



گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی

آزمون ماز | پایه دوازدهم



۳/۸ نیم سال دوم دوازدهم

☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------

۱/۵ پایه یازدهم

☐	☐	☐	☐	☐
--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------

ویژه کنکوری های ۱۴۰۵

دفترچه پاسخ

پنجشنبه ۷ اسفندماه ۱۴۰۴

- ✓ پاسخنامه سریع؛ برای بررسی فوری بعد از آزمون
- ✓ تحلیل تمام گزینه های هر سؤال؛ برای بررسی سؤالاتی که پاسخ نادرست داده اید
- ✓ نکات و درسنامه های آموزشی؛ برای یادگیری کامل مباحث هر سؤال
- ✓ مشاوره تستی؛ برای یادگیری انواع روش های حل تست
- ✓ استراتژی آزمون؛ برای یادگیری مدیریت زمان و مدیریت جلسه آزمون

دیس	مسئول درس	طراحان	ویراستاران
ریاضیات	حسین شفیع زاده سید جواد نظری مهرداد کیوان	مهرداد کیوان - حسین شفیع زاده علی منصف شکری - علیرضا شریف خطیبی رسول حاجی زاده	ندا فرهختی - مائده بادان فیروز حمیدرضا ولی پور - حسین صنمی یزدان نیک قدم - فؤاد خیر آبادی علی اسدی
فیزیک	سجاد صادقی زاده سعید احمدی	سجاد صادقی زاده - مهدی پارسا حامد نبی منصور - حسین عبدوی نژاد محمد جواد سورچی - سارا قانع امیررضا خوینی ها - مجید رجبی وندچالی احسان ایرانی	حامد نبی منصور حنا خلعتبری
شیمی	فرشاد هادیان فرد	فرشاد هادیان فرد - فرهنگ امیری عالیه میرزایی - طاهّا حق بین محمد حسین ذاکری - بهمن بازرگانی مهسا بایمانی نژاد	طاهّا حق بین - فرهنگ امیری امیرعلی حسینی فرد محمد دارابی جم

تیم اجرایی و تولید آزمون

مجتبی آدمیان

نازنین امیری

مائده بادان فیروز

زهره جعفری

مدیر تولید آزمون: محدثه شیخعلی



یک تیم با بیش از ۵۰۰ نفر در حال کار هستن تا آزمون‌های ماز با حداکثر کیفیت حاضر بشن و به شما کمک کنن و مسیر موفقیت رو براتون ساده‌تر کنن. همیشه از نظرات و کامنت‌های خوبتون انرژی می‌گیریم. مرسی که همراهمون هستین. راستی! حتماً در نظرسنجی آزمون شرکت کنین و نظرات و پیشنهاداتتون رو برامون بنویسین.

دکتر رسول خنجری

حذف گزینه

در مقاله قبلی گفتیم؛ کنگور با امتحان مدرسه زمین تا آسمون فرق داره و طبیعتاً سبک خوندنش هم متفاوت؛ چون تو کنگور زمان محدوده، نمره منفی داریم و همه درس‌ها باهم سنجیده می‌شن. برای همین بغچه‌خونی و حفظی خوندن جواب نمیده و باید مطالب رو طبقه‌بندی شده و ترکیبی بخونی تا تو یکی دو دقیقه بتونی فراخوانی کنی. از طرف دیگه مدیریت جلسه و تحمل چند ساعت آزمون خیلی مهمه و فقط با آزمون‌های آزمایشی جا می‌افته. آخرش هم درباره‌ی تاکتیک مهم حرف زدیم:

شجاعت در زدن گزینه‌های شک دار، به شرطی که حذف گزینه‌ات آگاهانه باشه و این مهارت رو بارها تمرین کرده باشی.

توی این مقاله قراره بیشتر درباره‌ی حذف گزینه حرف بزنیم تا بتونیم توی سوالات تستی، نتیجه‌ی بهتری بگیریم. **حذف گزینه یکی از مهم‌ترین مهارت‌های تست‌زنی، مخصوصاً توی موقعیت‌هایی که جواب دقیق سؤال یادت نیست ولی مطمئنی بعضی گزینه‌ها قطعاً غلط‌اند.**

خیلی وقت‌ها دانش‌آموز فکر می‌کنه تا جواب کامل تو ذهنش نیاد، نباید دست به گزینه‌ها بزنه، **در حالی که تو کنگور بلد بودن غلط‌ها، به اندازه بلد بودن جواب درست، ارزش داره.**

وقتی با دلیل مشخص روی گزینه‌های نادرست خط می‌کشی، عملاً احتمال خطا رو کم می‌کنی و ذهنت رو از شلوغی نجات می‌دی.

این کار باعث می‌شه سؤال از به معمای پیچیده، تبدیل بشه به به تصمیم منطقی بین گزینه‌های محدود.

نکته مهم اینه که **حذف گزینه باید آگاهانه باشه، نه احساسی.** یعنی دقیق بدونی چرا داری به گزینه رو کنار می‌ذاری؛ چون با متن کتاب نمی‌خونه، چون با صورت سؤال تناقض داره، چون واحدش غلطه، یا چون به شرط مهم رو رعایت نکرده. وقتی این دلایل رو داری، خط کشیدن روی گزینه‌ها فقط به حرکت نمایشی نیست، بلکه به ابزار کنترله. خیلی از اشتباهات سر جلسه آزمون به خاطر اینه که دانش‌آموز بعد از حذف گزینه، دوباره برمی‌گرده و به همون گزینه فکر می‌کنه و تو دام طراح سؤال می‌افته.

حذف گزینه یعنی «تصمیم گرفتم و برنمی‌گردم».

حذف گزینه مخصوصاً توی سؤال‌هایی که اطلاعات ناقص داری، خیلی نجات‌دهنده‌ست. لازم نیست همه اجزای سؤال رو بلد باشی؛ کافیه به بخشش رو خوب بدونی.

اینجاست که تست از حالت چهار جوابی تبدیل می‌شه به دو گزینه‌ای یا حتی تک گزینه‌ای.

قسمتی از امتیازهای کنگور دقیقاً از همین سؤال‌ها میان، نه از سؤال‌هایی که صد درصد بلد بودی. **یعنی تو با مدیریت ندانستن، می‌تونی امتیاز بگیری.**

توی سؤال‌های دو قسمتی، حذف گزینه عملاً بهترین سلاحه. مثلاً سؤال می‌پرسه «جیوه در ۱۰۰ درجه سانتی‌گراد چه حالتی دارد و عدد اتمی آن چیست؟» تو مطمئنی که جیوه تو این دما مایعه، ولی عدد اتمیش یادت نیست. همین دانستن نصف سؤال کافیه تا هر گزینه‌ای که «مایع» رو نیاورده حذف بشه.

حالا سؤال برای تو تبدیل می‌شه به دو گزینه. این جا با **تاکتیک تست زنی بین دو گزینه**، شانس درست زدن کاملاً واقعی و منطقیه، نه شانسی و بی حساب. خیلی‌ها چون عدد اتمی رو بلد نیستن، کل سؤال رو ول می‌کنن، **در حالی که تومی تونی از همون دانسته نصفه نیمه امتیاز بگیري.**

نکته طلایی اینه که وقتی بین دو گزینه موندی، یا باید واقعاً با منطق یکی رو انتخاب کنی، یا اگه هیچ ترجیحی نداری، کاملاً تصادفی بزنی و دیگه فکرش رو ادامه ندی.

تجربه نشون داده توی همین مرحله آخر، هرچی بیشتر فکر می‌کنی، احتمال اینکه ذهنت بره سمت گزینه غلط بیشتر می‌شه. **کنکور جای وسواس نیست؛ جای تصمیم‌های سریع و تمرین شده‌ست.**

روش فراوانی پاسخ

یه تکنیک دیگه که دقیقاً توی سؤال‌های چندقسمتی به کارت میاد، روش «فراوانی پاسخ»ه. این روش تقریباً عکس حذف گزینه است. یعنی این بار به جای اینکه دنبال گزینه‌های غلط بگردی، نگاه می‌کنی ببینی کدام جواب‌ها توی گزینه‌ها بیشتر تکرار شدن.

توی سؤال‌های چندقسمتی معمولاً هر گزینه از چند تیکه جواب تشکیل شده و طراح برای گمراه کردن، جواب‌های درست رو بین گزینه‌ها پخش می‌کنه.

حالا کاری که تومی کنی اینه که هر بخشی از جواب که به نظرت مصطلح‌تر یا آشنا تره رو توی گزینه‌ها علامت می‌زنی.

کم کم می‌بینی بعضی جواب‌ها مدام دارن تکرار می‌شن و بعضی‌ها خیلی کم یا اصلاً دیده نمی‌شن. این جا برعکس حذف گزینه، به جای خط زدن گزینه‌های غلط، دور جواب‌هایی که بیشتر تکرار شدن خط می‌کشی. آخرش معمولاً به یه گزینه می‌رسی که تقریباً دور همه بخش‌هاش خط کشیده شده؛ یعنی بیشترین اشتراک رو با بقیه گزینه‌ها داره و همون گزینه، با احتمال بالا جواب درست سؤاله.

این روش مخصوصاً وقتی جواب قطعی هیچ بخشی رو نمی‌دونی، ولی حس می‌کنی بعضی جواب‌ها منطقی‌تر یا آشنا ترند، خیلی کمک‌کننده‌ست.

اما یه هشدار خیلی مهم: این تکنیک‌ها قرار نیست معجزه کنن.

فراوانی پاسخ، مثل حذف گزینه، فقط وقتی جواب می‌ده که **قبلش بارها تمرینش کرده باشی**. اگه بدون تمرین، سر جلسه کنکور یهو بخوای ازش استفاده کنی، احتمال اینکه قاطی کنی یا وقتت تلف بشه زیاده. حتماً این روش‌ها رو توی شبیه‌سازها و آزمون‌های آزمایشی تمرین کن، نتیجه‌شون رو ببین و بعد تصمیم بگیر کی و کجا ازشون استفاده کنی. **کنکور جای آزمون و خطا نیست؛ جای اجرای چیزیه که قبلاً بارها تمرینش کردی.**

در نهایت یادت باشه حذف گزینه یه مهارت اکتسابیه، نه یه استعداد ذاتی.

هرچی بیشتر تو آزمون‌های آزمایشی تمرینش کنی، ذهنت سریع‌تر غلط‌ها رو تشخیص می‌ده و اعتماد به نفست تو جلسه کنکور بالاتر می‌ره.

خیلی وقت‌ها قرار نیست همه‌چی رو بلد باشی؛ کافیه بلد باشی چی جواب نیست و از همون مسیر، باهوش‌تر از بقیه به جواب درست برسی.

راهنمای پاسخنامه آزمون‌ها

در آزمون‌ها، به منظور سنجش میزان تسلط بر مباحث، سوالاتی طراحی شده است که نیازمند تفکر و تحلیل است. این سوالات، به منظور سنجش میزان تسلط بر مباحث، سوالاتی طراحی شده است که نیازمند تفکر و تحلیل است. این سوالات، به منظور سنجش میزان تسلط بر مباحث، سوالاتی طراحی شده است که نیازمند تفکر و تحلیل است.

زمان پاسخگویی:

سریع (زیر ۱ دقیقه) | استاندارد (۱-۲ دقیقه) |
زمان بر (بیشتر از ۲ دقیقه).

پاسخ: گزینه ۳

(متوسط - خط به خط - سریع) - صفحه ۱۶ - ۱۱۰۱

سطح سؤال:

آسان (اعتماد به نفس) | متوسط (محک جدی)
دشوار (چالش رشد).

هشتگ سؤال:

شماره درس + شماره پایه
دسته بندی راحت تر سؤالات

سبک سؤال:

خط به خط (متن کتاب) | ترکیبی (چند مبحث) |
محاسباتی (فرمول ودقت) | مفهومی (درک عمیق).

شماره صفحه:

منبع اصلی رو راحت پیدا کنید.

یادتون باشه:

- ✓ هر سؤال یک فرصت یادگیری، نه یک مانع.
- ✓ پاسخنامه فقط جواب نیست؛ یک کارگاه آموزشی کامله.
- ✓ با هر آزمون و مرور این پاسخنامه، یک پله بالاتر می‌رید و یک قدم به رؤیایون نزدیک‌تر می‌شید.
- ✓ موفقیت فقط برای کسانی که با برنامه و انگیزه حرکت می‌کنن. شما همون آدمید.



برای دیدن پاسخنامه ویدئویی آزمون
QRcode بالا را اسکن کنید!

یا بر روی لینک زیر کلیک کنید!

پاسخنامه ویدئویی

بودجه‌بندی
این آزمون

حسابان ۲: مشتق (از ابتدای مشتق‌پذیری روی یک بازه تا پایان فصل)، صفحه‌های ۹۷ تا ۱۱۰
ریاضی پایه: توان‌های گویا و عبارات‌های جبری + هندسه تحلیلی،
ریاضی ۱ صفحه‌های ۴۷ تا ۶۸، حسابان ۱ صفحه‌های ۲۹ تا ۳۶
هندسه ۳: آشنایی با مقاطع مخروطی
(از ابتدای صورت متعارف سهمی تا انتهای فصل) + بردارها، صفحه‌های ۵۴ تا ۶۳
هندسه پایه: تبدیل‌های هندسی و کاربردها، هندسه ۲ (از ابتدای تجانس)، صفحه‌های ۴۳ تا ۵۴
گسسته: ترکیبیات، صفحه‌های ۵۵ تا ۶۱، ریاضی ۱ صفحه‌های ۱۱۸ تا ۱۴۰
آمار و احتمال: آمار توصیفی، صفحه‌های ۶۹ تا ۹۵

سهم در
کنکور

حسابان ۲: از این مبحث به‌طور مستقیم تستی در کنکور طرح نشده است.
ریاضی پایه: این مبحث در مجموع ۱ تست از ۱۴ تست کنکور را پوشش داده است.
هندسه ۳: این مبحث در مجموع ۱ تست از ۴ تست کنکور را پوشش داده است.
هندسه پایه: این مبحث در مجموع ۱ تست از ۸ تست کنکور را پوشش داده است.
گسسته: این مبحث در مجموع ۴ تست از ۴ تست کنکور را پوشش داده است.
آمار و احتمال: این مبحث در مجموع ۱ تست از ۴ تست کنکور را پوشش داده است.

۱- اگر $f(x) = \tan^2\left(\frac{\pi}{\sqrt{x+15}}\right)$ ، آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع در $x=1$ چه عددی است؟

$$-\frac{\pi}{4} \quad (۴)$$

$$-\frac{\pi}{32} \quad (۳)$$

$$-\frac{\pi}{16} \quad (۲)$$

$$-\frac{\pi}{64} \quad (۱)$$

آسان - خط‌به‌خط - سریع (۵) - حسابان ۲ صفحه ۱۰۴ - ۱۲۰۴

پاسخ: گزینه ۳

ابتدا تابع مشتق را محاسبه کرده و سپس مقدار مشتق را در $x=1$ محاسبه می‌کنیم:

$$f(x) = \tan^2\left(\frac{\pi}{\sqrt{x+15}}\right) \Rightarrow f'(x) = 2 \tan\left(\frac{\pi}{\sqrt{x+15}}\right) \times \left(\tan\left(\frac{\pi}{\sqrt{x+15}}\right)\right)'$$

$$= 2 \tan\left(\frac{\pi}{\sqrt{x+15}}\right) \cdot \left(1 + \tan^2\left(\frac{\pi}{\sqrt{x+15}}\right)\right) \cdot \frac{-\pi}{2\sqrt{(x+15)}^3}$$

$$f'(1) = 2 \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) \left(1 + \tan^2\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \left(\frac{-\pi}{2 \times 64}\right) = \frac{-\pi}{32}$$

تابع مشتق

اگر u تابعی بر حسب x باشد، آن‌گاه:

$$y = u^n \Rightarrow y' = nu'u^{(n-1)}$$

مشتق تانژانت

$$y = \tan u \Rightarrow y' = u'(1 + \tan^2 u)$$

۲- اگر $f(x) = 3x^2 - 2ax + a - 1$ در بازه $[0, 2a]$ تعریف شده و آهنگ تغییر متوسط در این بازه با آهنگ تغییر لحظه‌ای در $x = 3$ برابر باشد. آهنگ تغییر لحظه‌ای در $x = a$ چه عددی است؟

۱۲ (۴)

۶ (۳)

۱۸ (۲)

۹ (۱)

(آسان - خطبه‌خط - سریع) - حسابان ۲ صفحه ۱۰۴ - ۱۲۰۴

پاسخ: گزینه ۴

آهنگ تغییر متوسط یک تابع درجه ۲ در بازه $[a, b]$ با آهنگ تغییر لحظه‌ای در وسط بازه برابر است، از طرفی طبق فرض آهنگ تغییر متوسط در بازه $[0, 2a]$ با آهنگ تغییر لحظه‌ای در $x = 3$ برابر است. پس:

$$\frac{2a + 0}{2} = 3 \Rightarrow a = 3$$

روش اول

$$f(x) = 3x^2 - 6x + 2 \Rightarrow f'(x) = 6x - 6 \Rightarrow f'(3) = 12$$

روش دوم

$$f'(x) = 6x - 2a \Rightarrow f'(a) = 6a - 2a = 4a \xrightarrow{a=3} f'(a) = 12$$

آهنگ تغییر

آهنگ متوسط تغییر تابع پیوسته f در بازه $[a, b]$ برابر است با:

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

اگر $b = a + h$ باشد، آن‌گاه:

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

در نتیجه آهنگ تغییر لحظه‌ای f در لحظه $x = a$ برابر است با:

$$\text{آهنگ تغییر لحظه‌ای در } x = a = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

که این مقدار برابر با شیب خط مماس بر نمودار f در نقطه $x = a$ است.

نکته‌های طلایی

۱) در توابع خطی $f(x) = mx + h$ (درجه اول)، آهنگ متوسط در هر بازه دلخواه با آهنگ لحظه‌ای در هر نقطه دلخواه با هم برابر است که مساوی با شیب خط (یعنی m) است.

۲) در توابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، آهنگ متوسط در بازه $[x_1, x_2]$ با آهنگ لحظه‌ای در وسط بازه (یعنی $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$) برابر است، زیرا:

$$\begin{aligned} \text{آهنگ متوسط} &= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{ax_2^2 + bx_2 + c - ax_1^2 - bx_1 - c}{x_2 - x_1} = \frac{a(x_2^2 - x_1^2) + b(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a(x_2 + x_1) + b \\ &= 2a\left(\frac{x_2 + x_1}{2}\right) + b \end{aligned}$$

$$\text{آهنگ لحظه‌ای} = f'(x_0) = 2ax_0 + b = 2a\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + b$$



۳- اگر $f(x) = \sin 2x$ باشد، معادله $f'(x)f''(x) = 4f(x)$ در بازه $[0, \pi]$ دارای چند جواب است؟

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

(متوسط - ترکیبی - استاندارد) - حسابان ۲ صفحه ۹۸ - ۱۲۰۴

پاسخ: گزینه ۳

با داشتن ضابطه $f(x)$ توابع $f'(x)$ و $f''(x)$ را به دست می آوریم:

$$f(x) = \sin 2x$$

$$f'(x) = (2x)' \cos 2x = 2 \cos 2x$$

$$f''(x) = 2(2x)'(-\sin 2x) = -4 \sin 2x$$

$$f'(x).f''(x) = 4f(x) \Rightarrow 2 \cos 2x (-4 \sin 2x) = 4 \sin 2x \Rightarrow \sin 2x (2 \cos 2x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{\pi}{2} \\ x = \pi \end{cases} \\ \cos 2x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos 2x = \cos \frac{2\pi}{3} \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} x = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

پس در بازه داده شده دارای ۵ جواب است.

مشتق توابع مثلثاتی

$$۱) (\sin u)' = u' \cos u$$

$$۲) (\cos u)' = -u' \sin u$$

$$۳) (\tan u)' = u'(1 + \tan^2 u)$$

$$۴) (\cot u)' = -u'(1 + \cot^2 u)$$

یادآوری!

برای حل معادلات مثلثاتی داشتیم:

$$۱) \sin x = \sin \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases}$$

$$۲) \cos x = \cos \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi - \alpha \end{cases}$$

$$۳) \tan x = \tan \alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha$$

$$\text{حالات خاص: } \begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \\ \sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \sin x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\text{حالات خاص: } \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi \\ \cos x = -1 \Rightarrow x = (2k+1)\pi \end{cases}$$



۴- اگر باقی مانده تقسیم $f(x) = 4x^4 + ax^3 + bx^2 - 2x - 1$ بر $(x-1)^2$ برابر با $2x+1$ باشد، مقدار b چه عددی است؟

(۱) -۱۸ (۲) ۱۸ (۳) ۱۶ (۴) -۱۶

(متوسط - ترکیبی - استاندارد) حسابان ۲ صفحه ۱۰۰ - ۱۲۰۴

پاسخ: گزینه ۲

اگر $q(x)$ خارج قسمت تقسیم باشد، طبق قضیه تقسیم داریم:

$$4x^4 + ax^3 + bx^2 - 2x - 1 = (x-1)^2 q(x) + 2x + 1$$

$$\xrightarrow{x=1} 4 + a + b - 2 - 1 = 0 + 3 \Rightarrow a + b = 2 \quad (1)$$

حال از طرفین مشتق می گیریم و داریم:

$$16x^3 + 3ax^2 + 2bx - 2 = 2(x-1)q(x) + q'(x)(x-1)^2 + 2$$

$$\xrightarrow{x=1} 16 + 3a + 2b - 2 = 2 \Rightarrow 3a + 2b = -12 \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \begin{cases} a + b = 2 \\ 3a + 2b = -12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a - 2b = -4 \\ 3a + 2b = -12 \end{cases} \Rightarrow a = -16, b = 18$$

یادآوری قضیه تقسیم

قضیه تقسیم: در تقسیم چندجمله ای $f(x)$ بر $p(x)$ ، اگر $q(x)$ خارج قسمت و $r(x)$ باقی مانده باشد، آن گاه همواره داریم:

$$\begin{array}{r} f(x) \mid p(x) \\ q(x) \\ \hline r(x) \end{array}$$

$$f(x) = p(x) \times q(x) + r(x)$$

به طوری که درجه $r(x)$ همواره کوچکتر از درجه $p(x)$ است.



۵- اگر تابع $f(x) = x|2x-4|$ مفروض باشد، نمودار تابع f نمودار تابع f' را در چند نقطه قطع می کند؟

(۴) صفر

(۳) ۱

(۲) ۳

(۱) ۲

(سخت - ترکیبی/خط به خط - زمان بر) حسابان ۲ صفحه ۹۷ - ۱۲۰۴

پاسخ: گزینه ۱

$$f(x) = x|2x-4| = \begin{cases} 2x^2 - 4x & x \geq 2 \\ 4x - 2x^2 & x \leq 2 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 4x - 4 & x > 2 \\ 4 - 4x & x < 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'_+(2) = 4 \\ f'_-(2) = -4 \end{cases}$$

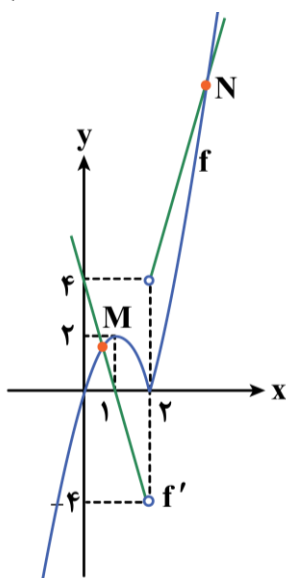
به علاوه داریم:

پس $f'(2)$ موجود نیست.

روش هندسی:

روش اول

نمودار f و f' را در یک دستگاه رسم کرده ایم:



f' از دو نیم خط تشکیل شده است. با توجه به نمودار، معادله $f'(x) = f(x)$ دارای ۲ ریشه است، زیرا نمودارهای آن ها همدیگر را در دو نقطه M و N قطع کرده اند.

روش جبری:

ضابطه دو تابع f و f' را با هم تقاطع می دهیم:

$$x > 2: 2x^2 - 4x = 4x - 4 \Rightarrow x^2 - 4x + 2 = 0 \xrightarrow{\Delta=8} x = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 2 \pm \sqrt{2} \xrightarrow{x>2} x = 2 + \sqrt{2}$$

$$x < 2: -2x^2 + 4x = 4 - 4x \Rightarrow x^2 - 4x + 2 = 0 \xrightarrow{\Delta=8} x = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 2 \pm \sqrt{2} \xrightarrow{x<2} x = 2 - \sqrt{2}$$

بنابراین دو نمودار یکدیگر را در دو نقطه قطع می کنند.



۶- اگر $g'(0) = 3$ و $f(0) = 2$ باشد، به طوری که داشته باشیم $g(x) = 3x - 2f^3(x)$ ، مقدار $\frac{g''(0)}{f''(0)}$ چه عددی است؟

۸ (۴)

-۸ (۳)

-۲۴ (۲)

۲۴ (۱)

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) حسابان ۲ صفحه ۹۸ - ۱۲۰۴

پاسخ: گزینه ۲

از طرفین رابطه داده شده مشتق می گیریم:

$$g(x) = 3x - 2f^3(x) \Rightarrow g'(x) = 3 - 6f^2(x)f'(x)$$

$$\xrightarrow{x=0} g'(0) = 3 - 6f^2(0)f'(0) \xrightarrow{\substack{f(0)=2 \\ g'(0)=3}} f'(0) = 0$$

با مشتق گیری از رابطه $g'(x)$ ، مشتق دوم g را به دست می آوریم:

$$g''(x) = -12f(x)f'(x).f'(x) - 6f''(x)f^2(x)$$

$$\xrightarrow{x=0} g''(0) = -12f(0)(f'(0))^2 - 6f''(0)f^2(0)$$

$$\xrightarrow{\substack{f(0)=2 \\ f'(0)=0}} g''(0) = -6 \times 4 \times f''(0) \Rightarrow \frac{g''(0)}{f''(0)} = -24$$



۷- اگر تابع $f(x) = \begin{cases} 4x^3 & x \geq a \\ bx^2 + c & x < a \end{cases}$ روی $\mathbb{R}$ مشتق پذیر باشد، مقدار $\frac{c}{a^3}$ چه عددی است؟ ($a \neq 0$)

 $\frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{1}{2}$ (۳)

-۲ (۲)

۲ (۱)

(متوسط - مفهومی - استاندارد) حسابان ۲ صفحه ۹۷ - ۱۲۰۴

پاسخ: گزینه ۲

هر یک از ضابطه ها روی دامنه شان مشتق پذیرند، پس کافی است مشتق پذیری را در $x = a$ بررسی کنیم.
ابتدا پیوستگی تابع در $x = a$ را بررسی می کنیم.

$$f(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \Rightarrow 4a^3 = ba^2 + c \quad (1)$$

حال مشتق تابع را به دست می آوریم:

$$f'(x) = \begin{cases} 12x^2 & x > a \\ 2bx & x < a \end{cases}$$

مشتق چپ و راست تابع را در $x = a$ به دست می آوریم و مساوی هم قرار می دهیم:

$$12a^2 = 2ab \xrightarrow{a \neq 0} 6a = b \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow 4a^3 = 6a^3 + c \Rightarrow c = -2a^3 \Rightarrow \frac{c}{a^3} = -2$$

در نتیجه:

مشتق پذیری تابع

- (۱) تابع f را در $x = a$ مشتق پذیر می‌گوییم اگر در $x = a$ پیوسته باشد و مشتق چپ و راست f در $x = a$ موجود و با هم برابر باشند.
- (۲) تابع f را روی بازه I مشتق پذیر می‌گوییم اگر در هر نقطه از I مشتق پذیر باشد.



توجه!

توجه کنید که اگر بازه I شامل نقطه ابتدایی یا انتهایی‌اش باشد باید در این نقاط به ترتیب مشتق پذیر از راست / مشتق پذیر از چپ باشد.



۸- اگر $f(x) = x^2 + ax + b$ و $g(x) = \begin{cases} f(x) & x \geq a \\ f'(x) & x < a \end{cases}$ در $\mathbb{R}$ مشتق پذیر باشد، مقدار $g(\frac{a}{3})$ چه عددی است؟

$$\frac{2}{3} \quad (۴)$$

$$\frac{4}{3} \quad (۳)$$

$$\frac{8}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{10}{3} \quad (۱)$$

(سخت - مفهومی/محاسباتی - زمان ۵ - حسابان ۲ صفحه ۹۷ - ۱۲۰۴)

پاسخ: گزینه ۳

چون f و f' چند جمله‌ای هستند، پس روی $\mathbb{R}$ مشتق پذیرند. بنابراین اگر تابع g در $x = a$ مشتق پذیر باشد، آن گاه در $\mathbb{R}$ هم مشتق پذیر خواهد بود. شرط لازم برای مشتق پذیری، پیوستگی است:

$$g(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & x \geq a \\ 2x + a & x < a \end{cases}$$

$$g(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} g(x) \Rightarrow f(a) = f'(a) \Rightarrow a^2 + a^2 + b = 2a + a \Rightarrow 2a^2 + b = 3a$$

حال مشتقات چپ و راست در $x = a$ را برابر هم قرار می‌دهیم:

$$g'(x) = \begin{cases} 2x + a & x \geq a \\ 2 & x < a \end{cases}$$

$$g'_-(a) = g'_+(a) \Rightarrow 2 = 2a + a \Rightarrow a = \frac{2}{3}$$

$$g(\frac{a}{3}) = g(\frac{1}{3}) \xrightarrow{\frac{1}{3} < a} f'(\frac{1}{3}) = 2(\frac{1}{3}) + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

برای یافتن $g(\frac{a}{3})$ داریم:



۹- اگر آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x) = ax + 2\sqrt{2x^2 + 1}$ در بازه $[0, 2]$ برابر ۴ باشد، آهنگ تغییر لحظه‌ای آن در $x = -a$ چه عددی است؟

$$\frac{8}{3} \quad (۴)$$

$$\frac{4}{3} \quad (۳)$$

$$-\frac{2}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{14}{3} \quad (۱)$$

(متوسط - مفهومی - استاندارد ۵ - حسابان ۲ صفحه ۱۰۴ - ۱۲۰۴)

پاسخ: گزینه ۲

آهنگ تغییر متوسط f بر بازه $[0, 2]$ برابر است با:

$$\frac{f(2) - f(0)}{2} = \frac{(2a + 2\sqrt{9}) - 2}{2} = \frac{2a + 4}{2} = a + 2 \xrightarrow{\frac{f(2) - f(0)}{2} = 4} a + 2 = 4 \Rightarrow a = 2$$

$$f(x) = 2x + 2\sqrt{2x^2 + 1} \Rightarrow f'(x) = 2 + \frac{4x}{\sqrt{2x^2 + 1}}$$

$$f'(-2) = 2 - \frac{8}{\sqrt{9}} = 2 - \frac{8}{3} = -\frac{2}{3}$$



۱۰- آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x) = 2x + \frac{a}{x}$ در بازه $[1, a]$ با آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع در کدام نقطه برابر است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{a}}{a}$ (۲) $2\sqrt{a}$ (۳) $\frac{\sqrt{a}}{2}$ (۴) $\sqrt{a}$

پاسخ: گزینه ۴

آسان - مفهومی - سریع - حسابان ۲ صفحه ۱۰۴ - ۱۲۰۴

آهنگ تغییر متوسط f بر $[1, a]$ برابر است با:

$$\frac{f(a) - f(1)}{a - 1} = \frac{(2a + 1) - (2 + a)}{a - 1} = \frac{a - 1}{a - 1} = 1$$

حال با یافتن $f'(x)$ آهنگ لحظه‌ای f را می‌یابیم:

$$f'(x) = 2 - \frac{a}{x^2}$$

قرار است آهنگ لحظه‌ای با آهنگ متوسط برابر باشد، پس داریم:

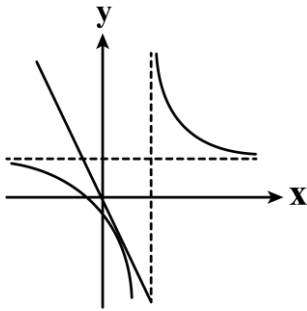
$$2 - \frac{a}{x^2} = 1 \Rightarrow \frac{a}{x^2} = 1 \Rightarrow x^2 = a \xrightarrow{a > 1} x = \sqrt{a}$$



۱۱- از مبدأ مختصات مطابق شکل، خطی مماس بر نمودار تابع $f(x) = \frac{ax+1}{x-4}$ رسم کرده‌ایم. اگر طول نقطه تماس $x=1$ باشد، مقدار a

کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۵ (۳) ۲ (۴) -۲



متوسط - ترکیبی - استاندارد - حسابان ۲ صفحه ۱۰۱ - ۱۲۰۴

پاسخ: گزینه ۳

فرض کنیم نقطه تماس $A(\alpha, \frac{a\alpha+1}{\alpha-4})$ باشد، پس شیب خط گذرنده از O و A با مشتق f در نقطه $x=1$ برابر است:

$$m_{OA} = f'(1)$$

$$f'(x) = \frac{a(x-4) - (ax+1)}{(x-4)^2} = \frac{-4a-1}{(x-4)^2}$$

$$\text{شیب خط } OA = \frac{\frac{a\alpha+1}{\alpha-4} - 0}{\alpha - 0} = \frac{-4a-1}{(\alpha-4)^2} \xrightarrow{\alpha=1} \frac{a+1}{-3} = \frac{-4a-1}{9}$$

$$\Rightarrow \frac{a+1}{-3} = \frac{-4a-1}{9} \Rightarrow a+1 = \frac{4a+1}{3} \Rightarrow 3a+3 = 4a+1 \Rightarrow a=2$$

شیب خط مماس در یک نقطه = مشتق در آن نقطه

شیب خط مماس بر نمودار تابع در $x=a$ ، برابر با مشتق تابع f در $x=a$ است.

$$f'(a) = \text{شیب خط مماس در } (x=a)$$



۱۲- خط مماس بر نمودار تابع $f(x) = (x-1)^2(x+2)$ در نقطه‌ای به طول $x=2$ ، در ادامه نمودار تابع را در نقطه‌ای به طول α قطع می‌کند. $f''(\alpha)$ چه عددی است؟

-۲۴ (۴)

۲۴ (۳)

۱۸ (۲)

-۱۸ (۱)

(متوسط - ترکیبی - استاندارد) - حسابان ۲ صفحه ۱۰۰ - ۱۲۰۴

پاسخ: گزینه ۴

قرار است در $x=2$ مماس بر نمودار تابع رسم کنیم، پس ابتدا مختصات نقطه تماس را می‌یابیم:

$$f(2) = 4 \Rightarrow A(2, 4) \text{ نقطه تماس}$$

$$f'(x) = 2(x-1)(x+2) + (x-1)^2$$

می‌دانیم شیب خط مماس بر تابع در $x=2$ برابر با مشتق تابع در $x=2$ است.

$$m = f'(2) = 8 + 1 = 9 \text{ شیب مماس}$$

$$A(2, 4), m = 9 \Rightarrow y = 9x - 14$$

حال معادله خط مماس را می‌نویسیم:

حال خط مماس را با نمودار تابع تلاقی می‌دهیم تا نقطه α به دست آید:

$$\begin{cases} y = (x-1)^2(x+2) \\ y = 9x - 14 \end{cases} \Rightarrow (x-1)^2(x+2) = 9x - 14$$

$$\Rightarrow (x^2 - 2x + 1)(x+2) = 9x - 14 \Rightarrow x^3 + 2x^2 - 2x^2 - 4x + x + 2 - 9x + 14 = 0$$

$$\Rightarrow x^3 - 12x + 16 = 0 \xrightarrow[\text{ریشه همان ۲ است.}]{\text{چون در } x=2 \text{ بر نمودار مماس بود یک}} (x-2)(x^2 + 2x - 8) = 0 \Rightarrow (x-2)(x-2)(x+4) = 0$$

$x=2$ ریشه مضاعف عبارت بالاست که همان محل مماس شدن خط بر تابع $f(x)$ است، پس ریشه دیگر معادله یعنی $x=-4$ همان طول نقطه‌ای است که خط، نمودار تابع $f(x)$ را قطع می‌کند.

$$f'(x) = (x-1)(3x+3) = 3(x^2-1) \Rightarrow f''(x) = 6x \Rightarrow f''(\alpha) = f''(-4) = -24$$

به نکته طلایی!

۱) اگر دو نمودار توابع چندجمله‌ای f و g در نقطه $x = \alpha$ بر هم مماس باشند، معادله تلاقی آن‌ها دارای ریشه مضاعف $x = \alpha$ است، یعنی دارای عامل $(x - \alpha)^2$ است.

۲) اگر دو نمودار توابع چندجمله‌ای f و g در نقطه $x = \alpha$ متقاطع باشند، معادله تلاقی آن‌ها دارای ریشه ساده $x = \alpha$ است، یعنی دارای عامل $(x - \alpha)$ است.



