



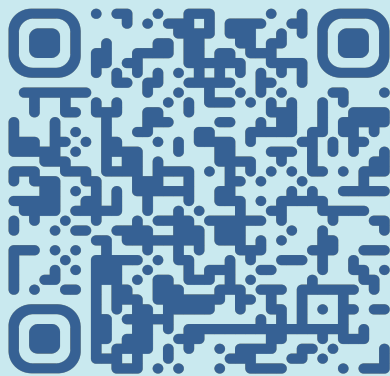
دفترچه پاسخ

مرور نیم سال اول دوازدهم



پنجشنبه

۱۴۰۳/۱۰/۲۰



برای دیدن پاسخنامه ویدئویی آزمون
QRcode بالارو اسکن یا روی لینک زیر کلیک کن!

مشاهده پاسخنامه ویدئویی آزمون

گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی - پایه دوازدهم آزمون الکترونیکی ماز - مرحله ۷

درس	مسئول درس	طراحان	ویراستاران
ریاضیات	حسین شفیع زاده سیدجواد نظری مهرداد کیوان	محمد پورسعید - رضا توکلی سوگند روشنی - امیرحسین ابومحbob مهدی عزیزی - کیوان دارابی	مهرداد اسپیدکار - حمیدرضا ولیپور علیرضا ملک حسینی
فیزیک	سجاد صادقی زاده سعید احمدی	سعید احمدی - مجید رجبی وندچالی حسین عبدوی نژاد - احسان ایرانی - سجاد صادقی زاده امیررضا خویینی ها - مجید میرزائی محسن قندچلر - مهدی یوسفی	حسین عبدوی نژاد - حامد نبی منصور
شیمی	فرشاد هادیان فرد	فرشاد هادیان فرد - حسین ایروانی محمد کهنه پوشی	فرهنگ امیری محمد داوودآبادی فراهانی بنیامین بهرامی

مدیر آزمون: دکتر رسول خنجری

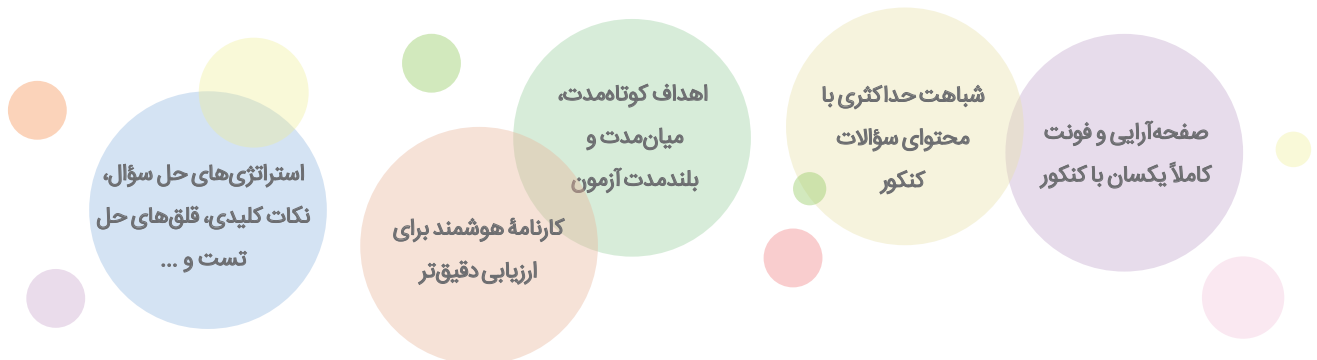
حق چاپ و تکثیر سؤالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز «گروه ماز» مجاز می باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می شود.
به دلیل عدم رضایت تیم ماز، هرگونه استفاده غیرقانونی از دفترچه سؤالات و پاسخنامه ماز برای تمامی اشخاص، شرعاً حرام است.



AzmonVIP

سلام، دمت گرم که تلاشت رو ادامه میدی و با نتیجه آزمونت یادگیریت رو کامل میکنی!

خیال کن میخوای توی شب تاریک از یک جنگل عبور کنی و به مقصدی که اولین باره سمتش میری برسی. اگه توی این مسیر یک چراغ و یک مسیرپاب داشته باشی خیالت راحت‌تره ولی قدم‌ها رو خودت باید برداری ما همراهت هستیم تا توی این مسیر که بارها با دانش‌آموزهای موفق دیگه طی کردیم، تو رو به سمت هدفت راهنمایی کنیم. امسال بیش از ۲۰۰ هزار نفر در آزمون‌های متوسطه دوم ماز شرکت می‌کنن و شما میتونی ارزیابی دقیقی از خودت داشته باشی و با این بازخورد از یک جامعه آماری بالا ساعت مطالعات رو بالا ببری و روش مطالعات رو اصلاح کنی و مرحله به مرحله خودت رو به هدفت نزدیک‌تر کنی. ما هم تلاشمون رو می‌کنیم که هرچی به عنوان چراغ و مسیرپابی نیاز داری در اختیارت بذاریم تا با خیال راحت این مسیر رو طی کنی :) حالایک سری از کارهایی که به ویژگی‌های آزمون اضافه کردیم رو بهت میگم...



بخشی از کارهایی که اخیراً برای ارتقای کیفیت و خدمات آزمون ماز انجام شده:

برنامه مطالعاتی برای تمام رشته‌ها و تمام پایه‌ها: می‌دونیم که برنامه‌ریزی و رسیدن به بودجه‌بندی آزمون کار سخته و کلی انرژی باید صرف این برنامه‌ریزی بشه! پس ما بعد از هر آزمون، تمام لقمه‌های مطالعاتی + یک پلتفرم مطالعاتی (کاربرگ مطالعاتی) برای رسیدن به آزمون بعد در اختیارتون قرار می‌دیم تا با خیال راحت و بدون دغدغه، برنامه‌ریزی کنید و به آزمون بعد برسید.

پاسخنامه ویدیویی: با اینکه پاسخنامه آزمون رو سعی می‌کنیم به کامل‌ترین شکل ممکن براتون بنویسیم؛ اما باز هم اگه برای حل برخی سؤالات دچار ابهام شدین می‌تونید از پاسخنامه ویدیویی آزمون استفاده کنید. این پاسخنامه توسط اساتید کلاس آنلاین ماز و مؤلفان و طراحان آزمون ماز حاضر میشه.

آزمون‌های تیک آبی برای جلوگیری از تقلب: درسته که ما تبلیغات تلویزیونی آن چنانی نداریم، اما به لطف نظرات مثبت شما، جامعه آماری ماز خیلی زیاد شده و کسب رتبه واقعی در این جامعه آماری می‌تونه بهتون کمک کنه که رتبه واقعی‌تون در کنکور رو هم تخمین بزنید. حالا برای اینکه شانس تقلب در آزمون به حداقل برسه، در برخی از آزمون‌های ماز برای یک درس، آزمون تیک آبی گرفته میشه (حدود ۱۰ تا ۱۵ سؤال) که این آزمون برای هر فرد متفاوت از بقیه افراد هست، تأثیری هم در درصد و کارنامه نداره، اما اگه تفاوت تراز یک نفر در این آزمون با همون درس در آزمون ماز، فاحش باشه، به این معنی هست که احتمالاً این فرد تقلب کرده و به این فرد رتبه داده نمیشه، تا کسانی که تقلب نکردن، رتبه واقعی خودشون رو ببینن. پس حتماً در آزمون تیک آبی شرکت کنید و به همه سؤالاتش پاسخ بدید.

درجه سختی تصادفی: حتماً از کسانی که کنکور دادن شنیدین که در کنکور هر سال، به صورت کاملاً تصادفی یک یا چند تا از دروس، سخت‌تر از حالت عادی طراحی میشن! و ممکنه سر جلسه کنکور خیلی متعجب بشید و استراتژی کنکورتون به طور کل به هم بخوره! ما برای آمادگی این حالت، در آزمون‌های نیمسال دوم ماز، در هر آزمون یک درس رو به صورت تصادفی سخت‌تر از حالت عادی طراحی می‌کنیم تا برای هر شرایطی در کنکور سراسری، آمادگی کامل داشته باشید.

سرنخ برای درصد گرفتن در درس‌های دشوار: بعضی درس‌ها ذاتاً دشوار هستن، نه فقط برای شما، برای همه! به طور مثال درس ریاضی برای خود من (رسول خنجری)، درس سختی بوده همیشه! اما توی کنکور خودم (کنکور ۹۲)، ریاضی رو تقریباً ۵۷ درصد زدم! چطوری؟ با پیدا کردن سؤال‌های آسون (به جای اتلاف وقت سر سؤال‌های سخت)! حالا برای یادگیری این استراتژی و درصد گرفتن در درس‌های دشوار، داخل بعضی از آزمون‌ها براتون سرنخ‌هایی گذاشتیم، مثلاً سرنخ سؤالات «مشابه تمرین کتاب درسی» در این آزمون! این سؤالات هم به درد امتحان نهایی‌تون می‌خورن، هم میتونن توی کنکور طرح بشن! و هم حل کردنشون براتون راحت‌تره! و باید یاد بگیرید این جنس سؤالات رو داخل هر آزمونی از جمله کنکور، پیدا کنید و اول اونارو حل کنید.

کلام آخر:

یک تیم با بیش از ۵۰۰ نفر در حال کار هستن تا آزمون‌های ماز با حداکثر کیفیت حاضر بشن و به شما کمک کنن و مسیر موفقیت رو براتون ساده‌تر کنن. همیشه از نظرات و کامنت‌های خوبتون انرژی می‌گیریم. مرسی که همراهمون هستین.

راستی! حتماً در نظرسنجی آزمون شرکت کنین و نظرات و پیشنهاداتتون رو برامون بنویسین.

ریاضی

یکی از مطابقت‌های آزمون سال گذشته ماز با کنکور ۱۴۰۳

۳۲- حداقل چند عضو از مجموعه اعداد طبیعی کمتر از ۲۱ انتخاب کنیم تا مطمئن باشیم حداقل ۲ عضو با تفاضل ۱۱ در بین آن‌ها وجود دارد؟

۱۳ (۴)

۱۲ (۳)

۱۱ (۲)

۱۰ (۱)

(مرحله ۱۸ آزمون‌های سالیانه - ریاضیات رشته ریاضی)

۳۹- حداقل چند عضو از مجموعه $\{14, 15, 16, \dots, 20, 22, 23, 24, \dots, 28\}$ انتخاب کنیم تا به طور قطع، لااقل سه عضو انتخاب شده اعداد متوالی باشند؟

۹ (۴)

۱۰ (۳)

۱۱ (۲)

۱۲ (۱)

(کنکور تیر ۱۴۰۳ - ریاضیات رشته ریاضی)



برای مشاهده
همه مطابقت‌ها
اینجا رو اسکن کن!

biomaze.ir

یا رو این کلیک کن!



دانش‌آموزان عزیز ماز

ما اومدیم با یکی دیگه از آزمون‌هامون

توی این آزمون یه سری مباحث جدید بهمون اضافه شدن حالا اگه می‌خوای ببینی توی این آزمون چه خبره باهامون همراه باش...

- آقا! + بله؟

- توی این آزمون دقیقاً از چه قسمت‌هایی سوال طرح کردین؟

+ مباحثی که توی این آزمون از شما سوال اومده رو می‌تونن توی جدول پایینی ببینی...

بخش	کتاب	فصل	مباحث	تعداد سوال
دوازدهم	حسابان ۲	فصل اول	تبدیل نمودار توابع	۳
			یکنوایی توابع	۱
			بخش‌پذیری و قضیه تقسیم	۱
		فصل دوم	تناوب و تانژانت	۴
			معادلات مثلثاتی	۴
		فصل سوم	حدهای نامتناهی	۲
			حد در بی‌نهایت	۵
	هندسه ۳	فصل اول	ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها	۱
			وارون ماتریس و دترمینان	۵
		فصل دوم	آشنایی با مقاطع مخروطی	۱
			دایره	۳
	ریاضیات گسسته	فصل اول	استدلال ریاضی	-
			بخش‌پذیری در اعداد صحیح	۲
		فصل دوم	هم‌نهشتی در اعداد صحیح و کاربردها	۴
			معرفی گراف	۴

- آقا! + بله؟

- از این مباحثی که گفتین، کدوما مهم‌ترن؟

+ خب همه مباحث اهمیت خاص خودشون رو دارن و می‌تونن به صورت مجزا و یا ترکیبی با بقیه مباحث توی کنکور مطرح بشن ولی اگه بخوام مهم‌ترها رو بگم، از بین همه این مباحث، قسمت‌های "حد در بی‌نهایت"، "تناوب و تانژانت" و قسمت "معادلات مثلثاتی" در حسابان و همچنین قسمت "وارون ماتریس و دترمینان" در هندسه ۳ و نهایتاً قسمت "هم‌نهشتی و کاربردها" در ریاضیات گسسته اهمیت بیشتری دارن.

بزن بریم که آزمون رو با هم تحلیل کنیم...

حسین شفیع‌زاده - رتبه ۶ کنکور ۶۷ و مسئول درس ریاضی آزمون ماز

۱- به ازای چند مقدار صحیح k ، تابع نمایی $f(x) = (32 - 2k^2)^x$ روی $\mathbb{R}$ صعودی است؟

۹ (۴)

۸ (۳)

۷ (۲)

۶ (۱)

(آسان - یکنوایی و بخش‌پذیری - مفهومی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۲

شرط این که تابع نمایی $f(x) = a^x$ روی $\mathbb{R}$ صعودی باشد، این است که $a > 1$ باشد، پس داریم:

$$32 - 2k^2 > 1 \Rightarrow 2k^2 < 31 \Rightarrow k^2 < \frac{31}{2} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} -3 \leq k \leq 3 \Rightarrow \text{مقدار صحیح برای } k \text{ وجود دارد.}$$



تابع نمایی

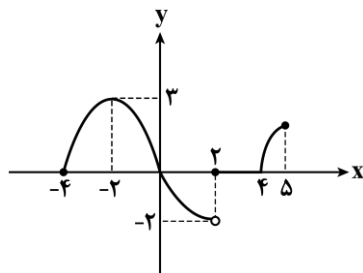
هر تابع به فرم $f(x) = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$) را تابع نمایی می‌گوییم. اگر $a > 1$ باشد، تابع اکیداً صعودی و اگر $0 < a < 1$ باشد، تابع اکیداً نزولی است.

گروه آموزشی ماز



AzmonVIP

۲- اگر نمودار تابع $y = f(\frac{y-x}{3})$ به شکل زیر و دامنه تابع $g(x) = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}f(2x+1)$ بازه $[a, b]$ باشد، حاصل $12a - 3b$ کدام است؟



- (۱) ۲
- (۲) -۶
- (۳) -۱۰
- (۴) ۱۵

(متوسط - تبدیل نمودار توابع - مفهومی / محاسباتی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۲

چون طبق شکل داده شده، دامنه تابع $y = f(\frac{y-x}{3})$ بازه $[-4, 5]$ است، پس خواهیم داشت:

$$-4 \leq x \leq 5 \Rightarrow -5 \leq -x \leq 4 \Rightarrow 2 \leq 7-x \leq 11 \Rightarrow \frac{2}{3} \leq \frac{7-x}{3} \leq \frac{11}{3}$$

پس دامنه تابع $y = f(x)$ بازه $[\frac{2}{3}, \frac{11}{3}]$ است و در نتیجه باید داشته باشیم:

$$\frac{2}{3} \leq 2x+1 \leq \frac{11}{3} \Rightarrow -\frac{1}{3} \leq 2x \leq \frac{8}{3} \Rightarrow -\frac{1}{6} \leq x \leq \frac{4}{3}$$

پس دامنه تابع $g(x) = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}f(2x+1)$ به صورت $D_g = [-\frac{1}{6}, \frac{4}{3}]$ است و بنابراین $a = -\frac{1}{6}$ و $b = \frac{4}{3}$ می‌باشد داریم: $12a - 3b = -2 - 4 = -6$

یافتن دامنه

اگر دامنه تابع $y = f(x)$ بازه $[m, n]$ باشد، برای تعیین دامنه تابع $y = kf(ax+b) + h$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

محدوده x را به دست می‌آوریم که دامنه تابع $y = kf(ax+b) + h$ می‌باشد. $m \leq ax+b \leq n$ $\xrightarrow{\text{۳ طرف منهای b شده و بر a تقسیم می‌شود}}$

اگر دامنه تابع $y = kf(ax+b) + h$ بازه $[m, n]$ باشد، برای تعیین دامنه تابع $y = f(x)$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

دامنه تابع $y = f(x)$ به دست می‌آید. $m \leq x \leq n$ $\xrightarrow{\text{۳ طرف در a ضرب شده و با b جمع می‌شود}}$

گروه آموزشی ماز

۳- نمودار تابع $f(x) = 3 - \sqrt{4+2x}$ را نسبت به محور x قرینه کرده و سپس نسبت به محور y قرینه می‌کنیم و در نهایت یک واحد به بالا و k واحد به راست انتقال می‌دهیم تا تابع g به دست آید. به ازای کدام مقدار صحیح k ، دامنه تابع $f+g$ شامل دقیقاً هفده عدد صحیح خواهد بود؟

(۴) -۱۲

(۳) -۱۱

(۲) ۱۲

(۱) ۱۱

(سخت - تبدیل نمودار توابع - مفهومی / محاسباتی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۲

$$y = 3 - \sqrt{4+2x} \xrightarrow[\times (-1)]{\text{قرینه نسبت به محور xها}} y = -3 + \sqrt{4+2x} \xrightarrow[x \rightarrow -x]{\text{قرینه نسبت به محور yها}} y = -3 + \sqrt{4-2x}$$

$$\xrightarrow{\text{یک واحد به بالا}} y = -2 + \sqrt{4-2x} \xrightarrow[x \rightarrow x-k]{\text{k واحد به راست}} y = -2 + \sqrt{4-2(x-k)} = -2 + \sqrt{-2x+2k+4}$$

$$D_f : 4+2x \geq 0 \Rightarrow x \geq -2 \quad (۱)$$

$$D_g : -2x+2k+4 \geq 0 \Rightarrow 2x \leq 2k+4 \Rightarrow x \leq k+2 \quad (۲)$$

$$(۱), (۲) \xrightarrow{\text{اشتراک}} -2 \leq x \leq k+2 = D_{f+g}$$

$$\text{تعداد xهای صحیح} = (k+2) - (-2) + 1 = k+5 \xrightarrow{\text{طبق فرض}} k+5 = 17 \Rightarrow k = 12$$

گروه آموزشی ماز

۴- خط $y = m$ نمودار تابع $f(x) = \frac{x^4 + 4x}{|x|}$ را در دو نقطه قطع می‌کند. m چند مقدار طبیعی یک رقمی می‌تواند داشته باشد؟

(۴) ۲

(۳) ۴

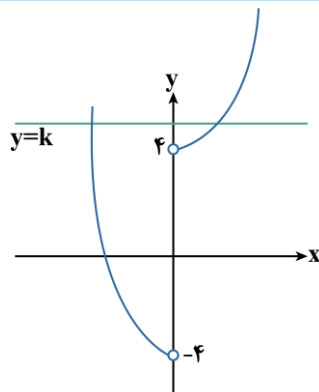
(۲) ۶

(۱) ۵

(متوسط - تبدیل نمودار توابع - مفهومی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۱

ابتدا ضابطه تابع f را ساده می‌کنیم:



$$f(x) = \frac{x^4 + 4x}{|x|}$$

$$f(x) = \frac{x(x^3 + 4)}{|x|} = \begin{cases} x^3 + 4 & x > 0 \\ -x^3 - 4 & x < 0 \end{cases}$$

با رسم نمودار تابع f مشخص می‌شود که m می‌تواند هر عدد حقیقی بزرگ‌تر از ۴ باشد، پس مقادیر طبیعی و یک رقمی برای m عبارتند از: ۵, ۶, ۷, ۸, ۹. یعنی m می‌تواند ۵ مقدار طبیعی یک رقمی را اختیار کند.

گروه آموزشی ماز

۵- اگر $Q(x)$ خارج قسمت تقسیم چند جمله‌ای $p(x) = x^5 - 4x^3 + 12x^2 - 7x + 1$ بر $(x+2)$ باشد، در این صورت باقی‌مانده تقسیم $Q(x)$ بر $(x+1)$ کدام است؟

(۴) -۲۹

(۳) -۳۹

(۲) -۳۰

(۱) -۴۰

(متوسط - یکنوایی و بخش‌پذیری - مفهومی / محاسباتی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۱ آزمون وی ای پی

$$p(x) = x^5 - 4x^3 + 12x^2 - 7x + 1$$

خارج قسمت تقسیم $p(x)$ بر $(x+2)$ برابر $Q(x)$ است، اگر باقی‌مانده آن را R در نظر بگیریم، طبق قضیه تقسیم خواهیم داشت:

$$p(x) = (x+2)Q(x) + R$$

برای یافتن R کافی است $p(-2)$ را به دست آوریم که در این صورت خواهیم داشت:

$$p(-2) = R \Rightarrow -32 + 32 + 48 + 14 + 1 = R \Rightarrow R = 63$$

$$p(x) = (x+2)Q(x) + 63$$

پس رابطه تقسیم به صورت زیر خواهد بود:

حال چون باقی‌مانده $Q(x)$ بر $(x+1)$ مورد نظر است، پس باید $Q(-1)$ را بیابیم که خواهیم داشت:

$$x = -1 \Rightarrow p(-1) = (-1+2)Q(-1) + 63$$

$$-1 + 4 + 12 + 7 + 1 = Q(-1) + 63 \Rightarrow Q(-1) = -40$$

مقسوم علیه مقسوم

$$\begin{array}{r} \uparrow \quad \uparrow \\ A(x) \mid B(x) \\ \vdots \quad \mid Q(x) \rightarrow \text{خارج قسمت} \\ \hline R(x) \rightarrow \text{باقی مانده} \end{array}$$

$$\Rightarrow A(x) = B(x) \times Q(x) + R(x)$$

تقسیم

باید درجه باقی‌مانده $(R(x))$ از درجه مقسوم علیه $(B(x))$ کمتر باشد.

یه چیز دوست داشتنی از تقسیم: اگر مقسوم علیه درجه اول باشد برای محاسبه باقی‌مانده کافی است ریشه مقسوم علیه را در مقسوم قرار دهیم.

گروه آموزشی ماز

۶- اگر دوره تناوب و مقادیر مینیمم و ماکزیمم تابع $f(x) = \sqrt{3} - \cos(\frac{\pi}{3}x)$ را به ترتیب با T_1 و m_1 و M_1 و دوره تناوب و مقادیر مینیمم و ماکزیمم تابع $g(x) = -\pi \sin(\frac{x}{3}) - 2$ را به ترتیب با T_2 و m_2 و M_2 نمایش دهیم، حاصل عبارت $\frac{T_2}{T_1} \times \frac{m_1 + M_1}{m_2 + M_2}$ کدام است؟

مشابه تمرین کتاب درسی

(۴) $\sqrt{3}\pi$

(۳) $-\sqrt{3}\pi$

(۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$

(۱) $-\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$

$$f(x) = \sqrt{3} - \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) \Rightarrow T_1 = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}} = 8, m_1 = \sqrt{3} - 1, M_1 = \sqrt{3} + 1$$

$$g(x) = -\pi \sin\left(\frac{x}{4}\right) - 2 \Rightarrow T_2 = \frac{2\pi}{\frac{1}{4}} = 8\pi, m_2 = -2 - \pi, M_2 = -2 + \pi$$

$$\frac{T_2}{T_1} \times \frac{m_1 + M_1}{m_2 + M_2} = \frac{8\pi}{8} \times \frac{\sqrt{3} - 1 + \sqrt{3} + 1}{(-2 - \pi) + (-2 + \pi)} = \pi \times \frac{2\sqrt{3}}{-4} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$$

توابع مثلثاتی

اگر بخواهیم مقادیر max و min توابع $y = a \sin(bx + c) + d$ یا $y = a \cos(bx + c) + d$ را مشخص کنیم کافی است یک بار به جای $\sin$ یا $\cos$ عدد ۱ و بار دیگر عدد -۱ قرار دهیم.

فرمول‌های دوره تناوب

$$f(x) = a \sin(bx + c) + d \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|x \text{ ضریب}|}$$

۷- در تابعی با ضابطه $f(x) = a \sin bx + 2$ فاصله دو نقطه مینیمم متوالی با عرض -۴ برابر 8π است. اگر نمودار این تابع روی بازه $(0, \frac{\pi}{4})$ اکیداً نزولی باشد، عرض این تابع در نقطه‌ای به طول 11π کدام است؟

(۴) $-3\sqrt{2} + 2$

(۳) $3\sqrt{2} + 2$

(۲) $-2\sqrt{3} + 3$

(۱) $2\sqrt{3} + 3$

فاصله دو نقطه مینیمم متوالی برابر دوره تناوب تابع است، یعنی داریم:

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = 8\pi \Rightarrow |b| = \frac{1}{4} \Rightarrow b = \pm \frac{1}{4}$$

$$y_{\min} = -|a| + 2 = -4 \Rightarrow |a| = 6 \Rightarrow a = \pm 6$$

چون تابع روی بازه $(0, \frac{\pi}{4})$ اکیداً نزولی است، پس باید a و b مختلف‌العلامت باشند، یعنی داریم:

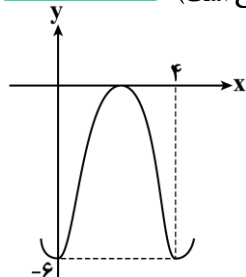
$$f(x) = -6 \sin \frac{x}{4} + 2 \Rightarrow f(11\pi) = -6 \sin\left(\frac{11\pi}{4}\right) + 2$$

$$f(11\pi) = -6 \sin\left(3\pi - \frac{\pi}{4}\right) + 2 = -6 \sin \frac{\pi}{4} + 2 = -6 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 = -3\sqrt{2} + 2$$

گروه آموزشی ماز

مشابه تمرین کتاب درسی

۸- شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a + b \cos(c\pi x)$ است. مقدار $\left[f\left(-\frac{11}{3}\right)\right]$ کدام است؟ (نماد [] نماد جزء صحیح است)



(۱) -۴

(۲) -۵

(۳) -۶

(۴) -۷

چون طبق شکل فاصله دو نقطه مینیمم تابع f برابر ۴ واحد است، پس $T = 4$ و از طرفی با توجه به شکل $a < 0$ است. همچنین تابع در همسایگی راست $x = 0$ صعودی بوده پس $b < 0$ است. طبق شکل ماکزیمم تابع برابر صفر است، پس داریم:

$$a + |b| = 0 \xrightarrow{\text{با توجه به شکل } b < 0} a - b = 0 \Rightarrow a = b$$

$$f(x) = a + a \cos(c\pi x) \xrightarrow{f(0) = -6} a + a(1) = -6 \Rightarrow 2a = -6 \Rightarrow a = -3$$

$$\Rightarrow b = -3 \Rightarrow f(x) = -3 - 3 \cos(c\pi x)$$

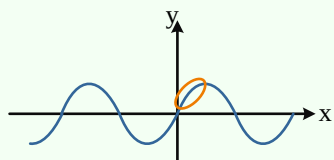
$$T = 4 \Rightarrow \frac{2\pi}{|c\pi|} = 4 \Rightarrow |c| = \frac{1}{2} \Rightarrow c = \pm \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow f(x) = -3 - 3 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

$$f\left(-\frac{11}{3}\right) = -3 - 3 \cos\left(-\frac{11\pi}{6}\right) = -3 - 3 \cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) = -3 - 3 \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right)$$

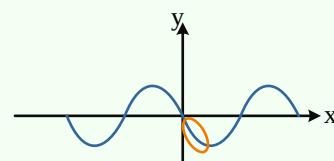
$$= -3 - 3 \cos \frac{\pi}{6} = -3 - 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -3\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \approx -3(1.87) \approx -5.61 \Rightarrow \left[f\left(-\frac{11}{3}\right)\right] = -6$$

نکته ریز در توابع مثلثاتی



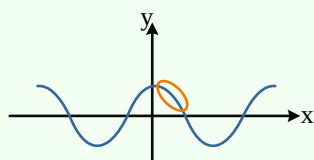
در سمت راست $x = 0$ تابع صعودی می‌باشد. a و b هم‌علامت هستند.

$$f(x) = a \sin(bx) + c$$



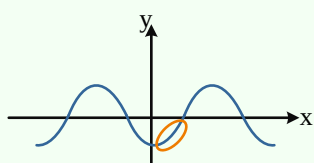
در سمت راست $x = 0$ تابع نزولی می‌باشد. a و b غیرهم‌علامت هستند.

جاهه‌جایی روی محور x وجود ندارد.



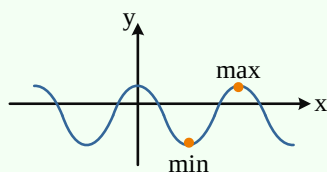
در سمت راست $x = 0$ تابع نزولی می‌باشد. $a > 0$ (علامت b تاثیر ندارد).

$$f(x) = a \cos(bx) + c$$

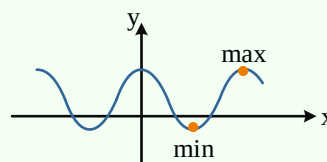


در سمت راست $x = 0$ تابع صعودی می‌باشد. $a < 0$ (علامت b تاثیر ندارد).

♦ در هر نمودار $y = a \sin(bx) + c$ یا $y = a \cos(bx) + c$ می‌توان گفت:



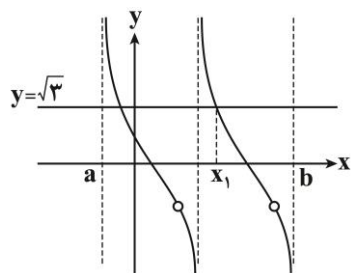
نقطه $\max$ به محور x نزدیک‌تر از نقطه $\min$ است. $c < 0 \rightarrow$



نقطه $\min$ به محور x نزدیک‌تر از نقطه $\max$ است. $c > 0 \rightarrow$

گروه آموزشی ماز

۹- نمودار تابع $f(x) = \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x}$ در بازه $[a, b]$ به شکل مقابل است. نمودار این تابع خط $y = \sqrt{3}$ را در نقطه‌ای به طول x_1 قطع می‌کند. حاصل $\frac{x_1}{b}$ کدام است؟



- (۱) $\frac{9}{11}$
(۲) $\frac{11}{21}$
(۳) $\frac{1}{9}$
(۴) $\frac{1}{21}$

(سخت - مثلثات - مفهومی / محاسباتی - ۱۴۰۲)

پاسخ: گزینه ۲

$$f(x) = \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \sqrt{3} \Rightarrow \frac{\pi}{4} - x = k\pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = -k\pi - \frac{\pi}{12}$$

طبق شکل اولین نقطه تقاطع با طول مثبت موردنظر است، بنابراین داریم:

$$k = -1 \Rightarrow x = \frac{11\pi}{12} \Rightarrow x_1 = \frac{11\pi}{12}$$

از طرفی، دومین مجانب قائم با طول مثبت نیز b نام دارد، بنابراین داریم:

$$\frac{\pi}{4} - x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = -k\pi - \frac{\pi}{4}$$

$$k = -2 \Rightarrow x = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4} \Rightarrow b = \frac{7\pi}{4}$$

$$\frac{x_1}{b} = \frac{\frac{11\pi}{12}}{\frac{7\pi}{4}} = \frac{11}{21}$$

گروه آموزشی ماز

۱۰- تعداد جواب‌های معادله $\sin x + \cos x = 1$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

(۴) ۱

(۳) ۴

(۲) ۳

(۱) ۲

(متوسط - مثلثات - مفهومی - ۱۴۰۲)

پاسخ: گزینه ۲

$$\sin x + \cos x = 1 \Rightarrow \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Rightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi \\ x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

معادله در بازه $[0, 2\pi]$ دارای ۳ جواب است.

فراموشتان نشود که

$$\sin x \pm \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x \pm \frac{\pi}{4}\right)$$

گروه آموزشی ماز

مشابه تمرین کتاب درسی

۱۱- بزرگ‌ترین جواب معادله $\sin x - \sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right) = 0$ در بازه $[2\pi, 4\pi]$ کدام است؟

(۴) $\frac{29\pi}{8}$

(۳) $\frac{57\pi}{16}$

(۲) $\frac{55\pi}{16}$

(۱) $\frac{27\pi}{8}$

(آسان - مثلثات - محاسباتی - ۱۴۰۲)

پاسخ: گزینه ۲

$$\sin x - \sin(x + \frac{\pi}{\lambda}) = 0 \Rightarrow \sin x = \sin(x + \frac{\pi}{\lambda})$$

$$\begin{cases} x = 2k\pi + x + \frac{\pi}{\lambda} \Rightarrow \text{x حذف می شود} \\ x = 2k\pi + \pi - x - \frac{\pi}{\lambda} \Rightarrow 2x = 2k\pi + \frac{7\pi}{\lambda} \Rightarrow x = k\pi + \frac{7\pi}{16} \end{cases}$$

$$k = 3 \Rightarrow x = 3\pi + \frac{7\pi}{16} = \frac{55\pi}{16}$$

بزرگترین جواب معادله در بازه $[2\pi, 4\pi]$ برابر است با:

معادله مثلثاتی معروف

$$\sin A = \sin B \Rightarrow \begin{cases} A = 2k\pi + B \\ A = 2k\pi + \pi - B \end{cases}$$

گروه آموزشی ماز

۱۲- معادله $2\sin x - 5\cos x = 0$ در بازه $[0, 2\pi]$ دارای m ریشه و معادله $4\tan x - 3\cot x = 0$ در بازه $[0, 2\pi]$ دارای n ریشه است. $m + n$ کدام است؟

۷ (۴)

۶ (۳)

۴ (۲)

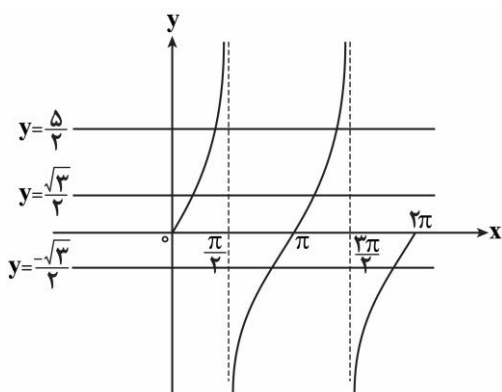
۲ (۱)

(متوسط - مثلثات - ترکیبی / محاسباتی - ۱۴۰۲)

پاسخ: گزینه ۳

$$2\sin x - 5\cos x = 0 \Rightarrow 2\sin x = 5\cos x \Rightarrow \tan x = \frac{5}{2}$$

$$4\tan x - 3\cot x = 0 \Rightarrow 4\tan x - \frac{3}{\tan x} = 0 \Rightarrow 4\tan^2 x - 3 = 0 \Rightarrow \tan^2 x = \frac{3}{4} \Rightarrow \tan x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$



کافی است نمودار تابع $y = \tan x$ را با خطوط $y = \frac{5}{2}$ و $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ و $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ قطع دهیم تا تعداد نقاط تلاقی این خطوط با نمودار تابع $y = \tan x$ تعداد ریشه‌های معادلات فوق را مشخص کند.

طبق شکل، معادله $2\sin x - 5\cos x = 0$ در بازه $[0, 2\pi]$ دارای دو ریشه و معادله $4\tan x - 3\cot x = 0$ در بازه $[0, 2\pi]$ دارای ۴ ریشه است، پس $m = 2$ و $n = 4$ و در نتیجه $m + n = 6$ است.

گروه آموزشی ماز

۱۳- اگر $\sin(\alpha + \frac{\pi}{4}) = 2\sin \alpha$ و $3\cos(\beta - \frac{3\pi}{4}) = \cos \beta$ باشد، آنگاه حاصل $\tan(\pi - \alpha - \beta)$ کدام است؟

$\frac{1}{7}$ (۴)

$-\frac{1}{7}$ (۳)

۱ (۲)

-۱ (۱)

(متوسط - مثلثات - مفهومی / محاسباتی - ۱۴۰۲)

پاسخ: گزینه ۳

$$\sin(\alpha + \frac{\pi}{4}) = 2\sin \alpha \Rightarrow \cos \alpha = 2\sin \alpha \Rightarrow \tan \alpha = \frac{1}{2}$$

$$3\cos(\beta - \frac{3\pi}{4}) = \cos \beta \Rightarrow -3\sin \beta = \cos \beta \Rightarrow \tan \beta = -\frac{1}{3}$$

$$\tan(\pi - \alpha - \beta) = \tan(\pi - (\alpha + \beta)) = -\tan(\alpha + \beta)$$

$$= -\frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = -\frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{6}} = -\frac{\frac{1}{6}}{\frac{7}{6}} = -\frac{1}{7}$$

گروه آموزشی ماز

مشابه تمرین کتاب درسی

۱۴- حاصل $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x^2 + x}{x^2 + 2x + 1}$ و $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{(x-1)^2}$ به ترتیب کدام است؟

(۱) $-\infty$ و $+\infty$ (۲) $+\infty$ و $-\infty$ (۳) $+\infty$ و $+\infty$ (۴) $-\infty$ و $-\infty$

پاسخ: گزینه ۱ آزمون وی ای پی

(آسان - حدهای نامتناهی - مفهومی - ۱۲۰۳)

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x^2 + x}{x^2 + 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x(x+1)}{(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x}{x+1} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+1}{x-1} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

حد بی‌نهایت

اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L > 0$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ در یک همسایگی a مثبت باشد، آن‌گاه:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$$

در حالت کلی می‌توان گفت حدهایی که صورت آن، عددی غیر صفر و مخرج آن $= 0$ (حدی) می‌شود دارای حاصل ∞ هستند، ببینید:

$$\frac{\text{عدد مثبت}}{0^-} = -\infty \quad \frac{\text{عدد مثبت}}{0^+} = +\infty \quad \frac{\text{عدد منفی}}{0^+} = -\infty \quad \frac{\text{عدد منفی}}{0^-} = +\infty$$

گروه آموزشی ماز

۱۵- اگر حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(a-3)x^5 - 16x^3 - x^2 + 5}{2ax^3 + 14x^3 - 7x + 1}$ برابر عدد حقیقی b باشد، حاصل $a+b$ کدام است؟ ($b \neq 0$)

(۱) $3/2$ (۲) $2/8$ (۳) $3/8$ (۴) $2/2$

(آسان - حد در بی‌نهایت - مفهومی - ۱۲۰۳)

پاسخ: گزینه ۴

چون حاصل حد تابع هنگامی که $x \rightarrow +\infty$ برابر عدد حقیقی b شده است، پس صورت و مخرج کسر هم‌درجه بوده‌اند. بنابراین خواهیم داشت:

$$a-3=0 \Rightarrow a=3$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(a-3)x^5 - 16x^3 - x^2 + 5}{2ax^3 + 14x^3 - 7x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-16x^3 - x^2 + 5}{6x^3 + 14x^3 - 7x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-16x^3}{20x^3} = \frac{-16}{20} = \frac{-4}{5} = -0.8$$

$$\Rightarrow b = -0.8 \Rightarrow a+b = 3 - 0.8 = 2.2$$

محاسبه حد در ∞ و قاعده پرتوان

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots}{a'x^m + b'x^{m-1} + c'x^{m-2} + \dots} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^n}{a'x^m} = \begin{cases} \infty & n > m \\ \frac{a}{a'} & n = m \\ 0 & n < m \end{cases}$$

گروه آموزشی ماز

۱۶- کدام یک از حدهای زیر موجود است؟

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x^3 - 2x^2 + x} \quad (۴)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan x \cdot \cot x \quad (۳)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\sin x}{x} \right] \quad (۲)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \cos \frac{1}{x} \quad (۱)$$

(متوسط - حد در بی‌نهایت - مفهومی / محاسباتی - ۱۲۰۳)

پاسخ: گزینه ۳

حاصل حد هنگامی موجود است که برابر عددی مشخص باشد، به عبارت دیگر باید حاصل حد برابر عدد حقیقی و مشخص L باشد. حال به بررسی هر یک از گزینه‌ها می‌پردازیم:

بررسی گزینه‌ها:

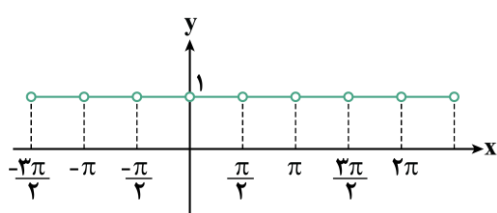
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \cos \frac{1}{x} = \text{موجود نیست}$$

زیرا اگر $x \rightarrow 0^+$ ، آن‌گاه $\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$ و بنابراین کمان $\cos \frac{1}{x}$ به سمت $+\infty$ میل می‌کند و در این صورت مقادیر کسینوس دائماً بین -1 تا 1 نوسان می‌کنند که در این صورت به دلیل نوسان مقادیر بین -1 تا 1 ، تابع f فاقد حد خواهد بود.



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\sin x}{x} \right] = \begin{cases} 0 & \sin x \geq 0 \\ -1 & \sin x < 0 \end{cases}$$

با میل کردن $x \rightarrow +\infty$ ، مقادیر کسر $\frac{\sin x}{x}$ به صفر میل می‌کنند، زیرا صورت کسر بین -1 تا 1 نوسان می‌کند ولی مخرج کسر به ∞ میل می‌کند، حال اگر $\sin x > 0$ باشد، آن‌گاه $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 0^+$ و اگر $\sin x < 0$ باشد، آن‌گاه $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 0^-$ و بنابراین جزء صحیح این مقادیر می‌تواند صفر یا -1 باشد که به دلیل نوسان روی این مقادیر، حاصل حد، موجود نیست.



$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan x \cdot \cot x = 1$$

حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan x \cdot \cot x$ ، با توجه به نمودار تابع که در شکل مقابل رسم شده است، موجود و

برابر ۱ است.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x^3 - 2x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{x(x^2-2x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{x(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(x^2+1)}{x(x-1)} = \frac{4}{\text{صفرحدی}} = \pm\infty$$

اگر $x \rightarrow 1^+$ ، آن‌گاه حاصل حد برابر $+\infty$ و اگر $x \rightarrow 1^-$ ، آن‌گاه حاصل حد برابر $-\infty$ خواهد بود و در هر صورت حاصل حد، موجود نیست.

گروه آموزشی ماز

$$17- \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1+x^4}{a+b \cos 2x} = -\infty \text{ اگر } (a, b) \text{ کدام می‌تواند باشد؟}$$

(۴) $(-4, 4)$

(۳) $(4, -4)$

(۲) $(-4, -4)$

(۱) $(4, 4)$

(متوسط - حدهای نامتناهی - مفهومی - ۱۳۰۳)

پاسخ: گزینه ۳

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1+x^4}{a+b \cos 2x} = -\infty$$

حد صورت کسر برابر (-1) است زیرا اگر $x \rightarrow 0^-$ یا $x \rightarrow 0^+$ ، آن‌گاه $x^4 \rightarrow 0^+$ و بنابراین داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} [-1+x^4] = [(-1)^+] = -1$$

پس چون حد تابع از دو طرف برابر $-\infty$ شده است، باید حد مخرج 0^+ باشد، یعنی باید مخرج کسر دارای ریشه مضاعف باشد، بنابراین لازم است که داشته باشیم:

پس گزینه‌های ۱ و ۲ مردود هستند. حال گزینه ۳ را بررسی می‌کنیم. به ازای $a = 4$ و $b = -4$ خواهیم داشت:

$$a = 4, b = -4 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1+x^4}{4-4 \cos 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1+x^4}{4(1-\cos 2x)} = \frac{-1}{4(0^+)} = -\infty$$



توجه

توجه شود که همواره $\cos 2x < 1$ است، به همین دلیل حد مخرج همواره 0^+ است.

نادرستی گزینه ۴ را هم خودتان تحقیق کنید.



و باز هم حد

اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ برابر یک عدد حقیقی غیر صفر مانند L و $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$ شود، یعنی هر دو حد راست و چپ در $x = a$ هم‌علامت باشند $\lim_{x \rightarrow a^\pm} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ یا $-\infty$

یا $\lim_{x \rightarrow a^\pm} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$ (بنابراین $g(x)$ در $x = a$ صفر شده و ریشه مکرر دارد، پس در مخرج عامل صفرشونده یا درون قدرمطلق یا دارای توان زوج است و یا مخرج به فرم $b(1 \pm \sin x)$ یا $b(1 \pm \cos x)$ است.

گروه آموزشی ماز

۱۸- اگر $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-4}{3x^2+2ax+6b} = -\infty$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(3-b)x - \sqrt{4x^2+12x}}{(a-2)x + \sqrt{x^2-x}}$ کدام است؟

(۴) $\frac{1}{24}$

(۳) $-\frac{1}{24}$

(۲) $-\frac{7}{24}$

(۱) $\frac{7}{24}$

(متوسط - حد در بی‌نهایت - مفهومی / محاسباتی - ۱۴۰۳)

پاسخ: گزینه ۳

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-4}{3x^2+2ax+6b} = -\infty$$

چون حاصل حد تابع در نقطه $x=3$ برابر $-\infty$ شده، پس باید مخرج کسر به ازای $x=3$ برابر صفر شود و چون هم حد راست و هم حد چپ هر دو $-\infty$ شده‌اند، پس مخرج کسر دارای ریشه مضاعف $x=3$ بوده است که در این صورت خواهیم داشت:

$$3x^2+2ax+6b = 3(x-3)^2 \Rightarrow 3x^2+2ax+6b = 3x^2-18x+27 \Rightarrow \begin{cases} 2a = -18 \Rightarrow a = -9 \\ 6b = 27 \Rightarrow b = \frac{9}{2} \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(3-b)x - \sqrt{4x^2+12x}}{(a-2)x + \sqrt{x^2-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\frac{3}{2}x - \sqrt{4x^2}}{-11x + \sqrt{x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\frac{3}{2}x - 2|x|}{-11x + |x|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\frac{3}{2}x + 2x}{-11x - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{2}x}{-12x} = \frac{-1}{24}$$

گروه آموزشی ماز

۱۹- نمودار تابع $f(x) = \frac{3x^2+x+1}{x^2+2x+3}$ در اطراف مجانب افقی‌اش به کدام صورت است؟



(متوسط - حد در بی‌نهایت - مفهومی / محاسباتی - ۱۴۰۳)

پاسخ: گزینه ۲

مجانب افقی نمودار تابع f ، خط $y=3$ است، زیرا:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2+x+1}{x^2+2x+3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2}{x^2} = 3$$

حال اگر منحنی و مجانب افقی را از هم کم کنیم، خواهیم داشت:

$$f(x) - 3 = \frac{3x^2+x+1}{x^2+2x+3} - 3 = \frac{3x^2+x+1-3x^2-6x-9}{x^2+2x+3} = \frac{-5x-8}{x^2+2x+3}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - 3) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-5x-8}{x^2+2x+3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-5x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-5}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5}{x} = 0^-$$

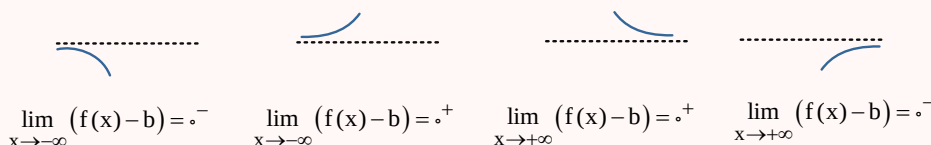
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-5}{x} = 0^+$$

پس در شاخه $+\infty$ منحنی پایین مجانب و در شاخه $-\infty$ منحنی بالای مجانب قرار دارد، یعنی گزینه ۲ صحیح است.

وضعیت نمودار $f(x)$ در اطراف مجانب افقی

برای بررسی وضعیت نمودار تابع $f(x)$ در اطراف مجانب افقی‌اش، ابتدا مجانب افقی $(y=b)$ را به دست می‌آوریم. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$

حال به محاسبه هر دو حد $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x)-b)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x)-b)$ می‌پردازیم. اگر حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x)-b)$ برابر 0^+ بود یعنی نمودار در شاخه $+\infty$ بالای مجانب افقی قرار دارد و اگر حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x)-b)$ برابر 0^- بود یعنی نمودار در شاخه $+\infty$ زیر مجانب افقی قرار دارد. برای شاخه $-\infty$ نیز استدلال به همین صورت است.



