



گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی

آزمون دوپینگ ماز | پایه دوازدهم



دوپینگ ماز

ریاضیات

دفترچه سؤال

ویژه کنکوری های ۱۴۰۵

چهارشنبه ۱۶ اردیبهشت ماه ۱۴۰۵

مدت زمان پاسخ گویی	شماره سؤال		تعداد سؤال	ماده امتحانی
	تا	از		
۷۰ دقیقه	۴۰	۱	۴۰	ریاضیات

الگو و دنباله +
توان های گویا و
عبارت های جبری،
مقاطع مخروطی +
بردارها، آشنایی با
نظریه اعداد

جامع مشتق و کاربرد
مشتق، ماتریس ها،
گراف و مدل سازی

جامع حد و پیوستگی،
روابط طولی در مثلث
+ ترسیم های هندسی و
استدلال، آمار
توصیفی و استنباطی

جامع مثلثات،
چندضلعی های
محاطی و محیطی +
تبدیل های هندسی،
احتمال

جامع تابع + توابع
نمایی و لگاریتمی،
تجسم فضایی + دایره،
آشنایی با مبانی
ریاضیات

مباحث پایه
(جبر، معادله و
نامعادله)، تالس و
چندضلعی ها،
ترکیبیات

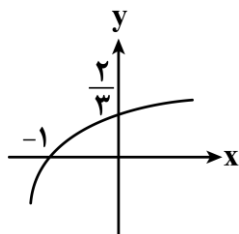
مسیر حرفه ای جمع بندی تا کنکور ۱۴۰۵

برای شباهت حداکثری به کنکور، صفحه آرای، فونت و حتی اندازه متن در تمامی آزمون های ماز، کاملاً یکسان با استاندارد دفترچه های کنکور در نظر گرفته می شود.

- ۱- نمودار توابع $f(x) = 2 + 2^{a-bx}$ و $g(x) = 2x^2 - x + 3$ در نقطه‌ای به طول ۱ همدیگر را قطع می‌کنند. هرگاه $f^{-1}(10) = 0$ باشد، مقدار $\log_b(a^3 + 5)$ چه عددی است؟

(۱) ۷ (۲) ۶ (۳) ۴ (۴) ۵

- ۲- شکل روبه‌رو نمودار تابع $f(x) = a \times 3^{bx+c} + 1$ است. $f^{-1}(-2)$ چه عددی است؟



(۱) $\frac{1}{4}$
(۲) $-\frac{1}{2}$
(۳) $\frac{1}{2}$
(۴) -2

- ۳- هرگاه $\log_4(8a) = \log_9(2b) = \log_{16}(4a+2b)$ مقدار $(\frac{4}{b} + \frac{3}{a})$ چه عددی است؟

(۱) ۲۴ (۲) ۱۲ (۳) ۳۶ (۴) ۷۲

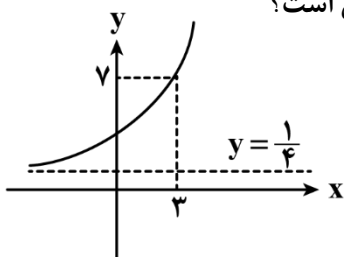
- ۴- اگر معادله $\log_3(9^x + 18) = x + 2$ دارای جواب‌های α و β باشد، حاصل $\alpha + \beta$ کدام است؟

(۱) ۹ (۲) $\log_3 36$ (۳) $\log_3 18$ (۴) ۱۸

- ۵- اگر $\log_{15} a = b$ و $\log_5 b = a$ مقدار $\log_9 a$ بر حسب a و b کدام است؟

(۱) $\frac{2a + ab - b}{2b}$ (۲) $\frac{2a + b - ab}{b}$ (۳) $\frac{2b + a - ab}{a}$ (۴) $\frac{2b - a + ab}{2a}$

- ۶- نمودار وارون تابع $f(x) = \log_3(ax+b)$ شکل روبه‌رو است. مقدار $f(61)$ چه عددی است؟



(۱) ۵/۵
(۲) ۴/۵
(۳) ۴
(۴) ۵

محل انجام محاسبات

۷- اگر مجموع ریشه‌های معادله $-8ax^2 + 2bx - \frac{c}{4} = 0$ برابر با $\log_3^a$ و $\frac{a}{4}$ واسطه حسابی بین $2b$ و $2c$ باشد، حاصل $\left(\sqrt[4]{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{c}{a}}$ چه عددی است؟

- (۱) $8\sqrt[4]{3}$ (۲) $\frac{8}{\sqrt[4]{3}}$ (۳) $4\sqrt[4]{3}$ (۴) $\frac{8}{\sqrt[4]{3}}$

۸- مقداری از یک عنصر موجود است، به طوری که در هر ساعت $\frac{1}{9}$ از جرم باقی‌مانده را از دست می‌دهد، پس از تقریباً چند ساعت $\frac{1}{12}$ از جرم باقی خواهد ماند؟ ($\log_5^2 = \frac{5}{12}$ و $\log_3^5 = \frac{7}{5}$)

- (۱) $7/6$ (۲) $8/3$ (۳) $8/6$ (۴) $9/2$

۹- اگر $f(x) = \log_3^{(2x-9)}$ ، $g(x) = x + \sqrt{5x-1}$ و تابع $g^{-1} \circ f^{-1}(x)$ محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض α قطع کند، مقدار $\alpha + \frac{2}{\alpha}$ کدام است؟

- (۱) $3/5$ (۲) $4/5$ (۳) 3 (۴) 4

۱۰- دامنه تابع $f(x) = \sqrt{3 - \log_3^{(2x-k)}}$ شامل k عدد صحیح است، k کدام است؟

- (۱) 3 (۲) 4 (۳) 5 (۴) 6

۱۱- اگر f تابعی ثابت و g تابعی همانی باشد، به طوری که $f(5x) + 3g^{-1}(4-2x) = 24-6x$ ، مقدار $\frac{f(2)}{g(4)}$ چه عددی است؟

- (۱) 2 (۲) 3 (۳) 4 (۴) 6

۱۲- نمودار وارون تابع $f(x) = x^2 - 3x^2 - ax - 39$ خط $5y - 2x = 17$ را در نقطه‌ای به عرض 4 قطع می‌کند، $f(-\frac{a}{3})$ چه عددی است؟

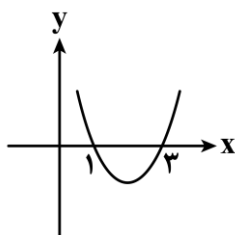
- (۱) 41 (۲) 27 (۳) -31 (۴) -29

۱۳- تابع $f(x) = 2x\sqrt{x} + \sqrt{x} - 5x - 3$ در یک همسایگی از a صعودی اکید است. اگر $f^{-1} \circ f^{-1}(a) = a$ باشد، مقدار $f(2a-2)$ چه عددی است؟

- (۱) 49 (۲) 48 (۳) 52 (۴) 51

محل انجام محاسبات

۱۴- نمودار تابع $y = g(x)$ مطابق شکل مقابل است. اگر $f(x) = 2x + \sqrt{x}$ ، اختلاف طول نقاطی که نمودار تابع $g \circ f$ محور x ها را قطع می‌کند، چه عددی است؟



- (۱) $\frac{1}{2}$
(۲) $\frac{1}{4}$
(۳) $\frac{5}{4}$
(۴) $\frac{3}{4}$

۱۵- تابع $f(x) = (3-x)|x-1|$ فقط در بازه (α, β) اکیداً صعودی است. اگر وارون تابع در این بازه $f^{-1}(x) = a\sqrt{-x+b} + 2$ باشد، مقدار ab کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) -۲

۱۶- نمودار $y = f(8-4x)$ را ۲ واحد به چپ انتقال داده و شکل حاصل را نسبت به خط $x=2$ قرینه می‌کنیم. اگر f تابعی وارون‌پذیر باشد، طول نقطه تلاقی تابع به دست آمده با تابع اولیه چه عددی است؟

- (۱) ۶ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۳

۱۷- نمودار تابع $y = 2f(3 - \frac{x}{2})$ را ۶ واحد به چپ انتقال داده و طول نقاط آن را نصف کرده‌ایم. قرینه نمودار به دست آمده نسبت به نیمساز ناحیه اول کدام است؟

- (۱) $2f^{-1}(-x)$ (۲) $\frac{1}{2}f^{-1}(-x)$ (۳) $-\frac{1}{2}f^{-1}(x)$ (۴) $-f^{-1}(\frac{x}{2})$

۱۸- اگر $m > 1$ عددی صحیح و مثبت و تابع $f = \{(m, 5), (6, 4m), (2m, 6), (1, 3)\}$ صعودی اکید باشد، $f^{-1}(2m+1)$ چه عددی است؟

- (۱) ۳ (۲) ۶ (۳) ۲ (۴) ۵

محل انجام محاسبات

- ۱۹- باقی مانده تقسیم $p(x) = 2x^4 + ax^3 + bx - 4$ بر $x^2 - x - 2$ چندجمله‌ای $1 - 2x$ است. باقی مانده $p(x)$ بر $x^2 + 2$ کدام است؟

(۱) $3x + 2$ (۲) $7x - 4$ (۳) $\frac{7}{2}x - 3$ (۴) $\frac{11}{2}x + 4$

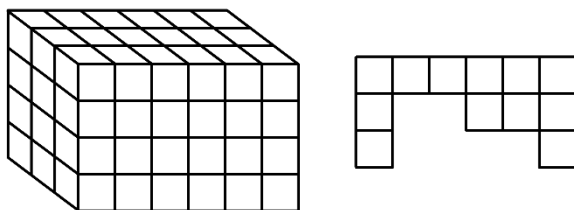
- ۲۰- باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای $p(x) = 2x^4 - 4x^3 + ax^2 + bx - 6$ بر $(x-1)^2$ چندجمله‌ای $2 - 3x$ است. مقدار $b - a$ چه عددی است؟

(۱) -7 (۲) 19 (۳) 13 (۴) -9

- ۲۱- خط Δ بر صفحه P عمود است و نقاط A و B غیرواقع بر Δ و خارج از صفحه P قرار دارند؛ اگر تنها یک صفحه گذرا بر A و B و عمود بر صفحه P موجود باشد، وضعیت خط گذرا از نقاط A و B نسبت به خط Δ الزاماً چگونه است؟

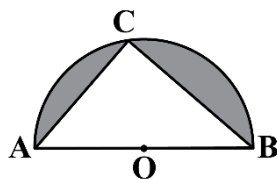
(۱) غیرعمود (۲) غیرموازی (۳) متقاطع (۴) متنافر

- ۲۲- از مکعب مستطیل شکل زیر که از چندین مکعب کوچک تشکیل شده است، حداقل چند مکعب باید برداریم تا نمای از بالای آن به صورت زیر باشد؟



(۱) ۶
(۲) ۱۲
(۳) ۲۴
(۴) ۶۰

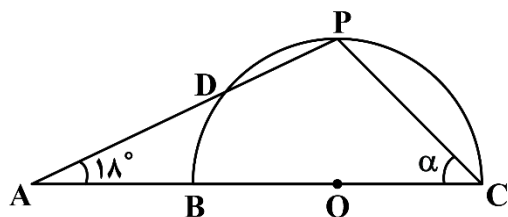
- ۲۳- نیم دایره‌ای به شعاع ۵ مفروض است. مطابق شکل، مثلث ABC به ضلع $AC = 6$ درون نیم دایره محاط شده و دو قطعه از دایره جدا کرده است، اگر این دو قطعه را حول محور AB دوران دهیم، حجم حاصل از دوران تقریباً چقدر است؟



(۱) 64π
(۲) 72π
(۳) 84π
(۴) 90π

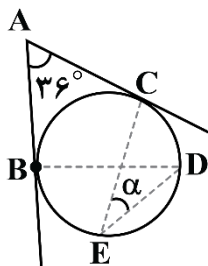
محل انجام محاسبات

- ۲۴- مطابق شکل، نیم دایره به مرکز O طوری نسبت به مثلث APC قرار گرفته است که اندازه پاره خط AD با شعاع نیم دایره برابر است، اگر $\hat{A} = 18^\circ$ باشد، α کدام است؟



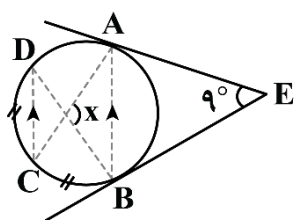
- (۱) 63°
(۲) 60°
(۳) 54°
(۴) 66°

- ۲۵- در دایره زیر به قطر BD از نقطه A دو مماس بر دایره رسم کرده ایم. اگر زاویه بین دو مماس 36° باشد، زاویه α کدام است؟



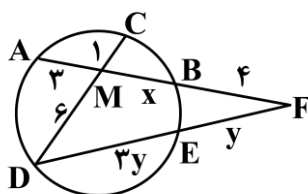
- (۱) 36°
(۲) 18°
(۳) 24°
(۴) 12°

- ۲۶- در شکل مقابل، اگر $\widehat{DC} = \widehat{BC}$ باشد، زاویه x کدام است؟



- (۱) 116°
(۲) 119°
(۳) 117°
(۴) 118°

- ۲۷- در شکل مقابل، اندازه پاره خط EF کدام است؟



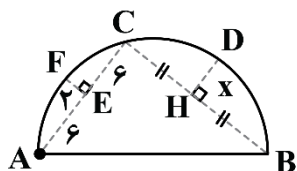
- (۱) ۲
(۲) ۳
(۳) ۴
(۴) ۶

محل انجام محاسبات

۲۸- اگر شعاع بزرگ‌ترین دایره مماس بر دو دایره متداخل $C(O, r)$ و $C'(O', r)$ برابر ۵ باشد و طول خط‌المركزین دو دایره $1/5$ واحد باشد، r کدام است؟

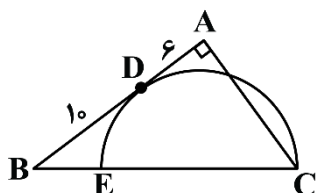
- (۱) $1/5$ (۲) $0/5$ (۳) ۲ (۴) $2/5$

۲۹- در نیم‌دایره شکل مقابل اندازه پاره خط DH که عمود منصف وتر BC است، کدام است؟



- (۱) ۳
(۲) ۴
(۳) ۵
(۴) ۶

۳۰- مثلث قائم‌الزاویه ABC مفروض است، نیم‌دایره‌ای مطابق شکل در نقطه D بر ضلع AB مماس است و دو قطعه به طول‌های ۶ و ۱۰ روی ضلع AB جدا کرده است، قطر نیم‌دایره کدام است؟



- (۱) ۱۰
(۲) ۱۲
(۳) ۱۵
(۴) ۱۶

۳۱- گزاره $\sim(p \wedge r) \Rightarrow \sim(p \Rightarrow q)$ هم‌ارز کدام گزاره است؟

- (۱) $q \Rightarrow (p \wedge r)$ (۲) $p \wedge (q \Rightarrow r)$ (۳) $r \wedge (p \Rightarrow q)$ (۴) $p \Rightarrow (q \wedge r)$

۳۲- عکس نقیض ترکیب شرطی $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\sim p \wedge q)$ کدام است؟

- (۱) $(\sim p \wedge q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$ (۲) $(p \wedge \sim q) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$
(۳) $(q \Rightarrow p) \Rightarrow (p \wedge \sim q)$ (۴) $(q \Rightarrow p) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$

۳۳- در چند حالت از جدول ارزش گزاره‌ای، ارزش گزاره $(p \vee q) \Leftrightarrow \sim r$ درست است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

محل انجام محاسبات

۳۴- نقیض گزاره $\forall x \in \mathbb{Z} : (\sqrt{x^2} = x) \Rightarrow [\frac{3}{4} \sin x] = -2$ کدام است؟

(۱) $\exists x \in \mathbb{Z} : (\sqrt{x^2} = x) \wedge ([\frac{3}{4} \sin x] \neq -2)$ (۲) $\exists x \in \mathbb{Z} : (\sqrt{x^2} \neq x) \wedge ([\frac{3}{4} \sin x] = -2)$

(۳) $\exists x \in \mathbb{Z} : (\sqrt{x^2} = x) \vee ([\frac{3}{4} \sin x] \neq -2)$ (۴) $\exists x \in \mathbb{Z} : (\sqrt{x^2} \neq x) \vee ([\frac{3}{4} \sin x] = -2)$

۳۵- اگر $A - C = \emptyset, B' \subseteq A'$ باشد، آنگاه متمم مجموعه $A \cap (C - B)$ با کدام گزینه برابر است؟ (U نماد مجموعه مرجع است)

(۱) $\emptyset$ (۲) $A' \cap B'$ (۳) $A' - B'$ (۴) U

۳۶- اگر $(A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B) = B$ باشد، آنگاه مجموعه $(A \cap B \cap C) - (A \cap (B - C))$ با کدام مجموعه برابر است؟

(۱) $A - C$ (۲) $A \cap C$ (۳) $A \cap B$ (۴) $B \cap C'$

۳۷- اگر $A = \{a, b, \{a\}, \emptyset\}$ و $B = \{a, \{b\}, \{a, b\}, \{b, a\}\}$ باشند، مجموعه $(A - B) \times (B - A)$ چند زیرمجموعه سره غیر تهی دارد؟

(۱) ۳۱ (۲) ۳۰ (۳) ۶۳ (۴) ۶۲

۳۸- اگر $A = [1, 3]$ و $B = \{1, 3\}$ باشد، آنگاه نمودار $(A \times B) \cup (B \times A)$ در کدام گزینه به درستی توصیف شده است؟

(۱) محیط یک مربع (۲) دو پاره خط موازی محور طول ها
(۳) سطح یک مربع (۴) چهار رأس یک مربع

۳۹- مجموعه $A = \{3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$ شامل چند زیرمجموعه است به طوری که مجموع بزرگ ترین و کوچک ترین عضو آن مضرب ۷ باشد؟

(۱) ۱۰ (۲) ۱۱ (۳) ۱۶ (۴) ۳۲

۴۰- اگر $(C - A)' \subseteq A - B'$ باشد، کدام گزینه زیر همواره درست است؟

(۱) $A - B' = \emptyset$ (۲) $A \cap C' = A$ (۳) $C' - A = \emptyset$ (۴) $B \cup C' = C'$

محل انجام محاسبات



دوست مازی من! سلام به جمع دوپینگی‌های کنکور ۱۴۰۵ خوش اومدی!
قراره کل نکات دروس اختصاصی رو به شکل تست و نکات پرتکرار در
کمترین حجم با صرف کمترین زمان و انرژی مرور کنیم.
می‌خوام براتون توضیح بدم که چطوری از این دوره استفاده کنید:



در دوره دوپینگ:

- ✓ در آزمون هر یک از دروس اختصاصی می‌توانید به صورت جداگانه شرکت کنید و بلافاصله پس از وارد کردن پاسخ‌های کلیدی در سایت، دفترچه پاسخ اون درس در اختیارتون قرار می‌گیره.
- ✓ محدودیت زمان برای شرکت در آزمون ندارید و از ۸ صبح تا ۸ شب می‌تونید در آزمون شرکت کنید.
- ✓ تمرکز بر روی پوشش همه نکات هر مبحث در یک آزمون، تست‌های تالیفی ماز



SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir



گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی

آزمون دوپینگ ماز | پایه دوازدهم



دوپینگ ماز

ریاضیات

دفترچه پاسخ

ویژه کنکوری‌های ۱۴۰۵

چهارشنبه ۱۶ اردیبهشت ماه ۱۴۰۵

درس	مسئول درس	طراحان	ویراستاران
ریاضیات	حسین شفیع زاده مهرداد کیوان سید جواد نظری	حسین شفیع زاده مهرداد کیوان علی منصف شکری علیرضا شریف خطیبی	ندا فرهختی - مائده بادران فیروز حمیدرضا ولی پور - مهرداد اسپیدکار یزدان نیک قدم - حسین صنمی نوید ذکی - علیرضا ملک حسینی علی اسدی

الگو و دنباله +
توان‌های گویا و
عبارت‌های جبری،
مقاطع مخروطی +
بردارها، آشنایی با
نظریه اعداد

جامع مشتق و کاربرد
مشتق، ماتریس‌ها،
گراف و مدل‌سازی

جامع حد و پیوستگی،
روابط طولی در مثلث
+ ترسیم‌های هندسی و
استدلال، آمار
توصیفی و استنباطی

جامع مثلثات،
چندضلعی‌های
محاطی و محیطی +
تبدیل‌های هندسی،
احتمال

جامع تابع + توابع
نمایی و لگاریتمی،
تجسیم فضایی + دایره،
آشنایی با مبانی
ریاضیات

مباحث پایه
(جبر، معادله و
نامعادله)، تالس و
چندضلعی‌ها،
ترکیب‌یات

مسیر حرفه‌ای جمع‌بندی تا کنکور ۱۴۰۵

برای شباهت حداکثری به کنکور، صفحه‌آرایی، فونت و حتی اندازه متن در تمامی آزمون‌های ماز، کاملاً یکسان با استاندارد دفترچه‌های کنکور در نظر گرفته می‌شود.

