر است با: $\frac{۵!}{۲} = ۶۰$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۴ **سکه‌ای به گونه‌ای ساخته شده است که احتمال آمدن رو در آن سه برابر احتمال آمدن پشت است. آن را پرتاب می‌کنیم. اگر رو بیاید دو تاس و اگر پشت بیاید سه تاس پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال مجموع اعداد روشدهٔ تاس‌ها حداکثر ۴ است؟**

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{۵}{۲۷}$ ۴) $\frac{۷}{۵۴}$

مشاوره احتمال سؤال آمدن، از قانون احتمال کل و بیز بیشتر از بخش‌های احتمال است.

پاسخ: گزینهٔ ۴

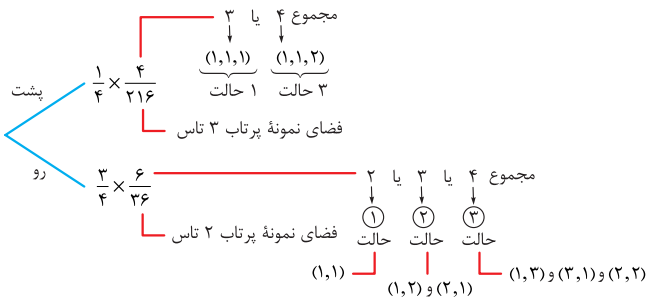
Hint اول احتمال «پ» یا «ر» آمدن رو حساب کن و بعد از احتمال شاخه‌ای برو.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: مجموع احتمال‌های $P(ر)$ و $P(پ)$ در پرتاب سکه برابر ۱ است، پس داریم:

$$P(پ)+P(ر)=۱ \Rightarrow P(پ)+۳P(پ)=۱ \Rightarrow P(پ)=\frac{۱}{۴}, P(ر)=\frac{۳}{۴}$$

گام دوم: از قانون احتمال کل داریم:



گام سوم: طبق قانون احتمال کل داریم:

$$P(A)=\frac{۱}{۲۱۶}+\frac{۱}{۸}=\frac{۲۸}{۲۱۶}=\frac{۷}{۵۴}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۵ برآورد بازه‌ای میانگین جامعه با اطمینان بیش از ۹۵ درصد با استفاده از یک نمونهٔ ۱۶تایی به صورت $(۵/۵,۶/۳)$ برآورد شده است. اگر انحراف معیار جامعه و نمونه برابر باشد، چند دادهٔ برابر با ۵ به نمونه اضافه کنیم تا واریانس نمونه، ۳ واحد کاهش یابد؟

۱) ۶ ۲) ۷

۳) ۸ ۴) صفر

مشاوره از بحث برآورد بازه‌ای تا حالا سؤالی در کنکور نیامده است. امسال ممکن است نوبت آن باشد.

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint از روی بازهٔ $(۵/۵,۶/۳)$ انحراف معیار و میانگین نمونه رو به دست بیارید.

درس Box

شاخص‌های پراکندگی:

شاخص	فرمول	توضیح فارسی
واریانس	$\sigma^۲=\frac{\sum(x_i-\bar{x})^۲}{n}$ یا $\sigma^۲=\frac{x_۱^۲+\cdots+x_n^۲}{n}-(\bar{x})^۲$	هر داده را منهای میانگین کرده به توان ۲ می‌رسانیم. سپس با هم جمع کرده و تقسیم بر تعداد می‌کنیم. به زبان دیگر واریانس برابر میانگین مربع انحراف از میانگین‌هاست.
انحراف معیار	$\sigma=\sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{x})^۲}{n}}$	جذر واریانس است.

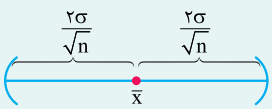
برآورده بازه‌ای:

برآورد بازه‌ای یا بازهٔ اطمینانِ پارامتر جامعه، عبارت است از بازه‌ای عددی برای پارامتر به همراه یک درصد اطمینان که به ضریب اطمینان مشهور است.

برآورد بازه‌ای برای میانگین جامعه:

اگر نمونه‌ای تصادفی به اندازهٔ n در اختیار داشته باشیم، با اطمینان بیش از ۹۵٪ می‌توانیم بگوییم:

$$\bar{x}-\frac{۲\sigma}{\sqrt{n}}\le\mu\le\bar{x}+\frac{۲\sigma}{\sqrt{n}}$$



که μ میانگین جامعه و σ انحراف معیار جامعه است.

نکته
۱) وسط بازهٔ اطمینان، همان میانگین نمونه $(\bar{x})$ است.
۲) طول بازهٔ اطمینان برابر با $\frac{۴\sigma}{\sqrt{n}}$ است.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: بازهٔ اطمینان بیش از ۹۵٪ میانگین به صورت $(\bar{x}-\frac{۲\sigma}{\sqrt{n}},\bar{x}+\frac{۲\sigma}{\sqrt{n}})$ است، پس داریم:

$$\begin{cases}\bar{x}-\frac{۲\sigma}{\sqrt{n}}=۳/۵\\ \bar{x}+\frac{۲\sigma}{\sqrt{n}}=۶/۵\end{cases}\xrightarrow{\oplus}۲\bar{x}=۱۰\Rightarrow\bar{x}=۵\Rightarrow\frac{۲\sigma}{\sqrt{n}}=۱/۵\xrightarrow{n=۱۶}۲\sigma=۴(۱/۵)\Rightarrow\sigma=۳$$

گام دوم: طبق فرمول واریانس داریم:

$$\sigma^۲=\frac{\sum(x_i-۵)^۲}{n}\Rightarrow۹=\frac{\sum(x_i-۵)^۲}{۱۶}\Rightarrow\sum(x_i-۵)^۲=۱۴۴$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

گام سوم: اگر k دادهٔ مساوی با ۵ به نمونه اضافه کنیم حاصل $\sum(x_i-5)^2$ تغییری نمی‌کند، اما واریانس جدید ۳ واحد کاهش می‌یابد، پس داریم:

$$\sigma^2=\frac{\sum(x_i-5)^2}{16+k}=9-3 \Rightarrow \frac{144}{16+k}=6 \Rightarrow 144=96+6k \Rightarrow k=8$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۶ **a عددی اول است که $a \mid 6k+1$ و $a \mid 3k+4$. بزرگ‌ترین جواب دورقمی برای x در معادلهٔ هم‌نهشتی $107x \equiv 61 - x$ به پیمانهٔ a کدام است؟**

۱) ۹۵

۲) ۹۶

۳) ۹۷

۴) ۹۸

مشاوره در بین موضوعات نظریه اعداد، هم‌نهشتی کم‌تر از سایر موضوعات است، البته در سال‌های اخیر طراحان به عادکردن هم علاقهٔ زیادی نشان داده‌اند.

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint

k رو حذف کنین و بعد a رو پیدا کنید.

درس Box

معادلهٔ هم‌نهشتی:

برای حل معادلهٔ هم‌نهشتی $ax \overset{m}{\equiv} b$ مراحل زیر را طی می‌کنیم:

۱) اگر a و b اعداد بزرگی هستند، به جایشان یک عدد هم‌نهشت با آن‌ها به پیمانهٔ m را قرار می‌دهیم.

۲) با اضافه‌کردن مضارب پیمانه به b، کاری می‌کنیم تا دو طرف بر a بخش‌پذیر باشند.

۳) با استفاده از ویژگی تقسیم، دو طرف را به a ساده می‌کنیم تا x به دست آید.

نکته

ساده‌کردن دو طرف هم‌نهشتی:

$$ac \overset{m}{\equiv} bc \xrightarrow[\div c]{(c,m)=1} a \overset{m}{\equiv} b$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول:

$$\begin{cases} a \mid 6k+1 \\ a \mid 3k+4 \xrightarrow{\times(2)} a \mid 6k+8 \end{cases} \Rightarrow a \mid 7 \xrightarrow[\text{عدد اول}]{a} a = 7$$

گام دوم: معادلهٔ هم‌نهشتی را حل می‌کنیم:

$$107x \overset{7}{\equiv} 61 - x \Rightarrow 108x \overset{7}{\equiv} 61 \xrightarrow[\substack{108 \overset{7}{\equiv} 3 \\ 61 \overset{7}{\equiv} 5}]{} 3x \overset{7}{\equiv} 5$$

$$\Rightarrow 3x \overset{7}{\equiv} 5 + 7 = 12 \xrightarrow[(3,7)=1]{\div 3} x \overset{7}{\equiv} 4 \Rightarrow x = 7k + 4$$

به ازای $k = 13$ بزرگ‌ترین عدد دورقمی x، یعنی ۹۵ به دست می‌آید.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۷ حاصل‌ضرب درجهٔ رأس‌های گراف همبند G با کم‌ترین تعداد رأس از درجهٔ یک، برابر ۶۰ است. حاصل $\gamma(\bar{G}) + \Delta(\bar{G})$ کدام است؟

۱) ۴

۲) ۵

۳) ۶

۴) ۷

مشاوره از فصل گراف، یک سؤال در کنکور می‌آید. این فصل نماد و تعریف‌های زیادی دارد، یک بار آن‌ها را دوره کنید.

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint ۶۰ رو به صورت ضرب اعداد (درجه‌های) مناسب تجزیه کنید.

درس Box

نماد	اسم	توضیح	نکته
$V(G)$	مجموعهٔ رأس‌های گراف	-	رأس‌ها را معمولاً با v_1 و v_2 و ... نمایش می‌دهیم.
$E(G)$	مجموعهٔ یال‌های گراف	-	یال را معمولاً به صورت ab نمایش می‌دهیم. 
p	مرتبهٔ گراف	تعداد رأس‌های گراف $(p > 0)$	$\lvert V(G) \rvert = p$
q	اندازهٔ گراف	تعداد یال‌های گراف $(q \geq 0)$	$\lvert E(G) \rvert = q$
$\deg_G(v)$	درجهٔ رأس v	تعداد یال‌هایی که به رأس v متصل است (در گراف G).	درجهٔ رأس v را با نماد $d(v)$ نمایش می‌دهیم $0 \leq d(v) \leq p-1$.
Δ	ماکزیمم درجه	بزرگ‌ترین درجه در بین کل درجهٔ رأس‌ها	$\Delta \leq p-1$
δ	مینیمم درجه	کوچک‌ترین درجه در بین کل درجهٔ رأس‌ها	$0 \leq \delta \leq \Delta$
$N_G(a)$	همسایگی باز رأس a	مجموعه رأس‌هایی که به a متصل هستند (در گراف G).	$N_G(a)$ به تعداد $d(a)$ عضو دارد.
$N_G[a]$	همسایگی بستهٔ رأس a	مجموعه رأس‌هایی که به a متصل هستند، به‌علاوهٔ خود a (در گراف G).	$N_G[a]$ به تعداد $d(a)+1$ عضو دارد.
$\bar{K}_p$	گراف تهی	گرافی که یال ندارد (همهٔ رأس‌ها ایزوله هستند).	تعدادی نقطه
$\gamma(G)$	عدد احاطه‌گری گراف G	کم‌ترین تعداد رأس که کل رأس‌های G احاطه شوند.	-

گراف مکمل:

اسم	نماد	تعریف	ویژگی‌ها
گراف مکمل G	$\bar{G}$	رأس‌های $\bar{G}$ همان رأس‌های G هستند. یال‌های $\bar{G}$ یال‌هایی هستند که در G وجود ندارد.	۱) $q(G)+q(\bar{G})=\frac{p(p-1)}{2}$ ۲) $\deg_G(a)+\deg_{\bar{G}}(a)=p-1$ ۳) $\Delta(\bar{G})+\delta(G)=p-1$ ۴) $\Delta(G)+\delta(\bar{G})=p-1$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: $۲\times۲\times۳\times۵=۶۰$ یا $۳\times۴\times۵=۶۰$ است. از طرفی وقتی رأس درجه۵ داریم، مرتبهٔ گراف باید حداقل برابر ۶ باشد.

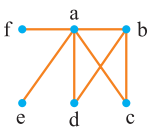
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

گام دوم: تعداد رأس‌های درجه۱ را طوری قرار می‌دهیم که تعداد رأس‌های فرد، عددی زوج باشد. حالتی قابل قبول است که تعداد یک‌های کم‌تری داشته باشد:

$۶۰ = ۵\times۳\times۲\times۲\times۱\times۱$ ✓

$۶۰ = ۵\times۴\times۳\times۱\times۱\times۱\times۱$ ×

گام سوم: درجهٔ رأس‌های G به صورت $۱, ۱, ۲, ۲, ۳, ۵$ و نمودار گراف آن به صورت زیر است:



گام چهارم: $\delta(G) = ۱$ (مثل رأس f)؛ از طرفی این رأس در $\bar{G}$ تبدیل به رأس با درجهٔ ماکزیمم می‌شود که به همهٔ رأس‌های دیگر به غیر از a وصل است، پس $\Delta(\bar{G}) = ۴$.

گام پنجم: در گراف $\bar{G}$ رأس a ایزوله است (چون در خود G به همه وصل است)؛ از طرفی رأس f به همهٔ رأس‌های غیر از a در $\bar{G}$ وصل هستند، پس $\{a, f\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم برای $\bar{G}$ بوده و $\gamma(\bar{G}) = ۲$:

$\gamma(\bar{G}) + \Delta(\bar{G}) = ۲ + ۴ = ۶$

حاصل‌ضرب درجهٔ رأس‌های گراف G، ۴۸ است. اگر تعداد رأس‌ها با درجهٔ رأس یک، حداقل باشد، حاصل $\Delta(\bar{G}) + q(\bar{G})$ کدام است؟ *(سؤال ۴۰ کنکور ریاضی ۱۴۰۲ ـ نوبت دوم)*

۱) ۱۷ ۲) ۱۱ ۳) ۱۹ ۴) ۱۳

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

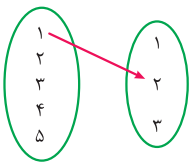
۳۸ چند تابع پوشا $\{1,2,3\} \rightarrow \{1,2,3,4,5\}$: f وجود دارد که $f(1) \neq 1$؟

۱) ۵۰ ۲) ۱۰۰ ۳) ۶۲ ۴) ۳۱

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint $f(1)=2$ یا $f(1)=3$. مثلاً فرض $f(1)=2$ باشه و دو حالت نامطلوب (برای غیرپوشابودن) تعریف کنین.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** فرض کنیم $f(1)=2$ (اگر $f(1)=3$ باشد هم تعداد حالت‌ها همین می‌شود، پس در پایان جواب را ۲ برابر می‌کنیم):



گام دوم: دو مجموعهٔ نامطلوب داریم:

A: ۱ پوشیده‌نشود $\Rightarrow |A| = \underbrace{2\times2\times2\times2}_{\text{هرکدام ۲ تا ۵ به ۲ یا ۳ نظیر شوند.}}$

B: ۳ پوشیده‌نشود $\Rightarrow |B| = 2\times2\times2\times2$

$A\cap B$: ۱ و ۳ پوشیده‌نشود $\Rightarrow |A\cap B| = 1$ (همه به ۲ نظیر شوند.)

گام سوم: خواستهٔ مسئله $\bar{A}\cap\bar{B}$ (هم ۱ پوشیده شود و هم ۳):

$$|\overline{A\cup B}| = |\bar{A}\cap\bar{B}| = |S| - |A\cup B| = |S| - (|A|+|B|-|A\cap B|)$$
$$= \underset{\downarrow}{3^4} - (16+16-1) = 81-31 = 50$$

هرکدام از ۲ تا ۵، به اعداد ۱ و ۲ و ۳ ممکن است نظیر شوند.

گام چهارم: تعداد تابع‌های مطلوب برابر $2\times50 = 100$ می‌شود.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۹ از بین ۵ نوع گل مختلف می‌خواهیم دسته‌گلی شامل ۹ شاخه درست کنیم. این کار به چند طریق امکان‌پذیر است، هرگاه از گل نوع سوم فقط دو شاخه و از گل نوع پنجم حداقل دو شاخه در دسته‌گل به کار رفته باشد؟

۱) ۲۸

۲) ۷۰

۳) ۱۲۶

۴) ۵۶

مشاوره از معادلهٔ سیالهٔ خطی، بیشتر از موضوعات دیگر فصل سوم گسسته، سؤال آمده است.

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint تعداد جواب‌های صحیح نامنفی معادلهٔ $x_۱+x_۲+\cdots+x_۵=۹$ رو با شرایط $x_۳=۲$ و $x_۵\geq ۲$ پیدا کنید.

درس Box

تعداد جواب‌های معادلهٔ سیالهٔ خطی در حالت‌های مختلف:

معادله	تعداد جواب‌های صحیح نامنفی	تعبیر یا روش حل
$\underbrace{x_۱+x_۲+\cdots+x_k}_{k\text{تا متغیر}}=n$	$\binom{n+k-۱}{k-۱}$	توزیع n شیء یکسان بین k نفر انتخاب n شاخه گل از بین k نوع
$\begin{cases}x_۱+x_۲+\cdots+x_k=n\\x_i\geq a\end{cases}$	$\binom{n+k-۱-a}{k-۱}$	قرار می‌دهیم: $x_i=x'_i+a$
$\begin{cases}x_۱+x_۲+\cdots+x_k=n\\x_i\geq ۱, i=۱,۲,\cdots,n\end{cases}$	$\binom{n-۱}{k-۱}$	جواب‌های طبیعی معادله
$\begin{cases}x_۱+x_۲+\cdots+x_k=n\\x_۱\leq a\end{cases}$	$\binom{n+k-۱}{k-۱}-\binom{n-(a+۱)+k-۱}{k-۱}$	کل جواب‌ها را از جواب‌های با شرط $x_۱\geq a+۱$ کم می‌کنیم.
$x_۱+x_۲+\cdots+x_k\leq n$	$\binom{n+k}{k}$	متغیر نامنفی $x_{k+۱}$ را اضافه کرده تا نامعادله تبدیل به معادلهٔ $x_۱+x_۲+\cdots+x_{k+۱}=n$ گردد.
$ax_۱+\cdots+x_k=n$ $x_۱^n+\cdots+x_k=n$ $\sqrt{x_۱}+\cdots+x_k=n$	-	متغیر دارای ضریب، توان، رادیکال و ... را حالت‌بندی می‌کنیم.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: تعداد گل‌های نوع iاُم را x_i می‌گیریم، پس:

$$\begin{cases}x_۱+x_۲+x_۳+x_۴+x_۵=۹\\x_۳=۲\ ,\ x_۵\geq ۲\end{cases}$$

گام دوم: $x_۳=۲$ و $x_۵=x'_۵+۲$ قرار می‌دهیم، پس داریم:

$$x_۱+x_۲+۲+x_۴+x'_۵+۲=۹ \Rightarrow x_۱+x_۲+x_۴+x'_۵=۵$$

$$\Rightarrow \text{تعداد جواب‌های صحیح نامنفی}=\binom{۵+۴-۱}{۴-۱}=\binom{۸}{۳}=\frac{۸\times ۷\times ۶}{۶}=۵۶$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۰ **در کیسه‌ای ۵ مهرهٔ سفید، ۳ مهرهٔ سبز، ۴ مهرهٔ قرمز و ۶ مهرهٔ آبی داریم. حداقل چند مهره خارج کنیم تا حداقل ۳ مهرهٔ سفید یا حداقل ۲ مهرهٔ سبز یا حداقل ۳ مهرهٔ قرمز خارج شود؟**

۱) ۱۰

۲) ۱۱

۳) ۱۲

۴) ۱۳

مشاوره اصل لانه‌کبوتری از موضوعات مورد علاقهٔ طراحان است. درست است که این بحث در ابتدا کمی دشوار به نظر می‌رسد، ولی با حل چند سؤال متنوع می‌توانید از پس سؤال کنکور آن بربیایید.

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint

بدترین حالت ممکن رو در نظر بگیرین تا اتفاقی که مسئله خواسته رخ نده.

پاسخ خیلی تشریحی

فرض کنیم بدترین حالت ممکن در ابتدا رخ بدهد تا خواستهٔ مسئله اتفاق نیفتد. گفته حداقل ۳ مهرهٔ سفید یا ۲ مهرهٔ سبز یا ۳ مهرهٔ قرمز بیرون بیاید، پس ما فرض می‌کنیم در ابتدا ۲تا سفید، ۱ سبز و ۲تا قرمز خارج بشود. مهره‌های آبی خارج‌شده نیز مهم نیستند، پس فرض کنیم آن‌ها هم خارج بشوند، پس اگر $۲+۲+۱+۶=۱۱$ مهره خارج کرده باشیم، هنوز مطمئن نیستیم که خواستهٔ مسئله قطعاً رخ داده باشد، ولی اگر یک مهرهٔ دیگر برداریم (یعنی حداقل ۱۲تا) قطعاً خواستهٔ مسئله رخ می‌دهد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۱ بردار مکان متحرکی که با سرعت ثابت در راستای محور x حرکت می‌کند، در لحظه‌های $t_1 = 2\ s$ و $t_2 = 9\ s$ به ترتیب برابر $(15\ m)\vec{i}$ و $(-27\ m)\vec{i}$ است. بردار مکان متحرک در لحظهٔ $t = 6\ s$ برحسب متر کدام است؟

۱) $9\vec{i}$
۲) $3\vec{i}$
۳) $-3\vec{i}$
۴) $-9\vec{i}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint

سرعت متوسط متحرک در بازه‌های زمانی t_1 تا $t = 6\ s$ و $t = 6\ s$ تا t_2 را برابر با هم قرار دهید و از آن‌جا، مکان متحرک در لحظهٔ $t = 6\ s$ پیدا کنید.

درس Box

بردار مکان ($\vec{r}$): برداری که مبدأ محور را به مکان جسم در هر لحظه وصل می‌کند، بردار مکان جسم در آن لحظه نام دارد. بردار مکان جسم در حرکت روی محور x را با $\vec{x}$ نشان می‌دهیم.

بردار جابه‌جایی ($\vec{d}$): پاره‌خط جهت‌داری است که مکان آغازین حرکت را به مکان پایانی وصل می‌کند. بردار جابه‌جایی $\vec{d}$ بین دو لحظهٔ t_1 و t_2 همان تفاضل دو بردار مکان $\vec{r}_1$ و $\vec{r}_2$ در آن دو لحظه است، بنابراین داریم: $\vec{d} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$

در حرکت روی محور x می‌توان نوشت: $\Delta\vec{x} = \vec{x}_2 - \vec{x}_1$

نکته

در حرکت با سرعت ثابت، سرعت متوسط متحرک در تمام بازه‌های زمانی، یکسان است. رابطهٔ سرعت متوسط در حرکت روی محور x:

$$\vec{v}_{av} = \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t} = \frac{\vec{x}_2 - \vec{x}_1}{t_2 - t_1}$$

$\vec{v}_{av}$: سرعت متوسط (m/s)

$\Delta\vec{x}$: جابه‌جایی (m)

$\Delta\vec{t}$: بازهٔ زمانی (s)

$\vec{x}_1$: مکان متحرک در لحظهٔ t_1 (m)

$\vec{x}_2$: مکان متحرک در لحظهٔ t_2 (m)

پاسخ خیلی تشریحی ✔

رابطهٔ سرعت متوسط را یک بار بین دو لحظهٔ t_1 تا $t = 6\ s$ و بار دیگر بین دو لحظهٔ $t = 6\ s$ تا t_2 می‌نویسیم و آن‌ها را برابر با هم قرار می‌دهیم تا مکان متحرک در لحظهٔ $t = 6$ را به دست آوریم:

$$\vec{v} = \vec{v}_{av} = \frac{\vec{x} - \vec{x}_1}{t - t_1} = \frac{\vec{x}_2 - \vec{x}}{t_2 - t} \Rightarrow \frac{\vec{x} - 15\vec{i}}{6 - 2} = \frac{-27\vec{i} - \vec{x}}{9 - 6}$$

$$\Rightarrow 3\vec{x} - 45\vec{i} = -108\vec{i} - 4\vec{x} \Rightarrow 7\vec{x} = -63\vec{i} \Rightarrow \vec{x} = (-9\ m)\vec{i}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

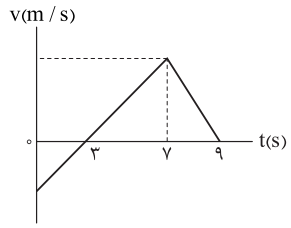
۴۲ نمودار سرعت ـ زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. اگر اندازهٔ شتاب متوسط متحرک در ۸ ثانیهٔ اول برابر $۳\ m/s^۲$ باشد، اندازهٔ سرعت متوسط متحرک در ۹ ثانیهٔ اول چند متر بر ثانیه است؟

۱) ۴

۲) ۴/۴

۳) ۸

۴) ۸/۸



مشاوره بخشی قابل توجهی از سؤالات حرکت‌شناسی که با نمودار مطرح می‌شوند، مربوط به نمودار سرعت ـ زمان هستند. با ویژگی‌های این نمودار به خوبی آشنا شوید.

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint

ابتدا به کمک رابطهٔ شتاب متوسط در ۸ ثانیهٔ اول حرکت، رابطه‌ای بین سرعت اولیه $(v_۰)$ و بیشینهٔ سرعت (v_m) به دست آورید. سپس با استفاده از تشابه مثلث‌ها، رابطهٔ دیگری بین آن‌ها پیدا کنید و با حل یک دستگاه، $v_۰$ و v_m را پیدا کنید. در پایان نیز به کمک مساحت سطح زیر نمودار سرعت ـ زمان، جابه‌جایی و سرعت متوسط در ۹ ثانیهٔ اول حرکت را محاسبه کنید.

درس Box

۱) **شتاب متوسط** در هر بازهٔ زمانی دلخواه، نسبت تغییر سرعت به بازهٔ زمانی را شتاب متوسط می‌گوییم.

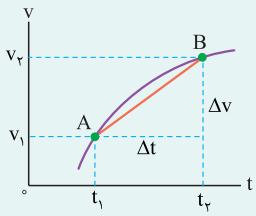
$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_۲ - v_۱}{t_۲ - t_۱}$$

a_{av}: شتاب متوسط $(m/s^۲)$

$v_۱$: سرعت متحرک در لحظهٔ $t_۱$ (m/s)

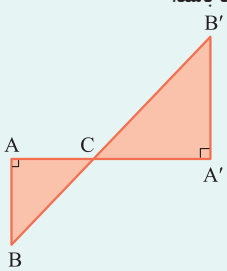
$v_۲$: سرعت متحرک در لحظهٔ $t_۲$ (m/s)

شتاب متوسط بین دو لحظه، برابر شیب خطی است که نمودار سرعت ـ زمان را در آن دو لحظه قطع می‌کند:



۲) مساحت سطح محدود بین نمودار سرعت ـ زمان و محور زمان، در هر بازهٔ زمانی، برابر با جابه‌جایی متحرک (Δx) در آن بازه است. مساحت بخشی از سطح را که زیر محور زمان است، منفی در نظر می‌گیریم، زیرا سرعت و جابه‌جایی در این بخش، منفی هستند.

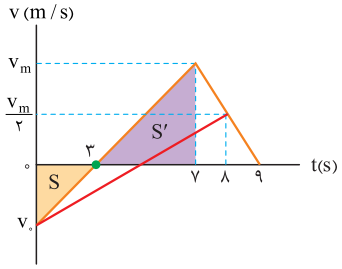
۳) در نمودارهای حرکت‌شناسی، نوشتن نسبت تشابه بین اضلاع مثلث‌ها (رابطهٔ تالس) می‌تواند مفید باشد:



$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C}{AC}$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: به کمک رابطهٔ شتاب متوسط در ۸ ثانیهٔ اول حرکت، رابطه‌ای بین سرعت اولیه $(v_۰)$ و بیشینهٔ سرعت متحرک (v_m) به دست می‌آوریم:



$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_۲ - v_۱}{t_۲ - t_۱} \Rightarrow ۳ = \frac{\frac{v_m}{۲} - v_۰}{۸ - ۰}$$

$$\Rightarrow \frac{v_m}{۲} - v_۰ = ۲۴ \quad (۱)$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

گام دوم: مثلث‌های S و S' با هم متشابه‌اند و می‌توان نوشت:

$$\frac{v_m}{-v_\circ}=\frac{۷-۳}{۳-۰}\Rightarrow v_m=-\frac{۴}{۳}v_\circ \qquad (۲)$$

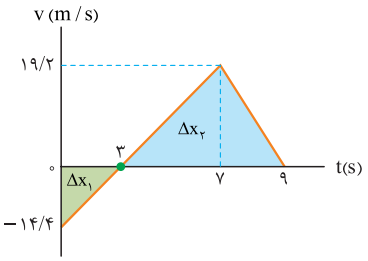
از ترکیب روابط (۱) و (۲)، $v_\circ$ و v_m را به دست می‌آوریم:

$$\frac{v_m}{۲}-v_\circ=۲۴ \xrightarrow{v_m=-\frac{۴}{۳}v_\circ} \frac{۱}{۲}(-\frac{۴}{۳}v_\circ)-v_\circ=۲۴ \Rightarrow -\frac{۵}{۳}v_\circ=۲۴$$

$$\Rightarrow v_\circ=-\frac{۷۲}{۵}=-۱۴/۴\ m/s$$

$$v_m=-\frac{۴}{۳}v_\circ=-\frac{۴}{۳}(۱۴/۴)=۱۹/۲\ m/s$$

گام سوم: با استفاده از مساحت سطح بین نمودار سرعت ـ زمان و محور زمان، جابه‌جایی متحرک در ۹ ثانیهٔ اول حرکت را حساب می‌کنیم:



$$\Delta x=\Delta x_۱+\Delta x_۲=\frac{-۱۴/۴\times۳}{۲}+\frac{۱۹/۲(۹-۳)}{۲}$$

$$\Rightarrow \Delta x=-۲۱/۶+۵۷/۶=۳۶\ m$$

گام چهارم: سرعت متوسط متحرک در ۹ ثانیهٔ اول حرکت را به دست می‌آوریم:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{۳۶}{۹}=۴\ m/s$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۳ سرعت متحرکی که با شتاب ثابت در راستای محور x حرکت می‌کند، در مبدأ زمان برابر $(۶\ m/s)\vec{i}$ است. اگر جابه‌جایی متحرک در ۲ ثانیهٔ دوم، ۷ برابر جابه‌جایی آن در ثانیهٔ اول باشد، شتاب متحرک برحسب متر بر مربع ثانیه کدام است؟

۱) $۷\vec{i}$
۲) $-۷\vec{i}$
۳) $۱۲\vec{i}$
۴) $-۱۲\vec{i}$

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint نمودار سرعت ـ زمان متحرک را در ۴ ثانیهٔ اول حرکت رسم کنید و با استفاده از مساحت سطح زیر این نمودار در بازه‌های زمانی داده‌شده، شتاب حرکت را پیدا کنید.