۱۳- ساده شده عبارت $A = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}} - \sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{3+2\sqrt{2}} + \sqrt{3-2\sqrt{2}}}$ کدام است؟

-۲√۲ (۴)

-√۲ (۳)

-۱/۲ (۲)

-√۲/۲ (۱)

(آسان - مفهومی - سریع) - ریاضی ۱ صفحه ۶۳ - ۱۰۰۳

پاسخ: گزینه ۲

روش اول

اگر در ابتدا کسر را ساده کنیم، آن گاه داریم:

$$M = \sqrt{2-\sqrt{3}} - \sqrt{2+\sqrt{3}} \Rightarrow M^2 = 2 - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} - 2\sqrt{4-3} = 2 \xrightarrow{M < 0} M = -\sqrt{2}$$

$$N = \sqrt{3+2\sqrt{2}} + \sqrt{3-2\sqrt{2}} \Rightarrow N^2 = 3 + 2\sqrt{2} + 3 - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{9-8} = 8 \xrightarrow{N > 0} N = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$A = \frac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}
 \text{صورت} &= \sqrt{2-\sqrt{3}} - \sqrt{2+\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{4-2\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{4+2\sqrt{3}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(1-\sqrt{3})^2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(1+\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} = \frac{-2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2} \\
 \text{مخرج کسر} &= \sqrt{3+2\sqrt{2}} + \sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{(1+\sqrt{2})^2} + \sqrt{(1-\sqrt{2})^2} = 1+\sqrt{2} + \sqrt{2}-1 = 2\sqrt{2} \\
 \text{حاصل کسر} &= \frac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{-1}{2}
 \end{aligned}$$

رادیكال مرکب

در مورد رادیكال مرکب دو قانون زیر را بلد باشید:

فرم رادیكال مرکب $\sqrt{A \pm 2\sqrt{B}}$

برای ساده کردن عبارت‌های رادیكالی به این فرم باید عبارت زیر رادیكال را به کمک اتحاد مربع دوجمله‌ای به صورت مربع کامل نوشته و آن را از زیر رادیكال خارج کنیم:

$$\sqrt{A \pm 2\sqrt{B}} = |\sqrt{X} \pm \sqrt{Y}| \quad (X + Y = A, XY = B)$$

یه نمونه باحال ببین!

$$\begin{aligned}
 &\sqrt{7+2\sqrt{6}} \\
 x+y=7, x \times y=6 &\Rightarrow x=6, y=1 \Rightarrow \sqrt{7+2\sqrt{6}} = \sqrt{6+2\sqrt{6}+1} = \sqrt{(\sqrt{6}+\sqrt{1})^2} = |\sqrt{6}+\sqrt{1}| = \sqrt{6}+1
 \end{aligned}$$

رادیكال مرکب در حالت کلی

در عبارت $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$ داریم:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+c}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-c}{2}}, \quad c = \sqrt{a^2 - b}$$



۱۴- مقدار عبارت $\frac{8x^3 - 36x^2 + 54x - 27}{12x^2 - 36x + 27}$ به ازای ریشه مثبت $x^2 - 2x - 1 = 0$ چه عددی است؟

$$\sqrt{3} - \frac{1}{3} \quad (۴)$$

$$\frac{2\sqrt{2}-1}{3} \quad (۳)$$

$$\sqrt{3} + \frac{2}{3} \quad (۲)$$

$$\sqrt{2} + \frac{1}{3} \quad (۱)$$

(متوسط - ترکیبی - استاندارد) (۶) - ریاضی ۱ صفحه ۶۳ - ۱۰۰۳

پاسخ: گزینه ۳

اگر کسر را ساده کنیم، آن گاه داریم:

$$\frac{(2x)^3 - 3(2x)^2(3) + 3(2x)(3)^2 - 3^3}{3(4x^2 - 12x + 9)} = \frac{(2x-3)^3}{3(2x-3)^2} = \frac{2x-3}{3} = \frac{2}{3}x - 1$$

$$x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2} + 1$$

ریشه مثبت معادله:

حاصل عبارت به ازای ریشه مثبت معادله را به دست می آوریم:

$$\frac{2}{3}(1+\sqrt{2}) - 1 = \frac{2}{3}\sqrt{2} - \frac{1}{3} = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}$$

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

اتحاد مزدوج:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

اتحاد مربع دو جمله‌ای:

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

اتحاد مکعب دو جمله‌ای:

$$(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3$$

اتحاد چاق و لاغر:

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + (ab)$$

اتحاد جمله مشترک:



۱۵- هرگاه $2\sqrt{x+\frac{a}{2}} + \sqrt{4x-a} = 3a$ باشد، مقدار $\sqrt{4x+2a} - \sqrt{4x-a}$ کدام است؟

(۴) $\frac{a}{2}$

(۳) ۳

(۲) a

(۱) ۱

(متوسط - خطبه‌خط - استاندارد) - ریاضی ۱ صفحه ۶۳ - ۱۰۰۳

پاسخ: گزینه ۱

روش اول

$$2\sqrt{x+\frac{a}{2}} + \sqrt{4x-a} = 3a \Rightarrow \sqrt{4x+2a} + \sqrt{4x-a} = 3a$$

اگر فرض کنیم $\sqrt{4x+2a} - \sqrt{4x-a} = A$ ، مطابق اتحاد مزدوج، با ضرب کردن طرفین دو تساوی داریم:

$$(\sqrt{4x+2a} + \sqrt{4x-a})(\sqrt{4x+2a} - \sqrt{4x-a}) = 3aA$$

$$\Rightarrow (4x+2a) - (4x-a) = 3aA \Rightarrow 3a = 3aA \Rightarrow A = 1$$

روش دوم

$$\sqrt{4x+2a} - \sqrt{4x-a} \times \frac{\sqrt{4x+2a} + \sqrt{4x-a}}{\sqrt{4x+2a} + \sqrt{4x-a}} = \frac{4x+2a-4x+a}{2\sqrt{x+\frac{a}{2}} + \sqrt{4x-a}} = \frac{3a}{3a} = 1$$



۱۶- حاصل عبارت $\frac{\sqrt[3]{9\sqrt{3}}}{3^4\sqrt[3]{243}\sqrt{3-1}}$ چند برابر $3^{\frac{2}{3}\sqrt{27}}$ است؟

(۴) $\frac{1}{\sqrt[3]{3^5}}$

(۳) $\sqrt[3]{3^5}$

(۲) $\frac{\sqrt[3]{3^{10}}}{3}$

(۱) $\frac{1}{\sqrt[3]{3^{10}}}$

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - ریاضی ۱ صفحه ۶۱ - ۱۰۰۳

پاسخ: گزینه ۱

ابتدا کسر داده شده را با کمک توان‌های گویا ساده می‌کنیم:

$$\frac{\sqrt[3]{3^2 \times 3^{\frac{1}{2}}}}{3^4 \sqrt[3]{3^5 \times 3^{-\frac{1}{2}}}} = \frac{3^{\frac{5}{2}}}{3^4 \times 3^{\frac{9}{2}}} = \frac{3^{\frac{5}{2}}}{3^{\frac{17}{2}}} = 3^{\frac{5}{2} - \frac{17}{2}} = 3^{-6} = \frac{1}{3^6}$$

حال باید ببینیم حاصل کسر چند برابر $\sqrt[3]{27}$ است:

$$\frac{\frac{-11}{3 \cdot 6}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{\frac{-11}{3 \cdot 6}}{3} = \frac{\frac{-11}{3 \cdot 6}}{\frac{9}{3 \cdot 6}} = 3 \cdot \frac{-11}{6 \cdot 6} = 3 \cdot \frac{-20}{6} = \frac{-20}{2} = -10 = \frac{1}{\frac{1}{-10}} = \frac{1}{\sqrt[3]{-1000}}$$

قوانین توان‌های گویا

اگر m و n اعداد صحیح مثبت باشند، آن‌گاه:

$$\begin{cases} a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}; a > 0 \\ a^{-m} = \frac{1}{a^m}; a \neq 0 \end{cases}$$

اگر m و n اعداد صحیح مثبت باشند، آن‌گاه:

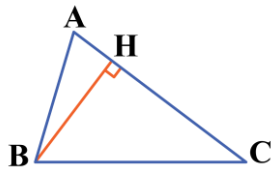
$$\begin{aligned} ۱) a^p \times a^q &= a^{p+q} & ۲) a^p \div a^q &= a^{p-q} \quad (a \neq 0) & ۳) (a^p)^q &= a^{pq} \\ ۴) a^p \times b^p &= (ab)^p & ۵) a^p \div b^p &= \left(\frac{a}{b}\right)^p \quad (b \neq 0) & ۶) a^{-p} &= \frac{1}{a^p} \end{aligned}$$



۱۷- اگر $A(-1, 3)$ ، $B(1, -1)$ و $C(4, 2)$ سه رأس مثلث ABC باشند، معادله ارتفاع گذرنده از رأس B دارای کدام عرض از مبدأ است؟
 (۱) -۴ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) -۶

آسان - خطبه‌خط - سریع - حسابان ۱ صفحه ۳۱ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۴



$$A \begin{vmatrix} -1 \\ 3 \end{vmatrix} \quad C \begin{vmatrix} 4 \\ 2 \end{vmatrix} \Rightarrow m_{AC} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3-2}{-1-4} = \frac{-1}{5}$$

ابتدا شیب خط AC را می‌یابیم:

شیب‌های دو خط عمود بر هم، عکس و قرینه یک‌دیگر است. چون BH بر AC عمود است، پس شیب ارتفاع BH برابر با ۵ است. پس می‌توان معادله BH را نوشت:

$$\xrightarrow{B(1, -1)} -۶ = \text{عرض از مبدأ} \Rightarrow y = 5x - 6 \Rightarrow y + 1 = 5(x - 1) \Rightarrow \text{معادله ارتفاع } BH$$

هندسه تحلیلی

الف) اگر A و B دو نقطه از صفحه باشند، آن‌گاه:

$$۱) \text{ شیب خط گذرا از } A \text{ و } B = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

$$۲) \text{ نقطه وسط } M \text{ از } A \text{ و } B = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right)$$

$$\text{طول پاره خط } AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

ب) اگر شیب خط d برابر با m باشد و از نقطه A بگذرد معادله d برابر است با:

$$y - y_A = m(x - x_A)$$

و اگر معادله خط d را به صورت استاندارد $y = mx + h$ بنویسیم، ضریب x (یعنی m) برابر با شیب خط و h (عرض محل تقاطع با محور y) عرض از مبدأ خط است.

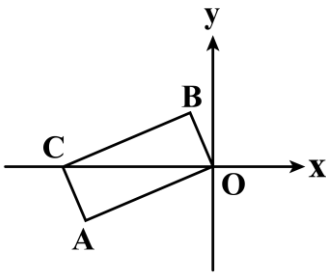
ج) دو خط موازی شیب‌های برابر دارند و شیب دو خط عمود بر هم عکس و قرینه هم است.

$$d \parallel d' \Rightarrow m_d = m_{d'}$$

$$d \perp d' \Rightarrow m_d = \frac{-1}{m_{d'}} \text{ یا } m_d \times m_{d'} = -1$$



۱۸- مطابق شکل دو رأس مستطیل روی خط $y = \frac{1}{5}x$ واقع شده است. اگر مساحت مستطیل $\frac{26}{5}$ باشد، حاصل جمع مختصات رأس B کدام است؟



۱ (۲)

$\frac{6}{5}$ (۴)

$\frac{3}{5}$ (۱)

$\frac{4}{5}$ (۳)

(سخت - ترکیبی - زمان‌بر) - حسابان ۱ صفحه ۳۱ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۳

روش اول

نقطه A روی خط $y = \frac{1}{5}x$ است، پس $A(\alpha, \alpha)$ را فرض می‌کنیم:

$$m_{OA} = \frac{1}{5} \xrightarrow{OA \perp AC} m_{AC} = -5, A(\alpha, \alpha) \Rightarrow AC: y = -5x + 26\alpha$$

$$y = 0 \Rightarrow x = \frac{26}{5}\alpha$$

خط AC را با محور طول‌ها قطع می‌دهیم:

پس $C(\frac{26}{5}\alpha, 0)$ است.

$$OA = \sqrt{25\alpha^2 + \alpha^2} = \sqrt{26}|\alpha|$$

$$AC = \sqrt{\frac{\alpha^2}{25} + \alpha^2} = \frac{\sqrt{26}}{5}|\alpha|$$

$$\sqrt{26}|\alpha| \times \frac{\sqrt{26}}{5}|\alpha| = \frac{26}{5}$$

می‌دانیم که $\alpha < 0$. با توجه به آن که مساحت مستطیل برابر $S = \frac{26}{5}$ است، پس داریم:

$$\Rightarrow \frac{26}{5}\alpha^2 = \frac{26}{5} \Rightarrow \alpha^2 = 1 \xrightarrow{\alpha < 0} \alpha = -1 \Rightarrow O \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}, C \begin{vmatrix} -\frac{26}{5} \\ 0 \end{vmatrix}, A \begin{vmatrix} -5 \\ -1 \end{vmatrix}$$

با توجه به ویژگی رأس‌های متوازی‌الاضلاع داریم:

$$\begin{cases} x_A + x_B = x_O + x_C \Rightarrow -5 + x_B = 0 - \frac{26}{5} \Rightarrow x_B = -\frac{1}{5} \Rightarrow x_B + y_B = -\frac{4}{5} \\ y_A + y_B = y_O + y_C \Rightarrow -1 + y_B = 0 + 0 \Rightarrow y_B = 1 \end{cases}$$

روش دوم

A روی خط $y = \frac{1}{5}x$ قرار دارد، پس: $A(5\alpha, \alpha)$ ($\alpha < 0$)

B روی خط $y = -5x$ قرار دارد، پس: $B(\beta, -5\beta)$ ($\beta < 0$)

$$OA = \sqrt{25\alpha^2 + \alpha^2} = \sqrt{26}|\alpha| = -\sqrt{26}\alpha$$

$$OB = \sqrt{\beta^2 + 25\beta^2} = \sqrt{26}|\beta| = -\sqrt{26}\beta$$

$$S = OA \times OB = \frac{26}{5} \Rightarrow 26(\alpha\beta) = \frac{26}{5} \Rightarrow \alpha\beta = \frac{1}{5} \quad (1)$$

از طرفی نقطه وسط AB که مرکز مستطیل است روی قطر OC قرار دارد، پس عرض آن صفر است:

$$AB \text{ وسط } M \Rightarrow y_M = 0 \Rightarrow \frac{y_A + y_B}{2} = 0 \Rightarrow y_A = -y_B$$

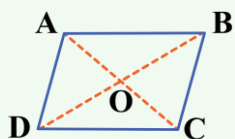
$$\Rightarrow \alpha = 5\beta \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow 5\beta^2 = \frac{1}{5} \Rightarrow \beta^2 = \frac{1}{25} \xrightarrow{\beta < 0} \beta = -\frac{1}{5}$$

$$B \text{ مختصات نقطه } B = \beta - 5\beta = -4\beta = -4(-\frac{1}{5}) = \frac{4}{5}$$

به نکته طلایی

در هر متوازی‌الاضلاع، قطرهای منصف یکدیگرند، پس اگر O محل تلاقی قطرها باشد، آن‌گاه:



$$O = \frac{A+C}{2} = \frac{B+D}{2}$$



$$\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases}$$

• • • Bio • • •

۱۹- فاصله نقطه $A(2, -1)$ از عمودمنصف پاره خط BC با مختصات نقاط $B(3, 2)$ و $C(-1, 6)$ ، چه عددی است؟

$$\frac{5\sqrt{2}}{2} \quad (4)$$

(۳) صفر

$$3\sqrt{2} \quad (2)$$

$$5\sqrt{2} \quad (1)$$

(متوسط - مفهومی - استاندارد) - حسابان ۱ صفحه ۳۳ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۲

برای نوشتن معادله عمودمنصف پاره خط واصل نقاط B و C داریم:

$$B \begin{vmatrix} 3 \\ 2 \end{vmatrix}, C \begin{vmatrix} -1 \\ 6 \end{vmatrix} \Rightarrow BC \text{ وسط } M = \frac{B+C}{2} = \begin{vmatrix} \frac{3-1}{2} \\ \frac{2+6}{2} \end{vmatrix} \Rightarrow M \begin{vmatrix} 1 \\ 4 \end{vmatrix}$$

از طرفی عمودمنصف بر خط BC عمود است:

$$m_{BC} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6-2}{-1-3} = -1 \Rightarrow BC \text{ عمودمنصف } m = 1$$

حال می‌توانیم معادله عمودمنصف BC را بنویسیم:

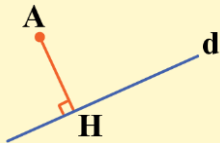
$$\begin{cases} m = 1 \\ M = (1, 4) \end{cases} \Rightarrow y = x + 3 \Rightarrow y - x - 3 = 0$$

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Rightarrow d = \frac{|-2 - 1 - 3|}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$$

در نهایت فاصله $A(2, -1)$ تا این خط را به دست می‌آوریم:

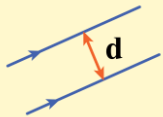
فاصله نقطه از خط

فاصله نقطه $A(x_0, y_0)$ از خط d به معادله $ax + by + c = 0$ برابر است با:



$$AH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

بر این اساس می‌توان فاصله دو خط موازی را به دست آورد. برای این کار کافی است فاصله نقطه‌ای دلخواه از یکی از خطوط را تا خط دیگر به دست آورد. در این صورت می‌توان نتیجه گرفت فاصله دو خط موازی $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ برابر است با:



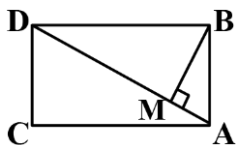
$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

توجه!

دقت کنید که حتماً برای محاسبه فاصله بین دو خط موازی باید ضریب x و ضریب y در هر دو معادله برابر باشند.



۲۰- طول مستطیل مقابل ۳ برابر عرض آن است. با توجه به شکل، فاصله نقطه M تا خط DC چند برابر عرض مستطیل است؟



(۱) ۲/۵

(۲) ۲/۴

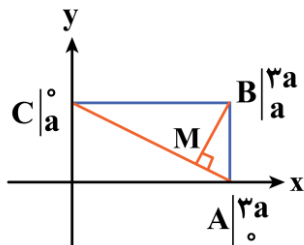
(۳) ۲/۷

(۴) ۲/۱

(سخت - محاسباتی - زمان‌بر) - حسابان ۱ صفحه ۳۳ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۳

روش اول



طول مستطیل را با مقدار $3a$ و عرض مستطیل را با مقدار a فرض می‌کنیم و مستطیل را چنان رسم می‌کنیم تا یک رأس روی مبدأ مختصات و دو ضلع روی محورهای مختصات واقع شود.

$$\begin{cases} m_{AC} = \frac{a - 0}{0 - 3a} = -\frac{1}{3} \\ C(0, a) \end{cases} \Rightarrow \text{معادله قطر } AC: y = -\frac{1}{3}x + a$$

پس شیب خط MB برابر $m' = 3$ است. معادله آن برابر است با:

$$m' = 3, B(3a, 0) \Rightarrow BM: y = 3x - 3a$$

از تلاقی دو خط MB و AC مختصات نقطه M به دست می‌آید:

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{3}x + a \\ y = 3x - 3a \end{cases} \Rightarrow 3x - 3a = -\frac{1}{3}x + a \Rightarrow \frac{10}{3}x = 4a \Rightarrow x_M = \frac{12}{10}a = \frac{6}{5}a$$

چون معادله خط DC به صورت $x=0$ و عمودی است، اختلاف طول این خط و نقطه M همان فاصله M تا خط DC است.
 DC تا M فاصله $= 2/\sqrt{a} - 0 = 2/\sqrt{a}$

پس فاصله نقطه M تا خط DC، $2/\sqrt{a}$ برابر اندازه عرض مستطیل است.

روش دوم

$$\begin{cases} m_{AC} = \frac{a-0}{0-3a} = -\frac{1}{3} \\ AC \text{ عرض از مبدأ} = a \end{cases} \Rightarrow y = -\frac{1}{3}x + a$$

M روی AC قرار دارد، پس $M(x_0, -\frac{1}{3}x_0 + a)$ در نظر می‌گیریم:

$$BM \perp AC \Rightarrow m_{BM} = 3$$

$$\Rightarrow \frac{(-\frac{1}{3}x_0 + a) - a}{x_0 - 3a} = 3 \Rightarrow \frac{-\frac{1}{3}x_0}{x_0 - 3a} = 3 \xrightarrow{\times(-3)} \frac{x_0}{x_0 - 3a} = -9 \Rightarrow x_0 = -9x_0 + 27a$$

$$\Rightarrow 10x_0 = 27a \Rightarrow x_0 = 27/10a$$

چون معادله خط DC به صورت $x=0$ و عمودی است، اختلاف طول این خط و نقطه M همان فاصله M تا خط DC است.
 DC تا M فاصله $= 2/\sqrt{a} - 0 = 2/\sqrt{a}$

پس فاصله نقطه M تا خط DC، $2/\sqrt{a}$ برابر اندازه عرض مستطیل است.

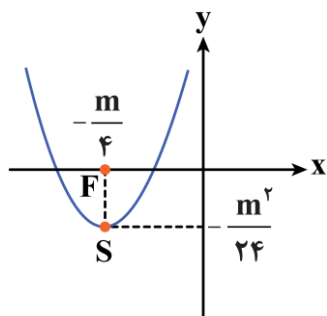


۲۱- به ازای کدام مقدار m کانون سهمی به معادله $mx^2 + 3y = 2x^2$ بر روی قسمت منفی محور x ها قرار دارد؟
 (۱) -۹ (۲) ۳ (۳) ۹ (۴) -۳

(سخت - مفهومی/محاسباتی - استاندارد ۶) - هندسه ۳ صفحه ۵۵ - ۱۲۰۲

پاسخ: گزینه ۲

کانون سهمی بر روی محور x ها است، یعنی عرض کانون حتماً صفر است، بنابراین معادله سهمی را استاندارد می‌کنیم و مختصات کانون را به دست می‌آوریم:



$$\begin{aligned} 2x^2 + mx = 3y &\Rightarrow x^2 + \frac{m}{2}x = \frac{3}{2}y \xrightarrow{+(\frac{m}{4})^2} x^2 + \frac{m}{2}x + \frac{m^2}{16} = \frac{3}{2}y + \frac{m^2}{16} \\ &\Rightarrow (x + \frac{m}{4})^2 = \frac{3}{2}y + \frac{m^2}{16} \Rightarrow (x + \frac{m}{4})^2 = \frac{3}{2}(y + \frac{m^2}{24}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} S(-\frac{m}{4}, -\frac{m^2}{24}) \\ Fa = \frac{3}{2} \Rightarrow a = \frac{3}{8} \end{cases} \Rightarrow F(-\frac{m}{4}, -\frac{m^2}{24} + \frac{3}{8}) \Rightarrow -\frac{m^2}{24} + \frac{3}{8} = 0 \Rightarrow \frac{m^2}{24} = \frac{3}{8} \Rightarrow m^2 = 9 \Rightarrow m = \pm 3$$

باید صفر شود.

$$x_F = -\frac{m}{4} < 0 \Rightarrow m > 0$$

حال چون کانون بر روی قسمت منفی محور x ها واقع است، بنابراین باید داشته باشیم:

بنابراین $m = 3$ قابل قبول است.

تبدیل معادله سهمی به فرم استاندارد

I. اگر معادله گسترده یک سهمی به صورت $Ay^2 + By + Cx + D = 0$ یا $Ax^2 + Bx + Cy + D = 0$ باشد، برای استاندارد کردن، مراحل زیر را طی می‌کنیم:

۱) ضرب درجه دو را از بین می‌بریم یعنی با تقسیم طرفین بر A ، معادله را به صورت $y^2 + ay + bx + c = 0$ یا $x^2 + ax + by + c = 0$ در می‌آوریم.

۲) دو جمله اول در فرم مرحله ۱ را سمت چپ نگه داشته و بقیه را به طرف دوم برده و معادله را به صورت $y^2 + ay = -bx - c$ یا $x^2 + ax = -by - c$ در می‌آوریم.

۳) طرف چپ را به صورت مربع کامل نوشته و $\frac{a^2}{4}$ را به طرف راست اضافه می‌کنیم.

توجه!

برای ساختن عبارت مربع کامل در واقع از اتحاد مربع دوجمله‌ای استفاده می‌کنیم:

$$x^2 + ax + \frac{a^2}{4} = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2$$

چون جمله آخر یعنی $\frac{a^2}{4}$ را نداریم آن را به دو طرف معادله اضافه می‌کنیم و بعد از اتحاد استفاده می‌کنیم.

۴) از ضرب متغیر درجه اول در طرف دوم فاکتور می‌گیریم.

وقتی معادله سهمی به یکی از صورت‌های استاندارد زیر درآمد، رأس در همه آن‌ها برابر با $S(\alpha, \beta)$ است.

۲) سهمی عمودی و بالایی $a > 0$: $(x - \alpha)^2 = 4a(y - \beta)$

۱) سهمی عمودی و پایینی $a < 0$: $(x - \alpha)^2 = 4a(y - \beta)$

۴) سهمی افقی و چپ $a < 0$: $(y - \beta)^2 = 4a(x - \alpha)$

۳) سهمی افقی و راستی $a > 0$: $(y - \beta)^2 = 4a(x - \alpha)$

II. برای پیدا کردن مختصات کانون یک سهمی، ابتدا باید مختصات رأس و سپس مقدار a را با علامت آن مشخص کنیم (مثلاً ممکن است $a = -3$ باشد که نشان می‌دهد دهانه سهمی به طرف منفی محور است) در این صورت:

$$S(\alpha, \beta) \begin{cases} \text{سهمی افقی: } F(\alpha + a, \beta) \\ \text{سهمی قائم: } F(\alpha, \beta + a) \end{cases}$$

توجه!

توجه کنید که علامت می‌تواند مثبت یا منفی باشد.

III. برای پیدا کردن معادله خط هادی نیز مختصات رأس و a را مشخص می‌کنیم و داریم:

$$S(\alpha, \beta) \begin{cases} \text{سهمی افقی: } x = \alpha - a \\ \text{سهمی قائم: } y = \beta - a \end{cases}$$

۲۲- یک شعاع نورانی در راستای خط $x=4$ بر سهمی $x^2=4y$ می‌تابد، شعاع بازتابش کدام است؟

$$4y - 3x = 4 \quad (4)$$

$$3y - 4x = 4 \quad (3)$$

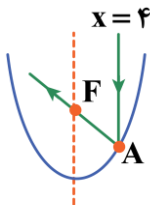
$$4x - 3y = 4 \quad (2)$$

$$3x - 4y = 4 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۴

(متوسط - مفهومی - استاندارد) - هندسه ۳ صفحه ۵۶ - ۱۲۰۲

می‌دانیم اگر یک شعاع نورانی به موازات محور سهمی بر آن بتابد، شعاع بازتابش از کانون سهمی عبور می‌کند. پس ابتدا نقطه A و سپس F را پیدا کرده و معادله خط گذرا از A و F را می‌نویسیم:



$$\begin{cases} x^2 = 4y \\ x = 4 \end{cases} \Rightarrow 4^2 = 4y \Rightarrow y = 4 \Rightarrow A(4, 4)$$

و اما در این سهمی $a = \frac{4}{4} = 1$ است، بنابراین مختصات کانون عبارت است از:

$$S(\alpha, \beta) = (0, 0) \Rightarrow F(\alpha, \beta + a) = (0, 0 + 1) = (0, 1)$$

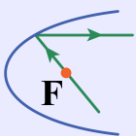
حال شیب خط گذرا از A و F را پیدا کرده و سپس معادله AF را می‌نویسیم:

$$m_{AF} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4-1}{4-0} = \frac{3}{4}$$

$$\xrightarrow{F(0,1)} AF \text{ خط معادله: } y - 1 = \frac{3}{4}(x - 0) \Rightarrow 4y - 4 = 3x \Rightarrow 4y - 3x = 4$$

شعاع تابش و بازتابش بر سهمی

۱) اگر یک شعاع نورانی از کانون سهمی بگذرد و بر سهمی بتابد، شعاع بازتابش موازی محور سهمی خواهد بود.



۲) اگر یک شعاع نورانی به موازات محور سهمی بر آن بتابد، شعاع بازتابش از کانون سهمی می‌گذرد.



۲۳- یک تلسکوپ انعکاسی دارای آینه سهمی است که فاصله رأس تا کانون آن ۷۲ سانتی‌متر و قطر قاعده آن $168\sqrt{2}$ سانتی‌متر است،

عمق آینه در مرکز چند سانتی‌متر است؟

$$12/25 \quad (4)$$

$$98 \quad (3)$$

$$24/5 \quad (2)$$

$$49 \quad (1)$$

(متوسط - خط‌به‌خط - سریع) - هندسه ۳ صفحه ۵۸ - ۱۲۰۲

پاسخ: گزینه ۱

می‌دانیم در همه آینه‌های سهمی یا دیش‌های مخابراتی $a = \frac{D^2}{16h}$ است که D قطر دهانه دیش و h عمق دیش است، بنابراین:

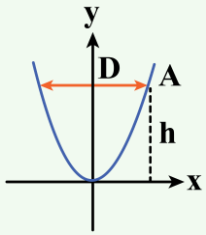
$$a = \frac{D^2}{16h} \Rightarrow 72 = \frac{(168\sqrt{2})^2}{16h} \Rightarrow h = \frac{168 \times 168 \times 2}{72 \times 16}$$

با توجه به این که $168 = 4 \times 42$ است، داریم:

$$h = \frac{42 \times 4 \times 42 \times 4 \times 2}{72 \times 16} = \frac{42 \times 42}{36} = 49$$

دیش‌های مخابراتی و آینه‌های سهموی

اگر D قطر دهانه یک دیش (قطر قاعده آینه سهموی) و h عمق دیش (عمق آینه سهموی) باشد، فاصله کانونی آن از رابطه زیر به دست می‌آید:



$$a = \frac{D^2}{16h}$$

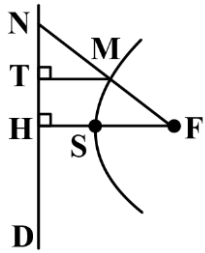
اثبات:

برای اثبات کافی است معادله سهمی را به صورت $x^2 = 4ay$ در نظر بگیریم، حال باید نقطه $A(\frac{D}{2}, h)$ در معادله سهمی صدق کند:

$$\left(\frac{D}{2}\right)^2 = 4a \times h \Rightarrow a = \frac{D^2}{16h}$$



۲۴- در سهمی شکل مقابل، نقطه F کانون سهمی و خط D خط هادی سهمی است. اگر $NT = \frac{1}{3}$ و $TH = 2$ باشد، فاصله رأس سهمی از



کانون سهمی کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}$
- (۲) ۲
- (۳) ۴
- (۴) $2\sqrt{2}$

(سخت - مفهومی - زمان‌بر) - هندسه ۳ صفحه ۵۸ - ۱۲۰۲

پاسخ: گزینه ۲

مطابق شکل درسنامه، اگر $NT = x$ و $TH = y$ باشد، می‌توان ثابت کرد که فاصله کانونی از رابطه زیر به دست می‌آید (اثبات در درسنامه):

$$a^2 = \frac{y^2(x+y)}{4(x-y)}$$

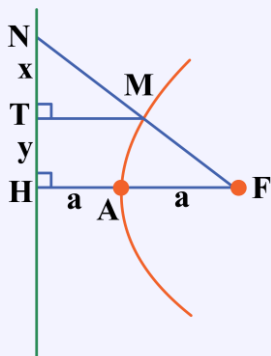
حال با جایگذاری $x = \frac{1}{3}$ و $y = 2$ در رابطه فوق داریم:

$$a^2 = \frac{\cancel{2}^2 \times (\frac{1}{3} + 2)}{4(\frac{1}{3} - 2)} = \frac{\frac{16}{3}}{\frac{-5}{3}} = -\frac{16}{5} \Rightarrow a = 2$$

تمرین‌شناسی!

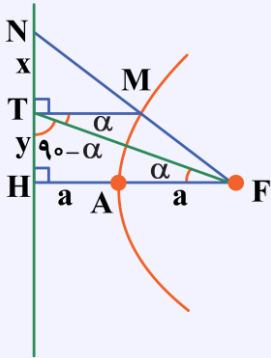
طبق تمرین ۱۲ صفحه ۵۸ کتاب درسی می‌توان به کمک قضیه نیمسازها ثابت کرد:

$$\frac{NF}{AF} = 2 \times \frac{NT}{HT}$$



اثبات:

برای اثبات کافیت از F به T وصل کنید چون $TM = MF$ است، مثلث TMF متساوی الساقین می شود و از آنجا FT نیمساز زاویه F از مثلث NHF می شود. (شکل را ببینید).



می دانیم که نیمساز، ضلع مقابل را به نسبت اضلاع کناری تقسیم می کند، پس:

$$\frac{NF}{HF} = \frac{NT}{HT} \Rightarrow \frac{NF}{2AF} = \frac{NT}{HT} \Rightarrow \frac{NF}{AF} = 2 \times \frac{NT}{HT}$$

نتایج کاربردی:

۱) فرض می کنیم $NT = x$ ، $TH = y$ و همچنین $FA = a$ خواهیم داشت:

$$\frac{NF}{a} = 2 \times \frac{x}{y} \Rightarrow NF = 2a \times \frac{x}{y}$$

حال طبق فیثاغورس در مثلث NHF داریم:

$$\begin{aligned} NF^2 &= (x+y)^2 + (2a)^2 \Rightarrow \left(2a \times \frac{x}{y}\right)^2 = (x+y)^2 + (2a)^2 \\ \Rightarrow 4a^2 \left(\frac{x}{y}\right)^2 - 4a^2 &= (x+y)^2 \Rightarrow 4a^2 \left(\frac{x^2}{y^2} - 1\right) = (x+y)^2 \\ \Rightarrow 4a^2 \left(\frac{x^2 - y^2}{y^2}\right) &= (x+y)^2 \Rightarrow 4a^2 \left(\frac{(x-y)(x+y)}{y^2}\right) = (x+y)^2 \\ \Rightarrow 4a^2 \left(\frac{x-y}{y^2}\right) &= x+y \Rightarrow a^2 = \frac{y^2(x+y)}{4(x-y)} \end{aligned}$$

۳) با استفاده از رابطه به دست آمده می توان ثابت کرد که طول NF مستقل از a است، (یعنی به طول a بستگی ندارد):

$$NF = 2a \times \frac{x}{y} \xrightarrow{a = \sqrt{\frac{y^2(x+y)}{4(x-y)}}} NF = 2 \sqrt{\frac{y^2(x+y)}{4(x-y)}} \times \frac{x}{y} = \frac{2y}{y} \sqrt{\frac{x+y}{x-y}} \times \frac{x}{y} \Rightarrow NF = x \sqrt{\frac{x+y}{x-y}}$$

سخن طراح

این تمرین یکی از تمرینات مهم آخر فصل دوم است. به این لحاظ که هنوز در کنکور سراسری به سراغ آن نرفته اند و به نوعی جزء سوالات بکر و دست نخورده کتاب است.



۲۵- سطح محدود به رابطه‌های $x^2 + y^2 \leq m^2$ و $y \leq |x|$ برابر 3π است. مقدار مثبت m کدام است؟

(۴) $\sqrt{2}$

(۳) ۲

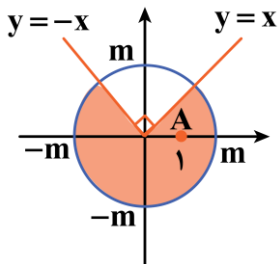
(۲) ۴

(۱) ۳

(آسان - خط‌به‌خط - سریع) - هندسه ۳ صفحه ۶۳ - ۱۲۰۳

پاسخ: گزینه ۳

نمودار هر دو رابطه را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:



رابطه $x^2 + y^2 \leq m^2$ نقاط درون دایره به شعاع m است و رابطه $y \leq |x|$ به نقاط پایین‌تر از $y = |x|$ اشاره دارد (چون $A(1, 0)$ در رابطه صدق می‌کند، نقاط پایین نمودار $y = |x|$ است). حال سطح محدود به این دو رابطه $\frac{3}{4}\pi$ سطح یک دایره به شعاع m است.

$$\frac{3}{4}(\pi m^2) = 3\pi \Rightarrow m^2 = 4 \Rightarrow m = \pm 2 \xrightarrow{m > 0} m = 2$$

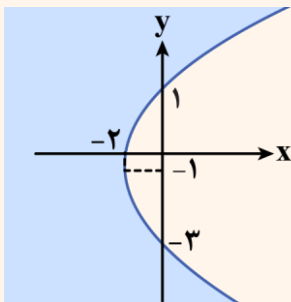
روش تعیین نمودار از روی ضابطه

به طور کلی برای رسم نمودار یک رابطه که به صورت نامساوی داده شده است، ابتدا آن را در حالت تساوی رسم می‌کنیم، سپس یک نقطه مشخص از صفحه را درون آن رابطه قرار می‌دهیم، اگر نقطه درون رابطه صدق کرد همان سمتی از نمودار که شامل نقطه است را هاشور می‌زنیم (جواب است) و اگر صدق نکرد سمت دیگر نمودار جواب است.

یه نمونه باحال ببین!

$$(y+1)^2 \geq 2(x+2)$$

ابتدا نمودار سهمی $(y+1)^2 = 2(x+2)$ را رسم می‌کنیم. سپس نقطه $(0, 0)$ را در نامساوی امتحان می‌کنیم. چون در نامساوی صدق نمی‌کند (۴ $\nless 1$) پس سمت دیگر که شامل $(0, 0)$ نیست، نشان دهنده ناحیه‌ای است که $(y+1)^2$ از $2(x+2)$ بزرگ‌تر است.



توجه!

نمودار $x^2 + y^2 < R^2$ نقاط درون یک دایره به مرکز مبدأ و به شعاع R است.



- ۲۶- دو خط d و d' می‌توانند تحت تبدیل‌های دوران، بازتاب، تجانس و انتقال تصویر یکدیگر باشند، وضعیت d و d' الزاماً چگونه است؟
- (۱) متقاطع و عمود
 - (۲) متقاطع با زاویه 60°
 - (۳) موازی
 - (۴) متناظر در فضا

پاسخ: گزینه ۳

(آسان - خطبه‌خط - سریع) - هندسه ۲ صفحه‌های ۴۳ تا ۴۸ - ۱۱۰۲

دو خط الزاماً باید موازی باشند که بتوانند انتقال یافته یا مجانس هم باشند، چون انتقال و تجانس شیب خطوط را تغییر نمی‌دهند. برای اطلاعات بیشتر به جدول زیر دقت کنید:

تبدیل خطوط به یکدیگر

اگر خط d' تصویر خط d تحت اثر بازتاب، انتقال، دوران و... باشد، آن‌گاه خواهیم داشت:

وضعیت d و d'		موازی	متقاطع	منطبق
نوع تبدیل				
بازتاب		خط بازتاب بین d و d' موازی و متساوی‌الفاصله از آن‌ها است.	هر دو نیمساز d و d' می‌توانند محور بازتاب باشند.	خط بازتاب عمود بر d یا خود d است.
انتقال		دو سر بردار انتقال روی دو خط d و d' (بی‌شمار انتقال وجود دارد).	امکان‌پذیر نیست.	بردار انتقال باید با خط d هم‌راستا باشد.
دوران با زاویه ۱۸۰°		مرکز دوران بین d و d'	امکان‌پذیر نیست.	هر نقطه روی d می‌تواند مرکز دوران باشد.
دوران با زاویه ۰° < θ < ۱۸۰°		امکان‌پذیر نیست.	مرکز دوران، هر نقطه روی نیمساز d و d' و زاویه دوران، زاویه بین دو خط است.	امکان‌پذیر نیست.
تجانس		مرکز تجانس هر نقطه غیرواقع بر d و d' می‌تواند باشد.	امکان‌پذیر نیست.	مرکز تجانس هر نقطه روی d و نسبت تجانس هر عدد دلخواه

یه نمونه باحال ببین!

- اگر برای تبدیل دو خط d و d' به یکدیگر، دقیقاً دو خط بازتاب وجود داشته باشد وضعیت d و d' نسبت به هم کدام است؟
- (۱) موازی
 - (۲) عمود
 - (۳) متقاطع
 - (۴) چنین چیزی امکان‌پذیر نیست.

پاسخ تشریحی:

اگر دو خط متقاطع باشند، هر کدام از نیمسازهای زاویه‌های بین آن‌ها می‌تواند خط بازتاب باشد، پس دو محور بازتاب مختلف برای تبدیل آن‌ها وجود دارد.

پاسخ: گزینه ۳



۲۷- اگر $A'(۳, ۸)$ مجانس نقطه $A(۲, ۵)$ و همچنین $B'(۱۱, ۱۲)$ مجانس نقطه $B(۶, ۷)$ باشد، مرکز تجانس در صورت امکان پذیر بودن مسئله کدام است؟

(۴) امکان پذیر نیست.

(۳) $(۱, ۰)$

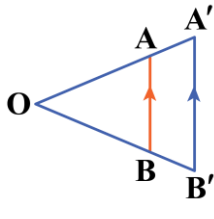
(۲) $(۲, ۱)$

(۱) $(۱, ۲)$

(متوسط - مفهومی - استاندارد) - هندسه ۲ صفحه ۴۶ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۱

می‌دانیم تجانس شیب خط را حفظ می‌کند، بنابراین باید AB و $A'B'$ موازی باشند:



$$m_{A'B'} = \frac{12-8}{11-3} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$m_{AB} = \frac{7-5}{6-2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow m_{A'B'} = m_{AB}$$

بنابراین $A'B'$ می‌تواند مجانس AB باشد. حال معادله خطوط AA' و BB' را می‌نویسیم و با هم تقاطع می‌دهیم تا نقطه O به دست آید:

$$m_{AA'} = \frac{8-5}{3-2} = 3 \Rightarrow y-5 = 3(x-2) \Rightarrow y = 3x-1$$

$$m_{BB'} = \frac{12-7}{11-6} = 1 \Rightarrow y-7 = (x-6) \Rightarrow y = x+1$$

تقاطع دو خط: $\begin{cases} y-3x=-1 \\ y-x=1 \end{cases} \Rightarrow -2x=-2 \Rightarrow x=1 \Rightarrow y=2 \Rightarrow O(1, 2)$ مرکز تجانس

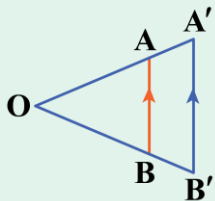
قلقشو یاد بگیر!