راهنمای پامفله آزمون ها

زمان پاسخگویی:

سریع (زیر ۱ دقیقه) | استاندارد (۱-۲ دقیقه) |
زمان بر (بیشتر از ۲ دقیقه).

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط - خط به خط - استاندارد) - صفحه ۳ تا ۶ - ۱۰۰۱

سطح سؤال:

آسان (اعتماد به نفس) | متوسط (محک جدی)
دشوار (چالش رشد).

هشتگ سؤال:

شماره درس + شماره پایه
دسته بندی راحت تر سؤالات

سبک سؤال:

خط به خط (متن کتاب) | ترکیبی (چند مبحث) |
محاسباتی (فرمول ودقت) | مفهومی (درک عمیق).

شماره صفحه:

منبع اصلی رو راحت پیدا کنید.

ویژگی های آزمون دوپینگ

پهروسی سریع



«بابت نگاه صرفه ای، دلیل درست بودن یا نبودن گزینه ها را در لحظه ببینید و درون اقلای وقت، پرونده هر سؤال را با یادگیری کامل ببینید!»

پاسخنامه کامل



«یک نقشه راه دقیق و نام نه نام که پیچیده ترین مسائل موضوع را بازمی کند تا هیچ ابهامی در مسیر موفقیت تان باقی نماند.»

نکات و دام های گنگوری



«در دام سؤالات نغیفتید! ما ترغدهای طراحان سوال و مفاهیم کلیدی رو بهتون یاد می دیم تا با آمادگی کامل، همه سؤالات رو جواب بدید.»

کپسول دوپینگ



آماده یک انفجار یادگیری باشید!

«با کپسول دوپینگ "کلید موفقیت در دستان شماست! با مرور سریع و کار بردی نکات، از پس هر سوالی برآید و در آزمون ها بدرخشید!»

دانشبورد دوپینگ

مبحث	کتاب	فصل	وضعیت این آزمون	سطح دشواری این آزمون	آخرین وضعیت کنکور ۱۴۰۴
تابع	ریاضی ۱	۵	مفاهیم پایه‌ای این فصل به صورت ضمنی در سایر سؤالات هستند.	-	فاقد تست مستقیم
	حسابان ۱	۲	۲ سؤال مشابه کنکور و ۲ سؤال با ایده نو طرح شده است.	★★★★★	۲ سؤال با ایده نو
	حسابان ۲	۱	۱ سؤال مشابه کنکور، ۳ سؤال با ایده نو و ۲ سؤال با الهام از کتاب درسی طرح شده است.	★★★★★	فاقد تست مستقیم
لگاریتم	حسابان ۱	۳	۴ سؤال مشابه کنکور، ۳ سؤال با ایده نو و ۳ سؤال با الهام از کتاب درسی طرح شده است.	★★★★★	یک سؤال مشابه کنکورهای گذشته + یک سؤال با ایده نو و ترکیبی با فصل ۱ یازدهم

توصیه‌های دوپینگ

پیش‌بینی طراح...

«نمودار توابع نمایی و لگاریتمی» و همچنین «حل معادلات لگاریتمی» از اهمیت به‌سزایی برخوردار هستند. همچنین انتظار ۱ تست مستقیم از فصل تابع دوازدهم را داشته باشید.

اگر دنبال درس‌های آسان‌تر هستید...

تمرکزتان را روی مباحث «ویژگی‌های لگاریتم»، «نمودار توابع نمایی»، «تبدیلات توابع» و «تابع وارون» بگذارید، در این مباحث زودتر به نتیجه می‌رسید.

اگر زمان کمی دارید...

اگر زمان کمی دارید «تابع نمایی و لگاریتمی» را اصلاً رها نکنید و حتماً روی ۱ الی ۲ تست این مباحث حساب کنید.

سفن مسئول درس

سلام به همه دانش‌آموزان عزیز رشته ریاضی

از مبحث «لگاریتم» معمولاً ۱ تست مستقیم و ۱ تست به‌صورت ترکیبی با معادلات درجه دوم یا در قالب یافتن دامنه توابعی شامل تابع نمایی یا لگاریتمی، مطرح می‌شود. از مبحث «تابع» نیز حتماً یک تست مستقیم از مباحث سال دوازدهم «انتقال‌ها، قضیه تقسیم و یکنوایی» و ۲ یا ۳ تست نیز طی سال‌های مختلف از «مباحث پایه‌ای تابع» طرح شده است. برای تسلط کافی بر این مباحث توصیه می‌کنیم که سؤالات مربوط به کنکور ریاضی و تجربی را حل کنید. همچنین مرور تست‌هایی که در قالب آزمون‌های دوره‌ای، جمع‌بندی یا دوپینگ آمده، می‌تواند بانک کاملی از انواع سؤالات را در اختیارتان قرار دهد که با یادگیری و تسلط بر آن‌ها می‌توانید کوله‌بار خود را تکمیل کنید.

حسین شفیع زاده - مهرداد کیوان

- ۱- نمودار توابع $f(x) = 2 + 2^{a-bx}$ و $g(x) = 2x^2 - x + 3$ در نقطه‌ای به طول ۱ همدیگر را قطع می‌کنند. هرگاه $f^{-1}(10) = 0$ باشد، مقدار $\log_b(a^2 + 5)$ چه عددی است؟
- (۱) ۷ (۲) ۶ (۳) ۴ (۴) ۵

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - حسابان ۱ صفحه‌های ۷۸ و ۷۹ - ۱۱۰۳

پاسخ: گزینه ۴

چون دو نمودار در $x = 1$ با هم تلاقی دارند، پس:
از آن جایی که $g(1) = 2(1)^2 - 1 + 3 = 4$ ، پس $f(1) = 4$ است. یعنی:
 $2 + 2^{a-b} = 4 \Rightarrow 2^{a-b} = 2 \Rightarrow a - b = 1$ (*)
از طرفی $f^{-1}(10) = 0$ ، پس $f(0) = 10$ ، یعنی:
 $2 + 2^a = 10 \Rightarrow 2^a = 8 \Rightarrow a = 3 \xrightarrow{(*)} b = a - 1 = 2$
بنابراین داریم:

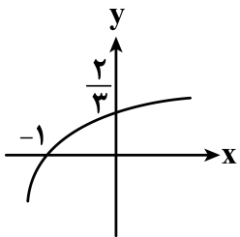
$$\log_b(a^2 + 5) = \log_2(2^3 + 5) = \log_2 17 = \log_2 2^4 = 4$$

کپسول دوبینگ | (نقطه نظیر روی وارون تابع)

اگر $f^{-1}(\alpha) = \beta$ باشد، آن‌گاه $f(\beta) = \alpha$ و برعکس.



- ۲- شکل روبه‌رو نمودار تابع $f(x) = a \times 3^{bx+c} + 1$ است. $f^{-1}(-2)$ چه عددی است؟



- (۱) $\frac{1}{4}$
(۲) $-\frac{1}{2}$
(۳) $\frac{1}{2}$
(۴) -2

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - حسابان ۱ صفحه ۷۴ - ۱۱۰۳

پاسخ: گزینه ۴

با توجه به نمودار داریم:

$$\begin{cases} f(0) = \frac{1}{3} \Rightarrow a \times 3^c + 1 = \frac{1}{3} \Rightarrow a \times 3^c = -\frac{2}{3} \quad (1) \\ f(-1) = 0 \Rightarrow a \times 3^{c-b} + 1 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

$$(1), (2) \Rightarrow \underbrace{a \times 3^c}_{-\frac{2}{3}} \times 3^{-b} + 1 = 0 \Rightarrow \frac{1}{3} \times 3^{-b} = 1 \Rightarrow 3^{-1} \times 3^{-b} = 1 \Rightarrow 3^{-b-1} = 1 \Rightarrow -b-1 = 0 \Rightarrow b = -1$$

درنتیجه تابع f به صورت زیر است:

$$f(x) = a \times 3^{c-x} + 1 = \underbrace{a \times 3^c}_{-\frac{2}{3}} \times 3^{-x} + 1 \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{3} \times 3^{-x} + 1$$

برای یافتن $f^{-1}(-2)$ داریم:

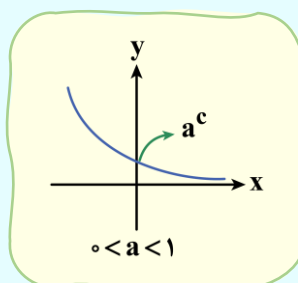
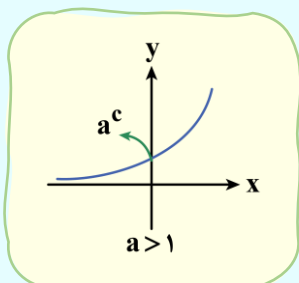
$$f^{-1}(-2) = \alpha \Rightarrow f(\alpha) = -2$$

$$-\frac{1}{3} \times 3^{-\alpha} + 1 = -2 \Rightarrow 3^{-\alpha} = 9 \Rightarrow -\alpha = 2 \Rightarrow \alpha = -2$$

$$\Rightarrow f^{-1}(-2) = -2$$

نمودار توابع نمایی

نمودار تابع نمایی $f(x) = a^{(bx+c)}$ با شرط $a > 0$ و $a \neq 1$ و b مثبت) به یکی از دو صورت زیر است:

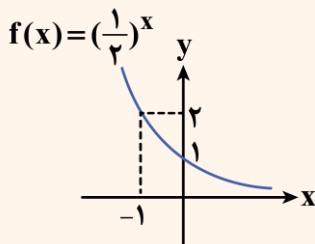
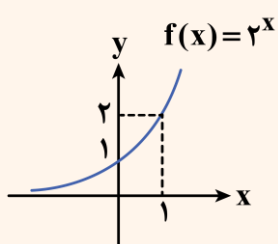


توجه کنید که محل تقاطع تابع با محور y ها برابر است با:

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = a^{0+c} = a^c$$

و همچنین $f(x) > 0$ یعنی f برد آن (زمانی که انتقال عمودی نداشته باشد) $(0, +\infty)$ و دامنه f برابر با $\mathbb{R}$ است.

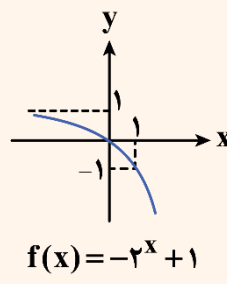
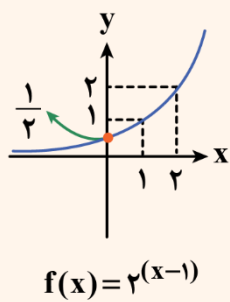
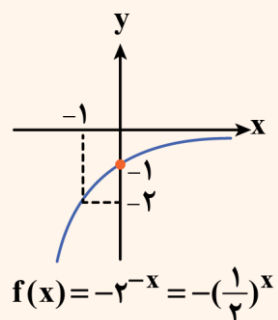
یه نمونه باحال ببین!



نکته!

می‌توان به کمک تبدیل نمودار f ، نمودار انتقال یافته و انعکاس یافته نمودار f را به دست آورد.

یه نمونه باحال ببین!



۳- هرگاه $\log_4^a = \log_9^b = \log_{36}^{(4a+3b)}$ ، مقدار $(\frac{4}{b} + \frac{3}{a})$ چه عددی است؟

۷۲ (۴)

۳۶ (۳)

۱۲ (۲)

۲۴ (۱)

سخت - ترکیبی - استاندارد - حسابان ۱ صفحه‌های ۸۶ و ۸۷ - ۱۱۰۳

پاسخ: گزینه ۱

اگر فرض کنیم:

$$\log_4^a = \log_9^b = \log_{36}^{(4a+3b)} = k$$

آن گاه خواهیم داشت:

$$\begin{cases} 4a = 4^k \Rightarrow a = \frac{4^k}{4} \\ 3b = 9^k \Rightarrow b = \frac{9^k}{3} \\ 4a + 3b = 36^k \end{cases}$$

حال خواسته مسئله را ساده می کنیم:

$$\frac{4}{b} + \frac{3}{a} = \frac{4a + 3b}{ab} = \frac{36^k}{\frac{4^k}{4} \times \frac{9^k}{3}} = \frac{36^k}{\frac{1}{24}(36)^k} = 24$$

تابع لگاریتمی

وارون یک تابع نمایی را تابع لگاریتمی می نامیم. تابع نمایی $f(x) = a^x$ با شرط $a > 0, a \neq 1$ یک به یک است. از این رو دارای تابع وارون f^{-1} است که تابع لگاریتمی با پایه یا مبانی a نامیده می شود و با نماد $y = \log_a^x$ نشان داده می شود.

$$y = \log_a^x$$

مبنای لگاریتم

$$y = \log_a^x \Leftrightarrow a^y = x$$

یعنی:

یه نمونه با حال ببین!

$$1) \log_2^8 = 3 \Leftrightarrow 2^3 = 8 \quad 2) \log_{10}^{10^{-1}} = -1 \Leftrightarrow 10^{-1} = \frac{1}{10}$$

••• i/o •••

۴- اگر معادله $\log_3^{(9^x + 18)} = x + 2$ دارای جواب های α و β باشد، حاصل $\alpha + \beta$ کدام است؟

(۱) ۹ (۲) $\log_3^{36}$ (۳) $\log_3^{18}$ (۴) ۱۸

پاسخ: گزینه ۳

به کمک تعریف لگاریتم داریم:

$$\log_3^{(9^x + 18)} = x + 2 \Rightarrow 9^x + 18 = 3^{(x+2)} \Rightarrow 9^x + 18 = 3^x \times 9 \Rightarrow 9^x - 9 \times 3^x + 18 = 0$$

اگر فرض کنیم $3^x = A$ ، آن گاه داریم:

روش اول

$$A^2 - 9A + 18 = 0 \Rightarrow \begin{cases} A_1 + A_2 = 9 \\ A_1 A_2 = 18 \Rightarrow 3^\alpha \times 3^\beta = 18 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3^{\alpha+\beta} = 18 \xrightarrow{\log_3} \alpha + \beta = \log_3^{18}$$

$$A^2 - 9A + 18 = 0 \xrightarrow{\Delta=9} A = \frac{9 \pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} 3^x = 6 \Rightarrow x = \log_3 6 \\ 3^x = 3 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = \log_3 6 \\ \beta = 1 \end{cases} \Rightarrow \alpha + \beta = 1 + \log_3 6 = \log_3 6 + \log_3 3 = \log_3 18$$

معادلات لگاریتمی

به معادلاتی که در آن‌ها مجهول مسئله در لگاریتم قرار بگیرد، معادله لگاریتمی می‌گویند.
برای حل معادلات لگاریتمی پس از ساده کردن طرفین تساوی به کمک ویژگی‌های لگاریتم معادله به یکی از دو صورت زیر درمی‌آید:

$$\log_a^{P(x)} = \log_a^{Q(x)} \Rightarrow P(x) = Q(x) ; P(x), Q(x) > 0$$

$$\log_a^{P(x)} = Q(x) \Rightarrow P(x) = a^{Q(x)} ; Q(x) > 0$$

و برای معادلات به دست آمده، جواب‌های حاصل را در معادله اولیه امتحان می‌کنیم تا عبارت جلوی لگاریتم را منفی یا صفر نکنند.

قلقشو یاد بگیر!

گاهی در حل معادلات لگاریتمی و نمایی لازم است از تغییر متغیر استفاده کنیم تا معادله را به یک معادله جبری تبدیل کنیم.

یه نمونه باحال ببین!

$$\log_2^{(4^x + 48)} = x + 4 \Rightarrow 4^x + 48 = 2^{(x+4)} \Rightarrow 4^x + 48 = 2^x \times 16$$

$$\Rightarrow 4^x - 16 \times 2^x + 48 = 0 \Rightarrow (2^x)^2 - 16 \times 2^x + 48 = 0$$

$$\xrightarrow{t=2^x} t^2 - 16t + 48 = 0 \Rightarrow (t-12)(t-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t=12 \\ t=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^x = 12 \Rightarrow x = \log_2 12 \\ 2^x = 4 \Rightarrow x = 2 \end{cases}$$

کپسول دوبینگ | (حل معادلات لگاریتمی)

در حل معادلات لگاریتمی ابتدا باید با استفاده از ویژگی‌های لگاریتم معادله را به یکی از دو صورت $\log_a^{P(x)} = \log_a^{Q(x)}$ یا $\log_a^{P(x)} = Q(x)$ تبدیل کنیم. آن‌گاه حل معادله به ترتیب به حل معادله $P(x) = Q(x)$ یا $P(x) = a^{Q(x)}$ تبدیل می‌شود. سپس گاهی لازم است از تغییر متغیر استفاده کنیم تا معادله را به یک معادله جبری تبدیل و حل کنیم. در نهایت باید حواسمان به قرارگیری جواب‌ها در محدوده مجاز دامنه باشد.