درس Box

۱) **معادلهٔ سرعت ـ زمان در حرکت با شتاب ثابت:**

$$v = at + v_۰$$

v: سرعت در لحظهٔ t (m/s)

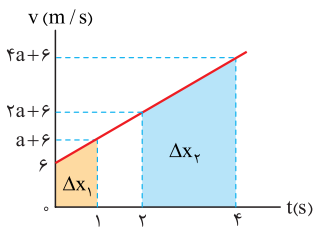
a: شتاب $(m/s^۲)$

t: زمان (s)

$v_۰$: سرعت اولیه (m/s)

۲) نمودار سرعت ـ زمان در حرکت با شتاب ثابت، به صورت یک خط شیبدار است و شیب آن، شتاب حرکت را نشان می‌دهد. هم‌چنین نقطهٔ شروع این نمودار روی محور v، سرعت اولیه $(v_۰)$ را نشان می‌دهد.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** سرعت متحرک در لحظه‌های $t=۱\ s$، $t=۲\ s$ و $t=۴\ s$ را برحسب شتاب، به دست آورده و نمودار سرعت ـ زمان را در ۴ ثانیهٔ اول حرکت رسم می‌کنیم:



$$v = at + v_۰ \xrightarrow{v_۰ = ۶\ m/s} \begin{cases} t_۱ = ۱\ s \Rightarrow v_۱ = a \times ۱ + ۶ = a + ۶ \\ t_۲ = ۲\ s \Rightarrow v_۲ = a \times ۲ + ۶ = ۲a + ۶ \\ t_۳ = ۴\ s \Rightarrow v_۳ = a \times ۴ + ۶ = ۴a + ۶ \end{cases}$$

گام دوم: با توجه به این‌که جابه‌جایی متحرک در ۲ ثانیهٔ دوم، ۷ برابر جابه‌جایی آن در ثانیهٔ اول است، داریم:

$$\Delta x_۲ = ۷\Delta x_۱ \Rightarrow \frac{[(۲a+۶)+(۴a+۶)](۴-۲)}{۲} = ۷ \times \frac{[۶+(a+۶)](۱)}{۲}$$

$$\Rightarrow ۶a + ۱۲ = ۳/۵(a+۱۲) \Rightarrow ۲/۵a = ۳۰ \Rightarrow a = ۱۲\ m/s^۲ \Rightarrow \vec{a} = (۱۲\ m/s^۲)\vec{i}$$

یه‌جور دیگه در حرکت با شتاب ثابت a و سرعت اولیهٔ $v_۰$ روی محور x، جابه‌جایی متحرک در T ثانیهٔ nام حرکت، از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\Delta x = (n - ۰/۵)aT^۲ + v_۰T$$

بنابراین در ۲ ثانیهٔ دوم حرکت داریم ($T = ۲\ s$، $n = ۲$ و $v_۰ = ۶\ m/s$):

$$\Delta x_۲ = (۲ - ۰/۵)a \times ۲^۲ + ۶ \times ۲ = ۶a + ۱۲$$

در ثانیهٔ اول نیز داریم $T = ۱\ s$، $n = ۱$ و $v_۰ = ۶\ m/s$:

$$\Delta x_۱ = (۱ - ۰/۵)a \times ۱^۲ + ۶ \times ۱ = ۰/۵a + ۶$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

با نوشتن نسبت Δx_1 و Δx_2، شتاب را به دست می‌آوریم:

$$\Delta x_2 = 7\Delta x_1 \Rightarrow 6a + 12 = 7(0/5a + 6) \Rightarrow 6a + 12 = 3/5a + 42$$

$$\Rightarrow 2/5a = 30 \Rightarrow a = 12\ m/s^2 \Rightarrow \vec{a} = (12\ m/s^2)\vec{i}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۴ در شرایط خلأ، گلولهٔ A از ارتفاع ۵۰متری سطح زمین و ۱ ثانیهٔ بعد گلولهٔ B از ارتفاع ۲۰متری سطح زمین رها می‌شوند. از لحظهٔ سقوط گلولهٔ B تا لحظه‌ای که یکی از گلوله‌ها به سطح زمین می‌رسد، کم‌ترین فاصلهٔ دو گلوله برابر چند متر است؟ $(g = ۱۰\ m/s^۲)$

۱) ۱۵ ۲) ۱۰ ۳) ۵ ۴) صفر

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint ابتدا تعیین کنید که کدام گلوله زودتر به زمین می‌رسد، سپس فاصلهٔ دو گلوله را در این لحظه پیدا کنید.

درس Box ارتفاع سقوط آزاد جسمی که از یک بلندی رها شده است، از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$h = \frac{۱}{۲}gt^۲$$

h: ارتفاع سقوط (m)

g: شتاب گرانش در سطح زمین $(m/s^۲)$

t: زمان سقوط (s)

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: زمان سقوط هر یک از گلوله‌ها تا رسیدن به زمین را به دست می‌آوریم:

$$h_A = \frac{۱}{۲}gt_A^۲ \Rightarrow ۵۰ = \frac{۱}{۲}\times ۱۰ t_A^۲ \Rightarrow t_A^۲ = ۱۰ \Rightarrow t_A = \sqrt{۱۰}\ s \simeq ۳/۱۶\ s$$

$$h_B = \frac{۱}{۲}gt_B^۲ \Rightarrow ۲۰ = \frac{۱}{۲}\times ۱۰ t_B^۲ \Rightarrow t_B^۲ = ۴ \Rightarrow t_B = ۲\ s$$

گام دوم: با آن‌که گلولهٔ B یک ثانیه پس از گلولهٔ A رها شده است، اما زودتر از گلولهٔ A به زمین می‌رسد:

$$\left.\begin{array}{l} t_A - ۱ = ۳/۱۶ - ۱ = ۲/۱۶\ s \\ t_B = ۲\ s \end{array}\right\} \Rightarrow t_A - ۱ > t_B$$

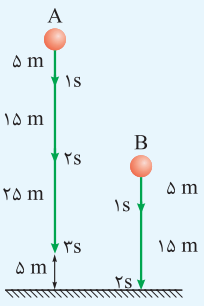
گام سوم: کم‌ترین فاصلهٔ بین دو گلوله در لحظه‌ای است که گلولهٔ B به زمین می‌رسد، بنابراین فاصلهٔ هر یک از دو گلوله از زمین (H_A و H_B) را ۲ s پس از شروع حرکت B و ۳ s پس از شروع حرکت A به دست آورده و اختلاف آن‌ها را پیدا می‌کنیم:

$$t_B = ۲\ s \Rightarrow H_B = ۰$$

$$t'_A = ۳\ s \Rightarrow h'_A = \frac{۱}{۲}gt'^۲_A = \frac{۱}{۲}\times ۱۰ \times ۳^۲ = ۴۵\ m \Rightarrow H_A = ۵۰ - ۴۵ = ۵\ m$$

$$H_A - H_B = ۵ - ۰ = ۵\ m$$

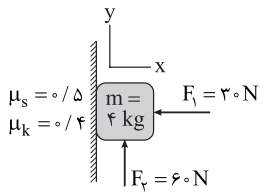
یه‌جور دیگه در سقوط آزاد بدون سرعت اولیه و با فرض $g = ۱۰\ m/s^۲$، جابه‌جایی‌های متحرک در ثانیه‌های متوالی، تشکیل یک دنبالهٔ حسابی می‌دهند که جملهٔ اول آن ۵ m و قدرنسبت آن ۱۰ m است، بنابراین گلولهٔ B، ۲ s پس از سقوط به زمین می‌رسد. در این لحظه، گلولهٔ A، به مدت ۳ ثانیه سقوط کرده و ۴۵ m رو به پایین آمده است:



در لحظه‌ای که گلولهٔ B به زمین می‌رسد، فاصلهٔ دو گلوله از هم ۵ m است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۵ در شکل زیر، به جسمی که به دیوار قائم تکیه داده شده، نیروی افقی F_1 و نیروی قائم F_2 وارد می‌شود. نیروی اصطکاک وارد بر جسم برحسب نیوتون کدام است؟ $(g = 10\ N/kg)$



۱) $15\vec{j}$

۲) $-15\vec{j}$

۳) $12\vec{j}$

۴) $-12\vec{j}$

مشاوره مشابه این سؤال قبلاً در کنکورهای خارج از کشور تجربی ۱۴۰۰ و ۱۴۰۲ و هم‌چنین در کنکور سراسری تجربی ۱۴۰۰ مطرح شده است.

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint

ابتدا نیروی اصطکاک در آستانهٔ حرکت و نیروی اصطکاک جنبشی را به دست آورید، سپس تعیین کنید که جسم در چه جهتی حرکت می‌کند یا می‌خواهد حرکت کند.

درس Box

۱) **رابطهٔ نیروی اصطکاک در آستانهٔ حرکت:**

$$f_{s,max} = \mu_s \times F_N$$

$f_{s,max}$: نیروی اصطکاک در آستانهٔ حرکت (N)

μ_s: ضریب اصطکاک ایستایی

F_N: نیروی عمودی سطح (N)

۲) **رابطهٔ نیروی اصطکاک جنبشی:**

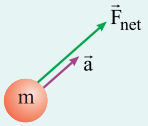
$$f_k = \mu_k \times F_N$$

f_k: نیروی اصطکاک جنبشی (N)

μ_k: ضریب اصطکاک جنبشی

F_N: نیروی عمودی سطح (N)

۳) **قانون دوم نیوتون:** هرگاه نیروهای وارد بر جسمی متوازن نباشند، یعنی بر جسم نیروی خالصی وارد شود، جسم تحت تأثیر آن نیرو، شتاب می‌گیرد:



$\vec{F}_{net} = m\vec{a}$ $\quad (m/s^2)$ شتاب: $\vec{a}$ $\quad$ (kg) جرم: m $\quad$ (N) نیروی خالص: $\vec{F}_{net}$

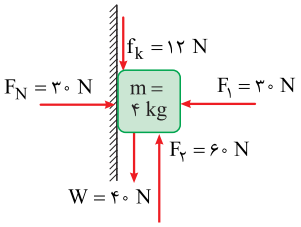
پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: نیروی اصطکاک در آستانهٔ حرکت و نیروی اصطکاک جنبشی جسم را به دست می‌آوریم:

$$f_{s,max} = \mu_s \times F_N \xrightarrow[\mu_s = 0/5]{F_N = F_1 = 30\ N} f_{s,max} = 0/5 \times 30 = 15\ N$$

$$f_k = \mu_k \times F_N \xrightarrow[\mu_k = 0/4]{F_N = F_1 = 30\ N} f_k = 0/4 \times 30 = 12\ N$$

گام دوم: از آن‌جا که نیروی خالص $\vec{F}_2$ و $\vec{W}$، رو به بالا است؛ بنابراین نیروی اصطکاک رو به پایین است:



$$F_2 - W = 60 - 40 = 20\ N$$

از طرفی این نیروی ۲۰ N از نیروی اصطکاک در آستانهٔ حرکت بزرگ‌تر است، بنابراین جسم رو به بالا شروع به حرکت می‌کند و نیروی اصطکاک جنبشی وارد بر آن رو به پایین است:

$$\vec{f}_k = (-12\ N)\vec{j}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۶ یک انتهای فنر سبکی به طول $30\ cm$ و ثابت $400\ N/m$ را به سقف آسانسوری بسته و از انتهای دیگر آن، وزنه‌ای به جرم $2\ kg$ آویزان می‌کنیم. اگر آسانسور با شتاب رو به بالایی به بزرگی $2\ m/s^2$، به سمت پایین در حال حرکت باشد، طول فنر به چند سانتی‌متر می‌رسد؟ $(g = 10\ N/kg)$

۱) ۲۴

۲) ۲۶

۳) ۳۴

۴) ۳۶

مشاوره این یک سؤال ترکیبی بین حرکت آسانسور و نیروی کشسانی فنر است که مشابه آن در کنکورهای ریاضی و تجربی ۱۴۰۰ و خارج از کشور تجربی ۱۴۰۰ و ۱۴۰۱ مطرح شده است.

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

۱) **رابطهٔ نیروی کشسانی فنر:**

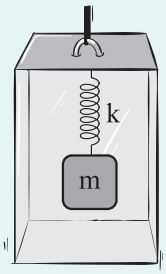
$$F_e = kx$$

F_e: اندازهٔ نیروی کشسانی فنر (N)

k: ثابت فنر (N/m)

$x = \Delta L$: تغییر طول فنر (m)

۲) اگر انتهای بالایی فنر را به سقف آسانسور بسته و وزنه‌ای را به انتهای پایینی آن بیاویزیم و آسانسور با شتاب a در راستای قائم حرکت کند، می‌توان نوشت:



$$F_e = m(g+a) \Rightarrow kx = m(g+a)$$

m: جرم وزنهٔ آویخته به فنر (kg)

g: شتاب گرانش در سطح زمین (m/s^2)

a: شتاب حرکت آسانسور (m/s^2)

اگر شتاب آسانسور رو به بالا باشد، $a > 0$ و اگر رو به پایین باشد، $a < 0$ است.

پاسخ خیلی تشریحی

رابطهٔ نیروی کشسانی فنر را برای وزنهٔ متصل به فنر قائم و آویخته به سقف آسانسور، می‌نویسیم و از آن‌جا طول فنر را به دست می‌آوریم:

$$kx = m(g+a) \xrightarrow[g=10\ N/kg,\ a=2\ m/s^2]{k=400\ N/m,\ m=2\ kg} 400x = 2(10+2)$$

$$\Rightarrow x = \Delta L = \frac{24}{400} = 0/06\ m = 6\ cm$$

$$\Delta L = L_2 - L_1 \Rightarrow 6 = L_2 - 30 \Rightarrow L_2 = 36\ cm$$

گول نخوری اگر علامت شتاب را منفی در نظر بگیرید، در دام گزینه‌های (۲) یا (۳) می‌افتید.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۷ معادلهٔ تکانه ـ زمان جسمی که در راستای محور x حرکت می‌کند، در SI به صورت $p = ۲t^۲ - ۸t + ۳$ است. نیروی خالص متوسط وارد بر جسم در بازهٔ زمانی $t_۱ = ۳\ s$ تا $t_۲ = ۵\ s$ برحسب نیوتون کدام است؟

۱) $۲\vec{i}$

۲) $-۲\vec{i}$

۳) $۸\vec{i}$

۴) $-۸\vec{i}$

مشاوره این سؤال، مشابه یکی از سؤالات کنکور خارج از کشور تجربی ۱۴۰۲ و هم‌چنین کنکور ریاضی ۱۴۰۲ نوبت دوم است.

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint

ابتدا تکانهٔ جسم را در لحظه‌های $t_۱ = ۳\ s$ و $t_۲ = ۵\ s$ به دست آورید، سپس نیروی متوسط وارد بر جسم را به کمک رابطهٔ $\vec{F}_{av} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$ محاسبه کنید.

درس Box

تکانه: حاصل‌ضرب جرم جسم در سرعت آن را تکانه می‌گوییم. با توجه به قانون دوم نیوتون، رابطهٔ نیروی خالص متوسط وارد بر یک جسم بر حسب تکانه، به صورت زیر است:

$$F_{av} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{p_۲ - p_۱}{t_۲ - t_۱}$$

F_{av}: نیروی خالص متوسط وارد بر جسم (N)

Δp: تغییر تکانه $(\frac{kg.m}{s})$

Δt: بازهٔ زمانی (s)

$p_۱$: تکانهٔ جسم در لحظهٔ $t_۱$ $(\frac{kg.m}{s})$

$p_۲$: تکانهٔ جسم در لحظهٔ $t_۲$ $(\frac{kg.m}{s})$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: با جای‌گذاری زمان‌های داده‌شدهٔ $t_۱$ و $t_۲$ در معادلهٔ تکانه ـ زمان، تکانهٔ جسم را در این دو لحظه به دست می‌آوریم:

$$p = ۲t^۲ - ۸t + ۳ \Rightarrow \begin{cases} t_۱ = ۳\ s \Rightarrow p_۱ = ۲\times۹ - ۲۴ + ۳ = -۳\ \frac{kg.m}{s} \\ t_۲ = ۵\ s \Rightarrow p_۲ = ۲\times۲۵ - ۴۰ + ۳ = ۱۳\ \frac{kg.m}{s} \end{cases}$$

گام دوم: نیروی خالص متوسط وارد بر جسم را محاسبه می‌کنیم.

$$F_{av} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{p_۲ - p_۱}{t_۲ - t_۱} = \frac{۱۳ - (-۳)}{۵ - ۳} = ۸\ N$$

از آن‌جا که این نیرو با علامت مثبت به دست آمده است، پس در جهت مثبت محور x اثر می‌کند:

$$\vec{F}_{av} = (۸\ N)\vec{i}$$

معادلهٔ تکانهٔ متحرکی به جرم ۵۰۰ گرم که روی محور x حرکت می‌کند، در SI به صورت $\vec{P} = (۳t - ۶)\vec{i}$ است. نیروی خالص متوسطی که در بازهٔ زمانی $t_۱ = ۱\ s$ تا $t_۲ = ۳\ s$ بر این متحرک وارد می‌شود، برحسب نیوتون، کدام است؟

(سؤال ۵۰ کنکور ریاضی ۱۴۰۲ ـ نوبت دوم)

۱) $۳\vec{i}$

۲) $-۳\vec{i}$

۳) $۶\vec{i}$

۴) $-۶\vec{i}$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۸ دو ماهوارهٔ A و B روی مدارهای دایره‌ای‌شکلی به دور زمین می‌چرخند. اگر فاصلهٔ ماهوارهٔ A از سطح زمین ۸ برابر فاصلهٔ ماهوارهٔ B از سطح زمین و دورهٔ ماهوارهٔ A، ۸ برابر دورهٔ ماهوارهٔ B باشد، فاصلهٔ ماهوارهٔ A از سطح زمین چند مگامتر است؟ (شعاع کرهٔ زمین ۶۴۰۰ km است.)

۱) ۳/۸۴

۲) ۴/۸

۳) ۳۸/۴

۴) ۴۸

مشاوره معمولاً در سؤالاتی که مربوط به حرکت ماهواره به دور زمین است باید به این نکته توجه کنید که فاصلهٔ ماهواره از مرکز زمین (r) با فاصلهٔ ماهواره از سطح زمین (h) متفاوت است.

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

رابطهٔ دورهٔ حرکت ماهواره:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM_e}} \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_e} \times r^3$$

$$r = R_e + h$$

T: دوره (s)

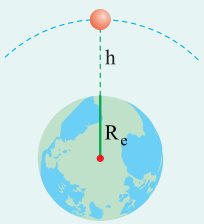
r: فاصلهٔ ماهواره از مرکز زمین (m)

G: ثابت جهانی گرانش $\left(\frac{N.m^2}{kg^2}\right)$

M_e: جرم کرهٔ زمین (kg)

R_e: شعاع کرهٔ زمین (m)

h: فاصلهٔ ماهواره از سطح زمین (m)



پاسخ خیلی تشریحی

با توجه به رابطهٔ مطرح‌شده در درس‌باکس، مربع دورهٔ حرکت ماهواره با توان سوم فاصلهٔ آن از مرکز زمین متناسب است:

$$\left(\frac{T_A}{T_B}\right)^2 = \left(\frac{r_A}{r_B}\right)^3 \xrightarrow{T_A=8T_B,\ r=R_e+h} 8^2 = \left(\frac{R_e+h_A}{R_e+h_B}\right)^3$$

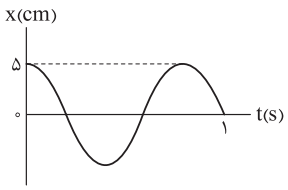
$$\Rightarrow \frac{R_e+h_A}{R_e+h_B} = 4 \xrightarrow{h_A=8h_B} \frac{R_e+8h_B}{R_e+h_B} = 4 \Rightarrow R_e+8h_B = 4R_e+4h_B$$

$$\Rightarrow 4h_B = 3R_e \xrightarrow{R_e=6400\ km} h_B = \frac{3}{4}\times 6400 = 4800\ km$$

$$\Rightarrow h_A = 8h_B = 8\times 4800 = 38400\ km = 38400\ \cancel{km} \times \frac{10^3\ \cancel{m}}{1\ \cancel{km}} \times \frac{1\ Mm}{10^6\ \cancel{m}} = 38/4\ Mm$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۹ نمودار مکان ـ زمان نوسانگری که در راستای محور x حرکت هماهنگ ساده انجام می‌دهد، به شکل زیر است. سرعت متحرک در لحظهٔ $t = ۰/۲\ s$ برحسب متر بر ثانیه کدام است؟



۱) $\frac{\pi}{۸}\vec{i}$

۲) $-\frac{\pi}{۸}\vec{i}$

۳) $\frac{\pi}{۱۶}\vec{i}$

۴) $-\frac{\pi}{۱۶}\vec{i}$

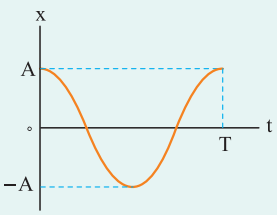
پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint

ابتدا دورهٔ تناوب نوسانگر (T) را تعیین کنید، سپس بسامد زاویه‌ای (ω) را به دست آورید و در نهایت، با مشخص‌کردن مکان متحرک در لحظهٔ $t = ۰/۲\ s$، سرعت آن را حساب کنید.

درس Box

۱) **نمودار مکان ـ زمان در حرکت هماهنگ ساده:**



۲) **رابطهٔ بیشینهٔ تندی نوسانگر:**

$v_{max} = A\omega$

v_{max} : بیشینهٔ تندی نوسانگر (m/s)

A : دامنه (m)

$\omega = \frac{۲\pi}{T}$

ω : بسامد زاویه‌ای (rad/s)

T : دوره (s)

۳) در لحظه‌ای که نوسانگر از حالت تعادل $(x = ۰)$ می‌گذرد، بیشینهٔ تندی خود را دارد. اگر جهت حرکت آن در سوی مثبت محور x باشد، سرعت آن مثبت است و اگر جهت حرکت آن در سوی منفی محور x باشد، سرعت آن منفی است. با توجه به شیب خط مماس بر نمودار مکان ـ زمان نیز می‌توان علامت سرعت نوسانگر را تعیین نمود.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: با توجه به نمودار مکان ـ زمان داده‌شده، دورهٔ تناوب نوسان را به دست می‌آوریم:

$$\frac{۵}{۴}T = ۱ \Rightarrow T = ۰/۸\ s$$

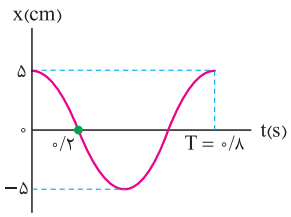
سپس بسامد زاویه‌ای نوسانگر را حساب می‌کنیم:

$$\omega = \frac{۲\pi}{T} = \frac{۲\pi}{۰/۸} = \frac{۲۰\pi}{۸} = \frac{۵\pi}{۲}\ rad/s$$

گام دوم: مکان متحرک را در لحظهٔ $t = ۰/۲\ s$ تعیین می‌کنیم:

$$t = ۰/۲\ s = \frac{T}{۴} \Rightarrow x = ۰$$

تندی نوسانگر در این لحظه بیشینه است:



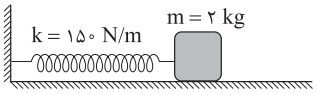
$$v_{max} = A\omega \xrightarrow[\omega=\frac{۵\pi}{۲}\ rad/s]{A=۵\ cm=۰/۰۵\ m} v_{max} = \frac{۵}{۱۰۰} \times \frac{۵\pi}{۲} = \frac{\pi}{۸}\ m/s$$

در لحظهٔ $t = ۰/۲\ s$ حرکت نوسانگر در جهت منفی است، بنابراین سرعت آن نیز منفی است:

$$\vec{v} = -\vec{v}_{max} = -(\frac{\pi}{۸}\ m/s)\vec{i}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۰ در شکل زیر، جسم متصل به فنر روی سطح افقی بدون اصطکاک با دامنهٔ $10\ cm$ نوسان می‌کند. در لحظه‌ای که تندی جسم برابر $0/5\ m/s$ است، انرژی پتانسیل سامانه برابر چند ژول است؟



۱) $0/25$

۲) $0/5$

۳) $0/75$

۴) 1

مشاوره در مبحث نوسان، یکی از مطالبی که تعداد زیادی سؤال در مورد آن در کنکورهای اخیر دیده می‌شود، همین موضوع انرژی است. نمونهٔ آن در کنکور تجربی ۱۴۰۴ نوبت دوم است.

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint ابتدا انرژی کل نوسانگر را حساب کنید؛ سپس انرژی مکانیکی آن را به دست آورید و در پایان، انرژی پتانسیل نوسانگر را پیدا کنید.

درس Box **انرژی در حرکت هماهنگ ساده:** انرژی کل (مکانیکی) یک نوسانگر، مجموع انرژی‌های جنبشی و پتانسیل آن است:

$$E = K + U$$

$$E = \frac{1}{2}kA^2$$

E: انرژی کل (مکانیکی) (J)

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

K: انرژی جنبشی (J)

U: انرژی پتانسیل (J)

m: جرم نوسانگر (kg)

v: تندی نوسانگر (m/s)

k: ثابت فنر (N/m)

A: دامنه (m)

هنگام نوسان، انرژی‌های جنبشی و پتانسیل به یکدیگر تبدیل می‌شوند، ولی مجموع آن‌ها مستقل از زمان بوده و مقداری ثابت است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: انرژی مکانیکی نوسانگر را به دست می‌آوریم:

$$E = \frac{1}{2}kA^2 \xrightarrow[A=10\ cm=0/1\ m]{k=150\ N/m} E = \frac{1}{2}\times 150\times (0/1)^2 = 0/75\ J$$

گام دوم: انرژی جنبشی نوسانگر را حساب می‌کنیم:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \xrightarrow[v=0/5\ m/s]{m=2\ kg} K = \frac{1}{2}\times 2\times (0/5)^2 = 0/25\ J$$

گام سوم: انرژی پتانسیل نوسانگر را محاسبه می‌کنیم:

$$E = K + U \Rightarrow 0/75 = 0/25 + U \Rightarrow U = 0/5\ J$$

جسمی به جرم $2\ kg$ به فنری با ثابت $2\ N/cm$ متصل است و در راستای افقی با دامنهٔ $8\ cm$ نوسان می‌کند. وقتی تندی جسم $40\ cm/s$ است، انرژی پتانسیل کشسانی آن چند ژول است؟ (از نیروهای اتلافی چشم‌پوشی شود.)

(سؤال ۵۸ کنکور تجربی ۱۴۰۴ ـ نوبت دوم)

۱) $0/48$

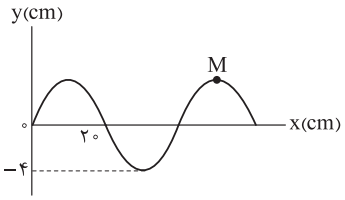
۲) $0/32$

۳) $0/16$

۴) $0/64$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۱ تصویر موج منتشرشده در تار کشیده‌ای در یک لحظه، به شکل زیر است. اگر تندی انتشار موج در تار برابر $۸۰\ m/s$ باشد، مسافت طی‌شده توسط ذرهٔ M از تار، در هر ثانیه برابر چند متر است؟



۱) ۸
۲) ۱۶
۳) ۳۲
۴) ۶۴

مشاوره این سؤال مشابه یکی از سؤالات کنکور تجربی ۱۴۰۳ نوبت دوم است.

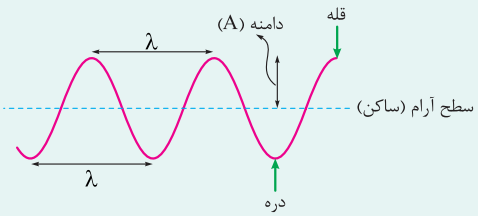
پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint ابتدا به کمک نمودار داده‌شده، طول موج را به دست آورید، سپس بسامد موج را با استفاده از رابطهٔ $f = \frac{v}{\lambda}$، پیدا کنید و در نهایت، مسافت طی‌شده توسط ذرهٔ M را در هر ثانیه حساب کنید.

درس Box

طول موج (λ): فاصلهٔ بین دو برآمدگی یا دو فرورفتگی مجاور، طول موج نامیده می‌شود.

در یک نوسان کامل، هر نقطه از محیط، در جای خود یک نوسان کامل انجام می‌دهد و مسافتی به اندازهٔ ۴ برابر دامنه $(۴A)$ را می‌پیماید.



رابطهٔ بسامد برحسب طول موج:

$$f = \frac{v}{\lambda}$$

f: بسامد (Hz)

v: تندی انتشار موج (m/s)

λ: طول موج (m)

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: با استفاده از نمودار داده‌شده، طول موج را به دست می‌آوریم:

$$\frac{\lambda}{۲} = ۲۰ \Rightarrow \lambda = ۴۰\ cm = ۰/۴\ m$$

گام دوم: با توجه به معلوم‌بودن تندی انتشار موج و طول موج آن، بسامد موج را حساب می‌کنیم:

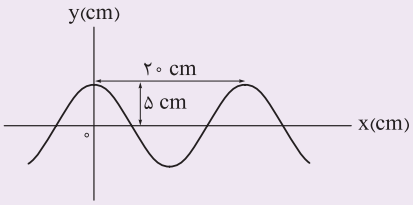
$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{۸۰}{۰/۴} = ۲۰۰\ Hz$$

گام سوم: در هر نوسان کامل، ذرهٔ M از تار، مسافتی به اندازهٔ ۴ برابر دامنه را می‌پیماید. با توجه به نمودار داده‌شده، دامنه برابر با $۴\ cm$ است و در هر ثانیه ۲۰۰ نوسان انجام می‌شود، بنابراین مسافت طی‌شده در هر ثانیه (ℓ) برابر است با:

$$\ell = f(۴A) \xrightarrow[A=۴\ cm=۰/۰۴\ m]{f=۲۰۰\ Hz} \ell = ۲۰۰ \times ۴ \times ۰/۰۴ = ۳۲\ m$$

نمودار جابه‌جایی ـ مکان یک موج عرضی که در یک ریسمان در حال انتشار است، مطابق شکل است. اگر تندی انتشار موج $۱۰\ m/s$ باشد، مسافتی که هر یک از ذرات ریسمان در مدت $۰/۰۱\ s$ طی می‌کند، چند سانتی‌متر است؟

(سؤال ۵۳ کنکور تجربی ۱۴۰۳ ـ نوبت دوم)



۱) ۲۰
۲) ۱۵
۳) ۱۰
۴) ۵

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۲ **اگر با کاهش دامنهٔ چشمهٔ صوتی، در یک فاصلهٔ معین از چشمه شدت صوت ۸۰ درصد کاهش یابد، تراز شدت آن چند دسی‌بل تغییر می‌کند؟ $(\log ۲ = ۰/۳)$**

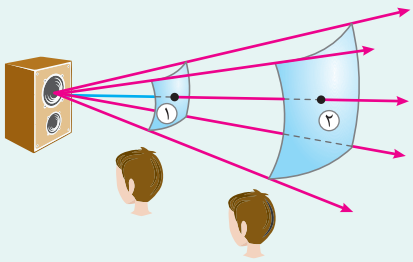
۱) ۷
۲) ۱
۳) ۰/۷
۴) ۰/۱

مشاوره برای حل چنین سؤال‌هایی، باید با محاسبات لگاریتمی آشنایی داشته باشید.

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

۱) **شدت صوت (I)**:



شدت صوت، آهنگ متوسط انرژی‌ای است که توسط موج به واحد سطح، عمود بر راستای انتشار صوت می‌رسد یا از آن عبور می‌کند.

