



دفترچه پاسخ

نیم سال اول دوازدهم

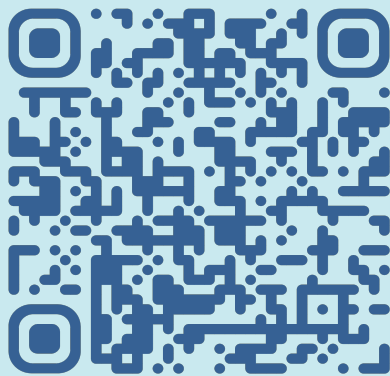


پایه دهم



پنجشنبه

۱۴۰۳/۰۸/۱۷



برای دیدن پاسخنامه ویدئویی آزمون
QRcode بالارو اسکن یا روی لینک زیر کلیک کن!

مشاهده پاسخنامه ویدئویی آزمون

گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی - پایه دوازدهم آزمون الکترونیکی ماز - مرحله ۳

درس	مسئول درس	طراحان	ویراستاران
ریاضیات	حسین شفیع زاده سیدجواد نظری مهرداد کیوان	کاظم اجلالی - سوگند روشنی امیرحسین ابومحبوب	علیرضا کاظمی بقا - فرزانه خاکپاش احسان غنی زاده - حمیدرضا ولیپور علیرضا ملک حسینی
فیزیک	سجاد صادقی زاده سعید احمدی	محسن قندچلر - آروین صالحی - حسین عبدوی نژاد مجید رجبی وندچالی - امیررضا خویینی ها سجاد صادقی زاده - علیرضا شجاعی سارا قانع - محمدجواد سورچی	محمدجواد سورچی امیرحسین مخانی صدقیانی
شیمی	فرشاد هادیان فرد	فرشاد هادیان فرد - علی ترابی محمد کهنه پوشی - سعیده محبی	فرهنگ امیری - رامین رزمجو محمد داوودآبادی فراهانی

مدیر آزمون: دکتر رسول خنجری

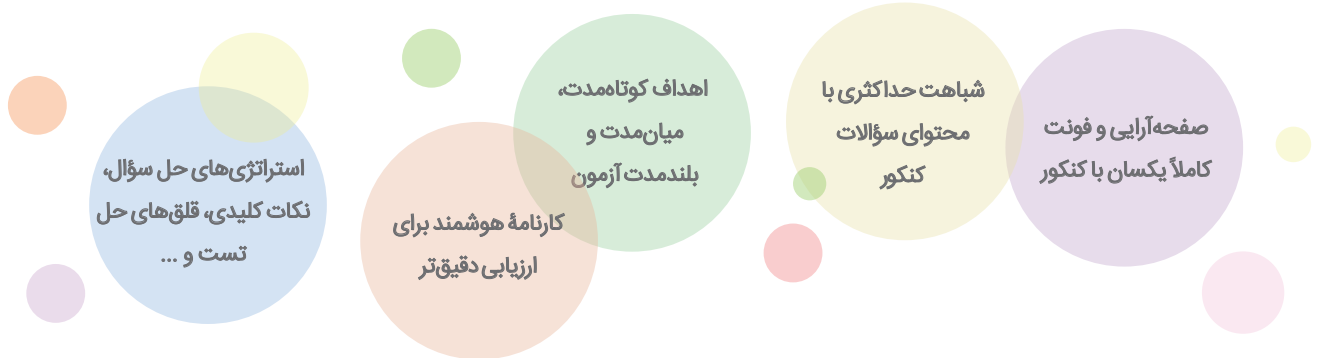
حق چاپ و تکثیر سؤالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز «گروه ماز» مجاز می باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می شود.
به دلیل عدم رضایت تیم ماز، هرگونه استفاده غیرقانونی از دفترچه سؤالات و پاسخنامه ماز برای تمامی اشخاص، شرعاً حرام است.



AzmonVIP

سلام، دمت گرم که اینقدر پشتکار داری و تلاشتو ادامه میدی!

ما فقط سعی می‌کنیم راه رو برات هموارتر کنیم و عامل اصلی موفقیت، خودتی و خودت! امسال بیش از ۲۰۰ هزار نفر در آزمون‌های متوسطه دوم ماز شرکت می‌کنن، آیا همه‌شون قراره موفق بشن؟ قطعاً نه! فقط اون‌هایی موفق میشن که مثل تو تا لحظه آخر تلاش می‌کنن، مرتب به برنامه مطالعاتی و برنامه آزمون‌هاشون میرسن و تا روز کنکور دست از تلاش برنمیدارن! ما هم تمام تلاشمون رو می‌کنیم که هر چی که نیاز داری در اختیار بذاریم تا با خیال راحت به چیزی که می‌خوای برسی! و هر آزمون یک سری از کارهایی که جدیداً به ویژگی آزمون اضافه کردیم رو بهت می‌گیم:



بخشی از کارهایی که اخیراً برای ارتقای کیفیت و خدمات آزمون ماز انجام شده:

برنامه مطالعاتی برای تمام رشته‌ها و تمام پایه‌ها: می‌دونیم که برنامه‌ریزی و رسیدن به بودجه‌بندی آزمون کار سخته و کلی انرژی باید صرف این برنامه‌ریزی بشه! پس ما بعد از هر آزمون، تمام لقمه‌های مطالعاتی + یک پلتفرم مطالعاتی (کاربرگ مطالعاتی) برای رسیدن به آزمون بعد در اختیارتون قرار می‌دیم تا با خیال راحت و بدون دغدغه، برنامه‌ریزی کنید و به آزمون بعد برسید.

پاسخنامه ویدیویی: با اینکه پاسخنامه آزمون رو سعی می‌کنیم به کامل‌ترین شکل ممکن براتون بنویسیم؛ اما باز هم اگه برای حل برخی سؤالات دچار ابهام شدین می‌تونید از پاسخنامه ویدیویی آزمون استفاده کنید. این پاسخنامه توسط اساتید کلاس آنلاین ماز و مؤلفان و طراحان آزمون ماز حاضر میشه.

آزمون‌های تیک آبی برای جلوگیری از تقلب: درسته که ما تبلیغات تلویزیونی آن‌چنانی نداریم، اما به لطف نظرات مثبت شما، جامعه آماری ماز خیلی زیاد شده و کسب رتبه واقعی در این جامعه آماری می‌تونه بهتون کمک کنه که رتبه واقعی‌تون در کنکور رو هم تخمین بزنید. حالا برای اینکه شانس تقلب در آزمون به حداقل برسه، در برخی از آزمون‌های ماز برای یک درس، آزمون تیک آبی گرفته میشه (حدود ۱۰ تا ۱۵ سؤال) که این آزمون برای هر فرد متفاوت از بقیه افراد هست، تأثیری هم در درصد و کارنامه نداره، اما اگه تفاوت تراز یک نفر در این آزمون با همون درس در آزمون ماز، فاحش باشه، به این معنی هست که احتمالاً این فرد تقلب کرده و به این فرد رتبه داده نمیشه، تا کسانی که تقلب نکردن، رتبه واقعی خودشون رو ببینن. پس حتماً در آزمون تیک آبی شرکت کنید و به همه سؤالاتش پاسخ بدید.

درجه سختی تصادفی: حتماً از کسانی که کنکور دادن شنیدین که در کنکور هر سال، به صورت کاملاً تصادفی یک یا چند تا از دروس، سخت‌تر از حالت عادی طراحی میشن! و ممکنه سر جلسه کنکور خیلی متعجب بشید و استراتژی کنکورتون به طور کل به هم بخوره! ما برای آمادگی این حالت، در آزمون‌های نیمسال دوم ماز، در هر آزمون یک درس رو به صورت تصادفی سخت‌تر از حالت عادی طراحی می‌کنیم تا برای هر شرایطی در کنکور سراسری، آمادگی کامل داشته باشید.

کلام آخر:

یک تیم با بیش از ۵۰۰ نفر در حال کار هستن تا آزمون‌های ماز با حداکثر کیفیت حاضر بشن و به شما کمک کنن و مسیر موفقیت رو براتون ساده‌تر کنن. همیشه از نظرات و کامنت‌های خوبتون انرژی می‌گیریم. مرسی که همراهمون هستین.

راستی! حتماً در نظرسنجی آزمون شرکت کنین و نظرات و پیشنهاداتتون رو برامون بنویسین.

رياضي



دانش‌آموزان عزیز ماز
ما اومدیم با یکی دیگه از آزمون‌هامون
توی این آزمون یه سری مباحث جدید بهمون اضافه شدن حالا اگه می‌خوای ببینی توی این آزمون چه خبره باهامون همراه باش...
- آقا! + بله؟

توی این آزمون دقیقا از چه قسمت‌هایی سوال طرح کردین؟
مباحثی که توی این آزمون ازش سوال اومده رو می‌تونن توی جدول پایینی ببینی...

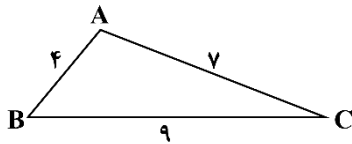
بخش	کتاب	فصل	مباحث	تعداد سوال
دوازدهم	ریاضی ۱	فصل دوم	نسبت های مثلثاتی	۱
			دایره مثلثاتی	۵
			روابط بین نسبت‌های مثلثاتی	۲
	حسابان ۱	فصل چهارم	رادیان	۵
			نسبت‌های مثلثاتی برخی زاویه‌ها	۱
			توابع مثلثاتی	۱
	حسابان ۲	فصل اول	تقسیم و بخش‌پذیری	۱
		فصل دوم	تناوب و تانژانت	۴
	هندسه ۳	فصل اول	دستگاه معادلات	۵
	ریاضیات گسسته	فصل اول	قضیه تقسیم	۲
			هم‌نهشتی و کاربردها	۳
پایه	ریاضی ۱	فصل سوم	ریشه و توان	
			توان‌های گویا	۱۰
			عبارت‌های جبری	
	هندسه ۱	فصل سوم	مساحت و کاربردهای آن	۵
		فصل چهارم	خط، نقطه و صفحه	۲
			تفکر تجسمی	۱
			برش	۱
			دوران	۱

- آقا! + بله؟

از این مباحثی که گفتین، کدوما مهم‌ترین؟
خب همه مباحث اهمیت خاص خودشون رو دارن و می‌تونن به صورت مجزا و یا ترکیبی با بقیه مباحث توی کنکور مطرح بشن ولی اگه بخوام مهم‌ترها رو بگم، از بین همه این مباحث، قسمت‌های "نسبت‌های مثلثاتی برخی زاویه‌ها" و "تناوب و تانژانت" در حسابان و همچنین قسمت "مساحت و کاربردهای آن" در هندسه و بخش "هم‌نهشتی و کاربردها" در ریاضیات گسسته اهمیت زیادتری دارن.

حالا بزن بریم که آزمون رو با هم تحلیل کنیم ...

حسین شفیعی‌زاده - رتبه ۶ کنکور ۶۷ و مسئول درس ریاضی آزمون ماز



$$\frac{2\sqrt{5}}{3} \quad (2) \quad \frac{\sqrt{5}}{2} \quad (4)$$

$$\frac{\sqrt{5}}{3} \quad (1) \quad \frac{2\sqrt{5}}{5} \quad (3)$$

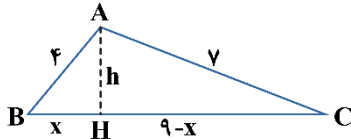
۱- در مثلث مقابل، مقدار $\tan \hat{B}$ کدام است؟

(آسان - مفهومی / محاسباتی - ۱۰۰۲)

پاسخ: گزینه ۴

روش اول:

از قضیه فیثاغورس در مثلث‌های ABH و ACH در شکل مقابل، نتیجه می‌شود:



$$\begin{cases} h^2 = 16 - x^2 \\ h^2 = 49 - (9-x)^2 \end{cases} \Rightarrow 16 - x^2 = 49 - (9-x)^2 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \Rightarrow h = \frac{4\sqrt{5}}{3}$$

$$\triangle ABH : \tan \hat{B} = \frac{h}{x} = \frac{\frac{4\sqrt{5}}{3}}{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

بنابراین:

روش دوم:

ابتدا به کمک قضیه هرون، مساحت مثلث ABC را به دست می‌آوریم. اگر P نصف محیط مثلث باشد، در این صورت داریم:

$$P = \frac{AB + AC + BC}{2} = \frac{4 + 7 + 9}{2} = 10$$

$$\Rightarrow S_{\triangle ABC} = \sqrt{P(P-AB)(P-AC)(P-BC)} = \sqrt{10(10-4)(10-7)(10-9)} = \sqrt{10 \times 6 \times 3 \times 1} = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \times BC \times \sin \hat{B} = 6\sqrt{5} = \frac{1}{2} \times 4 \times 9 \times \sin \hat{B} \Rightarrow \sin \hat{B} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

براساس زاویه $\hat{B}$ ، مساحت مثلث برابر است با:

از طرفی، طبق رابطه $\sin^2 \hat{B} + \cos^2 \hat{B} = 1$ داریم:

$$\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 + \cos^2 \hat{B} = 1 \Rightarrow \cos^2 \hat{B} = \frac{4}{9} \Rightarrow \cos \hat{B} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \tan \hat{B} = \frac{\sin \hat{B}}{\cos \hat{B}} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

گروه آموزشی ماز

۲- مقدار $\sin\left(\frac{497\pi}{42}\right)$ کدام است؟

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (4)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (3)$$

$$-\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} \quad (1)$$

(آسان - محاسباتی - ۱۱۰۴)

پاسخ: گزینه ۲

$$\frac{497\pi}{42} = \frac{71\pi}{6} = \frac{72\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = 12\pi - \frac{\pi}{6}$$

$$\sin\left(\frac{497\pi}{42}\right) = \sin\left(12\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

توجه کنید که:

بنابراین:

کمان‌های $(2n\pi \pm \theta)$

اگر کمان نسبت‌های مثلثاتی به صورت $(2n\pi \pm \theta)$ باشد، آن‌گاه داریم:

$$\sin(2n\pi \pm \theta) = \sin(\pm \theta)$$

$$\cos(2n\pi \pm \theta) = \cos(\pm \theta) = \cos \theta$$

$$\tan(2n\pi \pm \theta) = \tan(\pm \theta)$$

$$\cot(2n\pi \pm \theta) = \cot(\pm \theta)$$

کمان‌های $(2n+1)\pi \pm \theta$

اگر کمان نسبت‌های مثلثاتی به فرم $(2n+1)\pi \pm \theta$ باشد، آن‌گاه داریم:

$$\sin((2n+1)\pi \pm \theta) = -\sin(\pm\theta)$$

$$\cos((2n+1)\pi \pm \theta) = -\cos(\pm\theta) = -\cos\theta$$

$$\tan((2n+1)\pi \pm \theta) = \tan(\pm\theta)$$

$$\cot((2n+1)\pi \pm \theta) = \cot(\pm\theta)$$

سراسری تجربی ۹۹

حاصل عبارت $\tan(30^\circ)\cos(210^\circ) + \tan(48^\circ)\sin(84^\circ)$ کدام است؟ (اعداد داده شده برحسب درجه هستند.)

۲ (۴)

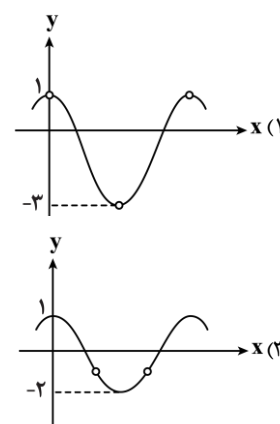
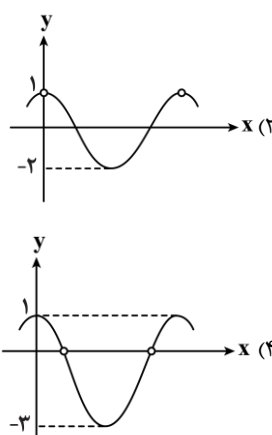
۱ (۳)

صفر (۲)

$-\frac{1}{2}$ (۱)

گروه آموزشی ماز

۳- نمودار تابع $f(x) = \frac{2\sin x \cos x - \sin x}{\sin x}$ به کدام صورت است؟



(آسان - مفهومی - ۱۱۰۴)

پاسخ: گزینه ۱

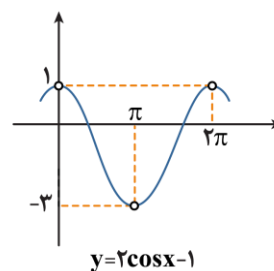
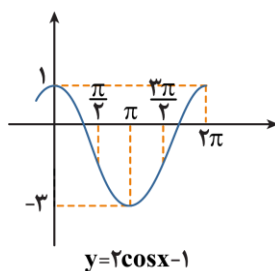
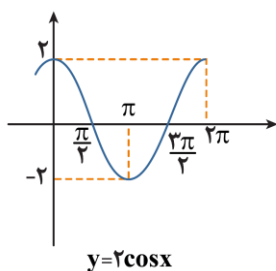
$$f(x) = \frac{2\sin x \cos x - \sin x}{\sin x} = \frac{\sin x(2\cos x - 1)}{\sin x} = 2\cos x - 1$$

$$\sin x \neq 0 \Rightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

توجه کنید که:

از طرف دیگر:

بنابراین نمودار تابع f به صورت زیر رسم می‌شود:



گروه آموزشی ماز

۴- دوره تناوب تابع $f(x) = a\sin(4\pi bx) - 2$ با دوره تناوب تابع $g(x) = 2\tan x - 3$ برابر است. مقدار $g(\frac{1}{8|b|})$ کدام است؟

$$\frac{2\sqrt{3}}{3} - 3 \quad (۴)$$

$$-1 \quad (۳)$$

$$2\sqrt{3} - 3 \quad (۲)$$

$$1 \quad (۱)$$

(آسان - مفهومی / محاسباتی - ۱۲۰۲)

پاسخ: گزینه ۳

دوره تناوب تابع f برابر است با: $\frac{2\pi}{4\pi b} = \frac{1}{2|b|}$ و دوره تناوب g برابر است با π .

$$\frac{1}{2|b|} = \pi \Rightarrow |b| = \frac{1}{2\pi}$$

بنابراین:

$$g\left(\frac{1}{\lambda|b|}\right) = g\left(\frac{1}{\lambda \times \frac{1}{2\pi}}\right) = g\left(\frac{\pi}{\lambda}\right) = 2 \tan \frac{\pi}{\lambda} - 3 = -1$$

در نتیجه:

دوره تناوب (T)

$$f(x+T) = f(x)$$

اگر f تابعی متناوب باشد، آن گاه به ازای $T \in \mathbb{R}$ داریم:

نکته

توابعی مانند مثلثاتی، ثابت، پراکت، متناوب هستند.

دوره تناوب توابع مثلثاتی

$$y = a \sin^{\circ}(bx+c) + d \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|b|}$$

$$y = a \cos^{\circ}(bx+c) + d \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|b|}$$

$$y = a \tan(bx+c) + d \Rightarrow T = \frac{\pi}{|b|}$$

$$y = a \cot(bx+c) + d \Rightarrow T = \frac{\pi}{|b|}$$

$$y = a \sin^{\circ}(bx+c) + d \Rightarrow T = \frac{\pi}{|b|}$$

$$y = a \cos^{\circ}(bx+c) + d \Rightarrow T = \frac{\pi}{|b|}$$

$$y = |a \sin(bx+c) + d| \Rightarrow T = \frac{\pi}{|b|}$$

$$y = |a \cos(bx+c) + d| \Rightarrow T = \frac{\pi}{|b|}$$

$$y = |a \tan(bx+c) + d| \Rightarrow T = \frac{\pi}{|b|}$$

$$y = |a \cot(bx+c) + d| \Rightarrow T = \frac{\pi}{|b|}$$

توجه

برای به دست آوردن دوره تناوب، حداقل امکان تابع را ساده می‌کنیم.

دوره تناوب توابع پراکتی

$$y = ax - [ax] \Rightarrow T = \frac{1}{|a|}$$

$$y = [ax] + [-ax] \Rightarrow T = \frac{1}{|a|}$$

$$y = (-1)^{[ax]} \Rightarrow T = \frac{2}{|a|}$$

توجه

در توابع پراکتی، T همان طول پاره‌خط‌ها می‌باشد.

سراسری تجربی ۱۴۰۳ (تیرماه)

دوره تناوب $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \sin \frac{2x}{a}$ برابر $\frac{\pi}{3}$ است. دوره تناوب $y = \cos ax$ کدام است؟

۱۲π (۴)

۶π (۳)

۴π (۲)

۳π (۱)

گروه آموزشی ماز

۵- چند جمله‌ای $P(x) = x^1 + 3x^9 + mx^8 - x + 1$ بر $x-1$ بخش پذیر است. اگر خارج قسمت تقسیم $P(x)$ بر $x-1$ باشد، چند جمله‌ای $q(x)$ باشد، باقی مانده تقسیم $q(x)$ بر $x-1$ کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

(متوسط - محاسباتی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۴

$P(x)$ بر $x-1$ بخش پذیر است. پس:

$$P(1) = 0 \Rightarrow 1 + 3 + m - 1 + 1 = 0 \Rightarrow m = -4$$

$$P(x) = x^1 + 3x^9 - 4x^8 - x + 1$$

$$P(x) = x^1 + 3x^9 - 4x^8 - x + 1 = x^9(x-1) + 4x^8(x-1) - (x-1)$$

اکنون توجه کنید که:

$$= (x-1)(x^9 + 4x^8 - 1) = (x-1)q(x)$$

$$q(1) = 1^9 + 4 \times 1^8 - 1 = 4$$

بنابراین باقی مانده تقسیم $q(x)$ بر $x-1$ برابر است با:

آزمون تقسیم

اگر $P(x)$ مقسوم و $q(x)$ مقسوم علیه و $Z(x)$ برابر خارج قسمت باشد و $R(x)$ باقی مانده تقسیم باشد، آنگاه داریم:

باقی مانده + مقسوم علیه $\times$ خارج قسمت = مقسوم : آزمون تقسیم

$$P(x) = q(x) \times Z(x) + R(x)$$

نکته ۱

در تقسیم چند جمله‌ای $P(x)$ بر $q(x)$ ، اگر ریشه $q(x)$ برابر $x = a$ باشد، در این صورت مقدار باقی مانده برابر است با $P(a)$.

نکته ۲

اگر چند جمله‌ای $P(x)$ بر $q(x)$ ، بخش پذیر باشد، آنگاه باقی مانده برابر صفر است.

نکته ۳

اگر چند جمله‌ای برابر $P(x)$ و مقسوم علیه به صورت یک عبارت درجه یک باشد، در این صورت می توانیم از روش هورنر (روش سریع) برای به دست آوردن خارج قسمت و باقی مانده استفاده کنیم:
در این روش کافی است ریشه مقسوم علیه را به دست آورده و براساس ضرایب جملات مقسوم، خارج قسمت و باقی مانده را به دست آوریم. به مثال زیر توجه کنید:

برای مثال

$$\begin{array}{r} x^3 - x^2 - x - 1 \\ x^2 + x + 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \\ \times 2 \quad \times 2 \quad \times 2 \quad \times 2 \\ 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \end{array}$$

باقی مانده $\rightarrow 1$

تذکره!

دقت کنید که ضریب جمله اول مقسوم از سمت چپ را در ریشه مقسوم علیه ضرب کرده و با ضریب جمله بعدی جمع کرده و حاصل را در ریشه مقسوم علیه ضرب کرده و این مرحله را تا جمله آخر ادامه داده و عدد حاصل سمت راست برابر باقی مانده و باقی اعداد مربوط به ضرایب عبارت خارج قسمت است.

سراسری تجربی ۹۹

فرض کنید چند جمله‌ای $P(x)$ بر $x^2 - 1$ بخش پذیر باشد. اگر $Q(x) = P(x-1) + P(1-x)$ ، آنگاه حاصل تقسیم $Q(x)$ بر $x-2$ کدام است؟

۲ (۴)

۱ (۳)

صفر (۲)

-۱ (۱)

گروه آموزشی ماز

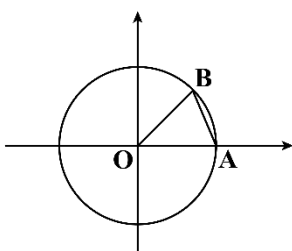
۶- در دایره مثلثاتی شکل مقابل، محیط مثلث OAB برابر $\frac{10+2\sqrt{5}}{5}$ است. مساحت این مثلث کدام است؟

$$\frac{\sqrt{5}}{4} \quad (2)$$

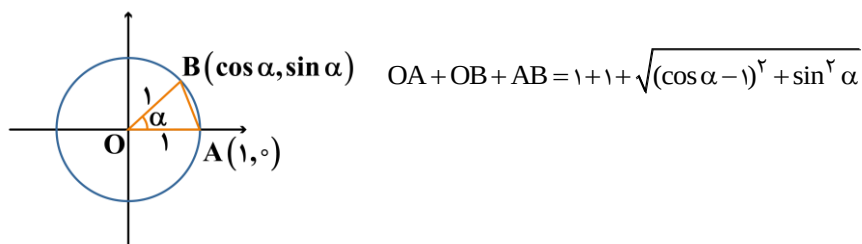
$$\frac{4}{5} \quad (4)$$

$$\frac{\sqrt{5}}{2} \quad (1)$$

$$\frac{2}{5} \quad (3)$$



مطابق شکل مقابل، محیط مثلث OAB برابر است با:



بنابراین:

$$2 + \sqrt{\cos^2 \alpha - 2 \cos \alpha + 1 + \sin^2 \alpha} = \frac{1 + 2\sqrt{5}}{5} \Rightarrow 2 + \sqrt{2 - 2 \cos \alpha} = \frac{1 + 2\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \sqrt{2 - 2 \cos \alpha} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$2 - 2 \cos \alpha = \frac{4}{5} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{3}{5} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{4}{5}$$

$$S = \frac{1}{2} OA \cdot OB \sin \alpha = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \frac{4}{5} = \frac{2}{5}$$

بنابراین مساحت مثلث OAB برابر است با:

گروه آموزشی ماز

۷- تابع $f(x) = m \tan(3\pi - x) + 2 \tan(\pi + x)$ روی بازه $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ اکیداً نزولی است. حدود m کدام است؟

(۴) $-2 < m < 0$

(۳) $0 < m < 2$

(۲) $m < -2$

(۱) $m > 2$

$$f(x) = m \tan(3\pi - x) + 2 \tan(\pi + x) = -m \tan x + 2 \tan x = (2 - m) \tan x$$

توجه کنید که:

تابع $y = \tan x$ روی بازه $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ اکیداً صعودی است، پس باید $2 - m$ عددی منفی باشد تا تابع f روی این بازه اکیداً نزولی باشد، در نتیجه:

$$2 - m < 0 \Rightarrow m > 2$$

گروه آموزشی ماز

۸- چند عدد حقیقی در دامنه تابع $f(x) = \tan(\frac{8\pi}{x^2 + 2})$ قرار ندارند؟

(۴) ۱۰

(۳) ۸

(۲) ۶

(۱) ۴

$$\frac{8\pi}{x^2 + 2} = (2k + 1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

فقط اعدادی مانند x در دامنه تابع f قرار ندارند که:

بنابراین:

$$\frac{8}{x^2 + 2} = \frac{2k + 1}{2} \Rightarrow x^2 + 2 = \frac{16}{2k + 1}$$

اکنون توجه کنید که $x^2 + 2 \geq 2$ ، پس:

$$\frac{16}{2k + 1} \geq 2 \Rightarrow \frac{8}{2k + 1} \geq 1 \Rightarrow \frac{8 - 2k - 1}{2k + 1} \geq 0 \Rightarrow \frac{7 - 2k}{2k + 1} \geq 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} < k \leq \frac{7}{2}$$

بنابراین هشت عدد زیر در دامنه تابع f قرار ندارند.

$$k = 0 \Rightarrow x^2 + 2 = 16 \Rightarrow x = \pm \sqrt{14}$$

$$k = 1 \Rightarrow x^2 + 2 = \frac{16}{3} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{10}{3}}$$

$$k = 2 \Rightarrow x^2 + 2 = \frac{16}{5} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{6}{5}}$$

$$k = 3 \Rightarrow x^2 + 2 = \frac{16}{7} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{2}{7}}$$

دامنه توابع مثلثاتی

• دامنه توابع به فرم $y = a \cos(bx + c) + d$ و $y = a \sin(bx + c) + d$ ، $\mathbb{R}$ است.

• دامنه توابع $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ به صورت $D_y = \{D_f \cap D_g \mid g(x) \neq 0\}$ است.

دامنه توابع $y = a \cot(bx + c) + d$ و $y = a \tan(bx + c) + d$ به صورت زیر است:

$$y = a \tan(bx + c) + d \Rightarrow bx + c \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x \neq \frac{k\pi + \frac{\pi}{2} - c}{b}$$

$$y = a \cot(bx + c) + d \Rightarrow bx + c \neq k\pi \Rightarrow x \neq \frac{k\pi - c}{b}$$

گروه آموزشی ماز

۹- اگر $\sqrt[5]{a^2 \sqrt[4]{a^2}} = 16$ مقدار $\sqrt[5]{a^2 \sqrt[4]{a^2}}$ کدام است؟

(۴) ۱۰۲۴

(۳) ۵۱۲

(۲) ۱۲۸

(۱) ۳۲

(آسان - محاسباتی - ۱۰۰۳)

پاسخ: گزینه ۳

$$\sqrt[5]{a^2 \sqrt[4]{a^2}} = 16 \Rightarrow a^{\frac{1}{5}} \times a^{\frac{2}{20}} = 16 \Rightarrow a^{\frac{5}{20}} = 16 \Rightarrow a^{\frac{1}{4}} = 16 \Rightarrow a = 16^4$$

توجه کنید که:

$$\sqrt[5]{a^2 \sqrt[4]{a^2}} = a^{\frac{2}{5}} \times a^{\frac{1}{10}} = a^{\frac{4}{10}} = a^{\frac{2}{5}} = (16^{\frac{1}{4}})^{\frac{2}{5}} = 16^{\frac{2}{20}} = 16^{\frac{1}{10}} = (16^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

بنابراین:

گروه آموزشی ماز

۱۰- اگر $a^{\frac{1}{a}} = \frac{1}{4}$ مقدار $(\frac{1}{a})^a$ کدام است؟

(۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(۳) $\sqrt{2}$

(۲) $\frac{1}{2}$

(۱) ۲

(آسان - محاسباتی - ۱۰۰۳)

پاسخ: گزینه ۳

$$a^{\frac{1}{a}} = \frac{1}{4} \Rightarrow (a^{\frac{1}{a}})^a = (\frac{1}{4})^a \Rightarrow a = (\frac{1}{4})^a$$

توجه کنید که:

$$\Rightarrow a^{\frac{1}{a}} = ((\frac{1}{4})^a)^{\frac{1}{a}} \Rightarrow a^{\frac{1}{a}} = ((\frac{1}{4})^{\frac{1}{a}})^a \Rightarrow a^{\frac{1}{a}} = (\frac{1}{4})^a$$

$$(\frac{1}{4})^a = a^{\frac{1}{a}} = \sqrt{2}$$

واضح است که $a = \frac{1}{4}$ جواب معادله بالاست. بنابراین:

گروه آموزشی ماز

۱۱- حاصل عبارت $A = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x^2-x}$ به ازای $x = 3 - \sqrt{2}$ کدام است؟

(۴) $\sqrt{2} + 1$

(۳) $1 - \sqrt{2}$

(۲) $2 - \sqrt{2}$

(۱) $2 + \sqrt{2}$

(آسان - محاسباتی - ۱۰۰۳)

پاسخ: گزینه ۱

$$A = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x^2-x} = \frac{x-1+x+1}{x^2-x} = \frac{2x}{x^2-x} = \frac{2x}{x(x-1)} = \frac{2}{x-1}$$

توجه کنید که:

بنابراین حاصل A به ازای $x = 3 - \sqrt{2}$ برابر است با:

$$A = \frac{2}{3 - \sqrt{2} - 1} = \frac{2}{2 - \sqrt{2}} = \frac{2(2 + \sqrt{2})}{(2 - \sqrt{2})(2 + \sqrt{2})} = \frac{2(2 + \sqrt{2})}{4 - 2} = 2 + \sqrt{2}$$

گروه آموزشی ماز

۱۲- کدام یک، عدد بزرگ تری است؟

(۴) $\sqrt[3]{15}$

(۳) $\sqrt[3]{9} - 1$

(۲) ۲

(۱) $\sqrt[3]{2} + 1$

(متوسط - محاسباتی - ۱۰۰۳)

پاسخ: گزینه ۴

توجه کنید که:

$$\begin{cases} \sqrt[3]{2} > 1 \Rightarrow \sqrt[3]{2} + 1 > 2 \\ \sqrt[3]{9} < 3 \Rightarrow \sqrt[3]{9} - 1 < 2 \end{cases} \Rightarrow \sqrt[3]{9} - 1 < 2 < \sqrt[3]{2} + 1$$

بنابراین از سه عدد $\sqrt[3]{2} + 1$ ، 2 و $\sqrt[3]{9} - 1$ از بقیه بزرگ تر است، کافی است این عدد را با عدد $\sqrt[3]{15}$ مقایسه کنیم. توجه کنید که:

$$(\sqrt[3]{2} + 1)^3 = 3 + 3\sqrt[3]{4} + 3\sqrt[3]{2} = 3(1 + \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}) < 3(1 + 2 + 2) \Rightarrow (\sqrt[3]{2} + 1)^3 < 15 \Rightarrow \sqrt[3]{2} + 1 < \sqrt[3]{15}$$

بنابراین $\sqrt[3]{15}$ از بقیه اعداد داده شده، بزرگ تر است.

گروه آموزشی ماز

۱۳- اگر $x = (\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 2)$ ، مقدار $\frac{2}{\sqrt[3]{x}}$ کدام است؟

(۴) $\sqrt[3]{32}$

(۳) $\sqrt[3]{128}$

(۲) $\sqrt[3]{256}$

(۱) $\sqrt[3]{128}$

(متوسط - محاسباتی - ۱۰۰۳)

پاسخ: گزینه ۲

توجه کنید که:

$$x = (\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 2) = \sqrt[3]{2}(\sqrt[3]{2} - 1)\sqrt[3]{2}(\sqrt[3]{2} + 1 + \sqrt[3]{4})$$

$$= \sqrt[3]{4}(\sqrt[3]{2} - 1)(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1) = \sqrt[3]{4}(2 - 1) = \sqrt[3]{4}$$

$$\frac{2}{\sqrt[3]{x}} = \frac{2}{\sqrt[3]{\sqrt[3]{4}}} = \frac{2}{\sqrt[3]{4}} = \frac{2}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{2\sqrt[3]{2}}{2} = \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{256}$$

بنابراین:

گروه آموزشی ماز

۱۴- اگر α جواب معادله $\sqrt{x + \frac{1}{x}} + \sqrt{x - \frac{1}{x}} = \frac{4}{x}$ باشد، مقدار $\sqrt{\alpha + \frac{1}{\alpha}} - \sqrt{\alpha - \frac{1}{\alpha}}$ کدام است؟

(۴) $-\frac{1}{2}$

(۳) $\frac{1}{2}$

(۲) ۲

(۱) ۱

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۰۰۳)

پاسخ: گزینه ۳

توجه کنید که α در معادله داده شده صدق می کند. پس:

$$\sqrt{\alpha + \frac{1}{\alpha}} + \sqrt{\alpha - \frac{1}{\alpha}} = \frac{4}{\alpha} \quad (۱)$$

$$\sqrt{\alpha + \frac{1}{\alpha}} - \sqrt{\alpha - \frac{1}{\alpha}} = A \quad (۲)$$

اکنون فرض می کنیم:

طرفین تساوی های (۱) و (۲) را در هم ضرب می کنیم:

$$(\sqrt{\alpha + \frac{1}{\alpha}} + \sqrt{\alpha - \frac{1}{\alpha}})(\sqrt{\alpha + \frac{1}{\alpha}} - \sqrt{\alpha - \frac{1}{\alpha}}) = \frac{4A}{\alpha}$$

$$(\alpha + \frac{1}{\alpha}) - (\alpha - \frac{1}{\alpha}) = \frac{4A}{\alpha} \Rightarrow \frac{2}{\alpha} = \frac{4A}{\alpha} \Rightarrow A = \frac{1}{2}$$

بنابراین مقدار خواسته شده، برابر $\frac{1}{2}$ است.

