



دفترچه پاسخ

مرور نیم سال اول دوازدهم



پنجشنبه

۱۴۰۴/۰۱/۱۴



برای دیدن پاسخنامه ویدئویی آزمون
QRcode بالارو اسکن یا روی لینک زیر کلیک کن!

مشاهده پاسخنامه ویدئویی آزمون

گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی - پایه دوازدهم آزمون الکترونیکی ماز - مرحله ۱۳

دروس	مسئول درس	طراحان	ویراستاران
ریاضیات	حسین شفیع زاده سید جواد نظری مهرداد کیوان مهرداد اسپیدکار	محمد خانگلدی - رسول حاجی زاده سوگند روشنی - کیوان دارابی	مهرداد اسپیدکار حمیدرضا ولی پور
فیزیک	سجاد صادقی زاده سعید احمدی	سجاد صادقی زاده - مهدی پارسا - رشاد براتی مجید رجبی وندچالی - محسن قندچلر - آروین صالحی سارا قانع - مجید میرزائی - امیرمحمد زمانی	حامد نبی منصور محمد جواد سورچی
شیمی	فرشاد هادیان فرد	فرشاد هادیان فرد - مهسا بایمانی نژاد علی ترابی	فرهنگ امیری - سجاد سیف اللهی رامین رزمجو

مدیر آزمون: دکتر رسول خنجری

تا حالا به این فکر کردین که چرا به نیمه دوم بازی فوتبال، نیمه مربیان گفته میشه؟ در واقع استراتژی‌های مربی، میتونه در نیمه دوم فوتبال نتیجه بازی رو کاملاً عوض کنه! بازی باخته رو به برد تبدیل کنه یا برعکسش! واقعیت اینه که نیمه دوم سال هم همینطوره! ارزش هر روز در نیمه دوم سال هم بیشتر از نیمه اول هست؛ چون الان بیشتر خودتون رو میشناسید، بازدهی و سرعت مطالعه‌تون بیشتر شده و کلاً حرفه‌ای‌تر شدین. ما در نیمه دوم سال این موارد رو در آزمون ماز براتون در نظر گرفتیم تا فارغ از نتیجه‌ای که در نیمسال اول گرفتید، بتونید نیمسال دوم رو به بهترین شکل سپری کنید:



بخشی از کارهایی که اخیراً برای ارتقای کیفیت و خدمات آزمون ماز انجام شده:

پوشش کامل تر مطالب در هر آزمون: با وجود اینکه در هر آزمون، تعداد تست‌های کمی برای هر درس در آزمون دارید، سعی می‌کنیم تمام نکات اون مبحث رو با تست‌های آزمون پوشش بدیم تا نگران پیشروی سریع در نیمسال دوم نباشید و همه نکات رو یاد بگیرید.

حجم کمتر پاسخنامه‌ها: برای بررسی راحت‌تر آزمون در نیمسال دوم، سعی کردیم حجم پاسخنامه‌ها رو منسجم‌تر کنیم تا در وقتتون بتونید صرفه‌جویی کنید.

چینش سؤالات براساس تاکسونومی بلوم: وقتی که قراره با ۱۰ سؤال، ۱۰ دانش‌آموز رو از هم تفکیک کنیم، باید یکی از سؤالات برای ۹ نفر قابل پاسخ‌دهی باشه، یکی دیگه برای ۸ نفر و در نهایت، یکی از سؤالات فقط برای ۱ نفر قابل حل میشه! حالا این سؤالات رو به کل سؤالات یک درس و این جامعه آماری رو به کل جامعه آماری ماز تعمیم بدید. چینش سؤالات براساس تاکسونومی بلوم به این شکل هست، پس اگر دانش‌آموز قوی‌ای هستید، همیشه در آزمون سؤالاتی هست که شمارو به چالش بکشه، و اگر دانش‌آموزی با تراز پایین هستید، باز هم سؤالاتی در آزمون هست که بتونید بهش پاسخ بدین!

دوپینگ‌ها: یه پازل بزرگ رو تصور کن! یک ساله داری می‌چینیش و الان تقریباً تموم شده، ولی شک داری که همه قطعه‌ها رو درست سر جاشون گذاشتی یا نه. حالا که دو ماه مونده، چیکار می‌کنی؟
همه چیزو به هم می‌ریزی و از اول شروع می‌کنی؟ (مثل اونایی که یک ماه مونده به کنکور یهو تصمیم می‌گیرن کل درسارو از صفر بخونن و آخرش با استرس و ذهن آشفته میرن سر جلسه.)
یا اینکه از راهنمای پازل اسفاده میکنی و جای درست قطعه‌ها رو پیدا می‌کنی؟ (این همون روش درسته! یعنی بفهمی کدوم قطعه‌ها درسته، کدومارو باید جابه‌جا کنی و چی رو باید اصلاح کنی تا تصویر کامل و درست دربیاد.)
راه دوم دقیقاً همون کاریه که تو دوره دوپینگ انجام میدیم! بهت نشون میدیم از کجا شروع کنی، چی رو تقویت کنی، کجاها رو اصلاح کنی و در نهایت با خیال راحت و ذهن آروم بری سر کنکور و بهترین نتیجه رو بگیری.

کلام آخر:

یک تیم با بیش از ۵۰۰ نفر در حال کار هستن تا آزمون‌های ماز با حداکثر کیفیت حاضر بشن و به شما کمک کنن و مسیر موفقیت رو براتون ساده‌تر کنن. همیشه از نظرات و کامنت‌های خوبتون انرژی می‌گیریم. مرسی که همراهمون هستین.

راستی! حتماً در نظرسنجی آزمون شرکت کنین و نظرات و پیشنهاداتتون رو برامون بنویسین.



ریاضی

یکی از مطابقت‌های آزمون سال گذشته ماز با کنکور ۱۴۰۳

۳۲- حداقل چند عضو از مجموعه اعداد طبیعی کمتر از ۲۱ انتخاب کنیم تا مطمئن باشیم حداقل ۲ عضو با تفاضل ۱۱ در بین آن‌ها وجود دارد؟

۱۳ (۴)

۱۲ (۳)

۱۱ (۲)

۱۰ (۱)

(مرحله ۱۸ آزمون‌های سالیانه - ریاضیات رشته ریاضی)

۳۹- حداقل چند عضو از مجموعه $\{14, 15, 16, \dots, 20, 22, 23, 24, \dots, 28\}$ انتخاب کنیم تا به طور قطع، لااقل سه عضو انتخاب شده اعداد متوالی باشند؟

۹ (۴)

۱۰ (۳)

۱۱ (۲)

۱۲ (۱)

(کنکور تیر ۱۴۰۳ - ریاضیات رشته ریاضی)



برای مشاهده
همه مطابقت‌ها
اینجا رو اسکن کن!

biomaze.ir

یا رو این کلیک کن!

دانش آموزان عزیز ماز

ما اومدیم با یکی دیگه از آزمون هامون

توی این آزمون یه سری مباحث جدید بهمون اضافه شدن حالا اگه می‌خوای ببینی توی این آزمون چه خبره باهامون همراه باش...
- آقا! + بله؟

- توی این آزمون دقیقاً از چه قسمت‌هایی سوال طرح کردین؟

+ مباحثی که توی این آزمون ازش سوال اومده رو می‌تونن توی جدول پایینی ببینی...

بخش	کتاب	فصل	مباحث	تعداد سوال
دوازدهم	حسابان ۲	فصل اول	تبدیل نمودار توابع	۲
			یکنوایی توابع	۳
			بخش‌پذیری و قضیه تقسیم	۱
		فصل دوم	تناوب و تانژانت	۴
			معادلات مثلثاتی	۳
		فصل سوم	حدهای نامتناهی	۳
			حد در بی‌نهایت	۴
	هندسه ۳	فصل اول	ماتریس و اعمال روی آن	۳
			وارون ماتریس و دترمینان	۳
		فصل دوم	آشنایی با مقاطع مخروطی	۱
			دایره	۳
ریاضیات گسسته		فصل اول	استدلال ریاضی	۱
			بخش‌پذیری در اعداد صحیح	۲
			هم‌نهشتی در اعداد صحیح و کاربردها	۴
		فصل دوم	معرفی گراف	۳

- آقا! + بله؟

- از این مباحثی که گفتین، کدوما مهم‌ترن؟

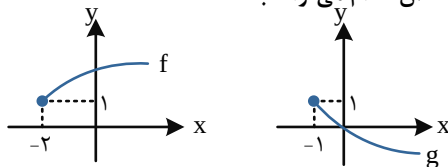
+ خب همه مباحث اهمیت خاص خودشون رو دارن و می‌تونن به صورت مجزا و یا ترکیبی با بقیه مباحث توی کنکور مطرح بشن ولی اگه بخوام مهم‌ترها رو بگم، از بین همه این مباحث، قسمت‌های "حد در بی‌نهایت"، "تناوب و تانژانت" و قسمت "معادلات مثلثاتی" در حسابان و همچنین قسمت "وارون ماتریس و دترمینان" در هندسه ۳ و نهایتاً قسمت "هم‌نهشتی و کاربردها" در ریاضیات گسسته اهمیت زیادی دارن.

حالا برین تحلیل آزمون رو شروع کنین که به‌نظم تحلیل آزمون و مشخص شدن ایرادها از خود آزمون دادن مهم‌تره.

آرزومند آرزوهایتان

حسین شفیع‌زاده - رتبه ۶ کنکور ۶۷ و مسئول درس ریاضی آزمون ماز

۱- نمودار توابع f و g رسم شده است. اگر g فقط از انتقال و قرینه یابی تابع f به دست آمده باشد، ضابطه آن کدام می تواند باشد؟



- (۱) $y = 2 - f(x - 1)$
(۲) $y = f(-x - 3)$
(۳) $y = 2 - f(x + 1)$
(۴) $y = f(-x + 3)$

(متوسط - تبدیل نمودار توابع - مفهومی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۱

اگر نمودار f را یک واحد به سمت راست انتقال داده، سپس نسبت به محور x ها قرینه کرده و در آخر ۲ واحد به سمت بالا انتقال دهیم به نمودار g خواهیم رسید، بنابراین:

$$y = f(x) \xrightarrow{\text{۱ واحد به سمت راست}} y = f(x - 1) \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } x \text{ ها}} y = -f(x - 1) \xrightarrow{\text{۲ واحد به سمت بالا}} y = 2 - f(x - 1)$$

تبدیل نمودار توابع

اگر نمودار و یا ضابطه تابع $\begin{cases} y = f(x) \\ D_f : [a, b] \rightarrow R_f : [c, d] \end{cases}$ را در اختیار داشته باشیم، با فرض $k > 0$ ، داریم:

ضابطه	در ضابطه تابع f به جای تمامی x ها، $(x + k)$ قرار می دهیم.
نمودار	نمودار تابع f را به اندازه k واحد و در راستای محور x ها به سمت چپ منتقل می کنیم.
نقطه متناظر	اگر نقطه $A(x, y)$ روی نمودار تابع f قرار داشته باشد، نقطه $A'(x - k, y)$ روی نمودار تابع $f(x + k)$ قرار دارد.
دامنه	اگر دامنه تابع f به صورت $[a, b]$ باشد، دامنه تابع $f(x + k)$ به صورت $[a - k, b - k]$ می باشد.
برد	برد تابع $f(x + k)$ با برد تابع f برابر است.

ضابطه	در ضابطه تابع f به جای تمامی x ها، $(x - k)$ قرار می دهیم.
نمودار	نمودار تابع f را به اندازه k واحد و در راستای محور x ها به سمت راست منتقل می کنیم.
نقطه متناظر	اگر نقطه $A(x, y)$ روی نمودار تابع f قرار داشته باشد، نقطه $A'(x + k, y)$ روی نمودار تابع $f(x - k)$ قرار دارد.
دامنه	اگر دامنه تابع f به صورت $[a, b]$ باشد، دامنه تابع $f(x - k)$ به صورت $[a + k, b + k]$ می باشد.
برد	برد تابع $f(x - k)$ با برد تابع f برابر است.

انتقال عمودی

اگر نمودار و یا ضابطه تابع $\begin{cases} y = f(x) \\ D_f : [a, b] \rightarrow R_f : [c, d] \end{cases}$ را در اختیار داشته باشیم، با فرض $k > 0$ ، داریم:

ضابطه	به ضابطه تابع f ، k واحد اضافه می کنیم.
نمودار	نمودار تابع f را به اندازه k واحد و در راستای محور y ها به سمت بالا منتقل می کنیم.
نقطه متناظر	اگر نقطه $A(x, y)$ روی نمودار تابع f قرار داشته باشد، نقطه $A'(x, y + k)$ روی نمودار تابع $f(x) + k$ قرار دارد.
دامنه	اگر دامنه تابع f به صورت $[a, b]$ باشد، دامنه تابع $f(x) + k$ با دامنه تابع f برابر است.
برد	اگر برد تابع f به صورت $[c, d]$ باشد، برد تابع $f(x) + k$ به صورت $[c + k, d + k]$ می باشد.

ضابطه	از ضابطه تابع f ، k واحد کم می کنیم
نمودار	نمودار تابع f را به اندازه k واحد و در راستای محور y ها به سمت پایین منتقل می کنیم.
نقطه متناظر	اگر نقطه $A(x, y)$ روی نمودار تابع f قرار داشته باشد، نقطه $A'(x, y - k)$ روی نمودار تابع $f(x) - k$ قرار می گیرد.
دامنه	دامنه تابع $f(x) - k$ با دامنه تابع f برابر است.
برد	اگر برد تابع f به صورت $[c, d]$ باشد، برد تابع $f(x) - k$ به صورت $[c - k, d - k]$ می باشد.

انبساط و انقباض عمودی

اگر نمودار و یا ضابطه تابع $\begin{cases} y = f(x) \\ D_f = [a, b] \rightarrow R_f : [c, d] \end{cases}$ را در اختیار داشته باشیم، با فرض $k > 0$ داریم:

ضابطه	ضابطه تابع f را در k ضرب می‌کنیم.
نمودار	نمودار تابع f را در راستای محور y ها با ضریب k ، منبسط (کشیده) می‌کنیم.
نقطه متناظر	اگر نقطه $A(x, y)$ روی نمودار تابع f قرار داشته باشد، نقطه $A'(x, ky)$ روی نمودار تابع $kf(x)$ قرار دارد.
دامنه	دامنه تابع $kf(x)$ با دامنه تابع f برابر است.
برد	اگر برد تابع f به صورت $[c, d]$ باشد، برد تابع $kf(x)$ به صورت $[kc, kd]$ است.

ضابطه	ضابطه تابع f را در k ضرب می‌کنیم.
نمودار	نمودار تابع f را در راستای محور y ها با ضریب k ، منقبض می‌کنیم.
نقطه متناظر	اگر نقطه $A(x, y)$ روی نمودار تابع f قرار داشته باشد، نقطه $A'(x, ky)$ روی نمودار تابع $kf(x)$ قرار دارد.
دامنه	دامنه تابع $kf(x)$ با دامنه تابع f برابر است.
برد	اگر برد تابع f به صورت $[c, d]$ باشد، برد تابع $kf(x)$ به صورت $[kc, kd]$ است.

انبساط و انقباض افقی

اگر نمودار و یا ضابطه تابع $\begin{cases} y = f(x) \\ D_f = [a, b] \rightarrow R_f : [c, d] \end{cases}$ را در اختیار داشته باشیم، با فرض $k > 0$ داریم:

ضابطه	در ضابطه تابع f به جای تمامی x ها، (kx) قرار می‌دهیم.
نمودار	نمودار تابع f را در راستای محور x ها با ضریب $\frac{1}{k}$ ، منقبض (فشرده) می‌کنیم.
نقطه متناظر	اگر نقطه $A(x, y)$ روی نمودار تابع f قرار داشته باشد، نقطه $A'(\frac{x}{k}, y)$ روی نمودار تابع $f(kx)$ قرار دارد.
دامنه	اگر دامنه تابع f به صورت $[a, b]$ باشد، دامنه تابع $f(kx)$ به صورت $[\frac{a}{k}, \frac{b}{k}]$ است.
برد	برد تابع $f(kx)$ با برد تابع f برابر است.

ضابطه	در ضابطه تابع f به جای تمامی x ها، (kx) قرار می‌دهیم.
نمودار	نمودار تابع f را در راستای محور x ها، با ضریب $\frac{1}{k}$ ، منبسط (کشیده) می‌کنیم.
نقطه متناظر	اگر نقطه $A(x, y)$ روی نمودار تابع f قرار داشته باشد، نقطه $A'(\frac{x}{k}, y)$ روی نمودار تابع $f(kx)$ قرار دارد.
دامنه	اگر دامنه تابع f به صورت $[a, b]$ باشد، دامنه تابع $f(kx)$ به صورت $[\frac{a}{k}, \frac{b}{k}]$ است.
برد	برد تابع $f(kx)$ با برد تابع f برابر است.

بازتاب (قرینه) نمودار

اگر نمودار و یا ضابطه تابع $\left\{ \begin{array}{l} y = f(x) \\ D_f : [a, b] \rightarrow R_f : [c, d] \end{array} \right.$ را در اختیار داشته باشیم، داریم:

ضابطه	در ضابطه تابع f به جای تمامی x ها، $(-x)$ قرار می‌دهیم.
نمودار	نمودار تابع f را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم.
$f(-x)$	نقطه متناظر اگر نقطه $A(x, y)$ روی نمودار تابع f قرار داشته باشد، نقطه $A'(-x, y)$ روی نمودار تابع $f(-x)$ قرار دارد.
دامنه	اگر دامنه تابع f به صورت $[a, b]$ باشد، دامنه تابع $f(-x)$ به صورت $[-b, -a]$ است.
برد	برد تابع $f(-x)$ با برد تابع f برابر است.

ضابطه	ضابطه تابع f را در عدد (-1) ضرب می‌کنیم.
نمودار	نمودار تابع f را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم.
$-f(x)$	نقطه متناظر اگر نقطه $A(x, y)$ روی نمودار تابع f قرار داشته باشد، نقطه $A'(x, -y)$ روی نمودار تابع $-f(x)$ قرار دارد.
دامنه	اگر دامنه تابع f به صورت $[a, b]$ باشد، دامنه تابع $-f(x)$ به صورت $[a, b]$ است.
برد	اگر برد تابع f به صورت $[c, d]$ باشد، برد تابع $-f(x)$ به صورت $[-d, -c]$ است.



توجه

اگر نمودار تابع f را نسبت به خط $x = k$ قرینه کنیم، ضابطه تابع جدید به صورت $f(2k - x)$ است.
اگر نمودار تابع f را نسبت به خط $y = k$ قرینه کنیم، ضابطه تابع جدید به صورت $2k - f(x)$ است.

رسم نمودار تابع

اگر نمودار تابع $y = f(x)$ را در اختیار داشته باشیم، برای رسم نمودار تابع $y = af(bx + c) + d$ به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

الف) تاثیرات روی دامنه

۱) تاثیر عدد ثابت c : اگر $c > 0$ باشد، نمودار تابع را به اندازه c واحد به سمت چپ و اگر $c < 0$ باشد، نمودار تابع را به اندازه $|c|$ واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم.

۲) تاثیر ضریب x : طول تمامی نقاط را در $\frac{1}{|b|}$ ضرب می‌کنیم. (اگر b منفی باشد نمودار تابع نسبت به محور y قرینه می‌شود).

ب) تاثیرات روی برد

۳) تاثیر ضریب f : عرض تمامی نقاط را در $|a|$ ضرب می‌کنیم. (اگر a منفی باشد نمودار تابع نسبت به محور x ها قرینه می‌شود).

۴) تاثیر عدد ثابت d : اگر $d > 0$ باشد، نمودار تابع را به اندازه d واحد به سمت بالا و اگر $d < 0$ باشد، نمودار تابع را به اندازه $|d|$ واحد به سمت پایین منتقل می‌کنیم.

گروه آموزشی ماز

۲- باقی‌مانده تقسیم $f(x) = ax^2 + 4x + 1$ بر $x - 2$ برابر ۵ است. بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع f در آن اکیداً نزولی است، کدام می‌باشد؟
(۱) $(-\infty, 2)$ (۲) $(-\infty, -2)$ (۳) $(2, +\infty)$ (۴) $(-2, +\infty)$

(آسان - یکنواپی و بخش‌پذیری - مفهومی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۳

باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $x - 2$ برابر $f(2)$ می‌باشد:

$$f(2) = 5 \Rightarrow 4a + 8 + 1 = 5 \Rightarrow a = -1 \Rightarrow f(x) = -x^2 + 4x + 1$$

تابع درجه دوم $f(x) = -x^2 + 4x + 1$ از رأس خود تا $+\infty$ اکیداً نزولی است (تقعر تابع رو به پایین بوده و دارای ماکزیمم است).

$$x_{\text{رأس}} = \frac{-4}{2 \times (-1)} = 2$$

در نتیجه تابع f در بازه $(2, +\infty)$ اکیداً نزولی است.

قضیه تقسیم و بخش‌پذیری

قضیه تقسیم: اگر چندجمله‌ای $f(x)$ بر چندجمله‌ای $p(x)$ تقسیم کنیم و خارج‌قسمت به دست آمده را به صورت $q(x)$ و باقی‌مانده را نیز به صورت $r(x)$ فرض کنیم، رابطه زیر بین آن‌ها برقرار است:

$$\begin{array}{c} \text{مقسوم} \quad \quad \quad \text{خارج‌قسمت} \\ \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \\ f(x) = p(x) \cdot q(x) + r(x) \\ \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \\ \text{مقسوم‌علیه} \quad \quad \text{باقی‌مانده} \end{array}$$

دقت کنید که درجه باقی‌مانده از درجه مقسوم‌علیه کمتر است.



اگر مقسوم‌علیه از درجه اول باشد، باقی‌مانده از درجه صفر (عدد ثابت) است و اگر مقسوم‌علیه از درجه دوم باشد، باقی‌مانده حداکثر از درجه اول $(ax + b)$ است.

$$f(x) = (ax + b)q(x) + R \quad f(x) = (ax^2 + bx + c)q(x) + (mx + n)$$

حداکثر از درجه اول چندجمله‌ای درجه دوم عدد ثابت چندجمله‌ای درجه اول

به طور کلی می‌توان گفت: اگر مقسوم $(f(x))$ از درجه n و مقسوم‌علیه $(p(x))$ از درجه m باشد، آنگاه:

❖ خارج‌قسمت $(q(x))$ از درجه $(n - m)$ است. ❖ باقی‌مانده $(r(x))$ ، حداکثر از درجه $(m - 1)$ است.

به عنوان مثال

اگر چندجمله‌ای $x^5 - 2x^4 + 3x - 1$ را بر $x^3 + 3x^2 + 1$ تقسیم کنیم، خارج‌قسمت از درجه $2 - 3 = -1$ و باقی‌مانده حداکثر از درجه $3 - 1 = 2$ است.

باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $(ax + b)$

زمانی که چندجمله‌ای $f(x)$ را بر عبارت درجه اول $(ax + b)$ تقسیم می‌کنیم، باقی‌مانده‌ای که حاصل می‌شود، عددی ثابت است و در این حالت رابطه تقسیم برابر است:

$$f(x) = (ax + b)q(x) + R \Rightarrow \text{باقی‌مانده (عدد ثابت)}$$

حالا برای این که باقی‌مانده رو به دست بیاریم، اول میایم و $ax + b$ رو برابر صفر قرار می‌دیم و ریشه اون رو به دست میاریم (که میشه $x = -\frac{b}{a}$)، بعدش ریشه‌ای که

به دست آوردیم رو داخل چندجمله‌ای $f(x)$ قرار می‌دیم و عددی که به دست میاد رو به عنوان باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $ax + b$ معرفی می‌کنیم، به عبارت دیگه:

$$\begin{cases} ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a} \\ R = f(-\frac{b}{a}) \end{cases}$$

گروه آموزشی ماز

۳- اگر تابع f را ابتدا دو واحد به سمت راست انتقال داده، سپس طول نقاط را دو برابر کنیم، تابع $g(x) = x^2 - x$ حاصل می‌شود. اگر در تابع f ابتدا طول

نقاط را دو برابر کرده، سپس دو واحد به سمت راست انتقال دهیم، به کدام ضابطه خواهیم رسید؟

(۴) $y = x^2 + 3x - 2$

(۳) $y = x^2 + 2x + 2$

(۲) $y = x^2 + x$

(۱) $y = x^2 - x$

(متوسط - تبدیل نمودار توابع - مفهومی / محاسباتی - ۱۴۰۱)

پاسخ: گزینه ۳

برای به دست آوردن ضابطه تابع f ، ابتدا طول نقاط تابع g را نصف کرده، سپس دو واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم:

$$y = g(x) \xrightarrow{\text{طول نقاط را نصف کنیم}} y = g(2x) \xrightarrow{\text{۲ واحد انتقال به چپ}} f(x) = g(2(x+2)) \Rightarrow f(x) = g(2x+4)$$

اکنون طول نقاط f را دو برابر کرده و ۲ واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم:

$$y = f(x) \xrightarrow{\text{۲ برابر کردن طول نقاط}} y = f(\frac{x}{2}) \xrightarrow{\text{۲ واحد انتقال به راست}} y = f(\frac{x-2}{2}) = f(\frac{x}{2}-1)$$

$$f(x) = g(2x+4) \Rightarrow f(\frac{x}{2}-1) = g(2(\frac{x}{2}-1)+4) = g(x+2)$$

حال خواهیم داشت:

$$\Rightarrow g(x+2) = (x+2)^2 - (x+2) = x^2 + 4x + 4 - x - 2 = x^2 + 3x + 2$$

گروه آموزشی ماز

۴- تابع $f(x) = x^3 + 3x(|x|+1)$ از نظر یکنوایی در مجموعه اعداد حقیقی چگونه است؟

(۲) ابتدا صعودی، سپس نزولی

(۱) اکیداً صعودی

(۴) ابتدای صعودی، سپس نزولی و بعد صعودی

(۳) ابتدا نزولی، سپس صعودی

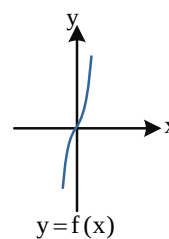
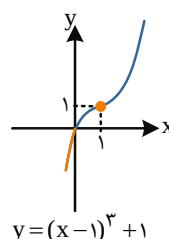
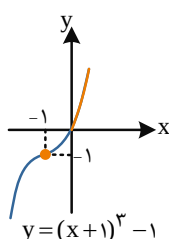
(متوسط - یکنوایی و بخش‌پذیری - مفهومی / محاسباتی - ۱۴۰۱)

پاسخ: گزینه ۱

روش اول:

ضابطه تابع را به صورت دوضابطه‌ای نوشته و رسم می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 3x^2 + 3x & x \geq 0 \\ x^3 - 3x^2 + 3x & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} (x+1)^3 - 1 & x \geq 0 \\ (x-1)^3 + 1 & x < 0 \end{cases}$$



با توجه به نمودار، تابع اکیداً صعودی می باشد.

روش دوم:

تابع داده شده در هر دو ضابطه خود، اکیداً صعودی است، بنابراین در دامنه خود اکیداً صعودی می باشد.

گروه آموزشی ماز

۵- تابع $f(x) = (\frac{1}{4})^x - x$ مفروض است. مجموعه جواب نامعادله $f(x) < f(4-x)$ کدام است؟

(۴) $x < -1$

(۳) $x \geq -1$

(۲) $x < 1$

(۱) $x > 1$

(آسان - یکنوایی و بخش پذیری - مفهومی / محاسباتی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۴

توابع $y = -x$ و $y = (\frac{1}{4})^x$ اکیداً نزولی می باشند، بنابراین مجموع آن ها یعنی $f(x) = (\frac{1}{4})^x - x$ نیز اکیداً نزولی می باشد. حال خواهیم داشت:

$$f(x) < f(4-x) \Rightarrow f(f(x)) < f(4-x) \Rightarrow f(x) > 4-x \Rightarrow (\frac{1}{4})^x - x > 4-x$$

$$\Rightarrow (\frac{1}{4})^x > 4 \Rightarrow (\frac{1}{4})^x > (\frac{1}{4})^{-1} \Rightarrow x < -1$$

صعودی یا نزولی بودن توابع

جدول پایین رو دریاب که بهت قول می دم خیلی از جاها به دردت می خوره...

$(g \circ f)(x)$	$(f \circ g)(x)$	$f(x) + g(x)$	$-f(x)$	$g(x)$	$f(x)$
صعودی	صعودی	صعودی	نزولی	صعودی	صعودی
صعودی	صعودی	نزولی	صعودی	نزولی	نزولی

گروه آموزشی ماز

۶- به ازای چند مقدار صحیح a تابع $f(x) = \begin{cases} 2ax - 3 & x \leq a \\ x^2 - 2x & x > a \end{cases}$ اکیداً صعودی است؟

(۴) بی شمار

(۳) ۲

(۲) ۱

(۱) صفر

(سخت - یکنوایی و بخش پذیری - مفهومی / محاسباتی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۲

اولاً تابع باید در هر یک از ضابطه های خود، اکیداً صعودی بوده و ثانیاً مقدار تابع در ضابطه بالا کوچک تر یا مساوی مقدار تابع در ضابطه پایین به ازای $x = a$ باشد. (تعریف نشده بودن $x = a$ در ضابطه پایین خللی در مفهوم ایجاد نمی کند)

برای آن که تابع $y = 2ax - 3$ اکیداً صعودی باشد، باید شیب خط مثبت باشد، یعنی: $a > 0$ (*)

همچنین تابع $y = x^2 - 2x$ باید در $(a, +\infty)$ اکیداً صعودی باشد و از آن جا که سهمی رو به بالاست، بنابراین طول رأس سهمی باید کوچک تر یا مساوی a باشد، یعنی:

$$x_S = \frac{2}{2 \times 1} = 1 \Rightarrow 1 \leq a \quad (**)$$

$$2a(a) - 3 \leq a^2 - 2a \Rightarrow 2a^2 - 3 \leq a^2 - 2a$$

$$\Rightarrow a^2 + 2a - 3 \leq 0 \Rightarrow (a+3)(a-1) \leq 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -3 \leq a \leq 1 \quad (***)$$

$$(*) \cap (**) \cap (***) \Rightarrow a = 1$$

و در نهایت خواهیم داشت:

بنابراین به ازای یک مقدار a تابع اکیداً صعودی است.

بررسی یکنوایی توابع دوضابطه ای

با توجه به جدول زیر برای بررسی یکنوایی توابع دوضابطه ای به فرم $y = \begin{cases} f(x) & x \geq a \\ g(x) & x < a \end{cases}$ داریم:

تابع صعودی باشد	تابع نزولی باشد
$f'(x) \geq 0$	$f'(x) \leq 0$
$g'(x) \geq 0$	$g'(x) \leq 0$
$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \geq \lim_{x \rightarrow a^-} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a^-} g(x)$

۷- دوره تناوب تابع $f(x) = a + b \sin(\frac{a\pi x}{b})$ برابر $\frac{2}{3}$ است. نسبت ماکزیمم این تابع به مینیمم آن چقدر است؟ ($a \neq 0$)

(۴) $\frac{1}{4}$ یا $\frac{1}{2}$

(۳) $\frac{1}{4}$ یا $\frac{1}{3}$

(۲) $\frac{1}{2}$ یا $\frac{1}{4}$

(۱) ۲ یا ۴

(متوسط - مثلثات - محاسباتی - ۱۴۰۲)

پاسخ: گزینه ۲

در تابع به فرم $y = a \sin bx + c$ ، دوره تناوب، ماکزیمم و مینیمم به ترتیب برابر $\frac{2\pi}{|b|}$ ، $|a| + c$ ، $-|a| + c$ است، پس داریم:

$$T = \frac{2}{3} = \frac{2\pi}{|a\pi|} = \frac{2|b|}{|a|} \Rightarrow |a| = 3|b|$$

$$\frac{\max}{\min} = \frac{|b| + a}{-|b| + a} = \frac{a + \frac{1}{3}|a|}{a - \frac{1}{3}|a|} = \frac{3a + |a|}{3a - |a|} \Rightarrow \begin{cases} a > 0 \Rightarrow \frac{3a + a}{3a - a} = \frac{4a}{2a} = 2 \\ a < 0 \Rightarrow \frac{3a - a}{3a - (-a)} = \frac{2a}{4a} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

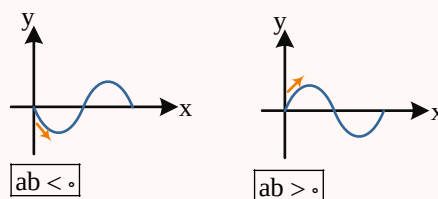
دقت کنید نسبت max به min اگر هر دو منفی باشند می تواند کمتر از ۱ باشد و اگر هر دو مثبت باشند، نسبت آن ها بزرگ تر از ۱ است.

تحلیل نمودار توابع مثلثاتی

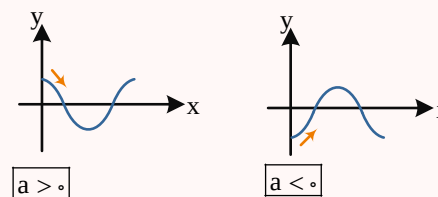
در برخی از سوالات مرتبط با این مبحث، نمودار تابع مثلثاتی را به ما می دهند و از ما می خواهند که پارامترهای مجهولی که در ضابطه تابع وجود دارد را به دست آوریم. برای این کار باید با استفاده از نمودار تابع و تحلیل آن اطلاعاتی که درون نمودار نهفته است را به دست آورده و با استفاده از آن ها مجهولات موردنظر سوال را پیدا کنیم. برای تحلیل نمودار توابع، نیازمند یک سری ابزار هستیم که در ادامه آن ها را به شما معرفی می کنیم.

تحلیل نمودار توابع به فرم $y = a \cos(bx) + c$ و $y = a \sin(bx) + c$

شروع (start) نمودار: در تابع $y = a \sin(bx) + c$ ، اگر a و b هم علامت نباشند ($ab < 0$)، نمودار از $x = 0$ به صورت نزولی حرکت می کند و اگر a و b هم علامت باشند ($ab > 0$)، نمودار در شروع از صفر صعودی است.



در تابع $y = a \cos(bx) + c$ ، اگر $a > 0$ باشد، نمودار از $x = 0$ به صورت نزولی حرکت می کند و اگر $a < 0$ باشد، نمودار در شروع از صفر صعودی است.



توجه به این که $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ و اصطلاحاً منفی خوار بودن کسینوس، علامت ضرب x (b) در تحلیل نمودار کسینوسی تاثیری ندارد.

بیشترین مقدار (max) و کمترین مقدار (min) نمودار

$\max : |a| + c \Rightarrow$ مقدار ثابت + ضرب $\sin$ یا $\cos$: بیشترین مقدار

$\min : -|a| + c \Rightarrow$ مقدار ثابت + ضرب $\sin$ یا $\cos$: کمترین مقدار

حال اگر دو طرف روابط بالا را یکبار از هم کم و یکبار با هم جمع کنیم، به نتایج جالبی می رسیم:

$$\begin{aligned} \max &= |a| + c & \max &= |a| + c \\ (-) \min &= -|a| + c & (+) \min &= -|a| + c \\ \hline \max - \min &= 2|a| & \max + \min &= 2c \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |a| = \frac{\max - \min}{2}$$

$$\Rightarrow c = \frac{\max + \min}{2}$$

بنابراین با داشتن مقادیر max و min در نمودار، می توانیم با استفاده از روابط فوق، مقدار ثابت در ضابطه تابع (c) و نیز $|a|$ را به دست آوریم.

به عنوان مثال

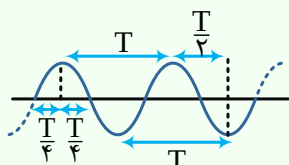
در تابع $y = 3 \cos(\pi - 2x) - 4$ داریم:

$$\begin{cases} a = 3 \\ b = -2 \\ c = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} \max : |a| + c &= |3| + (-4) = 3 - 4 = -1 \\ \min &= -|a| + c = -|3| - 4 = -3 - 4 = -7 \end{aligned}$$

دوره تناوب

$$\text{دوره تناوب} = \frac{2\pi}{|x \text{ ضریب}|} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|-2|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

نکته



فاصله دو دره متوالی = فاصله دو قله متوالی T

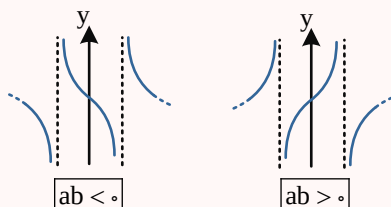
$\frac{T}{2}$ = فاصله یک قله و یک دره متوالی

$\frac{T}{4}$ = نصف قله = نصف دره

از فصل موج در فیزیک به خاطر داریم که

تحلیل نمودار تابع به فرم $y = a \tan(bx) + c$

در توابع به فرم $y = a \tan(bx) + c$ ، اگر a و b هم‌علامت نباشند ($ab < 0$) نمودار تابع در بازه‌های تعریف شده اکیداً نزولی و اگر a و b هم‌علامت باشند ($ab > 0$)، نمودار تابع در بازه‌های تعریف شده اکیداً صعودی است.