۲) اختلاف تراز شدت صوت، در دو حالت مختلف، از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\beta_۲ - \beta_۱ = ۱۰\log(\frac{I_۲}{I_۱})$$

$I_۱$: شدت صوت در حالت اول $(W/m^۲)$

$I_۲$: شدت صوت در حالت دوم $(W/m^۲)$

$\beta_۱$: تراز شدت صوت در حالت اول (dB)

$\beta_۲$: تراز شدت صوت در حالت دوم (dB)

پاسخ خیلی تشریحی رابطهٔ اختلاف تراز شدت صوت در دو حالت مختلف را می‌نویسیم:

$$\beta_۲ - \beta_۱ = ۱۰\log(\frac{I_۲}{I_۱}) \xrightarrow{I_۲ = I_۱ - ۰/۸I_۱ = ۰/۲I_۱} \beta_۲ - \beta_۱ = ۱۰\log(\frac{۰/۲I_۱}{I_۱}) = ۱۰\log(\frac{۲}{۱۰})$$

$$\Rightarrow \beta_۲ - \beta_۱ = ۱۰(\log ۲ - \log ۱۰) = ۱۰(۰/۳ - ۱) = -۷dB$$

گول نخوری اگر دقت نکنید و ضریب ۱۰ را پشت لگاریتم نگذارید، در دام گزینهٔ (۳) می‌افتید.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۳ بسامد امواج فراصوتی‌ای که وال برای مکان‌یابی پژواکی تولید می‌کند، ۱۰۰ kHz و طول موج آن در آب ۱/۵ cm است. زمان رفت و برگشت موج گسیل‌شده توسط وال برای مانعی که در فاصلهٔ ۷۵ m از آن قرار گرفته، برابر چند ثانیه است؟

۱) ۰/۰۵ ۲) ۰/۱

۳) ۰/۵ ۴) ۱

مشاوره این سؤال، برگرفته از مثال ۴ـ۱ کتاب درسی فیزیک (۳) رشتهٔ ریاضی، یا مثال ۳ـ۱۰ کتاب درسی فیزیک (۳) رشتهٔ تجربی است. مثال‌های کتاب درسی را نیز جدی بگیرید.

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint ابتدا تندی انتشار امواج فراصوت در آب را به دست آورید، سپس با معلوم‌بودن مسافت و تندی انتشار موج، زمان رفت و برگشت موج را حساب کنید.

درس Box برای موجی که با تندی ثابت در محیطی معین در حال انتشار است، داریم:

$$v = \frac{\ell}{\Delta t}$$

v : تندی انتشار (m/s)

ℓ : مسافت (m)

Δt : بازهٔ زمانی (s)

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** با معلوم‌بودن طول موج و بسامد امواج فراصوتی، تندی انتشار این امواج در آب را به دست می‌آوریم:

$$v = \lambda f \xrightarrow[f = 100\,kHz = 100\times10^{3}\,Hz]{\lambda = 1/5\,cm = 1/5\times10^{-2}\,m} v = 1/5\times10^{-2}\times100\times10^{3} = 1500\,m/s$$

گام دوم: زمان رفت و برگشت موج (Δt) را محاسبه می‌کنیم:



$$\Delta t = \frac{\ell}{v} \xrightarrow[v = 1500\,m/s]{\ell = 2\times75 = 150\,m} \Delta t = \frac{150}{1500} = 0/1\,s$$

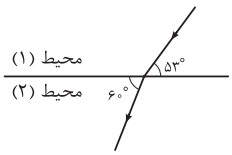
گول نخوری اگر فقط مسیر رفت را در محاسبات خود در نظر بگیرید، در دام گزینهٔ (۱) می‌افتید.

وال عنبر، یکی از جانورانی است که با استفاده از پژواک امواج فراصوتی، مکان‌یابی می‌کند. بسامد امواج فراصوتی‌ای که این وال تولید می‌کند حدود ۱۰۰ kHz است. با توجه به این‌که تندی صوت در آب دریا، حدود $1/52\times10^{3}\,m/s$ است، الف) طول موج این صوت و ب) زمان رفت‌وبرگشت صوت گسیل‌شده توسط وال برای مانعی که در فاصلهٔ ۱۰۰ m از آن قرار گرفته، چه‌قدر است؟

(فیزیک (۳) ـ مثال ۴ـ۱ صفحهٔ ۹۳ کتاب درسی)

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۴ در شکل زیر، پرتو نوری از محیط شفاف (۱) وارد محیط شفاف (۲) شده است. اگر اختلاف تندی نور در این دو محیط برابر $۴/۵\times۱۰^{۷}\ m/s$ باشد، تندی نور در محیط (۱) برابر چند متر بر ثانیه است؟ $(\sin ۵۳^\circ = ۰/۸)$



۱) $۲/۷\times۱۰^{۸}$

۲) $۱/۲\times۱۰^{۸}$

۳) $۲/۲۵\times۱۰^{۸}$

۴) $۷/۵\times۱۰^{۸}$

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

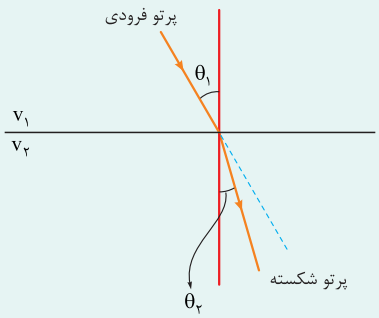
زاویهٔ تابش: هنگام شکست موج، زاویهٔ پرتو فرودی با خط عمود بر مرز جدایی دو محیط را با $\theta_۱$ نشان می‌دهیم و آن را زاویهٔ تابش می‌نامیم.

زاویهٔ شکست: هنگام شکست موج، زاویهٔ پرتو شکسته با خط عمود بر مرز جدایی دو محیط را با $\theta_۲$ نشان می‌دهیم و آن را زاویهٔ شکست می‌نامیم.

قانون شکست عمومی: اگر تندی انتشار موج فرودی را $v_۱$ و تندی انتشار موج شکست‌یافته را $v_۲$ بنامیم، بین تندی‌های $v_۱$ و $v_۲$ و زاویه‌های $\theta_۱$ و $\theta_۲$ رابطهٔ زیر برقرار است:

$$\frac{\sin\theta_۲}{\sin\theta_۱}=\frac{v_۲}{v_۱}$$

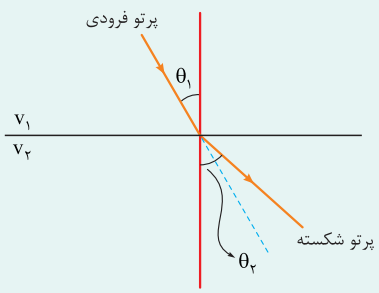
نمودار پرتویی در شکست:



شکل (۱)

$v_۲ < v_۱$

$\theta_۲ < \theta_۱$



شکل (۲)

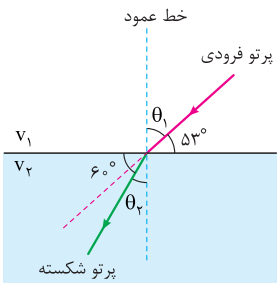
$v_۲ > v_۱$

$\theta_۲ > \theta_۱$

این قانون، هم در مورد موج‌های مکانیکی مانند صوت و هم در مورد موج‌های الکترومغناطیس مانند نور مرئی، صادق است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: زاویه‌های تابش و شکست را روی شکل مشخص می‌کنیم و نسبت تندی انتشار دو محیط را به دست می‌آوریم:



$$\theta_۱ = ۹۰^\circ - ۵۳^\circ = ۳۷^\circ$$

$$\theta_۲ = ۹۰^\circ - ۶۰^\circ = ۳۰^\circ$$

$$\frac{v_۲}{v_۱}=\frac{\sin\theta_۲}{\sin\theta_۱}=\frac{\sin ۳۰^\circ}{\sin ۳۷^\circ}=\frac{۰/۵}{۰/۶}=\frac{۵}{۶}$$

گام دوم: با توجه به نسبت به‌دست‌آمده در گام اول، معلوم می‌شود که $v_۲ < v_۱$ است؛ بنابراین می‌توان نوشت:

$$v_۱ - v_۲ = ۴/۵\times۱۰^{۷}\ m/s$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

گام سوم: با ترکب روابط به‌دست‌آمده در گام‌های اول و دوم، تندی انتشار موج در محیط اول را حساب می‌کنیم:

$$v_1 - v_2 = 4/5\times10^7 \xrightarrow{v_2=\frac{5}{6}v_1} v_1 - \frac{5}{6}v_1 = 4/5\times10^7$$

$$\Rightarrow \frac{1}{6}v_1 = 4/5\times10^7 \Rightarrow v_1 = 27\times10^7 = 2/7\times10^8\,m/s$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۵ در طیف اتمی هیدروژن، بلندترین طول موج گسیلی در ناحیهٔ فرابنفش، چند برابر بلندترین طول موج گسیلی در ناحیهٔ نور مرئی است؟

۱) $\frac{۴۹}{۸۱}$ ۲) $\frac{۸۱}{۴۹}$

۳) $\frac{۲۷}{۵}$ ۴) $\frac{۵}{۲۷}$

مشاوره معادلهٔ ریدبرگ از مهم‌ترین مطالب فیزیک اتمی است که در کنکورهای اخیر، بارها از آن سؤالات متنوعی طرح شده است. این معادله را به خوبی و بادقت یاد بگیرید.

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint

در معادلهٔ ریدبرگ و در طیف بالمر $(n' = ۲)$، اگر n را برابر با ۷ قرار دهید، بلندترین طول موج گسیلی در ناحیهٔ فرابنفش و اگر n را برابر با ۳ قرار دهید، بلندترین طول موج گسیلی در ناحیهٔ نور مرئی به دست می‌آید، سپس نسبت آن‌ها را پیدا کنید.

درس Box

طول موج خط‌های طیف اتمی هیدروژن از معادلهٔ ریدبرگ به دست می‌آیند:

$$\frac{۱}{\lambda} = R(\frac{۱}{n'^۲} - \frac{۱}{n^۲})$$

R: ثابت ریدبرگ $= ۰/۰۱۱\,(nm)^{-۱}$

λ: طول موج (nm)

n': شمارهٔ مدار کوچک‌تر

n: شمارهٔ مدار بزرگ‌تر

نام طیف	مقدار n'	مقدارهای n	ناحیهٔ طیف
لیمان	۱	۲,۳,۴,...	فرابنفش
بالمر	۲	۳,۴,۵,...	فرابنفش و مرئی
پاشن	۳	۴,۵,۶,...	فروسرخ
براکت	۴	۵,۶,۷,...	فروسرخ
پفوند	۵	۶,۷,۸,...	فروسرخ

بلندترین طول موج هر رشته، مربوط به کم‌ترین انرژی مبادله‌شده بین دو مدار است:

$$E_{max} = \frac{hc}{\lambda_{min}}$$

در طیف بالمر $(n' = ۲)$، $n = ۳$ تا $n = ۶$ مربوط به نور مرئی است، اما از $n = ۷$ تا $n = \infty$ مربوط به فرابنفش است.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: در ناحیهٔ نور مرئی، بلندترین طول موج گسیلی $(\lambda_۱)$ مربوط به گذار بین $n' = ۲$ و $n = ۳$ است:

$$\frac{۱}{\lambda_۱} = R(\frac{۱}{n'^۲} - \frac{۱}{n^۲}) = R(\frac{۱}{۲^۲} - \frac{۱}{۳^۲}) = R(\frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۹}) = \frac{۵R}{۳۶} \Rightarrow \lambda_۱ = \frac{۳۶}{۵R}$$

گام دوم: در ناحیهٔ فرابنفش، بلندترین طول موج گسیلی $(\lambda_۲)$ مربوط به گذار بین $n' = ۲$ و $n = ۷$ است:

$$\frac{۱}{\lambda_۲} = R(\frac{۱}{n'^۲} - \frac{۱}{n^۲}) = R(\frac{۱}{۲^۲} - \frac{۱}{۷^۲}) = R(\frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۴۹}) = \frac{۴۵R}{۴\times۴۹} \Rightarrow \lambda_۲ = \frac{۴\times۴۹}{۴۵R}$$

گام سوم: نسبت $\frac{\lambda_۲}{\lambda_۱}$ را پیدا می‌کنیم:

$$\frac{\lambda_۲}{\lambda_۱} = \frac{\frac{۴\times۴۹}{۴۵R}}{\frac{۳۶}{۵R}} = \frac{۴\times۴۹\times۵\cancel{R}}{۳۶\times۴۵\cancel{R}} = \frac{۴۹}{۸۱}$$

تیزپازی

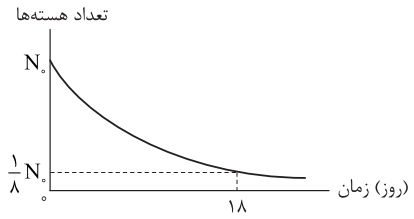
با توجه به این‌که طیف نور مرئی، حدوداً بین ۴۰۰ nm (بنفش) تا ۷۰۰ nm (قرمز) قرار دارد، بلندترین طول موج ناحیهٔ فرابنفش، کم‌ترین طول موج نور مرئی یعنی حدود ۴۰۰ nm است. بیشترین طول موج ناحیهٔ مرئی نیز که ۷۰۰ nm است، بنابراین داریم:

$$\frac{۴۰۰}{۷۰۰} \simeq ۰/۵۷$$

که به گزینهٔ (۱) بسیار نزدیک است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۶ نمودار تعداد هسته‌های فعال یک مادهٔ پرتوزا برحسب زمان به شکل زیر است. چند درصد از هسته‌های یک نمونه از این ماده، پس از ۳۰ روز دچار واپاشی می‌شوند؟



۱) ۳/۱۲۵

۲) ۶/۲۵

۳) ۹۳/۷۵

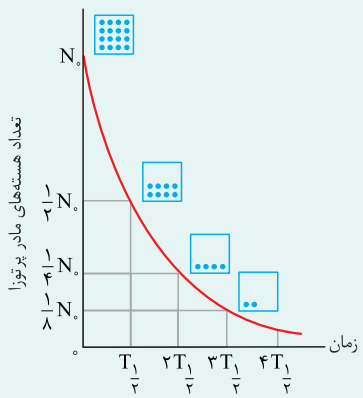
۴) ۹۶/۸۷۵

مشاوره این سؤال مشابه یکی از سؤالات کنکور تجربی ۱۴۰۳ نوبت دوم و کنکور ریاضی ۱۴۰۱ نوبت دوم، طرح شده است. کلاً مبحث نیم‌عمر مواد پرتوزا، از مطالب مهم و پرسؤال در کنکور و امتحان نهایی است.

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

نیمه‌عمر: ایزوتوپ‌های پرتوزا با گذشت زمان واپاشیده می‌شوند. در نتیجه تعداد هسته‌های مادر (هسته‌های اولیهٔ) آن‌ها کاهش می‌یابد و به صفر میل می‌کند. بنا به تعریف، نیمه‌عمر، مدت‌زمانی است که طول می‌کشد تا تعداد هسته‌های مادر (اولیهٔ) موجود در یک نمونه، به نصف برسند و آن را با نماد $T_{\frac{1}{2}}$ نشان می‌دهیم.



$$N = \frac{N_0}{2^n} \quad , \quad n = \frac{t}{T_{\frac{1}{2}}}$$

N_0 : تعداد هسته‌های اولیه در یک نمونهٔ پرتوزا

N : تعداد هسته‌های پرتوزای باقی‌مانده

$N_0 - N$: تعداد هسته‌های واپاشیده‌شده

n : تعداد تکرار نیمه‌عمر

t : کل زمان واپاشی

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: با استفاده از اطلاعات داده‌شده در نمودار، نیمه‌عمر این مادهٔ پرتوزا را به دست می‌آوریم:

$$N = \frac{N_0}{2^n} \Rightarrow \frac{1}{8}N_0 = \frac{N_0}{2^n} \Rightarrow 2^n = 8 \Rightarrow n = 3$$

$$n = \frac{t}{T_{\frac{1}{2}}} \Rightarrow 3 = \frac{18}{T_{\frac{1}{2}}} \Rightarrow T_{\frac{1}{2}} = 6 \text{ روز}$$

گام دوم: تعداد مراحل واپاشی (n') و تعداد هسته‌های باقی‌مانده (N') را پس از گذشت ۳۰ روز محاسبه می‌کنیم:

$$n' = \frac{t'}{T_{\frac{1}{2}}} \xrightarrow[T_{\frac{1}{2}}=6 \text{ روز}]{t'=30 \text{ روز}} n' = \frac{30}{6} = 5$$

$$N' = \frac{N_0}{2^{n'}} \xrightarrow{n'=5} N' = \frac{N_0}{2^5} = \frac{1}{32}N_0 = 0/03125\,N_0$$

بنابراین پس از گذشت ۳۰ روز، ۳/۱۲۵ درصد هسته‌های این مادهٔ پرتوزا باقی مانده و درصد هسته‌های واپاشی‌شدهٔ آن برابر است با:

$100 - 3/125 = \%96/875$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

یه‌جور دیگه

با توجه به اطلاعات موجود در نمودار، داریم:

$$\begin{cases} t = ۱۸ \text{ روز} \\ n = ۳ \end{cases}$$

$$N_۰ \xrightarrow{۶ \text{ روز}} \frac{۱}{۲}N_۰ \xrightarrow{۶ \text{ روز}} \frac{۱}{۴}N_۰ \xrightarrow{۶ \text{ روز}} \frac{۱}{۸}N_۰$$

پس از گذشت ۳۰ روز می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} t' = ۳۰ \text{ روز} \\ n' = ۵ \end{cases}$$

$$N_۰ \xrightarrow{۶ \text{ روز}} \frac{۱}{۲}N_۰ \xrightarrow{۶ \text{ روز}} \frac{۱}{۴}N_۰ \xrightarrow{۶ \text{ روز}} \frac{۱}{۸}N_۰ \xrightarrow{۶ \text{ روز}} \frac{۱}{۱۶}N_۰ \xrightarrow{۶ \text{ روز}} \frac{۱}{۳۲}N_۰$$

اگر تعداد هسته‌های فعال اولیه را ۱۰۰ فرض کنیم، پس از ۳۰ روز داریم:

۱۰۰ (درصد هسته‌های اولیه) → ۵۰ → ۲۵ → ۱۲/۵ → ۶/۲۵ → ۳/۱۲۵ (درصد هسته‌های باقی‌مانده)

درصد هسته‌های واپاشی‌شده $= ۱۰۰ - ۳/۱۲۵ = ٪۹۶/۸۷۵$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۷ کدام‌یک از موارد زیر درست است؟

الف) در واپاشی β^+، یکی از پروتون‌های درون هسته به یک نوترون و یک پوزیترون تبدیل می‌شود و سپس این پوزیترون از هسته گسیل می‌شود.

ب) الکترون گسیل‌شده در واپاشی β^-، در هستهٔ مادر وجود ندارد و یکی از الکترون‌های مداری اتم است.

پ) در تمام فرایندهای واپاشی پرتوزا، تعداد نوکلئون‌های هستهٔ مادر با تعداد نوکلئون‌های هستهٔ دختر برابر است.

ت) اغلب هسته‌ها پس از واپاشی آلفا یا بتا، در حالت برانگیخته قرار می‌گیرند و با گسیل پرتو گاما به حالت پایه می‌رسند.

۱) پ ـ ت ۲) الف ـ پ

۳) الف ـ ب ۴) الف ـ ت

مشاوره این سؤال مشابه یکی از سؤال‌های کنکور ریاضی ۱۴۰۰ است. واپاشی هسته‌ها نیز از مطالب بسیار مهم در فصل آخر کتاب فیزیک (۳) است که در کنکورهای سال‌های اخیر، بارها سؤالات متنوعی از آن طرح شده است.

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

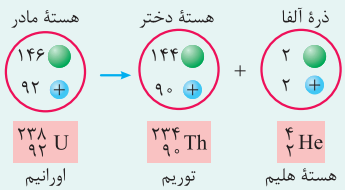
واپاشی آلفا (α): در این نوع واپاشی، هستهٔ سنگین ${}^{A}_{Z}X$ با گسیل ذرهٔ آلفا وامی‌پاشد. پرتوهای آلفا، ذرات باردار مثبت از جنس هستهٔ اتم هلیم هستند و از دو پروتون و دو نوترون تشکیل شده‌اند (${}^{4}_{2}He = {}^{4}_{2}\alpha$). واپاشی آلفا، با رابطهٔ زیر بیان می‌شود:

$${}^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2}Y + {}^{4}_{2}\alpha$$

$A = Z + N$ ← عدد جرمی، → عدد نوترونی، ↓ عدد اتمی

در این رابطه، X هستهٔ مادر و Y هستهٔ دختر نامیده می‌شوند.

مثال واپاشی آلفا برای اورانیم ۲۳۸ که به طور طبیعی رخ می‌دهد:



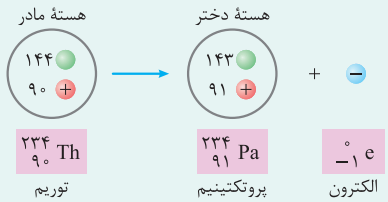
واپاشی بتا (β): این واپاشی، متداول‌ترین نوع واپاشی در هسته‌هاست و ذرات گسیل‌شده در آن را ذرات بتا می‌نامند.

الف) واپاشی بتا، همراه با گسیل الکترون (${}^{0}_{-1}\beta^-$ یا ${}^{0}_{-1}e^-$):

الکترون گسیل‌شده در این واپاشی، در هستهٔ مادر وجود ندارد و همچنین یکی از الکترون‌های مداری اتم نیست؛ این الکترون وقتی به وجود می‌آید که نوترونی درون هسته، به پروتون و الکترون تبدیل شود. فرایند این واپاشی را با رابطهٔ زیر بیان می‌کنند:

$${}^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A}_{Z+1}Y + {}^{0}_{-1}\beta^-$$

مثال واپاشی ${}^{0}_{-1}\beta^-$ برای توریم ۲۳۴ که به طور طبیعی رخ می‌دهد:



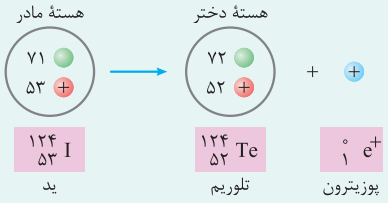
ب) واپاشی بتا، همراه با گسیل پوزیترون (${}^{0}_{1}\beta^+$ یا ${}^{0}_{1}e^+$):

در این نوع واپاشی بتا، ذرهٔ گسیل‌شده توسط هسته، جرم یکسان با الکترون دارد؛ ولی به جای بار منفی، حامل بار مثبت است. به این الکترونِ مثبت، پوزیترون می‌گویند. در واقع آن‌چه در این واپاشی رخ می‌دهد، این است که یکی از پروتون‌های درون هسته به یک نوترون و یک پوزیترون تبدیل می‌شود؛ سپس این پوزیترون از هسته گسیل می‌شود. فرایند این واپاشی، با رابطهٔ زیر بیان می‌شود:

$${}^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A}_{Z-1}Y + {}^{0}_{1}\beta^+$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

مثال واپاشی β^+ برای ید ۱۲۴ که به طور طبیعی رخ می‌دهد:

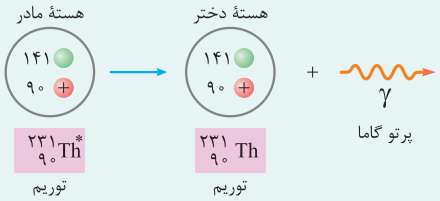


واپاشی گاما (γ):

اغلب هسته‌ها پس از واپاشی آلفا یا بتا، در حالت برانگیخته قرار می‌گیرند و با گسیل فوتون‌های پرانرژی (پرتو گاما) به حالت پایه می‌رسند. در این فرایند، A و Z تغییر نمی‌کنند، بلکه هستهٔ برانگیخته که با علامت * مشخص شده است، با گسیل پرتو گاما به حالت پایه می‌رسد. واپاشی γ با رابطهٔ زیر بیان می‌شود:

$$^{A}_{Z}X^{*} \rightarrow {}^{A}_{Z}X + \gamma$$

مثال واپاشی γ برای توریم ۲۳۱ که به طور طبیعی رخ می‌دهد:



پاسخ خیلی تشریحی

موارد مطرح‌شده را به ترتیب بررسی می‌کنیم:

الف) درست است. مطابق درس‌باکس، در واپاشی β^+، از تعداد پروتون‌ها یکی کاسته شده و به تعداد نوترون‌ها یکی افزوده می‌شود، در نتیجه عدد جرمی ثابت می‌ماند: $A = \downarrow Z + N \uparrow$

ب) نادرست است. الکترون گسیل‌شده در واپاشی β^- از تبدیل یک نوترون درون هسته به الکترون و پروتون حاصل شده است.

پ) نادرست است. در واپاشی آلفا، تعداد نوکلئون‌های هستهٔ مادر با تعداد نوکلئون‌های هستهٔ دختر، برابر نیست.

ت) درست است (مطابق قسمت آخر درس‌باکس).

کدام موارد درست است؟ *(سؤال ۱۵۶ کنکور ریاضی ۱۴۰۰)*

الف) در واپاشی β^-، الکترون گسیل‌شده در هستهٔ مادر وجود ندارد و هم‌چنین یکی از الکترون‌های مداری اتم نیست.

ب) در واپاشی β^+، ذرهٔ گسیل‌شده توسط هسته، جرم یکسان با الکترون دارد.

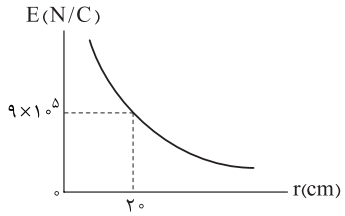
پ) اغلب هسته‌ها پس از واپاشی بتا، در حالت پایدار قرار می‌گیرند.

ت) در واپاشی β^+، یکی از نوترون‌های درون هسته به یک پروتون و یک پوزیترون تبدیل می‌شود.

۱) الف و ب
۲) الف و پ
۳) ب و ت
۴) ب و پ

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۸ نمودار اندازهٔ میدان الکتریکی حاصل از بار الکتریکی نقطه‌ای q برحسب فاصله از آن به شکل زیر است. اگر بار الکتریکی نقطه‌ای $q' = ۵\ \mu C$ در فاصلهٔ $۳۰\ cm$ از بار q قرار گیرد، اندازهٔ نیروی الکتریکی که این دو بار به هم وارد می‌کنند، چند نیوتون است؟ $(k = ۹\times ۱۰^{۹}\ \frac{N.m^{۲}}{C^{۲}})$



۱) ۲

۲) ۳

۳) ۴/۵

۴) ۶

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint ابتدا اندازهٔ بار الکتریکی q را به دست آورید، سپس به کمک قانون کولن نیروی الکتریکی بین q و q' را پیدا کنید.

درس Box

۱) **قانون کولن**: اندازهٔ نیروی الکتریکی بین دو بار نقطه‌ای که در راستای خط مستقیم بین آن‌ها اثر می‌کند، با حاصل‌ضرب بزرگی آن‌ها متناسب است و با مربع فاصلهٔ بین آن‌ها نسبت وارون دارد:

$$F = k\frac{|q_۱||q_۲|}{r^{۲}}$$

F: بزرگی نیروی الکتریکی (N)

k: ثابت کولن $= ۹\times ۱۰^{۹}\ \frac{N.m^{۲}}{C^{۲}}$

$|q_۱|$ و $|q_۲|$: اندازهٔ بارهای الکتریکی (C)

r: فاصلهٔ بین دو بار (m)

نکته هنگام عددگذاری در رابطهٔ قانون کولن، اگر بارهای الکتریکی برحسب میکروکولن و فاصله برحسب سانتی‌متر نوشته شوند، ضریب ثابت k را برابر با $۹۰\ \frac{N.cm^{۲}}{\mu C^{۲}}$ در نظر می‌گیریم تا نیرو برحسب نیوتون به دست آید.

نکته نیروی الکتریکی بین بارهای همنام از نوع رانش و بین بارهای ناهمنام از نوع ربایش است.

۲) اندازهٔ میدان الکتریکی حاصل از یک بار نقطه‌ای، از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$E = k\frac{|q|}{r^{۲}}$$

E: اندازهٔ میدان الکتریکی (N/C)

r: فاصلهٔ بار q تا نقطه‌ای که میدان الکتریکی را در آن نقطه می‌خواهیم (m)

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: با استفاده از اطلاعات داده‌شده در نمودار، اندازهٔ بار الکتریکی q را به دست می‌آوریم:

$$E = k\frac{|q|}{r^{۲}} \xrightarrow[r=۲۰\ cm=۰/۲\ m]{E=۹\times ۱۰^{۵}\ N/C,\ k=۹\times ۱۰^{۹}\ \frac{N.m^{۲}}{C^{۲}}} ۹\times ۱۰^{۵} = ۹\times ۱۰^{۹}\times\frac{|q|}{(۰/۲)^{۲}}$$

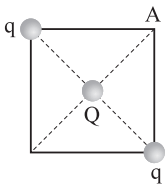
$$\Rightarrow |q| = ۰/۰۴\times ۱۰^{-۴}\ C = ۴\times ۱۰^{-۶}\ C = ۴\ \mu C$$

گام دوم: به کمک رابطهٔ قانون کولن، اندازهٔ نیروی الکتریکی بین بارهای q و q' را پیدا می‌کنیم. برای این کار، از نکتهٔ مطرح‌شده در درس‌باکس استفاده می‌کنیم:

$$F = k\frac{|q||q'|}{r^{۲}} = ۹۰\times\frac{۴\times ۵}{۳۰^{۲}} = ۲\ N$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۹ در شکل زیر که دو بار الکتریکی نقطه‌ای q روی دو رأس مربع و بار الکتریکی نقطه‌ای Q در مرکز مربع قرار دارد، میدان الکتریکی خالص در نقطهٔ A برابر $\vec{E}_1$ است. اگر با حذف بار Q، میدان الکتریکی خالص در نقطهٔ A برابر $\vec{E}_2 = -2\vec{E}_1$ شود، $\frac{Q}{q}$ برابر کدام است؟



۱) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

۲) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$

۳) $\frac{-3\sqrt{2}}{2}$

۴) $\frac{-3\sqrt{2}}{4}$

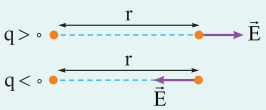
پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint

بار q را با علامت دلخواه (مثبت یا منفی) در نظر بگیرید و اندازهٔ میدان الکتریکی آن در رأس A را E فرض کنید، سپس با توجه به اطلاعات سؤال، علامت بار Q و اندازهٔ میدان الکتریکی آن در نقطهٔ A را تعیین کرده و در انتها نسبت $\frac{Q}{q}$ را پیدا کنید.