گروه آموزشی ماز

۱۵- اگر $x > 1$ و $x^4 + \frac{1}{x^4} = 23$ ، مقدار $x^4 - \frac{1}{x^4}$ کدام است؟

(۴) $5\sqrt{21}$

(۳) ۲۲

(۲) $15\sqrt{3}$

(۱) $10\sqrt{7}$

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۰۰۳)

پاسخ: گزینه ۴

روش اول:

توجه کنید که:

$$x^4 + \frac{1}{x^4} = 23 \Rightarrow (x^2 + \frac{1}{x^2})^2 - 2 = 23 \Rightarrow (x^2 + \frac{1}{x^2})^2 = 25 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 5 \quad (۱)$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 5 \Rightarrow (x + \frac{1}{x})^2 - 2 = 5 \Rightarrow (x + \frac{1}{x})^2 = 7 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = \sqrt{7} \quad (2)$$

از طرف دیگر:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 5 \Rightarrow (x - \frac{1}{x})^2 + 2 = 5 \Rightarrow (x - \frac{1}{x})^2 = 3 \Rightarrow x - \frac{1}{x} = \sqrt{3} \quad (3)$$

اکنون طرفین تساوی‌های (۱)، (۲)، (۳) را در هم ضرب می‌کنیم:

$$(x^2 + \frac{1}{x^2})(x + \frac{1}{x})(x - \frac{1}{x}) = 5\sqrt{7}\sqrt{3}$$

$$(x^2 + \frac{1}{x^2})(x^2 - \frac{1}{x^2}) = 5\sqrt{21} \Rightarrow x^4 - \frac{1}{x^4} = 5\sqrt{21}$$

روش دوم:

$$x^4 + \frac{1}{x^4} = 23 \Rightarrow (x^2 + \frac{1}{x^2})^2 - 2 = 23 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 5$$

$$(x + \frac{1}{x})^2 - 2 = 5 \Rightarrow (x + \frac{1}{x})^2 = 7 \xrightarrow{x>1} x + \frac{1}{x} = \sqrt{7}$$

$$(x + \frac{1}{x})^2 - (x - \frac{1}{x})^2 = 4 \xrightarrow{(x+\frac{1}{x})^2=7} 7 - (x - \frac{1}{x})^2 = 4 \Rightarrow (x - \frac{1}{x})^2 = 3 \xrightarrow{x>1} x - \frac{1}{x} = \sqrt{3}$$

از طرفی، می‌دانیم:

$$x^4 - \frac{1}{x^4} = (x^2 - \frac{1}{x^2})(x^2 + \frac{1}{x^2}) = (x - \frac{1}{x})(x + \frac{1}{x})(x^2 + \frac{1}{x^2}) = (\sqrt{3})(\sqrt{7})(5) = 5\sqrt{21}$$

گروه آموزشی ماز

۱۶- حاصل عبارت $A = \frac{\sqrt{4-\sqrt{12}}}{\sqrt{6}-\sqrt{27}} - \frac{5}{3+3\sqrt{6}}$ کدام است؟

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (4)$$

$$\frac{1}{3} \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{3} \quad (1)$$

(متوسط - محاسباتی - ۱۰۰۳)

پاسخ: گزینه ۳

$$\frac{\sqrt{4-\sqrt{12}}}{\sqrt{6}-\sqrt{27}} = \frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{\sqrt{6}-3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{3}\sqrt{2-\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

توجه کنید که:

$$\frac{5}{3+3\sqrt{6}} = \frac{5(3-3\sqrt{6})}{(3+3\sqrt{6})(3-3\sqrt{6})} = \frac{5(3-3\sqrt{6})}{9-54} = \frac{15(1-\sqrt{6})}{-45} = \frac{\sqrt{6}-1}{3}$$

از طرف دیگر:

$$A = \frac{\sqrt{6}}{3} - \frac{\sqrt{6}-1}{3} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{6}+1}{3} = \frac{1}{3}$$

بنابراین:

سراسری تجربی ۹۹

حاصل عبارت $\frac{\sqrt{8}+\sqrt{27}}{5-\sqrt{6}} - 2(\sqrt{4}-1)^{-1}$ کدام است؟

$$\sqrt{2}-2\sqrt{3} \quad (4)$$

$$1-\sqrt{2} \quad (3)$$

$$-1+\sqrt{2} \quad (2)$$

$$1+\sqrt{3} \quad (1)$$

گروه آموزشی ماز

۱۷- اگر $a = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}$ ، مقدار عبارت $A = \frac{a^4 + a^2 + 1}{a^2 + a + 1}$ کدام است؟

$$12+2\sqrt{2}+4\sqrt{3} \quad (4)$$

$$14+2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+2\sqrt{6} \quad (3)$$

$$12+4\sqrt{2}+2\sqrt{3} \quad (2)$$

$$14+4\sqrt{6} \quad (1)$$

(سخت - محاسباتی - ۱۰۰۳)

پاسخ: گزینه ۲

$$a^4 + a^2 + 1 = a^4 + 2a^2 + 1 - a^2 = (a^2 + 1)^2 - a^2 = (a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1)$$

توجه کنید که:

$$A = \frac{(a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1)}{a^2 + a + 1} - a = a^2 - a + 1 - a = a^2 - 2a + 1$$

بنابراین:

$$= (\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6})^2 - 2(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}) + 1$$

$$= 2+3+6+2\sqrt{6}+2\sqrt{12}+2\sqrt{18}-2\sqrt{2}-2\sqrt{3}-2\sqrt{6}+1 = 12+4\sqrt{2}+2\sqrt{3}$$

گروه آموزشی ماز

۱۸- اگر α زاویه‌ای حاده باشد و $\frac{1}{\sin \alpha} - \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{91}{60}$ ، مقدار $\tan \alpha$ کدام است؟

(۴) $\frac{12}{13}$

(۳) $\frac{5}{13}$

(۲) $\frac{12}{5}$

(۱) $\frac{5}{12}$

پاسخ: گزینه ۱

(سخت - مفهومی / محاسباتی - ۱۰۰۲)

$$\frac{1}{\sin \alpha} - \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{91}{60} \Rightarrow \frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{91}{60} \Rightarrow 60(\cos \alpha - \sin \alpha) = 91 \sin \alpha \cos \alpha \quad (۱)$$

توجه کنید که:

اگر فرض کنیم $t = \cos \alpha - \sin \alpha$ ، آن‌گاه:

$$t^2 = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha \Rightarrow t^2 = 1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha \Rightarrow \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1-t^2}{2}$$

بنابراین تساوی (۱) به صورت زیر درمی‌آید:

$$60t = 91 \left(\frac{1-t^2}{2} \right) \Rightarrow 91t^2 + 120t - 91 = 0 \Rightarrow (7t+13)(13t-7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{7}{13} \\ t = -\frac{13}{7} \end{cases}$$

از تساوی داده شده، نتیجه می‌گیریم $\sin \alpha < \cos \alpha$ پس $\cos \alpha - \sin \alpha > 0$ و در نتیجه $t = -\frac{13}{7}$ قابل قبول نیست. بنابراین $\cos \alpha - \sin \alpha = \frac{7}{13}$

$$\sin \alpha \cos \alpha = \frac{60}{169} \text{ پس:}$$

$$\sin \alpha \left(\frac{7}{13} + \sin \alpha \right) = \frac{60}{169} \Rightarrow 169 \sin^2 \alpha + 91 \sin \alpha - 60 = 0$$

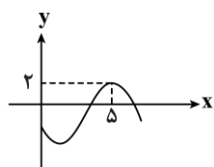
$$\sin \alpha = -\frac{12}{13} \text{ و غرضی} \quad \sin \alpha = \frac{5}{13} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{12}{13}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{5}{13}}{\frac{12}{13}} = \frac{5}{12}$$

بنابراین:

گروه آموزشی ماز

۱۹- قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a \sin\left(\frac{\pi}{b}(x+\delta)\right) - 1$ در شکل مقابل رسم شده است. مقدار ab کدام است؟ ($a > 0$ و $b \in \mathbb{N}$)



(۲) -۲۰

(۱) $\frac{20}{3}$

(۴) ۱۲

(۳) $-\frac{60}{7}$

پاسخ: گزینه ۴

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۲۰۲)

بیشترین مقدار تابع برابر ۲ است. بنابراین:

$$|a| - 1 = 2 \Rightarrow |a| = 3 \xrightarrow{a>0} a = 3$$

دوره تناوب تابع بزرگتر از ۵ و کوچکتر از ۱۰ است. پس:

$$5 < \frac{2\pi}{\frac{\pi}{b}} < 10 \Rightarrow 5 < 2b < 10 \Rightarrow \frac{5}{2} < b < 5$$

از طرف دیگر $f(5) = 2$ ، بنابراین:

$$f(5) = 3 \sin\left(\frac{10\pi}{b}\right) - 1 = 2 \Rightarrow \sin\left(\frac{10\pi}{b}\right) = 1$$

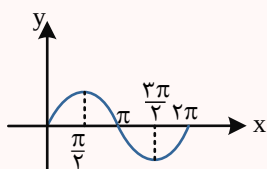
واضح است که تنها عدد طبیعی که در تساوی بالا صدق می‌کند $b = 4$ است. در نتیجه: $ab = 12$.

توابع $y = a \cos bx + c$ و $y = a \sin bx + c$

برای رسم توابع مثلثاتی باید به مقادیر $\max$ و $\min$ و T (دوره تناوب) توجه کنیم:

$$y = a \sin bx + c \Rightarrow \begin{cases} \min = -|a| + c \\ \max = |a| + c \\ T = \frac{2\pi}{|b|} \end{cases} \Rightarrow \frac{\max + \min}{2} = c$$

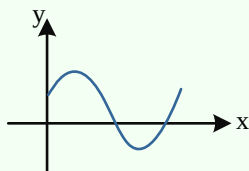
$$y = a \cos bx + c \Rightarrow \begin{cases} \min = -|a| + c \\ \max = |a| + c \\ T = \frac{2\pi}{|b|} \end{cases} \Rightarrow \frac{\max + \min}{2} = c$$



تابع $y = \sin x$ ، در دامنه $[0, 2\pi]$ به فرم زیر است:

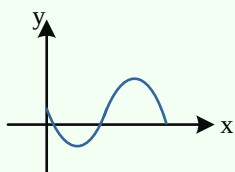
$$y = a \sin bx + c$$

$$\Rightarrow ab > 0$$

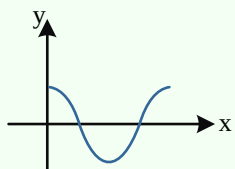


$$y = a \sin bx + c$$

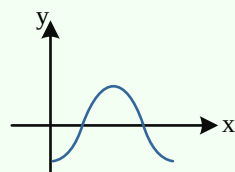
$$\Rightarrow ab < 0$$



$$1) a > 0 \Rightarrow \text{دهانه رو به بالا}$$



$$2) a < 0 \Rightarrow \text{دهانه رو به پایین}$$



نکته ۱

نکته ۲

در توابع به فرم $y = a \cos bx$ داریم:

توجه

در تابع $y = \cos bx$ برخلاف تابع $y = \sin bx$ ، علامت b تاثیری بر نمودار تابع ندارد.

گروه آموزشی ماز

۲۰- اگر a و b دو عدد حقیقی مثبت و متمایز باشند به طوری که $a^2 = a^2b + 1$ و $b^2 = a^2b - 1$ مقدار b^3 کدام است؟

$$\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \quad (۴)$$

$$\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \quad (۳)$$

$$\frac{\sqrt{5} + 1}{2} \quad (۲)$$

$$\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۱

دو طرف تساوی‌های داده شده را با هم جمع می‌کنیم:

$$a^2 + b^2 = 2a^2b \Rightarrow a^2 - 2a^2b + b^2 = 0$$

$$a^2 - b^2 - 2a^2b + 2b^2 = 0 \Rightarrow (a - b)(a^2 + ab + b^2) - 2b(a^2 - b^2) = 0$$

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) - 2b(a - b)(a + b) = 0$$

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2 - 2ab - 2b^2) = 0$$

$$(a - b)(a^2 - ab - b^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = b & \text{غ قق} \\ a^2 - ab - b^2 = 0 \end{cases}$$

طرفین تساوی $a^2 - ab - b^2 = 0$ را بر ab تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{a^2}{ab} - \frac{ab}{ab} - \frac{b^2}{ab} = 0 \Rightarrow \frac{a}{b} - 1 - \frac{b}{a} = 0$$

با فرض $\frac{a}{b} = x$ ، معادله بالا به صورت زیر درمی‌آید:

$$x - 1 - \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} & \text{غ قق} \end{cases}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \Rightarrow a = \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2}\right)b$$

بنابراین:

$$b^2 = a^2b - 1 \Rightarrow b^2 = \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2}\right)^2 b^2b - 1 \Rightarrow \left(\left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2}\right)^2 - 1\right)b^2 = 1$$

$$\left(\frac{6 + 2\sqrt{5}}{4} - 1\right)b^2 = 1 \Rightarrow b^2 = \frac{2}{\sqrt{5} + 1} = \frac{2(\sqrt{5} - 1)}{4} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

گروه آموزشی ماز

۲۱- اگر $AB = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ، $A^2 = 3A - I$ و A ماتریسی وارون‌پذیر باشد، آنگاه $A^{-1}B$ کدام است؟

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad (۴)$$

$$\begin{bmatrix} 7 \\ 7 \end{bmatrix} \quad (۳)$$

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad (۲)$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۴

(متوسط - محاسباتی - ۱۲۰۱)

با توجه به رابطه $A^2 = 3A - I$ داریم:

$$A^2 = 3A - I \xrightarrow{A^{-1} \times} A = 3I - A^{-1} \Rightarrow A^{-1} = 3I - A$$

$$\xrightarrow{\times B} A^{-1}B = 3B - AB = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

گروه آموزشی ماز

۲۲- مجموع درایه‌های غیر واقع بر قطر اصلی ماتریس A از تساوی $2A + I = A + 2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ کدام است؟

(۴) ۱۹

(۳) ۱۱

(۲) ۸

(۱) ۵

(متوسط - محاسباتی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۳

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} A + 2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = 2A + I \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} A - 2A = I - 2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -6 & -1 \end{bmatrix}$$

حال وارون ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$ را در طرفین ضرب می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -6 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

پس مجموع درایه‌های غیر قطر اصلی برابر ۱۱ است.

یافتن ماتریس مجهول

فرض کنید B یک ماتریس مربعی وارون‌پذیر باشد که در رابطه ماتریسی $BA = C$ صدق می‌کند. A یک ماتریس مجهول باشد، برای یافتن ماتریس A، کافی است طرفین معادله را از سمت چپ در ماتریس B^{-1} ضرب کنیم. در این صورت داریم:

$$B^{-1}(BA) = B^{-1}C \Rightarrow \underbrace{(B^{-1}B)}_I A = B^{-1}C \Rightarrow A = B^{-1}C$$

تذکر

در صورتی که معادله به فرم $AB = C$ و A ماتریس مجهول باشد، طرفین معادله را از سمت راست در B^{-1} ضرب می‌کنیم.

$$(AB)B^{-1} = CB^{-1} \Rightarrow A \underbrace{(BB^{-1})}_I = CB^{-1} \Rightarrow A = CB^{-1}$$

گروه آموزشی ماز

۲۳- اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ و $A^{-1} - A^T = mA + nI$ ، آن‌گاه $m + n$ کدام است؟

(۴) -۳

(۳) ۳

(۲) -۲

(۱) ۲

(متوسط - محاسباتی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۲

روش اول:

ابتدا ماتریس A^{-1} را به دست می‌آوریم.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$$

حالا این ماتریس را بر حسب A و I می‌نویسیم.

$$A^{-1} = \alpha A + \beta I \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\alpha & -\alpha \\ 5\alpha & -2\alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\alpha = -1 \Rightarrow \alpha = 1 \\ 3\alpha + \beta = 2 \xrightarrow{\alpha=1} \beta = 2 - 3 = -1 \end{cases}$$

بنابراین داریم:

$$A^{-1} = A - I \xrightarrow{\times A} I = A^T - A \Rightarrow A^T = A + I$$

$$A^{-1} - A^T = (A - I) - (A + I) = -2I \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ n = -2 \end{cases} \Rightarrow m + n = -2$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I = \bar{O} \Rightarrow A^2 - A - I = \bar{O} \Rightarrow A^2 = A + I$$

$$\xrightarrow{\times A^{-1}} A = I + A^{-1} \Rightarrow A^{-1} = A - I$$

$$A^{-1} - A^2 = (A - I) - (A + I) = -2I \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ n = -2 \end{cases} \Rightarrow m + n = -2$$

گروه آموزشی ماز

۲۴- اگر A و B ماتریس‌های وارون پذیر از مرتبه 2×2 باشند که $(A+3I)(B+3I) = 9I$ ، آن گاه در ماتریس $A^{-1} + B^{-1}$ مجموع درایه‌ها چقدر است؟

$$\frac{1}{9} \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} \quad (3)$$

$$-\frac{2}{3} \quad (2)$$

$$-3 \quad (1)$$

(متوسط - محاسباتی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۲

$$(A+3I)(B+3I) = 9I \Rightarrow AB + 3A + 3B + 9I = 9I$$

$$\Rightarrow AB = -3A - 3B$$

حال اگر عبارت به دست آمده را یک بار در A^{-1} و یک بار در B^{-1} ضرب کنیم، داریم:

$$\xrightarrow{A^{-1} \times} B = -3I - 3A^{-1}B \xrightarrow{\times B^{-1}} I = -3B^{-1} - 3A^{-1} \Rightarrow A^{-1} + B^{-1} = -\frac{1}{3}I = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

پس جمع درایه‌ها برابر $-\frac{2}{3}$ است.

گروه آموزشی ماز

۲۵- اگر معادله ماتریسی $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x+2y \\ 2x+y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$ متناظر با دستگاه معادلات $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ باشد، مجموع درایه‌های وارون ماتریس ضرایب دستگاه کدام است؟

$$\frac{2}{3} \quad (4)$$

$$6 \quad (3)$$

$$-2 \quad (2)$$

$$\text{صفر} \quad (1)$$

(متوسط - محاسباتی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۴

از ضرب ماتریس‌ها داریم:

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x+2y \\ 2x+y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3(x+2y) - 2(2x+y) = 1 \\ 4(x+2y) - 3(2x+y) = 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x+4y=1 \\ -2x+5y=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\text{وارون ماتریس ضرایب} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{جمع درایه‌ها} = \frac{2}{3}$$

تبدیل معادلات به ماتریس

دستگاه معادلات $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ را در نظر بگیرید. در این دستگاه $A = \begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب، $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ماتریس مجهولات و $B = \begin{bmatrix} c \\ c' \end{bmatrix}$ ماتریس مقادیر معلوم نامیده می‌شود و دستگاه را می‌توان به صورت معادله ماتریسی $AX = B$ نوشت.

برای حل دستگاه در صورتی که ماتریس A وارون پذیر باشد ($|A| \neq 0$)، کافی است طرفین معادله را از سمت چپ در ماتریس A^{-1} (وارون ماتریس ضرایب ضرب کنیم.

$$AX = B \Rightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

گروه آموزشی ماز

۲۶- در یک تقسیم، مقسوم ۴۰۵ و خارج قسمت ۱۱ است. اگر m مجموع کمترین مقدار و بیشترین مقدار مقسوم علیه باشد، m عضو کدام کلاس هم‌نهشتی به پیمانه ۶ است؟

(۴) [۰]

(۳) [۵]

(۲) [۴]

(۱) [۲]

پاسخ: گزینه ۲

(متوسط - محاسباتی - ۱۲۰۱)

$$405 \mid b \Rightarrow \begin{cases} 405 = 11b + r \\ 0 \leq r < b \end{cases}$$

$$\overline{r} \Rightarrow r = 405 - 11b$$

$$0 \leq 405 - 11b < b \Rightarrow 12b > 405 \Rightarrow b \geq 34$$

$$11b \leq 405 \Rightarrow b \leq 36$$

$$m = b_{\min} + b_{\max} = 34 + 36 = 70 \equiv 4^6$$

درسنامه

(۱) **قضیه تقسیم:** اگر a عددی صحیح و b عددی طبیعی باشد، اعدادی صحیح و منحصر به فرد مانند q و r پیدا می‌شوند به طوری که $a = bq + r$ و $0 \leq r < b$.
 a مقسوم، b مقسوم‌علیه، q خارج‌قسمت و r باقی‌مانده نامیده می‌شود.

(۲) کلاس هم‌نهشتی r (دسته هم‌نهشتی r) به پیمانه m عدد طبیعی m که آن را با $[r]_m$ نمایش می‌دهیم، عبارت است از مجموعه‌ای از اعداد صحیح که با r به پیمانه m هم‌نهشت هستند یا به عبارت دیگر کلاس هم‌نهشتی r به پیمانه m ، مجموعه همه اعداد صحیحی است که باقی‌مانده تقسیم آن‌ها بر عدد طبیعی m باقی‌مانده تقسیم عدد r بر m برابر است.

$$A_r = [r]_m = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv r \pmod{m} \right\}$$

نکته

طبق تعریف کتاب درسی در پیمانه r ، کلاس‌های هم‌نهشتی به صورت $[0]_r, [1]_r, \dots, [r-1]_r$ تعریف می‌شوند و کلاس هم‌نهشتی به صورت $[r]_r$ وجود ندارد.

گروه آموزشی ماز

۲۷- اگر a, b و c اعدادی طبیعی باشند به طوری که $a + b + c = 2024$ ، آن‌گاه باقی‌مانده $a^3 + b^3 + c^3$ بر ۶ کدام است؟

(۴) ۴

(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) ۱

پاسخ: گزینه ۲

(سخت - محاسباتی - ۱۲۰۱)

فرض کنید $A = a^3 + b^3 + c^3$ باشد.

$$A - a - b - c = \underbrace{a^3 - a}_{6q} + \underbrace{b^3 - b}_{6q'} + \underbrace{c^3 - c}_{6q''}$$

می‌دانیم همواره $n^3 - n$ حاصل ضرب سه عدد متوالی و بر ۶ بخش پذیر است. در نتیجه:

$$A - 2024 = 6t \Rightarrow A = 6t + 2024 \Rightarrow A = 6t' + 2$$

بخش پذیری

اگر n عددی صحیح باشد، آن‌گاه $n^3 \equiv n \pmod{6}$ یا به عبارت دیگر $n^3 - n \equiv 0 \pmod{6}$.
 برای اثبات این رابطه، ابتدا عبارت $n^3 - n$ را تجزیه می‌کنیم.

$$n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n-1)(n+1)$$

یعنی $n^3 - n$ به صورت حاصل ضرب سه عدد صحیح متوالی است. از هر دو عدد صحیح متوالی یکی بر ۲ بخش پذیر است و به طور مشابه از هر سه عدد صحیح متوالی یکی بر ۳ بخش پذیر است، پس حاصل ضرب سه عدد صحیح متوالی بر $6 = 3 \times 2$ بخش پذیر است.

گروه آموزشی ماز

۲۸- اگر x عددی صحیح و $x^3 \equiv 1 \pmod{m}$ و $x \in [m]$ باشد، مجموع مقادیر قابل قبول برای m کدام است؟

(۴) ۳۵

(۳) ۲۰

(۲) ۱۹

(۱) ۸

روش اول:

$$x \equiv 0 \rightarrow x^3 \equiv 0$$

$$x \equiv 1 \rightarrow x^3 \equiv 1$$

$$x \equiv 2 \rightarrow x^3 \equiv 1$$

$$x \equiv 3 \rightarrow x^3 \equiv 6$$

$$x \equiv 4 \rightarrow x^3 \equiv 1$$

$$x \equiv 5 \rightarrow x^3 \equiv 6$$

$$x \equiv 6 \rightarrow x^3 \equiv 6$$

$$\rightarrow x = 7k + 1 \quad \text{یا} \quad x = 7k + 2 \quad \text{یا} \quad x = 7k + 4$$

$$\begin{cases} x = 14t + 1 \\ x = 14t + 8 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 14t + 2 \\ x = 14t + 9 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 14t + 4 \\ x = 14t + 11 \end{cases}$$

$$\text{مجموع مقادیر} = 1 + 8 + 2 + 9 + 4 + 11 = 35$$

روش دوم:

می‌دانیم $13 \leq m$ است. داریم:

$$x \in [m]_{14} \rightarrow x \equiv m \xrightarrow{7/14} x \equiv m$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۳}} x^3 \equiv m^3 \xrightarrow{\text{طبق فرض}} m^3 \equiv 1 \Rightarrow m^2 - 1 \equiv 0$$

$$\Rightarrow (m-1)(m^2 + m + 1) \equiv 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m-1 \equiv 0 \Rightarrow m^2 \equiv 1 \Rightarrow m = 1 \text{ و } 8 \\ m^2 + m + 1 \equiv 0 \Rightarrow m^2 + m - 6 \equiv 0 \Rightarrow (m+3)(m-2) \equiv 0 \Rightarrow \begin{cases} m \equiv -3 \equiv 4 \Rightarrow 4 \text{ و } 11 \\ m \equiv 2 \Rightarrow m = 2 \text{ و } 9 \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{مجموع مقادیر} = 1 + 8 + 2 + 9 + 4 + 11 = 35$$

گروه آموزشی ماز

۲۹- اگر $1403 + A \equiv 501403$ باشد، A چند عدد طبیعی دو رقمی می‌تواند اختیار کند؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

(متوسط - محاسباتی - ۱۴۰۱)

پاسخ: گزینه ۲

$$\begin{matrix} 43 \\ 50 \equiv 7 \end{matrix}$$

$$7^2 \times (7^3)^{467} \equiv (-1)^{467} \times 7^2 \Rightarrow 7^{1403} \equiv -49 \equiv 37$$

$$A + 37 \equiv 1403 \equiv 27$$

$$A \equiv -10 \rightarrow A = 43k - 10 \rightarrow A = 33, 76$$

گروه آموزشی ماز

۳۰- اگر $1081 \equiv 161x \equiv 115$ باشد، کدام رابطه زیر نادرست است؟

$$25 \quad 35x \equiv 60 \quad (۴)$$

$$25 \quad x^2 \equiv 1 \quad (۳)$$

$$5 \quad 12x \equiv -23 \quad (۲)$$

$$5 \quad 21x \equiv 6 \quad (۱)$$

$$1) 161x \equiv 46 \pmod{115} \xrightarrow{\div 23} 7x \equiv 2 \pmod{5} \xrightarrow{\times 3} 21x \equiv 6 \pmod{5}$$

$$2) 7x \equiv 2 - 25 = -23 \pmod{5} \Rightarrow 12x \equiv -23 \pmod{5}$$

$$3) 7x \equiv 2 + 5 = 7 \pmod{5} \Rightarrow x \equiv 1 \pmod{5} \Rightarrow x^2 \equiv 1 \pmod{5}$$

$$x \equiv 1 \pmod{5} \xrightarrow{\times 5} 5x \equiv 5 \pmod{25} \xrightarrow{\times 7} 35x \equiv 35 + 25 \equiv 60 \pmod{25}$$

همزهشتی‌ها

تعدادی از مهم‌ترین ویژگی‌های همزهشتی عبارت‌اند از: $(n \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{Z})$

$$1) a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a \pm c \equiv b \pm c \pmod{m}$$

$$2) a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow ac \equiv bc \pmod{m}$$

$$3) a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow ac \equiv bc \pmod{mc}$$

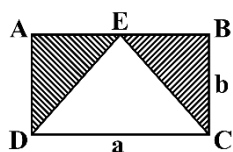
$$4) a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a^n \equiv b^n \pmod{m}$$

$$5) a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a + mk \equiv b + mt \pmod{m} \quad (k, t \in \mathbb{Z})$$

$$6) ac \equiv bc \pmod{m} \xrightarrow{(m,c)=d} a \equiv b \pmod{\frac{m}{d}}$$

گروه آموزشی ماز

۳۱- مطابق شکل، مثلث متساوی‌الاضلاع EDC در مستطیل ABCD محاط شده است. با توجه به اندازه‌های روی شکل، مساحت ناحیه هاشورخورده کدام است؟



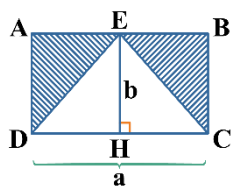
$$\frac{\sqrt{3}}{2} b^2 \quad (2)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4} b^2 \quad (4)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} b^2 \quad (1)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{6} b^2 \quad (3)$$

برای پیدا کردن مساحت قسمت هاشورخورده کافی است مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع را از مساحت مستطیل کم کنیم. ابتدا رابطه بین طول و عرض مستطیل را پیدا می‌کنیم.



$$EH = \frac{\sqrt{3}}{2} CD \Rightarrow b = \frac{\sqrt{3}}{2} a \Rightarrow a = \frac{2}{\sqrt{3}} b$$

$$S_{ABCD} = ab = \frac{2}{\sqrt{3}} b \times b = \frac{2}{\sqrt{3}} b^2 = \frac{2\sqrt{3}}{3} b^2$$

$$S_{\triangle EDC} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} b \right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{4}{3} b^2 = \frac{\sqrt{3}}{3} b^2$$

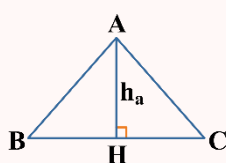
$$S_{\text{هاشورخورده}} = S_{ABCD} - S_{\triangle EDC} = \frac{\sqrt{3}}{3} b^2$$

محاسبه ارتفاع و مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع

مثلث متساوی‌الاضلاعی به طول ضلع a را در نظر بگیرید. طول ارتفاع و مساحت مثلث از روابط زیر به دست می‌آیند:

$$AH = h_a = \frac{\sqrt{3}}{2} a$$

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$



گروه آموزشی ماز

۳۲- قطرهای مستطیل ABCD در نقطه O یکدیگر را قطع می کنند. طول پاره خطی که نقاط همرسی میانه های دو مثلث AOB و AOD را به یکدیگر وصل می کند، چه کسری از طول قطر مستطیل است؟

(۴) $\frac{2}{3}$

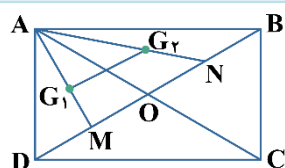
(۳) $\frac{1}{2}$

(۲) $\frac{1}{3}$

(۱) $\frac{1}{6}$

(متوسط - محاسباتی - ۱۰۰۳)

پاسخ: گزینه ۲



فرض کنید G_1 و G_2 به ترتیب نقاط همرسی میانه های مثلث AOD و AOB باشند. اگر AM میانه نظیر رأس A در مثلث AOD و AN میانه نظیر رأس A در مثلث AOB باشد، آن گاه داریم:

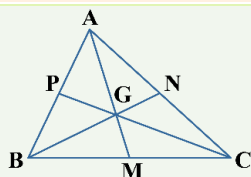
$$\triangle AMN: \frac{AG_1}{AM} = \frac{AG_2}{AN} = \frac{2}{3} \xrightarrow{\text{عکس قضیه تالس}} G_1G_2 \parallel MN \xrightarrow{\text{تعمیم قضیه تالس}} \frac{G_1G_2}{MN} = \frac{AG_1}{AM} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{G_1G_2}{\frac{1}{2}BD} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{G_1G_2}{BD} = \frac{1}{3}$$



$$MN = MO + ON = \frac{1}{2}OD + \frac{1}{2}OB = \frac{1}{2}(OD + OB) = \frac{1}{2}BD$$

میانه ها

میانه های هر مثلث در یک نقطه درون مثلث همرس اند. فاصله نقطه همرسی میانه ها از هر رأس مثلث برابر $\frac{2}{3}$ اندازه میانه نظیر آن رأس و فاصله آن از وسط هر ضلع مثلث برابر $\frac{1}{3}$ اندازه میانه نظیر آن ضلع است.

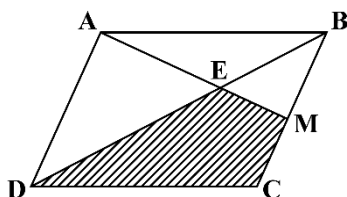


$$AG = \frac{2}{3}AM, GM = \frac{1}{3}AM$$

برای مثال

گروه آموزشی ماز

۳۳- در شکل زیر، اگر نقطه M وسط ضلع BC باشد، مساحت ناحیه هاشور خورده چه کسری از مساحت متوازی الاضلاع ABCD است؟



(۱) $\frac{1}{3}$

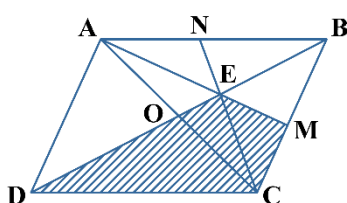
(۲) $\frac{5}{12}$

(۳) $\frac{4}{9}$

(۴) $\frac{11}{24}$

(متوسط - محاسباتی - ۱۰۰۳)

پاسخ: گزینه ۲



مطابق شکل، قطر AC را رسم می کنیم. همچنین از C به نقطه N وسط ضلع AB وصل می کنیم. در این صورت، نقطه E نقطه همرسی میانه های مثلث ABC است، بنابراین از برخورد میانه های این مثلث، شش مثلث هم مساحت ایجاد شده است و در نتیجه داریم:

$$S_{OEMC} = \frac{2}{6}S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}S_{ABCD} = \frac{1}{6}S_{ABCD}$$

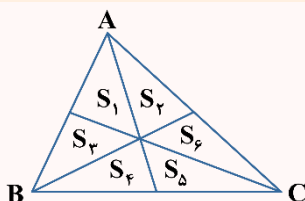
از طرفی از برخورد قطرهای هر متوازی الاضلاع، چهار مثلث هم مساحت ایجاد می شود، پس داریم:

$$S_{\triangle ODC} = \frac{1}{4}S_{ABCD}$$

$$S_{\text{هاشور خورده}} = \frac{1}{6}S_{ABCD} + \frac{1}{4}S_{ABCD} = \frac{5}{12}S_{ABCD}$$

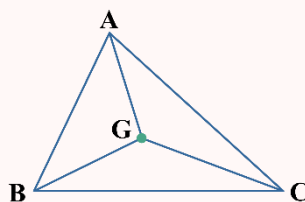
و باز هم میانه‌ها

۱) از برخورد میانه‌های هر مثلث، شش مثلث هم مساحت پدید می‌آید.



$$S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = S_5 = S_6$$

۲) اگر از نقطه هم‌مرسی میانه‌های مثلث به سه رأس آن وصل کنیم، سه مثلث هم‌مساحت ایجاد می‌شود.



$$S_{\triangle AGB} = S_{\triangle AGC} = S_{\triangle BGC}$$

گروه آموزشی ماز

۳۴- فاصله نقطه M درون مثلث متساوی‌الاضلاع ABC از سه ضلع مثلث به ترتیب ۱، ۲، $\sqrt{3}$ است. مساحت مثلث ABC کدام است؟

۴) $6 + 6\sqrt{3}$

۳) $6 + 4\sqrt{3}$

۲) $4 + 4\sqrt{3}$

۱) $4 + 2\sqrt{3}$

(متوسط - محاسباتی - ۱۰۰۳)

پاسخ: گزینه ۳

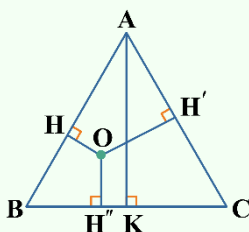
مجموع فواصل هر نقطه درون مثلث متساوی‌الاضلاع از سه ضلع آن برابر طول ارتفاع مثلث است، پس داریم:

$$h_a = 1 + 2 + \sqrt{3} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}a = 3 + \sqrt{3} \Rightarrow a = \frac{2(3 + \sqrt{3})}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)}{\sqrt{3}} = 2(\sqrt{3} + 1)$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 4(\sqrt{3} + 1)^2 = \sqrt{3}(3 + 1 + 2\sqrt{3}) = \sqrt{3}(2\sqrt{3} + 4) = 6 + 4\sqrt{3}$$

یه نکته پر سوال!!!

فرض کنید O نقطه‌ای درون مثلث متساوی‌الاضلاع ABC باشد، در این صورت مجموع فواصل نقطه O از سه ضلع مثلث، برابر طول ارتفاع مثلث است، یعنی داریم:



$$OH + OH' + OH'' = AK = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

گروه آموزشی ماز

۳۵- یک مستطیل شبکه‌ای افقی ۱۲ نقطه درونی دارد. اختلاف بین حداکثر و حداقل مساحت این مستطیل کدام است؟

۴) ۶

۳) ۵

۲) ۴

۱) ۳

(متوسط - محاسباتی - ۱۰۰۳)

پاسخ: گزینه ۴

مساحت مستطیل شبکه‌ای افقی را براساس ردیف‌های تعداد نقاط درونی محاسبه می‌کنیم. عدد ۱۲ را به ۳ حالت مختلف می‌توان به صورت ضرب دو عدد نوشت.

$$1) 12 = 12 \times 1 \Rightarrow \begin{cases} m-1 = 12 \Rightarrow m = 13 \\ n-1 = 1 \Rightarrow n = 2 \end{cases} \Rightarrow S_1 = 13 \times 2 = 26$$

$$2) 12 = 6 \times 2 \Rightarrow \begin{cases} m-1 = 6 \Rightarrow m = 7 \\ n-1 = 2 \Rightarrow n = 3 \end{cases} \Rightarrow S_2 = 7 \times 3 = 21$$

$$3) 12 = 4 \times 3 \Rightarrow \begin{cases} m-1 = 4 \Rightarrow m = 5 \\ n-1 = 3 \Rightarrow n = 4 \end{cases} \Rightarrow S_3 = 5 \times 4 = 20$$

$$S_1 - S_3 = 26 - 20 = 6$$

بنابراین اختلاف بین مقادیر ماکزیمم و مینیمم مساحت این مستطیل برابر است با:

فرمول پیک

اگر b و i به ترتیب تعداد نقاط مرزی و درونی یک چندضلعی شبکه‌ای باشند، مساحت این چندضلعی از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$S = \frac{b}{2} + i - 1$$

مستطیل شبکه‌ای افقی

در یک مستطیل شبکه‌ای افقی به طول m و عرض n، تعداد نقاط مرزی برابر $2(m+n)$ و تعداد نقاط درونی برابر $(m-1)(n-1)$ است.