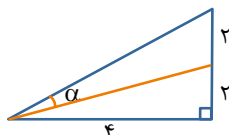


دوره تناوب این توابع برابر است با:

$$\text{دوره تناوب} = \frac{\pi}{|x \text{ ضریب}|} \Rightarrow T = \frac{\pi}{|b|}$$

گروه آموزشی ماز

۸- در شکل مقابل، مقدار $\tan \alpha$ کدام است؟



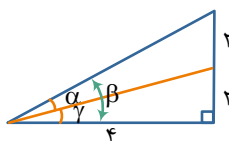
$$\begin{aligned} (1) & \frac{1}{2} \\ (2) & \frac{1}{3} \\ (3) & \frac{1}{4} \\ (4) & \frac{2}{3} \end{aligned}$$

(آسان - مثلثات - محاسباتی - ۱۴۰۲)

پاسخ: گزینه ۲

با توجه به شکل زیر، خواهیم داشت:

$$\tan \gamma = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad \tan \beta = \frac{2}{2} = 1$$



بنابراین: $\alpha = \beta - \gamma$

$$\tan \alpha = \tan(\beta - \gamma) = \frac{\tan \beta - \tan \gamma}{1 + \tan \beta \cdot \tan \gamma} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + (1 \times \frac{1}{2})} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}$$

محاسبهٔ تانژانت زوایای غیر مرزی

برای محاسبهٔ $\tan(\alpha \pm \beta)$ به طوری که α و β جزء زوایای مرزی دایرهٔ مثلثاتی نباشند، از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$$

به عنوان مثال

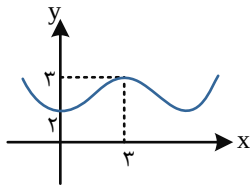
$$\tan 105^\circ = \tan(60^\circ + 45^\circ) = \frac{\tan 60^\circ + \tan 45^\circ}{1 - \tan 60^\circ \tan 45^\circ} = \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3}}$$

برای محاسبهٔ $\tan 105^\circ$ داریم:

نتیجه مهم: در رابطه $\tan(\alpha \pm \beta)$ ، اگر $\alpha = \beta$ باشد، داریم:

$$\tan(\alpha + \alpha) = \frac{\tan \alpha + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha \tan \alpha} \Rightarrow \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

گروه آموزشی ماز



۹- نمودار تابع $f(x) = a \cos^2 bx + c$ به صورت مقابل است. $f(10)$ چقدر است؟

- (۱) ۲
- (۲) ۲/۲۵
- (۳) ۲/۵
- (۴) ۲/۷۵

(سخت - مثلثات - محاسباتی / مفهومی - ۱۴۰۲)

پاسخ: گزینه ۴

از رابطه $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$ استفاده می‌کنیم. از آنجا که نمودار روی محور yها، min دارد، پس $a < 0$ است.

$$f(x) = a \cos^2 bx + c = \frac{a}{2}(1 + \cos 2bx) + c = \frac{a}{2} \cos 2bx + \frac{a}{2} + c$$

$$\min = -\left|\frac{a}{2}\right| + \frac{a}{2} + c = 2 \xrightarrow{a < 0} \frac{a}{2} + \frac{a}{2} + c = 2$$

$$\max = \left|\frac{a}{2}\right| + \frac{a}{2} + c = 3 \xrightarrow{a < 0} -\frac{a}{2} + \frac{a}{2} + c = 3 \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ c = 3 \end{cases}$$

همچنین با توجه به اینکه فاصله طولی بین یک ماکزیمم و یک مینیمم متوالی، برابر با نصف دوره تناوب است، پس: $T = 6$

$$T = \frac{2\pi}{|2b|} = 6 \Rightarrow |b| = \frac{\pi}{6} \Rightarrow b = \frac{\pi}{6}$$

(توجه کنید که b می‌تواند $\frac{\pi}{6}$ یا $-\frac{\pi}{6}$ باشد، زیرا تابع $\cos$ منفی‌خوار است و علامت b تاثیری در جواب ندارد).

$$f(x) = -\cos^2\left(\frac{\pi}{6}x\right) + 3$$

در نتیجه:

$$\text{خواسته مسئله: } f(10) = -\cos^2\left(\frac{10\pi}{6}\right) + 3 = -\cos^2\left(\frac{5\pi}{3}\right) + 3 = -\frac{1}{4} + 3 = \frac{11}{4} = 2.75$$

گروه آموزشی ماز

۱۰- جواب کلی معادله $4 \sin^2 x = 2 - \sqrt{3}$ به کدام صورت است؟

$$2k\pi \pm \frac{\pi}{24} \quad (۴)$$

$$k\pi \pm \frac{\pi}{24} \quad (۳)$$

$$2k\pi \pm \frac{\pi}{12} \quad (۲)$$

$$k\pi \pm \frac{\pi}{12} \quad (۱)$$

(متوسط - مثلثات - محاسباتی - ۱۴۰۲)

پاسخ: گزینه ۱

از رابطه مثلثاتی $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ استفاده کرده و معادله را ساده می‌کنیم:

$$4\left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right) = 2 - \sqrt{3} \Rightarrow 2 - 2 \cos 2x = 2 - \sqrt{3} \Rightarrow \cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{12}$$

نسبت‌های مثلثاتی 2α

$$\bullet \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\Rightarrow \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\left\{ \begin{aligned} \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = (\cos \alpha - \sin \alpha)(\cos \alpha + \sin \alpha) \\ \bullet \cos 2\alpha &= 2 \cos^2 \alpha - 1 \xrightarrow{\text{نتیجه}} \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \cos 2\alpha &= 1 - 2 \sin^2 \alpha \xrightarrow{\text{نتیجه}} \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \end{aligned} \right.$$

به عنوان مثال

$$\sin(\alpha) = 2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\sin(6\alpha) = 2 \sin(3\alpha) \cos(3\alpha)$$

$$\bullet \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

$$\text{در حالت کلی تر} \Rightarrow \tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$$

به عنوان مثال

$$\tan(110^\circ) = \frac{2 \tan(55^\circ)}{1 - \tan^2(55^\circ)}$$

$$\text{در حالت کلی تر} \Rightarrow \cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 1 - 2 \sin^2 \theta$$

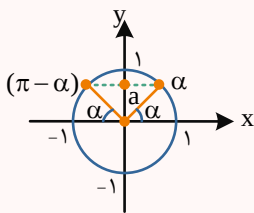
به عنوان مثال

$$\cos(\alpha) = \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 1 = 1 - 2 \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\cos(20^\circ) = \cos^2(10^\circ) - \sin^2(10^\circ) = 2 \cos^2(10^\circ) - 1 = 1 - 2 \sin^2(10^\circ)$$

معادلات به فرم $\sin x = a$

برای حل معادلات به فرم $\sin x = a$ که در آن a عددی حقیقی و $-1 \leq a \leq 1$ است، ابتدا زاویه‌ای مانند α که مقدار سینوس آن برابر a باشد را پیدا کرده ($\sin \alpha = a$) و سپس معادله $\sin x = a$ را به صورت $\sin x = \sin \alpha$ بازنویسی می‌کنیم. در نهایت برای پیدا کردن جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin x = \sin \alpha$ داریم:



$$\sin x = \sin \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + (\pi - \alpha) \end{cases}$$

و در حالت کلی‌تر داریم:

$$\sin f(x) = \sin g(x) \Rightarrow \begin{cases} f(x) = 2k\pi + g(x) \\ f(x) = 2k\pi + \pi - g(x) \end{cases}$$

به عنوان مثال

برای حل معادله $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ، ابتدا باید زاویه‌ای که سینوس آن برابر $\frac{\sqrt{2}}{2}$ است را پیدا کرده ($\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$)، سپس در معادله $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ به جای $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ، $\sin \frac{\pi}{4}$ را قرار می‌دهیم و سپس جواب‌های آن را محاسبه می‌کنیم.

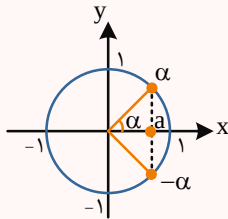
$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \xrightarrow{\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{4}} \sin x = \sin \frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ x_2 = 2k\pi + (\pi - \frac{\pi}{4}) = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

حالت‌های خاص معادلات سینوسی

معادله	جواب کلی	جواب‌ها روی دایره مثلثاتی
$\sin x = 0$	$x = k\pi$	
$\sin x = 1$	$x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$	
$\sin x = -1$	$x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$	

معادلات به فرم $\cos x = a$

برای حل معادلات به فرم $\cos x = a$ که در آن a عددی حقیقی و $-1 \leq a \leq 1$ است نیز همانند حل معادلات سینوسی، ابتدا باید زاویه‌ای مانند α که مقدار سینوس آن برابر a باشد را پیدا کنیم ($\cos \alpha = a$) و سپس معادله $\cos x = a$ را به صورت $\cos x = \cos \alpha$ بنویسیم، در نهایت برای پیدا کردن جواب‌های معادله مثلثاتی $\cos x = \cos \alpha$ داریم:



$$\cos x = \cos \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi - \alpha \end{cases}$$

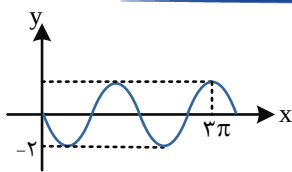
و در حالت کلی‌تر داریم:

$$\cos f(x) = \cos g(x) \Rightarrow \begin{cases} f(x) = 2k\pi + g(x) \\ f(x) = 2k\pi - g(x) \end{cases}$$

حالت‌های خاص معادلات کسینوسی

معادله	جواب کلی	جواب‌ها روی دایره مثلثاتی
$\cos x = 0$	$x = k\pi + \frac{\pi}{2}$	
$\cos x = 1$	$x = 2k\pi$	
$\cos x = -1$	$x = (2k+1)\pi$	

گروه آموزشی ماز



۱۱- قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a \sin bx$ به صورت مقابل است. دوره تناوب تابع $g(x) = \cos(abx)$ کدام است؟

(۲) $\frac{3}{4}\pi$
(۴) $\frac{8}{4}\pi$

(۱) $\frac{6}{7}\pi$
(۳) $\frac{8}{7}\pi$

(آسان - مثلثات - محاسباتی - ۱۴۰۲)

پاسخ: گزینه ۱

$$\min = -2 \Rightarrow -|a| = -2 \Rightarrow |a| = 2$$

با توجه به نمودار داده شده:

$$T + \frac{3}{4}T = 3\pi \Rightarrow \frac{7T}{4} = 3\pi \Rightarrow T = \frac{12\pi}{7} \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = \frac{12\pi}{7} \Rightarrow |b| = \frac{7}{6}$$

همچنین:

$$\frac{2\pi}{|ab|} = \frac{2\pi}{2 \times \frac{7}{6}} = \frac{6}{7}\pi$$

دوره تناوب تابع $\cos(abx)$ برابر $\frac{2\pi}{|ab|}$ می‌باشد که برابر است با:

گروه آموزشی ماز

۱۲- مجموع جواب‌های معادله $\sin(x - \frac{\pi}{3}) + \cos(2x - \frac{\pi}{3}) = 0$ در فاصله $[0, \pi]$ چقدر است؟

(۴) $\frac{23\pi}{18}$

(۳) $\frac{25\pi}{18}$

(۲) $\frac{11\pi}{9}$

(۱) $\frac{8\pi}{9}$

(سخت - مثلثات - محاسباتی - ۱۴۰۲)

پاسخ: گزینه ۴

معادله را ساده کرده و حل می‌کنیم:

$$\sin(x - \frac{\pi}{3}) + \cos(2x - \frac{\pi}{3}) = 0 \Rightarrow \cos(2x - \frac{\pi}{3}) = -\sin(x - \frac{\pi}{3}) = \sin(\frac{\pi}{3} - x)$$

حال با توجه به روابط بین زاویه‌های متمم می‌توان از تساوی زیر استفاده کرد:

$$\sin(\frac{\pi}{3} - x) = \cos(\frac{\pi}{3} - (\frac{\pi}{3} - x)) \Rightarrow \sin(\frac{\pi}{3} - x) = \cos(\frac{\pi}{6} + x)$$

در نتیجه معادله به صورت زیر درمی آید:

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) \Rightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \frac{\pi}{6} + x \\ 2x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi - \frac{\pi}{6} - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \xrightarrow{0 < x < \pi} x = \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{18} \xrightarrow{0 < x < \pi} \begin{cases} x = \frac{\pi}{18} \\ x = \frac{13\pi}{18} \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{مجموع جواب های معادله} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{18} + \frac{13\pi}{18} = \frac{23\pi}{18}$$

در نتیجه:

گروه آموزشی ماز

۱۳- تابع $y = \tan\left(ax - \frac{\pi}{6}\right) - 1$ در بازه $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ صعودی است. محدوده a کدام است؟

(۴) $\left[-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right]$

(۳) $\left[0, \frac{4}{3}\right]$

(۲) $\left[0, \frac{2}{3}\right]$

(۱) $\left[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right]$

(سخت - مثلثات - مفهومی / محاسباتی - ۱۲۰۲)

پاسخ: گزینه ۳

تابع تنازات در بازه‌ای که تعریف شده و فاقد مجانب قائم باشد، اکیداً صعودی است، پس $a \geq 0$ است. (توجه کنید که اگر $a < 0$ باشد، تابع تنازات نزولی خواهد بود.)

$$a > 0: 0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < ax < \frac{a\pi}{2} \Rightarrow \frac{-\pi}{6} < ax - \frac{\pi}{6} < \frac{a\pi}{2} - \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{a\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{a\pi}{2} \leq \frac{2\pi}{3} \Rightarrow a \leq \frac{4}{3} \xrightarrow{a > 0} 0 < a \leq \frac{4}{3}$$

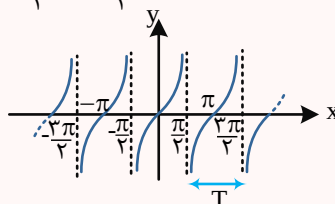
به ازای $a = 0$ تابع ثابت بوده $\left(y = \tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) - 1 = -\frac{\sqrt{3}}{3} - 1 = \frac{-\sqrt{3}-3}{3}\right)$ و صعودی می‌باشد، بنابراین جواب مسئله $0 < a \leq \frac{4}{3}$ می‌باشد.

تابع $y = \tan x$ و ویژگی‌های آن

دامنه: $D = \mathbb{R} - \left\{k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$ یا به صورت دیگر می‌شود: $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

برد: مجموعه اعداد حقیقی $(\mathbb{R})$

- نمودار این تابع در بازه‌هایی به طول π تکرار می‌شود، بنابراین تابع $y = \tan x$ تابعی متناوب با دوره تناوب $T = \pi$ است.
- این تابع در نقاطی به طول‌های $x = 0, x = \pi, \dots$ و به طور کلی در نقاطی به طول‌های $x = k\pi, (k \in \mathbb{Z})$ ، محور x ها را قطع می‌کند.
- همان‌طور که از نمودار تابع مشخص است، این تابع در بازه‌های $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right), \dots$ اکیداً صعودی است ولی در کل دامنه‌اش تابعی نه صعودی و نه نزولی است. (غیریکنواست) و به طور کلی می‌توان گفت که تابع $y = \tan x$ در بازه‌های به فرم $\left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right), (k \in \mathbb{Z})$ اکیداً صعودی است.



گروه آموزشی ماز

۱۴- تابع $f(x) = \frac{x^2 + x}{x^3 - x^2}$ مفروض است. حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ به ترتیب از راست به چپ کدام است؟

(۴) $+\infty, +\infty$

(۳) $+\infty, -\infty$

(۲) $-\infty, +\infty$

(۱) $-\infty, -\infty$

(آسان - حدهای نامتناهی - محاسباتی - ۱۲۰۳)

پاسخ: گزینه ۳

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + x}{x^3 - x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(x+1)}{x^2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x+1}{x(x-1)} = \frac{1}{0^-(-1)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + x}{x^3 - x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(x+1)}{x^2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+1}{x(x-1)} = \frac{1}{0^+(-1)} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

هدف ما در این درسنامه، حد نامتناهی در توابع کسری است. حال برای محاسبه حد $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ ، دو حالت را بررسی می‌کنیم:

حالت اول: اگر حاصل حد صورت کسر در $x = a$ برابر عددی غیر صفر و حاصل حد مخرج کسر در $x = a$ برابر صفر باشد، در این صورت حاصل حد برابر $+\infty$ و یا $-\infty$ خواهد شد که برای مشخص کردن علامت ∞ ، باید علامت عدد صورت کسر و علامت صفر مخرج را تعیین کنیم که حالت‌های مختلف آن را در جدول زیر بررسی کرده‌ایم:

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$	مثال
عدد +	$\frac{0}{0}^+$	$\frac{+ \text{ عدد}}{0^+} = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-1}{x^2-x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$
عدد +	$\frac{0}{0}^-$	$\frac{+ \text{ عدد}}{0^-} = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+3}{x^2-4} = \frac{5}{0^-} = -\infty$
عدد -	$\frac{0}{0}^+$	$\frac{- \text{ عدد}}{0^+} = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x}-2}{x^2-1} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$
عدد -	$\frac{0}{0}^-$	$\frac{- \text{ عدد}}{0^-} = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{2x+1}{x+1} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$



توجه

توجه کنید در تمامی موارد بالا، مقدار حد مخرج کسر برابر صفر حدی است، به عبارت دیگر، حاصل حد مخرج کسر، عددی بسیار نزدیک به صفر است و دقیقاً خود صفر نیست و از طرفی می‌دانیم که اگر در یک حدی حاصل حد مخرج کسر برابر صفر مطلق (یعنی خود خود صفر) باشد، در این صورت، می‌گوییم که آن حد جواب ندارد و اصطلاحاً تعریف نشده است.

حالت دوم: اگر حاصل حد صورت کسر در $x = a$ برابر یک عدد و حاصل حد مخرج کسر در $x = a$ برابر بی‌نهایت (حالا یا $+\infty$ و یا $-\infty$) باشد، در این صورت، حاصل حد برابر صفر است، به عبارت دیگر:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \\ \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{\pm\infty} = 0$$

گروه آموزشی ماز

۱۵- به ازای کدام مقدار a ، حاصل $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 + 2x(|x|+1)}{x^2-x}$ برابر ۲ است؟

(۱) صفر (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

(آسان - حد در بی‌نهایت - محاسباتی - ۱۴۰۳)

پاسخ: گزینه ۴

چون $x \rightarrow -\infty$ می‌باشد، پس $x < 0$ است و $|x| = -x$ ، در نتیجه:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax^2 + 2x(-x+1)}{x^2-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(a-2)x^2 + 2x}{x^2-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(a-2)x^2}{x^2} = 2$$

$\Rightarrow a-2=2 \Rightarrow a=4$

گروه آموزشی ماز

۱۶- اگر m تعداد مجانب‌های قائم و n تعداد مجانب‌های افقی تابع $f(x) = \frac{2x + \sqrt{x^2 - 4x}}{x^2 - 4}$ باشد، زوج مرتب (m, n) کدام است؟

(۴) $(2, 2)$

(۳) $(2, 1)$

(۲) $(1, 2)$

(۱) $(1, 1)$

(متوسط - حد در بی‌نهایت - محاسباتی - ۱۴۰۳)

پاسخ: گزینه ۱

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

$x = 2$ و $x = -2$ ریشه‌های مخرج کسر می‌باشند، اما تابع در همسایگی $x = 2$ تعریف نشده است، بنابراین $x = 2$ نمی‌تواند مجانب قائم باشد و تابع فقط یک مجانب قائم را داراست:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x + \sqrt{x^2 - 4x}}{x^2 - 4} = \frac{-4 + \sqrt{12}}{0^{\pm}} = \pm\infty$$

حال حد تابع را در $\pm\infty$ حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x + \sqrt{x^2 - 4x}}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x + \sqrt{x^2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x + |x|}{x^2} = 0$$

در نتیجه $y = 0$ تنها مجانب افقی تابع است. بنابراین $m = n = 1$ می‌باشد.

مجانب قائم

خط $x = a$ را مجانب قائم تابع f می‌گوییم هرگاه حداقل یکی از شرط‌های زیر برقرار باشد:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$



در واقع مجانب قائم طول نقطه‌ای است که تابع در یک همسایگی آن نامتناهی شود.

نکته ۱

در توابع کسری، ریشه‌های مخرج کاندیدای مجانب قائم هستند، به شرط آن‌که حد تابع را نامتناهی کنند.

$$1) f(x) = \frac{|x|}{9 - x^2} \xrightarrow{\text{ریشه مخرج}} x = \pm 3 \xrightarrow{\text{چون}} \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \infty$$

$$2) f(x) = \tan x, x \in [0, 2\pi] - \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\} \Rightarrow f(x) = \frac{\sin x}{\cos x} \xrightarrow{\text{ریشه مخرج}} \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{3\pi}{2}$$

در تابع $y = \tan x$ حد تابع در $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ و $x \rightarrow \frac{3\pi}{2}$ نامتناهی می‌شود، پس هر دو مجانب قائم هستند.

نتیجه: مجانب قائم عضو دامنه تابع نیست ولی در حداقل یک همسایگی آن تابع تعریف می‌شود.

به عنوان مثال

در تابع $f(x) = \frac{|x|}{9 - x^2}$ ، دامنه تابع $\mathbb{R} - \{\pm 3\}$ یعنی $(-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, +\infty)$ می‌باشد و اعداد ۳ و -۳ چسبیده به دامنه (مرز بازها) هستند، یا در تابع زیر:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}} + \frac{1}{\sqrt{x-2}} \Rightarrow D_f = (2, +\infty) \xrightarrow{\text{احتمالاً}} x = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \frac{1}{1} + \frac{1}{0^+} = +\infty$$

نکته ۲

هنگام به دست آوردن مجانب قائم، بهتر است تا حد امکان ضابطه تابع را ساده کرده باشیم.

به عنوان مثال

تابع $f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - 1}$ را در نظر بگیرید:

$$f(x) = \frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{x}{x+1} \xrightarrow{\text{چون}} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{x+1} = \infty$$

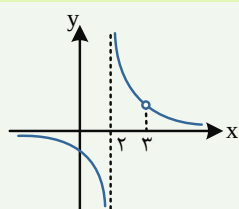
اگر $x = a$ هم ریشهٔ مخرج و هم ریشهٔ صورت کسر باشد، یعنی حد را به حالت مبهم $\frac{0}{0}$ تبدیل کند، به ازای $x \rightarrow a$ حد تابع را می‌یابیم، در این صورت:

(۱) اگر حاصل حد نامتناهی (∞) شد، $x = a$ مجانب قائم است.

(۲) اگر حاصل حد متناهی (عدد) شد، $x = a$ نقطهٔ توخالی در نمودار تابع است.

نمودار تابع در اطراف ریشهٔ مخرج	حد تابع به ازای ریشهٔ مخرج	ریشهٔ مخرج	تابع
	$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x}{3-x} = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x}{3-x} = +\infty$	$x = 3$	$f(x) = \frac{x}{3-x}$
	$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x}{\sqrt{x-3}} = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x}{\sqrt{x-3}} = \text{تعریف نشده}$	$x = 3$	$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-3}}$
	$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{(x-3)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{(x-3)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$	$x = 3$	$f(x) = \frac{1}{(x-3)^2}$
	$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{(x-3)^2} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{ساده}} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+3}{x-3} = \begin{cases} x \rightarrow 3^+ : +\infty \\ x \rightarrow 3^- : -\infty \end{cases}$	$x = 3$	$f(x) = \frac{x^2-9}{(x-3)^2}$
	$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{ساده}} \lim_{x \rightarrow 3} (x+3) = 6$	$x = 3$	$f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$

به عنوان مثال



فرض کنید نمودار تابع $f(x) = \frac{x+c}{x^2+ax+b}$ به شکل مقابل باشد.

اولاً: $x = 2$ مجانب قائم است، پس ریشهٔ مخرج است.

ثانیاً: $x = 3$ طول نقطهٔ توخالی است، پس همزمان ریشهٔ مخرج و ریشهٔ صورت است، پس می‌توان گفت تابع به این شکل بوده:

$$f(x) = \frac{x-3}{(x-2)(x-3)}$$

نکته ۴

در توابع لگاریتمی هم نقاط چسبیده به دامنه (مرز دامنه) مجانب قائم هستند.

به عنوان مثال

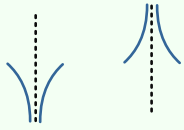
توابع زیر را ببینید:

$$f(x) = \log x + \log(x-1) \xrightarrow{\text{دامنه}} \begin{cases} x > 0 \\ x-1 > 0 \Rightarrow x > 1 \end{cases} \xrightarrow{\cap} D_f = (1, +\infty) \xrightarrow{\text{قائم}} x = 1$$

$$f(x) = \log(x)(x-1) \xrightarrow{\text{دامنه}} x(x-1) > 0 \Rightarrow \begin{matrix} + & | & - & | & + \\ 0 & 1 & & \end{matrix} \xrightarrow{>0} D = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty) \xrightarrow{\text{قائم}} \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

نکته ۵

معمولاً در مواقعی که مخرج کسر ریشه مضاعف دارد، می‌گوییم در اطراف مجانب قائم انفعال مضاعف ایجاد می‌شود، یعنی نمودار تابع در اطراف مجانب قائم هر دو شاخه‌اش به سمت $+\infty$ یا هر دو شاخه‌اش به سمت $-\infty$ می‌رود، به شکل مقابل:



نکته ۶

توابعی که برد محدود دارند (مانند $y = \cos x$ ، $y = \sin x$ ، $y = x - [x]$ ، $y = [x] + [-x]$ ، $y = \frac{ax}{1+x^2}$ و ...) فاقد مجانب قائم هستند زیرا نمی‌توانند حد نامتناهی داشته باشند.

تذکر

عبارات زیر ریشه مضاعف دارند:

۱) توابع درجه دوم که $\Delta = 0$ دارند، یعنی به شکل اتحاد مربع کامل $(x \pm a)^2$ هستند.

۲) $1 \pm \sin x$ یا $1 \pm \cos x$

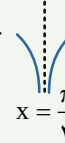
۳) $|g(x)|$

به عنوان مثال

$$۱) f(x) = \frac{1}{x^2 - 6x + 9} = \frac{1}{(x-3)^2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^\pm} f(x) = +\infty \Rightarrow$$



$$۲) f(x) = \frac{-1}{1 - \sin x} \xrightarrow{x = \frac{\pi}{2} \text{ مثلاً}} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^\pm} f(x) = \frac{-1}{0^+} = -\infty \Rightarrow$$



مجانب افقی

خط $y = L$ را مجانب افقی تابع f می‌گوییم به طوری که حداقل یکی از شرط‌های زیر را داشته باشد:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$

در واقع مجانب افقی حاصل حد تابع در بی‌نهایت می‌باشد، البته در صورت وجود.

به عنوان مثال

مجانب افقی توابع زیر را می‌یابیم:

$$f(x) = \frac{(x+1)^2 + (2x-1)^2}{x^2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + (2x)^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2}{x^2} = 5 \xrightarrow{\text{مجانب افقی}} y = 5$$

$$g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{|x|} = \begin{cases} x \rightarrow +\infty: \frac{x}{x} \Rightarrow y = 1 \\ x \rightarrow -\infty: \frac{x}{-x} \Rightarrow y = -1 \end{cases}$$



تابع $g(x)$ دو مجانب افقی دارد، مثلاً این شکلی:

نکته ۱

توابع متناوب، مجانب افقی ندارند، مثل $y = \sin x$ ، $y = \tan x$ ، $y = x - [x]$ و ... چون در $x \rightarrow \infty$ حد آن‌ها ناموجود است.

نکته ۲

توابعی که دامنه محدود دارند (مثلاً دامنه آن‌ها $-1 < x \leq 5$ است)، مجانب افقی ندارند، چون x نمی‌تواند به ∞ میل کند.

به عنوان مثال

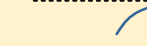
تابع $y = \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{2-x}}{x}$ مجانب افقی ندارد، چون دامنه‌اش محدود است.

$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1 \\ 2-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2 \end{cases} \xrightarrow{\cap} D_f = [-1, 2] - \{0\}$$

$$x \neq 0$$

نکته ۳

برای این‌که وضعیت نمودار تابع f را در اطراف مجانب افقی $y = L$ مشخص کنیم، کافی است علامت $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - L)$ را تعیین کنیم، اگر مثبت باشد، یعنی نمودار تابع f بالای مجانب افقی $y = L$ است، اگر منفی باشد، یعنی نمودار تابع f پایین مجانب افقی $y = L$ است.

			
$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - L) > 0$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - L) < 0$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - L) > 0$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - L) < 0$

به عنوان مثال

می‌خواهیم نمودار تابع $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ را در اطراف مجانب افقی رسم کنیم.

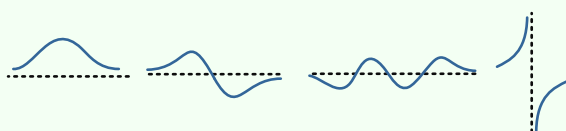
اولاً مجانب افقی $y = 1$ است: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x} = 1$ ، ثانیاً: $f(x) - L = \frac{x+2}{x-1} - 1 = \frac{3}{x-1}$

بنابراین:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x-1} = \frac{3}{+\infty} = 0^+ \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x-1} = \frac{3}{-\infty} = 0^- \end{cases} \Rightarrow \text{Graph approaching } y=1 \text{ from above and below as } x \rightarrow \pm\infty$$

نکته ۴

تابع می‌تواند مجانب افقی خود را هر چند بار که خواست قطع کند ولی مجانب قائم خود را حداکثر در یک نقطه می‌تواند قطع کند.

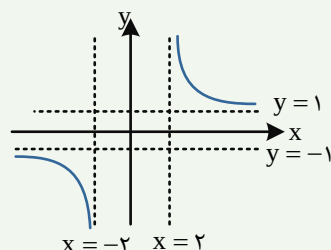


تذکر

وقتی تعداد مجانب‌های یک تابع خواسته می‌شود، منظور مجموع تعداد کل مجانب‌های افقی و قائم است.

به عنوان مثال

می‌خواهیم ببینیم تابع $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$ کلاً چند مجانب دارد؟



اولاً: $x^2 - 4 > 0 \Rightarrow x^2 > 4 \Rightarrow \sqrt{x^2} > 2 \Rightarrow |x| > 2 \Rightarrow D_f = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

پس ریشه‌های مخرج یعنی $x = 2$ و $x = -2$ که مرز دامنه هستند، مجانب قائم می‌باشند.

ثانیاً: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{|x|} = \begin{cases} x \rightarrow +\infty : y = 1 \\ x \rightarrow -\infty : y = -1 \end{cases}$

پس این تابع دارای ۴ مجانب است، مثلاً به این صورت:

نکته ۵

اگر دو تابع f و g را داشته باشیم و مجانب‌های توابع $f \pm g$ یا $f \times g$ یا $\frac{f}{g}$ را بخواهیم، ابتدا باید ضابطه این توابع را به دست آورده و کاملاً ساده کنیم، سپس مجانب‌های آن را به دست آوریم.

به عنوان مثال

اگر $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$ و $g(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$ ، مجانب‌های $g-f$ را می‌یابیم:

$$(g-f)(x) = \frac{x^2}{x^2-1} - \frac{x}{x^2-1} = \frac{x^2-x}{x^2-1} = \frac{x(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x}{x+1} \Rightarrow \begin{cases} \text{مجانب قائم: } x = -1 \\ \text{مجانب افقی: } y = 1 \end{cases}$$

نقطه $W(-1, 1)$ را محل برخورد مجانب‌های تابع می‌گوییم.

گروه آموزشی ماز

۱۷- اگر $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{f(x)}{\cos x} = -\infty$ باشد، ضابطه $f(x)$ کدام می‌تواند باشد؟

(۴) $[-2x] + 4$

(۳) $[2x] - 1$

(۲) $[-x] + 1$

(۱) $[x] - 1$

(متوسط - حدهای نامتناهی - مفهومی / محاسباتی - ۱۴۰۳)

پاسخ: گزینه ۳

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{f(x)}{\cos x} = \frac{f(\frac{\pi}{2}^+)}{0^-} = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(x) > 0$$

می‌دانیم که:

حال گزینه‌ها را در $x = \frac{\pi}{2}$ بررسی می‌کنیم:

۱ $f(\frac{\pi}{2}) = [\frac{\pi}{2}] - 1 = 1 - 1 = 0$ ✗

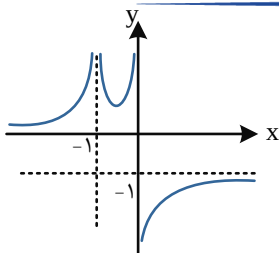
۲ $f(\frac{\pi}{2}) = [-\frac{\pi}{2}] + 1 = -2 + 1 = -1$ ✗

۳ $f(\frac{\pi}{2}) = [\pi] - 1 = 3 - 1 = 2$ ✓

۴ $f(\frac{\pi}{2}) = [-\pi] + 4 = -4 + 4 = 0$ ✗

گروه آموزشی ماز

۱۸- نمودار تابع f رسم شده است. تابع $y = f \circ f(x)$ چند خط مجانب موازی محورهای مختصات دارد؟



(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) صفر

(متوسط - حد در بی‌نهایت - محاسباتی - ۱۴۰۳)

پاسخ: گزینه ۴

برای یافتن مجانب‌های افقی باید x به سمت $\pm\infty$ میل کند:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f \circ f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(f(x)) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f \circ f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(f(x)) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

در نتیجه مجانب افقی ندارد.

برای یافتن مجانب‌های قائم باید y به سمت $\pm\infty$ میل کند:

$$y \rightarrow \pm\infty \Rightarrow f \circ f(x) \rightarrow \pm\infty$$

$$f(f(x)) \rightarrow \pm\infty \Rightarrow \begin{cases} f(x) \rightarrow -1 \Rightarrow x \rightarrow +\infty \\ f(x) \rightarrow 0 \Rightarrow x \rightarrow -\infty \end{cases}$$

در نتیجه مجانب قائم نیز ندارد.

گروه آموزشی ماز

۱۹- f تابعی خطی و $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f \circ f(x)}{x + f(x)} = -4$ است. اگر $x=4$ مجانب قائم تابع $y = \frac{1}{f(x)}$ باشد، $f(-4)$ کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) -۸ (۳) ۱۶ (۴) -۱۶

(سخت - حد در بی‌نهایت - محاسباتی - ۱۲۰۳)

پاسخ: گزینه ۳

تابع f را به صورت $f(x) = ax + b$ در نظر می‌گیریم.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f \circ f(x)}{x + f(x)} = -4 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a(ax+b)+b}{x+ax+b} = -4 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a^2x+ab+b}{(a+1)x+b} = -4 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a^2x}{(a+1)x} = -4$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{a+1} = -4 \Rightarrow a^2 + 4a + 4 = 0 \Rightarrow (a+2)^2 = 0 \Rightarrow a = -2$$

از طرفی، چون $x=4$ مجانب قائم $y = \frac{1}{f(x)}$ است، بنابراین $f(4) = 0$ می‌باشد:

$$f(4) = 0 \Rightarrow 4a + b = 0 \xrightarrow{a=-2} -8 + b = 0 \Rightarrow b = 8$$

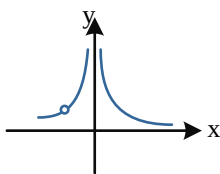
$$f(-4) = -2 \times (-4) + 8 = 16$$

در نتیجه تابع خطی موردنظر به صورت $f(x) = -2x + 8$ می‌باشد و داریم:

گروه آموزشی ماز

۲۰- قسمتی از نمودار تابع $f(x) = \frac{x^2 + ax + 3}{x^3 + x^2 + bx}$ رسم شده است. $f(1)$ کدام است؟

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۴



(متوسط - حدهای نامتناهی - مفهومی / محاسباتی - ۱۲۰۳)

پاسخ: گزینه ۴

با توجه به نمودار $x=0$ ریشه مضاعف مخرج کسر است، یعنی مخرج دارای عامل x^2 است، بنابراین $b=0$ می‌باشد.

$$f(x) = \frac{x^2 + ax + 3}{x^3 + x^2} = \frac{x^2 + ax + 3}{x^2(x+1)}$$

ریشه دیگر مخرج یعنی $x=-1$ مجانب قائم نمی‌باشد و تابع در $x=-1$ تعریف نشده است و دارای حد است. در نتیجه با توجه به توخالی بودن نقطه در نمودار $x=-1$ ریشه صورت کسر می‌باشد:

$$(-1)^2 + a(-1) + 3 = 0 \Rightarrow a = 4$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2(x+1)} = \frac{(x+1)(x+3)}{x^2(x+1)} = \frac{x+3}{x^2}$$

$$\Rightarrow f(1) = \frac{1+3}{1^2} = 4$$

گروه آموزشی ماز

۲۱- در رابطه ماتریسی $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ x \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ x \\ -1 \end{bmatrix}$ ، حاصل ضرب مقادیر به دست آمده برای x کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) ۶ (۴) -۶

(متوسط - ماتریس و اعمال روی آن - محاسباتی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۲

کافی است عملیات ضرب بین ۳ ماتریس را انجام دهیم، ببینید:

$$\begin{bmatrix} 2x & x & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x-1 & x & 7x-4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2x-1 & x & 7x-4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ x \\ 0 \end{bmatrix} = 6x-2+x^2 = 0 \Rightarrow x^2+6x-2=0 \Rightarrow \text{حاصل ضرب ریشه‌ها} = \frac{c}{a} = -2$$

گروه آموزشی ماز

۲۲- اگر $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 3 & 0 \\ c & 0 & d \end{bmatrix}$ و $A \times B$ یک ماتریس اسکالر باشد، آن گاه حاصل $(a+b)-(c+d)$ کدام است؟

(۱) ۲۵ (۲) ۲۶ (۳) ۲۷ (۴) ۲۸

(متوسط - ماتریس و اعمال روی آن - محاسباتی / مفهومی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۳

$$A \times B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & 7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 3 & 0 \\ c & 0 & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4a+3c & 0 & 4b+3d \\ 0 & 3 & 0 \\ 9a+7c & 0 & 9b+7d \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 4a+3c=3 \\ 9a+7c=0 \end{cases} \Rightarrow c=-27, a=21$$

$$\begin{cases} 9b+7d=3 \\ 4b+3d=0 \end{cases} \Rightarrow d=12, b=-9$$

$$(a+b)-(c+d) = (21-9)-(-27+12) = 12+15 = 27$$

بنابراین:

پس جواب برابر است با:

گروه آموزشی ماز

۲۳- اگر ماتریس A به صورت $A = \begin{bmatrix} 0 & n \\ n & 0 \end{bmatrix}$ و مجموع درایه‌های ماتریس $(A-I)(A^4+A^2+I)(A+I)$ برابر ۱۲۶ باشد، n کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

(سخت - ماتریس و اعمال روی آن - مفهومی / محاسباتی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۲

ابتدا ماتریس A^2 را محاسبه می‌کنیم، ببینید:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & n \\ n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & n \\ n & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n^2 & 0 \\ 0 & n^2 \end{bmatrix}$$

بنابراین ماتریس A^4 هم قطری و مضربی از ماتریس واحد بوده و در کل ماتریس $A^4 + A^2 + I$ نیز مضربی از ماتریس واحد است، پس ماتریس $A^4 + A^2 + I$ با ماتریس‌های $A+I$ و $A-I$ تعویض پذیر است و می‌توان نوشت:

$$(A-I)(A+I)(A^4+A^2+I) = (A^2-I)(A^4+A^2+I) = (A^2)^3 - I^3 = A^6 - I$$

بنابراین:

$$A^6 - I = \begin{bmatrix} n^6 & 0 \\ 0 & n^6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n^6-1 & 0 \\ 0 & n^6-1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{مجموع درایه‌ها} = 2(n^6-1) = 126 \Rightarrow n^6 = 64 \Rightarrow n = 2$$

ماتریس‌های تعویض پذیر

اگر ضرب دو ماتریس مربعی هم‌مرتبه A و B خاصیت جابه‌جایی داشته باشد، A و B را دو ماتریس تعویض پذیر می‌گوییم.

به عنوان مثال

ماتریس مربعی A با ماتریس همانی هم‌مرتبه‌اش و ماتریس معکوس خود یعنی A^{-1} (در صورت وجود) تعویض پذیر است.

$$A \times I = I \times A = A \quad A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I$$

اگر دو ماتریس A و B تعویض پذیر باشند، اتحادهای جبری در مورد آن‌ها برقرار است.

به عنوان مثال

$$(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2 \xrightarrow{\text{اگر } A \text{ و } B \text{ تعویض پذیر باشند}} (A+B)(A-B) = A^2 - B^2$$

گروه آموزشی ماز

۲۴- اگر $(2A + 3I)^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -10 \\ 3 & 3 \\ 4 & -7 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ باشد، آن گاه کدام عدد، درایه ماتریس $A(2A + 3I)^{-1}$ نیست؟

(۱) ۵ (۲) -۲ (۳) -۳ (۴) ۴

(سخت - وارون ماتریس و دترمینان - مفهومی / محاسباتی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۳

با روش محاسباتی و کلافه کننده پیش نمی رویم، بلکه از قضیه یکتایی وارون ماتریس استفاده می کنیم. ببینید:

$$(2A + 3I)(2A + 3I)^{-1} = I \Rightarrow \underbrace{2A(2A + 3I)^{-1}}_{\text{خواسته مسئله}} + \underbrace{3I(2A + 3I)^{-1}}_{\text{همان } (2A + 3I)^{-1}} = I \Rightarrow 2A(2A + 3I)^{-1} = I - 3(2A + 3I)^{-1}$$

$$A(2A + 3I)^{-1} = \frac{I - 3(2A + 3I)^{-1}}{2} \Rightarrow A(2A + 3I)^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 3 \times \begin{bmatrix} 5 & -10 \\ 3 & 3 \\ 4 & -7 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

پس $A(2A + 3I)^{-1}$ درایه ماتریس نمی باشد.

ماتریس معکوس

حاصل ضرب هر ماتریس در ماتریس معکوس خود، برابر ماتریس همانی می باشد. $A \times A^{-1} = I$

گروه آموزشی ماز

۲۵- اگر دستگاه معادلات $\begin{cases} (m^2 - 1)x + my = m + y \\ 3x = 2 - y \end{cases}$ بی شمار جواب داشته باشد، مجموع مقادیر قابل قبول برای m کدام گزینه است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

(متوسط - وارون ماتریس و دترمینان - محاسباتی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۲

ابتدا دستگاه معادلات را به فرم زیر مرتب می کنیم. ببینید:

$$\begin{cases} (m^2 - 1)x + my = m + y \\ 3x = 2 - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (m^2 - 1)x + (m - 1)y = m \\ 3x + y = 2 \end{cases}$$

زمانی دستگاه بی شمار جواب دارد که نسبت ضرایب x با نسبت ضرایب y و نسبت اعداد ثابت همگی با هم برابر باشند، یعنی:

$$\frac{m^2 - 1}{3} = \frac{m - 1}{1} = \frac{m}{2}$$

(I) (II) (III)

$$(I), (II) \Rightarrow \frac{m^2 - 1}{3} = \frac{m - 1}{1} \Rightarrow m^2 - 1 = 3m - 3 \Rightarrow m^2 - 3m + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 2 \end{cases}$$

$$(I), (III) \Rightarrow \frac{m^2 - 1}{3} = \frac{m}{2} \Rightarrow 2m^2 - 2 = 3m \Rightarrow 2m^2 - 3m - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$(II), (III) \Rightarrow \frac{m - 1}{1} = \frac{m}{2} \Rightarrow 2m - 2 = m \Rightarrow m = 2$$

پس تنها مقدار قابل قبول برای m برابر ۲ است.

