

A

دفترچه پاسخ تشریحی

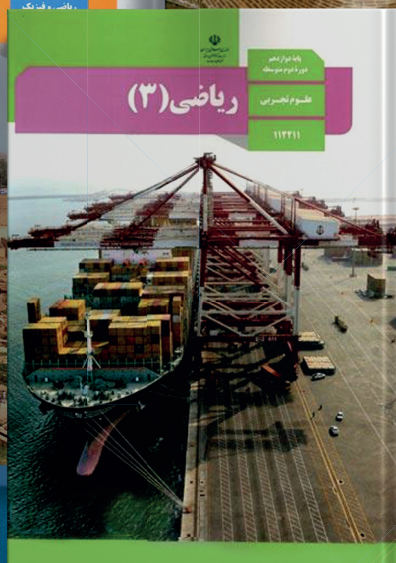
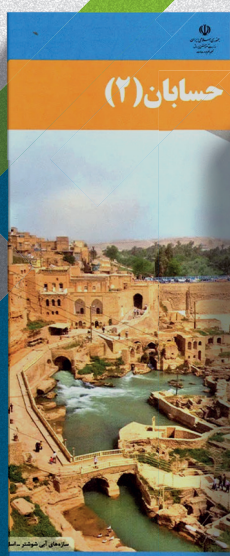
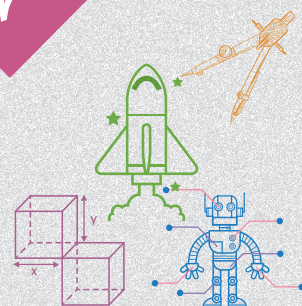
گروه آزمایشی علوم ریاضی

آزمون آزمایشی ۱۶ آذر ۱۴۰۳

ویژه داوطلبان آزمون سراسری ۱۴۰۴

پایه
دوازدهم

مرحله
۷



۱۴۰۳-۱۴۰۴

گزیده دو
مؤسسه آموزشی فرهنگی

تذکرات مهم ↓

➡ آزمون آزمایشی مرحله ۸ گزینه دو، در روز جمعه ۲۳ آذر ۱۴۰۳ برگزار می گردد.

➡ داوطلب گرامی، جهت استفاده از خدمات طلایی خود مانند کارنامه های هوشمند بعد از آزمون، آزمونک ها، بانک سؤال گزینه دو، رفع اشکال هوشمند، جزوه های کمک آموزشی، آرشیو آزمون های گزینه دو و...، با استفاده از شماره داوطلبی (به عنوان نام کاربری) و کد ملی خود (به عنوان رمز عبور) وارد وب سایت گزینه دو به آدرس www.gozine2.ir شوید.

➡➡ در صورتی که اینترنتی ثبت نام کرده اید، رمز عبور شما همان رمزی است که خودتان انتخاب نموده اید.

➡ کارنامه های آزمون آزمایشی مرحله ۷ به صورت کامل، با فاصله زمانی کوتاهی پس از آزمون مطابق اطلاعیه اعلام شده، بر روی پایگاه اینترنتی گزینه دو به آدرس www.gozine2.ir قرار می گیرد. در صورت بروز اشکال در دریافت کارنامه، موضوع را از طریق نمایندگی شهر خود پیگیری نمایید.



داوطلب گرامی، شما می توانید با اسکن تصویر بالا به وسیله گوشی هوشمند و یا تبلت خود، به صفحه اینستاگرام مؤسسه گزینه دو وارد شوید.

[gozine2.ir](https://www.instagram.com/gozine2.ir)

● مدیر واحد آموزش تخصصی: محمدرضا محمدهاشمی

● معاون تولید محتوا: علی الفتی

کارشناسان

طراحان

علی صادقی • نیکو دهقان

حسین شفیع زاده • ایمان اردستانی

مسئول درس: علی افضل زاده
دستیاران: عباس سعیدی - امین کبیریحسابان و
ریاضی پایه

محمد امین خدابخنده • امیروردی

سید محسن میراسلامی • علی نعمت

مسئول درس: سعید اکبرزاده
دستیار: هادی کاظم نژاد

هندسه

محمد امین خدابخنده • امیروردی

علیرضا شریف خطیبی • امیدرضا پورحسینی

مسئول درس: سعید اکبرزاده
دستیار: فرهاد فرزانیریاضیات
گسسته

پوپک مقدم

مهرداد کیوان • علی افضل زاده

مسئول درس: ایمان اردستانی
دستیاران: وحید جعفری - مهدی پوررضاییریاضی
تجربی

علی شهرابی فراهانی • وحید رباعی

مسئول درس: مهدی مجدآرا
دستیاران: حسین اسدزاده - مهدی پوررضاییریاضی
انسانیگروه
ریاضی

گروه ریاضی: ۱۴۰۳-۱۴۰۴

کارشناسان

طراحان

بتول خواجه پور • حسین ایمانی پور
مرئضی فرهنگدمحمد یازوکی • امیر کبیری راد
علی پناهی شایق • علیرضا اکبریور
بهرام میرحبیبی • مسعود حدادی
منصور کهن دل • فرزاد صادقیانمسئول درس: امیر کبیری راد
دستیار: پرسا کامکارزیست
شناسیسید علیرضا کشفیان • نرگس سادات حسینی
مریم کلی حسنلوعلی نعیمی • بهمن شاهمرادی
احمد رضوانی • احمد مصلاهی
جمال خم خاچیمسئول درس: منصور داودوندی
دستیار: ساناز دریگوندی

فیزیک

محمد احمدی • حسین ایمانی پور

ماشاءالله سلیمانی • بهنام ابراهیم پور
مهداد ملاصالحی • شهرام شاه پرویزی
محمدعلی توسلی فر • محمد احمدی

مسئول درس: شهرام شاه پرویزی

شیمی

فرزانه صاعدی • آنتیا هرطونیان
سهیلا مرادیفرزانه رجایی • حسن علی محمدی
فرزانه صاعدی

مسئول درس: شکبیا کریمی

زمین
شناسیگروه
علوم

گروه علوم: ۱۴۰۳-۱۴۰۴

کارشناسان

طراحان

سپهر سالار کیا • سید محمد صادق حسام زاده
محمدحسن مزروعی • عرشیا شریفیانمحمدرضا لمسه چی • ابوالفضل قاضی
عماد فیض آبادی • علی عطریمسئول درس: محمدرضا پیرو
دستیار: حسنا محمدیعلوم و
فنون ادبیهستی ناصح • نیایش غریبی
مهتاب شیرازیفروغ تیموریان • آریتا بیدقی
محمدزمان کبیر • علیرضا مختاریمسئول درس: الهام رضایی
دستیار: فاطمه صفریجامعه
شناسی

ثنا کاشیان • فاطمه انوری

سیده ضحی سکاکی • سیمین زاهدی
مهدی جاهدیمسئول درس: سیده ضحی سکاکی
دستیار: حسین اصفهانیروان
شناسیسارا حمزه • فاطمه نظری
مهتاب شیرازی • یکتا فضل الهی
صبا پهلوانکاظم غلامی • اسرافیل قربانپور
حمید جوهری مجد • پدرام علیمرادی
پویا رضاداد • عرفان جالبیزی

مسئول درس: پویا رضاداد

زبان
عربی

علی سلوکی • مهتاب شیرازی

بهرز یحیی • شهرام امامی
فاطمه نیتی • نگار مروتیمسئول درس: مهسا اصغری
دستیار: ثنا کاشیان

تاریخ

مهتاب شیرازی • علی سلوکی

بهرز یحیی • شهرام امامی
نگار مروتیمسئول درس: الناز گنج کار
دستیار: الهه ریاحی نسب

جغرافیا

مهدی مشایخی • مهتاب بیشه
محمدعلی مهرآبادی • فرار مختاری نژادحمید سودیان طهرانی • احمد خداداد حسینی
علی اکبر آخوندی • سعید رحیمیان
مهدی لاجوردیمسئول درس: سعید رحیمیان
دستیاران: منصور کاظم بیگی - محمدحسین خدامفلسفه
و منطق

کوثر رعدی

حسین خاکساری • میترا چینی ساز
طاهره کریمی • محمدرضا مبارکی
علی محسنی • آرش بدریمسئول درس: امیر محمدبیگی
دستیار: محمدرضا مبارکی

اقتصاد

گروه
انسانی

گروه انسانی: ۱۴۰۳-۱۴۰۴

ریاضیات

۱- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: ساده * ریاضی ۱ (درس ۳، فصل ۲)

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{ نکته}$$

با محاسبه مخرج مشترک، عبارت را ساده می‌کنیم:

$$A = \frac{\cos^2 \theta - (1 - \sin \theta)(1 + \sin \theta)}{\cos \theta (1 + \sin \theta)} = \frac{\cos^2 \theta - (1 - \sin^2 \theta)}{\cos \theta (1 + \sin \theta)} = \frac{\cos^2 \theta - \cos^2 \theta}{\cos \theta (1 + \sin \theta)} = 0$$

۲- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۱ (درس ۴، فصل ۴)

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x \text{ نکته}$$

ابتدا به کمک فرض داده شده، داریم:

$$\tan x + \cot x = 6 \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = 6 \Rightarrow \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = 6 \Rightarrow \frac{1}{\sin 2x} = 6 \Rightarrow \sin 2x = \frac{1}{6}$$

اکنون با استفاده از رابطه $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ داریم:

$$\sin^2 2x + \cos^2 2x = 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \cos^2 2x = 1 \Rightarrow \cos^2 2x = 1 - \frac{1}{36} \Rightarrow \cos^2 2x = \frac{35}{36} \Rightarrow \cos 2x = \pm \frac{\sqrt{35}}{6}$$

$$\begin{aligned} 0 < x < \frac{\pi}{4} &\Rightarrow 0 < 2x < \frac{\pi}{2} \\ \rightarrow \cos 2x &= \frac{\sqrt{35}}{6} \end{aligned}$$

۳- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۱ (درس ۴، فصل ۴)

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \text{ نکته}$$

$$\text{نکته: } \begin{cases} \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha \\ \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha \end{cases}$$

$$\text{نکته: } \begin{cases} \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \end{cases}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

با توجه به نکات، داریم:

$$\sin^2(\alpha + \beta) = 1 - \cos^2(\alpha + \beta) = 1 - \left(\frac{1}{6}\right)^2 = 1 - \frac{1}{36} = \frac{35}{36}$$

حال حاصل عبارت خواسته شده را به دست می‌آوریم:

۴- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضی ۱ (درس ۲، فصل ۲)

نکته: شیب هر خط برابر با تانژانت زاویه‌ای است که خط با جهت مثبت محور طول‌ها می‌سازد.