گروه آموزشی ماز

۳۶- کدام یک از گزاره‌های زیر همواره درست است؟

- (۱) اگر دو خط d و d' موازی صفحه P باشند، آن‌گاه d و d' موازی هستند.
- (۲) اگر دو صفحه P و P' موازی خط d باشند، آن‌گاه دارای فصل مشترکی موازی d هستند.
- (۳) تمام صفحاتی که از نقطه A خارج خط d موازی با خط d رسم می‌شوند، از خطی موازی با d عبور می‌کنند.
- (۴) هیچ صفحه‌ای وجود ندارد که با هر دو خط متناظر d و d' موازی باشد.

پاسخ: گزینه ۳

(متوسط - مفهومی - ۱۰۰۴)

گزینه‌ها را به طور جداگانه مورد بررسی قرار می‌دهیم:

بررسی گزینه‌ها:

- ۱ دو خط d و d' که موازی صفحه P هستند، می‌توانند هر وضعیتی نسبت به هم داشته باشند، یعنی ممکن است موازی، متقاطع و یا متناظر باشند.
- ۲ دو صفحه P و P' که موازی خط d هستند، ممکن است با یکدیگر موازی باشند و در این صورت فاقد فصل مشترک هستند.
- ۳ اگر نقطه A خارج خط d باشد، تمام صفحاتی که از A می‌گذرند و موازی خط d هستند، همگی از خطی مانند L می‌گذرند که از نقطه A عبور کرده و با خط d موازی است.
- ۴ هیچ صفحه‌ای وجود ندارد که شامل هر دو خط متناظر d و d' باشد، ولی بی‌شمار صفحه وجود دارد که با هر دو خط متناظر d و d' موازی باشد.

گروه آموزشی ماز

۳۷- صفحه P بر صفحه Q و دو خط متمایز d و d' عمود است. کدام گزینه لزوماً درست است؟

- (۱) d و d' هر دو با فصل مشترک P و Q موازی‌اند.
- (۲) d و d' با یکدیگر موازی‌اند و هر دو با صفحه Q نیز موازی‌اند و یا درون صفحه Q قرار دارند.
- (۳) d و d' هر دو با صفحه Q موازی‌اند، ولی لزوماً با هم موازی نیستند.
- (۴) d و d' هر دو به تمامی در صفحه Q قرار دارند.

پاسخ: گزینه ۲

(آسان - مفهومی - ۱۰۰۴)

دو خط d و d' هر دو بر صفحه P عمودند، پس با یکدیگر موازی‌اند. از طرفی صفحه Q نیز بر صفحه P عمود است، پس دو خط d و d' هر دو با صفحه Q نیز موازی‌اند و یا درون صفحه Q قرار دارند.

خط و صفحه

- (۱) دو خط عمود بر یک صفحه با هم موازی‌اند.
- (۲) دو صفحه عمود بر یک خط با هم موازی‌اند.
- (۳) اگر دو صفحه متقاطع بر صفحه دیگری عمود باشند، فصل مشترک آن‌ها نیز بر این صفحه عمود است.
- (۴) اگر دو صفحه بر هم عمود باشند، هر خط عمود بر یکی از آن‌ها، با دیگری موازی است.

گروه آموزشی ماز

۳۸- تمام وجه‌های مکعب‌مستطیلی به ابعاد $۶ \times ۶ \times ۴$ را که از مکعب‌های کوچک به ضلع ۱ واحد تشکیل شده است، رنگ آمیزی کرده‌ایم. تعداد مکعب‌های رنگ نشده چه کسری از تعداد مکعب‌هایی است که دو وجه آن‌ها رنگ شده است؟

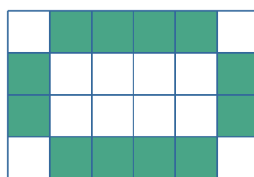
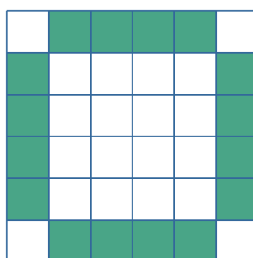
$$\frac{۲}{۵} \quad (۴) \quad \frac{۱}{۲} \quad (۳) \quad \frac{۲}{۵} \quad (۲) \quad \frac{۳}{۱۰} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۲

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۰۰۴)

با حذف یک ردیف از هر سمت این مکعب‌مستطیل، یک مکعب‌مستطیل به ابعاد $۴ \times ۴ \times ۲$ باقی می‌ماند که شامل ۳۲ مکعب کوچک رنگ نشده است. از طرفی وجه‌های این مکعب‌مستطیل شامل دو وجه به ابعاد ۶×۶ و چهار وجه به ابعاد ۶×۴ است که مطابق شکل زیر در آن‌ها به ترتیب ۱۶ و ۱۲ مکعب کوچک وجود دارد که دو وجه رنگ شده دارند. پس تعداد این دسته از مکعب‌های کوچک برابر است با: $۲ \times ۱۶ + ۴ \times ۱۲ = ۸۰$ بنابراین داریم:

$$\frac{\text{تعداد مکعب‌های رنگ نشده}}{\text{تعداد مکعب‌های با دو وجه رنگ شده}} = \frac{۳۲}{۸۰} = \frac{۲}{۵}$$



گروه آموزشی ماز

۳۹- مکعبی را با یک صفحه به گونه‌ای برش می‌دهیم که صفحه برش، سه یال مکعب را که یک رأس مشترک دارند، دقیقاً از وسط آن‌ها قطع کند. مساحت سطح مقطع حاصل چه کسری از مساحت یک وجه مکعب است؟

$$\frac{1}{4} \quad (۴)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \quad (۳)$$

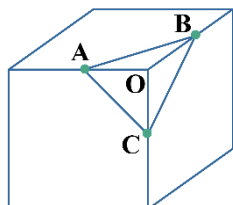
$$\frac{1}{8} \quad (۲)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{8} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۱

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۰۰۴)

با توجه به اینکه نقاط A, B, C دقیقاً وسط یال‌های مکعب قرار دارند، سطح مقطع حاصل یعنی مثلث ABC، یک مثلث متساوی‌الاضلاع است. اگر طول هر یال مکعب را برابر a فرض کنیم، آن‌گاه داریم:



$$OAB : AB^2 = OA^2 + OB^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4} AB^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{a^2}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8} a^2 = \frac{\sqrt{3}}{8} \times \text{مساحت هر وجه مکعب}$$

گروه آموزشی ماز

۴۰- حجم حاصل از دوران مثلثی به اضلاع ۱۵، ۲۰ و ۲۵ حول بزرگ‌ترین ضلع آن کدام است؟

$$۱۲۰۰\pi \quad (۴)$$

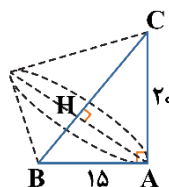
$$۹۰۰\pi \quad (۳)$$

$$۷۵۰\pi \quad (۲)$$

$$۶۰۰\pi \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۴

(سخت - محاسباتی - ۱۰۰۴)



مثلثی به طول اضلاع ۱۵، ۲۰ و ۲۵، یک مثلث قائم‌الزاویه است، زیرا داریم:

$$۱۵^2 + ۲۰^2 = ۲۲۵ + ۴۰۰ = ۶۲۵ = ۲۵^2 \quad \text{عکس قضیه فیثاغورس}$$

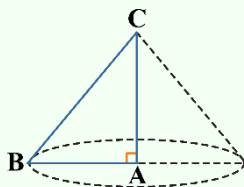
مثلث قائم‌الزاویه است. از دوران این مثلث حول وتر آن، دو مخروط به هم چسبیده از قاعده ایجاد می‌شود. مطابق شکل، شعاع قاعده این دو مخروط برابر AH و ارتفاع آن‌ها به ترتیب BH و CH است. طبق روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه ABC داریم:

$$AH \times BC = AB \times AC \Rightarrow AH \times ۲۵ = ۱۵ \times ۲۰ \Rightarrow AH = ۱۲$$

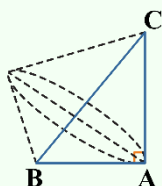
$$\text{حجم دو مخروط} = \frac{1}{3} \pi \times AH^2 \times BH + \frac{1}{3} \pi \times AH^2 \times CH = \frac{\pi}{3} AH^2 (BH + CH) = \frac{\pi}{3} \times ۱۲^2 \times ۲۵ = ۱۲۰۰\pi$$

آیا می‌دانستید؟

۱) از دوران یک مثلث قائم‌الزاویه حول یکی از اضلاع قائمه آن، یک مخروط ایجاد می‌شود.



۲) از دوران یک مثلث قائم‌الزاویه حول وتر آن، دو مخروط ایجاد می‌شود که از قاعده به هم متصل هستند.



گروه آموزشی ماز





دانش‌آموزان عزیز ماز

رسیدیم به آزمون مرحله ۳ و خوبه که چند تا نکته رو راجع به این آزمون بدونیم.

- ۱- بودجه‌بندی قسمت دوازدهم این آزمون از نیمه دوم فصل **حرکت‌شناسیه** که یکی از مباحث دشوار کتاب محسوب می‌شه و سؤالات سختی هم در کنکورهای چند سال اخیر از این مبحث مطرح شده، به همین خاطر قسمت دوازدهم این آزمون رو نسبتاً دشوار طرح کردیم تا بتونیم واسه کنکور به‌خوبی آمادتون کنیم.
- ۲- با توجه به سختی آزمون در قسمت فیزیک دوازدهم، اگه کمی درصد فیزیکتون نسبت به دو آزمون قبلی کمتر شد اصلاً نگران نشین، چون درجه سختی مباحث آزمون‌ها متفاوت.
- ۳- حتماً بعد از آزمون، سؤالاتش رو به‌خوبی بررسی کنین. سؤالات خیلی خوبی در این آزمون که می‌تونه حسابی به پیشرفت درصد فیزیکتون در کنکور کمک کنه.
- ۴- برای جبران دشواری آزمون در قسمت دوازدهم، سعی کردیم در قسمت مربوط به فیزیک پایه که از فصل **کار و انرژی** هست، بیش‌تر، سؤالات آسون و متوسط براتون قرار بدیم.

سجاد صادقی‌زاده - رتبه ۱ کنکور ۹۲ و مسئول درس فیزیک آزمون ماز

۴۱- معادله مکان - زمان متحرکی در SI به صورت $x = t^2 - 9$ است. به ترتیب، نوع حرکت این متحرک چگونه است و در چه لحظه‌ای متحرک از مبدأ مکان می‌گذرد؟

- (۱) با سرعت ثابت، پایان ثانیه سوم (۲) با سرعت ثابت، پایان ثانیه چهارم (۳) با شتاب ثابت، پایان ثانیه سوم (۴) با شتاب ثابت، پایان ثانیه چهارم

(آسان - مفهومی/محاسباتی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۳

معادله مکان - زمان، به صورت درجه دو است، بنابراین حرکت با شتاب ثابت انجام می‌شود. لحظه عبور از مبدأ ($x = 0$) برابر است با:

$$x = t^2 - 9 \xrightarrow{x=0} 0 = t^2 - 9 \Rightarrow t = 3s$$

گروه آموزشی ماز

۴۲- نمودار مکان - زمان متحرکی که با شتاب ثابت روی محور x ها حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. تندی متوسط متحرک در بازه زمانی $t_1 = 2s$ تا

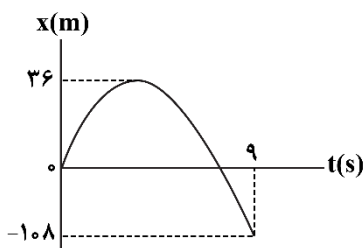
$t_2 = 5s$ برابر چند $\frac{m}{s}$ است؟

(۱) ۳

(۲) $\frac{20}{3}$

(۳) $\frac{10}{3}$

(۴) $\frac{2}{5}$



(سخت - نموداری - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۲

روش اول:

اگر فرض کنیم متحرک در لحظه t تغییر جهت داده است، با استفاده از معادله مکان - زمان، بین دو لحظه صفر تا t و t تا ۹s داریم:

$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow \begin{cases} 36 = -\frac{1}{2}at^2 \\ -144 = \frac{1}{2}a(9-t)^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{36}{144} = \left(\frac{t}{9-t}\right)^2 \Rightarrow \frac{6}{12} = \frac{t}{9-t}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{t}{9-t} \Rightarrow 2t = 9 - t \Rightarrow 3t = 9 \Rightarrow t = 3s$$

اکنون شتاب متحرک را به‌دست می‌آوریم:

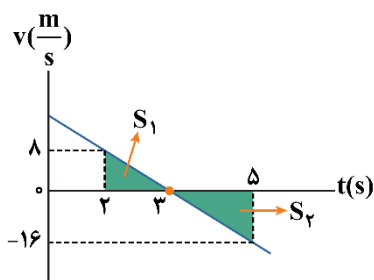
$$36 = -\frac{1}{2}at^2 \xrightarrow{t=3s} 36 = -\frac{1}{2} \times a \times 9 \Rightarrow a = -8 \frac{m}{s^2}$$

حال سرعت اولیه متحرک را به‌دست می‌آوریم:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow -8 = \frac{0 - v_0}{3} \Rightarrow v_0 = 24 \frac{m}{s}$$

معادله سرعت - زمان متحرک را می‌نویسیم و سرعت متحرک در لحظات $t = 2s$ و $t = 5s$ را محاسبه می‌کنیم:

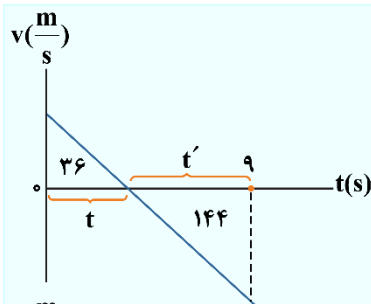
$$v = at + v_0 \Rightarrow \begin{cases} v_2 = -8 \times 2 + 24 = -16 + 24 = 8 \frac{m}{s} \\ v_5 = -8 \times 5 + 24 = -40 + 24 = -16 \frac{m}{s} \end{cases}$$



نمودار سرعت - زمان آن را رسم می‌کنیم و با استفاده از مساحت محصور مسافت طی‌شده و در نهایت تندی متوسط خواسته‌شده را به‌دست می‌آوریم:

$$\ell = S_1 + S_2 = \frac{1 \times 16}{2} + \frac{2 \times 16}{2} = 4 + 16 = 20 \text{ m}$$

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{20 \text{ m}}{3 \text{ s}}$$

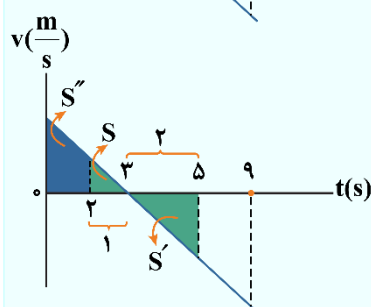


با توجه به شکل نمودار مکان - زمان، درمی‌یابیم شتاب، منفی و سرعت اولیه مثبت است. از طرفی با داشتن جابه‌جایی از شروع حرکت تا لحظه تغییر جهت و جابه‌جایی از لحظه تغییر جهت تا $t = 9 \text{ s}$ با استفاده از تشابه مثلثات داریم:

$$\text{تشابه: } \left(\frac{t'}{t} \right)^2 = \frac{144}{36} = 4 \Rightarrow t' = 2t$$

$$\Rightarrow t + t' = 3t = 9 \Rightarrow t = 3 \text{ s}$$

حالا تندی متوسط از ۲s تا ۵s را حساب می‌کنیم:



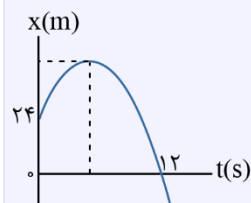
$$\text{تشابه: } \frac{S + S''}{S} = \left(\frac{3}{1} \right)^2 = 9 \Rightarrow \frac{36}{S} = 9 \Rightarrow S = 4 \text{ m}$$

$$\text{تشابه: } \frac{S'}{S} = \left(\frac{2}{1} \right)^2 = 4 \Rightarrow \frac{S'}{4} = 4 \Rightarrow S' = 16 \text{ m}$$

$$s_{av(2-5)} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{S + S'}{\Delta t} = \frac{4 + 16}{3} = \frac{20 \text{ m}}{3 \text{ s}}$$

کنکور سراسری تجربی ۱۴۰۲

۴۹- نمودار مکان - زمان متحرکی که با شتاب ثابت حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. اگر در لحظه $t = 5 \text{ s}$ جهت حرکت تغییر کند، تندی متوسط متحرک در بازه زمانی $t_1 = 2 \text{ s}$ تا $t_2 = 10 \text{ s}$ چند متر بر ثانیه است؟



$$\frac{17}{4} \quad (1)$$

$$\frac{15}{4} \quad (2)$$

$$2 \quad (3)$$

$$8 \quad (4)$$

پاسخ تشریحی:

با توجه به این که در لحظه $t = 5 \text{ s}$ ، جهت حرکت تغییر کرده است، رأس سهمی در $t = 5 \text{ s}$ قرار دارد.

$$|\Delta x_{0 \rightarrow 5}| = \frac{1}{2} |a| \times 5^2 = \frac{25}{2} |a|$$

$$|\Delta x_{5 \rightarrow 12}| = \frac{1}{2} |a| \times 7^2 = \frac{49}{2} |a|$$

$$\Rightarrow |\Delta x_{5 \rightarrow 12}| - |\Delta x_{0 \rightarrow 5}| = \frac{49}{2} |a| - \frac{25}{2} |a| = 12 |a| \Rightarrow 24 = 12 |a| \Rightarrow |a| = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \xrightarrow{a < 0} a = -2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

طبق نمودار برابر 24 m است.

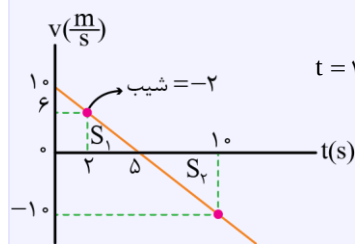
با توجه به معادله مکان - زمان در حرکت با شتاب ثابت داریم:

$$x = \frac{1}{2} at^2 + v_0 t + x_0 \xrightarrow{x_{12} = 0, x_0 = 24 \text{ m}, t = 12 \text{ s}, a = -2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} 0 = \frac{1}{2} \times (-2) \times (12)^2 + 12 v_0 + 24 \rightarrow v_0 = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

بنابراین معادله سرعت - زمان برابر است با:

$$v = at + v_0 \rightarrow v = -2t + 10$$

در ادامه نمودار سرعت - زمان حرکت مطابق شکل زیر است:



$$l = S_1 + S_2 = \frac{3 \times 6}{2} + \frac{5 \times 10}{2} = 34 \text{ m}$$

$t = 10 \text{ s}$ تا $t = 2 \text{ s}$ مسافت طی شده در بازه زمانی

بنابراین تندی متوسط متحرک برابر است با:

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{34}{2} = 17 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

پاسخ: گزینه ۱

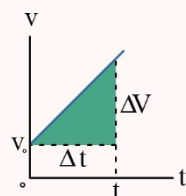
حرکت با شتاب ثابت

هرگاه بردار شتاب متحرکی در لحظه‌های مختلف یکسان باشد، حرکت جسم را حرکت با شتاب ثابت می‌نامیم.

ویژگی‌های حرکت با شتاب ثابت:

- ۱- سرعت متحرک با زمان به صورت خطی تغییر می‌کند پس تغییرات v نسبت به t به صورت یک تابع خطی است به همین دلیل سرعت متوسط متحرک در بازه زمانی صفر تا t برابر است با میانگین سرعت متحرک در این دو لحظه، یعنی:
معادله سرعت متوسط در حرکت با شتاب ثابت:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \xrightarrow{\text{حرکت با شتاب ثابت}} v_{av} = \frac{v_1 + v_2}{2}$$



$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \text{شیب نمودار سرعت زمان}$$

- ۲- شیب نمودار سرعت - زمان، ثابت است و برابر با شتاب متحرک می‌باشد.

- ۳- شتاب متوسط در بازه‌های زمانی مختلف یکسان است.
شتاب متوسط در هر بازه زمانی برابر شتاب لحظه‌ای متحرک است یعنی:

$$a = a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

- ۴- معادله مکان - زمان در حرکت با شتاب ثابت:

معادله‌ای که مکان متحرک را در هر لحظه برای ما مشخص می‌کند:

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$$

a : شتاب ثابت متحرک

x_0 : مکان اولیه

x : مکان متحرک در لحظه t

v_0 : سرعت اولیه

در حرکت با شتاب ثابت، مکان متحرک، تابعی درجه دوم از زمان است.

- ۵- معادله سرعت - زمان در حرکت با شتاب ثابت:

معادله‌ای است که سرعت متحرک را در هر لحظه برای ما مشخص می‌کند:

$$v = at + v_0$$

v_0 : سرعت اولیه

a : شتاب ثابت متحرک

v : سرعت متحرک در لحظه t

- ۶- معادله سرعت - جابجایی (مستقل از زمان) در حرکت با شتاب ثابت:

در این معادله زمان وجود ندارد، پس بهتر است در سؤالاتی که زمان را نمی‌دهند و نمی‌خواهند از این معادله استفاده کنیم:



$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$$

- ۷- معادله مستقل از شتاب در حرکت با شتاب ثابت:

در این معادله شتاب وجود ندارد، پس بهتر است در سؤالاتی که شتاب را نمی‌دهند و نمی‌خواهند از این معادله استفاده کنیم:



$$\Delta x = \frac{v_2 + v_1}{2} \Delta t$$

روش محاسبه جابجایی در حرکت با شتاب ثابت:

معادله جابجایی زمان: (در بازه t_1 تا t_2)



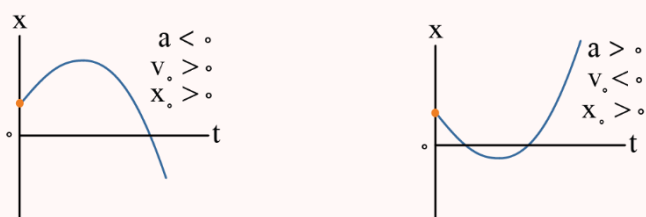
$$\Delta x = \frac{1}{2}a\Delta t^2 + v_1\Delta t$$

حالت خاص: جابجایی در بازه زمانی $[0, t]$

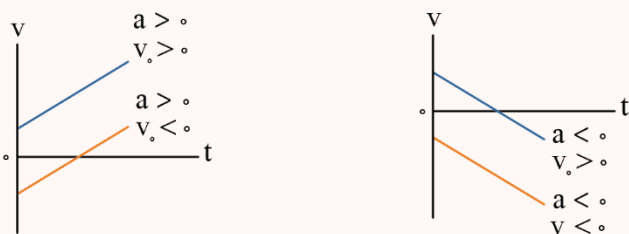
$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t$$

نمودارهای حرکت با شتاب ثابت

۱- نمودار مکان - زمان به شکل یک سهمی است که تقعر آن علامت شتاب را نشان می‌دهد.



۲- نمودار سرعت - زمان به صورت یک خط با شیب ثابت است.



۳- نمودار شتاب - زمان به صورت یک خط افقی است.



گروه آموزشی ماز

۴۳- متحرکی در امتداد محور x و با شتاب ثابت در حرکت است. اگر در مکان $x_1 = 10\text{ m}$ سرعت متحرک $126 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ و در مکان $x_2 = 65\text{ m}$ سرعت متحرک

$72 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ باشد، بردار شتاب متحرک در SI کدام است؟

(۴) $7/5 \text{ m/s}^2$

(۳) $-7/5 \text{ m/s}^2$

(۲) 5 m/s^2

(۱) -5 m/s^2

(آسان - محاسباتی - ۱۴۰۱)

پاسخ: گزینه ۳

معادله مستقل از زمان

در حرکت با شتاب ثابت، اگر بخواهیم بدون داشتن زمان، شتاب را حساب کنیم، باید از معادله مستقل از زمان استفاده کنیم. مطابق رابطه زیر داریم:

$$v_2^2 - v_1^2 = 2a\Delta x$$

v_1 : سرعت در ابتدای بازه $(\frac{\text{m}}{\text{s}})$

v_2 : سرعت در انتهای بازه $(\frac{\text{m}}{\text{s}})$

Δx : جابه‌جایی (m)

a : شتاب $(\frac{\text{m}}{\text{s}^2})$

طبق معادله مستقل از زمان می‌توانیم بنویسیم:

$$v_1 = 126 \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{126}{3.6} = 35 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_2 = 72 \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{72}{3.6} = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_2^2 - v_1^2 = 2a\Delta x \Rightarrow 20^2 - 35^2 = 2a \times (65 - 10)$$

$$\Rightarrow (20 - 35)(20 + 35) = 2a \times 55 \Rightarrow 2a = -15 \Rightarrow a = -7.5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

گروه آموزشی ماز

۴۴- معادله مکان - زمان متحرکی که بر روی خط راست حرکت می‌کند، در SI به صورت $x = -2t^2 + 12t + 23$ است. تندی متوسط متحرک در ۲ ثانیه دوم حرکت چند متر بر ثانیه است؟

(۴) صفر

(۳) ۴

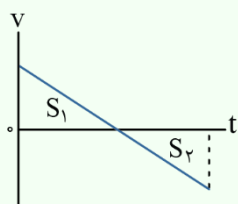
(۲) ۳

(۱) ۲



نکته

برای محاسبه مسافت طی شده، معمولاً بهترین راه، رسم نمودار سرعت - زمان و استفاده از مساحت زیر آن است:



$$\ell = |S_1| + |S_2| \text{ : مسافت}$$

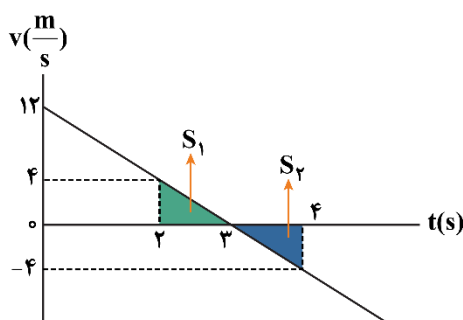
گام اول:

از روی معادله مکان - زمان متحرک، شتاب و سرعت اولیه را به دست می آوریم:

$$\begin{cases} x = -2t^2 + 12t + 23 \\ x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \end{cases} \Rightarrow a = -4 \frac{m}{s^2}, v_0 = 12 \frac{m}{s}$$

گام دوم:

نمودار سرعت - زمان را رسم می کنیم و مسافت طی شده را محاسبه می کنیم:



$$v = at + v_0 \Rightarrow v = -4t + 12$$

$$\ell = S_1 + S_2 = 2 + 2 = 4 \text{ m}$$

گام آخر:

تندی متوسط برابر است با:

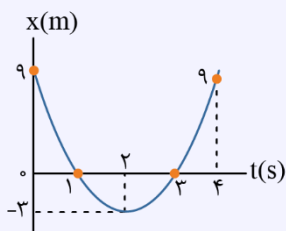
$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} \Rightarrow s_{av} = \frac{4}{2} = 2 \frac{m}{s}$$

کنکور سراسری ریاضی ۱۴۰۱

۴۴- معادله حرکت متحرکی در SI به صورت $x = 3t^2 - 12t + 9$ است. تندی متوسط متحرک در بازه زمانی $t_1 = 1s$ تا $t_2 = 4s$ ، چند متر بر ثانیه است؟
(۱) ۵ (۲) ۸ (۳) ۳ (۴) ۶

پاسخ تشریحی:

با توجه به معادله داده شده در صورت سؤال، ابتدا نمودار مکان - زمان متحرک را رسم می کنیم و سپس با توجه به نمودار، به راحتی مسافت طی شده در بازه زمانی ۱ تا ۴ ثانیه را به دست می آوریم:



$$x = 3t^2 - 12t + 9$$

$$\ell = 3 + 3 + 9 = 15 \text{ (m)}$$

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{15}{3} = 5 \left(\frac{m}{s} \right)$$

پاسخ: گزینه ۱

گروه آموزشی ماز

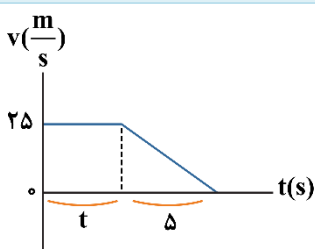
۴۵- خودرویی با تندی $90 \frac{km}{h}$ در جاده ای مستقیم در حرکت است که ناگهان راننده مانعی را در فاصله ۱۰۰ متری خود می بیند و با کمی تأخیر ترمز می گیرد. اگر حرکت خودرو با شتابی به اندازه $5 \frac{m}{s^2}$ کند شود، حداکثر مدت زمان تأخیر راننده در واکنش چند ثانیه باشد تا خودرو به مانع برخورد نکند؟

(۴) ۲/۵

(۳) ۲

(۲) ۱/۵

(۱) ۱



در مدت زمانی که طول می کشد تا راننده واکنش نشان دهد حرکت با سرعت ثابت و پس از آن حرکت با شتاب ثابت است؛ بنابراین نمودار سرعت - زمان آن به شکل مقابل است.

برای تبدیل $\frac{km}{h}$ به $\frac{m}{s}$ عدد را بر ۳/۶ تقسیم می‌کنیم.

$$90 \frac{km}{h} = 25 \frac{m}{s}$$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow -5 = \frac{-25}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = 5s$$

$$S_{\text{دورنقه}} = \frac{25(t + (t + 5))}{2} = \frac{25(2t + 5)}{2} = 100 \Rightarrow 2t + 5 = 8 \Rightarrow 2t = 3 \Rightarrow t = 1.5s$$

می‌توانید با نوشتن روابط $\Delta x = vt$ و $\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t$ برای حرکت دو مرحله‌ای ذکر شده به نتایج مشابه برسید.

کنکور سراسری ریاضی ۱۳۹۶

اتومبیلی روی یک خط راست با سرعت $108 \frac{km}{h}$ در حال حرکت است. راننده با دیدن مانعی در فاصله $165m$ ، با شتاب ثابت $3 \frac{m}{s^2}$ ترمز می‌کند و درست جلوی مانع می‌ایستد. اگر زمان واکنش راننده t_1 و زمانی که حرکت اتومبیل کندشونده بوده، t_2 باشد، کدام است؟

۱) ۵ (۲) ۱۰ (۳) ۱۵ (۴) ۲۰

پاسخ تشریحی:

گام اول

الف) اتومبیلی روی خط راست با سرعت $108 \frac{km}{h}$ در حال حرکت است. $v_0 = 108 \frac{km}{h} = \frac{108}{3.6} = 30 \frac{m}{s}$

ب) راننده با دیدن مانعی در فاصله $165m$ ← فاصله اتومبیل از مانع در لحظه دیدن آن

پ) با شتاب ثابت $3 \frac{m}{s^2}$ ترمز می‌کند و جلوی مانع می‌ایستد $a = -3 \frac{m}{s^2}$

گام دوم

با توجه به شکل زیر و معادله سرعت - زمان خواهیم داشت:



$$x_2 = \frac{-v_0^2}{2a} = \frac{-(30)^2}{-2 \times 3} = 150m$$

$$x_1 = 165 - x_2 = 165 - 150 = 15m$$

$$v = \frac{x_1}{t_1} \Rightarrow t_1 = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}s$$

$$v = at_2 + v_0 \Rightarrow 0 = -3 \times t_2 + 30 \Rightarrow t_2 = 10s$$

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{10}{\frac{1}{2}} = 20$$

پاسخ: گزینه ۴

بررسی مسائل ترمز و توقف

مسائل توقف از دو قسمت تشکیل می‌شوند:

۱- قبل از ترمز (زمان واکنش راننده):

از زمانی که راننده یک مانع را می‌بیند، تا زمانی که پدال ترمز را فشار دهد، مدتی طول می‌کشد که به این زمان، زمان واکنش (عکس‌العمل) راننده می‌گویند. در این مدت راننده هنوز ترمز نکرده و خودرو با همان سرعت اولیه حرکت می‌کند.

$$\Delta x_{\text{واکنش}} = v_0 \Delta t_{\text{واکنش}}$$

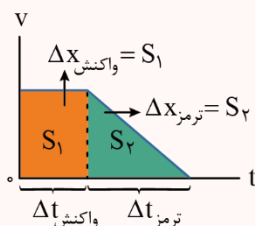
۲- پس از ترمز (کند شدن):

در این مدت، حرکت خودرو با شتاب ثابت a کند می‌شود. زمان و مسافت طی‌شده در هنگام ترمز برابر است با:

$$\Delta t_{\text{ترمز}} = \frac{v_0}{|a|} \quad \Delta x_{\text{ترمز}} = \frac{v_0^2}{2|a|}$$

۳- کل مسافتی که خودرو طی می‌کند تا متوقف شود برابر مجموع مسافت طی‌شده در دو مرحله قبل است:

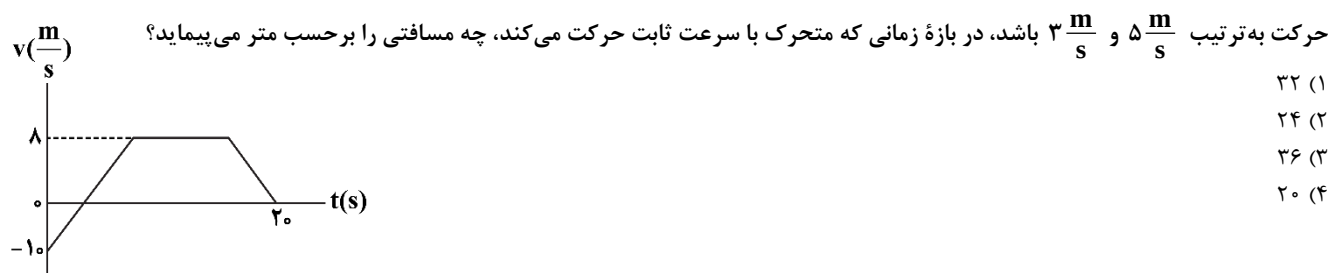
$$\Delta x_{\text{توقف}} = \Delta x_{\text{واکنش}} + \Delta x_{\text{ترمز}} = v_0 \Delta t_{\text{واکنش}} + \frac{v_0^2}{|2a|}$$



۴- گاهی برای بررسی مسائل ترمز، می‌توانیم نمودار سرعت - زمان متحرک را نیز رسم کنیم.

گروه آموزشی ماز

۴۶- نمودار سرعت - زمان متحرکی که در امتداد محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. اگر تندی متوسط و سرعت متوسط متحرک در کل مسیر



- ۳۲ (۱)
- ۲۴ (۲)
- ۳۶ (۳)
- ۲۰ (۴)

(متوسط - نموداری - ۱۲۰۱)

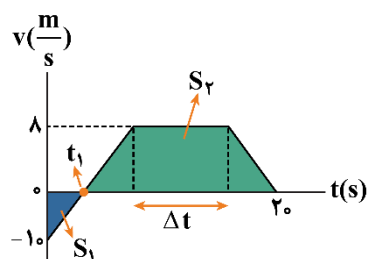
پاسخ: گزینه ۱

ابتدا با استفاده از تندی متوسط و سرعت متوسط داده‌شده، مسافت طی‌شده و جابه‌جایی متحرک را به‌دست می‌آوریم:

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} \Rightarrow \ell = s_{av} \Delta t \Rightarrow \ell = 100 \text{ m}$$

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \Delta x = v_{av} \Delta t \Rightarrow \Delta x = 60 \text{ m}$$

با توجه به مساحت محصور بین نمودار و محور t داریم:



$$\begin{cases} |S_1| + |S_2| = 100 \text{ m} \\ |S_2| - |S_1| = 60 \text{ m} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2S_2 = 160 \Rightarrow S_2 = 80 \text{ m}, |S_1| = 20 \text{ m} \Rightarrow 20 = \frac{10 \times t_1}{2} \Rightarrow t_1 = 4 \text{ s}$$

$$\Rightarrow S_2 = 80 = \frac{(\Delta t) + (20 - 4)}{2} \times 8 \Rightarrow 80 = \frac{\Delta t + 16}{2} \times 8 \Rightarrow \Delta t = 4 \text{ s}$$

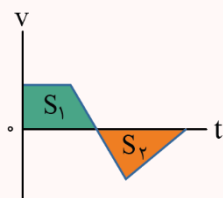
در نتیجه خواسته سؤال مسافت طی‌شده در بازه زمانی Δt یعنی مسافتی که با سرعت ثابت انجام شده است:

$$\ell = 8 \times 4 = 32 \text{ m}$$

نمودار سرعت - زمان

در آزمون‌های قبل بررسی مواردی مثل جهت حرکت، شتاب لحظه‌ای و شتاب متوسط، تندشونده و کندشونده بودن حرکت و ... را با استفاده از نمودار سرعت - زمان یاد گرفتیم. در این قسمت بررسی مواردی مثل مسافت، جابه‌جایی، تندی متوسط و سرعت متوسط را با کمک نمودار سرعت - زمان یاد می‌گیریم.