برای درک بهتر شما هر ۳ معادله را بررسی کردیم و گر نه اهل فن میدانن که لازم نیست.

بی شمار جواب در دستگاه ۲ معادله ۲ مجهول چطور ممکنه؟؟

اگر دستگاه معادلات $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ دارای بی شمار جواب باشد، آن گاه:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

گروه آموزشی ماز

۲۶- بیشترین فاصله نقاط دو دایره $C: x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ و $C': x^2 + y^2 + 6x - 4y + 9 = 0$ از یکدیگر با کدام گزینه برابر است؟

۹ (۴)

۸ (۳)

۶ (۲)

۵ (۱)

(متوسط - دایره و بیضی - مفهومی / محاسباتی - ۱۲۰۲)

پاسخ: گزینه ۴

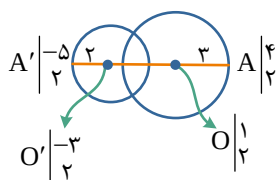
روش اول:

مرکز و شعاع دو دایره را به دست می آوریم. ببینید:

$$C: x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} O \begin{vmatrix} -\frac{a}{2} \\ -\frac{b}{2} \end{vmatrix} \Rightarrow O \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix} \\ R = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{2} \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2 - 4(-4)} = 3 \end{cases}$$

$$C': x^2 + y^2 + 6x - 4y + 9 = 0 \Rightarrow \begin{cases} O' \begin{vmatrix} -\frac{a}{2} \\ -\frac{b}{2} \end{vmatrix} \Rightarrow O' \begin{vmatrix} -3 \\ 2 \end{vmatrix} \\ R' = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{2} \sqrt{6^2 + (-4)^2 - 4(9)} = 2 \end{cases}$$

با توجه به این که $OO' = 4$ و $R - R' < OO' < R + R'$ می باشد، پس دو دایره متقاطع هستند و داریم:



$$A'A = |4 - (-5)| = 9$$

بیشترین فاصله نقاط دو دایره فاصله A' تا A می باشد که برابر است با:

روش دوم:

مرکز و شعاع دو دایره برابر است با:

$$\begin{matrix} O \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix}, R=3 \\ O' \begin{vmatrix} -3 \\ 2 \end{vmatrix}, R'=2 \end{matrix} \Rightarrow |OO'| = 4$$

بیشترین فاصله نقاط دو دایره برابر است با:

$$|OO'| + R + R' = 4 + 3 + 2 = 9$$

گروه آموزشی ماز

$$-27 \text{ اگر } -x^2 - 22 = \begin{vmatrix} 2 & x & -1 \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & x \end{vmatrix} \text{ باشد، } x \text{ کدام است؟}$$

۲۲ (۴)

۱۸ (۳)

۱۲ (۲)

۱۰ (۱)

(متوسط - وارون ماتریس و دترمینان - محاسباتی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۴

دترمینان ماتریس 3×3 هم با روش ساروس و هم با روش بسط، قابل محاسبه است، ببینید:

$$\begin{vmatrix} 2 & x & -1 \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & x \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & x \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 2(3x - 20) + 4 = 6x - 40 + 4 = 6x - 36$$

$$\begin{vmatrix} x & 22 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 5x - 22$$

$$\text{همچنین حاصل } \begin{vmatrix} x & 22 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \text{ برابر است با:}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & x & -1 \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 22 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} - x^2 \Rightarrow (-x^2 + 6x - 44) = (5x - 22) - x^2 \Rightarrow 6x - 44 = 5x - 22 \Rightarrow x = 22$$

پس:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{vmatrix} = (aei + bfg + cdh) - (bdi + afh + ceg)$$

گروه آموزشی ماز

۲۸- نقاط متمایز A و B و خط L در یک صفحه را در نظر بگیرید. چند نقطه در صفحه وجود دارد که به فاصله ثابت a از نقطه A، نقطه B و خط L باشد؟

(۴) حداکثر دو نقطه

(۳) دو نقطه

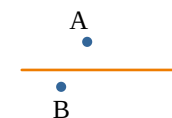
(۲) حداکثر یک نقطه

(۱) یک نقطه

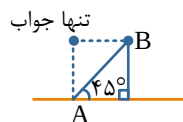
(آسان - مقاطع مخروطی و مکان هندسی - مفهومی - ۱۳۰۲)

پاسخ: گزینه ۴

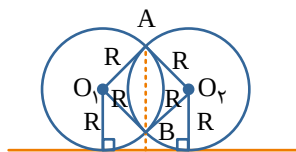
با پیدا کردن مرکز دایره یا دایره‌ی شامل دو نقطه A و B و مماس بر خط، پاسخ می‌تواند ۰، ۱ یا ۲ باشد.
به عنوان مثال:



(الف) بدون جواب:



(ب) یک جواب:



(ج) دو جواب: O_1, O_2

گروه آموزشی ماز

۲۹- از تلاقی ۳ خط $x=1$ ، $y=1$ و $3x+4y=12$ یک مثلث ساخته می‌شود. اگر مرکز دایره محاطی این مثلث $O'(\alpha, \beta)$ باشد، آنگاه $6\alpha+6\beta$ کدام است؟

(۴) ۱۸

(۳) ۱۷

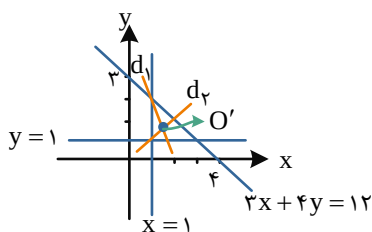
(۲) ۱۶

(۱) ۱۵

(سخت - دایره و بیضی - مفهومی / محاسباتی - ۱۳۰۲)

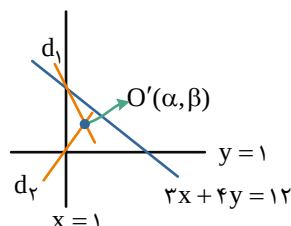
پاسخ: گزینه ۳

سه خط را در دستگاه مختصات رسم می‌کنیم. ببینید:



با توجه به این که محل تلاقی نیمسازهای زوایای درونی مثلث، مرکز دایره محاطی مثلث می‌باشد، کافی است نیمساز دو تا از زوایا را برخورد دهیم تا نقطه O' مشخص شود. از آن جایی که هر دو خط متقاطع، دو زاویه ساخته و دو نیمساز دارند، پس نیمساز زاویه بین دو خط $3x+4y=12$ و $x=1$ را d_1 نامیده که با توجه به شکل می‌توانیم بگوییم شیب خط d_1 منفی است و همچنین نیمساز زاویه بین دو خط $x=1$ و $y=1$ را d_2 نامیده و می‌توانیم با توجه به شکل بگوییم که شیب d_2 مثبت است. پس:

$$\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow m_{d_2} = 1 \Rightarrow d_2: y=x$$



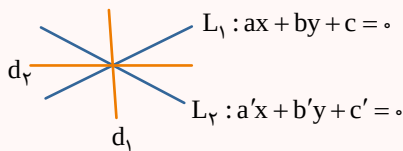
$$\left. \begin{aligned} x-1=0 \\ 3x+4y-12=0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{|3x+4y-12|}{\sqrt{3^2+4^2}} = |x-1| \Rightarrow |3x+4y-12| = 5|x-1| \Rightarrow \begin{cases} d_1: 8x+4y=17 \checkmark \text{ شیب نیمساز منفی است.} \\ 2x-4y=-7 \Rightarrow \text{شیب نیمساز مثبت است.} \end{cases}$$

$$d_1 \text{ و } d_2 \text{ تلاقی} \Rightarrow \begin{cases} 8x+4y=17 \\ y=x \end{cases} \Rightarrow x=y=\frac{17}{12} \Rightarrow O'(\frac{17}{12}, \frac{17}{12})$$

پس $\alpha = \beta = \frac{17}{12}$ می باشد و حاصل $6\alpha + 6\beta = 17$ است.

نیمساز زاویه بین ۲ خط

با توجه به این که هر نقطه روی نیمساز از دو ضلع زاویه به یک فاصله است می توانیم نقطه $A(x, y)$ را روی نیمساز فرض کنیم و فاصله آن را از دو خط برابر قرار دهیم:



$$\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|a'x+b'y+c'|}{\sqrt{a'^2+b'^2}}$$

از تساوی فوق ۲ معادله ایجاد می شود که معادله نیمسازهای d_1 و d_2 می باشد. (d_1 و d_2 بر هم عمودند).

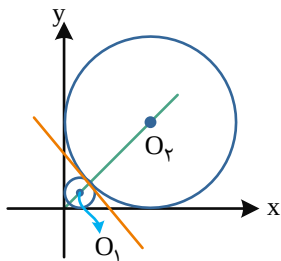
گروه آموزشی ماز

- ۳۰- دو دایره در ناحیه اول دستگاه مختصات بر هر دو محور x و y و همچنین خط $x+y=3$ مماس هستند. مجموع شعاع های این دو دایره چقدر است؟
- (۱) ۶ (۲) ۵ (۳) ۳ (۴) ۴

(متوسط - دایره و بیضی - مفهومی / محاسباتی - ۱۲۰۲)

پاسخ: گزینه ۱

مراکز این دو دایره روی خط $y=x$ واقع هستند، به عبارتی مختصات مرکز آن ها به صورت $O(R, R)$ است. بنابراین:



$$x+y=3 \text{ از خط } O(R, R) \text{ فاصله} = R \Rightarrow \frac{|R+R-3|}{\sqrt{2}} = R \Rightarrow 2R-3 = \pm\sqrt{2}R \Rightarrow R = \frac{3}{2 \pm \sqrt{2}} \Rightarrow \begin{cases} R_1 = \frac{3}{2+\sqrt{2}} \\ R_2 = \frac{3}{2-\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$R_1 + R_2 = \frac{3}{2+\sqrt{2}} + \frac{3}{2-\sqrt{2}} = \frac{3(2-\sqrt{2}) + 3(2+\sqrt{2})}{2} = \frac{6+6}{2} = 6$$

پس مجموع شعاع دو دایره برابر است با:

دایره های خاص

اگر دایره ای در نواحی اول و سوم بر محورهای مختصات مماس باشد، مرکز آن نقطه $O(\alpha, \alpha)$ و اگر در نواحی دوم و چهارم بر محورهای مختصات مماس باشد، مرکز آن $O(\alpha, -\alpha)$ می باشد.

گروه آموزشی ماز

- ۳۱- اعداد صحیح d, c, b, a مفروض هستند. چهار عدد صحیح d', c', b', a' همان اعداد d, c, b, a اما به ترتیب دیگری هستند، حال اگر $A = (a-a')(b-b')(c-c')(d-d')$ باشد، آن گاه کدام نتیجه گیری درست است؟

(۱) همواره عددی زوج است.

(۲) اگر A عددی زوج باشد، آن گاه اعداد d, c, b, a همگی زوج یا همگی فرد هستند.

(۳) اگر A عددی زوج باشد، آن گاه $a+b+c+d$ عددی زوج است.

(۴) اگر $a+b+c+d$ عددی زوج باشد، آن گاه A می تواند فرد باشد.

آزمون الکترونیکی | مرحله ۱۳ دوازدهم | ریاضی

(سخت - استدلال ریاضی - مفهومی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۴

توجه داشته باشید، در اینجا برعکس مثال کتاب تعداد اعداد زوج است (در مثال کتاب با ۳ عدد و در اینجا با ۴ عدد مواجه هستیم). پس حکم A همواره زوج است اینجا برقرار نیست که در کتاب درسی برای ۳ عدد، از برهان خلف اثبات شده است. اما اگر از بین a, b, c, d ، ۲ عدد زوج و ۲ عدد فرد باشند، مثلاً:

$$\begin{cases} a = 3 \\ b = 4 \\ c = 5 \\ d = 6 \end{cases}, \begin{cases} a' = 4 \\ b' = 5 \\ c' = 6 \\ d' = 3 \end{cases} \Rightarrow (a - a')(b - b')(c - c')(d - d') = -3$$

عدد فرد: ۳

برای نشان دادن نادرستی گزینه‌های دیگر می‌توانید از مثال نقض استفاده کنید.

گروه آموزشی ماز

۳۲- به ازای چند مقدار طبیعی یک رقمی برای n ، دو عدد $3n+1$ و $5n+2$ نسبت به هم اول هستند؟

۶ (۴)

۷ (۳)

۸ (۲)

۹ (۱)

(آسان - بخش پذیری - محاسباتی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۱

اگر ب‌م $3n+1$ و $5n+2$ را d فرض کنیم، داریم:

$$\begin{cases} d | 3n+1 \\ d | 5n+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d | (-5) \times (3n+1) \\ d | 3 \times (5n+2) \end{cases} \xrightarrow{\text{سمت راست روابط را جمع می‌کنیم}} d | (-15n-5) + (15n+6) \Rightarrow d | 1 \Rightarrow d = 1$$

به ازای تمام مقادیر طبیعی n ، دو عدد $3n+1$ و $5n+2$ نسبت به هم اول هستند، پس ۹ مقدار طبیعی یک رقمی برای n وجود دارد.

متباین یا نسبت به هم اول

اگر دو عدد a و b متباین یا نسبت به هم اول باشند، ب‌م آن‌ها برابر ۱ است. (لزومی ندارد خود دو عدد اول باشند).

دو عدد a و b نسبت به هم اول یا متباین هستند. $\Leftrightarrow (a, b) = 1$

گروه آموزشی ماز

۳۳- در یک تقسیم، مقسوم ۹۷ و خارج‌قسمت مخالف ۱ است. باقی‌مانده کدام باشد تا مقسوم‌علیه عددی طبیعی و منحصر به فرد به دست آید؟

۶ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

(متوسط - بخش پذیری - مفهومی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۳

گزینه‌ها را تک به تک بررسی می‌کنیم:

بررسی گزینه‌ها:

اگر $r=1$ ، آن‌گاه $b.q$ برابر ۹۶ می‌شود که برای b مقادیر $2, 3, 4, 6, \dots, 48$ به دست می‌آید که منحصر به فرد نیست.

اگر $r=2$ ، آن‌گاه $b.q$ برابر ۹۵ می‌شود که برای b مقادیر ۵ یا ۱۹ به دست می‌آید و منحصر به فرد نیست.

اگر $r=3$ ، آن‌گاه $b.q$ برابر ۹۴ می‌شود که برای b فقط مقدار ۴۷ به دست می‌آید و **منحصر به فرد** است. دقت کنید ۲ قابل قبول نیست چون مقسوم‌علیه نمی‌تواند از باقی‌مانده کمتر باشد.

اگر $r=6$ ، آن‌گاه $b.q$ برابر ۹۱ می‌شود که برای b مقادیر ۷ یا ۱۳ به دست می‌آید و منحصر به فرد نیست.

گروه آموزشی ماز

۳۴- باقی‌مانده تقسیم عدد $19^{53} + 51^{19}$ بر ۱۲ کدام است؟

۱۰ (۴)

۸ (۳)

۴ (۲)

صفر

(متوسط - هم‌نهشتی - محاسباتی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۴

روش اول:

باقی‌مانده تقسیم عدد 51^{19} و نیز 19^{53} را به طور جداگانه در تقسیم بر ۱۲ محاسبه کرده و باقی‌مانده‌ها را جمع می‌کنیم.

$$19 \equiv 7 \xrightarrow{\text{توان ۲}} 19^2 \equiv 7^2 \equiv 1 \xrightarrow{\times 19} 19^3 \equiv 1 \xrightarrow{\times 19} 19^4 \equiv 1 \xrightarrow{\times 19} 19^5 \equiv 1 \xrightarrow{\times 19} 19^6 \equiv 1 \xrightarrow{\times 19} 19^7 \equiv 1 \xrightarrow{\times 19} 19^8 \equiv 1 \xrightarrow{\times 19} 19^9 \equiv 1 \xrightarrow{\times 19} 19^{10} \equiv 1 \xrightarrow{\times 19} 19^{11} \equiv 1 \xrightarrow{\times 19} 19^{12} \equiv 1 \xrightarrow{\times 19} 19^{13} \equiv 1 \xrightarrow{\times 19} 19^{14} \equiv 1 \xrightarrow{\times 19} 19^{15} \equiv 1 \xrightarrow{\times 19} 19^{16} \equiv 1 \xrightarrow{\times 19} 19^{17} \equiv 1 \xrightarrow{\times 19} 19^{18} \equiv 1 \xrightarrow{\times 19} 19^{19} \equiv 7$$

$$51 \equiv 3 \xrightarrow{\times 51} 51^2 \equiv 9 \xrightarrow{\text{توان ۲}} 51^4 \equiv 81 \equiv 9 \xrightarrow{\text{توان ۲}} 51^8 \equiv 81 \equiv 9 \xrightarrow{\text{توان ۲}} 51^{16} \equiv 81 \equiv 9 \xrightarrow{\times 51} 51^{17} \equiv 27 \xrightarrow{\times 51} 51^{18} \equiv 27 \xrightarrow{\times 51} 51^{19} \equiv 27$$

$$51^{19} \equiv 27 \equiv 3 \pmod{12} \quad 19^{53} \equiv 7 \pmod{12} \Rightarrow \text{باقی‌مانده } A \text{ بر } 12 = 3 + 7 = 10$$

$$\left. \begin{array}{l} 41 \equiv -1, 19 \equiv -1 \Rightarrow A \equiv (-1)^{19} + (-1)^{53} \equiv -2 \equiv 10 \\ 21 \equiv 0, 19 \equiv 1 \Rightarrow A \equiv 0^{19} + 1^{53} \equiv 1 \equiv 10 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A \equiv 10 \\ A \equiv 10 \end{array} \Rightarrow A \equiv 10$$

گروه آموزشی ماز

۳۵- عدد $x = 1403$ جوابی برای کدام یک از معادلات زیر است؟

$6x \equiv 1 \pmod{4}$

$5x \equiv 8 \pmod{3}$

$5x \equiv 3 \pmod{2}$

$6x \equiv 2 \pmod{11}$

(متوسط - هم‌نهشتی - مفهومی / محاسباتی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۳

در ابتدا توجه کنید که $1403 \equiv 3 \pmod{11}$ و $1403 \equiv 6 \pmod{4}$ می‌باشد. بنابراین:

بررسی گزینه‌ها:

رد گزینه اول $\Rightarrow 6x \equiv 36 \equiv 3 \pmod{11} \Rightarrow 6x \equiv 3 \pmod{11} \Rightarrow 1403 \equiv 6 \pmod{11}$

رد گزینه دوم $\Rightarrow 5x \equiv 15 \equiv 1 \pmod{4} \Rightarrow 5x \equiv 1 \pmod{4} \Rightarrow 1403 \equiv 3 \pmod{4}$

تایید گزینه سوم $\Rightarrow 5x \equiv 30 \equiv 8 \pmod{11} \Rightarrow 5x \equiv 8 \pmod{11} \Rightarrow 1403 \equiv 6 \pmod{11}$

رد گزینه چهارم $\Rightarrow 6x \equiv 18 \equiv 4 \pmod{11} \Rightarrow 6x \equiv 4 \pmod{11} \Rightarrow 1403 \equiv 3 \pmod{11}$

گروه آموزشی ماز

۳۶- دو عدد چهار رقمی به فرم $\overline{aba2}$ وجود دارد که هر دو مضرب ۸۸ هستند. دو عدد را از هم کم می‌کنیم، رقم صدگان عدد حاصل کدام است؟

$4 \pmod{4}$

$3 \pmod{3}$

$2 \pmod{2}$

$1 \pmod{1}$

(سخت - هم‌نهشتی - مفهومی / محاسباتی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۱

اگر عدد $\overline{aba2}$ را x بنامیم، داریم:

$88 \mid x \Rightarrow 4 \mid x \Rightarrow a$ باید فرد باشد.

به زبان ساده می‌توانیم بگوییم اگر عددی بر ۸۸ بخش‌پذیر باشد، قطعاً بر ۴ نیز بخش‌پذیر است و عددی بر ۴ بخش‌پذیر است که دو رقم سمت راست آن بر ۴ بخش‌پذیر باشد، پس باید عدد دو رقمی $\overline{a2}$ بر ۴ نیز بخش‌پذیر باشد که نتیجه آن می‌شود که a حتماً عدد یک رقمی فرد است. حالت‌های مختلف را بررسی می‌کنیم:

$a = 1 \Rightarrow x = \overline{1b12} \equiv 0 \pmod{88} \Rightarrow (b+2) - (1+1) = 11k \Rightarrow b = 0 \Rightarrow x = 1012 \equiv 44 \pmod{88} \times$

$a = 3 \Rightarrow x = \overline{3b32} \equiv 0 \pmod{88} \Rightarrow (b+2) - (3+3) = 11k \Rightarrow b = 4 \Rightarrow x = 3432 \equiv 0 \pmod{88} \Rightarrow x_1 = 3432 \checkmark$

$a = 5 \Rightarrow x = \overline{5b52} \equiv 0 \pmod{88} \Rightarrow (b+2) - (5+5) = 11k \Rightarrow b = 8 \Rightarrow x = 5852 \equiv 44 \pmod{88} \times$

$a = 7 \Rightarrow x = \overline{7b72} \equiv 0 \pmod{88} \Rightarrow (b+2) - (7+7) = 11k \Rightarrow b = 1 \Rightarrow x = 7172 \equiv 44 \pmod{88} \times$

$a = 9 \Rightarrow x = \overline{9b92} \equiv 0 \pmod{88} \Rightarrow (b+2) - (9+9) = 11k \Rightarrow b = 5 \Rightarrow x = 9592 \equiv 0 \pmod{88} \Rightarrow x_2 = 9592 \checkmark$

$x_2 - x_1 = 9592 - 3432 = 6160$

بنابراین:

پس رقم صدگان اختلاف دو عدد موردنظر برابر ۱ است.

گروه آموزشی ماز

۳۷- از هم‌نهشتی $۴۵a \equiv ۳۲b + ۲۸ \pmod{۶۰}$ کدام یک از هم‌نهشتی‌های زیر نتیجه نمی‌شود؟

(۴) $b \equiv ۱ \pmod{۵}$

(۳) $b \equiv ۱ \pmod{۳}$

(۲) $a \equiv ۲ \pmod{۳}$

(۱) $a \equiv ۰ \pmod{۲}$

(متوسط - هم‌نهشتی - مفهومی / محاسباتی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۲

$$(۴۵, ۶۰) = ۱۵ \Rightarrow ۳۲b + ۲۸ \equiv ۰ \pmod{۱۵} \Rightarrow ۳۲b \equiv -۲۸ \pmod{۱۵} \Rightarrow ۲b \equiv ۲ \pmod{۱۵} \Rightarrow b \equiv ۱ \pmod{۱۵}$$

تایید گزینه سوم $b \equiv ۱ \pmod{۳}$

$$(۴۵, ۶۰) = ۱۵ \Rightarrow ۳۲b + ۲۸ \equiv ۰ \pmod{۱۵} \Rightarrow ۳۲b \equiv -۲۸ \pmod{۱۵} \Rightarrow ۲b \equiv ۲ \pmod{۱۵} \Rightarrow b \equiv ۱ \pmod{۱۵}$$

تایید گزینه چهارم $b \equiv ۱ \pmod{۵}$

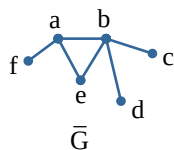
$$(۳۲, ۶۰) = ۴ \Rightarrow ۴۵a - ۲۸ \equiv ۰ \pmod{۴} \Rightarrow ۴۵a \equiv ۲۸ \pmod{۴} \Rightarrow a \equiv ۰ \pmod{۴} \Rightarrow a \equiv ۰ \pmod{۲}$$

تایید گزینه اول $a \equiv ۰ \pmod{۲}$

برای رد درستی گزینه ۲ می‌توانید از مثال نقض $a = ۰$ و $b = ۱$ استفاده کنید.

گروه آموزشی ماز

۳۸- اگر مکمل گراف G به شکل مقابل باشد، آنگاه حاصل $N_G[d] - N_G(f)$ کدام است؟



- (۱) $\{a\}$
- (۲) $\{a, f\}$
- (۳) $\{b\}$
- (۴) $\{b, e\}$

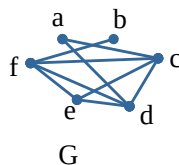
(متوسط - گراف و مدل‌سازی - مفهومی - ۱۲۰۲)

پاسخ: گزینه ۲

$$N_G[d] = \{a, c, d, e, f\}$$

$$N_G(f) = \{b, c, d, e\}$$

$$\Rightarrow N_G[d] - N_G(f) = \{a, f\}$$



گراف G را رسم می‌کنیم. ببینید:

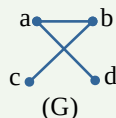
همسایگی باز و بسته

اگر v یک رأس گراف G باشد، مجموعه تمامی رئوسی که به v متصل هستند، همسایگی باز رأس v نامیده می‌شوند که آن‌ها را با $N_G(v)$ نمایش می‌دهیم. همچنین تمامی رئوس متصل به v به همراه خود v همسایگی بسته رأس v نامیده می‌شوند که آن‌ها را با $N_G[v]$ نمایش می‌دهیم.

به عنوان مثال

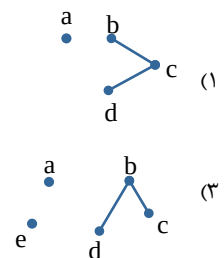
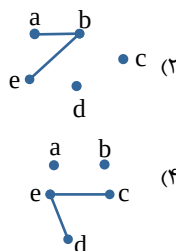
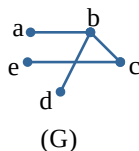
$$N_G(a) = \{b, d\}$$

$$N_G[a] = \{a, b, d\}$$



گروه آموزشی ماز

۳۹- کدام یک از گراف‌های زیر، زیرگرافی از گراف مقابل است؟



(آسان - گراف و مدل‌سازی - مفهومی - ۱۲۰۲)

پاسخ: گزینه ۳

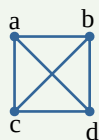
بررسی گزینه‌ها:

- ۱ cd یالی از گراف G نیست، پس گراف رسم شده در گزینه ۱، زیرگرافی برای گراف G نمی‌باشد.
- ۲ be یالی از گراف G نیست، پس گراف رسم شده در گزینه ۲، زیرگرافی برای گراف G نمی‌باشد.
- ۴ ed یالی از گراف G نیست، پس گراف رسم شده در گزینه ۴، زیرگرافی برای گراف G نمی‌باشد.

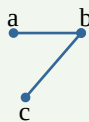
زیرگراف

یک زیرگراف از گراف G ، گرافی است که مجموعه رئوس آن زیرمجموعه‌ای از رئوس گراف G و مجموعه یال‌های آن، زیرمجموعه‌ای از یال‌های گراف G باشد.

به عنوان مثال



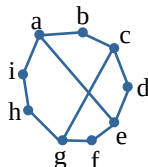
گراف G



زیرگراف G

گروه آموزشی ماز

۴۰- در گراف مقابل، طول هر یک از دورهای موجود را دقیقاً یک بار نوشته و اعداد حاصل را در یک دنباله صعودی قرار می‌دهیم. (مثلاً اگر گراف ۵ دور به طول ۳ داشته باشد، عدد ۳ را ۵ بار می‌نویسیم) مجموع تمام جملات این دنباله کدام است؟



(۱) ۳۸

(۲) ۴۴

(۳) ۳۹

(۴) ۴۳

پاسخ: گزینه ۲

(سخت - گراف و مدل‌سازی - مفهومی / محاسباتی - ۱۴۰۲)

چهار حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت اول: هیچ‌یک از دو یال ae و gc در دور مشارکت نکنند.

abcdefghia

فقط یک دور به طول ۹ وجود دارد.

حالت دوم: یال ae در دور مشارکت داشته ولی یال gc مشارکت نداشته باشد.

abcdea

aihgfca

یک دور به طول ۵ و یک دور به طول ۶ وجود دارد.

حالت سوم: یال gc در دور مشارکت داشته ولی یال ae مشارکت نداشته باشد.

cdefgc

cbaihgc

یک دور به طول ۵ و یک دور به طول ۶ وجود دارد.

حالت چهارم: هر دو یال ae و gc در دور مشارکت داشته باشند.

abcgfea

aihgcdea

یک دور به طول ۶ و یک دور به طول ۷ وجود دارد.

بنابراین دنباله موردنظر به شکل ۵, ۵, ۶, ۶, ۶, ۶, ۷, ۹ درمی‌آید که مجموع جملات آن برابر ۴۴ است.

گروه آموزشی ماز



www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds

فیزیک

یکی از مطابقت‌های آزمون سال گذشته ماز با کنکور ۱۴۰۳

۵۱- گلوله‌ای در شرایط خلأ از ارتفاع ۲۴۵ متری سطح زمین رها می‌شود. تندی متوسط گلوله در ۳

ثانیه آخر حرکتش چند متر بر ثانیه است؟ ($g = 10 \frac{m}{s^2}$)

۶۰ (۴)

۵۰ (۳)

۶۵ (۲)

۵۵ (۱)

(آزمون مرحله ۳ سالیانه - فیزیک)

۵۱- گلوله‌ای در شرایط خلأ از ارتفاع ۱۲۵ متری زمین رها می‌شود. سرعت متوسط گلوله در ۲ ثانیه

آخر حرکت، چند متر بر ثانیه است؟ ($g = 10 \frac{m}{s^2}$)

۴۵ (۴)

۴۰ (۳)

۳۵ (۲)

۳۰ (۱)

(کنکور تیر ۱۴۰۳ - فیزیک رشته ریاضی)



برای مشاهده
همه مطابقت‌ها
اینجا رو اسکن کن!

biomaze.ir

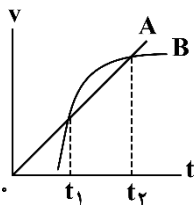
یا رو این کلیک کن!



امیدواریم تعطیلات عید بهتون خوش گذشته باشه و استفاده کافی رو از این فرصت کرده باشین تا درسا رو مرور کنین. آزمون امروز طوری طراحی شده که هم برای دانش آموزایی که کامل مباحث نیمسال اول رو جمع بندی کردن می تونه مفید باشه و هم برای دانش آموزایی که هنوز جمع بندی نیمسال اولشون تموم نشده. برای بچه هایی که جمع بندی نیمسال اولشون تموم شده، این آزمون حکم یک امتحان جامع رو داره که تقریباً از همه مباحث مهم نیمسال اول سؤال داره و می تونه بهتون نشون بده چقدر خوب این مطالب رو یاد گرفتین. البته حواستون باشه چند تا سؤال سفت و سخت و چالشی هم داریم که اگه در کنکور بخوان سؤال سخت هم بدن شما آمادگیش رو پیدا کنین. باقی سؤالات آزمون هم سعی شده در راستای کتاب درسی و کنکور باشه. برای بچه هایی هم که هنوز نیمسال اول رو کامل جمع بندی نکردن، این آزمون می تونه یک جمع بندی سریع انجام بده. کافیه پاسخ نامه رو با دقت بخونین و تحلیل های ویدیویی آزمون رو هم ببینین تا یک جمع بندی سریع از مباحث داشته باشین.

سعید احمدی و سجاد صادقی زاده (رتبه ۱ کنکور ۹۲) - مسئولین درس فیزیک پایه دوازدهم آزمون ماز

۴۱- نمودار سرعت - زمان دو متحرک A و B که روی محور x حرکت می کنند، مطابق شکل زیر است. در بازه زمانی t_1 تا t_2 چه تعداد از عبارات زیر صحیح است؟



۲ (۲)
۴ (۴)
صفر

۱ (۱)
۳ (۳)

الف: بزرگی سرعت متوسط دو متحرک برابر است.

ب: تندی متوسط متحرک B بیش تر از متحرک A است.

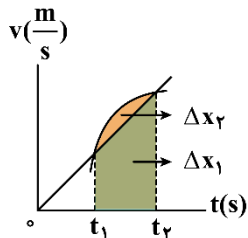
پ: شتاب متوسط دو متحرک برابر است.

(متوسط - نموداری - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۲

بررسی موارد:

الف



برای مقایسه سرعت متوسط با توجه به این که Δt برای دو متحرک برابر است، باید جابه جایی دو متحرک (سطح زیر دو نمودار) را با یکدیگر مقایسه کنیم.

با توجه به این که $\Delta x_2 > \Delta x_1$ است؛ بنابراین سرعت متوسط دو متحرک برابر نخواهد بود. (*)

ب

چون هیچ کدام از متحرک ها در بازه زمانی (t_1, t_2) تغییر جهت ندارند، پس برای هر متحرک اندازه سرعت متوسط و تندی متوسط باهم برابر خواهند بود؛ بنابراین چون سرعت متوسط متحرک B بیش تر است، تندی متوسط متحرک B نیز بیش تر است. (✓)

پ

با توجه به این که سرعت هر دو متحرک در لحظات t_1 و t_2 با همدیگر برابرند؛ بنابراین تغییرات سرعت در یک بازه زمانی برابر یا به عبارتی شتاب متوسط آنها نیز باهم برابر خواهند بود. (✓)

گروه آموزشی ماز

۴۲- معادله مکان - زمان متحرکی که بر روی محور x حرکت می کند، در SI به صورت $x = t^3 - 64$ است. از مبدأ زمان تا لحظه ای که متحرک از مبدأ مکان می گذرد، سرعت متوسط آن چند متر بر ثانیه است؟

۳۲ (۴)

۴ (۳)

۸ (۲)

۱۶ (۱)

(آسان - محاسباتی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۱

گام اول:

در لحظه $t_1 = 0$ (مبدأ زمان)، مکان متحرک برابر است با:

$$x = t^3 - 64 \xrightarrow{t_1=0} x_1 = 0 - 64 = -64 \text{ m}$$

برای آن که متحرک از مکان $x_2 = 0$ (مبدأ مکان) بگذرد، می توان نوشت:

$$x = t^3 - 6t \xrightarrow{x_2=0} t_2^3 - 6t_2 = 0 \Rightarrow t_2 = 4s$$

گام آخر:

بنابراین بازه زمانی موردنظر سؤال، ۴ ثانیه اول حرکت است و سرعت متوسط در این بازه برابر است با:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow v_{av} = \frac{0 - (-64)}{4} = 16 \frac{m}{s}$$

گروه آموزشی ماز

۴۳- سرعت متوسط متحرکی در ۴ ثانیه اول حرکت $-2 \frac{m}{s}$ و در ۱۶ ثانیه بعدی $8 \frac{m}{s}$ است. سرعت متوسط در ۲۰ ثانیه اول حرکت چند متر بر ثانیه است؟

-۶ (۴)

+۶ (۳)

-۴ (۲)

+۴ (۱)

(آسان - محاسباتی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۳

گام اول:

جابه جایی متحرک را در هر کدام از بازه های زمانی پیدا می کنیم:

$$\Delta x = v_{av} \Delta t \Rightarrow \begin{cases} \Delta x_1 = 4 \times (-2) = -8 \text{ m} \\ \Delta x_2 = 16 \times (8) = 128 \text{ m} \end{cases}$$

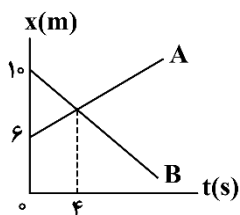
گام آخر:

سرعت متوسط کل متحرک را مطابق رابطه زیر به دست می آوریم:

$$v_{av \text{ کل}} = \frac{\Delta x_{\text{کل}}}{\Delta t_{\text{کل}}} = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{\Delta t_1 + \Delta t_2} = \frac{-8 + 128}{4 + 16} = \frac{120}{20} = 6 \frac{m}{s}$$

گروه آموزشی ماز

۴۴- نمودار مکان - زمان دو متحرک A و B که بر روی محور x حرکت می کنند، مطابق شکل زیر است. فاصله این دو متحرک در لحظه $t = 10s$ از یکدیگر چند متر است؟



۱ (۱)

۲ (۲)

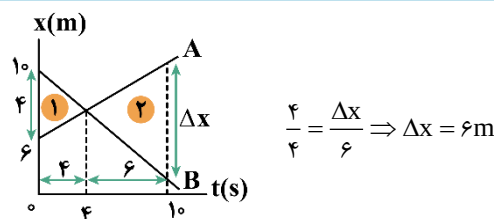
۴ (۳)

۶ (۴)

(متوسط - نموداری - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۴

از تشابه مثلث ها، فاصله دو متحرک را در لحظه $t = 10s$ به دست می آوریم:



$$\frac{4}{4} = \frac{\Delta x}{6} \Rightarrow \Delta x = 6m$$

گروه آموزشی ماز

۴۵- شکل زیر، هواپیمایی را نشان می دهد که از حال سکون و با شتاب ثابت روی باند پرواز و در امتداد محور x شروع به حرکت می کند. جابه جایی هواپیما در این مدت چند متر است؟

$$v_0 = 0$$

$$a = 2/5 \frac{m}{s^2}$$

$$v = 360 \frac{km}{h}$$

۱۰۰۰ (۱)

۲۰۰۰ (۲)

۳۰۰۰ (۳)

۴۰۰۰ (۴)



(آسان - محاسباتی - ۱۲۰۱)

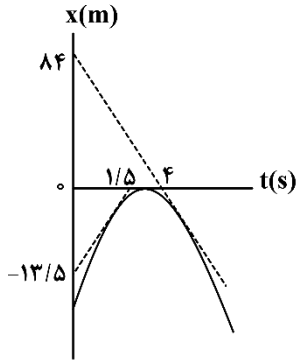
پاسخ: گزینه ۲

با استفاده از رابطه سرعت - جابه جایی (مستقل از زمان) داریم:

$$v = 360 \frac{km}{h} = \frac{360}{3/6} \frac{m}{s} = 100 \frac{m}{s}$$

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \Rightarrow 100^2 - 0 = 2 \times 2/5 \times \Delta x \Rightarrow \Delta x = 2500m$$

۴۶- نمودار مکان - زمان متحرکی به صورت سهمی زیر است که در آن خط‌های مماس بر نمودار در لحظه‌های $t = 1s$ و $t = 6s$ رسم شده است. شتاب متوسط در مدتی که حرکت کندشونده است، چند متر بر مربع ثانیه است؟



- (۱) -0.5
(۲) -2
(۳) -4
(۴) -6

(متوسط - نموداری - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۴

شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان در هر لحظه، برابر با سرعت متحرک در آن لحظه است.

$$v_{t=1s} = \text{شیب خط مماس} = \frac{13/5}{1/5} = 9 \frac{m}{s}$$

$$v_{t=6s} = \text{شیب خط مماس} = \frac{-84}{6} = -21 \frac{m}{s}$$

چون نمودار مکان - زمان یک سهمی است، در نتیجه حرکت با شتاب ثابت است.