۵- اگر $\log_{15}^2 = a$ و $\log_5^9 = b$ ، مقدار $\log_4^9$ بر حسب a و b کدام است؟

(۱) $\frac{2a + ab - b}{2b}$ (۲) $\frac{2a + b - ab}{b}$ (۳) $\frac{2b + a - ab}{a}$ (۴) $\frac{2b - a + ab}{2a}$

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - حسابان ۱ صفحه ۹۰ - ۱۱۰۳

پاسخ: گزینه ۱

روش اول

ابتدا سعی می‌کنیم ۲ و ۳ را بر حسب ۵ بنویسیم:

$$\log_{15}^2 = a \Rightarrow 12 = 15^a \Rightarrow 3 \times 2^2 = 5^a \times 3^a \quad (I)$$

$$\log_5^9 = b \Rightarrow 9 = 5^b \Rightarrow 3^2 = 5^b \Rightarrow 3 = 5^{\frac{b}{2}} \quad (II)$$

با جای گذاری (II) در (I) داریم:

$$\frac{b}{5^{\frac{b}{2}}} \times 2^2 = 5^a \times \left(5^{\frac{b}{2}}\right)^a \Rightarrow 2^2 = 5^{(a + \frac{ab}{2} - \frac{b}{2})} \Rightarrow 2^2 = 5^{\frac{(2a + ab - b)}{2}} \Rightarrow 2 = 5^{\frac{(2a + ab - b)}{4}}$$

حال مقدار $\log_4^9$ را بر حسب a و b می‌یابیم:

$$\log_4^9 = \log_{2^2}^9 = \log_{5^{\frac{(2a + ab - b)}{4}}}^9 = \frac{\frac{2a + ab - b}{4}}{\frac{b}{2}} = \frac{2a + ab - b}{2b}$$

روش دوم

ابتدا هر کدام از لگاریتم‌های معادل a و b را ساده می‌کنیم:

$$\log_5^9 = b \Rightarrow \frac{\log_3^9}{\log_3^5} = b \Rightarrow \frac{2}{\log_3^5} = b \Rightarrow \log_3^5 = \frac{2}{b} \quad (I)$$

$$\log_{15}^2 = a \Rightarrow \frac{\log_3^2}{\log_3^{15}} = a \Rightarrow \frac{\log_3^2 + \log_3^2}{\log_3^5 + \log_3^3} = \frac{1 + 2\log_3^2}{\log_3^5 + 1} = a$$

$$\xrightarrow{(I)} 1 + 2\log_3^2 = a\left(\frac{2}{b} + 1\right) \Rightarrow 1 + 2\log_3^2 = \frac{2a}{b} + a \Rightarrow \log_3^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2a}{b} + a - 1\right) = \frac{2a + ab - b}{2b}$$

از طرفی:

$$\log_4^9 = \log_{2^2}^9 = \frac{2}{2} \log_2^9 = \log_2^9 = \frac{2a + ab - b}{2b}$$

کپسول دوبینگ | ویژگی‌های لگاریتم

بنا بر تعریف لگاریتم می‌دانیم:

$$\log_b^a = c \Leftrightarrow a = b^c \quad (a > 0, b > 0, b \neq 1)$$

بر این اساس می‌توان گفت:

$$1) \log_a^a = 1, \log_a^1 = 0$$

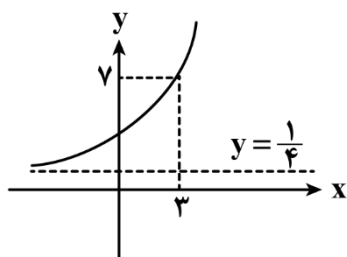
$$\left. \begin{array}{l} ۲) \log_b a^n = n \log_b a \\ ۳) \log_b a^m = \frac{1}{m} \log_b a \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{نتیجه}} \log_b a^n = \frac{n}{m} \log_b a$$

$$۴) \log_b (aa') = \log_b a + \log_b a'$$

$$۵) \log_b \left(\frac{a}{a'}\right) = \log_b a - \log_b a'$$

$$۶) a^{\log_b c} = b^{\log_c a}$$

$$۷) \log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b} \xrightarrow{\text{نتیجه}} \log_b a = \frac{\log a}{\log b} \quad (\log a = \log_{10} a)$$



۶- نمودار وارون تابع $f(x) = \log_3(ax+b)$ شکل روبه‌رو است. مقدار $f(۶۱)$ چه عددی است؟

- ۵ / ۵ (۱)
- ۴ / ۵ (۲)
- ۴ (۳)
- ۵ (۴)

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - حسابان ۱ صفحه ۸۱ - ۱۱۰۳

پاسخ: گزینه ۴

نمودار داده شده نمودار f^{-1} است، به‌طوری که:

$$f^{-1}(۳) = ۷ \Rightarrow f(۷) = ۳ \Rightarrow \log_3(7a+b) = ۳ \Rightarrow 7a+b = 27 \quad (۱)$$

از طرفی داریم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f^{-1}(x) = \frac{1}{4}$$

$y = \frac{1}{4}$ مجانب افقی تابع $y = f^{-1}(x)$ است، پس برای خود تابع f داریم:

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{4})^+} f(x) = -\infty$$

پس $x = \frac{1}{4}$ مجانب قائم تابع f است، یعنی $\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{4})^+} ax+b = 0$ و $x = \frac{1}{4}$ ریشه $ax+b$ است:

$$\frac{1}{4}a+b=0 \Rightarrow a+4b=0 \quad (۲)$$

با حل دستگاه شامل معادلات (۱) و (۲) داریم:

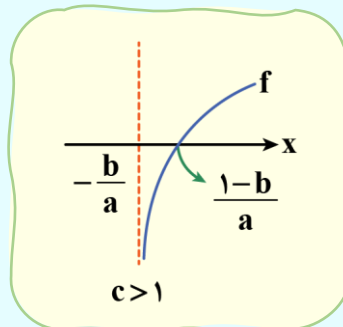
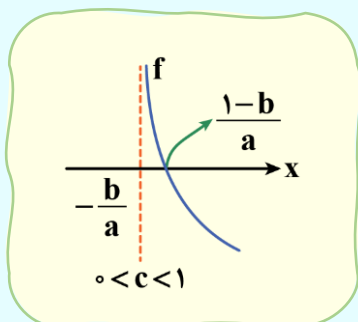
$$\begin{cases} (-۷) \times \begin{cases} a+4b=0 \\ 7a+b=27 \end{cases} \Rightarrow -27b=27 \Rightarrow b=-1 \Rightarrow a=4 \Rightarrow f(x) = \log_3(4x-1) \end{cases}$$

بنابراین:

$$f(۶۱) = \log_3 243 = \log_3 3^5 = ۵$$

نمودار تابع لگاریتمی

تابع لگاریتمی $f(x) = \log_c^{(ax+b)}$ وارون تابع نمایی است و نمودار آن به یکی از دو صورت زیر است: (با فرض $a > 0$)



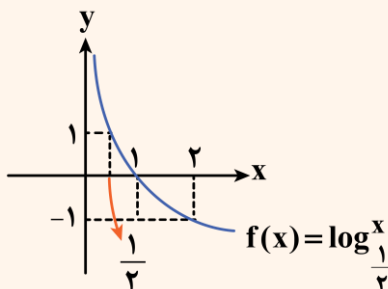
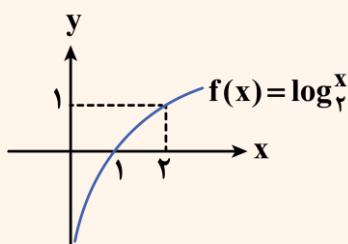
یعنی ریشه عبارت جلوی لگاریتم **مجانِب قائم** منحنی است و دامنه تابع $x > -\frac{b}{a}$ است.

توجه کنید که **محل تقاطع نمودار f با محور xها** برابر است با:

$$f(x) = 0 \Rightarrow \log_c^{(ax+b)} = 0 \Rightarrow ax + b = 1 \Rightarrow x = \frac{1-b}{a}$$

یه نمونه با حال ببین!

برای توابع $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}^x$ و $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}^x$ داریم:



کپسول دوبینگ | (نمودار تابع لگاریتمی)

از قرینه کردن نمودار تابع نمایی نسبت به نیمساز ربع اول و سوم تابع لگاریتمی به دست می‌آید. در **توابع نمایی** یک خط **مجانِب افقی** داریم ولی در **توابع لگاریتمی** یک **مجانِب قائم** داریم که ریشه عبارت جلوی لگاریتم است.

$$f(x) = \log_c^{(ax+b)} \Rightarrow \text{مجانِب قائم: } x = -\frac{b}{a}$$



۷- اگر مجموع ریشه‌های معادله $-8ax^2 + 2bx - \frac{c}{4} = 0$ برابر با $\log_3^{\frac{a}{4}}$ و واسطه حسابی بین $2b$ و $2c$ باشد، حاصل

$\left(\sqrt[4]{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{c}{a}}$ چه عددی است؟

(۴) $\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$

(۳) $\sqrt[4]{3}$

(۲) $\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$

(۱) $\sqrt[4]{3}$

(سخت - محاسباتی - استاندارد) حسابان ۱ صفحه‌های ۸۶ و ۸۷ - ۱۱۰۳

پاسخ: گزینه ۲

فرض کنیم α و β جواب‌های معادله باشند، پس:

$$S = \alpha + \beta = -\frac{2b}{-8a} = \frac{b}{4a} \Rightarrow \frac{b}{4a} = \log_3^{\frac{a}{4}} \Rightarrow \frac{b}{a} = 4 \log_3^{\frac{a}{4}} \quad (1)$$

از طرفی $\frac{a}{4}$ واسطه حسابی بین اعداد $2b$ و $2c$ است، پس:

$$\frac{2b + 2c}{2} = \frac{a}{4} \Rightarrow b + c = \frac{a}{2} \Rightarrow \frac{b}{a} + \frac{c}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{1}{2} - \frac{b}{a} \quad (2)$$

با جای‌گذاری (۱) در (۲) داریم:

$$\frac{c}{a} = \frac{1}{2} - \frac{b}{a} = \frac{1}{2} - 4 \log_3^{\frac{a}{4}}$$

از طرفی مقدار خواسته شده را ساده می‌کنیم:

$$\left(\sqrt[4]{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{c}{a}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{c}{4a}}$$

و با جای‌گذاری مقدار به‌دست آمده برای $\frac{c}{a}$ در آن داریم:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{c}{4a}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} - 4 \log_3^{\frac{a}{4}}\right)} = 3^{\log_3^{\frac{a}{4}} - \frac{1}{8}} = 3^{\log_3^{\frac{a}{4}} - \frac{1}{8}} = 3^{\frac{1}{8} \times 3 - \frac{1}{8}} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$$

مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله درجه ۲

در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ با شرط وجود جواب‌های حقیقی α و β ، بدون حل معادله می‌توان مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها را به‌دست آورد:

مجموع ریشه‌ها: $S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$

حاصل‌ضرب ریشه‌ها: $P = \alpha\beta = \frac{c}{a}$

تفاضل ریشه‌ها: $|\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$

واسطه حسابی و هندسی

اگر C واسطه حسابی دو عدد a و b باشد، آن گاه:

$$c = \frac{a+b}{2} \text{ یا } a+b=2c$$

اگر C واسطه هندسی دو عدد هم علامت a و b باشد، آن گاه:

$$c = \pm\sqrt{ab} \text{ یا } ab = c^2$$



۸- مقداری از یک عنصر موجود است، به طوری که در هر ساعت $\frac{1}{9}$ از جرم باقی مانده را از دست می دهد، پس از تقریباً چند

ساعت $\frac{1}{12}$ از جرم باقی خواهد ماند؟ ($\log_3^5 = \frac{7}{5}$ و $\log_5^2 = \frac{5}{12}$)

۹/۲ (۴)

۸/۶ (۳)

۸/۳ (۲)

۷/۶ (۱)

(سخت - محاسباتی - استاندارد) - حسابان ۱ صفحه ۸۹ - ۱۱۰۳

پاسخ: گزینه ۳

مطابق رابطه‌ای که برای زوال یک ماده یا عنصر داریم می دانیم:

$$f(t) = A_0(1-a)^{\frac{t}{T}}$$

$$\xrightarrow{T=1, a=\frac{1}{9}} \frac{1}{12} A_0 = A_0 \left(\frac{8}{9}\right)^t$$

$$\left(\frac{8}{9}\right)^t = \frac{1}{12} \Rightarrow t = \log_{\frac{8}{9}}^{\frac{1}{12}} \Rightarrow t = \frac{-\log_3^{\frac{1}{12}}}{\log_3^{\frac{8}{9}}} = \frac{-\log_3^{\frac{1}{12}}}{\log_3^8 - \log_3^9} = \frac{\log_3^{3 \times 2^2}}{-\log_3^8 + \log_3^9} \Rightarrow t = \frac{1+2\log_3^2}{-3\log_3^2+2} \quad (1)$$

پس کافی است $\log_3^2$ را به دست آوریم:

$$\log_5^2 \times \log_3^5 = \frac{5}{12} \times \frac{7}{5} \Rightarrow \log_3^2 = \frac{7}{12} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow t = \frac{1+\frac{7}{6}}{-\frac{7}{4}+2} = \frac{\frac{13}{6}}{\frac{1}{4}} = \frac{52}{6} \approx 8/6$$

کپسول دوبینک | (مسائل رشد یا زوال نمایی)

زوال: اگر ماده‌ای در هر T واحد زمانی، a واحد (کسری) خود را از دست دهد پس از t واحد زمانی مقدار ماده موجود برابر است با:

$$f(t) = A_0(1-a)^{\frac{t}{T}}$$

که A_0 مقدار ماده اولیه است.

رشد: اگر ماده‌ای در هر T واحد زمانی، a واحد (کسری) به آن اضافه شود، پس از t واحد زمانی مقدار ماده موجود برابر است با:

$$f(t) = A_0 \left(1 + a\right)^{\frac{t}{T}}$$

توجه!

همیشه به واحدهای زمانی (روز، هفته، ماه، سال و...) و در صورت نیاز تبدیل آن‌ها به یکدیگر در این گونه سؤالات دقت کنید.

یه نمونه باحال ببین!

رابطه مربوط به جرم یک ماده با نیمه عمر T سال به صورت زیر است:

$$f(t) = A_0 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}} \Rightarrow f(t) = A_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}} \quad \text{مقدار ماده پس از } t \text{ سال:}$$



- ۹- اگر $f(x) = \log_2(2^x - 9)$ ، $g(x) = x + \sqrt{5x - 1}$ و تابع $g^{-1} \circ f^{-1}(x)$ محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض α قطع کند، مقدار $\alpha + \frac{2}{\alpha}$ کدام است؟
- (۱) $\frac{3}{5}$ (۲) $\frac{4}{5}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{4}{3}$

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - حسابان ۱ صفحه ۶۹ - ۱۱۰۳

پاسخ: گزینه ۳

روش اول

چون تابع $g^{-1} \circ f^{-1}(x)$ محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض α قطع می‌کند، پس:

$$g^{-1} \circ f^{-1}(\alpha) = \alpha \Rightarrow g^{-1}(f^{-1}(\alpha)) = \alpha \Rightarrow f^{-1}(\alpha) = g(\alpha) \xrightarrow{g(\alpha) = \beta}$$

$$f^{-1}(\alpha) = \beta \Rightarrow f(\beta) = \alpha \Rightarrow \log_2(2^\beta - 9) = \alpha \Rightarrow 2^\beta - 9 = 2^\alpha$$

یعنی $\beta = 5$ ، پس $f^{-1}(\alpha) = 5$ ، به این ترتیب:

$$g(\alpha) = 5 \Rightarrow \alpha + \sqrt{5\alpha - 1} = 5 \Rightarrow \sqrt{5\alpha - 1} = 5 - \alpha \xrightarrow[\text{توان ۲}]{\alpha \leq 5} 5\alpha - 1 = \alpha^2 - 10\alpha + 25$$

$$\Rightarrow \alpha^2 - 15\alpha + 26 = 0 \Rightarrow (\alpha - 2)(\alpha - 13) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \alpha = 13 \end{cases} \quad \text{غقی}$$

پس $\alpha = 2$. یعنی A نقطه تلاقی تابع $g^{-1} \circ f^{-1}(x)$ با محور عرض‌هاست. در نتیجه:

$$\alpha + \frac{2}{\alpha} = 2 + 1 = 3$$

روش دوم

$$g^{-1} \circ f^{-1}(x) = (f \circ g)^{-1}(x) \Rightarrow (f \circ g)^{-1}(\alpha) = \alpha \Rightarrow f \circ g(\alpha) = \alpha$$

$$\Rightarrow f(g(\alpha)) = \alpha \Rightarrow 2g(\alpha) - 9 = \alpha \Rightarrow g(\alpha) = \frac{\alpha + 9}{2}$$

$$\Rightarrow \alpha + \sqrt{5\alpha - 1} = \frac{\alpha + 9}{2} \Rightarrow \sqrt{5\alpha - 1} = \frac{\alpha + 9}{2} - \alpha \xrightarrow[\text{توان ۲}]{\alpha \leq 5} 5\alpha - 1 = \frac{\alpha^2 + 18\alpha + 81}{4} - \alpha + 9 \Rightarrow \alpha^2 = 15\alpha - 26 \quad (*)$$

بنابراین داریم:

$$\alpha + \frac{2}{\alpha} = \frac{\alpha^2 + 2}{\alpha} = \frac{15\alpha - 26 + 2}{\alpha} = \frac{15\alpha - 24}{\alpha} = 15 - \frac{24}{\alpha}$$

از طرفی داریم:

$$\alpha^2 - 15\alpha + 26 = 0 \Rightarrow (\alpha - 2)(\alpha - 13) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \alpha = 13 \end{cases} \text{ غ ق ق}$$

در نتیجه:

$$\alpha + \frac{2}{\alpha} = 15 - \frac{24}{2} = 15 - 12 = 3$$

کپسول دوپینگ | (وارون ترکیب تابع)

$$g^{-1} \circ f^{-1}(x) = (f \circ g)^{-1}(x)$$

کپسول دوپینگ | (حل معادلات رادیکالی)

برای حل یک معادله رادیکالی، عبارت رادیکالی را در یک طرف تساوی نگه می‌داریم و بقیه عبارت‌ها را به طرف دیگر تساوی می‌بریم. سپس با توان‌رسانی رادیکال را از بین می‌بریم و معادله حاصل را حل می‌کنیم. اگر معادله شامل k عبارت رادیکالی باشد باید k بار عملیات توان‌رسانی را انجام دهیم تا همه رادیکال‌ها از بین بروند.