گروه آموزشی ماز

۲۰- اگر نقطه $(1, 1)$ نقطه تلاقی مجانب‌های نمودار تابع $f(x) = \frac{ax+1}{(2a-1)x+4b}$ باشد، حاصل $f(3)$ کدام است؟

(۴) -۲

(۳) ۲

(۲) ۳

(۱) -۳

(متوسط - حد در بی‌نهایت - محاسباتی - ۱۴۰۳)

پاسخ: گزینه ۳

$$f(x) = \frac{ax+1}{(2a-1)x+4b}$$

$$(2a-1)x+4b=0 \Rightarrow x = \frac{-4b}{2a-1} \text{ مجانب قائم}$$

$$\Rightarrow \text{طبق فرض: } \frac{-4b}{2a-1} = 1 \quad (۱)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax+1}{(2a-1)x+4b} = \frac{a}{2a-1} \Rightarrow y = \frac{a}{2a-1} \text{ مجانب افقی}$$

$$\Rightarrow \text{طبق فرض: } \frac{a}{2a-1} = 1 \Rightarrow a = 2a-1 \Rightarrow a = 1 \xrightarrow{(۱)} \frac{-4b}{2a-1} = 1 \Rightarrow -4b = 1 \Rightarrow b = -\frac{1}{4}$$

$$f(x) = \frac{ax+1}{(2a-1)x+4b} = \frac{x+1}{x-1} \Rightarrow f(3) = \frac{4}{2} = 2$$

گروه آموزشی ماز

۲۱- اگر معادله $\begin{bmatrix} x & 0 & a \\ 1 & -x & -1 \\ -1 & 3 & ax \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ -1 \\ x \end{bmatrix} = 0$ دارای ریشه مضاعف باشد، مقدار این ریشه کدام است؟

(۴) -۴

(۳) ۴

(۲) -۱

(۱) ۱

(متوسط - ماتریس و اعمال روی آن - محاسباتی - ۱۴۰۱)

پاسخ: گزینه ۲

ابتدا با ضرب ماتریس‌ها، یک معادله تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{bmatrix} x & 0 & a \\ 1 & -x & -1 \\ -1 & 3 & ax \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ -1 \\ x \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} x-2 & x+3 & ax+a+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ -1 \\ x \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow x(x-2) - (x+3) + x(ax+a+1) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - x - 3 + ax^2 + ax + x = 0$$

$$\Rightarrow (a+1)x^2 + (a-2)x - 3 = 0$$

معادله زمانی ریشه مضاعف دارد که $\Delta = 0$ باشد:

$$\Delta = 0 \Rightarrow (a-2)^2 - 4 \times (-3)(a+1) = 0 \Rightarrow a^2 - 4a + 4 + 12a + 12 = 0 \Rightarrow a^2 + 8a + 16 = 0 \Rightarrow (a+4)^2 = 0 \Rightarrow a = -4$$

با جای گذاری $a = -4$ در معادله $(a+1)x^2 + (a-2)x - 3 = 0$ ریشه مضاعف آن را به دست می‌آوریم:

$$a = -4 \Rightarrow -3x^2 - 6x - 3 = 0 \Rightarrow -3(x^2 + 2x + 1) = 0 \Rightarrow -3(x+1)^2 = 0 \Rightarrow x+1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

گروه آموزشی ماز

۲۲- اگر A ماتریس وارون‌پذیر و $(A+I)^3 = \bar{O}$ باشد، حاصل $A^{-1} + I$ کدام است؟

(۴) $-(A+I)(A+2I)$

(۳) $(A-I)(A+2I)$

(۲) $(A+I)(A+2I)$

(۱) $-(A-I)(A+2I)$

(متوسط - وارون ماتریس و دترمینان - محاسباتی - ۱۴۰۱)

پاسخ: گزینه ۴

با توجه به صورت سوال داریم:

$$(A+I)^3 = \bar{O} \Rightarrow A^3 + 3A^2I + 3AI^2 + I^3 = \bar{O} \Rightarrow A^3 + 3A^2 + 3A + I = \bar{O} \Rightarrow I = -A^3 - 3A^2 - 3A$$

$$\Rightarrow I = A(-A^2 - 3A - 3I) \Rightarrow A^{-1} = -A^2 - 3A - 3I$$

حال به محاسبه $A^{-1} + I$ می‌پردازیم:

$$A^{-1} + I = -A^2 - 3A - 3I + I \Rightarrow A^{-1} + I = -A^2 - 3A - 2I = -(A^2 + 3A + 2I) = -(A+I)(A+2I)$$

$$A^{-1} + I = -(A+I)(A+2I)$$

پس:

از ماتریس بدانید

۱) دو ماتریس مربعی A و B وارون یکدیگرند، هرگاه $AB = BA = I$ باشد، در این صورت می‌نویسیم $A = B^{-1}$ و $B = A^{-1}$.

۲) شرط وارون‌پذیری ماتریس مربعی A آن است که $|A| \neq 0$ باشد.

۳) وارون هر ماتریس در صورت وجود، منحصر به فرد است.

۴) ضرب ماتریس‌ها در حالت کلی خاصیت جابه‌جایی ندارد، اگر $A \times B = B \times A$ باشد، در این صورت دو ماتریس A و B تعویض‌پذیر هستند، در حالت کلی، دو ماتریس مربعی و هم‌مرتبه A و I تعویض‌پذیر می‌باشند ($A \times I = I \times A = A$). استفاده از اتحادها در ضرب ماتریس‌ها امکان‌پذیر نیست مگر آنکه دو ماتریس تعویض‌پذیر باشند، به عنوان مثال:

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2 \xrightarrow[A \times B = B \times A]{\text{اگر } A \text{ و } B \text{ تعویض‌پذیر باشند}} (A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

$$(A-B)(A+B) = A^2 + AB - BA - B^2 \xrightarrow[A \times B = B \times A]{\text{اگر } A \text{ و } B \text{ تعویض‌پذیر باشند}} (A-B)(A+B) = A^2 - B^2$$

$$(A+I)^2 = A^2 + 2AI + I^2 = A^2 + 2A + I$$

A و I همواره تعویض‌پذیرند، پس:

گروه آموزشی ماز

۲۳- ماتریس $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ به صورت $a_{ij} = \begin{cases} 0 & ; i=j \\ 1 & ; i \neq j \end{cases}$ معرفی شده است. به ازای کدام مقدار k رابطه $|kA|A^2 = 256$ برقرار است؟

$\sqrt[4]{2^4}$ (۴)

$\sqrt[3]{2}$ (۳)

$\sqrt{2}$ (۲)

$\sqrt[3]{2^3}$ (۱)

(متوسط - وارون ماتریس و دترمینان - محاسباتی - ۱۴۰۱)

پاسخ: گزینه ۳

ابتدا ماتریس A را طبق تعریف داده شده نوشته و دترمینان آن را به کمک دستور ساروس محاسبه می‌کنیم:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = (0+1+1) - (0+0+0) = 2$$

$$|kA| = k^3 |A| = 2k^3 \Rightarrow |kA|A^2 = |kA|A^2 = (2k^3)^2 |A|^2 = 4k^6 |A|^2 = 4k^6 \times 4 = 16k^6$$

$$16k^6 = 256 \Rightarrow k^6 = 16 \Rightarrow k = \sqrt[6]{16} \Rightarrow k = \sqrt[3]{2}$$

بنابراین:

دترمینان ماتریس

۱) اگر A یک ماتریس مربعی و n عددی طبیعی باشد، آنگاه داریم: $|A^n| = |A|^n$

۲) اگر A یک ماتریس مربعی $n \times n$ و k عددی حقیقی باشد، آنگاه داریم: $|kA| = k^n |A|$

۳) اگر A یک ماتریس مربعی و A^{-1} وارون ماتریس A باشد، آنگاه داریم: $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

گروه آموزشی ماز

۲۴- بر روی کدام یک از خطوط زیر، تنها یک نقطه وجود دارد که از آن نقطه بتوان دو مماس عمود بر هم بر دایره C به معادله $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 6 = 0$ رسم کرد؟

رسم کرد؟

$y = -3$ (۴)

$y = -1$ (۳)

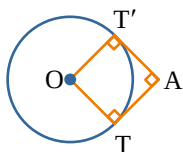
$y = 3$ (۲)

$y = 5$ (۱)

(متوسط - دایره و بیضی - محاسباتی - ۱۴۰۲)

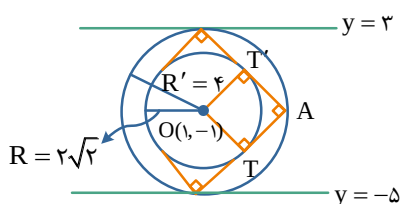
پاسخ: گزینه ۲

فرض کنید که از نقطه A دو مماس عمود بر هم بر دایره $C(O, R)$ رسم کرده باشیم. چهارضلعی $ATOT'$ چهار زاویه قائمه دارد و دو ضلع مجاور آن برابر یکدیگرند ($OT = OT' = R$)، پس این چهارضلعی مربع است و در نتیجه OA قطر مربع و اندازه آن برابر $R\sqrt{2}$ است.



$$R = \sqrt{a^2 + b^2 - c^2} = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 - 4(-6)} = \sqrt{4 + 4 + 24} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \Rightarrow R\sqrt{2} = 4$$

پس نقطه A روی دایره‌ای به مرکز O و شعاع ۴ قرار دارد. با توجه به این که مختصات مرکز دایره $O(1, -1)$ می‌باشد، خطوط افقی $y = 3$ و $y = -5$ بر این دایره مماس‌اند و در نتیجه بر روی هر کدام از این دو خط، تنها یک نقطه وجود دارد که می‌توان از آن، دو مماس عمود بر هم بر دایره C رسم کرد.



از دایره بشنوید

مکان هندسی نقاطی از صفحه که از آن نقاط بتوان دو مماس عمود بر هم بر دایره $C(O, R)$ رسم کرد، دایره $C'(O, R\sqrt{2})$ است.

گروه آموزشی ماز

۲۵- فرض کنید دایره C بزرگ‌ترین دایره مماس بر دو محور مختصات باشد که از مرکز دایره C' به معادله $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$ عبور می‌کند. معادله وتر مشترک دو دایره C و C' کدام است؟

۳x + ۲y = ۶ (۴)

۲x + ۳y = ۶ (۳)

۴x + ۳y = ۱۲ (۲)

۳x + ۴y = ۱۲ (۱)

(متوسط - دایره و بیضی - محاسباتی / مفهومی - ۱۳۰۲)

پاسخ: گزینه ۱

مختصات مرکز دایره C' به صورت $O'(2, 1)$ است، یعنی مرکز این دایره در ناحیه اول دستگاه مختصات قرار دارد. معادله دایره مماس بر هر دو محور مختصات در ناحیه اول به صورت $(x - R)^2 + (y - R)^2 = R^2$ است. با قرار دادن مختصات نقطه O' در معادله این دایره داریم:

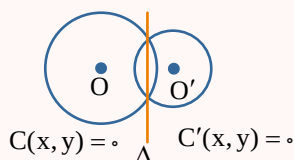
$$(x - R)^2 + (y - R)^2 = R^2 \xrightarrow{\substack{x=2 \\ y=1}} 4 - 4R + R^2 + 1 - 2R + R^2 = R^2 \Rightarrow R^2 - 6R + 5 = 0 \Rightarrow (R - 1)(R - 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} R = 1 \\ R = 5 \end{cases}$$

چون دایره C طبق فرض، بزرگ‌ترین دایره مماس بر دو محور مختصات است، پس مقدار $R = 5$ قابل قبول است و در نتیجه داریم:

$$C: (x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 5^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - 10x - 10y + 25 = 0$$

برای به دست آوردن معادله وتر مشترک دو دایره C و C' ، معادلات دو دایره را از هم کم می‌کنیم:

$$(x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1) - (x^2 + y^2 - 10x - 10y + 25) = 0 \Rightarrow 6x + 8y - 24 = 0 \Rightarrow 3x + 4y = 12$$



وتر مشترک دو دایره متقاطع

برای پیدا کردن وتر مشترک دو دایره متقاطع، کافی است معادله دو دایره را از هم کم کنیم.

$$\Delta(x, y): C(x, y) - C'(x, y) = 0$$

توجه

توجه داریم در معادله دو دایره باید ضرایب x^2 و y^2 یکی باشد، تا وقتی معادله دو دایره را از هم کم می‌کنیم، با هم ساده شوند.

گروه آموزشی ماز

۲۶- اگر A ماتریس وارون‌پذیر به صورت $A = \begin{bmatrix} |A^{-1}| & 0 & |-A^{-1}| \\ 0 & -1 & |A| \\ 3|A| & 0 & |2A| \end{bmatrix}$ باشد، درایه سطر سوم و ستون اول ماتریس A^{-1} کدام است؟

۱۳۴۰ (۴)

۲۹۰۷ (۳)

۲۰۵۰ (۲)

۱۴۰۴ (۱)

(سخت - وارون ماتریس و دترمینان - محاسباتی - ۱۳۰۱)

پاسخ: گزینه ۳

ابتدا از طرفین ماتریس داده شده، دترمینان می‌گیریم. با توجه به این که $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$ است، خواهیم داشت:

$$|A| = -1(|A^{-1}| \times \underbrace{|2A|}_{4|A|} - 3|A| \times \underbrace{|-A^{-1}|}_{-|A^{-1}|}) = -(1 + 3) = -4 \Rightarrow \begin{cases} |A| = -11 \\ |A^{-1}| = -\frac{1}{11} \end{cases}$$

حال ماتریس A را بازنویسی می‌کنیم:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{11} & 0 & \frac{1}{11} \\ 0 & -1 & -11 \\ -33 & 0 & -11 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = B \Rightarrow b_{31} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{11} & 0 & \frac{1}{11} \\ 0 & -1 & -11 \\ -33 & 0 & -11 \end{bmatrix} = 3 + 290.4 = 290.7$$

گروه آموزشی ماز

۲۷- اگر ماتریس $A^{-1} = \begin{bmatrix} a+1 & -b \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$ وارون ماتریس ضرایب دستگاه $\begin{cases} ax+by=e \\ cx+dy=f \end{cases}$ باشد، آن گاه $\frac{a-b}{c-d}$ کدام است؟ (ضرایب دستگاه معادله غیر صفر هستند)

- (۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) $\frac{1}{2}$

(متوسط - وارون ماتریس و دترمینان - محاسباتی - ۱۳۰۱)

پاسخ: گزینه ۴

ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب دستگاه معادلات و ماتریس $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ وارون آن است. با توجه به برابری دو ماتریس $\begin{bmatrix} a+1 & -b \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$ و $\frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ در نتیجه مساوی بودن درایه‌های واقع در سطر اول و ستون دوم این دو ماتریس، $|A|=1$ است و داریم:

$$\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+1 & -b \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -c = -5 \Rightarrow c = 5 \\ a = 2 \\ d = a+1 \Rightarrow d = 3 \end{cases}$$

$$|A|=1 \Rightarrow ad-bc=1 \Rightarrow 2 \times 3 - b \times 5 = 1 \Rightarrow 6-5b=1 \Rightarrow b=1$$

$$\frac{a-b}{c-d} = \frac{2-1}{5-3} = \frac{1}{2}$$

بنابراین حاصل عبارت برابر است با:

گروه آموزشی ماز

۲۸- مثلث قائم‌الزاویه $\hat{A}ABC$ ($\hat{A}=90^\circ$) را در نظر بگیرید. اگر طول اضلاع قائم ۶ و ۸ سانتی‌متر باشد، چند نقطه در صفحه وجود دارد که از رأس A و وتر به فاصله ۴ سانتی‌متر باشند؟

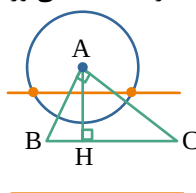
- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بی‌شمار

(متوسط - مقاطع مخروطی و مکان هندسی - محاسباتی - ۱۳۰۲)

پاسخ: گزینه ۳

اولاً با توجه به اضلاع مثلث، وتر ۱۰ سانتی‌متر است. می‌دانیم مکان هندسی نقاطی از صفحه که از رأس A به فاصله ۴ سانتی‌متر باشند، دایره‌ای است به مرکز A و شعاع ۴ سانتی‌متر و همچنین مکان هندسی نقاطی در صفحه که از ضلع BC به فاصله ۴ باشند، دو خط موازی به فاصله ۴ در طرفین BC است. پیدا کردن تقاطع این دو مکان هندسی، جواب مسئله است. ارتفاع AH را به دست می‌آوریم و همان‌طور که می‌بینید این دو مکان هندسی دو نقطه تقاطع دارند.

$$AH \times BC = AB \times AC \Rightarrow AH \times 10 = 6 \times 8 \Rightarrow AH = 4.8$$



گروه آموزشی ماز

۲۹- نقاط $A(0,2)$ ، $B(-4,4)$ و $C(-1,-3)$ را در نظر بگیرید. چند نقطه در صفحه وجود دارد که از A و B به یک فاصله باشد و از نقطه C نیز فاصله ۲ داشته باشد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

(متوسط - دایره و بیضی - محاسباتی - ۱۳۰۲)

پاسخ: گزینه ۱

مکان هندسی نقاطی از صفحه که از $A(0,2)$ و $B(-4,4)$ به یک فاصله باشد، عمودمنصف AB است که معادله آن به صورت زیر است:

$$m_{AB} = \frac{2-4}{0+4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \Rightarrow m_{\text{عمودمنصف}} = +2$$

$$AB \text{ نقطه وسط} \Rightarrow M(-2,3) \Rightarrow \text{معادله عمودمنصف: } y-3=2(x+2) \Rightarrow y=2x+7$$

مکان هندسی نقاطی از صفحه که از نقطه C به فاصله ۲ هستند، دایره‌ای به مرکز C و شعاع ۲ است که معادله آن به صورت زیر می‌باشد:

$$(x+1)^2 + (y+3)^2 = 4$$

حال کافی است تعداد نقاط تلاقی دایره $(x+1)^2 + (y+3)^2 = 4$ و خط $y = 2x + 7$ را تعیین کنیم. برای این منظور وضعیت نسبی خط و دایره را تعیین می‌کنیم.

$$O = (-1, -3), R = 2 \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow \text{فاصله از O خط} = \frac{|-2+3+7|}{\sqrt{4+1}} = \frac{8}{\sqrt{5}} \\ 2x - y + 7 = 0 \end{array} \right.$$

اما $\frac{8}{\sqrt{5}} < 2$ بنابراین فاصله مرکز دایره از خط از شعاع بزرگتر بوده و دایره، خط را قطع نمی‌کند. یعنی هیچ نقطه‌ای با شرایط مطلوب سوال وجود ندارد.

گروه آموزشی ماز

۳۰- اگر $\begin{vmatrix} 2x & 1 & 0 \\ -1 & x & 3 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} \sin \theta & \cos \theta \\ -\cos \theta & \sin \theta \end{vmatrix}$ و ماتریسی مانند A وارون‌پذیر و خود توان باشد و وارون ماتریس $I + xA$ را به صورت $I + \alpha A$ نشان دهیم.

کدام گزینه است؟

۴) -۶

۳) ۶

۲) $\frac{1}{7}$

۱) $-\frac{1}{7}$

(سخت - وارون ماتریس و دترمینان - محاسباتی - ۱۴۰۱)

پاسخ: گزینه ۱

$$-3(8x-2) = 2(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \Rightarrow -24x + 6 = 2 \Rightarrow -24x = -4 \Rightarrow x = \frac{1}{6}$$

$$I + xA = I + \frac{1}{6}A \Rightarrow (I + \frac{1}{6}A)^{-1} = I + \alpha A$$

$$(I + \frac{1}{6}A)(I + \alpha A) = I \Rightarrow I + \alpha A + \frac{1}{6}A + \frac{\alpha}{6}A^2 = I \Rightarrow (\alpha + \frac{1}{6} + \frac{\alpha}{6})A = 0 \Rightarrow \alpha + \frac{1}{6} + \frac{\alpha}{6} = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{7}$$

ماتریس خود توان

اگر ماتریس مربعی A خود توان باشد، یعنی هر توانی از ماتریس A با خود ماتریس A برابر می‌شود. $A^n = A$

گروه آموزشی ماز

۳۱- فرض کنید $V(G) = \{a, b, c, d, e\}$ و $N_G[a] = N_G[d] = \{a, b, c, d\}$ باشد، اگر $\delta(G) = 1$ باشد، حداکثر تعداد یال‌های این گراف کدام است؟

۴) ۸

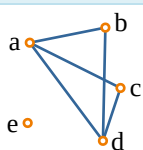
۳) ۷

۲) ۶

۱) ۵

(آسان - گراف و مدل‌سازی - مفهومی - ۱۴۰۲)

پاسخ: گزینه ۳



سعی می‌کنیم شکل گراف G را رسم کنیم. چون $\delta(G) = 1$ است، پس از e فقط یک یال خارج می‌شود. دقت کنید چون گراف G می‌خواهد بیشترین یال را داشته باشد، یال bc را رسم می‌کنیم. پس

$$q_{\max}(G) = 5 + 1 + 1 = 7$$

یال منتهی به e یال bc

گروه آموزشی ماز

۳۲- در گراف G از مرتبه $p = 18$ ، $\Delta(G) = 12$ می‌باشد. اگر $q(G) = 107$ باشد، $\Delta(\bar{G})$ کدام است؟

۴) ۹

۳) ۸

۲) ۷

۱) ۶

(آسان - گراف و مدل‌سازی - مفهومی / محاسباتی - ۱۴۰۲)

پاسخ: گزینه ۱

$$q(G) = \frac{12 \times 18}{2} = 12 \times 9 = 108$$

دقت کنید اگر درجه تمام رئوس گراف G، ۱۲ باشد. یعنی گراف G، ۱۲-منتظم باشد داریم:

اما گراف G، ۱۰۷ یال دارد. پس باید یک یال از گراف ۱۲-منتظم مرتبه $p = 18$ برداریم. پس گراف G، ۱۶ رأس با درجه ۱۲ و ۲ رأس با درجه ۱۱ دارد.

$$\delta(G) = 11, \quad \delta(G) + \Delta(\bar{G}) = p - 1 = 17 \Rightarrow \Delta(\bar{G}) = 6$$

هرگز نشه فراموش

$$\delta(G) + \Delta(\bar{G}) = p - 1$$

$$\Delta(G) + \delta(\bar{G}) = p - 1$$

۳۳- گراف منتظم غیر کامل از مرتبه $p=9$ حداکثر چند یال دارد؟

۲۷ (۴)

۳۶ (۳)

۳۵ (۲)

۲۸ (۱)

(آسان - گراف و مدل سازی - مفهومی - ۱۲۰۲)

پاسخ: گزینه ۴

چون $p=9$ عددی فرد است، بنابراین اگر گراف G ، r منتظم باشد باید r عددی زوج و $0 \leq r \leq 8$ باشد. اگر $r=8$ باشد، گراف کامل است، پس باید $r=6$ باشد، بنابراین:

$$q = \frac{r \times p}{2} \Rightarrow q = \frac{6 \times 9}{2} = 27$$

گراف منتظم

گراف r منتظم از مرتبه p گرافی دارای p رأس بوده و درجه همه رئوس آن r می باشد. بنابراین تعداد یال های این گراف از رابطه $q = \frac{p \times r}{2}$ به دست می آید. توجه داریم گراف r منتظم از مرتبه p که در آن r و p هر دو فرد باشند، وجود ندارد.

گروه آموزشی ماز

۳۴- گراف G از مرتبه $p=9$ ، ۳۳ یال دارد. اگر در گراف G ، ۳ رأس یافت شود که همسایگی باز آن ها دو به دو برابر باشند، تعداد رئوس با درجه ماکزیمم در این گراف کدام است؟

۴ (۴)

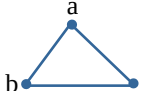
۳ (۳)

۵ (۲)

۶ (۱)

(متوسط - گراف و مدل سازی - مفهومی - ۱۲۰۲)

پاسخ: گزینه ۱

این گراف از گراف کامل هم مرتبه اش، ۳ یال کمتر دارد. سه یال به صورت  از آن حذف می کنیم. دقت کنید $N(a) = N(b) = N(c)$ است، پس تعداد رئوس Δ می باشد.

گروه آموزشی ماز

۳۵- فرض کنید $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{y-2} + \frac{1}{3} = 0$ باشد، اگر x و y اعدادی صحیح و غیر منفی باشند، مقدار $x+y$ کدام است؟

۸ (۴)

۷ (۳)

۶ (۲)

۵ (۱)

(متوسط - بخش پذیری - مفهومی / محاسباتی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۳

$$\frac{1}{y-2} = -\frac{1}{3} - \frac{1}{x-1} \Rightarrow \frac{1}{y-2} = \frac{(x-1)+3}{-3(x-1)} \Rightarrow y-2 = \frac{3(x-1)}{-x-2} \xrightarrow{x \text{ و } y \text{ اعداد صحیح و نامنفی هستند}} -x-2 \mid 3(x-1)$$

$$\begin{aligned} -x-2 \mid 3x-3 \\ -x-2 \mid -3x-6 \\ \hline -x-2 \mid -9 \Rightarrow x+2 \mid 9 \Rightarrow x+2 = \pm 1, \pm 3, \pm 9 \Rightarrow x = 1, 7 \end{aligned}$$

دقت کنید $X=1$ عضو دامنه تابع نمی باشد، پس:

$$x=7 \Rightarrow y=0 \Rightarrow x+y=7$$

گروه آموزشی ماز

۳۶- در تقسیم عدد طبیعی a بر b ، خارج قسمت برابر با ۱۷ و باقی مانده برابر با ۲۹ است. چند عدد ۳ رقمی برای a یافت می شود که مضرب ۹ باشند؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۵ (۲)

۶ (۱)

(متوسط - بخش پذیری - مفهومی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۳

طبق الگوریتم تقسیم، تقسیم را می نویسیم و شرط باقی مانده هم لحاظ می کنیم:

$$a = b \times 17 + 29 \Rightarrow 0 \leq 29 < b$$

طبق صورت سوال a باید مضرب ۹ باشد، پس:

$$a \equiv 0 \Rightarrow 17b + 29 \equiv 0 \Rightarrow 17b \equiv -29 \xrightarrow{\begin{matrix} 17 \equiv -1 \\ -29 \equiv -2 \end{matrix}} -b \equiv -2 \Rightarrow b \equiv 2 \Rightarrow b = 9k + 2$$

$$29 < b \Rightarrow 29 < 9k + 2 \Rightarrow 27 < 9k \Rightarrow k > 3 \Rightarrow k \geq 4$$

از طرفی، باید $29 < b$ باشد، پس:

$$a = b \times 17 + 29 \Rightarrow a = (9k + 2) \times 17 + 29 \Rightarrow a = 153k + 63$$

حال a را بر حسب k پیدا می کنیم:

چون a عددی ۳ رقمی است، بنابراین $100 \leq a \leq 999$ می باشد، پس:

$$100 \leq a \leq 999 \Rightarrow 100 \leq 153k + 63 \leq 999 \Rightarrow 1 \leq k \leq 6$$

به خاطر شرط باقی مانده از قبل نشان دادیم که $k \geq 4$ می باشد، پس $4 \leq k \leq 6$ در نتیجه ۳ مقدار (۴، ۵، ۶) برای k یافت می شود، یعنی ۳ عدد ۳ رقمی برای a به دست می آید.

قضیه تقسیم

در تقسیم عدد صحیح a بر عدد طبیعی b ، a را مقسوم و b را مقسوم علیه می‌نامیم. اگر خارج قسمت تقسیم، برابر عدد صحیح q و باقی‌مانده، عدد حسابی r باشد، طبق الگوریتم تقسیم می‌توان گفت:

$$\begin{array}{r} \text{مقسوم علیه} \\ \text{(عدد طبیعی)} \\ \begin{array}{r} b \\ \hline q \\ \hline r \end{array} \\ \text{مقسوم} \\ \text{(عدد صحیح)} \\ a \\ \vdots \\ r \\ \text{باقی مانده} \\ \text{(عدد حسابی)} \end{array} \Rightarrow a = b \times q + r \quad (0 \leq r < b)$$

گروه آموزشی ماز

۳۷- فرض کنید $a \equiv 5 \pmod{12}$. اگر $a \equiv 28 \pmod{7}$ باشد، باقیمانده $\frac{a-5}{12}$ بر ۷ کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۴ (۲)

۵ (۱)

(آسان - هم‌نهشتی - محاسباتی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۴

$$a \equiv 28 \pmod{7} \Rightarrow a - 5 \equiv 23 \pmod{7} \Rightarrow a - 5 \equiv 2 \pmod{7} \Rightarrow \frac{a-5}{12} \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow \frac{a-5}{12} \equiv 6 \pmod{7}$$

پس $r = 6$ می‌باشد.

گروه آموزشی ماز

۳۸- عدد $x = \overline{ab \cdot ab}$ در معادله $5x \equiv 1 \pmod{8}$ صدق می‌کند. بیشترین مقدار $\overline{ab}$ تا اولین عدد ۳ رقمی چقدر فاصله دارد؟

۷ (۴)

۶ (۳)

۵ (۲)

۲ (۱)

(متوسط - هم‌نهشتی - محاسباتی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۴

$$x = \overline{ab \cdot ab} = \overline{ab \cdot 00} + \overline{ab} = 100 \cdot \overline{ab} \Rightarrow 5x \equiv 1 \pmod{8}$$

$$\Rightarrow 5 \times 100 \cdot \overline{ab} \equiv 1 \pmod{8} \Rightarrow 5 \overline{ab} \equiv 1 \pmod{8} \Rightarrow 5 \overline{ab} \equiv 1 - 2 \times 8 \pmod{8} \Rightarrow 5 \overline{ab} \equiv -15 \pmod{8} \Rightarrow \overline{ab} \equiv -3 \pmod{8} \Rightarrow \overline{ab} \equiv 5 \pmod{8}$$

$$\xrightarrow{q=11} \overline{ab} = 8 \times 11 + 5 \Rightarrow \overline{ab} = 93$$

فاصله عدد ۹۳ تا اولین عدد ۳ رقمی یعنی ۱۰۰ برابر ۷ می‌باشد.

گروه آموزشی ماز

۳۹- اگر بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک دو عدد $n^2 + 5n + 6$ و $n^2 + 8n + 15$ برابر با ۱۴۰۳ باشد، مجموع ارقام عدد طبیعی n کدام است؟

۵ (۴)

۶ (۳)

۷ (۲)

۸ (۱)

(متوسط - هم‌نهشتی - مفهومی / محاسباتی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۴

می‌دانیم که بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک دو عدد $n^2 + 5n + 6$ و $n^2 + 8n + 15$ برابر با ۱۴۰۳ است، پس:

$$(n^2 + 8n + 15, n^2 + 5n + 6) = ((n+3)(n+5), (n+3)(n+2)) = (n+3) \underbrace{(n+5, n+2)}_{d'} = (n+3) \times d'$$

$$(n+5, n+2) = d' \Rightarrow \begin{cases} d' | n+5 \\ d' | n+2 \end{cases} \Rightarrow d' | (n+5) - (n+2) \Rightarrow d' | 3 \xrightarrow{d' > 0} d' = 1 \text{ یا } 3$$

$$(n^2 + 8n + 15, n^2 + 5n + 6) = (n+3)(n+5, n+2) = (n+3) \times d' = n+3 \text{ یا } 3(n+3)$$

اما ۱۴۰۳ مضرب ۳ نیست پس $n+3 = 1403$

$$\Rightarrow n = 1400 \xrightarrow{\text{مجموع ارقام } n} 1+4+0+0 = 5$$

عدد طبیعی d را بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد صحیح a و b می‌گوییم و می‌نویسیم $(a, b) = d$ هرگاه هر دو شرط زیر برقرار باشد:

- ۱) $d|a, d|b$
- ۲) $\forall m > 0; m|a, m|b \Rightarrow m \leq d$
- $(ka, kb) = |k|(a, b); (k \in \mathbb{Z}, k \neq 0)$
- $\begin{cases} a|b \\ a|c \end{cases} \Rightarrow a|b \pm c$

گروه آموزشی ماز

۴۰- معادله $27x + 39y = 1002$ چند دسته جواب طبیعی دارد؟

۱ (۴)

۲ (۳)

۳ (۲)

۴ (۱)

(آسان - هم‌نهشتی - مفهومی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۲

ابتدا شرط جواب معادله را بررسی می‌کنیم:

$$(27, 39) = 3 \mid 1002 \quad \checkmark$$

$$\xrightarrow{\div 3} 9x + 13y = 334 \Rightarrow 13y \equiv 334 \pmod{9}$$

$$\Rightarrow 13y \equiv 1 \pmod{9} \xrightarrow{13 \equiv 4} 4y \equiv -8 \pmod{9} \Rightarrow y \equiv -2 \pmod{9} \Rightarrow y = -2 + 9t \quad (t \in \mathbb{Z})$$

$$9x + 13(-2 + 9t) = 334 \Rightarrow x = 40 - 13t \Rightarrow \begin{cases} x = 40 - 13t \\ y = -2 + 9t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{Z})$$

حالا شرط جواب‌های طبیعی را چک می‌کنیم:

$$\begin{aligned} x > 0 &\Rightarrow 40 - 13t > 0 \Rightarrow t < \frac{40}{13} \\ y > 0 &\Rightarrow -2 + 9t > 0 \Rightarrow t > \frac{2}{9} \end{aligned} \Rightarrow \frac{2}{9} < t < \frac{40}{13} \Rightarrow t = 1, 2, 3$$

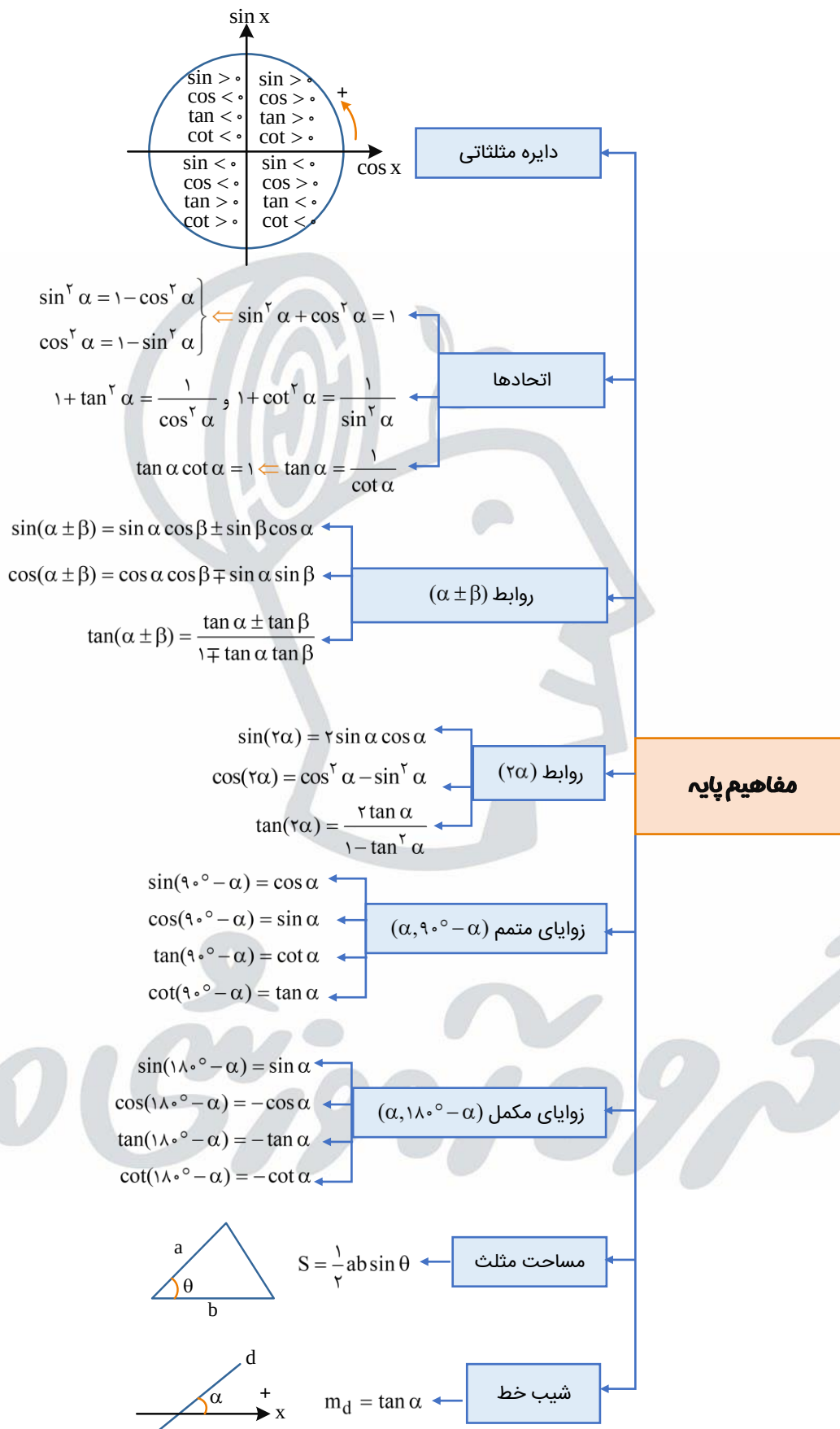
پس معادله ۳ دسته جواب طبیعی دارد.

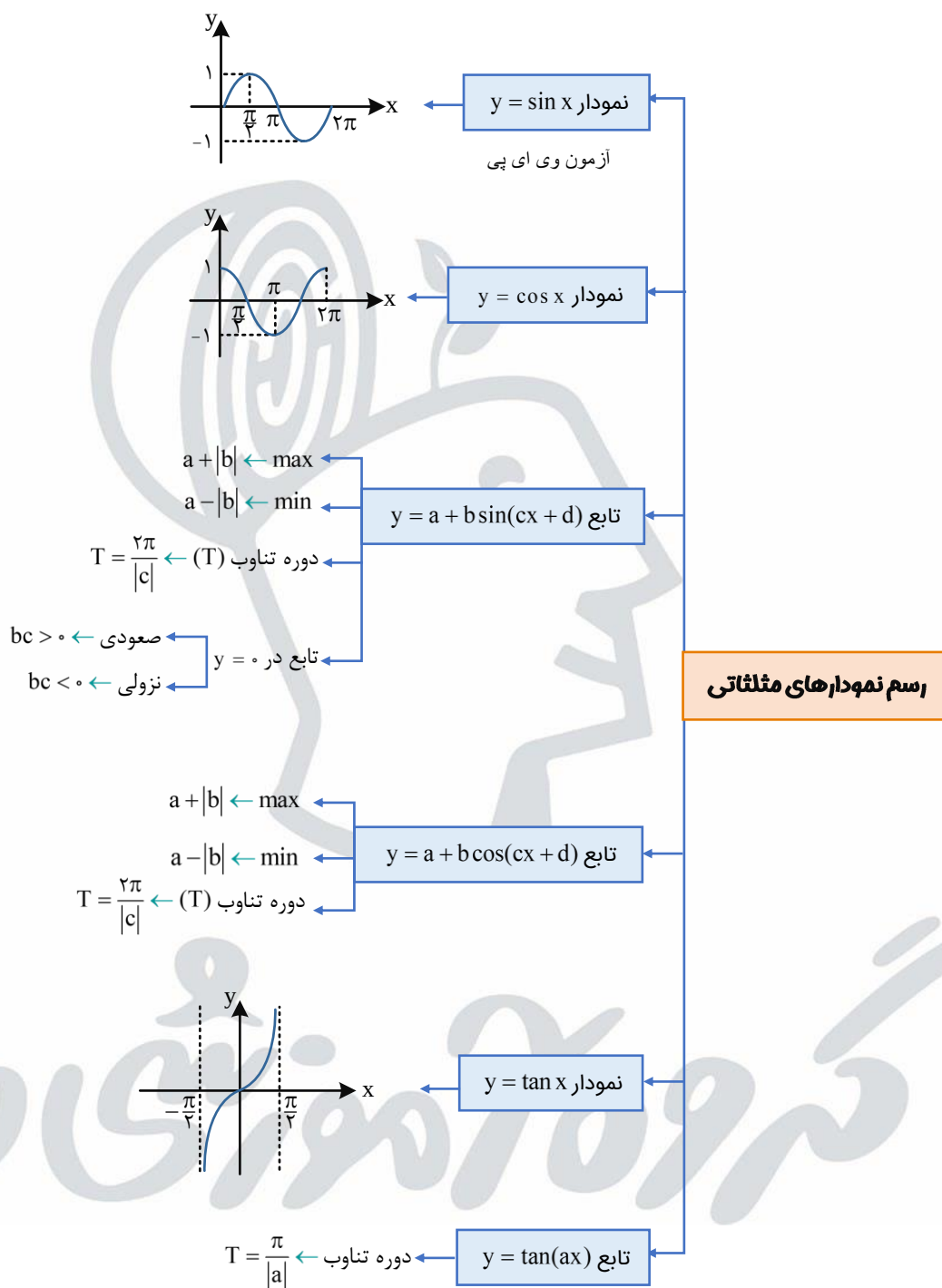
$$t = 1 \Rightarrow x = 27, y = 7$$

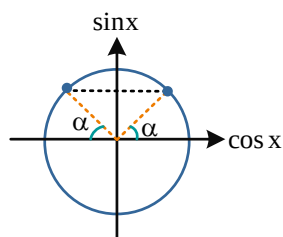
$$t = 2 \Rightarrow x = 14, y = 16$$

$$t = 3 \Rightarrow x = 1, y = 25$$

گروه آموزشی ماز

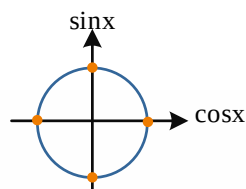






$$\sin x = \sin \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

معادله سینوسی

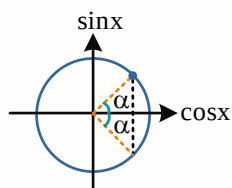


$$\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi$$

$$\sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

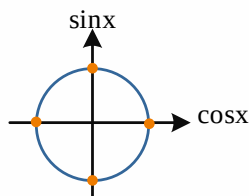
$$\sin x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$$

حالات خاص معادله سینوسی



$$\cos x = \cos \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ x = 2k\pi - \alpha \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

معادله کسینوسی



$$\cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi$$

$$\cos x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi + \pi$$

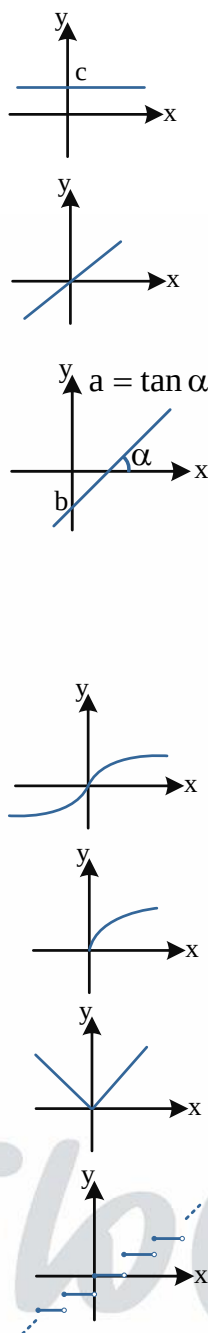
حالات خاص معادله کسینوسی

$$\tan x = \tan \alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\cot x = \cot \alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha \quad (k \in \mathbb{Z})$$

معادله تانژانت و کتانژانتی

معادله مثلثاتی



نمودار پیکانی
زوج مرتبی
مختصاتی

نمایش تابع

شرط تابع بودن

به ازای هر x ، y متفاوت نداشته باشیم.

تابع ثابت

ضابطه $y = c$

دامنه $\mathbb{R}$

برد $\{C\}$

تابع همانی

ضابطه $y = x$

دامنه $\mathbb{R}$

برد $\mathbb{R}$

برد با دامنه برابر است.