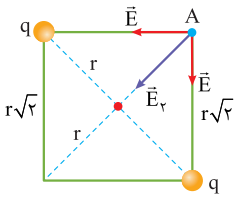
درس Box

جهت میدان الکتریکی از بارهای مثبت رو به خارج و به طرف بارهای منفی است:



پاسخ خیلی تشریحی

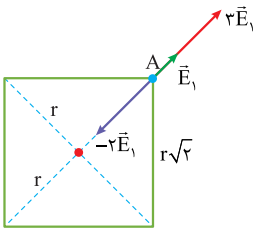
گام اول: ابتدا حالتی را در نظر می‌گیریم که بار Q حذف شده است. بارهای q را منفی فرض می‌کنیم و اندازهٔ میدان الکتریکی هر یک از آن‌ها را در نقطهٔ A با E نشان می‌دهیم. بر این اساس، میدان الکتریکی خالص آن دو در نقطهٔ A همان $\vec{E}_2$ است:



$$E = k\frac{|q|}{2r^2}$$

$$E_2 = \sqrt{E^2 + E^2} = E\sqrt{2} \xrightarrow{E_2 = 2E_1} 2E_1 = E\sqrt{2} = \sqrt{2}\frac{k|q|}{2r^2}$$

گام دوم: در صورتی که بار Q حضور داشته باشد، میدان الکتریکی خالص در نقطهٔ A برابر $\vec{E}_1$ است و چون $\vec{E}_2 = -2\vec{E}_1$ است، پس میدان الکتریکی حاصل از بار Q در نقطهٔ A برابر با $3E_1$ و جهت آن برخلاف $\vec{E}_2$ است:



$$3E_1 = k\frac{|Q|}{r^2}$$

گام سوم: نتایج به‌دست‌آمده از گام‌های اول و دوم را بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{3E_1}{2E_1} = \frac{k\frac{|Q|}{r^2}}{\sqrt{2}\frac{k|q|}{2r^2}} \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{2|Q|}{\sqrt{2}|q|} \Rightarrow \frac{|Q|}{|q|} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

یعنی گزینه‌های (۱) و (۳) رد می‌شوند.

گام چهارم: در نقطهٔ A جهت میدان الکتریکی حاصل از بار Q در خلاف جهت میدان الکتریکی خالص حاصل از دو بار q است، بنابراین بارهای Q و q ناهمنام هستند و داریم:

$$\frac{Q}{q} = -\frac{3\sqrt{2}}{4}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶۰ **خازنی به ظرفیت $5\ \mu F$ توسط یک باتری ۶ولتی باردار شده است. خازن را از باتری جدا کرده و سپس عایق بین صفحه‌های خازن را برمی‌داریم. اگر ثابت دی‌الکتریک این عایق برابر ۳ باشد، انرژی ذخیره‌شده در خازن چند میلی‌ژول و چگونه تغییر می‌کند؟**

۱) ۰/۰۶، کاهش می‌یابد.

۲) ۰/۰۶، افزایش می‌یابد.

۳) ۰/۱۸، کاهش می‌یابد.

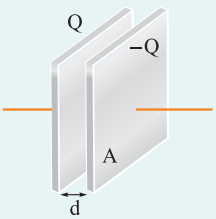
۴) ۰/۱۸، افزایش می‌یابد.

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint ابتدا به کمک رابطهٔ $Q = CV$، بار ذخیره‌شده در خازن را پیدا کنید، سپس با توجه به ثابت‌بودن این بار الکتریکی و با استفاده از رابطهٔ $U = \frac{Q^2}{2C}$، تغییرات انرژی خازن را حساب کنید.

درس Box

۱) **رابطهٔ ظرفیت خازن براساس مشخصات ساختاری آن:**



$$C = \kappa \varepsilon_0 \frac{A}{d}$$

C: ظرفیت خازن (F فاراد)

κ : ثابت دی‌الکتریک

ε_0 : ضریب گذردهی الکتریکی خلأ $= 8/85 \times 10^{-12}\ F/m$

A: مساحت متقابل صفحه‌ها (m^2)

d : فاصلهٔ جدایی صفحه‌ها (m)

- ظرفیت خازن تخت با ثابت دی‌الکتریک و مساحت سطح متقابل صفحه‌ها نسبت مستقیم دارد، ولی با فاصلهٔ دو صفحه از یکدیگر نسبت وارون دارد:

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \times \frac{A_2}{A_1} \times \frac{d_1}{d_2}$$

- کم‌ترین κ برای هوا و خلأ بوده و برابر یک فرض می‌شود. برای سایر اجسام نارسانا، $\kappa > 1$ می‌باشد.

نکته اگر خازن پرشده، از مولد جدا شود، بار الکتریکی (Q) آن ثابت می‌ماند.

۲) **رابطهٔ بار الکتریکی ذخیره‌شده در خازن:**

$$Q = CV$$

Q: بار الکتریکی (C)

V: اختلاف پتانسیل دو سر خازن (V)

۳) یکی از شکل‌های رابطهٔ محاسبهٔ انرژی خازن به صورت زیر است:

$$U = \frac{Q^2}{2C}$$

U: انرژی (J)

۴) هنگام عددگذاری در فرمول‌های انرژی، اختلاف پتانسیل همیشه برحسب ولت است، اما یکاهای انرژی و ظرفیت و بار الکتریکی، لازم نیست حتماً در SI باشند، بلکه کافی است پیشوند یکسانی داشته باشند. مثلاً هر سه می‌توانند با پیشوند میکرو باشند.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

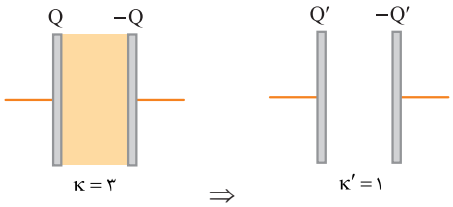
پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: بار الکتریکی ذخیره‌شده در خازن در حالت اول را پیدا می‌کنیم:

$$Q = CV = ۵ \times ۶ = ۳۰\ \mu C$$

از آن‌جا که در حالت دوم خازن را از باتری جدا کرده‌ایم، پس بار الکتریکی آن ثابت می‌ماند، یعنی بعد از خروج دی‌الکتریک داریم:

$$Q' = Q = ۳۰\ \mu C$$



گام دوم: ظرفیت خازن در حالت دوم را نیز به دست می‌آوریم:

$$\frac{C'}{C} = \frac{\kappa'}{\kappa} \times \frac{A'}{A} \times \frac{d}{d'} \xrightarrow[d'=d,\kappa=۳]{A'=A,C=۵\ \mu F,\kappa'=۱} \frac{C'}{۵} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow C' = \frac{۵}{۳}\ \mu F$$

گام سوم: تغییر انرژی خازن بین دو حالت را محاسبه می‌کنیم:

$$U' - U = \frac{Q'^{۲}}{۲C'} - \frac{Q^{۲}}{۲C} \xrightarrow[C'=\frac{۵}{۳}\ \mu F, C=۵\ \mu F]{Q'=Q=۳۰\ \mu C} U' - U = \frac{۳۰^{۲}}{۲ \times \frac{۵}{۳}} - \frac{۳۰^{۲}}{۲ \times ۵}$$

$$\Rightarrow U' - U = \frac{۲۷۰۰}{۱۰} - \frac{۹۰۰}{۱۰} = ۱۸۰\ \mu C = ۰/۱۸\ mC$$

از آن‌جا که تغییر انرژی ذخیره‌شده در خازن، با علامت مثبت به دست آمده است، پس انرژی آن $۰/۱۸\ mJ$ افزایش یافته است.

تیزبازی

از همان ابتدا معلوم بود که با برداشتن عایق دی‌الکتریک، ظرفیت خازن کاهش یافته و با توجه به رابطهٔ $U = \frac{Q^{۲}}{۲C}$، انرژی خازن افزایش می‌یابد، یعنی گزینه‌های (۱) و (۳) از همان ابتدا رد می‌شوند.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

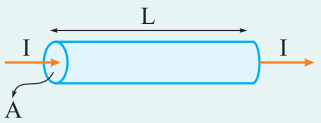
۶۱ **اگر جرم سیم مسی A با جرم سیم مسی B، برابر و قطر مقطع سیم A، ۲ برابر قطر مقطع سیم B باشد، مقاومت الکتریکی سیم A، چند برابر مقاومت الکتریکی سیم B است؟**

۱) ۴ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) ۱۶ ۴) $\frac{۱}{۱۶}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint ابتدا رابطه‌ای فیزیکی برای مقاومت الکتریکی رسانا برحسب جرم، قطر و جنس رسانا به دست آورید، سپس از این رابطه، به صورت نسبتی استفاده کنید.

درس Box ۱) **مقاومت الکتریکی یک جسم در دمای ثابت:** مقاومت الکتریکی یک جسم در دمای ثابت، با طول و جنس آن نسبت مستقیم دارد، ولی با مساحت سطح مقطع آن، رابطهٔ عکس دارد:



$$R=\rho\frac{L}{A}$$

R: مقاومت الکتریکی (Ω)

ρ: مقاومت ویژه $(\Omega.m)$

L: طول جسم (m)

A: مساحت سطح مقطع (که در امتداد جسم ثابت فرض می‌شود.) $(m^۲)$

اگر مقطع عبور جریان، دایره‌ای به قطر D باشد، داریم:

$$A=\pi\frac{D^۲}{۴}$$

۲) **یادآوری رابطهٔ چگالی:**

$$\rho'=\frac{m}{V}$$

ρ': چگالی $(kg/m^۳)$

m: جرم (kg)

V: حجم $(m^۳)$

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** رابطه‌ای فیزیکی برای مقاومت الکتریکی رسانا، برحسب جرم، قطر و جنس آن به دست می‌آوریم. برای این کار، حجم رسانا را با V و چگالی آن را با ρ' نشان می‌دهیم:

$$R=\rho\frac{L}{A}\xrightarrow{L=\frac{V}{A}}R=\rho\frac{V}{A^۲}\xrightarrow[A=\pi\frac{D^۲}{۴}]{V=\frac{m}{\rho'}}R=\rho\times\frac{\frac{m}{\rho'}}{\frac{\pi^۲D^۴}{۱۶}}\Rightarrow R=\frac{۱۶m\rho}{\rho'\pi^۲D^۴}$$

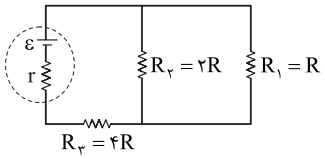
گام دوم: با توجه به رابطهٔ به‌دست‌آمده در گام اول، نسبت مقاومت الکتریکی سیم A به مقاومت الکتریکی سیم B را می‌نویسیم:

$$\frac{R_A}{R_B}=\frac{m_A}{m_B}\times\frac{\rho_A}{\rho_B}\times\frac{\rho'_B}{\rho'_A}\times(\frac{D_B}{D_A})^۴\xrightarrow[\rho'_A=\rho'_B,D_A=۲D_B]{m_A=m_B,\rho_A=\rho_B}\frac{R_A}{R_B}=(\frac{D_B}{۲D_B})^۴\Rightarrow\frac{R_A}{R_B}=(\frac{۱}{۲})^۴=\frac{۱}{۱۶}$$

گول نخوری چنان‌چه نسبت قطرها، برعکس نوشته شود، در دام گزینهٔ (۳) می‌افتیم.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶۲ در مدار شکل زیر، توان مصرفی مقاومت R_1، چند برابر توان خروجی باتری است؟



۱) $\frac{1}{21}$

۲) $\frac{2}{21}$

۳) $\frac{1}{7}$

۴) $\frac{2}{7}$

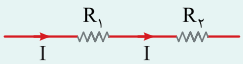
مشاوره موضوع توان در مدارهای الکتریکی از مطالب بسیار مهم به شمار می‌رود، چون به راحتی با سایر مطالب مدارهای الکتریکی ترکیب شده و سؤالات مختلفی از آن در کنکورهای اخیر مطرح شده است.

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint ابتدا مقاومت معادل مدار را برحسب R به دست آورید. سپس جریان هر شاخه را حساب کنید و در پایان، به کمک رابطهٔ $P = RI^2$، نسبت توان‌های خواسته‌شده را پیدا کنید.

درس Box

۱) **به هم بستن متوالی مقاومت‌ها:** هنگامی دو مقاومت را متوالی می‌گوییم که فقط از یک سر به هم متصل بوده و از محل اتصال آن‌ها هیچ انشعاب جریان‌داری خارج نگردد. در این حالت، جریان الکتریکی عبوری از مقاومت‌ها یکسان است:

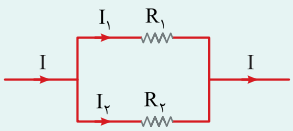


$$R_{eq} = R_1 + R_2$$

R_{eq}: مقاومت معادل (Ω)

۲) **به هم بستن موازی مقاومت‌ها:** هنگامی دو مقاومت را موازی می‌گوییم که هر دو سر آن‌ها به وسیلهٔ سیم‌های رابط به یکدیگر متصل شده باشند. در این حالت، اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت‌ها یکسان است.

نکته مجموع جریان‌هایی که به هر نقطهٔ انشعاب (گره) وارد می‌شوند، برابر با مجموع جریان‌هایی است که از آن نقطهٔ انشعاب خارج می‌شوند.



$$I = I_1 + I_2$$

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \Rightarrow R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

نکته جریان الکتریکی بین دو مقاومت موازی و مشابه به اندازهٔ مساوی تقسیم می‌شود، اما اگر اندازهٔ مقاومت‌ها یکسان نباشد، جریان الکتریکی به نسبت عکس مقاومت‌های الکتریکی بین آن‌ها تقسیم می‌شود.

$$I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \times I \quad , \quad I_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \times I \Rightarrow \frac{I_2}{I_1} = \frac{R_1}{R_2}$$

۳) توان مصرفی در مقاومت R از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

مقاومت الکتریکی (Ω)
↑
توان (W) ← $P = RI^2$
↓
جریان الکتریکی (A)

۴) **قانون اُهم:** در دمای ثابت، نسبت اختلاف پتانسیل برخی وسیله‌ها که جریان الکتریکی را از خود عبور می‌دهند، به جریانی که از آن‌ها می‌گذرد، مقدار ثابتی است. چنین وسیله‌هایی را مقاومت یا رسانای اهمی می‌گوییم.

$$\frac{V}{I} = R \Rightarrow V = IR$$

V: اختلاف پتانسیل (V) I: جریان الکتریکی (A) R: مقاومت الکتریکی (Ω)

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: مقاومت‌های R_1 و R_2 با هم به صورت موازی بسته شده‌اند. مقاومت معادل آن‌ها را برحسب R به دست می‌آوریم:

$$R_{1,2} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{2R \times R}{2R + R} = \frac{2R}{3}$$

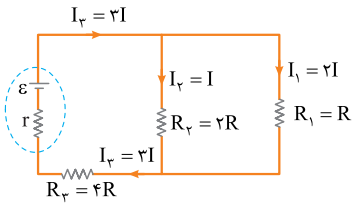
$R_{1,2}$ با R_3 به صورت متوالی بسته شده و مقاومت معادل آن‌ها را که همان مقاومت معادل مدار است، برحسب R به دست می‌آوریم:

$$R_{eq} = R_{1,2} + R_3 = \frac{2R}{3} + 4R = \frac{14R}{3}$$

گام دوم: اگر جریان عبوری از مقاومت R_2، برابر با I باشد، می‌توان نوشت:

$$V_1 = V_2 \Rightarrow I_1 R_1 = I_2 R_2 \Rightarrow I_1 R = I \times 2R \Rightarrow I_1 = 2I$$

جریان عبوری از مقاومت R_3 را که همان جریان عبوری از مولد است، پیدا می‌کنیم:



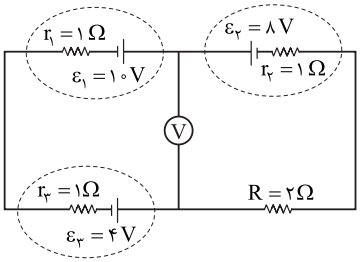
$$I_3 = I_1 + I_2 \Rightarrow I_3 = 2I + I = 3I$$

گام سوم: توان خروجی باتری، همان توان مصرفی مدار است. بر این اساس، نسبت توان‌های خواسته‌شده در سؤال را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{P_{R_1}}{P_{R_{eq}}} = \frac{R_1 I_1^2}{R_{eq} I_3^2} = \frac{R(2I)^2}{\frac{14R}{3}(3I)^2} = \frac{R \times 4I^2}{\frac{14R}{3} \times 9I^2} = \frac{4}{42} = \frac{2}{21}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶۳ در مدار شکل زیر، مقداری که ولت‌سنج آرمانی نشان می‌دهد، چند ولت است؟



۱) ۶/۸

۲) ۷/۶

۳) ۸/۴

۴) ۹/۲

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

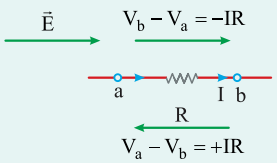
باتری‌ها ← منبع (مولد) / مصرف‌کننده

باید توجه داشت که وقتی چند باتری در یک مدار به کار می‌روند، ممکن است بعضی از آن‌ها به عنوان مولد نباشند، یعنی به گونه‌ای بسته شوند که ضدمولد باشند. به عبارت دیگر، به جای انرژی‌دادن به مدار، به عنوان مصرف‌کننده عمل کنند. مانند باتری یک تلفن همراه که در حال شارژ است.

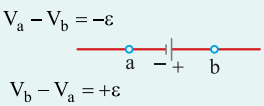
در باتری‌های منبع (مولد) همواره جریان از پایانهٔ مثبت وارد مدار می‌شود، اما در باتری‌های مصرف‌کننده، برعکس است.

برای نوشتن تغییر پتانسیل الکتریکی در مدارها، دو نکتهٔ زیر به کار می‌روند:

۱) هرگاه در جهت جریان از مقاومت R یا r بگذریم، پتانسیل الکتریکی به اندازهٔ IR یا Ir کاهش می‌یابد (افت پتانسیل رخ می‌دهد) اما اگر در خلاف جهت جریان از آن‌ها بگذریم، پتانسیل به همان اندازه افزایش می‌یابد.



۲) بدون توجه به جهت جریان، هرگاه درون باتری از پایانهٔ منفی به پایانهٔ مثبت برویم، پتانسیل به اندازهٔ ε افزایش می‌یابد (زیرا در خلاف جهت $\vec{E}$ رفته‌ایم) و اگر برعکس از پایانهٔ مثبت به منفی برویم، پتانسیل به اندازهٔ ε کاهش می‌یابد (زیرا در جهت $\vec{E}$ رفته‌ایم):



چون مقاومت یک سیم رابط، ناچیز فرض می‌شود، هنگام عبور از آن، پتانسیل تغییر نمی‌کند. یعنی نقاطی که به وسیلهٔ یک سیم رابط به هم وصل می‌شوند، پتانسیل یکسانی دارند.

محاسبهٔ اختلاف پتانسیل بین دو نقطه از مدار: ابتدا پتانسیل نقطهٔ اول را می‌نویسیم، آن‌گاه از این نقطه روی مدار و در جهت دلخواه، به طور ذهنی به طرف نقطهٔ دوم می‌رویم و ضمن گذر از هر قسمت، تغییر پتانسیل را می‌نویسیم تا به نقطهٔ دوم برسیم. حاصل نوشته‌ها برابر پتانسیل نقطهٔ دوم است.

اختلاف پتانسیل دو سر باتری مولد و باتری مصرف‌کننده:

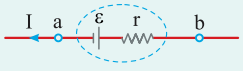


باتری مولد

$V_a + \varepsilon - Ir = V_b$

$V_b - V_a = \varepsilon - Ir$

$V = \varepsilon - Ir$



باتری مصرف‌کننده

$V_a + \varepsilon + Ir = V_b$

$V_b - V_a = \varepsilon + IR$

$V = \varepsilon + Ir$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

مدار تک‌حلقه: این مدار الکتریکی شامل یک یا چند باتری و یک یا چند مقاومت است که به وسیلهٔ سیم‌های رابط (با مقاومت ناچیز) به طور متوالی به هم بسته شده‌اند و جریان الکتریکی در همهٔ قسمت‌های آن یکسان است.

تعیین جهت جریان در مدار تک‌حلقه:

هر باتری، می‌خواهد جریان الکتریکی را از پایانهٔ مثبت خود، وارد مدار کند. بر این اساس، وقتی چند باتری در مدار بسته شده باشند، مجموع نیروی محرکهٔ باتری‌هایی که می‌خواهند در مدار، جریان ساعتگرد ایجاد کنند و مجموع نیروی محرکهٔ باتری‌هایی که می‌خواهند در مدار، جریان پادساعتگرد ایجاد کنند را با هم مقایسه می‌کنیم. هر کدام بزرگ‌تر باشد، آن باتری یا باتری‌ها مولد محسوب می‌شوند و جریان به میل آن‌ها در مدار برقرار می‌شود، یعنی جریان الکتریکی از پایانهٔ مثبت آن‌ها وارد مدار می‌شود. سایر باتری‌ها نیز مصرف‌کننده محسوب می‌شوند و جریان الکتریکی از مدار وارد پایانهٔ مثبت آن‌ها می‌شود.

محاسبهٔ جریان در مدار تک‌حلقه:

$$I = \frac{\varepsilon_t - \varepsilon'_t}{R_{eq} + r_t + r'_t}$$

I: جریان الکتریکی مدار (A)

ε_t: مجموع نیروی محرکهٔ باتری‌های مولد (V)

ε'_t: مجموع نیروی محرکهٔ باتری‌های مصرف‌کننده (V)

R_{eq}: مجموع مقاومت‌های خارجی مدار (Ω)

r_t: مجموع مقاومت درونی باتری‌های مولد (Ω)

r'_t: مجموع مقاومت درونی باتری‌های مصرف‌کننده (Ω)

نکته مقاومت الکتریکی یک ولت‌سنج آرمانی، بی‌نهایت فرض می‌شود و جریانی از آن عبور نمی‌کند.

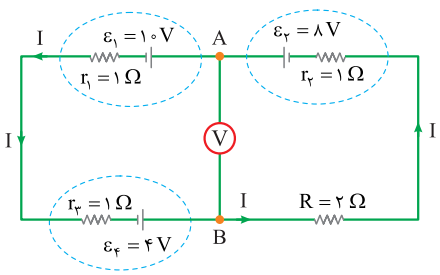
پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: با توجه به نیروهای محرکهٔ باتری‌های داده‌شده، معلوم می‌شود که جریان در این مدار تک‌حلقه، به صورت پادساعتگرد برقرار است؛ زیرا باتری‌های (۲) و (۳) به عنوان مولد و باتری (۱) به عنوان مصرف‌کننده در این مدار عمل می‌کنند:

$$\varepsilon_2 + \varepsilon_3 > \varepsilon_1$$

$$8 + 4 > 10$$

گام دوم: اندازهٔ جریان الکتریکی در این مدار را به دست می‌آوریم:



$$I = \frac{\varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_1}{R + r_1 + r_2 + r_3} = \frac{8 + 4 - 10}{2 + 1 + 1 + 1}$$

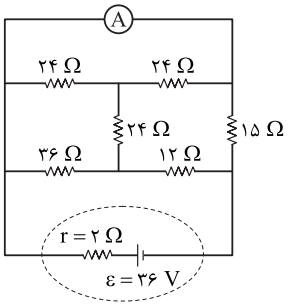
$$\Rightarrow I = \frac{2}{5} = 0/4\ A$$

گام سوم: به طور ذهنی و در جهت جریان، روی مدار از نقطهٔ A به طرف نقطهٔ B حرکت می‌کنیم تا اختلاف پتانسیل بین دو نقطهٔ A و B را که همان عدد ولت‌سنج است، به دست آوریم:

$$V_A - \varepsilon_1 - Ir_1 - Ir_3 + \varepsilon_3 = V_B \Rightarrow V_A - 10 - 0/4 \times 1 - 0/4 \times 1 + 4 = V_B \Rightarrow V_A - V_B = 6/8\ V$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶۴ در مدار شکل زیر، مقداری که آمپرسنج آرمانی نشان می‌دهد، چند آمپر است؟



۱) ۱/۷۵
۲) ۰/۷۵
۳) ۲/۲۵
۴) ۱/۲۵

مشاوره در کنکورهای سال‌های اخیر، سؤالات زیادی از مدارهای الکتریکی مطرح شده که در آن‌ها، آمپرسنج به تنهایی در یک شاخه از مدار قرار می‌گیرد و جریان عبوری از آن خواسته می‌شود، نمونهٔ آن در کنکورهای تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲ و ۱۴۰۴، کنکور تجربی ۱۴۰۳ هر دو نوبت اول و دوم و کنکور ریاضی ۱۴۰۴ نوبت دوم دیده می‌شود.

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint

ابتدا مقاومت معادل مدار را به دست آورید و به کمک آن، جریان عبوری از مولد و هم‌چنین جریان الکتریکی در سایر شاخه‌های مدار را پیدا کنید. سپس با توجه به این نکته که جمع جریان‌های ورودی به هر نقطهٔ انشعاب، با جمع جریان‌های خروجی از آن نقطه برابر است، جریان عبوری از آمپرسنج را حساب کنید.

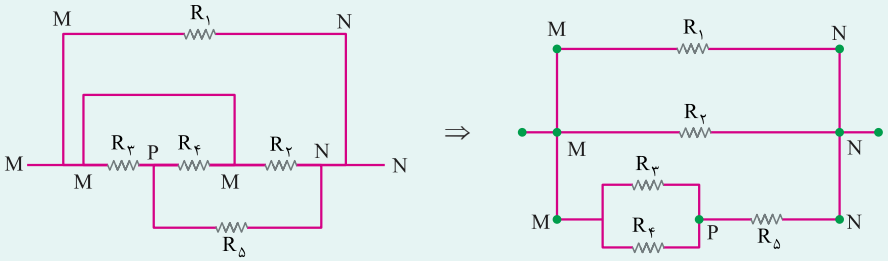
درس Box

نام‌گذاری نقاط هم‌پتانسیل و ساده‌کردن مدار:

گاهی تشخیص متوالی یا موازی بودن مقاومت‌ها در یک مدار، به راحتی امکان‌پذیر نیست. در این صورت، شکل ساده‌تری از مدار را رسم می‌کنیم بدون آن‌که تغییری در تعداد اجزای مدار و چگونگی اتصال آن‌ها ایجاد شود.

برای این کار، نقاطی را که با سیم رابط (مقاومت آن ناچیز فرض می‌شود) به یکدیگر متصل شده‌اند، با پتانسیل یکسان و با نام مشترک یک نقطه، در نظر می‌گیریم. آمپرسنج آرمانی نیز در این مورد مانند سیم رابط عمل می‌کند. بعد از نام‌گذاری چنین نقاطی، دو سر مدار یا دو سر مولد را مبنا قرار داده و سایر اجزای مدار را بین نقطه‌های نام‌گذاری‌شده، جای‌گذاری می‌کنیم تا شکل واضح‌تری از مدار به دست آید.

مثال

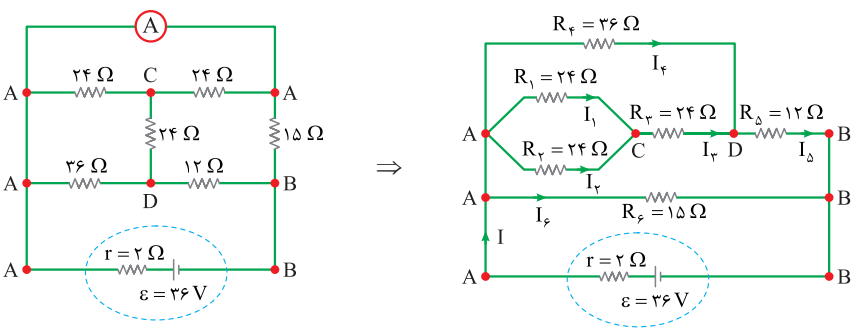


نکته

مقاومت الکتریکی یک آمپرسنج آرمانی برابر با صفر فرض می‌شود، بنابراین اختلاف پتانسیل دو سر آن صفر خواهد بود، اما جریان الکتریکی می‌تواند از آن عبور کند.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: نقاط هم‌پتانسیل مدار را مشخص کرده و شکل ساده‌تری از مدار رسم می‌کنیم:



SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

گام دوم: مقاومت معادل مدار را به دست می‌آوریم. دو مقاومت R_1 و R_2 با هم موازی‌اند و حاصل آن‌ها با مقاومت R_3 به صورت متوالی بسته شده است:

$$R_{1,2}=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}=\frac{24\times24}{24+24}=12\,\Omega$$

$$R_{3\text{تا}1}=R_{1,2}+R_3=12+24=36\,\Omega$$

مقاومت $R_{3\text{تا}1}$ با مقاومت R_4 به طور موازی بسته شده و مجموعهٔ آن‌ها با مقاومت R_5 به طور متوالی قرار دارند:

$$R_{4\text{تا}1}=\frac{R_{3\text{تا}1}\times R_4}{R_{3\text{تا}1}+R_4}=\frac{36\times36}{36+36}=18\,\Omega$$

$$R_{5\text{تا}1}=R_{4\text{تا}1}+R_5=18+12=30\,\Omega$$

مقاومت $R_{5\text{تا}1}$ با مقاومت R_6 به طور موازی بسته شده است، بنابراین مقاومت معادل مدار (R_{eq}) برابر است با:

$$R_{eq}=\frac{R_{5\text{تا}1}\times R_6}{R_{5\text{تا}1}+R_6}=\frac{30\times15}{30+15}=10\,\Omega$$

گام سوم: جریان عبوری از مولد را محاسبه می‌کنیم، سپس این جریان را بین قسمت‌های مختلف مدار، تقسیم می‌کنیم تا جریان عبوری از مقاومت‌هایی که لازم داریم، به دست آید:

$$I=\frac{\varepsilon}{R_{eq}+r}=\frac{36}{10+2}=3\,A$$

$$R_6I_6=R_{eq}I\Rightarrow15\times I_6=10\times3\Rightarrow I_6=2\,A$$

$$R_{5\text{تا}1}\times I_5=R_{eq}I\Rightarrow30\times I_5=10\times3\Rightarrow I_5=1\,A$$

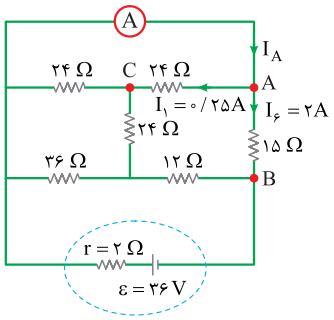
$$V_{AD}=R_{4\text{تا}1}\times I_5=18\times1=18\,V$$

$$V_{AD}=R_4\times I_4\Rightarrow18=36I_4\Rightarrow I_4=0/5\,A$$

$$V_{AD}=R_{3\text{تا}1}\times I_3\Rightarrow18=36I_3\Rightarrow I_3=0/5\,A$$

$$I_3=I_1+I_2\xrightarrow[I_3=0/5\,A]{I_1=I_2}0/5=2I_1\Rightarrow I_1=I_2=0/25\,A$$

گام چهارم: جریان‌های به‌دست‌آمده را روی شکل مدار اولیه نشان می‌دهیم و جریان عبوری از آمپرسنج را پیدا می‌کنیم. برای این منظور، گره A را در نظر می‌گیریم و جریان‌های I_1 و I_6 را روی مدار نشان می‌دهیم، بنابراین باید جریان آمپرسنج (I_A) به این نقطهٔ انشعاب A وارد شود:



$$I_A=I_1+I_6=0/25+2=2/25\,A$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶۵ کدام مواد فاقد حوزهٔ مغناطیسی‌اند، اما اتم‌های آن‌ها به طور ذاتی دارای دوقطبی مغناطیسی هستند؟

۱) فرومغناطیسی نرم

۲) فرومغناطیسی سخت

۳) پارامغناطیسی

۴) دیامغناطیسی

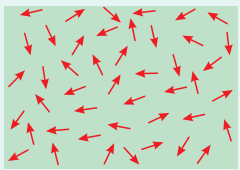
مشاوره شاید بعضی از دانش‌آموزان فکر کنند مطالب مربوط به ویژگی‌های مغناطیسی مواد، کم‌اهمیت هستند و در کنکور مطرح نمی‌شوند، اما چنین نیست. از همین مطالب در کنکور خارج از کشور تجربی ۱۴۰۴ و ریاضی ۱۴۰۳ و هم‌چنین کنکور ریاضی ۱۴۰۲ نوبت اول، سؤال مطرح شده است.