با توجه به شکل، زاویه خط ℓ با جهت مثبت محور طول‌ها 60° است؛ بنابراین طبق نکته، شیب خط ℓ برابر $m = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$ است.این خط از نقطه $(0, -3)$ می‌گذرد، پس معادله آن به صورت زیر است:

$$\ell: y = \sqrt{3}x - 3$$

اکنون محل تلاقی خط ℓ با محور طول‌ها را به دست می‌آوریم:

$$\xrightarrow{y=0} x = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

بنابراین، مساحت قسمت هاشورزده برابر است با:

$$S = \frac{OA \times OB}{2} = \frac{3 \times \sqrt{3}}{2}$$

۵- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضی ۱ (درس ۱، فصل ۲)

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin \hat{A}$$

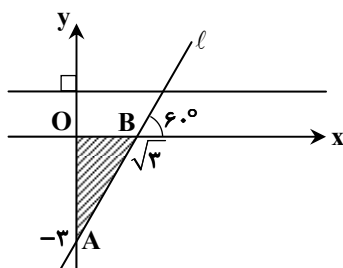
نکته ۱: در هر مثلث با معلوم بودن طول دو ضلع و اندازه زاویه بین آن‌ها داریم:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

نکته ۲:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABD} \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} S_{\triangle ACD}$$

با توجه به فرض سؤال داریم:



پس مطابق نکته ۱، می توان نوشت:

$$\frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times AC \times 3 \times \sin \alpha \Rightarrow \frac{1}{4} AB \cdot AC = \frac{3}{4} AC \cdot \sin \alpha \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3}{4} \sin \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

اکنون به کمک نکته ۲، مقدار $\cos \alpha$ را به دست می آوریم:

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (درس ۴، فصل ۴)

۶- پاسخ: گزینه ۳

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad \cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

ابتدا تساوی داده شده را ساده می کنیم:

$$\tan 3x - \tan x = \frac{1}{2 \cos 3x} \Rightarrow \frac{\sin 3x}{\cos 3x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{2 \cos 3x} \Rightarrow \frac{\sin 3x \cos x - \sin x \cos 3x}{\cos 3x \cos x} = \frac{1}{2 \cos 3x}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin(3x - x)}{\cos 3x \cos x} = \frac{1}{2 \cos 3x} \Rightarrow \frac{\sin 2x}{\cos x} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2 \sin x \cos x}{\cos x} = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \frac{1}{4}$$

$$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x = 1 - 2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 1 - 2 \times \frac{1}{16} = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

حال مقدار $\cos 2x$ را به دست می آوریم:

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (درس ۴، فصل ۴)

۷- پاسخ: گزینه ۴

$$\text{نکته ۱: اگر } \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}, \text{ آن گاه } \sin \alpha = \cos \beta \text{ و } \cos \alpha = \sin \beta$$

$$\text{نکته ۲: } \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad \cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

با توجه به نکته ۱، داریم:

$$A = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 10^\circ}}{\sin 20^\circ \sin 70^\circ} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 80^\circ}}{\sin 20^\circ \cos 20^\circ}$$

$$\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha, \quad 1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

از طرفی مطابق نکته ۲، می توان نوشت:

$$A = \frac{\sqrt{2 \sin^2 40^\circ}}{\frac{1}{2} \sin 40^\circ} = \frac{\sqrt{2} \sin 40^\circ}{\frac{1}{2} \sin 40^\circ} = 2\sqrt{2}$$

بنابراین:

▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۱ (درس ۴، فصل ۴)

۸- پاسخ: گزینه ۳

$$\text{نکته: } \begin{cases} \cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \\ \cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \end{cases}$$

نکته: $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

$$\text{نکته: } \begin{cases} \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha \\ \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha \end{cases}$$

راه حل اول:

از تساوی داده شده، داریم:

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{2}{4} \Rightarrow \sin x \cos \frac{\pi}{3} - \cos x \sin \frac{\pi}{3} = \frac{2}{4} \Rightarrow \frac{1}{2} \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x = \frac{2}{4} \Rightarrow \sin x - \sqrt{3} \cos x = \frac{2}{2}$$

طرفین تساوی را به توان ۲ می رسانیم:

$$\sin^2 x + 3 \cos^2 x - 2\sqrt{3} \sin x \cos x = \frac{4}{4} \Rightarrow \frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{3(1 + \cos 2x)}{2} - \sqrt{3} \sin 2x = \frac{4}{4} \Rightarrow \frac{1}{2} \cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x = \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow \cos \frac{\pi}{3} \cos 2x - \sin \frac{\pi}{3} \sin 2x = \frac{1}{8} \Rightarrow \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{8}$$

راه حل دوم:

$$\text{نکته: } \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x, \quad \cos(\pi - x) = -\cos x$$

$$\text{عبارت } \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \text{ را ساده کرده تا به } \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \text{ برسیم:}$$

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{6} - x\right) = \cos\left(\pi - \left(\frac{\pi}{6} + x\right)\right) = -\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \xrightarrow{\text{مطابق فرض}} \frac{2}{4}$$

$$\Rightarrow \cos^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{4}{16} \Rightarrow \frac{1 + \cos 2\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}{2} = \frac{4}{16} \Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{4}{16} \Rightarrow \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{8}$$

۹- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۱ (درس ۴، فصل ۴)

$$\text{نکته: } \begin{cases} \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \\ \sin 2x = 2 \sin x \cos x \end{cases}$$

با توجه به نکته، سمت چپ تساوی را ساده می‌کنیم:

$$\frac{\cos 2x}{1 + \sin 2x} = a \Rightarrow \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x} = a \Rightarrow \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{(\sin x + \cos x)^2} = a \Rightarrow \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} = a$$

$$\xrightarrow[\text{تقسیم بر } \cos x]{\text{صورت و مخرج}} \frac{1 - \tan x}{\tan x + 1} = a \Rightarrow 1 - \tan x = a + a \tan x \Rightarrow (a + 1) \tan x = 1 - a \Rightarrow \tan x = \frac{1 - a}{1 + a}$$

▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۲ (درس ۲، فصل ۱)

۱۰- پاسخ: گزینه ۱

نکته: باقی‌مانده $p(x)$ بر $ax + b$ برابر $p(-\frac{b}{a})$ است.برای یافتن باقی‌مانده $xf(x) + f(-x)$ بر $x - 1$ کافی است مقدار عبارت را به‌ازای $x = 1$ به‌دست آوریم، یعنی حاصل:

$$1 \times f(1) + f(-1) = f(1) + f(-1)$$

برای به‌دست آوردن مقادیر $f(1)$ و $f(-1)$ ، ابتدا به‌کمک تجزیه سمت چپ تساوی، ضابطه $f(x)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$x^{18} - 1 = (x^3)^6 - 1 = (x^3 - 1)(x^{15} + x^{12} + x^9 + x^6 + x^3 + 1) \Rightarrow f(x) = x^{15} + x^{12} + x^9 + x^6 + x^3 + 1 \Rightarrow \begin{cases} f(1) = 6 \\ f(-1) = 0 \end{cases}$$

$$f(1) + f(-1) = 6 + 0 = 6$$

بنابراین:

▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۲ (درس ۱، فصل ۲)

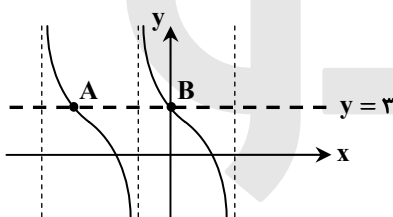
۱۱- پاسخ: گزینه ۳

مطابق نمودار، نقطه A محل تقاطع نمودار تابع با خط افقی است که از محل تقاطع نمودار با محور عرض‌ها (نقطه B) عبور می‌کند، پس برای به‌دست آوردن عرض نقطه A داریم:

$$y(0) = \sqrt{3} \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3 \Rightarrow y(0) = 3$$

$$y = \sqrt{3} \tan(\frac{\pi}{3} - 2x) \text{ از طرفی دوره تناوب } y = 3 \text{ برابر } A \text{ برابر } y = 3 \text{ است.}$$

$$\text{برابر } T = \frac{\pi}{2} \text{ است، پس طول نقطه } A \text{ برابر است با طول نقطه } B \text{ منهای } \frac{\pi}{2} \text{ که برابر } -\frac{\pi}{2}$$

می‌شود؛ بنابراین مختصات این نقطه به‌صورت $A(-\frac{\pi}{2}, 3)$ است.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (درس ۱، فصل ۲)

۱۲- پاسخ: گزینه ۴

$$\text{نکته: } 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

$$AT = \tan \theta = \tan(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cot \alpha \text{ در شکل روبه‌رو } AT = \tan \theta \text{ است، پس می‌توان نوشت:}$$

برای استفاده از نکته، به مقدار $\sin^2 \alpha$ نیاز داریم:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha + \frac{1}{9} = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{8}{9}$$

$$1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \Rightarrow 1 + AT^2 = \frac{1}{\frac{8}{9}} = \frac{9}{8} \Rightarrow AT^2 = \frac{1}{8} \Rightarrow AT = \frac{1}{\sqrt{8}}$$

حال به‌کمک نکته داریم:

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (درس ۲، فصل ۲)

۱۳- پاسخ: گزینه ۳

$$\text{نکته: } \cos x = \cos \alpha \Rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{نکته: } \begin{cases} \sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b \\ \cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b \end{cases}$$

معادله را به‌کمک نکته ساده می‌کنیم:

$$(\sin x \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \sin \frac{\pi}{4}) + (\cos x \cos \frac{\pi}{4} - \sin x \sin \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \cos 2x$$

$$\Rightarrow 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x = \sqrt{2} \cos 2x \Rightarrow \cos 2x = \cos x \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + x \Rightarrow x = 2k\pi \\ 2x = 2k\pi - x \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

جواب‌های دسته دوم، شامل دسته اول نیز می‌باشد و گزینه ۳ پاسخ است.

۱۴- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (درس ۱، فصل ۲)

نکته: در توابع به فرم $y = a \sin bx + c$ و $y = a \cos bx + c$ مقدار مینیمم برابر $-|a| + c$ ، مقدار ماکزیمم برابر $|a| + c$ و دوره تناوب به صورت $T = \frac{2\pi}{|b|}$ است.

نکته: $\cos(-x) = \cos x$

با توجه به نمودار، دوره تناوب تابع برابر $\frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \pi$ است، پس مطابق نکته، داریم:

با توجه به نکته دوم، مقدار b مثبت یا منفی باشد، فرقی ندارد. با فرض $b = 2$ داریم:

$$f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 0 \Rightarrow c + a \cos\left(-\frac{2\pi}{6}\right) = 0 \Rightarrow c = -\frac{a}{2} (*)$$

از طرفی چون شروع نمودار در مبدأ از قسمت منفی محور عرض‌ها است و تابع انتقال افقی ندارد، پس $a < 0$ و چون بیشترین مقدار تابع ۳

$$|a| + c = 3 \xrightarrow{a < 0} -a + c = 3 \xrightarrow{(*)} -a - \frac{a}{2} = 3 \Rightarrow -\frac{3a}{2} = 3 \Rightarrow a = -2 \Rightarrow c = 1$$

است، داریم:

$$ac + |b| = -2 + 2 = 0$$

بنابراین:

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (درس ۱، فصل ۲)

۱۵- پاسخ: گزینه ۳

نکته: دامنه تابع $y = \tan x$ عبارت است از:

با توجه به نکته، دامنه تابع داده شده برابر است با:

$$f(x) = \tan \frac{\pi x}{6} \Rightarrow \frac{\pi x}{6} \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{x}{6} \neq k + \frac{1}{2} \Rightarrow x \neq 6k + 3 \quad (k \in \mathbb{Z}) \xrightarrow{1 \leq x < 30} x \neq 3, 9, 15, 21, 27$$

یعنی ۲۴ عدد طبیعی در بازه $[1, 30)$ عضو دامنه f است.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (درس ۲، فصل ۲)

۱۶- پاسخ: گزینه ۴

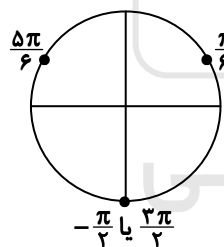
$$\text{نکته: } \sin x = \sin \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

معادله را ساده و حل می‌کنیم:

$$2\cos^2 x - \sin x = 1 \Rightarrow 2(1 - \sin^2 x) - \sin x = 1 \Rightarrow 2 - 2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0 \Rightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow (2\sin x - 1)(\sin x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6} \\ \sin x = -1 = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \\ x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

اگر نقاط به دست آمده را روی دایره مثلثاتی نمایش دهیم، داریم:



$$\Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۲ (درس ۲، فصل ۱)

۱۷- پاسخ: گزینه ۳

نکته: باقی‌مانده تقسیم $p(x)$ بر $ax + b$ برابر $p\left(-\frac{b}{a}\right)$ است.باقی‌مانده f بر $x - 1$ و $x + 2$ به ترتیب -2 و 1 است، پس:

$$f(1) = -2$$

$$f(-2) = 1$$

برای یافتن باقی‌مانده $(f \circ f)(x)$ بر چندجمله‌ای درجه دوم $x^2 + x - 2$ داریم:

$$(f \circ f)(x) = (x^2 + x - 2)q(x) + \underbrace{\alpha x + \beta}_{\text{باقی‌مانده}} \Rightarrow (f \circ f)(x) = (x - 1)(x + 2)q(x) + \alpha x + \beta$$

$$x = 1 \Rightarrow f \circ f(1) = \alpha + \beta \Rightarrow f(f(1)) = \alpha + \beta \Rightarrow \alpha + \beta = 1$$

حال مقادیر ۱ و -2 را قرار می‌دهیم:

$$x = -2 \Rightarrow f \circ f(-2) = -2\alpha + \beta \Rightarrow f(f(-2)) = -2\alpha + \beta \Rightarrow -2\alpha + \beta = -2$$

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow r(x) = x$$

بنابراین:

▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۲ (درس ۱، فصل ۲)

۱۸- پاسخ: گزینه ۲

نکته:

۱) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

۲) $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$

نکته: توابع $y = a\sin bx + c$ و $y = a\cos bx + c$ دارای مقدار ماکزیمم $|a| + c$ و مقدار مینیمم $-|a| + c$ و دوره تناوب $\frac{2\pi}{|b|}$ است.