تابع خطی

ضابطه $y = ax + b$

دامنه $\mathbb{R}$

برد $\mathbb{R}$

تابع چندجمله‌ای

ضابطه چندجمله‌ای‌های جبری

دامنه $\mathbb{R}$

انواع تابع

مفاهیم پایه

تابع گویا

ضابطه $y = \frac{p(x)}{q(x)}$

دامنه $\mathbb{R} - \{x | q(x) = 0\}$

تابع رادیکالی

ضابطه $y = \sqrt[n]{x}$

دامنه $\mathbb{R}$

با فرجه فرد

ضابطه $y = \sqrt[n]{x}$

دامنه $x \geq 0$

با فرجه زوج

ضابطه $y = |x|$

دامنه $\mathbb{R}$

تابع قدرمطلق

ضابطه $y = [x]$

دامنه $\mathbb{R}$

تابع بزرگ یا جزء صحیح

شرط اول

برابری دامنه‌ها قبل از ساده کردن

تساوی دو تابع

شرط دوم

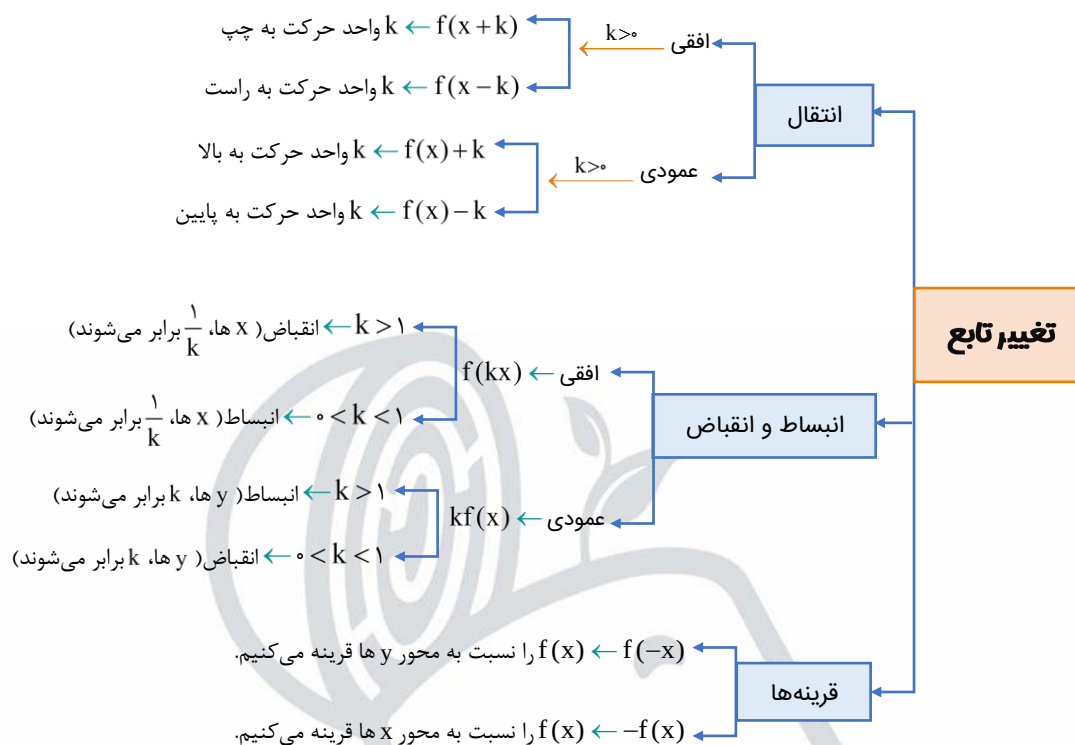
یکسان بودن ضابطه‌ها

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x), D_{f \pm g} = D_f \cap D_g$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x), D_{fg} = D_f \cap D_g$$

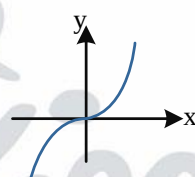
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\}$$

جبر توابع



فرم کلی $y = ax^3$

تابع درجه ۳

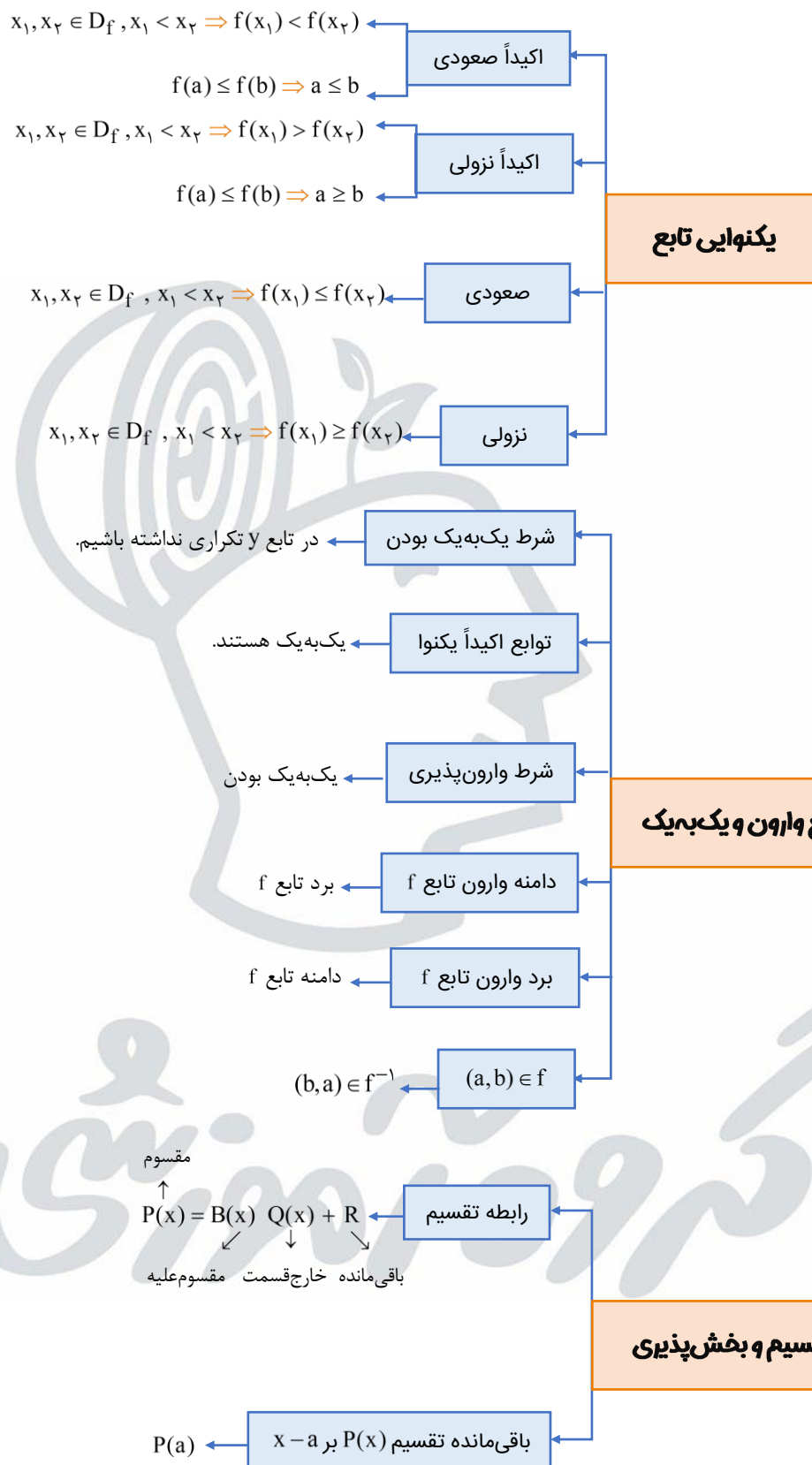


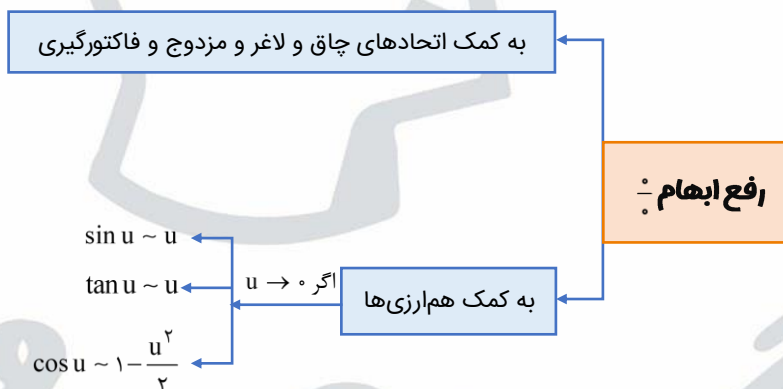
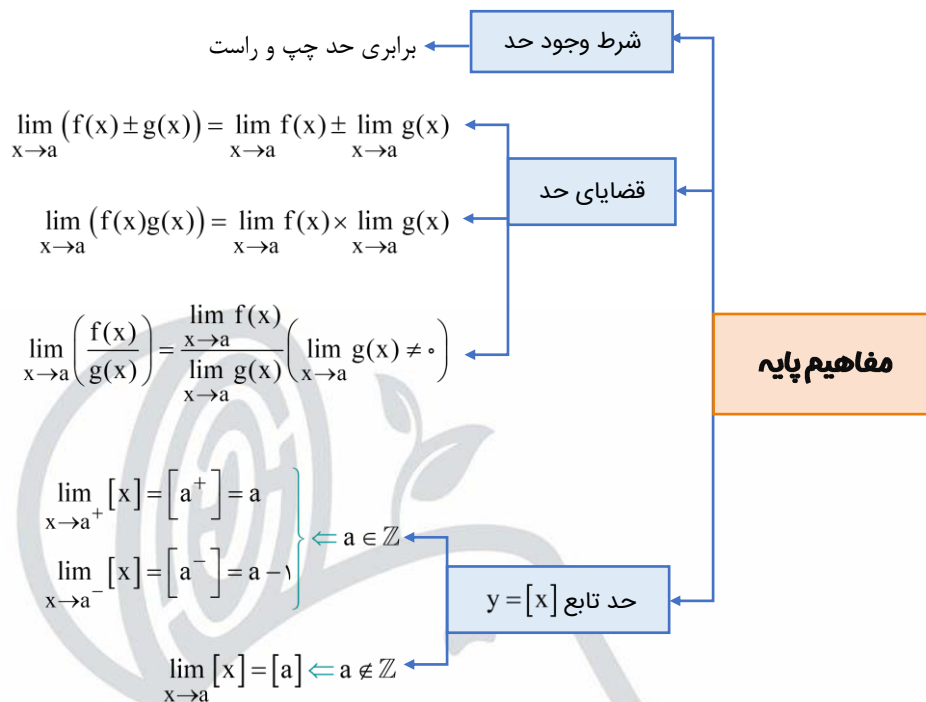
نمودار تابع $y = x^3$

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$ دامنه $D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$

ترکیب توابع

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$ دامنه $D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$





حد در بی نهایت

$$\frac{\infty}{\infty} \leftarrow \text{مبهم}$$

$$\frac{\text{عدد}}{\infty} = 0$$

اگر $x \rightarrow \pm\infty$ $\leftarrow$ هم‌ارزی پرتوان $\leftarrow$ جمله با بزرگ‌ترین توان را انتخاب می‌کنیم.

قائم

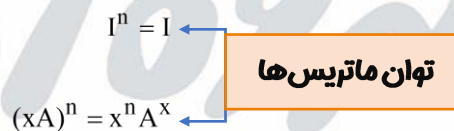
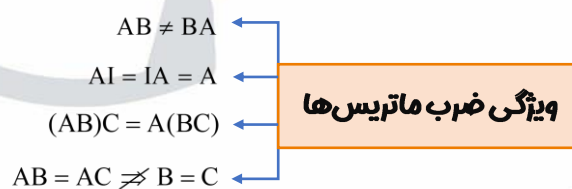
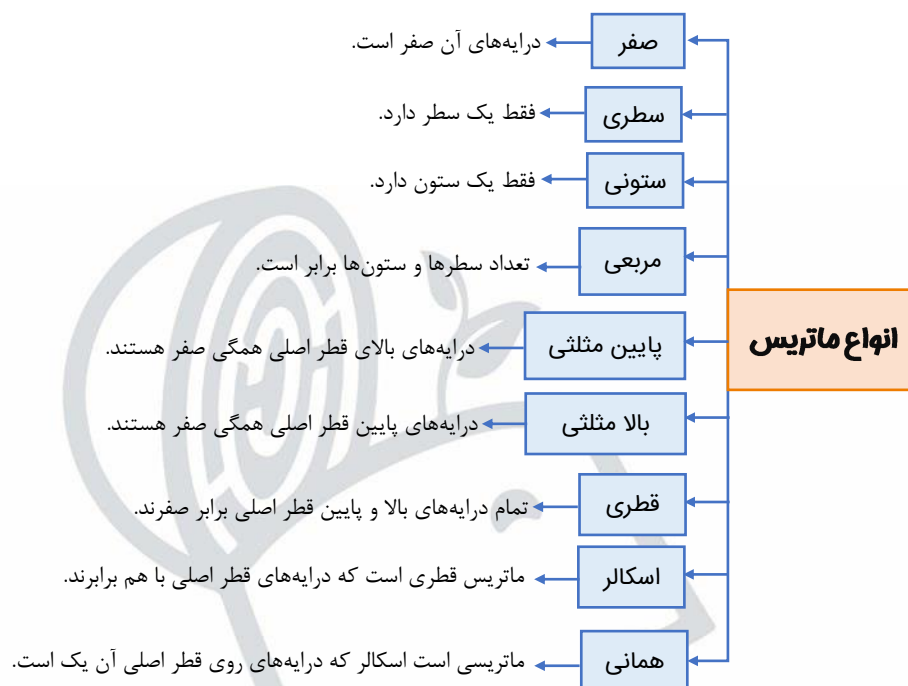
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \leftarrow x = a$$

در توابع گویا، ریشه‌های مخرج مجانب قائم هستند، به شرطی که ریشه صورت نباشند.

مجانب‌ها

افقی

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a \leftarrow y = a$$



$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc : 2 \times 2 \text{ دترمینان ماتریس}$$

$$A^2 - (a+d)A + |A|I = \vec{0} \leftarrow 2 \times 2 \text{ رابطه کیلی همیتون در ماتریس}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} + b(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \leftarrow 3 \times 3 \text{ دترمینان ماتریس}$$

دترمینان و ویژگی‌های آن

اگر همه درایه‌های یک سطر یا یک ستون ماتریس مربعی صفر باشد، دترمینان آن صفر است.

$$|AB| = |BA| = |A||B| \leftarrow \text{اگر } A \text{ و } B \text{ دو ماتریس مربعی هم‌مرتبه باشند}$$

دترمینان ماتریس‌های قطری و مثلثی برابر است با حاصل ضرب درایه‌های قطر اصلی

$$|kA| = k^n |A| : k \in \mathbb{R}, A_{n \times n} \text{ آزمون وی ای پی}$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

وارون ماتریس 2×2

$$AA^{-1} = I$$

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

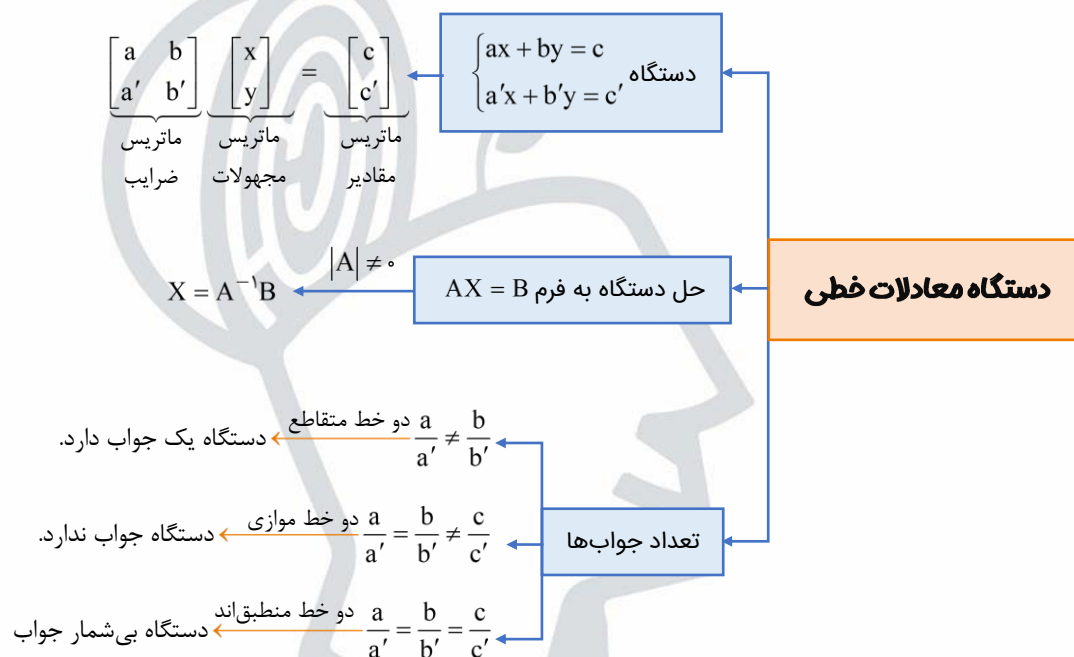
$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

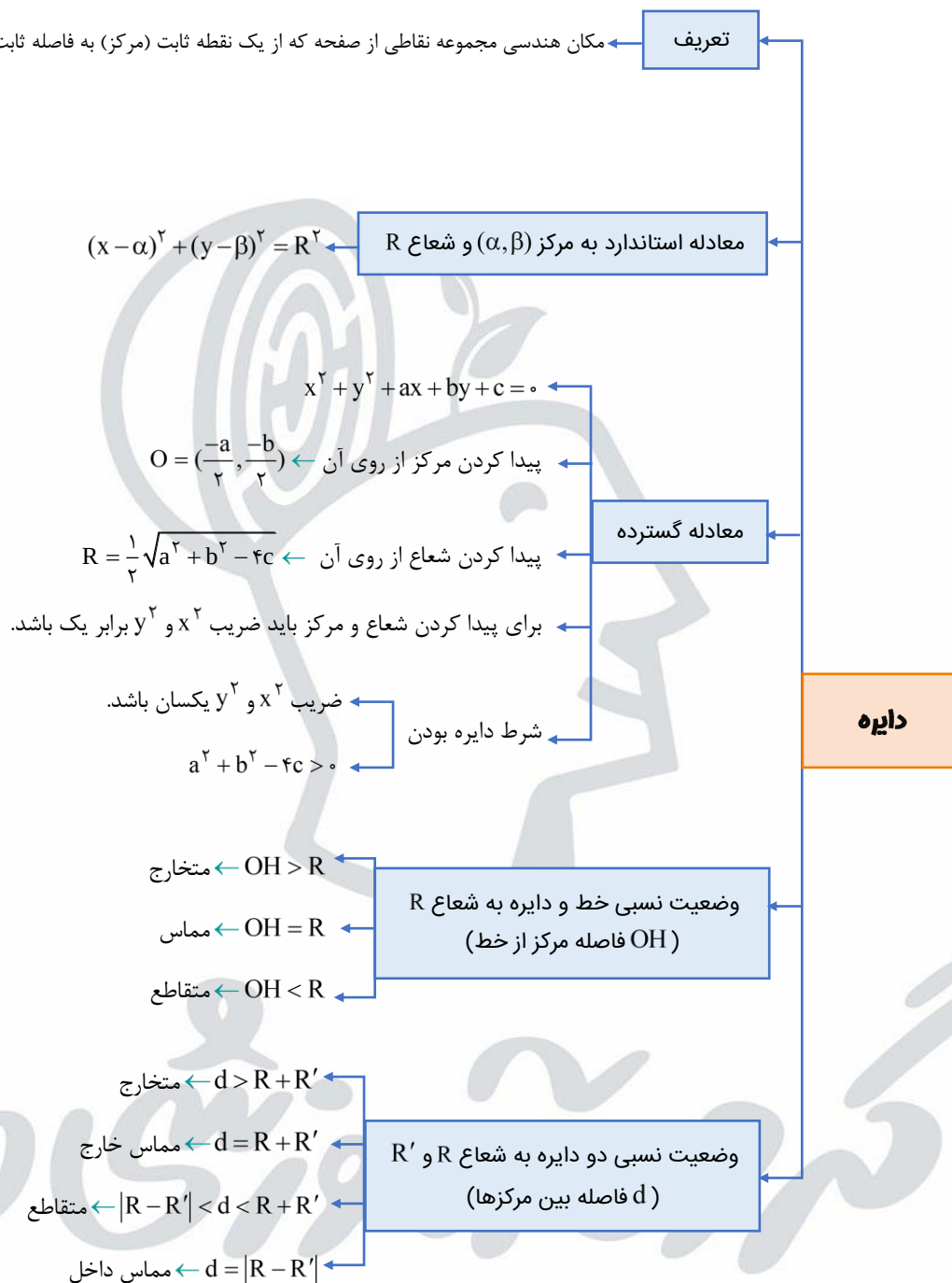
برخی از ویژگی‌ها

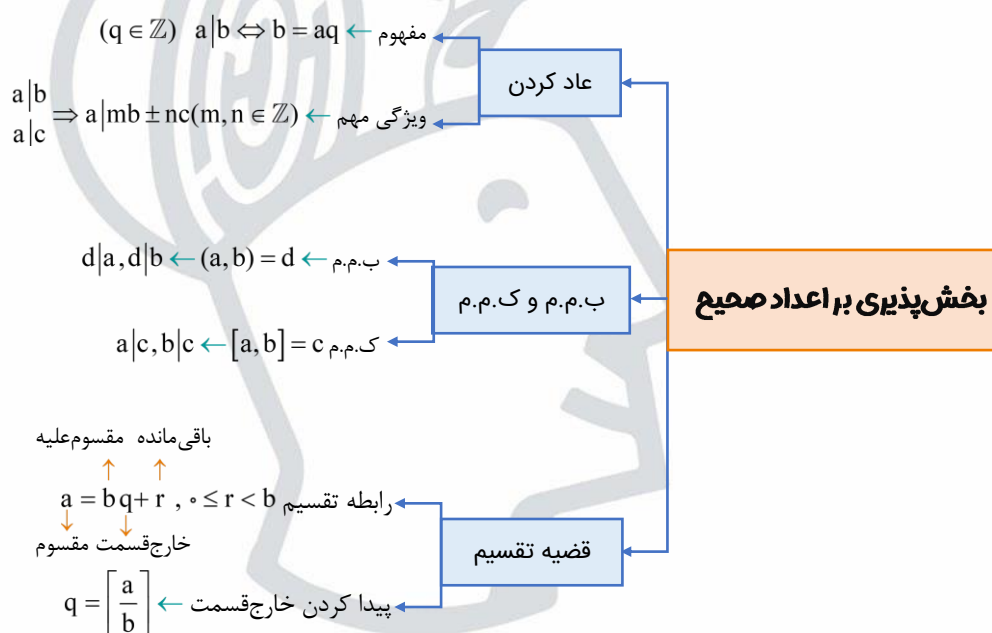
وارون ماتریس

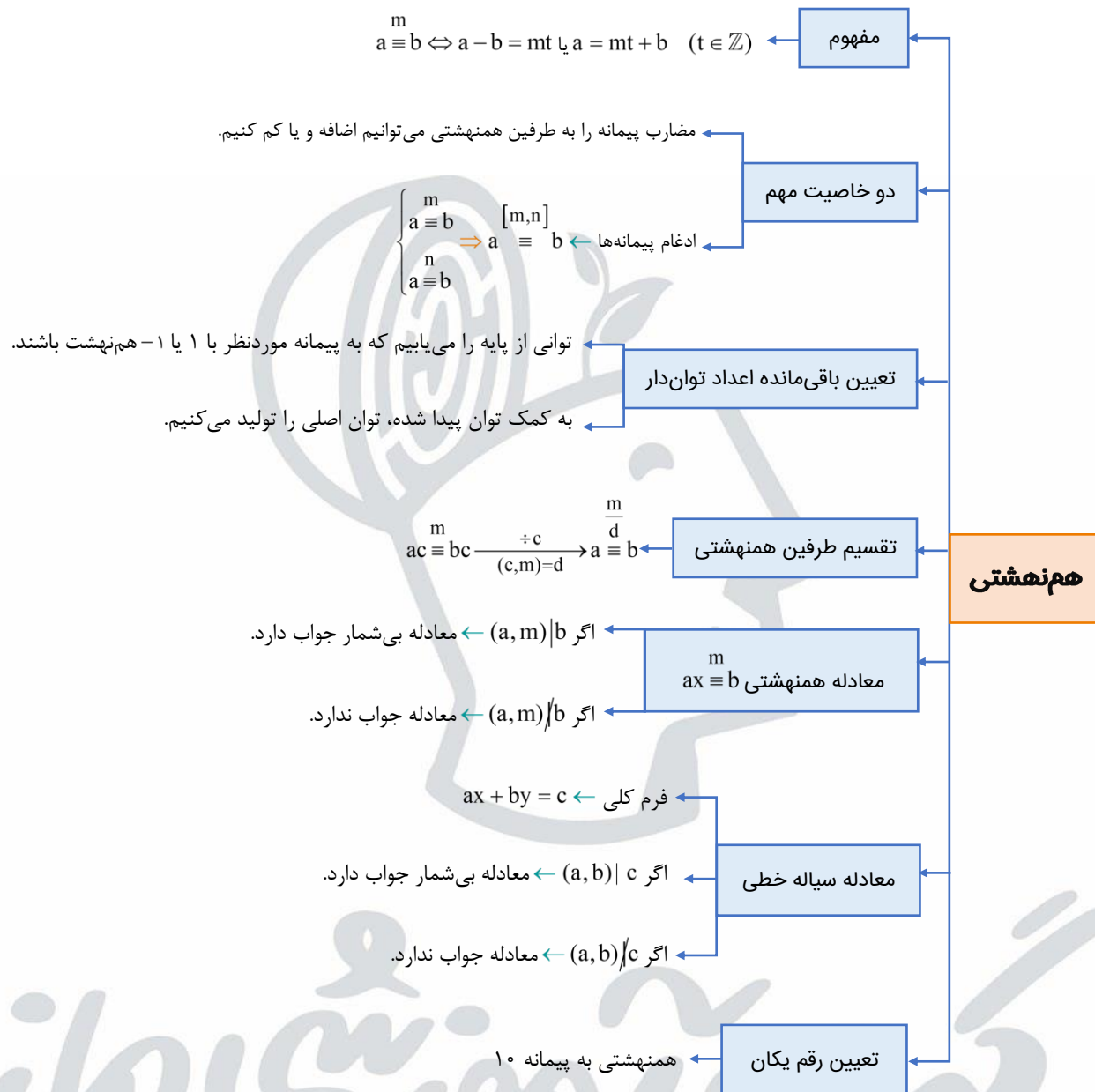
$$A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

معادله ماتریسی $AX = B$









گراف

دنباله درجات

مجموع درجات رأس‌ها، دو برابر تعداد یال‌هاست.

تعداد رأس‌های درجه فرد، باید زوج باشد.

مجموعه همسایه‌های رأس a

باز $\leftarrow$ خود a در آن نیست. $N_G(a)$

بسته $\leftarrow$ خود a در آن موجود است. $N_G[a]$

گراف r -منتظم

مجموع درجات $2q = rp$

rp نمی‌تواند هیچ‌گاه فرد باشد.

گراف کامل K_p

همه رأس‌ها با هم مجاور هستند.

حداکثر و حداقل درجه آن $(p-1)$ است.

تعداد یال‌ها $\leftarrow q = \binom{p}{2} = \frac{p(p-1)}{2}$

گراف تهی $(\bar{K}_p)$

هیچ یالی ندارد.

مسیر

در گراف از مرتبه P ، طول مسیر حداکثر $P-1$ است.

در گراف P_n ، دو رأس درجه یک و بقیه رأس‌ها از درجه ۲ هستند.

در گراف P_n ، تعداد کل مسیرهای موجود برابر است با: $\binom{P}{2}$

در هر گراف ساده، تعداد مسیرهای به طول صفر همان تعداد رأس‌ها و تعداد مسیرهای به طول یک همان تعداد یال‌ها می‌باشد.

دور

گرافی که از تنها یک دور به طول n تشکیل شده است را با C_n نمایش می‌دهند.

تعداد دورها به طول n در گراف $K_p \leftarrow \binom{P}{n} \frac{(n-1)!}{2}$

همبند و ناهمبند

همبند فقط از یک بخش تشکیل شده است.

اگر $q \geq \binom{P-1}{2} + 1$ گراف قطعاً همبند است.

اگر $\Delta = P-1$ گراف قطعاً همبند است.

اگر $\delta = P-1$ گراف قطعاً همبند است.

فیزیک

یکی از مطابقت‌های آزمون سال گذشته ماز با کنکور ۱۴۰۳

۵۱- گلوله‌ای در شرایط خلأ از ارتفاع ۲۴۵ متری سطح زمین رها می‌شود. تندی متوسط گلوله در ۳ ثانیه آخر حرکتش چند متر بر ثانیه است؟ ($g = 10 \frac{m}{s^2}$)

۶۰ (۴)

۵۰ (۳)

۶۵ (۲)

۵۵ (۱)

(آزمون مرحله ۳ سالیانه - فیزیک)

۵۱- گلوله‌ای در شرایط خلأ از ارتفاع ۱۲۵ متری زمین رها می‌شود. سرعت متوسط گلوله در ۲ ثانیه آخر حرکت، چند متر بر ثانیه است؟ ($g = 10 \frac{m}{s^2}$)

۴۵ (۴)

۴۰ (۳)

۳۵ (۲)

۳۰ (۱)

(کنکور تیر ۱۴۰۳ - فیزیک رشته ریاضی)



برای مشاهده
همه مطابقت‌ها
اینجا رو اسکن کن!

biomaze.ir

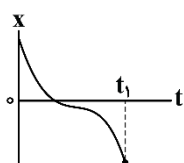
یا رو این کلیک کن!

دانش‌آموزان عزیز ماز

رسیدیم به یک آزمون بسیار مهم که قراره نتیجه درس خوندن شما در پاییز رو بهتون نشون بده. در این آزمون، فصل‌های یک و دو به‌صورت کامل قرار دارن و از فصل سوم هم، قسمت نوسان رو داریم. همه این مباحث، یعنی **حرکت‌شناسی، دینامیک و نوسان** از مباحث پرسؤال و نسبتاً دشوار کنکور محسوب می‌شن که معمولاً چند سؤال سختی که در کنکور مطرح می‌شه به همین فصل‌ها اختصاص داره. یادتون باشه که از مباحث این آزمون، ۸ تست در کنکور **تجربی** و ۱۰ تست در کنکور **ریاضی** خواهیم داشت که نشون‌دهنده اهمیت بالای این آزمونیه. بیش‌تر سؤالات این آزمون، کاملاً استاندارد و بر مبنای سؤالات کنکور و تمرین‌های کتاب هستن تا متوجه اهمیت کنکورهای گذشته و کتاب درسی بشین. البته حدود ۵ سؤال ایده‌دار هم در آزمون قرار گرفته تا ابتکار و توانایی حل مسائل جدید هم مورد سنجش قرار بگیره. مثل همیشه فراموش نکنین مهم‌ترین بخش هر آزمون بعد از برگزاری اون انجام می‌شه که همون تحلیل آزمون هست. تلاشمون بر این بوده که با آماده‌سازی یک پاسخ‌نامه جامع، کیفیت تحلیل آزمونتون رو هم بالاتر ببریم.

سعید احمدی و سجاد صادقی‌زاده (رتبه ۱ کنکور ۹۲) - مسئولین درس فیزیک پایه دوازدهم آزمون ماز

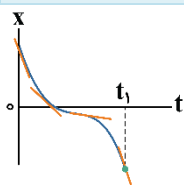
۴۱- نمودار مکان - زمان متحرکی به شکل مقابل است. در بازه زمانی صفر تا t_1 ، تندی متحرک چگونه تغییر می‌کند؟



- (۱) پیوسته افزایش می‌یابد.
- (۲) ابتدا افزایش، سپس کاهش می‌یابد.
- (۳) پیوسته کاهش می‌یابد.
- (۴) ابتدا کاهش، سپس افزایش می‌یابد.

(آسان - نموداری - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۴



می‌دانیم اندازه شیب مماس بر نمودار مکان - زمان در لحظه موردنظر، همان تندی جسم در آن لحظه است. مطابق شکل، اندازه شیب‌های مماس بر نمودار، ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد. پس تندی جسم ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد.

مشاوره

استفاده از شیب مماس بر نمودار مکان - زمان برای تحلیل سرعت لحظه‌ای یا تندی لحظه‌ای متحرک هم در کنکور و هم در امتحانات نهایی همواره موردتوجه طراحان هست و حتماً به کمک پاسخ‌نامه سعی کنید تحلیل درست این سؤال رو خوب یاد بگیرید.

نمودار مکان - زمان

در مورد نمودار مکان - زمان، نکات مهم زیر را باید درنظر بگیریم:

۱- سرعت متوسط برابر است با شیب خط واصل دو نقطه از نمودار مکان - زمان:

$$\bar{v}_{av} = \frac{\Delta \bar{x}}{\Delta t}$$

۲- سرعت لحظه‌ای برابر است با شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان در لحظه موردنظر:

لحظه‌ای $v =$ شیب خط مماس

۳- هر جا که نمودار مکان - زمان محور زمان را قطع کند و از آن عبور نماید، بردار مکان تغییر علامت می‌دهد.

۴- هر جا نمودار مکان - زمان صعودی باشد ($v > 0$)، متحرک در جهت محور حرکت می‌کند، هر جا نزولی باشد ($v < 0$)، متحرک در خلاف جهت محور حرکت می‌کند.

۵- اگر اندازه شیب‌های مماس بر نمودار مکان - زمان افزایش یابد، تندی متحرک افزایش می‌یابد و بالعکس.

گروه آموزشی ماز

۴۲- متحرکی بر روی محور x در حال حرکت است. بردار شتاب متوسط آن در بازه زمانی $t_1 = 0s$ تا $t_2 = 6s$ در SI برابر $2\vec{i}$ و در بازه زمانی $t_2 = 6s$ تا $t_3 = 15s$ در SI برابر $3\vec{i}$ است. بردار شتاب متوسط آن در بازه زمانی $t_1 = 0s$ تا $t_3 = 15s$ در SI کدام است؟

(۴) $-\frac{1}{2}\vec{i}$

(۳) $-\vec{i}$

(۲) $\vec{i}$

(۱) $\frac{1}{2}\vec{i}$

با توجه به رابطه $a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ داریم:

$$t_1 = 0 \Rightarrow t_2 = 6s : a_{av_1} = \frac{\Delta v_1}{\Delta t_1} \Rightarrow -2 = \frac{\Delta v_1}{6} \Rightarrow \Delta v_1 = -12 \frac{m}{s}$$

$$t_2 = 6s \Rightarrow t_3 = 15s : a_{av_2} = \frac{\Delta v_2}{\Delta t_2} \Rightarrow 3 = \frac{\Delta v_2}{9} \Rightarrow \Delta v_2 = 27 \frac{m}{s}$$

$$t_1 = 0 \Rightarrow t_3 = 15s : a_{av_3} = \frac{\Delta v_3}{\Delta t_3} = \frac{\Delta v_1 + \Delta v_2}{\Delta t_3} = \frac{-12 + 27}{15} = 1 \frac{m}{s^2} \Rightarrow \vec{a}_{av_3} = \vec{i} \left(\frac{m}{s^2} \right)$$

بچه‌ها حواستون باشه که بردار تغییر سرعت از $t_1 = 0s$ تا $t_3 = 15s$ برابر با مجموع بردار تغییر سرعت $t_1 = 0s$ تا $t_2 = 6s$ و بردار تغییر سرعت $t_2 = 6s$ تا $t_3 = 15s$ است.



نکته

اگر شتاب متوسط متحرک در بازه زمانی صفر تا t_1 برابر a_{av_1} ، در بازه زمانی t_1 تا t_2 برابر a_{av_2} ، ... و در بازه زمانی t_{n-1} تا t_n برابر a_{av_n} باشد، آنگاه در بازه زمانی صفر تا t_n ، شتاب متوسط متحرک برابر است با:

$$a_{av_{0 \rightarrow t_n}} = \frac{(t_2 - t_1)a_{av_1} + (t_3 - t_2)a_{av_2} + \dots + (t_n - t_{n-1})a_{av_n}}{t_n}$$



میان‌بر

$$a_{av_{0 \rightarrow 15s}} = \frac{(t_2 - t_1)a_{av_1} + (t_3 - t_2)a_{av_2}}{t_3 - t_1} = \frac{6(-2) + 9(3)}{15} = 1 \frac{m}{s^2}$$

کنکور سراسری تجربی تیرماه ۱۴۰۰

۴۹- متحرکی روی محور X در حال حرکت است. بردار شتاب متوسط آن در بازه زمانی $t_1 = 5s$ تا $t_2 = 10s$ در SI برابر $-4\vec{i}$ و در بازه زمانی $t_2 = 10s$ تا $t_3 = 12s$ در SI برابر $2\vec{i}$ است. بردار شتاب متوسط آن در بازه زمانی $t_1 = 5s$ تا $t_3 = 12s$ در SI، کدام است؟

- (۱) $-\frac{2}{3}\vec{i}$ (۲) $-\frac{16}{3}\vec{i}$ (۳) $4\vec{i}$ (۴) $8\vec{i}$

پاسخ تشریحی:

با استفاده از تعریف شتاب متوسط داریم:

$$\left. \begin{aligned} \frac{v(10s) - v(5s)}{10 - 5} = -4 \Rightarrow v(10s) - v(5s) = -20 \\ \frac{v(12s) - v(10s)}{12 - 10} = 2 \Rightarrow v(12s) - v(10s) = 4 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{مجموع طرفین}} v(12s) - v(5s) = -16 \xrightarrow{\text{تقسیم طرفین بر } 7s} \frac{v(12s) - v(5s)}{7} = -\frac{16}{7} \frac{m}{s^2}$$

شتاب متوسط در بازه $t=5s$ تا $t=12s$

میان‌بر:

$$a_{av_{t_1 \rightarrow t_3}} = \frac{-4(10 - 5) + 2(12 - 10)}{12 - 5} = -\frac{16}{7} \frac{m}{s^2}$$

پاسخ: گزینه ۲

گروه آموزشی ماز

۴۳- شناگری از ابتدای استخری به طول L، یک بار در بازه زمانی صفر تا t_1 طول استخر را با تندی متوسط s_1 رفته و برمی‌گردد و در بازه زمانی t_1 تا t_2 طول استخر را با تندی متوسط s_2 طی می‌کند. در بازه زمانی صفر تا t_2 ، اندازه سرعت متوسط شناگر کدام است؟

- (۱) $\frac{s_1 s_2}{2(s_1 + 2s_2)}$ (۲) $\frac{2s_1 s_2}{s_2 + 2s_1}$ (۳) $\frac{s_1 s_2}{s_2 + 2s_1}$ (۴) $\frac{s_1 s_2}{s_1 + 2s_2}$

(سخت - مفهومی/محاسباتی - ۱۴۰۱)

پاسخ: گزینه ۴

گام اول:

برای بازه زمانی صفر تا t_1 داریم:

$$s_1 = \frac{L_1}{\Delta t_1} = \frac{2L}{t_1} \Rightarrow t_1 = \frac{2L}{s_1} *$$

برای بازه زمانی t_1 تا t_2 داریم:

$$s_2 = \frac{L_2}{\Delta t_2} = \frac{L}{t_2 - t_1} \Rightarrow t_2 - t_1 = \frac{L}{s_2} \xrightarrow{*} t_2 - \frac{2L}{s_1} = \frac{L}{s_2} \Rightarrow t_2 = \frac{L}{s_2} + \frac{2L}{s_1} = L \left(\frac{2}{s_1} + \frac{1}{s_2} \right)$$

۱

با توجه به این که در بازه زمانی صفر تا t_2 ، شناگر یک بار طول استخر را رفته و برگشته و یک بار هم فقط طول استخر را طی کرده است، بنابراین اندازه جابه‌جایی شناگر برابر با طول استخر بوده و داریم:

$$v_{av} = \frac{|\Delta x|}{\Delta t} = \frac{L}{t_2} = \frac{L}{L \left(\frac{2}{s_1} + \frac{1}{s_2} \right)} = \frac{s_1 s_2}{2s_2 + s_1}$$

دام تستی

صورت این تست خیلی گمراه‌کننده‌ست و شما اگر با دقت به نحوه حرکت و مسیر طی‌شده در هر دو حالت نگاه نکنی، قطعاً به یکی از گزینه‌های (۱)، (۲) یا (۳) می‌رسی.

مقایسه مسافت و جابه‌جایی، تندی متوسط و سرعت متوسط

۱- در شکل زیر، متحرک از مسیر نشان‌داده‌شده از A به B می‌رود. در این صورت طول مسیر واقعی برابر مسافت طی‌شده است و طول پاره‌خطی که A را به B وصل می‌کند برابر اندازه جابه‌جایی متحرک است (درواقع جابه‌جایی کوتاه‌ترین مسافت میان دو نقطه است). به شکل زیر دقت کنید:



۲- مسافت، کمیتی نرده‌ای است، درحالی‌که جابه‌جایی، کمیتی برداری است و جهت دارد.

۳- یکای مسافت و جابه‌جایی، هر دو در SI برابر متر (m) است.

۴- اندازه جابه‌جایی همواره کوچک‌تر یا مساوی مسافت طی‌شده است.

$$|\vec{d}| \leq \ell$$

۵- در شرایطی جابه‌جایی و مسافت هم‌اندازه هستند که متحرک تغییر جهت ندهد.

مثال

در کدامیک از حرکت‌های زیر، مسافت طی‌شده برابر اندازه جابه‌جایی متحرک است؟

الف: اتومبیلی که در مسیر مستقیم به سمت شمال حرکت می‌کند.

ب: اتومبیلی که ابتدا در مسیر مستقیم به سمت شمال حرکت می‌کند و سپس در مسیر مستقیم به سمت شرق می‌رود.

پ: ماهواره‌ای که در مسیر دایره‌ای دور کره زمین می‌چرخد.

ت: شناگری که طول استخر را شنا می‌کند و دوباره به مکان اولیه خود برمی‌گردد.

پاسخ: مطابق نکات فوق، برای آن که در حرکتی مسافت طی‌شده هم‌اندازه جابه‌جایی باشد، حرکت باید بدون هیچ‌گونه تغییر جهتی انجام شود و در مسیر مستقیم باشد. در بین عبارت‌های داده‌شده، فقط در عبارت «الف» متحرک روی خط راست و بدون تغییر جهت حرکت می‌کند.

۶- با تقسیم مسافت طی‌شده بر زمان حرکت، تندی متوسط حرکت به‌دست می‌آید:

$$s_{av} = \frac{\text{مسافت}}{\text{زمان}} = \frac{\ell}{\Delta t}$$

۷- با تقسیم جابه‌جایی بر زمان حرکت، سرعت متوسط به‌دست می‌آید:

$$\vec{v}_{av} = \frac{\text{بردار جابه‌جایی}}{\text{زمان}} = \frac{\vec{d}}{\Delta t}$$

۸- تندی متوسط، کمیتی نرده‌ای است، درحالی‌که سرعت متوسط، کمیتی برداری است.

۹- اندازه سرعت متوسط همواره کوچک‌تر یا مساوی تندی متوسط است. هنگامی این دو کمیت هم‌اندازه هستند که متحرک روی مسیر مستقیم بدون تغییر جهت حرکت کند.

۱۰- در حرکت بر روی محور X برای محاسبه جابه‌جایی و سرعت متوسط داریم:

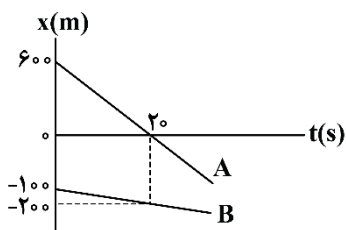
$$\vec{d} = \Delta \vec{x} = \vec{x}_2 - \vec{x}_1$$

$$\Rightarrow \vec{v}_{av} = \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t}$$

۴۴- نمودار مکان - زمان دو خودروی A و B که روی خط راست حرکت می کنند، مطابق شکل است. اگر ابتدا در لحظه t_1 و سپس در لحظه t_2 فاصله دو

متحرک از هم ۳۰۰ متر باشد، نسبت $\frac{t_1}{t_2}$ کدام است؟

- (۱) ۰/۴
- (۲) ۲/۵
- (۳) ۰/۸
- (۴) ۱/۲۵

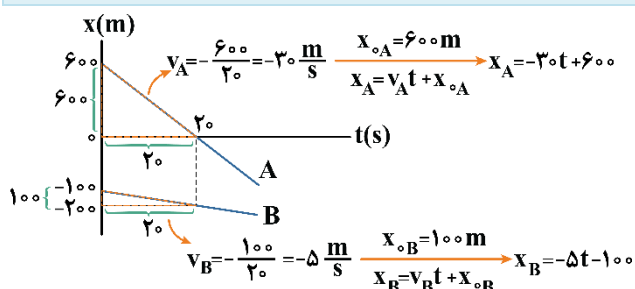


(متوسط - نموداری - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۱

روش اول: گام اول:

ابتدا به کمک شیب نمودارها، سرعت هر دو خودرو را به دست آورده و سپس معادله مکان - زمان آن‌ها را تشکیل می دهیم؛ بنابراین داریم:



گام آخر:

می دانیم فاصله دو متحرک A و B از هم به صورت $|x_A - x_B|$ به دست می آید. پس داریم:

$$|x_A - x_B| = 300 \Rightarrow |-25t + 700| = 300 \Rightarrow \begin{cases} -25t + 700 = 300 \Rightarrow t_1 = 16s \\ -25t + 700 = -300 \Rightarrow t_2 = 40s \end{cases} \Rightarrow \frac{t_1}{t_2} = 0/4$$

روش دوم:

می توانیم با روش نسبی نیز مسئله را حل کنیم. چون هر دو خودرو در یک جهت حرکت می کنند، داریم:

$$v_{\text{نسبی}} = |v_A - v_B| = |-30 - (-5)| = 25 \frac{m}{s}$$

$$|\Delta x_{\text{نسبی}}| = v_{\text{نسبی}} t = 25t \quad \left| \Delta x_{\text{نسبی}} \right| = 400m \text{ یا } 1000m \Rightarrow \begin{cases} 25t_1 = 400 \Rightarrow t_1 = 16s \\ 25t_2 = 1000 \Rightarrow t_2 = 40s \end{cases} \Rightarrow \frac{t_1}{t_2} = 0/4$$

امیدوارم حواستون باشه که چون فاصله دو خودرو از هم در مبدأ زمان برابر ۷۰۰m بود و نیز دو خودرو هم جهت حرکت می کنند، پس قبل از به هم رسیدن با جابه جایی ۴۰۰m نسبت به هم و بعد از سبقت گرفتن با جابه جایی ۱۰۰۰m نسبت به هم، فاصله دو خودرو از یکدیگر برابر با ۳۰۰m می شود.

مشاوره

این تست براساس یکی از تمرین های کتاب درسی طرح شده و هم برای امتحان نهایی و هم برای کنکور سؤال مهمی محسوب می شه. برای همین یک بار به سبک امتحان نهایی و یک بار هم به سبک کاملاً کنکوری براتون حل کردیم تا همه جوره خیالتون راحت باشه.

حرکت با سرعت ثابت

حرکتی است که در آن اندازه سرعت (تندی) متحرک و جهت آن در طول مسیر، ثابت است.
معادله مکان - زمان یک متحرک که با سرعت ثابت حرکت می کند، به شکل زیر است:

$$x = vt + x_0$$

سرعت متحرک $\left(\frac{m}{s}\right)$ مکان اولیه متحرک (m) مکان نهایی متحرک (m)

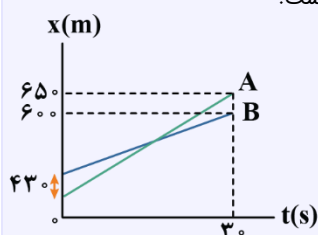
در حرکت با سرعت ثابت	۱- سرعت لحظه ای و سرعت متوسط با هم برابرند: $v_{av} = v$
	۲- شتاب حرکت، صفر است.
	۳- اندازه جابه جایی و مسافت با هم برابرند ($ d = L$)، در نتیجه در این حرکت اندازه سرعت برابر تندی است ($ v = s$).

به نمودارهای مکان - زمان و سرعت - زمان با سرعت ثابت توجه کنید:

معادله	مکان - زمان	سرعت - زمان	نوع حرکت
	$x = vt + x_0$	$v = \text{ثابت}$	
حرکت یکنواخت در جهت محور X	$x_0 > 0$ $x_0 = 0$ $x_0 < 0$	$v > 0$	
حرکت یکنواخت در خلاف جهت محور X	$x_0 > 0$ $x_0 = 0$ $x_0 < 0$	$v < 0$	

کنکور سراسری خارج از کشور ۱۳۹۴

نمودار مکان - زمان دو متحرک A و B به صورت شکل زیر است. سرعت متحرک A چند متر بر ثانیه بیش تر از سرعت متحرک B است؟



(۱) ۱۲

(۲) ۱۲/۶

(۳) ۱۶

(۴) ۱۶/۳

پاسخ تشریحی:

نمودار $x-t$ هر دو متحرک به صورت یک تابع خطی است؛ بنابراین معادله مکان - زمان آنها به صورت $x = vt + x_0$ است. در لحظه $t = 30$ s متحرک A در مکان $x_A = 65$ m و متحرک B در مکان $x_B = 60$ m می باشد؛ پس:

$$x_A = v_A t + x_{0A} \rightarrow 65 = v_A \times 30 + x_{0A} \rightarrow 65 = 30v_A + x_{0A} \quad (1)$$

$$x_B = v_B t + x_{0B} \rightarrow 60 = v_B \times 30 + x_{0B} \rightarrow 60 = 30v_B + x_{0B} \quad (2)$$

حال طرفین معادله های (۱) و (۲) را از هم کم می کنیم:

$$65 - 60 = (30v_A + x_{0A}) - (30v_B + x_{0B}) \Rightarrow 5 = 30(v_A - v_B) + (x_{0A} - x_{0B}) = 30(v_A - v_B) + (-43)$$

$$\Rightarrow 5 = 30(v_A - v_B) - 43 \Rightarrow 5 + 43 = 30(v_A - v_B) \Rightarrow 48 = 30(v_A - v_B) \Rightarrow v_A - v_B = \frac{48}{30} = 1.6 \frac{m}{s}$$

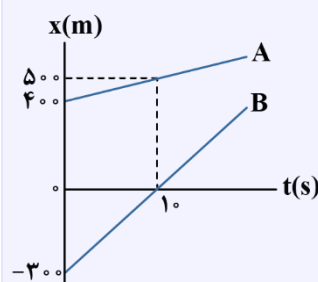
میان بر:

$$\Delta x_{نسبی} = 43 + 5 = 48 \Rightarrow v_{نسبی} = \frac{48}{30} = 1.6 \frac{m}{s}$$

پاسخ: گزینه ۳

کنکور سراسری تجربی خارج از کشور تیرماه ۱۴۰۰

۵۰- نمودار مکان - زمان دو خودرو که روی خط راست حرکت می کنند، مطابق شکل زیر، است. در لحظه های t_1 و t_2 فاصله دو متحرک از هم 60 m است. $\frac{t_2}{t_1}$ کدام است؟



(۱) ۱۵

(۲) ۱۳

(۳) ۸

(۴) ۵

پاسخ تشریحی:

ابتدا در لحظه $t = 0$ ، فاصله دو متحرک 70 m است و سپس در لحظه $t = 10$ s، فاصله به 50 m رسیده است؛ بنابراین فاصله با سرعت 20 m/s کاهش می یابد و معادله فاصله دو متحرک از هم برابر است با:

$$\rightarrow d = 20t + 70$$

فاصله اولیه: $d = vt + 70$

برای آن که فاصله برابر 600 m شود، داریم:

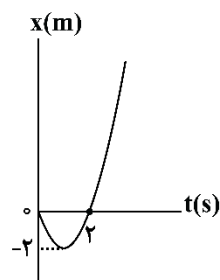
$$|d| = 600\text{ m} \rightarrow |-20t + 700| = 600 \rightarrow \begin{cases} -20t + 700 = 600 \\ -20t + 700 = -600 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t_1 = 5\text{ s} \\ t_2 = 65\text{ s} \end{cases}$$

$$\rightarrow \frac{t_2}{t_1} = \frac{65}{5} = 13$$

پاسخ: گزینه ۲

گروه آموزشی ماز

۴۵- نمودار مکان - زمان متحرکی که با شتاب ثابت بر روی محور x حرکت می کند، مطابق شکل زیر است. سرعت متوسط متحرک در بازه $t_1 = 0$ تا $t_2 = 3\text{ s}$ چند متر بر ثانیه است؟



- ۱ (۱)
- ۲ (۲)
- ۳ (۳)
- ۴ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

(آسان - نموداری - ۱۲۰۱)

با توجه به نمودار، مکان اولیه متحرک، صفر ($x_0 = 0$) است و با استفاده از تقارن سهمی، رأس سهمی در لحظه $t = 1\text{ s}$ قرار دارد.

