



گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی

آزمون ماز | پایه دوازدهم



نیم سال دوم دوازدهم



پایه یازدهم



ویژه کنکوری های ۱۴۰۵

دفترچه پاسخ

پنجشنبه ۲۳ بهمن ماه ۱۴۰۴

- ✓ پاسخنامه سریع؛ برای بررسی فوری بعد از آزمون
- ✓ تحلیل تمام گزینه های هر سؤال؛ برای بررسی سؤالاتی که پاسخ نادرست داده اید
- ✓ نکات و درسنامه های آموزشی؛ برای یادگیری کامل مباحث هر سؤال
- ✓ مشاوره تستی؛ برای یادگیری انواع روش های حل تست
- ✓ استراتژی آزمون؛ برای یادگیری مدیریت زمان و مدیریت جلسه آزمون

دیس	مسئول درس	طراحان	ویراستاران
ریاضیات	حسین شفیع زاده سید جواد نظری مهرداد کیوان	مهرداد کیوان - حسین شفیع زاده علی منصف شکری - سوگند روشنی علیرضا شریف خطیبی	ندا فرهختی - مائده بادن فیروز حسین صنمی - حمیدرضا ولی پور وحید بهروزی - نوید ذکی علیرضا ملک حسینی - علی اسدی
فیزیک	سجاد صادقی زاده سعید احمدی	سعید احمدی - سجاد صادقی زاده حسین عبدوی نژاد - محمد جواد سورچی مهدی پارسا - زهره آقامحمدی - سارا قانع غلامرضا محبی - محسن قندچلر احسان ایرانی - امیرحسین اکبری	محمد جواد سورچی حنا خلعتبری علیرضا ملک حسینی
شیمی	فرشاد هادیان فرد	فرشاد هادیان فرد - فرهنگ امیری عالیه میرزایی - علی ترابی مهسا بایمانی نژاد - محمدعلی مؤمن زاده حسین ایروانی	طاها حق بین - فرهنگ امیری امیرعلی حسینی فرد محمد دارابی جم

تیم اجرایی و تولید آزمون

مجتبی آدمیان

نازنین امیری

مائده بادن فیروز

زهره جعفری

مدیر تولید آزمون: محدثه شیخعلی



یک تیم با بیش از ۵۰۰ نفر در حال کار هستند تا آزمون‌های ماز با حداکثر کیفیت حاضر بشن و به شما کمک کنن و مسیر موفقیت رو براتون ساده‌تر کنن. همیشه از نظرات و کامنت‌های خوبتون انرژی می‌گیریم. مرسی که همراهمون هستین. راستی! حتماً در نظرسنجی آزمون شرکت کنین و نظرات و پیشنهاداتتون رو برامون بنویسین.

دکتر رسول خنجری

فرق کنکور و امتحان

فرق کنکور و امتحان مدرسه چیه و اینکه چرا مسبک مطالعه کنکوری باید فرق داشته باشه؟

خیلی از داوطلب‌ها با همون ذهنیتی که سال‌ها برای امتحان مدرسه درس خوندن، میان سراغ کنکور؛ بعد هم تعجب می‌کنن که چرا با وجود ساعت مطالعه بالا، درصدهاشون راضی‌کننده نیست. سؤال اصلی اینه:

آیا کنکور واقعاً با امتحان‌های مدرسه فرق داره؟

و آنگه فرق داره، این تفاوت باید روی روش مطالعه ما اثر بذاره یا نه؟

جواب کوتاهه: **بله، خیلی هم اثر می‌ذاره.**

کنکور و امتحان مدرسه حداقل پنج تفاوت جدی دارن که اگه درکشون نکنی، ناخودآگاه اشتباه درس می‌خونی. اولین تفاوت اینه که:

در کنکور، همه درس‌ها با هم سنجیده می‌شن؛

اما توی مدرسه، هر امتحان فقط مربوط به یه درسه. یعنی ذهنت توی کنکور باید بتونه بین ۱۳-۱۴ تا کتاب مختلف مدام سوییچ کنه.

تفاوت دوم، زمانه.

توی کنکور برای هر سؤال یکی دو دقیقه بیشتر فرصت نداری، در حالی که توی امتحان مدرسه معمولاً این فشار زمانی وجود نداره. سومین فرق خیلی مهمه:

تو کنکور فقط جواب نهایی مهمه؛

ولی تو امتحان مدرسه، راه‌حل هم نمره داره.

یعنی ممکنه کلی بلد باشی، ولی چون به جواب درست نرسیدی، هیچ امتیازی نگیری.

چهارمین تفاوت، تحمل جلسه‌ست.

کنکور دو و نیم تا سه ساعته؛

ولی امتحان‌های مدرسه معمولاً کوتاه‌ترن و فشار ذهنی کمتری دارن.

و تفاوت پنجم که خیلی تعیین‌کننده‌ست:

کنکور نمره منفی داره، ولی امتحان مدرسه نه.

چرا این تفاوت‌ها روش مطالعه رو عوض می‌کنن؟

همین پنج تفاوت کافیه تا بفهمیم

الگوی مطالعه کنکوری نمی‌تونه شبیه الگوی امتحان مدرسه باشه.

مثلاً «بُغچه‌خونی» (اینکه یکی دو روز کامل یه درس رو بخونی، امتحانش رو بدی و ببندی بزاری کنار) برای امتحان مدرسه جواب می‌داد، ولی برای کنکور راندمان پایینی داره.

کنکور جاییه که قراره همه مطالب همه درس‌ها همزمان توی ذهنت زنده باشن، نه اینکه هر کدوم ته یه انبار شلوغ تلنبار شده باشن.

تو کنکور باید مطالب طبقه‌بندی‌شده و مرتب توی ذهنت نشسته باشن تا بتونی توی همون یکی‌دو دقیقه طلایی، سریع فراخوانی‌شون کنی.

برای همین روش مطالعه درست اهمیت پیدا می‌کنه، روشی که توی مقالات ۱۰ و ۱۱ کامل درباره‌ش توضیح دادیم. با اون روش، مطالب انبار نمی‌شن؛

می‌رن تو قفسه‌های مشخص ذهن، و دقیقاً همون‌جایی هستن که موقع تست بهشون نیاز داری.

کنکور جای نیم‌نمره گرفتن نیست. توی کنکور خبری از ۰/۲۵ و نیم‌نمره نیست. **یا جواب درست رو می‌زنی، یا هیچ.** حتی بدتر از اون: **اگه جواب غلط بزنی، از کسی که سؤال رو سفید گذاشته عقب‌تر می‌افتی؛**

چون هم زمانش رو حفظ کرده، هم نمره منفی نگرفته.

به خاطر همینکه **مدیریت جلسه و تصمیم‌گیری لحظه‌ای** این قدر مهم می‌شه.

و ما توی مقالات ۲ تا ۵ مفصل درباره‌ش حرف زدیم.

از طرف دیگه، **باید بتونی چند ساعت کامل تمرکز تو حفظ کنی؛ چیزی که فقط با تمرین در شرایط آزمون به دست میاد.** برای همین

شرکت تو آزمون‌های آزمایشی ما، فقط منبش علمی نیست؛ تمرین کنکور دانه.

تکنیک‌های جادویی؟ نه، ولی یادشون بگیر و ازش استفاده کن.

یه سری تکنیک‌ها هستن که کمک می‌کنن با همون دانشی که داری، درصد بهتری بگیری.

نه معجزه‌ان، نه تقلب؛ فقط بلد بودن تصمیم درست تو زمان درسته.

یکی از مهم‌ترینشون: **شجاعت در زدن گزینه‌های شک‌دار؛ البته آگاهانه.**

کنکور چهار گزینه‌ایه و هر سه گزینه غلط، عملاً به نفع گزینه درست کار می‌کنن.

اگه همه سؤال‌ها رو شانسی بزنی، از نظر آماری نه جلو می‌افتی، نه عقب.

اما حالا به حالت واقعی‌تر رو در نظر بگیر:

فرض کن توی ۳۰ سؤال، بتونی فقط یک گزینه رو با اطمینان حذف کنی و بین سه گزینه باقی‌مونده یکی رو بزنی.

از نظر آماری، انتظار می‌ره حدود ۱۰ سؤال درست دریاد. ۲۰ غلط، حدود ۷ تا از اون درست‌ها رو می‌سوزونه، و تهش حدود

۳ پاسخ درست خالص برات می‌مونه. یعنی بدون اینکه دانش جدیدی اضافه کرده باشی، جلو افتادی.

اما این تکنیک فقط وقتی به نفعته که **دو شرط مهم رعایت بشه:**

■ اول اینکه **واقعاً و با اطمینان کامل، دو گزینه رو حذف کرده باشی.** نه با حس، نه با حدس، نه با «فکر کنم».

■ دوم اینکه **اگه بین دو گزینه نهایی شک داشتی، دیگه تحلیل اضافه نکن.**

تجربه نشون داده توی این مرحله، فکر کردن زیاد معمولاً آدم رو می‌بره سمت گزینه غلط.

یا انتخاب آگاهانه داری، یا انتخاب تصادفی، وسطش خطرناکه.

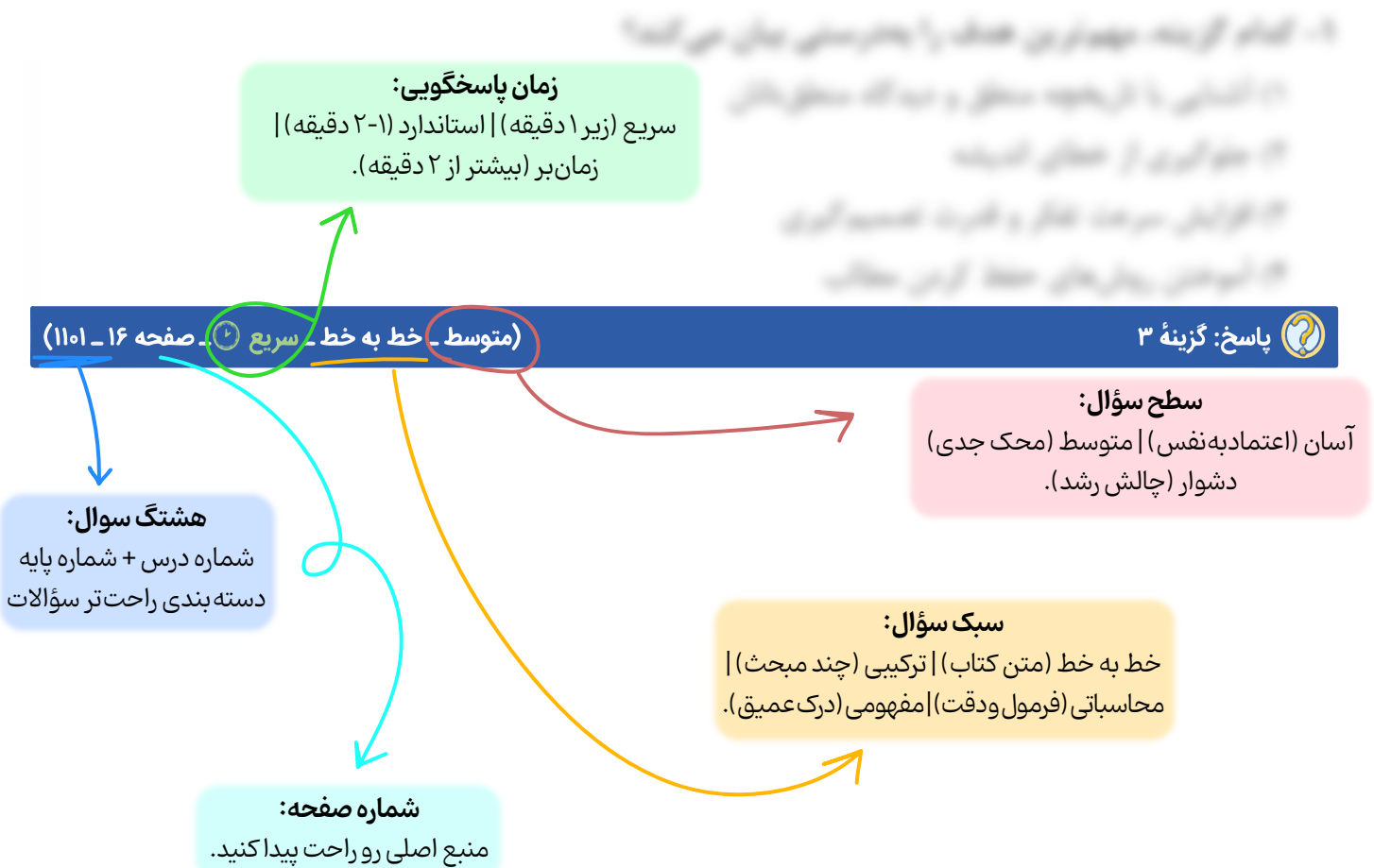
و مهم‌تر از همه:

این تصمیم‌ها رو باید توی آزمون‌های آزمایشی تمرین کنی.

نتیجه‌ش رو ببینی، درصد موفقیت رو بررسی کنی و آخرش به یک قاعده شفصی برسی.

کنکور جای تقلید کورکورانه نیست؛ جای شناخت خودته.

راهنمای پاسخنامه آزمون‌ها



یادتون باشه:

- ✓ هر سؤال یک فرصت یادگیری، نه یک مانع.
- ✓ پاسخ نامه فقط جواب نیست؛ یک کارگاه آموزشی کامله.
- ✓ با هر آزمون و مرور این پاسخ نامه، یک پله بالاتر می رید و یک قدم به رؤیایون نزدیک تر می شید.
- ✓ موفقیت فقط برای کسانی که با برنامه و انگیزه حرکت می کنن. شما همون آدمید.



برای دیدن پاسخنامه ویدئویی آزمون
QRcode بالا را اسکن کنید!

یا بر روی لینک زیر کلیک کنید!

پاسخنامه ویدئویی

بودجه‌بندی
این آزمون

حسابان ۲: مشتق (تا ابتدای مشتق‌پذیری روی یک بازه)، صفحه‌های ۸۴ تا ۹۷
ریاضی پایه: تابع و معادله درجه ۲، ریاضی ۱ صفحه‌های ۶۹ تا ۸۲، حسابان ۱ صفحه‌های ۷ تا ۱۳
هندسه ۳: آشنایی با مقاطع مخروطی (از ابتدای سهمی تا ابتدای صورت متعارف)، صفحه‌های ۵۰ تا ۵۴
هندسه پایه: تبدیل‌های هندسی و کاربردها، هندسه ۲ (تا ابتدای تجانس)، صفحه‌های ۳۱ تا ۴۳
گسسته: گراف و مدل‌سازی (از ابتدای فعالیت ص ۴۸ تا انتهای فصل)، صفحه‌های ۴۸ تا ۵۴
آمار و احتمال: احتمال، صفحه‌های ۳۵ تا ۶۸، ریاضی ۱ صفحه‌های ۱۴۱ تا ۱۵۱

سهم در
کنکور

حسابان ۲: این مبحث در مجموع ۱ تست از ۶ تست کنکور را پوشش داده است.
ریاضی پایه: این مبحث در مجموع ۲ تست از ۱۴ تست کنکور را پوشش داده است.
هندسه ۳: از این مبحث به‌طور مستقیم تستی در کنکور طرح نشده است.
هندسه پایه: از این مبحث به‌طور مستقیم تستی در کنکور طرح نشده است.
گسسته: این مبحث در مجموع ۱ تست از ۴ تست کنکور را پوشش داده است.
آمار و احتمال: این مبحث در مجموع ۱ تست از ۴ تست کنکور را پوشش داده است.

۱- اگر نیم‌مماس‌ها در نقطه گوشه‌ای تابع $f(x) = \sqrt{x^2 + k|x| + 1}$ بر هم عمود باشند، مقدار k کدام است؟

(۱) ± 1 (۲) $\pm \sqrt{2}$ (۳) ± 2 (۴) $\pm 2\sqrt{2}$

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - حسابان ۲ صفحه ۸۹ - ۱۲۰۴

پاسخ: گزینه ۳

در این مثال، $x = 0$ طول نقطه گوشه‌ای است، زیرا:

$$x > 0: f(x) = \sqrt{x^2 + kx + 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x + k}{2\sqrt{x^2 + kx + 1}} \Rightarrow f'_+(0) = \frac{k}{2}$$

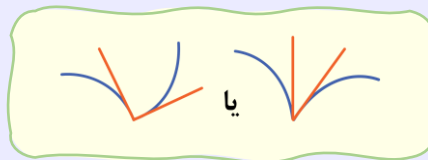
$$x < 0: f(x) = \sqrt{x^2 - kx + 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x - k}{2\sqrt{x^2 - kx + 1}} \Rightarrow f'_-(0) = -\frac{k}{2}$$

چون نیم‌مماس‌ها در $x = 0$ بر هم عمودند، پس:

$$\left(\frac{k}{2}\right)\left(-\frac{k}{2}\right) = -1 \Rightarrow \frac{k^2}{4} = 1 \Rightarrow k = \pm 2$$

نقطه گوشه‌ای

نقطه گوشه‌ای نقطه‌ای است که تابع در آن نقطه پیوسته باشد، مشتقات چپ و راست دو عدد متمایز باشند و یا آن‌که یکی عدد و دیگری بی‌نهایت باشد.



نیم‌مماس‌ها

اگر تابع f در $x = a$ پیوسته باشد به مشتق چپ $f'_-(a)$ و راست $f'_+(a)$ به ترتیب شیب نیم‌مماس‌های چپ و راست f در $x = a$ می‌گویند.
اگر f در $x = a$ مشتق‌پذیر باشد نیم‌مماس‌ها بر هم منطبق می‌شوند:

$$\text{شیب نیم‌مماس راست} = f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$f'_-(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

شیب نیم مماس چپ



۲- تابع $f(x) = \sqrt[3]{2x^2 + ax}$ در $x = -3$ دارای مماس قائم است. شیب خط مماس در $x = 1$ چه عددی است؟

$$\frac{1}{6} \quad (۴)$$

$$\frac{5}{6} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{12} \quad (۲)$$

$$\frac{5}{2} \quad (۱)$$

(متوسط - خط به خط - استاندارد) - حسابان ۲ صفحه ۸۸ - ۱۲۰۴

پاسخ: گزینه ۳

ابتدا f' را به دست می آوریم:

$$f'(x) = \frac{4x + a}{3\sqrt[3]{(2x^2 + ax)^2}}$$

حال برای آن که در $x = -3$ دارای مماس قائم باشد، باید $x = -3$ ریشه $2x^2 + ax = 0$ باشد، یعنی:

$$18 - 3a = 0 \Rightarrow a = 6$$

پس تابع f و مشتق آن به صورت زیر هستند:

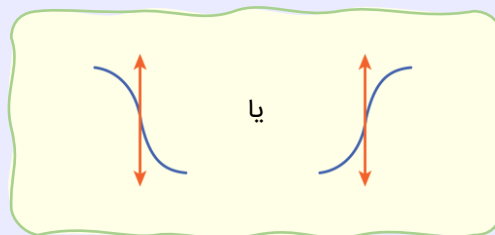
$$f(x) = \sqrt[3]{2x^2 + 6x} \Rightarrow f'(x) = \frac{4x + 6}{3\sqrt[3]{(2x^2 + 6x)^2}}$$

اکنون از آن جا که شیب خط مماس بر نمودار در نقطه $x = 1$ همان $f'(1)$ است، داریم:

$$x = 1 \text{ در نقطه } f'(1) = \frac{10}{3\sqrt[3]{(8)^2}} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

مماس قائم

اگر تابع f در $x = \alpha$ پیوسته و $f'(\alpha) = \infty$ باشد (مشتق در آن نقطه نامتناهی باشد)، می گوئیم f در α دارای مماس قائم است.



۳- اگر $f(1) = g(1) = 1$ و $f'(1) = g'(1) = 6$ ، مشتق تابع $y = \frac{f}{f+g}$ به ازای $x = 1$ چه عددی است؟

$$-\frac{1}{4} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{2} \quad (۳)$$

$$-\frac{1}{2} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{4} \quad (۱)$$

(آسان - محاسباتی - سریع) - حسابان ۲ صفحه ۹۴ - ۱۲۰۴

پاسخ: گزینه ۱

ابتدا مشتق تابع $y = \frac{f(x)}{f(x) + g(x)}$ را به دست می آوریم:

$$y' = \frac{f'(x)(f(x) + g(x)) - (f'(x) + g'(x))f(x)}{(f(x) + g(x))^2}$$

سپس مشتق را در نقطه $x=1$ حساب می‌کنیم:

$$y'(1) = \frac{f'(1)(f(1) + g(1)) - (f'(1) + g'(1))f(1)}{(f(1) + g(1))^2}$$

$$2f'(1) = 3g'(1) = 6 \Rightarrow f'(1) = \frac{6}{2} = 3, g'(1) = \frac{6}{3} = 2$$

طبق فرض سؤال می‌دانیم:

$$y'(1) = \frac{3 \times 2 - 5 \times 1}{4} = \frac{1}{4}$$

قضایای مشتق

اگر توابع f و g در $x=a$ مشتق‌پذیر باشند، آن‌گاه:

$$۱) (f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$$

$$۲) (kf)'(a) = kf'(a)$$

$$۳) (fg)'(a) = f'(a)g(a) + g'(a)f(a)$$

$$۴) \left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - g'(a)f(a)}{(g(a))^2}; g(a) \neq 0$$

نکته!

این قوانین را برای توابع مشتق‌پذیر f و g در هر نقطه دلخواه x می‌توان نوشت.



۴- اگر برای تابع f داشته باشیم $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-3h)-2}{h} = -\frac{3}{2}$ ، شیب خط مماس بر نمودار $y=2f(x-1)$ در $x=2$ کدام است؟

$$m = -3 \quad (۴)$$

$$m = 2 \quad (۳)$$

$$m = \frac{1}{2} \quad (۲)$$

$$m = 1 \quad (۱)$$

(آسان - ترکیبی - سریع) - حسابان ۲ صفحه ۹۶ - ۱۲۰۴

پاسخ: گزینه ۱

با توجه به آن که $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-3h)-2}{h} = -\frac{3}{2}$ ، پس باید $f(1) = 2$ باشد.

$$(-3) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-3h) - f(1)}{-3h} = -\frac{3}{2} \Rightarrow -3f'(1) = -\frac{3}{2} \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{2}$$

در نتیجه داریم:

حال داریم:

$$y = 2f(x-1) \Rightarrow y' = 2 \underbrace{(x-1)'}_{1} f'(x-1) \Rightarrow y' = 2f'(x-1) \Rightarrow y'(2) = 2f'(1) = 1$$

پس شیب خط مماس بر نمودار تابع $y=2f(x-1)$ در $x=2$ برابر $m=1$ است.

قلقلشو یاد بگیر!

اگر حاصل یک حد عددی غیر صفر شد و حد صورت (یا مخرج) صفر باشد باید حد مخرج (یا صورت) هم صفر باشد.

یادآوری!

اگر f در $x=a$ پیوسته باشد، $f'(a)$ (مقدار مشتق f در $x=a$) به کمک حد زیر به دست می‌آید:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

 مشتق ترکیب توابع

اگر f و g توابع مشتق پذیر باشند، آن گاه مشتق تابع مرکب $f \circ g$ به صورت زیر به دست می آید:

$$(f \circ g)'(x) = (f(g(x)))' = g'(x)f'(g(x))$$

 رفع ابهام!

مشتق گرفتن از عبارت $y = 2f(x-1)$ دقیقاً مشتق ترکیب دو تابعه. در واقع تابع $g(x) = x-1$ با تابع $f(x)$ ترکیب شده و تابع $f \circ g(x) = f(x-1)$ رو به وجود آورده.



۵- اگر $g(x) = 2x + \frac{1}{x}$ و $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+2h) - 2}{h} = 4$ باشد، مقدار $(f \circ g)'(1)$ چه عددی است؟

$(1) \ 2$ $(2) \ 4$ $(3) \ 8$ $(4) \ 16$

(آسان - ترکیبی - استاندارد) - حسابان ۲ صفحه ۹۶ - ۱۴۰۴

پاسخ: گزینه ۳

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+2h) - 2}{h} = 2f'(3)$$

در حل سؤال، اولاً باید $f(3) = 2$ باشد، در نتیجه:

بنابراین: $2f'(3) = 4$ ، پس $f'(3) = 2$.

از طرفی داریم:

$$g(x) = 2x + \frac{1}{x} \Rightarrow g'(x) = 2 - \frac{1}{x^2} \Rightarrow \begin{cases} g'(1) = 1 \\ g(1) = 3 \end{cases}$$

پس:

$$(f \circ g)'(1) = g'(1) \cdot (f')'(g(1)) = g'(1) \cdot (f')'(3) = g'(1) \times 2f'(3) = 1 \times 2 \times 2 = 4$$

 به نکته طلایی!

اگر f تابعی مشتق پذیر باشد، آن گاه:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+mh) - f(a)}{h} = mf'(a)$$

 قواعد مشتق

$$(x^n)' = nx^{n-1} \xrightarrow{\text{نتیجه}} \begin{cases} (x)' = 1 \\ (c)' = 0 \end{cases}$$

$$\left(x^{\frac{m}{n}}\right)' = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1} \xrightarrow{\text{نتیجه}} \begin{cases} \left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2} \\ (\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{cases}$$

تعمیم: اگر u تابعی از x باشد، آنگاه:

$$(u^n)' = nu'u^{n-1}$$

۶- اگر $f(x) = \frac{6x}{x+3}$ و $g(x) = \frac{3x}{1-x}$ برای $a \neq 1$ ، مقدار $f'(g(a)) \cdot g'(a)$ چه عددی است؟

۱۸ (۴)

۶ (۳)

 $\frac{1}{3}$ (۲)

۳ (۱)

(متوسط - مفهومی - استاندارد) - حسابان ۲ صفحه ۹۶ - ۱۲۰۴

پاسخ: گزینه ۳

برای توابع مشتق پذیر f و g می‌دانیم $(fog)'(a) = g'(a) \cdot f'(g(a))$ ، پس به جای آن که $f'(g(a)) \cdot g'(a)$ را محاسبه کنیم، مقدار $(fog)'(a)$ را به دست می‌آوریم، پس ابتدا fog را تشکیل داده و ساده می‌کنیم:

$$y = fog(x) = f(g(x)) = \frac{6g(x)}{g(x)+3} = \frac{6(\frac{3x}{1-x})}{\frac{3x}{1-x}+3} = \frac{18x}{3} = 6x \quad (x \neq 1)$$

$$y = fog(x) = 6x \Rightarrow y'(x) = 6$$

$$\xrightarrow{a \neq 1} g'(a)f'(g(a)) = y'(a) = 6$$


 قَلَقِشو یاد بگیر!

در برخی سؤالات محاسبه عبارتی را از ما می‌خواهند که با فرمول‌های محاسبه مشتق به یک مشتق‌گیری ساده‌تر تبدیل می‌شود. در این گونه سؤالات باید یک عینک دید کلی به چشم بزنیم تا عبارت معادل با چیزی که داده شده را تشخیص بدهیم. 😊

$$f'(a)g(a) + g'(a)f(a) = (fg)'(a)$$

$$g'(a)f'(g(a)) = (fog)'(a)$$

$$\frac{f'(a)g(a) - g'(a)f(a)}{(g(a))^2} = \left(\frac{f}{g}\right)'(a); \quad g(a) \neq 0$$

در عبارت‌های بالا، سمت چپ را از ما می‌خواهند که محاسبه آن احتمالا طولانی‌تر است، ما با تشخیص این‌که فرمول کدام قاعده مشتق به ما داده شده (ضرب، تقسیم یا ترکیب دو تابع) به تابع سمت راست می‌رسیم، سپس از تابع حاصل مشتق می‌گیریم.

۷- اگر $f(x) = \sin^2 3x$ ، مقدار $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2x+3h) - f(2x)}{h}$ در کدام گزینه آمده است؟

۹ sin ۱۸x (۴)

۱۸ sin ۱۲x (۳)

۱۸ sin ۱۸x (۲)

۹ sin ۱۲x (۱)

(متوسط - مفهومی - استاندارد) - حسابان ۲ صفحه ۹۶ - ۱۲۰۴

پاسخ: گزینه ۱

چون f تابعی مشتق پذیر است، پس:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2x+3h) - f(2x)}{h} = 3 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2x+3h) - f(2x)}{3h} = 3f'(2x)$$

$f'(2x)$

کافی است $f'(x)$ را به دست آورده و به کمک آن $3f'(2x)$ را مشخص کنیم:

$$f(x) = \sin^2 3x \Rightarrow f'(x) = 2 \sin 3x (\sin 3x)' = 2 \sin 3x (\cos 3x \times 3) = 3 \times \underbrace{(2 \sin 3x \cos 3x)}_{\sin 6x} = 3 \sin 6x$$

$$\Rightarrow 3f'(2x) = 9 \sin 12x$$

$$(\sin x)' = \cos x \xrightarrow[\text{u تابعی از x}]{\text{تعمیم}} (\sin u)' = u' \cos u$$

$$(\cos x)' = -\sin x \xrightarrow[\text{u تابعی از x}]{\text{تعمیم}} (\cos u)' = -u' \sin u$$

$$(\tan x)' = 1 + \tan^2 x \xrightarrow[\text{u تابعی از x}]{\text{تعمیم}} (\tan u)' = u'(1 + \tan^2 u)$$

۸- تابع $f(x) = 3x^2 + ax$ مفروض است، به طوری که $f'of(x) = 18x^2 - 6x - 1$ می باشد. حاصل $f'of(\frac{1}{4})$ چه عددی است؟

۱۱ (۴)

۵ (۳)

۹ (۲)

۷ (۱)

(آسان - مفهومی - استاندارد) - حسابان ۲ صفحه ۹۶ - ۱۲۰۴

پاسخ: گزینه ۴

 ابتدا مشتق تابع چندجمله‌ای f را حساب می کنیم:

$$f(x) = 3x^2 + ax \Rightarrow f'(x) = 6x + a$$

$$f'of(x) = 6f(x) + a = 6(3x^2 + ax) + a = 18x^2 + 6ax + a$$

 از آن جا که طبق فرض سؤال داریم $f'of(x) = 18x^2 - 6x - 1$ ، پس $a = -1$ است، بنابراین:

$$f(x) = 3x^2 - x \Rightarrow f'(x) = 6x - 1$$

$$f'(\frac{1}{4}) = 3 - 1 = 2$$

 با جای گذاری $x = \frac{1}{4}$ در ضابطه $f'(x)$ داریم:

$$f'of(\frac{1}{4}) = f'(f'(\frac{1}{4})) = f'(2) = 6(2) - 1 = 11$$

در نتیجه:

۹- اگر $f(x) = (x^2 - \frac{1}{x})\sqrt[3]{x^2 + 4}$ باشد، مشتق $f(x^2 + \sqrt[3]{x})$ به ازای $x = 1$ چه عددی است؟

۲۴ (۴)

۲۸ (۳)

۱۲ (۲)

۱۴ (۱)

(متوسط - ترکیبی - استاندارد) - حسابان ۲ صفحه ۹۶ - ۱۲۰۴

پاسخ: گزینه ۳

 مطابق قاعده زنجیره‌ای یا مشتق تابع مرکب، مشتق تابع $y = f(x^2 + \sqrt[3]{x})$ را به دست می آوریم:

$$y' = (x^2 + \sqrt[3]{x})' f'(x^2 + \sqrt[3]{x}) = (2x + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}) f'(x^2 + \sqrt[3]{x})$$

$$\xrightarrow{x=1} y'(1) = (2 + \frac{1}{3}) f'(2) = \frac{7}{3} f'(2)$$

 بنابراین لازم است که $f'(2)$ را به دست آوریم:

$$f(x) = (x^2 - \frac{1}{x})\sqrt[3]{x^2 + 4}$$

 عامل صفرکننده در $x = 2$

$$f'(x) = (2x + \frac{1}{x^2})\sqrt[3]{x^2 + 4} + (\sqrt[3]{x^2 + 4})'. (x = 2 \text{ در عامل صفرکننده در})$$

$$f'(2) = (4+2) \times \sqrt[3]{8} + 0 = 6 \times 2 = 12$$

$$y'(1) = \frac{7}{3} f'(2) = \frac{7}{3} \times 12 = 28$$

در نهایت داریم:

راهنمای زنگ بازی!

(اگر می‌خواید افسانه‌ای باشید به این نکته دقت کنید! افسانه‌ای‌ها سعی می‌کنن زمان رو برای محاسبات اضافی صرف نکنن!)

اگر تابع f به صورت حاصل ضرب دو تابع باشد، یعنی $f(x) = u(x) \times v(x)$ و بخواهیم مشتق تابع f را در $x = a$ بیابیم و بدانیم که $u(a) = 0$ می‌شود (یعنی u عامل صفرکننده در a است) در این صورت برای محاسبه f' در $x = a$ کافی است مشتق عامل صفرکننده را در عامل دیگر ضرب کنیم. یعنی: $f'(a) = u'(a) \times v(a)$



۱۰- خط گذرنده از مبدأ مختصات با شیب k بر نمودار تابع $f(x) = \frac{-4\sqrt{x}}{x^2 - x - 2}$ مماس است. مقدار k کدام است؟

۴ (۴)

 $2\sqrt{2}$ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

(سخت - محاسباتی - زمان‌بر) - حسابان ۲ صفحه ۹۴ - ۱۲۰۴

پاسخ: گزینه ۲

خط گذرنده از مبدأ را به صورت $y = kx$ در نظر می‌گیریم، در صورتی خط بر نمودار f مماس است که معادله حاصل از تلاقی آن‌ها ریشه مضاعف داشته باشد، پس:

$$\frac{-4\sqrt{x}}{x^2 - x - 2} = kx \Rightarrow \frac{-4}{x^2 - x - 2} = k\sqrt{x} \quad (x > 0)$$

$$\Rightarrow \frac{-4}{k} = x^{\frac{5}{2}} - x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}}$$

اگر از طرفین مشتق بگیریم باید مشتق آن‌ها در نقطه تماس باهم برابر باشد.

$$0 = \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}$$

اگر طرفین را در $\sqrt{x}$ ضرب کنیم، آنگاه داریم:

$$\frac{5}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 1 = 0 \xrightarrow{\times 2} 5x^2 - 3x - 2 = 0$$

$$\xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} x=1 \\ x=-\frac{2}{5} \text{ غ ق } (x > 0) \end{cases}$$

یعنی خط و نمودار در نقطه‌ای به طول $x=1$ بر هم مماسند، از طرفی:

$$f(1) = \frac{-4}{-2} = 2 \Rightarrow A(1, 2)$$

$$2 = k \times 1 \Rightarrow k = 2$$

$A(1, 2)$ روی خط $y = kx$ قرار دارد، بنابراین:

یعنی خط با شیب $k=2$ در نقطه‌ای به طول $x=1$ بر نمودار f مماس است.

خط مماس بر نمودار

اگر خط d به معادله $y = mx + h$ در نقطه $x = \alpha$ بر نمودار تابع $y = f(x)$ مماس باشد:

۱) $f(\alpha) = m\alpha + h$ (مختصات نقطه تماس هم در خط و هم در f صدق می‌کند.)

۲) $f'(\alpha) = m$ (شیب خط مماس در $x = \alpha$ برابر با مشتق f در $x = \alpha$ است.)

در حالت کلی‌تر، اگر دو نمودار f و g در $x = \alpha$ بر هم مماس باشند، آنگاه:

$$f(\alpha) = g(\alpha) \quad , \quad f'(\alpha) = g'(\alpha)$$



۱۱- اگر $f(x) = 4 \cos^2(\frac{\pi}{6}x)$ و $fg(x) + 1 = 2g(x) + f(x)$ ، مقدار $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$ چه عددی است؟

$$\frac{\pi\sqrt{3}}{4} \quad (4)$$

$$\frac{\pi\sqrt{3}}{6} \quad (3)$$

$$-\frac{\pi\sqrt{3}}{3} \quad (2)$$

$$-\frac{\pi\sqrt{3}}{2} \quad (1)$$

(متوسط - ترکیبی - زمان‌بر) - حسابان ۲ صفحه‌های ۹۵ و ۹۶ - ۱۴۰۴

پاسخ: گزینه ۲

روش اول

در ابتدا تابع g را برحسب f پیدا می‌کنیم و داریم:

$$g(x) = \frac{f(x) - 1}{x - 2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 1}{x - 2}$$

از آن جا که:

$$f(2) = 4 \cos^2 \frac{\pi}{3} = 4 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1$$

بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = f'(2)$$

پس $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = f'(2)$ اما داریم:

$$f'(x) = 4 \times 2 \cos\left(\frac{\pi}{6}x\right) \times \left(-\sin\left(\frac{\pi}{6}x\right)\right) \times \frac{\pi}{6} = -4 \times \frac{\pi}{6} \left(\sin\left(\frac{\pi}{3}x\right)\right)$$

$$\Rightarrow f'(2) = \frac{-4\pi}{6} \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{2\pi}{3} \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{-2\pi}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \frac{-\pi\sqrt{3}}{3}$$



۱۲- اگر $f(x) = \frac{\lambda - \cos^3 x}{3 + \sin^2 x}$ و $g(x) = \frac{2}{2 + \cos x}$ ، حاصل $f'(\frac{5\pi}{6}) - 2g'(\frac{5\pi}{6})$ کدام است؟

$$-\frac{1}{2} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{2} \quad (۳)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (۲)$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (۱)$$

(سخت - محاسباتی - استاندارد) - حسابان ۲ صفحه ۹۵ - ۱۲۰۴

پاسخ: گزینه ۴

ابتدا ضابطه f را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{\lambda - \cos^3 x}{3 + (1 - \cos^2 x)} = \frac{\lambda - \cos^3 x}{4 - \cos^2 x}$$

$$f(x) = \frac{(2 - \cos x)(\cos^2 x + 2 \cos x + 4)}{(2 - \cos x)(2 + \cos x)} = \frac{\cos^2 x + 2 \cos x + 4}{2 + \cos x}$$

حال تابع $y = f(x) - 2g(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$y = f(x) - 2g(x) = \frac{\cos^2 x + 2 \cos x + 4}{2 + \cos x} - \frac{4}{2 + \cos x} = \frac{\cos x(2 + \cos x)}{2 + \cos x}$$

$$\Rightarrow f(x) - 2g(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) - 2g'(x) = -\sin x$$

$$\xrightarrow{x = \frac{5\pi}{6}} f'(\frac{5\pi}{6}) - 2g'(\frac{5\pi}{6}) = -\sin(\frac{5\pi}{6}) = -\sin(\pi - \frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$$



۱۳- اگر α و β جواب‌های معادله $3x^3 - kx^2 - 17x + k + 2 = 0$ باشند، به طوری که $\alpha + \beta = 1$ و $\alpha\beta = -6$ ، ریشه دیگر معادله کدام عدد است؟

$$\frac{1}{3} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{4} \quad (۳)$$

$$-\frac{1}{3} \quad (۲)$$

$$-\frac{1}{4} \quad (۱)$$

(سخت - محاسباتی - زمان‌بر) - حسابان ۱ صفحه ۹ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۴

چون α و β جواب‌هایی هستند که $\alpha + \beta = 1$ و $\alpha\beta = -6$ ، پس معادله درجه دوم نظیر ریشه‌های α و β به صورت $x^2 - x - 6 = 0$ است، پس:

$$3x^3 - kx^2 - 17x + k + 2 = (x^2 - x - 6)(3x + p)$$

در واقع با متحد قرار دادن طرفین تکلیف k و p در نتیجه جواب دیگر معلوم می‌شود.

$$3x^3 - kx^2 - 17x + k + 2 = 3x^3 + (p - 3)x^2 - (18 + p)x - 6p$$

$$\begin{cases} p - 3 = -k \\ -17 = -18 - p \Rightarrow p = -1 \Rightarrow \text{ریشه دیگر: } x = -\frac{p}{3} = \frac{1}{3} \\ k + 2 = -6p \Rightarrow k = 4 \end{cases}$$

مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله درجه دوم

اگر α و β ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ باشند، آن‌گاه:

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$$

و

$$P = \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

به این ترتیب، اگر S و P به ترتیب مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های یک معادله درجه دوم باشند، آن معادله را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$x^2 - Sx + P = 0$$



۱۴- نمودار تابع $f(x) = mx^2 - (4m-1)x + 3m-1$ از ناحیه دوم عبور نمی‌کند. حدود m کدام است؟

(۴) $m < -1$

(۳) $m \leq 0$

(۲) $-1 < m < 0$

(۱) $0 \leq m < 1$

(متوسط - مفهومی/خط به خط - استاندارد) - ریاضی ۱ صفحه ۸۱ - ۱۰۰۴

پاسخ: گزینه ۳

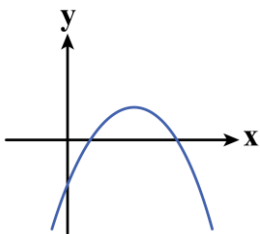
$$m + (-4m + 1) + 3m - 1 = 0$$

در معادله $f(x) = 0$ مجموع ضرایب صفر است:

$$mx^2 - (4m-1)x + 3m-1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{3m-1}{m} \end{cases}$$

پس $x = 1$ یکی از جواب‌های آن است و داریم:

اگر ریشه دیگر هم مثبت باشد و ضریب x^2 منفی باشد، منحنی به صورت مقابل خواهد شد و از ناحیه دوم عبور نمی‌کند.



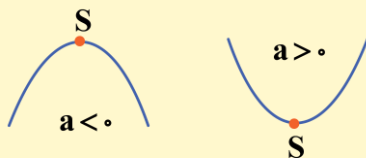
$$\begin{cases} m < 0 \\ \frac{3m-1}{m} > 0 \end{cases} \Rightarrow 3m-1 < 0 \Rightarrow m < \frac{1}{3} \xrightarrow{m < 0} m < 0$$

اگر $m = 0$ ، آن گاه تابع خطی $f(x) = x - 1$ باز هم از ناحیه دوم عبور نمی‌کند، پس در حالت کلی، اگر $m \leq 0$ ، آن گاه منحنی از ناحیه دوم عبور نخواهد کرد.



نمودار تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ یک سهمی است.

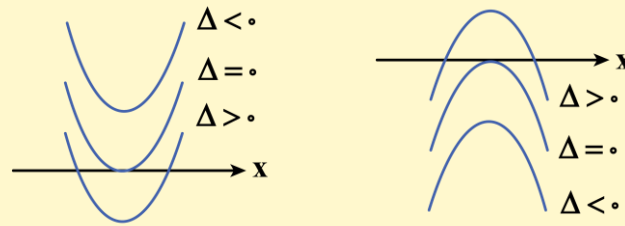
با توجه به علامت ضریب x^2 می‌تواند رو به بالا یا رو به پایین باشد.



هر سهمی دارای یک نقطهٔ ماکزیمم ($a < 0$) یا مینیمم ($a > 0$) است که مختصات آن برابر است با:

$$\begin{cases} x_S = \frac{-b}{2a} \\ y_S = \frac{-\Delta}{4a}, \Delta = b^2 - 4ac \end{cases}$$

ریشه‌های معادله $f(x) = 0$ که آن‌ها را صفرهای تابع f می‌نامند، محل تلاقی نمودار f و محور x ‌ها هستند که معادله می‌تواند حداکثر دو جواب داشته باشد.



با توجه به این که ریشه‌های معادله به چه صورت هستند و دهانه سهمی رو به بالا یا پایین است، می‌توان شرایطی که تعیین کننده گذشتن سهمی از نواحی مختلف است را به دست آورد. بهتر است این گونه شرایط را حفظ نکنید و در هر مسئله با توجه به حالت مطلوب شرایط را به دست آورید.

جواب‌های معادله درجه دوم در حالت خاص

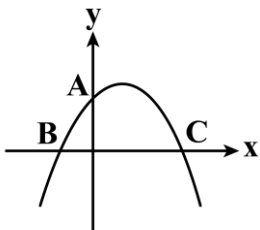
در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$:

(۱) اگر $a + b + c = 0$ (مجموع ضرایب صفر باشد)، آن گاه $x_1 = 1$ و $x_2 = \frac{c}{a}$ است.

(۲) اگر $a + c = b$ باشد، آن گاه $x_1 = -1$ و $x_2 = \frac{-c}{a}$ است.