اگر A' مجانس A و همچنین B' مجانس B به مرکز O باشند:

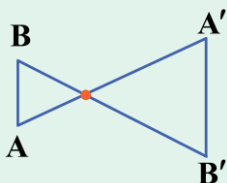
اولاً: باید $A'B'$ و AB موازی باشند تا چنین چیزی امکان پذیر باشد.

ثانیاً: برای به دست آوردن مرکز تجانس باید خط گذرا از A و A' و خط گذرا از B و B' را تقاطع دهیم.

ثالثاً: برای پیدا کردن نسبت تجانس باید اندازه $A'B'$ را بر اندازه AB تقسیم کنیم و علامت مثبت یا منفی نسبت تجانس بستگی به این دارد که A و A' در یک طرف O باشند یا در طرفین O .

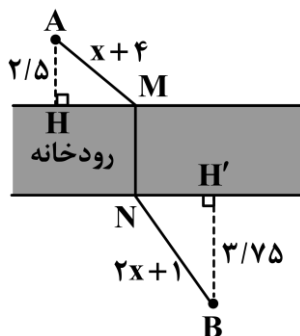


$$k = + \frac{|A'B'|}{|AB|}$$



$$k = - \frac{|A'B'|}{|AB|}$$

۲۸- دو شهر A و B در دو طرف رودخانه‌ای قرار دارند. می‌خواهیم جاده‌ای از A به B بسازیم که پل MN بر راستای رودخانه عمود باشد. اگر AMNB کوتاه‌ترین مسیر بین A و B باشد، مقدار x کدام است؟



- (۱) ۱/۲۵
(۲) ۵
(۳) ۱۰
(۴) ۱۲/۵

(متوسط - مفهومی - استاندارد) - هندسه ۲ صفحه ۵۳ - ۱۱۰۲

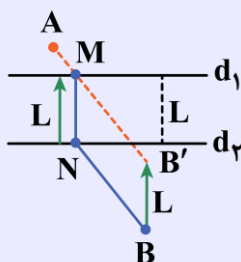
پاسخ: گزینه ۳

برای این که AMNB کوتاه‌ترین مسیر باشد، باید دو مثلث AHM و NBH' متشابه باشند، بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{x+4}{2x+1} = \frac{2/5}{3/75} \Rightarrow 3/75x + 15 = 5x + 2/5 \Rightarrow 1/25x = 12/5 \Rightarrow x = \frac{12/5}{1/25} = 10$$

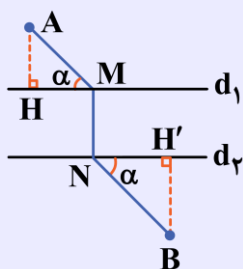
کوتاه‌ترین مسیر

دو خط d_1 و d_2 به فاصله L از هم قرار دارند، اگر نقاط A و B در طرفین d_1 و d_2 قرار گرفته باشند و پاره‌خط MN عمود بر هر دو خط d_1 و d_2 باشد، برای پیدا کردن کمترین طول خط شکسته AMNB کافیست B را به اندازه بردار L به موازات بردار L انتقال دهیم و از A به B' وصل کنیم تا خط d_1 در M قطع کند، حال اگر از M عمودی بر d_2 رسم کنیم تا آن را در N قطع کند، در این صورت AMNB کوتاه‌ترین مسیر ممکن است و اندازه آن برابر است با:



$$\text{Min}(AMNB) = |AB'| + L$$

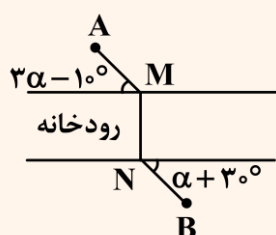
اگر AMNB کوتاه‌ترین مسیر بین دو نقطه A و B باشد، زاویه‌های $\hat{M}$ و $\hat{N}$ با هم برابرند و مثلث‌های قائم‌الزاویه ساخته شده در دو طرف خط‌های d_1 و d_2 متشابه‌اند.



$$\hat{M} = \hat{N} \Rightarrow \triangle AHM \sim \triangle NH'B$$

یه نمونه بحال ببین!

دو شهر A و B در دو طرف رودخانه قرار دارند، می‌خواهیم جاده‌ای از A به B بسازیم که پل MN بر راستای رودخانه عمود باشد. اگر AMNB کوتاه‌ترین مسیر بین A و B باشد، α کدام است؟



- (۱) 10°
(۲) 20°
(۳) 30°
(۴) 25°

پاسخ تشریحی:

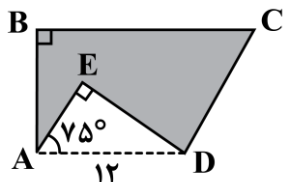
باید زاویه‌های $\hat{M}$ و $\hat{N}$ با هم برابر باشند:

$$3\alpha - 10^\circ = \alpha + 30^\circ \Rightarrow 2\alpha = 40^\circ \Rightarrow \alpha = 20^\circ$$

پاسخ: گزینه ۲



۲۹- چهارضلعی ABCD دوزنقه قائم‌الزاویه است. اگر بدون تغییر محیط و تعداد اضلاع چندضلعی ABCDE مساحت آن را افزایش دهیم، مساحت جدید چقدر بیشتر از مساحت اولیه آن است؟



(۱) ۱۸

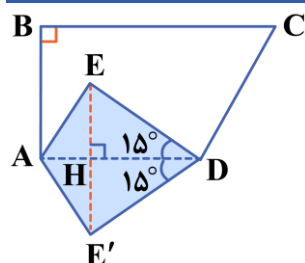
(۲) ۳۶

(۳) ۲۴

(۴) ۴۸

(متوسط - مفهومی - سریع) - هندسه ۲ صفحه‌های ۵۱ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۲



باید اضلاع AE و ED را نسبت به پاره خط AD بازتاب دهیم در این صورت مقدار افزایش مساحت کل شکل برابر با مساحت چهارضلعی AEDE' است که خود از دو مثلث هم‌نهشت تشکیل شده، بنابراین:

$$S_{\text{اضافه شده}} = 2 \times S_{\triangle AED}$$

اما برای به دست آوردن مساحت $\triangle AED$ ، توجه کنید که مثلث قائم‌الزاویه است و یک زاویه 15° دارد، بنابراین ارتفاع وارد بر وتر ربع وتر است:

$$EH = \frac{1}{4} \times 12 = 3 \Rightarrow S_{\triangle AED} = \frac{1}{2} \times 12 \times 3 = 18$$

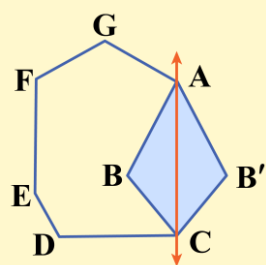
بنابراین مساحت اضافه شده برابر است با:

$$\Delta S = S_{\text{جدید}} - S_{\text{اولیه}} = 2S_{\triangle AED} = 2 \times 18 = 36$$

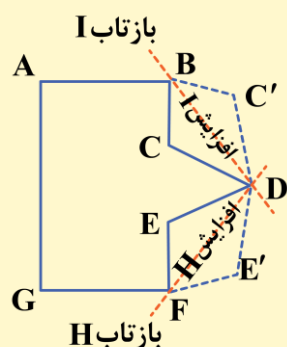
مسائل هم‌پیرامونی = افزایش مساحت بدون تغییر محیط



اگر بخواهیم مساحت شکل را بدون تغییر محیط آن افزایش دهیم از بازتاب استفاده می‌کنیم. این مسئله به مسئله هم‌پیرامونی مشهور است. میزان افزایش مساحت مطابق شکل به اندازه دو برابر مساحت مثلث ABC است.

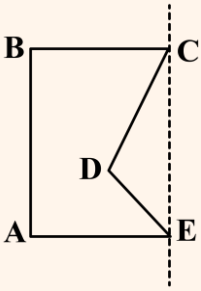


اگر شکلی دارای چندین فرورفتگی باشد، با چند بار استفاده از بازتاب می‌توانیم با ثابت ماندن محیط، مساحت را افزایش دهیم.



یه نمونه باحال ببین!

در شکل زیر، اگر بازتاب رأس D نسبت به امتداد پاره خط CE را D' بنامیم، آنگاه کدام گزینه در مورد محیط و مساحت پنج ضلعی‌های ABCDE و ABCD'E درست است؟



- (۱) محیط‌ها و مساحت‌های دو شکل برابرند.
- (۲) محیط‌ها برابرند ولی مساحت شکل جدید بیشتر است.
- (۳) محیط و مساحت شکل جدید بیشتر است.
- (۴) محیط شکل قبلی بیشتر و مساحت شکل جدید بیشتر است.

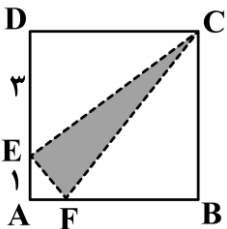
پاسخ تشریحی:

در اثر بازتاب نقطه D نسبت به امتداد CE، محیط شکل ثابت می‌ماند ولی مساحت شکل افزایش می‌یابد.

پاسخ: گزینه ۲



۳۰- در مربع ABCD مطابق شکل نقطه F طوری روی ضلع AB واقع شده است که مثلث CEF کمترین مقدار محیط ممکن را دارد،



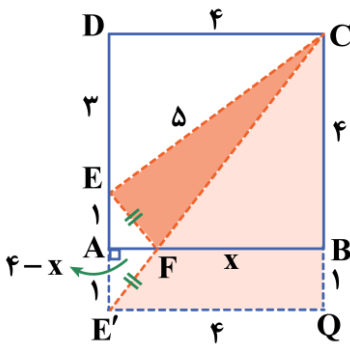
مساحت مثلث در این حالت کدام است؟

- (۱) ۶/۴
- (۲) ۳/۲
- (۳) ۴/۲
- (۴) ۴/۸

(سخت - مفهومی - زمان‌بر) - هندسه ۲ صفحه ۵۳ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۲

چون CE ثابت است باید EF + FC کمترین مقدار ممکن باشد، بنابراین E را نسبت به AB بازتاب می‌دهیم تا به E' برسیم، سپس از E' به C وصل می‌کنیم تا AB را در F قطع کند، در این صورت مثلث EFC در این حالت کمترین محیط ممکن را دارد، حال برای پیدا کردن x در مثلث E'CQ طبق تالس داریم:



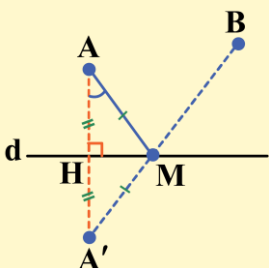
$$\frac{x}{4} = \frac{4}{4+1} \Rightarrow x = \frac{16}{5} = 3\frac{1}{5} \Rightarrow AF = 4 - x = 4 - 3\frac{1}{5} = \frac{9}{5}$$

بنابراین مساحت مثلث EFC در این حالت برابر است با:

$$S_{\triangle EFC} = 4^2 - \left(\frac{1}{2} \times 3 \times 4\right) - \left(\frac{1}{2} \times \frac{9}{5} \times 1\right) - \left(\frac{1}{2} \times 3\frac{1}{5} \times 4\right) = 16 - (6 + \frac{9}{10} + \frac{36}{5}) = 16 - 12\frac{9}{10} = 3\frac{1}{10}$$

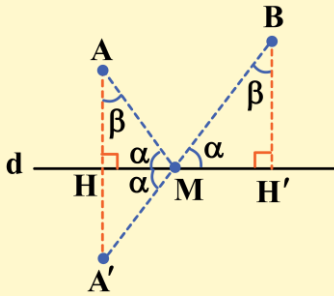
کوتاه‌ترین مسیر دومقصد! (مسئله هرون)

دو نقطه A و B در یک طرف خط d مفروض‌اند، اگر نقطه M روی خط d بلغزد برای پیدا کردن کمترین طول خط شکسته AMB کافیه بازتاب نقطه A نسبت به خط d یعنی A' را پیدا کنیم و از A' به B وصل کنیم تا خط d را در M قطع کند، در این صورت:



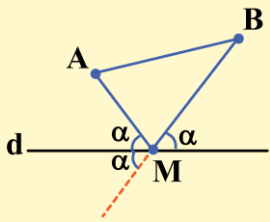
$$\text{Min}(AMB) = |A'B|$$

این مسئله به مسئله هرون مشهور است، در این تیپ از مسائل، اگر طول پاره‌خط‌های AM یا BM را بخواهیم باید از تشابه دو مثلث AHM و BMH' استفاده کنیم:

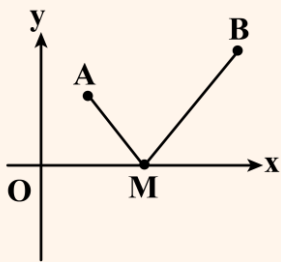


$$\frac{MB}{MA} = \frac{BH'}{AH} = \frac{MH'}{MH}$$

در این حالت، خط d نیمساز زاویه خارجی رأس M از مثلث ABM است و در ضمن زاویه‌های ساخته شده در طرفین نقطه M نیز با هم برابرند.



یه نمونه باحال ببین!

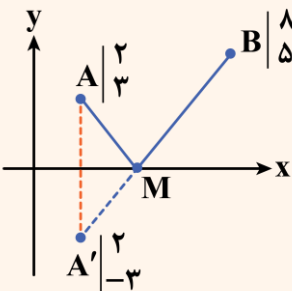


نقاط $A \begin{vmatrix} 8 \\ 3 \end{vmatrix}$ و $B \begin{vmatrix} 8 \\ 5 \end{vmatrix}$ مفروض‌اند. نقطه M روی محور x می‌لغزد، کم‌ترین اندازه خط شکسته AMB کدام است؟

- ۱ (۱)
۱۲ (۲)
۸ (۳)
۱۰ (۴)

پاسخ تشریحی:

کافیست بازتاب نقطه A نسبت به محور x‌ها یعنی A' را پیدا کنیم و اندازه A'B را به دست آوریم:



$$|A'B| = \sqrt{(8-2)^2 + (5-(-3))^2} = 10$$

پاسخ: گزینه ۴

بازتاب یک نقطه نسبت به چهار خط مشهور صفحه

- ۱) تصویر نقطه $A(a, b)$ تحت بازتاب نسبت به محور x‌ها نقطه $A'(a, -b)$ است.
- ۲) تصویر نقطه $A(a, b)$ تحت بازتاب نسبت به محور y‌ها نقطه $A'(-a, b)$ است.
- ۳) تصویر نقطه $A(a, b)$ تحت بازتاب نسبت به خط $y = x$ (نیمساز ربع اول و سوم) نقطه $A'(b, a)$ است.
- ۴) تصویر نقطه $A(a, b)$ تحت بازتاب نسبت به خط $y = -x$ (نیمساز ربع دوم و چهارم) نقطه $A'(-b, -a)$ است.



۳۱- چند عدد ۴ رقمی فرد با ارقام متمایز وجود دارد که کوچکتر از ۵۰۰۰ باشند؟

(۴) ۹۸۸

(۳) ۹۶۸

(۲) ۱۰۰۸

(۱) ۱۰۰۶

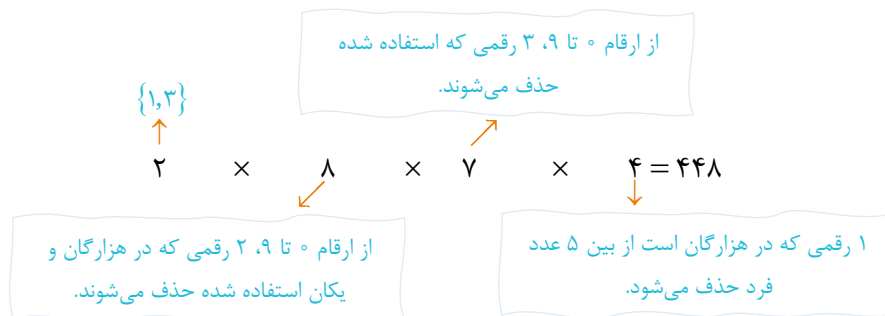
(متوسط - مفهومی - استاندارد) - ریاضی ۱ صفحه ۱۲۳ - ۱۰۰۶

پاسخ: گزینه ۲

برای این که عدد فرد باشد باید رقم یکان آن یکی از ارقام $\{۱, ۳, ۵, ۷, ۹\}$ باشد. از طرفی برای این که عدد کوچکتر از ۵۰۰۰ باشد باید رقم هزارگان آن یکی از ارقام $\{۱, ۲, ۳, ۴\}$ باشد، ولی این که کدام رقم برای یکان انتخاب شود بستگی دارد به این که برای هزارگان چه رقمی انتخاب شده باشد، پس اولین جایگاهی که باید تکلیف آن را معلوم کنیم (اولین خانه شرطدار) رقم هزارگان و دومین جایگاهی که باید تکلیف آن را معلوم کنیم (خانه شرطدار) رقم یکان است:

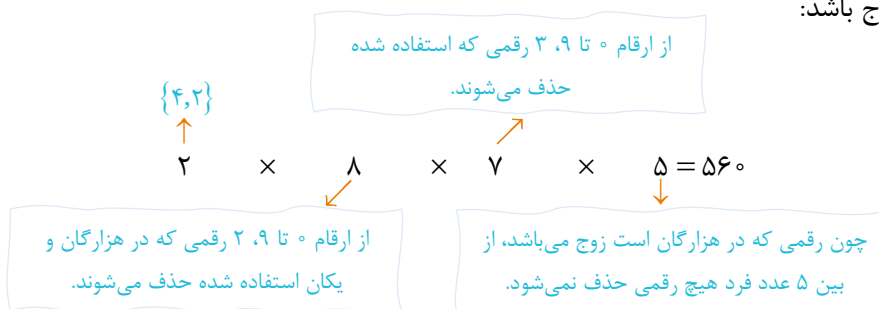
حالت اول

رقم هزارگان فرد باشد:



حالت دوم

رقم هزارگان زوج باشد:



$$۱۰۰۸ = ۴۴۸ + ۵۶۰ = \text{مجموع حالت‌ها}$$

راهنمای زنگ بازی!

همیشه در سؤالات شمارشی، برای هر انتخاب یک جایگاه خالی در نظر می‌گیریم و تعداد حالت‌های متفاوتی که هر جایگاه می‌تواند داشته باشد را در آن می‌نویسیم. حواستان باشد که برای نوشتن تعداد حالت‌های هر خانه، **اول به سراغ خانه‌هایی که شرط دارند می‌رویم.** در غیر این صورت ممکن است برخی شرایط از قلم بیافتند و تعداد اشتباهی به دست بیاوریم!



۳۲- به چند طریق می‌توان ۵ کتاب متمایز ریاضی و ۳ کتاب متمایز فیزیک را کنار هم چید به طوری که هیچ کدام از کتاب‌های فیزیک کنار هم قرار نگیرند؟

(۴) ۱۴۶۰۰

(۳) ۱۵۰۰۰

(۲) ۱۴۴۰۰

(۱) ۱۲۲۰۰

(آسان - مفهومی - سریع) - گسسته صفحه ۵۷ - ۱۲۰۳

پاسخ: گزینه ۲

ابتدا باید کتاب‌های ریاضی را کنار هم قرار دارد، ملاحظه می‌شود ۶ جای خالی بین آن‌ها وجود دارد که اگر کتاب‌های فیزیک در هر یک از این جاهای خالی قرار گیرند، دیگر کنار هم قرار نمی‌گیرند و مطلوب ما است.

— r — r — r — r — r —

جایگشت کتاب‌های فیزیک

$$\text{تعداد حالات مطلوب} = \binom{6}{3} \times 3! \times 5! = 14400$$

جایگشت کتاب‌های ریاضی

انتخاب جایگاه کتاب‌های فیزیک

جایگشت

هر طریقه قرار گرفتن n شیء متمایز در یک ردیف و در کنار هم را یک «جایگشت خطی» از آن n شیء می‌گوییم. جایگشت خطی n شیء متمایز برابر $n!$ است.

قلقشو یاد بگیر!

اگر در مسائل مربوط به جایگشت خطی اشیاء، بخواهند:

۱) تعدادی شیء کنار هم نباشند، باید باقی اشیاء را در یک ردیف بچینیم و مشاهده کنیم که چند جایگاه بین آن‌ها وجود دارد (ابتدا و انتها را فراموش نکنید 😊) و این جایگاه‌های بین این اشیاء همان تعداد مکان‌های مجاز برای اشیائی است که نباید کنار هم باشند.

یه نمونه باحال ببین!

۳ مهندس و ۴ پزشک را به چند طریق می‌توان در یک ردیف صندلی کنار هم نشاند، به طوری که هیچ کدام از مهندس‌ها کنار هم نباشند؟

پاسخ تشریحی:

ابتدا پزشک‌ها را در یک ردیف می‌نشانیم به طوری که بین هر کدام یک فاصله باشد. ببینید:

— پزشک — پزشک — پزشک — پزشک —

حال برای این که هیچ دو مهندسی کنار هم ننشسته باشند باید مهندس‌ها در ۵ جای خالی که مشخص شده بنشینند. بنابراین:

جایگشت پزشک‌ها

$$\text{جواب} = \binom{5}{3} \times 4! \times 3!$$

جایگشت مهندس‌ها

انتخاب ۳ جایگاه برای مهندس‌ها

۲) تعدادی شیء کنار هم باشند اصطلاحاً اشیاء را به هم می‌بندیم و به عنوان یک شیء در نظر می‌گیریم. سپس جایگشت اشیاء کلی را در جایگشت اشیاء داخل دسته، ضرب می‌کنیم.

یه نمونه باحال ببین!

۳ مهندس و ۴ پزشک را به چند طریق می‌توان در یک ردیف صندلی کنار هم نشاند، به طوری که مهندس‌ها کنار هم باشند؟

پاسخ تشریحی:

۳ مهندس را در یک بسته کنار هم قرار می‌دهیم. ببینید:

پزشک، پزشک، پزشک، پزشک، مهندس، مهندس، مهندس

کل دسته مهندس‌ها را یک شیء در نظر می‌گیریم. بنابراین:

جایگشت کلی افراد

$$\text{جواب} = 5! \times 3!$$

جایگشت افراد داخل دسته



۳۳- با ارقام ۱, ۲, ۳, ۴, ۴, ۴, ۲, ۲, ۱ چند عدد ۷ رقمی می توان ساخت به طوری که ارقام فرد و زوج یکی در میان باشند؟

۱۸ (۴)

۱۶ (۳)

۱۵ (۲)

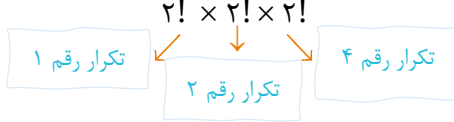
۱۲ (۱)

(متوسط - مفهومی - استاندارد) - گسسته صفحه ۵۸ - ۱۲۰۳

پاسخ: گزینه ۴

چون تعداد ارقام زوج ۴ و تعداد ارقام فرد ۳ تا است، پس ابتدا و انتهای ارقام باید رقم زوج قرار گیرد.

$$\frac{4 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 1 \times 1}{2! \times 2! \times 2!} = 18$$



توجه!

چون با جابه جایی دو رقم یکسان حالت جدیدی ایجاد نمی شود، پس باید این حالتها در نظر گرفته نشوند.



۳۴- به چند طریق می توان از بین سه نوع گل مریم، شقایق و رز، ۱۰ شاخه گل خرید به طوری که از گل مریم حداقل ۲ شاخه و از گل رز حداکثر ۴ شاخه انتخاب کرد؟

۴۵ (۴)

۴۰ (۳)

۳۵ (۲)

۲۵ (۱)

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - گسسته صفحه ۶۱ - ۱۲۰۳

پاسخ: گزینه ۲

تعداد جوابهای این مسئله مانند تعداد جوابهای صحیح و نامنفی معادله زیر است:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 10 & (I) \\ x_1 \geq 2 \\ x_3 \leq 4 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 2 \Rightarrow x_1 - 2 \geq 0 \xrightarrow{x_1 - 2 = y_1} x_1 = y_1 + 2 \xrightarrow{\text{جایگذاری در (I)}} y_1 + 2 + x_2 + x_3 = 10 \Rightarrow y_1 + x_2 + x_3 = 8 \quad (II)$$

$$x_3 \leq 4 \xrightarrow{\text{از روش متمم}} x_3 \geq 5 \Rightarrow x_3 - 5 \geq 0 \xrightarrow{x_3 - 5 = y_3} x_3 = y_3 + 5 \xrightarrow{\text{جایگذاری در معادله (II)}} y_1 + x_2 + y_3 = 3$$

اگر A مجموعه حالت هایی باشد که در انتخاب ۱۰ شاخه گل از بین ۳ نوع گل مذکور، حداقل ۲ شاخه گل مریم و ۵ شاخه گل رز انتخاب شود و S مجموعه حالت هایی باشد که در انتخاب ۱۰ شاخه گل از بین ۳ نوع گل حداقل ۲ شاخه گل مریم انتخاب شود، در این صورت تعداد حالت های مطلوب با استفاده از متمم گیری از A در مجموعه S به دست می آیند:

$$\Rightarrow |A'| = |S| - |A| = \binom{8+3-1}{3-1} - \binom{3+3-1}{3-1} = \binom{10}{2} - \binom{5}{2} = 45 - 10 = 35$$

تعداد جوابهای صحیح و نامنفی معادله

تعداد انتخاب های دلخواه n شیء از بین k نوع شیء برابر است با تعداد جوابهای صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ که آن هم برابر است با:

$$\binom{n+k-1}{k-1}$$

توجه!

توجه کنید که شرط $x_i \geq 0$ باید برای تمام $i = 1, 2, \dots, k$ برقرار باشد تا بتوانیم ادعا کنیم که تعداد جوابها برابر با $\binom{n+k-1}{k-1}$ است.

 قلیقشو یاد بگیر!

در یافتن تعداد جواب‌های معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ اگر شرطی وجود داشته باشد که به صورت $x_i \geq r$ باشد باید ابتدا آن را به نامساوی $x_i - r \geq 0$ تبدیل کرده و از تغییر متغیر $y_i = x_i - r$ استفاده کنیم تا متغیر جدید y_i در شرط نامنفی بودن صدق کند و بتوان از فرمول تعداد جواب‌های آن استفاده کرد.

و اگر شرطی وجود داشته باشد که به صورت $x_i \leq r$ باشد، باید ابتدا متمم گرفت و آن شرط را به صورت $x_i \geq r+1$ تبدیل کرده و سپس مجدداً مانند بالا از تغییر متغیر استفاده کرد. سپس باید تعداد جواب‌های حالت متمم، از تعداد جواب‌های کل کم گردد.



۳۵- معادله $(y_1 + y_2 + y_3)(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = 55$ چند جواب طبیعی دارد؟

۹۴۴ (۴)

۹۰۰ (۳)

۸۴۰ (۲)

۷۲۰ (۱)

(سخت - محاسباتی - زمان‌بر) - گسسته صفحه ۶۱ - ۱۲۰۳

پاسخ: گزینه ۳

برای تساوی بالا، دو حالت وجود دارد: 11×5 و 5×11

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5 \Rightarrow |S_1| = \binom{n-1}{k-1} = \binom{5-1}{4-1} = \binom{4}{3} = 4 \\ y_1 + y_2 + y_3 = 11 \Rightarrow |S_2| = \binom{11-1}{3-1} = \binom{10}{2} = 45 \end{cases} \Rightarrow |S| = 4 \times 45 = 180$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 11 \Rightarrow |S'_1| = \binom{11-1}{4-1} = \binom{10}{3} = 120 \\ y_1 + y_2 + y_3 = 5 \Rightarrow |S'_2| = \binom{5-1}{3-1} = \binom{4}{2} = 6 \end{cases} \Rightarrow |S'| = 6 \times 120 = 720$$

تعداد کل جواب‌های طبیعی $= 180 + 720 = 900$

 تعداد جواب‌های طبیعی معادله

تعداد جواب‌های طبیعی معادله $x_1 + \dots + x_k = n$ به شکل $\binom{n-1}{k-1}$ محاسبه می‌شود.

 ویژگی ترکیب

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$



۳۶- اگر نمودار دایره‌ای برای ۸۴ داده آماری چنان باشد که زاویه مرکزی متناظر به داده‌های A و B به اندازه 90° از یکدیگر اختلاف داشته باشند، آن‌گاه اختلاف فراوانی‌های آن دو داده از یکدیگر چقدر خواهد بود؟

۱۵ (۴)

۳۰ (۳)

۲۸ (۲)

۲۱ (۱)

(آسان - خط‌به‌خط - سریع) - آمار و احتمال صفحه ۷۲ - ۱۱۰۳

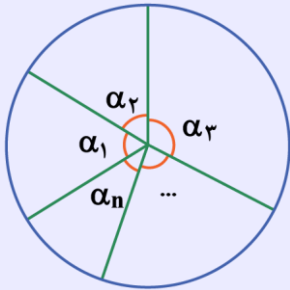
پاسخ: گزینه ۱

از آن‌جا که اندازه زاویه در نمودار دایره‌ای با فرمول $\frac{f_i}{n} \times 360^\circ$ مشخص می‌شود، داریم:

$$\frac{f_A}{84} - \frac{f_B}{84} = \frac{f_A - f_B}{84} = \frac{90^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{f_A - f_B}{84} = \frac{1}{4} \Rightarrow f_A - f_B = 21$$

نمودار دایره‌ای برای نمایش داده‌ها

برای نمایش داده‌ها با استفاده از نمودار دایره‌ای، نسبت هر گروه از جامعه به کل جامعه را در نظر گرفته و آن را به منزله زاویه مرکزی نظیر این گروه در دایره قرار می‌دهیم. به عنوان مثال اگر جامعه m عضو و n دسته داشته باشد برای هر $1 \leq i \leq n$ ، زاویه نظیر گروه i ام در دایره است و داریم:



$$\alpha_i = \frac{\text{تعداد اعضای گروه } i\text{-ام}}{\text{تعداد اعضای کل جامعه}} \times 360^\circ = \frac{f_i}{m} \times 360^\circ$$



۳۷- از داده‌های زیر حداقل چند داده باید حذف کنیم تا میانگین داده‌های باقی‌مانده بیش‌تر از 10° نباشد؟

۲, ۳, ۶, ۶, ۸, ۱۰, ۱۱, ۱۲, ۱۲, ۱۶, ۱۶, ۱۶, ۱۷, ۱۸, ۲۰

۵ (۴)

۶ (۳)

۳ (۲)

۹ (۱)

(متوسط - محاسباتی - استاندارد ۶) - آمار و احتمال صفحه ۸۱ - ۱۱۰۳

پاسخ: گزینه ۲

برای آن که تعداد اعداد حذف شده حداقل باشد لازم است اعداد را از بزرگ به کوچک حذف کنیم. با این کار معلوم است که عدد 10° و تمام اعداد کوچک‌تر از 10° در داده‌ها باقی خواهند ماند که مقدار مجموع کمبودهای آن‌ها تا 10° برابر است با:

$$(10-2) + (10-3) + (10-6) + (10-6) + (10-8) + (10-10) = (8+7+4+4+2+0) = 25$$

بنابراین تعدادی بزرگ‌تر از 10° را، چنان در داده‌های باقی‌مانده نگه می‌داریم که مجموع زیادبود آن‌ها از 10° بیش‌تر از ۲۵ نشود. مجموع زیادبود از داده‌های اولیه که بزرگ‌تر از 10° هستند به ترتیب به شکل زیر هستند:

$$(11-10) + (12-10) + (12-10) + (16-10) + (16-10) + (16-10) + (17-10) + (18-10) + (20-10)$$

$$= \underbrace{1+2+2+6+6+6}_{23} + \underbrace{7+8+10}_{25} = 48$$

معلوم است که با حذف ۳ عدد آخر مجموع زیادبودها کم‌تر از ۲۵ بوده و میانگین به کمتر از 10° تبدیل می‌شود. توجه کنید که با حذف ۶ داده اول بزرگ‌تر از 10° میانگین دقیقاً 10° خواهد شد و باز هم چون بیش‌تر از 10° نیست قابل قبول است اما در مسئله از ما کمترین تعداد حذف خواسته شده.

مفهوم میانگین

میانگین مشخصه‌ای عددی است که از مجموع داده‌ها تقسیم بر تعداد آن‌ها به دست می‌آید. در واقع وقتی میانگین تعدادی عدد 10° باشد (اگر بدانیم همه آن‌ها 10° نیستند) به ازای اعدادی در بین داده‌ها که از 10° کوچک‌تر هستند و میانگین را به سمت کمتر از 10° می‌کشاند، باید اعدادی بزرگ‌تر از 10° هم وجود داشته باشند که میانگین را به سمت بزرگ‌تر از 10° بکشاند و در نتیجه این تأثیرات متضاد یکدیگر را خنثی کنند و میانگین در نهایت 10° شود.



۳۸- اختلاف از میانگین شش داده آماری برابر ۳، -۵، a، ۷، b، ۱ است. اگر بدانیم واریانس آن شش داده برابر ۲۹ است، آن گاه ab کدام است؟

(۱) -۱۶	(۲) -۱۸	(۳) -۲۷	(۴) -۲۱
---------	---------	---------	---------

(متوسط - محاسباتی - استاندارد ۶) - آمار و احتمال صفحه ۸۹ - ۱۱۰۳)

 پاسخ: گزینه ۳

می‌دانیم مجموع اختلاف از میانگین‌ها همیشه صفر است، پس:

$$1 + b + \gamma + a - \delta + \epsilon = 0 \Rightarrow a + b = -\epsilon$$

$$\sigma^r = r_9 \Rightarrow \frac{1^r + b^r + v^r + a^r + (-\omega)^r + r^r}{\varepsilon} = r_9 \Rightarrow 1^r + b^r + v^r + a^r + (-\omega)^r + r^r = 1v\varepsilon \Rightarrow a^r + b^r = 9.$$

با استفاده از اتحاد مربع دوجمله‌ای داریم:

$$r_{ab} = (a + b)^r - (a^r + b^r) = 36 - 90 = -54 \Rightarrow ab = -27$$

واریانس 

برای محاسبه واریانس n داده آماری $X_1, X_2, \dots, X_n$ داریم:

$$\sigma^r = \frac{(x_1 - \bar{x})^r + (x_2 - \bar{x})^r + \dots + (x_n - \bar{x})^r}{n} \quad \text{u} \quad \sigma^r = \frac{x_1^r + x_2^r + \dots + x_n^r}{n} - \bar{x}^r$$

گاهی راحت‌تر است $(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2$ را به‌دست آوریم که مجموع مربعات اختلاف از میانگین‌ها است.

گاهی راحت‌تر است $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$ را به‌دست آوریم که مجموع مربعات داده‌ها است.

مجموع اختلاف از میانگین‌ها صفره... 

همواره برای هر مجموعه‌ای از داده‌ها، **مجموع اختلاف داده‌ها از میانگین برابر صفر** است.

$$(x_1 - \bar{x}) + (x_2 - \bar{x}) + \dots + (x_n - \bar{x}) = 0$$



۳۹- میانگین داده‌های سمت چپ، درون و سمت راست نمودار جعبه‌ای ۲۰ داده آماری به ترتیب برابر ۱۵، ۲۲ و ۲۵ هستند. اگر بیش‌ترین و کم‌ترین مقادیر ممکن برای دامنه میان‌چارکی آن ۲۰ داده را به ترتیب با a و b نمایش دهیم، آنگاه عدد $5a+2b$ به کدام یک از اعداد زیر بخش‌پذیر است؟

۴ (۴

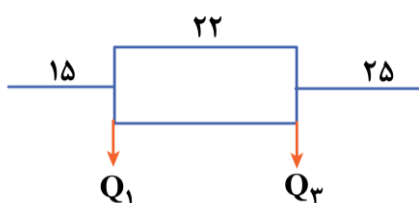
۷ (۳)

5 (2)

3 (1)

(سخت - مفہومی - زمان پر ۷) - آمار و احتمال صفحہ ۹۲ - ۱۱۰۳)

❓ **یاسخ: گزینه ۲**



Q_3 نمی‌تواند بیش‌تر از ۲۵ و نیز Q_1 نمی‌تواند کم‌تر از ۱۵ باشد، بنابراین حداکثر مقدار برای IQR برابر ۱۵-۲۵ یعنی ۱۰ است.

$$a = \text{IQR}_{\max} = 25 - 15 = 10$$

اگر همهٔ داده‌های سمت چپ جعبه به همراه اولین دادهٔ درون جعبه را ۱۵ در نظر بگیریم چارک اول برابر با ۱۵ خواهد شد و اگر تمام داده‌های سمت راست جعبه به همراه آخرین دادهٔ درون جعبه را ۲۵ در نظر بگیریم چارک سوم برابر با ۲۵ خواهد شد و به دامنهٔ میان‌چارکی ۱۰ خواهیم رسید.

Q_3 نمی‌تواند کوچک‌تر از ۲۲ و نیز Q_1 نمی‌تواند بزرگ‌تر از ۲۲ باشد ولی هر دو می‌توانند ۲۲ باشند و آن موقعی است که همه داده‌های داخل جعبه به همراه آخرین داده سمت چپ جعبه و اولین داده سمت راست جعبه را ۲۲ در نظر بگیریم، بنابراین:

$$b = \text{IQR}_{\min} = 22 - 22 = 0$$

$$5a + 2b = 5 \times 10 + 2 \times 0 = 50$$

پس:

۵۰ به ۵ بخش پذیر است.

رفع ابهام!

چرا $Q_1 \geq 15$ و $Q_3 \leq 25$ است؟ دیدیم که حالت تساوی فقط در یک زمان خاص اتفاق می افتد حال با فرض متفاوت بودن داده ها: اگر چارک اول بخواهد کمتر از ۱۵ باشد، چون داده ها به ترتیب از کمتر به بیشتر مرتب شده اند یعنی در محدوده کمتر از چارک اول همه اعداد کوچک تر از ۱۵ هستند، در نتیجه میانگین آن ها نمی تواند ۱۵ شود که با فرض تناقض دارد، پس: $Q_1 \geq 15$

اگر چارک سوم بخواهد بیشتر از ۲۵ باشد، چون داده ها به ترتیب از کمتر به بیشتر مرتب شده اند یعنی در محدوده بیشتر از چارک سوم همه داده ها بزرگ تر از ۲۵ هستند، در نتیجه میانگین آن ها نمی تواند ۲۵ شود که با فرض تناقض دارد، پس: $Q_3 \leq 25$

حالا خودتان بگویید که چرا $Q_1 \leq 22$ و $Q_3 \geq 22$ است؟

چارک ها

چارک ها (Q): چارک اول، دوم و سوم مقادیری هستند که داده های مرتب شده را به چهار قسمت مساوی تقسیم می کنند.

چارک دوم همان میانه (Q_2) است.

روش محاسبه **چارک اول (Q_1)** و **چارک سوم (Q_3)**:

۱) داده ها را به صورت صعودی مرتب کرده و میانه را می یابیم.

۲) میانه داده های مرتب شده کوچک تر از میانه را چارک اول (Q_1) می نامیم.

۳) میانه داده های مرتب شده بزرگ تر از میانه را چارک سوم (Q_3) می نامیم.

نمودار جعبه ای

نمودار جعبه ای، نموداری است که می تواند نحوه پراکندگی داده ها را به نمایش بگذارد. این نمودار براساس ۵ شاخص مهم آماری زیر رسم می شود:

۲) چارک اول (Q_1)

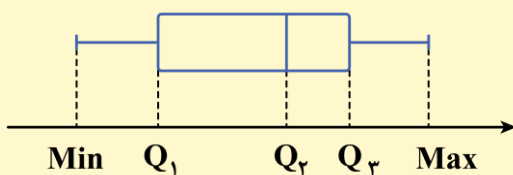
۱) کوچک ترین داده (Min)

۴) چارک سوم (Q_3)

۳) میانه یا چارک دوم (Q_2)

۵) بزرگ ترین داده (Max)

داده های بزرگ تر از Q_1 و کوچک تر از Q_3 (بین Q_1 و Q_3) را داده های **داخل جعبه** و داده های بزرگ تر از Q_3 و کوچک تر از Q_1 را داده های **بیرون جعبه** و Q_1 و Q_3 را داده های **روی جعبه** می نامند.