۱- **جابه‌جایی متحرک:** مساحت زیر نمودار سرعت - زمان (با در نظر گرفتن علامت) در هر بازه زمانی برابر جابه‌جایی متحرک در آن بازه است:

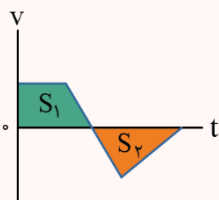


$$\Delta x = S_1 - S_2$$

۲- **سرعت متوسط حرکت:** با داشتن جابه‌جایی از نکته قبل، می‌توان به راحتی سرعت متوسط را محاسبه کرد:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\text{مساحت زیر نمودار سرعت - زمان با در نظر گرفتن علامت}}{\text{طول بازه زمانی}}$$

۳- مسافت طی شده: اگر مساحت زیر نمودار سرعت - زمان را بدون در نظر گرفتن علامت محاسبه کنیم، مسافت طی شده به دست می آید:



$$\ell = |S_1| + |S_2|$$

منظور از بدون در نظر گرفتن علامت این است که همه مساحت‌ها مثبت نوشته می‌شوند.

۴- تندی متوسط: با داشتن مسافت طی شده از نکته قبل، محاسبه تندی متوسط کار ساده‌ای است.

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{\text{مساحت زیر نمودار سرعت - زمان بدون در نظر گرفتن علامت}}{\text{طول بازه زمانی}}$$

گروه آموزشی ماز

۴۷- متحرکی از حال سکون و با شتاب ثابت a در لحظه $t = 0$ شروع به حرکت می‌کند و بعد از گذشت $9s$ حرکت خود را با شتاب ثابت $-\frac{9}{16}a$ ادامه می‌دهد. چند ثانیه پس از شروع حرکت، متحرک به مکان اولیه خود برمی‌گردد؟

۴۵ (۴)

۳۶ (۳)

۲۵ (۲)

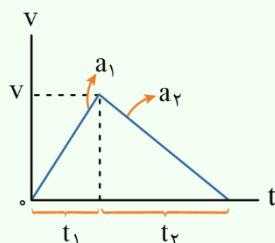
۱۶ (۱)

پاسخ: گزینه ۴



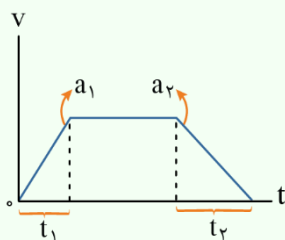
نکته

در حالتی خاص از سؤالات حرکت شتاب ثابت، متحرک از حال سکون با شتاب a_1 شروع به حرکت می‌کند و پس از گذشت t_1 ثانیه، با شتاب a_2 حرکتش کند و متوقف می‌شود. با توجه به نمودار سرعت - زمان این نوع حرکت می‌توانیم بنویسیم:



$$\frac{|a_1|}{|a_2|} = \frac{t_2}{t_1}$$

دقت کنید که اگر در بخش میانی حرکت، حرکت به صورت سرعت ثابت باشد، باز هم رابطه فوق در بخش حرکت تندشونده و کندشونده برقرار است:



$$\frac{|a_1|}{|a_2|} = \frac{t_2}{t_1}$$

نمودار سرعت - زمان متحرک را رسم می‌کنیم. چون شتاب متحرک $\frac{9}{16}$ برابر و قرینه شده است، مدتی که طول می‌کشد تا سرعت متحرک مجدداً صفر شود $\frac{16}{9}$ برابر است:

$$\frac{16}{9} \times 9 = 16s$$

نسبت مساحت دو مثلث ایجاد شده از ۰ تا ۹ ثانیه و از ۹ تا ۲۵ ثانیه برابر نسبت قاعده‌ها و $\frac{9}{16}$ است.

(۹s و ۱۶s در شکل)

حال متحرک باید با ادامه حرکت خود این جابه‌جایی را جبران کند تا دوباره به مکان اولیه بازگردد (معادل ۲۵s). با توجه به تشابه دو مثلث ایجاد شده از ۹ تا ۲۵ ثانیه و از ۲۵ تا ۴۵s داریم:

$$\left(\frac{t-25}{25-9}\right)^2 = \frac{25}{16} \Rightarrow \frac{t-25}{16} = \frac{5}{4} \Rightarrow t = 45s$$

بنابراین در لحظه $t = 45s$ ، متحرک به مکان اولیه خود برمی‌گردد.

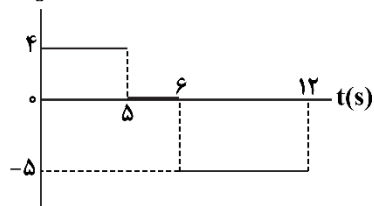
یادآوری

اگر نسبت تشابه دو مثلث، k باشد، نسبت مساحت آن‌ها k^2 است.

گروه آموزشی ماز

۴۸- نمودار شتاب - زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. اگر در لحظه $t = 1\text{ s}$ جهت حرکت متحرک تغییر کند، مدت ۱۲ ثانیه اول حرکت، مجموع مسافت طی شده توسط متحرک در بازه‌های زمانی که به صورت تندشونده حرکت می‌کند، چند متر است؟

$a(\frac{m}{s^2})$



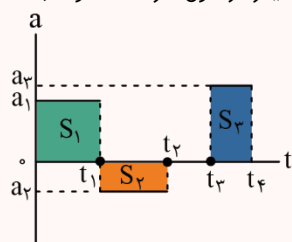
- (۱) ۲۵
(۲) ۳۰
(۳) ۵۰
(۴) ۶۰

(متوسط - نموداری - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۴

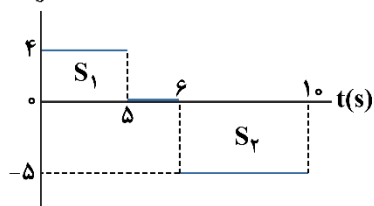
نمودار شتاب - زمان

در حرکت با شتاب ثابت، نمودار شتاب - زمان، خطی موازی محور زمان می‌باشد. اگر شتاب ثابت حرکت در هر بازه زمانی با بازه دیگر در طول حرکت متفاوت باشد، نمودار به شکل زیر، پله‌ای خواهد بود و مساحت زیر نمودار در هر بخش، با تغییرات سرعت در آن بازه زمانی برابر است:



در بازه t_2 تا t_3 شتاب صفر است.

$a(\frac{m}{s^2})$



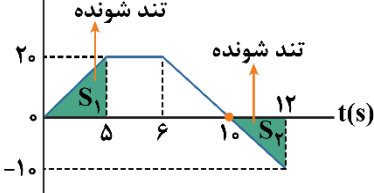
با استفاده از نمودار شتاب - زمان داده شده تغییر سرعت متحرک را از لحظه $t = 0$ تا $t = 1\text{ s}$ به دست می‌آوریم:

$$v_{10} = 0$$

$$\Delta v = S_1 - S_2 = 20 - 20 = 0 \Rightarrow v_{10} - v_0 = 0$$

$$v_{10} = 0 \rightarrow v_0 = 0$$

$v(\frac{m}{s})$



$$v_5 = at + v_0 \Rightarrow v_5 = 4 \times 5 = 20 \frac{m}{s}$$

$$v_{12} = -5 \times 6 + 20 \Rightarrow v_{12} = -10 \frac{m}{s}$$

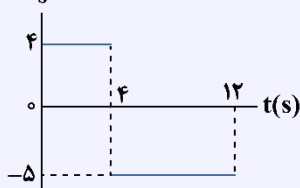
حال نمودار سرعت - زمان آن را رسم می‌کنیم:

$$l_{\text{تندشونده}} = S_1 + S_2 = \frac{20 \times 5}{2} + \frac{2 \times 10}{2} = 50 + 10 = 60 \text{ m}$$

کنکور سراسری تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

نمودار شتاب - زمان متحرکی که در مبدأ زمان با سرعت $4 \frac{m}{s}$ از مبدأ مکان می‌گذرد مطابق شکل است. مسافت طی شده در بازه زمانی صفر تا ۱۲ ثانیه چند متر است؟

$a(\frac{m}{s^2})$



- (۱) ۴۸
(۲) ۹۶
(۳) ۱۲۸
(۴) ۱۶۰

پاسخ تشریحی:

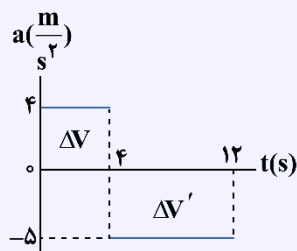
گام اول:

در مبدأ زمان با سرعت $4 \frac{m}{s}$ از مبدأ مکان می‌گذرد $\leftarrow v_0 = 4 \frac{m}{s}, x_0 = 0$

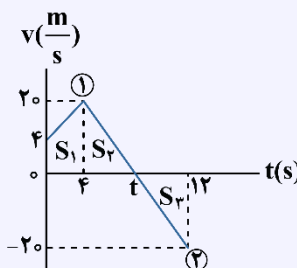
گام دوم:

باید نمودار سرعت - زمان را رسم کنیم تا با استفاده از این نکته که مساحت زیر نمودار $v - t$ برابر با مقدار جابه‌جایی است، مسافت را در بازه مشخص به دست آوریم.

برای رسم نمودار $v-t$ سرعت در لحظات $t = 4s$ و $t = 12s$ را حساب می‌کنیم.



$$\begin{cases} \Delta v = v_1 - v_0 \\ v_0 = 4 \frac{m}{s} \Rightarrow 16 = v_1 - 4 \Rightarrow v_1 = 20 \frac{m}{s} \\ \Delta v = 4 \times 4 = 16 \frac{m}{s} \end{cases}$$



$$\begin{cases} \Delta v' = v_2 - v_1 \\ v_1 = 20 \frac{m}{s} \Rightarrow -40 = v_2 - 20 \Rightarrow v_2 = -20 \frac{m}{s} \\ \Delta v' = (12-4) \times -5 = -40 \frac{m}{s} \end{cases}$$

حالا مطابق نمودار $v-t$ لحظه t را حساب می‌کنیم (t بین $4s$ و $12s$ است پس شتاب $-5 \frac{m}{s^2}$ است):

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow -5 = \frac{0 - 20}{t - 4} \Rightarrow t = 8s$$

در نهایت با توجه به این که قدر مطلق جابه‌جایی در بازه‌های مختلف برابر مسافت طی شده است، مسافت طی شده در 12 ثانیه را به دست می‌آوریم:

$$\text{مسافت طی شده} = \frac{4+20}{2} \times 4 + \frac{20 \times 4}{2} + \frac{20 \times 4}{2} = 128m$$

پاسخ: گزینه ۳

گروه آموزشی ماز

۴۹- متحرکی با شتاب ثابت بر روی محور x در حال حرکت است و به ترتیب در لحظه‌های $t_1 = 1s$ ، $t_2 = 3s$ و $t_3 = 4s$ در مکان‌های $x_1 = +6m$ ، $x_2 = -8m$ و $x_3 = -24m$ قرار دارد. در چهار ثانیه اول حرکت، چند ثانیه متحرک در حال افزایش است؟

$$\begin{matrix} \frac{5}{6} & (1) & \frac{3}{4} & (2) & \frac{13}{4} & (3) & \frac{19}{6} & (4) \end{matrix}$$

(سخت - محاسباتی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۴

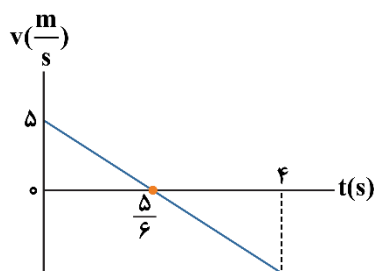
روش اول:

ابتدا معادله مکان را به کمک مکان متحرک در سه لحظه ذکر شده به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} 6 = \frac{1}{2}a(1)^2 + v_0(1) + x_0 & (1) \\ -8 = \frac{1}{2}a(3)^2 + v_0(3) + x_0 & (2) \\ -24 = \frac{1}{2}a(4)^2 + v_0(4) + x_0 & (3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -6 \frac{m}{s^2} \\ v_0 = +5 \frac{m}{s} \end{cases}$$

اکنون نمودار $v-t$ را برای 4 ثانیه اول حرکت رسم می‌کنیم.



$$v = at + v_0 \Rightarrow v = -6t + 5 \Rightarrow$$

در بازه زمانی $\frac{5}{6}s \leq t \leq 4s$ حرکت تندشونده است.

در نتیجه مدت زمانی که تندی متحرک در حال افزایش است به صورت زیر است:

$$4 - \frac{5}{6} = \frac{19}{6}s$$

می‌دانیم در حرکت شتاب ثابت، سرعت متحرک در بازه زمانی t_1 تا t_2 با سرعت لحظه‌ای در لحظه $t = \frac{t_1 + t_2}{2}$ برابر است؛ بنابراین ابتدا سرعت متحرک را در دو لحظه حساب کرده و سپس معادله $v - t$ را به دست می‌آوریم:

$$v_{av(1-2)} = v_2 = \frac{-8 - 6}{3 - 1} = \frac{-14}{2} = -7 \frac{m}{s}$$

$$v_{av(2-4)} = v_{3/5} = \frac{-24 - (-8)}{4 - 3} = \frac{-16}{1} = -16 \frac{m}{s}$$

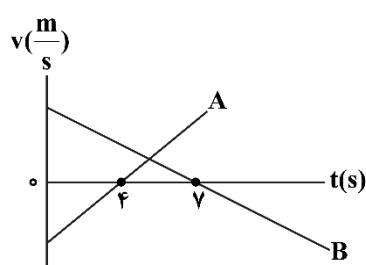
$$v = at + v_0 \Rightarrow \begin{cases} -7 = 2a + v_0 \\ -16 = 3/5a + v_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -6 \frac{m}{s^2} \\ v_0 = 5 \frac{m}{s} \end{cases}$$

در حرکت با شتاب ثابت می‌دانیم بعد از لحظه تغییر جهت $t = \frac{-v_0}{a} = \frac{5}{6} s$ حرکت تندشونده است؛ بنابراین در $4s$ اول داریم:

$$\Delta t_{تندشونده} = 4 - \frac{5}{6} = \frac{19}{6} s$$

گروه آموزشی ماز

۵۰- نمودار سرعت - زمان دو متحرک A و B که بر روی محور x حرکت می‌کنند، به شکل زیر است. اگر بزرگی شتاب متحرک A، ۲ برابر بزرگی شتاب متحرک B باشد و هر دو متحرک از یک مکان شروع به حرکت کرده باشند، در چه لحظه‌ای بر حسب ثانیه، دو متحرک دوباره از کنار هم عبور می‌کنند؟



- ۵ (۱)
- ۷ (۲)
- ۱۰ (۳)
- ۲۰ (۴)

(سخت - نموداری - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۳

بررسی حرکت دو متحرک

برای تعیین زمان و مکان برخورد یا سبقت دو متحرک باید معادله‌های مکان - زمان دو متحرک را نوشته و آن‌ها را مساوی هم قرار دهیم:

$$x_A = x_B$$

از حل معادله فوق، لحظه رسیدن دو متحرک به هم تعیین می‌شود.

روشن اول:

شتاب متحرک A، مثبت و شتاب متحرک B، منفی است، در نتیجه:

$$a_A = -2a_B$$

با استفاده از رابطه $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ داریم:

$$a_A = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow a_A = \frac{-v_{0A}}{4} \Rightarrow v_{0A} = -4a_A \xrightarrow{a_A = -2a_B} v_{0A} = 8a_B$$

$$a_B = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow a_B = \frac{-v_{0B}}{7} \Rightarrow v_{0B} = -7a_B$$

حرکت دو متحرک با شتاب ثابت است، در نتیجه:

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \Rightarrow \begin{cases} x_A = \frac{1}{2}(-2a_B)t^2 + (\lambda a_B)t + x_0 \\ x_B = \frac{1}{2}(a_B)t^2 + (-\lambda a_B)t + x_0 \end{cases}$$

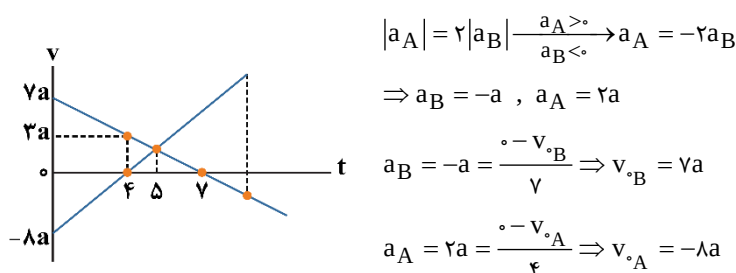
$$x_A = x_B \Rightarrow -a_B t^2 + \lambda a_B t = \frac{1}{2}a_B t^2 - \lambda a_B t$$

$$\Rightarrow 15 \cancel{a_B} t = \frac{2}{2} \cancel{a_B} t^2 \Rightarrow \frac{2}{2} t^2 = 15t \Rightarrow \frac{2}{2} t = 15$$

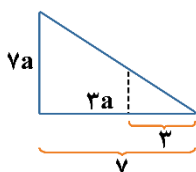
$$\Rightarrow t = 15s$$

روش دوم:

به کمک تشابه می‌توانیم لحظه رسیدن دو متحرک به یکدیگر را به دست آوریم:

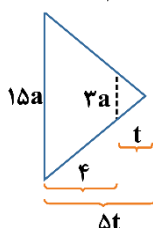


تشابه (۱):



$$\Delta t = t + 4 \Rightarrow t = 15s$$

تشابه (۲):



می‌دانیم اگر دو متحرک با شتاب ثابت از یک نقطه حرکت کنند و در لحظه t سرعت دو متحرک باهم برابر شود (یعنی نمودار $v-t$ دو متحرک یکدیگر را قطع کنند، در لحظه $2t$ دو متحرک به یکدیگر می‌رسند؛ بنابراین با توجه به این که در لحظه $t = 5s$ نمودار $v-t$ دو متحرک یکدیگر را قطع کرده‌اند، در لحظه $t = 10s$ دو متحرک به یکدیگر می‌رسند.

مثال

خودرویی پشت چراغ قرمز ایستاده است. با سبز شدن چراغ قرمز با شتاب $\frac{2}{3} \frac{m}{s^2}$ شروع به حرکت می‌کند. در همین لحظه کامیونی با سرعت $36 \frac{km}{h}$ از کنار آن می‌گذرد.

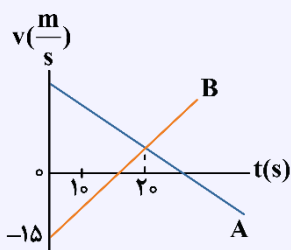
در چه لحظه و در چه مکانی خودرو به کامیون می‌رسد؟

پاسخ:

$$\begin{cases} \text{خودرو } x = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow \text{خودرو } x = t^2 \\ \text{کامیون } x = vt \\ v = 36 \frac{km}{h} = 10 \frac{m}{s} \Rightarrow \text{کامیون } x = 10t \end{cases} \xrightarrow{\text{در لحظه بهم رسیدن}} \begin{cases} t^2 = 10t \Rightarrow t = 10s \\ x = (10)^2 = 100m \end{cases}$$

کنکور سراسری ریاضی خارج از کشور ۱۴۰۰

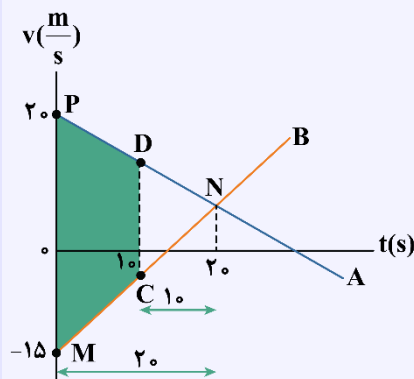
۴۳- نمودار سرعت - زمان دو متحرک A و B که روی محور x حرکت می‌کنند، مطابق شکل زیر است. مجموع مسافتی که دو متحرک در بازه زمانی $t_1 = 0$ s تا $t_2 = 10$ s طی می‌کنند، چند متر است؟



- (۱) ۳۵۰
- (۲) ۲۶۲/۵
- (۳) ۲۵۰
- (۴) ۱۲۵/۵

پاسخ تشریحی:

مجموع مسافت طی شده توسط دو متحرک در ۱۰ ثانیه اول برابر مساحت مشخص شده در شکل است:



مثلث‌های PMN و DNC با نسبت ۲ متشابه هستند، بنابراین مساحت مثلث DNC، $\frac{1}{4}$ برابر مساحت PMN است و در نتیجه مساحت هاشورخورده، $\frac{3}{4}$ برابر مساحت مثلث PMN خواهد بود.

$$\text{مساحت PMN: } S_1 = \frac{3.5 \times 2.5}{2} = 3.5$$

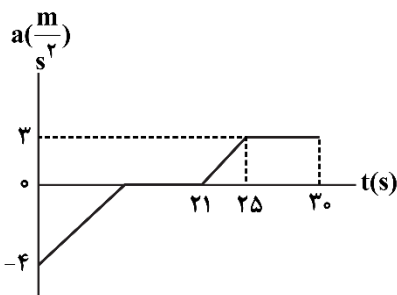
$$\rightarrow \text{مساحت هاشورخورده: } S_2 = \frac{3}{4} S_1 = \frac{3}{4} \times 3.5 = 2.625$$

بنابراین مجموع مسافت طی شده توسط دو متحرک در بازه زمانی $t = 0$ تا $t = 10$ s برابر ۲۶۲/۵ m است.

پاسخ: گزینه ۲

گروه آموزشی ماز

۵۱- نمودار شتاب - زمان متحرکی که با سرعت اولیه $30 \frac{m}{s}$ در جهت محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. اگر شتاب متوسط متحرک در مدت



۳۰ ثانیه صفر باشد، در مدتی که متحرک با سرعت ثابت حرکت می‌کند، چند متر جابه‌جا شده است؟

- (۱) ۹۳
- (۲) ۹۳/۵
- (۳) ۹۴
- (۴) ۹۴/۵

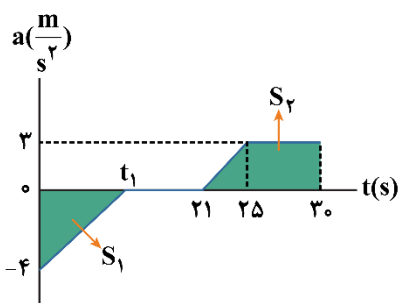
(سخت - نموداری - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۴

سطح زیر نمودار شتاب - زمان، برابر با تغییرات سرعت است.

با توجه به این که در ۳۰ ثانیه اول حرکت، شتاب متوسط صفر است، می‌توانیم بنویسیم:

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = 0 \Rightarrow \Delta v = 0 \Rightarrow \text{سطح زیر نمودار} = 0$$



$$|S_1| = S_2 \Rightarrow \frac{4t_1}{2} = \frac{(9+5)3}{2} \Rightarrow t_1 = 10/5s$$

در نتیجه در نمودار نشان داده شده، مساحت بالا و پایین محور t باید برابر باشند.

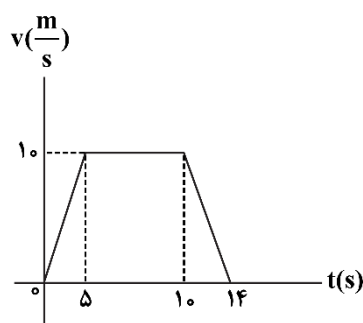
$$S_1 = v_{10/5} - v_0 \Rightarrow -\frac{10/5 \times 4}{2} = v_{10/5} - (30) \Rightarrow v_{10/5} = 9 \frac{m}{s}$$

سرعت در مبدأ زمان، $30 \frac{m}{s}$ است و بعد از گذشت $t_1 = 10/5s$ ثانیه، سرعت به اندازه S_1 تغییر می کند.

$$\Delta x = v \cdot \Delta t = (9)(21 - 10/5) = 94/5m$$

گروه آموزشی ماز

۵۲- متحرکی در مسیر مستقیم حرکت می کند و نمودار سرعت - زمان آن مطابق شکل زیر است. اندازه جابه جایی این متحرک در بازه $t_1 = 1s$ تا $t_2 = 13s$ چند متر است؟



چند متر است؟

۸۴ (۱)

۱۰۰ (۲)

۹۲/۷۵ (۳)

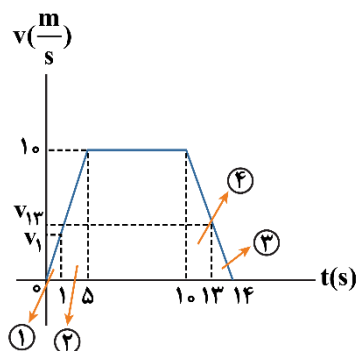
۱۱۲/۵ (۴)

(متوسط - نموداری - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۳

گام آخر:

سرعت را در لحظه $t_1 = 1s$ و $t_2 = 13s$ از طریق تشابه مثلث ها محاسبه می کنیم:



$$2 \text{ و } 1 \text{ مثلث های } \Rightarrow \frac{1}{5} = \frac{v_1}{10} \Rightarrow v_1 = 2 \frac{m}{s}$$

$$4 \text{ و } 3 \text{ مثلث های } \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{v_{13}}{10} \Rightarrow v_{13} = 2/5 \frac{m}{s}$$

گام آخر:

جابه جایی، برابر مساحت زیر نمودار در بازه $t_1 = 1s$ تا $t_2 = 13s$ است.

$$\Delta x = \frac{2+10}{2} \times 4 + 10 \times 5 + \frac{2/5+10}{2} \times 3 = 24 + 50 + 18/75 = 92/75m$$

گروه آموزشی ماز

۵۳- گلوله کوچکی را در شرایط خلأ از یک بلندی رها می کنیم. اگر گلوله در ۲ ثانیه آخر حرکت خود، ۶ برابر دو ثانیه اول حرکتش جابه جا شده باشد، تندی

برخورد گلوله با سطح زمین چند متر بر ثانیه است؟ ($g = 10 \frac{m}{s^2}$)

۱۲۰ (۴)

۹۰ (۳)

۷۰ (۲)

۴۵ (۱)

(متوسط - محاسباتی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۲

گام اول:

اندازه جابه جایی در ۲ ثانیه اول را محاسبه می کنیم:

$$\Delta y_1 = \begin{cases} t_0 = 0 \\ t_1 = 2 \end{cases} \quad |\Delta y_1| = \left| -\frac{1}{2}g(2)^2 \right| = 20m$$

$$\Delta y_2 = \begin{cases} t_2 = t - 2 \\ t \end{cases} \quad |\Delta y_2| = 6|\Delta y_1| = 6 \times 20 = 120m$$

اندازه جابه جایی در ۲ ثانیه آخر:

زمان برخورد با زمین را به دست می آوریم:

$$|\Delta y_2| = \left| \frac{1}{2}gt^2 \right| - \left| -\frac{1}{2}g(t-2)^2 \right| = 120 \Rightarrow |\Delta y_2| = 5(t^2 - (t^2 - 4t + 4)) = 120 \Rightarrow 5(4t - 4) = 120 \Rightarrow t = 7s$$

گام آخر:

تندی در لحظه t (برخورد با زمین):

$$v = -gt \Rightarrow |v| = |-gt| = v_0 \frac{m}{s}$$

کنکور سراسری ریاضی ۱۳۹۶

گلوله‌ای در شرایط خلأ بدون سرعت اولیه از ارتفاع h رها می‌شود. اگر این گلوله مسافتی را که در ثانیه آخر حرکت طی کرده، ۳ برابر مسافتی باشد که تا قبل از آن طی

کرده است، h چند متر است؟ ($g = 10 \frac{m}{s^2}$)

۸۰ (۴)

۷۵ (۳)

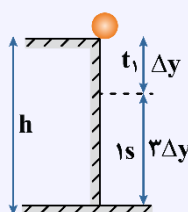
۲۵ (۲)

۲۰ (۱)

پاسخ تشریحی:

روش اول:

با توجه به شکل مقابل داریم:



$$\begin{cases} \Delta y_1 = \frac{1}{2}gt_1^2 \\ \Delta y_{\text{کل}} = \Delta y_1 + \Delta y_2 = \frac{1}{2}gt_{\text{کل}}^2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} v_0 = 0, t_{\text{کل}} = t_1 + 1 & \rightarrow \begin{cases} \Delta y_1 = \frac{1}{2}gt_1^2 \\ \Delta y_{\text{کل}} = \frac{1}{2}g(t_1 + 1)^2 \end{cases} \xrightarrow[\Delta y_{\text{کل}} - \Delta y_1 = \Delta y_2]{\text{تفاضل}} \rightarrow -\Delta(t_1^2 + 2t_1 + 1) - (-\Delta t_1^2) = 2(-\Delta t_1^2) \\ & \Rightarrow 1\Delta t_1^2 - 10t_1 - 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 1s \text{ ق ق} \\ t_1 = -\frac{1}{2} \text{ غ ق} \end{cases} \end{aligned}$$

پس زمان کل حرکت: $t = 1 + t_1 = 1 + 1 = 2s$ است و بنابراین:

$$h = |\Delta y_{\text{کل}}| = \left| -\Delta t^2 \right| = 20m$$

روش دوم:

دنباله عددی جابه‌جایی (در هر ثانیه) در حرکت سقوط آزاد، با شتاب $g = 10 \frac{m}{s^2}$ برابر است با:

۵، ۱۵، ۲۵، ۳۵، ...

با توجه به دنباله بالا، جمله دوم سه برابر جمله اول است، بنابراین ارتفاع h برابر است با:

$$h = 5 + 15 = 20m$$

پاسخ: گزینه ۱

سقوط آزاد

به حرکت جسمی که فقط تحت تأثیر جاذبه گرانشی در نزدیکی سطح زمین سقوط می‌کند در صورتی که از مقاومت هوا صرف‌نظر شود، سقوط آزاد گویند. برای راحتی کار در حل سؤالات سقوط آزاد نقطه رها شدن جسم را مبدأ مختصات در نظر می‌گیریم و جهت مثبت محور y را به سمت پایین انتخاب می‌کنیم:

در این صورت علامت شتاب و مکان و سرعت در هر لحظه مثبت خواهد شد.

معادله‌های سقوط آزاد در صورت رها شدن جسم بدون سرعت اولیه

۱- معادله مکان - زمان:

$$y = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + y_0 \xrightarrow[y_0 = 0]{v_0 = 0} y = \frac{1}{2}gt^2$$

۲- معادله سرعت - زمان:

$$v = gt + v_0 \xrightarrow[v_0 = 0]{} v = gt$$

$$v_2^2 - v_1^2 = 2g\Delta y$$

گروه آموزشی ماز

۵۴- گلوله‌ای در شرایط خلأ از ارتفاع h از سطح زمین رها شده است و با تندی v به سطح زمین برخورد می‌کند. اگر سرعت متوسط گلوله در بازه زمانی که

تندی آن از صفر به $\frac{2}{3}v$ می‌رسد، برابر با $20 \frac{m}{s}$ باشد، h چند متر است؟ ($g = 10 \frac{m}{s^2}$)

(۴) ۱۸۰

(۳) ۸۰

(۲) ۱۰۰

(۱) ۲۴۰

(آسان - محاسباتی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۴

در ابتدا تندی گلوله در لحظه برخورد به زمین را محاسبه می‌کنیم: (در سقوط آزاد، تندی اولیه صفر می‌باشد)

$$v_{av} = \frac{v_2 + v_1}{2} \Rightarrow 20 = \frac{v + 0}{2} \Rightarrow v = 40 \frac{m}{s}$$

حالا با استفاده از معادله مستقل از زمان h را پیدا می‌کنیم:

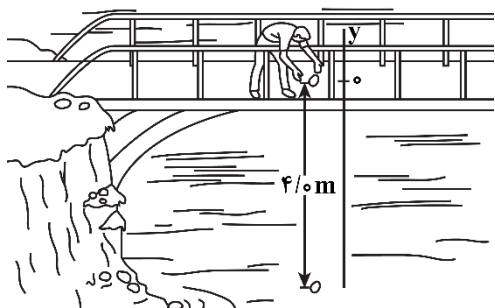
$$v^2 - v_0^2 = -2g\Delta y \Rightarrow (40)^2 - 0 = -2 \times 10 \times -h \Rightarrow h = 180m$$

گروه آموزشی ماز

۵۵- شکل زیر، شخصی را نشان می‌دهد که ابتدا سنگی را از بالای پلی به داخل رودخانه‌ای رها کرده است. وقتی سنگ مسافت $1/6m$ را طی می‌کند سنگ

دیگری دوباره از همان ارتفاع توسط شخص رها می‌شود. تا قبل از برخورد سنگ اول به سطح آب رودخانه، فاصله بین دو سنگ با آهنگ

متر بر ثانیه می‌یابد. ($g = 9/8 \frac{m}{s^2}$ و مقاومت هوا ناچیز است).



(۱) ۵/۶، افزایش

(۲) ۴/۸، کاهش

(۳) ۴/۸، افزایش

(۴) ۵/۶، کاهش

(متوسط - مفهومی/محاسباتی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۱

حرکت نسبی در سقوط آزاد

در سقوط دو متحرک در راستای قائم در خلأ، دو متحرک نسبت به هم شتاب ندارند؛ بنابراین سرعت نسبی دو متحرک در تمام مدت حرکت، با سرعت نسبی اولیه دو متحرک برابر است و داریم:

$$|v_{نسبی}| = |v_{0A} - v_{0B}|$$

گام اول:

سرعت گلوله اول هنگامی که فرد گلوله دوم را رها می‌کند، برابر است با:

$$v^2 - v_0^2 = 2g\Delta y \Rightarrow v^2 - 0 = 2 \times 9/8 \times 1/6$$

$$\Rightarrow v^2 = 2 \times 9/8 \times 1/6 \times 10^{-2} \Rightarrow v = 14 \times 4 \times 10^{-1} = 5/6 \frac{m}{s}$$

گام آخر:

با توجه به این که شتاب دو گلوله برابر است، حرکت آن‌ها نسبت به هم با سرعت ثابت انجام می‌شود و چون سرعت گلوله اول $5/6 \frac{m}{s}$ بیش‌تر است، فاصله بین

دو گلوله با آهنگ $5/6 \frac{m}{s}$ افزایش می‌یابد.

گروه آموزشی ماز

۵۶- جرم خودرویی به همراه راننده‌اش ۲ تن است و خودرو با تندی ثابت در حال حرکت است. راننده با دیدن تابلوی خطر، ترمز کرده و تندی خودرو را

$10 \frac{m}{s}$ کاهش می‌دهد. در نتیجه، انرژی جنبشی خودرو ۴۰۰ کیلوژول تغییر می‌کند. تندی اولیه خودرو چند $\frac{m}{s}$ بوده است؟

(۴) ۳۵

(۳) ۲۵

(۲) ۱۵

(۱) ۵

تندی خودرو کاهش یافته است؛ بنابراین انرژی جنبشی خودرو کاهش یافته و تغییر انرژی جنبشی، منفی است.

$$v_2 = v_1 - 10$$

$$\Delta K = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2} m ((v_1 - 10)^2 - v_1^2) = \frac{1}{2} m (-20v_1 + 100) \Rightarrow -400 \times 10^3 = \frac{1}{2} \times 2000 \times (-20v_1 + 100) \Rightarrow 20v_1 = 500 \Rightarrow v_1 = 25 \frac{m}{s}$$

انرژی جنبشی

انرژی وابسته به حرکت یک جسم را انرژی حرکتی یا انرژی جنبشی می‌نامیم.

برای جسمی به جرم m که با تندی v حرکت می‌کند، انرژی جنبشی از رابطه زیر به دست می‌آید:



$$K = \frac{1}{2} mv^2$$

K : انرژی جنبشی جسم بر حسب ژول (J) m : جرم جسم بر حسب کیلوگرم (kg)

v : تندی جسم بر حسب متر بر ثانیه ($\frac{m}{s}$) $J = kg \frac{m^2}{s^2} = N \cdot m$: یکای انرژی

✓ انرژی جنبشی یک کمیت نرده‌ای و نامنفی است که فاقد جهت می‌باشد. (انرژی جنبشی به جهت حرکت و یا جهت سرعت بستگی ندارد).