۱۵- نمودار سهمی $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + mx + (m + \frac{1}{4})$ مطابق شکل روبه‌رو است. اگر مثلث با رئوس A ، B و C در رأس A قائمه باشد، حداکثر مقدار تابع f چه عددی است؟



(۱) $\frac{17}{2}$

(۲) $\frac{17}{4}$

(۳) $\frac{289}{16}$

(۴) $\frac{289}{64}$

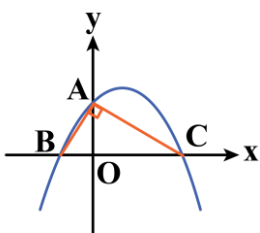
(سخت - ترکیبی - زمان‌بر) - ریاضی ۱ صفحه ۸۰ - ۱۰۴

پاسخ: گزینه ۳

ابتدا صفرهای تابع را با حل معادله $f(x) = 0$ به دست می‌آوریم:

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + mx + m + \frac{1}{4} = 0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} x = -1 \Rightarrow x_B = -1 \\ x = -\frac{c}{a} = \frac{m + \frac{1}{4}}{-\frac{1}{4}} \Rightarrow x_C = 4m + 1 \end{cases}$$

از طرفی $f(0) = m + \frac{1}{4}$ یعنی $y_A = m + \frac{1}{4}$ ، از طرفی چون مثلث در رأس A قائمه است، پس ارتفاع وارد بر وتر واسطه هندسی بین دو قطعه ایجاد شده روی وتر است. یعنی:



$$OA^2 = OB \cdot OC$$

$$OA^2 = OB \cdot OC \Rightarrow \left(m + \frac{1}{4}\right)^2 = 1 \times (4m + 1) \Rightarrow \frac{(4m+1)^2}{16} = 4m+1 \xrightarrow[m \neq -\frac{1}{4}]{\div (4m+1)} 4m+1 = 16 \Rightarrow m = \frac{15}{4}$$

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{15}{4}x + 4$$

بنابراین داریم:

$$f(x) = 0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} x = -1 \\ x = 16 \end{cases} \Rightarrow x_S = \frac{16-1}{2} = \frac{15}{2}$$

$$y_S = f\left(\frac{15}{2}\right) = -\frac{1}{4} \times \frac{225}{4} + \frac{15}{4} \times \frac{15}{2} + 4 = -\frac{225}{16} + \frac{225}{8} + 4$$

$$y_S = \frac{225}{16} + 4 = \frac{289}{16}$$


 قلیقشو یاد بگیر!

اگر نقاط A و B صفرهای تابع درجه دوم $f(x) = 0$ باشند، آن گاه طول رأس سهمی میانگین طول نقاط A و B است:

$$x_S = \frac{x_A + x_B}{2}$$

در حالت کلی تر، اگر A و B دو نقطه هم عرض از نمودار تابع درجه دوم $f(x) = 0$ باشند، آن گاه:

$$x_S = \frac{x_A + x_B}{2}$$



۱۶- هرگاه α و β جواب های معادله درجه دوم $2x^2 - 7x + 2 = 0$ باشند، حاصل $\alpha^2 + \frac{\beta}{\alpha}$ چه عددی است؟

$$\frac{7}{4} \quad (4)$$

$$\frac{49}{4} \quad (3)$$

$$\frac{41}{4} \quad (2)$$

$$\frac{21}{2} \quad (1)$$

(آسان - مفهومی - سریع) - حسابان ۱ صفحه ۸ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۲ 

$$\alpha^2 + \frac{\beta}{\alpha} = \alpha^2 + \frac{\beta^2}{\alpha\beta}$$

در ابتدا کسر $\frac{\beta}{\alpha}$ را در β ضرب و تقسیم می کنیم:

$$\alpha^2 + \frac{\beta}{\alpha} = \alpha^2 + \frac{\beta^2}{1} = \alpha^2 + \beta^2$$

چون $\alpha\beta = \frac{2}{2} = 1$ داریم:

$$(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \xrightarrow[\alpha\beta = \frac{2}{2} = 1]{\alpha + \beta = -(-\frac{7}{2}) = \frac{7}{2}} \left(\frac{7}{2}\right)^2 - 2 = \frac{49}{4} - 2 = \frac{41}{4}$$

راهنمای زنگ بازی! 

اگر α و β ریشه های یک معادله درجه دوم باشند، آن گاه:

۱) برای محاسبه $\alpha^2 + \beta^2$ ، از اتحاد مربع دوجمله ای کمک می گیریم:

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = S^2 - 2P$$

۲) برای محاسبه $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ از مخرج مشترک کمک می‌گیریم:

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{S}{P}$$

۳) برای محاسبه $\alpha^3 + \beta^3$ از اتحاد مکعب دوجمله‌ای کمک می‌گیریم:

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = S^3 - 3PS$$



۱۷- اختلاف جذر دو ریشه معادله $x^2 - 3mx + m = 0$ برابر ۱ است. حاصل جمع مربع ریشه‌های معادله $3x^2 + mx - m = 0$ چه عددی است؟

$\frac{5}{3}$ (۴)

$\frac{8}{9}$ (۳)

$\frac{7}{9}$ (۲)

$\frac{2}{3}$ (۱)

سخت - ترکیبی - زمان‌بر - حسابان ۱ صفحه‌های ۸ و ۹ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۲

در معادله $x^2 - 3mx + m = 0$ ، اگر ریشه‌ها را α و β فرض کنیم، داریم:

$$\begin{cases} S = \alpha + \beta = 3m \\ P = \alpha\beta = m \end{cases}$$

با توجه به فرض داده‌شده:

$$|\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}| = 1 \xrightarrow{\text{توان ۲}} \alpha + \beta - 2\sqrt{\alpha\beta} = 1$$

$$\Rightarrow 3m - 2\sqrt{m} = 1 \Rightarrow 3m - 1 = 2\sqrt{m} \xrightarrow[m \geq \frac{1}{9}]{\text{توان ۲}} 9m^2 - 6m + 1 = 4m$$

$$\Rightarrow 9m^2 - 10m + 1 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} m = 1 \\ m = \frac{1}{9} \text{ غ ق} \end{cases}$$

با توجه به آن که $m \geq \frac{1}{9}$ ، پس $m = 1$ قابل قبول است، پس داریم:

$$3x^2 + mx - m = 0 \Rightarrow 3x^2 + x - 1 = 0$$

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{1}{3} \text{ و } P = x_1x_2 = -\frac{1}{3}$$

فرض کنیم ریشه‌های آن x_1 و x_2 باشند، در این صورت:

$$x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 2\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9} + \frac{2}{3} = \frac{7}{9}$$

قلقشو یاد بگیر!

اگر α و β ریشه‌های یک معادله درجه دوم باشند آن‌گاه برای محاسبه $(\sqrt{\alpha} \pm \sqrt{\beta})$ آن را به توان ۲ می‌رسانیم و از اتحاد مربع دوجمله‌ای کمک می‌گیریم.

توجه کنید که در این حالت باید معادله دارای دو ریشه مثبت باشد.



۱۸- اگر نقاط $A(2a+3, a-3)$ و $B(9-2a, a-3)$ دو نقطه با مختصات طبیعی واقع بر یک سهمی با رأس $S(b, b+4)$ باشند، سهمی محور عرض‌ها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

$(1) -\frac{74}{25}$
 $(2) -\frac{36}{25}$
 $(3) -\frac{9}{5}$
 $(4) -\frac{17}{5}$

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط - محاسباتی - استاندارد) - ریاضی ۱ صفحه ۸۰ - ۱۰۰۴

نقاط $A(2a+3, a-3)$ و $B(9-2a, a-3)$ روی سهمی با عرض برابر هستند، پس طول نقطه رأس سهمی برابر است با:

$$x_S = \frac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow b = \frac{9-2a+2a+3}{2} \Rightarrow b = 6$$

$$y = k(x-6)^2 + 10$$

پس $S(6, 10)$ رأس سهمی است و معادله سهمی به صورت مقابل خواهد بود.

از طرفی چون طول و عرض نقاط A و B اعداد طبیعی هستند، پس:

$$\begin{aligned}
 a-3 > 0 &\Rightarrow a > 3 \\
 9-2a > 0 &\Rightarrow a < 4.5 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow A(11, 1)
 \end{aligned}$$

پس $A(11, 1)$ روی سهمی است، یعنی:

$$1 = k(11-6)^2 + 10 \Rightarrow 25k + 10 = 1 \Rightarrow k = -\frac{9}{25}$$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{9}{25}(x-6)^2 + 10 \xrightarrow{\text{محل تلاقی با محور } y \text{ ها}} f(0) = \frac{-9 \times 36}{25} + 10 = -\frac{74}{25}$$

نوشتن ضابطه یک تابع درجه دو

برای نوشتن ضابطه تابع درجه دوم $f(x)$ ، آن را به صورت کلی $f(x) = ax^2 + bx + c$ می‌نویسیم و با داشتن سه نقطه از آن و جای‌گذاری آن‌ها در ضابطه f پارامترهای a ، b و c را می‌یابیم و به این ترتیب ضابطه f به دست می‌آید.

یه نمونه باحال ببین!

ضابطه تابع درجه دوم f که از نقاط $A(1, 1)$ و $B(-1, 0)$ می‌گذرد و محور y ها را در عرض $\frac{3}{2}$ قطع می‌کند:

$$\begin{aligned}
 f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow \begin{cases} (1, 1) \Rightarrow 1 = a + b + c \\ (-1, 0) \Rightarrow 0 = a - b + c \end{cases} &\Rightarrow 2a + 2c = 1 \xrightarrow{c = \frac{3}{2}} 2a + 3 = 1 \Rightarrow a = -1 \\
 (0, \frac{3}{2}) \Rightarrow \frac{3}{2} = c & \\
 a - b + c = 0 &\Rightarrow b = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

اگر مختصات رأس سهمی را داشته باشیم

اگر رأس سهمی $S(x_0, y_0)$ داده شده باشد و مختصات یک نقطه دیگر را نیز داشته باشیم، ضابطه تابع را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$f(x) = a(x - x_0)^2 + y_0$$

سپس مختصات نقطه دیگر را در رابطه بالا قرار می‌دهیم تا پارامتر a نیز به دست آید.

یه نمونه باحال ببین!

ضابطه تابع درجه دوم که $S(-1, 2)$ رأس آن باشد و محور عرض‌ها را در ۳ قطع کند:

$$f(x) = a(x+1)^2 + 2 \xrightarrow{(0, 3)} 3 = a(0+1)^2 + 2 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow f(x) = (x+1)^2 + 2$$

 اگر هر دوریشه را داشته باشیم

اگر صفرهای تابع f ، x_1 و x_2 داده شده باشند و مختصات نقطه دیگری هم داده شده باشد، ضابطه تابع را به صورت زیر می نویسیم:

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

سپس مختصات نقطه دیگر را در رابطه قرار می دهیم تا پارامتر a به دست آید.

 به نمونه باحال بین!

تابع درجه دوم f ، محور x ها را در دو نقطه به طول های -1 و 3 قطع می کند. اگر ماکزیمم مقدار f برابر با 2 باشد، نمودار f محور عرض ها را در چه نقطه ای قطع می کند؟

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= a(x - (-1))(x - 3) = a(x + 1)(x - 3) \\ x_S &= \frac{3 + (-1)}{2} = 1, y_S = 2 \Rightarrow S(1, 2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2 = a(1 + 1)(1 - 3) \Rightarrow a = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$

$$f(x) = -\frac{1}{2}(x + 1)(x - 3) \xrightarrow{x=0} f(0) = -\frac{1}{2}(1)(-3) = \frac{3}{2}$$

بنابراین:

۱۹- اگر رأس سهمی $f(x) = 3x^2 + mx - 24$ در ناحیه چهارم واقع شده باشد، حدود m کدام است؟

$$m < 0 \quad (4)$$

$$m > 0 \quad (3)$$

$$-2 < m < 2 \quad (2)$$

$$0 < m < 4 \quad (1)$$

(آسان - خط به خط - سریع  - ریاضی ۱ صفحه ۸۰ - ۱۰۰۴)

 پاسخ: گزینه ۴

مختصات رأس سهمی $f(x) = mx^2 + (m + 3)x - 24$ برابر است با:

$$S \left\{ \begin{aligned} -\frac{b}{2a} &= -\frac{m}{6} \\ -\frac{\Delta}{4a} &= \frac{-(288 + m^2)}{12} \end{aligned} \right.$$

$$\Delta = m^2 + 4 \times 3 \times 24 = m^2 + 288$$

توجه کنید که:

چون S در ربع چهارم واقع شده است، پس داریم:

$$\left\{ \begin{aligned} x_S = -\frac{m}{6} > 0 &\Rightarrow m < 0 \\ y_S = -\frac{m^2 + 288}{12} < 0 &\checkmark \end{aligned} \right.$$

$$m < 0$$

در نتیجه حدود m برابر است با:

۲۰- دو عدد طبیعی و فرد متوالی جواب‌های معادله $x^2 - (a+1)x + a = 0$ و دو عدد صحیح و زوج متوالی جواب‌های معادله $x^2 - (3a+1)x + b = 0$ هستند. اختلاف ریشه‌های بزرگ‌تر معادلات چه عددی است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۵ (۱)

(متوسط - ترکیبی/محاسباتی - استاندارد) - حسابان ۱ صفحه ۱۱ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۳

چون جواب‌های $x^2 - (a+1)x + a = 0$ دو عدد فرد متوالی است و به علاوه جمع ضرایب صفر است، پس داریم:

$$x^2 - (a+1)x + a = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = a = 3 \end{cases}$$

$$x^2 - (3a+1)x + b = 0 \xrightarrow{a=3} x^2 - 10x + b = 0$$

از طرفی:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 = 10 &\Rightarrow x_1 + x_2 + 2 = 10 \Rightarrow x_1 = 4, x_2 = 6 \Rightarrow b = x_1 x_2 = 24 \\ x_2 = x_1 + 2 \end{aligned}$$

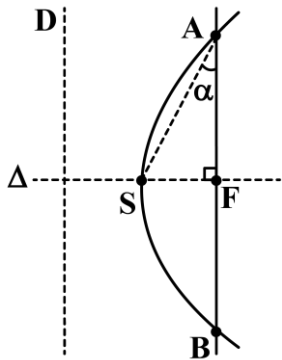
$$x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases} \Rightarrow \text{اختلاف ریشه‌های بزرگ‌تر} = 6 - 3 = 3$$

بنابراین:

$$x^2 - 10x + 24 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 6 \end{cases}$$



۲۱- از کانون سهمی مطابق شکل خطی عمود بر محور سهمی رسم کرده‌ایم تا سهمی را در A و B قطع کند، $\sin \alpha$ کدام است؟



$$\frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \quad (2)$$

$$\frac{\sqrt{5}}{5} \quad (3)$$

$$\frac{1}{5} \quad (4)$$

(آسان - مفهومی - سریع) - هندسه ۳ صفحه ۵۲ - ۱۲۰۲

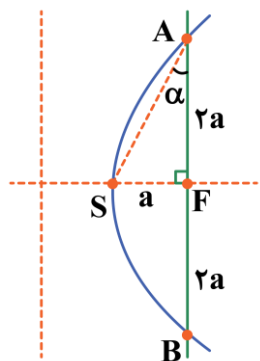
پاسخ: گزینه ۳

می‌دانیم وتری که در کانون سهمی بر محور کانونی عمود می‌شود طولش ۴ برابر فاصله کانون تا رأس سهمی است، بنابراین اگر فرض کنیم $|SF| = a$ باشد، آن‌گاه $|AF| = |BF| = 2a$. حال در مثلث ASF داریم:

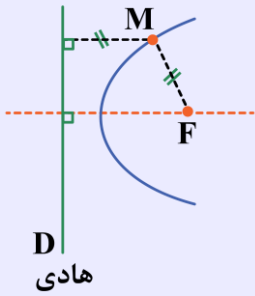
$$AS = \sqrt{a^2 + 4a^2} = \sqrt{5}a$$

$$\sin \alpha = \frac{|SF|}{|AS|} = \frac{a}{\sqrt{5}a} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

بنابراین خواهیم داشت:

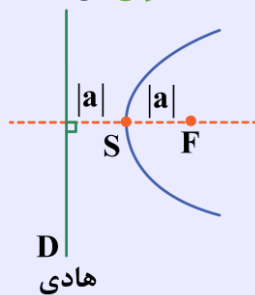


مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط ثابت D و نقطه F غیرواقع بر خط D به یک فاصله هستند، یک سهمی است. خط D هادی سهمی و نقطه F کانون سهمی نامیده می‌شود.



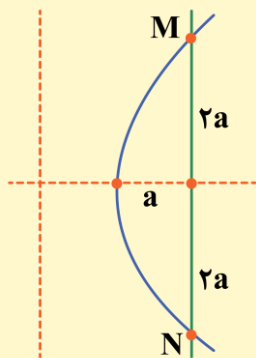
۱) خطی که از کانون سهمی می‌گذرد و بر خط هادی سهمی عمود است، محور تقارن یا محور کانونی یا به طور خلاصه محور سهمی نامیده می‌شود.

۲) محل تقاطع محور سهمی با سهمی، رأس سهمی نامیده می‌شود و فاصله رأس تا کانون یا رأس تا خط هادی را فاصله کانونی می‌نامند. فاصله کانونی سهمی برابر با a است.



وتر گذرنده از کانون سهمی

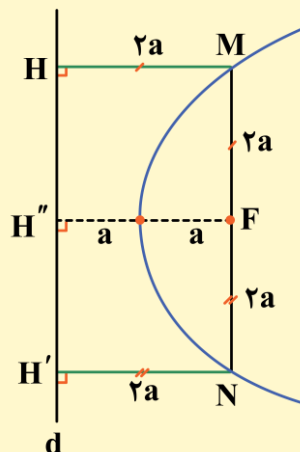
وتری که از کانون سهمی گذشته و با خط هادی موازی باشد را وتر کانونی می‌نامند. در هر سهمی طول وتر کانونی ۴ برابر فاصله کانونی (فاصله رأس تا کانون) است.



$$MN = 4a$$

اثبات:

میدانیم که اگر نقطه M روی سهمی قرار داشته باشد، فاصله آن از کانون سهمی با فاصله آن از خط هادی برابر است، پس:



$$MH = MF$$

$$NH' = NF$$

به طریق مشابه اگر نقطه N را نیز روی سهمی در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$\left\{ \begin{array}{l} MF = MH \xrightarrow{MH = FH'' = 2a} MF = 2a \quad (1) \\ NF = NH' \xrightarrow{NH' = FH'' = 2a} NF = 2a \quad (2) \end{array} \right.$$

$$\xrightarrow{(1), (2)} \underbrace{MF + NF}_{MN} = 2a + 2a = 4a \Rightarrow MN = 4a$$

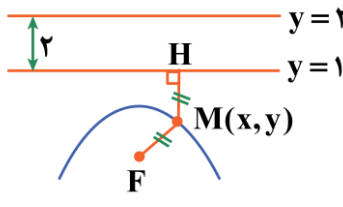
۲۲- معادله مکان هندسی نقاطی از صفحه که فاصله آنها از خط $y=3$ دو واحد بیشتر از فاصله آنها تا نقطه $F(2, -1)$ است، کدام است؟

(۱) $(x-2)^2 = 4y$ (۲) $(x-2)^2 = -4y$ (۳) $(y-2)^2 = 4x$ (۴) $(x-2)^2 = -4x$

پاسخ: گزینه ۲

(متوسط - مفهومی - استاندارد) - هندسه ۳ صفحه‌های ۵۰ تا ۵۲ - ۱۴۰۲

مطابق شکل، مکان هندسی نقاطی که فاصله آنها از خط $y=3$ دو واحد بیشتر از فاصله آنها از نقطه F است، معادل با مکان هندسی نقاطی است که فاصله آنها از خط $y=1$ و نقطه F باهم برابر است:



$$M(x, y) \Rightarrow MF = MH \Rightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2} = |y-1|$$

$$\Rightarrow (x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 2y + 1) = y^2 - 2y + 1$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 = -4y \Rightarrow (x-2)^2 = -4y$$



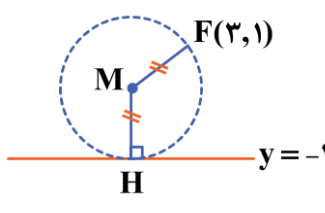
۲۳- معادله مکان هندسی مرکز دایره‌های گذرا از $(3, 1)$ و مماس بر خط $y=-2$ به صورت $x^2 = ax + by + c$ است، مقدار $a+b+c$ کدام است؟

(۱) ۱۲ (۲) ۱۸ (۳) -۶ (۴) ۶

پاسخ: گزینه ۴

(متوسط - مفهومی - استاندارد) - هندسه ۳ صفحه‌های ۵۲ - ۱۴۰۲

می‌دانیم هر نقطه روی سهمی از کانون و خط هادی به یک فاصله است. حال اگر مرکز دایره مذکور را $M(x, y)$ فرض کنیم باید فاصله M از $F(3, 1)$ و $D: y=-2$ باهم برابر باشد:



$$MF = MH \Rightarrow \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2} = |y+2|$$

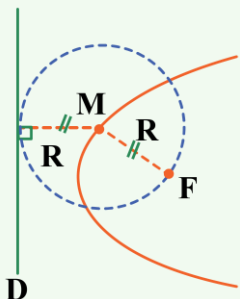
$$\Rightarrow (x^2 - 6x + 9) + (y^2 - 2y + 1) = y^2 + 4y + 4$$

$$x^2 = 6x + 6y - 6 \Rightarrow a + b + c = 6 + 6 + (-6) = 6$$

زیبایی هندسه!

از آن جایی که هر نقطه روی سهمی از کانون و خط هادی به یک فاصله است، بنابراین اگر مرکز دایره‌ای روی سهمی باشد و از کانون سهمی بگذرد حتماً بر خط هادی مماس است.

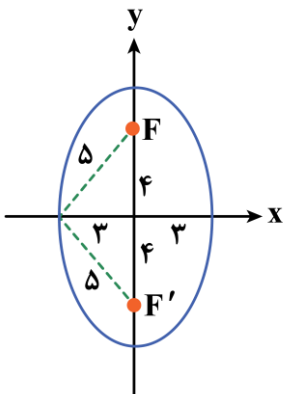
نتیجه: مکان هندسی مرکز دایره‌های گذرا از F و مماس بر خط D یک سهمی است که F کانون و خط D خط هادی آن سهمی است.



- ۲۴- چند نقطه روی سهمی $x = y^2 - 3$ وجود دارد که مجموع فواصل آن از دو نقطه با عرض ۴ و -۴ واقع بر محور y ها برابر ۱۰ باشد؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

پاسخ: گزینه ۳

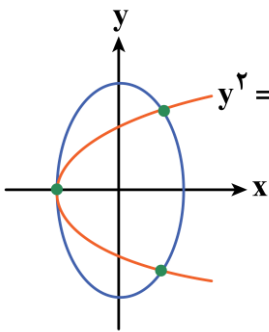
(متوسط - مفهومی/ترکیبی - استاندارد ۶) - هندسه ۳ صفحه‌های ۵۲ تا ۵۴ - ۱۲۰۲



می‌دانیم مکان هندسی نقاطی از صفحه که مجموع فواصل آن‌ها از دو نقطه به عرض ۴ و -۴ واقع بر محور y ها برابر ۱۰ باشد، یک بیضی با فاصله کانونی ۸ و به کانون‌های $F(0, 4)$ و $F'(0, -4)$ است و قطر بزرگ ۱۰ واحد است.

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 5^2 = b^2 + 4^2 \Rightarrow b = 3$$

بنابراین در این بیضی $b = 3$ است. حال اگر سهمی $x = y^2 - 3$ یا به عبارتی $y^2 = x + 3$ را در یک دستگاه مختصات به همراه بیضی رسم کنیم معلوم می‌شود که این سهمی بیضی را در ۳ نقطه قطع می‌کند، یعنی می‌توان گفت ۳ نقطه در صفحه و روی سهمی $y^2 = x + 3$ وجود دارد که مجموع فواصل آن از دو نقطه با عرض ۴ و -۴ واقع بر محور y ها برابر ۱۰ باشد.



توجه!

برای رسم $y^2 = x + 3$ ، ابتدا $y^2 = x$ را رسم می‌کنیم سپس آن‌ها را ۳ واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم. (روش رسم همانند آنچه در حسابان آموختیم انجام می‌شود).



- ۲۵- رأس یک سهمی روی خط $y = 2x$ و در ربع سوم دستگاه مختصات قرار دارد، اگر سهمی از نقطه $A(-3, -2)$ عبور کند و خط هادی آن $x = 2$ باشد، مختصات کانون سهمی کدام است؟

- (۱) $(-6, -5)$ (۲) $(-7, -5)$ (۳) $(-8, -5)$ (۴) $(-5, -5)$

پاسخ: گزینه ۲

(سخت - مفهومی - زمان‌بر ۷) - هندسه ۳ صفحه‌های ۵۲ تا ۵۴ - ۱۲۰۲

چون خط هادی قائم است، پس سهمی افقی است. رأس آن را به صورت $S(\alpha, 2\alpha)$ روی خط $y = 2x$ فرض می‌کنیم، بنابراین معادله خط هادی سهمی به صورت زیر خواهد بود:

$$x = \alpha - a \Rightarrow \alpha - a = 2 \Rightarrow a = \alpha - 2$$

حال معادله کلی سهمی را بر حسب α می‌نویسیم و نقطه $A(-3, -2)$ را در آن می‌گذاریم:

$$(y - \beta)^2 = 4a(x - \alpha) \xrightarrow[a = \alpha - 2]{S(\alpha, 2\alpha)} (y - 2\alpha)^2 = 4(\alpha - 2)(x - \alpha)$$

$$\xrightarrow{A(-3, -2)} (-2 - 2\alpha)^2 = 4(\alpha - 2)(-3 - \alpha)$$

$$\Rightarrow 4(\alpha^2 + 2\alpha + 1) = -4(\alpha^2 + \alpha - 6) \Rightarrow 2\alpha^2 + 3\alpha - 5 = 0$$

مجموع ضرایب صفر $\rightarrow \alpha = 1$ یا $\alpha = -\frac{5}{2}$ $\xrightarrow{\text{رأس در ربع سوم}}$ $\begin{cases} S(-\frac{5}{2}, -5) \\ a = -\frac{5}{2} - 2 = -\frac{9}{2} \end{cases}$

حال مختصات کانون سهمی عبارت است از:

$$F(\alpha + a, 2\alpha) = (-\frac{5}{2} + (-\frac{9}{2}), -5) = (-7, -5)$$

چالشو یاد بگیر!

اگر گفته شود رأس سهمی یا کانون سهمی روی یک خط قرار دارد، بهتر است آن‌ها را به صورت پارامتری روی آن خط در نظر بگیریم و با در نظر گرفتن سایر شرایط مسئله، مقدار پارامتر را به دست آوریم.



۲۶- چه تعداد از عبارات زیر همواره صحیح است؟

- (الف) هر تبدیل طولی، جهت شکل را حفظ می‌کند.
- (ب) هر تبدیل طولی، بی‌نهایت نقطه ثابت دارد.
- (ج) هر تبدیل طولی، اندازه زاویه را حفظ می‌کند.
- (د) هر تبدیل طولی، شیب خطوط را حفظ می‌کند.

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

(آسان - خطبه خط - سریع) - هندسه ۲ صفحه‌های ۳۲ تا ۴۳ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۱

هر تبدیل طولی (ایزومتري) علاوه بر حفظ طول پاره خط دارای دو ویژگی مهم دیگر نیز هست:

۱) در تبدیل ایزومتري (طولی) اندازه هر زاویه ثابت می‌ماند.

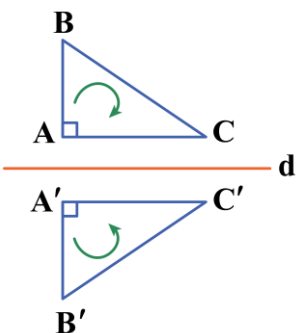
۲) در هر تبدیل ایزومتري (طولی) شکل و تصویرش هم‌نهشت هستند.

با توجه به توضیحات فوق به بررسی عبارات می‌پردازیم:

بررسی موارد:



نادرست است، زیرا تبدیل‌های طولی ممکن است جهت شکل‌ها را تغییر دهند، مثلاً بازتاب نسبت به یک خط جهت شکل را تغییر می‌دهد.



نادرست است، زیرا تبدیل طولی ممکن است حتی هیچ نقطه ثابتی نداشته باشد، مثلاً در انتقال توسط بردار غیر صفر $\vec{v}$ هیچ نقطه‌ای ثابت نمی‌ماند.



طبق توضیحات اولیه این مورد **درست** است. ✓

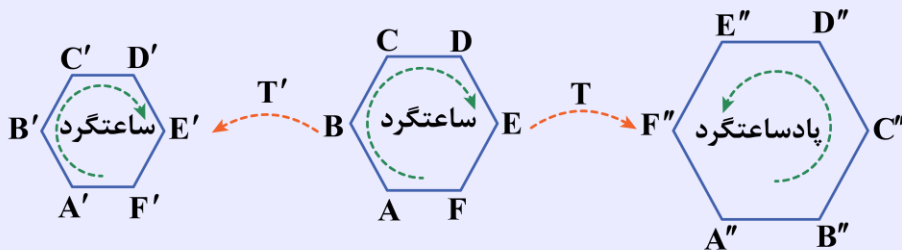


نادرست است، زیرا تبدیل‌های طولی مانند انتقال یا دوران با زاویه $k\pi$ شیب خطوط را حفظ می‌کنند، اما همه تبدیل‌های طولی این گونه نیستند، مثلاً در بازتاب شیب خطوط تغییر می‌کند مگر آن که آن خطوط موازی یا عمود بر محور بازتاب باشند.

تبدیلی که طول پاره‌خط‌های صفحه را حفظ می‌کند (تغییر نمی‌دهد) **ایزومتري** یا **طولپا** نامیده می‌شود، به عبارت دیگر، اگر یک تبدیل ایزومتري روی پاره‌خط AB اثر کند، طول پاره‌خط قبل از تبدیل، با طول این پاره‌خط پس از تبدیل برابر است.



تبدیل ایزومتري اندازه و ابعاد شکل را تغییر نمی‌دهد، به عبارت دیگر در تبدیل ایزومتري شکل و تصویرش همنهشت هستند. اگر تبدیل T جهت اشکال هندسی را ثابت نگه دارد، تبدیل T را یک تبدیل جهت‌پا می‌نامند. (منظور از جهت یک شکل یا یک چندضلعی ساعتگرد یا پادساعتگرد بودن پیمایش رأس‌های متوالی آن است.) در شکل‌های زیر تبدیل T جهت شکل را عوض کرده است اما تبدیل T' جهت شکل را عوض نکرده است.



اگر در تبدیل T شیب همه خط‌ها در اثر تبدیل ثابت بماند، تبدیل T را شیب‌پا می‌نامیم، بنابراین در تبدیل شیب‌پا، هر پاره‌خط باید با تصویرش موازی باشد.

T_3 شیب‌پا است	T_2 شیب‌پا نیست	T_1 شیب‌پا نیست
در تبدیل T_3 شیب تمام خط‌ها ثابت مانده.	در تبدیل T_2 شیب بعضی از خط‌ها ثابت مانده و شیب بعضی از خط‌ها مانند BC عوض شده.	در تبدیل T_1 هیچ‌کدام از پاره‌خط‌ها با تصویرشان موازی نیستند.

یه نمونه باحال ببین!

مربع ABCD با مساحت ۱۲ را به کمک یک تبدیل ایزومتري تصویر کرده‌ایم، محیط شکل حاصل چقدر است؟

$$۸\sqrt{3} \quad (۲)$$

$$۱۲\sqrt{2} \quad (۱)$$

$$۹ \quad (۴)$$

$$۲\sqrt{3} \quad (۳)$$

پاسخ تشریحی:

تصویر مربع به مساحت ۱۲، تحت یک تبدیل ایزومتري مربعی به مساحت ۱۲ خواهد بود، بنابراین اگر ضلع مربع تصویر را a فرض کنیم، خواهیم داشت:

$$a^2 = 12 \Rightarrow a = 2\sqrt{3} \Rightarrow \text{محیط مربع} = 4a = 4(2\sqrt{3}) = 8\sqrt{3}$$

پاسخ: گزینه ۲

نقطه ثابت تبدیل

اگر نقطه‌ای تحت اثر یک تبدیل، روی خودش تصویر شود آن نقطه را **نقطه ثابت تبدیل** می‌نامند، یعنی اگر $T(A) = A$ باشد، آن‌گاه نقطه A ، نقطه ثابت تبدیل T است.

نقطه ثابت تبدیل‌های مشهور

- (۱) در دوران، مرکز دوران نقطه ثابت محسوب می‌شود.
- (۲) در تجانس، مرکز تجانس نقطه ثابت محسوب می‌شود. (در آزمون بعدی به تجانس می‌رسیم. 😊)
- (۳) انتقال در حالت کلی نقطه ثابت تبدیل ندارد.
- (۴) در بازتاب، تمام نقاط واقع بر محور بازتاب، نقطه ثابت هستند، پس بازتاب می‌تواند دارای بی‌شمار نقطه ثابت تبدیل باشد.
- (۵) در تبدیل همانی، تمام نقاط صفحه، نقطه ثابت تبدیل هستند.



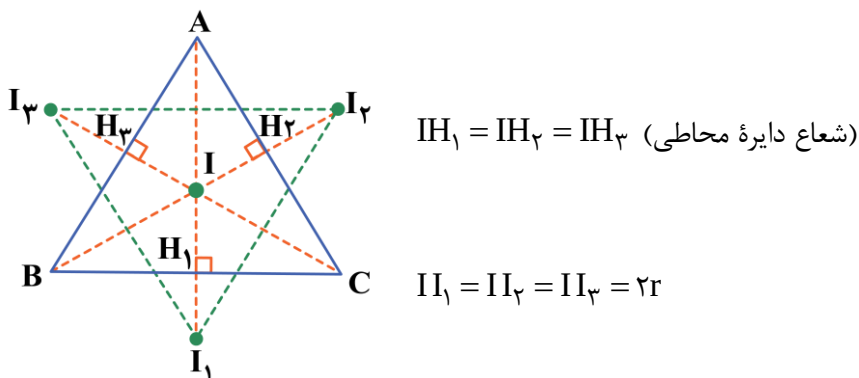
۲۷- نقطه I مرکز دایره محاطی داخلی مثلث ABC است و بازتاب‌های I نسبت به اضلاع مثلث I_1, I_2, I_3 هستند، نقطه I برای مثلث $I_1I_2I_3$ چه نقطه‌ای است؟

- (۱) مرکز دایره محاطی (۲) مرکز دایره محیطی (۳) مرکز ثقل (۴) محل تلاقی ارتفاعات

(متوسط - مفهومی/ترکیبی - استاندارد ۶) - هندسه ۲ صفحه‌های ۳۶ تا ۳۸ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۲

می‌دانیم که مرکز دایره محاطی داخلی مثلث نقطه هم‌رسی نیمسازهای داخلی مثلث است که از سه ضلع مثلث به یک فاصله است.



و چون I_1, I_2, I_3 بازتاب‌های I هستند، بنابراین:

پس I از I_1, I_2, I_3 به یک فاصله است و لذا محل برخورد عمودمنصف‌های اضلاع مثلث $I_1I_2I_3$ و یا مرکز دایره محیطی آن است.

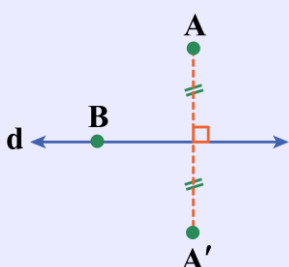
یادآوری!

- (۱) مرکز دایره محاطی از سه ضلع مثلث به یک فاصله است و محل برخورد نیمسازهای داخلی است.
- (۲) مرکز دایره محیطی از سه رأس مثلث به یک فاصله است و محل برخورد عمودمنصف‌هاست.

بازتاب

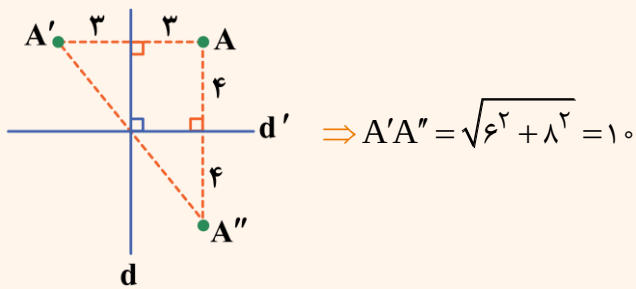
تبدیل T را بازتاب نسبت به خط d می‌نامند، اگر و تنها اگر دو شرط زیر برقرار باشد:

- (۱) تصویر هر نقطه A دلخواه مانند A' غیرواقع بر خط d نقطه‌ای مانند A' است به‌طوری‌که خط d عمودمنصف پاره‌خط AA' است.
- (۲) تصویر هر نقطه مانند B واقع بر خط d ، بر خود نقطه B منطبق است.

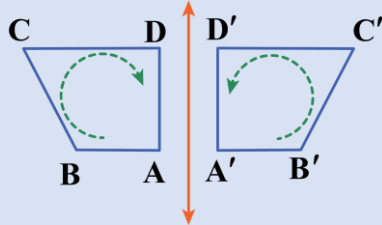


یه نمونه باحال ببین!

دو خط d و d' بر هم عمودند، نقطه A به فاصله ۳ واحد از خط d و به فاصله ۴ واحد از خط d' قرار دارد، اگر بازتاب A نسبت به d را A' و بازتاب A نسبت به d' را A'' بنامیم، فاصله A' از A'' کدام است؟



ویژگی‌های بازتاب نسبت به خط

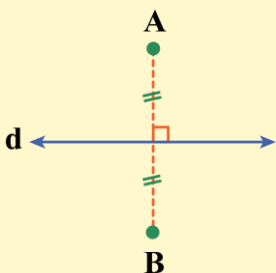


ABCD ساعتگرد و $A'B'C'D'$ پادساعتگرد است.

- (۱) بازتاب نسبت به خط، ایزومتري است یعنی پاره‌خط و تبدیل یافته‌اش، هم‌اندازه‌اند.
- (۲) بازتاب نسبت به خط، شیب‌پا نیست. یعنی شیب خط را لزوماً حفظ نمی‌کند، بازتاب تنها در صورتی شیب خط را حفظ می‌کند که خط موازی با محور بازتاب یا عمود بر آن باشد.
- (۳) بازتاب نسبت به خط، جهت‌پا نیست. یعنی جهت شکل را حفظ نمی‌کند.
- (۴) در بازتاب نسبت به خط، اندازه زاویه‌ها ثابت می‌ماند.
- (۵) در بازتاب نسبت به یک خط، شکل و تصویرش باهم هم‌نهشت هستند.
- (۶) اگر نقطه A' تصویر نقطه A تحت بازتاب نسبت به خط d باشد، نقطه A نیز تصویر نقطه A' تحت بازتاب نسبت به خط d محسوب می‌شود، یعنی اگر S یک تبدیل بازتاب باشد و داشته باشیم $S(A) = A'$ ، آن‌گاه $S(A') = A$ خواهد بود.

چه موقع دو نقطه بازتاب یک‌دیگرند؟

اگر دو نقطه A و B را بدهند و بپرسند تحت بازتاب نسبت به کدام خط این دو نقطه تصویر یک‌دیگرند، کافی است عمودمنصف پاره‌خط AB را پیدا کنیم، بدیهی است که در این حالت دو نقطه A و B در طرفین محور بازتاب واقع‌اند و از محور بازتاب هم فاصله‌اند.

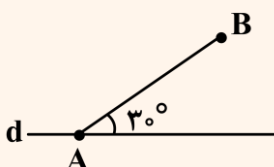


نقاط ثابت بازتاب

در بازتاب نسبت به خط، فقط نقاطی که روی محور بازتاب قرار داشته باشند، روی خودشان تصویر می‌شوند.

یه نمونه باحال ببین!

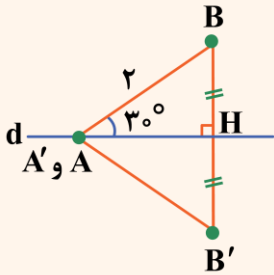
در شکل زیر، طول پاره‌خط AB برابر ۲ و زاویه $\hat{A}$ برابر 30° است. تبدیل T بازتاب نسبت به خط d است. اگر $T(B) = B'$ باشد، محیط مثلث ABB' کدام است؟



- | | |
|-------|-------|
| (۱) ۵ | (۲) ۶ |
| (۳) ۷ | (۴) ۸ |

پاسخ تشریحی:

می‌دانیم برای یافتن بازتاب نقطه B نسبت به خط d باید از B به d عمود کنیم و به همان اندازه ادامه دهیم، پس با توجه به شکل مقابل و قائم‌الزاویه بودن مثلث ABH خواهیم داشت:



$$\sin 30^\circ = \frac{BH}{AB} \Rightarrow \frac{BH}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow BH = 1 \Rightarrow BB' = 2BH = 2$$

از طرفی با توجه به این که بازتاب تبدیلی ایزومتر است، هر پاره‌خط با تبدیل یافته‌اش هم‌اندازه است، بنابراین $A'B' = AB = 2$ ، در نتیجه محیط مثلث ABB' برابر است با:

پاسخ: گزینه ۲



۲۸- شش ضلعی منتظمی به ضلع a داریم. تبدیل هندسی بازتاب نسبت به یک قطر کوچک شش ضلعی با کدام تبدیل زیر هم‌ارز است؟

(۱) دوران حول مرکز شش ضلعی

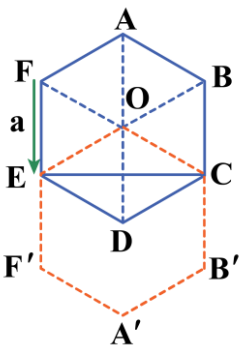
(۲) بازتاب نسبت به یک محور دیگر

(۳) انتقال با برداری به طول a

(۴) انتقال با برداری به طول $\frac{\sqrt{3}}{2}a$

پاسخ: گزینه ۳

(متوسط - مفهومی - استاندارد) - هندسه ۲ صفحه ۳۹ - ۱۱۰۲



بازتاب شش ضلعی منتظم ABCDEF نسبت به قطر کوچک CE، شش ضلعی منتظم $A'B'C'D'E'F'$ است، اما این شش ضلعی را می‌توان انتقال یافته شش ضلعی اصلی تحت بردار $\vec{BC}$ (و یا $\vec{FE}$ یا $\vec{AO}$ و ...) دانست که با این انتقال A به O، B به C، C به B، O به A، D به A' ، E به F' و F به E تبدیل می‌شود. پس تبدیل گفته شده معادل با انتقال با برداری به طول a است و سایر گزینه‌ها نادرست هستند.

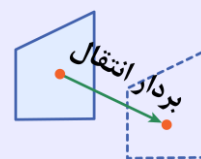
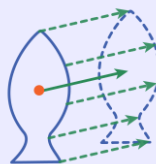
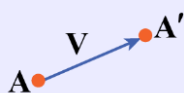
طریقه یافتن بازتاب نسبت به یک خط

برای پیدا کردن تصویر نقطه A تحت بازتاب نسبت به خط d از نقطه A عمودی به d رسم کرده و به اندازه خودش امتداد می‌دهیم تا به A' برسیم. (درواقع d عمود منصف AA' خواهد بود).

انتقال

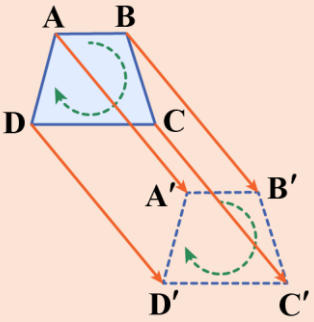
انتقال T تحت بردار $\vec{V}$ تبدیلی از صفحه است که در آن، تصویر هر نقطه A از صفحه P، نقطه‌ای مانند A' از همان صفحه است، به طوری که:

$$\vec{AA'} = \vec{V}$$

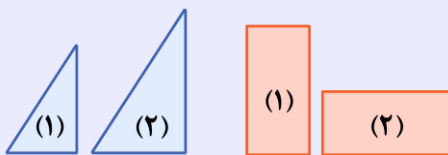


انتقال تبدیلی است که هر نقطه از صفحه را به اندازه بردار $\vec{V}$ جابه‌جا می‌کند.

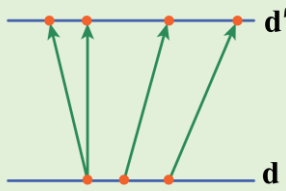
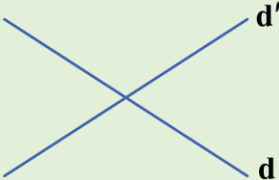
تبدیل انتقال براساس تعریف، دارای پنج ویژگی مهم به شرح زیر است:

ویژگی‌های انتقال	
	۱) انتقال، طولپا (ایزومتری) است.
	۲) انتقال، شیب‌پا است.
	۳) انتقال، جهت‌پا است.
	۴) در انتقال، اندازه زاویه ثابت می‌ماند.
	۵) یک شکل و انتقال یافته‌اش همواره هم‌نهشت هستند.

در شکل‌های مقابل، مستطیل (۱) نمی‌تواند با انتقال روی مستطیل (۲) تصویر شود، زیرا اضلاع نظیر در دو شکل موازی نیستند، همچنین مثلث (۱) نمی‌تواند با انتقال روی مثلث (۲) تصویر شود زیرا دو شکل هم‌نهشت نیستند.



تصویر خط d تحت انتقال با بردار $\vec{V}$ خطی است مانند d' که با خط d موازی است. حال اگر دو خط d و d' داده شده باشند و بخواهیم بدانیم چند بردار وجود دارد که d را به خط d' منتقل کند، با دو حالت عمده مواجه می‌شویم:

دو خط موازی باشند	دو خط متقاطع باشند
بی‌شمار بردار انتقال وجود دارد که خط d را به خط d' تبدیل می‌کند.	بردار انتقالی وجود ندارد که بتواند خط d را به خط d' تبدیل کند.
	