دامنه میان چارکی داده ها

به اختلاف Q_3 و Q_1 دامنه میان چارکی داده ها می گویند.

$$IQR = Q_3 - Q_1$$

۴۰- قرار است به یکی از ۶ داده زیر ۱ واحد، به دیگری ۲ واحد، ... و به ششمی ۶ واحد اضافه کرده و ضریب تغییرات داده‌های جدید را t بنامیم. مجموع ارقام بیش‌ترین مقدار ممکن برای $\frac{t^2}{t}$ کدام است؟

۱۰ (۴)

۹ (۳)

۸ (۲)

۷ (۱)

(سخت - محاسباتی - زمان‌بر) - آمار و احتمال صفحه ۹۰ - ۱۱۰۳

پاسخ: گزینه ۳

برای آن که $\frac{t^2}{t}$ ماکزیمم باشد باید t^2 و در نتیجه t مینیمم باشد. با توجه به فرمول ضریب تغییرات یعنی $t = CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$ ، مقدار t وقتی مینیمم است که σ مینیمم و $\bar{x}$ ماکزیمم باشد. مقدار $\bar{x}$ ثابت و برابر است با:

$$\frac{(2+3+5+6+8+9) + (1+2+\dots+6)}{6} = 9$$

پس باید σ مینیمم باشد و این موقعی اتفاق می‌افتد که داده‌ها به اندازه کافی به هم نزدیک باشند (به کادر توجه سر بنزید!)، بنابراین ۶ را به ۲، ۵، ۳، ۱ و ۹ اضافه می‌کنیم (یعنی بزرگ‌ترین عدد را به کوچک‌ترین داده، و کوچک‌ترین عدد را به بزرگ‌ترین داده اضافه می‌کنیم تا اختلاف‌ها کمتر شود.) و به داده‌های زیر خواهیم رسید:

جدید داده‌های: ۸، ۸، ۹، ۹، ۱۰، ۱۰

$$\sigma_{\text{جدید}}^2 = \frac{2 \times (8-9)^2 + 2 \times (9-9)^2 + 2 \times (10-9)^2}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{t^2}{t} \xrightarrow{t^2 = \frac{\sigma^2}{\bar{x}^2}} \frac{2}{t^2} = 2 \times \frac{\bar{x}^2}{\sigma^2} = 2 \times \frac{9^2}{\frac{2}{3}} = 243$$

۲۴۳ مجموع ارقام = ۲ + ۴ + ۳ = ۹

توجه!

توجه کنید که واریانس یکی از معیارهای پراکندگی است که هر چه **کوچک‌تر** باشد نشان می‌دهد داده‌ها به هم نزدیک‌تر و **متمرکزتر**ند و هر چه **بزرگ‌تر** باشد نشان می‌دهد داده‌ها بیشتر از هم فاصله دارند و **پراکنده‌تر**ند.

معیارهای پراکندگی

(۲) انحراف معیار: $\sigma = \sqrt{\text{واریانس}}$

(۱) واریانس: $\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$

(۴) دامنه تغییرات: $R = x_{\max} - x_{\min}$

(۳) ضریب تغییرات: $CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$





برای دیدن پاسخنامه ویدئویی آزمون
QR Code بالا را اسکن یا روی آن کلیک کنید!

فیزیک ۲: مغناطیس - صفحه‌های ۸۳ تا ۱۰۸
فیزیک ۳: برهم‌کنش‌های موج (تا پایان فصل ۴) - صفحه‌های ۸۹ تا ۱۱۴

بودجه‌بندی
این آزمون

پایه یازدهم: درمجموع ۲ تست از ۳۵ تست کنکور را پوشش داده است.
پایه دوازدهم: درمجموع ۲ تست از ۳۵ تست کنکور را پوشش داده است.

سهم در
کنکور

۴۱- یک وال عنبر در عمق اقیانوس برای شکار از پژواک امواج فراصوتی استفاده می‌کند. بسامد امواج فراصوتی‌ای که این وال تولید می‌کند، حدود 10 kHz است. با توجه به این که تندی صوت در آب دریا $\frac{3}{5} \times 10^3 \text{ m/s}$ است، وال کدامیک از ماهی‌های زیر را نمی‌تواند شکار کند؟

- (۱) ماهی تترا به طول 0.6 cm
(۲) ماهی اسکار به طول 25 cm
(۳) ماهی گلدفیش به طول 4 cm
(۴) ماهی ردلاین به طول 11 cm

(آسان - محاسباتی - سریع) - صفحه ۹۳ - ۱۲۰۴

پاسخ: گزینه ۱

با استفاده از رابطه $\lambda = \frac{v}{f}$ داریم:

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{1/5 \times 10^3}{1000 \times 10^3} = 1/5 \times 10^{-2} \text{ m} = 1/5 \text{ cm}$$

برای شکار یک ماهی، اندازه آن باید در حدود یا بزرگ‌تر از طول موج ارسالی وال باشد، پس وال قادر به تشخیص و شکار ماهی تترا به طول 0.6 cm نیست.



نکته
برای تشخیص جسم توسط جانور، اندازه جسم باید در حدود طول موج به کار رفته یا بزرگ‌تر از آن باشد.

۴۲- دانش‌آموزی بین دو صخره قائم ایستاده است و فاصله او تا صخره دورتر، 240 متر بیش‌تر از فاصله‌اش تا صخره نزدیک‌تر است. این دانش‌آموز با بسامد 1600 Hz فریاد می‌زند و پژواک صوت خود از این دو صخره را با $1/5 \text{ s}$ تأخیر نسبت به هم می‌شنود. طول موج صوت این دانش‌آموز چند سانتی‌متر است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۲ (۳) ۲۰ (۴) ۲۴

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - صفحه ۹۳ - ۱۲۰۴

پاسخ: گزینه ۳

گام اول

صوت به صورت حرکت یکنواخت در محیط منتشر می‌شود، پس از رابطه $\Delta x = vt$ برای دو صخره، سرعت انتشار صوت را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} 2d = vt \\ 2(d + 240) = v(t + 1/5) \end{cases} \Rightarrow 2d + 480 = \cancel{2d} + 1/5 v$$

$$\Rightarrow 480 = 1/5 v \Rightarrow v = 320 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

گام آخر

طول موج صوت دانش‌آموز برابر است با:

$$\lambda = \frac{v}{f} \Rightarrow \lambda = \frac{320}{1600} = 0.2 \text{ m} = 20 \text{ cm}$$

۴۳- کدام مورد صحیح است؟

(۱) میکروفون سهموی به کمک بازتابنده‌های تخت صداهای ضعیف را ثبت می‌کند.

(۲) شخصی که در محلی با سرعت صوت $340 \frac{m}{s}$ در هوا قرار دارد و فاصله‌اش تا دیواری ۱۴ متر است، صدای پژواک را از صدای اصلی تشخیص نمی‌دهد.

(۳) از امواج فراصوتی در رادار دوپلری برای مکان‌یابی و تعیین تندی خودروها استفاده می‌شود.

(۴) در دستگاه لیتوتریپسی و سونوگرافی از مکان‌یابی پژواکی استفاده می‌شود.

پاسخ: گزینه ۲

(متوسط - مفهومی - استاندارد ۱ - صفحه ۹۳ - ۱۲۰۴)

بررسی گزینه‌ها:

۱

میکروفون سهموی به کمک بازتابنده‌های صوتی خمیده (به شکل سهمی) صداها را ثبت می‌کند. (✗)

۲

با توجه به رابطه $\Delta x = vt$ حداقل فاصله شخص تا دیوار باید ۱۷ متر باشد تا پژواک رخ دهد:

$$2d = vt \Rightarrow 2d = 340 \times 0.1 \Rightarrow d = 17m$$

۱۷/۰: حداقل تأخیر زمانی بین دو صدا تا پژواک رخ دهد.

چون $14 < 17$ است، در نتیجه فرد صدای پژواک را از صدای اصلی تشخیص نمی‌دهد. (✓)

۳

از امواج الکترومغناطیس در رادارهای دوپلری استفاده می‌شود. (✗)

۴

در دستگاه لیتوتریپسی از بازتابنده‌های بیضوی برای شکستن سنگ کلیه استفاده می‌شود. (✗)

•••

۴۴- پرتوی نوری مطابق شکل زیر به آینه (۱) می‌تابد. زاویه بین دو آینه چند درجه باشد تا در دومین بازتاب از آینه (۲) زاویه بازتابش

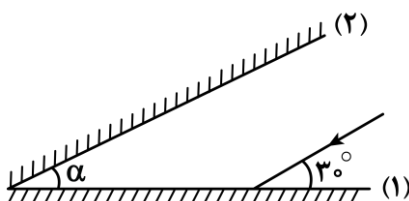
صفر درجه باشد؟

۲۰ (۲)

۳۰ (۱)

۱۰ (۴)

۱۵ (۳)



(متوسط - محاسباتی - استاندارد ۱ - صفحه ۹۴ - ۱۲۰۴)

پاسخ: گزینه ۲

می‌دانیم اگر پرتو عمود به سطح آینه بتابد، روی پرتوی تابش بازمی‌گردد و زاویه‌های تابش و بازتابش صفر درجه می‌شوند، یعنی پرتوی دومین بازتاب آینه (۲) با سطح آینه، زاویه ۹۰ درجه می‌سازد.

طبق قانون بازتاب عمومی، $\theta_i = \theta_r$ است. همچنین جمع زوایای داخلی مثلث ۱۸۰ درجه می‌باشد.

در مثلث ABE:

$$90 + x + 30 + \alpha = 180 \Rightarrow x + \alpha = 60 \quad (1)$$

در مثلث CDB:

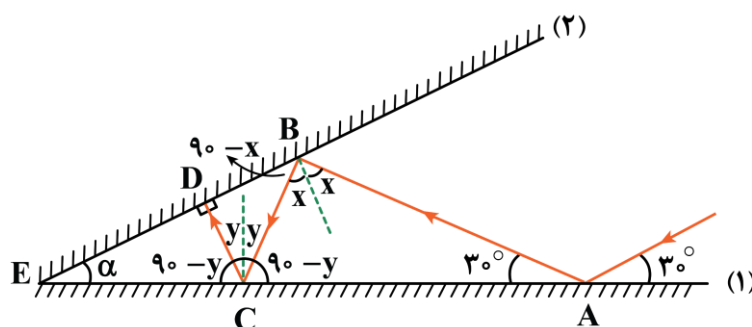
$$90 + 90 - x + 2y = 180 \Rightarrow x = 2y \quad (2)$$

در مثلث CDE:

$$90 - y + 90 + \alpha = 180 \Rightarrow y = \alpha \quad (3)$$

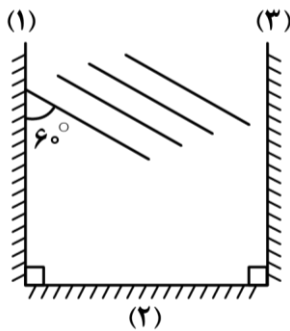
رابطه‌های (۲) و (۳) را در رابطه (۱) جایگذاری می‌کنیم:

$$2y + y = 60 \Rightarrow y = \alpha = 20^\circ$$



•••

۴۵- مطابق شکل، موجی به آینه (۱) تابیده و در ادامه از آینه‌های (۲) و (۳) بازتاب شده و از مجموعه آینه‌ها خارج می‌شود. پرتوی نهایی نسبت به پرتوی اولیه چند درجه منحرف شده است؟



(۱) 120°

(۲) 180°

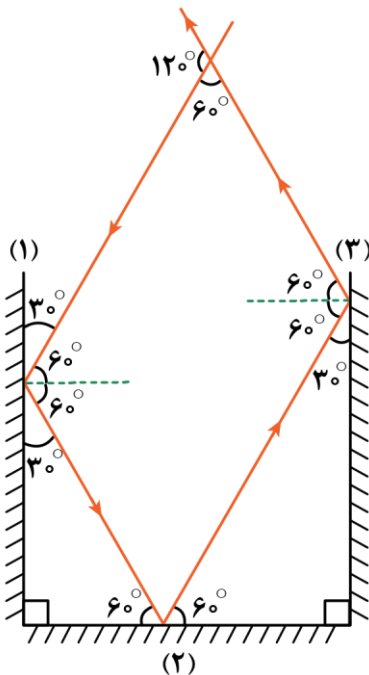
(۳) 90°

(۴) صفر

پاسخ: گزینه ۱

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - صفحه ۹۴ - ۱۲۰۴

زاویه بین جبهه‌های موج تابش و سطح آینه برابر زاویه تابش است؛ بنابراین مسیر پرتو مطابق شکل مقابل است:



با توجه به شکل، زاویه بین پرتوی اولیه و پرتوی نهایی 120° است.



۴۶- یک موج سینوسی از قسمت ضخیم طنابی به قسمت نازک وارد می‌شود. بخشی از این موج از مرز عبور می‌کند و بخشی از آن باز می‌تابد. کدام کمیت برای موج اولیه، موج عبوری و موج بازتاب یکسان است؟

(۱) دامنه (۲) دوره تناوب (۳) تندی انتشار (۴) طول موج

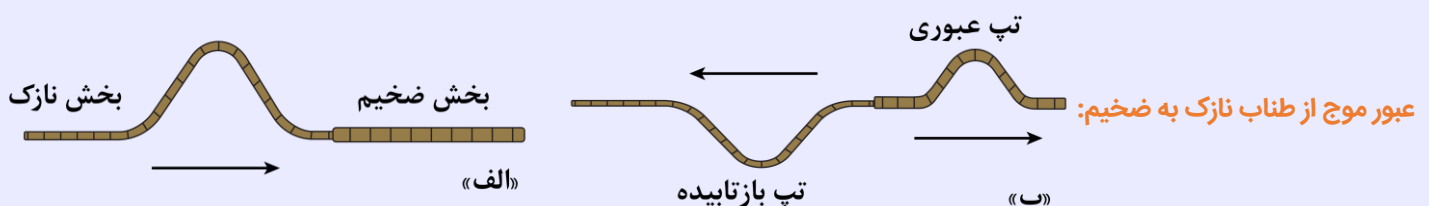
پاسخ: گزینه ۲

(آسان - مفهومی - سریع) - صفحه ۹۵ - ۱۲۰۴

بسامه و در نتیجه دوره تناوب برای هر سه موج یکسان است، زیرا توسط چشمه موج مشخص می‌شود.

بازتاب و شکست موج در یک بُعد

وقتی موج به مرز جدایی دو محیط می‌رسد بخشی از آن بازتابیده می‌شود و بخشی دیگر عبور می‌کند که این افزون بر جذب موج است که در هر دو محیط رخ می‌دهد. عبور یک تپ در طول طنابی را در نظر بگیرید که از دو بخش، یکی نازک و دیگری ضخیم، تشکیل شده است. وقتی این تپ از سمت بخش نازک به مرز دو بخش می‌رسد، مطابق شکل، بخشی از این تپ باز می‌تابد و بخش دیگری عبور می‌کند.



همان طور که در شکل می بینید، بخش ضخیم مانند مانع سخت عمل می کند و موج بازتابیده نسبت به موج فرودی وارون می شود، زیرا بخش ضخیم سنگین تر از بخش نازک است.

علاوه بر به خاطر سپردن شکل بالا و چگونگی عبور و بازتاب تپ، باید بتوانیم پارامترهایی مثل طول موج، بسامد و... را برای موج اصلی، موج بازتاب و موج عبوری مقایسه کنیم.

۱- بسامد ثابت است: بسامد توسط چشمه موج تعیین می شود. پس برای یک موج سینوسی، بسامد موج عبوری و بازتابیده همان بسامد موج فرودی است.

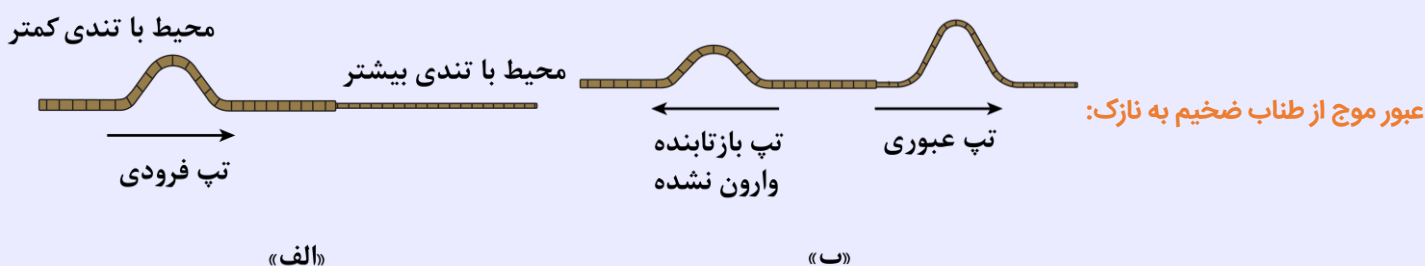
۲- تندی انتشار موج در بخش نازک بیش تر از بخش ضخیم است: نیروی کشش در تمام طول طناب های متوالی یکسان است؛ طبق رابطه

تندی انتشار موج عرضی در طناب $(v = \sqrt{\frac{F}{\rho A}})$ ، هر چه طناب ضخیم تر باشد (A بزرگ تر باشد)، تندی انتشار موج در آن کم تر است.

بنابراین تندی انتشار موج فرودی و موج بازتاب یکسان است و تندی موج عبوری که به قسمت ضخیم می رود، کم تر از آن هاست.

۳- طول موج در بخش نازک بیش تر از بخش ضخیم است: چون بسامد ثابت است، با توجه به رابطه تندی انتشار موج $(v = \lambda f)$ ، در بخش نازک که تندی بیش تر است، طول موج هم بیش تر است. توجه کنید که طول موج و تندی موج فرودی و بازتابیده (که در یک محیط هستند) باهم برابرند.

۴- دامنه موج فرودی از دامنه موج بازتابیده و عبوری بیش تر است: با صرف نظر از اتلاف انرژی، انرژی موج فرودی برابر مجموع انرژی موج بازتابیده و موج عبوری است. با توجه به این که انرژی موج با مجذور دامنه آن متناسب است، دامنه موج فرودی از دامنه موج عبوری و بازتابیده بیش تر است.



علاوه بر به خاطر سپردن شکل بالا و چگونگی عبور و بازتاب تپ، باید بتوانیم پارامترهایی مثل طول موج، بسامد و... را برای موج اصلی، موج بازتاب و موج عبوری مقایسه کنیم.

۱- بسامد ثابت است: بسامد توسط چشمه موج تعیین می شود. پس برای یک موج سینوسی، بسامد موج عبوری و بازتابیده همان بسامد موج فرودی است.

۲- تندی انتشار موج در بخش نازک بیش تر از بخش ضخیم است: نیروی کشش در تمام طول طناب های متوالی یکسان است؛ طبق رابطه

تندی انتشار موج عرضی در طناب $(v = \sqrt{\frac{F}{\rho A}})$ ، هر چه طناب ضخیم تر باشد (A بزرگ تر باشد)، تندی انتشار موج در آن کم تر است.

بنابراین تندی انتشار موج فرودی و موج بازتاب یکسان است و تندی موج عبوری که به قسمت نازک می رود، بیش تر از آن هاست.

۳- طول موج در بخش نازک بیش تر از بخش ضخیم است: چون بسامد ثابت است، با توجه به رابطه تندی انتشار موج $(v = \lambda f)$ ، در بخش نازک که تندی بیش تر است، طول موج هم بیش تر است. توجه کنید که طول موج و تندی موج فرودی و بازتابیده (که در یک محیط هستند) باهم برابرند.

۴- دامنه موج عبوری از دامنه موج بازتابیده و فرودی بیش تر است: زیرا طناب نازک سبک تر است و هنگام انتقال انرژی به آن، بیش تر بالا می رود. البته حواستان باشد که دامنه موج بازتابیده از همه کم تر است.



۴۷- ضریب شکست زجاجیه چشم برابر $\frac{4}{3}$ است. نوری با بسامد $7/5 \times 10^{14}$ Hz از هوا وارد زجاجیه چشم شخصی می‌شود. طول موج

این نور در زجاجیه چند میکرومتر است و چشمان این شخص، نور را به چه رنگی تشخیص می‌دهد؟ ($c = 3 \times 10^8 \frac{m}{s}$)

(۱) $0/3$ ، چون نور مرئی نیست، چشم آن را تشخیص نمی‌دهد.

(۲) $0/3$ ، بنفش

(۳) $0/4$ ، چون نور مرئی نیست، چشم آن را تشخیص نمی‌دهد.

(۴) $0/4$ ، بنفش

پاسخ: گزینه ۲

(سخت - محاسباتی - استاندارد) - صفحه ۹۷ - ۱۲۰۴

کلم اول

تندی نور در خلأ برابر $c = 3 \times 10^8 \frac{m}{s}$ است؛ بنابراین طول موج این نور در خلأ برابر است با:

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8}{7/5 \times 10^{14}} = 0/4 \times 10^{-6} m = 0/4 \mu m$$

کلم آخر

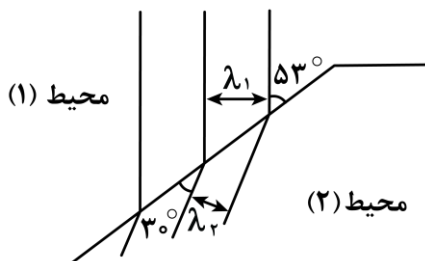
طول موج با ضریب شکست محیط رابطه عکس دارد؛ بنابراین طول موج در زجاجیه برابر است با:

$$\frac{\lambda_{\text{زجاجیه}}}{\lambda_{\text{خلأ}}} = \frac{n_{\text{خلأ}}}{n_{\text{زجاجیه}}} \Rightarrow \frac{\lambda_{\text{زجاجیه}}}{0/4} = \frac{1}{4/3} \Rightarrow \lambda_{\text{زجاجیه}} = 0/3 \mu m$$

دقت کنید چون طول موج این نور در خلأ $0/4 \mu m$ است، در ناحیه مرئی قرار دارد و رنگ آن بنفش است. هنگامی که می‌گوییم طول موج نورهای مرئی در بازه $0/4 \mu m < \lambda < 0/7 \mu m$ قرار دارد، منظور طول موج آن‌ها در هوا است.



۴۸- شکل زیر جبهه‌های موج الکترومغناطیسی را نشان می‌دهد که از محیط (۱) وارد محیط (۲) شده است. طول موج نور در محیط (۱) چند برابر طول موج نور در محیط (۲) است؟ ($\sin 53^\circ = 0/8$)



$$\frac{5}{8} \quad (1)$$

$$1/6 \quad (2)$$

$$0/4\sqrt{3} \quad (3)$$

$$\frac{5}{6}\sqrt{3} \quad (4)$$

پاسخ: گزینه ۲

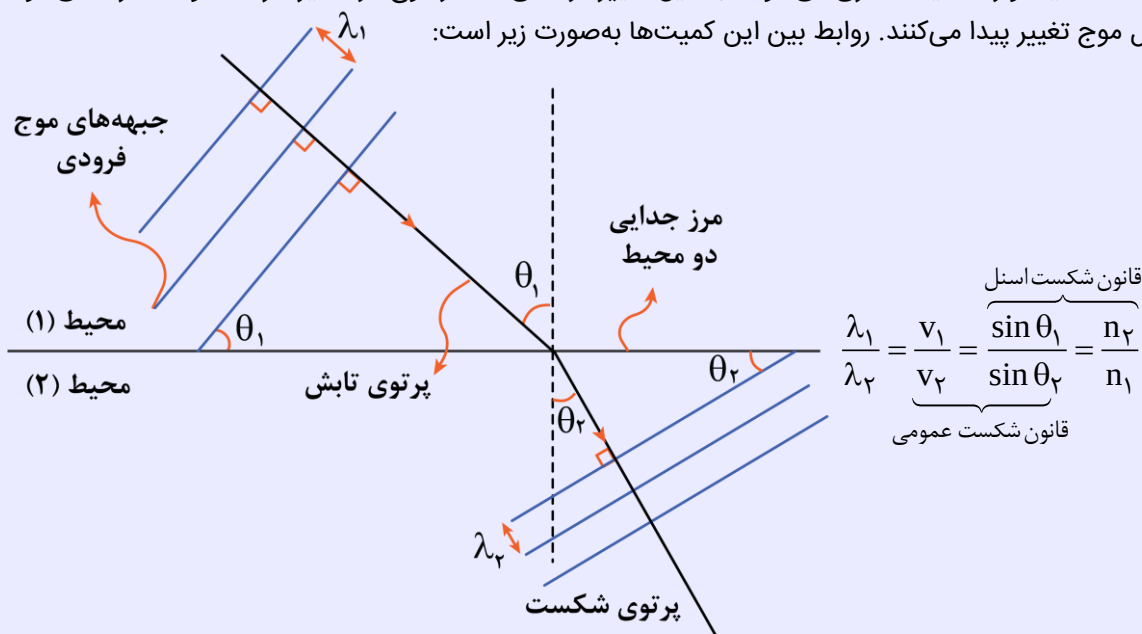
(آسان - محاسباتی - سریع) - صفحه ۹۶ - ۱۲۰۴

زاویه جبهه موج و سطح جداکننده دو محیط همان زاویه تابش و شکست است.

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \Rightarrow \frac{0/8}{0/5} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \Rightarrow \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = 1/6$$

شکست موج

هنگامی که پرتوهای نور از یک محیط وارد محیط دیگری می‌شوند، به دلیل تغییر در تندی انتشار موج، از مسیر حرکت خود منحرف می‌شوند. همچنین تندی موج و طول موج تغییر پیدا می‌کنند. روابط بین این کمیت‌ها به صورت زیر است:



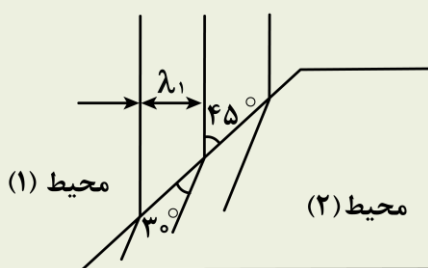
با توجه به رابطه بالا، اگر ضریب شکست محیط دوم از محیط اول بیش‌تر باشد ($n_2 > n_1$)، پرتوی شکست به خط عمود نزدیک می‌شود و برعکس.

تذکره!

در حالت خاص، اگر پرتوی موج، عمود بر سطح جدایی دو محیط بتابد، بدون انحراف وارد محیط دوم می‌شود.

آزمون سراسری ریاضی خارج از کشور ۱۴۰۰

۵۴- شکل زیر جبهه‌های موج الکترومغناطیسی را نشان می‌دهد که از محیط (۱) وارد محیط (۲) شده است. تندی نور در محیط (۱) چند برابر تندی نور در محیط (۲) است؟



- (۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- (۲) $\sqrt{\frac{3}{2}}$
- (۳) $\sqrt{2}$
- (۴) ۲

پاسخ تشریحی:

زاویه‌ای که جبهه‌های یک موج با سطح می‌سازند برابر با زاویه‌ای است که خود پرتو با خط عمود بر سطح می‌سازد؛ بنابراین، زاویه تابش برابر $\theta_1 = 45^\circ$ و زاویه شکست برابر $\theta_2 = 30^\circ$ است. با نوشتن قانون شکست داریم:

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{v_1}{v_2} \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{\sin 45^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

پاسخ: گزینه ۲



۴۹- پرتوی نوری به طور مایل از هوا به سطح محیط شفاف می تابد. قسمتی از پرتو، بازتاب و قسمت دیگری وارد محیط شفاف می شود. اگر زاویه بین پرتوی بازتاب و پرتوی شکست 103° درجه و زاویه انحراف 29° درجه باشد، ضریب شکست محیط شفاف کدام است؟

(۱) $1/2$

(۲) $1/4$

(۳) $1/6$

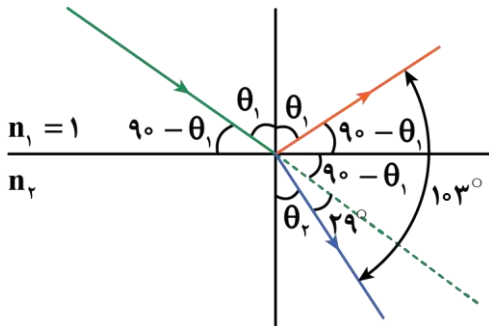
(۴) 2

θ	24°	30°	37°	53°	60°	64°
$\sin \theta$	$0/4$	$0/5$	$0/6$	$0/8$	$0/85$	$0/9$

(متوسط - محاسباتی - استاندارد ۱ - صفحه ۹۸ - ۱۲۰۴)

پاسخ: گزینه ۴

کلم اول



مسیر پرتو را رسم کرده و زاویه تابش (θ_1) و زاویه شکست (θ_r) را به دست می آوریم:

$$90 - \theta_1 + 90 - \theta_2 + 29 = 103 \Rightarrow \theta_1 = 53^\circ$$

$$\theta_1 = \theta_r + 29 \xrightarrow{\theta_1 = 53^\circ} 53 = \theta_r + 29 \Rightarrow \theta_r = 24^\circ$$

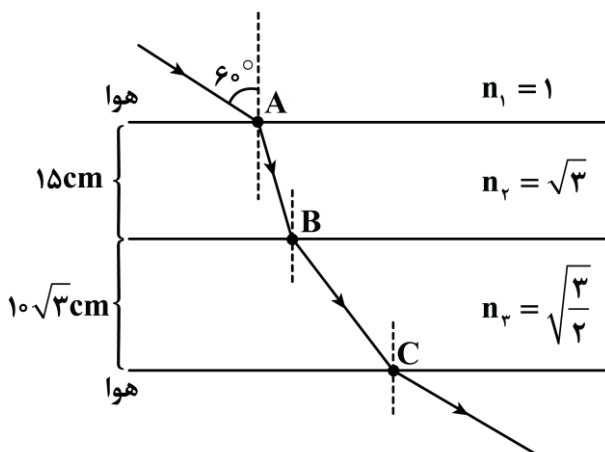
کلم آخر

حال قانون شکست اسنل را نوشته و n_r را به دست می آوریم:

$$n_1 \sin \theta_1 = n_r \sin \theta_r \Rightarrow 1 \times \sin 53^\circ = n_r \sin 24^\circ \Rightarrow n_r = \frac{0/8}{0/4} = 2$$



۵۰- پرتوی نوری مطابق شکل زیر از هوا وارد محیط های شفاف می شود و شکست می یابد. این پرتو فاصله A تا C را در چند نانوثانیه طی می کند؟ ($3 \times 10^8 \frac{m}{s}$ = تندی نور در هوا و $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$)



(۱) 2

(۲) 3

(۳) $0/02$

(۴) $0/03$

(سخت - محاسباتی - زمان بر ۱ - صفحه ۹۸ - ۱۲۰۴)

پاسخ: گزینه ۱

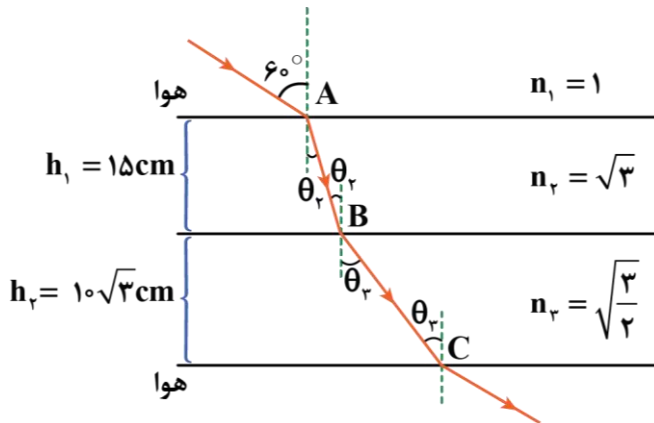
کلم اول

سرعت نور را در محیط های (۲) و (۳) به دست می آوریم:

$$\frac{n_r}{n_1} = \frac{v_1}{v_r} \Rightarrow v_r = \frac{1}{\sqrt{3}} \times 3 \times 10^8 = \sqrt{3} \times 10^8 \frac{m}{s}$$

$$\frac{n_r}{n_1} = \frac{v_1}{v_r} \Rightarrow v_r = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}} \times 3 \times 10^8 = \sqrt{6} \times 10^8 \frac{m}{s}$$

زاویه‌های θ_2 و θ_3 را محاسبه می‌کنیم:



$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \Rightarrow 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \times \sin \theta_2 \Rightarrow \theta_2 = 30^\circ$$

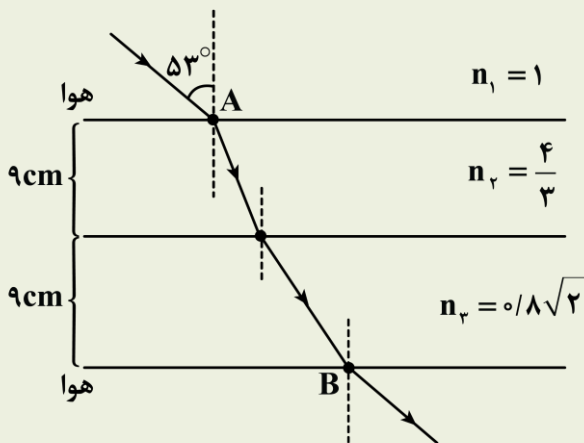
$$n_2 \sin \theta_2 = n_3 \sin \theta_3 \Rightarrow \sqrt{3} \times \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{3}{2}} \times \sin \theta_3 \Rightarrow \theta_3 = 45^\circ$$

طول پاره‌خط‌های AB و BC سپس مدت‌زمانی که نور در هریک از محیط‌های (۲) و (۳) بوده را محاسبه می‌کنیم:

$$\left. \begin{aligned} AB &= \frac{h_1}{\cos \theta_2} = \frac{15}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 10\sqrt{3} \text{ cm} \Rightarrow \Delta t_1 = \frac{AB}{v_2} = \frac{10\sqrt{3} \times 10^{-2}}{\sqrt{3} \times 10^8} = 10 \times 10^{-10} \text{ s} = 1 \text{ ns} \\ BC &= \frac{h_2}{\cos \theta_3} = \frac{10\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 10\sqrt{6} \text{ cm} \Rightarrow \Delta t_2 = \frac{BC}{v_3} = \frac{10\sqrt{6} \times 10^{-2}}{\sqrt{6} \times 10^8} = 10 \times 10^{-10} \text{ s} = 1 \text{ ns} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta t_{\text{کل}} = \Delta t_1 + \Delta t_2 = 2 \text{ ns}$$

۵۷- پرتوی نوری مطابق شکل زیر، از هوا وارد محیط‌های شفاف می‌شود و شکست می‌یابد. این پرتو فاصله A تا B را در چند نانوثانیه طی

می‌کند؟ ($\frac{m}{s} \times 10^8 = 3$ = تندی نور در هوا، $\sin 37^\circ = 0.6$)



(۱) ۰/۶

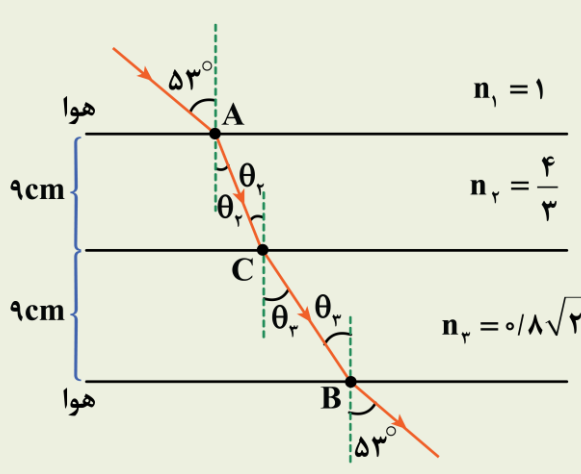
(۲) ۰/۹۶

(۳) ۰/۹۸

(۴) ۹/۶

پاسخ تشریحی:

گام اول: ابتدا زوایای شکست در دو محیط شفاف و سپس سرعت در آن دو محیط را به دست می‌آوریم:



$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{n_1}{n_2} = \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} \Rightarrow \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{\sin \theta_2}{\sin 53^\circ} \Rightarrow \sin \theta_2 = \frac{3}{4} \Rightarrow \theta_2 = 37^\circ \\ \frac{n_2}{n_3} = \frac{\sin \theta_3}{\sin \theta_2} \Rightarrow \frac{\frac{4}{3}}{0.8\sqrt{2}} = \frac{\sin \theta_3}{\sin 37^\circ} \Rightarrow \sin \theta_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta_3 = 45^\circ \\ \frac{n_1}{n_2} = \frac{v_2}{v_1} \Rightarrow \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{v_2}{3 \times 10^8} \Rightarrow v_2 = \frac{9}{4} \times 10^8 \frac{m}{s} \\ \frac{n_2}{n_3} = \frac{v_3}{v_2} \Rightarrow \frac{\frac{4}{3}}{0.8\sqrt{2}} = \frac{v_3}{\frac{9}{4} \times 10^8} \Rightarrow v_3 = \frac{15\sqrt{2}}{8} \times 10^8 \frac{m}{s} \end{array} \right.$$

گام آخر: حالا با توجه به شکل، مسافت طی شده توسط پرتو، مجموع دو طول $\overline{AC}$ و $\overline{BC}$ است:

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos 37^\circ = \frac{9}{\overline{AC}} \Rightarrow \overline{AC} = \frac{9}{0.8} = \frac{45}{4} \text{ cm} \\ \cos 45^\circ = \frac{9}{\overline{BC}} \Rightarrow \overline{BC} = \frac{9}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 9\sqrt{2} \text{ cm} \end{array} \right.$$

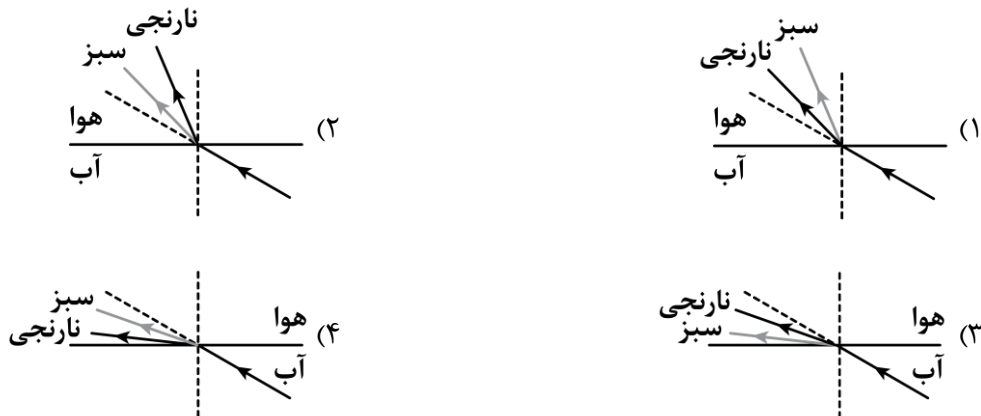
در نتیجه:

$$t = t_{AC} + t_{BC} = \frac{\overline{AC}}{v_2} + \frac{\overline{BC}}{v_3} = \frac{\frac{45}{4} \times 10^{-2}}{\frac{9}{4} \times 10^8} + \frac{9\sqrt{2} \times 10^{-2}}{\frac{15\sqrt{2}}{8} \times 10^8} = 0.5 \times 10^{-9} \text{ s} + 0.48 \times 10^{-9} \text{ s} = 0.98 \text{ ns}$$

پاسخ: گزینه ۳



۵۱- مطابق شکل زیر، پرتوی نوری شامل پرتوهای نارنجی و سبز، از آب وارد هوا می‌شود. کدام شکل از نظر فیزیکی قابل قبول است؟



پرتوی نور از محیط غلیظ وارد رقیق شده پس از خط عمود دور می‌شود، یعنی گزینه‌های (۱) و (۲) نادرست هستند. می‌دانیم ضریب شکست نور سبز از نارنجی بیش‌تر است. پس بیش‌تر منحرف می‌شود، یعنی گزینه (۳) صحیح است.