توجه!

توجه کنید که در نهایت جواب‌های حاصل را در معادله اصلی امتحان کنید، چون با توان‌رسانی ممکن است جواب اضافی ایجاد شود.

یه نمونه باحال ببین!

$$\sqrt{x+1} + 2x = 1 \Rightarrow \sqrt{x+1} = 1 - 2x \xrightarrow{\text{توان 2}} x+1 = 1 + 4x^2 - 4x \Rightarrow 4x^2 - 5x = 0 \Rightarrow x(4x - 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{5}{4} \end{cases}$$

$$x = 0: \sqrt{0+1} + 0 = 1 \Rightarrow 1 = 1 \checkmark$$

$$x = \frac{5}{4}: \sqrt{\frac{5}{4}+1} + \frac{5}{2} = 1 \Rightarrow \frac{3}{2} + \frac{5}{2} = 1 \Rightarrow 4 = 1 \times$$

پس فقط $x = 0$ قابل قبول است.

•••

۱۰- دامنه تابع $f(x) = \sqrt{3 - \log_2(2^x - k)}$ شامل k عدد صحیح است، k کدام است؟
۳ (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴)

(متوسط - ترکیبی - استاندارد) - حسابان ۱ صفحه‌های ۸۰ و ۸۱ - ۱۱۰۳

پاسخ: گزینه ۲

$$1) 2x - k > 0 \Rightarrow x > \frac{k}{2}$$

شرایط تعریف شده بودن f را می‌نویسیم:

$$2) 3 - \log_2(2^x - k) \geq 0 \Rightarrow \log_2(2^x - k) \leq 3 \Rightarrow 2^x - k \leq 8 \Rightarrow x \leq \frac{\log(8 - k)}{\log 2}$$

پس دامنه برابر بازه $[\frac{k}{2}, \frac{\log(8 - k)}{\log 2}]$ است. اگر k صحیح باشد، این بازه شامل ۴ عدد صحیح است.

کپسول دوبینگ | دامنه تابع لگاریتمی و رادیکالی

۱) عبارت زیر رادیکال با فرجه زوج باید نامنفی باشد اما برای رادیکال با فرجه فرد محدودیتی نداریم.

۲) در تابع لگاریتمی سه شرط را برای دامنه بررسی می‌کنیم:

$$f(x) = \log_{h(x)}^{g(x)} \rightarrow \begin{cases} g(x) > 0 \\ h(x) > 0 \\ h(x) \neq 1 \end{cases} \rightarrow D_f = \{x \mid g(x) > 0 \wedge h(x) > 0 \wedge h(x) \neq 1\}$$



۱۱- اگر f تابعی ثابت و g تابعی همانی باشد، به طوری که $f(5x) + 3g^{-1}(4-2x) = 24-6x$ مقدار $\frac{f(2)}{g(4)}$ چه عددی است؟

۲ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴)

آسان - ترکیبی - سریع - ریاضی ۱ صفحه ۱۱۰ و حسابان ۱ صفحه ۵۸ - ۱۰۰۵ و ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۲

$f(x) = k$ تابعی ثابت است، پس فرض می‌کنیم:

$g(x) = g^{-1}(x) = x$ تابع همانی است، پس:
به این ترتیب داریم:

$$\begin{cases} f(5x) = k \\ g^{-1}(4-2x) = 4-2x \end{cases} \Rightarrow f(5x) + 3g^{-1}(4-2x) = k + 3(4-2x) = -6x + k + 12$$

$$-6x + k + 12 = 24 - 6x \Rightarrow k = 12$$

از طرفی:

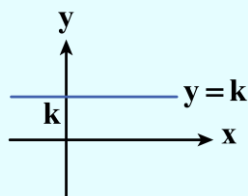
$$\begin{cases} f(x) = 12 \\ g(x) = x \end{cases} \Rightarrow \frac{f(2)}{g(4)} = \frac{12}{4} = 3$$

انواع تابع

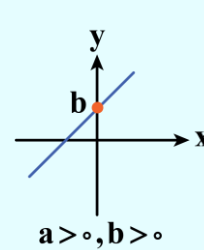
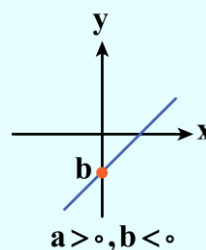
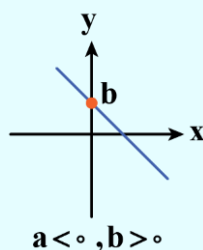
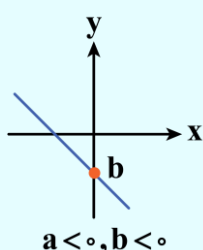
۱) توابع چندجمله‌ای: تابع $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots + cx + d$ که در آن $a \neq 0$ یک تابع چندجمله‌ای از درجه n است. دامنه همه توابع چندجمله‌ای برابر با $\mathbb{R}$ است.

چند دسته از توابع چندجمله‌ای معروف عبارت‌اند از:

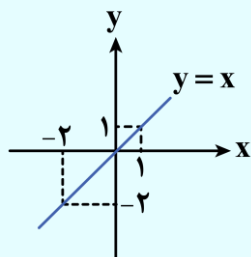
الف) توابع ثابت: تابع $f(x) = k$ که نمودار آن یک خط افقی به شکل $y = k$ و برد آن مجموعه تک عضوی $\{k\}$ است را تابع ثابت می‌گوییم. (توابع ثابت، توابع چندجمله‌ای از درجه صفرند).



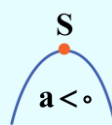
ب) توابع خطی: تابع $f(x) = ax + b$ ($a \neq 0$) یک تابع خطی نام دارد که تابعی چندجمله‌ای از درجه یک است. برد توابع خطی برابر با $\mathbb{R}$ است و نمودار آن خطی با شیب a و عرض از مبدأ b است.



(ج) تابع همانی: از جمله توابع خطی تابع همانی $y = x$ است که هر عددی را به خودش نظیر می‌کند و نمودار آن نیمساز ربع اول و سوم است:



(د) تابع درجه دوم: نمودار نظیر توابع به فرم $f(x) = ax^2 + bx + c$ که در آن $a \neq 0$ است، یک سهمی است.



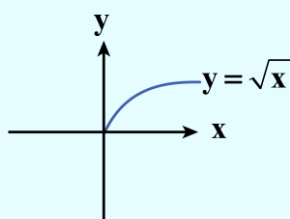
$$D_f = \mathbb{R}$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$R_f = [y_S, +\infty)$$

$$R_f = (-\infty, y_S]$$

(۲) توابع رادیکالی: توابع به فرم $f(x) = \sqrt{P(x)}$ که دامنه آن به صورت $\{x | P(x) \geq 0\}$ است، توابع رادیکالی نامیده می‌شوند. نمودار ساده‌ترین تابع رادیکالی به شکل مقابل است.



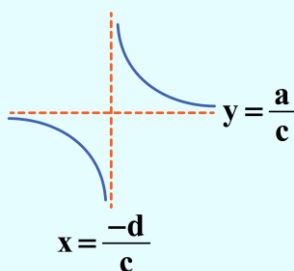
$$D_f = \mathbb{R}^+ \cup \{0\} = [0, +\infty)$$

$$R_f = \mathbb{R}^+ \cup \{0\} = [0, +\infty)$$

(۳) توابع گویا: توابع به شکل $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ که دامنه آن $\mathbb{R} - \{x | Q(x) = 0\}$ است، توابع گویا نامیده می‌شوند. از جمله توابع گویای

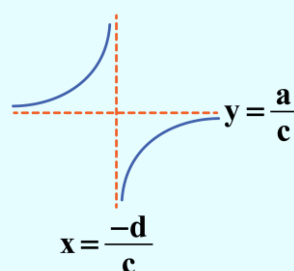
$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

مهم توابع هموگرافیک هستند:



$$(ad - bc < 0)$$

$$D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{d}{c}\right\}, R_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{a}{c}\right\}$$



$$(ad - bc > 0)$$

$$D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{d}{c}\right\}, R_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{a}{c}\right\}$$

۱۲- نمودار وارون تابع $f(x) = x^3 - 3x^2 - ax - 39$ خط $5y - 3x = 17$ را در نقطه‌ای به عرض ۴ قطع می‌کند، $f(-\frac{a}{3})$ چه

عددی است؟

(۴) -۲۹

(۳) -۳۱

(۲) ۲۷

(۱) ۴۱

(آسان - ترکیبی - سریع) - حسابان ۱ صفحه ۶۲ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۳

در واقع نقطه $A \Big|_{x_0}^x$ هم روی خط $5y - 3x = 17$ واقع شده هم روی f^{-1} ، چون A روی خط قرار دارد، پس:

$$20 - 3x_0 = 17 \Rightarrow x_0 = 1$$

$$f^{-1}(1) = 4 \Rightarrow f(4) = 1$$

$$f(4) = 64 - 48 - 4a - 39 = 1 \Rightarrow 16 - 39 - 1 = 4a \Rightarrow 4a = -24 \Rightarrow a = -6$$

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 39$$

$$\Rightarrow f(-\frac{a}{3}) = f(2) = 8 - 12 + 12 - 39 = -31$$

یعنی $A \Big|_{x_0}^x$ روی وارون تابع واقع شده، پس:

تذکره!

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 6 \Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow f' > 0$$

تابع f صعودی اکید، در نتیجه وارون پذیر است.

• • •

۱۳- تابع $f(x) = 2x\sqrt{x} + \sqrt{x} - 5x - 3$ در یک همسایگی از a صعودی اکید است. اگر $f^{-1} \circ f^{-1}(a) = a$ باشد، مقدار

$f(2a - 2)$ چه عددی است؟

(۴) ۵۱

(۳) ۵۲

(۲) ۴۸

(۱) ۴۹

(سخت - محاسباتی - زمان‌بر) - حسابان ۱ صفحه ۶۱ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۱

f در دامنه‌اش وارون پذیر نیست زیرا یک به یک نیست، اما می‌توانیم با محدوده‌بندی دامنه به یک بازه کوچک آن را به تابعی وارون پذیر تبدیل کنیم.

از طرفی چون:

$$f^{-1} \circ f^{-1}(a) = a \Rightarrow (f \circ f)^{-1}(a) = a \Rightarrow f \circ f(a) = a \Rightarrow f(a) = f^{-1}(a)$$

یعنی قرار است در آن بازه f و f^{-1} متقاطع باشند و به عبارت دیگر تابع f چون در آن بازه صعودی است، نیمساز ناحیه اول را قطع می‌کند، پس معادله زیر را حل می‌کنیم:

$$f(x) = x \Rightarrow 2x\sqrt{x} + \sqrt{x} - 5x - 3 = x$$

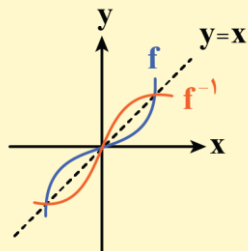
$$\Rightarrow 2x\sqrt{x} + \sqrt{x} - 6x - 3 = 0 \Rightarrow \sqrt{x}(2x + 1) - 3(2x + 1) = 0$$

$$(2x + 1)(\sqrt{x} - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x} - 3 = 0 \Rightarrow x = 9 \Rightarrow a = 9 \\ 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \text{ غ ق} \end{cases}$$

$$f(2a - 2) = f(16) = 2(16)\sqrt{16} + \sqrt{16} - 5(16) - 3 = 128 + 4 - 80 - 3 = 49$$

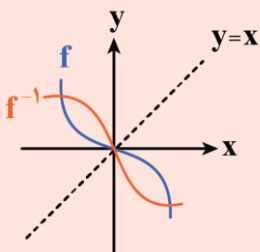
نقاط برخورد تابع با وارونش

اگر f اکیداً صعودی باشد، محل تلاقی دو تابع f و f^{-1} در صورت وجود روی نیمساز ناحیه اول و سوم است و برای یافتن طول‌های محل تلاقی کافی است به جای معادله $f(x) = f^{-1}(x)$ ، معادله $f(x) = x$ را حل کنیم.



تذکره!

اگر f اکیداً نزولی باشد، ممکن است f و f^{-1} نقاط تلاقی غیر از نیمساز ناحیه اول و سوم داشته باشند. (البته این نقاط نسبت به خط $y = x$ تقارن دارند).



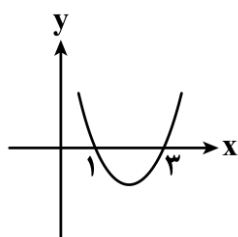
کپسول دوبینگ | (تبدیل معادله نقاط برخورد تابع و وارون آن)

اگر f اکیداً صعودی باشد، وارونش را (در صورتی که قطع کند) روی نیمساز ربع اول و سوم قطع می‌کند. به همین دلیل حل معادله $f(x) = f^{-1}(x)$ به حل معادله $f(x) = x$ تقلیل می‌یابد.

اگر f اکیداً نزولی باشد، وارونش را (در صورتی که قطع کند) روی نیمساز ربع اول و سوم قطع می‌کند یا نقاط تقاطع نسبت به نیمساز ربع اول و سوم تقارن دارند.



۱۴- نمودار تابع $y = g(x)$ مطابق شکل مقابل است. اگر $f(x) = 2x + \sqrt{x}$ ، اختلاف طول نقاطی که نمودار تابع $g \circ f$ محور x ها را قطع می‌کند، چه عددی است؟



- (۱) $\frac{1}{2}$
- (۲) $\frac{1}{4}$
- (۳) $\frac{5}{4}$
- (۴) $\frac{3}{4}$

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - حسابان ۱ صفحه ۶۹ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۴

وقتی می‌گوییم نمودار $y = g \circ f$ محور x ها را قطع کند، یعنی:

$$g \circ f(x) = 0 \Rightarrow g(f(x)) = 0$$

با توجه به نمودار، تابع g محور x ها را در نقاط به طول ۱ و ۳ قطع می کند. پس:

$$g(f(x)) = 0 \Rightarrow \begin{cases} f(x) = 1 \\ f(x) = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) = 1 \Rightarrow 2x + \sqrt{x} = 1 \Rightarrow 2x + \sqrt{x} - 1 = 0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} \sqrt{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{4} \\ \sqrt{x} = -1 \text{ غ ق ق} \end{cases} \\ f(x) = 3 \Rightarrow 2x + \sqrt{x} = 3 \Rightarrow 2x + \sqrt{x} - 3 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} \sqrt{x} = 1 \Rightarrow x = 1 \\ \sqrt{x} = -\frac{3}{2} \text{ غ ق ق} \end{cases} \end{cases}$$

یعنی نمودار $g \circ f$ در نقاط $x = 1$ و $x = \frac{1}{4}$ محور طول ها را قطع می کند، اختلاف طول نقاط تلاقی $\frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{4}$ است.

کپسول دوبینگ | (حل معادلات ترکیب تابع)

وقتی می خواهیم معادله ای مثل $g \circ f(x) = k$ را حل کنیم که در آن ترکیب توابع وجود دارد، طی دو مرحله آن را حل می کنیم. ابتدا $g(y) = k$ را حل کرده و سپس به ازای مقادیر y به دست آمده معادلات $f(x) = y$ را حل می کنیم.



۱۵- تابع $f(x) = (3-x)|x-1|$ فقط در بازه (α, β) اکیداً صعودی است. اگر وارون تابع در این بازه $f^{-1}(x) = a\sqrt{-x+b} + 2$ باشد، مقدار ab کدام است؟

(۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) -۲

(متوسط - مفهومی - استاندارد) - حسابان ۲ صفحه ۱۷ - ۱۲۰۱

پاسخ: گزینه ۲

ابتدا با رسم نمودار f وضعیت یکنوایی آن را معلوم می کنیم.

$$f(x) = (3-x)|x-1| = \begin{cases} (3-x)(x-1) & x \geq 1 \\ (x-3)(x-1) & x < 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{رسم نمودار}}$$

$f(x) = -x^2 + 4x - 3$ در بازه $[1, 2]$ صعودی اکید است و داریم:

برای یافتن ضابطه وارون تابع f ابتدا باید آن را مربع کامل کنیم:

$$y = f(x) = -(x-2)^2 + 1 \quad 1 \leq x \leq 2$$

$$\Rightarrow (x-2)^2 = 1-y \Rightarrow x-2 = \pm \sqrt{1-y} \quad 0 \leq y \leq 1$$

از آن جا که $1 \leq x \leq 2$ است، پس $x-2 \leq 0$ و در نتیجه ضابطه منفی یعنی $-\sqrt{1-y}$ را قبول می کنیم:

$$x-2 = -\sqrt{1-y} \Rightarrow x = -\sqrt{1-y} + 2 \Rightarrow f^{-1}(x) = -\sqrt{1-x} + 2 \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow ab = -1$$

کپسول دوبینگ | (محاسبه ضابطه تابع وارون)

اگر f روی بازه I یک به یک و وارون پذیر باشد، برای محاسبه ضابطه تابع وارون (f^{-1}) ، کافی است x را تنها کنیم یعنی x را بر حسب y بنویسیم، سپس جای x و y را عوض کنیم. ضابطه به دست آمده ضابطه f^{-1} است.
توجه کنید که $D_{f^{-1}} = R_f$ و $R_{f^{-1}} = D_f$ است.

یه نمونه باحال ببین!

$$f(x) = 2x - 1 \quad -1 \leq x < 1$$

$$y = 2x - 1 \Rightarrow 2x = y + 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}(y + 1) \xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = \frac{1}{2}(x + 1)$$

$$-1 \leq x < 1 \xrightarrow{\times 2} -2 \leq 2x < 2 \xrightarrow{+(-1)} -3 \leq 2x - 1 < 1 \Rightarrow R_f = [-3, 1)$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x + 1) \quad x \in [-3, 1)$$

$$D_{f^{-1}} = R_f = [-3, 1), \quad R_{f^{-1}} = D_f = [-1, 1)$$

به عبارت دیگر:



۱۶- نمودار $y = f(8 - 4x)$ را 2 واحد به چپ انتقال داده و شکل حاصل را نسبت به خط $x = 2$ قرینه می کنیم. اگر f تابعی وارون پذیر باشد، طول نقطه تلاقی تابع به دست آمده با تابع اولیه چه عددی است؟

۳ (۴

۴ (۳

۲ (۲

۶ (۱

(متوسط - مفهومی - استاندارد) - حسابان ۲ صفحه ۳ - ۱۲۰۱

پاسخ: گزینه ۴

تبدیلات بیان شده را روی تابع اولیه اثر می دهیم.

$$y = f(8 - 4x) \xrightarrow[\text{واحد انتقال به چپ}]{x \rightarrow x+2} y = f(8 - 4(x+2)) = f(-4x)$$

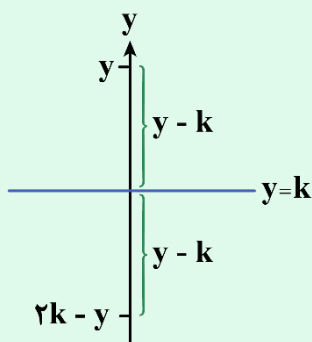
$$\xrightarrow[\text{بازتاب نسبت به خط } x=2]{x \rightarrow 4-x} y = f(-4(4-x)) = f(4x - 16)$$

چون f وارون پذیر و یک به یک است، پس:

$$f(4x - 16) = f(8 - 4x) \xrightarrow{f \text{ یک به یک}} 4x - 16 = 8 - 4x \Rightarrow 8x = 24 \Rightarrow x = 3$$

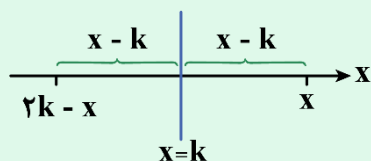
قرینه نسبت به خطوط افقی

در قرینه f نسبت به خط $y = k$ کافی است y را به $2k - y$ تبدیل کنیم.