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t \Rightarrow \begin{cases} t = 1\text{ s} : -2 = \frac{1}{2}a \times 1^2 + v_0 \times 1 \\ t = 3\text{ s} : 6 = \frac{1}{2}a \times 3^2 + v_0 \times 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2 = \frac{1}{2}a + v_0 \\ 6 = \frac{9}{2}a + 3v_0 \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه دو معادله}} a = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, v_0 = -4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

برای محاسبه سرعت متوسط در بازه $t_1 = 0$ تا $t_2 = 3\text{ s}$ می توان نوشت:

$$\begin{cases} t_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \\ t_2 = 3\text{ s} \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2} \times 4 \times 3^2 - 4 \times 3 = 6\text{ m} \end{cases} \Rightarrow v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{6 - 0}{3 - 0} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

حرکت با شتاب ثابت

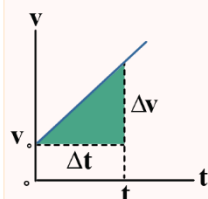
هرگاه بردار شتاب متحرکی در لحظه های مختلف یکسان باشد، حرکت جسم را حرکت با شتاب ثابت می نامیم.

ویژگی های حرکت با شتاب ثابت:

- ۱- سرعت متحرک با زمان به صورت خطی تغییر می کند پس تغییرات v نسبت به t به صورت یک تابع خطی است به همین دلیل سرعت متوسط متحرک در بازه زمانی صفر تا t برابر است با میانگین سرعت متحرک در این دو لحظه، یعنی: معادله سرعت متوسط در حرکت با شتاب ثابت:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \xrightarrow{\text{حرکت با شتاب ثابت}} v_{av} = \frac{v_1 + v_2}{2} \Rightarrow v_{av} = v \left(\frac{t_1 + t_2}{2} \right) \xrightarrow{v = at + v_0} v_{av} = \frac{1}{2}a(t_1 + t_2) + v_0$$

۲- شیب نمودار سرعت - زمان، ثابت است و برابر با شتاب متحرک می باشد.



$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \text{شیب نمودار سرعت - زمان}$$

- ۳- شتاب متوسط در بازه های زمانی مختلف یکسان است. شتاب متوسط در هر بازه زمانی برابر شتاب لحظه ای متحرک است یعنی:

$$a = a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

۴- معادله مکان - زمان در حرکت با شتاب ثابت:

معادله‌ای که مکان متحرک را در هر لحظه برای ما مشخص می‌کند:

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$$

X: مکان متحرک در لحظه t

$\vec{v}_0$: سرعت اولیه

در حرکت با شتاب ثابت، مکان متحرک، تابعی درجه دوم از زمان است.

۵- معادله سرعت - زمان در حرکت با شتاب ثابت:

معادله‌ای است که سرعت متحرک را در هر لحظه برای ما مشخص می‌کند:

$$v = at + v_0$$

v_0 : سرعت اولیه

V: سرعت متحرک در لحظه t

۶- معادله سرعت - جابجایی (مستقل از زمان) در حرکت با شتاب ثابت:

در این معادله زمان وجود ندارد، پس بهتر است در سؤالاتی که زمان را نمی‌دهند و نمی‌خواهند از این معادله استفاده کنیم:

$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$$

۷- معادله مستقل از شتاب در حرکت با شتاب ثابت:

در این معادله شتاب وجود ندارد، پس بهتر است در سؤالاتی که شتاب را نمی‌دهند و نمی‌خواهند از این معادله استفاده کنیم:

$$\Delta x = \frac{v_2 + v_1}{2} \Delta t$$

روش محاسبه جابجایی در حرکت با شتاب ثابت:

معادله جابجایی زمان: (در بازه t_1 تا t_2)

$$\Delta x = \frac{1}{2}a\Delta t^2 + v_1\Delta t$$

حالت خاص: جابجایی در بازه زمانی $[0, t]$

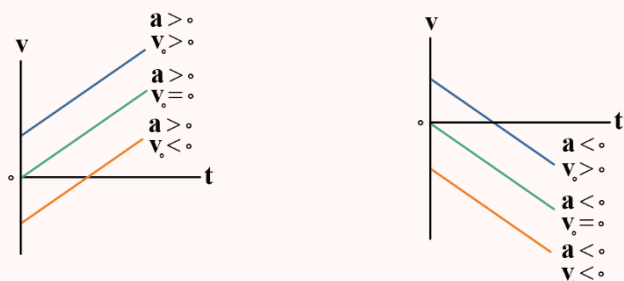
$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t$$

نمودارهای حرکت با شتاب ثابت

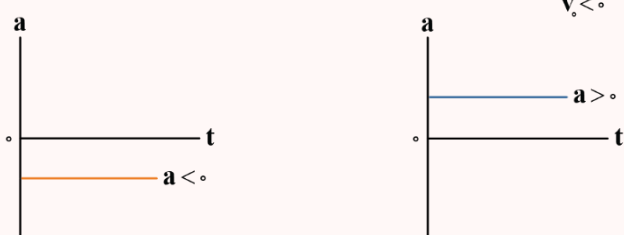
۱- نمودار مکان - زمان به شکل یک سهمی است که تقعر آن علامت شتاب را نشان می‌دهد.



۲- نمودار سرعت - زمان به صورت یک خط با شیب ثابت است.



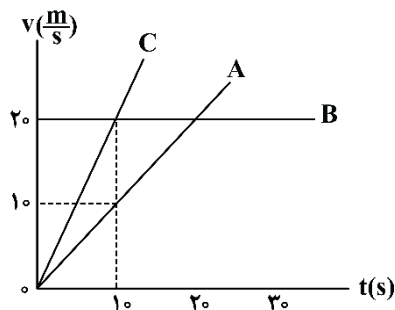
۳- نمودار شتاب - زمان به صورت یک خط افقی است.



در حرکت با شتاب ثابت اگر برای دو لحظه t_1 و t_2 داشته باشیم رأس سهمی $t = \frac{t_1 + t_2}{2}$ آن گاه $v_{t_1} = -v_{t_2}$ می شود.

گروه آموزشی ماز

۴۶- نمودار سرعت - زمان برای سه متحرک A، B و C که بر روی مسیر مستقیم حرکت می کنند، مطابق شکل است. کدام گزینه در مورد مقایسه شتاب حرکت این سه متحرک صحیح است؟



$$a_C = 2a_A > a_B = 0 \quad (1)$$

$$a_C = \frac{1}{2}a_A > a_B = 0 \quad (2)$$

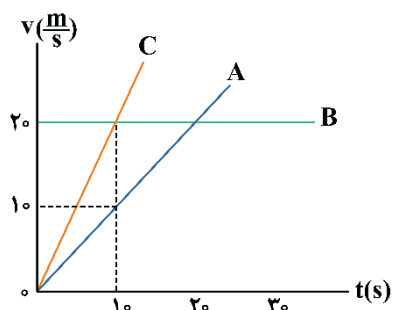
$$a_B > a_C > a_A \quad (3)$$

$$a_B = 2a_C = 4a_A \quad (4)$$

(آسان - نموداری - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۱

شیب نمودار سرعت - زمان برابر شتاب متحرک است؛ بنابراین با توجه به نمودار سرعت - زمان، شتاب هر کدام از متحرک ها برابر است با:



$$\begin{cases} a_A = \frac{20-0}{20-0} = 1 \frac{m}{s^2} \\ a_B = 0 \\ a_C = \frac{20-0}{10-0} = 2 \frac{m}{s^2} \end{cases} \Rightarrow a_C = 2a_A > a_B = 0$$

دام تستی

در تستی به این سادگی، هستند بچه هایی که به خاطر عجله و بی دقتی در مقایسه نسبت شتاب متحرک A و C به اشتباه گزینه (۲) را علامت زدند. برای پرهیز از این نوع سوتی ها، حتماً مقادیر به دست آمده رو در مقایسه های مطرح شده در گزینه ها چک کنین تا به گزینه درست برسین.

جرعه ذهنی

راستی بچه ها چون سرعت متحرک B ثابت و در نتیجه شتاب اون صفر هست پس گزینه های (۳) و (۴) حذف می شن. از طرفی هم چون شیب نمودار C بیش تر از شیب نمودار A هست، پس گزینه (۲) هم حذف می شه.

گروه آموزشی ماز

۴۷- متحرکی از حال سکون بر روی محور x با شتاب ثابت، شروع به حرکت می کند. مسافت طی شده در ثانیه سوم حرکت چند برابر مسافت طی شده در ۳ ثانیه اول حرکت است؟

$$3 \quad (4)$$

$$\frac{5}{7} \quad (3)$$

$$\frac{5}{9} \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

(آسان - محاسباتی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره

در حرکت با شتاب ثابت، جابه جایی در ثانیه های متوالی یا در m ثانیه های متوالی به خاطر نکات و تکنیک هایی که در حلش وجود داره همیشه مورد علاقه طراحان است. ما با ۳ روش کاملاً خفن این تست رو براتون ترکونیم و حسابی سنگ تمام گذاشتیم. پس حتماً به سر به پاسخ نامه بزن و با انواع روش های حل آشنا شو.

روش اول:

در حرکت با شتاب ثابت، برای محاسبه جابه جایی در ثانیه سوم و ۳ ثانیه اول حرکت، می توان به صورت زیر عمل کرد:

$$\Delta x_n = \frac{1}{2}a(n-1) + v_0 \Rightarrow \Delta x_3 = \frac{1}{2}a(2 \times 3 - 1) + 0 = \frac{5}{2}a$$

جابه‌جایی در ۳ ثانیه اول:

$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t \Rightarrow \Delta x = \frac{1}{2}a \times 3^2 + 0 = \frac{9}{2}a$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta x_3}{\Delta x} = \frac{\frac{5}{2}a}{\frac{9}{2}a} = \frac{5}{9}$$

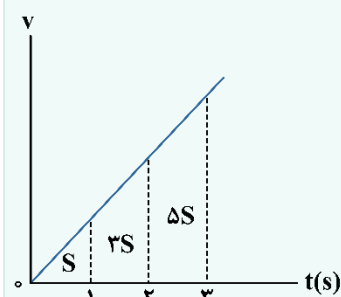
روش دوم:

در حرکت با شتاب ثابت، جابه‌جایی در ثانیه‌های متوالی، تشکیل یک دنباله حسابی با قدر نسبت شتاب را می‌دهند. اگر متحرک از حال سکون شروع به حرکت کرده باشد، جملات متوالی این دنباله به صورت $\frac{1}{2}a$ ، $\frac{3}{2}a$ ، $\frac{5}{2}a$ و $\frac{7}{2}a$... خواهد بود؛ بنابراین می‌توان نوشت:

$$\frac{\text{جابه‌جایی در ثانیه سوم}}{\text{جابه‌جایی در ۳ ثانیه اول}} = \frac{\frac{5}{2}a}{\frac{1}{2}a + \frac{3}{2}a + \frac{5}{2}a} = \frac{5}{9}$$

جرعه ذهنی

چون مساحت سطح بین نمودار سرعت - زمان و محور زمان (S) برابر با جابه‌جایی است، پس داریم:



$$\frac{\text{جابه‌جایی در ثانیه سوم}}{\text{جابه‌جایی در ۳ ثانیه اول}} = \frac{5S}{S + 3S + 5S} = \frac{5}{9}$$

محاسبه جابه‌جایی در T ثانیه nام

$$\Delta x_{n,T} = \frac{1}{2}a(n-1)T^2 + v_0T$$

جابه‌جایی‌های انجام‌شده توسط متحرک در T ثانیه‌های متوالی، تشکیل یک تصاعد حسابی با قدر نسبت aT^2 می‌دهند.

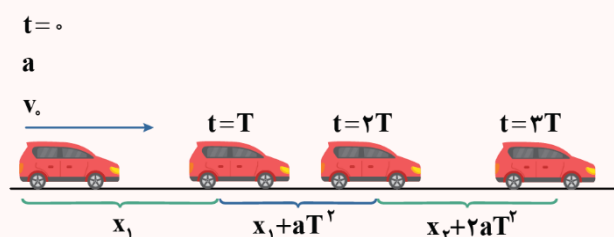
$$\Delta x_{n,T} = \frac{1}{2}a(n-1)T^2 + v_0T$$

$$\Delta x_{T,1} = 0 + \frac{1}{2}aT^2 + v_0T$$

$$\Delta x_{T,2} = \frac{1}{2}aT^2 + v_0T$$

$$\Delta x_{T,3} = \frac{3}{2}aT^2 + v_0T$$

$$\Delta x_{T,4} = \frac{5}{2}aT^2 + v_0T$$

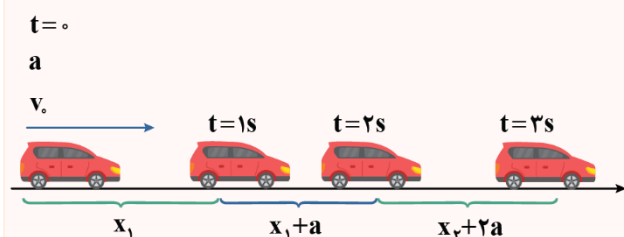


حالت خاص: جابه‌جایی در ثانیه nام:

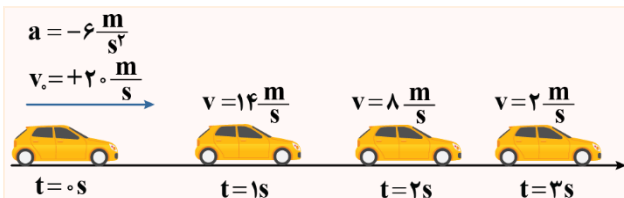
$$\Delta x_n = \frac{1}{2}a(n-1) + v_0$$

جابه‌جایی‌های انجام‌شده در ثانیه‌های متوالی، تشکیل یک تصاعد حسابی با قدر نسبت a می‌دهند.

۱- در هر ثانیه جابه‌جایی یک a تغییر می‌کند.



۲- در هر ثانیه سرعت یک a تغییر می‌کند.



کنکور سراسری ریاضی اردیبهشت‌ماه ۱۴۰۳

۴۷- متحرکی در لحظه $t = 0$ s با شتاب ثابت از حال سکون شروع به حرکت می‌کند. جابه‌جایی این متحرک در n ثانیه سوم، چند برابر جابه‌جایی در n ثانیه دوم است؟

- (۱) $\frac{5}{3}$ (۲) $\frac{9}{4}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $2n$

پاسخ تشریحی:

روش اول: کافی است n را برابر یک قرار داده و مشخص کنیم جابه‌جایی در ثانیه سوم چند برابر جابه‌جایی در ثانیه دوم است. با توجه به این‌که سرعت اولیه صفر است، تصاعد را برای جابه‌جایی‌های متوالی یک ثانیه‌ای می‌نویسیم:



$$\frac{\text{جابه‌جایی در ثانیه سوم}}{\text{جابه‌جایی در ثانیه دوم}} = \frac{2/5 |a|}{1/5 |a|} = \frac{5}{3}$$

روش دوم:

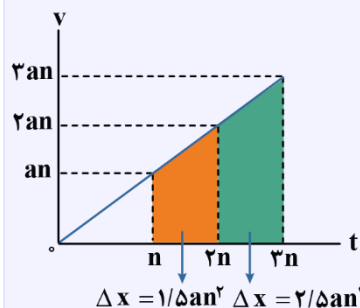
با استفاده از فرمول جابه‌جایی در Δt ثانیه n ام، جابه‌جایی را در n ثانیه سوم و n ثانیه دوم به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta x = (3 - 0/5)an^2 + 0 \times n$$

$$\Delta x = (2 - 0/5)an^2 + 0 \times n$$

$$\frac{\text{جابه‌جایی در } n \text{ ثانیه سوم}}{\text{جابه‌جایی در } n \text{ ثانیه دوم}} = \frac{2/5 an^2}{1/5 an^2} = \frac{5}{3}$$

می‌توان با نمودار سرعت - زمان هم به راحتی به جواب رسید:



پاسخ: گزینه ۱

گروه آموزشی ماز

۴۸- متحرکی از حال سکون بر روی محور x و در جهت محور x با شتاب ثابت، شروع به حرکت می‌کند و پس از مدت زمان Δt_1 سرعت خود را با شتاب ثابتی به بزرگی $1 \frac{m}{s}$ کاهش می‌دهد تا در مدت زمان Δt_2 متوقف شود. اگر مسافت طی‌شده توسط متحرک در کل $300m$ و تندى متوسط در بازه زمانی

Δt_1 برابر $10 \frac{m}{s}$ باشد، شتاب متوسط در 6 ثانیه دوم حرکت چند متر بر مربع ثانیه است؟

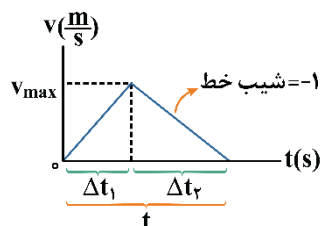
- (۱) 0.5 (۲) 1 (۳) 1.5 (۴) 2

(سخت - محاسباتی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۲

نمودار سرعت - زمان حرکت متحرک مطابق شکل است:

سرعت متوسط برابر میانگین سرعت‌ها در بازه زمانی Δt_1 است:



$$v_{av} = \frac{v_{max} + v_0}{2} \Rightarrow 10 = \frac{v_{max} + 0}{2} \Rightarrow v_{max} = 20 \frac{m}{s}$$

مسافت طی‌شده در کل بازه زمانی $300m$ است:

$$\frac{v_{max} \times t}{2} = 300 \Rightarrow 20 \times t = 600 \Rightarrow t = 30s$$

زمان Δt_2 برابر است با:

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow -1 = \frac{-20}{\Delta t_2} \Rightarrow \Delta t_2 = 20s$$

در نتیجه Δt_1 برابر است با:

$$\Delta t_1 = 30 - 20 = 10 \text{ s}$$

حال باید سرعت متحرک در لحظات $t_1 = 6 \text{ s}$ و $t_2 = 12 \text{ s}$ را به دست بیاوریم:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{20}{10} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \rightarrow v_{6s} = 2 \times 6 + 0 \Rightarrow v_{6s} = 12 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v = a't + v_0 \Rightarrow v_{12s} = -1 \times 2 + 20 \Rightarrow v_{12s} = 18 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

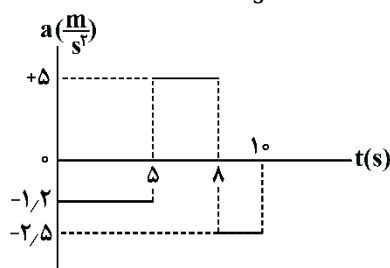
$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_{12s} - v_{6s}}{12 - 6} = \frac{18 - 12}{6} = \frac{6}{6} = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

مشاوره

تحلیل حرکت‌های چندمرحله‌ای از بخش‌های مهم و تست‌خیز این فصل هست. خیلی از بچه‌ها در این تیپ تست‌ها دچار مشکل تحلیل هستند و عمده علت آن هم عدم رعایت اصولی مراحل حل است. پس به دقت پاسخ‌نامه رو بررسی کنین و ترتیب مراحل حل این تست رو خوب یاد بگیرین.

گروه آموزشی ماز

۴۹- مطابق شکل زیر، نمودار شتاب - زمان متحرکی رسم شده که در مبدأ زمان در مکان $x = 8 \text{ m}$ بوده و دارای سرعت $\vec{v} = (-4 \frac{\text{m}}{\text{s}}) \hat{i}$ است. در ۱۰ ثانیه اول



حرکت، بیش‌ترین فاصله متحرک از محل شروع حرکت، چند متر است؟

- ۳۷ (۱)
- ۲۹/۵ (۲)
- ۴۵ (۳)
- ۲۹ (۴)

(سخت - نموداری - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۳

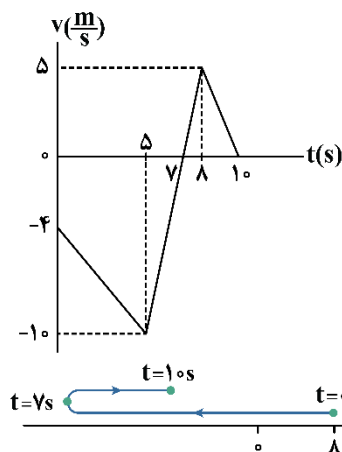
ابتدا سرعت متحرک را در لحظات $t = 5 \text{ s}$ ، $t = 8 \text{ s}$ و $t = 10 \text{ s}$ به دست می‌آوریم:

$$0 \leq t < 5: v_{5s} = a_1 \Delta t_1 + v_0 \Rightarrow v_{5s} = (-1/2 \times 5) - 4 \Rightarrow v_{5s} = -10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$5 \leq t < 8: v_{8s} = a_2 \Delta t_2 + v_{5s} \Rightarrow v_{8s} = (5 \times 3) - 10 \Rightarrow v_{8s} = +5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$8 \leq t < 10: v_{10s} = a_3 \Delta t_3 + v_{8s} \Rightarrow v_{10s} = (-2/5 \times 2) + 5 \Rightarrow v_{10s} = 0$$

در نتیجه نمودار سرعت - زمان برای این متحرک به صورت مقابل است:



با توجه به نمودار، متحرک در بازه صفر تا ۷s در حال حرکت در خلاف جهت محور x و دور شدن از مبدأ حرکتش است. از ۷s تا ۱۰s مجدداً به مبدأ نزدیک‌تر می‌شود.

پس کفایت مساحت سطح بین نمودار و محور t را تا لحظه ۷s محاسبه کنیم:

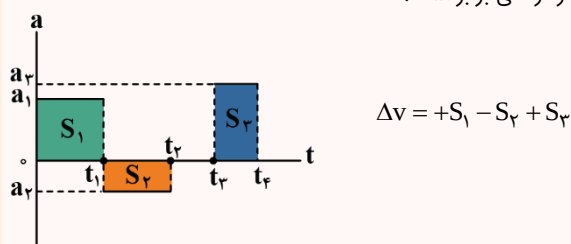
$$\Delta x_{0-7s} = \Delta x_{0-5s} + \Delta x_{5s-7s} = -\left(\frac{(4+10)(5)}{2}\right) - \left(\frac{2 \times 10}{2}\right) = -45 \text{ m} \Rightarrow |\Delta x| = 45 \text{ m}$$

دام تستی

اگر بیش‌ترین فاصله متحرک از مبدأ مکان را حساب کرده باشید در دام گزینه (۱) می‌افتید.

نمودار شتاب - زمان

در حرکت با شتاب ثابت، نمودار شتاب - زمان، خطی موازی محور زمان می‌باشد. اگر شتاب ثابت حرکت در هر بازه زمانی با بازه دیگر در طول حرکت متفاوت باشد، نمودار به شکل زیر، پله‌ای خواهد بود و مساحت زیر نمودار در هر بخش، با تغییرات سرعت در آن بازه زمانی برابر است:



در بازه t_2 تا t_3 شتاب صفر است.

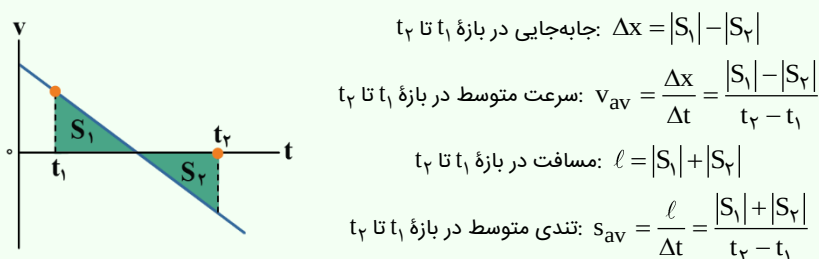


هنگامی که معادله مکان - زمان حرکت به صورت درجه ۲ است، حرکت با شتاب ثابت انجام می‌شود و به راحتی می‌توانیم معادله سرعت - زمان حرکت را بنویسیم.

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \rightarrow \text{با جایگذاری } a \text{ و } t \text{ از معادله مکان - زمان به دست می‌آیند.}$$

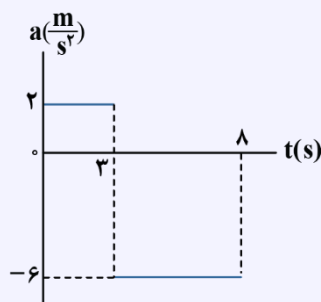
$$v = at + v_0 \rightarrow \text{با جایگذاری } a \text{ و } t \text{، معادله سرعت - زمان به دست می‌آید.}$$

با داشتن معادله سرعت - زمان و رسم آن، به راحتی می‌توان مسافت، جابه‌جایی، تندی متوسط و سرعت متوسط را با کمک مساحت زیر نمودار سرعت - زمان به دست آورد.



کنکور سراسری ریاضی اردیبهشت ماه ۱۴۰۳

۴۶- شکل زیر، نمودار شتاب - زمان متحرکی است که در لحظه $t = 0$ s با سرعت $\vec{v} = +(\frac{m}{s})\hat{i}$ حرکت کرده است. تندی متوسط متحرک در این ۸ ثانیه چند متر بر ثانیه است؟



(۱) ۱۲

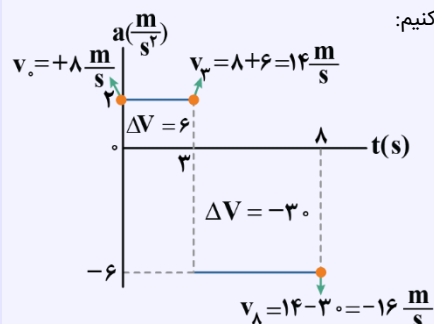
(۲) ۱۵

(۳) $\frac{43}{4}$

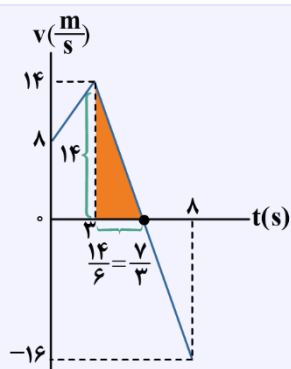
(۴) $\frac{53}{6}$

پاسخ تشریحی:

با توجه به این که مساحت زیر نمودار شتاب - زمان برابر Δv است، سرعت متحرک را در لحظات مرزی محاسبه می‌کنیم:

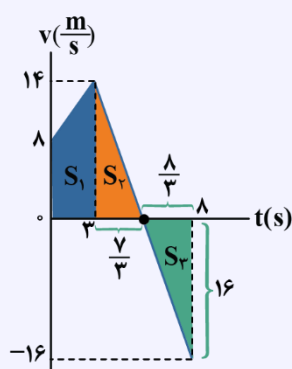


حال نمودار سرعت - زمان را رسم می‌کنیم:



با توجه به این که شیب قسمت دوم نمودار $a = -\frac{6}{5} \frac{m}{s^2}$ است، پس باید در مثلث رنگی، ضلع افقی $\frac{1}{6}$ ضلع قائم باشد.

حال مساحت زیر نمودار را به دست می‌آوریم:



$$S_1 = \frac{8+14}{2} \times 3 = 33 \text{ m}$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \times 14 \times \frac{7}{3} = \frac{49}{3} \text{ m}$$

$$S_3 = \frac{1}{2} \times \frac{8}{3} \times 16 = \frac{64}{3} \text{ m}$$

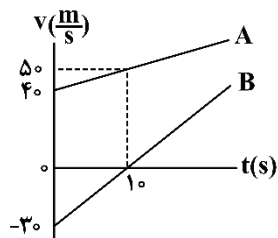
$$\text{مسافت طی شده: } \ell = 33 + \frac{49}{3} + \frac{64}{3} = \frac{212}{3} \text{ m}$$

$$\text{تندی متوسط: } s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{\frac{212}{3}}{8} = \frac{53}{6} \frac{m}{s}$$

پاسخ: گزینه ۴

گروه آموزشی ماز

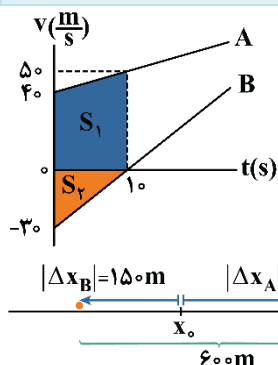
۵۰- نمودار سرعت - زمان دو متحرک A و B که از یک مکان بر روی محور x شروع به حرکت می‌کنند، مطابق شکل زیر است. در لحظه $t = 10 \text{ s}$ ، فاصله دو متحرک از یکدیگر چند متر است؟



- ۱۵۰ (۱)
- ۳۰۰ (۲)
- ۴۵۰ (۳)
- ۶۰۰ (۴)

(متوسط - نموداری - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۴



جابه‌جایی هر یک از دو متحرک را از لحظه صفر تا لحظه 10 s به کمک مساحت زیر نمودار سرعت - زمان به دست می‌آوریم:

$$\Delta x_A = S_1 = \frac{40+50}{2} \times 10 = 450 \Rightarrow \Delta x_A = 450 \text{ m}$$

$$|\Delta x_B| = S_2 = \frac{30 \times 10}{2} = 150 \Rightarrow \Delta x_B = -150 \text{ m}$$

چون دو متحرک از یک مکان شروع به حرکت کرده‌اند، در لحظه $t = 10 \text{ s}$ ، فاصله دو متحرک از یکدیگر برابر $450 + 150 = 600 \text{ m}$ است.

مشاوره

در مسائل دو متحرک، حتماً به علامت سرعت‌ها دقت کنید تا جهت حرکت متحرک رو خوب تشخیص بدین و بر مبنای اون و البته مکان اولیه متحرک‌ها، تحلیل درستی از نحوه تغییر فاصله دو متحرک داشته باشید.

دام طراحی

اگر به جهت حرکت دو متحرک تا لحظه 10 s دقت نکنید، در دام گزینه (۲) گرفتار می‌شوید.

گروه آموزشی ماز

۵۱- خودرویی پشت چراغ قرمز ایستاده است. با سبز شدن چراغ، خودرو با شتاب ثابت $\frac{2}{3} \frac{m}{s^2}$ از حال سکون، شروع به حرکت می‌کند. در همین لحظه،

کامیونی با سرعت ثابت $36 \frac{km}{h}$ از آن سبقت می‌گیرد. پس از گذشت چند ثانیه، خودرو به کامیون می‌رسد؟

۳۶ (۴)

۱۸ (۳)

۱۰ (۲)

۵ (۱)

(آسان - محاسباتی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۲

معادله مکان - زمان دو متحرک را نوشته و سپس لحظه رسیدن دو متحرک به یکدیگر را به دست می‌آوریم: (مکان اولیه دو متحرک را مبدأ $x=0$ در نظر می‌گیریم.)

$$\begin{cases} \text{خودرو: } x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2} \times 2t^2 + 0 + 0 \Rightarrow x_1 = t^2 \\ \text{کامیون: } x = vt + x_0 \Rightarrow x_2 = 10t + 0 \Rightarrow x_2 = 10t \end{cases}$$

$$\text{لحظه به هم رسیدن دو متحرک: } x_1 = x_2 \Rightarrow t^2 = 10t \Rightarrow t^2 - 10t = 0 \Rightarrow t(t - 10) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 10s \end{cases} \checkmark$$

راستی بچه‌ها در مسائل دو متحرکه که دو متحرک در مبدأ زمان در یک مکان هستند، می‌تونیم مکان اولیه اون‌ها رو صفر بگیریم. البته به شرطی که در صورت سؤال جای خاصی رو مبدأ مکان نگفته باشه!

مشاوره

این سؤال خیلی در چهارچوب امتحان نهایی‌تون هست. پس با دقت روند حل این سؤال رو خوب یاد بگیر. البته برای کنکور هم می‌تونه مطرح بشه!

نکته

اگر دو متحرک به طور هم‌زمان از یک نقطه با شتاب ثابت شروع به حرکت کنند (یا یکی با سرعت ثابت و دیگری با شتاب ثابت)، آن‌گاه در لحظه‌ای که سرعت دو متحرک یکسان می‌شود، در دو برابر آن لحظه نیز، مکان دو متحرک یکسان می‌شود.

جرعه ذهنی

$$v_{\text{خودرو}} = 2t$$

$$v_{\text{کامیون}} = 10 \frac{m}{s} \Rightarrow 2t = 10s \Rightarrow t = 5s \xrightarrow{\text{برابر این لحظه}} 2t = 10s$$

گروه آموزشی ماز

۵۲- سنگی از صخره‌ای به ارتفاع $31/25m$ نسبت به سطح زمین، در شرایط خلأ رها می‌شود. سرعت متوسط سنگ از لحظه رها شدن تا لحظه رسیدن به

سطح زمین چند متر بر ثانیه است؟ $(g = 10 \frac{m}{s^2})$

۲۵ (۴)

۱۵ (۳)

۱۲/۵ (۲)

۷/۵ (۱)

(آسان - محاسباتی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۲

روش اول:
گام اول:

سرعت سنگ در لحظه رسیدن به سطح زمین برابر است با:

$$v_f^2 - v_i^2 = 2g\Delta y \Rightarrow v_f^2 - 0^2 = 2 \times 10 \times 31/25 = 625 \Rightarrow v_f = 25 \frac{m}{s}$$

گام آخر:

بنابراین سرعت متوسط سنگ در کل مدت زمان حرکتش برابر است با:

$$v_{av} = \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{0 + 25}{2} = 12/5 \frac{m}{s}$$

روش دوم:

$$\Delta y = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow 31/25 = \frac{1}{2} \times 10 \times t^2 \Rightarrow t = 2/5s$$

$$v_{av} = \frac{\Delta y}{t} = \frac{31/25}{2/5} = 12/5 \frac{m}{s}$$

سقوط آزاد

به حرکت جسمی که فقط تحت تأثیر جاذبه گرانشی در نزدیکی سطح زمین سقوط می‌کند در صورتی که از مقاومت هوا صرف‌نظر شود، سقوط آزاد گویند. برای راحتی کار در حل سؤالات سقوط آزاد، نقطه رها شدن جسم را مبدأ مختصات در نظر می‌گیریم و جهت مثبت محور y را به سمت پایین انتخاب می‌کنیم. در این صورت علامت شتاب و مکان و سرعت در هر لحظه مثبت خواهد شد.

معادله‌های سقوط آزاد در صورت رها شدن جسم بدون سرعت اولیه

۱- معادله مکان - زمان:

$$y = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + y_0 \xrightarrow[y_0=0]{v_0=0} y = \frac{1}{2}gt^2$$

۲- معادله سرعت - زمان:

$$v = gt + v_0 \xrightarrow[v_0=0]{} v = gt$$

۳- معادله مستقل از زمان:

$$v_f^2 - v_i^2 = 2g\Delta y$$

۴- معادله سرعت متوسط:

$$v_{av} = \frac{1}{2}gt$$

کنکور سراسری ریاضی ۱۳۹۶

گلوله‌ای در شرایط خلأ بدون سرعت اولیه از ارتفاع h رها می‌شود. اگر این گلوله مسافتی را که در ثانیه آخر حرکت طی کرده، ۳ برابر مسافتی باشد که تا قبل از آن طی

کرده است، h چند متر است؟ ($g = 10 \frac{m}{s^2}$)

۸۰ (۴)

۷۵ (۳)

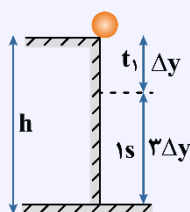
۲۵ (۲)

۲۰ (۱)

پاسخ تشریحی:

روش اول:

با توجه به شکل مقابل داریم:



$$\begin{cases} \Delta y_1 = \frac{1}{2}gt_1^2 \\ \Delta y_{\text{کل}} = \Delta y_1 + \Delta y_2 = \frac{1}{2}gt_{\text{کل}}^2 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[v_0=0, t_{\text{کل}}=t_1+1]{\Delta y_1 = \frac{1}{2}gt_1^2, \Delta y_{\text{کل}} = \frac{1}{2}g(t_1+1)^2} \xrightarrow[\Delta y_{\text{کل}} - \Delta y_1 = \Delta y_2]{\text{تفاضل}} \rightarrow -\Delta(t_1^2 + 2t_1 + 1) - (-\Delta t_1^2) = 2(-\Delta t_1^2)$$

$$\Rightarrow 1\Delta t_1^2 - 1\Delta t_1 - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 1s \text{ ق ق} \\ t_1 = -\frac{1}{2} \text{ غ ق} \end{cases}$$

پس زمان کل حرکت: $t_{\text{کل}} = 1 + t_1 = 1 + 1 = 2s$ است و بنابراین:

$$h = |\Delta y_{\text{کل}}| = \frac{1}{2}gt_{\text{کل}}^2 = 20m$$

روش دوم:

دنباله عددی جابه‌جایی (در هر ثانیه) در حرکت سقوط آزاد، با شتاب $g = 10 \frac{m}{s^2}$ برابر است با:

۵، ۱۵، ۲۵، ۳۵، ...

با توجه به دنباله بالا، جمله دوم سه برابر جمله اول است، بنابراین ارتفاع h برابر است با:

$$h = 5 + 15 = 20m$$

پاسخ: گزینه ۱

گروه آموزشی ماز

۵۳- دو گلوله از ارتفاع یکسان از سطح زمین و در شرایط خلأ، با اختلاف زمانی چند ثانیه رها شوند تا در لحظه رسیدن گلوله اول به زمین، جابه‌جایی آن ۹ برابر گلوله دوم باشد و حداکثر فاصله دو گلوله در حین حرکت به ۱۶۰ متر برسد؟ $(g = 10 \frac{m}{s^2})$

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

(متوسط - محاسباتی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۳

فرض می‌کنیم از لحظه رها شدن گلوله اول تا رسیدن آن به سطح زمین t_1 ثانیه و از لحظه رها شدن گلوله دوم تا رسیدن گلوله اول به سطح زمین t_2 ثانیه طول بکشد.

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{-\frac{1}{2}gt_2^2}{-\frac{1}{2}gt_1^2} = \frac{1}{9} \Rightarrow \frac{t_2}{t_1} = \frac{1}{3} \Rightarrow t_1 = 3t_2$$

از طرفی هم می‌دانیم حداکثر فاصله دو گلوله زمانی رخ می‌دهد که گلوله اول به سطح زمین برسد.

$$\Delta h_{\max} = h_1 - h_2 = \Delta t_1^2 - \Delta t_2^2 = 160 \Rightarrow t_1^2 - t_2^2 = 32 \xrightarrow{t_1=3t_2} 8t_2^2 = 32$$

$$\Rightarrow t_2 = 2s, \quad t_1 = 3t_2 = 6s$$

بنابراین اختلاف زمانی رها شدن دو گلوله:

$$t_1 - t_2 = 4s$$

مشاوره

سقوط آزاد دو متحرکه همواره موردتوجه طراحان است. ما اینجا سقوط آزاد رو با فرض تأخیر یکی از گلوله‌ها ترکیب و یک تست خیلی مهم رو براتون طرح کردیم که نه تنها با پاسخ کاملاً تشریحی حلش کردیم بلکه یک روش خیلی خفن هم براتون نوشتیم که حتماً به سر بهش بزنین.

جرقه ذهنی

به کمک جابه‌جایی ثانیه‌های متوالی داریم:

$$5m, 15m, 25m, \underbrace{35m, 45m, 55m}_{135m}$$

پس گلوله اول در لحظه $t = 6s$ به زمین رسیده و گلوله دوم نیز تا این لحظه ۳s جابه‌جا شده که می‌توان نتیجه گرفت اختلاف زمانی رها شدن دو گلوله $6 - 3 = 3s$ است.

گروه آموزشی ماز

۵۴- چه تعداد از موارد زیر درست است؟

الف: نیروی وزن سیبی که به یک شاخه درخت آویزان است بر شاخه درخت و واکنش آن بر روی زمین وارد می‌شود.

ب: واکنش نیروی شناوری وارد بر یک کشتی شناور بر سطح آب که در حال تعادل قرار دارد، هم‌اندازه و هم‌جهت با نیروی وزن کشتی است.

پ: واکنش نیرویی که یک قایقران با پارو به آب وارد می‌کند، بر پارو وارد می‌شود.

ت: نیروی اصطکاک وارد بر شخصی که در حال راه رفتن بر روی یک سطح افقی است، در جهت حرکت شخص بوده و واکنش آن بر سطح افقی وارد می‌شود.

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

(آسان - مفهومی - ۱۲۰۲)

پاسخ: گزینه ۳

نکته

قانون سوم نیوتون:

هرگاه جسمی به جسم دیگر نیرو وارد کند، جسم دوم نیز به جسم اول نیرویی هم‌اندازه، هم‌راستا اما در خلاف جهت به آن وارد می‌کند:

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} \Rightarrow F_{21} = F_{12}$$

بررسی موارد:

الف: نیروی وزن سیب، از طرف مرکز زمین بر سیب و واکنش آن از طرف سیب بر مرکز زمین وارد می‌شود. (×)

ب: نیروی شناوری از طرف آب بر کشتی و واکنش آن از طرف کشتی بر آب وارد می‌شود. از آنجاکه نیروی شناوری همواره بالاسو است، بنابراین، واکنش آن به سمت پایین (هم‌جهت با نیروی وزن کشتی) است. از طرفی، به دلیل تعادل کشتی در راستای قائم، نیروی شناوری و در نتیجه واکنش آن، با نیروی وزن، هم‌اندازه است. (✓)

پ: نیروی قایقران از طرف پارو به آب و واکنش آن از طرف آب بر پارو وارد می‌شود. (✓)

ت: هنگام راه رفتن، شخص بر سطح به سمت عقب، نیرو وارد می‌کند (کنش) و سطح بر شخص به سمت جلو (در جهت حرکت شخص) نیرو وارد می‌کند (واکنش). (✓)

۵۵- دو گوی هم‌اندازه با جرم‌های m و $2m$ را از بالای برجی به ارتفاع h به‌طور هم‌زمان رها می‌کنیم. با فرض این‌که نیروی مقاومت هوا در طی حرکت دو گوی، یکسان و بزرگی آن برابر $\frac{1}{8}mg$ باشد، تندی برخورد گوی سنگین‌تر با زمین چند برابر تندی برخورد گوی سبک‌تر با زمین است؟

۳ (۴)

$\sqrt{3}$ (۳)

$\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۲)

۱ (۱)

(متوسط - محاسباتی - ۱۴۰۲)

پاسخ: گزینه ۳



نکته

۱- قانون دوم نیوتون:

$$F_{\text{net}} = ma$$

۲- رابطه سرعت - جابه‌جایی در حرکت با شتاب ثابت:

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta y$$

نیروی مقاومت هوا را با f_D نشان می‌دهیم و برای بررسی ساده‌تر حرکت گوی‌ها، جهت مثبت محور y را به‌طرف پایین انتخاب می‌کنیم:

$$F_{\text{net}} = ma \Rightarrow mg - f_D = ma \Rightarrow a = g - \frac{f_D}{m}$$

$$\begin{cases} m_1 = m \Rightarrow a_1 = g - \frac{1/8 mg}{m} = 7/8 g \\ m_2 = 2m \Rightarrow a_2 = g - \frac{1/8 mg}{2m} = 15/16 g \end{cases}$$

طبق رابطه سرعت - جابه‌جایی داریم:

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta y \Rightarrow v^2 - 0 = 2ah \Rightarrow v = \sqrt{2ah}$$

$$\Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{a_2}{a_1}} = \sqrt{\frac{15/16 g}{7/8 g}} = \sqrt{3}$$



مشاوره

تأثیر جرم گلوله بر اندازه شتاب حرکت آن در حضور مقاومت هوا یکی از بحث‌های خیلی مهم کتاب درسی هست که اتفاقاً هم برای امتحان نهایی و هم برای کنکور موردتوجه طراحان محترم هست. با حل این تست و بررسی روند حل اون در پاسخ‌نامه، یک بار برای همیشه خیالت رو از این تیپ مسائل راحت کن.

گروه آموزشی ماز

۵۶- فتری به جرم ناچیز از سقف آسانسوری آویزان است. وزنه‌ای را از فنر آویزان می‌کنیم و بعد از تعادل مجموعه جرم - فنر، طول فنر به 22cm می‌رسد.

ناگهان آسانسور با شتاب رو به بالای $2 \frac{m}{s^2}$ شروع به حرکت می‌کند و طول فنر به 34cm می‌رسد. طول فنر قبل از آویختن وزنه چند سانتی‌متر بوده

است؟ $(g = 10 \frac{m}{s^2})$

۲۶ (۴)

۲۴ (۳)

۲۲ (۲)

۲۰ (۱)

(متوسط - محاسباتی - ۱۴۰۲)

پاسخ: گزینه ۲



نکته

نیروی کشش فنر:

$$F = kx = k(L - L_0)$$

k : ثابت فنر

L : طول نهایی فنر

L_0 : طول اولیه فنر

x : تغییر طول فنر

گام اول:

قبل از حرکت آسانسور، وزنه ساکن است و نیروهای وارد بر وزنه متوازن هستند؛ بنابراین داریم:

$$F_{\text{فنر}} = mg \Rightarrow k(L_1 - L_0) = mg = 10\text{m} \quad (1)$$

گام دوم:

با حرکت آسانسور، طبق قانون دوم نیوتون داریم:

$$F_{\text{فنر}} - mg = ma \Rightarrow F_{\text{فنر}} = m(a + g) \Rightarrow k(L_2 - L_0) = m(a + g) = 12\text{m} \quad (2)$$

با جایگذاری مقادیر و تقسیم رابطه (۱) بر (۲) داریم:

$$\frac{32 - L_0}{34 - L_0} = \frac{10 \text{ m}}{12 \text{ m}} = \frac{5}{6} \Rightarrow 170 - 5L_0 = 192 - 6L_0 \Rightarrow L_0 = 22 \text{ cm}$$

جرقه ذهنی

در حالت اول که $k(L_1 - L_0) = mg$ است؛ اما در حالت دوم، صدقه سر شتاب آسانسور، طول فنر به اندازه ۲cm بیش تر از حالت اول شده که داریم:

$$\Delta F_e = k(L_2 - L_1) = ma \Rightarrow k(34 - 32) = m(2) \Rightarrow k = m$$

$$\xrightarrow{\text{برای حالت اول}} m(32 - L_0) = m(10) \Rightarrow L_0 = 22 \text{ cm}$$

مشاوره

این تست از دل کتاب درسی طراحی شده و ایده طراحی این تست به شدت مورد توجه کنکورهای اخیر بوده. پس حتماً سعی کنیم اولاً حواستون به کتاب درسی باشه و دوماً تأثیر حرکت آسانسور بر تغییر طول فنر رو به کمک این تست حسابی یاد بگیرین.

تعبیر

طول فنر قبل از آویختن وزنه، همان طول عادی فنر است.

اگر؟

اگر آسانسور رو به پایین شروع به حرکت می کرد، اون وقت طول فنر کمتر از ۳۲cm می شد. چرا؟

کنکور سراسری تجربی اردیبهشت ماه ۱۴۰۳

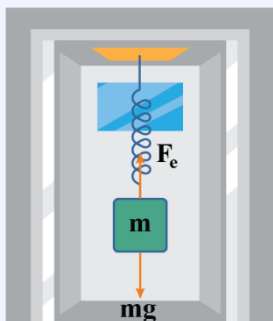
۵۰- فبری به جرم ناچیز به طول ۳۰cm و ثابت $400 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ از سقف آسانسوری آویزان است. اگر وزنه ۲kg را از فنر آویزان کنیم و آسانسور با شتاب رو به پایین $2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

حرکت کند، طول فنر به چند سانتی متر می رسد؟ $(g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2})$

(۱) ۲۶ (۲) ۲۸ (۳) ۳۲ (۴) ۳۴

پاسخ تشریحی:

با توجه به این که شتاب آسانسور روبه پایین است، می توان نوشت:



$$F_e = m(g - a) = 2(10 - 2) = 16 \text{ N}$$

$$F_e = k\Delta x \Rightarrow 16 = 400 \cdot \Delta x \Rightarrow \Delta x = 0.04 \text{ m} = 4 \text{ cm}$$

$$x_2 = 30 + 4 = 34 \text{ cm}$$

پس طول فنر ۴cm افزایش یافته است.

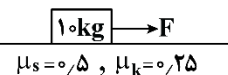
پاسخ: گزینه ۴

گروه آموزشی ماز

۵۷- مطابق شکل، به جسمی به جرم ۱۰kg که بر روی سطح افقی قرار دارد، نیروی افقی F وارد شده و جسم در آستانه حرکت است. بزرگی نیروی F را چند

درصد افزایش دهیم تا نیروی خالص وارد بر جسم برابر ۳۰N شود؟ $(g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2})$

(۱) ۵ (۲) ۱۰ (۳) ۲۰ (۴) ۳۰



(متوسط - محاسباتی - ۱۴۰۲)

پاسخ: گزینه ۲

نکته

۱- وقتی یک جسم که در تماس با یک سطح است، در آستانه حرکت باشد، نیروی اصطکاک ایستایی در حالت بیشینه $(f_{s, \max})$ قرار دارد.