اگر خط d با بردار انتقال موازی باشد، در این صورت تصویر خط تحت بردار انتقال بر خودش منطبق است.	

یه نمونه باحال ببین!

اگر مربع $ABCD$ را با بردار $\vec{AB}$ انتقال دهیم، فاصله رأس D تا تبدیل یافته رأس B چند برابر ضلع مربع است؟

$$\sqrt{2} \quad (۲)$$

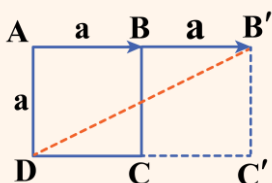
(۱) ۲

$$\sqrt{10} \quad (۴)$$

(۳) $\sqrt{5}$

پاسخ تشریحی

انتقال یک تبدیل ایزومتری است. پس اگر اندازه ضلع مربع $ABCD$ برابر a باشد، تصویرش تحت انتقال نیز مربعی به ضلع a است و B روی نقطه B' تصویر شده است، بنابراین:



$$DB' = \sqrt{AD^2 + AB'^2} = \sqrt{a^2 + (2a)^2} = \sqrt{5}a$$

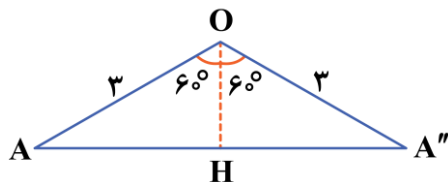
پاسخ: گزینه ۳

- ۲۹- خطوط d_1 و d_2 در نقطه O متقاطع اند و باهم زاویه 60° می سازند، نقطه A به فاصله 3 سانتی متر از O و غیر واقع بر d_1 و d_2 مفروض است. اگر بازتاب A نسبت به d_1 نقطه A' و بازتاب A' نسبت به d_2 نقطه A'' باشد، طول AA'' چند سانتی متر است؟
- (۱) ۶ (۲) $6\sqrt{3}$ (۳) $4\sqrt{3}$ (۴) $3\sqrt{3}$

(متوسط - مفهومی - استاندارد) - هندسه ۲ صفحه ۴۱ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۴

می دانیم ترکیب دو بازتاب متوالی نسبت به محورهای متقاطع که باهم زاویه α می سازند، دورانی است به مرکز O (محل برخورد دو محور) و زاویه 2α ، بنابراین مطابق شکل داریم:

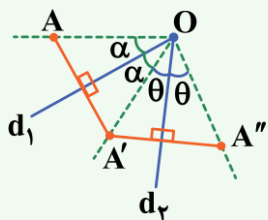


$$OA'' = OA = 3 \Rightarrow AH = HA'' = \sin 60^\circ \times 3 = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 3 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AA'' = 3\sqrt{3}$$

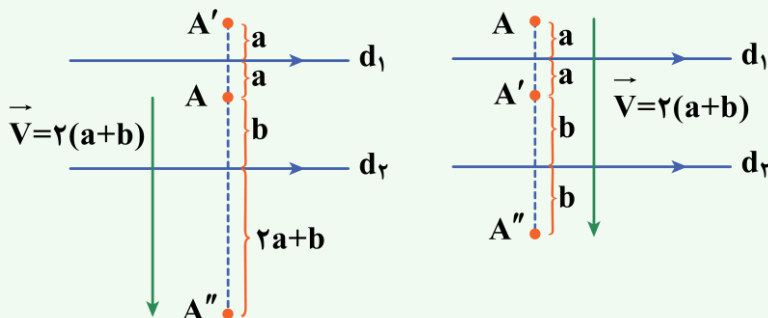
$$\angle AOA'' = 120^\circ$$

ترکیب تبدیل‌ها!

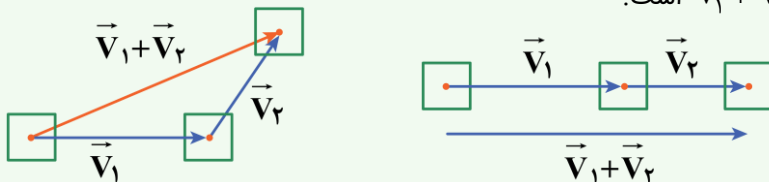
(۱) ترکیب دو بازتاب با محورهای متقاطع یک دوران است که مرکز آن محل برخورد دو خط و زاویه آن دو برابر زاویه بین دو خط است.



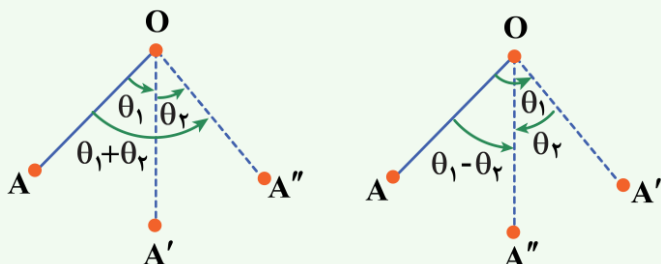
(۲) ترکیب دو بازتاب با محورهای موازی یک انتقال است با برداری عمود بر راستای دو خط که طول این بردار دو برابر فاصله بین دو محور است.



(۳) ترکیب دو انتقال با بردارهای $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ یک انتقال با بردار $\vec{V}_1 + \vec{V}_2$ است.



(۴) ترکیب دو دوران با زاویه‌های θ و θ' یک دوران با زاویه $\theta + \theta'$ یا $\theta - \theta'$ است که جمع شدن یا کم شدن زاویه‌ها بستگی به هم‌جهت یا غیرهم‌جهت بودن دو دوران اولیه دارد.



۳۰- مثلث ABC مفروض است. اگر B' و C' دوران یافته‌های B و C حول A به اندازه 90° در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت باشند و $B'C' = 6\text{cm}$ و محیط مثلث ABC برابر 14cm باشد، اندازه $BB' + CC'$ کدام است؟

$12\sqrt{2}$ (۴)

۱۶ (۳)

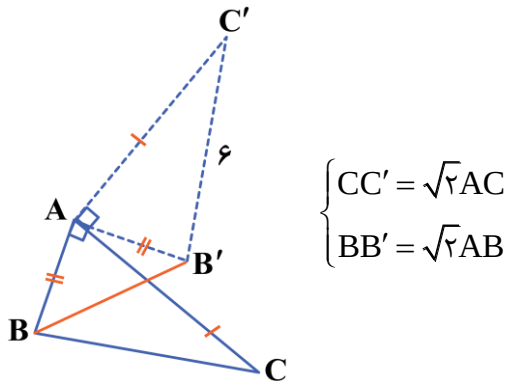
$8\sqrt{2}$ (۲)

۸ (۱)

(سخت - مفهومی - زمان‌بر) - هندسه ۲ صفحه‌های ۴۰ و ۴۱ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۲

با توجه به طولپایی دوران واضح است که $AB = AB'$ و $\hat{B}AB' = 90^\circ$ و همچنین $AC = AC'$ و $\hat{C}AC' = 90^\circ$ ، بنابراین مثلث‌های BAB' و CAC' قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین هستند و داریم:



$$\begin{cases} CC' = \sqrt{2}AC \\ BB' = \sqrt{2}AB \end{cases}$$

همچنین $B'C'$ دوران یافته BC است و لذا با BC هم‌اندازه است یعنی $BC = B'C' = 6$ ، حال با توجه به فرض داریم:

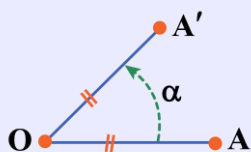
$$AB + AC + BC = 14 \xrightarrow{BC=6} AB + AC = 8$$

$$BB' + CC' = \sqrt{2}(AB + AC) = 8\sqrt{2}$$

حال داریم:

دوران

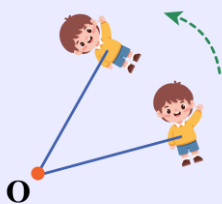
نقطه A' تصویر نقطه A تحت تبدیل دوران به مرکز نقطه ثابت O و زاویه α است، هرگاه:



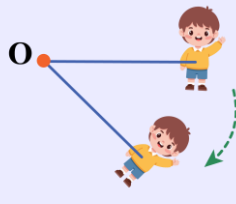
$$OA = OA' \quad \text{و} \quad \hat{AOA'} = \alpha$$

(۱) دوران تبدیلی است که هر نقطه از صفحه را حول نقطه O می‌چرخاند.

(۲) در دوران با زاویه α جهت چرخش می‌تواند ساعتگرد یا پادساعتگرد باشد که معمولاً در مسائل، طراح آن را مشخص می‌کند.



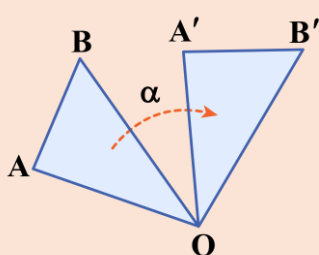
دوران پادساعتگرد



دوران ساعتگرد

تبدیل دوران به مرکز O و زاویه α دارای خواص زیر است:

ویژگی‌های دوران



(۱) دوران ایزومتري است، یعنی طول پاره‌خط را ثابت نگه می‌دارد.

(۲) دوران شیب‌پا نیست، یعنی شیب خط را الزاماً حفظ نمی‌کند مگر آن‌که $\alpha = k\pi$ باشد.

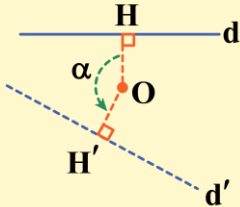
(۳) در دوران، شکل و تصویرش همنهشت و هم‌جهت هستند و اندازه زاویه‌ها نیز حفظ می‌شود.

(۴) مرکز دوران روی عمودمنصف پاره‌خطی قرار دارد که نقطه و تصویرش را به هم وصل می‌کند.

در شکل جدول قبل، مثلث OAB با دوران به مرکز O و زاویه α روی مثلث $OA'B'$ تصویر شده است، پس دو مثلث اضلاع برابر دارند و هم‌نهشت‌اند، همچنین عمودمنصف‌های AA' و BB' از نقطه O می‌گذرند.

چگونه دوران یافته یک خط را بیابیم؟

اگر نقطه O ، خط d و زاویه α معلوم باشد، برای پیدا کردن دوران یافته خط d تحت دوران به مرکز O و زاویه α ، ابتدا از نقطه O عمود OH را بر خط d رسم می‌کنیم، سپس نقطه H را با دوران به مرکز O و زاویه α به نقطه H' تصویر می‌کنیم. در انتها از نقطه H' خطی عمود بر OH' رسم می‌کنیم. این خط، همان دوران یافته خط d است.

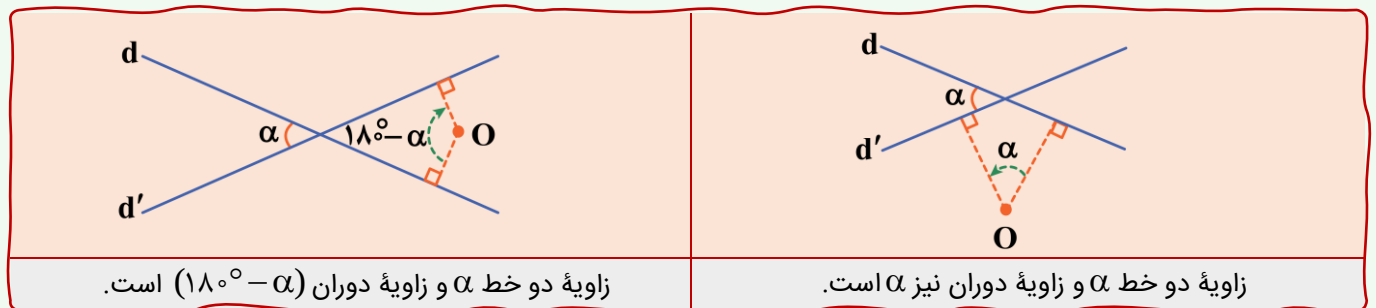


هر دو خط در صفحه می‌توانند با دوران به هم تبدیل شوند

اگر دو خط d و d' را داده باشند و بخواهیم بررسی کنیم خط d با چه دورانی به خط d' تبدیل می‌شود، آن‌گاه:

۱) زاویه دورانی که خط d را به خط d' تبدیل می‌کند برابر با زاویه بین دو خط یا مکمل آن زاویه است.

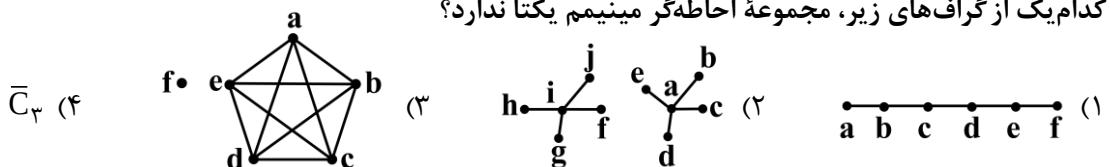
۲) مرکز دوران از دو خط به یک فاصله است و روی نیمساز زاویه بین دو خط قرار دارد.



در دوران 180° خط d به خطی موازی با خودش تبدیل می‌شود و اگر در دوران 180° مرکز دوران بر خط منطبق باشد، خط d روی خودش تصویر می‌شود.



۳۱- کدام یک از گراف‌های زیر، مجموعه احاطه‌گر مینیمم یکتا ندارد؟



(آسان - مفهومی - سریع) - گسسته صفحه‌های ۴۸ تا ۵۱ - ۱۴۰۲

پاسخ: گزینه ۳

بررسی گزینه‌ها:

۱

مجموعه $\{e, b\}$ تنها مجموعه احاطه‌گر مینیمم است.

۲

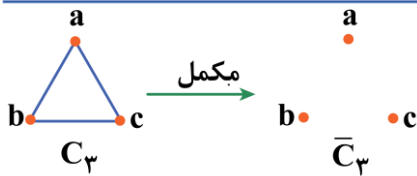
مجموعه $\{a, i\}$ تنها مجموعه احاطه‌گر مینیمم است.

۳

چون گراف شامل یک زیرگراف کامل است پس همه مجموعه‌های زیر یک γ -مجموعه (مجموعه احاطه‌گر مینیمم) هستند:

$\{f, a\}, \{f, b\}, \{f, c\}, \{f, d\}, \{f, e\}$

بنابراین گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

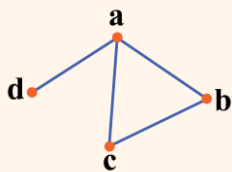


بنابراین تنها مجموعه احاطه گر مینیمم برای گراف تهی $\bar{C}_3$ برابر با $\{a, b, c\}$ است.

مجموعه احاطه گر

زیرمجموعه D از مجموعه رؤس یک گراف را یک مجموعه احاطه گر می‌گوییم اگر همه رؤس گراف یا عضوی از D باشند یا حداقل با یکی از اعضای D مجاور باشند (یا مشترک داشته باشند).

یه نمونه باحال ببین!



$$\gamma_1 = \{a, b, c, d\}$$

$$\gamma_4 = \{a, d\}$$

$$\gamma_2 = \{a, b, c\}$$

$$\gamma_5 = \{d, b\}$$

$$\gamma_3 = \{b, c, d\}$$

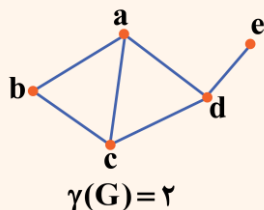
$$\gamma_6 = \{a\}$$

مجموعه احاطه گر مینیمم

یک مجموعه احاطه گر برای گراف G را **احاطه گر مینیمم** می‌گوییم اگر در بین همه مجموعه‌های احاطه گر، کمترین تعداد عضو را داشته باشد، تعداد اعضای مجموعه‌های احاطه گر مینیمم را **عدد احاطه‌گری** می‌نامیم و با $\gamma(G)$ نمایش می‌دهیم، به همین علت به مجموعه‌های احاطه گر مینیمم **γ -مجموعه** هم می‌گویند.

یه نمونه باحال ببین!

برای گراف زیر مجموعه‌های زیر یک γ -مجموعه‌اند:



$$\gamma_1 = \{a, e\}$$

$$\gamma_2 = \{d, b\}$$

$$\gamma_3 = \{c, e\}$$

$$\gamma_4 = \{a, d\}$$

$$\gamma_5 = \{b, e\}$$

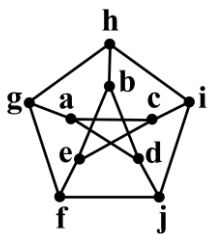
$$\gamma_6 = \{c, d\}$$

یعنی عدد احاطه‌گری این گراف برابر با ۲ است.

توجه کنید که این گراف با هیچ زیرمجموعه تک عضوی‌ای احاطه نمی‌شود.



۳۲- چه تعداد از مجموعه‌های زیر، برای گراف مقابل، مجموعه احاطه گر مینیمال غیرمینیمم هستند؟



۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

الف) $\{a, c, f, j\}$

ب) $\{g, i, b\}$

ج) $\{h, j, a, e\}$

د) $\{g, i, e, d\}$

(متوسط - مفهومی/خط به خط - استاندارد) - گسسته صفحه ۴۸ - ۱۲۰۲

پاسخ: گزینه ۲

بررسی موارد:

الف) رؤس b و h در مجموعه داده شده نیستند و با هیچ یک از رؤس داخل مجموعه هم‌مجاور نیستند یعنی رؤس b و h احاطه نمی‌شوند و

در نتیجه این مجموعه، احاطه گر نیست.

پ) این مجموعه یک مجموعه احاطه گر مینیمم (و البته مینیمال) است.

ج این مجموعه یک مجموعه احاطه گر مینیمال است و مینیمم نیست زیرا عدد احاطه گری این گراف برابر با ۳ است. (مجموعه «ب» را ببینید.)

د این مجموعه یک مجموعه احاطه گر مینیمال است، چون عدد احاطه گری برابر با ۳ است پس مینیمم نیست. بنابراین ۲ مجموعه «ج» و «د» مجموعه احاطه گر مینیمال اند که مینیمم نیستند.

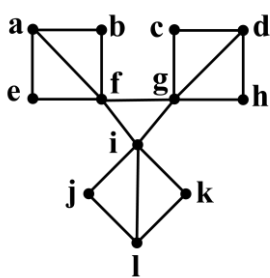
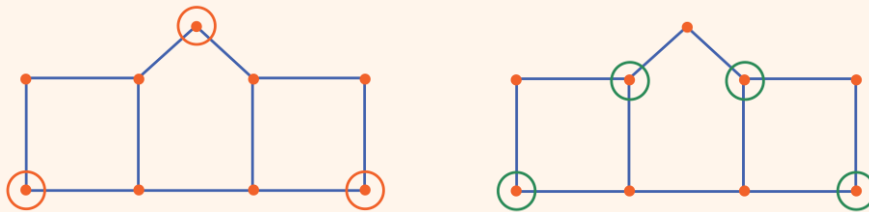
مجموعه احاطه گر مینیمال

در بین مجموعه های احاطه گر یک گراف، مجموعه یا مجموعه هایی که با حذف عضوی از آن، دیگر احاطه گر نباشند را مجموعه احاطه گر مینیمال می گوئیم. واضح است که همه مجموعه های احاطه گر مینیمم، مینیمال هم می باشند. اما عکس آن برقرار نیست.

احاطه گر مینیمال $\longleftrightarrow$ احاطه گر مینیمم

یه نمونه باحال ببین!

در مثال زیر عدد احاطه گری برابر با ۳ است و مجموعه رئوس انتخاب شده با رنگ نارنجی، نشان دهنده تنها مجموعه احاطه گر مینیمم آن است و مجموعه رئوس انتخاب شده با رنگ سبز، یک زیرمجموعه احاطه گر مینیمال برای گراف می باشد. دقت کنید که مجموعه احاطه گر مینیمم، مینیمال هم هست اما مجموعه احاطه گر مینیمال سمت راست مینیمم نیست!



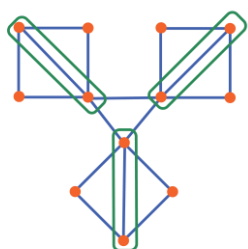
۳۳- گراف روبه رو چند مجموعه احاطه گر مینیمال حداکثر ۴ عضوی دارد؟

- ۸ (۱)
- ۱۲ (۲)
- ۲۰ (۳)
- ۲۳ (۴)

(متوسط - مفهومی - استاندارد) - گسسته صفحه ۵۲ - ۱۲۰۲

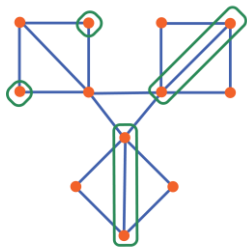
پاسخ: گزینه ۳

برای داشتن مجموعه احاطه گر مینیمم (مینیمال ۳ عضوی) کافی است از هر قطر مربع یکی از رأس ها را انتخاب کنیم:



$$\text{۳ عضوی} \Rightarrow \binom{2}{1} \binom{2}{1} \binom{2}{1} = 8$$

برای داشتن مجموعه احاطه گر مینیمال ۴ عضوی، از دو تا از مربع ها یک سر قطر و از مربع سوم دو رأس غیر قطر را انتخاب می کنیم:



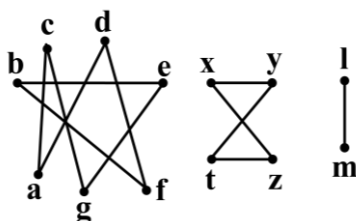
$$\Rightarrow 4 \text{ عضوی} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \times 3 = 12$$

از کدام مربع دو رأس انتخاب کنیم؟

پس در مجموع $20 = 8 + 12$ مجموعه احاطه گر مینیمال ۴ عضوی داریم.



۳۴- گراف روبه رو چند مجموعه احاطه گر مینیمم دارد؟



۸۴ (۱)

۱۶۸ (۲)

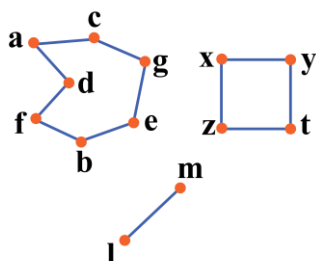
۴۸ (۳)

۹۶ (۴)

(متوسط - مفهومی/خط به خط - استاندارد) - گسسته صفحه های ۴۸ تا ۵۱ - ۱۲۰۲

پاسخ: گزینه ۲

گراف داده شده شامل یک گراف C_7 ، یک گراف C_4 و یک گراف P_2 است:



$C_7 \Rightarrow 14$ تا

$\{a, e, f\}, \{a, e, d\}, \{a, e, b\}$

$\{a, g, f\}, \{a, g, b\}, \{a, c, b\}$

$\{c, g, f\}, \{c, e, f\}, \{c, e, d\}$

$\{c, b, f\}, \{c, b, d\}, \{g, e, d\}$

$\{g, b, d\}, \{g, b, a\}$

$$C_4 \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 6$$

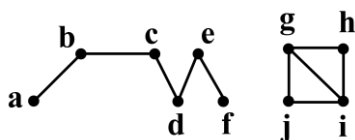
$$P_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2$$

$$14 \times 6 \times 2 = 168$$

بنابراین تعداد کل مجموعه های احاطه گر مینیمم برابر است با:



۳۵- گراف زیر چند مجموعه احاطه گر مینیمال ۴ عضوی دارد؟



۵ (۱)

۱۳ (۲)

۷ (۳)

۱۷ (۴)

(سخت - مفهومی/محاسباتی - استاندارد) - گسسته صفحه ۵۴ - ۱۲۰۲

پاسخ: گزینه ۲

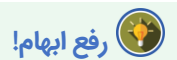
گراف داده شده شامل یک گراف P_6 است:



$\{j, h\}$: احاطه گر مینیمال دو عضوی از قسمت دوم گراف ، $\{b, e\}$: احاطه گر مینیمال دو عضوی از P_6
 $\{g\}$: احاطه گرهای یک عضوی از قسمت دوم گراف ، $\{a, c, e\}$
 $\{a, c, f\}$
 $\{a, d, f\}$
 $\{a, d, e\}$
 $\{b, d, f\}$
 $\{b, c, f\}$

به دو طریق مقابل می توان احاطه گر مینیمال ۴ عضوی ساخت:

$$\Rightarrow 12 + 1 = 13 = (6 \times 2) + (1 \times 1) = \text{تعداد مجموعه های احاطه گر}$$



برای ساختن مجموعه احاطه گر مینیمال ۴ عضوی دو حالت داریم:

حالت اول) یک مجموعه احاطه گر ۳ عضوی از P_6 و یک احاطه گر یک عضوی از بخش دیگر

حالت دوم) یک مجموعه احاطه گر ۲ عضوی از P_6 و یک احاطه گر ۲ عضوی از بخش دیگر



۳۶- در پرتاب یک تاس، احتمال ظاهر شدن عدد یک، نصف احتمال ظاهر شدن اعداد اول و احتمال ظاهر شدن اعداد ۴ و ۶ باهم مساوی هستند و دو برابر احتمال ظاهر شدن عدد ۲ هستند، با پرتاب این تاس احتمال ظاهر شدن عددی بزرگ تر از ۴ کدام است؟

$$\frac{1}{3} \quad (۱) \quad \frac{1}{2} \quad (۲) \quad \frac{2}{5} \quad (۳) \quad \frac{2}{3} \quad (۴)$$

(آسان - مفهومی - استاندارد) - آمار و احتمال صفحه ۴۵ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۳

اگر فرض کنیم احتمال ظاهر شدن اعداد اول یعنی ۲ یا ۳ یا ۵، برابر با X باشد، آن گاه:

$$P(6) = P(4) = 2X, P(1) = \frac{X}{2}$$

از طرفی داریم:

$$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1$$

$$\frac{X}{2} + X + X + 2X + X + 2X = 1 \Rightarrow \frac{15}{2}X = 1 \Rightarrow X = \frac{2}{15}$$

$$\Rightarrow P(5) = \frac{2}{15}, P(6) = \frac{4}{15}$$

بنابراین:

$$P(\{5, 6\}) = P(5) + P(6) = \frac{2}{15} + \frac{4}{15} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

احتمال غیرهم شانس

اگر $S = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ فضای نمونه ای متناهی باشد و S_i ها غیرهم شانس باشند (یعنی مثلاً احتمال وقوع S_1 با احتمال وقوع S_2 فرق داشته باشد) آن گاه S را فضای نمونه ای غیرهم شانس می گویند.

به زبان خودمون یعنی اعضای S شانس برابر نداشته باشند و شانس یکی بیشتر از بقیه باشه!

در فضاهای نمونه ای غیرهم شانس داریم:

$$P(S) = 1 \quad (۱) \text{ یعنی:}$$

$$\sum_{i=1}^n P(S_i) = P(S_1) + P(S_2) + \dots + P(S_n) = 1$$

(به عبارت دیگه مجموع احتمال های فضای نمونه ای همیشه برابر یک)

۲) اگر A پیشامدی از فضای نمونه‌ای S باشد، یعنی $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\} \subseteq S$ ، آن‌گاه:

$$P(A) = P(\{a_1, \dots, a_m\}) = P(a_1) + P(a_2) + \dots + P(a_m)$$

در این صورت، چون $A \subseteq S$ بنابراین همواره: $0 \leq P(A) \leq 1$

 **یه نمونه باحال بین!**

در پرتاب تاس، اگر احتمال رو شدن اعداد زوج دو برابر اعداد فرد باشد، احتمال این‌که در پرتاب این تاس عددی اول بیاید چقدر است؟

پاسخ تشریحی:

$$P(1) = P(3) = P(5) = x, \quad P(2) = P(4) = P(6) = 2x$$

فضای نمونه: $S = \{1, 2, \dots, 6\}$

بنابراین داریم:

$$\sum_{i=1}^6 P(i) = P(1) + P(2) + \dots + P(6) = 1 \Rightarrow x + 2x + x + 2x + x + 2x = 1 \Rightarrow 9x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{9}$$

$$P(\text{فرد}) = \frac{1}{9}, \quad P(\text{زوج}) = \frac{2}{9}$$

$$A = \{2, 3, 5\}$$

و اگر A پیشامد اول بودن عدد ظاهر شده باشد، داریم:

$$P(A) = P(2) + P(3) + P(5) = 2x + x + x = 4x \Rightarrow 4\left(\frac{1}{9}\right) = \frac{4}{9}$$



۳۷- در فصل پاییز در شهر تهران تعداد روزهای آلوده بودن هوا، پنج برابر روزهای با هوای پاک است. احتمال آن‌که فردی مسن در هوای پاک برای خرید از منزل خارج شود، $\frac{7}{10}$ و احتمال آن‌که همین فرد در روزهای با هوای آلوده برای خرید از منزل خارج شود $\frac{4}{10}$ است. می‌دانیم این شخص در یکی از روزهای پاییز از منزل خارج شده است. احتمال آن‌که هوای آن روز پاک بوده باشد کدام است؟

$$\frac{5}{17} \quad (4)$$

$$\frac{9}{17} \quad (3)$$

$$\frac{7}{27} \quad (2)$$

$$\frac{5}{27} \quad (1)$$

(متوسط - مفهومی - استاندارد) - آمار و احتمال صفحه ۵۸ - ۱۱۰۲

 **پاسخ: گزینه ۲**

$$P(\text{هوای پاک}) = \frac{1}{6} \Rightarrow P(A) = \frac{1}{6} \Rightarrow x + 5x = 1 \Rightarrow 6x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{6} \Rightarrow \text{احتمال آلوده بودن هوا} = 5x = \frac{5}{6}$$

اگر B پیشامد خارج شدن از منزل باشد و A' پیشامد آلوده بودن هوا باشد، داریم:

$$P(A) = \frac{1}{6}, \quad P(A') = \frac{5}{6}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A) + P(A')P(B|A')}$$

$$\Rightarrow P(A|B) = \frac{\frac{1}{6} \times \frac{7}{10}}{\frac{1}{6} \times \frac{7}{10} + \frac{5}{6} \times \frac{4}{10}} = \frac{\frac{7}{60}}{\frac{7}{60} + \frac{20}{60}} = \frac{\frac{7}{60}}{\frac{27}{60}} = \frac{7}{27}$$

احتمال شرطی و احتمال کل

اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، $P(A|B)$ یعنی احتمال وقوع A به شرط وقوع B که برابر است با:

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

و آن را **احتمال شرطی** می‌نامند.

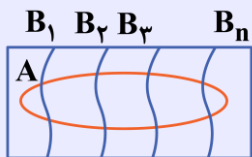
در واقع این‌جا چون B رخ داده است، دیگر فضای نمونه‌ای همه S نیست و به B محدود شده و انگار B فضای نمونه‌ای جدیدی است و می‌خواهیم در این فضای جدید احتمال وقوع پیشامد A را بیابیم. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(B) \times P(A|B)$$

$P(A \cap B) = P(B) \times P(A|B)$ به **قانون ضرب احتمال** معروف است.

احتمال کل و قانون بیز

اگر $B_1, \dots, B_2, B_3, \dots, B_n$ فضای نمونه‌ای S را افراز کنند، یعنی سه شرط زیر را ارضا کنند: (به‌ازای هر $1 \leq i, j \leq n$ ، $i \neq j$)



$$P(B_i \cap B_j) = 0 \quad (1)$$

$$P(B_i) \neq 0 \quad (2)$$

$$P(B_1) + P(B_2) + \dots + P(B_n) = 1 \quad (3)$$

آن‌گاه مطابق شکل داریم:

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \dots + P(A \cap B_n)$$

و طبق قانون ضرب احتمال داریم:

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + \dots + P(B_n)P(A|B_n)$$

به خصوص اگر S را به دو زیرمجموعه B و B' تقسیم کنیم، در این صورت:



$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B') = P(B)P(A|B) + P(B')P(A|B')$$

با توجه به مطالب گفته‌شده نتیجه مهمی می‌توان گرفت که آن را **قانون بیز** می‌نامند که تحت فرمول زیر بیان می‌شود:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|B')P(B')}$$

به نمونه باحال بین!

فرض کنید دو تاس در اختیار داریم. تاس سفید، تاس استاندارد است که احتمال آمدن هر یک از اعداد باهم برابر است و تاس سیاه که غیراستاندارد است و احتمال آمدن هر عدد متناسب با آن عدد است. به تصادف یکی از تاس‌ها را پرتاب می‌کنیم، احتمال آن‌که عددی اول بیاید کدام است؟

پاسخ تشریحی:

اولاً در تاس سیاه و غیراستاندارد داریم:

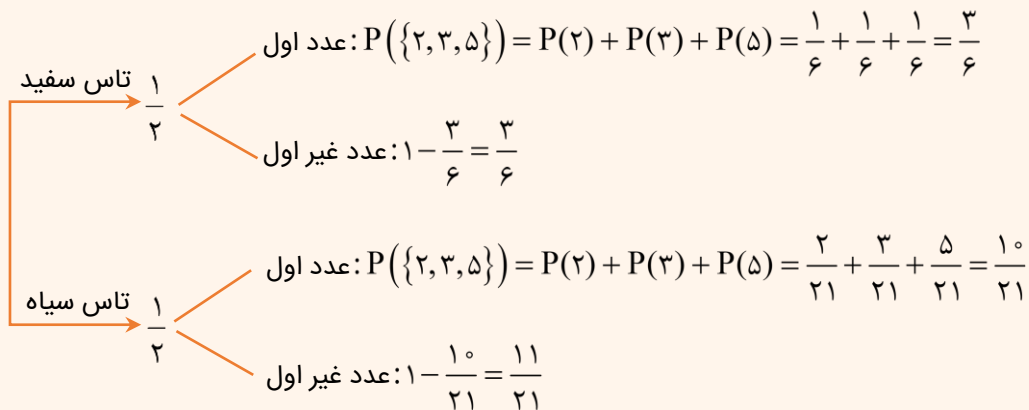
$$P(1) = x, P(2) = 2x, P(3) = 3x, \dots, P(6) = 6x$$

$$\sum_{i=1}^6 P(i) = 1 \Rightarrow x + 2x + 3x + 4x + 5x + 6x = 1 \Rightarrow 21x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{21}$$

$$P(1) = \frac{1}{21}, P(2) = \frac{2}{21}, \dots, P(6) = \frac{6}{21}$$

بنابراین داریم:

طبق نمودار درختی زیر مسئله را بررسی می‌کنیم:



اگر A اول بودن عدد ظاهر شده باشد، و فرض کنیم B_1 پیشامد سفید بودن تاس و B_2 پیشامد سیاه بودن تاس باشد، آن‌گاه B_1 و B_2 فضای نمونه‌ای را افراز می‌کنند و داریم:

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2)$$

$$= \frac{3}{6} \times \frac{1}{2} + \frac{10}{21} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{5}{21} = \frac{21}{84} + \frac{20}{84} = \frac{41}{84}$$

حال اگر مسئله گفته بود «عدد رو شده اول است احتمال آن‌که روی تاس سیاه دیده شده باشد، چقدر است؟» داشتیم:

$$P(B_2|A) = \frac{P(A \cap B_2)}{P(A)} = \frac{P(A|B_2)P(B_2)}{P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2)}$$

$$= \frac{\frac{10}{21} \times \frac{1}{2}}{\frac{3}{6} \times \frac{1}{2} + \frac{10}{21} \times \frac{1}{2}} = \frac{\frac{5}{21}}{\frac{41}{84}} = \frac{5 \times 4}{41 \times 1} = \frac{20}{41}$$

(B_1) تاس سفید (B_2) تاس سیاه

S	$\frac{10}{21}$	$\frac{3}{6}$
	$\frac{11}{21}$	$\frac{3}{6}$



۳۸- دو سکه و دو تاس را باهم پرتاب می‌کنیم. احتمال این که مجموع دو تاس عدد اول ظاهر شود یا سکه‌ها هر دو «رو» بیایند، کدام است؟

$$\frac{7}{15} \quad (۴)$$

$$\frac{5}{21} \quad (۳)$$

$$\frac{9}{16} \quad (۲)$$

$$\frac{5}{18} \quad (۱)$$

(متوسط - مفهومی - زمان‌بَر) - آمار و احتمال صفحه ۶۴ - ۱۱۰۲

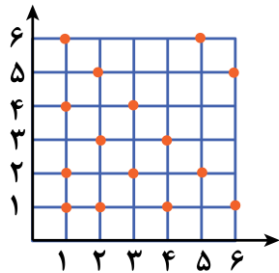
پاسخ: گزینه ۲

اگر A پیشامد رو ظاهر شدن هر دو سکه و B پیشامد اول بودن مجموع دو تاس باشد، آن‌گاه:

$$P(A) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

احتمال ظاهر شدن هر دو «رو» در پرتاب ۲ سکه برابر است با:

برای محاسبه احتمال اول بودن مجموع دو تاس از جدول زیر استفاده می‌کنیم.



$$P(B) = \frac{15}{36}$$

مطابق نمودار مقابل، احتمال اول بودن مجموع دو تاس مساوی $\frac{15}{36}$ است، یعنی:

از آن‌جا که A و B دو پیشامد مستقل اند، داریم:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

$$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{15}{36} - \frac{1}{4} \times \frac{15}{36} = \frac{36 + 60 - 15}{36 \times 4} = \frac{81}{144} = \frac{9}{16}$$

پیشامدهای مستقل

اگر A و B دو پیشامد باشند به‌طوری‌که احتمال رخ دادن یکی روی دیگری تأثیری نداشته باشد این دو پیشامد را **مستقل** می‌گویند. مثلاً احتمال قبولی سارا و تارا در درس ریاضی مستقل از هم است و فقط به تلاش هر کدام از آن‌ها بستگی دارد. در پیشامدهای مستقل A و B داریم:

$$P(A|B) = P(A) \quad (\text{چون } B \text{ تأثیری روی } A \text{ ندارد!})$$

بنابراین:

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(A) \times P(B)$$

یعنی:

$$B, A \text{ مستقل اند} \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$



۳۹- در یک سبد، ۴ سیب قرمز و ۳ سیب زرد و ۱ سیب سبز داریم. به تصادف و متوالی با جای گذاری دو سیب از سبد خارج می کنیم. احتمال آن که حداقل یکی از سیب ها زرد باشد، کدام است؟

$$\frac{39}{64} \quad (۴)$$

$$\frac{37}{64} \quad (۳)$$

$$\frac{29}{64} \quad (۲)$$

$$\frac{19}{64} \quad (۱)$$

(متوسط - مفهومی - استاندارد) - آمار و احتمال صفحه ۶۵ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۴

روش اول

چون انتخاب سیب ها با جای گذاری انجام می شود، پس در هر مرحله تعداد سیب ها تغییر نمی کند و ترتیب انتخاب هم مهم است:

$$P(\text{حداقل یکی زرد}) = P(\text{یک سیب زرد}) + P(\text{دو سیب زرد}) = \left(\frac{3}{8} \times \frac{5}{7} + \frac{5}{8} \times \frac{3}{7} \right) + \frac{3}{8} \times \frac{3}{7} = \frac{39}{64}$$

اولی زرد
دومی غیرزرد

اولی غیرزرد
دومی زرد

اولی زرد
دومی زرد

متمم:

روش دوم

$$P(\text{حداقل یکی زرد}) = 1 - (\text{هیچ کدام زرد نباشند}) = 1 - \left(\frac{5}{8} \times \frac{5}{7} \right) = 1 - \frac{25}{56} = \frac{39}{56}$$

هر دو غیرزرد

پیشامد متمم

اگر A پیشامدی از فضای نمونه ای S باشد، متمم A که آن را با A' نمایش می دهیم، پیشامد رخ ندادن A است، یعنی:

$$A' = S - A$$

همواره داریم:

$$P(A') = 1 - P(A)$$

یه نمونه باحال ببین!

اگر A پیشامد باران آمدن و $P(A) = \frac{3}{10}$ باشد، پیشامد متمم A یعنی A' پیشامد باران نیامدن است و احتمال آن برابر است با:

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$$



۴۰- ظرفی شامل ۴ مهره سیاه و ۳ مهره سفید است. یک مهره به تصادف از ظرف خارج کرده و رنگ آن را مشاهده می‌کنیم و سپس آن را به همراه دو مهره غیر هم‌رنگ دیگر به ظرف برمی‌گردانیم، حال مهره‌ای را از ظرف خارج می‌کنیم، احتمال سفید بودن آن کدام است؟

$$\frac{3}{7} \quad (۴)$$

$$\frac{23}{63} \quad (۳)$$

$$\frac{29}{63} \quad (۲)$$

$$\frac{5}{9} \quad (۱)$$

(سخت - مفهومی - زمان‌بر) - آمار و احتمال صفحه ۵۵ و ۵۶ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۲

روش اول

از فرمول احتمال کل استفاده می‌کنیم:

A: پیشامد سفید بودن مهره دوم

$$B_1: \text{پیشامد سفید بودن مهره اول} \Rightarrow P(B_1) = \frac{3}{7}$$

$$B_2: \text{پیشامد سیاه بودن مهره اول} \Rightarrow P(B_2) = \frac{4}{7}$$

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2)$$

$$P(A \cap B_1)$$

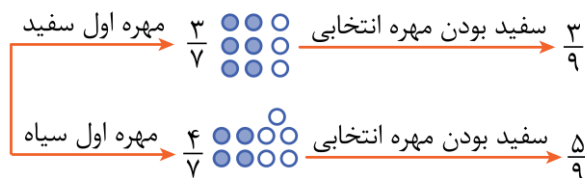
$$P(A \cap B_2)$$

$$P(A) = \left(\frac{3}{7} \times \frac{3}{9}\right) + \left(\frac{4}{7} \times \frac{5}{9}\right) = \frac{9}{63} + \frac{20}{63} = \frac{29}{63}$$

توجه کنید که اگر B_1 رخ دهد یعنی مهره اول سفید باشد، آن مهره را به همراه دو مهره سیاه به ظرف برمی‌گردانیم. در این حالت، ظرف شامل ۶ مهره سیاه و ۳ مهره سفید خواهد بود و احتمال سفید بودن مهره دوم $\frac{3}{9}$ می‌شود و اگر B_2 رخ دهد، یعنی مهره اول سیاه باشد، آن مهره را به همراه دو مهره سفید به ظرف برمی‌گردانیم. در این صورت ظرف شامل ۴ مهره سیاه و ۵ مهره سفید خواهد بود و احتمال سفید بودن مهره دوم $\frac{5}{9}$ می‌شود.

روش دوم

استفاده از نمودار درختی:



$$P(A) = \left(\frac{3}{7} \times \frac{3}{9}\right) + \left(\frac{4}{7} \times \frac{5}{9}\right) = \frac{9}{63} + \frac{20}{63} = \frac{29}{63}$$





برای دیدن پاسخنامه ویدئویی آزمون
QR Code بالا را اسکن یا روی آن کلیک کنید!

فیزیک ۲: جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم (از ابتدای نیروی محرکه الکتریکی و مدارها) - صفحه‌های ۶۱ تا ۸۲
فیزیک ۳: نوسان و موج (از موج و انواع آن تا پایان فصل ۳) صفحه‌های ۶۹ تا ۸۸

بودجه‌بندی
این آزمون

پایه یازدهم: در مجموع ۲ یا ۳ تست از ۳۵ تست کنکور را پوشش داده است.
پایه دوازدهم: در مجموع ۲ تست از ۳۵ تست کنکور را پوشش داده است.

سهم در
کنکور

۴۱- کدام گزینه در مورد امواج مکانیکی نادرست است؟

- (۱) برای امواج مکانیکی، تندی انتشار امواج طولی در یک محیط جامد بیش‌تر از تندی انتشار امواج عرضی در همان محیط است.
- (۲) در مورد امواج طولی، طول موج برابر با فاصله بین دو بیشینه تراکم یا دو بیشینه انبساط متوالی است.
- (۳) صوت یک موج مکانیکی طولی است که تندی آن افزون بر جنس محیط به دما نیز بستگی دارد.
- (۴) در انتشار موج طولی در یک فنر در مکان‌هایی که بیش‌ترین جمع‌شدگی یا بیش‌ترین بازشدگی حلقه‌ها رخ می‌دهد، جابه‌جایی هر جزء فنر از وضعیت تعادل متعادل بیشینه است.

(آسان - حفظی - سریع ۶ - صفحه ۷۷ - ۱۲۰۳)

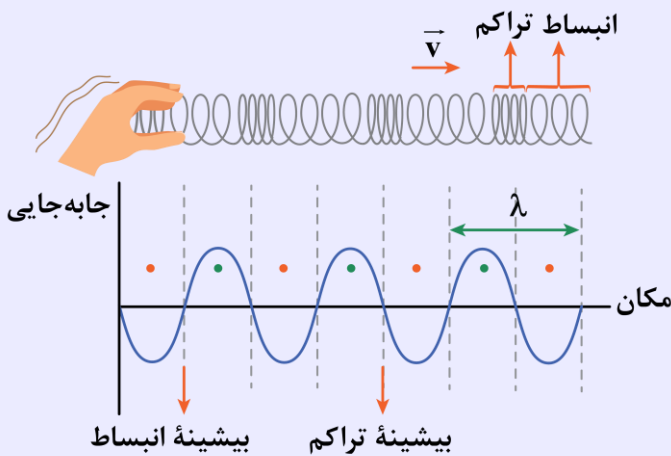
پاسخ: گزینه ۴

گزینه (۴) نادرست است.