ابتدا ضابطه تابع f را ساده می کنیم:

$$f(x) = 1 + a\sin^2 bx \cos^2 bx = 1 + \frac{a}{4}\sin^2 2bx = 1 + \frac{a}{4}(1 - \cos 4bx) = 1 + \frac{a}{4} - \frac{a}{4}\cos 4bx$$

مطابق نمودار، بیشترین مقدار تابع برابر ۳ است. از طرفی چون در سمت راست $x = 0$ تابع صعودی است، مقدار $a > 0$ است، پس:

$$\max = 3 \Rightarrow 1 + \frac{a}{4} + \frac{a}{4} = 3 \Rightarrow a = 4$$

با توجه به نمودار، دوره تناوب تابع برابر 2π است، پس داریم:

$$\frac{2\pi}{4b} = 2\pi \Rightarrow 4b = 1 \Rightarrow 4b = \pm 1 \Rightarrow b = \pm \frac{1}{4}$$

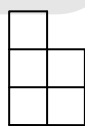
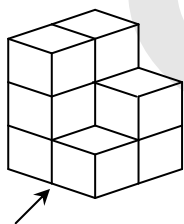
بنابراین:

$$ab^2 = 4 \times (\pm \frac{1}{4})^2 = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

▲ مشخصات سؤال: ساده * هندسه ۱ (درس ۲، فصل ۴)

۱۹- پاسخ: گزینه ۳

نکته: در تفکر تجسمی، نمایی از جسم را که مورد نیاز است، بر یک صفحه تصویر می کنیم. آن چه مشاهده می شود، نمای مورد نظر است. نمای چپ شکل داده شده، به صورت زیر است:



بنابراین گزینه ۳ پاسخ است.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۱ (درس ۱، فصل ۴)

۲۰- پاسخ: گزینه ۳

چون AB عمود بر صفحه P است، پس بر همه خطوط صفحه P عمود است، پس: $AB \perp d$ همچنین BC عمود است؛ بنابراین d هم بر BC و هم بر AB از مثلث ABC عمود است و در نتیجه بر صفحه ABC عمود می شود؛ بنابراین خط d بر تمام خطوط صفحه ABC عمود است. در نتیجه زاویه خط d با AC نیز 90° است.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۱ (درس ۲، فصل ۴)

۲۱- پاسخ: گزینه ۳

نکته: شکلی که از بر خورد یک صفحه به یک جسم هندسی حاصل می شود، سطح مقطع آن نامیده می شود. در هرم های منتظم، تصویر رأس هرم بر قاعده، همواره بر مرکز ثقل قاعده منطبق می شود؛ بنابراین در شکل روبه رو، نقطه H نقطه همرسی میانه های قاعده است و با توجه به اینکه قاعده، مثلث متساوی الاضلاع است، داریم:

$$BH = \frac{2}{3}BC = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \sqrt{6} = \sqrt{2}$$

اکنون در مثلث قائم الزاویه ABH طبق قضیه فیثاغورس داریم:

$$AH = \sqrt{AB^2 - HB^2} = \sqrt{6 - 2} = 2$$

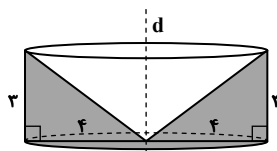
$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AH \times BC = \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{6} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

بنابراین:

▲ مشخصات سؤال: دشوار * هندسه ۱ (درس ۲، فصل ۴)

۲۲- پاسخ: گزینه ۳

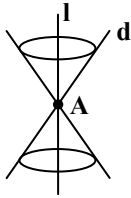
برای محاسبه حجم ایجاد شده باید حجم یک مخروط را از حجم یک استوانه کم کنیم. فرض کنیم V_2 حجم استوانه ای به شعاع قاعده ۴ و ارتفاع ۳ و V_1 حجم مخروطی با همان شعاع قاعده و همان ارتفاع باشد. بنابراین:



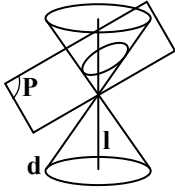
$$V_2 - V_1 = \pi r^2 h - \frac{1}{3}\pi r^2 h = \pi \times 4^2 \times 3 - \frac{1}{3}\pi \times 4^2 \times 3 = 48\pi - 16\pi = 32\pi$$

۲۳- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: ساده * هندسه ۳ (درس ۱، فصل ۲)



نکته: دو خط l و d در نقطه A متقاطع‌اند (l و d بر هم عمود نیستند). سطح حاصل از دوران خط d حول خط l را یک سطح مخروطی می‌نامیم. خط d را مولد، خط l را محور و نقطه A را رأس سطح مخروطی می‌نامند.



با توجه به شکل روبه‌رو، فصل مشترک صفحه P با سطح مخروطی در حالتی که صفحه P بر محور l عمود نباشد و با مولد d نیز موازی نباشد و تنها یکی از دو نیمه مخروط را قطع کند، یک بیضی است.

۲۴- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۳ (درس ۲، فصل ۱)

راه حل اول:

$$\text{اولاً } |A| = -a - 2 \quad \text{ثانیاً از آنجایی که: } |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} \text{ خواهیم داشت:}$$

$$2(-a-2) + \frac{1}{-a-2} = 3 \Rightarrow 2(-a-2)^2 + 1 = 3(-a-2) \Rightarrow 2(a^2 + 4 + 4a) + 1 = -3a - 6$$

$$\Rightarrow 2a^2 + 8 + 8a + 1 = -3a - 6 \Rightarrow 2a^2 + 11a + 15 = 0 \xrightarrow{\Delta > 0} \text{مجموع مقادیر } a = -\frac{11}{2}$$

توجه کنید $a = -2$ ریشه معادله فوق نیست که $|A| = 0$ شود، پس هر دو ریشه قابل قبول و مجموع شان $-\frac{11}{2}$ است.

راه حل دوم:

$$\text{با توجه به رابطه } |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}, \text{ داریم:}$$

$$2|A| + |A^{-1}| = 3 \Rightarrow 2|A| + \frac{1}{|A|} = 3 \xrightarrow{\times |A|} 2|A|^2 + 1 = 3|A| \Rightarrow 2|A|^2 - 3|A| + 1 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{مجموع ضرایب} = 0} \begin{cases} |A| = 1 \Rightarrow -a - 2 = 1 \Rightarrow a = -3 \\ |A| = \frac{1}{2} \Rightarrow -a - 2 = \frac{1}{2} \Rightarrow a = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

$$-3 - \frac{5}{2} = -\frac{11}{2}$$

مجموع مقادیر ممکن برای a برابر است با:

۲۵- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۳ (درس ۲، فصل ۱)

نکته: سه حالت زیر را برای دستگاه $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ می‌توان در نظر گرفت:

(الف) اگر $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ ، در این صورت دو خط متقاطع‌اند و دستگاه یک جواب یکتا دارد.

(ب) اگر $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ ، در این صورت دو خط موازی‌اند و یکی از دو حالت زیر می‌تواند رخ دهد:

(۱) $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ ، در این حالت دو خط هیچ نقطه اشتراکی ندارند، لذا دستگاه هیچ جوابی ندارد.

(۲) $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ در این حالت دو خط روی یکدیگر واقع‌اند یا به عبارتی هر دو معادله یک خط را نشان می‌دهند، لذا دستگاه تعداد بی‌شمار جواب دارد و هر نقطه‌ای که در یکی از معادلات صدق کند، در دیگری هم صدق می‌کند.

طبق نکته فوق، داریم:

$$\frac{m}{2} = \frac{1}{m-1} \neq \frac{-3}{6} \Rightarrow \frac{m}{2} = \frac{1}{m-1} \Rightarrow m^2 - m - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -1 \end{cases}$$

$$m = 2 \Rightarrow \frac{2}{2} = \frac{1}{1} \neq \frac{-3}{6} \quad \checkmark$$

$$m = -1 \Rightarrow \frac{-1}{2} = \frac{1}{-2} = \frac{-3}{6} \quad \times$$

حال مقادیر فوق را امتحان می‌کنیم:

پس فقط $m = 2$ قابل قبول است.

(الف)

$$\frac{ax + by = c}{a'x + b'y = c'}$$

(۱)

$$\frac{ax + by = c}{a'x + b'y = c'}$$

(۲)

$$\frac{ax + by = c}{a'x + b'y = c'}$$

۲۶- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۳ (درس ۲، فصل ۱)

نکته: اگر A ماتریسی مربعی از مرتبه n باشد، $(1 \leq n \leq 3)$ در این صورت دترمینان ماتریس A را با نماد $\det(A) = |A|$ نمایش می‌دهیم و داریم:

$$\text{I) } A = [k]_{1 \times 1} \Rightarrow |A| = k$$

$$\text{II) } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = ad - bc$$

$$\text{III) } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = a_{11} \times (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \times (-1)^{1+2} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \times (-1)^{1+3} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$\text{برای هر ماتریس } 3 \times 3 \text{ دلخواه می‌توان دترمینان } A \text{ را برحسب هر سطر یا ستونی به‌دست آورد که حاصل در همه حالت‌ها یکسان خواهد بود.}$$

$$|A| = a_{11} \times \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

برای هر ماتریس 3×3 دلخواه می‌توان دترمینان A را برحسب هر سطر یا ستونی به‌دست آورد که حاصل در همه حالت‌ها یکسان خواهد بود.

$$\text{نکته: } |kA_{n \times n}| = k^n |A_{n \times n}| \text{ و } |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}, |A^n| = |A|^n$$

ابتدا با بسط دترمینان A برحسب ستون اول، مقدار $|A|$ را می‌یابیم.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2(6 + 2) = 16$$

$$|2A^{-1}| = 2^3 |A^{-1}| = 8 \times \frac{1}{|A|} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

حال خواسته سؤال را به‌دست می‌آوریم:

۲۷- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۳ (درس ۲، فصل ۱)

نکته: در حالت کلی اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب و $B = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$ ماتریس مقادیر معلوم و $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ماتریس مجهولات دستگاه دو

معادله و دو مجهول $\begin{cases} ax + by = e_1 \\ cx + dy = e_2 \end{cases}$ باشند، در این صورت دستگاه مذکور به شکل معادله ماتریسی $AX = B$ نوشته شده و در صورتی که

ماتریس A وارون‌پذیر باشد یا $|A| \neq 0$ با ضرب A^{-1} از چپ در معادله فوق می‌توان مجهولات را به‌صورت زیر به‌دست آورد:

$$AX = B \Rightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}B \Rightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B \Rightarrow IX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

با توجه به اینکه در سؤال، وارون ماتریس ضرایب داده شده است، طبق نکته، داریم:

$$\begin{cases} ax + by = -1 \\ cx + dy = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -5 \end{cases} \Rightarrow 3y - 5x = 3(-5) - 5 \times 2 = -25$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۳ (درس ۲، فصل ۱)

۲۸- پاسخ: گزینه ۲

نکته: اگر A ماتریسی $n \times n$ و k عددی حقیقی باشد، آنگاه: $|kA| = k^n |A|$

نکته: برای دو ماتریس مربعی هم‌مرتبه A و B داریم:

$$|AB| = |A| \times |B|$$

با توجه به نکات داریم:

$$||A|A| = 256 \Rightarrow |A|^2 |A| = 256 \Rightarrow |A|^3 = 256 = 4^3 \Rightarrow |A| = \pm 4$$

و اینک خواهیم داشت:

$$\begin{cases} |A| = 4 \Rightarrow |A + |A|A| = |A + 4A| = |5A| = 5^3 |A| = 4 \times 5^3 \\ |A| = -4 \Rightarrow |A + |A|A| = |A - 4A| = |-3A| = (-3)^3 |A| = -3^3 \times (-4) = 4 \times 3^3 \end{cases}$$

عدد 4×5^3 در گزینه‌ها وجود دارد، بنابراین گزینه ۲ پاسخ است.