قرینه نسبت به خطوط عمودی

در قرینه f نسبت به خط $x = k$ کافی است x را به $x - k$ تبدیل کنیم.



تبدیل نمودارها

اگر نمودار تابع $y = f(x)$ را داشته باشیم، آن گاه:

۱) نمودار $y = f(x - a)$ از انتقال افقی نمودار f به اندازه a واحد به راست به دست می آید.
از انتقال افقی نمودار f به اندازه $|a|$ واحد به چپ به دست می آید.

۲) نمودار $y = f(x) + a$ از انتقال عمودی نمودار f به اندازه a واحد به بالا به دست می آید.
از انتقال عمودی نمودار f به اندازه $|a|$ واحد به پایین به دست می آید.

۳) نمودار $y = f(ax)$ از انقباض افقی نمودار f با ضریب $\frac{1}{a}$ به دست می آید. (Xها $\frac{1}{a}$ برابر می شوند).
از انقباض افقی نمودار f با ضریب $\frac{1}{a}$ به دست می آید.

۴) نمودار $y = af(x)$ از انقباض عمودی نمودار f با ضریب a به دست می آید.
از انقباض عمودی نمودار f با ضریب a به دست می آید.

۵) نمودار $y = f(-x)$ از قرینه نمودار f نسبت به محور y ها به دست می آید. (Xها قرینه می شوند).

۶) نمودار $y = -f(x)$ از قرینه نمودار f نسبت به محور x ها به دست می آید. (Yها قرینه می شوند).

۷) نمودار $y = f(|x|)$: نمودار f در قسمت Xهای مثبت بدون تغییر باقی می ماند و در قسمت Xهای منفی حذف می شود و قرینه نمودار در Xهای مثبت (نسبت به محور y ها) در Xهای منفی رسم می شود.

۸) نمودار $y = |f(x)|$: هر جا که نمودار f زیر محور x ها باشد، قرینه آن نسبت به محور x ها رسم می شود.

توابع یک به یک (وارون پذیر)

تابع f را تابعی یک به یک می‌گوییم اگر به ازای هر y در برد تابع f ، تنها یک x وجود داشته باشد که $f(x) = y$ باشد. یعنی به ازای هر y یک x وجود داشته باشد (دو تا x متفاوت به یک y نظیر نشوند).



بسیاری از اوقات برای اثبات یک به یک بودن توابع از تساوی $f(x_1) = f(x_2)$ (یا $y_1 = y_2$) نتیجه می‌گیریم: $x_1 = x_2$

نمودار توابع یک به یک

همچنین در نمودار توابع یک به یک هر خط افقی نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.
با توجه به تعریف تابع یک به یک، وارون توابع یک به یک، خود نیز تابع است، یعنی اگر f یک به یک باشد، f^{-1} تابع است و f وارون پذیر است.

کپسول دوپینگ | (قرینه نسبت به خطوط عمودی یا افقی)

برای به دست آوردن قرینه f نسبت به خط $x = k$ ($y = k$) کافی است x را به $2k - x$ (y را به $2k - y$) تبدیل کنیم.



۱۷- نمودار تابع $y = 2f(3 - \frac{x}{2})$ را ۶ واحد به چپ انتقال داده و طول نقاط آن را نصف کرده‌ایم. قرینه نمودار به دست آمده نسبت به نیمساز ناحیه اول کدام است؟

(۱) $2f^{-1}(-x)$ (۲) $\frac{1}{2}f^{-1}(-x)$ (۳) $-\frac{1}{2}f^{-1}(x)$ (۴) $-f^{-1}(\frac{x}{2})$

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط - مفهومی - استاندارد) - حسابان ۲ صفحه ۹ - ۱۲۰۱

اگر تبدیلات را روی ضابطه آن در نظر بگیریم، آن گاه:

$$y = 2f(3 - \frac{x}{2}) \xrightarrow[\text{واحد انتقال به چپ}]{x \rightarrow x+6} y = 2f(3 - \frac{x+6}{2}) = 2f(-\frac{x}{2})$$

برای نصف کردن طول نقاط، x را به $2x$ تبدیل می‌کنیم. پس:

$$\frac{y}{2} = f(-x) \Rightarrow f^{-1}(\frac{y}{2}) = -x \Rightarrow y^{-1} = -f^{-1}(\frac{x}{2})$$

حال باید ضابطه وارون آن را به دست آوریم:

کپسول دوپینگ | (نمودار وارون تابع)

نمودار وارون تابع f در واقع با قرینه کردن نمودار تابع f نسبت به نیمساز ربع اول و سوم به دست می‌آید.



۱۸- اگر $m > 1$ عددی صحیح و مثبت و تابع $f = \{(m, 5), (6, 4m), (2m, 6), (1, 3)\}$ صعودی اکید باشد، $f^{-1}(2m+1)$ چه عددی است؟

(۱) ۳ (۲) ۶ (۳) ۲ (۴) ۵

پاسخ: گزینه ۳ (آسان - مفهومی/محاسباتی - استاندارد) - حسابان ۲ صفحه‌های ۱۶ و ۱۷ - ۱۲۰۱

روش اول

سه حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

$$1) \begin{cases} 1 < m < 2m < 6 \Rightarrow 1 < m < 3 \\ 3 < 5 < 6 < 4m \Rightarrow m > \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \Rightarrow m = 2 \end{cases}$$

$$f = \{(1, 3), (2, 5), (4, 6), (6, 8)\} \Rightarrow f^{-1}(2m+1) = f^{-1}(5) = 2$$

$$2) \begin{cases} 1 < m < 6 < 2m \Rightarrow 3 < m < 6 \\ 3 < 5 < 4m < 6 \Rightarrow \frac{5}{4} < m < \frac{6}{4} \times \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 1 < 6 < m < 2m \Rightarrow m > 6 \\ 3 < 4m < 5 < 6 \Rightarrow \frac{3}{4} < m < \frac{5}{4} \Rightarrow m = 1 \times \end{cases}$$

بنابراین تنها حالت ممکن $m = 2$ است و $f^{-1}(2m+1) = 2$ است.

روش دوم

ابتدا f را به صورت $f = \{(1, 3), (m, 5), (2m, 6), (6, 4m)\}$ بازنویسی می‌کنیم. قرار است f صعودی اکید باشد با توجه به آن که $m > 1$ (مطابق گزینه) چند حالت داریم:

حالت اول

$$1 < m < 2m < 6 \Rightarrow 1 < m < 3$$

در این حالت فقط $m = 2$ قابل قبول است و داریم:

$$f = \{(1, 3), (2, 5), (4, 6), (6, 8)\}$$

که قابل قبول است زیرا f صعودی اکید خواهد بود و داریم:

$$f^{-1}(2m+1) = f^{-1}(5) = 2$$

$$1 < m < 6 < 2m \Rightarrow 3 < m < 6 \Rightarrow \begin{cases} m = 4 \\ m = 5 \end{cases}$$

$$m = 4 \Rightarrow f = \{(1, 3), (4, 5), (8, 6), (6, 16)\}$$

با توجه به وجود $(8, 6)$ و $(6, 16)$ غیرقابل قبول است.

$$m = 5 \Rightarrow f = \{(1, 3), (5, 5), (10, 6), (6, 20)\} \Rightarrow \text{غیرقابل قبول است}$$

$$1 < 6 < m < 2m \Rightarrow m > 6 \Rightarrow m = 7, 8, \dots$$

$$f = \{(1, 3), (6, 28), (7, 5), (14, 6)\} \Rightarrow \text{غیرقابل قبول}$$

حالت سوم

دام تستی!

اگر مقدار $2m+1$ را حساب کنید به مقدار 5 و گزینه اشتباه 4 می‌رسید.

توابع یکنوا

تابع f را روی دامنه خود صعودی اکید می‌گویند، اگر به ازای هر x_1 و x_2 در دامنه f :

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

تابع f را روی دامنه خود نزولی اکید می‌گویند، اگر به ازای هر x_1 و x_2 در دامنه f :

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

توابع صعودی اکید یا نزولی اکید را یکنوای اکید می‌گویند.

تابع f را روی دامنه‌اش صعودی می‌گویند، اگر به ازای هر x_1 و x_2 در دامنه f :

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

تابع f را روی دامنه‌اش نزولی می‌گویند، اگر به ازای هر x_1 و x_2 در دامنه f :

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

توابع صعودی یا نزولی را توابع یکنوا می‌گویند.

کپسول دوپینگ | (یکنوایی و یکنوایی اکید)

تابع اکیدا یکنوا (یکنوای اکید) تابعی است که در تمام دامنه‌اش از یک رفتار پیروی می‌کند:

۱) اگر همواره با افزایش مقادیر x مقادیر $f(x)$ نیز افزایش یابند، تابع صعودی اکید است.

۲) اگر همواره با افزایش مقادیر x مقادیر $f(x)$ کاهش یابند، تابع نزولی اکید است.

۳) اگر با افزایش مقادیر x مقادیر $f(x)$ افزایش یابند یا ثابت بمانند، صعودی است.

۴) اگر با افزایش مقادیر x مقادیر $f(x)$ کاهش یابند یا ثابت بمانند، نزولی است.

به توابعی که در دسته اول و دوم قرار دارند یکنوای اکید و به توابعی که در دسته سوم و چهارم قرار دارند، توابع یکنوا می‌گویند.



۱۹- باقی‌مانده تقسیم $p(x) = 2x^4 + ax^3 + bx - 4$ بر $x^2 - x - 2$ چند جمله‌ای $1 - 2x$ است. باقی‌مانده $p(x)$ بر $x^2 + 2$ کدام است؟

$$\frac{11}{2}x + 4 \quad (4)$$

$$\frac{7}{2}x - 3 \quad (3)$$

$$7x - 4 \quad (2)$$

$$3x + 2 \quad (1)$$

(سخت - ترکیبی - زمان بر) - حسابان ۲ صفحه ۱۹ - ۱۲۰۱

پاسخ: گزینه ۴

بنابر قضیه تقسیم داریم:

$$p(x) = (x^2 - x - 2)q(x) + 1 - 2x$$

$$p(x) = (x + 1)(x - 2)q(x) + 1 - 2x$$

اکنون با جای‌گذاری $x = 2$ و $x = -1$ داریم:

$$p(-1) = 3 \Rightarrow 2 - a - b - 4 = 3 \Rightarrow a + b = -5$$

$$p(2) = -3 \Rightarrow 32 + 8a + 2b - 4 = -3 \Rightarrow 8a + 2b = -31$$

$$\begin{cases} 8a + 2b = -31 \\ -2 \times \begin{cases} a + b = -5 \end{cases} \Rightarrow 6a = -21 \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{7}{2} \\ b = -\frac{3}{2} \end{cases} \end{cases}$$

$$p(x) = 2x^4 - \frac{7}{2}x^3 - \frac{3}{2}x - 4$$

برای یافتن باقی‌مانده $p(x)$ بر $x^2 + 2$ کافی است به جای x^2 عدد -2 را قرار دهیم. گرچه که این جایگزینی در اعداد حقیقی غیرمنطقی به نظر می‌رسد!

$$r(x) = 2(-2)^2 - \frac{7}{2}x(-2) - \frac{3}{2}x - 4 = 8 + 7x - \frac{3}{2}x - 4 = \frac{11}{2}x + 4$$

تقسیم چندجمله‌ای‌ها

برای تقسیم چندجمله‌ای $p(x)$ بر $q(x)$ هر بار جمله با بزرگ‌ترین درجه p را بر جمله با بزرگ‌ترین درجه q تقسیم می‌کنیم و جواب را در خارج‌قسمت می‌نویسیم با ضرب آن در q حاصل عبارت را از p کم می‌کنیم و این روند را تا جایی ادامه می‌دهیم که درجه عبارت باقی مانده از درجه q کمتر شود، در این صورت داریم:

$$\begin{array}{r} p(x) \mid q(x) \\ t(x) \\ \hline r(x) \end{array}$$

بنا به قضیه تقسیم داریم:

$$p(x) = t(x) \times q(x) + r(x) ; r \text{ درجه} < q$$

بخش‌پذیری

اگر $r(x) = 0$ باشد، می‌گوییم $p(x)$ بر $q(x)$ بخش‌پذیر است.

یافتن باقی‌مانده تقسیم بر چندجمله‌ای درجه اول

اگر $q(x) = ax + b$ یک عبارت درجه اول باشد، بنابراین $r(x)$ عددی ثابت است و داریم:

$$p(x) = t(x)(ax + b) + r$$

$$x = -\frac{b}{a} \Rightarrow p\left(-\frac{b}{a}\right) = t\left(-\frac{b}{a}\right) \times 0 + r \Rightarrow r = p\left(-\frac{b}{a}\right)$$

یعنی باقی‌مانده برابر با مقدار عبارت مقسوم $(p(x))$ به‌ازای ریشه مقسوم‌علیه $(q(x) = ax + b)$ است.

یه نمونه باحال ببین!

در تقسیم عبارت $x^3 + x - 1$ بر $2x - 1$ داریم:

$$\begin{array}{r} x^3 + x - 1 \mid 2x - 1 \\ -(x^3 - \frac{1}{2}x^2) \quad \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{5}{8} \\ \hline \frac{1}{2}x^2 + x - 1 \\ -(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x) \\ \hline \frac{5}{4}x - 1 \\ -(\frac{5}{4}x - \frac{5}{8}) \\ \hline -\frac{3}{8} \end{array}$$

$$r = -\frac{3}{8} \text{ باقی مانده و } \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{5}{8} = \text{خارج قسمت}$$

در نتیجه داریم:

$$x^3 + x - 1 = (2x - 1)\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{5}{8}\right) - \frac{3}{8}$$

$$2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

بدون انجام عمل تقسیم می توان نوشت:

$$r = p\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} - 1 = \frac{5}{8} - 1 = -\frac{3}{8}$$

کپسول دوپینگ | (قلق یافتن باقی مانده در قضیه تقسیم)



برای به دست آوردن باقی مانده تقسیم $p(x)$ بر $q(x)$ اگر $m(x)$ خارج قسمت و $r(x)$ باقی مانده باشد، بنابر رابطه تقسیم داریم:

$$p(x) = q(x) \times m(x) + r(x)$$

بنابراین اگر x به گونه ای انتخاب شود که $q(x) = 0$ باشد داریم:

$$p(x) = 0 \times m(x) + r(x) \Rightarrow p(x) = r(x)$$

یعنی برای به دست آوردن $r(x)$ فارغ از محاسبه عمل تقسیم، کافی است x را به گونه ای انتخاب کنیم که $q(x)$ صفر شود. با جای گذاری مقدار مناسب x در عبارت $p(x)$ ، $r(x)$ به دست می آید. به طور مثال:

۱) اگر $q(x) = ax + b$ درجه اول باشد، $x = -\frac{b}{a}$ ریشه $q(x) = 0$ و $r(x) = p\left(-\frac{b}{a}\right)$ عددی ثابت به دست می آید.

۲) اگر $q(x) = ax^2 + bx + c$ درجه دوم باشد، x^2 را بر حسب بقیه عبارت ها می نویسیم و در $p(x)$ جای گذاری می کنیم. در این حالت $r(x)$ یک چند جمله ای درجه اول به دست می آید.



۲۰- باقی مانده تقسیم چند جمله ای $p(x) = 2x^4 - 4x^3 + ax^2 + bx - 6$ بر $(x-1)^2$ چند جمله ای $2-3x$ است. مقدار $b-a$ چه عددی است؟

۹- (۴)

۱۳ (۳)

۱۹ (۲)

۷- (۱)

(متوسط - ترکیبی/محاسباتی - استاندارد) - حسابان ۲ صفحه ۱۸ - ۱۲۰۱

پاسخ: گزینه ۲

$$p(x) = (x-1)^2 q(x) + 2-3x$$

مطابق قضیه تقسیم داریم:

$$p(1) = -1 \Rightarrow 2-4+a+b-6 = -1 \Rightarrow a+b = 7 \quad (1)$$

اولاً:

$$p'(x) = 2(x-1)q(x) + q'(x)(x-1)^2 - 3$$

ثانیاً به کمک مشتق داریم:

$$p'(1) = -3$$

قرار می دهیم $x = 1$ و داریم:

سپس از معادله اصلی مشتق می گیریم:

$$p'(x) = 2x^2 - 4x^2 + 2ax + b$$

$$p'(1) = 2 - 4 + 2a + b = -3 \xrightarrow{p'(1) = -3} -4 + 2a + b = -3 \Rightarrow 2a + b = 1 \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \begin{cases} a + b = 7 \\ 2a + b = 1 \end{cases}$$

$$b - a = 19, b = 13, a = -6$$



دانشپوردوبینک

کتاب	فصل	وضعیت این آزمون	سطح دشواری این آزمون	آخرین وضعیت کنکور ۱۴۰۴
هندسه ۱	۴	۱ سؤال مشابه کنکور، ۱ سؤال با الهام از کتاب درسی و ۱ سؤال با ایده نو طرح شده است.	***	۱ سؤال مشابه با تمرین کتاب درسی
هندسه ۲	فصل ۱ درس ۱ و ۲	۳ سؤال مشابه کنکور، ۱ سؤال با الهام از کتاب درسی و ۲ سؤال با ایده نو طرح شده است.	****	۱ سؤال با ایده نو و ترکیبی با فصل ۲ هندسه دهم
آمار و احتمال	۱	۴ سؤال مشابه کنکور، ۴ سؤال با الهام از کتاب درسی و ۲ سؤال با ایده نو طرح شده است.	****	۲ سؤال با ایده مشابه کنکور سال های گذشته

توصیه های دوبینک

پیش بینی طراح...