تبدیل یکاهای انرژی جنبشی

$$\begin{aligned} \frac{km}{h} &\xrightarrow{\div 3/6} \frac{m}{s} & \frac{km}{s} &\xrightarrow{\times 10^3} \frac{m}{s} & \frac{cm}{s} &\xrightarrow{\times 10^{-2}} \frac{m}{s} \\ & & ton &\xrightarrow{\times 10^3} kg & g &\xrightarrow{\times 10^{-3}} kg \end{aligned}$$

عوامل مؤثر بر انرژی جنبشی

✓ انرژی جنبشی با جرم جسم و مجذور تندی جسم، رابطه مستقیم دارد.

۱- هرچه جرم جسم بیش‌تر باشد، انرژی جنبشی بیش‌تری دارد.

۲- هرچه جسمی تندتر حرکت کند، انرژی جنبشی بیش‌تری دارد.

$$K \propto m$$

$$K \propto v^2$$

مقایسه انرژی جنبشی دو متحرک:

$$\frac{K_2}{K_1} = \left(\frac{m_2}{m_1}\right) \times \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2$$

✓ هنگامی که جسم ساکن باشد، انرژی جنبشی آن صفر است.

محاسبه تغییر انرژی جنبشی جسمی که جرم آن ثابت است به شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$\Delta K = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2)$$

کنکور سراسری تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۷۵- جرم خودرویی به همراه راننده‌اش ۱۰۰۰ kg است. تندی خودرو در دو نقطه از مسیرش از $18 \frac{m}{s}$ به $25 \frac{m}{s}$ می‌رسد. تغییرات انرژی جنبشی خودرو در این جابه‌جایی، چند مگاژول است؟

(۱) $3/0 \times 10^{-2}$ (۲) $3/0 \times 10^5$ (۳) $1/505 \times 10^{-1}$ (۴) $1/505 \times 10^5$

پاسخ تشریحی:

با توجه به رابطه انرژی جنبشی داریم:

$$K = \frac{1}{2} mv^2 \rightarrow K_2 - K_1 = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2} \times 1000 \times (25^2 - 18^2)$$

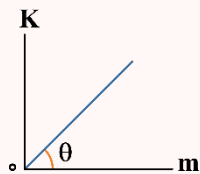
$$\Rightarrow K_2 - K_1 = \frac{1}{2} \times 10^3 (625 - 324) = 150/5 \times 10^3 J = 150/5 \times 10^{-3} MJ = 1/505 \times 10^{-1} MJ$$

پاسخ: گزینه ۳

نمودارهای انرژی جنبشی

۱- نمودار انرژی جنبشی برحسب جرم:

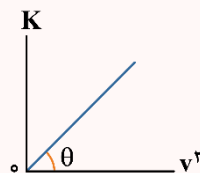
در این حالت تندی جسم، ثابت ولی جرم جسم متغیر می‌باشد.



$$\tan \theta = \frac{1}{2} v^2$$

۲- نمودار انرژی جنبشی برحسب مربع تندی:

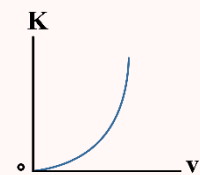
در این حالت جرم جسم، ثابت ولی تندی جسم متغیر می‌باشد.



$$\tan \theta = \frac{1}{2} m$$

۳- نمودار تغییرات انرژی جنبشی برحسب تندی:

در این حالت جرم جسم، ثابت ولی تندی جسم متغیر می‌باشد.



گروه آموزشی ماز

۵۷- اگر کار نیروی $\vec{F} = \alpha \vec{i} + 2\alpha \vec{j}$ در جابه‌جایی $\vec{d} = 10\vec{i}$ برابر ۳۰۰ ژول باشد، کار این نیرو در جابه‌جایی $\vec{d}' = -10\vec{j}$ برابر چند ژول است؟ (یکای SI است.)

(۴) -۶۰۰

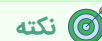
(۳) ۶۰۰

(۲) -۳۰۰

(۱) ۳۰۰

(آسان - محاسباتی - ۱۰۰۳)

پاسخ: گزینه ۴



نکته

کار نیروی $\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j}$ در جابه‌جایی $\vec{d} = d_x \vec{i} + d_y \vec{j}$ برابر است با:

$$W = F_x d_x + F_y d_y$$

طبق نکته بالا، داریم:

$$\vec{d} \text{ در جابه‌جایی } \vec{F} \text{ کار نیروی } = \alpha \times 10 + 2\alpha \times 0 \Rightarrow 300 = 10\alpha \Rightarrow \alpha = 30 \text{ (N)}$$

$$\vec{d}' \text{ در جابه‌جایی } \vec{F} \text{ کار نیروی } = \alpha \times 0 + 2\alpha \times (-10) = 2 \times 30 \times (-10) = -600 \text{ J}$$

کنکور سراسری تجربی ۱۳۹۸

نیروی $\vec{F} = (30 \text{ N})\vec{i} + (40 \text{ N})\vec{j}$ به جسمی به جرم ۵ kg وارد می‌شود و آن را روی سطح افقی به اندازه $\Delta \vec{x} = (6 \text{ m})\vec{i}$ جابه‌جا می‌کند. کار نیروی $\vec{F}$ در این جابه‌جایی چند ژول است؟

(۴) ۴۲۰

(۳) ۳۰۰

(۲) ۲۴۰

(۱) ۱۸۰

پاسخ تشریحی:

$$W = (F_x d_x) + (F_y d_y)$$

$$\rightarrow W = (30 \times 6) + (40 \times 0) \rightarrow W = 180 \text{ J}$$

پاسخ: گزینه ۱



نکته

کار نیروی $\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j}$ در جابه‌جایی $\vec{d} = d_x \vec{i} + d_y \vec{j}$:

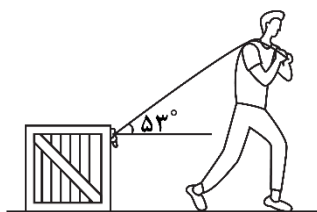
نیروی F_x بر d_y جابه‌جایی عمود و با جابه‌جایی d_x هم‌جهت است. از طرفی، نیروی F_y بر جابه‌جایی d_x عمود و با جابه‌جایی d_y هم‌جهت است؛ بنابراین:

$$W_F = F_x d_x \cos 0^\circ + F_x d_y \cos 90^\circ + F_y d_x \cos 90^\circ + F_y d_y \cos 0^\circ$$

$$\Rightarrow W_F = F_x d_x + F_y d_y$$

گروه آموزشی ماز

۵۸- مطابق شکل، شخصی با استفاده از یک طناب، با انجام ۳۰۰ J کار، جعبه‌ای را بر روی زمین به اندازه d جابه‌جا می‌کند. اگر شخص طول طناب را دو برابر کند و با همان نیروی قبلی جعبه را به اندازه d جابه‌جا کند، کار انجام‌شده توسط شخص چند ژول خواهد بود؟ ($\cos 53^\circ = 0.6$) و در هر دو حالت، انتهای طناب که در دستان شخص است را در ارتفاع یکسان فرض کنید.



- (۱) $60\sqrt{21}$
(۲) ۱۵۰
(۳) $100\sqrt{21}$
(۴) ۲۵۰

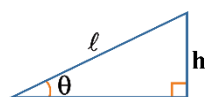
(سخت - مفهومی/محاسباتی - ۱۰۰۳)

پاسخ: گزینه ۳

نیروی شخص را برابر F در نظر می‌گیریم.

حالت اول:

$$W_{\text{شخص}} = Fd \cos 53^\circ = 300 \text{ J} \Rightarrow Fd \times 0.6 = 300 \Rightarrow Fd = 500 \text{ (N.m)} \quad (1)$$



ارتفاع شانه شخص تا زمین (h) ثابت است؛ بنابراین، با دو برابر شدن طول طناب (l)، مقدار $\sin \theta$ نصف می‌شود.

$$\sin \theta_1 = \sin 53^\circ = 0.8 \Rightarrow \sin \theta_2 = \frac{1}{2} \times 0.8 = 0.4$$

$$\Rightarrow \cos \theta_2 = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \sqrt{1 - 0.16} = \sqrt{0.84}$$

$$\Rightarrow \cos \theta_2 = \sqrt{0.4 \times 21} = 0.2\sqrt{21}$$

$$W_{\text{شخص}} = Fd \cos \theta_2 \xrightarrow{(1)} W_{\text{شخص}} = 500 \times 0.2\sqrt{21} = 100\sqrt{21} \text{ J}$$

حالت دوم:

کار نیروی ثابت

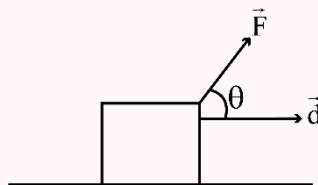
اگر نیروی $\vec{F}$ به جسمی وارد شده و جسم به اندازه d جابه‌جا شود، کار انجام‌شده توسط نیروی $\vec{F}$ در جابه‌جایی d برابر است با:

$$W_F = Fd \cos \theta$$

θ : زاویه بین نیرو و جابه‌جایی

کار، کمیتی نرده‌ای و یکای آن در SI، ژول می‌باشد که داریم:

$$J = \text{N.m}$$



نکته

۱- طبق رابطه $W_F = Fd \cos \theta$ داریم:

$$\begin{cases} 0^\circ \leq \theta < 90^\circ \rightarrow \cos \theta > 0 \rightarrow W_F > 0 \\ \theta = 90^\circ \rightarrow \cos \theta = 0 \rightarrow W_F = 0 \\ 90^\circ < \theta \leq 180^\circ \rightarrow \cos \theta < 0 \rightarrow W_F < 0 \end{cases}$$

۲- همان‌طور که می‌دانیم:

$$-1 \leq \cos \theta \leq 1 \rightarrow -Fd \leq W_F \leq Fd$$

مثال

بیماری به جرم ۷۵ kg روی تختی به جرم ۱۵ kg دراز کشیده است. پرستاری این تخت را با نیروی ثابت و افقی $\vec{F}$ روی سطحی هموار و بدون اصطکاک هل می‌دهد. مجموعه تخت و بیمار با شتاب $\frac{6}{5} \text{ m/s}^2$ حرکت می‌کند. اگر تخت ۱۰ m در جهت این نیرو جابه‌جا شود، کار انجام‌شده توسط نیروی $\vec{F}$ چند ژول است؟

پاسخ:

$$F = ma = (75 + 15) \times (6/5) \rightarrow F = 54 \text{ N}$$

$$W = Fd = (54) \times (10) \rightarrow W = 540 \text{ J}$$

گروه آموزشی ماز

۵۹- تندی خودرویی در مرحله اول از $48 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ به v و در مرحله دوم از v به $120 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ می‌رسد. کل کار انجام‌شده در مرحله اول و دوم به ترتیب W_1 و W_2 است. اگر $\frac{W_1}{W_2} = \frac{11}{17}$ باشد، تندی v چند $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ است؟

۸۴ (۴)

۷۴ (۳)

۶۴ (۲)

۵۴ (۱)

قضیه کار و انرژی جنبشی

۱- مطابق قضیه کار و انرژی جنبشی، کار کل انجام شده روی یک جسم برابر تغییرات انرژی جنبشی آن است.

$$W_{\text{کل}} = \Delta K = \frac{1}{2} m (v_f^2 - v_i^2)$$

۲- مطابق رابطه فوق، اگر کار کل انجام شده روی یک جسم صفر باشد، تندی حرکت و انرژی جنبشی آن ثابت می‌ماند. اگر کار کل مثبت باشد، تندی و انرژی جنبشی افزایش می‌یابند و اگر کار کل منفی باشد، تندی و انرژی جنبشی کاهش می‌یابند.

۳- دقت کنید کار کل انجام شده روی جسم به طور مستقیم اطلاعاتی در مورد انرژی پتانسیل و انرژی مکانیکی جسم به ما نمی‌دهد.

$$48 \frac{\text{km}}{\text{h}} \xrightarrow{W_1} v \xrightarrow{W_2} 120 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

طبق قضیه کار و انرژی جنبشی داریم:

$$\frac{W_1}{W_2} = \frac{(\Delta K)_1}{(\Delta K)_2} = \frac{\frac{1}{2} m [v^2 - 48^2]}{\frac{1}{2} m [120^2 - v^2]} = \frac{v^2 - 48^2}{120^2 - v^2} = \frac{11}{17}$$

$$\Rightarrow 17v^2 - 17 \times 48^2 = 11 \times 120^2 - 11v^2 \Rightarrow 28v^2 = 11 \times 120^2 + 17 \times 48^2 = 24^2 (11 \times 25 + 17 \times 4) = 24^2 \times 343$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{343}{28} \times 24^2 = \frac{49}{4} \times 24^2$$

$$\Rightarrow v = \frac{7}{2} \times 24 = 84 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

کنکوری سراسری تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۵۲- برای این که سرعت وزنه‌ای با جرم معین از صفر به V برسد، باید کار W_1 روی آن انجام شود و برای این که سرعت این وزنه از V به $3V$ برسد، باید کار W_2

روی آن انجام شود، نسبت $\frac{W_2}{W_1}$ چقدر است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۸ (۴) ۹

پاسخ تشریحی:

دو حالت مختلف برای یک جسم بوده، پس جرم جسم ثابت است:

$$\frac{W_2}{W_1} = \frac{m((3V)^2 - V^2)}{m(V^2 - 0)} = \frac{8V^2}{V^2} = 8$$

پاسخ: گزینه ۳

گروه آموزشی ماز

۶۰- در شکل زیر، سه توپ مشابه، با زاویه‌های مختلف از بالای ساختمانی (ارتفاع یکسان) با تندی یکسان پرتاب می‌شوند. برای این توپ‌ها، چند مورد از

موارد زیر از لحظه پرتاب تا رسیدن به زمین درست است؟ (از مقاومت هوا صرف نظر شود).

الف: هر سه توپ با تندی یکسان به زمین برخورد می‌کنند.

ب: کل کار انجام شده بر روی هر سه توپ یکسان است.

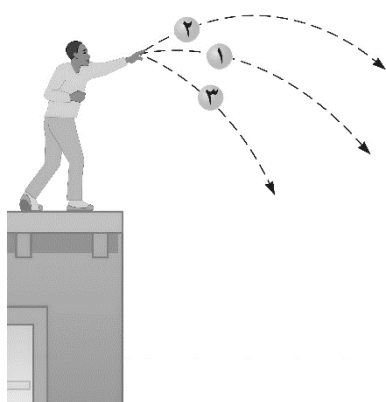
پ: کار نیروی وزن روی توپ (۲) بیش تر از دو توپ دیگر است.

(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) ۳



الف) طبق قضیه کار - انرژی جنبشی داریم:

$$W_t = \Delta K \Rightarrow W_{mg} = K_2 - K_1$$

هر سه توپ دارای جرم و تندی اولیه یکسان هستند؛ بنابراین، انرژی جنبشی اولیه (K_1) برای هر سه توپ یکسان است. از طرفی، نیروی وزن و جابه‌جایی قائم هر سه توپ یکسان است؛ بنابراین کار نیروی وزن (W_{mg}) برای هر سه توپ یکسان است؛ در نتیجه انرژی جنبشی و تندی هر سه توپ هنگام برخورد با زمین یکسان است. (✓)

ب) کل کار انجام‌شده روی هر توپ برابر با کار نیروی وزن (تنها نیروی مؤثر روی توپ) است که برای هر سه توپ یکسان است. (طبق استدلال ارائه‌شده در

مورد «الف») (✓)

پ) طبق استدلال ارائه‌شده در قسمت «الف»، کار نیروی وزن برای هر سه توپ یکسان است. (✗)

کنکور سراسری ریاضی خارج از کشور ۱۴۰۲

۷۳- در شکل زیر، سه توپ مشابه با تندی یکسان از بالای ساختمانی پرتاب می‌شوند. توپ (۱) در راستای افقی و دو توپ دیگر با زاویه‌های بالاتر و پایین‌تر از سطح افق پرتاب می‌شوند. برای این توپ‌ها، از لحظه پرتاب تا رسیدن به زمین، کدام موارد درست است؟ (از مقاومت هوا صرف‌نظر شود).
الف: تندی توپ‌های (۱) و (۳) پیوسته افزایش می‌یابند.
ب: تندی توپ‌های (۱) و (۲) ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابند.
پ: هر سه توپ با تندی یکسان به زمین برخورد می‌کنند.
ت: زمان حرکت هر سه توپ باهم برابر است.

(۱) «الف» و «پ»

(۲) «الف» و «ت»

(۳) «ب» و «ت»

(۴) «ب» و «پ»

پاسخ تشریحی:

عبارت «الف» درست ← ارتفاع توپ‌های «۱» و «۳» در طول حرکت کاهش می‌یابد، بنابراین انرژی پتانسیل گرانشی آن‌ها نیز کاهش یافته و طبق اصل پایستگی انرژی، انرژی جنبشی آن‌ها افزایش می‌یابد. با افزایش انرژی جنبشی، تندی آن‌ها نیز افزایش می‌یابد.
عبارت «ب» نادرست ← تندی توپ «۲» ابتدا کاهش، سپس افزایش می‌یابد ولی حرکت توپ «۱» دائماً تندشونده است.
عبارت «پ» درست ← هر سه توپ با تندی یکسان به زمین برخورد می‌کنند، چراکه طبق اصل پایستگی انرژی مکانیکی، انرژی مکانیکی برای هر سه توپ باید از لحظه پرتاب تا لحظه برخورد به زمین یکسان باشد و به دلیل یکسان بودن انرژی جنبشی و پتانسیل اولیه برای هر سه توپ، تندی نهایی برخورد به زمین نیز یکسان است.
عبارت «ت» نادرست است ← $t_3 > t_1 > t_2$
بنابراین عبارت‌های «الف» و «پ» درست هستند.

پاسخ: گزینه ۱

گروه آموزشی ماز

۶۱- گلوله‌ای از سطح زمین در راستای قائم رو به بالا پرتاب می‌شود و تا رسیدن گلوله به ارتفاع ۳۰ متری از سطح زمین، انرژی جنبشی آن نصف مقدار اولیه می‌شود. در ارتفاع چند متری از سطح زمین، تندی گلوله نصف تندی گلوله در لحظه پرتاب می‌شود؟ (مقاومت هوا ناچیز است).

۴۵ (۴)

۳۷/۵ (۳)

۳۰ (۲)

۲۲/۵ (۱)

انرژی مکانیکی E

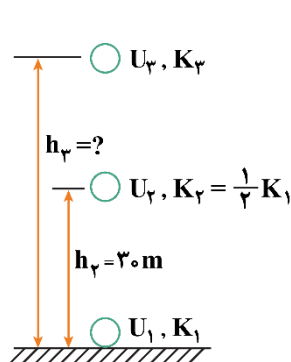
مجموع انرژی پتانسیل و جنبشی جسم را انرژی مکانیکی می‌گویند:

$$E = U + K$$

پایستگی انرژی مکانیکی

هرگاه هنگام جابه‌جایی جسم بین دو نقطه نیروهای تلف‌کننده انرژی مانند اصطکاک و مقاومت هوا به جسم وارد نشود، انرژی مکانیکی جسم ثابت می‌ماند و داریم:

$$E_2 = E_1 \rightarrow U_2 + K_2 = U_1 + K_1$$



هنگامی که تندی گلوله نصف می‌شود، طبق رابطه $K = \frac{1}{2}mv^2$ ، انرژی جنبشی گلوله $\frac{1}{4}$ برابر می‌شود؛ بنابراین $K_3 = \frac{1}{4}K_1$ است.

مقاومت هوا ناچیز است؛ بنابراین انرژی مکانیکی گلوله پایسته است. با در نظر گرفتن سطح زمین به عنوان مبدأ پتانسیل گرانشی داریم:

$$\begin{cases} E_1 = E_2 \Rightarrow U_1 + K_1 = U_2 + K_2 \Rightarrow K_1 = U_2 + \frac{1}{4}K_1 \Rightarrow U_2 = \frac{3}{4}K_1 \\ E_1 = E_3 \Rightarrow U_1 + K_1 = U_3 + K_3 \Rightarrow K_1 = U_3 + \frac{1}{4}K_1 \Rightarrow U_3 = \frac{3}{4}K_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{U_2}{U_1} = \frac{\frac{3}{4}K_1}{\frac{1}{4}K_1} \Rightarrow \frac{mgh_2}{mgh_1} = \frac{3}{1} \Rightarrow \frac{h_2}{30} = \frac{3}{1} \Rightarrow h_2 = 90m$$

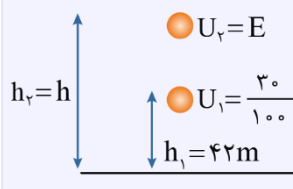
کنکور سراسری ریاضی ۱۴۰۲

۴۲- گلوله‌ای از سطح زمین در راستای قائم رو به بالا پرتاب می‌شود و تا رسیدن گلوله به ارتفاع ۴۲ متری از سطح زمین، انرژی جنبشی آن ۳۰ درصد کاهش می‌یابد. این گلوله حداکثر تا ارتفاع چند متری از سطح زمین بالا می‌رود؟ (مقاومت هوا ناچیز است و $g = ۱۰ \frac{m}{s^2}$)

(۱) ۹۶ (۲) ۱۲۰ (۳) ۱۴۰ (۴) ۱۴۹

پاسخ تشریحی:

در ارتفاع ۴۲ متری، ۳۰ درصد انرژی جنبشی کاهش می‌یابد و به انرژی پتانسیل گرانشی تبدیل می‌شود و در بالاترین نقطه مسیر، همه انرژی مکانیکی جسم به صورت انرژی پتانسیل گرانشی است، بنابراین داریم:



$$U = mgh \Rightarrow \frac{U_2}{U_1} = \frac{h_2}{h_1}$$

$$\Rightarrow \frac{E}{\frac{3}{100}E} = \frac{h}{42} \Rightarrow h = ۱۴۰m$$

پاسخ: گزینه ۳

گروه آموزشی ماز

۶۲- جسمی روی یک سطح شیب‌دار آزادانه می‌لغزد و پایین می‌آید. اگر انرژی مکانیکی جسم در طول مسیر ثابت بماند، کدام موارد الزاماً درست است؟

الف: تندی جسم افزایش می‌یابد.

ب: سطح، بدون اصطکاک است.

پ: جسم با تندی ثابت پایین می‌آید.

ت: تغییرات انرژی جنبشی جسم برابر با تغییرات انرژی پتانسیل گرانشی آن است.

(۴) «پ» و «ت»

(۳) «ب» و «پ»

(۲) «الف» و «ت»

(۱) «الف» و «ب»

(متوسط - مفهومی - ۱۰۰۳)

پاسخ: گزینه ۱

ب در حرکت آزادانه (بدون اعمال نیروی خارجی)، زمانی انرژی مکانیکی پایسته می‌ماند که نیروهای اتلافی (اصطکاک و مقاومت هوا) وجود نداشته باشند؛ بنابراین، سطح بدون اصطکاک است. (✓)

الف انرژی مکانیکی برابر با مجموع انرژی‌های پتانسیل و جنبشی جسم است. هنگامی که جسم به سمت پایین می‌آید، انرژی پتانسیل گرانشی آن کاهش می‌یابد؛ بنابراین، انرژی جنبشی باید افزایش یابد تا انرژی مکانیکی پایسته بماند. در واقع، انرژی پتانسیل تبدیل به انرژی جنبشی می‌شود. در نتیجه تندی جسم افزایش می‌یابد. (درستی مورد «الف» (✓) و نادرستی مورد «پ» (✗))

ت انرژی مکانیکی جسم پایسته است بنابراین:

$$E_2 = E_1 \Rightarrow U_2 + K_2 = U_1 + K_1 \Rightarrow K_2 - K_1 = U_1 - U_2 = -(U_2 - U_1)$$

$$\Rightarrow \Delta K = -\Delta U$$

بنابراین، تغییرات انرژی جنبشی جسم، قرینه تغییرات انرژی پتانسیل آن است. (✗)

۴۹- جسمی روی یک سطح شیب‌دار، آزادانه می‌لغزد و با تندی ثابت پایین می‌آید. برای این جسم، کدام موارد درست است؟

الف: کار نیرویی که سطح به جسم وارد می‌کند، صفر است.

ب: انرژی مکانیکی جسم کاهش می‌یابد.

پ: کار نیروی خالص، برابر با کار وزن است.

ت: انرژی مکانیکی جسم ثابت می‌ماند.

(۱) «ب» (۲) «ت» (۳) «الف» و «ب» (۴) «پ» و «ت»

پاسخ تشریحی:

هریک از عبارت‌ها را جداگانه بررسی می‌کنیم.

الف: نیرویی که سطح به جسم وارد می‌کند، دارای دو مؤلفه است. یکی نیروی عمودی تکیه‌گاه و دیگری نیروی اصطکاک (اگر جسم با سطح اصطکاک نداشت، تندشونده روی سطح سُر می‌خورد). نیروی عمودی تکیه‌گاه بر مسیر حرکت است و کار آن صفر است.

$$W_{F_N} = F_N d \cos 90^\circ = 0$$

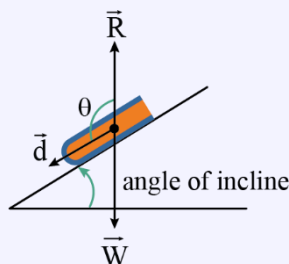
نیروی اصطکاک در خلاف جهت حرکت جسم به آن وارد می‌شود و کار آن منفی است.

$$W_{f_k} = f_k d \cos 180^\circ = -f_k d \rightarrow W_{f_k} < 0$$

$$\vec{R} = \vec{F}_N + \vec{f}_k \rightarrow W_R = W_{F_N} + W_{f_k} \rightarrow W_R < 0$$

نیروی سطح

به عبارت دیگر به جسم فقط دو نیرو وارد می‌شود. یکی نیروی وزن و دیگری نیروی سطح. چون جسم با سرعت ثابت حرکت می‌کند، این دو نیرو هم‌اندازه و در خلاف جهت هم هستند.



نیروی سطح بر جابه‌جایی عمود نیست ($\theta \neq 90^\circ$)؛ پس کار نیروی سطح مخالف صفر است («الف»: ✖)

ب و ت: تغییر انرژی مکانیکی جسم برابر کار نیروی اصطکاک است: $\Delta E = W_f$

(انرژی مکانیکی کم می‌شود). $W_f < 0 \rightarrow \Delta E < 0$

به عبارت دیگر، چون جسم با سرعت ثابت حرکت می‌کند، انرژی جنبشی آن ثابت است.

ثابت: v

$$K: \text{ثابت} \rightarrow \Delta K = 0$$

کار نیروهای اصطکاک و مقاومت هوا منفی است. این کار باعث کاهش انرژی مکانیکی جسم می‌شود. با حرکت جسم به طرف پایین، ارتفاع و انرژی پتانسیل گرانشی جسم کاهش می‌یابد.

$$h: \text{کاهش} \xrightarrow{(U=mgh)} U: \text{کاهش} \rightarrow \Delta U < 0$$

$$E = K + U \rightarrow \Delta E = \Delta K + \Delta U \rightarrow \Delta E < 0$$

منفی صفر

پس انرژی مکانیکی جسم کاهش می‌یابد. («ب»: ✓ و «ت»: ✖)

پ: طبق قضیه کار و انرژی جنبشی، کار نیروی خالص وارد بر جسم صفر است.

$$W_T = \Delta K \xrightarrow{(\Delta K=0)} W_T = 0$$

از طرفی با کم شدن ارتفاع جسم، کار نیروی وزن مثبت است، بنابراین کار نیروی خالص و کار نیروی وزن با هم برابر نیست.

عبارت «پ» هم ✖!

پاسخ: گزینه ۱

گروه آموزشی ماز

۶۳- شخصی یک تکه سنگ ۱۰۰ گرمی را از زمین برداشته و با تندی $16 \frac{m}{s}$ از ارتفاع $1/5$ متری سطح زمین به سمت چراغی در ارتفاع ۶ متری از سطح

زمین پرتاب می‌کند. اگر سنگ با تندی $10 \frac{m}{s}$ به چراغ برخورد کند، کار نیروی مقاومت هوا چند ژول است؟ ($g = 10 \frac{m}{s^2}$)

(۴) $-7/8$

(۳) $-4/5$

(۲) $-3/3$

(۱) $-1/8$

انرژی درونی و مکانیکی

همان طور که می‌دانیم، در صورتی که نیروهای غیرپایستار مانند نیروی مقاومت هوا و اصطکاک در مسئله وجود نداشته باشند، انرژی مکانیکی پایسته می‌ماند. در این درس‌نامه می‌خواهیم ببینیم در حضور این نیروها، انرژی مکانیکی چگونه تغییر خواهد کرد. به نکات زیر توجه کنید.

۱- کار نیروهای اصطکاک و مقاومت هوا منفی است. این کار باعث کاهش یافتن انرژی مکانیکی جسم می‌شود؛ به عبارت دیگر:

$$E_f - E_i = W_f$$

با توجه به این که علامت کار منفی است، E_f کوچکتر از E_i می‌باشد.

۲- انرژی مکانیکی که جسم از دست می‌دهد صرف افزایش انرژی درونی محیط و جسم می‌شود؛ به عبارت دیگر تغییرات انرژی درونی محیط و جسم برابر $E_i - E_f$ خواهد بود.

روش اول:

طبق قانون پایستگی انرژی می‌توانیم بنویسیم:

$$W_f = E_f - E_i = (U_f + K_f) - (U_i + K_i) = (mgh_f + \frac{1}{2}mv_f^2) - (mgh_i + \frac{1}{2}mv_i^2)$$

$$\Rightarrow W_f = (0/1 \times 10 \times 6 + \frac{1}{2} \times 0/1 \times 100) - (0/1 \times 10 \times 1/5 + \frac{1}{2} \times 0/1 \times 16)$$

$$\Rightarrow W_f = (6 + 5) - (1/5 + 12/8) = -3/3 J$$

روش دوم:

طبق قضیه کار - انرژی جنبشی می‌توانیم بنویسیم:

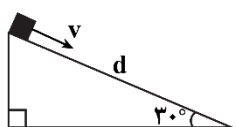
$$W_t = \Delta K \xrightarrow{W_t = W_{mg} + W_f} W_{mg} + W_f = \frac{1}{2}m(v_f^2 - v_i^2)$$

$$\xrightarrow{W_{mg} = -mg\Delta h = -0/1 \times 10 \times (6 - 1/5) = -4/5 J} -4/5 + W_f = \frac{1}{2} \times 0/1 (100 - 256) = -7/8$$

$$\Rightarrow W_f = -3/3 J$$

گروه آموزشی ماز

۶۴- مطابق شکل، بر روی یک سطح شیب‌دار به طول d ، بسته‌ای به جرم 2 kg را مماس بر سطح با تندی v به سمت پایین پرتاب می‌کنیم و بسته در پایین سطح شیب‌دار متوقف می‌شود. چنانچه، بسته را مماس بر سطح و با همان تندی v از پایین سطح شیب‌دار به سمت بالا پرتاب کنیم، چه مسافتی را بر روی سطح طی می‌کند؟ (نیروی اصطکاک جنبشی بین بسته و سطح، ثابت و برابر با 20 N است و $g = 10 \frac{m}{s^2}$).



$$\frac{1}{2}d \quad (2)$$

$$\frac{1}{3}d \quad (1)$$

$$d \quad (4)$$

$$\frac{2}{3}d \quad (3)$$

$$f_k = mg = 20 \text{ N}$$

طبق قضیه کار و انرژی جنبشی داریم:

$$h = d \sin \alpha \quad \cancel{W_{FN}} + W_{mg} + W_{fk} = \Delta K = K_f - K_i$$

هنگام پایین آمدن:

$$mg \times d \sin \alpha - f_k d = 0 - \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow$$

$$2 \times 10 \times d \times \frac{1}{2} - 20 \times d = -\frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = 10d \quad (1)$$

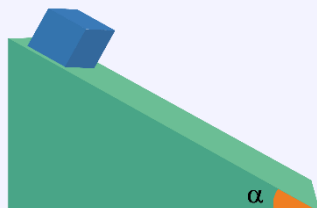
$$-mg \times d' \sin \alpha - f_k d' = 0 - \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow$$

$$-2 \times 10 \times d' \times \frac{1}{2} - 20 \times d' = -\frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow \frac{1}{2} m v^2 = 30 d' \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1), (2)} 30 d' = 10 d \Rightarrow d' = \frac{1}{3} d$$

کنکور سراسری ریاضی ۱۴۰۳

۷۳- مطابق شکل جسمی به جرم $g = 10^\circ$ از بالای سطح شیب‌داری با تندی $\frac{4}{5} \frac{m}{s}$ از ارتفاع 10° متری مماس بر سطح شیب‌دار پرتاب می‌شود و با تندی $\frac{10}{5} \frac{m}{s}$ به پایین



سطح شیب‌دار می‌رسد. کار نیروهای مقاوم روی جسم چند ژول است؟ ($g = 10 \frac{m}{s^2}$)

(۱) $-2/1$

(۲) $-2/4$

(۳) $-4/2$

(۴) $-5/8$

پاسخ تشریحی:

بر جسم سه نیروی mg و $\vec{F}_N$ و $\vec{f}$ وارد می‌شوند:

$$W_{mg} = -mg\Delta h = -10/1 \times 10 \times (-10) = +10 J$$

$$W_{F_N} = 0$$

$$W_t = \Delta K \rightarrow W_{mg} + W_{F_N} + W_f = \frac{1}{2} m (v_f^2 - v_i^2)$$

$$\rightarrow +10 + 0 + W_f = \frac{1}{2} \times 10/1 \times (10^2 - 4^2)$$

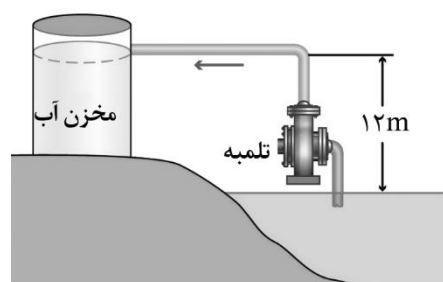
$$\rightarrow W_f = 4/2 - 10 \rightarrow W_f = -5/8 J$$

چون $\vec{F}_N$ عمود بر جابه‌جایی است، پس کار آن صفر است.

پاسخ: گزینه ۴

گروه آموزشی ماز

۶۵- در شکل زیر، توان ورودی تلمبه برقی، ۴ کیلووات است و در هر دقیقه یک متر مکعب آب با چگالی $\rho = 1 \frac{g}{cm^3}$ را با تندی $\frac{12}{5} \frac{m}{s}$ وارد مخزن می‌کند.



بازده این تلمبه چند درصد است؟ ($g = 10 \frac{N}{kg}$)

(۱) ۲۰

(۲) ۳۰

(۳) ۵۰

(۴) ۸۰

چگالی آب $1 \frac{g}{cm^3}$ یا همان $1000 \frac{kg}{m^3}$ است؛ بنابراین، جرم هر یک متر مکعب آب برابر $1000 kg$ است.

در تلمبه برقی ذکرشده، انرژی الکتریکی، انرژی ورودی و مجموع تغییرات انرژی جنبشی و پتانسیل گرانشی آب، انرژی خروجی است؛ بنابراین:

$$E_{\text{خروجی}} = |\Delta U| + |\Delta K| = mg|\Delta h| + \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2)$$

$$\Rightarrow E_{\text{خروجی}} = 1000 \times 10 \times 12 + \frac{1}{2} \times 1000 \times (12^2 - 0^2) = 192000 J$$

$$E_{\text{ورودی}} = P_{\text{ورودی}} \times \Delta t = 4000 \times 60 = 240000 J$$

$$Ra = \frac{E_{\text{خروجی}}}{E_{\text{ورودی}}} \times 100 = \frac{192000}{240000} \times 100 = 80\%$$

کنکور سراسری ریاضی ۱۳۹۹

پمپ آبی در هر دقیقه ۳ مترمکعب آب رودخانه‌ای را به نقطه‌ای منتقل می‌کند که ارتفاع آن تا سطح آب رودخانه ۲۴ متر است. اگر توان ورودی پمپ ۲۰ کیلووات باشد،

بازده پمپ چند درصد است؟ $(\rho_{\text{آب}} = 1 \frac{g}{cm^3}, g = 10 \frac{m}{s^2})$

- (۱) ۷۰ (۲) ۶۰ (۳) ۴۰ (۴) ۳۰

پاسخ تشریحی:

گام اول: با استفاده از قضیه کار - انرژی جنبشی، کار پمپ را به دست می‌آوریم:

$$W_{\text{پمپ}} + W_{\text{mg}} = K_2 - K_1 \xrightarrow{K_2=K_1} W_{\text{پمپ}} = -W_{\text{mg}}$$

$$\rightarrow W_{\text{پمپ}} = -(-mg\Delta h) = +\rho Vg\Delta h$$

$$\rightarrow W_{\text{پمپ}} = +1 \times 10^3 \times 3 \times 10 \times 24 = 720000 J$$

گام دوم: توان مفید پمپ را به دست می‌آوریم:

$$P_{\text{مفید}} = \frac{W_{\text{پمپ}}}{\Delta t} = \frac{720000}{60} = 12000 W = 12 kW$$

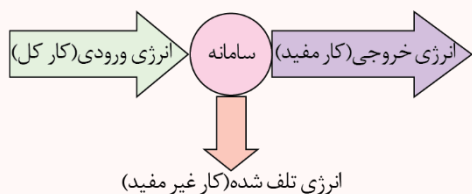
گام سوم: بازده پمپ برابر است با:

$$Ra = \frac{P_{\text{مفید}}}{P_{\text{ورودی}}} \times 100 = \frac{12}{20} \times 100 = 60\%$$

پاسخ: گزینه ۲

$$Ra = \frac{\text{توان مفید (خروجی)}}{\text{انرژی کل (ورودی)}} \times 100 = \frac{\text{انرژی مفید (خروجی)}}{\text{انرژی کل (ورودی)}} \times 100$$

✓ بازده یکا ندارد و درصد آن همواره کوچکتر مساوی ۱۰۰ است.



