گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی

آزمون ماز | پایهٔ دوازدهم



تابستان ۱۴۰۵

دفترچه پاسخ

جمعه ۱۳ شهریورماه ۱۴۰۵

مرور و تثبیت مباحث پایه

ویژهٔ کنکـــوری‌های ۱۴۰۶

- پاسخنامه سریع؛ برای بررسی فوری بعد از آزمون
- تحلیل تمام گزینه‌های هر سؤال؛ برای بررسی سؤالاتی که پاسخ نادرست داده‌اید
- نکات و درسنامه‌های آموزشی؛ برای یادگیری کامل مباحث هر سؤال
- مشاورهٔ تستی؛ برای یادگیری انواع روش‌های حل تست
- استراتژی آزمون؛ برای یادگیری مدیریت زمان و مدیریت جلسهٔ آزمون

حق چاپ و تکثیر سؤالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز «گروه ماز» مجاز می‌باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می‌شود.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

درس	مسئول درس	طراحان	ویراستاران
ریاضیات	مهرداد کیوان حسین شفیع‌زاده سیدجواد نظری	حسین شفیع‌زاده ـ مهرداد کیوان سوگند روشنی	محسن جواهری ـ فرشاد حسن‌زاده ندا فرهختی ـ مائده بادان‌فیروز یزدان نیک‌قدم ـ حمیدرضا ولی‌پور ارسلان حسنوند ـ نوید ذکی محمدمهدی معظمی ـ علی اسدی
فیزیک	سجاد صادقی‌زاده سعید احمدی	سعید احمدی ـ سجاد صادقی‌زاده حسین عبدوی‌نژاد ـ حسین زین‌العابدین‌زاده مجید رجبی وندچالی ـ غلامرضا محبی امیررضا خوینی‌ها ـ محمدجواد سورچی محسن قندچلر	حسین عبدوی‌نژاد حنا خلعتبری
شیمی	فرشاد هادیان‌فرد	فرشاد هادیان‌فرد ـ فرهنگ امیری عالیه میرزایی ـ طاها حق‌بین فاطمه محمودی ـ علی ترابی مهسا بایمانی‌نژاد	رامین رزمجو ـ طاها حق‌بین محمد دارابی‌جم ـ وحید فارسیان محمد داودآبادی‌فراهانی محمدمهدی معظمی

یک تیم با بیش از ۵۰۰ نفر در حال کار هستن تا آزمون‌های ماز با حداکثر کیفیت حاضر بشن و به شما کمک کنن و مسیر موفقیت رو براتون ساده‌تر کنن. همیشه از نظرات و کامنت‌های خوب‌تون انرژی می‌گیریم. مرسی که همراهمون هستین.

راستی! حتماً در نظرسنجی آزمون شرکت کنین و نظرات و پیشنهادات‌تون رو برامون بنویسین.

آموزش استراتژی آزمون و مدیریت جلسه کنکور - قسمت ۳

تابستون؛ سکوی پرتابت به سمت کنکور!

«تابستون رو جدی بگیر»

رفیق سلام!

رسیدیم به ایستگاه ۱۳ شهریور؛ جایی که هوا هم کم‌کم داره بوی پاییز رو می‌گیره. اگه تا الآن با ما همراه بودی، یعنی تو اون بخش سختِ «تغییر عادت» رو پشت سر گذاشتی. حالا دیگه تابستون اون‌قدرها هم که اولش فکر می‌کردی طولانی نیست.

از ۱۳ شهریور تا ۲۷ شهریور، از زمان‌های استراتژیکه؛ چون تو رو از «فاز آرامشِ تابستونه» می‌کِشه بیرون و پرتت می‌کنه توی فضایِ جدیِ «آمادگی برای سال تحصیلی» جایی که تیکهٔ آخر از برنامه آزمون مونده.

بیا واقع‌بین باشیم؛ الآن مغزت احتمالاً یه جور «خستگیِ انباشته» رو تجربه می‌کنه. ممکنه توی تحلیل آزمون‌های قبلی دیده باشی که یه جاهایی نوسان داشتی. کاملاً طبیعیه! توی روان‌شناسیِ یادگیری، ما به این می‌گیم «اثرِ فرسایشِ کوتاه‌مدت».

برای اینکه از این دام فرار کنی، باید بدونی آزمون ۱۳ شهریور صرفاً یه عدد و درصد نیست؛ این آزمون، «سندِ دارایی‌های علمیِ توئه». هر چیزی که تا الآن خوندی و عمیقش کردی، توی این آزمون باید به شکلِ تسلطِ کامل خودشو نشون بده.

اگه هنوز مبحثی رو «نیم‌بند» بلدی، همین الآن وقتشه که با یه وسواسِ علمی، پرونده‌اش رو ببندی و بذاری کنار.

یه نکتهٔ خیلی مهم که شاید کمتر کسی بهت بگه: از الآن به بعد، سبک مطالعه‌ت باید یه تغییر کوچولو بکنه. تا الآن داشتی «تک‌بعدی» و عمیق کار می‌کردی، اما از دو هفتهٔ دیگه، مدرسه و کلاس‌ها با حجمِ بالایی از تکالیف و درس‌های جدید هجوم میارن سمتت.

۱۳ تا ۲۷ شهریور، تمرینِ «حفظِ کیفیت در شرایطِ پرفشاره». یعنی باید یاد بگیری چطور با وجودِ خستگیِ ذهنی و نزدیک شدن به شروعِ پاییز، همچنان بتونی روی تست‌ها متمرکز بمونی و بازیِ خودت رو مدیریت کنی.

پیش‌خوانی‌های سال بعد رو که توی آزمون‌های قبل داشتی، یادت هست؟ حالا دیگه اون پیش‌خوانی‌ها حکمِ «تکیه‌گاه» رو برات دارن. اگه مهرماه کلاس‌ها شلوغ بشه و تو حس کنی داری عقب می‌مونی، همین پیش‌خوانی‌های تابستونه است که بهت آرامش میده و جلوی استرسِ کاذب رو می‌گیره. به آزمون بعدی به چشمِ «آخرین تستِ آمادگیِ جسمانی و روانی» قبل از مسابقه اصلی نگاه کن. هر چی اینجا یاد بگیری و هر نقطه ضعفی که پیدا کنی، دقیقاً همون چیزیه که باعث میشه پاییزِ امسال، متفاوت‌ترین فصلِ زندگیت بشه.

حرفِ آخرم اینه: بذار آزمونِ ۲۷ شهریور، تیرِ خلاصِ «تنبلی‌های احتمالی» باشه. می‌خوام وقتی کارنامه‌ت رو می‌گیری، فارغ از هر درصدی، به خودت بگی: «دمم گرم که تا لحظهٔ آخرِ تابستون، شل نکردم». این همون اعتمادبه‌نفسِ قهرمانانه‌ایه که مهرماه، وقتی همه دارن با استرس شروع می‌کنن، تو رو با فاصله چند پله بالاتر از بقیه نگه می‌داره.

بروکه بترکونی، ما منتظرِ گزارشِ درخششِ تو توی تحلیلِ این آزمون هستیم! ♡

پاسخنامه کلیدی

ریاضیات

۱	۱	**۲**	۳	۴	۱۱	۱	۲	**۳**	۴
۲	**۱**	۲	۳	۴	۱۲	**۱**	۲	۳	۴
۳	۱	**۲**	۳	۴	۱۳	۱	۲	**۳**	۴
۴	۱	۲	**۳**	۴	۱۴	۱	۲	**۳**	۴
۵	۱	۲	۳	**۴**	۱۵	**۱**	۲	۳	۴
۶	۱	۲	**۳**	۴	۱۶	۱	۲	**۳**	۴
۷	۱	**۲**	۳	۴	۱۷	۱	۲	۳	**۴**
۸	۱	۲	۳	**۴**	۱۸	۱	**۲**	۳	۴
۹	۱	۲	۳	**۴**	۱۹	۱	**۲**	۳	۴
۱۰	**۱**	۲	۳	۴	۲۰	**۱**	۲	۳	۴
۲۱	۱	۲	۳	**۴**	۳۱	۱	۲	۳	**۴**
۲۲	۱	۲	**۳**	۴	۳۲	۱	۲	**۳**	۴
۲۳	۱	**۲**	۳	۴	۳۳	**۱**	۲	۳	۴
۲۴	**۱**	۲	۳	۴	۳۴	**۱**	۲	۳	۴
۲۵	**۱**	۲	۳	۴	۳۵	۱	**۲**	۳	۴
۲۶	۱	**۲**	۳	۴	۳۶	۱	۲	**۳**	۴
۲۷	۱	۲	**۳**	۴	۳۷	۱	۲	۳	**۴**
۲۸	**۱**	۲	۳	۴	۳۸	۱	۲	**۳**	۴
۲۹	۱	۲	۳	**۴**	۳۹	۱	۲	**۳**	۴
۳۰	۱	۲	**۳**	۴	۴۰	۱	۲	**۳**	۴

فیزیک دهم

۴۱	۱	**۲**	۳	۴	۵۱	۱	۲	**۳**	۴
۴۲	۱	۲	**۳**	۴	۵۲	۱	۲	**۳**	۴
۴۳	۱	**۲**	۳	۴	۵۳	۱	۲	۳	**۴**
۴۴	۱	۲	**۳**	۴	۵۴	۱	**۲**	۳	۴
۴۵	۱	۲	**۳**	۴	۵۵	۱	**۲**	۳	۴
۴۶	۱	۲	۳	**۴**	۵۶	**۱**	۲	۳	۴
۴۷	۱	۲	۳	**۴**	۵۷	**۱**	۲	۳	۴
۴۸	۱	۲	**۳**	۴	۵۸	**۱**	۲	۳	۴
۴۹	۱	۲	۳	**۴**	۵۹	۱	۲	**۳**	۴
۵۰	۱	۲	۳	**۴**	۶۰	۱	۲	**۳**	۴

فیزیک یازدهم

۶۱	۱	۲	۳	**۴**	۷۱	۱	۲	۳	**۴**
۶۲	۱	۲	**۳**	۴	۷۲	۱	۲	۳	**۴**
۶۳	۱	۲	**۳**	۴	۷۳	**۱**	۲	۳	۴
۶۴	**۱**	۲	۳	۴	۷۴	۱	**۲**	۳	۴
۶۵	**۱**	۲	۳	۴	۷۵	۱	۲	۳	**۴**
۶۶	۱	۲	۳	**۴**	۷۶	۱	**۲**	۳	۴
۶۷	۱	**۲**	۳	۴	۷۷	۱	۲	**۳**	۴
۶۸	۱	۲	۳	**۴**	۷۸	**۱**	۲	۳	۴
۶۹	۱	۲	**۳**	۴	۷۹	۱	**۲**	۳	۴
۷۰	۱	۲	**۳**	۴	۸۰	۱	۲	**۳**	۴

پاسخنامه کلیدی

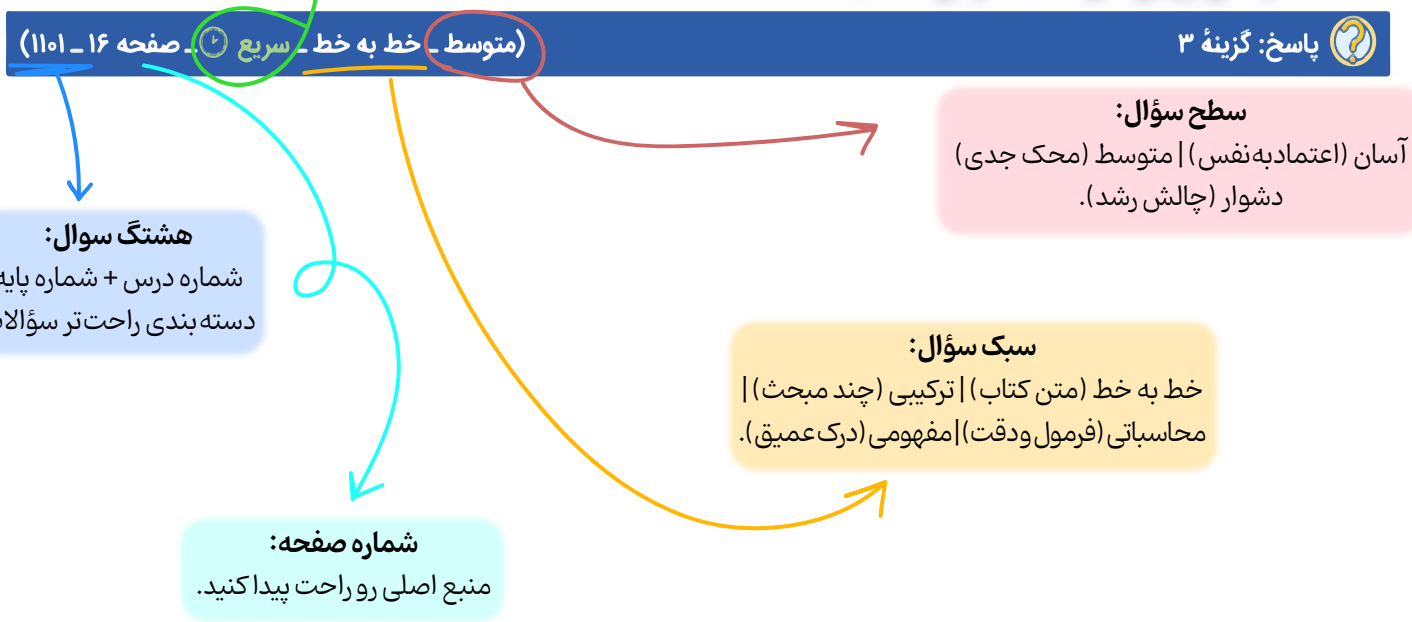
شیمی دهم

۸۱	۱	۲	۳	**۴**	۹۱	۱	**۲**	۳	۴
۸۲	۱	**۲**	۳	۴	۹۲	**۱**	۲	۳	۴
۸۳	۱	۲	**۳**	۴	۹۳	۱	**۲**	۳	۴
۸۴	۱	**۲**	۳	۴	۹۴	**۱**	۲	۳	۴
۸۵	۱	۲	**۳**	۴	۹۵	۱	۲	**۳**	۴
۸۶	۱	۲	**۳**	۴	۹۶	۱	۲	۳	**۴**
۸۷	۱	**۲**	۳	۴	۹۷	**۱**	۲	۳	۴
۸۸	۱	۲	**۳**	۴	۹۸	**۱**	۲	۳	۴
۸۹	**۱**	۲	۳	۴	۹۹	**۱**	۲	۳	۴
۹۰	۱	۲	**۳**	۴	۱۰۰	۱	۲	**۳**	۴

شیمی یازدهم

۱۰۱	۱	**۲**	۳	۴	۱۱۱	۱	**۲**	۳	۴
۱۰۲	**۱**	۲	۳	۴	۱۱۲	۱	۲	۳	**۴**
۱۰۳	۱	**۲**	۳	۴	۱۱۳	**۱**	۲	۳	۴
۱۰۴	۱	۲	**۳**	۴	۱۱۴	۱	**۲**	۳	۴
۱۰۵	۱	**۲**	۳	۴	۱۱۵	۱	۲	۳	**۴**
۱۰۶	۱	**۲**	۳	۴	۱۱۶	۱	۲	۳	**۴**
۱۰۷	۱	۲	۳	**۴**	۱۱۷	**۱**	۲	۳	۴
۱۰۸	**۱**	۲	۳	۴	۱۱۸	۱	۲	**۳**	۴
۱۰۹	۱	۲	**۳**	۴	۱۱۹	**۱**	۲	۳	۴
۱۱۰	۱	۲	**۳**	۴	۱۲۰	**۱**	۲	۳	۴

راهنمای پاسخنامه آزمون ها



یادتون باشه:

- ✓ هر سؤال یک فرصت یادگیریه، نه یک مانع.
- ✓ پاسخ‌نامه فقط جواب نیست؛ یک کارگاه آموزشی کامله.
- ✓ با هر آزمون و مرور این پاسخ‌نامه، یک پله بالاتر می‌رید و یک قدم به رؤیاتون نزدیک‌تر می‌شید.
- ✓ موفقیت فقط برای کسایی‌یه که با برنامه و انگیزه حرکت می‌کنن. شما همون آدمید.

بودجه‌بندی این آزمون

ریاضی پایه: معادله درجه ۲ + سهمی (تابع درجه ۲) یادگیری عمیق
ریاضی ۱ صفحه‌های ۶۹ تا ۸۲، حسابان ۱ صفحه‌های ۷ تا ۱۶
هندسه ۲: تبدیل‌های هندسی و کاربردها (فصل۲)، صفحه‌های ۳۱ تا ۵۴ مرور و جمع‌بندی
آمار و احتمال: احتمال (فصل ۲)، صفحه‌های ۳۵ تا ۶۸ مرور و جمع‌بندی

سهم در کنکور

ریاضی پایه: این مباحث در مجموع ۲ تست از ۱۴ تستِ کنکور را پوشش داده است.
هندسه ۲: این مباحث در مجموع ۱ تست از ۵ تستِ کنکور را پوشش داده است.
آمار و احتمال: این مباحث در مجموع ۱ تست از ۴ تستِ کنکور را پوشش داده است.

برای دیدن پاسخنامهٔ ویدئویی آزمون QRcode بالا را اسکن کنید!
یا بر روی لینک زیر کلیک کنید!
پاسخنامهٔ ویدئویی آزمون

۱- اگر α و β جواب‌های معادلهٔ درجه دوم $2x^2-mx+m+4=0$ باشند به طوری‌که $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=2$ باشد، مقدار m چه عددی است؟

۱) ۸ ۲) -8 ۳) -4 ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ خط‌به‌خط ـ سریع ـ حسابان ۱ صفحهٔ ۸ ـ ۱۱۰۱)

با توجه به روابط مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها، داریم:

$$\begin{cases} S=\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=\frac{m}{2} \\ P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{m+4}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{\frac{m}{2}}{\frac{m+4}{2}}=\frac{m}{m+4}$$

از طرفی طبق فرض مسئله $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=2$ می‌باشد، پس:

$$\frac{m}{m+4}=2 \Rightarrow m=2m+8 \Rightarrow m=-8$$

مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها

اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ باشد، آن‌گاه با فرض $\Delta\geq 0$ داریم:

مجموع ریشه‌ها	حاصل‌ضرب ریشه‌ها
$S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$	$P=\alpha\beta=\frac{c}{a}$

۲- اگر α و β صفرهای سهمی $f(x)=-3x^2-3x+k$ باشند به طوری‌که $2\alpha+\beta=1$ باشد، حداکثر مقدار f کدام است؟

۱) ۱۸/۷۵ ۲) ۱۸/۲۵ ۳) ۱۲/۷۵ ۴) ۱۲/۲۵

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ حسابان ۱ صفحهٔ ۸ و ۹ ـ ۱۱۰۱)

بررسی سریع

$$\begin{cases} \alpha+\beta=\frac{3}{-3}=-1 \\ 2\alpha+\beta=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=2 \\ \beta=-3 \end{cases} \Rightarrow P=\alpha\beta=\frac{-k}{3}=-6 \Rightarrow k=18$$

$$f(x)=-3x^2-3x+18 \Rightarrow \max=-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{9-4(-3)(18)}{4(-3)}=\frac{3+4\times 18}{4}=18/75$$

α و β صفرهای سهمی هستند یعنی ریشه‌های معادلهٔ $f(x)=0$ می‌باشند، پس:

$$S=\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=\frac{3}{-3}=-1 \Rightarrow \begin{cases} \alpha+\beta=-1 \\ 2\alpha+\beta=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=2 \\ \beta=-3 \end{cases}$$

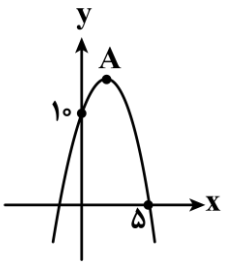
یعنی صفرهای سهمی $y=f(x)$ اعداد ۲ و -۳ هستند، پس:

$$P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=-\frac{k}{۳}\Rightarrow(۲)(-۳)=-\frac{k}{۳}\Rightarrow k=۱۸$$

در نتیجه معادلهٔ سهمی به صورت $f(x)=-۳x^۲-۳x+۱۸$ می‌باشد و داریم:

$$x_S=\frac{-b}{۲a}=\frac{۳}{۲(-۳)}=-\frac{۱}{۲}$$

$$\max=y_S=-۳(\frac{-۱}{۲})^۲-۳(\frac{-۱}{۲})+۱۸=\frac{-۳}{۴}+\frac{۳}{۲}+۱۸=۱۸/۷۵$$



۳- نمودار سهمی $f(x)=-۲x^۲+bx+c$ به صورت مقابل است. مجموع مختصات رأس A کدام است؟

۱) ۱۸
۲) ۲۰
۳) ۲۴
۴) ۱۶

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ ریاضی ۱ صفحهٔ ۸۰ ـ ۱۰۰۴)

$$f(۰)=۱۰\Rightarrow c=۱۰\Rightarrow f(x)=-۲x^۲+bx+۱۰$$

$$f(۵)=۰\Rightarrow-۲(۵)^۲+۵b+۱۰=۰\Rightarrow-۴۰+۵b=۰\Rightarrow b=۸$$

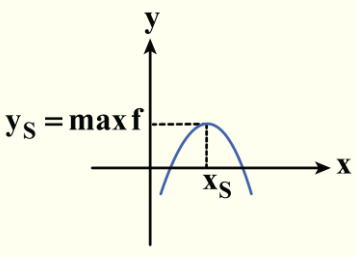
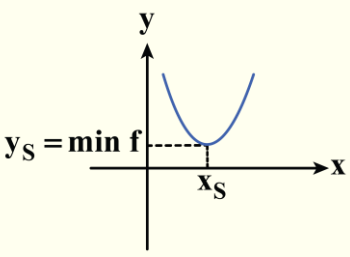
$$\Rightarrow f(x)=-۲x^۲+۸x+۱۰$$

$$\Rightarrow A\begin{vmatrix}x_A=\frac{-b}{۲a}=\frac{-۸}{۲(-۲)}=۲\\ y_A=f(۲)=-۲(۲)^۲+۸(۲)+۱۰=-۸+۱۶+۱۰=۱۸\end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow x_A+y_A=۲+۱۸=۲۰$$

دَمی با سهمی

$f(x)=a(x-h)^۲+k$	$f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)$	$f(x)=ax^۲+bx+c$	
$x_S=h$	$x_S=\frac{\alpha+\beta}{۲}$	$x_S=-\frac{b}{۲a}$	طول رأس
$y_S=k$	$y_S=f(\frac{\alpha+\beta}{۲})$	$y_S=f(-\frac{b}{۲a})=-\frac{\Delta}{۴a}$	عرض رأس

$a<۰$	$a>۰$
	

۴- اگر α و β جواب‌های غیرصفر معادلهٔ درجهٔ دوم $2x^2-(\beta+5)x+\alpha^2\beta=0$ باشند، مقدار $\alpha-\beta$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) -3 ۳) -1 ۴) ۱

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ حسابان ۱ صفحهٔ ۸ و ۹ ـ ۱۱۰۱)

با توجه به روابط بین ریشه‌ها می‌توان نوشت:

$$P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{\alpha^2\beta}{2}\Rightarrow\alpha\beta=\frac{\alpha^2\beta}{2}\Rightarrow\frac{\alpha}{2}=1\Rightarrow\alpha=2$$

$$S=\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=\frac{\beta+5}{2}\xrightarrow{\alpha=2}2+\beta=\frac{\beta+5}{2}\Rightarrow 4+2\beta=\beta+5\Rightarrow\beta=1$$

$$\Rightarrow\beta-\alpha=1-2=-1$$

ماز

۵- رأس سهمی $f(x)=-x^2+mx+m-3$ در ناحیهٔ سوم واقع شده است. برای m چند مقدار صحیح یافت می‌شود؟

۱) ۶ ۲) ۴ ۳) ۷ ۴) ۵

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ ریاضی ۱ صفحهٔ ۸۰ و ۸۱ ـ ۱۰۰۴)

از آن‌جا که رأس سهمی در ناحیهٔ سوم واقع شده است، پس:

$$S\begin{vmatrix}x_S<0\\y_S<0\end{vmatrix}$$

$$x_S=\frac{-b}{2a}=\frac{-m}{2(-1)}=\frac{m}{2}<0\Rightarrow m<0\quad(*)$$

$$y_S=-(\frac{m}{2})^2+m(\frac{m}{2})+m-3<0\Rightarrow-\frac{m^2}{4}+\frac{m^2}{2}+m-3<0\Rightarrow\frac{m^2}{4}+m-3<0$$

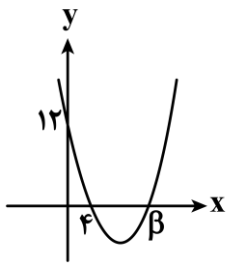
$$\Rightarrow m^2+4m-12<0\Rightarrow(m+6)(m-2)<0\xrightarrow{\text{تعیین علامت}}-6<m<2\quad(**)$$

$$(*),(**)\Rightarrow-6<m<0$$

که شامل ۵ عدد صحیح $-1,-2,-3,-4$ و -5 می‌باشد.

ماز

۶- نمودار سهمی $y=f(x)$ به شکل مقابل است. مقدار $f(\beta+4)$ چه عددی است؟



۱) ۱۸
۲) ۶
۳) ۱۲
۴) ۹

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ ریاضی ۱ صفحهٔ ۷۸ و ۷۹ ـ ۱۰۰۴)

با توجه به این‌که $x=4$ و $x=\beta$ صفرهای سهمی هستند، پس:

$$f(x)=k(x-4)(x-\beta)$$

همچنین با توجه به این‌که $f(0)=12$ می‌باشد، پس:

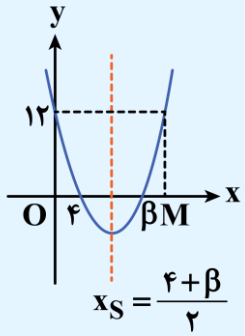
$$12=k(0-4)(0-\beta)\Rightarrow 4k\beta=12\Rightarrow k=\frac{3}{\beta}\Rightarrow f(x)=\frac{3}{\beta}(x-4)(x-\beta)$$

حال $f(\beta+4)$ را به دست می‌آوریم:

$$f(\beta+4)=\frac{3}{\beta}(\beta+4-4)(\beta+4-\beta)=\frac{3}{\beta}\times\beta\times 4=12$$

راهنمای زرنگ بازی

با توجه به خاصیت نقاط هم عرض می‌توان نوشت:



$$x_S=\frac{۴+\beta}{۲}=\frac{\cancel{x_O}^{\circ}+x_M}{۲}\Rightarrow x_M=۴+\beta\Rightarrow f(۴+\beta)=۱۲$$

ماز

۷- به ازای کدام مقدار m، مجموع ریشه‌های معادلهٔ $(۲m+۱)x+m+۲=۰$ با $۳x^۲$ برابر است؟

۱) $\frac{۵}{۲}$ ۲) $\frac{-۷}{۲}$ ۳) -۱ ۴) ۱

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ حسابان ۱ صفحهٔ ۸ ـ ۱۱۰۱)

بررسی سریع

$$\alpha+\beta=\frac{۱}{\alpha\beta}\Rightarrow\frac{۲m+۱}{۳}=\frac{۳}{m+۲}\Rightarrow ۲m^۲+۵m-۷=۰$$

$\xrightarrow{a+b+c=۰}$
- $m=۱\xrightarrow{\Delta<۰}$ معادله ریشه‌حقیقی ندارد پس قابل قبول نیست
- $m=-\frac{۷}{۲}\xrightarrow{\Delta>۰}$ قابل قبول

اگر α و β ریشه‌های معادله باشند باید در رابطهٔ زیر صدق کنند:

$$\alpha+\beta=\frac{۱}{\alpha\beta}\Rightarrow\frac{۲m+۱}{۳}=\frac{۱}{\frac{m+۲}{۳}}\Rightarrow\frac{۲m+۱}{۳}=\frac{۳}{m+۲}$$

$$\Rightarrow(۲m+۱)(m+۲)=(۳)(۳)\Rightarrow ۲m^۲+۴m+m+۲=۹\Rightarrow ۲m^۲+۵m-۷=۰$$

$$\Rightarrow(m-۱)(۲m+۷)=۰\Rightarrow\begin{cases}m=۱\\ m=-\frac{۷}{۲}\end{cases}$$

$m=۱: ۳x^۲-۳x+۳=۰\Rightarrow x^۲-x+۱=۰\xrightarrow{\Delta<۰}$ معادله ریشهٔ حقیقی ندارد، پس غیرقابل قبول است.

$m=-\frac{۷}{۲}: ۳x^۲+۶x-\frac{۳}{۲}=۰\Rightarrow ۶x^۲+۱۲x-۳=۰\xrightarrow{\Delta>۰}$ قابل قبول است

ماز

۸- اگر α و β جواب‌های معادلهٔ درجه دوم $۲x^۲-۵x+۳=۰$ باشند، با فرض $\alpha>\beta$، معادلهٔ درجهٔ دوم با ریشه‌های $\alpha-۱$ و $\beta+۱$ کدام است؟

۱) $۲x^۲+۵x-۲=۰$ ۲) $۲x^۲-۵x-۲=۰$ ۳) $۲x^۲+۵x+۲=۰$ ۴) $۲x^۲-۵x+۲=۰$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (آسان ـ مفهومی ـ استاندارد ـ ریاضی ۱ صفحهٔ ۷۴ ـ ۱۰۰۴)

$$۲x^۲-۵x+۳=۰\xrightarrow{a+b+c=۰}\begin{cases}x_۱=۱\Rightarrow\beta=۱\Rightarrow\beta+۱=۲\\ x_۲=\frac{۳}{۲}\Rightarrow\alpha=\frac{۳}{۲}\Rightarrow\alpha-۱=\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

حال معادله با ریشه‌های $(\beta+۱)$ و $(\alpha-۱)$ را تشکیل می‌دهیم:

$$S'=(\alpha-۱)+(\beta+۱)=\frac{۱}{۲}+۲=\frac{۵}{۲}$$

$$P' = (\alpha - ۱)(\beta + ۱) = \frac{۱}{۲} \times ۲ = ۱$$

$$x^۲ - S'x + P' = ۰ \Rightarrow x^۲ - \frac{۵}{۲}x + ۱ = ۰ \xrightarrow{\times ۲} ۲x^۲ - ۵x + ۲ = ۰$$

می‌خوای با استفاده از ریشه‌ها، معادله بنویسی؟ خب بیا بهت بگم چجوری...

اگر α و β ریشه‌های معادله خواسته شده باشند، داریم:

$$\begin{cases} S = \alpha + \beta \\ P = \alpha\beta \end{cases} \Rightarrow x^۲ - Sx + P = ۰$$

۹- اگر سهمی $f(x) = mx^۲ + ۹x + ۱۶m$ بر نیمساز ناحیهٔ سوم محورهای مختصات مماس باشد، طول نقطهٔ تماس کدام است؟

۱) -۱ ۲) -۲ ۳) -۳ ۴) -۴

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ حسابان ۱ صفحهٔ ۱۲ ـ ۱۱۰۱)

یک خط به شرطی بر یک نمودار مماس است که معادلهٔ حاصل از تلاقی آن‌ها دارای ریشهٔ مضاعف باشد.

همچنین مقدار ریشهٔ مضاعف، طول نقطهٔ تماس است.

با توجه به این‌که معادلهٔ نیمساز ناحیهٔ سوم، $y = x$ می‌باشد، خواهیم داشت:

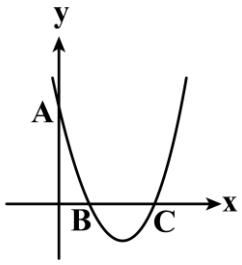
$$mx^۲ + ۹x + ۱۶m = x \Rightarrow mx^۲ + ۸x + ۱۶m = ۰ \Rightarrow \Delta = (۸)^۲ - ۴(m)(۱۶m)$$

$$\Delta = ۰ : ۶۴ - ۶۴m^۲ = ۰ \Rightarrow ۱ - m^۲ = ۰ \Rightarrow m^۲ = ۱ \Rightarrow \begin{cases} m = ۱ \\ m = -۱ \end{cases}$$

$m = -۱ : -x^۲ + ۸x - ۱۶ = ۰ \Rightarrow x^۲ - ۸x + ۱۶ = ۰ \Rightarrow (x - ۴)^۲ = ۰ \Rightarrow x = ۴$ غ‌ق‌ق (طول به دست آمده در ناحیهٔ سوم واقع نیست)

$m = ۱ : x^۲ + ۸x + ۱۶ = ۰ \Rightarrow (x + ۴)^۲ = ۰ \Rightarrow x = -۴$ ✓

۱۰- نمودار سهمی $f(x) = x^۲ + ۲mx - ۲m - ۱$ به صورت مقابل است. اگر مساحت مثلث با رئوس A, B, C برابر با ۱۰ باشد، مجموع مربعات ریشه‌های معادلهٔ $f(x) = ۰$ چه عددی است؟



۱) ۲۶
۲) ۲۹
۳) ۱۷
۴) ۱۰

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ ریاضی ۱ صفحهٔ ۷۹ و ۸۰ ـ ۱۰۰۴)

در سهمی $f(x)$ جمع ضرایب صفر است پس ریشه‌های معادلهٔ $f(x) = ۰$ به صورت زیر می‌باشند:

$$\begin{cases} x_۱ = ۱ \\ x_۲ = -۲m - ۱ \end{cases}$$

از طرفی $f(۰) = -۲m - ۱$ است و داریم:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{۱}{۲}(BC)(OA) = \frac{۱}{۲}|-۲m - ۱ - ۱||-۲m - ۱| = \frac{۱}{۲}|-۲m - ۲||-۲m - ۱|$$

$$= \frac{۱}{۲} \times ۲ \times |m + ۱| \times |۲m + ۱| = |(m + ۱)(۲m + ۱)| = ۱۰$$

$$\Rightarrow |۲m^۲+۳m+۱|=۱۰ \Rightarrow \begin{cases} ۲m^۲+۳m+۱=-۱۰ \Rightarrow ۲m^۲+۳m+۱۱=۰ \xrightarrow{\Delta<۰} \text{ریشه ندارد} \\ ۲m^۲+۳m+۱=۱۰ \Rightarrow ۲m^۲+۳m-۹=۰ \Rightarrow (۲m-۳)(m+۳)=۰ \Rightarrow \begin{cases} m=-۳ \ \checkmark \\ m=\frac{۳}{۲} \text{ غ‌ق‌ق} \end{cases} \end{cases}$$

(چون عرض از مبدأ سهمی منفی می‌شود و مطابق با نمودار داده شده نیست)

$$\Rightarrow f(x)=x^۲-۶x+۵$$

حال باید $f(x)=۰$ را حل کرده و مجموع مربعات ریشه‌های آن را به دست آوریم:

$$f(x)=۰ \Rightarrow x^۲-۶x+۵=۰ \Rightarrow (x-۵)(x-۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x_۱=۵ \\ x_۲=۱ \end{cases} \Rightarrow x_۱^۲+x_۲^۲=۲۵+۱=۲۶$$

ماز

۱۱- یکی از ریشه‌های معادلهٔ $x^۲-(m^۲+۳m-۴)x+m^۳=۰$ جذر ریشهٔ دیگر است. مجموع مکعب ریشه‌های معادله چه عددی است؟

۱) $۸+۲\sqrt{۲}$ ۲) $۲۷+۳\sqrt{۳}$ ۳) ۷۲ ۴) ۹

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ حسابان ۱ صفحهٔ ۸ ـ ۱۱۰۱)

اگر α و β ریشه‌های معادله باشند، پس:

$$\alpha,\beta>۰ \text{ و } \alpha=\sqrt{\beta}$$

همچنین:

$$P=\alpha\beta=m^۳ \Rightarrow \beta\sqrt{\beta}=m^۳ \Rightarrow \beta^۳=m^۶ \Rightarrow \beta=m^۲ \Rightarrow \alpha=m$$

$$S=\alpha+\beta=m^۲+۳m-۴ \Rightarrow m^۲+m=m^۲+۳m-۴ \Rightarrow m=۲ \Rightarrow \begin{cases} \alpha=۲ \\ \beta=۴ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha^۳+\beta^۳=۲^۳+۴^۳=۸+۶۴=۷۲$$

ماز

۱۲- اگر α یکی از ریشه‌های معادلهٔ $x^۲+x-۵=۰$ باشد، حاصل $\frac{۱}{\alpha}-\frac{\alpha}{۵}$ چه عددی است؟

۱) $\frac{۱}{۵}$ ۲) ۵ ۳) -۵ ۴) $-\frac{۱}{۵}$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (آسان ـ مفهومی ـ استاندارد ـ ریاضی ۱ صفحهٔ ۷۷ ـ ۱۰۰۴)

از آن‌جا که α ریشهٔ معادله است، پس در آن صدق می‌کند:

$$\alpha^۲+\alpha-۵=۰ \Rightarrow \alpha=۵-\alpha^۲$$

$$\frac{۱}{\alpha}-\frac{\alpha}{۵}=\frac{۵-\alpha^۲}{۵\alpha}=\frac{\alpha}{۵\alpha}=\frac{۱}{۵}$$

ماز

۱۳- اگر کمترین مقدار سهمی $f(x)=mx^۲-۲mx+۲m-۱۰$ برابر با -۸ باشد و α و β صفرهای سهمی $y=f(x)$ باشند، مقدار $\frac{۳}{\alpha}+\frac{۳}{\beta}$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) -۲ ۴) -۳

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ ترکیبی ـ استاندارد ـ ریاضی ۱ صفحهٔ ۸۱ ـ ۱۰۰۴)

بررسی سریع

$$x_S=-\frac{-۲m}{۲(m)}=۱ \Rightarrow y_S=m(۱)^۲-۲m(۱)+۲m-۱۰=m-۱۰$$

$$m-۱۰=-۸ \Rightarrow m=۲ \Rightarrow f(x)=۲x^۲-۴x-۶$$

$$f(x)=۰ \Rightarrow ۲(x-۳)(x+۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x_۱=۳ \Rightarrow \alpha=۳ \\ x_۲=-۱ \Rightarrow \beta=-۱ \end{cases} \Rightarrow \frac{۳}{\alpha}+\frac{۳}{\beta}=۱-۳=-۲$$

کمترین مقدار سهمی، همان عرض رأس سهمی (یعنی y_S) است، پس:

$$y_S = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{(-2m)^2 - 4(m)(2m-10)}{4(m)} = -\frac{4m^2 - 8m^2 + 40m}{4m} = \frac{4m^2 - 40m}{4m}$$

$$= \frac{\cancel{4m}(m-10)}{\cancel{4m}} = m-10 \Rightarrow m-10 = -8 \Rightarrow m = 2 \Rightarrow f(x) = 2x^2 - 4x - 6$$

حال با حل معادلهٔ $f(x) = 0$، صفرهای سهمی (یعنی α و β) را به دست می‌آوریم:

$$2x^2 - 4x - 6 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \Rightarrow \alpha = 3 \\ x_2 = -1 \Rightarrow \beta = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{\alpha} + \frac{3}{\beta} = \frac{3}{3} + \frac{3}{-1} = 1 - 3 = -2$$

۱۴- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2 + x - 1 - m^2 = 0$ باشند، حداکثر مقدار $\alpha^3 + \beta^3$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) -3 ۳) -4 ۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ ترکیبی ـ سریع ـ حسابان ۱ صفحهٔ ۸ ـ ۱۱۰۱)

با توجه به روابط بین ریشه‌ها می‌توان نوشت: $S = \alpha + \beta = -1 \quad , \quad P = \alpha\beta = -1 - m^2$

از طرفی می‌دانیم: $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha+\beta) = S^3 - 3PS$

$$\Rightarrow \alpha^3 + \beta^3 = (-1)^3 - 3(-1-m^2)(-1) = -1 - 3 - 3m^2 = -3m^2 - 4$$

حال باید حداکثر مقدار عبارت درجه دوم $-3m^2 - 4$ را به دست آوریم:

$$m^2 \geq 0 \Rightarrow -3m^2 \leq 0 \Rightarrow -3m^2 - 4 \leq -4 \Rightarrow \max = -4$$

توجه کنید که به ازای هر مقدار m، چون $\Delta > 0$ است، پس معادله همواره ۲ ریشه دارد.

آنچه از روابط بین ریشه‌ها باید بدانید

رابطه	حاصل برحسب S و P
$\alpha^2 + \beta^2$	$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta = S^2 - 2P$
$\alpha^3 + \beta^3$	$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha+\beta) = S^3 - 3PS$
$\alpha^4 + \beta^4$	$\alpha^4 + \beta^4 = (\alpha^2+\beta^2)^2 - 2(\alpha\beta)^2 = (S^2-2P)^2 - 2P^2$
$\alpha^6 + \beta^6$	$\alpha^6 + \beta^6 = (\alpha^2+\beta^2)^3 - 3(\alpha\beta)^2(\alpha^2+\beta^2) = (S^2-2P)^3 - 3P^2(S^2-2P)$
$\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}$	$\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = \frac{\beta^2+\alpha^2}{\alpha^2\beta^2} = \frac{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2} = \frac{S^2-2P}{P^2}$
$\frac{1}{\alpha^3} + \frac{1}{\beta^3}$	$\frac{1}{\alpha^3} + \frac{1}{\beta^3} = \frac{\beta^3+\alpha^3}{\alpha^3\beta^3} = \frac{(\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{(\alpha\beta)^3} = \frac{S^3-3PS}{P^3}$
$\frac{1}{\alpha^4} + \frac{1}{\beta^4}$	$\frac{1}{\alpha^4} + \frac{1}{\beta^4} = \frac{\beta^4+\alpha^4}{\alpha^4\beta^4} = \frac{(\alpha^2+\beta^2)^2 - 2(\alpha\beta)^2}{(\alpha\beta)^4} = \frac{(S^2-2P)^2 - 2P^2}{P^4}$
$\lvert\alpha - \beta\rvert$	$\lvert\alpha - \beta\rvert = \frac{\sqrt{\Delta}}{\lvert a\rvert}$

SanjeshCloud

$\lvert\alpha^۲-\beta^۲\rvert$	$\lvert\alpha^۲-\beta^۲\rvert=\lvert(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)\rvert=\lvert\frac{\sqrt{\Delta}}{\lvert a\rvert}\times S\rvert$
$\lvert\alpha^۳-\beta^۳\rvert$	$\lvert\alpha^۳-\beta^۳\rvert=\lvert(\alpha-\beta)(\alpha^۲+\beta^۲+\alpha\beta)\rvert=\lvert\frac{\sqrt{\Delta}}{\lvert a\rvert}(S^۲-P)\rvert$
$\lvert\alpha^۴-\beta^۴\rvert$	$\lvert\alpha^۴-\beta^۴\rvert=\lvert(\alpha^۲-\beta^۲)(\alpha^۲+\beta^۲)\rvert=\lvert\frac{\sqrt{\Delta}}{\lvert a\rvert}(S)(S^۲-۲P)\rvert$
$\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$	$\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{\alpha+\beta+۲\sqrt{\alpha\beta}}=\sqrt{S+۲\sqrt{P}}\ \ (\alpha,\beta>۰)$
$\lvert\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}\rvert$	$\lvert\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}\rvert=\sqrt{\alpha+\beta-۲\sqrt{\alpha\beta}}=\sqrt{S-۲\sqrt{P}}\ \ (\alpha,\beta>۰)$
$\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}+\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}$	$\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}+\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}=\frac{\alpha+\beta}{\sqrt{\alpha\beta}}=\frac{S}{\sqrt{P}}$

۱۵- اگر $A(۳b,۲b+b^۲)$ و $B(b,۲b+b^۲)$ دو نقطهٔ متمایز با مختصات صحیح و منفی بر روی سهمی $y=m(x-۲\alpha+۴)^۲+۲\alpha+۱$ باشند، مقدار m کدام است؟

۱) -۴ ۲) -۲ ۳) ۲ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۱ (سخت ـ محاسباتی ـ زمان‌بر ـ ریاضی ۱ صفحهٔ ۸۱ ـ ۱۰۰۴)

بررسی سریع

$$۲b+b^۲<۰\Rightarrow b(b+۲)<۰\Rightarrow -۲<b<۰\xrightarrow{b\in\mathbb{Z}}b=-۱$$

$$A(-۳,-۱)\ ,\ B(-۱,-۱)\xrightarrow{\text{هم‌عرض }A,B}x_S=\frac{-۳-۱}{۲}=-۲$$

$$۲\alpha-۴=-۲\Rightarrow\alpha=۱\Rightarrow y=m(x+۲)^۲+۳\xrightarrow{A(-۳,-۱)}m=-۴$$

چون مختصات نقاط A و B صحیح و منفی است، پس:

$$۲b+b^۲<۰\Rightarrow b(b+۲)<۰\Rightarrow -۲<b<۰\Rightarrow b=-۱$$
$$\Rightarrow A(-۳,-۱)\ ,\ B(-۱,-۱)$$

با توجه به هم‌عرض بودن نقاط A و B، طول رأس سهمی برابر با $\frac{x_A+x_B}{۲}$ است:

$$x_S=\frac{(-۳)+(-۱)}{۲}=-۲$$

همچنین با توجه به معادلهٔ سهمی خواهیم داشت:

$$x_S=۲\alpha-۴$$

پس:

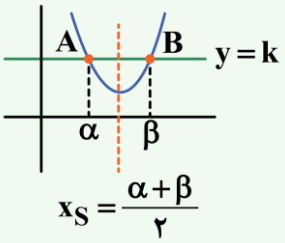
$$۲\alpha-۴=-۲\Rightarrow ۲\alpha=۴-۲=۲\Rightarrow\alpha=۱$$
$$\Rightarrow \text{معادلهٔ سهمی: } y=m(x+۲)^۲+۳$$

حال یکی از نقاط را در معادلهٔ سهمی جایگذاری می‌کنیم تا m به دست آید:

$$\xrightarrow{A(-۳,-۱)}-۱=m(-۳+۲)^۲+۳\Rightarrow -۱-۳=m\Rightarrow m=-۴$$

نکته

می‌دانیم که یک سهمی نسبت به محور تقارن خود، متقارن است، بنابراین اگر نقطه $A(\alpha, k)$ روی سهمی قرار داشته باشد، نقطه $B(\beta, k)$ نیز قطعاً روی سهمی است و در این حالت، معادله محور تقارن سهمی به صورت $x = \frac{\alpha+\beta}{۲}$ است. به بیان دیگر، اگر خط افقی $y = k$ سهمی را در دو نقطه به طول‌های α و β قطع کند، معادله محور تقارن سهمی برابر $x = \frac{\alpha+\beta}{۲}$ بوده که همان طول رأس سهمی است، ببینید:



به عنوان مثال

اگر نقاط $A(-۱, ۳)$ و $B(۵, ۳)$ دو نقطه از یک سهمی باشند، معادله محور تقارن این سهمی برابر است با:

$$\begin{cases} x_A = \alpha = -۱ \\ x_B = \beta = ۵ \end{cases} \Rightarrow x_S = \frac{x_A + x_B}{۲} = \frac{\alpha+\beta}{۲} = \frac{-۱+۵}{۲} = \frac{۴}{۲} = ۲ \Rightarrow \text{معادله محور تقارن } x_S = ۲$$

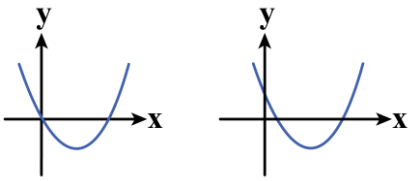
ماز

۱۶- نمودار سهمی $f(x) = mx^۲ - ۲(m+۱)x + m$ از ناحیهٔ سوم محورهای مختصات عبور نمی‌کند اما از ۳ ناحیهٔ دیگر عبور می‌کند. حدود m کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳} < m$ ۲) $۰ < m < \frac{۱}{۳}$ ۳) $m > ۰$ ۴) $m > ۰, m \neq \frac{۱}{۳}$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ حسابان ۱ صفحهٔ ۱۲ ـ ۱۱۰۱)

چون نمودار فقط از ناحیهٔ سوم عبور نمی‌کند، پس باید نمودار آن به یکی از دو صورت مقابل باشد:



با توجه به نمودارها باید شرایط زیر برقرار باشند:

۱) $a > ۰ : m > ۰$

۲) $\frac{-b}{a} > ۰ : \frac{۲(m+۱)}{m} > ۰$ تعیین علامت

عبارت	+	۰	−	ت ن	+
		−۱	۰		

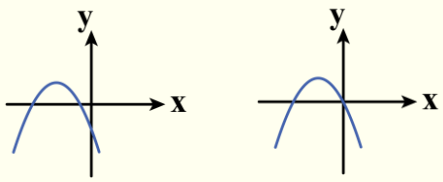
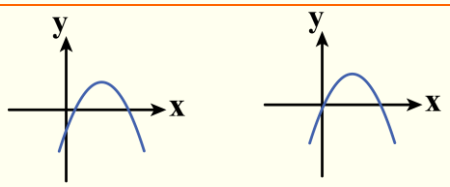
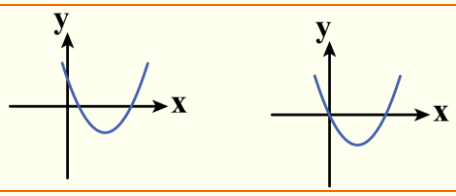
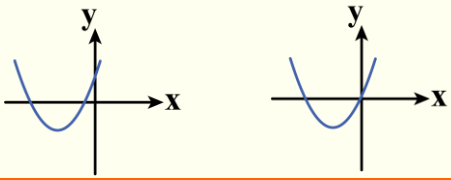
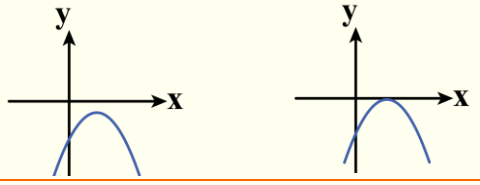
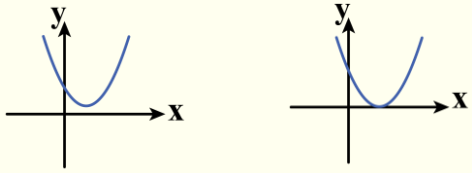
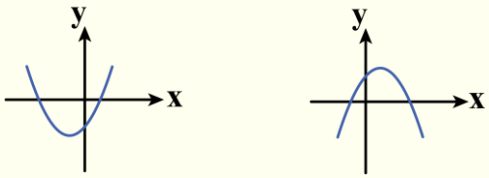
جواب: $m > ۰$ یا $m < -۱$

۳) $\frac{c}{a} \geq ۰ : \frac{m}{m} \geq ۰ \Rightarrow ۱ \geq ۰$ همواره برقرار است

۴) $\Delta > ۰ : \left(-(-۲(m+۱))\right)^۲ - ۴(m)(m) > ۰ \Rightarrow ۴m^۲ + ۸m + ۴ - ۴m^۲ > ۰ \Rightarrow ۸m + ۴ > ۰ \Rightarrow ۸m > -۴ \Rightarrow m > \frac{-۱}{۲}$

اشتراک شرط‌های گفته شده، $m > ۰$ است.

مقررات عبور و مرور تابع درجه دوم از نواحی مختلف

توضیحات	رسم تقریبی نمودار	شرایط
سهمی فقط از ناحیه **اول** عبور نکند.		$a<0$ $b<0$ $c\le 0$ $\Delta>0$
سهمی فقط از ناحیه **دوم** عبور نکند.		$a<0$ $b>0$ $c\le 0$ $\Delta>0$
سهمی فقط از ناحیه **سوم** عبور نکند.		$a>0$ $b<0$ $c\ge 0$ $\Delta>0$
سهمی فقط از ناحیه **چهارم** عبور نکند.		$a>0$ $b>0$ $c\ge 0$ $\Delta>0$
سهمی از نواحی اول و دوم عبور نکند. (سهمی فقط از نواحی **سوم و چهارم** عبور کند.)		$a<0$ $\Delta\le 0$
سهمی از نواحی سوم و چهارم عبور نکند. (سهمی فقط از نواحی **اول و دوم** عبور کند.)		$a>0$ $\Delta\le 0$
سهمی از هر **چهار ناحیه** عبور کند.		$\frac{c}{a}<0$

۱۷- سهمی $y=-2x^2+ax+16$ محور طول‌ها را در نقاطی به طول α و β قطع می‌کند به طوری‌که $\beta>\alpha$ و $2\beta+\alpha=6$ می‌باشد. کدام سهمی محور طول‌ها را در نقاطی به طول $\frac{2}{\alpha}$ و $\frac{2}{\beta}$ قطع می‌کند؟

۱) $f(x)=2x^2+2x-4$

۲) $f(x)=2x^2-2x-4$

۳) $f(x)=4x^2-2x-2$

۴) $f(x)=4x^2+2x-2$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ ترکیبی ـ زمان‌بر ـ حسابان ۱ صفحهٔ ۹ ـ ۱۱۰۱)

بررسی سریع

$$\begin{cases}\alpha+\beta=\frac{a}{2}\\ \alpha\beta=-8\Rightarrow\alpha=\frac{-8}{\beta}\end{cases}$$

$$2\beta+\alpha=6\Rightarrow 2\beta-\frac{8}{\beta}=6\Rightarrow\beta^2-3\beta-4=0\Rightarrow\begin{cases}\beta=4\Rightarrow\alpha=-2\ \checkmark\\ \beta=-1\Rightarrow\alpha=8\ \text{غ‌ق}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\frac{2}{\beta}=\frac{1}{2}\\ \frac{2}{\alpha}=-1\end{cases}\Rightarrow S=-\frac{1}{2},\ P=-\frac{1}{2}\Rightarrow x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}=0\Rightarrow 4x^2+2x-2=0$$

سهمی: $f(x)=4x^2+2x-2$

از آن‌جا که سهمی محور طول‌ها را در α و β قطع می‌کند، پس α و β ریشه‌های معادلهٔ $-2x^2+ax+16=0$ هستند، پس:

$$\begin{cases}\alpha+\beta=\frac{a}{2}\\ \alpha\beta=\frac{16}{-2}=-8\Rightarrow\alpha=\frac{-8}{\beta}\end{cases}$$

از طرفی طبق فرض مسئله:

$$2\beta+\alpha=6\xrightarrow{\alpha=\frac{-8}{\beta}}2\beta-\frac{8}{\beta}=6\Rightarrow\beta-\frac{4}{\beta}=3\Rightarrow\beta^2-3\beta-4=0$$

$$\Rightarrow(\beta-4)(\beta+1)=0\Rightarrow\begin{cases}\beta=4\Rightarrow\alpha=-2\ \checkmark\\ \beta=-1\Rightarrow\alpha=8\end{cases}$$ چون باید $\beta>\alpha$ باشد پس قابل قبول نیست

حال باید معادلهٔ سهمی را بنویسیم که ریشه‌های آن $\frac{2}{\alpha}$ و $\frac{2}{\beta}$ باشد:

$$\begin{cases}\frac{2}{\alpha}=-1\\ \frac{2}{\beta}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow S=-1+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2},\ P=(-1)(\frac{1}{2})=-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x^2-Sx+P=0\Rightarrow x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}=0\xrightarrow{\times 4}4x^2+2x-2=0$$

پس معادلهٔ سهمی موردنظر $f(x)=4x^2+2x-2$ است.

۱۸- اگر a,b,c به ترتیب از چپ به راست جملات ابتدایی یک دنبالهٔ حسابی باشند و مجموع جواب‌های معادلهٔ $ax^2-2bx+c=0$ برابر ۴ باشد، مقدار $\frac{c}{3a}$ چه عددی است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۲

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ ترکیبی ـ استاندارد ـ حسابان ۱ صفحهٔ ۱۱ ـ ۱۱۰۱)

از آن‌جا که a,b,c تشکیل دنبالهٔ حسابی می‌دهند، پس: $a+c=2b \Rightarrow a+c-2b=0$

و این یعنی جمع ضرایب معادله درجه دوم داده شده صفر است و نتیجه می‌شود که $x=1$ یکی از ریشه‌هاست. از طرفی چون مجموع ریشه‌ها برابر ۴ است پس ریشهٔ دیگر معادله، $x=3$ است.

$$\text{حاصل‌ضرب ریشه ها}=\frac{c}{a}=(3)(1)=3 \Rightarrow \frac{c}{3a}=\frac{1}{3}(\frac{c}{a})=\frac{1}{3}\times 3=1$$

واسطهٔ حسابی (میانگین حسابی)

اگر a,b,c به ترتیب سه جملهٔ متوالی یک **دنبالهٔ حسابی** باشند، در این صورت b را **واسطهٔ حسابی** (میانگین حسابی) a و c می‌گوییم و داریم:

$$b=\frac{a+c}{2}$$

۱۹- اگر α و β جواب‌های معادلهٔ $2x^2-3x-1=0$ باشند، معادلهٔ درجهٔ دوم با ریشه‌های $\{1+\frac{1}{\alpha},1+\frac{1}{\beta}\}$ کدام است؟

۱) $x(x-1)=8$ ۲) $x(x+1)=4$ ۳) $x(x+1)=8$ ۴) $x(x-1)=4$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ خط‌به‌خط ـ استاندارد ـ حسابان ۱ صفحهٔ ۹ ـ ۱۱۰۱)

$$S=\alpha+\beta=\frac{3}{2}\ ,\ P=\alpha\beta=-\frac{1}{2}$$

$$S'=(1+\frac{1}{\alpha})+(1+\frac{1}{\beta})=2+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=2+\frac{\frac{3}{2}}{\frac{-1}{2}}=2-3=-1$$

$$P'=(1+\frac{1}{\alpha})(1+\frac{1}{\beta})=1+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\alpha\beta}=1+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+\frac{1}{\alpha\beta}$$

$$=1+\frac{\frac{3}{2}}{\frac{-1}{2}}+\frac{1}{-\frac{1}{2}}=1-3-2=-4$$

$$\Rightarrow x^2-S'x+P'=0 \Rightarrow x^2+x-4=0 \Rightarrow x(x+1)=4$$

۲۰- سهمی $f(x)=-2mx^2+9x-m$ خط $y=x+2$ را در دو نقطهٔ متمایز قطع می‌کند. m چند مقدار صحیح می‌تواند باشد؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۸

پاسخ: گزینهٔ ۱ (آسان ـ ترکیبی ـ سریع ـ حسابان ۱ صفحهٔ ۱۴ ـ ۱۱۰۱)

از آن‌جا که خط و سهمی دو نقطهٔ تلاقی دارند، پس معادلهٔ حاصل از تلاقی آن‌ها دارای دو ریشهٔ متمایز است. یعنی:

$$-2mx^2+9x-m=x+2 \Rightarrow 2mx^2-8x+m+2=0$$

$$\Delta>0: (-8)^2-4(2m)(m+2)>0 \Rightarrow 64-8m^2-16m>0 \Rightarrow m^2+2m-8<0$$

$$\Rightarrow (m+4)(m-2)<0 \Rightarrow -4<m<2$$

اما توجه کنید که اگر $m=0$ باشد، $f(x)$ سهمی نمی‌باشد.

در نتیجه m می‌تواند اعداد صحیح $-3,-2,-1,1$ باشد که تعداد آن‌ها ۴ تاست.

۲۱- نقاط $A(۵,۲)$ و $B(۳,۴)$ در یک بازتاب محوری تصویر یکدیگرند. کدام‌یک از گزینه‌های زیر، یک نقطهٔ ثابت این تبدیل است؟

۱) $(۵,۳)$ ۲) $(۳,۴)$ ۳) $(۲,۵)$ ۴) $(۴,۳)$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (آسان ـ ترکیبی ـ سریع ـ هندسه ۲ صفحهٔ ۳۶ ـ ۱۱۰۲)

در بازتاب، مجموعه نقاط ثابت تبدیل، همان **محور بازتاب** است یعنی **عمودمنصف پاره‌خط AB**. بنابراین باید معادلهٔ عمودمنصف پاره‌خط AB را به‌دست آوریم.

$$\left.\begin{matrix}A(۵,۲)\\B(۳,۴)\end{matrix}\right\}\Rightarrow m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{۴-۲}{۳-۵}=\frac{۲}{-۲}=-۱$$

بنابراین شیب **عمودمنصف** AB، برابر ۱ است، از طرفی:

$$\text{مختصات نقطهٔ M وسط A و B}: M(\frac{x_A+x_B}{۲},\frac{y_A+y_B}{۲})\Rightarrow M(\frac{۵+۳}{۲},\frac{۲+۴}{۲})=(۴,۳)$$

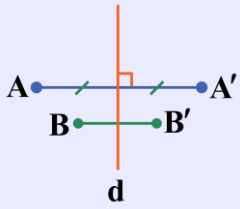
حال معادلهٔ خطی را تشکیل می‌دهیم که شیب آن برابر ۱ باشد و از نقطهٔ $M(۴,۳)$ نیز عبور کند:

$$y=mx+h\Rightarrow y=x-۱$$

بنابراین معادلهٔ محور بازتاب به صورت $y=x-۱$ است و گزینه ای درست است که در معادله این خط صدق کند. با بررسی سایر گزینه‌ها مشخص می‌شود که سایر نقاط در این معادله صدق نمی‌کنند.

بازتاب محوری

تصویر هر نقطه مانند A در بازتاب نسبت به محور d، نقطه‌ای است که فاصله‌اش تا محور d با فاصلهٔ A تا d برابر است و d **عمودمنصف پاره‌خط نقطه و تصویر آن** است. یعنی برای یافتن تصویر A در بازتاب نسبت به خط d، از A بر d عمود می‌کنیم و به اندازهٔ خودش امتداد می‌دهیم.

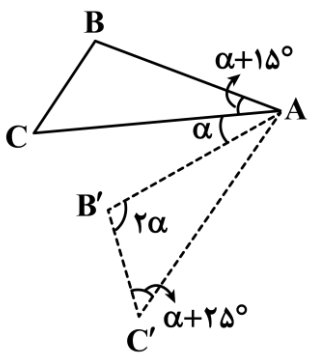


نقطهٔ ثابت تبدیل در بازتاب

اگر نقطهٔ A روی **محور بازتاب** باشد، تصویر آن بر خودش منطبق می‌شود. پس تنها **نقاط ثابت بازتاب** نقاط روی **محور بازتاب** هستند.



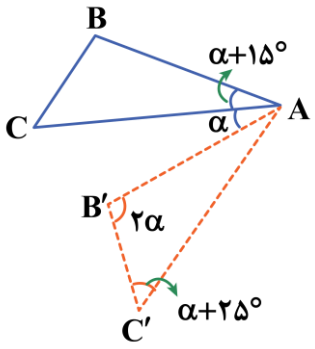
۲۲- در شکل مقابل، مثلث ABC با دوران به مرکز A روی مثلث $AB'C'$ تصویر شده است. زاویهٔ این دوران چند درجه است؟



۱) ۳۵°
۲) ۶۵°
۳) ۸۵°
۴) ۱۰۰°

پاسخ: گزینهٔ ۳ (آسان ـ خط‌به‌خط ـ سریع ـ هندسه ۲ صفحهٔ ۴۱ ـ ۱۱۰۲)

در تبدیل دوران، شکل و دوران یافتهٔ آن با هم **هم‌نهشت** هستند، بنابراین:



$$\overset{\triangle}{ABC} \cong \overset{\triangle}{AB'C'} \Rightarrow B'\hat{A}C' = B\hat{A}C = \alpha + ۱۵$$

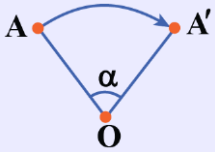
از آن‌جا که مجموع زوایای داخلی مثلث $AB'C'$ ۱۸۰° است:

$$(\alpha+۱۵^\circ)+(۲\alpha)+(\alpha+۲۵^\circ)=۱۸۰^\circ \Rightarrow ۴\alpha+۴۰^\circ=۱۸۰^\circ \Rightarrow ۴\alpha=۱۴۰^\circ \Rightarrow \alpha=۳۵^\circ$$

$$\text{زاویهٔ دوران} = B\hat{A}B' = (\alpha+۱۵^\circ)+\alpha = ۲\alpha+۱۵^\circ = ۷۰^\circ+۱۵^\circ = ۸۵^\circ$$

تبدیل دوران

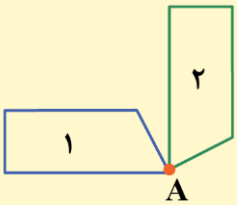
دوران یعنی **چرخاندن** یک شکل حول یک نقطه (مرکز دوران) به اندازهٔ یک زاویه مشخص (زاویهٔ دوران). به عبارت دقیق‌تر دوران به مرکز نقطهٔ ثابت O و زاویهٔ α تبدیلی است که تحت آن تصویر هر نقطه مانند A از صفحه، نقطه‌ای مانند A' از همان صفحه است.



$$\begin{cases} AO = A'O \\ AOA' = \alpha \end{cases}$$

دوران‌یافتهٔ شکل

دوران یافتهٔ هر شکل با شکل اولیه **هم‌نهشت** است. زیرا دوران **طولپاست** و **اندازهٔ زوایا** را نیز حفظ می‌کند.

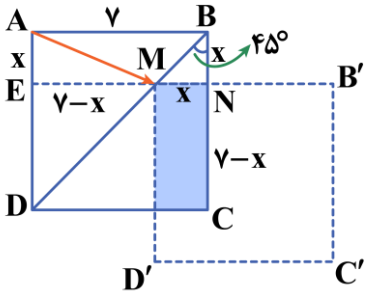


۲۳- نقطهٔ M روی قطر BD از مربع ABCD به ضلع ۷ مفروض‌است. اگر مربع را با بردار $\overrightarrow{AM}$ انتقال دهیم، مساحت ناحیهٔ مشترک بین مربع و تصویرش برابر ۱۲ است. طول بردار انتقال کدام است؟

۱) $۴\sqrt{۲}$ ۲) ۵ ۳) $۲\sqrt{۱۰}$ ۴) ۶

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ هندسه ۲ صفحهٔ ۳۹ ـ ۱۱۰۲)

اگر مربع ABCD با بردار $\overrightarrow{AM}$ منتقل شود، مطابق شکل، ناحیهٔ مشترک بین مربع و تصویرش، یک **مستطیل** است.



مثلث BMN قائم‌الزاویهٔ **متساوی‌الساقین** است.

$$BN = MN = x \Rightarrow NC = ۷ - x$$

$$\text{مساحت ناحیهٔ مشترک} = x(۷-x) = ۱۲$$

$$x^۲ - ۷x + ۱۲ = ۰ \Rightarrow (x-۳)(x-۴) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۳ \\ x = ۴ \end{cases}$$

حال برای به‌دست آوردن طول AM، در مثلث قائم‌الزاویهٔ AEM خواهیم داشت:

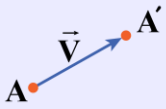
$$AM^۲ = AE^۲ + EM^۲ \Rightarrow AM = \sqrt{x^۲ + (۷-x)^۲} = \sqrt{۹+۱۶} = \sqrt{۲۵} = ۵$$

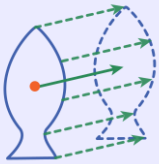
SanjeshCloud

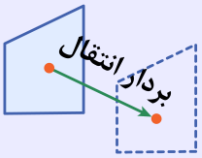
انتقال

انتقال T تحت بردار $\vec{V}$ تبدیلی از صفحه است که در آن، تصویر هر نقطه A از صفحهٔ P، نقطه‌ای مانند A' از همان صفحه است، به‌طوری‌که:

$$\overrightarrow{AA'} = \vec{V}$$







انتقال تبدیلی است که هر نقطه از صفحه را به اندازهٔ بردار $\vec{V}$ جابه‌جا می‌کند.

توجه!

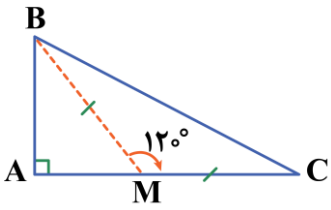
فرقی ندارد که مقدار x برابر با ۳ باشد یا ۴. در هر دو صورت یک مقدار برای AM به‌دست می‌آید و قابل قبول هستند.

۲۴- مثلث ABC با $\hat{A}=۹۰^\circ$ و $AC=\sqrt{۱۲}$ مفروض است. اگر نقطهٔ M واقع بر ضلع AC مرکز دورانی با زاویه ۱۲۰° باشد که نقطهٔ B را روی نقطهٔ C تصویر می‌کند، مساحت مثلث ABC کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۳}$ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) $\sqrt{۳}$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ ترکیبی ـ استاندارد ـ هندسه ۲ صفحهٔ ۴۱ ـ ۱۱۰۲)

چون نقطهٔ M مرکز دورانی است که نقطهٔ B را روی نقطهٔ C تصویر می‌کند، بنابراین: $BM=MC$



از طرفی، چون مثلث BMC در رأس M **متساوی‌الساقین** است، بنابراین $\hat{B}=\hat{C}=۳۰^\circ$، پس:

$$\tan ۳۰^\circ = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۳} = \frac{AB}{\sqrt{۱۲}} \Rightarrow AB = \frac{\sqrt{۳۶}}{۳} = \frac{۶}{۳} = ۲$$

در نتیجه: $S_{\triangle ABC} = \frac{۱}{۲} \times AC \times AB = \frac{۱}{۲} \times \sqrt{۱۲} \times ۲ = \sqrt{۱۲} = ۲\sqrt{۳}$

طولپایی دوران

دوران تبدیلی **طولپاست**. (**طول پاره‌خط‌ها** را **حفظ** می‌کند.)

۲۵- دو نقطهٔ A و A' بازتاب یافتهٔ یکدیگر نسبت به خط d هستند و O نقطه‌ای از خط d است. اگر $AA'=۱۲$ و محیط مثلث AOA' برابر ۳۲ باشد، طول بلندترین ارتفاع این مثلث، کدام است؟

۱) ۹/۶ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۰/۸

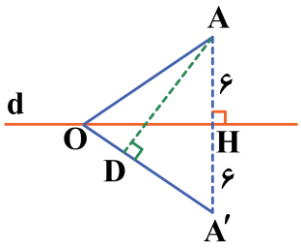
پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ هندسه ۲ صفحهٔ ۳۶ ـ ۱۱۰۲)

روش اول

دو نقطهٔ A و A' **بازتاب** یکدیگر نسبت به خط d هستند، بنابراین خط d **عمودمنصف** پاره‌خط AA' است و با توجه به این‌که $AA'=۱۲$ است، نتیجه می‌شود که $AH=A'H=۶$.