در این نوع حرکت، شتاب متوسط در هر بازه زمانی، برابر با شتاب در هر لحظه است.

$$a_{av} = a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow a = \frac{-21 - 9}{6 - 1} = \frac{-30}{5} = -6 \frac{m}{s^2}$$

گروه آموزشی ماز

۴۷- متحرکی با شتاب ثابت روی محور x حرکت می‌کند و بردار سرعت متوسط آن در چهار ثانیه دوم و پنج ثانیه دوم به ترتیب $(-3 \frac{m}{s})\hat{i}$ و $(+1/5 \frac{m}{s})\hat{i}$ است. مسافت طی شده این متحرک در ۱۰ ثانیه اول حرکت چند متر است؟

۸۷ (۴)

۸۶ (۳)

۷۸ (۲)

۶۸ (۱)

(سخت - محاسباتی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۴



نکته

در حرکت با شتاب ثابت، طبق تعریف سرعت متوسط، داریم:

$$(v_{av})_{t_1 \rightarrow t_2} = \frac{v_{t_1+t_2}}{2}$$

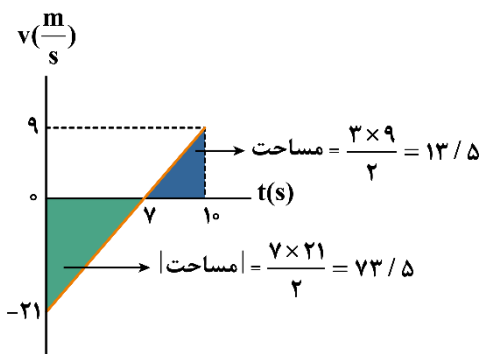
طبق نکته بالا خواهیم داشت:

$$(v_{av})_{\text{چهار ثانیه دوم}} = (v_{av})_{4 \rightarrow 8} = v_6 = -3 \frac{m}{s}$$

$$(v_{av})_{\text{پنج ثانیه دوم}} = (v_{av})_{5 \rightarrow 10} = v_{7.5} = 1/5 \frac{m}{s}$$

اکنون شتاب حرکت و سرعت اولیه را به دست می‌آوریم و سپس نمودار سرعت - زمان را رسم می‌کنیم.

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{(1/5) - (-3)}{7.5 - 6} = 3 \frac{m}{s^2} \quad \begin{matrix} v = at + v_0 \\ t = 6s, v = -3 \frac{m}{s} \end{matrix} \rightarrow -3 = (3)(6) + v_0 \Rightarrow v_0 = -21 \frac{m}{s}$$



$$\text{مساحت} = \frac{3 \times 9}{2} = 13/5$$

$$|\text{مساحت}| = \frac{7 \times 21}{2} = 73/5$$

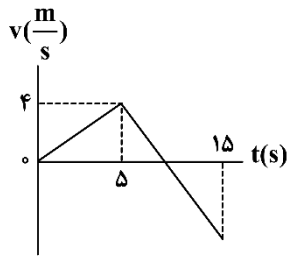
$$\text{معادله سرعت: } v = at + v_0 \Rightarrow v = 3t - 21$$

$$v_{10} = 3 \times 10 - 21 = 9 \frac{m}{s}$$

$$L_{0 \rightarrow 10} = 73/5 + 13/5 = 87m$$

گروه آموزشی ماز

۴۸ - نمودار سرعت - زمان متحرکی که روی مسیری مستقیم حرکت می کند و پس از ۱۵ ثانیه به مکان اولیه خود برمی گردد، مطابق شکل زیر است. تندی متوسط متحرک در این ۱۵ ثانیه چند متر بر ثانیه است؟

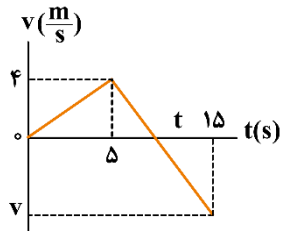


- (۱) ۲
(۲) ۲/۲۵
(۳) ۲/۴
(۴) ۳

(سخت - نموداری - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۳

مساحت محصور در نمودار $v-t$ برابر جابه جایی متحرک است. برای دستیابی به خواسته سؤال باید t را بیابیم. حرکت انجام شده از دو حرکت با شتاب ثابت تشکیل شده است. (از $t=0$ تا $t=5$ و از $t=5$ تا $t=15$) در حرکت با شتاب ثابت داریم:



$$\Delta x = v_{av} \Delta t \quad v_{av} = \frac{v_1 + v_2}{2}$$

$$\Delta x = \Delta x_{0-5} + \Delta x_{5-15} = 10 + \left(\frac{4+0}{2}\right) \times 10 = 0$$

متحرک به مکان اولیه خود برگشته است؛ بنابراین کل جابه جایی آن صفر است و داریم:

$$\Delta x = 0 \Rightarrow \left(\frac{4+v}{2}\right) \times 10 = -10 \Rightarrow \frac{4+v}{2} = -1 \Rightarrow v = -6 \frac{m}{s}$$

$$a_{5-15} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{-6-4}{10} = -1 \frac{m}{s^2}$$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow -1 = \frac{-4}{t-5} \Rightarrow t = 9s$$

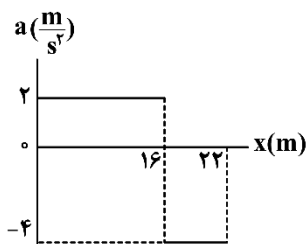
در ادامه با کمک مساحت زیر نمودار سرعت - زمان، مسافت طی شده را محاسبه و تندی متوسط را به دست می آوریم:

$$\ell = |S_1| + |S_2| = \frac{9 \times 4}{2} + \frac{6 \times 6}{2} = 18 + 18 = 36m$$

$$S_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{36}{15} = 2.4 \frac{m}{s}$$

گروه آموزشی ماز

۴۹ - نمودار شتاب - مکان متحرکی که در لحظه $t=0$ در حال سکون و از مبدأ مختصات در جهت محور x شروع به حرکت می کند، مطابق شکل زیر است. مدت زمانی که حرکت متحرک، تندشونده است، چند برابر مدت زمانی است که حرکت متحرک، کندشونده است؟



- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۴
(۴) ۸

(سخت - نموداری - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۳

جرقه ذهنی

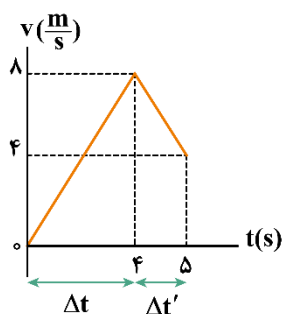
در سؤالات نمودار شتاب - مکان بهترین کار استفاده از فرمول $\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t$ یا $v_2^2 - v_1^2 = 2a\Delta x$ برای هر پاره خط و رسم نمودار سرعت - زمان است.

$$\text{در قسمت اول: } v^2 - 0 = 2 \times 2 \times 16 \Rightarrow v = \pm 8 \frac{m}{s} \xrightarrow{x \text{ در حال افزایش } v > 0} v = 8 \frac{m}{s}$$

$$\text{در قسمت دوم: } v'^2 - 64 = 2 \times (-4) \times 6 \Rightarrow v' = \pm 4 \frac{m}{s} \xrightarrow{x \text{ در حال افزایش } v' > 0} v' = 4 \frac{m}{s}$$

آزمون الکترونیکی | مرحله ۱۳ دوازدهم | فیزیک

بنابراین نمودار $v-t$ متحرک به شکل مقابل است:



$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow 2 = \frac{8}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = 4s$$

$$-4 = \frac{-8}{\Delta t'} \Rightarrow \Delta t' = 1s$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta t}{\Delta t'} = \frac{4}{1} = 4$$

گروه آموزشی ماز

۵۰- محیط بانی با اتومبیل خود در نیمه شب با سرعت ثابت $12 \frac{m}{s}$ در حال حرکت است. ناگهان در فاصله ۱۵ متری خود، گوزنی را می بیند و بعد از 0.5 ثانیه، با شتاب ثابت ترمز می گیرد. اگر گوزن بلافاصله پس از ترمز اتومبیل، با شتاب $2 \frac{m}{s^2}$ هم جهت با حرکت اتومبیل شروع به فرار کند، اندازه شتاب اتومبیل

چند $\frac{m}{s^2}$ باشد تا اتومبیل با گوزن برخورد نکند؟

(۴) بزرگ تر از ۸

(۳) بزرگ تر از ۶

(۲) بزرگ تر از ۴

(۱) بزرگ تر از $2/5$

(متوسط - محاسباتی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۳

در 0.5 ثانیه اول حرکت اتومبیل، گوزن ساکن است و اتومبیل به اندازه $6m$ جلو رفته است.

$$\Delta x = v \cdot \Delta t = 12 \times 0.5 = 6m$$

اگر مکان اولیه اتومبیل را از لحظه شروع ترمز $x = 0$ در نظر بگیریم، آن گاه مکان اولیه گوزن در همین لحظه، برابر با $9m$ است.

$$\begin{cases} \text{اتومبیل: } x_1 = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}at^2 + 12t + 0 \\ \text{گوزن: } x_2 = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2}(2)t^2 + 0 + 9 \end{cases}$$

برای محاسبه حداقل شتاب کندشونده اتومبیل که با گوزن برخورد نکند، باید معادله مکان دو متحرک، هیچ گاه بهم برابر نشود.

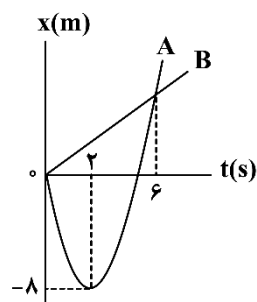
$$x_1 = x_2 \Rightarrow \frac{1}{2}at^2 + 12t = t^2 + 9 \Rightarrow (1 - \frac{a}{2})t^2 - 12t + 9 = 0$$

$$\Delta < 0 \Rightarrow 144 - 4(1 - \frac{a}{2})(9) < 0 \Rightarrow a < -6 \frac{m}{s^2} \Rightarrow |a| > 6 \frac{m}{s^2}$$

بنابراین اندازه شتاب ترمز اتومبیل باید بزرگ تر از $6 \frac{m}{s^2}$ باشد.

گروه آموزشی ماز

۵۱- نمودار مکان - زمان دو متحرک A و B که به ترتیب با شتاب ثابت و سرعت ثابت بر روی محور x در حال حرکت اند، مطابق شکل زیر است. چند ثانیه فاصله دو متحرک کم تر از $10m$ است؟



$$\sqrt{14} - 1 \quad (1)$$

$$\sqrt{14} + 1 \quad (2)$$

$$2 \quad (3)$$

$$4 \quad (4)$$

(سخت - نموداری - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۱

ابتدا معادله مکان - زمان متحرک A را می نویسیم.

روش اول:

با استفاده از رأس و یک نقطه:

$$x = A(t - 2)^2 - 8 \xrightarrow{(0,0)} A = 2$$

با استفاده از دو ریشه و یک نقطه:

$$x = A(t)(t - 4) \xrightarrow{(2, -8)} A = 2$$

بنابراین معادله مکان - زمان متحرک A در SI به صورت زیر است:

$$x_A = 2t^2 - 8t$$

برای نوشتن معادله مکان - زمان متحرک B از نقطه تلاقی دو نمودار کمک می گیریم:

$$t = 6s \Rightarrow x = 2(6)^2 - 8(6) = 24m \Rightarrow v_B = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{24 - 0}{6} = 4 \frac{m}{s}$$

$$x_B = v_B t + x_{0B} \Rightarrow x_B = 4t$$

فاصله دو متحرک باید کم تر از ۱۰m باشد؛ بنابراین دو حالت داریم:

حالت اول:

A جلوتر از B باشد:

$$x_A - x_B < 10 \Rightarrow 2t^2 - 8t - 4t < 10$$

$$\Rightarrow 2t^2 - 12t - 10 < 0 \Rightarrow t^2 - 6t - 5 < 0$$

$$\Delta = 36 + 20 = 56 \Rightarrow t = \frac{6 \pm \sqrt{56}}{2} = 3 \pm \sqrt{14}$$

بازه زمانی $(6, 3 + \sqrt{14})$ قابل قبول است.

حالت دوم:

B جلوتر از A باشد:

$$x_B - x_A < 10 \Rightarrow 4t - 2t^2 + 8t < 10$$

$$-2t^2 + 12t - 10 < 0 \Rightarrow t^2 - 6t + 5 > 0$$

۰	۱	۵	۶
+	-	+	
ج		ج	

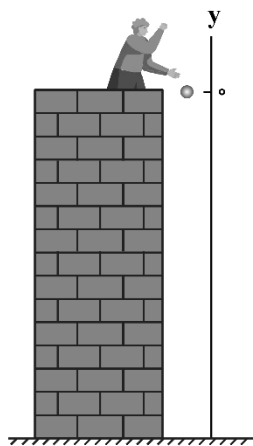
بازه های زمانی $(0, 1)$ و $(5, 6)$

از اجتماع موارد ۱ و ۲، بازه های زمانی $(5, 3 + \sqrt{14})$ و $(0, 1)$ مورد قبول است؛ بنابراین:

$$\Delta t = 1 + (3 + \sqrt{14} - 5) = \sqrt{14} - 1(s)$$

گروه آموزشی ماز

۵۲- شکل زیر، شخصی را نشان می دهد که از بالای دیواری بلند، گلوله ای را رها می کند. اگر ارتفاع دیوار ۱۰/۰m باشد، مدت زمان کل حرکت چند ثانیه است؟



$$(g = 10 \frac{m}{s^2})$$

۱ (۱)

$\sqrt{2}$ (۲)

۲ (۳)

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴)

۲ (۴)

(آسان - محاسباتی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۲

طبق رابطه $\Delta y = -\frac{1}{2}gt^2$ در سقوط آزاد، داریم:

$$\Delta y = -\frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow -10 = -5t^2 \Rightarrow t^2 = 2 \Rightarrow t = \sqrt{2}s$$

گروه آموزشی ماز

آزمون الکترونیکی | مرحله ۱۳ دوازدهم | فیزیک

۵۳- گلوله‌ای در شرایط خلأ از ارتفاع ۲۱۰ متری سطح زمین رها می‌شود. تندی متوسط گلوله در ثانیه چهارم حرکت چند متر بر ثانیه است؟ ($g = 9.8 \frac{m}{s^2}$)

۳۴/۳ (۴)

۳۷/۴ (۳)

۲۹/۴ (۲)

۳۹/۲ (۱)

(متوسط - محاسباتی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۴

ثانیه چهارم به معنی بازه زمانی بین $t_1 = 3s$ تا $t_2 = 4s$ است. طبق رابطه $v = -gt$ ، سرعت در لحظه $t_1 = 3s$ برابر $v_1 = -9.8 \times 3 = -29.4 \frac{m}{s}$ و در

لحظه $t_2 = 4s$ برابر $v_2 = -9.8 \times 4 = -39.2 \frac{m}{s}$ است؛ بنابراین سرعت متوسط برابر است با:

$$v_{av} = \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{-29.4 + (-39.2)}{2} = -34.3 \frac{m}{s}$$

چون حرکت بدون تغییر جهت انجام می‌شود، تندی متوسط، هم‌اندازه سرعت متوسط و برابر $s_{av} = 34.3 \frac{m}{s}$ است.

گروه آموزشی ماز

۵۴- گلوله A را در شرایط خلأ از ارتفاع h و بدون سرعت اولیه رها می‌کنیم. سه ثانیه بعد گلوله B را از ارتفاع $\frac{h}{4}$ و بدون سرعت اولیه رها می‌کنیم. اگر دو

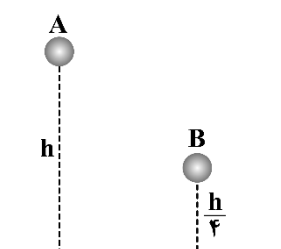
گلوله هم‌زمان به زمین برسند، ارتفاع h چند متر است؟ ($g = 10 \frac{m}{s^2}$)

۱۸۰ (۱)

۱۳۵ (۲)

۳۲۰ (۳)

۱۸۵ (۴)



(متوسط - محاسباتی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۱

با توجه به این که دو گلوله هم‌زمان به زمین رسیده‌اند، زمان سقوط گلوله B، ۳ ثانیه کمتر از زمان سقوط گلوله A بوده است و داریم:

$$\Delta y = -\frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow \frac{\Delta y_A}{\Delta y_B} = \left(\frac{t_A}{t_B}\right)^2 \Rightarrow \frac{h}{\frac{h}{4}} = \left(\frac{t_A}{t_A - 3}\right)^2$$

$$\Rightarrow 4 = \left(\frac{t_A}{t_A - 3}\right)^2 \Rightarrow \frac{t_A}{t_A - 3} = 2 \Rightarrow t_A = 6s$$

بنابراین ارتفاع h برابر است با:

$$h = \frac{1}{2}gt_A^2 = 5 \times 6^2 = 180m$$

گروه آموزشی ماز

۵۵- چه تعداد از موارد زیر درست است؟

الف: نیروهای کنش و واکنش، حتماً و فقط بین دو جسم برقرار می‌شود و الزاماً هم‌نوع‌اند.

ب: ثابت فنر به شکل هندسی فنر و ساختار ماده‌ای که فنر از آن ساخته شده بستگی دارد و هرچه انعطاف‌پذیری فنر بیشتر باشد، عدد آن کوچک‌تر است.

پ: رابطه بین نیروی خالص وارد بر یک جسم و تغییر تکانه آن، بیان دیگری از قانون دوم نیوتون است.

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

(آسان - مفهومی - ۱۲۰۲)

پاسخ: گزینه ۴

الف

نیروهای کنش و واکنش همواره به دو جسم وارد می‌شوند و هم‌نوع‌اند؛ مثلاً هر دو الکتریکی‌اند، یا هر دو مغناطیسی‌اند یا هر دو گرانشی‌اند و یا ... (✓)

ب

ثابت فنر از مشخصات فنر است و به اندازه، شکل و ساختار ماده‌ای که فنر از آن ساخته شده بستگی دارد. برای یک فنر انعطاف‌پذیر، ثابت فنر عددی کوچک

(حدود $1000 \frac{N}{m}$) و برای یک فنر سخت، ثابت فنر عددی بزرگ (حدود $10000 \frac{N}{m}$) است. (✓)

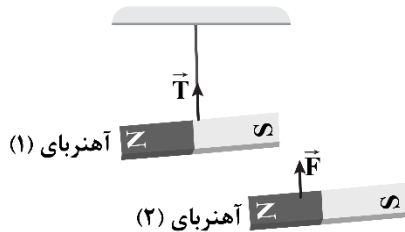
قانون دوم نیوتون را می‌توان به صورت دیگری نیز نوشت که منجر به رابطه نیروی خالص وارد بر جسم و تغییر تکانه آن می‌شود:

$$\vec{F}_{\text{net}} = m \cdot \vec{a} = m \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta(m\vec{v})}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} \Rightarrow \Delta \vec{p} = \vec{F}_{\text{net}} \Delta t \quad (\checkmark)$$

قانون دوم نیوتون رابطه نیروی خالص و تکانه

گروه آموزشی ماز

۵۶- مطابق شکل، آهنربایی را از سقف آویخته‌ایم و آهنربای دیگری را به آن نزدیک کرده‌ایم. واکنش نیروهای $\vec{T}$ و $\vec{F}$ که بر روی شکل مشخص شده‌اند به ترتیب به کدام اجسام وارد می‌شود؟



- (۱) طناب و آهنربای (۱)
- (۲) طناب و آهنربای (۲)
- (۳) سقف و آهنربای (۱)
- (۴) سقف و آهنربای (۲)

(آسان - مفهومی - ۱۲۰۲)

پاسخ: گزینه ۱

نیروی $\vec{T}$ نیرویی است که طناب به آهنربای (۱) وارد می‌کند؛ بنابراین واکنش آن از طرف آهنربای (۱) به طناب وارد می‌شود.
نیروی $\vec{F}$ ، نیروی ربایش مغناطیسی است که آهنربای (۱) به آهنربای (۲) وارد می‌کند؛ بنابراین واکنش آن به آهنربای (۱) وارد می‌شود.

گروه آموزشی ماز

۵۷- جرم قطره بارانی که به تندی حدی خود به مقدار $7 \frac{m}{s}$ رسیده برابر 0.05 گرم است. نیروی مقاومت هوا در برابر حرکت قطره باران چند میلی نیوتون

است؟ $(g = 9.8 \frac{N}{kg})$

۴/۹ (۴)

۰/۰۱ (۳)

۰/۱ (۲)

۰/۴۹ (۱)

(آسان - محاسباتی - ۱۲۰۲)

پاسخ: گزینه ۱

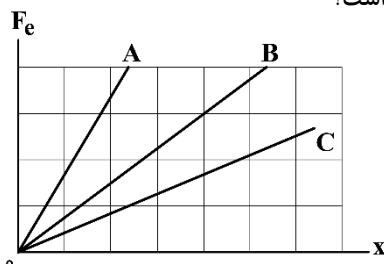
تندی حدی، تندی ثابت است و به این معناست که نیروهای وارد بر جسم متوازن هستند، پس اندازه تندی حدی مهم نیست. چون شتاب حرکت صفر است.

$$f_D = mg$$

$$\Rightarrow f_D = 0.05 \times 10^{-3} \times 9.8 = 0.49 \times 10^{-3} N = 0.49 mN$$

گروه آموزشی ماز

۵۸- نمودار نیروی کشسانی فنرهای A، B و C بر حسب تغییر طول آن‌ها مطابق شکل است. کدام فنر سخت‌تر است؟



- A (۱)
- B (۲)
- C (۳)

(۴) بستگی به طول عادی فنرها دارد.

(آسان - نموداری - ۱۲۰۲)

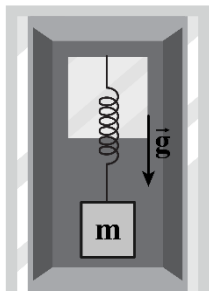
پاسخ: گزینه ۱

هرچه فنر سخت‌تر باشد (ثابت فنر بزرگ‌تر باشد)، شیب نمودار نیرو بر حسب تغییر طول فنر بیش‌تر است.

فنر A سخت‌تر است. $k_A > k_B > k_C \Rightarrow$

گروه آموزشی ماز

۵۹- مطابق شکل، وزنه‌ای به جرم m را با استفاده از یک فنر با جرم ناچیز، از سقف یک آسانسور می‌آویزیم. آسانسور در حال حرکت به سمت بالا، با شتاب g ترمز می‌کند. در این صورت، نیروی فنر بر وزنه برابر است و اگر ناگهان کابل آسانسور پاره شود، نیروی فنر بر وزنه برابر است. (گ شتاب جاذبه زمین است.)



- (۱) صفر، صفر
(۲) mg ، $2mg$
(۳) $2mg$ ، صفر
(۴) صفر، mg

(آسان - محاسباتی - ۱۴۰۲)

پاسخ: گزینه ۱

حالت اول:

$$F_{\text{net}} = ma \Rightarrow F_e - mg = m(-g) \Rightarrow F_e = 0$$

$$F_e$$
 (up), mg (down), $a = -g$ (down)

حالت دوم:

وقتی کابل آسانسور پاره شود، آسانسور سقوط آزاد می‌کند و شتاب آن برابر g و رو به پایین است؛ بنابراین، نمودار آزاد جسم همانند حالت اول خواهد بود و F_e برابر صفر است.

گروه آموزشی ماز

۶۰- به جعبه ۲۰ کیلوگرمی که روی سطح افقی قرار دارد، نیروی افقی ۱۶۰ نیوتونی وارد می‌شود، به طوری که در آستانه حرکت قرار می‌گیرد. سپس به دلیل یک ضربه کوچک، جعبه شروع به حرکت کرده و پس از طی کردن مسافت ۱۸m، تندی جعبه به $12 \frac{m}{s}$ می‌رسد. ضریب اصطکاک جنبشی بین جعبه و سطح، چند برابر ضریب اصطکاک ایستایی بین آن‌هاست؟ ($g = 10 \frac{m}{s^2}$)

۰/۵ (۴)

۰/۶ (۳)

۰/۳ (۲)

۰/۸ (۱)

(سخت - محاسباتی - ۱۴۰۲)

پاسخ: گزینه ۴

گام اول:

نیروهای وارد بر جسم مطابق شکل مقابل است:

گام دوم:

جسم در آستانه حرکت است، در نتیجه:

$$F_{\text{net}} = F - f_{s,\text{max}} = 0 \Rightarrow F = \mu_s F_N$$

$$\frac{F_N = mg}{\rightarrow} F = \mu_s mg \Rightarrow 160 = \mu_s \times 20 \times 10 \Rightarrow \mu_s = 0/8$$

گام سوم:

جسم پس از شروع حرکت، مسافت ۱۸m را طی می‌کند تا تندی آن به $v = 12 \frac{m}{s}$ برسد؛ بنابراین با استفاده از رابطه مستقل از زمان می‌توان نوشت:

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \Rightarrow 12^2 - 0 = 2a \times 18 \Rightarrow a = 4 \frac{m}{s^2}$$

گام چهارم:

در حالتی که جسم حرکت می‌کند، قانون دوم نیوتون را می‌نویسیم:

$$F_{\text{net}} = ma \Rightarrow F - f_k = ma$$

$$\Rightarrow 160 - \mu_k mg = ma \Rightarrow 160 - \mu_k \times (20 \times 10) = 20 \times 4 \Rightarrow \mu_k = 0/4$$

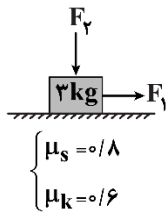
گام آخر:

نسبت خواسته شده را به دست می‌آوریم:

$$\frac{\mu_k}{\mu_s} = \frac{0/4}{0/8} = \frac{1}{2}$$

گروه آموزشی ماز

۶۱- مطابق شکل زیر، جسمی به جرم 3 kg بر روی یک سطح افقی ساکن است و دو نیروی $F_1 = 36\text{ N}$ و $F_2 = 20\text{ N}$ بر آن وارد شده است. نیروی F_2 را چگونه تغییر دهیم تا جسم با سرعت ثابت حرکت کند؟ ($g = 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}}$)



(۱) ۵ نیوتون کاهش

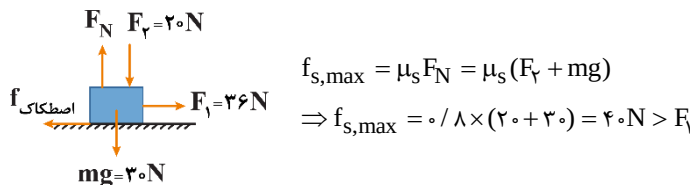
(۲) ۱۰ نیوتون افزایش

(۳) ابتدا ۵ نیوتون کاهش و سپس ۵ نیوتون افزایش

(۴) ابتدا ۵ نیوتون کاهش و سپس ۱۵ نیوتون افزایش

(متوسط - محاسباتی - ۱۴۰۲)

پاسخ: گزینه ۴



ابتدا نمودار آزاد جسم را رسم کرده و $f_{s,max}$ را محاسبه می‌کنیم:

بنابراین جسم ساکن می‌ماند.

برای آن که جسم به آستانه حرکت برسد باید با تغییر F_N ، $f_{s,max}$ را به 36 N برسانیم.

$$f_{s,max} = \mu_s F'_N \Rightarrow 36 = 0.8 F'_N \Rightarrow F'_N = 45\text{ N}$$

بنابراین، ابتدا باید نیروی F_2 را از 20 N به 15 N برسانیم؛ یعنی 5 N کاهش دهیم. با یک کاهش ناچیز در F_2 جسم از آستانه حرکت خارج شده و به حرکت درمی‌آید. اما چون نیروی اصطکاک از $f_{s,max}$ تبدیل به f_k می‌شود، حرکت شتابدار می‌شود.

$$f_k = \mu_k F'_N = 0.6 \times 45 = 27\text{ N} < F_1 \Rightarrow \text{حرکت شتابدار}$$

بنابراین باید F'_N را افزایش دهیم تا f_k به 36 N برسد و حرکت، یکنواخت شود.

$$f_k = \mu_k F''_N \Rightarrow 36 = 0.6 \times F''_N \Rightarrow F''_N = 60\text{ N}$$

در نتیجه، نیروی F_2 باید از 15 N به 30 N برسد؛ یعنی 15 N افزایش یابد.

گروه آموزشی ماز

۶۲- جسمی با سرعت اولیه $\vec{v}_0 = 5(\frac{\text{m}}{\text{s}})\vec{i}$ در امتداد سطح افقی با ضریب اصطکاک جنبشی 0.2 در مبدأ زمان از مبدأ مکان پرتاب می‌گردد. بردار مکان

جسم در لحظه $t = 2\text{ s}$ در SI کدام است؟ ($g = 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}}$)

(۴) $-6\vec{i}$

(۳) $6\vec{i}$

(۲) $-14\vec{i}$

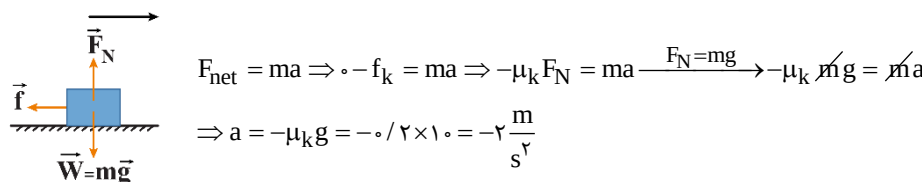
(۱) $14\vec{i}$

(متوسط - محاسباتی - ۱۴۰۲)

پاسخ: گزینه ۳

گام اول:

جسمی که در امتداد سطح افقی پرتاب شود، حرکت شتابدار کندشونده می‌کند تا بایستد؛ در صورتی که فرض کنیم جسم در محور x و هم‌جهت با آن رها شده باشد، شتاب آن مخالف محور x هاست.



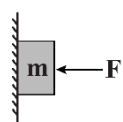
گام آخر:

معادله مکان - زمان متحرک را به دست می‌آوریم و سپس مکان آن را در لحظه $t = 2\text{ s}$ محاسبه می‌کنیم:

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}(-2)t^2 + (5)t + 0 \Rightarrow x = -t^2 + 5t \xrightarrow{t=2\text{s}} x = -2^2 + 5 \times 2 = 6\text{ m}$$

گروه آموزشی ماز

۶۳- مطابق شکل زیر، جسمی با نیروی F که اندازه آن برابر نیروی وزن است، به دیوار تکیه داده شده است. در صورتی که نیروی F را ۲ برابر کنیم، نیروی سطح وارد بر جسم چند برابر می‌شود؟



(۲) $\sqrt{\frac{5}{2}}$

(۱) ۱

(۴) $\sqrt{\frac{5}{4}}$

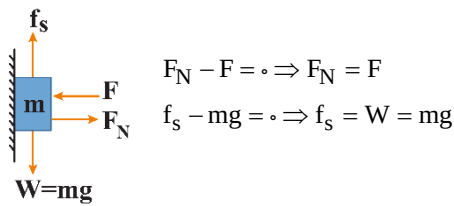
(۳) ۲

(متوسط - محاسباتی - ۱۴۰۲)

پاسخ: گزینه ۲

گام اول:

با توجه به این که $F = W$ و جسم ساکن است، داریم:



گام دوم:

نیروی که سطح به جسم وارد می کند:

$$R_1 = \sqrt{F_N^2 + f_s^2} = \sqrt{F^2 + W^2} \xrightarrow{F=W} R_1 = \sqrt{W^2 + W^2} = W\sqrt{2}$$

گام سوم:

در صورتی که F را ۲ برابر کنیم، بازهم جسم ساکن خواهد بود، پس داریم:

$$F_N = 2F$$

$$f_s = mg \Rightarrow R_2 = \sqrt{(2F)^2 + W^2} \xrightarrow{F=W} R_2 = \sqrt{4W^2 + W^2} = W\sqrt{5}$$

گام آخر:

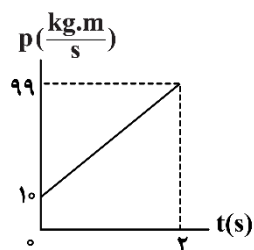
بنابراین نسبت نیروی سطح در دو حالت برابر است با:

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{W\sqrt{5}}{W\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{5}{2}}$$

گروه آموزشی ماز

۶۴- به جعبه‌ای به جرم 4 kg که روی سطح افقی قرار دارد، نیروی افقی 69 N وارد می شود. اگر نیروی عمودی رو به پایین $19/6\text{ N}$ نیز به جعبه وارد شود،

نمودار تغییرات تکانه وارد بر جعبه بر حسب زمان به صورت زیر خواهد بود. از طرف سطح چند نیوتون نیرو به جعبه وارد می شود؟ ($g = 9/8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$)



۶۰ (۱)

۵۸/۸ (۲)

۶۳/۷ (۳)

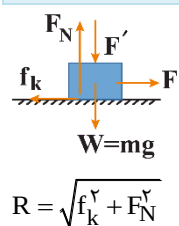
۶۵ (۴)

(سخت - نموداری - ۱۴۰۲)

پاسخ: گزینه ۳

نیروهای وارد بر جعبه مطابق شکل رسم می شوند.

نیروی وارد از طرف سطح به جعبه برابر است با:



$$F_N = F' + mg = 19/6 + 4 \times 9/8 = 58/8\text{ N}$$

$$F_{\text{net}} = ma \Rightarrow F - f_k = ma = \frac{\Delta p}{\Delta t}$$

$$69 - f_k = \frac{99 - 10}{2} = 44/2 \Rightarrow f_k = 24/2\text{ N}$$

$$R = \sqrt{(24/2)^2 + (58/8)^2} = \sqrt{(4/9 \times 5)^2 + (4/9 \times 12)^2} = 4/9 \sqrt{5^2 + 12^2} \Rightarrow R = 4/9 \times 13 = 63/7\text{ N}$$

بنابراین داریم:

گروه آموزشی ماز

آزمون الکترونیکی | مرحله ۱۳ دوازدهم | فیزیک

۶۵- خودرویی با تندی ثابت ۷ در حال حرکت است. ناگهان راننده با دیدن مانعی در فاصله ۶۰ متری خود، با شتابی به بزرگی $\frac{4}{5} \frac{m}{s^2}$ ترمز می‌گیرد و مماس بر مانع می‌ایستد. اگر زمان واکنش راننده، $\frac{1}{5}$ ثانیه و جرم راننده ۵۵kg باشد، بزرگی نیروی خالص متوسط وارد بر راننده در مدت زمان بین دیدن مانع تا توقف کامل، چند نیوتون است؟

۲۲۰ (۴)

۲۰۰ (۳)

۱۱۰ (۲)

۱۰۰ (۱)

(سخت - محاسباتی - ۱۴۰۲)

پاسخ: گزینه ۳

نکته

۱- معادله سرعت - جابه‌جایی در حرکت با شتاب ثابت:

$$v_f^2 - v_i^2 = 2a\Delta x$$

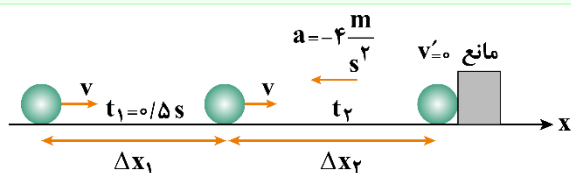
۲- رابطه جابه‌جایی - زمان در حرکت با سرعت ثابت:

$$\Delta x = v\Delta t$$

۳- نیروی خالص متوسط وارد بر یک جسم:

$$\Delta p = F_{av}\Delta t = m\Delta v$$

ابتدا مسیر حرکت خودرو را رسم می‌کنیم:



گام اول:

محاسبه v :

$$\Delta x_1 = vt_1 = \frac{v}{5}$$

$$v_f^2 - v_i^2 = 2a\Delta x_f \Rightarrow \Delta x_f = -\frac{v^2}{-2 \times \frac{4}{5}} = +\frac{v^2}{8}$$

$$\Delta x_1 + \Delta x_f = 60 \Rightarrow \frac{v}{5} + \frac{v^2}{8} = 60 \Rightarrow v^2 + 4v - 480 = 0$$

$$\Rightarrow (v + 24)(v - 20) = 0 \Rightarrow v = 20 \frac{m}{s}$$

گام دوم:

محاسبه مدت زمان ترمز:

$$v = at + v_0 \Rightarrow 0 = -4t_f + 20 \Rightarrow t_f = 5s$$

گام آخر:

محاسبه F_{av} :

$$F_{av} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{m\Delta v}{\Delta t} = \frac{55 \times (0 - 20)}{5/5} \Rightarrow |F_{av}| = 200N$$

گروه آموزشی ماز

۶۶- اگر اندازه شتاب گرانشی در سطح زمین $10 \frac{m}{s^2}$ باشد، وزن جسمی به جرم ۹۰kg در ارتفاع $2R_e$ از سطح زمین چند نیوتون است؟ (R_e شعاع زمین است.)

۴۵۰ (۴)

۳۰۰ (۳)

۲۵۰ (۲)

۱۰۰ (۱)

(آسان - محاسباتی - ۱۴۰۲)

پاسخ: گزینه ۱

گام اول:

ابتدا بایستی اندازه شتاب گرانشی را در فاصله $2R_e$ از سطح زمین محاسبه کنیم:

$$g = G \frac{M_e}{r^2} \Rightarrow \frac{g_h}{g_0} = \left(\frac{R_e}{R_e + h}\right)^2 \xrightarrow[h=2R_e]{g_0=10 \frac{m}{s^2}} \frac{g_h}{10} = \left(\frac{R_e}{3R_e}\right)^2 \Rightarrow g_h = \frac{10}{9} \frac{m}{s^2}$$

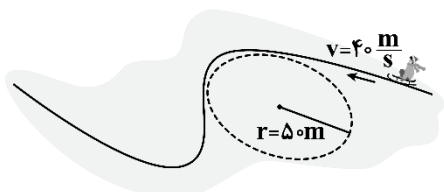
گام آخر:

اندازه وزن جسم در این ارتفاع برابر است با:

$$W_h = mg_h = 90 \times \frac{10}{9} = 100N$$

آزمون الکترونیکی | مرحله ۱۳ دوازدهم | فیزیک

۶۷- شکل زیر، مسیر حرکت سورتیه‌ای را در مسابقه المپیک زمستانی نشان می‌دهد. سورتیه روی یک سطح افقی در حال حرکت است. اگر تندی حرکت سورتیه در کل مسیر $40 \frac{m}{s}$ باشد، شتاب مرکزگرای آن در پیچی به شعاع $50m$ چند واحد SI است؟



۱۶ (۱)

۳۲ (۲)

۴۸ (۳)

۶۴ (۴)

(آسان - محاسباتی - ۱۴۰۲)

پاسخ: گزینه ۲

طبق رابطه $a_C = \frac{v^2}{r}$ شتاب مرکزگرا را به دست می‌آوریم:

$$a_C = \frac{v^2}{r} \Rightarrow a_C = \frac{40^2}{50} = 32 \frac{m}{s^2}$$

گروه آموزشی ماز

۶۸- ماهواره A در فاصله ΔR_e از سطح زمین و ماهواره B در فاصله $5R_e$ از سطح زمین، تحت تأثیر نیروی گرانش زمین در حال حرکت دایره‌ای یکنواخت به دور زمین هستند. به ترتیب از راست به چپ، تندی حرکت و دوره ماهواره A، چند برابر تندی حرکت و دوره ماهواره B است؟

$\frac{1}{4}$ و ۴ (۴)

$\frac{1}{2}$ و ۲ (۳)

$\frac{1}{8}$ و ۴ (۲)

$\frac{1}{2}$ و ۲ (۱)

(متوسط - محاسباتی - ۱۴۰۲)

پاسخ: گزینه ۱

گام اول:

مقایسه تندی:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R_e + h}} \Rightarrow \frac{v_A}{v_B} = \sqrt{\frac{R_e + h_B}{R_e + h_A}} = \sqrt{\frac{R_e + 5R_e}{R_e + \Delta R_e}} = \sqrt{4} = 2$$

گام آخر:

مقایسه دوره:

$$T \propto (R_e + h)^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \frac{T_A}{T_B} = \left(\frac{R_e + h_A}{R_e + h_B} \right)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{1/5 R_e}{6 R_e} \right)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{1}{6} \right)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{8}$$

گروه آموزشی ماز

۶۹- اگر تندی متوسط یک نوسانگر در مدت یک دوره برابر $0.6 \frac{m}{s}$ باشد، بزرگی بیش‌ترین سرعت متوسط آن در مدت $\frac{3}{4}$ دوره تناوب، چند متر بر ثانیه است؟

۰.۹ (۴)

۰.۲ (۳)

۰.۱ (۲)

صفر (۱)

(متوسط - محاسباتی - ۱۴۰۳)

پاسخ: گزینه ۳

گام اول:

در مدت یک دوره، متحرک مسافت $4A$ را طی می‌کند:

$$s_{av} = \frac{L}{\Delta t} = \frac{4A}{T} \Rightarrow \frac{4A}{T} = 0.6 \frac{m}{s}$$

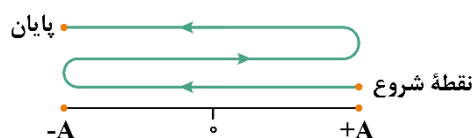
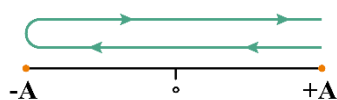
گام آخر:

بیش‌ترین سرعت متوسط در یک بازه زمانی مشخص وقتی اتفاق می‌افتد که جابه‌جایی حداکثر شود.