۲۹- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: دشوار * هندسه ۳ (درس ۲، فصل ۱)

نکته: اگر A و B دو ماتریس مربعی هم‌مرتبه باشند، داریم:

$$|AB| = |A||B|$$

نکته: اگر A یک ماتریس وارون‌پذیر باشد، داریم:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I, \quad |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

با استفاده از نکات بالا داریم:

$$|AB^{-1} + I| = |AB^{-1} + BB^{-1}| = |(A+B)B^{-1}| = |A+B||B^{-1}| = \frac{|A+B|}{|B|} \stackrel{\text{طبق فرض}}{=} \frac{3|B|}{|B|} = 3$$

۳۰- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: ساده * ریاضیات گسسته (درس ۲، فصل ۱)

نکته: اگر a و b اعداد صحیح باشند، داریم:

$$\begin{cases} a|b \Rightarrow (a,b) = |a| \\ a|b \Rightarrow [a,b] = |b| \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} 2a^2 | 4a^2 &\Rightarrow [2a^2, 4a^2] = |4a^2| \\ a | a^3 &\Rightarrow (a, a^3) = |a| \end{aligned} \right\} \Rightarrow ([2a^2, 4a^2], (a, a^3)) = (|4a^2|, |a|)$$

با توجه به نکته داریم:

$$|a| |4a^2| \Rightarrow (|a|, |4a^2|) = |a|$$

۳۱- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: ساده * ریاضیات گسسته (درس ۲، فصل ۱)

نکته (قضیه تقسیم): اگر a عددی صحیح و b عددی طبیعی باشد در این صورت، اعدادی صحیح و منحصر به فرد مانند q و r یافت می‌شوند به‌قسمی که $a = bq + r$ و $0 \leq r < b$.

با استفاده از نکته فوق، داریم:

$$a = 25 \times q + q^2; \quad 0 \leq q^2 < 25$$

چون a عددی طبیعی است، پس q هم عددی طبیعی است و داریم:

$$0 \leq q^2 < 25 \Rightarrow 0 \leq q \leq 2 \xrightarrow{q \in \mathbb{N}} q = 1 \text{ یا } 2 \Rightarrow \begin{cases} q = 1 \Rightarrow a = 26 \\ q = 2 \Rightarrow a = 58 \end{cases}$$

بنابراین دو مقدار برای a وجود دارد.

۳۲- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (درس ۲، فصل ۱)

نکته: اگر a عددی فرد باشد، آنگاه:

$$a^2 = 8k + 1$$

نکته: اگر $a|b$ و b عددی فرد باشد، آنگاه a هم عددی فرد است.

$$\begin{cases} a | 15^{100} \Rightarrow a^2 = 8k + 1 \Rightarrow a \text{ عددی فرد است} \\ b | 19^{100} \Rightarrow b^2 = 8k' + 1 \Rightarrow b \text{ عددی فرد است} \end{cases}$$

با استفاده از نکات بالا داریم:

$$a^2 + b^2 + 2 = 8k + 1 + 8k' + 1 + 2 = 8(k + k') + 4 = 8q + 4 \Rightarrow \text{باقی‌مانده} = 4$$

بنابراین:

▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (درس ۲، فصل ۱)

۳۳- پاسخ: گزینه ۳

نکته (قضیه تقسیم): اگر a عددی صحیح و b عددی طبیعی باشد در این صورت، اعدادی صحیح و منحصر به فرد مانند q و r یافت می‌شوند به‌قسمی که $a = bq + r$ و $0 \leq r < b$.

طبق نکته و فرض سؤال، در رابطه تقسیم $a = bq + r$ داریم:

$$\left. \begin{aligned} a + 31 = (b + 3)q + r - 5 &\Rightarrow a + 31 = bq + 3q + r - 5 = bq + r + 3q - 5 \\ a = bq + r &\Rightarrow bq + r + 31 = bq + r + 3q - 5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow bq + r + 31 = bq + r + 3q - 5$$

$$\Rightarrow 31 = 3q - 5 \Rightarrow q = \frac{36}{3} = 12$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (درس ۲، فصل ۱)

۳۴- پاسخ: گزینه ۳

نکته: اعداد صحیح در پیمانه ۴ به‌صورت $4k$ یا $4k + 1$ یا $4k + 2$ یا $4k + 3$ هستند که مجموعه $\mathbb{Z}$ را به ۴ زیرمجموعه افراز می‌کنند.از میان ۴ افراز به پیمانه ۴، فقط اعداد به‌صورت $4k + 2$ زوج هستند؛ ولی مضرب ۴ نیستند. بنابراین داریم:

$$a = 4k + 2 \Rightarrow a^2 + 1 = (4k + 2)^2 + 1 = 16k^2 + 16k + 4 + 1 \Rightarrow a^2 + 1 = 16k^2 + 16k + 5 = 8(\underbrace{2k^2 + 2k}_q) + 5 = 8q + 5$$

پس باقی‌مانده تقسیم عدد $a^2 + 1$ بر ۸ برابر ۵ است.

۳۵- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (درس ۳، فصل ۱)

نکته: اگر بخواهیم طرفین یک رابطهٔ هم‌نهشتی را بر عددی تقسیم کنیم، باید پیمانهٔ آن هم‌نهشتی را بر ب.م.م آن عدد و پیمانه تقسیم کنیم:

$$\frac{m}{d} \quad ac \equiv bc, (c, m) = d \Rightarrow a \equiv b$$

با توجه به نکته بالا داریم:

$$a^2 \equiv 5a - 6 \Rightarrow a^2 - 5a + 6 \equiv 0 \Rightarrow (a-2)(a-3) \equiv 0 \xrightarrow{(a-2, m)=1} a-3 \equiv 0 \Rightarrow m \mid a-3$$

بنابراین گزینه ۱ پاسخ است. دقت کنید که گزینه‌های دیگر الزاماً درست نیستند.

۳۶- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (درس ۳، فصل ۱)

$$\text{نکته: } a \mid b \Rightarrow a^n \mid b^n \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\text{نکته: } a \mid b \Rightarrow ma \mid mb \quad (m \in \mathbb{Z})$$

$$\text{نکته: } a \equiv b \wedge c \equiv d \Rightarrow \begin{cases} a+c \equiv b+d \\ ac \equiv bd \end{cases}$$

با استفاده از نکات بالا داریم:

$$3^4 \equiv -1 \xrightarrow{\text{به توان ۱۲۸}} (3^4)^{128} \equiv 1 \Rightarrow 3^{512} \equiv 1 \xrightarrow{\times 3} 3^{513} \equiv 3$$

$$42! = 42 \times 41 \times \dots \times 2 \times 1 = 42k \equiv 0 \pmod{42}$$

بنابراین:

$$3^{513} + 42! \equiv 3 + 0 = 3$$

۳۷- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (درس ۳، فصل ۱)

نکته: اگر بخواهیم دو طرف یک رابطهٔ هم‌نهشتی را بر عددی تقسیم کنیم، باید پیمانهٔ آن هم‌نهشتی را بر ب.م.م آن عدد و پیمانه تقسیم کنیم.

$$\frac{m}{d} \quad ac \equiv bc, (c, m) = d \Rightarrow a \equiv b$$

با استفاده از نکته بالا، هر یک از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

$$\text{گزینه ۱: } 18a \equiv 24b \xrightarrow[(9,6)=3]{+6} 3a \equiv 4b$$

$$\text{گزینه ۲: } 3a \equiv 4b \Rightarrow 0 \equiv 4b \xrightarrow[(3,3)=1]{\div 4} b \equiv 0$$

$$\text{گزینه ۳: } 18a \equiv 24b \xrightarrow[(9,2)=1]{+2} 9a \equiv 12b$$

$$\text{گزینه ۴: } a=4 \text{ و } b=3; \begin{cases} 18a \equiv 24b \Rightarrow 72 \equiv 72 \\ a \not\equiv b \end{cases}$$

بنابراین گزینه ۴ پاسخ است.

۳۸- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (درس ۳، فصل ۱)

نکته: اگر بخواهیم دو طرف یک رابطهٔ هم‌نهشتی را بر عددی تقسیم کنیم، باید پیمانهٔ آن هم‌نهشتی را بر ب.م.م آن عدد و پیمانه تقسیم کنیم.

$$\frac{m}{d} \quad ac \equiv bc, (c, m) = d \Rightarrow a \equiv b$$

نکته: برای پیدا کردن باقی‌ماندهٔ تقسیم هر عدد بر ۱۱ کافی است ارقام آن عدد را از سمت راست یکی در میان مثبت و منفی بنویسیم و با هم جمع کنیم، سپس باقی‌ماندهٔ عدد به دست آمده را در پیمانهٔ ۱۱ محاسبه کنیم.

$$a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0 \equiv a_0 - a_1 + a_2 - \dots + (-1)^n a_n$$

طبق نکات فوق، داریم:

$$2a^3a^1a^1a^1 \equiv a^1 - 1 + a^1 - 3 + a^1 - 2 \equiv 0 \Rightarrow 3a^1 \equiv 6 \xrightarrow[(3,1)=1]{+3} a^1 \equiv 2 \xrightarrow{0 \leq a \leq 9} a = 2$$

$$2a^3a^1a^1a^1 = 222212 = 222 \times 10^3 + 212 \equiv 212$$

۳۹- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: دشوار * ریاضیات گسسته (درس ۲، فصل ۱)

راه حل اول:

نکته (قضیه تقسیم): اگر a عددی صحیح و b عددی طبیعی باشد در این صورت، اعدادی صحیح و منحصر به فرد مانند q و r یافت می شوند به قسمی که:

$$a = bq + r \text{ و } 0 \leq r < b$$

عدد مورد نظر را a می نامیم. طبق فرض داریم:

$$\begin{cases} a = 6q + 2 \xrightarrow{\times 9} 9a = 54q + 18 \quad (1) \\ a = 9q' + 5 \xrightarrow{\times 6} 6a = 54q' + 30 \quad (2) \end{cases} \xrightarrow{(1)-(2)} 3a = 54(q - q') - 12 \xrightarrow{+3} a = 18k - 4$$

$$\Rightarrow a = 18k - 18 + 18 - 4 = 18(k - 1) + 14 \Rightarrow a = 18k' + 14$$

راه حل دوم:

نکته: می توان به دو طرف یا یک طرف یک رابطه هم نهشتی هر مضربی از پیمانه را اضافه یا از آن کم کرد.

$$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow \begin{cases} a + mt \equiv b + mk \\ a - mt \equiv b - mk \end{cases}$$

$$\left. \begin{matrix} a \equiv b \pmod{m} \\ a \equiv b \pmod{n} \end{matrix} \right\} \Rightarrow a \equiv b \pmod{[m,n]}$$

$$\left. \begin{matrix} a \equiv 2 \pmod{6} \Rightarrow a \equiv 2 + 2 \times 6 \Rightarrow a \equiv 14 \pmod{6} \\ a \equiv 5 \pmod{9} \Rightarrow a \equiv 5 + 9 \Rightarrow a \equiv 14 \pmod{9} \end{matrix} \right\} \Rightarrow a \equiv 14 \pmod{[6,9]}$$

با استفاده از نکات فوق، داریم:

چون ک.م.م دو عدد ۶ و ۹ برابر ۱۸ است، داریم:

$$a \equiv 14 \pmod{18}$$

پس باقی مانده تقسیم a بر ۱۸ برابر ۱۴ است.