در انتشار موج طولی در یک فنر در مکان‌هایی که بیش‌ترین جمع‌شدگی یا بیش‌ترین بازشدگی حلقه‌ها رخ می‌دهد، جابه‌جایی هر جزء فنر از وضعیت تعادل برابر صفر است. (✗)

امواج طولی

۱- راستای نوسان و انتشار موج برهم منطبق‌اند.



۲- در نقاط بیشینه تراکم و بیشینه انبساط جابه‌جایی ذره صفر و در وسط فاصله یک بیشینه تراکم از بیشینه انبساط مجاور، جابه‌جایی ذره بیشینه است.

۳- در نمودار جابه‌جایی - مکان موج طولی بعد از بیشینه انبساط نقطه ماکزیمم و بعد از بیشینه تراکم نقطه مینیمم می‌بینیم.

۴- در یک محیط، تندی انتشار موج طولی از تندی انتشار موج عرضی بیش‌تر است.



۴۲- در ریسمانی به طول ۲۰۰cm که تحت کشش نیروی ۱۰۰N است، تپی عرضی ایجاد می‌کنیم و این تپ طول ریسمان را در مدت ۰/۰۴ ثانیه طی می‌کند. جرم ریسمان چند گرم است؟

۱۶۰ (۴)

۵۰ (۳)

۸۰ (۲)

۲۵ (۱)

ابتدا تندی انتشار تپ عرضی را به دست می آوریم:

$$v = \frac{L}{\Delta t} \xrightarrow{L=2m, \Delta t=0.04s} v = \frac{2}{4} = 0.5 \frac{m}{s}$$

از طریق رابطه $v = \sqrt{\frac{FL}{m}}$ می توانیم جرم طناب را به دست آوریم:

$$v = \sqrt{\frac{FL}{m}} \xrightarrow{\substack{F=100N \\ L=2m}} 0.5 = \sqrt{\frac{100 \times 2}{m}} \Rightarrow 2500 = \frac{200}{m} \Rightarrow m = 0.08 \text{ kg} = 80 \text{ g}$$

چگالی خطی جرم

جرم واحد طول یک تار یا ریسمان یا فنر از رابطه زیر به دست می آید:

$$\mu = \frac{m}{L}$$

L : طول (m)

m : جرم (kg)

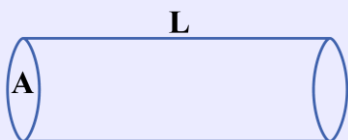
μ : چگالی خطی جرم ($\frac{kg}{m}$)

برای تار یا ریسمان همگن داریم:

$$V = AL = \frac{m}{\rho}$$

$$\mu = \frac{m}{L} = \frac{\rho AL}{L} \Rightarrow \mu = \rho A$$

$$A = \frac{\pi D^2}{4} \rightarrow \mu = \frac{\rho \pi D^2}{4}$$



تندی انتشار امواج عرضی در تار یا فنر کشیده شده

تاری به طول L ، جرم m ، چگالی ρ ، مساحت مقطع A و قطر D را در نظر بگیرید که توسط نیروی F از طرفین مورد کشش قرار می گیرد و در آن موج عرضی ایجاد می شود. تندی انتشار این امواج در تار (فنر) از روابط زیر قابل محاسبه است:

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{FL}{m}} = \sqrt{\frac{F}{\rho A}} = \frac{1}{D} \sqrt{\frac{F}{\pi \rho}}$$



۱- μ در این روابط، چگالی خطی جرم طناب یا جرم واحد طول طناب است که از رابطه $\mu = \frac{m}{L}$ به دست می آید و یکای آن در SI، $\frac{kg}{m}$ است.

۲- اگر تمام کمیت های این روابط در SI عددگذاری شوند، تندی انتشار موج بر حسب متر بر ثانیه به دست می آید.

۳- چون موج عرضی در طول تار با تندی ثابت حرکت می کند، در نتیجه برای پیش روی موج در تار با استفاده از رابطه حرکت یکنواخت می توان نوشت:

$$\Delta x = v \Delta t \xrightarrow{\Delta x=L} L = v \Delta t$$

در این رابطه، جابه جایی موج، برابر طول تار یعنی L است.



- ۴۳- سیمی با چگالی $8 \frac{g}{cm^3}$ و سطح مقطع $50 mm^2$ بین دو نقطه با نیروی $160 N$ کشیده شده است. اگر موج عرضی با بسامد $400 Hz$ در این سیم منتشر شود، طول موج آن چند متر است؟
- (۱) 0.5 (۲) 1 (۳) 2 (۴) 4

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - صفحه ۷۳ - ۱۲۰۳

پاسخ: گزینه ۱

گام اول

تندی انتشار موج عرضی برابر است با:

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{F}{\rho A}}$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{160}{8 \times 10^{-3} \times 50 \times 10^{-6}}} = \sqrt{40000} = 200 \frac{m}{s}$$

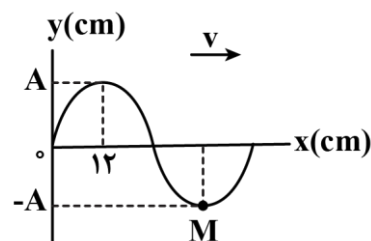
گام آخر

طول موج برابر است با:

$$\lambda = \frac{v}{f} \Rightarrow \lambda = \frac{200}{400} = 0.5 m$$



- ۴۴- شکل زیر، تصویری از موج عرضی در یک ریسمان کشیده شده را در لحظه $t=0$ نشان می دهد. اگر سرعت انتشار موج $4 \frac{m}{s}$ باشد، در بازه زمانی $t_1 = 0.13 s$ تا $t_2 = 0.15 s$ حرکت ذره M چگونه است؟



- (۱) پیوسته تندشونده
(۲) پیوسته کندشونده
(۳) ابتدا تندشونده و سپس کندشونده
(۴) ابتدا کندشونده و سپس تندشونده

(متوسط - مفهومی/محاسباتی - زمان بر) - صفحه ۷۳ - ۱۲۰۳

پاسخ: گزینه ۱

راه نجات سریع

اول طول موج رو از نمودار به دست بیار. بعدش با داشتن λ و v ، دوره تناوب رو حساب کن. در نهایت به کمک نوسان ذره M مسیر حرکتش رو به دست بیار و نوع حرکتش رو توی بازه زمانی خواسته شده مشخص کن.

گام اول

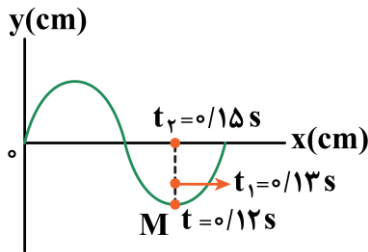
در ابتدا طول موج را به دست می آوریم:

$$\frac{\lambda}{4} = \frac{12}{100} \Rightarrow \lambda = \frac{48}{100} m$$

گام دوم

سپس دوره تناوب موج را از رابطه $\lambda = Tv$ محاسبه می کنیم:

$$\lambda = Tv \Rightarrow \frac{48}{100} = T \times 4 \Rightarrow T = 0.12 s$$



تا لحظه $t = 0.12 \text{ s}$ یک نوسان کامل انجام داده است و به همین نقطه می‌رسد و به سمت بالا شروع به حرکت می‌کند؛ یعنی در $t_1 = 0.13 \text{ s}$ در مکانی بین نقطه $x = -A$ و مرکز نوسان ($x = 0$) است.

همچنین در لحظه $t_2 = 0.15 \text{ s}$ به تعادل می‌رسد؛ زیرا:

$$\frac{15}{100} = T + \frac{T}{4}$$

در این بازه زمانی حرکت ذره M همواره تندشونده است؛ بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

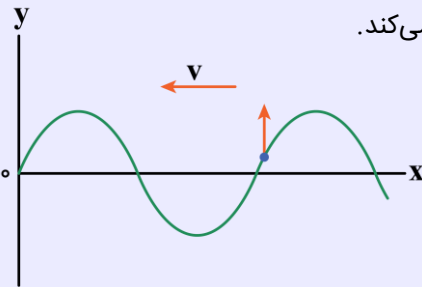
نمودار جابه‌جایی - مکان موج

در نمودار جابه‌جایی - مکان اگر بخواهیم مشخص کنیم که در این لحظه جهت حرکت یک ذره دلخواه از محیط در جهت محور نوسانی (رو به بالا) بوده یا در خلاف جهت این محور (رو به پایین)، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

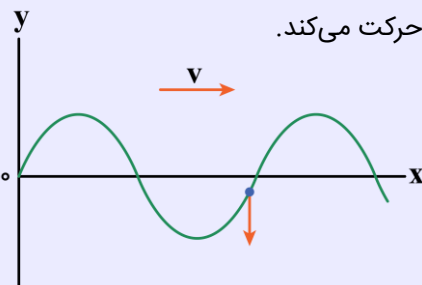
۱- با توجه به جهت انتشار موج، پشت سر هر نقطه را معین می‌کنیم. اگر موج به سمت راست می‌رود، پشت سر هر نقطه سمت چپ آن می‌شود و اگر موج به سمت چپ منتشر می‌شود، پشت سر هر نقطه سمت راست آن می‌شود.

۲- به پشت سر نقطه مورد نظر نگاه می‌کنیم:

الف) اگر اولین چیزی که می‌بینیم قله است ← ذره در آن لحظه در جهت محور (رو به بالا) حرکت می‌کند.



ب) اگر اولین چیزی که می‌بینیم دره است ← ذره در آن لحظه در خلاف جهت محور (رو به پایین) حرکت می‌کند.

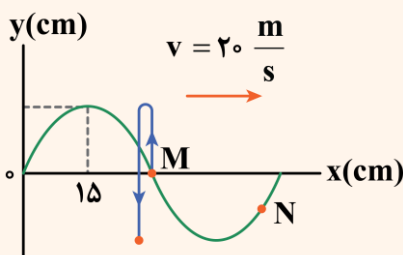


نکته

اگر در یک سؤال از مبحث موج، رفتار نوسانی فقط یک ذره از محیط، مورد بررسی قرار گرفت، آن سؤال در واقع ترکیبی از موج و نوسان است. کافی است به کمک روابط مربوط به موج، مقدار T را به دست آورده و سپس از مطالب مربوط به حرکت نوسانی استفاده کنیم.

یه نمونه باحال

نقش یک موج عرضی که در یک محیط در حال انتشار است در یک لحظه مطابق شکل زیر می‌باشد. ذره N از محیط در هر دقیقه چند نوسان کامل انجام می‌دهد و حداقل چند ثانیه طول می‌کشد تا بردار شتاب ذره M در جهت محور y و اندازه آن بیشینه شود؟



پاسخ تشریحی:

طبق نمودار داده شده می توان نوشت:

$$\frac{\lambda}{4} = 15 \Rightarrow \lambda = 60 \text{ cm} = 0.6 \text{ m}$$

$$\lambda = vT \Rightarrow 0.6 = 20 \cdot T \Rightarrow T = \frac{0.6}{20} = 0.03 \text{ s}$$

$$T = \frac{t}{n} \Rightarrow 0.03 = \frac{60}{n} \Rightarrow n = 2000$$

$$\Delta t = \frac{3T}{4} = \frac{0.09}{4} = \frac{9}{400} \text{ s}$$



الف) هنگامی که هر ذره از محیط از مکان تعادل می گذرد، دارای سرعت و انرژی جنبشی بیشینه است.

ب) هنگامی که هر ذره از محیط در بیشترین فاصله از مکان تعادل قرار می گیرد، نیرو و شتاب وارد بر آن بیشینه است.

پ) هنگامی که هر ذره از محیط در حال نزدیک شدن به مکان تعادل است، حرکت آن تندشونده است و هنگامی که در حال دور شدن از مکان تعادل است، حرکت آن کندشونده است.



۴۵- یک نوسان ساز، موج هایی دوره ای در یک ریسمان کشیده شده ایجاد می کند. اگر بسامد نوسان ساز افزایش یابد، تندی موج، دوره تناوب موج و طول موج به ترتیب چه تغییری می کنند؟

- (۱) ثابت می ماند، کاهش می یابد و افزایش می یابد. (۲) کاهش می یابد، کاهش می یابد و ثابت می ماند.
(۳) ثابت می ماند، کاهش می یابد و کاهش می یابد. (۴) افزایش می یابد، ثابت می ماند و کاهش می یابد.

(آسان - مفهومی - سریع) - صفحه ۷۲ - ۱۲۰۳

پاسخ: گزینه ۳

تندی موج به محیط انتشار موج بستگی دارد، پس تغییر بسامد تأثیری روی تندی انتشار موج ندارد و ثابت می ماند. همچنین طبق رابطه $T = \frac{1}{f}$ با افزایش بسامد، دوره تناوب کاهش می یابد و از رابطه $\lambda = \frac{v}{f}$ ، با ثابت بودن تندی و افزایش بسامد، متوجه کاهش طول موج می شویم.

مشخصه های موج

مربوط به چشمه ← دامنه (A) / دوره تناوب (T) / بسامد (f) / بسامد زاویه ای (ω)

مربوط به محیط ← تندی انتشار موج (v)

مربوط به هر دو ← طول موج (λ)

تندی انتشار موج: مسافتی که جبهه موج در ۱s طی می کند.

طول موج: مسافتی که جبهه موج در مدت T (دوره تناوب) طی می کند.

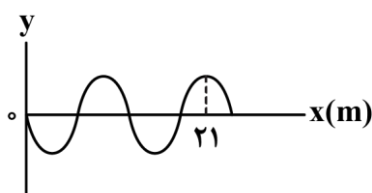
$$v = \frac{\lambda}{T}$$



۴۶- در ریسمانی به چگالی خطی $130 \frac{\text{g}}{\text{m}}$ یک موج سینوسی مطابق شکل در حال انتشار است. اگر ذرات این ریسمان در هر دقیقه

۲۰۰ نوسان کامل انجام دهند، نیروی کشش ریسمان چند نیوتون است؟

- (۱) ۲۲۷ (۲) ۲۰۸ (۳) ۲۰۸۰۰۰ (۴) ۲۲۷۰۰۰



اول دوره تناوب رو حساب کن. بعدش به کمک نمودار λ رو به دست بیار. در نهایت با داشتن $v = \frac{\lambda}{T}$ ، طبق رابطه $v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$ ، نیروی کشش ریسمان رو حساب کن.

گام اول

با استفاده از رابطه $T = \frac{t}{n}$ دوره تناوب را محاسبه می کنیم:

$$T = \frac{60}{200} = \frac{3}{10} \text{ s}$$

گام دوم

با استفاده از نمودار طول موج را محاسبه می کنیم:

$$\lambda + \frac{3\lambda}{4} = 21 \Rightarrow \lambda = 12 \text{ m}$$

گام آخر

تندی انتشار موج و نیروی کشش نخ را محاسبه می کنیم:

$$\lambda = Tv \Rightarrow 12 = \frac{3}{10} v \Rightarrow v = 40 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \Rightarrow 40 = \sqrt{\frac{F}{0.13}} \Rightarrow F = 208 \text{ N}$$



۴۷ - چه تعداد از موارد زیر، در مورد امواج الکترومغناطیسی درست است؟

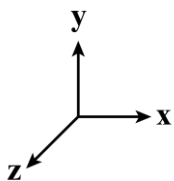
الف - امواج عرضی هستند و میدان های الکتریکی و مغناطیسی این امواج هم بسامد و هم گام می باشند.

ب - تندی انتشار آنها در همه محیط ها یکسان و برابر $\frac{1}{2}(\epsilon_0 \mu_0)^{-1/2}$ می باشد.

ج - برای انتشار به محیط مادی نیاز ندارند.

د - اگر میدان الکتریکی در جهت محور x و میدان مغناطیسی در خلاف جهت محور y باشد، جهت انتشار

موج در جهت محور z است.



۳ (۴)

۴ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

بررسی موارد:

الف

طبق متن کتاب درسی، امواج الکترومغناطیسی از دسته امواج عرضی می باشند و میدان های الکتریکی و مغناطیسی این امواج هم بسامد و هم گام می باشند. (✓)

ب

تندی انتشار همه آنها در خلأ برابر $c = (\mu_0 \epsilon_0)^{-1/2}$ می باشد. (✗)

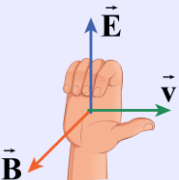
ج (✓)

با استفاده از قاعده دست راست، جهت انتشار موج باید در خلاف جهت محور Z (درون سو) باشد. (✖)

امواج الکترومغناطیسی

اگر یک ذره باردار حرکت هماهنگ ساده انجام دهد، میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی به صورت سینوسی تغییر می‌کنند و عامل ایجاد یکدیگر هستند و انتشار نوسان آن‌ها در محیط منجر به ایجاد موج الکترومغناطیسی می‌شود.

جهت انتشار این امواج از قاعده دست راست پیروی می‌کند. به این صورت که اگر چهار انگشت دست راست، جهت میدان الکتریکی $\vec{E}$ و کف دست، جهت میدان مغناطیسی $\vec{B}$ را نشان دهد، آن‌گاه انگشت شست دست، جهت انتشار موج را نشان می‌دهد. ویژگی‌های این امواج در زیر آورده شده است:



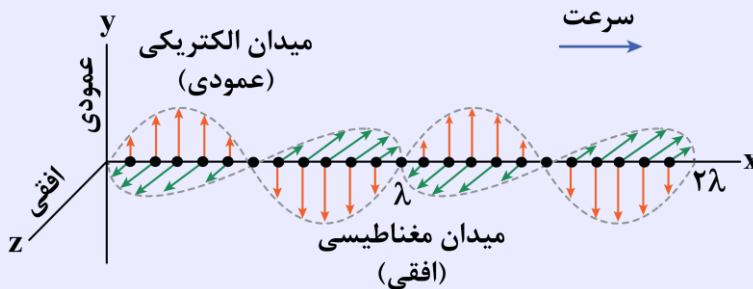
۱- میدان‌های الکتریکی $\vec{E}$ و مغناطیسی $\vec{B}$ برهم عمودند.

۲- راستای نوسان این میدان‌ها همواره بر جهت انتشار موج عمود است؛ بنابراین از نوع موج عرضی می‌باشند.

۳- نوسانات میدان‌ها هم‌بسامد و هم‌گام هستند (باهم صفر و باهم به بیش‌ترین مقدار خود می‌رسند).

۴- برای انتشار (برخلاف امواج مکانیکی) نیاز به محیط مادی ندارند.

۵- تندی انتشار آن‌ها به ویژگی‌های الکتریکی (ϵ : ضریب گذردهی الکتریکی) و ویژگی‌های مغناطیسی (μ : تراوایی مغناطیسی) محیط وابسته است. مثلاً تندی انتشار آن‌ها در خلأ از رابطه $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$ به دست می‌آید.



۴۸- شکل زیر طیف موج‌های الکترومغناطیسی را بدون مقیاس نشان می‌دهد. کدامیک از گزینه‌های زیر، به ترتیب از راست به چپ عبارت زیر را به درستی تکمیل می‌کند؟

T	S	R	Q	P	پرتوهای x	پرتوهای γ
---	---	---	---	---	-----------	------------------

قسمت P مربوط به امواج است و با حرکت از چپ به راست، افزایش می‌یابد.

(۱) فرابنفش - تندی انتشار در خلأ (۲) فروسرخ - تندی انتشار در خلأ

(۳) فرابنفش - طول موج (۴) فروسرخ - طول موج

(آسان - حفظی/مفهومی - سریع - صفحه ۷۶ - ۱۲۰۳)

پاسخ: گزینه ۳

رادیویی	میکروموج	فروسرخ	مرئی	فرابنفش	پرتوهای x	پرتوهای γ
---------	----------	--------	------	---------	-----------	------------------

طیف کامل شده به صورت مقابل است:

با حرکت به سمت راست طیف، بسامد کاهش، طول موج افزایش و تندی انتشار در خلأ ثابت می‌ماند.

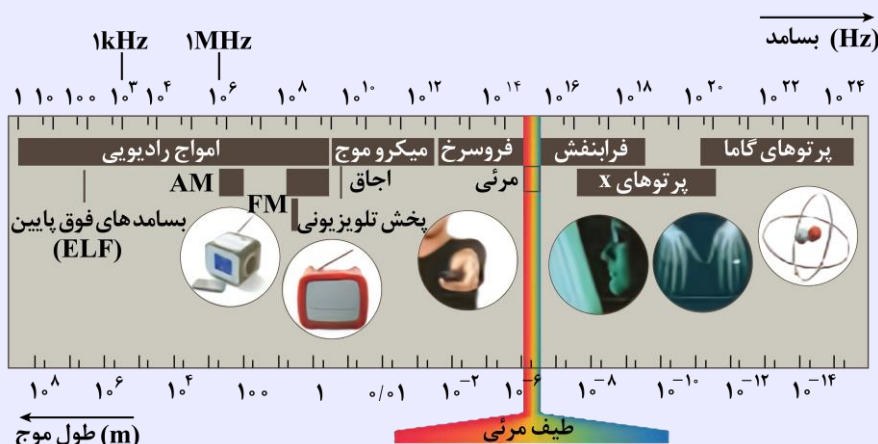
راهنمای مسیрт

این قسمت جزء حفظیات مهمه! چه توی کنکور چه توی نهایی.

طیف امواج الکترومغناطیسی

این طیف شامل امواج رادیویی، میکروموج، فروسرخ، نور مرئی، فرابنفش، پرتوهای X و پرتوهای گاما می‌شود. همه این امواج با تندی نور در خلأ حرکت می‌کنند.

طیف امواج الکترومغناطیسی به شکل زیر است که خوب است این طیف را به ترتیب بسامد و طول موج به خاطر بسپارید.



نکته

۱- گستره تقریبی طول موج نور مرئی ۴۰۰nm (نور بنفش) تا ۷۰۰nm (نور قرمز) است.

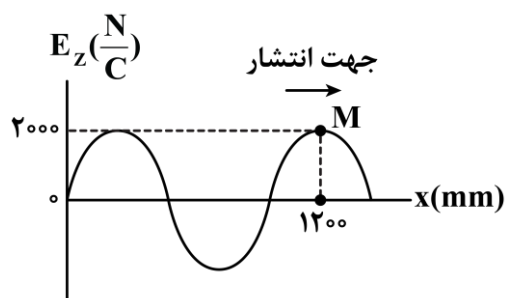
۲- در گستره نور مرئی، نور قرمز بیشترین طول موج و کمترین بسامد و نور بنفش کمترین طول موج و بیشترین بسامد را دارد.

۳- در طیف امواج الکترومغناطیسی، پرتوی گاما بیشترین بسامد و کمترین طول موج و امواج رادیویی کمترین بسامد و بیشترین طول موج را دارند.



۴۹- نمودار میدان الکتریکی یک موج الکترومغناطیسی که در جهت محور x در خلأ منتشر می‌شود، در لحظه $t=0$ مطابق شکل زیر

است. چند نانو ثانیه پس از این لحظه، میدان مغناطیسی در نقطه M در جهت محور y و بیشینه است؟ $(c=3 \times 10^8 \frac{m}{s})$



۱) ۰/۸

۲) ۱/۶

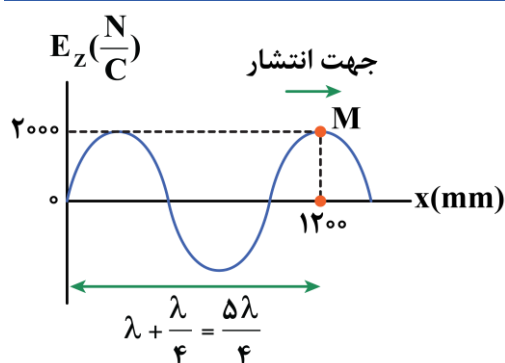
۳) ۲/۴

۴) ۳/۲

(سخت - مفهومی/محاسباتی - زمان ۲۰ - صفحه ۷۵ - ۱۲۰۳)

پاسخ: گزینه ۲

گام اول



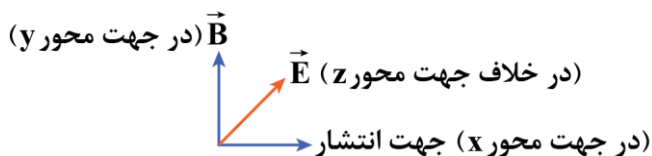
طول موج را با توجه به نمودار داده شده به دست می‌آوریم:

$$\frac{5\lambda}{4} = 1200 \text{ mm} \Rightarrow \lambda = 960 \text{ mm}$$

$$\lambda + \frac{\lambda}{4} = \frac{5\lambda}{4}$$

دوره موج برابر است با:

$$T = \frac{\lambda}{v} \Rightarrow T = \frac{960 \times 10^{-3}}{3 \times 10^8} = 320 \times 10^{-11} \text{ s} = 3.2 \text{ ns}$$



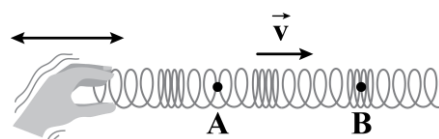
میدان الکتریکی این موج در راستای محور z ، میدان مغناطیسی در راستای محور y و راستای انتشار محور x است. برای آن که در نقطه M میدان مغناطیسی در جهت محور y باشد، با توجه به شکل مقابل و قاعده دست راست، میدان الکتریکی باید در خلاف جهت محور z (درون سو) باشد. برای آن که میدان الکتریکی منفی و بیشینه باشد، باید زمان $\frac{T}{4}$ طی شود.

$$t = \frac{T}{4} = \frac{3.2}{4} = 0.8 \text{ ns}$$

دقت کنید هرگاه میدان الکتریکی بیشینه باشد، میدان مغناطیسی هم بیشینه می‌شود.



۵۰- چشمه موجی با بسامد 5 Hz در یک فنر که تندی انتشار موج در آن $10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ است، نوسان‌هایی طولی ایجاد می‌کند. فاصله نقاط



۲ (۲)
۴ (۴)

A و B از هم چند متر است؟

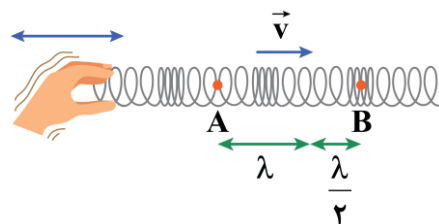
۱/۵ (۱)
۳ (۳)

(آسان - مفهومی/محاسباتی - سریع - صفحه ۷۷ - ۱۲۰۳)

پاسخ: گزینه ۳

طول موج برابر است با:

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{10}{5} = 2 \text{ m}$$



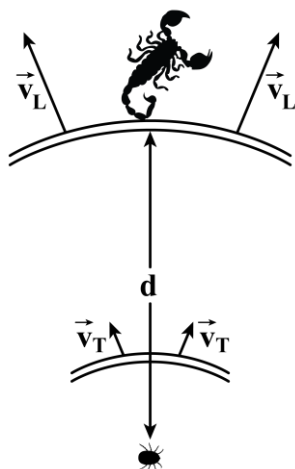
فاصله نقاط A و B برابر $\frac{3}{2}\lambda$ است؛ بنابراین داریم:

$$\text{فاصله A تا B} = \frac{3\lambda}{2} = \frac{3 \times 2}{2} = 3 \text{ m}$$



۵۱- مطابق شکل، طعمه‌ای در ساحل شنی حرکت کرده و عقبی در فاصله d از آن دو موج با تندی‌های $v_T = 50 \frac{m}{s}$ و $v_L = 100 \frac{m}{s}$

احساس می‌کند. اگر اختلاف زمانی رسیدن این امواج به نزدیک‌ترین پای عقب باشد، طعمه در چه فاصله‌ای بر حسب سانتی‌متر از عقب قرار دارد؟



(۱) ۸۰

(۲) ۳۰

(۳) ۴۰

(۴) ۲۰

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) (صفحه ۷۷ - ۱۲۰۳)

پاسخ: گزینه ۱

مدت زمان رسیدن موج L به عقب را t_1 و برای موج T ، t_2 در نظر می‌گیریم، در نتیجه داریم:

$$\Delta x = v \Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta x}{v} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{d}{v_L} \\ t_2 = \frac{d}{v_T} \end{cases} \Rightarrow t_2 - t_1 = \frac{d}{v_T} - \frac{d}{v_L} = d \left(\frac{v_L - v_T}{v_L v_T} \right)$$

$$\Delta t = d \left(\frac{v_L - v_T}{v_L v_T} \right) \Rightarrow d = \left(\frac{50 \times 100}{100 - 50} \right) \times 10^{-3} = \frac{1}{10} m = 10 cm$$

امواج S و P در زمین‌لرزه

وقتی زمین‌لرزه‌ای رخ می‌دهد، دو نوع موج در مرکز آن تولید شده و با تندی ثابت به اطراف منتشر می‌شوند. نوع اول، امواج عرضی است که آن را با امواج ثانویه S نشان می‌دهند و نوع دوم امواج طولی است که آن را با امواج اولیه P نمایش می‌دهند. تندی امواج عرضی (S) همواره کمتر از تندی امواج طولی (P) است، در نتیجه امواج طولی (P) همواره زودتر به مقصد می‌رسند. اگر فرض کنیم نقطه‌ای در فاصله Δx از مرکز زمین‌لرزه باشد، امواج P در مدت t_P و امواج S ، در مدت t_S این فاصله را طی می‌کنند، چون همواره $t_S > t_P$ است، پس اختلاف زمانی رسیدن دو موج به مقصد برابر خواهد بود با:

$$\Delta t = t_S - t_P$$

از طرفی چون این امواج با تندی ثابت حرکت می‌کنند، در نتیجه می‌توان نوشت:

$$t_S = \frac{\Delta x}{v_S}, \quad t_P = \frac{\Delta x}{v_P}, \quad \Delta t = t_S - t_P \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta x}{v_S} - \frac{\Delta x}{v_P} \Rightarrow \Delta x = \frac{v_P v_S}{v_P - v_S} \cdot \Delta t$$

این رابطه فقط برای امواج زلزله برقرار نیست. هرگاه دو موج با تندی‌های مختلف، فاصله یکسانی را طی کنند، می‌توانیم به همین ترتیب سؤال را حل کنیم. در کتاب درسی شما این مسئله به سه حالت بیان شده است.

۱- امواج زلزله: امواج اولیه و ثانویه با تندی‌های مختلف فاصله بین کانون زلزله تا دستگاه لرزه‌نگار را طی می‌کنند.

۲- امواج صوتی درون یک لوله: امواج صوتی یک بار از طریق دیواره لوله و بار دیگر از طریق هوای درون آن، طول لوله را طی می‌کنند.

۳- امواج دریافتی از طعمه توسط عقب: امواج طولی و عرضی با تندی‌های مختلف فاصله طعمه تا عقب ماسه‌ای را طی می‌کنند.

یه نمونه باحال ۱

یک دستگاه لرزه‌نگاری از یک زمین‌لرزه، دو موج، یکی طولی و دیگری عرضی به فاصله زمانی ۵۰ ثانیه از هم ثبت می‌کند. اگر سرعت انتشار

این دو موج به ترتیب $8 \frac{km}{s}$ و $4 \frac{km}{s}$ باشد، زلزله در چند کیلومتری از محل لرزه‌نگار رخ داده است؟

پاسخ تشریحی:

موج طولی و اولیه: P، موج عرضی و ثانویه: S

$$\Delta x = \frac{v_P v_S}{v_P - v_S} \times \Delta t = \frac{3 \times 4 / 8}{0 / 4} \times 50 = 600 \text{ km}$$

دقت کنید که سرعت‌ها برحسب $\frac{\text{km}}{\text{s}}$ داده شده‌اند و با جایگذاری آن‌ها در رابطه بالا، فاصله برحسب km به دست می‌آید.

پاسخ: گزینه ۴

یه نمونه باحال ۲

یک طعمه که در فاصله ۲۰ سانتی‌متری از یک عقرب ماسه‌ای قرار دارد، بر اثر حرکت خود دو موج طولی و عرضی تولید می‌کند که تندی موج طولی ۴ برابر تندی موج عرضی است. اگر این دو موج با اختلاف زمانی ۳/۷۵ms به پای عقرب برسند، مدت زمانی که طول می‌کشد تا موج طولی از طعمه به عقرب برسد چند میلی‌ثانیه است؟

- (۱) ۱/۲۵ (۲) ۱/۷۵ (۳) ۵ (۴) ۵/۵

پاسخ تشریحی:

$$\Delta x = \frac{4v \times \cancel{3}}{\cancel{3}} \times \frac{1/25}{3/75 \times 10^{-3}} = 0/20 \Rightarrow v = 40 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow \begin{cases} v_T = 40 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ v_L = 160 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{cases}$$

$$t_L = \frac{\Delta x}{v_L} = \frac{0/2}{160} \text{ s} = \frac{200}{160} \text{ ms} = 1/25 \text{ ms}$$

پاسخ: گزینه ۱

یه نمونه باحال ۳

به یک سر لوله توخالی بلندی به طول ۲۴۰ متر ضربه محکمی می‌زنیم. اختلاف زمانی بین دریافت دو صدا در گوش شنونده‌ای که در طرف دیگر این لوله قرار دارد، چند ثانیه است؟ (تندی صوت در هوا و لوله به ترتیب $320 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ و $4800 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ می‌باشد.)

- (۱) ۰/۰۵ (۲) ۰/۷۵ (۳) ۰/۸ (۴) ۰/۷

پاسخ تشریحی:

$$\Delta x = \frac{v_2 v_1}{v_2 - v_1} \Delta t \Rightarrow 240 = \frac{4800 \times 320}{4800 - 320} \times \Delta t \Rightarrow \Delta t = 0/7 \text{ s}$$

پاسخ: گزینه ۴



۵۲- کدام گزینه در مورد امواج صوتی نادرست است؟

- (۱) امواج صوتی ناشی از دیافراژن‌های مختلف که با ضربه‌های متفاوت در یک اتاق منتشر می‌شوند، سرعت انتشار یکسانی دارند.
- (۲) سرعت انتشار صوت معمولاً در جامدها بیش‌تر از مایع‌ها و در گازها است.
- (۳) چون راستای ارتعاش ذرات محیط عمود بر راستای انتشار موج صوتی است، موج صوتی یک موج عرضی است.
- (۴) به‌طور کلی تندی انتشار صوت در زمستان کم‌تر از تابستان است.

بررسی گزینه‌ها:

۱) چون محیط یکسان است، سرعت انتشار امواج صوتی برابر است. (✓)



۲ (✓)

۳ صوت یک موج طولی است. (✗)

۴ با افزایش دما تندی انتشار صوت افزایش می‌یابد. (✓)

صوت 

نوعی موج مکانیکی طولی

- تندی انتشار صوت وابسته به ویژگی‌های محیط است.
- با افزایش دما، تندی انتشار صوت افزایش می‌یابد.
- معمولاً تندی انتشار صوت در جامد بیش‌تر از مایع و در مایع بیش‌تر از گاز است.

$$v_{\text{گاز}} > v_{\text{مایع}} > v_{\text{جامد}}$$



۵۲- تراز شدت صوت در محل پرده گوش شنونده‌ای ۵۶dB است. اگر مساحت هر پرده گوش شنونده ۶۰mm^۲ باشد، انرژی که در

مدت ۱ دقیقه در مجموع به پرده‌های گوش‌های این شنونده می‌رسد، چند نانوذول است؟ $(\log 2 = 0.3, I_0 = 10^{-12} \frac{\mu W}{m^2})$

۲/۸۸ (۴)

۳/۳۶ (۳)

۱/۶۸ (۲)

۱/۴۴ (۱)

(متوسط - محاسباتی - زمان‌بَر ۵ - صفحه ۸۰ - ۱۲۰۳)

پاسخ: گزینه ۴ 

گام اول

شدت صوت را حساب می‌کنیم:

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0} \Rightarrow 56 = 10 \log \frac{I}{10^{-12}} \Rightarrow \log \frac{I}{10^{-12}} = 5.6 = 5 + 0.6 = \log 10^5 + 2 \log 2 \Rightarrow I = 4 \times 10^{-7} \frac{W}{m^2}$$

گام دوم

توان متوسط صوتی که به هر گوش می‌رسد را حساب می‌کنیم:

$$I = \frac{P}{A} \Rightarrow P = 4 \times 10^{-7} \times 60 \times 10^{-6} = 24 \times 10^{-12} W$$

گام آخر

انرژی صوتی که به گوش شنونده می‌رسد را حساب می‌کنیم:

$$P = \frac{E}{t} \Rightarrow E = 24 \times 10^{-12} \times 60 = 1.44 \times 10^{-9} J$$

این انرژی به یک گوش وارد می‌شود و سؤال انرژی وارد بر دو گوش را خواسته که برحسب نانوذول برابر است با:

$$2E = 2 \times 1.44 = 2.88 nJ$$

شدت صوت و تراز شدت صوت 

شدت یک موج صوتی (I) در یک سطح برابر با آهنگ متوسط انرژی‌ای است که توسط موج به واحد سطح، عمود بر راستای انتشار صوت می‌رسد.

$$I = \frac{E}{At} = \frac{P_{av}}{A}$$

یکای شدت صوت در SI، $\frac{W}{m^2}$ است.

مساحت جبهه موج صوتی مساحت کره است:

$$A = 4\pi r^2$$

r: فاصله نقطه موردنظر از چشمه

تراز شدت صوت:

کمیتی است که برای درک انسان از بلندی صوت به صورت رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0} \text{ (dB)}$$

I_0 : شدت صوت مبنا

یکای تراز شدت صوت دسی‌بل (dB) است.

مقایسه شدت و تراز شدت صوت

۱- برای مقایسه تراز شدت دو صوت داریم:

$$\begin{cases} \beta_1 = 10 \log \frac{I_1}{I_0} \\ \beta_2 = 10 \log \frac{I_2}{I_0} \end{cases} \Rightarrow \beta_2 - \beta_1 = 10 \log \frac{I_2}{I_1}$$

۲- شدت یک صوت به بسامد منبع صوت، دامنه صوت و همین‌طور فاصله شنونده از منبع بستگی دارد.

$$I \propto \frac{A^2 f^2}{r^2} \Rightarrow \frac{I_2}{I_1} = \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2 \left(\frac{f_2}{f_1}\right)^2 \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2$$

با کمک رابطه فوق می‌توانیم شدت دو صوت را مقایسه کنیم.



۵۴- دو ناظر A و B در فاصله‌های ۳ و ۹ متری از یک چشمه صوت نقطه‌ای قرار دارند و تراز شدت صوت دریافتی آن‌ها به ترتیب

$\beta_1 = 70$ و $\beta_2 = 50$ است. تراز شدت صوت در فاصله ۲ متری از این چشمه چند دسی‌بل است؟ ($\log 2 = 0.3$, $\log 3 = 0.5$)

۲۴ (۴)

۹ (۳)

۱۸ (۲)

۱۰ (۱)

(سخت - محاسباتی - زمان‌بر) - صفحه ۸۰ - ۱۲۰۳

پاسخ: گزینه ۲

کلم اول

ابتدا ترکیب دو رابطه $\beta_2 - \beta_1 = 10 \log \frac{I_2}{I_1}$ و $\frac{I_2}{I_1} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2$ را برای ناظرهای A و B می‌نویسیم:

$$\beta_A - \beta_B = 10 \log \left(\frac{r_B}{r_A}\right)^2 \Rightarrow 70 - 50 = 10 \log \left(\frac{9}{3}\right)^2 \Rightarrow 20 = 20 \log 3 \Rightarrow \beta = 20 \text{ dB}$$

کلم آخر

حال تراز شدت صوت را در فاصله ۲ متری از چشمه طبق رابطه قبل محاسبه می‌کنیم:

$$\beta_2 - \beta_A = 10 \log \left(\frac{r_A}{r_2}\right)^2 \Rightarrow \beta_2 - 70 = 10 \log \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \beta_2 - 14 = 20(\log 3 - \log 2) \Rightarrow \beta_2 = 18 \text{ dB}$$



۵۵- کدام گزینه در مورد اثر دوپلر درست است؟

(۱) اگر شنونده به چشمه ساکن نزدیک شود، چون طول موج دریافتی کاهش می‌یابد، بسامد بیشتری دریافت می‌کند.

(۲) اگر شنونده به چشمه ساکن نزدیک شود، بسامد دریافتی او افزایش می‌یابد.

(۳) اگر چشمه از شنونده ساکن دور شود، جبهه‌های موج کم‌تری به شنونده می‌رسد که باعث کاهش دوره تناوب دریافتی او می‌شود.

(۴) اگر چشمه از شنونده ساکن دور شود، بسامد دریافتی او افزایش می‌یابد.

بررسی گزینه‌های نادرست:

- ۱ در حالتی که چشمه ساکن است، تجمع جبهه‌های موج تولیدی تغییری نکرده و طول موج دریافتی توسط شنونده ثابت است. (✗)
- ۳ در حالتی که چشمه از شنونده دور شود، شنونده، امواج با طول موج و دوره تناوب بیش‌تری دریافت می‌کند، درحالی‌که بسامد دریافتی او کاهش می‌یابد. (✗)
- ۴ هرگاه چشمه و شنونده به هم نزدیک شوند، بسامد دریافتی افزایش می‌یابد و هرگاه از هم دور شوند، بسامد دریافتی کاهش می‌یابد. (✗)

اثر دوپلر

هنگامی که شنونده (ناظر) و چشمه تولیدکننده صوت نسبت به یکدیگر درحال حرکت باشند، بسامدی که ناظر از موج تولیدشده دریافت می‌کند، متفاوت با بسامدی است که چشمه تولید کرده است، به این پدیده اثر دوپلر می‌گویند.

نکته

اثر دوپلر هم برای امواج صوتی صادق است هم امواج الکترومغناطیسی.

طول موج دریافتی

دو حالت کلی در مورد طول موج دریافتی توسط ناظر وجود دارد:

حالت ۱: اگر چشمه ساکن باشد، طول موج امواج در جلو و عقب چشمه برابر خواهد بود.



حالت ۲: اگر چشمه حرکت کند، فاصله جبهه‌های موج در جلوی چشمه، کمتر از پشت آن خواهد بود، درنتیجه ناظری که در جلوی چشمه قرار دارد، طول موج را کوتاه‌تر و ناظری که در پشت چشمه قرار دارد، طول موج را بلندتر دریافت خواهد کرد.



نکته

حرکت ناظر در تغییرات طول موج دریافتی تأثیری ندارد.

بسامد دریافتی

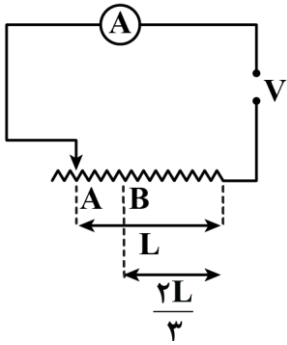
در مورد بسامد دریافتی توسط ناظر، هم حرکت ناظر مهم است، هم حرکت چشمه صوت. در این‌جا ۳ حالت کلی داریم:

- حالت ۱:** اگر فاصله ناظر و چشمه ثابت باشد، بسامد صوت دریافتی توسط ناظر با بسامد تولیدشده توسط چشمه برابر خواهد بود.
- حالت ۲:** اگر فاصله ناظر و چشمه افزایش یابد، بسامد صوت دریافتی توسط ناظر کمتر از بسامد تولیدشده توسط چشمه خواهد بود.
- حالت ۳:** اگر فاصله ناظر و چشمه کاهش یابد، بسامد صوت دریافتی توسط ناظر بیش‌تر از بسامد تولیدشده توسط چشمه خواهد بود.



۵۶- در مدار شکل زیر، لغزنده رئوسا از نقطه A به نقطه B جابه جا می شود. عددی که آمپرسنج آرمانی نشان می دهد، چقدر و چگونه

تغییر می کند؟ (دما ثابت فرض می شود).



(۱) ۵۰ درصد کاهش می یابد.

(۲) ۳۳ درصد کاهش می یابد.

(۳) ۵۰ درصد افزایش می یابد.

(۴) ۳۳ درصد افزایش می یابد.

پاسخ: گزینه ۳

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - صفحه ۶۴ - ۱۱۰۲

کلم اول

با توجه به ثابت بودن ولتاژ، جریان به نسبت وارون با مقاومت تغییر می کند:

$$V = IR \xrightarrow{V=\text{ثابت}} \frac{I_2}{I_1} = \frac{R_1}{R_2}$$

کلم دوم

طول مقاومت $\frac{1}{3}L$ کاهش پیدا کرده است؛ بنابراین طبق رابطه $R = \frac{\rho L}{A}$ داریم:

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{l_1}{l_2} = \frac{L}{\frac{2L}{3}} = \frac{3}{2} = 1.5$$

کلم آخر

درصد تغییر جریان را محاسبه می کنیم:

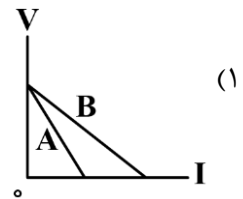
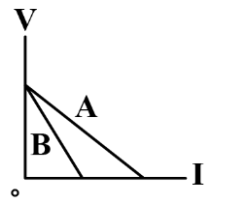
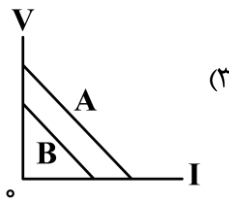
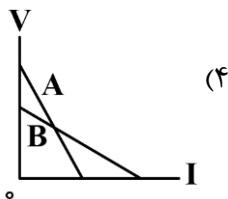
$$\frac{\Delta I}{I_1} \times 100 = \frac{I_2 - I_1}{I_1} \times 100 = \frac{1.5I_1 - I_1}{I_1} \times 100 = 50\%$$

بنابراین عدد آمپرسنج ۵۰ درصد افزایش می یابد.