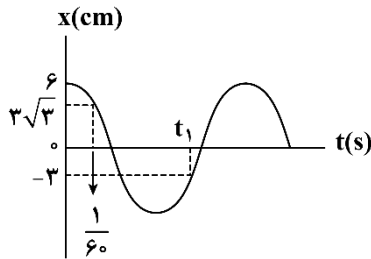
$$|v_{av}| = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{2A}{\frac{3}{2}T} = \frac{4A}{3T} \xrightarrow{\frac{4A}{T} = 0.6}$$

$$|v_{av}| = \frac{1}{3} \times 0.6 = 0.2 \frac{m}{s}$$

گروه آموزشی ماز



۷۰- نمودار مکان - زمان نوسانگری مطابق شکل زیر است. شتاب این نوسانگر در لحظه t_1 چند متر بر مربع ثانیه است؟



- (۱) $-۰/۳\pi^۲$
(۲) $+۰/۳\pi^۲$
(۳) $-۳\pi^۲$
(۴) $+۳\pi^۲$

(متوسط - نموداری - ۱۴۰۳)

پاسخ: گزینه ۴

با توجه به الگوی زمانی متوجه می‌شویم که $\frac{T}{۱۲} = \frac{۱}{۶۰}$ s است، پس:

$$T = \frac{۱}{۵} = ۰/۲s$$

$$\omega = \frac{۲\pi}{T} = \frac{۲\pi}{۰/۲} = ۱۰\pi \frac{\text{rad}}{s}$$

نوسانگر در لحظه t_1 در مکان $x = -۳ \text{ cm}$ قرار دارد، پس داریم:

$$a = -\omega^2 x \Rightarrow a = -(۱۰\pi)^2 \times (-\frac{۳}{۱۰۰}) = +۳\pi^2 \frac{m}{s^2}$$

گروه آموزشی ماز

۷۱- معادله حرکت نوسانگری در SI به صورت $x = ۷ \cos \frac{\Delta\pi}{۲} t$ است. در بازه زمانی $t = ۰/۲۵s$ تا $t = ۱/۷۳s$ چند ثانیه به‌طور هم‌زمان سرعت نوسانگر

منفی است و انرژی پتانسیل آن در حال افزایش است؟

- (۱) $۰/۳۳$ (۲) $۰/۳۵$ (۳) $۰/۴$ (۴) $۰/۴۵$

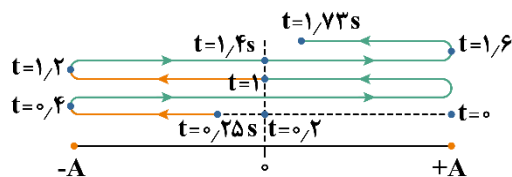
(متوسط - محاسباتی - ۱۴۰۳)

پاسخ: گزینه ۲

ابتدا دوره تناوب حرکت را به‌دست می‌آوریم:

$$\left. \begin{aligned} x &= ۷ \cos \frac{\Delta\pi}{۲} t \\ x &= A \cos \omega t \end{aligned} \right\} \Rightarrow A = ۷m, \omega = \frac{\Delta\pi}{۲} \frac{\text{rad}}{s}$$

$$\omega = \frac{۲\pi}{T} \Rightarrow \frac{\Delta\pi}{۲} = \frac{۲\pi}{T} \Rightarrow T = ۰/۱s \Rightarrow \frac{T}{۴} = ۰/۲s$$



حال بازه زمانی موردنظر را مشخص می‌کنیم:

در بازه‌های زمانی $t = ۰/۲۵s$ تا $t = ۰/۴s$ و $t = ۱s$ تا $t = ۱/۲s$ سرعت منفی است و انرژی پتانسیل در حال افزایش است، پس:

$$\Delta t = (۰/۴ - ۰/۲۵) + (۱/۲ - ۱) = ۰/۳۵s$$

گروه آموزشی ماز

۷۲- در یک سامانه جرم - فنر اگر با ثابت ماندن دامنه نوسان، جرم وزنه متصل به نوسانگر را ۲۱ درصد افزایش دهیم، به ترتیب انرژی مکانیکی نوسانگر و بسامد آن چند برابر می‌شود؟

- (۱) $۱, ۱/۱۱$ (۲) $۱, ۱$ (۳) $۱/۱۱, ۱/۱۰$ (۴) $۱, ۱/۱۰$

(متوسط - محاسباتی - ۱۴۰۳)

پاسخ: گزینه ۱

جرم متصل به فنر ۲۱ درصد افزایش یافته است، پس:

$$m_۲ = m_۱ + ۰/۲۱m_۱ \Rightarrow m_۲ = ۱/۲۱m_۱$$

انرژی مکانیکی سامانه جرم - فنر از رابطه $E = \frac{1}{۲}kA^2$ به‌دست می‌آید و چون ثابت فنر و دامنه تغییر نکرده است، پس انرژی مکانیکی ثابت می‌ماند.

بسامد سامانه جرم - فنر از رابطه $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$ محاسبه می شود، پس:

$$\frac{f_2}{f_1} = \sqrt{\frac{k_2}{k_1} \times \frac{m_1}{m_2}} \xrightarrow{m_2 = 1/2 m_1, k \text{ ثابت}} \frac{f_2}{f_1} = \sqrt{\frac{m_1}{1/2 m_1}}$$

$$\Rightarrow f_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} f_1$$

گروه آموزشی ماز

۷۳- دامنه نوسان وزنه‌ای که به یک فنر با ثابت $80 \frac{N}{m}$ متصل است و در راستای افقی نوسان می کند، برابر با 10 cm است. اگر انرژی پتانسیل این نوسانگر در نقطه‌ای از مسیر 0.1 J باشد، انرژی جنبشی آن در این مکان چند ژول است؟

۰/۴ (۴)

۰/۳ (۳)

۰/۲ (۲)

۰/۱ (۱)

(آسان - محاسباتی - ۱۴۰۳)

پاسخ: گزینه ۳

گام اول:

ابتدا انرژی مکانیکی نوسانگر را محاسبه می کنیم:

$$E = \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} \times 80 \times \left(\frac{10}{100}\right)^2 = 0.4 \text{ J}$$

گام آخر:

با داشتن انرژی مکانیکی و پتانسیل، انرژی جنبشی را به دست می آوریم:

$$E = U + K \Rightarrow 0.4 = 0.1 + K \Rightarrow K = 0.3 \text{ J}$$

گروه آموزشی ماز

۷۴- دو آونگ A و B در مکانی با شتاب گرانشی $g = \pi^2 \frac{N}{kg}$ حرکت هماهنگ ساده انجام می دهند. در مدت زمان t آونگ A و B به ترتیب ۱۲ و ۱۵ نوسان انجام می دهند. اگر طول آونگ B، 9 cm کم تر از طول آونگ A باشد، دوره تناوب آونگ A چند ثانیه است؟

۲ (۴)

۱/۶ (۳)

۱ (۲)

۰/۸ (۱)

(متوسط - محاسباتی - ۱۴۰۳)

پاسخ: گزینه ۲

تعداد نوسانات دو آونگ در مدت زمان یکسان داده شده است، پس:

$$T = \frac{t}{N} \Rightarrow \frac{T_A}{T_B} = \frac{N_B}{N_A} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}$$

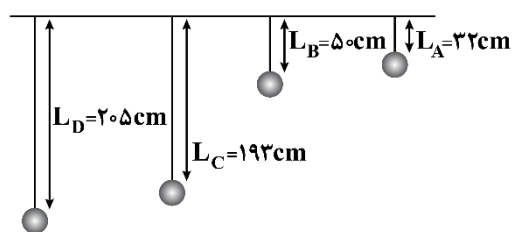
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \Rightarrow \frac{T_A}{T_B} = \sqrt{\frac{L_A}{L_B}} \Rightarrow \frac{5}{4} = \sqrt{\frac{L_A}{L_A - 9}}$$

$$\Rightarrow \frac{25}{16} = \frac{L_A}{L_A - 9} \Rightarrow L_A = 25 \text{ cm}$$

$$T_A = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{0.25}{\pi^2}} = 1 \text{ s}$$

گروه آموزشی ماز

۷۵- در شکل زیر، چهار آونگ ساده از میله‌ای افقی آویزان هستند. اگر میله دستخوش نوسان‌هایی افقی با بسامد زاویه‌ای در گستره $\frac{2}{5} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ تا $\frac{5}{5} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ باشد، چه تعداد از آونگ‌ها با حداکثر دامنه به نوسان درمی‌آیند؟ ($g = 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}}$)



- (۱) صفر
(۲) ۱
(۳) ۲
(۴) ۳

(متوسط - محاسباتی - ۱۲۰۳)

پاسخ: گزینه ۴

در صورتی که بسامد زاویه‌ای آونگی در محدوده بسامد زاویه‌ای میله قرار بگیرد تشدید رخ می‌دهد. محدوده طول آونگ را برای گستره $\frac{2}{5} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ تا $\frac{5}{5} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ به دست می‌آوریم.

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \Rightarrow 2 \leq \sqrt{\frac{g}{L}} \leq 5 \Rightarrow 4 \leq \frac{10}{L} \leq 25 \Rightarrow 0.4 \text{ m} \leq L \leq 2.5 \text{ m}$$

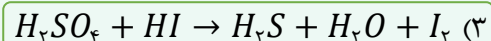
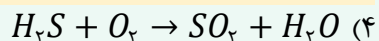
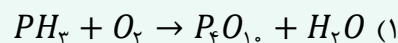
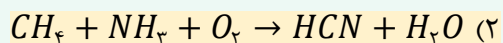
پس در آونگ‌هایی که طول آن‌ها بین ۴۰ cm تا ۲۵۰ cm است، تشدید رخ می‌دهد، یعنی سه آونگ B و C و D تشدید می‌شوند.

گروه آموزشی ماز



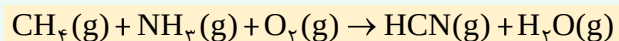
یکی از مطابقت‌های آزمون سال گذشته ماز با کنکور ۱۴۰۳

۸۴- بر اثر سوختن اوره، گازهای کربن دی‌اکسید و نیتروژن به همراه بخار آب تولید می‌شود. ضریب آب در معادله موازنه شده سوختن اوره، با ضریب این ماده در معادله موازنه شده کدام یک از واکنش‌های زیر برابر است؟



(مرحله ۴ آزمون‌های سالیانه - شیمی رشته ریاضی)

۸۱- مجموع ضرایب استوکیومتری مواد در واکنش زیر، پس از موازنه معادله آن، کدام است؟



۱۵ (۴)

۱۴ (۳)

۱۳ (۲)

۱۲ (۱)

(کنکور اردیبهشت ۱۴۰۳ - شیمی رشته ریاضی)



برای مشاهده
همه مطابقت‌ها
اینجا رو اسکن کن!

biomaze.ir

یا رو این کلیک کن!



دانش‌آموزان عزیز ماز

امیدوارم که حالتون خوب باشه و با حال خیلی خوب، وارد ایام جمع‌بندی کنکورتون شده باشید!

بچه‌ها دقت کنید که در طول ایام جمع‌بندی، با توجه به مدل درس خوندتون در طول سال تحصیلی و برنامه‌ای که با اون پیش رفتید، ممکنه روش‌های پیشروی متفاوتی داشته باشید! مثلاً ممکنه یک نفر جمع‌بندی رو با شیمی دهم شروع کنه، ممکنه یکی کار رو با شیمی دوازدهم شروع کنه و حتی ممکنه یکی کار رو به‌صورت موضوعی جلو بیره. اگر بخوام یک توصیه خیلی مهم بهتون بکنم، اینه که در طول ایام جمع‌بندی سعی کنید خیلی خودتون رو محدود به بودجه آزمون‌ها نکنید و سعی کنید در همه آزمون‌ها شرکت کنید تا مدام خودتون رو به چالش بکشید! مهم‌ترین وظیفه شما در طول ایام جمع‌بندی، مرور مدام کتاب درسی و حل آزمون‌های متنوع هست. مطمئن باشید که به واسطه این دو اصل کاری، حتماً اتفاقات خیلی خوبی براتون رقم خواهد خورد.

بچه‌ها دقت کنید که در طول ماه‌های پایانی کنکور، با حرف‌ها و مشاوره‌های خیلی متعددی مواجه خواهید شد. دوست، آشنا، معلم‌ها و مشاورها در طول این ایام ارتباطات زیادی با شما دارن و ممکنه به‌صورت ناخواسته، شما از حرف‌هایی که می‌شنوید حس اضطراب یا حس ناکافی بودن بگیرید! در یک کلام، سعی کنید خودتون رو تا حد امکان از این حس‌ها دور کنید و مطمئن باشید که اگر برای رسیدن به هدفتون تلاش کنید، خدا بهتون کمک می‌کنه که به اون هدف برسید و اتفاقات خوبی رو در زندگی‌تون به تصویر بکشید!

دکتر فرشاد هادیان‌فرد - رتبه ۲۸ کنکور ۹۴ و مسئول درس شیمی آزمون ماز

۷۶- بر اثر سوختن ۰/۱ مول از کربوکسیلیک اسید $C_6H_8O_7$ ، مقدار $7/2$ گرم آب تولید می‌شود. در ساختار این کربوکسیلیک اسید چند پیوند اشتراکی وجود داشته و از واکنش ۰/۱ مول از این ماده با مقدار کافی متانول، در نهایت چند گرم فراورده آلی تولید می‌شود؟

($O = 16$ و $C = 12$ و $H = 1 : g \cdot mol^{-1}$)

۱۱/۴ - ۱۶ (۴)

۱۲/۶ - ۱۶ (۳)

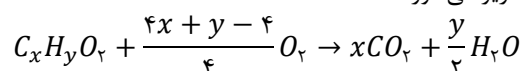
۱۱/۴ - ۱۸ (۲)

۱۲/۶ - ۱۸ (۱)

(سخت - مسئله - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۱

کربوکسیلیک اسیدهای یک عاملی بر اساس معادله زیر می‌سوزند:



اتم‌های هیدروژن موجود در ساختار آب و اتم‌های کربن موجود در ساختار کربن دی‌اکسید، همان اتم‌های کربن و هیدروژنی هستند که در ساختار کربوکسیلیک اسید وجود داشته‌اند. با توجه به مقدار آب تولید شده، شمار مول اتم‌های هیدروژن موجود در ۰/۱ مول از کربوکسیلیک اسید مورد نظر را محاسبه می‌کنیم.

$$? \text{ mol } H = 7/2 \text{ g } H_2O \times \frac{1 \text{ mol } H_2O}{18 \text{ g } H_2O} \times \frac{2 \text{ mol } H}{1 \text{ mol } H_2O} = 0.8 \text{ mol}$$

در ۰/۱ مول از اسید مورد نظر، ۰/۸ مول اتم هیدروژن وجود دارد، پس در ۱ مول از این ترکیب، ۸ مول اتم هیدروژن یافت می‌شود. اگر فرمول مولکولی کربوکسیلیک اسید مورد نظر را معادل با $C_6H_8O_7$ در نظر بگیریم، مقدار ۷ برابر با ۸ می‌شود. بر این اساس، تعداد پیوند اشتراکی در ترکیبی با فرمول مولکولی $C_6H_8O_7$ را محاسبه می‌کنیم:

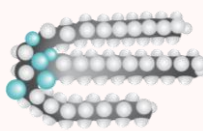
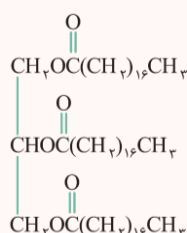
$$\begin{aligned} \text{تعداد پیوند اشتراکی} &= \frac{4 \times (\text{تعداد اتم } C) + 2 \times (\text{تعداد اتم } O) + 1 \times (\text{تعداد اتم } H) + 3 \times (\text{تعداد اتم } N)}{2} \\ &= \frac{4 \times (6) + 2 \times (7) + 1 \times (8) + 3 \times (0)}{2} = 18 \end{aligned}$$

این اسید بر اساس معادله $CH_3OH + C_6H_8O_7 \rightarrow C_6H_7O_7 + H_2O$ با متانول (CH_3OH) واکنش داده و ترکیبی با فرمول مولکولی $C_7H_{11}O_7$ را ایجاد می‌کند. بر این اساس، داریم:

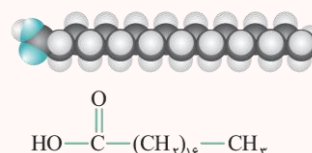
$$? \text{ g } C_7H_{11}O_7 = 0.8 \text{ mol } C_6H_8O_7 \times \frac{1 \text{ mol } C_7H_{11}O_7}{1 \text{ mol } C_6H_8O_7} \times \frac{126 \text{ g } C_7H_{11}O_7}{1 \text{ mol } C_7H_{11}O_7} = 12/6 \text{ g}$$

چربی‌ها

چربی‌ها، مخلوطی از اسیدهای چرب (کربوکسیلیک اسیدهایی با زنجیر بلند کربنی و جرم مولکولی زیاد) و استرهای بلندزنجیر (استرهایی با جرم مولی زیاد) هستند. تصویر زیر، ساختار مولکولی انواع چربی‌ها را نشان می‌دهد:



استر بلندزنجیر



اسید چرب

آزمون الکترونیک | مرحله ۱۳ دوازدهم | شیمی

بخش قطبی مولکول چربی‌ها، دارای تعدادی اتم اکسیژن در ساختار خود است. همان‌طور که مشخص است، در ساختار بخش قطبی این دو ماده، پیوند $C = O$ یافت می‌شود. هر یک از مولکول‌های سازنده چربی‌ها (اسیدهای چرب و استرها با جرم مولی زیاد)، از یک بخش قطبی (بخش آب‌دوست) و یک بخش ناقطبی (بخش چربی‌دوست و یا آب‌گریز) تشکیل شده است. از آن‌جا که بخش اعظم این مولکول‌ها ناقطبی است، پس بخش ناقطبی مولکول به راحتی بر بخش قطبی آن غلبه کرده و در نتیجه مولکول‌های چربی در مجموع، ناقطبی به حساب می‌آیند و در حلال‌های قطبی مانند آب حل نمی‌شوند. به خاطر نامحلول بودن چربی‌ها در حلال‌های قطبی، آب به تنهایی نمی‌تواند چربی‌های موجود بر روی پوست و لباس‌ها را پاک کند و به همین دلیل، برای پاک کردن چربی‌ها باید از سایر پاک‌کننده‌ها کمک بگیریم.

گروه آموزشی ماز

۷۷- کدام یک از مطالب زیر نادرست است؟

- (۱) نوع نیروی بین مولکولی غالب میان ذرات سازنده یک نمونه از صابون، مشابه به یک نمونه استون است.
- (۲) ماده‌ای با فرمول شیمیایی $CH_3 - C_6H_4 - SO_3Na$ نمی‌توان به‌عنوان یک پاک‌کننده استفاده کرد.
- (۳) اوره، از جمله مواد محلول در آب بوده و بین مولکول‌های آن امکان برقرار شدن پیوند هیدروژنی وجود ندارد.
- (۴) شاخص امید به زندگی به عوامل مختلف بستگی داشته و مقدار آن در مناطق برخوردار، بیشتر از میانگین جهان است.

پاسخ: گزینه ۳

(متوسط - مفهومی - ۱۲۰۱)

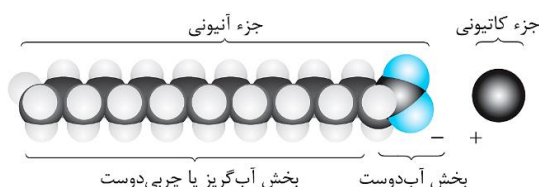
اوره، از مولکول‌های قطبی تشکیل شده و از جمله مواد محلول در آب به شمار می‌رود. چون اوره دارای اتم‌های هیدروژن متصل به نیتروژن است، بین مولکول‌های این ماده امکان برقرار شدن پیوند هیدروژنی وجود دارد. اطلاعات مربوط به اوره، به‌صورت زیر است:

نام ماده	فرمول شیمیایی	ساختار	نوع ماده	حلال مناسب
اوره	$CO(NH_2)_2$		مولکول قطبی	حلال قطبی (آب)

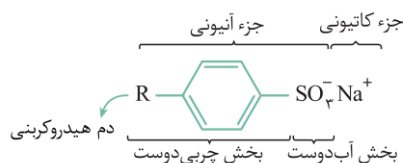
توجه داریم که در ساختار مولکولی اوره، گروه عاملی آمیدی وجود دارد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱- ساختار صابون‌های جامد به‌صورت زیر است:



صابون‌های جامد، نمک سدیم اسیدهای چرب هستند و می‌توان آن‌ها را با فرمول کلی $RCOONa$ نشان داد که در آن، گروه R نشان‌دهنده یک زنجیر هیدروکربنی بلند است. چون زنجیره هیدروکربنی در ساختار صابون‌ها خیلی بلند است، نوع نیروی بین ذره‌ای در این مواد از جنس وان‌دروالسی خواهد بود. این نکته، برای اولین بار در امتحانات نهایی شیمی دوازدهم پارسال مطرح شد! توجه داریم که بین ذرات استون نیز نیروی وان‌دروالسی برقرار است. در ساختار پاک‌کننده‌های غیر صابونی یک حلقه بنزنی وجود دارد که به زنجیر آلکیلی با تعداد اتم کربن زیاد (بین ۸ تا ۱۵ اتم کربن) متصل است. کلی این مواد به‌صورت زیر است:



چون پاک‌کننده داده شده در صورت سؤال، دارای زنجیره آلکیل کوتاه است، نمی‌تواند به‌عنوان یک پاک‌کننده مناسب ایفای نقش کند.

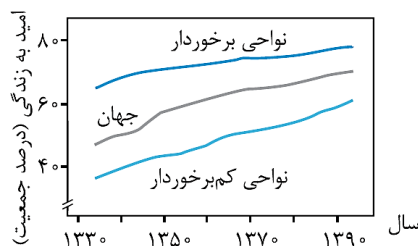
پاک‌کننده‌های غیر صابونی

شیمی‌دان‌ها به دنبال موادی بودند که علاوه بر قدرت پاک‌کنندگی بالا، بتوان آن‌ها را به میزان انبوه و با قیمت مناسب تولید کرد. با توجه به رابطه میان ساختار و رفتار یک ماده، شیمی‌دان‌ها به دنبال موادی بودند که همانند صابون‌ها، ساختاری دوگانه‌دوست (هم چربی‌دوست و هم آب‌دوست) داشته باشد. سرانجام آن‌ها توانستند با استفاده از بنزن و دیگر مواد اولیه موجود در صنایع پتروشیمی، پاک‌کننده‌های جدیدی را تولید کنند. این مواد، به پاک‌کننده‌های غیر صابونی معروف بوده و فرمول همگانی آن‌ها به‌صورت $RC_6H_4SO_3Na$ است.

همان‌طور که مشخص است، پاک‌کننده‌های غیر صابونی نیز همانند پاک‌کننده‌های صابونی از یک بخش آب‌دوست و یک بخش چربی‌دوست (حلقه بنزنی و زنجیر هیدروکربنی) تشکیل شده‌اند. در هنگام استفاده از این پاک‌کننده‌ها، مولکول‌های چربی به زنجیره هیدروکربنی پاک‌کننده می‌چسبند و بخش آب‌دوست مولکول‌های پاک‌کننده نیز باعث پخش شدن چربی‌ها در آب می‌شود.

پاک‌کننده‌های غیر صابونی، برخلاف پاک‌کننده‌های صابونی، طی واکنش‌های پیچیده و از مواد پتروشیمیایی تولید می‌شوند. این پاک‌کننده‌ها، همانند بنزن، نفتالن، بنزوتیک اسید، بنزالدهید و ...، دارای حلقه کربنی آروماتیک (حلقه بنزنی) در ساختار خود هستند. پاک‌کننده‌های غیر صابونی، قدرت پاک‌کنندگی بیشتری نسبت به پاک‌کننده‌های صابونی دارند.

شاخص امید به زندگی به عوامل گوناگونی بستگی داشته و مقدار آن در مناطق کم برخوردار، همانند مناطق برخوردار جهان، رو به افزایش یافتن است. نمودار زیر، روند تغییر شاخص امید به زندگی را در مناطق مختلف جهان نشان می‌دهد:



گروه آموزشی ماز

۷۸- در ساختار بخش آنیونی یک پاک‌کننده صابونی جامد، یک زنجیره هیدروکربنی سیرشده با ۱۳ اتم کربن وجود دارد. با حل کردن هر گرم از این ماده در ۱۶ لیتر محلول با چگالی $1/25 \text{ g} \cdot \text{mL}^{-1}$ ، غلظت ppm یون سدیم در محلول چقدر می‌شود؟

($\text{Na} = 23$ و $\text{O} = 16$ و $\text{C} = 12$ و $\text{H} = 1$: $\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$)

۴۶ (۴)

۴/۶ (۳)

۲۳ (۲)

۲/۳ (۱)

(متوسط - مسئله - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۳

با توجه به اطلاعات داده شده، فرمول شیمیایی صابون مورد نظر به صورت $\text{C}_{13}\text{H}_{27}\text{COONa}$ است. در قدم اول، جرم سدیم موجود در ساختار یک گرم از این پاک‌کننده را محاسبه می‌کنیم:

$$? \text{ g Na}^+ = 1 \text{ g C}_{13}\text{H}_{27}\text{COONa} \times \frac{1 \text{ mol C}_{13}\text{H}_{27}\text{COONa}}{250 \text{ g C}_{13}\text{H}_{27}\text{COONa}} \times \frac{1 \text{ mol Na}^+}{1 \text{ mol C}_{13}\text{H}_{27}\text{COONa}} \times \frac{23 \text{ g Na}^+}{1 \text{ mol Na}^+} = 0.092 \text{ g}$$

جرم محلول مورد نظر برابر است با:

$$\text{جرم محلول} = \text{چگالی محلول} \times \text{حجم محلول} = 16000 \text{ mL} \times 1/25 \text{ g} \cdot \text{mL}^{-1} = 20000 \text{ g}$$

در مرحله بعد، غلظت ppm یون سدیم را در محلول مورد نظر محاسبه می‌کنیم:

$$\text{ppm} = \frac{\text{جرم Na}^+}{\text{جرم محلول}} \times 10^6 = \frac{0.092}{20000} \times 10^6 = 4/6$$

با توجه به محاسبات انجام شده، غلظت ppm یون سدیم در محلول ۲۰ کیلوگرمی ایجاد شده برابر با ۴/۶ واحد می‌شود.

گروه آموزشی ماز

۷۹- کدام موارد از مطالب زیر درباره انواع پاک‌کننده درست است؟

الف: اتم‌های موجود در گروه عاملی پلی‌آمیدها، در ساختار نوعی از صابون‌های مایع نیز وجود دارد.

ب: استفاده از مواد شوینده و گسترش میزان ارائه خدمات بهداشتی، بر شاخص امید به زندگی اثر دارد.

پ: اولین و سومین کاتیون فراوان در آب دریا، باعث سختی آب و کاهش ارتفاع کف صابون در آن می‌شود.

ت: با مصرف محلول سود برای باز کردن مجاری بسته شده با چربی، در نهایت یک ماده اسیدی تولید می‌شود.

(۴) «الف» و «ت»

(۳) «پ» و «ت»

(۲) «ب» و «پ»

(۱) «الف» و «ب»

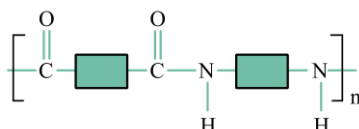
(متوسط - مفهومی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۱

عبارت‌های (الف) و (ب) درست هستند.

بررسی موارد:

«الف»: ساختار پلی‌آمیدها به صورت زیر است:



در گروه عاملی موجود در ساختار پلی‌آمیدها، اتم‌هایی از عناصر هیدروژن، نیتروژن، کربن و اکسیژن وجود دارد. در ساختار بخش قطبی صابون‌های مایع حاوی یون آمونیوم نیز اتم‌های هیدروژن، کربن، نیتروژن و اکسیژن وجود دارد.

صابون‌ها

پاک‌کننده‌های صابونی، از جمله موادی هستند که از آن‌ها برای پاک کردن لکه‌ها و قطره‌های چربی استفاده می‌شود. به نمک سدیم، پتاسیم یا آمونیوم اسیدهای چرب دراز زنجیر، صابون گفته می‌شود. در واقع، صابون‌های مایع، نمک پتاسیم یا آمونیوم اسیدهای چرب و صابون‌های جامد نیز نمک سدیم اسیدهای چرب هستند. از آنجا که صابون‌های جامد دمای ذوب بالاتری دارند، پس می‌توان گفت اگر یون Na^+ موجود در نوعی صابون را با کاتیون آمونیوم و یا کاتیون K^+ جایگزین کنیم، دمای ذوب آن کاهش می‌یابد.

«پ»: در گذشته به دلیل عدم دسترسی، کمبود و یا استفاده نکردن از صابون، سطح بهداشت فردی و همگانی در جامعه بسیار پایین بود؛ به طوری که بیماری‌های گوناگون به سادگی در جهان گسترش می‌یافت. با گذشت زمان و استفاده از مواد شوینده و گسترش میزان ارائه خدمات بهداشتی و درمانی، شاخص امید به زندگی در جهان افزایش یافت.

موانع صنعت صابون‌سازی

نقش پاک‌کنندگی صابون باعث شد تا کاربرد آن از پاکیزگی و تأمین بهداشت فردی و محیط خانه، به مراکز صنعتی، بیمارستانی و اداری نیز گسترش پیدا کند. این روند، سبب رشد چشمگیر صابون‌سازی و تبدیل آن به یک صنعت بزرگ در جهان شد. این صنعت، نقش چشمگیری در کاهش بیماری‌های گوناگون و افزایش سطح بهداشت در جهان داشته است. در این زمان، عوامل زیر، چون سدی بر سر راه صنعت صابون‌سازی قرار گرفتند:

۱. با افزایش جمعیت جهان، مصرف صابون نیز افزایش یافت.
۲. برای تولید صابون در مقیاس انبوه، به میزان زیادی چربی به‌عنوان مواد اولیه نیاز بود و تأمین این میزان چربی، به یک چالش تبدیل شد.
۳. تأمین صابون مورد نیاز جهان به روش‌های سنتی تقریباً ناممکن بود.

۴. پاک‌کننده‌های صابونی در همه شرایط به خوبی عمل نمی‌کردند و استفاده از آن‌ها در برخی از موقعیت‌ها مثل سفرهای دریایی، پاسخگوی نیاز انسان نبود. نگرانی‌هایی از این دست، سبب شد تا شیمی‌دان‌ها برای شناسایی و تولید دیگر پاک‌کننده‌ها ترغیب شوند. شیمی‌دان‌ها به دنبال موادی بودند که علاوه بر قدرت پاک‌کنندگی بالا، بتوان آن‌ها را به میزان انبوه و با قیمت مناسب تولید کرد. با توجه به رابطه میان ساختار و رفتار یک ماده، شیمی‌دان‌ها به دنبال موادی بودند که همانند صابون‌ها، ساختاری دوگانه‌دوست (هم چربی‌دوست و هم آب‌دوست) داشته باشد. سرانجام آن‌ها توانستند با استفاده از بنزن و دیگر مواد اولیه تولید شده در صنایع پتروشیمی، پاک‌کننده‌های غیر صابونی را بسازند.

«پ»: کاتیون‌های منیزیم و کلسیم، به ترتیب دومین و سومین کاتیون‌های فراوان موجود در آب دریا هستند. این کاتیون‌های تک‌اتمی، سبب افزایش سختی آب دریا شده و به دنبال آن، موجب کاهش تأثیر صابون‌ها و کاهش ارتفاع کف ایجاد شده می‌شوند.

«ت»: سدیم هیدروکسید در واکنش با اسیدهای چرب موجود در چربی‌ها، آب و نوعی پاک‌کننده صابونی تولید می‌کند. آب یک ماده خنثی است اما پاک‌کننده‌های صابونی از جمله مواد با خاصیت بازی هستند.

گروه آموزشی ماز

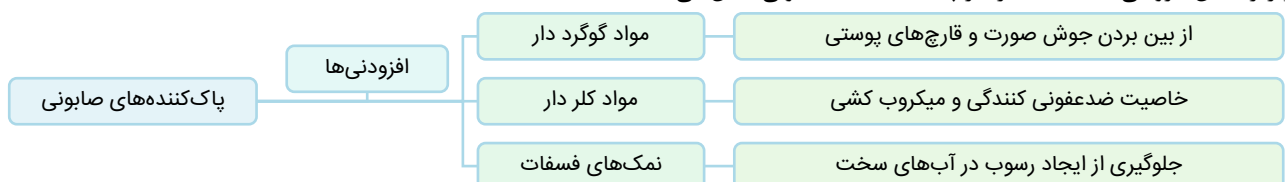
۸۰- کدام یک از مطالب داده شده نادرست است؟

- (۱) به منظور افزایش خاصیت ضد عفونی‌کنندگی و میکروب‌کشی صابون‌ها، به آن‌ها مواد گوگردار اضافه می‌کنند.
- (۲) در ساختار ذرات عسل، اتم‌های اکسیژنی وجود دارد که به دو اتم متفاوت از دو عنصر نافلزی متصل شده‌اند.
- (۳) مخلوطی از آب، روغن و صابون، به ظاهر همگن بوده و حاوی توده‌های مولکولی با اندازه‌های متفاوت است.
- (۴) شربت معده مثالی از مخلوط‌های ناهمگن از نوع سوسپانسیون است که ناپایدار بوده و نور را پخش می‌کند.

(متوسط - مفهومی و حفظی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۱

نمودار زیر، نقش افزودنی‌های مختلف را در پاک‌کننده‌های صابونی نشان می‌دهد:



با توجه به نمودار بالا، به منظور افزایش خاصیت ضد عفونی‌کنندگی و میکروب‌کشی صابون‌ها، به آن‌ها ماده شیمیایی کلردار اضافه می‌کنند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۲ عسل از مولکول‌هایی با ساختار قطبی ($\mu > 0$) تشکیل شده است که در ساختار آن‌ها شمار زیادی گروه هیدروکسیل ($-OH$) وجود دارد. برای پاک کردن لکه‌های ایجاد شده توسط عسل، از آب می‌توان به‌عنوان یک پاک‌کننده مناسب استفاده کرد. در ساختار گروه عاملی هیدروکسیل، یک اتم اکسیژن به اتم‌های هیدروژن و کربن متصل شده است.

صابون مراغه

اغلب صابون‌ها دارای انواع مختلفی از افزودنی‌های شیمیایی هستند که خواص ویژه‌ای را به آن‌ها می‌دهند. این در حالی است که برخی از صابون‌ها فاقد افزودنی هستند. صابون طبیعی معروف به صابون مراغه، معروف‌ترین صابون سنتی ایران است. برای تهیه این صابون، پیه گوسفند و سود سوزآور را در دیگ‌های بزرگ با آب برای چندین ساعت می‌جوشانند و پس از قالب‌گیری آن‌ها را در آفتاب خشک می‌کنند. این صابون حالت جامد داشته و از آنجا که فاقد افزودنی شیمیایی بوده و خاصیت بازی مناسبی دارد، از آن برای شست‌وشوی موهای چرب استفاده می‌شود.

۳ مخلوطی از آب، روغن و صابون، یک نوع کلوئید به شمار می‌رود. کلوئیدها به ظاهر همگن بوده و در ساختار خود، حاوی توده‌های مولکولی با اندازه‌های متفاوت هستند. توجه داریم که کلوئیدها از دید میکروسکوپی ناهمگن هستند.

۴

شربت معده یک نمونه از مخلوط‌های سوسپانسیون است. سوسپانسیون‌ها نمونه‌ای از یک مخلوط ناهمگن هستند که اندازه ذره‌های آن‌ها نسبت به کلوئیدها بزرگ‌تر است. با گذشت زمان ذره‌های مخلوط سوسپانسیون ته‌نشین می‌شوند، بنابراین مخلوط سوسپانسیون ناپایدار است. از طرفی، این مخلوط‌ها مانند کلوئیدها نور را پخش می‌کنند. جدول زیر، ویژگی‌های انواع مختلف مخلوط‌های همگن و ناهمگن را نشان می‌دهد:

ویژگی	مخلوط ناهمگن (سوسپانسیون)	کلوئید	مخلوط همگن (محلول)
عبور نور	نور را پخش می‌کند.	نور را پخش می‌کند.	نور را عبور می‌دهد.
همگن بودن	ناهمگن است.	ناهمگن است.	همگن است.
پایداری	ناپایدار است.	پایدار است.	پایدار است.
نوع ذره	ذره‌ها و قطعات مجزا	مولکول‌های بزرگ یا توده‌های مولکولی	یون‌ها یا مولکول‌ها
مثال‌ها	سالاد - مخلوط آب و روغن - شربت معده	مخلوط آب و صابون و روغن - سرامیک‌ها - انواع رنگ‌ها - چسب‌ها - شیر - ژله - مایونز	محلول آب‌نمک - محلول مس (II) سولفات در آب

گروه آموزشی ماز

۸۱- مطابق تصویر مقابل، محلولی از هیدروکلریک اسید با غلظت ۰/۵ مول بر لیتر را در مسیر یک مدار الکتریکی قرار داده‌ایم تا لامپ مورد نظر روشن شود. با ایجاد کدام تغییر زیر، شدت نور لامپ موجود در مدار افزایش می‌یابد؟



- ۱) حل کردن مقداری گاز HF در محلول
- ۲) ریختن آب خالص بر روی محلول
- ۳) ریختن محلول ۰/۰۱ مولار HNO₃ روی محلول
- ۴) ریختن محلول ۰/۰۲ مولار سود روی محلول

پاسخ: گزینه ۱

(آسان - مفهومی - ۱۲۰۱)

فلزها و گرافیت (مغز مداد) رسانای جریان برق هستند. از آنجا که رسانایی آن‌ها به وسیله الکتردها انجام می‌شود، به آن‌ها رسانای الکتریکی می‌گویند. نوع دیگری از رسانایی نیز وجود دارد که به وسیله یون‌ها انجام می‌شود و به آن رسانای یونی می‌گویند. این رسانایی هنگامی انجام می‌شود که یون‌های موجود در یک ماده بتوانند آزادانه از نقطه‌ای به نقطه دیگر جابه‌جا شوند، زیرا در این شرایط بارهای الکتریکی نیز جابه‌جا خواهند شد. در چنین شرایطی، هرچقدر که غلظت مولی یون‌ها در محلول بیشتر باشد، آن محلول رسانایی الکتریکی بیشتری خواهد داشت. با انحلال گاز هیدروژن فلوئورید در محلول مورد نظر، مقداری از ذرات سازنده این گاز یونش یافته و غلظت یون‌ها در محلول بالا می‌رود. با بیشتر شدن غلظت مولی یون‌ها در این محلول آبی، رسانایی آن بیشتر شده و نور لامپ نیز بیشتر می‌شود.