در درس هندسه یازدهم یک سؤال از «روابط طولی در دایره» و در درس آمار و احتمال نیز یک سؤال از «مجموعه های معادل» و یک سؤال هم از «گزاره های هم ارز» می توانند جزء کاندیدهای اصلی سؤالات کنکور ۱۴۰۵ باشند.

اگر دنبال درس های آسان تر هستید...

حتماً تمرین های کتاب درسی از مبحث «زاویه ها در دایره» در هندسه یازدهم و «مجموعه های معادل» در آمار و احتمال را حل کنید، سپس به حل سؤالات کنکور ۱۰ سال اخیر بپردازید.

اگر زمان کمی دارید...

در درس هندسه یازدهم تمرکزتان را روی مبحث «زاویه ها در دایره» و در درس آمار و احتمال تمرکزتان را روی مبحث «مجموعه های معادل» بگذارید.

سفن مسئول درس

سلام به همه دانش آموزان عزیز رشته ریاضی

توصیه می کنیم هنگام مطالعه هندسه دهم و یازدهم به هیچ وجه تمرین های کتاب درسی را دست کم نگیرید. در سال های اخیر طراحان کنکور توجه ویژه ای به تمرین ها و مثال های داخل کتاب های درسی داشته اند و بارها دیده شده که سؤال ها با الهام مستقیم از همین تمرین ها طرح شده اند. پس حتماً تمام تمرین ها را با دقت بررسی و حل کنید تا از این امتیاز ساده ولی مهم غافل نمانید. همچنین در فصل اول کتاب آمار و احتمال، حتماً کنکورهای سال های گذشته را به طور کامل بررسی کنید. طبق روند چند سال اخیر، بسیار محتمل است که یک سؤال از مجموعه ها (به ویژه مجموعه های معادل) و یک سؤال هم از گزاره ها (به خصوص گزاره های هم ارز) در کنکور مطرح شود. با تحلیل کنکورهای گذشته و تسلط بر این مباحث، می توانید درصد خود را با کمترین زمان مطالعه به طور چشمگیری بالا ببرید.

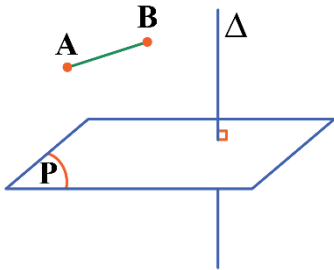
سید جواد نظری

- ۲۱- خط Δ بر صفحه P عمود است و نقاط A و B غیرواقع بر Δ و خارج از صفحه P قرار دارند؛ اگر تنها یک صفحه گذرا بر A و B و عمود بر صفحه P موجود باشد، وضعیت خط گذرا از نقاط A و B نسبت به خط Δ الزاماً چگونه است؟
- (۱) غیرعمود (۲) غیرموازی (۳) متقاطع (۴) متناظر

(متوسط - مفهومی - سریع ۵) - هندسه ۱ صفحه ۸۳ - ۱۰۰۴

پاسخ: گزینه ۲

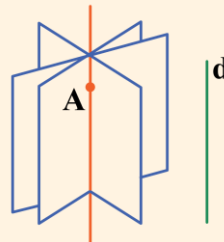
چون تنها یک صفحه گذرا از A و B عمود بر P وجود دارد، بنابراین AB عمود بر P نیست. پس نمی‌تواند با Δ موازی باشد، بنابراین Δ با AB غیرموازی است که ممکن است متقاطع، متناظر و یا حتی عمود نیز باشد ولی کامل‌ترین جواب که الزاماً همواره درست است وضعیت غیرموازی است.



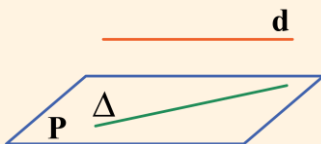
وضعیت صفحه گذرا بر یک خط از بین دو خط

می‌خواهیم ببینیم اگر دو خط موازی، عمود و یا غیرعمود باشند، چند صفحه گذرا بر یکی از آن‌ها و موازی یا عمود بر دیگری وجود دارد.

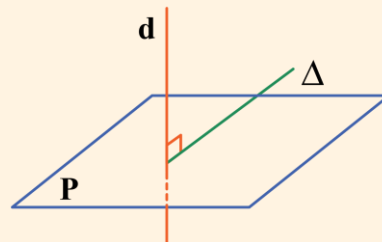
۱- اگر دو خط موازی باشند، بی‌شمار صفحه وجود دارد که شامل یکی از آن‌ها بوده و موازی دیگری باشد.



۲- اگر دو خط متناظر باشند، فقط یک صفحه وجود دارد که شامل یکی از آن‌ها بوده و موازی دیگری باشد.



۳- اگر دو خط عمود باشند، فقط یک صفحه گذرا بر یکی از دو خط و عمود بر دیگری وجود دارد.



۴- اگر دو خط غیرعمود باشند، هیچ صفحه‌ای گذرا بر یکی از دو خط و عمود بر دیگری وجود ندارد. (تمام صفحات گذرا بر یکی از خط‌ها با خط دیگر زاویه $\alpha \neq 90^\circ$ می‌سازند).

وضعیت صفحه گذرا از یک خط در یک خط و یک صفحه

می‌خواهیم ببینیم اگر یک خط و یک صفحه با هم موازی، غیرموازی، عمود یا غیرعمود باشند، چند صفحه گذرا بر خط و موازی یا عمود بر صفحه دیگر وجود دارد:

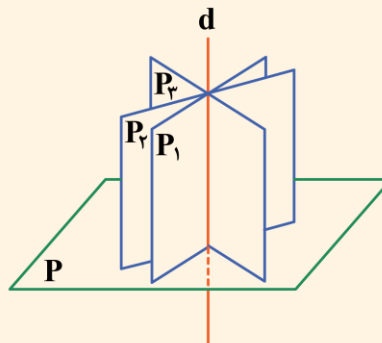
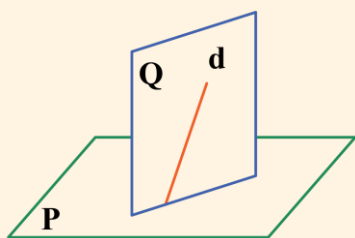
۲- اگر خط d موازی صفحه P نباشد [صفحه P را قطع کند]، هیچ صفحه‌ای شامل خط d وجود ندارد که با صفحه P موازی باشد.

۱- اگر خط d موازی صفحه P باشد، فقط یک صفحه گذرا از d و موازی P وجود دارد.



۴- اگر خط d ، صفحه P را قطع کند و بر آن عمود نباشد، فقط یک صفحه شامل خط d و عمود بر صفحه P وجود دارد.

۳- اگر خط d عمود بر صفحه P باشد، بی‌شمار صفحه گذرا بر d و عمود بر P وجود دارد.

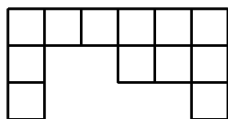
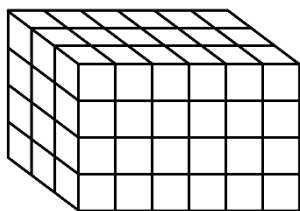


کپسول دوبینگ | (قلق حل سوالات تجسم فضایی)

در حل سوالات مربوط به تجسم فضایی همیشه **رسم شکل مناسب** به شما کمک می‌کند. همچنین **در نظر گرفتن تمام حالت‌های ممکن** در حین ترسیم را از قلم نیندازید! با حالت‌بندی وضعیت نقطه‌ها، خط‌ها و صفحه‌ها ابتدا تمام حالت‌های ممکن قرارگیری آن‌ها نسبت به یکدیگر را در نظر گرفته و سپس به دنبال خواسته مسئله باشید.



۲۲- از مکعب مستطیل شکل زیر که از چندین مکعب کوچک تشکیل شده است، حداقل چند مکعب باید برداریم تا نمای آن بالای آن به صورت زیر باشد؟



۶ (۱)

۱۲ (۲)

۲۴ (۳)

۶۰ (۴)

(آسان - مفهومی - سریع) - هندسه ۱ (صفحه ۹۱ - ۱۰۰۴)

پاسخ: گزینه ۳

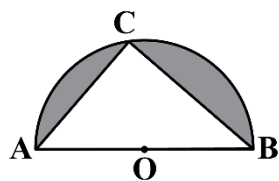
همان‌طور که در نمای بالا دیده می‌شود ۶ مربع کوچک نسبت به سطح بالایی مکعب کم شده است اما برای این که نمای بالا به آن صورت دیده شود، باید این ۶ مکعب را از بالا تا پایین مکعب مستطیل یعنی در عمق آن برداریم که تعداد آن‌ها در این صورت برابر است با:

$$6 \times 4 = 24$$

کپسول دوبینگ | (تجسم فضایی مکعب‌ها)

در سؤال‌هایی که از یک نمای خاص به یک مکعب مستطیل متشکل از مکعب‌های کوچک‌تر نگاه می‌کنیم باید توجه داشته باشید که برای دیدن یک شکل خاص که نسبت به شکل اولیه مربع کم دارد باید تمام یک ردیف یا ستون حذف شود. اما برای دیدن شکلی که نسبت به شکل اولیه مربع اضافه دارد، اضافه کردن ۱ مربع برای هر خانه‌ای که اضافه شده کافی است.

۲۳- نیم‌دایره‌ای به شعاع ۵ مفروض است. مطابق شکل، مثلث ABC به ضلع $AC=6$ درون نیم‌دایره محاط شده و دو قطعه از دایره جدا کرده است، اگر این دو قطعه را حول محور AB دوران دهیم، حجم حاصل از دوران تقریباً چقدر است؟



(۱) 64π

(۲) 72π

(۳) 84π

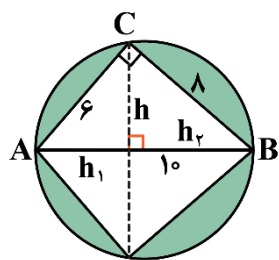
(۴) 90π

(متوسط - مفهومی - زمان‌بر) - هندسه ۱ صفحه ۹۵ - ۱۰۰۴

پاسخ: گزینه ۴

چون شعاع نیم‌دایره $R=5$ است، طبق فیثاغورس ضلع دیگر مثلث ۸ به دست می‌آید، یعنی اضلاع مثلث ABC برابر ۶ و ۸ و ۱۰ است (زاویه $\hat{C}$ محاطی رو به قطر است و برابر 90° است) حال ارتفاع مثلث ABC را h فرض می‌کنیم و طبق رابطه طولی در مثلث قائم‌الزاویه خواهیم داشت:

$$h \times 10 = 6 \times 8 \Rightarrow h = 4/5$$



حال حجم حاصل از دوران موردنظر، یک کره به شعاع ۵ است که یک حجم مخروطی (دو مخروط از قاعده به هم چسبیده) به شعاع قاعده $4/5$ و ارتفاع 10 از داخل آن خارج شده است بنابراین:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{1}{3}\pi r^2(h_1 + h_2) = \frac{4}{3}\pi \times 5^3 - \frac{1}{3}\pi \times (4/5)^2 \times 10$$

$$\Rightarrow V = \frac{500\pi}{3} - \frac{230/4\pi}{3} = \frac{269/6\pi}{3} \approx 90\pi$$

حجم و سطح جانبی احجام هندسی معروف

سطح کره	سطح جانبی استوانه	سطح جانبی مخروط قائم	حجم کره	حجم استوانه	حجم مخروط
$S = 4\pi R^2$	$S = 2\pi Rh$	$S = \pi Rl$	$V = \frac{4}{3}\pi R^3$	$V = \pi R^2 h$	$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$

حجم حاصل از دوران مثلث قائم الزاویه

از دوران مثلث قائم الزاویه حول اضلاع قائم، یک مخروط و حول وتر، دو مخروط از قاعده به هم چسبیده حاصل می‌شود.

محور دوران	وضعیت شکل نسبت به محور	نمایش دوران	شکل حاصل از دوران
ضلع قائم			
وتر			

حجم حاصل از دوران مثلث متساوی الساقین

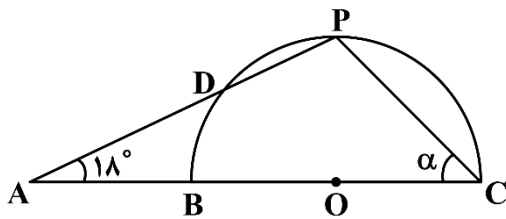
از دوران مثلث متساوی الساقین حول ارتفاع وارد بر قاعده، یک مخروط و حول قاعده، دو مخروط از قاعده به هم چسبیده حاصل می‌شود.

محور دوران	وضعیت شکل نسبت به محور	نمایش دوران	شکل حاصل از دوران
ارتفاع وارد بر قاعده			
قاعده			

حجم حاصل از دوران لوزی

از دوران لوزی، حول قطر بزرگ یا قطر کوچک آن نیز دو مخروط از قاعده به هم چسبیده پدید می‌آید.
(به سطر آخر جدول قبل دقت کنید.)

۲۴- مطابق شکل، نیم‌دایره به مرکز O طوری نسبت به مثلث APC قرار گرفته است که اندازه پاره خط AD با شعاع نیم‌دایره برابر است، اگر $\hat{A} = 18^\circ$ باشد، α کدام است؟

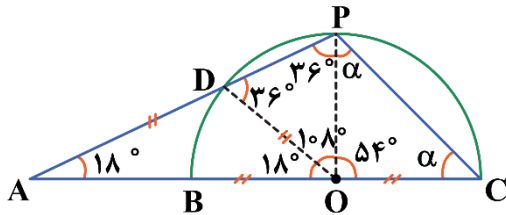


- (۱) 63°
(۲) 60°
(۳) 54°
(۴) 66°

(متوسط - مفهومی - استاندارد) - هندسه ۲ صفحه ۱۱ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۱

شعاع‌های OD و OP را رسم می‌کنیم:



طبق فرض $AD = OB = OD = OP = OC$ می‌باشد، بنابراین مثلث OAD متساوی‌الساقین است و زاویه‌های مجاور به دو ساق برابرند. حال $\hat{PDO} = 36^\circ$ زاویه خارجی مثلث OAD است، پس $\hat{PDO} = 36^\circ$ و چون مثلث OPD نیز متساوی‌الساقین است، پس زاویه‌های مجاور به دو ساق هر دو 36° هستند و زاویه رأس برابر است با:

$$\hat{POD} + 36^\circ + 36^\circ = 180^\circ \Rightarrow \hat{POD} = 108^\circ$$

حال زاویه $\hat{POC}$ نیز قابل محاسبه است:

$$\hat{POC} + 18^\circ + 108^\circ = 180^\circ \Rightarrow \hat{POC} = 54^\circ$$

حال مثلث OPC نیز متساوی‌الساقین است، پس زاویه‌های مجاور به دو ساق برابرند:

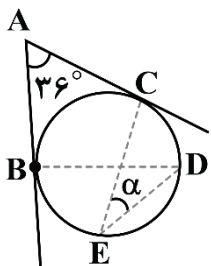
$$\alpha + \alpha + 54^\circ = 180^\circ \Rightarrow 2\alpha = 126^\circ \Rightarrow \alpha = 63^\circ$$

کپسول دوبینگ | (زوایای مجاور به دو ساق در مثلث متساوی‌الساقین)

در هر مثلث متساوی‌الساقین زاویه‌های مجاور به دو ساق با هم برابرند.



۲۵- در دایره زیر به قطر BD از نقطه A دو مماس بر دایره رسم کرده‌ایم. اگر زاویه بین دو مماس 36° باشد، زاویه α کدام است؟



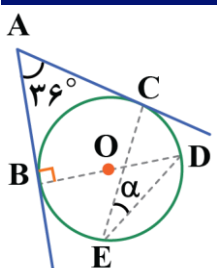
- (۱) 36°
(۲) 18°
(۳) 24°
(۴) 12°

(متوسط - مفهومی - استاندارد) - هندسه ۲ صفحه ۱۶ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۲

می‌دانیم اگر از یک نقطه خارج دایره دو مماس بر آن رسم کنیم، مجموع زاویه بین دو مماس و کمان

مقابل به آن 180° است، پس:



$$\hat{A} + \widehat{BC} = 180^\circ \Rightarrow 36^\circ + \widehat{BC} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{BC} = 144^\circ$$

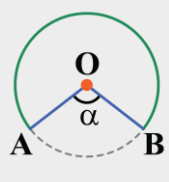
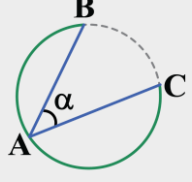
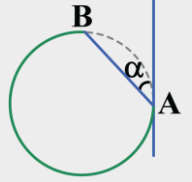
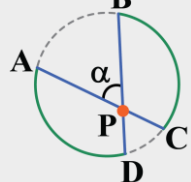
حال چون BD قطر دایره است بنابراین محیط دایره را نصف می کند:

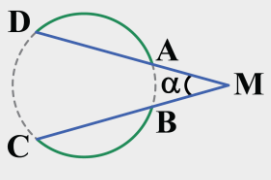
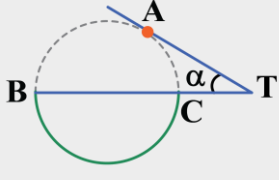
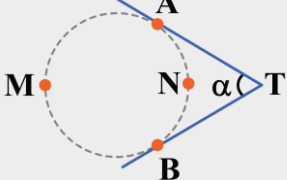
$$\widehat{BC} + \widehat{CD} = 180^\circ \Rightarrow 144^\circ + \widehat{CD} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{CD} = 36^\circ$$

حال زاویه α ، زاویه محاطی رو به کمان $\widehat{CD}$ است بنابراین:

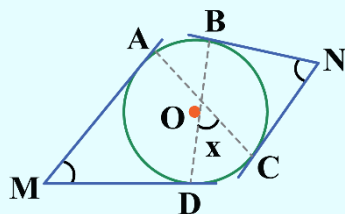
$$\alpha = \frac{1}{2} \widehat{CD} = \frac{1}{2} \times 36^\circ = 18^\circ$$

جمع بندی تمام زاویه های مربوط به دایره

زاویه مرکزی	زاویه محاطی	زاویه ظلی	زاویه بین دو وتر
برابر با کمان مقابل	برابر با نصف کمان مقابل	برابر با نصف کمان مقابل	نصف مجموع کمان های مقابل
			
$\alpha = \widehat{AB}$	$\alpha = \frac{\widehat{BC}}{2}$	$\alpha = \frac{\widehat{AB}}{2}$	$\alpha = \frac{\widehat{AB} + \widehat{CD}}{2}$

زاویه بین امتداد دو وتر	زاویه بین وتر و مماس	زاویه بین دو مماس
نصف تفاضل کمان های مقابل	نصف تفاضل کمان های مقابل	نصف تفاضل کمان های مقابل
		
$\alpha = \frac{\widehat{CD} - \widehat{AB}}{2}$	$\alpha = \frac{\widehat{AB} - \widehat{AC}}{2}$	$\alpha = \frac{\widehat{AMB} - \widehat{ANB}}{2}$

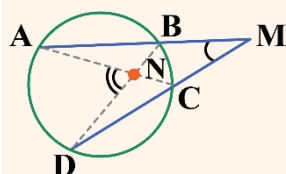
در شکل مقابل زاویه x میانگین زاویه M, N است:



$$x = \frac{M + N}{2}$$

یه نمونه باحال ببین!