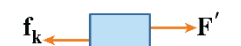
۲- بزرگی نیروی اصطکاک ایستایی بیشینه $(f_{s, \max})$ و بزرگی نیروی اصطکاک جنبشی برابر است با:

$$f_{s, \max} = \mu_s F_N$$

$$f_k = \mu_k F_N$$

$$F = f_{s, \max} = \mu_s F_N = \mu_s mg$$

$$\Rightarrow F = 0.5 \times 10 \times 10 = 50 \text{ N}$$



$$F_{\text{net}} = 30 \text{ N} \Rightarrow F' - f_k = 30$$

$$\Rightarrow F' - \mu_k F_N = 30 \Rightarrow F' - \mu_k mg = 30 \Rightarrow F' - 0.25 \times 10 \times 10 = 30 \Rightarrow F' = 55 \text{ N}$$

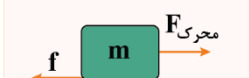
$$\Rightarrow F \text{ بزرگی تغییر درصد} = \left(\frac{F' - F}{F} \right) \times 100 = \left(\frac{55 - 50}{50} \right) \times 100 = 10\%$$

بنابراین، بزرگی نیروی F باید ۱۰ درصد افزایش یابد.

دام تستی

اگر به جای درصد تغییر بزرگی نیروی F ، فقط به مقدار افزایش نیروی F توجه کنید اون وقت در دام گزینه (۱) می افتید.

حرکت روی سطح دارای اصطکاک



اگر مانند شکل مقابل نیروی خالص متحرکی به جسم ساکن اعمال شود:

۱- ابتدا مقدار ($F_{\text{حرکی}}$) را به دست می آوریم که مساوی با برآیند نیروهای در راستای حرکت به جز خود اصطکاک می شود.

۲- سپس نیروی $f_{s, \max}$ را از رابطه $f_{s, \max} = \mu_s F_N$ به دست می آوریم.

۳- مقادیر دو مرحله قبل را باهم مقایسه می کنیم و سه حالت پیش می آید:

الف) اگر $f_{s, \max} < F_{\text{حرکی}} \Rightarrow$ جسم ساکن می ماند؛ بنابراین:

ب) اگر $f_{s, \max} = F_{\text{حرکی}} \Rightarrow$ جسم در آستانه حرکت خواهد بود؛ بنابراین:

پ) اگر $f_{s, \max} < F_{\text{حرکی}} \Rightarrow$ جسم حرکت خواهد کرد؛ بنابراین:

$$f = f_s = F_{\text{حرکی}} \text{ :نیروی اصطکاک}$$

$$f = f_{s, \max} = \mu_s F_N = F_{\text{حرکی}} \text{ :نیروی اصطکاک}$$

$$f = f_k = \mu_k F_N \text{ :نیروی اصطکاک}$$

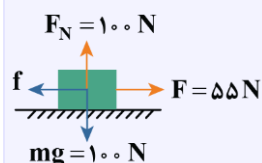
در روابط بالا μ_s و μ_k را به ترتیب ضریب اصطکاک ایستایی و ضریب اصطکاک جنبشی می نامیم که به ویژگی های سطح تماس جسم با زمین بستگی دارند و فاقد یکا هستند. در ضمن همواره: $\mu_s \geq \mu_k$

کنکور سراسری ریاضی اردیبهشت ماه ۱۴۰۳

۵۰- جسم ساکنی به جرم 10 kg روی سطح افقی قرار دارد و ضریب اصطکاک ایستایی و جنبشی بین جسم و سطح 0.5 و 0.25 است. اگر به جسم، نیروی افقی 55 N وارد شود، نیروی خالص وارد بر جسم چند نیوتون است؟

- (۱) ۱۵ (۲) ۲۰ (۳) ۳۰ (۴) ۵۰

پاسخ تشریحی:



$$f_{s, \max} = \mu_s F_N = \mu_s mg = 0.5 \times 10 \times 10 \rightarrow f_{s, \max} = 50 \text{ N}$$

چون $F > f_{s, \max}$ است پس جسم حرکت می کند و نیروی اصطکاک آن از نوع جنبشی است:

$$f_k = \mu_k F_N = 0.25 \times 100 = 25 \text{ N}$$

$$F_{\text{net}} = F - f_k = 55 - 25 = 30 \text{ N} \text{ :نیروی خالص}$$

پاسخ: گزینه ۳

گروه آموزشی ماز

۵۸- راننده خودروبی با دیدن مانعی که در فاصله ۵۰ متری آن قرار دارد بلافاصله ترمز می کند و بعد از ۴ ثانیه می ایستد. اگر ضریب اصطکاک جنبشی بین

لاستیک ها و سطح جاده برابر 0.2 باشد، خودرو در فاصله چند متری مانع می ایستد؟ ($g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$)

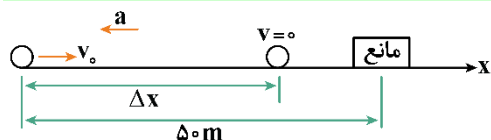
- (۱) صفر (۲) ۲ (۳) ۱۶ (۴) ۳۴



معادلات سرعت - زمان و جابه‌جایی - زمان در حرکت با شتاب ثابت:

$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t \quad \text{و} \quad \Delta x = \left(\frac{v_0 + v}{2}\right)t$$

معادله سرعت - زمان: $v = at + v_0$



هنگامی که خودرو ترمز می‌کند تنها نیروی مؤثر بر خودرو، نیروی اصطکاک جنبشی است.

ابتدا شتاب خودرو را به دست می‌آوریم:

$$F_{\text{net}} = ma \Rightarrow -f_k = ma \Rightarrow -\mu_k F_N = ma$$

$$\Rightarrow -\mu_k mg = ma \Rightarrow a = -\mu_k g = -0.2 \times 10 = -2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

با نوشتن معادلات سرعت - زمان و جابه‌جایی - زمان داریم:

$$\left. \begin{aligned} v = at + v_0 \Rightarrow 0 = -2 \times t + v_0 \Rightarrow v_0 &= 2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ \Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t &= \frac{1}{2} \times (-2) \times 16 + 2 \times 4 = 16 \text{m} \end{aligned} \right\} \text{ یا } \Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t = \frac{1}{2}(-2)(4)^2 + 2(4) = 16 \text{m}$$

(معادله جابه‌جایی - زمان به کمک سرعت نهایی)

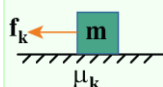
$$\text{فاصله تا مانع} = 50 - 16 = 34 \text{m}$$



وقتی می‌گه راننده بلافاصله ترمز می‌کند، یعنی زمان واکنش راننده و مسافت واکنش ناچیز هست و کل ماجرا شتاب ثابت تحلیل می‌شه.



هنگامی که یک جسم را روی سطح با سرعت افقی پرتاب می‌کنیم تا فقط تحت تأثیر اصطکاک متوقف شود، شتاب حرکت برابر است با:



$$F_{\text{net}} = ma \Rightarrow -f_k = ma$$

$$\Rightarrow -\mu_k mg = ma \Rightarrow a = -\mu_k g$$

بچه‌ها به کمک این نکته می‌شه شتاب توقف رو سریع‌تر هم حساب کرد.



ما طراحان آزمون، همیشه دوست داریم از این تیپ تست داشته باشیم. اولاً مربوط به یکی از مسئله‌های کتاب درسی هست و به درد کنکور و نهایی‌تون می‌خوره. دوماً اینجا خیلی می‌شه روی تست مانور داد. مثلاً در این سؤال، ما زمان واکنش راننده رو ناچیز گرفتیم ولی گاهی وقت‌ها هم توی طراحی‌هامون زمان واکنش راننده رو هم لحاظ می‌کنیم. خلاصه که دست طراحان حسابی توی این سؤال باز هست و نگاه ویژه‌ای به این تست و انواع حالت‌های اون داشته باش.

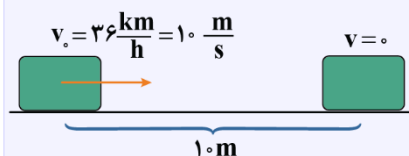


۵۱- راننده خودرویی که در یک روز بارانی با سرعت $36 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ در حرکت است، با دیدن مانعی ترمز می‌کند و بعد از طی مسافت ۱۰ متر می‌ایستد. اگر جرم خودرو

۱۶۰۰ kg باشد، نیروی اصطکاک بین لاستیک‌ها و سطح جاده چند نیوتون است؟

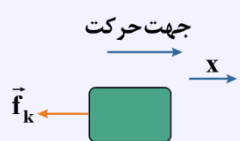
- (۱) ۳۲۰۰ (۲) ۴۰۰۰ (۳) ۶۴۰۰ (۴) ۸۰۰۰

پاسخ تشریحی:



$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \rightarrow 0^2 - 10^2 = 2 \times a \times 10 \rightarrow a = -5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

چون خودرو ترمز کرده، نیروی پیشران نداریم و تنها نیروی وارد بر خودرو در راستای افق، نیروی اصطکاک است.

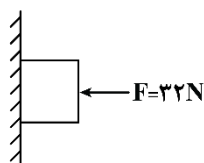


$$F_{\text{net}} = ma \rightarrow 0 - f_k = 1600 \times (-5) \rightarrow f_k = 8000 \text{N}$$

پاسخ: گزینه ۴

گروه آموزشی ماز

۵۹- در شکل زیر، جسمی به جرم $۲/۴\text{ kg}$ توسط نیروی افقی F ، به دیواری فشرده شده است و در حالت سکون قرار دارد. نیرویی که از طرف سطح به جسم وارد می‌شود، چند برابر وزن جسم است؟ ($\mu_s = ۰/۸$ ، $g = ۱۰ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$)



$$\frac{4}{3} \quad (۲)$$

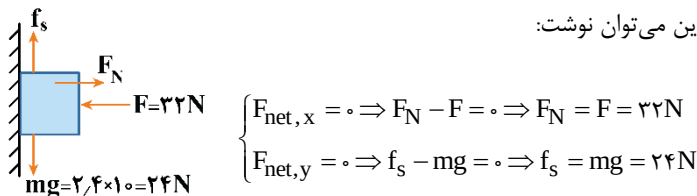
$$\sqrt{3} \quad (۱)$$

$$\sqrt{2} \quad (۴)$$

$$\frac{5}{3} \quad (۳)$$

(متوسط - محاسباتی - ۱۴۰۲)

پاسخ: گزینه ۳



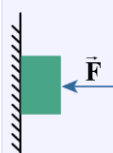
چون جسم در حال سکون قرار دارد، برآیند نیروهای وارد بر آن صفر است؛ بنابراین می‌توان نوشت:

$$R = \sqrt{F_N^2 + f_s^2} = \sqrt{۳۲^2 + ۲۴^2} = ۴۰\text{ N}$$

$$\Rightarrow \frac{R}{mg} = \frac{۴۰}{۲۴} = \frac{۵}{۳}$$

کنکور سراسری تجربی تیرماه ۱۴۰۳

۷۵- جسمی را مطابق شکل با نیروی افقی به دیوار قائمی فشرده و ثابت نگه داشته‌ایم. اگر نیروی F را ۲ برابر کنیم، کدام نیرو ۲ برابر می‌شود؟



(۱) نیرویی که سطح به جسم وارد می‌کند.

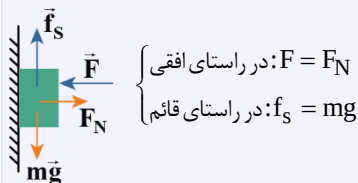
(۲) نیرویی که جسم به سطح وارد می‌کند.

(۳) نیروی عمودی سطح

(۴) نیروی اصطکاک

پاسخ تشریحی:

مطابق شکل، نیروهای وارد بر جسم را ترسیم می‌کنیم. چون جسم ساکن و در حال تعادل است، پس هم در راستای افق و هم در راستای قائم برآیند نیروهای وارد بر جسم صفر است، پس:



با دو برابر شدن نیروی F چون $F = F_N$ است، پس قطعاً F_N هم دو برابر می‌شود. پس گزینه (۳) صحیح است.

با دو برابر شدن F چون F_N هم دو برابر می‌شود، پس $f_{s,max}$ دو برابر شده به همین علت mg هنوز کوچک‌تر از $f_{s,max}$ خواهد ماند و همین باعث می‌شود جسم باز هم ساکن بماند و f_s برابر mg باشد، یعنی نیروی اصطکاک تغییری نخواهد کرد.

در مورد نیروی واکنش سطح می‌توان نوشت:

$$R = \sqrt{F_N^2 + f_s^2} \xrightarrow{F_N=F, f_s=mg} R = \sqrt{F^2 + (mg)^2}$$

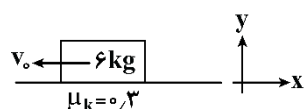
چون F دو برابر شده، ولی mg ثابت مانده، پس R افزایش می‌یابد، ولی نمی‌توان گفت دو برابر می‌شود.

پاسخ: گزینه ۳

گروه آموزشی ماز

۶۰- مطابق شکل زیر، وزنه‌ای را در مبدأ زمان با تندی اولیه $۱۲ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ روی سطح افقی به سمت چپ پرتاب می‌کنیم تا تحت تأثیر نیروی اصطکاک متوقف شود. اگر از لحظه توقف جسم، نیروی ثابت $\vec{F} = ۲۰(\text{N})\vec{i}$ به آن وارد شود. در چه لحظه‌ای بر حسب ثانیه، وزنه به مکان اولیه‌اش برمی‌گردد؟

$$(g = ۱۰ \frac{\text{m}}{\text{s}^2})$$



$$۸ \quad (۲)$$

$$۲۰ \quad (۱)$$

$$۱۶ \quad (۴)$$

$$۱۲ \quad (۳)$$

مشاوره

اکثر بچه‌ها در تحلیل این تیپ تست‌ها که بعد از مدتی یک نیرویی حذف یا اضافه می‌شه و ادامه داستان حرکت جسم رو تغییر می‌ده مشکل دارن. ما اومدیم کاملاً قدم به قدم و ریزه ریز روند حل این سؤال رو برات نوشتیم. پس حسابی با دقت پاسخ‌نامه رو بخون تا نحوه تحلیل این تیپ تست‌ها کاملاً توی مشتت باشه. راستی این تیپ تست رو می‌شه با تغییر تکانه هم ترکیب کرد و خیلی حواست جمع باشه بهش.

گام اول:

از لحظه پرتاب تا لحظه توقف، فقط نیروی اصطکاک به جسم وارد می‌شود، بنابراین داریم:

$$f_k = ma, F_N = mg \Rightarrow a = \mu_k g = 0.3 \times 10 = 3 \frac{m}{s^2}$$

$$v = at + v_0 \Rightarrow 0 = 3t - 12 \Rightarrow t = 4s$$

گام دوم:

پس ۴s ثانیه طول می‌کشد تا وزنه متوقف شود. در این ۴ ثانیه جسم، مسافت d را طی می‌کند و داریم:

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \Rightarrow 0 - 144 = 6\Delta x \Rightarrow \Delta x = -24m \Rightarrow d = |\Delta x| = 24m$$

گام سوم:

بلافاصله در لحظه توقف نیروی $F = 20N$ به سمت راست وارد می‌شود:

$$F_{net} = ma \Rightarrow F - f_k = ma'$$

$$\Rightarrow 20 - 0.3 \times 6 \times 10 = 6a' \Rightarrow a' = \frac{1}{3} \frac{m}{s^2}$$

گام آخر:

باید محاسبه شود که چند ثانیه طول می‌کشد تا وزنه فاصله ۲۴ متری را طی کرده و به نقطه اولیه برمی‌گردد:

$$\Delta x' = \frac{1}{2} a' t'^2 + v_0' t' \xrightarrow{a' = \frac{1}{3} \frac{m}{s^2}, \Delta x' = 24m, v_0' = 0} 24 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} t'^2 + 0 \Rightarrow t' = 12s$$

بنابراین در مجموع بعد از $12 + 4 = 16$ ثانیه، یعنی در لحظه $t = 16s$ وزنه به مکان اولیه برمی‌گردد.

دام تستی

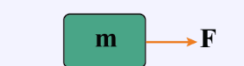
اگر گزینه (۳) رو زدی، به‌خاطر اینه که فقط به زمان برگشت وزنه توجه کردی و حواست به کل مدت‌زمان خواسته‌شده نبوده!

نکات طلایی

- ۱- هنگامی که یک جسم را روی سطح با سرعت افقی پرتاب می‌کنیم تا فقط تحت تأثیر اصطکاک متوقف شود، شتاب حرکت برابر است با:
 $F_{net} = ma \Rightarrow -f_k = ma$
 $\Rightarrow -\mu_k mg = ma \Rightarrow a = -\mu_k g$
- ۲- زمان توقف جسم برابر است با:
 $t_{توقف} = \frac{v_0}{|a|} = \frac{v_0}{\mu_k g}$
- ۳- مسافتی که جسم طی می‌کند تا متوقف شود برابر است با:
 $\ell_{توقف} = \frac{v_0^2}{|2a|} = \frac{v_0^2}{2\mu_k g}$
- ۴- شتاب حرکت، زمان توقف و مسافت طی‌شده، هیچ‌کدام به جرم جسم ربطی ندارند.

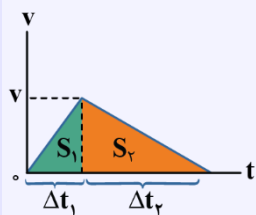
کنکور سراسری تجربی خارج از کشور تیرماه ۱۴۰۲

۵۶- مطابق شکل به جسمی روی سطح افقی دارای اصطکاک، نیروی افقی F وارد می‌شود و جسم از حال سکون شروع به حرکت می‌کند. پس از آن که به اندازه Δx جابه‌جا شد، نیروی F در یک لحظه قطع می‌شود و پس از آن جسم با طی مسافت $4\Delta x$ متوقف می‌شود. نیروی F چند برابر نیروی اصطکاک است؟



- | | |
|------|------|
| ۱) ۲ | ۲) ۳ |
| ۳) ۴ | ۴) ۵ |

پاسخ تشریحی:



با توجه به این که مساحت محصور بین نمودار $v-t$ و محور زمان برابر جابه جایی متحرک است و با توجه به اطلاعات مسئله، نمودار $v-t$ حرکت جسم را رسم می کنیم:

$$\Delta x_2 = 4\Delta x_1 \rightarrow S_2 = 4S_1 \rightarrow \frac{v \times \Delta t_2}{2} = 4 \frac{v \times \Delta t_1}{2} \rightarrow \Delta t_2 = 4\Delta t_1 (*)$$

با توجه به نسبت بزرگی شیب $v-t$ در دو حالت، نسبت شتاب و در نتیجه نسبت نیروی خالص در دو حالت را داریم:

$$\left| \frac{F_1}{F_2} \right| = \left| \frac{a_1}{a_2} \right| = \frac{\frac{\Delta t_1}{\Delta t_2}}{\frac{\Delta t_2}{\Delta t_1}} = \frac{\Delta t_2}{\Delta t_1} \xrightarrow{(*)} \left| \frac{F_1}{F_2} \right| = 4$$

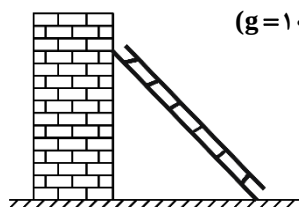
در مرحله اول حرکت، نیروی خالص وارد بر جسم برابر $F_1 = F - f_k$ است و در مرحله دوم حرکت، نیروی خالص برابر $F_2 = -f_k$ است. حال می توان نوشت:

$$\left| \frac{F_1}{F_2} \right| = \frac{F - f_k}{f_k} = 4 \rightarrow F - f_k = 4f_k \rightarrow F = 5f_k$$

پاسخ: گزینه ۴

گروه آموزشی ماز

۶۱- مطابق شکل، نردبان ساکنی به جرم ۲۰ کیلوگرم به دیوار قائم بدون اصطکاک تکیه داده شده است و دیوار، نیروی ۱۰۰ نیوتون بر آن وارد می کند. ضریب اصطکاک ایستایی بین زمین و پای نردبان ۰/۷۵ است. نیروی اصطکاک بین نردبان و زمین چند نیوتون است؟ ($g = 10 \frac{m}{s^2}$)

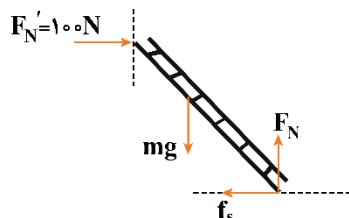


- ۱۰۰ (۱)
- ۱۵۰ (۲)
- ۲۰۰ (۳)
- ۲۵۰ (۴)

(آسان - محاسباتی - ۱۲۰۲)

پاسخ: گزینه ۱

ابتدا نمودار نیروهای وارد بر نردبان را رسم می کنیم:



چون نردبان ساکن است؛ بنابراین، طبق قانون اول نیوتون، نیروهای وارد بر نردبان باید متوازن باشند؛ بنابراین داریم:

$$\begin{cases} F_N = mg = 200 \text{ N} \\ f_s = F'_N = 100 \text{ N} \end{cases}$$

دام تستی

بعید نیست در تستی تا این حد ساده، بعضی ها زخم خورده گزینه (۲) باشند. چرا؟ از بس توی مسائل نردبان، نردبان در آستانه حرکت بوده، خیلی ها عادت کردند که نردبان رو در آستانه حرکت بگیرن و نسبت به این مسئله دچار یکنواختی شدند. خواستیم یه تلنگر مشتی بزنینم تا حواسشون بیش تر جمع بشه.

گروه آموزشی ماز

۶۲- جرم جسم A، ۵۰ درصد کم تر از جرم جسم B است. اگر هر دو جسم با تندی ثابت حرکت کنند، طوری که تکانه جسم A، ۴ برابر تکانه جسم B باشد، انرژی جنبشی جسم B چند برابر انرژی جنبشی جسم A است؟

$$\frac{1}{64} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{32} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{16} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{8} \quad (۱)$$

(آسان - محاسباتی - ۱۲۰۲)

پاسخ: گزینه ۳

رابطه انرژی جنبشی بر حسب تکانه به صورت $K = \frac{p^2}{2m}$ است. پس داریم:

$$\frac{K_B}{K_A} = \left(\frac{p_B}{p_A} \right)^2 \times \left(\frac{m_A}{m_B} \right) = \frac{m_A = \frac{1}{2} m_B}{p_A = 4 p_B} \rightarrow \frac{K_B}{K_A} = \frac{1}{16} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{32}$$

اگر حواستون نباشه که در رابطه $K = \frac{p^2}{2m}$ ، انرژی جنبشی با مربع تکانه رابطه مستقیم و با جرم جسم رابطه معکوس داره به احتمال خیلی بالایی در دام گزینۀ (۱) یا گزینۀ (۴) گرفتار می‌شوید.

گروه آموزشی ماز

۶۳- معادله تکانه - زمان متحرکی که بر روی محور x حرکت می‌کند، در SI به صورت $p = 2t^2 - 4t + 6$ است. نیروی خالص متوسط وارد بر جسم در بازه $t_1 = 2s$ تا $t_2 = 4s$ چند نیوتون است؟

(۱) $8\vec{i}$ (۲) $-8\vec{i}$ (۳) $4\vec{i}$ (۴) $-4\vec{i}$

(آسان - محاسباتی - ۱۴۰۲)

پاسخ: گزینۀ ۱

با استفاده از قانون دوم نیوتون با بیان تکانه داریم:

$$p = 2t^2 - 4t + 6 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 2s : p = 2 \times 2^2 - 4 \times 2 + 6 = 6 \frac{\text{kg.m}}{\text{s}} \\ t_2 = 4s : p = 2 \times 4^2 - 4 \times 4 + 6 = 22 \frac{\text{kg.m}}{\text{s}} \end{cases}$$

$$F_{av} = \frac{\Delta p}{\Delta t} \Rightarrow F_{av} = \frac{22 - 6}{4 - 2} = \frac{16}{2} = 8N$$

کنکور سراسری تجربی خارج از کشور تیرماه ۱۴۰۲

۵۷- معادله تکانه - زمان جسمی در SI به صورت $p = (t^2 - 5t + 6)\vec{i}$ است. بزرگی نیروی خالص متوسط وارد بر جسم در بازه $t_1 = 1s$ تا $t_2 = 2/5s$ چند نیوتون است؟

(۱) $\frac{5}{4}$ (۲) $\frac{7}{4}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{7}{3}$

پاسخ تشریحی:

با توجه به معادله $p = t - 5$ ، تکانه جسم در دو لحظه را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} p_1 = (1)^2 - 5(1) + 6 = 2 \frac{\text{kg.m}}{\text{s}} \\ p_2 = (2/5)^2 - 5(2/5) + 6 = -0.2 \frac{\text{kg.m}}{\text{s}} \end{cases}$$

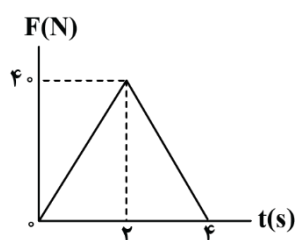
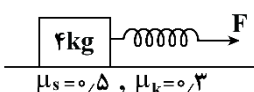
حال به کمک رابطه نیروی خالص متوسط با تغییر تکانه، داریم:

$$F_{av} = \frac{\Delta p}{\Delta t} \Rightarrow F_{av} = \frac{-0.2/5 - 2}{2/5 - 1} = \frac{-2.2/5}{-1/5} = -2.2N \Rightarrow |F_{av}| = 2.2N = \frac{11}{5}N$$

پاسخ: گزینۀ ۳

گروه آموزشی ماز

۶۴- جسمی ساکن به جرم $4kg$ به یک فنر با طول اولیه $30cm$ و ثابت فنر $400 \frac{N}{m}$ بسته شده است. نمودار تغییرات نیروی فنر (F) بر حسب زمان، مطابق



شکل زیر داده شده است. چه تعداد از موارد زیر درست است؟ ($g = 10 \frac{N}{kg}$)

الف: در لحظه شروع حرکت، طول فنر $35cm$ است.

ب: در لحظه‌ای که طول فنر به $33cm$ می‌رسد، نیروی خالص وارد بر جسم، صفر است.

پ: به مدت $2/4$ ثانیه، حرکت جسم تندشونده است.

(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) ۳

$$f_{s,max} = \mu_s F_N = 0.5 \times 40 = 20 \text{ N}$$

$$\text{از آستانه حرکت: } F = f_{s,max} = 20 \text{ N} \Rightarrow k(L - L_0) = 20 \Rightarrow 4(L - 30) = 20 \Rightarrow L = 35 \text{ cm} \quad (\checkmark)$$

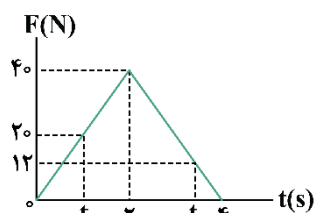
$$L = 33 \text{ cm} \Rightarrow F = k(L - L_0) = 4(33 - 30) = 12 \text{ N}$$

دو بار نیروی F به 12 N می‌رسد. بار اول، جسم هنوز به آستانه حرکت نرسیده است؛ بنابراین جسم ساکن است و $F_{net} = 0$ است.

بار دوم، بعد از شروع حرکت جسم و پس از لحظه 2 s که بزرگی $\vec{F}$ کاهش یافته و به 12 N می‌رسد:

$$f_k = \mu_k F_N = 0.3 \times 40 = 12 \text{ N} \Rightarrow F = f_k \Rightarrow F_{net} = 0 \quad (\checkmark)$$

از لحظه شروع حرکت تا زمانی که نیروی F بزرگ‌تر از f_k باشد، حرکت تندشونده است:



$$f_k = 12 \text{ N} \text{ و } f_{s,max} = 20 \text{ N}$$

از تشابه مثلث‌ها داریم:

$$\begin{cases} \frac{t_1}{2} = \frac{20}{40} \Rightarrow t_1 = 1 \text{ s} \\ \frac{4 - t_2}{4 - 2} = \frac{12}{40} \Rightarrow t_2 = 3/4 \text{ s} \end{cases}$$

لحظه شروع حرکت
آخرین لحظه‌ای که حرکت تندشونده است.

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 2/4 \text{ s} \quad (\checkmark)$$

دام تستی

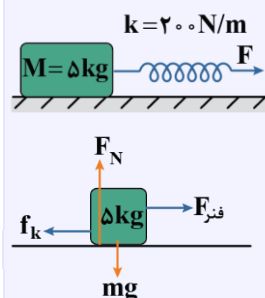
در قسمت «پ» که زمان برابر با $3/4 \text{ s}$ می‌شود، اگر حواستان به لحظه شروع حرکت ($t_1 = 1 \text{ s}$) نباشد، آن‌گاه به اشتباه فکر می‌کنید به مدت $3/4 \text{ s}$ حرکت تندشونده بوده و مورد «پ» رو نادرست می‌گیرید و گزینه (۳) رو انتخاب می‌کنید.

مشاوره

ترکیب تغییر نیروی فنر با تأثیر اون بر نوع حرکت متحرک، همیشه مورد علاقه طراحان محترم بوده؛ اما ما توی ماز براتون یک تست فوق خفن از حرفه‌ای‌ترین حالت ممکن براتون طراحی کردیم تا کا رو تمام کنیم. به نظرمون این تست از اوناست که باید هایلایت و توی ایام جمع‌بندی حتماً مرورش کنیم.

کنکور سراسری تجربی تیرماه ۱۳۹۸

۵۱- جسمی روی یک سطح افقی تحت تأثیر نیروی افقی F با سرعت ثابت کشیده می‌شود. اگر افزایش طول فنر در ضمن حرکت 5 سانتی‌متر باشد، ضریب اصطکاک جنبشی بین جسم و سطح کدام است؟ ($g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$)



- (۱) ۰/۲
(۲) ۰/۲۵
(۳) ۰/۳
(۴) ۰/۴

پاسخ تشریحی:

چون حرکت جسم با سرعت ثابت است، پس برابری نیروهای وارد بر جسم صفر است:

پاسخ: گزینه ۱

گروه آموزشی ماز

۶۵- یک تلسکوپ فضایی در ارتفاع تقریبی 1600 کیلومتری از سطح زمین به دور زمین می‌چرخد. شتاب گرانشی در این فاصله چند واحد SI است؟

$$(g_0 = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, R_e = 6400 \text{ km})$$

$$8/4 \quad (۴)$$

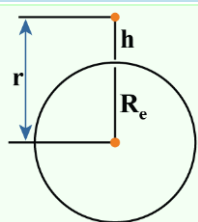
$$6/4 \quad (۳)$$

$$5/6 \quad (۲)$$

$$7/6 \quad (۱)$$



نکته: شتاب گرانش در فاصله r از مرکز زمین برابر است با:



$$\left\{ \begin{array}{l} g = \frac{GM_e}{r^2} \\ r = R_e + h \end{array} \right. \xrightarrow{\text{شتاب گرانش در فاصله } h \text{ از سطح زمین}} g = \frac{GM_e}{(R_e + h)^2} \xrightarrow{\text{با تغییر فاصله از سطح زمین}} \frac{g_2}{g_1} = \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 = \left(\frac{R_e + h_1}{R_e + h_2} \right)^2$$

شتاب گرانش در ارتفاع $h = ۱۶۰ \text{ km}$ را با شتاب گرانش در سطح زمین مقایسه می‌کنیم.

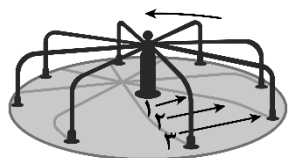
$$g = G \frac{M_e}{(R_e + h)^2} \Rightarrow \frac{g_h}{g_0} = \left(\frac{R_e}{R_e + h} \right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{g_h}{10} = \left(\frac{6400}{6400 + 1600} \right)^2 = \left(\frac{4}{5} \right)^2 = \frac{16}{25}$$

$$\Rightarrow g_h = 10 \times \frac{16}{25} = 6.4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

گروه آموزشی ماز

۶۶- یک دیسک گردان در شهر بازی را در نظر بگیرید که توسط یک موتور الکتریکی می‌چرخد. فرض کنید سه فرد (۱)، (۲) و (۳) در فاصله‌های d ، $۲d$ و $۳d$ از مرکز آن قرار دارند. کدام یک از مقایسه‌های زیر در مورد دوره تناوب، بسامد، تندی حرکت و شتاب مرکزگرا برای این افراد نادرست است؟



$$T_1 = T_2 = T_3 \quad (۱)$$

$$f_1 = f_2 = f_3 \quad (۲)$$

$$v_1 = 2v_2 = 3v_3 \quad (۳)$$

$$a_1 = \frac{1}{2}a_2 = \frac{1}{3}a_3 \quad (۴)$$

هر سه فرد باهم دور می‌زنند، بنابراین مدت زمانی که طول می‌کشد که هر کدام از آن‌ها یک دور بزنند، باهم برابر است. در نتیجه $T_1 = T_2 = T_3$ و $f_1 = f_2 = f_3$ است. در مقایسه تندی حرکت و شتاب مرکزگرا برای این سه فرد می‌توان نوشت:

$$v = \frac{2\pi r}{T} \xrightarrow{\text{یکسان: } T} v_1 = \frac{1}{2}v_2 = \frac{1}{3}v_3$$

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2}{r} = \frac{4\pi^2}{T^2} r \xrightarrow{\text{یکسان: } T} a_1 = \frac{1}{2}a_2 = \frac{1}{3}a_3$$

مشاوره

این سؤال که از دل کتاب درسی طرح شده، هدفش این بود که تأثیر یا عدم تأثیر شعاع چرخش رو در تمام کمیت‌های مورد بحث برای حرکت دایره‌ای با شما مطرح کنه و درواقع یک دید جامع برای این موضوع بهتون بده.

حرکت دایره‌ای یکنواخت

۱- در حرکت دایره‌ای یکنواخت، مدت زمان لازم برای پیمودن یک دور محیط دایره دوره تناوب (دوره) نامیده می‌شود.

$$T = \frac{2\pi r}{v} \xrightarrow{T = \frac{2\pi}{\omega}} v = r\omega \quad (\text{دوره})$$

$$\omega: \text{ بسامد زاویه‌ای برحسب } \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

۲- در حرکت دایره‌ای یکنواخت، اندازه سرعت، ثابت است اما جهت آن دائماً تغییر می‌کند. بنا به همین دلیل این حرکت شتابدار است. جهت شتاب همواره به سمت مرکز دایره است.

$$a_C = \frac{v^2}{r} \xrightarrow{v=r\omega} a_C = r\omega^2$$

$$a_C: \text{ شتاب مرکزگرا برحسب } \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

۳- براساس قانون دوم نیوتون: ($F = ma$) خواهیم داشت:

$$F_{\text{net}} = \frac{mv^2}{r} \xrightarrow{v=r\omega} F_{\text{net}} = mr\omega^2$$

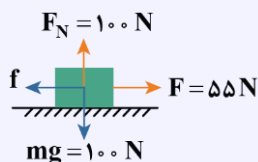
F_{net} : نیروی مرکزگرا برحسب N

کنکور سراسری ریاضی اردیبهشت ماه ۱۴۰۳

۵۰- جسم ساکنی به جرم 10 kg روی سطح افقی قرار دارد و ضریب اصطکاک ایستایی و جنبشی بین جسم و سطح 0.5 و 0.25 است. اگر به جسم نیروی افقی 55 N وارد شود، نیروی خالص وارد بر جسم چند نیوتون است؟ ($g = 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}}$)

- (۱) ۱۵ (۲) ۲۰ (۳) ۳۰ (۴) ۵۰

پاسخ تشریحی:



$$f_{s,\text{max}} = \mu_s F_N = \mu_s mg = 0.5 \times 10 \times 10 \rightarrow f_{s,\text{max}} = 50 \text{ N}$$

چون $F > f_{s,\text{max}}$ است پس جسم حرکت می‌کند و نیروی اصطکاک آن از نوع جنبشی است:

$$f_k = \mu_k F_N = 10 \times 0.25 = 25 \text{ N}$$

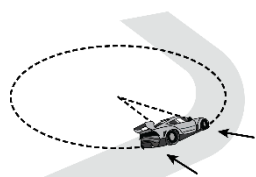
$$\text{نیروی خالص: } F_{\text{net}} = F - f_k = 55 - 25 = 30 \text{ N}$$

پاسخ: گزینه ۳

گروه آموزشی ماز

۶۷- مطابق شکل، خودرویی به جرم 1500 kg را در نظر بگیرید که می‌خواهد در یک پیچ مسطح افقی به شعاع 50 m بدون آن‌که بلغزد، دور بزند. اگر ضریب

اصطکاک ایستایی بین لاستیک و سطح جاده ۱ باشد، حداکثر تندی خودرو چند متر بر ثانیه می‌تواند باشد؟ ($g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$)



نیروهای اصطکاک ایستایی

(۱) $5\sqrt{2}$

(۲) $10\sqrt{5}$

(۳) ۲۵

(۴) ۵۰

(آسان - محاسباتی - ۱۴۰۲)

پاسخ: گزینه ۲

نکته

حداکثر تندی خودرویی که می‌خواهد در یک پیچ مسطح افقی به شعاع r و ضریب اصطکاک ایستایی μ_s بدون لغزش دور بزند برابر است با:

$$v_{\text{max}} = \sqrt{\mu_s rg}$$

در این مثال نیروی اصطکاک ($f_{s,\text{max}}$) نقش نیروی مرکزگرا (F_C) را دارد، بنابراین می‌توان نوشت:

$$F_C = \frac{mv^2}{r} \quad F_C = f_{s,\text{max}} = \mu_s F_N \rightarrow \mu_s F_N = \frac{mv_{\text{max}}^2}{r}$$

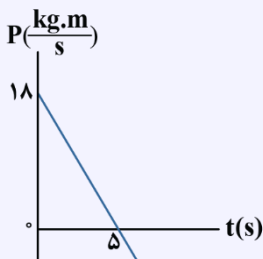
$$\Rightarrow \mu_s mg = \frac{mv_{\text{max}}^2}{r} \Rightarrow v_{\text{max}} = \sqrt{\mu_s rg}$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{1 \times 50 \times 10} = 10\sqrt{5} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

راستی بچه‌ها جرم خودرو به دردمون نخورد و بد نیست بگی $v_{\text{max}} = \sqrt{rg}$ (م: μ_s / r: r / گ: g)

کنکور سراسری ریاضی خارج از کشور تیرماه ۱۴۰۳

۵۴- شکل زیر، نمودار تکانه - زمان متحرکی است که در مسیر مستقیم حرکت می‌کند. اگر جرم متحرک 45° گرم باشد، بزرگی شتاب آن در لحظه $t = 5$ s چند متر بر مربع ثانیه است؟



(۱) ۸

(۲) ۶

(۳) ۴

(۴) ۳

پاسخ تشریحی:

چون نمودار تکانه - زمان خط راست است، پس نیرو و شتاب ثابت هستند، بنابراین:

$$F_{av} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{0 - 18}{5 - 0} = -3.6 \text{ N}$$

$$F = ma \Rightarrow a = \frac{F}{m} = \frac{-3.6}{0.45} = -8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\Rightarrow |a| = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

پاسخ: گزینه ۱

گروه آموزشی ماز

۶۸- تندی گردش ماهواره A به دور زمین، ۲۰ درصد کم‌تر از تندی گردش ماهواره B به دور زمین است. شعاع مدار ماهواره A، چند برابر شعاع مدار ماهواره B است؟

(۴) $\frac{25}{16}$

(۳) $\frac{16}{25}$

(۲) $\frac{5}{4}$

(۱) $\frac{4}{5}$

(آسان - محاسباتی - ۱۲۰۲)

پاسخ: گزینه ۴

تندی گردش ماهواره به دور زمین از رابطه $v = \sqrt{\frac{GM_e}{r}}$ به دست می‌آید؛ بنابراین می‌توان نوشت:

$$v_A = v_B - 20\%v_B = 80\%v_B = 0.8v_B$$

$$v = \sqrt{\frac{GM_e}{r}} \Rightarrow \frac{v_A}{v_B} = \sqrt{\frac{r_B}{r_A}} \xrightarrow{v_A = 0.8v_B} \frac{0.8}{1} = \sqrt{\frac{r_B}{r_A}}$$

$$\Rightarrow \frac{r_B}{r_A} = \frac{16}{25} \Rightarrow \frac{r_A}{r_B} = \frac{25}{16}$$

دام تستی

اگر خدایی نکرده حواستون به این‌که $v \propto \frac{1}{\sqrt{r}}$ نباشه، یا نسبت خواسته شده رو برعکس بگیرید، در دام گزینه (۳) می‌افتید.

کنکور سراسری ریاضی تیرماه ۱۴۰۳

۵۵- اگر تندی ماهواره A، دو برابر تندی ماهواره B باشد، دوره آن چند برابر دوره ماهواره B است؟

(۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(۳) $\frac{1}{8}$

(۲) $\frac{1}{4}$

(۱) $\frac{1}{2}$

پاسخ تشریحی:

می‌دانیم که تندی ماهواره با جذر شعاع، رابطه عکس دارد:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} \Rightarrow \frac{v_A}{v_B} = \sqrt{\frac{r_B}{r_A}} \Rightarrow \frac{2v_B}{v_B} = \sqrt{\frac{r_B}{r_A}} \Rightarrow \frac{r_B}{r_A} = 4$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}} \Rightarrow \frac{T_A}{T_B} = \sqrt{\left(\frac{r_A}{r_B}\right)^3} \Rightarrow \frac{T_A}{T_B} = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^3} \Rightarrow \frac{T_A}{T_B} = \frac{1}{8}$$

پاسخ: گزینه ۳

گروه آموزشی ماز

۶۹- معادله مکان - زمان نوسانگری که حرکت هماهنگ ساده انجام می‌دهد، در SI به صورت $x = 0.4 \cos 4\pi t$ است. از لحظه صفر تا لحظه‌ای که مسافت طی شده توسط نوسانگر برابر 140 cm می‌شود، اندازه سرعت متوسط نوسانگر چند واحد SI است؟

۰/۱۲ (۴)

۰/۱۸ (۳)

۰/۲۴ (۲)

۰/۴۸ (۱)

(متوسط - محاسباتی - ۱۲۰۳)

پاسخ: گزینه ۱

گام اول:

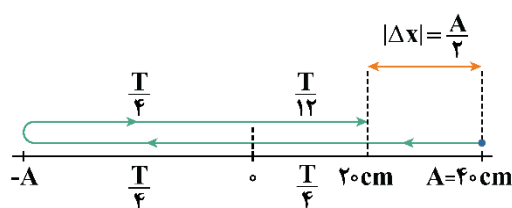
ابتدا با توجه به معادله مکان - زمان نوسانگر، دامنه حرکت و دوره آن را می‌یابیم:

$$A = 0.4 \text{ m} = 40 \text{ cm}$$

$$\omega = 4\pi \left(\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right) \Rightarrow \frac{2\pi}{T} = 4\pi \Rightarrow T = \frac{1}{2} \text{ s}$$

گام دوم:

با توجه به مقدار مسافت طی شده از شروع حرکت نوسانگر، اندازه جابه‌جایی و مدت زمان حرکت آن را می‌یابیم:



$$L = 140 \text{ cm} = 3.5A = \frac{7}{2}A$$

$$\Delta t = \frac{3T}{4} + \frac{T}{4} = \frac{4T}{4} = T = \frac{1}{2} \text{ s}$$

$$|\Delta x| = \frac{A}{2} = 20 \text{ cm}$$

گام آخر:

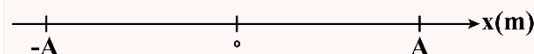
اندازه سرعت متوسط نوسانگر در این مدت را می‌یابیم:

$$|v_{av}| = \frac{|\Delta x|}{\Delta t} = \frac{0.2}{0.5} = \frac{2 \times 12}{5 \times 10} = 0.48 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

حرکت هماهنگ ساده

در یک حرکت هماهنگ ساده که معادله مکان - زمان آن به صورت $x = A \cos \omega t$ است، دانستن نکات زیر، ضروری است:

۱- **پارمخ نوسان:** اگر مکان نوسان‌کننده در زمان‌های مختلف را بر روی یک محور، نمایش دهیم ملاحظه می‌کنیم که مکان نوسان‌کننده بین دو مقدار $+A$ و $-A$ قرار می‌گیرد:

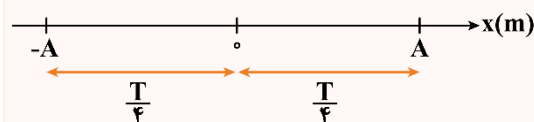


۲- **نقطه تعادل:** در وسط پارمخی که جسم بر روی آن نوسان می‌کند، قرار دارد؛ یعنی نقطه O، در این نقطه تندی نوسانگر دارای بیشترین مقدار ممکن است:

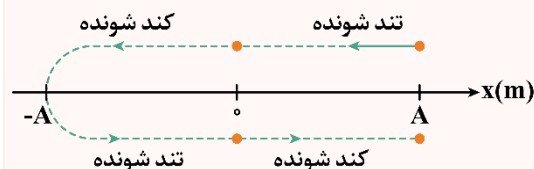
$$v_{\max} = A\omega$$

۳- **نقاط بازگشت:** در دو انتهای پارمخ نوسان یعنی در مکان‌های $x = \pm A$ سرعت نوسانگر صفر شده و تغییر جهت می‌دهد، برای همین به این نقاط، نقاط بازگشت می‌گوییم.

۴- کمترین مدت زمان لازم برای آن که نوسانگر فاصله بین نقاط بازگشت و تعادل را بپیماید برابر $\frac{T}{4}$ است و مقدار مسافت پیموده شده توسط نوسانگر برابر A است:



۵- در یک حرکت هماهنگ ساده، هرچه نوسانگر به نقطه تعادل نزدیک‌تر شود، تندی آن بیش‌تر و هرچه نوسانگر به نقاط بازگشت نزدیک‌تر شود، تندی آن کم‌تر می‌شود:



۶- بیشینه هریک از کمیت‌های مربوط به نوسانگر از روابط زیر به دست می‌آید:

$$\text{مکان بیشینه: } x_{\max} = A$$

$$\text{تندی بیشینه: } v_{\max} = A\omega$$

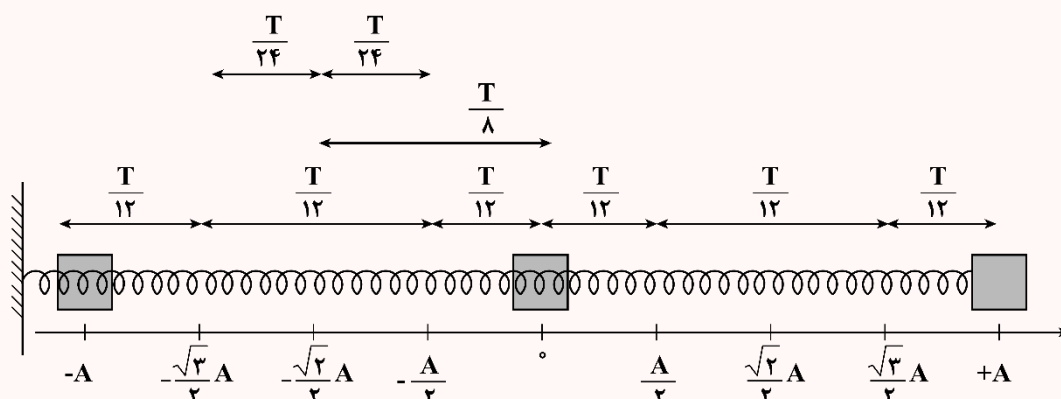
$$\text{شتاب بیشینه: } a_{\max} = A\omega^2$$

$$\text{نیروی بیشینه: } F_{\max} = mA\omega^2$$

$$\text{تکانه بیشینه: } p_{\max} = mv_{\max} = mA\omega$$

جدول جمع‌بندی حرکت هماهنگ ساده

برای حل این سؤال جدول زیر را به‌خاطر بسپارید!