الکترولیت و انواع انحلال

الکترولیت‌ها موادی هستند که هنگام حل شدن در آب، یون تولید کنند و محلول آن‌ها رسانای یونی جریان الکتریکی خواهد بود. این مواد به دو دسته ترکیبات یونی و مولکولی تبدیل می‌شوند:

۱. مواد یونی: این مواد در آب تفکیک می‌شوند و یون‌های موجود در آن‌ها در محلول مورد نظر آزاد می‌شوند. همچنین این مواد در حالت مذاب نیز در خود یون‌های آزاد دارند. برای مثال، سدیم کلرید در این دسته قرار می‌گیرد.
 ۲. مواد مولکولی: پس از انحلال این مواد در آب، تمام یا بخشی از آن‌ها یونش یافته و به یون‌هایی با بار متفاوت تبدیل می‌شوند. اسیدها و بازهای آرنیوس، از این دسته مواد هستند. برای مثال، گاز هیدروژن کلرید در این دسته قرار می‌گیرد.
- مواد غیرالکترولیت نیز موادی مولکولی هستند که به‌طور کامل به‌صورت مولکولی در آب حل می‌شوند و هیچ یونی تولید نمی‌کنند. از این مواد می‌توان به الکل‌ها، کتون‌ها، اترها و شکر اشاره کرد. محلول این مواد در آب رسانای جریانی الکتریکی نیست.

بررسی سایر گزینه‌ها:

- ۲) با ریختن آب خالص روی یک محلول الکترولیت، رسانایی الکتریکی آن محلول کاهش خواهد یافت.
- ۳) چون محلول نیتریک اسید افزوده شده به محلول اولیه در مقایسه با این محلول رقیق‌تر است، افزودن این محلول به محلول اولیه منجر به کاهش غلظت آن شده و بر این اساس، رسانایی الکتریکی این محلول کاهش می‌یابد.
- ۴) با ریختن محلول سود بر روی محلول اولیه، اسید موجود در این محلول خنثی شده و بر این اساس، رسانایی الکتریکی محلول مورد نظر کاهش می‌یابد.

گروه آموزشی ماز

۸۲- اگر ۵/۶ لیتر گاز گوگرد تری‌اکسید را در شرایط STP به ۲ لیتر محلول ۰/۱ مولار کلسیم هیدروکسید اضافه کنیم، مقدار pH محلول نهایی چقدر می‌شود؟ (از تغییر حجم ناشی از افزودن گاز گوگرد تری‌اکسید به محلول صرف نظر کنید.)

۱/۶ (۴)

۱/۳ (۳)

۰/۶ (۲)

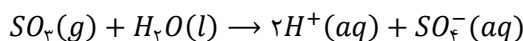
۰/۳ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

(سخت - مسئله - ۱۲۰۱)

یکی از رفتارهای جالب و پرکاربرد اسیدها و بازها، واکنش‌هایی است که بین این دو دسته از مواد انجام می‌شود. به این گروه از واکنش‌ها، به اصطلاح واکنش‌های خنثی‌شدن یا همان تیتراسیون گفته می‌شود. طی واکنش‌های خنثی‌شدن، یون‌های هیدروکسید حاصل از بازها با یون‌های هیدرونیوم حاصل از اسیدها براساس

معادله $OH^-(aq) + H_3O^+(aq) \rightarrow 2H_2O(l)$ وارد واکنش شده و مولکول‌های آب را تولید می‌کنند. گاز SO_3 بر اثر حل شدن در آب به صورت زیر واکنش می‌دهد:



ابتدا شمار مول‌های هیدرونیوم ایجاد شده بر اثر حل شدن گاز SO_3 در محلول را حساب می‌کنیم:

$$? mol H^+ = 5/6 L SO_3 \times \frac{1 mol SO_3}{22/4 L SO_3} \times \frac{2 mol H^+}{1 mol SO_3} = 0/5 mol$$

در قدم بعدی شمار مول‌های یون هیدروکسید موجود در محلول اولیه را به دست می‌آوریم:

$$? mol OH^- = 2 L \text{ محلول} \times \frac{0/1 mol Ca(OH)_2}{1 L \text{ محلول}} \times \frac{2 mol OH^-}{1 mol Ca(OH)_2} = 0/4 mol$$

هر ۱ مول یون هیدروکسید موجود در محلول، با ۱ مول یون هیدرونیوم واکنش داده و خنثی می‌شود. توجه داریم که پس از خنثی شدن کل یون‌های هیدروکسید، مقداری یون هیدرونیوم در محلول باقی خواهد ماند. در نتیجه غلظت یون هیدرونیوم در محلول نهایی برابر است با:

$$\text{مقدار یون هیدروکسید} - \text{مقدار یون هیدرونیوم} = \frac{0/5 - 0/4}{2} = 0/05 mol.L^{-1}$$

در نهایت، pH محلول برابر خواهد بود با:

$$pH = -\log(0/05) = -\log(5 \times 10^{-2}) = 2 - \log 5 = 1/3$$

گروه آموزشی ماز

۸۳- جرم هیدروژن موجود در نمونه‌ای از گاز هیدروژن کلرید، برابر با جرم هیدروژن موجود در ۱۸ لیتر گاز متان است. با انحلال این مقدار از گاز هیدروژن کلرید

در ۱۰ لیتر آب خالص، pH محلول مورد نظر چند واحد تغییر می‌کند؟ (حجم مولی گازها در شرایط واکنش برابر با ۲۴ لیتر است. $H = 1 : g.mol^{-1}$)

۶/۵ (۴)

۶/۳ (۳)

۵/۵ (۲)

۵/۳ (۱)

(متوسط - مسئله - ۱۳۰۱)

پاسخ: گزینه ۴

در قدم اول، جرم هیدروژن موجود در ۱۸ لیتر گاز متان (CH_4) را محاسبه می‌کنیم:

$$? g H = 18 L CH_4 \times \frac{1 mol CH_4}{24 L CH_4} \times \frac{4 mol H}{1 mol CH_4} \times \frac{1 g H}{1 mol H} = 3 g$$

در قدم بعد، مقداری از گاز هیدروژن کلرید که شامل ۳ گرم هیدروژن باشد را محاسبه می‌کنیم:

$$? mol HCl = 3 g H \times \frac{1 mol H}{1 g H} \times \frac{1 mol HCl}{1 mol H} = 3 mol$$

مقدار ۳ مول هیدروژن کلرید، در ۱۰ لیتر آب خالص حل شده است. بر این اساس، غلظت یون هیدروژن را محاسبه کرده و پس از آن، مقدار pH محلول را به دست می‌آوریم:

$$[HCl] = \frac{\text{مول } HCl}{\text{لیتر محلول}} = \frac{3 mol HCl}{10 L \text{ محلول}} = 0/3 mol.L^{-1} \xrightarrow{\alpha=1} [H^+] = 0/3 mol.L^{-1}$$

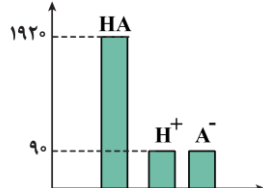
$$pH \text{ محلول} = -\log[H^+] = -\log(0/3) = 1 - 0/5 = 0/5$$

$$pH \text{ تغییر} = 7 - 0/5 = 6/5 \text{ واحد}$$

گروه آموزشی ماز

۸۴- با توجه به نمودار که فراوانی نسبی ذرات اسید HA و یون‌های H^+ و A^- را در محلول ۰/۰۸ مولار این اسید پس از برقراری تعادل نشان می‌دهد، ثابت

یونش اسید HA بر حسب مول بر لیتر به تقریب کدام است؟



$$1/6 \times 10^{-4} \quad (1)$$

$$3/2 \times 10^{-4} \quad (2)$$

$$1/6 \times 10^{-3} \quad (3)$$

$$3/2 \times 10^{-3} \quad (4)$$

(متوسط - مسئله - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۱

یک محلول اسیدی در اختیار داریم که در ساختار آن تعدادی ذره اسید یونیده نشده و تعدادی یون حاصل از یونش اسید وجود دارد. برای محاسبه درجه یونش اسید مورد نظر از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\text{تعداد ذرات یونیده شده}}{\text{تعداد ذرات کل ذرات}} = \frac{\text{تعداد ذرات یونیده شده}}{\text{تعداد ذرات یونیده نشده} + \text{تعداد ذرات یونیده شده}}$$

اگر مقدار درجه یونش کمتر از ۰/۰۵ باشد یا ثابت یونش اسید کمتر از 10^{-5} مول بر لیتر باشد و یا اینکه در صورت سؤال طراح ثابت یونش را به تقریب خواسته باشد، می‌توان مقدار ثابت یونش را از رابطه $K_a \approx M\alpha^2$ به دست آورد. از آنجا که صورت سؤال ثابت یونش را به‌طور تقریبی خواسته، از رابطه $K_a \approx M\alpha^2$ استفاده می‌کنیم:

$$K_a \approx M\alpha^2 = 0/08 \times \left(\frac{90}{1920 + 90}\right)^2 = \frac{8}{100} \times \left(\frac{3}{67}\right)^2 \approx 1/6 \times 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}$$

اسیدهای قوی و ضعیف

اسیدهای قوی موادی هستند که بر اثر حل شدن در آب، تقریباً به‌طور کامل یونش می‌یابند؛ به همین دلیل غلظت هر یک از یون‌ها در محلول اسیدهای قوی تک‌پروتون‌دار، با غلظت اولیه اسید برابر است و محلول اسیدهای قوی را می‌توان محلولی شامل یون‌های آبیوشیده دانست. از آنجا که اسیدهای قوی در آب تقریباً به‌طور کامل یونش می‌یابند، جزو الکترولیت‌های قوی به شمار می‌روند. اسیدهای ضعیف، موادی هستند که بر اثر حل شدن در آب به‌طور جزئی یونش می‌یابند؛ یعنی بیشتر مولکول‌های اسید در محلول باقی می‌مانند و فقط تعداد کمی از آن‌ها به یون تبدیل می‌شوند. بنابراین در محلول اسیدهای ضعیف، علاوه بر یون‌های آبیوشیده، مولکول‌های اسید نیز یافت می‌شوند. مراقب باشید که اسیدهای ضعیف، جزو الکترولیت‌های ضعیف هستند و رسانای ضعیف جریان برق به شمار می‌روند.

گروه آموزشی ماز

۸۵- کدام مطلب نادرست است؟

- ۱) در شرایط یکسان، غلظت مولی یون هیدروکسید در آب گازدار از اسید معده بیشتر است.
- ۲) مقدار pH محلول لوله بازکن از مقدار pH محلولی که در آن $\frac{[H^+]}{[OH^-]} = 10^{9/2}$ است، کمتر است.
- ۳) در سامانه‌های تعادلی، واکنش‌های رفت و برگشت به‌طور پیوسته و با سرعت‌های برابر انجام می‌شوند.
- ۴) K_a اسیدی که غلظت یون H^+ در محلول ۳ مولار آن، ۰/۲۵ برابر غلظت اولیه اسید باشد، $0/25 \text{ mol.L}^{-1}$ است.

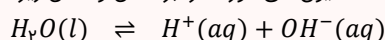
(آسان - مفهومی و حفظی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۲

از محلول سدیم هیدروکسید به‌عنوان لوله بازکن استفاده می‌شود و محلول آن pH بزرگ‌تر از ۷ دارد؛ اما محلولی که در آن $\frac{[H^+]}{[OH^-]} = 10^{9/2}$ است، اسیدی بوده و قطعاً pH کوچک‌تر از ۷ دارد.

بررسی نمونه آب خالص

براساس آزمایش‌های انجام‌شده، نمونه‌ای از آب خالص که فاقد هر گونه حل‌شونده‌ای است، رسانایی الکتریکی ناچیزی دارد که وجود آن را به حضور مقدار بسیار اندکی از یون‌های هیدروکسید و هیدروژن در آب خالص نسبت می‌دهند. یون‌های موردنظر، براساس واکنش زیر در آب تولید می‌شوند:



ثابت تعادل این واکنش به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$H_2O(l) \rightleftharpoons OH^-(aq) + H^+(aq) \quad K = K_W = [OH^-][H^+]$$

آزمایش‌های مختلف نشان می‌دهد که مقدار K_W در دمای اتاق ($25^\circ C$)، برابر با $10^{-14} \text{ mol}^2 \cdot L^{-2}$ است که این مقدار، همانند ثابت تعادل سایر واکنش‌ها، فقط و فقط تابع دما است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

- ۱) آب گازدار، همان محلول گاز CO_2 در آب است و از آنجا که کربنیک اسید برخلاف اسید معده (هیدروکلریک اسید)، یک اسید ضعیف به شمار می‌رود، بنابراین در شرایط یکسان، غلظت یون هیدروکسید در محلول آن بیشتر است.
- ۳) واکنش‌های برگشت‌پذیر در شرایط مناسب هم‌زمان در هر دو جهت رفت و برگشت انجام می‌شوند. در سامانه‌های تعادلی، واکنش‌های رفت و برگشت به‌طور پیوسته و با سرعت برابر انجام می‌شوند و به همین دلیل، مقدار مواد شرکت‌کننده در سامانه ثابت باقی می‌ماند.
- ۴) ثابت یونش این اسید ضعیف از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$K_a = \frac{[H^+]^2}{M - [H^+]} = \frac{(0/25M)^2}{M - 0/25M} = \frac{0/0625M}{0/75} = \frac{0/0625 \times 3}{0/75} = 0/25 \text{ mol.L}^{-1}$$

توجه داریم که درجه یونش این اسید ضعیف برابر با ۰/۲۵ است.

گروه آموزشی ماز

آزمون الکترونیک | مرحله ۱۳ دوازدهم | شیمی

۸۶- محلولی از باریم هیدروکسید با $pH = 11$ در اختیار داریم. اگر در محلولی از نیترواسید ($K_a = 4/5 \times 10^{-4}$)، مقدار pH برابر با $2/5$ باشد، نسبت جرم هیدروژن برمید مورد نیاز به سدیم هیدروکسید مورد نیاز که به ترتیب باید به این دو محلول اضافه شود تا هر یک را خنثی کند، کدام است؟ (حجم محلول اسیدی و بازی به ترتیب ۹ و ۲۳ لیتر است.)

$$(Br = 80 \text{ و } Na = 23 \text{ و } O = 16 \text{ و } H = 1 : g.mol^{-1})$$

۰/۲۲۵ (۴)

۰/۱۰۱ (۳)

۰/۱۳۵ (۲)

۰/۲۷ (۱)

(سخت - مسئله - ۱۳۰۱)

پاسخ: گزینه ۴

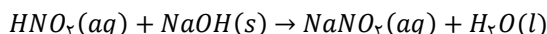
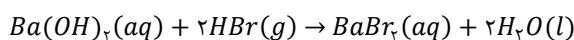
ابتدا غلظت هر محلول را محاسبه می‌کنیم. در رابطه با غلظت باریم هیدروکسید، داریم:

$$pH = 11 \Rightarrow pOH = 14 - 11 = 3 \Rightarrow [OH^-] = 10^{-3} mol.L^{-1} \Rightarrow Ba(OH)_2 = \frac{[OH^-]}{2} = 5 \times 10^{-4} mol.L^{-1}$$

طبق فرض سؤال، غلظت H^+ در محلول اسیدی برابر با 0.003 مول بر لیتر است. با استفاده از ثابت یونش نیترواسید، غلظت اسید را محاسبه می‌کنیم:

$$K_a = \frac{[H^+]^2}{[HNO_2]_{\text{اولیه}} - [H^+]} \rightarrow \frac{0.003 \times 0.003}{[HNO_2]_{\text{اولیه}} - 0.003} = 4/5 \times 10^{-4} \rightarrow [HNO_2]_{\text{اولیه}} = 0.023 mol.L^{-1}$$

حجم محلول باریم هیدروکسید و نیترواسید به ترتیب ۲۳ و ۹ لیتر است. محلول باریم هیدروکسید با هیدروژن برمید و محلول نیترواسید با سدیم هیدروکسید خنثی می‌شود. معادله خنثی‌سازی این مواد به صورت زیر است:



نسبت جرم هیدروژن برمید مورد نیاز به جرم سدیم هیدروکسید مورد نیاز را محاسبه می‌کنیم:

$$? g HBr = 23 L \text{ محلول} \times \frac{5 \times 10^{-4} mol Ba(OH)_2}{1 L \text{ محلول}} \times \frac{2 mol HBr}{1 mol Ba(OH)_2} \times \frac{81 g HBr}{1 mol HBr} = 1/863 g$$

$$? g NaOH = 9 L \text{ محلول} \times \frac{23 \times 10^{-3} mol HNO_2}{1 L \text{ محلول}} \times \frac{1 mol NaOH}{1 mol HNO_2} \times \frac{40 g NaOH}{1 mol NaOH} = 1/28 g$$

سپس نسبت جرم هیدروژن برمید به جرم سدیم هیدروکسید را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{1/863 g}{1/28 g} = 0.225 \text{ برابر}$$

با توجه به محاسبات بالا، نسبت جرم هیدروژن برمید به جرم سدیم هیدروکسید برابر با 0.225 است.

گروه آموزشی ماز

۸۷- کدام موارد از عبارتهای داده شده درست است؟

الف: در شرایط یکسان، غلظت یون هیدروکسید در محلول آبی هیدروسیانیک اسید از محلول نیترواسید بیشتر است.

ب: با افزودن مقداری از گاز HCl به محلول هیدروسیانیک اسید، ثابت یونش هیدروسیانیک اسید افزایش می‌یابد.

پ: گل ادریسی در خاکی که غلظت یون هیدرونیوم در آن برابر $3 \times 10^{-9} mol.L^{-1}$ است، به رنگ سرخ می‌رود.

ت: آرنیوس هنگام کار روی رسانایی محلول‌ها، به عنوان اولین فرد با واکنش میان اسیدها و بازها آشنا شد.

(۴) «ب» و «ت»

(۳) «ب» و «پ»

(۲) «الف» و «ت»

(۱) «الف» و «پ»

(متوسط - مفهومی - ۱۳۰۱)

پاسخ: گزینه ۱

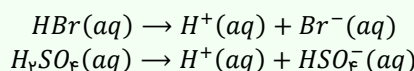
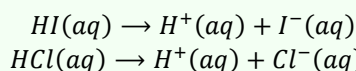
عبارتهای (الف) و (پ) درست هستند.

بررسی موارد:

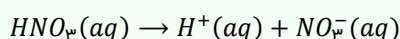
«الف»: ثابت یونش نیترواسید، در مقایسه با هیدروسیانیک اسید بزرگتر است؛ در نتیجه در شرایط یکسان از نظر دمای محیط و غلظت اسیدها، غلظت مولی یون هیدروکسید در محلول آبی هیدروسیانیک اسید بیشتر بوده و غلظت مولی یون هیدروژن در این محلول کمتر است.

به نکات زیر درباره اسیدهای قوی و ضعیف توجه کنید:

نکته ۱: هیدرویدیک اسید ($HI(aq)$)، هیدروبرمیک اسید ($HBr(aq)$)، هیدروکلریک اسید ($HCl(aq)$) و سولفوریک اسید ($H_2SO_4(aq)$) اسیدهای قوی با ثابت‌های یونش بسیار بزرگ هستند؛ بنابراین معادله یونش آن‌ها در آب یک‌طرفه است. به عبارت دیگر، این اسیدها درجه یونش برابر با ۱ دارند. معادله یونش این اسیدها به صورت زیر است:

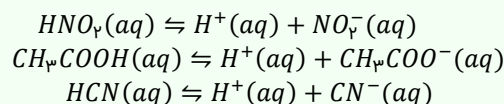
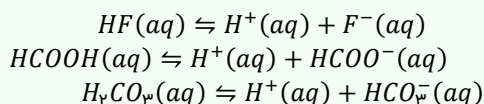


نکته ۲: نیتریک اسید برخلاف نیترواسید، یک اسید قوی با ثابت یونش بزرگ است و معادله یونش آن در آب یک‌طرفه است. معادله زیر، فرایند یونش این اسید را در آب نشان می‌دهد:



آزمون الکترونیکی | مرحله ۱۳ دوازدهم | شیمی

نکته ۳: هیدروفلوئوریک اسید ($HF(aq)$)، نیترواسید ($HNO_3(aq)$)، فورمیک اسید ($HCOOH(aq)$)، استیک اسید ($CH_3COOH(aq)$)، کربنیک اسید ($H_2CO_3(aq)$) و هیدروسیانیک اسید ($HCN(aq)$)، اسیدهای ضعیف با ثابت یونش کوچک هستند و فرایند یونش آن‌ها در آب یک واکنش تعادلی است. معادله یونش این اسیدها به صورت زیر است:



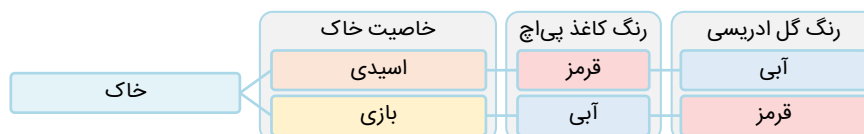
در رابطه با اسیدهای گفته شده، مقایسه زیر را به خاطر بسپارید:



نکته ۴: در شرایط یکسان، هر چه قدرت اسیدی (ثابت یونش) یک اسید بزرگتر باشد، غلظت مولی یون هیدرونیوم در محلول آبی آن اسید بیشتر و در نتیجه غلظت مولی یون هیدروکسید در محلول آن کمتر است. به علاوه در محلول اسید با ثابت یونش بزرگتر، غلظت مولی یون‌ها و در نتیجه رسانایی الکتریکی محلول نیز بیشتر خواهد بود.

«ب»: ثابت یونش یک اسید ضعیف تنها به دما بستگی دارد و مستقل از سایر پارامترها (مثلاً تغییر غلظت یون هیدرونیوم که بر اثر افزودن گاز HCl اتفاق می‌افتد) است. توجه داریم که هیدروکلریک اسید و هیدروسیانیک اسید، به ترتیب اسیدهای قوی و ضعیف هستند.

«پ»: گل‌های آدریسی در خاک‌های بازی به رنگ قرمز و در خاک‌های اسیدی به رنگ آبی می‌رویند. در رابطه با این گل‌ها، به نمودار زیر توجه کنید:



توجه داریم، خاکی که غلظت یون H^+ در آن برابر $3 \times 10^{-9} \text{ mol. L}^{-1}$ است ($pH = 8.5$) نوعی خاک بازی به شمار می‌رود.

«ت»: در زمان‌های گذشته، توجیه رفتار اسیدها و بازها به یک مبنای علمی نیاز داشت. سوانت آرنیوس نخستین کسی بود که اسیدها و بازها را بر یک مبنای علمی توصیف کرد. او بر روی رسانایی الکتریکی محلول‌های آبی کار می‌کرد و یافته‌هایی را به دست آورد که نشان می‌داد که محلول اسیدها و بازها رسانایی برق هستند، هر چند میزان رسانایی آن‌ها با یکدیگر یکسان نیست. شواهد بسیاری در تاریخ علم وجود دارد که نشان می‌دهند پیش از آنکه ساختار اسیدها و بازها شناخته شود، شیمی‌دان‌ها افزون بر ویژگی‌های اسیدها و بازها با برخی واکنش‌های آن‌ها نیز آشنا بودند.

گروه آموزشی ماز

۸۸- مقدار ۵ گرم اسید HA ($K_a = 5 \times 10^{-4}$) را در ۲ لیتر آب حل می‌کنیم. غلظت مولی یون هیدرونیوم در محلول ایجاد شده چند برابر غلظت یون هیدروکسید بوده و مقدار pH این محلول برابر با چند واحد خواهد شد؟ ($HA = 250 \text{ g. mol}^{-1}$)

$$2/7 - 4 \times 10^{-8} \quad (4)$$

$$2/4 - 16 \times 10^{-8} \quad (3)$$

$$3 - 10^{-8} \quad (2)$$

$$2/3 - 25 \times 10^{-8} \quad (1)$$

(سخت - مسئله - ۱۴۰۱)

پاسخ: گزینه ۴

طی این فرایند، ۵ گرم اسید HA معادل با 0.02 مول از این ماده در آب حل شده است. در قدم اول، باید غلظت مولی اسید حل شده در محلول مورد نظر را محاسبه کنیم. بر این اساس، داریم:

$$[HA] = \frac{\text{مول اسید } HA}{\text{لیتر محلول}} = \frac{0.02}{2} = 0.01 \text{ mol. L}^{-1}$$

در گروهی از سؤالات اسید و باز، نیاز داریم که بین غلظت یون هیدروژن در یک محلول، غلظت اولیه اسید در آن محلول (M) و مقدار ثابت یونش اسید ارتباط برقرار کنیم. در چنین شرایطی، از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$K_a = \frac{[H^+][A^-]}{[HA]} = \frac{[H^+][H^+]}{M - [H^+]} = \frac{[H^+]^2}{M - [H^+]} \implies K_a = \frac{[H^+]^2}{M - [H^+]}$$

توجه داریم که در رابطه نوشته شده، مؤلفه M مقدار غلظت اولیه اسید را در محلول نشان می‌دهد. با توجه به رابطه بالا، می‌توان غلظت یون هیدروژن را در محلول مورد نظر محاسبه کرد.

$$K_a = \frac{[H^+]^2}{M - [H^+]} \implies 5 \times 10^{-4} = \frac{[H^+]^2}{0.01 - [H^+]} \implies [H^+] = 0.002 \text{ mol. L}^{-1}$$

با توجه به مقدار غلظت یون هیدروژن در محلول نهایی، می‌توان گفت درجه یونش اسید در این محلول برابر با 0.2 بوده است. در قدم بعد، مقدار pH محلول ایجاد شده را محاسبه می‌کنیم.

$$pH = -\log[H^+] = -\log(0.002) = 2.7$$

در قدم آخر نیز غلظت یون هیدروکسید و نسبت بین غلظت یون‌های موجود در محلول را محاسبه می‌کنیم. در یک محلول آبی، با استفاده از غلظت یکی از یون‌های هیدروژن و یا هیدروکسید، غلظت یون دیگر را می‌توانیم پیدا کنیم. بر این اساس، داریم:

$$\frac{[H^+]}{[OH^-]} = \frac{[H^+]}{10^{-14}} = \frac{[H^+]^2}{10^{-14}} = \frac{(0.002)^2}{10^{-14}} = \frac{4 \times 10^{-6}}{10^{-14}} = 4 \times 10^8$$

۸۹- کدام یک از مطالب داده شده درست است؟

- (۱) تماس محلول سود سوزآور به پوست یا تنفس بخارات این ماده، برخلاف محلول جوهر نمک، به بدن آسیب می‌رساند.
- (۲) همه اتم‌های هیدروژن موجود در ساختار مولکول استیک اسید می‌توانند در قالب یون هیدرونیوم وارد محلول شوند.
- (۳) غلظت یون هیدروکسید در یک نمونه محلول لوله بازکن، بیشتر از غلظت این یون در محلول شیشه‌پاک‌کن است.
- (۴) دیواره داخلی معده، به‌طور طبیعی همه یون‌های هیدرونیوم ترشح شده توسط سلول‌های خود را جذب می‌کند.

پاسخ: گزینه ۳

(متوسط - مفهومی - ۱۲۰۱)

چون pH محلول لوله بازکن در مقایسه با محلول شیشه‌پاک‌کن بیشتر است، می‌توان گفت غلظت یون هیدروکسید در این محلول نیز بیشتر از غلظت یون هیدروکسید در محلول شیشه‌پاک‌کن خواهد بود. به‌طور کلی، محلول شیشه‌پاک‌کن حاوی مولکول‌های آمونیاک بوده و محلول لوله بازکن نیز حاوی سدیم هیدروکسید است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

- ۱ بازها از جمله مواد خورنده بوده و به بدن آسیب می‌رسانند. برای مثال، محلول سود سوزآور یا همان سدیم هیدروکسید که به‌عنوان لوله‌بازکن استفاده می‌شود، در تماس با پوست یا تنفس بخارات آن به بدن آسیب جدی می‌رساند. اسیدهای قوی مختلف مثل جوهر نمک (هیدروکلریک اسید) نیز در واکنش با پوست، احساس سوزش ایجاد کرده و به پوست صدمه می‌زنند.
- ۲ کربوکسیلیک اسیدها از جمله اسیدهای ضعیف هستند که تنها هیدروژن گروه کربوکسیل آن‌ها می‌تواند به‌صورت یون هیدرونیوم وارد محلول شود. فرمول شیمیایی استیک اسید به‌عنوان دومین عضو این خانواده نیز به‌صورت CH_3COOH بوده و تنها یکی از اتم‌های هیدروژن موجود در هر مولکول از این اسید در قالب یون هیدرونیوم وارد محلول می‌شود.
- ۴ دیواره داخلی معده، به‌طور طبیعی مقدار کمی از یون‌های هیدرونیوم موجود در محیط داخلی معده را جذب می‌کند. با جذب این یون‌ها، برخی از سلول‌های دیواره معده از بین می‌روند.

اسید معده

با ورود غذا به معده انسان، غدد موجود در دیواره معده برای از بین بردن میکروب‌های موجود در غذاها و فعال کردن آنزیم‌های گوارشی، شروع به ترشح هیدروکلریک اسید می‌کنند. در بدن انسان بالغ، روزانه بین ۲ تا ۳ لیتر شیره معده تولید می‌شود که غلظت یون هیدرونیوم در آن حدوداً برابر با 10^{-3} مول بر لیتر است. بر این اساس، می‌توان گفت pH اسید ترشح‌شده در معده تقریباً برابر $1/5$ است و به همین خاطر، فضای درون معده را می‌توان یک محیط اسیدی به حساب آورد؛ به طوری که این اسید می‌تواند فلز روی را در خود حل کند. دیواره داخلی معده، به‌طور طبیعی مقدار اندکی از یون‌های هیدرونیوم ترشح‌شده را مجدداً جذب می‌کند. این فرایند، سبب نابودی برخی از سلول‌های سازنده دیواره معده می‌شود. در این شرایط، اگر مقدار اسید موجود در معده به هر دلیلی بیش از اندازه باشد، مقدار یون‌های هیدرونیوم جذب‌شده توسط دیواره معده بیشتر شده و مقدار بیشتری از سلول‌های دیواره معده آسیب می‌بینند. آسیب به سلول‌های دیواره معده، سبب درد، التهاب و گاهی خونریزی معده می‌شود.

گروه آموزشی ماز

- ۹۰- محلول آبی از هیدروکلریک اسید به حجم 20 mL و $pH = 0.7$ را با مقداری آب خالص مخلوط می‌کنیم تا pH آن به عدد ۲ برسد. محلول حاصل از این فرایند، با چند میلی‌لیتر محلول 0.2% جرمی سود واکنش می‌دهد؟ (چگالی محلول سود 1 g.mL^{-1} است. $H = 1$ و $O = 16$ و $Na = 23$)
- (۱) ۱۲۰ (۲) ۸۰ (۳) ۱۶۰ (۴) ۴۰

پاسخ: گزینه ۲

(متوسط - مسئله - ۱۲۰۱)

اگر محلول یک اسید قوی و یا یک باز قوی را n مرتبه رقیق کنیم، pH این محلول به اندازه $\log n$ واحد به pH ناحیه خنثی ($pH = 7$) نزدیک‌تر می‌شود. با توجه به داده‌های موجود در صورت سوال، pH این محلول به اندازه $1/3$ واحد افزایش یافته است، پس می‌توان گفت طی این فرایند حجم $20 = 10^{1/3}$ برابر شده است. در واقع، طی این فرایند حجم محلول از ۲۰ میلی‌لیتر به ۴۰۰ میلی‌لیتر رسیده است. بر این اساس، می‌توان گفت حجم آب مصرف شده برابر با ۳۸۰ میلی‌لیتر بوده و pH محلول نهایی نیز برابر با ۲ است، پس داریم:

$$[H^+] = 10^{-pH} = 10^{-2} = 0.01\text{ mol.L}^{-1}$$

در قدم بعد، غلظت مولی محلول سود را محاسبه می‌کنیم.

$$\text{غلظت مولی} = \frac{\text{چگالی} \times \text{درصد جرمی}}{\text{جرم مولی}} = \frac{10 \times 0.2 \times 1}{40} = 0.05\text{ mol.L}^{-1}$$

هرگاه حجم V_a از محلول اسیدی با غلظت مولی M_a و ظرفیت n_a با حجم V_b از محلول بازی با غلظت مولی M_b و ظرفیت n_b به‌طور کامل واکنش بدهد، به‌طوری که هر دو محلول کاملاً مصرف شوند، رابطه زیر میان این دو محلول برقرار می‌شود:

$$M_a \times V_a \times n_a = M_b \times V_b \times n_b$$

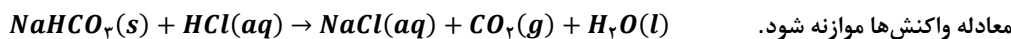
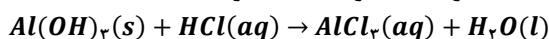
به کمک این تساوی، می‌توانیم بدون استفاده از روابط استوکیومتری، مقدار اسید یا باز مورد نیاز برای خنثی کردن را محاسبه کنیم. بر این اساس، داریم:

$$M_a \times V_a \times n_a = M_b \times V_b \times n_b \implies 0.01 \times 400 \times 1 = 0.05 \times V_b \times 1 \implies V_b = 80\text{ mL}$$

گروه آموزشی ماز

آزمون الکترونیک | مرحله ۱۳ دوازدهم | شیمی

۹۱- نوعی شربت ضد اسید دارای ۱۳٪ جرمی آلومینیم هیدروکسید و ۲۵/۲٪ جرمی سدیم هیدروژن کربنات است. چند گرم از این شربت برای خنثی کردن ۹۶٪ از اسید موجود در ۷۵۰ میلی لیتر اسید معده با $pH = ۰/۳$ نیاز است؟ ($H = ۱$ و $O = ۱۶$ و $Na = ۲۳$ و $Al = ۲۷$)



۴۵ (۴)

۲۲/۵ (۳)

۳۰ (۲)

۶۰ (۱)

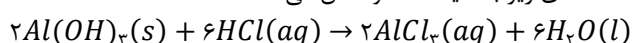
(سخت - مسئله - ۱۳۰۱)

پاسخ: گزینه ۴

ابتدا غلظت یون هیدرونیوم در محلولی با pH برابر ۰/۳ را حساب می کنیم:

$$pH = -\log[H^+] \rightarrow [H^+] = 10^{-pH} \rightarrow \begin{cases} [H_1^+] = 10^{-0/3} = 5 \times 10^{-1} \\ [H_2^+] = 0/4 \times [H_1^+] = 2 \times 10^{-2} \end{cases}$$

برای اینکه pH محلول مورد نظر از ۰/۳ به مقدار دلخواه برسد، باید غلظت یون هیدرونیوم موجود در این محلول از ۵/۱۰۰ مول بر لیتر به ۰/۲۰۰ مول بر لیتر برسد. در این فرایند، ۹۶٪ از اسید موجود در محلول خنثی شده و فقط ۴ درصد (معادل ۰/۰۴) از اسید اولیه در آن باقی مانده است. حجم محلول اسیدی برابر با ۷۵۰ میلی لیتر است، بنابراین مقدار یون هیدرونیوم موجود در این محلول باید از ۰/۳۷۵ مول به ۰/۰۱۵ مول رسیده و مقدار ۰/۳۶ مول از آن خنثی شود. آلومینیم هیدروکسید و سدیم هیدروژن کربنات موجود در محلول ضد اسید، بر مبنای معادله های زیر با اسید معده واکنش می دهند:



ضد اسیدها

پزشکان برای مقابله با مقدار اضافی از اسید موجود در معده بیماران مبتلا به بیماری های معده ای، از داروهایی به نام ضد اسید یا همان آنتی اسید استفاده می کنند. این داروها خاصیت بازی داشته و با ورود به معده، سبب خنثی کردن بخشی از اسید معده (هیدروکلریک اسید) و افزایش مقدار pH محتویات معده می شوند. مواد مؤثر موجود در ضد اسیدهای مختلف، شامل منیزیم هیدروکسید ($Mg(OH)_2$)، آلومینیم هیدروکسید ($Al(OH)_3$) و سدیم هیدروژن کربنات (جوش شیرین یا $NaHCO_3$) می شود.

با استفاده از معادله واکنش های بالا، باید ۰/۳۶ مول از هیدروکلریک اسید موجود در معده خنثی شود. توجه داریم که در هر ۱۰۰ گرم از این ضد اسید، مقدار ۱۳ گرم آلومینیم هیدروکسید و مقدار ۲۵/۲ گرم سدیم هیدروژن کربنات وجود دارد. مقدار هیدروکلریک اسیدی که با این ۱۰۰ گرم از این ضد اسید واکنش می دهد را حساب می کنیم:

$$? \text{ mol HCl} = 13 \text{ g Al(OH)}_3 \times \frac{1 \text{ mol Al(OH)}_3}{78 \text{ g Al(OH)}_3} \times \frac{6 \text{ mol HCl}}{2 \text{ mol Al(OH)}_3} = 0/5 \text{ mol}$$

$$? \text{ mol HCl} = 25/2 \text{ g NaHCO}_3 \times \frac{1 \text{ mol NaHCO}_3}{84 \text{ g NaHCO}_3} \times \frac{1 \text{ mol HCl}}{1 \text{ mol NaHCO}_3} = 0/3 \text{ mol}$$

$$\text{مقدار کل اسید} = 0/5 + 0/3 = 0/8 \text{ mol HCl}$$

بنابراین، مقدار ۱۰۰ گرم از این ضد اسید با ۰/۸ مول هیدروکلریک اسید واکنش می دهد. در پایان مقدار ضد اسید مورد نیاز برای خنثی سازی ۰/۳۶ مول از اسید موجود در معده را محاسبه می کنیم. در این رابطه، داریم:

$$? \text{ g ضد اسید} = 0/36 \text{ mol HCl} \times \frac{100 \text{ g ضد اسید}}{0/8 \text{ mol HCl}} = 45 \text{ g}$$

گروه آموزشی ماز

۹۲- مقدار pH محلول ۰/۱۵ مولار نیترو اسید، برابر با ۲/۵ است. درصد یونش این اسید در محلول مورد نظر چقدر است؟

۰/۴ (۴)

۰/۲ (۳)

۴ (۲)

۲ (۱)

(آسان - مسئله - ۱۳۰۱)

پاسخ: گزینه ۱

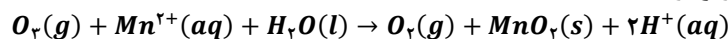
اغلب اسیدهایی که در زندگی روزمره با آن ها سروکار داریم، در دسته اسیدهای ضعیف قرار می گیرند. برای مثال، نیترو اسید از جمله اسیدهای ضعیف است. اسیدها و بازهای گوناگون، به هنگام انحلال در آب، به مقدار متفاوتی یونش پیدا می کنند. برای مقایسه کمی میزان یونیده شدن انواع اسیدها و بازها، می توان از درجه یونش استفاده کرد. درجه یونش یک ماده، عبارت است از نسبت تعداد مولکول های یونیده شده از یک ماده به تعداد کل مولکول های حل شده از آن ماده. توجه داریم که اگر درجه یونش یک ماده را در عدد ۱۰۰ ضرب کنیم، درصد یونش آن ماده به دست می آید. ابتدا غلظت یون هیدرونیوم در محلول را حساب می کنیم:

$$pH = 2/5 \rightarrow [H^+] = 10^{-2/5} = 10^{-0/5} \times 10^{-3} = 3 \times 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$$

درجه یونش این اسید برابر است با:

$$\text{درصد} = 2 = 100 \times \text{درجه یونش} = \text{درصد یونش} = 0/2 \implies \frac{[H^+]}{[HNO_3]} = \frac{3 \times 10^{-3}}{15 \times 10^{-2}} = 0/2$$

۹۳- چند مورد از عبارتهای داده شده در مورد واکنش اکسایش-کاهش زیر درست است؟



الف: با انجام این واکنش، غلظت یون هیدروکسید در محلول کاهش می‌یابد.

ب: هر ذره از گونه کاهنده در این واکنش، با از دست دادن ۲ الکترون اکسایش می‌یابد.

پ: گونه اکسنده در این واکنش، مولکولی ناقطبی بوده و دارای ۶ جفت الکترون ناپیوندی است.