۴۰- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: دشوار * ریاضیات گسسته (درس ۲، فصل ۱)

نکته: اگر بخواهیم دو طرف یک رابطه هم نهشتی را بر عددی تقسیم کنیم، باید پیمانه آن هم نهشتی را بر ب.م.م آن عدد و پیمانه تقسیم کنیم.

$$ac \equiv bc, (c, m) = d \Rightarrow a \equiv b \pmod{\frac{m}{d}}$$

نکته: می توان به دو طرف یا یک طرف یک رابطه هم نهشتی هر مضربی از پیمانه را اضافه یا از آن کم کرد.

$$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow \begin{cases} a + mt \equiv b + mk \\ a - mt \equiv b - mk \end{cases}$$

نکته: هرگاه عددی دو عدد را بشمارد، آن گاه مجموع و تفاضل آن دو عدد را نیز می شمارد.

$$a | b \wedge a | c \Rightarrow a | b \pm c$$

نکته: اگر عدد a عدد b را بشمارد، آنگاه هر مضرب صحیح عدد b را نیز می شمارد؛ یعنی:

$$a | b \Rightarrow a | mb$$

فرض کنیم $d = (5n - 2, 7n + 3)$. در این صورت داریم:

$$\begin{cases} d | 5n - 2 \xrightarrow{\times 7} d | 35n - 14 \\ d | 7n + 3 \xrightarrow{\times 5} d | 35n + 15 \end{cases} \xrightarrow{-} d | 29 \Rightarrow d = 1 \text{ یا } 29$$

برای اینکه این دو عدد نسبت به هم اول نباشند، باید داشته باشیم $d = 29$. به ازای این مقدار داریم:

$$29 | 5n - 2 \Rightarrow 5n - 2 \equiv 0 \pmod{29} \Rightarrow 5n \equiv 2 \pmod{29} \Rightarrow 5n \equiv 2 + 29 \times 2 \pmod{29} \Rightarrow 5n \equiv 60 \pmod{29} \xrightarrow{+5} n \equiv 12 \pmod{29} \Rightarrow n = 29q + 12$$

به ازای $q = 0, 1, 2, 3$ ، عدد طبیعی n دورقمی می شود، پس ۴ جواب داریم.

فیزیک

۴۱- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۳ (فصل ۱)

جسم از لحظه رها شدن تا رسیدن به ارتفاع ۳۰ متری سطح زمین، ۶۰ متر سقوط کرده است.

$$v^2 = -2g\Delta y \Rightarrow v^2 = -2 \cdot (-60) \Rightarrow |v| = 20\sqrt{3} \frac{m}{s}$$

۴۲- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow y = -5t^2$$

$$y(t) - y(t-2s) = -30 \Rightarrow -5t^2 + 5(t-2)^2 = -30 \Rightarrow t^2 - (t-2)^2 = 6 \Rightarrow (t+t-2)(t-t+2) = 6$$

 $\Rightarrow t = 2/5s$ زمان کل سقوط

$$y = -5 \times (2/5)^2 = -31/25 \Rightarrow h = 31/25 m$$

۴۳- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۳ (فصل ۱)

مبدأ مکان را محل رها شدن سنگ‌ها در نظر می‌گیریم. ($y_0 = 0$). بنابراین:

$$y_1 = -\frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow -11/25 = -5t^2 \Rightarrow t = 1/5s$$

یعنی سنگ دوم ۱/۵ ثانیه پس از شروع حرکت سنگ اول، رها شده است و معادله حرکت آن به صورت $y_2 = -\frac{1}{2}g(t-1/5)^2$ خواهد بود.

$$y_2 - y_1 = 48/75 \Rightarrow -\frac{1}{2}g(t-1/5)^2 - (-\frac{1}{2}gt^2) = 48/75$$

$$\Rightarrow -5(t^2 - 2t + 2/25) + 5t^2 = 48/75 \Rightarrow 15t - 11/25 = 48/75 \Rightarrow t = 4s$$

۴۴- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل‌های ۱ و ۲)

شخص با سرعت ۷ به تشک برخورد می‌کند (چون ۲۰ متر سقوط آزاد کرده است). که برای حرکت بعدی، سرعت اولیه محسوب می‌گردد.

$$v^2 - v_0^2 = -2g \cdot \Delta y \Rightarrow v^2 - 0 = -2 \times 10 \times -20 \Rightarrow v = -20 \frac{m}{s}$$

$$v^2 - v_0'^2 = 2a \cdot \Delta x \Rightarrow 0 - 400 = 2a \times 4 \Rightarrow a = -50 \frac{m}{s^2}$$

اندازه شتاب $50 \frac{m}{s^2}$ و جهت آن رو به بالا است.

$$F_N - mg = ma \Rightarrow F_N - 400 = 40 \times 50 \Rightarrow F_N = 2400N$$

۴۵- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

در حالت اول: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + m\vec{g} = \vec{0}$ ، پس $|\vec{F}_1 + \vec{F}_2| = |m\vec{g}| = 50N$ و $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$ در خلاف جهت وزن جسم است.در حالت دوم: $|\vec{F}_1|$ و $|\vec{F}_2|$ هر کدام $\frac{3}{4}$ برابر شده است، پس $|\vec{F}_1 + \vec{F}_2|$ هم $\frac{3}{4}$ برابر شده است، پس $|\vec{F}_1 + \vec{F}_2| = \frac{3}{4} \times 50 = 75$ و جهت $(\vec{F}_1 + \vec{F}_2)$ نیز خلاف جهت $m\vec{g}$ است، پس:

$$F_{net} = 75 - 50 = 25N$$

$$F_{net} = ma \Rightarrow a = \frac{25}{5} = 5 \frac{m}{s^2}$$

۴۶- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

$$F_{net} = ma$$

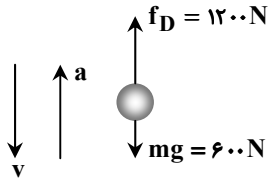
شتاب لحظه‌ای در تمام این مدت صفر است پس شتاب متوسط هم صفر است. F_{av} برابر آهنگ تغییر تکانه است پس تکانه تغییر نمی‌کند اما می‌تواند صفر نباشد.

۴۷- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

پس از باز شدن چتر، در ابتدا برآیند نیروها رو به بالا و جهت حرکت رو به پایین است و حرکت کندشونده است؛ پس: $a \cdot v < 0$

مقاومت هوا تابع تندی جسم است، چون تندی چتر باز پس از باز کردن چتر کاهش می‌یابد، مقاومت هوا نیز کاهش می‌یابد، بنابراین طبق قانون دوم نیوتون بزرگی شتاب کاهش می‌یابد.

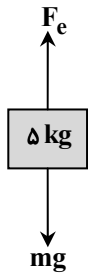


$$f_D - mg = ma \Rightarrow a = \frac{f_D}{m} - g$$

پس از مدتی اندازه نیروی مقاومت هوا برابر وزن چتر باز و چتر می‌شود و تندی چتر باز ثابت می‌ماند. (تندی حدی)

۴۸- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)



$$F_{net} = ma \Rightarrow mg - F_e = ma$$

$$50 - F_e = 5 \times 2 \Rightarrow F_e = 40 \text{ N}$$

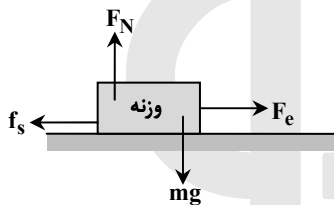
$$F_e = kx \Rightarrow 40 = 1000x \Rightarrow x = 0.04 \text{ m} = 4 \text{ cm}$$

فنر به وزنه نیروی رو به بالا وارد می‌کند (کشش) طبق قانون سوم نیوتون، وزنه هم فنر را می‌کشد و طول فنر از طول عادی آن بیشتر می‌شود.

$$L = L_0 + x = 80 + 4 = 84 \text{ cm}$$

۴۹- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۳ (فصل ۲)



$$F_{net}(x) = 0 \Rightarrow f_s = F_e$$

$$F_{net}(y) = 0 \Rightarrow F_N = mg$$

در آستانه لغزیدن یعنی نیروی اصطکاک وارد بر جسم، $f_{s,max}$ است. بنابراین:

$$f_{s,max} = \mu_s \cdot F_N$$

$$\mu_s \cdot F_N = kx \Rightarrow 100\mu_s = 400 \times \frac{6}{100} \Rightarrow \mu_s = 0.24$$

۵۰- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

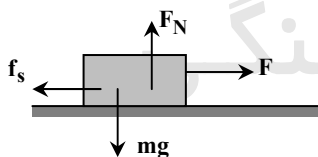
$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{2/5 - 0}{3} = \frac{5}{6} \text{ s}^{-2}$$

$$F_{net} = ma \Rightarrow T - mg = ma \Rightarrow T - (10 + 2) \times 10 = (10 + 2) \times \frac{5}{6} \Rightarrow T - 120 = 10 \Rightarrow T = 130 \text{ N}$$

۵۱- پاسخ: گزینه ۳

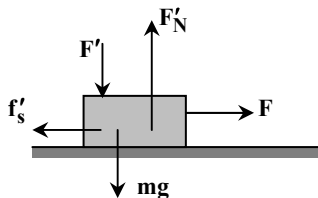
▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

حالت اول:



$$\begin{cases} mg = F_N \\ F = f_s \end{cases}$$

حالت دوم:



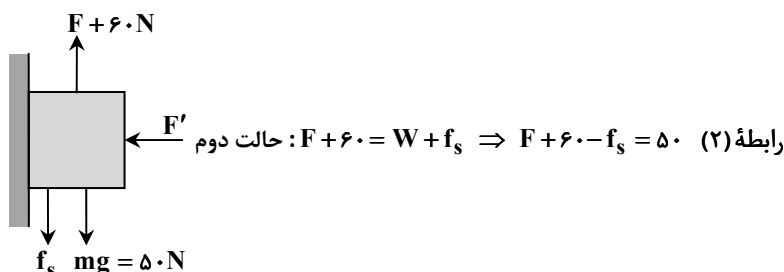
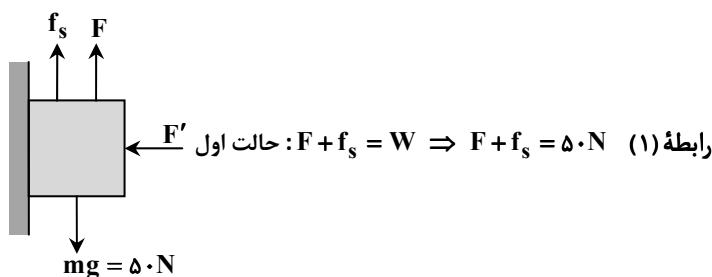
$$\begin{cases} F'_N = mg + F' \Rightarrow F'_N > F_N \\ F = f'_s \end{cases}$$

$$\begin{cases} R = \sqrt{F_N^2 + f_s^2} \\ R' = \sqrt{F'_N^2 + f_s'^2} \end{cases} \xrightarrow{F'_N > F_N, f_s = f'_s} R' > R$$

زاویه نیروی سطح با سطح، طبق رابطه $\tan \alpha = \frac{F_N}{f_s}$ به دست می‌آید. چون F'_N بزرگ‌تر از F_N است، زاویه نیروی سطح با سطح در حالت دوم بیشتر است. بنابراین زاویه نیروی سطح با نیروی F که مکمل α است، در حالت دوم کمتر می‌شود.

۵۲- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)



$$\xrightarrow{(۱) \text{ و } (۲)} \begin{cases} F + f_s = 50 \\ F - f_s = -10 \end{cases} \Rightarrow 2F = 40 \Rightarrow F = 20 \text{ N}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

۵۳- پاسخ: گزینه ۳

یک سطح بدون اصطکاک، تنها در راستای عمود بر سطح بر جسم نیرو وارد می‌کند، پس دیوار فقط نیروی $F_{N1} = 50 \text{ N}$ بر میله وارد می‌کند، اما کف اتاق اصطکاک دارد و دو نیروی $\vec{F}_N$ و $\vec{f}_s$ بر میله وارد می‌نماید.

$$F_{N2} - mg = 0 \Rightarrow F_{N2} = 100 \text{ N}$$

$$f_s - F_{N1} = 0 \Rightarrow f_s = 50 \text{ N}$$

$$R = \sqrt{f_s^2 + F_{N2}^2} = \sqrt{50^2 + 100^2} = 50\sqrt{5} \text{ N}$$

نیروی که کف اتاق بر میله وارد می‌کند:

$$f_s \leq \mu_s F_{N2} \Rightarrow 50 \leq 100\mu_s \Rightarrow 0.5 \leq \mu_s$$

میله نلغزیده است

توجه: حالت $f_{s,\max} = \mu_s F_N$ فقط برای وقتی است که میله در آستانه لغزیدن باشد.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

۵۴- پاسخ: گزینه ۲

جرم شخص همراه با کیف او ۸۰ کیلوگرم است، پس می‌توان گفت فردی با جرم ۸۰ کیلوگرم داخل آسانسور ایستاده است و کف آسانسور نیروی ۷۶۰ نیوتون بر پای او وارد می‌کند.