از طرفی نقطهٔ O روی خط d (**عمودمنصف** AA') قرار دارد، پس: $OA = OA' = x$

محیط مثلث $AOA' = ۳۲ \Rightarrow x + x + ۱۲ = ۳۲ \Rightarrow ۲x = ۲۰ \Rightarrow x = ۱۰$



حال در مثلث قائم‌الزاویهٔ OAH طبق قضیهٔ فیثاغورس، داریم:

$$OH^۲ = OA^۲ - AH^۲ \Rightarrow OH = \sqrt{۱۰^۲ - ۶^۲} = \sqrt{۶۴} = ۸$$

می‌دانیم که در یک مثلث، **بلندترین ارتفاع** بر **کوچک‌ترین ضلع** وارد می‌شود، پس با توجه به شکل فوق، بلندترین ارتفاع در مثلث AOA' بر ساق‌های OA یا OA' وارد می‌شود. حال **مساحت** این مثلث را به **دو روش** محاسبه کرده و با هم **برابر** قرار می‌دهیم:

$$\frac{۱}{۲} \times AD \times OA' = \frac{۱}{۲} \times OH \times AA' \Rightarrow AD \times ۱۰ = ۸ \times ۱۲ \Rightarrow AD = \frac{۸ \times ۱۲}{۱۰} = ۹/۶$$

روش دوم (این روش مربوط به بودجهٔ آزمون‌های آینده است.)

در روش قبل مقدار $OA = OA' = ۱۰$ به‌دست آمد، حال با دستور **هرون**، ابتدا مساحت مثلث AOA' را محاسبه می‌کنیم:

$$P = \frac{۳۲}{۲} = ۱۶ \Rightarrow S_{\triangle AOA'} = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} = \sqrt{۱۶ \times (۱۶-۱۰)(۱۶-۱۰)(۱۶-۱۲)} = \sqrt{۱۶ \times ۶ \times ۶ \times ۴}$$

$$\Rightarrow S_{\triangle AOA'} = ۴ \times ۶ \times ۲ = ۴۸$$

بنابراین: $S_{\triangle AOA'} = \frac{۱}{۲} \times AD \times OA' \Rightarrow ۴۸ = \frac{۱}{۲} \times AD \times ۱۰ \Rightarrow AD = \frac{۴۸}{۵} = ۹/۶$

یادآوری!

در یک مثلث، **بلندترین ارتفاع** بر **کوچک‌ترین ضلع** وارد می‌شود و **کوچک‌ترین ارتفاع** بر **بلندترین ضلع**.

۲۶- چه تعداد از گزاره‌های زیر در حالت کلی درست هستند؟

الف) تبدیل طولپایی که شیب همهٔ خط‌ها را نیز حفظ می‌کند، انتقال است.

ب) تبدیلی که با حفظ جهت شکل، می‌تواند شیب تمام خط‌ها را تغییر دهد، دوران است.

ج) تبدیلی که هیچ‌گاه «تبدیل همانی» نمی‌شود، بازتاب است.

د) تبدیل طولپایی که می‌تواند مساحت شکل را تغییر دهد، تجانس است.

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ خط‌به‌خط ـ سریع ـ هندسه ۲ صفحهٔ ۴۸ ـ ۱۱۰۲)

تبدیل‌های **دوران**، **انتقال** و **تجانس** تحت شرایط خاص به تبدیل همانی، مبدل می‌شوند اما بازتاب هیچ‌گاه نمی‌تواند تبدیل همانی شود.

همچنین به جدول زیر توجه کنید:

	طول پاره‌خط را حفظ می‌کند.	اندازهٔ زاویه را حفظ می‌کند.	شیب خط را حفظ می‌کند.	جهت شکل را حفظ می‌کند.	مساحت شکل را حفظ می‌کند.
بازتاب	✓	✓	×	×	✓
انتقال	✓	✓	✓	✓	✓
دوران	✓	✓	×	✓	✓
تجانس	×	✓	✓	✓	×

با توجه به توضیحات و جدول فوق، ۳ گزارهٔ الف، ب و ج درست هستند و گزارهٔ د نادرست است.

دقت!

حفظ طول و **حفظ مساحت** با یکدیگر اتفاق می‌افتند و از بین ۴ تبدیل آشنای ما هیچ کدام وجود ندارند که طول را حفظ کند اما مساحت را حفظ نکند!

تبدیلات هندسی در حالت خاص

دوران **با زاویهٔ ۰° یا مضارب صحیح ۳۶۰°** همان تبدیل همانی است.

انتقال به **بردار صفر** همان تبدیل همانی است.

تجانس مستقیم با **نسبت تجانس $k=1$** همان تبدیل همانی است.

ماز

۲۷- در یک تجانس به مرکز O و نسبت $k=-2$، مثلث ABC به مثلث $A'B'C'$ تبدیل می‌شود. اگر شعاع دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC برابر $\sqrt{2}$ باشد، مساحت دایرهٔ محاطی داخلی مثلث $A'B'C'$ کدام است؟

۱) 2π ۲) 4π ۳) 8π ۴) 16π

پاسخ: گزینهٔ ۳ (آسان ـ مفهومی ـ سریع ـ هندسه ۲ صفحهٔ ۴۷ ـ ۱۱۰۲)

در تجانس، شکل و تصویر آن با هم **متشابه‌اند** و **نسبت تشابه** $|k|$ است، پس:

$$\frac{r'}{r}=|k| \Rightarrow r'=|k|r \xrightarrow[r=\sqrt{2}]{k=-2} r'=2\sqrt{2}$$

بنابراین شعاع دایرهٔ محاطی داخلی مثلث $A'B'C'$ برابر $2\sqrt{2}$ است، پس مساحت آن برابر است با:

$$S'=\pi(r')^2=\pi(2\sqrt{2})^2=8\pi$$

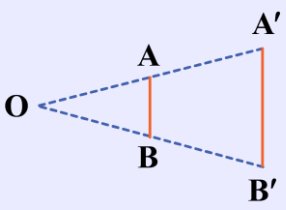
تجانس

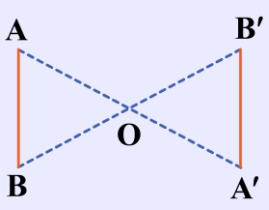
تجانس به مرکز ثابت O و نسبت k، تبدیلی است که در آن هر نقطهٔ M به نقطهٔ N چنان تصویر می‌شود که:

۱) سه نقطهٔ O، M و N روی یک خط راست قرار دارند.

۲) $ON=|k|OM$

۳) اگر $k>0$ باشد، نقاط M و N در یک طرف O قرار دارند (تجانس مستقیم) و اگر $k<0$ باشد، در دو طرف O واقع می‌شوند. (تجانس معکوس).





اگر N مجانس M به مرکز O و نسبت k باشد، آن‌گاه M نیز مجانس N به مرکز O و نسبت $\frac{1}{k}$ است.

دو شکل متجانس

دو شکل متجانس با یکدیگر **متشابه‌اند** و **نسبت تشابه** آن‌ها برابر با $|k|$ است.

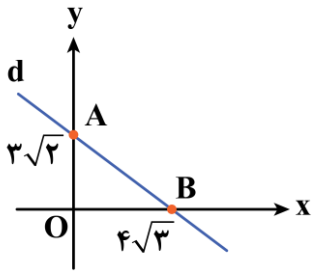
۲۸- خط d محورهای مختصات را در نقاط $A(۰,۳\sqrt{۲})$ و $B(۴\sqrt{۳},۰)$ قطع می‌کند. اگر تصویر خط d در تجانس به مرکز مبدأ مختصات و نسبت تجانس $k=\sqrt{۳}$ خط ℓ باشد، مساحت ناحیهٔ محدود بین دو خط d و ℓ و محورهای مختصات کدام است؟

۱) $۱۲\sqrt{۶}$ ۲) $۱۶\sqrt{۶}$ ۳) $۱۸\sqrt{۶}$ ۴) $۲۴\sqrt{۶}$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ هندسه ۲ صفحهٔ ۴۹ ـ ۱۱۰۲)

روش اول

مطابق شکل مقابل، خط d با محورهای مختصات یک مثلث **قائم‌الزاویه** ایجاد می‌کند که مساحت آن برابر است با:



$$S_۱=\frac{۱}{۲}\times OA\times OB=\frac{۱}{۲}\times ۳\sqrt{۲}\times ۴\sqrt{۳}=۶\sqrt{۶}$$

از طرفی، چون نسبت تجانس $k=\sqrt{۳}$ است، پس مساحت شکل جدید برابر است با:

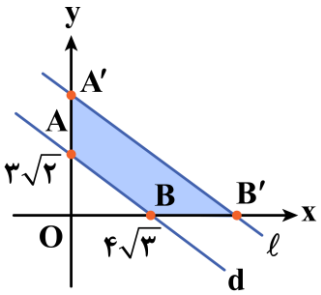
$$\frac{S_۲}{S_۱}=k^۲\Rightarrow S_۲=k^۲S_۱\Rightarrow S_۲=(\sqrt{۳})^۲\times ۶\sqrt{۶}=۳\times ۶\sqrt{۶}=۱۸\sqrt{۶}$$

در نتیجه مساحت ناحیهٔ محصور برابر است با:

$$S=S_۲-S_۱=۱۸\sqrt{۶}-۶\sqrt{۶}=۱۲\sqrt{۶}$$

روش دوم

با توجه به شکل مقابل، ابتدا نقاط برخورد خط ℓ را با محورهای مختصات به‌دست می‌آوریم:



$$\begin{cases}\frac{OA'}{OA}=k=\sqrt{۳}\Rightarrow OA'=\sqrt{۳}\times OA=\sqrt{۳}\times ۳\sqrt{۲}=۳\sqrt{۶}\\ \frac{OB'}{OB}=k=\sqrt{۳}\Rightarrow OB'=\sqrt{۳}\times OB=\sqrt{۳}\times ۴\sqrt{۳}=۱۲\end{cases}$$

مساحت ناحیهٔ رنگی برابر است با:

$$S=S_{\triangle OA'B'}-S_{\triangle OAB}=(\frac{۱}{۲}\times OA'\times OB')-(\frac{۱}{۲}\times OA\times OB)$$

$$S=(\frac{۱}{۲}\times ۳\sqrt{۶}\times ۱۲)-(\frac{۱}{۲}\times ۳\sqrt{۲}\times ۴\sqrt{۳})=۱۸\sqrt{۶}-۶\sqrt{۶}=۱۲\sqrt{۶}$$

نسبت‌های مهم در تجانس

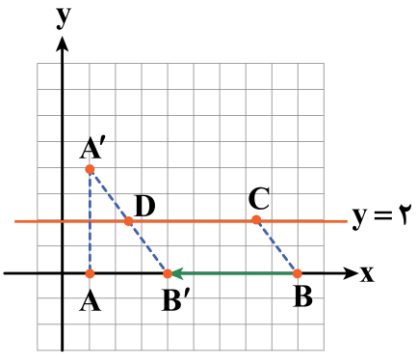
تجانس با نسبت k		
نسبت ضلع تصویر به ضلع اولیه	نسبت محیط تصویر به محیط اولیه	نسبت مساحت تصویر به مساحت اولیه
$\|k\|$	$\|k\|$	$k^۲$

۲۹- نقاط $A(۱,۰)$، $B(۹,۰)$، $C(\alpha,۲)$ و $D(\alpha-۵,۲)$ داده شده‌اند. کمترین مقدار محیط چهارضلعی $ABCD$ کدام است؟ $(\alpha\in\mathbb{R})$

۱) ۲۱ ۲) ۲۰ ۳) ۱۹ ۴) ۱۸

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ هندسه ۲ صفحهٔ ۵۳ ـ ۱۱۰۲)

نقاط C و D با فاصلهٔ ۵ روی خط $y=۲$ قرار دارند. در یک انتقال با بردار به طول ۵ در خلاف جهت محور xها نقطهٔ B روی $B'(۴,۰)$ تصویر می‌شود، پس: $BC=B'D$



در چهارضلعی $ABCD$ اضلاع $AB=۸$ و $CD=۵$، **اندازهٔ ثابت** دارند و **کمترین مجموع** $AD+BC$ با **کمترین مجموع** $AD+DB'$ معادل است، حال نقطهٔ A را نسبت به خط $y=۲$ **بازتاب** می‌دهیم تا به نقطهٔ $A'(۱,۴)$ برسیم، پس:

$$AD+BC=AD+DB' \xrightarrow{AD=A'D} AD+BC=A'D+DB'=A'B'$$

$$A'B'=\sqrt{(AA')^۲+(AB')^۲}=\sqrt{۴^۲+۳^۲}=\sqrt{۱۶+۹}=\sqrt{۲۵}=۵ \Rightarrow AD+BC=۵$$

بنابراین **کمترین** مقدار **محیط** چهارضلعی $ABCD$ برابر است با: $۵+۵+۸=۱۸$

مسئلهٔ هرون

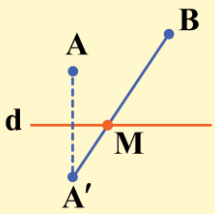
اگر A و B دو نقطهٔ خارج خط d و **در یک طرف آن** باشند و M نقطه‌ای روی خط d باشد. برای یافتن M ای که $MA+MB$ کم‌ترین مقدار باشد از **بازتاب** کمک می‌گیریم.

۱) A' بازتاب A نسبت به خط d را می‌یابیم.

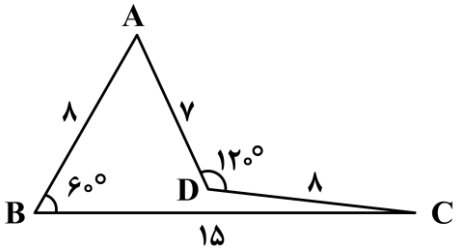
۲) A' را به B وصل می‌کنیم.

۳) محل تلاقی $A'B$ و خط d نقطهٔ M است.

و در نهایت طول $MA+MB$ کمترین مقدار ممکن است.



۳۰- زمینی به شکل مقابل داریم و می‌خواهیم بدون تغییر محیط، مساحت زمین را افزایش دهیم، مساحت کل زمین در حالت جدید چقدر است؟



۱) $۲۸\sqrt{۳}$

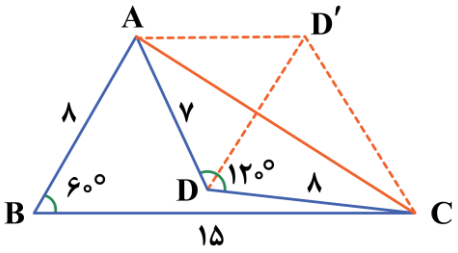
۲) $۳۰\sqrt{۳}$

۳) $۴۴\sqrt{۳}$

۴) $۵۶\sqrt{۳}$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مفهومی/محاسباتی ـ استاندارد ـ هندسه ۲ صفحهٔ ۵۱ ـ ۱۱۰۲)

در **بازتاب** نسبت به AC نقطهٔ D به D' تبدیل شده است، پس:



$$S_{ABCD'} = S_{\overset{\triangle}{ABC}} + S_{\overset{\triangle}{ACD'}}$$

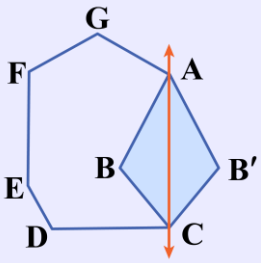
توجه داشته باشید که مساحت مثلث ACD' با مساحت مثلث ADC برابر است.

$$\begin{cases} S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{۱}{۲} \times AB \times BC \times \sin \hat{B} = \frac{۱}{۲} \times ۸ \times ۱۵ \times \sin ۶۰^\circ = ۴ \times ۱۵ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۳۰\sqrt{۳} \\ S_{\overset{\triangle}{ACD'}} = S_{\overset{\triangle}{ADC}} = \frac{۱}{۲} \times AD \times DC \times \sin \hat{D} = \frac{۱}{۲} \times ۷ \times ۸ \times \sin ۱۲۰^\circ = ۲۸ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۱۴\sqrt{۳} \end{cases}$$

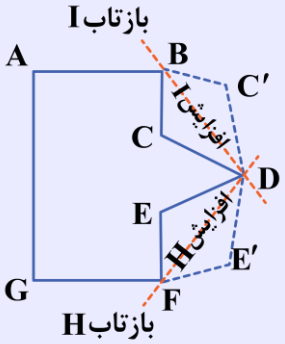
$$S_{ABCD'} = ۳۰\sqrt{۳} + ۱۴\sqrt{۳} = ۴۴\sqrt{۳}$$

مسائل هم‌پیرامونی = افزایش مساحت بدون تغییر محیط

اگر بخواهیم مساحت شکل را بدون تغییر محیط آن افزایش دهیم از **بازتاب** استفاده می‌کنیم. این مسئله به مسئلهٔ هم‌پیرامونی مشهور است.
میزان افزایش مساحت مطابق شکل به اندازهٔ دو برابر مساحت مثلث ABC است.



اگر شکلی دارای چندین فرورفتگی باشد، با چند بار استفاده از بازتاب می‌توانیم با ثابت ماندن محیط، مساحت را افزایش دهیم.



رفع ابهام!

کمی هم از حسابان تو هندسه استفاده کنیم!

$$\sin ۱۲۰^\circ = \sin(۹۰^\circ + ۳۰^\circ) = \cos ۳۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

SanjeshCloud

۳۱- یک موتور سوار، در ایستگاه منتظر می‌ماند تا حداکثر ۲ مسافر سوار کند، البته ممکن است با کمتر از ۲مسافر هم حرکت کند. در مسیر برگشت هم همین اتفاق می‌افتد. فضای نمونه برای توصیف چنین پدیده‌ای، اگر فقط تعداد مسافرها در دو مسیر رفت و برگشت برای ما مهم باشد، چند عضو دارد؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۹

پاسخ: گزینهٔ ۴ (آسان ـ خط‌به‌خط ـ سریع ـ آمار و احتمال صفحهٔ ۴۰ ـ ۱۱۰۲)

چون فقط تعداد مسافرها در مسیر رفت و برگشت اهمیت دارد، بنابراین در هر مسیر حالت‌های زیر ممکن است:

• صفر مسافر • ۱ مسافر • ۲ مسافر

پس برای مسیر **رفت**، **۳ حالت** و برای مسیر **برگشت** هم، **۳ حالت** وجود دارد، بنابراین فضای نمونه به صورت زیر خواهد بود:

$$S=\underbrace{\{۰,۱,۲\}}_{\text{رفت}}\times\underbrace{\{۰,۱,۲\}}_{\text{برگشت}}\Rightarrow n(S)=۳\times۳=۹$$

فضای نمونه‌ای

به مجموعهٔ **تمام حالت‌های ممکن** برای **رخداد یک پیشامد** فضای نمونه‌ای می‌گویند و آن را با S نمایش می‌دهند.

چند نمونهٔ باحال ببین!

۱) فضای نمونه‌ای پرتاب یک سکه:

$$\{پ,ر\}$$

۲) فضای نمونه‌ای پرتاب یک تاس و یک سکه:

$$\{(۱,ر),(۲,ر),(۳,ر),(۴,ر),(۵,ر),(۶,ر),(۱,پ),(۲,پ),(۳,پ),(۴,پ),(۵,پ),(۶,پ)\}$$

۳۲- از بین اعداد طبیعی دو رقمی عددی را به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال آن‌که عدد انتخاب شده مضرب ۸ نباشد، یا مضرب ۶ باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۶۷}{۹۰}$ ۲) $\frac{۸۴}{۹۰}$ ۳) $\frac{۸۳}{۹۰}$ ۴) $\frac{۷۶}{۹۰}$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ آمار و احتمال صفحهٔ ۴۳ ـ ۱۱۰۲)

پیشامدهای A و B را به صورت مقابل تعریف می‌کنیم:

$A=\{$عدد انتخاب شده مضرب ۸ باشد$\}$

$B=\{$عدد انتخاب شده مضرب ۶ باشد$\}$

ما به دنبال تعداد حالت‌هایی هستیم که عدد انتخاب شده مضرب ۸ نباشد یا مضرب ۶ باشد، پس:

$$n(A'\cup B)=n(S)-n(A-B)=n(S)-\big(n(A)-n(A\cap B)\big)=n(S)-n(A)+n(A\cap B)$$

از طرفی تعداد کل اعداد دو رقمی برابر ۹۰ تا است، پس:

$$n(S)=۹۰$$

$$n(A)=\left[\frac{۹۹}{۸}\right]-\left[\frac{۹}{۸}\right]=۱۲-۱=۱۱$$

$$n(A\cap B)=\left[\frac{۹۹}{۲۴}\right]-\left[\frac{۹}{۲۴}\right]=۴$$

$$n(A'\cup B)=n(S)-n(A)+n(A\cap B)=۹۰-۱۱+۴=۸۳$$

بنابراین احتمال مطلوب برابر است با:

$$P(A'\cup B)=\frac{n(A'\cup B)}{n(S)}=\frac{۸۳}{۹۰}$$

یک تیپ مسئلهٔ معروف!

در برخی مسائل احتمال دربارهٔ **بخش‌پذیری** یا **عدم بخش‌پذیری** اعداد بر اعدادی خاص و مشخص از ما سؤال می‌شود. در این‌گونه مسائل هر پیشامد را نظیر بخش‌پذیر بودن بر یکی از اعداد مفروض تعریف می‌کنیم و سپس با **تبدیل خواستهٔ مسئله به زبان مجموعه‌ها**، پیشامد مطلوب را مشخص می‌کنیم.

توجه!

اعدادی که بر هر دو عدد a و b بخش‌پذیرند اعدادی هستند که بر **ک.م.م** آن‌ها بخش پذیرند.

یه نمونهٔ باحال ببین!

اعداد بخش‌پذیر بر ۷ و ۱۱ اعدادی هستند که بر ۷۷ بخش‌پذیر باشند.

اعداد بخش‌پذیر بر ۶ و ۱۵ اعدادی هستند که بر ۳۰ بخش‌پذیرند.

تعداد اعداد بخش‌پذیر بر n

تعداد اعداد بخش‌پذیر بر n در مجموعهٔ $\{۱,۲,...,m\}$ برابر است با:

$$\left[\frac{m}{n}\right]$$

[ ] نماد جزء صحیح است.

۳۳- تاسی به گونه‌ای ساخته شده است که احتمال ظاهر شدن هر عدد، با تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت آن عدد متناسب است. تاس را یک بار پرتاب می‌کنیم، با کدام احتمال عدد اول ظاهر می‌شود؟

۱) $\frac{۳}{۷}$ ۲) $\frac{۱۳}{۲۸}$ ۳) $\frac{۵}{۶}$ ۴) $\frac{۲}{۷}$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ آمار و احتمال صفحهٔ ۴۶ ـ ۱۱۰۲)

می‌دانیم که احتمال ظاهر شدن هر عدد با تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت آن عدد متناسب است، پس:

عدد	۱	۲	۳	۴	۵	۶
تعداد مقسوم‌های مثبت	۱	۲	۲	۳	۲	۴

حال اگر **ضریب تناسب** را **k** فرض کنیم، خواهیم داشت:

$$P(۱)+P(۲)+P(۳)+P(۴)+P(۵)+P(۶)=۱$$

$$k+۲k+۲k+۳k+۲k+۴k=۱\Rightarrow ۱۴k=۱\Rightarrow k=\frac{۱}{۱۴}$$

بنابراین احتمال ظاهر شدن عدد اول برابر است با:

$$P(\text{عدد اول})=P(۲)+P(۳)+P(۵)=۲k+۲k+۲k=۶k=۶(\frac{۱}{۱۴})=\frac{۶}{۱۴}=\frac{۳}{۷}$$

فضای احتمال غیرهم‌شانس

یک فضای احتمال را **فضای احتمال غیرهم‌شانس** گوییم، اگر حداقل دو پیشامد ساده (پیشامد تک عضوی) از فضای نمونه احتمالشان با یکدیگر برابر نباشد. همچنین **مجموع احتمال همهٔ پیشامدهای تک‌عضوی برابر با ۱** است و از این‌جا می‌توان احتمال هر پیشامد را به‌دست آورد.

اما در **فضای احتمال هم‌شانس** احتمال رخ دادن هر کدوم از پیشامدهای تک‌عضوی برابر و مساوی با $\frac{۱}{n(S)}$ است.

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۳۴- سه تاس سالم را با هم پرتاب می‌کنیم. اگر مجموع اعداد ظاهر شده روی سه تاس ۱۳ باشد، احتمال آن‌که دقیقاً دو تاس عدد ۶ را نشان دهند، چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۷}$ ۲) $\frac{۲}{۷}$ ۳) $\frac{۳}{۷}$ ۴) $\frac{۴}{۷}$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ آمار و احتمال صفحهٔ ۴۹ ـ ۱۱۰۲)

ابتدا **فضای نمونه‌ای محدود شده** را می‌نویسیم و از داخل آن مطلوب سؤال را مشخص می‌کنیم:

تعداد حالت‌های دو تاس دیگر	مجموع دو تاس دیگر	تاس اول
۱	۱۲	۱
۲	۱۱	۲
۳	۱۰	۳
۴	۹	۴
۵	۸	۵
۶	۷	۶
مجموع حالت‌ها: ۲۱		

از طرفی از بین این ۲۱ حالت، تنها حالت‌های (۱,۶,۶), (۶,۱,۶), (۶,۶,۱) مطلوب مسئله هستند، پس $n(A)=۳$ است و احتمال موردنظر برابر است با:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۳}{۲۱}=\frac{۱}{۷}$$

احتمال

اگر S مجموعهٔ همهٔ حالت‌های ممکن برای یک آزمایش تصادفی باشد، آن را فضای نمونه‌ای می‌نامیم و $n(S)$ تعداد اعضای آن است. حال اگر $A \subseteq S$ باشد A را یک **پیشامد** از S می‌گوییم و احتمال وقوع آن برابر است با:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$$

فضای نمونهٔ کاهشی

اگر آزمایش تحت شرایط خاص انجام شده باشد یا بدانیم طیف محدودی از حالت‌ها ممکن است اتفاق بیفتد، با **محدود کردن فضای نمونه‌ای** به همان حالات و شرایط خاص، اعضای آن را کاهش می‌دهیم.

۳۵- یک تیم والیبال ۷ عضو دارد که قد هیچ دو نفری با هم برابر نیست. یک نفر را به تصادف انتخاب کرده و سپس دو نفر دیگر از میان افراد باقی‌مانده انتخاب می‌کنیم. اگر بدانیم قد هر دو نفر دیگر از فرد اول کوتاه‌تر است. احتمال آن‌که نفر اولی که انتخاب کرده‌ایم، دومین بازیکن قد بلند تیم باشد، چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۷}$ ۲) $\frac{۲}{۷}$ ۳) $\frac{۳}{۷}$ ۴) $\frac{۴}{۷}$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ آمار و احتمال صفحهٔ ۵۱ ـ ۱۱۰۲)

چون قد هیچ دو نفری با هم برابر نیست، در هر گروه ۳ نفره دقیقاً ۱ نفر بلندترین فرد است پس تعداد کل حالات ممکن برابر است با:

$$n(S)=\binom{۷}{۳}$$

از طرفی برای این‌که «نفر اول» یعنی همان بلندترین فرد گروه ۳ نفره در واقع دومین نفر قد بلند کل تیم باشد، باید:

۱) **نفر اول** انتخاب شده، **دقیقاً نفر دوم** از نظر قد باشد. (**چون فقط یک نفر از او بلندتر است.**)

۲) **دو نفر دیگر** باید **از بین ۵ نفری که از نفر دوم کوتاه‌تر هستند**، انتخاب شوند.

پس تعداد حالات مطلوب برابر است با:

$$n(A)=\binom{۵}{۲}$$

و در نهایت احتمال موردنظر:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\binom{۵}{۲}}{\binom{۷}{۳}}=\frac{\frac{۵\times۴}{۲}}{\frac{۷\times۶\times۵}{۳\times۲\times۱}}=\frac{۱۰}{۳۵}=\frac{۲}{۷}$$

احتمال شرطی

اگر B پیشامدی باشد که احتمال وقوع آن ناصفر است، پیشامد «**وقوع A به شرط وقوع B**» را با $A|B$ نشان می‌دهیم و احتمال آن به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

۳۶- در کیسه‌ای ۵ مهرهٔ قرمز و ۳ مهرهٔ آبی وجود دارد. هر بار یک مهره را از کیسه خارج می‌کنیم، اگر مهرهٔ خارج شده، آبی باشد، آن را به همراه دو مهرهٔ آبی دیگر به کیسه باز می‌گردانیم و اگر مهرهٔ خارج شده قرمز باشد، آن را به کیسه بازنمی‌گردانیم. به این صورت سه مهره را به طور متوالی از کیسه خارج می‌کنیم با کدام احتمال در این آزمایش فقط مهرهٔ اول خارج شده به رنگ آبی است؟

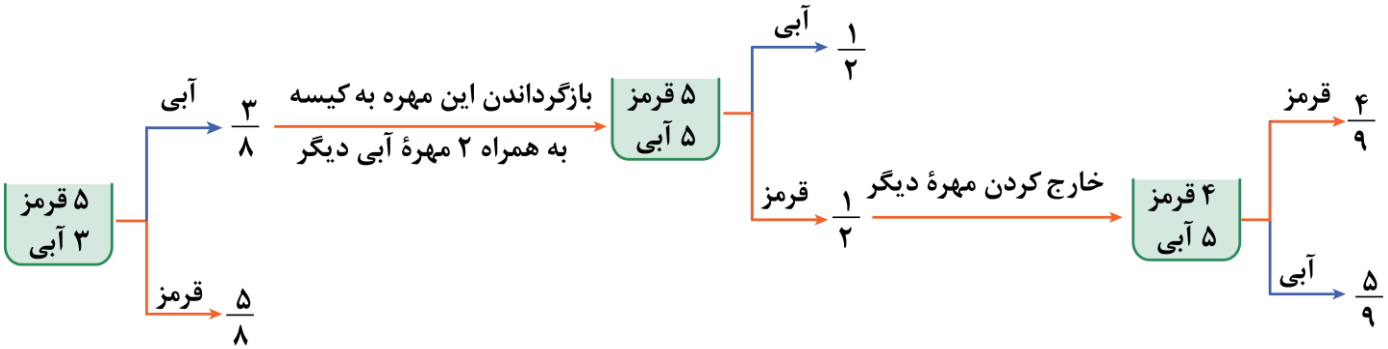
۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۴}{۹}$ ۳) $\frac{۱}{۱۲}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ آمار و احتمال صفحهٔ ۵۳ ـ ۱۱۰۲)

احتمال این‌که فقط مهرهٔ اول آبی باشد، به این معنی است که دنبالهٔ رنگ‌ها باید به صورت (قرمز، قرمز، آبی) باشد، از طرفی می‌دانیم که:

اگر مهره آبی باشد، آن را به همراه دو مهرهٔ آبی به کیسه برمی‌گردانیم.

اگر مهره قرمز باشد، آن را به کیسه برنمی‌گردانیم. پس:



توجه داشته باشید که برای رسیدن به مطلوب مسئله، باید مسیر (قرمز ← قرمز ← آبی) را طی کنیم، بنابراین احتمال مطلوب برابر است با:

$$P(\text{مطلوب})=\frac{۳}{۸}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۴}{۹}=\frac{۱}{۱۲}$$

قانون ضرب احتمال

برای محاسبهٔ احتمال رخداد همزمان دو پیشامد A و B با استفاده از احتمال شرطی به‌دست می‌آید:

$$P(A\cap B)=P(B)\times P(A|B)$$

که به **قانون ضرب احتمال** معروف است. تعمیم آن برای ۳ پیشامد A، B و C به‌صورت زیر است:

$$P(A\cap B\cap C)=P(A)\times P(B|A)\times P(C|A\cap B)$$

۳۷- در ظرف A، ۳ مهرهٔ آبی و ۳ مهرهٔ قرمز، در ظرف B، ۶ مهرهٔ آبی و ۳ مهرهٔ قرمز و در ظرف C تعدادی مهرهٔ قرمز وجود دارد. از هر یک از ظرف‌های A، B و C دو مهره به طور تصادفی و بدون جایگذاری خارج کرده و در ظرف D قرار می‌دهیم، سپس یک مهره را به طور تصادفی از ظرف D خارج می‌کنیم. احتمال آن‌که این مهره قرمز باشد، چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۹}$ ۴) $\frac{۱۱}{۱۸}$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ آمار و احتمال صفحهٔ ۵۵ ـ ۱۱۰۲)

روش اول

مهره‌ای که از ظرف D خارج می‌شود از یکی از ظرف‌های A، B و C آمده است، چون از هر ظرف دقیقاً ۲ مهره وارد ظرف D شده است، احتمال این‌که مهرهٔ انتخابی از هر ظرف آمده باشد، برابر است با:

$$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$$

حال احتمال قرمز بودن مهره را در هر حالت محاسبه می‌کنیم:

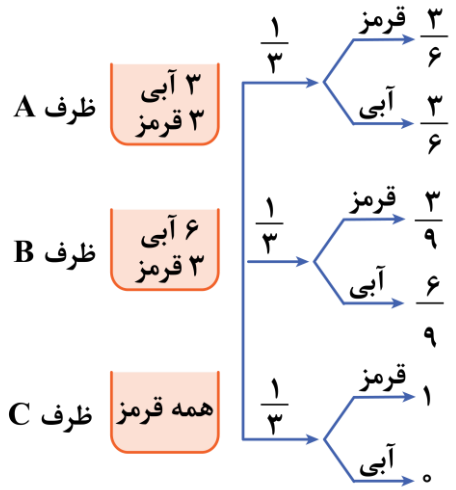
$$P(\text{قرمز}|A)=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}$$
$$P(\text{قرمز}|B)=\frac{۳}{۹}=\frac{۱}{۳}$$
$$P(\text{قرمز}|C)=۱$$

حال طبق قانون احتمال کل، داریم:

$$P(\text{قرمز})=P(A)P(\text{قرمز}|A)+P(B)P(\text{قرمز}|B)+P(C)P(\text{قرمز}|C)$$
$$P(\text{قرمز})=(\frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{۲})+(\frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{۳})+(\frac{۱}{۳}\times۱)=\frac{۱}{۳}\left[\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+۱\right]=\frac{۱}{۳}\times\frac{۱۱}{۶}=\frac{۱۱}{۱۸}$$

روش دوم

نمودار درختی:



احتمال قرمز بودن مهرهٔ انتخاب شده **مجموع احتمال مسیرهای منتهی به قرمز** است.

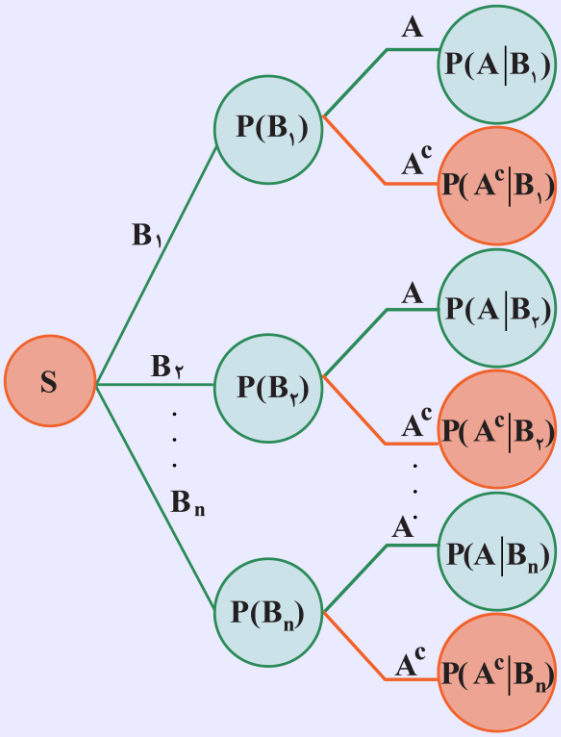
$$P(\text{قرمز}) = (\frac{۱}{۳} \times \frac{۳}{۶}) + (\frac{۱}{۳} \times \frac{۳}{۹}) + (\frac{۱}{۳} \times ۱) = \frac{۱۱}{۱۸}$$

قانون احتمال کل

در مسائل مربوط به قانون احتمال کل می‌خواهیم احتمال وقوع پیشامدی مانند A را به‌دست آوریم به‌طوری که وقوع این پیشامد به پیشامدهای $B_۱, B_۲, B_۳, ..., B_n$ وابسته است، یعنی ممکن است $B_۱$ رخ داده باشد و A رخ دهد یا $B_۲$ رخ داده باشد و A رخ دهد یا ... و در نهایت این احتمال‌ها را با هم جمع می‌کنیم. به این فرآیند «قانون احتمال کل» می‌گوییم.

$$P(A) = P(B_۱) \times P(A|B_۱) + P(B_۲) \times P(A|B_۲) + ... + P(B_n) \times P(A|B_n)$$

استفاده از رسم نمودار درختی برای احتمال کل:



اعداد یک مسیر سبز افقی را در هم **ضرب** کرده و سپس **مجموع** اعداد تمام شاخه‌ها را به‌دست می‌آوریم.

۳۸- خانواده‌ای ۳ فرزند دارد. به تصادف یکی از فرزندان را انتخاب می‌کنیم و می‌بینیم که خواهر بزرگ‌تر از خود دارد. با کدام احتمال او کوچک‌ترین فرزند خانواده است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (سخت ـ مفهومی ـ زمان‌بر ـ آمار و احتمال صفحهٔ ۵۸ ـ ۱۱۰۲)

پیشامدهای A و B را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

A: فرزند انتخاب‌شده **خواهر بزرگ‌تر از خود داشته باشد.**

B_i ; $i=۱,۲,۳$: فرزند iام خانواده انتخاب شده باشد.

چون یکی از سه فرزند را به‌طور تصادفی انتخاب می‌کنیم، پس:

$$P(B_۱)=P(B_۲)=P(B_۳)=\frac{۱}{۳}$$

$B_۱$: بزرگ‌ترین فرزند — $B_۳$: کوچک‌ترین فرزند

حال به بررسی حالت‌های ممکن می‌پردازیم:

فرزند اول، هیچ خواهری بزرگ‌تر از خود ندارد، پس: $P(A|B_۱)=۰$

فرزند دوم، خواهر بزرگ‌تر از خود دارد هرگاه فرزند اول دختر باشد، پس: $P(A|B_۲)=\frac{۱}{۲}$

فرزند سوم، خواهر بزرگ‌تر از خود دارد، هرگاه **حداقل یکی** از دو فرزند بزرگ‌تر دختر باشد، پس:

$$P(A|B_۳)=۱-P(\text{هر دو فرزند بزرگ‌تر پسر باشند})=۱-(\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲})=\frac{۳}{۴}$$

بنابراین:

$$P(A)=P(B_۱)P(A|B_۱)+P(B_۲)P(A|B_۲)+P(B_۳)P(A|B_۳)$$

$$P(A)=(\frac{۱}{۳}\times ۰)+(\frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{۲})+(\frac{۱}{۳}\times\frac{۳}{۴})=\frac{۱}{۳}(\frac{۱}{۲}+\frac{۳}{۴})=\frac{۱}{۳}\times\frac{۵}{۴}=\frac{۵}{۱۲}$$

در نتیجه:

$$P(B_۳|A)=\frac{P(B_۳\cap A)}{P(A)}=\frac{P(B_۳)\times P(A|B_۳)}{P(A)}$$

$$P(B_۳|A)=\frac{\frac{۱}{۳}\times\frac{۳}{۴}}{\frac{۵}{۱۲}}=\frac{\frac{۱}{۴}}{\frac{۵}{۱۲}}=\frac{۱۲}{۲۰}=\frac{۳}{۵}$$

قانون بیز

قانون بیز در واقع فرم شرطی احتمال کل است، یعنی چند **تصادف پی‌درپی** رخ داده و نتیجه مشاهده شده است. حال می‌خواهیم بررسی کنیم **ریشهٔ** این اتفاق **به کدام‌یک از اتفاق‌های اولیه** برمی‌گردد و هر کدام چند درصد در اتفاقی که افتاده، تاثیرگذار بوده‌اند. فرمول این احتمال همان فرمول احتمال شرطی است ولی باید ابتدا مخرج کسر را به وسیلهٔ **احتمال کل** و نمودار درختی پیدا کنیم.

یعنی اگر $B_۱, B_۲ \text{و} \dots B_n$ پیشامدهایی با احتمال ناصفر باشند، که فضای نمونه را افراز می‌کنند، در این‌صورت برای هر پیشامد دلخواه A و هر $۱\le i\le n$ داریم:

$$P(B_i|A)=\frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\underbrace{P(B_۱)P(A|B_۱)+\dots+P(B_n)P(A|B_n)}_{P(A)\text{احتمال کل}}}$$

توجه داریم که در قانون بیز، صورت کسر بخشی از همان محاسبه‌ای است که در مخرج کسر برای قانون احتمال کل انجام داده‌ایم.

SanjeshCloud

۳۹- احتمال موفقیت عمل پیوند کلیه برای بیمار A، برابر ۰/۴ و احتمال موفقیت این عمل برای بیمار B برابر ۰/۵ است. اگر عمل پیوند کلیه برای هر دو بیمار انجام شود، احتمال آن‌که این عمل برای حداقل یکی از آن‌ها موفقیت‌آمیز باشد، چقدر است؟

۱) ۰/۳ ۲) ۰/۵ ۳) ۰/۷ ۴) ۰/۸

پاسخ: گزینهٔ ۳ (آسان ـ خط‌به‌خط ـ سریع ـ آمار و احتمال صفحهٔ ۶۴ ـ ۱۱۰۲)

روش اول

دو پیشامد **مستقل** هستند، حال اگر $P(A)$ احتمال موفقیت عمل برای بیمار A و $P(B)$ احتمال موفقیت عمل بیمار B باشد، خواهیم داشت:

$$P(\text{حداقل یک موفقیت}) = 1 - P(\text{هر دو ناموفق}) = 1 - [P(A')P(B')]$$

از آن‌جا که A' و B' نیز **مستقل** هستند داریم:

$$1 - [P(A')P(B')] = 1 - \left[(1-\frac{4}{10})(1-\frac{1}{2})\right] = 1 - (\frac{6}{10}\times\frac{1}{2}) = 1 - \frac{3}{10} = 0/7$$

روش دوم

احتمال موفقیت عمل برای **حداقل یکی** از آن‌ها، همان $P(A\cup B)$ است و می‌دانیم که:

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$$

با توجه به مستقل بودن دو پیشامد، $P(A\cap B) = P(A)P(B)$ است، پس:

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = 0/4 + 0/5 - (0/4\times 0/5) = 0/9 - 0/2 = 0/7$$

پیشامدهای وابسته و مستقل

دو پیشامد وابسته پیشامدهایی هستند که **احتمال وقوع یکی بر احتمال وقوع یا عدم وقوع دیگری اثرگذار** است. مانند خارج‌کردن پی‌درپی و **بدون جای‌گذاری** اشیاء از یک کیسه. زیرا وقتی پس از خارج کردن یک شیء آن را به کیسه **برنگردانیم** دیگر فضای احتمال داخل کیسه مانند گذشته **نیست** و باید در فضای جدید، احتمال خارج‌شدن هر شیء از اشیاء باقی‌مانده را حساب کنیم. برای محاسبهٔ احتمال رخداد هر دو پیشامد وابسته از **قانون ضرب احتمال** استفاده می‌کنیم:

$$P(A\cap B) = P(B)\times P(A|B)$$

دو پیشامد مستقل، پیشامدهایی هستند که **احتمال وقوع یکی بر احتمال وقوع یا عدم وقوع دیگری اثرگذار نباشد**. مانند خارج‌کردن پی‌درپی و **با جای‌گذاری** اشیاء از یک کیسه. زیرا وقتی پس از خارج کردن یک شیء آن را به کیسه **برگردانیم** فضای احتمال همچنان **مانند گذشته** خواهد بود و هیچ فرقی بین احتمال یک پیشامد در پیش از برداشت و جای‌گذاری یا بعد از آن ایجاد نمی‌شود. برای محاسبهٔ احتمال رخداد دو پیشامد مستقل نیز از قانون ضرب احتمال استفاده می‌شود با این تفاوت که چون دو پیشامد تأثیری بر هم ندارند، داریم:

$$A \text{ و } B \text{ مستقل باشند.} \Rightarrow P(A|B) = P(A)$$

و **قانون ضرب احتمال** به‌صورت زیر **ساده‌تر** می‌شود:

$$P(A\cap B) = P(B)\times P(A)$$

استقلال پیشامدها

اگر A و B دو پیشامد **مستقل** باشند، جفت پیشامدهای زیر نیز مستقل هستند:

۱) A و B'

۲) A' و B

۳) A' و B'

۴۰- در فضای نمونه‌ای S، برای دو پیشامد A و B رابطهٔ $P(A-B)=P(A)P(B')$ برقرار است. اگر $P(A)=۰/۶$ و $P(A'\cap B')=۰/۲$ باشد، مقدار $P(A'\cup B)$ کدام است؟

۱) ۰/۳ ۲) ۰/۵ ۳) ۰/۷ ۴) ۰/۸

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ آمار و احتمال صفحهٔ ۶۴ ـ ۱۱۰۲)

می‌دانیم که $P(A-B)=P(A)P(B')$ است، پس به کمک **تبدیل تفاضل به اشتراک** داریم:

$$P(A\cap B')=P(A)P(B')\Rightarrow A \text{ و } B' \text{ مستقل‌اند} \Rightarrow A' \text{ و } B' \text{ نیز مستقل‌اند}$$

$$P(A'\cap B')=۰/۲\Rightarrow P(A')P(B')=۰/۲\xrightarrow[P(A')=۰/۴]{P(A)=۰/۶}۰/۴\times P(B')=۰/۲\Rightarrow P(B')=۰/۵\Rightarrow P(B)=۰/۵$$

روش اول

حال به سراغ خواستهٔ سؤال می‌رویم:

$$P(A'\cup B)=P(A')+P(B)-\underbrace{P(A'\cap B)}_{P(A')P(B)}$$

$$P(A'\cup B)=۰/۴+۰/۵-(۰/۴\times ۰/۵)=۰/۹-۰/۲=۰/۷$$

روش دوم

به کمک قانون **دمورگان**، داریم:

$$P(A'\cup B)=P\big((A\cap B')'\big)=۱-\underbrace{P(A\cap B')}_{P(A-B)}=۱-P(A)P(B')$$

$$P(A'\cup B)=۱-(۰/۶\times ۰/۵)=۱-۰/۳=۰/۷$$

بودجه‌بندی این آزمون

فیزیک ۱: فصل ۲ - ویژگی‌های فیزیکی مواد (تا ابتدای فشارسنج هوا (بارومتر)) (صفحه‌های ۲۳ تا ۳۷) یادگیری عمیق
فیزیک ۲: فصل ۲ - جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم (صفحه‌های ۴۵ تا ۸۲) مرور و جمع‌بندی

سهم در کنکور

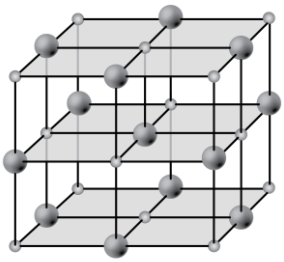
پایهٔ دهم: درمجموع ۱ تست از ۳۵ تست کنکور را پوشش داده است.
پایهٔ یازدهم: درمجموع ۳ یا ۴ تست از ۳۵ تست کنکور را پوشش داده است.

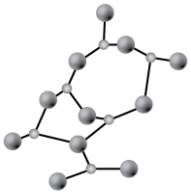
برای دیدن پاسخ‌نامهٔ ویدئویی آزمون بالا را اسکن یا روی آن کلیک کنید! QR Code

فیزیک دهم (بخش انتخابی)

۴۱- ساختارهای نشان‌داده‌شده در شکل‌های «الف» و «ب» به‌ترتیب از راست به چپ، مربوط به کدام مواد می‌توانند باشند؟

۱) شیشه، یخ
۲) نمک، شیشه
۳) یخ، الماس
۴) الماس، نمک


«الف»


«ب»

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ خط‌به‌خط ـ سریع ـ صفحهٔ ۲۴ ـ ۱۰۰۲)

اتم‌های برخی از جامدها در طرح‌های منظمی مانند شکل «الف» قرار می‌گیرند. این جامدهایی را که در یک الگوی سه‌بعدی تکرارشونده از این واحدهای منظم ساخته می‌شوند، جامدهای بلورین می‌نامیم. فلزها، نمک‌ها، الماس، یخ و بیش‌تر مواد معدنی جزو جامدهای بلورین‌اند.

ذرات سازندهٔ جامدهای بی‌شکل (آمورف) برخلاف جامدهای بلورین، در طرح‌های منظمی کنار هم قرار ندارند (شکل «ب»). وقتی مایعی به‌سرعت سرد شود معمولاً جامد بی‌شکل به‌وجود می‌آید. شیشه مثالی از یک جامد بی‌شکل است.

راهنمای مسیرت

طرح سؤال از متن و شکل‌های کتاب درسی سال‌هاست که توی کنکور جا افتاده و ما هم حواسمون بهش هست. باور کنید اگه یک دور خط‌به‌خط کتاب درسی رو دقیق بخونین، به‌راحتی می‌تونین به این تیپ سؤال‌ها جواب بدین.

حالت جامد

جسم جامد حجم و شکل معینی دارد. برای درک بهتر ساختار جسم جامد فرض می‌کنند ذرات آن توسط فنرهایی به یکدیگر متصل هستند. اگر این ذرات نسبت به وضع تعادلشان به‌هم نزدیک‌تر یا از هم دورتر شوند، نیروی کشسانی بین فنرها آن‌ها را به وضع تعادل برمی‌گرداند و جسم جامد شکل و اندازهٔ اولیه‌اش را حفظ می‌کند. جامدات به دو دستهٔ ۱- جامد بلورین و ۲- جامد بی‌شکل (آمُورف) تقسیم می‌شوند.

۱- جامد بلورین: جامدهایی را که در یک الگوی سه‌بعدی تکرارشونده از واحدهای منظم ساخته می‌شوند، جامد بلورین می‌نامیم. فلزها، نمک‌ها، الماس، یخ و بیش‌تر مواد معدنی جزء جامدهای بلورین هستند. وقتی مایعی را به آهستگی سرد کنیم، اغلب جامدهای بلورین تشکیل می‌شوند. در این فرایند سردسازی آرام، ذرات سازندهٔ مایع فرصت کافی دارند تا در طرح‌های منظم خود را مرتب کنند.

۲- جامد بی‌شکل (آمُورف): ذرات سازندهٔ جامدهای بی‌شکل برخلاف جامدهای بلورین، در طرح‌های منظم کنار هم قرار ندارند. وقتی مایعی به‌سرعت سرد شود، معمولاً جامد بی‌شکل به‌وجود می‌آید. در این فرایند سردسازی سریع، ذرات سازندهٔ مایع فرصت کافی ندارند تا در طرحی منظم مرتب شوند. شیشه مثالی از یک جامد بی‌شکل است.

یه نمونهٔ باحال

آهن، شیشه، نمک طعام و یخ به‌ترتیب از راست به چپ جزء کدام دسته از جامدها هستند؟

۱) بلورین، بی‌شکل، بلورین، بی‌شکل
۲) بلورین، بی‌شکل، بلورین، بلورین
۳) بلورین، بلورین، بی‌شکل، بی‌شکل
۴) بلورین، بی‌شکل، بی‌شکل، بلورین

پاسخ تشریحی:

فلزها، نمک‌ها، الماس، یخ و بیش‌تر مواد معدنی جزء جامدهای بلورین هستند. شیشه مثالی از یک جامد بی‌شکل است.

پاسخ: گزینهٔ ۲

ماز

۴۲- چه تعداد از موارد زیر، مربوط به پدیدهٔ کشش سطحی است؟

الف ـ قرار گرفتن گیرهٔ فلزی روی آب

ب ـ قرار گرفتن تنهٔ درخت روی آب

ج ـ تشکیل حباب‌های آب و صابون

د ـ پخش آب روی سطح شیشه

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

پاسخ: گزینهٔ ۳ (آسان ـ خط‌به‌خط ـ سریع ـ صفحهٔ ۲۹ ـ ۱۰۰۲)

هرکدام از موارد را بررسی می‌کنیم:

بررسی موارد:

الف) کشش سطحی (✓)

ب) اختلاف چگالی و اصل ارشمیدس (✗)

ج) کشش سطحی (✓)

د) اختلاف نیروهای هم‌چسبی و دگرچسبی (✗)

کشش سطحی

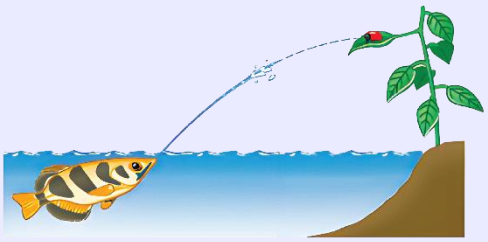
به‌دلیل نیروی جاذبه‌ای که مولکول‌های سطح مایع به یکدیگر وارد می‌کنند، سطح مایع شبیه یک پوستهٔ تحت کشش رفتار می‌کند و کشش سطحی رخ می‌دهد. پس کشش سطحی ناشی از هم‌چسبی مولکول‌های سطح مایع است.

عامل تمامی مثال‌های زیر، کشش سطحی است:

۱- سطح قطره‌ای که آزادانه سقوط می‌کند، مانند یک پوستهٔ کشیده‌شده تمایل به کمینه‌کردن مساحتش را دارد؛ به همین دلیل به شکل کره درمی‌آید.



۲- کشش سطحی باعث می‌شود آبی که توسط ماهی کمان‌گیر از دهان او به‌طرف حشره پرتاب می‌شود، در هوا پخش شود و به برگ و حشره برخورد کند. این پدیده بزرگ‌بودن نیروی هم‌چسبی مولکول‌های آب را نشان می‌دهد.



۳- نشستن حشره روی آب و قرار گرفتن گیره روی سطح آب




۴- تشکیل حباب‌های آب و صابون



۵- بادهای نسبتاً ضعیف قادرند توده‌های بزرگی از ریزگردها را به حرکت درآورند، درحالی‌که توفان‌های شدید دریایی تنها مقدار اندکی آب را به‌صورت قطره‌های ریز به‌طرف بالا می‌پاشند. دلیل این اتفاق، بزرگ‌بودن نیروی هم‌چسبی مولکول‌های آب در مقایسه با نیروی هم‌چسبی اندک ذرات ریزگرد است.

نکات طلایی

۱- اگر یک سوزن ته‌گرد روی سطح آب شناور باشد، با به‌آرامی اضافه‌کردن چند قطره مایع شوینده به آب درون ظرف، مشاهده می‌کنیم که سوزن در آب فرو می‌رود؛ چون اضافه‌کردن مایع شوینده نیروی کشش سطحی را کاهش می‌دهد.

۲- افزایش دمای آب نیز سبب کاهش کشش سطحی آبی می‌شود.

یه نمونهٔ باحال

کدام‌یک از پدیده‌های زیر، نمونه‌ای از کشش سطحی نیست؟

۱) نشستن حشرات روی سطح آب ۲) کروی‌شدن قطره‌های آب درحال سقوط آزاد

۳) تراوش آب از منفذهای مویین دیوارها ۴) تشکیل حباب صابون

پاسخ تشریحی:

پدیده‌های (۱)، (۲) و (۴) نمونه‌هایی از کشش سطحی هستند.

پاسخ: گزینهٔ ۳

یه نمونهٔ باحال

درون دو ظرف A و B آب ریخته‌ایم. اگر دمای آب ظرف B بیش‌تر از دمای آب ظرف A باشد، کدام گزینه درست است؟

۱) قطره‌های آب ظرف B از قطره‌های آب ظرف A بزرگ‌تر است.

۲) اگر آب ظرف A روی سطح شیشه‌ای به‌صورت قطره باقی بماند، قطعاً آب ظرف B نیز روی آن سطح به‌صورت قطره باقی می‌ماند.

۳) اگر گیره‌ای فلزی در ظرف A روی سطح آن باقی نماند، قطعاً روی سطح آب ظرف B نیز باقی نمی‌ماند.

۴) هر سه گزینه صحیح است.

پاسخ تشریحی: چون دمای آب ظرف B از A بیش‌تر است، نیروهای هم‌چسبی بین مولکول‌های آن کم‌تر است.

پاسخ: گزینهٔ ۳

ماز

۴۳- وقتی شیشه می‌شکند، با نزدیک کردن قطعه‌های آن به‌هم نمی‌توان اجزای شیشه را دوباره به‌هم چسباند؛ ولی اگر قطعه‌های شیشه را آن‌قدر گرم کنیم که نرم شوند، می‌توان آن‌ها را به‌هم چسباند. این پدیده با استفاده از کدام پدیدهٔ فیزیکی توجیه می‌شود؟

۱) بلندبُرد بودن نیروهای بین‌مولکولی ۲) کوتاه‌بُرد بودن نیروهای بین‌مولکولی

۳) بیش‌تر شدن پدیدهٔ دگرچسبی بابت ایجاد گرما ۴) بیش‌تر شدن پدیدهٔ پخش بابت ایجاد گرما

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ خط‌به‌خط ـ سریع ـ صفحهٔ ۲۹ ـ ۱۰۰۲)

وقتی قطعه‌های شیشه گرم می‌شوند، پس از نرم شدن، مولکول‌های شیشه‌های شکسته به‌هم نزدیک می‌شوند. از طرفی با نزدیک شدن این مولکول‌ها به یکدیگر، نیروهای بین‌مولکولی بیش‌تر شده و باعث می‌شود دو قطعهٔ شکسته‌شده به‌هم بچسبند. پس این پدیده با کوتاه‌بُرد بودن نیروهای بین‌مولکولی توجیه می‌شود.

تذکر!

در گازها به‌دلیل فاصلهٔ زیاد، نیروهای بین‌مولکولی بسیار ضعیف هستند. این نیروها در جامدات و مایعات قوی‌تر هستند.

نیروی بین‌مولکولی

دو ویژگی مهم نیروهای بین‌مولکولی:

الف) نیروهای بین‌مولکولی کوتاه‌برد هستند؛ یعنی وقتی فاصلهٔ بین مولکول‌ها به چند برابر ابعاد مولکول می‌رسد، بسیار کوچک و عملاً صفر می‌شوند. به همین دلیل است که این نیروها در گازها تقریباً صفر هستند.

ب) وقتی فاصلهٔ بین مولکول‌ها از حد معینی (نسبت به ابعاد مولکول) کم‌تر شود، نیروی بین‌مولکولی به‌صورت دافعه خواهد بود و همین موضوع سبب می‌شود که متراکم‌کردن مایع‌ها و جامدها بسیار دشوار باشد.

درنتیجه وقتی سعی می‌کنیم فاصلهٔ بین مولکول‌های مایع را کم کنیم، نیروی دافعهٔ بزرگی بین آن‌ها ایجاد می‌شود که از تراکم‌پذیری مایعات جلوگیری می‌کند و وقتی مولکول‌های مایع را کمی از هم دور کنیم، نیروی جاذبه بین آن‌ها ظاهر می‌شود.

✓ افزایش دما و افزودن ناخالصی (مانند مایع ظرف‌شویی) به مایع، موجب کاهش نیروهای بین‌مولکولی ازجمله کاهش نیروی هم‌چسبی و کشش سطحی مایع می‌شود (و قطرات مایع ریزتر خواهند شد).

جدول انواع نیروهای بین‌مولکولی

نوع نیروی بین‌مولکولی	تعریف و مثال	پدیده
هم‌چسبی	جاذبهٔ بین مولکول‌های همسان مانند جاذبهٔ بین مولکول‌های آب در قطرهٔ آب آویزان از شاخهٔ درخت	کشش سطحی
دگرچسبی	جاذبهٔ بین مولکول‌های ناهمسان مانند جاذبهٔ بین مولکول‌های آب و سطح شیشه	ترشوندگی، مویینگی

۱- دلیل این‌که شیشهٔ شکسته‌شده را گرم می‌کنند که نرم شود و به‌هم بچسبد، کوتاه‌برد بودن نیروهای بین‌مولکولی است (با گرم کردن شیشه انرژی جنبشی بین مولکول‌ها بیش‌تر شده و درنتیجه مولکول‌های شیشه به‌هم نزدیک‌تر می‌شوند).

۲- آویزان شدن قطره‌های باران از شاخ و برگ درختان و نیفتادن آن‌ها برای مدتی، دلیل بر نیروهای بین‌مولکولی در مایع‌ها است.

یه نمونهٔ باحال

بین دو مولکول از یک ماده به‌ترتیب از راست به چپ در فاصلهٔ خیلی کم و در فاصلهٔ کمی زیاد از هم چه نیروهایی ایجاد می‌شود؟

۱) پیوسته رانشی ۲) پیوسته ربایشی ۳) رانشی و ربایشی ۴) ربایشی و رانشی

پاسخ: گزینهٔ ۳

یه نمونهٔ باحال

شکل زیر، خروج قطره‌های روغن با دمای متفاوت را از دهانهٔ دو قطره‌چکان نشان می‌دهد. کدام گزینه مقایسهٔ بین دما (T) و نیروی هم‌چسبی بین مولکول‌های روغن (F) را به‌درستی نشان می‌دهد؟



شکل «۱» شکل «۲»

۱) $F_1 > F_2 \ , \ T_1 > T_2$

۲) $F_1 < F_2 \ , \ T_1 > T_2$

۳) $F_1 > F_2 \ , \ T_1 < T_2$

۴) $F_1 < F_2 \ , \ T_1 < T_2$

پاسخ تشریحی:

با افزایش دما، هم‌چسبی بین مولکول‌های مایع کم‌تر می‌شود و نیروی جاذبهٔ گرانشی راحت‌تر بر نیروی هم‌چسبی غلبه می‌کند و قطره‌های کوچک‌تری از قطره‌چکان خارج می‌شود.

پاسخ: گزینهٔ ۲

ماز

۴۴- **مکعب‌مستطیل فلزی توپری به ابعاد $۵cm\times ۴cm\times ۳cm$ را می‌توان از وجه‌های مختلف بر روی یک سطح افقی قرار داد. اگر اختلاف بیش‌ترین و کم‌ترین فشاری که این مکعب بر سطح افقی وارد می‌کند، $۱/۶kPa$ باشد، چگالی مکعب چند گرم بر سانتی‌متر مکعب است؟** $(g=۱۰\frac{m}{s^۲})$

۱) ۳/۲ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۱۶

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۳۳ ـ ۱۰۰۲)

فشار این مکعب‌مستطیل را می‌توان از رابطهٔ $P=\rho gh$ به‌دست آورد. بیش‌ترین فشار واردشده بر سطح افقی مربوط به حالتی است که ارتفاع مکعب‌مستطیل حداکثر $(h_{max}=۵cm)$ و کم‌ترین فشار مربوط به حالتی است که ارتفاع آن حداقل $(h_{min}=۳cm)$ باشد.

$$\begin{cases}P_{max}=\rho gh_{max}\\P_{min}=\rho gh_{min}\end{cases}\Rightarrow P_{max}-P_{min}=\rho g(h_{max}-h_{min})$$

$$\Rightarrow ۱۶۰۰=\rho\times ۱۰\times(۵-۳)\times ۱۰^{-۲}\Rightarrow \rho=۸۰۰۰\frac{kg}{m^۳}=۸\frac{g}{cm^۳}$$

فشار ناشی از جامدات

فشار ناشی از جسم جامد بر سطح زیرین خود از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$P=\frac{F_N}{A}$$

در این رابطه F_N اندازهٔ نیروی عمودی تکیه‌گاه است و اگر بر روی سطح افقی نیروی عمودی دیگری به جسم وارد نشود، طبق قانون اول نیوتون، نیروی عمودی تکیه‌گاه و نیروی وزن برابر خواهند بود:

$$F_N=mg\Rightarrow P=\frac{mg}{A}$$

در مورد اشکال هندسی مانند مکعب و استوانه که سطح مقطع جسم از پایین به بالا یکسان است، می‌توان نوشت:

$$m=\rho V=\rho Ah$$

در رابطهٔ بالا A مساحت قاعده، h ارتفاع جسم و $F_N=mg$ است.

$$\Rightarrow P=\frac{\rho \cancel{A} hg}{\cancel{A}}=\rho gh$$

پس فشار ناشی از یک مکعب یا استوانهٔ توپر به چگالی و ارتفاع جسم بستگی دارد. در مورد مکعب‌مستطیل، چون می‌توان آن را در ۳ وضعیت مختلف روی سطح افقی قرار داد، می‌توان گفت که زمانی فشار ناشی از آن بیشینه است که ارتفاع آن بیشینه باشد.

یه نمونهٔ باحال

مکعب توپری با ابعاد $۴cm\times ۸cm\times ۶cm$ و چگالی ρ بر روی سطح افقی قرار دارد. اگر بیش‌ترین فشار ناشی از مکعب بر سطح برابر ۴ کیلوپاسکال باشد، چگالی آن چند گرم بر سانتی‌متر مکعب است؟ $(g=۱۰\frac{N}{kg})$

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) ۵ ۴) ۱/۵

پاسخ تشریحی:

با توجه به اطلاعات داده‌شده در این سؤال داریم:

$$P_{max}=۴kPa \text{ و } h_{max}=۸cm$$

$$\Rightarrow P_{max} = \rho g h_{max}$$

$$۴\times۱۰^{۳} = \rho \times ۱۰ \times \frac{۸}{۱۰۰} \Rightarrow \rho = \frac{۴\times۱۰^{۴}}{۸} = ۵۰۰۰ \frac{kg}{m^{۳}} = ۵ \frac{g}{cm^{۳}}$$

پاسخ: گزینهٔ ۳

محاسبهٔ حداقل و حداکثر مقدار فشار در جامدات

طبق رابطهٔ $P = \frac{mg}{A}$ اگر یک جسم جامد با وزن معین بتواند از تمام وجه‌های خود روی سطح افقی قرار گیرد، بیش‌ترین فشار به‌ازای کم‌ترین مساحت ممکن و کم‌ترین فشار به‌ازای بیش‌ترین مساحت ممکن به‌دست خواهد آمد؛ بنابراین:

$$\begin{cases} P_{max} = \frac{mg}{A_{min}} \\ P_{min} = \frac{mg}{A_{max}} \end{cases}$$

هم‌چنین اگر استفاده از رابطهٔ $P = \rho g h$ مجاز باشد، با توجه به ثابت‌بودن ρ و g می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} P_{max} = \rho g h_{max} \\ P_{min} = \rho g h_{min} \end{cases}$$

آزمون سراسری ریاضی ۱۳۹۸

مکعب فلزی توپری به ابعاد $۵cm \times ۴cm \times ۲cm$ و چگالی $۸ \frac{g}{cm^{۳}}$ از طرف یکی از وجه‌هایش روی سطح افقی قرار می‌گیرد. بیش‌ترین فشاری که مکعب می‌تواند بر سطح وارد کند، چند پاسکال است؟ $(g = ۱۰ \frac{N}{kg})$

۱) $۱/۶\times۱۰^{۲}$ ۲) ۴×۱۰^{۲} ۳) $۱/۶\times۱۰^{۳}$ ۴) ۴×۱۰^{۳}

پاسخ تشریحی:

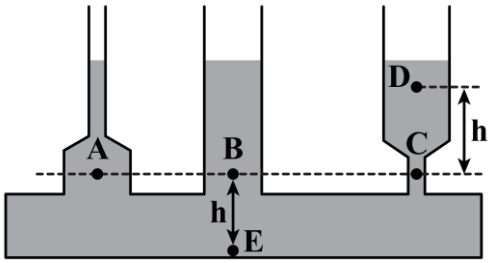
چون جسم به شکل مکعب است می‌توان از رابطهٔ $P = \rho g h$ برای آن استفاده کرد.

$$P_{max} = \rho g h_{max} \xrightarrow{h_{max} = ۵cm} P_{max} = ۸\times۱۰^{۳} \times ۱۰ \times ۵ \times ۱۰^{-۲} = ۴\times۱۰^{۳} Pa$$

پاسخ: گزینهٔ ۴

ماز

۴۵- شکل زیر، مایع ساکنی را درون یک ظرف نشان می‌دهد. کدام‌یک از گزینه‌های زیر در مورد مقایسهٔ فشار ناشی از مایع در نقاط مختلف آن نادرست است؟



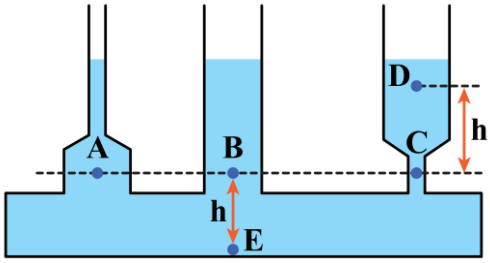
۱) $P_B = P_C$

۲) $P_C - P_D = P_E - P_B$

۳) $P_B > P_A$

۴) $\frac{P_C}{P_D} > ۱$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (آسان ـ مفهومی ـ سریع ـ صفحهٔ ۳۴ ـ ۱۰۰۲)



برای محاسبهٔ فشار ناشی از مایع ساکن در عمق h، می‌توان از رابطهٔ $P=\rho gh$ استفاده کرد؛ بنابراین در نقاط هم‌تراز، فشار یکسان بوده و هرچه عمق مایع بیش‌تر شود، فشار ناشی از مایع بیش‌تر خواهد بود. درنتیجه با توجه به شکل مقابل، می‌توان نوشت:

$$P_E > P_A = P_B = P_C > P_D$$

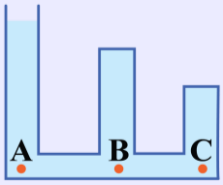
ضمناً چون اختلاف عمق دو نقطهٔ D و C برابر با اختلاف عمق دو نقطهٔ B و E است، پس می‌توان نتیجه گرفت که $P_C - P_D = P_E - P_B = \rho gh$ است؛ بنابراین گزینهٔ (۳) نادرست است.

فشار مایعات

۱- فشار یک مایع در عمق h از سطح آزاد یک مایع با چگالی ρ برابر است با:

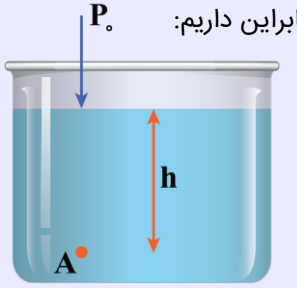
$$P=\rho gh$$

۲- در رابطهٔ فوق، h عمق از سطح آزاد مایع است؛ بنابراین در شکل مقابل، فشار مایع در نقاط A، B و C برابر است.



$$P_A = P_B = P_C$$

۳- فشار کل در عمق h از یک مایع برابر مجموع فشار هوای محیط و فشار حاصل از مایع در آن ارتفاع است؛ بنابراین داریم:



فشار کل در نقطهٔ A: $P_{کل} = P_0 + P_{مایع} \Rightarrow P_{کل} = P_0 + \rho gh$

یه نمونهٔ باحال

فشار کل در عمق‌های ۱۰ و ۲۰ متری از سطح آب یک دریاچه چند پاسکال است؟ ($P_0 = 10^5\,Pa$، $\rho_{آب} = 1\frac{g}{cm^3}$ و $g = 10\frac{N}{kg}$)

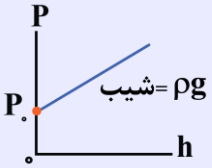
پاسخ تشریحی:

در عمق ۱۰ متری: $P = P_0 + \rho gh = (10^5) + (1000\times10\times10) = 2\times10^5\,Pa$

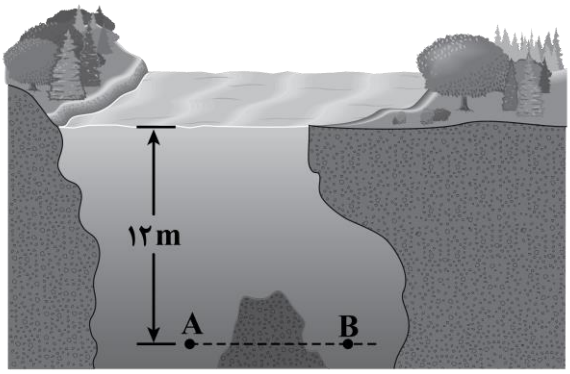
در عمق ۲۰ متری: $P = P_0 + \rho gh = (10^5) + (1000\times10\times20) = 3\times10^5\,Pa$

همان‌طور که می‌بینید، با ۲ برابرکردن عمق مایع، فشار کل ۲ برابر نمی‌شود. به‌طور کلی، اگر عمق را مایع k برابر کنیم، فشار کل کم‌تر از k برابر می‌شود.