نکات

۱- اگر باریکه نور سفید از هوا بر یک سطح شیشه‌ای فرود آید بر اثر شکست نور، مؤلفه‌های سازنده باریکه نور سفید هرکدام به میزان متفاوتی خم می‌شوند که البته این تفاوت چندان محسوس نیست. برای افزایش جدایی رنگ‌ها در پاشندگی نور، معمولاً از یک منشور با سطح مقطع مثلثی استفاده می‌کنیم. پاشندگی ناچیز در سطح اول، سپس با پاشندگی در سطح دوم افزایش می‌یابد و مؤلفه‌های رنگی نور سفید به‌طور محسوسی از هم جدا می‌شوند.

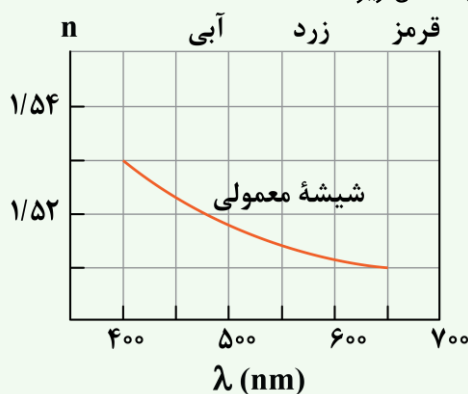
۲- در طیف مرئی نور، ضریب شکست منشور برای نور بنفش بیش‌ترین مقدار و برای نور قرمز کم‌ترین مقدار را دارد.

$$n_{\text{قرمز}} > n_{\text{نارنجی}} > n_{\text{زرد}} > n_{\text{سبز}} > n_{\text{آبی}} > n_{\text{بنفش}}$$

۳- برای طیف مرئی نور، در داخل منشور، نور بنفش کم‌ترین تندی و نور قرمز بیش‌ترین تندی را دارد.

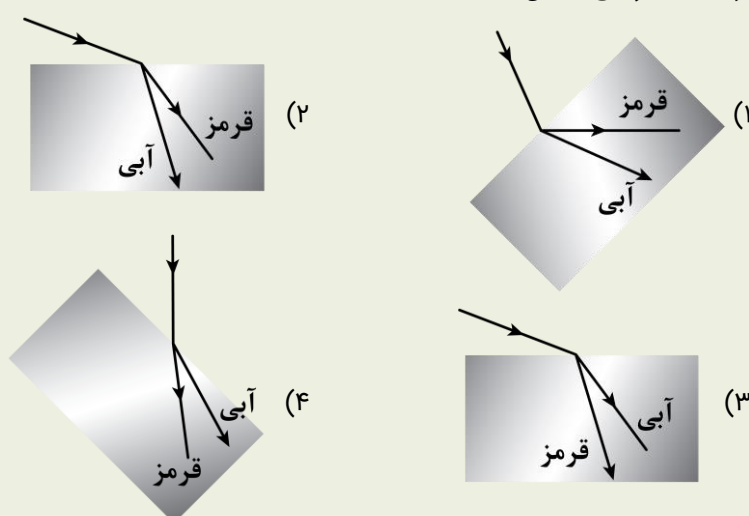
$$v_{\text{قرمز}} > v_{\text{نارنجی}} > v_{\text{زرد}} > v_{\text{سبز}} < v_{\text{آبی}} < v_{\text{بنفش}}$$

۴- نمودار تغییرات ضریب شکست در طیف مرئی نور برحسب طول موج برای شیشه معمولی به شکل زیر است:



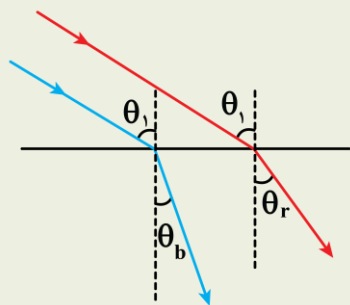
آزمون سراسری ریاضی تیرماه ۱۴۰۱

۶۱- در شکل‌های زیر، پرتوی فرودی که شامل نورهای آبی و قرمز است، از هوا وارد شیشه می‌شود. کدام شکل، شکستی را نشان می‌دهد که از لحاظ فیزیکی ممکن است؟



پاسخ تشریحی:

ضرب شکست شیشه برای نور آبی بیش‌تر از ضریب شکست شیشه برای نور قرمز است و نور آبی بیش‌تر از مسیر اولیه منحرف می‌شود. برای اثبات، مطابق شکل زیر، پرتوهای آبی و قرمز را جداگانه رسم می‌کنیم.



$$n_a \sin \theta_i = n_b \sin \theta_b \quad (1)$$

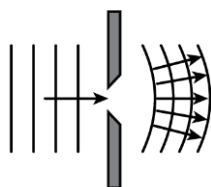
$$n_a \sin \theta_i = n_r \sin \theta_r \quad (2)$$

$$(1) = (2) \Rightarrow n_b \sin \theta_b = n_r \sin \theta_r \xrightarrow{(n_b > n_r)} \theta_b < \theta_r$$

پاسخ: گزینه ۲



۵۲- جبهه‌های موج تختی به بسامد 225 Hz با تندی $45 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ در محیطی منتشر می‌شوند. جبهه‌های موج مطابق شکل به مانعی با شکاف 2 cm برخورد می‌کنند و دچار پراش می‌شوند. فاصله دو جبهه موج متوالی موج پراش یافته چند سانتی‌متر است؟



۱۸ (۱)

۲۰ (۲)

۲۲ (۳)

۱۰ (۴)

(آسان - محاسباتی - سریع - صفحه ۱۰۲ - ۱۲۰۴)

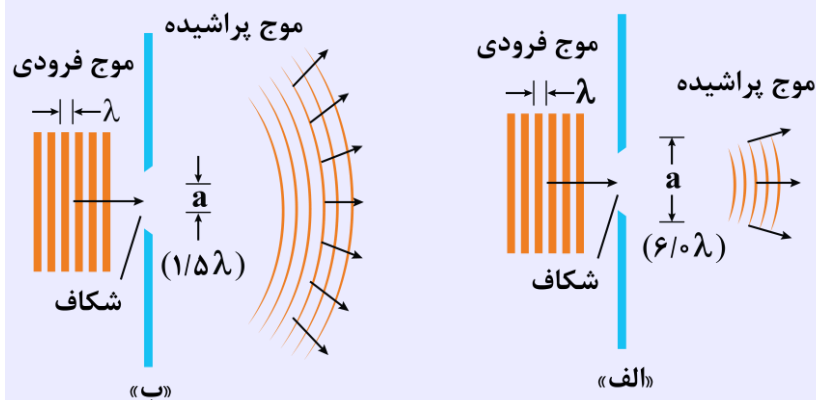
پاسخ: گزینه ۲

فاصله دو جبهه موج متوالی برابر اندازه طول موج است و چون جنس محیط تغییر نکرده، پس تندی انتشار موج و در نتیجه طول موج یکسان خواهد بود.

$$\lambda = \frac{v}{f} \Rightarrow \lambda = \frac{45}{225} = 0.2 \text{ m} = 20 \text{ cm}$$



اگر در مسیر پیشروی یک موج مانعی قرار دهیم، بخشی از موج که به مانع برخورد می‌کند، توسط مانع بازتاب و یا جذب می‌شود و به پشت مانع نمی‌رسد و بخشی دیگر، از لبه‌های مانع یا شکاف‌های موجود در آن می‌گذرد. در صورتی که ابعاد مانع یا شکاف در حدود طول موج باشد، بخشی از موج که از لبه‌ها یا شکاف‌ها عبور می‌کند، به وضوح به اطراف مانع یا شکاف گسترده می‌شود. به این پدیده که موج در عبور از یک شکاف یا مانع با ابعادی از مرتبه طول موج، به اطراف گسترده می‌شود، پراش می‌گویند. به شکل‌های زیر دقت کنید.



در شکل «الف» ابعاد شکاف بسیار بزرگ‌تر از طول موج است ($a = 6\lambda$)؛ بنابراین موج به مقدار کمی گسترده (پراشیده) شده است و حالت تخت خود را حفظ کرده است.

در شکل «ب» ابعاد شکاف در حدود طول موج است ($a = 1/5\lambda$)؛ بنابراین موج به وضوح به اطراف گسترده شده و پراش به طور واضح دیده می‌شود. با گسترش موج خروجی از شکاف، این موج حالت تخت خود را از دست داده و به صورت کروی منتشر شده است.



- ۱- شرط رخ دادن پدیده پراش این است که ابعاد مانع یا شکاف در حدود طول موج باشد. هرچه ابعاد مانع یا شکاف کوچک‌تر باشد، پراش بیش‌تر و واضح‌تر مشاهده می‌شود.
- ۲- علت این‌که با وجود موانع زیاد در مسیر امواج رادیویی و تلویزیونی، گیرنده‌ها می‌توانند این موج را دریافت کنند، پراش موج است.
- ۳- اگر پراش نوری تکفام از یک شکاف باریک یا لبه‌ای تیز را روی یک پرده ملاحظه کنیم، همواره نوارهای تاریک و روشنی موسوم به نقش پراش را موازی با لبه‌های شکاف مشاهده می‌کنیم. شکل «الف» پراش امواج تخت هنگام عبور از شکافی باریک در یک تشت موج و شکل «ب» نقش پراش نوری تکفام از لبه‌های تیز درون و بیرون یک تیغ را نشان می‌دهند.



«ب»



«الف»

۴- تحلیل نقش پراش مبتنی بر بحث تداخل امواج است.



۵۳- در آزمایش ینگ، در کدام‌یک از شرایط زیر پهنای نوارهای تداخلی بیش‌تر است؟

- (۱) آزمایش با نور زرد در خلأ انجام شود.
- (۲) آزمایش با نور سبز در خلأ انجام شود.
- (۳) آزمایش با نور زرد زیر آب انجام شود.
- (۴) آزمایش با نور سبز زیر آب انجام شود.

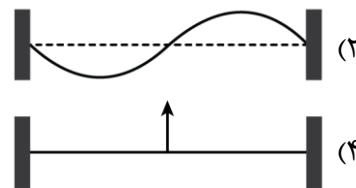
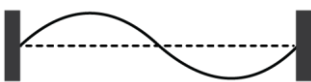
(متوسط - مفهومی - سریع ۱) - صفحه ۱۰۴ - ۱۲۰۴

پاسخ: گزینه ۱

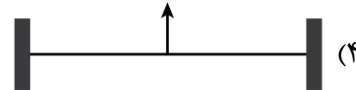
در آزمایش ینگ، پهنای نوارهای تداخلی متناسب با طول موج نور است؛ بنابراین چون طول موج نور زرد بیش‌تر از طول موج نور سبز است، استفاده از نور زرد پهنای نوارها را بیش‌تر می‌کند. همچنین با انجام آزمایش زیر آب، چون تندی نور و طول موج کم می‌شود، پهنای نوارها کاهش می‌یابد؛ بنابراین برای آن‌که پهنای نوارها بیش‌تر باشد، باید آزمایش را در خلأ انجام دهیم.



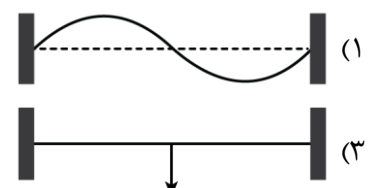
۵۴- تازی که بین دو تکیه‌گاه محکم شده است در هماهنگ دوم خود با بسامد 100 Hz به نوسان درمی‌آید. شکل زیر جابه‌جایی تار در $t=0$ را نشان می‌دهد و شکم‌ها در بیشینه فاصله خود از تعادل هستند. کدام‌یک از شکل‌های زیر جابه‌جایی تار را در لحظه $t=5\text{ ms}$ به درستی نشان می‌دهد؟



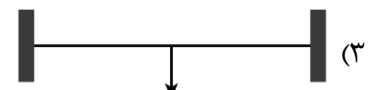
(۲)



(۴)



(۱)



(۳)

(آسان - محاسباتی - سریع ۱) - صفحه ۱۰۷ - ۱۲۰۴

پاسخ: گزینه ۲

دوره تناوب این موج برابر است با:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{100} \text{ s} = 10 \text{ ms}$$

بنابراین مدت زمان $\Delta t = 5 \text{ ms}$ برابر نصف دوره است و مکان همه ذرات قرینه می‌شود؛ بنابراین شکل گزینه (۲) صحیح است.



۵۵- مجموع بسامدهای چهار هماهنگ نخست یک تار دو انتها بسته 1500 Hz است. اگر نیروی کشش این تار 60 سانتی‌متری 324 نیوتون باشد، 40 سانتی‌متر از این تار چند گرم است؟

(۴) ۶

(۳) ۴

(۲) ۲۸

(۱) ۵۸

در یک تار دو انتها بسته بسامد تشدید n ام از رابطه $f_n = \frac{nv}{2L}$ به دست می آید، مجموع چهار بسامد نخست را برابر 1500 Hz قرار می دهیم:

$$f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = \frac{v}{2L} + \frac{2v}{2L} + \frac{3v}{2L} + \frac{4v}{2L} = \frac{10v}{2L} = 1500 \Rightarrow \frac{v}{L} = 300$$

$$\frac{L=0.6\text{m}}{0.6} \rightarrow \frac{v}{0.6} = 300 \Rightarrow v = 180 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

حال با استفاده از رابطه تندی امواج عرضی در تار، چگالی خطی طناب را محاسبه می کنیم:

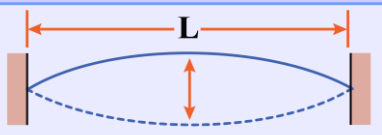
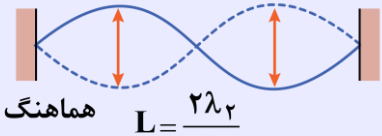
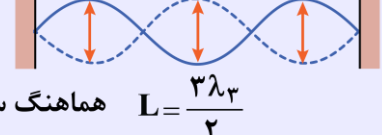
$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \Rightarrow 180 = \sqrt{\frac{324}{\mu}} \Rightarrow \mu = \frac{1}{100} \frac{\text{kg}}{\text{m}}$$

با استفاده از رابطه چگالی خطی، جرم 40 سانتی متر از تار را محاسبه می کنیم:

$$\mu = \frac{m}{L} \Rightarrow \frac{1}{100} = \frac{m}{0.4} \Rightarrow m = 4 \times 10^{-3} \text{ kg} = 4 \text{ g}$$

امواج ایستاده در تار دوسر بسته

در یک تار دوسر بسته، به ازای بسامدهای معینی، تداخل موج موجب ایجاد موج ایستاده بارزی (یا اصطلاحاً یک مُد نوسان) در تار می شود. گفته می شود تار در این بسامدهای معین که بسامدهای تشدید خوانده می شوند به تشدید درآمده است. اگر تار در بسامدی غیر از بسامدهای تشدید نوسان کند موج ایستاده بارزی ایجاد نمی شود. شکل های زیر سه مد اول تشدید یک تار را نشان می دهند.

شکل تار	شماره هماهنگ	تعداد شکم ها	تعداد گره ها
 هماهنگ اول $L = \frac{\lambda_1}{2}$	$n = 1$	۱	۲
 هماهنگ دوم $L = \frac{2\lambda_2}{2}$	$n = 2$	۲	۳
 هماهنگ سوم $L = \frac{3\lambda_3}{2}$	$n = 3$	۳	۴

با توجه به این شکل ها، می توان رابطه ای کلی بین طول موج های تشدید تار با طول تار و شماره هماهنگ پیدا کرد:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}$$

n : شماره هماهنگ یا مد

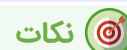
L : طول تار (m)

λ_n : طول موج تشدید (m)

بنابراین با استفاده از رابطه $f = \frac{v}{\lambda}$ ، می‌توانیم بسامدهای تشدیدی تار را هم به دست آوریم:

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{v}{\frac{2L}{n}} = \frac{nv}{2L} \Rightarrow f_n = \frac{nv}{2L}$$

f_n : بسامد تشدیدی (Hz) v : تندی موج در تار $(\frac{m}{s})$ L : طول تار (m) n : شماره هماهنگ یا مد



۱- به n عدد هماهنگ گفته می‌شود و عددی طبیعی ($n = 1, 2, 3, \dots$) است.

۲- پایین‌ترین بسامد به ازای $n = 1$ به دست می‌آید که به آن بسامد اصلی تار می‌گویند.

$$f_1 = \frac{v}{2L}$$

۳- با افزایش شماره هماهنگ، بسامد تشدیدی تار بیش‌تر می‌شود و طول موج تشدیدی کاهش می‌یابد.

$$f_n = \frac{nv}{2L} \Rightarrow f \propto n$$

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \Rightarrow \lambda \propto \frac{1}{n}$$

۴- بسامد هماهنگ n ام تار، n برابر بسامد اصلی آن است.

$$f_n = nf_1$$

۵- اختلاف دو بسامد متوالی تار برابر بسامد اصلی آن است؛ بنابراین بسامدهای تشدیدی تار یک دنباله حسابی تشکیل می‌دهند.

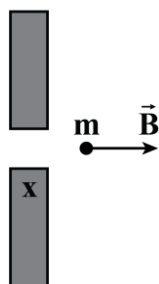
$$f_1, 2f_1, 3f_1, 4f_1, \dots$$



۵۶- با توجه به شکل زیر، دو آهنربای میله‌ای هم‌اندازه در فاصله مشخصی از هم قرار دارند و جهت میدان مغناطیسی خالص ناشی از

هر دو آهنربا در نقطه m به صورت زیر است. حال اگر آهنربای بالایی طوری بچرخد که قطب‌های آن برعکس شوند، به ترتیب از

راست به چپ قطب x و جهت میدان مغناطیسی خالص در نقطه m مطابق با کدام گزینه است؟



(۱) $\uparrow$ ، S

(۲) $\leftarrow$ ، S

(۳) $\uparrow$ ، N

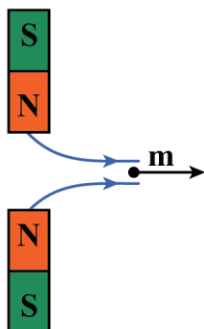
(۴) $\leftarrow$ ، N

(آسان - مفهومی - سریع) - صفحه ۸۶ - ۱۱۰۳

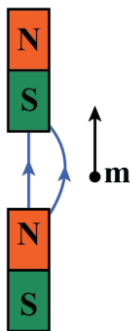
پاسخ: گزینه ۳

حالت اول

در حالت اول با توجه به جهت بردار میدان مغناطیسی برآیند، قطب‌های مغناطیسی آهنربا به صورت مقابل هستند:



در حالت دوم با چرخش آهنربای بالایی، جهت میدان مغناطیسی برآیند به صورت مقابل خواهد بود:



- ۵۷- یک ذره باردار با بار الکتریکی $-4\mu\text{C}$ و با سرعت ثابت $4 \times 10^5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ در راستای افقی به سمت جنوب غربی حرکت می کند. اگر این ذره وارد میدان مغناطیسی به بزرگی 50G در راستای قائم به سمت پایین شود، بزرگی و جهت نیروی وارد بر ذره کدام است؟
- (۱) $4 \times 10^{-3}\text{N}$ ، شمال غربی
(۲) $4 \times 10^{-3}\text{N}$ ، جنوب شرقی
(۳) $8 \times 10^{-3}\text{N}$ ، شمال غربی
(۴) $8 \times 10^{-3}\text{N}$ ، جنوب شرقی

(آسان - محاسباتی - سریع - صفحه ۹۰ - ۱۱۰۳)

پاسخ: گزینه ۳

ابتدا بزرگی نیروی مغناطیسی وارد بر ذره را به دست می آوریم:

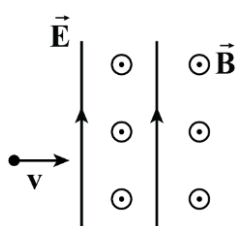
$$F = |q|vB \sin \alpha \Rightarrow F = 4 \times 10^{-6} \times 4 \times 10^5 \times 50 \times 10^{-3} \times \sin 90^\circ$$

$$\Rightarrow F = 8 \times 10^{-3}\text{N}$$

به کمک قاعده دست راست جهت نیروی مغناطیسی به سمت شمال غربی است.



- ۵۸- در شکل زیر ذره باردار به جرم 25g و بار $2/5\text{mC}$ وارد میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{E} = 100 \frac{\text{N}}{\text{C}}$ و میدان مغناطیسی یکنواخت برون سوی 50°G می شود. اندازه سرعت ذره چند متر بر ثانیه باشد تا در لحظه ورود به میدان ها، شتاب آن $10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ رو به بالا باشد؟ ($g = 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}}$ و جهت شتاب گرانش رو به پایین است).



$$1/5 \times 10^3 \quad (2)$$

$$6 \times 10^3 \quad (4)$$

$$7/5 \times 10^2 \quad (1)$$

$$3 \times 10^3 \quad (3)$$

(متوسط - محاسباتی - استاندارد - صفحه ۹۰ - ۱۱۰۳)

پاسخ: گزینه ۴

گام اول

با توجه به قاعده دست راست جهت نیروی مغناطیسی رو به بالا و همین طور جهت نیروی الکتریکی و نیروی وزن به سمت پایین است. حال به کمک قانون دوم نیوتون و جهت شتاب رو به بالا، داریم:

$$F_{\text{net}} = ma \Rightarrow F_B - F_E - mg = ma \Rightarrow F_B - E|q| - mg = ma$$

$$\Rightarrow F_B - 100 \times 2/5 \times 10^{-3} - 25 \times 10^{-3} \times 10 = 25 \times 10^{-3} \times 10$$

$$\Rightarrow F_B - 0/25 - 0/25 = 0/25 \Rightarrow F_B = 3 \times 0/25 = 0/75\text{N}$$

طبق رابطه $F_B = |q|vB \sin \alpha$ داریم:

$$F_B = |q|vB \sin \alpha \Rightarrow 0.75 = 2/5 \times 10^{-3} \times v \times 5 \times 10^{-2} \times \sin 90^\circ$$

$$\Rightarrow v = \frac{75 \times 10^{-2}}{2 \times 10^{-3} \times 5 \times 10^{-2}} = \frac{3}{5} \times 10^4 = 6 \times 10^3 \frac{m}{s}$$

آزمون سراسری تجربی ۱۴۰۰

۶۸- مطابق شکل زیر، ذره‌ای به بار $q = 2 \mu C$ با جرم ناچیز با تندی $v = 2 \times 10^4 \frac{m}{s}$ در جهت نشان داده شده که عمود بر میدان‌های

یکنواخت $B = 0.2 T$ و $E = 500 \frac{N}{C}$ است. وارد فضای این میدان‌ها می‌شود. نیروی خالص وارد بر ذره در لحظه ورود به میدان‌ها چند

نیوتون است؟

(۱) صفر

(۲) 3×10^{-4}

(۳) 2×10^{-4}

(۴) $1/8 \times 10^{-3}$

پاسخ تشریحی:

نیروی الکتریکی وارد بر ذره با بار الکتریکی مثبت در جهت میدان الکتریکی، یعنی به سمت پایین است. نیروی مغناطیسی با توجه به قاعده دست راست به سمت بالا است.

$$F_E = E|q| = 2 \times 10^{-6} \times 500 = 10^{-3} N$$

$$F_B = |q|vB = 2 \times 10^{-6} \times 2 \times 10^4 \times \frac{2}{100}$$

$$F_B = 8 \times 10^{-4} N$$

$$F_T = F_E - F_B = 10^{-3} - 8 \times 10^{-4}$$

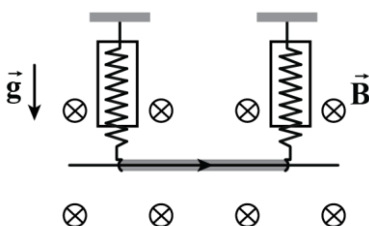
$$F_T = 2 \times 10^{-4} N$$

پاسخ: گزینه ۳



۵۹- در شکل زیر میله‌ای به طول ۵۰ cm و جرم ۱۰۰ g توسط دو نیروسنج کاملاً مشابه از سقف آویزان شده است. اگر جریان عبوری از

میله ۴ A و میدان مغناطیسی یکنواخت در این فضا ۲۰۰۰ G باشد، هر نیروسنج چند نیوتون را نشان می‌دهد؟ ($g = 10 \frac{N}{kg}$)



(۱) ۱/۴

(۲) ۰/۶

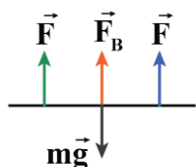
(۳) ۰/۷

(۴) ۰/۳

نیروی وزن و نیروی مغناطیسی را به دست می آوریم:

$$mg = 0.1 \times 10 = 1 \text{ N}$$

$$F_B = BIl \quad \begin{matrix} B=200 \text{ G} = 0.02 \text{ T} \\ I=4 \text{ A}, \ell=50 \text{ cm} = \frac{1}{2} \text{ m} \end{matrix} \rightarrow 0.02 \times 4 \times \frac{1}{2} = 0.4 \text{ N}$$



نیروهای وارد بر میله را رسم می کنیم. به کمک قاعده دست راست جهت نیروی مغناطیسی وارد بر میله به سمت بالا به دست می آید. با استفاده از قانون اول نیوتون داریم:

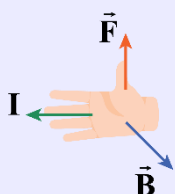
$$F_{\text{net}} = 0 \Rightarrow 2F + F_B = mg$$

$$\Rightarrow 2F + 0.4 = 1 \Rightarrow F = 0.3 \text{ N}$$

جهت نیروی مغناطیسی وارد بر سیم حامل جریان

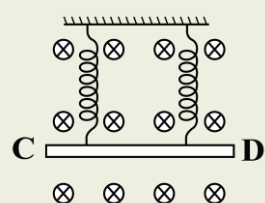
اگر از سیمی به طول ℓ که درون میدان مغناطیسی یکنواخت با اندازه B قرار دارد، جریان I عبور کند، به آن نیروی مغناطیسی F وارد می شود. جهت این نیرو مطابق قاعده دست راست تعیین می شود.

اگر دست راست را طوری نگه داریم که انگشتان باز شده ما در جهت I باشد، به گونه ای که وقتی چهار انگشت را در جهت چرخش طبیعی خم کنیم، در جهت $\vec{B}$ قرار گیرد، انگشت شست ما در جهت نیروی وارد بر سیم حامل جریان خواهد بود.



آزمون سراسری تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۶۸- مطابق شکل زیر، میله CD به جرم 160 گرم و طول 80 سانتی متر به دو فنر مشابه آویخته شده و در یک میدان مغناطیسی یکنواخت که اندازه آن 0.4 تسلا است، به صورت افقی قرار دارد. از میله جریان چند آمپر و در چه جهتی عبور کند تا از طرف میله بر فنرها نیرویی وارد



نشود؟ ($g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$)

- (۱) ۵ و از C به طرف D
(۲) ۵ و از D به طرف C
(۳) ۲ و از C به طرف D
(۴) ۲ و از D به طرف C

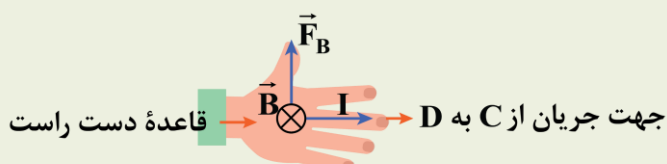
پاسخ تشریحی:

نیروی فنرها صفر است، پس نیروی مغناطیسی وارد بر سیم به سمت بالا و هم اندازه نیروی وزن است:

$$F_B = mg \Rightarrow BIL \sin 90^\circ = mg$$

$$\Rightarrow 0.4 \times I \times 0.8 \times 1 = 160 \times 10^{-3} \times 10$$

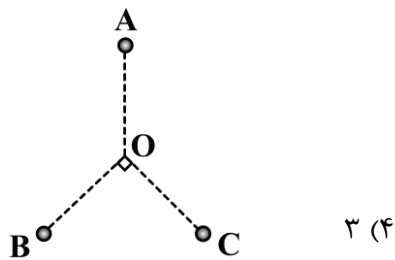
$$\Rightarrow I = 5 \text{ A}$$



جهت جریان از C به D به قاعده دست راست

پاسخ: گزینه ۱

۶۰- مطابق شکل، سه سیم با جریان‌های هم‌اندازه، در نقاط A، B و C عمود بر صفحه کاغذ قرار دارند. نقطه O در صفحه کاغذ، به فاصله مساوی از هر سیم قرار دارد. در چه تعداد از موارد زیر، میدان مغناطیسی خالص ناشی از سه سیم در نقطه O می‌تواند صفر باشد؟ (نقطه A روی عمود منصف پاره خط BC است.)



الف - I_B و I_C هر دو برون سو باشند.

ب - I_B درون سو و I_C برون سو باشد.

ج - I_B و I_C هر دو درون سو باشند.

(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) ۲

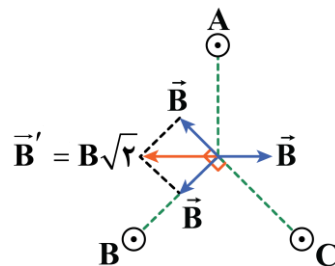
(۴) ۳

(متوسط - مفهومی - استاندارد ۱ - صفحه ۹۶ - ۱۱۰۳)

پاسخ: گزینه ۱

از هر سه سیم جریان‌های هم‌اندازه عبور می‌کند و فاصله نقطه O از هر سه سیم، یکسان است؛ بنابراین، اندازه میدان هر سه سیم در نقطه O، یکسان است.

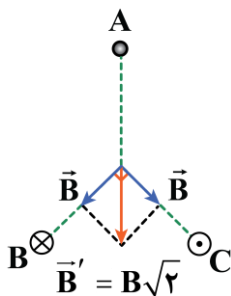
الف



طبق قاعده دست راست، جهت میدان‌ها به صورت مقابل است و برآیند میدان‌های $\vec{B}_B$ و $\vec{B}_C$ ($\vec{B}'$) به سمت چپ است؛ بنابراین، جهت میدان $\vec{B}_A$ باید به سمت راست باشد؛ اما از آنجا که $B' > B$ است، برآیند نمی‌تواند صفر شود. (✗)

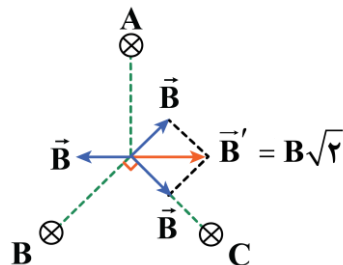
ب

در این حالت، برآیند میدان‌های $\vec{B}_B$ و $\vec{B}_C$ ($\vec{B}'$) به سمت پایین است؛ اما میدان سیم A در نقطه O، طبق قاعده دست راست، در راستای افقی است و نمی‌تواند $\vec{B}'$ را خنثی کند. (✗)

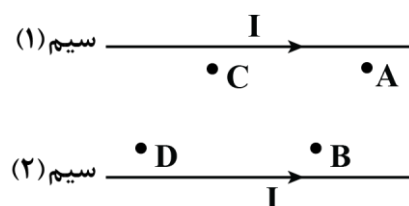


ج

با استدلال مشابه مورد «الف»، در این حالت نیز $B' > B$ است و برآیند نمی‌تواند صفر شود. (✗)



۶۱- مطابق شکل، از دو سیم موازی و بلند، جریان‌های یکسان عبور می‌کند. در لحظه $t=0$ ، دو الکترون از نقاط A و B رها می‌شوند. هم‌زمان، الکترون سوم از نقطه C به موازات دو سیم به سمت راست و الکترون چهارم از نقطه D به موازات دو سیم به سمت چپ پرتاب می‌شوند. چه تعداد از این ۴ الکترون، بلافاصله بعد از لحظه $t=0$ ، متمایل به سمت سیم (۲) می‌شوند؟ (از نیروی وزن صرف نظر کنید.)



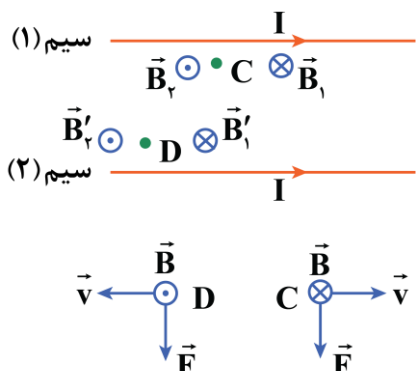
(۲) ۳

(۱) ۴

(۴) ۱

(۳) ۲

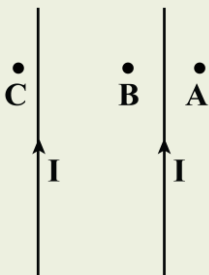
اگر یک ذره باردار درون میدان مغناطیسی حرکت کند، طوری که خطوط میدان را قطع کند، از طرف میدان بر آن نیرو وارد می‌شود؛ اما اگر ذره درون میدان ساکن باشد یا در راستای خطوط میدان حرکت کند، بر آن نیرویی وارد نمی‌شود؛ بنابراین، الکترون‌های نقاط A و B که ساکن هستند، در وضعیت سکون باقی می‌مانند.



برای الکترون‌های نقاط C و D ابتدا جهت میدان مغناطیسی خالص در این نقاط را مشخص می‌کنیم. در نقطه C، میدان‌های $\vec{B}_1$ و $\vec{B}_2$ خلاف جهت یکدیگرند. در نقطه D نیز میدان‌های $\vec{B}'_1$ و $\vec{B}'_2$ خلاف جهت یکدیگرند. جریان هر دو سیم، یکسان است؛ بنابراین، با توجه به فاصله این دو نقطه از سیم‌ها، $B_1 > B_2$ و $B'_1 > B'_2$ است. در نتیجه، میدان خالص در نقطه C، درون‌سو و در نقطه D، برون‌سو است. طبق قاعده دست راست، بر هر دو الکترون C و D به سمت پایین نیرو وارد می‌شود و هر دو الکترون به سمت سیم (۲) متمایل می‌شوند.

آزمون سراسری ریاضی تیرماه ۱۴۰۳

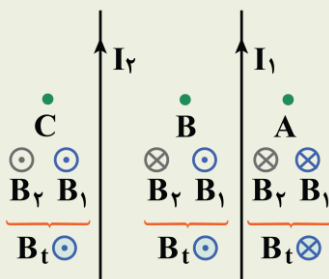
۶۵- در شکل زیر، جریان‌های الکتریکی هم‌اندازه و هم‌جهت در سیم‌ها جاری است. جهت میدان مغناطیسی حاصل از جریان‌های الکتریکی در نقاط A، B و C به ترتیب کدام‌اند؟



- (۱) $\odot - \odot - \otimes$
- (۲) $\otimes - \otimes - \odot$
- (۳) $\odot - \otimes - \otimes$
- (۴) $\otimes - \odot - \odot$

پاسخ تشریحی:

با استفاده از قاعده دست راست جهت میدان مغناطیسی هر یک از سیم‌ها را در نقاط موردنظر مشخص می‌کنیم:



نقطه A: چون هر دو میدان درون‌سو هستند، پس میدان خالص درون‌سو است. ($\otimes$)

نقطه B: جریان دو سیم برابر است. از طرفی نقطه B به سیم (۱) نزدیک‌تر است (کمتر r) پس میدان سیم (۱) در نقطه B قوی‌تر است.

میدان خالص برون‌سو ($\odot$) $\rightarrow$ میدان خالص در جهت $\vec{B}_1$ $B_1 > B_2$

نقطه C: چون هر دو میدان برون‌سو هستند، پس میدان خالص برون‌سو است. ($\odot$)

پاسخ: گزینه ۱



۶۲- دو حلقه A و B به ترتیب دارای شعاع‌های ۵cm و ۶cm عمود برهم و هم‌مرکز هستند. اگر از حلقه A جریان ۱۰A و از حلقه B،

جریان ۹A عبور کند، میدان مغناطیسی در مرکز مشترک حلقه‌ها چند گاوس است؟ ($\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{T \cdot m}{A}$)

- (۱) $\frac{\pi}{2}$
- (۲) π
- (۳) $\frac{3\pi}{2}$
- (۴) 2π

میدان مغناطیسی در مرکز هر دو حلقه را محاسبه می‌کنیم:

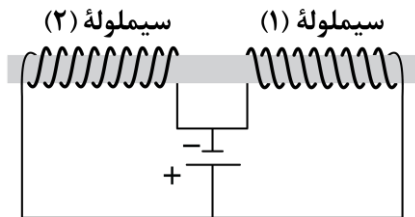
$$B = \mu_0 \frac{NI}{2r} \Rightarrow \begin{cases} B_A = 4\pi \times 10^{-7} \times \frac{1 \times 10}{0.1} = 4\pi \times 10^{-5} T \\ B_B = 4\pi \times 10^{-7} \times \frac{1 \times 9}{12 \times 10^{-2}} = 3\pi \times 10^{-5} T \end{cases}$$

سطح حلقه‌ها عمود برهم هستند، پس میدان مغناطیسی که هریک از آن‌ها در مرکز دارند، برهم عمود هستند. در نتیجه داریم:

$$B_T = \sqrt{B_A^2 + B_B^2} = \sqrt{(4\pi \times 10^{-5})^2 + (3\pi \times 10^{-5})^2} = 5\pi \times 10^{-5} T = 0.5 \pi G = \frac{\pi}{2} G$$



۶۳- با استفاده از یک سیم بلند و نازک، بر روی یک استوانه عایق، دو سیملوله درست می‌کنیم و مطابق شکل، به یک باتری آرمانی می‌بندیم. تعداد دورهای سیملوله (۱) برابر ۲۰۰ و تعداد دورهای سیملوله (۲) برابر ۳۰۰ است. اگر طول سیملوله (۲)، ۳۶cm باشد، طول سیملوله (۱) باید چند سانتی‌متر باشد تا اندازه میدان مغناطیسی داخل دو سیملوله و دور از لبه‌های آن‌ها باهم برابر باشد؟ حلقه‌های سیملوله دارای مقاومت الکتریکی و سایر سیم‌های مدار بدون مقاومت هستند.



۲۴ (۱)

۳۶ (۲)

۵۴ (۳)

۸۱ (۴)

طبق رابطه $B = \frac{\mu_0 NI}{l}$ داریم:

$$\frac{B_2}{B_1} = \frac{N_2}{N_1} \times \frac{I_2}{I_1} \times \frac{l_1}{l_2} \xrightarrow{B_1=B_2} \frac{l_2}{l_1} = \frac{N_2}{N_1} \times \frac{I_2}{I_1} \quad (I)$$

از طرفی، دو سیملوله به صورت موازی به هم بسته شده‌اند؛ بنابراین، اختلاف پتانسیل دو سر آن‌ها باهم برابر است.

$$V_2 = V_1 \Rightarrow R_2 I_2 = R_1 I_1 \Rightarrow \frac{I_2}{I_1} = \frac{R_1}{R_2} \xrightarrow{R = \frac{\rho L}{A}} \frac{I_2}{I_1} = \frac{L_1}{L_2} \quad (II)$$

اگر شعاع استوانه را r در نظر بگیریم، داریم:

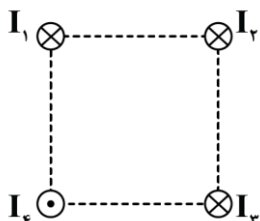
$$L = N \times (\text{محیط هر حلقه}) = N \times (2\pi r) \Rightarrow \frac{L_1}{L_2} = \frac{N_1}{N_2} \xrightarrow{(II)} \frac{I_2}{I_1} = \frac{N_1}{N_2}$$

$$\xrightarrow{(I)} \frac{l_2}{l_1} = \frac{N_2}{N_1} \times \frac{N_1}{N_2} = 1 \Rightarrow l_2 = l_1 = 36 \text{ cm}$$

اگه گزینه (۱) رو زدی حواست نبوده که سیم‌لوله‌ها موازی هستن و جریان یکسانی ازشون عبور نمی‌کنه.