مطابق شکل، $M = 27^\circ$ و $N = 71^\circ$ می باشد، کمان $\widehat{AD}$ چند درجه است؟



- (۱) ۹۸
- (۲) ۱۰۰
- (۳) ۱۰۲
- (۴) ۱۰۴

پاسخ تشریحی:

اگر فرض کنیم $\widehat{AD} = x$ و $\widehat{BC} = y$ باشد، در این صورت خواهیم داشت:

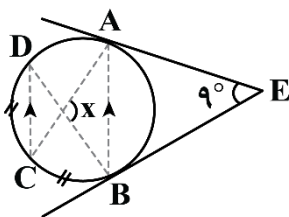
$$\begin{cases} \frac{x+y}{2} = 71^\circ \\ \frac{x-y}{2} = 27^\circ \end{cases} \xrightarrow{(+)} \frac{x+y+x-y}{2} = 98^\circ \Rightarrow \frac{2x}{2} = 98^\circ \Rightarrow x = 98^\circ$$

پاسخ: گزینه ۱

•••

۲۶- در شکل مقابل، اگر $\widehat{DC} = \widehat{BC}$ باشد، زاویه x کدام است؟

- (۱) 116°
(۲) 119°
(۳) 117°
(۴) 118°



(متوسط - مفهومی - استاندارد) - هندسه ۲ صفحه ۱۶ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۳

می‌دانیم کمان‌های محصور بین دو وتر موازی با هم برابرند، بنابراین:

$$\widehat{AD} = \widehat{BC} \Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{BC} = \widehat{DC}$$

$$\widehat{AB} = 360^\circ - 3\alpha$$

حال با فرض $\widehat{BC} = \alpha$ خواهیم داشت:

حال زاویه $\hat{E}$ برابر است با:

$$\hat{E} = \frac{3\alpha - (360^\circ - 3\alpha)}{2} \Rightarrow 9^\circ = \frac{6\alpha - 360^\circ}{2}$$

$$\Rightarrow 18^\circ = 6\alpha - 360^\circ \Rightarrow 6\alpha = 378^\circ \Rightarrow \alpha = 63^\circ$$

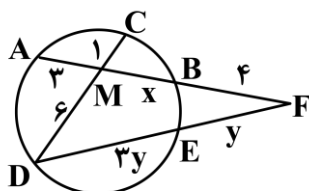
حال زاویه x زاویه بین دو وتر است و داریم:

$$x = \frac{\alpha + (360^\circ - 3\alpha)}{2} = \frac{360^\circ - 2\alpha}{2} = \frac{360^\circ - 126^\circ}{2} = 117^\circ$$

•••

۲۷- در شکل مقابل، اندازه پاره خط EF کدام است؟

- (۱) ۲
(۲) ۳
(۳) ۴
(۴) ۶



(آسان - مفهومی - استاندارد) - هندسه ۲ صفحه ۱۸ - ۱۱۰۱

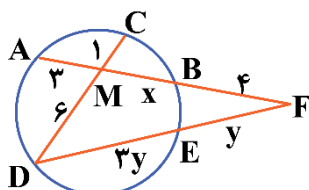
پاسخ: گزینه ۲

ابتدا برای دو وتر AB و CD که در M متقاطع‌اند، روابط طولی را می‌نویسیم:

$$1) \quad MA \cdot MB = MC \cdot MD \Rightarrow 3x = 1 \times 6 \Rightarrow x = 2$$

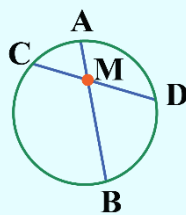
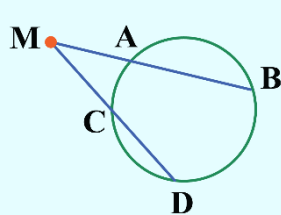
حال برای امتداد دو وتر AB و DE که در F متقاطع‌اند، رابطه طولی را می‌نویسیم:

$$2) \quad FB \cdot FA = FE \cdot FD \Rightarrow 4(4 + 2 + 3) = y(y + 3y) \Rightarrow y^2 = 9 \Rightarrow y = 3$$



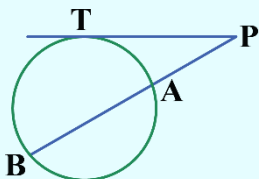
روابط طولی در دایره

اگر دو وتر یا امتداد آن‌ها در نقطه‌ای مانند M متقاطع باشند، آن‌گاه حاصل ضرب قطعات به وجود آمده روی دو وتر با هم برابر است:



$$MA \cdot MB = MC \cdot MD$$

اگر از یک نقطه خارج از دایره یک مماس و یک قاطع بر دایره رسم شود، حاصل ضرب قطعات ایجاد شده با مربع طول مماس برابر است:

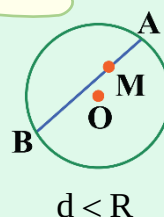
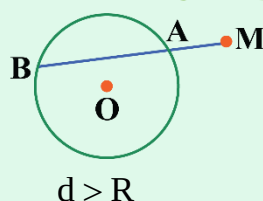


$$PT^2 = PA \cdot PB$$

قوت نقطه‌ای روی وتر دایره یا امتداد وتر دایره (نوشابه اضافی برای علاقه‌مندان!)

اگر فاصله نقطه M واقع بر وتر AB (یا امتداد وتر AB) تا مرکز دایره $C(O, R)$ برابر با d باشد، آن‌گاه رابطه زیر همواره برقرار است:

$$MA \cdot MB = |d^2 - R^2|$$



عدد $d^2 - R^2$ را قوت نقطه M نسبت به دایره (P_C^M) می‌نامند که یک شاخص مهم در روابط طولی دایره به حساب می‌آید.

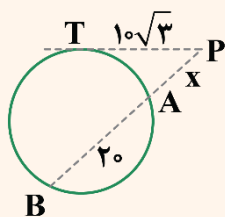
یه نمونه باحال ببین!

در شکل مقابل PT بر دایره مماس است. طول PA کدام است؟

- (۱) ۱۲
(۲) ۹
(۳) ۸
(۴) ۱۰

پاسخ تشریحی:

از روابط طولی استفاده می‌کنیم، با فرض $PA = x$ داریم:



$$PT^2 = PA \cdot PB \Rightarrow (10\sqrt{3})^2 = x(x + 20) \Rightarrow 300 = x^2 + 20x \Rightarrow x^2 + 20x - 300 = 0 \Rightarrow (x + 30)(x - 10) = 0 \Rightarrow x = 10$$

پاسخ: گزینه ۴



۲۸- اگر شعاع بزرگ‌ترین دایره مماس بر دو دایره متداخل $C(O, 7)$ و $C'(O', r)$ برابر ۵ باشد و طول خط‌المركزین دو دایره

۱/۵ واحد باشد، r کدام است؟

- (۱) ۱/۵
(۲) ۰/۵
(۳) ۲
(۴) ۲/۵

متوسط - مفهومی - سریع - هندسه ۲ صفحه ۲۰ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۱

می‌دانیم قطر بزرگ‌ترین دایره مماس بر دو دایره همواره برابر است با:

$$D = d + R + r \Rightarrow 2 \times 5 = 1/5 + 7 + r \Rightarrow r = 10 - 8/5 = 1/5$$

دورترین و نزدیکترین نقطه دو دایره

اگر در دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O', r)$ طول خط‌المركزين برابر d باشد و بدانيم $r < R$ است، در اين صورت **کمترین** و **بیشترین فاصله** نقاط دو دایره مطابق جدول زیر است:

$\text{Max} = d + R + r$	$\text{Min} = d - R - r$

بزرگترین و کوچکترین دایره مماس بر دو دایره

با توجه به جدول قبل قطر **بزرگترین** و **کوچکترین دایره مماس** بر دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O', r)$ مطابق جدول زیر خواهد بود:

قطر کوچکترین دایره مماس بر دو دایره	قطر بزرگترین دایره مماس بر دو دایره
$MN = d - R - r$	$MN = d + R + r$
$MN = d - R - r$	$MN = R - d - r$
$MN = d + R + r$	$MN = d + R + r$

یه نمونه باحال ببین!

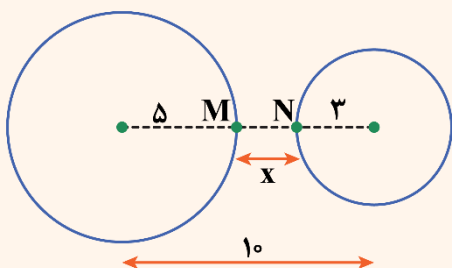
دو دایره $C(O, 5)$ و $C'(O', 3)$ مفروض‌اند. اگر طول خط‌المركزين دو دایره برابر ۱۰ باشد، کمترین فاصله نقاط دو دایره کدام است؟

- ۱) ۲
۲) ۳
۳) ۶
۴) ۸

پاسخ تشریحی:

کمترین فاصله نقاط دو دایره همواره برابر با $MN = |d - R| - r$ و بیشترین فاصله نقاط دو دایره همواره برابر $d + R + r$ است که R شعاع دایره بزرگ‌تر و r شعاع دایره کوچک‌تر می‌باشد؛ بنابراین داریم:

$$\Rightarrow MN = |10 - 5| - 3 = 5 - 3 = 2$$



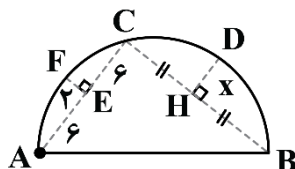
پاسخ: گزینه ۱

کپسول دوبینگ | (بزرگترین و کوچکترین دایره مماس بر دو دایره)

قطر بزرگترین و کوچکترین دایره مماس بر دو دایره در واقع همان دورترین و نزدیکترین فاصله نقاط دو دایره است که به ترتیب برابرند با $|d - R| - r$ و $d + R + r$.



۲۹- در نیم دایره شکل مقابل اندازه پاره خط DH که عمود منصف وتر BC است، کدام است؟



۳ (۱)

۴ (۲)

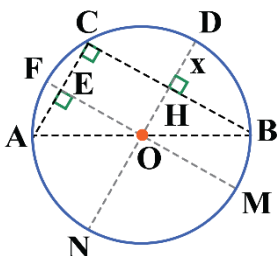
۵ (۳)

۶ (۴)

(سخت - مفهومی - زمان ۵) - هندسه ۲ صفحه ۱۸ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۲

چون FE و DH عمود منصف وترها هستند، امتداد هر دوی آنها از مرکز دایره می‌گذرد.



حال ابتدا با نوشتن روابط طولی برای نقطه E داریم:

$$FE \times EM = CE \times AE \Rightarrow 2 \times EM = 6 \times 6 \Rightarrow EM = 18$$

بنابراین قطر دایره برابر است با:

$$2R = 2 + 18 = 20 \Rightarrow R = 10$$

برای محاسبه OH دو روش داریم:

روش اول

حال در مثلث ABC دو ضلع از مثلث معلوم است و ضلع سوم با فیثاغورس به دست می‌آید:

$$AC^2 + BC^2 = AB^2 \Rightarrow 12^2 + BC^2 = 20^2 \Rightarrow BC = 16 \Rightarrow BH = 8$$

حال در مثلث OBH طبق فیثاغورس داریم:

$$OH^2 + BH^2 = OB^2 \Rightarrow OH^2 + 8^2 = 10^2 \Rightarrow OH = 6$$

روش دوم

از آن جا که CEOH مستطیل است می‌توانیم نتیجه بگیریم که:

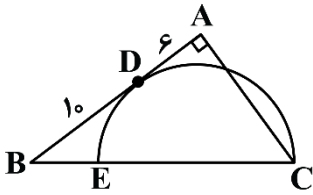
$$CE = OH = 6$$

حال داریم:

$$x = OD - OH = R - 6 = 10 - 6 = 4$$



۳۰- مثلث قائم الزاویه ABC مفروض است، نیم دایره ای مطابق شکل در نقطه D بر ضلع AB مماس است و دو قطعه به طول های ۶ و ۱۰ روی ضلع AB جدا کرده است، قطر نیم دایره کدام است؟



۱۰ (۱)

۱۲ (۲)

۱۵ (۳)

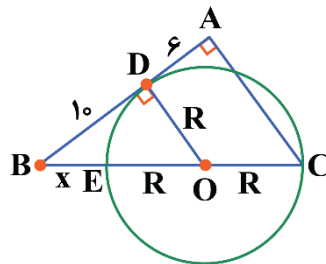
۱۶ (۴)

(سخت - مفهومی/ترکیبی - زمان ۵ - هندسه ۲ صفحه ۱۹ - ۱۱۰۱)

پاسخ: گزینه ۳

روش اول

از مرکز نیم دایره به نقطه D وصل می کنیم و می دانیم شعاع بر خط مماس عمود است، حال با فرض $BE = x$ از روابط طولی برای نقطه B استفاده می کنیم:



$$BD^2 = BE \times BC \Rightarrow 10^2 = x \times (x + 2R) \quad (1)$$

حال در مثلث ABC چون $OD \parallel AC$ است، طبق تالس داریم:

$$\frac{BO}{BC} = \frac{BD}{BA} \Rightarrow \frac{x+R}{x+2R} = \frac{10}{10+6} \Rightarrow \frac{x+R}{x+2R} = \frac{5}{8}$$

$$\Rightarrow 8x + 8R = 5x + 10R \Rightarrow 3x = 2R \Rightarrow x = \frac{2R}{3}$$

با جایگذاری x در رابطه (۱) داریم:

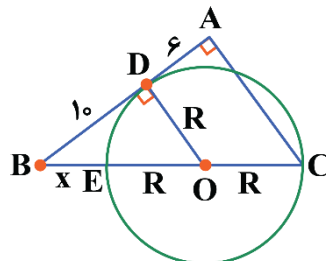
$$100 = \frac{2R}{3} \left(\frac{2R}{3} + 2R \right) \Rightarrow 100 = \frac{2R}{3} \times \frac{8R}{3} \Rightarrow 100 = \frac{16}{9} R^2$$

$$\Rightarrow R^2 = \frac{10^2 \times 3^2}{4^2} \Rightarrow R = \frac{10 \times 3}{4} = 7.5 \Rightarrow EC = 2R = 15$$

روش دوم

از مرکز نیم دایره به نقطه D وصل می کنیم و می دانیم شعاع بر خط مماس عمود است.

حال در مثلث ABC چون $OD \parallel AC$ است، طبق تالس داریم:



$$\frac{BO}{BC} = \frac{BD}{BA} \Rightarrow \frac{x+R}{x+2R} = \frac{10}{10+6} \Rightarrow \frac{x+R}{x+2R} = \frac{5}{8}$$

$$\Rightarrow 8x + 8R = 5x + 10R \Rightarrow 3x = 2R \Rightarrow x = \frac{2R}{3}$$

با استفاده از فیثاغورس در مثلث OBD داریم:

$$\Delta OBD: 10^2 + R^2 = (x+R)^2 \Rightarrow 10^2 + R^2 = \left(\frac{2R}{3} + R \right)^2 \Rightarrow 100 = \frac{16}{9} R^2 \Rightarrow R^2 = \frac{10^2 \times 3^2}{4^2}$$

$$\Rightarrow R = \frac{10 \times 3}{4} = 7.5 \Rightarrow EC = 2R = 15$$

۳۱- گزاره $(p \wedge r) \Rightarrow \sim(p \Rightarrow q)$ هم‌ارز کدام گزاره است؟

- (۱) $q \Rightarrow (p \wedge r)$ (۲) $p \wedge (q \Rightarrow r)$ (۳) $r \wedge (p \Rightarrow q)$ (۴) $p \Rightarrow (q \wedge r)$

متوسط - مفهومی - استاندارد (۵) - آمار و احتمال صفحه ۸ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۲

گزاره شرطی داده شده را ساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} & \sim(p \wedge r) \Rightarrow \sim(p \Rightarrow q) \\ & \equiv (p \wedge r) \vee \sim(\sim p \vee q) \equiv (p \wedge r) \vee (p \wedge \sim q) \\ & \equiv p \wedge (r \vee \sim q) \equiv p \wedge (\sim q \vee r) \equiv p \wedge (q \Rightarrow r) \end{aligned}$$

ترکیب شرطی دو گزاره

اگر p و q دو گزاره باشند، ترکیب شرطی ۲ گزاره p و q را به صورت $p \Rightarrow q$ نشان می‌دهیم که در آن p را **مقدم** و q را **تالی** می‌گوییم. جدول ارزش درستی این گزاره به صورت زیر است:

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

کپسول دوپینگ | (تنها حالتی که ترکیب شرطی نادرست است!)

تنها زمانی ترکیب شرطی نادرست است که **مقدم درست** و **تالی نادرست** باشد.

نحوه خواندن ترکیب شرطی ۲ گزاره

$p \Rightarrow q$ را به صورت‌های زیر می‌خوانیم:

۱) اگر p آن‌گاه q .

۲) p شرط کافی برای q است.

۳) q شرط لازم برای p است.



۳۲- عکس نقیض ترکیب شرطی $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\sim p \wedge q)$ کدام است؟

- (۱) $(\sim p \wedge q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$ (۲) $(p \wedge \sim q) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$
(۳) $(q \Rightarrow p) \Rightarrow (p \wedge \sim q)$ (۴) $(q \Rightarrow p) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$

متوسط - مفهومی - استاندارد (۵) - آمار و احتمال صفحه ۹ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۳

عکس نقیض ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ عبارت است از $\sim q \Rightarrow \sim p$.

بنابراین:

$$\begin{aligned} & (p \Rightarrow q) \Rightarrow (\sim p \wedge q) \xrightarrow{\text{عکس نقیض}} \sim(\sim p \wedge q) \Rightarrow \sim(p \Rightarrow q) \\ & \equiv (p \vee \sim q) \Rightarrow \sim(\sim p \vee q) \equiv (p \vee \sim q) \Rightarrow (p \wedge \sim q) \equiv (q \Rightarrow p) \Rightarrow (p \wedge \sim q) \end{aligned}$$

نکته!

عکس نقیض گزاره شرطی **هم‌ارز** با خود گزاره است.