۴- نمودار فشار کل برحسب ارتفاع از سطح آزاد مایع به شکل مقابل است:



۴۶- شکل زیر، یک دریاچه را نشان می‌دهد. فشار کل در نقطهٔ B چند کیلوپاسکال است؟ ($g=۱۰\frac{m}{s^۲}$، چگالی آب دریاچه را $۱۰۰۰\frac{kg}{m^۳}$ و فشار هوا در سطح دریاچه را $۱۰^۵Pa$ درنظر بگیرید.)



۱) ۱۲

۲) ۲۲

۳) ۱۲۰

۴) ۲۲۰

پاسخ: گزینهٔ ۴ (آسان ـ محاسباتی ـ سریع ـ صفحهٔ ۳۵ ـ ۱۰۰۲)

با توجه به رابطهٔ زیر، به‌راحتی می‌توان نوشت:

$$P=P_۰+\rho gh=۱۰^۵+۱۰۰۰\times۱۰\times۱۲=۲۲\times۱۰^۴Pa=۲۲۰kPa$$

سوتی‌های پرتکرار

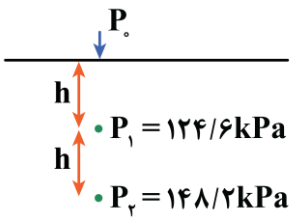
اگر به‌جای فشار کل، فقط فشار ناشی از مایع رو حساب کرده باشی در دام گزینهٔ (۳) می‌افتی.

۴۷- شناگری عمق شنای خود را دو برابر می‌کند. درنتیجه، فشار وارد بر بدن او از $۱۲۴/۶kPa$ به $۱۴۸/۲kPa$ می‌رسد. فشار هوای محیط چند کیلوپاسکال است؟

۱) ۹۸ ۲) ۹۹ ۳) ۱۰۰ ۴) ۱۰۱

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۳۶ ـ ۱۰۰۲)

مطابق شکل داریم:



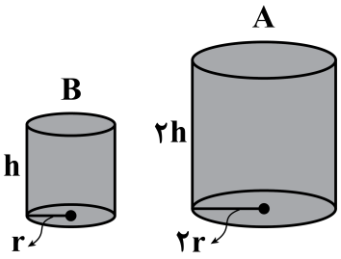
$$\Delta P=\rho g\Delta h\Rightarrow\begin{cases}P_۱-P_۰=\rho gh\\P_۲-P_۱=\rho gh\end{cases}$$

$$\Rightarrow P_۱-P_۰=P_۲-P_۱$$

$$\Rightarrow ۱۲۴/۶-P_۰=۱۴۸/۲-۱۲۴/۶$$

$$\Rightarrow P_۰=۱۰۱kPa$$

۴۸- مطابق شکل، ابعاد استوانهٔ A، دو برابر ابعاد استوانهٔ B است. اگر هر دو استوانه را پر از آب کنیم، به‌ترتیب از راست به چپ فشاری که آب به کف استوانهٔ A وارد می‌کند، چند برابر استوانهٔ B و نیرویی که آب به کف استوانهٔ A وارد می‌کند، چند برابر استوانهٔ B است؟



۱) ۲، ۲

۲) ۸، ۸

۳) ۲، ۸

۴) ۲، ۴

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۳۵ ـ ۱۰۰۲)

گام اول

فشار ناشی از مایع بر کف ظرف از رابطهٔ $P=\rho gh$ به‌دست می‌آید؛ بنابراین می‌توان نوشت:

$$P=\rho gh \Rightarrow \frac{P_A}{P_B}=\frac{h_A}{h_B}=\frac{2h}{h}=2$$

گام آخر

حال با توجه به رابطهٔ $F=PA$ می‌توان نوشت:

$$F=PA \Rightarrow \frac{F_A}{F_B}=\frac{P_A}{P_B}\times\frac{A_A}{A_B}=2\times 4=8$$

تذکر!

چون شعاع مقطع استوانهٔ A، دو برابر استوانهٔ B است؛ بنابراین طبق رابطهٔ $A=\pi r^2$، مساحت قاعدهٔ استوانهٔ A، چهار برابر استوانهٔ B خواهد بود.

نکته

فشار ناشی از شاره در عمق h از آن به شکل ظرف و مساحت قاعدهٔ ظرف بستگی ندارد.

اگر بخواهیم نیروی ناشی از شاره را در کف ظرف به‌دست آوریم، کافی است فشار ناشی از شاره را در سطح مقطع کف ظرف ضرب کنیم:

$$F=PA=\rho ghA$$

حواستان باشد که h، عمق کف ظرف از سطح آزاد مایع است.

نکته

نیروی ناشی از مایع در کف ظرف، به شکل ظرف بستگی ندارد.

۴۹- درون یک ظرف، مایعی به چگالی $2\frac{g}{cm^3}$ ریخته‌ایم. اگر از نقطهٔ A که در عمق ۱۰ سانتی‌متری مایع است، به‌اندازهٔ h پایین برویم، فشار کل ۱۰ درصد افزایش می‌یابد. h چند سانتی‌متر است؟ $(P_0=100kPa\ ,\ g=10\frac{N}{kg})$

۱) ۸۱ ۲) ۷۱ ۳) ۶۱ ۴) ۵۱

پاسخ: گزینهٔ ۴ (سخت ـ محاسباتی ـ زمان‌بَر ـ صفحهٔ ۳۶ ـ ۱۰۰۲)

فشار در عمق h از یک مایع از رابطهٔ $P=\rho gh+P_0$ قابل‌محاسبه است. با رفتن از عمق h_1 به عمق h_2، فشار ثانویه $\frac{110}{100}$ فشار اولیه شده است. پس خواهیم داشت:

$$\frac{P_2}{P_1}=\frac{11}{10}\Rightarrow\frac{\rho gh_2+P_0}{\rho gh_1+P_0}=\frac{11}{10}\Rightarrow 10\rho gh_2+10P_0=11\rho gh_1+11P_0$$

$$\Rightarrow 10\rho gh_2=11\rho gh_1+P_0$$

$$\Rightarrow 10\times 2000\times 10\times h_2=11\times 2000\times 10\times 0/1+10^5$$

$$\Rightarrow 2\times 10^5 h_2=122000\Rightarrow h_2=0/61m=61cm$$

درنتیجه خواستهٔ سؤال برابر است با:

$$h=h_2-h_1=61-10=51cm$$

سوتی‌های پرتکرار

اگر به‌جای تغییر عمق، عمق ثانویه رو به‌عنوان جواب تست بگیری، در دام گزینهٔ (۳) می‌افتی.

راهنمای مسیرت

بچه‌ها این تیپ سؤال‌ها اخیراً خیلی مورد توجه طراحان محترم قرار گرفته و با توجه به این‌که احتمال طرح شدن در کنکورشون بالا هست، حتماً سعی کنید چم‌وخم پاسخ دادن رو کامل بلد باشین تا مثل آب خوردن از پس این تست‌ها بربیاین.

ماز

۵۰- مساحت پنجرهٔ یک زیردریایی $۲۵۰cm^۲$ است. اگر این زیردریایی از عمق ۲۰ متری آب به عمق ۵۰ متری آب برود، نیرویی که از طرف آب به پنجرهٔ آن وارد می‌شود، چند کیلونیوتون افزایش می‌یابد؟ $(\rho_{آب}=۱\frac{g}{cm^۳}\ ,\ g=۱۰\frac{N}{kg})$

۱) ۰/۵ ۲) ۵ ۳) ۰/۷۵ ۴) ۷/۵

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۳۳ ـ ۱۰۰۲)

گام اول

تغییرات فشار وارد بر پنجره را حساب می‌کنیم:

$$P=\rho gh \Rightarrow \Delta P=\rho g\Delta h \Rightarrow \Delta P=۱۰۰۰\times ۱۰\times(۵۰-۲۰)=۳\times ۱۰^۵ Pa$$

گام آخر

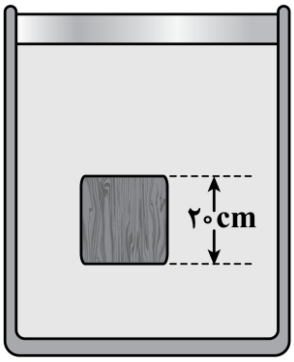
تغییرات نیروی وارد بر پنجره را حساب می‌کنیم:

$$F=PA \Rightarrow \Delta F=\Delta P\times A \Rightarrow \Delta F=۳\times ۱۰^۵\times ۲۵۰\times ۱۰^{-۴}=۷۵۰۰N$$

$$\Rightarrow \Delta F=۷/۵kN$$

ماز

۵۱- مطابق شکل، جسمی مکعبی به طول ضلع ۲۰cm درون شاره‌ای غوطه‌ور و درحال تعادل است. فشار در بالا و زیر جسم به‌ترتیب برابر ۱۰۰ و ۱۰۵ کیلوپاسکال است. چگالی شاره چند کیلوگرم بر متر مکعب است؟ $(g=۱۰\frac{m}{s^۲})$



۱) ۲/۵
۲) $۲/۵\times ۱۰^۲$
۳) $۲/۵\times ۱۰^۳$
۴) $۲/۵\times ۱۰^۴$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (آسان ـ محاسباتی ـ سریع ـ صفحهٔ ۳۶ ـ ۱۰۰۲)

با توجه به رابطهٔ $\Delta P=\rho g\Delta h$، می‌توان اختلاف فشار دو نقطه درون یک مایع را به‌دست آورد؛ بنابراین می‌توان نوشت:

$$\Delta P=\rho g\Delta h \Rightarrow (۱۰۵-۱۰۰)\times ۱۰^۳=\rho\times ۱۰\times ۰/۲ \Rightarrow \rho=۲/۵\times ۱۰^۳\ \frac{kg}{m^۳}$$

سوتی‌های پرتکرار

اگر بدون توجه به صورت سؤال، چگالی شاره رو برحسب $\frac{g}{cm^۳}$ حساب کنی، در دام گزینهٔ (۱) می‌افتی.

ماز

۵۲- ۲۰۰ میلی‌لیتر از مایعی به چگالی $۱\frac{g}{cm^۳}$ را با ۳۰۰ میلی‌لیتر از مایعی به چگالی $۱/۲\frac{g}{cm^۳}$ مخلوط می‌کنیم. با این مخلوط، ظرف استوانه‌ای‌شکلی به عمق ۲۵cm را پُر می‌کنیم. فشار ناشی از مخلوط این دو مایع در کف این ظرف چند کیلوپاسکال است؟ ($g=۱۰\frac{N}{kg}$ و از تغییر حجم مایع به سبب اختلاط، صرف‌نظر شود.)

۱) $۲/۸\times۱۰^۳$ ۲) $۵/۶\times۱۰^۳$ ۳) ۲/۸ ۴) ۵/۶

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۳۶ ـ ۱۰۰۲)

کام اول

محاسبهٔ چگالی مخلوط این دو مایع:

$$\rho_{\text{مخلوط}}=\frac{m_A+m_B}{V_A+V_B}=\frac{\rho_A V_A+\rho_B V_B}{V_A+V_B}=\frac{۱\times۲۰۰+۱/۲\times۳۰۰}{۲۰۰+۳۰۰}=\frac{۵۶۰}{۵۰۰}=۱/۱۲\frac{g}{cm^۳}$$

تذکر!

بچه‌ها حواستون هست که میلی‌لیتر معادل با سانتی‌متر مکعب است.

کام آخر

محاسبهٔ فشار ناشی از مخلوط دو مایع در کف ظرف:

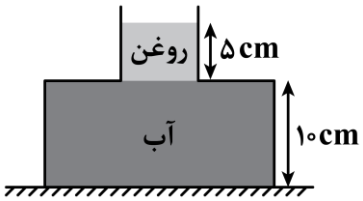
$$P=\rho_{\text{مخلوط}}gh=۱/۱۲\times۱۰^۳\times۱۰\times۰/۲۵=۲/۸\times۱۰^۳\,Pa=۲/۸kPa$$

راهنمای مسیرت

در ماز نه‌تنها حواسمون به تمام ایده‌های کتاب و کنکورهای اخیر هست، بلکه ایده‌هایی خلاقانه و جدیدی که به‌شدت مناسب کنکور هستند رو هم پوشش می‌دیدیم. این سؤال دقیقاً از اون سؤالاست!

ماز

۵۳- در شکل زیر، ظرف از دو قسمت استوانه‌ای به سطح مقطع‌های $۱۰cm^۲$ و $۵۰cm^۲$ تشکیل شده است. نیرویی که از طرف مایع‌ها به کف ظرف وارد می‌شود چند برابر نیرویی است که ظرف بر سطح افقی وارد می‌کند؟ ($g=۱۰\frac{m}{s^۲}$، چگالی آب و روغن به‌ترتیب $۱\frac{g}{cm^۳}$ و $۰/۸\frac{g}{cm^۳}$ و وزن ظرف ناچیز است.)



۱) $\frac{۷}{۹}$ ۲) $\frac{۷۰}{۹}$ ۳) $\frac{۳۵۰}{۲۷}$ ۴) $\frac{۳۵}{۲۷}$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (سخت ـ استدلالی ـ زمان‌بَر ـ صفحهٔ ۳۶ ـ ۱۰۰۲)

کام اول

برای یافتن نیروی وارده از طرف مایعات بر کف ظرف ابتدا فشار حاصل از مایعات در کف ظرف را می‌یابیم:

$$P_{\text{ناشی از مایعات}}=P_{\text{آب}}+P_{\text{روغن}}=(\rho gh)_{\text{آب}}+(\rho gh)_{\text{روغن}}\xrightarrow[h_{\text{آب}}=۰/۱m\,,\,h_{\text{روغن}}=۰/۰۵m]{\rho_{\text{آب}}=۱۰۰۰\frac{kg}{m^۳}\,,\,\rho_{\text{روغن}}=۸۰۰\frac{kg}{m^۳}}$$

$$P_{\text{ناشی از مایعات}}=۱۰۰۰\times۱۰\times۰/۱+۸۰۰\times۱۰\times۰/۰۵=۱۴۰۰Pa$$

SanjeshCloud

گام دوم

حالا نیروی ناشی از مایعات را در کف ظرف به‌دست می‌آوریم:

$$P=\frac{F}{A_{\text{کف ظرف}}}\Rightarrow F=PA_{\text{کف ظرف}}$$

$$\xrightarrow[A_{\text{کف ظرف}}=۵۰\times۱۰^{-۴}m^۲]{P=۱۴۰۰Pa} F=۱۴۰۰\times۵۰\times۱۰^{-۴}=۷N$$

پس نیرویی که از طرف مایع‌ها به کف ظرف وارد می‌شود برابر $۷N$ است.

گام سوم

از طرفی نیرویی که ظرف بر سطح زیرینش وارد می‌کند، مستقل از شکل ظرف بوده و برابر مجموع وزن ظرف و محتویات آن است. از آنجایی‌که وزن ظرف ناچیز می‌باشد، برای یافتن وزن مایعات از رابطهٔ چگالی داریم:

$$\rho=\frac{m}{V}\Rightarrow m=\rho V\xrightarrow{V=Ah} m=\rho Ah$$

$$\rho_{\text{آب}}=۱۰۰۰\frac{kg}{m^۳}\ ,\ A_{\text{آب}}=۵۰\times۱۰^{-۴}m^۲\ ,\ h_{\text{آب}}=۰/۱m\Rightarrow m_{\text{آب}}=۱۰۰۰\times۵۰\times۱۰^{-۴}\times۰/۱=۰/۵kg$$

$$\rho_{\text{روغن}}=۸۰۰\frac{kg}{m^۳}\ ,\ A_{\text{روغن}}=۱۰\times۱۰^{-۴}m^۲\ ,\ h_{\text{روغن}}=۰/۰۵m$$

$$\Rightarrow m_{\text{روغن}}=۸۰۰\times۱۰\times۱۰^{-۴}\times۰/۰۵=۰/۰۴kg$$

درنتیجه مجموع وزن مایعات برابر می‌شود با:

$$W=(۰/۵+۰/۰۴)\times۱۰=۵/۴N$$

گام آخر

درنهایت نسبت این دو نیرو برابر است با:

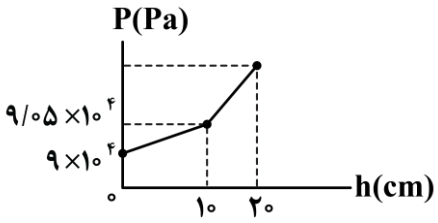
$$\frac{F}{W}=\frac{۷}{۵/۴}=\frac{۷۰}{۵۴}=\frac{۳۵}{۲۷}$$

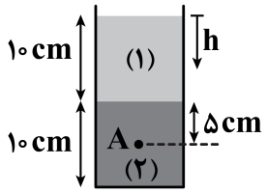
راهنمای مسیرت

وقتی سطح مقطع ظرف حاوی مایع ثابت نیست، نیروی ناشی از مایع در کف ظرف با نیروی وارد بر سطح متفاوت می‌شه که اتفاقاً خیلی از بچه‌ها هم در تحلیل دقیق این تیپ‌ها مشکل دارند. حتماً حتماً روند پاسخ‌نامه رو با دقت یاد بگیرین.

ماز

۵۴- در ظرفی مطابق شکل زیر، دو مایع مخلوط‌نشدنی وجود دارد و نمودار تغییرات فشار برحسب عمق دو مایع مطابق شکل زیر است. اگر چگالی مایع (۲)، ۱/۴ برابر چگالی مایع (۱) باشد، فشار در نقطهٔ A چند کیلوپاسکال است؟ $(g=۱۰\frac{m}{s^۲})$





۱) ۹۰۸۵۰
۲) ۹۰/۸۵
۳) ۹۰۸۰۰
۴) ۹۰/۸

پاسخ: گزینهٔ ۲ (سخت ـ محاسباتی ـ زمان‌بَر ـ صفحهٔ ۳۴ ـ ۱۰۰۲)

گام اول

قسمت ابتدایی نمودار که دارای شیب کم‌تر است، مربوط به مایع سطحی‌تر یعنی مایع (۱) می‌باشد. از طرفی با توجه به نمودار درمی‌یابیم که فشار هوا (نقطهٔ تقاطع نمودار با محور عرض‌ها) برابر $۹\times۱۰^۴\,Pa$ و فشار کل در عمق ۱۰ سانتی‌متری که ناشی از فشار هوا و فشار مایع (۱) است برابر $۹/۰۵\times۱۰^۴\,Pa$ می‌باشد؛ پس داریم:

$$P_۱ = P_۰ + \rho_۱ g h_۱ \xrightarrow{h_۱ = ۰/۱m} ۹/۰۵\times۱۰^۴ = ۹\times۱۰^۴ + \rho_۱\times۱۰\times۰/۱ \Rightarrow \rho_۱ = ۵۰۰\frac{kg}{m^۳}$$

گام دوم

در ادامه چگالی مایع (۲) را می‌یابیم:

$$\rho_۲ = ۱/۴\rho_۱ = ۱/۴\times۵۰۰ = ۷۰۰\frac{kg}{m^۳}$$

گام آخر

درنهایت فشار کل در نقطهٔ A که ناشی از ارتفاع $5cm$ از مایع (۲)، کل مایع (۱) و فشار هوا است را می‌یابیم:

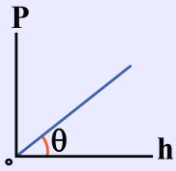
$$P_A = \rho_۲ g h_۲ + \rho_۱ g h_۱ + P_۰ = ۷۰۰\times۱۰\times۰/۰۵ + ۵۰۰\times۱۰\times۰/۱ + ۹\times۱۰^۴ = ۹۰۸۵۰Pa = ۹۰/۸۵kPa$$

سوتی‌های پرتکرار

اگر فشار در نقطهٔ A رو برحسب پاسکال حساب کنین در دام گزینهٔ (۱) می‌افتین.

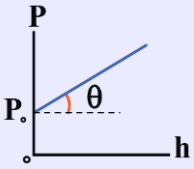
نمودارهای فشار

۱- نمودار فشار **حاصل از مایع** برحسب ارتفاع از سطح آزاد مایع:



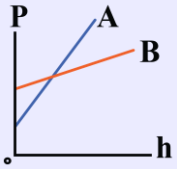
$$P = \underset{\text{شیب}}{\rho g}\, h \Rightarrow \text{شیب} = \tan\theta = \rho g$$

۲- نمودار فشار برحسب ارتفاع از سطح آزاد مایع:



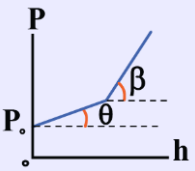
$$P = \underset{\text{شیب}}{\rho g}\, h + \underset{\text{عرض از مبدأ}}{P_۰} \Rightarrow \text{شیب} = \tan\theta = \rho g$$

۳- مقایسهٔ دو نمودار فشار برحسب ارتفاع از سطح آزاد مایع:

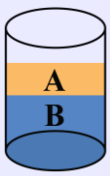


$$\Rightarrow \begin{cases} P_{۰B} > P_{۰A} \\ \rho_A > \rho_B \end{cases}$$

۴- نمودار فشار برحسب ارتفاع از سطح آزاد مایع برای دو مایع متفاوت:



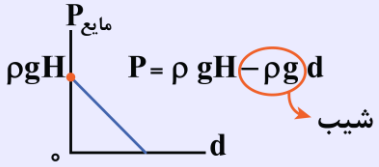
$$\tan\beta > \tan\theta$$



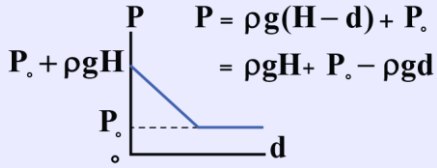
چون مایع B زیر مایع A قرار دارد پس چگالی آن بیش‌تر است، پس باید شیب نمودار در قسمت B از قسمت A بیش‌تر باشد.

۵- اگر نمودار فشار برحسب فاصله از کف ظرف (d) مدنظر باشد، چون فاصلهٔ یک نقطه از کف ظرف برابر با ارتفاع کل مایع منهای فاصلهٔ آن نقطه از سطح مایع است، پس نمودار مربوطه به‌صورت زیر می‌شود:

الف) نمودار فشار مایع برحسب فاصله از کف ظرف



ب) نمودار فشار برحسب فاصله از کف ظرف



ماز

۵۵- داخل یک ظرف استوانه‌ای‌شکل به مساحت مقطع $۲۰۰۰cm^۲$ که بر روی یک سطح افقی قرار دارد، مقداری جیوه ریخته شده است. اگر روی جیوه مقداری مایع بریزیم که چگالی آن $\frac{۱۰}{۳۴}$ چگالی جیوه باشد، فشار در کف ظرف $۲۴kPa$ افزایش می‌یابد. ارتفاع مایع ریخته‌شده چند سانتی‌متر است؟ $(g=۱۰\frac{N}{kg}\ ,\ \rho_{جیوه}=۱۳/۶\frac{g}{cm^۳})$

۱) ۱۲/۵ ۲) ۶۰ ۳) ۳۷/۵ ۴) ۵۰

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۳۶ ـ ۱۰۰۲)

افزایش فشار وارد بر کف ظرف ناشی از ریخته شدن مایع در ظرف است؛ پس داریم:

$$\rho_{مایع}=\frac{۱۰}{۳۴}\rho_{جیوه}=\frac{۱۰}{۳۴}\times ۱۳/۶=۴\frac{g}{cm^۳}\xrightarrow{\Delta P=(\rho gh)_{مایع}}۲۴\times ۱۰^۳=۴\times ۱۰^۳\times ۱۰\times h_{مایع}$$

حال داریم:

$$\Rightarrow h_{مایع}=۰/۶m=۶۰cm$$

راهنمای مسیرت

یه وقتایی یه سری اطلاعات اضافی در صورت سؤال هست که شما باید حواستون به اونا باشه و درگیرشون نشین. مثل همین سؤال.

ماز

۵۶- در شکل زیر، مساحت روزنهٔ خروج بخار آب، روی درب یک زودپز $۴mm^۲$ است. جرم وزنه‌ای که روی این روزنه باید گذاشت چند گرم باشد تا فشار داخل زودپز در $۲atm$ نگه داشته شود؟ $(g=۱۰\frac{m}{s^۲}$، $۱atm=۱۰^۵Pa$ و فشار بیرون دیگ زودپز را $۱atm$ درنظر بگیرید.)



۱) ۴۰
۲) ۸۰
۳) ۴×۱۰^{-۲}
۴) ۸×۱۰^{-۲}

پاسخ: گزینهٔ ۱ (آسان ـ محاسباتی ـ سریع ـ صفحهٔ ۴۹ ـ ۱۰۰۲)

در این سؤال باید مجموع فشار هوای بیرون دیگ زودپز و فشار ناشی از وزنه برابر $۲atm=۲\times ۱۰^۵Pa$ شود؛ بنابراین می‌توان نوشت:

$$P_{هوای\ درون\ زودپز}=P_{هوای\ بیرون\ زودپز}+\frac{mg}{A}\Rightarrow ۲\times ۱۰^۵=۱۰^۵+\frac{m_{وزنه}\times ۱۰}{۴\times ۱۰^{-۶}}\Rightarrow \frac{m_{وزنه}\times ۱۰^۷}{۴}=۱۰^۵$$

$$\Rightarrow m_{وزنه}=۴\times ۱۰^{-۲}kg=۴۰g$$

راهنمای مسیرت

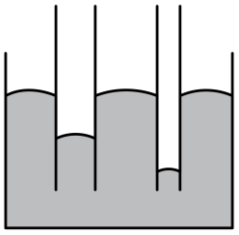
این تست هم پرتکراره، هم آسونه و هم این‌که تمرین آخر فصل کتاب درسیه! بچه‌ها کتاب درسی لطفاً فراموش نشه.

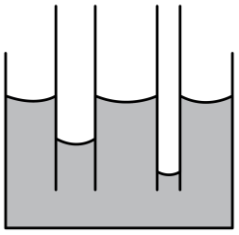
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

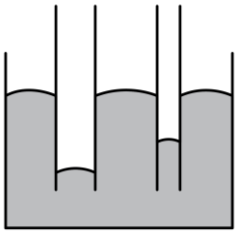
سوتی‌های پرتکرار

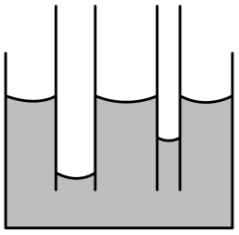
اگر با عجله صورت سؤال رو خوندی و جرم برحسب کیلوگرم رو جواب گرفتی در دام گزینهٔ (۳) افتادی!

۵۷- کدام گزینه خاصیت مویینگی در لوله‌های شیشه‌ای مویین را برای جیوه درست نشان داده است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

پاسخ: گزینهٔ ۱ (آسان ـ مفهومی ـ سریع ـ صفحهٔ ۳۱ ـ ۱۰۰۲)

سطح جیوه در لوله‌های مویین پایین‌تر از سطح جیوه در ظرف قرار می‌گیرد و به‌دلیل قوی‌تر بودن نیروی هم‌چسبی بین ذرات جیوه نسبت به نیروی دگرچسبی بین جیوه و شیشه، سطح جیوه برآمده می‌شود (رد گزینه‌های (۲) و (۴)).

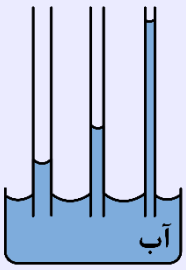
از طرفی با افزایش قطر لولهٔ مویین، جابه‌جایی جیوه در لولهٔ مویین کم‌تر خواهد شد (رد گزینهٔ (۳)).

اثر مویینگی

هنگامی که یک لولهٔ مویین شیشه‌ای را در یک ظرف مایع فرو می‌بریم، به دلیل تفاوت نیروی هم‌چسبی بین ذرات مایع و نیروی دگرچسبی مایع با لوله، سطح مایع درون لوله بالا یا پایین می‌رود که به آن خاصیت مویینگی می‌گویند. در این باره به نکات زیر توجه کنید:

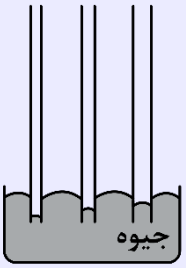
۱- اگر نیروی هم‌چسبی ذرات مایع **کم‌تر** از دگرچسبی آن‌ها با لوله باشد، مایع در لوله **بالا** می‌رود و سطح آن به‌صورت **فرورفته (مقعر)** خواهد بود.

قرارگیری آب در لولهٔ مویین شیشه‌ای تمیز به‌صورت مقابل است:



۲- اگر نیروی هم‌چسبی ذرات مایع **بیش‌تر** از نیروی دگرچسبی آن‌ها با لوله باشد، مایع در لوله **پایین** می‌رود و سطح آن به‌صورت **برآمده (محدب)** خواهد بود.

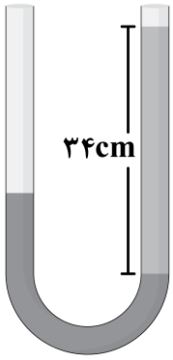
قرارگیری جیوه در لولهٔ مویین تمیز و آب در لولهٔ مویین چرب‌شده به‌صورت مقابل است:



دقت کنید در هر دو حالت هرچه لوله باریک‌تر باشد، اختلاف ارتفاع سطح مایع در لوله با سطح مایع در ظرف بیش‌تر می‌شود.

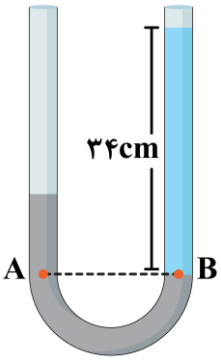
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۸- در لولهٔ Uشکل زیر، مقداری جیوه قرار دارد. در شاخهٔ سمت راست لوله آن‌قدر آب می‌ریزیم تا ارتفاع آب به ۳۴cm برسد. اختلاف ارتفاع جیوه در دو شاخه چند سانتی‌متر است؟ $(\rho_{\text{جیوه}}=۱۳۶۰۰\frac{kg}{m^۳}\ ,\ \rho_{\text{آب}}=۱۰۰۰\frac{kg}{m^۳})$



۱) ۲/۵
۲) ۵
۳) ۲۹
۴) ۳۱/۵

پاسخ: گزینهٔ ۱ (آسان ـ محاسباتی ـ سریع ـ صفحهٔ ۳۵ ـ ۱۰۰۲)



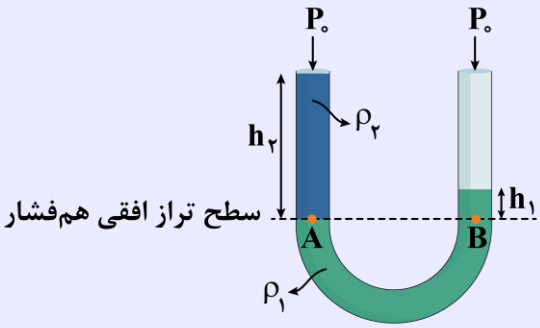
در شکل روبه‌رو، نقاط A و B که درون جیوه انتخاب شده‌اند، هم‌ترازند؛ بنابراین $P_A = P_B$ است. به این ترتیب می‌توان نوشت:

$$P_۰ + \rho_{\text{جیوه}}gh_{\text{جیوه}} = P_۰ + \rho_{\text{آب}}gh_{\text{آب}} \Rightarrow \rho_{\text{جیوه}}h_{\text{جیوه}} = \rho_{\text{آب}}h_{\text{آب}}$$

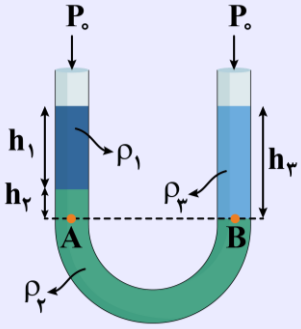
$$۱۳۶۰۰ \times h_{\text{جیوه}} = ۱۰۰۰ \times ۳۴ \Rightarrow h_{\text{جیوه}} = ۲/۵\text{cm}$$

لوله‌های Uشکل

برای حل مسائل لوله‌های Uشکل، در سطح هر دو شاخه آن‌قدر به سمت پایین حرکت کنید تا به نقطه‌ای برسید که در هر دو شاخه یک مایع قرار داشته باشد. از مساوی قراردادن فشار این دو نقطه، خواستهٔ مسئله به‌دست می‌آید:



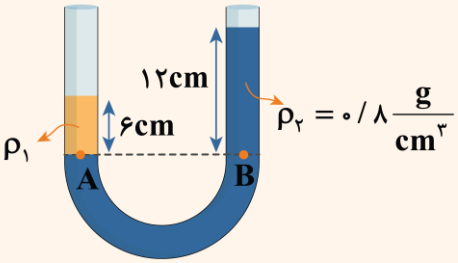
$$P_A = P_B$$
$$\Rightarrow \rho_۲gh_۲ + P_۰ = \rho_۱gh_۱ + P_۰$$
$$\Rightarrow \rho_۲h_۲ = \rho_۱h_۱$$



$$P_A = P_B$$
$$\Rightarrow P_۰ + \rho_۱gh_۱ + \rho_۲gh_۲ = P_۰ + \rho_۳gh_۳$$
$$\Rightarrow \rho_۱h_۱ + \rho_۲h_۲ = \rho_۳h_۳$$

یه نمونهٔ باحال

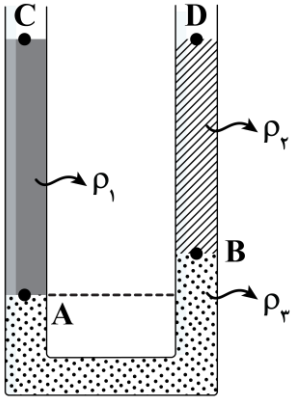
در لولهٔ U‌شکل مقابل، چگالی ρ_1 چند واحد SI است؟



پاسخ تشریحی:

$$P_A = P_B$$
$$\Rightarrow \rho_1 h_1 = \rho_2 h_2$$
$$\Rightarrow \rho_1 \times 6 = 0/8 \times 12 \Rightarrow \rho_1 = 1/6 \frac{g}{cm^3} \Rightarrow \rho_1 = 1600 \frac{kg}{m^3}$$

۵۹- در شکل زیر، سه مایع مخلوط‌نشدنی در یک لولهٔ U‌شکل در حالت تعادل قرار گرفته‌اند و سطح آزاد مایع‌ها در دو طرف لوله در یک ارتفاع قرار دارد. چه تعداد از موارد زیر صحیح است؟



الف ـ $\rho_1 > \rho_2$

ب ـ $P_A > P_B$

ج ـ $\rho_1 = \rho_2 + \rho_3$

۱) صفر

۲) ۱

۳) ۲

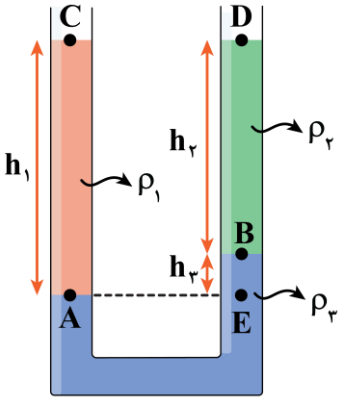
۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مفهومی/استدلالی ـ زمان‌بَر ـ صفحهٔ ۳۵ ـ ۱۰۰۲)

بررسی موارد:

الف

نقاط A و E در یک مایع و در یک ارتفاع قرار گرفته‌اند؛ بنابراین این دو نقطه فشار یکسانی دارند؛ پس می‌توان نوشت:



$$P_A = P_E \Rightarrow P_0 + \rho_1 g h_1 = P_0 + \rho_2 g h_2 + \rho_3 g h_3$$
$$\Rightarrow \rho_1 h_1 = \rho_2 h_2 + \rho_3 h_3$$
$$\xrightarrow{h_3 = h_1 - h_2} \rho_1 h_1 = \rho_2 h_2 + \rho_3 (h_1 - h_2)$$
$$\Rightarrow \rho_1 h_1 = \rho_2 h_2 + \rho_3 h_1 - \rho_3 h_2 \Rightarrow \rho_3 h_2 - \rho_2 h_2 = \rho_3 h_1 - \rho_1 h_1$$
$$(\rho_3 - \rho_2) h_2 = (\rho_3 - \rho_1) h_1 \Rightarrow \frac{h_1}{h_2} = \frac{\rho_3 - \rho_2}{\rho_3 - \rho_1}$$

از طرفی $h_1 > h_2$ است؛ بنابراین می‌توان نوشت:

$$\frac{\rho_3 - \rho_2}{\rho_3 - \rho_1} > 1 \Rightarrow \rho_3 - \rho_2 > \rho_3 - \rho_1 \Rightarrow \rho_1 > \rho_2 \quad (\checkmark)$$

ب

در شکل فوق، $P_E > P_B$ است؛ چون هر دو نقطه در مایع با چگالی ρ_3 قرار گرفته‌اند و از طرفی عمق نقطهٔ E بیش‌تر است. از طرفی $P_A = P_E$ است؛ بنابراین $P_A > P_B$ است. (✓)

ج

با توجه به پاسخ مربوط به قسمت اول، این گزاره نادرست است. (✗)

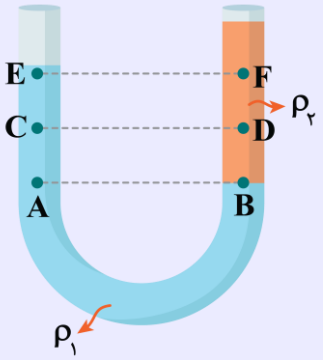
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

راهنمای مسیرت

این سؤال خلاقانه و مفهومی از لولهٔ U‌شکل، داره درک شما رو از سازوکار لوله‌های U‌شکل به چالش می‌کشه. اگر نتونستی این تست و درست جواب بدی، پس واجبه که خط‌به‌خط پاسخ رو با دقت مطالعه کنی تا باگ‌های آموزشیت از لوله‌های U‌شکل رو شناسایی و برطرف کنی.

روابط مقایسه‌ای در لوله‌های U‌شکل

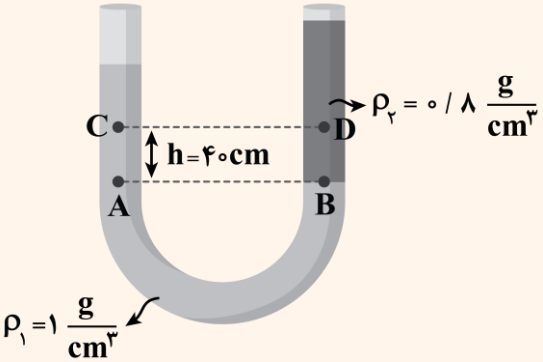
در لولهٔ U‌شکل مقابل، روابط مقایسه‌ای زیر بین فشار نقاط مشخص‌شده برقرار است که خوب است آن‌ها را بدانید.



$$P_A = P_B$$
$$P_C < P_D$$
$$P_E < P_F$$

یه نمونهٔ باحال:

در لولهٔ U‌شکل مقابل، اختلاف فشار نقاط C و D چند پاسکال است؟ $(g = ۱۰\frac{N}{kg})$



پاسخ تشریحی:

$$\begin{cases} P_C = P_A - \rho_1 gh \\ P_D = P_B - \rho_2 gh \end{cases}$$
$$\Rightarrow P_D - P_C = \underbrace{(P_B - P_A)}_{\text{صفر}} + gh(\rho_1 - \rho_2)$$
$$\Rightarrow P_D - P_C = gh(\rho_1 - \rho_2)$$
$$\Rightarrow P_D - P_C = ۱۰ \times ۰/۴ \times (۱۰۰۰ - ۸۰۰)$$
$$\Rightarrow P_D - P_C = ۸۰۰\,Pa$$

ماز

۶۰- برای محاسبهٔ اختلاف فشار بین دو نقطه از هوا که اختلاف ارتفاع قابل‌توجهی دارند، ..... مشابه اختلاف فشار بین دو نقطه درون یک ظرف حاوی مایع عمل کرد؛ زیرا با افزایش ارتفاع از سطح زمین، چگالی هوا ..... می‌یابد.

۱) می‌توان ـ کاهش ۲) می‌توان ـ افزایش ۳) نمی‌توان ـ کاهش ۴) نمی‌توان ـ افزایش

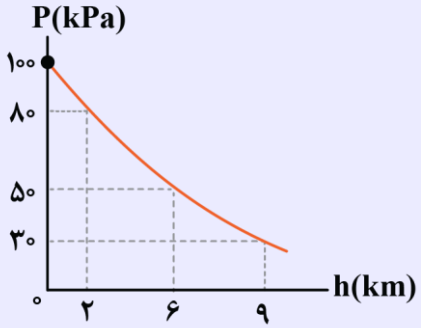
پاسخ: گزینهٔ ۳ (آسان ـ خط‌به‌خط ـ سریع ـ صفحهٔ ۳۶ ـ ۱۰۰۲)

برای محاسبهٔ اختلاف فشار بین دو نقطه از هوا که اختلاف ارتفاع قابل‌توجهی دارند، دیگر نمی‌توان از رابطهٔ $\Delta P = \rho g \Delta h$ استفاده کرد. برای مثال، اختلاف فشار قلهٔ دماوند و سطح دریا با استفاده از این رابطه و درنظر گرفتن چگالی $۱/۲۹\frac{kg}{m^3}$ برای هوا، حدود ۷۱kPa به‌دست می‌آید درحالی‌که مقدار واقعی آن نزدیک به ۵۰kPa است!

برای یافتن دلیل تفاوت آشکار بین این مقادیر، باید توجه کنیم که با افزایش ارتفاع از سطح زمین، چگالی هوا کاهش می‌یابد. نیروی جاذبهٔ زمین سبب می‌شود که لایه‌های زیرین هوا نسبت به لایه‌های بالایی هوا متراکم‌تر شوند. درنتیجه هرچه از سطح زمین دورتر می‌شویم، چگالی و فشار هوا کم‌تر می‌شود.

فشار هوا

برای محاسبهٔ اختلاف فشار بین دو نقطه از شاره‌ای که چگالی آن یکنواخت است و اختلاف عمق (ارتفاع) h با یکدیگر دارند از رابطه $P_۲ = P_۱ + \rho gh$ استفاده می‌کنیم ولی برای محاسبه اختلاف فشار بین دو نقطه از هوا که اختلاف ارتفاع قابل‌توجهی دارند دیگر نمی‌توان از رابطهٔ فوق استفاده کرد علت این مسئله آن است که با افزایش ارتفاع از سطح زمین چگالی هوا کاهش می‌یابد. محاسبه‌های دقیق نشان می‌دهند که تغییر فشار برحسب ارتفاع از سطح زمین مطابق نمودار زیر است:



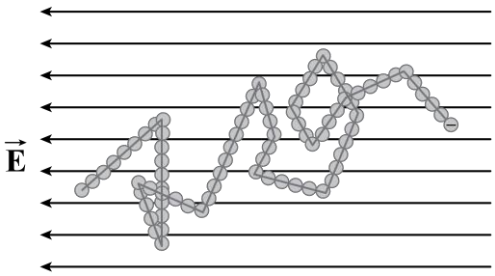
نیروی جاذبهٔ زمین سبب می‌شود که لایه‌های زیرین هوا نسبت به لایه‌های بالایی هوا متراکم‌تر شوند، درنتیجه هر چه به سطح زمین نزدیک‌تر می‌شویم چگالی و فشار هوا بیش‌تر می‌شود.

در هواشناسی و روی نقشه‌های آب و هوا معمولاً از یکای بار (bar) برای فشار هوا استفاده می‌کنند. به‌طوری که داریم:

$$۱\,\text{bar} = ۱۰^۵\,\frac{\text{N}}{\text{m}^۲} = ۱۰^۵\,\text{Pa}$$

فیزیک یازدهم (بخش انتخابی)

۶۱- شکل زیر، مسیر زیگزاگ یک الکترون آزاد را درون یک رسانای فلزی در حضور میدان الکتریکی خارجی نشان می‌دهد. چه تعداد از گزاره‌های زیر در مورد آن صحیح است؟



الف ـ جهت جریان الکتریکی به سمت چپ است.

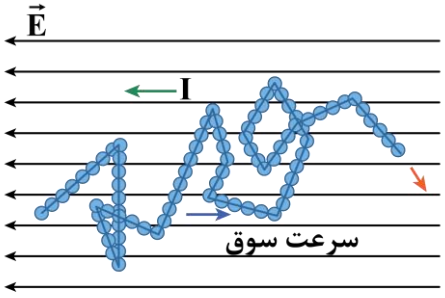
ب ـ جهت سرعت سوق الکترون به سمت راست است.

ج ـ در حضور میدان الکتریکی خارجی، الکترون‌ها حرکت کاتوره‌ای خود را کمی تغییر می‌دهند و با سرعتی متوسط موسوم به سرعت سوق، در خلاف جهت میدان، به‌طور بسیار آهسته‌ای سوق پیدا می‌کنند.

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۴ (آسان ـ خط‌به‌خط ـ سریع ـ صفحهٔ ۴۷ ـ ۱۱۰۲)

اگر اختلاف پتانسیلی در دو سر یک سیم رسانا و میدانی الکتریکی درون آن ایجاد شود، باعث حرکت الکترون‌های آزاد در سیم و ایجاد جریان می‌شود. درواقع وقتی میدان الکتریکی درون فلز ایجاد می‌شود، الکترون‌ها حرکت کاتوره‌ای خود را کمی تغییر می‌دهند و با سرعتی متوسط موسوم به سرعت سوق در خلاف جهت میدان به‌طور بسیار آهسته‌ای سوق پیدا می‌کنند که این موجب برقراری جریان الکتریکی در رسانا می‌شود. اندازهٔ سرعت سوق در یک رسانای فلزی در مقایسه با تندی کاتوره‌ای الکترون‌های آزاد، بسیار کم و مثلاً در سیم‌های مسی از مرتبهٔ بزرگی $10^{-5}\frac{m}{s}$ یا $10^{-4}\frac{m}{s}$ است. توجه کنید که جهت قراردادی جریان الکتریکی I، برخلاف جهت سوق الکترون‌هاست.

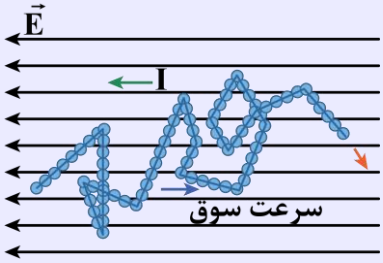


مسیر زیگزاگ یک الکترون آزاد در یک رسانای فلزی. در حضور میدان الکتریکی، این مسیر زیگزاگ در خلاف جهت میدان سوق یافته است.

با توجه به شکل و توضیحات فوق، هر سه گزارهٔ مطرح‌شده در صورت سؤال، صحیح هستند.

جریان الکتریکی

شکل زیر، حرکت الکترون‌ها را درون یک رسانای فلزی در حضور میدان الکتریکی نشان می‌دهد:



در مورد این شکل به نکات زیر توجه کنید:

۱- در غیاب میدان الکتریکی، الکترون‌ها به‌صورت کاتوره‌ای، تصادفی و با سرعت زیاد در همهٔ جهت‌ها حرکت می‌کنند و بار الکتریکی به‌طور خالص منتقل نمی‌شود؛ بنابراین جریان الکتریکی درون رسانا ایجاد نمی‌شود.

۲- در حضور میدان الکتریکی، الکترون‌ها با سرعتی متوسط موسوم به سرعت سوق در خلاف جهت میدان الکتریکی حرکت می‌کنند. علت این حرکت آن است که میدان الکتریکی، نیرویی در خلاف جهت میدان به الکترون‌ها وارد می‌کند.

۳- به‌دلیل حرکت الکترون‌ها با سرعت سوق در خلاف جهت میدان، بار الکتریکی منفی به‌طور خالص در خلاف جهت میدان الکتریکی به حرکت درمی‌آید؛ بنابراین جریان الکتریکی در جهت میدان الکتریکی در رسانا ایجاد می‌شود. دقت کنید که طبق قرارداد، جهت جریان الکتریکی در خلاف جهت حرکت بارهای منفی است.

۴- میدان الکتریکی و جریان الکتریکی هم‌جهت هستند، درحالی‌که جهت سرعت سوق الکترون‌ها در خلاف جهت آن‌هاست.

۵- سرعت سوق الکترون‌ها بسیار کم است و در سیم‌های مسی از مرتبهٔ بزرگی $10^{-4}\frac{m}{s}$ یا $10^{-5}\frac{m}{s}$ است، درصورتی‌که سرعت حرکت کاتوره‌ای آن‌ها بسیار زیاد و از مرتبهٔ $10^{6}\frac{m}{s}$ است.

۶- آهنگ شارش بار الکتریکی در یک سیم معادل با جریان الکتریکی گذرنده از آن سیم است:

$$I_{av}=\frac{\Delta q}{\Delta t}$$

Δq : بار الکتریکی شارش‌شده با یکای کولن (C) $\quad$ Δt : مدت‌زمان عبور بار الکتریکی با یکای ثانیه (s)

I_{av} : جریان الکتریکی متوسط با یکای آمپر (A)

۷- یکای جریان الکتریکی برابر آمپر (A) است که معادل با $\frac{\text{کولن}}{\text{ثانیه}}$ می‌باشد. دقت کنید که آمپر یکی از هفت یکای اصلی SI می‌باشد.

۸- طبق رابطهٔ $\Delta q = I_{av}\Delta t$، علاوه‌بر کولن، می‌توان یکای آمپر ـ ساعت را هم برای بار الکتریکی استفاده کرد. هر آمپر ـ ساعت معادل با ۳۶۰۰ کولن است.

۹- در سؤالاتی که تعداد الکترون‌های عبوری از یک مقطع رسانا را در مدت‌زمان Δt می‌خواهیم، می‌توان به‌صورت زیر عمل کرد:

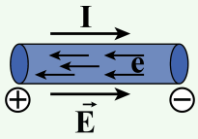
$$\begin{cases} I_{av}=\dfrac{\Delta q}{\Delta t} \\ \Delta q = ne \end{cases} \Rightarrow I_{av}=\frac{ne}{\Delta t} \Rightarrow n=\frac{I_{av}\Delta t}{e}$$

نکته

۱- جهت جریان الکتریکی با میدان الکتریکی هم‌سو است.

۲- جهت حرکت الکترون‌ها یا همان سرعت سوق الکترون‌ها در خلاف جریان الکتریکی است.

۳- میدان و جریان الکتریکی همیشه از پتانسیل الکتریکی بیش‌تر به کم‌تر جاری می‌شود.



ماز

۶۲- **ولتاژ باتری ماشین‌حساب زیر، ۳V است. وقتی ماشین‌حساب روشن است، این باتری باعث عبور جریان ۰/۱۵mA در آن می‌شود. اگر این ماشین‌حساب یک ساعت روشن باشد، باتری چند ژول انرژی به مدار ماشین‌حساب می‌دهد؟**



۱) $۲/۷\times۱۰^{-۲}$

۲) $۲/۷\times۱۰^{-۳}$

۳) ۱/۶۲

۴) ۱۶/۲

پاسخ: گزینهٔ ۳ (آسان ـ محاسباتی ـ سریع ـ صفحهٔ ۴۸ ـ ۱۱۰۲)

باری که در یک ساعت از مدار می‌گذرد، با استفاده از رابطهٔ زیر برابر است با:

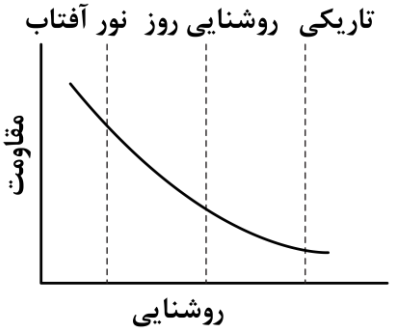
$$\Delta q = I(\Delta t)=۰/۱۵\times۱۰^{-۳}\times۳/۶\times۱۰^{۳}=۰/۵۴C$$

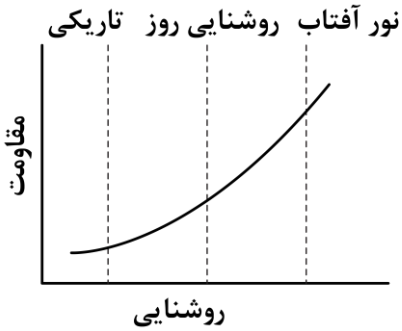
بنابراین انرژی‌ای که باتری به مدار می‌دهد، بنا به رابطهٔ $(W_{\text{خارجی}}=q\Delta V)$ برابر است با:

انرژی داده‌شده به مدار $=q\Delta V=۰/۵۴\times۳=۱/۶۲J$

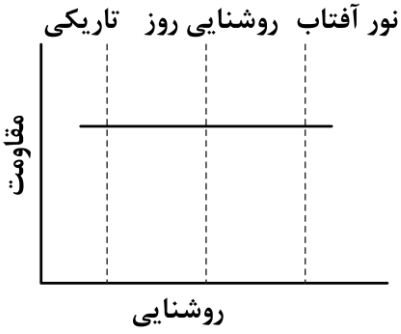
ماز

۶۳- **کدام‌یک از نمودارهای زیر، می‌تواند مقاومت برحسب روشنایی برای یک LDR باشد؟**

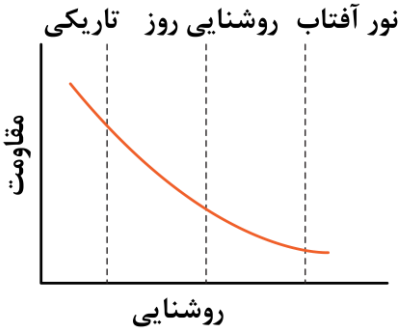
۱)


۲)


۳)


۴)


پاسخ: گزینهٔ ۳ (آسان ـ خط‌به‌خط ـ سریع ـ صفحهٔ ۵۹ ـ ۱۱۰۲)



مقاومت نوری (LDR)، نوعی مقاومت است که مقاومت الکتریکی آن به نور تابیده‌شده به آن بستگی دارد، به‌طوری که با افزایش شدت نور، از مقاومت آن کاسته می‌شود. مثلاً یک LDR نوعی در تاریکی مقاومتی چند مگااُهمی دارد، درحالی‌که در یک نور مناسب، مقاومت آن به چند صد اُهم می‌رسد. نوعی از این مقاومت‌ها از جنس نیم‌رسانای خالص، مانند سیلیسیم هستند که با افزایش شدت نور تابیده‌شده، بر تعداد حامل‌های بار الکتریکی آن‌ها افزوده شده و درنتیجه از مقاومت آن‌ها کاسته می‌شود. شکل نشان‌داده‌شده، مقاومت الکتریکی چنین LDRهایی را برحسب روشنایی (که با یکای LUX سنجیده می‌شود) نشان می‌دهد.

راهنمای مسیرت

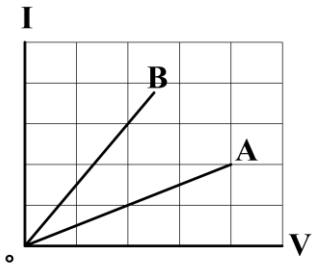
بچه‌ها حتماً حواستون به نمودارها و شکل‌های کتاب درسی باشه و سعی کنید با جزئیات کامل به ذهنتون بسپارین تا به‌راحتی از پس این تیپ تست‌ها بربیاین.

دو مقاومت خاص

۱- ترمیستور: ترمیستور نوعی از مقاومت است که وابستگی مقاومت الکتریکی آن به دما با مقاومت‌های الکتریکی معمولی متفاوت است. اغلب از ترمیستورها به‌عنوان حسگر دما در مدارهای حساس به دما مانند زنگ خطر آتش و دماپاها و نیز در دماسنج‌ها استفاده می‌شود.

۲- مقاومت‌های نوری (LDR): مقاومت نوری نوعی مقاومت است که مقاومت الکتریکی آن به میزان نور تابیده‌شده به آن بستگی دارد، به‌طوری‌که با افزایش شدت نور، از مقاومت آن کاسته می‌شود. مثلاً یک نوع LDR در تاریکی، مقاومتی چند مگااُهمی دارد، درحالی‌که در یک نور مناسب، مقاومت آن به چند صد اُهم می‌رسد. نوعی از این مقاومت‌ها از جنس نیم‌رسانای خالص، مانند سیلیسیم هستند که با افزایش شدت نور تابیده‌شده، بر تعداد حامل‌های بار الکتریکی آن‌ها افزوده شده و درنتیجه از مقاومت آن‌ها کاسته می‌شود.

۶۴- شکل زیر، نمودار $I-V$ را برای دو رسانای اهمی A و B نشان می‌دهد. مقاومت الکتریکی A چند برابر مقاومت الکتریکی B است؟



۱) ۳

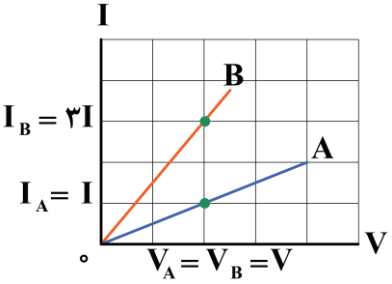
۲) $\frac{۱}{۳}$

۳) ۲

۴) $\frac{۳}{۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (آسان ـ نموداری ـ سریع ـ صفحهٔ ۵۰ ـ ۱۱۰۲)

با توجه به نمودار داده‌شده و به کمک قانون اهم، می‌توان نوشت:



$$R = \frac{V}{I} \Rightarrow \frac{R_A}{R_B} = \frac{\frac{V}{I}}{\frac{V}{۳I}} = ۳$$

راهنمای مسیرت

نمودارهای $I-V$ و $V-I$ همیشه مورد توجه طراحان هستند و اتفاقاً می‌شه با برخی مباحث دیگر از فصل ۲ نیز ترکیب کرد. کافیه شما با پیدا کردن شیب نمودار، مقاومت رسانا رو به‌دست بیارین.

انواع رسانا

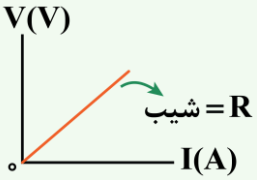
رسانای اُهمی: رسانایی که از قانون اُهم پیروی می‌کند. (مانند فلزات و بیش‌تر رساناهای غیرفلزی)

رسانای غیراُهمی: رسانایی که از قانون اُهم پیروی نمی‌کند. (مثل دیودها)

بررسی نمودارهای مهم

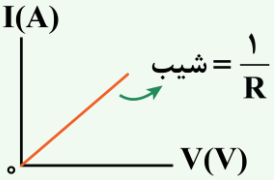
نمودار $V-I$ (ولتاژ برحسب جریان):

برای رسانای اُهمی، این نمودار به‌صورت خطی است که شیب آن متناسب با مقاومت است.



نمودار $I-V$ (جریان برحسب ولتاژ):

برای رساناهای اُهمی، این نمودار به‌صورت خطی با شیب ثابت است که شیب آن برابر با $\frac{1}{R}$ است.

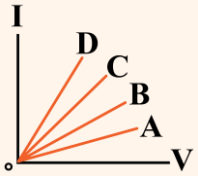


یه نمونهٔ باحال

نمودار جریان الکتریکی برحسب ولتاژ چهار رسانای A، B، C و D مطابق شکل زیر است. ترتیب مقاومت‌ها از کوچک به بزرگ چگونه است؟

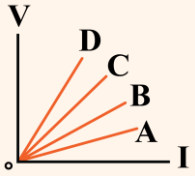
پاسخ تشریحی:

در نمودار $I-V$ هرچه شیب بزرگ‌تر باشد، مقاومت کم‌تر است.



$$R_D < R_C < R_B < R_A$$

اگر نمودار $V-I$ بود چی؟



$$R_A < R_B < R_C < R_D$$

نتیجهٔ اخلاقی: هرچه خطی به محور V نزدیک‌تر باشه، مقاومتش بیش‌تره.

۶۵- یک مکعب‌مستطیل که از جنس یک فلز فرضی به ابعاد ۵mm، ۱cm و ۲cm است را می‌توان از هر یک از دو وجه مقابل آن در مدار قرار داد و در این صورت، اختلاف بزرگ‌ترین مقاومت و کوچک‌ترین مقاومت این مکعب ۰/۳Ω می‌شود. مقاومت ویژهٔ فلز مورد استفاده چند μΩ.m است؟

۱) ۸۰۰ ۲) ۱۶۰ ۳) ۸۰ ۴) ۱۶

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ زمان‌بَر ـ صفحهٔ ۵۲ ـ ۱۱۰۲)

اگر بلندترین و کوتاه‌ترین اضلاع مکعب را به‌ترتیب L_{max} و L_{min} نام‌گذاری کنیم و L' دیگر ضلع آن باشد، داریم:

$$R=\rho\frac{L}{A}\Rightarrow\begin{cases}R_{max}=\rho\dfrac{L_{max}}{A_{min}}=\rho\dfrac{L_{max}}{L'.L_{min}}\\ R_{min}=\rho\dfrac{L_{min}}{A_{max}}=\rho\dfrac{L_{min}}{L'.L_{max}}\end{cases}$$

اگر روابط بالا را بر یکدیگر تقسیم کنیم، خواهیم داشت:

$$\frac{R_{max}}{R_{min}}=\left(\frac{L_{max}}{L_{min}}\right)^2$$

پس نسبت مقاومت بیشینه به مقاومت کمینه به‌دست می‌آید.

$$\Rightarrow \frac{R_{max}}{R_{min}} = (\frac{۲}{۰/۵})^۲ = ۱۶ \Rightarrow R_{max} = ۱۶R_{min}$$

با توجه به این‌که اختلاف مقاومت‌ها در حالت بیشینه و کمینه ۰/۳ اُهم است و نسبت این دو مقاومت ۱۶ است، خواهیم داشت:

$$R_{max} - R_{min} = ۰/۳ \Rightarrow ۱۶R_{min} - R_{min} = ۰/۳ \Rightarrow R_{min} = ۰/۰۲\Omega$$

اکنون مقاومت ویژه را به‌دست می‌آوریم:

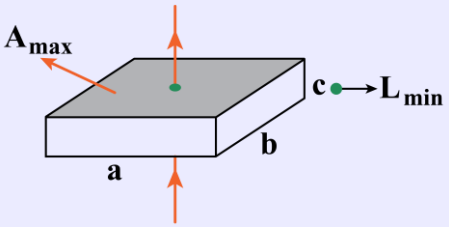
$$R_{min} = \rho \frac{L_{min}}{L'.L_{max}} \Rightarrow ۰/۰۲ = \frac{\rho \times ۵ \times ۱۰^{-۳}}{(۱ \times ۱۰^{-۲})(۲ \times ۱۰^{-۲})} \Rightarrow \rho = ۸ \times ۱۰^{-۴} \Omega.m = ۸۰۰ \mu\Omega.m$$

راهنمای مسیرت

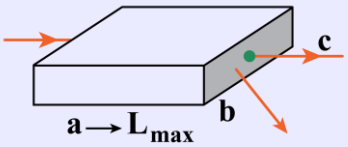
این‌که یک مکعب‌مستطیل رو از کدام دو وجه مقابل آن در مدار قرار بدیم، با تنوع‌های مختلف همواره مورد توجه طراحان هست و جالبه بدونید که مسیر حل همهٔ این تیپ‌ها تقریباً یکسانه و همونیه که در پاسخ‌نامه اشاره کردیم. پس حواست به پاسخ‌نامه باشه.

مقاومت یک رسانای مستطیلی

اگر یک مکعب‌مستطیل به ابعاد a، b و c داشته باشیم، به‌طوری که $a > b > c$ باشد و بتوانیم از هر یک از دو وجه موازی‌اش در مدار قرار دهیم، آن‌گاه طبق رابطهٔ $R = \rho \frac{L}{A}$ داریم:



$$\left.\begin{aligned} R_{max} &= \rho \frac{L_{max}}{A_{min}} = \rho \frac{a}{bc} \\ R_{min} &= \rho \frac{L_{min}}{A_{max}} = \rho \frac{c}{ab} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{R_{max}}{R_{min}} = \frac{\rho \frac{a}{bc}}{\rho \frac{c}{ab}} \Rightarrow \frac{R_{max}}{R_{min}} = \frac{a^۲}{c^۲}$$



$$\Rightarrow \frac{R_{max}}{R_{min}} = (\frac{L_{max}}{L_{min}})^۲$$

اگر هر یک از این دو مقاومت را به یک اختلاف پتانسیل ثابت و یکسان وصل کنیم، داریم:

$$V = RI \xrightarrow{\text{ثابت است. } V} R_{max} I_{min} = R_{min} I_{max} \Rightarrow \frac{I_{max}}{I_{min}} = \frac{R_{max}}{R_{min}}$$

$$\Rightarrow \frac{R_{max}}{R_{min}} = \frac{I_{max}}{I_{min}} = (\frac{L_{max}}{L_{min}})^۲$$

۶۶- دو میلهٔ فلزی A و B، قطر و مقاومت الکتریکی یکسانی دارند. اگر مقاومت ویژهٔ میلهٔ A، نصف مقاومت ویژهٔ میلهٔ B و چگالی میلهٔ B، $\frac{۱}{۴}$ برابر چگالی میلهٔ A باشد، جرم میلهٔ A چند برابر جرم میلهٔ B است؟

۱) $\frac{۱}{۸}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۲ ۴) ۸

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۵۲ ـ ۱۱۰۲)

به کمک رابطهٔ $R = \frac{\rho}{\rho'} . \frac{m}{A^۲}$ داریم:

$$R_A = R_B \Rightarrow \frac{\rho_A}{\rho'_A} . \frac{m_A}{A_A^۲} = \frac{\rho_B}{\rho'_B} . \frac{m_B}{A_B^۲} \xrightarrow{d_A = d_B \Rightarrow A_A = A_B} \frac{m_A}{m_B} = \frac{\rho_B}{\rho_A} . \frac{\rho'_A}{\rho'_B}$$

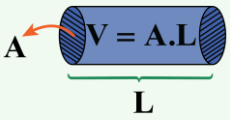
$$\xrightarrow{\rho_A=\frac{1}{2}\rho_B\ ,\ \rho'_B=\frac{1}{4}\rho'_A}\frac{m_A}{m_B}=2\times4=8$$

راهنمای مسیرت

من جای شما باشم روابط $R=\rho\rho'\frac{L^2}{m}$ و $R=\frac{\rho}{\rho'}.\frac{m}{A^2}$ رو دیگه حفظ می‌شم.

نکته

روابط کمکی زیر را در مورد عوامل مؤثر بر مقاومت به‌خاطر بسپارید.



R: مقاومت برحسب Ω — ρ: مقاومت ویژه برحسب $\Omega.m$

L: طول رسانا برحسب m — A: سطح مقطع برحسب m^2

V: حجم رسانا برحسب m^3 — ρ': چگالی رسانا برحسب $\frac{kg}{m^3}$ — m: جرم رسانا برحسب kg

$$R=\frac{\rho L}{A}\Rightarrow\begin{cases}A=\frac{V}{L}\Rightarrow R=\frac{\rho.L^2}{V}\xrightarrow{\rho'=\frac{m}{V}}R=\rho\rho'\frac{L^2}{m}\\ L=\frac{V}{A}\Rightarrow R=\frac{\rho V}{A^2}\xrightarrow{\rho'=\frac{m}{V}}R=\frac{\rho m}{\rho' A^2}\end{cases}$$

یه نمونهٔ باحال

مقاومت سیم‌های A و B با مشخصات زیر را به‌دست آورید.

سیم A: جرم: ۲۰g، چگالی: $5\frac{g}{cm^3}$، طول: ۳m و مقاومت ویژه: $2\times10^{-6}\Omega.m$

سیم B: جرم: ۱۰۰g، چگالی: $4\frac{g}{cm^3}$، مساحت مقطع: $2mm^2$ و مقاومت ویژه: $5\times10^{-6}\Omega.m$

پاسخ تشریحی:

$$R_A=\frac{\rho L^2\rho'}{m}\xrightarrow[\rho'=5000\frac{kg}{m^3}\ ,\ m=0/02kg]{\rho=2\times10^{-6}\Omega.m\ ,\ L=3m}R_A=\frac{2\times10^{-6}\times9\times5000}{0/02}=4/5\Omega$$

$$R_B=\frac{\rho m}{\rho' A^2}\xrightarrow[\rho'=4000\frac{kg}{m^3}\ ,\ A=2\times10^{-6}m^2]{\rho=5\times10^{-6}\Omega.m\ ,\ m=0/1kg}R_B=\frac{5\times10^{-6}\times0/1}{4000\times4\times10^{-12}}=31/25\Omega$$

این فرمول‌ها رو برای محاسبهٔ مقاومت الکتریکی براساس ویژگی‌های ساختمانی آن به‌خاطر بسپار!

۱- محاسبهٔ مقاومت الکتریکی رسانا به کمک طول و سطح مقطع:

$$R=\frac{\rho L}{A}$$

۲- محاسبهٔ مقاومت الکتریکی رسانا به کمک طول و حجم:

$$R=\frac{\rho L^2}{V}$$

۳- محاسبهٔ مقاومت الکتریکی رسانا به کمک **سطح مقطع** و **حجم**:

$$R=\frac{\rho V}{A^{۲}}$$

۴- محاسبهٔ مقاومت الکتریکی رسانا به کمک **طول**، **جرم** و **چگالی**:

$$R=\frac{\rho\rho' L^{۲}}{m}$$

۵- محاسبهٔ مقاومت الکتریکی رسانا به کمک **سطح مقطع**، **جرم** و **چگالی**:

$$R=\frac{\rho m}{\rho' A^{۲}}$$

۶۷- مقاومت رشتهٔ درونی یک برشته‌کن که از جنس نیکروم است، در حالت روشن (دمای $۱۲۷۰^{\circ}C$) برابر ۴۵Ω است. مقاومت این رشته در دمای $۲۰^{\circ}C$ چند اهم است؟ (از تغییر طول و قطر رشته دراثر تغییر دما چشم‌پوشی شود و ضریب دمایی مقاومت ویژه نیکروم $۴\times۱۰^{-۴}\frac{۱}{K}$ است.)