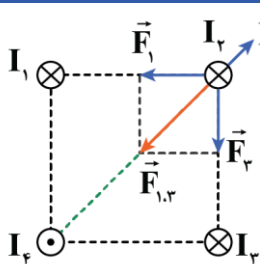
۶۴- در شکل زیر، چهار سیم موازی با جریان هم‌اندازه در رأس‌های یک مربع، عمود بر صفحه کاغذ قرار دارند. جهت نیروی خالص مغناطیسی وارد بر سیم (۲) کدام است؟



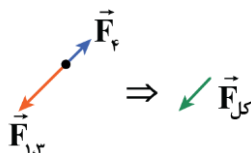
- (۱) ↗
- (۲) ↖
- (۳) ↘
- (۴) ↙

(متوسط - مفهومی - استاندارد ۱ - صفحه ۹۶ - ۱۱۰۳)

پاسخ: گزینه ۲



جریان سیم‌های (۱) و (۳) هم‌جهت با جریان سیم (۲) است؛ بنابراین سیم‌های (۱) و (۳)، سیم (۲) را با نیروی مغناطیسی جذب می‌کنند. جریان سیم (۴) در خلاف جهت جریان سیم (۲) است و در نتیجه سیم (۲) را می‌راند. دقت کنید نیروی F_4 کوچک‌تر از نیروهای F_1 و F_3 است، زیرا فاصله سیم (۴) تا سیم (۲) بیش‌تر از فاصله سیم‌های دیگر تا سیم (۲) است.



۶۵- در نقشه مفهومی شکل مقابل، خانه‌های A، B و C به ترتیب از راست به چپ کدام است؟



- (۱) دیامغناطیس - پارامغناطیس - اورانیم
- (۲) دیامغناطیس - پارامغناطیس - کبالت
- (۳) پارامغناطیس - دیامغناطیس - مس
- (۴) پارامغناطیس - دیامغناطیس - بیسموت

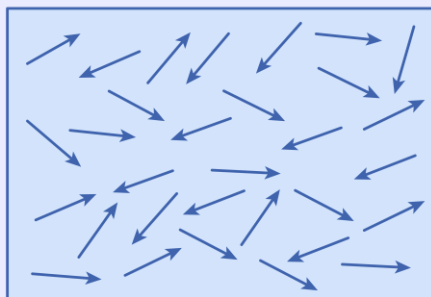
(آسان - خط‌به‌خط - سریع ۱ - صفحه ۱۰۳ - ۱۱۰۳)

پاسخ: گزینه ۲

نقره و پلاتین به ترتیب از دسته مواد دیامغناطیس و پارامغناطیسی هستند اما اورانیم از دسته مواد پارامغناطیسی و مس و همچنین بیسموت از دسته مواد دیامغناطیسی هستند.

مواد پارامغناطیس

اتم‌های مواد پارامغناطیسی، خاصیت مغناطیسی دارند (ذاتی)؛ اما دوقطبی‌های مغناطیسی وابسته به آن‌ها، به‌طور کاتوره‌ای سوگیری کرده‌اند و میدان مغناطیسی خالصی ایجاد نمی‌کنند.

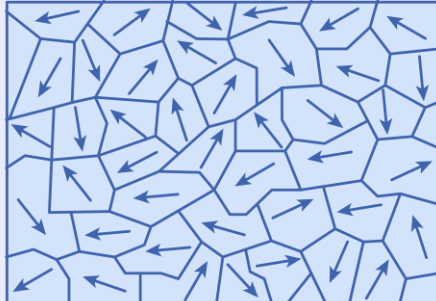


جسم پارامغناطیس
در غیاب میدان مغناطیسی

با قراردادن مواد پارامغناطیس درون میدان مغناطیسی خارجی قوی، دوقطبی‌های مغناطیسی آن‌ها، مانند عقربه قطب‌نما در نزدیکی آهنربا رفتار می‌کنند و به مقدار مختصری در راستای خط‌های میدان مغناطیسی منظم می‌شوند. با دورکردن آهنربا از این مواد، دوقطبی‌های مغناطیسی آن‌ها، دوباره به‌طور کاتوره‌ای سوگیری می‌کنند.

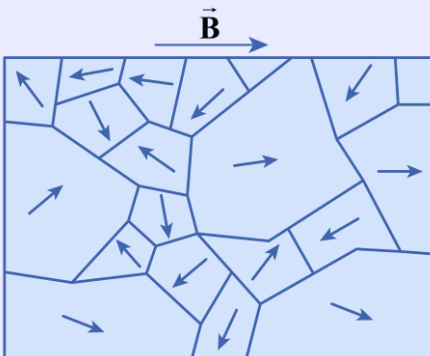
به این ترتیب، می‌توان گفت مواد پارامغناطیس در حضور میدان‌های مغناطیسی قوی، خاصیت مغناطیسی ضعیف و موقت پیدا می‌کنند. اورانیم، پلاتین، آلومینیم، سدیم، اکسیژن و اکسید نیتروژن از جمله مواد پارامغناطیسی‌اند.

مواد فرومغناطیس

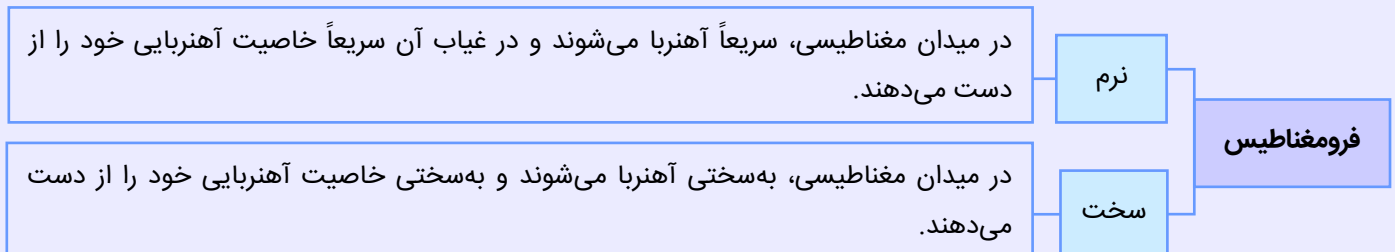


در این مواد، دوقطبی‌های مغناطیسی به‌صورت گروهی، حوزه‌های مغناطیسی تشکیل می‌دهند.

با قرارگرفتن این مواد در میدان مغناطیسی خارجی، حوزه‌هایی که دوقطبی‌های آن‌ها در جهت میدان مغناطیسی هستند، گسترش می‌یابند و ماده خاصیت مغناطیسی پیدا می‌کند. در حالت اشباع تمام دوقطبی‌ها در راستای میدان مغناطیسی قرار می‌گیرند.



مواد فرومغناطیس به دو دسته تقسیم می‌شوند:



موادی مانند آهن، کبالت و نیکل فرومغناطیس نرم هستند و در هسته سیم‌لوله‌ها و ساخت آهنرباهای الکتریکی کاربرد دارند و آلیاژ آن‌ها مانند فولاد و آلیاژهای آهن، کبالت و نیکل فرومغناطیس سخت هستند و در ساخت آهنرباهای دائمی کاربرد دارند.

مواد دیامغناطیس

اتم‌های مواد دیامغناطیس نظیر مس، نقره، سرب و بیسموت به‌طور ذاتی فاقد خاصیت مغناطیسی‌اند؛ به عبارت دیگر، هیچ‌یک از اتم‌های این مواد دارای دوقطبی مغناطیسی خالصی نیستند. با این وجود، حضور میدان مغناطیسی خارجی می‌تواند سبب القای دوقطبی‌های مغناطیسی در خلاف سوی میدان خارجی، در این مواد شود (توسط آهنربا دفع می‌شوند).

خاصیت القای مغناطیسی

وقتی که مواد پارامغناطیسی یا فرومغناطیسی در میدان مغناطیسی قرار بگیرند، دوقطبی‌های آن‌ها همانند عقربه مغناطیسی عمل کرده و در جهت میدان قرار می‌گیرند. ازاین‌رو بر خاصیت مغناطیسی‌شان افزوده می‌شود و اثر آهنربایی از خود نشان می‌دهند.

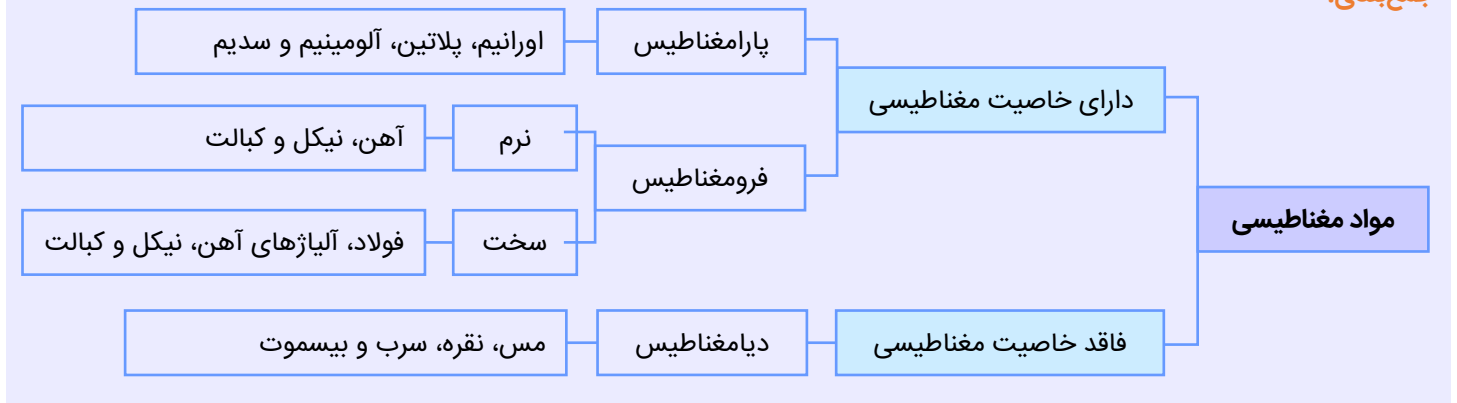
اگر این میدان مغناطیسی حذف شود:

در مواد پارامغناطیسی، دوقطبی‌ها به وضعیت اولیه‌شان برمی‌گردند.

در مواد فرومغناطیسی نرم، حوزه‌ها به حالت اولیه برمی‌گردند.

در مواد فرومغناطیسی سخت، حوزه‌ها تقریباً در همین وضعیت باقی می‌مانند و حالت آهنربای دائم تشکیل می‌دهند.

جمع‌بندی:





برای دیدن پاسخنامه ویدئویی آزمون
QRcode بالا را اسکن کنید!
یا بر روی لینک زیر کلیک کنید!
[پاسخنامه ویدئویی](#)

شیمی ۳: شیمی، جلوه‌ای از هنر، زیبایی و ماندگاری (از هنرنمایی شاره‌ها تا انتهای فصل) شیمی، راهی به سوی آینده‌ای روشن‌تر (از ابتدای فصل تا انتهای با هم بیانیشیم) صفحه‌های ۷۷ تا ۹۹
شیمی پایه: در پی غذای سالم (از ابتدای غذای سالم) صفحه‌های ۷۷ تا ۹۸

بودجه‌بندی
این آزمون

مباحث این آزمون در مجموع ۳ تست از ۳۰ تست کنکور را پوشش داده است.

سهم در
کنکور

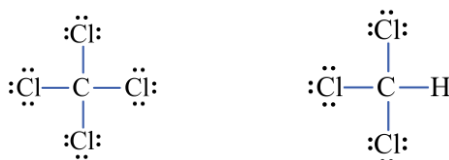
۶۶- اگر در مولکول کلروفرم، به جای اتم هیدروژن، اتم کلر قرار گیرد، کدام مورد درباره تغییر ویژگی‌های آن در تبدیل به مولکول جدید درست است؟

- (۱) گشتاور دوقطبی مولکول افزایش می‌یابد.
(۲) علامت بار جزئی اتم مرکزی تغییر می‌کند.
(۳) شمار جفت الکترون‌های ناپیوندی تغییر می‌کند.
(۴) حالت فیزیکی ماده در دمای اتاق، تغییر می‌کند.

(متوسط - مفهومی - سریع ۶) - صفحه ۷۵ - ۱۲۰۳

پاسخ: گزینه ۳

به ساختار لوویس مولکول کلروفرم ($CHCl_3$) و کربن تتراکلرید (CCl_4) توجه کنید:



در این دو مولکول، اتم کربن در نقش اتم مرکزی است. با توجه به ساختارهای رسم شده، کلروفرم و کربن تتراکلرید به ترتیب ۹ و ۱۲ جفت الکترون ناپیوندی دارند. در واقع، اگر در مولکول کلروفرم، به جای اتم هیدروژن، اتم کلر قرار گیرد، شمار جفت الکترون‌های ناپیوندی به تقریب ۱/۳۳ برابر می‌شود. این سؤال با ایده گرفتن از یکی از سؤال‌های کنکور سراسری ۱۴۰۴ طراحی شده است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) اگر در مولکول کلروفرم ($CHCl_3$)، اتم هیدروژن را با اتم کلر جایگزین کنیم، مولکول کربن تتراکلرید (CCl_4) ایجاد می‌شود. کلروفرم برخلاف کربن تتراکلرید یک ماده قطبی است. بر این اساس گشتاور دوقطبی کلروفرم عددی بزرگ‌تر از صفر و گشتاور دوقطبی کربن تتراکلرید برابر با صفر است.

گشتاور دوقطبی

جهت‌گیری مولکول‌ها در میدان الکتریکی، مبنای اندازه‌گیری کمیتی به نام گشتاور دوقطبی (μ) با یکای دبی (D) است. مقدار این کمیت، با افزایش مقدار قطبیت مولکول افزایش می‌یابد. این کمیت، میزان قطبیت مولکول و قدرت نیروهای بین مولکولی را نشان می‌دهد. نمودار زیر، وابستگی گشتاور دو قطبی مولکول‌ها با سایر مشخصات مربوط به آن‌ها را نشان می‌دهد:



۲) خاصیت نافلزی عنصر کلر از عنصر کربن بیشتر است، بنابراین علامت بار جزئی اتم مرکزی در هر دو مولکول (اتم کربن)، مثبت است. البته، مقدار این بار الکتریکی در مولکول نهایی بیشتر از مولکول اولیه خواهد بود.

۴) هر دو ماده، جرم مولی بالایی داشته و در دمای اتاق به حالت مایع یافت می‌شوند. توجه داریم که متانول، اتانول و استون نیز از جمله موادی هستند که در دمای اتاق حالت مایع دارند.

۶۷- کدام موارد از عبارت‌های زیر درست هستند؟

- الف - فروپاشی شبکه بلور Al_2O_3 ، همراه با جذب انرژی بوده و طی این فرایند، اتم‌های گازی اکسیژن تولید می‌شوند.
 ب - رسانایی الکتریکی و گرمایی، داشتن جلا و قابلیت چکش‌خواری از جمله رفتارهای فیزیکی فلزها هستند.
 ج - میانگین مقدار فروپاشی ΔH لیتیم فلوئورید و لیتیم برمید، بیشتر از مقدار فروپاشی ΔH لیتیم کلرید است.
 د - رنگدانه‌های طبیعی، به کمک منابعی مثل کانی‌ها به دست آمده و عناصر فلزی در همه آن‌ها وجود دارند.
- (۱) «الف» و «ب» (۲) «ب» و «ج» (۳) «ج» و «د» (۴) «الف» و «د»

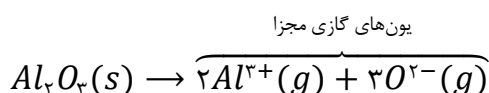
پاسخ: گزینه ۲

(متوسط - مفهومی - استاندارد) - صفحه ۸۳ - ۱۲۰۳

عبارت‌های (ب) و (ج) درست هستند.

بررسی موارد:

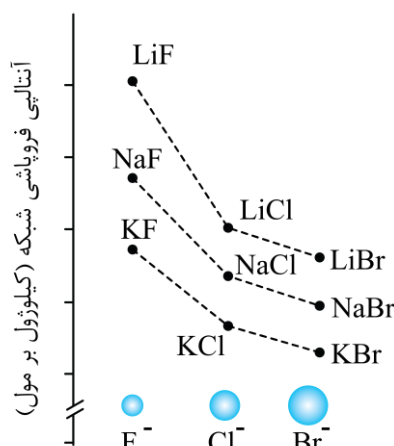
واکنش فروپاشی شبکه بلور، واکنشی گرماگیر بوده و با جذب انرژی همراه است. طی این فرایند، یون‌ها از یکدیگر جدا شده و مجموعه‌ای از یون‌های گازی تولید می‌شوند. از این رو، فروپاشی ΔH همواره عددی مثبت است. معادله زیر، واکنش فروپاشی شبکه بلور آلومینیم اکسید را نشان می‌دهد:



با توجه به معادله بالا، طی فروپاشی شبکه بلور Al_2O_3 ، یون‌های گازی تولید می‌شوند.

داشتن جلا، رسانایی الکتریکی بالا، رسانایی گرمایی، قابلیت چکش‌خواری و قابلیت شکل‌پذیری، دمای ذوب و جوش، از جمله رفتارهای فیزیکی فلزها و تنوع عدد اکسایش، اندازه‌گیری مقدار پتانسیل کاهش استاندارد و مقدار واکنش‌پذیری با نافلزها نیز از جمله رفتارهای شیمیایی فلزها هستند.

نمودار زیر، روند تغییر آنتالپی فروپاشی هالیدهای فلزهای قلیایی را نشان می‌دهد:



با توجه به این نمودار، تفاوت آنتالپی فروپاشی فلوئورید و کلرید هر فلز، بیشتر از تفاوت آنتالپی فروپاشی کلرید و برمید آن فلز است. بر این اساس، می‌توان گفت تفاوت فروپاشی ΔH لیتیم فلوئورید و لیتیم کلرید، بیشتر از تفاوت فروپاشی ΔH لیتیم کلرید و لیتیم برمید است. با توجه به توضیحات داده شده، میانگین مقدار فروپاشی ΔH لیتیم فلوئورید و لیتیم برمید، بیشتر از مقدار فروپاشی ΔH لیتیم کلرید است.

هالیدهای فلزهای قلیایی

هالیدهای فلزهای قلیایی شامل گروهی از ترکیب‌های یونی می‌شوند که از واکنش میان عناصر فلزی گروه اول (فلزهای قلیایی) و عناصر نافلزی گروه ۱۷ (هالوژن‌ها) به دست می‌آیند. به طور کلی در هالیدهای فلزهای قلیایی با افزایش عدد اتمی یا کاتیون، شعاع این یون‌ها افزایش پیدا کرده و چگالی بار آن‌ها کمتر می‌شود. در این گروه از ترکیب‌های یونی، با افزایش عدد اتمی یا کاتیون، آنتالپی فروپاشی شبکه بلوری جامد یونی کاهش پیدا می‌کند. به عنوان مثال، چون عدد اتمی پتاسیم بیشتر از لیتیم است، آنتالپی فروپاشی شبکه پتاسیم کلرید کمتر از آنتالپی فروپاشی شبکه بلور لیتیم کلرید می‌شود.

جزء سازنده اصلی یک ماده رنگی که به آن رنگ می‌بخشد، رنگدانه نام دارد. در واقع، رنگدانه‌های موجود در یک ماده با جذب یا بازتاب برخی از پرتوهای مرئی، سبب ایجاد رنگ‌های مختلف می‌شوند. به‌عنوان مثال، رنگ سبز درختان و رنگ سرخ گل رز به خاطر وجود رنگدانه‌ها است. تیتانیم (IV) اکسید، آهن (III) اکسید و دوده، از جمله رنگدانه‌های معدنی هستند که به‌ترتیب رنگ‌های سفید، قرمز و سیاه را ایجاد می‌کنند. انسان‌های گذشته این مواد را از منابع طبیعی همچون گیاهان، جانوران و برخی از کانی‌ها تهیه می‌کردند. توجه داریم که در ساختار تیتانیم (IV) اکسید و آهن (III) اکسید، یون‌های حاصل از اتم‌های فلزی یافت می‌شوند اما دوده، نمونه خالصی از کربن بوده و فاقد اتم فلزی است.



۶۸- کدام یک از عبارات‌های داده شده، نادرست است؟

- (۱) جسمی که هم‌رنگ با رنگ شعله منیزیم سولفات دیده می‌شود، برخلاف اجسام سبز رنگ، پرتوهای آبی را جذب نمی‌کند.
- (۲) نیتینول، آلیاژی از یک فلز اصلی و یک فلز واسطه بوده و از آن در ساخت سازه‌های ارتودنسی و استنت استفاده می‌شود.
- (۳) نمونه‌هایی از گوگرد، به حالت آزاد در طبیعت یافت شده و این عنصر، همانند فسفر، یک عنصر اکسیژن دوست است.
- (۴) به‌خاطر مقاومت بالای تیتانیم در برابر خوردگی، پوشش بیرونی موزه گوگنهایم، از این فلز ساخته شده است.

(متوسط - مفهومی و حفظی - استاندارد) - صفحه ۸۸ - ۱۲۰۳

پاسخ: گزینه ۲

تیتانیم به شکل آلیاژهای گوناگون کاربرد گسترده‌ای در صنعت دارد. به‌عنوان مثال، نیتینول آلیاژی از تیتانیم و نیکل بوده که به آلیاژ هوشمند معروف است. همان‌طور که می‌دانیم، نیتینول از اتم‌های نیکل ($^{58}_{28}Ni$) و تیتانیم ($^{48}_{22}Ti$) ساخته شده است. این دو عنصر فلزی متعلق به دسته d از تناوب چهارم بوده و آرایش الکترونی آن‌ها به زیرلایه $4s^2$ ختم می‌شود. نیتینول، در ساخت استنت برای رگ‌ها، سازه‌های ارتودنسی دندان و قاب عینک‌ها استفاده می‌شود.

بررسی سایر گزینه‌ها:

شعله منیزیم و ترکیب‌های آن به رنگ سفید دیده می‌شود. شعله فلزهای مس، لیتیم و سدیم نیز به‌ترتیب، به رنگ‌های سبز، سرخ و زرد دیده می‌شود. شعله آهن نیز نارنجی رنگ است. توجه داریم که اجسام سفید رنگ، برخلاف اجسام سبز رنگ، پرتوهای الکترومغناطیسی مرئی آبی‌رنگ را جذب نکرده و این پرتوها را به سمت چشم بیننده بازتاب می‌کنند.

گوگرد، مثل فسفر از جمله عناصر اکسیژن دوست به شمار رفته به‌طوری‌که انواعی از ترکیبات و یون‌های چنداتی با اکسیژن تشکیل می‌دهند. اغلب عناصرها در طبیعت به شکل ترکیب یافت می‌شوند؛ هر چند در میان فلزات، نمونه‌هایی از طلا، نقره، مس و پلاتین و در میان نافلزات، عناصری مانند اکسیژن، نیتروژن و گوگرد به‌صورت آزاد در طبیعت وجود دارند.

با توجه به مقاومت بالای تیتانیم در برابر خوردگی، از این فلز برای ساختن نمای بیرونی برخی از ساختمان‌ها از جمله موزه گوگنهایم استفاده می‌شود. جدول زیر، برخی از ویژگی‌های تیتانیم را در مقایسه با فولاد نشان می‌دهد:

ویژگی	ماده	تیتانیم	مقایسه	فولاد
نقطه ذوب ($^{\circ}C$)	۱۶۶۷	<	۱۵۳۵	
چگالی ($g \cdot mL^{-1}$)	۴/۵۱	>	۷/۹۰	
واکنش با ذره‌های موجود در آب دریا	ناچیز	>	متوسط	
مقاومت در برابر خوردگی	عالی	<	ضعیف	
مقاومت در برابر سایش	عالی	$\approx$	عالی	

تیتانیم

تیتانیم ($^{48}_{22}Ti$) یکی از عناصر موجود در دسته d تناوب چهارم جدول دوره‌ای است که به خاطر ویژگی‌های باورنکردنی و فراتر از انتظار مثل ماندگاری و استحکام مناسب، از آن در جاهای مختلفی مثل ساخت موتور جت، پروانه کشتی‌های اقیانوس‌پیما و نمای زیبای ساختمان‌ها استفاده می‌شود. اجسام ساخته شده از فلز تیتانیم، همانند فولاد زنگ‌نزن، مقاومت بسیار بالایی در برابر سایش دارند. با توجه به زیبایی ظاهری تیتانیم و مقاومت بالای این فلز در مقابل خوردگی و سایش، ساخت بناهایی از جمله موزه گوگنهایم با پوشش بیرونی تیتانیم، باعث افزایش ماندگاری این بناها شده است.

۶۹- به یک لیتر از محلول آبی نمک وانادیم با غلظت ۰/۱۲ مولار که به رنگ آبی است، مقداری گرد روی اضافه می‌کنیم تا کاتیون‌های V^{3+} در محلول تولید شوند. اگر این مقدار از گرد روی را در حضور مقدار کافی از محلول هیدروکلریک اسید قرار دهیم، چند

الکترون بین گونه‌های کاهنده و اکسنده در این واکنش مبادله می‌شود؟

- (۱) $90/3 \times 10^{21}$ (۲) $36/12 \times 10^{21}$ (۳) $72/24 \times 10^{21}$ (۴) $54/18 \times 10^{21}$

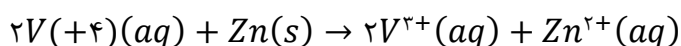
پاسخ: گزینه ۳

(سخت - مسئله - استاندارد) - صفحه ۸۴ - ۱۲۰۳

اگر عدد اکسایش وانادیم برابر با +۴ باشد (برای مثال، در یون VO^{2+})، رنگ محلول حاوی این یون، آبی می‌شود. محلول سبز رنگ نمک‌های وانادیم نیز دارای یون‌های V^{3+} است. رنگ محلول نمک‌های وانادیم در حالت‌های مختلف، در جدول زیر آورده شده است:

رنگ محلول	محلول نمک‌های وانادیم
زرد	محلولی از نمک وانادیم (V)
سبز	محلولی از نمک وانادیم (III)
آبی	محلولی از نمک وانادیم (IV)
بنفش	محلولی از نمک وانادیم (II)

واکنش تبدیل محلول آبی رنگ وانادیم به محلول سبز رنگ آن به صورت زیر است:



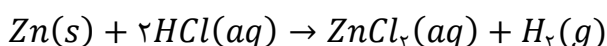
طی این فرایند، هر ذره وانادیم یک الکترون گرفته و عدد اکسایش آن به اندازه یک درجه تغییر می‌کند. در نقطه مقابل، هر اتم روی نیز دو الکترون از دست داده و به کاتیون روی تبدیل می‌شود. مقدار گرد روی اضافه شده به محلول برای انجام این فرایند برابر است با:

$$? \text{ mol Zn} = 1 \text{ L محلول} \times \frac{0/12 \text{ mol V}(+4)}{1 \text{ L محلول}} \times \frac{1 \text{ mol Zn}}{2 \text{ mol V}(+4)} = 0/06 \text{ mol}$$

با استفاده از کسرهای تناسب نیز می‌توان برای $V(+4)$ ، کسر مربوط به غلظت مولی و برای روی، کسر مربوط به مول را نوشت:

$$\left[\frac{\text{لیتر محلول} \times \text{غلظت مولی یون حاوی وانادیم}}{\text{ضریب}} \right] = \left[\frac{\text{مول فلز روی}}{\text{ضریب}} \right] \Rightarrow \left[\frac{1 \times 0/12}{2} \right] = \left[\frac{x}{1} \right] \Rightarrow x = 0/06 \text{ mol}$$

واکنش فلز روی با محلول هیدروکلریک اسید، به صورت زیر است:



در این واکنش به ازای مصرف هر مول فلز Zn ، مقدار ۲ مول الکترون بین گونه‌های اکسنده و کاهنده مبادله شده است. گاز هیدروژن، فراورده گازی این واکنش است. بر این اساس می‌توان نوشت:

$$? e = 0/06 \text{ mol Zn} \times \frac{2 \text{ mol e}}{1 \text{ mol Zn}} \times \frac{6/02 \times 10^{23} e}{1 \text{ mol e}} = 72/24 \times 10^{21} e$$

در واکنش نمونه روی با محلول هیدروکلریک اسید، تعداد $72/24 \times 10^{21}$ الکترون بین گونه‌های اکسنده و کاهنده مبادله شده است.



۷۰- در جدول زیر، آرایش الکترونی اتم برخی از عناصر جدول دوره‌ای نمایش داده شده است. کدام یک از عبارات‌های زیر در رابطه با این عناصر درست است؟ (نماد عناصر، فرضی هستند).

عنصر	A	B	C	D
آرایش الکترونی	$[Ne]3s^2$	$[Ne]3s^23p^1$	$[Ne]3s^23p^5$	$[Ar]3d^{10}4s^24p^5$

- (۱) یون پایدار عنصر B و D، بیشترین اختلاف شعاع را داشته و ترکیب حاصل از آن‌ها، در حالت جامد نارسانا است.
- (۲) با تشکیل ۰/۵ مول ترکیب یونی از واکنش گالیم با عنصر D، دو مول الکترون بین عناصر سازنده مبادله می‌شود.
- (۳) بیشترین مقدار آنتالپی فروپاشی شبکه در میان مواد یونی حاصل از این عناصر، متعلق به ترکیب A با C است.
- (۴) عنصر C، واکنش‌پذیری بالایی داشته و در دمای اتاق، حالت فیزیکی یک نمونه از آن مشابه هگزان است.

پاسخ: گزینه ۱

(سخت - مفهومی و حفظی - استاندارد ۱ - صفحه ۸۱ - ۱۲۰۳)

با توجه به آرایش الکترونی اتم عناصر موجود در جدول، عناصر A، B، C و D به ترتیب معادل با منیزیم (Mg)، آلومینیم (Al)، کلر (Cl) و برم (Br) هستند. یون پایدار حاصل از فلز آلومینیم معادل با Al^{3+} بوده و یون پایدار حاصل از عنصر برم نیز برمید نام داشته و معادل با Br^{-} است. ترکیب یونی حاصل از واکنش آلومینیم با برم، آلومینیم برمید نام دارد و فرمول شیمیایی آن به صورت $AlBr_3$ است. می‌دانیم که ترکیب‌های یونی، در حالت مذاب و محلول رسانای جریان الکتریکی هستند اما در حالت جامد رسانایی ندارند. از میان یون‌های داده شده، Al^{3+} کمترین شعاع و Br^{-} بیشترین شعاع را دارد؛ لذا اختلاف شعاع میان این دو یون، بیشتر از جفت یون‌های دیگر است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۲) برای به دست آوردن شمار مول‌های الکترون مبادله شده به ازای تشکیل یک مول ترکیب یونی، می‌توان از قاعده زیر بهره برد:

(بار کاتیون × زیروند کاتیون) = (قدرمطلق بار آنیون × زیروند آنیون) = شمار مول‌های الکترون مبادله شده

گالیم، کاتیون با بار ۳+ و برم، آنیون با بار ۱- تشکیل می‌دهند. فرمول شیمیایی ترکیب حاصل از واکنش این دو ماده با یکدیگر، به صورت $GaBr_3$ است. به ازای تشکیل هر مول $GaBr_3$ ، مقدار ۳ مول الکترون بین عناصر سازنده مبادله می‌شود؛ در نتیجه به ازای تشکیل ۰/۵ مول از آن، ۱/۵ مول الکترون بین عناصر سازنده مبادله شده است. توجه داریم که طبق فرض کتاب درسی و کنکور سال‌های اخیر، ترکیب بین یک فلز و یک نافلز مثل گالیم برمید، گالیم کلرید، آلومینیم کلرید، آلومینیم برمید و ...، همواره یونی در نظر گرفته می‌شود.

۳) هرچه چگالی بار آنیون و کاتیون سازنده یک ترکیب یونی بیشتر باشد، این یون‌ها با قدرت بیشتری یکدیگر را جذب کرده و مقدار آنتالپی فروپاشی شبکه حاصل از واکنش آن‌ها بیشتر است. از میان دو کاتیون Al^{3+} و Mg^{2+} ، چگالی بار Al^{3+} بیشتر است؛ چون بار آن بیشتر و شعاع آن کمتر است. از میان دو آنیون Cl^{-} و Br^{-} نیز چگالی بار Cl^{-} بیشتر است؛ چون شعاع کمتری دارد. بر این اساس از بین ترکیب‌های یونی ایجاد شده، آلومینیم کلرید ($AlCl_3$) بیشترین مقدار آنتالپی فروپاشی شبکه را دارد.

۴) عنصر C، معادل با کلر است. این عنصر، واکنش‌پذیری بالایی داشته و در دمای اتاق، حالت فیزیکی یک نمونه از آن گاز است در حالی که حالت فیزیکی هگزان، در دمای اتاق مایع است.



۷۱- اگر در واکنش $N_2(g) + 2H_2(g) \rightarrow N_2H_4(g)$ ، پس از عبور از قله انرژی $107 kJ$ گرما آزاد شود، مقدار انرژی فعال‌سازی این واکنش برابر با کیلوژول بوده و برای تولید گرم هیدرازین، ۳۳ کیلوژول گرما نیاز خواهد بود. (انرژی پیوندهای اشتراکی $N \equiv N$ ، $N - N$ ، $N - H$ و $H - H$ به ترتیب برابر ۹۴۱، ۱۵۹، ۳۸۹ و ۴۳۵ کیلوژول بر مول است).

($N = 14$ و $H = 1 : g.mol^{-1}$)

(۴) ۲۹۹ - ۱۱

(۳) ۲۰۳ - ۱۱

(۲) ۲۹۹ - ۸

(۱) ۲۰۳ - ۸

در قدم اول، آنتالپی واکنش را به کمک آنتالپی پیوندها حساب می‌کنیم. در این رابطه، داریم:

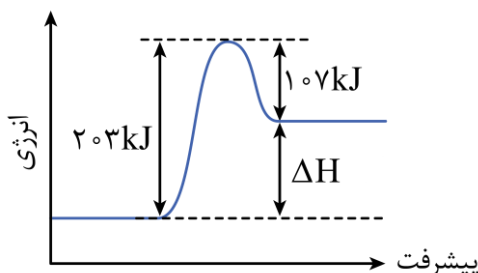
$$\Delta H = [\text{مجموع آنتالپی پیوندها در فراورده‌ها}] - [\text{مجموع آنتالپی پیوندها در واکنش‌دهنده‌ها}]$$

با توجه به مقدار آنتالپی پیوندهای تشکیل شده و شکسته شده، داریم:

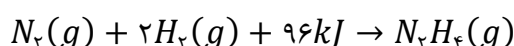
$$\Delta H = [\Delta H(N \equiv N) + 2\Delta H(H - H)] - [4\Delta H(N - H) + \Delta H(N - N)]$$

$$= [941 + (2 \times 435)] - [(4 \times 389) + 159] = 96 \text{ kJ}$$

از آن جا که واکنش گرماگیر است، مقدار انرژی فعال‌سازی آن برابر با $203 = 96 + 107$ کیلوژول می‌شود. بنابراین نمودار انرژی-پیشرفت برای این واکنش، به صورت زیر خواهد بود:



معادله این واکنش به صورت زیر است:



در ادامه، حساب می‌کنیم که برای تولید چند گرم هیدرازین، مقدار 33 kJ گرما نیاز خواهد بود. بر این اساس، داریم:

$$? \text{ g } N_2H_4 = 33 \text{ kJ} \times \frac{1 \text{ mol } N_2H_4}{96 \text{ kJ}} \times \frac{32 \text{ g } N_2H_4}{1 \text{ mol } N_2H_4} = 11 \text{ g}$$

راز شیمیایی تولید آمونیاک



همان‌طور که می‌دانید، واکنش تولید هیدرازین (N_2H_4) از گازهای نیتروژن و هیدروژن، مرحله اول تهیه آمونیاک به روش هابر است. نکات زیر را درباره این واکنش، به خاطر بسپارید:

- واکنش تولید هیدرازین از گازهای نیتروژن و هیدروژن گرماگیر است.
- واکنش گازهای هیدرازین و هیدروژن گرماده بوده و محصول آن آمونیاک است.
- سطح آنتالپی هیدرازین از سطح آنتالپی آمونیاک و سطح آنتالپی نیتروژن بالاتر است؛ بنابراین هیدرازین ناپایدارتر از گازهای آمونیاک و نیتروژن است.



۷۲- در رابطه با واکنش‌های شیمیایی مختلف و نمودار پیشرفت آن‌ها بر حسب زمان، کدام مورد همواره درست است؟

- اگر شیب نمودار مول-زمان یک فراورده صفر باشد، آن واکنش به پایان رسیده و کل واکنش‌دهنده‌ها مصرف شده‌اند.
- اگر سرعت واکنش برابر با $\frac{\Delta n(A)}{2 \times \Delta t}$ باشد، ماده A فراورده واکنش بوده و ضریب آن در معادله واکنش برابر با ۲ است.
- شیب نمودار غلظت-زمان برای هر فراورده تولید شده در یک واکنش، به مرور زمان کاهش پیدا خواهد کرد.
- سرعت انجام واکنش‌های گرماده، در مقایسه با واکنش‌های گرماگیر، بیشتر تحت تأثیر کاتالیزگر قرار می‌گیرد.

سرعت واکنش، همواره مقداری مثبت است. بر این اساس، می‌توان گفت سرعت واکنش تغییر مول فراورده‌ها هم‌علامت و با تغییر مول واکنش‌دهنده‌ها غیر هم‌علامت است. همچنین، اگر قدر مطلق تغییر مول مواد در واحد زمان را بر ضریب هر ماده در واکنش تقسیم کنیم، سرعت واکنش به دست می‌آید. برای مثال، در رابطه با واکنش $3B + C \rightarrow 2A$ روابط زیر برقرار هستند:

$$\bar{R} = \frac{-\Delta n(B)}{3 \times \Delta t} = \frac{-\Delta n(C)}{\Delta t} = \frac{\Delta n(A)}{2 \times \Delta t}$$

سرعت واکنش

شیب نمودار مول-زمان برای هر یک از مواد شرکت‌کننده در واکنش، متناسب با ضریب استوکیومتری آن ماده در معادله موازنه شده واکنش است. به عبارت دیگر، اگر ضریب استوکیومتری شرکت‌کننده‌ها یکسان نباشد، سرعت متوسط آن‌ها متفاوت از یکدیگر خواهد بود. شیمی‌دان‌ها برای درک آسان‌تر روند پیشرفت واکنش‌ها در واحد زمان، از یک مفهوم کاربردی به نام سرعت واکنش استفاده می‌کنند. سرعت واکنش، از تقسیم سرعت متوسط مصرف یا تولید هریک از مواد شرکت‌کننده در واکنش بر ضریب آن ماده به‌دست می‌آید. به عنوان مثال، در واکنش $2A(g) + 3B(g) \rightarrow C(g) + 2D(g)$ برای محاسبه سرعت متوسط واکنش در بازه زمانی Δt به روش زیر عمل می‌کنیم:

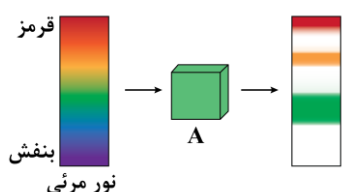
$$\bar{R}_{\text{واکنش}} = \frac{|\Delta n_A|}{\nu \times \Delta t} = \frac{|\Delta n_B|}{\nu \times \Delta t} = \frac{|\Delta n_C|}{\Delta t} = \frac{|\Delta n_D|}{\nu \times \Delta t} \implies \bar{R}_{\text{واکنش}} = \frac{\bar{R}_A}{\nu} = \frac{\bar{R}_B}{\nu} = \frac{\bar{R}_C}{1} = \frac{\bar{R}_D}{\nu}$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

- ۱ در واکنش‌های شیمیایی تعادلی، بعد از رسیدن به تعادل، سرعت واکنش‌های رفت و برگشت برابر می‌شود؛ یعنی مول مصرف‌شده و تولیدشده هر ماده با هم برابر می‌شود و در نتیجه شمار مول مواد ثابت می‌ماند. این در حالی است که در شرایط مورد نظر، مقدار واکنش‌دهنده‌ها به صفر نرسیده و این مواد هنوز در ظرف حضور دارند.
- ۳ اگر فراورده مایع یا جامد خالص باشد، شیب نمودار غلظت-زمان برای آن ثابت است و در طول واکنش تغییری نمی‌کند.
- ۴ گرماده یا گرماگیر بودن واکنش ارتباطی با تأثیر کاتالیزگر ندارد. به بیان دیگر، میزان تغییرات انرژی فعال‌سازی واکنش در اثر استفاده از کاتالیزگر و تغییر آنتالپی واکنش ارتباطی با هم ندارند.