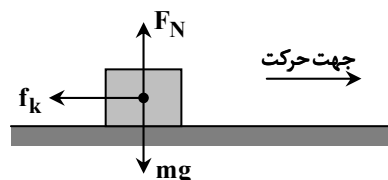
حرکت کندشونده روبه بالا است $\xrightarrow{\text{جهت شتاب رو به پایین است}}$ $F_N < mg$

$$mg - F_N = ma \Rightarrow 800 - 760 = 80a \Rightarrow a = 0.5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۳ (فصل ۲)

۵۵- پاسخ: گزینه ۲

وقتی یک جعبه روی یک سطح افقی به طرف جلو حرکت می‌کند؛ در ضمن حرکت، نیروهای وارد بر آن به شکل روبه‌رو است:



$$\begin{cases} F_N = mg \\ f_k = \mu_k F_N = \mu_k mg \\ F_{\text{net}} = ma \Rightarrow -f_k = ma \Rightarrow -\mu_k mg = ma \Rightarrow a = -\mu_k g \end{cases}$$

همان‌طور که دیده می‌شود، شتاب جعبه‌ها به جرم آن‌ها بستگی ندارد.

$$v_2^2 - v_1^2 = 2a\Delta x \Rightarrow 0 - v_1^2 = 2a \cdot \Delta x \Rightarrow |\Delta x| = \frac{v_1^2}{2|a|}$$

$$\left| \frac{\Delta x_B}{\Delta x_A} \right| = \left(\frac{v_B}{v_A} \right)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow |\Delta x_B| = \frac{1}{4} \times 6 = 1.5 \text{ m}$$

۵۶- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۳ (فصل ۲)

در شکل «الف»:

$$(F_{\text{net}})_y = 0 \Rightarrow F_N + F_y - mg = 0 \Rightarrow F_N = 100 - 40 = 60 \text{ N}$$

$$f_{s,\text{max}} = \mu_s \times F_N = 0.6 \times 60 = 36 \text{ N}$$

$$F_1 = 50 \text{ N} \Rightarrow F_1 > f_{s,\text{max}} \Rightarrow \text{جسم حرکت می کند.}$$

$$f_k = \mu_k \times F_N = 0.4 \times 60 = 24 \text{ N}$$

در شکل «ب»:

$$(F_{\text{net}})_y = 0 \Rightarrow F_y + mg - F_N = 0 \Rightarrow 40 + 100 - F_N = 0 \Rightarrow F_N = 140 \text{ N}$$

$$f_{s,\text{max}} = \mu_s \times F_N = 0.6 \times 140 = 84 \text{ N}$$

$$F_1 = 50 \text{ N} \Rightarrow F_1 < f_{s,\text{max}} \Rightarrow \text{جسم حرکت نمی کند.}$$

$$(F_{\text{net}})_x = 0 \Rightarrow F_1 - f_s = 0 \Rightarrow f_s = 50 \text{ N}$$

$$\frac{\text{بزرگی نیروی اصطکاک در شکل (ب)}}{\text{بزرگی نیروی اصطکاک در شکل (الف)}} = \frac{50}{24} = \frac{25}{12}$$

۵۷- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

$$\vec{F}_{\text{av}} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = m \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

$$\Delta \vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = 8\vec{i} - (-2\vec{i}) = 10\vec{i}$$

$$\vec{F}_{\text{av}} = 0.2 \times \frac{10\vec{i}}{6-4} = 1\vec{i} \Rightarrow F_{\text{av}} = 1 \text{ N}$$

۵۸- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

$$\frac{15 \text{ دور}}{1 \text{ دور}} = \frac{60 \text{ s}}{T} \Rightarrow T = 4 \text{ s}$$

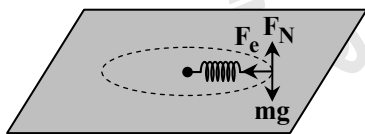
$$T = \frac{2\pi r}{v} \Rightarrow v = \frac{2\pi \times 3}{4} = \frac{3\pi}{2} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\begin{cases} \vec{v}_1 = -v \\ \vec{v}_2 = v \end{cases} \Rightarrow \Delta \vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$$

$$\Delta p = m\Delta v = m(v - (-v)) = 2mv = 2 \times 0.6 \times \frac{3\pi}{2} = \frac{9\pi}{5} \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

۵۹- پاسخ: گزینه ۱



$$F_{\text{فر}} = F_{\text{net}} = \frac{mv^2}{r} \text{ و } v = \frac{2\pi r}{T}$$

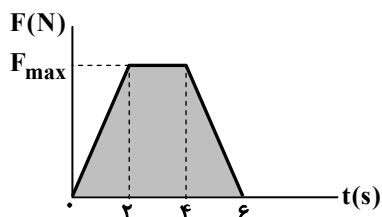
$$kx = m \times \frac{4\pi^2 r}{T^2} \text{ و } x = 0.25 - 0.2 = 0.05 \text{ m}$$

$$k \times \frac{5}{100} = \frac{0.2 \times 4 \times 10 \times \frac{25}{100}}{4} \Rightarrow k = 10 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

۶۰- پاسخ: گزینه ۴

مساحت سطح زیر نمودار «F-t» برابر با تغییر تکانه است.



$$\Delta p = p_2 - p_1 = 120 - (-80) = 200 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$$

نیروی خالص وارد بر جسم در لحظه $t = 3 \text{ s}$ با همان نیروی بیشینه (F_{max}) برابر است:

$$\Delta p = 200 = \frac{6+2}{2} F_{\text{max}} \Rightarrow F_{\text{max}} = \frac{400}{8} = 50 \text{ N}$$

$$F_{t=3\text{s}} = F_{\text{max}} = 50 \text{ N}$$

▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۳ (فصل ۲)

۶۱- پاسخ: گزینه ۴

$$K = \frac{1}{2} mv^2 \Rightarrow mv^2 = 2K = 200 \text{ J}$$

$$F_{\text{net}} = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow F_{\text{net}} = \frac{200}{0.5} = 400 \text{ N}$$

▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۱ (فصل ۵)

۶۲- پاسخ: گزینه ۳

کاری که روی دستگاه انجام می‌شود می‌تواند مثبت، منفی و یا صفر باشد.

▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۱ (فصل ۵)

۶۳- پاسخ: گزینه ۱

$$\left. \begin{array}{l} PV = nRT \\ P_B > P_A \\ V_B > V_A \end{array} \right\} \Rightarrow T_B > T_A$$

در این فرایند، دمای گاز زیاد شده و در نتیجه انرژی درونی آن هم زیاد شده است:

$$\Delta U > 0$$

این فرایند، فرایند انبساطی است یعنی گاز کار انجام می‌دهد ($W < 0$)؛ بنابراین داریم:

$$\Delta U = W + Q \xrightarrow{\Delta U > 0, W < 0} Q > 0 \text{ و } |Q| > |W|$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۵)

۶۴- پاسخ: گزینه ۲

گزینه ۳ نادرست $\Rightarrow T_b > T_a \Rightarrow \Delta U_{ab} = W_{ab} = +S_{ab} > 0 \Rightarrow Q_{ab} = 0 \Rightarrow ab \Rightarrow$ تراکم بی‌درروگزینه ۴ نادرست $\Rightarrow$ محیط روی گاز کار انجام می‌دهد $\Rightarrow W_{ac} > 0 \Rightarrow$ فرایند ac تراکمگزینه ۱ نادرست $\Rightarrow T_c > T_b, T_b > T_a \Rightarrow T_c > T_a \Rightarrow \Delta U_{ac} > 0 \Rightarrow$ پس پاسخ گزینه ۲ است. همچنین از آنجا که با توجه به شکل $S_{ac} < 2S_{ab}$ است، می‌توان نوشت:

$$\left. \begin{array}{l} W_{ac} = +S_{ac} \\ \Delta U_{ac} = 2\Delta U_{ab} = +2S_{ab} \end{array} \right\} \Rightarrow W_{ac} < \Delta U_{ac} = Q_{ac} + W_{ac} \Rightarrow Q_{ac} > 0 \text{ (گاز گرما می‌گیرد)}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۵)

۶۵- پاسخ: گزینه ۱

■ وسیله A: چون $W = 0$ است، پس قانون دوم به بیان یخچالی نقض شده است. از طرفی تساوی $|Q_H| = Q_L + W$ برقرار نیست؛ زیرا $120 \neq 110$ ؛ بنابراین قانون اول ترمودینامیک نیز نقض شده است.

■ وسیله B: چون $Q_L = 0$ است، پس قانون دوم به بیان ماشین گرمایی نقض شده است؛ اما قانون اول ترمودینامیک برقرار است؛ زیرا تساوی $Q_H = |Q_L| + |W|$ برقرار است.

■ وسیله C: تنها قانون اول ترمودینامیک نقض شده است، زیرا تساوی $|Q_H| = Q_L + W$ برقرار نیست: $120 \neq 140$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۵)

۶۶- پاسخ: گزینه ۲

نمودار « $P-V$ » فرایند هم‌دما به صورت شکل روبه‌رو است. مساحت سطح زیرنمودار ($|W|$) در تغییر حجم $3L$ به $2L$ بیشتر از $4L$ به $3L$ است و چون حجم کاهش یافته، کار انجام شده روی گاز مثبت است، پس:

$$W_2 > W_1 > 0$$

در فرایند هم‌دما، $\Delta U = 0$ است و چون W مثبت است، Q ها منفی هستند. طبق رابطه $\Delta U = Q + W$ ، داریم:

$$\Delta U_2 = \Delta U_1 \Rightarrow Q_2 + W_2 = Q_1 + W_1 \Rightarrow Q_2 - Q_1 = W_1 - W_2 < 0 \Rightarrow Q_2 < Q_1 < 0$$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۱ (فصل ۵)

۶۷- پاسخ: گزینه ۳

$$\left. \begin{array}{l} (PV)_A = 4 \times 10^5 \times 2 \times 10^{-3} = 800 \text{ J} \\ (PV)_D = 10^5 \times 8 \times 10^{-3} = 800 \text{ J} \end{array} \right\} \Rightarrow (PV)_A = (PV)_D \Rightarrow T_A = T_D$$

از آنجایی که دمای اولیه گاز (T_A) و دمای نهایی آن (T_D) یکسان است؛ پس تغییر انرژی درونی گاز در این مسیر صفر است:

$$W_{BC} = S_{BC} = \frac{10^5 + 4 \times 10^5}{2} \times (6 \times 10^{-3}) = 1500 \text{ J} \quad \text{رابطه (۱)}$$

$$\Delta U_{ABCD} = 0 \Rightarrow \Delta U_{AB} + \Delta U_{BC} + \Delta U_{CD} = 0$$

$$\Rightarrow 3600 + (Q_{BC} + W_{BC}) + 900 = 0 \xrightarrow{\text{رابطه (۱)}} (Q_{BC} + 1500) + 4500 = 0 \Rightarrow Q_{BC} = -6000 \text{ J}$$

گاز در فرایند BC، ۶۰۰۰ J گرما از دست داده است.

۶۸- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۵)

■ اگر 900 J - را به گرما نسبت بدهیم، باید بگوییم دستگاه 900 J گرما از دست داده یا محیط 900 J گرما گرفته است.
 ■ اگر 1200 J + را به کار نسبت بدهیم، باید بگوییم محیط روی دستگاه 1200 J کار انجام داده است.
 با این توصیف، گزینه ۴ درست است.

■ اگر 900 J - را به کار نسبت بدهیم، باید بگوییم دستگاه روی محیط 900 J کار انجام داده است.
 ■ اگر 1200 J + را به گرما نسبت بدهیم، باید بگوییم دستگاه از محیط 1200 J گرما گرفته یا محیط 1200 J گرما از دست داده است.
 که چنین تعبیری در گزینه‌ها دیده نمی‌شود.