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

مواد پارامغناطیسی: اتم‌های مواد پارامغناطیسی، خاصیت مغناطیسی دارند، اما دوقطبی‌های مغناطیسی وابستهٔ به آن‌ها، به طور کاتوره‌ای سمت‌گیری کرده‌اند و میدان مغناطیسی خالصی ایجاد نمی‌کنند. با قراردادن مواد پارامغناطیسی درون میدان مغناطیسی خارجی قوی (مثلاً نزدیک یک آهنربای قوی)، دوقطبی‌های مغناطیسی آن‌ها، به مقدار مختصری در راستای خط‌های میدان مغناطیسی منظم می‌شوند. با دورکردن آهنربا از این مواد، دوقطبی‌های مغناطیسی آن‌ها، دوباره به طور کاتوره‌ای سمت‌گیری می‌کنند.

پس مواد پارامغناطیسی فقط در حضور میدان‌های مغناطیسی قوی، خاصیت مغناطیسی موقت و ضعیفی پیدا می‌کنند. اورانیم، پلاتین، آلومینیم، سدیم، اکسیژن و اکسید نیتروژن از جمله مواد پارامغناطیسی‌اند.



سمت‌گیری کاتوره‌ای دوقطبی‌های مغناطیسی در یک مادهٔ پارامغناطیسی در نبود میدان مغناطیسی:

مواد دیامغناطیسی: اتم‌های مواد دیامغناطیسی، نظیر مس، نقره، سرب و بیسموت، به طور ذاتی فاقد خاصیت مغناطیسی‌اند. به عبارت دیگر، هیچ‌یک از اتم‌های این مواد، دارای دوقطبی مغناطیسی خالصی نیستند. با وجود این، حضور میدان مغناطیسی خارجی، می‌تواند به طور موقت، سبب القای دوقطبی‌های مغناطیسی در خلاف سوی میدان خارجی، در مواد دیامغناطیسی شود. یعنی مواد دیامغناطیسی توسط میدان خارجی دفع می‌شوند.

مواد فرومغناطیسی: اتم‌های مواد فرومغناطیسی به طور ذاتی دارای دوقطبی مغناطیسی هستند. آهن، نیکل، کبالت و بسیاری از آلیاژهای دارای این عنصرها فرومغناطیسی‌اند. برهم‌کنش‌های قوی بین دوقطبی‌های مغناطیسی در این مواد موجب می‌شود که این دوقطبی‌ها، حتی در نبود میدان خارجی، در ناحیه‌هایی که حوزه‌های مغناطیسی نامیده می‌شود، همسو شوند.

حوزه‌های مغناطیسی برخی از مواد فرومغناطیسی، در حضور میدان مغناطیسی خارجی به سهولت تغییر می‌کنند و ماده به سادگی آهنربا می‌شود و با حذف میدان خارجی نیز، خاصیت آهنربایی خود را به آسانی از دست می‌دهد. این مواد را مواد فرومغناطیسی نرم می‌نامند. از این مواد در ساخت هستهٔ پیچه‌ها و سیملوله‌ها و آهنرباهای الکتریکی (آهنرباهای غیردائمی) استفاده می‌شوند.

برخی مواد دیگر مانند فولاد، آلیاژهای آهن، کبالت و نیکل به سختی آهنربا می‌شوند؛ یعنی در حضور میدان مغناطیسی خارجی، حجم حوزه‌ها در آن‌ها به سختی تغییر می‌کند. این مواد را فرومغناطیسی سخت می‌نامند. در این مواد، سمت‌گیری دوقطبی‌های مغناطیسی حوزه‌ها پس از حذف میدان خارجی، تا مدت‌زمان زیادی، تقریباً بدون تغییر باقی می‌ماند. به عبارت دیگر، پس از حذف میدان خارجی، مادهٔ فرومغناطیسی سخت، خاصیت آهنربایی خود را تا اندازهٔ قابل توجهی حفظ می‌کند. به همین دلیل، این مواد برای ساختن آهنرباهای دائمی مناسب‌اند.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: با توجه به متن درس‌باکس، مواد فرومغناطیسی چه از نوع نرم و چه از نوع سخت، دارای حوزهٔ مغناطیسی هستند، بنابراین گزینه‌های (۱) و (۲) رد می‌شوند.

گام دوم: اتم‌های مواد پارامغناطیس به طور ذاتی دوقطبی مغناطیسی دارند، ولی مواد دیامغناطیس ندارند، بنابراین گزینهٔ (۳) درست است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶۶ در فضایی که میدان مغناطیسی یکنواختی به بزرگی $25\,G$ در جهت شمال وجود دارد، یک ذرهٔ آلفا با تندی $4\times10^{3}\ m/s$ در راستای افقی و به سمت شرق در حال حرکت است. نیروی مغناطیسی وارد بر این ذره چند نیوتون و در چه جهتی است؟ $(e=1/6\times10^{-19}\ C)$

۱) $1/6\times10^{-18}$، عمود بر سطح زمین و به طرف بالا

۲) $1/6\times10^{-18}$، عمود بر سطح زمین و به طرف پایین

۳) $3/2\times10^{-18}$، عمود بر سطح زمین و به طرف بالا

۴) $3/2\times10^{-18}$، عمود بر سطح زمین و به طرف پایین

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint

ذرهٔ آلفا دارای بار مثبت است. جهت نیروی وارد بر آن را به کمک قاعدهٔ دست راست تعیین کنید و اندازهٔ نیروی وارد بر آن را با استفاده از رابطهٔ $F=|q|vB\sin\theta$ به دست آورید.

درس Box

۱) میدان مغناطیسی، یک کمیت برداری است و یکای آن در SI، تسلا (T) می‌باشد. یکای دیگر آن گاوس (G) است:

$$1\,G=10^{-4}\,T$$

۲) نیروی مغناطیسی وارد بر ذرهٔ باردار متحرک در میدان مغناطیسی از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود.

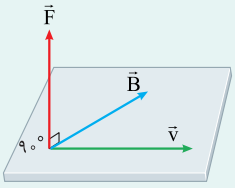
$F=|q|vB\sin\theta$

F: اندازهٔ نیرو (N) — $|q|$: بزرگی بار (C) — v: تندی (m/s) — B: اندازهٔ میدان مغناطیسی (T) — θ: زاویهٔ بین بردارهای سرعت و میدان مغناطیسی

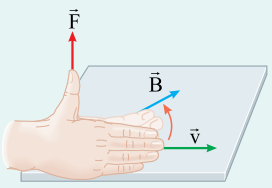
نماد میدان مغناطیسی برون‌سو: $\vec{B}\odot$

نماد میدان مغناطیسی درون‌سو: $\vec{B}\otimes$

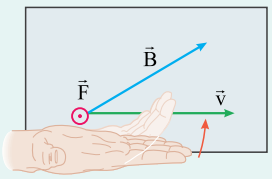
۳) تعیین جهت نیروی مغناطیسی وارد بر ذرهٔ باردار مثبت با استفاده از قاعدهٔ دست راست: اگر چهار انگشت دست راست را در جهت $\vec{v}$ قرار دهیم، به گونه‌ای که جهت خم‌شدن چهار انگشت در جهت $\vec{B}$ باشد، انگشت شست، جهت نیروی مغناطیسی $(\vec{F})$ را نشان می‌دهد.



(الف)



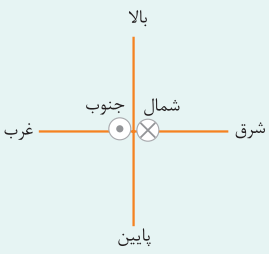
(ب)



(پ)

۴) برای بررسی و تعیین جهت‌ها می‌توانیم از شکل‌های زیر استفاده کنیم:





SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ خیلی تشریحی ✔

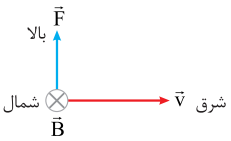
گام اول: اندازهٔ نیروی مغناطیسی وارد بر این ذرهٔ آلفا را در میدان مغناطیسی داده‌شده به دست می‌آوریم. برای این منظور باید بدانیم که ذرهٔ آلفا از جنس هستهٔ اتم هلیم است، یعنی دو پروتون و دو نوترون دارد، بنابراین بار هر ذرهٔ آلفا برابر است با:

$$q_\alpha = +2e \xrightarrow{e=1/6\times10^{-19}C} q_\alpha = 3/2\times10^{-19}C$$

$$F = |q|vB\sin\theta \xrightarrow[B=25\,G=25\times10^{-4}T,\theta=90^\circ]{q=q_\alpha=3/2\times10^{-19}C,\,v=4\times10^{3}\,m/s} F = 3/2\times10^{-19}\times4\times10^{3}\times25\times10^{-4}\sin90^\circ$$

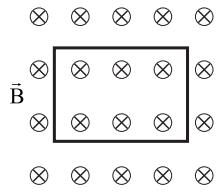
$$\Rightarrow F = 3/2\times10^{-18}\,N$$

گام دوم: جهت نیروی مغناطیسی وارد بر این ذرهٔ مثبت را به کمک قاعدهٔ دست راست تعیین می‌کنیم. جهت این نیرو، عمود بر سطح زمین و به طرف بالا است:



SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶۷ در شکل زیر، سطح قابی به مساحت $400\ cm^2$ و مقاومت الکتریکی $2\ \Omega$، عمود بر میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ قرار دارد. اندازهٔ این میدان با آهنگ $300\ G/s$ افزایش می‌یابد. در این مدت، جریان الکتریکی القاشده در قاب، چند میلی‌آمپر و در چه جهتی است؟



۱) ۶/۰، پادساعتگرد

۲) ۶/۰، ساعتگرد

۳) ۶، ساعتگرد

۴) ۶، پادساعتگرد

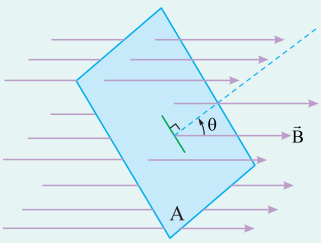
مشاوره در این سؤال دو مطلب مهم، یعنی قانون القای الکترومغناطیسی فاراده و قانون لنز، به صورت ترکیبی مطرح شده‌اند. از این دو مطلب سؤالات متعددی در کنکورهای اخیر مطرح شده‌اند.

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

شار مغناطیسی: مجموعهٔ خطوط میدان مغناطیسی که از یک سطح می‌گذرند، شار مغناطیسی نام دارد. شار مغناطیسی، کمیتی نرده‌ای است و برای میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ که از مدار بسته‌ای (مثلاً یک حلقه) به مساحت A می‌گذرد، از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\Phi = AB\cos\theta$$



Φ : شار مغناطیسی (Wb)

A : مساحت سطح مدار بسته (m^2)

B : اندازهٔ میدان مغناطیسی یکنواخت (T)

θ : زاویهٔ بین بردار میدان مغناطیسی و نیم‌خط عمود بر سطح حلقه

قانون القای الکترومغناطیسی فاراده: هرگاه شار مغناطیسی‌ای که از مدار بسته‌ای می‌گذرد تغییر کند، نیروی محرکه‌ای در آن القا می‌شود که بزرگی آن با آهنگ تغییر شار مغناطیسی متناسب است:

$$\varepsilon_{av} = -N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

ε_{av} : نیروی محرکهٔ القایی متوسط (V)

N : تعداد دورها یا حلقه‌های مدار

$\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$: آهنگ تغییر شار مغناطیسی (Wb/s)

$$I_{av} = \frac{\varepsilon_{av}}{R}$$

I_{av} : جریان القایی متوسط (A)

R : مقاومت الکتریکی مدار (Ω)

اگر فقط اندازهٔ میدان مغناطیسی تغییر کند، رابطهٔ قانون القای الکترومغناطیسی فاراده به صورت زیر درمی‌آید:

$$\varepsilon_{av} = -N\,A\cos\theta\frac{\Delta B}{\Delta t}$$

$\frac{\Delta B}{\Delta t}$: آهنگ تغییر میدان مغناطیسی (T/s)

قانون لنز: جریان حاصل از نیروی محرکهٔ القایی در یک مدار یا پیچه در جهتی است که آثار مغناطیسی ناشی از آن، با عامل به‌وجودآورندهٔ جریان القایی، یعنی تغییر شار مغناطیسی، مخالفت می‌کند.

- علامت منفی در رابطهٔ قانون فاراده، نشان‌دهندهٔ همین مخالفت است.
- از قانون لنز برای تعیین جهت جریان القایی استفاده می‌شود.

الف) وقتی شار افزایشی است: میدان القایی (ثانویه) در جهت مخالف میدان اصلی (اولیه) است تا از این راه با افزایش شار مخالفت کند:

$\vec{B}$ اصلی ← $\vec{B}'$ القایی →

ب) وقتی شار کاهشی است: میدان القایی (ثانویه) هم‌جهت با میدان اصلی (اولیه) است تا از این راه با کاهش شار مخالفت کند:

$\vec{B}$ اصلی ← $\vec{B}'$ القایی ←

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: با استفاده از رابطهٔ قانون القای الکترومغناطیسی فاراده، اندازهٔ نیروی محرکهٔ القایی متوسط را به دست می‌آوریم:

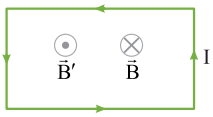
$$\varepsilon_{av} = -N\,A\cos\theta\times\frac{\Delta B}{\Delta t} \xrightarrow[\theta=0^\circ,\ \frac{\Delta B}{\Delta t}=300\,G/s=3\times10^{-2}\,T/s]{N=1,\ A=400\,cm^2=4\times10^{-2}\,m^2}$$

$$\varepsilon_{av} = -1\times4\times10^{-2}\times\cos0^\circ\times3\times10^{-2} \Rightarrow |\varepsilon_{av}| = 12\times10^{-4}\,V$$

گام دوم: اندازهٔ جریان القایی متوسط را محاسبه می‌کنیم:

$$|I_{av}| = \frac{|\varepsilon_{av}|}{R} = \frac{12\times10^{-4}}{2} = 6\times10^{-4}\,A = 0/6\,mA$$

گام سوم: از آن‌جا که شار مغناطیسی عبوری از قاب، در حال افزایش است، بنا به قانون لنز، جهت میدان مغناطیسی القایی $\vec{B}'$ در خلاف جهت میدان مغناطیسی اصلی $\vec{B}$ عمل می‌کند و برون‌سو می‌شود:



با توجه به به قاعدهٔ دست راست، جهت جریان القایی در این قاب باید به صورت پادساعتگرد باشد تا $\vec{B}'$ به صورت برون‌سو باشد.

گول نخوری

اگر از قاعدهٔ دست راست، درست استفاده نکنید یا به هر دلیل دیگری، جهت $\vec{B}'$ را برعکس به دست آورید، در دام گزینهٔ (۲) می‌افتید.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶۸ در ظرفی استوانه‌ای به مساحت مقطع $50\ cm^2$، $4\ L$ مایع با چگالی $1/7\ g/cm^3$ ریخته شده است. اگر فشار هوای محیط $74\ cmHg$ باشد، فشار در کف ظرف چند کیلوپاسکال است؟ $(\rho_{جیوه} = 13/6\ g/cm^3 \ , \ g = 10\ N/kg)$

۱) $114/24$
۲) $103/36$
۳) $104/72$
۴) 102

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint

ابتدا جرم و وزن مایع درون ظرف را حساب کنید. سپس فشار پیمانه‌ای وارد بر کف ظرف را از رابطهٔ $P = \frac{F}{A}$ محاسبه کنید. در پایان، با افزودن فشار هوای محیط به فشار پیمانه‌ای، فشار در کف ظرف را برحسب کیلوپاسکال به دست آورید.

درس Box

۱) چگالی: نسبت جرم به حجم یک مادهٔ همگن را چگالی آن می‌گوییم:

$$\rho = \frac{m}{V}$$

ρ: چگالی (kg/m^3)

m: جرم (kg)

V: حجم (m^3)

۲) فشاری که بر یک سطح فرضی درون شاره وارد می‌شود از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$P = \frac{F}{A}$$

P: فشار $(Pa$ یا $N/m^2)$

F: اندازهٔ نیروی عمودی وارد بر سطح (N)

A: مساحت سطح (m^2)

فشار کل (مطلق) یک جسم که بر سطحی وارد می‌شود، مجموع فشار پیمانه‌ای، یعنی فشار ناشی از جسم و فشار هوای محیط است:

$$P = P_g + P_\circ$$

۳) فشار پیمانه‌ای یک مایع از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$P_g = \rho g h$$

P_g: فشار پیمانه‌ای (Pa)

ρ: چگالی مایع (kg/m^3)

g: شتاب گرانش در سطح زمین (N/kg)

h: ارتفاع یا عمق مایع (m)

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: با استفاده از رابطهٔ چگالی، جرم جسم و سپس وزن آن را حساب می‌کنیم:

$$m = \rho V \xrightarrow[V=4\ L]{\rho=1/7\ g/cm^3=1/7\ kg/L} m = 1/7 \times 4 = 6/8\ kg$$

$$W = mg = 6/8 \times 10 = 68\ N$$

گام دوم: فشار پیمانه‌ای مایع وارد بر کف ظرف را به دست می‌آوریم:

$$P = \frac{F}{A} \xrightarrow[A=50\ cm^2=50\times10^{-4}\ m^2]{F=W=68\ N} P = \frac{68}{50\times10^{-4}} = 13600\ Pa$$

گام سوم: فشار مطلق (کل) در کف ظرف را محاسبه می‌کنیم:

$$P = P_\circ + P_g \xrightarrow{P_\circ=74\ cm\ Hg=13600\times10\times\frac{74}{100}=7/4\times13600\ Pa} P = 7/4\times13600 + 13600$$

$$= 8/4\times13600 = 114240\ Pa = 114/24\ kPa$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

یه‌جور دیگه

اگر مایعی به چگالی ρ و ارتفاع h داشته باشیم و فشار پیمانه‌ای آن را برحسب cmHg بخواهیم، می‌توان نوشت:

$$P_g = \frac{\rho}{\rho_{Hg}} \times h$$

h : ارتفاع مایع برحسب (cm)

بر این اساس، فشار پیمانه‌ای مایع برحسب سانتی‌متر جیوه به دست می‌آید:

$$P_g = \frac{\rho}{\rho_{Hg}} \times h = \frac{۱/۷}{۱۳/۶} \times ۸۰ = ۱۰ \text{ cmHg}$$

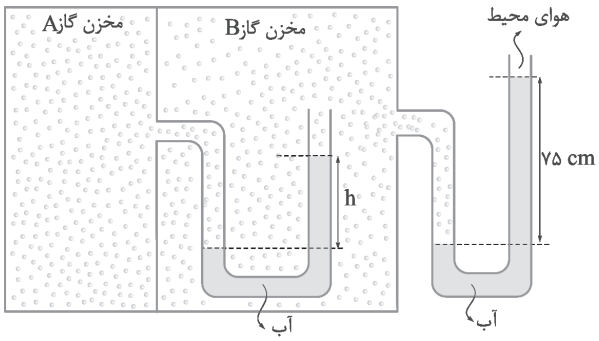
سپس فشار مطلق (کل) را حساب می‌کنیم:

$$P = P_{\circ} + P_g = ۷۴ + ۱۰ = ۸۴ \text{ cmHg} \Rightarrow P = ۸۴ \text{ cmHg} \times \frac{۱۳۶۰ \text{ Pa}}{۱ \text{ cmHg}}$$

$$\Rightarrow P = ۱۱۴۲۴۰ \text{ Pa} = ۱۱۴/۲۴ \text{ kPa}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶۹ در شکل زیر، فشار گاز مخزن A برابر ۱۱۰ kPa و فشار هوای محیط ۹۶ kPa است. اگر چگالی آب $1\ g/cm^3$ باشد، مقدار h برابر چند سانتی‌متر است؟ $(g = 10\ N/kg)$



۱) ۳۵
۲) ۴۵
۳) ۵۵
۴) ۶۵

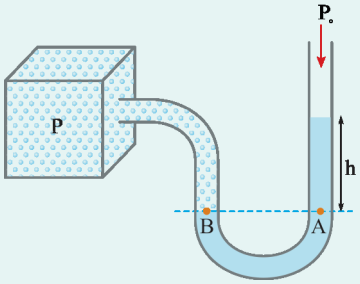
مشاوره این سؤال برگرفته از مسئلهٔ شمارهٔ ۱۴ صفحهٔ ۵۰ کتاب درسی فیزیک (۱) است. پرسش‌ها و تمرین‌های کتاب درسی را جدی بگیرید.

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint ابتدا فشار گاز مخزن B را به دست آورید، سپس رابطهٔ فشار بین دو مخزن A و B را بنویسید تا ارتفاع h را پیدا کنید.

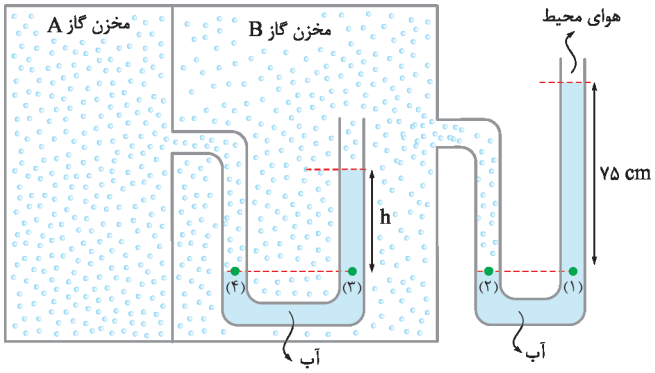
درس Box

در لوله‌های U‌شکل یا ظروف مشابه، اگر یک سطح افقی فرضی را از طرفین لوله بگذرانیم، به طوری که زیر آن سطح فقط یک نوع مایع به صورت پیوسته قرار گیرد، فشار مطلق در طرفین لوله روی این سطح برابر است. مثلاً در شکل روبه‌رو، فشار گاز درون مخزن از فشار هوای بیرون بیشتر است، اما $P_B = P_A$.



پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: فشار گاز مخزن B را به دست می‌آوریم:



$$P_2 = P_1 \xrightarrow{P_B = P_2} P_B = P_0 + \rho g h_1$$

$$\xrightarrow[h_1 = 75\ cm = 0/75\ m,\ P_0 = 96\ kPa = 96000\ Pa]{\rho = 1\ g/cm^3 = 10^3\ kg/m^3,\ g = 10\ N/kg} P_B = 96000 + 10^3 \times 10 \times \frac{75}{100} = 96000 + 7500 = 103500\ Pa$$

گام دوم: فشار دو نقطهٔ (۳) و (۴) را برابر با هم قرار می‌دهیم و ارتفاع h را حساب می‌کنیم:

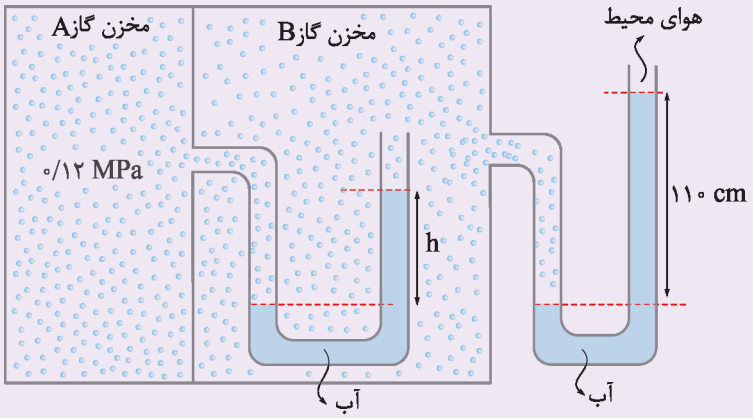
$$P_4 = P_3 \xrightarrow{P_4 = P_A} P_A = P_B + \rho g h \xrightarrow[P_B = 103500\ Pa]{P_A = 110\ kPa = 110000\ Pa} 110000 = 103500 + 10^3 \times 10 \times h$$

$$\Rightarrow 6500 = 10^4 h \Rightarrow h = 0/65\ m = 65\ cm$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

در شکل زیر مقدار h چند سانتی‌متر است؟ فشار هوای محیط را ۱۰۱ kPa و چگالی آب را ۱۰۰۰ kg/m^3 بگیرید.

(فیزیک (۱) ـ مسئلهٔ ۱۴ صفحهٔ ۵۰ کتاب درسی)



SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷۰ **خودرویی به جرم ۱۶۰۰ kg در مسیری افقی، در مدت ۵ s تندی خود را از ۱۸ km / h به ۵۴ km / h می‌رساند. توان متوسط خودرو برای انجام این کار چند کیلووات است؟ (نیروهای اتلافی را نادیده بگیرید.)**

۱) ۱۶

۲) ۳۲

۳) ۱۶۰

۴) ۳۲۰

مشاوره مشابه این سؤال، در کنکورهای قدیم (مثلاً کنکور ۱۳۸۱ ریاضی) مطرح شده است. به طور کلی به خاطر داشته باشید که مباحث کار و انرژی، به راحتی با مطالب حرکت‌شناسی و یا دینامیک، ترکیب می‌شوند.

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

رابطهٔ توان متوسط:

$$P_{av} = \frac{W}{\Delta t}$$

$$W = Fd\cos\theta$$

P_{av} : توان متوسط (W)

W : کار نیروی F (J)

Δt : بازهٔ زمانی

d : جابه‌جایی (m)

θ : زاویهٔ بین نیروی $\vec{F}$ و جابه‌جایی $\vec{d}$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: تندی‌های اولیه و نهایی خودرو را برحسب m/s به دست آورده و شتاب آن را در این مدت محاسبه می‌کنیم:

$$v_1 = 18\ km/h = 18 \div 3/6 = 5\ m/s$$

$$v_2 = 54\ km/h = 54 \div 3/6 = 15\ m/s$$

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{15-5}{5} = 2\ m/s^2$$

گام دوم: به کمک قانون دوم نیوتون، نیروی متوسط خالص وارد بر خودرو را پیدا می‌کنیم:

$$F = F_{av} = ma_{av} = 1600 \times 2 = 3200\ N$$

سرعت متوسط خودرو را نیز در این بازهٔ زمانی حساب می‌کنیم:

$$v_{av} = \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{5+15}{2} = 10\ m/s$$

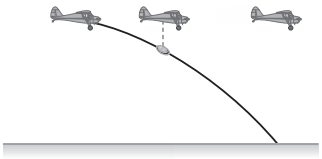
گام سوم: توان متوسط خودرو را به دست می‌آوریم:

$$P_{av} = \frac{W}{\Delta t} = \frac{Fd\cos\theta}{\Delta t} \xrightarrow{v_{av} = \frac{d}{\Delta t}} P_{av} = Fv_{av}\cos\theta = 3200 \times 10 \times \cos 0^\circ = 32000\ W$$

$$\Rightarrow P_{av} = 32\ kW$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷۱ در شکل زیر، از هواپیمایی که در ارتفاع ۳۰۰ متری از سطح زمین و با تندی $50\ m/s$ پرواز می‌کند، بسته‌ای به جرم $200\ kg$ رها می‌شود. اگر تندی بسته هنگام برخورد به زمین برابر $60\ m/s$ باشد، کار نیروی مقاومت هوای بر روی بسته از لحظهٔ رهاشدن تا لحظهٔ رسیدن به سطح زمین، برابر چند کیلوژول است؟ $(g = 10\ N/kg)$



۱) -240

۲) 240

۳) -490

۴) 490

مشاوره این سؤال، برگرفته از مسئلهٔ ۱۴ صفحهٔ ۸۰ کتاب درسی فیزیک است که با تغییراتی در این‌جا مطرح شده است.

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

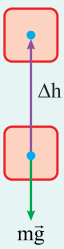
کار نیروی وزن (W_{mg}): $W_{mg} = -mg\Delta h$

m: جرم (kg)

g: شتاب گرانش زمین $(g = 9/8\ N/kg \simeq 10\ N/kg)$

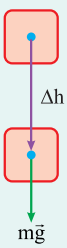
$\Delta h = h_2 - h_1$ جابه‌جایی قائم (m)

الف) اگر جسم رو به بالا جابه‌جا شود:



$\Delta h > 0 \Rightarrow W_{mg} < 0$

ب) اگر جسم رو به پایین جابه‌جا شود:



$\Delta h < 0 \Rightarrow W_{mg} > 0$

کار یک نیرو با توجه به شرایط مختلف، ممکن است بزرگ‌تر از صفر، کوچک‌تر از صفر یا برابر صفر باشد:

$\theta = 90^\circ \rightarrow W_F = 0$

$\theta < 90^\circ \rightarrow W_F > 0$

$\theta > 90^\circ \rightarrow W_F < 0$

کار، یک کمیت نرده‌ای است، پس به صورت نرده‌ای نیز جمع می‌شود؛ یعنی کار برآیند نیروهای وارد بر یک جسم در یک جابه‌جایی معین، با جمع جبری کار هر یک از نیروهای وارد بر جسم در این جابه‌جایی برابر است.