کپسول دوپینگ | (عکس‌ها و نقیض‌ها در ترکیب شرطی دو گزاره)

۱) $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$ (تبدیل گزاره شرطی به فصلی)

۲) $p \Rightarrow q \equiv q \Rightarrow p$ (عکس ترکیب شرطی)

۳) $p \Rightarrow q$ ترکیب شرطی $\equiv \neg(p \Rightarrow q) \equiv (\neg p \vee q) \equiv p \wedge \neg q$

۴) $p \Rightarrow q$ ترکیب شرطی $\equiv \neg q \Rightarrow \neg p \equiv q \vee \neg p \equiv p \vee q \equiv p \Rightarrow q$

۵) $p \Rightarrow q$ ترکیب شرطی $\equiv \neg(q \Rightarrow p) \equiv (\neg q \vee p) \equiv q \wedge \neg p$



۳۳- در چند حالت از جدول ارزش گزاره‌ای، ارزش گزاره $(p \vee q) \Leftrightarrow \neg r$ درست است؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

(متوسط - مفهومی - زمان ۵ - آمار و احتمال صفحه ۱۰ - ۱۱۰)

پاسخ: گزینه ۳

کافی است جدول ارزش را رسم کنیم.

p	q	r	$p \vee q$	$\neg r$	$(p \vee q) \Leftrightarrow \neg r$
د	د	د	د	ن	ن
د	د	ن	د	د	د
د	ن	د	د	ن	ن
د	ن	ن	د	د	د
ن	د	د	د	ن	ن
ن	د	ن	د	د	د
ن	ن	د	ن	ن	د
ن	ن	ن	ن	د	ن

بنابراین ۴ حالت درست در ستون آخر که نتیجه نهایی است ملاحظه می‌شود.

ترکیب دو شرطی دو گزاره

اگر p و q دو گزاره باشند، گزاره مرکب $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ را به صورت $p \Leftrightarrow q$ می‌نویسیم و آن را ترکیب دو شرطی دو گزاره می‌گوییم. جدول ارزش درستی ترکیب دو شرطی دو گزاره به صورت زیر است:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	د

کپسول دوپینگ | (حالت‌هایی که ترکیب دو شرطی درست است)

ترکیب دو شرطی دو گزاره p و q یعنی $p \Leftrightarrow q$ زمانی درست است که هر ۲ گزاره p و q درست یا هر دو نادرست باشند.

نحوه خواندن ترکیب دو شرطی دو گزاره

گزاره $p \Leftrightarrow q$ را به صورت‌های زیر می‌خوانیم:

۱) اگر p آن‌گاه q و برعکس.

۲) p شرط لازم و کافی برای q است.

۳) p اگر و تنها اگر q.



۳۴- نقیض گزاره $\forall x \in \mathbb{Z} : (\sqrt{x^2} = x) \Rightarrow [\frac{3}{2} \sin x] = -2$ کدام است؟

$$(1) \exists x \in \mathbb{Z} : (\sqrt{x^2} = x) \wedge ([\frac{3}{2} \sin x] \neq -2)$$

$$(2) \exists x \in \mathbb{Z} : (\sqrt{x^2} \neq x) \wedge ([\frac{3}{2} \sin x] = -2)$$

$$(3) \exists x \in \mathbb{Z} : (\sqrt{x^2} = x) \vee ([\frac{3}{2} \sin x] \neq -2)$$

$$(4) \exists x \in \mathbb{Z} : (\sqrt{x^2} \neq x) \vee ([\frac{3}{2} \sin x] = -2)$$

(آسان - مفهومی - استاندارد) - آمار و احتمال صفحه ۱۳ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۱

توجه کنید نقیض سور عمومی، سور وجودی می شود و داریم:

$$\sim (\forall x \in D : p(x)) \equiv \exists x \in D : \sim p(x)$$

از طرفی نقیض گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ به شکل زیر است:

$$\sim (p \Rightarrow q) \equiv (\sim p \vee q) \equiv p \wedge \sim q$$

پس نقیض سور عمومی داده شده در صورت سؤال با توجه به مطالب بیان شده به شکل زیر است:

$$\forall x \in \mathbb{Z} : \underbrace{(\sqrt{x^2} = x)}_p \Rightarrow \underbrace{[\frac{3}{2} \sin x] = -2}_q \xrightarrow{\text{نقیض}} \exists x \in \mathbb{Z} : (\sqrt{x^2} = x) \wedge ([\frac{3}{2} \sin x] \neq -2)$$

کپسول دوبینگ | (نقیض گزاره های سوری)

$$\sim (\forall x; p(x)) \equiv \exists x; \sim p(x)$$

$$\sim (\exists x; p(x)) \equiv \forall x; \sim p(x)$$

•• ilo ••

۳۵- اگر $A - C = \emptyset, B' \subseteq A'$ باشد، آنگاه متمم مجموعه $A \cap (C - B)$ با کدام گزینه برابر است؟ (U نماد مجموعه مرجع است)

(۴) U

(۳) $A' - B'$

(۲) $A' \cap B'$

(۱) $\emptyset$

(آسان - مفهومی - سریع) - آمار و احتمال صفحه ۲۳ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۴

ابتدا با فرضیات سؤال پیش می رویم تا مجموعه $A \cap (C - B)$ را ساده کنیم:

$$B' \subseteq A' \Rightarrow A \subseteq B \Rightarrow A - B = \emptyset$$

$$A - C = \emptyset \Rightarrow A \subseteq C$$

حال با دانستن این که $A \subseteq C$ است به سراغ مجموعه داده شده می رویم:

$$A \cap (C - B) = A \cap (C \cap B') = \underbrace{(A \cap C)}_A \cap B' = A \cap B' = A - B = \emptyset$$

متمم مجموعه $\emptyset$ همان مجموعه مرجع U است.

قوانین مجموعه‌ها

اگر A, B و C سه زیرمجموعه از مجموعه مرجع U باشند، آنگاه:

- ۱) $\begin{cases} A \cup B = B \cup A \\ A \cap B = B \cap A \end{cases}$ خاصیت جابه‌جایی
- ۲) $\begin{cases} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C \end{cases}$ خاصیت شرکت‌پذیری
- ۳) $\begin{cases} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{cases}$ خاصیت توزیع‌پذیری
- ۴) $\begin{cases} A \cup (A \cap B) = A \\ A \cap (A \cup B) = A \end{cases}$ قانون جذب
- ۵) $U - A = A'$ تعریف متمم مجموعه
- ۶) $A - \emptyset = A$
- ۷) $\emptyset - A = \emptyset$
- ۸) $A - A' = A$
- ۹) $A' - A = A'$
- ۱۰) $A \cap A' = \emptyset$
- ۱۱) $A \cup A' = U$
- ۱۲) $\emptyset' = U$
- ۱۳) $U' = \emptyset$
- ۱۴) $A - B = A \cap B'$ تبدیل تفاضل به اشتراک
- ۱۵) $\begin{cases} (A \cup B)' = A' \cap B' \\ (A \cap B)' = A' \cup B' \end{cases}$ قوانین دمورگان
- ۱۶) $A \cup B = A \cup C \not\Rightarrow B = C$
- ۱۷) $A \cap B = A \cap C \not\Rightarrow B = C$
- ۱۸) $(A \cap B) \subseteq A$, $(A \cap B) \subseteq B$
- ۱۹) $A \subseteq (A \cup B)$, $B \subseteq (A \cup B)$
- ۲۰) $(A \cap B) \subseteq (A \cup B)$
- ۲۱) $A \subseteq B \Leftrightarrow B' \subseteq A'$
- ۲۲) $(A \subseteq B \wedge B \subseteq A) \Leftrightarrow A = B$ تعریف دو مجموعه مساوی

کپسول دوبینگ | (گلچین قوانین مجموعه‌ها)

۱) تبدیل تفاضل به اشتراک و برعکس $A - B = A \cap B'$

۲) $A \subseteq B \Leftrightarrow B' \subseteq A'$

۳) قانون جذب $\begin{cases} A \cup (A \cap B) = A \\ A \cap (A \cup B) = A \end{cases}$

۴) قوانین دمورگان $\begin{cases} (A \cup B)' = A' \cap B' \\ (A \cap B)' = A' \cup B' \end{cases}$

۵) تعریف دو مجموعه مساوی $(A \subseteq B \wedge B \subseteq A) \Leftrightarrow A = B$



۳۶- اگر $(A-B) \cup (B-A) \cup (A \cap B) = B$ باشد، آنگاه مجموعه $(A \cap B \cap C) - (A \cap (B-C))$ با کدام مجموعه برابر است؟

$B \cap C'$ (۴)

$A \cap B$ (۳)

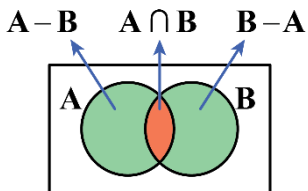
$A \cap C$ (۲)

$A - C$ (۱)

(متوسط - مفهومی - استاندارد) - آمار و احتمال صفحه ۲۷ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۲

نمودار ون زیر را ببینید:



$$\left. \begin{aligned} (A-B) \cup (B-A) \cup (A \cap B) &= A \cup B \\ \xrightarrow{\text{طبق فرض}} (A-B) \cup (B-A) \cup (A \cap B) &= B \end{aligned} \right\} \Rightarrow A \cup B = B$$

حال چون اجتماع دو مجموعه A و B برابر با B شده است، حتماً A زیرمجموعه B بوده است. در نتیجه:

$$A \cup B = B \Rightarrow A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$$

اکنون با دانستن این اطلاعات به سراغ ساده کردن مجموعه داده شده می‌رویم.

$$\begin{aligned} (A \cap B \cap C) - (A \cap (B-C)) &= \underbrace{(A \cap B \cap C)}_A - \underbrace{(A \cap B \cap C')}_{A'} \\ &= (A \cap C) \cap (A \cap C')' = (A \cap C) \cap (A' \cup C) = \underbrace{(A \cap C \cap A')}_{\emptyset} \cup (A \cap C \cap C) = \emptyset \cup (A \cap C) = A \cap C \end{aligned}$$

•••

۳۷- اگر $A = \{a, b, \{a\}, \emptyset\}$ و $B = \{a, \{b\}, \{a, b\}, \{b, a\}\}$ باشند، مجموعه $(A-B) \times (B-A)$ چند زیرمجموعه سره غیر تهی دارد؟

۶۲ (۴)

۶۳ (۳)

۳۰ (۲)

۳۱ (۱)

(متوسط - مفهومی - استاندارد) - آمار و احتمال صفحه ۳۰ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۴

! حواست باشه!

مجموعه B ، سه عضوی است، چون $\{a, b\}$ و $\{b, a\}$ فرقی با هم ندارند: $B = \{a, \{b\}, \{a, b\}\}$

ابتدا مجموعه‌های $A-B$ و $B-A$ را محاسبه کرده و چون $|A-B| \times |B-A| = |(A-B) \times (B-A)|$ می‌باشد داریم:

$$\begin{aligned} A-B &= \{b, \{a\}, \emptyset\} \\ B-A &= \{\{a, b\}, \{b\}\} \end{aligned} \Rightarrow |(A-B) \times (B-A)| = 3 \times 2 = 6$$

پس مجموعه $(A-B) \times (B-A)$ دارای ۶ عضو است. پس $۲^۶ - ۲ = ۶۲$ زیرمجموعه سره غیر تهی داریم.

تعداد زیرمجموعه‌های سره و سره ناتهی

تعداد زیرمجموعه‌های سره یک مجموعه π عضوی برابر با $۲^{\pi} - ۱$ و تعداد زیرمجموعه‌های سره ناتهی آن مساوی $۲^{\pi} - ۲$ است.

ضرب دکارتی ۲ مجموعه

ضرب دکارتی ۲ مجموعه A و B به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A \wedge y \in B\}$$

یعنی زوج‌های مرتبی که مؤلفه‌های اول آن‌ها از A و مؤلفه‌های دوم آن‌ها از B انتخاب می‌شود.

- ۱) $|A \times B| = |A| \times |B|$
- ۲) $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$
- ۳) $A \times B = B \times A \Rightarrow A = \emptyset \vee B = \emptyset \vee A = B$
- ۴) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
- ۵) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
- ۶) $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$
- ۷) $A \times B = C \times D \Leftrightarrow A = C \wedge B = D$
- ۸) $A \times B \subseteq (C \times D) \Leftrightarrow A \subseteq C \wedge B \subseteq D$
- ۹) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$
- ۱۰) $(A \times B) \cap (B \times A) = (A \cap B)^2$
- ۱۱) $A^2 \cap B^2 = (A \times A) \cap (B \times B) = (A \cap B) \times (A \cap B) = (A \cap B)^2$

کیسول دوبیینگ | (زیرمجموعه‌های سیره (محض))

به زیرمجموعه‌ای که با خود مجموعه برابر نباشد زیرمجموعه محض یا سیره آن مجموعه گویند. در واقع تمام زیرمجموعه‌های دیگر به جز خود مجموعه، سیره هستند.



۳۸- اگر $A = [1, 3]$ و $B = \{1, 3\}$ باشد، آنگاه نمودار $(A \times B) \cup (B \times A)$ در کدام گزینه به درستی توصیف شده است؟
 (۱) محیط یک مربع
 (۲) دو پاره خط موازی محور طول‌ها
 (۳) سطح یک مربع
 (۴) چهار رأس یک مربع

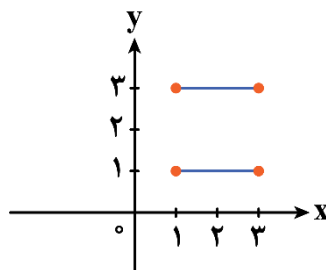
آسان - مفهومی - سریع (🕒) - آمار و احتمال صفحه ۳۱ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۱

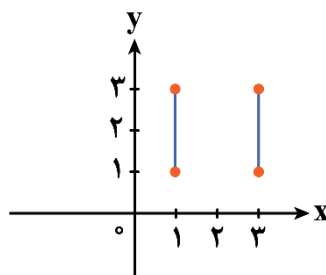
$$A \times B = \{(x, y) | x \in A, y \in B\}$$

مطابق تعریف ضرب دکارتی داریم:

$$A \times B = \{(x, y) | 1 \leq x \leq 3, (y = 1 \text{ یا } y = 3)\}$$

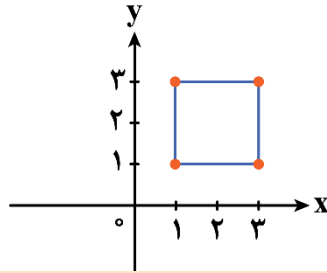


$$B \times A = \{(x, y) | (x = 1 \text{ یا } x = 3), 1 \leq y \leq 3\}$$



از اجتماع دو نمودار $A \times B$ و $B \times A$ نمودار زیر حاصل می‌شود که نشان‌دهنده محیط یک مربع است.

$$(A \times B) \cup (B \times A)$$



کپسول دوبینگ | (شکل حاصل از ضرب دکارتی)

درباره نمودار ضرب دکارتی ۲ مجموعه A و B یعنی $A \times B$ و یا $B \times A$ به نکات زیر توجه کنید:

۱) اگر A و B هر دو مجموعه‌هایی گسسته از اعداد (یعنی دارای تعداد عضو قابل شمارش) باشند، $A \times B$ یا $B \times A$ دارای **تعدادی نقطه متناهی و گسسته** روی دستگاه مختصات می‌باشد.

۲) اگر از بین مجموعه‌های A و B یکی مجموعه‌ای گسسته از اعداد (دارای تعداد عضو قابل شمارش) و دیگری بازه‌ای پیوسته از اعداد باشد، آن‌گاه مجموعه $A \times B$ و یا $B \times A$ **پاره‌خط‌های موازی محورهای مختصات** هستند.

۳) اگر A و B مجموعه‌هایی پیوسته از اعداد باشند، آن‌گاه مجموعه‌های $A \times B$ و یا $B \times A$ به صورت **سطح یک مستطیل و یا مربع** می‌باشند.



۳۹- مجموعه $A = \{3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$ شامل چند زیرمجموعه است به طوری که مجموع بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عضو آن مضرب ۷ باشد؟

۳۲ (۴)

۱۶ (۳)

۱۱ (۲)

۱۰ (۱)

(سخت - مفهومی - استاندارد) - آمار و احتمال صفحه ۱۷ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۲

باید با روش حالت‌بندی تمام زیرمجموعه‌هایی که مجموع کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عضو آن‌ها بر ۷ بخش‌پذیر است را بنویسیم. دقت کنید اعضای بین کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عضو، هر کدام دو حالت دارند می‌توانند در زیرمجموعه ظاهر بشوند یا نشوند و مطابق اصل ضرب داریم:

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} \text{حالت ۱} & \text{حالت ۲} & \text{حالت ۱} \\ \uparrow & \uparrow \uparrow & \uparrow \\ 3 & 5, 7, 9, 11 & \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \text{تعداد زیرمجموعه‌ها} = 1 \times 2 \times 2 \times 2 \times 1 = 8$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} \text{حالت ۱} & \text{حالت ۲} & \text{حالت ۱} \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 5 & 7 & 9 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \text{تعداد زیرمجموعه‌ها} = 1 \times 2 \times 1 = 2$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{cc} \text{حالت ۱} & \text{حالت ۱} \\ \uparrow & \uparrow \\ 13 & 15 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \text{تعداد زیرمجموعه} = 1 \times 1 = 1$$

بنابراین در کل $8 + 2 + 1$ یعنی ۱۱ زیرمجموعه مطلوب دارد.

۴۰- اگر $(C - A)' \subseteq A - B'$ باشد، کدام گزینه زیر همواره درست است؟

- (۱) $A - B' = \emptyset$ (۲) $A \cap C' = A$ (۳) $C' - A = \emptyset$ (۴) $B \cup C' = C'$

(سخت - مفهومی - استاندارد) - آمار و احتمال صفحه ۲۹ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۳ 

$$(C - A)' \subseteq \underbrace{A - B'}_{A \cap B} \Rightarrow (C \cap A)' \subseteq A \cap B \Rightarrow C' \cup A \subseteq A \cap B$$

$$\xrightarrow{A \cap B \subseteq A} C' \cup A \subseteq A \xrightarrow{A \subseteq C' \cup A} A \subseteq C' \cup A \subseteq A \Rightarrow A = C' \cup A \Rightarrow C' \subseteq A$$

$$\Rightarrow C' - A = \emptyset$$

 کپسول دوبینگ | (قلق مجموعه‌ها)

وقتی یک رابطه صحیح بین مجموعه‌ها داده شده باشد و بخواهیم از این رابطه، یک نتیجه‌گیری دیگر کنیم باید **با استفاده از قوانین مجموعه‌ها و فرض داده شده** پله‌پله پیش برویم و بعد از جای‌گذاری و استفاده از قوانین مجموعه‌ها، رابطه را ساده کنیم تا به یک رابطه صحیح دیگر برسیم.