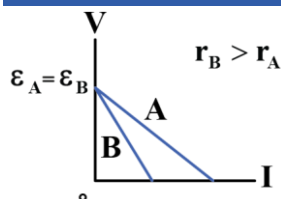
۵۷- دو باتری مشابه در اختیار داریم. اگر باتری A نو و باتری B فرسوده باشد، نمودار ولتاژ - جریان برای این دو باتری کدام شکل

می تواند باشد؟

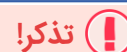


پاسخ: گزینه ۲

(متوسط - مفهومی - سریع) - صفحه ۶۴ - ۱۱۰۲



چون دو باتری مشابه هستند، دارای نیروی محرکه برابر می باشند. از طرفی چون باتری B فرسوده است، درمی یابیم مقاومت درونی (مقدار شیب نمودار $V-I$) آن بیش تر است؛ بنابراین نمودار ولتاژ - جریان آنها به صورت مقابل خواهد بود:



تذکر! دقت شود در نمودار $V-I$ برای یک باتری، عرض از مبدأ برابر نیروی محرکه باتری (ε) و شیب نمودار برابر مقاومت درونی باتری (r) است.

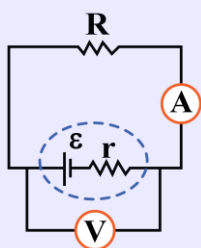
نیروی محرکه چیست؟

مقدار کاری که مولد بر روی یک واحد مثبت بار الکتریکی ($+1C$) انجام می‌دهد، تا آن را از پتانسیل کمتر (قطب منفی) به پتانسیل بیشتر (قطب مثبت) منتقل کند.

$$\varepsilon = \frac{W}{\Delta q}$$

ε : نیروی محرکه (V) W : کار (J) Δq : بار الکتریکی (C)

در مدار تک‌حلقه ساده، ولتاژ دو سر باتری را از رابطه زیر به دست می‌آوریم:



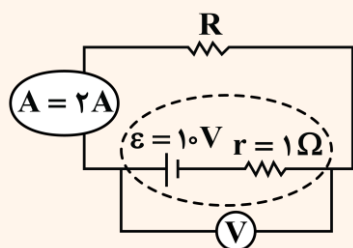
$$V_{\text{باتری}} = \varepsilon - rI$$

ε : نیروی محرکه (V) I : جریان (A) r : مقاومت درونی (Ω) rI : افت پتانسیل (V)

یه نمونه باحال

در مدار شکل زیر، عددی که ولت‌سنج نشان می‌دهد، چند ولت است؟

پاسخ تشریحی:



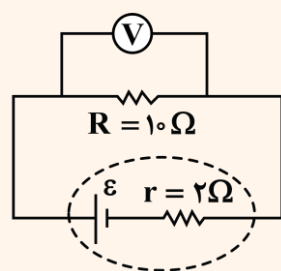
$$V_{\text{باتری}} = \varepsilon - rI$$

$$V_{\text{باتری}} = 10 - (1 \times 2) = 10 - 2 = 8V$$

یه نمونه باحال

در مدار شکل زیر، عددی که ولت‌سنج آرمانی نشان می‌دهد، $20V$ است. نیروی محرکه باتری چند ولت است؟

پاسخ تشریحی:

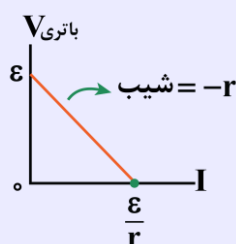


$$V_{\text{باتری}} = V_{\text{مقاومت خارجی}}$$

$$V = RI \rightarrow \frac{V=20V}{R=10\Omega} \rightarrow 20 = 10 \times I \Rightarrow I = 2A$$

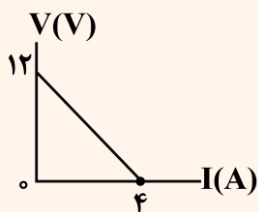
$$V_{\text{باتری}} = \varepsilon - rI \rightarrow \frac{V_{\text{باتری}}=20V}{r=2\Omega, I=2A} \rightarrow 20 = \varepsilon - (2 \times 2) \Rightarrow \varepsilon = 24V$$

نمودار ولتاژ دو سر باتری بر حسب جریان



یه نمونه باحال

نمودار ولتاژ دو سر باتری بر حسب جریان گذرنده از آن در یک مدار تک حلقه ساده مطابق شکل زیر است. نیروی محرکه و مقاومت درونی باتری به ترتیب چقدر است؟

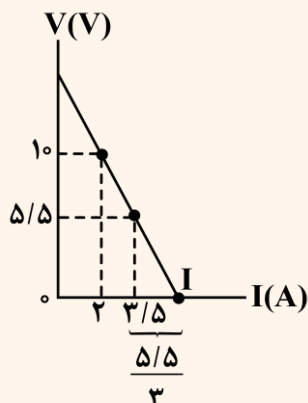


$$\varepsilon = 12V$$

$$-r = \frac{-12}{4} = -3 \Rightarrow r = 3\Omega$$

یه نمونه باحال

نمودار ولتاژ دو سر یک باتری بر حسب جریان گذرنده از آن مطابق شکل زیر است. به ازای چه جریانی، ولتاژ دو سر باتری صفر می شود؟



$$\text{شیب} = -r \Rightarrow \frac{5/5 - 10}{3/5 - 2} = -\frac{4/5}{1/5} \Rightarrow r = 3\Omega$$

$$I = 3/5 + \frac{5/5}{3} = \frac{16}{3} A$$

برای محاسبه جریان گذرنده از باتری در مدار تک حلقه ساده از رابطه زیر استفاده می کنیم:

$$I = \frac{\varepsilon}{R_{eq} + r}$$

ε : نیروی محرکه (V)

I: جریان (A)

r: مقاومت درونی باتری (Ω)

R_{eq} : مقاومت معادل خارجی (Ω)

یه نمونه باحال

در مدار شکل مقابل،

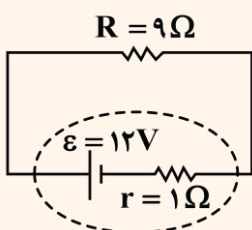
الف: جریان گذرنده از باتری چند آمپر است؟

ب: افت پتانسیل باتری را حساب کنید.

پ: ولتاژ دو سر باتری را حساب کنید.

پاسخ تشریحی:

الف:



$$I = \frac{\varepsilon}{R_{eq} + r} = \frac{12}{9 + 1} = \frac{12}{10} = 1.2 A$$

ب:

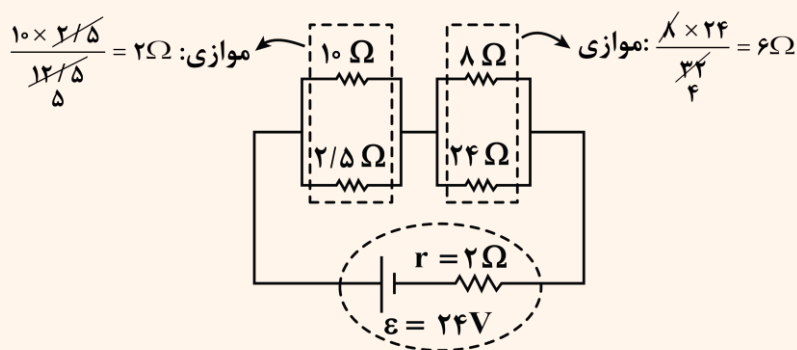
$$\text{افت پتانسیل} = rI = 1 \times 1.2 = 1.2 V$$

پ:

$$V_{\text{باتری}} = \varepsilon - rI \Rightarrow V_{\text{باتری}} = 12 - (1 \times 1.2) = 10.8 V$$

یه نمونه باحال

در مدار شکل زیر، جریان گذرنده از باتری چند آمپر است؟



پاسخ تشریحی:

مرحله ۱: محاسبه مقاومت معادل (R_{eq}):

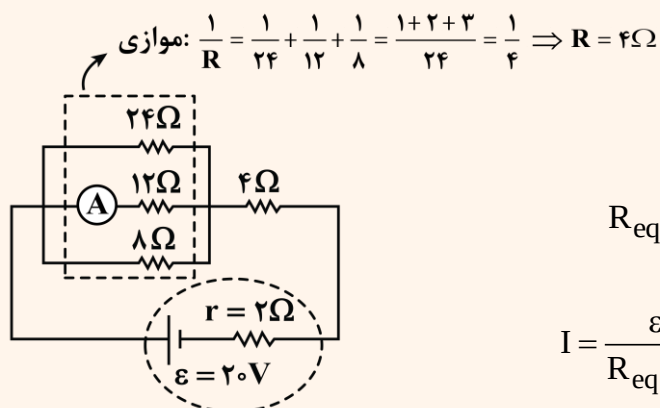
$$R_{eq} = 2 + 6 = 8\Omega$$

مرحله ۲: محاسبه جریان:

$$I = \frac{\varepsilon}{R_{eq} + r} = \frac{24}{8 + 2} = 2/4A$$

یه نمونه باحال

در مدار شکل زیر، عددی که آمپرسنج آرمانی نشان می‌دهد، چند آمپر است؟



پاسخ تشریحی:

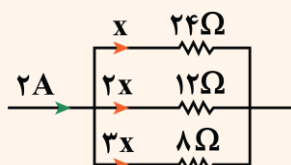
مرحله ۱: محاسبه مقاومت معادل (R_{eq}):

$$R_{eq} = 4 + 4 = 8\Omega$$

مرحله ۲: محاسبه جریان کل:

$$I = \frac{\varepsilon}{R_{eq} + r} = \frac{20}{8 + 2} = 2A$$

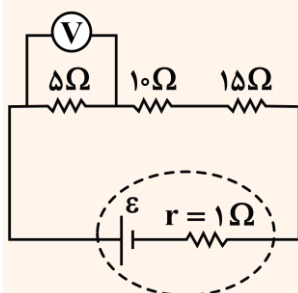
مرحله ۳: محاسبه جریان گذرنده از مقاومت 12Ω :



$$I_{12\Omega} = \frac{2x}{6x} \times 2 = \frac{1}{3} \times 2 = \frac{2}{3}A$$

یه نمونه باحال

در شکل زیر، عددی که ولت‌سنج آرمانی نشان می‌دهد، $15V$ است. نیروی محرکه باتری چند ولت است؟



پاسخ تشریحی:

مرحله ۱: محاسبه جریان:

$$V = RI \Rightarrow I = \frac{V}{R} = \frac{15}{5} = 3A$$

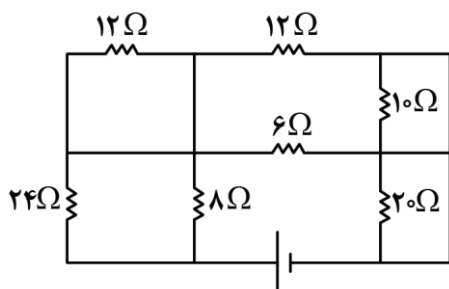
مرحله ۲: محاسبه مقاومت معادل:

$$R_{eq} = 5 + 10 + 15 = 30 \Omega$$

مرحله آخر: محاسبه نیروی محرکه:

$$I = \frac{\varepsilon}{R_{eq} + r} \Rightarrow 3 = \frac{\varepsilon}{30 + 1} \Rightarrow \varepsilon = 93V$$

دقت کنید چون مقاومت‌ها متوالی هستند، جریان گذرنده از هر سه مقاومت با جریان کل برابر است.



۵۸- در شکل روبه‌رو، مقاومت معادل مدار چند اهم است؟

۴ (۱)

۱۰ (۲)

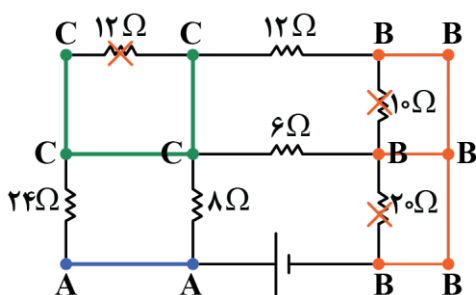
۲۲ (۳)

۳۴ (۴)

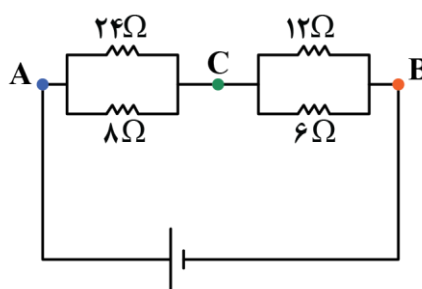
(متوسط - مفهومی/محاسباتی - استاندارد) - صفحه ۷۳ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۲

ابتدا به کمک نام‌گذاری، یک شکل ساده‌تر رسم می‌کنیم:



شکل ساده‌تر



همان‌طور که در شکل فوق مشاهده می‌کنید، سه مقاومت اتصال کوتاه شده و از مدار حذف می‌شوند، چون دو سر هریک از آن‌ها هم‌نام شده است، حال به کمک شکل ساده‌شده به راحتی مقاومت معادل به دست می‌آید:

$$R_1 = \frac{24 \times 8}{24 + 8} = 6 \Omega$$

$$R_2 = \frac{12 \times 6}{12 + 6} = 4 \Omega$$

$$R_{eq} = 6 + 4 = 10 \Omega$$

مدار از چه اجزایی ساخته می‌شود؟

سیم:

مولد (باتری): } آرمانی ← مقاومت درونی ندارد.
واقعی ← مقاومت درونی دارد.

کلید: K باز / K بسته

مقاومت متغیر: R

یا R

مصرف‌کننده (مقاومت): R

آمپرسنج: A

ولت‌سنج: V

ولت‌سنج آرمانی ← وسیله‌ای که اختلاف پتانسیل دو نقطه را نشان می‌دهد و مقاومت آن بسیار زیاد (∞) است. اگر ولت‌سنج، آرمانی نباشد، عددی که نشان می‌دهد، کمتر از مقدار واقعی است.

آمپرسنج آرمانی ← وسیله‌ای که جریان گذرنده از یک عنصر مدار را نشان می‌دهد و مقاومت آن صفر است. اگر آمپرسنج، آرمانی نباشد، عددی که نشان می‌دهد، کمتر از مقدار واقعی است.

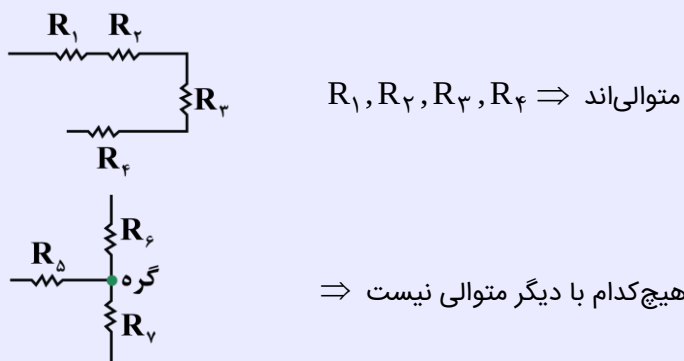
نکته: ولت‌سنج آرمانی را به صورت موازی و آمپرسنج آرمانی را به صورت متوالی با بخش موردنظر می‌بندیم.

به هم بستن مقاومت‌ها

دو حالت مهم به هم بستن مقاومت‌ها به صورت سری (متوالی) و موازی است.

به هم بستن متوالی (سری) مقاومت‌ها:

اگر دو یا چند مقاومت به صورت پشت سر هم بسته شده باشند، به طوری که انشعاب فعالی بین آن‌ها نباشد، به این حالت متوالی می‌گوییم.

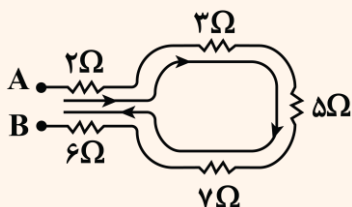


برای به دست آوردن مقاومت معادل دو یا چند مقاومت متوالی آن‌ها را با هم جمع می‌کنیم.

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 + R_4$$

به نمونه باحال

در شکل مقابل، مقاومت معادل دو نقطه A و B چند اهم است؟



پاسخ تشریحی:

$$R_{AB} = 2 + 3 + 5 + 7 + 6 = 23\Omega \quad \text{۵: مقاومت متوالی}$$

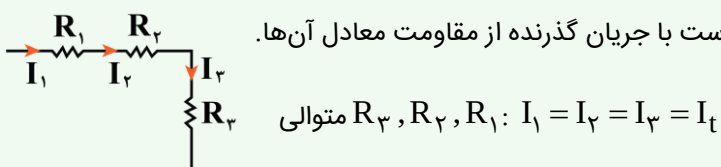
نکته

اگر n مقاومت مشابه R به صورت متوالی به هم وصل باشند، مقاومت معادل برابر است با:

$$R_{eq} = nR$$

نکته

جریان الکتریکی گذرنده از مقاومت‌های متوالی یکسان است و برابر است با جریان گذرنده از مقاومت معادل آن‌ها.

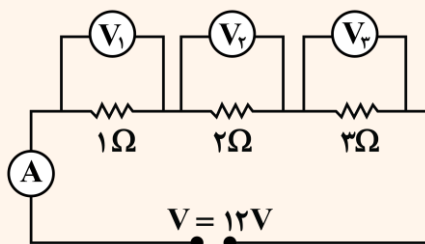


نکته

ولتاژ مقاومت معادل دو یا چند مقاومت متوالی برابر است با مجموع ولتاژ تک‌تک مقاومت‌ها.

$$V_t = V_1 + V_2 + V_3$$

یه نمونه باحال



در مدار شکل زیر،

الف: مقاومت معادل را حساب کنید.

ب: عدد آمپرسنج را حساب کنید.

پ: عدد هر یک از ولت‌سنج‌ها را حساب کنید.

پاسخ تشریحی:

الف:

$$R_3, R_2, R_1: R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 = 1 + 2 + 3 = 6\Omega$$

ب:

$$R_{eq} = \frac{V_t}{I_t} \Rightarrow 6 = \frac{12}{I_t} \Rightarrow I_t = 2A \Rightarrow \text{عدد آمپرسنج } 2A \text{ است.}$$

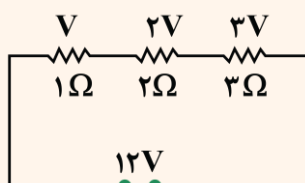
پ: جریان گذرنده از هر یک از مقاومت‌ها همان جریان کل یعنی ۲A است.

برای به دست آوردن ولتاژ هر یک از مقاومت‌ها باید طبق قانون اهم، جریان گذرنده از آن مقاومت را در مقدار مقاومت ضرب کنیم و خواهیم داشت:

$$V = RI \xrightarrow{I_1=I_2=I_3=2A} \begin{cases} V_1 = 1 \times 2 = 2V \\ V_2 = 2 \times 2 = 4V \\ V_3 = 3 \times 2 = 6V \end{cases}$$

یه جور دیگه:

در مقاومت‌های متوالی، ولتاژ دو سر هر مقاومت با مقدار آن مقاومت متناسب است.

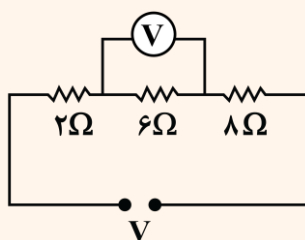


$$R_2, R_1: \frac{V_2}{V_1} = \frac{R_2}{R_1}$$

برای تقسیم ولتاژ در مقاومت‌های متوالی به کمترین مقاومت مجموعه، یک سهم نسبت می‌دهیم و مابقی را با نسبت مستقیم با مقاومت به دست می‌آوریم. در نهایت ولتاژ کل را برابر با مجموع سهم‌ها قرار داده تا مقدار ولتاژ هر مقاومت به دست آید.

یه نمونه باحال

در شکل زیر، اگر عددی که ولت‌سنج آرمانی نشان می‌دهد، ۹V باشد، اختلاف پتانسیل مجموعه مقاومت‌ها چند ولت است؟



پاسخ تشریحی:

مرحله ۱: جریان گذرنده از مقاومت که همان جریان مجموعه نیز است را به دست می‌آوریم:

$$R = \frac{V}{I} \Rightarrow 6 = \frac{9}{I} \Rightarrow I = \frac{9}{6} = 1.5A$$

مرحله ۲: مقاومت معادل مجموعه را حساب می‌کنیم:

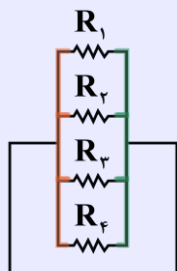
$$R_{eq} = 2 + 6 + 8 = 16\Omega$$

مرحله آخر: ولتاژ کل را حساب می‌کنیم:

$$R_{eq} = \frac{V_t}{I_t} \Rightarrow 16 = \frac{V_t}{1.5} \Rightarrow V_t = 1.5 \times 16 = 24V$$

به هم بستن موازی مقاومت‌ها

اگر دو یا چند مقاومت طوری به هم وصل شده باشند که هر دو دست مقاومت‌ها در دست یکدیگر باشد (یعنی دو سر مشترک) آن مقاومت‌ها موازی‌اند.



موازی‌اند $R_1, R_2, R_3, R_4 \Rightarrow$

برای محاسبه مقاومت معادل چند مقاومت موازی داریم:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}$$

اگر دو مقاومت موازی داشتیم، چطور می‌تونیم راحت‌تر مقاومت معادل رو حساب کنیم؟

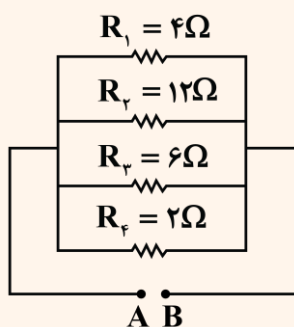
روش کنکوری:

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad \text{یا} \quad R_{eq} = \frac{R_{\text{بزرگ}}}{n+1} \quad n = \frac{R_{\text{بزرگ}}}{R_{\text{کوچیک}}}$$

طبق رابطه $R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ برای حساب کردن مقاومت معادل چند مقاومت موازی به جای رابطه $\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots$ می‌توانیم دوبه‌دو مقاومت‌ها را از این رابطه به دست آوریم.

یه نمونه باحال

مقاومت معادل دو نقطه A و B را حساب کنید.



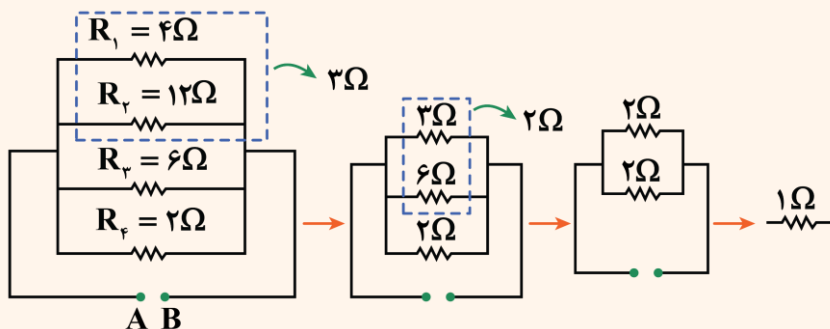
پاسخ تشریحی:

روش اول:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{3+1+2+6}{12} = 1 \Rightarrow R_{eq} = 1\Omega$$

روش دوم:





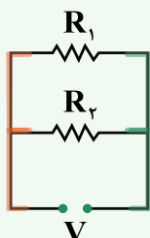
مقاومت معادل n مقاومت موازی مشابه R برابر است با:

$$R_{eq} = \frac{R}{n}$$



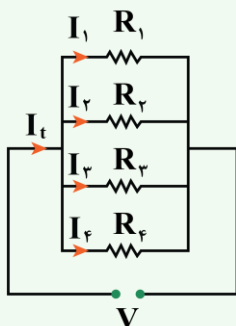
مقاومت معادل چند مقاومت سری از بزرگترین مقاومت مجموعه بزرگتر است ولی مقاومت معادل چند مقاومت موازی از کوچکترین مقاومت مجموعه کوچکتر است.

در مقاومت‌های موازی، ولتاژ دو سر مقاومت‌ها با هم برابر است و ولتاژ با ولتاژ مجموعه است.



$$V_1 = V_2 = V$$

در مقاومت‌های موازی جریان کل برابر است با مجموع جریان تک تک مقاومت‌ها.



$$I_t = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$$

تقسیم جریان در مقاومت‌های موازی چگونه است؟

۱- به بزرگترین مقاومت مجموعه یک سهم جریان نسبت می‌دهیم.

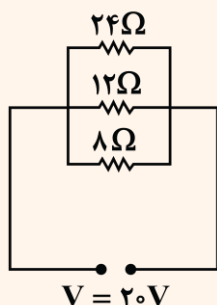
۲- جریان گذرنده از مابقی مقاومت‌ها را با نسبت عکس مقاومت تقسیم می‌کنیم.

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{R_1}{R_2}$$

۳- مجموع سهم‌ها را برابر جریان کل قرار داده و جریان هر مقاومت را حساب می‌کنیم.

یه نمونه باحال

در مدار شکل زیر، جریان گذرنده از هر یک از مقاومت‌ها را حساب کنید.



پاسخ تشریحی:

روش اول:

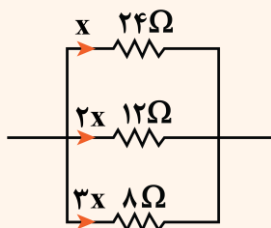
مرحله ۱: محاسبه مقاومت معادل:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{24} + \frac{1}{12} + \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{1}{R_{eq}} = \frac{1+2+3}{24} = \frac{1}{4} \Rightarrow R_{eq} = 4\Omega$$

مرحله ۲: محاسبه جریان کل:

$$R = \frac{V}{I} \Rightarrow I = \frac{V}{R} \Rightarrow I_t = \frac{V}{R_{eq}} = \frac{20}{4} = 5A$$

مرحله ۳: محاسبه سهم هر مقاومت:



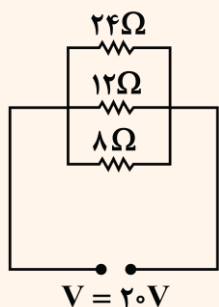
$$I_t = x + 2x + 3x = 6x \Rightarrow 5 = 6x \Rightarrow x = \frac{5}{6} A$$

$$I_{24\Omega} = \frac{5}{6} A, I_{12\Omega} = \frac{5}{3} A, I_{8\Omega} = \frac{5}{2} A$$

مرحله آخر: محاسبه جریان هر مقاومت:

روش دوم:

مرحله ۱: ولتاژ هر مقاومت را به دست می آوریم:

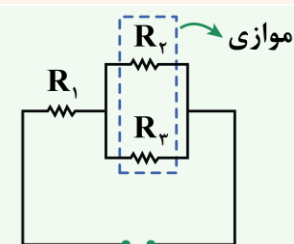


$$V_{24\Omega} = V_{12\Omega} = V_{8\Omega} = V = 20V$$

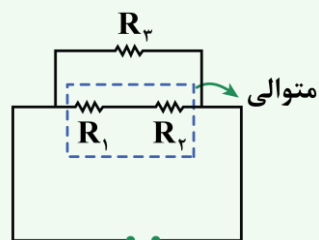
مرحله ۲: با داشتن ولتاژ و مقاومت هرکدام جریان را حساب می کنیم:

$$I = \frac{V}{R} \Rightarrow \begin{cases} I_{24\Omega} = \frac{20}{24} = \frac{5}{6} A \\ I_{12\Omega} = \frac{20}{12} = \frac{5}{3} A \\ I_{8\Omega} = \frac{20}{8} = \frac{5}{2} A \end{cases}$$

حالت های ترکیبی مهم



$$R_{eq} = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$$

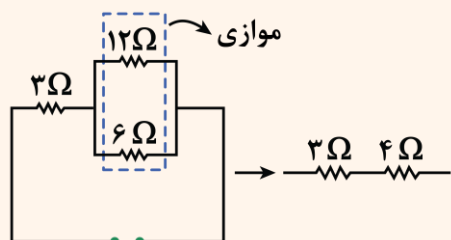


$$R_{eq} = \frac{(R_1 + R_2) R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

یه نمونه باحال

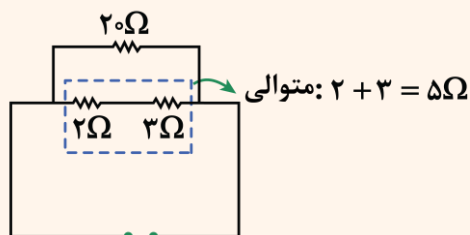
در شکل‌های زیر، مقاومت معادل را به دست آورید.

پاسخ تشریحی:



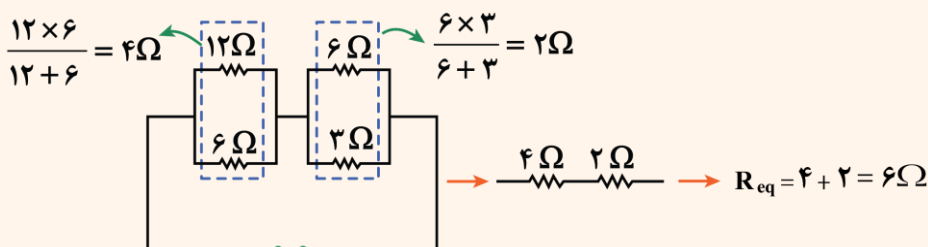
$$\text{موازی: } \frac{12 \times 6}{12 + 6} = \frac{12 \times 6}{18} = 4\Omega$$

$$R_{eq} = 3 + 4 = 7\Omega$$



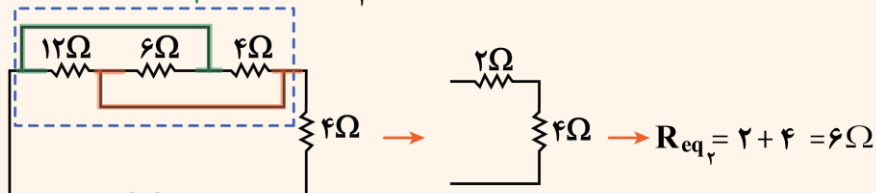
$$\text{متوالی: } 2 + 3 = 5\Omega$$

$$R_{eq} = \frac{5 \times 20}{5 + 20} = \frac{5 \times 20}{25} = 4\Omega$$

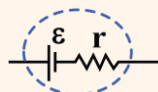


$$\frac{12 \times 6}{12 + 6} = 4\Omega \quad \frac{6 \times 3}{6 + 3} = 2\Omega$$

$$\text{موازی: } \frac{1}{R_{eq1}} = \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{1+2+3}{12} = \frac{1}{2} \Rightarrow R_{eq1} = 2\Omega$$



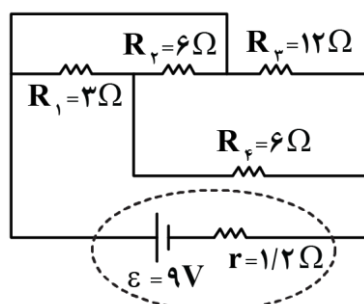
باتری آرمانی ← فقط نیروی محرکه دارد.



باتری واقعی ← نیروی محرکه و مقاومت درونی دارد.

انواع باتری

۵۹- در مدار شکل زیر، اگر جای باتری و مقاومت R_f را عوض کنیم، جریان عبوری از باتری، چند آمپر تغییر می کند؟

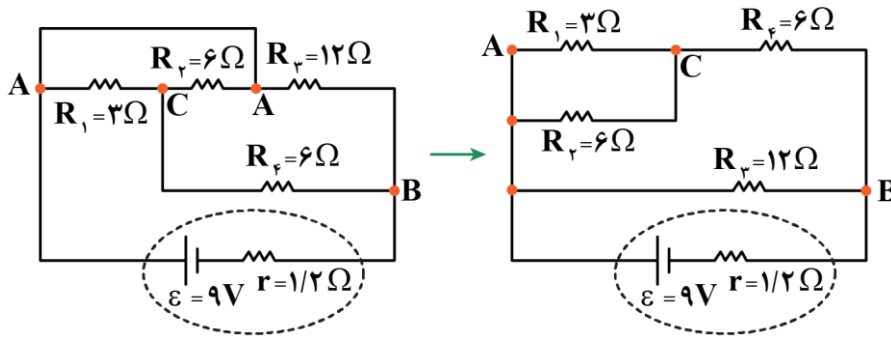


(۱) ۰/۵، کاهش

(۲) ۰/۵، افزایش

(۳) ۰/۲۵، کاهش

(۴) ۰/۲۵، افزایش



ابتدا با نام‌گذاری نقاط هم‌پتانسیل مدار، مدار را به شکل مقابل ساده می‌کنیم:

مقاومت‌های R_1 و R_2 موازی‌اند و مقاومت معادل آن‌ها با مقاومت R_4 متوالی است:

$$R_{1,2} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{3 \times 6}{3 + 6} = 2 \Omega$$

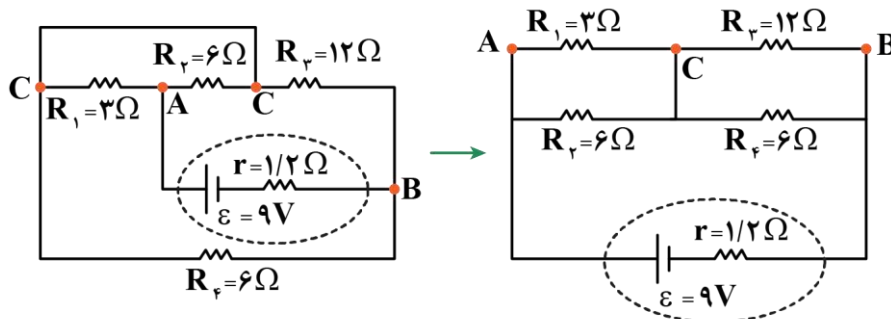
$$R_{1,2,4} = R_{1,2} + R_4 = 2 + 6 = 8 \Omega$$

$$R_{eq} = \frac{R_{1,2,4} \times R_3}{R_{1,2,4} + R_3} = \frac{8 \times 12}{8 + 12} = 4.8 \Omega$$

در نهایت مقاومت $R_{1,2,4}$ با مقاومت R_3 موازی است:

$$I = \frac{\varepsilon}{r + R_{eq}} = \frac{9V, r=1/2\Omega}{R_{eq}=4.8\Omega} \rightarrow I = \frac{9}{1/2 + 4.8} = \frac{9}{5.3} = 1.7 \text{ A}$$

در نتیجه جریان عبوری از باتری برابر است با:



اکنون جای مقاومت R_4 و باتری را عوض می‌کنیم:

در این حالت مقاومت‌های R_1 و R_2 باهم موازی‌اند و مقاومت معادل آن‌ها باهم متوالی‌اند:

$$R_{1,2} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{3 \times 6}{3 + 6} = 2 \Omega$$

$$R_{3,4} = \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} = \frac{12 \times 6}{12 + 6} = 4 \Omega$$

$$\Rightarrow R'_{eq} = R_{1,2} + R_{3,4} = 2 + 4 = 6 \Omega$$

در نتیجه جریان عبوری از باتری برابر است با:

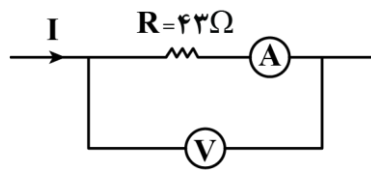
$$I' = \frac{\varepsilon}{r + R'_{eq}} = \frac{9V, r=1/2\Omega}{R'_{eq}=6\Omega} \rightarrow I' = \frac{9}{1/2 + 6} = \frac{9}{6.5} = 1.38 \text{ A}$$

بنابراین تغییر جریان عبوری از باتری برابر است با:

$$I' - I = 1.38 - 1.7 = -0.32 \text{ A}$$

یعنی جریان عبوری از باتری، 0.32 A کاهش می‌یابد.

۶۰- شکل زیر بخشی از یک مدار را نشان می‌دهد. اگر مقاومت آمپرسنج و ولتسنج به ترتیب 2Ω و 180Ω باشد و ولتسنج عدد ۳۶ ولت را نشان دهد، مقدار I بر حسب آمپر کدام است؟



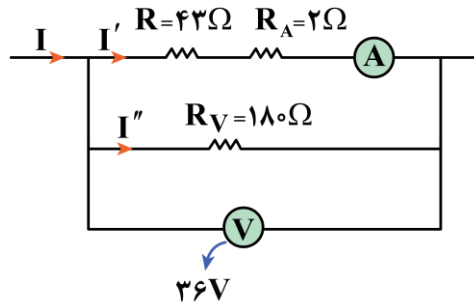
- (۲) $0/8$
(۴) $1/2$

- (۱) $0/2$
(۳) 1

(سخت - مفهومی/محاسباتی - استاندارد) (صفحه ۷۱ - ۱۱۰۲)

پاسخ: گزینه ۳

کلام اول



شکل ساده‌شده مدار را رسم می‌کنیم. در این شکل آمپرسنج و ولتسنج آرمانی فرض شده‌اند:

کلام دوم

جریان‌های I' و I'' را حساب می‌کنیم. با توجه به ولتاژ $36V$ مجموعه داریم:

$$R \text{ و } R_A \text{ موازی با معادل } R_V \Rightarrow V_t = R_V I'' = (R + R_A) I' \\ \Rightarrow 36 = 180 \cdot I'' = (43 + 2) I' \Rightarrow \begin{cases} I'' = 0/2 A \\ I' = 0/8 A \end{cases}$$

کلام آخر

مقدار I را به دست می‌آوریم. می‌دانیم که در یک گره مجموع جریان‌های ورودی با خروجی برابر است؛ در نتیجه داریم:

$$I = I' + I'' \Rightarrow I = 0/8 + 0/2 = 1A$$

۶۱- سیمی به طول $12m$ به اختلاف پتانسیل $220V$ وصل شده است و در مدت $10s$ در آن $2kJ$ گرما تولید شده است. چند متر از همان سیم را انتخاب کنیم تا وقتی به اختلاف پتانسیل 220 ولت وصل می‌شود، همان مقدار گرما را در مدت $5s$ بدهد؟

(۴) ۴

(۳) ۱۰

(۲) ۸

(۱) ۶

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) (صفحه ۶۷ - ۱۱۰۲)

پاسخ: گزینه ۱

کلام اول

رابطه بین گرمای تولیدشده با طول رسانا و مدت‌زمان را می‌یابیم:

$$U = Pt \Rightarrow U = Q = \frac{V^2}{R} \times t \quad \text{و} \quad R = \frac{\rho \cdot L}{A} \\ \xrightarrow{V=\text{ثابت}} \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{R_2}{R_1} \times \frac{t_1}{t_2} = \frac{L_2}{L_1} \times \frac{t_1}{t_2}$$

کلام آخر

با جایگذاری اطلاعات مسئله در رابطه مقایسه‌ای به دست آمده داریم:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{L_2}{L_1} \times \frac{t_1}{t_2} \Rightarrow 1 = \frac{L_2}{12} \times \frac{10}{5} \Rightarrow L_2 = 6m$$

توان الکتریکی

توان: آهنگ مصرف یا تولید انرژی

توان کمیتی نرده‌ای و فرعی است که یکای آن در SI، وات (W) است که معادل آن برحسب یکاهای اصلی $\frac{\text{kg.m}^2}{\text{s}^3}$ است.

توان مصرفی: توانی که توسط مصرف‌کننده‌ها در مدار مثل مقاومت‌ها مصرف می‌شود.

توان تولیدی: توانی که توسط مولد در مدار تولید می‌شود.

توان اتلافی: توانی که توسط مقاومت درونی باتری مصرف می‌شود.

توان خروجی: توان مفید باتری

توان ورودی: ویژه بچه‌های ریاضی: باشه برای بعداً...

$$P_{\text{مصرفی}} = VI = RI^2 = \frac{V^2}{R}$$

I: جریان عبوری از مقاومت (A)

V: ولتاژ دو سر مقاومت (V)

R: مقاومت (Ω)

$$P_{\text{تولیدی}} = \varepsilon I$$

I: جریان عبوری از باتری (A)

ε : نیروی محرکه (V)

$$P_{\text{اتلافی}} = rI^2$$

I: جریان عبوری از باتری (A)

r: مقاومت درونی (Ω)

$$P_{\text{خروجی}} = P_{\text{تولیدی}} - P_{\text{اتلافی}} = \varepsilon I - rI^2$$

یه نمونه باحال

جریان گذرنده از مقاومت R، ۵A و ولتاژ دو سر آن، ۲۰V است. توان مصرفی مقاومت چند وات است؟

پاسخ تشریحی:

$$P = VI = 20 \times 5 = 100 \text{ W}$$

یه نمونه باحال

جریان عبوری از مقاومت $R = 7\Omega$ برابر با ۲A است. آهنگ مصرف انرژی این مقاومت چند واحد SI است؟

پاسخ تشریحی:

$$P = RI^2 = 7 \times (2)^2 = 28 \text{ W}$$

یه نمونه باحال

اختلاف پتانسیل دو سر یک مقاومت ۱۰ اهمی برابر با ۵۰V است. این مقاومت در مدت یک دقیقه چند ژول انرژی مصرف می‌کند؟

پاسخ تشریحی:

مرحله ۱: محاسبه توان مصرفی

$$P = \frac{V^2}{R} = \frac{(50)^2}{10} = \frac{2500}{10} = 250 \text{ W}$$

مرحله ۲: محاسبه انرژی مصرفی

$$U = P.t$$

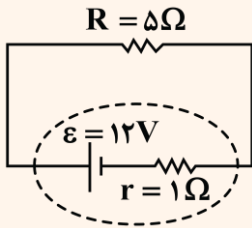
t: زمان (s)

P: توان (W)

U: انرژی (J)

$$U = Pt = 250 \times 60 = 15000 \text{ J}$$

یه نمونه باحال



- در مدار شکل مقابل
- توان تولیدی باتری
- توان اتلافی باتری
- توان خروجی باتری را به دست آورید.

پاسخ تشریحی:

با به دست آوردن جریان مدار، مقادیر خواسته شده را محاسبه می کنیم:

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r} = \frac{12}{5 + 1} = 2A$$

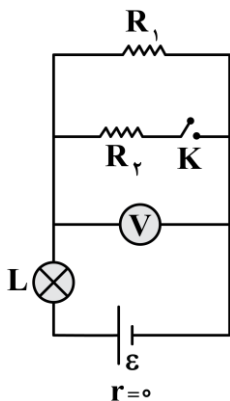
$$\begin{cases} P_{\text{تولیدی}} = \varepsilon I = 12 \times 2 = 24W \\ P_{\text{اتلافی}} = rI^2 = 1 \times (2)^2 = 4W \\ P_{\text{خروجی}} = \varepsilon I - rI^2 = 24 - 4 = 20W \\ P_{\text{مصرفی}} = RI^2 = 5 \times (2)^2 = 20W \end{cases}$$

به نظرتون تصادفی بود که خروجی P با مصرفی P_R برابر شد؟ خیر
در مدار تک حلقه ساده داریم:

$$P_{\text{خروجی باتری}} = P_{\text{مصرفی کل}}$$



۶۲- در مدار شکل زیر، کلید K در ابتدا باز است. با بستن کلید، نور لامپ L و ولتسنج آرمانی نشان می دهد، به ترتیب از راست به چپ چگونه تغییر می کنند؟



- (۱) کاهش، کاهش
- (۲) کاهش، افزایش
- (۳) افزایش، کاهش
- (۴) افزایش، افزایش

(متوسط - مفهومی - استاندارد ۶ - صفحه ۷۳ - ۱۱۰۲)

پاسخ: گزینه ۳

با بستن کلید K ، مقاومت R_1 و R_2 موازی می شوند؛ در نتیجه مقاومت معادل این دو مقاومت، کمتر از مقاومت R_1 می شود؛ بنابراین با بستن کلید، مقاومت معادل مدار کاهش می یابد. با کاهش مقاومت معادل مدار، طبق رابطه $I = \frac{\varepsilon}{r + R_{eq}} = \frac{\varepsilon}{R_{eq}}$ ، جریان عبوری از باتری افزایش می یابد و بنابراین لامپ L پر نورتر می شود.

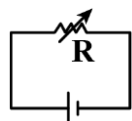
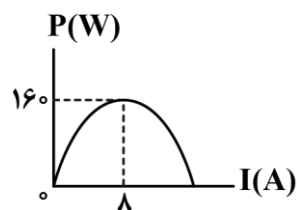
از طرفی اختلاف پتانسیل دو سر باتری برابر با مجموع اختلاف پتانسیل دو سر لامپ و اختلاف پتانسیلی است که ولتسنج آرمانی نشان می دهد:

$$V_{\text{باتری}} = V_{\text{لامپ}} + V_{\text{ولتسنج}} \xrightarrow{\frac{V_{\text{باتری}} = \varepsilon - Ir = \varepsilon}{V_{\text{لامپ}} = IR_{\text{لامپ}}}} \varepsilon = IR_{\text{لامپ}} + V_{\text{ولتسنج}}$$

بنابراین با افزایش جریان I ، عددی که ولتسنج آرمانی نشان می دهد کاهش می یابد.