قضیهٔ کار ـ انرژی جنبشی: کار کل انجام‌شده روی یک جسم در یک جابه‌جایی معین، با تغییر انرژی جنبشی آن برابر است:

$W_t = K_2 - K_1$

W_t: کار کل (کار برآیند نیروها) (J)

K_1: انرژی جنبشی در وضعیت ۱ (J)

K_2: انرژی جنبشی در وضعیت ۲ (J)

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

رابطهٔ انرژی جنبشی:

$$K = \frac{۱}{۲}mv^۲$$

K : انرژی جنبشی (J)

m : جرم (kg)

v : تندی (m/s)

پاسخ خیلی تشریحی ✔ قضیهٔ کار ـ انرژی جنبشی را برای این بسته، از لحظهٔ رهاشدن از هواپیما تا لحظهٔ برخورد به زمین می‌نویسیم. توجه داشته باشید که تندی هواپیما با تندی بسته در لحظهٔ رهاشدن، برابر است. هم‌چنین دو نیروی وزن و مقاومت هوا در طول مسیر این بسته بر آن اثر می‌کنند:

$$K_۲ - K_۱ = W_t \Rightarrow \frac{۱}{۲}mv_۲^۲ - \frac{۱}{۲}mv_۱^۲ = W_{mg} + W_{f_D}$$

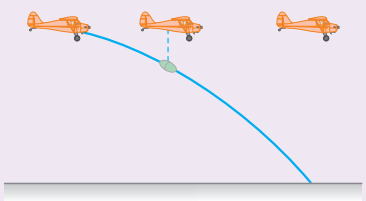
$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}m(v_۲^۲ - v_۱^۲) = mgh + W_{f_D} \Rightarrow \frac{۱}{۲}\times ۲۰۰(۶۰^۲ - ۵۰^۲) = ۲۰۰\times ۱۰\times ۳۰۰ + W_{f_D}$$

$$\Rightarrow ۱۰۰\times ۱۱۰۰ = ۶\times ۱۰^۵ + W_{f_D} \Rightarrow W_{f_D} = ۱۱\times ۱۰^۴ - ۶۰\times ۱۰^۴ = -۴۹۰۰۰۰\,J$$

$$\Rightarrow W_{f_D} = -۴۹۰\,kJ$$

در شکل زیر، هواپیمایی که در ارتفاع $۳۰۰\,m$ از سطح زمین و با تندی $۵۰\,m/s$ پرواز می‌کند، بسته‌ای را برای کمک به آسیب‌دیدگان زلزله رها می‌کند. تندی بسته هنگام برخورد به زمین چه‌قدر است؟ (از تأثیر مقاومت هوا روی حرکت بسته چشم‌پوشی کنید.)

(فیزیک (۱) ـ مسئلهٔ ۱۴ صفحهٔ ۸۰ کتاب درسی)



SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷۲ درون گرماسنجی، $800\ g$ آب ریخته شده و دمای مجموعه برابر $25\ ^\circ C$ است. اگر $1/2\ kg$ آب با دمای $80\ ^\circ C$ به گرماسنج اضافه کنیم، پس از ایجاد تعادل گرمایی، دمای مجموعه به $55\ ^\circ C$ می‌رسد. ظرفیت گرمایی گرماسنج در SI کدام است؟ (گرمای ویژهٔ آب برابر $4200\ \frac{J}{kg.^\circ C}$ و اتلاف گرمایی، ناچیز است.)

۱) ۷۰۰ ۲) ۸۴۰

۳) ۷۰۰۰ ۴) ۸۴۰۰

مشاوره سؤالات مربوط به دمای تعادل، دو نوع هستند. یک نوع بدون تغییر حالت ماده و دیگری همراه با تغییر حالت ماده. این سؤال از نوع اول است.

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

ظرفیت گرمایی: وقتی در اثر انتقال گرما، دمای جسمی تغییر می‌کند، نسبت گرما به تغییر دما را ظرفیت گرمایی می‌گویند و به جنس و جرم آن جسم بستگی دارد:

$$C = \frac{Q}{\Delta T}$$

Q: گرما (J)

C: ظرفیت گرمایی (J/K)

ΔT: تغییر دما (K)

مثلاً وقتی می‌گوییم ظرفیت گرمایی جسمی $500\ J/K$ است، یعنی اگر به آن جسم $500\ J$ گرما بدهیم، دمای آن $1\ K$ یا $1\ ^\circ C$ افزایش می‌یابد.

گرمای ویژه: گرمای ویژهٔ هر جسم، مقدار گرمایی است که باید به یک کیلوگرم از آن جسم داده شود تا دمای آن یک درجهٔ سلسیوس یا یک کلوین افزایش یابد:

$$c = \frac{C}{m}$$

c: گرمای ویژه $(\frac{J}{kg.K})$

C: ظرفیت گرمایی (J/K)

m: جرم (kg)

گرمای ویژهٔ یک جسم به جنس مادهٔ تشکیل‌دهندهٔ آن و دما بستگی دارد.

برای جسمی که بدون تغییر حالت، در اثر تبادل گرمایی فقط دمای آن تغییر می‌کند، می‌توان نوشت:

$$Q = C\Delta T \Rightarrow Q = mc\Delta T$$

دمای تعادل: اگر دو یا چند جسم با دماهای مختلف در تماس با یکدیگر قرار گیرند، پس از مدتی، هم‌دما می‌شوند، یعنی دمای آن‌ها به مقدار یکسانی می‌رسد که دمای تعادل نام دارد. بنا به قرارداد، برای اجسامی که گرما می‌گیرند، $Q > 0$ و برای اجسامی که گرما از دست می‌دهند، $Q < 0$ است. براساس قانون پایستگی انرژی، همان قدر که اجسام گرم انرژی از دست می‌دهند، اجسام سرد انرژی می‌گیرند؛ پس جمع جبری این گرماها صفر می‌شود و داریم:

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 + \cdots = 0$$

مثلاً وقتی چند جسم متفاوت با گرماهای ویژهٔ c_1 و c_2 و c_3 و ... به جرم‌های m_1 و m_2 و m_3 و ... با دماهای اولیهٔ θ_1 و θ_2 و θ_3 و ... را در تماس با یکدیگر قرار دهیم و دمای تعادل آن‌ها θ باشد، می‌توان نوشت:

$$m_1c_1(\theta - \theta_1) + m_2c_2(\theta - \theta_2) + m_3c_3(\theta - \theta_3) + \cdots = 0$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ خیلی تشریحی ✔ در این‌جا با سه جسم سروکار داریم: ۱) گرماسنج ۲) آب اولیهٔ درون گرماسنج که دمای آن $25\ ^\circ C$ است. ۳) آب با دمای $80\ ^\circ C$ که بعداً به گرماسنج اضافه می‌شود. جمع جبری گرماهای مبادله‌شده بین این سه جسم، برابر با صفر است:

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0 \Rightarrow C_1\Delta\theta_1 + m_2c_2\Delta\theta_2 + m_3c_3\Delta\theta_3 = 0$$

$$\Rightarrow C_1(55-25) + 0/8\times 4200(55-25) + 1/2\times 4200(55-80) = 0$$

$$\Rightarrow C_1\times 30 + 100800 - 126000 = 0 \Rightarrow 30C_1 = 25200 \Rightarrow C_1 = 840\ \frac{J}{^\circ C}$$

نکته در این سؤال، ظرفیت گرمایی گرماسنج خواسته شده بود، بنابراین در محاسبات خود، جرم گرماسنج را لازم نداشتیم.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷۳ درون ظرفی استوانه‌ای، تا ارتفاع ۸۰ cm بنزین ریخته شده است. اگر دمای بنزین $60\ ^\circ C$ افزایش یابد، ارتفاع بنزین در این ظرف چند میلی‌متر تغییر می‌کند؟ (ضریب انبساط حجمی بنزین $10^{-3}\ \frac{1}{K}$ و انبساط ظرف، ناچیز است و تبخیر بنزین در اثر افزایش دما را ناچیز فرض کنید.)

۱) ۱/۶ ۲) ۴/۸ ۳) ۱۱ ۴) ۴۸

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint

در رابطهٔ انبساط حجمی مایع، به جای ΔV از $A\Delta h$ و به جای V_1 از Ah_1 استفاده کنید تا رابطه‌ای به صورت $\Delta h = h_1\beta\Delta T$ به دست آورید. سپس به کمک این رابطه، به راحتی تغییر ارتفاع بنزین را به دست آورید.

درس Box

انبساط حجمی: اگر در دمای T_1 حجم یک جسم، برابر V_1 و در دمای T_1 حجم آن برابر V_2 باشد، تجربه نشان می‌دهد که با افزایش دما، حجم جسم افزایش می‌یابد:

$$\Delta V = \beta V_1 \Delta T$$

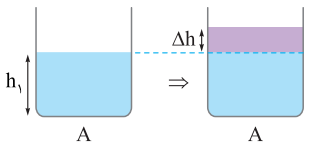
$\Delta V = V_2 - V_1$: تغییر حجم (m^3)

$\Delta T = T_2 - T_1$: تغییر دما (K) یا $(^\circ C)$

β : ضریب انبساط حجمی $(\frac{1}{K}$ یا $\frac{1}{^\circ C})$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: با توجه به این‌که ظرف، استوانه‌ای‌شکل است حجم بنزین درون آن در حالت اول، $V_1 = Ah_1$ و افزایش حجم آن، $\Delta V = A\Delta h$ است:



گام دوم: رابطهٔ انبساط حجمی را برای بنزین درون ظرف می‌نویسیم و تغییر ارتفاع آن راحساب می‌کنیم:

$$\Delta V = V_1\beta\Delta T \xrightarrow[\Delta V = A\Delta h]{V_1 = Ah_1} A\Delta h = Ah_1\beta\Delta T \Rightarrow \Delta h = h_1\beta\Delta T$$

$$\xrightarrow[\Delta T = \Delta\theta = 60\ ^\circ C]{h_1 = 80\ cm = 800\ mm,\ \beta = 10^{-3}\ \frac{1}{K}} \Delta h = 800 \times 10^{-3} \times 60 = 48\ mm$$

گول نخوری

پاسخ برحسب میلی‌متر خواسته شده، پس اگر ارتفاع ۸۰ cm را برحسب mm نویسید، در دام گزینهٔ (۲) می‌افتید.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷۴ مخزنی به حجم $40\ L$، حاوی $25\ g$ گاز هیدروژن است. اگر فشار این گاز برابر $7\ bar$ باشد، دمای آن چند درجهٔ فارنهایت است؟ ($R = 8\ \frac{J}{mol.K}$ و جرم مولی گاز هیدروژن $2\ g/mol$ است.)

۱) ۷

۲) ۴۴/۶

۳) ۵۴/۶

۴) ۲۸۰

مشاوره این تست، مشابه یکی از سؤالات کنکور خارج از کشور رشتهٔ ریاضی ۱۴۰۴ است. توجه کنید که شما در معادلهٔ حالت گاز آرمانی، دما را برحسب کلوین به دست می‌آورید اما در این‌جا دمای گاز برحسب درجهٔ فارنهایت خواسته شده است.

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

۱) **معادلهٔ حالت گاز آرمانی (کامل):**

$$PV = nRT$$

P: فشار مطلق (Pa)

V: حجم (m^3)

n: تعداد مول (mol)

$$n = \frac{m}{M}$$

R: ثابت جهانی گازها $(\frac{J}{mol.K})$

T: دما (K)

m: جرم گاز (g)

M: جرم مولی گاز (g/mol)

۲) **رابطهٔ بین یکاهای دما (درجهٔ سلسیوس، درجهٔ فارنهایت و کلوین):**

$$T = \theta + ۲۷۳$$

$$F = ۱/۸\theta + ۳۲$$

T: دما (K)

θ: دما $(^\circ C)$

F: دما $(^\circ F)$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: تعداد مول‌های گاز را به دست می‌آوریم:

$$n = \frac{m}{M} = \frac{۲۵}{۲}\ mol$$

گام دوم: به کمک معادلهٔ حالت گاز آرمانی، دمای گاز را برحسب کلوین حساب می‌کنیم:

$$PV = nRT \Rightarrow T = \frac{PV}{nR} \xrightarrow[n=\frac{۲۵}{۲}\ mol,\ R=۸\ \frac{J}{mol.K}]{P=۷\ bar=۷\times۱۰^۵\ Pa,\ V=۴۰\ L=۴۰\times۱۰^{-۳}\ m^۳} T = \frac{۷\times۱۰^۵\times۴۰\times۱۰^{-۳}}{\frac{۲۵}{۲}\times۸} = ۲۸۰\ K$$

گام سوم: دمای به‌دست‌آمده را ابتدا برحسب درجهٔ سلسیوس و سپس برحسب درجهٔ فارنهایت پیدا می‌کنیم:

$$T = \theta + ۲۷۳ \Rightarrow ۲۸۰ = \theta + ۲۷۳ \Rightarrow \theta = ۷\ ^\circ C$$

$$F = ۱/۸\theta + ۳۲ \Rightarrow F = ۱/۸\times۷ + ۳۲ = ۴۴/۶\ ^\circ F$$

گول نخوری اگر دمای به‌دست‌آمده برحسب کلوین را به درجهٔ فارنهایت تبدیل نکنید، در دام گزینهٔ (۴) می‌افتید.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

مخزنی به حجم ۱۶ لیتر در دمای ۴۷ درجهٔ سلسیوس، پر از گاز هلیم است. اگر فشار پیمانه‌ای گاز برابر با فشار هوا یعنی 10^5 پاسکال باشد، جرم گاز چند گرم است؟ $(M_{He} = 4 g/mol \text{ و } R = 8 \frac{J}{mol.K})$

(سؤال ۷۴ کنکور ریاضی ۱۴۰۴ (خارج از کشور))

۱) ۲۵ ۲) ۱۶ ۳) ۵ ۴) ۴

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷۵ در چرخهٔ ماشین گرمایی درون‌سوز بنزینی، کدام فرایندها را می‌توان فرایند بی‌دررو در نظر گرفت؟

الف) ضربهٔ مکش

ب) ضربهٔ تراکم

پ) ضربهٔ قدرت

ت) ضربهٔ خروج گاز

۱) ب ـ پ

۲) ب ـ ت

۳) الف ـ پ

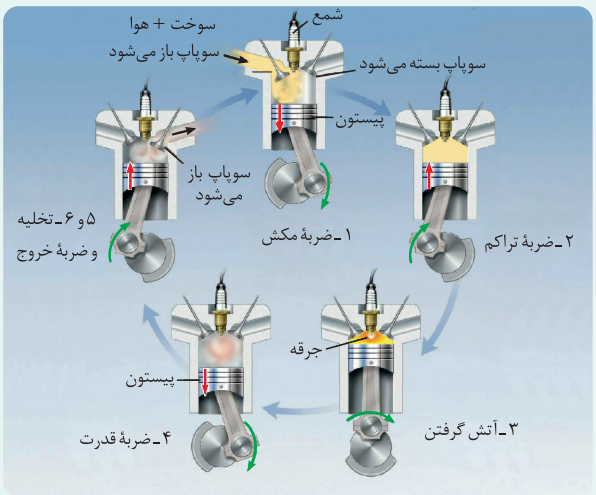
۴) الف ـ ت

مشاوره تا قبل از کنکور ۱۴۰۳، فرایندهای چرخهٔ موتور بنزینی در سؤال‌های کنکور، جایگاهی نداشتند و به همین دلیل، بسیاری از داوطلبان کنکور، آن‌ها را کنار می‌گذاشتند. اما وقتی در کنکورهای ریاضی ۱۴۰۳ و ۱۴۰۴ نوبت اول و هم‌چنین کنکور خارج از کشور ۱۴۰۳ از این درس سؤالاتی در کنکور مطرح شد، توجه خاصی به این فرایندها پیدا شده و داوطلبان کنکور به این باور رسیده‌اند که سؤالات ترمودینامیک از چنین مباحثی هم می‌تواند مطرح شود.

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

ماشین بنزینی چرخه‌ای را طی می‌کند که شامل شش فرایند است. از این شش فرایند، چهار فرایند همراه با حرکت پیستون‌اند که به آن‌ها ضربه می‌گویند.



۱) **ضربهٔ مکش:** با پایین‌آمدن پیستون، مخلوط بنزین و هوا در فشار ثابت جو از طریق دریچهٔ ورودی وارد استوانه شده و وقتی پیستون به پایین‌ترین وضعیت خود رسید، این دریچه بسته شده و مخلوط بنزین و هوا در داخل استوانه محبوس می‌شوند.

۲) **ضربهٔ تراکم:** پیستون بالا می‌آید، مخلوط را به سرعت متراکم کرده و دما و فشار آن را به صورت بی‌دررو، تا حد زیادی بالا می‌برد.

۳) **آتش‌گرفتن:** هنگامی که پیستون به بالاترین وضعیت خود رسید، شمع جرقه می‌زند، مخلوط آتش می‌گیرد و دما و فشار آن در حجم ثابت تا مقدار زیادی بالا می‌رود.

۴) **ضربهٔ قدرت:** در این مرحله، در اثر فشار زیاد، مخلوط منبسط می‌شود و حجم آن از V_1 به V_2 می‌رسد. این انبساط به سرعت رخ می‌دهد. بنابراین، می‌توان آن را بی‌دررو در نظر گرفت. در نتیجه در این انبساط، فشار و دمای مخلوط کاهش می‌یابند. در این مرحله، مخلوط پیستون را به شدت به پایین می‌راند و روی آن کار انجام می‌دهد. این کار توسط میل‌لنگ به اجزای دیگر ماشین منتقل می‌شود.

۵) **تخلیه:** در حالی که پیستون در پایین‌ترین وضعیت (حجم V_2) قرار دارد، سوپاپ دریچهٔ خروجی باز می‌شود و قسمتی از محصولات احتراق به صورت دود از دریچهٔ خروجی خارج می‌شود، تا این‌که فشار گاز داخل استوانه با فشار جو یکسان شود. در این مرحله، پیستون ساکن است.

۶) **ضربهٔ خروج گاز:** پیستون بالا می‌آید و بقیهٔ محصولات احتراق را بیرون می‌راند و حجم فضای بالای پیستون از V_2 به مقدار اولیهٔ V_1 می‌رسد.

پاسخ خیلی تشریحی با توجه به متن درس‌باکس، مراحل ۲ و ۴، یعنی ضربهٔ تراکم و ضربهٔ قدرت را می‌توان فرایند بی‌دررو در نظر گرفت.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷۶ کدام مورد درست است؟

۱) عنصرهایی از جدول تناوبی با عددهای اتمی ۱ تا ۹۲، در طبیعت یافت می‌شوند.

۲) جرم یک نمونه طبیعی از عنصر هیدروژن با گذشت زمان ثابت باقی می‌ماند.

۳) زمین، یک سیارهٔ سنگی است و در بین ۸ عنصر فراوان‌تر آن، عنصر نافلزی وجود ندارد.

۴) امروزه با پیشرفت علم، تبدیل فلز پلاتین ($_{78}Pt$) به طلا ($_{79}Au$) امکان‌پذیر است.

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔

با پیشرفت علم شیمی و فیزیک، انسان می‌تواند طلا تولید کند، اما هزینهٔ تولید آن به اندازه‌ای زیاد است که صرفهٔ اقتصادی ندارد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

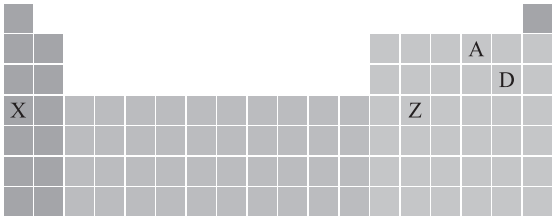
گزینهٔ (۱): *درسته که* ۹۲ عنصر در طبیعت یافت می‌شوند، اما همهٔ این عنصرها جزء ۹۲ عنصر اول جدول تناوبی نیستند! عنصر تکنسیم با عدد اتمی ۴۳، یک عنصر ساختگی است و در طبیعت یافت نمی‌شود.

گزینهٔ (۲): یک نمونه طبیعی از عنصر هیدروژن، شامل ۳ ایزوتوپ $_{1}^{1}H$، $_{1}^{2}H$ و $_{1}^{3}H$ است که $_{1}^{3}H$ پرتوزا بوده و با گذشت زمان، متلاشی می‌شود؛ بنابراین جرم نمونه تغییر می‌کند.

گزینهٔ (۳): زمین یک سیاره سنگی است، اما در بین ۸ عنصر فراوان‌تر آن، ۲ عنصر نافلزی (اکسیژن و گوگرد) وجود دارد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷۷ با در نظر گرفتن موقعیت عناصر A، D، X و Z در جدول دوره‌ای، کدام مطلب درست است؟



۱) عنصر A، فراوان‌ترین گاز سازندهٔ هواکره است که در اتم آن شمار الکترون‌هایی با $l=0$ با شمار الکترون‌هایی با $l=1$ برابر است.

۲) عنصر D، گازی زردرنگ با خاصیت رنگ‌بری است که فقط در دماهایی بالاتر از $200\ ^\circ C$ می‌تواند با گاز هیدروژن واکنش دهد.

۳) عنصر X، تشکیل‌دهندهٔ یونی ضروری برای تنظیم عملکرد دستگاه عصبی بوده و بزرگ‌ترین شعاع اتمی را در بین ۳۶ عنصر اول جدول دارد.

K^+

۴) عنصر Z، دومین شبه‌فلز گروه ۱۴ جدول دوره‌ای و عنصر اصلی سازندهٔ سلول‌های خورشیدی است.

سیلیسیم

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔ ابتدا عنصرها را مشخص می‌کنیم:

$A \rightarrow {}_8O$

$D \rightarrow {}_{17}Cl$

$X \rightarrow {}_{19}K$

$Z \rightarrow {}_{32}Ge$

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): عنصر A، اکسیژن است، اما فراوان‌ترین گاز سازندهٔ هوا، نیتروژن می‌باشد. در ضمن در اتم ${}_8O$، شمار الکترون‌ها با $l=0$ (زیرلایه‌های s) و شمار الکترون‌ها با $l=1$ (زیرلایه‌های p) برابر است:

$${}_8O: \underbrace{1s^2 2s^2}_{\text{۴ الکترون با } l=0}\ \underbrace{2p^4}_{\text{۴ الکترون با } l=1}$$

گزینهٔ (۲): D، کلر بوده که در دمای اتاق، گازی زردرنگ با خاصیت رنگ‌بری و گندزدایی است. گاز کلر در دمای اتاق نیز می‌تواند با گاز هیدروژن واکنش دهد.

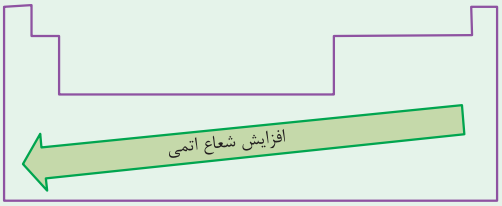
نام هالوژن	شرایط واکنش با گاز هیدروژن
فلوئور	حتی در دمای $-200\ ^\circ C$ به سرعت واکنش می‌دهد.
کلر	در دمای اتاق به آرامی واکنش می‌دهد.
برم	در دمای $200\ ^\circ C$ واکنش می‌دهد.
ید	در دمای بالاتر از $400\ ^\circ C$ واکنش می‌دهد.

گزینهٔ (۳): عنصر X، پتاسیم است. یون K^+ برای تنظیم عملکرد دستگاه عصبی ضروری است. *از اون‌جایی‌که* در یک دوره از راست به چپ و در یک گروه از بالا به پایین، شعاع اتمی افزایش می‌یابد، در بین ۳۶ عنصر اول جدول، نخستین عنصر دورهٔ چهارم، یعنی ${}_{19}K$ بیشترین شعاع اتمی را دارد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

نکته

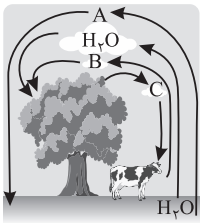
با توجه به روند تغییر شعاع اتمی در یک گروه و دوره، هر چه عنصری در جدول دوره‌ای، سمت چپ‌تر و پایین‌تر باشد. شعاع آن بیشتر است و بالعکس! هر چه عنصری، سمت راست‌تر و بالاتر باشد، شعاع آن کم‌تر است.



گزینهٔ (۴): عنصر Z، همان ژرمانیم است که دومین شبه‌فلز گروه ۱۴ محسوب می‌شود! اما عنصر اصلی سازندهٔ سلول‌های خورشیدی، سیلیسیم است و نه ژرمانیم!

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷۸ با توجه به شکل زیر که برهم‌کنش هواکره با زیست‌کره را نشان می‌دهد، کدام موارد از مطالب زیر، درست است؟



الف) نسبت شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی به پیوندی در ساختار مولکول C، دو برابر این نسبت در ساختار مولکول B است.

ب) گاز A یکی از واکنش‌دهنده‌های فرایند هابر است.

پ) در هوای مایع با دمای $-۲۰۰\ ^\circ C$، هر سه مادهٔ A، B و C وجود دارند.

ت) گاز C دارای دگرشکلی است که در لایهٔ دوم هواکره، درصد حجمی بیشتری نسبت به C دارد.

۱) الف و ب
۲) پ و ت
۳) الف و پ
۴) ب و ت

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✔

عبارت‌های «الف» و «ب» درست‌اند.

گیاهان برای رشد خود نیاز به نیتروژن دارند. جانداران ذره‌بینی، گاز نیتروژن هواکره را برای مصرف گیاهان در خاک تثبیت می‌کنند.

$$A \rightarrow N_2$$

گیاهان با بهره‌گیری از نور خورشید و مصرف کربن دی‌اکسید هواکره (همان فرایند فتوسنتز)، اکسیژن مورد نیاز جانداران را تولید می‌کنند.

فرایند فتوسنتز: $6CO_2 + 6H_2O \rightarrow C_6H_{12}O_6 + 6O_2$

- CO_2: گاز تولیدی در فرایند تنفس موجودات زنده و گاز مصرفی در فرایند فتوسنتز
- O_2: گاز تولیدی در فرایند فتوسنتز و گاز مصرفی در فرایند تنفس

$$B \rightarrow CO_2$$

$$C \rightarrow O_2$$

بررسی عبارت‌ها:

الف) نسبت شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی به پیوندی در مولکول‌های B و C به ترتیب برابر ۱ و ۲ است:

$$\ddot{O}=C=\ddot{O} \quad \frac{4}{4}=1$$

$$\ddot{O}=\ddot{O} \quad \frac{4}{2}=2$$

ب) گاز A همان نیتروژن است که یکی از واکنش‌دهنده‌های تولید آمونیاک به روش هابر است:

$$N_2(g)+3H_2(g) \rightleftharpoons 2NH_3(g)$$

پ) در هوای مایع با دمای $-۲۰۰\ ^\circ C$، کربن دی‌اکسید (CO_2) وجود ندارد. در مراحل تقطیر جزءبه‌جزء هوای مایع، این ماده در دمای $-۷۸\ ^\circ C$ به حالت جامد از مخلوط جدا می‌شود.

ت) گاز C، اکسیژن (O_2) است که به شکل مولکول‌های سه‌اتمی اوزون (O_3) نیز در هواکره یافت می‌شود. درسته که بیشترین مقدار اوزون در لایهٔ دوم (استراتوسفر) وجود دارد، اما دقت کنید که به طور کلی مقدار اوزون در هواکره کم است و درصد حجمی آن در هوا خیلی کم‌تر از اکسیژن است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷۹ با توجه به معادله‌های موازنه‌شدهٔ زیر، Y کدام ترکیب است؟

$$2Al + 2NaOH + 6H_2O \rightarrow 3H_2 + 2X$$

$$2X + H_2CO_3 \rightarrow Y + Al_2O_3 + 5H_2O$$

۱) جوش شیرین
۲) سود سوزآور
۳) سدیم کربنات
۴) سدیم کربید

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔ باید به کمک واکنش اول به X و سپس به کمک واکنش دوم، به Y برسیم. طبق قانون پایستگی جرم، شمار اتم‌های هر عنصر در دو سمت معادلهٔ یک واکنش باید برابر باشد؛ بنابراین خواهیم داشت:

$$\underbrace{2Al + 2NaOH + 6H_2O}_{2Al\,,\,2Na\,,\,14H\,,\,8O} \rightarrow \underbrace{3H_2}_{6H} + 2X$$

با توجه به این‌که ضریب X برابر ۲ است، در فرمول X، باید ۱ اتم Al، ۱ اتم Na، ۴ اتم H و ۴ اتم O وجود داشته باشد؛ بنابراین فرمول X را می‌توان به صورت $NaAlH_4O_4$ در نظر گرفت (در واقع به صورت $NaAl(OH)_4$ است).

حالا بریم سراغ واکنش دوم؛

$$\underbrace{2NaAlH_4O_4 + H_2CO_3}_{2Na,2Al,10H,11O,1C} \rightarrow Y + \underbrace{Al_2O_3 + 5H_2O}_{2Al,8O,10H}$$

پس در فرمول Y، باید ۲ اتم Na، ۱ اتم C و ۳ اتم O وجود داشته باشد، یعنی فرمول Y به صورت Na_2CO_3 بوده که همان سدیم کربنات است. دقت کنید که جوش شیرین همان سدیم هیدروژن کربنات $(NaHCO_3)$ می‌باشد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸۰ برای تولید متان از عناصر سازنده‌اش، مقداری گرافیت را با مقدار کافی گاز هیدروژن وارد ظرف کرده‌ایم (واکنش I). اگر واکنش (II) نیز به عنوان واکنش جانبی انجام شود و جرم متان تولیدشده، ۱/۶ برابر جرم اتان تولیدی باشد، چند درصد از گرافیت اولیه در واکنش (I) شرکت کرده است؟ $(H=1, C=12 : g.mol^{-1})$

I) $C(s)+2H_2(g) \rightarrow CH_4(g)$

II) $2C(s)+3H_2(g) \rightarrow C_2H_6(g)$

۱) ۴۰ ۲) ۶۰ ۳) ۴۵ ۴) ۵۵

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✔ جرم متان و اتان تولیدی را به ترتیب ۱/۶ و ۱ گرم در نظر می‌گیریم و شمار مول‌های گرافیت مصرف‌شده در هر واکنش را حساب می‌کنیم:

$$\begin{cases} 1/6\ g\ CH_4 \times \frac{1\ mol\ CH_4}{16\ g\ CH_4} \times \frac{1\ mol\ C}{1\ mol\ CH_4} = \frac{1}{10}\ mol\ C \\ 1\ g\ C_2H_6 \times \frac{1\ mol\ C_2H_6}{30\ g\ C_2H_6} \times \frac{2\ mol\ C}{1\ mol\ C_2H_6} = \frac{1}{15}\ mol\ C \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{10}+\frac{1}{15}=\frac{5}{30}=\frac{1}{6}\ mol\ C$$

پس می‌توان گفت کربن (گرافیت) اولیه، $\frac{1}{6}$ مول بوده، اما $\frac{1}{10}$ مول از آن در واکنش تولید متان شرکت کرده است، پس خواهیم داشت:

$$\text{درصد گرافیت شرکت‌کرده در واکنش (I)} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{6}} \times 100 = 60\%$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸۱ **اگر فرمول شیمیایی مس (II) منگنات و سدیم پرمنگنات به ترتیب به صورت $CuMnO_4$ و $NaMnO_4$ باشد، در هر واحد فرمولی از کلسیم پرمنگنات، ..... اتم وجود دارد و تبدیل یون پرمنگنات به منگنات، یک فرایند ..... به شمار می‌آید.**

۱) ۷ ـ کاهش
۲) ۱۱ ـ اکسایش
۳) ۷ ـ اکسایش
۴) ۱۱ ـ کاهش

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔ باید با توجه به فرمول ترکیب‌های داده‌شده و کاتیون‌های Cu^{2+} و Na^+، فرمول شیمیایی یون‌های منگنات و پرمنگنات را به دست آوریم:

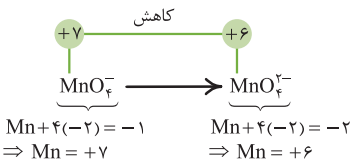
$$CuMnO_4 \begin{cases} Cu^{2+} \\ MnO_4^{2-} \text{ منگنات} \end{cases}$$

$$NaMnO_4 \begin{cases} Na^+ \\ MnO_4^- \text{ پرمنگنات} \end{cases}$$

به این ترتیب خواهیم داشت:

کلسیم پرمنگنات: $Ca^{2+}MnO_4^- \Rightarrow Ca(MnO_4)_2 \Rightarrow$ ۱۱ اتم

عدد اکسایش منگنز در یون‌های پرمنگنات و منگنات به ترتیب برابر ۷+ و ۶+ است؛ بنابراین تبدیل یون پرمنگنات به منگنات، یک فرایند کاهش به شمار می‌رود:



SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸۲ کدام گزینه درست است؟ $(H = ۱ , C = ۱۲ , O = ۱۶ : g.mol^{-۱})$

۱) در محلول ۵۰ درصد جرمی اتانول در آب برخلاف محلول ۵۰ درصد جرمی استون در آب، آب نقش حلال را دارد.