۱) ۳۶ ۲) ۳۰ ۳) ۴۰ ۴) ۴۲

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ محاسباتی ـ سریع ـ صفحهٔ ۵۳ ـ ۱۱۰۲)

طبق متن کتاب درسی، دمای مرجع را $۲۰^{\circ}C$ درنظر می‌گیریم. با توجه به رابطهٔ $R_{۲}=R_{۱}[۱+\alpha\Delta\theta]$ به‌راحتی می‌توان نوشت:

$$\Delta\theta=\theta_{۲}-\theta_{۱}=۱۲۷۰-۲۰=۱۲۵۰^{\circ}C$$

$$R_{۲}=R_{۱}[۱+\alpha\Delta\theta]\Rightarrow ۴۵=R_{۱}[۱+۴\times۱۰^{-۴}\times۱۲۵۰]\Rightarrow ۴۵=R_{۱}\times\frac{۳}{۲}\Rightarrow R_{۱}=۳۰\Omega$$

اثر تغییر دما بر مقاومت الکتریکی

۱- در مقاومت‌های نیم‌رسانا مانند مقاومت‌های ژرمانیم و سیلیسیم با افزایش دما، مقاومت الکتریکی کاهش می‌یابد.

۲- در مقاومت‌های فلزی، با افزایش دما، مقاومت الکتریکی هم افزایش می‌یابد. برای محاسبهٔ تغییرات مقاومت الکتریکی فلزات برحسب دما از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

$$\Delta R=R_{۲}-R_{۱}=R_{۱}\alpha\Delta\theta$$

$$\Rightarrow R_{۲}=R_{۱}(۱+\alpha\Delta\theta)$$

۳- در مسائل مربوط به اثر دما بر مقاومت، ممکن است خواسته‌های زیر مطرح شود:

الف) مقاومت الکتریکی چند برابر می‌شود؟

در این حالت نسبت $\frac{R_{۲}}{R_{۱}}$ را می‌خواهیم و داریم:

$$R_{۲}=R_{۱}(۱+\alpha\Delta\theta)\Rightarrow\frac{R_{۲}}{R_{۱}}=۱+\alpha\Delta\theta$$

ب) مقاومت الکتریکی چقدر تغییر می‌کند؟

در این حالت $R_{۲}-R_{۱}$ موردنظر است و داریم:

$$\Delta R=R_{۲}-R_{۱}=R_{۱}\alpha\Delta\theta$$

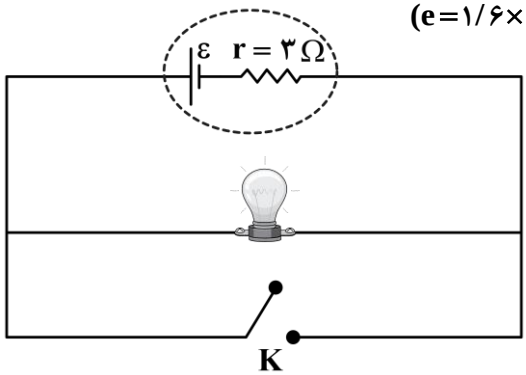
پ) مقاومت الکتریکی چند درصد تغییر کرده است؟

در این حالت $\frac{\Delta R}{R_1}$ را می‌خواهیم و داریم:

$$\frac{\Delta R}{R_1}=\frac{R_1\alpha\Delta\theta}{R_1}=\alpha\Delta\theta$$

$$\Rightarrow \text{درصد تغییر مقاومت}=\alpha\Delta\theta\times 100$$

۶۸- در مدار شکل زیر، در مدت ۲ دقیقه به تعداد $4/5\times10^{21}$ الکترون از لامپ می‌گذرد. اگر مقاومت الکتریکی لامپ 4Ω باشد، با بسته شدن کلید K، جریان عبوری از باتری چند آمپر تغییر می‌کند؟ $(e=1/6\times10^{-19}C)$



۱) ۱۸

۲) ۶

۳) ۱۴

۴) ۸

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۶۴ ـ ۱۱۰۲)

گام اول

ابتدا اندازهٔ بار عبوری از لامپ را در مدت‌زمان گفته‌شده به‌دست می‌آوریم:

$$|\Delta q|=ne=4/5\times10^{21}\times1/6\times10^{-19}=45\times16=720C$$

گام دوم

جریان عبوری از لامپ را به‌دست می‌آوریم:

$$I=\frac{|\Delta q|}{\Delta t}=\frac{720}{2\times60}=6A$$

$$\xrightarrow[R_{eq}=R_{\text{لامپ}}]{I=\frac{\varepsilon}{R_{eq}+r}} 6=\frac{\varepsilon}{4+3}\Rightarrow\varepsilon=42V$$

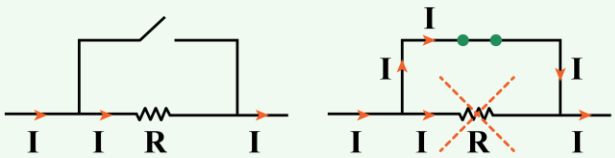
گام آخر

با بستن کلید، لامپ اتصال کوتاه شده و از مدار حذف می‌شود و باتری نیز اتصال کوتاه شده و حداکثر جریان ممکن را تولید می‌کند که برابر است با:

$$R'_{eq}=0\Rightarrow I'=\frac{\varepsilon}{r}=\frac{42}{3}=14A\xrightarrow{\text{تغییر جریان عبوری از باتری}}I'-I=14-6=8A$$

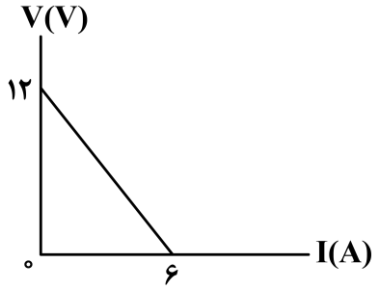
نکته

اگر مقاومت الکتریکی با یک سیم بدون مقاومت یا با یک آمپرسنج ایده‌آل، موازی بسته شده باشد، از مدار حذف می‌شود و اصطلاحاً می‌گوییم **اتصال کوتاه** رخ داده است.



SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

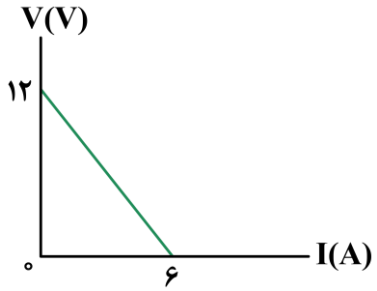
۶۹- نمودار تغییرات ولتاژ دو سر یک باتری برحسب جریانی که از آن می‌گذرد، مطابق شکل است. اگر این باتری به یک مقاومت ۳ اهمی متصل شود، چه جریانی از آن عبور می‌کند؟



۱) ۱/۲
۲) ۲
۳) ۲/۴
۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ نموداری ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۶۴ ـ ۱۱۰۲)

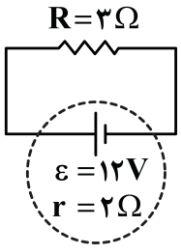
کام اول



با توجه به نمودار داده‌شده، نیروی محرکهٔ باتری برابر عرض از مبدأ نمودار بوده و برابر $\varepsilon = ۱۲V$ است.

از طرفی اندازهٔ شیب نمودار داده‌شده برابر مقاومت درونی باتری بوده و برابر $r = \frac{۱۲}{۶} = ۲\Omega$ است.

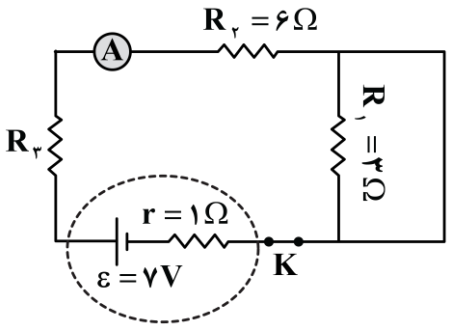
کام آخر



حال اگر مطابق شکل، این باتری به یک مقاومت ۳ اهمی متصل شود، جریان عبوری از آن برابر است با:

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r} = \frac{۱۲}{۳ + ۲} = ۲/۴A$$

۷۰- در مدار شکل زیر، آمپرسنج آرمانی بوده و مقاومت معادل مدار برابر ۱۳Ω است. مقاومت $R_۳$ برابر ..... اهم بوده و عدد نشان‌داده‌شده توسط آمپرسنج برابر ..... آمپر است.



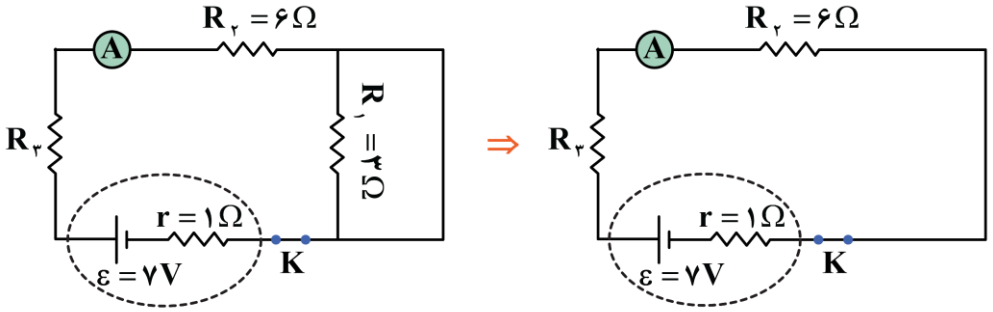
۱) ۴، ۰/۵
۲) ۴، $\frac{۷}{۱۳}$
۳) ۷، ۰/۵
۴) ۷، $\frac{۷}{۱۳}$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۷۱ ـ ۱۱۰۲)

کلام اول

به‌دست آوردن مقاومت R_3:

در مدار نشان‌داده‌شده، مقاومت R_1 اتصال کوتاه می‌شود؛ بنابراین شکل ساده‌شدهٔ مدار به‌صورت زیر می‌شود. با توجه به این‌که طبق صورت سؤال مقاومت معادل برابر $R_{eq}=13\Omega$ است؛ بنابراین مقاومت $R_3=7\Omega$ می‌باشد.



$$R_{eq}=R_2+R_3\Rightarrow 13=6+R_3\Rightarrow R_3=7\Omega$$

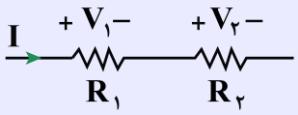
کلام آخر

جریان کل مدار را به‌دست می‌آوریم:

$$I_{\text{کل}}=\frac{\varepsilon}{R_{eq}+r}=\frac{7}{13+1}=\frac{7}{14}=0/5A$$

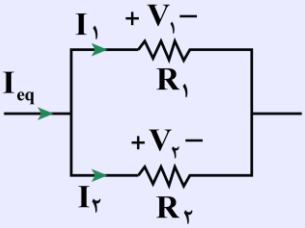
مقاومت معادل

۱- هنگامی‌که دو مقاومت بدون هیچ انشعابی با یک سیم به‌هم بسته شده باشند، به اتصال آن‌ها سری یا متوالی می‌گوییم. در مقاومت‌های متوالی روابط زیر برقرار است:



$$R_{eq}=R_1+R_2$$
$$I_{eq}=I_1=I_2=I$$
$$V_{eq}=V_1+V_2$$

۲- هنگامی‌که دو سر دو مقاومت با سیم رسانا به‌هم متصل باشد، این دو مقاومت به‌صورت موازی به‌هم متصل شده‌اند. در مقاومت‌های موازی روابط زیر برقرار است:

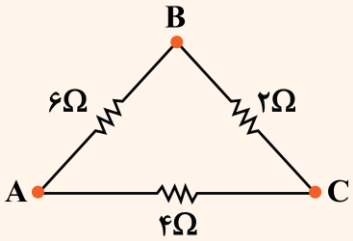


$$\frac{1}{R_{eq}}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\Rightarrow R_{eq}=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$$
$$I_{eq}=I_1+I_2$$
$$V_{eq}=V_1=V_2$$

۳- مقاومت معادل بین دو نقطهٔ A و B به این معنی است که یک سیم به نقطهٔ A وارد شده است و یک سیم از نقطهٔ B خارج شده است. به مثال زیر توجه کنید.

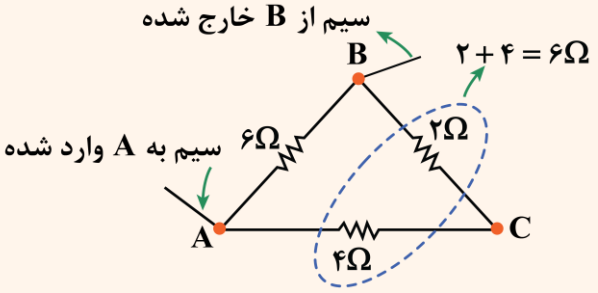
یه نمونهٔ باحال

در شکل زیر، مقاومت معادل بین نقاط A و B و مقاومت معادل بین نقاط A و C را محاسبه کنید.



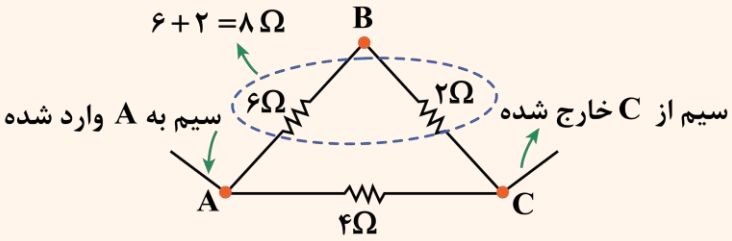
پاسخ تشریحی:

حالت اول: ابتدا مقاومت معادل بین نقاط A و B را محاسبه می‌کنیم. در این حالت، مقاومت‌های ۲Ω و ۴Ω باهم متوالی هستند و مقاومت معادل آن‌ها با مقاومت ۶Ω موازی است؛ بنابراین داریم:



$$R_{AB}=\frac{۶\times۶}{۶+۶}=\frac{۳۶}{۱۲}=۳\Omega$$

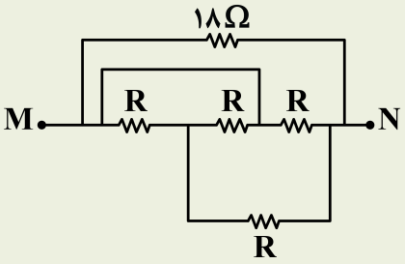
حالت دوم: مقاومت معادل بین نقاط A و C را محاسبه می‌کنیم. در این حالت مقاومت‌های ۲Ω و ۶Ω متوالی هستند و مقاومت معادل آن‌ها با مقاومت ۴Ω موازی است. درنتیجه:



$$R_{AC}=\frac{۸\times۴}{۸+۴}=\frac{۳۲}{۱۲}=\frac{۸}{۳}\Omega$$

آزمون سراسری ریاضی ۱۳۹۸

۶۵- در مدار مقابل، مقاومت معادل بین دو نقطهٔ M و N برابر $\frac{R}{۲}$ است. R چند اُهم است؟

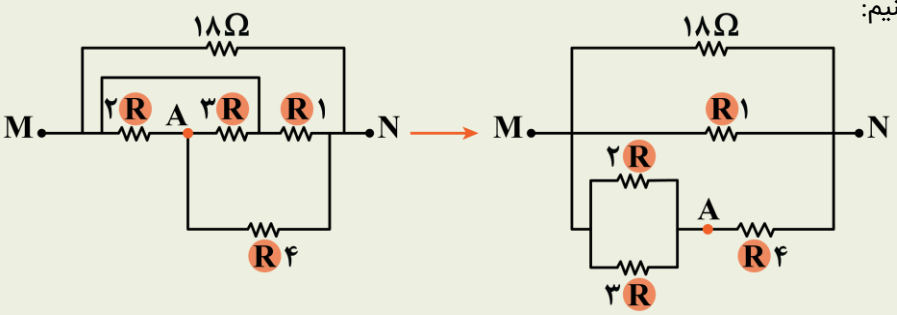


۱) ۱۸ ۲) ۱۲

۳) ۶ ۴) ۳

پاسخ تشریحی:

ابتدا به روش نقاط هم‌پتانسیل، مدار را ساده‌تر می‌کنیم:



شاخهٔ پایینی: $R_{eq_1}=\frac{R}{۲}\Rightarrow R_{eq_2}=\frac{R}{۲}+R=\frac{۳}{۲}R$

و درنهایت $\Rightarrow \frac{۱}{R_{eq}}=\frac{۱}{۱۸}+\frac{۱}{R}+\frac{۱}{\frac{۳}{۲}R}\Rightarrow \frac{۲}{R}=\frac{۱}{۱۸}+\frac{۱}{R}+\frac{۲}{۳R}\Rightarrow \frac{۱}{۳R}=\frac{۱}{۱۸}\Rightarrow R=۶\Omega$

پاسخ: گزینهٔ ۳

نکتهٔ تستی

اگر دو مقاومت $R_۱$ و $R_۲$ باهم موازی و برابر باهم باشند داریم:

$$R_{eq}=\frac{R_۱R_۲}{R_۱+R_۲}\xrightarrow{R_۱=R_۲=R} R_{eq}=\frac{R^۲}{۲R}=\frac{R}{۲}$$

۷۱- سه مقاومت مشابه ۱۲ اهمی را به حالت‌های مختلف به یکدیگر می‌بندیم و مجموعه را به اختلاف پتانسیل ۳۶ ولت وصل می‌کنیم. کدام‌یک از گزینه‌های زیر نمی‌تواند مربوط به جریان کل مدار برحسب آمپر باشد؟

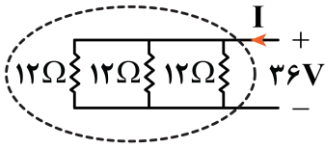
۱) ۴/۵ ۲) ۹ ۳) ۱ ۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۴ (سخت ـ استدلالی ـ زمان‌بَر ـ صفحهٔ ۷۳ ـ ۱۱۰۲)

تمام حالت‌های مختلفی که می‌توان این سه مقاومت را به‌هم بست، بررسی می‌کنیم:

حالت اول

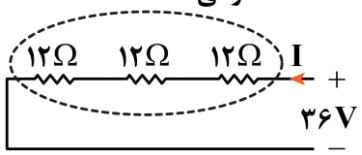
موازی



$$R_{eq}=\frac{۱۲}{۳}=۴\Omega\Rightarrow I=\frac{V_{eq}}{R_{eq}}=\frac{۳۶}{۴}=۹A$$

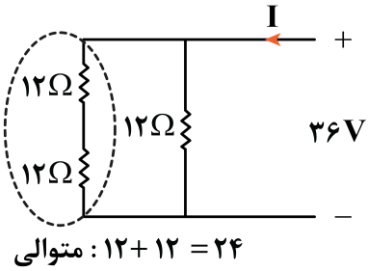
حالت دوم

متوالی



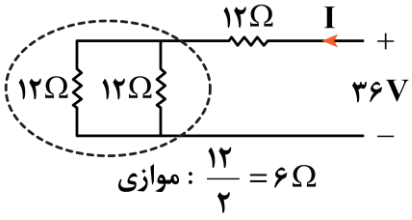
$$R_{eq}=۳\times ۱۲=۳۶\Omega\Rightarrow I=\frac{V_{eq}}{R_{eq}}=\frac{۳۶}{۳۶}=۱A$$

حالت سوم



$$\xrightarrow{۲۴\Omega||۱۲\Omega} R_{eq}=\frac{۲۴\times ۱۲}{۲۴+۱۲}=۸\Omega\Rightarrow I=\frac{V_{eq}}{R_{eq}}=\frac{۳۶}{۸}=۴/۵A$$

حالت چهارم



$$\xrightarrow{۱۲\Omega\text{ , }۶\Omega\text{متوالی‌اند.}} R_{eq}=۱۲+۶=۱۸\Omega$$

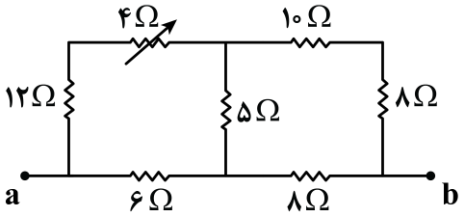
$$I=\frac{V_{eq}}{R_{eq}}=\frac{۳۶}{۱۸}=۲A$$

راهنمای مسیرت

هدفمون از طرح این تست، این بود که دانش‌آموز با حالت‌های مختلف به‌هم بستن سه مقاومت روبه‌رو بشه و با تحلیل تک‌تک اون‌ها، تسلط خودش رو در تحلیل مدارهای به‌دست اومده به چالش بکشه. پس حتماً سعی کنید تمام حالت‌ها رو به دقت بررسی کنید.

SanjeshCloud

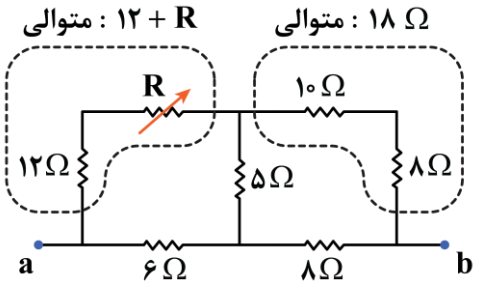
۷۲- در مدار زیر، مقاومت رئوستا را چند درصد و چگونه تغییر دهیم تا جریانی از مقاومت ۵Ω عبور نکند؟



۱) ۳۷/۵ درصد کاهش
۲) ۳۷/۵ درصد افزایش
۳) ۶۲/۵ درصد افزایش
۴) ۶۲/۵ درصد کاهش

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۷۳ ـ ۱۱۰۲)

مقدار اولیهٔ مقاومت رئوستا برابر با ۴Ω است. حالا فرض کنید، مقدار مقاومت رئوستا بعد از تغییر آن برابر با R شود. با توجه به مدار مقابل، برای این‌که از مقاومت ۵Ω جریانی عبور نکند، باید تکنیک پل وتستون برقرار باشد:



$$(۱۲+R)\times ۸=۱۸\times ۶\Rightarrow ۱۲+R=۱۳/۵\Rightarrow R=۱/۵\Omega$$

$$\text{درصد تغییر مقاومت رئوستا}=\left(\frac{۱/۵-۴}{۴}\right)\times ۱۰۰=-۶۲/۵٪$$

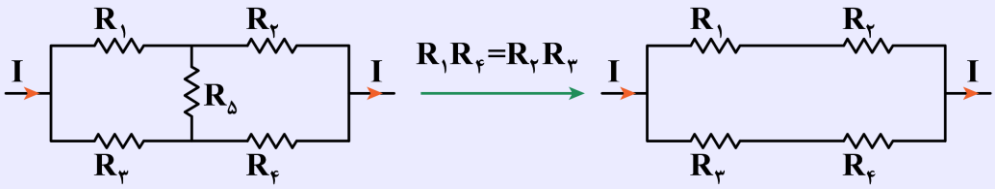
پس باید مقدار مقاومت رئوستا را ۶۲/۵ درصد کاهش دهیم.

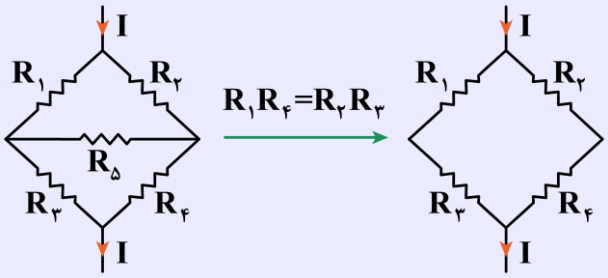
راهنمای مسیرت

دیگه پای تکنیک پل وتستون به سؤالات کنکور باز شده و ما هم که حسابی حواسمون بهش هست، یه دونه سؤال از این تکنیک براتون آوردیم تا خیال همه راحت بشه.

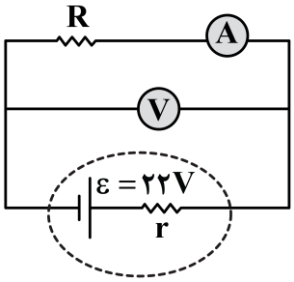
پل وتستون

در مدارهایی به شکل زیر، هرگاه $R_۱R_۴=R_۲R_۳$ باشد، از مقاومت $R_۵$ جریان عبور نمی‌کند، یعنی بودن و نبودن مقاومت $R_۵$ هیچ فرقی به حال مدار نمی‌کند. پس مقاومت $R_۵$ را حذف می‌کنیم و سپس تحلیل مدار را انجام می‌دهیم.





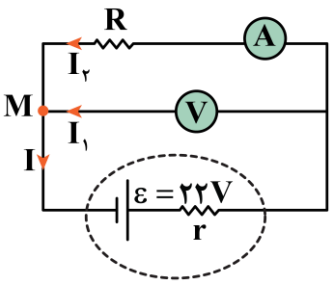
۷۳- در مدار زیر، مقاومت آمپرسنج و ولت‌سنج به‌ترتیب ۱۰Ω و ۲۰۰Ω است و آمپرسنج ۰/۴A و ولت‌سنج ۲۰V را نشان می‌دهد. مقدار $\frac{R}{r}$ برابر با کدام گزینه است؟



۱) ۱۰
۲) ۱۲
۳) ۱۴
۴) ۱۶

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ زمان‌بَر ـ صفحهٔ ۷۱ ـ ۱۱۰۲)

کام اول



مقاومت R و مقاومت آمپرسنج متوالی هستند و معادل آن‌ها $(R+R_A)$ با ولت‌سنج موازی است؛ بنابراین داریم:

$$(R+R_A).I_۲ = R_V.I_۱ \xrightarrow{R_A=۱۰\Omega\ ,\ I_۲=۰/۴A\ ,\ R_V.I_۱=۲۰V} (R+۱۰)\times ۰/۴ = ۲۰$$

$$\Rightarrow R+۱۰ = \frac{۲۰}{۰/۴} = ۵۰ \Rightarrow R = ۴۰\Omega$$

کام دوم

جریان عبوری از باتری را به‌دست می‌آوریم:

$$V = R_V.I_۱ \Rightarrow ۲۰ = ۲۰۰\times I_۱ \Rightarrow I_۱ = ۰/۱A$$

قانون گره در نقطهٔ M: $I = I_۱ + I_۲ = ۰/۱ + ۰/۴ = ۰/۵A$

کام آخر

باتری با ولت‌سنج موازی است و اختلاف پتانسیل یکسانی دارند:

$$V_{\text{باتری}} = V \Rightarrow \varepsilon - rI = V \Rightarrow ۲۲ - \frac{۱}{۲}r = ۲۰ \Rightarrow \frac{۱}{۲}r = ۲۲-۲۰ \Rightarrow r = ۴\Omega$$

$$\Rightarrow \frac{R}{r} = \frac{۴۰}{۴} = ۱۰$$

راهنمای مسیرت

همیشه به بچه‌ها می‌گم وقتی ولت‌سنج یا آمپرسنج غیرایده‌آل هستند، کافیه به‌جای اون‌ها مقاومتشون را قرار بدین و خیلی ساده تحلیل مدار انجام بدین. خواهشاً الکی به خودتون سخت نگیرین...

اگر در یک مدار، آمپرسنج و ولت‌سنج، غیرآرمانی باشند، چگونه مدار را ساده کنیم؟

آمپرسنج غیرآرمانی را برمی‌داریم و به‌جای آن یک آمپرسنج آرمانی و یک مقاومت متوالی با آن درنظر می‌گیریم.

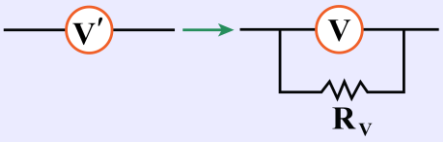


A': آمپرسنج غیرآرمانی

A: آمپرسنج آرمانی

R_A: مقاومت آمپرسنج غیرآرمانی

ولت‌سنج غیرآرمانی را برمی‌داریم و به‌جای آن یک ولت‌سنج آرمانی و یک مقاومت موازی با آن درنظر می‌گیریم.



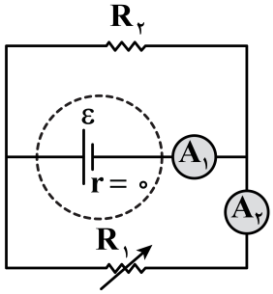
V': ولت‌سنج غیرآرمانی

V: ولت‌سنج آرمانی

R_V: مقاومت ولت‌سنج غیرآرمانی

ماز

۷۴- در شکل زیر، مقاومت متغیر $R_۱$ را تغییر می‌دهیم و مشاهده می‌شود عدد آمپرسنج $A_۱$، $۵A$ کاهش یافته است. عدد آمپرسنج $A_۲$ چگونه تغییر می‌کند؟ (آمپرسنج‌ها ایده‌آل هستند.)



۱) $۵A$ افزایش می‌یابد.

۲) $۵A$ کاهش می‌یابد.

۳) بیش‌تر از $۵A$ افزایش می‌یابد.

۴) کم‌تر از $۵A$ کاهش می‌یابد.

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ سریع ـ صفحهٔ ۷۳ ـ ۱۱۰۲)

دقت کنید با توجه به آرمانی بودن مولد ($r=0$) جریان در مقاومت R_2 ثابت می‌ماند ($V_2=\varepsilon=IR_2$). هر تغییر در جریان کل در جریان عبوری از مقاومت R_1 رخ می‌دهد.

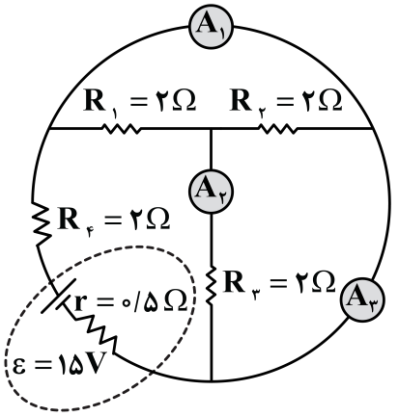
ثابت ثابت ثابت

$$I=I_1+I_2 \xrightarrow{\Delta I_2=0} \Delta I=\Delta I_1=-5A$$

راهنمای مسیرت

بچه‌ها حواستون باشه که وقتی باتری آرمانی هست، اختلاف پتانسیل دو سرش همواره ثابت و برابر با نیروی محرکه است. ضمناً هر مقاومتی که با باتری آرمانی موازی هست، اونم همیشه اختلاف پتانسیلش ثابت و برابر با نیروی محرکهٔ باتری می‌شه.

۷۵- در مدار شکل زیر، جریان‌هایی که آمپرسنج‌های آرمانی نشان می‌دهند، چند آمپر هستند؟



۱) $I_1=1A\ ,\ I_2=0\ ,\ I_3=2A$

۲) $I_1=1A\ ,\ I_2=6A\ ,\ I_3=3A$

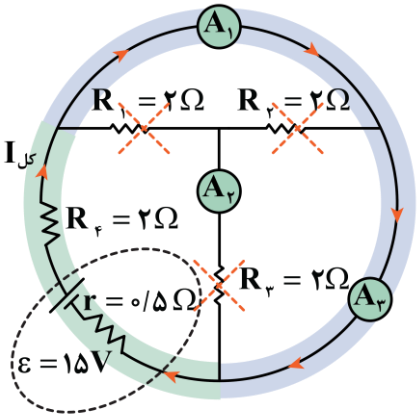
۳) $I_1=I_2=0\ ,\ I_3=6A$

۴) $I_2=0\ ,\ I_1=I_3=6A$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (سخت ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۷۳ ـ ۱۱۰۲)

کام اول

ابتدا دقت کنید که در مدار اتصال کوتاه داریم یا نه. با توجه به مدار، مقاومت‌های R_1، R_2 و R_3 اتصال کوتاه شده و در مدار وجود ندارند و جریانی از آن‌ها رد نمی‌شود؛ لذا $I_2=0$ است.



کام آخر

از طرفی طبق رابطهٔ $I=\dfrac{\varepsilon}{R_{eq}+r}$ خواهیم داشت:

$$R_{eq}=R_4=2\Omega$$

$$I_1=I_3=I_{کل}=\frac{\varepsilon}{R_{eq}+r}=\frac{15}{2+0/5}=6A$$

۷۶- اگر در شهری با ۲۵۰ هزار خانه، هر خانه یک لامپ ۱۰۰ واتی اضافی را به مدت ۳ ساعت در شب روشن کند، در طول یک ماه (۳۰ روز)، چند کیلووات ـ ساعت انرژی الکتریکی اضافی مصرف می‌شود؟

۱) $2/25\times10^3$ ۲) $2/25\times10^6$ ۳) $7/5\times10^2$ ۴) $7/5\times10^5$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۶۷ ـ ۱۱۰۲)

اگر یک لامپ اضافی ۱۰۰ واتی در هر شب ۳ ساعت روشن باشد، انرژی الکتریکی اضافی مصرف‌شده در هر شبانه‌روز برابر است با:

$$U=Pt=100\times10^{-3}\times3=0/3kW.h$$

حال اگر در مدت‌زمان ۳۰ روز و برای ۲۵۰ هزار خانه درنظر بگیریم، انرژی الکتریکی اضافی مصرف‌شده در طول یک ماه برابر است با:

$$U_{کل} = ۰/۳ \times ۳۰ \times ۲۵۰ \times ۱۰^{۳} = ۲۲۵۰۰۰۰ = ۲/۲۵ \times ۱۰^{۶}\ kW.h$$

توان الکتریکی

توان: آهنگ مصرف یا تولید انرژی

توان کمیتی نرده‌ای و فرعی است که یکای آن در SI، وات (W) است که معادل آن برحسب یکاهای اصلی $\frac{kgm^{۲}}{s^{۳}}$ است.

توان مصرفی: توانی که توسط **مصرف‌کننده‌ها** در مدار مثل **مقاومت‌ها** مصرف می‌شود.

توان تولیدی: توانی که توسط مولد در مدار تولید می‌شود.

توان اتلافی: توانی که توسط **مقاومت درونی** باتری مصرف می‌شود.

توان خروجی: توان مفید باتری

$$P_{مصرفی} = VI = RI^{۲} = \frac{V^{۲}}{R}$$

R: مقاومت برحسب Ω　　V: ولتاژ دو سر مقاومت برحسب V　　I: جریان عبوری از مقاومت برحسب A

$$P_{تولیدی} = \varepsilon I$$

ε: نیروی محرکه برحسب V　　I: جریان عبوری از باتری برحسب A

$$P_{اتلافی} = rI^{۲}$$

r: مقاومت درونی برحسب Ω　　I: جریان عبوری از باتری برحسب A

$$P_{خروجی} = P_{تولیدی} - P_{اتلافی} = \varepsilon I - rI^{۲}$$

یه نمونهٔ باحال

اختلاف پتانسیل دو سر یک مقاومت ۱۰ اُهمی برابر با ۵۰V است. این مقاومت در مدت یک دقیقه چند ژول انرژی مصرف می‌کند؟

پاسخ تشریحی:

مرحلهٔ ۱: محاسبهٔ توان مصرفی

$$P = \frac{V^{۲}}{R} = \frac{(۵۰)^{۲}}{۱۰} = \frac{۲۵۰۰}{۱۰} = ۲۵۰W$$

مرحلهٔ ۲: محاسبهٔ انرژی مصرفی

$$U = Pt$$

U: انرژی J　　P: توان W　　t: زمان s

$$U = Pt = ۲۵۰ \times ۶۰ = ۱۵۰۰۰J$$

۷۷- قطر سیم مقاومت یک لامپ را در دمای ثابت چند درصد و چگونه تغییر دهیم تا با ثابت ماندن ولتاژ دو سر لامپ، توان مصرفی آن ۹/۷۵ درصد کاهش یابد؟

۱) ۱۰ درصد افزایش　　۲) ۱۰ درصد کاهش　　۳) ۵ درصد کاهش　　۴) ۵ درصد افزایش

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۶۷ ـ ۱۱۰۲)

ولتاژ لامپ ثابت بوده و توان مصرفی آن ۹/۷۵ درصد کاهش یافته است؛ بنابراین داریم:

$$P = \frac{V^{۲}}{R} \xrightarrow{R=\rho\frac{\ell}{A}} P = \frac{V^{۲}}{\rho\frac{\ell}{A}} = \frac{V^{۲}A}{\rho\ell}$$

$$\xrightarrow{\ell,\rho,V\ \text{ثابت‌اند.}} \frac{P_۲}{P_۱}=\frac{A_۲}{A_۱} \xrightarrow{A\propto d^۲} \frac{P_۲}{P_۱}=(\frac{d_۲}{d_۱})^۲ \Rightarrow \frac{d_۲}{d_۱}=\sqrt{\frac{P_۲}{P_۱}}$$

$$\xrightarrow{P_۲=(۱-\frac{۹/۷۵}{۱۰۰})P_۱=\frac{۳۶۱}{۴۰۰}P_۱} \frac{d_۲}{d_۱}=\sqrt{\frac{۳۶۱}{۴۰۰}}=\frac{۱۹}{۲۰}=۰/۹۵$$

$$\text{درصد تغییر قطر سیم}=(\frac{d_۲}{d_۱}-۱)\times ۱۰۰=(۰/۹۵-۱)\times ۱۰۰=-۵٪$$

پس قطر سیم باید ۵ درصد کاهش یابد.

راهنمای مسیرت

یه وقتایی دانش‌آموز می‌گه آقا به خدا اکثر تست‌ها رو بلد بودم ولی وقت کم آوردم. بچه‌ها به‌قدری تست حل کنید تا دستتون هم مثل ذهنتون گرم بشه. مثل همین تست که اگر سرعت عمل شما در محاسبات بالا باشه، وقت کم نمیارین.

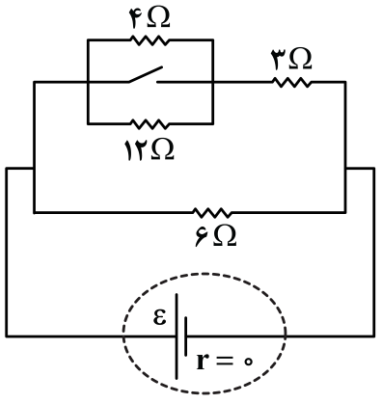
نکته

اگر قطر سیم یک لامپ را x درصد کاهش دهیم و x مقدار کوچکی باشد (مثلاً ۵ درصد)، مساحت مقطع لامپ تقریباً ۲x درصد کاهش، مقاومت آن تقریباً ۲x درصد افزایش و توان مصرفی آن (با فرض ثابت بودن ولتاژ) تقریباً ۲x درصد کاهش می‌یابد.

مثلاً در این سؤال می‌خواهیم توان مصرفی تقریباً ۱۰ درصد کاهش یابد؛ بنابراین قطر مقطع لامپ باید تقریباً ۵ درصد کاهش یابد.

۷۸- در مدار زیر، با بستن کلید، توان مصرفی در مقاومت ۳ اُهمی، ۹ وات تغییر می‌کند. نیروی محرکهٔ باتری چند ولت است؟

۱) ۶
۲) ۱۰
۳) ۱۲
۴) ۲۰



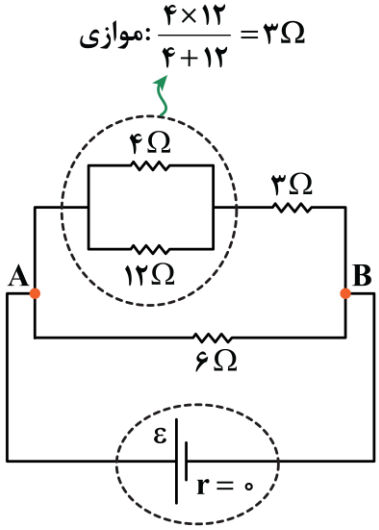
پاسخ: گزینهٔ ۱ (سخت ـ محاسباتی ـ زمان‌بَر ـ صفحهٔ ۷۳ ـ ۱۱۰۲)

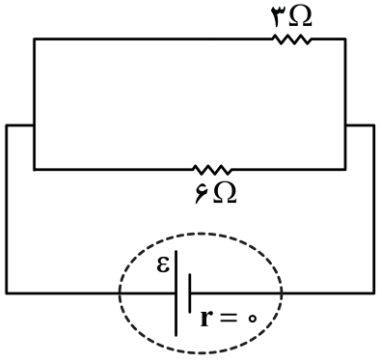
حالت اول کلید باز باشد:

با توجه به مدار مقابل، اختلاف پتانسیل بین نقاط A و B با اختلاف پتانسیل باتری آرمانی برابر بوده $(V_{AB}=\varepsilon)$ و این اختلاف پتانسیل بین دو مقاومت متوالی ۳Ω به‌طور یکسان تقسیم می‌شود:

$$V_{۳\Omega}=\frac{۱}{۲}V_{AB}=\frac{\varepsilon}{۲}$$

$$P=\frac{V^۲}{R}\Rightarrow P_{۳\Omega}=\frac{(\frac{\varepsilon}{۲})^۲}{۳}=\frac{\varepsilon^۲}{۱۲}$$





حالت دوم کلید بسته باشد:

در این حالت، مقاومت‌های ۴Ω و ۱۲Ω اتصال کوتاه می‌شوند و درنتیجه مقاومت ۳Ω با باتری آرمانی موازی و هم‌پتانسیل می‌شود:

$$V'_{۳\Omega}=\varepsilon \Rightarrow P'_{۳\Omega}=\frac{\varepsilon^۲}{۳}$$

اکنون اختلاف توان مقاومت ۳ اُهمی را در دو حالت برابر با ۹W قرار می‌دهیم:

$$P'-P=۹ \Rightarrow \frac{\varepsilon^۲}{۳}-\frac{\varepsilon^۲}{۱۲}=۹ \Rightarrow \frac{\varepsilon^۲}{۴}=۹ \Rightarrow \varepsilon=۶V$$

ماز

۷۹- یک باتری با نیروی محرکهٔ ε=۱۲V به دو سر یک مقاومت الکتریکی وصل بوده و اختلاف پتانسیل دو سر آن برابر با ۳V است. اگر توان خروجی باتری ۱۸W باشد، مقاومت درونی آن چند اهم است؟

۱) ۱ ۲) ۱/۵ ۳) ۲ ۴) ۲/۵

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۶۹ ـ ۱۱۰۲)

می‌دانیم توان خروجی باتری از رابطهٔ $P_{\text{خروجی}}=VI$ به‌دست می‌آید که V اختلاف پتانسیل دو سر باتری و I جریان عبوری از آن است؛ بنابراین داریم:

$$V=\varepsilon-rI \Rightarrow I=\frac{\varepsilon-V}{r} \xrightarrow{P_{\text{خروجی}}=VI} P_{\text{خروجی}}=V\left(\frac{\varepsilon-V}{r}\right)$$

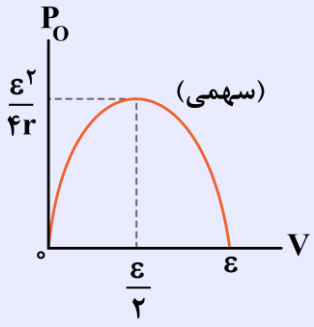
$$\xrightarrow{P_{\text{خروجی}}=۱۸W\ ,\ \varepsilon=۱۲V\ ,\ V=۳V} ۱۸=۳\left(\frac{۱۲-۳}{r}\right) \Rightarrow ۶=\frac{۹}{r} \Rightarrow r=\frac{۹}{۶}=۱/۵\Omega$$

راهنمای مسیرت

بچه‌ها خواهشاً رابطهٔ توان خروجی برحسب اختلاف پتانسیل دو سر باتری رو خیلی خوب بهش مسلط باشین. از بس که مورد توجه طراحان هست.

توان خروجی مولد برحسب اختلاف پتانسیل الکتریکی آن

$$P_O=\varepsilon I-rI^۲ \xrightarrow{I=\frac{\varepsilon-V}{r}} P_O=\frac{\varepsilon}{r}V-\frac{۱}{r}V^۲$$



$$۰ \le P_O \le \frac{\varepsilon^۲}{۴r}$$

$R=۰$ باشد (مولد اتصال کوتاه شود) یا کلید باز باشد.

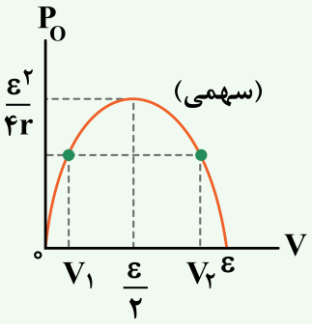
$I=\frac{\varepsilon}{۲r}$ باشد.

$(V=\frac{\varepsilon}{۲}, R=r)$

نکته

۱- در حالتی که توان خروجی مولد بیشینه است، اختلاف پتانسیل آن برابر با $\frac{\varepsilon}{۲}$ است.

۲- اگر به‌ازای دو مقدار متفاوت برای اختلاف پتانسیل مولد، توان خروجی مولد یا همان توان مصرفی سایر اجزای مدار (R)، یکسان باشد باید $V_۱ + V_۲$ برابر با اختلاف پتانسیل مولد در حالت کلید باز باشد:



$$V_۱ + V_۲ = \varepsilon$$

ماز

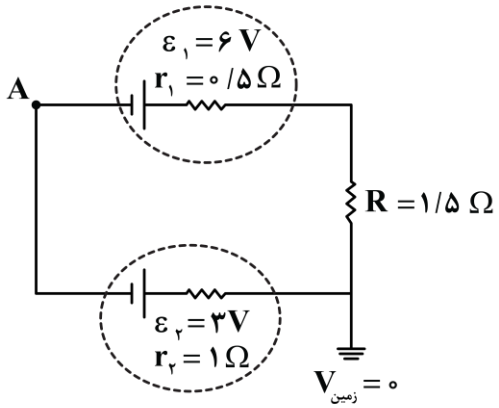
۸۰- **در شکل مقابل، پتانسیل الکتریکی نقطهٔ A چند ولت است؟**

۱) ۲-

۲) ۲

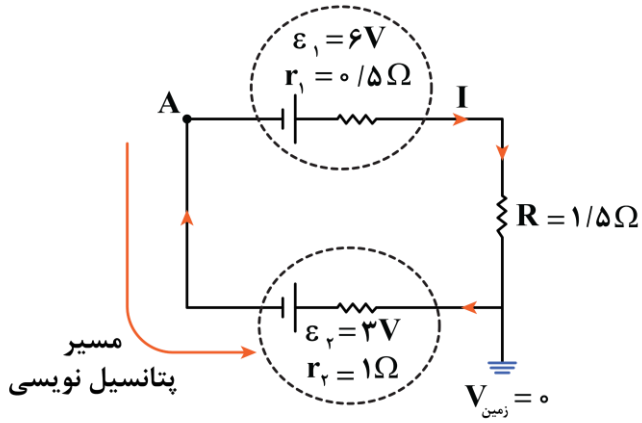
۳) ۴-

۴) ۴



پاسخ: گزینهٔ ۳ (آسان ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۶۵ ـ ۱۱۰۲)

ابتدا جریان مدار را به‌دست می‌آوریم:



$$I = \frac{\varepsilon_۱ - \varepsilon_۲}{R + r_۱ + r_۲} = \frac{۶ - ۳}{۱/۵ + ۰/۵ + ۱} = ۱A$$

حال از نقطهٔ A تا زمین در مسیر نشان‌داده‌شده، پتانسیل‌نویسی می‌کنیم:

$$V_A + \varepsilon_۲ + r_۲ I = V_{زمین} \Rightarrow V_A + ۳ + ۱ = ۰ \Rightarrow V_A = -۴V$$

در مدارهای تک‌حلقه با بیش از یک منبع، به روش زیر، جهت جریان مدار و مقدار آن را تعیین می‌کنیم

۱- باتری‌هایی که به خاطر موقعیت پایانهٔ مثبتشان، می‌خواهند در جهت ساعتگرد جریان تولید کنند را ساعتگردی‌ها می‌نامیم و مجموع نیروی محرکهٔ آن‌ها را ε_s می‌گیریم.

۲- باتری‌هایی که به خاطر موقعیت پایانهٔ مثبتشان، می‌خواهند در جهت پادساعتگرد جریان تولید کنند را پادساعتگردی‌ها می‌نامیم و مجموع نیروی محرکهٔ آن‌ها را ε_{ps} می‌گیریم.

۳- اگر $\varepsilon_s > \varepsilon_{ps}$ باشد، جریان کل مدار در جهت ساعتگرد می‌شود و گروه ساعتگردی‌ها که قُلدرتر هستند می‌شوند باتری‌های شارژدهنده و گروه مغلوب‌شدهٔ پادساعتگردی‌ها هم می‌شوند باتری‌های شارژشونده یا مصرف‌کننده.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴- اگر $\varepsilon_{ps} > \varepsilon_s$ باشد، جریان کل مدار در جهت پادساعتگرد می‌شود و گروه پادساعتگردی‌ها که قُلدرتر هستند می‌شوند باتری‌های شارژدهنده و گروه مغلوب‌شدهٔ ساعتگردی‌ها هم می‌شوند باتری‌های شارژشونده یا مصرف‌کننده.

۵- جریان کل مدار هم از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$I = \frac{\left|\varepsilon_s - \varepsilon_{ps}\right|}{\text{جمع تمام مقاومت‌های داخلی و بیرونی مدار}}$$

نکته

برای یافتن ولتاژ نقطه‌ای از مدار، کافی است از آن نقطه و در یک مسیر خلوت به سمت زمین حرکت کنیم و با رعایت پروتکل‌های پتانسیل‌نویسی، ولتاژ نقطهٔ موردنظر را به‌دست آوریم.

بودجه‌بندی این آزمون

شیمی ۱: فصل ۱ و ۲ دهم / (صفحه‌های ۳۴ تا ۴۱ و ۵۵ تا ۵۷ و ۵۷ تا ۵۸ و ۶۲ تا ۶۵) یادگیری عمیق
شیمی ۲: فصل ۱ و ۲ یازدهم (تا سر غذای سالم) / (صفحه‌های ۴۰ تا ۷۷) مرور و جمع‌بندی

سهم در کنکور

پایهٔ دهم: درمجموع ۲ تست از ۳۰ تست کنکور را پوشش داده است.
پایهٔ یازدهم: درمجموع ۳ تست از ۳۰ تست کنکور را پوشش داده است.

برای دیدن پاسخنامهٔ ویدئویی آزمون QRcode بالا را اسکن کنید!
یا بر روی لینک زیر کلیک کنید!
پاسخنامهٔ ویدئویی آزمون

شیمی دهم (بخش انتخابی)

۸۱- کدام مورد درست است؟

۱) هیدروژن تنها عنصری است که در ترکیب‌های خود به آرایش دوتایی می‌رسد.
۲) اتم‌های نافلزی، فقط با گرفتن الکترون می‌توانند به آرایش گاز نجیب هم‌دوره خود برسند.
۳) مولکول، ذره‌ای است که اتم‌های تشکیل‌دهنده آن، تمام الکترون‌های ظرفیتی خود را به اشتراک می‌گذارند.
۴) در ترکیب‌های مولکولی، الکترون‌های پیوندی متعلق به یک اتم نبوده و بین دو اتم به اشتراک گذاشته‌شده‌اند.

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ مفهومی ـ سریع ـ صفحهٔ ۴۱ ـ ۱۰۰۱)

در ترکیب‌های مولکولی، الکترون‌های پیوندی متعلق به یک اتم نبوده و بین دو اتم به اشتراک گذاشته‌شده‌اند. این الکترون‌ها بیشتر زمان خود را در اطراف هسته اتمی سپری می‌کنند که خاصیت نافلزی **بالاتری** دارد. به همین دلیل به این اتم‌ها **بار جزئی منفی** نسبت داده می‌شود. برای مثال در مولکول H_2O اتم اکسیژن خاصیت نافلزی **بیشتری** داشته و بار جزئی آن منفی است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) اتم هیدروژن می‌تواند با گرفتن یا به اشتراک گذاشتن الکترون ظرفیتی خود، به آرایش الکترونی گاز نجیب هم‌دوره خود یعنی **هلیم** دست پیدا کند. همچنین عنصر **لیتیم** نیز می‌تواند با از دست دادن الکترون و تبدیل شدن به کاتیون، به آرایش الکترونی هلیم دست پیدا کند.

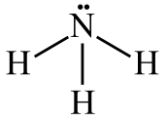
هلیم

در رابطه با هلیم، داریم:

- هلیم
  - به‌عنوان سبک‌ترین گاز نجیب، بی‌رنگ و بی‌بو است.
  - برای پرکردن بالن‌های هواشناسی، تبلیغاتی و تفریحی و همچنین در جوشکاری کاربرد دارد.
  - در کپسول غواصی و خنک کردن دستگاه‌های تصویربرداری مانند MRI کاربرد دارد.
  - مقدار آن در منابع زیرزمینی بیشتر از مقدار آن در هواکره است.
  - حدود ۷ درصد حجمی گاز طبیعی را شامل می‌شود.
  - بعد از آرگون و نئون، سومین گاز نجیب فراوان در هواکره است.

۲) اتم‌های نافلزی با گرفتن یا به اشتراک گذاشتن الکترون‌های ظرفیتی خود، به آرایش الکترونی گاز نجیب هم‌دوره خود می‌رسند. برای مثال، اتم اکسیژن در مولکول H_2O، با به اشتراک گذاشتن و در ترکیب یونی K_2O، با گرفتن الکترون به آرایش گاز نجیب هم‌دوره خود یعنی نئون دست پیدا می‌کند.

۳) مولکول‌ها، ترکیب‌هایی هستند که در آن‌ها اتم‌ها با به اشتراک گذاشتن برخی یا تمام الکترون‌های لایه ظرفیت خود، به آرایش گاز نجیب هم‌دوره خود می‌رسند. برای مثال، اتم نیتروژن (که در لایه ظرفیت خود دارای ۵ الکترون است) در مولکول آمونیاک (NH_3) تعداد ۳ الکترون خود را با اتم‌های هیدروژن به اشتراک گذاشته و ۲ الکترون ظرفیتی خود را نیز به‌صورت جفت الکترون ناپیوندی روی اتم خود نگه می‌دارد. از طرفی اتم‌های **هیدروژن** تک الکترون ظرفیتی خود را با **نیتروژن** به اشتراک گذاشته و به آرایش گاز نجیب هم‌دوره خود یعنی هلیم می‌رسند. ساختار لوویس آمونیاک به‌صورت زیر است:



ماز

۸۲- کدام گزینه زیر نادرست است؟

۱) عنصری با عدد اتمی ۳۴، متعلق به گروه شانزدهم بوده و ۶ الکترون در بیرونی‌ترین لایه الکترونی خود دارد.

۲) هر عنصر از جدول دوره‌ای که دارای ۱۲ الکترون با $l = ۱$ است، در واکنش‌ها الکترون از دست می‌دهد.

۳) اگر اتم ^{۵۸}X دارای ۱۶ الکترون با $n = ۳$ باشد، در هر اتم این عنصر ۳۰ ذره زیراتمی بدون بار وجود دارد.

۴) لایه الکترونی پنجم، ۵ زیرلایه داشته و ۲۰٪ از کل الکترون‌های آن، در زیرلایه با $l = ۲$ قرار می‌گیرند.

پاسخ: گزینهٔ ۲ (دشوار ـ مفهومی ـ زمان‌بر ـ صفحهٔ ۳۹ ـ ۱۰۰۱)

عدد کوانتومی اصلی را با n و عدد کوانتومی فرعی را با l نمایش می‌دهند. عدد کوانتومی فرعی می‌تواند شمار الکترون‌های هر زیرلایه را تعیین کند. زیرلایه‌ای با $l = ۱$، معادل با زیرلایه p است. عناصری که دارای ۱۲ الکترون با $l = ۱$ هستند، دارای دو زیرلایه $۲p$ و $۳p$ کاملاً پر هستند. عدد اتمی این عناصر، در بازه بین ۱۸ تا ۳۰ قرار می‌گیرد. به‌جز آرگون، سایر عناصر گفته‌شده فلز بوده و در واکنش‌ها الکترون از دست می‌دهند. توجه داریم که آرگون، نوعی **نافلز** بوده و چون **آرایش هشت‌تایی** دارد، واکنش‌پذیری **بسیار ناچیزی** دارد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) عنصری با عدد اتمی ۳۴، معادل با سلنیم است. **سلنیم**، متعلق به **گروه شانزدهم** بوده و دارای ۴ الکترون در زیرلایه $۴p$ و ۲ الکترون دیگر نیز در زیرلایه $۴s$ است. آرایش الکترونی سلنیم به‌صورت زیر است:

$$_{۳۴}Se : ۱s^۲۲s^۲۲p^۶۳s^۲۳p^۶۳d^{۱۰}۴s^۲۴p^۴$$

هر اتم سلنیم، در مجموع ۶ الکترون در بیرونی‌ترین لایه الکترونی خود دارد.

۳) طبق فرض سؤال، این عنصر دارای ۱۶ الکترون با $n = ۳$ است. بر این اساس، عنصر مورد نظر به‌ترتیب دارای ۲ و ۶ الکترون در زیرلایه‌های $۳s$ و $۳p$ بوده و ۸ الکترون نیز در زیرلایه $۳d$ دارد. اگر اتم ^{۵۸}X دارای ۸ الکترون با $l = ۲$ باشد، آرایش الکترونی آن به‌صورت زیر در می‌آید:

$$X : ۱s^۲۲s^۲۲p^۶۳s^۲۳p^۶۳d^۸۴s^۲$$

این اتم دارای ۲۸ الکترون بوده و عدد اتمی آن برابر با **۲۸** است. بر این اساس، می‌توان گفت در هر اتم این عنصر **۳۰ ذره زیراتمی بدون‌بار** (نوترون) وجود دارد. داریم:

$$\text{تعداد نوترون} = \text{عدد جرمی} - \text{عدد اتمی} = ۵۸ - ۲۸ = ۳۰$$

۴) عدد کوانتومی اصلی (n)، تعداد زیرلایه‌های الکترونی موجود در یک لایه را مشخص می‌کند. هر لایه، به اندازه عدد کوانتومی اصلی خود، زیرلایه دارد. بر این اساس، می‌توان گفت لایه الکترونی پنجم، ۵ زیرلایه مجزا دارد. این لایه، به‌طور کلی ظرفیت ۵۰ الکترون را دارد که از کل این مقدار، ۲۰٪ می‌توانند در زیرلایه $۵d$ با $l = ۲$ قرار بگیرند. توجه داریم که به کمک مقدار n، حداکثر گنجایش الکترونی یک لایه را می‌توان محاسبه کرد. در این رابطه، داریم:

$$\text{حداکثر گنجایش الکترونی لایه } n\text{ام} = ۲n^۲$$

۸۳- نام کدام ترکیب به‌صورت درست نوشته شده است؟

۱) بوکسیت: Al_2O_3
۲) کبالت(II) سولفات: $COSO_4$
۳) لیتیم نیترات: $LiNO_3$
۴) روی دی‌برمید: $ZnBr_2$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (آسان ـ مفهومی ـ سریع ـ صفحهٔ ۵۵ ـ ۱۰۰۲)

از ترکیب یون نیترات با یون لیتیم، ترکیب یونی لیتیم نیترات با فرمول شیمیایی $LiNO_3$ تولید می‌شود. با توجه به مطرح شدن موارد مشابه در کنکور سراسری، بهتر است یون‌های پرکاربرد زیر را علاوه بر یون‌های مطرح‌شده در کتاب درسی، به‌خاطر بسپارید:

نام یون	فرمول شیمیایی یون	نام یون	فرمول شیمیایی یون
فورمات	CHO_2^-	هیدروژن کربنات	HCO_3^-
استات	$C_2H_3O_2^-$	هیدروژن سولفات	HSO_4^-
بنزوات	$C_6H_5COO^-$	سولفیت	SO_3^{2-}
پرمنگنات	MnO_4^-	نیتریت	NO_2^-
سیانید	CN^-	پراکسید	O_2^{2-}

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) نام درست این ترکیب، به‌صورت آلومینیم اکسید است. توجه داریم که آلومینیم در طبیعت به شکل بوکسیت (Al_2O_3 به همراه ناخالصی) یافت شده و این نام، مربوط به سنگ معدن حاوی فلز آلومینیم است.

۲) کبالت از جمله فلزهای چند ظرفیتی است. بار الکتریکی این عنصر در ترکیبات مختلف می‌تواند ۲+ یا ۳+ باشد؛ بنابراین برای نام‌گذاری ترکیب‌های آن، باید بار الکتریکی فلز در آن ترکیب را نیز ذکر کنیم. نام‌گذاری این ترکیب یونی ایرادی ندارد، اما در نوشتن نماد عناصر مختلف باید حرف اول با حروف بزرگ و حرف دوم را با حروف کوچک بنویسیم. فرمول شیمیایی کبالت (II) سولفات به‌صورت $CoSO_4$ است.

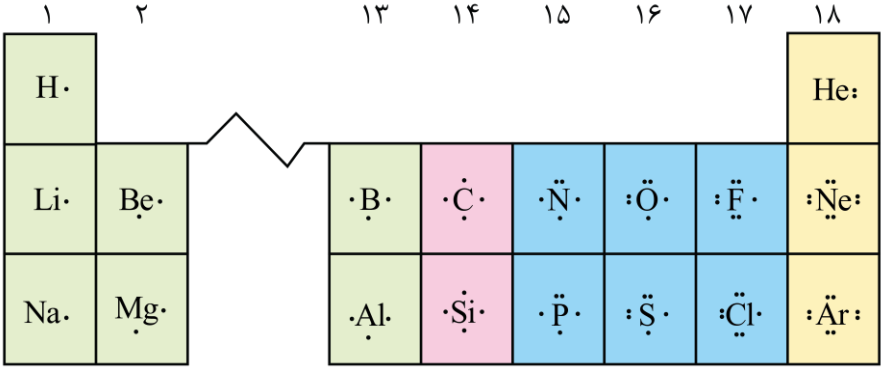
۴) فلزها در واکنش‌های شیمیایی الکترون از دست داده و به کاتیون تبدیل می‌شوند. با کنار هم قرار گرفتن کاتیون‌ها و آنیون‌ها، ترکیبات یونی شکل می‌گیرند. توجه داریم هر ترکیب دارای فلز، نوعی ترکیب یونی بوده و باید با قواعد ترکیبات یونی آن‌ها را نام‌گذاری کنیم. برای مثال، نام ترکیب مطرح شده در صورت سؤال، به‌صورت روی برمید است.

۸۴- شمار الکترون‌های جفت‌نشده در آرایش الکترون-نقطه‌ای کدام عنصر در مقایسه با سایر عناصر بیشتر است؟

۱) اکسیژن
۲) فسفر
۳) پتاسیم
۴) بریلیم

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ مفهومی ـ سریع ـ صفحهٔ ۴۰ ـ ۱۰۰۱)

لوویس برای پیش‌بینی رفتار اتم عناصر اصلی (عناصر دسته s و p)، آرایشی به نام آرایش الکترون-نقطه‌ای را ارائه کرد که در آن الکترون‌های ظرفیت هر اتم، پیرامون نماد آن نمایش داده می‌شوند. برای رسم آرایش الکترون-نقطه‌ای هر اتم، می‌توان نقطه‌گذاری را از یک سمت نماد آن عنصر آغاز کرد و نقطه‌های بعد را در کنار آن قرار داد. در این رابطه، داریم:



توجه داریم، اتم‌هایی که در آرایش الکترون-نقطه‌ای خود دارای الکترون‌های جفت‌نشده (الکترون‌های تک) هستند، **ناپایدار** بوده و تمایل دارند با انجام واکنش‌های شیمیایی، این الکترون‌های **جفت‌نشده** را از بین ببرند. با توجه به جدول بالا، **فسفر** در مقایسه با سایر عناصر داده شده دارای شمار الکترون‌های جفت‌نشده بیشتری در آرایش الکترون-نقطه‌ای خود است. **اکسیژن**، **پتاسیم** و **بریلیم**، به‌ترتیب دارای **۲**، **۱** و **۲** الکترون جفت‌نشده در آرایش الکترون-نقطه‌ای خود هستند.

ماز

۸۵- در رابطه با عنصر سدیم، کدام‌یک از مطالب زیر درست است؟

۱) در واکنش با عنصر گالیم، نوعی ترکیب مولکولی را ایجاد می‌کند.

۲) بار الکتریکی کاتیون حاصل از این عنصر، مشابه بار کاتیون حاصل از باریم است.

۳) فرمول شیمیایی ترکیب حاصل از واکنش این عنصر با سلنیم، به‌صورت Na_2Se است.

۴) شمار زیرلایه‌های کاملاً پر در آرایش الکترونی این عنصر، نصف شمار این زیرلایه‌ها در کلر است.

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۳۹ ـ ۱۰۰۱)

سدیم، یک فلز از **گروه اول** جدول تناوبی بوده و در واکنش‌ها، تک الکترون ظرفیتی خود را از دست می‌دهد و یون Na^+ را تشکیل می‌دهد. سلنیم نیز یک نافلز از **گروه ۱۶** جدول تناوبی بوده و در واکنش‌ها، دو الکترون می‌گیرد و یون Se^{2-} را تشکیل می‌دهد. از کنار هم قرار گرفتن یون‌های ایجاد شده طی این فرایند، ترکیبی با نام **سدیم سلنید** و با فرمول شیمیایی Na_2Se ایجاد می‌شود.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) سدیم، یک عنصر فلزی بوده و با یک عنصر فلزی دیگر مثل گالیم، در هیچ واکنش شیمیایی خاصی شرکت نمی‌کند. توجه داریم که ترکیب‌های مولکولی، در واکنش میان دو نافلز با یکدیگر ایجاد می‌شوند.

۲) سدیم، یک فلز از گروه اول جدول تناوبی بوده و در واکنش‌ها، یون Na^+ را تشکیل می‌دهد. باریم، یک فلز از گروه دوم جدول تناوبی بوده و در واکنش‌ها، ۲ الکترون از دست می‌دهد و یون Ba^{2+} را تشکیل می‌دهد.

۴) آرایش الکترونی سدیم به‌صورت زیر است:

$$_{11}Na : 1s^2 2s^2 2p^6 3s^1$$

در ساختار سدیم، ۳ زیرلایه کاملاً پر از الکترون وجود دارد. آرایش الکترونی کلر به‌صورت زیر است:

$$_{17}Cl : 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^5$$

هر اتم کلر، در ساختار خود دارای ۴ زیرلایه الکترونی کاملاً پر است.

ماز

۸۶- در رابطه با ترکیب حاصل از واکنش میان کربن و فلوئور، کدام مطلب زیر نادرست است؟

۱) در واکنش تولید مولکول مورد نظر، اتم‌های کربن و فلوئور با یکدیگر الکترون به اشتراک می‌گذارند.

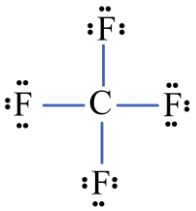
۲) در ساختار هر مولکول از ترکیب تولید شده در این فرایند، ۴ اتم فلوئور وجود دارد.

۳) همه اتم‌های موجود در ساختار این مولکول، در یک صفحه قرار می‌گیرند.

۴) شمار پیوندهای اشتراکی در این ماده با مولکول SO_3 برابر است.

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۵۷ ـ ۱۰۰۲)

کربن و فلوئور، دو عنصر نافلزی بوده و از واکنش میان آن‌ها، ترکیب زیر تولید می‌شود:



در ساختار ترکیب داده شده، اتم‌های فلوئور سعی می‌کنند در حداکثر فاصله ممکن نسبت به یکدیگر قرار بگیرند. در این حالت، اتم‌های فلوئور به شکل هرم در اطراف اتم کربن قرار می‌گیرند. با توجه به توضیحات داده شده، ساختار فضایی مولکول ایجاد شده طی این فرایند، به‌صورت زیر می‌شود:

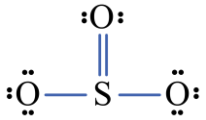


بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) کربن تترافلوئورید، نوعی ماده مولکولی است. در واکنش تولید مواد مولکولی، اتم‌های نافلزی با یکدیگر الکترون به اشتراک می‌گذارند.

۲) کربن تترافلوئورید، فراورده این واکنش بوده و در ساختار هر مولکول از آن، **۴ اتم فلوئور** وجود دارد.

۴) ساختار مولکول SO_3 به‌صورت زیر است:



در ساختار این مولکول، همانند مولکول کربن تترافلوئورید، تعداد **۴ پیوند اشتراکی** وجود دارد.

ماز

۸۷- کدام عنصر زیر، در واکنش با عناصر نافلزی می‌تواند کاتیون‌های متنوع تولید کند؟

۱) کلسیم ۲) وانادیم ۳) گالیم ۴) منیزیم

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ مفهومی ـ سریع ـ صفحهٔ ۵۶ ـ ۱۰۰۲)

عناصر دسته d، همگی فلز هستند. عدد اتمی اولین گروه از این عناصر، در بازه بین ۲۱ (معادل با فلز اسکاندیم) تا ۳۰ (معادل با فلز روی) قرار می‌گیرد. در رابطه با این عناصر و کاتیون‌های حاصل از آن‌ها، باید به ۲ نکته مهم زیر توجه کنیم:

۱) آرایش الکترونی کاتیون حاصل از اغلب این عناصر، مشابه آرایش الکترونی هیچ گاز نجیبی نیست. برای مثال، در رابطه با فلزهای روی و مس، داریم:

$$Zn : [Ar]\,3d^{10}4s^{2} \longrightarrow Zn^{2+} : [Ar]\,3d^{10}$$
$$Cu : [Ar]\,3d^{10}4s^{1} \longrightarrow Cu^{+} : [Ar]\,3d^{10}$$

۲) اغلب این عناصر فلزی بیش از یک نوع کاتیون پایدار تشکیل می‌دهند. برای مثال، به کاتیون‌های حاصل از فلز آهن دقت کنید:

$$Fe : [Ar]\,3d^{6}4s^{2} \longrightarrow \begin{cases} Fe^{2+} : [Ar]\,3d^{6} \\ Fe^{3+} : [Ar]\,3d^{5} \end{cases}$$

توجه داریم که از میان عناصر واسطه، فلزهای روی و نقره، مهم‌ترین عناصری هستند که فقط یک نوع کاتیون تشکیل می‌دهند. در رابطه با سایر عناصر واسطه مهم که می‌توانند کاتیون‌هایی با بار متنوع تشکیل بدهند، داریم:

فلز	مس	آهن	وانادیم	کروم
بار کاتیون‌ها	۱+ و ۲+	۲+ و ۳+		

ماز

۸۸- در رابطه با ترکیب مس(II) کلرید، کدام موارد از مطالب زیر درست هستند؟

الف ـ نسبت شمار آنیون به کاتیون در ساختار این ماده، برابر با مقدار این نسبت در سدیم سولفید است.

ب ـ در آرایش الکترونی کاتیون موجود در ساختار این ترکیب، زیرلایه $3d$ کاملاً پر از الکترون است.

ج ـ آرایش الکترونی آنیون موجود در ساختار این ترکیب، مشابه آرایش الکترونی یون کلسیم است.

د ـ در واکنش تولید هر مول از این ماده از عناصر سازنده آن، ۲ مول الکترون مبادله شده است.

۱) «الف» و «ب» ۲) «ب» و «ج» ۳) «ج» و «د» ۴) «الف» و «د»

پاسخ: گزینهٔ ۳ (دشوار ـ مفهومی ـ زمان‌بر ـ صفحهٔ ۵۶ ـ ۱۰۰۲)

در رابطه با ترکیب مس(II) کلرید با فرمول شیمیایی $CuCl_2$، عبارت‌های (ج) و (د) درست هستند.

بررسی موارد:

الف) نسبت شمار آنیون به کاتیون در ساختار مس(II) کلرید، برابر با ۲ است. توجه داریم که نسبت شمار آنیون به کاتیون در ساختار سدیم سولفید با فرمول شیمیایی Na_2S، برابر با ۰/۵ است.