ت: گاز اکسیژن حاصل از مصرف ۲ مول آب در این واکنش، می‌تواند یک مول متان را به‌طور کامل بسوزاند.

۴ (۴)

۳ (۳)

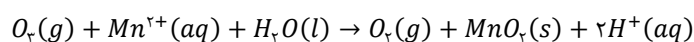
۲ (۲)

۱ (۱)

(سخت - مفهومی و مسئله - ۱۲۰۲)

پاسخ: گزینه ۳

معادله واکنش انجام شده به‌صورت زیر است:



عدد اکسایش Mn^{2+} برابر با ۲+ بوده و عدد اکسایش آن در MnO_2 به ۴+ رسیده است؛ در نتیجه Mn^{2+} نقش کاهنده را در واکنش داشته و عدد اکسایش آن افزایش پیدا کرده است. عدد اکسایش اکسیژن در O_2 برابر با صفر بوده و عدد اکسایش آن در MnO_2 به ۲- رسیده است؛ در نتیجه O_2 در واکنش نقش اکسنده را دارد. بر این اساس، عبارتهای (الف)، (ب) و (ت) درست هستند.

بررسی موارد:

«الف»: در واکنش انجام شده، یون هیدروژن تولید شده است؛ در نتیجه خاصیت اسیدی محلول افزایش یافته و مقدار pH آن کاهش می‌یابد. هرچه غلظت یون هیدروژن (یا همان یون هیدرونیوم) در محلولی افزایش یابد، خاصیت اسیدی محلول بیشتر است و هرچه غلظت یون هیدروکسید در محلولی افزایش یابد، خاصیت بازی محلول بیشتر است.

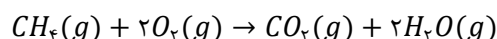
«ب»: در واکنش موازنه شده، هر ذره از گونه کاهنده (کاتیون منگنز) با از دست دادن ۲ الکترون اکسایش پیدا می‌کند. دقت کنید که گونه کاهنده در نیم‌واکنش اکسایش شرکت می‌کند و الکترون از دست می‌دهد. گونه اکسنده نیز با گرفتن الکترون، کاهش می‌یابد.

«پ»: گونه اکسنده در این واکنش، اوزون (O_3) است. ساختار لوویس مولکول اوزون به‌صورت زیر است:



مولکول اوزون به دلیل داشتن جفت الکترون ناپیوندی بر روی اکسیژن مرکزی خود، مولکولی قطبی به شمار می‌رود و در میدان الکتریکی جهت‌گیری می‌کند. همان‌طور که مشخص است، در مولکول اوزون ۶ جفت الکترون ناپیوندی وجود دارد.

«ت»: در واکنش داده شده، ضریب استوکیومتری مولکول‌های آب و اکسیژن برابر است؛ در نتیجه به ازای مصرف ۲ مول آب در واکنش، ۲ مول گاز اکسیژن نیز تولید می‌شود. واکنش سوختن کامل متان به‌صورت زیر است:



اکنون می‌توان جرم گاز متان مصرف شده را محاسبه کرد:

$$? \text{ mol } CH_4 = 2 \text{ mol } O_2 \times \frac{1 \text{ mol } CH_4}{2 \text{ mol } O_2} = 1 \text{ mol}$$

با توجه به محاسبات بالا، مقدار گاز متان مصرف شده برابر با یک مول بوده است.

گروه آموزشی ماز

۹۴- کدام یک از مطالب داده شده در رابطه با سلول نور الکتروشیمیایی که در تهیه گاز هیدروژن کاربرد دارد، نادرست است؟

(۱) پتانسیل کاهشی استاندارد نیم‌واکنش انجام شده در هر دو قطب سلول کمتر از صفر است.

(۲) همانند سلول آبکاری، جرم تیغه آندی آن در طول مدت انجام واکنش کاهش می‌یابد.

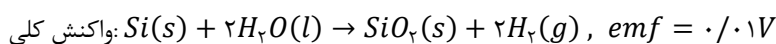
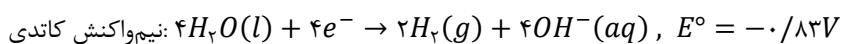
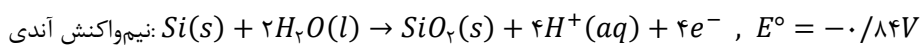
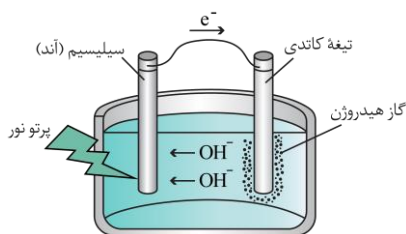
(۳) همانند سلول برقکافت آب، محیط اطراف آند آن خاصیت اسیدی پیدا می‌کند.

(۴) در مدار خارجی آن، الکترون‌ها از سمت آند به طرف کاتد حرکت می‌کنند.

(متوسط - مفهومی - ۱۴۰۲)

پاسخ: گزینه ۲

در برخی از سلول‌های الکتروشیمیایی، برای انجام واکنش اکسایش-کاهش از نور استفاده می‌شود و به همین علت به آن‌ها سلول نور الکتروشیمیایی گفته می‌شود. از یکی از این سلول‌های نور الکتروشیمیایی، برای تولید گاز هیدروژن استفاده می‌شود. تصویر زیر، نمایی از سلول نور الکتروشیمیایی استفاده شده برای تجزیه آب را نشان می‌دهد:



در واکنش کلی انجام شده در این سلول، سیلیسیم به‌عنوان گونه کاهنده (گونه‌ای که اکسید می‌شود) و آب نیز به‌عنوان گونه اکسنده (گونه‌ای که کاهش پیدا می‌کند) مصرف می‌شوند. برای محاسبه emf این سلول از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$emf = E^\circ(\text{کاتد}) - E^\circ(\text{آند}) = (-0.83) - (-0.84) = 0.01V$$

با کارکرد این سلول، اتم‌های اکسیژن وارد ساختار تیغه سیلیسمی آندی شده و جرم این تیغه به مرور زمان افزایش پیدا می‌کند. توجه داریم که پتانسیل کاهشی استاندارد نیم‌واکنش انجام شده در هر دو قطب سلول کمتر از صفر بوده و چون در نیم‌واکنش آندی این سلول یون هیدروژن تولید می‌شود، پس می‌توان گفت همانند سلول برقکافت آب، محیط اطراف آند این سلول خاصیت اسیدی پیدا می‌کند.

گروه آموزشی ماز

۹۵- طی واکنش محلولی از هیدروکلریک اسید با یک قطعه فلز روی، $10^{22} \times \frac{3}{0.1}$ الکترون بین گونه‌های اکسنده و کاهنده مبادله شده است. طی این فرایند، چند میلی لیتر فراورده گازی در شرایط استاندارد به دست آمده است؟

۱۱۲۰ (۴)

۸۴۰ (۳)

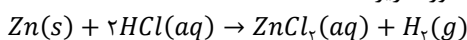
۵۶۰ (۲)

۲۸۰ (۱)

(آسان - مسئله - ۱۴۰۲)

پاسخ: گزینه ۲

واکنش میان فلز روی و محلول هیدروکلریک اسید به‌صورت زیر است:



با توجه به معادله این واکنش، به ازای مبادله شدن ۲ مول الکترون بین گونه‌های اکسنده و کاهنده، ۱ مول گاز هیدروژن تولید می‌شود. بر این اساس، حجم گاز هیدروژن تولید شده را محاسبه می‌کنیم.

$$? L H_2 = \frac{3}{0.1} \times 10^{22} e \times \frac{1 \text{ mol } e}{6/0.2 \times 10^{23}} \times \frac{1 \text{ mol } H_2}{2 \text{ mol } e} \times \frac{22/4 L H_2}{1 \text{ mol } H_2} \times \frac{1000 \text{ mL } H_2}{1 L H_2} = 560 \text{ mL}$$

با توجه به محاسبات انجام شده، طی این فرایند ۵۶۰ میلی لیتر گاز هیدروژن تولید شده است.

فلزهایی که با اسید واکنش نمی‌دهند.

مقدار E° برای شش عنصر فلزی طلا، پلاتین، پالادیم، جیوه، نقره و مس، بزرگتر از صفر است. از میان این عناصر، مقدار E° برای عناصر طلا، پلاتین، نقره و مس در جدول پتانسیل کاهشی کتاب درسی مطرح شده است و توصیه می‌کنیم که نام و ترتیب این چهار عنصر را به خاطر بسپارید. از آنجا که مقدار E° این عناصر فلزی بزرگتر از $E^\circ(H^+/H_2)$ است، محلول‌های اسیدی بر این فلزها اثری نداشته و آن‌ها را دچار خوردگی نمی‌کنند. به‌جز این عناصر، مقدار E° برای سایر فلزها منفی بوده و به همین خاطر است که سایر عناصر فلزی در واکنش با اسیدها دچار خوردگی می‌شوند.

گروه آموزشی ماز

۹۶- کدام موارد از عبارتهای داده شده درست است؟

الف: گرمای حاصل از واکنش فلز منیزیم با محلولی از نقره نیترات، نسبت به واکنش آهن با محلول $CuSO_4$ کمتر است.

ب: از نیم‌سلول استاندارد هیدروژن به‌عنوان یک مبنا برای تعیین پتانسیل سایر نیم‌سلول‌ها استفاده شده است.

پ: در سلول روی-مس، تیغه‌ای که در طول زمان جرم آن افزایش می‌یابد، قطب مثبت را تشکیل داده است.

ت: با قرار دادن یک تیغه مسی در محلولی از هیدروکلریک اسید، یک محلول آبی‌رنگ به دست می‌آید.

(۴) «ب» و «ت»

(۳) «الف» و «ت»

(۲) «ب» و «پ»

(۱) «الف» و «پ»

(متوسط - مفهومی - ۱۴۰۲)

پاسخ: گزینه ۲

عبارتهای (ب) و (پ) درست هستند.

بررسی موارد:

«الف»: مقایسه قدرت کاهندگی چهار فلز داده شده به‌صورت زیر است:

نقره > مس > آهن > منیزیم : قدرت کاهندگی

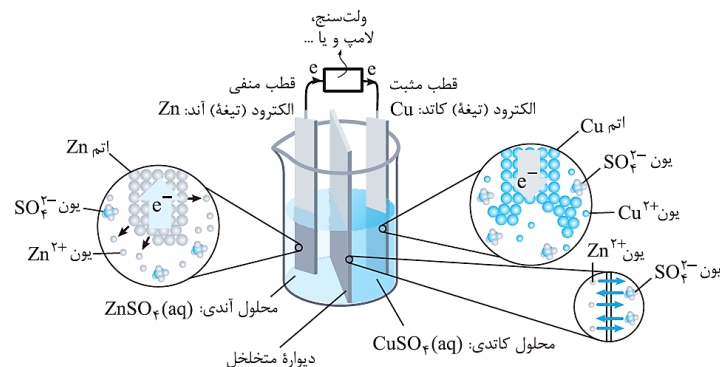
بر این اساس، می توان گفت مقایسه قدرت اکسندگی کاتیون حاصل از این چهار فلز نیز به صورت زیر است:

کاتیون نقره < کاتیون مس < کاتیون آهن < کاتیون منیزیم : قدرت اکسندگی

چون در واکنش اول (واکنش میان فلز منیزیم با محلولی از نقره نیترات)، قدرت کاهندگی فلز مصرف شده بیشتر بوده و قدرت اکسندگی کاتیون مصرف شده (یون نقره) نیز بالاتر از واکنش دوم (واکنش میان فلز آهن با محلول $CuSO_4$) است، پس می توان گفت مقدار انرژی مبادله شده در این واکنش شیمیایی بیشتر از مقدار انرژی مبادله شده در واکنش دوم می شود.

«ب»: اندازه گیری پتانسیل یک نیم سلول، به طور جداگانه ممکن نیست و این کمیت باید به طور نسبی اندازه گیری شود. شیمی دان ها برای دستیابی به این هدف، تصمیم گرفتند نیم سلول استاندارد هیدروژن (SHE) را به عنوان یک مبنا برای مقایسه پتانسیل الکترودی سایر نیم سلول ها انتخاب کرده و پتانسیل آن را برابر با صفر در نظر بگیرند. الکترود یا نیم سلول هیدروژن، شامل یک الکترود فلزی از جنس پلاتین می شود که در محلولی با غلظت یک مولار از یون هیدروژن در دمای $25^\circ C$ درجه سانتی گراد فرو برده شده است و گاز هیدروژن با فشار ۱ اتمسفر از روی آن عبور داده می شود. محلول بکار رفته در این سلول، یک محلول اسیدی با غلظت یک مولار یون هیدروژن و $pH = 0$ است.

«پ»: در سلول گالوانی روی-مس، با گذشت زمان جرم تیغه کاتد (تیغه مس) که قطب مثبت سلول است، افزایش یافته و در طرف مقابل، از جرم تیغه آند (تیغه روی) که قطب منفی سلول است، کاسته می شود. ساختار این سلول گالوانی به صورت زیر است:

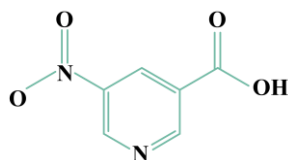


«ت»: پتانسیل کاهشی هیدروژن در محلولی از اسیدها با $pH = 0$ ، برابر با صفر در نظر گرفته می شود. طلا، پلاتین، جیوه، نقره و مس، از جمله فلزهایی هستند که پتانسیل کاهشی آن ها بزرگ تر از صفر بوده و در صورت مجاورت با محلول یک مولار از اسیدها، با این محلول ها واکنش نمی دهند. بر این اساس، در صورت قرار دادن یک تیغه مسی در محلولی از اسیدها، هیچ واکنشی انجام نشده و رنگ محلول نیز تغییر نمی کند. توجه داریم که از ظروف ساخته شده از این عناصر فلزی، می توانیم برای نگهداری محلول های اسیدی استفاده کنیم.

گروه آموزشی ماز

۹۷- ترکیبی با ساختار مقابل را در نظر بگیرید:

در ساختار این ترکیب، چند نوع اتم کربن با عدد اکسایش متفاوت وجود داشته و شمار پیوندهای $C-H$ موجود در آن برابر با چند عدد است؟



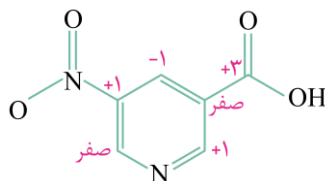
- ۳ - ۴ (۲)
۵ - ۴ (۴)

- ۳ - ۳ (۱)
۵ - ۳ (۳)

(آسان - مفهومی - ۱۲۰۲)

پاسخ: گزینه ۲

فرمول شیمیایی این ماده به صورت $C_6H_4N_2O_6$ بوده و عدد اکسایش اتم های کربن موجود در ساختار این ماده به صورت زیر است:



در ساختار این ماده، ۴ اتم هیدروژن وجود دارد که یکی از آن ها متصل به اتم اکسیژن بوده و ۳ مورد از آن ها توسط پیوندهای $C-H$ به اتم های کربن متصل شده اند. بر این اساس، می توان گفت در ساختار این ترکیب ۳ پیوند $C-H$ وجود دارد.

گروه آموزشی ماز

۹۸- اگر با گذشتن یک بازه زمانی در سلول گالوانی استاندارد آلومینیم-نقره، تفاوت غلظت کاتیون در محلول موجود در دو نیم سلول به 0.5 مولار رسیده باشد، در طول این بازه تقریباً چند الکترون در مدار خارجی جاری شده است؟ (حجم محلول های موجود در نیم سلول های آندی و کاتدی به ترتیب برابر با ۳ و ۱ لیتر بوده و دیواره متخلخل فقط به آن یون ها اجازه عبور می دهد).

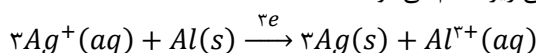
$2/7 \times 10^{23}$ (۴)

$5/4 \times 10^{23}$ (۳)

$1/4 \times 10^{23}$ (۲)

$7/1 \times 10^{23}$ (۱)

در سلول گالوانی مورد نظر، واکنش الکتروشیمیایی زیر انجام می‌شود:



با توجه به معادله نوشته شده، تیغه‌های نقره و آلومینیم به ترتیب معادل با کاتد (قطب مثبت) و آند (قطب منفی) سلول مورد نظر هستند. فرض می‌کنیم در مدار خارجی این سلول گالوانی x مول الکترون مبادله شده است. بر این اساس، مقدار یون آلومینیم تولید شده و مقدار یون نقره مصرف شده را محاسبه کرده و تغییر غلظت هر یون را نیز به دست می‌آوریم. در این رابطه، داریم:

$$? mol Ag^+ = x mol e \times \frac{3 mol Ag^+}{3 mol e} = x mol \implies \Delta[Ag^+] = \frac{\Delta n(Ag^+)}{\text{حجم محلول}} = \frac{x mol Ag^+}{1 L} = x mol \cdot L^{-1}$$

$$? mol Al^{3+} = x mol e \times \frac{1 mol Al^{3+}}{3 mol e} = \frac{x}{3} mol \implies \Delta[Al^{3+}] = \frac{\Delta n(Al^{3+})}{\text{حجم محلول}} = \frac{\frac{x}{3} mol Ag^+}{3 L} = \frac{x}{9} mol \cdot L^{-1}$$

چون سلول گالوانی مورد نظر با استفاده از نیم‌سلول‌های استاندارد نقره و آلومینیم ساخته شده است، در ابتدای کار غلظت کاتیون‌های نقره و آلومینیم در این سلول برابر با هم و معادل با ۱ مول بر لیتر بوده است؛ اما پس از گذشتن یک مدت زمان خاص، تفاوت غلظت این دو یون به ۰/۵ مول بر لیتر رسیده است. توجه داریم که طی این فرایند، یون نقره مصرف شده و یون آلومینیم تولید شده است. بر این اساس، داریم:

$$0.5 mol \cdot L^{-1} = (1 + \frac{x}{9}) - (1 - x) \implies \frac{10x}{9} = 0.5 \implies x = 0.45$$

با توجه به مقدار x می‌توان گفت در مدار خارجی سلول مورد نظر ۰/۴۵ مول الکترون مبادله شده است. بر این اساس، داریم:

$$e \text{ تعداد } = 0.45 \times 10^{23} \times \frac{1 mol e}{3 mol e} = 1.5 \times 10^{22} e$$

گروه آموزشی ماز

۹۹- در معادله موازنه شده واکنش کلی فرایند خوردگی آهن، مجموع تغییر عدد اکسایش اتم‌های گونه کاهنده، چند برابر تغییر عدد اکسایش هر اتم اکسیژن در واکنش سوختن گاز استیلن است؟

۶ (۴)

۳ (۳)

۴/۵ (۲)

۱/۵ (۱)

واکنش کلی انجام شده در هنگام زنگ‌زدن آهن به صورت $4Fe(s) + 3O_2(g) + 6H_2O(l) \rightarrow 4Fe(OH)_3(s)$ است. برای انجام شدن این واکنش، حضور مولکول‌های آب و اکسیژن الزامی است. توجه داریم در معادله واکنش کلی خوردگی آهن، تغییر عدد اکسایش گونه کاهنده (اتم آهن) برابر با ۳+ و تغییر عدد اکسایش گونه اکسنده (هر اتم اکسیژن) برابر با ۲- است. با توجه به توضیحات داده شده، مجموع تغییر عدد اکسایش ۴ اتم آهن شرکت کننده در این واکنش برابر با ۱۲ واحد است. توجه داریم که در واکنش سوختن استیلن (اتین) و یا هر ماده دیگری، عدد اکسایش اتم‌های اکسیژن از صفر به ۲- می‌رسد، پس می‌توان گفت در این واکنش تغییر عدد اکسایش هر اتم اکسیژن برابر با ۲ واحد است. مقدار نسبت خواسته شده برابر با $\frac{12}{6} = 2$ می‌شود.

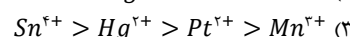
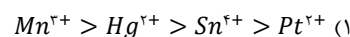
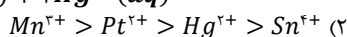
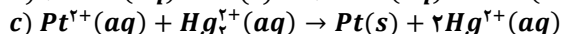
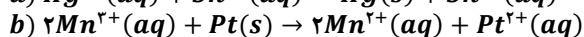
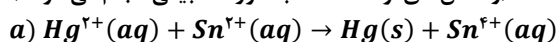
جلوگیری از خوردگی آهن

وسایل آهنی در هوای مرطوب زنگ زده و پس از آن دچار خوردگی می‌شوند. این فرایند، یک واکنش اکسایش-کاهش نامطلوب و ناخواسته است که در شهرهای بندری و ساحلی به مقدار بیشتری انجام می‌شود. برای جلوگیری از فرایند خوردگی آهن می‌توان از روش‌های زیر استفاده کرد:

- ایجاد پوشش محافظ: ساده‌ترین راه برای جلوگیری از خوردگی آهن، ایجاد یک پوشش محافظ بر روی آن است. این پوشش‌ها را می‌توان با روش‌هایی مانند رنگ‌زدن، قیراندودکردن و روکش‌دادن ایجاد کرده و از رسیدن اکسیژن و رطوبت به سطح آهن جلوگیری کرد. البته، به کمک چنین روش‌هایی نمی‌توانیم به طور کامل از خوردگی آهن جلوگیری کنیم، زیرا به تدریج اکسیژن و رطوبت از روزه‌های موجود در این پوشش‌ها به درون آن‌ها نفوذ می‌کند.
- حفاظت کاتدی: در این روش، فلزی که قرار است در برابر خوردگی محافظت شود را یک فلز دیگری قرار می‌دهند که پتانسیل کاهشی استاندارد کوچک‌تر و تمایل بیشتری به از دست دادن الکترون داشته باشد. در این شرایط، فلزهای موردنظر برای از دست دادن الکترون و اکسایش یافتن با یکدیگر رقابت می‌کنند. در چنین شرایطی، فلزی که پتانسیل کاهشی استاندارد کوچک‌تر و تمایل بیشتری به از دست دادن الکترون داشته باشد در نقش آند اکسید می‌شود. اما فلزی که پتانسیل کاهشی استاندارد بزرگ‌تری دارد در نقش کاتد ظاهر شده و در برابر خوردگی محافظت می‌شود. به این روش جلوگیری از خوردگی فلزها، به اصطلاح حفاظت کاتدی گفته می‌شود.

گروه آموزشی ماز

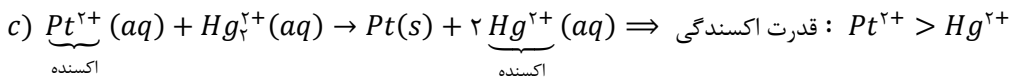
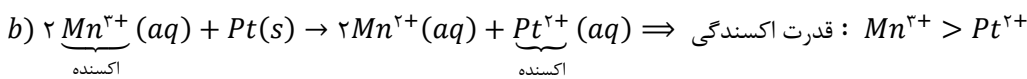
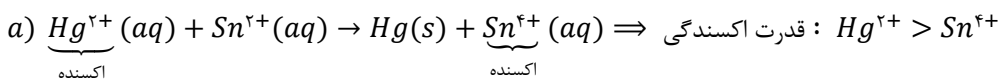
۱۰۰- در کدام گزینه، مقایسه قدرت اکسندگی گونه‌ها با توجه به واکنش‌های زیر به درستی آمده است؟ (واکنش‌های نوشته شده، به صورت طبیعی انجام می‌شوند.)



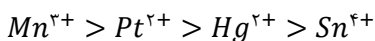
(متوسط - مفهومی - ۱۴۰۲)

پاسخ: گزینه ۲

اکسنده، گونه‌ای است که خود کاهش یافته و سبب اکسید شدن گونه دیگر در محیط واکنش می‌شود. در واکنش‌های اکسایش-کاهش که به‌طور طبیعی (به‌صورت خودبه‌خود) در جهت رفت پیش می‌روند، گونه‌های اکسنده و کاهنده در سمت واکنش‌دهنده‌ها، قوی‌تر از گونه‌های اکسنده و کاهنده در سمت فراورده‌ها هستند. بر این اساس، داریم:



با توجه به واکنش‌های بالا می‌توان قدرت اکسندگی گونه‌ها را به‌صورت زیر مرتب کرد:



گروه آموزشی ماز

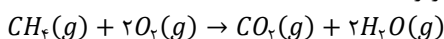
۱۰۱- کدام یک از مطالب داده شده نادرست است؟

- (۱) در واکنش مربوط به سلول سوختی متان-اکسیژن، عدد اکسایش هر اتم کربن ۸ واحد کاهش می‌یابد.
- (۲) در شرایط یکسان، حجم گاز مصرف شده در آند رایج‌ترین سلول سوختی، ۲ برابر گاز مصرفی در کاتد است.
- (۳) مقدار E° نیم‌واکنش آندی سلول سوختی هیدروژن-اکسیژن، بیشتر از E° نیم‌واکنش کاهش فلز روی است.
- (۴) بازده تولید انرژی الکتریکی از سوخت‌های فسیلی در نیروگاه حرارتی تولید برق، کمتر از سلول‌های سوختی است.

(متوسط - مفهومی - ۱۴۰۲)

پاسخ: گزینه ۱

واکنش انجام شده در سلول سوختی متان-اکسیژن، همان واکنش اکسایش متان بوده و معادله آن به‌صورت زیر است:



در این واکنش، عدد اکسایش کربن در متان برابر با ۴- بوده و عدد اکسایش آن در کربن دی‌اکسید نیز برابر با ۴+ است؛ در نتیجه عدد اکسایش کربن در این واکنش، ۸ واحد افزایش یافته است.

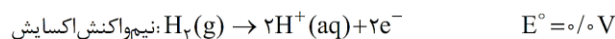
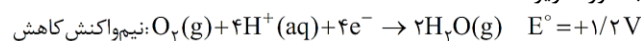
سلول سوختی

در سلول‌های سوختی، یک واکنش شیمیایی در شرایط کنترل‌شده انجام می‌شود. هرچند که در رایج‌ترین نوع از سلول‌های سوختی، گاز هیدروژن به‌عنوان سوخت مصرف می‌شود، اما در برخی از انواع این سلول‌ها از سایر مواد از جمله متان نیز به‌عنوان سوخت استفاده می‌شود. طی این فرایند، عدد اکسایش اتم‌های کربن افزایش یافته و عدد اکسایش اتم‌های اکسیژن کاهش پیدا می‌کند. توجه داریم که این سلول‌ها با کارکرد خود، نوعی گاز آلاینده (گاز کربن دی‌اکسید) تولید کرده و وارد هواکره می‌کنند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

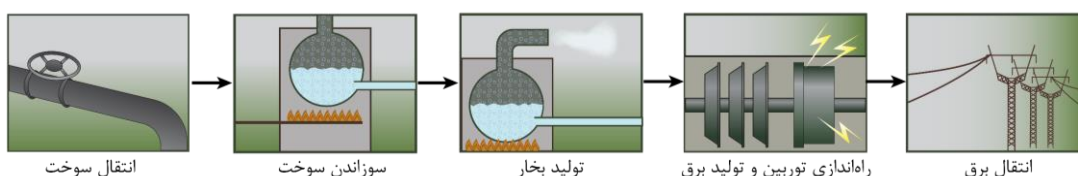
رایج‌ترین سلول سوختی، سلول سوختی هیدروژن-اکسیژن است که در آن واکنش $2H_2(g) + O_2(g) \rightarrow 2H_2O(l)$ انجام می‌شود. گاز هیدروژن در سمت آند و گاز اکسیژن در سمت کاتد این سلول مصرف می‌شود. در شرایط یکسان، مقدار مول و به دنبال آن، حجم گازهای مصرف شده در این سلول متناسب با ضریب استوکیومتری این مواد در معادله واکنش است. بر این اساس، می‌توان گفت حجم گاز هیدروژن مصرف شده در آند این سلول، ۲ برابر حجم گاز اکسیژن مصرف شده در کاتد آن است.

نیم‌واکنش‌های آندی و کاتدی انجام شده در سلول سوختی هیدروژن-اکسیژن به‌صورت زیر است:



مقدار E° نیم‌واکنش آندی سلول سوختی هیدروژن-اکسیژن (نیم‌واکنش اکسایش هیدروژن که مقدار پتانسیل کاهشی استاندارد آن برابر با صفر ولت است)، بیشتر از E° نیم‌واکنش کاهش فلز روی است، چراکه روی از جمله فلزهایی به شمار می‌رود که E° منفی داشته و نسبت به هیدروژن کاهنده‌تر است.

بازده تولید انرژی الکتریکی از سوخت در نیروگاه حرارتی تولید برق، کمتر از سلول سوختی است. علت این پدیده آن است که در سوختن سوخت‌ها، انرژی در یک لحظه آزاد می‌شود و به همین علت امکان استفاده از همه آن وجود ندارد. همچنین انرژی تولیدشده در این حالت به‌صورت گرما بوده و باید ابتدا به انرژی مکانیکی (به حرکت انداختن توربین‌ها) و سپس به انرژی الکتریکی تبدیل شود که با اتلاف انرژی در هر یک از این تبدیل‌ها همراه است. به‌علاوه چون سوختن سوخت‌ها یک واکنش خطرناک است، باید در نیروگاه‌ها انجام شود و به هنگام انتقال انرژی الکتریکی تولیدشده به مصرف‌کننده نیز، بخشی از آن هدر می‌رود. تصویر زیر، نمایی از فرایند تولید انرژی در این نیروگاه‌ها را نشان می‌دهد:



آزمون الکترونیک | مرحله ۱۳ دوازدهم | شیمی

در نقطه مقابل، در سلول‌های سوختی انرژی به صورت الکتریکی و همچنین به آرامی از اکسایش سوخت آزاد می‌شود و با توجه به کم‌خطر بودن آن، می‌توان به مانند باتری در محل مصرف برق، از این سلول استفاده کرد. توجه داریم که سوزاندن گاز هیدروژن در موتور درون‌سوز، بازدهی نزدیک به ۲۰ درصد و اکسایش آن در سلول سوختی هیدروژن-اکسیژن، در حدود ۶۰ درصد بازده دارد.

گروه آموزشی ماز

۱۰۲- در یک سلول الکترولیتی مربوط به فرآیند هال، اگر پیشرفت واکنش برابر با ۲۵٪ باشد، $10^{24} \times 3/01$ الکترون میان دو الکترود مبادله می‌شود. در صورت پیشرفت کامل واکنش در این سلول، چند گرم فلز آلومینیم با خلوص ۹۰٪ تولید می‌شود؟ ($Al = 27 \text{ g.mol}^{-1}$)

(۴) ۲۰۰

(۳) ۱۰۰

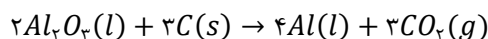
(۲) ۱۵۰

(۱) ۷۵

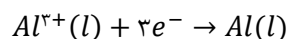
(متوسط - مسئله - ۱۲۰۲)

پاسخ: گزینه ۴

فرایند هال به صورت زیر انجام می‌شود:



نیم‌واکنش کاتدی در این فرایند به صورت زیر است:

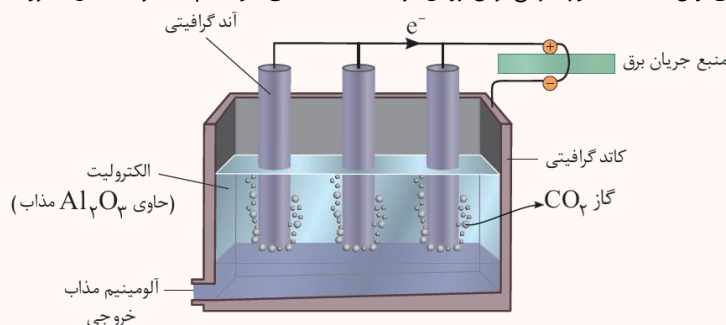


بنابراین جرم آلومینیم ناخالص تولید شده در صورت پیشرفت کامل واکنش مورد نظر برابر است با:

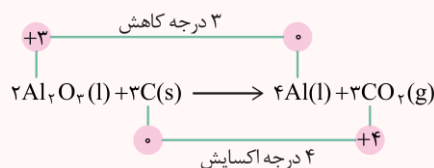
$$? \text{ g Al} = 3/01 \times 10^{24} e^- \times \frac{1 \text{ mol } e^-}{6/02 \times 10^{23} e^-} \times \frac{1 \text{ mol Al}}{3 \text{ mol } e^-} \times \frac{27 \text{ g Al}}{1 \text{ mol Al}} \times \frac{100 \text{ g Al}}{90 \text{ g Al}} \times \frac{100}{25} = 200 \text{ g}$$

فرایند هال

آلومینیم، همانند سدیم و منیزیم در دسته فلزهای فعال قرار داشته و به همین خاطر، در طبیعت به حالت آزاد وجود ندارد و به شکل ترکیب با سایر عناصر یافت می‌شود. علت واکنش‌پذیری زیاد آلومینیم را می‌توان به کم (منفی) بودن پتانسیل کاهش استاندارد نیم‌واکنش کاهش این عنصر نسبت داد. به خاطر واکنش‌پذیری زیاد آلومینیم، این فلز را تنها از برق‌کافت نمک‌های آن می‌توان به دست آورد. رایج‌ترین روش برق‌کافت نمک‌های آلومینیم، به فرایند هال معروف است که در سلول زیر انجام می‌شود:



همان‌طور که مشخص است، جنس آند (تیغه‌های موجود در محلول) و کاتد (دیواره و بدنه ظرف) این سلول الکترولیتی از گرافیت است و الکترولیت به کاررفته در این سلول نیز آلومینیم اکسید مذاب می‌باشد. معادله واکنش کلی انجام شده در این سلول به صورت زیر خواهد بود:



گروه آموزشی ماز

۱۰۳- اگر نیروی الکتروموتوری سلول‌های نقره-منیزیم و مس-منیزیم به ترتیب برابر با $3/17$ و $2/71$ ولت باشد، نیروی الکتروموتوری سلول نقره-مس برابر با ولت بوده و در این سلول گالوانی، آنیون‌های موجود در محلول الکترولیت به تدریج به سمت الکترود حرکت می‌کنند.

(۴) ۲/۶۶ - نقره

(۳) ۲/۶۶ - مس

(۲) ۰/۴۶ - نقره

(۱) ۰/۴۶ - مس

(متوسط - مفهومی - ۱۲۰۲)

پاسخ: گزینه ۱

در سری الکتروشیمیایی، عناصر نقره و مس نسبت به منیزیم در موقعیت بالاتری قرار می‌گیرند. به عبارت دیگر، مقدار E° عناصر نقره و مس، مثبت‌تر از مقدار E° برای فلز منیزیم است. با توجه به اطلاعات داده شده در صورت سؤال، قسمتی از سری الکتروشیمیایی را مطابق با تصویر زیر در نظر می‌گیریم.

فلز	پتانسیل کاهش استاندارد
نقره	$x + 3/17$
مس	$x + 2/71$
منیزیم	x

آزمون الکترونیک | مرحله ۱۳ دوازدهم | شیمی

با توجه به تصویر بالا، E° فلز نقره به اندازه $0/46$ ولت بیشتر از E° فلز مس است؛ پس نیروی الکتروموتوری سلول استاندارد مس-نقره برابر با $0/46$ ولت می‌شود. در این سلول گالوانی، نیم‌سلول نقره در نقش کاتد (قطب مثبت) بوده و الکترون‌های موجود در مدار بیرونی نیز به سمت این الکتروود حرکت می‌کنند. در نقطه مقابل، آنیون‌های موجود در محلول الکترولیت، به سمت تیغه آندی (تیغه مس) حرکت می‌کنند.

emf سلول

برای پیدا کردن مقدار emf یک سلول گالوانی، از روش‌های زیر می‌توان کمک گرفت:

۱. نیم‌سلول‌های سازنده سلول را به یکدیگر متصل کرده و مقدار emf را به کمک ولت‌سنج اندازه‌گیری می‌کنیم. مقدار emf به دست آمده از این روش، مقدار عملی emf سلول را نشان می‌دهد. در این رابطه داریم:

بازده درصدی سلول $\times$ نظری emf = عملی emf

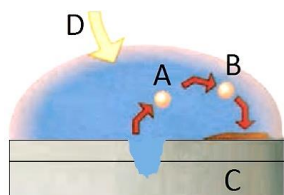
۲. ابتدا آند و کاتد سلول گالوانی موردنظر را پیدا کرده و پس از آن E° آند (الکترودی که E° کوچک‌تری دارد) را از E° کاتد (الکترودی که E° بزرگ‌تری دارد) کم می‌کنیم. بر این اساس، داریم:

$$emf = E^\circ (\text{کاتد}) - E^\circ (\text{آند})$$

توجه داریم که مقدار emf برای سلول‌های گالوانی همواره مقداری مثبت است. چنانچه ولت‌سنج مقدار E° یک سلول را با عددی منفی نشان داد و یا این که پس از محاسبه emf سلول، یک عدد منفی به دست آوردید، فقط به این معناست که موقعیت آند و کاتد سلول را به اشتباه تشخیص داده و قطب‌های ناهم‌نام سلول گالوانی و ولت‌سنج را به یکدیگر وصل کرده‌اید.

گروه آموزشی ماز

۱۰۴- شکل روبه‌رو فرآیند خوردگی یک قطعه از ورقه حلبی را نمایش می‌دهد. چند مورد از عبارت‌های زیر در مورد این فرایند درست است؟



۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

الف: هیچ پیوند اشتراکی بین اتم‌های ماده C وجود ندارد.

ب: در آرایش الکترونی گونه B ، یک زیرلایه نیمه‌پر وجود دارد.

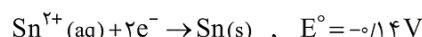
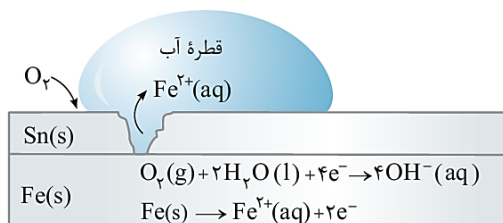
پ: ماده D ، واکنش‌پذیری بیشتری نسبت به فراوان‌ترین گاز هواکره دارد.

ت: از ترکیب گونه A با یون سولفات، ترکیبی با فرمول شیمیایی As_2SO_4 به دست می‌آید.

(متوسط - مفهومی - ۱۴۰۲)

پاسخ: گزینه ۳

تصویر زیر، نمایی از فرایند خوردگی ورقه حلبی را نشان می‌دهد:



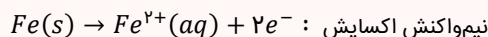
جدول زیر، اکسیدشدن فلز را در آهن سفید و حلبی خراشیده شده و آهن خالص، با یکدیگر مقایسه می‌کند:

	آهن خالص	آهن سفید	حلبی
فلز پوشاننده	-	روی	قلع
آند	آهن	روی	آهن
کاتد	آهن	آهن	قلع
نیم‌واکنش آندی	$Fe \rightarrow Fe^{2+} + 2e^-$	$Zn \rightarrow Zn^{2+} + 2e^-$	$Fe \rightarrow Fe^{2+} + 2e^-$
نیم‌واکنش کاتدی	$O_2 + 2H_2O + 4e^- \rightarrow 4OH^-$	$O_2 + 2H_2O + 4e^- \rightarrow 4OH^-$	$O_2 + 2H_2O + 4e^- \rightarrow 4OH^-$
E° فلز پوشاننده	-	کمتر از آهن	بیشتر از آهن

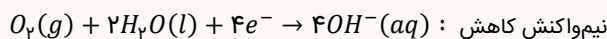
در ساختار حلبی خراشیده‌شده، فلز آهن اکسایش یافته و خورده می‌شود. در این حالت، سرعت خوردگی آهن حتی از سرعت خوردگی آهن خالص در هوای مرطوب بیشتر است. با توجه به روند انجام این واکنش، گونه‌های A ، B ، C و D به ترتیب معادل با Fe ، Fe^{2+} ، Fe^{2+} و گاز O_2 هستند. از میان جمله‌های داده شده، عبارت‌های (الف)، (ب) و (پ) درست هستند.