ماشین آرمانی: $Ra = 100\%$

$$P_{\text{کل}} = P_{\text{مفید}} + P_{\text{غیرمفید}}$$

انواع توان

۱- **توان کل (توان ورودی):** توانی که به دستگاه می‌دهیم تا برای ما کار انجام دهد.

✓ وقتی گفته می‌شود توان دستگاه مثلاً ۲۰۰ وات است، منظور توان کل دستگاه است.

✓ توان کل اصولاً روی دستگاه نوشته می‌شود.

۲- **توان غیرمفید (توان تلف‌شده در داخل دستگاه):** این توان داخل دستگاه به‌صورت گرما و ... تلف می‌شود و صرف هدف اصلی دستگاه نمی‌شود.

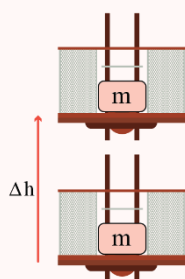
۳- **توان مفید (خروجی):** این توان از دستگاه خارج شده و صرف هدف اصلی دستگاه می‌شود.

این توان را در عمل و به‌صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$P_{\text{مفید}} = \frac{W}{\Delta t}$$

نحوه محاسبه توان مفید بالابر و پمپ

کار مفیدی که بالابر و پمپ بر روی جسم انجام می‌دهند، صرف افزایش انرژی مکانیکی جسم می‌شود، بنابراین:



$$P_{\text{مفید}} = \frac{W_{\text{مفید}}}{\Delta t} = \frac{\Delta E}{\Delta t}$$

✓ در اکثر سؤالات، تبدی جسم تغییر نمی‌کند (مثلاً جسم در ابتدا و انتها ساکن است). در این حالت تغییر انرژی جنبشی جسم، صفر است و کار مفید برابر تغییر انرژی پتانسیل گرانشی جسم می‌باشد:

$$P_{\text{مفید}} = \frac{mg\Delta h}{\Delta t} \quad \text{: توان مفید پمپ (بالابر)}$$





دانش آموزان عزیز ماز

امیدوارم که حالتون خوب باشه و از آزمون، نتیجه دلخواهتون رو گرفته باشید. مهم‌ترین بخش این آزمون، سؤالات شیمی پایه دوازدهم بودن و اگر نتیجه خوبی از این قسمت گرفتین، دیگه خیالتون میتونه از بابت فصل یک دوازدهم راحت باشه. تراز بالای ۹۰۰۰ در این قسمت خوبه و تراز بالای ۱۰۵۰۰ بسیار بسیار عالی هست. در مراحل بعدی از آزمون‌های ماز، وارد مفاهیم مربوط به الکتروشیمی خواهید شد و با ماجراهایی روبه‌رو میشین که سؤالات کنکورش اغلب آسون هستن؛ کافیه خوب درس بخونین تا بتونین به این سؤالات پاسخ درست بدین. ما سعی می‌کنیم به واسطه آزمون‌های ماز، کلی ایده خفن از این قسمت‌ها بهتون نشون بدیم تا بتونین خیلی بهتر از پس این فصل بریاین.

دقت کنین که برای پیشروی خوب در مباحث مربوط به فصل دو شیمی دوازدهم، باید مطالب مربوط به آرایش الکترونی، مدل‌های اتمی، قطبیت مولکول‌ها، مقایسه خاصیت نافلزی عناصر و ویژگی‌های ترکیب‌های آلی مهم رو بلد باشین!

دکتر فرشاد هادیان‌فرد - رتبه ۲۸ کنکور ۹۴ و مسئول درس شیمی آزمون ماز

۶۶- دو نمونه آب خالص، یکی به حجم ۱۰ لیتر و دیگری به حجم ۱۰۰ لیتر در اختیار داریم. مقدار مول برابر از پودر سدیم هیدروکسید و گاز هیدروژن فلوئورید ($\alpha = 0.01$) را به‌صورت مجزا، در این دو نمونه آب حل می‌کنیم تا تفاوت pH آن‌ها به $9/6$ واحد برسد. تفاوت جرم حل شونده حل شده در این محلول آبی، برابر با چند گرم می‌تواند باشد؟

$$(Na = 23 \text{ و } F = 19 \text{ و } O = 16 \text{ و } H = 1 : g \cdot mol^{-1})$$

۴۰ (۴)

۲۰ (۳)

۰/۴ (۲)

۰/۲ (۱)

(سخت - مسئله - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۴

برای حل این سؤال، می‌توانیم دو سناریو مختلف را در نظر بگیریم. در سناریو اول، ترکیب اسیدی (هیدروفلئوریک اسید) در محلول ۱۰ لیتری و ترکیب بازی، در محلول ۱۰۰ لیتری حل شده و تفاوت pH دو محلول به $9/6$ واحد می‌رسد. در سناریو دوم، ترکیب اسیدی (هیدروفلئوریک اسید) در محلول ۱۰۰ لیتری و ترکیب بازی، در محلول ۱۰ لیتری حل شده و تفاوت pH دو محلول به $9/6$ واحد می‌رسد. ابتدا سناریو اول را بررسی می‌کنیم. مقدار مول هر ماده را برابر با n در نظر گرفته و بر این اساس، pH هر محلول را محاسبه می‌کنیم. در رابطه با محلول اسیدی، داریم:

$$[HF] = \frac{\text{مول HF}}{\text{لیتر محلول}} = \frac{n \text{ mol HF}}{100 \text{ L محلول}} = \frac{n}{100} \text{ mol} \cdot L^{-1} \implies [H^+] = [HF] \times \alpha = \frac{n}{100} \times 0.01 = \frac{n}{10000}$$

$$pH = -\log[H^+] = -\log\left(\frac{n}{10000}\right) = 3 - \log(n)$$

در محلول‌های بازی، غلظت یون هیدروکسید بیشتر از یون هیدرونیوم است. برای محاسبه pH این محلول‌ها، ابتدا باید غلظت یون هیدروکسید موجود در محلول را به‌دست بیاوریم و پس از آن، به کمک رابطه $K_w = [OH^-] \times [H^+]$ ، غلظت یون هیدروژن را محاسبه کنیم. در مرحله آخر نیز با توجه به غلظت یون هیدروژن، pH محلول را محاسبه می‌کنیم. در این شرایط، اگر محلول موردنظر مربوط به یک باز قوی تک ظرفیتی باشد، مقدار α برای آن باز برابر یک بوده و غلظت یون هیدروکسید در این محلول، با غلظت باز حل‌شده در آن (M) برابر است. بر این اساس، داریم:

$$[OH^-] = M$$

در نقطه مقابل، برای محاسبه غلظت OH^- در محلولی از یک باز ضعیف با غلظت مولی M و درجه یونش α ، می‌توانیم از رابطه زیر استفاده کنیم:

$$[OH^-] = M \cdot \alpha$$

به‌جز رابطه کلاسیک بالا، از یک راه دیگر هم می‌توانیم مقدار pH محلول‌های بازی را محاسبه کنیم. در این رابطه، داریم:

$$pH = -\log \frac{10^{-14}}{[OH^-]} \quad \text{یا} \quad pH = \log \frac{[OH^-]}{10^{-14}}$$

در قدم بعد، به سراغ محلول بازی می‌رویم و مقدار pH این محلول ۱۰۰ لیتری را نیز محاسبه می‌کنیم:

$$[NaOH] = \frac{\text{مول NaOH}}{\text{لیتر محلول}} = \frac{n \text{ mol NaOH}}{100 \text{ L محلول}} = \frac{n}{100} \text{ mol} \cdot L^{-1} \xrightarrow{\text{سدیم هیدروکسید، باز قوی است}} [OH^-] = [NaOH] = \frac{n}{100} \text{ mol} \cdot L^{-1}$$

$$pH = -\log\left(\frac{10^{-14}}{[OH^-]}\right) = -\log\left(\frac{10^{-14}}{\frac{n}{100}}\right) = -\log\left(\frac{10^{-12}}{n}\right) = 12 + \log(n)$$

طبق فرض سؤال، تفاوت pH دو محلول برابر با $9/6$ واحد است. بر این اساس، داریم:

$$\Delta pH = pH \text{ محلول اسیدی} - pH \text{ محلول بازی} \implies 9/6 = (12 + \log(n)) - (3 - \log(n)) \implies 9/6 = 9 + 2 \log(n) \implies$$

$$2 \log(n) = 0/6 \implies \log(n) = 0/3 \implies n = 2 \text{ mol}$$

مطابق سناریو اول، ۲ مول سدیم هیدروکسید (معادل با ۸۰ گرم سدیم هیدروکسید) و ۲ مول هیدروفلئوریک اسید (معادل با ۴۰ گرم هیدروفلئوریک اسید) در محلول‌های اولیه حل شده و تفاوت جرم این دو ماده برابر با ۴۰ گرم است، پس یکی از پاسخ‌های این سؤال، می‌تواند معادل با ۴۰ گرم باشد. در قدم بعد، سناریو دوم را بررسی می‌کنیم. مقدار مول هر ماده را برابر با n در نظر گرفته و بر این اساس، pH هر محلول را محاسبه می‌کنیم.

در رابطه با محلول اسیدی، داریم:

$$[HF] = \frac{\text{مول HF}}{\text{لیتر محلول}} = \frac{n \text{ mol HF}}{100 \text{ L محلول}} = \frac{n}{100} \text{ mol.L}^{-1} \implies [H^+] = [HF] \times \alpha = \frac{n}{100} \times 0.1 = \frac{n}{1000}$$

$$pH = -\log[H^+] = -\log\left(\frac{n}{1000}\right) = 4 - \log(n)$$

در قدم بعد، به سراغ محلول بازی می‌رویم و مقدار pH این محلول ۱۰ لیتری را نیز محاسبه می‌کنیم:

$$[NaOH] = \frac{\text{مول NaOH}}{\text{لیتر محلول}} = \frac{n \text{ mol NaOH}}{10 \text{ L محلول}} = \frac{n}{10} \text{ mol.L}^{-1} \xrightarrow{\text{سدیم هیدروکسید، باز قوی است}} [OH^-] = [NaOH] = \frac{n}{10} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$pH = -\log\left(\frac{10^{-14}}{[OH^-]}\right) = -\log\left(\frac{10^{-14}}{\frac{n}{10}}\right) = -\log\left(\frac{10^{-13}}{n}\right) = 13 + \log(n)$$

طبق فرض سؤال، تفاوت pH دو محلول برابر با ۹/۶ واحد است. بر این اساس، داریم:

$$\Delta pH = pH \text{ محلول اسیدی} - pH \text{ محلول بازی} \implies 9/6 = (13 + \log(n)) - (4 - \log(n)) \implies 9/6 = 9 + 2 \log(n) \implies$$

$$2 \log(n) = 0/6 \implies \log(n) = 0/3 \implies n = 2 \text{ mol}$$

مطابق سناریو دوم نیز ۲ مول سدیم هیدروکسید (معادل با ۸۰ گرم سدیم هیدروکسید) و ۲ مول هیدروفلوئوریک اسید (معادل با ۴۰ گرم هیدروفلوئوریک اسید) در محلول‌های اولیه حل شده و تفاوت جرم این دو ماده برابر با ۴۰ گرم است.

گروه آموزشی ماز

۶۷- در واکنش تولید یک نمونه از سدیم اکسید، تعداد $2/40.8 \times 10^{25}$ الکترون بین عناصر سازنده مبادله شده است. نمونه سدیم اکسید را در مقداری آب حل کرده و حجم محلول را به ۱۶۰ لیتر می‌رسانیم. مقدار pH محلول تولید شده چقدر می‌شود و ۵۰۰ میلی‌لیتر از محلول تولید شده، با چند لیتر گاز هیدروژن کلرید در شرایط استاندارد واکنش می‌دهد؟

$$4/48 - 13/7 \quad (4)$$

$$2/24 - 13/7 \quad (3)$$

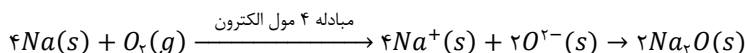
$$5/6 - 13/4 \quad (2)$$

$$2/8 - 13/4 \quad (1)$$

(سخت - مسئله - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۱

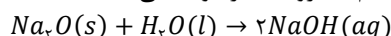
واکنش تولید سدیم اکسید از عناصر سازنده آن (فلز سدیم و گاز اکسیژن) به‌صورت زیر است:



با توجه به معادله بالا، می‌توان گفت به ازای تشکیل ۲ مول سدیم اکسید، ۴ مول الکترون بین گونه‌ها مبادله شده است. بر این اساس، مقدار مول سدیم اکسید تولید شده در این فرایند را محاسبه می‌کنیم:

$$? \text{ mol Na}_2\text{O} = 2/40.8 \times 10^{25} e^- \times \frac{1 \text{ mol } e^-}{6/0.2 \times 10^{23} e^-} \times \frac{2 \text{ mol Na}_2\text{O}}{4 \text{ mol } e^-} = 20 \text{ mol}$$

سدیم اکسید، بر اساس معادله زیر با آب واکنش داده و سدیم هیدروکسید را تولید می‌کند:



با توجه به معادله این واکنش، مقدار مول سدیم هیدروکسید تولید شده را محاسبه می‌کنیم:

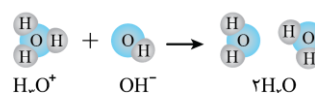
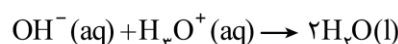
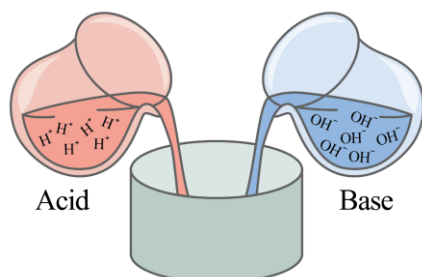
$$? \text{ mol NaOH} = 20 \text{ mol Na}_2\text{O} \times \frac{2 \text{ mol NaOH}}{1 \text{ mol Na}_2\text{O}} = 40 \text{ mol}$$

در قدم بعد، غلظت سدیم هیدروکسید و مقدار pH محلول مورد نظر را محاسبه می‌کنیم:

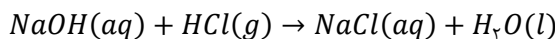
$$[NaOH] = \frac{\text{مول NaOH}}{\text{لیتر محلول}} = \frac{40 \text{ mol NaOH}}{160 \text{ L محلول}} = 0/25 \text{ mol.L}^{-1} \xrightarrow{\text{سدیم هیدروکسید، باز قوی است}} [OH^-] = [NaOH] = 0/25 \text{ mol.L}^{-1}$$

$$pH = -\log\left(\frac{10^{-14}}{[OH^-]}\right) = -\log\left(\frac{10^{-14}}{0/25}\right) = 13/4$$

در واکنش خنثی شدن، یون‌های هیدروژن اسید با یون‌های هیدروکسید باز واکنش می‌دهند. این واکنش را به‌صورت زیر می‌توان نشان داد:



معادله واکنش خنثی شدن محلول سدیم هیدروکسید با گاز هیدروژن کلرید به صورت زیر است:



مطابق این واکنش، یون هیدروکسید باز با یون هیدروژن اسید واکنش می دهد. با توجه به معادله واکنش، حجم گاز هیدروژن کلرید لازم برای واکنش دادن با ۵۰۰ میلی لیتر محلول بازی را محاسبه می کنیم.

$$? L HCl = 500 mL \text{ محلول} \times \frac{0.25 \text{ mol NaOH}}{1000 mL \text{ محلول}} \times \frac{1 \text{ mol HCl}}{1 \text{ mol NaOH}} \times \frac{22.4 L HCl}{1 \text{ mol HCl}} = 11.2 L$$

همان طور که مشخص است، طی این فرایند ۱۱/۲ لیتر گاز هیدروژن کلرید مصرف می شود.

گروه آموزشی ماز

۶۸- رسانایی الکتریکی محلول یک مولار کدام ماده زیر در شرایط یکسان، بیشتر است؟

(۴) هیدرویدیک اسید

(۳) پتاسیم برمید

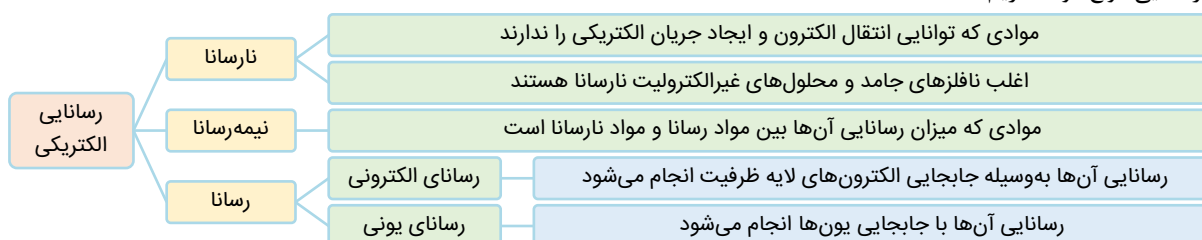
(۲) باریم کلرید

(۱) هیدروسیانیک اسید

(آسان - مفهومی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۲

در رابطه با رسانایی انواع مواد، داریم:



در محلولها، رسانایی الکتریکی تابعی از مجموع غلظت یونهای موجود در محلول است. هیدروسیانیک اسید، یک اسید بسیار ضعیف بوده و در محلول آن، مقدار بسیار کمی یون وجود داشته و رسانایی آن بسیار ناچیز است. در فرمول شیمیایی باریم کلرید ($BaCl_2$)، مجموعاً ۳ یون وجود دارد، پس مجموع غلظت مولی یونها در محلول یک مولار این ماده، برابر با ۳ مول بر لیتر می شود. در فرمول شیمیایی پتاسیم برمید (KBr)، مجموعاً ۲ یون وجود دارد، پس مجموع غلظت مولی یونها در محلول یک مولار این ماده، برابر با ۲ مول بر لیتر می شود. هیدرویدیک اسید نیز یک اسید قوی بوده و بر اثر یونش هر مول از آن، ۲ مول یون در محلول ایجاد می شود، پس می توان گفت مجموع غلظت مولی یونها در محلول یک مولار این ماده، برابر با ۲ مول بر لیتر می شود. با توجه به توضیحات داده شده، مجموع غلظت مولی یونها در محلول باریم کلرید بیشتر از سایر محلولها بوده و این محلول رسانایی بالاتری دارد.

گروه آموزشی ماز

۶۹- کدام یک از مطالب زیر نادرست است؟

- (۱) سرکه سفید، همانند جوهر نمک، در مجاورت با کاغذ pH ، رنگ این کاغذ را از زرد به قرمز تغییر می دهد.
- (۲) در محلول هر ترکیب اسیدی با ثابت یونش بسیار بزرگ، غلظت یون هیدرونیوم با غلظت اولیه اسید برابر است.
- (۳) مواد بازی مثل محلول سود، به پوست بدن آسیب زده و همانند صابون، در سطح آن احساس لیزی ایجاد می کنند.
- (۴) پس از انحلال مقداری گاز هیدروژن فلوئورید در آب، سرعت تولید یون فلوئورید در محلول به تدریج کاهش می یابد.

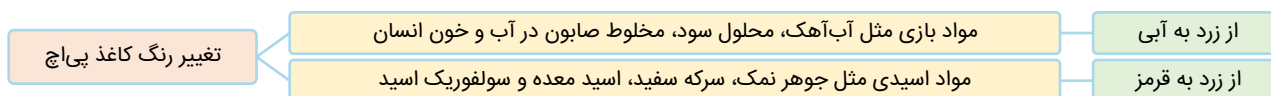
(متوسط - مفهومی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۲

اگر ثابت یونش یک اسید تک پروتون دار (ترکیب اسیدی که توانایی آزاد کردن فقط یک یون هیدرونیوم را دارد) بسیار بزرگ باشد، این اسید در محلول آبی خود به طور کامل یونیده شده و در نتیجه غلظت یون هیدرونیوم موجود در محلول نهایی با غلظت اولیه اسید برابر خواهد بود. در رابطه با چنین محلولی، می توان رابطه $[H^+] = M$ را نوشت. توجه داریم که در این حالت، درجه یونش اسید برابر با یک بوده و در این محلول رابطه $\alpha = \frac{[H^+]}{M} = 1$ برقرار خواهد بود. این در حالی است که اگر یک اسید چند پروتون دار قوی مثل سولفوریک اسید داشته باشیم، غلظت یون هیدرونیوم موجود در محلول نهایی بیشتر از غلظت اولیه اسید خواهد شد.

بررسی سایر گزینه ها:

۱ سرکه سفید، همانند جوهر نمک، خاصیت اسیدی داشته و در مجاورت با کاغذ pH ، رنگ این کاغذ را از زرد به قرمز تغییر می دهد. روند تغییر رنگ کاغذ pH در مجاورت با مواد مختلف به صورت زیر است:

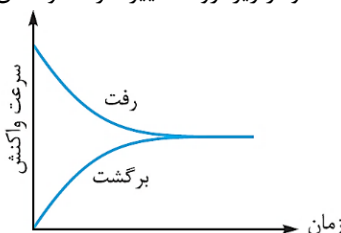


سرکه، محلولی از استیک اسید (اتانویک اسید) در آب است. به طور کلی، اسیدهای قوی را می توان محلولی شامل یونهای آب پوشیده دانست، به طوری که در آنها تقریباً مولکولهای یونیده نشده یافت نمی شود. در نقطه مقابل، در محلول اسیدهای ضعیف افزون بر اندک یونهای آب پوشیده، مولکولهای اسید یونیده نشده نیز یافت می شود.

می‌شوند. برای نمونه، در محلول سرکه شمار ناچیزی از یون‌های آب پوشیده (یون‌های استات و هیدروژن)، هم‌زمان با شمار زیادی از مولکول‌های استیک‌اسید یونیده نشده حضور دارند. یافته‌های تجربی نشان می‌دهند که در شرایط معین، **غلظت همه گونه‌های موجود در محلول این اسید، همانند دیگر اسیدهای ضعیف ثابت است.**

۳ مواد بازی از جمله محلول سود و یا محلول پتاس، به پوست بدن آسیب می‌رسانند. این مواد، با چربی‌های روی پوست واکنش داده و **موادی شبیه به صابون تولید می‌کنند**، پس می‌توان گفت این مواد نیز همانند صابون، در سطح پوست احساس لیزی ایجاد می‌کنند.

۴ واکنش‌های شیمیایی را به‌طور کلی به دو دسته برگشت‌ناپذیر و برگشت‌پذیر تقسیم‌بندی می‌کنند. در واکنش‌های برگشت‌ناپذیر، فقط واکنش‌دهنده‌ها می‌توانند به فراورده‌ها تبدیل شوند در حالی که در این واکنش‌ها امکان تبدیل فراورده‌ها به واکنش‌دهنده‌ها وجود ندارد. به عبارتی، این واکنش‌ها فقط در جهت رفت انجام می‌شوند. در نقطه مقابل، واکنش‌های برگشت‌پذیر وجود دارند که در آن‌ها امکان انجام شدن واکنش‌های رفت و برگشت به‌صورت هم‌زمان وجود دارد. **فرایند یونش اسیدهای ضعیف** از جمله هیدروفلوئوریک اسید در آب، از جمله واکنش‌های برگشت‌پذیر است. اگر در واکنش‌های برگشت‌پذیر، واکنش‌های رفت و برگشت به‌صورت هم‌زمان و با سرعت‌های برابر انجام شوند، مقدار فراورده‌ها و واکنش‌دهنده‌ها ثابت باقی می‌ماند و در سامانه موردنظر تعادل برقرار می‌شود. در لحظه برقراری تعادل، سرعت تولید هر ماده با سرعت مصرف آن برابر است و به همین خاطر، مقدار هر ماده در سامانه ثابت می‌ماند و چنین به نظر می‌رسد که واکنش موردنظر متوقف شده است. در این سامانه‌ها، قبل از برقراری تعادل، سرعت واکنش رفت در مقایسه با واکنش برگشت بیشتر است. نمودار زیر، روند تغییر سرعت واکنش‌های رفت و برگشت را در این واکنش‌ها نشان می‌دهد:



با توجه به نمودار بالا، پس از انحلال مقداری گاز هیدروژن فلوئورید در آب، **سرعت واکنش رفت** (واکنشی که منجر به تولید یون فلوئورید در محلول می‌شود) به تدریج کاهش می‌یابد.

گروه آموزشی ماز

۷۰- چه تعداد از عبارات‌های داده شده درست هستند؟

الف: pH محلولی که غلظت یون هیدروژن در آن 4×10^{-6} برابر غلظت یون هیدروکسید است، برابر $3/7$ می‌شود.

ب: با انحلال مقداری از یک نوع پاک‌کننده صابونی در یک نمونه آب، غلظت یون هیدروژن در آب کاهش می‌یابد.

پ: محلول نیترو اسید، یک رسانای یونی بوده و $[NO_3^-]$ در آن، در مقایسه با غلظت اسید یونیده نشده کمتر است.

ت: واکنش $HF(aq) + I^-(aq) \rightleftharpoons HI(aq) + F^-(aq)$ با غلظت برابر از هر ماده، به سمت راست پیش می‌رود.

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

(متوسط - مفهومی و مسئله - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۳

عبارات‌های (الف)، (ب) و (پ) درست هستند.

بررسی موارد:

«الف»: در دمای $25^\circ C$ ، حاصل ضرب غلظت مولی یون‌های هیدروژن و هیدروکسید در محلول‌های آبی برابر با 10^{-14} می‌شود. بر این اساس، داریم:

$$[H^+] \times [OH^-] = 10^{-14} \xrightarrow{[H^+] = 4 \times 10^{-6} \times [OH^-]} 4 \times 10^{-6} \times [OH^-] \times [OH^-] = 10^{-14} \implies [OH^-] = 0.5 \times 10^{-10} \text{ mol. L}^{-1} \implies [H^+] = 2 \times 10^{-4} \text{ mol. L}^{-1}$$

در قدم بعد، با توجه به غلظت یون هیدروژن، مقدار pH این محلول را محاسبه می‌کنیم.

$$pH = -\log[H^+] = -\log(2 \times 10^{-4}) = 4 - 0.3 = 3.7$$

«ب»: پاک‌کننده‌های صابونی، موادی با خاصیت بازی بوده و با انحلال آن‌ها در آب، غلظت یون هیدروکسید در محلول مورد نظر افزایش پیدا می‌کند. این

مواد، رنگ کاغذ pH را آبی می‌کنند. بین غلظت مولی یون‌ها در محلول‌های آبی، رابطه زیر برقرار است:

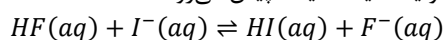
$$[H^+] \times [OH^-] = 10^{-14}$$

بر اساس این رابطه، با افزایش غلظت یون هیدروکسید در محلول، غلظت یون هیدروژن به همان نسبت کاهش پیدا می‌کند.

«پ»: نیترو اسید، یک اسید ضعیف با ثابت یونش (K_a) کوچک‌تر از یک است. این اسید به‌طور جزئی در آب یونش یافته و محلولی ایجاد می‌کند که یک رسانای یونی است. با توجه به قدرت اسیدی کم این ماده، غلظت مولی آنیون حاصل از یونش آن (NO_3^-) در مقایسه با غلظت مولکول‌های اسید یونیده نشده در محلول کمتر است.

«ت»: قدرت اسیدی HF از سایر هیدروژن هالیدها (ترکیب‌های حاصل از اتصال یک اتم هالوژن به یک اتم هیدروژن) کمتر است. در واقع تنها اسید ضعیف میان هیدروژن هالیدها، هیدروفلوئوریک اسید است. اگر در یک محلول آبی، دو اسید به همراه آنیون حاصل از یونش آن‌ها وجود داشته باشد، واکنش میان آن‌ها به سمتی می‌رود که اسید ضعیف‌تر تولید و اسید قوی‌تر مصرف شود. در واقع در این فرایند اسیدی که یون هیدروژن تولید می‌کند، اسید قوی‌تر

است. این اسید، یون هیدروژن خود را به آنیون حاصل از اسید ضعیف‌تر می‌دهد. پس در تعادل زیر که میان هیدرویدیک اسید و هیدروفلوئوریک اسید باید ایجاد شود، واکنش به سمت چپ (مصرف اسید قوی و تولید اسید ضعیف) پیش می‌رود.



گروه آموزشی ماز

۷۱- مطابق واکنش موازنه‌نشده $(NH_4)_2Cr_2O_7(s) + HCl(aq) \rightarrow Cl_2(g) + NH_4Cl(aq) + H_2O(l) + CrCl_3(aq)$ ، یک نمونه گاز کلر به حجم $3/36$ لیتر، طی واکنش یک محلول 70 لیتری از هیدروکلریک اسید با مقدار کافی $(NH_4)_2Cr_2O_7$ به‌دست آمده است. مقدار pH محلول اسیدی مصرف شده چقدر است؟ (واکنش در شرایط استاندارد انجام می‌شود.)

۲/۳ (۴)

۲ (۳)

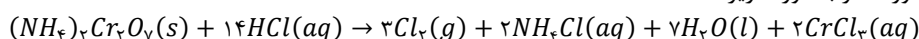
۱/۳ (۲)

۱/۷ (۱)

(متوسط - مسئله - ۱۳۰۱)

پاسخ: گزینه ۳

معادله موازنه شده واکنش مورد نظر به‌صورت زیر است:



با توجه به معادله واکنش و اطلاعات داده شده در صورت سؤال، مقدار مول هیدروکلریک اسید مصرف شده را محاسبه می‌کنیم:

$$? mol HCl = 3/36 L Cl_2 \times \frac{1 mol Cl_2}{22/4 L Cl_2} \times \frac{14 mol HCl}{3 mol Cl_2} = 0/7 mol$$

در قدم بعد، غلظت محلول هیدروکلریک اسید را محاسبه کرده و پس از آن، مقدار pH این محلول را به‌دست می‌آوریم.

$$[HCl] = \frac{mol HCl}{L محلول} = \frac{0/7 mol HCl}{70 L} = 0/01 mol.L^{-1} \xrightarrow{\text{هیدروکلریک اسید، اسید قوی است}} [H^+] = [HCl] = 0/01 mol.L^{-1}$$

$$pH = -\log[H^+] = -\log(0/01) = 2$$

با توجه به محاسبات انجام شده، مقدار pH محلول مورد نظر برابر با ۲ است.

گروه آموزشی ماز

۷۲- محلول‌هایی از هیدروکلریک اسید و پتاسیم هیدروکسید را با هم مخلوط می‌کنیم. اگر غلظت نهایی یون‌های کلرید و پتاسیم در محلول به ترتیب برابر با $1/2$ و $0/8$ مول بر لیتر باشد، pH این محلول چقدر خواهد بود؟

۰/۶ (۴)

۰/۴ (۳)

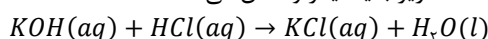
۱۳/۶ (۲)

۱۳/۴ (۱)

(آسان - مسئله - ۱۳۰۱)

پاسخ: گزینه ۳

پتاسیم هیدروکسید و هیدروکلریک اسید، بر اساس معادله زیر با یکدیگر واکنش می‌دهند:



یک لیتر از محلول مورد نظر را در نظر می‌گیریم. یون‌های پتاسیم و هیدروکسید، در کنار هم قرار داشته و یون‌های هیدروژن و کلرید نیز در کنار هم قرار دارند. در این محلول یک لیتری، $0/8$ مول یون پتاسیم وجود دارد، پس در ابتدای کار نیز $0/8$ مول یون هیدروکسید در آن وجود داشته است. در این محلول یک لیتری، $1/2$ مول یون کلرید نیز وجود دارد، پس در ابتدای کار $1/2$ مول یون هیدروژن در آن وجود داشته است. از $1/2$ مول یون هیدروژن موجود در این محلول، $0/8$ مول از آن با $0/8$ مول یون هیدروکسید خنثی شده و $0/4$ مول از آن در محلول باقی می‌ماند. بر این اساس، می‌توان گفت محلولی داریم که غلظت یون هیدروژن در آن برابر با $0/4$ مول بر لیتر بوده و کل یون هیدروکسید موجود در آن نیز خنثی شده است. در رابطه با این محلول، داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1/2 mol H^+ \\ 1/2 mol Cl^- \\ 0/8 mol OH^- \\ 0/8 mol K^+ \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0/4 mol H^+ \\ 1/2 mol Cl^- \\ OH^- \rightarrow \text{مقدار خیلی ناچیز} \\ 0/8 mol K^+ \end{array} \right.$$

با توجه به غلظت یون هیدروژن در محلول، pH محلول را محاسبه می‌کنیم:

$$pH = -\log[H^+] = -\log(0/4) = 0/4$$

گروه آموزشی ماز

۷۳- چه تعداد از مطالب زیر درست‌اند؟

الف: همه اسیدهای آرنیوس در ساختار خود دارای اتم هیدروژن هستند.

ب: تعریف آرنیوس برای اسیدها و بازها برای محلول‌های غیرآبی قابل استفاده نیست.

پ: مقدار 2 مول باریم هیدروکسید با 2 مول سولفوریک اسید خالص خنثی می‌شود.

ت: معادله یونش نیترواسید، همانند معادله یون هیدرویدیک اسید یک طرفه خواهد بود.

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

عبارت‌های (ب) و (پ) درست هستند.

بررسی موارد:

«الف»: برخی از مواد اسیدی از جمله اکسیدهای نافلزی در ساختار خود اتم هیدروژن یا یون هیدروژن ندارند. برای مثال، گاز SO_3 نوعی اسید آرنیوس است که در ساختار خود یون H^+ یا اتم هیدروژن ندارد اما پس از ورود به یک محیط آبی، غلظت یون هیدروژن را در محلول مورد نظر افزایش داده و خاصیت اسیدی خود را اعمال می‌کند.

«ب»: سوانت آرنیوس، نخستین کسی بود که اسیدها و بازها را بر یک مبنای علمی توصیف کرد. آرنیوس با تحقیق بر روی رسانایی الکتریکی محلول‌های آبی (نه محلول‌هایی با حلال‌های آلی) توانست یک مبنای علمی برای توصیف اسیدها و بازها ارائه کند. تعریف آرنیوس برای اسیدها و بازها بر اساس محیط آبی بوده و از این رو برای محیط‌های غیرآبی صادق نیست.

«پ»: اسید و باز داده شده، از نظر ظرفیت مشابه هم بوده و دو ظرفیتی هستند. مقدار ۲ مول باریم هیدروکسید ($Ba(OH)_2$) دارای ۴ مول یون OH^- در ساختار خود است که با ۲ مول سولفوریک اسید (H_2SO_4) خنثی می‌شود.

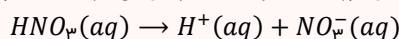
«ت»: نیترواسید با فرمول شیمیایی HNO_3 ، برخلاف HI یک اسید ضعیف بوده و از این رو معادله یونش آن برگشت‌پذیر است.

بررسی معادله و ثابت یونش اسیدها

هیدرویدیک اسید ($HI(aq)$)، هیدروبرمیک اسید ($HBr(aq)$)، هیدروکلریک اسید ($HCl(aq)$) و سولفوریک اسید ($H_2SO_4(aq)$) اسیدهای قوی با ثابت یونش بسیار بزرگ هستند؛ بنابراین معادله یونش آن‌ها در آب یک‌طرفه است. این مواد بر اساس معادلات زیر در آب یونش پیدا می‌کنند:



نیتریک اسید برخلاف نیترواسید، یک اسید قوی با ثابت یونش بزرگ است و معادله یونش آن در آب یک‌طرفه است:



هیدروفلوئوریک اسید ($HF(aq)$)، نیترواسید، فورمیک اسید ($HCOOH(aq)$)، استیک اسید ($CH_3COOH(aq)$)، کربنیک اسید ($H_2CO_3(aq)$) و هیدروسیانیک اسید ($HCN(aq)$)، اسیدهای ضعیف با ثابت یونش کوچک هستند و فرایند یونش آن‌ها در آب یک واکنش تعادلی است. این مواد بر اساس معادلات زیر در آب یونش پیدا می‌کنند:



مقایسه مقابله را به خاطر بسپارید: $K_a : HF > HNO_2 > HCOOH > CH_3COOH > H_2CO_3 > HCN$ قدرت اسیدی

در شرایط یکسان، هر چه قدرت اسیدی (ثابت یونش) یک اسید بزرگ‌تر باشد، غلظت مولی یون هیدرونیوم در محلول حاصل از آن اسید بیشتر و در نتیجه غلظت مولی یون هیدروکسید در آن محلول کمتر است. به علاوه در محلول اسید با ثابت یونش بزرگ‌تر، غلظت مولی یون‌ها و در نتیجه رسانایی الکتریکی محلول نیز بیشتر خواهد بود.