ب) در ساختار ترکیب داده شده، بار الکتریکی کاتیون برابر با ۲+ است. آرایش الکترونی یون مس به‌صورت زیر است:

$$_{29}Cu^{2+}: 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^9$$

همان‌طور که مشخص است، زیرلایه $3d$ در کاتیون مورد نظر کاملاً پر نبوده و یک الکترون کمتر از حالت پر دارد.

ج) در ساختار این ترکیب، یون کلرید وجود دارد. هر یون کلرید، دارای ۱۸ الکترون بوده و آرایش مشابه به گاز آرگون دارد. توجه داریم که یون کلسیم نیز دارای ۱۸ الکترون بوده و آرایش مشابه به گاز آرگون دارد.

د) در واکنش تولید ترکیب‌های یونی، میان عناصر سازنده، الکترون مبادله می‌شود. برای محاسبه تعداد الکترون مبادله‌شده در مراحل تولید هر واحد فرمولی از ترکیب یونی، از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

بار کاتیون × زیروند کاتیون = بار آنیون × زیروند آنیون = تعداد الکترون مبادله شده

با توجه به رابطه بالا، در واکنش تولید هر مول مس (II) کلرید از عناصر سازنده، ۲ الکترون میان اتم‌ها مبادله می‌شود.

ماز

۸۹- در واکنش میان کدام دو عنصر، ترکیبی ایجاد می‌شود که نسبت شمار آنیون به کاتیون در ساختار آن برابر با ۲ است؟

۱) منیزیم و برم
۲) سیلیسیم و کلسیم
۳) لیتیم و اکسیژن
۴) سدیم و فسفر

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۳۹ ـ ۱۰۰۱)

هنگامی‌که اتم‌های نافلزی و فلزی در مجاورت هم قرار بگیرند، با یکدیگر الکترون مبادله کرده و ترکیب‌های یونی را ایجاد می‌کنند. برای نوشتن فرمول شیمیایی ترکیب‌های یونی، کافی است ابتدا نماد کاتیون و سپس نماد آنیون را بنویسیم. زیروند کاتیون، برابر با بار آنیون بوده و زیروند آنیون، برابر با بار کاتیون خواهد شد. داریم:

$$A^{n+} \quad + \quad B^{m-}$$

نماد کاتیون [بار آنیون] نماد آنیون [بار کاتیون]

برای به‌دست آوردن نام مواد یونی، از الگوی زیر استفاده می‌کنیم:

نام ترکیب یونی : اسم فلز + اسم نافلز + ید

در واکنش میان منیزیم و برم، یون‌های Mg^{2+} و Br^- ایجاد می‌شوند. از کنار هم قرار گرفتن این یون‌ها، ترکیب یونی منیزیم برمید با فرمول شیمیایی $MgBr_2$ به‌دست می‌آید که نسبت شمار **آنیون** به **کاتیون** در ساختار آن برابر با **۲** است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۲) **سیلیسیم**، یک **شبه‌فلز** بوده و در واکنش‌ها نمی‌تواند به یون تک‌اتمی تبدیل شود. بر این اساس، از واکنش میان **سیلیسیم** و **کلسیم**، اصلاً ترکیب یونی تولید نخواهد شد.

۳) در واکنش میان لیتیم و اکسیژن، یون‌های O^{2-} و Li^+ ایجاد می‌شوند. از کنار هم قرار گرفتن این یون‌ها، ترکیب یونی لیتیم اکسید با فرمول شیمیایی Li_2O به‌دست می‌آید که نسبت شمار آنیون به کاتیون در ساختار آن برابر با ۰/۵ است.

۴) در واکنش میان سدیم و فسفر، یون‌های Na^+ و P^{3-} ایجاد می‌شوند. از کنار هم قرار گرفتن این یون‌ها، ترکیب یونی سدیم فسفید با فرمول شیمیایی Na_3P به‌دست می‌آید که نسبت شمار آنیون به کاتیون در ساختار آن برابر با $\frac{1}{3}$ است.

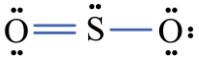
ماز

۹۰- شمار جفت الکترون‌های پیوندی در ساختار کدام ترکیب زیر، برابر با شمار این پیوندها در ساختار مولکول گوگرد دی‌اکسید است؟

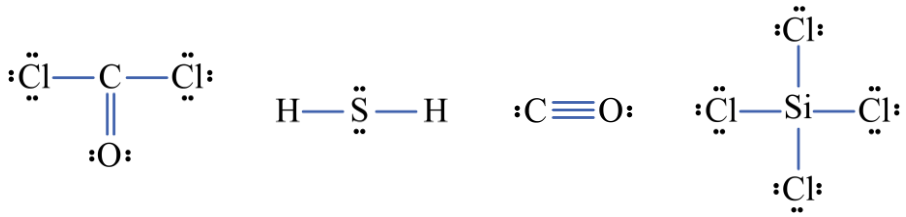
۱) کربونیل کلرید ۲) هیدروژن سولفید ۳) کربن مونوکسید ۴) سیلیسیم تتراکلرید

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۵۷ ـ ۱۰۰۲)

ساختار لوویس مولکول گوگرد دی‌اکسید به‌صورت زیر است:



در هر مولکول از این ماده، ۳ جفت الکترون پیوندی وجود دارد. فرمول شیمیایی کربونیل کلرید و هیدروژن سولفید، به‌ترتیب معادل با $COCl_2$ و H_2S است. فرمول شیمیایی کربن مونوکسید و سیلیسیم تتراکلرید نیز به‌ترتیب معادل با CO و $SiCl_4$ است. ساختار لوویس ترکیب‌های داده شده به‌صورت زیر است:



همان‌طور که مشخص است، در ساختار مولکول کربن مونوکسید نیز **۳ پیوند اشتراکی** برقرار شده و **۳ جفت الکترون پیوندی** وجود دارد.

۹۱- در رابطه با کلسیم فسفید، کدام مطلب زیر نادرست است؟

۱) آرایش الکترونی آنیون و کاتیون در ساختار این ترکیب یونی، مشابه هم است.

۲) در واکنش تولید این ماده از عناصر سازنده آن، ۳ الکترون میان اتم‌ها مبادله شده است.

۳) نسبت شمار آنیون به کاتیون در این ماده، عکس مقدار همین نسبت در آهن(III) اکسید است.

۴) زیروند هر عنصر در فرمول شیمیایی این ترکیب، برابر با بار الکترونی یون حاصل از عنصر دیگر موجود در آن است.

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۳۹ ـ ۱۰۰۱)

در واکنش میان کلسیم و فسفر، یون‌های Ca^{2+} و P^{3-} ایجاد می‌شوند. از کنار هم قرار گرفتن این یون‌ها، ترکیب یونی کلسیم فسفید با فرمول شیمیایی Ca_3P_2 به‌دست می‌آید. برای محاسبه تعداد الکترون مبادله شده در مراحل تولید هر واحد فرمولی از ترکیب یونی، از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

بار کاتیون × زیروند کاتیون = بار آنیون × زیروند آنیون = تعداد الکترون مبادله شده

با توجه به رابطه بالا، در واکنش تولید هر مول کلسیم فسفید از عناصر سازنده، **۶ مول الکترون** میان اتم‌ها مبادله می‌شود.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) عدد اتمی کلسیم و فسفر، به‌ترتیب برابر با ۲۰ و ۱۵ است. یون‌های کلسیم و فسفید، هرکدام دارای ۱۸ الکترون بوده و آرایش الکترونی آن‌ها مشابه آرایش الکترونی آرگون است.

۳) نسبت شمار آنیون به کاتیون در کلسیم فسفید، برابر با $\frac{2}{3}$ است. مقدار این نسبت در کلسیم فسفید، عکس مقدار همین نسبت در آهن(III) اکسید با فرمول شیمیایی Fe_2O_3 است.

۴) زیروند هر عنصر در فرمول شیمیایی کلسیم فسفید، برابر با بار الکترونی یون حاصل از عنصر دیگر موجود در واحد فرمولی آن است.

۹۲- شمار الکترون‌های جفت‌شده در آرایش الکترون-نقطه‌ای گوگرد، برابر با تعداد الکترون‌های موجود در بیرونی‌ترین زیرلایه الکترونی کدام عنصر زیر است؟

۱) سلنیم ۲) کروم ۳) تیتانیم ۴) روی

پاسخ: گزینهٔ ۱ (آسان ـ مفهومی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۳۷ ـ ۱۰۰۱)

گوگرد، عنصری از گروه شانزدهم جدول دوره‌ای بوده و در ساختار هر اتم آن، ۶ الکترون ظرفیتی وجود دارد. در آرایش الکترون-نقطه‌ای اتم گوگرد، ۶ الکترون ظرفیتی در اطراف نماد این عنصر قرار می‌گیرد. در این حالت، ۲ الکترون به‌صورت تک و ۴ الکترون نیز به‌صورت جفت وجود خواهد داشت. آرایش الکترون-نقطه‌ای گوگرد به‌صورت زیر است:



آرایش الکترونی عناصر داده شده در گزینه‌های سؤال، به‌صورت زیر است:

$_{34}Se : 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^4$

$_{24}Cr : 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^5 4s^1$

$_{22}Ti : 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^2 4s^2$

$_{30}Zn : 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2$

در آرایش الکترونی سلنیم، بیرونی‌ترین زیرلایه معادل با زیرلایه $4p$ است. در این زیرلایه، ۴ الکترون قرار گرفته است.

۹۳- کدام‌یک از مطالب زیر درست است؟

۱) همه عناصر نافلزی، می‌توانند در واکنش با سایر نافلزها شرکت کرده و الکترون به اشتراک بگذارند.

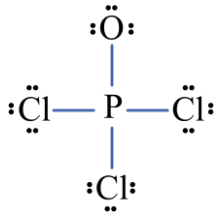
۲) در ساختار مولکول $POCl_3$، مجموعاً ۱۲ جفت الکترون ناپیوندی و ۴ پیوند اشتراکی وجود دارد.

۳) در ساختار مولکول دی‌نیتروژن مونوکسید، همانند مولکول NO، یک پیوند سه‌گانه وجود دارد.

۴) مولکول آمونیاک، ساختار غیرمسطح داشته و همه اتم‌ها در آن به آرایش هشت‌تایی رسیده‌اند.

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۵۷ ـ ۱۰۰۲)

ساختار لوویس مولکول $POCl_3$ به‌صورت زیر است:

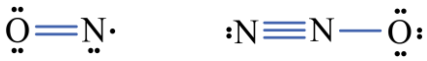


در ساختار این مولکول، مجموعاً ۱۲ جفت الکترون ناپیوندی و ۴ پیوند اشتراکی وجود دارد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

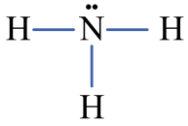
۱) برخی از عناصر نافلزی، دارای آرایش الکترونی هشت‌تایی بوده و در واکنش‌ها شرکت نمی‌کنند. برای مثال، گازهای نجیب، چنین ویژگی دارند و به همین خاطر است که با سایر عناصر نافلزی واکنش نمی‌دهند.

۳) ساختار مولکول **دی‌نیتروژن مونوکسید** با فرمول شیمیایی N_2O و ساختار مولکول نیتروژن مونوکسید با فرمول شیمیایی NO به‌صورت زیر است:



همان‌طور که مشخص است، در ساختار مولکول نیتروژن مونوکسید، هیچ پیوند سه‌گانه‌ای وجود ندارد.

۴) در ساختار **مولکول آمونیاک، اتم هیدروژن** وجود دارد. اتم هیدروژن، پس از تشکیل پیوند اشتراکی، دارای ۲ الکترون بوده و به آرایش دوتایی مشابه گاز هلیم رسیده است. ساختار این مولکول به‌صورت زیر است:



ماز

۹۴- نام کدام‌یک از ترکیب‌های داده شده، با توجه به فرمول شیمیایی آن درست نوشته شده است؟

۱) $Ca(OH)_2$: کلسیم هیدروکسید
۲) Ba_3N_2 : تری‌باریم دی‌نیترید
۳) GaF_3 : گالیم (III) فلوئورید
۴) $TiSiO_4$: تیتانیم (II) سولفات

پاسخ: گزینهٔ ۱ (آسان ـ مفهومی ـ سریع ـ صفحهٔ ۵۷ ـ ۱۰۰۲)

برای نام‌گذاری ترکیب‌های یونی، ابتدا نام **کاتیون** و سپس نام **آنیون** نوشته می‌شود. اگر کاتیون دارای بارهای الکتریکی متنوع باشد، لازم است که بین نام کاتیون و آنیون، بار الکتریکی کاتیون به‌صورت عدد رومی نوشته شود. در اثر کنار هم قرار گرفتن یون‌های Ca^{2+} و OH^-، ترکیبی به نام کلسیم هیدروکسید تشکیل می‌شود که فرمول شیمیایی آن به‌صورت $Ca(OH)_2$ است. توجه داریم که یون چندتامی هیدروکسید، در محلول‌های بازی وجود دارد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۲) در نام‌گذاری ترکیب‌های یونی، از اعداد به‌صورت پیشوندهای یونانی استفاده نمی‌شود. در اثر کنار هم قرار گرفتن یون‌های Ba^{2+} و N^{3-}، ترکیبی به نام باریم نیترید با فرمول شیمیایی Ba_3N_2 تشکیل می‌شود.

۳) در نام‌گذاری ترکیب‌های یونی، برای فلزهایی که فقط یک کاتیون تشکیل می‌دهند، از اعداد رومی استفاده نمی‌شود. گالیم، فقط یک نوع کاتیون با بار ۳+ ایجاد می‌کند. از کنار هم قرار گرفتن یون‌های Ga^{3+} و F^-، ترکیبی به نام گالیم فلوئورید با فرمول شیمیایی GaF_3 ایجاد می‌شود.

۴) یون سیلیکات، یونی با فرمول SiO_4^{4-} است. برای تشکیل ترکیبی با فرمول $TiSiO_4$، کاتیون Ti^{4+} لازم است. ازاین‌رو، نام این ترکیب تیتانیم (IV) سیلیکات است.

ماز

۹۵- در رابطه با عنصری که با فلوئور در یک گروه و با وانادیم در یک تناوب مشابه قرار گرفته است، کدام مطلب زیر نادرست است؟

۱) این عنصر با نماد شیمیایی دوحرفی نشان داده می‌شود.
۲) در واکنش این ماده با گاز نیتروژن، نوعی ماده مولکولی ایجاد می‌شود.
۳) اگر در هر اتم از این عنصر ۴۵ نوترون وجود داشته باشد، عدد جرمی آن برابر با ۷۸ می‌باشد.
۴) شمار الکترون‌های ظرفیتی در ساختار هر اتم از این عنصر، بیشتر از شمار این الکترون‌ها در اتم آلومینیم است.

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۴۱ ـ ۱۰۰۱)

فلوئور، عنصری از گروه ۱۷ جدول تناوبی و وانادیم، عنصری از تناوب چهارم است. بر این اساس، می‌توان گفت عنصر مورد نظر، متعلق به تناوب چهارم بوده و در گروه شماره ۱۷ قرار گرفته است. این عنصر، معادل با برم بوده و عدد اتمی آن برابر با ۳۵ است. اگر هر اتم برم در ساختار خود دارای ۴۵ نوترون باشد، مجموعاً ۸۰ ذره در ساختار هسته این اتم قرار گرفته و عدد جرمی آن برابر با ۸۰ می‌شود.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) برم، با نماد Br در جدول تناوبی نشان داده می‌شود.

۲) برم، یک **نافلز** بوده و در واکنش با نیتروژن، الکترون به اشتراک می‌گذارد. هر اتم نیتروژن، دارای ۳ الکترون تک و هر اتم برم، دارای یک الکترون تک است. طی واکنش میان این دو عنصر، نیتروژن تری‌برمید با فرمول شیمیایی NBr_3 تشکیل می‌شود.

۴) آرایش الکترونی برم به‌صورت زیر است:

$_{۳۵}Br : ۱s^۲۲s^۲۲p^۶۳s^۲۳p^۶۳d^{۱۰}۴s^۲۴p^۵$

برم، متعلق به دسته p بوده و در هر اتم آن، ۷ الکترون ظرفیتی وجود دارد. این در حالی است که هر اتم آلومینیم، مجموعاً دارای ۳ الکترون ظرفیتی در ساختار خود است. آرایش الکترونی این عنصر، به‌صورت زیر است:

$_{۱۳}Al : ۱s^۲۲s^۲۲p^۶۳s^۲۳p^۱$

ماز

۹۶- اگر آرایش الکترونی عنصر X به $۴s^۲$ ختم شود، در رابطه با این عنصر، کدام مطلب زیر به‌یقین درست است؟

۱) این عنصر، نوعی فلز بوده و در ترکیب‌های خود، فقط یک نوع کاتیون تشکیل می‌دهد.

۲) آخرین الکترون موجود در آرایش الکترونی این عنصر، وارد زیرلایه $۳d$ شده است.

۳) همه الکترون‌های ظرفیتی این عنصر، دارای عدد کوانتومی اصلی برابر هستند.

۴) این عنصر در واکنش با یک نمونه از گاز فلوئور، الکترون از دست می‌دهد.

پاسخ: گزینهٔ ۴ (دشوار ـ مفهومی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۵۶ ـ ۱۰۰۲)

اگر آرایش الکترونی عنصر X به $۴s^۲$ ختم شود، یعنی این عنصر متعلق به تناوب چهارم جدول دوره‌ای است. آرایش الکترونی عناصر موجود در تناوب چهارم (عناصری با عدد اتمی ۱۹ تا ۳۶) به‌صورت زیر است:

$Ca : [Ar]\ ۴s^۲$	$K : [Ar]\ ۴s^۱$
$Ti : [Ar]\ ۳d^۲۴s^۲$	$Sc : [Ar]\ ۳d^۱۴s^۲$
$Cr : [Ar]\ ۳d^۵۴s^۱$	$V : [Ar]\ ۳d^۳۴s^۲$
$Fe : [Ar]\ ۳d^۶۴s^۲$	$Mn : [Ar]\ ۳d^۵۴s^۲$
$Ni : [Ar]\ ۳d^۸۴s^۲$	$Co : [Ar]\ ۳d^۷۴s^۲$
$Zn : [Ar]\ ۳d^{۱۰}۴s^۲$	$Cu : [Ar]\ ۳d^{۱۰}۴s^۱$
$Ge : [Ar]\ ۳d^{۱۰}۴s^۲۴p^۲$	$Ga : [Ar]\ ۳d^{۱۰}۴s^۲۴p^۱$
$Se : [Ar]\ ۳d^{۱۰}۴s^۲۴p^۴$	$As : [Ar]\ ۳d^{۱۰}۴s^۲۴p^۳$
$Kr : [Ar]\ ۳d^{۱۰}۴s^۲۴p^۶$	$Br : [Ar]\ ۳d^{۱۰}۴s^۲۴p^۵$

با توجه به جدول بالا، عدد اتمی عنصر مورد نظر در بازه بین ۲۰ تا ۳۰ قرار دارد، اما این عنصر معادل با **کروم** و **مس** نخواهد بود. توجه داریم که همه عناصر گفته شده، فلز بوده و در واکنش با یک نافلز مثل فلوئور، الکترون از دست می‌دهند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) اگر عنصر مورد نظر معادل با فلزهای آهن، وانادیم و ... باشد، می‌تواند کاتیون‌های متنوع در ترکیب‌های خود تشکیل بدهد.

۲) اگر عنصر مورد نظر معادل با کلسیم باشد، آخرین الکترون موجود در آرایش الکترونی این عنصر، وارد زیرلایه $۴s$ شده است.

۳) اگر عدد اتمی این عنصر فلزی در بازه بین ۲۱ تا ۳۰ قرار بگیرد، این عنصر متعلق به دسته d بوده و الکترون‌های ظرفیتی آن در دو زیرلایه مختلف $۴s$ و $۳d$ قرار می‌گیرند.

ماز

۹۷- پس از موازنهٔ معادله واکنش شیمیایی زیر، مجموع ضرایب مواد مولکولی تولید شده، چند برابر ضریب پتاسیم یدید مصرف شده خواهد بود؟

$$KNO_2(s) + KI(s) + HBr(aq) \rightarrow KBr(aq) + NO(g) + H_2O(l) + I_2(s)$$

۱) ۲/۵ ۲) ۳ ۳) ۱/۵ ۴) ۲

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۶۵ ـ ۱۰۰۲)

معادلهٔ موازنه نشده این واکنش به‌صورت زیر است:

$$KNO_2 + KI + HBr \rightarrow KBr + NO + H_2O + I_2$$

برای موازنهٔ معادلهٔ واکنش، ابتدا باید ضریب یک را به پیچیده‌ترین ماده، یعنی KNO_2 بدهیم. بر این اساس، ضرایب نیتروژن مونوکسید و آب، مشخص می‌شوند. در این حالت، معادله واکنش به‌صورت زیر می‌شود:

$$1KNO_2 + \_KI + \_HBr \rightarrow \_KBr + 1NO + 1H_2O + \_I_2$$

با توجه به ضریب آب، می‌توانیم ضریب هیدروژن برمید را نیز محاسبه کنیم. در این حالت، داریم:

$$1KNO_2 + \_KI + 2HBr \rightarrow \_KBr + 1NO + 1H_2O + \_I_2$$

در قدم بعد، ضریب پتاسیم برمید و به دنبال آن، ضریب پتاسیم یدید و ید جامد را نیز محاسبه می‌کنیم. در این حالت، معادله واکنش به‌صورت زیر می‌شود:

$$1KNO_2 + 1KI + 2HBr \rightarrow 2KBr + 1NO + 1H_2O + \frac{1}{2}I_2$$

پس از بین بردن ضرایب کسری، معادله واکنش به‌صورت زیر می‌شود:

$$2KNO_2 + 2KI + 4HBr \rightarrow 4KBr + 2NO + 2H_2O + I_2$$

نیتروژن مونوکسید، آب و ید، فقط از عناصر نافلزی ساخته شده و مواد مولکولی هستند. مجموع ضرایب این سه ماده، معادل با ۲/۵ برابر ضریب پتاسیم یدید در معادله واکنش است.

۹۸- معادله دو واکنش مقابل را در نظر بگیرید:

$$KMnO_4(s) \rightarrow K_2MnO_4(s) + MnO_2(s) + O_2(g)$$
$$C_3H_5N_3O_9(l) \rightarrow CO_2(g) + H_2O(g) + N_2(g) + O_2(g)$$

پس از موازنه معادله این دو واکنش شیمیایی، ضریب گاز اکسیژن در معادله واکنش اول، چند برابر ضریب این ماده در معادله واکنش دوم می‌شود؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۰/۵ ۴) ۱/۵

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۶۵ ـ ۱۰۰۲)

پس از موازنه، معادله واکنش اول به‌صورت زیر می‌شود:

$$2KMnO_4(s) \rightarrow K_2MnO_4(s) + MnO_2(s) + O_2(g)$$

برای موازنه معادله واکنش دوم، ابتدا باید ضریب یک را به ماده واکنش‌دهنده بدهیم و بر این اساس، معادله واکنش را موازنه کنیم. پس از موازنه، معادله این واکنش نیز به‌صورت زیر می‌شود:

$$4C_3H_5N_3O_9(l) \rightarrow 12CO_2(g) + 10H_2O(g) + 6N_2(g) + O_2(g)$$

همان‌طور که مشخص است، ضریب گاز اکسیژن در معادله این دو واکنش شیمیایی با هم برابر است.

۹۹- پس از موازنه معادله واکنش $CH_4(g) + NH_3(g) + O_2(g) \rightarrow HCN(g) + H_2O(g)$، مجموع ضرایب مواد فراورده به اندازه چند واحد با مجموع ضرایب مواد واکنش‌دهنده تفاوت دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۶۵ ـ ۱۰۰۲)

معادله واکنش داده شده به‌صورت زیر است:

$$CH_4(g) + NH_3(g) + O_2(g) \rightarrow HCN(g) + H_2O(g)$$

پیچیده‌ترین ماده در معادله این واکنش، هیدروژن سیانید (HCN) است. در ابتدا، به این ماده ضریب یک داده و ضریب متان و آمونیاک را بر اساس آن مشخص می‌کنیم. در این حالت، داریم:

$$1CH_4(g) + 1NH_3(g) + \_O_2(g) \rightarrow 1HCN(g) + \_H_2O(g)$$

با توجه به تعداد اتم‌های هیدروژن، ضریب آب را مشخص کرده و سپس، ضریب گاز اکسیژن را نیز مشخص می‌کنیم. بر این اساس، داریم:

$$1CH_4(g) + 1NH_3(g) + \frac{3}{2}O_2(g) \rightarrow 1HCN(g) + 3H_2O(g)$$

در قدم آخر، باید ضرایب کسری موجود در معادله واکنش را از بین ببریم. در این رابطه، داریم:

$$2CH_4(g) + 2NH_3(g) + 3O_2(g) \rightarrow 2HCN(g) + 6H_2O(g)$$

۱۰۰- معادله دو واکنش مقابل را در نظر بگیرید:

$I)\ NaN_3(s) \rightarrow Na(s) + N_2(g)$

$II)\ NaF(s) + SCl_2(g) \rightarrow SF_4(g) + S_2Cl_2(g) + NaCl(s)$

پس از موازنه معادله این واکنش‌ها، ضریب استوکیومتری فراورده جامد واکنش دوم، چند برابر ضریب استوکیومتری واکنش‌دهنده مصرف‌شده در واکنش اول می‌شود؟

۱) ۱/۵ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۳ (دشوار ـ مفهومی ـ زمان‌بر ـ صفحهٔ ۶۵ ـ ۱۰۰۲)

معادله موازنه‌شده واکنش اول، به‌صورت زیر است:

$$2NaN_3(s) \rightarrow 2Na(s) + 3N_2(g)$$

معادله واکنش دوم به‌صورت زیر است:

$$NaF(s) + SCl_2(g) \rightarrow SF_4(g) + S_2Cl_2(g) + NaCl(s)$$

برای موازنه، ابتدا ضریب یک را به SF_4 داده و بر این اساس، ضریب دو ماده دیگر در این معادله مشخص می‌شود. در این مرحله، معادله واکنش به‌صورت زیر خواهد بود:

$$4NaF(s) + \_SCl_2(g) \rightarrow 1SF_4(g) + \_S_2Cl_2(g) + 4NaCl(s)$$

در ساختار دو ماده باقیمانده، اتم‌های گوگرد و کلر به‌صورت هم‌زمان وجود دارند، پس ضریب این دو ماده را نمی‌توانیم با استفاده از روش وارسی و به سادگی به‌دست بیاوریم. اگر ضریب S_2Cl_2 برابر با a باشد، در سمت فراورده‌ها $2a + 1$ اتم گوگرد وجود داشته و بر این اساس، ضریب SCl_2 نیز برابر با $2a + 1$ می‌شود. در این حالت، داریم:

$$4NaF(s) + (2a + 1)SCl_2(g) \rightarrow 1SF_4(g) + (a)S_2Cl_2(g) + 4NaCl(s)$$

می‌دانیم که شمار اتم‌های کلر باید در دو سمت معادله واکنش با هم برابر باشد. بر این اساس، یک معادله برای موازنه تعداد اتم‌های کلر تشکیل می‌دهیم. در این حالت، داریم:

$$\text{تعداد اتم کلر در سمت فراورده} = \text{تعداد اتم کلر در سمت واکنش‌دهنده} \Rightarrow 4a + 2 = 2a + 4 \Rightarrow a = 1$$

بر این اساس، معادله موازنه‌شده واکنش مورد نظر به‌صورت زیر می‌شود:

$$4NaF(s) + 3SCl_2(g) \rightarrow SF_4(g) + S_2Cl_2(g) + 4NaCl(s)$$

با توجه به معادله این دو واکنش، ضریب سدیم کلرید در واکنش دوم، ۲ برابر ضریب واکنش‌دهنده واکنش اول است.

شیمی یازدهم (بخش انتخابی)

۱۰۱- مقدار ۵۷/۶ گرم از ترکیب $C_{19}H_{28}O_2$، با ۰/۸ مول H_2 واکنش داده و سیر می‌شود. در ساختار این ماده، چند حلقه کربنی وجود داشته و هر مول از آن در حضور چند گرم گاز اکسیژن به‌صورت کامل می‌سوزد؟ (ماده، فاقد پیوند سه‌گانه بوده و دارای ۲ گروه عاملی الکلی است. $g.mol^{-1}$: $H=1, C=12, O=16$)

۱) ۱ ـ ۷۰۴ ۲) ۲ ـ ۸۰۰ ۳) ۲ ـ ۷۰۴ ۴) ۱ ـ ۸۰۰

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی و محاسباتی ـ زمان‌بر ـ صفحهٔ ۷۱ ـ ۱۱۰۲)

معادله واکنش ماده آلی مورد نظر با گاز هیدروژن به‌صورت زیر است:

$$C_{19}H_{28}O_2 + xH_2 \xrightarrow{Ni(s)} C_{19}H_{28+2x}O_2$$

هر پیوند دوگانه موجود در ساختار این ماده آلی، در واکنش با یک مولکول هیدروژن به‌طور کامل سیر می‌شود. برای حل این سؤال، ابتدا شمار مول ماده آلی را محاسبه می‌کنیم. در رابطه با ماده آلی، داریم:

$$?\,mol\ C_{19}H_{28}O_2 = ۵۷/۶\ g\ C_{19}H_{28}O_2 \times \frac{۱\ mol\ C_{19}H_{28}O_2}{۲۸۸\ g\ C_{19}H_{28}O_2} = ۰/۲\ mol$$

طبق محاسبات انجام‌شده، مول مصرف‌شده از گاز هیدروژن، ۴ برابر مول مصرف‌شده از ماده آلی است؛ بنابراین طبق قواعد استوکیومتری، ضریب گاز هیدروژن در معادله موازنه‌شده واکنش، معادل با ۴ برابر ضریب ماده آلی است. پس می‌توان گفت x معادل ۴ بوده و در هر واحد از مولکول ماده آلی، ۴ پیوند دوگانه حضور دارد.

حال تعداد حلقه‌های موجود در ماده آلی را به‌دست می‌آوریم:

$$۲۸ = ۱۹ \times ۲ + ۲ - ۴ \times ۲ - (\text{تعداد حلقه} \times ۲) \Longrightarrow \text{تعداد حلقه} = ۲$$

همان‌طور که مشخص است، ماده آلی مورد نظر در ساختار خود دارای دو حلقه کربنی است. حال معادله سوختن این ماده آلی را نوشته و موازنه می‌کنیم. در این رابطه، داریم:

$$C_{19}H_{28}O_2 + ۲۵O_2 \longrightarrow ۱۹CO_2 + ۱۴H_2O$$

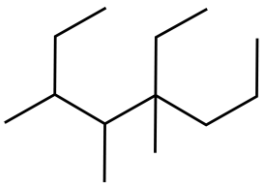
طبق معادله موازنه‌شده، هر مول از این ماده آلی در حضور ۲۵ مول گاز اکسیژن به‌طور کامل می‌سوزد. جرم یک نمونه از گاز اکسیژن که شامل ۲۵ مول از این ماده می‌شود، برابر با ۸۰۰ گرم است.

شمار اتم‌های هیدروژن در ترکیب‌های آلی

شمارش تعداد کربن‌ها، اکسیژن‌ها و نیتروژن‌ها و هالوژن‌های ترکیبات آلی از روی شکل ساده بوده ولی برای شمارش تعداد هیدروژن از فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

(تعداد نیتروژن) + (تعداد هالوژن) − (۴ × تعداد پیوند سه‌گانه) − (۲ × تعداد پیوند دوگانه) − (۲ × تعداد حلقه) − ۲ + (۲ × تعداد کربن) = تعداد اتم هیدروژن

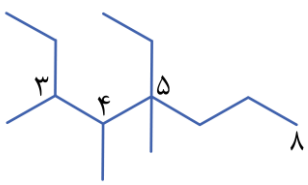
۱۰۲- نام‌گذاری آلکان مقابل، به چه صورت بوده و جرم مولی این ترکیب، به‌تقریب چند برابر جرم مولی هیدروکربنی است که به‌عنوان گاز عمل‌آورنده در کشاورزی کاربرد دارد؟ ($g.mol^{-1}$: $H=1, C=12$)



۱) ۵- اتیل-۵،۴،۳-تری‌متیل اوکتان ـ ۶/۵۷
۲) ۴-اتیل-۶،۵،۴-تری‌متیل اوکتان ـ ۵/۲۴
۳) ۵- اتیل-۵،۴،۳-تری‌متیل اوکتان ـ ۵/۲۴
۴) ۴-اتیل-۶،۵،۴-تری‌متیل اوکتان ـ ۶/۵۷

پاسخ: گزینهٔ ۱ (آسان ـ مفهومی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۴۰ ـ ۱۱۰۱)

فرمول نقطه-خط آلکان مورد نظر و نحوه شماره‌گذاری اتم‌های کربن موجود در زنجیر اصلی به‌صورت زیر است:



SanjeshCloud

به دلیل نزدیک‌تر بودن به اولین شاخه فرعی، شماره‌گذاری زنجیر اصلی هیدروکربن مورد نظر از سمت چپ انجام شده و نام آن به‌صورت ۵- اتیل-۵،۴،۳-تری‌متیل اوکتان خواهد بود. فرمول مولکولی این آلکان به‌صورت $C_{۱۳}H_{۲۸}$ بوده و جرم مولی آن برابر $۱۸۴\ g.mol^{-۱}$ است.

هیدروکربنی که به‌عنوان **گاز عمل‌آورنده** در **کشاورزی** کاربرد دارد، معادل با اتن است. فرمول مولکولی این آلکن به‌صورت $C_۲H_۴$ بوده و جرم مولی آن برابر $۲۸\ g.mol^{-۱}$ است. در پایان نسبت خواسته‌شده را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{نسبت جرم مولی} = \frac{۱۸۴}{۲۸} \simeq ۶/۵۷$$

نام‌گذاری آلکان‌ها

برای نام‌گذاری آلکان‌ها، ابتدا باید زنجیر اصلی که دارای بیشترین شمار کربن باشد را پیدا کنیم. توجه داریم که اگر در دو حالت، تعداد کربن زنجیر اصلی یکسان باشد، اولویت با حالتی است که تعداد شاخه‌های فرعی بیشتر است. در مرحله بعد، بایستی جهت شماره‌گذاری را براساس تراکم شاخه‌های فرعی تعیین کنیم. شماره‌گذاری را از سمتی آغاز می‌کنیم که به اولین شاخه فرعی نزدیک‌تر باشد. اگر این مورد از هر دو جهت یکسان بود، شماره‌گذاری را از سمتی آغاز می‌کنیم که به دومین شاخه فرعی نزدیک‌تر باشد. در صورت برابر بودن این مورد، همین روند را ادامه می‌دهیم. اگر شماره تمام شاخه‌های فرعی از هر دو سمت برابر بود، اولویت شماره‌گذاری با سمتی است که به شاخه‌ای که حرف اول آن بر شاخه دیگر مقدم باشد (برای مثال شاخه فرعی اتیل بر متیل مقدم است).

۱۰۳- مخلوطی از هگزان و ۲-بوتن به جرم ۲۲/۹ گرم، با ۳۰۰۰ میلی‌لیتر گاز کلر در شرایطی که حجم مولی گازها برابر با ۳۰ لیتر است، به‌طور کامل واکنش می‌دهد. درصد جرمی ترکیب آلی کلردار در مخلوط پایانی به‌تقریب کدام است؟

$(Cl = ۳۵/۵\ ,C = ۱۲\ ,H = ۱ : g.mol^{-۱})$

۱) ۳۹/۱ ۲) ۴۲/۳ ۳) ۵۶/۴ ۴) ۳۶/۴

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ زمان‌بر ـ صفحهٔ ۴۲ ـ ۱۱۰۱)

آلکن‌ها از جمله هیدروکربن‌های سیرنشده هستند و به‌خاطر وجود یک پیوند $C = C$ در ساختار خود، واکنش‌پذیری بالایی دارند. این مواد با هیدروژن، آب، هالوژن‌ها و ... وارد واکنش می‌شوند. از بین دو هیدروکربن داده شده، تنها ۲-بوتن با گاز کلر واکنش می‌دهد. معادله این واکنش به‌صورت زیر است:

$$C_۴H_۸ + Cl_۲ \xrightarrow{FeCl_۳} C_۴H_۸Cl_۲$$

ابتدا جرم ۲ – بوتن مصرف‌شده و جرم ۳،۲-دی‌کلروبوتان تولید شده را حساب می‌کنیم:

$$?\ g\ C_۴H_۸ = \underbrace{۳۰۰۰\ ml\ Cl_۲ \times \frac{۱\ mol\ Cl_۲}{۳۰۰۰۰\ ml\ Cl_۲}}_{۰/۱\ mol\ Cl_۲} \times \frac{۱\ mol\ C_۴H_۸}{۱\ mol\ Cl_۲} \times \frac{۵۶\ g\ C_۴H_۸}{۱\ mol\ C_۴H_۸} = ۵/۶\ g\ C_۴H_۸$$

$$?\ g\ C_۴H_۸Cl_۲ = ۰/۱\ mol\ Cl_۲ \times \frac{۱\ mol\ C_۴H_۸Cl_۲}{۱\ mol\ mol\ Cl_۲} \times \frac{۱۲۷\ g\ C_۴H_۸Cl_۲}{۱\ mol\ C_۴H_۸Cl_۲} = ۱۲/۷\ g\ C_۴H_۸Cl_۲$$

بنابراین جرم مخلوط نهایی برابر خواهد بود با:

$$\text{جرم مخلوط نهایی} = \text{جرم مخلوط اولیه} - \text{جرم بوتن مصرف شده} + \text{جرم دی کلرو بوتان تولید شده} = ۲۲/۹ - ۵/۶ + ۱۲/۷ = ۳۰\ g$$

و در نهایت درصد جرمی ترکیب آلی کلردار (۲، ۳-دی‌کلرو بوتان) را در مخلوط نهایی به‌دست می‌آوریم:

$$\text{درصد جرمی ترکیب آلی کلردار} = \frac{\text{جرم ترکیب آلی کلردار}}{\text{جرم مخلوط نهایی}} \times ۱۰۰ = \frac{۱۲/۷}{۳۰} \times ۱۰۰ \simeq \text{درصد ۴۲/۳}$$

همان‌طور که مشخص است، ۴۲/۳ درصد از مخلوط نهایی توسط ترکیب آلی کلردار تشکیل شده است.

۱۰۴- در رابطه با ترکیب حاصل از واکنش میان کربن و فلوئور، کدام مطلب زیر نادرست است؟

۱) در واکنش تولید مولکول مورد نظر، اتم‌های کربن و فلوئور با یکدیگر الکترون به اشتراک می‌گذارند.

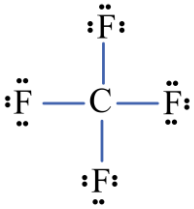
۲) شمار پیوندهای اشتراکی در این ماده، نصف شمار پیوندها در ساختار مولکول پروپین است.

۳) یک نمونه از این ماده، برخلاف یک نمونه از هگزان، نوعی ترکیب ناقطبی است.

۴) اتم مرکزی در این مولکول، همانند اتم مرکزی مولکول SO_3، یک نافلز است.

پاسخ: گزینهٔ ۳ (آسان ـ مفهومی ـ سریع ـ صفحهٔ ۴۲ ـ ۱۱۰۱)

کربن و فلوئور، دو عنصر نافلزی بوده و از واکنش میان آن‌ها، ترکیب زیر تولید می‌شود:



در ساختار ترکیب داده شده، چهار اتم یکسان به اتم مرکزی متصل شده و اتم مرکزی نیز **فاقد جفت الکترون ناپیوندی** است. بر این اساس، ترکیب تولید شده نوعی ماده **ناقطبی** است. ساختار فضایی مولکول ایجاد شده طی این فرایند، به‌صورت زیر می‌شود:



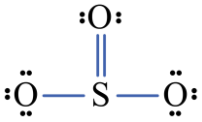
این ماده، همانند یک نمونه از **هگزان**، **ناقطبی** است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) کربن تترافلوئورید، نوعی ماده مولکولی است. در واکنش تولید مواد مولکولی، اتم‌های نافلزی با یکدیگر الکترون به اشتراک می‌گذارند.

۲) کربن تترافلوئورید، فراورده این واکنش بوده و در ساختار هر مولکول از آن، ۴ پیوند اشتراکی وجود دارد. پروپین نیز معادل با دومین عضو خانواده آلکین‌ها بوده و در ساختار مولکولی آن ۸ پیوند اشتراکی وجود دارد.

۴) ساختار مولکول SO_3 به‌صورت زیر است:



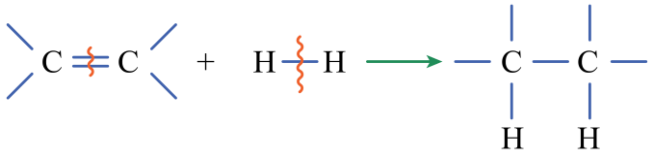
در ساختار این مولکول، همانند مولکول کربن تترافلوئورید، اتم مرکزی نوعی اتم نافلزی است.

۱۰۵- یک نمونه ۱۷/۴ گرمی از ترکیب با فرمول شیمیایی $C_{13}H_{18}$، در شرایط استاندارد با ۸/۹۶ لیتر گاز هیدروژن به‌طور کامل واکنش داده و سیر می‌شود. نسبت شمار پیوندهای اشتراکی دوگانه به شمار پیوندهای اشتراکی سه‌گانه در ساختار این ترکیب، برابر با کدام‌یک از اعداد زیر می‌تواند باشد؟ $(C = 12 , H = 1 : g.mol^{-1})$

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۰/۵

پاسخ: گزینهٔ ۲ (دشوار ـ مفهومی و محاسباتی ـ زمان‌بر ـ صفحهٔ ۴۱ ـ ۱۱۰۱)

از واکنش هیدروکربن‌های سیرنشده با گاز هیدروژن، هیدروکربن‌های سیرشده به‌دست می‌آیند. با انجام واکنش، پیوندهای دوگانه و سه‌گانه کربن-کربن شکسته شده و به پیوندهای یگانه تبدیل می‌شوند. برای سیر کردن پیوند دوگانه و سه‌گانه کربن-کربن به‌ترتیب نیاز به یک و دو مول گاز هیدروژن است. به عبارت دیگر، هر مول پیوند دوگانه با یک مول و هر مول پیوند سه‌گانه نیز با ۲ مول گاز هیدروژن به‌طور کامل واکنش داده و سیر می‌شود. در رابطه با پیوندهای دوگانه، داریم:



برای حل کردن این سؤال، لازم است که ابتدا مقدار مول هیدروکربن و گاز هیدروژن مصرف شده را به‌دست بیاوریم:

$$?\,mol\ C_{۱۳}H_{۱۸} = ۱۷/۴\ g\ C_{۱۳}H_{۱۸} \times \frac{۱\ mol\ C_{۱۳}H_{۱۸}}{۱۷۴\ g\ C_{۱۳}H_{۱۸}} = ۰/۱\ mol$$

$$?\,mol\ H_۲ = ۸/۹۶\ L\ H_۲ \times \frac{۱\ mol\ H_۲}{۲۲/۴\ L\ H_۲} = ۰/۴\ mol$$

طبق فرض سؤال، مقدار ۰/۱ مول از هیدروکربن مورد نظر با ۰/۴ مول گاز هیدروژن سیر شده است. پس می‌توان گفت که ۱ مول از هیدروکربن با ۴ مول گاز هیدروژن سیر می‌شود. معادله واکنش انجام شده به‌صورت زیر است:

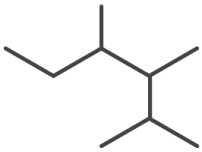
$$C_{۱۳}H_{۱۸} + ۴H_۲ \rightarrow C_{۱۳}H_{۲۶}$$

همان‌طور که اشاره کردیم، هر پیوند دوگانه و سه‌گانه کربن-کربن برای سیر شدن به‌ترتیب به یک و دو مول گاز هیدروژن نیاز دارند. فرض می‌کنیم که a مول پیوند دوگانه کربن-کربن و b مول پیوند سه‌گانه کربن-کربن داریم. از این رو، رابطه زیر بین تعداد این پیوندها برقرار خواهد بود:

$$a + ۲b = ۴$$

با توجه به معادله بالا و وجود دو مجهول در آن، تعداد پیوندهای دوگانه و سه‌گانه می‌تواند به‌ترتیب برابر با یکی از زوج اعداد ۲ و ۱ و یا ۰ و ۲ و یا ۴ و ۰ باشد. بنابراین نسبت تعداد پیوند دوگانه به پیوند سه‌گانه می‌تواند برابر ۲ یا ۰ باشد.

۱۰۶- در رابطه با هیدروکربن مقابل، کدام موارد از عبارت‌های زیر درست هستند؟



$(C = ۱۲, H = ۱ : g.mol^{-۱})$

الف ـ مجموع اعداد موجود در نام آیوپاک این ترکیب، برابر با ۹ است.

ب ـ این ترکیب آلکانی، نسبت به ۳-اتیل هگزان ایزومر به شمار می‌رود.

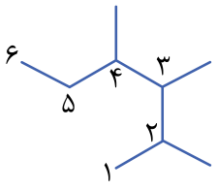
ج ـ در واکنش سوختن جرم برابر از این ماده و نفتالن، حجم یکسانی از گاز اکسیژن مصرف می‌شود.

د ـ شمار پیوندهای کربن-هیدروژن در مولکول این ماده، ۲/۵ برابر شمار این پیوندها در ۲-بوتانون است.

۱) «الف» و «ب»　　۲) «الف» و «د»　　۳) «ب» و «ج»　　۴) «ج» و «د»

پاسخ: گزینهٔ ۲　　**(متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۷۱ ـ ۱۱۰۲)**

هیدروکربن مورد نظر یک آلکان است. برای نام‌گذاری این ترکیب، ابتدا آن را به‌صورت زیر شماره‌گذاری می‌کنیم:



بنابراین نام این ترکیب به‌صورت ۴،۳،۲-تری‌متیل هگزان است. بر این اساس، عبارت‌های (الف) و (د) درست هستند.

بررسی موارد:

الف) همانطور که از نام این آلکان مشخص است، اعداد موجود در نام آیوپاک این آلکان برابر ۲، ۳ و ۴ هستند که مجموع این اعداد برابر ۹ می‌شود.

ب) فرمول مولکولی این ترکیب به‌صورت $C_۹H_{۲۰}$ است. ۳-اتیل هگزان، هیدروکربنی با ۸ کربن است که فرمول مولکولی آن به‌صورت $C_۸H_{۱۸}$ است. از آنجا که فرمول شیمیایی این دو هیدروکربن با یکدیگر یکسان نیست، پس ایزومر یکدیگر محسوب نمی‌شوند.

ج) معادله واکنش سوختن این ماده به‌صورت زیر است:

$$C_۹H_{۲۰} + ۱۴O_۲ \rightarrow ۹CO_۲ + ۱۰H_۲O$$

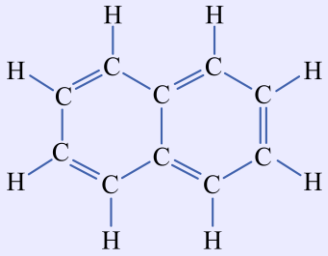
نفتالن، هیدروکربنی با فرمول مولکولی $C_{۱۰}H_۸$ است که معادله واکنش سوختن آن به‌صورت زیر است:

$$C_{۱۰}H_۸ + ۱۲O_۲ \rightarrow ۱۰CO_۲ + ۴H_۲O$$

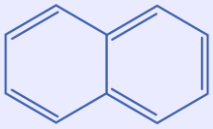
جرم مولی این هیدروکربن و نفتالن با یکدیگر برابر است و یک مول از هر دو ماده ۱۲۸ گرم جرم دارد؛ در نتیجه جرم برابری از این دو ماده، معادل مقدار مول برابری از آن‌ها است. در اثر سوختن آلکان مورد نظر در مقایسه با نفتالن، مقدار گاز اکسیژن بیشتری مصرف می‌شود. بنابراین حجم گاز اکسیژن مصرف شده در واکنش سوختن این **آلکان بیشتر** از **نفتالن** است.

نفتالن

نفتالن، هیدروکربنی آروماتیک با فرمول مولکولی $C_{۱۰}H_{۸}$ است. در ساختار این ماده، ۲ حلقه و ۵ پیوند دوگانه کربن-کربن وجود دارد. در گذشته این ماده به‌عنوان ضد بید برای نگهداری فرش و لباس کاربرد داشته است. ساختار این ماده را در تصویر زیر می‌توانید مشاهده کنید:



یا



شمار پیوندهای کربن-هیدروژن در این ماده برابر تعداد اتم‌های هیدروژن موجود در آن یعنی ۲۰ است. ۲-بوتانون نیز نوعی ترکیب **کتونی** است که دارای **۸ اتم هیدروژن** و در نتیجه آن، ۸ پیوند $C-H$ است. بنابراین نسبت مورد نظر برابر است با:

$$A = \frac{۲۰}{۸} = ۲/۵$$

۱۰۷- واکنش سولفوریک اسید با سدیم هیدروژن کربنات به‌صورت زیر است:

$$۲NaHCO_۳(s) + H_۲SO_۴(aq) \rightarrow Na_۲SO_۴(aq) + ۲CO_۲(g) + ۲H_۲O(l) \qquad \Delta H = -۲۰۰kJ$$

در واکنش کامل ۴۰۰ میلی‌لیتر محلول ۴۹ درصد جرمی سولفوریک اسید با چگالی $۱/۱g.mL^{-۱}$، چند کیلوژول گرما آزاد می‌شود؟
$(S = ۳۲ , O = ۱۶ , H = ۱ : g.mol^{-۱})$

۱) ۳۳۰ ۲) ۶۶۰ ۳) ۲۲۰ ۴) ۴۴۰

پاسخ: گزینهٔ ۴ **(متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۶۴ ـ ۱۱۰۲)**

ابتدا غلظت مولی محلول سولفوریک‌اسید را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{غلظت مولی محلول} = \frac{۱۰\ ad}{\text{جرم مولی}} = \frac{۱۰ \times ۴۹ \times ۱/۱}{۹۸} = ۵/۵mol.L^{-۱}$$

معادله واکنش انجام شده به‌صورت زیر است:

$$۲NaHCO_۳(s) + H_۲SO_۴(aq) \rightarrow Na_۲SO_۴(aq) + ۲CO_۲(g) + ۲H_۲O(l)$$

در ادامه، مقدار انرژی تولید شده را به‌دست می‌آوریم:

$$?\ kJ\ \text{انرژی} = \underbrace{۴۰۰\ mL\ \text{محلول} \times \frac{۱\ L\ \text{محلول}}{۱۰۰۰\ mL\ \text{محلول}} \times \frac{۵/۵\ mol\ H_۲SO_۴}{۱\ L\ \text{محلول}}}_{۲/۲\ mol\ H_۲SO_۴} \times \frac{۲۰۰\ kJ\ \text{انرژی}}{۱\ mol\ H_۲SO_۴} = ۴۴۰\ kJ$$

۱۰۸- واکنش‌های مقابل را در نظر بگیرید:

$$I)\ Cu(s)+F_2(g)\rightarrow CuF_2(s)\ ,\quad \Delta H=-485\ kJ$$
$$II)\ 2NO(g)+F_2(g)\rightarrow 2NOF(g)\ ,\quad \Delta H=-314\ kJ$$
$$III)\ N_2F_4(g)+2NOF(g)\rightarrow 2NF_3(g)+2NO(g)\ ,\quad \Delta H=+829\ kJ$$

به‌ازای تولید ۲ مول گاز N_2F_4 طی واکنش $2NF_3(g)+Cu(s)\rightarrow N_2F_4(g)+CuF_2(s)$، چند کیلوژول انرژی آزاد می‌شود؟

۱) ۲۰۰۰ ۲) ۱۰۰۰ ۳) ۲۰۰ ۴) ۱۰۰

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۷۵ ـ ۱۱۰۲)

بر اساس قانون هس، ΔH یک واکنش را می‌توان از جمع جبری ΔH چند واکنش دیگر محاسبه کرد. برای محاسبه آنتالپی واکنش مورد نظر، لازم است تا واکنش‌ها را یک‌به‌یک به‌صورت زیر بررسی کنیم:

واکنش I) در بین این واکنش و واکنش داده شده، Cu ماده مشترک است که در واکنش‌های دیگر دیده نمی‌شود. این ماده در واکنش مدنظر، ضریب ۱ در سمت واکنش‌دهنده‌ها دارد؛ بنابراین کافی است واکنش I را بدون تغییر در نظر بگیریم:

$$Cu(s)+F_2(g)\rightarrow CuF_2(s)\ ,\ \Delta H_1=-485\ kJ$$

واکنش III) در بین این واکنش و واکنش داده شده، N_2F_4 ماده مشترک است که در واکنش‌های دیگر دیده نمی‌شود. در واکنش نهایی، ضریب این ماده ۱ و در سمت فراورده‌ها است. بنابراین باید واکنش III را قرینه کنیم؛ در این صورت خواهیم داشت:

$$2NF_3(g)+2NO(g)\rightarrow N_2F_4(g)+2NOF(g)\ ,\ \Delta H_3=-829\ kJ$$

واکنش II) در بین این واکنش و واکنش داده شده، ماده مشترکی دیده نمی‌شود. بنابراین به سراغ ماده‌ای می‌رویم که در دو واکنش از سه واکنش مشترک است تا با حذف کردن این ماده، تکلیف واکنش II نیز مشخص شود. بین این واکنش و واکنش I، گاز F_2 مشترک است. این ماده در واکنش I با ضریب ۱ در سمت واکنش‌دهنده قرار دارد؛ پس باید واکنش II را قرینه کنیم که در نهایت این ماده در واکنش نهایی حذف شود:

$$2NOF(g)\rightarrow 2NO(g)+F_2(g),\ \Delta H_2=+314\ kJ$$

در نهایت، آنتالپی واکنش نهایی از جمع جبری آنتالپی سه واکنش تغییر یافته به‌دست می‌آید:

$$\Delta H=\Delta H_1+\Delta H_2+\Delta H_3=(-485)+314+(-829)=-1000\ kJ$$

با توجه به این واکنش، با تولید شدن ۱ مول گاز N_2F_4، ۱۰۰۰ کیلوژول گرما آزاد می‌شود. پس با تولید شدن ۲ مول از این گاز، ۲۰۰۰ کیلوژول گرما تولید می‌شود.

۱۰۹- در دو ظرف جداگانه، یک کیلوگرم آب و ۲۰۰ گرم اتانول با دمای ۳۰°C ریخته شده است. در رابطه با این دو ظرف، کدام مطلب زیر درست است؟

۱) در صورت مجاورت دو ظرف با یکدیگر، گرما از نمونه آب به سمت نمونه اتانول جاری می‌شود.
۲) برای رساندن دمای محتویات این دو ظرف به ۵°C، مقدار یکسان گرما با محیط مبادله می‌شود.
۳) با ریختن نمونه اتانول در آب، انرژی گرمایی محتویات ظرف حاوی آب افزایش می‌یابد.
۴) ظرفیت گرمایی نمونه آب، معادل با ۵ برابر ظرفیت گرمایی نمونه اتانول است.

پاسخ: گزینهٔ ۳ (آسان ـ مفهومی ـ سریع ـ صفحهٔ ۶۱ ـ ۱۱۰۲)

انرژی گرمایی یک نمونه ماده هم‌ارز با مجموع انرژی جنبشی ذرات سازنده ماده است. این کمیت به **دما** و **جرم نمونه ماده** بستگی دارد. دمای اتانول و آب موجود در هر دو ظرف با یکدیگر برابر است؛ در نتیجه، اضافه کردن آن‌ها به یکدیگر سبب تغییر دما نمی‌شود و دمای نهایی همان ۳۰°C است. از طرف دیگر، با اضافه کردن نمونه **اتانول** به نمونه آب، جرم مخلوط افزایش می‌یابد. پس می‌توان گفت که انرژی گرمایی محتویات ظرف دارای آب **افزایش** می‌یابد.

دما و انرژی گرمایی

ذره‌های سازنده هر ماده، دارای جنب‌وجوش‌های نامنظم هستند. این جنب‌وجوش‌ها در حالت گازی شدیدتر از مایع و در حالت مایع شدیدتر از جامد هستند. از آنجا که ذرات سازنده هر ماده دارای انرژی جنبشی و تندی هستند، پس می‌توان گفت که دمای هر ماده، معیاری برای توصیف میانگین تندی و میانگین انرژی جنبشی ذره‌های سازنده آن است. همچنین معیاری برای میزان سردی یا گرمی نمونه‌ها نیز هست. نماد دما در سیستم بین‌المللی، T و یکای آن کلوین (K) است. همچنین نماد و یکای رایج دما به‌ترتیب θ و درجه سلسیوس $(^\circ C)$ است.

همان‌طور که گفتیم، هر ذره دارای انرژی جنبشی است. مجموع انرژی جنبشی همه ذرات سازنده ماده را هم‌ارز با انرژی گرمایی می‌دانند. پس می‌توان گفت که انرژی گرمایی به جرم و دمای ماده بستگی دارد؛ هر چه جرم و دمای یک نمونه ماده بیشتر باشد، انرژی گرمایی آن نیز بیشتر خواهد بود.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) گرما، هم‌ارز با انرژی گرمایی است که به دلیل تفاوت دمای دو نمونه ماده جاری می‌شود. این دو ظرف حاوی مایعاتی با دمای برابر هستند؛ بنابراین کنار هم قرار گرفتن این دو ظرف باعث جاری شدن انرژی گرمایی نمی‌شود.

گرما

گرما، هم‌ارز با انرژی است که به دلیل تفاوت دمای میان دو نمونه ماده جاری می‌شود. این انرژی از جسمی با دمای بیشتر به جسمی با دمای کمتر انتقال می‌یابد. البته لازم به ذکر است که گرما فقط به دلیل تفاوت دما جاری نمی‌شود؛ بلکه ممکن است برای تغییر حالت فیزیکی نیز گرما منتقل شود با اینکه تغییر دمایی وجود ندارد. نماد گرما در SI، Q و یکای آن ژول (J) است. برای محاسبه گرما از رابطه زیر استفاده می‌شود:

$$Q = mc\Delta\theta$$

در این رابطه، m جرم نمونه ماده، $\Delta\theta$ تغییرات دمایی و c، ظرفیت گرمایی ویژه جسم است. ظرفیت گرمایی ویژه، گرمای لازم برای افزایش دمای ۱ گرم ماده به اندازه ۱ درجه سلسیوس را نشان می‌دهد. این کمیت به نوع ماده، دما و فشار وابسته بوده و جرم نقشی در آن ندارد.

۲) چون هر دو ظرف دارای دو مایع با جنس متفاوت هستند، بنابراین ظرفیت گرمایی ویژه آن‌ها نیز با یکدیگر تفاوت دارد. ظرفیت گرمایی ویژه و جرم نمونه آب از اتانول بیشتر است. پس با کاهش دمای محتویات هر دو ظرف به اندازه ۲۵ درجه سلسیوس، گرمای مبادله شده با محیط آن‌ها با یکدیگر برابر نخواهد بود.

۴) جرم آب معادل با ۵ برابر جرم اتانول است. از طرف دیگر، ظرفیت گرمایی ویژه آب نیز از اتانول بیشتر است. پس می‌توان گفت که ظرفیت گرمایی آب بیشتر از ۵ برابر ظرفیت گرمایی اتانول است.

۱۱۰- کدام مطلب زیر درست است؟

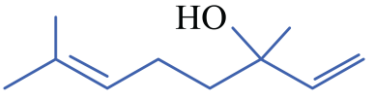
۱) ترکیب آلی موجود در گیاه گشنیز، دارای ۴ جفت الکترون ناپیوندی در ساختار خود است.
۲) بین ذرات سازنده بنزآلدهید در یک نمونه از این ماده، پیوند هیدروژنی برقرار می‌شود.
۳) در ساختار ترکیب آلی موجود در یک نمونه از دارچین، حلقه بنزنی یافت می‌شود.
۴) ترکیب موجود در گیاه میخک، دارای گروه عاملی آلدهیدی در ساختار خود است.

پاسخ: گزینهٔ ۳ (آسان ـ حفظی و مفهومی ـ سریع ـ صفحهٔ ۷۱ ـ ۱۱۰۲)

ترکیب آلی موجود در دارچین، نوعی ماده آروماتیک بوده و دارای حلقه بنزنی است. این ماده در ساختار مولکولی خود یک گروه عاملی آلدهیدی دارد.

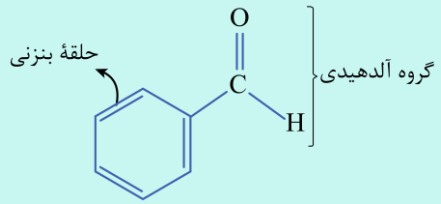
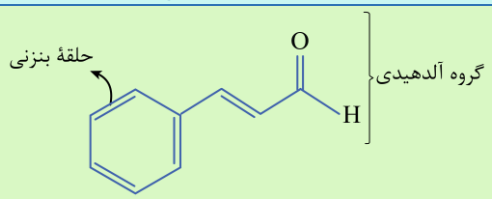
بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) در ساختار ترکیب آلی موجود در گشنیز، گروه عاملی الکلی (هیدروکسیل) وجود دارد. ساختار ترکیب آلی موجود در گیاه گشنیز به‌صورت زیر است:



این ماده در ساختار خود دارای ۱ اتم اکسیژن بوده و روی این اتم اکسیژن، ۲ جفت الکترون ناپیوندی قرار گرفته است.

۲) در ساختار گروه عاملی آلدهیدی، یک اتم اکسیژن توسط یک پیوند دوگانه به یک اتم کربن متصل شده است. این اتم کربن نیز از یک سو به اتم هیدروژن و از سوی دیگر به یک گروه R (یک زنجیره‌ی هیدروکربنی یا یک اتم هیدروژن) متصل شده است. بادام و دارچین از جمله خوراکی‌هایی هستند که در آن‌ها ترکیبات آلدهیدی وجود دارد. جدول زیر، این ترکیبات آلی را نشان می‌دهد:

نام خوراکی	نام ترکیب	ساختار	فرمول مولکولی	تعداد پیوند اشتراکی
بادام	بنزآلدهید		$C_۷H_۶O$	۱۸
دارچین	-		$C_۹H_۸O$	۲۳

آلدهیدها، فاقد اتم هیدروژن متصل به اکسیژن بوده و بر این اساس، توانایی ایجاد پیوند هیدروژنی را ندارند.

۴) ترکیب آلی موجود در گیاه میخک، ۲-هپتانون با ساختار زیر است:



این ماده گروه عاملی آلدهیدی ندارد.

ماز

۱۱۱- **در یک ظرف، ۳۵ گرم آب($c = ۴\,J/g.°C$) با دمای ۴۰°C وجود دارد. با سوزاندن $۲/۵ \times ۱۰^{-۳}$ مول گلوکز و انتقال گرمای تولیدشده به ظرف، دمای آب به چند درجه سانتی‌گراد خواهد رسید؟ ($O = ۱۶ , C = ۱۲ , H = ۱ : g.mol^{-۱}$)**

$$C_۶H_{۱۲}O_۶ + ۶O_۲ \longrightarrow ۶CO_۲ + ۶H_۲O \quad ; \quad \Delta H = -۲۸۰۰\ kJ$$

۱) ۷۵ ۲) ۹۰ ۳) ۵۰ ۴) ۶۰

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۶۴ ـ ۱۱۰۲)

معادله ترموشیمی موازنه‌شده سوختن گلوکز به‌صورت زیر است:

$$C_۶H_{۱۲}O_۶ + ۶O_۲ \longrightarrow ۶CO_۲ + ۶H_۲O \qquad \Delta H = -۲۸۰۰\ kJ$$

ابتدا مقدار انرژی تولیدشده را محاسبه می‌کنیم:

$$?J = ۲/۵ \times ۱۰^{-۳}\ mol\ C_۶H_{۱۲}O_۶ \times \frac{۲۸۰۰\ kJ}{۱\ mol\ C_۶H_{۱۲}O_۶} \times \frac{۱۰۰۰\ J}{۱\ kJ} = ۷۰۰۰\ J$$

گرماشیمی (ترموشیمی)

هر واکنش شیمیایی می‌تواند با تغییر رنگ، تولید رسوب، آزاد شدن گاز و حتی ایجاد جرقه و گرما همراه باشد. اما ویژگی بنیادی و مشترک همه واکنش‌های شیمیایی، داد و ستد و تبادل انرژی با محیط اطراف است. بررسی و مطالعه گرمای مبادله شده در واکنش‌ها موجب پیدایش شاخه ترموشیمی (گرماشیمی) از علم شیمی شد. این شاخه از علم شیمی گرمای واکنش‌های شیمیایی از لحاظ کمی و کیفی، تغییر این گرما و تأثیر آن بر حالت فیزیکی مواد را بررسی می‌کند. همچنین به‌خاطر داشته باشید که اگر یک واکنش را با آنتالپی آن واکنش بیان کنند، به آن واکنش ترموشیمیایی گفته می‌شود.

حال با استفاده از فرمول، مقدار تغییر دمای آب را محاسبه می‌کنیم:

$$Q = mc\Delta\theta \Longrightarrow ۷۰۰۰ = ۳۵ \times ۴ \times \Delta\theta \Longrightarrow \Delta\theta = ۵۰$$

با توجه به محاسبات انجام‌شده، تغییر دمای آب برابر ۵۰ درجه سانتی‌گراد بوده و دمای نهایی آن به ۹۰ درجه سانتی‌گراد خواهد رسید.

ظرفیت گرمایی (C) و ظرفیت گرمایی ویژه (c)

ظرفیت گرمایی(C)، مقدار گرمای لازم برای افزایش دمای یک ماده به اندازه ۱°C یا ۱K است. این کمیت به جرم و جنس جسم بستگی دارد. یکای این کمیت، $J.K^{-1}$ یا $J.°C^{-1}$ است. ظرفیت گرمایی از رابطه $C = m \times c$ محاسبه می‌شود. ظرفیت گرمایی ویژه(c)، مقدار گرمای لازم برای افزایش دمای یک گرم از ماده به اندازه ۱°C یا ۱K است. این کمیت فقط به جنس ماده وابسته است. همچنین یکای این کمیت، $J.g^{-1}.K^{-1}$ یا $J.g^{-1}.°C^{-1}$ است. با توجه به توضیحات داده شده، برای افزایش دمای یکسان دو نمونه ماده با ظرفیت گرمایی (C) برابر، انرژی یکسانی لازم است؛ اما برای افزایش دمای یکسان دو نمونه با جرم برابر، نمونه‌ای با گرمای ویژه (c) بالاتر، انرژی بیشتری نیز نیاز دارد.

۱۱۲- برای شکستن یک مول از کدام پیوند، انرژی بیشتری مصرف می‌شود؟

۱) $N - H$ ۲) $C = C$ ۳) $O - O$ ۴) $C = O$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (آسان ـ مفهومی ـ سریع ـ صفحهٔ ۶۶ ـ ۱۱۰۲)

به انرژی لازم برای شکستن یک مول از هر پیوند اشتراکی، آنتالپی پیوند گفته می‌شود. مقدار آنتالپی پیوند به دو عامل مرتبه پیوند و طول پیوند بستگی دارد. در رابطه با این دو عامل، داریم:

۱) مرتبه پیوند: هرچه مرتبه یک پیوند بیشتر باشد، آنتالپی پیوند نیز بزرگ‌تر است. برای مثال، میانگین آنتالپی پیوند $C = O$ از میانگین آنتالپی پیوند $C - O$ بزرگ‌تر است.

۲) شعاع اتم‌های دخیل در پیوند: هرچه شعاع اتم‌های تشکیل‌دهنده پیوند کوچک‌تر باشد، آنتالپی پیوند بزرگ‌تر است. برای مثال، آنتالپی پیوند $Cl - Cl$ از آنتالپی پیوند $I - I$ بزرگ‌تر است.

پس می‌توان گفت در بین پیوندهای ذکر شده در صورت سؤال، میانگین آنتالپی پیوند $C = O$ از همه بزرگ‌تر است.

میانگین آنتالپی پیوند

برای پیوندهایی که بیش از یک مورد از آن‌ها در یک مولکول وجود دارد (مانند پیوند $N - H$ در آمونیاک) و یا اینکه در دو مولکول متفاوت بتوان آن‌ها را دید (مانند پیوند $C = C$ در اتن و بنزن)، باید از اصطلاح میانگین آنتالپی پیوند استفاده کرد. این در حالی است که در پیوندهایی که تنها در یک ماده با مولکول‌های دواتمی دیده می‌شوند، نیازی به استفاده از لفظ میانگین برای آنتالپی پیوند نیست. در کتاب درسی از واژه آنتالپی پیوند برای پیوند موجود در مولکول هالوژن‌ها، هیدروژن هالیدها، گازهای نیتروژن و اکسیژن استفاده شده است.

۱۱۳- کدام مورد نادرست است؟

۱) گرمای یک نمونه ماده، انرژی جنبشی ذرات سازنده آن را تعیین می‌کند.
۲) هرچه آنتالپی پیوند بزرگ‌تر باشد، پایداری آن پیوند نیز بیشتر خواهد بود.
۳) آنتالپی همه پیوندهای اشتراکی موجود در مولکول آمونیاک با هم برابر نیست.
۴) تصعید، همانند تبخیر و برخلاف چگالش، از جمله فرایندهای گرماگیر به شمار می‌رود.

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۶۸ ـ ۱۱۰۲)

دما، گرما و انرژی گرمایی، از جمله مفاهیمی هستند که در بحث ترمودینامیک با آن‌ها سروکار داریم. به تعاریف زیر دقت کنید:

- دما: دمای یک نمونه، نشان‌دهنده میانگین انرژی جنبشی و سرعت حرکت ذرات آن ماده است. دما، میزان سردی و گرمی جسم مورد نظر را نشان می‌دهد.
- انرژی گرمایی: به مجموع انرژی جنبشی ذرات سازنده یک نمونه، انرژی گرمایی گفته می‌شود.
- گرما: به مقدار انرژی که در اثر تفاوت دمای میان دو نمونه، بین آن‌ها جابه‌جا می‌شود، گرما می‌گوییم. توجه داریم که گرما، از جمله ویژگی‌های یک نمونه ماده به شمار نمی‌رود. بر این اساس، می‌توان گفت دما و انرژی گرمایی، از جمله ویژگی‌های یک نمونه ماده بوده و گرما مربوط به یک فرایند است. پس نمی‌توان از عبارت گرما برای توصیف ویژگی یک نمونه استفاده کرد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

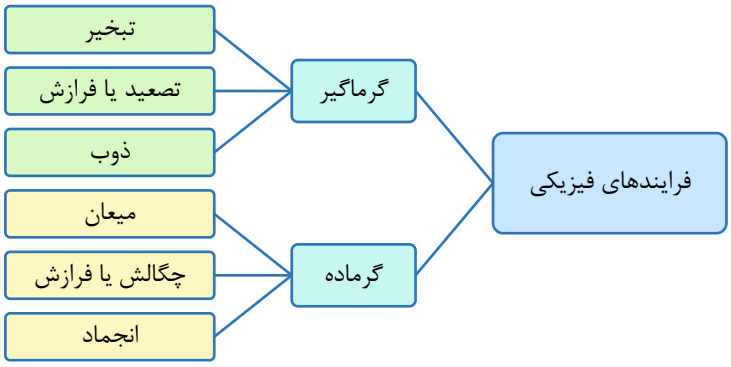
۲) هرچه آنتالپی پیوند بزرگ‌تر باشد، اتم‌های دخیل در تشکیل آن پیوند محکم‌تر به یکدیگر اتصال پیدا کرده‌اند و در نتیجه پایدارتر هستند. برای مثال، پیوند $C=O$ پایدارتر از پیوند $C-O$ است.