مکان	A	$\frac{\sqrt{3}}{2}A$	$\frac{\sqrt{2}}{2}A$	$\frac{A}{2}$	۰	$-\frac{A}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}A$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}A$	-A
سرعت	۰	$\pm \frac{1}{2}v_{\max}$	$\pm \frac{\sqrt{2}}{2}v_{\max}$	$\pm \frac{\sqrt{3}}{2}v_{\max}$	$\pm v_{\max}$	$\pm \frac{\sqrt{3}}{2}v_{\max}$	$\pm \frac{\sqrt{2}}{2}v_{\max}$	$\pm \frac{1}{2}v_{\max}$	۰
شتاب	$-a_{\max}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}a_{\max}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}a_{\max}$	$-\frac{1}{2}a_{\max}$	۰	$\frac{1}{2}a_{\max}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}a_{\max}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}a_{\max}$	$a_{\max}$
انرژی جنبشی	۰	$\frac{1}{4}K_{\max}$	$\frac{1}{2}K_{\max}$	$\frac{3}{4}K_{\max}$	$K_{\max}$	$\frac{3}{4}K_{\max}$	$\frac{1}{2}K_{\max}$	$\frac{1}{4}K_{\max}$	۰
انرژی پتانسیل	$U_{\max}$	$\frac{3}{4}U_{\max}$	$\frac{1}{2}U_{\max}$	$\frac{1}{4}U_{\max}$	۰	$\frac{1}{4}U_{\max}$	$\frac{1}{2}U_{\max}$	$\frac{3}{4}U_{\max}$	$U_{\max}$
انرژی مکانیکی	E	E	E	E	E	E	E	E	E

گروه آموزشی ماز

۷۰- نوسانگری بر روی پاره‌خطی به طول ۲۰cm حرکت هماهنگ ساده انجام می‌دهد و در هر بازه زمانی دلخواهی به مدت ۱ ثانیه، ۱۰ بار به بیشینه تندی خود می‌رسد. اندازه بیش‌ترین تندی متوسط نوسانگر در یک بازه زمانی $\frac{1}{3}$ ثانیه‌ای، چند متر بر ثانیه بیش‌تر از کم‌ترین تندی متوسط نوسانگر در

یک بازه زمانی $\frac{1}{4}$ ثانیه‌ای می‌باشد؟

۴) $2\sqrt{2} - 1$

۳) $3 - 2\sqrt{2}$

۲) $2\sqrt{2}$

۱) $4\sqrt{2}$

(سخت - مفهومی/محاسباتی - ۱۴۰۳)

پاسخ: گزینه ۴

مشاوره

این تیپ تست در کنکور ۱۴۰۳ هم مطرح شد و نشون می‌ده ایده این تست خیلی مورد علاقه طراح کنکور هست. چرا؟ چون یک بار حداکثر مسافت طی‌شده در یک مدت‌زمان معین بحث می‌شه و یک بار هم حداقل مسافت طی‌شده در یک مدت‌زمان معین! ما اینجا حسابی به این موضوع حواسمون بوده و برای همین یک تست جامع از این موضوع براتون طرح کردیم تا خیالتون رو راحت کنیم.

گام اول:

ابتدا دامنه نوسان و دوره نوسان را به دست می‌آوریم:

طول پاره‌خط نوسان (L) دو برابر دامنه نوسان (A) می‌باشد، پس داریم:

$$L = 2A \xrightarrow{L=20\text{cm}} 20 = 2A \Rightarrow A = 10\text{cm}$$

در هر نوسان کامل، نوسانگر ۲ بار به بیشینه تندی خود می‌رسد. پس در این سؤال نوسانگر در مدت زمان ۱s، پنج نوسان کامل انجام داده است. پس داریم:

$$n = \frac{\Delta t}{T} \xrightarrow{n=5, \Delta t=1s} 5 = \frac{1}{T} \Rightarrow T = \frac{1}{5} s$$

گام دوم:

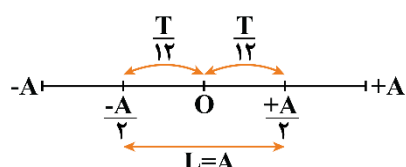
بازه‌های زمانی داده‌شده را بر حسب این که چه کسری از دوره تناوب (T) می‌باشند مشخص می‌کنیم:

$$\Delta t_1 = \frac{1}{30} s \Rightarrow \frac{\Delta t_1}{T} = \frac{\frac{1}{30}}{\frac{1}{5}} = \frac{1}{6} \Rightarrow \Delta t_1 = \frac{T}{6}$$

$$\Delta t_2 = \frac{1}{20} s \Rightarrow \frac{\Delta t_2}{T} = \frac{\frac{1}{20}}{\frac{1}{5}} = \frac{1}{4} \Rightarrow \Delta t_2 = \frac{T}{4}$$

گام سوم:

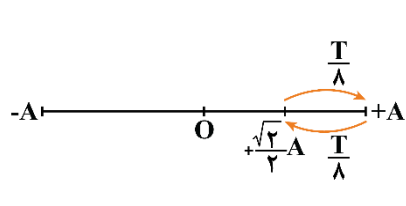
بیش‌ترین تندی متوسط نوسانگر در بازه زمانی $\frac{T}{6}$ را باید به صورت متقارن (دو بازه $\frac{T}{12}$) در طرفین نقطه وسط (مرکز نوسان) در نظر بگیریم:



$$\left. \begin{aligned} L &= A = 10 \text{ cm} = 0.1 \text{ m} \\ \Delta t_1 &= \frac{T}{6} = \frac{1}{30} s \end{aligned} \right\} \Rightarrow s_{av1} = \frac{L}{\Delta t_1} = \frac{0.1}{\frac{1}{30}} = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (I)$$

گام چهارم:

کم‌ترین تندی متوسط نوسانگر در بازه زمانی $\frac{T}{4}$ را باید به صورت متقارن (دو تا $\frac{T}{8}$) در موقع رفت و برگشت به یکی از نقاط بازگشت در نظر گرفت.



$$\left. \begin{aligned} L &= 2(A - \frac{\sqrt{2}}{2}A) = A(2 - \sqrt{2}) \xrightarrow{A=0.1m} L = 0.1(2 - \sqrt{2}) \text{ m} \\ \Delta t_2 &= \frac{T}{4} = \frac{1}{20} s \end{aligned} \right\} \Rightarrow s_{av2} = \frac{L}{\Delta t_2} = \frac{0.1(2 - \sqrt{2})}{\frac{1}{20}} = 2(2 - \sqrt{2}) = (4 - 2\sqrt{2}) \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (II)$$

گام آخر:

اختلاف بیش‌ترین و کم‌ترین تندی متوسط در بازه‌های خواسته‌شده را به دست می‌آوریم:

$$s_{av1} - s_{av2} = 3 - (4 - 2\sqrt{2}) = (2\sqrt{2} - 1) \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

نکته ۱

اگر در مدت زمان معین Δt ، بخواهیم نوسانگر حداکثر مسافت طی شده را داشته باشد باید دو بازه زمانی $\frac{\Delta t}{2}$ را به صورت متقارن در طرفین مرکز نوسان در نظر بگیریم.

نکته ۲

اگر در مدت زمان معین Δt ، بخواهیم نوسانگر حداقل مسافت طی شده را داشته باشد باید دو بازه زمانی $\frac{\Delta t}{2}$ را به صورت متقارن در موقع رفت و برگشت به یکی از نقاط بازگشتی در نظر بگیریم.

کنکور سراسری تجربی تیرماه ۱۴۰۳

۵۴- معادله حرکت هماهنگ ساده نوسانگری در SI به صورت $x = 0.02 \cos 6\pi t$ است. بیش‌ترین سرعت متوسط نوسانگر در مدت $\Delta t = 0.5$ s چند سانتی‌متر بر ثانیه است؟

۴√۲ (۴)

۲√۲ (۳)

۸ (۲)

۲ (۱)

پاسخ تشریحی:

$$x = 0.02 \cos 6\pi t \Rightarrow \omega = 6\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}} \text{ و } A = 0.02 \text{ m} = 2 \text{ cm}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow 6\pi = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{1}{3} s$$

ابتدا محاسبه می‌کنیم زمان موردنظر چه مضربی از دوره است:

$$\frac{\Delta t}{T} = \frac{0.5}{\frac{1}{3}} = 1.5 \Rightarrow \Delta t = 1.5T$$

Δt ثابت است، پس بیش‌ترین سرعت متوسط زمانی رخ می‌دهد که جابه‌جایی حداکثر شود:

$$\uparrow v_{av} = \frac{\Delta x \uparrow}{\Delta t} \rightarrow \text{ثابت}$$

بازه زمانی موردنظر $\Delta t = 1.5T$ است چون در مدت یک دوره دوباره به مکان اول باز می‌گردیم و جابه‌جایی در مدت یک دوره صفر است، پس ما باید حداکثر جابه‌جایی را در $0.5T$ به دست آوریم، و در این مدت حداکثر جابه‌جایی زمانی است که فاصله بین دو نقطه بازگشت طی شود.



$$\Delta x = 2A = 2 \times 2 = 4 \text{ cm}$$

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{4 \text{ cm}}{0.5s} = 8 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

پاسخ: گزینه ۲

گروه آموزشی ماز

۷۱- جرم خودرویی همراه با سرنشینان آن 1600 kg است. این خودرو روی چهار فنر که ثابت هر کدام $10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ می‌باشد، سوار شده است. بسامد ارتعاش

خودرو وقتی از چاله‌ای می‌گذرد، چند هرتز است؟ (فرض کنید وزن خودرو به‌طور یکنواخت روی فنرهای چهارچرخ توزیع شده است و $\pi = \sqrt{10}$)

(۴) ۵

(۳) ۲/۵

(۲) ۰/۴

(۱) ۱/۲۵

(آسان - محاسباتی - ۱۲۰۳)

پاسخ: گزینه ۳

جرم خودرو به‌طور یکسان بر روی ۴ فنر تقسیم شده است؛ بنابراین جرم روی هر فنر $\frac{1600}{4} = 400 \text{ kg}$ است و با توجه به رابطه زیر، می‌توان نوشت:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{400}{10^5}} = 2\pi \sqrt{\frac{4}{10^3}} = 2\pi \times \frac{2}{10\sqrt{10}} = \frac{4}{10} \text{ s}$$

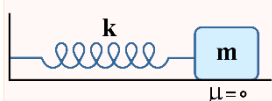
$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{\frac{4}{10}} = \frac{10}{4} = 2.5 \text{ Hz}$$

دام تستی

اگر حواستون نباشه که برای هر فنر، $\frac{1}{4}$ برابر جرم کل رو درنظر بگیرید، در دام گزینه (۱) گرفتار می‌شوید.

نوسان هماهنگ ساده سامانه جرم - فنر

۱- بسامد زاویه‌ای نوسان برابر است با:



$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

۲- دوره تناوب و بسامد نوسان برابر است با:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$f = \frac{1}{T} \rightarrow f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

۳- برای مقایسه دوره و بسامد دو نوسانگر می‌توان نوشت:

$$\frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1} \times \frac{k_1}{k_2}} \quad \frac{f_2}{f_1} = \sqrt{\frac{m_1}{m_2} \times \frac{k_2}{k_1}}$$

مشاوره

به قول آقای دکتر فرهنگ‌دینا، و علیکم بالمتن الکتاب الدرس! چون این سؤال دقیقاً از مسائل آخر فصل طرح شده و به‌قدری مهمه که هم برای امتحان نهایی و هم برای کنکور، حساسی حواست بهش باشه.

گروه آموزشی ماز

۷۲- وزنه‌ای به جرم ۹۰۰ گرم به انتهای فنری با ثابت $\frac{4}{5} \frac{N}{cm}$ بسته شده است و روی سطح افقی بدون اصطکاک به نوسان درمی‌آید. اگر بیش‌ترین و کم‌ترین طول فنر به ترتیب ۶۰cm و ۴۰cm باشد، بیشینه تندی نوسانگر چند متر بر ثانیه است؟

(۱) ۱ (۲) $\sqrt{5}$ (۳) ۲ (۴) $\sqrt{10}$

(متوسط - محاسباتی - ۱۴۰۳)

پاسخ: گزینه ۲



در نوسان هماهنگ ساده اگر بیشینه و کمینه طول فنر به ترتیب برابر با $L_{\max}$ و $L_{\min}$ باشد داریم:

$$\begin{cases} L_o = \frac{L_{\max} + L_{\min}}{2} \\ A = \frac{L_{\max} - L_{\min}}{2} \end{cases}$$

گام اول:

با استفاده از طول $\max$ و $\min$ داده شده برای فنر می‌توانیم دامنه نوسان (A) و طول عادی فنر (L_o) را به دست بیاوریم:

$$A = \frac{L_{\max} - L_{\min}}{2} = \frac{60 - 40}{2} = 10 \text{ cm} = 0.1 \text{ m}$$

$$L_o = \frac{L_{\max} + L_{\min}}{2} = \frac{60 + 40}{2} = 50 \text{ cm} = 0.5 \text{ m}$$

توجه کنید که هنگامی که فنر طول عادی (L_o) خود را دارد، نوسانگر در مرکز نوسان است.

گام دوم:

با استفاده از رابطه $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ می‌توان نوشت:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \frac{k = \frac{4}{5} \frac{N}{cm} = \frac{450}{m}}{m = 900 \cdot g = 0.9 \text{ kg}} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{450}{0.9}} = 10\sqrt{5} \frac{\text{rad}}{s}$$

گام آخر:

تندی بیشینه نوسانگر برابر است با:

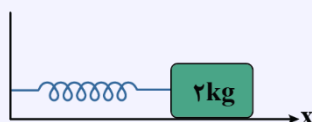
$$v_{\max} = A\omega = 0.1 \times 10\sqrt{5} = \sqrt{5} \frac{m}{s}$$

مشاوره

استفاده از طول بیشینه و طول کمینه فنر برای محاسبه طول عادی فنر و دامنه نوسان در کنکورهای اخیر موردتوجه قرار گرفت و بعید نیست که حالا حالاها این نکته موردتوجه طراح کنکور بمونه.

کنکور سراسری تجربی خارج از کشور تیرماه ۱۴۰۲

۶۰- مطابق شکل، وزنه‌ای به جرم ۲ kg به فنری که ثابت آن $\frac{20}{m} \frac{N}{cm}$ است بسته شده و روی سطح افقی بدون اصطکاک، حرکت هماهنگ ساده انجام می‌دهد. اگر کم‌ترین و بیش‌ترین طول فنر در حین نوسان به ترتیب ۴۰cm و ۵۰cm باشد، در لحظه‌ای که شتاب نوسانگر $\vec{a} = \left(2 \frac{m}{s^2}\right) \hat{i}$ است، طول فنر چند سانتی‌متر است؟



(۲) ۴۳

(۱) ۴۲

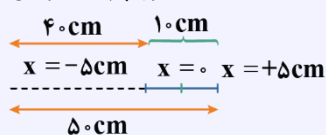
(۴) ۴۸

(۳) ۴۷

پاسخ تشریحی:

با توجه به کم‌ترین و بیش‌ترین طول فنر، طول پاره‌خط نوسان و دامنه (A) را به دست می‌آوریم:

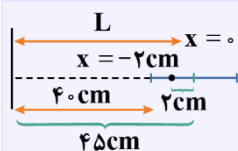
$$\text{طول پاره‌خط نوسان} = 10 \text{ cm} \rightarrow A = 5 \text{ cm}$$



حال با داشتن شتاب نوسانگر، مکان نوسانگر را به دست می‌آوریم:

$$a = -\omega^2 x \xrightarrow{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \omega^2 = \frac{k}{m}} a = -\frac{k}{m} x \xrightarrow{\substack{a = 2 \frac{m}{s^2} \\ k = \frac{20}{m} \frac{N}{cm}, m = 2 \text{ kg}}} 2 = \left(-\frac{20}{2}\right) x \Rightarrow x = -0.2 \text{ m} = -20 \text{ cm}$$

در نهایت با داشتن مکان نوسانگر، طول فنر را به دست می آوریم:



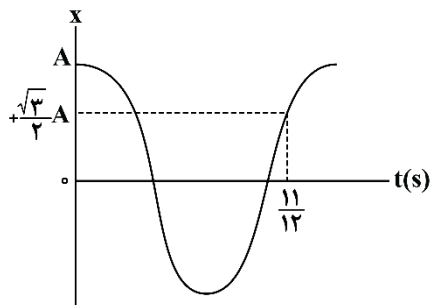
$$L = 45 - 2 = 43 \text{ cm}$$

پاسخ: گزینه ۲

گروه آموزشی ماز

۷۳- نمودار مکان - زمان آونگ ساده ای که به صورت هماهنگ ساده نوسان می کند به صورت زیر است. اگر طول آونگ $12/5 \text{ cm}$ کاهش یابد، دوره تناوب آن

چند برابر می شود؟ ($\pi^2 = g$)



- (۱) $\frac{1}{2}$
- (۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- (۴) ۲

(متوسط - نموداری - ۱۳۰۳)

پاسخ: گزینه ۲

نکته

۱- دوره تناوب یک آونگ ساده از رابطه $T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$ به دست می آید. در این رابطه، L طول آونگ و g شتاب گرانش است.

۲- در ساعت آونگ دار، هرگاه از عقب یا جلو افتادن ساعت صحبت شد، باید دوره آونگ را مدنظر گرفته و به صورت زیر با آن برخورد کنیم:

الف) اگر دوره افزایش یابد ← ساعت عقب می افتد.

ب) اگر دوره کاهش یابد ← ساعت جلو می افتد.

گام اول:

با استفاده از نمودار مکان - زمان داده شده و معادله مکان - زمان حرکت هماهنگ ساده که به صورت $x = A \cos(\omega t)$ می باشد، می توان نوشت:

$$\left(\omega = \frac{2\pi}{T} \right)$$

$$\left. \begin{aligned} t &= \frac{11}{12} \text{ s} \\ x &= +\frac{\sqrt{3}}{2} A \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} A = A \cos\left(\frac{2\pi}{T} \times \frac{11}{12}\right) \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{11\pi}{6T}\right) \Rightarrow \frac{11\pi}{6T} = \frac{\pi}{6} \times$$

$$\Rightarrow \frac{11\pi}{6T} = \frac{11\pi}{6} \Rightarrow T = 1 \text{ s} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{1} = 2\pi \left(\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)$$

گام دوم:

با استفاده از رابطه $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$ می توان طول آونگ را به دست آورد:

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \sqrt{\frac{g}{L}} \\ \omega &= 2\pi \end{aligned} \right\} \rightarrow g = \pi^2 L \Rightarrow 2\pi = \sqrt{\frac{\pi^2}{L}} \Rightarrow 4 = \frac{1}{L} \Rightarrow L = \frac{1}{4} \text{ m} = 25 \text{ cm}$$

گام آخر:

با کاهش طول آونگ به اندازه $12/5 \text{ cm}$ طول آن نصف می شود. پس طبق رابطه $T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$ داریم:

$$\frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} = \sqrt{\frac{25 - 12/5}{25}} = \sqrt{\frac{12/5}{25}} = \sqrt{\frac{1}{25}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

برای محاسبه دوره تناوب اولیه می‌تونیم این‌طور هم عمل کنیم:

$$\frac{3T}{4} + \frac{T}{8} = \frac{11}{12} \Rightarrow \frac{11T}{12} = \frac{11}{12} \Rightarrow T = 1s$$

مشاوره

برای این‌که بتوانید به این تیپ تست‌ها پاسخ بدهید، باید به کمک معادله مکان - زمان و زمان داده‌شده، دوره تناوب و بالطبع طول اولیه آونگ رو به دست بیارین و سپس با تغییر طول آونگ، نسبت دوره‌ها رو حساب کنین. البته اگر زمان‌های مشهور رو حفظ باشین می‌تونین دوره تناوب اولیه رو سریع‌تر هم حساب کنین.

کنکور سراسری تجربی تیرماه ۱۴۰۲

۵۵- آونگ ساده‌ای در مدت ۳۶ ثانیه، ۲۰ نوسان انجام می‌دهد. اگر طول آونگ ۱۷ cm کاهش یابد، در مدت ۴۰ ثانیه چند نوسان انجام می‌دهد؟ ($g = \pi^2$)

(۱) ۲۵ (۲) ۲۸ (۳) ۳۰ (۴) ۳۲

پاسخ تشریحی:

طول اولیه آونگ برابر است با:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{L_1}{g}} \Rightarrow \frac{36}{20} = 2\pi\sqrt{\frac{L_1}{\pi^2}} \Rightarrow 1/8 = 2\sqrt{L_1} \Rightarrow L_1 = 0.16m$$

با کم کردن ۱۷ cm از طول آونگ، طول آن به $L_2 = 0.04m$ می‌رسد و دوره آن برابر می‌شود با:

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{L_2}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{0.04}{\pi^2}} = 1/5s$$

بنابراین تعداد نوسان‌ها در مدت ۴۰s برابر است با:

$$T = \frac{t}{n} \rightarrow \frac{40}{n} = 1/5 \Rightarrow n = 20$$

پاسخ: گزینه ۱

گروه آموزشی ماز

۷۴- نوسانگری به جرم ۲۰۰ گرم بر روی پاره‌خطی به طول ۱۰cm حرکت هماهنگ ساده انجام می‌دهد. اگر بسامد نوسانگر برابر ۵Hz باشد، بیشینه انرژی جنبشی نوسانگر چند میلی‌ژول است؟ ($\pi=3$)

(۴) ۲۲۵

(۳) ۲۲/۵

(۲) ۴۵۰

(۱) ۴۵

(آسان - محاسباتی - ۱۲۰۳)

پاسخ: گزینه ۴

طول پاره‌خط نوسان برابر ۱۰cm است؛ بنابراین دامنه نوسانگر برابر $A = \frac{1}{4} = 5cm$ است، از طرفی می‌دانیم بیشینه انرژی جنبشی نوسانگر برابر انرژی مکانیکی آن است؛ بنابراین می‌توان نوشت:

$$\omega = 2\pi f \Rightarrow \omega = 2 \times 3 \times 5 = 30 \frac{rad}{s}$$

$$K_{max} = E = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \times 0.2 \times (5 \times 10^{-2})^2 \times 30^2 = 225 \times 10^{-3} J = 225mJ$$

انرژی در حرکت هماهنگ ساده

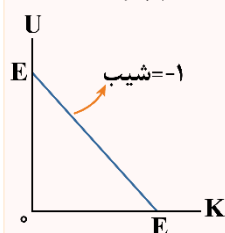
یک نوسانگر وزنه - فنر را در نظر بگیرید. این دستگاه دارای انرژی پتانسیل کشسانی (U) و انرژی جنبشی (K) است. در مورد انرژی نوسانگر به نکات زیر توجه کنید.

۱- مجموع انرژی پتانسیل و جنبشی نوسانگر برابر انرژی مکانیکی آن است که مقدار ثابتی است:

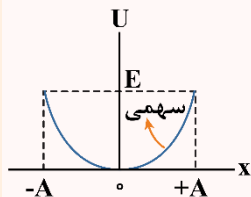
$$U + K = E \quad \text{ثابت}$$

۲- انرژی پتانسیل کشسانی ذخیره‌شده در فنر برابر است با:

$$U = \frac{1}{2} kx^2 \xrightarrow{k=m\omega^2} U = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$$



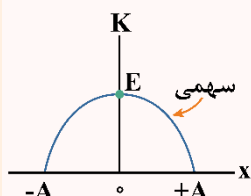
البته توجه داشته باشید که رابطه $U = \frac{1}{2} kx^2$ از کتاب درسی حذف شده است و طرح سؤال مستقیم از آن در کنکور مجاز نمی‌باشد. اینجا برای این که موضوع را بهتر متوجه شوید از این رابطه استفاده کرده‌ایم.



۳- بیشینه انرژی پتانسیل کشسانی همان انرژی مکانیکی نوسانگر است.

$$E = U_{\max} = \frac{1}{2} kA^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 = \pi^2 A^2 f^2 m$$

۴- اگر انرژی پتانسیل را از انرژی مکانیکی کم کنیم، انرژی جنبشی نوسانگر به دست می‌آید:



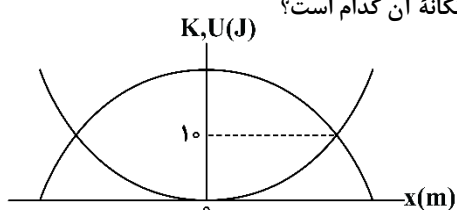
$$\begin{cases} K = E - U \\ U = \frac{1}{2} kx^2 \end{cases} \rightarrow K = E - \frac{1}{2} kx^2 = E - \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$$

البته اگر سرعت نوسانگر را بدانیم، می‌توانیم از رابطه $K = \frac{1}{2} mv^2$ هم برای محاسبه انرژی جنبشی کمک بگیریم.

۵- هنگامی که متحرک در $x = 0$ (مرکز نوسان) است، همه انرژی به صورت جنبشی است. هنگامی که متحرک در $x = \pm A$ (نقاط بازگشتی) قرار دارد، همه انرژی به صورت انرژی پتانسیل کشسانی است. هنگامی که متحرک در مکان $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} A$ است، انرژی‌های جنبشی و پتانسیل برابرند و هریک نصف انرژی مکانیکی هستند.

گروه آموزشی ماز

۷۵- نمودار انرژی‌های جنبشی (K) و پتانسیل کشسانی (U) یک نوسانگر هماهنگ ساده بر حسب مکان آن مطابق شکل زیر است. اگر مسافت طی شده نوسانگر در هر دوره نوسان ۴۰ cm باشد، نیروی خالص وارد بر نوسانگر در لحظه تغییر جهت بردار تکانه آن کدام است؟



- ۱) ۸۰۰
- ۲) ۲۰۰
- ۳) ۴۰۰
- ۴) ۱۶۰۰

(سخت - نموداری - ۱۳۰۳)

پاسخ: گزینه ۳

گام اول:

می‌دانیم نوسانگر در هر دوره نوسان (T)، مسافت ۴A را طی می‌کند. پس می‌توان نوشت:

$$L = 4A \xrightarrow{L=40\text{cm}} 40 = 4A \Rightarrow A = 10\text{cm} = 0.1\text{m}$$

گام دوم:

با استفاده از نمودار داده شده متوجه می‌شویم که در محل تقاطع دو نمودار $K = U = 10\text{J}$ می‌باشد و همچنین می‌دانیم که $E = K_{\max}$ ، پس:

$$\begin{cases} E = K + U = 20\text{J} \\ E = K_{\max} = \frac{1}{2} mA^2 \omega^2 \end{cases} \Rightarrow 20 = \frac{1}{2} mA^2 \omega^2 \Rightarrow mA^2 \omega^2 = 40$$

گام آخر:

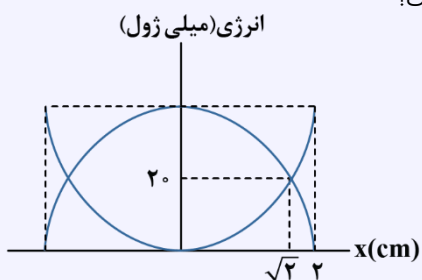
نیروی وارد بر نوسانگر در لحظه تغییر جهت بردار تکانه، همان $F_{\max} = mA\omega^2$ می‌باشد، پس می‌توان نوشت:

$$\left. \begin{aligned} mA^2 \omega^2 &= 40 \\ A &= 0.1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{mA^2 \omega^2}{A} = \frac{40}{0.1} \Rightarrow mA\omega^2 = 400 \xrightarrow{F_{\max} = mA\omega^2} F_{\max} = 400\text{N}$$

مشاوره

این تست خیلی جامع طرح شده و اومدیم چندین مورد مهم از بحث نوسان رو باهم ترکیب کردیم. اگر نتونستی این تست رو بزنی، خیلی واجبه که به کمک پاسخنامه بری دقیقاً نگاه کنی که توی کدوم بخش مشکل داری و سعی کنی اون بخش رو حسابی تمرین کنی. راستی این تست برای کنکور خیلی شانس طرح شدن داره!

۵۴- شکل زیر، نمودار تغییرات انرژی جنبشی و پتانسیل سامانه جرم - فنری را بر حسب مکان نشان می‌دهد. اگر حداقل زمانی که طول می‌کشد که انرژی جنبشی نوسانگر از صفر به 40 mJ برسد برابر 0.5 s باشد، بزرگی سرعت نوسانگر در لحظه عبور از مکان $x = 0$ چند متر بر ثانیه است؟



(۱) $\frac{\pi}{5}$

(۲) $\frac{\pi}{10}$

(۳) 2π

(۴) 10π

پاسخ تشریحی:

با توجه به نمودار داده شده سؤال:

$$K_{\max} = 2 \times 20 = 40 \text{ mJ}$$

در نتیجه حداقل زمانی که انرژی جنبشی از صفر به 40 mJ می‌رسد، یعنی نوسانگر از نقطه بازگشت به مکان تعادل خواهد رسید و مدت زمان سپری شده برابر خواهد بود

با $\frac{T}{4}$:

$$\frac{T}{4} = 0.5 \rightarrow T = 2 \text{ s}$$

بزرگی سرعت نوسانگر در مکان تعادل، بیشینه سرعت است:

$$|v_{\max}| = A\omega = A \left(\frac{2\pi}{T} \right) = 2 \times 10^{-2} \times \frac{2\pi}{2} = \frac{\pi}{5} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

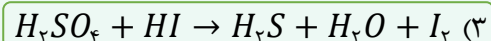
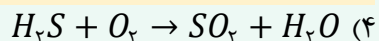
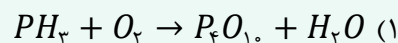
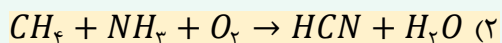
پاسخ: گزینه ۱

گروه آموزشی ماز

شیمی

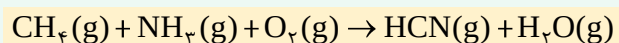
یکی از مطابقت‌های آزمون سال گذشته ماز با کنکور ۱۴۰۳

۸۴- بر اثر سوختن اوره، گازهای کربن دی‌اکسید و نیتروژن به همراه بخار آب تولید می‌شود. ضریب آب در معادله موازنه شده سوختن اوره، با ضریب این ماده در معادله موازنه شده کدام یک از واکنش‌های زیر برابر است؟



(مرحله ۴ آزمون‌های سالیانه - شیمی رشته ریاضی)

۸۱- مجموع ضرایب استوکیومتری مواد در واکنش زیر، پس از موازنه معادله آن، کدام است؟



۱۵ (۴)

۱۴ (۳)

۱۳ (۲)

۱۲ (۱)

(کنکور اردیبهشت ۱۴۰۳ - شیمی رشته ریاضی)



برای مشاهده
همه مطابقت‌ها
اینجا رو اسکن کن!

biomaze.ir

یا رو این کلیک کن!

دانش‌آموزان عزیز ماز

خب این هم از آزمون جمع‌بندی نیمسال اول شیمی دوازدهم! در این آزمون، مطالب مربوط به یک فصل مسئله‌محور (فصل یک شیمی دوازدهم) و یک فصل کاملاً مفهومی (فصل دو شیمی دوازدهم) براتون مرور شد و امیدوارم که نتیجه خیلی خوبی ازش گرفته باشید. اگه احیاناً در قسمت کوچکی از مطالب این دو فصل اشکال دارید و به این اشکالات در این آزمون پی بردید، حتماً یک لیست از اون‌ها تهیه کنید تا سر فرصت مناسب (مثلاً ایام طلایی نوروز) بتونید این اشکالات رو رفع کنید. و اما آزمون بعد! در آزمون بعد، باید مطالب شیمی دهم رو مرور و جمع‌بندی کنید و این یعنی حدود ۳۰٪ از مطالبی که در کنکور میادا! از بین این سه فصل، قطعاً فصل‌های دوم و سوم اهمیت بیشتری دارن و اغلب تعداد سوالات بیشتری از اون‌ها توی کنکور مطرح میشه، پس این دو فصل رو بیشتر بخونید! سعی کنید از همه قسمت‌های فصل ۱، ۲ و ۳ شیمی دهم تست مروری بزنید تا در نهایت در این آزمون هم درصد خیلی خوبی رو به‌دست بیارید.

دکتر فرشاد هادیان‌فرد - رتبه ۲۸ کنکور ۹۴ و مسئول درس شیمی آزمون ماز

۷۶- کدام مطلب زیر درست است؟

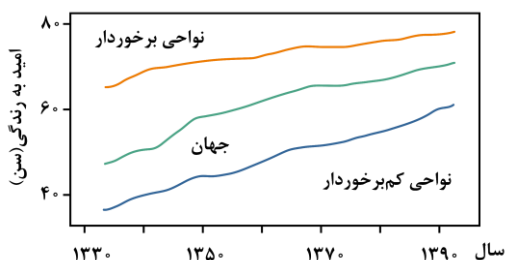
- (۱) میانگین جهانی شاخص امید به زندگی، بیشتر از مقدار این شاخص در نواحی برخوردار جهان است.
- (۲) صابون مایع را از گرم کردن مخلوط روغن‌های مایع مثل روغن زیتون با سدیم هیدروکسید تهیه می‌کنند.
- (۳) اگر ظروف چرب را به خاکستر آغشته کرده و با آب گرم شست‌وشو بدهیم، چربی‌ها آسان‌تر تمیز می‌شوند.
- (۴) اتیلن گلیکول، الکلی است که به عنوان ضدیخ کاربرد داشته و در هر مولکول آن، ۷ پیوند اشتراکی وجود دارد.

پاسخ: گزینه ۳

(آسان - صابون - مفهومی و حفظی - ۱۲۰۱)

خاکستر حاوی برخی از **مواد قلیایی و اکسیدهای فلزی** بوده و در واکنش با چربی‌ها، این مواد را به ترکیب‌های محلول در آب تبدیل می‌کند. بر این اساس، اگر ظرف‌های چرب را به خاکستر آغشته کرده و سپس با آب گرم شست‌وشو بدهیم، این ظروف آسان‌تر تمیز می‌شوند. نیاکان ما از این روش برای پاک کردن راحت‌تر چربی‌ها از ظروف استفاده می‌کردند.

بررسی سایر گزینه‌ها:



۱ نمودار مقابل، روند تغییر شاخص امید به زندگی در مناطق مختلف جهان را نشان می‌دهد: با توجه به داده‌های موجود در این نمودار، میانگین جهانی شاخص امید به زندگی حدوداً برابر با ۶۵ سال است؛ در حالی که شاخص امید به زندگی در مناطق برخوردار جهان بیشتر از ۷۵ سال است. بر این اساس، می‌توان گفت در حال حاضر میانگین جهانی شاخص امید به زندگی کمتر از مقدار این شاخص در نواحی برخوردار جهان است.

شاخص امید به زندگی

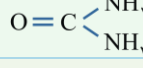
میزان شاخص امید به زندگی به عوامل مختلفی بستگی داشته و به همین خاطر، مقدار آن در کشورهای گوناگون و حتی در شهرهای گوناگون یک کشور نیز با هم تفاوت دارد. در طول ۶۰ سال اخیر، میزان امید به زندگی هم برای مناطق برخوردار جهان و هم برای مناطق کم‌برخوردار جهان افزایش پیدا کرده است. هر چند که میزان این افزایش برای مناطق کم‌برخوردار، بیشتر از مناطق برخوردار بوده است، اما هنوز هم میزان امید به زندگی در نواحی برخوردار جهان در حدود ۲۰ سال بیشتر از مناطق کم‌برخوردار است.

۲ حالت فیزیکی صابون‌ها، ربطی به حالت فیزیکی مواد مصرف شده برای تولید آن‌ها نداشته و وابسته به نوع کاتیون موجود در ساختار آن‌ها است. در واقع، **صابون جامد** را از گرم کردن مخلوط روغن‌های گوناگون (استرهای سنگینی که حالت مایع دارند) یا چربی‌ها (استرهای سنگینی که حالت جامد دارند) مانند روغن زیتون، نارگیل و پیه با سدیم هیدروکسید تهیه می‌کنند. **صابون‌های مایع** نیز نمک پتاسیم یا آمونیوم اسیدهای چرب هستند.

بیماری وبا

بیماری وبا که یک بیماری واگیردار است، به دلیل آلوده شدن آب‌ها و نبودن بهداشت در جامعه، بارها در جهان همه‌گیر شده و جان میلیون‌ها انسان را گرفته است. در طول زمان، استفاده از صابون و توجه به نظافت و بهداشت در جامعه گسترش یافت و سبب شد تا مقدار آلودگی‌ها، میکروب‌ها و عوامل بیماری‌زا در محیط‌های فردی و همگانی کاهش یافته و سطح بهداشت جامعه افزایش پیدا کند. بر این اساس، می‌توان گفت احتمال بروز وبا در طول زمان کاهش یافته است. البته، توجه داریم که این بیماری هنوز هم می‌تواند برای هر جامعه‌ای تهدیدکننده باشد. ساده‌ترین و مؤثرترین راه پیشگیری از این بیماری، رعایت بهداشت فردی و همگانی است.

۴ اتیلن گلیکول، یک الکل دوعاملی است که به عنوان ضدیخ کاربرد دارد. در هر مولکول از این ماده، ۹ پیوند اشتراکی بین اتم‌ها برقرار شده است. جدول زیر، اطلاعات مربوط به اوره، بنزین و اتیلن گلیکول را نشان می‌دهد:

نام ماده	فرمول شیمیایی	ساختار	نوع ماده	حلال مناسب
بنزین	C_8H_{18}		مولکول ناقطبی	حلال ناقطبی (هگزان)
اوره	$CO(NH_2)_2$		مولکول قطبی	حلال قطبی (آب)
اتیلن گلیکول	CH_2OHCH_2OH	$HO-CH_2-CH_2-OH$	مولکول قطبی	حلال قطبی (آب)

گروه آموزشی ماز

۷۷- تفاوت جرم واکنش‌دهنده‌های مصرف شده در فرایند تولید ۰/۱ مول پاک‌کننده صابونی جامد با استفاده از یک اسید چرب، برابر با ۲۰/۲ گرم است. اگر همه پیوندهای کربن-کربن موجود در این پاک‌کننده یگانه باشند، شمار اتم‌های کربن موجود در هر مول از این پاک‌کننده کدام است؟
($g \cdot mol^{-1}$: $H = 1$ و $C = 12$ و $O = 16$ و $Na = 23$)

آب + پاک کننده صابونی → محلول سدیم هیدروکسید + اسید چرب : معادله واکنش

$$9/.3 \times 1.25 (f)$$

$$1/2.4 \times 1.24 \text{ (m)}$$

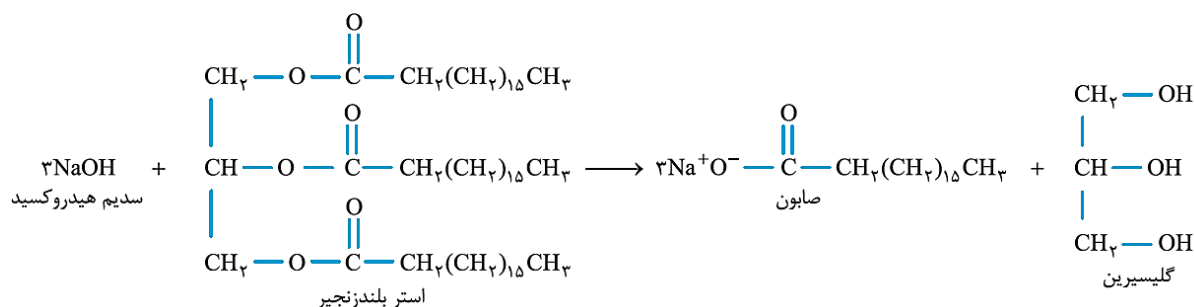
$$6/0.2 \times 1.2^F (2)$$

$$3/0.1 \times 1.25 (1)$$

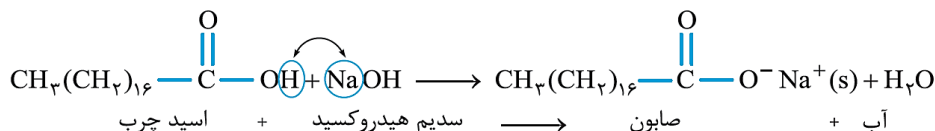
(متوسط - صابون - مسئله - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۴

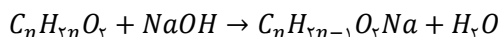
صابون‌ها یا طی واکنش اسیدهای چرب و یا استرهای سنگین با سدیم هیدروکسید تولید می‌شوند. معادله واکنش تولید این مواد با استفاده از استرهای سنگین سه‌عاملی (چربی‌ها و روغن‌ها) به‌صورت زیر است:



معادله واکنش تولید صابون‌ها با استفاده از اسیدهای چرب نیز به صورت زیر است:



همانطور که مشخص است، این پاک‌کننده صابونی طی واکنش اسیدهای چرب با سدیم هیدروکسید تولید شده است. معادله نمادی واکنش تولید یک پاک‌کننده صابونی جامد با زنجیره کربنی کاملاً سیرشده با فرمول شیمیایی $C_nH_{2n-1}O_2Na$ از اثر میان سدیم هیدروکسید ($NaOH$) و یک اسید چرب کاملاً سیرشده ($C_nH_{2n}O_2$) به صورت زیر است:



چرب(معادل با ۳۲ + ۱۴n گرم اسید چرب) مصرف می‌شود. بر این اساس، داریم:

$$\text{جرم سدیم هیدروکسید} - \text{جرم اسید چرب} = \text{تفاوت جرم واکنش دهنده ها} = (14n + 32) - (40) = 14n - 8$$

پس می‌توان گفت به ازای تولید ۱ مول پاک‌کننده صابونی در این واکنش، تفاوت جرم واکنش‌دهنده‌های مصرف شده برابر با $8 - 14n$ گرم خواهد بود. بر این اساس، به کمک اطلاعات داده شده در صورت سوال، مقدار n را محاسبه می‌کنیم.

$$۲۰/۲ \text{ g تفاوت جرم} = ۰/۱ \text{ mol} \times \frac{\text{تفاوت جرم } ۱۴n - ۸ \text{ g}}{\text{پاک کننده صابونی } ۱ \text{ mol}} \implies ۱۰۱ = ۷n - ۴ \implies n = ۱۵$$

با توجه به مقدار n ، هر مول از این پاک‌کننده صابونی شامل ۱۵ مول اتم کربن می‌شود؛ پس داریم:

$$C = 1 \text{ mol} \times \frac{15 \text{ mol } C}{1 \text{ mol}} \times \frac{6/0.2 \times 10^{23} \text{ atm}}{1 \text{ mol } C} = 9/0.3 \times 10^{24} \text{ atm}$$

گروه آموزشی ماز

۷۸- کدام مطلب زیر نادرست است؟

- (۱) رسوب تشکیل شده بر روی دیواره کتری، لوله‌ها، آبراه‌ها و دیگ‌های بخار را می‌توان به کمک صابون‌ها پاک کرد.
- (۲) در ساختار بخشی قطبی اسیدهای چرب، همانند استرهای سنگین، پیوند دوگانه کربن-اکسیژن یافت می‌شود.
- (۳) شربت معده، نمونه‌ای از مخلوط‌های ناپایدار بوده و مسیر حرکت نور در یک نمونه از آن مشخص است.
- (۴) با ریختن مقداری صابون در روغن زیتون، بخشی قطبی ذرات صابون در کنار هم قرار می‌گیرد.

(متوسط - صابون - مفهومی - ۱۲۰۱)

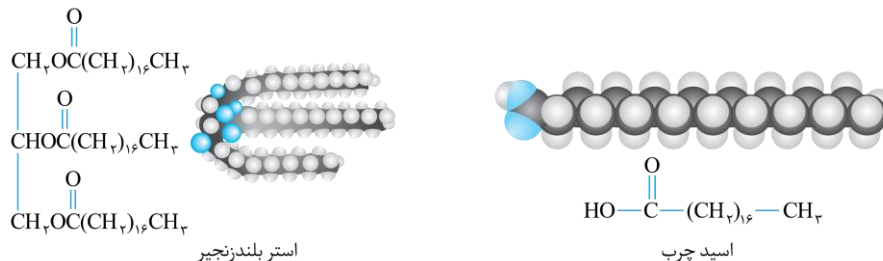
یاسخ: گزینه ۱

رسوب تشکیل شده بر روی دیواره کتری، لوله‌ها، آب‌راه‌ها و دیگرهای بخار، آن چنان به این سطوح می‌چسبند که با صابون و پاک‌کننده‌های غیرصابونی **زودوده نمی‌شوند**. برای زدودن این رسوب‌ها، به پاک‌کننده‌هایی نیاز است که بتوانند با آن‌ها **واکنش شیمیایی** داده و آن‌ها را به فرآورده‌هایی تبدیل کنند که با آب

شسته شوند. موادی مانند هیدروکلریک اسید (جوهر نمک)، سدیم هیدروکسید (محلول سود) و سفیدکننده‌ها از جمله این پاک‌کننده‌ها هستند. به این مواد، **پاک‌کننده خورنده** گفته می‌شود.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۲ چربی‌ها، مخلوطی از اسیدهای چرب (کربوکسیلیک اسیدهایی با زنجیر بلند کربنی و جرم مولکولی زیاد) و استرهای بلند زنجیر (استرهای با جرم مولی زیاد) هستند. تصویر زیر، ساختار مولکولی انواع چربی‌ها را نشان می‌دهد:



بخش قطبی مولکول چربی‌ها، دارای تعدادی اتم اکسیژن در ساختار خود است. همانطور که مشخص است، در ساختار بخش قطبی این دو ماده، پیوند اشتراکی $C=O$ یافت می‌شود.

پاک کردن چربی‌ها

هر یک از مولکول‌های سازنده چربی‌ها (اسیدهای چرب و استرهای با جرم مولی زیاد)، از یک بخش قطبی (بخش آب‌دوست) و یک بخش ناقطبی (بخش چربی‌دوست و یا آبگریز) تشکیل شده است. از آن‌جا که بخش اعظم این مولکول‌ها از جنس هیدروکربن بوده و ناقطبی است، پس بخش ناقطبی مولکول به راحتی بر بخش قطبی آن غلبه کرده و در نتیجه مولکول‌های چربی در مجموع، **ناقطبی** به حساب می‌آیند و در حلال‌های قطبی مانند آب حل نمی‌شوند. به خاطر نامحلول بودن چربی‌ها در حلال‌های قطبی، آب به تنهایی نمی‌تواند چربی‌های موجود بر روی پوست و لباس‌ها را پاک کند و به همین دلیل، برای پاک کردن چربی‌ها باید از سایر پاک‌کننده‌ها کمک بگیریم.

۳ جدول زیر، برخی از ویژگی‌های کلونیدها و مخلوط‌های همگن و ناهمگن را در مقایسه با یکدیگر نشان می‌دهد.

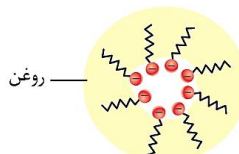
ویژگی	مخلوط ناهمگن (سوسپانسیون)	کلونید	مخلوط همگن (محلول)
عبور نور	نور را پخش می‌کند.	نور را پخش می‌کند.	نور را عبور می‌دهد.
ظاهر	ناهمگن	همگن	همگن
همگن بودن	ناهمگن	ناهمگن	همگن
پایداری	ناپایدار است.	پایدار است.	پایدار است.
نوع ذره	ذره‌ها و قطعات مجزا	مولکول‌های بزرگ یا توده‌های مولکولی	یون‌ها یا مولکول‌ها

شربت معده، نوعی **سوسپانسیون** است. سوسپانسیون‌ها نمونه‌ای از مخلوط‌های **ناپایدار** بوده و مسیر حرکت نور در یک نمونه از آن‌ها مشخص است.

کلونیدها

کلونیدها مخلوط‌هایی از دو یا چند ماده به حساب می‌آیند که در برخی از ویژگی‌های خود، به محلول‌ها شباهت دارند و در برخی از ویژگی‌های خود، با محلول‌ها تفاوت داشته و به مخلوط‌های ناهمگن شبیه هستند. ذره‌های سازنده کلونیدها عموماً به صورت **مولکول‌های بزرگ و یا توده‌های مولکولی** هستند که اندازه آن‌ها بزرگ‌تر از اندازه حل‌شونده‌های موجود در محلول‌های همگن است. چون ذرات موجود در کلونیدها بزرگ‌تر از اندازه ذرات موجود در محلول‌ها است، اگر پرتوی نوری از درون کلونیدها بگذرد، توسط ذره‌های سازنده کلونید پخش شده و به چشم بازتابیده می‌شود و به همین خاطر است که مسیر عبور نور در کلونیدها **قابل مشاهده** است. سطح ذرات موجود در ساختار کلونیدها باردار بوده و به همین خاطر، این مواد با ماندن در یک موقعیت ثابت **تشنشین نمی‌شوند**.