۷۲- کدام موارد از عبارت‌های زیر، در رابطه با فرایند مقابل که بر روی ماده آلی A انجام می‌شود، درست هستند؟



(۴) «الف» و «د»

(۳) «ج» و «د»

(۲) «ب» و «ج»

(۱) «الف» و «ب»

- الف - جسم، بلندترین طول موج‌های مرئی را برخلاف کوتاه‌ترین طول موج‌ها، جذب کرده است.
- ب - پرتوهای فروسرخ، برخلاف پرتوهای مرئی، به یقین با این ماده آلی برهمکنش ندارند.
- ج - با ایجاد تغییر در ساختار گروه عاملی این ماده، الگوی طیف جذبی آن تغییر می‌کند.
- د - به کمک این روش، می‌توان نوع آلاینده‌های موجود در هواکره را مشخص کرد.

(متوسط - مفهومی و حفظی - استاندارد) - صفحه ۹۴ - ۱۲۰۴

پاسخ: گزینه ۳

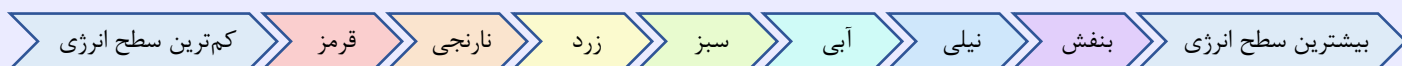
طیف‌سنجی، یک روش شناسایی و بررسی ساختار مواد بر اساس برهم‌کنش میان ماده و پرتوهای الکترومغناطیسی است. اگر از پرتوهای فروسرخ در این روش استفاده شود، نام این فرایند، طیف‌سنجی فروسرخ خواهد بود و اگر از پرتوهای مرئی در این روش استفاده شود، نام این فرایند، طیف‌سنجی مرئی خواهد بود. در رابطه با این فرایند، عبارت‌های (ج) و (د) درست هستند.

بررسی موارد:

- الف یک دسته پیوسته از پرتوهای مرئی به این جسم تابانده شده است. جسم مورد نظر، پرتوهای آبی، نیلی و بنفش را جذب کرده است در حالی که پرتوهای قرمز رنگ را از خود عبور داده است. می‌دانیم که پرتوهای بنفش دارای بیشترین انرژی و کمترین طول موج هستند در حالی که پرتوهای قرمز دارای کمترین انرژی و بیشترین طول موج هستند.

پرتوهای مرئی

نور خورشید، اگرچه سفید به نظر می‌رسد اما با عبور از یک منشور و یا قطره‌های آب موجود در هوا، تجزیه شده و گستره‌ای پیوسته از رنگ‌ها را ایجاد می‌کند. این گستره رنگی، شامل بی‌نهایت طول موج از رنگ‌های گوناگون می‌شود. بررسی‌ها نشان می‌دهد که نور خورشید، شامل گستره بسیار بزرگ‌تری از این پرتوها است. پرتوهایی که از نوع پرتوهای الکترومغناطیسی بوده و با خود انرژی حمل می‌کنند؛ به‌طوری‌که هر چه طول موج این پرتوها کوتاه‌تر باشد، انرژی بیشتری با خود حمل می‌کنند. نمودار زیر، انواع امواج مرئی را در مقایسه با یکدیگر نشان می‌دهد:



- پ طیف‌سنجی فروسرخ، روشی برای شناسایی گروه‌های عاملی است. در این روش، هر گروه عاملی تنها طول موجی مشخص را جذب می‌کند. بر این اساس، می‌توان گفت هر ماده آلی با پرتوهای فروسرخ دارای برهم‌کنش است.

ج با تغییر گروه عاملی ترکیب‌های آلی طول موج فروسرخ جذب شده توسط آن نیز تغییر پیدا می‌کند. برای مثال اتانول و دی‌متیل اتر فرمول شیمیایی یکسانی دارند؛ اما به دلیل داشتن گروه عاملی متفاوت طول موج جذب شده توسط آن‌ها نیز متفاوت خواهد بود.

د از طیف‌سنجی فروسرخ می‌توان برای شناسایی آلاینده‌هایی مانند کربن مونوکسید و اکسیدهای نیتروژن در هواکره و نیز شناسایی برخی مولکول‌ها در فضای بین ستاره‌ای استفاده کرد. توجه داریم که افزون بر طیف‌سنجی فروسرخ، می‌توان از برهم‌کنش پرتوهای فرابنفش، نور مرئی و امواج رادیویی نیز برای شناسایی مواد گوناگون بهره برد. دستگاه ام.آر.آی، نمونه‌ای از کاربرد طیف‌سنجی در علم پزشکی است.



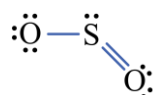
۷۴- کدام یک از عبارت‌های داده شده، درست است؟

- (۱) هر سه ماده آمونیاک، اوره و ویتامین (آ)، در آب محلول بوده و تولید آن‌ها پس از انقلاب صنعتی آغاز شده است.
- (۲) هوای آلوده، سرعت فرایند پوسیدگی خودروها را زیاد کرده و محتوی آلاینده‌هایی است که همه آن‌ها بوی بد دارند.
- (۳) اکسیدی از عنصر گوگرد که در موتور خودروها تولید می‌شود، دارای ۳ پیوند اشتراکی در ساختار مولکول خود است.
- (۴) با کاهش غلظت گاز قطبی اوزون در هوای شهرهای بزرگ، غلظت NO_2 افزایش یافته و به حداکثر مقدار خود می‌رسد.

(آسان - مفهومی - سریع) - صفحه ۹۲ - ۱۲۰۴

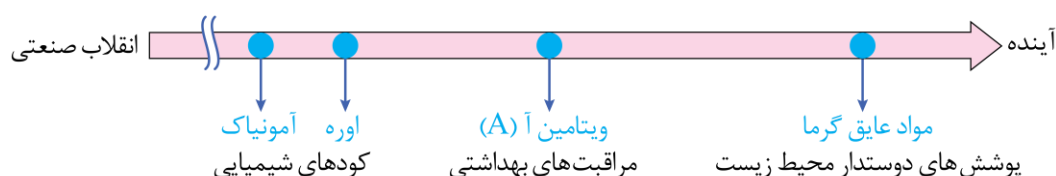
پاسخ: گزینه ۳

گوگرد دی‌اکسید، اکسید، گوگرد است که از اگزوز خودروها خارج می‌شود. این گاز از واکنش گوگرد موجود در سوخت‌های فسیلی با گاز اکسیژن در موتور خودروها تولید می‌شود. هر مولکول گوگرد دی‌اکسید، دارای ۳ پیوند اشتراکی و ۶ جفت الکترون ناپیوندی در ساختار خود است. ساختار مولکولی این ماده به صورت زیر است:



بررسی سایر گزینه‌ها:

۱ تولید هر سه ماده آمونیاک، اوره و ویتامین (آ)، پس از انقلاب صنعتی آغاز شده است؛ ولی از بین این سه ماده تنها آمونیاک و اوره در آب محلول‌اند. ویتامین (آ)، به‌طور عمده از بخش‌های ناقطبی تشکیل شده و نامحلول در آب است. روند تولید این مواد در سال‌های بعد از انقلاب صنعتی به صورت زیر است:



ویتامین (آ)

در ساختار ویتامین (آ)، فقط یک گروه عاملی هیدروکسیل وجود دارد. چون قسمت عمده مولکول‌های این ماده از بخش هیدروکربنی و ناقطبی تشکیل شده است، این بخش‌ها بر بخش‌های قطبی غلبه کرده و مولکول‌های ویتامین (آ) در مجموع ناقطبی به شمار می‌روند و در حلال‌های ناقطبی مثل چربی حل می‌شوند. چون ویتامین (آ) محلول در آب نیست، مقدار اضافی مصرف شده از آن به راحتی از بدن دفع نشده و در بافت چربی تجمع پیدا می‌کند؛ پس مصرف بیش از اندازه این ویتامین باعث ایجاد مشکل برای بدن می‌شود.

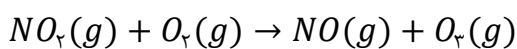
۲ با رشد دانش و فناوری، گسترش صنایع گوناگون و با انجام رفتارهای نادرست، گازهای آلاینده وارد هوا شده و دسترسی به هوای پاک محدودتر شده است. گازهای SO_2 ، NO_2 ، نیتروژن مونوکسید، کربن مونوکسید، اوزون، مواد آلی فرار و ذرات معلق، از جمله گازهای آلاینده موجود در هوای آلوده هستند. به دلیل وجود این آلاینده‌ها، هوای آلوده بوی بدی دارد، چهره شهر را زشت می‌کند، به فرایند فرسودگی ساختمان‌ها و پوسیدگی خودروها سرعت می‌بخشد و سبب ایجاد و تشدید بیماری‌های تنفسی از جمله برونشیت، آسم و سرطان ریه و حتی مرگ می‌شود. توجه داریم که همه گازهای موجود در هوای آلوده الزاماً بوی بدی ندارند. برای مثال، گاز کربن مونوکسید یک گاز بی‌بو است. ساختار مولکولی این گاز به صورت زیر است:



کربن مونوکسید

کربن مونوکسید گازی بی‌رنگ، بی بو و بسیار سمی است. چگالی این گاز کمتر از هوا بوده و قابلیت انتشار آن در محیط بسیار زیاد است؛ به‌طوری‌که این گاز به سرعت در همهٔ فضای اتاق پخش می‌شود. از آنجا که میل ترکیبی هموگلوبین خون با این گاز بسیار زیاد و بیش از ۲۰۰ برابر گاز اکسیژن است، مولکول‌های آن پس از اتصال به هموگلوبین از رسیدن اکسیژن به بافت‌های بدن جلوگیری می‌کنند. این ویژگی باعث مسمومیت فرد شده و سامانهٔ عصبی او را فلج می‌کند و قدرت هرگونه اقدامی را از آن می‌گیرد. در چنین شرایطی، به فرد مسموم احساس خفگی دست داده و او سرانجام می‌میرد.

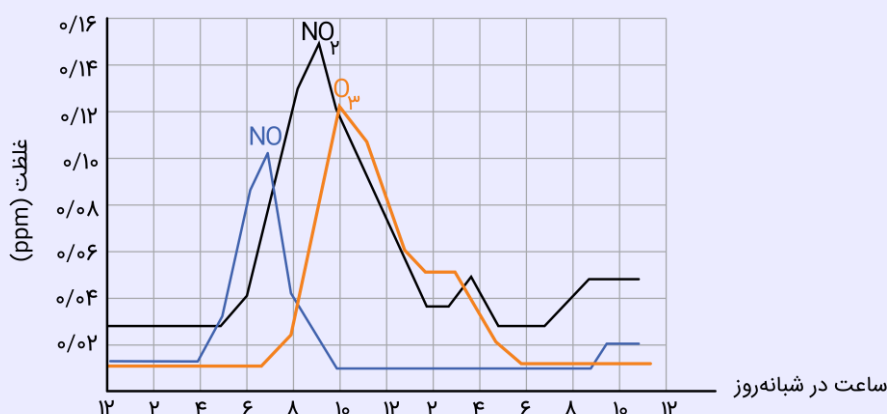
با گذشت زمان و مصرف شدن گاز نیتروژن دی‌اکسید در واکنش تولید اوزون تروپوسفری، غلظت این گاز در هوای شهرهای بزرگ کاهش یافته و به دنبال آن، غلظت گاز O_3 به تدریج افزایش پیدا می‌کند. معادله واکنش تولید اوزون در لایه تروپوسفر به‌صورت زیر است:



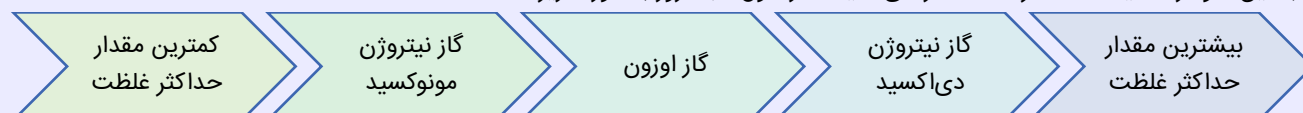
توجه داریم که گاز اوزون از اکسیژن واکنش‌پذیرتر بوده و یک آلاینده سمی و خطرناک به شمار می‌آید، به‌طوری‌که حضور آن در هوایی که تنفس می‌کنیم، سبب سوزش چشم‌ها و آسیب دیدن ریه‌ها می‌شود.

تغییر غلظت گازها در هواکره

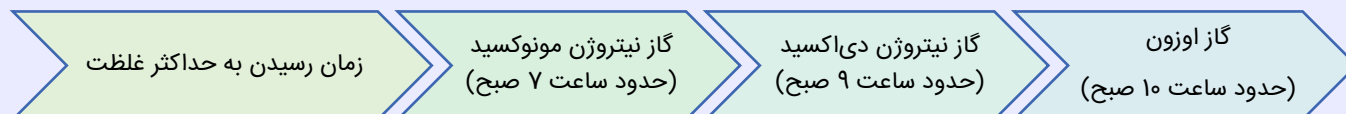
نمودار زیر، روند تغییر غلظت گازهای آلاینده در هوای آلوده را نشان می‌دهد:



با توجه به این نمودار، مقایسه حداکثر غلظت گازهای آلاینده در طول شبانه‌روز به‌صورت زیر است:



از طرفی، زمان رسیدن به حداکثر غلظت این گازها در طول شبانه‌روز نیز به‌صورت زیر خواهد بود:



با ورود خودروها به خیابان، گاز NO تولیدشده در موتور خودروها وارد هواکره شده و به همین خاطر، غلظت این گاز در هواکره در حدود ساعت ۷ صبح به بیشترین مقدار خود می‌رسد. با گذشت زمان، گاز NO موجود در هوا با گاز اکسیژن واکنش داده و گاز NO_2 را تولید می‌کند. با انجام شدن این واکنش، غلظت گاز NO در هوا کاهش یافته و غلظت گاز NO_2 افزایش پیدا می‌کند؛ تا جایی که غلظت این گاز در حوالی ساعت ۹ صبح به بیشترین مقدار خود می‌رسد. گاز NO_2 تولیدشده هم عمر زیادی نکرده و با شرکت در واکنش $NO_2(g) + O_2(g) \rightarrow NO(g) + O_3(g)$ ، موجب تولید گاز اوزون و افزایش غلظت آن در هواکره می‌شود. غلظت گاز اوزون تولیدشده در این فرایند، در حوالی ساعت ۱۰ صبح به حداکثر مقدار خود می‌رسد.

۷۵- کدام یک از عبارتهای داده شده، نادرست است؟

- مقدار گاز کربن مونوکسید تولید شده توسط خودرو، بیشتر از مقدار گاز نیتروژن مونوکسید تولید شده توسط آن است.
- سرعت واکنش سوختن فسفر سفید در دمای اتاق، بیشتر از سرعت واکنش سوختن گاز هیدروژن در شرایط یکسان است.
- در دمای اتاق، واکنش گاز هیدروژن با گاز اکسیژن در حضور یک فلز واسطه، می‌تواند به‌صورت انفجاری انجام شود.
- واکنش‌های گرماگیر، برخلاف واکنش‌های گرماده، برای آغاز شدن به انرژی نیاز دارند که با نماد E_a مشخص می‌شود.

واکنش‌های شیمیایی صرف نظر از اینکه گرماده (واکنش‌هایی با ΔH منفی) یا گرماگیر (واکنش‌هایی با ΔH مثبت) باشند، برای آغاز شدن به مقداری انرژی نیاز دارند که با نماد E_a نشان داده شده و به آن انرژی فعال‌سازی گفته می‌شود.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱ گازهای کربن مونوکسید، گوگرد دی‌اکسید، نیتروژن مونوکسید و هیدروکربن‌های نسوخته از جمله آلاینده‌هایی هستند که در اثر سوزاندن سوخت‌های فسیلی وارد هواکره می‌شوند. جدول زیر، جرم برخی از آلاینده‌های تولیدشده توسط خودروها به ازای طی یک کیلومتر مسافت را نشان می‌دهد:

فرمول شیمیایی آلاینده	CO	C_xH_y	NO
مقدار آلاینده به ازای طی یک کیلومتر مسافت (گرم)	۵/۹۹	۱/۶۷	۱/۰۴

با توجه به جدول بالا، مقدار گاز کربن مونوکسید تولید شده توسط خودروها، تقریباً ۵ برابر مقدار گاز NO تولید شده توسط آن‌ها است.

نیتروژن مونوکسید

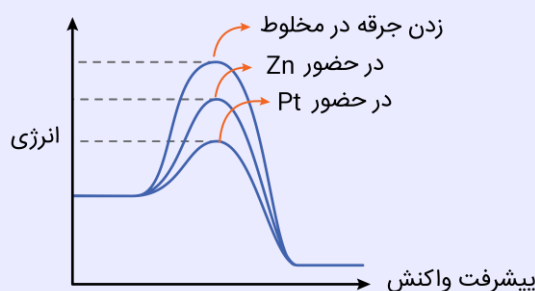
گاز NO یکی از آلاینده‌های موجود در هوا است که براساس معادله $O_2(g) + N_2(g) \rightarrow 2NO(g)$ از واکنش میان گازهای اکسیژن و نیتروژن تولید می‌شود. گاز نیتروژن به‌عنوان اصلی‌ترین جزء سازنده هواکره، واکنش‌پذیری بسیار کمی دارد و به‌طور معمول با اکسیژن واکنش نمی‌دهد. شرایط مورد نیاز برای انجام شدن واکنش میان گازهای اکسیژن و نیتروژن، فقط در دماهای بسیار بالا (مثل شرایط موجود در موتور خودروها و شرایط ایجادشده به هنگام رعدوبرق) فراهم می‌شود.

۲ فسفر سفید برخلاف هیدروژن، در هوا و در دمای اتاق می‌سوزد در حالی که گاز هیدروژن در این شرایط پایدار مانده و بدون حضور جرقه، شعله‌ور نمی‌شود. بر این اساس، می‌توان گفت سرعت واکنش سوختن فسفر سفید از هیدروژن بیشتر است. برای مقایسه سرعت انجام شدن واکنش‌های شیمیایی مختلف، می‌توانیم مقدار انرژی فعال‌سازی این واکنش‌ها را با یکدیگر مقایسه کنیم. توجه داریم که انرژی فعال‌سازی واکنش سوختن فسفر سفید در دمای اتاق، کم‌تر از انرژی فعال‌سازی واکنش سوختن هیدروژن است.

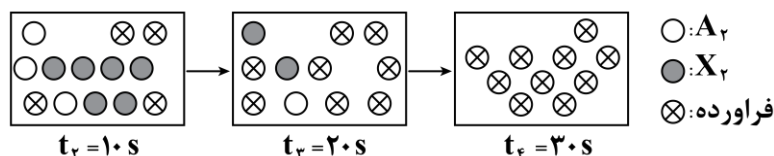
۳ گازهای هیدروژن و اکسیژن در دمای اتاق با هم واکنش نمی‌دهند؛ اما در حضور توری پلاتینی (نوعی فلز واسطه) به‌عنوان کاتالیزگر، واکنش این گازها به‌صورت انفجاری انجام می‌شود. توجه داریم که کاتالیزگر دیگر این واکنش، پودر روی (نوع دیگری فلز واسطه) است که در حضور آن، واکنش گازهای هیدروژن و اکسیژن به‌صورت سریع انجام می‌شود.

سوختن هیدروژن

مخلوط گازهای هیدروژن و اکسیژن را در غیاب کاتالیزگر می‌توان برای مدت طولانی نگه داشت. در این شرایط، هیچ واکنشی انجام نشده و مخلوط موردنظر به‌صورت دست‌نخورده باقی می‌ماند؛ چرا که انرژی فعال‌سازی این واکنش خیلی بزرگ است. با ایجاد جرقه در مخلوط واکنش، انرژی فعال‌سازی آن تأمین شده و گازهای مورد نظر با سرعت خیلی بالایی با یکدیگر واکنش می‌دهند. از طرف دیگر، در صورت اضافه کردن کاتالیزگر مناسب (نمونه‌هایی از فلزهای Pt و Zn) به مخلوط واکنش نیز با کاهش انرژی فعال‌سازی آن، سرعت انجام شدن واکنش افزایش پیدا می‌کند. نمودار زیر، روند تغییر مقدار انرژی فعال‌سازی واکنش مورد نظر را در حضور هر کاتالیزگر نشان می‌دهد:



۷۶- گازهای A_2 و X_2 متناسب با ضرایب استوکیومتری، وارد ظرف ۵/۰ لیتری با حجم ثابت می‌شوند. اگر شکل زیر، قسمتی از واکنش مربوط به آن‌ها را نشان دهد، کدام مورد، نادرست است؟ (هر ذره، معادل ۰/۵ مول است.)

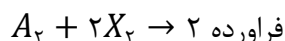


- (۱) سرعت واکنش در گستره زمانی ۲۰ تا ۳۰ ثانیه، نصف سرعت متوسط آن در گستره ۱۰ تا ۲۰ ثانیه است.
- (۲) در معادله موازنه شده واکنش، فقط یک فراورده وجود داشته و ضریب گاز X_2 دو برابر ضریب گاز A_2 است.
- (۳) در گستره زمانی ۲۰ تا ۳۰ ثانیه، سرعت متوسط مصرف گاز X_2 برابر با $1/2 \text{ mol.L}^{-1}.\text{min}^{-1}$ است.
- (۴) مقدار اولیه گاز A_2 برابر با ۰/۲ مول بوده و با افزایش حجم ظرف، سرعت متوسط واکنش کاهش می‌یابد.

(سخت - مفهومی و محاسباتی - زمان بر ۵ - صفحه ۹۴ - ۱۱۰۲)

پاسخ: گزینه ۴

برای حل آن ابتدا مقدار اولیه مواد و معادله واکنش را پیدا می‌کنیم. مقدار مول مصرف شده و تولید شده از هر ماده در یک واکنش، متناسب با ضریب آن ماده در معادله واکنش است. در بازه زمانی ۱۰ تا ۲۰ ثانیه، ۰/۱ مول A_2 و ۰/۲ مول X_2 مصرف شده و ۰/۲ مول فراورده نیز تولید شده است. بر این اساس، معادله واکنش به این صورت نوشته می‌شود:



درنتیجه اگر از لحظه شروع واکنش تا ثانیه ۱۰، مقدار ۰/۲ مول فراورده تولید شده باشد، در این بازه زمانی ۰/۱ مول A_2 نیز مصرف شده است. در ثانیه ۱۰، ۰/۱۵ مول A_2 در ظرف وجود دارد، پس مقدار اولیه A_2 موجود در ظرف در لحظه شروع واکنش برابر است با:

$$A_2 \text{ مقدار اولیه} = 0.1 + 0.15 = 0.25 \text{ mol}$$

دقت کنید در واکنش‌های گازی با افزایش حجم ظرف، غلظت گازها کاهش یافته و سرعت متوسط واکنش نیز کاهش می‌یابد. توجه داریم که فرمول شیمیایی فراورده این واکنش به صورت AX_2 است. جدول زیر، روند تغییر مقدار مول مواد در ظرف واکنش را نشان می‌دهد:

زمان (ثانیه)	مول A_2	مول X_2	مول AX_2
۰	۰/۲۵	۰/۵	۰
۱۰	۰/۱۵	۰/۳	۰/۲
۲۰	۰/۰۵	۰/۱	۰/۴
۳۰	۰	۰	۰/۵

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) در بازه زمانی ۲۰ تا ۳۰ ثانیه، مقدار ۰/۰۵ مول A_2 مصرف شده است، در حالی که در بازه زمانی ۱۰ تا ۲۰ ثانیه، ۰/۱ مول A_2 مصرف شده است. بر این اساس، سرعت متوسط در بازه زمانی ۲۰ تا ۳۰ ثانیه، نصف سرعت متوسط در بازه زمانی ۱۰ تا ۲۰ ثانیه است.

۲) با توجه به معادله نوشته شده، ضریب گاز X_2 و تنها فراورده واکنش، ۲ برابر ضریب A_2 است.

۳) در این بازه زمانی، تعداد دو ذره از گاز X_2 معادل با ۰/۱ مول X_2 مصرف شده است. سرعت متوسط مصرف این گاز برابر است با:

$$\bar{R}_{X_2} = \frac{|\Delta n|}{\Delta t(\text{min}) \times V} = \frac{0.1}{\frac{1}{6} \times 0.5} = 1/2 \text{ mol.L}^{-1}.\text{min}^{-1}$$



۷۷- کدام موارد از عبارتهای زیر درست هستند؟

- الف - آمونیوم نیترات، علاوه بر تهیه بسته‌های سرمازا، به عنوان کود شیمیایی نیز استفاده می‌شود.
 ب - برگ زردآلو، در مقایسه با بادام، نیاز ضروری بدن به تأمین انرژی را با سرعت بیشتری فراهم می‌کند.
 ج - اگر واکنش ید جامد با گاز هیدروژن گرماگیر باشد، واکنش بخار ید با گاز هیدروژن نیز به یقین گرماگیر است.
 د - کلسترول، نوعی ترکیب آروماتیک به شمار رفته و گروه عاملی موجود در آن، در ماده سازنده ضدیخ یافت می‌شود.
 (۱) «الف» و «ب» (۲) «ب» و «ج» (۳) «ج» و «د» (۴) «الف» و «د»

پاسخ: گزینه ۱

(متوسط - مفهومی و حفظی - استاندارد ۶ - صفحه ۹۷ - ۱۱۰۲)

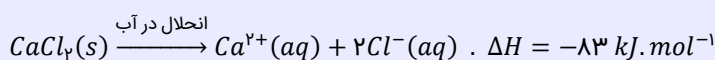
عبارتهای (الف) و (ب) درست هستند.

بررسی موارد:

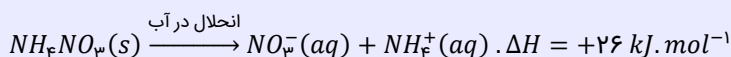
الف آمونیوم نیترات با فرمول شیمیایی NH_4NO_3 ، در تهیه بسته‌های سرمازا کاربرد دارد. این ترکیب، حاوی اتم نیتروژن بوده و با افزودن آن به خاک، نیتروژن مورد نیاز گیاهان را تأمین می‌کند. این ماده، همانند اوره و آمونیوم سولفات، نوعی کود شیمیایی است.

بسته‌های سرمازا و گرمازا

پس از ریختن ترکیب‌های یونی در آب، یون‌های سازنده این مواد از یکدیگر جدا شده و در میان مولکول‌های آب پخش می‌شوند. فرایند حل شدن برخی از انواع ترکیب‌های یونی در آب با آزاد شدن گرما و فرایند حل شدن برخی از انواع ترکیب‌های یونی در آب با جذب گرما همراه است. از فرایند انحلال این ترکیب‌های یونی در آب، برای تولید انواع بسته‌های سرمازا و گرمازا استفاده می‌شود. در این بسته‌ها مقداری از یک ترکیب یونی که در یک کپسول قرار داده شده، در مجاورت با مقداری آب قرار داده شده است. با فشار دادن کپسول موجود در این بسته‌ها، ترکیب یونی در آب حل شده و پس از مبادله انرژی با محیط، با توجه به نوع ترکیب یونی، سرما یا گرما تولید می‌شود. ورزشکاران برای درمان آسیب‌دیدگی‌های خود از این بسته‌ها استفاده می‌کنند. کلسیم کلرید بر اساس معادله زیر در آب حل می‌شود:



همان‌طور که مشخص است، این ترکیب طی یک فرایند گرماده در آب حل می‌شود. از این ترکیب یونی برای تولید بسته‌های گرمازا استفاده می‌شود. آمونیوم نیترات بر اساس معادله زیر در آب حل می‌شود:



همان‌طور که مشخص است، این ترکیب طی یک فرایند گرماگیر در آب حل می‌شود. از این ترکیب یونی برای تولید بسته‌های سرمازا استفاده می‌شود.

ب کربوهیدرات‌ها، چربی‌ها و پروتئین‌ها منبعی برای تأمین انرژی یاخته‌های بدن هستند. از میان این سه ماده، تنها کربوهیدرات‌ها به سرعت شکسته شده و به گلوکز تبدیل می‌شوند. گلوکز با انحلال در خون، خود را به یاخته‌ها می‌رساند و به هنگام اکسایش در یاخته، انرژی تولید می‌کند؛ پس برای تأمین نیاز فوری و ضروری بدن انسان به انرژی، بهتر است از موادی با درصد کربوهیدرات بیشتر استفاده کرد؛ اما برای تأمین انرژی فعالیت‌های فیزیکی در مدت طولانی، به علت ارزش سوختی بیشتر چربی‌ها، استفاده از موادی با درصد چربی بالاتر، مناسب‌تر است. برگ زردآلو، درصد کربوهیدرات بسیار بالایی داشته و انرژی را به صورت فوری برای بدن تأمین می‌کند.

ارزش غذایی مواد

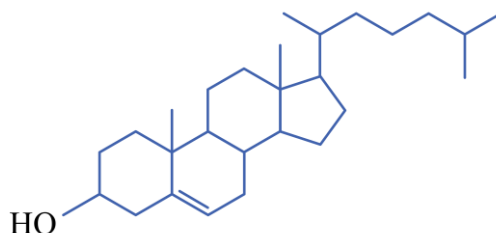
ارزش سوختی کربوهیدرات و پروتئین مساوی بوده و ارزش سوختی چربی بیش از دو برابر (به تقریب ۲/۲ برابر) ارزش سوختی این دو ماده است؛ بنابراین برای تأمین انرژی فعالیت‌های فیزیکی در مدت طولانی، به علت ارزش سوختی بیشتر چربی‌ها، استفاده از موادی با درصد چربی بالاتر، مناسب‌تر است. مقایسه ارزش سوختی مواد غذایی مطرح‌شده در کتاب درسی به صورت زیر است:

چربی < بادام < بادام زمینی < پنیر < شکلات < پروتئین = کربوهیدرات < نان < برگ زردآلو < تخم‌مرغ < شیر < سیب

همچنین با توجه به ارزش سوختی بالای چربی، مقدار اضافی انرژی دریافتی از مواد غذایی عمدتاً به شکل چربی در بدن ذخیره می‌شود.

ج مواد در حالت جامد، سطح انرژی پایین‌تری در مقایسه با حالت گازی دارند. اگر سطح انرژی واکنش‌دهنده یک واکنش گرماگیر افزایش پیدا کند، ممکن است آن واکنش به یک فرایند گرماده تبدیل شود. بر این اساس، واکنش ید جامد با گاز هیدروژن گرماگیر ($\Delta H > 0$) است، اما واکنش بخار ید با گاز هیدروژن گرماده ($\Delta H < 0$) است.

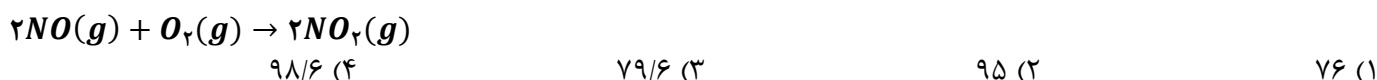
تصویر زیر، ساختار مولکول کلسترول را نشان می‌دهد:



کلسترول، یکی از مواد آلی موجود در غذاهای جانوری است که مقدار اضافی آن در دیواره رگ‌ها رسوب می‌کند. این فرایند، منجر به گرفتگی رگ‌ها شده و سکنه قلبی را به دنبال دارد. فرمول شیمیایی کلسترول به صورت $C_{27}H_{46}O$ بوده و در ساختار آن ۷۸ پیوند اشتراکی بین اتم‌ها قرار دارد. این ترکیب آلی دارای ۴ حلقه کربنی و یک پیوند دوگانه در ساختار خود است؛ پس در دسته ترکیب‌های آلی سیرنشده و حلقوی قرار می‌گیرد. با توجه به گروه عاملی هیدروکسیل موجود در کلسترول، این ترکیب یک الکل محسوب می‌شود. توجه داریم که در ساختار کلسترول، حلقه بنزنی وجود ندارد، پس این ماده آروماتیک نیست. در محلول ضدیخ، اتیلن گلیکول وجود دارد و این ماده نیز دارای گروه عاملی الکی است.



۷۸- یک ظرف، حاوی مقداری گاز اکسیژن و غلظت برابر از اکسیدهای نیتروژن است. اگر در طول مدت ۴۵ ثانیه، کل گاز اکسیژن با سرعت $4/8 \text{ g} \cdot \text{min}^{-1}$ در واکنش زیر مصرف شود، جرم فراورده واکنش در ظرف به $56/35$ گرم می‌رسد. مجموع جرم مواد موجود در ظرف در ابتدای واکنش چند گرم بوده است؟ ($O = 16, N = 14 : \text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$)



(سخت - محاسباتی - زمان‌بر) - صفحه ۸۹ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۳

با توجه به سرعت متوسط داده شده در صورت سؤال، ابتدا حساب می‌کنیم در طول مدت ۴۵ ثانیه، چند مول گاز اکسیژن مصرف می‌شود و بعد از این مدت، چند مول از فراورده واکنش (یعنی گاز NO_2) در ظرف واکنش وجود خواهد داشت. در رابطه با گاز اکسیژن مصرف شده، داریم:

$$? \text{ mol } O_2 = 45 \text{ s} \times \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} \times \frac{4/8 \text{ g } O_2}{1 \text{ min}} \times \frac{1 \text{ mol } O_2}{32 \text{ g } O_2} = 0/1125 \text{ mol}$$

در رابطه با مقدار گاز NO_2 نهایی موجود در ظرف واکنش، داریم:

$$? \text{ mol } NO_2 = 56/35 \text{ g } NO_2 \times \frac{1 \text{ mol } NO_2}{46 \text{ g } NO_2} = 1/225 \text{ mol}$$

در ابتدای واکنش، ظرف حاوی مقداری گاز اکسیژن و غلظت برابر از اکسیدهای نیتروژن بوده است. اگر فرض کنیم در ابتدای واکنش، شمار مول هر یک از اکسیدهای نیتروژن برابر با n مول و شمار مول اکسیژن نیز برابر با m مول باشد، خواهیم داشت:

معادله واکنش	$2NO(g)$	$+ O_2(g)$	$\rightarrow$	$2NO_2(g)$
شمار مول‌ها در ابتدای واکنش	n	m		n
تغییر مقدار مول	$-2x$	$-x$		$+2x$
شمار مول‌ها در انتهای واکنش	$n - 2x$	$m - x$		$n + 2x$

طی این فرایند، کل گاز اکسیژن موجود در ظرف واکنش مصرف شده است، پس داریم:

$$m - x = 0 \Rightarrow m = x = 0/1125 \text{ mol}$$

پس می‌توان گفت مقدار x برابر با $0/1125 \text{ mol}$ است و بر این اساس، شمار مول NO_2 در انتهای واکنش به $1/225 \text{ mol}$ می‌رسد. بنابراین مقدار n برابر خواهد بود با:

$$n + 2x = 1/225 \Rightarrow n = 1/225 - (2 \times 0/1125) = 1 \text{ mol}$$

بنابراین در ابتدای واکنش، یک مول از هر یک از اکسیدهای نیتروژن در ظرف واکنش وجود داشته است. در رابطه با این مواد، داریم:

معادله واکنش	$2NO(g) + O_2(g) \rightarrow 2NO_2(g)$
شمار مول‌ها در ابتدای واکنش	۱ ۰/۱۱۲۵ ۱

بر این اساس، داریم:

جرم اولیه اکسیدهای نیتروژن + جرم اکسیژن = مجموع جرم مواد موجود در ظرف

$$\left(0.1125 \text{ mol } O_2 \times \frac{32 \text{ g } O_2}{1 \text{ mol } O_2}\right) + \left(\left(1 \text{ mol } NO_2 \times \frac{46 \text{ g } NO_2}{1 \text{ mol } NO_2}\right) + \left(1 \text{ mol } NO \times \frac{30 \text{ g } NO}{1 \text{ mol } NO}\right)\right) = 79.6 \text{ g}$$



۷۹- تغییر غلظت گاز NO_2 نسبت به زمان در آزمایش تجزیه N_2O_5 در یک ظرف ۲ لیتری، مطابق داده‌های زیر به دست آمده است:

$t(s)$	۰	۵	۱۰	۱۵	۲۰	۲۵
$[NO_2] (mol.L^{-1})$	۰	۰/۲۴	۰/۴۴	۰/۶۰	۰/۷۲	۰/۸۰

نسبت سرعت متوسط تجزیه N_2O_5 در پنج ثانیه پنجم واکنش به سرعت متوسط واکنش در ۱۰ ثانیه ابتدایی واکنش، به تقریب



کدام است؟

۰/۷۲ (۴)

۰/۵۴ (۳)

۰/۲۷ (۲)

۰/۱۴ (۱)

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - صفحه ۹۳ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۴

پنج ثانیه پنجم واکنش، معادل با بازه بین ثانیه ۲۰ تا ۲۵ است. در طول این بازه، غلظت نیتروژن دی‌اکسید موجود در ظرف از ۰/۷۲ مولار به ۰/۸۰ مولار رسیده است. سرعت متوسط تجزیه N_2O_5 در پنج ثانیه پنجم واکنش برابر است با:

$$\text{سرعت متوسط تجزیه } N_2O_5 \text{ در پنج ثانیه پنجم} = \bar{R}_{N_2O_5} = \frac{1}{2} \bar{R}_{NO_2} = \frac{1}{2} \times \frac{\Delta[NO_2]}{\Delta t} = \frac{1}{2} \left(\frac{0.80 - 0.72}{25 - 20} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{0.08}{5} \right) = 0.008 \text{ mol.L}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$$

از طرفی سرعت متوسط واکنش در ۱۰ ثانیه ابتدایی واکنش برابر است با:

$$\bar{R}_{\text{واکنش}} = \frac{1}{4} \bar{R}_{NO_2} = \frac{1}{4} \left(\frac{0.44 - 0}{10 - 0} \right) = 0.11 \text{ mol.L}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$$

بنابراین نسبت خواسته شده برابر خواهد بود با:

$$\frac{0.008}{0.11} \approx 0.072$$



۸۰- کدام یک از عبارتهای داده شده، نادرست است؟

- (۱) پاشیدن و پخش کردن گرد آهن بر روی شعله آتش، سبب سوختن این عنصر فلزی می‌شود.
- (۲) در واکنش کلسیم کربنات با $HCl(aq)$ ، یک گاز قطبی تولید شده و سرعت واکنش به مرور کاهش می‌یابد.
- (۳) واکنش زنگ زدن آهن به کندی انجام شده و فراورده حاصل از آن، همانند یک نمونه گوگرد، ترد و شکننده است.
- (۴) در واکنش تجزیه مقداری آب اکسیژنه، با افزودن محلول پتاسیم دیدید، سرعت تولید اکسیژن به شدت افزایش می‌یابد.