۳) دو عامل در تعیین پایداری و انرژی یک پیوند دخیل هستند. این دو عامل، به شرح زیر هستند:

- نوع اتم‌های دخیل در پیوند: برای مثال آنتالپی پیوند $Cl-Cl$ متفاوت از آنتالپی پیوند $N-H$ است.
- مرتبه پیوند: برای مثال آنتالپی پیوند $C-O$ متفاوت از آنتالپی پیوند $C=O$ است.

در ساختار مولکول آمونیاک، سه پیوند یکسان $N-H$ وجود دارد اما مقدار انرژی این سه پیوند با هم کاملاً یکسان نیست و به همین خاطر، برای بیان انرژی پیوند مورد نظر، از عبارت (میانگین آنتالپی پیوند) استفاده می‌کنیم.

۴) فرایندهای فیزیکی به دو دسته گرماگیر و گرماده تقسیم‌بندی می‌شوند. نمودار زیر نشان‌دهنده انواع فرایندهای فیزیکی است:



همان‌طور که مشخص است، فرایند تصعید همانند تبخیر و برخلاف چگالش، از جمله فرایندهای فیزیکی گرماگیر است. توجه داریم که انرژی سامانه در طی یک فرایند فیزیکی گرماگیر افزایش پیدا کرده و در طی یک فرایند فیزیکی گرماده، کاهش پیدا می‌کند.

۱۱۴- از سوختن ۰/۵ مول گاز پروپان در اکسیژن کافی، ۱۱۴۴ کیلوژول انرژی آزاد می‌شود. همچنین اگر ۶ گرم گاز متان را به‌صورت کامل بسوزانیم، ۳۳۳/۷۵ کیلوژول انرژی تولید می‌شود. ارزش سوختی گاز متان به‌تقریب چند برابر گاز پروپان است؟

($O=16, C=12, H=1 : g.mol^{-1}$)

۱) ۱/۲۸ ۲) ۱/۰۷ ۳) ۰/۹۵ ۴) ۰/۸۶

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ زمان‌بر ـ صفحهٔ ۷۳ ـ ۱۱۰۲)

برای محاسبه ارزش سوختی یک ماده از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$\text{ارزش سوختی} = \frac{\left|\text{آنتالپی سوختن}\right|}{\text{جرم مولی}}$$

طبق فرض سؤال، به ازای سوختن ۰/۵ مول از پروپان، ۱۱۴۴ کیلوژول انرژی آزاد می‌شود. پس می‌توان گفت اگر ۱ مول از این ماده سوختنی را با اکسیژن کافی وارد واکنش کنیم، ۲۲۸۸ کیلوژول انرژی تولید خواهد شد. حال ارزش سوختی پروپان را محاسبه می‌کنیم. توجه داریم که پروپان با فرمول مولکولی C_3H_8 و جرم مولی $44 g.mol^{-1}$، سومین عضو خانواده آلکان‌ها است. در این رابطه، داریم:

$$\text{ارزش سوختی پروپان} = \frac{2288\ kJ.mol^{-1}}{44\ g.mol^{-1}} = 52\ kJ.g^{-1}$$

انرژی آزاد شده از سوختن نمونه‌های مختلف از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\text{انرژی آزادشده} = \text{ارزش سوختی} \times \text{جرم نمونه}$$

در مرحله بعد برای یافتن ارزش سوختی متان از همین رابطه استفاده می‌کنیم. حال داریم:

$$\text{انرژی آزادشده} = \text{ارزش سوختی} \times \text{جرم نمونه} \Longrightarrow ۳۳۳/۷۵\ kJ = \text{ارزش سوختی} \times ۶\ g$$

$$\Longrightarrow \text{ارزش سوختی} = \frac{۳۳۳/۷۵}{۶} = ۵۵/۶۲۵\ kJ.g^{-۱}$$

در مرحله پایانی، نسبت خواسته‌شده را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{نسبت ارزش سوختی} = \frac{۵۵/۶۲۵}{۵۲} \simeq ۱/۰۷$$

متان

در رابطه با متان، داریم:

- متان
  - ساده‌ترین آلکان بوده و در ساختار خود یک اتم کربن و چهار اتم هیدروژن دارد.
  - در دمای اتاق به حالت گاز یافت می‌شود.
  - مولکول آن ناقطبی بوده و در میدان الکتریکی جهت‌گیری پیدا نمی‌کند.
  - هرگاه غلظت آن در هوای معدن به بیش از ۵ درصد برسد، احتمال انفجار وجود دارد.
  - در برخی سلول‌های سوختی به عنوان سوخت مصرف می‌شود.
  - در صنعت پتروشیمی در تولید متانول نقش دارد.

ارزش سوختی

ارزش سوختی، مقدار انرژی آزادشده حاصل از سوختن ۱ گرم از ماده سوختنی بوده و همواره عددی مثبت است. مقایسه ارزش سوختی ترکیبات آلی هم‌کربن از خانواده‌های مختلف آلی به‌صورت زیر است:

آلکان > آلکن > آلکین > الکل

آنتالپی سوختن نیز معادل آنتالپی واکنشی است که در آن ۱ مول از ماده سوختنی با اکسیژن کافی واکنش داده و به‌صورت کامل بسوزد. توجه داریم که سوختن همه مواد گرماده بوده و درنتیجه آنتالپی واکنش سوختن آن‌ها عددی منفی است. مقایسه اندازه آنتالپی سوختن ترکیب‌های آلی هم‌کربن از خانواده‌های مختلف به‌صورت زیر است:

آلکان > آلکن > الکل > آلکین

ماز

۱۱۵- جدول زیر را در نظر بگیرید:

پیوند	$C-H$	$C-C$	$H-H$	$C=C$
آنتالپی پیوند$(kJ.mol^{-۱})$	۴۱۵	۳۴۸	۴۳۶	۶۱۴

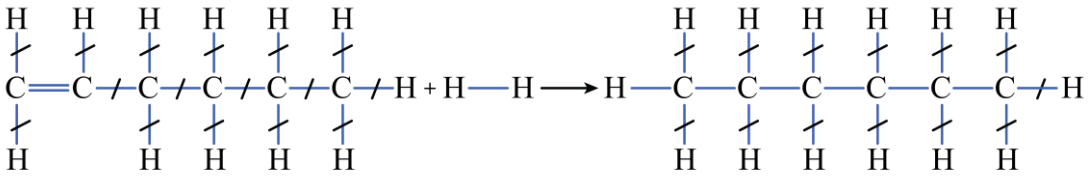
انرژی تولیدشده طی مصرف ۴/۲ گرم بخار ۱-هگزن در واکنش $C_۶H_{۱۲}(g) + H_۲(g) \rightarrow C_۶H_{۱۴}(g)$، در واکنش تولید چند مول گاز $SO_۲$ در طبق معادله زیر به‌دست می‌آید؟ $(C = ۱۲ , H = ۱ : g.mol^{-۱})$

$$۲S(s) + ۲OF_۲(g) \longrightarrow SO_۲(g) + SF_۴(g) \qquad \Delta H = -۳۲۰kJ$$

۱) ۰/۴ ۲) ۰/۲ ۳) ۰/۰۴ ۴) ۰/۰۲

پاسخ: گزینهٔ ۴ (دشوار ـ محاسباتی ـ زمان‌بر ـ صفحهٔ ۶۹ ـ ۱۱۰۲)

معادله واکنش انجام‌شده به‌صورت زیر است:



در مراحل انجام شدن اغلب واکنش‌های شیمیایی، همه پیوندهای موجود در واکنش‌دهنده‌ها شکسته نمی‌شود و همه پیوندهای موجود در فراورده‌ها نیز در طول واکنش تشکیل نمی‌شوند؛ بلکه برخی از پیوندهای موجود در واکنش‌دهنده عیناً در فراورده‌ها نیز وجود دارند. برای محاسبه ΔH این واکنش‌ها از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

ΔH واکنش = (مجموع آنتالپی پیوندهای جدید تشکیل شده در فراورده‌ها) − (مجموع آنتالپی پیوندهای شکسته شده در واکنش‌دهنده‌ها)

با توجه به رابطه‌ی بالا، داریم:

$$\Delta H = \big(\Delta H(C=C) + \Delta H(H-H)\big) - \big(\Delta H(C-C) + ۲\Delta H(C-H)\big)$$
$$= (۶۱۴ + ۴۳۶) - (۳۴۸ + ۲ \times ۴۱۵) = -۱۲۸ kJ$$

بر این اساس، مقدار انرژی مبادله‌شده در واکنش مورد نظر را محاسبه می‌کنیم.

$$?\,kJ \text{ انرژی} = ۴/۲\ g\ C_۴H_{۱۰} \times \frac{۱\ mol\ C_۴H_{۱۰}}{۸۴\ g\ C_۴H_{۱۰}} \times \frac{۱۲۸\ kJ \text{ انرژی}}{۱\ mol\ C_۴H_{۱۰}} = ۶/۴\ kJ$$

می‌خواهیم ۶/۴ کیلوژول انرژی را توسط واکنش $۲S(s) + ۲OF_۲(g) \longrightarrow SO_۲(g) + SF_۴(g)$ تولید کنیم. بر این اساس، حساب می‌کنیم که به ازای تولید ۶/۴ کیلوژول انرژی در این واکنش، چقدر گاز $SO_۲$ تولید می‌شود. در این رابطه، داریم:

$$?\,mol\ SO_۲ = ۶/۴\ kJ \text{ انرژی} \times \frac{۱\ mol\ SO_۲}{۳۲۰\ kJ \text{ انرژی}} = ۰/۰۲\ mol$$

۱۱۶- در شرایط استاندارد، یک مخلوط ۲/۲۴ لیتری از اتان و بوتان که درصد حجمی هر گاز در آن برابر با ۵۰٪ است را می‌سوزانیم. اگر طی این فرایند، ۲۲۳ کیلوژول انرژی آزاد شود، آنتالپی سوختن بخار هگزان تقریباً برابر با چند کیلوژول بر مول می‌شود؟ (آنتالپی سوختن اتان برابر با ۱۵۶۰- کیلوژول بر مول است.)

۱) -۳۹۴۰ ۲) -۳۶۸۰ ۳) -۳۴۰۰ ۴) -۴۲۴۰

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ زمان‌بر ـ صفحهٔ ۷۳ ـ ۱۱۰۲)

در مخلوط گازی از اتان و بوتان، درصد حجمی هر دو گاز برابر ۵۰٪ است. می‌دانیم که حجم یک گاز را می‌توانیم هم‌ارز با مول گاز در نظر بگیریم. بنابراین در این مخلوط، مقدار مول هر یک از گازها با یکدیگر برابر است. در ابتدا، مجموع مول گازهای موجود در مخلوط را محاسبه می‌کنیم:

$$?\,mol \text{ گاز} = ۲/۲۴\ L \text{ گاز} \times \frac{۱\ mol \text{ گاز}}{۲۲/۴\ L \text{ گاز}} = ۰/۱\ mol \text{ گاز}$$

مجموع مول مخلوط گازی برابر ۰/۱ است و مقدار هر یک از گازهای آن برابر ۰/۰۵ مول است. در اثر سوختن این مخلوط، ۲۲۳ کیلوژول گرما آزاد شده است. از آنجا که آنتالپی سوختن اتان برابر ۱۵۶۰- کیلوژول بر مول است، مقدار گرمای آزاد شده حاصل از سوختن اتان برابر خواهد بود با:

$$?\,kJ \text{ گرما} = ۰/۰۵\ mol\ C_۲H_۶ \times \frac{۱۵۶۰\ kJ \text{ گرما}}{۱\ mol\ C_۲H_۶} = ۷۸\ kJ$$

از ۲۲۳ کیلوژول گرمای آزاد شده، ۷۸ کیلوژول گرما حاصل از سوختن اتان است؛ بنابراین، ۱۴۵ کیلوژول گرما از سوختن گاز بوتان به‌دست می‌آید. با توجه به مصرف شدن ۰/۰۵ مول از بوتان، آنتالپی سوختن این گاز را به‌صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$?\,kJ \text{ گرما} = \cdot/\cdot\Delta\,mol\,C_4H_{10} \times \frac{\Delta H\ kJ \text{ گرما}}{1\ mol\ C_4H_{10}} = 145\ kJ \Rightarrow \Delta H = -2900\ kJ$$

آنتالپی سوختن اتان با فرمول مولکولی C_2H_6 و بوتان با فرمول مولکولی C_4H_{10} به‌ترتیب برابر ۱۵۶۰- و ۲۹۰۰- کیلوژول بر مول است. تفاوت ساختار این دو ماده، به اندازه ۲ تا گروه CH_2 است. بنابراین می‌توانیم بگوییم که به ازای اضافه شدن هر گروه CH_2، اندازه قدرمطلق آنتالپی سوختن هر عضو خانواده آلکان‌ها به اندازه ۶۷۰ کیلوژول بر مول اضافه می‌شود؛ بنابراین آنتالپی سوختن هگزان برابر ۴۲۴۰- کیلوژول بر مول است.

آنتالپی سوختن

گرمای آزاد شده از سوختن کامل یک مول ماده سوختنی در اکسیژن کافی را آنتالپی سوختن می‌گویند. از آنجا که سوختن فرایندی گرماده است، آنتالپی سوختن همیشه با علامت منفی گزارش می‌شود. یکای آنتالپی سوختن $kJ.mol^{-1}$ است. برای مقایسه آنتالپی سوختن ترکیب‌های آلی می‌توانیم به‌صورت زیر عمل کنیم:

۱) هر چه تعداد اتم‌های کربن ترکیب آلی بیشتر باشد، اندازه قدرمطلق آنتالپی سوختن آن بیشتر خواهد بود.

۲) اگر تعداد اتم‌های کربن در دو ترکیب برابر باشد، در این صورت به بررسی تعداد هیدروژن‌ها می‌پردازیم. هر چه تعداد هیدروژن‌ها بیشتر باشد، اندازه قدرمطلق آنتالپی سوختن بیشتر خواهد بود.

۱۱۷- با توجه به واکنش‌های زیر، با تولید ۵/۱ گرم گاز H_2S در واکنش $CS_2(l) + 2H_2O(l) \rightarrow CO_2(g) + 2H_2S(g)$، چند کیلوژول انرژی جذب می‌شود؟ $(S = 32 , H = 1 : g.mol^{-1})$

$$I)\ 2H_2S(g) + 3O_2(g) \rightarrow 2H_2O(l) + 2SO_2(g) \quad , \quad \Delta H = -1325\ kJ$$
$$II)\ CS_2(l) + 3O_2(g) \rightarrow CO_2(g) + 2SO_2(g) \quad , \quad \Delta H = -1175\ kJ$$

۱) ۱۱/۲۵ ۲) ۲۲/۵ ۳) ۳۷/۵ ۴) ۷۵

پاسخ: گزینهٔ ۱ (آسان ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۷۵ ـ ۱۱۰۲)

با استفاده از قانون هس می‌توانیم ΔH برخی از واکنش‌ها را به‌طور دقیق محاسبه کنیم. آقای هس برای اولین بار پی‌برد که مقدار گرمای مبادله شده در یک واکنش معین، به راهی که برای انجام آن واکنش در پیش گرفته می‌شود وابسته نیست و فقط به حالت آغازی و پایانی فرایند بستگی دارد. ابتدا آنتالپی واکنش تولید H_2S را به کمک قانون هس حساب می‌کنیم. ترکیب H_2S در واکنش در سمت راست و با ضریب ۲ است پس واکنش (۱) را معکوس می‌کنیم:

$$1')\ 2H_2O(l) + 2SO_2(g) \longrightarrow 2H_2S(g) + 3O_2(g) \quad , \quad \Delta H = 1325\ kJ$$

ترکیب CS_2، در سمت چپ واکنش و با ضریب یک است، پس واکنش (۲) را تغییر نمی‌دهیم:

$$2)\ CS_2(l) + 3O_2(g) \longrightarrow CO_2(g) + 2SO_2(g) \quad , \quad \Delta H = -1175\ kJ$$

بنابراین ΔH واکنش کلی برابر خواهد بود با:

$$\Delta H = 1325 + (-1175) = 150\ kJ$$

در نهایت مقدار گرمای جذب‌شده را حساب می‌کنیم:

$$?\,kJ = 5/1\ g\ H_2S \times \frac{1\ mol\ H_2S}{34\ g\ H_2S} \times \frac{150\ kJ}{2\ mol\ H_2S} = 11/25\ kJ$$

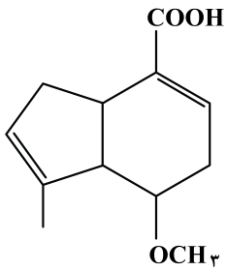
۱۱۸- کدام‌یک از ترکیب‌های داده شده، در مقایسه با سایر موارد آنتالپی سوختن منفی‌تری دارد؟

۱) پروپان ۲) پروپین ۳) پنتان ۴) ۲-پنتین

پاسخ: گزینهٔ ۳ (آسان ـ مفهومی ـ سریع ـ صفحهٔ ۷۳ ـ ۱۱۰۲)

برای مقایسه تغییر آنتالپی سوختن دو نمونه از هیدروکربن‌ها ابتدا به تعداد اتم‌های کربن در هر نمونه نگاه می‌کنیم؛ هر کدام تعداد اتم‌های کربن بیشتری داشت، ΔH واکنش سوختن آن نمونه، منفی‌تر است. همچنین اگر تعداد اتم‌های کربن در هر دو نمونه مساوی باشد، نمونه‌ای که اتم هیدروژن بیشتری خواهد داشت، ΔH واکنش سوختن منفی‌تری دارد. برای مقایسه ارزش سوختی اعضای خانواده آلکان‌ها، آلکن‌ها و آلکین‌ها به‌صورت مجزا، هر کدام تعداد کربن کمتری داشت، ارزش سوختی بیشتری دارد. به‌عنوان مثال، ارزش سوختی متان از تمامی آلکان‌ها بیشتر است. از میان ترکیب‌های داده شده، پنتان و ۲-پنتین، دارای ۵ اتم کربن هستند، اما پنتان تعداد اتم هیدروژن بیشتری دارد، پس آنتالپی سوختن این ماده منفی‌تر بوده و قدرمطلق آنتالپی سوختن آن در مقایسه با سایر مواد داده شده بیشتر خواهد بود.

۱۱۹- مقدار ۰/۵ مول از ترکیب مقابل را در مقداری آب حل کرده و جرم محلول مورد نظر را با استفاده از آب خالص به ۵ کیلوگرم می‌رسانیم. درصد جرمی حل‌شونده در محلول ایجاد شده چقدر می‌شود؟



$(O = ۱۶ , C = ۱۲ , H = ۱ : g.mol^{-۱})$

۱) ۲/۰۸ ۲) ۱/۰۴
۳) ۲/۳۶ ۴) ۱/۱۸

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۷۱ ـ ۱۱۰۲)

فرمول مولکولی ترکیب داده شده به‌صورت $C_{۱۲}H_{۱۶}O_{۳}$ است. این ترکیب دارای یک گروه اتری و یک گروه اسیدی در ساختار خود بوده و به همین علت، هنگام انحلال در آب خاصیت اسیدی از خود نشان می‌دهد. در قدم اول، جرم نمونه مورد نظر از این ماده را محاسبه می‌کنیم:

$$?\, g\ C_{۱۲}H_{۱۶}O_{۳} = ۰/۵\ mol\ C_{۱۲}H_{۱۶}O_{۳} \times \frac{۲۰۸\ g\ C_{۱۲}H_{۱۶}O_{۳}}{۱\ mol\ C_{۱۲}H_{۱۶}O_{۳}} = ۱۰۴\ g$$

در قدم بعد، درصد جرمی ترکیب مورد نظر در محلول ایجاد شده را محاسبه می‌کنیم:

$$C_{۱۲}H_{۱۶}O_{۳} \text{ درصد جرمی} = \frac{C_{۱۲}H_{۱۶}O_{۳} \text{ گرم}}{\text{گرم محلول}} \times ۱۰۰ = \frac{۱۰۴\ g\ C_{۱۲}H_{۱۶}O_{۳}}{۵۰۰۰\ g} \times ۱۰۰ = ۲/۰۸ \text{ درصد}$$

۱۲۰- کدام موارد از عبارت‌های زیر درست هستند؟

الف ـ واکنش انجام‌شده در یخچال صحرایی، نوعی فرایند گرماگیر بوده و در آن هیچ پیوند اشتراکی شکسته نمی‌شود.

ب ـ در واکنش سوختن متان، اگر به‌جای بخار آب، آب مایع تولید شود، مقدار گرمای مبادله شده افزایش می‌یابد.

ج ـ چربی‌ها، نوعی از هیدروکربن‌ها به شمار رفته و در مقایسه با پروتئین‌ها، ارزش سوختی بیشتری دارند.

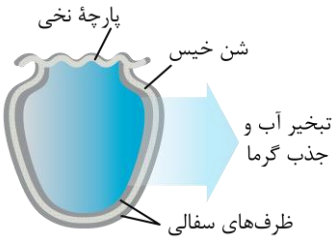
د ـ تغییر آنتالپی واکنش تولید آب با استفاده از عناصر سازنده، به روش مستقیم قابل اندازه‌گیری نیست.

۱) «الف» و «ب» ۲) «ب» و «ج» ۳) «ج» و «د» ۴) «الف» و «د»

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۷۳ ـ ۱۱۰۲)

عبارت‌های (الف) و (ب) درست هستند.

بررسی موارد:



الف یخچال صحرایی دستگاهی بسیار ساده و ارزان‌قیمت است که بدون نیاز به انرژی الکتریکی، مواد غذایی را خنک کرده و برای مدت طولانی‌تری نگه می‌دارد. ساختار این دستگاه به‌صورت مقابل است:

SanjeshCloud

یخچال صحرایی بر اساس نفوذ آب به خارج از بدنه سفالی یخچال و تبخیر آن کار می‌کند. همان‌طور که می‌دانیم، تبخیر یک فرایند گرماگیر است که در آن سطح انرژی فراورده (بخار آب)، بالاتر از سطح انرژی واکنش‌دهنده (آب مایع) است. طی این فرایند، هیچ پیوند اشتراکی شکسته نمی‌شود.

یخچال صحرایی

در ساختار یخچال صحرایی، دو ظرف سفالی که از جنس خاک رس ساخته شده‌اند درون یکدیگر قرار گرفته و فضای میان آن‌ها با شن خیس پر می‌شود. درپوش این مجموعه نیز پوششی نخی و مرطوب است که تهویه را به آسانی انجام می‌دهد. با گذشت زمان، به مرور آب در بدنه‌ی سفالی ظرف بیرونی نفوذ کرده و به آرامی تبخیر می‌شود. معادله فرایند انجام‌شده به‌صورت زیر است:

$H_۲O(l) + ۴۴/۱\,kJ \rightarrow H_۲O(g)$

با توجه به معادله این واکنش، برای تبخیر هر مول آب ۴۴/۱ کیلوژول گرما از محیط جذب می‌شود. فرایند جذب گرما در این دستگاه، فضای داخلی و محتویات درونی آن را خنک کرده و شرایط را برای سالم نگه‌داشتن غذا به مدت طولانی‌تر مناسب می‌کند.

ب) اگر فراوردهٔ یک واکنش گرماده به‌جای حالت گاز (g)، به حالت مایع (l) تولید شود، میزان پایداری فراورده‌های آن واکنش افزایش‌یافته و مقدار تغییر آنتالپی آن واکنش نیز بیشتر می‌شود.

ج) چربی‌ها، در ساختار خود دارای اتم اکسیژن بوده و بر این اساس، نوعی از هیدروکربن‌ها به شمار نمی‌روند. می‌دانیم که چربی‌ها در مقایسه با پروتئین‌ها، ارزش سوختی بیشتری دارند.

روغن و چربی

روغن و چربی از جمله ترکیب‌های آلی هستند که به دلیل تفاوت در ساختار، رفتارهای فیزیکی و شیمیایی متفاوتی دارند. روغن دارای حالت فیزیکی مایع (l) بوده و چربی دارای حالت فیزیکی جامد (s) است. از دیدگاه شیمیایی، در ساختار مولکول‌های روغن پیوندهای دوگانه بیشتری وجود داشته و به همین خاطر، روغن در مقایسه با چربی واکنش‌پذیری بیشتری دارد. هرچقدر که تعداد پیوندهای دوگانه در یک نمونه از روغن بیشتر باشد، آن نمونه از روغن با سرعت بالاتری با محلول برم واکنش داده و آن را بی‌رنگ می‌کند.

د) هیدروژن پراکسید $(H_۲O_۲)$ ماده‌ای است که با نام تجاری آب اکسیژنه به فروش می‌رسد. تولید این ماده از واکنش مستقیم میان گازهای اکسیژن و هیدروژن امکان‌پذیر نیست. در واقع، چون آب $(H_۲O)$ در مقایسه با هیدروژن پراکسید سطح انرژی پایین‌تری دارد (پایدارتر است)، گازهای هیدروژن و اکسیژن بر اساس معادله‌ی $۲H_۲(g) + O_۲(g) \rightarrow ۲H_۲O(l)$ واکنش داده و آب تولید می‌شود. معادله تجزیه آب‌اکسیژنه به‌صورت زیر است:

$۲H_۲O_۲(aq) \rightarrow ۲H_۲O(l) + O_۲(g)$

با توجه به توضیحات داده شده، گرمای واکنش تولید آب از عناصر سازنده آن **به‌طور مستقیم قابل اندازه‌گیری است**، اما گرمای حاصل از واکنش تولید هیدروژن پراکسید از عناصر سازنده آن به‌طور مستقیم **قابل اندازه‌گیری نیست**.

قانون هس

گرمای حاصل از واکنش‌های شیمیایی را به دو روش مستقیم و غیرمستقیم می‌توان محاسبه کرد. در روش‌های مستقیم، واکنش مورد نظر در حضور سایر مواد انجام می‌شود و به کمک تغییر دمای مواد، مقدار گرمای حاصل از واکنش محاسبه می‌شود. استفاده از انواع گرماسنج‌های مختلف، از جمله روش‌های مستقیم محاسبه گرمای یک واکنش هستند. در روش‌های غیرمستقیم، بدون انجام شدن واکنش مورد نظر و با استفاده از داده‌های آزمایشگاهی، می‌توان مقدار گرمای یک واکنش را محاسبه کرد. استفاده از قانون هس، استفاده از آنتالپی پیوند و استفاده از آنتالپی سوختن، از جمله روش‌های غیرمستقیم محاسبه مقدار گرمای یک واکنش هستند. توجه داریم که به کمک این روش‌ها، می‌توان مقدار ΔH واکنش‌هایی که مرحله‌ای از یک واکنش پیچیده هستند و یا به آسانی انجام نمی‌شوند را محاسبه کرد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

میخوای خوندن پاسخ‌نامه رو راحت‌تر کنی!
پس بیا پاسخ ویدیویی‌اش رو ببین!

- پس از پایان آزمون، می‌تونین **پاسخ‌نامهٔ ویدیویی و تشریحی** این آزمون رو با کلیک یا اسکن کردن این QRcode، از صفحه آپارات آزمون ماز مشاهده کنید.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی

آزمون ماز | پایهٔ دوازدهم



تابستان ۱۴۰۵

دفترچه پاسخ

جمعه ۱۳ شهریورماه ۱۴۰۵

پیش‌خوانی پایهٔ دوازدهم

(اختیاری - ویژهٔ دانش‌آموزان پیشتاز)

ویژهٔ کنکـــوری‌های ۱۴۰۶

- پاسخنامه سریع؛ برای بررسی فوری بعد از آزمون
- تحلیل تمام گزینه‌های هر سؤال؛ برای بررسی سؤالاتی که پاسخ نادرست داده‌اید
- نکات و درسنامه‌های آموزشی؛ برای یادگیری کامل مباحث هر سؤال
- مشاورهٔ تستی؛ برای یادگیری انواع روش‌های حل تست
- استراتژی آزمون؛ برای یادگیری مدیریت زمان و مدیریت جلسهٔ آزمون

حق چاپ و تکثیر سؤالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز «گروه ماز» مجاز می‌باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می‌شود.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

درس	مسئول درس	طراحان	ویراستاران
ریاضیات	مهرداد کیوان حسین شفیع‌زاده سیدجواد نظری	حسین شفیع‌زاده ـ مهرداد کیوان علی منصف‌شکری	ندا فرهختی ـ مائده بادان‌فیروز یزدان نیک‌قدم ـ حمیدرضا ولی‌پور نوید ذکی ـ علی اسدی
فیزیک	سجاد صادقی‌زاده سعید احمدی	سعید احمدی ـ سجاد صادقی‌زاده حسین عبدوی‌نژاد ـ حسین زین‌العابدین‌زاده مجید رجبی وندچالی ـ غلامرضا محبی امیررضا خوینی‌ها ـ محمدجواد سورچی محسن قندچلر	حسین عبدوی‌نژاد حنا خلعتبری
شیمی	فرشاد هادیان‌فرد	فرشاد هادیان‌فرد ـ فرهنگ امیری عالیه میرزایی ـ طاها حق‌بین فاطمه محمودی ـ علی ترابی مهسا بایمانی‌نژاد	رامین رزمجو ـ طاها حق‌بین محمد دارابی‌جم ـ وحید فارسیان محمد داودآبادی‌فراهانی محمدمهدی معظمی

یک تیم با بیش از ۵۰۰ نفر در حال کار هستن تا آزمون‌های ماز با حداکثر کیفیت حاضر بشن و به شما کمک کنن و مسیر موفقیت رو براتون ساده‌تر کنن. همیشه از نظرات و کامنت‌های خوب‌تون انرژی می‌گیریم. مرسی که همراهمون هستین.

راستی! حتماً در نظرسنجی آزمون شرکت کنین و نظرات و پیشنهادات‌تون رو برامون بنویسین.

آموزش استراتژی آزمون و مدیریت جلسه کنکور - قسمت ۳

تابستون؛ سکوی پرتابت به سمت کنکور!

«تابستون رو جدی بگیر»

رفیق سلام!

رسیدیم به ایستگاه ۱۳ شهریور؛ جایی که هوا هم کم‌کم داره بوی پاییز رو می‌گیره. اگه تا الآن با ما همراه بودی، یعنی تو اون بخش سختِ «تغییر عادت» رو پشت سر گذاشتی. حالا دیگه تابستون اون‌قدرها هم که اولش فکر می‌کردی طولانی نیست.

از ۱۳ شهریور تا ۲۷ شهریور، از زمان‌های استراتژیکه؛ چون تو رو از «فاز آرامشِ تابستونه» می‌کِشه بیرون و پرتت می‌کنه توی فضایِ جدیِ «آمادگی برای سال تحصیلی» جایی که تیکهٔ آخر از برنامه آزمون مونده.

بیا واقع‌بین باشیم؛ الآن مغزت احتمالاً یه جور «خستگیِ انباشته» رو تجربه می‌کنه. ممکنه توی تحلیل آزمون‌های قبلی دیده باشی که یه جاهایی نوسان داشتی. کاملاً طبیعیه! توی روان‌شناسیِ یادگیری، ما به این می‌گیم «اثرِ فرسایشِ کوتاه‌مدت». برای اینکه از این دام فرار کنی، باید بدونی آزمون ۱۳ شهریور صرفاً یه عدد و درصد نیست؛ این آزمون، «سندِ دارایی‌های علمیِ توئه». هر چیزی که تا الآن خوندی و عمیقش کردی، توی این آزمون باید به شکلِ تسلطِ کامل خودشو نشون بده. اگه هنوز مبحثی رو «نیم‌بند» بلدی، همین الآن وقتشه که با یه وسواسِ علمی، پرونده‌اش رو ببندی و بذاری کنار.

یه نکتهٔ خیلی مهم که شاید کمتر کسی بهت بگه: از الآن به بعد، سبک مطالعه‌ت باید یه تغییر کوچولو بکنه. تا الآن داشتی «تک‌بعدی» و عمیق کار می‌کردی، اما از دو هفتهٔ دیگه، مدرسه و کلاس‌ها با حجمِ بالایی از تکالیف و درس‌های جدید هجوم میارن سمتت.

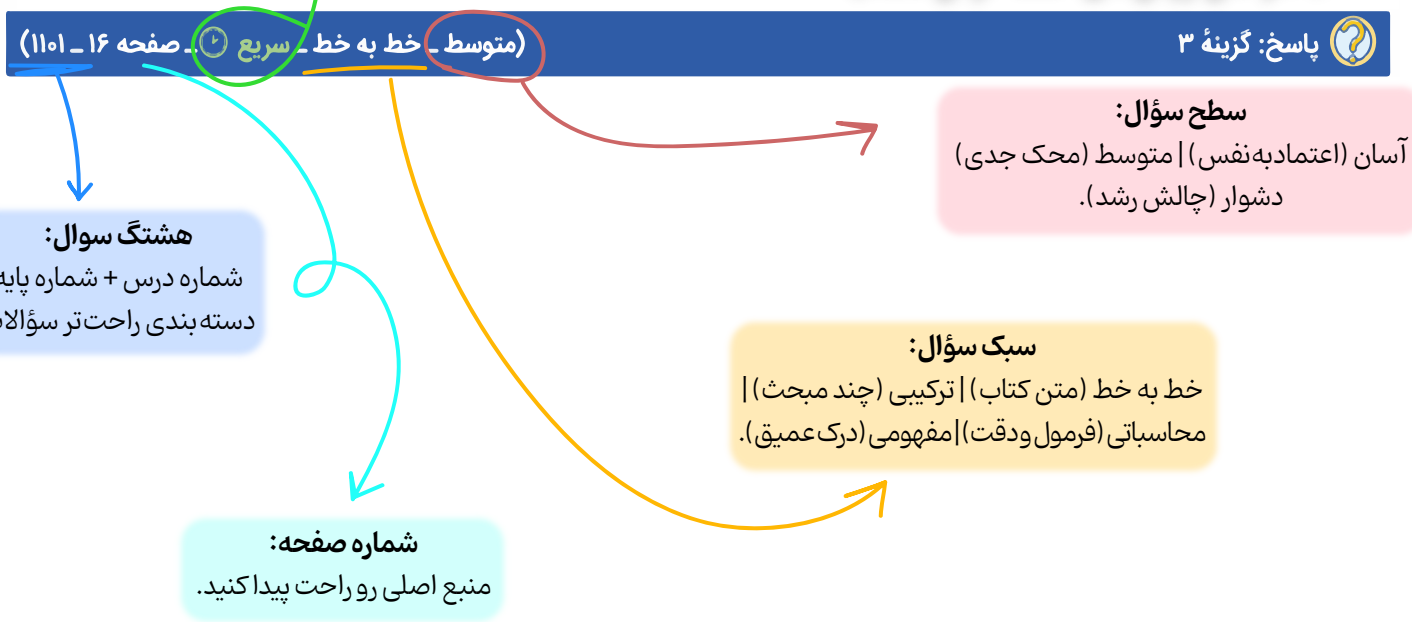
۱۳ تا ۲۷ شهریور، تمرینِ «حفظِ کیفیت در شرایطِ پرفشاره». یعنی باید یاد بگیری چطور با وجودِ خستگیِ ذهنی و نزدیک شدن به شروعِ پاییز، همچنان بتونی روی تست‌ها متمرکز بمونی و بازیِ خودت رو مدیریت کنی.

پیش‌خوانی‌های سال بعد رو که توی آزمون‌های قبل داشتی، یادت هست؟ حالا دیگه اون پیش‌خوانی‌ها حکمِ «تکیه‌گاه» رو برات دارن. اگه مهرماه کلاس‌ها شلوغ بشه و تو حس کنی داری عقب می‌مونی، همین پیش‌خوانی‌های تابستونه است که بهت آرامش میده و جلوی استرسِ کاذب رو می‌گیره. به آزمون بعدی به چشمِ «آخرین تستِ آمادگیِ جسمانی و روانی» قبل از مسابقه اصلی نگاه کن. هر چی اینجا یاد بگیری و هر نقطه ضعفی که پیدا کنی، دقیقاً همون چیزیه که باعث میشه پاییزِ امسال، متفاوت‌ترین فصلِ زندگیت بشه.

حرفِ آخرم اینه: بذار آزمونِ ۲۷ شهریور، تیرِ خلاصِ «تنبلی‌های احتمالی» باشه. می‌خوام وقتی کارنامه‌ت رو می‌گیری، فارغ از هر درصدی، به خودت بگی: «دمم گرم که تا لحظهٔ آخرِ تابستون، شل نکردم». این همون اعتمادبه‌نفسِ قهرمانانه‌ایه که مهرماه، وقتی همه دارن با استرس شروع می‌کنن، تو رو با فاصله چند پله بالاتر از بقیه نگه می‌داره.

بروکه بترکونی، ما منتظرِ گزارشِ درخششِ تو توی تحلیلِ این آزمون هستیم! ♡

راهنمای پاسخنامه آزمون ها



یادتون باشه:

- ✓ هر سؤال یک فرصت یادگیریه، نه یک مانع.
- ✓ پاسخ‌نامه فقط جواب نیست؛ یک کارگاه آموزشی کامله.
- ✓ با هر آزمون و مرور این پاسخ‌نامه، یک پله بالاتر می‌رید و یک قدم به رؤیاتون نزدیک‌تر می‌شید.
- ✓ موفقیت فقط برای کسایی‌یه که با برنامه و انگیزه حرکت می‌کنن. شما همون آدمید.

بودجه‌بندی این آزمون

حسابان ۲: تابع، صفحه‌های ۱ تا ۱۲
هندسه ۳: ماتریس و کاربردها (درس ۱)، صفحه‌های ۹ تا ۲۱
گسسته: آشنایی با نظریه اعداد (درس ۱)، صفحه‌های ۱ تا ۸

سهم در کنکور

حسابان ۲: از این مباحث به‌طور مستقیم تستی در کنکور طرح نشده است.
هندسه ۳: از این مباحث به‌طور مستقیم تستی در کنکور طرح نشده است.
گسسته: از این مباحث به‌طور مستقیم تستی در کنکور طرح نشده است.

برای دیدن پاسخنامهٔ ویدئویی آزمون QRcode بالا را اسکن کنید!
یا بر روی لینک زیر کلیک کنید!
پاسخنامهٔ ویدئویی آزمون

۱- کدام تابع زیر از انبساط افقی و انقباض عمودی تابع $y=f(x)$ به‌دست می‌آید؟

۱) $y=\frac{۱}{۲}f(۳x)$ ۲) $y=۲f(۳x)$ ۳) $y=\frac{۱}{۲}f(\frac{x}{۳})$ ۴) $y=۲f(\frac{x}{۳})$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (آسان ـ مفهومی ـ سریع ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۷ و ۹ ـ ۱۲۰۱)

اگر $۰<k<۱$ و $۰<m<۱$ باشد، آن‌گاه تابع $y=mf(kx)$ از **انبساط افقی** و **انقباض عمودی** $f(x)$ به‌دست می‌آید.

در گزینه‌ها تنها تابع $y=\frac{۱}{۲}f(\frac{x}{۳})$، با $۰<k=\frac{۱}{۳}<۱$ و $۰<m=\frac{۱}{۲}<۱$ دارای انبساط افقی و انقباض عمودی است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) $y=\frac{۱}{۲}f(۳x)$ دارای **انقباض عمودی** و **انقباض افقی**

۲) $y=۲f(۳x)$ دارای **انبساط عمودی** و **انقباض افقی**

۴) $y=۲f(\frac{x}{۳})$ دارای **انبساط عمودی** و **انبساط افقی**

تبدیل نمودارها (انبساط و انقباض افقی و عمودی)

انبساط و انقباض عمودی: اگر نمودار و یا ضابطهٔ تابع $\begin{cases} y=f(x) \\ D_f=[a,b]\to R_f=[c,d] \end{cases}$ را در اختیار داشته باشیم، با فرض $k>۰$ داریم:

$kf(x)\ ;\ (k>۱)$

ضابطه	ضابطهٔ تابع f را در k ضرب می‌کنیم.
نمودار	نمودار تابع f را در راستای محور yها با ضریب k، **منبسط** (کشیده) می‌کنیم.
نقطهٔ متناظر	اگر نقطهٔ $A(x,y)$ روی نمودار تابع f قرار داشته باشد، نقطهٔ $A'(x,ky)$ روی نمودار تابع $kf(x)$ قرار دارد.
دامنه	دامنهٔ تابع $kf(x)$ با دامنهٔ تابع f برابر است.
برد	اگر برد تابع f به صورت $[c,d]$ باشد، برد تابع $kf(x)$ به صورت $[kc,kd]$ است.

$kf(x);(0<k<1)$

ضابطه	ضابطهٔ تابع f را در k ضرب می‌کنیم.
نمودار	نمودار تابع f را در راستای محور yها با ضریب k، **منقبض** (فشرده) می‌کنیم.
نقطهٔ متناظر	اگر نقطهٔ $A(x,y)$ روی نمودار تابع f قرار داشته باشد، نقطهٔ $A'(x,ky)$ روی نمودار تابع $kf(x)$ قرار دارد.
دامنه	دامنهٔ تابع $kf(x)$ با دامنهٔ تابع f برابر است.
برد	اگر برد تابع f به صورت $[c,d]$ باشد، برد تابع $kf(x)$ به صورت $[kc,kd]$ است.

انبساط و انقباض افقی: اگر نمودار و یا ضابطهٔ تابع $\begin{cases} y=f(x) \\ D_f=[a,b]\to R_f=[c,d] \end{cases}$ را در اختیار داشته باشیم، با فرض $k>0$ داریم:

$f(kx)\ ;\ (k>1)$

ضابطه	در ضابطهٔ تابع f به جای تمامی xها، (kx) قرار می‌دهیم.
نمودار	نمودار تابع f را در راستای محور xها با ضریب $\frac{1}{k}$، **منقبض** (فشرده) می‌کنیم.
نقطهٔ متناظر	اگر نقطهٔ $A(x,y)$ روی نمودار تابع f قرار داشته باشد، نقطهٔ $A'(\frac{x}{k},y)$ روی نمودار تابع $f(kx)$ قرار دارد.
دامنه	اگر دامنهٔ تابع f به صورت $[a,b]$ باشد، دامنهٔ تابع $f(kx)$ به صورت $\left[\frac{a}{k},\frac{b}{k}\right]$ است.
برد	برد تابع $f(kx)$ با برد تابع f برابر است.

$f(kx)\ ;\ (0<k<1)$

ضابطه	در ضابطهٔ تابع f به جای تمامی xها، (kx) قرار می‌دهیم.
نمودار	نمودار تابع f را در راستای محور xها، با ضریب $\frac{1}{k}$، **منبسط** (کشیده) می‌کنیم.
نقطهٔ متناظر	اگر نقطهٔ $A(x,y)$ روی نمودار تابع f قرار داشته باشد، نقطهٔ $A'(\frac{x}{k},y)$ روی نمودار تابع $f(kx)$ قرار دارد.
دامنه	اگر دامنهٔ تابع f به صورت $[a,b]$ باشد، دامنهٔ تابع $f(kx)$ به صورت $\left[\frac{a}{k},\frac{b}{k}\right]$ است.
برد	برد تابع $f(kx)$ با برد تابع f برابر است.

۲- نمودار تابع $f(x)=2-\sqrt{x-1}$ را ۳ واحد به راست و k واحد به پایین انتقال می‌دهیم. به‌ازای کدام مقدار k، نمودار تابع جدید از نقطهٔ $A(5,-2)$ عبور می‌کند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۳ (آسان ـ محاسباتی ـ سریع ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۱۱ ـ ۱۲۰۱)

$$y=f(x)\xrightarrow[x\to x-3]{\text{۳واحد به راست}}y=f(x-3)\xrightarrow[-k]{\text{kواحد به پایین}}y=f(x-3)-k$$

تابع جدید از نقطهٔ $A(5,-2)$ عبور می‌کند، پس داریم:

$$-2=f(5-3)-k\Rightarrow k-2=f(2)\xrightarrow{f(2)=1}k-2=1\Rightarrow k=3$$

تبدیل نمودارها (انتقال افقی و عمودی)

انتقال افقی: اگر نمودار و یا ضابطهٔ تابع $\begin{cases} y=f(x) \\ D_f=[a,b]\to R_f=[c,d] \end{cases}$ را در اختیار داشته باشیم، با فرض $k>0$، داریم:

$f(x+k)$

ضابطه	در ضابطهٔ تابع f به جای تمامی xها، $(x+k)$ قرار می‌دهیم.
نمودار	نمودار تابع f را به اندازهٔ k واحد و در راستای محور xها به سمت **چپ** منتقل می‌کنیم.
نقطهٔ متناظر	اگر نقطهٔ $A(x,y)$ روی نمودار تابع f قرار داشته باشد، نقطهٔ $A'(x-k,y)$ روی نمودار تابع $f(x+k)$ قرار دارد.
دامنه	اگر دامنهٔ تابع f به صورت $[a,b]$ باشد، دامنهٔ تابع $f(x+k)$ به صورت $[a-k,b-k]$ می‌باشد.
برد	برد تابع $f(x+k)$ با برد تابع f برابر است.

$f(x-k)$

ضابطه	در ضابطهٔ تابع f به جای تمامی xها، $(x-k)$ قرار می‌دهیم.
نمودار	نمودار تابع f را به اندازهٔ k واحد و در راستای محور xها به سمت **راست** منتقل می‌کنیم.
نقطهٔ متناظر	اگر نقطهٔ $A(x,y)$ روی نمودار تابع f قرار داشته باشد، نقطهٔ $A'(x+k,y)$ روی نمودار تابع $f(x-k)$ قرار دارد.
دامنه	اگر دامنهٔ تابع f به صورت $[a,b]$ باشد، دامنهٔ تابع $f(x-k)$ به صورت $[a+k,b+k]$ می‌باشد.
برد	برد تابع $f(x-k)$ با برد تابع f برابر است.

انتقال عمودی: اگر نمودار و یا ضابطهٔ تابع $\begin{cases} y=f(x) \\ D_f=[a,b]\to R_f=[c,d] \end{cases}$ را در اختیار داشته باشیم، با فرض $k>0$ داریم:

$f(x)+k$

ضابطه	به ضابطهٔ تابع f، k واحد **اضافه** می‌کنیم.
نمودار	نمودار تابع f را به اندازهٔ k واحد و در راستای محور yها به سمت **بالا** منتقل می‌کنیم.
نقطهٔ متناظر	اگر نقطهٔ $A(x,y)$ روی نمودار تابع f قرار داشته باشد، نقطهٔ $A'(x,y+k)$ روی نمودار تابع $f(x)+k$ قرار دارد.
دامنه	دامنهٔ تابع $f(x)+k$ با دامنهٔ تابع f برابر است.
برد	اگر برد تابع f به صورت $[c,d]$ باشد، برد تابع $f(x)+k$ به صورت $[c+k,d+k]$ می‌باشد.

$f(x)-k$

ضابطه	از ضابطهٔ تابع f، k واحد **کم** می‌کنیم.
نمودار	نمودار تابع f را به اندازهٔ k واحد و در راستای محور yها به سمت **پایین** منتقل می‌کنیم.
نقطهٔ متناظر	اگر نقطهٔ $A(x,y)$ روی نمودار تابع f قرار داشته باشد، نقطهٔ $A'(x,y-k)$ روی نمودار تابع $f(x)-k$ قرار می‌گیرد.
دامنه	دامنهٔ تابع $f(x)-k$ با دامنهٔ تابع f برابر است.
برد	اگر برد تابع f به صورت $[c,d]$ باشد، برد تابع $f(x)-k$ به صورت $[c-k,d-k]$ می‌باشد.

۳- نمودار سهمی $y=x^۲+mx$ را نسبت به محور xها قرینه کرده، سپس ۸ واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم. اگر رأس سهمی به‌دست آمده و سهمی اولیه بر هم منطبق باشند، m کدام است؟

۱) ± ۸ ۲) ± ۲ ۳) ± ۶ ۴) ± ۴

پاسخ: گزینهٔ ۴ (آسان ـ ترکیبی ـ سریع ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۷ ـ ۱۲۰۱)

$$y=x^۲+mx \xrightarrow[\times(-۱)]{\text{قرینه نسبت به محور } x\text{ها}} y=-x^۲-mx \xrightarrow[-۸]{\text{۸ واحد به پایین}} y=-x^۲-mx-۸$$

نقطهٔ رأس و در نتیجه **عرض** رأس این دو سهمی **یکسان** است.

$$y_۱=y_۲ \Rightarrow -\frac{\Delta_۱}{۴a_۱}=-\frac{\Delta_۲}{۴a_۲} \Rightarrow -\frac{m^۲}{۴\times ۱}=-\frac{m^۲-۳۲}{۴\times(-۱)} \Rightarrow m^۲=-m^۲+۳۲ \Rightarrow m^۲=۱۶ \Rightarrow m=\pm ۴$$

تبدیل نمودار (قرینه‌یابی)

قرینهٔ نمودار: اگر نمودار و یا ضابطهٔ تابع $\begin{cases} y=f(x) \\ D_f=[a,b] \to R_f=[c,d] \end{cases}$ را در اختیار داشته باشیم، داریم:

$f(-x)$

ضابطه	در ضابطهٔ تابع f به جای تمامی xها، $(-x)$ قرار می‌دهیم.
نمودار	نمودار تابع f را **نسبت به محور yها قرینه** می‌کنیم.
نقطهٔ متناظر	اگر نقطهٔ $A(x,y)$ روی نمودار تابع f قرار داشته باشد، نقطهٔ $A'(-x,y)$ روی نمودار تابع $f(-x)$ قرار دارد.
دامنه	اگر دامنهٔ تابع f به صورت $[a,b]$ باشد، دامنهٔ تابع $f(-x)$ به صورت $[-b,-a]$ است.
برد	برد تابع $f(-x)$ با برد تابع f برابر است.

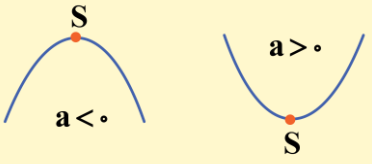
$-f(x)$

ضابطه	ضابطهٔ تابع f را در عدد (-۱) ضرب می‌کنیم.
نمودار	نمودار تابع f را **نسبت به محور xها قرینه** می‌کنیم.
نقطهٔ متناظر	اگر نقطهٔ $A(x,y)$ روی نمودار تابع f قرار داشته باشد، نقطهٔ $A'(x,-y)$ روی نمودار تابع $-f(x)$ قرار دارد.
دامنه	اگر دامنهٔ تابع f به صورت $[a,b]$ باشد، دامنهٔ تابع $-f(x)$ نیز با آن برابر است.
برد	اگر برد تابع f به صورت $[c,d]$ باشد، برد تابع $-f(x)$ به صورت $[-d,-c]$ است.

قرینه کردن نمودار نسبت به **هر دو محور**، همان قرینه کردن نسبت به **مبدأ مختصات** است.

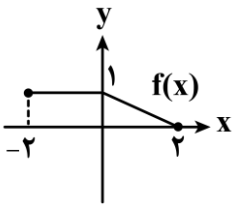
رأس سهمی

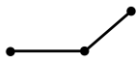
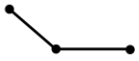
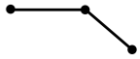
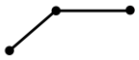
در سهمی به معادلهٔ $y=ax^۲+bx+c$ **طول** و **عرض** رأس سهمی به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:



$$x_S=\frac{-b}{۲a} \qquad y_S=-\frac{\Delta}{۴a}$$

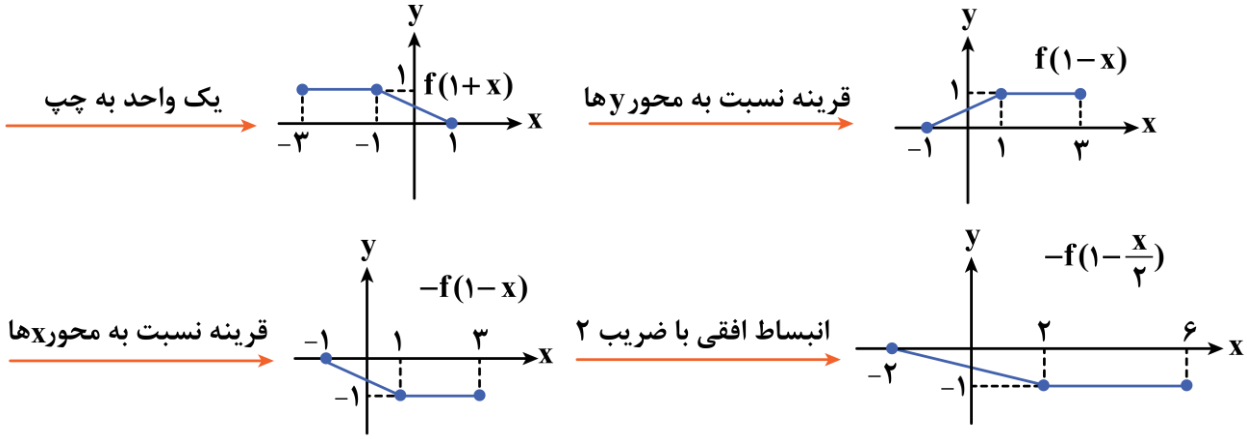
۴- نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت مقابل است. نمودار تابع $y=-f(1-\frac{x}{2})$ به کدام صورت زیر است؟



۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ خط‌به‌خط ـ سریع ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۸ و ۹ ـ ۱۲۰۱)

به ترتیب زیر، تبدیلات را انجام می‌دهیم:



نمودار حاصل شبیه گزینهٔ «۲» است.

ترتیب اعمال تبدیلات روی توابع

اگر نمودار تابع $y=f(x)$ را در اختیار داشته باشیم، برای رسم نمودار تابع $y=af(bx+c)+d$ به **ترتیب** زیر عمل می‌کنیم $(b\neq 0)$:

الف) تأثیرات روی دامنه

۱) تأثیر عدد ثابت c: اگر $c>0$ باشد، نمودار تابع را به اندازهٔ c واحد به **سمت چپ** و اگر $c<0$ باشد، نمودار تابع را به اندازهٔ $|c|$ واحد به **سمت راست** منتقل می‌کنیم.

۲) تأثیر ضریب x: طول تمامی نقاط را در $\frac{1}{|b|}$ **ضرب** می‌کنیم. (اگه b منفی باشه نمودار تابع نسبت به محور yها قرینه هم می‌شه.)

ب) تأثیرات روی برد

۳) تأثیر ضریب f: عرض تمامی نقاط را در $|a|$ **ضرب** می‌کنیم. (اگه a منفی باشه نمودار تابع نسبت به محور xها قرینه هم می‌شه.)

۴) تأثیر عدد ثابت d: اگر $d>0$ باشد، نمودار تابع را به اندازهٔ d واحد به **سمت بالا** و اگر $d<0$ باشد، نمودار تابع را به اندازهٔ $|d|$ واحد به **سمت پایین** منتقل می‌کنیم.

۵- نمودار تابع $f(x)=x^2-4x$ را ۲ واحد به سمت راست انتقال داده و سپس طول نقاط نمودار به‌دست آمده را در $\frac{1}{2}$ ضرب می‌کنیم. تابع جدید، خط $y=-8x+12$ را در نقاطی با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) ۲- یا صفر ۲) ۲ یا ۴- ۳) ۲- یا ۴ ۴) ۲ یا صفر

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ ترکیبی ـ استاندارد ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۳ و ۹ ـ ۱۲۰۱)

ابتدا تابع تبدیل‌یافته را پیدا می‌کنیم:

$$y=f(x)\xrightarrow[x\to x-2]{\text{۲ واحد راست}}y=f(x-2)\xrightarrow[x\to 2x]{\text{طول نقاط نصف}}y=f(2x-2)$$

SanjeshCloud

بنابراین **معادلهٔ تلاقی خط** و $y=f(2x-2)$ را می‌یابیم:

$$f(2x-2)=-8x+12 \xrightarrow{f(x)=x^2-4x} (2x-2)^2-4(2x-2)=-8x+12$$
$$\Rightarrow 4x^2-8x=0 \Rightarrow x=0 \text{ یا } 2$$

ماز

۶- **عرض نقاط تابع $y=-2x^2+4x+8$ را نصف کرده، سپس ۲ واحد به سمت yهای پایین و ۲ واحد به سمت xهای مثبت انتقال می‌دهیم. در کدام بازه، نمودار جدید بالای نیمساز ناحیه اول است؟**

۱) $(2,3)$ ۲) $(1,4)$ ۳) $(1,3)$ ۴) $(2,4)$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۳ و ۷ ـ ۱۲۰۱)

ابتدا تابع تبدیل‌یافته را پیدا می‌کنیم:

$$y=-2x^2+4x+8 \xrightarrow[\times(\frac{1}{2})]{\text{عرض نقاط نصف}} y=\frac{1}{2}(-2x^2+4x+8)=-x^2+2x+4$$
$$\xrightarrow[-2]{\text{۲ واحد پایین}} y=(-x^2+2x+4)-2=-x^2+2x+2$$
$$\xrightarrow[x\to x-2]{\text{۲ واحد راست}} y=-(x-2)^2+2(x-2)+2 \Rightarrow y=-x^2+6x-6$$

حال می‌خواهیم نمودار جدید بالای **نیمساز ناحیهٔ اول** $(y=x)$ باشد:

$$-x^2+6x-6>x \Rightarrow x^2-5x+6<0 \Rightarrow (x-3)(x-2)<0 \Rightarrow 2<x<3$$

توجه کنید که بازهٔ موردنظر در ناحیهٔ اول است $(x>0)$، پس **قابل قبول** است.

نیمساز ناحیهٔ اول و سوم

خط $y=x$ نیمساز ناحیهٔ اول و سوم نامیده می‌شود.

ماز

۷- **نمودار تابع $y=\sqrt{7-x}$ را نسبت به مبدأ قرینه کرده، سپس طول نقاط تابع به‌دست آمده را $\frac{1}{3}$ برابر می‌کنیم. نمودار نهایی را چند واحد به بالا انتقال دهیم تا نیمساز ناحیهٔ سوم را در نقطه‌ای به طول ۱- قطع کند؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۳ و ۹ و ۱۲ ـ ۱۲۰۱)

قرینهٔ $y=f(x)$ نسبت به مبدأ تابع $-f(-x)$ است.

$$y=\sqrt{7-x} \xrightarrow[f(x)\to -f(-x)]{\text{قرینه نسبت به مبدأ}} y=-\sqrt{7+x} \xrightarrow[x\to 3x]{\text{طول نقاط } \frac{1}{3} \text{ برابر}} y=-\sqrt{7+3x} \xrightarrow[+k]{k \text{ واحد بالا}} y=-\sqrt{7+3x}+k$$

حال **تقاطع نمودار حاصل** و **نیمساز ربع سوم** $(y=x)$ را می‌یابیم. توجه داریم از آن‌جا که نقطهٔ تقاطع روی نیمساز ربع سوم است **طول و عرض** آن با هم **برابرند**: $(x<0)$

تقاطع با نیمساز ربع سوم: $-\sqrt{7+3x}+k=x \xrightarrow{(-1,-1)} -\sqrt{7-3}+k=-1 \Rightarrow k=-1+\sqrt{4}=1$

ماز

۸- نقطهٔ $A(۲,a)$ از نمودار تابع $y=۲f(۱+bx)$ با نقطهٔ $A'(b,a)$ از نمودار تابع $y=۱+f(۳x)$ متناظر است. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۱۰ ـ ۱۲۰۱)

روش اول

مرحله به مرحله تبدیلات را روی توابع اعمال می‌کنیم تا از $y=۲f(۱+bx)$ به $y=۱+f(۳x)$ برسیم و متناظر هر تغییر را روی نقطه اعمال می‌کنیم:

$$y=۲f(۱+bx)\xrightarrow[\times\frac{۱}{۲}]{}y=f(۱+bx)\xrightarrow[x\to\frac{x}{b}]{}y=f(۱+x)\xrightarrow{x\to x-۱}y=f(x)\xrightarrow[+۱]{x\to ۳x}y=f(۳x)+۱$$

$$A(۲,a)\xrightarrow[y_A\times\frac{۱}{۲}]{}(۲,\frac{a}{۲})\xrightarrow{x\times b}(۲b,\frac{a}{۲})\xrightarrow{x+۱}(۲b+۱,\frac{a}{۲})\xrightarrow[y+۱]{x\times\frac{۱}{۳}}A'(\frac{۲b+۱}{۳},\frac{a}{۲}+۱)$$

و با توجه به صورت سؤال $A'(b,a)$ است، پس:

$$\begin{cases}\frac{۲b+۱}{۳}=b\Rightarrow ۳b=۲b+۱\Rightarrow b=۱\\ \frac{a}{۲}+۱=a\Rightarrow a-\frac{a}{۲}=۱\Rightarrow\frac{a}{۲}=۱\Rightarrow a=۲\end{cases}\Rightarrow a+b=۳$$

روش دوم

مختصات نقاط را در ضابطهٔ توابع **جایگزین** می‌کنیم:

$$A(۲,a):a=۲f(۱+۲b)\Rightarrow f(۱+۲b)=\frac{a}{۲}$$
$$A'(b,a):a=۱+f(۳b)\Rightarrow f(۳b)=a-۱$$
$$\Rightarrow\begin{cases}۱+۲b=۳b\Rightarrow b=۱\\ \frac{a}{۲}=a-۱\Rightarrow a=۲\end{cases}\Rightarrow a+b=۳$$

۹- **نمودار تابع $f(x)=x^۲+۳x$ را در امتداد محور xها، ۲ واحد در جهت مثبت انتقال داده، سپس نمودار به‌دست آمده را نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم. فاصلهٔ نقطهٔ برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f، از مبدأ چقدر است؟**

۱) $۲\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۱۷}$ ۳) $\sqrt{۵}$ ۴) $۳\sqrt{۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۳ و ۹ ـ ۱۲۰۱)

با توجه به تبدیل‌یافتهٔ نمودار داریم:

$$y=f(x)\xrightarrow[x\to x-۲]{۲\text{واحد راست}}y=f(x-۲)\xrightarrow[x\to -x]{\text{قرینه نسبت به محور }y\text{ها}}y=f(-x-۲)$$
$$\xrightarrow{\text{تقاطع با نمودار }f}f(-x-۲)=f(x)$$
$$\Rightarrow(-x-۲)^۲+۳(-x-۲)=x^۲+۳x\Rightarrow x^۲+۴x+۴-۳x-۶=x^۲+۳x$$
$$\Rightarrow -۲x-۲=۰\Rightarrow x=-۱\Rightarrow y=f(-۱)=۱-۳=-۲$$

نقطهٔ برخورد $A(-۱,-۲)$ است و **به فاصلهٔ** $\sqrt{۵}$ از **مبدأ** قرار دارد:

$$OA=\sqrt{(-۱)^۲+(-۲)^۲}=\sqrt{۵}$$

فاصلهٔ دو نقطه از هم

نقاط $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ را در نظر بگیرید، آن‌گاه طول پاره‌خط AB برابر است با:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

به طور خاص فاصلهٔ هر نقطه مانند $A(x_A, y_A)$ تا **مبدأ مختصات** برابر است با:

$$OA = \sqrt{x_A^2 + y_A^2}$$

۱۰- دامنهٔ تابع $y = f(x)$ برابر بازهٔ $[a, 2b]$ و دامنهٔ تابع $y = 2f(\frac{2-x}{3})$ برابر بازهٔ $[b, 2a]$ است. مقدار $\frac{a}{b}$ کدام است؟

۱) $\frac{4}{7}$ ۲) $\frac{7}{4}$ ۳) $\frac{7}{5}$ ۴) $\frac{5}{7}$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (سخت ـ محاسباتی ـ زمان‌بر ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۹ ـ ۱۲۰۱)

برای یافتن دامنهٔ $y = 2f(\frac{2-x}{3})$ باید $\frac{2-x}{3}$ را بین a و 2b قرار دهیم:

$$D_f : a \le x \le 2b \Rightarrow a \le \frac{2-x}{3} \le 2b \xrightarrow{\times 3} 3a \le 2 - x \le 6b$$

$$\xrightarrow{-2} 3a - 2 \le -x \le 6b - 2 \xrightarrow{\times(-1)} 2 - 6b \le x \le 2 - 3a$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2 - 6b = b \Rightarrow b = \frac{2}{7} \\ 2 - 3a = 2a \Rightarrow a = \frac{2}{5} \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{7}} = \frac{2 \times 7}{2 \times 5} = \frac{7}{5}$$

تأثیر انتقال‌ها روی دامنه و برد

اگر دامنهٔ تابع $y = f(x)$ بازهٔ $[m, n]$ باشد برای محاسبهٔ دامنهٔ تابع $y = kf(ax+b)+h$ باید مجموعه جواب نامعادلهٔ زیر را به‌دست آوریم:

$m \le ax + b \le n \Rightarrow$ **حل نامعادله**، دامنهٔ تابع را می‌دهد.

و اگر برد تابع $y = f(x)$ بازهٔ $[m, n]$ باشد برای محاسبهٔ برد تابع $y = kf(ax+b)+h$ داریم:

$m \le f(ax+b) \le n \Rightarrow$ **طرفین نامعادله** را در **k** ضرب کرده و سپس **با h جمع** می‌کنیم.

یه نمونهٔ باحال ببین!

اگر دامنهٔ تابع $y = f(x)$ بازهٔ $(-1, 5]$ باشد، دامنهٔ تابع $y = -2 + 3f(2x+1)$ را به‌دست آورید.

کافی است در تابع جدید، عبارت مقابل f یعنی $2x+1$ را در فاصلهٔ $(-1, 5]$ قرار دهیم:

$$-1 \le 2x + 1 < 5 \Rightarrow -2 \le 2x < 4 \Rightarrow -1 \le x < 2 \Rightarrow D_{-2+3f(2x+1)} = [-1, 2)$$

۱۱- ماتریس $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$ با شرط $a_{ij}=\begin{cases}۰ & |i-j|>۰\\ ۲i-j & |i-j|=۰\end{cases}$ چه نوع ماتریسی است؟

۱) همانی
۲) ماتریس صفر
۳) قطری غیراسکالر
۴) اسکالر غیرهمانی

پاسخ: گزینهٔ ۳ (آسان ـ خط‌به‌خط ـ سریع ـ هندسه ۳ صفحهٔ ۱۲ ـ ۱۲۰۱)

شرط $|i-j|>۰$ با $i\neq j$ معادل است و طبق این شرط، تمام درایه‌های خارج قطر اصلی باید برابر صفر باشند از طرفی شرط $|i-j|=۰$ نیز معادل $i=j$ است و طبق آن تمام درایه‌های روی قطر اصلی از رابطهٔ $a_{ij}=۲i-j$ پیروی می‌کنند بنابراین داریم:

$$A=\begin{bmatrix}a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳}\\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳}\\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲-۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۴-۲ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۶-۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۲ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۳\end{bmatrix}$$

در این ماتریس، چون درایه‌های **خارج قطر اصلی صفر** هستند، قطری محسوب می‌شود ولی چون اعداد روی قطر اصلی **برابر نیستند**، غیراسکالر است.

ماتریس مربعی

اگر در ماتریس A، **تعداد سطرها** با **تعداد ستون‌ها برابر** و مساوی n باشد، A را یک ماتریس مربعی از مرتبهٔ n $(n\times n)$ می‌نامیم.

ماتریس صفر

ماتریسی است که **همهٔ درایه‌های آن صفر** باشند و آن را با نماد $\bar{O}$ نشان می‌دهیم.

دو نمونهٔ باحال ببین!

$$\bar{O}_{۲\times۳}=\begin{bmatrix}۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\end{bmatrix}\qquad \bar{O}_{۲\times۲}=\begin{bmatrix}۰ & ۰\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}$$

تذکر!

یک ماتریس صفر لزوماً ماتریسی مربعی **نیست** و می‌تواند تعداد سطرها و ستون‌هایش متفاوت باشد.

ماتریس قطری

ماتریس قطری، ماتریسی مربعی است که تمام **درایه‌های غیرواقع** بر **قطر اصلی** آن **صفر** باشند. (درایه‌های واقع بر قطر اصلی می‌توانند صفر باشند یا نباشند.)

ماتریس اسکالر

ماتریس اسکالر، ماتریسی قطری است که **درایه‌های** واقع بر **قطر اصلی** آن، همگی با هم **برابرند**.

ماتریس همانی (واحد)

ماتریس اسکالری است که درایه‌های واقع بر قطر اصلی آن همگی ۱ هستند.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۲- اگر ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix}۱ & ۲y & ۶\\ a & ۱ & ۲\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}x-۱ & ۴ & ۳-z\\ ۱ & a^۲ & ۲a\end{bmatrix}$ با هم برابر باشند، ماتریس $C=\begin{bmatrix}x & a^۲-۱\\ z+۳ & y\end{bmatrix}$ چه نوع ماتریسی است؟

۱) قطری غیراسکالر
۲) اسکالر غیرهمانی
۳) ماتریس صفر
۴) همانی

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ خط‌به‌خط ـ سریع ـ هندسه ۳ صفحهٔ ۱۳ ـ ۱۲۰۱)

باید **درایه‌های نظیر** در دو ماتریس با هم **برابر** باشند:

$$\begin{cases}x-۱=۱\Rightarrow x=۲\\ ۲y=۴\Rightarrow y=۲\\ ۳-z=۶\Rightarrow z=-۳\\ a=۱\end{cases}\Rightarrow C=\begin{bmatrix}x & a^۲-۱\\ z+۳ & y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲ & ۰\\ ۰ & ۲\end{bmatrix}$$

ماتریس C، یک ماتریس اسکالر غیرهمانی است.

تساوی دو ماتریس

دو ماتریس $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{r\times s}$ برابر هستند، اگر **هم‌مرتبه** باشند (یعنی $m=r$ و $n=s$) و **درایه‌های** آن‌ها **نظیربه‌نظیر** **با هم برابر** باشند (یعنی $\begin{cases}۱\le i\le m\\ ۱\le j\le n\end{cases}$; $a_{ij}=b_{ij}$).