۲) چگالی هگزان از آب کم‌تر بوده و عامل بنفش‌رنگ‌بودن مخلوط همگن ید در هگزان، حلال آن است.

۳) هوا و آب دریا از جمله محلول‌هایی هستند که از یک حل‌شونده و چند حلال تشکیل شده‌اند.

۴) جاذبهٔ بین مولکولی ترکیبات هیدروژن‌دار عناصر دورهٔ دوم گروه‌های ۱۵ و ۱۷ جدول دوره‌ای، برخلاف گروه ۱۴، از نوع پیوند هیدروژنی است.

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔ ترکیب‌های هیدروژن‌دار عناصر دورهٔ دوم در گروه‌های ۱۴، ۱۵ و ۱۷ به ترتیب به صورت $CH_۴$، $NH_۳$ و HF است که جاذبهٔ بین مولکولی HF و $NH_۳$ از نوع هیدروژنی است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): در محلول ۵۰٪ جرمی اتانول و استون در آب، جرم حلال و حل‌شونده یکسان است و با توجه به جرم مولی بیشتر استون $(C_۳H_۶O)$ و اتانول $(C_۲H_۶O)$ نسبت به آب و در نتیجه کم‌تربودن مول آن‌ها، آب، حلال و استون و اتانول، حل‌شونده محسوب می‌شوند.

نکته برای مشخص کردن حلال و حل‌شونده، حلال ماده‌ای است که شمار مول بیشتری دارد، برای مثال در انحلال ۱ مول الکل در ۲ مول آب، آب، حلال و الکل، حل‌شونده محسوب می‌شود.

گزینهٔ (۲): هگزان بی‌رنگ بوده و جزء حلال‌های آلی است که چگالی کم‌تری از آب دارد.

گزینهٔ (۳): هوا و آب دریا، حاوی یک حلال و چند حل‌شونده هستند، نه بالعکس!

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸۳ در واکنش تخمیر یک کیلوگرم از محلول آبی گلوکز، ۲۲۰ گرم گاز CO_2 آزاد می‌شود. اگر در پایان واکنش غلظت مولی گلوکز به $\frac{1}{3}$ غلظت مولی اولیه‌اش برسد، درصد جرمی محلول به تقریب چند واحد تغییر می‌کند؟ (از تغییر حجم صرف نظر شود و $O=16, C=12, H=1: g.mol^{-1}$)

$$C_6H_{12}O_6(aq) \rightarrow 2CO_2(g) + 2C_2H_5OH(aq)$$

۱) ۱۵ ۲) ۳۹ ۳) ۴۵ ۴) ۶۲

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: با توجه به جرم کربن دی‌اکسید آزادشده، مقدار گلوکز مصرف‌شده در واکنش را محاسبه می‌کنیم:

$$220\ g\ CO_2 \times \frac{1\ mol\ CO_2}{44\ g\ CO_2} \times \frac{1\ mol\ C_6H_{12}O_6}{2\ mol\ CO_2} = 2/5\ mol\ C_6H_{12}O_6$$

گام دوم: با توجه به این‌که غلظت مولی گلوکز به $\frac{1}{3}$ غلظت مولی اولیه‌اش رسیده و حجم تغییر نکرده است، پس مول آن $\frac{1}{3}$ حالت اولیه شده؛ بنابراین مول اولیه (n) را به دست می‌آوریم:

$$\text{مول باقی‌مانده} = \text{مول اولیه} - \text{مول مصرفی} \Rightarrow n - 2/5 = \frac{n}{3} \Rightarrow n = \frac{15}{4}\ mol$$

$$\text{مول باقی‌مانده} = \frac{\frac{15}{4}\ mol}{3} = \frac{5}{4}\ mol$$

گام سوم: درصد جرمی محلول را در حالت اولیه و نهایی حساب می‌کنیم:

$$\text{درصد جرمی محلول اولیه} = \frac{\frac{15}{4}\ mol \times \frac{180\ g}{1\ mol}}{1000\ g} \times 100 = 67/5\%$$

$$\text{درصد جرمی محلول ثانویه} = \frac{\frac{5}{4}\ mol \times \frac{180\ g}{1\ mol}}{(1000 - 220)\ g} \times 100 \simeq 29\%$$

$$\text{درصد جرمی محلول ثانویه} - \text{درصد جرمی محلول اولیه} = 67/5 - 29 = 38/5\% \simeq 39\%$$

برای اکسایش بخشی از گلوکز موجود در ۸۱ میلی‌لیتر از محلول آبی آن، ۱/۵ مول اکسیژن مصرف می‌شود. در صورتی که غلظت آغازی گلوکز در محلول، ۶/۵ برابر غلظت پایانی آن باشد، به تقریب، چند درصد جرمی گلوکز در این واکنش شرکت کرده است؟ $(O=16, H=1: g.mol^{-1})$ (سؤال ۲۳۹ کنکور تجربی ۱۴۰۰ (خارج از کشور))

(معادلهٔ واکنش موازنه شود.) $C_6H_{12}O_6(aq) + O_2(g) \rightarrow CO_2(g) + H_2O(l)$

۱) ۶۹/۵ ۲) ۷۹/۵ ۳) ۸۹/۵ ۴) ۹۹/۵

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸۴ کدام مورد نادرست است؟

۱) اگر درصد جرمی محلول سیرشدهٔ نمک AB در دمای $40\ ^\circ C$ برابر $37/5$ باشد، انحلال‌پذیری آن در آب در این دما برابر ۶۰ گرم است.

۲) موادی که انحلال‌پذیری آن‌ها در آب در دمای معین، کم‌تر از $0/1$ گرم در ۱۰۰ گرم آب باشد، جزء مواد نامحلول محسوب می‌شوند.

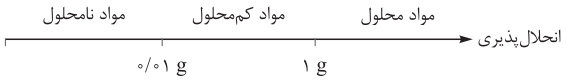
۳) اگر مولکول‌های AB_2 و AD_4 در میدان الکتریکی جهت‌گیری نکنند، اتم مرکزی در آن‌ها فاقد جفت‌الکترون ناپیوندی است.

۴) جرم مولی استون از جرم مولی اتانول بیشتر بوده، اما نقطهٔ جوش اتانول بالاتر از استون است.

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✔

موادی که انحلال‌پذیری آن‌ها کم‌تر از $0/01$ گرم در ۱۰۰ گرم آب است، جزء مواد نامحلول محسوب می‌شوند.



بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): اگر انحلال‌پذیری یک نمک در دمای معین را S گرم در ۱۰۰ گرم آب در نظر بگیریم، درصد جرمی محلول سیرشدهٔ آن از رابطهٔ $a=\frac{S}{S+100}\times 100$ به دست می‌آید:

$$37/5=\frac{S}{S+100}\times 100 \Rightarrow \frac{37/5}{100}=\frac{S}{S+100} \Rightarrow 8S=3S+300 \Rightarrow 5S=300 \Rightarrow S=60$$

گزینهٔ (۳): مولکول‌های AB_2 و AD_4 به شرطی ناقطبی هستند که اتم مرکزی در آن‌ها الکترون ناپیوندی نداشته باشد.

گزینهٔ (۴): هرچند جرم مولی استون ($CH_3-\overset{\overset{O}{\|}}{C}-CH_3$) بیشتر از اتانول ($C_2H_5OH$) است، اما نقطهٔ جوش اتانول بالاتر می‌باشد، زیرا مولکول‌های اتانول به دلیل داشتن گروه OH، توانایی برقراری پیوند هیدروژنی را دارند.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸۵ **اگر آرایش الکترونی یون پایدار M^{n+} به $3d^{10}$ ختم شود، کدام مورد به یقین درست است؟**

۱) M، فلز واسطه است و به n، دو مقدار متفاوت می‌توان نسبت داد.

۲) در اتم M، شمار الکترون‌ها با $l=2$ و $n=3$، ۵ برابر شمار الکترون‌ها با $l=0$ و $n=4$ است.

۳) اگر در اتم ^{65}M، تفاوت شمار نوترون‌ها و الکترون‌ها برابر ۵ باشد، واکنش $M(s)+FeSO_4(aq)\rightarrow$، به طور طبیعی انجام‌پذیر است.

۴) اگر M، فلزی اصلی باشد، تفاوت عدد اتمی آن با عنصر گروه ۷ در دورهٔ پنجم برابر ۱۱ است.

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔ آرایش الکترونی یون‌های $_{29}Cu^{+}$، $_{30}Zn^{2+}$ و $_{31}Ga^{3+}$، به $3d^{10}$ ختم می‌شود:

$$_{29}Cu:[Ar]3d^{10}4s^{1}\Rightarrow {}_{29}Cu^{+}:[Ar]3d^{10}$$

$$_{30}Zn:[Ar]3d^{10}4s^{2}\Rightarrow {}_{30}Zn^{2+}:[Ar]3d^{10}$$

$$_{31}Ga:[Ar]3d^{10}4s^{2}4p^{1}\Rightarrow {}_{31}Ga^{3+}:[Ar]3d^{10}$$

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): Cu و Zn، جزء فلزهای واسطه (دستهٔ d) و Ga، جزء فلزهای اصلی (دستهٔ p) است. در ضمن، n سه مقدار مختلف (۱، ۲ و ۳) دارد.

گزینهٔ (۲): عددهای کوانتومی $l=2$ و $n=3$ مربوط به زیرلایهٔ 3d و عددهای کوانتومی $l=0$ و $n=4$، مربوط به زیرلایهٔ 4s است. در $_{30}Zn$ و $_{31}Ga$، تعداد الکترون‌های 3d، ۵ برابر 4s $\left(\frac{10}{2}=5\right)$ است، اما در $_{29}Cu$، این نسبت برابر $\frac{10}{1}=10$ می‌باشد.

گزینهٔ (۳): باید به کمک عدد جرمی و تفاوت شمار نوترون‌ها و الکترون‌ها در ^{65}M، عدد اتمی M را به دست آوریم:

$$\text{عدد اتمی}=\frac{\text{تفاوت شمار نوترون‌ها و الکترون‌ها}-\text{عدد جرمی}}{2}=\frac{65-5}{2}=30\Rightarrow {}_{30}Zn$$

واکنش‌پذیری روی از آهن بیشتر است؛ بنابراین واکنش به طور طبیعی انجام می‌شود.

$$Zn(s)+FeSO_4(aq)\rightarrow Fe(s)+ZnSO_4(aq)$$

گزینهٔ (۴): از بین مس، روی و گالیم، فقط گالیم $(_{31}Ga)$ متعلق به گروه ۱۳ و دستهٔ p است و فلزی اصلی محسوب می‌شود. از طرفی عدد اتمی عنصر گروه ۷ در دورهٔ پنجم، ۷ واحد بیشتر از گاز نجیب دورهٔ چهارم بوده و برابر $36+7=43$ است:

$$43-31=12$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸۶ از واکنش سوختن مقداری $C_xH_8O_2N_2$، ۰/۴ مول آب و ۱۷/۶ گرم کربن دی‌اکسید تولید شده است. چند گرم $C_xH_8O_2N_2$ در این واکنش مصرف شده است؟ ($H=1, C=12, N=14, O=16 : g.mol^{-1}$، بازده واکنش ۵۰ درصد است).

$$C_xH_8O_2N_2 + O_2 \rightarrow CO_2 + H_2O + NO_2$$

۱) ۱۱/۶ ۲) ۲۳/۲

۳) ۳۲/۸ ۴) ۴۶/۴

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✔ برای محاسبهٔ جرم مصرفی ترکیب آلی نیاز به جرم مولی آن و در نتیجه مقدار x داریم. ابتدا معادلهٔ واکنش را برحسب x موازنه می‌کنیم:

$$C_xH_8O_2N_2 + (x+3)O_2 \rightarrow xCO_2 + 4H_2O + 2NO_2$$

$$\text{جرم مولی } C_xH_8O_2N_2 = (12x+68)\ g.mol^{-1}$$

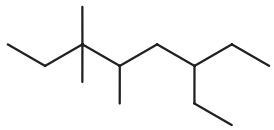
حالا کسرهای تناسب را برای ۳ مادهٔ گفته‌شده می‌نویسیم:

$$\frac{\text{جرم}\times\frac{\text{بازده درصدی}}{100}}{\underbrace{\text{جرم مولی}\times\text{ضریب}}_{C_xH_8O_2N_2}} = \frac{\text{جرم}}{\underbrace{\text{جرم مولی}\times\text{ضریب}}_{CO_2}} = \frac{\text{مول}}{\underbrace{\text{ضریب}}_{H_2O}} \Rightarrow \frac{m\times\frac{50}{100}}{1\times(12x+68)} = \underbrace{\frac{17/6}{x\times 44}}_{x=4} = \frac{0/4}{4} \Rightarrow \frac{m\times\frac{1}{2}}{116} = \frac{0/4}{4}$$

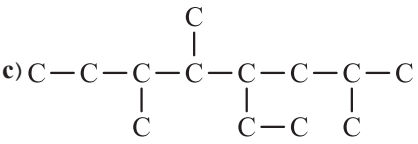
$$\Rightarrow m = 23/2\ g\ C_4H_8O_2N_2$$

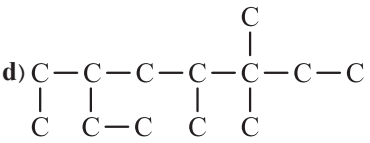
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸۷ کدام ساختارها را می‌توان به آلکانی با نام «۶- اتیل-۳، ۳، ۴- تری متیل اوکتان» نسبت داد؟

a) 

b) $CH_3CH_2CH(CH_3)C(CH_3)_2CH_2CH(C_2H_5)CH_2CH_3$

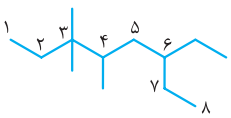
c) 

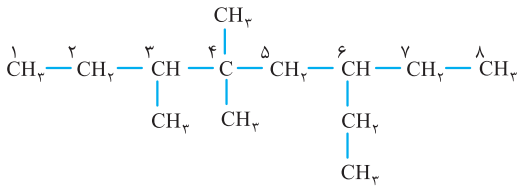
d) 

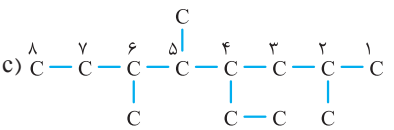
۱) a و b
۲) a و d
۳) b و c
۴) c و d

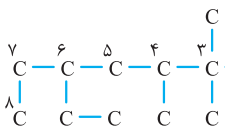
پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی باید همهٔ آلکان‌های داده‌شده را نام‌گذاری کنیم:

a)  ۶- اتیل - ۳، ۳، ۴- تری‌متیل اوکتان

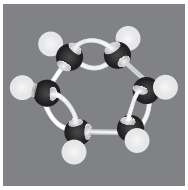
b)  ۶- اتیل- ۳، ۴، ۴- تری‌متیل اوکتان

c)  ۴- اتیل - ۲، ۵، ۶- تری‌متیل اوکتان

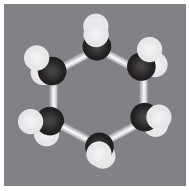
d)  ۶- اتیل - ۳، ۳، ۴- تری‌متیل اوکتان

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸۸ کدام موارد داده‌شده در ارتباط با هیدروکربن‌های زیر، درست است؟



(A)



(B)

الف) A سرگروه خانوادهٔ مهمی از هیدروکربن‌های سیرشده به نام ترکیب‌های آروماتیک است.

ب) هر دو هیدروکربن A و B، در نفت خام وجود دارند.

پ) فرمول مولکولی B، مانند ششمین عضو خانوادهٔ آلکن‌ها است.

پ) نسبت شمار اتم‌های هیدروژن به شمار اتم‌های کربن در مولکول B، دو برابر این نسبت در مولکول A است.

۱) ب و پ
۲) الف و ت
۳) الف و پ
۴) ب و ت

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی

عبارت‌های «ب» و «ت» درست‌اند.

A و B به ترتیب بنزن (C_6H_6) و سیکلوهگزان (C_6H_{12}) هستند.

بررسی عبارت‌ها:

الف) بنزن، سرگروه ترکیب‌های آروماتیک است، اما این ترکیب‌ها، سیرنشده محسوب می‌شوند.

ب) *کاملاً درسته!*

پ) اولین عضو آلکن‌ها (C_2H_4)، دو اتم کربن دارد؛ پس ششمین عضو آن‌ها، دارای ۷ اتم کربن بوده و فرمول مولکولی یکسانی با سیکلوهگزان ندارد.

ت)

$$\left.\begin{array}{l} \text{بنزن } (C_6H_6) \Rightarrow x = \dfrac{\text{شمار اتم‌های هیدروژن}}{\text{شمار اتم‌های کربن}} = \dfrac{6}{6} = 1 \\ \text{سیکلوهگزان } (C_6H_{12}) \Rightarrow y = \dfrac{\text{شمار اتم‌های هیدروژن}}{\text{شمار اتم‌های کربن}} = \dfrac{12}{6} = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{y}{x} = 2$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸۹ **کدام مورد درست است؟**

۱) انرژی گرمایی دو نمونه آب خالص با جرم یکسان و دمای متفاوت، قابل مقایسه نیست.

۲) در شرایط یکسان دما و فشار، گرمای ویژهٔ آب از روغن‌زیتون بیشتر است، اما ظرفیت گرمایی آن‌ها می‌تواند یکسان باشد.

۳) در دمای $25\ ^\circ C$ و فشار $1\ atm$، ظرفیت گرمایی ویژهٔ یک فلز در مقایسه با یک گاز به یقین بیشتر است.

۴) الماس و گرافیت، دگرشکل‌های طبیعی کربن هستند و پایداری الماس در مقایسه با گرافیت بیشتر است.

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✔

در شرایط یکسان دما و فشار، ظرفیت گرمایی یک ماده به جرم آن نیز بستگی دارد. با افزایش جرم روغن‌زیتون، ظرفیت گرمایی آن می‌تواند با ظرفیت گرمایی آب یکسان شود.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): انرژی گرمایی یک نمونه ماده افزون بر جرم به دمای ماده نیز بستگی دارد. در جرم برابر، نمونه آبی که دمای بیشتری دارد، انرژی گرمایی آن بیشتر است.

گزینهٔ (۳): بسته به نوع فلز و گاز، ظرفیت گرمایی ویژهٔ یک فلز می‌تواند از یک گاز بیشتر یا کم‌تر باشد. مثلاً گرمای ویژهٔ آلومینیم $(0/9)$ از کربن دی‌اکسید $(0/84)$ بیشتر و از اکسیژن $(0/92)$ کم‌تر است. نیازی به حفظ اعداد نیست. فقط *باید بدونین* رابطهٔ مشخصی بین گرمای ویژهٔ فلزها و گازها وجود ندارد.

گزینهٔ (۴): پایداری الماس از گرافیت کم‌تر است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹۰ **یک یخچال صحرایی با ظرفیت گرمایی $1500\ J.\ ^\circ C^{-1}$ در محیطی با دمای $40\ ^\circ C$ قرار می‌گیرد. اگر حداکثر دمای لازم برای نگه‌داری نوعی روغن گیاهی $15\ ^\circ C$ باشد، حداقل چند گرم آب باید از سطح این یخچال تبخیر شود تا روغن فاسد نشود؟ (فرض کنید همهٔ گرمای مورد نیاز برای تبخیر آب از محتویات درون یخچال گرفته می‌شود و گرمای لازم برای تبخیر یک مول آب برابر $44\ kJ$ است و $H=1, O=16 : g.mol^{-1}$)**

۱) ۱۲ ۲) ۱۵/۳

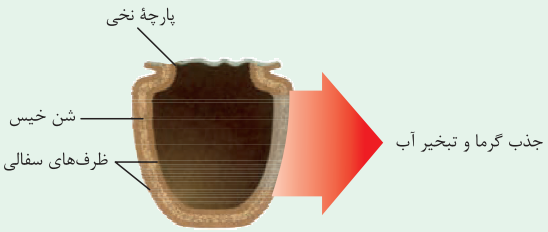
۳) ۱۸ ۴) ۲۱/۱

پاسخ: گزینهٔ ۲

نکته

یخچال صحرایی:

یخچال صحرایی دستگاهی همانند یک یخچال است، با این تفاوت که بدون نیاز به انرژی الکتریکی، غذا را خنک و برای مدت طولانی‌تری سالم نگه می‌دارد.



این دستگاه از دو ظرف سفالی (ساخته‌شده از خاک رس) تشکیل شده که فضای بین آن‌ها با شن خیس پر شده است. درپوش این یخچال، پوششی نخی و مرطوب است که تهویه را به آسانی انجام می‌دهد. تبخیر آب از سطح بیرونی ظرف سفالی طبق معادلهٔ $H_2O(l) + 44/1\ kJ \rightarrow H_2O(g)$ باعث جذب گرما و کاهش دمای محفظهٔ درون ظرف شده و به این ترتیب غذای درون آن را خنک می‌کند.

در یخچال‌های صحرایی، تبخیر آب از سطح کوزه‌های سفالی باعث جذب گرما و کاهش دمای درونی محفظه می‌شود.

پاسخ خیلی تشریحی

حداکثر دمای لازم برای نگه‌داری این روغن گیاهی $15\ ^\circ C$ است؛ بنابراین برای نگه‌داری این روغن در یخچال صحرایی باید دمای درون آن حداکثر $15\ ^\circ C$ باشد.

با استفاده از ظرفیت گرمایی یخچال و تغییر دما، گرمای گرفته‌شده از محتویات درون یخچال را به دست می‌آوریم:

$$Q = \underset{\text{ظرفیت گرمایی}}{C}\Delta\theta \Rightarrow Q = 1500 \times (40-15) = 1500 \times 25 = 37500\ J \Rightarrow Q = 37/5\ kJ$$

حالا باید حساب کنیم که برای تبخیر چند گرم آب به $37/5$ کیلوژول گرما نیاز است:

$$?\ g\ H_2O : 37/5\ kJ \times \frac{1\ mol\ H_2O}{44\ kJ} \times \frac{18\ g\ H_2O}{1\ mol\ H_2O} \simeq 15/3\ g\ H_2O$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹۱ کدام مورد جملهٔ زیر را به درستی کامل نمی‌کند؟

«نخستین عضو خانوادهٔ ..... با دومین عضو خانوادهٔ .....، همپار است.»

۱) اترها ـ الکل‌ها
۲) سیکلوآلکان‌ها ـ آلکن‌ها
۳) کتون‌ها ـ آلدهیدها
۴) استرها ـ کربوکسیلیک اسیدها

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

ترکیب‌های آلی مهم:

نام خانواده	ویژگی	فرمول کلی	فرمول ساده‌ترین عضو خانواده
آلکان‌ها	همهٔ پیوندها یگانه هستند.	$-\overset{|}{\underset{|}{C}}-$	$H-\overset{H}{\underset{H}{\overset{|}{\underset{|}{C}}}}-H$
آلکن‌ها	دارای ۱ پیوند $C=C$	$C=C$	$H_2C=CH_2$
آلکین‌ها	دارای ۱ پیوند $C\equiv C$	$-C\equiv C-$	$H-C\equiv C-H$
سیکلوآلکان‌ها	همهٔ پیوندها یگانه و دارای ساختار حلقوی	$\triangle$ ، $\square$ ، $\pentagon$ ، ...	$H_2C<\overset{CH_2}{}>CH_2$
آلدهیدها	دارای گروه آلدهیدی $-CHO$	$R-CHO$ R، هیدروژن یا گروه هیدروکربنی است.	$H-CHO$
کتون‌ها	دارای گروه کتونی $-CO-$	$R-CO-R'$ گروه‌های R و R′ هیدروکربنی هستند.	$CH_3-CO-CH_3$
الکل‌ها	دارای گروه هیدروکسیل (OH)	ROH R گروه هیدروکربنی است.	CH_3-OH
اترها	دارای گروه اتری $(-O-)$	$R-O-R'$ گروه‌های R و R′ هیدروکربنی هستند.	CH_3-O-CH_3
کربوکسیلیک اسیدها	دارای گروه کربوکسیل $-COOH$	$R-COOH$ R، هیدروژن یا گروه هیدروکربنی است.	$H-COOH$
استرها	دارای گروه استری $-COO-$	$R-COO-R'$ R هیدروژن یا گروه هیدروکربنی است، اما R′ فقط می‌تواند گروه هیدروکربنی باشد.	$H-COO-CH_3$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

نام خانواده	ویژگی	فرمول کلی	فرمول ساده‌ترین عضو خانواده
آمین‌ها	دارای گروه آمینی ($-\underset{|}{N}-$)	$R-\underset{R''}{\overset{|}{N}}-R'$ R، R' و R'' اتم هیدروژن یا گروه هیدروژنی هستند، ولی هر سه به طور هم‌زمان نمی‌توانند هیدروژن باشند.	CH_3NH_2
آمیدها	دارای گروه آمیدی ($-\overset{O}{\overset{\|\|}{C}}-\underset{|}{N}-$)	$R-\overset{O}{\overset{\|\|}{C}}-\underset{R''}{\overset{|}{N}}-R'$ R، R' و R''، اتم هیدروژن یا گروه هیدروکربنی هستند.	$H-\overset{O}{\overset{\|\|}{C}}-NH_2$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ به ترکیب‌هایی که فرمول مولکولی یکسان، اما ساختار متفاوتی دارند، ایزومر یا همپار گفته می‌شود.

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱):

نخستین عضو اترها $\Rightarrow CH_3-O-CH_3 \Rightarrow C_2H_6O$

دومین عضو الکل‌ها $\Rightarrow CH_3CH_2OH \Rightarrow C_2H_6O$ ✓

گزینهٔ (۲):

نخستین عضو سیکلوآلکان‌ها $\Rightarrow$  $\Rightarrow C_3H_6$

دومین عضو آلکن‌ها $\Rightarrow CH_2=CH-CH_3 \Rightarrow C_3H_6$ ✓

گزینهٔ (۳):

نخستین عضو کتون‌ها $\Rightarrow CH_3-\overset{O}{\overset{\|\|}{C}}-CH_3 \Rightarrow C_3H_6O$

دومین عضو آلدهیدها $\Rightarrow CH_3-\overset{O}{\overset{\|\|}{C}}-H \Rightarrow C_2H_4O$ ✗

گزینهٔ (۴):

نخستین عضو استرها $\Rightarrow H-\overset{O}{\overset{\|\|}{C}}-O-CH_3 \Rightarrow C_2H_4O_2$

دومین عضو کربوکسیلیک اسیدها $\Rightarrow CH_3-\overset{O}{\overset{\|\|}{C}}-OH \Rightarrow C_2H_4O_2$ ✓

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹۲ در مورد واکنش تیغهٔ روی و محلول مس (II) سولفات، چند عبارت زیر درست است؟ $(Zn = 65 , Cu = 64 : g.mol^{-1})$

- در طول انجام واکنش، غلظت یکی از یون‌ها ثابت است.
- با گذشت زمان، جرم مواد جامد کاهش می‌یابد.
- در طول انجام واکنش، سرعت تغییر رنگ محلول به مرور زمان کاهش می‌یابد.
- شیب نمودار غلظت ـ زمان برای تمام گونه‌ها در طول انجام واکنش یکسان است.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۳

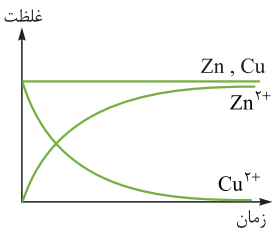
پاسخ خیلی تشریحی ✔ عبارت‌های اول تا سوم درست‌اند.

$$Zn(s) + CuSO_4(aq) \rightarrow ZnSO_4(aq) + Cu(s)$$

$$\xrightarrow{\text{حذف یون ناظر } (SO_4^{2-})} Zn(s) + Cu^{2+}(aq) \rightarrow Zn^{2+}(aq) + Cu(s)$$

بررسی عبارت‌ها:

- یون سولفات در واکنش شرکت ندارد و غلظت آن در طول انجام واکنش، ثابت است.
- با انجام واکنش، ۱ مول یا ۶۵ گرم $Zn(s)$ مصرف و ۱ مول یا ۶۴ گرم $Cu(s)$ تولید می‌شود، بنابراین جرم مواد جامد کاهش می‌یابد.
- با گذشت زمان، سرعت واکنش کاهش می‌یابد؛ بنابراین سرعت تغییر رنگ محلول (به دلیل مصرف یون‌های Cu^{2+}) نیز کاهش می‌یابد.
- غلظت مواد جامد و مایع خالص با گذشت زمان ثابت باقی می‌ماند، در حالی‌که غلظت یون‌های محلول در آب، تغییر می‌کند.



۹۳ در شرایطی معین، یک مول پروپان با سرعت ثابت ۰/۰۱ مول بر ثانیه در حال سوختن کامل است. پس از چند ثانیه، جرم کربن دی‌اکسید تولیدی با جرم پروپان باقی‌مانده برابر می‌شود؟ $(H=1, C=12, O=16 : g.mol^{-1})$

۱) ۲۵ ۲) ۵۰

۳) ۷۵ ۴) ۱۲/۵

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✔ معادلهٔ واکنش سوختن کامل پروپان و جدول تغییرات تعداد مول C_3H_8 و CO_2 در آن به صورت زیر است:

	C_3H_8	+	$5O_2$	→	$3CO_2$	+	$4H_2O$
مول اولیه	۱				۰		
مول نهایی	$1-x$				$3x$		

$$\text{جرم } CO_2 = \text{جرم باقی‌مانده } C_3H_8 \xrightarrow{\text{جرم مولی×مول=جرم}} 3x \times 44 = (1-x) \times 44 \Rightarrow 4x = 1$$

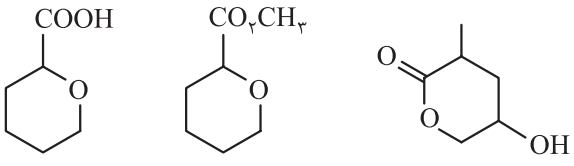
$$\Rightarrow x = 0/25 \text{ mol}$$

باید ۰/۲۵ مول پروپان مصرف شود:

$$0/25 \text{ mol } C_3H_8 \times \frac{1 \text{ s}}{\underbrace{0/01 \text{ mol } C_3H_8}_{\text{سرعت مصرف پروپان}}} = 25 \text{ s}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹۴ با توجه به ساختار ترکیب‌های زیر، کدام گزینه درست است؟ $(H = ۱ , C = ۱۲ , O = ۱۶ : g.mol^{-۱})$

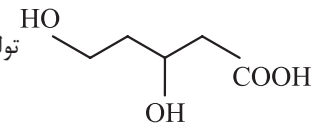


(I) (II) (III)

۱) از واکنش مادهٔ (II) با مقدار کافی آب، علاوه بر تولید مادهٔ (I)، ماده‌ای تولید می‌شود که در بازیافت PET نقش اساسی دارد.