خوردگی آهن

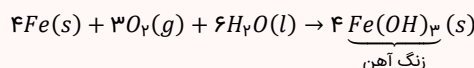
خوردگی به فرایند ترد شدن، خرد شدن و فروریختن فلزها در اثر واکنش‌های اکسایش-کاهش گفته می‌شود. برای خوردگی آهن، اکسیژن و رطوبت (آب) لازم است. در این فرایند، در مکانی که غلظت گاز اکسیژن بیشتر باشد، نیم‌واکنش کاهش اتفاق افتاده و زنگ آهن (رسوب قرمز رنگ) ایجاد می‌شود. معادله نیم‌واکنش اکسایش در خوردگی آهن به صورت زیر است:



یون‌های Fe^{2+} تولید شده، وارد مدار خارجی (قطره آب) شده و الکترون‌های حاصل از این فرایند از خود آهن (فلز) به عنوان بستر مبادله کننده الکترون استفاده کرده تا در نیم‌واکنش کاهش زیر شرکت کند:



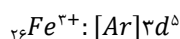
در مکانی که نیم‌واکنش کاهش اتفاق می‌افتد، یون OH^{-} تولید شده (محیط بازی) و این یون نیز وارد قطره آب شده تا رسوب سبز رنگ $Fe(OH)_2$ تشکیل شود. این رسوب دوباره با آب و اکسیژن واکنش داده تا واکنش کلی زنگ زدن آهن به صورت زیر نوشته شود:



بررسی موارد:

«الف»: ماده C معادل با فلز آهن است. آهن، نوعی فلز به شمار می‌رود. در ساختار یک ماده فلزی، هیچ پیوند اشتراکی بین اتم‌ها برقرار نشده است.

«ب»: آرایش الکترونی فشرده یون Fe^{3+} به صورت زیر است:



در آرایش الکترونی این یون، زیرلایه d دارای ۵ الکترون بوده و نیمه پر است.

«پ»: فراوان‌ترین گاز موجود در هواکره، گاز نیتروژن (N_2) است. گاز نیتروژن، نسبت به اکسیژن واکنش‌پذیری کمتری داشته و نقطه جوش منفی تری دارد. گاز نیتروژن، همانند اکسیژن ناقطبی بوده و در میدان الکتریکی جهت‌گیری نمی‌کند. از این گاز در صنعت برای سرماسازی و نگهداری نمونه‌های بیولوژیک استفاده می‌شود.

«ت»: گونه A، معادل با یون Fe^{2+} بوده و از ترکیب آن با یون سولفات (SO_4^{2-})، ترکیبی یونی با فرمول شیمیایی ASO_4 حاصل می‌شود. نام ترکیب ایجاد شده طی این فرایند، آهن (II) سولفات است.

گروه آموزشی ماز

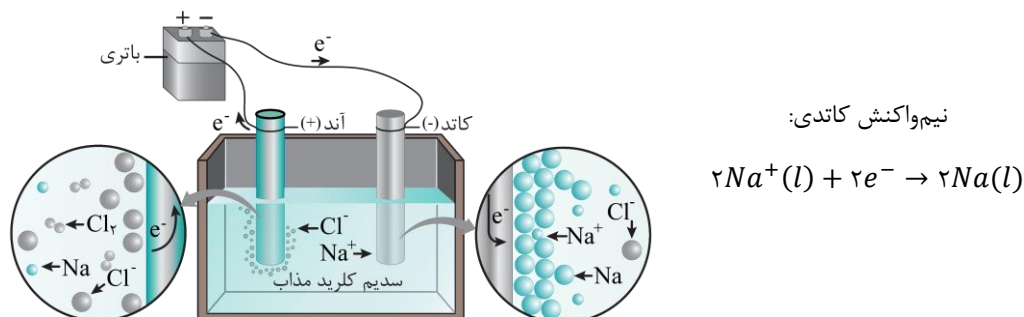
۱۰۵- کدام یک از مطالب داده شده درست است؟

- (۱) در فرایند آبکاری، فلزی که قرار است لایه‌ای از آن بر روی جسم قرار بگیرد را در نقش کاتد قرار می‌گیرد.
- (۲) فلز لیتیم، چگالی بیشتری نسبت به فلز آلومینیم داشته و قدرت کاهندگی بیشتری نسبت به منیزیم دارد.
- (۳) در مراحل استخراج منیزیم از آب دریا، از محلول جوهر نمک برای رسوب دادن یون Mg^{2+} استفاده می‌شود.
- (۴) سدیم یک فلز قلیایی است که قدرت کاهندگی بالایی داشته و برای استخراج آن انرژی زیادی مصرف می‌شود.

(آسان - مفهومی و حفظی - ۱۲۰۲)

پاسخ: گزینه ۴

فلز سدیم، یک کاهنده قوی است که در طبیعت به حالت آزاد یافت نمی‌شود. این عنصر در ترکیب‌های طبیعی و گوناگون خود، تنها به شکل یون سدیم وجود دارد. این واقعیت نشان می‌دهد که یون‌های سدیم بسیار پایدارتر از اتم‌های سدیم هستند. به همین دلیل، برای تهیه فلز سدیم باید انرژی زیادی مصرف کرد. چون فلز سدیم قدرت کاهندگی بالایی دارد، برای به دست آوردن آن نمی‌توان از محلول آبی نمک خوراکی استفاده کرد. بر این اساس، برای به دست آوردن فلز سدیم باید یک نمونه مذاب از این ماده را برقکافت کنند. سلول زیر، نمایی از برقکافت سدیم کلرید مذاب را نشان می‌دهد:



برای کاهش دمای ذوب سدیم کلرید استفاده شده در این فرایند، مقداری کلسیم کلرید را به این ماده می‌افزایند.

۱ پوشاندن سطح یک فلز با لایه نازکی از یک فلز ارزشمند و مقاوم در برابر خوردگی به کمک سلول الکترولیتی را آبکاری می‌گویند. در این فرایند، جسمی که روکش فلزی روی آن ایجاد می‌شود باید حتماً رسانای جریان برق باشد. بر این اساس، می‌توان گفت اجسام نارسانا را نمی‌توان آبکاری کرد. در فرایند آبکاری، جسم موردنظر را کاتد و فلزی که قرار است لایه نازکی از آن بر روی جسم قرار بگیرد را به‌عنوان آند قرار می‌دهند.

۲ لیتیم در بین فلزها، کم‌ترین چگالی را دارد؛ پس چگالی آن از آلومینیم کمتر است. از طرف دیگر، لیتیم قوی‌ترین کاهنده است و کم‌ترین E° را دارد، بنابراین قدرت کاهندگی لیتیم از منیزیم بیشتر است. توجه داریم که باتری‌های لیتیومی نسبت به اغلب باتری‌های دیگر، ولتاژ بالاتری تولید می‌کنند و توانایی ذخیره انرژی بیشتری را دارند.

باتری‌ها و لیتیم

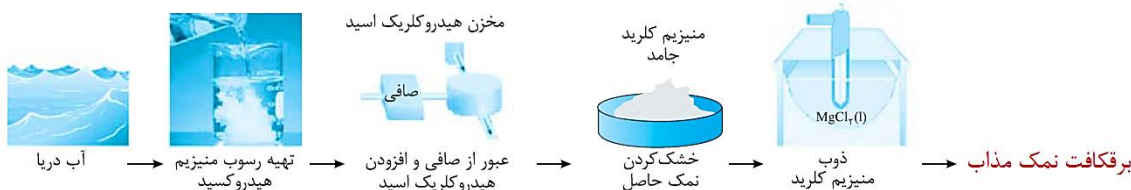
برای ساختن بسیاری از باتری‌های امروزی از جمله باتری‌های دگمه‌ای و باتری‌های به‌کاررفته در ساختار تلفن‌ها و رایانه‌های همراه از فلز لیتیم استفاده می‌شود. مزایای استفاده از فلز لیتیم نسبت به سایر عناصر فلزی به شرح زیر هستند:

۱. چگالی فلز لیتیم نسبت به چگالی سایر فلزها کمتر است.

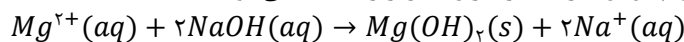
۲. از میان عناصر فلزی، لیتیم کم‌ترین مقدار پتانسیل کاهشی را دارد.

این ویژگی‌های لیتیم سبب شد تا از آن برای ساختن باتری‌های سبک‌تر و کوچک‌تر (به خاطر چگالی کم لیتیم) و با توانایی ذخیره بیشتر انرژی (به خاطر پتانسیل کاهشی کمتر لیتیم) استفاده شود. با افزایش تقاضا برای باتری‌های لیتیومی، این فلز جایگاه ممتازی را در تأمین انرژی جهان پیدا کرده است، به طوری که سالانه از میلیاردها باتری لیتیومی برای ساختن دستگاه‌های الکترونیکی استفاده می‌شود. این دستگاه‌ها سرانجام به همراه باتری‌های به‌کاررفته در ساختار آن‌ها دور ریخته می‌شوند و به این ترتیب، حجم بزرگی از پسماندهای الکترونیکی تولید می‌شود. این پسماندها به دلیل داشتن مواد شیمیایی گوناگون، سمی بوده و رها کردن آن‌ها در طبیعت موجب آلودگی محیط زیست می‌شود. از طرف دیگر، در برخی از این پسماندها مقدار قابل توجهی از مواد و فلزهای ارزشمند و گران‌قیمت وجود دارد که آن‌ها را به منبع مناسبی برای بازیافت تبدیل می‌کند.

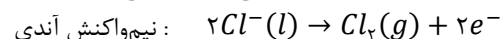
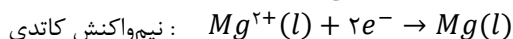
۳ یون منیزیم، چهارمین یون فراوان موجود در آب دریا است. مراحل استخراج منیزیم از آب دریا به شرح زیر است:



مطابق تصویر بالا، برای رسوب دادن منیزیم موجود در آب دریا از واکنش زیر استفاده می‌شود:



در واکنش بالا، از یک محلول بازی حاوی یون هیدروکسید استفاده می‌شود. با افزودن هیدروکلریک اسید به رسوب حاصل، منیزیم کلرید به دست آمده و این ماده نیز در یک سلول الکترولیتی برقکافت می‌شود. نیم‌واکنش‌های انجام شده در این سلول الکترولیتی به‌صورت زیر هستند:



فلز منیزیم حاصل از این فرایند، ماده ارزشمندی است که از آن در تهیه آلیاژها و شربت معده استفاده می‌شود.

گروه آموزشی ماز



مشاور خودت باش!

ویژه آزمون ۲۱ فروردین ماز

بهار ۱۴۰۴

برنامه یک هفته‌ای
(۱۵ فروردین تا ۲۱ فروردین)

(چون تو بیشتر از همه از خودت و روش مطالعات
شناخت داری، به کمک یک سری اصول که توی این دفترچه می‌خونی
می‌تونی بهترین برنامه درسی این هفته‌ات رو تنظیم کنی!)





مشاور خودت باش

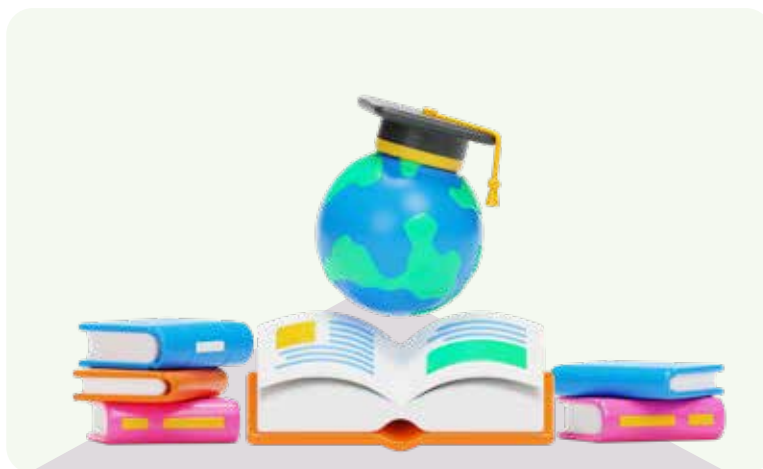


چون تو بیشتر از همه از خودت و روش مطالعات شناخت داری، به کمک یه سری اصول که توی این دفترچه می‌خونی می‌تونی بهترین برنامه رو توی یک هفته بعدی تنظیم کنی.

الان (بعد از آزمون) بهترین وقته که با خودت جلسه بذاری و ببینی چیکار کردی و قراره برای آزمون بعد چیکار کنی؟

توی این جلسه چند تا کار مهم داری که پیشنهاد می‌کنیم به ترتیب زیر انجام بدی:

- ۱- تکمیل یادگیری
- ۲- ارزیابی یک هفته گذشته
- ۳- پیش‌برنامه یک هفته بعد
- ۴- اطلاعات تکمیلی
- ۵- تکمیل یادگیری





آزمون آزمایشی فقط برای تعیین جایگاه شما نیست، در واقع هدف اصلی آزمون، عیب‌یابی هستش، مثل همین تست‌هایی که توی آزمایشگاه می‌گیرن، زمانی که احساس می‌کنی بدنت نیاز به چکاپ داره و به پزشک مراجعه می‌کنی، دلیل اصلی انجام تست، یافتن نقاط ضعف بدنت هست و قراره برطرفشون کنی. مسلماً تو آزمایش نمی‌دی که فقط از نتیجه‌اش حرص بخوری یا خوشحال بشی! بلکه هدف اصلی اینه که بدونی برای کدوم قسمت از بدنت مشکلی پیش اومده و برنامه بریزی تا اون رو برطرف کنی.

اصلاً فلسفه تست دادن، امیدواری به تغییر نتایج اونه.

قبل از این‌که بری سراغ بررسی سؤالات آزمون، بذار تا به طبقه‌بندی از پاسخ‌ها داشته باشیم و بدونیم چه پاسخ‌هایی توی اولویت بررسی قرار می‌گیرند.



الف) پاسخ‌های غلط

ب) پاسخ‌های سفید

ج) پاسخ‌های درست

الف) پاسخ‌های غلط

پاسخ‌های غلط یا به دلیل شانس زدن هستند و یا به دلیل نفهمیدن نکته سؤال؛ اگر از پاسخ‌های غلطی که شانس زدی، صرف‌نظر کنیم، منظور از پاسخ‌های غلط همون پاسخ‌هایی هست که به نظرت درست بودن اما یادگیری ناقص در اون مبحث و ندونستن یک نکته مهم باعث شده شما به سؤال پاسخ غلط بدی.

با بررسی پاسخ‌های غلط هر آزمون حداقل به تعداد این سؤال‌ها، نکته‌هایی یاد می‌گیری. این حجم زیاد یادگیری، در کمترین زمان اتفاق میفته؛ چون هفتاد هشتاد درصد مطلب رو بلدی و به تکیه کوچولو در حد به نکته، یادگیریت رو کامل می‌کنه. پیشنهادمون اینه که راحت از این نکته‌ها نگذری و در انتهای همین دفترچه **در قسمت**

یادداشت‌های رفع اشکال ثبت کنی؛ (آخر دفترچه - صفحه ۱۱)

به صورتی که بعداً خوندی متوجه نکته بشی و نوشتن این یادداشت‌ها باعث بشه تا این اشتباه رو توی آزمون‌های بعدی و مخصوصاً توی کنکور نداشته باشی.



ب) پاسخ‌های سفید

ما به دو دلیل پاسخ‌ها رو سفید می‌ذاریم، یکی به دلیل اینکه کلاً مبحث سؤال رو یاد نگرفتیم و یکی به این دلیل که چیزی که یاد گرفته بودیم رو فراموش کردیم. پس اولویت دوم، بررسی پاسخ‌های سفیدی است که دلیل بی‌پاسخ موندنشون، فراموشی بوده. با بررسی این پاسخ‌ها کلی از نکته‌ها و مطالب فزّار رو به دام می‌ندازی و در انتهای دفترچه یادداشت می‌کنی که برای آزمون‌های بعدی و خصوصاً کنکور، دیگه فراموش نشن.

(آخر دفترچه - صفحه ۱۲)



ج) پاسخ‌های درست

پاسخ درست را یا با اطمینان انتخاب کرده‌ای یا با شک. اگه پاسخ‌های درست شک‌دار رو بررسی نکنی و نکته‌اش رو توی دفتر رفع اشکال ننویسی، این احتمال وجود داره توی آزمون‌های بعدی هم دوباره با شک به این سؤال‌ها جواب بدی و از قضا این بار غلط از آب در بیان. اگه باز فرصت بیشتری داری، پاسخ‌های درست مطمئن رو هم بررسی کن تا با بررسی اونا، مطالبی رو که یاد گرفتی چند باره مرور بشن و احتمال فراموشیشون توی آزمون‌های بعدی از بین بره.

پس یک بار دیگه مرور کنیم که قراره توی قسمت اول جلسه‌ات چیکار کنی:

در این قسمت، با بررسی سؤالات آزمون، یادگیری ناقصت رو کامل می‌کنی و اثر آموزشی آزمون رو بالا می‌بری. اولویت بررسی سؤالات هم به این صورت است:

اول پاسخ‌های غلط رو بررسی می‌کنی تا به تعداد پاسخ‌های غلطت از آزمون، نکته یاد بگیری.

دوم پاسخ‌های سفید فراموش شده رو بررسی می‌کنی تا مطالب فزّاری که به کمک این آزمون کشفشون کردی توی دام بندازی.

سوم پاسخ‌های درست با شک رو بررسی می‌کنی تا اگه نکته‌ای شبیه به این سؤالات در آزمون‌های بعدی بیاد بتونی با اطمینان به این سؤال‌ها جواب بدی.



۲ - ارزیابی یک هفته گذشته



چرا باید توی این یک هفته‌ای که گذشت، کار و مطالعات رو ارزیابی کنی؟ دلایل خیلی واضحه، **چون اگه روش مطالعات نتیجه‌بخش نبوده، تغییرش بدی.** خیلی از دانش‌آموزان با اینکه ساعت مطالعه‌شون بالاست اما نتیجه‌ای که می‌گیرن متناسب با ساعت مطالعه و درس خوندنشون نیست و عاقلانه اینه:

اگه یه روشی راندمان نداره، حتماً به فکر اصلاحش باشی.



● ارزیابی رو چطور انجام بدیم؟

برای انجام ارزیابی یک هفته‌ای که گذشت، جدول زیر رو کامل کن:

ردیف	نام کتاب	ساعات مطالعه در یک هفته	ساعات تست در یک هفته	درصد این کتاب در آزمون	تناسب درصد و زمانی که برای کتاب گذاشتی
۱	حسابان	☐ کم ☐ متوسط ☐ زیاد			
۲	فیزیک	☐ کم ☐ متوسط ☐ زیاد			
۳	شیمی	☐ کم ☐ متوسط ☐ زیاد			
۴	هندسه	☐ کم ☐ متوسط ☐ زیاد			
۵	گسسته	☐ کم ☐ متوسط ☐ زیاد			

● حالا برای کتاب‌هایی که درصدش با ساعتش نمی‌خونه باید دلیل بیاری مثلاً دلایلی

مثل مطالعه کم کیفیت، تعداد تست‌های کم، فراموشی مطالب و ... (مراجعه به ارزیابی - صفحه ۱۰)

با این کار می‌فهمی چه کارهایی باعث می‌شه راندمان مطالعات پایین بیاد و در دوره بعدی حواست هست که از این خطاها انجام ندی.

حالا اگه نکات و درس‌هایی که از این ارزیابی گرفتی رو توی چند خط بنویسی، احتمال اصلاح روش مطالعات بالاتر می‌ره.





۳ - پیش برنامه یک هفته بعد



الآن وقتشه که برای یک هفته بعد، حجم مطالعه‌ای که باید انجام بدی و زمانی که داری رو در نظر بگیری. ما برای این که کارت راحت تر بشه، مطالب رو توی این آزمون لقمه‌بندی کردیم. لقمه‌ها اکثراً مروری بودن و تو آزمون‌های قبلی به صورت مفصل و کامل خوندی و الآن فقط کافیه برای آزمون مرورشون کنی. اما لقمه‌های جدید رو که تعدادشون زیاد نیست حتماً بهشون زنگ اختصاص بده و به صورت عمیق مطالعه کن.

● راهنمای کاربرگ

هر روز ۹ زنگ داری و برای ۶ روز ۵۴ زنگ داری. اگر یکی دو زنگ خالی رو هر روز برای انعطاف برنامه در نظر بگیریم ۴۰ زنگ برای این یک هفته داری که لقمه‌های مشخص شده رو باید توی این زنگ‌ها بچینی. بهت پیشنهاد می‌کنیم که برای هر لقمه دو زنگ در نظر بگیری؛ یک زنگ برای مطالعه و مرور و یک زنگ برای تست‌زنی. (لقمه‌های سنگین رو توی زنگ‌هایی بذار که انرژی بالاتری داری.)



۴ - اطلاعات تکمیلی



توی این بخش یه سری اطلاعات درباره روش مطالعه، اهمیت هر دوره زمانی و مسائل مهم در هر دوره زمانی مطرح می‌شن. توجه به این اطلاعات به شما کمک می‌کنه راه تا کنکور برات روشن تر بشه

● مطلب مشاوره‌ای این شماره

● دوران جمع‌بندی از چه زمانی شروع می‌شود؟

هر چه به روز کنکور نزدیک تر می‌شوید، اهمیت زمان باقی‌مانده بیشتر می‌شود. از یک تاریخی که خودتان مشخص می‌کنید وارد دوران جمع‌بندی می‌شوید.

حالا برای این که این تاریخ را مشخص کنید، نیاز است به نکات زیر توجه کنید:

(الف) دوران جمع‌بندی دورانی است که آزمون‌های آزمایشی به صورت جامع برگزار می‌شود و بخشی خواندن به پایان رسیده است.

(ب) شاید شما حدود ۴ تا ۷ روز برای ورود به دوران جمع‌بندی زمان لازم داشته باشید. به این دوران دوران گذار می‌گویند. دورانی که باید کم کم از یادگیری مطالب جدید دل بکنید.

(ج) حداقل زمان دوران جمع‌بندی را دو هفته قبل از کنکور در نظر بگیرید.



به این ترتیب این تاریخ‌ها می‌توانند بازه‌های مناسبی برای دوران جمع‌بندی باشند:

● دوران جمع‌بندی اول از ۲۲ فروردین تا ۱۱ اردیبهشت ۱۴۰۴

● دوران جمع‌بندی دوم از ۹ خرداد تا ۵ تیر ۱۴۰۴.

همانطور که اشاره شد، در دوران گذار باید یادگیری مطالب جدید را به پایان برسانید و آمادهٔ دوران جمع‌بندی شوید. برای همین بستگی به تشخیص خودتان دارد که چند روز را به دوران گذار اختصاص دهید.

دوران گذار برای بستن پرونده یادگیری جدید

شما بیشتر از هر کسی می‌دانید که چه مباحث مهمی باقی مانده است و باید در دوران گذار به سرانجام برسد؛ با این حال مؤلفه‌هایی به شما معرفی می‌کنیم تا اگر قرار است بین چند مطلب انتخاب کنید، بتوانید آن مباحث را اولویت‌بندی کنید و در دوران گذار زمان را به ترتیب به مباحث موردنظر اختصاص دهید.

۱- مباحثی که بودجه‌بندی بیشتری در کنکورهای سال‌های گذشته داشته‌اند.

۲- مباحثی که پیش‌نیاز یادگیری مباحث دیگر هستند.

۳- مباحثی که آموختن آن‌ها برای شما زمان کمی می‌گیرد.

۴- مباحثی که نیمه‌کاره و ناتمام هستند.

مباحث با بودجه‌بندی بیشتر

بودجه‌بندی مباحث کنکور در شش سال اخیر برای تعیین مباحث مهم اهمیت دارند. چون تقریباً بودجه‌بندی مباحث در سال‌های مختلف، تغییرات چندانی نمی‌کند و شما اگر قرار است مطلبی را حذف کنید، دقت داشته باشید که از آن مبحث در سال‌های اخیر چند سؤال در کنکور آمده است.

مباحث پیش‌نیاز

منظور مباحثی است که در ابتدای زنجیره‌ی یادگیری قرار دارند و یادگیری مباحث دیگر نیازمند دانستن آن‌هاست مثلاً دانستن ضرب پیش‌نیاز آموختن تقسیم است و شما تا ضرب را نیاموزی نمی‌توانی به راحتی تقسیم را یاد بگیری.

مباحث ساده‌تر

آموختن این مباحث برای شما آسان‌تر است و پیش‌بینی می‌کنید در زمان کمتری آن‌ها را به نتیجه برسانید. ممکن است یک مبحث برای شما این ویژگی را داشته باشد اما برای دوستان مطلب سبکی نباشد.

مباحث نیمه‌کاره

شما در طول سال بعضی مباحث را به طور کامل مطالعه کرده‌اید بعضی را به طور ناقص و بعضی را اصلاً مطالعه نکرده‌اید. دستهٔ اول نیاز به جمع‌بندی و مرور دارند دسته دوم بایستی سریع‌تر تکمیل شوند و مطمئناً زمانی را که صرف تکمیل مباحث ناقص خواهید کرد خیلی کمتر از مباحث دست‌نخورده می‌باشد.

خب رسیدیم به تاریخ حساس «شروع دوران جمع‌بندی» فکر نکنید شروع دوران جمع‌بندی فقط برای شما سخت است. دل‌کندن از یادگیری جدید برای همه سخت است. اما باید دل‌ببرید و وارد دوران جدید شوید. برای اینکه قانع شوید که چرا حتماً باید این کار را بکنید، مقالهٔ بعدی در آزمون بعد را مطالعه کنید.



پاسخ به دغدغه‌های شرکت‌کننده در آزمون‌های ماز



ما نظر شرکت‌کنندگان رو قبل از گرفتن کارنامه ازشون می‌گیریم و ازشون می‌خوایم اگه نظری درباره آزمون ماز دارن، چه مثبت چه منفی به ما بگید، خوشحال می‌شیم از شنیدنش. لازمه بدونین ما تک تک این نظرات رو می‌خونیم و برامون مهمه که شما چه احساسی از آزمون‌های ماز دارید و اگه مشکل یا مسئله‌ای رو مطرح می‌کنید، حتماً پیگیری می‌کنیم. در ادامه بعضی از این کامنت‌ها رو می‌خونیم و پاسخی که از طرف ما برای این کامنت‌ها هست رو می‌گیم.

- سلام خسته نباشید، بنده در این آزمون دیر وارد شدم و تقریباً ۱۰ دقیقه وقت دفرچه ۲ برام کمتر بود
- ساعت ۹ صبح شروع شود بهتره

پاسخ ماز: برای این‌که پنجشنبه یک روز تعطیل در مدرسه‌ها به حساب می‌آید و از طرفی روزی است که در برخی مدارس ممکن است کلاس‌های خارج از برنامه وجود داشته باشد، زمان‌بندی آزمون ماز با انعطاف کافی در نظر گرفته شده است. شما از ساعت ۷ تا ۱۷ (۵ عصر) می‌توانید وارد سامانه شوید و در آزمون شرکت کنید. این به شرایط شما بستگی دارد که چه زمانی را برای شروع آزمون انتخاب نمایید اما حواستان باشد اگر به عنوان مثال مدت پاسخگویی به آزمون شما ۲ ساعت و ۳۰ دقیقه است، برای اینکه زمان کافی برای آزمون دادن داشته باشید حداکثر باید ساعت ۱۴:۳۰ وارد سامانه شوید. اگر شما ساعت ۱۶ وارد شوید، فقط ۱ ساعت برای آزمون دادن فرصت دارید. همچنین به خاطر داشته باشید که در آزمون‌های جامع، مدت پاسخگویی نسبت به آزمون‌های عادی بیشتر است و شما برای اینکه زمان کافی داشته باشید، باید زودتر آزمون را شروع کنید.

- لطفاً راجع به زمان آزمون در ماه رمضان توضیح بدید که همچنان به روال سابق است؟

پاسخ ماز: بله ساعت ۷ تا ۱۷ تقریباً هیچ تداخلی با زمان افطار و سحری در شهرهای ایران ندارد و چون زمان‌بندی ۷ تا ۱۷ انعطاف کافی برای شرکت در آزمون دارد، تغییری در این روال صورت نگرفت و زمان آزمون مانند دیگر روزها از ساعت ۷ تا ۱۷ است.





پاسخ به دغدغه‌های شرکت‌کننده در آزمون‌های ماز



- سلام وقت بخیر اگر امکان داره برای عید برای درس‌ها برامون یک برنامه مطالعاتی بدید تا دروس رو خوب جمع بندی کنیم
- در این ایام که تعطیل هستیم به نحوی راهنمایی‌هایی انجام شود که بتوانیم از این زمان بهترین بهره را ببریم
- من مدت هاست از بودجه بندی ماز عقب ترم خیلی، و همش دارم تلاش میکنم تو دو هفته خودمو برسونم و میلم این دفعه دیگه می‌رسم ولی باز نمیشه. این موضوع یکم برام سخت شده... ممنون میشم یجوری و به یک شکلی راهنمایی کنید که این وضعیت به بهترین شکل مدیریت بشه...

پاسخ ماز:

دانش‌آموزان دهم و یازدهم در نظر داشته باشید:

در روزهای نوروز، خوب است که دو یا سه روز را کامل تفریح یا استراحت کنید. مثلاً این روزها می‌تواند ۱ فروردین، ۱۳ فروردین و روز عید فطر باشد. اما برای روزهای باقی‌مانده، حتماً برنامه داشته باشید. حدود ۵ تا ۷ ساعت مطالعه در روز می‌تواند نوروز شما را پربار کند.

شما در آزمون ۷ فروردین، توانستید نیم‌سال اول را مرور کنید و هر مبحثی که در نیم‌سال اول، خوب مطالعه نکرده بودید، در این آزمون جبران کنید. در آزمون ۱۴ فروردین هم می‌توانید، نصف نیم‌سال دوم را مرور کنید و با آمادگی کامل ادامه دهید.

دانش‌آموزان دوازدهم در نظر داشته باشید:

در روزهای نوروز، خوب است که یکی دو روز را کامل تفریح یا استراحت کنید. مثلاً این روزها می‌تواند ۱ فروردین و ۱۳ فروردین باشد. اما برای روزهای باقی‌مانده، حتماً برنامه داشته باشید. حدود ۸ تا ۱۲ ساعت مطالعه در روز می‌تواند جمع‌بندی شما را کامل کند. شما در آزمون ۷ فروردین توانستید، مباحث پایه را مرور کنید و در آزمون ۱۴ فروردین فرصت دارید که نیم‌سال اول دوازدهم را مرور کنید و ۲۱ فروردین هم برای مرور نیم‌سال دوم مطالعه کنید. با این سه آزمون و جمع کردن همه مباحث از ۲۲ فروردین می‌توانید به کمک مارکوپولو، وارد دوران جمع‌بندی شوید و با یک برنامه منسجم و انجام و بررسی کنکورهای سال‌های قبل، خود را برای کنکور اردیبهشت آماده کنید.





پاسخ به دغدغه‌های شرکت‌کننده در آزمون‌های ماز



- عالی فقط پاسخنامه مربوط به شیمی و زیست را یکم گسترش بدید
- لطفا یکم پاسخنامه شیمیو خلاصه تر کنین

پاسخ ماز: ما در پاسخنامه ماز، سعی کردیم مباحث هر سؤال را به صورت پیرامونی، توضیح دهیم تا بتوانید با خواندن پاسخنامه، نکته سؤال را بیاموزید و یادگیری خود در آن مبحث را کامل کنید. در واقع حجم پاسخنامه برای ما اولویت ندارد و یادگیری اهمیت بیشتری دارد. با این حال، اکثر دانش‌آموزان حجم پاسخنامه را استاندارد می‌دانند و یکی از نقاط قوت آزمون‌های ماز را پاسخنامه آن می‌دانند. اما با توجه به زمان و شرایط بعضی دانش‌آموزان ممکن است این حجم، کم یا زیاد باشد که باز هم با رنگ بندی در پاسخنامه سعی شده، متناسب به نیاز دانش‌آموزان مطالب مهم‌تر نیز مشخص شود.

- اولین ازمون رو امروز دادم توی زمان بندی مشکل داشتم کاش به جلسه مشاوره مدیریت زمان بزارید
- من دفعه اولم بود و نمی‌دانستم این آزمون چگونه و از منحا و ضرب و دایره اون چیزی نفهمیدم

پاسخ ماز: یکی از مهم‌ترین مهارت‌هایی که قراره به کمک آزمون‌های آزمایشی به دست بیاری مدیریت زمان در جلسه کنکوره، برای این کار باید بتونی سطح سؤال و زمان پاسخگویی رو حدس بزنی؛ اگه نتونی به این مهارت برسی، خیلی از سؤالای آسون بی‌پاسخ می‌مونه. پس خیلی مهمه که بتونی با دیدن سؤال تشخیص بدی که این سؤال زیر یک دقیقه حل می‌شه یا نه تا بتونی تکلیفش رو روشن کنی. باید بارها و بارها به هر سؤال می‌رسی بتونی این تشخیص رو بدی وگرنه توی جلسه آزمون تو می‌مونی و کلی سؤال زخمی و نیمه‌کاره که نتونستی مدیریتشون کنی. دل کندن از حل بعضی سؤال‌ها هنر می‌خواد. خیلی سخته که دل بکنی از حل سؤال‌هایی که بلدی ولی وقت‌گیره، اگه می‌خوای توی جلسه کنکور موفق بشی لازمه که این مهارت دل‌کندن رو داشته باشی؛ مثل کسی که داره قایقش غرق می‌شه و اگه از به سری وسیله‌ها دل نکنه و اونا رو توی آب نندازه قایقش و خودش غرق می‌شن! خب برای این کار توی سامانه آزمون سه تا علامت در اختیار قرار گرفته تا به کمک اونا زمان رو مدیریت کنی،

سؤالایی که حلش رو می‌دونی ولی زمان بر هست رو با دایره مشخص کن،

سؤالاتی که کلاً بلد نیستی رو با منها مشخص کن،

سؤالایی که بین دو گزینه از اون بالاترین موندی با ضربدر مشخص کن،

تا بتونی در دقایق پایانی هر دفترچه، با فیلتر کردن سؤال‌ها، بتونی اونایی

که علامت زدی رو ببینی و پاسخ بدی.





ارزیابی یک هفته‌ای



ردیف	نام کتاب	ساعات مطالعه در یک هفته	ساعات تست در یک هفته	درصد این کتاب در آزمون	تناسب درصد و زمانی که برای کتاب گذاشتی
۱	حسابان دوازدهم				☐ کم ☐ متوسط ☐ زیاد
۲	فیزیک دوازدهم				☐ کم ☐ متوسط ☐ زیاد
۳	شیمی دوازدهم				☐ کم ☐ متوسط ☐ زیاد
۴	هندسه دوازدهم				☐ کم ☐ متوسط ☐ زیاد
۵	گسسته				☐ کم ☐ متوسط ☐ زیاد

علت نتایج و

نکاتی که در ارزیابی یک هفته به دست آمد:





● نکاتی که از بررسی سؤالات غلط آزمون به دست آوردم:





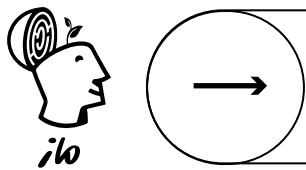
● نکات فزّاری که با بررسی سؤالات سفید فراموش شده‌آزمون پیدا کردم:





- نکاتی که از بررسی سؤالات درست شک‌دار آزمون به دست آوردم
تا در آزمون‌های بعدی با اطمینان پاسخ دهم:





برنامه مطالعاتی ویژه آزمون ۲۱ فروردین - درس های دوازدهم ریاضی

تاریخ/زنگ	۸:۳۰ تا ۷	۱۰:۱۵ تا ۸:۴۵	۱۲:۰۰ تا ۱۰:۳۰	۱۳:۴۵ تا ۱۲:۱۵	۱۵:۰۰ تا ۱۶:۳۰	۱۶:۴۵ تا ۱۸:۱۵	۱۸:۳۰ تا ۲۰:۰۰	۲۰:۱۵ تا ۲۱:۴۵	۲۲:۰۰ تا ۲۳:۳۰	جمع ساعت روز	جمع ساعات هفته
جمعه ۱۵ فروردین											
شنبه ۱۶ فروردین											
یکشنبه ۱۷ فروردین											
دوشنبه ۱۸ فروردین											
سه شنبه ۱۹ فروردین											
چهارشنبه ۲۰ فروردین											
پنجشنبه ۲۱ فروردین				آزمون	ون	ماز	تحلیل	آزمون	ماز		

این کاربرگو تو A3 پرینت کن

لقمه جدید
(نیاز به مطالعه عمیق)

لقمه مروری
(نیاز به مطالعه مروری)

گسسته	
لقمه ۱	مدل سازی با گراف (۱)
لقمه ۲	مدل سازی با گراف (۲)
لقمه ۳	جایگشت و ترکیب
لقمه ۴	تعداد جواب های یک معادله
لقمه ۵	مربع های لاتین
لقمه ۶	دو مربع لاتین متعامد
لقمه ۷	اصل شمول و عدم شمول
لقمه ۸	اصل لانه کبوتری

هندسه دوازدهم	
لقمه ۱	بیضی
لقمه ۲	تعریف و معادله سهمی و انتقال
لقمه ۳	تبدیل معادله رسم و ویژگی های سهمی
لقمه ۴	فضای دوبعدی
لقمه ۵	فضای سه بعدی
لقمه ۶	بردارها در دو بعد
لقمه ۷	بردار در سه بعد
لقمه ۸	ضرب داخلی
لقمه ۹	ضرب خارجی
لقمه ۱۰	حجم متوازی السطوح

حسابان دوازدهم	
لقمه ۱	خط مماس بر منحنی
لقمه ۲	محاسبه مشتق به روش دوم
لقمه ۳	مشتق پذیری
لقمه ۴	تابع مشتق چند جمله ای و رادیکالی
لقمه ۵	مشتق توابع مثلثاتی و مرکب
لقمه ۶	مشتق پذیری روی یک بازه و مشتق دوم
لقمه ۷	آهنگ متوسط و لحظه ای تغییر
لقمه ۸	اکسترمم های یک تابع
لقمه ۹	تشخیص صعودی یا نزولی بودن
لقمه ۱۰	جهت تقعر نمودار
لقمه ۱۱	نقطه عطف
لقمه ۱۲	رسم نمودار تابع

شیمی دوازدهم	
لقمه ۱	ساختار مولکولی و کووالانسی
لقمه ۲	رفتار ملکول ها و توزیع الکترون ها
لقمه ۳	شاره های ملکولی
لقمه ۴	جامد یونی
لقمه ۵	فلزها
لقمه ۶	دستاوردهای شیمی
لقمه ۷	انرژی فعال سازی
لقمه ۸	میدل کاتالیستی
لقمه ۹	ثابت تعادل
لقمه ۱۰	لوشاتلیه
لقمه ۱۱	دما و تعادل
لقمه ۱۲	فراوری و سنتز
لقمه ۱۳	بطری پلاستیکی

فیزیک دوازدهم	
لقمه ۱	موج و شاخص های اصلی
لقمه ۲	موج عرضی و انتقال انرژی در آن
لقمه ۳	الکترومغناطیس و موج طولی
لقمه ۴	امواج صوتی
لقمه ۵	شدت و تراز شدت صوت و اثر دوپلر
لقمه ۶	بازتاب موج
لقمه ۷	شکست موج
لقمه ۸	سراب، پراش و پاشیدگی نور
لقمه ۹	تداخل امواج
لقمه ۱۰	تشدید در تار و لوله صوتی
لقمه ۱۱	فوتون و اثر فوتوالکتریک
لقمه ۱۲	طیف خطی
لقمه ۱۳	مدل های اتمی
لقمه ۱۴	لیزر
لقمه ۱۵	ساختار هسته و نیروهای درون آن
لقمه ۱۶	پرتوزایی طبیعی
لقمه ۱۷	نیمه عمر
لقمه ۱۸	شکافت و گداخت هسته ای