۴ **روغن زیتون**، نوعی ترکیب آلی است که با استفاده از مولکول‌های **ناقطبی** ساخته شده است. با ریختن مقداری صابون در روغن زیتون، یک **کلونید** پایدار ایجاد می‌شود که در آن، بخش قطبی ذرات صابون (گروه $-COO^-$) در کنار هم و در وسط توده‌های مولکولی قرار گرفته و بخش ناقطبی ذرات صابون (دم هیدروکربنی) در مجاورت با روغن زیتون قرار می‌گیرد. تصویر زیر، نمایی از فرایند قرارگیری مولکول‌های صابون (یا همان بخش آنیونی صابون) در کنار هم در مخلوطی از صابون و روغن زیتون را نشان می‌دهد:



گروه آموزشی ماز

۷۹- جرم یک نمونه اوره، برابر با جرم متانول موجود در ۶ لیتر محلول ۰/۱ مولار این ماده است. در ساختار این نمونه از اوره، تقریباً چند اتم هیدروژن وجود

دارد؟ ($g \cdot mol^{-1}$ و $H = 1$ و $C = 12$ و $N = 14$ و $O = 16$)

(۴) $6/6 \times 10^{23}$

(۳) $1/32 \times 10^{24}$

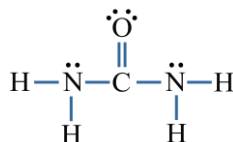
(۲) $7/7 \times 10^{23}$

(۱) $1/54 \times 10^{24}$

متانول، نوعی الکل یک کربنی با فرمول شیمیایی CH_3OH است. در قدم اول، جرم متانول موجود در محلول این ماده را محاسبه می‌کنیم:

$$? g CH_3OH = 6 L \text{ محلول} \times \frac{1 \text{ mol } CH_3OH}{1 L \text{ محلول}} \times \frac{32 g CH_3OH}{1 \text{ mol } CH_3OH} = 192 g$$

ساختار اوره به صورت زیر است:



با توجه به فرض سوال، جرم اوره و متانول با هم برابر است. پس یک نمونه ۱۹۲ گرمی اوره با فرمول شیمیایی $CO(NH_2)_2$ در اختیار داریم. باید شمار اتم‌های هیدروژن موجود در ساختار این نمونه از اوره را محاسبه کنیم. در هر مولکول اوره، ۴ اتم هیدروژن وجود دارد، پس در ساختار هر مول از این ماده نیز ۴ مول اتم هیدروژن یافت می‌شود. بر این اساس، داریم:

$$? \text{ atom H} = 192 g CO(NH_2)_2 \times \frac{1 \text{ mol } CO(NH_2)_2}{60 g CO(NH_2)_2} \times \frac{4 \text{ mol atom H}}{1 \text{ mol } CO(NH_2)_2} \times \frac{6/0.2 \times 10^{23} \text{ atom H}}{1 \text{ mol atom H}} \approx 7/7 \times 10^{23} \text{ atom}$$

گروه آموزشی ماز

۸۰- اگر ثابت یونش اسید HA در محلول ۰/۵ مولار از این ماده برابر ۱/۱۲۵ مول بر لیتر باشد، درصد یونش این اسید در محلول مورد نظر چند برابر درصد یونش هیدروفلوئوریک اسید در محلولی از این ماده با غلظت ۱ مولار و $pH = 2$ خواهد بود؟

۸۰ (۴)

۷۵ (۳)

۶۰ (۲)

۵۰ (۱)

اگر درجه یونش و غلظت این اسید را به ترتیب برابر با α و M در نظر بگیریم، داریم:

$$K_a = \frac{[H^+][A^-]}{[HA]} = \frac{\alpha^2 \times M}{(1 - \alpha) \times M} = \frac{\alpha^2 \times M}{1 - \alpha} \Rightarrow 1/125 = \frac{\alpha^2 \times 0.5}{1 - \alpha} \Rightarrow 2/25 = \frac{\alpha^2}{1 - \alpha} \xrightarrow{\text{حل معادله‌ی درجه دو}} \alpha = 0.75$$

با توجه به مقدار α ، می‌توان گفت درصد یونش اسید مورد نظر در محلول داده شده برابر با ۷۵٪ است. در قدم بعد، به سراغ محلول هیدروفلوئوریک اسید می‌رویم که غلظت آن برابر با ۱ مول بر لیتر است. در این رابطه، داریم:

$$[H^+] = 10^{-pH} = 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$$

در قدم بعد، درصد یونش هیدروفلوئوریک اسید را محاسبه می‌کنیم:

$$[H^+] = 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1} = 1 \text{ mol.L}^{-1} \times \alpha \Rightarrow \alpha = 0.01 \Rightarrow \alpha \text{ درصد} = 1$$

با توجه به محاسبات انجام شده، درصد یونش اسید اول ۷۵ برابر درصد یونش هیدروفلوئوریک اسید است.

گروه آموزشی ماز

۸۱- اگر pH محلول یک اسید آلی تک پروتون‌دار با درصد جرمی ۰/۷۸ و چگالی ۱ گرم بر میلی‌لیتر برابر با ۱/۵ باشد، جرم مولی ذرات سازنده این اسید برابر با چند گرم بر مول می‌شود؟ (ثابت یونش این اسید 9×10^{-3} است.)

۷۸ (۴)

۷۴ (۳)

۶۰ (۲)

۴۶ (۱)

ابتدا غلظت مولی یون هیدرونیوم را در محلول این اسید حساب می‌کنیم:

$$[H^+] = 10^{-pH} = 10^{-1/5} = 10^{0.5} \times 10^{-2} = 3 \times 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$$

ثابت یونش اسید تک پروتون‌دار HA از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$K_a = \frac{[H^+][A^-]}{[HA]_{\text{اولیه}} - [H^+]} = \frac{[H^+]^2}{[HA]_{\text{اولیه}} - [H^+]} \Rightarrow 9 \times 10^{-3} = \frac{(3 \times 10^{-2})^2}{[HA]_{\text{اولیه}} - 0.03} \Rightarrow 9 \times 10^{-3} = \frac{9 \times 10^{-4}}{[HA]_{\text{اولیه}} - 0.03} \Rightarrow$$

$$[HA]_{\text{اولیه}} - 0.03 = 0.1 \Rightarrow [HA]_{\text{اولیه}} = 0.13 \text{ mol.L}^{-1}$$

با توجه به محاسبات انجام شده، غلظت مولی اولیه اسید ($[HA]_{\text{اولیه}}$) در محلول مورد نظر برابر با ۰/۱۳ مول بر لیتر بوده است، در نتیجه جرم مولی اسید برابر خواهد بود با:

$$HA \text{ غلظت مولی اسید} = \frac{10 \text{ ad}}{M} \Rightarrow 0.13 = \frac{10 \times 0.78 \times 1}{M} \Rightarrow M = \frac{7/8}{0.13} = 60 \text{ g.mol}^{-1}$$

گروه آموزشی ماز

۸۲- کدام مطلب زیر درست است؟

- (۱) پاک‌کننده‌های خورنده برخلاف صابون‌ها با آلودگی‌ها واکنش داده و آن‌ها را به مواد محلول در آب تبدیل می‌کنند.
- (۲) در ساختار یک پاک‌کننده غیرصابونی، برخلاف پاک‌کننده‌های صابونی، به یقین پیوند دوگانه بین اتم‌ها وجود دارد.
- (۳) در ساختار هر پاک‌کننده صابونی، به یقین ذره‌هایی یافت می‌شوند که در تشکیل هیچ پیوند اشتراکی شرکت نکرده‌اند.
- (۴) شیر، حاوی توده‌های مولکولی با اندازه متفاوت بوده و مسیر حرکت نور، همانند محلول آبی شکر، در آن مشخص است.

پاسخ: گزینه ۱

(متوسط - صابون - مفهومی و حفظی - ۱۲۰۱)

پاک‌کننده‌های خورنده برخلاف صابون‌ها با آلودگی‌ها واکنش داده و آن‌ها را به مواد محلول در آب تبدیل می‌کنند؛ درحالی که صابون‌ها فقط به کمک برهمکنش‌های بین مولکولی موجب پاک‌شدن آلودگی‌ها می‌شوند. سفیدکننده‌ها، محلول حاصل از انواع اسیدهای قوی مثل هیدروکلریک اسید (جوهر نمک) و محلول حاصل از انواع بازهای قوی مثل سدیم هیدروکسید، از جمله مواد خورنده هستند.

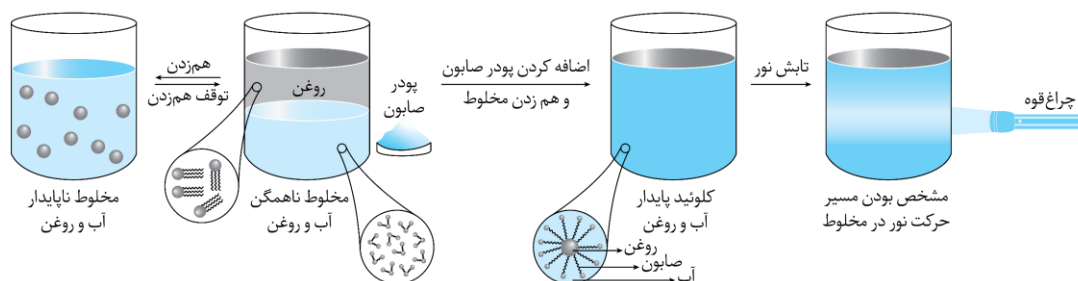
بررسی سایر گزینه‌ها:

- ۲ در ساختار بخش قطبی پاک‌کننده‌های صابونی (گروه $-COO^-$)، پیوند دوگانه بین اتم‌ها برقرار شده است. در ساختار حلقه بنزنی پاک‌کننده‌های غیرصابونی نیز پیوندهای دوگانه وجود دارد.
- ۳ در ساختار برخی از پاک‌کننده صابونی مایع، یون آمونیوم در کنار بخش آنیونی قرار گرفته است. چون در ساختار این مواد هیچ یون تک‌اتمی یافت نمی‌شود، پس می‌توان گفت در این مواد هر اتم به یقین در تشکیل تعدادی پیوند اشتراکی شرکت کرده است.
- ۴ شیر نوعی کلوئید است که از توده‌های مولکولی با اندازه متفاوت ساخته شده است. در ساختار این ماده، توده‌های چربی در میان ذرات آب قرار گرفته‌اند. مسیر حرکت نور در همه کلوئیدها از جمله شیر مشخص است.

کلوئیدها

در سال ۱۸۶۰ میلادی، دانشمندی به نام توماس گراهام برای توصیف ویژگی‌های برخی از مواد مثل چسب‌ها، ژلاتین و نشاسته، از واژه «کلوئید» استفاده کرد. کلوئیدها مخلوط‌هایی از دو یا چند ماده به حساب می‌آیند که در برخی از ویژگی‌های خود، به محلول‌ها شباهت دارند و در برخی از ویژگی‌های خود، با محلول‌ها تفاوت داشته و به مخلوط‌های ناهمگن شبیه هستند. ذره‌های سازنده کلوئیدها عموماً به صورت مولکول‌های بزرگ و یا توده‌های مولکولی هستند که اندازه آن‌ها بزرگ‌تر از اندازه حل‌شونده‌های موجود در محلول‌های همگن است. چون ذرات موجود در کلوئیدها بزرگ‌تر از اندازه ذرات موجود در محلول‌ها است، اگر پرتوی نوری از درون کلوئیدها بگذرد، توسط ذره‌های سازنده کلوئید پخش شده و به چشم بازتابیده می‌شود و به همین خاطر است که مسیر عبور نور در کلوئیدها قابل مشاهده است. توجه داریم که توده‌های مولکولی موجود در کلوئیدها اندازه‌های متفاوتی دارند. توجه داریم که کلوئیدها نوعی مخلوط ناهمگن بوده و پایدار هستند.

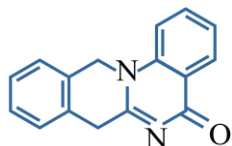
مخلوط آب، صابون روغن نیز نوعی کلوئید است. تصویر زیر، خاصیت پخش نور در این کلوئید را نشان می‌دهد:



بدون حضور صابون، این مخلوط پایدار باقی نمانده و اجزای سازنده آن از هم تفکیک می‌شوند.

گروه آموزشی ماز

۸۳- شمار پیوندهای اشتراکی در ساختار هر مولکول از ترکیب مقابل، چند برابر شمار این پیوندها در ساختار یون استات است؟



- ۵ (۱)
- ۶ (۲)
- ۷ (۳)
- ۸ (۴)

(آسان - اسیدها و بازها - مفهومی - ۱۲۰۱)

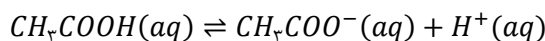
گزینه ۲

فرمول شیمیایی ترکیب مورد نظر به صورت $C_{16}H_{12}N_2O$ است. در رابطه با این ماده، داریم:

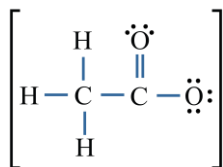
$$\begin{aligned} \text{شمار پیوندهای اشتراکی} &= \frac{(\text{تعداد اتم‌های } C \times 4) + (\text{تعداد اتم‌های } O \times 2) + (\text{تعداد اتم‌های } H \times 1) + (\text{تعداد اتم‌های } N \times 3)}{2} \\ &= \frac{(4 \times 16) + (2 \times 1) + (1 \times 12) + (3 \times 2)}{2} = \frac{81}{2} = 40.5 \end{aligned}$$

پیوند ۴۲

با یونیده شدن برخی از اسیدهایی که طی واکنش تعادلی در محلول یونش می‌یابند، یک آنیون چنداتمی ایجاد می‌شود. برای مثال، فرایند یونش استیک اسید به صورت زیر خواهد بود:



طی این فرایند، یون هیدرونیوم به همراه آنیون چنداتمی استات تولید شده است. ساختار یون استات به صورت زیر است:



در ساختار این یون چنداتمی، ۷ پیوند اشتراکی برقرار شده است. همانطور که مشخص است، شمار پیوندها در ترکیب آلی داده شده در صورت سوال، ۶ برابر شمار این پیوندها در ساختار یون استات است.

گروه آموزشی ماز

۸۴- مقدار pH محلول حاصل از افزودن ۴۰۰ میلی لیتر آب خالص به ۱۰۰ میلی لیتر محلول هیدروکلریک اسید با $pH = 2/3$ ، چقدر بوده و غلظت یون کلرید در محلول حاصل از این فرایند برابر با چند ppm می‌شود؟ (چگالی محلول را برابر با $1/25$ گرم بر میلی لیتر در نظر بگیرید. $Cl = 35/5 \text{ g. mol}^{-1}$)

۲۸/۴ - ۳ (۴) ۲۸/۴ - ۲/۷ (۳) ۴۴/۳ - ۳ (۲) ۴۴/۳ - ۲/۷ (۱)

(متوسط - اسیدها و بازها - مسئله - ۱۳۰۱)

پاسخ: گزینه ۴

غلظت یون هیدروژن در محلولی با $pH = 2/3$ ، برابر با 0.005 مول بر لیتر است. اضافه کردن آب به یک محلول، موجب رقیق شدن آن محلول می‌شود. با افزودن ۴۰۰ میلی لیتر آب خالص به این محلول، حجم آن ۵ برابر شده و غلظت اسید موجود در محلول نیز $0.2 = \frac{1}{5}$ برابر می‌شود؛ پس غلظت نهایی اسید برابر با 10^{-3} مول بر لیتر است. در این شرایط، داریم:

$$pH = -\log[H^+] = -\log(10^{-3}) = 3$$

رابطه تغییر غلظت محلول‌ها با PH

به عنوان یک قاعده اگر غلظت محلول یک اسید یا یک باز قوی m برابر شود، pH آن محلول به اندازه $|\log(m)|$ به سمت pH ناحیه خنثی ($pH = 7$) نزدیک می‌شود. به عنوان مثال، اگر حجم یک محلول اسیدی با $pH = 2$ را افزودن آب خالص به آن ۱۰ برابر کنیم، غلظت اسید موجود در این محلول ۰/۱ برابر شده و pH آن به اندازه $|\log(0.1)| = 1$ واحد به سمت pH ناحیه خنثی نزدیک‌تر می‌شود.

طی این فرایند، حجم محلول اسیدی مورد نظر (محلولی با $pH = 2/3$) را با افزودن ۴۰۰ میلی لیتر آب خالص به آن، از ۱۰۰ میلی لیتر به ۵۰۰ میلی لیتر رسانده و ۵ برابر کرده‌ایم؛ پس غلظت اسید موجود در این محلول ۰/۲ برابر شده و pH آن به اندازه $|\log(0.2)| = 0.7$ واحد به سمت pH ناحیه خنثی نزدیک‌تر شده و به ۳ می‌رسد. با توجه به اطلاعات داده شده در صورت سوال، جرم هر لیتر از محلول مورد نظر برابر با ۱۲۵۰ گرم بوده و در این مقدار از محلول، 10^{-3} مول یون کلرید (معادل با $35/5 \times 10^{-3}$ گرم یون کلرید) نیز وجود دارد، پس داریم:

$$ppm = \frac{\text{گرم حل شونده}}{\text{گرم محلول}} \times 10^6 = \frac{35/5 \times 10^{-3}}{1250} \times 10^6 = 28/4$$

گروه آموزشی ماز

۸۵- اگر مجموع غلظت مولی یون‌ها در محلول حاصل از حل کردن مقداری فورمیک اسید ($K_a = 1/8 \times 10^{-4} \text{ mol. L}^{-1}$) در ۴۰۰ میلی لیتر آب در دمای معین برابر ۰/۳ مول بر لیتر باشد، pH محلول و جرم تقریبی فورمیک اسید حل شده در محلول به ترتیب کدام است؟ (از تغییر حجم محلول صرف نظر کنید. $O = 16$ و $C = 12$ و $H = 1$: g. mol^{-1})

۲۳/۳ - ۱/۸ (۴)

۲۷/۶ - ۱/۸ (۳)

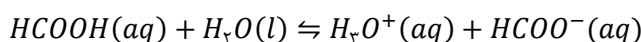
۲۳/۳ - ۱/۳ (۲)

۲۷/۶ - ۱/۳ (۱)

(متوسط - اسیدها و بازها - مسئله - ۱۳۰۱)

پاسخ: گزینه ۴

فورمیک اسید، یک اسید ضعیف به شمار می‌رود. این اسید، به هنگام گزش مورچه سرخ وارد بدن شده و سبب ایجاد حس سوزش می‌شود. واکنش یونش فورمیک اسید در آب به صورت زیر است:



در محلول ایجاد شده طی این فرایند، غلظت مولی یون‌ها H_3O^+ و $HCOO^-$ با هم برابر است و با توجه به داده‌های سوال، مجموع غلظت مولی این یون‌ها برابر با 0.3 mol. L^{-1} است؛ در نتیجه داریم:

$$[H_3O^+] = \frac{0.3}{2} \text{ mol. L}^{-1} = 0.15 \text{ mol. L}^{-1}$$

$$pH = -\log 0.15 = -\log(3 \times 5 \times 10^{-3}) = -\log 3 - \log 5 + 3 = -0.5 - 0.7 + 3 = 1/8$$

با توجه به رابطه ثابت یونش اسید مورد نظر، می‌توانیم بنویسیم:

$$K_a = \frac{[H_3O^+][HCOO^-]}{[HCOOH]} = \frac{[H_3O^+]^2}{M - [H_3O^+]} = \frac{(0.015)^2}{M - 0.015} = 1/8 \times 10^{-4} \Rightarrow 225 \times 10^{-6} = 1/8 \times 10^{-4} M - 2/7 \times 10^{-6}$$

$$\Rightarrow M = \frac{225 \times 10^{-6} + 2/7 \times 10^{-6}}{1/8 \times 10^{-4}} = 1/265 \text{ mol.L}^{-1}$$

در نهایت جرم دقیق فورمیک اسید حل شده در محلول را به دست می‌آوریم:

$$? g \text{ HCOOH} = 400 \text{ mL محلول} \times \frac{1 \text{ L محلول}}{1000 \text{ mL محلول}} \times \frac{1/265 \text{ mol HCOOH}}{1 \text{ L محلول}} \times \frac{46 \text{ g HCOOH}}{1 \text{ mol HCOOH}} = 23/276 \text{ g}$$

البته، چون درجه یونش فورمیک اسید در محلول مورد نظر خیلی کوچک است، با استفاده از رابطه زیر نیز می‌توانستیم مقدار اسید حل شده در محلول را به طور تقریبی محاسبه کنیم:

$$[H^+] = \sqrt{K_a \times M} \Rightarrow 0.015 = \sqrt{1/8 \times 10^{-4} \times M} \Rightarrow M = 1/25 \text{ mol.L}^{-1}$$

$$? g \text{ HCOOH} = 400 \text{ mL محلول} \times \frac{1 \text{ L محلول}}{1000 \text{ mL محلول}} \times \frac{1/25 \text{ mol HCOOH}}{1 \text{ L محلول}} \times \frac{46 \text{ g HCOOH}}{1 \text{ mol HCOOH}} = 23 \text{ g}$$

توجه داریم که جرم اسید محاسبه شده با این روش، به صورت تقریبی است.

گروه آموزشی ماز

۸۶- کدام مطلب زیر نادرست است؟

- ۱) با افزودن سدیم هیدروژن کربنات به شوینده‌ها، قدرت این مواد برای پاک کردن چربی‌ها بیشتر می‌شود.
- ۲) مقدار $[H_3O^+]$ در شیر ترشح شده از معده انسان، بیشتر از غلظت این یون در محلولی با $pH = 2$ است.
- ۳) دیواره داخلی معده انسان، به طور طبیعی مقدار کمی از یون‌های هیدرونیوم موجود در معده را جذب می‌کند.
- ۴) منیزیم هیدروکسید، یکی از مواد موجود در ضداسیدها بوده و هر مول از آن، یک مول اسید معده را خنثی می‌کند.

(آسان - خنثی شدن - مفهومی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۴

منیزیم هیدروکسید، یکی از مواد موجود در ضداسیدها است. هر مول از این ماده با ۲ مول اسید معده (هیدروکلریک اسید) واکنش داده و آن را خنثی می‌کند. واکنش انجام شده طی این فرایند به صورت مقابل است:

$$Mg(OH)_2(s) + 2HCl(aq) \rightarrow MgCl_2(aq) + 2H_2O(l)$$

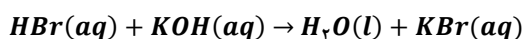
در این واکنش، اسید معده خنثی شده و منیزیم کلرید تولید می‌شود.

بررسی سایر گزینه‌ها:

- ۱) با افزودن سدیم هیدروژن کربنات (جوش شیرین) به شوینده‌ها، قدرت این مواد برای پاک کردن چربی‌ها بیشتر می‌شود. در واقع، جوش شیرین خاصیت بازی داشته و موجب افزایش قدرت بازی پاک‌کننده‌ها می‌شود. با افزایش خاصیت بازی پاک‌کننده‌ها، قدرت پاک‌کنندگی این مواد نیز افزایش پیدا می‌کند.
- ۲) غلظت یون هیدروژن در محلولی با $pH = 2$ ، برابر با 0.01 مول بر لیتر است؛ در حالی که غلظت یون هیدروژن در شیر معده انسان برابر با 0.03 مول بر لیتر است. در این شرایط، pH شیر معده انسان برابر با $1/5$ می‌شود.
- ۳) درون معده، یک محیط بسیار اسیدی است که حتی می‌تواند فلز روی را در خود حل کند! دیواره داخلی معده به طور طبیعی مقدار کمی از یون‌های هیدرونیوم را دوباره جذب می‌کند. این جذب سبب نابودی سلول‌های سازنده دیواره معده می‌شود. حال اگر مقدار اسید معده به هر دلیل بیش از اندازه باشد، شمار یون‌های جذب شده افزایش یافته و سبب ایجاد مشکلات معده‌ای می‌شود.

گروه آموزشی ماز

۸۷- مقدار 25 mL محلول هیدروبرمیک اسید با $pH = 1$ به 175 mL محلول KOH اضافه می‌شود. اگر pH محلول نهایی برابر $13/4$ باشد، جرم تقریبی یون K^+ در محلول بازی اولیه برابر با چند گرم بوده و درصد جرمی یون Br^- در محلول پایانی چقدر است؟ (چگالی محلول‌ها را برابر با 1 گرم بر میلی‌لیتر در نظر بگیرید. $K = 39$ و $Br = 80$: $g \cdot mol^{-1}$)



۴) 0.1 ، $4/1$

۳) 0.8 ، $4/1$

۲) 0.1 ، $2/0.5$

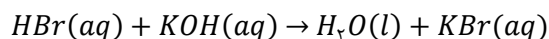
۱) 0.8 ، $2/0.5$

با افزودن ۲۵ میلی لیتر هیدروبرمیک اسید به ۱۷۵ میلی لیتر محلول پتاسیم هیدروکسید، حجم محلول نهایی برابر با ۲۰۰ میلی لیتر می شود. با استفاده از pH محلول ها، غلظت یون های موجود در آن ها را محاسبه می کنیم:

$$pH_{HBr} = -\log[H^+] = 1 \implies [H^+] = 0.1 \text{ mol.L}^{-1}$$

$$pH_{\text{محلول نهایی}} = -\log[H^+] = 13/4 \implies [H^+] = 4 \times 10^{-14} \text{ mol.L}^{-1} \implies [H^+] \times [OH^-] = 10^{-14} \implies [OH^-] \times 4 \times 10^{-14} = 10^{-14} \implies [OH^-] = 0.25 \text{ mol.L}^{-1}$$

واکنش خنثی شدن هیدروبرمیک اسید با پتاسیم هیدروکسید به صورت زیر است:



در ۲۵ میلی لیتر محلول هیدروبرمیک اسید، مقدار $2/5 \times 10^{-3}$ مول یون هیدرونیوم وجود دارد. در ۲۰۰ میلی لیتر از محلول نهایی نیز مقدار 0.05 مول یون هیدروکسید وجود دارد. بنابراین در ۱۷۵ میلی لیتر محلول پتاسیم هیدروکسید اولیه، مقدار $5/25 \times 10^{-2}$ مول یون هیدروکسید وجود داشته است که 0.25×10^{-2} مول از آن در واکنش با هیدروبرمیک اسید خنثی شده است. همانطور که گفتیم، در ۱۷۵ میلی لیتر محلول پتاسیم هیدروکسید اولیه، مقدار $5/25 \times 10^{-2}$ مول پتاسیم هیدروکسید وجود داشته است. بر این اساس، جرم تقریبی یون پتاسیم را محاسبه می کنیم:

$$? g K^+ = 5/25 \times 10^{-2} \text{ mol } K^+ \times \frac{39 \text{ g } K^+}{1 \text{ mol } K^+} = 2/0.5 \text{ g}$$

در محلول پایانی با حجم ۲۰۰ میلی لیتر، $2/5 \times 10^{-3}$ مول یون برمید وجود دارد که همه از به واسطه محلول اسیدی اولیه وارد این محلول شده است. چگالی محلول نیز برابر با ۱ گرم بر میلی لیتر بوده و بر این اساس، جرم محلول برابر با ۲۰۰ گرم می شود. در قدم آخر، درصد جرمی یون برمید را محاسبه می کنیم:

$$\text{درصد} = \frac{\text{جرم مولی حل شونده} \times \text{جرم محلول}}{\text{جرم محلول}} \times 100 = \frac{2/5 \times 10^{-3} \times 80}{200} \times 100 = 0.1\%$$

گروه آموزشی ماز

۸۸- یک نمونه ۱/۶ گرمی از گاز گوگرد تری اکسید را در مقداری آب حل کرده و حجم محلول مورد نظر را به ۴۰۰ میلی لیتر می رسانیم. برای خنثی کردن ۱۰۰ میلی لیتر از محلول ایجاد شده، به چند لیتر محلول 0.02 مولار سود نیاز داریم؟

$$(S = 32 \text{ و } O = 16 : g. \text{mol}^{-1})$$

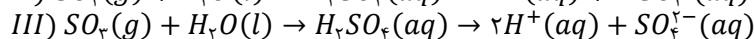
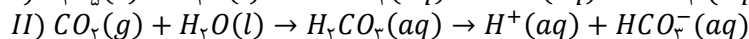
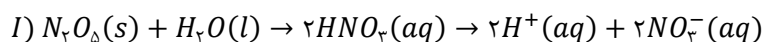
$$0.5 (4)$$

$$0.25 (3)$$

$$0.05 (2)$$

$$0.25 (1)$$

اکسیدهای نافلزتی، اغلب خاصیت اسیدی دارند. واکنش اکسیدهای اسیدی مختلف با آب که منجر به تولید اسیدهای مختلف و افزایش غلظت یون هیدرونیوم در محلول می شود، به شرح زیر است:



با توجه به معادله واکنش گاز گوگرد تری اکسید با آب، غلظت محلول سولفوریک اسید تولید شده طی این فرایند را محاسبه می کنیم:

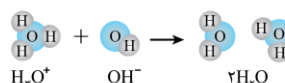
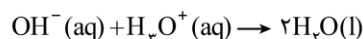
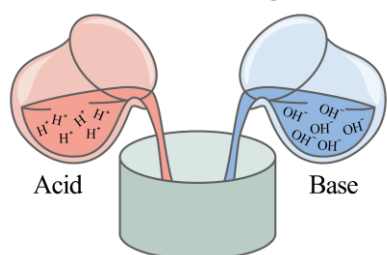
$$? \text{ mol } H_2SO_4 = 1/6 \text{ g } SO_3 \times \frac{1 \text{ mol } SO_3}{80 \text{ g } SO_3} \times \frac{1 \text{ mol } H_2SO_4}{1 \text{ mol } SO_3} = 0.02 \text{ mol}$$

$$[H_2SO_4] = \frac{0.02 \text{ mol } H_2SO_4}{0.4 \text{ L محلول}} = 0.05 \text{ mol.L}^{-1}$$

سدیم هیدروکسید یا سود، یک ماده بازی بوده و می تواند محلول های اسیدی را خنثی کند. در قدم بعد، غلظت محلول سود استفاده شده برای خنثی کردن محلول اسیدی را محاسبه می کنیم.

$$[OH^-] = 10^{pH-14} = 10^{12/3-14} = 10^{-1/3} = 2 \times 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$$

در واکنش خنثی شدن، یون های هیدروژن محلول اسیدی با یون های هیدروکسید محلول بازی واکنش می دهند. توجه داریم که سولفوریک اسید، یک اسید دو ظرفیتی (دو پروتون دار) است. تصویر زیر، مبنایی از واکنش خنثی شدن اسیدها و بازها را نشان می دهد:



با توجه به غلظت محلول‌های اسیدی و بازی، حجم محلول سود مورد نیاز را محاسبه می‌کنیم.

$$M_a \cdot n_a \cdot V_a = M_b \cdot n_b \cdot V_b \implies 0.05 \times 100 \times 2 = 0.02 \times V_b \times 1 \implies V_b = 500 \text{ mL}$$

در رابطه بالا، مقدار M نشان دهنده غلظت هر محلول، مقدار V نشان دهنده حجم هر محلول و مقدار n نیز نشان دهنده ظرفیت اسیدی یا بازی هر ماده است. با توجه به محاسبات انجام شده، در این فرایند ۰/۵ لیتر محلول بازی مصرف شده است.

گروه آموزشی ماز

۸۹- کدام موارد از عبارت‌های زیر درست است؟

- الف: برخلاف خون موجود در رگ‌ها، محتویات معده خاصیت اسیدی داشته و pH آن‌ها کوچک‌تر از ۷ است.
 ب: در شرایط یکسان، تعداد ذرات اسید یونیده نشده در محلول نیتریک اسید کمتر از محلول نیترواسید است.
 پ: در شرایط استاندارد (STP)، حاصل ضرب غلظت مولی یون‌های H^+ و OH^- در محلول‌های آبی برابر 10^{-14} است.
 ت: هیدروسیانیک اسید، برخلاف سولفوریک اسید، یک اسید ضعیف بوده و مقدار ثابت یونش آن کوچک‌تر از صفر است.
- (۱) «الف» و «ب» (۲) «ب» و «پ» (۳) «پ» و «ت» (۴) «الف» و «ت»

(متوسط - اسیدها و بازها - مفهومی - ۱۴۰۱)

پاسخ: گزینه ۱

عبارت‌های «الف» و «ب» درست هستند.

بررسی موارد:

«الف»: خون موجود در رگ‌ها، خاصیت بازی داشته و pH آن بزرگ‌تر از ۷ است؛ درحالی که محتویات معده‌ی انسان خاصیت اسیدی داشته و pH آن کوچک‌تر از ۷ است. محتویات موجود در روده‌های انسان نیز خاصیت بازی داشته و pH آن بزرگ‌تر از ۷ است. نمودار زیر، وضعیت اسیدی یا بازی بودن محتویات بدن انسان را نشان می‌دهد:



«ب»: در شرایط یکسان از نظر دما و غلظت، ثابت یونش نیتریک اسید از ثابت یونش نیترواسید بزرگ‌تر بوده و در نتیجه تعداد مولکول‌های یونیده نشده در محلول آبی نیترواسید به مراتب بیشتر است. توجه داریم که واکنش یونش نیترواسید در آب، برخلاف واکنش یونش نیتریک اسید، یک واکنش تعادلی است و محلول این ماده، شامل تعدادی از ذرات اسید یونیده نشده نیز خواهد بود.

«پ»: در شرایط اتاق (دمای 25°C)، حاصل ضرب غلظت مولی یون‌های H^+ و OH^- در محلول‌های آبی برابر 10^{-14} است. با تغییر دما، مقدار حاصل ضرب غلظت مولی این یون‌ها نیز دچار تغییر می‌شود. بر این اساس، می‌توان گفت که در شرایط استاندارد (دمای صفر درجه‌ی سانتی‌گراد) و یا دمای بدن انسان (دمای 37°C)، حاصل ضرب غلظت مولی یون‌های H^+ و OH^- برابر با 10^{-14} نمی‌شود.

«ت»: هیدروسیانیک اسید یک اسید ضعیف با ثابت یونش $K_a = 4/9 \times 10^{-10} \text{ mol} \cdot L^{-1}$ بوده و سولفوریک اسید، یک اسید قوی ($\alpha = 1$) دو پروتون‌دار با ثابت یونش بسیار بزرگ است. توجه داریم که اسیدهای ضعیف دارای ثابت یونش کوچکی (کوچک‌تر از یک) هستند اما مقدار ثابت یونش آن‌ها همواره بزرگ‌تر از صفر است.

ثابت یونش اسیدها

ثابت یونش هر اسید، مولفه‌ای است که از آن برای مقایسه قدرت اسیدهای مختلف استفاده می‌شود. توجه داریم که ثابت یونش اسیدهای ضعیف کمتر از $1 \text{ mol} \cdot L^{-1}$ است. جدول زیر، ثابت یونش اسیدهای مختلف را نشان می‌دهد:

نام اسید	فرمول شیمیایی	ثابت یونش (K_a)	معادله یونش در آب
هیدروپدیک اسید	HI	بسیار بزرگ	$\text{HI(aq)} \rightarrow \text{H}^+(\text{aq}) + \text{I}^-(\text{aq})$
هیدروبرمیک اسید	HBr	بسیار بزرگ	$\text{HBr(aq)} \rightarrow \text{H}^+(\text{aq}) + \text{Br}^-(\text{aq})$
هیدروکلریک اسید	HCl	بسیار بزرگ	$\text{HCl(aq)} \rightarrow \text{H}^+(\text{aq}) + \text{Cl}^-(\text{aq})$
سولفوریک اسید	H_2SO_4	بسیار بزرگ	$\text{H}_2\text{SO}_4(\text{aq}) \rightarrow \text{H}^+(\text{aq}) + \text{HSO}_4^-(\text{aq})$
نیتریک اسید	HNO_3	بزرگ	$\text{HNO}_3(\text{aq}) \rightarrow \text{H}^+(\text{aq}) + \text{NO}_3^-(\text{aq})$
هیدروفلوئوریک اسید	HF	$5/9 \times 10^{-4}$	$\text{HF(aq)} \rightleftharpoons \text{H}^+(\text{aq}) + \text{F}^-(\text{aq})$
نیترو اسید	HNO_2	$4/5 \times 10^{-4}$	$\text{HNO}_2(\text{aq}) \rightleftharpoons \text{H}^+(\text{aq}) + \text{NO}_2^-(\text{aq})$
فورمیک اسید	HCOOH	$1/8 \times 10^{-4}$	$\text{HCOOH(aq)} \rightleftharpoons \text{H}^+(\text{aq}) + \text{HCOO}^-(\text{aq})$
استیک اسید	CH_3COOH	$1/8 \times 10^{-5}$	$\text{CH}_3\text{COOH(aq)} \rightleftharpoons \text{H}^+(\text{aq}) + \text{CH}_3\text{COO}^-(\text{aq})$
هیدروسیانیک اسید	HCN	$4/9 \times 10^{-10}$	$\text{HCN(aq)} \rightleftharpoons \text{H}^+(\text{aq}) + \text{CN}^-(\text{aq})$

در جدول بالا قدرت اسیدی و ثابت یونش اسیدها از بالا به پایین کاهش می‌یابد.

۹۰- جرم‌های برابر از باریم اکسید و آمونیاک را به طور مجزا در ۱ لیتر آب حل می‌کنیم. اگر درجه یونش آمونیاک در محلول حاصل از این فرایند برابر با ۰/۰۲ باشد، pH محلول آمونیاک تقریباً به اندازه واحد از محلول دیگر می‌شود.

($Ba = ۱۳۷$ و $O = ۱۶$ و $N = ۱۴$ و $H = ۱$: $g \cdot mol^{-1}$)

(۴) ۰/۶ - بیشتر

(۳) ۰/۶ - کمتر

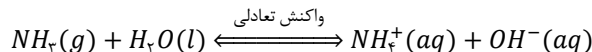
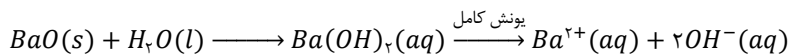
(۲) ۱ - بیشتر

(۱) ۱ - کمتر

(سخت - خنثی شدن - مسئله - ۱۳۰۱)

پاسخ: گزینه ۱

واکنش‌های انجام شده طی انحلال باریم اکسید و آمونیاک در آب به صورت زیر است:



جرم آمونیاک و باریم اکسید حل شده در محلول‌ها را برابر با x گرم در نظر می‌گیریم و بر این اساس، غلظت یون هیدروکسید تولید شده در هر کدام از محلول‌ها را محاسبه می‌کنیم. ابتدا به سراغ محلول باریم هیدروکسید می‌رویم.

$$? mol BaO = x g BaO \times \frac{1 mol BaO}{153 g BaO} = \frac{x}{153} mol \xrightarrow{\alpha=1 \rightarrow \text{باریم هیدروکسید یک باز قوی است}}$$

$$? mol OH^{-} = \frac{x}{153} mol BaO \times \frac{2 mol OH^{-}}{1 mol BaO} = \frac{2x}{153} mol \xrightarrow{\text{محاسبه غلظت}} [OH^{-}] = \frac{\frac{2x}{153} mol}{1 L} = \frac{2x}{153} mol \cdot L^{-1}$$

در مرحله بعد، غلظت یون هیدروکسید را در محلول آمونیاک محاسبه می‌کنیم.

$$? mol NH_3 = x g NH_3 \times \frac{1 mol NH_3}{17 g NH_3} = \frac{x}{17} mol \xrightarrow{\alpha=0.02 \rightarrow \text{آمونیاک یک باز ضعیف است}}$$

$$? mol OH^{-} = \frac{x}{17} mol NH_3 \times \frac{0.02 mol OH^{-}}{1 mol NH_3} = \frac{0.02x}{17} mol \xrightarrow{\text{محاسبه غلظت}} [OH^{-}] = \frac{\frac{0.02x}{17} mol}{1 L} = \frac{0.02x}{17} mol \cdot L^{-1}$$

با توجه به غلظت‌های به دست آمده از یون هیدروکسید، داریم:

$$pH = \log \frac{[OH^{-}]}{10^{-14}} \xrightarrow{\text{آمونیاک}} pH_{\text{آمونیاک}} - pH_{\text{باریم هیدروکسید}} = \log \frac{[OH^{-}]_{\text{آمونیاک}}}{10^{-14}} - \log \frac{[OH^{-}]_{\text{باریم هیدروکسید}}}{10^{-14}} =$$

$$\log \frac{[OH^{-}]_{\text{آمونیاک}}}{[OH^{-}]_{\text{باریم هیدروکسید}}} = \log \left(\frac{\frac{0.02x}{17}}{\frac{2x}{153}} \right) = \log (0.09) = \log \left(\frac{3 \times 3}{100} \right) = \log 3 + \log 3 - \log 100 = 0.5 + 0.5 - 2 = -1$$

با توجه به محاسبات بالا، می‌توان گفت که pH محلول آمونیاک حدوداً به اندازه ۱ واحد کمتر از محلول دیگر است.

گروه آموزشی ماز

۹۱- کدام مطلب زیر نادرست است؟

- (۱) اگر غلظت یون هیدرونیوم در محلول یک اسید با غلظت اولیه اسید برابر باشد، ثابت یونش آن اسید بسیار بزرگ است.
- (۲) یک نمونه از آب خالص، برخلاف نمونه‌ای از آب گازدار و آب نمک، اصلاً جریان الکتریسیته را از خود عبور نخواهد داد.
- (۳) با افزودن مقداری آب خالص به محلول آبی از نیترواسید، درجه یونش اسید مورد نظر در محلول افزایش پیدا می‌کند.
- (۴) اگر K_a اسید HA بزرگ‌تر از K_b باشد، با دانستن pH اسید HA ، درباره pH اسید دیگر نمی‌توان اظهار نظر کرد.

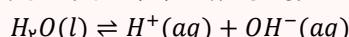
(متوسط - اسیدها و بازها - مفهومی - ۱۳۰۱)

پاسخ: گزینه ۲

آب گازدار، همان محلول حاصل از انحلال گاز کربن دی‌اکسید در آب است که خاصیت اسیدی دارد. این محلول، حاوی کربنیک اسید بوده و یک **الکترولیت ضعیف** به شمار می‌رود. از طرفی می‌دانیم که به علت یونش آب خالص و حضور یون‌های هیدرونیوم و هیدروکسید در آن، این ماده جریان الکتریسیته را به میزان کمی از خود عبور می‌دهد.

رسانایی و ثابت یونش آب خالص

بر اساس آزمایش‌های انجام شده، نمونه‌ای از آب خالص که فاقد هر گونه حل‌شونده‌ای است، **رسانایی الکتریکی ناچیزی** دارد که وجود آن را به حضور مقدار بسیار اندکی از یون‌های هیدروکسید و هیدروژن در آب خالص نسبت می‌دهند. یون‌های مورد نظر، بر اساس واکنش زیر در آب تولید می‌شوند:



ثابت تعادل این واکنش به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$K = K_w = [H^{+}][OH^{-}]$$

آزمایش‌های مختلف نشان می‌دهد که مقدار K_w در دمای اتاق، برابر با $10^{-14} mol^2 \cdot L^{-2}$ است که این مقدار، همانند ثابت تعادل سایر واکنش‌ها، فقط و فقط تابع دما است.

۱ اسیدهای قوی به هنگام انحلال در آب به طور کامل یونیده می‌شوند در حالی که اسیدهای ضعیف طی یک فرایند تعادلی، به طور جزئی یونش پیدا می‌کنند و اندک یون‌های حاصل از یونش آن‌ها، با مولکول‌های اسید موجود در محلول، در حالت تعادل قرار می‌گیرند. بر این اساس، برای هر ترکیب اسیدی در دمای مشخص، می‌توان عبارت ثابت تعادل را نوشت. به ثابت تعادل فرایند یونش اسیدها، به اصطلاح ثابت یونش اسیدی می‌گویند. ثابت یونش اسید فرضی HA را در نظر بگیرید. مقدار این مولفه به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$K_a = \frac{[H^+][A^-]}{[HA]} = \frac{M\alpha^2}{1-\alpha}$$

اگر غلظت یون هیدرونیوم با غلظت اولیه اسید برابر باشد ($[H^+] = M$)، درجه یونش اسید مورد نظر برابر با یک شده ($\alpha = \frac{[H^+]}{M} = 1$) و در نتیجه ثابت یونش به بی‌نهایت میل می‌کند.

۳ نیترواسید، یک اسید ضعیف است. با افزودن مقداری آب خالص به محلولی از نیترواسید، غلظت این اسید در محلول مورد نظر کاهش پیدا می‌کند. برای محاسبه ثابت یونش اسید مورد نظر، از رابطه زیر استفاده می‌شود:

$$K_a = \frac{\alpha^2 \times M}{1-\alpha} \xrightarrow{\text{درجه یونش نیترواسید اغلب کمتر از } 0.05 \text{ است}} K_a = \alpha^2 \times M$$

همانطور که می‌دانیم، ثابت یونش اسیدها فقط تابع دما بوده و با تغییر غلظت اسید، مقدار K_a تغییر نمی‌کند. در چنین شرایطی، اگر غلظت اسید (M) با افزودن آب خالص به محلول کاهش پیدا کند، درجه یونش اسید افزایش پیدا می‌کند.

۴ در شرایط یکسان از نظر دما و غلظت، اگر ثابت یونش اسید HA از ثابت یونش اسید HB بزرگتر باشد، غلظت یون هیدرونیوم در محلول اسید HA بیشتر بوده و pH این محلول کوچک‌تر است. چون در عبارت داده شده، اطلاعاتی از غلظت دو اسید داده نشده است، پس مقدار pH این دو اسید را نمی‌توان مقایسه کرد و در این رابطه نمی‌توان اظهار نظر کرد.

گروه آموزشی ماز

۹۲ - در شرایط استاندارد، $44/8$ لیتر گاز HX را در 800 میلی‌لیتر آب خالص حل می‌کنیم. درصد یونش مولکول‌های اسید در محلول ایجاد شده برابر با چقدر باشد، تا محلول ایجاد شده قابل استفاده در ساختار نیم‌سلول SHE شود؟

۴۰ (۴)

۲۰ (۳)

۸۰ (۲)

۶۰ (۱)

(آسان - انرژی و الکترون - مسئله ۱۳۰۲)

پاسخ: گزینه ۴

اندازه‌گیری پتانسیل یک نیم‌سلول، به طور جداگانه ممکن نیست و این کمیت باید به طور نسبی اندازه‌گیری شود. شیمی‌دان‌ها برای دستیابی به این هدف، تصمیم گرفتند نیم‌سلول استاندارد هیدروژن (SHE) را به عنوان یک مبنا برای مقایسه پتانسیل الکترودی سایر نیم‌سلول‌ها انتخاب کرده و پتانسیل آن را برابر با صفر در نظر بگیرند. الکترودی نیم‌سلول هیدروژن، شامل یک الکترودی فلزی از جنس پلاتین می‌شود که در محلولی با غلظت یک مولار از یون هیدروژن در دمای 25 درجه سانتی‌گراد فرو برده شده است و گاز هیدروژن با فشار 1 اتمسفر از روی آن عبور داده می‌شود. در قدم اول، شمار مول‌های گاز HX را محاسبه کرده و در مرحله بعد، غلظت این ماده را در آب به دست می‌آوریم.

$$? \text{ mol } HX = 44/8 \text{ L } HX \times \frac{1 \text{ mol } HX}{22.4 \text{ L } HX} = 2 \text{ mol}$$

$$[HX] = \frac{\text{مول } HX}{\text{لیتر محلول}} = \frac{2}{0.8 \text{ L}} = 2.5 \text{ mol.L}^{-1}$$

اسید HX ، یک اسید ضعیف بوده و در آب بر اساس واکنش تعادلی $HX(aq) \rightleftharpoons H^+(aq) + X^-(aq)$ ، یون‌های هیدروژن و X^- را تولید می‌کند. محلول بکار رفته در نیم‌سلول استاندارد هیدروژن، یک محلول اسیدی با غلظت یک مولار یون هیدروژن و $pH = 0$ است. بر این اساس، می‌توان گفت باید درجه یونش اسید مورد نظر در حدی باشد که غلظت یون هیدروژن در محلول برابر با 1 مول بر لیتر شود. بر این اساس، داریم:

$$[H^+] = [HX] \times \frac{\alpha \text{ درصد}}{100} = 2.5 \times \frac{x}{100} = 1 \text{ mol.L}^{-1} \implies x = 40 \text{ درصد}$$

گروه آموزشی ماز

۹۳ - یک نمونه 3 گرمی از منیزیم را در واکنش اکسایش شرکت داده و الکترون‌های حاصل از این فرایند را روی سطح یک کره فلزی به شعاع 5 cm قرار می‌دهیم. اگر این الکترون‌ها به صورت متقارن روی سطح کره پخش شوند، در هر سانتی‌متر از سطح این کره فلزی تقریباً چند عدد الکترون قرار خواهد گرفت؟ (عدد π را برابر 3 در نظر بگیرید. $Mg = 24 : g.mol^{-1}$)

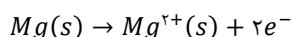
5×10^{20} (۴)

$2/5 \times 10^{21}$ (۳)

5×10^{21} (۲)

$2/5 \times 10^{21}$ (۱)

نیم واکنش اکسایش فلز منیزیم به صورت زیر است:



با توجه به معادله این نیم واکنش، محاسبه می کنیم که بر اثر اکسایش ۳ گرم منیزیم، چند عدد الکترون تولید می شود:

$$\text{عدد } e^{-} = 3 \text{ g Mg} \times \frac{1 \text{ mol Mg}}{24 \text{ g Mg}} \times \frac{2 \text{ mol } e^{-}}{1 \text{ mol Mg}} \times \frac{6.02 \times 10^{23} \text{ عدد } e^{-}}{1 \text{ mol } e^{-}} = 1.505 \times 10^{23}$$

در قدم بعد، مساحت سطح یک کره با شعاع ۵ سانتی متر را محاسبه می کنیم:

$$\text{مساحت سطح کره} = 4 \times (r^2 \pi) = 4 \times (25 \times 3) = 300 \text{ cm}^2$$

در قدم بعد، میزان تراکم الکترون ها را روی سطح کره محاسبه می کنیم:

$$\text{تراکم تعداد الکترون ها روی سطح کره} = \frac{\text{تعداد } e^{-}}{\text{مساحت سطح کره}} = \frac{1.505 \times 10^{23} \text{ عدد } e^{-}}{300 \text{ cm}^2} \approx 5 \times 10^{20}$$

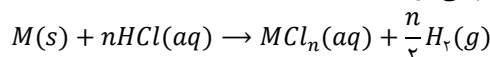
با توجه به محاسبات بالا، در هر سانتی متر مربع از سطح کره مورد نظر، تقریباً 5×10^{20} الکترون قرار می گیرد.