۱۳- ماتریس‌های $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{p\times q}$ و $C=[c_{ij}]_{r\times ۳}$ و $D=[d_{ij}]_{m\times ۴}$ مفروض هستند، اگر ماتریس‌های $A\times D$ و همچنین $(A\times B)\times(C\times D)$ تعریف شده باشند، مقدار $\sqrt[۳]{mnp}$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ هندسه ۳ صفحهٔ ۱۷ ـ ۱۲۰۱)

برای این‌که ضرب دو ماتریس تعریف شده باشد، باید تعداد **ستون‌های ماتریس سمت چپ** با تعداد **سطرهای ماتریس سمت راست** برابر باشد؛ در ضمن ضرب ماتریس‌ها نیز **شرکت‌پذیر** است و **پرانتز در ضرب اهمیتی ندارد**:

۱) $A_{m\times n}\times D_{m\times ۴}\Rightarrow n=m$

۲) $A_{m\times n}\times B_{p\times q}\times C_{r\times ۳}\times D_{m\times ۴}\Rightarrow\begin{cases}n=p\\ q=r\\ m=۳\Rightarrow n=۳\end{cases}$

بنابراین $p=۳$ می‌باشد و داریم:

$$\sqrt[۳]{mnp}=\sqrt[۳]{۳\times ۳\times ۳}=۳$$

شرط صورت‌پذیر بودن ضرب ماتریس‌ها

برای این‌که ضرب دو ماتریس $A_{(m\times n)}\times B_{(s\times p)}$ تعریف‌شده باشد، باید **تعداد ستون‌های** ماتریس اول (A) با **تعداد سطرهای** ماتریس دوم (B) برابر باشد. (یعنی $n=s$)

۱۴- فرض کنید $A=\begin{bmatrix}۰&۰&۱\\۱&۰&۰\\۰&۱&۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۵&۶&۷\\۴&۳&۲\\۱&۱&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰&۱&۰\\۱&۰&۰\\۰&۰&۱\end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های سطر دوم ماتریس A کدام است؟

۱) ۱۷ ۲) ۱۸ ۳) ۱۹ ۴) ۲۰

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ خط‌به‌خط/محاسباتی ـ استاندارد ـ هندسه ۳ صفحهٔ ۲۰ ـ ۱۲۰۱)

ماتریس‌های دوم و سوم را در هم ضرب می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix}۵&۶&۷\\۴&۳&۲\\۱&۱&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰&۱&۰\\۱&۰&۰\\۰&۰&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۶&۵&۷\\۳&۴&۲\\۱&۱&۱\end{bmatrix}$$

حال برای به‌دست آوردن درایه‌های سطر دوم ماتریس A کافی است **فقط سطر دوم ماتریس اول** را در این ماتریس ضرب کنیم:

$$\begin{bmatrix}○&○&○\\۱&۰&۰\\○&○&○\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۶&۵&۷\\۳&۴&۲\\۱&۱&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}○&○&○\\۶&۵&۷\\○&○&○\end{bmatrix}$$

بنابراین **مجموع درایه‌های سطر دوم** ماتریس A برابر ۱۸ است.

ضرب ماتریس‌ها

برای محاسبهٔ ضرب دو ماتریس ابتدا باید ضرب یک ماتریس سطری در یک ماتریس ستونی را تعریف کنیم:

۱) ضرب ماتریس سطری در ستونی:

$$\begin{bmatrix}a_۱&a_۲&\dots&a_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_۱\\b_۲\\\vdots\\b_n\end{bmatrix}=a_۱b_۱+a_۲b_۲+\dots+a_nb_n$$

۲) ضرب دو ماتریس: برای ضرب دو ماتریس $A_{(m\times n)}\times B_{(n\times k)}$ کافی است سطر i ام A را در ستون j ام B ضرب کنیم و عدد حاصل را در درایهٔ C_{ij} ام از ماتریس حاصل‌ضرب بنویسیم.

۱۵- ماتریس‌های A، B و C به‌صورت $A=\begin{bmatrix}۱&\frac{۱}{۳}&\frac{۱}{۶}\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}۱&۲&۶\\\frac{۱}{۲}&۱&۳\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix}B\\A\end{bmatrix}$ مفروض‌اند. مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس $C^۲$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۹ ۳) ۱۲ ۴) صفر

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ خط‌به‌خط ـ استاندارد ـ مشابه کنکور ـ صفحهٔ ۱۸ ـ ۱۲۰۱)

ابتدا ماتریس C را تشکیل می‌دهیم و سپس **قطر اصلی** $C^۲$ را به‌دست می‌آوریم:

$$C^۲=\begin{bmatrix}۱&۲&۶\\\frac{۱}{۲}&۱&۳\\\frac{۱}{۶}&\frac{۱}{۳}&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&۲&۶\\\frac{۱}{۲}&۱&۳\\\frac{۱}{۶}&\frac{۱}{۳}&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳&○&○\\○&۳&○\\○&○&۳\end{bmatrix}$$

دقت کنید که برای پیدا کردن قطر اصلی C^2 باید **سطر اول** C را در **ستون اول** خودش، **سطر دوم** را در **ستون دوم** و **سطر سوم** را در **ستون سوم** ضرب کنیم. به این ترتیب مجموع درایه‌های قطر اصلی C^2 برابر با $۳+۳+۳=۹$ است.

توان در ماتریس‌ها

$$A^2 = A \times A$$
$$A^3 = A \times A \times A$$
$$\vdots$$
$$A^n = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n\text{بار}}$$

ماز

۱۶- اگر $A=[a_{ij}]_{۲\times ۲}$ و $a_{ij}=\begin{cases} i+j & i>j \\ j-i & i\le j \end{cases}$ بوده و $B=[b_{ij}]_{۲\times ۴}$ و $b_{ij}=\begin{cases} j^2 & i\text{غیراول}; \\ ۱ & i\text{اول}; \end{cases}$ باشد، مجموع درایه‌های سطر دوم ماتریس **AB** کدام است؟

۱) ۶۰ ۲) ۷۰ ۳) ۸۰ ۴) ۹۰

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ هندسه ۳ صفحهٔ ۱۸ ـ ۱۲۰۱)

برای پیدا کردن سطر دوم ماتریس AB کافی است **سطر دوم** A را در ماتریس B ضرب کنیم. بنابراین ابتدا ماتریس‌های A و B را تشکیل می‌دهیم:

$$\left.\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} ۱-۱ & ۲-۱ \\ ۲+۱ & ۲-۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۳ & ۰ \end{bmatrix}_{۲\times ۲} \\ B &= \begin{bmatrix} ۱^2 & ۲^2 & ۳^2 & ۴^2 \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}_{۲\times ۴} \end{aligned}\right\} \Rightarrow AB = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۳ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۴ & ۹ & ۱۶ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۳ & ۱۲ & ۲۷ & ۴۸ \end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های سطر دوم ماتریس AB برابر است با:

$$۳+۱۲+۲۷+۴۸=۹۰$$

ماز

۱۷- اگر **A** و **B** دو ماتریس مربعی ۲×۲ باشند، به‌طوری که $AB=\begin{bmatrix} ۳-a & ۲ \\ b & ۱ \end{bmatrix}$ و مجموع درایه‌های سطر اول ماتریس $A\begin{bmatrix} -۳ & ۱ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix}B+\frac{۳}{۴}A\begin{bmatrix} ۸ & -\frac{۴}{۳} \\ \frac{۴}{۳} & ۰ \end{bmatrix}B$ برابر صفر باشد، مقدار **a** کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی/محاسباتی ـ استاندارد ـ هندسه ۳ صفحهٔ ۲۰ ـ ۱۲۰۱)

ابتدا $\frac{۳}{۴}$ را در ماتریس $\begin{bmatrix} ۸ & -\frac{۴}{۳} \\ \frac{۴}{۳} & ۰ \end{bmatrix}$ ضرب می‌کنیم.

$$A\begin{bmatrix}-۳ & ۱\\ -۱ & ۳\end{bmatrix}B+\frac{۳}{۴}A\begin{bmatrix}۸ & -\frac{۴}{۳}\\ \frac{۴}{۳} & ۰\end{bmatrix}B=A\begin{bmatrix}-۳ & ۱\\ -۱ & ۳\end{bmatrix}B+A\begin{bmatrix}۶ & -۱\\ ۱ & ۰\end{bmatrix}B$$

سپس A را از **سمت چپ** و B را از **سمت راست فاکتور** می‌گیریم:

$$=A(\begin{bmatrix}-۳ & ۱\\ -۱ & ۳\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۶ & -۱\\ ۱ & ۰\end{bmatrix})B=A\times\begin{bmatrix}۳ & ۰\\ ۰ & ۳\end{bmatrix}\times B=A(۳I)B=۳AB=\begin{bmatrix}۹-۳a & ۶\\ ۳b & ۳\end{bmatrix}$$

طبق فرض سؤال، **مجموع درایه‌های سطر اول** ماتریس حاصل باید برابر **صفر** باشد، پس:

$$(۹-۳a)+۶=۰\Rightarrow ۱۵-۳a=۰\Rightarrow a=۵$$

خواص ضرب ماتریس‌ها

۱) حاصل‌ضرب ماتریس همانی $I_n=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۰ & \cdots & ۰\\ ۰ & ۱ & ۰ & \cdots & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱ & \cdots & ۰\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & ۱\end{bmatrix}$ در **هر ماتریس مربعی** مرتبهٔ n **برابر** با خود آن ماتریس است.

$$AI=IA=A$$

۲) ضرب ماتریس‌ها **شرکت‌پذیر** است.

$$A(BC)=(AB)C$$

۳) ضرب نسبت به جمع خاصیت **توزیع‌پذیری** دارد.

$$A(B+C)=AB+AC$$

عکس قانون توزیع‌پذیری

در ماتریس‌ها عکس قانون توزیع‌پذیری یا پخشی نیز درست است، اما به شرط آن‌که دو ماتریس **در یک سمت** باشند، مثلاً هر دو در سمت چپ یا هر دو در سمت راست.

چند نمونهٔ باحال ببین!

$$AB+AC=A(B+C)\qquad AB+A=AB+AI=A(B+I)$$

$$B^۲+AB=(B+A)B\qquad AC+۲C=(A+۲I)C$$

۱۸- اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۱ & ۱\\ ۰ & ۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}$ **باشد، مجموع درایه‌های ستون سوم ماتریس** $A^{۲۰}$ **کدام است؟**

۱) ۲۱ ۲) ۲۲ ۳) ۴۰ ۴) ۴۱

پاسخ: گزینهٔ ۱ (آسان ـ خط‌به‌خط/محاسباتی ـ استاندارد ـ هندسه ۳ صفحهٔ ۲۰ ـ ۱۲۰۱)

ابتدا $A^۲$ را تشکیل می‌دهیم:

$$A^۲=\begin{bmatrix}۱ & ۱ & ۱\\ ۰ & ۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۱ & ۱\\ ۰ & ۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۲\\ ۰ & ۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}$$

برای **تشخیص نظم** به‌دست آمده بهتر است $A^{۳}$ را هم تشکیل دهیم:

$$A^{۳}=AA^{۲}=\begin{bmatrix}۱&۱&۱\\۰&۱&۰\\۰&۰&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&۲&۲\\۰&۱&۰\\۰&۰&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&۳&۳\\۰&۱&۰\\۰&۰&۱\end{bmatrix}$$

بنابراین ماتریس $A^{۲۰}$ به‌صورت $A^{۲۰}=\begin{bmatrix}۱&۲۰&۲۰\\۰&۱&۰\\۰&۰&۱\end{bmatrix}$ می‌باشد و مجموع درایه‌های ستون سوم آن برابر ۲۱ است.

محاسبهٔ توان‌های بزرگ در ماتریس‌ها

معمولاً در سؤال‌هایی که توان‌های بزرگی از یک ماتریس مطرح می‌شود، می‌توان یک فرم کلی برای توان nام آن ماتریس پیدا کرد. برای آن ابتدا **توان دوم و سوم** ماتریس را یافته و سعی می‌کنیم **الگوی** آن را تشخیص دهیم. اگر تشخیص الگو سخت بود می‌توانیم توان‌های بیشتری را محاسبه کنیم.

ماز

۱۹- اگر $A=\begin{bmatrix}۸&a\\-۳&۲\end{bmatrix}$ **و** $B=\begin{bmatrix}۴&-۱\\b&۶\end{bmatrix}$ **باشد و داشته باشیم** $(A+B)(A-B)=A^{۲}-B^{۲}$ **مقدار** $a+b$ **کدام است؟**

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ هندسه ۳ صفحهٔ ۱۹ ـ ۱۲۰۱)

اتحادها هنگامی در ماتریس‌ها برقرار است که ضرب دو ماتریس دارای خاصیت **جابه‌جایی** باشد، یعنی: $AB=BA$

زیرا اگر ضرب دو ماتریس دارای خاصیت جابه‌جایی باشد، داریم: $(A+B)(A-B)=A^{۲}-\cancel{AB}+\cancel{BA}-B^{۲}=A^{۲}-B^{۲}$

پس:

$$AB=\begin{bmatrix}۸&a\\-۳&۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۴&-۱\\b&۶\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳۲+ab&-۸+۶a\\-۱۲+۲b&۱۵\end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix}۴&-۱\\b&۶\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۸&a\\-۳&۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳۵&۴a-۲\\۸b-۱۸&ab+۱۲\end{bmatrix}$$

بنابراین باید داشته باشیم:

$$\begin{cases}-۸+۶a=۴a-۲\Rightarrow ۲a=۶\Rightarrow a=۳\\-۱۲+۲b=۸b-۱۸\Rightarrow ۶b=۶\Rightarrow b=۱\end{cases}\Rightarrow a+b=۴$$

از اتحاد برای ماتریس استفاده کنم؟ همیشه نه!

اگر A و B ماتریس‌هایی **«مربعی»** باشند؛ به‌طوری که **«$AB=BA$»**، اتحادهای جبری مثل مربع دوجمله‌ای، مکعب دوجمله‌ای، مزدوج و چاق و لاغر برایشان برقرار است.

$$(A\pm B)^{۲}=A^{۲}\pm ۲AB+B^{۲}$$

$$(A\pm B)^{۳}=A^{۳}\pm ۳A^{۲}B+۳AB^{۲}\pm B^{۳}$$

$$A^{۲}-B^{۲}=(A-B)(A+B)$$

$$A^{۳}\pm B^{۳}=(A\pm B)(A^{۲}\mp AB+B^{۲})$$

۲۰- اگر $aA+I=\begin{bmatrix}۵ & a\\ ۶ & ۹\end{bmatrix}$ و $A+aI=\begin{bmatrix}۴ & ۱\\ ۳ & b\end{bmatrix}$ باشد، مقدار b کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

پاسخ: گزینهٔ ۴ (سخت ـ محاسباتی ـ زمان‌بر ـ هندسه ۳ صفحهٔ ۱۶ ـ ۱۲۰۱)

$$A+aI=\begin{bmatrix}۴ & ۱\\ ۳ & b\end{bmatrix}\Rightarrow A+\begin{bmatrix}a & ۰\\ ۰ & a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴ & ۱\\ ۳ & b\end{bmatrix}\Rightarrow A=\begin{bmatrix}۴-a & ۱\\ ۳ & b-a\end{bmatrix}$$

$$aA+I=\begin{bmatrix}۵ & a\\ ۶ & ۹\end{bmatrix}\Rightarrow aA=\begin{bmatrix}۵ & a\\ ۶ & ۹\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}\Rightarrow aA=\begin{bmatrix}۴ & a\\ ۶ & ۸\end{bmatrix}$$

حال ماتریس A را جایگذاری می‌کنیم:

$$a\begin{bmatrix}۴-a & ۱\\ ۳ & b-a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴ & a\\ ۶ & ۸\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}۳a=۶\Rightarrow a=۲\\ a(b-a)=۸\Rightarrow b=۶\end{cases}$$

ضرب عدد در ماتریس

اگر **عددی** مانند r در یک ماتریس ضرب شود، آن عدد را **در تک‌تک درایه‌های** ماتریس ضرب می‌کنیم.

خواص جمع ماتریس‌ها

۱) $A+\bar{O}=\bar{O}+A=A$

۲) $A+B=B+A$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۱- کدام دو عدد کلیت حکم «حاصل‌ضرب دو عدد گنگ، گنگ است.» را نقض می‌کنند؟

۱) $\sqrt{۵}-۳$ و $\sqrt{۳}+۵$
۲) $۲\sqrt{۳}$ و $۳\sqrt{۲}$
۳) $\sqrt{۲}+۱$ و $\sqrt{۲}+۲$
۴) $\log_{۲}^{۲۵}$ و $\log_{۵}^{۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (آسان ـ محاسباتی ـ سریع ـ گسسته صفحهٔ ۳ ـ ۱۲۰۱)

اعداد داده‌شده در گزینه‌ها همگی **گنگ** هستند، حال به بررسی حاصل‌ضرب آن‌ها می‌پردازیم:

۱) $(۵+\sqrt{۳})(۳-\sqrt{۵})=۱۵-۵\sqrt{۵}+۳\sqrt{۳}-\sqrt{۱۵}\in\mathbb{Q}'$

۲) $(۲\sqrt{۳})(۳\sqrt{۲})=۶\sqrt{۶}\in\mathbb{Q}'$

۳) $(۲+\sqrt{۲})(۱+\sqrt{۲})=۲+۲\sqrt{۲}+\sqrt{۲}+۲=۴+۳\sqrt{۲}\in\mathbb{Q}'$

۴) $\log_{۲}^{۲۵}\times\log_{۵}^{۲}=\log_{۲}^{۵^{۲}}\times\log_{۵}^{۲}=\overbrace{۲(\log_{۲}^{۵}\times\log_{۵}^{۲})}^{۱}=۲\in\mathbb{Q}$

مثال نقض و احکام کلی

اگر یک گزاره در حالت کلی درست نباشد، یعنی **همیشه صادق نیست** و مواردی وجود دارد که درستی آن **نقض** می‌شود. در این مواقع برای اثبات **نادرستی** گزاره در حالت کلی، از **مثال نقض** استفاده می‌کنیم.

اعمال جبری روی اعداد گویا و گنگ

۱) **جمع**، **تفریق** و **ضرب** هر دو عدد **گویا**، عددی **گویاست**.

$$\text{عددگویا}=\text{عددگویا}\ \underset{\times\text{یا}-\text{یا}+}{\square}\ \text{عددگویا}$$

همچنین **تقسیم** هر عدد **گویا** بر عددی **گویا و ناصفر**، عددی **گویاست**.

$$\text{عددگویا}=\frac{\text{عددگویا}}{\text{عددگویای ناصفر}}$$

۲) **جمع**، **تفریق**، **ضرب** و **تقسیم** هر **دو عدد گنگ**، عددی **گنگ یا گویا** است.

$$\text{عددگویا یا عدد گنگ}=\text{عدد گنگ}\ \underset{\div\text{یا}\times\text{یا}-\text{یا}+}{\square}\ \text{عدد گنگ}$$

۳) **جمع** یا **تفریق** یک عدد **گویا** و یک عدد **گنگ**، عددی **گنگ** است.

$$\text{عدد گنگ}=\text{عدد گنگ}\ \underset{-\text{یا}+}{\square}\ \text{عددگویا}$$

۴) **ضرب** یا **تقسیم** یک عدد **گویا** و یک عدد **گنگ**، یا **گویاست** و **یا گنگ**.

$$\text{عدد گنگ یا عددگویا}=\text{عدد گنگ}\ \underset{\times\text{یا}}{\square}\ \text{عددگویا}\Rightarrow\begin{cases}۰\ \underset{\div\text{یا}}{\square}\ \text{عدد گنگ}=۰\\ \text{عدد گنگ}=\text{عدد گنگ}\ \underset{\div\text{یا}}{\square}\ \text{عددگویای ناصفر}\end{cases}$$

۵) **معکوس** هر عدد **گویای غیرصفر**، عددی **گویاست** و **معکوس** هر عدد **گنگ** نیز، عددی **گنگ** است.

۲۲- برای کدام‌یک از گزینه‌های زیر مثال نقض [پادنمونه] وجود ندارد؟

۱) هر عدد به شکل $n^۲-n+۴۱$ با n صحیح اول است.

۲) اگر p یک عدد اول فرد باشد، $p^۲-۱$ مضرب ۲۴ است.

۳) به‌ازای تمام اعداد طبیعی n، $۲^n \geq n^۲$ می‌باشد.

۴) اگر به حاصل‌ضرب چهار عدد طبیعی متوالی یک واحد اضافه کنیم، عددی به‌صورت مربع کامل به‌دست می‌آید.

پاسخ: گزینهٔ ۴ (آسان ـ خط‌به‌خط ـ سریع ـ گسسته صفحهٔ ۳ ـ ۱۲۰۱)

بررسی گزینه‌ها:

۱) به‌ازای $n=۴۱$ عبارت $n^۲-n+۴۱$ مضرب ۴۱ می‌شود و اول **نیست**:

$$n^۲-n+۴۱ \xrightarrow{n=۴۱} (۴۱)^۲-۴۱+۴۱=۴۱^۲=۴۱\times۴۱$$

۲) به‌ازای $p=۳$ عبارت $p^۲-۱=۸$ می‌شود که مضرب ۲۴ **نیست**. هرچند به‌ازای تمام pهای بزرگ‌تر از ۳ این قضیه درست است و قابل اثبات است.

۳) به‌ازای $n=۳$ این نامساوی برقرار **نیست**.

$$۸=۲^۳<۳^۲=۹$$

۴) به‌ازای **هر چهار عدد طبیعی متوالی** دلخواه این قضیه درست است:

$$\overbrace{k(k+۱)(k+۲)(k+۳)}^{\text{ضرب}}+۱=\underbrace{(k^۲+۳k)}_{x}\underbrace{(k^۲+۳k+۲)}_{x}+۱$$

$$=x(x+۲)+۱=x^۲+۲x+۱=(x+۱)^۲=(k^۲+۳k+۱)^۲ \Rightarrow$$

مربع کامل است.

۲۳- به کمک اثبات مستقیم می‌توان ثابت کرد حاصل‌ضرب هر دو عدد به شکل $۸q+۷$ عددی به‌صورت ..... است.

۱) $۸k+۱$ ۲) $۸k+۳$ ۳) $۸k+۵$ ۴) $۸k-۱$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ گسسته صفحهٔ ۳ ـ ۱۲۰۱)

روش اول

دو عدد را می‌توانیم به‌صورت $۸q+۷$ و $۸q'+۷$ در نظر بگیریم که در این صورت خواهیم داشت:

$$(۸q+۷)(۸q'+۷)=۶۴qq'+۵۶q+۵۶q'+\underbrace{۴۹}_{۴۸+۱}=۸(\underbrace{۸qq'+۷q+۷q'+۶}_{k})+۱=۸k+۱$$

روش دوم

هر عدد به شکل $۸q+۷$ به‌صورت $۸q'-۱$ نیز قابل نوشتن است، زیرا:

$$۸q+۷=۸q+۸-۱=۸(\underbrace{q+۱}_{q'})-۱=۸q'-۱$$

حال با ضرب دو عدد به این شکل خواهیم داشت:

$$(۸q-۱)(۸q'-۱)=۶۴qq'-۸q-۸q'+۱=۸(\underbrace{۸qq'-q-q'}_{k})+۱=۸k+۱$$

روش سوم

اعداد را ۷ و ۷ فرض می‌کنیم و داریم:

$$۷\times۷=۴۹=\overbrace{\boxed{۴۸}}^{۸k}+۱$$

اثبات مستقیم

به روشی از اثبات که در آن با استفاده از مجموعه‌ای از **فرض‌ها**، **احکام درستی که از قبل می‌دانیم** و **عملیات‌های ریاضی** یا **استدلال منطقی**، یک حکم جدید را نتیجه می‌گیریم، «**اثبات مستقیم**» می‌گویند.

۲۴- اگر a و b دو عدد صحیح و $a^۲+b^۲$ فرد باشد، کدام‌یک از عبارات زیر قطعاً فرد است؟

۱) ab ۲) $ab^۲-a^۲b$ ۳) $a-b$ ۴) $a+b+۱$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ گسسته صفحهٔ ۴ ـ ۱۲۰۱)

اگر $a^۲+b^۲$ **فرد** باشد، قطعاً **یکی** از دو عدد a یا b **فرد** و **دیگری زوج** است، پس خواهیم داشت:

۱) می‌دانیم که حاصل‌ضرب عددی **زوج** و عددی **فرد**، **زوج** است:

$$ab=\text{زوج}=\text{فرد}\times\text{زوج}$$

۲) می‌دانیم که اختلاف یک عدد **زوج** و یک عدد **فرد**، عددی **فرد** است:

$$ab^۲-a^۲b=ab(b-a)=\text{زوج}\times\text{فرد}=\text{زوج}$$

۳)

$$a-b=\begin{cases}\text{زوج}-\text{فرد}=\text{فرد}\\ \text{فرد}-\text{فرد}=\text{زوج}\end{cases}$$

۴) مجموع یک عدد **زوج** و یک عدد **فرد**، عددی **فرد** است، پس:

$$a+b+۱=\text{زوج}+۱=\text{فرد}$$

زوج یا فرد؟!

۱) اگر حاصل‌ضرب چند عدد **فرد** باشد، همهٔ آن‌ها **فرد** هستند.

۲) اگر حاصل‌ضرب چند عدد **زوج** باشد، حتما **حداقل یکی** از آن‌ها **زوج** است.

۳) اگر **مجموع** یا **تفاضل** دو عدد فرد باشد، حتماً **یکی از آن‌ها فرد** و **دیگری زوج** است.

۴) **توان** روی زوج یا فرد بودن اعداد **تأثیری ندارد**.

$$a=\text{زوج}\Leftrightarrow a^n=\text{زوج}\qquad a=\text{فرد}\Leftrightarrow a^n=\text{فرد}\qquad ;n\in\mathbb{N}$$

۲۵- اگر α و β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha+\beta$ گویا باشد، چه تعداد از اعداد زیر حتماً گنگ هستند؟

الف) $\alpha-\beta$ ب) $\alpha+۲\beta$ ج) $۳\alpha+۳\beta$

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۳ (آسان ـ خط‌به‌خط ـ سریع ـ گسسته صفحهٔ ۵ ـ ۱۲۰۱)

بررسی موارد:

الف)

فرض می‌کنیم که $(\alpha-\beta)$ **گنگ نباشد** یعنی **گویا** باشد (**فرض خلف**). از طرفی طبق فرض سؤال $(\alpha+\beta)\in\mathbb{Q}$ لذا مجموع دو عدد **گویا** نیز **گویا** خواهد بود:

$$(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)=۲\alpha\in\mathbb{Q}\Rightarrow\alpha\in\mathbb{Q}\xrightarrow[\alpha\in\mathbb{Q}']{\text{طبق فرض}}\text{تناقض}$$

بنابراین **فرض خلف باطل** است و $(\alpha-\beta)$ **گنگ** است.

ب)

روش اول

می‌دانیم که جمع عددی گویا و عددی گنگ، عددی گنگ است.

$$\alpha+۲\beta=\underbrace{(\alpha+\beta)}_{\in\mathbb{Q}}+\underbrace{\beta}_{\in\mathbb{Q}'}$$

روش دوم

فرض می‌کنیم که $\alpha+2\beta$ **گنگ نباشد** یعنی **گویا** باشد (**فرض خلف**) از طرفی طبق فرض سؤال $(\alpha+\beta)\in\mathbb{Q}$ لذا تفاضل دو عدد **گویا** نیز **گویا** خواهد بود:

$$(\alpha+2\beta)-(\alpha+\beta)=\beta\in\mathbb{Q}\xrightarrow[\beta\in\mathbb{Q}']{\text{طبق فرض}}\text{تناقض}$$

بنابراین **فرض خلف باطل** است و $(\alpha+2\beta)$ **گنگ** است.

گزینه ۴

طبق فرض می‌دانیم که $(\alpha+\beta)$ عددی **گویا** است، پس:

$$3\alpha+3\beta=3\underbrace{(\alpha+\beta)}_{\mathbb{Q}}\Rightarrow(3\alpha+3\beta)\in\mathbb{Q}$$

پس ۲ تا از اعداد گنگ‌اند.

ماز

۲۶- برای اثبات درستی کدام‌یک از گزاره‌های زیر برهان خلف مناسب‌ترین روش است؟

۱) اگر n مضرب ۳ باشد، n^2 نیز مضرب ۳ است.
۲) مربع هر عدد فرد به شکل $8q+1$ است.
۳) مجموع سه عدد فرد متوالی مضرب ۳ است.
۴) اگر $\sqrt{2}$ گنگ باشد، $\sqrt{2}+1$ نیز گنگ است.

پاسخ: گزینهٔ ۴ (آسان ـ خط‌به‌خط ـ سریع ـ گسسته صفحهٔ ۵ ـ ۱۲۰۱)

بررسی گزینه‌ها:

۱) مناسب‌ترین روش برای اثبات استفاده از **اثبات مستقیم** است:

$$n=3k\Rightarrow n^2=9k^2=3(\underbrace{3k^2}_{k'})=3k'$$

۲) مناسب‌ترین روش برای اثبات، روش **اثبات مستقیم** است:

$$a=2k+1\Rightarrow a^2=4k^2+4k+1=4\underbrace{k(k+1)}_{2q}+1\Rightarrow a^2=8q+1$$

۳) مناسب‌ترین برای اثبات، روش **اثبات مستقیم** است.

$$(2k+1)+(2k+3)+(2k+5)=6k+9=3\underbrace{(2k+3)}_{k'}=3k'$$

۴) مناسب‌ترین روش برای اثبات، **برهان خلف** است، چون اگر $\sqrt{2}+1$ **گنگ نباشد** پس **گویاست** و در این صورت فرض می‌کنیم $\sqrt{2}+1=a\ ;\ (a\in\mathbb{Q})$ و خواهیم داشت:

$$\sqrt{2}=a-1\in\mathbb{Q}$$

و این با گنگ بودن $\sqrt{2}$ در تناقض است، پس $\sqrt{2}+1$ باید **گنگ** باشد.

حاصل‌ضرب دو عدد متوالی

از بین دو عدد متوالی همواره قطعا یکی **زوج** است و از آن‌جا که حاصل‌ضرب یک عدد زوج در یک عدد فرد، زوج است، **حاصل‌ضرب دو عدد متوالی همواره زوج است.**

برهان خلف

روش برهان خلف یا **اثبات غیرمستقیم**، زمانی استفاده می‌شود که **نتوانیم** یک حکم کلی را با استفاده از قضایا و احکام درستی که از قبل می‌دانیم با نتیجه‌گیری منطقی و پله‌پله اثبات کنیم یا این‌که استفاده از روش اثبات مستقیم خیلی سخت باشد.

SanjeshCloud

برای اثبات به روش برهان خلف سه گام زیر را انجام می‌دهیم:

الف) فرض می‌کنیم که حکم قضیه **نادرست** است.

ب) نشان می‌دهیم که این فرض غلط به نتیجه‌ای ختم می‌شود که با **اصول ریاضی** یا **فرض سؤال تناقض** دارد.

ج) با توجه به تناقض ایجاد شده، **فرض نادرست بودن حکم باطل** و **درستی حکم ثابت می‌شود**.

ماز

۲۷- اگر a_1,a_2,a_3 اعداد صحیح و b_1,b_2,b_3 همان اعداد ولی با ترتیب دیگری باشند، به کمک برهان خلف می‌توان ثابت کرد عبارت ..... .

۱) $a_1a_2a_3+b_1b_2b_3$ عددی فرد است.

۲) $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$ عددی فرد است.

۳) $(a_1-b_1)(a_2-b_2)(a_3-b_3)$ عددی زوج است.

۴) $(a_1+a_2+a_3)(b_1+b_2+b_3)$ عددی زوج است.

پاسخ: گزینهٔ ۳ (آسان ـ خط‌به‌خط ـ استاندارد ⏱ ـ گسسته صفحهٔ ۶ ـ ۱۲۰۱)

گزینه‌های ۱، ۲ و ۴ را می‌توان به کمک **مثال نقض** به‌راحتی رد کرد:

بررسی گزینه‌ها:

۱

$$\begin{cases}(a_1,a_2,a_3)=(1,3,5)\\(b_1,b_2,b_3)=(5,1,3)\end{cases}\Rightarrow a_1a_2a_3+b_1b_2b_3=1\times3\times5+5\times1\times3=30\Rightarrow$$ **زوج** است.

۲

$$\begin{cases}(a_1,a_2,a_3)=(4,2,3)\\(b_1,b_2,b_3)=(3,4,2)\end{cases}\Rightarrow a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=12+8+6=26\Rightarrow$$ **زوج** است.

۳

اما درستی گزینهٔ ۳ را به کمک **برهان خلف** می‌توان ثابت کرد، چون اگر عبارت $(a_1-b_1)(a_2-b_2)(a_3-b_3)$ زوج نباشد حتماً عددی **فرد** است، پس **هر سه عامل** آن یعنی (a_1-b_1) و (a_2-b_2) و (a_3-b_3) نیز **فرد** هستند، پس باید **مجموع** این سه عدد نیز **فرد** باشد، در حالی که $(a_1-b_1)+(a_2-b_2)+(a_3-b_3)=0$ است و عددی **زوج** است پس فرض خلف **باطل** و $(a_1-b_1)(a_2-b_2)(a_3-b_3)$ عددی زوج است.

۴

$$\begin{cases}(a_1,a_2,a_3)=(1,2,4)\\(b_1,b_2,b_3)=(4,1,2)\end{cases}\Rightarrow(a_1+a_2+a_3)(b_1+b_2+b_3)=(7)(7)=49\Rightarrow$$ **فرد** است.

ماز

۲۸- اگر x و y دو عدد حقیقی مثبت باشند، در اثبات نامساوی $x^۴+y^۴\geq x^۳y+xy^۳$ به وسیلهٔ اثبات بازگشتی به کدام نامساوی بدیهی می‌رسیم؟

۱) $(x+y)^۲(x^۲+xy+y^۲)\geq ۰$
۲) $(x-y)^۲(x^۲+xy+y^۲)\geq ۰$
۳) $(x-y)^۲(x^۲+y^۲)\geq ۰$
۴) $(x+y)^۲(x^۲+y^۲)\geq ۰$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ خط‌به‌خط ـ استاندارد ـ گسسته صفحهٔ ۷ ـ ۱۲۰۱)

کافیست $x^۳y+xy^۳$ را **به طرف اول ببریم** و با **فاکتورگیری** مسئله را ساده‌تر کنیم:

$$x^۴+y^۴\geq x^۳y+xy^۳ \Leftrightarrow x^۴+y^۴-x^۳y-xy^۳\geq ۰ \Leftrightarrow x^۳(x-y)-y^۳(x-y)\geq ۰$$
$$\Leftrightarrow (x-y)(x^۳-y^۳)\geq ۰ \Leftrightarrow (x-y)(x-y)(x^۲+xy+y^۲)\geq ۰$$
$$\Leftrightarrow (x-y)^۲(x^۲+xy+y^۲)\geq ۰$$

اثبات بازگشتی

در روش اثبات بازگشتی با دنباله‌ای از **استدلال‌های درست** و **برگشت‌پذیر** (یعنی استدلال برعکس مسیر رفت هم درست باشد!) به یک **حکم معادل با حکم اولیه** می‌رسیم که درستی آن **بدیهی** است. به‌دلیل **برگشت‌پذیری** تمام مراحل، جهت فلش‌ها را **دوطرفه** می‌گذاریم که معادل بودن حکم اولیه با حکم بدیهی را نشان می‌دهد.

یه نمونهٔ باحال ببین!

برای اثبات حکم $a+\frac{۱}{a}\geq ۲$ برای هر عدد حقیقی مثبت a داریم:

$$a+\frac{۱}{a}\geq ۲ \xleftrightarrow[\div a]{\times a} a^۲+۱\geq ۲a \Leftrightarrow a^۲-۲a+۱\geq ۰ \Leftrightarrow (a-۱)^۲\geq ۰$$

۲۹- برای اثبات درستی یا نادرستی حکم «مجموع مربعات سه عدد حقیقی از مجموع حاصل‌ضرب دو به دوی آن‌ها کمتر نیست.» کدام روش استدلال مناسب‌تر است؟

۱) برهان خلف
۲) اثبات مستقیم
۳) مثال نقض
۴) اثبات بازگشتی

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ خط‌به‌خط ـ استاندارد ـ گسسته صفحهٔ ۷ ـ ۱۲۰۱)

ترجمهٔ صورت سؤال

«مجموع مربعات سه عدد حقیقی از مجموع حاصل‌ضرب دو به دوی آن‌ها کمتر نیست.» یعنی اگر سه عدد حقیقی را a، b و c درنظر بگیریم باید رابطهٔ زیر برقرار باشد:

$$a^۲+b^۲+c^۲\geq ab+ac+bc$$

برای **اثبات نامساوی‌ها** معمولاً بهتر است به سراغ اثبات بازگشتی برویم:

$$a^۲+b^۲+c^۲\geq ab+ac+bc \Leftrightarrow ۲a^۲+۲b^۲+۲c^۲\geq ۲ab+۲ac+۲bc$$
$$\Leftrightarrow a^۲+a^۲+b^۲+b^۲+c^۲+c^۲-۲ab-۲ac-۲bc\geq ۰$$
$$\Leftrightarrow (a^۲+b^۲-۲ab)+(a^۲+c^۲-۲ac)+(b^۲+c^۲-۲bc)\geq ۰$$
$$\Leftrightarrow (a-b)^۲+(a-c)^۲+(b-c)^۲\geq ۰$$

این **نامساوی بدیهی** است و تمام مراحل **بازگشت‌پذیر** است.

۳۰- در اثبات نامساوی $x^۲+y^۲+m\geq x+xy+y$ به وسیلهٔ اثبات بازگشتی حدود m برای آن‌که به یک رابطهٔ بدیهی برسیم و تمامی مراحل بازگشت‌پذیر باشد، کدام است؟

۱) $۰\leq m<۱$ ۲) $m\geq ۱$ ۳) $m\in\mathbb{R}$ ۴) $m\leq ۱$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (سخت ـ خط‌به‌خط ـ زمان‌بر ـ گسسته صفحهٔ ۷ ـ ۱۲۰۱)

ابتدا طرفین نامساوی را در عدد ۲ **ضرب** می‌کنیم:

$$x^۲+y^۲+m\geq x+xy+y \Leftrightarrow ۲x^۲+۲y^۲+۲m\geq ۲x+۲xy+۲y$$

$$\Leftrightarrow ۲x^۲+۲y^۲+۲m-۲x-۲xy-۲y\geq ۰$$

$$\Leftrightarrow (x^۲+y^۲-۲xy)+(x^۲-۲x)+(y^۲-۲y)+۲m\geq ۰$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^۲+(x-۱)^۲-۱+(y-۱)^۲-۱+۲m\geq ۰$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^۲+(x-۱)^۲+(y-۱)^۲\geq ۲-۲m$$

بنابراین باید $۲-۲m\leq ۰$ باشد، تا نامساوی فوق بدیهی باشد:

$$۲-۲m\leq ۰ \Rightarrow ۲m\geq ۲ \Rightarrow m\geq ۱$$

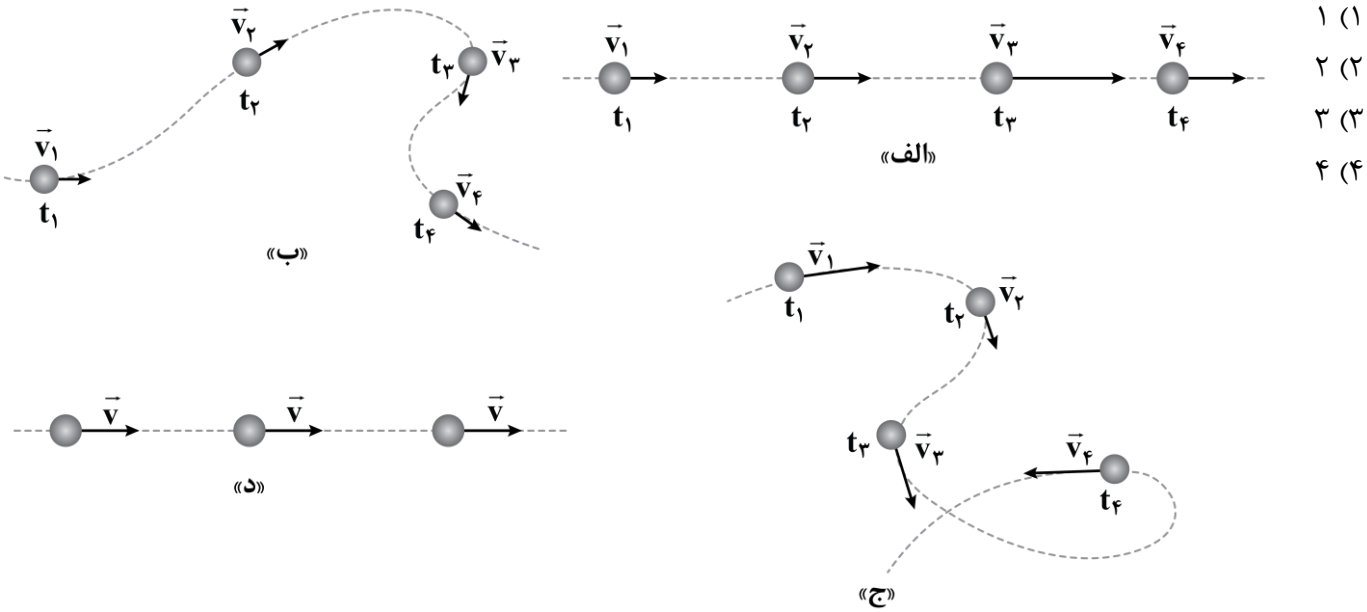
بودجه‌بندی این آزمون: فیزیک ۳: حرکت بر خط راست (تا ابتدای حرکت با شتاب ثابت)
صفحه‌های ۱ تا ۱۵

سهم در کنکور: پایهٔ دوازدهم: درمجموع ۱ یا ۲ تست از ۳۵ تست کنکور را پوشش داده است.

برای دیدن پاسخ‌نامهٔ ویدئویی آزمون بالا را اسکن یا روی آن کلیک کنید! QR Code

۳۱- در چه تعداد از شکل‌های زیر، متحرک با سرعت ثابت حرکت می‌کند؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴



پاسخ: گزینهٔ ۱ (آسان ـ خط‌به‌خط ـ سریع ـ صفحهٔ ۱۰ ـ ۱۲۰۱)

فقط در شکل «د»، بردار سرعت جسم ثابت است؛ یعنی هم‌اندازه و هم‌جهت سرعت جسم، ثابت مانده و جسم با سرعت ثابت حرکت می‌کند. در بقیهٔ شکل‌ها یا جهت سرعت (شکل «ب») یا اندازهٔ سرعت (شکل «الف») و یا هر دو مورد (شکل «ج») تغییر کرده‌اند و حرکت جسم شتاب‌دار است.

راهنمای مسیرت

هنوزم که هنوزه برخی در درک حرکت سرعت ثابت مشکل دارند. لطفاً این تست رو یک بار برای همیشه درست یاد بگیرین.

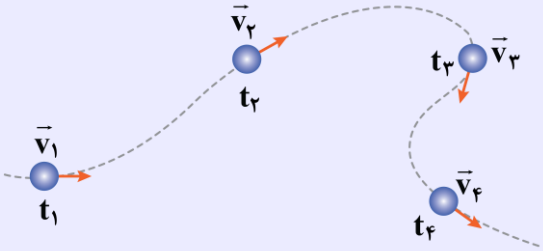
حرکت شتاب‌دار چیست؟

هرگاه بردار سرعت متحرکی تغییر کند، حرکت آن شتاب‌دار است. با توجه به این‌که بردار سرعت در هر نقطه از مسیر، بر مسیر حرکت مماس است، تغییر سرعت متحرک در نقاط مختلف از مسیر حرکت می‌تواند به یکی از سه دلیل زیر باشد:

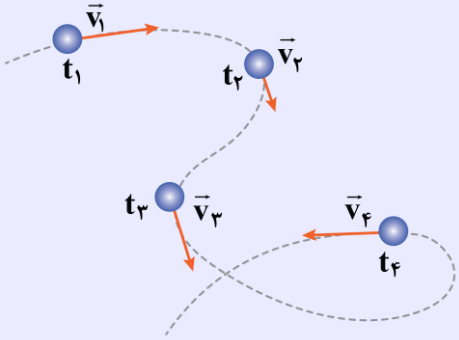
۱- تغییر در اندازهٔ بردار سرعت (تندی) متحرک: وقتی جهت حرکت ثابت است ولی تندی متحرک تغییر می‌کند، حرکت کندشونده یا تندشونده است. در این صورت حرکت متحرک شتاب‌دار است.



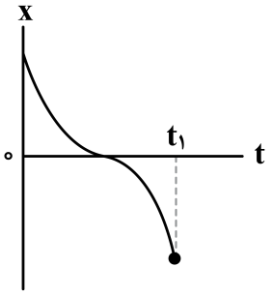
۲- تغییر جهت بردار سرعت متحرک: وقتی تندی متحرک ثابت است ولی جهت حرکت آن تغییر می‌کند، جهت بردار سرعت که مماس بر مسیر حرکت است، تغییر می‌کند و حرکت متحرک شتاب‌دار است. مثلاً در شکل زیر، اندازهٔ بردارهای $\vec{v}_1$، $\vec{v}_2$، $\vec{v}_3$ و $\vec{v}_4$ ثابت است، ولی این بردارها هم‌جهت نیستند؛ بنابراین بردار سرعت تغییر می‌کند و حرکت متحرک شتاب‌دار است.



۳- تغییر در اندازه و جهت بردار سرعت متحرک: اگر هم تندی متحرک و هم جهت بردار سرعت آن تغییر کند، حرکت متحرک شتاب‌دار است.



۳۲- نمودار مکان ـ زمان متحرکی که بر روی محور x حرکت می‌کند، به‌صورت شکل زیر است. در بازهٔ زمانی صفر تا t_1، تندی متحرک چگونه تغییر می‌کند؟



۱) پیوسته افزایش می‌یابد.

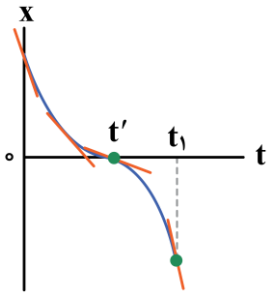
۲) ابتدا افزایش، سپس کاهش می‌یابد.

۳) پیوسته کاهش می‌یابد.

۴) ابتدا کاهش، سپس افزایش می‌یابد.

پاسخ: گزینهٔ ۴ (آسان ـ مفهومی ـ سریع ـ صفحهٔ ۱۰ ـ ۱۲۰۱)

می‌دانیم اندازهٔ شیب مماس بر نمودار مکان ـ زمان در لحظهٔ موردنظر، همان تندی جسم در آن لحظه است. مطابق شکل، اندازهٔ شیب‌های مماس بر نمودار، ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد. پس تندی جسم ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد.



تندی در حال کاهش: از لحظهٔ صفر تا لحظهٔ t'

تندی در حال افزایش: از لحظهٔ t' تا لحظهٔ t_1

راهنمای مسیرت

استفاده از شیب مماس بر نمودار مکان ـ زمان برای تحلیل سرعت لحظه‌ای یا تندی لحظه‌ای متحرک هم در کنکور و هم در امتحانات نهایی همواره موردتوجه طراحان هست و حتماً به کمک پاسخ‌نامه سعی کنید تحلیل درست این سؤال رو خوب یاد بگیرید.

نوع حرکت

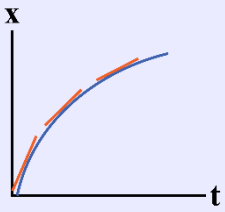
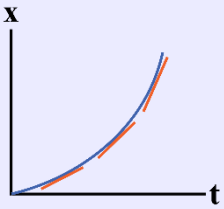
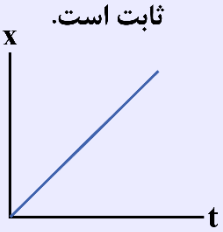
الف) اگر در یک بازهٔ زمانی، تندی متحرک (اندازهٔ شیب مماس بر نمودار مکان ـ زمان) درحال افزایش باشد، حرکت متحرک در آن بازهٔ زمانی را **تندشونده** می‌گویند.

ب) اگر در یک بازهٔ زمانی، تندی متحرک (اندازهٔ شیب مماس بر نمودار مکان ـ زمان) درحال کاهش باشد، حرکت متحرک در آن بازهٔ زمانی را **کندشونده** می‌گویند.

پ) اگر در یک بازهٔ زمانی، تندی متحرک (اندازهٔ شیب مماس بر نمودار مکان ـ زمان) ثابت باشد، حرکت متحرک را در آن بازهٔ زمانی **یکنواخت** می‌گویند.

توجه کنید که اگر هم تندی و هم‌جهت حرکت ثابت باشد (متحرک روی خط راست با تندی ثابت و بدون تغییر جهت حرکت کند)، حرکت را **سرعت ثابت** می‌گوییم.

با کمک نمودار مکان ـ زمان می‌توانیم نوع حرکت متحرک را مشخص کنیم. کافی است ببینیم اندازهٔ شیب نمودار چگونه تغییر می‌کند. اگر اندازهٔ شیب نمودار رو به افزایش باشد، حرکت تندشونده است. اگر اندازهٔ شیب نمودار رو به کاهش باشد، حرکت کندشونده است و اگر اندازهٔ شیب نمودار ثابت باشد (نمودار یک خط راست باشد)، حرکت با سرعت ثابت انجام می‌شود.

اندازه شیب نمودار رو به کاهش است.	اندازه شیب نمودار رو به افزایش است.	اندازه شیب نمودار ثابت است.
		
حرکت کندشونده	حرکت تندشونده	حرکت سرعت ثابت

۳۳- معادلهٔ سرعت ـ زمان متحرکی که بر روی خط راست حرکت می‌کند، در SI به‌صورت $v=t^2-10t+1$ است. شتاب متوسط متحرک در بازهٔ زمانی $t_1=2s$ تا $t_2=8s$ چند واحد SI است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) -۱ ۴) -۲

پاسخ: گزینهٔ ۱ (آسان ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۱۱ ـ ۱۲۰۱)

برای محاسبهٔ شتاب متوسط به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\begin{cases} t_1=2s: v_1=2^2-(10\times 2)+1=-15\dfrac{m}{s} \\ t_2=8s: v_2=8^2-(10\times 8)+1=-15\dfrac{m}{s} \end{cases} \Rightarrow \Delta v=v_2-v_1=0$$

$$\Rightarrow a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=0$$

جرقهٔ ذهنی

$$v=t^2-10t+1 \xrightarrow{t_{رأس}=\frac{10}{2}=5s} \frac{t_1+t_2}{2}=\frac{2+8}{2}=5$$

$$\Rightarrow v_{t_1}=v_{t_2} \Rightarrow a_{av}=0$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

شتاب متوسط چیست؟

شتاب متوسط متحرک در هر بازهٔ زمانی دلخواه t_1 تا t_2 به‌صورت رابطهٔ زیر تعریف می‌شود:

$$\vec{a}_{av}=\frac{\vec{v}_2-\vec{v}_1}{t_2-t_1}=\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

$\vec{v}_1$: سرعت متحرک در لحظهٔ t_1 برحسب $\frac{m}{s}$ $\quad$ $\vec{v}_2$: سرعت متحرک در لحظهٔ t_2 برحسب $\frac{m}{s}$

$\vec{a}_{av}$: بردار شتاب متوسط برحسب $\frac{m}{s^2}$

نکات

۱- یکای SI شتاب متوسط، **متر بر مربع ثانیه** $(\frac{m}{s^2})$ است.

۲- شتاب متوسط $(\vec{a}_{av})$، کمیتی **برداری** و **هم‌جهت با بردار تغییر سرعت** $(\Delta\vec{v})$ است. توجه کنید که بردار سرعت با بردار تغییر سرعت متفاوت است. بردار تغییر سرعت، تفاضل دو بردار سرعت است.

۳- اگر متحرک در یک راستا مانند محور x حرکت کند، رابطهٔ شتاب متوسط را می‌توان به‌صورت زیر به‌کار برد:

$$a_{av}=\frac{v_2-v_1}{t_2-t_1}=\frac{\Delta v}{\Delta t}$$

با توجه به ماهیت برداری v_1 و v_2 باید به علامت‌های جبری آن‌ها که نشان‌دهندهٔ جهت آن‌هاست توجه کنیم.

در این حالت اگر a_{av} **مثبت** باشد، شتاب متوسط **در جهت محور x** و اگر a_{av} **منفی** باشد، شتاب متوسط **در خلاف جهت محور x** است.

از معادلهٔ سرعت ـ زمان چه اطلاعاتی به‌دست می‌آید؟

در این بخش می‌خواهیم ببینیم که با داشتن معادلهٔ سرعت ـ زمان چه اطلاعاتی به‌دست می‌آوریم. به‌عنوان مثال، فرض کنید که معادلهٔ سرعت ـ زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، در SI به‌صورت $v=t^2-12t+32$ است. اطلاعات زیر از این معادله قابل‌استخراج است:

۱- سرعت در هرلحظه: با جایگذاری زمان موردنظر در معادله، می‌توانیم سرعت را در هرلحظه به‌دست آوریم. مثلاً:

$$t_1=1s:\ v_1=1^2-12\times1+32=21\frac{m}{s}$$

$$t_2=4s:\ v_2=4^2-12\times4+32=0$$

۲- تغییرات سرعت: با کم‌کردن سرعت در دو لحظه از هم، تغییرات سرعت به‌دست می‌آید. مثلاً:

$$\begin{cases}t_1=1s:\ v_1=21\frac{m}{s}\\ t_2=4s:\ v_2=0\end{cases}\Rightarrow\Delta v=v_2-v_1=0-21=-21\frac{m}{s}$$

دقت کنید که منفی‌شدن تغییرات سرعت به معنی آن است که بردار تغییرات سرعت در خلاف جهت محور x است.

۳- شتاب متوسط: با تقسیم‌کردن تغییرات سرعت بر طول بازهٔ زمانی، شتاب متوسط به‌دست می‌آید. مثلاً:

$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{-21}{4-1}=-7\frac{m}{s^2}:\text{ در بازهٔ زمانی } t_1=1s \text{ تا } t_2=4s$$

همان‌طور که می‌بینید، در بازهٔ زمانی $1s\le t<4s$، شتاب متوسط منفی است، یعنی بردار آن در خلاف جهت محور x می‌باشد.

۴- تعیین جهت حرکت: هرگاه سرعت مثبت باشد، متحرک در جهت محور x حرکت می‌کند و هرگاه سرعت منفی باشد، متحرک در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند؛ بنابراین با تعیین علامت‌کردن سرعت، می‌توانیم جهت حرکت را بیابیم. مثلاً:

$$v=t^2-12t+32=(t-4)(t-8)\Rightarrow\text{ریشه‌ها: }\begin{cases}t_1=4s\\ t_2=8s\end{cases}$$

جدول تعیین علامت:

t	۰		۴s		۸s		+∞
v		+	۰	-	۰	+	

+ : در جهت محور x حرکت می‌کند. - : در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند.

۵- تعیین لحظات تغییر جهت حرکت متحرک: لحظاتی که علامت سرعت تغییر می‌کند، جهت حرکت متحرک عوض می‌شود، مثلاً در قسمت قبل دیدیم که در لحظات $t_1 = 4s$ و $t_2 = 8s$، علامت سرعت عوض می‌شود و درنتیجه جهت حرکت متحرک در این لحظات تغییر می‌کند.

۶- برای به‌دست آوردن سایر اطلاعات مثل مسافت طی‌شده، تندی متوسط و ... کافی است نمودار مربوط به معادله را رسم کنید و از نکات مربوط به نمودار کمک بگیرید.

ماز

۳۴- کدام‌یک از عبارت‌های زیر الزاماً صحیح است؟

الف ـ در یک بازهٔ زمانی، بردار سرعت متوسط هم‌جهت با بردار تغییرات سرعت است.

ب ـ اگر متحرک با تندی ثابت حرکت کند، سرعت متوسط و تندی متوسط آن هم‌اندازه‌اند.

ج ـ در یک بازهٔ زمانی، بردار شتاب متوسط هم‌جهت با بردار تغییرات سرعت است.

۱) «الف» و «ب» ۲) «ب» و «ج» ۳) فقط «الف» ۴) فقط «ج»

پاسخ: گزینهٔ ۴ (آسان ـ خط‌به‌خط ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۱۱ ـ ۱۲۰۱)

بررسی موارد:

الف

طبق رابطهٔ $v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$، بردار سرعت متوسط الزاماً با بردار جابه‌جایی هم‌جهت است. (✗)

ب

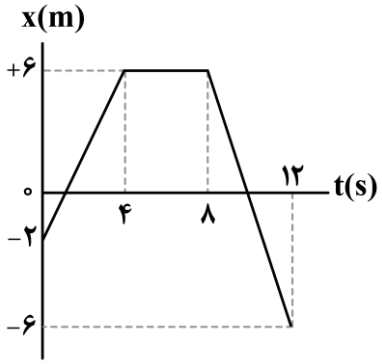
ممکن است با تندی ثابت، جهت حرکت تغییر کند و سرعت متوسط و تندی متوسط برابر نشوند. (✗)

ج

طبق رابطهٔ $a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$، بردار شتاب متوسط الزاماً با بردار تغییرات سرعت هم‌جهت است. (✓)

ماز

۳۵- نمودار مکان ـ زمان متحرکی که بر روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. شتاب متوسط متحرک در بازهٔ زمانی $t_1 = 2s$ تا $t_2 = 10s$، چند متر بر مربع ثانیه می‌باشد؟



۱) $\frac{1}{8}$

۲) $-\frac{5}{8}$

۳) $-\frac{1}{8}$

۴) $\frac{5}{8}$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ استدلالی ـ زمان‌بَر ـ صفحهٔ ۱۴ ـ ۱۲۰۱)

شتاب متوسط متحرک از رابطهٔ $a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ به‌دست می‌آید:

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t = 10s - 2s]{\Delta v = v_{10s} - v_{2s}} a_{av} = \frac{v_{10s} - v_{2s}}{10 - 2} = \frac{v_{10s} - v_{2s}}{8} \quad (*)$$

متحرک در بازهٔ زمانی صفر تا ۴s با سرعت ثابت حرکت می‌کند، پس سرعت در لحظهٔ $t=2s$ همان سرعت متوسط در بازهٔ زمانی صفر تا ۴s می‌باشد و همچنین سرعت در لحظهٔ $t=10s$ نیز با سرعت متوسط در بازهٔ زمانی ۸s تا ۱۲s برابر می‌باشد، پس داریم:

$$0\to 4s:\ v_{av_1}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\xrightarrow[\Delta t=4s]{\Delta x=8m} v_{av_1}=+2\frac{m}{s}\xrightarrow{v_{av_1}=v_{2s}} v_{2s}=+2\frac{m}{s}$$

$$8s\to 12s:\ v_{av_2}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\xrightarrow[\Delta t=4s]{\Delta x=-12m} v_{av_2}=-3\frac{m}{s}\xrightarrow{v_{av_2}=v_{10s}} v_{10s}=-3\frac{m}{s}$$

با توجه به رابطهٔ (*) و سرعت‌های به‌دست‌آمده در لحظات ۲s و ۱۰s داریم:

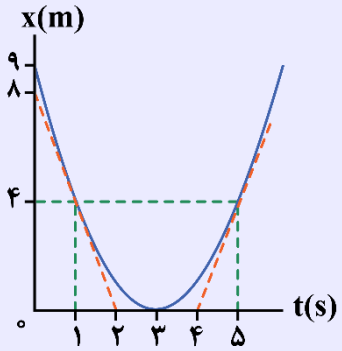
$$a_{av}=\frac{v_{10s}-v_{2s}}{8}=\frac{-3-(+2)}{8}=-\frac{5}{8}\frac{m}{s^2}$$

راهنمای مسیرت

این‌که در حرکت با سرعت ثابت، سرعت در هر لحظهٔ دلخواه با سرعت متوسط در هر بازهٔ زمانی دلخواهی برابر می‌شه، خیلی نکتهٔ مفید و کار راه‌اندازیه و خیلی هم مورد توجه طراحان کنکور و نهایی هست. پس حواستون باشه.

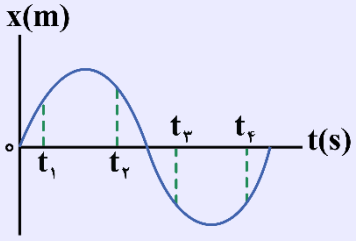
چگونه شتاب از روی نمودار مکان ـ زمان تعیین می‌شود؟

۱- شتاب متوسط: کافی است با کمک شیب خط مماس بر نمودار مکان ـ زمان، سرعت را در لحظات t_1 و t_2 مشخص کنیم و سپس با کمک رابطهٔ $a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}$، شتاب متوسط را به‌دست آوریم. مثلاً در نمودار مکان ـ زمان زیر، خط مماس بر نمودار در دو لحظهٔ $t_1=1s$ و $t_2=5s$ رسم شده‌اند. شتاب متوسط در این بازهٔ زمانی برابر است با:

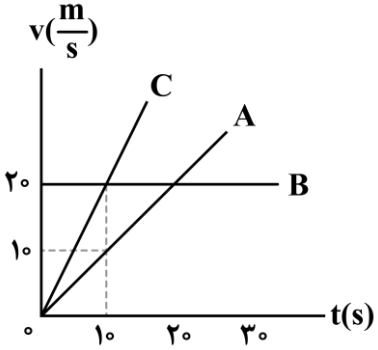


$$\begin{cases} v_{1s}=\frac{4-8}{1}=-4\frac{m}{s} \\ v_{5s}=\frac{4-0}{5-4}=4\frac{m}{s} \end{cases}\Rightarrow a_{av}=\frac{v_{5s}-v_{1s}}{\Delta t}=\frac{4-(-4)}{5-1}=2\frac{m}{s^2}$$

۲- شتاب لحظه‌ای: در قسمت‌هایی از نمودار مکان ـ زمان که تقعر نمودار به سمت بالا (نمودار به شکل ∪) است، شتاب مثبت (در جهت محور x) است و در قسمت‌هایی که تقعر به سمت پایین (نمودار به شکل ∩) است، شتاب منفی (در خلاف جهت محور x) است. مثلاً در نمودار مکان ـ زمان زیر، در لحظات t_1 و t_2 شتاب منفی است و در لحظات t_3 و t_4، شتاب مثبت است.



۳۶- نمودار سرعت ـ زمان برای سه متحرک A، B و C که بر روی مسیر مستقیم حرکت می‌کنند، مطابق شکل زیر است. کدام گزینه در مورد مقایسهٔ شتاب حرکت این سه متحرک صحیح است؟



۱) $a_C = ۲a_A > a_B = ۰$

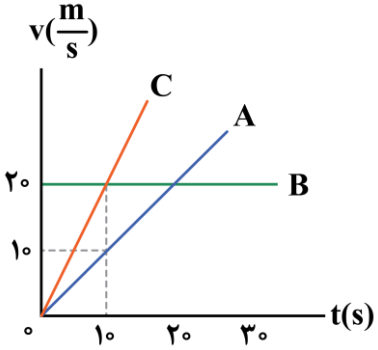
۲) $a_C = \frac{۱}{۲}a_A > a_B = ۰$

۳) $a_B > a_C > a_A$

۴) $a_B = ۲a_C = ۴a_A$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (آسان ـ مفهومی ـ سریع ـ صفحهٔ ۱۲ ـ ۱۲۰۱)

شیب نمودار سرعت ـ زمان برابر شتاب متحرک است؛ بنابراین با توجه به نمودار سرعت ـ زمان، شتاب هرکدام از متحرک‌ها برابر است با:



$$\begin{cases} a_A = \frac{۱۰-۰}{۱۰-۰} = ۱\frac{m}{s^۲} \\ a_B = ۰ \\ a_C = \frac{۲۰-۰}{۱۰-۰} = ۲\frac{m}{s^۲} \end{cases} \Rightarrow a_C = ۲a_A > a_B = ۰$$

سوتی‌های پرتکرار

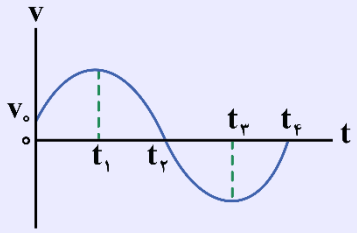
در تستی به این سادگی، هستند بچه‌هایی که به‌خاطر عجله و بی‌دقتی در مقایسهٔ نسبت شتاب متحرک C و A به‌اشتباه گزینهٔ (۲) را علامت می‌زنند. برای پرهیز از این نوع سوتی‌ها، حتماً مقادیر به‌دست‌آمده رو در مقایسه‌های مطرح‌شده در گزینه‌ها چک کنین تا به گزینهٔ درست برسین.

جرقهٔ ذهنی

راستی بچه‌ها چون سرعت متحرک B ثابت و درنتیجه شتاب اون صفر هست؛ گزینه‌های (۳) و (۴) حذف می‌شن. از طرفی هم چون شیب نمودار C بیش‌تر از شیب نمودار A هست؛ گزینهٔ (۲) هم حذف می‌شه.

نمودار سرعت ـ زمان در حرکت بر خط راست چه اطلاعاتی به ما می‌دهد؟

اگر سرعت متحرکی را که روی خط راست حرکت می‌کند، نسبت به زمان رسم کنیم، نمودار سرعت ـ زمان به‌دست می‌آید. شکل زیر، نمودار سرعت ـ زمان متحرکی را نشان می‌دهد که روی محور x حرکت می‌کند. در این قسمت می‌خواهیم ببینیم نمودار سرعت ـ زمان چه اطلاعاتی از حرکت به ما می‌دهد؟



۱- سرعت اولیه: سرعت جسم در لحظهٔ $t_۰ = ۰$، سرعت اولیه نام دارد و آن را با $v_۰$ نشان می‌دهند. در نمودار سرعت ـ زمان، $v_۰$ نقطه‌ای است که نمودار محور v را قطع می‌کند. مثلاً در نمودار داده‌شده، $v_۰ > ۰$ است.

۲- تعیین جهت حرکت: در بازه‌های زمانی‌ای که نمودار بالای محور t است، علامت سرعت مثبت است و متحرک در جهت مثبت محور حرکت می‌کند و در بازه‌های زمانی‌ای که نمودار زیر محور t است، علامت سرعت منفی است و متحرک در خلاف جهت محور حرکت می‌کند. مثلاً در نمودار داده‌شده، در بازهٔ زمانی صفر تا $t_۲$ متحرک در جهت محور x و در بازهٔ زمانی $t_۲$ تا $t_۴$، متحرک در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند.

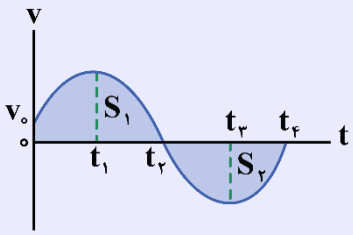
۳- لحظهٔ تغییر جهت حرکت: در لحظه‌ای که نمودار از روی محور t عبور می‌کند ($v=0$ و علامت سرعت متحرک نیز عوض می‌شود)، متحرک تغییر جهت می‌دهد. مثلاً در لحظهٔ t_2 که سرعت متحرک صفر است و همچنین علامت سرعت نیز عوض شده است، متحرک تغییر جهت می‌دهد.

توجه کنید که در لحظهٔ t_4 نیز، سرعت متحرک صفر است، ولی چون جهت حرکت متحرک پس‌ازآن مشخص نیست، این لحظه، لحظهٔ تغییر جهت حرکت نیست.

۴- تعیین نوع حرکت: قبلاً دیدیم که اگر در یک بازهٔ زمانی، تندی (اندازهٔ سرعت) متحرک درحال افزایش باشد، حرکت تندشونده و اگر تندی (اندازهٔ سرعت) متحرک درحال کاهش باشد، حرکت کندشونده است. در نمودار سرعت ـ زمان، اگر در یک بازهٔ زمانی نمودار از محور t دور شود، حرکت تندشونده و اگر نمودار به محور t نزدیک شود، حرکت کندشونده است. مثلاً در بازه‌های زمانی صفر تا t_1 و t_2 تا t_3 حرکت متحرک تندشونده و در بازه‌های زمانی t_1 تا t_2 و t_3 تا t_4، حرکت متحرک کندشونده است.

۵- محاسبهٔ جابه‌جایی و مسافت طی‌شده به کمک نمودار v - t:

مهم‌ترین نکتهٔ نمودار سرعت ـ زمان این است که مساحت محصور بین نمودار و محور t در یک بازهٔ زمانی، برابر جابه‌جایی متحرک در آن بازهٔ زمانی است. توجه کنید که اگر مساحت محصور بین نمودار و محور t، بالای محور t باشد، جابه‌جایی متحرک در جهت مثبت محور و اگر این مساحت زیر محور t باشد، جابه‌جایی متحرک در جهت منفی محور است؛ بنابراین با توجه به نمودار داریم:



جابه‌جایی در بازهٔ زمانی صفر تا t_2: $\Delta x_1 = +S_1$

جابه‌جایی در بازهٔ زمانی t_2 تا t_4: $\Delta x_2 = -S_2$

جابه‌جایی در بازهٔ زمانی صفر تا t_4: $\Delta x_{کل} = \Delta x_1 + \Delta x_2 = S_1 - S_2$

چون مسافت طی‌شده برابر با حاصل‌جمع قدر مطلق جابه‌جایی‌ها است، مسافت طی‌شده در بازهٔ زمانی صفر تا t_4 برابر است با:

$$\ell = S_1 + S_2$$

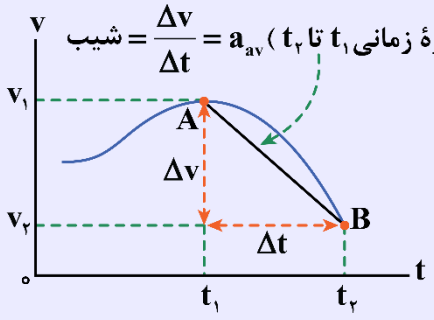
پس بچه‌ها حواستون باشه که موقع پیداکردن جابه‌جایی، مساحت‌های بالای محور زمان رو با علامت مثبت و مساحت‌های زیر محور زمان رو با علامت منفی استفاده کنین. موقع پیداکردن مسافت هم که تمام مساحت‌ها رو با علامت مثبت استفاده کنین.

۶- محاسبهٔ سرعت متوسط و تندی متوسط: پس از محاسبهٔ جابه‌جایی و مسافت طی‌شده، می‌توانیم سرعت متوسط و تندی متوسط را در بازهٔ زمانی موردنظر محاسبه کنیم:

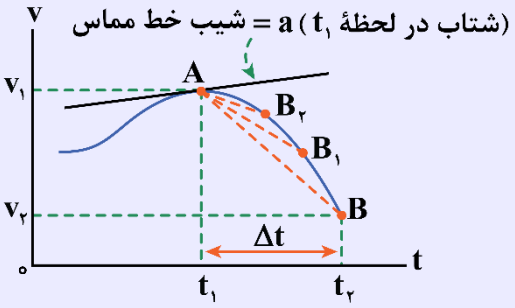
$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t}$$

۷- محاسبهٔ شتاب متوسط: در شکل زیر، نمودار سرعت ـ زمان متحرکی نشان داده شده است که روی خط راست حرکت می‌کند. با توجه به تعریف شتاب متوسط، معلوم می‌شود که شتاب متوسط بین دو لحظه برابر شیب پاره‌خطی است که نمودار سرعت ـ زمان را در آن دو لحظه قطع می‌کند.