۶۳- نمودار توان خروجی مولدی بر حسب جریان عبوری از آن در شکل زیر رسم شده است. این مولد را در مدار زیر قرار می‌دهیم. اگر مقاومت R را از 4Ω به 3Ω برسانیم، توان خروجی مولد و آهنگ شارش بار الکتریکی، چگونه تغییر می‌کنند؟



(۱) افزایش، افزایش

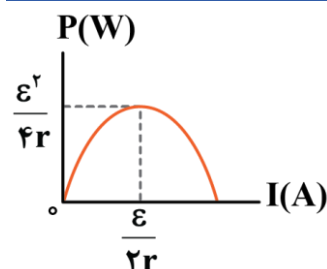
(۲) افزایش، کاهش

(۳) ابتدا افزایش سپس کاهش، افزایش

(۴) ابتدا افزایش سپس کاهش، کاهش

(متوسط - مفهومی/محاسباتی - استاندارد ۶ - صفحه ۶۹ - ۱۱۰۲)

پاسخ: گزینه ۱



طبق رابطه توان خروجی مولد بر حسب جریان که به صورت $P = \varepsilon I - rI^2$ است، نمودار آن به صورت روبه‌رو می‌شود.

در نتیجه با توجه به مقادیر داده‌شده، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \frac{\varepsilon^2}{4r} = 16 \\ \frac{\varepsilon}{2r} = 8 \end{cases} \xrightarrow[\text{تقسیم می‌کنیم.}]{\text{برهم}} \varepsilon = 40V, r = 2/5\Omega$$

نکته

به‌ازای $r = R_{eq}$ ، توان خروجی (مفید) مولد بیشینه می‌شود.

پس:

- اگر R_{eq} در حال نزدیک شدن به r باشد $P \Leftarrow$ خروجی افزایش می‌یابد.

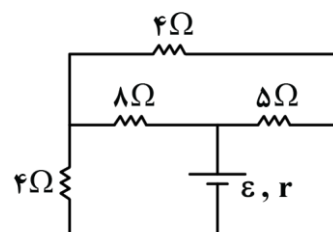
- اگر R_{eq} در حال دور شدن از r باشد $P \Leftarrow$ خروجی کاهش می‌یابد.

در نتیجه اگر مقاومت R را از 4Ω به 3Ω برسانیم، همواره در حال نزدیک شدن به $r = 2/5\Omega$ هستیم و توان خروجی مولد در حال افزایش است.

با کاهش مقاومت R از 4Ω به 3Ω ، مقاومت معادل مدار، کاهش می‌یابد و در نتیجه جریان مدار (آهنگ شارش بار الکتریکی) افزایش می‌یابد.



۶۴- در مدار شکل زیر، توان مصرفی در مقاومت ۵ اهمی، چند برابر توان مصرفی در هریک از مقاومت‌های ۴ اهمی است؟



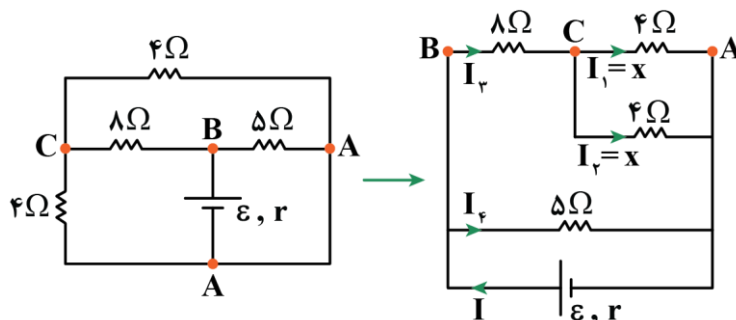
(۱) ۵

(۲) ۱۰

(۳) ۱۵

(۴) ۲۰

ابتدا با نام‌گذاری نقاط هم‌پتانسیل مدار، مدار را به شکل زیر ساده می‌کنیم:



چون مقاومت‌های 4Ω موازی‌اند، اختلاف پتانسیل دو سر آن‌ها باهم برابر است. از طرفی چون این مقاومت‌ها اندازه یکسان دارند، جریان عبوری از آن‌ها نیز برابر خواهد شد که آن را x در نظر می‌گیریم؛ بنابراین جریان عبوری از شاخه بالا برابر $2x$ است:

$$I_3 = I_1 + I_2 = 2x$$

از طرفی مقاومت معادل شاخه بالا برابر است با:

$$R' = \frac{4 \times 4}{4 + 4} + 8 = 10\Omega$$

اختلاف پتانسیل دو سر R' با اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت 5Ω برابر است:

$$5I_f = 10 \times 2x \Rightarrow I_f = 4x$$

اکنون نسبت توان مصرفی در مقاومت 5Ω به توان مصرفی در مقاومت 4Ω برابر است با:

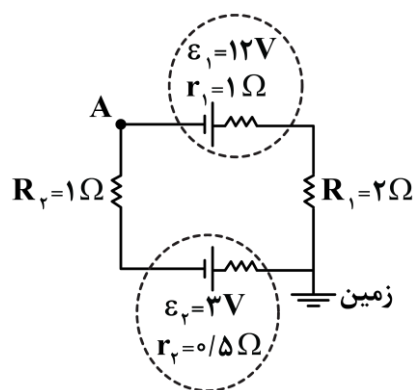
$$P = RI^2 \Rightarrow \frac{P_{5\Omega}}{P_{4\Omega}} = \frac{5 \times I_f^2}{4 \times I_1^2} = \frac{5 \times (4x)^2}{4 \times x^2} = 20$$



توجه کنید که چون جریان عبوری از هر دو مقاومت 4Ω یکسان است، این دو مقاومت توان مصرفی یکسان دارند.



۶۵- در مدار شکل زیر، به ترتیب از راست به چپ، پتانسیل الکتریکی نقطه A برابر ولت و اندازه توان باتری



(۱) برابر وات است.

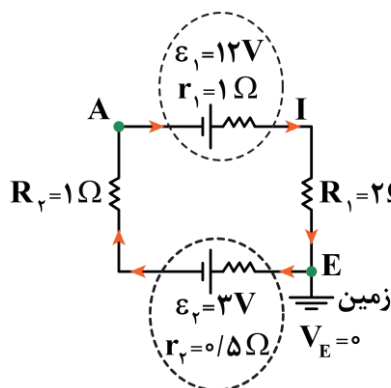
(۱) ۶، ورودی، ۲۰

(۲) ۶، خروجی، ۲۶

(۳) ۶-، ورودی، ۲۶

(۴) ۶-، خروجی، ۲۰

گام اول



ابتدا جریان مدار را به دست می آوریم. چون $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ است، جریان در مدار ساعت گرد است.

$$I = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{R_{eq} + r_1 + r_2} = \frac{12 - 3}{3 + 1 + 0.5} = \frac{9}{4.5} = 2A$$

گام دوم

از نقطه E تا A پتانسیل نویسی کرده و پتانسیل الکتریکی نقطه A را به دست می آوریم:

$$V_E - \varepsilon_2 - r_2 I - R_1 I = V_A \Rightarrow 0 - 3 - (0.5 \times 2) - (1 \times 2) = V_A \Rightarrow V_A = -6V$$

گام آخر

جریان از قطب مثبت باتری (۱) خارج می شود؛ بنابراین این باتری محرکه بوده و توان خروجی از آن به صورت زیر محاسبه می شود:

$$P_1 = \varepsilon_1 I - r_1 I^2 = (12 \times 2) - 1 \times 2^2 = 20W$$



بودجه‌بندی
این آزمون

شیمی ۳: شیمی، جلوه‌ای از هنر، زیبایی و ماندگاری (از ابتدای فصل تا سر خود را بیازمایید «وانادیم») صفحه‌های ۶۷ تا ۸۶
شیمی پایه: در پی غذای سالم (تا انتهای جمع‌پذیری گرمای واکنش‌ها، قانون هس) صفحه‌های ۵۱ تا ۷۷

سهم در
کنکور

مباحث این آزمون در مجموع ۴ تست از ۳۰ تست کنکور را پوشش داده است.

۶۶- در کدام موارد زیر، ویژگی بیان‌شده دربارهٔ جامد مربوطه درست است؟

- الف - جامد فلزی: آرایش منظم کاتیون‌ها است که الکترون‌های آزاد، در بین آن‌ها قرار گرفته‌اند.
ب - جامد مولکولی: بین ذرات سازنده آن، نیروی بین مولکولی وان‌دروالسی یا کووالانسی برقرار است.
ج - جامد کووالانسی: چینشی از اتم‌ها که در ساختار آن، کربن یا سیلیسیم به‌یقین وجود دارد.
د - جامد یونی: از کنار هم قرار گرفتن یون‌های مثبت و منفی ایجاد شده و به‌یقین، فاقد پیوند اشتراکی است.
- (۱) «ب» و «د» (۲) «ب» و «ج» (۳) «الف» و «د» (۴) «الف» و «ج»

(متوسط - حفظی و مفهومی - استاندارد ۶ - صفحه ۸۲ - ۱۲۰۳)

پاسخ: گزینه ۴

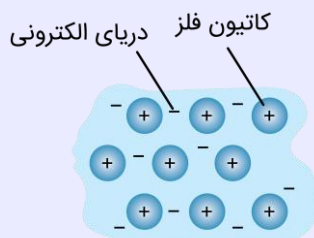
عبارت‌های (الف) و (ج) درست هستند.

بررسی موارد:

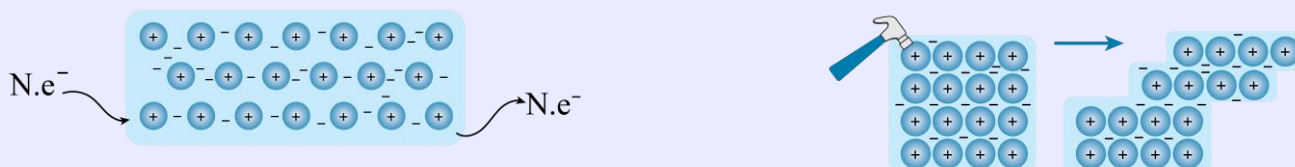
الف) بر اساس مدل دریای الکترونی، ساختار فلزها آرایش منظمی از کاتیون‌ها در سه بعد است که در فضای میان آن‌ها سست‌ترین الکترون‌های موجود در هر اتم (الکترون‌های ظرفیتی) دریایی را ساخته‌اند و در آن آزادانه جابه‌جا می‌شوند.

دریای الکترونی

دریای الکترونی، یک الگوی ساده از شبکهٔ بلوری فلزها را نشان می‌دهد که برای توجیه برخی از رفتارهای فیزیکی این عناصر ارائه شده است. تصویر زیر، نمایی از این مدل را نشان می‌دهد:



دریای الکترونی عاملی است که چیدمان کاتیون‌ها را در شبکه بلوری فلز حفظ می‌کند. بر اساس مدل دریای الکترونی، رفتارهای شیمیایی فلز مثل واکنش‌پذیری و تنوع عدد اکسایش توجیه نمی‌شود. داشتن جلا (سطح صیقلی)، رسانایی الکتریکی و گرمایی، شکل‌پذیری و ... از جمله رفتارهای فیزیکی فلزها بوده درحالی‌که واکنش‌پذیری (خصلت فلزی)، تنوع اعداد اکسایش و ... جزو رفتارهای شیمیایی فلزها است. تصویر زیر، نمایی از توجیه دو ویژگی چکش‌خواری و رسانایی بر اساس مدل دریای الکترونی را نشان می‌دهد:



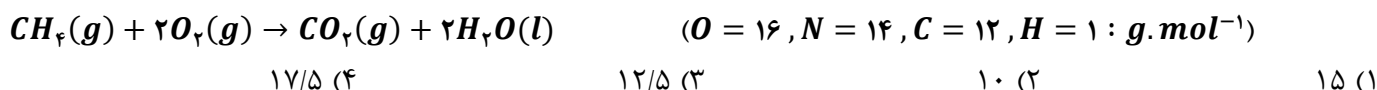
پ) بین ذرات سازنده یک مادهٔ مولکولی، نیروهای بین مولکولی از نوع هیدروژنی یا وان‌دروالسی وجود دارند، اما پیوندهای کووالانسی بین اتم‌های موجود در یک مولکول قرار دارند و نیروی بین مولکولی به‌شمار نمی‌روند.

ج) کربن و سیلیسیم عناصر اصلی سازنده جامدات کووالانسی هستند و در ساختار هر جامد کووالانسی حداقل یکی از این دو عنصر وجود دارد. در کنار این دو عنصر، ممکن است عناصر دیگر مثل اکسیژن نیز وجود داشته باشد.

در ساختار ترکیب‌های یونی، یون‌های مثبت و منفی در کنار هم قرار گرفته‌اند. اگر کاتیون یا آنیون موجود در ساختار یک ترکیب یونی، یون چند اتمی باشد در ساختار این یون و در نتیجه در ساختار ترکیب یونی مورد نظر، پیوند اشتراکی وجود دارد. برای مثال، در ساختار یون سولفات موجود در بلور لیتیم سولفات، پیوند اشتراکی یافت می‌شود.



۶۷- مخلوطی از گازهای اکسیژن و نیتروژن در محفظه‌ای به حجم ۱۱۲ لیتر در شرایط استاندارد قرار دارند، به طوری که ۴۰٪ حجمی از مخلوط را گازی با نقطه جوش بالاتر تشکیل می‌دهد. اگر ۰/۷۵ مول گاز متان به محفظه اضافه شود، پس از زدن یک جرقه در این مخلوط، درصد جرمی گاز اکسیژن باقیمانده در مخزن چقدر می‌شود؟



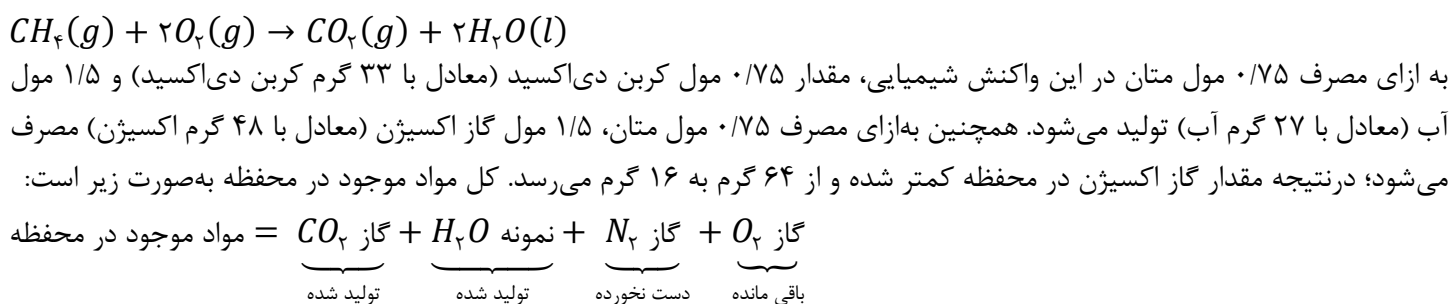
(سخت - محاسباتی - زمان بر) - صفحه ۷۰ - ۱۲۰۳

پاسخ: گزینه ۲

با توجه به جرم مولی بیشتر اکسیژن در مقایسه با نیتروژن، می‌توان گفت گاز اکسیژن (O_2)، نقطه جوش بیشتری نسبت به گاز نیتروژن (N_2) دارد. در شرایط استاندارد، هر مول گاز، حجمی برابر با ۲۲/۴ لیتر دارد؛ در نتیجه مخلوطی به حجم ۱۱۲ لیتر در این شرایط، معادل با ۵ مول ماده گازی است. در این رابطه، داریم:

$$? \text{ mol گاز} = 112 \text{ L گاز} \times \frac{1 \text{ mol گاز}}{22.4 \text{ L گاز}} = 5 \text{ mol}$$

با توجه به اینکه در یک مخلوط گازی درصد حجمی هر گاز، با درصد مولی آن گاز برابر است، می‌توان گفت ۴۰ درصد مولی از مخلوط گازی اولیه را گاز اکسیژن تشکیل داده است. با توجه به توضیحات داده شده، از ۵ مول گاز موجود در مخلوط گازی اولیه، مقدار ۲ مول مربوط به گاز اکسیژن (معادل با ۶۴ گرم اکسیژن) و مقدار ۳ مول نیز متعلق به گاز نیتروژن (معادل با ۸۴ گرم نیتروژن) است. اگر گاز متان را وارد محفظه کنیم، با گاز اکسیژن طی واکنش سوختن مصرف می‌شود و گاز نیتروژن دست نخورده باقی می‌ماند. واکنش سوختن کامل متان به صورت زیر است:



جرم کل مواد موجود در ظرف بعد از واکنش صورت گرفته به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$160 \text{ g} = \text{جرم نهایی مخلوط} \Rightarrow 16 + 84 + 27 + 33 = \text{جرم نهایی مخلوط}$$

درصد جرمی گاز اکسیژن در مخلوط نهایی، برابر است با:

$$10\% = \text{درصد جرمی گاز اکسیژن} \Rightarrow \frac{16}{160} \times 100 = \text{درصد جرمی گاز اکسیژن} = \frac{\text{جرم گاز اکسیژن}}{\text{جرم مخلوط}} \times 100$$

با توجه به محاسبات بالا، درصد جرمی گاز اکسیژن در مخلوط نهایی برابر با ۱۰ درصد است.



۶۸- نسبت آنتالپی فروپاشی شبکه بلور دو ماده داده شده در کدام گزینه، بزرگ‌تر از سایر موارد است؟

(۱) K_2S به CaO (۲) $NaCl$ به KCl (۳) MgO به Al_2O_3 (۴) $LiBr$ به KBr

(متوسط - مفهومی - استاندارد) - صفحه ۸۱ - ۱۲۰۳

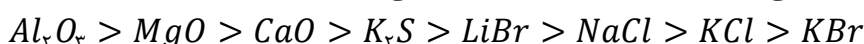
پاسخ: گزینه ۴

برای مقایسه آنتالپی شبکه ترکیبات یونی مختلف، به ترتیب از مقیاس‌های زیر استفاده می‌کنیم:

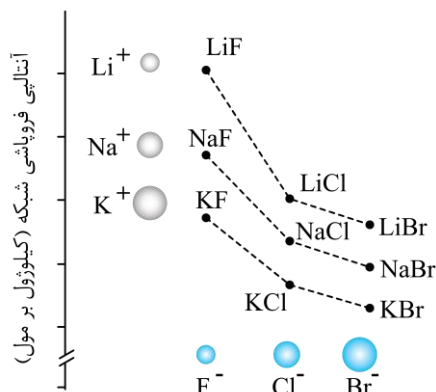
مقایسه مجموع قدر مطلق بار الکتریکی آنیون و کاتیون سازنده ترکیب مورد نظر ← هر ترکیبی که مجموع قدر مطلق بار الکتریکی آنیون و کاتیون سازنده آن بزرگ‌تر باشد، آنتالپی فروپاشی شبکه بالاتری دارد.

در صورت یکسان بودن مجموع قدر مطلق بار الکتریکی یون‌ها، مقایسه شعاع آنیون و کاتیون سازنده ← هر ترکیبی که شعاع یون‌های سازنده آن کوچک‌تر باشد، آنتالپی فروپاشی شبکه بالاتری دارد.

آنتالپی فروپاشی این ترکیب‌های یونی داده شده، به این صورت مقایسه می‌شود:



با توجه به این مقایسه، نسبت خواسته شده در گزینه ۱ و ۳، کمتر از یک است. در گزینه ۲ و ۴ نسبت مورد نظر بیشتر از یک است. با توجه به این که تفاوت آنتالپی فروپاشی شبکه در دو ترکیب گزینه ۴ بیشتر است، این گزینه درست است. دقت کنید در این سؤال که شبیه‌سازی یکی از سؤال‌های کنکور ۱۴۰۴ است، برای مقایسه آنتالپی فروپاشی شبکه ترکیب‌های حاصل از هالوژن‌ها با فلزهای قلیایی، از نمودار زیر استفاده می‌کنیم:



هالیدهای فلزهای قلیایی

هالیدهای فلزهای قلیایی، شامل گروهی از ترکیب‌های یونی می‌شوند که از واکنش میان عناصر فلزی گروه اول (فلزهای قلیایی) و عناصر نافلزی گروه ۱۷ (هالوژن‌ها) به‌دست می‌آیند. به‌طور کلی در هالیدهای فلزهای قلیایی، با افزایش عدد اتمی آنیون یا کاتیون، شعاع این یون‌ها افزایش پیدا کرده و چگالی بار آن‌ها کمتر می‌شود. در این گروه از ترکیب‌های یونی، با افزایش عدد اتمی آنیون یا کاتیون، آنتالپی فروپاشی شبکه بلوری جامد یونی کاهش پیدا می‌کند. به‌عنوان مثال، چون عدد اتمی پتاسیم بیشتر از لیتیم است، آنتالپی فروپاشی شبکه پتاسیم کلرید کمتر از آنتالپی فروپاشی شبکه بلور لیتیم کلرید می‌شود. با توجه به نمودار داده شده، تفاوت آنتالپی فروپاشی فلوئورید و کلرید هر فلز، بیشتر از تفاوت آنتالپی فروپاشی کلرید و برمید آن فلز است.



۶۹- اتیلن گلیکول موجود در ۵ لیتر محلول ۰/۴ مولار از این ماده را به‌طور کامل سوزانده و فراورده‌های حاصل از این فرایند را وارد یک میدان الکتریکی می‌کنیم. درصد جرمی مولکول‌هایی از این مخلوط که در میدان الکتریکی جهت‌گیری پیدا می‌کنند تقریباً چقدر

است؟ ($O = ۱۶, C = ۱۲, H = ۱ : g.mol^{-1}$)

۷۲ (۴)

۳۸ (۳)

۵۵ (۲)

۴۵ (۱)

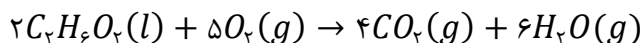
(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - صفحه ۷۴ - ۱۲۰۳

پاسخ: گزینه ۳

به‌طور کلی، اگر روی اتم مرکزی یک مولکول چنداتمی، یک یا چند الکترون ناپیوندی قرار داشته باشد، گشتاور دوقطبی آن مولکول بزرگ‌تر از صفر می‌شود و آن مولکول در حضور میدان الکتریکی جهت‌گیری پیدا می‌کند. از طرفی، اگر روی اتم مرکزی یک مولکول چنداتمی، هیچ الکترون ناپیوندی وجود نداشته باشد و اتم‌های متصل به اتم مرکزی در آن مولکول نیز یکسان باشند، مولکول موردنظر ناقطبی خواهد بود و در حضور یک میدان الکتریکی جهت‌گیری پیدا نخواهد کرد. ساختار مولکول‌های اتیلن گلیکول به‌صورت زیر است:



این ماده، یک الکل دو عاملی بوده و در محلول ضد یخ، یافت می‌شود. واکنش سوختن اتیلن گلیکول به صورت زیر است:



در محلول گفته شده، ۲ مول اتیلن گلیکول وجود دارد. با توجه به معادله این واکنش، از سوختن ۲ مول اتیلن گلیکول، ۴ مول کربن دی‌اکسید (معادل با ۱۷۶ گرم کربن دی‌اکسید) و ۶ مول بخار آب (معادل با ۱۰۸ گرم بخار آب) تولید می‌شود. همان‌طور که می‌دانیم، بخار آب از مولکول‌های قطبی و کربن دی‌اکسید نیز از مولکول‌های ناقطبی تشکیل شده است. بر این اساس، درصد جرمی مولکول‌هایی که در میدان الکتریکی جهت‌گیری پیدا می‌کنند (مولکول‌هایی با گشتاور دوقطبی بزرگ‌تر از صفر) را در مخلوط فراورده‌ها محاسبه می‌کنیم. داریم:

$$\text{درصد } = \frac{\text{جرم آب تولید شده}}{\text{جرم کل فراورده‌ها}} \times 100 = \frac{108}{108 + 176} \times 100 \approx 38\%$$



۷۰- چه تعداد از عبارت‌های داده شده درست است؟

- الف - با کاهش دمای مقداری آب، شمار پیوندهای هیدروژنی بین مولکول‌های سازنده این ماده بیشتر می‌شود.
 ب - در مولکول‌های کربونیل سولفید و کلروفرم، به ترتیب به اتم‌های O و C می‌توان بار جزئی منفی نسبت داد.
 ج - در مولکول AX_2 ، احتمال حضور الکترون‌ها زمانی روی هسته اتم‌ها متقارن است که ساختار مولکول، خمیده باشد.
 د - مواد مولکولی از واحدهای مجزایی به نام مولکول تشکیل شده و همه آن‌ها در شرایط اتاق حالت گاز یا مایع دارند.
- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

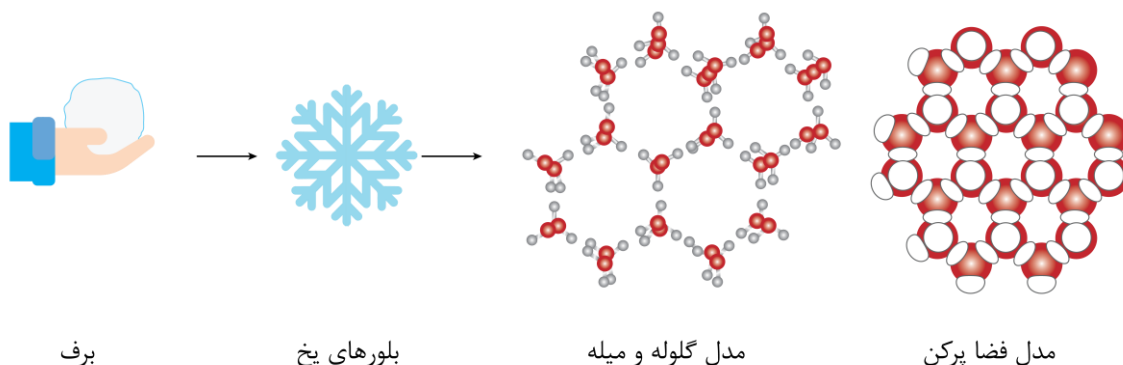
(متوسط - مفهومی و حفظی - استاندارد) - صفحه ۷۵ - ۱۲۰۳

پاسخ: گزینه ۱

فقط عبارت (الف) درست است.

بررسی موارد:

الف) با کاهش دمای آب، بین مولکول‌های سازنده این ماده پیوندهای هیدروژنی بیشتری تشکیل شده و بر این اساس، تعداد کل پیوندهای هیدروژنی بیشتر می‌شود. برای مثال، در دمای اتاق هر مولکول تقریباً در تشکیل ۲ پیوند هیدروژنی شرکت می‌کند؛ در حالی که با یخ زدن آب، هر مولکول در تشکیل ۴ پیوند هیدروژنی شرکت می‌کند. تصویر زیر، ساختار یخ را نشان می‌دهد:



شیمی‌دان‌ها برای نمایش توزیع الکترون‌ها و بررسی تراکم بار الکتریکی روی اتم‌های سازنده یک گونه شیمیایی، از شکل‌هایی به نام نقشه پتانسیل الکترواستاتیکی استفاده می‌کنند. در این نقشه‌ها، رنگ آبی تراکم کم‌تر الکترون‌ها (بار جزئی مثبت) و رنگ قرمز تراکم بیشتر الکترون‌ها (بار جزئی منفی) را نشان می‌دهد. با توجه به نقشه پتانسیل الکترواستاتیکی مولکول‌های کربونیل سولفید (SCO) و کلروفرم ($CHCl_3$)، به ترتیب به اتم‌های O و Cl در این مولکول‌ها می‌توان بار جزئی منفی نسبت داد. نقشه پتانسیل الکترواستاتیکی این مواد به صورت زیر است:



اگر احتمال حضور الکترون‌های پیوندی روی هسته اتم‌ها، یکسان و متقارن باشد، مولکول ناقطبی و اگر یکسان و متقارن نباشد، مولکول قطبی است. مولکولی با فرمول AX_2 می‌تواند قطبی و یا ناقطبی باشد. اگر این مولکول ساختار خطی داشته باشد، اتم مرکزی آن فاقد جفت الکترون ناپیوندی بوده و ناقطبی است و اگر ساختار خمیده داشته باشد، اتم مرکزی آن دارای جفت الکترون ناپیوندی بوده و قطبی است. برای مثال CO_2 ناقطبی بوده و SO_2 قطبی است.

مواد مولکولی از واحدهای مجزایی به نام مولکول تشکیل شده‌اند. این مواد در دمای اتاق می‌توانند به حالت گاز (مثل اتان، اتن، اتین و هیدروژن کلرید)، مایع (مثل هگزان و آب) و جامد (مثل ید، نفتالن و پلی‌اتن) باشند؛ در حالی که ترکیب‌های یونی و ترکیب‌های کووالانسی در دمای اتاق فقط به حالت جامد دیده می‌شوند. فلزها نیز در دمای اتاق، اغلب به حالت جامد دیده می‌شوند.



۷۱- کدام یک از مطالب زیر درست است؟

- (۱) اگر یکی از اتم‌های H اتیلن را با فلئور جایگزین کنیم، گشتاور دوقطبی این ماده، برخلاف دمای جوش آن افزایش می‌یابد.
- (۲) در نیروگاه خورشیدی حرارتی، از یک ترکیب مولکولی با دمای جوش بالا، برای جذب گرمای خورشید استفاده می‌شود.
- (۳) هر مولکول چنداتمی که اتم مرکزی آن بار جزئی منفی دارد، در حضور یک میدان الکتریکی جهت‌گیری پیدا می‌کند.
- (۴) نیروگاه خورشیدی، در طول روز شارژ یونی را در منبع ذخیره انرژی گرمایی جمع کرده و در شب، برق تولید می‌کند.

(آسان - مفهومی - سریع ۶ - صفحه ۷۷ - ۱۲۰۳)

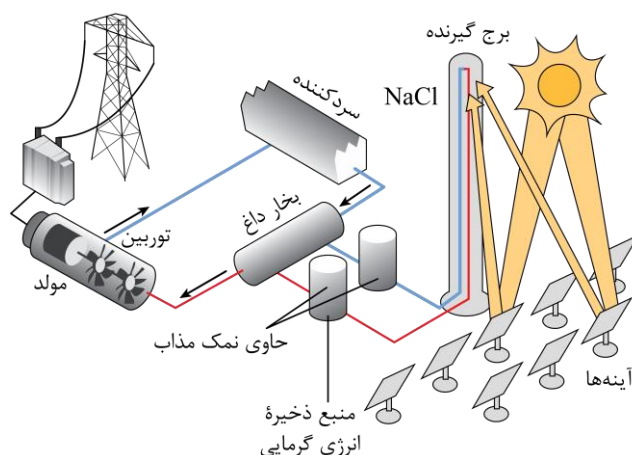
پاسخ: گزینه ۴

خورشید بزرگ‌ترین منبع انرژی برای زمین است. این ستاره انرژی خود را در قالب پرتوهای الکترومغناطیسی به سمت زمین گسیل می‌کند که از آن می‌توان به‌عنوان یک منبع انرژی تجدیدپذیر استفاده کرد. برای تولید برق با استفاده از انرژی خورشید، از نیروگاه‌های خورشیدی حرارتی استفاده می‌شود. در این نیروگاه‌ها، شارژ یونی (سدیم کلرید مذاب) گرمای خورشید را جذب کرده و در منبع ذخیره انرژی گرمایی ذخیره می‌کند. با ذخیره سدیم کلرید مذاب در منبع ذخیره انرژی گرمایی، این نیروگاه‌ها در طول شب و روزهای ابری نیز می‌توانند انرژی الکتریکی تولید کنند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

اگر یکی از اتم‌های هیدروژن اتیلن (C_2H_4) را با اتم فلئور جایگزین کنیم، مولکول فلئورواتن (C_2H_3F) حاصل می‌شود. چون در این مولکول، اتم‌های متفاوتی در اطراف اتم‌های کربن قرار دارند، این ماده گشتاور دوقطبی بزرگ‌تر از صفر دارد. این در حالی است که گشتاور دوقطبی اتن (اتیلن) تقریباً برابر با صفر در نظر گرفته می‌شود. فلئورواتن نسبت به اتن، گشتاور دوقطبی و جرم مولی بیشتر و به دنبال آن، قدرت نیروهای بین مولکولی قوی‌تری دارد و از آنجا که رفتار فیزیکی مواد مولکولی به نوع و قدرت نیروهای بین مولکولی در آن‌ها وابسته است، می‌توان نتیجه گرفت فلئورواتن نسبت به اتن، دمای جوش بالاتری خواهد داشت.

تصویر زیر، نمایی از یک نیروگاه خورشیدی حرارتی را نشان می‌دهد:



در این نیروگاه، از یک ترکیب یونی مثل سدیم کلرید مذاب برای جذب گرمای خورشید استفاده می‌شود. در واقع آینه‌ها پرتوهای خورشید را بر روی برج گیرنده متمرکز کرده و انرژی این پرتوها را به شارژ یونی منتقل می‌کنند.

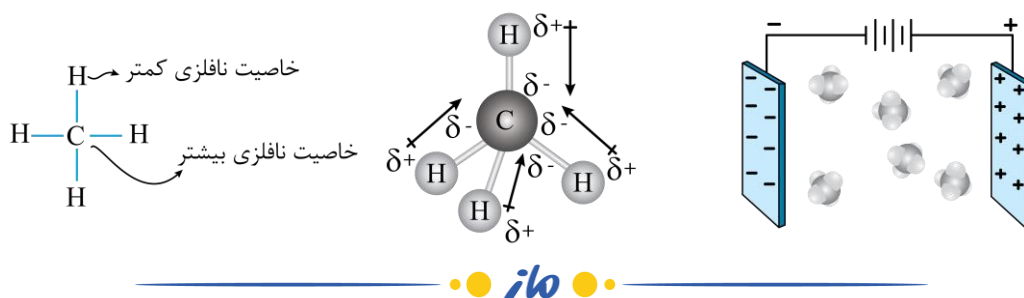
نیروگاه حرارتی خورشیدی

تبدیل انرژی خورشیدی به انرژی الکتریکی، نیازمند تجهیزات و فناوری پیشرفته بوده و فقط در برخی کشورها انجام پذیر است. برای این کار، نیاز به دو شاره (سیال) یونی و مولکولی است. شاره (سیال)، ماده‌ای است که مقاومت چندانی در برابر جاری شدن نداشته باشد؛ در نتیجه مواد گازی یا مایع می‌توانند به‌عنوان شاره استفاده شوند.

در فرایند تولید انرژی الکتریکی از نور خورشید، باید از شاره‌هایی استفاده کنیم که بتوانند انرژی زیادی را جذب کرده و در خود نگه دارند. هرچه اختلاف نقطه ذوب و جوش برای ماده‌ای بیشتر باشد، آن ماده در گستره وسیع‌تری از دما به حالت مایع خواهد بود. اختلاف نقطه ذوب و جوش برای ترکیب‌های یونی، بیشتر از ترکیب‌های مولکولی است؛ در نتیجه ترکیب‌های یونی، ظرفیت بیشتری برای جذب گرما داشته و در گستره وسیع‌تری از دما به حالت مایع هستند، از این رو از شاره‌های یونی (مثل $NaCl$ مذاب و ...)، به‌عنوان ماده‌ای برای ذخیره انرژی گرمایی در این فناوری استفاده می‌شود.

در این فناوری، ابتدا نور خورشید توسط آینه‌ها بر روی برج گیرنده (برجی که دارای شاره یونی است) متمرکز شده و باعث گرم شدن شاره یونی می‌شود. سپس شاره یونی داغ، وارد منبع ذخیره انرژی گرمایی شده و پس از آن، با ورود به مخزن مبادله گرما، دمای شاره مولکولی را افزایش می‌دهد. شاره مولکولی (مثل بخار آب داغ) باعث به حرکت درآوردن توربین می‌شود. در این فناوری، هدر رفتن شاره‌های یونی و مولکولی را مشاهده نخواهیم کرد، چون هر دو شاره پس از سرد شدن دوباره وارد فرایند خواهند شد.

تنها مولکول‌های قطبی در حضور یک میدان الکتریکی جهت‌گیری پیدا می‌کنند و این قضیه کاملاً مستقل از نوع بار جزئی اتم مرکزی در مولکول‌ها است. برای مثال، متان مولکولی است با بار جزئی منفی بر روی اتم مرکزی که ناقطبی بوده و در حضور میدان الکتریکی جهت‌گیری پیدا نمی‌کند. تصویر زیر، نمایی از ساختار مولکول متان را نشان می‌دهد:



۷۲- کدام مورد زیر، نادرست است؟

- (۱) گرافن، یک ماده شفاف بوده و ضخامت آن، به اندازه قطر اتم کربن است.
- (۲) گرافیت، رسانای جریان الکتریسیته بوده و یک نمونه از آن، روی سطح آب شناور می‌ماند.
- (۳) الماس، درجه سختی بالایی داشته و ذرات سازنده آن، توسط پیوندهای اشتراکی به یکدیگر متصل شده‌اند.
- (۴) سیلیس، در سنگ‌کره وجود داشته و پیوندهای $Si - O$ در اطراف هر اتم Si آن، بر یک صفحه منطبق نمی‌شوند.

(متوسط - حفظی و مفهومی - سریع ۶ - صفحه ۷۱ - ۱۲۰۳)

پاسخ: گزینه ۲

گرافیت رسانای جریان الکتریسیته است اما همانند الماس، چگالی بیشتری نسبت به آب دارد و در آب فرو می‌رود. طراحان کنکور سراسری به ویژگی‌های الماس و گرافیت توجه ویژه‌ای دارند و این سؤال نیز با ایده گرفتن از یکی از سؤال‌های کنکور ۱۴۰۴ طراحی شده است. در جدول زیر مهم‌ترین ویژگی‌های الماس و گرافیت مقایسه شده‌اند:

آلوتروپ	الماس	گرافیت
نوع جامد	کووالانسی سه بعدی	کووالانسی دو بعدی
ویژگی ظاهری	شفاف	تیره
سختی یا نرمی	بسیار سخت	نسبتاً نرم
نقطه ذوب	بالا	بالا
رسانایی الکتریکی در حالت جامد	ندارد	دارد
رسانایی گرمایی در حالت جامد	دارد	ندارد
چگالی	بیشتر	کمتر
پایداری	ناپایدارتر	پایدارتر
قدر مطلق آنتالپی سوختن	بیشتر	کمتر

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) گرافن تک‌لایه‌ای از گرافیت است که در آن، اتم‌های کربن ساختارهای شش گوشه تشکیل داده‌اند. ساختار گرافن، الگویی مشابه کندوی زنبور عسل دارد و استحکام ویژه‌ای دارد. مقاومت کششی آن، حدود ۱۰۰ برابر فولاد است. از آن جا که ضخامت گرافن به اندازه یک اتم کربن است انتظار می‌رود که شفاف و انعطاف‌پذیر باشد.

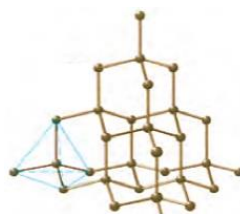
گرافن

به هر یک از لایه‌های سازنده گرافیت، گرافن گفته می‌شود که در آن اتم‌های کربن با پیوندهای اشتراکی، حلقه‌های شش گوشه تشکیل داده‌اند. گرافن با الگوی خاص در ساختار خود (الگویی مانند کندوی زنبور عسل)، استحکام ویژه‌ای دارد. با توجه به این‌که ضخامت گرافن به اندازه یک اتم کربن است، این ماده را می‌توان یک گونه شیمیایی دوبعدی در نظر گرفت. ساختار گرافن به صورت زیر است:



گرافن، یک گونه شفاف و انعطاف‌پذیر است. این ماده، همانند گرافیت، رسانای جریان الکتریسیته است. چون رسانایی الکتریکی این ماده توسط الکترون‌های موجود در آن انجام می‌شود، گرافن یک رسانای الکترونی به شمار می‌رود. یک روش ساده برای تهیه گرافن، استفاده از نوار چسب و گرافیت برای جدا کردن لایه‌هایی از آن است. با این کار، لایه‌ای به ضخامت نانومتر از اتم‌های کربن در سطح نوار چسب ایجاد می‌شود که همان گرافن است.

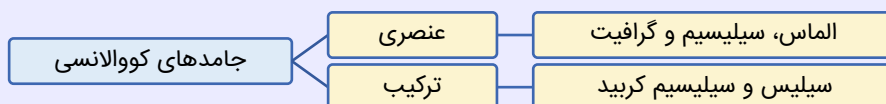
۲) الماس ساختاری غول‌آسا و یکپارچه سه‌بعدی داشته؛ در نتیجه سختی بالایی دارد. در ساختار این ماده هر اتم کربن با ۴ پیوند اشتراکی یگانه به ۴ اتم کربن دیگر متصل است. ساختار این ماده به صورت زیر است:



۳) سیلیس عمده‌ترین جزء سازنده خاک رس است و در ساختار آن اتم سیلیسیم و اتم اکسیژن وجود دارد. در ساختار سیلیس اتم‌های سیلیسیم و اکسیژن با پیوند کووالانسی یگانه در شبکه‌ای سه‌بعدی به همدیگر متصل شده‌اند. هر اتم سیلیسیم با ۴ اتم اکسیژن و هر اتم اکسیژن با ۲ اتم سیلیسیم با پیوند کووالانسی یگانه به همدیگر متصل شده‌اند. با توجه به سه‌بعدی بودن این ساختار، پیوندهای $Si - O$ بر یک صفحه منطبق نمی‌شوند. کوارتز از جمله نمونه‌های خالص و ماسه از جمله نمونه‌های ناخالص سیلیس است.

انواع مواد

برخی از موادی که در دسته جامدهای کووالانسی قرار می‌گیرند (مثل الماس، گرافیت و سیلیسیم)، از اتصال شمار زیادی از اتم‌های یکسان تشکیل شده‌اند؛ در حالی که برخی از جامدهای کووالانسی (مثل سیلیس و سیلیسیم کربید) از اتصال اتم‌های چند عنصر متفاوت به یکدیگر تشکیل شده‌اند. نمودار زیر، انواع جامدهای کووالانسی را نشان می‌دهد:



علاوه بر جامدهای کووالانسی، در گروه مواد مولکولی نیز برخی از مواد عنصری (مثل اکسیژن، نیتروژن، ید و گوگرد) و برخی از ترکیب‌ها (مثل آب، آمونیاک و پروپان) قرار دارند.



۷۳- کدام موارد از عبارت‌های داده شده درست هستند؟

- الف - عدد کوئوردیناسیون هر یک از یون‌های Na^+ و Cl^- موجود در بلور سدیم کلرید با هم مساوی و برابر ۶ است.
 ب - باریم سیلیکات، عضوی از خانواده ترکیب‌های یونی بوده و نسبت شمار آنیون‌ها به کاتیون‌ها در آن برابر ۲ است.
 ج - سدیم سولفید، یک ترکیب یونی دوتایی بوده و دمای ذوب یک نمونه از آن نسبت به منیزیم کلرید بالاتر است.
 د - انرژی فروپاشی شبکه بلور ترکیب اصلی سازنده سنگ معدن بوکسیت، بیشتر از Fe_2O_3 خواهد بود.

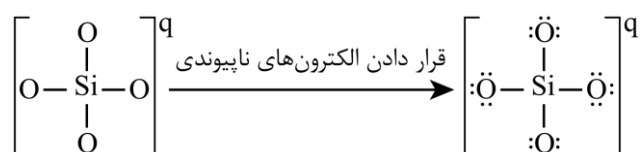
(۱) «الف» و «ب» (۲) «ب» و «ج» (۳) «ج» و «د» (۴) «الف» و «د»

عبارت‌های (الف) و (د) درست هستند.

بررسی موارد:

الف) آرایش یون‌ها در سرتاسر شبکه بلوری سدیم کلرید، همانند سایر جامدهای یونی، از یک الگوی تکراری پیروی می‌کند؛ به‌طوری‌که هر کاتیون با شمار معینی از آنیون‌ها و هر آنیون با شمار معینی از کاتیون‌ها احاطه شده است. به شمار نزدیک‌ترین یون‌های ناهمنام موجود در اطراف هر یون در شبکه بلور، عدد کوئوردیناسیون می‌گویند. عدد کوئوردیناسیون در بلور سدیم کلرید برای هر یک از یون‌های Na^+ و Cl^- برابر با ۶ است.

پ) ابتدا با توجه به ساختار لوویس یون سیلیکات، بار آن را تعیین می‌کنیم:



$-4 = [(4 \times 6) + 4] - [(4 \times 6) + (4 \times 2)] =$ تعداد کل الکترون‌های ناپیوندی و پیوندی - مجموع الکترون‌های ظرفیتی = بار آنیون در نتیجه فرمول شیمیایی ترکیب یونی باریم سیلیکات به‌صورت Ba_2SiO_4 بوده و نسبت شمار کاتیون‌ها به آنیون‌ها در آن برابر ۲ است. توجه داریم که باریم، یک فلز قلیایی خاکی بوده و کاتیون با بار $+2$ تشکیل می‌دهد.