گروه آموزشی ماز

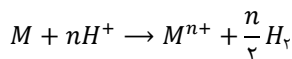
۹۴ - کدام مطلب زیر درست است؟

- (۱) در واکنش هیدروکلریک اسید با فلزها، یون کلرید نقشی در فرایند اکسایش - کاهش ندارد.
- (۲) آخرین فلز واسطه موجود در تناوب چهارم، در مقایسه با آلومینیم، قدرت کاهندگی بیشتری دارد.
- (۳) در واکنش میان فلز روی با گاز اکسیژن، هر اتم از گونه کاهنده ۲ الکترون با $l = 2$ از دست خواهد داد.
- (۴) با قرار دادن منیزیم در محلول مس (II) سولفات، دما بالا رفته و مجموع غلظت کاتیون ها در محلول بیشتر می شود.

واکنش فلزها با هیدروکلریک اسید به صورت زیر انجام می شود:



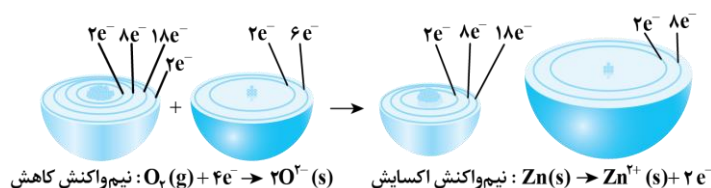
در این واکنش، فلزهایی که چند ظرفیت مختلف دارند، با کمترین ظرفیت خود در واکنش شرکت می کنند. در این واکنش، یون H^{+} کاهش یافته و فلز اکسایش می یابد؛ بنابراین در این فرایند یون کلرید اکسایش یا کاهش نمی یابد و در واکنش شرکت نمی کند. می توان این واکنش را به صورت زیر نوشت:



بررسی سایر گزینه ها:

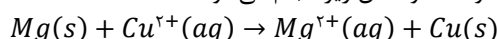
۲ آخرین فلز واسطه موجود در تناوب چهارم، روی است. روی در مقایسه با آلومینیم، قدرت کاهندگی (تمایل به از دست دادن الکترون و اکسید شدن) کمتری داشته و با تمایل کمتری الکترون های بیرونی ترین زیرلایه خود را از دست می دهد.

۳ واکنش میان فلز روی و گاز اکسیژن به صورت زیر است:



گونه کاهنده، گونه ای است که اکسایش یافته و سبب کاهش سایر گونه های شرکت کننده در واکنش می شود. در این واکنش، فلز روی کاهنده است. هر اتم روی دو الکترون از زیرلایه ۴s از دست داده و به یون روی تبدیل می شود.

۴ با قرار دادن فلز منیزیم در محلول مس (II) سولفات، واکنش زیر انجام می شود:



چون شمار کاتیون های مصرف شده در این واکنش با شمار کاتیون های تولید شده در آن برابر است، پس می توان گفت در طول انجام شدن این واکنش غلظت کاتیون های موجود در محلول تغییر نمی کند. از آن جا که طی واکنش تیغه منیزیم و یا هر عنصر دیگری که قدرت کاهندگی بیشتری نسبت به فلز مس داشته باشد با محلول مس (II) سولفات، دمای محلول مورد نظر افزایش پیدا می کند، می توان گفت تغییر آنتالپی (ΔH) این دسته از واکنش ها منفی بوده و انجام شدن آن ها با کاهش سطح انرژی واکنش دهنده ها همراه است.

گروه آموزشی ماز

۹۵- چند مورد از عبارتهای زیر درست است؟

- الف: کاهش اثر نقص عضو، نیم‌رخ از افزایش سطح رفاه بوده و به دنبال رشد دانش و پیشرفت فناوری محقق شده است.
 ب: با استفاده از یک لیمو و دو تیغه از جنس Cu و Zn ، می‌توان بخشی از انرژی ذخیره شده در فلزها را آزاد کرد.
 پ: پرکاربردترین شکل انرژی در استفاده از فناوری‌هایی مثل فناوری گرمایش آسان‌تر، انرژی الکتریکی است.
 ت: اکسیژن نافلز فعال است که با همه عناصر فلزی واکنش داده و آنها را به اکسید فلز تبدیل می‌کند.

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

(آسان - انرژی و الکترون - مفهومی و حفظی - ۱۳۰۲)

پاسخ: گزینه ۳

عبارتهای «الف»، «ب» و «پ» درست هستند.

بررسی موارد:

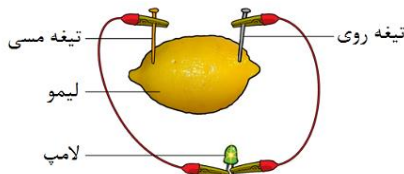
«الف»: تأمین روشنایی، گرمایش و سرمایش آسان‌تر، حمل و نقل سریع‌تر و ایمن‌تر، درمان و کاهش اثر نقص عضو و انتقال ایمن آب آشامیدنی، نیم‌رخ از افزایش سطح رفاه و آسایش را نشان می‌دهند که به دنبال رشد دانش و پیشرفت فناوری محقق شده‌اند. دو رکن اساسی تحقق این فناوری‌ها، دستیابی به مواد مناسب و تأمین انرژی است.

قلمروهای الکتروشیمی

انرژی الکتریکی، پرکاربردترین شکل انرژی مورد نیاز برای استفاده از فناوری‌های مختلف است. این دانش، علاوه بر تهیه مواد جدید و تأمین انرژی الکتریکی مورد نیاز برای صنایع، می‌تواند در راستای پیاده‌کردن اصول شیمی سبز نیز گام بردارد. برخی از **قلمروهای علم الکتروشیمی** به شرح زیر هستند:

- تأمین انرژی ← باتری‌ها و سلول‌های سوختی
- تولید مواد ← برق‌کافت و آبکاری
- اندازه‌گیری و کنترل کیفی ← دستگاه pH سنج دیجیتال

«ب»: با استفاده از یک لیمو و دو تیغه از جنس فلزهای روی و مس، می‌توان یک باتری لیمویی را ساخت. با استفاده از باتری‌های لیمویی، همانند سایر سلول‌های گالوانی، می‌توان بخشی از انرژی ذخیره شده در فلزها را آزاد کرد. تصویر زیر، نمایی از یک باتری لیمویی را نشان می‌دهد:

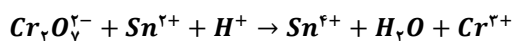


«پ»: انرژی الکتریکی، پرکاربردترین شکل انرژی مورد نیاز برای استفاده از فناوری‌های مختلف بوده و الکتروشیمی شاخه‌ای از علم شیمی است که در بهبود خواص مواد و تأمین انرژی نقش بسزایی دارد.

«ت»: اکسیژن نافلز فعال است که قدرت اکسندگی بالایی داشته و با اغلب عناصر فلزی مثل آلومینیم، آهن و منیزیم واکنش داده و آنها را به اکسید فلز تبدیل می‌کند. این عنصر نافلز با برخی از عناصر فلزی مثل طلا و پلاتین که پتانسیل کاهشی استاندارد بسیار بالایی داشته و به این راحتی اکسایش پیدا نمی‌کنند، واکنش نمی‌دهد.

گروه آموزشی ماز

۹۶- مجموع ضرایب‌های استوکیومتری مواد در واکنش اکسایش-کاهش زیر چقدر بوده و به ازای مبادله $0/6$ مول الکترون در این واکنش، چند مول از گونه اکسند مصرف می‌شود؟ (گزینه‌ها را از راست به چپ بخوانید.)



۰/۱ - ۳۰ (۴)

۰/۱۵ - ۳۰ (۳)

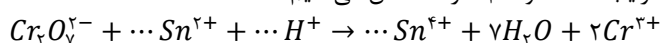
۰/۱ - ۲۸ (۲)

۰/۱۵ - ۲۸ (۱)

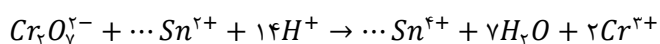
(متوسط - انرژی و الکترون - مسئله - ۱۳۰۲)

پاسخ: گزینه ۴

موازنه را با اتم Cr آغاز کرده و به $Cr_2O_7^{2-}$ ضریب یک می‌دهیم و با توجه به آن، ضرایب Cr^{3+} و H_2O را مشخص می‌کنیم:



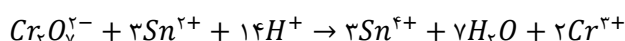
در مرحله بعد، با توجه به ضریب H_2O ، به H^+ ضریب ۱۴ می‌دهیم، پس داریم:



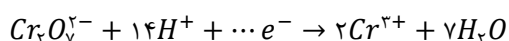
در نهایت ضرایب یون‌های قلع را به کمک موازنه بار پیدا می‌کنیم. اگر ضریب این یون‌ها را x فرض کنیم، خواهیم داشت:

$$1 \times (-2) + x \times (+2) + 14 \times (+1) = x \times (+4) + \gamma \times (+3) \rightarrow x = 3$$

در نتیجه معادله واکنش به صورت زیر می‌شود:



و مجموع ضرایب‌های استوکیومتری برابر ۳۰ است. معادله نیم‌واکنش کاهش به صورت زیر است:



تعداد الکترون ها را با استفاده از موازنه بار به دست می آوریم:

$$-2 + 14 \times (+1) + y \times (-1) = 2 \times (+3) \rightarrow y = 6$$

بنابراین به ازای هر مول گونه اکسند (یون $Cr_2O_7^{2-}$), ۶ مول الکترون مبادله می شود. بر این اساس، داریم:

$$? \text{ mol } Cr_2O_7^{2-} = \frac{1 \text{ mol } Cr_2O_7^{2-}}{6 \text{ mol } e^-} \times 0.6 \text{ mol } e^- = 0.1 \text{ mol}$$

گروه آموزشی ماز

۹۷- یک قطعه فلز روی را در محلولی از مس (II) سولفات قرار می دهیم. اگر در طول یک بازه زمانی، ۳ مول الکترون بین گونه های شرکت کننده در این واکنش مبادله شده باشد، میزان تغییر جرم تیغه فلزی برابر با چند گرم می شود؟ (کل فلز تولید شده روی سطح تیغه رسوب می کند.

$$(Zn = 65 \text{ و } Cu = 64 : g. \text{ mol}^{-1})$$

۱/۵ (۴)

۳ (۳)

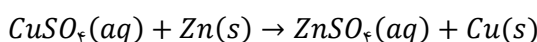
۲/۵ (۲)

۵ (۱)

(آسان - انرژی و الکترون - مسئله - ۱۳۰۲)

پاسخ: گزینه ۴

معادله واکنش انجام شده به صورت زیر است:



با توجه به معادله ی این واکنش، هر مول یون Cu^{2+} (معادل با ۶۴ گرم کاتیون Cu^{2+}) موجود در محلول با جذب ۲ مول الکترون، به یک مول اتم مس تبدیل شده و روی سطح تیغه رسوب می کند و جرم تیغه را به اندازه ۶۴ گرم افزایش می دهد. در طول همین بازه، یک مول فلز روی (معادل با ۶۵ گرم فلز روی) اکسید شده و به شکل کاتیون وارد محلول می شود و جرم تیغه را به اندازه ۶۵ گرم کاهش می دهد. براینند تغییر جرم تیغه در این فرایند، یک گرم کاهش جرم به ازای مبادله ۲ مول الکترون است. بر این اساس، داریم:

$$? \text{ g} = 3 \text{ mol } e^- \times \frac{1 \text{ g}}{2 \text{ mol } e^-} = 1.5 \text{ g}$$

گروه آموزشی ماز

۹۸- برای تغییر مقدار emf سلول گالوانی روی -نقره، از کدام اقدام زیر نمی توان استفاده کرد؟

(۲) تغییر غلظت کاتیون در ساختار نیم سلول نقره

(۱) جایگزین کردن الکتروود روی با الکتروود آهن

(۴) تغییر دمای محیط انجام واکنش الکتروشیمیایی

(۳) تغییر جرم تیغه فلز روی در نیم سلول روی

(آسان - انرژی و الکترون - مفهومی - ۱۳۰۲)

پاسخ: گزینه ۳

ساختار و ویژگی های سلول های گالوانی مشابه باتری ها است. یکی از ویژگی های مهم باتری ها، ولتاژ خروجی از آن ها است. برای اندازه گیری ولتاژ یک باتری، باید از وسیله ای به نام ولتسنج کمک بگیریم. به این منظور، قطب منفی باتری را به قطب منفی ولتسنج و قطب مثبت آن را نیز به قطب مثبت ولتسنج وصل می کنیم. در صورت اتصال قطب های ناهم نام باتری و ولتسنج به یکدیگر، عدد نشان داده شده توسط ولتسنج منفی شده و قرینه ولتاژ آن مولد توسط ولتسنج نشان داده می شود. با تغییر در هریک از اجزای موجود در سلول گالوانی، ولتاژ خروجی از سلول مورد نظر دچار تغییر می شود. برای مثال، اگر غلظت کاتیون در محلول های آندی و کاتدی تغییر کند و یا جنس تیغه های آندی و کاتدی دچار تغییر شود و یا دمای محیط افزایش یا کاهش پیدا کند، مقدار ولتاژ خروجی از سلول مورد نظر نیز دچار تغییر می شود. توجه داریم که جرم تیغه های آندی و کاتدی به کار رفته در ساختار یک سلول گالوانی، هیچ تاثیری روی مقدار emf آن سلول ندارد.

گروه آموزشی ماز

۹۹- کدام موارد از عبارات زیر درست است؟

الف: جهت حرکت الکترون ها در مدار خارجی سلول روی -مس، مخالف جهت حرکت آنیون ها در دیواره متخلخل آن است.

ب: نیروی الکتروموتوری سلول گالوانی هیدروژن -نقره، کمتر از نیروی الکتروموتوری سلول گالوانی آهن -نقره است.

پ: با قرار دادن یک تیغه مس در محلول آبی از نیتریک اسید، با گذشت زمان، نیم سلولی از مس ایجاد می شود.

ت: در سری الکتروشیمیایی عناصر فلزی، عنصر لیتیم در موقعیت بالاتری در مقایسه با عنصر روی قرار دارد.

(۴) «الف» و «ت»

(۳) «پ» و «ت»

(۲) «ب» و «پ»

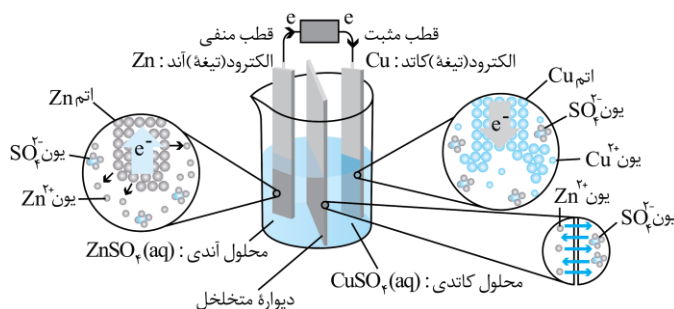
(۱) «الف» و «ب»

(متوسط - انرژی و الکترون - مفهومی - ۱۳۰۲)

گزینه ۱

عبارات های «الف» و «ب» درست هستند.

الف: تصویر زیر، سلول گالوانی روی - مس را نشان می‌دهد:



نیم‌واکنش کاهش یون‌های مس:

$$Cu^{2+}(aq) + 2e^{-} \rightarrow Cu(s)$$

نیم‌واکنش اکسایش اتم‌های روی:

$$Zn(s) \rightarrow Zn^{2+}(aq) + 2e^{-}$$

همانطور که مشخص است، به هنگام کار کردن این سلول الکترون‌های موجود در مدار خارجی از سمت آند به طرف کاتد حرکت می‌کنند، درحالی که آنیون‌ها از خلال دیواره متخلخل از سمت کاتد به طرف آند حرکت می‌کنند. بر این اساس، به طور کلی می‌توان گفت جهت حرکت الکترون‌ها در مدار خارجی سلول‌های گالوانی **برخلاف جهت حرکت آنیون‌ها** از خلال دیواره متخلخل موجود در آن‌ها است.

ب: نیروی الکتروموتوری (emf) در یک سلول گالوانی، حداکثر اختلاف پتانسیلی است که یک سلول می‌تواند به وجود بیاورد. مقدار این اختلاف پتانسیل را با E° نیز نشان می‌دهند. برای پیدا کردن مقدار emf یک سلول گالوانی، از روش‌های زیر می‌توان کمک گرفت:

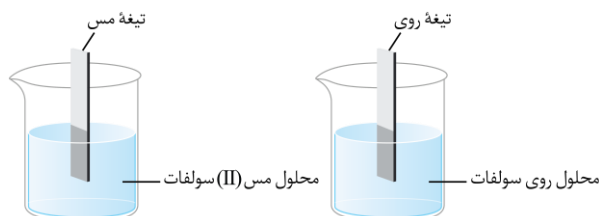
- ✓ نیم‌سلول‌های سازنده سلول را به یکدیگر متصل کرده و مقدار emf را به کمک ولت‌سنج اندازه‌گیری می‌کنیم.
- ✓ ابتدا آند و کاتد سلول گالوانی مورد نظر را پیدا کرده و پس از آن E° آند را از E° کاتد کم می‌کنیم.

با توجه به توضیحات بالا، اگر کاتد دو سلول گالوانی یکسان باشد، سلولی که E° آند آن کوچک‌تر است، نیروی الکتروموتوری بیشتری نیز خواهد داشت. چون آهن در مقایسه با هیدروژن پتانسیل کاهشی کوچک‌تری (منفی‌تری) دارد، پس می‌توان گفت نیروی الکتروموتوری سلول گالوانی آهن - نقره، بیشتر از نیروی الکتروموتوری سلول گالوانی هیدروژن - نقره است.

emf سلول‌های گالوانی

مقدار emf برای سلول‌های گالوانی همواره مقداری مثبت است. چنانچه ولت‌سنج مقدار E° یک سلول را با عددی منفی نشان داد و یا این که پس از محاسبه emf سلول، یک عدد منفی به دست آوردید، فقط به این معناست که موقعیت آند و کاتد سلول را به اشتباه تشخیص داده و قطب‌های ناهم‌نام سلول گالوانی و ولت‌سنج را به یکدیگر وصل کرده‌اید.

پ: با قراردادن یک تیغه فلزی در محلولی که حاوی کاتیون‌های آبپوشیده آن فلز باشد، یک نیم‌سلول ایجاد می‌شود. برای مثال، تصاویر زیر نیم‌سلول‌هایی از عناصر مس و روی را نشان می‌دهد:



پس از قرار دادن یک تیغه از جنس فلز مس در محلول نیتریک اسید، فلز مس با محلول اسیدی واکنش نداده و کاتیون‌های آن وارد محلول نمی‌شوند، پس یک نیم‌سلول ایجاد نمی‌شود. این در حالی است که اگر یک فلز با پتانسیل کاهشی منفی را وارد محلول اسیدی کنیم، اتم‌های آن فلز به تدریج اکسایش یافته و در قالب کاتیون وارد محلول می‌شوند. علاوه بر اکسایش اتم‌های فلزی، در طول این بازه یون‌های هیدروژن موجود در محلول اسیدی نیز کاهش یافته و به صورت گاز هیدروژن در می‌آیند و از محلول خارج می‌شوند. با گذشت زمان، کل یون‌های هیدروژن موجود در محلول اسیدی مصرف شده و محلولی ایجاد می‌شود که حاوی کاتیون‌های فلز مورد نظر بوده و یک تیغه فلزی از جنس فلز نیز در آن قرار گرفته است. چنین سامانه‌ای، یک نیم‌سلول از آن فلز به شمار می‌رود.

ت: پتانسیل کاهشی لیتیم در مقایسه با سایر عناصر فلزی کمتر بوده و به همین خاطر، در سری الکتروشیمیایی عناصر فلزی، عنصر لیتیم در موقعیت پایین‌تری در مقایسه با عنصر روی و سایر فلزات قرار دارد.

گروه آموزشی ماز

۱۰۰- کدام مطلب زیر نادرست است؟

- (۱) گرمای حاصل از واکنش آهن با محلول $CuSO_4$ ، بیشتر از گرمای حاصل از واکنش آهن با محلول Ag_2SO_4 است.
- (۲) در سری الکتروشیمیایی، گونه کاهنده در سمت راست و گونه اکسنده در سمت چپ نیم‌واکنش‌ها نوشته می‌شود.
- (۳) بازده تولید انرژی الکتریکی در نیروگاه حرارتی، نسبت به بازده تولید انرژی در سلول‌های سوختی کمتر است.
- (۴) واکنش‌هایی که در برخی از باتری‌های لیتیومی انجام می‌شوند، از نوع واکنش‌های برگشت‌پذیر هستند.

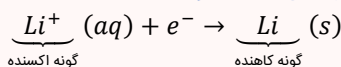
هرچقدر که تفاوت پتانسیل کاهشی استاندارد فلز واکنش دهنده با یون های فلزی موجود در محلول بیشتر باشد، مقدار گرمایی که در واکنش فلز با محلول مورد نظر آزاد می شود، بیشتر خواهد بود. چون پتانسیل کاهشی استاندارد نقره بیشتر از پتانسیل کاهشی مس است، گرمای حاصل از واکنش آهن با محلول $CuSO_4$ کمتر از گرمای حاصل از واکنش آهن با محلول Ag_2SO_4 می شود.

بررسی سایر گزینه ها:

۲ در سری الکتروشیمیایی طبق قرارداد، نیم واکنش ها به صورت کاهشی نوشته می شوند؛ در نتیجه در این جدول گونه اکسند (گونه ای که الکترون گرفته و کاهش پیدا می کند) در سمت واکنش دهنده ها (سمت چپ معادله) و گونه کاهنده در سمت فراورده ها (سمت راست معادله) نوشته می شود. هرچه پتانسیل کاهشی گونه ای منفی تر باشد، گونه سمت راست معادله کاهشی آن، کاهنده قوی تری خواهد بود.

سری الکتروشیمیایی

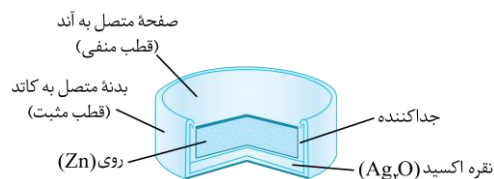
در سری الکتروشیمیایی، پتانسیل کاهشی مربوط به نیم واکنش های کاهش نوشته شده است. در این سری، گونه ای با پتانسیل کاهشی استاندارد منفی تر در پایین جدول و گونه ای با پتانسیل کاهشی استاندارد مثبت تر در بالای جدول قرار گرفته است. نیم واکنش کاهش، نیم واکنشی است که در آن یک ماده با گرفتن الکترون، به گونه ای با عدد اکسایش کمتر تبدیل می شود. **واکنش پذیرترین فلز در محلول های آبی، لیتیم است؛ در نتیجه نیم واکنش زیر، کمترین (منفی ترین) پتانسیل کاهشی را دارد:**



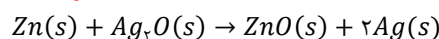
پتانسیل کاهشی استاندارد برای این نیم واکنش بالا را به صورت $E^\circ(Li^+/Li)$ نمایش می دهند و مقدار آن برابر با $-3/04$ ولت است. در این نیم واکنش، گونه Li^+ اکسند بوده و با جذب الکترون به گونه ای با عدد اکسایش کمتر (Li) تبدیل شده است. **هرچه پتانسیل استاندارد کاهشی تولید یک گونه منفی تر باشد، گونه ذکر شده کاهنده قوی تری است.**

۳ از آن جا که در سلول های سوختی، انرژی شیمیایی سوخت ها به طور مستقیم به انرژی الکتریکی تبدیل شده و برخلاف نیروگاه ها، در این روش چند مرحله متوالی از تبدیل انرژی صورت نمی گیرد، اتلاف انرژی به صورت گرما کم تر است و درصد بیشتری از انرژی شیمیایی ذخیره شده در سوخت مورد نظر به انرژی الکتریکی تبدیل می شود.

۴ با رشد و پیشرفت چشمگیر صنایع، نیاز و تقاضا برای ساخت باتری ها با ویژگی های گوناگون و کاربرد معین افزایش یافته است. شیمی دان ها در پی پاسخ به این نیازها، توانستند به فناوری ساخت باتری های جدید دست یابند. در این فناوری، نقش فلز لیتیم پررنگ است؛ زیرا لیتیم در میان فلزها دارای کمترین چگالی و منفی ترین مقدار پتانسیل کاهشی استاندارد است. این ویژگی های لیتیم سبب شد راه برای ساخت باتری های سبک تر (بخاطر چگالی کم لیتیم)، کوچک تر و با توانایی ذخیره بیشتر انرژی (بخاطر پتانسیل کاهشی استاندارد منفی لیتیم) هموار شود. باتری دگمه ای از جمله باتری های لیتیومی است که در شکل ها و اندازه های گوناگون به کار می رود. این باتری ها قابلیت شارژ شدن را ندارند. دسته ای دیگر از باتری های لیتیومی، آن هایی هستند که در تلفن و رایانه همراه به کار می روند و می توان آنها را بارها شارژ کرد و در آن ها واکنش های برگشت پذیر انجام می شود. نوع دیگری از باتری های دگمه ای، باتری های روی-نقره است. ساختار این باتری ها نیز به صورت زیر است:



گونه کاهنده



گونه اکسند

این باتری ها، انواعی از سلول های گالوانی به شمار می روند.

گروه آموزشی ماز

۱۰۱- اگر مدتی پس از شروع واکنش الکتروشیمیایی در سلول آلومینیم-مس، اختلاف جرم الکتروکاتد و الکتروآند به $7/28g$ برسد، در طول این مدت چند گرم از جرم الکتروکاتد کاسته شده است؟

(جرم الکتروکاتدهای استفاده شده در ابتدای واکنش یکسان بوده است. $Al = 27$ و $Cu = 64 : g.mol^{-1}$)

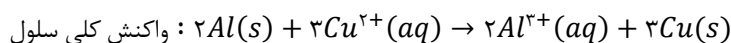
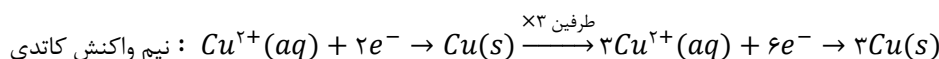
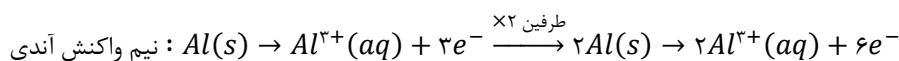
۵/۷۶ (۴)

۲/۸۸ (۳)

۱/۶۲ (۲)

۰/۸۱ (۱)

در سلول گالوانی مورد نظر، آلومینیم در نقش آند بوده و مس در نقش کاتد است. ابتدا نیم واکنش های انجام شده را نوشته و با یکسان کردن تعداد الکترون مبادله شده در این دو نیم واکنش، واکنش کلی سلول را مشخص می کنیم. در این رابطه، داریم:



با شروع واکنش، از جرم الکتروند آند کاسته شده و به جرم الکتروند کاتد افزوده می‌شود؛ بنابراین در زمان مورد نظر داریم:

$$7/38g = \text{جرم کاهش یافته از الکتروند آند} - \text{جرم افزوده شده به الکتروند کاتد} = \text{اختلاف جرم الکترونها}$$

اگر در بازه زمانی موردنظر ۲x مول Al به صورت Al^{3+} وارد نیم‌سلول آندی شود، ۵۴x گرم از جرم آند کاسته شده (این مقدار را با ۵۴x گرم مشخص می‌کنیم) و ۱۹۲x گرم بر جرم کاتد مسی (این مقدار را با ۱۹۲x گرم مشخص می‌کنیم) افزوده می‌شود. بنابراین داریم:

$$192x - (-54x) = 246x = 7/38g \rightarrow x = \frac{7/38}{246} = 0.0009 \text{ mol}$$

بنابراین جرم خورده شده از الکتروند آند برابر است با:

$$? g Al = (2 \times 0.0009) \text{ mol Al} \times \frac{27 g Al}{1 \text{ mol Al}} = 0.0486 g$$

گروه آموزشی ماز

۱۰۲- در ساختار یک اسید چرب، ۱۸ اتم کربن وجود داشته و مجموع عدد اکسایش این اتم‌های کربن برابر با ۲۴- است. شمار پیوندهای اشتراکی در ساختار هر مولکول از این ماده، چند برابر شمار این پیوندها در مولکول SO_3 است؟

۱۳ (۴)

۱۲ (۳)

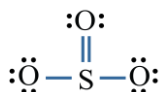
۱۲/۵ (۲)

۱۱/۵ (۱)

(متوسط - انرژی و الکترون - مسئله - ۱۳۰۲)

پاسخ: گزینه ۴

ساختار مولکول گوگرد تری‌اکسید به صورت زیر است:



فرمول شیمیایی کلی یک اسید چرب را بدون داشتن هیچ اطلاعاتی در رابطه با سیر شده بودن و یا نبودن آن، می‌توان به صورت $C_xH_yO_z$ در نظر گرفت. در ساختار این مواد، ۲ اتم اکسیژن به همراه تعدادی اتم کربن و هیدروژن وجود دارند. طبق فرض سوال، در این ماده ۱۸ اتم کربن وجود دارد که مجموع عدد اکسایش آن‌ها برابر با ۲۴- است، پس فرمول شیمیایی آن به صورت $C_{18}H_yO_z$ می‌شود. بار الکتریکی این مولکول برابر با صفر بوده و بر این اساس، مجموع عدد اکسایش اتم‌ها در ساختار یک اسید چرب برابر با صفر است. در این رابطه داریم:

$$-4 + y + (-24) = 0 \Rightarrow y = 28$$

با توجه به محاسبات بالا، در ساختار این ماده ۲۸ اتم هیدروژن وجود داشته و فرمول شیمیایی این اسید چرب به صورت $C_{18}H_{28}O_z$ است. بر این اساس، رابطه با تعداد پیوندهای موجود در ساختار این ماده داریم:

$$\text{شمار پیوندهای اشتراکی} = \frac{(4 \times C) + (2 \times O) + (1 \times H)}{2} = \frac{(4 \times 18) + (2 \times 2) + (1 \times 28)}{2} = 52$$

همانطور که دیدیم، در ساختار مولکول گوگرد تری‌اکسید نیز ۴ پیوند اشتراکی وجود دارد، پس مقدار نسبت خواسته شده برابر با ۱۳ می‌شود.

گروه آموزشی ماز

۱۰۳- چه تعداد از عبارتهای زیر درست است؟

- الف: در آبکاری قطعه‌ای از جنس فلز مس با فلز نقره، قطعه مسی را به قطب منفی باتری متصل می‌کنند.
- ب: در سلول برقکافت سدیم کلرید مذاب، عنصری در سمت کاتد تولید می‌شود که در دمای اتاق حالت گاز دارد.
- پ: در فرایند برقکافت مقداری منیزیم کلرید مذاب، فرآورده کاتدی نسبت به الکترولیت مذاب چگالی کمتری دارد.
- ت: چون اتم‌های سدیم بسیار پایدارتر از یون‌های سدیم هستند، برای تهیه فلز سدیم باید انرژی زیادی مصرف کرد.
- ث: در سلول نورالکتروشیمیایی که در تهیه گاز H_2 کاربرد دارد، عدد اکسایش سیلیسیم در سمت کاتد تغییر می‌کند.

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

(سخت - سلول‌های الکترولیتی و خوردگی - مفهومی - ۱۳۰۲)

پاسخ: گزینه ۲

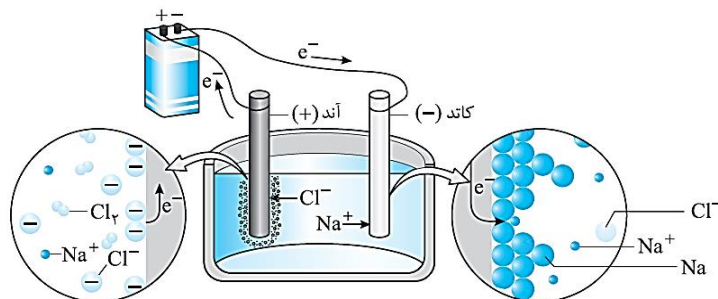
عبارتهای «الف» و «پ» درست هستند.

بررسی موارد:

«الف»: در فرآیند آبکاری، قطعه‌ای که آبکاری می‌شود را به قطب منفی (کاتد) و روکش فلزی را به قطب مثبت (آند) متصل می‌کنند. در سلول داده شده، جسم مسی باید به قطب منفی مولد وصل شود.

پوشاندن سطح یک فلز با لایه نازکی از فلز دیگر را **آبکاری** می‌گویند و این فرایند، در **نوعی سلول الکترولیتی** انجام می‌پذیرد. طی این فرایند، فلز پوشاننده در نقش آند بوده، اکسایش می‌یابد (جرم آن کاهش می‌یابد) و به قطب مثبت باتری متصل می‌شود و جسمی که روکش فلزی بر روی آن ایجاد می‌شود، رسانا بوده و در نقش کاتد ظاهر می‌شود. توجه داریم که الکترولیت فرایند آبکاری، دارای یون‌های فلز پوشاننده است. همچنین نیم‌واکنش‌های اکسایش و کاهش، هر دو مربوط به فلز پوشاننده هستند؛ در نتیجه **غلظت الکترولیت** استفاده شده در فرایند آبکاری، **ثابت** می‌ماند.

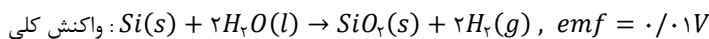
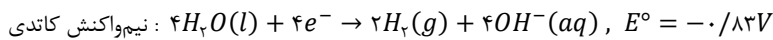
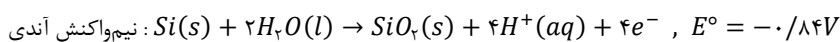
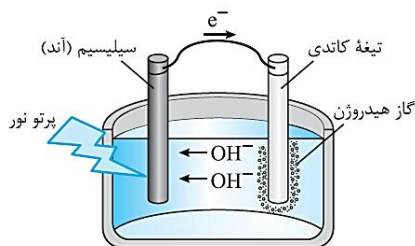
«ب»: با توجه به قدرت کاهندگی بالای سدیم، از برق‌کافت سدیم کلرید محلول در آب، **نمی‌توان** برای به‌دست آوردن فلز سدیم و گاز کلر استفاده کرد. تصویر زیر، نمایی از سلول الکترولیتی مربوط به برق‌کافت سدیم کلرید مذاب را نشان می‌دهد:



در سمت **کاتد** این سلول، **فلز سدیم** با حالت مذاب تولید شده و در سمت **آند** آن گاز **کلر آزاد** می‌شود. از عنصر کلر، برای میکروپزدایی آب استفاده می‌شود. «پ»: در برق‌کافت منیزیم کلرید مذاب، فرآورده کاتدی فلز $Mg(l)$ است که **چگالی کمتری** از الکترولیت مذاب یعنی $MgCl_2(l)$ دارد و در نتیجه، طی این فرایند فلز منیزیم مذاب **بر روی سطح** الکترولیت قرار می‌گیرد.

«ت»: فلز سدیم، یک کاهنده قوی است که در طبیعت به حالت آزاد (به حالت عنصری) یافت نمی‌شود. این عنصر در ترکیب‌های طبیعی و گوناگون خود، **تنها** به شکل یون سدیم وجود دارد. این واقعیت نشان می‌دهد که یون‌های سدیم بسیار پایدارتر از اتم‌های سدیم هستند. به همین دلیل برای تهیه فلز سدیم باید انرژی زیادی مصرف کرد.

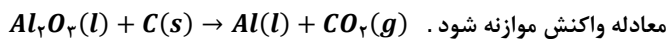
«ث»: ساختار نوعی سلول **نورالکتروشیمیایی** که در تهیه گاز H_2 کاربرد دارد، به صورت زیر است:



در سمت **کاتد** این سلول، عدد اکسایش اتم **هیدروژن** تغییر می‌کند در حالی که در سمت **آند** آن، عدد اکسایش اتم **سیلیسیم** تغییر می‌کند. در واقع، در نیم‌واکنش آندی این سلول اتم سیلیسیم اکسید می‌شود.

گروه آموزشی ماز

۱۰۴- مجموع جرم تیغه‌های کربنی بکار رفته در سلول مورد استفاده برای فرایند هال برابر با ۷۲۰ گرم است. این تیغه‌های کربنی به چه قطبی از مولد متصل بوده و از آن‌ها برای استخراج حداکثر چند گرم آلومینیم می‌توان استفاده کرد؟ ($Al = 27$ و $C = 12 : g.mol^{-1}$)



(۴) منفی - ۲۱۶۰

(۳) مثبت - ۲۱۶۰

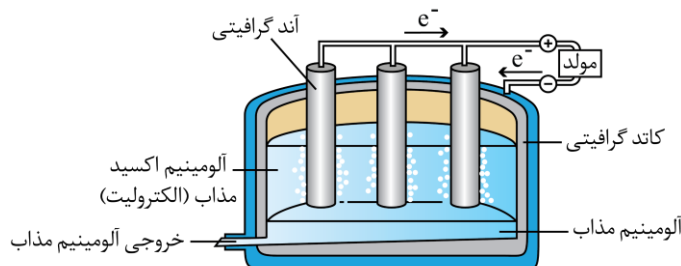
(۲) منفی - ۱۲۱۵

(۱) مثبت - ۱۲۱۵

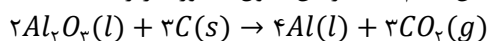
(متوسط - سلول‌های الکترولیتی و خوردگی - مسئله - ۱۳۰۲)

پاسخ: گزینه ۳

تصویر زیر، نمایی از سلول هال را نشان می‌دهد:



در این سلول الکترولیتی، تیغه‌های گرافیتی در نقش آند بوده و به قطب مثبت مولد وصل می‌شوند. در مجاورت این تیغه‌ها، اتم‌های کربن اکسید شده و گاز کربن دی‌اکسید تولید می‌شود. بدنه ظرف نیز از جنس گرافیت بوده و در نقش کاتد قرار می‌گیرد. در مجاورت با بدنه ظرف نیز یون‌های آلومینیم الکترون گرفته و به آلومینیم مذاب کاهش پیدا می‌کنند. واکنش انجام شده در این سلول به صورت زیر است:



با توجه به جرم کربن مصرف شده، جرم فلز آلومینیم تولید شده در این واکنش را محاسبه می‌کنیم.

$$? g Al = 720 g C \times \frac{1 mol C}{12 g C} \times \frac{4 mol Al}{3 mol C} \times \frac{27 g Al}{1 mol Al} = 2160 g$$

فلز آلومینیم نقش کلیدی در صنایع گوناگون داشته و فناوری تولید آن، بسیار ارزشمند است. از این عنصر فلزی در ساخت لوازم خانگی، هواپیما و کشتی استفاده می‌شود. فرایند هال به علت مصرف مقدار زیادی انرژی الکتریکی، هزینه‌ی بالایی دارد؛ از این رو با بازیافت فلز آلومینیم می‌توان ضمن افزایش عمر یکی از مهم‌ترین منابع تجدیدناپذیر طبیعت، برخی از هزینه‌های تولید این فلز را نیز کاهش داد. برای نمونه تولید قوطی‌های آلومینیومی از قوطی‌های کهنه، فقط به ۷٪ از انرژی لازم برای تهیه همان تعداد قوطی از فرایند هال نیاز دارد.

گروه آموزشی ماز

۱۰۵- کدام مطلب زیر نادرست است؟

- (۱) در ساختار نوعی از آهن که برای تهیه قوطی کنسرو استفاده می‌شود، فلزی با $E^\circ < 0$ در سطح قرار گرفته است.
- (۲) تمایل اکسیژن به گرفتن الکترون، در محیطی که رنگ کاغذ pH را سرخ می‌کنند، بیشتر از محیط خنثی است.
- (۳) قیراندود کردن و روکش دادن، از جمله روش‌هایی هستند که به طور کامل جلوی خوردگی آهن را می‌گیرند.
- (۴) در معادله واکنش خوردگی آهن، تغییر عدد اکسایش گونه کاهنده، ۱/۵ برابر هر اتم از گونه اکسند است.

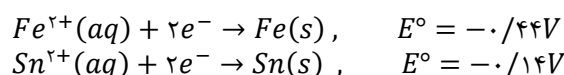
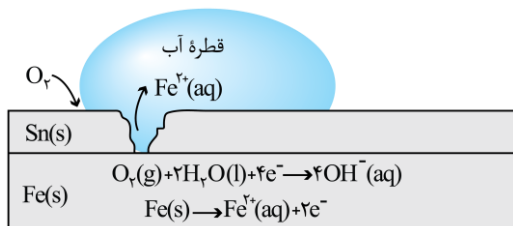
(متوسط - سلول‌های الکترولیتی و خوردگی - مفهومی - ۱۲۰۲)

پاسخ: گزینه ۳

وسایل آهنی در هوای مرطوب و در مجاورت با اکسیژن موجود در هوا دچار خوردگی می‌شوند. ساده‌ترین راه برای جلوگیری از خوردگی آهن، ایجاد یک پوشش محافظ است تا از رسیدن اکسیژن و رطوبت هوا به آهن جلوگیری کند. این پوشش با روش‌هایی مانند رنگ زدن، قیراندود کردن و روکش دادن ایجاد می‌شود. باید توجه داشت که چنین روش‌هایی نمی‌توانند به طور کامل از خوردگی پیشگیری کنند؛ زیرا به تدریج رطوبت و اکسیژن از روزه‌های موجود در این پوشش‌ها به درون فلز نفوذ کرده و به سطح آهن می‌رسند و خوردگی دوباره آغاز می‌شود.

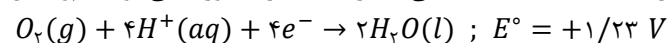
بررسی سایر گزینه‌ها:

یکی از راه‌های محافظت از آهن در مقابل خوردگی، پوشاندن سطح آن با فلزهای دیگر است. آهن گالوانیزه (آهن سفید) و ورقه‌های حلبی، نمونه‌هایی از ورقه‌های آهنی پوشیده‌شده با سایر فلزات هستند. به ورقه‌های آهنی که سطح آن‌ها با لایه نازکی از فلز قلع پوشیده شده باشد، حلبی گفته می‌شود. تصویر زیر، یک قطعه حلبی را نشان می‌دهد:



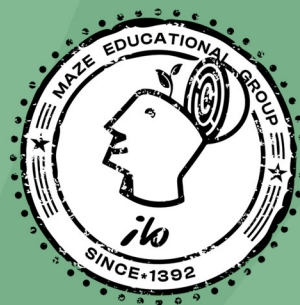
قبل از ایجاد خراش در سطح حلبی، فلز قلع به عنوان یک پوشش محافظ از خوردگی آهن جلوگیری می‌کند. توجه داریم که در این شرایط خود قلع نیز به خاطر ایجاد شدن یک لایه متراکم از اکسیدهای قلع در سطح آن، دچار خوردگی نمی‌شود. می‌دانیم که پتانسیل کاهش استاندارد (E°) قلع، کوچک‌تر از صفر است.

تمایل مولکول‌های اکسیژن به گرفتن الکترون، در محیط‌های اسیدی (محیط‌هایی با $pH < 7$ که رنگ کاغذ pH را سرخ می‌کنند)، بیشتر از محیط‌های خنثی است و به همین خاطر، فلز آهن در محیط‌های اسیدی در مقایسه با محیط‌های خنثی با سرعت بیشتری خورده می‌شود. نیم‌واکنش کاهش آب در محیط‌های اسیدی به صورت مقابل است:



واکنش کلی انجام‌شده در هنگام زنگ‌زدن آهن به صورت $4Fe(s) + 3O_2(g) + 6H_2O(l) \rightarrow 4Fe(OH)_3(s)$ است. برای انجام شدن این واکنش، حضور مولکول‌های آب و اکسیژن الزامی است. توجه داریم در معادله‌ی واکنش کلی خوردگی آهن، تغییر عدد اکسایش گونه‌ی کاهنده (اتم آهن) برابر با ۳+ و تغییر عدد اکسایش گونه‌ی اکسند (اتم اکسیژن) برابر با ۲- است.

گروه آموزشی ماز



سفر در سرزمین کنکورها

مارکو پولو



مارکو پولو کامل ترین بسته کنکورهای سراسری

(ویژه ایام جمع بندی)

تهیه از طریق سایت مازمارکت

mazemarket.org



AzmonVIP

به برنامه آزمون هام نمی رسم چیکار کنم؟



یکی از دلایل عدم شرکت در آزمون های آزمایشی، تفکر اشتباهی است که باید تمام بودجه آزمون را مطالعه کرده باشید. در این مقاله، به بررسی ۷ مورد که موجب عقب ماندن از برنامه آزمون می شود و راهکارهای عملی برای حل آن ها خواهیم پرداخت.

۱. چند برنامه ای بودن

در سال کنکور، به دلیل برنامه های مختلف، زمان محدود است. بهتر است یک برنامه را انتخاب کرده و طبق آن پیش بروید.

۲. نخواندن مباحث پایه ای و پیش نیاز

در کنکور، برخی مباحث پیش نیاز مباحث دیگر هستند. اگر این مباحث را نخوانید، درک مباحث بعدی دشوار خواهد بود و این باعث می شود نتوانید به طور کامل برنامه آزمون را اجرا کنید.

۳. وسواس مطالعاتی

وسواس مطالعاتی می تواند سرعت مطالعه را کاهش دهد. در دور اول یادگیری، نیازی به کامل کردن همه چیز نیست. ابتدا **درسنامه** را با تمرکز مطالعه کنید، سپس **تست زنی** کرده و برای یادگیری بهتر، از پاسخنامه ها استفاده کنید.

۴. چند منبعی بودن و زدن همه تست ها

استفاده از چند منبع و تست زنی زیاد مهم است، اما باید منابع را با توجه به زمان و توانایی خود انتخاب کنید تا استفاده بهینه داشته باشید.

۵. شرکت در آزمون های متعدد با برنامه های مختلف

کمال گرایی ممکن است شما را به شرکت در آزمون های مختلف و سردرگمی در برنامه ریزی سوق دهد. بهتر است یک آزمون را انتخاب کنید و به برنامه آن پایبند باشید.

۶. برنامه ریزی غیر منطقی

عقب افتادن از برنامه به دلیل برنامه ریزی غیر منطقی است که بدون توجه به زمان و توان فرد، حجم زیادی از مطالب و تست ها را در نظر می گیرد.

۷. نگاه به عقب

نگاه به عقب و جبران مباحث عقب مانده با برنامه ریزی فشرده و غیر اصولی فقط باعث کاهش کیفیت مطالعه می شود و شما را از مباحث جدید بازمی دارد.

جمع بندی: عدم شرکت در آزمون های آزمایشی اغلب ناشی از تفکرات اشتباه در برنامه ریزی است. در این مطلب مواردی که سبب عدم موفقیت در آزمون های آزمایشی می شود، بررسی گردید. برای موفقیت، باید یک برنامه منسجم و واقع بینانه انتخاب کرده، از منابع محدود و مناسب استفاده کرده، و به برنامه آزمون پایبند باشید.