گروه آموزشی ماز

۷۴- کدام موارد از عبارت‌های داده شده درست هستند؟

الف: باران‌های اسیدی حاوی نیتریک اسید و سولفوریک اسید هستند، در حالی که باران معمولی pH برابر با ۷ دارد.

ب: آب خالص رسانایی الکتریکی ناچیزی دارد که به خاطر وجود مقدار بسیار کم از یون‌های چنداتمی در آن است.

پ: با استفاده از مدل آرنیوس می‌توان درباره میزان اسیدی یا بازی بودن یک محلول آبی اظهار نظر کرد.

ت: بازها کاربردهای زیادی در زندگی روزانه دارند که از جمله آن‌ها می‌توان به تهیه شیشه پاک‌کن اشاره کرد.

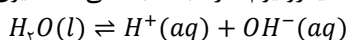
۱) «الف» و «پ» ۲) «الف» و «ت» ۳) «ب» و «پ» ۴) «ب» و «ت»

عبارت‌های (ب) و (ت) درست هستند.

بررسی موارد:

«الف»: در مناطق صنعتی، به خاطر ورود اکسیدهای گوگرد و نیتروژن به هواکره، باران اسیدی ایجاد می‌شود. باران‌های اسیدی حاوی نیتریک اسید و سولفوریک اسید هستند، در حالی که باران‌های معمولی حاوی کربنیک اسید هستند. هرچند که pH باران‌های اسیدی کمتر از باران‌های معمولی است، اما هر دو نمونه از آب این باران‌ها pH کوچک‌تر از ۷ دارند.

«ب»: براساس آزمایش‌های انجام‌شده، نمونه‌ای از آب خالص که فاقد هر گونه حل‌شونده‌ای است، رسانایی الکتریکی ناچیزی دارد که وجود آن را به حضور مقدار بسیار اندکی از یون‌های هیدروکسید و هیدروژن (یا همان هیدرونیوم) در آب نسبت می‌دهند. یون‌های موردنظر، بر اساس واکنش زیر در آب تولید می‌شوند:



ثابت تعادل این واکنش به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$K = K_w = [OH^-] \times [H^+]$$

آزمایش‌های مختلف نشان می‌دهد که مقدار K_w در دمای اتاق، برابر با $10^{-14} \text{ mol}^2 \cdot \text{L}^{-2}$ است که این مقدار، همانند ثابت تعادل سایر واکنش‌ها، فقط و فقط تابع دمای محیط است.

«پ»: با استفاده از مدل آرنیوس، تنها می‌توان تشخیص داد کدام ترکیب اسید و کدام ترکیب باز است ولی درباره میزان اسیدی یا بازی بودن یک محلول نمی‌توان اظهار نظر کرد. توجه داریم که برای اندازه‌گیری میزان اسیدی یا بازی بودن یک محلول می‌توان از روش‌هایی مانند اندازه‌گیری رسانایی محلول، استفاده از کاغذ pH و ... استفاده کرد.

«ت»: بازها کاربردهای گسترده‌ای در زندگی روزانه دارند که از جمله آنها می‌توان به محلول شیشه پاک‌کن (محلول آبی آمونیاک در آب) و لوله بازکن (محلول آبی سدیم هیدروکسید در آب که نوعی پاک‌کننده خورنده قوی به شمار می‌رود) اشاره کرد. توجه داریم که در محلول‌های بازی، غلظت یون هیدروکسید بیشتر از یون هیدرونیوم است.

گروه آموزشی ماز

۷۵- در محلولی از فورمیک اسید با غلظت 0.2 مول بر لیتر و چگالی $1.08 \text{ g} \cdot \text{mL}^{-1}$ ، غلظت یون فورمات (HCOO^-) برابر 25 ppm است. ثابت یونش فورمیک اسید در این محلول، به تقریب چقدر است؟ ($1 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ و 12 C و 16 O)

(۱) 9×10^{-5} (۲) 9×10^{-6} (۳) $1/8 \times 10^{-4}$ (۴) $1/8 \times 10^{-5}$

پاسخ: گزینه ۳

(متوسط - مسئله - ۱۲۰۱)

فورمیک اسید، بر اساس معادله زیر در محلول آبی یونش پیدا می‌کند:



در محلول فورمیک اسید، غلظت یون فورمات با غلظت یون هیدروژن برابر است. با توجه به غلظت یون فورمات در مقیاس ppm ، غلظت مولی این یون را در ۱ لیتر از محلول مورد نظر محاسبه می‌کنیم.

$$? \text{ mol HCOO}^- = 1 \text{ L محلول} \times \frac{1000 \text{ mL محلول}}{1 \text{ L محلول}} \times \frac{1/0.8 \text{ g محلول}}{1 \text{ mL محلول}} \times \frac{25.0 \text{ g HCOO}^-}{10.6 \text{ g محلول}} \times \frac{1 \text{ mol HCOO}^-}{45 \text{ g HCOO}^-} = 0.006 \text{ mol}$$

$$\text{HCOO}^- \text{ غلظت مولی} = \frac{\text{مول HCOO}^-}{\text{لیتر محلول}} = \frac{0.006 \text{ mol}}{1 \text{ L محلول}} = 0.006 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

با توجه به محاسبات بالا، می‌توان گفت غلظت یون فورمات، همانند غلظت یون هیدروژن، در محلول مورد نظر برابر با 0.006 مول بر لیتر است. بر این اساس، درجه یونش اسید را در محلول مورد نظر محاسبه می‌کنیم.

$$\alpha = \frac{\text{غلظت مولی HCOO}^-}{\text{غلظت مولی اسید}} = \frac{0.006}{0.2} = 0.03$$

در قدم آخر، با توجه به درجه یونش اسید، مقدار ثابت یونش آن را محاسبه می‌کنیم.

$$K_a = \frac{\alpha^2 \times M}{1 - \alpha} \xrightarrow{\alpha < 0.05} K_a = \alpha^2 \times M = (0.03)^2 \times 0.2 = 1/8 \times 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

با توجه به محاسبات انجام شده، ثابت یونش فورمیک اسید برابر با $1/8 \times 10^{-4}$ است.

گروه آموزشی ماز

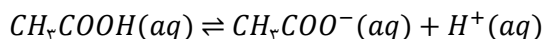
۷۶- مجموع غلظت مولی یون‌ها در محلولی از استیک اسید با غلظت 0.5 مولار، برابر با 2×10^{-3} مول بر لیتر است. ثابت یونش مولکول‌های استیک اسید در این محلول کدام است؟

(۱) 4×10^{-5} (۲) 4×10^{-6} (۳) 2×10^{-5} (۴) 2×10^{-6}

پاسخ: گزینه ۳

(آسان - مسئله - ۱۲۰۱)

معادله یونش استیک اسید در آب به صورت زیر است:



بر اثر یونش هر مولکول استیک اسید، ۲ یون در محلول ایجاد می‌شود. مجموع غلظت مولی یون‌ها در محلول داده شده برابر با 2×10^{-3} مول بر لیتر است؛ پس می‌توان گفت غلظت هر یک از یون‌های هیدرونیوم و استات در این محلول برابر با 10^{-3} مول بر لیتر می‌شود. با توجه به غلظت اسید در محلول مورد نظر، ابتدا درجه یونش را محاسبه می‌کنیم.

$$\text{درجه یونش} = \frac{\text{غلظت یون هیدرونیوم}}{\text{غلظت اسید}} = \frac{10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}}{0.5 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}} = 0.2$$

در مرحله بعد، با توجه به درجه یونش این اسید، مقدار ثابت یونش آن را نیز محاسبه می‌کنیم.

$$K_a = \alpha^2 \cdot M \implies K_a = (0.02)^2 \times 0.5 = 2 \times 10^{-5} \text{ mol.L}^{-1}$$

با توجه به محاسبات انجام شده، ثابت یونش اسید مورد نظر برابر با $2 \times 10^{-5} \text{ mol.L}^{-1}$ می‌شود. مقدار ثابت یونش اسید را با استفاده از رابطه استاندارد کتاب درسی نیز می‌توان محاسبه کرد:

$$K_a = \frac{[CH_3COO^-] \times [H^+]}{[CH_3COOH]} = \frac{10^{-3} \times 10^{-3}}{0.5} = 2 \times 10^{-5} \text{ mol.L}^{-1}$$

گروه آموزشی ماز

۷۷- در واکنش میان یک قطعه بلور جوش شیرین و محلول ۰/۵ مولار هیدروفلوئوریک اسید، نوعی گاز تولید شده و اگر طی این فرایند سرعت تولید گاز مورد نظر افزایش پیدا می‌کند.

(۲) ناقطبی - مقداری هیدروبرمیک اسید در محلول حل کنیم

(۱) قطبی - دمای محلول اسیدی را افزایش بدهیم

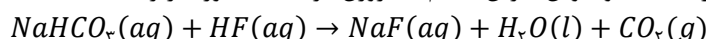
(۴) قطبی - از پودر جوش شیرین استفاده کنیم

(۳) ناقطبی - مقداری آب خالص به محلول اضافه کنیم

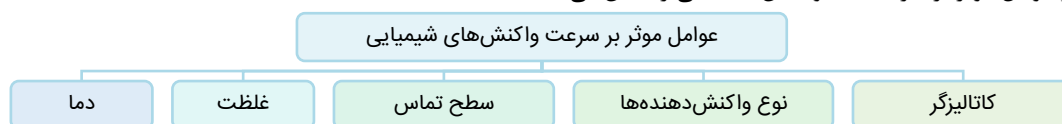
(آسان - مفهومی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۲

معادله واکنش میان محلول هیدروفلوئوریک اسید و جوش شیرین (سدیم هیدروژن کربنات) به صورت زیر است:



همان‌طور که مشخص است، طی این فرایند گاز کربن دی‌اکسید (CO_2) تولید می‌شود. این گاز، از مولکول‌های متقارن ساخته شده و از جمله مواد ناقطبی است. نمودار زیر نیز عوامل مؤثر بر سرعت یک واکنش شیمیایی را نشان می‌دهد:



با توجه به نمودار فوق، اگر یک اسید قوی مثل هیدروبرمیک اسید (HBr) را به محلول هیدروفلوئوریک اسید اضافه کنیم، غلظت یون هیدروژن در این محلول اسیدی افزایش پیدا کرده و سرعت انجام شدن واکنش افزایش یافته و سرعت تولید گاز کربن دی‌اکسید نیز بیشتر می‌شود. این در حالی است که اگر مقداری آب به محلول اسیدی اولیه اضافه کنیم، غلظت این محلول کاهش یافته و با کاهش غلظت یون هیدروژن در این محلول آبی، سرعت تولید گاز کربن دی‌اکسید نیز کمتر می‌شود.

با تغییر نوع مواد واکنش‌دهنده، سرعت انجام شدن واکنش‌های شیمیایی نیز تغییر می‌کند. در چنین شرایطی، اگر واکنش‌پذیری واکنش‌دهنده‌ها افزایش پیدا کند، سرعت انجام شدن واکنش نیز افزایش می‌یابد. به عبارت دیگر، سرعت انجام شدن واکنش‌های شیمیایی با میزان واکنش‌پذیری مواد شرکت‌کننده در آن‌ها رابطه مستقیم دارد. به عنوان مثال، چون پتاسیم در مقایسه با سدیم واکنش‌پذیری بیشتری دارد، یک نمونه از فلز پتاسیم در شرایط یکسان در مقایسه با فلز سدیم با سرعت و شدت بیشتری با محلول‌های اسیدی واکنش می‌دهد.

گروه آموزشی ماز

۷۸- کدام یک از مطالب زیر نادرست است؟

- (۱) با افزایش غلظت مولی مولکول‌های اسیدی حل شده در یک محلول، ثابت یونش اسید مورد نظر کاهش پیدا می‌کند.
- (۲) در واکنش میان مقداری محلول سود و محلول هیدروکلریک اسید، یون‌های Na^+ و Cl^- در واکنش شرکت نمی‌کنند.
- (۳) آلومینیم هیدروکسید، از مواد موجود در ضد اسیدها بوده و هر مول آن، ۳ مول اسید معده را به طور کامل خنثی می‌کند.
- (۴) روزانه دو تا سه لیتر شیره معده در بدن انسان تولید می‌شود که pH آن از pH محیط معده در حالت استراحت کمتر است.

(متوسط - مفهومی - ۱۲۰۱)

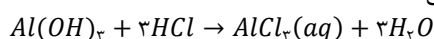
پاسخ: گزینه ۱

با افزایش یا کاهش غلظت مولی مولکول‌های اسیدی حل شده در یک محلول آبی، ثابت یونش اسید مورد نظر تغییر نمی‌کند. در واقع، میزان ثابت یونش اسیدهای مختلف فقط تابع دما است و تغییر مقدار گونه‌های موجود در محلول تأثیری در مقدار ثابت یونش اسید ندارد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۲- معادله واکنش مورد نظر به صورت $NaOH(aq) + HCl(aq) \rightarrow NaCl(aq) + H_2O(l)$ است. طی این واکنش، یون هیدروکسید از محلول سود با یون هیدروژن از محلول هیدروکلریک اسید خنثی می‌شود. همان‌طور که مشخص است، یون‌های Na^+ و Cl^- در واکنش شرکت نکرده و به صورت دست نخورده در محلول مورد نظر باقی می‌مانند.

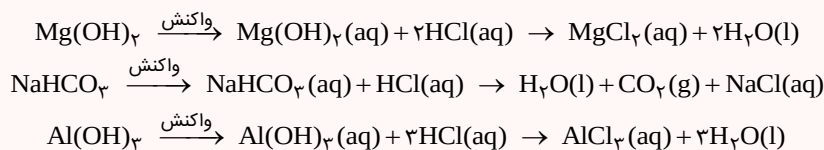
۳- آلومینیم هیدروکسید، همانند منیزیم هیدروکسید و سدیم هیدروژن کربنات، یکی از مواد موجود در ضد اسیدهای معده‌ای است. این ماده مطابق با معادله زیر با اسید معده (هیدروکلریک اسید) واکنش می‌دهد:



با توجه به معادله بالا، هر مول آلومینیم هیدروکسید با ۳ مول اسید معده به طور کامل واکنش می‌دهد.

ضد اسیدها

پزشکان برای مقابله با مقدار اضافی از اسید موجود در معده بیماران مبتلا به بیماری‌های معده‌ای، از داروهایی به نام **ضد اسید** یا همان آنتی‌اسید استفاده می‌کنند. این داروها خاصیت بازی داشته و با ورود به معده، سبب خنثی کردن اسید معده (هیدروکلریک اسید) و **افزایش مقدار pH محتویات معده می‌شوند**. مواد مؤثر موجود در ضد اسیدهای مختلف، شامل **منیزیم هیدروکسید** ($Mg(OH)_2$)، **آلومینیم هیدروکسید** ($Al(OH)_3$) و **سدیم هیدروژن کربنات** (جوش شیرین یا $NaHCO_3$) می‌شود. این مواد براساس معادله‌های زیر با اسید معده واکنش می‌دهند:



معده برای گوارش غذا به اسید نیاز دارد. در بدن انسان بالغ روزانه بین دو تا سه لیتر شیر معده تولید می‌شود که غلظت یون هیدرونیوم در آن حدود 0.3 mol.L^{-1} بوده و **pH آن برابر ۱/۵** است. این در حالی است که **pH معده در زمان استراحت ۳/۷** می‌باشد. اسید موجود در شیر معده هیدروکلریک اسید (اسیدی قوی) است که علاوه بر فعال کردن آنزیم‌های دخیل در گوارش، جانداران ذره‌بینی موجود در غذا را نیز از بین می‌برد.

اسید معده

دیواره داخلی معده به‌طور طبیعی مقدار کمی از یون‌های هیدرونیوم موجود در شیر معده را دوباره جذب می‌کند که همین اسید جذب شده از محیط درونی معده، **موجب مرگ و نابودی سلول‌های دیواره معده** می‌گردد. اگر مقدار اسید معده به هر دلیل بیش از اندازه باشد، مقدار یون‌های جذب‌شده و در نتیجه مرگ سلول‌ها افزایش می‌یابد و مسبب درد، التهاب و گاهی خونریزی معده می‌شود. همچنین برگشت شیر معده به درون مری موجب سوزش و درد شدید در ناحیه قفسه سینه نیز می‌شود.

گروه آموزشی ماز

۷۹- اگر با اضافه کردن آب به محلول یک مولار باز ضعیف **BOH** با ثابت یونش 0.5×10^{-5} مول بر لیتر، **pH محلول ۰/۶** واحد تغییر کند، یک لیتر از محلول حاصل با چند میلی‌لیتر محلول 0.4 مولار نیتریک اسید واکنش می‌دهد؟

۵۰۰ (۴)

۴۰۰ (۳)

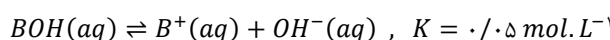
۲۵۰ (۲)

۲۰۰ (۱)

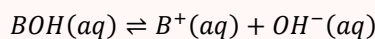
(سخت - مسئله - ۱۳۰۱)

پاسخ: گزینه ۲

واکنش یونش این باز به‌صورت زیر است:



بازهای ضعیف، همانند اسیدهای ضعیف، به هنگام انحلال در آب به‌صورت کامل یونش نمی‌یابند و یک تعادل میان ذرات باز یونش نیافته، یون هیدروکسید و کاتیون آن باز ایجاد می‌شود. در این رابطه، داریم:



مقدار ثابت تعادل فرایند بالا، ثابت یونش باز **BOH** است که از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$K_b = \frac{[OH^-] \times [B^+]}{[BOH]}$$

همچنین رابطه بالا را در محلول این باز می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$K_b = \frac{[OH^-]^2}{M - [OH^-]}$$

در این رابطه **M** غلظت اولیه باز است. اگر میزان غلظت یون هیدروکسید در این محلول بسیار کمتر از غلظت اولیه باز باشد، می‌توان از آن صرف نظر کرد و معادله را به‌صورت زیر نوشت:

$$K_b = \frac{[OH^-]^2}{M}$$

رابطه بالا زمانی قابل استفاده است که **نسبت $\frac{K_b}{M}$ کمتر از 2×10^{-4} یا درصد یونش کمتر از ۵ درصد باشد**.

ابتدا **pH** محلول یک مولار این ماده را حساب می‌کنیم:

$$K_b = \frac{[OH^-]^2}{M - [OH^-]} \Rightarrow 0.5 \times 10^{-5} = \frac{[OH^-]^2}{1 - [OH^-]} \Rightarrow [OH^-]^2 + 0.5 \times 10^{-5} [OH^-] - 0.5 \times 10^{-5} = 0 \Rightarrow [OH^-] = \begin{cases} +0.2 \\ -0.25 \end{cases}$$

$$pH = 14 + \log[OH^-] \Rightarrow pH = 14 + \log 0.2 = 14 + \log \frac{2}{10} = 14 + \log(2) - \log(10) = 13/3$$

طبق فرض سؤال، مقدار **pH** محلول به اندازه 0.6 واحد تغییر کرده است؛ بنابراین **pH** محلول پس از افزودن آب به آن، به $12/7$ می‌رسد. بر این اساس، غلظت باز در این حالت را حساب می‌کنیم:

$$[OH^-] = 10^{pH-14} \Rightarrow [OH^-] = 10^{12/7-14} = 10^{-1/7} = 10^{-0.14} \times 10^{-2} = 0.5 \text{ mol.L}^{-1}$$

$$K_b = \frac{[OH^-]^2}{M - [OH^-]} \Rightarrow 0.5 \times 10^{-5} = \frac{(0.5)^2}{M - 0.5} \Rightarrow 1 = \frac{0.5}{M - 0.5} \Rightarrow M = 0.5 \text{ mol.L}^{-1}$$

پس غلظت باز در محلول جدید، برابر با ۰/۱ مولار است. در واقع می‌توان گفت طی این فرایند، غلظت باز از ۱ مول بر لیتر به ۰/۱ مول بر لیتر رسیده است. در فرایند خنثی شدن، رابطه زیر برقرار است:

$$n_{\text{باز}} \times M_{\text{باز}} \times V_{\text{باز}} = n_{\text{اسید}} \times M_{\text{اسید}} \times V_{\text{اسید}}$$

در این رابطه، n ظرفیت اسید و باز را مشخص کرده و M نیز معادل با غلظت مولی هر ماده است. بر این اساس، حجم اسید مصرف شده را به دست می‌آوریم:

$$1 \times 0.4 \times V_{\text{اسید}} = 1 \times 0.1 \times 1 \Rightarrow V_{\text{اسید}} = \frac{1}{4} L \times \frac{1000 \text{ mL}}{1 L} = 250 \text{ mL}$$

یک لیتر از این محلول بازی، با ۲۵۰ میلی لیتر از محلول اسید مورد نظر واکنش می‌دهد.

گروه آموزشی ماز

۸۰- در بدن یک انسان بالغ، روزانه ۳ لیتر شیرۀ معده با غلظت $0.3 \text{ mol} \cdot L^{-1}$ تولید می‌شود. اگر ۹۰ درصد جرمی نوعی ضد اسید معده‌ای از منیزیم هیدروکسید تشکیل شده باشد، برای خنثی کردن نیمی از اسید معده، روزانه به چند گرم دارو نیاز است؟

($Mg = 24$ و $O = 16$ و $H = 1$: $g \cdot mol^{-1}$)

۲/۹ (۴)

۲/۳ (۳)

۱/۴۵ (۲)

۱/۱۵ (۱)

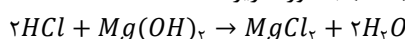
(متوسط - مسئله - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۲

برای مقابله با مقدار اضافی از اسید موجود در معده افرادی که به بیماری‌های معده‌ای دچار هستند، از داروهایی به نام ضد اسید استفاده می‌کنند. این داروها خاصیت بازی دارند و مواد مؤثر موجود در آن‌ها، شامل منیزیم هیدروکسید، آلومینیم هیدروکسید و سدیم هیدروژن کربنات (جوش شیرین) می‌شود. برای مثال، شیر منیزی یکی از رایج‌ترین ضد اسیدهای مورد استفاده به شمار می‌رود که ماده مؤثر موجود در آن، منیزیم هیدروکسید است. از آن جا که ماده موجود در این دارو انحلال پذیری بسیار کمی در آب دارد، شیر منیزی را می‌توان یک مخلوط ناهمگن و متعلق به دسته سوسپانسیون‌ها به حساب آورد. جدول زیر، ویژگی‌های سوسپانسیون‌ها، کلوئیدها و محلول‌های همگن را در مقایسه با یکدیگر نشان می‌دهد:

ویژگی	مخلوط ناهمگن (سوسپانسیون)	کلوئید	مخلوط همگن (محلول)
عبور نور	نور را پخش می‌کند.	نور را پخش می‌کند.	نور را عبور می‌دهد.
ظاهر	ناهمگن	همگن	همگن
همگن بودن	ناهمگن	ناهمگن	همگن
پایداری	ناپایدار است.	پایدار است.	پایدار است.
نوع ذره	ذرات ریز ماده و قطعات مجزا	مولکول‌های بزرگ یا توده‌های مولکولی	یون‌ها یا مولکول‌ها

واکنش شیر منیزی یا منیزیم هیدروکسید با اسید معده (HCl) به صورت زیر است:



ابتدا جرم منیزیم هیدروکسید خالص مورد نیاز برای خنثی کردن نیمی از اسید معده (یعنی ۱/۵ لیتر اسید معده) را حساب می‌کنیم:

$$? g Mg(OH)_2 = \frac{1}{5} L HCl \text{ محلول} \times \frac{0.3 \text{ mol HCl}}{1 L HCl \text{ محلول}} \times \frac{1 \text{ mol Mg(OH)}_2}{2 \text{ mol HCl}} \times \frac{58 g Mg(OH)_2}{1 \text{ mol Mg(OH)}_2} = 1/30.5 g$$

از آنجا که درصد جرمی ماده مؤثر (یعنی منیزیم هیدروکسید) در داروی شیر منیزی ۹۰٪ است، جرم دارو برابر خواهد بود با:

$$\text{جرم دارو} = \frac{1/30.5}{0.9} \times 100 = 1/45 g$$

جرم دارو = $\frac{\text{جرم منیزیم هیدروکسید}}{\text{درصد جرمی منیزیم هیدروکسید}} \times 100$

گروه آموزشی ماز

۸۱- به ازای هر ۳ کیلومتر افزایش ارتفاع در طول لایه تروپوسفر یک نقطه از زمین، فشار هوا ۰/۷۵ برابر می‌شود. در ارتفاعی که دمای هوا به $-18^\circ C$ می‌رسد، فشار هوا برابر با چند اتمسفر است؟ (دما و فشار هوا در سطح زمین در نقطه مورد نظر، به ترتیب برابر با ۱۸ درجه سلسیوس و ۰/۹۶ اتمسفر است.)

۰/۴۴ (۴)

۰/۶۴ (۳)

۰/۳۸ (۲)

۰/۵۴ (۱)

(آسان - مسئله - ۱۰۰۲)

پاسخ: گزینه ۱

می‌دانیم که به ازای هر کیلومتر افزایش ارتفاع در طول لایه تروپوسفر، دمای هوا در حدود ۶ درجه سلسیوس کاهش می‌یابد. پس در قدم اول، ارتفاع لایه تروپوسفر را در نقطه‌ای که دمای هوا برابر با $-18^\circ C$ است، محاسبه می‌کنیم. توجه داریم که تغییرات دما بر حسب کلوین (ΔT) با تغییرات دما بر حسب سلسیوس ($\Delta \theta$) با هم برابر است ($\Delta T = \Delta \theta$)، پس داریم:

$$\text{ارتفاع (km)} = \frac{1 \text{ km}}{-6 K} \times (K) \text{ تغییر دما} = (-18 - 18) \times \left(\frac{1}{-6}\right) = 6 \text{ km}$$

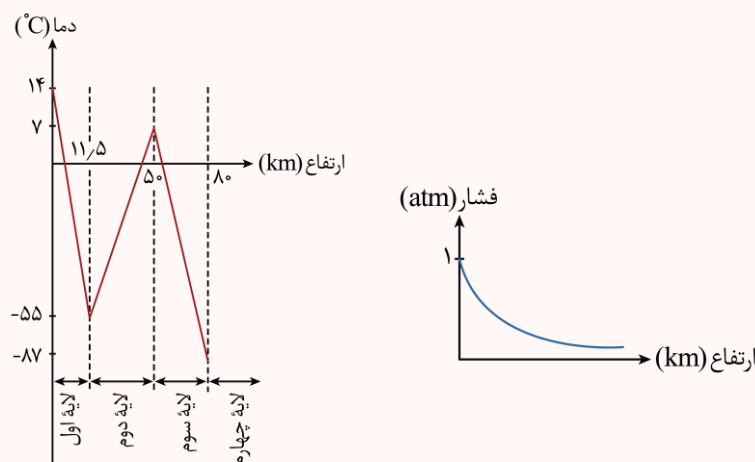
حال با توجه به اینکه فشار هوا به ازای هر ۳ کیلومتر افزایش ارتفاع در طول لایه تروپوسفر ۰/۷۵ برابر می‌شود، فشار هوا را در ارتفاع ۶ کیلومتری لایه تروپوسفر به دست می‌آوریم:

$$? atm = (0.96) \times (0.75)^2 = 0.54$$

لایه‌های مختلف هواکره

توجه داریم لایه تروپوسفر لایه‌ای است که در ارتفاع ۱۰ الی ۱۲ کیلومتری از سطح زمین قرار گرفته و **تغییرات آب و هوایی** در این لایه رخ می‌دهد. در سیاره زمین، روند تغییر دما در لایه‌های مختلف هواکره به صورت زیر است:

- **سطح زمین:** در این ناحیه، دمای هوا به طور میانگین برابر با ۱۴ درجه سلسیوس است.
- **لایه اول (تروپوسفر):** در این لایه، به ازای هر کیلومتر افزایش ارتفاع در طول لایه تروپوسفر، دمای هوا در حدود ۶ درجه سلسیوس کاهش می‌یابد.
- **لایه دوم (استراتوسفر):** در این لایه، با افزایش ارتفاع، دما افزایش می‌یابد.
- **لایه سوم:** در این لایه، همانند لایه اول، با افزایش ارتفاع، دما کاهش می‌یابد.
- **لایه چهارم:** در این لایه، همانند لایه دوم، با افزایش ارتفاع، دما افزایش می‌یابد. نمودارهای زیر، روند تغییرات دما و تغییرات فشار را در این لایه‌ها از هواکره موجود در اطراف زمین نشان می‌دهد:



گروه آموزشی ماز

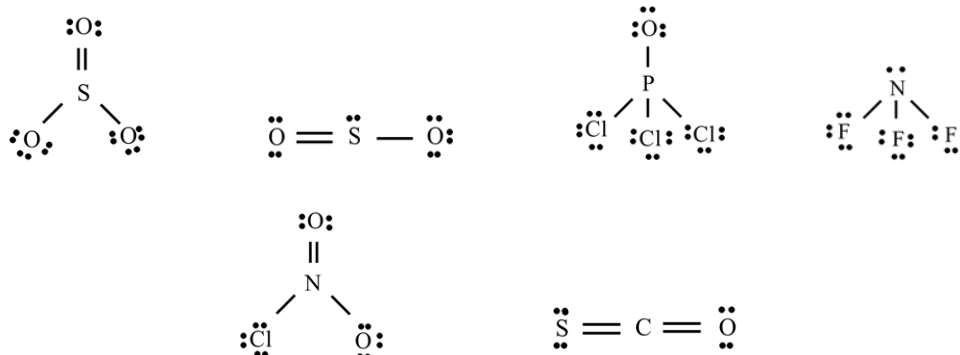
۸۲- در ساختار چه تعداد از مولکول‌های زیر، پیوند دوگانه بین اتم‌ها وجود دارد؟

NO_2Cl	SCO	SO_3	SO_2	$POCl_3$	NF_3
۵ (۴)			۴ (۳)		۳ (۲)
					۲ (۱)

(متوسط - مفهومی - ۱۰۰۲)

پاسخ: گزینه ۳

هرگاه هریک از دو اتم دخیل در تشکیل یک پیوند اشتراکی، هر یک ۲ الکترون به اشتراک بگذارند، یک پیوند دوگانه ایجاد خواهد شد. ساختار لوویس ترکیب‌های داده شده را رسم می‌کنیم:



از بین مواد داده شده، در ساختار لوویس چهار ماده پیوند دوگانه وجود دارد.

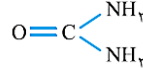
گروه آموزشی ماز

۸۳- تفاوت جرم اتم‌های کربن و نیتروژن در یک نمونه اوره برابر با ۳/۲ گرم است. در ساختار این نمونه اوره، چند اتم هیدروژن وجود دارد؟

$$(O = 16 \text{ و } N = 14 \text{ و } C = 12 \text{ و } H = 1 : g.mol^{-1})$$

$4/116 \times 10^{23}$ (۴)	$2/40.8 \times 10^{23}$ (۳)	$3/612 \times 10^{23}$ (۲)	$1/80.6 \times 10^{23}$ (۱)
----------------------------	-----------------------------	----------------------------	-----------------------------

اوره، از مولکول‌های قطبی تشکیل شده و از جمله مواد محلول در آب به شمار می‌رود. فرمول شیمیایی این ترکیب آلی به صورت $CO(NH_2)_2$ است. چون اوره در ساختار مولکولی خود دارای اتم‌های هیدروژن متصل به نیتروژن است، بین مولکول‌های این ماده امکان برقرار شدن پیوند هیدروژنی وجود دارد. اطلاعات مربوط به اوره، به صورت زیر است:

نام ماده	فرمول شیمیایی	ساختار	نوع ماده	حلال مناسب
اوره	$CO(NH_2)_2$		مولکول قطبی	حلال قطبی (آب)

با توجه به فرمول شیمیایی اوره، می‌توان گفت در هر مول از این ماده، یک مول اتم کربن (معادل با ۱۲ گرم اتم کربن) و ۲ مول اتم نیتروژن (معادل با ۲۸ گرم اتم نیتروژن) وجود دارد، پس تفاوت جرم اتم‌های کربن و نیتروژن در هر مول از این ماده برابر با ۱۶ گرم می‌شود. بر این اساس، داریم:

$$\frac{1 \text{ mol } CO(NH_2)_2}{16 \text{ g}} \times \text{تفاوت جرم} = \frac{1 \text{ mol } CO(NH_2)_2}{16 \text{ g}} \times 16 \text{ g} = 1 \text{ mol}$$

در قدم بعد، شمار اتم‌های هیدروژن موجود در ۰/۲ مول اوره را محاسبه می‌کنیم:

$$? \text{ atom H} = 0.2 \text{ mol } CO(NH_2)_2 \times \frac{4 \text{ mol H}}{1 \text{ mol } CO(NH_2)_2} \times \frac{6.02 \times 10^{23} \text{ atom H}}{1 \text{ mol H}} = 4.816 \times 10^{23} \text{ atom H}$$

گروه آموزشی ماز

۸۴- کدام یک از مطالب زیر نادرست است؟

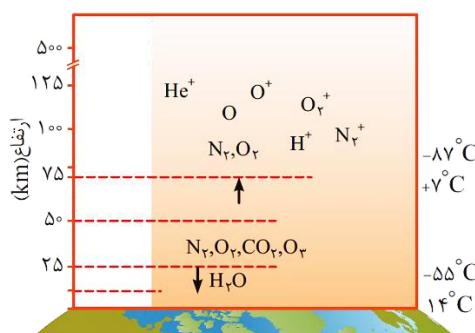
- ۱) بین سیاره‌های موجود در سامانه خورشیدی، تنها زمین اتمسفری دارد که امکان زندگی را روی آن فراهم می‌کند.
- ۲) پایین‌ترین دمای هوا در طول کل ضخامت هواکره موجود در اطراف زمین، در انتهای لایه تروپوسفر وجود دارد.
- ۳) اکسیژن، در ساختار همه مولکول‌های زیستی وجود داشته و به صورت یون O^+ نیز در هواکره یافت می‌شود.
- ۴) اولین گازی که با افزایش دمای هوای مایع از آن خارج می‌شود، در ساختار خود یک پیوند سه‌گانه دارد.

در طول لایه تروپوسفر زمین، دمای هوا مرتباً به اندازه ۶ درجه به ازای هر کیلومتر افزایش ارتفاع کاهش پیدا می‌کند تا در نهایت، در انتهای این لایه به ۵۵- درجه سانتی‌گراد می‌رسد. پس از آن، با افزایش ارتفاع، دمای هوا شروع به افزایش می‌کند تا به دمای ۷ درجه سانتی‌گراد می‌رسد. بعد از آن، دمای هوا مجدداً شروع به کاهش یافتن می‌کند و در ارتفاع حدود ۷۵ کیلومتری از سطح زمین، دما به ۸۷- درجه سانتی‌گراد می‌رسد. توجه داریم که در این محدوده از هواکره، دما پایین‌تر از دما در انتهای لایه تروپوسفر است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) در میان سیاره‌های سامانه خورشیدی، تنها زمین اتمسفری دارد که امکان زندگی را روی آن فراهم می‌کند. این اتمسفر، مخلوطی از گازهای گوناگون است که تا فاصله ۵۰۰ کیلومتری از سطح زمین امتداد یافته است. این مخلوط گازی، به رنگ فیروزه‌ای دیده می‌شود. جاذبه زمین، این گازها را پیرامون خود نگه می‌دارد و مانع از خروج آنها از اتمسفر می‌شود. از سوی دیگر، انرژی گرمایی (انرژی جنبشی) مولکول‌ها سبب می‌شود تا آنها پیوسته در حال جنبش باشند و در سرتاسر هواکره توزیع شوند.