ج) سدیم سولفید (Na_2S)، یک ترکیب یونی دوتایی به شمار می‌رود که از یون‌های Na^+ و S^{2-} تشکیل شده است. هرچه آنتالپی فروپاشی شبکه یک ترکیب یونی بیشتر باشد، این ترکیب در دماهای بالاتری ذوب می‌شود. مجموع قدرمطلق بار کاتیون و آنیون سدیم سولفید (Na_2S) و منیزیم کلرید ($MgCl_2$) با هم برابر است اما منیزیم کلرید به علت کمتر بودن شعاع یون‌های سازنده‌اش، نسبت به سدیم سولفید آنتالپی فروپاشی بیشتری دارد و بنابراین در دماهای بالاتری ذوب می‌شود. مقایسه شعاع یون‌های سازنده این دو ترکیب به‌صورت زیر است:

$S^{2-} < Cl^-$: شعاع آنیون‌ها و $Mg^{2+} < Na^+$: شعاع کاتیون‌ها

د) ترکیب اصلی در سنگ معدن بوکسیت و همتایت، به ترتیب Al_2O_3 و Fe_2O_3 است. بار کاتیون‌ها و آنیون‌ها در این دو ترکیب با هم یکسان است؛ اما چگالی بار یون Al^{3+} از Fe^{3+} بیشتر است (فلز Al در دوره سوم و فلز Fe در دوره چهارم جدول تناوبی قرار دارد). در نتیجه انرژی فروپاشی شبکه بلور Al_2O_3 از Fe_2O_3 بیشتر خواهد بود.



۷۴- اگر برای تولید $10^{22} \times 6/02$ یون $O^{2-}(g)$ از بلور آلومینیم اکسید، به $532/5$ کیلوژول انرژی لازم باشد، آنتالپی فروپاشی شبکه بلور آلومینیم اکسید برحسب کیلوژول بر مول چقدر بوده و طی این فرایند، چند گرم کاتیون گازی تولید می‌شود؟

($Al = 27 \text{ g.mol}^{-1}$)

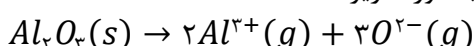
(۴) $15975 - 3/6$

(۳) $15975 - 1/8$

(۲) $5325 - 3/6$

(۱) $5325 - 1/8$

به انرژی لازم برای فروپاشی شبکه بلوری یک مول جامد یونی در فشار ثابت و تبدیل آن به یون‌های گازی مجزا، آنتالپی فروپاشی شبکه گفته می‌شود. آنتالپی فروپاشی شبکه جامدهای یونی را در مقیاس کیلوژول بر مول گزارش می‌کنند. هر چه چگالی بار یون‌های سازنده یک ترکیب یونی بیشتر باشد، این یون‌ها با نیروی بیشتری به سمت یکدیگر جذب می‌شوند و پایداری و استحکام شبکه بلوری نیز بیشتر می‌شود. بر این اساس، با افزایش چگالی بار یون‌های سازنده ترکیب‌های یونی مختلف، مقدار آنتالپی فروپاشی شبکه این مواد افزایش پیدا می‌کند و فروپاشی شبکه بلوری آن‌ها دشوارتر می‌شود. با توجه به توضیحات داده شده، معادله واکنش انجام شده به‌صورت زیر است:



کافیست انرژی لازم برای تولید ۳ مول یون O^{2-} را در این واکنش حساب کنیم:

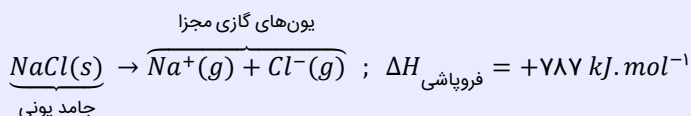
$$? kJ = 3 \text{ mol } O^{2-} \times \frac{6/0.2 \times 10^{23} O^{2-}}{1 \text{ mol } O^{2-}} \times \frac{532/5 kJ}{6/0.2 \times 10^{23} O^{2-}} = 15975 kJ$$

بنابراین آنتالپی فروپاشی Al_2O_3 برابر $15975 kJ \cdot mol^{-1}$ است. در قدم بعد، جرم یون‌های گازی آلومینیم تولید شده را محاسبه می‌کنیم:

$$? g Al^{3+} = 6/0.2 \times 10^{23} O^{2-} \times \frac{1 \text{ mol } O^{2-}}{6/0.2 \times 10^{23} O^{2-}} \times \frac{2 \text{ mol } Al^{3+}}{3 \text{ mol } O^{2-}} \times \frac{27 g Al^{3+}}{1 \text{ mol } Al^{3+}} = 1/8 g$$

آنتالپی فروپاشی شبکه

به انرژی لازم برای فروپاشی شبکه بلوری یک مول جامد یونی در فشار ثابت و تبدیل آن به یون‌های گازی مجزا، آنتالپی فروپاشی شبکه گفته می‌شود. آنتالپی فروپاشی شبکه جامدهای یونی را در مقیاس کیلوژول بر مول گزارش می‌کنند. به عنوان مثال، معادله زیر واکنش فروپاشی شبکه بلور سدیم کلرید جامد را نشان می‌دهد:



در این واکنش، یک ترکیب یونی جامد به یون‌های گازی تبدیل شده است.



۷۵- کدام یک از مطالب زیر نادرست است؟

- (۱) شکنندگی ذرات بلور سدیم کلرید، به خاطر جابه‌جایی یون‌ها و ایجاد نیروی دافعه میان این یون‌ها ایجاد می‌شود.
- (۲) از بین دو ویژگی چکش‌خواری و واکنش‌پذیری فلزها، تنها یک مورد به کمک مدل دریای الکترونی قابل توجیه است.
- (۳) از میان یون‌های پایدار حاصل از عناصر سدیم، منیزیم، پتاسیم و کلسیم، یون منیزیم دارای کوچک‌ترین شعاع یونی است.
- (۴) هر فلز واسطه، دارای زیرلایه‌ای با $l = 0$ بوده و همه این عناصر، بیش از یک نوع عدد اکسایش در ترکیب‌های خود دارند.

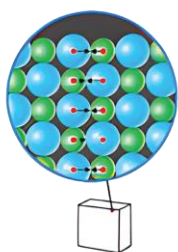
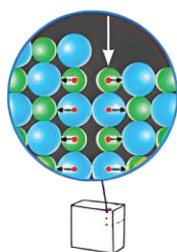
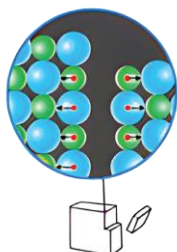
(آسان - مفهومی و حفظی - سریع - صفحه ۸۲ - ۱۲۰۳)

پاسخ: گزینه ۴

هرچند که اغلب فلزهای واسطه دارای اعداد اکسایش متفاوتی در ترکیب‌های خود هستند، اما برخی از عناصر این دسته مثل اسکاندیم، نقره و روی، اعداد اکسایش متنوعی در ترکیب‌های خود نداشته و فقط در قالب یک یون با بار الکتریکی مشخص در ترکیب‌های خود مشاهده می‌شوند. بار الکتریکی کاتیون حاصل از اسکاندیم، نقره و روی، به ترتیب برابر با $+3$ ، $+1$ و $+2$ است.

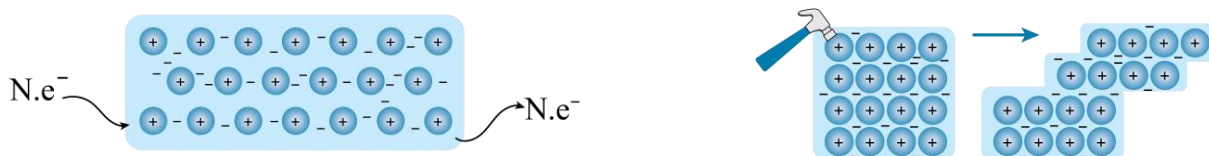
بررسی سایر گزینه‌ها:

در اثر وارد شدن ضربه به بلور یک جامد یونی، ذرات سازنده این ماده جابه‌جا شده و یون‌های هم‌نام در کنار یکدیگر قرار می‌گیرند. دافعه ایجاد شده میان یون‌ها در این حالت، موجب جدا شدن دو قطعه از هم و خرد شدن این جامد می‌شود. تصویر زیر، نمایی از این فرایند را نشان می‌دهد:



نیروی دافعه در هنگام وارد شدن ضربه

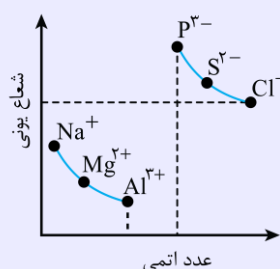
ویژگی‌های چکش‌خواری (شکل‌پذیری) و رسانایی الکتریکی (که هر دو از جمله خواص فیزیکی هستند) را می‌توان به کمک مدل دریای الکترونی توجیه کرد. توجه داریم که این مدل برای توجیه خواص شیمیایی (مثل واکنش‌پذیری) کاربرد ندارد. تصویر زیر، نمایی از توجیه این دو ویژگی بر اساس مدل دریای الکترونی را نشان می‌دهد:



به‌طور کلی بین کاتیون‌های فلزی مختلف، با حرکت به سمت راست و بالای جدول دوره‌ای، شعاع یونی کاهش پیدا می‌کند. از میان یون‌های پایدار حاصل از عناصر سدیم، منیزیم، پتاسیم و کلسیم، یون منیزیم از یون سدیم شعاع کوچک‌تری دارد. یون منیزیم از یون کلسیم هم کوچک‌تر است. همچنین شعاع یون سدیم از یون پتاسیم کمتر بوده، پس شعاع یون‌های پایدار سدیم، پتاسیم و کلسیم بیشتر از شعاع یون منیزیم است.

شعاع یونی

از میان آنیون‌های موجود در یک دوره، با افزایش بار یون‌ها، شعاع آن‌ها بیشتر می‌شود. به‌عنوان مثال، مقایسه شعاع آنیون‌های موجود در تناوب دوم به‌صورت $F^- > O^{2-} > N^{3-}$ است. از میان کاتیون‌های موجود در یک دوره نیز با افزایش بار یون‌ها، شعاع آن‌ها کاهش پیدا می‌کند. به‌عنوان مثال، مقایسه شعاع کاتیون‌های موجود در تناوب سوم به‌صورت $Al^{3+} > Mg^{2+} > Na^+$ است. البته توجه داریم که شمار لایه‌های الکترونی موجود در آنیون‌های یک دوره، یکی بیشتر از شمار لایه‌های الکترونی کاتیون‌های موجود در آن دوره است و به همین خاطر، شعاع آنیون‌های موجود در هر دوره بیشتر از کاتیون‌های موجود در آن دوره است. نمودار زیر، روند تغییر شعاع یون‌ها در تناوب سوم را نشان می‌دهد:



• • زیمن • •

۷۶- اگر برای شکستن پیوندهای موجود در ۰/۲ مول گاز Cl_2 و ۰/۴ گرم گاز هیدروژن، مجموعاً به ۱۳۵/۶ کیلوژول انرژی نیاز باشد، با توجه به معادله واکنش زیر، آنتالپی پیوند اشتراکی $H - Cl$ برابر با چند کیلوژول است؟ ($Cl = ۳۵/۵$, $H = ۱$: $g \cdot mol^{-1}$)



۴۳۱ (۴)

۲۸۷ (۳)

۲۱۵/۵ (۲)

۵۷۴ (۱)

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - صفحه ۷۰-۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۴

طبق فرض سؤال، برای شکستن پیوندهای موجود در ۰/۲ مول گاز Cl_2 و ۰/۴ گرم گاز هیدروژن (معادل با ۰/۲ مول گاز هیدروژن)، مجموعاً به ۱۳۵/۶ کیلوژول انرژی نیاز است. برای حل این سؤال که مشابه با یکی از سؤال‌های کنکور سراسری ۱۴۰۴ است، در گام اول مجموع آنتالپی پیوندهای $H - H$ و $Cl - Cl$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta H(Cl - Cl) = x kJ \Rightarrow 0.2 \text{ mol } Cl_2 \times \frac{x kJ}{1 \text{ mol } Cl_2} = 0.2x kJ$$

$$\Delta H(H - H) = y kJ \Rightarrow 0.4 \text{ g } H_2 \times \frac{1 \text{ mol } H_2}{2 \text{ g } H_2} \times \frac{y kJ}{1 \text{ mol } H_2} = 0.2y kJ$$

طبق فرض سؤال داریم:

$$0.2x + 0.2y = 135.6 kJ \Rightarrow x + y = \Delta H(H - H) + \Delta H(Cl - Cl) = \frac{135.6}{0.2} = 678 kJ$$

با توجه به تغییر آنتالپی واکنش داریم:

$$\Delta H_{\text{واکنش}} = \left[\text{مجموع آنتالپی پیوندها در مواد فراورده} \right] - \left[\text{مجموع آنتالپی پیوندها در مواد واکنش دهنده} \right]$$

$$= \Delta H(H-H) + \Delta H(Cl-Cl) - 2\Delta H(H-Cl)$$

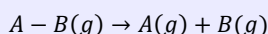
بر این اساس، $\Delta H(H-Cl)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta H(H-H) + \Delta H(Cl-Cl) - 2\Delta H(H-Cl) \Rightarrow -184 = 678 - 2\Delta H(H-Cl) \Rightarrow \Delta H(H-Cl) = 431 \text{ kJ}$$

پس مقدار $\Delta H(H-Cl)$ برابر با ۴۳۱ کیلوژول بر مول است.

آنتالپی پیوند

به مقدار انرژی لازم برای شکستن یک مول پیوند اشتراکی میان دو اتم در حالت گازی، آنتالپی پیوند می‌گویند. برای شکستن پیوند، همواره به انرژی نیاز است؛ بنابراین آنتالپی پیوند همواره مثبت است. تغییر آنتالپی واکنش زیر، معادل آنتالپی پیوند $A-B$ است:



بنابراین شرط آن‌که گرمای مبادله‌شده در یک واکنش برابر آنتالپی پیوند باشد این است که در آن واکنش یک مول پیوند کووالانسی میان دو اتم شکسته شود و مواد شرکت‌کننده در واکنش نیز به حالت گازی باشند. آنتالپی پیوند میان دو اتم که نشان‌دهنده قدرت پیوند است، به جاذبه میان الکترون‌های پیوندی و هسته این دو اتم بستگی دارد. مسلماً هر چه جاذبه میان دو اتم بیشتر باشد، پیوند نیز قوی‌تر است. به‌طور کلی هرچه فاصله هسته‌ها از الکترون‌ها کمتر باشد، جاذبه آن پیوند بیشتر می‌شود؛ بنابراین هر چه طول پیوند کمتر باشد، آنتالپی پیوند نیز بیشتر است. به‌طور کلی، هر چه شعاع اتم‌های دخیل در تشکیل پیوند کوچک‌تر و مرتبه پیوند بیشتر باشد، طول پیوند کمتر می‌شود؛ بنابراین به‌صورت کلی آنتالپی پیوند سه‌گانه نسبت به پیوند دوگانه و آن هم نسبت به پیوند یگانه بیشتر است. برای مثال، داریم:

$$\Delta H(N-N) < \Delta H(N=N) < \Delta H(N \equiv N)$$

$$\Delta H(C-C) < \Delta H(C=C) < \Delta H(C \equiv C)$$

همچنین غالباً هر چه شعاع اتم‌های تشکیل‌دهنده پیوند کوچک‌تر باشد، آنتالپی پیوند بیشتر خواهد بود. به‌طور مثال داریم:

$$F < Cl < Br < I \Rightarrow \Delta H(H-F) > \Delta H(H-Cl) > \Delta H(H-Br) > \Delta H(H-I)$$



۷۷- کدام موارد از عبارات‌های داده شده درست هستند؟

- الف - شیر و فراورده‌های آن، منبعی برای تأمین کلسیم بوده و باعث پیشگیری و ترمیم پوکی استخوان می‌شوند.
 ب - با دادن مقدار برابر گرما به ۵۰ گرم آب و ۷۵ گرم روغن، انرژی گرمایی روغن به مقدار بیشتری افزایش می‌یابد.
 ج - فرایند گوارش و سوخت‌وساز بستنی در بدن انسان، برخلاف فرایند فتوسنتز انجام شده در گیاهان، گرماده است.
 د - میزان جنب‌وجوش مولکول‌های آب در دمای ۳۱۳K، بیشتر از مقدار جنب‌وجوش مولکول‌های آن در دمای ۵۰°C است.
- (۱) «الف» و «ج» (۲) «الف» و «د» (۳) «ب» و «ج» (۴) «ب» و «د»

(متوسط - مفهومی و حفظی - استاندارد) - صفحه ۵۹ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۱

عبارات‌های (الف) و (ج) درست هستند.

بررسی موارد:

الف) شیر و فراورده‌های آن، منبع مهمی برای تأمین پروتئین و کلسیم هستند. کلسیم موجود در شیر برای پیشگیری و ترمیم پوکی استخوان کاربرد دارد، هرچند که ممکن است باعث ایجاد سنگ کلیه نیز بشود.

غذا و مواد موجود در آن

غذا معجونی از مواد شیمیایی بوده و محتوی ذره‌های گوناگون است. بخش عمده اتم‌ها، مولکول‌ها و یون‌های موجود در بدن ما، از غذایی که می‌خوریم تأمین می‌شود. نقش‌های عمده غذا در بدن ما به شرح زیر هستند:

- ۱- تأمین انرژی مورد نیاز برای حرکت ماهیچه‌های بدن
 - ۲- تأمین انرژی مورد نیاز برای ارسال پیام‌های عصبی، جابه‌جایی یون‌ها و مولکول‌ها از دیواره یاخته‌ها
 - ۳- تأمین مواد اولیه برای ساخت و رشد بخش‌های گوناگون بدن مانند سلول‌های خونی، استخوان، پوست، مو، ماهیچه‌ها و آنزیم‌ها
 - ۴- تنظیم و کنترل دمای بدن به کمک انجام شدن واکنش‌های شیمیایی
- توجه داریم که بدن ما برای انجام تمام فعالیت‌های ارادی و غیرارادی گوناگون به ماده و انرژی نیاز دارد، اما ارزش مواد غذایی مختلف در تأمین ماده و انرژی مورد نیاز بدن یکسان نیست. به‌عنوان مثال، گوشت قرمز و گوشت ماهی، افزون بر پروتئین‌ها، محتوی انواع ویتامین‌ها و مواد معدنی نیز هست.

با دادن مقادیر برابری از گرما به ۵۰ گرم آب و ۷۵ گرم روغن، انرژی گرمایی هر دو ماده به مقدار برابری افزایش می‌یابد. هر چند که طی این فرایند، دمای آب احتمالاً به مقدار کمتری افزایش می‌یابد (چون ظرفیت گرمایی آب بیشتر از روغن است)، اما تغییر انرژی گرمایی این دو نمونه از ماده با هم برابر است چراکه انرژی داده شده به هر دو ماده، مقدار برابر و یکسانی دارد. در واقع طی این فرایند مجموع انرژی جنبشی ذرات در آب و روغن، به یک اندازه افزایش پیدا می‌کند اما میزان تغییر دمای این دو ماده برابر با هم نخواهد بود.

اگر مقداری بستنی با دمای 10°C را بخورید، پس از ورود بستنی (سامانه) به بدن (محیط اطراف)، سامانه گرما جذب کرده و با بدن هم‌دم می‌شود. معادله این فرایند به صورت زیر است:

$$\text{بستنی}(37^{\circ}\text{C}) \rightarrow \text{گرما}(Q) + \text{بستنی}(10^{\circ}\text{C})$$

پس از ورود بستنی به بدن، فرایند سوخت و ساز این ماده بر اساس معادله زیر انجام شده و بخش عمده انرژی موجود در بستنی به بدن می‌رسد.

$$\text{گرما}(Q) + \text{فراورده‌های گوارش و سوخت و ساز}(37^{\circ}\text{C}) \rightarrow \text{بستنی}(37^{\circ}\text{C})$$

توجه داریم که فرایند فتوسنتز، مربوط به تولید گلوکز در گیاهان بوده و با مصرف انرژی خورشید همراه است، پس می‌توان گفت این واکنش از جمله فرایندهای گرماگیر به شمار می‌رود.

مبادله گرما در واکنش‌ها

در فرایندهای گرماده، علامت Q منفی بوده و نماد Q در سمت راست معادله فرایند قرار می‌گیرد. به عنوان مثال، فرض کنید مقداری شیر گرم با دمای 60°C را می‌خورید. با توجه به اینکه دمای درونی بدن انسان برابر با 37°C است، پس از ورود شیر گرم (سامانه) به بدن (محیط اطراف)، شیر مقداری گرما از دست داده و با بدن هم‌دم می‌شود. معادله فرایند انجام شده به صورت زیر است:

$$\text{شیر}(60^{\circ}\text{C}) \rightarrow \text{شیر}(37^{\circ}\text{C}) + \text{گرما}(Q)$$

پس از ورود شیر به بدن، فرایند گوارش و سوخت و ساز انجام شده و بخش عمده انرژی موجود در شیر به بدن می‌رسد. انجام مجموعه این واکنش‌ها منجر به تولید انرژی و مواد اولیه مورد نیاز سوخت و ساز یاخته‌ها خواهد شد. معادله این فرایند نیز به صورت زیر است:

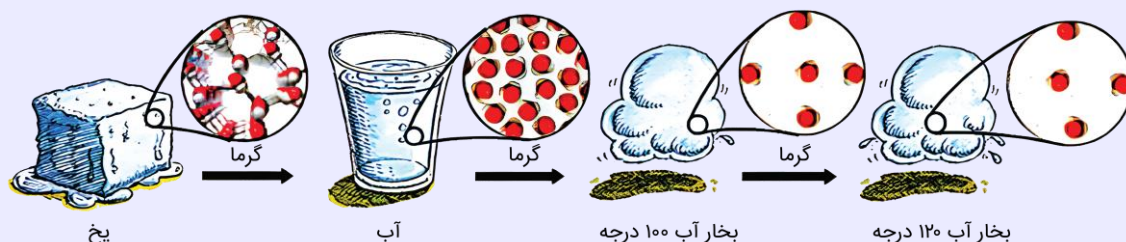
$$\text{شیر}(37^{\circ}\text{C}) + \text{فراورده‌های گوارش و سوخت و ساز}(37^{\circ}\text{C}) \rightarrow \text{شیر}(37^{\circ}\text{C})$$

فرایند هم‌دم شدن شیر گرم با بدن، یک تغییر فیزیکی و گرماده بوده و در آن دمای فراورده کمتر از دمای واکنش‌دهنده است. فرایند گوارش و سوخت و ساز شیر نیز یک تغییر شیمیایی و گرماده است که در آن دمای فراورده‌ها با دمای واکنش‌دهنده‌ها برابر است. همان‌طور که مشخص است، همه واکنش‌های گرماده با تغییر دمای مواد شرکت‌کننده در واکنش همراه نیستند.

یکای رایج دما، درجه سلسیوس ($^{\circ}\text{C}$) است؛ در حالی که یکای دما در سیستم SI معادل با کلونین (K) است. دمای یک جسم در مقیاس سلسیوس با نماد θ و در مقیاس کلونین با نماد T نشان داده می‌شود. رابطه بین این دو مقیاس دمایی به صورت $T(K) = \theta(^{\circ}\text{C}) + 273$ است. با توجه به این رابطه، ارزش دمایی 1°C با ارزش دمایی $1K$ برابر خواهد بود؛ پس تغییر دمای یک جسم در مقیاس سلسیوس ($\Delta\theta$) برابر با میزان تغییر دمای آن جسم در مقیاس کلونین (ΔT) است. از آنجا که میزان جنب‌وجوش ذرات سازنده یک ماده با دمای آن ماده رابطه مستقیم دارد، پس می‌توان گفت میزان جنب‌وجوش مولکول‌های آب در دمای $313K$ (معادل با دمای 40°C درجه سانتی‌گراد)، کمتر از مقدار جنب‌وجوش مولکول‌های آن در دمای 50°C است.

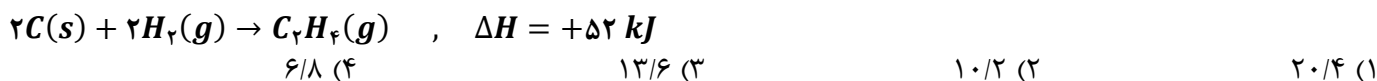
آب

توجه داریم که ذرات سازنده یک ماده در سه حالت فیزیکی جامد، مایع یا گاز، پیوسته در حال حرکت و جنب‌وجوش هستند اما میزان جنبش ذره‌ها در حالت‌های فیزیکی مختلف، متفاوت از یکدیگر است. تصویر زیر، میزان جنب‌وجوش مولکول‌های H_2O را در حالت‌های فیزیکی و دماهای مختلف نشان می‌دهد.



هرچند که مولکول‌های H_2O در همه حالت‌ها در حال جنب‌وجوش هستند، اما میزان جنبش‌های نامنظم این ذرات در حالت گاز شدیدتر از حالت مایع و در حالت مایع نیز شدیدتر از حالت جامد است. توجه داریم که با ذوب شدن یخ، میانگین فاصله میان مولکول‌های H_2O کاهش یافته و حجم این ماده کمتر می‌شود. به عبارت دیگر، با ذوب شدن یخ، چگالی یک نمونه از این ماده افزایش پیدا می‌کند.

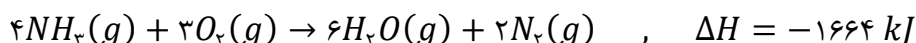
۷۸- از گرمای تولید شده در واکنش $4NH_3(g) + 3O_2(g) \rightarrow 6H_2O(g) + 2N_2(g)$, $\Delta H = -1664 \text{ kJ}$ ، برای انجام واکنش زیر استفاده می‌کنیم. اگر در مجموع این دو واکنش، ۱۲۰ لیتر فراورده گازی تولید شده باشد، در واکنش اول چند گرم آمونیاک مصرف شده است؟ (حجم هر مول ماده گازی در شرایط واکنش، ۳۰ لیتر است. $H = 1, N = 14 : g \cdot mol^{-1}$)



(سخت - محاسباتی - زمان بر) - صفحه ۶۷ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۴

باید بین مقدار آمونیاک مصرف شده و مجموع مقدار گاز تولید شده در این دو واکنش، ارتباط برقرار کنیم. توجه داریم که رابط بین دو واکنش، مقدار گرمای مبادله شده در آن‌ها است. معادله واکنش اول که یک واکنش گرماده است، به صورت زیر خواهد بود:



توجه داریم که این دو واکنش، در شرایط استاندارد در حال انجام شدن نیستند. به ازای یک بار انجام شدن واکنش اول، مقدار ۴ مول گاز آمونیاک به مصرف رسیده و مجموعاً ۸ مول گاز (۲ مول گاز نیتروژن و ۶ مول بخار آب)، به همراه ۱۶۶۴ کیلوژول گرما آزاد می‌شود. طبق فرض سؤال، مقدار ۱۶۶۴ کیلوژول گرما را به سامانه واکنش دوم منتقل کرده‌ایم. بر این اساس، مقدار گاز تولید شده در این واکنش را محاسبه می‌کنیم:

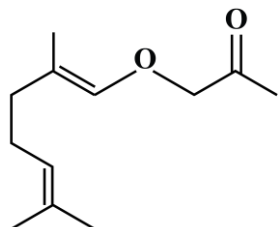
$$? \text{ mol } C_2H_4 = 1664 \text{ kJ گرما} \times \frac{1 \text{ mol } C_2H_4}{52 \text{ kJ گرما}} = 32 \text{ mol}$$

با توجه به محاسبات بالا، طی این فرایند ۳۲ مول گاز در واکنش دوم نیز تولید شده است. در واکنش اول، ۸ مول گاز و در واکنش دوم، ۳۲ مول گاز تولید شده، پس در مجموع این دو واکنش ۴۰ مول گاز تولید شده است. طبق توضیحات داده شده، اگر ۴ مول گاز آمونیاک در واکنش اول مصرف شود، در نهایت ۴۰ مول گاز در مجموع دو واکنش تولید خواهد شد. بر این اساس، جرم آمونیاک مصرف شده به ازای تولید ۱۲۰ لیتر گاز را محاسبه می‌کنیم. توجه داریم که حجم هر مول ماده گازی در شرایط واکنش، برابر با ۳۰ لیتر است. بر این اساس داریم:

$$? \text{ g } NH_3 = 120 \text{ L گاز} \times \frac{1 \text{ mol گاز}}{30 \text{ L گاز}} \times \frac{4 \text{ mol } NH_3}{40 \text{ mol گاز}} \times \frac{17 \text{ g } NH_3}{1 \text{ mol } NH_3} = 6/8 \text{ g}$$



۷۹- کدام یک از مطالب زیر در رابطه با ترکیب مقابل، نادرست است؟

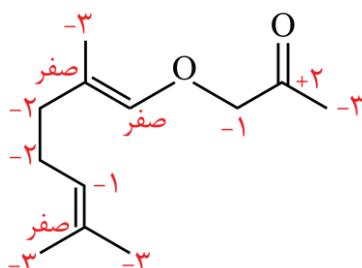


- (۱) شمار اتم‌های هیدروژن موجود در این ماده، با شمار اتم‌های هیدروژن در نونان برابر است.
- (۲) یکی از گروه‌های عاملی موجود در این ماده، در ترکیب ایجادکننده بوی رازیانه وجود دارد.
- (۳) بین ذرات این ماده، برخلاف ذرات سازنده اتانول، امکان برقراری پیوند هیدروژنی وجود ندارد.
- (۴) دو مورد از اتم‌های کربن موجود در ساختار این ماده آلی، عدد اکسایش بزرگ‌تر از صفر دارند.

(متوسط - مفهومی و حفظی - استاندارد) - صفحه ۷۱ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۴

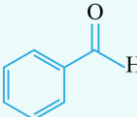
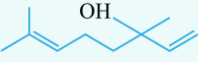
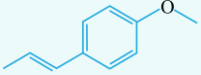
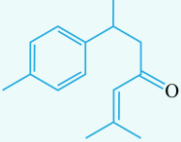
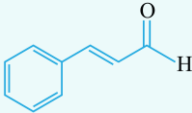
ترکیب مورد نظر، در ساختار خود دارای یک گروه کتونی و یک گروه اتری است. فرمول شیمیایی این ماده به صورت $C_{12}H_{22}O_4$ خواهد بود. چون این ماده در ساختار خود دارای پیوند $C = C$ است، از جمله مواد سیرنشده به شمار می‌رود. عدد اکسایش همه اتم‌های کربن موجود در ساختار این ماده، برابر با صفر و یا کمتر از صفر است و تنها اتم کربنی از این ماده که عدد اکسایش بیشتر از صفر دارد، اتم کربن موجود در گروه عاملی کتونی است. عدد اکسایش اتم‌های کربن موجود در ساختار این ماده، به شرح زیر است:



بررسی سایر گزینه‌ها:

۱ در ساختار نونان، ۹ اتم کربن و ۲۰ اتم هیدروژن وجود دارد. در ساختار این ترکیب آلی نیز ۲۰ اتم هیدروژن وجود دارد.

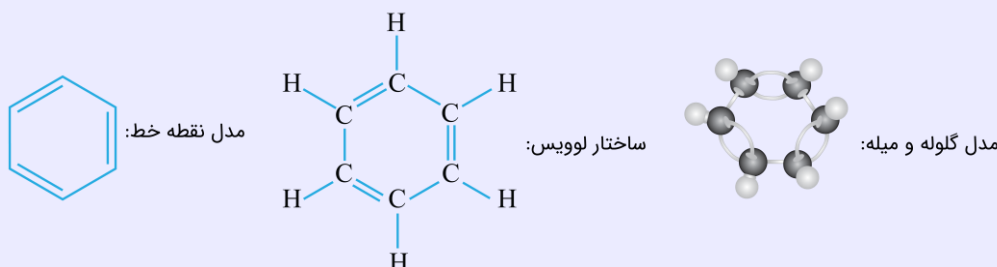
۲ جدول زیر گروه‌های عاملی موجود در عامل بو و مزه برخی از گیاهان را نشان می‌دهد:

نام گیاه	میخک	بادام	گشنیز	رازیانه	زردچوبه	دارچین
ساختار						
فرمول مولکولی	$C_7H_{14}O$	C_7H_6O	$C_4H_{10}O$	$C_{11}H_{12}O$	$C_{15}H_{24}O$	C_9H_8O
گروه عاملی	کتون (کربونیل)	آلدهید (کربونیل)	الکلی	اتر	کتون (کربونیل)	آلدهید (کربونیل)

در ساختار رازیانه، ترکیبات حاوی گروه عاملی اتری وجود دارند. در ساختار ترکیب داده شده در سؤال نیز عامل اتری یافت می‌شود.

مواد آروماتیک

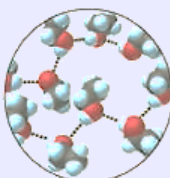
حلقهٔ بنزنی، یک حلقهٔ ۶ ضلعی ساخته شده از اتم‌های کربن است که در آن پیوندهای بین اتم‌های کربن یکی در میان دوگانه هستند. ترکیب‌های دارای حلقه بنزنی، به اصطلاح ترکیبات آروماتیک خوانده می‌شوند. بنزن، بنزوئیک اسید، بنزآلدهید، نفتالن، استیرن، ترفتالیک اسید، پارازایلن، ترکیب آلی عامل طعم و بوی گیاه رازیانه، ترکیب‌های آلی موجود در دارچین و زردچوبه و ویتامین (کا)، مهم‌ترین ترکیبات آروماتیک مطرح شده در کتاب درسی هستند. تصویر زیر، نمایی از مولکول بنزن به‌عنوان سرگروه خانواده ترکیبات آروماتیک را نشان می‌دهد.



۳ به‌طور کلی در گروه عاملی کربونیل (آلدهیدها و کتون‌ها) و در ساختار ترکیب‌های اتری، اتم هیدروژن به هیچ یک از اتم‌های اکسیژن، نیتروژن و فلوئور متصل نیست و به همین خاطر، اتم اکسیژن موجود در این گروه‌های عاملی توانایی تشکیل پیوند هیدروژنی با مولکول‌های خود را ندارند.

اتانول

اتانول، یک الکل دو کربنی است که از مولکول‌هایی با $\mu > 0$ تشکیل شده است. این ماده، بی‌رنگ بوده و از تخمیر گلوکز تولید می‌شود. در یک نمونه خالص از اتانول، هر مولکول توانایی ایجاد دو پیوند هیدروژنی را دارد. تصویر زیر، نمایی از اتانول خالص را نشان می‌دهد:



همانطور که مشخص است، هر مولکول اتانول (C_2H_5OH) یک پیوند هیدروژنی از سمت اتم اکسیژن و یک پیوند هیدروژنی از سمت اتم هیدروژن موجود در گروه هیدروکسیل برقرار کرده است.



۸۰- گرمای حاصل از سوختن مقداری متان را به دو بخش مساوی تقسیم کرده و هر قسمت از آن را به نمونه‌هایی از آب با جرم ۲۰۰ گرم و اتانول با جرم ۷۰۰ گرم می‌دهیم. میزان تغییر دمای نمونه آب، چند برابر نمونه اتانول خواهد بود؟ (گرمای ویژه آب و اتانول، به ترتیب برابر با ۴/۲ و ۲/۴ ژول بر گرم بر درجه سلسیوس است.)

(۴) ۲/۵

(۳) ۲

(۲) ۱/۵

(۱) ۱/۲۵

(آسان - محاسباتی - استاندارد) - صفحه ۶۰ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۳

میزان تغییر دمای یک نمونه از ماده را به ازای Q ژول گرما، از رابطه زیر به دست می‌آوریم:

$$Q = mc\Delta\theta$$

طبق فرض سؤال، گرمای حاصل از سوختن مقداری متان را به دو بخش مساوی تقسیم کرده و هر قسمت از آن را به نمونه‌هایی از آب و اتانول داده‌ایم. بر این اساس، می‌توان گفت مقدار گرمای داده شده به هر ماده برابر با هم است؛ پس داریم:

$$Q_{\text{آب}} = Q_{\text{اتانول}}$$

با توجه به برابر بودن مقدار گرمای داده شده به دو ماده، مقدار تغییر دمای آن‌ها را مقایسه می‌کنیم:

$$Q_{\text{آب}} = Q_{\text{اتانول}} \implies m_{\text{آب}} \times c_{\text{آب}} \times \Delta\theta_{\text{آب}} = m_{\text{اتانول}} \times c_{\text{اتانول}} \times \Delta\theta_{\text{اتانول}} \implies 200 \times 4/2 \times \Delta\theta_{\text{آب}}$$

$$= 700 \times 2/4 \times \Delta\theta_{\text{اتانول}} \implies \frac{\Delta\theta_{\text{آب}}}{\Delta\theta_{\text{اتانول}}} = \frac{700 \times 2/4}{200 \times 4/2} = 2 \text{ برابر}$$

تغییر دمای یک ماده با استفاده از گرما

ظرفیت گرمایی یک ماده (C)، گرمای مورد نیاز برای افزایش دمای آن ماده به اندازه یک درجه سلسیوس است:

$$Q = C\Delta\theta$$

ظرفیت گرمایی یک ماده در دما و فشار ثابت، به نوع ماده و جرم ماده وابسته است و یکای آن $J \cdot K^{-1}$ یا $J \cdot ^\circ C^{-1}$ است. اما گرمای ویژه (c)، گرمای مورد نیاز برای افزایش دمای یک گرم از ماده به اندازه یک درجه سلسیوس است:

$$Q = mc\Delta\theta$$

گرمای ویژه یک ماده در دما و فشار ثابت، تنها به نوع ماده وابسته است و یکای آن $J \cdot g^{-1} \cdot ^\circ C^{-1}$ یا $J \cdot g^{-1} \cdot K^{-1}$ است. توجه داریم که در رابطه بالا، واحد گرما (Q) ژول است و اگر مقدار گرما را بر حسب کیلوژول، کالری و ... دادند، باید تبدیل واحد انجام دهیم. توجه داریم که هر کالری برابر با ۴/۱۸ ژول است که برای حل تقریبی مسائل می‌توانیم آن را معادل ۴/۲ ژول در نظر بگیریم:

$$1 \text{ cal} = 4/18 \text{ J} \approx 4/2 \text{ J}$$



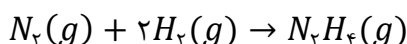
۸۱- واکنش تشکیل هیدرازین از عناصر سازنده، واکنش تولید آمونیاک از عناصر سازنده، بوده و با انجام آن در یک ظرف سر بسته در دمای ثابت، تعداد مول مواد گازی موجود در ظرف پیدا می‌کند.

- | | |
|-------------------------------|------------------------------|
| (۱) همانند - گرماگیر - افزایش | (۲) همانند - گرماده - افزایش |
| (۳) برخلاف - گرماده - کاهش | (۴) برخلاف - گرماگیر - کاهش |

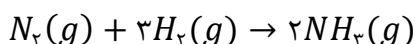
(آسان - حفظی و مفهومی - سریع) - صفحه ۷۷ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۴

واکنش تشکیل هیدرازین (N_2H_4) از عناصر سازنده، طبق معادله زیر انجام می‌شود:



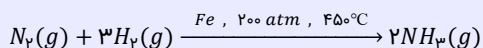
واکنش تولید آمونیاک از عناصر سازنده (واکنش هابر) نیز، طبق معادله زیر انجام می‌شود:



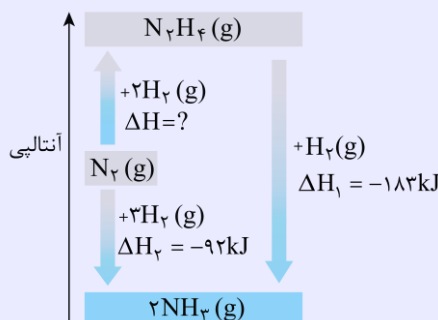
واکنش تشکیل هیدرازین از عناصر سازنده برخلاف واکنش تولید آمونیاک از عناصر سازنده، گرماگیر است. با انجام واکنش تشکیل هیدرازین، ۳ مول گاز مصرف شده و یک مول گاز تولید می‌شود. بر این اساس، می‌توان گفت مجموع مول مواد گازی در ظرف کاهش می‌یابد و در صورت ثابت بودن حجم، فشار گازها نیز کاهش می‌یابد.

تغییر آنتالپی در فرایند هابر

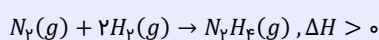
فرایند هابر روشی برای تولید گاز آمونیاک از عناصر سازنده بوده که واکنش کلی آن به صورت زیر است:



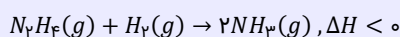
نمودار زیر نمایی از مراحل انجام این واکنش را نشان می‌دهد:



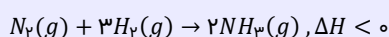
این فرایند در واقع یک فرایند دو مرحله‌ای است. واکنش مرحله اول این فرایند به صورت زیر است:



در این مرحله، هیدرازین تولید می‌شود. این مرحله گرماگیر بوده و واکنش‌دهنده‌های آن (نیتروژن و هیدروژن) پایدارتر از هیدرازین هستند. با توجه به ناپایداری هیدرازین، این ماده به سرعت با هیدروژن واکنش داده و به همین علت نمی‌توان ΔH این مرحله را به صورت مستقیم حساب کرد. واکنش مرحله دوم این فرایند به صورت زیر است:



در این مرحله، گاز هیدرازین طی یک واکنش گرماده با هیدروژن، آمونیاک را تولید می‌کند. به علت گرماده بودن این واکنش، می‌توان گفت آمونیاک نسبت به واکنش‌دهنده‌ها (هیدروژن و هیدرازین) پایدارتر است. معادله واکنش کلی این فرایند نیز به صورت زیر است:



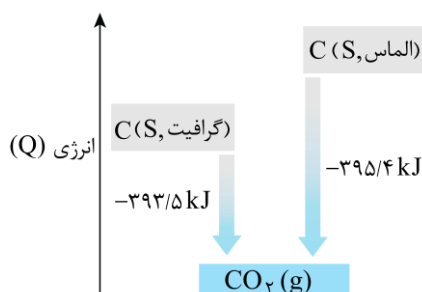
۸۲- کدام یک از مطالب زیر درست است؟

- (۱) در دما و فشار معین، به مجموع انرژی پتانسیل ذرات سازنده یک ماده، محتوای انرژی یا آنتالپی آن ماده گفته می‌شود.
- (۲) مقدار گرمای ویژه هر جسم، برخلاف ظرفیت گرمایی آن جسم، به جرم و نوع ماده سازنده آن جسم بستگی دارد.
- (۳) انتقال گرما میان دو جسم، قطعاً موجب کاهش تفاوت مجموع انرژی جنبشی ذرات سازنده دو جسم می‌شود.
- (۴) برای تولید مقدار مشخص از انرژی در واکنش سوختن، جرم الماس مورد نیاز کمتر از جرم گرافیت است.

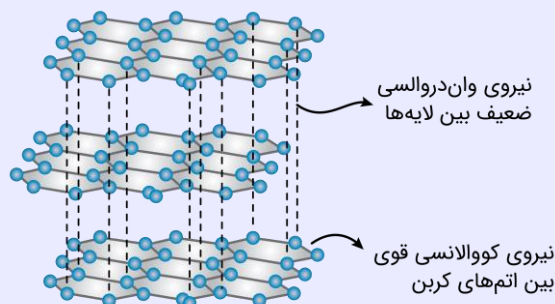
(متوسط - مفهومی - استاندارد) - صفحه ۶۴ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۴

به شکل‌های متفاوت مولکولی یا بلوری یک عنصر، آلوتروپ یا دگرشکل گفته می‌شود. الماس و گرافیت، دو آلوتروپ متفاوت از کربن هستند. در ساختار این دو ماده، فقط اتم کربن وجود دارد. هرچند که این دو ماده به‌طور خالص از اتصال اتم‌های کربن به یکدیگر تشکیل شده‌اند، اما روش اتصال اتم‌ها در ساختار آن‌ها متفاوت از یکدیگر است. نمودار زیر، روند سوختن الماس و گرافیت را نشان می‌دهد:



با توجه به داده‌های موجود در این نمودار، سطح انرژی الماس بالاتر از سطح انرژی گرافیت است؛ پس یک نمونه از الماس در مقایسه با یک نمونه از گرافیت ناپایدارتر است. با توجه به بالاتر بودن سطح انرژی الماس و منفی‌تر بودن تغییر آنتالپی واکنش سوختن این ماده، می‌توان گفت برای تولید مقدار مشخص از انرژی در واکنش سوختن، جرم الماس مورد نیاز کمتر از جرم گرافیت مورد نیاز خواهد بود.