(آسان - مفهومی و حفظی - سریع) - صفحه ۸۷ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۲

معادله واکنش انجام شده به صورت زیر است:



کلسیم کربنات مصرف شده در این واکنش، یک ترکیب نامحلول در آب بوده و در کف ظرف قرار می‌گیرد. این ترکیب به تدریج با محلول هیدروکلریک اسید واکنش داده و گاز کربن دی‌اکسید را تولید می‌کند. کربن دی‌اکسید تولید شده، یک ماده ناطبی بوده و از ظرف واکنش خارج شده و موجب کاهش جرم محتویات این ظرف می‌شود. طی این فرایند، غلظت محلول هیدروکلریک اسید نیز کاهش یافته و در نتیجه آن، pH محلول موجود در ظرف نیز افزایش پیدا می‌کند. با کاهش غلظت هیدروکلریک اسید، سرعت انجام شدن این واکنش کاهش پیدا می‌کند.

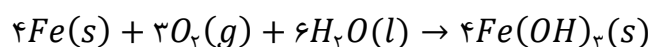
بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) سطح تماس مواد، یکی از مهم‌ترین عوامل مؤثر بر سرعت واکنش‌ها است. شعله آتش، گرد آهن موجود در کپسول چینی را داغ و سرخ می‌کند؛ در حالی که پاشیدن و پخش کردن گرد آهن بر روی شعله، باعث افزایش سطح تماس فلز آهن با گاز اکسیژن شده و سبب سوختن آن می‌شود.

۲) سطح تماس واکنش‌دهنده‌ها

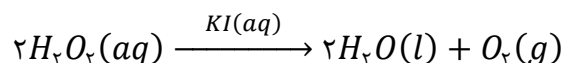
با افزایش غلظت واکنش‌دهنده‌های شرکت‌کننده در یک واکنش شیمیایی یا افزایش میزان سطح تماس میان آن‌ها، تعداد برخوردهای میان ذرات سازنده این مواد افزایش یافته و به دنبال آن، واکنش مورد نظر با سرعت بیشتری انجام می‌شود. بر این اساس، می‌توان گفت سرعت انجام شدن واکنش‌های شیمیایی با غلظت مواد شرکت‌کننده در آن‌ها و یا سطح تماس میان واکنش‌دهنده‌ها رابطه مستقیم دارد. برای مثال، قاووت گردی مغزی است که بر اثر پودر کردن مغز آفتاب‌گردان، پسته و ... تولید می‌شود. با توجه به سطح تماس زیاد ذرات سازنده این ماده غذایی با اکسیژن موجود در هوا، یک نمونه از این ماده در مقایسه با مغز آفتاب‌گردان و مغز پسته با سرعت بیشتری با اکسیژن هوا واکنش داده و به همین خاطر، زودتر فاسد می‌شود.

۳) معادله واکنش زنگ زدن آهن به صورت زیر است:



این واکنش در حضور رطوبت هوا به کندی انجام شده و فراورده حاصل از آن، زنگ آهن است. زنگ آهن ساختاری ترد و متخلخل داشته و به مرور زمان، فرو می‌ریزد. یکی از راه‌های جلوگیری از زنگ زدن آهن، ایجاد یک لایه پوشش محافظ بر روی سطح آهن است. گوگرد نیز یک عنصر نافلزی است که شکننده بوده و با زدن ضربه، خرد می‌شود.

۴) نام تجاری هیدروژن پراکسید، آب اکسیژنه است. واکنش تجزیه این ماده گرماده بوده ($\Delta H < 0$) و به صورت زیر انجام می‌شود:



محلول آب اکسیژنه در دمای اتاق به کندی تجزیه شده و گاز اکسیژن تولید می‌کند، در حالی که افزودن دو قطره از محلول پتاسیم یدید (I^-) به عنوان کاتالیزگر، سرعت واکنش را به طور چشمگیری افزایش می‌دهد. در واقع کاتالیزگر این واکنش یون یدید (I^-) است.



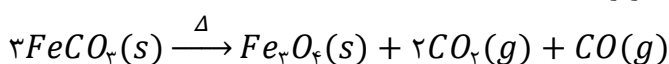
۸۱- کدام مورد، پس از موازنه معادله واکنش گازی $FeCO_3(s) \xrightarrow{\Delta} Fe_2O_3(s) + CO_2(g) + CO(g)$ ، در رابطه با این واکنش درست است؟ (حجم ظرف واکنش برابر با یک لیتر است.)

$$\begin{aligned} \bar{R}_{\text{واکنش}} &= -\frac{\Delta n(FeCO_3)}{\Delta t} = \frac{\Delta[CO_2]}{\Delta t} \quad (2) & \bar{R}_{\text{واکنش}} &= \frac{\Delta[CO]}{4 \times \Delta t} = 0.5 \frac{\Delta[CO_2]}{\Delta t} \quad (1) \\ &= -\frac{\Delta[CO]}{\Delta t} = \frac{\Delta[CO_2]}{2 \times \Delta t} \quad (4) & &= -\frac{\Delta n(Fe_2O_3)}{\Delta t} = \frac{\Delta[CO_2]}{\Delta t} \quad (3) \end{aligned}$$

(متوسط - محاسباتی - صفحه ۹۲ - ۱۱۰۲)

پاسخ: گزینه ۲

در گام اول واکنش را موازنه می‌کنیم. معادله موازنه شده این واکنش به صورت زیر است:



مقدار مصرف و تولید شده از هر ماده در یک واکنش، متناسب با ضریب استوکیومتری آن ماده در معادله واکنش است. با توجه به ضرایب مواد شرکت‌کننده در واکنش، روابط زیر برقرار است:

$$\begin{aligned} \bar{R}_{\text{واکنش}} &= -\frac{\Delta n_{FeCO_3}}{3 \times \Delta t} = \frac{\Delta n_{Fe_2O_3}}{\Delta t} = \frac{\Delta n_{CO_2}}{2 \times \Delta t} = \frac{\Delta n_{CO}}{\Delta t} \\ \bar{R}_{\text{واکنش}} &= \frac{|\Delta n_{FeCO_3}|}{3 \times \Delta t} = \frac{|\Delta n_{Fe_2O_3}|}{\Delta t} = \frac{|\Delta n_{CO_2}|}{2 \times \Delta t} = \frac{|\Delta n_{CO}|}{\Delta t} \end{aligned}$$

بر این اساس، داریم:

$$\bar{R}_{\text{واکنش}} = \frac{\bar{R}_{FeCO_3}}{3} = \frac{\bar{R}_{Fe_2O_3}}{1} = \frac{\bar{R}_{CO_2}}{2} = \frac{\bar{R}_{CO}}{1}$$

چون حجم ظرف یک لیتر است، در رابطه بالا به جای تغییر مول مواد، می‌توان تغییر غلظت مواد را جایگزین کرد.

توجه داریم که این روش تنها برای مواد گازی و محلول در آب کاربرد دارد.

۸۲- کدام واکنش زیر در مقایسه با سایر واکنش‌های داده شده با سرعت بیشتری انجام می‌شود؟

- (۱) واکنش پودر فلز سدیم با بخار برم در دمای 20°C (۲) واکنش پودر فلز سدیم با بخار برم در دمای 80°C
(۳) واکنش پودر فلز پتاسیم با گاز کلر در دمای 20°C (۴) واکنش پودر فلز پتاسیم با گاز کلر در دمای 80°C

پاسخ: گزینه ۴

(آسان - مفهومی - سریع) - صفحه ۸۳ - ۱۱۰۲

سرعت واکنش فلزهای مختلف با عناصر نافلزی، به جنس فلز، جنس نافلز، غلظت مواد، سطح تماس مواد و دمای محیط واکنش بستگی دارد. در این رابطه، داریم:



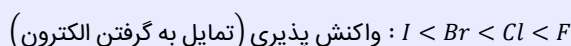
معادله واکنش فلزهای سدیم و پتاسیم با مواد داده شده به صورت زیر است:



چون پتاسیم از سدیم واکنش پذیرتر بوده و کلر نیز در مقایسه با برم واکنش پذیرتر است، پس واکنش دوم در مقایسه با واکنش اول با سرعت بیشتری انجام می‌شود. اگر دمای محیط افزایش پیدا کند، این واکنش نیز با سرعت بیشتری انجام می‌شود.

هالوژن‌ها

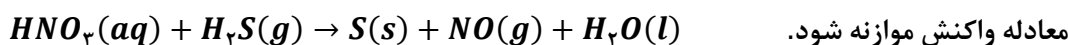
در گروه ۱۷ جدول دوره‌ای، عناصر فلوئور (F)، کلر (Cl)، برم (Br) و ید (I) قرار دارند. این عناصر به هالوژن‌ها معروف هستند. با افزایش عدد اتمی هالوژن‌ها، شعاع اتمی این عناصر افزایش یافته و به دنبال آن، واکنش‌پذیری این عناصر نافلزی نیز کمتر می‌شود. ترتیب واکنش‌پذیری عناصر موجود در گروه هفدهم به صورت زیر است:



آرایش الکترونی هالوژن‌ها به زیرلایه ns^2np^5 ختم می‌شود. اتم‌های سازنده این عناصر با گرفتن یک الکترون به آرایش الکترونی گاز نجیب بعد از خود رسیده و یون پایدار X^- را تولید می‌کنند. از میان هالوژن‌ها، فلوئور دارای بیشترین خاصیت نافلزی بوده و نسبت به سایر عناصر، الکترون‌ها را با قدرت بیشتری به سمت خود جذب می‌کند. هالوژن‌ها در حالت آزاد به شکل مولکول‌های دو اتمی دیده می‌شوند. فلوئور (F_2) و کلر (Cl_2) در دمای اتاق به حالت گاز هستند در حالی که برم (Br_2) و ید (I_2) در دمای اتاق به ترتیب به حالت مایع و جامد یافت می‌شوند.



۸۳- با توجه به معادله واکنش زیر، اگر در مدت 0.5 دقیقه، $11/2$ لیتر گاز هیدروژن سولفید در شرایط استاندارد مصرف شود، در مدت چند ثانیه 0.8 مول گاز نیتروژن مونوکسید تولید می‌شود؟ (سرعت واکنش، ثابت در نظر گرفته شود).



معادله واکنش موازنه شود. (۱) ۳۶ (۲) ۷۲ (۳) ۱۸ (۴) ۵۴

پاسخ: گزینه ۲

(آسان - محاسباتی - سریع) - صفحه ۸۷ - ۱۱۰۲

برای حل این سؤال، به ترتیب مراحل زیر را طی می‌کنیم:

گام اول

معادله واکنش داده شده را موازنه می‌کنیم.

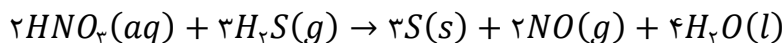
گام دوم

محاسبه حجم گاز هیدروژن سولفید مصرف شده به ازای تولید 0.8 مول نیتروژن مونوکسید

گام سوم

به دست آوردن مدت زمان انجام واکنش برای تولید فراورده مورد نظر

در قدم اول معادله موازنه شده واکنش را می نویسیم:



برای محاسبه حجم گاز هیدروژن سولفید در شرایط استاندارد داریم:

$$? L H_2S = 0.8 \text{ mol NO} \times \frac{3 \text{ mol } H_2S}{2 \text{ mol NO}} \times \frac{22.4 \text{ L } H_2S}{1 \text{ mol } H_2S} = 26.88 \text{ L}$$

اگر در مدت ۰/۵ دقیقه ۱۱/۲ لیتر گاز هیدروژن سولفید مصرف شده باشد، زمان مورد نیاز برای مصرف ۲۶/۸۸ لیتر از این گاز به این صورت به دست می آید:

$$? s = 26.88 \text{ L } H_2S \times \frac{0.5 \text{ min}}{11.2 \text{ L } H_2S} \times \frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}} = 72 \text{ s}$$

بخش آخر محاسبات خود را با استفاده از تناسب زیر هم می توانستیم انجام بدهیم:

$$\frac{11.2 \text{ L } H_2S}{30 \text{ s}} = \frac{26.88 \text{ L } H_2S}{x} \implies x = 72 \text{ s}$$



۸۴- سرعت متوسط واکنش $4KNO_3(s) \rightarrow K_2N(s) + KN_3(s) + 6O_2(g)$ برابر $0.005 \text{ mol} \cdot s^{-1}$ است. گاز اکسیژنی که در طول مدت ۷/۵ دقیقه در این واکنش تولید می شود، برای سوزاندن کامل چند مول از دومین عضو خانواده آلکن ها کافی بوده و در طول این مدت، چند مول پتاسیم نیتريد تولید می شود؟

۲/۲۵ - ۳ (۴)

۱/۵ - ۲/۲۵ (۳)

۴/۵ - ۶ (۲)

۳ - ۴/۵ (۱)

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - صفحه ۹۲ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۴

سرعت هر واکنش، از تقسیم سرعت متوسط مصرف یا تولید هر ماده شرکت کننده در آن بر ضریب استوکیومتری آن ماده به دست می آید. به عنوان مثال، در واکنش شیمیایی $2A(g) + 3B(g) \rightarrow C(g) + 2D(g)$ برای محاسبه سرعت متوسط واکنش در بازه زمانی Δt به روش زیر عمل می کنیم:

$$\bar{R}_{\text{واکنش}} = \frac{|\Delta n_A|}{2 \times \Delta t} = \frac{|\Delta n_B|}{3 \times \Delta t} = \frac{|\Delta n_C|}{\Delta t} = \frac{|\Delta n_D|}{2 \times \Delta t} \implies \bar{R}_{\text{واکنش}} = \frac{\bar{R}_A}{2} = \frac{\bar{R}_B}{3} = \frac{\bar{R}_C}{1} = \frac{\bar{R}_D}{2}$$

با توجه به توضیحات داده شده، در واکنش $4KNO_3(s) \rightarrow K_2N(s) + KN_3(s) + 6O_2(g)$ ، سرعت متوسط تولید گاز اکسیژن ۶ برابر سرعت متوسط واکنش خواهد بود؛ پس می توان گفت در هر ثانیه ۰/۰۳ مول گاز اکسیژن تولید می شود. بر این اساس، مقدار گاز اکسیژن تولید شده در طول مدت زمان ۷/۵ دقیقه را محاسبه می کنیم.

$$? \text{ mol } O_2 = 7.5 \text{ min} \times \frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}} \times \frac{0.03 \text{ mol } O_2}{1 \text{ s}} = 13.5 \text{ mol}$$

معادله واکنش سوختن گاز پروپن (دومین عضو خانواده آلکن ها) به صورت $2C_3H_6(g) + 9O_2(g) \rightarrow 6CO_2(g) + 6H_2O(g)$ است. بر این اساس، شمار مول های گاز پروپن مصرف شده را محاسبه می کنیم.

$$? \text{ mol } C_3H_6 = 13.5 \text{ mol } O_2 \times \frac{2 \text{ mol } C_3H_6}{9 \text{ mol } O_2} = 3 \text{ mol}$$

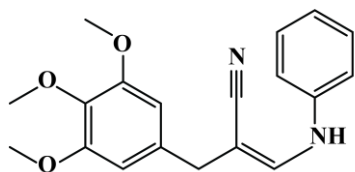
در طول بازه زمانی مورد نظر، ۱۳/۵ مول اکسیژن تولید شده است. بر این اساس، داریم:

$$? \text{ mol } K_2N = 13.5 \text{ mol } O_2 \times \frac{1 \text{ mol } K_2N}{6 \text{ mol } O_2} = 2.25 \text{ mol}$$

توجه داریم که دو عدد داده شده در هیچ کدام از گزینه ها مشابه یکدیگر نیست و تنها با حل کردن یک بخش از این سؤال، می توانستیم به جواب درست برسیم.



۸۵- شمار اتم‌های هیدروژن در ساختار ترکیب زیر، چند برابر شمار جفت الکترون‌های ناپیوندی در ساختار بنزوئیک اسید است؟



- (۱) ۵
(۲) ۵/۵
(۳) ۴
(۴) ۴/۵

پاسخ: گزینه ۱

(آسان - مفهومی - استاندارد) - صفحه ۸۴ - ۱۱۰۲

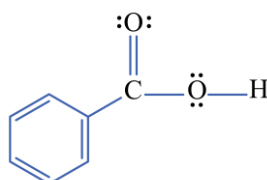
ترکیب مورد نظر، در ساختار مولکولی خود دارای ۱۹ اتم کربن، ۲ اتم نیتروژن، ۳ اتم اکسیژن، ۲ حلقه کربنی، ۷ پیوند اشتراکی دوگانه و یک پیوند سه‌گانه است. برای شمارش تعداد اتم‌های هیدروژن در ساختار ترکیب‌های آلی می‌توانیم از فرمول زیر استفاده کنیم:

تعداد هالوژن - تعداد اتم $N + (\text{تعداد پیوند سه‌گانه}) \times 4 - (\text{تعداد حلقه} + \text{تعداد پیوند دوگانه}) \times 2 = \text{تعداد اتم هیدروژن}$

برای مثال در ترکیب داده شده شمار اتم‌های هیدروژن برابر است با:

$$20 = 2 + (1) \times 4 - (7 + 2) \times 2 - (2 \times 19 + 2)$$

ساختار بنزوئیک اسید به صورت زیر است:



در هر مولکول بنزوئیک اسید، ۲ اتم اکسیژن وجود داشته و هر اتم اکسیژن نیز دارای ۲ جفت الکترون ناپیوندی است؛ پس مولکول بنزوئیک اسید در کل دارای ۴ جفت الکترون ناپیوندی است. تعداد اتم‌های هیدروژن در ساختار ماده مورد نظر، ۵ برابر شمار جفت الکترون ناپیوندی در بنزوئیک اسید است.

بنزوئیک اسید

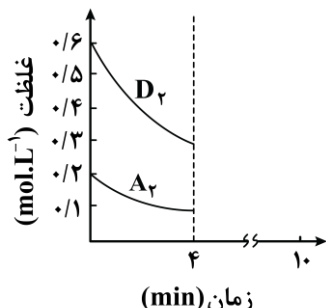
افزودنی‌ها موادی هستند که سبب افزایش زمان ماندگاری و افزایش کیفیت مواد غذایی می‌شوند. نگهدارنده‌ها گروهی از افزودنی‌ها هستند که سرعت واکنش‌های شیمیایی که منجر به فساد مواد غذایی می‌شوند را کاهش می‌دهند. بنزوئیک اسید ($C_7H_6O_2$)، عضوی از خانواده کربوکسیلیک اسیدها است که در تمشک و توت‌فرنگی وجود داشته و از آن به عنوان نگهدارنده در صنایع غذایی استفاده می‌شود. این ماده به صورت طبیعی وجود داشته و ساده‌ترین اسید آروماتیک نیز به شمار می‌رود.



۸۶- مطابق نمودار مقابل، مقداری از گازهای A_2 و D_2 را وارد یک ظرف ۲ لیتری می‌کنیم تا با یکدیگر واکنش بدهند. فرمول شیمیایی

فراورده تولید شده در این واکنش، به چه صورت بوده و پس از ۴ دقیقه، مجموعاً چند مول ماده گازی در ظرف واکنش وجود دارد؟

(واکنش میان گازها، به صورت یک طرفه انجام می‌شود.)



- (۱) $AD_3 - 1/2$
(۲) $AD_3 - 0/8$
(۳) $AD_2 - 1/2$
(۴) $AD_2 - 0/8$

پاسخ: گزینه ۱

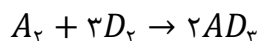
(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - صفحه ۹۰ - ۱۱۰۲

این سؤال با ایده گرفتن از یکی از سؤال‌های کنکور سراسری ۱۴۰۴ طراحی شده است. برای حل آن در گام اول، تغییر غلظت واکنش‌دهنده‌ها را با استفاده از نمودار به دست می‌آوریم. در ۴ دقیقه اول واکنش، ۰/۳ مول D_2 و ۰/۱ مول A_2 مصرف شده است. بنابراین ضریب ماده D_2 در معادله واکنش، ۳ برابر ضریب ماده A_2 است.

تصویر زیر، نمایی از فرایند انجام شده را نشان می‌دهد:



بر این اساس، در فراورده واکنش شمار اتم‌های D معادل با ۳ برابر شمار اتم‌های A است. بر این اساس، گزینه‌های ۳ و ۴ رد می‌شوند. با توجه به فرمول شیمیایی مواد شرکت‌کننده در واکنش، معادله موازنه شده واکنش را می‌نویسیم:



حجم این ظرف ۲ لیتر است، پس اگر غلظت ماده A_p به اندازه ۰/۱ مول بر لیتر کاهش یافته باشد، ۰/۲ مول A_p مصرف شده است. در ۴ دقیقه اول واکنش، ۰/۲ مول A_p مصرف شده است، با توجه به معادله واکنش مقدار فراورده تولیدشده را محاسبه می‌کنیم:

$$? \text{ mol } AD_p = 0.2 \text{ mol } A_p \times \frac{2 \text{ mol } AD_p}{1 \text{ mol } A_p} = 0.4 \text{ mol } AD_p$$

مول نهایی مواد واکنش‌دهنده نیز با توجه به حجم ۲ لیتری ظرف واکنش، به این صورت محاسبه می‌شود:

$$? \text{ mol } A_p = 2 \text{ L محلول} \times \frac{0.1 \text{ mol } A_p}{1 \text{ L محلول}} = 0.2 \text{ mol } A_p$$

$$? \text{ mol } D_p = 2 \text{ L محلول} \times \frac{0.3 \text{ mol } D_p}{1 \text{ L محلول}} = 0.6 \text{ mol } D_p$$

با توجه به نمودار و محاسبات استوکیومتری، مقدار مواد A_p ، D_p و AD_p به ترتیب برابر با ۰/۲، ۰/۶ و ۰/۴ مول است. مجموع مول این مواد برابر با ۱/۲ می‌شود.



۸۷- کدام یک از عبارات‌های داده شده، درست است؟

- ۱) با توجه به چهره آشکار ردپای غذا، حدود ۷۰٪ غذای فراهم شده، به مصرف رسیده و باقی آن به زباله تبدیل می‌شود.
- ۲) سرعت مصرف یک ماده در مقیاس $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ ، به یقین کمتر از سرعت مصرف آن در مقیاس $\text{mol} \cdot \text{s}^{-1}$ است.
- ۳) میزان تولید گاز گلخانه‌ای در ردپای غذا، کمتر از نصف مقدار گاز CO_2 حاصل از سوختن سوخت‌های فسیلی است.
- ۴) در هر واکنش، کمترین قدرمطلق شیب نمودار مول-زمان مربوط به ماده‌ای با ضریب استوکیومتری یک است.

آسان - مفهومی و حفظی - سریع (صفحه ۹۴ - ۱۱۰۲)

پاسخ: گزینه ۱

ردپای ایجاد شده در صنایع غذایی، دو چهره پنهان و آشکار دارد که به شرح زیر هستند:

▶ چهره آشکار ردپای غذا: فقط ۷۰٪ از کل غذای تولید شده، به مصرف رسیده و سالانه حدود ۳۰٪ از منابع غذایی که در جهان فراهم می‌شوند به مصرف نمی‌رسند و قبل از مصرف، به زباله تبدیل شده و یا از بین می‌رود. این در حالی است که به ازای هر هفت نفر در جهان، یک نفر گرسنه است.

▶ چهره پنهان ردپای غذا: یکی از چهره‌های پنهان این ردپا، شامل همه منابعی می‌شود که در تهیه غذا از آغاز تا سر سفره سهم داشته‌اند. مدیریت منابع، نیروی انسانی برای تولید و تأمین مواد اولیه و انرژی، فراوری، ابزار و دستگاه‌های مورد نیاز، بسته‌بندی، حمل و نقل، آب و انرژی مصرفی و زمین‌های بایر از جمله این منابع هستند. چهره پنهان دیگر این ردپا، تولید گازهای گلخانه‌ای به‌ویژه گاز کربن دی‌اکسید است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۲) برای اینکه سرعت مصرف یک ماده در مقیاس $\text{mol} \cdot \text{s}^{-1}$ را به سرعت مصرف آن در مقیاس $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ تبدیل کنیم، کافی است عدد سرعت را به حجم ظرف تقسیم کنیم. در این رابطه، داریم:

$$\text{سرعت در مقیاس } \text{mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{s}^{-1} \xrightarrow{\text{حجم ظرف} \div} \text{سرعت در مقیاس } \text{mol} \cdot \text{s}^{-1}$$

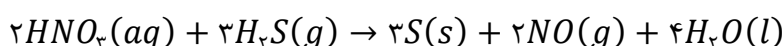
اگر حجم ظرف واکنش بیشتر از یک لیتر باشد، طی این فرایند، عدد سرعت کاهش پیدا می‌کند اما اگر حجم ظرف واکنش کمتر از یک لیتر باشد، قطعاً عدد سرعت افزایش پیدا می‌کند.

یکی از چهره‌های پنهان ردپای غذا، تولید گازهای گلخانه‌ای به ویژه کربن دی‌اکسید است، آن چنان که سهم تولید این گاز در ردپای غذا به مراتب بیش از سوختن سوخت‌های فسیلی در خودروها، کارخانه‌ها و ... است.

الگوی مصرف غذا

با افزایش جمعیت جهان، رشد اقتصادی و ارتقای سطح رفاه جوامع، میزان تقاضا برای غذا نیز پیوسته افزایش می‌یابد. با افزایش تقاضا برای غذا، منابع آب، انرژی، مواد اولیه و زمین بیشتری مورد نیاز قرار می‌گیرند. با ادامه این روند، ردپای غذا روی محیط زیست سنگین‌تر شده و مساحت کل مورد نیاز برای تأمین اقلام ضروری زندگی بیشتر خواهد شد. اگر روند مصرف غذا به همین شکل ادامه پیدا کند، مساحت زمین‌های موجود بر روی کره زمین در آینده جوابگوی تأمین غذای انسان‌ها نخواهد بود؛ پس باید به دنبال الگوی مصرف پایدار باشیم تا بتوانیم از پس تأمین نیازهای انسان بربیاییم.

در یک واکنش، ممکن است هیچ ماده‌ای با ضریب استوکیومتری یک وجود نداشته باشد. در واقع، می‌توان گفت در یک واکنش، کمترین قدرمطلق شیب نمودار مول-زمان مربوط به ماده‌ای با کوچک‌ترین ضریب استوکیومتری است. برای مثال، واکنش زیر را در نظر بگیرید:



کمترین ضریب استوکیومتری در این معادله، برابر با ۲ است، پس موادی با این ضریب دارای کمترین سرعت مصرف یا تولید هستند.



۸۸- کدام موارد از عبارت‌های زیر درست هستند؟

الف - کاغذ، با استفاده از مولکول‌های مالتوز ساخته شده و با تجزیه این ماده در طول زمان، کاغذ زرد و پوسیده می‌شود.

ب - به کمک مواد نگهدارنده، شیب نمودار مول-زمان برای فراورده‌های حاصل از فساد مواد غذایی افزایش می‌یابد.

ج - رادیکال، گونه‌ای فعال و ناپایدار بوده و محتوای اتم‌هایی است که از قاعده هشت تایی پیروی نمی‌کنند.

د - لیکوپن، یک هیدروکربن غیرحلقوی است که از انجام واکنش‌های نامطلوب در بدن جلوگیری می‌کند.

(۱) «الف» و «ب» (۲) «ب» و «ج» (۳) «ج» و «د» (۴) «الف» و «د»

(متوسط - مفهومی و حفظی - استاندارد ۶ - صفحه ۹۱ - ۱۱۰۲)

پاسخ: گزینه ۳

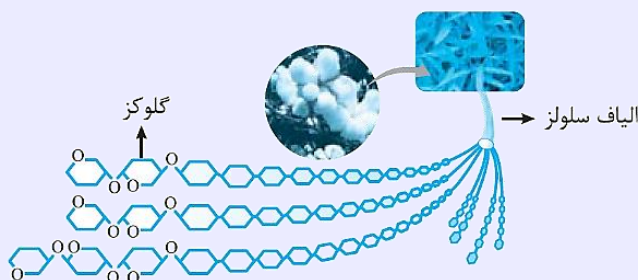
عبارت‌های (ج) و (د) درست هستند.

بررسی موارد:

الف) ورقه‌های کاغذی با استفاده از الیاف سلولزی (پلیمری از مولکول‌های گلوکز) ساخته شده‌اند. کتاب‌های قدیمی در گذر زمان زرد و پوسیده می‌شوند و این پدیده نشان می‌دهد که واکنش تجزیه سلولز سازنده کاغذ، بسیار کند رخ می‌دهد.

الیاف سلولزی

پنبه و پشم انواعی از الیاف طبیعی هستند که در طبیعت یافت می‌شوند. آمارها نشان می‌دهد که حدود نیمی از لباس‌های تولیدی در جهان از پنبه تهیه می‌شود. از پنبه افزون بر تولید پوشاک، در تولید رویه مبلی، پرده، تور ماهیگیری و گاز استریل نیز استفاده می‌شود. پنبه از الیاف سلولز تشکیل شده است و هر رشته سلولز نیز زنجیر بسیار بلندی است که از اتصال شمار بسیار زیادی مولکول گلوکز به یکدیگر ساخته می‌شود. تصویر زیر، نمایی از الیاف سلولزی موجود در پنبه را نشان می‌دهد:

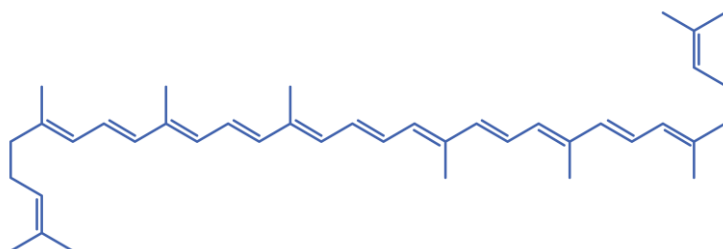


همان‌طور که مشخص است، واحد تکرارشونده این پلیمر توسط گروه عاملی اتری به واحد کناری متصل شده است.

افزودنی‌ها موادی هستند که سبب افزایش زمان ماندگاری و افزایش کیفیت مواد غذایی می‌شوند. نگه‌دارنده‌ها گروهی از افزودنی‌ها هستند که سرعت واکنش‌های شیمیایی که منجر به فساد مواد غذایی می‌شوند را کاهش می‌دهند. با کاهش سرعت متوسط واکنش‌های فاسدکننده غذاها، شیب نمودار مول-زمان برای فرآورده‌های حاصل از این واکنش‌ها کاهش می‌یابد.

رادیکال، گونه فعال و ناپایداری است. در واقع، رادیکال‌ها محتوی اتم‌هایی هستند که از قاعده هشت‌تایی (اوکت) پیروی نمی‌کنند. به‌عنوان مثال، مولکول‌های نیتروژن مونوکسید (NO) و نیتروژن دی‌اکسید (NO_2) از جمله مواد رادیکال بوده و اتم نیتروژن موجود در آن‌ها از قاعده هشت‌تایی پیروی نمی‌کند.

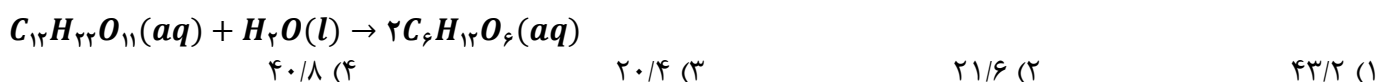
لیکوپن یک هیدروکربن سیرنشده است که در هندوانه و گوجه‌فرنگی وجود دارد و می‌تواند از انجام واکنش‌های نامطلوب توسط رادیکال‌ها جلوگیری کند. ساختار لیکوپن به‌صورت زیر است:



از آن‌جا که مولکول‌های لیکوپن فقط شامل اتم‌های کربن و هیدروژن می‌شوند، این ماده همانند آلکان‌ها، آلکن‌ها و آلکین‌ها در دسته هیدروکربن‌ها قرار می‌گیرد. فرمول شیمیایی لیکوپن به‌صورت $C_{11}H_{18}$ بوده و در ساختار آن مجموعاً ۱۰۸ پیوند اشتراکی بین اتم‌ها وجود دارد. با توجه به وجود ۱۳ پیوند دوگانه کربن-کربن در ساختار لیکوپن، این ماده یک هیدروکربن سیرنشده به حساب می‌آید.



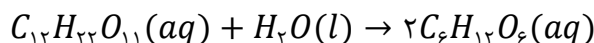
۸۹- محلول آبی از مالتوز با جرم ۳ کیلوگرم و غلظت 5700 ppm در اختیار داریم. اگر نیمی از مالتوز موجود در محلول در طول مدت ۲۵ ثانیه تجزیه شود، سرعت متوسط تولید گلوکز در طول این بازه زمانی چند گرم بر دقیقه می‌شود؟
($O = 16, C = 12, H = 1: g. mol^{-1}$)



(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - صفحه ۹۳ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۲

قند موجود در جوانه گندم، مالتوز بوده و فرمول شیمیایی آن به‌صورت $C_{12}H_{22}O_{11}$ است. این قند، در سمنو نیز وجود دارد، چراکه سمنو با استفاده از جوانه گندم تولید می‌شود. معادله واکنش شکستن مالتوز و تجزیه آن به مولکول‌های گلوکز به‌صورت زیر است:



نیمی از مالتوز موجود در محلول مصرف شده است. بر این اساس، جرم مالتوز مصرف شده را محاسبه می‌کنیم.

$$? \text{ g } C_{12}H_{22}O_{11} = 3 \text{ kg محلول} \times \frac{1000 \text{ g محلول}}{1 \text{ kg محلول}} \times \frac{5700 \text{ g } C_{12}H_{22}O_{11}}{10^6 \text{ g محلول}} \times \frac{1 \text{ g } C_{12}H_{22}O_{11}}{2 \text{ g } C_{12}H_{22}O_{11}} \\ = 8/55 \text{ g}$$

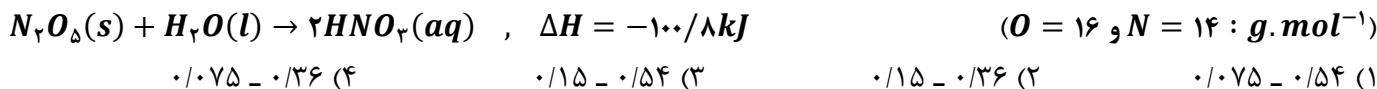
در قدم بعد، جرم گلوکز تولید شده را محاسبه می‌کنیم.

$$? \text{ g } C_6H_{12}O_6 = 8/55 \text{ g } C_{12}H_{22}O_{11} \times \frac{1 \text{ mol } C_{12}H_{22}O_{11}}{342 \text{ g } C_{12}H_{22}O_{11}} \times \frac{2 \text{ mol } C_6H_{12}O_6}{1 \text{ mol } C_{12}H_{22}O_{11}} \times \frac{180 \text{ g } C_6H_{12}O_6}{1 \text{ mol } C_6H_{12}O_6} = 9 \text{ g}$$

در قدم آخر، سرعت متوسط تولید گلوکز را محاسبه می‌کنیم.

$$\bar{R}_{C_6H_{12}O_6} = \frac{\text{تغییر جرم } C_6H_{12}O_6}{\Delta t} = \frac{9 \text{ g } C_6H_{12}O_6}{25 \text{ s} \times \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}}} = 21/6 \text{ g. min}^{-1}$$

۹۰- مقدار ۳۲۴ گرم N_2O_5 جامد، در طول چهار دقیقه و با سرعت ثابت در ۵۰ لیتر آب حل شده است. سرعت متوسط افزایش دمای آب، تقریباً برابر با چند درجه سلسیوس بر دقیقه بوده و بعد از گذشت ۱۵۰ ثانیه از ابتدای کار، غلظت مولی نیتریک اسید در محلول چقدر است؟ (از تغییر جرم محلول صرف نظر کرده و گرمای ویژه همه مواد را $4/2 J \cdot g^{-1} \cdot ^\circ C^{-1}$ در نظر بگیرید.)



(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - صفحه ۸۸ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۴

ابتدا مقدار انرژی گرمایی آزاد شده در این بازه زمانی را حساب می‌کنیم:

$$? J = 324 g N_2O_5 \times \frac{1 mol N_2O_5}{108 g N_2O_5} \times \frac{100/8 kJ}{1 mol N_2O_5} \times \frac{10^3 J}{1 kJ} = 302400 J$$

در قدم بعد، با توجه به اینکه گرمای واکنش، تنها صرف گرم شدن آب می‌شود؛ تغییر دمای آب موجود در مخزن را حساب می‌کنیم:

$$Q = mc\Delta\theta \rightarrow \Delta\theta = \frac{Q}{mc} = \frac{302400}{50000 \times 4/2} = 1/44 ^\circ C$$

بنابراین میانگین افزایش دما در هر دقیقه برابر خواهد بود با:

$$\text{میانگین افزایش دما} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{1/44}{4} = 0/36 ^\circ C/min$$

البته، توجه داریم که عدد به دست آمده کاملاً تقریبی است چراکه طی این فرایند، مقداری آب مصرف شده و مقداری اسید تولید می‌شود. در چنین شرایطی، جرم محلول کمی بیشتر از ۵۰۰۰۰ گرم خواهد بود. در نهایت، با توجه به اینکه از مصرف هر مول N_2O_5 ، مقدار دو مول نیتریک اسید در محلول مورد نظر تولید می‌شود، می‌توانیم بنویسیم:

$$? mol HNO_3 = 150 s \times \frac{1 min}{60 s} \times \frac{324 g N_2O_5}{4 min} \times \frac{1 mol N_2O_5}{108 g N_2O_5} \times \frac{2 mol HNO_3}{1 mol N_2O_5} = 3/75 mol$$

در قدم آخر، غلظت مولی نیتریک اسید را در محلول مورد نظر محاسبه می‌کنیم:

$$[HNO_3] = \frac{\text{مول } HNO_3}{\text{لیتر محلول}} = \frac{3/75 mol HNO_3}{50 L} = 0/075 mol \cdot L^{-1}$$



بسته شبیه ساز کنکور

مارکوپولو منتشر شد!

✓ ۱۷ دوره کنکور سراسری از ۹۸ تا ۱۴۰۴؛ آپدیت شده و منطبق با

تفصیلات کنکور ۱۴۰۵

✓ پاسخنامه به سبک ماز؛ شامل بررسی دقیق گزینه‌ها، نکته‌ها،

جداول و گادرهای جمع‌بندی

✓ قابلیت تخمین رتبه و تراز کنکور سراسری؛ براساس نمرات

نهایی و درصدهای کنکور

✓ آزمون پیش‌بینی کنکور سراسری ۱۴۰۵ از نگاه طراحان ماز

✓ تحلیل پاسخنامه ویدیویی سؤالات کنکور توسط اساتید ماز

✓ بسته جامع آمادگی امتحانات نهایی خرداد ۱۴۰۵

• بانک کنکور به تفکیک درس به درس و مبحث به مبحث مناسب

دوران جمع‌بندی

• بانک کامل سؤالات شیمی و فیزیک کنکور تجربی مشترک با

رشته ریاضی



ثبت سفارش
از سایت مازمارکت
mazemarket.ir



اسکن کن!