۳) اتم‌های اکسیژن، در ساختار همه مولکول‌های زیستی (مولکول‌هایی که در بدن جانوران ساخته و یا مصرف می‌شوند) از جمله پروتئین‌ها، آمینواسیدها، روغن‌ها، کربوهیدرات‌ها و چربی‌ها وجود دارد. این عنصر به صورت یون O^+ نیز در لایه‌های بالایی هواکره یافت می‌شود. تصویر زیر، برخی از یون‌های موجود در لایه‌های بالایی هواکره را نشان می‌دهد:



۴) بین اجزای موجود در هوای مایع، نیتروژن دارای پایین‌ترین دمای جوش است، پس اولین گازی که با افزایش دمای هوای مایع (نمونه هوا با دمای ۲۰۰- درجه سانتی‌گراد) از آن خارج می‌شود، گاز نیتروژن است. دمای جوش این گاز، برابر با ۱۹۶- درجه سانتی‌گراد است. نیتروژن در ساختار مولکولی خود دارای یک پیوند سه‌گانه $N \equiv N$ است.

گروه آموزشی ماز

۸۵- چه تعداد از عبارتهای داده شده درست هستند؟

- الف: هواکره ساختار لایه‌ای داشته و حدود ۷۵٪ جرم آن در نزدیک‌ترین لایه به زمین، یعنی استراتوسفر، قرار دارد.
 ب: گاز نیتروژن، در ساختار خود ۲ جفت الکترون ناپیوندی داشته و از آن در صنعت سرماسازی استفاده می‌شود.
 پ: فراوان‌ترین گاز نجیب موجود در هواکره، تعداد الکترون‌های برابری در لایه‌های الکترونی $n = 2$ و $n = 3$ دارد.
 ت: طبق بررسی‌های انجام شده، از ۲۰ میلیون سال پیش تاکنون، نسبت گازهای سازنده هواکره تقریباً ثابت مانده است.

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

(متوسط - مفهومی و حفظی - ۱۰۰٪)

پاسخ: گزینه ۳

عبارتهای (ب)، (پ) و (ت) درست هستند.

بررسی موارد:

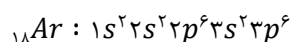
«الف»: هواکره ساختار لایه‌ای داشته و حدود ۷۵٪ جرم آن در نزدیک‌ترین لایه به زمین، یعنی لایه تروپوسفر، قرار دارد. توجه داریم که استراتوسفر، یکی از لایه‌های بالایی هواکره بوده و لایه اوزون، قسمتی از آن است.

«ب»: گاز نیتروژن، اصلی‌ترین جزء سازنده هواکره بوده و در ساختار مولکولی خود دارای یک پیوند سه‌گانه $N \equiv N$ به همراه ۲ جفت الکترون ناپیوندی است. از گاز نیتروژن، در صنعت سرماسازی و به‌منظور منجمد کردن مواد غذایی استفاده می‌شود. علاوه بر صنعت سرماسازی، از گاز نیتروژن برای پرکردن تایر خودروها و برای نگهداری نمونه‌های بیولوژیک در پزشکی نیز استفاده می‌شود.

«پ»: جدول زیر، درصد حجمی مهم‌ترین اجزای موجود در هواکره را نشان می‌دهد:

نام گاز	درصد گاز در هوا
نیتروژن	۷۸/۰۷۹
اکسیژن	۲۰/۹۵۲
آرگون	۰/۹۲۸
کربن دی‌اکسید	۰/۰۳۸۵

با توجه به داده‌های موجود در این جدول، آرگون فراوان‌ترین گاز نجیب موجود در هواکره است. پس از آرگون، نئون گاز نجیبی است که بیشترین فراوانی را در هواکره دارد. آرایش الکترونی آرگون به‌صورت زیر است:



همان‌طور که مشخص است، در هریک از لایه‌های الکترونی $n = 2$ و $n = 3$ اتم آرگون، ۸ الکترون وجود دارد.

«ت»: بررسی حباب‌های هوای به دام افتاده در ساختار یخ‌های قطبی و سنگ‌های آتشفشانی نشان می‌دهد که از ۲۰۰ میلیون سال پیش تاکنون، نسبت گازهای سازنده هواکره تقریباً ثابت مانده است. طبعاً وقتی که از ۲۰۰ میلیون سال پیش تاکنون، نسبت گازهای سازنده هواکره تقریباً ثابت مانده است، پس می‌توان گفت در هر بازه کمتر از این مدت نیز نسبت گازهای سازنده هواکره تقریباً ثابت مانده است.

گروه آموزشی ماز

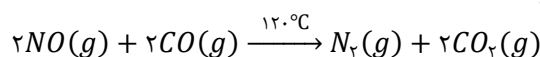
۸۶- کدام یک از مطالب زیر در رابطه با واکنش موازنه نشده $NO(g) + CO(g) \xrightarrow{120^\circ C} N_2(g) + CO_2(g)$ درست است؟

- پس از موازنه، ضریب همه مواد موجود در معادله واکنش با هم برابر می‌شود.
- در نام‌گذاری همه ترکیب‌های مولکولی موجود در معادله واکنش، پیشوند (مونو) یافت می‌شود.
- برای آغاز شدن این واکنش شیمیایی، دمای مواد شرکت‌کننده باید به ۱۲۰ درجه سلسیوس برسد.
- در ساختار لوویس همه مواد شرکت‌کننده در واکنش، همه اتم‌ها از قاعده هشت‌تایی پیروی می‌کنند.

(متوسط - مفهومی - ۱۰۰٪)

پاسخ: گزینه ۳

معادله موازنه شده واکنش مورد نظر به‌صورت زیر است:



جدول زیر برخی از نمادهای مورد استفاده در معادله‌های شیمیایی را نمایش می‌دهد:

نماد	معنا
$\rightarrow$	تولید می‌کند یا می‌دهد
Δ	واکنش‌دهنده‌ها بر اثر گرم شدن واکنش می‌دهند.
$20 atm$	واکنش در فشار ۲۰ اتمسفر انجام می‌شود.
$1200^\circ C$	واکنش در دمای $1200^\circ C$ انجام می‌شود.
Pd	در واکنش از کاتالیزگر پالادیم استفاده شده است.

با توجه به معادله نوشته شده، می‌توان گفت برای آغاز شدن این واکنش شیمیایی، دمای مواد شرکت‌کننده باید به ۱۲۰ درجه سلسیوس برسد. در این حالت،

واکنش آغاز شده و مواد با یکدیگر واکنش می دهند. توجه داریم که پس از موازنه معادله واکنش، ضریب گاز نیتروژن نسبت به سایر مواد شرکت کننده در واکنش متفاوت است. در نام گذاری یکی از ترکیب های شرکت کننده در این واکنش (CO_2) نیز نیازی به آوردن پیشوند (مونو) نداریم. نام درست این ترکیب، به صورت کربن دی اکسید است. در ساختار لوویس گاز NO نیز اتمی وجود دارد که از قاعده هشت تایی پیروی نمی کند. ساختار لوویس این گاز به صورت زیر است:



گروه آموزشی ماز

۸۷- کدام موارد از عبارتهای داده شده درست هستند؟ ($Cr = 52$ و $O = 16 : g.mol^{-1}$)

الف: از گاز هلیوم، برای پر کردن بالن های هواشناسی و کیسول های غواصی استفاده می شود.

ب: نسبت جرم کروم به اکسیژن در ساختار یک نمونه جامد از کروم (II) اکسید، برابر با $3/75$ است.

پ: آرگون، به عنوان محیط بی اثر در جوشکاری فلزها کاربرد داشته و برخلاف گاز CO ، گازی بی بو است.

ت: هلیوم، در گاز طبیعی یافت شده و همانند خورشید، طی واکنش های هسته ای در عمق زمین نیز تولید می شود.

(۴) «ب» و «ت»

(۳) «ب» و «پ»

(۲) «الف» و «ت»

(۱) «الف» و «پ»

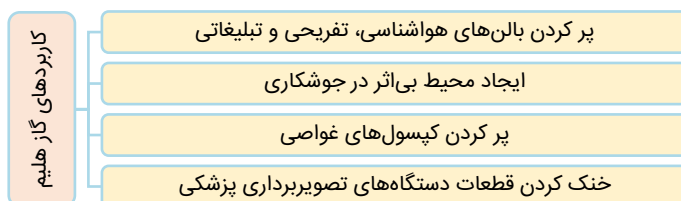
(متوسط - مفهومی - ۱۰۰۲)

پاسخ: گزینه ۲

عبارتهای (الف) و (ت) درست هستند.

بررسی موارد:

«الف»: نمودار زیر، کاربردهای گاز هلیوم را نشان می دهد:



با توجه به نمودار بالا، از گاز هلیوم، برای پر کردن بالن های هواشناسی و کیسول های غواصی استفاده می شود.

«ب»: فرمول شیمیایی کروم (II) اکسید به صورت CrO بوده و شمار آیون ها و کاتیون ها در واحد فرمولی این ماده برابر با یک است. در واحد فرمولی این ماده، یک اتم کروم و یک اتم اکسیژن وجود دارد. بر این اساس، نسبت جرم کروم به اکسیژن در یک نمونه از کروم (II) اکسید را به صورت زیر محاسبه می کنیم:

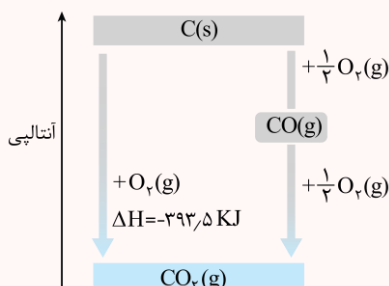
$$\frac{Cr}{O} = \frac{52}{16} = 3/25$$

«پ»: گاز آرگون، سومین عضو از خانواده گازهای نجیب (عناصر موجود در گروه ۱۸ جدول دوره ای) بوده و عدد اتمی آن برابر با ۱۸ است. آرگون، گازی بی رنگ، بی بو و غیرسمی است که از آن برای ساخت لامپ رشته ای استفاده می شود. علاوه بر این، از گاز آرگون به عنوان محیط بی اثر در جوشکاری و برش فلزها نیز استفاده می شود. این گاز در پتروشیمی شیراز از تقطیر جزء جزء هوای مایع با خلوص بسیار زیاد تهیه می شود. گاز کربن مونوکسید نیز مشابه به گاز آرگون، یک گاز بی رنگ و بی بو است. توجه داریم که گاز کربن مونوکسید، یک گاز بسیار سمی به شمار می رود و در صورت ورود مقدار زیادی از آن به خون، فرد دچار خفگی شده و می میرد. ساختار مولکول کربن مونوکسید به صورت زیر است:



در رابطه با گاز کربن مونوکسید، به مطالب زیر توجه کنید.

- گاز CO یا کربن مونوکسید از سوختن ناقص سوخت های فسیلی تولید می شود. این گاز بی رنگ، بی بو و بسیار سمی است.
- کربن مونوکسید از مخلوط کربن و اکسیژن پایدارتر و از کربن دی اکسید ناپایدارتر است؛ به طوری که کربن مونوکسید تولید شده در سوختن ناقص، در حضور اکسیژن و در شرایط مناسب دوباره می سوزد و به کربن دی اکسید تبدیل می شود: $2CO(g) + O_2(g) \rightarrow 2CO_2(g)$
- نمودار انرژی واکنش سوختن یک نمونه از کربن و مراحل انجام شدن آن به صورت زیر است:



• میل ترکیبی هموگلوبین خون با این گاز بسیار زیاد و بیش از ۲۰۰ برابر اکسیژن است. مولکول‌های این گاز پس از اتصال به هموگلوبین از رسیدن اکسیژن به بافت‌های بدن جلوگیری می‌کنند. این ویژگی باعث مسمومیت می‌شود و سامانه عصبی را فلج می‌کند؛ به‌طوری که قدرت هرگونه اقدامی را از فرد مسموم می‌گیرد و بدین ترتیب باعث مرگ می‌شود.

• چگالی این گاز کمتر از هوا و قابلیت انتشار آن در محیط بسیار زیاد است؛ به‌طوری که به‌سرعت در همه فضای اتاق پخش می‌شود.

«ت»: هلیوم در کره زمین، به مقدار خیلی کم یافت می‌شود؛ به‌طوری که مقدار ناچیزی از آن در هوا و مقدار بیشتری از آن در لایه‌های زیرین پوسته زمین وجود دارد. به همین خاطر، منابع زمینی آن از هواکره سرشارتر بوده و برای تولید هلیوم در مقیاس صنعتی مناسب‌تر هستند. توجه داریم که هلیوم از واکنش‌های هسته‌ای در ژرفای زمین تولید می‌شود. این گاز پس از نفوذ به لایه‌های زمین، وارد میدان‌های گازی می‌شود. در خورشید نیز طی واکنش‌های هسته‌ای، گاز هیدروژن به گاز هلیوم تبدیل می‌شود.

گروه آموزشی ماز

۸۸- یک کارگاه در هر ساعت، ۲ کیلووات ساعت برق مصرف می‌کند. اگر کارگاه روزانه ۱۰ ساعت کار کند، بر اساس جدول زیر، برای پاک‌سازی CO_2 حاصل از این مجموعه به مدت یک ماه (۳۰ روز)، تقریباً چند درخت با قطر تنه ۷-۱۰ سانتی‌متر باید کاشته شود؟ (مقدار CO_2 تولید شده در این کارگاه، برابر با ۱۴۰۰ گرم به ازای مصرف هر کیلووات ساعت برق است).

اندازه قطر درخت	۱-۴	۴-۷	۷-۱۰	۱۰-۱۲
مقدار CO_2 مصرفی (کیلوگرم در سال)	۳/۲	۳/۶	۴/۸	۶/۹
(۱) ۱۰۵۰	(۲) ۲۱۰۰	(۳) ۱۲۲۵	(۴) ۲۴۵۰	

(آسان - مسئله - ۱۰۰۲)

پاسخ: گزینه ۲

این کارگاه در هر ساعت، ۲ کیلووات برق مصرف کرده است؛ درنتیجه در هر روز به ازای ۱۰ ساعت کار، ۲۰ کیلووات برق مصرف می‌کند و در یک ماه ۳۰ روزه این مقدار به ۶۰۰ کیلووات می‌رسد. به ازای مصرف هر کیلووات ساعت برق در کارگاه مورد نظر، ۱/۴ کیلوگرم کربن دی‌اکسید (معادل با ۱۴۰۰ گرم کربن دی‌اکسید) حاصل می‌شود؛ درنتیجه میزان CO_2 تولید شده به ازای هر ماه کار در این کارگاه، به ۸۴۰ کیلوگرم می‌رسد. هر درخت با قطر تنه ۷-۱۰ سانتی‌متر می‌تواند در هر سال (۱۲ ماه)، ۴/۸ کیلوگرم CO_2 را جذب (پاک‌سازی) کند؛ درنتیجه مقدار CO_2 پاک‌سازی شده به ازای هر درخت با این قطر در هر ماه، برابر با ۰/۴ کیلوگرم است. بر این اساس می‌توان نوشت:

$$\text{درخت ۱} \times \frac{20 \text{ kg } CO_2}{\text{درخت ۱}} = 2100 \text{ kg } CO_2$$

برای پاک‌سازی مقدار ۸۴۰ کیلوگرم CO_2 حاصل از هر ماه این کارگاه، تقریباً باید تعداد ۲۱۰۰ درخت با قطر ۷-۱۰ سانتی‌متر کاشته شود.

گروه آموزشی ماز

۸۹- در لایه تروپوسفر، فشار گاز O_2 بر حسب ارتفاع از رابطه $P = 0.001h^2 - 0.025h + 0.2$ به‌دست می‌آید. در چه ارتفاعی از این لایه، فشار هواکره برابر با ۰/۲۵ اتمسفر می‌شود؟ (فشار اکسیژن در هر نقطه از هواکره، ۰/۲ برابر فشار کلی هواکره است).

(۴) ۲۴

(۳) ۶

(۲) ۱۸

(۱) ۱۰

(متوسط - مسئله - ۱۰۰۲)

پاسخ: گزینه ۱

فشار اکسیژن در هر نقطه، ۰/۲ برابر فشار کلی هواکره است. بر این اساس، می‌توان گفت فشار گاز اکسیژن در نقطه‌ای که فشار کلی هواکره برابر با ۰/۲۵ اتمسفر است، برابر با ۰/۰۵ اتمسفر می‌شود. از آنجا که در ارتفاع موردنظر فشار گاز اکسیژن برابر 0.05 atm است، پس رابطه مربوط به محاسبه فشار گاز اکسیژن به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$P_{O_2} = 0.05 \text{ atm} \Rightarrow P_{O_2} = 0.001h^2 - 0.025h + 0.2 = 0.05 \Rightarrow 0.001h^2 - 0.025h + 0.15 = 0$$

برای راحت‌تر حل کردن معادله درجه دوم بالا، طرفین تساوی را در ۱۰۰۰ ضرب می‌کنیم:

$$h^2 - 25h + 150 = 0 \Rightarrow (h - 10)(h - 15) = 0 \Rightarrow h_1 = 10, h_2 = 15$$

حاصل ضرب
ریشه‌ها

از آنجا که ارتفاع لایه تروپوسفر حداکثر در حدود ۱۱/۵ کیلومتر است، پس مقدار مؤلفه $h_2 = 15 \text{ km}$ ، غیرقابل قبول بوده و ارتفاع موردنظر در لایه تروپوسفر برابر با ۱۰ کیلومتر است.

گروه آموزشی ماز

۹۰- چه تعداد از عبارات‌های داده شده درست هستند؟

- الف: مجموع درصد حجمی همه گازهای نجیب موجود در هوای پاک و خشک، کمتر از ۱ درصد است.
 ب: با سرد کردن یک نمونه هوا تا دمای 0°C ، رطوبت هوا میعان شده و در قالب آب از آن خارج می‌شود.
 پ: در آرایش الکترونی کاتیون‌های موجود در بلور مس (I) سولفید، هیچ الکترونی در لایه $n = 4$ وجود ندارد.
 ت: سنگ معدن آلومینیم، بوکسیت نام داشته و این ماده، نمونه ناخالص از فلز آلومینیم بوده و همواره به رنگ سفید دیده می‌شود.

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

(متوسط - مسئله - ۱۰۰۲)

پاسخ: گزینه ۲

عبارت‌های (الف) و (پ) درست هستند.

بررسی موارد:

«الف»: مجموع درصد حجمی گازهای N_2 و O_2 در هواکره برابر با $99/03$ درصد می‌شود و گاز CO_2 هم حدود $0/03$ درصد حجمی هواکره را تشکیل می‌دهد. با این حساب مجموع درصد حجمی بقیه گازهای موجود در هواکره که گازهای نجیب هم جزئی از آن‌ها می‌باشند، حداکثر برابر با $0/94$ درصد است. به‌خاطر کم بودن درصد حجمی گازهای نجیب در هواکره، به این مواد گازهای کمیاب نیز گفته می‌شود.

«ب»: با کاهش دمای هوا تا صفر درجه سانتی‌گراد، رطوبت موجود در هوا به عنوان اولین جزء، به‌صورت یخ از مخلوط هوا خارج می‌شود. توجه داریم که دمای صفر درجه سانتی‌گراد معادل با نقطه ذوب یخ است. با کاهش دمای هوا تا دمای -78°C ، گاز کربن دی‌اکسید هوا نیز به حالت جامد در آمده و در قالب یخ خشک، از آن خارج می‌شود. بر این اساس، می‌توان گفت دو ماده اولی که از هواکره جدا می‌شوند، به حالت جامد از مخلوط خارج شده‌اند. ترتیب خارج شدن اجزای موجود در هواکره طی مراحل تولید هوای مایع، به‌صورت زیر است:

هلیوم (در صورت کاهش دمای هوا تا -269 درجه)

نیتروژن

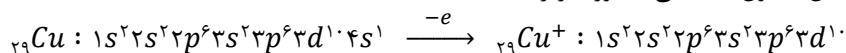
آرگون

اکسیژن

کربن دی‌اکسید

بخار آب

«پ»: مس (I) سولفید، یک ترکیب یونی با فرمول شیمیایی Cu_2S است. کاتیون موجود در این ترکیب، Cu^{+} است. فلز مس علاوه بر کاتیونی با بار الکتریکی $+1$ ، توانایی ایجاد کاتیونی با بار $+2$ را نیز دارد. آرایش الکترونی این کاتیون تک اتمی به‌صورت زیر است:

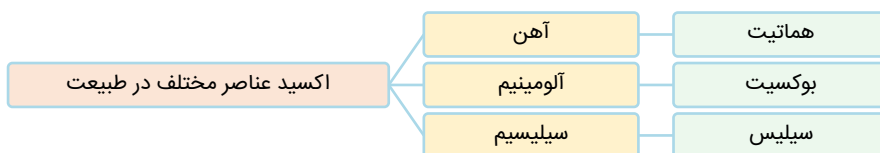


همان‌طور که مشخص است، در آرایش الکترونی این کاتیون هیچ الکترونی در لایه چهارم الکترونی وجود ندارد. در ساختار این کاتیون، ۳ لایه اول الکترونی به‌طور کامل پر از الکترون هستند.

«ت»: سنگ معدن آلومینیم، بوکسیت نام داشته و این ماده، نمونه ناخالصی از آلومینیم اکسید (Al_2O_3) است که به رنگ قهوه‌ای دیده می‌شود. تصویر زیر، نمایی از سنگ معدن بوکسیت را نشان می‌دهد:



عناصر آهن، آلومینیم و سیلیسیم، اغلب در طبیعت به‌صورت زیر دیده می‌شوند.



سنگ معدن آهن، به اصطلاح هماتیت نام دارد. این سنگ معدن به رنگ قهوه‌ای روشن دیده شده و یک نمونه از آن، شامل آهن (III) اکسید ناخالص می‌شود.

گروه آموزشی ماز

۹۱- پس از موازنه معادله واکنش $P_4O_{10}(s) + NaOH(aq) \rightarrow Na_3PO_4(aq) + H_2O(l)$ ، مجموع ضرایب فراورده‌ها در این واکنش با شمار جفت الکترون‌های ناپیوندی در مولکول کدام ماده برابر می‌شود؟

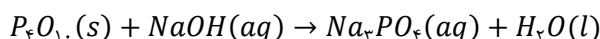
(۴) هیدروژن سولفید

(۳) نیتروژن تری‌فلوئورید

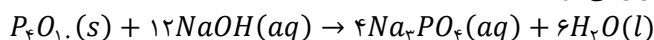
(۲) گوگرد تری‌اکسید

(۱) دی‌نیتروژن مونوکسید

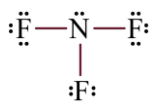
معادله واکنش داده شده به صورت زیر است:



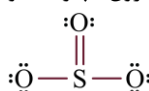
فرایند موازنه را با دادن ضریب ۴ به Na_3PO_4 و ضریب یک به P_4O_{10} آغاز کرده و بر این اساس، ضرایب سایر مواد شرکت کننده در این واکنش را پیدا می کنیم. پس از موازنه، معادله این واکنش به صورت زیر می شود:



همان طور که مشخص است، مجموع ضرایب فراورده ها در معادله این واکنش برابر با ۱۰ خواهد بود. ساختار لوویس مولکول نیتروژن تری فلئورید با فرمول مولکولی NF_3 به صورت زیر خواهد بود:



همان طور که مشخص است، در ساختار مولکولی این ماده ۱۰ جفت الکترون ناپیوندی وجود دارد. ساختار مولکولی گوگرد تری اکسید نیز به صورت زیر است:



ساختار مولکولی دی نیتروژن مونوکسید (N_2O) نیز به صورت زیر خواهد بود:



توجه داریم که در ساختار N_2O ، یک پیوند یگانه و یک پیوند سه گانه وجود دارد. ساختار مولکول هیدروژن سولفید (H_2S) نیز به صورت زیر است:



گروه آموزشی ماز

۹۲- کدام موارد از عبارتهای داده شده درست هستند؟

- الف: بخش کوچکی از پرتوهای خورشیدی توسط هواکره و قسمت عمده آن توسط زمین جذب می شود.
ب: قیمت هر گرم گاز طبیعی، بیشتر از زغال سنگ بوده و از سوختن هر گرم آن، گرمای کمتری حاصل می شود.
پ: فلز منیزیم، در حضور اکسیژن کافی سوخته و ضمن تولید منیزیم اکسید، یک نور زرد رنگ نیز تولید می کند.
ت: افزودن برخی از مواد مثل آهک به خاک، سبب می شود تا مقدار و نوع مواد معدنی در دسترس گیاهان تغییر کند.
- (۱) «الف» و «پ» (۲) «الف» و «ت» (۳) «ب» و «پ» (۴) «ب» و «ت»

عبارتهای (الف) و (ت) درست هستند.

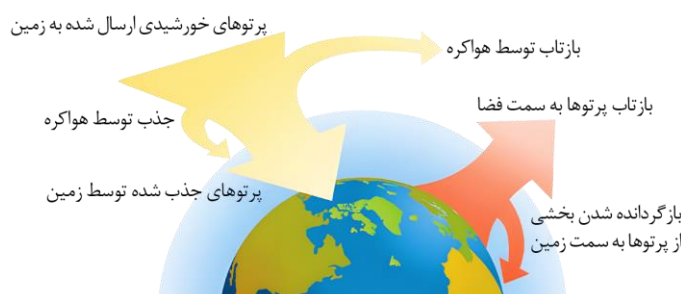
بررسی موارد:

«الف»: از پرتوهای خورشیدی رسیده به کره زمین، بخش عمده ای از پرتوها به سطح زمین می رسند و بخش کوچکی از آنها نیز به وسیله هواکره جذب می شود. زمین بخش قابل توجهی از گرمای جذب شده را به صورت پرتوهای فرو سرخ دفع می کند. البته، توجه داریم که گازهای گلخانه ای موجود در هواکره مانع از خروج کامل گرمای آزاد شده می شود.

اثر گلخانه ای

کره زمین با لایه ای از گازهای مختلف به نام هواکره احاطه شده است. این لایه برای زمین همانند لایه پلاستیکی برای گلخانه است و سبب گرم شدن آن می شود، به طوری که اگر این لایه وجود نداشت میانگین دمای کره زمین به -18°C کاهش می یافت. پرتوهای خورشیدی پس از برخورد به زمین با طول موجهای بلندتر به هواکره برمی گردند و برخی گازهای موجود در هواکره مانند CO_2 و H_2O مانع از خروج آنها می شوند و بدین ترتیب زمین را گرم تر می کنند. از میان گازهای موجود در هواکره، گاز کربن دی اکسید نقش بسزایی در ایجاد اثر گلخانه ای دارد. این گاز در بسیاری از فعالیت های صنعتی انسان از جمله فرایند استخراج فلز آهن از سنگ معدن، تولید می شود.

تصویر زیر، نمایی از فرایند جذب و بازتاب پرتوهای خورشیدی توسط زمین را نشان می دهد:



«ب»: قیمت هر گرم گاز طبیعی بیشتر از هر گرم زغال سنگ است، ولی گرمای آزاد شده از سوختن هر گرم گاز طبیعی بیشتر از هر گرم زغال سنگ است. در جدول زیر اطلاعاتی در رابطه با چند سوخت مهم را مشاهده می‌کنید:

نام سوخت	بنزین	زغال سنگ	هیدروژن	گاز طبیعی
سوخت فسیلی	✓	✓	×	✓
گرمای آزاد شده (کیلوژول بر گرم)	۴۸	۳۰	۱۴۳	۵۴
فراورده‌های سوختن	CO, CO_2, H_2O	CO, CO_2, H_2O, SO_2	H_2O	CO, CO_2, H_2O
قیمت (ریال به ازای یک گرم)	۱۴	۴	۲۸۰۰	۵

«پ»: فلز منیزیم، در حضور اکسیژن کافی سوخته و ضمن تولید منیزیم اکسید، یک نور سفید و درخشان نیز تولید می‌کند. در نقطه مقابل، بر اثر سوختن فلز سدیم در حضور اکسیژن کافی، نور زرد رنگ تولید می‌شود.

«ت»: آهک (کلسیم اکسید)، یک اکسید بازی است. افزودن آهک به زمین‌های کشاورزی و دریاچه‌های اسیدی، موجب کاهش خاصیت اسیدی این دریاچه‌ها و افزایش pH آب موجود در آن‌ها می‌شود. افزودن این مواد به خاک، با تغییر غلظت یون هیدروژن در نمونه خاک، سبب می‌شود تا مقدار و نوع مواد معدنی در دسترس گیاهان تغییر کند.

گروه آموزشی ماز

۹۳- یک مخلوط گازی، شامل شمار مول‌های برابر از عناصر نیتروژن، اکسیژن و هلیوم می‌شود. دمای این مخلوط را تا 200°C - درجه سانتی‌گراد کاهش داده و پس از جدا کردن مواد مایع تولید شده، دما را مجدداً افزایش می‌دهیم. طی این فرایند، جرم مخلوط گازی مورد نظر چند برابر می‌شود؟

$$(O = 16 \text{ و } N = 14 \text{ و } He = 4 : g.mol^{-1})$$

$$\frac{1}{16} \quad (1) \quad \frac{1}{32} \quad (2) \quad \frac{1}{2} \quad (3) \quad \frac{1}{16} \quad (4)$$

(متوسط - مسئله و مفهومی - ۱۰۰۲)

پاسخ: گزینه ۱

مخلوط گازی، شامل شمار مول‌های برابر از عناصر نیتروژن، اکسیژن و هلیوم می‌شود. فرض می‌کنیم که مقدار مول هریک از این مواد در مخلوط اولیه برابر با x مول است. بر این اساس، جرم هر گاز را در مخلوط اولیه محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \text{جرم نیتروژن} : \text{mol } N_2 = x \text{ mol } N_2 \times \frac{28 \text{ g } N_2}{1 \text{ mol } N_2} &= 28x \text{ g} \\ \text{جرم اکسیژن} : \text{mol } O_2 = x \text{ mol } O_2 \times \frac{32 \text{ g } O_2}{1 \text{ mol } O_2} &= 32x \text{ g} \\ \text{جرم هلیوم} : \text{mol } He = x \text{ mol } He \times \frac{4 \text{ g } He}{1 \text{ mol } He} &= 4x \text{ g} \end{aligned}$$

بر این اساس، داریم:

$$64x \text{ g} = 4x + 28x + 32x = \text{جرم اکسیژن} + \text{جرم نیتروژن} + \text{جرم هلیوم} = \text{جرم اولیه مخلوط گازی}$$

دمای این مخلوط را تا 200°C - درجه سانتی‌گراد کاهش داده و دو گاز نیتروژن و اکسیژن، میعان می‌شوند اما هلیوم به حالت گاز باقی می‌ماند. طبق فرض سؤال، پس از جدا کردن مواد مایع تولید شده (نیتروژن و اکسیژن)، دما را مجدداً افزایش می‌دهیم. در این حالت، فقط گاز هلیوم باقی می‌ماند. در این حالت، جرم نمونه گازی ایجاد شده را با مخلوط اولیه مقایسه می‌کنیم:

$$\frac{\text{جرم نمونه نهایی}}{\text{جرم نمونه اولیه}} = \frac{\text{جرم هلیوم}}{\text{جرم اکسیژن} + \text{جرم نیتروژن} + \text{جرم هلیوم}} = \frac{4x}{4x + 28x + 32x} = \frac{4}{64} = \frac{1}{16}$$

طی این فرایند، جرم مخلوط مورد نظر $\frac{1}{16}$ برابر شده است.

گروه آموزشی ماز

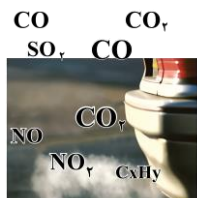
۹۴- کدام یک از مطالب زیر نادرست است؟

- (۱) بعضی از ترکیب‌های شیمیایی، دو یا چند نوع آلوتروپ دارند که خواص شیمیایی و فیزیکی آن‌ها متفاوت از هم است.
- (۲) با سوزاندن سوخت‌های فسیلی در خودرو، ۲ نوع اکسید مختلف از نافلز موجود در گروه ۱۴ جدول دوره‌ای تولید می‌شود.
- (۳) گاز گوگرد دی‌اکسید خارج شده از قسمت فوقانی آتشفشان‌ها، پس از واکنش دادن در هواکره به H_2SO_4 تبدیل می‌شود.
- (۴) مرجان‌ها، نوعی کیسه‌تن بوده و در اسکلت آن‌ها یک ترکیب یونی دوتایی وجود دارد که با کاهش pH آب، از بین می‌رود.

(متوسط - مفهومی - ۱۰۰۲)

پاسخ: گزینه ۱

عنصر، ماده‌ای است که از اتم‌های یکسان ساخته شده باشد. این در حالی است که ترکیب، ماده‌ای به شمار می‌رود که از اتصال اتم‌های چند عنصر به یکدیگر ایجاد شده است. به شکل‌های مختلف مولکولی یا بلوری یک عنصر (نه ترکیب)، دگرشکل یا آلوتروپ می‌گویند. دگرشکل‌ها به دلیل ساختار متفاوت، خواص فیزیکی و شیمیایی متفاوتی دارند. به عنوان مثال، اوزون و اکسیژن دو دگرشکل هستند که خواص فیزیکی و شیمیایی متفاوتی نسبت به یکدیگر دارند. الماس و گرافیت نیز دو دگرشکل کربن هستند.



۲ بر اساس شکل روبه‌رو در اثر سوزاندن سوخت‌های فسیلی، آلاینده‌های CO ، CO_2 ، NO ، NO_2 ، SO_2 ، C_xH_y وارد هواکره می‌شوند:

از میان آلاینده‌های تولید شده فقط در C_xH_y اتم اکسیژن وجود ندارد. همان‌طور که مشخص است، اتم اکسیژن در ترکیب با سه نوع نافلز (گوگرد، کربن و نیتروژن)، در ساختار ۵ نوع آلاینده وجود دارد. کربن دی‌اکسید و کربن مونوکسید، آلاینده‌های حاصل از واکنش کربن با اکسیژن هستند. دقت کنید که در میان آلاینده‌ها گاز SO_2 وجود ندارد، چون این گاز در هواکره از واکنش گاز SO_2 با اکسیژن حاصل می‌شود.

۳ از آتشفشان‌ها گاز SO_2 یا گوگرد دی‌اکسید خارج می‌شود. این گاز در اتمسفر با اکسیژن ترکیب شده و به گاز SO_3 تبدیل می‌شود و باران‌های اسیدی را به وجود می‌آورد. به‌طور کلی، هم از دودکش کارخانه‌ها و هم از مجرای آتشفشان‌ها، گاز SO_2 خارج می‌شود.

۴ مرجان‌ها، گروهی از کیسه‌تنان با اسکلت آهکی هستند و همان‌طور که می‌دانیم، آهک همان کلسیم اکسید با فرمول مولکولی CaO است. کلسیم اکسید فقط از دو عنصر مختلف ساخته شده و یک ترکیب یونی دوتایی به شمار می‌رود. پژوهش‌ها نشان می‌دهند که این جانداران با افزایش مقدار کربن دی‌اکسید در آب و کاهش pH آب (اسیدی شدن آب)، از بین می‌روند. در واقع اسید موجود در آب با اسکلت آهکی این جانداران واکنش داده و با از بین بردن این اسکلت، موجب مرگ جاندار می‌شود.

گروه آموزشی ماز

۹۵- کدام ماده در واکنش با آب، محلولی با $pH > 7$ را ایجاد کرده و نسبت شمار اتم‌ها به شمار عناصر در واحد فرمولی این ماده، کدام است؟

(۴) دی‌نیتروژن پنتاکسید - ۲/۵

(۳) گوگرد دی‌اکسید - ۱/۵

(۲) سدیم اکسید - ۱/۵

(۱) منیزیم اکسید - ۲

(آسان - مفهومی - ۱۰۰۲)

پاسخ: گزینه ۲

اکسیدهای فلزی در واکنش با آب، محلول‌هایی بازی با $pH > 7$ را ایجاد می‌کنند. این مواد در واکنش با آب، غلظت یون هیدروکسید را در محلول مورد نظر افزایش می‌دهند. منیزیم اکسید و سدیم اکسید، از جمله اکسیدهای بازی هستند که فرمول شیمیایی آن‌ها به ترتیب به صورت MgO و Na_2O است. نسبت شمار اتم‌ها به شمار عناصر در واحد فرمولی این دو ماده به ترتیب برابر با ۱ و ۱/۵ است. توجه داریم که اکسیدهای نافلزی در واکنش با آب، محلول‌هایی اسیدی با $pH < 7$ را ایجاد می‌کنند. این مواد در واکنش با آب، غلظت یون هیدروژن را در محلول مورد نظر افزایش می‌دهند. کربن دی‌اکسید و گوگرد تری‌اکسید، نمونه‌هایی از اکسیدهای اسیدی هستند.

گروه آموزشی ماز

آزمون های الکترونیک ماز

- ✓ بیش از ۱۲۰ هزار شرکت کننده
- ✓ مرور حداقل ۳ باره تمام دروس
- ✓ بانک تست مولفان مطرح کنکور
- ✓ کادر درسنامه دقیق و جامع برای هر تست
- ✓ کارنامه تحلیلی دقیق

زمان برگزاری:

هر ۲ هفته

پنجشنبه ها

ساعت ۷ تا ۱۷ 

× × ×



ورود به صفحه آزمون ↑