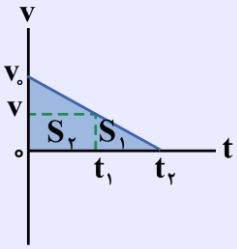
۸- محاسبهٔ شتاب لحظه‌ای: شتاب متحرک در هرلحظه را شتاب لحظه‌ای می‌نامیم. برای سادگی شتاب لحظه‌ای را شتاب می‌نامیم و آن را با $\vec{a}$ نشان می‌دهیم. در حرکت بر خط راست، شتاب را با a نشان می‌دهیم که علامت آن، جهت شتاب را نشان می‌دهد. در نمودار قبل، اگر نقطه‌های A و B را به‌هم نزدیک کنیم تا t_1 و t_2 یک لحظه شوند، Δt به سمت صفر میل می‌کند $(\Delta t \to 0)$ و خط واصل بین نقطه‌های A و B، به خط مماس بر نمودار در نقطهٔ A میل می‌کند، در این حالت، شیب خط مماس برابر شتاب متحرک در لحظهٔ t_1 است. به این ترتیب می‌توان نتیجه گرفت که شتاب در هر لحظهٔ دلخواه t، برابر شیب خط مماس بر نمودار سرعت ـ زمان در آن لحظه است.



می‌توان نتیجه گرفت که هرگاه در یک بازهٔ زمانی، نمودار سرعت ـ زمان خط راست باشد، شتاب در آن بازهٔ زمانی ثابت و برابر شیب نمودار است و شتاب متوسط و لحظه‌ای باهم برابرند.

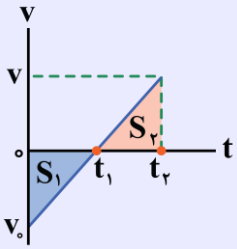
نمودار سرعت ـ زمان

در سؤالات حرکت‌شناسی و نمودارهای این بخش استفاده از تشابه مثلث‌ها بسیار پرکاربرد است. مثلاً در نمودارهای سرعت ـ زمان زیر می‌توانیم تشابه را برای مثلث‌ها به‌کار ببریم:



$$\text{نسبت تشابه مثلث‌ها} = \frac{v}{v_0} = \frac{t_2 - t_1}{t_2}$$

$$\text{نسبت مساحت مثلث‌ها} = \frac{S_1}{S_1 + S_2} = (\frac{v}{v_0})^2 = (\frac{t_2 - t_1}{t_2})^2$$

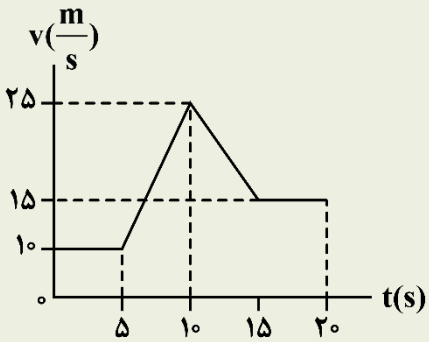


$$\text{نسبت تشابه مثلث‌ها} = \frac{v}{v_0} = \frac{t_2 - t_1}{t_1}$$

$$\text{نسبت مساحت مثلث‌ها} = \frac{S_2}{S_1} = (\frac{v}{v_0})^2 = (\frac{t_2 - t_1}{t_1})^2$$

آزمون سراسری تجربی تیرماه ۱۴۰۳

نمودار سرعت ـ زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل است. شتاب متوسط در بازهٔ $t_1 = 7s$ تا $t_2 = 12s$، چند متر بر مربع ثانیه است؟



۱) ۱

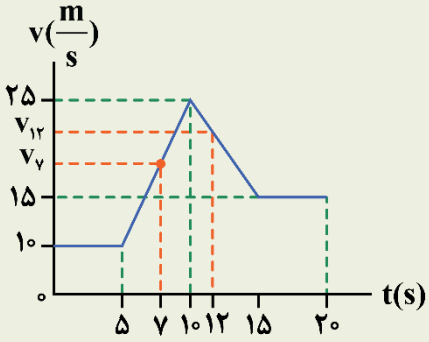
۲) $\frac{۱}{۲}$

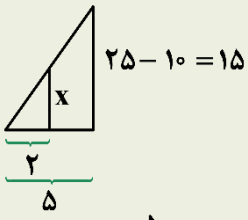
۳) $\frac{۱}{۵}$

۴) صفر

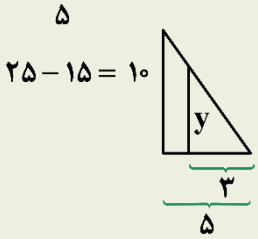
پاسخ تشریحی:

با توجه به قواعد تشابه دو مثلث، $v_{۷}$ و $v_{۱۲}$ را به‌دست می‌آوریم:





$$\frac{x}{۱۵}=\frac{۲}{۵}\Rightarrow x=۶\Rightarrow v_{۷}=v_{۵}+x=۱۰+۶=۱۶\frac{m}{s}$$



$$\frac{y}{۱۰}=\frac{۳}{۵}\Rightarrow y=۶\Rightarrow v_{۱۲}=v_{۱۵}+y=۱۵+۶=۲۱\frac{m}{s}$$

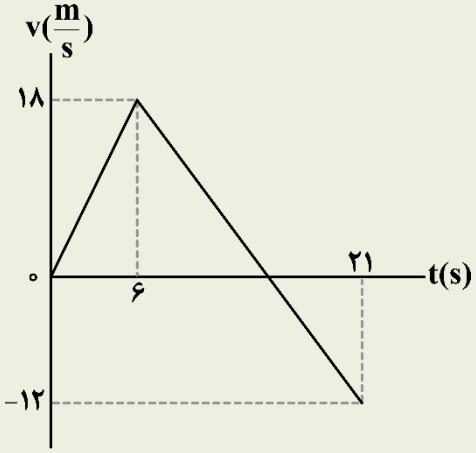
حالا شتاب متوسط در بازهٔ زمانی $t_{۱}=۷s$ تا $t_{۲}=۱۲s$ را به‌دست می‌آوریم:

$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v_{۱۲}-v_{۷}}{۱۲-۷}=\frac{۲۱-۱۶}{۵}=۱\frac{m}{s^{۲}}$$

پاسخ: گزینهٔ ۱

آزمون سراسری تجربی اردیبهشت‌ماه ۱۴۰۴

۵۳- نمودار سرعت ـ زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. اگر متحرک در لحظهٔ $t=۰s$ از مکان $\vec{x}_{۰}=(۱۰m)\vec{i}$ عبور کند، در چه لحظه‌هایی برحسب ثانیه مکان متحرک $\vec{x}=(۱۳۶m)\vec{i}$ است؟



۱) ۱۰ و ۱۵

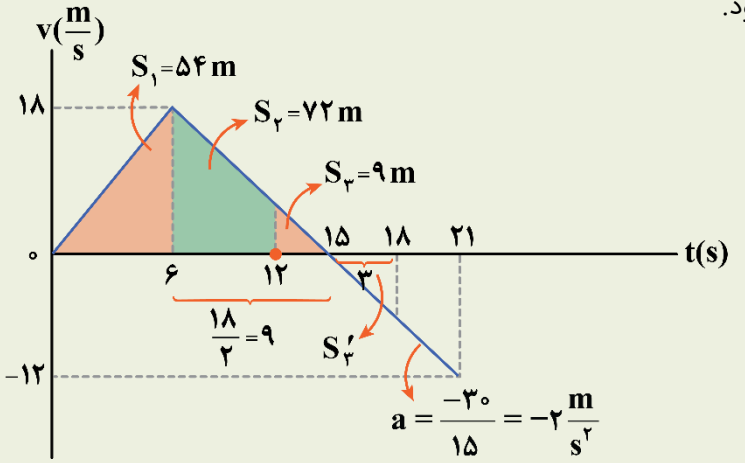
۲) ۱۲ و ۱۸

۳) ۱۳/۵ و ۱۶/۵

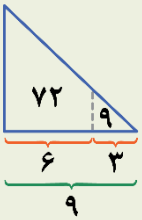
۴) ۱۰/۵ و ۱۹/۵

پاسخ تشریحی:

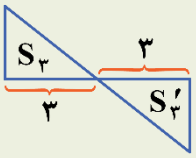
برای آن‌که متحرک از مکان $x_0 = ۱۰\,m$ به مکان $x = ۱۳۶\,m$ برسد، باید جابه‌جایی $\Delta x = ۱۲۶\,m$ را طی کند؛ بنابراین باید لحظه‌ای را پیدا کنیم که مساحت زیر نمودار از ابتدا تا آن لحظه برابر ۱۲۶m شود.



تشابه (۱):



تشابه (۲):



$$x_{۱۲} = x_{۱۸} = ۵۴ + ۷۲ + ۱۰ = ۱۳۶\,m$$

پاسخ: گزینهٔ ۲

۳۷- متحرکی با سرعت ثابت درحال حرکت است. اگر این متحرک در لحظات $t_۱ = ۴s$ و $t_۲ = ۷s$ به‌ترتیب از مکان‌های $x_۱ = -۱۶m$ و $x_۲ = -۴m$ عبور کند، در کدام لحظه از مبدأ مکان می‌گذرد؟

۱) پایان ثانیهٔ هفتم ۲) پایان ثانیهٔ هشتم ۳) پایان ثانیهٔ نهم ۴) پایان ثانیهٔ دهم

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۱۴ ـ ۱۲۰۱)

کلام اول

ابتدا معادلهٔ مکان ـ زمان حرکت را به‌دست می‌آوریم. چون سرعت متحرک ثابت است؛ سرعت متحرک برابر با سرعت متوسط آن است و داریم:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{-۴ - (-۱۶)}{۷ - ۴} = \frac{۱۲}{۳} = ۴\,\frac{m}{s}$$

$$x = vt + x_0 = ۴t + x_0 \xrightarrow[x=-۱۶m]{t=۴s} -۱۶ = ۴ \times ۴ + x_0 \Rightarrow x_0 = -۳۲m$$

کلام آخر

در ادامه لحظهٔ عبور از مبدأ مکان $(x = ۰)$ را به‌دست می‌آوریم:

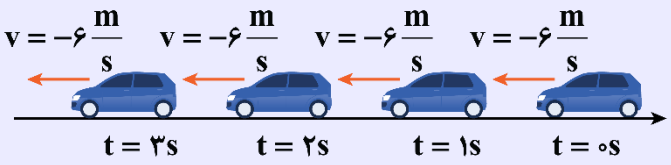
$$x = ۴t - ۳۲ \Rightarrow ۰ = ۴t - ۳۲ \Rightarrow t = ۸s$$

بنابراین در پایان ثانیهٔ هشتم $(t = ۸s)$ متحرک از مبدأ مکان می‌گذرد.

حرکت با سرعت ثابت

در این نوع حرکت، اندازه و جهت سرعت متحرک در طول مسیر ثابت است پس در حرکت با سرعت ثابت، سرعت متوسط متحرک در هر بازهٔ زمانی دلخواه برابر سرعت لحظه‌ای آن است:

اندازهٔ سرعت متوسط = تندی متوسط = اندازهٔ سرعت لحظه‌ای = تندی لحظه‌ای



حرکت با سرعت ثابت

- حرکت روی خط راست انجام می‌شود.
- تندی با گذشت زمان تغییر نمی‌کند.
- جهت سرعت ثابت است.
- اندازهٔ سرعت ثابت است.

اندازهٔ سرعت و جهت سرعت ثابت است.
پس شتاب حرکت صفر است: $a = 0$

در حرکت با سرعت ثابت

۱- سرعت لحظه‌ای و سرعت متوسط باهم برابرند: $v_{av} = v$

۲- شتاب حرکت صفر است.

۳- اندازهٔ جابه‌جایی و مسافت باهم برابرند $(|d| = L)$، درنتیجه در این حرکت اندازهٔ سرعت برابر تندی است $(|v| = s)$.

معادلهٔ مکان ـ زمان در حرکت با سرعت ثابت

$$x = \underset{\text{مکان در لحظهٔ } t}{x} = \overset{\text{سرعت}}{v}t + \underset{\text{مکان اولیه}}{x_0}$$

(زمان: t)

معادلهٔ جابه‌جایی ـ زمان حرکت با سرعت ثابت

$$\Delta x = \underset{\text{جابه‌جایی}}{\Delta x} = \overset{\text{سرعت}}{v}\Delta t$$

(Δt: زمان سپری‌شده)

چون جهت حرکت ثابت است، در این رابطه اندازهٔ Δx برابر مسافت طی‌شده می‌باشد.

چگونه با استفاده از مکان متحرک در دو لحظهٔ t_1 و t_2، معادلهٔ مکان ـ زمان حرکت با سرعت ثابت را به‌دست آوریم؟

۱- در معادلهٔ مکان ـ زمان حرکت با سرعت ثابت یعنی $x = vt + x_0$ به‌جای t و x مقادیرشان را در دو نقطه جایگذاری می‌کنیم.

۲- با استفاده از دستگاه دو معادله - دو مجهول، مقادیر x_0 و v را به‌دست می‌آوریم.

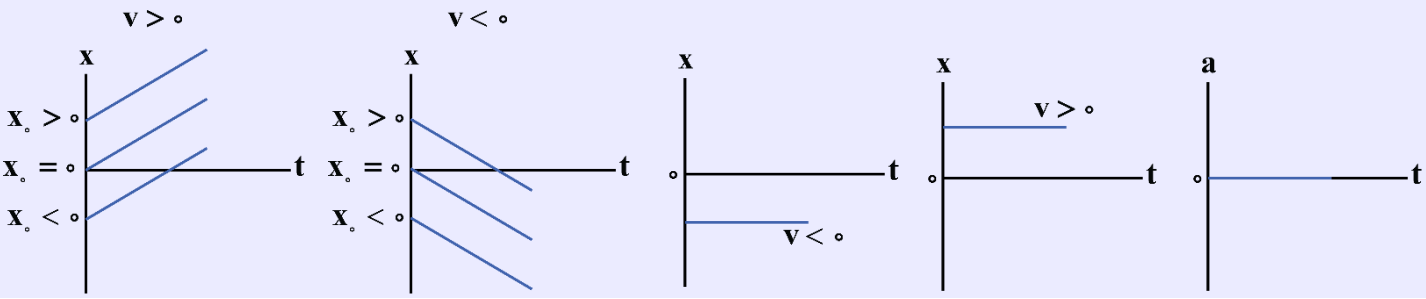
۳- طبق رابطهٔ $x = vt + x_0$، با داشتن v و x_0 معادلهٔ $x - t$ را می‌نویسیم.

نمودارها در حرکت با سرعت ثابت

۱- طبق معادلهٔ مکان ـ زمان که به‌صورت یک معادلهٔ خطی است، نمودار مکان ـ زمان در حرکت با سرعت ثابت به‌صورت خط راستی با شیب ثابت v و عرض از مبدأ x_0 است:

۲- نمودار سرعت ـ زمان در حرکت با سرعت ثابت، خط راستی موازی محور t است.

۳- شتاب در حرکت با سرعت ثابت، همواره صفر است.



آزمون سراسری تجربی اردیبهشت‌ماه ۱۴۰۳

۴۶- جسمی با سرعت ثابت بر مسیری مستقیم در حرکت است. اگر جسم در لحظهٔ $t_1 = 4s$ در مکان $x_1 = 8m$ و در لحظهٔ $t_2 = 10s$ در مکان $x_2 = 26m$ باشد، معادلهٔ مکان ـ زمان آن در SI کدام است؟

۱) $x = 3t + 4$ ۲) $x = 3t - 4$ ۳) $x = 2t + 4$ ۴) $x = 2t - 4$

پاسخ تشریحی:

روش اول: ابتدا سرعت متحرک را به‌دست می‌آوریم:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{26 - 8}{10 - 4} = 3\frac{m}{s} \Rightarrow v = 3\frac{m}{s}$$

حال یکی از لحظات داده‌شده را در معادلهٔ مکان ـ زمان قرار می‌دهیم و مکان اولیه را به‌دست می‌آوریم:

$$x = vt + x_0 \xrightarrow[x_1 = 8m]{t_1 = 4s} 8 = 3 \times 4 + x_0 \Rightarrow x_0 = -4m$$

$$x = vt + x_0 \Rightarrow x = 3t - 4$$

روش دوم: یکی از لحظات را در گزینه‌ها جایگذاری می‌کنیم تا پاسخ درست مشخص شود:

۱) $x = 3t + 4 \xrightarrow[x_1 = 8m]{t_1 = 4s} 8 = 3 \times 4 + 4$ (✗)

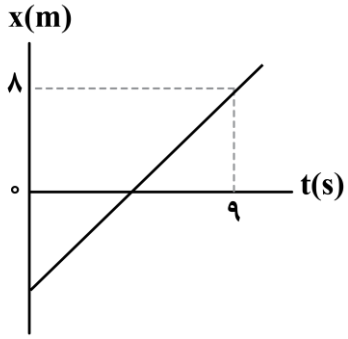
۲) $x = 3t - 4 \xrightarrow[x_1 = 8m]{t_1 = 4s} 8 = 3 \times 4 - 4$ (✓)

۳) $x = 2t + 4 \xrightarrow[x_1 = 8m]{t_1 = 4s} 8 = 2 \times 4 + 4$ (✗)

۴) $x = 2t - 4 \xrightarrow[x_1 = 8m]{t_1 = 4s} 8 = 2 \times 4 - 4$ (✗)

پاسخ: گزینهٔ ۲

۳۸- نمودار مکان ـ زمان متحرکی که بر روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل است. اگر سرعت متوسط این متحرک در ۴ ثانیهٔ سوم حرکتش، ۲ متر بر ثانیه باشد، بردار مکان این متحرک در چه لحظه‌ای تغییر جهت می‌دهد؟



۱) ۲
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۱۴ ـ ۱۲۰۱)

روش اول

حرکت با سرعت ثابت است؛ بنابراین سرعت متوسط در هر بازهٔ زمانی دلخواه، یکسان و برابر سرعت لحظه‌ای است $(v = v_{av} = ۲\frac{m}{s})$؛ بنابراین با توجه به نمودار داده‌شده می‌توان نوشت:

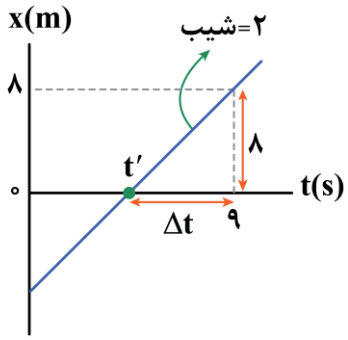
$$x = vt + x_{۰} \Rightarrow ۸ = ۲\times ۹ + x_{۰} \Rightarrow x_{۰} = -۱۰m \Rightarrow x = ۲t - ۱۰$$

بردار مکان زمانی تغییر جهت می‌دهد که $x = ۰$ شود؛ بنابراین داریم:

$$x = ۰ \Rightarrow ۲t - ۱۰ = ۰ \Rightarrow t = ۵s$$

روش دوم

می‌توانیم با استفاده از شیب خط، لحظهٔ تغییر جهت بردار مکان را به‌دست آوریم. مطابق شکل زیر داریم:



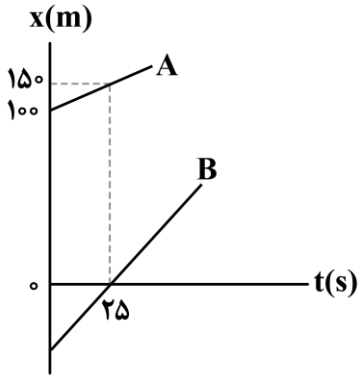
$$۲ = \frac{۸}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = ۴s$$

$$\Delta t = ۹ - t' \Rightarrow ۴ = ۹ - t' \Rightarrow t' = ۵s$$

نکته

در لحظه‌ای که علامت مکان جسم عوض می‌شود، در آن لحظه جهت بردار مکان عوض می‌شود.

۳۹- نمودار مکان ـ زمان دو متحرک A و B که بر مسیر مستقیم حرکت می‌کنند، مطابق شکل زیر می‌باشد. اگر در دو لحظهٔ $t_۱$ و $t_۲$ $(t_۲ > t_۱)$، فاصلهٔ دو متحرک از هم ۴۰ متر باشد و $\frac{t_۲}{t_۱} = \frac{۳}{۲}$ باشد، تندی متحرک B، چند متر بر ثانیه است؟



۱) ۴
۲) ۸
۳) ۳
۴) ۶

پاسخ: گزینهٔ ۱ (سخت ـ استدلالی ـ زمان‌بَر ـ صفحهٔ ۱۴ ـ ۱۲۰۱)

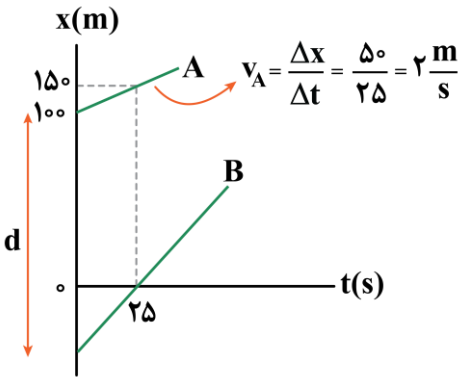
کام اول

ابتدا تندی نسبی دو متحرک را به‌دست می‌آوریم. توجه کنید که چون دو متحرک هم‌جهت حرکت می‌کنند، تندی نسبی دو متحرک به‌صورت زیر حساب می‌شود:

$$v_B > v_A$$

$$v_{\text{نسبی}} = v_B - v_A$$

و همچنین می‌توان v_A را از شیب نمودار $x-t$ به‌دست آورد:



$$\Rightarrow v_{\text{نسبی}} = v_B - ۲$$

کام دوم

در لحظهٔ $t_۱$، برای اولین بار فاصلهٔ دو متحرک ۴۰ متر می‌شود. در این مدت $\Delta x_{\text{نسبی}}$ دو متحرک برابر است با:

$$\Delta x_{\text{نسبی}} = d - ۴۰$$

و در لحظهٔ $t_۲$، برای دومین بار فاصلهٔ دو متحرک از هم ۴۰ متر می‌شود. در این مدت $\Delta x_{\text{نسبی}}$ دو متحرک برابر است با:

$$\Delta x_{\text{نسبی}} = d + ۴۰$$

با توجه به رابطهٔ $\Delta x_{\text{نسبی}} = v_{\text{نسبی}} \Delta t$، می‌توان نوشت:

$$۰ \to t_۱ : \ \Delta x_{\text{نسبی}} = d - ۴۰ = v_{\text{نسبی}} \Delta t_۱ \xrightarrow[\Delta t_۱ = t_۱]{v_{\text{نسبی}} = v_B - ۲} d - ۴۰ = (v_B - ۲)t_۱ \qquad (۱)$$

$$۰ \to t_۲ : \ \Delta x_{\text{نسبی}} = d + ۴۰ = v_{\text{نسبی}} \Delta t_۲ \xrightarrow[\Delta t_۲ = t_۲]{v_{\text{نسبی}} = v_B - ۲} d + ۴۰ = (v_B - ۲)t_۲ \qquad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۲) \div (۱)} \frac{d+۴۰}{d-۴۰} = \frac{(v_B-۲)t_۲}{(v_B-۲)t_۱} \xrightarrow{\frac{t_۲}{t_۱} = \frac{۳}{۲}} \frac{d+۴۰}{d-۴۰} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow ۳d - ۱۲۰ = ۲d + ۸۰ \Rightarrow d = ۲۰۰m$$

کام آخر

فاصلهٔ اولیهٔ دو متحرک $d = ۲۰۰m$ می‌باشد؛ پس مکان اولیهٔ متحرک B، $x_{۰B} = -۱۰۰m$ می‌باشد.

تندی متحرک B را می‌توان با استفاده از رابطهٔ $v_B = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ در بازهٔ زمانی صفر تا ۲۵s به‌دست آورد:

$$v_B = \frac{\Delta x}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta x = ۱۰۰m]{\Delta t = ۲۵s} v_B = \frac{۱۰۰}{۲۵} = ۴\frac{m}{s}$$

راهنمای مسیرت

مسائل دو متحرکه از تنوع به شدت بالایی برخوردار هستند و جایگاه ویژه‌ای هم در کنکور دارند. این‌جا هم یک تست خوب از مسائل دو متحرکه در حرکت با سرعت ثابت رو براتون آوردیم تا به‌مرور با این تیپ‌ها هم آشنا بشین. پس حتماً به روند حل پاسخ‌نامه به دقت نگاه کنید.

سرعت نسبی

۱- اگر دو متحرک خلاف جهت یکدیگر حرکت کنند:



$$v_{\text{نسبی}} = |v_۱| + |v_۲|$$

۲- اگر دو متحرک هم‌جهت حرکت کنند:



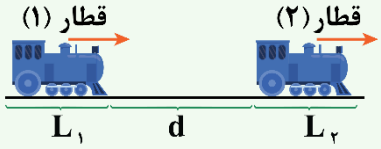
$$v_{\text{نسبی}} = |v_۱ - v_۲|$$

جابه‌جایی نسبی دو متحرک از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$d_{\text{نسبی}} = v_{\text{نسبی}} \Delta t$$

نکته

در سؤال‌های مربوط به حرکت نسبی دو قطار اگر قطار (۱) به‌اندازهٔ d عقب‌تر از قطار (۲) باشد، برای عبور کامل قطار (۱) از قطار (۲) جابه‌جایی نسبی برابر است با:



$$d_{\text{نسبی}} = L_۱ + L_۲ + d$$

کنکور سراسری علوم تجربی نوبت دوم خارج از کشور ۱۴۰۲

دو متحرک با تندی ثابت $v_۱$ و $v_۲ > v_۱$ روی خط راست طوری حرکت می‌کنند که اگر خلاف جهت هم بروند، فاصلهٔ آن‌ها در هر ثانیه ۱۶ متر تغییر می‌کند و اگر هم‌جهت حرکت کنند، فاصلهٔ آن‌ها در هر دقیقه ۲۴۰ متر تغییر می‌کند. $\frac{v_۲}{v_۱}$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۴}{۳}$ ۳) $\frac{۵}{۳}$ ۴) $\frac{۷}{۵}$

پاسخ تشریحی:

در حالت اول که دو متحرک در خلاف جهت هم حرکت می‌کنند، تندی نسبی دو متحرک برابر است با مجموع تندی دو متحرک و در حالت دوم که دو متحرک در یک جهت حرکت می‌کنند، تندی نسبی دو متحرک برابر است با مقدار اختلاف تندی دو متحرک؛ بنابراین می‌توان نوشت:

$$v = v_۱ + v_۲$$
$$v' = v_۲ - v_۱$$

از طرفی با توجه به رابطهٔ $v = \frac{d}{\Delta t}$ می‌توان نوشت:

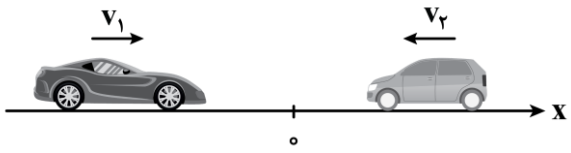
$$v = \frac{d}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t = ۱s]{d = ۱۶m} v = \frac{۱۶}{۱} = ۱۶ \frac{m}{s}$$
$$v' = \frac{d'}{\Delta t'} \xrightarrow[\Delta t' = ۶۰s]{d' = ۲۴۰m} v' = \frac{۲۴۰}{۶۰} = ۴ \frac{m}{s}$$

درنهایت با تشکیل دستگاه دو معادله و دو مجهول داریم:

$$\begin{cases} v_۱ + v_۲ = ۱۶ \\ v_۲ - v_۱ = ۴ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_۲ = ۱۰ \frac{m}{s} \\ v_۱ = ۶ \frac{m}{s} \end{cases} \Rightarrow \frac{v_۲}{v_۱} = \frac{۱۰}{۶} = \frac{۵}{۳}$$

پاسخ: گزینهٔ ۳

۴۰- **مطابق شکل زیر، دو متحرک (۱) و (۲) با سرعت ثابت به سمت هم درحال حرکت‌اند. در لحظهٔ t که متحرک (۱) از مبدأ محور عبور می‌کند، فاصلهٔ دو متحرک از هم ۲۴۰m است و ۱۲ ثانیه بعد که متحرک (۲) از مبدأ محور عبور می‌کند، فاصلهٔ دو متحرک از هم ۴۸m است. در فاصلهٔ چندمتری از مبدأ محور، دو متحرک از کنار هم عبور می‌کنند؟**

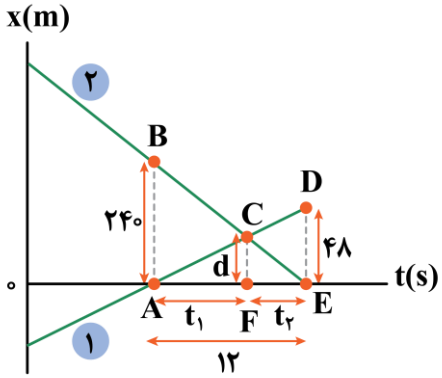


۱) ۴۵
۲) ۴۰
۳) ۳۵
۴) ۳۰

پاسخ: گزینهٔ ۲ (سخت ـ استدلالی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۱۴ ـ ۱۲۰۱)

گام اول

ابتدا نمودار مکان ـ زمان دو متحرک را رسم می‌کنیم:



گام دوم

دو مثلث ABC و CDE متشابه‌اند، پس:

$$\frac{۲۴۰}{۴۸}=\frac{t_۱}{t_۲}\Rightarrow t_۱=۵t_۲$$

$$t_۱+t_۲=۱۲\Rightarrow ۵t_۲+t_۲=۱۲\Rightarrow\begin{cases}t_۲=۲s\\t_۱=۱۰s\end{cases}$$

گام آخر

با توجه به تشابه دو مثلث ACF و ADE داریم:

$$\frac{d}{۱۰}=\frac{۴۸}{۱۲}\Rightarrow d=۴۰m$$

راهنمای مسیرت

خفن‌ترین سؤال این آزمون قطعاً همین سؤال بود و فقط می‌تونم بگم پاسخ‌نامه رو بخونین تا از نحوهٔ حلش حسابی لذت ببرین.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

بودجه‌بندی این آزمون: مولکول‌ها در خدمت تندرستی (تا سر پاک‌کننده‌های خورنده)
صفحه‌های ۱ تا ۱۲

سهم در کنکور: این بودجه‌بندی درمجموع ۱ تست از ۳۰ تست کنکور را پوشش داده است.

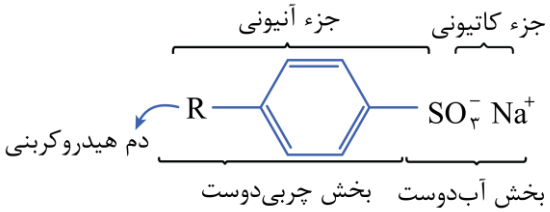
برای دیدن پاسخنامهٔ ویدئویی آزمون QRcode بالا را اسکن کنید!
یا بر روی لینک زیر کلیک کنید!
پاسخنامهٔ ویدئویی آزمون

۴۱- در ساختار یک نوع پاک‌کننده غیرصابونی، روی اتم‌های سازنده کدام عنصر جفت الکترون ناپیوندی در میان الکترون‌های ظرفیتی دیده می‌شود؟

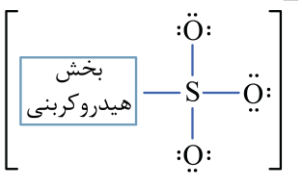
۱) اکسیژن ۲) گوگرد ۳) کربن ۴) هیدروژن

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ مفهومی ـ سریع ـ صفحهٔ ۱۱ ـ ۱۲۰۱)

با توجه به عدم کارایی صابون در مجاورت با آب سخت و رابطه میان ساختار و رفتار یک ماده، شیمی‌دان‌ها به دنبال موادی بودند که همانند صابون‌ها، ساختاری **دوگانه‌دوست** (هم چربی‌دوست و هم آب‌دوست) داشته باشند. سرانجام آن‌ها توانستند با استفاده از **بنزن** و دیگر مواد اولیه تولید شده در صنایع پتروشیمی، **پاک‌کننده‌های غیرصابونی** را بسازند. در ساختار پاک‌کننده‌های غیرصابونی یک حلقه بنزنی وجود دارد که به زنجیر آلکیلی متصل است. ساختار کلی این مواد به‌صورت زیر است:



ساختار لوویس بخش باردار از آنیون سازنده این نوع از پاک‌کننده‌ها به‌صورت زیر است:



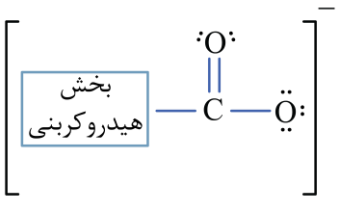
همان‌طور که مشخص است، روی اتم‌های اکسیژن سازنده این ماده، **جفت الکترون ناپیوندی** وجود دارد.

۴۲- کدام مطلب زیر نادرست است؟

۱) پاک‌کننده‌های صابونی، از کنار هم قرار گرفتن یون‌ها تشکیل شده‌اند.
۲) در حضور آب سخت، صابون‌های مایع به رسوب سفیدرنگ تبدیل می‌شوند.
۳) با افزایش دمای آب، قدرت پاک‌کنندگی صابون در مجاورت پارچه نخی افزایش می‌یابد.
۴) در ساختار صابون‌ها، هر اتم کربن حداقل به یک اتم هیدروژن توسط پیوند اشتراکی متصل شده است.

پاسخ: گزینهٔ ۴ (آسان ـ مفهومی ـ سریع ـ صفحهٔ ۹ ـ ۱۲۰۱)

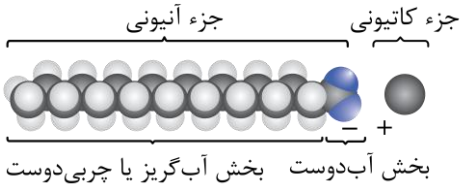
ساختار بخش باردار از یک نوع صابون، به‌صورت زیر است:



همان‌طور که مشخص است، در این بخش اتم کربنی وجود دارد که به هیچ اتم هیدروژنی متصل نشده است. سایر اتم‌های کربن موجود در ساختار صابون، همگی به اتم **هیدروژن** متصل شده‌اند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) صابون جامد، نمک سدیم اسیدهای چرب و صابون مایع، نمک پتاسیم یا آمونیوم اسیدهای چرب است. زنجیر هیدروکربنی صابون‌ها ناقطبی و آب‌گریز است و بنابراین در حلال‌های ناقطبی حل می‌شود. ساختار صابون‌های جامد به‌صورت زیر است:



همان‌طور که مشخص است، در ساختار صابون آنیون و کاتیون وجود دارد.

۲) مستقل از حالت فیزیکی مایع و یا جامد شوینده‌های صابونی، مولکول‌های صابون براساس معادله‌های زیر با کاتیون‌های موجود در آب‌های سخت واکنش می‌دهند:

واکنش صابون با یون کلسیم: $۲RCOONa(aq) + Ca^{۲+}(aq) \rightarrow (RCOO)_۲Ca(s) + ۲Na^{+}(aq)$

واکنش صابون با یون منیزیم: $۲RCOONa(aq) + Mg^{۲+}(aq) \rightarrow (RCOO)_۲Mg(s) + ۲Na^{+}(aq)$

رسوب‌های تولید شده در این واکنش‌ها، سفید رنگ بوده و رد آن‌ها بر روی لباس‌ها باقی می‌ماند. همان‌طور که مشخص است، نسبت شمار آنیون‌ها به شمار کاتیون‌ها در این رسوب‌ها برابر با ۲ خواهد بود.

نمک‌های فسفات

اضافه کردن یون فسفات به صابون‌ها، به‌منظور افزایش قدرت پاک‌کنندگی آن‌ها در آب سخت است. در این حالت با انحلال نمک‌های فسفات‌دار در آب، یون فسفات با یون‌های کلسیم و منیزیم موجود در آب سخت رسوب تشکیل می‌دهد و از تشکیل رسوب صابون با این کاتیون‌ها جلوگیری می‌کند. یون فسفات موجود در این دسته از شوینده‌ها، با یون‌های $Mg^{۲+}$ و $Ca^{۲+}$ براساس معادله‌های زیر واکنش می‌دهد:

$$۲PO_۴^{۳-}(aq) + ۳Mg^{۲+}(aq) \rightarrow Mg_۳(PO_۴)_۲(s) \quad , \quad ۲PO_۴^{۳-}(aq) + ۳Ca^{۲+}(aq) \rightarrow Ca_۳(PO_۴)_۲(s)$$

همچنین یکی از مزیت‌هایی که پاک‌کننده‌های غیرصابونی نسبت به صابون دارند، این است که با یون‌های موجود در آب سخت واکنش نداده و رسوب نمی‌کنند. در واقع این مواد در آب سخت نیز قدرت پاک‌کنندگی خود را حفظ خواهند کرد. با استفاده از این دو روش، می‌توان از شوینده‌ها در سفرهای دریایی و یا صنایعی که با آب سخت سروکار دارند، استفاده کرد.

۳) علاوه بر این که در دماهای بالاتر، ساختار چربی‌های موجود بر روی سطح لباس سست می‌شود و صابون راحت‌تر به داخل توده‌های چربی نفوذ می‌کند، **افزایش** دما موجب تأمین‌شدن گرمای لازم برای انجام برهم‌کنش‌ها با لکه می‌شود، پس **افزایش دما** نیز قدرت پاک‌کنندگی صابون را افزایش می‌دهد.

عوامل مؤثر بر قدرت پاک‌کنندگی صابون

صابون‌های مختلف، همه لکه‌های موجود بر روی پارچه‌ها را به یک اندازه از بین نمی‌برند. در واقع، هر چقدر که یک پاک‌کننده صابونی بتواند مقدار بیشتری از آلاینده‌ها و چربی‌های روی لباس را بزداید، قدرت پاک‌کنندگی بیشتری دارد. عوامل مؤثر بر قدرت پاک‌کنندگی صابون، به شرح زیر هستند:

۱) میزان سختی آب: صابون‌ها در مجاورت با آب سخت، با دو یون کلسیم و منیزیم موجود در این نمونه از آب، رسوب سفیدرنگی ایجاد می‌کنند که بر روی لباس دیده می‌شود. در این حالت، قدرت پاک‌کنندگی صابون به‌شدت کاهش می‌یابد.

۲) جنس پارچه: چسبندگی لکه‌های چربی بر روی لباس‌های نخی یا همان پنبه‌ای کمتر از پارچه‌های پلی‌استری است. بر این اساس، می‌توان گفت صابون بر روی لکه‌های ایجاد شده بر سطح پارچه‌های نخی اثر بیشتری دارد.

۳) آنزیم: آنزیم نوعی کاتالیزگر است که فرایندهای تجزیه مواد موجود در لکه‌ها را تسریع می‌بخشد و این مواد را به مواد ساده‌تر تبدیل می‌کند. اضافه کردن آنزیم به صابون، قدرت پاک‌کنندگی صابون را افزایش می‌دهد.

۴) دما: در دماهای بالاتر، ساختار چربی‌های موجود بر روی سطح لباس سست می‌شود، پس قدرت نفوذ صابون به توده‌های چربی بیشتر می‌شود.

۵) افزودنی‌های شیمیایی: اضافه کردن جوش شیرین به صابون، موجب ایجاد خاصیت بازی و افزایش قدرت پاک‌کنندگی آن می‌شود. افزودن نمک‌های فسفات به صابون نیز قدرت پاک‌کنندگی آن را در مواجهه با آب سخت افزایش می‌دهد.

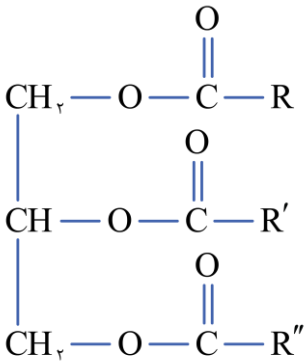
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۳- از سوختن مقداری از یک استر سه عاملی با زنجیرهای هیدروکربنی سیرشده یکسان، ۱۳۲۰ گرم کربن دی‌اکسید و ۲۹ مول بخار آب تولید شده است. تفاوت شمار اتم‌های هیدروژن و اکسیژن در ساختار هریک از اسیدهای چرب سازنده این استر برابر با چند واحد است؟ $(O = ۱۶, C = ۱۲, H = ۱ : g.mol^{-۱})$

۱) ۳۴ ۲) ۳۲ ۳) ۳۸ ۴) ۳۶

پاسخ: گزینهٔ ۴ (دشوار ـ مفهومی و محاسباتی ـ زمان‌بر ـ صفحهٔ ۵ ـ ۱۲۰۱)

استرهای سه عاملی از جمله ترکیب‌های آلی بوده و فرمول شیمیایی آن‌ها به‌صورت $C_nH_mO_۶$ است. ساختار کلی این مواد به‌صورت زیر است:



اگر زنجیرهای هیدروکربنی این مولکول‌ها سیرشده باشد، فرمول شیمیایی آن‌ها به‌صورت $C_nH_{۲n-۴}O_۶$ خواهد بود؛ بنابراین معادله موازنه‌شده سوختن این ترکیب آلی به‌صورت زیر است:

$$C_nH_{۲n-۴}O_۶ + (\frac{۳n-۸}{۲})O_۲ \longrightarrow nCO_۲ + (n-۲)H_۲O$$

در مرحله بعد، مول کربن دی‌اکسید تولید شده را محاسبه می‌کنیم:

$$CO_۲ \text{ مول} = \frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی}} = \frac{۱۳۲۰}{۴۴} = ۳۰\ mol$$

با توجه به ضرایب مواد در معادله موازنه‌شده واکنش سوختن ترکیب استری، نسبت مول بخار آب تولید شده به مول کربن دی‌اکسید تولید شده برابر $\frac{n-۲}{n}$ است. از طرفی طبق محاسبات انجام شده، نسبت مورد نظر در واکنش سوختن استر داده شده برابر $\frac{۲۹}{۳۰}$ است. حال با برابر قرار دادن این دو مقدار، n را پیدا می‌کنیم. داریم:

$$\frac{n-۲}{n} = \frac{۲۹}{۳۰} \Longrightarrow ۳۰n - ۶۰ = ۲۹n \Longrightarrow n = ۶۰$$

با توجه به محاسبات انجام شده، فرمول شیمیایی استر سه‌عاملی، به‌صورت $C_{۶۰}H_{۱۱۶}O_۶$ است. حال معادله واکنش آن با مقدار کافی آب و تولید الکل و اسید چرب سازنده را می‌نویسیم. داریم:

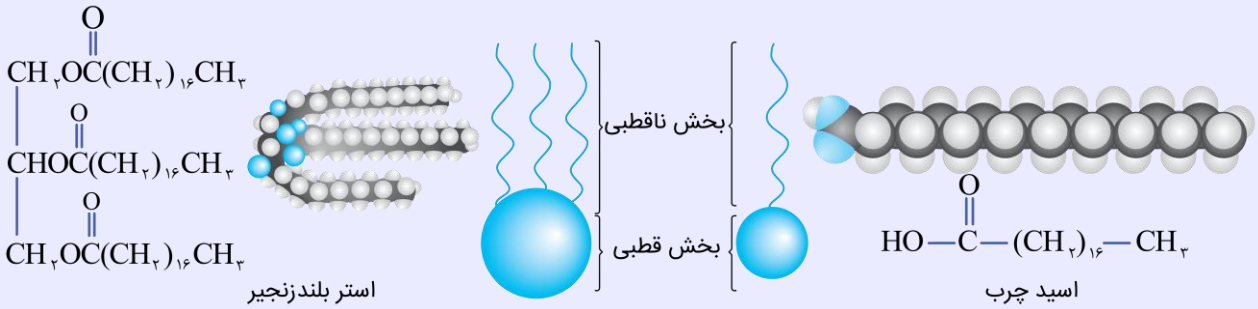
$$C_{۶۰}H_{۱۱۶}O_۶ + ۳H_۲O \longrightarrow ۳C_{۱۹}H_{۳۸}O_۲ + C_۳H_۸O_۳$$

فرمول شیمیایی اسید چرب سازنده این ماده، به‌صورت $C_{۱۹}H_{۳۸}O_۲$ است.

بنابراین تفاوت شمار اتم‌های هیدروژن و اکسیژن در ساختار این اسید چرب برابر ۳۶ (۲-۳۸) است.

تبدیل فرمول شیمیایی استر سه عاملی، اسید چرب و صابون به یکدیگر

چربی‌ها مخلوطی از اسیدهای چرب و استرهای بلند زنجیر هستند که بخش ناقطبی آن‌ها بر بخش قطبی‌شان غلبه دارد و در نتیجه نیروی بین مولکولی غالب در آن‌ها از نوع واندروالسی است. ساختار ذرات موجود در چربی‌ها را می‌توان به‌صورت زیر نشان داد:



برای یافتن فرمول شیمیایی اسید چرب حاصل از آبکافت استر سه عاملی، به‌صورت زیر عمل کنید:

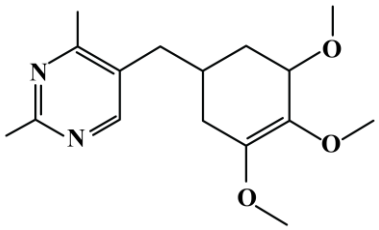
۱) برای محاسبه شمار اتم‌های کربن اسید چرب، شمار اتم‌های کربن استر را منهای ۳ کرده و حاصل را تقسیم بر ۳ کنید. برای مثال اگر استر ۵۷ اتم کربن داشته باشد، اسید چرب حاصل ۱۸ ($\frac{۵۷-۳}{۳}$) اتم کربن خواهد داشت.

۲) برای محاسبه شمار اتم‌های هیدروژن اسید چرب، شمار اتم‌های هیدروژن استر را منهای ۲ کرده و حاصل را تقسیم بر ۳ کنید. برای مثال اگر استر ۱۱۰ اتم هیدروژن داشته باشد، اسید چرب حاصل ۳۶ ($\frac{۱۱۰-۲}{۳}$) اتم هیدروژن خواهد داشت.

۳) شمار اتم‌های اکسیژن اسید چرب برابر ۲ است.

توجه داشته باشید برای یافتن فرمول صابون حاصل از اسید چرب، باید یکی از اتم‌های هیدروژن آن را کم کرده و در انتهای فرمول نماد کاتیون را قرار دهید. برای مثال فرمول شیمیایی صابون جامد حاصل از واکنش $C_{۱۷}H_{۳۴}O_۲$ با سدیم هیدروکسید، $C_{۱۷}H_{۳۳}O_۲Na$ است.

۴۴- ترکیبی با ساختار زیر را در نظر بگیرید:



شمار اتم‌های هیدروژن در ساختار این ترکیب، چند برابر شمار اتم‌های هیدروژن در اتیلن‌گلیکول است؟

۱) ۳/۵ ۲) ۴ ۳) ۴/۵ ۴) ۵

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۴ ـ ۱۲۰۱)

اتیلن‌گلیکول، یک الکل دوعاملی است که به‌عنوان **ضدیخ** کاربرد دارد. در هر مولکول از این ماده، ۶ اتم هیدروژن وجود دارد. ساختار مولکول اتیلن گلیکول به‌صورت زیر است:

$$HO-CH_۲-CH_۲-OH$$

ترکیب مورد نظر، یک ماده آلی است. فرمول مولکولی این ماده، به‌صورت $C_{۱۶}H_{۲۴}N_۲O_۴$ است. برای شمارش تعداد اتم‌های هیدروژن در ساختار ترکیب‌های آلی می‌توانیم از فرمول زیر استفاده کنیم:

تعداد اتم هیدروژن = $(۲ \times C + ۲) - ۲ \times$ (تعداد پیوند دوگانه + تعداد حلقه) $- ۴ \times$ (تعداد پیوند سه‌گانه) + تعداد اتم N − تعداد هالوژن

برای مثال در ترکیب داده شده شمار اتم‌های هیدروژن برابر است با:

تعداد اتم هیدروژن = $(۲ \times ۱۶ + ۲) - ۲ \times (۴ + ۲) + ۲ = ۲۴$

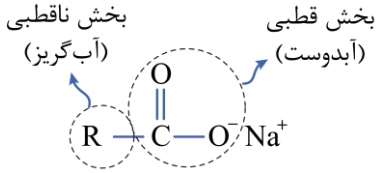
۴۵- در ساختار یک پاک‌کننده صابونی مایع، ۱۸ اتم کربن و یک حلقه کربنی وجود دارد. تعداد اتم هیدروژن موجود در اسید چرب سازنده این صابون، برابر چند بوده و با تبدیل این ماده به نوعی صابون جامد، جرم مولی آن به‌تقریب چند درصد افزایش پیدا می‌کند؟ (صابون مایع، فاقد اتم فلزی بوده و بخش هیدروکربنی آن سیرشده است.)

$(K = ۳۹ , Na = ۲۳ , O = ۱۶ , N = ۱۴ , C = ۱۲ , H = ۱ : g.mol^{-۱})$

۱) ۳۲ ـ ۱/۶۷ ۲) ۳۴ ـ ۵/۳۳ ۳) ۳۲ ـ ۵/۳۳ ۴) ۳۴ ـ ۱/۶۷

پاسخ: گزینهٔ ۴ (دشوار ـ مفهومی ـ زمان‌بر ـ صفحهٔ ۶ ـ ۱۲۰۱)

در صورت سیرشده بودن زنجیر هیدروکربنی در صابون‌ها، فرمول مولکولی آن‌ها به‌صورت $C_nH_{۲n-۱}O_۲X$ است. توجه داریم که در یک صابون با زنجیر هیدروکربنی سیرشده، یک پیوند دوگانه $C = O$ حضور دارد. ساختار کلی صابون‌ها به‌صورت زیر است:



طبق اطلاعات صورت سؤال، صابون مورد نظر در ساختار خود یک حلقه کربنی دارد. هر حلقه کربنی، ۲ اتم هیدروژن از ساختار مواد آلی حذف می‌کند، پس فرمول مولکولی صابون به‌صورت $C_nH_{۲n-۳}O_۲X$ خواهد بود. صابون‌های مایع، نمک پتاسیم یا آمونیوم اسیدهای چرب هستند. طبق گفته صورت سؤال، در ساختار صابون مایع مورد نظر ۱۸ اتم کربن حضور داشته و اتم فلزی حضور ندارد؛ بنابراین می‌توان گفت این صابون نمک آمونیوم اسید چرب بوده و فرمول آن به‌صورت $C_{۱۸}H_{۳۳}O_۲NH_۴$ است. معادله واکنش تولید این صابون از اسید چرب به‌صورت زیر است:

$$C_{۱۸}H_{۳۴}O_۲ \xrightarrow{\text{واکنش صابونی شدن}} C_{۱۸}H_{۳۳}O_۲NH_۴$$

پس می‌توان گفت در اسید چرب سازنده این صابون، ۳۴ اتم هیدروژن حضور داشته است. جرم مولی این صابون برابر با $۲۹۹\ g.mol^{-۱}$ است. با جایگزین کردن یون **آمونیوم** با یون **سدیم**، جرم مولی آن به اندازه $۵g.mol^{-۱}$ افزایش پیدا کرده و به $۳۰۴\ g.mol^{-۱}$ می‌رسد. در پایان درصد افزایش جرم مولی را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{درصد افزایش جرم مولی} = \frac{۵}{۲۹۹} \times ۱۰۰ \simeq ۱/۶۷ \text{ درصد}$$

۴۶- در رابطه با صابون مراغه، کدام مطلب زیر درست است؟

۱) در ساختار این ماده، کاتیون پتاسیم یا آمونیوم یافت می‌شود.
۲) از این ماده می‌توان برای چرب کردن سطح سنگ در تنور نانوایی استفاده کرد.
۳) این ترکیب، با استفاده از پیه گوسفند تهیه شده و یک نمونه از آن، خاصیت اسیدی دارد.
۴) این ماده، دارای افزودنی‌های شیمیایی مناسب بوده و برای شستن موی چرب کاربرد دارد.

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ مفهومی و حفظی ـ سریع ـ صفحهٔ ۱۱ ـ ۱۲۰۱)

صابون طبیعی یا همان **صابون مراغه**، با بیش از ۱۵۰ سال قدمت، معروف‌ترین صابون سنتی ایران است. برای تهیه این صابون، پیه (چربی) گوسفند و سود سوزآور (سدیم هیدروکسید یا $NaOH$) را در دیگ‌های بزرگ با آب برای چندین ساعت می‌جوشانند و پس از قالب‌گیری، آن‌ها را در آفتاب خشک می‌کنند. از صابون‌های طبیعی، می‌توان برای چرب کردن سطح سنگ‌ها در تنور نانوایی استفاده کرد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) صابون مراغه حالت **جامد** داشته و **کاتیون** موجود در آن، قطعاً از جنس **یون سدیم** است.

۳) این صابون‌ها به دلیل خاصیت بازی مناسبی که دارند، از آن‌ها برای شست‌وشوی موهای چرب استفاده می‌شود. توجه داریم که پیه گوسفند، نوعی چربی **جانوری** بوده و حالت **جامد** دارد.

۴) این صابون‌ها فاقد افزودنی‌های شیمیایی هستند و به همین خاطر، احتمال ایجاد عوارض جانبی توسط آن‌ها **بسیار پایین** است.

SanjeshCloud

۴۷- در رابطه با پاک‌کننده‌های غیرصابونی، کدام موارد از مطالب زیر درست هستند؟

$(S = ۳۲ , O = ۱۶ , C = ۱۲ , H = ۱ : g.mol^{-۱})$

الف ـ در ساختار این مواد، همانند مولکول نفتالن، حلقه بنزنی یافت می‌شود.

ب ـ یک نمونه از این پاک‌کننده‌ها را با استفاده از چربی‌ها می‌توان به راحتی تهیه کرد.

ج ـ جرم مولی نوعی از این مواد که در زنجیر هیدروکربنی سیرشده خود ۱۲ کربن دارد، برابر ۳۵۰ گرم می‌شود.

د ـ در ساختار بخش آب‌گریز این مواد، همانند بخش آب‌گریز صابون‌ها، اتم‌های کربن و هیدروژن یافت می‌شوند.

۱) «الف» و «ج» ۲) «الف» و «د» ۳) «ب» و «ج» ۴) «ب» و «د»

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۱۱ ـ ۱۲۰۱)

در رابطه با پاک‌کننده‌های غیرصابونی، عبارت‌های (الف) و (د) درست هستند.

پاک‌کننده غیرصابونی

نقش پاک‌کنندگی صابون باعث شد تا کاربرد آن از پاکیزگی و تأمین بهداشت فردی و محیط خانه، به مراکز صنعتی، بیمارستانی و اداری نیز گسترش پیدا کند. این روند، سبب رشد چشمگیر صابون‌سازی و تبدیل آن به یک صنعت بزرگ در جهان شد. این صنعت، نقش چشمگیری در کاهش بیماری‌های گوناگون و افزایش سطح بهداشت در جهان داشته است. در این زمان، عوامل زیر، چون سدی بر سر راه صنعت صابون‌سازی قرار گرفتند:

۱) با افزایش جمعیت جهان، مصرف صابون نیز افزایش یافت.

۲) برای تولید صابون در مقیاس انبوه، به میزان زیادی چربی به‌عنوان مواد اولیه نیاز بود و تأمین این میزان چربی، به یک چالش تبدیل شد.

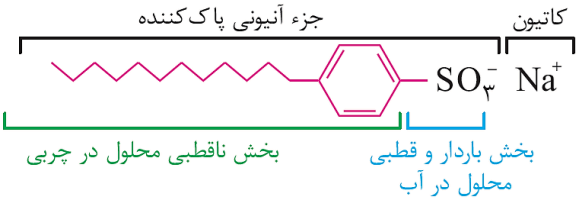
۳) تأمین صابون مورد نیاز جهان به روش‌های سنتی تقریباً ناممکن بود.

۴) پاک‌کننده‌های صابونی در همه شرایط به خوبی عمل نمی‌کردند و استفاده از آن‌ها در برخی از موقعیت‌ها مثل سفرهای دریایی و صنایعی که از آب شور استفاده می‌کردند، پاسخگوی نیاز انسان نبود.

نگرانی‌هایی از این دست، سبب شد تا شیمی‌دان‌ها برای شناسایی و تولید دیگر پاک‌کننده‌ها ترغیب شوند. شیمی‌دان‌ها به دنبال موادی بودند که علاوه بر قدرت پاک‌کنندگی بالا، بتوان آن‌ها را به میزان انبوه و با قیمت مناسب تولید کرد. با توجه به رابطه میان ساختار و رفتار یک ماده، شیمی‌دان‌ها به دنبال موادی بودند که همانند صابون‌ها، ساختاری دوگانه‌دوست (هم چربی‌دوست و هم آب‌دوست) داشته باشند. سرانجام آن‌ها توانستند با استفاده از بنزن و دیگر مواد اولیه تولید شده در صنایع پتروشیمی، پاک‌کننده‌های غیرصابونی را بسازند.

بررسی موارد:

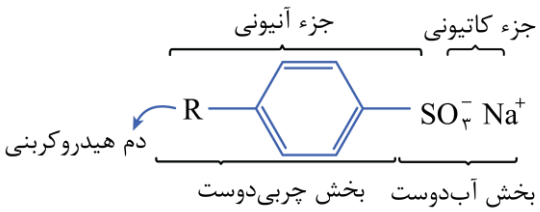
الف) ساختار کلی این نوع از پاک‌کننده‌ها به‌صورت زیر است:



همان‌طور که مشخص است، در ساختار این ماده، حلقه بنزنی وجود دارد، پس این ماده همانند یک نمونه نفتالن، آروماتیک است.

ب) صابون، با استفاده از چربی تولید می‌شود، اما پاک‌کننده‌های غیرصابونی، از مواد پتروشیمیایی طی واکنش‌های پیچیده در صنعت تولید می‌شوند. این مواد قدرت پاک‌کنندگی بیشتری نسبت به صابون دارند و در آب‌های سخت نیز خاصیت پاک‌کنندگی خود را حفظ می‌کنند، زیرا با یون‌های موجود در این آب‌ها رسوب نمی‌دهند.

ج) در ساختار پاک‌کننده‌های غیرصابونی یک حلقه بنزنی وجود دارد که به زنجیر آلکیلی متصل است. ساختار کلی این مواد به‌صورت زیر است:



بر این اساس، داریم:

$$RC_6H_4SO_3Na \xrightarrow{R: C_{12}H_{25}} C_{18}H_{29}SO_3Na \longrightarrow \text{جرم مولی} = 348\ g.mol^{-1}$$

د) در ساختار بخش آب‌گریز (بخش ناقطبی که در مجاورت با ذرات چربی قرار گرفته و از آب دوری می‌کند) پاک‌کننده‌های غیرصابونی، همانند بخش آب‌گریز صابون‌ها، فقط اتم‌های **کربن** و **هیدروژن** یافت می‌شوند.

۴۸- قدرت پاک‌کنندگی نوعی صابون آنزیم‌دار، در کدام شرایط زیر بیشتر از سایر حالت‌های داده شده است؟

۱) استفاده از پارچه نخی در دمای ۲۵ درجه سلسیوس
۲) استفاده از پارچه پلی‌استری در دمای ۲۵ درجه سلسیوس
۳) استفاده از پارچه نخی در دمای ۴۰ درجه سلسیوس
۴) استفاده از پارچه پلی‌استری در دمای ۴۰ درجه سلسیوس

پاسخ: گزینهٔ ۳ (آسان ـ مفهومی ـ سریع ـ صفحهٔ ۱۰ ـ ۱۲۰۱)

عوامل مؤثر بر قدرت پاک‌کنندگی صابون، به شرح زیر هستند:

۱) **میزان سختی آب:** صابون‌ها در مجاورت با آب سخت، با دو یون کلسیم و منیزیم موجود در این نمونه از آب رسوب سفیدرنگی ایجاد می‌کنند که بر روی لباس دیده می‌شود. در این حالت، قدرت پاک‌کنندگی صابون کاهش می‌یابد.

۲) **جنس پارچه:** چسبندگی لکه‌های چربی بر روی لباس‌های نخی یا همان پنبه‌ای کمتر از پارچه‌های پلی‌استری است. بر این اساس، می‌توان گفت صابون بر روی لکه‌های ایجاد شده بر سطح پارچه‌های نخی اثر بیشتری دارد.

۳) **آنزیم:** آنزیم نوعی کاتالیزگر است که فرایندهای تجزیه مواد موجود در لکه‌ها را سرعت داده و این مواد را به مواد ساده‌تر تبدیل می‌کند. اضافه کردن آنزیم به صابون، قدرت پاک‌کنندگی صابون را افزایش می‌دهد.

۴) **دما:** در دماهای بالاتر، ساختار چربی‌های موجود بر روی سطح لباس سست می‌شود و بر این اساس، ذرات صابون با قدرت بیشتری به درون توده‌های چربی موجود در محیط نفوذ می‌کنند.

۵) **افزودنی‌های شیمیایی:** اضافه کردن جوش شیرین به صابون، موجب ایجاد خاصیت بازی و افزایش قدرت پاک‌کنندگی آن می‌شود. افزودن نمک‌های فسفات به صابون نیز قدرت پاک‌کنندگی آن را در مواجهه با آب سخت افزایش می‌دهد.

با توجه به توضیحات داده شده، با افزایش دمای محیط و استفاده از پارچه نخی به‌جای پارچه پلی‌استری، قدرت پاک‌کنندگی صابون در مقایسه با سایر حالت‌های داده شده بیشتر خواهد بود.

۴۹- کدام موارد از مطالب زیر درست هستند؟

الف ـ با ریختن نمک کلسیم نیترات در مخلوطی از آب، صابون و روغن، اجزای سازنده مخلوط از هم جدا می‌شوند.
ب ـ اندازه ذرات سازنده کلوئیدها در مقایسه با ذرات سازنده یک نمونه از سوسپانسیون‌ها، کوچک‌تر است.
ج ـ با قرار دادن رنگ‌های پوششی در یک محیط ثابت، حل‌شونده موجود در آن‌ها ته‌نشین خواهد شد.
د ـ یک نمونه از محلول مس (II) سولفات، همانند یک نمونه شیر، نور را پخش می‌کند.

۱) «الف» و «ب»
۲) «ب» و «ج»
۳) «ج» و «د»
۴) «الف» و «د»

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۹ ـ ۱۲۰۱)

عبارت‌های (الف) و (ب) درست هستند.

بررسی موارد:

الف) با ریختن نمک کلسیم نیترات در مخلوطی از آب، صابون و روغن، یون‌های کلسیم از این ماده وارد مخلوط می‌شوند و با ذرات صابون واکنش می‌دهند. در این حالت، صابون به **رسوب** تبدیل شده و از محیط **خارج** می‌شود و به دنبال آن، اجزای سازنده مخلوط از هم جدا می‌شوند.

SanjeshCloud

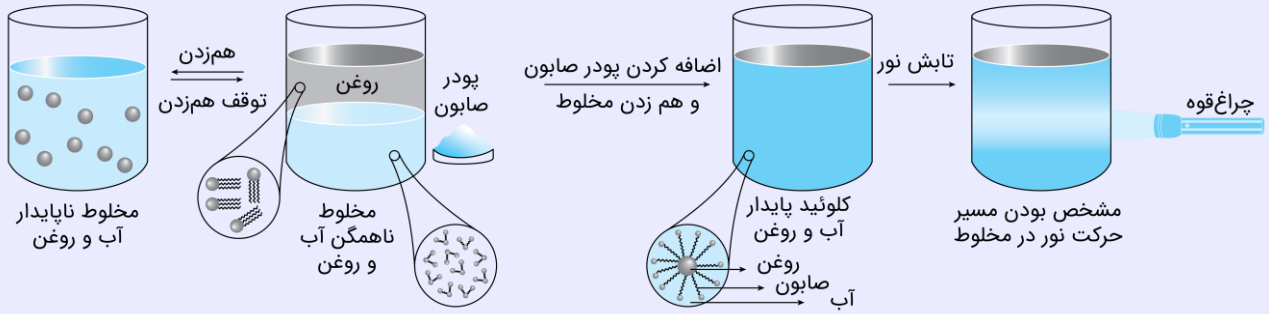
ب) کلوئیدها مخلوط‌هایی از دو یا چند ماده به حساب می‌آیند که در برخی از ویژگی‌های خود، به محلول‌ها شباهت دارند و در برخی از ویژگی‌های خود، با محلول‌ها تفاوت داشته و به مخلوط‌های ناهمگن شبیه هستند. ذره‌های سازنده کلوئیدها عموماً به‌صورت توده‌های **مولکولی** یا **یونی** هستند که اندازه آن‌ها **بزرگ‌تر** از اندازه حل‌شونده‌های موجود در محلول‌های همگن و **کوچک‌تر** از ذرات موجود در **سوسپانسیون‌ها** است. چون اندازه ذرات موجود در کلوئیدها **بزرگ‌تر** از اندازه ذرات موجود در محلول‌ها است، اگر پرتوی نوری از درون کلوئیدها بگذرد، توسط ذره‌های سازنده کلوئید پخش شده و به چشم بازتابیده می‌شود و به همین خاطر است که مسیر عبور نور در کلوئیدها قابل مشاهده است.

ج) رنگ‌های پوششی نوعی **کلوئید** هستند. سطح ذرات موجود در ساختار کلوئیدها باردار بوده و به همین خاطر، این مواد با ماندن در یک موقعیت ثابت، ته‌نشین نمی‌شوند.

د) **شیر**، یک نوع **کلوئید** بوده و نور را پخش می‌کند. این در حالی است که محلول مس(II) سولفات، نوعی محلول **همگن** بوده و چون ذرات سازنده آن **بسیار کوچک** هستند، نور را پخش نمی‌کنند.

کلوئید

در سال ۱۸۶۰ میلادی، دانشمندی به نام توماس گراهام برای توصیف ویژگی‌های برخی از مواد مثل چسب‌ها، ژلاتین و نشاسته، از واژه «کلوئید» استفاده کرد. کلوئیدها مخلوط‌هایی از دو یا چند ماده به حساب می‌آیند که در برخی از ویژگی‌های خود، به محلول‌ها شباهت دارند و در برخی از ویژگی‌های خود، با محلول‌ها تفاوت داشته و به مخلوط‌های ناهمگن شبیه هستند. ذره‌های سازنده کلوئیدها عموماً به‌صورت مولکول‌های بزرگ و یا توده‌های مولکولی هستند که اندازه آن‌ها بزرگ‌تر از اندازه حل‌شونده‌های موجود در محلول‌های همگن است. تصویر زیر، نمایی از فرایند تولید یک کلوئید را نشان می‌دهد:



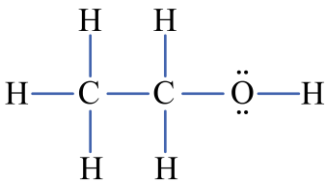
ماز

۵۰- کدام‌یک از مطالب زیر، در رابطه با اتانول نادرست است؟

۱) این ماده، با برقراری نیروهای بین مولکولی مشابه بنزین، در یک نمونه از آب حل می‌شود.
۲) یک نمونه از این ماده، با اسیدهای چرب واکنش داده و طی این فرایند، نوعی استر تولید می‌شود.
۳) انحلال‌پذیری یک نمونه از این ماده در آب، بیشتر از انحلال‌پذیری اجزای سازنده چربی‌ها در آب است.
۴) گروه عاملی موجود در ساختار مولکولی این ماده، در ساختار ذرات سازنده یک نمونه عسل نیز وجود دارد.

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ مفهومی ـ سریع ـ صفحهٔ ۵ ـ ۱۲۰۱)

ساختار مولکول اتانول به‌صورت زیر است:



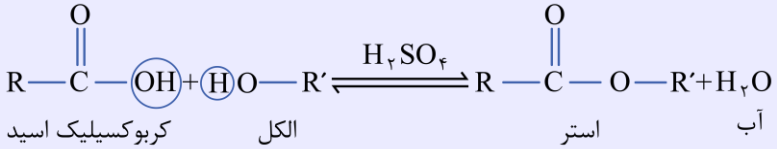
این ماده، دارای گروه عاملی هیدروکسیل (الکلی) بوده و با ذرات آب پیوند هیدروژنی برقرار می‌کند، درحالی‌که بنزین نوعی **هیدروکربن** بوده و چون ناقطبی است، نمی‌تواند با ذرات آب پیوند هیدروژنی برقرار کند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۲) اتانول، نوعی الکل است. الکل‌ها می‌توانند در شرایط مناسب با **کربوکسیلیک اسیدها** واکنش بدهند و در این حالت، **گروه عاملی استری** را ایجاد کنند.

واکنش استری‌شدن

استرها را می‌توان از واکنش میان الکل‌ها ($R' - OH$) و کربوکسیلیک اسیدها ($R - COOH$) به‌دست آورد. فرایند انجام شده به‌صورت زیر است:



این واکنش، اصطلاحاً استری شدن نام دارد. با توجه به معادله‌ی نشان داده شده، کاتالیزگر واکنش مورد نظر، سولفوریک اسید (H_2SO_4) است. استرها طی یک واکنش برگشت‌پذیر تولید شده و در شرایط مناسب می‌توانند به اسید و الکل سازنده‌ی خود تجزیه شوند. به واکنش استرها با مولکول‌های آب که منجر به تجزیه‌ی این مواد به الکل و اسید سازنده‌ی آن‌ها می‌شود، اصطلاحاً واکنش آبکافت گفته می‌شود. معادله‌ی کلی تولید یک ترکیب استری از یک اسید با فرمول شیمیایی $C_xH_yO_2$ و یک الکل با فرمول شیمیایی C_wH_zO به‌صورت زیر است:

$$C_xH_yO_2 + C_wH_zO \rightarrow C_{x+w}H_{y+z-2}O_2 + H_2O$$

۳) چربی‌ها، از جمله مواد نامحلول در آب بوده و به مقدار **بسیار ناچیزی** در آب حل می‌شوند. این در حالی است که اتانول، بسیار قطبی بوده و انحلال‌پذیری آن در آب **بسیار زیاد** است.

۴) اتانول، دارای گروه عاملی هیدروکسیل (الکلی) است. عسل نیز حاوی مولکول‌های قطبی است که در ساختار خود شمار قابل توجهی گروه عاملی هیدروکسیل ($-OH$) دارند. هنگامی‌که عسل وارد آب می‌شود، مولکول‌های سازنده آن با مولکول‌های آب **پیوند هیدروژنی** برقرار می‌کنند و در سرتاسر آن پخش می‌شوند. به این ترتیب، آب پاک‌کننده مناسبی برای لکه‌های شیرینی مانند آب قند، شربت آبلیمو و چای شیرین است.

میخوای خوندن پاسخ‌نامه رو راحت‌تر کنی!
پس بیا پاسخ ویدیویی‌اش رو ببین!

- پس از پایان آزمون، می‌تونین **پاسخ‌نامهٔ ویدیویی و تشریحی** این آزمون رو با کلیک یا اسکن کردن این **QRcode**، از صفحه آپارات آزمون ماز مشاهده کنید.