۶۹- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۵)

انرژی درونی مقدار معینی گاز کامل فقط با دمای آن متناسب است؛ پس داریم:

$$\frac{U_a}{U_b} = \frac{T_1}{T_2} \Rightarrow \frac{1600}{U_b} = \frac{800}{600} \Rightarrow U_b = 1200\text{ J}$$

$$\Delta U_{ab} = 1200 - 1600 = -400\text{ J}$$

$$\Delta U_{ab} = W_{ab} \Rightarrow -400 = W_{ab} \Rightarrow |W_{ab}| = 400\text{ J}$$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۱ (فصل ۵)

۷۰- پاسخ: گزینه ۴

فرایندهای AB و CD هم حجم و فرایندهای BC و DA هم فشار هستند.

$$W_{\text{کل}} = W_{BC} + \cancel{W_{CD}} + W_{DA} + \cancel{W_{AB}} = W_{BC} + W_{DA}$$

$$W = -nR\Delta T \Rightarrow \begin{cases} W_{BC} = -3 \times 8 \times (T_C - T_B) = -24 \left(\frac{5}{2} \times 300 - 300 \right) = -24 \times \frac{3}{2} \times 300 = -10800\text{ J} \\ W_{DA} = -3 \times 8 \times (T_A - T_D) = -24 \left(400 - \frac{5}{2} \times 400 \right) = +24 \times 400 \times \frac{3}{2} = 14400\text{ J} \end{cases}$$

$$W_{\text{کل}} = 14400 - 10800 = 3600\text{ J} \Rightarrow Q_{\text{کل}} = -3600\text{ J}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۵)

۷۱- پاسخ: گزینه ۴

$$\left. \begin{aligned} \frac{T_B}{T_A} &= \frac{P_B V_B}{P_A V_A} \Rightarrow \frac{T_B}{T_A} = \frac{9 \times 2}{3 \times 4} = \frac{3}{2} \\ T_A &= 127 + 273 = 400\text{ K} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{T_B}{400} = \frac{3}{2} \Rightarrow T_B = 600\text{ K}$$

$$T_B = \theta_B + 273 \Rightarrow 600 = \theta_B + 273 \Rightarrow \theta_B = 600 - 273 = 327^\circ\text{C}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۵)

۷۲- پاسخ: گزینه ۴

هر چهار مورد درست است.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۵)

۷۳- پاسخ: گزینه ۳

$$\left. \begin{aligned} \Rightarrow V_A = V_B \text{ و } W_1 = W_2 = 0 \\ \Delta U = Q + W \end{aligned} \right\} \rightarrow Q_1 = Q_2$$

$$\Delta T_1 = \Delta T_2 \Rightarrow \Delta U_1 = \Delta U_2$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۵)

۷۴- پاسخ: گزینه ۳

$$Q_H = 0.2 \times 6 \times 10^4 = 1.2 \times 10^4\text{ J} = 12\text{ kJ}$$

ابتدا انرژی داده‌شده به ماشین توسط گرمای حاصل از سوخت را حساب می‌کنیم:

$$\eta = \frac{|W|}{Q_H} \Rightarrow |W| = 0.25 \times 12 = 3\text{ kJ}$$

با توجه به رابطه محاسبه بازده، برای محاسبه کار می‌توان نوشت:

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۵)

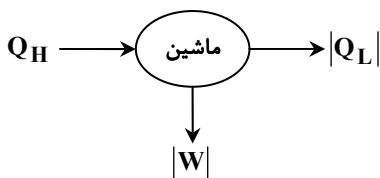
۷۵- پاسخ: گزینه ۲

گاز در فرایندهای AB و BC گرما می‌گیرد و در CD و DA گرما از دست می‌دهد. (چرا؟)

$$\Rightarrow \text{نمودار «P-V» ساعت‌گرد} \quad W_{\text{چرخه}} = -S = -10^5 \times 3 \times 10^{-2} = -300\text{ J}$$

$$\eta = \frac{|W|}{Q_H} \Rightarrow \frac{4}{10} = \frac{300}{Q_H} \Rightarrow Q_H = 750\text{ J} \Rightarrow Q_{ABC} = 750\text{ J}$$

$$|Q_{CDA}| = |Q_L| = Q_H - |W| = 750 - 300 = 450\text{ J}$$



شیمی

۷۶- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۳)

محلول ۲۰ ppm (۰/۰۰۲ درصد جرمی) یک ماده، از محلول ۰/۲ درصد همان ماده، رقیق تر است. بررسی عبارت‌های نادرست:

الف) حلال، جزئی از یک محلول است که حل‌شونده را در خود حل می‌کند و شمار مول بیشتری از دیگر اجزای مخلوط دارد.

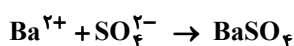
ب) درصد جرمی، شیوه بیان غلظتی است که جرم حل‌شونده را در جرم معینی از محلول نشان می‌دهد.

ت) اگر به ۵۰ میلی‌لیتر از محلول آبی ۱۰ درصد جرمی یک ماده، ۵۰ میلی‌لیتر آب خالص اضافه کنیم، غلظت آن ماده ۵ درصد جرمی نخواهد شد؛ زیرا در صورتی درصد جرمی با افزودن حلال خالص نصف می‌شود که جرم محلول ۲ برابر شده باشد، ولی از آنجایی که مطمئناً چگالی محلول و آب خالص با هم یکسان نیست، جرم ۵۰ میلی‌لیتر محلول با جرم ۵۰ میلی‌لیتر آب خالص نیز برابر نمی‌باشد.

۷۷- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۳)

$$\text{جرم حل‌شونده بر حسب گرم} = \text{جرم محلول (تن)} \times \text{ppm} = ۲۷ / ۴ \times ۵ = ۳۳۷ \text{ g Ba}^{۲+}$$



$$۳۳۷ \text{ g Ba}^{۲+} \times \frac{۱ \text{ mol Ba}^{۲+}}{۳۳۷ \text{ g Ba}^{۲+}} \times \frac{۱ \text{ mol SO}_4^{۲-}}{۱ \text{ mol Ba}^{۲+}} = ۱ \text{ mol SO}_4^{۲-} \quad \text{یا} \quad \frac{۳۳۷ \text{ g}}{۱ \times ۳۳۷ \text{ g Ba}^{۲+}} = \frac{x \text{ mol}}{۱ \text{ mol SO}_4^{۲-}} \Rightarrow x = ۱ \text{ mol}$$

۷۸- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۳)

راه حل اول:

گلوکومتر میزان گلوکز را بر حسب میلی‌گرم (g) در دسی لیتر (L) خون نشان می‌دهد.

$$\text{غلظت مولی} = \frac{۲۴۰ \times ۱۰^{-۳} \text{ g} \times \frac{۱ \text{ mol}}{۱۸۰ \text{ g}}}{۱۰^{-۱} \text{ L}} \approx ۰/۰۱۳ \text{ mol} \cdot \text{L}^{-۱}$$

راه حل دوم:

$$۱ \text{ L محلول} \times \frac{۲۴۰ \times ۱۰^{-۳} \text{ g گلوکز}}{۰/۱ \text{ L محلول}} \times \frac{۱ \text{ mol گلوکز}}{۱۸۰ \text{ g گلوکز}} \approx ۰/۰۱۳ \text{ mol گلوکز}$$

$$M = \frac{۰/۰۱۳ \text{ mol}}{۱ \text{ L}} = ۰/۰۱۳ \frac{\text{mol}}{\text{L}}$$

۷۹- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۳)

۴ ذره داریم پس $۴ \times ۰/۰۲ = ۰/۰۸ \text{ mol}$ حل‌شونده داریم. پس از اضافه کردن آب، حجم محلول به ۱۲۵ میلی‌لیتر (۰/۱۲۵ لیتر) می‌رسد.

$$\text{غلظت مولی} = \frac{\text{مول حل‌شونده}}{\text{حجم محلول}} = \frac{۰/۰۸ \text{ mol}}{۰/۱۲۵ \text{ L}} = ۰/۶۴ \frac{\text{mol}}{\text{L}}$$

۸۰- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۳)

$$\text{درصد جرمی} = \frac{\text{جرم حل‌شونده}}{\text{جرم محلول}} \times ۱۰۰$$

هر مول سدیم هیدروکسید، ۴۰ گرم جرم دارد؛ بنابراین:

$$(I) \quad \text{درصد جرمی حل‌شونده در محلول} = \frac{۲ \times ۴۰}{۲۲۰} \times ۱۰۰ = \frac{۴}{۱۱} \times ۱۰۰$$

وقتی ۴۰ گرم سدیم نیترات به ۷۰ گرم آب افزوده می‌شود، ۱۱۰ گرم محلول به وجود می‌آید؛ بنابراین:

$$(II) \quad \text{درصد جرمی حل‌شونده در محلول} = \frac{۴۰}{۴۰+۷۰} \times ۱۰۰ = \frac{۴}{۱۱} \times ۱۰۰ \Rightarrow \frac{\text{درصد جرمی حل‌شونده در محلول (I)}}{\text{درصد جرمی حل‌شونده در محلول (II)}} = \frac{\frac{۴ \times ۱۰۰}{۱۱}}{\frac{۴ \times ۱۰۰}{۱۱}} = ۱$$

۸۱- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۳)

با توجه به شیب و عرض از مبدأ بیشتر منحنی انحلال پذیری ماده B نسبت به ماده A، در دماهای بالای صفر درجه سلسیوس، گزینه ۴ درست است.

بررسی گزینه‌های نادرست:

گزینه ۱) برای استخراج فلز منیزیم از آب دریا، ابتدا آن را به ترکیب جامد و نامحلول در آب منیزیم هیدروکسید تبدیل، سپس آن را به منیزیم کلرید تبدیل می‌کنند.

گزینه ۲) اگر ۲ مول سدیم کلرید را در یک لیتر آب خالص حل کنیم، محلولی تهیه کرده‌ایم که غلظت مولی سدیم کلرید در آن کمتر از ۲ مول بر لیتر است؛ زیرا حجم محلول کمی بیشتر از یک لیتر خواهد شد.

گزینه ۳) انحلال پذیری، بیشترین مقدار یک ماده را نشان می‌دهد که در دمایی معین، در ۱۰۰ گرم حلال می‌تواند حل شود.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۳)

۸۲- پاسخ: گزینه ۲

$$\text{حجم سولفوریک اسید مورد نیاز} = 100 \text{ mL KOH محلول} \times \frac{1/12 \text{ g KOH محلول}}{1 \text{ mL KOH محلول}} \times \frac{56 \text{ g KOH}}{100 \text{ g KOH محلول}} \times \frac{1 \text{ mol KOH}}{56 \text{ g KOH}}$$

$$\times \frac{1 \text{ mol H}_2\text{SO}_4}{2 \text{ mol KOH}} \times \frac{1 \text{ L محلول H}_2\text{SO}_4}{1/4 \text{ mol H}_2\text{SO}_4} \times \frac{1000 \text{ mL}}{1 \text{ L}} = 400 \text{ mL}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۳)

۸۳- پاسخ: گزینه ۳

$$\text{mol NaNO}_3 = 0.05 \text{ L} \times \frac{0.8 \text{ mol}}{1 \text{ L}} = 0.04 \text{ mol} \Rightarrow 0.04 \text{ mol} \times \frac{85 \text{ g NaNO}_3}{1 \text{ mol NaNO}_3} = 3.4 \text{ g NaNO}_3$$

$$\text{mol KNO}_3 = 0.2 \text{ L} \times \frac{0.2 \text{ mol}}{1 \text{ L}} = 0.04 \text{ mol} \Rightarrow 0.04 \text{ mol} \times \frac{101 \text{ g KNO}_3}{1 \text{ mol KNO}_3} = 4.04 \text{ g KNO}_3$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۳)

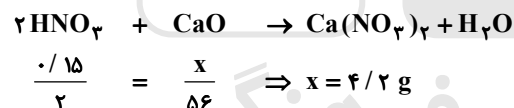
۸۴- پاسخ: گزینه ۴

راه حل اول:

$$\left. \begin{array}{l} 2 \times 0.1 = 0.2 : \text{مول اسید اولیه} \\ 0.15 = 0.5 \times 0.1 : \text{مول اسید باقی مانده} \end{array} \right\} \Rightarrow 0.15 = \text{مول اسید خنثی شده}$$

$$0.15 \text{ mol HNO}_3 \times \frac{1 \text{ mol CaO}}{2 \text{ mol HNO}_3} \times \frac{56 \text{ g CaO}}{1 \text{ mol CaO}} = 4.2 \text{ g}$$

راه حل دوم:



▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۳)

۸۵- پاسخ: گزینه ۴

انحلال پذیری NaNO_3 در 10°C برابر با $100 \text{ g H}_2\text{O} / 80 \text{ g}$ است، بنابراین در ۲۰۰ گرم آب 160 g نمک حل می‌شود و ۳۰ گرم نمک در ته ظرف ته‌نشین می‌شود.

▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۱ (فصل ۳)

۸۶- پاسخ: گزینه ۲

$$30^\circ\text{C} : \frac{60}{100+60} \times 100$$

$$10^\circ\text{C} : \frac{40}{100+40} \times 100$$

$$100 \left(\frac{60}{160} - \frac{40}{140} \right) = 8.93 : \text{اختلاف درصد جرمی}$$

(جرم محلول تأثیری در درصد جرمی ندارد.)

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۳)

۸۷- پاسخ: گزینه ۳

با توجه به اینکه انحلال پذیری مواد کم محلول بین ۰/۱ تا ۱ گرم است، پس تنها ماده کم محلول موجود در این جدول، کلسیم سولفات است. همچنین در این جدول، سه ماده محلول در آب (شکر، سدیم نیترات و سدیم کلرید) وجود دارد که در میان آن‌ها، تنها دو ماده (سدیم نیترات و سدیم کلرید) جزء ترکیب‌های یونی هستند.

۸۸- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۳)

$$S_A = S_B \Rightarrow 0.2\theta + 27 = -0.16\theta + 36 \Rightarrow 0.46\theta = 9 \Rightarrow \theta = \frac{9}{0.46} = \frac{900}{46} = \frac{900}{45} = 20$$

بنابراین در دمای حدود ۲۰ درجه سلسیوس، انحلال پذیری این دو نمک با هم برابر می شود.

بررسی سایر گزینه ها:

$$\theta = 50^\circ\text{C} \Rightarrow S_B = -0.16(50) + 36 = 28 \quad \text{گزینه ۱}$$

گزینه ۲) هرچه قدر مطلق شیب خط در معادله انحلال پذیری بیشتر باشد، تأثیر دما بر انحلال پذیری بیشتر است.

گزینه ۳) شیب خط در معادله انحلال پذیری نمک «A» مثبت است؛ یعنی با افزایش دما، انحلال پذیری این نمک افزایش می یابد، در حالی که شیب خط در معادله انحلال پذیری نمک «B» منفی است و با افزایش دما، انحلال پذیری این نمک کاهش می یابد؛ بنابراین نمک «A» در آب گرم و نمک «B» در آب سرد به مقدار بیشتری حل می شود.

۸۹- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۳)

برای محاسبه انحلال پذیری، به جرم حل شونده و جرم حلال در محلول سیر شده نیاز است:

$$\text{جرم آب در محلول سیر شده} = 264 - 64 = 200\text{g} \Rightarrow x = 64\text{g} \Rightarrow 12/8 \times 100 = 150 \Rightarrow \frac{x}{264 + 236} = \text{درصد جرمی}$$

$$\text{انحلال پذیری} = 100\text{g H}_2\text{O} \times \frac{64\text{g KNO}_3}{200\text{g H}_2\text{O}} = 32\text{g KNO}_3$$

۹۰- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)

$$\begin{aligned} \text{HA} \begin{cases} \text{mg} \\ \text{pH}_{\text{HA}} \\ a = \text{جرم مولی} \Rightarrow n_{\text{HA}} = \frac{m}{a} \end{cases} \quad \text{HB} \begin{cases} 1/5 \text{ mg} \\ \text{pH}_{\text{HB}} \\ 3a = \text{جرم مولی} \Rightarrow n_{\text{HB}} = \frac{1/5 m}{3a} \end{cases} \\ \text{pH}(\text{HA}) = \text{pH}(\text{HB}) \Rightarrow [\text{H}^+]_{\text{HA}} = [\text{H}^+]_{\text{HB}} \xrightarrow{[\text{H}^+] = M\alpha} \alpha_{\text{HA}} \times \frac{m/a}{1} = \alpha_{\text{HB}} \times \frac{1/5 m}{3a} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \alpha_{\text{HA}} = \frac{1}{3} \alpha_{\text{HB}} \Rightarrow \frac{\alpha_{\text{HA}}}{\alpha_{\text{HB}}} = \frac{1}{3}$$

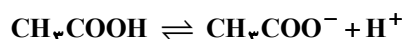
۹۱- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)

در دمای معین، ثابت یونش معیار مناسبی برای مقایسه قدرت دو اسید است. داده های سؤال نشان می دهند هیدروسیانیک اسید، اسید ضعیف تری از استیک اسید است و در شرایط یکسان، میزان یونش کمتری از استیک اسید دارد. تنها در غلظت بیشتر از هیدروسیانیک اسید، می تواند غلظت یون هیدرونیوم در محلول دو اسید برابر باشد.

۹۲- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)



$$K_a = \frac{[\text{H}^+]}{M - [\text{H}^+]} = \frac{10^{-3} \times 10^{-3}}{M - 10^{-3}} \Rightarrow 2 \times 10^{-5} \approx \frac{10^{-6}}{M} \Rightarrow M = 0.5 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$\text{g CH}_3\text{COOH} = \frac{500}{1000} \text{L} \times 0.5 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \times 60 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1} = 15 \text{ g}$$

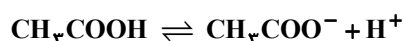
۹۳- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)

همه نمودارهای داده شده درست اند.

۹۴- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)



اتانویک اسید، یک اسید ضعیف است و به مقدار کمی یونیده می شود؛ بنابراین خواهیم داشت:

$$[\text{CH}_3\text{COOH}] > [\text{H}^+] = [\text{CH}_3\text{COO}^-] > [\text{OH}^-]$$

۹۵- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۳ (فصل ۱)

بررسی گزینه‌های نادرست:

گزینه ۱) با افزودن آب خالص به محلول اسید، محلول رقیق‌تر شده و به دلیل کاهش غلظت یون هیدرونیوم، pH محلول افزایش می‌یابد.

گزینه ۲) اگر غلظت یون هیدرونیوم در محلولی نصف ($\frac{1}{2}$ برابر) شود، pH آن محلول $\frac{0.3}{0.1}$ واحد افزایش می‌یابد.

گزینه ۳) گستره تغییر pH برای محلول‌های آبی در دمای اتاق از صفر تا ۱۴ است.

۹۶- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)

با توجه به اینکه ثابت یونش اسید HA عدد کوچکی است، می‌توان نوشت:

$$K_a \approx M\alpha^2 \Rightarrow 25 \times 10^{-6} = M \times (0.1)^2 \Rightarrow M = 25 \times 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$\text{جرم HA} = 25 \times 10^{-2} \frac{\text{mol}}{\text{L}} \times 2 \text{ L} \times \frac{20 \text{ g HA}}{1 \text{ mol HA}} = 10 \text{ g HA}$$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۱)

۹۷- پاسخ: گزینه ۴

$$\text{pH} = 1 \Rightarrow [\text{H}^+] = 0.1$$

$$\text{HNO}_3 \text{ مول اولیه} = 0.1 \times 0.1 = 0.01$$

$$\text{pH نهایی} = 0.3 \Rightarrow [\text{H}^+] = 10^{-0.3} = \frac{1}{10^{0.3}} \approx \frac{1}{2} = 0.5 \Rightarrow \text{مول نهایی} = 0.5 \times 0.1 = 0.05$$

$$\text{مول اضافه شده} = 0.05 - 0.01 = 0.04$$

$$0.04 \text{ mol HNO}_3 \times \frac{63 \text{ g HNO}_3}{1 \text{ mol HNO}_3} \times \frac{100 \text{ g محلول}}{70 \text{ g HNO}_3} = 3.6 \text{ g محلول}$$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۱)

۹۸- پاسخ: گزینه ۴

$$\text{A محلول: pH} = 14 \Rightarrow [\text{H}^+] = 10^{-14} \Rightarrow [\text{OH}^-] = 1 \Rightarrow M = 1 \Rightarrow \text{مول باز} = 0.2$$

$$\text{B محلول: pH} = 0.3 \Rightarrow [\text{H}^+] = 0.5 \Rightarrow M = 0.5 \Rightarrow \text{مول اسید} = 0.5 \times 0.3 = 0.15$$

$$\text{C محلول: pH} = 11 \Rightarrow [\text{OH}^-] = 10^{-3} \xrightarrow{K_b = \frac{[\text{OH}^-]^2}{M}} M = 0.1 \Rightarrow \text{مول باز} = 0.05$$

۳۰۰ میلی لیتر محلول C شامل ۰.۰۳ مول باز است. $\left\{ \begin{array}{l} \text{با اضافه کردن آن‌ها به هم، باز به طور کامل خنثی نمی‌شود.} \\ \text{۳۰۰ میلی محلول HCl با pH} = 3 \text{ شامل } 3 \times 10^{-4} \text{ مول اسید است.} \end{array} \right. \Leftarrow$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)

۹۹- پاسخ: گزینه ۱

$$\text{pH} = 0.15 \Rightarrow [\text{H}^+] = 10^{-0.15} = 10^{-1} \times 10^{0.15} = 0.7$$



$$\frac{0.7 \times 0.1}{1} = \frac{x}{22/4} \Rightarrow x = 0.7 \times 22/4 = 1/568 \text{ L}$$

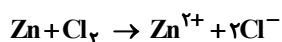
▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۳ (فصل ۱)

۱۰۰- پاسخ: گزینه ۲

با توجه به نمودار داده شده، غلظت یون هیدروکسید در محلول آمونیاک (10^{-3} مولار)، ۰.۰۱ برابر غلظت یون هیدرونیوم در محلول اسیدمعده (10^{-1} مولار) بوده و pH نمونه آب گازدار ($[\text{H}^+] = 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$) برابر با ۴ است.

▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۳ (فصل ۲)

۱۰۱- پاسخ: گزینه ۴

در واکنش روی با گاز کلر، اتم‌های کلر کاهش می‌یابند و Cl^- گونه کاهش یافته گاز کلر محسوب می‌شود.

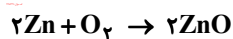
↓
گونه کاهش یافته گاز کلر

↓
گونه اکسایش یافته Zn

۱۰۲- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۳ (فصل ۲)

نافلزها اغلب اکسند اند نه همواره!

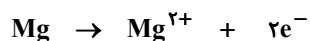
۱۰۳- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۳ (فصل ۲)



در این واکنش، Zn به Zn^{2+} اکسایش یافته و کاهنده است.

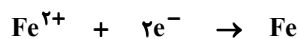
۱۰۴- پاسخ: گزینه ۱ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۲)

Mg^{2+} به محلول اضافه می شود و Fe^{2+} از محلول جدا می شود.



$$\frac{x}{24} = \frac{0.25}{2} \Rightarrow x = 3 \text{ g}$$

Mg^{2+} وارد محلول می شود.

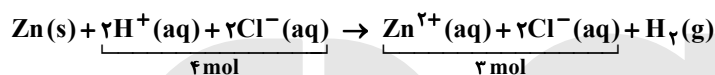
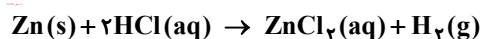


$$\frac{0.25}{2} = \frac{x'}{56} \Rightarrow x' = 7 \text{ g}$$

Fe^{2+} از محلول جدا می شود.

۴ گرم از جرم محلول کاسته می شود $\rightarrow -4 = -7 = 3$ تغییر جرم محلول

۱۰۵- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱، فصل ۲)



در این واکنش، فلز روی اکسایش یافته و کاهنده است و یون H^+ الکترون گرفته و نقش اکسند را ایفا می کند. با کاهش غلظت H^+ ، غلظت

OH^- و pH محلول افزایش می یابد. همچنین با توجه به کمتر شدن مجموع غلظت مولی یون ها، رسانایی الکتریکی محلول کمتر می شود.



مؤسسه آموزشی فرهنگی