با توجه به این تصاویر، گرافیت ساختار لایه‌ای دارد و در هر لایه از آن، اتم‌های کربن مطابق با یک ساختار دوبعدی به یکدیگر متصل شده‌اند. از آنجا که بین لایه‌های مختلف سازنده گرافیت نیروی ضعیف وان دروالسی وجود دارد، این لایه‌ها می‌توانند به راحتی بر روی یکدیگر بلغزند و به همین خاطر، گرافیت برخلاف الماس ماده بسیار نرمی است. به خاطر همین ویژگی گرافیت، از آن برای ساختن مغز مداد استفاده می‌شود. گرافیت برخلاف الماس رسانای قوی جریان الکتریسیته است، اما یک نمونه خالص از این ماده، رسانایی گرمایی ندارد. با توجه به فاصله نسبتاً زیاد میان لایه‌های کربنی موجود در ساختار گرافیت، تراکم اتم‌های کربن در این ماده کمتر از تراکم اتم‌های کربن در الماس بوده و به همین خاطر، چگالی گرافیت کمتر از چگالی الماس است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

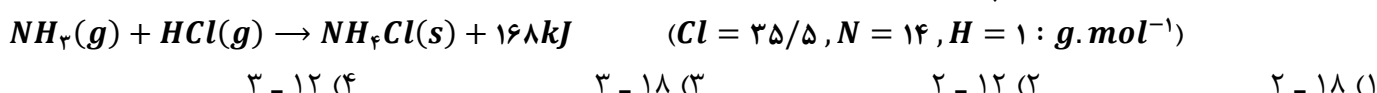
۱ به انرژی نهفته شده در یک نمونه ماده که ناشی از نیروهای نگه‌دارنده ذره‌های سازنده آن ماده است، انرژی پتانسیل گفته می‌شود. به‌عنوان مثال، انرژی نهفته شده در مولکول‌های متان که به هنگام سوزاندن ذرات این ماده آزاد می‌شود، انرژی پتانسیل ذرات سازنده متان است. در دما و فشار معین، به مجموع انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل همه ذرات سازنده یک ماده، محتوای انرژی یا آنتالپی آن ماده گفته می‌شود.

۲ مقدار ظرفیت گرمایی (C) به نوع ماده سازنده یک جسم بستگی دارد. برای مثال، مقدار ظرفیت گرمایی ۱۰ گرم آهن با مقدار ظرفیت گرمایی ۱۰ گرم آب متفاوت خواهد بود. به عبارت دیگر، میزان گرمای لازم برای افزایش دمای ۱۰ گرم آهن به اندازه 1°C متفاوت از مقدار گرمای لازم برای افزایش دمای ۱۰ گرم آب به اندازه 1°C است. علاوه بر نوع ماده، مقدار ظرفیت گرمایی یک جسم (C)، به جرم آن جسم نیز وابسته است. در واقع با افزایش جرم، مقدار ظرفیت گرمایی آن جسم نیز افزایش پیدا می‌کند. به‌عنوان مثال، ظرفیت گرمایی یک نمونه ۵۰۰ گرمی از آب، دو برابر ظرفیت گرمایی یک نمونه ۲۵۰ گرمی از آب است. این در حالی است که گرمای ویژه، فقط به جنس جسم بستگی داشته و هیچ وابستگی به جرم آن ندارد.

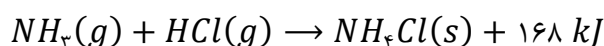
۳ انتقال گرما میان دو جسم، موجب افزایش دمای جسم سرد و کاهش دمای جسم گرم می‌شود. اگر مجموع انرژی جنبشی یا همان انرژی گرمایی جسم سرد بیشتر از جسم گرم باشد (به‌عنوان مثال، یک ۱۰۰ کیلوگرم آب 40°C و ۲۰۰ گرم آب 45°C)، انتقال گرما از جسم گرم به جسم سرد منجر به افزایش اختلاف انرژی گرمایی این دو ماده می‌گردد.



۸۳- با انرژی حاصل از واکنش مقدار کافی گاز هیدروژن کلرید با ۱۰۲ گرم گاز آمونیاک بر اساس معادله زیر، چند کیلوگرم آب را می‌توان از دمای 353K به نقطه جوش رساند و با استفاده از نمک تولید شده، چند کیلوگرم محلول آبی با درصد جرمی ۱۰/۷٪ می‌توان تولید کرد؟ ($c_{\text{آب}} = 4/2 \text{ J} \cdot \text{g}^{-1} \cdot ^\circ\text{C}^{-1}$)



واکنش مورد نظر به صورت زیر انجام می‌گیرد:



ابتدا گرمای تولید شده را حساب می‌کنیم:

$$? \text{ kJ گرما} = 102 \text{ g } NH_3 \times \frac{1 \text{ mol } NH_3}{17 \text{ g } NH_3} \times \frac{168 \text{ kJ گرما}}{1 \text{ mol } NH_3} = 6 \times 168 \text{ kJ}$$

دمای ۳۵۳ کلوین، معادل با دمای ۸۰ درجه سلسیوس است. برای به جوش آوردن نمونه آب، باید دمای آن را ۲۰ درجه افزایش داده و مقدار دما را به ۱۰۰°C برسانیم. حال جرم آبی که دمای آن در اثر این گرما، ۲۰ درجه سانتی‌گراد افزایش می‌یابد را به دست می‌آوریم. در این رابطه داریم:

$$Q = mc\Delta\theta \Rightarrow (6 \times 168 \text{ kJ}) \times \frac{1000 \text{ J}}{1 \text{ kJ}} = \left(x \text{ kg} \times \frac{1000 \text{ g}}{1 \text{ kg}}\right) \times 4/2 \times 20 \Rightarrow x = 12 \text{ kg}$$

در قدم بعد، جرم نمک تولید شده و جرمی از محلول با غلظت ۱۰/۷ درصد جرمی از نمک که تولید می‌شود را محاسبه می‌کنیم:

$$? \text{ mol } NH_4Cl = 102 \text{ g } NH_3 \times \frac{1 \text{ mol } NH_3}{17 \text{ g } NH_3} \times \frac{1 \text{ mol } NH_4Cl}{1 \text{ mol } NH_3} \times \frac{53/5 \text{ g } NH_4Cl}{1 \text{ mol } NH_4Cl} = 321 \text{ g}$$

$$? \text{ kg محلول} = 321 \text{ g } NH_4Cl \times \frac{100 \text{ g محلول}}{10/7 \text{ g } NH_4Cl} \times \frac{1 \text{ kg محلول}}{1000 \text{ g محلول}} = 3 \text{ kg}$$



۸۴- آنتالپی سوختن نوعی آلکین برابر با ۱۸۴۸- کیلوژول بر مول است. تعداد پیوندهای اشتراکی در ساختار این آلکین کدام است؟

(آنتالپی پیوندهای $C \equiv C$, $C = C$, $C - C$, $C - H$ و $O - H$ با یکای کیلوژول بر مول، به ترتیب برابر ۴۱۴، ۳۴۸، ۸۲۰، ۴۹۵ و ۴۶۳ در نظر گرفته شود و همه مواد شرکت‌کننده گازی هستند.)

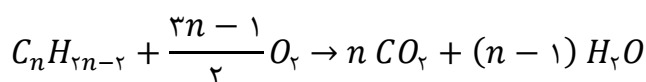
۱۴ (۴)

۱۱ (۳)

۸ (۲)

۵ (۱)

آلکین‌ها، گروهی از هیدروکربن‌های خطی با یک پیوند سه‌گانه و با فرمول شیمیایی کلی C_nH_{2n-2} هستند. واکنش موازنه شده سوختن یک نوع آلکین با فرمول شیمیایی کلی C_nH_{2n-2} به صورت زیر است:



مقدار آنتالپی سوختن آلکین مورد نظر برابر با ۱۸۴۸- کیلوژول بر مول است. یک آلکین n کربنه با فرمول مولکولی C_nH_{2n-2} در ساختار مولکولی خود یک پیوند سه‌گانه کربن-کربن و $n-2$ پیوند یگانه کربن-کربن و $2n-2$ پیوند اشتراکی $C-H$ دارد. جدول زیر شمار پیوندهای موجود در ساختار سه خانواده اصلی هیدروکربن‌ها را نشان می‌دهد:

نوع هیدروکربن	فرمول کلی	پیوند $C-C$	پیوند $C=C$	پیوند $C \equiv C$	پیوند $C-H$	کل پیوندها
آلکان	C_nH_{2n+2}	$n-1$	-	-	$2n+2$	$3n+1$
آلکن	C_nH_{2n}	$n-2$	۱	-	$2n$	$3n$
آلکین	C_nH_{2n-2}	$n-2$	-	۱	$2n-2$	$3n-1$

بر این اساس، آنتالپی سوختن آلکین مورد نظر را حساب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} & \left[\text{مجموع آنتالپی پیوند فراورده‌ها} \right] - \left[\text{مجموع آنتالپی پیوند واکنش‌دهنده‌ها} \right] = \text{آنتالپی واکنش} \\ & ((100 \times 2n) + (463 \times 2 \times (n-1))) - ((1820 + (348 \times (n-2))) + (414 \times (2n-2)) + (495 \times \frac{3n-1}{2})) = -1848 \text{ kJ} \rightarrow n = 3 \end{aligned}$$

با توجه به محاسبات بالا، آلکین مورد نظر معادل با C_3H_4 است که در ساختار خود ۸ پیوند اشتراکی دارد.

چون در ساختار آلکین‌ها یک پیوند سه‌گانه $C \equiv C$ وجود دارد، این مواد سیرنشده هستند. در واقع هریک از اتم‌های کربن در ساختن پیوند اشتراکی $C \equiv C$ فقط به ۲ اتم متصل هستند. به همین خاطر، واکنش‌پذیری آلکین‌ها در مقایسه با آلکان‌ها و آلکن‌ها بیشتر است. در یک آلکین با n اتم کربن، $n - 2$ پیوند $C - C$ ، تعداد $2n - 2$ پیوند $C - H$ و یک پیوند $C \equiv C$ دیده می‌شود. بر این اساس، می‌توان گفت در یک آلکین با n اتم کربن، مجموعاً $3n - 1$ پیوند اشتراکی (کووالانسی) بین اتم‌ها وجود دارد.



۸۵- کدام یک از مطالب زیر نادرست است؟

- (۱) قدر مطلق مقدار گرمای مبادله‌شده در تبخیر مقدار مشخص از یک مایع، نسبت به انجماد همان مقدار مایع، بیشتر است.
- (۲) برای شکستن یک مول پیوند اشتراکی $Cl - Cl$ ، در مقایسه با یک مول پیوند $H - F$ ، انرژی بیشتری نیاز است.
- (۳) از میان چربی و روغن، ماده‌ای که ذرات آن در دمای اتاق جنبش‌های کمتری دارد، واکنش‌پذیری پایین‌تری دارد.
- (۴) در واکنش ترمیت، یک فلز مذاب تولید شده و این واکنش، همانند انحلال لیتیم سولفات در آب، گرماده است.

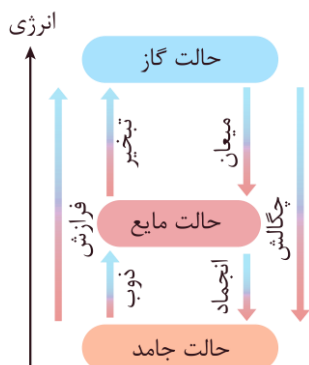
(متوسط - مفهومی - استاندارد) - صفحه ۶۹ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۲

هرچقدر که اتم‌های دخیل در تشکیل یک پیوند اشتراکی با قدرت بیشتری یکدیگر را جذب کنند، انرژی مورد نیاز برای جدا کردن آن دو اتم (آنتالپی پیوند) نیز بیشتر خواهد بود. عوامل زیر، بر مقدار آنتالپی پیوندهای اشتراکی مؤثر هستند:

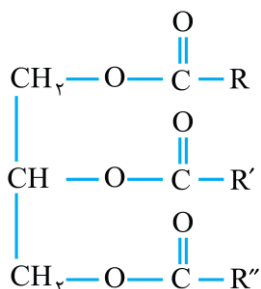
- مرتب‌بندی پیوند: هرچه مرتبه پیوند اشتراکی بین دو اتم بیشتر باشد، آنتالپی پیوند بیشتر خواهد بود. به عبارت دیگر، به شرط ثابت بودن نوع اتم‌های دخیل در یک پیوند، آنتالپی پیوند سه‌گانه بیشتر از دوگانه و آنتالپی پیوند دوگانه نیز بیشتر از یگانه خواهد شد. به عنوان مثال، آنتالپی پیوند $N \equiv N$ بیشتر از پیوند $N = N$ و آنتالپی پیوند $N = N$ نیز بیشتر از پیوند $N - N$ است.
- شعاع اتم‌های دخیل در تشکیل پیوند: هرچقدر که شعاع اتم‌های دخیل در تشکیل پیوندهای کووالانسی کوچک‌تر باشد، آن اتم‌ها با قدرت بیشتری یکدیگر را جذب کرده و آنتالپی آن پیوند بیشتر می‌شود. به عنوان مثال، چون ترتیب شعاع اتمی کلر، برم و ید به صورت $Cl > Br > I$ است، آنتالپی پیوند میان این اتم‌ها با اتم هیدروژن به صورت $HCl > HBr > HI$ می‌شود.
- چون اتم‌های هیدروژن و فلوئور، در مقایسه با اتم کلر شعاع کوچک‌تری دارند؛ می‌توان گفت آنتالپی پیوند $Cl - Cl$ کمتر از آنتالپی پیوند $H - F$ است و بر همین اساس، برای شکستن یک مول پیوند $Cl - Cl$ ، نسبت به یک مول پیوند $H - F$ ، به انرژی کمتری نیاز است.

بررسی سایر گزینه‌ها:



همانطور که در نمودار مقابل مشخص است، تفاوت سطح انرژی حالت جامد و مایع کمتر از تفاوت سطح انرژی حالت گاز و مایع است؛ پس برای مقدار مشخص از ماده، گرمای مبادله‌شده در فرایند تبدیل حالت از جامد به مایع یا از مایع به جامد کمتر از فرایند تبدیل حالت از گاز به مایع یا از مایع به گاز است. بر همین اساس، می‌توان گفت مقدار گرمای مبادله‌شده در تبخیر یک مایع بیشتر از گرمای منتقل‌شده در انجماد همان مقدار مایع است. در واقعیت نیز برای تبخیر یک ماده مایع مثل آب، مقدار انرژی مبادله شده بیشتر از حالتی است که آن ماده مایع بخواند منجمد شود.

ساختار کلی ذرات سازنده روغن‌ها و چربی‌ها، به صورت زیر است:



روغن و چربی از جمله ترکیبات آلی هستند که به دلیل تفاوت در ساختار، خواص فیزیکی و شیمیایی گوناگونی دارند. به طور کلی، پیوندهای دوگانه بیشتری در ساختار بخش هیدروکربنی روغن‌ها نسبت به چربی‌ها وجود دارد و به همین علت می‌توان گفت روغن‌ها واکنش‌پذیری

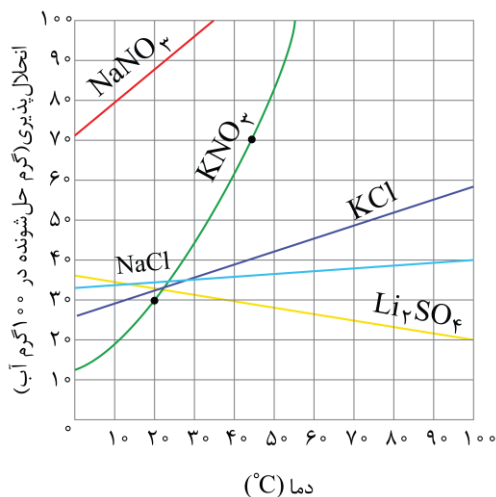
بیشتری داشته و در مقایسه با چربی‌ها پایداری کمتری دارند. با توجه به آن که جنبش‌های نامنظم در حالت مایع نسبت به جامد بیشتر است و با توجه به جامد بودن چربی‌ها و مایع بودن روغن‌ها، می‌توان نتیجه گرفت ذرات روغن نسبت به ذرات چربی جنبش‌های بیشتری دارند.

چربی‌ها

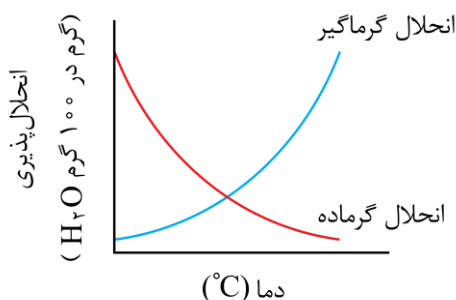
ارزش سوختی کربوهیدرات و پروتئین مساوی بوده و ارزش سوختی چربی بیش از دو برابر (به تقریب ۲/۲ برابر) ارزش سوختی این دو ماده است؛ بنابراین برای تأمین انرژی فعالیت‌های فیزیکی در مدت طولانی، به علت ارزش سوختی بیشتر چربی‌ها، استفاده از موادی با درصد چربی بالاتر، مناسب‌تر است. مقایسه ارزش سوختی مواد غذایی مطرح شده در کتاب درسی به صورت زیر است:

چربی < بادام < بادام زمینی < پنیر < شکلات < پروتئین = کربوهیدرات < نان < برگ زردآلو < تخم مرغ < شیر < سیب
همچنین با توجه به ارزش سوختی بالای چربی، مقدار اضافی انرژی دریافتی از مواد غذایی عمدتاً به شکل چربی در بدن ذخیره می‌شود.

از آنجا که واکنش $Fe_2O_3(s) + 2Al(s) \rightarrow Al_2O_3(s) + 2Fe(l)$ به طور طبیعی انجام می‌شود، می‌توان گفت واکنش پذیری آلومینیم از فلز آهن بیشتر است. این واکنش، اصطلاحاً به واکنش ترمیت معروف بوده و از آهن مذاب تولید شده طی آن در صنعت جوشکاری استفاده می‌شود. واکنش ترمیت، همانند واکنش میان سایر ترکیب‌های فلزی با عناصر فلزی واکنش پذیرتر از آن‌ها، از جمله واکنش‌های گرماده است. از طرفی می‌دانیم که افزایش دما، می‌تواند موجب افزایش مقدار انحلال پذیری برخی از مواد (مواد با انحلال گرماگیر) در آب شده و در نقطه مقابل، می‌تواند موجب کاهش مقدار انحلال پذیری برخی از مواد (مواد با انحلال گرماده) دیگر در آب شود. نمودار زیر، روند تغییر مقدار انحلال پذیری برخی از نمک‌های مهم در آب را نشان می‌دهد:



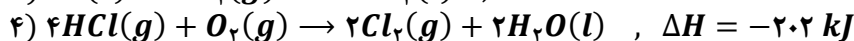
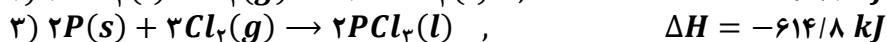
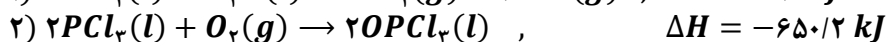
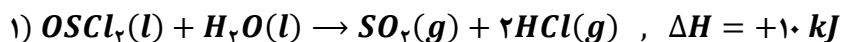
با توجه به نمودار انحلال پذیری مواد، می‌توان نوع مبادله گرما در واکنش انحلال نمک مورد نظر در آب را تشخیص داد. در این رابطه داریم:



با توجه به نمودارهای بالا، نمک لیتیم سولفات طی یک فرایند گرماده در آب حل شده و نمودار انحلال پذیری-دمای آن به صورت نزولی است.



۸۶- با توجه به واکنش های مقابل:



به ازای تولید مجموعاً ۸ مول فراورده در واکنش $2P(s) + 2SO_2(g) + 5Cl_2(g) \rightarrow 2OSOCl_2(l) + 2OPCL_3(l)$ کیلوژول انرژی آزاد می شود؟

۲۸۹۵ (۴)

۲۹۷۶ (۳)

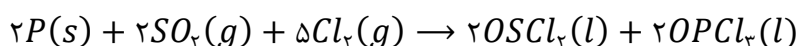
۲۱۶۶ (۲)

۲۰۸۴ (۱)

(سخت - محاسباتی - زمان بر) - صفحه ۷۵ - ۱۱۰۲

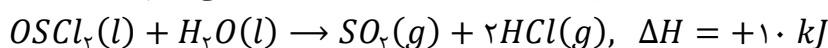
پاسخ: گزینه ۲

واکنش اصلی به صورت زیر انجام می گیرد:



با استفاده از قانون هس می توانیم آنتالپی این واکنش را به دست آوریم. ابتدا از میان مواد شرکت کننده در واکنش ها، موادی که غیر تکراری هستند را انتخاب می کنیم و ضریب و جهت آن ها را مطابق واکنش اصلی قرار می دهیم. در میان مواد شرکت کننده در واکنش های اول تا چهارم، $OSOCl_2(l)$ در واکنش اول، $OPCL_3(l)$ در واکنش دوم و $P(s)$ در واکنش سوم غیر تکراری هستند، پس ضریب و جهت این مواد را در این سه واکنش، مطابق واکنش اصلی قرار می دهیم. بر این اساس داریم:

واکنش اول: ضریب $OSOCl_2(l)$ نصف واکنش اصلی و جهت آن معکوس است؛ پس این واکنش را در (-2) ضرب می کنیم:



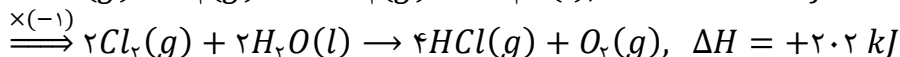
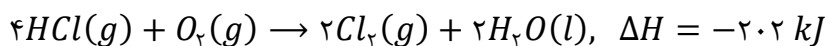
واکنش دوم: ضریب و جهت $OPCL_3(l)$ مشابه واکنش اصلی است؛ پس این واکنش را بدون تغییر قرار می دهیم:



واکنش سوم: ضریب و جهت $P(s)$ مشابه واکنش اصلی است؛ پس این واکنش را بدون تغییر قرار می دهیم:



اگر پس از در نظر گرفتن مواد غیر تکراری، واکنشی باقی ماند، در میان مواد شرکت کننده در این واکنش به دنبال ماده ای می گردیم که در واکنش اصلی نبوده و تنها در یک واکنش دیگر دیده شود. ضریب این ماده را در این واکنش برابر واکنش دیگر قرار می دهیم، اما جهت آن را عکس قرار می دهیم تا با یکدیگر حذف شوند و در واکنش مجموع نیایند. به عنوان مثال، در واکنش چهارم $HCl(g)$ وجود دارد که در واکنش اصلی نیست اما در واکنش اول دیده می شود. واکنش چهارم را در (-1) ضرب می کنیم تا ضریب $HCl(g)$ در واکنش های اول و چهارم برابر و جهت آن ها معکوس باشد:



آنتالپی واکنش اصلی برابر مجموع آنتالپی سایر واکنش ها است؛ پس آنتالپی واکنش اصلی را حساب می کنیم:

$$\Delta H = (-20) + (-650/2) + (-614/8) + (+202) = -1083 \text{ kJ}$$

به ازای تولید مجموعاً ۴ مول فراورده در واکنش اصلی، 1083 kJ کیلوژول گرما آزاد شده است، پس به ازای تولید ۸ مول فراورده در این واکنش، ۲ برابر این مقدار یعنی 2166 kJ گرما آزاد می شود.



۸۷- کدام موارد از عبارات های داده شده درست هستند؟

الف - انرژی آزاد شده در واکنش اکسایش گلوکز، ناشی از تفاوت انرژی گرمایی مواد واکنش دهنده و فراورده ها خواهد بود.

ب - در یخچال صحرایی، گرمای لازم برای تبخیر آب از بدنه ظرف بیرونی، فقط از هوای گرم اطراف کوزه گرفته می شود.

ج - نسبت شمار اتم ها به شمار عناصر در گاز هیدرازین برابر ۳ بوده و این ماده از آمونیاک و نیتروژن، ناپایدارتر است.

د - آنتالپی واکنش تولید گاز مرداب از عناصر سازنده را می توان به طور دقیق با استفاده از قانون هس محاسبه کرد.

(۴) «الف» و «د»

(۳) «ج» و «د»

(۲) «ب» و «ج»

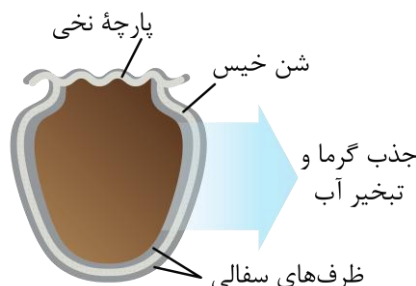
(۱) «الف» و «ب»

عبارت‌های (ج) و (د) درست هستند.

بررسی موارد:

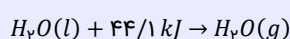
الف) واکنش اکسایش گلوکز (قند خون) در بدن انسان که منجر به تأمین انرژی مورد نیاز برای سلول‌ها می‌شود را در نظر بگیرید. معادله این واکنش شیمیایی به صورت $C_6H_{12}O_6(s) + 6O_2(g) \rightarrow 6CO_2(g) + 6H_2O(l) + Q$ است. با وجود تولید انرژی در این واکنش شیمیایی، دمای بدن تغییر محسوسی نمی‌کند. در این شرایط، چون دمای مواد واکنش‌دهنده پیش از آغاز واکنش با دمای مواد فراورده پس از پایان واکنش برابر است ($\Delta\theta = 0$)؛ پس انرژی آزاد شده در این فرایند را نمی‌توان ناشی از تغییر در مقدار انرژی جنبشی مواد شرکت‌کننده در آن دانست. در واقع، انرژی آزاد شده در این واکنش از تغییر در مقدار انرژی پتانسیل مواد، که به دنبال تغییر در نحوه برقراری پیوندهای شیمیایی بین اتم‌های سازنده این مواد است، منشأ می‌گیرد.

پ) در یخچال صحرایی، آبی که در بدنه ظرف سفالی بیرونی وجود دارد با گرفتن گرما از مواد درون ظرف سفالی داخلی و محیط اطراف، تبخیر می‌شود. این آب به علت گرفتن گرما از مواد موجود در ظرف داخلی، موجب خنک ماندن این مواد می‌شود. یخچال صحرایی دستگاهی ساده و ارزان است که توسط محمد باه آبا، معلم نیجریایی طراحی شده است. ساختار این دستگاه به صورت زیر است:



یخچال صحرایی

در ساختار یخچال صحرایی، دو ظرف سفالی که از جنس خاک رس ساخته شده‌اند، درون یکدیگر قرار گرفته و فضای میان آن‌ها با شن خیس پر می‌شود. درپوش این مجموعه نیز پوششی نخی و مرطوب است که تهویه را به آسانی انجام می‌دهد. با گذشت زمان، به مرور آب در بدنه سفالی ظرف بیرونی نفوذ کرده و به آرامی تبخیر می‌شود. معادله فرایند انجام شده به صورت زیر است:



با توجه به معادله این واکنش، برای تبخیر هر مول آب ۴۴/۱ کیلوژول گرما از محیط جذب می‌شود. فرایند جذب گرما در این دستگاه، فضای داخلی و محتویات درونی آن را خنک کرده و شرایط را برای سالم نگه‌داشتن غذا به مدت طولانی‌تر مناسب می‌کند.

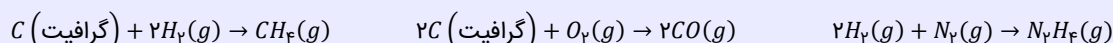
ج) سطح آنتالپی هیدرازین (N_2H_4) از سطح آنتالپی آمونیاک (NH_3) و نیتروژن (N_2) بالاتر است. توجه داریم که نسبت شمار اتم‌ها به عنصرها در هیدرازین برابر با ۳ = $\frac{6}{2}$ است.

د) گاز متان که نخستین بار از سطح مرداب‌ها جمع‌آوری شده و به همین علت به گاز مرداب معروف است، ساده‌ترین هیدروکربن بوده و همچنین در معادن از زغال‌سنگ آزاد می‌شود. این گاز در زیر آب و به وسیله باکتری‌های بی‌هوازی از تجزیه گیاهان تولید می‌شود؛ اما تأمین شرایط بهینه برای انجام واکنش تولید این ماده از عناصر سازنده ($CH_4(g)$) + $2H_2(g)$ (گرافیت، $C(s)$) در آزمایشگاه بسیار دشوار و پرهزینه است و برای تعیین ΔH این واکنش، باید از روشی غیرمستقیم مانند قانون هس بهره بگیریم. محاسبه آنتالپی واکنش‌ها با استفاده از قانون هس، یک روش دقیق است.

روش‌های اندازه‌گیری گرمای واکنش

گرمای حاصل از واکنش‌های شیمیایی را به دو روش مستقیم و غیرمستقیم می‌توان محاسبه کرد. در روش‌های مستقیم، واکنش مورد نظر در حضور سایر مواد انجام می‌شود و به کمک تغییر دمای مواد، مقدار گرمای حاصل از واکنش محاسبه می‌شود. استفاده از انواع گرماسنج‌های مختلف، از جمله روش‌های مستقیم محاسبه گرمای یک واکنش هستند. در روش‌های غیرمستقیم، بدون انجام شدن واکنش مورد نظر و با استفاده از داده‌های آزمایشگاهی، می‌توان مقدار گرمای یک واکنش را محاسبه کرد. استفاده از قانون هس، استفاده از آنتالپی پیوند و استفاده از آنتالپی سوختن، از جمله روش‌های غیرمستقیم محاسبه مقدار گرمای یک واکنش هستند. توجه داریم که به کمک این روش‌ها، می‌توان مقدار ΔH واکنش‌هایی که مرحله‌ای از یک واکنش پیچیده هستند و یا به آسانی انجام نمی‌شوند را محاسبه کرد.

از روش غیرمستقیم، برای محاسبه تغییر آنتالپی واکنش‌هایی استفاده می‌شود که تأمین شرایط مورد نیاز برای انجام شدن آن‌ها دشوار است. واکنش‌های زیر، معادله برخی از فرایندهایی را نشان می‌دهد که ΔH آن‌ها را نمی‌توان به‌طور مستقیم اندازه‌گیری کرد:



با توجه به معادله‌های بالا، می‌توان گفت ΔH واکنش‌های تولید هیدرازین (N_2H_4)، گاز متان (CH_4)، کربن مونوکسید (CO) و آب اکسیژنه (هیدروژن پراکسید یا H_2O_2) از عناصر سازنده این مواد را نمی‌توان به‌طور مستقیم اندازه‌گیری کرد.



۸۸- ظرفیت گرمایی مایع A ، دو برابر ظرفیت گرمایی مایع B است. اگر جرم مایع A ، چهار برابر جرم مایع B باشد، کدام مورد زیر نادرست است؟

- (۱) گرمای ویژه مایع A ، نصف گرمای ویژه مایع B است.
- (۲) پس از دادن گرمای برابر به این دو ماده، دمای آن‌ها به‌یقین با یکدیگر یکسان نخواهد شد.
- (۳) در صورت دادن مقدار گرمای برابر به این دو ماده، تغییر دمای مایع B ، دو برابر مایع دیگر است.
- (۴) اگر تغییر دمای مایع A ، دو برابر مایع دیگر باشد، گرمای داده شده به این ماده، ۴ برابر ماده دیگر بوده است.

(متوسط - محاسباتی و مفهومی - استاندارد) - صفحه ۶۰-۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۲

مقایسه ظرفیت گرمایی و گرمای ویژه مواد مختلف از مباحث مهم کنکور سراسری است؛ این سؤال نیز با ایده گرفتن از یکی از سؤال‌های کنکور ۱۴۰۴ طراحی شده است. بر اساس رابطه $Q = C \times \Delta\theta$ ، اگر به دو ماده گرما (Q) یکسان بدهیم، چون ظرفیت گرمایی (C) مایع A دو برابر مایع B است، تغییر دما ($\Delta\theta$) مایع B دو برابر مایع A است. چون دمای اولیه دو مایع را نمی‌دانیم، نمی‌توان در رابطه با دمای نهایی دو مایع نظر داد و ممکن است دمای نهایی این مواد با هم یکسان شود.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) با توجه به رابطه $C = m \times c$ ، اگر ظرفیت گرمایی (C) و جرم (m) مایع A به‌ترتیب ۲ و ۴ برابر ظرفیت گرمایی (C) و جرم (m) مایع B باشد، گرمای ویژه (c) مایع A نصف گرمای ویژه مایع B است. در این رابطه داریم:

$$Q = m \times c \implies \frac{c_A}{c_B} = \frac{\frac{Q_A}{m_A}}{\frac{Q_B}{m_B}} = \frac{C_A}{C_B} \times \frac{m_B}{m_A} = 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

۲) با توجه به رابطه $Q = C \times \Delta\theta$ ، با دادن گرمای یکسان به این دو ماده، تغییر دمای مایع B دو برابر مایع A خواهد بود. در این رابطه داریم:

$$Q = C \times \Delta\theta \implies \frac{\Delta\theta_B}{\Delta\theta_A} = \frac{\frac{Q_B}{C_B}}{\frac{Q_A}{C_A}} = \frac{Q_B}{Q_A} \times \frac{C_A}{C_B} = 1 \times 2 = 2$$

۳) بر اساس رابطه $Q = C \times \Delta\theta$ داریم:

$$\frac{Q_A}{Q_B} = \frac{C_A}{C_B} \times \frac{\Delta\theta_A}{\Delta\theta_B} = 2 \times 2 = 4$$

ظرفیت گرمایی و گرمای ویژه

ظرفیت گرمایی (C) یک ماده، مقدار گرمایی است که در دما و فشار مشخص به آن ماده داده می‌شود تا دمای آن به اندازه 1°C بالا رود. همچنین ظرفیت گرمایی ویژه یا گرمای ویژه (c) یک ماده، مقدار گرمایی است که به یک گرم از ماده در دما و فشار مشخص داده می‌شود، تا دمای آن 1°C افزایش یابد. پس گرمای ویژه، به نوع، فشار و دمای ماده بستگی داشته اما به جرم بستگی ندارد. ظرفیت گرمایی به هر چهار مورد نوع ماده، دما، فشار و جرم وابسته است.

شاخص دمایی	واحد	وابستگی به نوع ماده	وابستگی به جرم ماده	وابستگی به دما و فشار
گرمای ویژه	$J \cdot g^{-1} \cdot K^{-1}$	دارد	ندارد	دارد
ظرفیت گرمایی	$J \cdot K^{-1}$	دارد	دارد	دارد



۸۹- آنتالپی سوختن گاز اتن برابر با $1400 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ است. با انرژی حاصل از سوزاندن ۷۲ لیتر گاز اتن در شرایط استاندارد، دمای چند کیلوگرم فلز آلومینیم را می‌توان به اندازه 40°C افزایش داد؟ (گرمای ویژه آلومینیم برابر 0.9 ژول بر گرم بر درجه سانتی‌گراد است.)

(۱) ۲۵۰ (۲) ۱۲۵ (۳) ۵۰ (۴) ۲۵

متوسط - محاسباتی - استاندارد (صفحه ۷۳ - ۱۱۰۲)

پاسخ: گزینه ۲

ساده‌ترین عضو خانواده آلکن‌ها، اتن با فرمول شیمیایی C_2H_4 است. این ماده در بیشتر گیاهان وجود دارد. برای مثال، موز و گوجه‌فرنگی رسیده گاز اتن آزاد می‌کنند. گاز اتن آزاد شده از یک موز یا گوجه‌فرنگی رسیده به نوبه خود موجب رسیدن سریع‌تر سایر میوه‌های نارس می‌شود. به همین خاطر، در کشاورزی از گاز اتن به‌عنوان «عمل آورنده» استفاده می‌شود. در گذشته گاز اتن به نام «اتیلن» معروف بوده است. در قدم اول، گرمای حاصل از سوختن ۷۲ لیتر گاز اتن (C_2H_4) در شرایط استاندارد را محاسبه می‌کنیم. در این رابطه داریم:

$$Q = 4/5 \times 10^6 \text{ J} \implies 1400 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \times \frac{1 \text{ mol } C_2H_4}{22.4 \text{ L } C_2H_4} \times 72 \text{ L } C_2H_4 = 4500 \text{ kJ} = \text{انرژی } 1400 \text{ kJ}$$

در قدم بعد، مقدار آلومینیمی که دمای آن افزایش پیدا می‌کند را محاسبه می‌کنیم.

$$Q = mc\Delta\theta \implies 4/5 \times 10^6 = m \times 0.9 \times 40 \implies m = 125000 \text{ g} \implies m = 125 \text{ kg}$$



۹۰- کدام یک از مطالب زیر نادرست است؟

- (۱) در بین ترکیب‌های آلی، همواره ترکیبی که جرم مولی بیشتری داشته باشد، گرمای سوختن مولی آن منفی‌تر است.
- (۲) به کمک گرماسنج لیوانی، می‌توان گرمای مبادله شده در انحلال پتاسیم کلرید در آب را در فشار ثابت اندازه گرفت.
- (۳) با افزایش اتم‌های کربن در آلکان‌ها، آنتالپی سوختن منفی‌تر شده، ارزش سوختی کاهش و دمای جوش افزایش می‌یابد.
- (۴) ΔH واکنش سوختن گلوکز در حالتی که H_2O به حالت مایع تولید شود، منفی‌تر از زمانی است که بخار آب تولید شود.

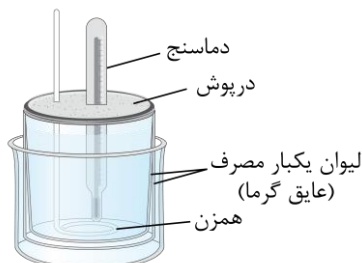
متوسط - مفهومی - استاندارد (صفحه ۷۴ - ۱۱۰۲)

پاسخ: گزینه ۱

این عبارت درباره یک دسته خاص از ترکیب‌های آلی مثلاً آلکان‌ها یا الکل‌های تک عاملی و ... درست است، ولی نمی‌توان آن را در مقایسه تمام ترکیب‌های آلی به کار گرفت. برای مثال، با اینکه جرم مولی متانول (CH_3OH) بیشتر از متان (CH_4) است، اما متانول گرمای سوختن مولی کمتری نسبت به متان دارد. به‌جز مثال گفته شده، هر آلکان در مقایسه با الکل هم‌کربن با خود، آنتالپی سوختن منفی‌تر و جرم مولی کمتری دارد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۲ در روش‌های مستقیم گرماسنجی، باید مقداری از واکنش‌دهنده‌ها را در مجاورت با یکدیگر قرار داده و گرمای مبادله شده در واکنش میان آن‌ها را اندازه بگیریم. یکی از وسایل مورد استفاده برای اندازه‌گیری مستقیم گرمای واکنش‌ها، گرماسنج لیوانی است. این دستگاه ساده با استفاده از دو لیوان یکبار مصرف، یک درپوش عایق، یک دماسنج و یک همزن ساخته می‌شود. ساختار این وسیله به صورت زیر است:



برای تعیین گرمای یک واکنش به کمک این گرماسنج، مقدار مشخصی از محلول‌ها یا مواد واکنش‌دهنده را در مجاورت با یکدیگر قرار داده و پس از تکمیل شدن واکنش، دمای نهایی محلول موجود در گرماسنج را اندازه‌گیری می‌کنیم. در مرحله بعد، با توجه به تغییر دمای محتویات گرماسنج ($\Delta\theta$) و با استفاده از رابطه $Q = mc\Delta\theta$ ، مقدار گرمای مبادله شده در واکنش مورد نظر را در فشار ثابت به دست می‌آوریم. توجه داریم که با استفاده از گرماسنج لیوانی، می‌توان گرمای مبادله شده طی انحلال نمک‌ها در آب را اندازه‌گیری کرد.

۳ در آلکان‌ها، آلکن‌ها یا آلکین‌ها با افزایش شمار اتم‌های کربن، آنتالپی سوختن منفی‌تر و ارزش سوختی کمتر می‌شود. با افزایش شمار اتم‌های کربن در این مواد، جرم مولی نیز بیشتر شده و دمای جوش افزایش می‌یابد. برای مثال، بوتان (آلکان ۴ کربنه) نسبت به پروپان (آلکان ۳ کربنه) آنتالپی سوختن منفی‌تری دارد و ارزش سوختی آن کمتر است. دمای جوش بوتان نیز در مقایسه با پروپان بیشتر است.

مقایسه آنتالپی سوختن مواد

به طور کلی، برای مقایسه تغییر آنتالپی سوختن دو نمونه از هیدروکربن‌ها ابتدا به تعداد اتم‌های کربن در هر نمونه نگاه می‌کنیم؛ هر کدام تعداد اتم‌های کربن بیشتری داشت، ΔH واکنش سوختن آن نمونه، منفی‌تری است. همچنین اگر تعداد اتم‌های کربن در هر دو نمونه مساوی باشد، نمونه‌ای که اتم هیدروژن بیشتری داشته باشد، ΔH واکنش سوختن منفی‌تری دارد. برای مثال داریم:

۱) مقایسه گرمای آزاد شده از سوختن ۱/۵ مول بوتان و ۳/۵ مول اتان: مقدار کربن در نمونه بوتان و نمونه اتان به ترتیب برابر ۶ و ۷ مول اتم کربن هستند؛ پس گرمای آزاد شده از سوختن نمونه اتان بیشتر از نمونه بوتان است.

۲) مقایسه گرمای آزاد شده از سوختن ۱ مول پروپن و ۱/۵ مول اتان: مقدار کربن در این دو نمونه برابر ۳ مول است، پس تعداد اتم‌های هیدروژن را در این دو نمونه مقایسه می‌کنیم. مقدار هیدروژن در نمونه پروپن برابر ۶ مول و در نمونه اتان برابر ۹ مول است، پس از سوختن نمونه اتان گرمای بیشتری آزاد می‌شود.

مقایسه ارزش سوختی مواد

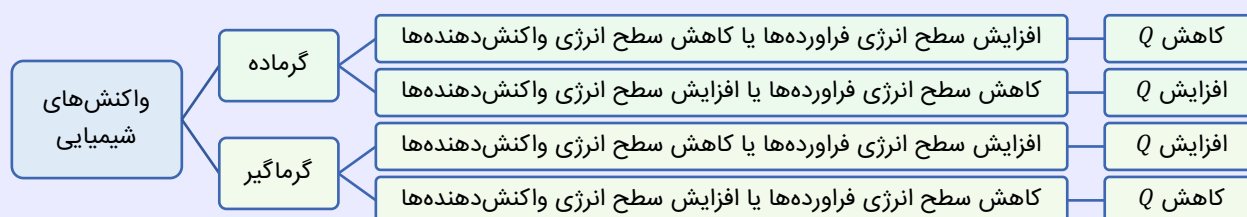
◀ برای مقایسه ارزش سوختی اعضای خانواده آلکان‌ها، آلکن‌ها و آلکین‌ها به صورت مجزا، هر کدام تعداد کربن کمتری داشت، ارزش سوختی بیشتری دارد. به عنوان مثال، ارزش سوختی متان از تمامی آلکان‌ها بیشتر است. همچنین ارزش سوختی پروپن از ارزش سوختی ۱-هگزن بیشتر می‌باشد.

◀ همچنین در مقایسه آنتالپی سوختن یک آلکان و الکل هم‌کربن، آنتالپی سوختن آلکان منفی‌تر بوده و این ماده، ارزش سوختی بیشتری دارد. بر این اساس مقدار گرمای آزاد شده از یک مول متان بیشتر از یک مول متانول بوده و ارزش سوختی بیشتری دارد.

۴ سطح انرژی مواد در حالت مایع، پایین‌تر از سطح انرژی مواد در حالت گازی است. اگر فراورده یک واکنش گرماده به جای حالت گاز (g)، به حالت مایع (l) تولید شود، میزان پایداری فراورده‌های آن واکنش افزایش یافته و مقدار تغییر آنتالپی آن واکنش نیز بیشتر می‌شود.

تغییر گرما در واکنش‌ها

گفتیم که سطح انرژی مواد در حالت گاز (g) بیشتر از حالت مایع (l) و در حالت مایع نیز بیشتر از حالت جامد (s) است. بر این اساس، روند تغییر مقدار گرمای مبادله شده در واکنش‌های شیمیایی با توجه به تغییر حالت فیزیکی مواد شرکت‌کننده در آن‌ها مطابق با نمودار زیر خواهد بود:



بسته شبیه ساز کنکور

مارکوپولو منتشر شد!

✓ ۱۷ دوره کنکور سراسری از ۹۸ تا ۱۴۰۴؛ آپدیت شده و منطبق با

تفصیلات کنکور ۱۴۰۵

✓ پاسخنامه به سبک ماز؛ شامل بررسی دقیق گزینه‌ها، نکته‌ها،

جداول و گادرهای جمع‌بندی

✓ قابلیت تخمین رتبه و تراز کنکور سراسری؛ براساس نمرات

نهایی و درصدهای کنکور

✓ آزمون پیش‌بینی کنکور سراسری ۱۴۰۵ از نگاه طراحان ماز

✓ تحلیل پاسخنامه ویدیویی سؤالات کنکور توسط اساتید ماز

✓ بسته جامع آمادگی امتحانات نهایی خرداد ۱۴۰۵

• بانک کنکور به تفکیک درس به درس و مبحث به مبحث مناسب

دوران جمع‌بندی

• بانک کامل سؤالات شیمی و فیزیک کنکور تجربی مشترک با

رشته ریاضی



ثبت سفارش
از سایت مازمارکت
mazemarket.ir



اسکن کن!