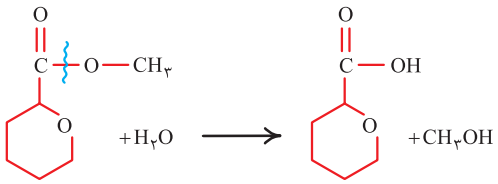
۲) هر سه ترکیب، گروه عاملی اتری دارند و نیروی جاذبهٔ بین مولکولی در دو مورد از آن‌ها مشابه است.

۳) (I) و (III) ایزومرند و جرم مولی آن‌ها، ۲ گرم کم‌تر از (II) است.

۴) از واکنش (III) با مقدار کافی آب،  تولید می‌شود که دارای چهار نوع اتم کربن با عدد اکسایش متفاوت است.

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✔ از واکنش ترکیب II با آب در فرایند آبکافت استر، خواهیم داشت:



(II) (I)

از متانول در بازیافت PET استفاده می‌شود.

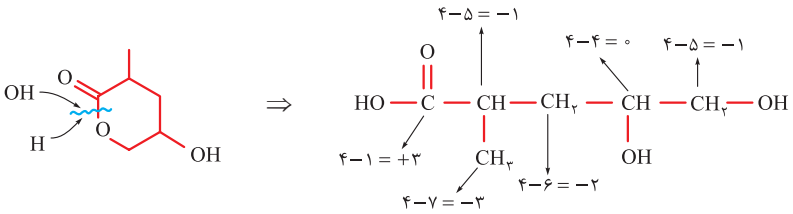
بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۲): ترکیب (III)، گروه اتری (—O—) ندارد و دارای گروه‌های استری () و هیدروکسیل (—OH) است.

گزینهٔ (۳): (I) و (III) با فرمول $C_۶H_{۱۰}O_۳$ ایزومرند، اما جرم مولی آن‌ها نسبت به (II) با فرمول $C_۷H_{۱۲}O_۳$، ۱۴ گرم کم‌تر است:

$$C_۷H_{۱۲}O_۳ - C_۶H_{۱۰}O_۳ = CH_۲ = ۱۴\ g$$

گزینهٔ (۴): واکنش ترکیب (III) با آب، در واقع آبکافت گروه استری است:



اتم‌های کربن این ترکیب دارای عددهای اکسایش ۳−، ۲−، ۱−، ۰ و ۳+ هستند.

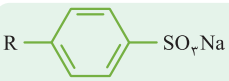
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹۵ **با توجه به مطالب کتاب درسی، اگر در ساختار یک پاک‌کنندهٔ غیرصابونی دارای ۲۲ اتم کربن در مجموع ۵ پیوند $C=C$ وجود داشته باشد، جرم مولی آن کدام است و اگر هیدروژن‌های حلقهٔ بنزنی آن را با گروه‌های متیل جایگزین کنیم، جرم مولی آن چند درصد افزایش می‌یابد؟ $(H=1, C=12, O=16, Na=23, S=32 : g.mol^{-1})$**

۱) ۳۹۴، ۱۲
۲) ۳۹۴، ۱۴
۳) ۴۰۰، ۱۲
۴) ۴۰۰، ۱۴

پاسخ: گزینهٔ ۴

نکته فرمول عمومی پاک‌کننده‌های غیرصابونی به صورت $RC_6H_4SO_3Na$ است:



پاسخ خیلی تشریحی حلقهٔ بنزنی در ساختار پاک‌کننده، ۶ اتم کربن و ۳ پیوند $C=C$ دارد؛ بنابراین گروه R باید ۱۶ اتم کربن و ۲ پیوند $C=C$ داشته باشد. فرمول عمومی گروه R در صورت سیر شده بودن به صورت C_nH_{2n+1} است. با توجه به این‌که هر پیوند دوگانه، ۲ اتم هیدروژن کم می‌کند، فرمول گروه R به صورت $C_{16}H_{33-4}=C_{16}H_{29}$ است.

فرمول پاک‌کننده: $C_{16}H_{29}C_6H_4SO_3Na \Rightarrow$ جرم مولی $=(22\times12)+33+32+(3\times16)+23=400\ g.mol^{-1}$

با جایگزینی ۴ اتم هیدروژن حلقهٔ بنزنی با ۴ گروه متیل (CH_3)، جرم مولی ترکیب به اندازهٔ ۴ گروه CH_2 افزایش می‌یابد:

$$4CH_3-4H=4CH_2=4\times14\ g$$

$$\text{درصد افزایش جرم مولی پاک‌کننده}=\frac{\text{میزان افزایش جرم}}{\text{جرم مولی اولیه}}\times100=\frac{4\times14}{400}\times100=\%14$$

با توجه به مطالب کتاب درسی، اگر اتم‌های هیدروژن حلقهٔ بنزنی در یک پاک‌کنندهٔ دارای ۱۸ اتم کربن و با زنجیر هیدروکربنی سیرشده، با گروه متیل جایگزین شود، جرم مولی آن، به تقریب چند درصد افزایش می‌یابد؟ $(S=32, Na=23, O=16, C=12, H=1 : g.mol^{-1})$

(سؤال ۹۲ کنکور تجربی ۱۴۰۳ ـ نوبت دوم)

۱) ۱۲
۲) ۱۶
۳) ۱۸
۴) ۲۴

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹۶ با توجه به جدول زیر که اطلاعاتی دربارهٔ ۱ لیتر از محلول‌های ۰/۰۲۵ مولار دو اسید را در دمای $25\ ^\circ C$ نشان می‌دهد، کدام مورد درست است؟

محلول	$[OH^-]$	pH
HX		۲/۳
HY	۴×۱۰^{-۱۳}	

۱) X و Y به ترتیب می‌توانند دومین و سومین عنصر گروه ۱۷ جدول تناوبی باشند.

۲) HY برخلاف HX، اسیدی قوی است و حجم کم‌تری از محلول آن برای خنثی‌کردن ۱ لیتر محلول سود با $pH = ۱۰$ نیاز است.

۳) تفاوت pH دو محلول با pH محلول ۰/۵ مولار نیتریک اسید برابر است.

۴) درصد یونش و ثابت یونش HX به ترتیب برابر با ٪۲۰ و $۱/۲۵\times۱۰^{-۳}$ است.

پاسخ: گزینهٔ ۴

نکته در اسیدهای قوی تک‌پروتون‌دار، $[H^+]$ با غلظت اولیهٔ محلول برابر است، اما در اسیدهای ضعیف تک‌پروتون‌دار، رابطهٔ زیر برقرار است:
$[H^+] = M\alpha$

پاسخ خیلی تشریحی به کمک اطلاعات جدول و محاسبهٔ $[H^+]$ محلول‌ها، باید قوی یا ضعیف بودن اسیدها را بررسی کنیم.

محلول HX: $[H^+] = ۱۰^{-pH} = ۱۰^{-۲/۳} = ۱۰^{-۳}\times۱۰^{۰/۷} = ۵\times۱۰^{-۳}\ mol.L^{-۱}$

در محلول HX، $[H^+]$ با غلظت اولیهٔ محلول ($۰/۰۲۵\ mol.L^{-۱}$) برابر نیست؛ بنابراین HX یک اسید ضعیف است.

محلول HY: $[H^+] = \frac{۱۰^{-۱۴}}{[OH^-]} = \frac{۱۰^{-۱۴}}{۴\times۱۰^{-۱۳}} = \frac{۱۰^{-۱}}{۴} = ۰/۲۵\times۱۰^{-۱} = ۰/۰۲۵\ mol.L^{-۱}$

در محلول HY، $[H^+]$ با غلظت اولیهٔ محلول ($۰/۰۲۵\ mol.L^{-۱}$) برابر است؛ بنابراین HY یک اسید قوی است.

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): دومین و سومین عنصر گروه ۱۷ به ترتیب Cl و Br هستند. HCl و HBr هر دو جزء اسیدهای قوی هستند، در حالی که دیدیم HX، اسیدی ضعیف است.

گزینهٔ (۲): با توجه به این‌که غلظت اولیهٔ اسیدها برابر است، برای خنثی‌کردن مقدار معینی از محلول سود، به حجم یکسانی از محلول اسیدها نیاز است و طبق رابطهٔ $n_aM_aV_a = n_bM_bV_b$، این موضوع ربطی به قوی یا ضعیف بودن اسیدها ندارد.

گزینهٔ (۳):

$pH(HX) = ۲/۳$

$[H^+]_{HY} = ۲۵\times۱۰^{-۳}\ mol.L^{-۱} \Rightarrow pH(HY) = -\log(۲۵\times۱۰^{-۳}) = ۳ - \log ۲۵$

$= ۳ - \log ۵^۲ = ۳ - ۲\underbrace{\log ۵}_{۰/۷} = ۱/۶$

$pH(HX) - pH(HY) = ۲/۳ - ۱/۶ = ۰/۷$

pH محلول ۰/۵ مولار نیتریک اسید ($HNO_۳$) برابر ۰/۳ است:

$pH = -\log(۵\times۱۰^{-۱}) = ۱ - \underbrace{\log ۵}_{۰/۷} = ۰/۳$

گزینهٔ (۴): با توجه به $[H^+]$ و غلظت محلول HX خواهیم داشت:

$٪\alpha = \frac{[H^+]}{M}\times۱۰۰ = \frac{\overset{۱}{\cancel{۵}}\times۱۰^{-۳}}{\underset{۵}{\cancel{۲۵}}\times۱۰^{-۳}}\times۱۰۰ = ٪۲۰$

$K_a = \frac{[H^+]^۲}{M - [H^+]} = \frac{(۵\times۱۰^{-۳})^۲}{(۲۵\times۱۰^{-۳}) - (۵\times۱۰^{-۳})} = \frac{\overset{۵}{\cancel{۲۵}}\times۱۰^{-۶}}{\underset{۴}{\cancel{۲۰}}\times۱۰^{-۳}} = ۱/۲۵\times۱۰^{-۳}$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹۷ کدام مورد دربارهٔ ضداسیدها درست است؟

۱) در واکنش مواد مؤثر در آن‌ها با اسید معده، تنها یک ترکیب یونی به همراه آب تولید می‌شود.

۲) داروهایی محلول در آب هستند که غلظت یون هیدروکسید در آن‌ها بیشتر از غلظت یون هیدرونیوم است.

۳) واکنش $H^+(aq) + OH^-(aq) \rightarrow H_2O(l)$، مبنایی برای عملکرد آن‌ها است.

۴) مادهٔ مؤثر در آن‌ها را می‌توان برای افزایش خاصیت پاک‌کنندگی به شوینده‌ها نیز اضافه کرد.

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔ مبنای عملکرد ضداسیدها مانند شوینده‌های خورنده، واکنش خنثی‌شدن اسید و باز $(H^+ + OH^- \rightarrow H_2O)$ است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): *نه لزوماً!* مثلاً در واکنش جوش شیرین با اسید معده، گاز کربن دی‌اکسید نیز تولید می‌شود:

$$NaHCO_3(aq) + HCl(aq) \rightarrow NaCl(aq) + CO_2(g) + H_2O(l)$$

گزینهٔ (۲): همهٔ ضداسیدها در آب محلول نیستند. شیر منیزی (حاوی $Mg(OH)_2$) به صورت سوسپانسیون مصرف می‌شود.

گزینهٔ (۴): در کتاب درسی می‌خوانیم که جوش شیرین که یکی از مواد مؤثر در ضداسیدها است، برای افزایش خاصیت پاک‌کنندگی به شوینده‌ها اضافه می‌شود. همهٔ مواد مؤثر در ضداسیدها که این ویژگی *رو ندارن!*

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹۸ **اگر در دمای معین، درجهٔ یونش باز BOH با $K_b = ۲\times۱۰^{-۵}$ برابر ۰/۰۴ باشد، به ۲۰۰ mL از این محلول چند میلی‌لیتر آب اضافه کنیم تا درجهٔ یونش باز به ۰/۱۲ برسد؟**

۱) ۱۶۰۰
۲) ۱۸۰۰
۳) ۲۰۰۰
۴) ۲۲۰۰

پاسخ: گزینهٔ ۱

نکته در اسید و بازهای خیلی ضعیف (با ثابت یونش کوچک)، رابطهٔ $K = M\alpha^۲$ برقرار است. با توجه به این‌که ثابت یونش فقط به دما بستگی دارد، در دمای معین می‌توان نوشت:

$$M_۱\alpha_۱^۲ = M_۲\alpha_۲^۲$$

پاسخ خیلی تشریحی ابتدا به کمک درجهٔ یونش اولیه و نهایی، رابطهٔ غلظت اولیه و نهایی محلول را به دست می‌آوریم:

$$M_۱\alpha_۱^۲ = M_۲\alpha_۲^۲ \Rightarrow \frac{M_۲}{M_۱} = \frac{\alpha_۱^۲}{\alpha_۲^۲} = (\frac{۰/۰۴}{۰/۱۲})^۲ = \frac{۱}{۹}$$

می‌خواهیم غلظت محلول، $\frac{۱}{۹}$ برابر شود؛ پس باید حجم محلول ۹ برابر شود؛ یعنی از ۲۰۰ mL به ۱۸۰۰ mL برسد:

$$\text{حجم آب اضافه‌شده} = ۱۸۰۰ - ۲۰۰ = ۱۶۰۰\ mL$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹۹ تفاوت جرم یون‌های تولیدشده در واکنش زیر به ازای مبادلهٔ $۹/۰۳\times۱۰^{۲۱}$ الکترون، چند گرم خواهد بود؟ $(I=۱۲۷, Cu=۶۴ : g.mol^{-1})$

$AuI_۴^-(aq)+Cu(s)\rightarrow Au(s)+Cu^{۲+}(aq)+I^-(aq)$ (معادله موازنه شود.)

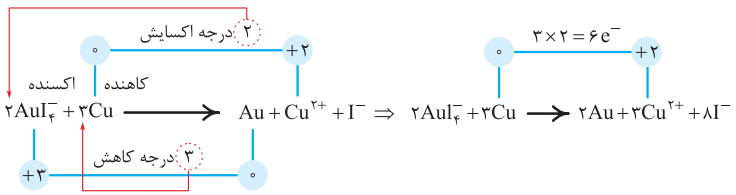
۱) ۰/۵۱۵ ۲) ۱/۰۳

۳) ۲/۰۶ ۴) ۴/۱۲

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔ ابتدا معادلهٔ واکنش مورد نظر را موازنه می‌کنیم:

$AuI_۴^-: Au+۴(-۱)=-۱ \Rightarrow Au=+۳$



حالا تفاوت جرم یون‌های تولیدشده ($Cu^{۲+}$ و I^-) را حساب می‌کنیم:

$$\frac{\underbrace{\text{تفاوت جرم}}_{|(\text{ضریب A}\times\text{جرم مولی A})-(\text{ضریب B}\times\text{جرم مولی B})|}}{\underbrace{I^- - Cu^{۲+}}} = \frac{\text{تعداد}}{\underbrace{\text{عدد آووگادرو}\times\text{ضریب}}_{e^-}}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{(۸\times۱۲۷)-(۳\times۶۴)} = \frac{۹/۰۳\times۱۰^{۲۱}}{۶\times۶/۰۲\times۱۰^{۲۳}} \Rightarrow \frac{x}{۸۲۴}=\frac{۱/۵}{۶۰۰} \Rightarrow x=\frac{۸۲۴}{۴۰۰}=۲/۰۶\ g$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۰۰ **در مورد سه سامانهٔ: a) رایج‌ترین سلول سوختی b) قطعهٔ آهن در حال خوردگی و c) سلول آبکاری قاشق آهنی با نقره، کدام گزینه درست است؟**

۱) آند در هر سه سامانه، قطب منفی است.

۲) در سامانهٔ c، الکترولیت می‌تواند از جنس آهن (II) سولفات باشد.

۳) در سامانهٔ a برخلاف c، درکاتد، نیم‌واکنش کاهش رخ می‌دهد.

۴) بر اساس معادلهٔ کلی، شمار الکترون‌های مبادله‌شده در b، سه برابر a است.

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): سلول سوختی و قطعهٔ آهن در حال خوردگی، جزء سلول‌های گالوانی محسوب شده و آند در آن‌ها، قطب منفی است، اما سلول آبکاری، جزء سلول‌های الکترولیتی است و آند در آن، قطب مثبت محسوب می‌شود.

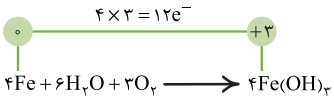
گزینهٔ (۲): در آبکاری با نقره، الکترولیت باید نمکی از نقره باشد، مانند نقره نیترات!

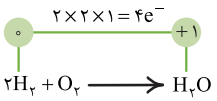
گزینهٔ (۳): کاتد همیشه الکترودی است که در آن کاهش رخ می‌دهد.

الکترود / نوع سلول	آند		کاتد	
	چه نیم‌واکنشی در آن انجام می‌شود؟	علامت	چه نیم‌واکنشی در آن انجام می‌شود؟	علامت
گالوانی	اکسایش	−	کاهش	+
الکترولیتی	اکسایش	+	کاهش	−

گزینهٔ (۴): شمار الکترون‌های مبادله‌شده در خوردگی آهن و سلول سوختی هیدروژن به ترتیب برابر ۱۲ و ۴ است:

$$\frac{۱۲}{۴} = ۳$$





SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۰۱ **اگر در مولکول آب به جای اتم‌های هیدروژن، گروه‌های متیل جایگزین شود، به ترکیب A تبدیل می‌شود. کدام مطلب دربارهٔ این ترکیب درست است؟ $(H=1, C=12, O=16 : g.mol^{-1})$**

۱) اگر نقطهٔ جوش سومین آلکان برابر θ_1 و نقطهٔ جوش ترکیب A برابر θ_2 باشد، در فشار معین مقایسهٔ $\theta_2 < \theta_1$ درست است.

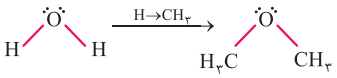
۲) ترکیب A دارای یک ایزومر الکلی بوده که دارای پیوند $C-C$ است و نسبت به ترکیب A، نقطهٔ جوش بالاتر و نیروی بین مولکولی قوی‌تری دارد.

۳) بیش از ۶۰ درصد جرمی ترکیب A را کربن تشکیل می‌دهد و شمار اتم‌های هیدروژن آن سه برابر شمار اتم‌های کربن آن است.

۴) ترکیب A مانند گوگرد تری‌اکسید در میدان الکتریکی جهت‌گیری می‌کند.

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✔ ترکیب A، دی‌متیل اتر است.



آب　　دی‌متیل اتر

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): نقطهٔ جوش دی‌متیل اتر از نقطهٔ جوش پروپان (C_3H_8) بیشتر است، زیرا جرم مولی دو ترکیب به هم نزدیک است، اما دی‌متیل اتر برخلاف پروپان، قطبی است.

گزینهٔ (۲): اتانول (C_2H_5OH) ایزومر دی‌متیل اتر است که به دلیل توانایی در تشکیل پیوند هیدروژنی، نیروی بین مولکولی قوی‌تر و نقطهٔ جوش بالاتری دارد.

گزینهٔ (۳): درصد جرمی کربن در دی‌متیل اتر (C_2H_6O) برابر است با:

$$\text{جرم مولی} = (2\times12)+6+16 = 46\ g.mol^{-1}$$

$$\text{درصد جرمی کربن} = \frac{2\times12}{46}\times100 \simeq ٪52/1$$

گزینهٔ (۴): SO_3 یک مولکول ناقطبی است و در میدان الکتریکی جهت‌گیری نمی‌کند.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۰۲ با توجه به فرمول‌ها و توضیحات داده‌شده، کدام گزینه درست است؟

$MgF_2, NaCl, CO_2, SiO_2, C(s, \text{الماس}), Fe$

I) عدد کوئوردیناسیون کاتیون و آنیون برای آن به ترتیب برابر ۶ و ۳ است.

II) اصطلاح شبکهٔ بلور برای این گونه استفاده می‌شود.

III) از آن، در ساخت منشورها و عدسی‌ها استفاده می‌شود.

IV) در حالت جامد، رسانای جریان برق است.

۱) گونهٔ مرتبط با عبارت (I)، آنتالپی فروپاشی شبکهٔ کم‌تری نسبت به LiF دارد.

۲) عبارت (II) برای ۴ مورد از گونه‌ها صادق است.

SiO_4^{4-}

۳) تنها یکی از عناصر سازندهٔ گونهٔ مربوط به عبارت (III)، در ساختار یون سیلیکات وجود دارد.

۴) عبارت (IV)، فقط برای یک مورد از گونه‌ها صادق است.

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): می‌دانیم که عدد کوئوردیناسیون کاتیون و آنیون در NaCl یکسان است، پس توضیح (I) مربوط به MgF_2 است. آنتالپی فروپاشی این ترکیب نسبت به LiF بیشتر است، زیرا چگالی بار Mg^{2+} از Li^+ بیشتر می‌باشد.

گزینهٔ (۲): واژهٔ شبکهٔ بلور برای توصیف آرایش سه‌بعدی و منظم اتم‌ها (مانند فلز Fe و جامدهای کووالانسی الماس و SiO_2)، مولکول‌ها (مانند CO_2) و یون‌ها (مانند NaCl و MgF_2) استفاده می‌شود.

گزینهٔ (۳): توضیح (III) مربوط به سیلیس (SiO_2) است که هر دو عنصر سازندهٔ آن در ساختار یون سیلیکات (SiO_4^{4-}) نیز وجود دارند.

گزینهٔ (۴): عبارت (IV) فقط در مورد فلز آهن صادق است؛ دقت کنید که ترکیب‌های یونی در حالت جامد، رسانای جریان برق نیستند.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۰۳ کدام مورد، درست است؟

۱) E_a و $|\Delta H|$ واکنش حذف NO از واکنش حذف CO در خودروهای بنزینی بیشتر است.

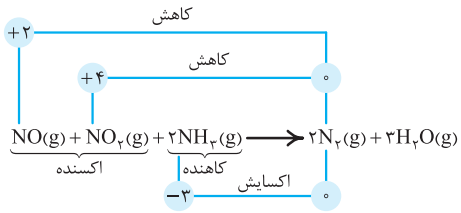
۲) میزان تأثیر مبدل کاتالیستی خودروهای بنزینی بر کاهش جرم آلایندهٔ CO بیشتر از آلایندهٔ NO است.

۳) در واکنش حذف آلاینده‌های NO و NO_2 در خودروهای دیزلی، هر دو اکسید نقش اکسنده را دارند.

۴) در دمای اتاق، انرژی فعال‌سازی واکنش سوختن هیدروژن کم‌تر از واکنش سوختن فسفر سفید است.

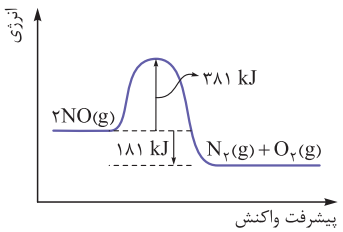
پاسخ: گزینهٔ ۳

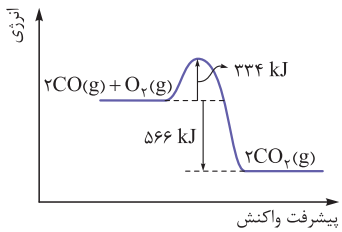
پاسخ خیلی تشریحی ✔ برای حذف آلاینده‌های NO و NO_2 در خودروهای دیزلی از آمونیاک استفاده می‌شود. در این واکنش، NO و NO_2، نقش اکسنده را دارند، در حالی که NH_3، نقش کاهنده را ایفا می‌کند.



بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): با توجه به نمودارها و شکل‌های کتاب درسی *بدانید و آگاه باشید که*:





$$\begin{cases} E_a : \text{NO حذف واکنش} > \text{CO حذف واکنش} \\ |\Delta H| : \text{NO حذف واکنش} < \text{CO حذف واکنش} \end{cases}$$

گزینهٔ (۲): جدول زیر مقدار برخی آلاینده‌ها را در گازهای خروجی از اگزوز خودروها در غیاب و در حضور مبدل کاتالیستی نشان می‌دهد:

فرمول شیمیایی آلاینده		CO	C_xH_y	NO
مقدار آلاینده برحسب گرم به ازای طی یک کیلومتر	در غیاب مبدل	۵/۹۹	۱/۶۷	۱/۰۴
	در حضور مبدل	۰/۶۱	۰/۰۷	۰/۰۴

در غیاب و در حضور مبدل، مقدار CO از دو آلایندهٔ دیگر بیشتر و مقدار NO از همه کم‌تر است.

مقدار آلاینده‌ها در غیاب و حضور مبدل کاتالیستی: $CO > C_xH_y > NO$

بالا یه سؤال: با توجه به این جدول، مبدل کاتالیستی بر کاهش کدام آلاینده (از نظر جرمی) تأثیر بیشتری دارد؟

$$\text{درصد کاهش جرم آلاینده} = \left|\frac{\text{میزان تغییر جرم آلاینده}}{\text{مقدار اولیهٔ آلاینده در غیاب مبدل}}\right| \times ۱۰۰$$

$$\text{درصد کاهش جرم CO} = \left|\frac{۰/۶۱ - ۵/۹۹}{۵/۹۹}\right| \times ۱۰۰ \simeq ٪۸۹/۸۲$$

$$\text{درصد کاهش جرم NO} = \left|\frac{۰/۰۴ - ۱/۰۴}{۱/۰۴}\right| \times ۱۰۰ \simeq ٪۹۶/۱۵$$

$$\text{درصد کاهش } C_xH_y = \left|\frac{۰/۰۷ - ۱/۶۷}{۱/۶۷}\right| \times ۱۰۰ \simeq ٪۹۵/۸۱$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

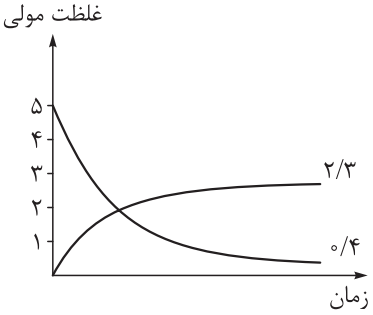
پس:

$NO > C_xH_y > CO$: میزان تأثیر مبدل کاتالیستی بر کاهش جرم آلاینده

گزینهٔ (۴): فسفر سفید (P_4) در هوا و در دمای اتاق می‌سوزد، در حالی که گاز هیدروژن در هوا و در دمای اتاق با اکسیژن هوا واکنش نمی‌دهد. این موضوع نشان می‌دهد که انرژی فعال‌سازی واکنش سوختن فسفر سفید در هوا و در دمای اتاق تأمین می‌شود و کم‌تر از انرژی فعال‌سازی واکنش سوختن گاز هیدروژن است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۰۴ نمودار زیر را به کدام‌یک از واکنش‌های داده‌شده می‌توان نسبت داد و مقدار ثابت تعادل آن به تقریب کدام است؟



واکنش I) $2NO(g) \rightleftharpoons N_2(g) + O_2(g)$

واکنش II) $N_2O_4(g) \rightleftharpoons 2NO_2(g)$

۱) $33 - I$

۲) $13 - I$

۳) $13 - II$

۴) $33 - II$

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✔ مقدار تغییرات غلظت مواد در یک واکنش، متناسب با ضرایب استوکیومتری آن‌ها است. با توجه به نمودار خواهیم داشت:

$$\left|\frac{\Delta[\text{واکنش دهنده}]}{\Delta[\text{فراورده}]}\right| = \frac{۵ - ۰/۴}{۲/۳ - ۰} = \frac{۴/۶}{۲/۳} = ۲$$

ضریب واکنش‌دهنده باید دو برابر فراورده باشد، بنابراین نمودار می‌تواند مربوط به واکنش I باشد.

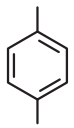
$$2NO \rightleftharpoons N_2 + O_2$$

برای محاسبهٔ ثابت تعادل، باید از غلظت تعادلی مواد استفاده کنیم:

$$K = \frac{[N_2][O_2]}{[NO]^2} = \frac{۲/۳ \times ۲/۳}{۰/۴ \times ۰/۴} = \frac{۵۲۹}{۱۶} \simeq ۳۳$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۰۵ با توجه به ساختارهای داده‌شده، کدام مورد درست است؟

$+CH_2CH_2+_n$ **(A)**	CH_3-CH_3 **(B)**	$CH_2(OH)-CH_2(OH)$ **(X)**
CH_3CH_2OH **(D)**	$CH_2=CH_2$ **(E)**	 **(M)**

۱) E در واکنش با یک اکسنده، به D تبدیل می‌شود.

۲) تنها $\frac{۱}{۳}$ از این مواد در نفت خام وجود دارند.

۳) واکنش تبدیل E به A از نوع اکسایش ـ کاهش است.

۴) از واکنش X با فراوردهٔ حاصل از اکسایش M در حضور پتاسیم پرمنگنات، پلیمری با فرمول $+C_{10}H_8O_4+_n$ تولید می‌شود.

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): E (اتن) در واکنش با آب، به D (اتانول) تبدیل می‌شود. عدد اکسایش هیدروژن و اکسیژن در این واکنش تغییری نمی‌کند، بنابراین آب نقش کاهندگی یا اکسندگی ندارد.

$$C_2H_4 + H_2O \rightarrow C_2H_6O$$

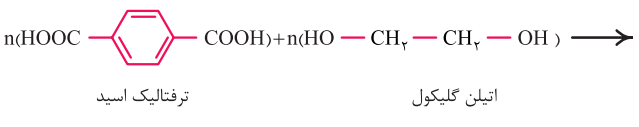
گزینهٔ (۲): مواد B (اتان)، E (اتن) و M (پارازایلن) در نفت خام وجود دارند، یعنی ۳ ماده از ۶ ماده:

$$\frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲}$$

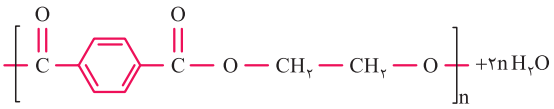
گزینهٔ (۳): در واکنش پلیمری‌شدن اتن، عدد اکسایش هیچ اتمی تغییری نمی‌کند، بنابراین از نوع اکسایش ـ کاهش نیست:

$$n\ C_2H_4(g) \rightarrow +C_2H_4+_n\ (s)$$

گزینهٔ (۴): M (پارازایلن) در حضور پتاسیم پرمنگنات به ترفتالیک اسید تبدیل می‌شود. از واکنش ترفتالیک اسید با اتیلن گلیکول (X) در شرایط مناسب، پلی‌اتیلن ترفتالات (PET) تولید می‌شود.



ترفتالیک اسید — اتیلن گلیکول



پلی‌اتیلن ترفتالات (PET)

$$nC_8H_6O_4 + nC_2H_6O_2 \rightarrow +C_{10}H_8O_4+_n + 2nH_2O$$

ترفتالیک اسید — اتیلن‌گلیکول — پلی‌اتیلن ترفتالات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir