

A

دفترچه پاسخ تشریحی

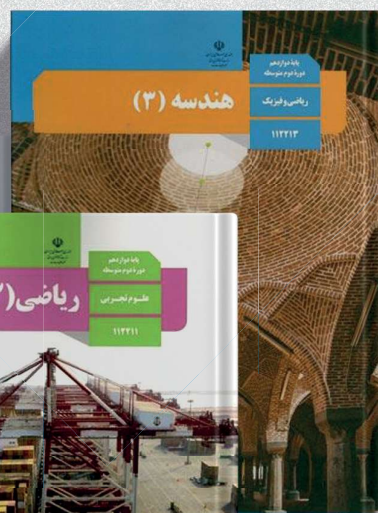
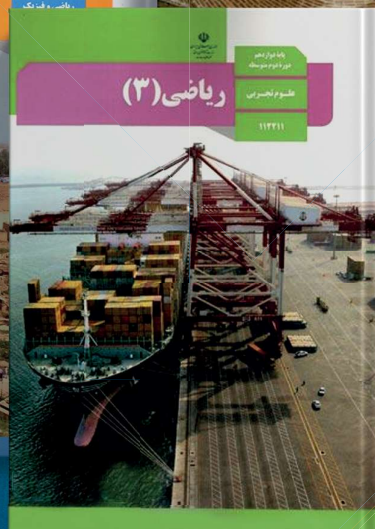
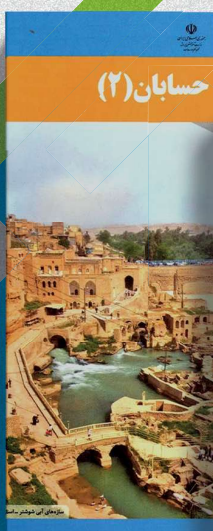
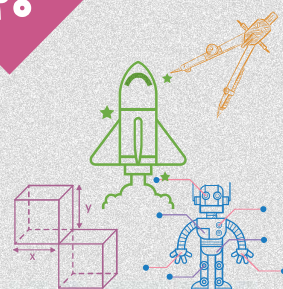
گروه آزمایشی علوم ریاضی

آزمون آزمایشی ۲۲ فروردین ۱۴۰۴

ویژه داوطلبان آزمون سراسری ۱۴۰۴

پایه
دوازدهم

مرحله
۲۰



تذکرات مهم ↓

➡ آزمون آزمایشی مرحله ۲۱ گزینه دو، در روز سه شنبه ۲۶ فروردین ۱۴۰۴ برگزار می گردد.

➡ داوطلب گرامی، جهت استفاده از خدمات طلایی خود مانند کارنامه های هوشمند بعد از آزمون، آزمونک ها، بانک سؤال گزینه دو، رفع اشکال هوشمند، جزوه های کمک آموزشی، آرشیو آزمون های گزینه دو و ...، با استفاده از شماره داوطلبی (به عنوان نام کاربری) و کد ملی خود (به عنوان رمز عبور) وارد وب سایت گزینه دو به آدرس www.gozine2.ir شوید.

➡➡ در صورتی که اینترنتی ثبت نام کرده اید، رمز عبور شما همان رمزی است که خودتان انتخاب نموده اید.

➡ کارنامه های آزمون آزمایشی مرحله ۲۰ به صورت کامل، با فاصله زمانی کوتاهی پس از آزمون مطابق اطلاعیه اعلام شده، بر روی پایگاه اینترنتی گزینه دو به آدرس www.gozine2.ir قرار می گیرد. در صورت بروز اشکال در دریافت کارنامه، موضوع را از طریق نمایندگی شهر خود پیگیری نمایید.



داوطلب گرامی، شما می توانید با اسکن تصویر بالا به وسیله گوشی هوشمند و یا تبلت خود، به صفحه اینستاگرام مؤسسه گزینه دو وارد شوید.

[gozine2.ir](https://www.instagram.com/gozine2.ir)

● معاون تولید محتوا: علی الفتی

● مدیر واحد آموزش تخصصی: محمدرضا محمدهاشمی

گروه ریاضی
مدیر: محمد اسد زاده
تلفن: ۰۲۱-۱۲۳۴۵۶۷۸

گروه ریاضی

- حسابان و ریاضی پایه
- هندسه
- ریاضیات گسسته
- ریاضی تجربی
- ریاضی انسانی

مسئول درس: علی افضل زاده
دستیاران: عباس سعیدی - امین کبیری

مسئول درس: سعید اکبرزاده
دستیار: هادی کاظم نژاد

مسئول درس: سعید اکبرزاده
دستیار: فرهاد فرزانی

مسئول درس: ایمان اردستانی
دستیاران: وحید جعفری - مهدی پوررضایی

مسئول درس: حسین افسری
دستیاران: حسین اسدزاده - مهدی پوررضایی

حسین شفیع زاده

ایمان اردستانی

سیدمحسن میراسلامی

علی نعمت

علیرضا شریف خطیبی

امیدرضا پورحسینی

مهرداد کیوان

علی افضل زاده

وحید رباعی

علی صادقی

نیکو دهقان

محمد امین خدابنده

امیرورودی

محمد امین خدابنده

امیرورودی

پوپک مقدم

گروه علوم
مدیر: محمد حسین کشانی
تلفن: ۰۲۱-۱۲۳۴۵۶۷۸

گروه علوم

- زیست شناسی
- فیزیک
- شیمی
- زمین شناسی

مسئول درس: امیر کبیری راد
دستیار: پرسا کامکار

مسئول درس: منصور داودوندی
دستیار: ساناز دریکوندی

مسئول درس: شهرام شاه پرویزی

مسئول درس: شکبیا کریمی

محمد بازوکی

علی پناهی شایق

بهرام میرحبیبی

منصور گهن دل

علی نعیمی

احمد رضوانی

جمال خم خاجی

پهمن شاهمرادی

احمد مصلاهی

ماشاءالله سلیمانی

مهرداد ملاصالحی

محمدعلی توسلی فر

فرزانه رجایی

فرزانه ساعدی

حسن علیمحمدی

بتول خواجه پور

حسین ایمانی پور

مرتضی فرهنگد

سید علیرضا کشفیان

نرگس سادات حسینی

مریم گلی حسنلو

محمد احمدی

حسین ایمانی پور

فرزانه ساعدی

آیتا هرطونیان

روزبه اسحاقیان

گروه انسانی
مدیر: علی اکبر آخوندی
تلفن: ۰۲۱-۱۲۳۴۵۶۷۸

گروه انسانی

- علوم و فنون ادبی
- جامعه شناسی
- روان شناسی
- زبان عربی
- تاریخ
- جغرافیا
- فلسفه و منطق
- اقتصاد

مسئول درس: محمدرضا پیرو
دستیار: حسنا محمدی

مسئول درس: الهام رضایی
دستیار: فاطمه صفری

مسئول درس: سیده ضحی سکاکی
دستیار: حسین اصفهانی

مسئول درس: پویا رضاداد

مسئول درس: مهسا اصغری
دستیار: ثنا کاشیان

مسئول درس: الناز گنج کار
دستیار: الهه ریاحی نسب

مسئول درس: سعید رحیمیان
دستیاران: منصور کاظم بیگی - محمدحسین خدام

مسئول درس: امیر محمدبیگی
دستیار: محمدرضا مبارکی

ابوالفضل قاضی

علی عطری

آریتا بیدقی

علیرضا مختاری

سیمین زاهدی

مهدی جاهدی

کاظم غلامی

حمید جوهری مجد

پویا رضاداد

شهرام امامی

نگار مروتی

بهروز یحیی

فاطمه نبی

شهرام امامی

احمد خداداد حسینی

سعید رحیمیان

حمید سودیان طهرانی

علی اکبر آخوندی

مهدی لاچوردی

حسین خاکساری

طاهره کریمی

علی محسنی

میترا چینی ساز

محمدرضا مبارکی

آرش بدری

سپهر سالار کیا

محمدحسن مزروعی

عرشیا شریفیان

هستی ناصح

مهتاب شیرازی

نیایش غریبی

ثنا کاشیان

فاطمه انوری

سارا حمزه

مهتاب شیرازی

صبا پهلوان

فاطمه نظری

یکتا فضل الهی

علی سلوکی

مهتاب شیرازی

علی سلوکی

مهتاب شیرازی

مهدی مشایخی

محمدعلی مهرآبادی

فرزاد مختاری نژاد

کوثر رعدی

گروه ریاضی
معاون تولید محتوا: علی الفتی

گروه علوم
معاون تولید محتوا: علی الفتی

گروه انسانی
معاون تولید محتوا: علی الفتی

ریاضیات

۱- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضی ۱ (فصل ۱، درس ۴)



– جمله n ام دنباله هندسی به صورت $t_n = t_1 r^{n-1}$ است که در آن t_1 جمله اول و r قدرنسبت می باشد. ($t_1, r \neq 0$)



با استفاده از جمله عمومی دنباله هندسی، روابط داده شده را ساده می کنیم:

$$\begin{cases} a_6 + a_7 = 10 \Rightarrow a_1 q^5 + a_1 q^6 = 10 \Rightarrow a_1 q^5 (q + 1) = 10 & (1) \\ a_8 - a_6 = 24 \Rightarrow a_1 q^7 - a_1 q^5 = 24 \Rightarrow a_1 q^5 (q^2 - 1) = 24 & (2) \end{cases}$$

رابطه (۱) را بر رابطه (۲) تقسیم می کنیم و با استفاده از تغییر متغیر معادله را حل می کنیم:

$$\frac{q^5 (q^2 - 1)}{q^5 (q + 1)} = \frac{24}{10} \xrightarrow{q^5 = t} \frac{t(t-1)}{t+1} = \frac{12}{5} \Rightarrow 5t^2 - 12t - 12 = 0$$

$$\Rightarrow (t-4)(5t+3) = 0 \xrightarrow{t>0} t = 4 \Rightarrow q^5 = 4 \xrightarrow{q>0} q = 2$$

$$a_1 q^5 (q + 1) = 10 \xrightarrow{q=2} a_1 = \frac{1}{4}$$

مقدار $q = 2$ را در رابطه (۱) جایگذاری می کنیم تا a_1 به دست آید:

$$a_6 = a_1 q^5 = 2$$

بنابراین مقدار خواسته شده برابر است با:

۲- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضی ۱ (فصل ۴، درس ۳)



– اگر معادله $P(x) = 0$ دارای $\Delta < 0$ باشد، در این صورت معادله $P(x) = 0$ ریشه حقیقی ندارد و علامت عبارت $P(x)$ برای x های مختلف از جدول زیر تعیین می شود:

x	برای هر $x \in \mathbb{R}$
$P(x)$	موافق علامت a



با توجه به فرض سؤال، دو نامعادله زیر باید همواره برقرار باشند:

$$\begin{cases} -x^2 - 2x + m < 2x + 7 \\ -x^2 - 2x + m < -4x + 2m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 4x + (7 - m) > 0 \\ x^2 - 2x + m > 0 \end{cases}$$

در هر دو رابطه به شرطی نامعادله همواره برقرار است که Δ منفی بوده و ضریب جمله درجه دوم مثبت باشد (توجه کنید که در نامعادله های فوق، ضریب x^2 مثبت است):

$$\begin{cases} \Delta_1 < 0 \Rightarrow 16 - 4(7 - m) < 0 \Rightarrow m < 3 \\ \Delta_2 < 0 \Rightarrow 4 - 4m < 0 \Rightarrow m > 1 \end{cases}$$

از اشتراک دو نامساوی به دست آمده، محدوده $1 < m < 3$ به دست می آید.

۳- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (فصل ۱، درس ۲)



– به طور کلی در هر معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ اگر جمع ریشه ها S و ضرب ریشه ها P باشد، این روابط برقرار است:

$$S = -\frac{b}{a}, \quad P = \frac{c}{a}$$



روابط مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها را می‌نویسیم. فرض کنید $\alpha + \beta = S$ و $\alpha\beta = P$ ؛ بنابراین اگر مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله $x^2 - 9x + 9 = 0$ را S' و P' بنامیم، داریم:

$$S' = 1 + \frac{1}{\alpha} + 1 + \frac{1}{\beta} \Rightarrow S' = 2 + \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} \Rightarrow S' = 2 + \frac{S}{P} \xrightarrow{S'=9} S = 7P$$

$$P' = (1 + \frac{1}{\alpha})(1 + \frac{1}{\beta}) \Rightarrow P' = 1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha\beta} \Rightarrow P' = 1 + \frac{S+1}{P} \xrightarrow{P'=9} S+1 = 8P$$

از حل دستگاه فوق متوجه می‌شویم که $S = 7$ و $P = 1$ اکنون به محاسبه مقدار خواسته شده می‌پردازیم:

$$A = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} \Rightarrow A^2 = \alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta} \Rightarrow A^2 = S + 2\sqrt{P} \Rightarrow A^2 = 7 + 2 \Rightarrow A^2 = 9 \xrightarrow{A>0} A = 3$$

▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۱ (فصل ۱، درس ۵)

۴- پاسخ: گزینه ۴



- فاصله نقطه $A(x_0, y_0)$ از خط $ax + by + c = 0$ برابر $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ است.



فاصله نقطه $A(a, 2)$ از خط $3x + 4y - 4 = 0$ برابر است با:

$$\frac{|3a + 8 - 4|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|3a + 4|}{5}$$

مقدار به دست آمده با فاصله نقطه $A(a, 2)$ از محور عرض‌ها (خط $x = 0$) برابر است:

$$|a| = \text{فاصله } A \text{ از محور عرض‌ها}$$

$$\Rightarrow \frac{|3a + 4|}{5} = |a| \Rightarrow \begin{cases} 3a + 4 = 5a \Rightarrow a = 2 \\ 3a + 4 = -5a \Rightarrow a = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

مجموع مقادیر ممکن برای a برابر $\frac{3}{2} + (-\frac{1}{2}) = 1$ است.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (فصل ۲، درس ۴)

۵- پاسخ: گزینه ۱



- برای به دست آوردن ضابطه تابع وارون یک تابع یک به یک مانند f ، در معادله $y = f(x)$ در صورت امکان x را بر حسب y محاسبه می‌کنیم، سپس با تبدیل y به x ، $f^{-1}(x)$ را به دست می‌آوریم.

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$



ابتدا ضابطه وارون تابع g را محاسبه می‌کنیم:

$$y = \frac{x+3}{x-1} \Rightarrow xy - y = x + 3 \Rightarrow xy - x = y + 3 \Rightarrow x(y-1) = y+3 \Rightarrow x = \frac{y+3}{y-1}$$

بنابراین $g^{-1}(x) = \frac{x+3}{x-1}$ یعنی دو تابع g و g^{-1} برابر یا یکدیگر هستند.

پس به جای محاسبه دامنه تابع $f \circ g$ ، دامنه تابع f و g به صورت زیر است:

$$D_f = \left[-\frac{a}{2}, +\infty\right) \quad , \quad D_g = \mathbb{R} - \{1\}$$

بنابراین دامنه تابع مرکب fog به صورت زیر است:

$$D_{fog} = \left\{ x \neq 1 \mid \frac{x+3}{x-1} \geq -\frac{a}{2} \right\} \Rightarrow D_{fog} = \left\{ x \neq 1 \mid \frac{x+3}{x-1} + \frac{a}{2} \geq 0 \right\} \Rightarrow D_{fog} = \left\{ x \neq 1 \mid \frac{2(x+3) + a(x-1)}{2(x-1)} \geq 0 \right\}$$

$$\Rightarrow D_{fog} = \left\{ x \neq 1 \mid \frac{(2+a)x + 6-a}{2(x-1)} \geq 0 \right\}$$

به شرطی جواب نامعادله بالا به صورت $(1, +\infty)$ است که صورت کسر برابر با یک عدد ثابت نامنفی باشد، پس:

$$\begin{cases} 2+a=0 \\ 6-a \geq 0 \end{cases} \Rightarrow a=-2$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضی ۱ (فصل ۲، درس ۳)

۶- پاسخ: گزینه ۱



$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad (\cos \alpha \neq 0)$$

$$1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \quad (\sin \alpha \neq 0)$$



دو طرف تساوی داده شده را بر $\sin x \cos x$ تقسیم می کنیم:

$$\frac{1 + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{\sin x \cos x}{\sin x \cos x} - \frac{\sin^2 x}{\sin x \cos x} \Rightarrow \frac{1}{\sin x \cos x} \cot x = 1 - \tan x$$

برای حل این معادله از تغییر متغیر $\tan x = a$ استفاده می کنیم:

$$\tan x = a \Rightarrow \frac{1}{\sin x \cos x} = 1 - a \Rightarrow \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} = 0 \Rightarrow (2a-1)^2 = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

با توجه به تغییر متغیر، $\tan x = \frac{1}{2}$ است، پس:

$$\begin{cases} 1 + \cot^2 a = \frac{1}{\sin^2 x} \xrightarrow{\cot x=2} 1 + 4 = \frac{1}{\sin^2 x} \Rightarrow \frac{1}{\sin^2 x} = 5 \\ 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow 1 + \frac{1}{4} = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{5}{4} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} = 5 + \frac{5}{4} = \frac{25}{4}$$

▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۱ (فصل ۳، درس ۳)

۷- پاسخ: گزینه ۴



$$y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$$

$$\log_a b^n = n \log_a b$$



با توجه به دامنه تعریف لگاریتم، $3-x$ مثبت است، پس $x < 3$ ؛ بنابراین $|x-3| = 3-x$ و داریم:

$$\log_7(3-x) = 4 + \log_7(3-x)^{-1} \Rightarrow \log_7(3-x) = 4 - \log_7(3-x)$$

$$\Rightarrow 2 \log_7(3-x) = 4 \Rightarrow \log_7(3-x) = 2$$

$$\Rightarrow 3-x = 4 \Rightarrow x = -1$$

جواب به دست آمده قابل قبول است؛ بنابراین مقدار $\log_7(1-7x)$ برابر است با:

$$\log_7(1-7x) = \log_7 8 = 3$$

کوچک ترین عدد صحیح بزرگ تر از ۳، برابر ۴ است.

▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۲ (فصل ۱، درس ۱)

۸- پاسخ: گزینه ۱

خوبه اینو بدونی



- برای رسم نمودار $y = f(x) + k$ ، اگر $k > 0$ باشد، کافی است نمودار تابع $f(x)$ را k واحد در راستای قائم به سمت بالا انتقال دهیم و برای $k < 0$ این انتقال به سمت پایین انجام می‌شود.
- برای رسم نمودار $y = f(x + k)$ ، اگر $k > 0$ باشد، کافی است نمودار تابع $f(x)$ را k واحد در جهت افقی به سمت چپ انتقال دهیم و برای $k < 0$ ، این انتقال به اندازه $|k|$ واحد به سمت راست انجام می‌شود.
- اگر طول نقاط تابع $y = f(x)$ را قرینه کنیم، نقاط تابع $y = f(-x)$ به دست می‌آیند. بنابراین نمودار تابع $y = f(-x)$ قرینه نمودار تابع $y = f(x)$ نسبت به محور عرض‌ها است.

جوابش اینه



به ترتیب تبدیلات موردنظر را انجام می‌دهیم:

$$f(x) \xrightarrow{\text{دو واحد به راست}} f(x-2) \xrightarrow{\text{قرینه نسبت محور عرض‌ها}} f(-x-2) \xrightarrow{\text{سه واحد به پایین}} f(-x-2)-3$$

بنابراین ضابطه تابع g به صورت زیر است:

$$g(x) = f(-x-2)-3 \Rightarrow g(x) = \frac{1-2(-x-2)}{-x-2+3}-3 \Rightarrow g(x) = \frac{2x+5}{-x+1}-3 \Rightarrow g(x) = \frac{5x+2}{-x+1}$$

برای یافتن نقاط برخورد تابع g با g^{-1} کافی است تابع g را با خط $y = x$ تقاطع دهیم:

$$g(x) = x \Rightarrow \frac{5x+2}{-x+1} = x \Rightarrow x^2 + 4x + 2 = 0 \xrightarrow{S = \frac{-b}{a}} x_1 + x_2 = -4$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۱، درس ۲)

۹- پاسخ: گزینه ۱

خوبه اینو بدونی



- قضیه تقسیم برای چندجمله‌ای‌ها: اگر $f(x)$ و $p(x)$ چندجمله‌ای باشند و درجه $p(x)$ از صفر بزرگ‌تر باشد، آنگاه چندجمله‌ای‌های منحصر به فرد $q(x)$ و $r(x)$ وجود دارند به طوری که:
- باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $ax + b$ عبارت است از $r(x) = f\left(\frac{-b}{a}\right)$.

جوابش اینه

چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-2$ بخش پذیر است، پس:

$$P(2) = 0 \Rightarrow 16 + 8b + 24 - 6a + 4 = 0 \Rightarrow 4b - 3a = -22$$

از طرفی قضیه تقسیم را برای تقسیم دوم می‌نویسیم:

$$P(x) = (x-2)^2 g(x) + ax + b \quad P(2) = 0 \Rightarrow 2a + b = 0$$

$$\begin{cases} 4b - 3a = -22 \\ 2a + b = 0 \end{cases} \text{ به جواب‌های } a = 2 \text{ و } b = -4 \text{ می‌رسیم؛ در نتیجه } a + b = -2.$$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۱ (فصل ۴، درس ۴)

۱۰- پاسخ: گزینه ۲

خوبه اینو بدونی



$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad (\cos \alpha \neq 0)$$

$$1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \quad (\sin \alpha \neq 0)$$

- اگر زاویه دلخواهی باشد، همواره داریم:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \begin{cases} \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \\ \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha \end{cases} \text{ یا}$$

تذکر: در رابطه‌های فوق، علامت نسبت مثلثاتی زاویه α با توجه به ناحیه‌ای که زاویه α در آن قرار دارد، تعیین می‌شود.



ابتدا با توجه به مقدار داده شده برای $\tan(B-C)$ ، مقدار $\sin(B-C)$ را پیدا می‌کنیم:

$$1 + \tan^2(B-C) = \frac{1}{\cos^2(B-C)} \Rightarrow 1 + \frac{9}{16} = \frac{1}{\cos^2(B-C)} \Rightarrow \cos^2(B-C) = \frac{16}{25} \Rightarrow 1 - \sin^2(B-C) = 1 - \frac{16}{25}$$

$$\Rightarrow \sin^2(B-C) = \frac{9}{25} \Rightarrow \sin(B-C) = \pm \frac{3}{5}$$

توجه شود که C و B زوایای حاده بوده و $\tan(B-C)$ مثبت است، پس $\sin(B-C)$ نیز حتماً مقداری مثبت است، پس:

$$\sin(B-C) = \frac{3}{5}$$

اکنون به محاسبه مقدار خواسته شده می‌پردازیم و به جای $\frac{3}{5}$ ، $\sin(B-C)$ را جایگذاری می‌کنیم:

$$P = \frac{\Delta(\frac{3}{5} - \sin(B+C))}{\sin C \cos B} = \frac{\Delta(\sin(B-C) - \sin(B+C))}{\sin C \cdot \cos B} = \frac{\Delta(\sin B \cos C - \cos B \sin C - \sin B \cos C - \cos B \sin C)}{\sin C \cdot \cos B}$$

$$= \frac{-10 \cos B \sin C}{\sin C \cdot \cos B} = -10$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۲، درس ۱)

۱۱- پاسخ: گزینه ۳



- توابع $y = a \sin bx + c$ و $y = a \cos bx + c$ دارای مقدار ماکزیمم $|a| + c$ و مقدار مینیمم $-|a| + c$ و دوره تناوب $\frac{2\pi}{|b|}$ است.



طول نقاط A و B را α و β فرض می‌کنیم. مطابق نمودار فاصله طولی دو نقطه A و B ، برابر نصف دوره تناوب تابع f است. پس از آنجا که دوره

تناوب تابع f برابر $T = \frac{2\pi}{|a|}$ بوده و a عددی مثبت است (مطابق شکل نمودار)، در نتیجه $\beta - \alpha = \frac{\pi}{a}$ است. شیب پاره خط AB برابر است با:

$$m_{AB} = \frac{-2 - 2}{\beta - \alpha} \Rightarrow m_{AB} = \frac{-4}{\frac{\pi}{a}} \Rightarrow m_{AB} = -\frac{4a}{\pi}$$

شیب پاره خط AB برابر $-\frac{3}{\pi}$ است، یعنی $-\frac{4a}{\pi} = -\frac{3}{\pi}$ ؛ بنابراین:

$$a = \frac{3}{4}$$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۲ (فصل ۲، درس ۲)

۱۲- پاسخ: گزینه ۱



- رابطه تانژانت مجموع زوایا:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$



سعی می‌کنیم عبارت $\cos^2 x$ را بر حسب $\tan x$ بنویسیم:

$$\cos^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x \xrightarrow{\text{تقسیم بر } \cos^2 x} \cos^2 x = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1 - \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2}{1 + \tan^2 x} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$$

اکنون از رابطه $\cos^2 x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$ استفاده کرده و معادله را حل می‌کنیم:

$$1 + \Delta \cos^2 x = \tan x \Rightarrow 1 + \frac{\Delta(1 - \tan^2 x)}{1 + \tan^2 x} = \tan x \Rightarrow \frac{\Delta(1 - \tan^2 x)}{1 + \tan^2 x} = -1 + \tan x \Rightarrow \frac{\Delta(1 - \tan x)(1 + \tan x)}{1 + \tan^2 x} = -(1 - \tan x)$$

عامل $1 - \tan x$ را از دو طرف تساوی ساده می‌کنیم. از آنجاکه $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ است، پس $1 - \tan x \neq 0$ است؛ بنابراین:

$$\frac{\Delta(1 + \tan x)}{1 + \tan^2 x} = -1 \Rightarrow \tan^2 x + \Delta \tan x + \Delta = 0 \Rightarrow \tan x = -2 \text{ یا } -3$$

پس $\tan \alpha = -2$ و $\tan \beta = -3$ ، پس مقدار خواسته شده برابر است با:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \Rightarrow \tan(\alpha + \beta) = \frac{-2 - 3}{1 - 6} \Rightarrow \tan(\alpha + \beta) = 1$$

۱۳- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (فصل ۵، درس ۴)



$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$$

- برای رفع ابهام حالت $\frac{\pi}{2}$ رادیکالی، ابتدا مزدوج رادیکال را در آن ضرب می‌کنیم، سپس با تبدیل به چندجمله‌ای، آن را تجزیه می‌کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$



$$\sqrt{1 - \cos 2x} = \sqrt{2\sin^2 x} = \sqrt{2}|\sin x|$$

با استفاده از اتحادهای مثلثاتی، ابتدا مخرج کسر را ساده می‌کنیم:

اکنون به محاسبه حد موردنظر می‌پردازیم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1 + 4x} - \sqrt{1 - 2x}}{\sqrt{2}|\sin x|} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(\sqrt{1 + 4x} - \sqrt{1 - 2x})(\sqrt{1 + 4x} + \sqrt{1 - 2x})}{(-\sqrt{2}\sin x)(\sqrt{1 + 4x} + \sqrt{1 - 2x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 + 4x - 1 + 2x}{-2\sqrt{2}\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{6x}{-2\sqrt{2}\sin x} = -\frac{3}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

۱۴- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۳، درس ۲)



- اگر $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a$ و $g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b$ ، آنگاه داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n}{b_m} x^{n-m}$$



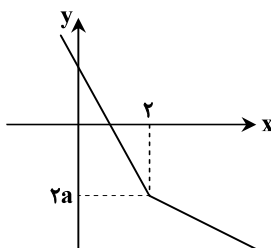
ابتدا تابع f را به صورت دو ضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x) = \begin{cases} ax - x + 2 & x < 2 \\ ax + x - 2 & x \geq 2 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} (a-1)x + 2 & x < 2 \\ (a+1)x - 2 & x \geq 2 \end{cases}$$

به شرطی f اکیداً نزولی است که شیب هر دو ضابطه منفی باشد، پس $a < -1$ و نمودار f مطابق

شکل روبه‌رو می‌باشد:

بنابراین ضابطه وارون تابع f به صورت زیر است:



$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{a-1}(x-2) & x > 2a \\ \frac{1}{a+1}(x+2) & x < 2a \end{cases}$$

پس با توجه به مقدار حد داده شده، داریم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{f^{-1}(x)} = \frac{16}{9} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(a+1)x - 2}{\frac{1}{a-1}(x-2)} = \frac{16}{9} \Rightarrow \frac{a+1}{a-1} = \frac{16}{9} \Rightarrow a^2 - 1 = \frac{16}{9} \Rightarrow a^2 = \frac{25}{9} \xrightarrow{a < -1} a = -\frac{5}{3}$$



– (پیوستگی در نقطه): تابع f در نقطه $x = a$ پیوسته است، هرگاه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.



برای آنکه تابع f روی مجموعه اعداد حقیقی پیوسته باشد، باید دامنه آن برابر $\mathbb{R}$ بوده و در $x = 1$ نیز پیوسته باشد. پس تابع f باید در $x = 1$ حد داشته باشد. به علت وجود عبارت $|x - 1|$ در ضابطه تابع، حد راست و چپ تابع در $x = 1$ قرینه یکدیگر است، پس به شرطی ضابطه اول در $x = 1$ حد دارد که صورت کسر، مضربی از $|x - 1|$ باشد، پس باید زیر رادیکال مضربی از $(x - 1)^2$ باشد، یعنی:

$$ax^2 + 4bx + c = a(x - 1)^2 \Rightarrow ax^2 + 4bx + c = ax^2 - 2ax + a \Rightarrow \begin{cases} 4b = -2a \Rightarrow b = -\frac{1}{2}a \\ c = a \end{cases}$$

ضمناً باید حد تابع و مقدار تابع در $x = 1$ با یکدیگر برابر باشد، تا تابع در $x = 1$ پیوسته باشد، پس:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{a(x-1)^2}}{|x-1|} = a + b \Rightarrow \sqrt{a} = a - \frac{1}{2}a \Rightarrow \sqrt{a} = \frac{1}{2}a \Rightarrow a = \frac{1}{4}a^2 \Rightarrow a = 4$$

با جایگذاری مقدار a در معادلات قسمت قبل؛ بنابراین $b = -2$ و $c = 4$ است و مقدار خواسته شده برابر است با:

$$\frac{ab}{c} = \frac{4(-2)}{4} = -2$$



– (آزمون مشتق اول): فرض کنیم تابع f بر بازه‌ای باز مانند I ($I \subseteq D_f$) پیوسته باشد و $c \in I$ یک نقطه بحرانی تابع f باشد، هرگاه f بر این بازه به جز احتمالاً در نقطه c ، مشتق پذیر باشد، در این صورت:

الف) اگر به ازای تمام مقادیر x در بازه‌ای مانند (a, c) ، $f'(x) > 0$ و به ازای تمام مقادیر x در بازه‌ای مانند (c, b) ، $f'(x) < 0$ ، در این صورت $f(c)$ یک مقدار ماکزیمم نسبی f است.

ب) اگر به ازای تمام مقادیر x در بازه‌ای مانند (a, c) ، $f'(x) < 0$ و به ازای تمام مقادیر x در بازه‌ای مانند (c, b) ، $f'(x) > 0$ ، آنگاه $f(c)$ یک مقدار مینیمم نسبی f است.

پ) اگر f' در نقطه c تغییر علامت ندهد، به طوری که f' در هر دو طرف c مثبت یا هر دو طرف آن منفی باشد، آنگاه $f(c)$ نه مینیمم نسبی و نه ماکزیمم نسبی است.



ابتدا معادله f را محاسبه می‌کنیم. سهمی f در نقطه‌ای به طول ۲ بر محور طول‌ها مماس است، پس ضابطه f را به صورت $f(x) = a(x - 2)^2$ در نظر می‌گیریم. در این صورت $f(0) = 4a$ به دلیل تقارن سهمی، طول نقطه A برابر ۴ است. پس $A(4, 4a)$ ، مختصات نقطه A است. حال، مشتق تابع f را محاسبه می‌کنیم:

$$f'(x) = 2a(x - 2) \Rightarrow \text{شیب مماس: } m = f'(4) = 4a$$

پس شیب خط گذرنده از دو نقطه $(4, 4a)$ و $(0, -6)$ برابر $4a$ است:

$$\frac{-6 - 4a}{0 - 4} = 4a \Rightarrow -12a = -6 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

بنابراین $f(x) = \frac{1}{2}(x - 2)^2$. اکنون به محاسبه اکسترمم‌های تابع $y = xf(x)$ می‌پردازیم:

$$y = xf(x) = \frac{1}{2}x(x - 2)^2$$

$$y' = \frac{1}{2}((x - 2)^2 + 2x(x - 2)) = \frac{1}{2}(x - 2)(3x - 2)$$

$$y' = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ یا } \frac{2}{3}$$

پس نقاطی به طول ۲ یا $\frac{2}{3}$ اکستریم‌های نسبی تابع $y = x f(x)$ هستند. عرض این نقاط اکستریم برابر است با:

$$\begin{cases} x=2 \Rightarrow y=2f(2) \Rightarrow y=2 \times \frac{1}{3}(2-2)^2 \Rightarrow y=0 \\ x=\frac{2}{3} \Rightarrow y=\frac{2}{3}f\left(\frac{2}{3}\right) \Rightarrow y=\frac{2}{3} \times \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}-2\right)^2 \Rightarrow y=\left(-\frac{4}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} \Rightarrow y=\frac{16}{27} \end{cases}$$

با توجه به اینکه $\frac{16}{27}$ در گزینه ۳ آمده است، پس این گزینه درست است.

۱۷- پاسخ: گزینه ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۴، درس ۲)



$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

- تعریف مشتق تابع:

$$(fog)'(x) = g'(x)f'(g(x))$$

- اگر f و g دو تابع مشتق‌پذیر باشند، در این صورت تابع مرکب fog مشتق‌پذیر است و داریم:



ابتدا مشتق توابع f و g در $x=2$ را به‌طور جداگانه محاسبه می‌کنیم:

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) - g(2)}{x^2 - 4} = \frac{3}{2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) - g(2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{1}{4} g'(2) = \frac{3}{2} \Rightarrow g'(2) = 6$$

$$2) f(x) = -x + (x-1)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow f'(x) = -1 + \frac{2}{3}(x-1)^{-\frac{1}{3}} \Rightarrow f'(x) = -1 + \frac{2}{3\sqrt[3]{x-1}} \Rightarrow f'(2) = -1 + \frac{2}{3 \times (-2)} \Rightarrow f'(2) = -\frac{4}{3}$$

$$(gof)'(2) = f'(2) \times g'(f(2)) = f'(2) \times g'(2) = -\frac{4}{3} \times 6 = -8$$

بنابراین مقدار خواسته‌شده برابر است با:

$$f(2) = -2 + \sqrt[3]{(2-1)^2} = -2 + \sqrt[3]{-8} = -2 + (-2) = -4$$

توجه کنید که $f(2)$ را این‌گونه محاسبه کرده‌ایم:

۱۸- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۵، درس ۲)



- (تعریف): فرض کنیم تابع f در نقطه $x=c$ پیوسته است. در این صورت نقطه $(c, f(c))$ نقطه عطف تابع f است، هرگاه هر دو شرط زیر برقرار باشند:

الف) نمودار f در نقطه $(c, f(c))$ خط مماس داشته باشد.

ب) جهت تقعر f در نقطه $(c, f(c))$ تغییر کند.



نقاط عطف تابع درجه چهارم f همان ریشه‌های ساده معادله $f''(x) = 0$ است.

ابتدا مشتق دوم تابع را محاسبه می‌کنیم:

$$f'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 36x$$

$$f''(x) = 12x^2 - 48x + 36 \Rightarrow f''(x) = 12(x^2 - 4x + 3)$$

سپس معادله $f''(x) = 0$ را حل می‌کنیم:

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow y=k+11 \\ x=3 \Rightarrow y=k+27 \end{cases}$$

خط گذرنده از نقاط عطف و مبدأ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(k+27) - (k+11)}{3-1} = 8$$

معادله خط گذرنده از نقاط عطف و مبدأ

حال، کافی است یکی از نقاط عطف را در معادله صدق می‌دهیم تا مقدار k به‌دست آید:

$$y = 8x \xrightarrow{(1, k+11)} k+11 = 8 \times 1 \Rightarrow k = -3$$



- مجموع زوایای داخلی هر n ضلعی برابر است با:

$$(n-2)180^\circ$$

- هر زاویه داخلی n ضلعی منتظم برابر است با:

$$\frac{(n-2)180^\circ}{n}$$

- مجموع زوایای خارجی هر n ضلعی برابر است با:

$$360^\circ$$

- هر زاویه خارجی n ضلعی منتظم برابر است با:

$$\frac{360^\circ}{n}$$



طبق نکات بالا، خواسته سؤال برابر است با:

$$\frac{\left(\frac{12-2}{12}\right)180^\circ}{\frac{360^\circ}{12}} = \frac{10 \times 180^\circ}{2 \times 180^\circ} = \frac{10}{2} = 5$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۱ (فصل ۲، درس‌های ۳ و ۴)

۲۰- پاسخ: گزینه ۲

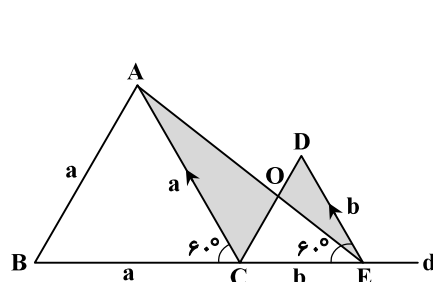


- اگر مثلث‌های $A'B'C'$ و ABC متشابه باشند و نسبت تشابه آن‌ها k باشد $\left(\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = k\right)$ ، آنگاه:

$$\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = k^2 \text{ است. یعنی } k^2 \text{ نسبت تشابه یعنی } k^2.$$



هر دو مثلث متساوی‌الاضلاع، متشابه‌اند و نسبت مساحت‌های آن‌ها، مجذور نسبت اضلاع دو مثلث می‌باشد. اگر اندازه ضلع مثلث ABC را a و اندازه ضلع مثلث CDE را b در نظر بگیریم، داریم:



$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle CDE}} = 4 \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^2 = 4 \Rightarrow \frac{a}{b} = 2$$

$$\hat{ACB} = 60^\circ, \hat{DEC} = 60^\circ \Rightarrow DE \parallel AC \Rightarrow \begin{cases} \hat{EDO} = \hat{OCA} \\ \hat{DEO} = \hat{OAC} \end{cases}$$

پس دو مثلث OAC و ODE به حالت تساوی دو زاویه، متشابه‌اند و داریم:

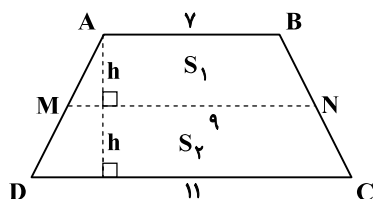
$$\frac{S_{\triangle OAC}}{S_{\triangle ODE}} = \left(\frac{AC}{DE}\right)^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2^2 = 4$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۱ (فصل ۴، درس ۲)

۲۱- پاسخ: گزینه ۳



- حجم منشور قائم برابر است با حاصل ضرب مساحت قاعده در ارتفاع.



اندازه ارتفاع منشور را H در نظر می گیریم. در قاعده ABCD، طبق شکل مقابل، داریم:

$$MN = \frac{AB + DC}{2} = \frac{7 + 11}{2} = 9$$

$$\begin{cases} S_1 = \frac{1}{2}(9 + 7) \times h = \frac{16}{2}h = 8h \\ S_2 = \frac{1}{2}(9 + 11) \times h = \frac{20}{2}h = 10h \end{cases} \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

حال نسبت حجم دو قسمت به وجود آمده را به دست می آوریم:

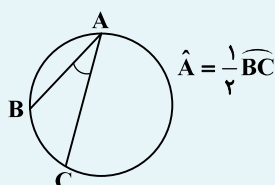
$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{S_1 \cdot H}{S_2 \cdot H} = \frac{S_1}{S_2} = \frac{4}{5}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۲ (فصل های ۱ و ۲، درس ۱)

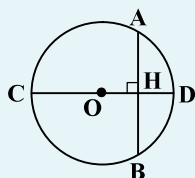
۲۲- پاسخ: گزینه ۲



- اندازه هر زاویه محاطی برابر است با نصف اندازه کمان مقابل به آن زاویه.

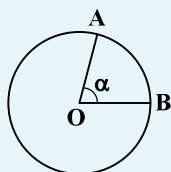


- اگر CD قطری از دایره باشد که بر وتر AB عمود است، آنگاه قطر CD وتر AB و کمان AB را نصف می کند.



$$CD \perp AB \Rightarrow \begin{cases} AH = BH \\ \widehat{AD} = \widehat{BD} \end{cases}$$

- اندازه کمان، همان اندازه زاویه مرکزی مقابل به آن کمان تعریف می شود و واحد آن درجه است.



$$\widehat{AB} = \angle AOB = \alpha$$

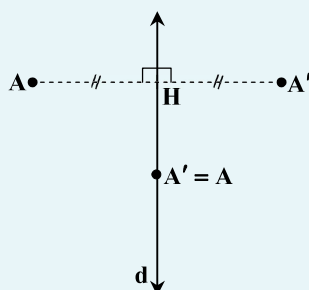
- برای پیدا کردن بازتاب یک نقطه مثل A نسبت به خط d، کافی است از نقطه A به خط داده شده عمودی وارد کنیم و پای عمود را H بنامیم. حال AH را از سمت H به اندازه خودش امتداد می دهیم تا A' به دست آید. در این صورت A' را بازتاب یا قرینه A نسبت به خط d می نامیم و می نویسیم:

$$S(A) = A'$$

در چنین حالتی خط d عمودمنصف پاره خط AA' خواهد بود.

خط d، خط بازتاب یا محور بازتاب نامیده می شود.

اگر نقطه ای روی خط بازتاب باشد، تصویر آن بر خودش منطبق می شود؛ به عبارتی A' همان A است.



طبق شکل، O' بازتاب O نسبت به BC است و داریم:

$$S(O) = O' \Rightarrow OH = HO'$$

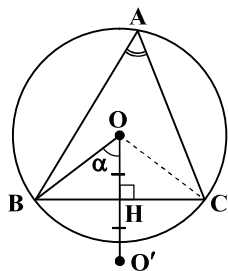
$$\frac{OO'}{2} = OH, \quad \frac{BC}{2} = BH$$

$$OO' = BC \Rightarrow OH = BH$$

مثلث OBH ، قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین است. پس زاویه α در شکل 45° است.

$$\hat{\alpha} = \frac{\widehat{BC}}{2} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{BC} = 90^\circ$$

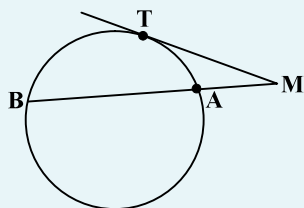
$$\hat{A} = \frac{\widehat{BC}}{2} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$$



▲ مشخصات سؤال: دشوار * هندسه ۲ (فصل ۱، درس ۲)

۲۳- پاسخ: گزینه ۲

- هرگاه M نقطه‌ای بیرون دایره باشد و از M مماس و قاطعی نسبت به دایره رسم کنیم، مربع اندازه مماس برابر است با حاصل ضرب اندازه‌های دو قطعه قاطع



$$MT^2 = MA \cdot MB$$

شکل مقابل را در نظر بگیرید. شعاع دایره را R فرض کرده و داریم:

$$R = AM = \sqrt{AB^2 + BM^2} = \sqrt{(2a)^2 + a^2} = \sqrt{5}a$$

$$R = AE = AM \Rightarrow AE = \sqrt{5}a \Rightarrow R = AF = \sqrt{5}a$$

$$CE = AC - AE = \sqrt{2}(2a) - \sqrt{5}a = (2\sqrt{2} - \sqrt{5})a$$

$$CF = AC + AF = \sqrt{2}(2a) + \sqrt{5}a = (2\sqrt{2} + \sqrt{5})a$$

حال طبق رابطه طولی در دایره، داریم:

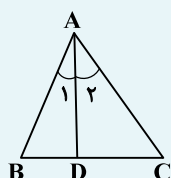
$$CT^2 = CE \times CF = (2\sqrt{2} - \sqrt{5})(2\sqrt{2} + \sqrt{5})a^2 = (8 - 5)a^2 = 3a^2$$

$$CT = \sqrt{3}a$$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * هندسه ۲ (فصل ۳، درس ۳)

۲۴- پاسخ: گزینه ۴

- در هر مثلث، نیمساز هر زاویه داخلی، ضلع روبه‌رو به آن زاویه را به نسبت اندازه‌های ضلع‌های آن زاویه تقسیم می‌کند.



$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$$



در مثلث ABC، AD نیمساز است، پس داریم:

$$\triangle ABC: \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{7}{8} \Rightarrow \frac{BD}{DB+DC} = \frac{7}{7+8} \Rightarrow \frac{BD}{BC} = \frac{7}{15} \Rightarrow \frac{BD}{5} = \frac{7}{15}$$

$$\Rightarrow BD = \frac{7}{15} \times 5 = \frac{7}{3}$$

در مثلث ABD نیز، BI نیمساز است، پس داریم:

$$\triangle ABD: \frac{AI}{ID} = \frac{AB}{BD} = \frac{7}{\frac{7}{3}} = 3 \Rightarrow \frac{AI}{ID} = 3 \Rightarrow \frac{AI}{AI+ID} = \frac{3}{1+3} \Rightarrow \frac{AI}{AD} = \frac{3}{4}$$

حال در مثلث ABC با توجه به موازی بودن MN با BC، از تالس استفاده می‌کنیم:

$$MN \parallel BC \Rightarrow \frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB} = \frac{AI}{AD} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{MN}{5} = \frac{3}{4} \Rightarrow MN = \frac{15}{4} = 3 \frac{3}{4}$$

▲ مشخصات سؤال: ساده * هندسه ۳ (فصل ۱، درس ۲)

۲۵- پاسخ: گزینه ۱

- برای هر ماتریس مربعی مانند A، وارون ماتریس A (در صورت وجود) ماتریسی است چون B به طوری که $A \times B = B \times A = I$. در این

$$A \times B = B \times A = I \Rightarrow A^{-1} = B$$

صورت B را وارون A می‌نامیم و با A^{-1} نشان می‌دهیم:

$$|kA_{n \times n}| = k^n |A_{n \times n}| \text{ و } |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}, |A^n| = |A|^n$$

- اگر A ماتریس مربعی مرتبه n باشد، داریم:



وارون ماتریس A، ماتریس I - A است، پس داریم:

$$A^{-1} = I - A \Rightarrow A \cdot A^{-1} = I \Rightarrow A(I - A) = I \Rightarrow A - A^2 = I$$

$$A^2 = A - I \Rightarrow A^4 = (A - I)^2 = A^2 - 2A + I, A^2 = A - I \Rightarrow A^4 = A - I - 2A + I$$

$$A^4 = -A \Rightarrow |A^4| = |-A| \Rightarrow |A|^4 = (-1)^3 |A| = -|A|$$

$$|A|^4 = -|A| \Rightarrow |A| = -1$$

چون A وارون پذیر است، پس $|A| \neq 0$ و لذا از رابطه $|A|^4 = -|A|$ داریم:

$$|A|^4 = |A|^4 = (-1)^4 = 1$$

خواسته سؤال برابر است با:

▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۳ (فصل ۱، درس ۱)

۲۶- پاسخ: گزینه ۱



- ماتریس مربعی A قطری است هرگاه تمام درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی آن برابر صفر باشند.

- (ضرب ماتریس در ماتریس): اگر A ماتریسی $m \times p$ و B ماتریسی $p \times n$ باشد (تعداد ستون‌های ماتریس A با تعداد سطرهای B برابرباشد)، در این صورت $A_{m \times p} \times B_{p \times n} = C_{m \times n} = [c_{ij}]$ می‌کنیم. اگر فرض کنیم $m \times n$ بوده که درایه روی سطر iام و ستون jام در آن یعنی، c_{ij} از ضرب سطر iام A در ستون jام B به دست می‌آید، یعنی:

$$c_{ij} = \text{سطر } i \text{ اُم } A \times \text{ستون } j \text{ اُم } B \Rightarrow c_{ij} = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ip} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{pj} \end{bmatrix} = a_{i1} \times b_{1j} + a_{i2} \times b_{2j} + \dots + a_{ip} \times b_{pj}$$

- اگر ماتریسی قطری باشد و تمام درایه‌های روی قطر اصلی آن با هم برابر باشند، آن را یک ماتریس اسکالر می‌نامیم.

$$\text{ماتریس اسکالر مرتبه } 2 = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix}$$



چون A ماتریس قطری است، داریم:

$$A = \begin{bmatrix} a & a+1 \\ 2b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -a & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a^2 + 4a + 4 & -a+1 \\ -2ab+4a & a-4b \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -a+1=0 \\ 4a-2ab=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

حال A^n را به ازای n های مختلف محاسبه می کنیم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \quad \text{به ازای } n=2 \text{ اسکالر است}$$

$$A^2 = I \xrightarrow{\times A} A^3 = A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{به ازای } n=3 \text{ اسکالر نیست}$$

$$A^2 = I \Rightarrow A^4 = (A^2)^2 = I^2 = I \quad \text{به ازای } n=4 \text{ اسکالر است}$$

بنابراین به ازای n های زوج، ماتریس A^n اسکالر است، پس خواسته سؤال، $n=2$ است.

۲۷- پاسخ: گزینه ۱ **▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۳ (فصل ۲، درس ۲)**



- با داشتن مختصات مرکز و طول شعاع دایره، می توان معادله آن را تعیین کرد و برعکس با داشتن معادله دایره می توان مختصات مرکز و طول شعاع آن را به دست آورد.

$$r = \text{شعاع دایره}, O'(\alpha, \beta) : \text{مرکز دایره} \Rightarrow (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$$



کوچک ترین دایره گذرنده از نقاط $A(5,2)$ و $B(3,-4)$ ، دایره ای به قطر AB است؛ بنابراین معادله دایره به صورت زیر است.

$$\text{مرکز } O = \frac{A+B}{2} \Rightarrow O(4, -1)$$

$$R = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{(5-3)^2 + (2+4)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{40} = \sqrt{10}$$

$$\text{معادله دایره: } (x-4)^2 + (y+1)^2 = 10$$

مختصات نقطه $M(1,0)$ در این دایره صدق می کند:

$$(1-4)^2 + (0+1)^2 = 9+1 = 10$$

بنابراین معادله خط مماس بر دایره در نقطه M به صورت زیر است:

$$\text{شیب } OM = \frac{0-(-1)}{1-4} = -\frac{1}{3}$$

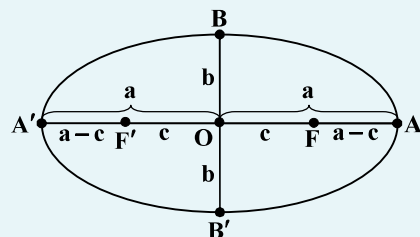
$$\text{شیب خط مماس} = 3 \Rightarrow y-0 = 3(x-1) \Rightarrow y = 3x-3$$

$y = 3x-3$ معادله خط مماس است که از بین نقاط گزینه ها، فقط نقطه $(2,3)$ روی این خط قرار دارد.

۲۸- پاسخ: گزینه ۲ **▲ مشخصات سؤال: دایره * هندسه ۳ (فصل ۲، درس ۳)**



- در بیضی شکل زیر داریم:



۱) $AA' = 2a$ = طول قطر بزرگ

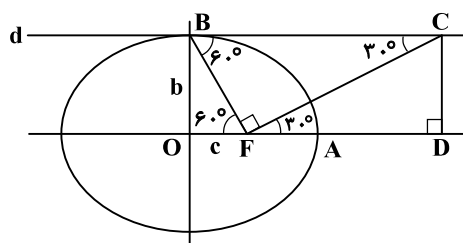
۲) $BB' = 2b$ = طول قطر کوچک

۳) $FF' = 2c$ = فاصله کانونی

۴) $a^2 = b^2 + c^2$



با توجه به شکل، داریم:



$$\widehat{BCF} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{CBF} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ, \widehat{CBF} = \widehat{BFO}$$

$$\Rightarrow \widehat{BFO} = 60^\circ$$

$$OB = b, OF = c \Rightarrow \tan 60^\circ = \frac{b}{c} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow b = c\sqrt{3}, a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 3c^2 + c^2 = 4c^2$$

$$\Rightarrow a = 2c$$

حال در مثلث FCD، داریم:

$$\tan 30^\circ = \frac{CD}{FD} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow FD = \sqrt{3}CD, CD = OB = b \Rightarrow FD = \sqrt{3}b$$

$$FD = \sqrt{3}(c\sqrt{3}) = 3c \Rightarrow AD = FD - FA = 3c - (a - c) = 4c - a$$

خواسته سؤال برابر است با:

$$\frac{AD}{AF} = \frac{4c - a}{a - c} = \frac{4c - 2c}{2c - c} = \frac{2c}{c} = 2$$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * هندسه ۳ (فصل ۳، درس ۲)

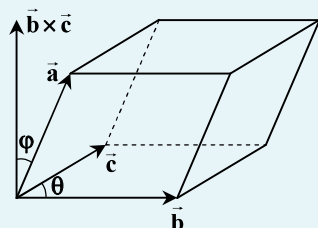
۲۹- پاسخ: گزینه ۴



- طول هر بردار مانند $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ در $\mathbb{R}^3$ از رابطه زیر به دست می آید.

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

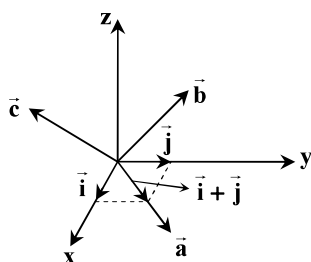
- حجم متوازی السطوح ساخته شده بر روی سه بردار $\vec{a}, \vec{b}$ و $\vec{c}$ به صورت زیر به دست می آید:



$$\text{حجم متوازی السطوح} = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$$



بردار $\vec{i} + \vec{j}$ بردار قطر مربع بنا شده بر $\vec{i}$ و $\vec{j}$ است که در راستای نیمساز زاویه بین محور x و محور y قرار می گیرد. پس بردار $\vec{a}$ باید مضرب $\vec{i} + \vec{j}$ باشد. به همین ترتیب بردار $\vec{b}$ مضرب $\vec{j} + \vec{k}$ و بردار $\vec{c}$ مضرب $\vec{i} + \vec{k}$ است؛ بنابراین بردارهای $\vec{a}, \vec{b}$ و $\vec{c}$ به صورت زیر هستند:



$$\vec{a} = (m, m, 0), \vec{b} = (0, n, n), \vec{c} = (p, 0, p)$$

$$\begin{cases} |\vec{a}| = 2\sqrt{2} = \sqrt{m^2 + m^2} = \sqrt{2}m \Rightarrow m = 2 \Rightarrow \vec{a} = (2, 2, 0) \\ |\vec{b}| = 4\sqrt{2} = \sqrt{n^2 + n^2} = \sqrt{2}n \Rightarrow n = 4 \Rightarrow \vec{b} = (0, 4, 4) \\ |\vec{c}| = 4\sqrt{2} = \sqrt{p^2 + p^2} = \sqrt{2}p \Rightarrow p = 4 \Rightarrow \vec{c} = (4, 0, 4) \end{cases}$$

خواسته سؤال برابر است با:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 2(16 - 0) - 2(0 - 16) = 64 \Rightarrow V = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})| = 64$$

▲ مشخصات سؤال: ساده * آمار و احتمال (فصل ۱، درس ۲)

۳۰- پاسخ: گزینه ۲



- تعداد ترکیب‌های r تایی از n شیء متمایز با $C(n, r)$ یا $\binom{n}{r}$ نشان داده می‌شود.

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)! r!}$$



کوچک‌ترین عضو زیرمجموعه برابر ۶ و بزرگ‌ترین عضو آن برابر ۱۳ است. پس عضو سوم باید از بین اعضای ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲ انتخاب شود که تعداد حالات آن برابر است با:

$$\binom{6}{1} = 6$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * آمار و احتمال (فصل ۱، درس ۱)

۳۱- پاسخ: گزینه ۳



- جدول ارزش برای نقیض یک گزاره که تمام حالت‌های ممکن را برای درستی یا نادرستی گزاره در نظر می‌گیرد، به صورت زیر است:

p	~ p
د	ن
ن	د

- هرگاه p و q دو گزاره باشند، گزاره مرکب « $p \wedge q$ » که خوانده می‌شود «p و q» را ترکیب عطفی دو گزاره می‌گوییم. در اینجا به رابط منطقی « $\wedge$ » عاطف گفته می‌شود. ارزش ترکیب عطفی دو گزاره « $p \wedge q$ » فقط وقتی درست است که ارزش هر دو گزاره p و q درست باشد و در بقیه حالات ارزش « $p \wedge q$ » نادرست است.

p	q	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

- هرگاه p و q دو گزاره باشند، گزاره مرکب «p یا q» را که به صورت « $p \vee q$ » می‌نویسند، ترکیب فصلی دو گزاره می‌گوییم. در اینجا به رابط منطقی « $\vee$ » فاصل گفته می‌شود. ارزش ترکیب فصلی دو گزاره « $p \vee q$ » فقط وقتی نادرست است که ارزش هر دو گزاره p و q نادرست باشد و در بقیه حالات ارزش « $p \vee q$ » درست است.

p	q	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

- جدول ارزش گزاره شرطی « $p \Rightarrow q$ » به صورت زیر است:

(۱) هرگاه ارزش p (مقدم) نادرست باشد، آنگاه ارزش گزاره مرکب « $p \Rightarrow q$ » همواره درست است و ارزش آن به ارزش گزاره q بستگی ندارد.
(۲) ارزش گزاره « $p \Rightarrow q$ » وقتی نادرست است که p درست و q نادرست باشد.

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د



گزاره $p \sim q$ درست است، پس هر دو گزاره p و q درست هستند و داریم:

$$p \equiv T, \sim q \equiv T \Rightarrow q \equiv F$$

گزاره شرطی $p \Rightarrow (r \vee q)$ نیز درست است و چون p درست است، باید گزاره $r \vee q$ درست باشد. پس داریم:

$$r \vee q \equiv T, q \equiv F \Rightarrow r \equiv T$$

حال گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

$$1 \text{ گزینه } 1: \sim r \Rightarrow p \equiv \sim T \Rightarrow T \equiv F \Rightarrow T \equiv T$$

$$2 \text{ گزینه } 2: (\sim r \wedge q) \Rightarrow \sim p \equiv (\sim T \wedge F) \Rightarrow \sim T \equiv (F \wedge F) \Rightarrow F \equiv F \Rightarrow F \equiv T$$

$$3 \text{ گزینه } 3: r \Rightarrow (p \wedge q) \equiv T \Rightarrow (T \wedge F) \equiv T \Rightarrow F \equiv F$$

$$4 \text{ گزینه } 4: r \Rightarrow (p \wedge \sim q) \equiv T \Rightarrow (T \wedge \sim F) \equiv T \Rightarrow (T \wedge T) \equiv T \Rightarrow T \equiv T$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * آمار و احتمال (فصل ۲، درس ۲)

۳۲- پاسخ: گزینه ۱



- در فضای نمونه‌ای متناهی با احتمال غیرهم‌شانس، اگر $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ فضای نمونه‌ای و $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ یک زیرمجموعه k عضوی S باشد، همواره داریم:

$$0 \leq P(A) \leq 1 \quad (1)$$

$$P(S) = 1 \quad (2)$$

$$P(A) = P(a_1) + P(a_2) + \dots + P(a_k) \quad (3)$$



مقادیر $P(1), P(2), \dots, P(6)$ تشکیل یک دنباله حسابی با قدرنسبت d می‌دهند، فرض می‌کنیم، $P(1) = x$ ، پس داریم:

$$P(2) = x + d, P(3) = x + 2d, P(4) = x + 3d, P(5) = x + 4d, P(6) = x + 5d$$

$$\text{چون } P(4) = \frac{7}{36}, \text{ پس:}$$

$$x + 3d = \frac{7}{36} \Rightarrow x = \frac{7}{36} - 3d \quad (1)$$

از طرفی داریم:

$$P(1) + P(2) + \dots + P(6) = 1 \Rightarrow x + x + d + x + 2d + x + 3d + x + 4d + x + 5d = 1$$

$$\Rightarrow 6x + 15d = 1 \xrightarrow{(1)} 6\left(\frac{7}{36} - 3d\right) + 15d = 1 \Rightarrow \frac{7}{6} - 18d + 15d = 1$$

$$\Rightarrow -3d = 1 - \frac{7}{6} \Rightarrow -3d = -\frac{1}{6} \Rightarrow d = \frac{1}{18} \xrightarrow{(1)} x = \frac{7}{36} - 3 \times \frac{1}{18}$$

$$x = \frac{7}{36} - \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

خواسته سؤال برابر است با:

$$P(2) = x + d = \frac{1}{36} + \frac{1}{18} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * آمار و احتمال (فصل ۴، درس ۲)

۳۳- پاسخ: گزینه ۳



- برآورد نقطه‌ای پارامتر جامعه برابر است با مقدار عددی حاصل از جایگذاری اعداد نمونه تصادفی در آماره نظیر آن پارامتر. به بیان دیگر مقدار عددی آماره را برآورد یا برآورد نقطه‌ای می‌نامند.

$$\binom{6}{2} = \frac{6 \times 5}{2} = 15$$

تعداد نمونه‌های ۲ عضوی جامعه $\{1, 3, 4, 5, 7, 8\}$ برابر است با:

برای آنکه نمونه دو عضوی $\{x_1, x_2\}$ میانگین جامعه را برابر ۴ برآورد کند، باید داشته باشیم:

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = 4 \Rightarrow x_1 + x_2 = 8$$

$$P_1 = \frac{2}{15} : \text{مقدار احتمال} \Rightarrow \{1, 7\}, \{3, 5\} : \text{نمونه‌های ۲ عضوی}$$

$$\binom{6}{3} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20$$

تعداد نمونه‌های ۳ عضوی جامعه $\{1, 3, 4, 5, 7, 8\}$ برابر است با:

برای آنکه نمونه سه عضوی $\{x_1, x_2, x_3\}$ میانگین جامعه را برابر ۴ برآورد کند، باید داشته باشیم:

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = 4 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 12$$

$$P_2 = \frac{3}{20} : \text{مقدار احتمال} \Rightarrow \{1, 3, 8\}, \{1, 4, 7\}, \{3, 4, 5\} : \text{نمونه‌های ۳ عضوی}$$

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\frac{2}{15}}{\frac{3}{20}} = \frac{40}{45} = \frac{8}{9}$$

خواسته سؤال برابر است با:

۳۴- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * آمار و احتمال (فصل ۲، درس ۳)

- فرض کنید $B_1, B_2, \dots, B_n$ پیشامدهایی با احتمال ناصفر باشند که فضای نمونه را افراز می‌کنند. در این صورت، برای هر پیشامد دلخواه A، داریم:

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + \dots + P(B_n)P(A|B_n) = \sum_{k=1}^n P(B_k)P(A|B_k)$$

برحسب دو سببی که از جعبه اول برداشته و داخل جعبه دوم قرار داده‌ایم، حالات زیر را داریم:

$$\begin{aligned}
 & \text{جعبه اول: } \begin{cases} 4 \text{ سیب زرد} \\ 5 \text{ سیب قرمز} \end{cases} \begin{cases} \text{هر دو سیب زرد باشند} \\ \text{یک سیب زرد و یک سیب قرمز باشد} \\ \text{هر دو سیب قرمز باشند} \end{cases} \\
 & \left(\frac{4}{9} \right) \Rightarrow \left(\frac{4}{9} \right) \Rightarrow \text{احتمال قرمز بودن سیب} = \frac{2}{9} \\
 & \left(\frac{4}{9} \right) \left(\frac{5}{9} \right) \Rightarrow \left(\frac{4}{9} \right) \Rightarrow \text{احتمال قرمز بودن سیب} = \frac{3}{9} \\
 & \left(\frac{5}{9} \right) \Rightarrow \left(\frac{5}{9} \right) \Rightarrow \text{احتمال قرمز بودن سیب} = \frac{4}{9}
 \end{aligned}$$

حال طبق قانون احتمال کل، داریم:

$$P(\text{قرمز بودن سیب}) = \left(\frac{4}{9} \right) \times \frac{2}{9} + \left(\frac{4}{9} \right) \left(\frac{5}{9} \right) \times \frac{3}{9} + \left(\frac{5}{9} \right) \times \frac{4}{9} = \frac{6 \times 2 + 20 \times 3 + 10 \times 4}{9 \times 9} = \frac{12 + 60 + 40}{36 \times 9} = \frac{112}{36 \times 9} = \frac{28}{81}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (فصل ۲، درس ۱)

۳۵- پاسخ: گزینه ۳



- مجموعه همسایه‌های یک رأس: فرض کنیم $v \in V(G)$ ، به مجموعه رأس‌هایی از گراف G که به رأس v متصل هستند، «همسایگی باز رأس v » می‌گوییم و با $N_G(v)$ نمایش می‌دهیم. اضافه کردن خود رأس v به $N_G(v)$ «همسایگی بسته رأس v » را به دست می‌دهد که آن را با $N_G[v]$ نمایش می‌دهیم. می‌توان این دو مجموعه را به صورت زیر نمایش داد:

$$N_G(v) = \{u \in V(G); uv \in E(G)\}$$

$$N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$$

- گراف کامل: گرافی را که هر رأس آن با تمام رئوس دیگر مجاور باشد، گراف کامل می‌نامیم. گراف کامل n رأسی را با K_n نمایش می‌دهیم. می‌توان گفت K_n یک گراف n رأسی و $n-1$ - منتظم است.

نکته: در هر گراف کامل p رأسی تعداد یال‌ها برابر است با:

$$q = \binom{p}{2} = \frac{p(p-1)}{2}$$



با توجه به اینکه همسایگی بسته هر رأس دارای p عضو است، می‌توان نتیجه گرفت که هر رأس به تمام رئوس دیگر متصل است و گراف کامل است. بنابراین طبق فرض سؤال، داریم:

$$q = 3p + 4 \Rightarrow \frac{p(p-1)}{2} = 3p + 4 \Rightarrow p^2 - p = 6p + 8$$

$$\Rightarrow p^2 - 7p - 8 = 0 \Rightarrow (p+1)(p-8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} p = -1 \\ p = 8 \end{cases} \text{ غیر قابل قبول}$$

بنابراین گراف موردنظر، گراف کامل K_8 است و در این گراف داریم:

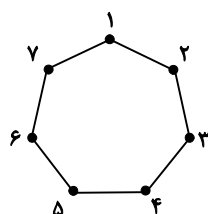
$$\delta = \Delta = p - 1 = 8 - 1 = 7$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (فصل ۲، درس ۲)

۳۶- پاسخ: گزینه ۳



- زیرمجموعه D از مجموعه رئوس گراف G را مجموعه احاطه‌گر می‌نامیم هرگاه هر رأس از گراف یا در D باشد و یا حداقل با یکی از رئوس D مجاور باشد.



همان گونه که مشاهده می‌کنید همه زیرمجموعه‌های ۴ عضوی از رئوس این گراف به جز ۴ رأس متوالی، مجموعه احاطه‌گر هستند. از طرفی ۷ مجموعه با ۴ رأس متوالی وجود دارد که احاطه‌گر نیستند و عبارت‌اند از:

$$\{1, 2, 3, 4\}, \{2, 3, 4, 5\}, \{3, 4, 5, 6\}, \{4, 5, 6, 7\}, \{5, 6, 7, 1\}, \{6, 7, 1, 2\}, \{7, 1, 2, 3\}$$

پس تعداد کل مجموعه‌های احاطه‌گر ۴ عضوی این گراف عبارت‌اند از:

$$\binom{7}{4} - 7 = 35 - 7 = 28$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (فصل ۳، درس ۱)

۳۷- پاسخ: گزینه ۱



- تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ برابر است با تعداد انتخاب‌های دلخواه n شاخه گل از بین k نوع گل

$$\text{یعنی برابر است با } \binom{n+k-1}{k-1}$$



با توجه به شرط مسئله داریم:

$$i = 1 \Rightarrow x_1 \geq 2 \Rightarrow x_1 - 2 \geq 0, y_1 = x_1 - 2 \Rightarrow x_1 = y_1 + 2$$

$$i = 2 \Rightarrow x_2 \geq 3 \Rightarrow x_2 - 3 \geq 0, y_2 = x_2 - 3 \Rightarrow x_2 = y_2 + 3$$

چون جواب صحیح و مثبت معادله را می‌خواهیم، پس باید $x_3 \geq 1$ و داریم:

$$x_3 - 1 \geq 0, y_3 = x_3 - 1 \Rightarrow x_3 = y_3 + 1$$

با جایگذاری روابط بالا در معادله، داریم:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 12 \Rightarrow y_1 + 2 + y_2 + 3 + y_3 + 1 = 12$$

$$\Rightarrow y_1 + y_2 + y_3 = 6, n = 6, k = 3 \Rightarrow \text{تعداد جوابها} = \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{8}{2}$$

$$\Rightarrow \text{تعداد جوابها} = \frac{8 \times 7}{2} = 28$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (فصل ۳، درس ۲)

۳۸- پاسخ: گزینه ۳



- اصل لانه کبوتری: اگر m کبوتر و n لانه داشته باشیم و $m > n$ و همه کبوترها درون لانه‌ها قرار بگیرند، در این صورت لانه‌ای وجود دارد که حداقل ۲ کبوتر در آن قرار گرفته است.



بازه $(\frac{1}{5}, \frac{8}{5})$ را به صورت زیر به بازه‌هایی با طول $\frac{1}{75}$ تقسیم می‌کنیم.

$$[\frac{1}{75}, \frac{2}{75}), [\frac{2}{75}, \frac{3}{75}), [\frac{3}{75}, \frac{4}{75}), [\frac{4}{75}, \frac{5}{75}), [\frac{5}{75}, \frac{6}{75}), [\frac{6}{75}, \frac{7}{75}), [\frac{7}{75}, \frac{8}{75})$$

هر کدام از بازه‌های بالا را یک لانه در نظر می‌گیریم. اگر انتخاب هر عدد از هر بازه را یک کبوتر در نظر بگیریم، با انتخاب حداقل $11 = 10 + 1$ کبوتر یعنی با انتخاب حداقل ۱۱ عدد، دست کم دو عدد داخل یک بازه قرار دارند و تفاضل آن دو عدد کمتر از $\frac{1}{75}$ می‌باشد.

▲ مشخصات سؤال: دشوار * ریاضیات گسسته (فصل ۱، درس‌های ۲ و ۳)

۳۹- پاسخ: گزینه ۲



- اگر عدد a عدد b را بشمارد، آنگاه هر مضرب صحیح عدد b را نیز می‌شمارد؛ یعنی:

$$a | b \Rightarrow a | mb$$

- هرگاه عددی دو عدد را بشمارد، آنگاه مجموع و تفاضل آن دو عدد را نیز می‌شمارد.

$$a | b \wedge a | c \Rightarrow a | b \pm c$$

- می‌توان به دو طرف یا یک طرف یک رابطه هم‌نهشتی هر مضربی از پیمانه را اضافه یا از آن کم کرد.

$$a \equiv b \Rightarrow \begin{cases} a + mt \equiv b + mk \\ a - mt \equiv b - mk \end{cases}$$

- اگر بخواهیم دو طرف یک رابطه هم‌نهشتی را بر عددی تقسیم کنیم، باید پیمانه آن هم‌نهشتی را بر ب.م.م آن عدد و پیمانه تقسیم کنیم.

$$ac \equiv bc, (c, m) = d \Rightarrow a \equiv \frac{m}{d} b$$



فرض می‌کنیم ب.م.م دو عدد $7n+5$ و $11n+2$ برابر d باشد، داریم:

$$(7n+5, 11n+2) = d$$

$$d \mid 7n+5 \Rightarrow d \mid 11(7n+5) \Rightarrow d \mid 77n+55$$

$$d \mid 11n+2 \Rightarrow d \mid 7(11n+2) \Rightarrow d \mid 77n+14$$

$$\Rightarrow d \mid 77n+55 - (77n+14) \Rightarrow d \mid 41 \Rightarrow d = 1, 41$$

اگر $d = 41$ باشد، داریم:

$$41 \mid 7n+5 \Rightarrow 7n+5 \equiv 0 \pmod{41} \Rightarrow 7n \equiv -5 \pmod{41} \Rightarrow 7n \equiv 36 \pmod{41} \Rightarrow n \equiv 11 \pmod{41} \Rightarrow n = 41q + 11$$

تعداد اعداد دورقمی طبیعی n به صورت زیر به دست می‌آید.

$$10 \leq 41q + 11 \leq 99 \Rightarrow -1 \leq 41q \leq 88 \Rightarrow \frac{-1}{41} \leq q \leq \frac{88}{41} \Rightarrow q = 0, 1, 2$$

بنابراین به ازای ۳ عدد طبیعی دورقمی n ، ب.م.م دو عبارت $7n+5$ و $11n+2$ برابر ۴۱ است. در نتیجه تعداد اعداد طبیعی دورقمی n که به ازای آن‌ها دو عدد $7n+5$ و $11n+2$ نسبت به هم اول هستند یعنی $d = 1$ است، به صورت زیر است.

$$87 = 90 - 3 = \text{خواسته سؤال} \Rightarrow \text{تعداد کل اعداد دورقمی} = 90$$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * ریاضیات گسسته (فصل ۱، درس ۳)

۴۰- پاسخ: گزینه ۱



- می‌توان به دو طرف یا یک طرف یک رابطه هم‌نهشتی هر مضربی از پیمانه را اضافه یا از آن کم کرد.

$$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow \begin{cases} a + mt \equiv b + mk \\ a - mt \equiv b - mk \end{cases}$$

- دو طرف یک رابطه هم‌نهشتی را می‌توان به توان n رساند. ($n \in \mathbb{N}$)

$$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a^n \equiv b^n \pmod{m}$$



رابطه $a + 26^{301} \mid 19$ را می‌توان به صورت $a + 26^{301} \equiv 0 \pmod{19}$ نوشت. حال داریم:

$$26 \equiv 26 - 19 \Rightarrow 26 \equiv 7 \xrightarrow{\times 26} 26^2 \equiv 182 \Rightarrow 26^2 \equiv 182 - 9 \times 19 \pmod{19}$$

$$\Rightarrow 26^2 \equiv 11 \xrightarrow{\times 26} 26^3 \equiv 11 \times 26 \Rightarrow 26^3 \equiv 286 \pmod{19}$$

$$\Rightarrow 26^3 \equiv 286 - 15 \times 19 \Rightarrow 26^3 \equiv 286 - 285 \equiv 1 \pmod{19}$$

طرفین رابطه بالا را به توان ۱۰۰ می‌رسانیم:

$$(26^3)^{100} \equiv 1^{100} \Rightarrow 26^{300} \equiv 1 \xrightarrow{\times 26} 26^{301} \equiv 26 \pmod{19}$$

$$\Rightarrow 26^{301} + a \equiv 26 + a \Rightarrow 26 + a \equiv 0 \Rightarrow a \equiv -26 \pmod{19}$$

$$\Rightarrow a \equiv -26 + 2 \times 19 \equiv 12 \Rightarrow a = 19k + 12$$

کوچک‌ترین عدد دورقمی طبیعی a به ازای $k = 0$ به دست می‌آید.

$$a = 12 \Rightarrow \text{مجموع ارقام} = 1 + 2 = 3$$

فیزیک

۴۱- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۳ (فصل ۶)



از آب معمولی (H_2O)، آب سنگین (D_2O) و گرافیت می توان به عنوان کندساز نوترون ها در راکتور شکافت هسته ای استفاده کرد.

۴۲- پاسخ: گزینه ۴

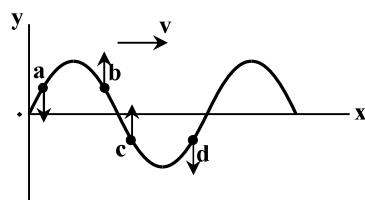
▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۲ (فصل ۳)



$$B = \frac{\mu_0 NI}{\ell} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 200 \times 0.5}{0.2} = 2\pi \times 10^{-4} \text{ T} = 2\pi \text{ G}$$

۴۳- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۳ (فصل ۳)



هر یک از ذرات محیط نوسان می کنند. اگر ذره ای در مکان های منفی باشد ($y < 0$) شتاب آن مثبت است. بنابراین از بین نقاط رسم شده در شکل، فقط شتاب نقاط c و d مثبت است. از طرفی در شکل روبه رو با توجه به موقعیت نقاطی که در همسایگی نقاط a, b, c و d قرار دارند و موج را زودتر دریافت می کنند، جهت حرکت این نقاط را نشان داده ایم. با توجه به شکل، $v_d < 0$ ، $v_c > 0$ ، $v_b > 0$ ، $v_a < 0$ است. بنابراین نقطه c تنها نقطه ای است که سرعت و شتاب آن، هر دو مثبت اند.

۴۴- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۴)



$$f_n = \frac{nv}{\ell L} \Rightarrow 600 = \frac{n \times 120}{2 \times 0.6} \Rightarrow n = 6$$

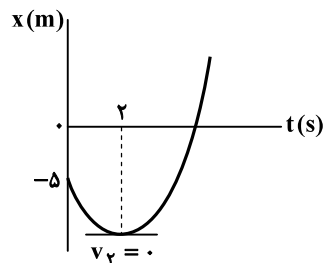
ابتدا عدد هماهنگ ایجاد شده را به دست می آوریم:

تعداد گره های ایجاد شده در تار که دو انتهای آن بسته است، یک واحد بیشتر از عدد هماهنگ تار است.

$$n + 1 = 6 + 1 = 7 = \text{تعداد گره ها}$$

۴۵- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)



می خواهیم شتاب متحرک را حساب کنیم. دو کار می توانیم انجام دهیم. یکی اینکه حرکت را از لحظه $t = 2 \text{ s}$ بررسی کنیم. در این لحظه سرعت متحرک صفر است ($v_2 = 0$). بازه زمانی ۴ s تا ۵ s (یعنی ثانیه پنجم) معادل ثانیه سوم پس از لحظه تغییر جهت است. جابه جایی متحرک در این مدت برابر است با:

$$\Delta x_n = (n - 0.5)a + v_0$$

$$\Delta x_3 = (3 - 0.5)a + v_2 \Rightarrow 5 = 2.5a + 0 \Rightarrow a = 2 \frac{m}{s^2}$$

یک کار دیگر هم می توانستیم انجام دهیم. سرعت متوسط در ثانیه پنجم برابر سرعت آن در وسط ثانیه پنجم (یعنی لحظه ۴/۵ s) است؛ بنابراین داریم:

$$v_{4/5s} = v_{av}(4s, 5s) \Rightarrow v_{4/5s} = \frac{\Delta x(4s, 5s)}{5-4} = \frac{5}{1} = 5 \frac{m}{s}$$

$$a = a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_{4/5s} - v_{2s}}{4/5 - 2} = \frac{5 - 0}{2/5} = 2 \frac{m}{s^2}$$

$$v = at + v_0 \Rightarrow 0 = 2 \times 2 + v_0 \Rightarrow v_0 = -4 \frac{m}{s}$$

حالا سرعت اولیه متحرک را می یابیم:

تندی عبور متحرک از مبدأ مکان را با v' نشان می دهیم. در این صورت:

$$v'^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \Rightarrow v'^2 - (-4)^2 = 2 \times 2 \times (0 - (-5)) \Rightarrow v' = 6 \frac{m}{s}$$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۳ (فصل ۱)

۴۶- پاسخ: گزینه ۴



معادله مکان- زمان دو اتومبیل را تعیین می کنیم:

$$x_A = \frac{1}{2} a_A t^2 + v_{0A} t + x_{0A} = \frac{1}{2} \times 1 \times t^2 + 0 + 0 = \frac{1}{2} t^2$$

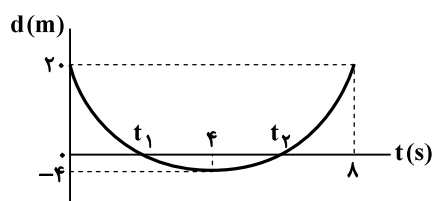
$$v_B = a_B t + v_{0B} \Rightarrow 0 = -2 \times 2 + v_{0B} \Rightarrow v_{0B} = \frac{4}{s}$$

$$x_B = \frac{1}{2} a_B t^2 + v_{0B} t + x_{0B} = \frac{1}{2} \times (-2) \times t^2 + 4t + x_{0B} \xrightarrow{(t=2s, x=0)} 0 = -2 + 4 \times 2 + x_{0B} \Rightarrow x_{0B} = -2 \cdot m$$

$$\Rightarrow x_B = -t^2 + 4t - 2$$

اختلاف مکان اتومبیل A نسبت به اتومبیل B را با d نشان می دهیم:

$$d = x_A - x_B \Rightarrow d = \frac{1}{2} t^2 - (-t^2 + 4t - 2) = \frac{3}{2} t^2 - 4t + 2$$



نمودار $d-t$ مطابق شکل روبه‌رو رسم می شود. مطابق شکل، در بازه زمانی (t_1, t_2) فاصله دو متحرک کاهش و در بازه زمانی $(t_2, 8s)$ فاصله آن‌ها افزایش می یابد.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)

۴۷- پاسخ: گزینه ۳



ابتدا زمان حرکت گلوله A را به دست می آوریم:

$$h_A = \frac{1}{2} g t_A^2 \Rightarrow 180 = \frac{1}{2} \times 10 \times t_A^2 \Rightarrow t_A^2 = 36 \Rightarrow t_A = 6s$$

گلوله B با ۲s تأخیر نسبت به گلوله A رها شده است؛ پس داریم:

$$t_B = t_A - 2 = 6 - 2 = 4s$$

$$h_B = \frac{1}{2} g t_B^2 = \frac{1}{2} \times 10 \times 4^2 = 80 \cdot m$$

گلوله B تا لحظه $t_B = 4s$ به اندازه $80 \cdot m$ سقوط کرده است؛ بنابراین فاصله آن از سطح زمین برابر است با:

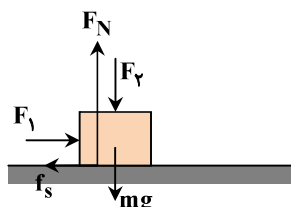
$$h_A - h_B = 180 - 80 = 100 \cdot m$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

۴۸- پاسخ: گزینه ۳



شکل روبه‌رو، نیروهای وارد بر جسم را نشان می دهد. جسم ساکن است و نیروی خالص وارد بر آن صفر است.



$$F_{net,x} = 0 \Rightarrow f_s = F_1$$

$$F_{net,y} = 0 \Rightarrow F_N = F_Y + mg$$

مطابق روابط بالا، با افزایش F_Y ، نیروی عمودی سطح، بیشینه نیروی اصطکاک ایستایی $(f_{s,max} = \mu_s F_N)$ و نیرویی که سطح به جسم

وارد می کند $(R = \sqrt{F_N^2 + f_s^2})$ ، افزایش می یابند، اما نیروی خالص وارد بر جسم کماکان صفر و بزرگی نیروی اصطکاک، برابر F_1 است.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

۴۹- پاسخ: گزینه ۱



شکل روبه‌رو، نیروهای وارد بر نردبان را نشان می‌دهد. چون نردبان ساکن است، برابری نیروهای وارد بر آن صفر است.

$$F_{\text{net},x} = 0 \Rightarrow 30 - f_{s,\text{max}} = 0 \Rightarrow f_{s,\text{max}} = 30 \cdot N$$

$$F_{\text{net},y} = 0 \Rightarrow 10 + F_N - mg = 0 \Rightarrow F_N = 5 \times 10 - 10 = 40 \cdot N$$

$$f_{s,\text{max}} = \mu_s F_N \Rightarrow 30 = \mu_s \times 40 \Rightarrow \mu_s = \frac{3}{4}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

۵۰- پاسخ: گزینه ۳

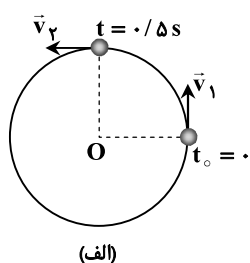


$$F_{\text{net}} = \frac{\Delta p}{\Delta t} \Rightarrow 10 = \frac{\Delta p}{\Delta t} \Rightarrow \Delta p = 5 \cdot \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}} \Rightarrow p_2 - p_1 = 50 \Rightarrow p_2 - 0 = 50 \Rightarrow p_2 = 50 \cdot \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$$

$$K = \frac{p^2}{2m} \Rightarrow 500 = \frac{50^2}{2m} \Rightarrow m = 0.25 \cdot \text{kg} = 250 \cdot \text{g}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

۵۱- پاسخ: گزینه ۴



(الف)

$$n = \frac{t}{T} \Rightarrow 150 = \frac{60}{T} \Rightarrow T = 0.4 \cdot \text{s}$$

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi \times 5}{0.4} = 25\pi \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$n = \frac{t}{T} = \frac{0.5}{0.4} = 1.25$$

ابتدا دوره حرکت گلوله را حساب می‌کنیم:

تندی دوران گلوله برابر است با:

تعداد دوران‌های گلوله در مدت ۰.۵ s برابر است با:

بنابراین گلوله پس از ۰.۵ s در راستایی عمود بر راستای اولیه قرار می‌گیرد (مثل شکل «الف»). با توجه به شکل «ب» بزرگی تغییر بردار سرعت گلوله برابر است با:

$$\Delta v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \xrightarrow{v_1=v_2=v} \Delta v = \sqrt{2}v = 25\sqrt{2}\pi \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\Delta p = m\Delta v = 0.2 \times 25\sqrt{2}\pi = 5\sqrt{2}\pi \cdot \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۳ (فصل ۳)

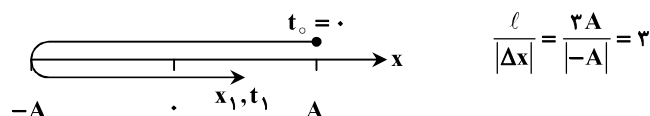
۵۲- پاسخ: گزینه ۲



از اینکه تندی متوسط ۷ برابر بزرگی سرعت متوسط است، نتیجه می‌گیریم مسافت طی شده توسط نوسانگر ۷ برابر بزرگی جابه‌جایی آن است.

$$s_{\text{av}} = 7|v_{\text{av}}| \Rightarrow \frac{\ell}{\Delta t} = 7 \frac{|\Delta x|}{\Delta t} \Rightarrow \ell = 7|\Delta x|$$

نوسانگر در لحظه $t = \frac{3T}{4}$ برای دومین بار از مرکز نوسان می‌گذرد. در بازه $(0, \frac{3T}{4})$ ، مسافت طی شده ۳ برابر بزرگی جابه‌جایی می‌شود.



بنابراین t_1 در بازه زمانی $(\frac{3T}{4}, T)$ قرار دارد. مکان نوسانگر را در لحظه t_1 با x_1 نشان می‌دهیم؛ بنابراین داریم:

$$\ell = 7|\Delta x| \Rightarrow 3A + x_1 = 7(A - x_1) \Rightarrow 3A + x_1 = 7A - 7x_1 \Rightarrow 8x_1 = 4A \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}A$$

$$x = A \cos \frac{10\pi}{3} t \Rightarrow \frac{1}{2}A = A \cos \frac{10\pi}{3} t_1 \Rightarrow \cos \frac{10\pi}{3} t_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{10\pi}{3} t_1 = 2\pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{10\pi}{3} t_1 = \frac{5\pi}{3} \Rightarrow t_1 = 0.5 \cdot \text{s}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۳)

۵۳- پاسخ: گزینه ۳



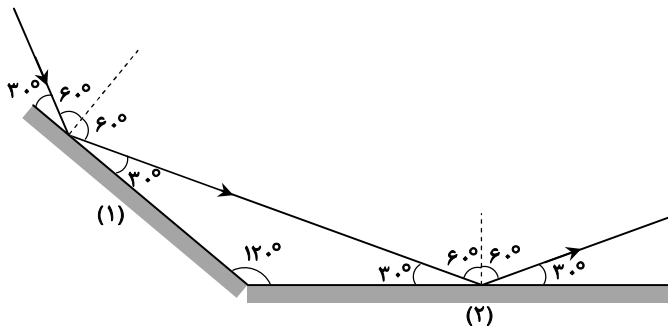
$$\begin{cases} \Delta\beta = 10 \log \frac{I_2}{I_1} \\ \frac{I_2}{I_1} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \end{cases} \Rightarrow \Delta\beta = 10 \log \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 = 20 \log \frac{r_1}{r_2}$$

چون فاصله شنونده از چشمه افزایش یافته، تراز شدت صوتی که به گوش شنونده می‌رسد، کاهش می‌یابد ($\Delta\beta = -12 \text{ dB}$).

$$-12 = 20 \log \frac{r_1}{r_2} \Rightarrow \log \frac{r_2}{r_1} = \frac{12}{20} = 0.6 = 2 \times 0.3 = 2 \log 2 = \log 2^2 \Rightarrow \frac{r_2}{r_1} = 4 \Rightarrow \frac{r_1 + 60}{r_1} = 4 \Rightarrow r_1 + 60 = 4r_1 \Rightarrow 3r_1 = 60 \Rightarrow r_1 = 20 \text{ m}$$

▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۳ (فصل ۴)

۵۴- پاسخ: گزینه ۴



شکل روبه‌رو، مسیر پرتو را نشان می‌دهد. پرتو با زاویه بازتاب 60° از آینه (۲) بازمی‌تابد. زاویه‌ای که جبهه‌های موج با سطح آینه می‌سازند برابر زاویه‌ای است که پرتو نور با خط عمود بر سطح می‌سازد. پس جبهه موج با زاویه 60° نسبت به آینه (۲) بر سطح آن فرود و از سطح آن بازمی‌تابد.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۴)

۵۵- پاسخ: گزینه ۱



ویژگی‌های شیشه و الماس را به ترتیب با زیروند g و d نشان می‌دهیم.

$$v = \frac{c}{n} \Rightarrow \frac{v_d}{v_g} = \frac{n_g}{n_d} = \frac{1/6}{2} = \frac{1}{12} \Rightarrow v_d = \frac{1}{12} v_g$$

$$\Delta v = v_d - v_g = \frac{1}{12} v_g - v_g = -\frac{11}{12} v_g \Rightarrow \frac{\Delta v}{v_g} \times 100 = -91.67\%$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۵)

۵۶- پاسخ: گزینه ۴



طول موج 4652 nm است و امکان ندارد یکی از خطوط رشته بالمر باشد (خطوط بالمر در ناحیه مرئی و فرابنفش اند). طول موج بیشینه خطوط پاشن، براکت و پفوند را به ترتیب با پاشن λ ، براکت λ و پفوند λ نشان می‌دهیم. بلندترین طول موج هر رشته با جایگذاری $n = n' + 1$ در رابطه ریدبرگ مربوط به آن رشته به دست می‌آید.

$$\frac{1}{\lambda_{\text{پاشن}}} = R \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right) = \frac{11}{10000} \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} \right) = \frac{77}{1440000} \Rightarrow \lambda_{\text{پاشن}} = \frac{1440000}{77} \approx 18700 \text{ nm}$$

$$\frac{1}{\lambda_{\text{براکت}}} = \frac{11}{10000} \times \left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{5^2} \right) = \frac{99}{4000000} \Rightarrow \lambda_{\text{براکت}} = \frac{4000000}{99} \approx 40400 \text{ nm}$$

$$\frac{1}{\lambda_{\text{پفوند}}} = \frac{11}{10000} \times \left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{6^2} \right) = \frac{121}{9000000} \Rightarrow \lambda_{\text{پفوند}} = \frac{9000000}{121} \approx 74380 \text{ nm}$$

با توجه به محاسبات فوق، طول موج 4652 nm قطعاً متعلق به رشته پفوند است.



وقتی الکترون از تراز $n = 5$ به دورترین تراز ($n' = 1$) سقوط می‌کند، کوتاه‌ترین طول موج ممکن را تابش می‌کند. انرژی فوتون تابشی در این حالت برابر است با:

$$\Delta E = E_5 - E_1$$

وقتی الکترون از تراز $n = 5$ به نزدیک‌ترین تراز ($n' = 4$) سقوط می‌کند، بلندترین طول موج ممکن را تابش می‌کند. انرژی فوتون تابشی در این حالت برابر است با:

$$\Delta E' = E_5 - E_4$$

آنچه سؤال از ما خواسته عبارت است از:

$$\Delta E - \Delta E' = (E_5 - E_1) - (E_5 - E_4) = E_4 - E_1 = -\frac{E_R}{16} - (-E_R) = \frac{15}{16} E_R = \frac{15}{16} \times 13.6 \text{ eV} = \frac{15}{16} \times 13.6 \times 1.6 \times 10^{-19} \text{ J}$$

$$= 2.04 \times 10^{-18} \text{ J}$$



نیمه‌عمر را با T نشان می‌دهیم. با توجه به نمودار رسم‌شده در صورت سؤال داریم:

$$N = \frac{N_0}{2^{\frac{t}{T}}} \Rightarrow \frac{1}{8} N_0 = \frac{N_0}{2^{\frac{t}{T}}} \Rightarrow \frac{t}{T} = 3$$

$$\Rightarrow \frac{60}{T} = 3 \Rightarrow \frac{60}{T} = 3 \Rightarrow T = 20 \text{ day}$$

در شرایطی که $93/75$ درصد ماده واپاشیده می‌شود، داریم:

$$N = N_0 - \frac{93}{100} N_0 = \frac{7}{100} N_0 = \frac{1}{16} N_0$$

$$N = \frac{N_0}{2^{\frac{t}{T}}} \Rightarrow \frac{1}{16} N_0 = \frac{N_0}{2^{\frac{t}{T}}} \Rightarrow \frac{t}{T} = 4$$

$$\Rightarrow \frac{t}{20} = 4 \Rightarrow t = 80 \text{ day}$$



الف) نادرست است؛ زیرا:

$$\Delta q = +n|e| = 1.9 \times 1.6 \times 10^{-19} = 3.04 \times 10^{-19} \text{ C}$$

$$q_2 = q_1 + \Delta q = -2 \times 10^{-9} + 3.04 \times 10^{-19} = -1.999999999696 \times 10^{-9} \text{ C}$$

ب) نادرست است؛ چون کار نیروی الکتریکی بین دو بار مثبت بوده و تغییرات انرژی پتانسیل الکتریکی منفی است.

$$\Delta U = -W_E$$

پ) نادرست است؛ میدان الکتریکی خالص در فاصله بین دو بار q_1 و q_2 صفر است؛ پس q_1 و q_2 همدیگر را با حرکت q_3 به سمت یکی از بارها، به سمت آن بار فرار می‌کند؛ یعنی q_3 مخالف بارهای q_1 و q_2 است.

ت) درست است.

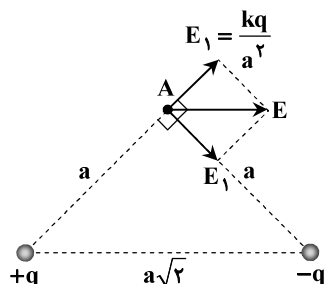
ث) نادرست است؛ دو گلوله هم‌پتانسیل هستند که بین آن‌ها جریان ایجاد نمی‌شود. مثل همه نقاط رسانای دوکی شکل درحالی‌که الزاماً چگالی سطحی بار در همه نقاط آن یکسان نیست.

۶۰- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۱)

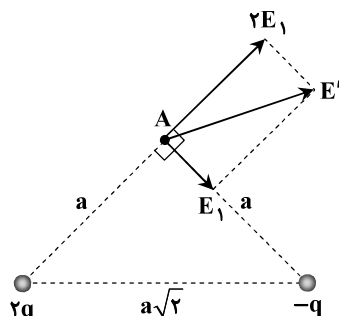


با توجه به برقراری رابطه فیثاغورس، نتیجه می گیریم زاویه رأس A، ۹۰ درجه است.
حالت اول:



$$E = E_1 \sqrt{2}$$

حالت دوم:



$$E' = \sqrt{(2E_1)^2 + E_1^2} = \sqrt{5} E_1$$

نسبت خواسته شده برابر است با:

$$\frac{E'}{E} = \frac{\sqrt{5} E_1}{\sqrt{2} E_1} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

۶۱- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۱)



اعداد نوشته شده بر روی خازن، ظرفیت خازن و حداکثر ولتاژ قابل تحمل آن است.
در حالت اول:

$$U_1 = \frac{1}{2} C V_1^2 \Rightarrow 61/25 = \frac{1}{2} \times 10 \times V_1^2 \Rightarrow V_1^2 = 12/25 \Rightarrow V_1 = 3/5 \text{ V}$$

در لحظه موردنظر، خازن به اختلاف پتانسیل ۳/۵ V وصل است. اگر ولتاژ دو سر خازن را ۲ ولت افزایش دهیم، به ۵/۵ V می رسد. چون ولتاژ دو سر خازن بیشتر از حداکثر ولتاژ قابل تحمل آن می شود، فروریزش رخ می دهد؛ در نتیجه خازن می سوزد و انرژی آن صفر می شود.

۶۲- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۲)



گزینه ۲ درست است.



گزینه ۱: سرعت سوق الکترون ها در مدار در حدود $10^{-5} \frac{m}{s}$ یا $10^{-4} \frac{m}{s}$ است.

گزینه ۳: افزایش دما باعث کاهش مقاومت نیم رسانا می شود.

گزینه ۴: تابش نور روی مقاومت نوری (LDR) باعث کاهش مقاومت آن می شود.

۶۳- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۲ (فصل ۲)



اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت ۱۲ اهمی همان اختلاف پتانسیل دو سر AB است.

$$V_V = V_{AB} = I_{\text{کل}} \times R_{AB} \quad \text{رابطه (۱)}$$

وقتی کلید وصل است:

$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{4+2} \Rightarrow R_{AB} = 3\Omega \Rightarrow R_{eq} = 3+6 = 9\Omega$$

$$I_{کل} = \frac{\mathcal{E}}{R_{eq} + r} = \frac{\mathcal{E}}{9+1} = \frac{\mathcal{E}}{10} A \xrightarrow{\text{رابطه (۱)}} V = V_{AB} = I_{کل} \times R_{AB} = \frac{\mathcal{E}}{10} \times 3 = \frac{3}{10}\mathcal{E}$$

وقتی کلید قطع می‌شود:

$$\frac{1}{R'_{AB}} = \frac{1}{12} + \frac{1}{4+2} \Rightarrow R'_{AB} = 4\Omega \Rightarrow R'_{eq} = 4+6 = 10\Omega$$

$$I'_{کل} = \frac{\mathcal{E}}{R'_{eq} + r} = \frac{\mathcal{E}}{10+1} = \frac{\mathcal{E}}{11} A \xrightarrow{\text{رابطه (۱)}} V'_{AB} = I'_{کل} \times R'_{AB} = \frac{\mathcal{E}}{11} \times 4 = \frac{4}{11}\mathcal{E}$$

$$\frac{V'_{AB}}{V_{AB}} = \frac{\frac{4}{11}\mathcal{E}}{\frac{3}{10}\mathcal{E}} = \frac{40}{33}$$

نسبت V'_{AB} به V_{AB} را می‌یابیم:

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۲)

۶۴- پاسخ: گزینه ۳



کل توان تولیدی توسط باتری $\mathcal{E}_1$ است ($\mathcal{E}_1 I$) که به اندازه $I^2 r_1$ آن توسط مقاومت درونی خودش تلف شده است؛ بنابراین توان مفید این مولد $\mathcal{E}_1 I - I^2 r_1$ است که این توان مفید برابر با مجموع توان ورودی باتری $\mathcal{E}_2$ ($\mathcal{E}_2 I + I^2 r_2$) و توان مصرفی مقاومت R است و چون $\mathcal{E}_2 I + I^2 r_2 = 0.75(\mathcal{E}_1 I - I^2 r_1)$ است، داریم:

$$I^2 R = 0.25(\mathcal{E}_1 I - I^2 r_1)$$

حالا نسبت خواسته شده را می‌یابیم:

$$\frac{I^2 R}{\mathcal{E}_2 I + I^2 r_2} = \frac{0.25}{0.75} = \frac{1}{3}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۲)

۶۵- پاسخ: گزینه ۱



چون آمپرسنج آرمانی و مقاومتش صفر است، مقاومت ۱۲ اهمی اتصال کوتاه و حذف می‌شود و مقاومت‌های ۶ و ۳ اهمی موازی‌اند.

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \Rightarrow R' = 2\Omega \Rightarrow R_{eq} = 1/5 + 2 = 3/5\Omega$$

$$6 \times 0.2 = 3 \times I_{3\Omega} \Rightarrow I_{3\Omega} = 0.4 A$$

$$I_{کل} = 0.2 + 0.4 = 0.6 A$$

$$P_{\text{مفید مولد}} = \mathcal{E}I - I^2 r = R_{eq} I_{کل}^2 = 3/5 \times (0.6)^2 = 1/26 W$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۴)

۶۶- پاسخ: گزینه ۳



$$\mathcal{E}_{av} = -N \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -100 \times \frac{(-0.04 - 0.02)}{0.2} = 30 V$$

$$I_{av} = \frac{\mathcal{E}_{av}}{R} = \frac{30}{12} = 2.5 A$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۴)

۶۷- پاسخ: گزینه ۲



$$\frac{N_A}{\ell_A} = \frac{N_B}{\ell_B} \xrightarrow{N_A = 2N_B} \ell_A = 2\ell_B$$

$$L = \frac{\mu_0 N^2 A}{\ell} \Rightarrow \frac{L_A}{L_B} = \left(\frac{N_A}{N_B}\right)^2 \times \frac{A_A}{A_B} \times \frac{\ell_B}{\ell_A} \Rightarrow \frac{L_A}{L_B} = 4 \times \frac{1}{2} = 2$$

۶۸- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۱)



چون مکعب روی سطح مایع شناور است، یعنی چگالی آن کمتر از مایع است.

$$V_{\text{مکعب}} = d^3 = 125 \text{ cm}^3$$

$$\text{رابطه (۱)} \quad \rho_{\text{مکعب}} = \frac{m_{\text{مکعب}}}{V_{\text{مکعب}}} < \rho_{\text{مایع}} \Rightarrow \frac{m_{\text{مکعب}}}{125 \text{ cm}^3} < 1/2 \frac{g}{\text{cm}^3} \Rightarrow m_{\text{مکعب}} < 150 \text{ g}$$

$$\text{رابطه (۲)} \quad \rho_{\text{مکعب}} = \frac{m_{\text{مکعب}}}{V_{\text{مکعب}}} = \frac{m_{\text{مکعب}}}{1/5 V_{\text{مکعب ماده}}} \Rightarrow m_{\text{مکعب}} = 1/5 V_{\text{مکعب ماده}} \Rightarrow m_{\text{مکعب}} = 1/5 \times 125 = 25 \text{ g}$$

از روابط (۱) و (۲) داریم:

$$\text{رابطه (۳)} \quad m_{\text{مکعب}} = 1/5 V_{\text{مکعب ماده}} < 150 \Rightarrow V_{\text{مکعب ماده}} < 100 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{مکعب ماده}} + V_{\text{حفره}} = V_{\text{مکعب}} \xrightarrow{\text{رابطه (۳)}} V_{\text{مکعب ماده}} = V_{\text{مکعب}} - V_{\text{حفره}} < 100 \text{ cm}^3 \Rightarrow 125 - V_{\text{حفره}} < 100$$

$$\Rightarrow V_{\text{حفره}} > 25 \text{ cm}^3$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۲)

۶۹- پاسخ: گزینه ۳



قبل از اضافه شدن مایع ρ_3 داریم:

$$\text{رابطه (۱)} \quad \rho_1 g h = \rho_2 g \times 3h \Rightarrow \rho_1 = 3\rho_2$$

بعد از ریختن مایع ρ_3 ، در حال تعادل داریم:

$$P_A = P_B \Rightarrow \rho_2 g \times 3h = \rho_1 g \frac{h}{2} + \rho_3 g \times \frac{\Delta h}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{رابطه (۱)}} \rho_2 g \times 3h = (3\rho_2) g \frac{h}{2} + \rho_3 g \times \frac{\Delta h}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} \rho_2 g h = \rho_3 g \times \frac{\Delta h}{2} \Rightarrow 3\rho_2 = \Delta \rho_3 \Rightarrow \frac{\rho_3}{\rho_2} = \frac{3}{\Delta} = 0/6$$

▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۱ (فصل ۲)

۷۰- پاسخ: گزینه ۲



طبق اصل برنولی، فشار هوا بالای صفحه، بیشتر از فشار هوا در زیر صفحه است؛ بنابراین برای بلند کردن صفحه، نیروی بیشتر از وزن صفحه (W) لازم است.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۳)

۷۱- پاسخ: گزینه ۱



طبق قضیه کار-انرژی جنبشی داریم:

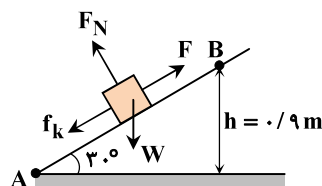
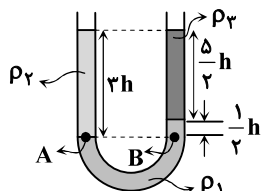
$$W_{\text{کل نیروها}} = \Delta K \Rightarrow W_F + W_{mg} + W_{F_N} + W_{f_k} = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2$$

$$(3 \times 1/8 \times \cos 0) + (-mgh) + 0 + W_{f_k} = \frac{1}{2} m v^2$$

$$\Rightarrow 5/4 - 0/2 \times 10 \times 0/9 + W_{f_k} = \frac{1}{2} \times 0/2 \times 16$$

$$\Rightarrow 5/4 - 1/8 + W_{f_k} = 1/6 \Rightarrow W_{f_k} = 1/6 + 1/8 - 5/4 = -2 \text{ J}$$

$$\Rightarrow |W_{f_k}| = 2 \text{ J}$$



▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۱ (فصل ۴)

۷۲- پاسخ: گزینه ۳



$$\Delta A_A = A_1 \times \alpha_A \Delta \theta = 0.01 A_1 \Rightarrow \alpha_A \Delta \theta = 0.01$$

$$\Delta V_B = V_1 \times \alpha_B \Delta \theta = V_1 \times 2 \times \alpha_A \times \Delta \theta = 0.02 V_1$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta V_B}{V_1} \times 100 = 0.02 \times 100 = 2\%$$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۱ (فصل ۴)

۷۳- پاسخ: گزینه ۱



$$F = 1/8 \theta + 32 \Rightarrow 50 = 1/8 \theta + 32 \Rightarrow \theta = 10^\circ C$$

$$Q_{AB} = m_{AB} c_{AB} \Delta \theta_{AB} = 0.25 \times 4200 \times (10 - 6) = -52500 J$$

دمای تعادل بر حسب درجه سلسیوس:
گرمایی که آب از دست می‌دهد:

$$Q_{AB} = 42000 J \text{ می‌رسد، } \frac{A}{10} \times |Q_{AB}| = 42000 J \text{ است.}$$

$$Q_{\text{بخ}} = (mc\Delta\theta)_{\text{بخ}} + mL_F + (mc\Delta\theta)_{\text{بخ ذوب شده}} \Rightarrow 42000 = m \times 2100 \times (0 - (-20)) + m \times 336000 + m \times 4200 \times (10 - 0)$$

$$\Rightarrow 42000 = 42000m + 336000m + 42000m \Rightarrow 42 = 420m \Rightarrow m = 0.1 kg = 100g$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۵)

۷۴- پاسخ: گزینه ۴



با حرکت سریع پیستون، انبساط بی‌دررو رخ داده و دمای گاز کاهش می‌یابد و چون استوانه در چشمه گرما، یعنی هوای اطراف قرار دارد، از طریق بدنه رسانا طی فرایند انبساط هم‌فشار از هوای اطراف (چشمه گرما) گرما دریافت می‌کند تا دمای آن افزایش یافته و به مقدار اولیه برسد.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۵)

۷۵- پاسخ: گزینه ۲



$$W_{\text{دو چرخه}} = -S = \frac{-2 \times 10^5 \times 2 \times 10^{-3}}{2} = -300 J$$

$$\Delta U_{\text{دو چرخه}} = W + Q = 0 \Rightarrow Q = +300 J$$

$$Q = Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CA} \Rightarrow 300 = 600 + 2250 + Q_{CA} \Rightarrow Q_{CA} = 300 - 2850 = -2550 J$$

شیمی

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۱)

۷۶- پاسخ: گزینه ۱



$${}^{132}_{52}X^{3-} \Rightarrow \begin{cases} n + p = 132 \\ e = p + 3 \\ n - e = 17 \Rightarrow n - (p + 3) = 17 \Rightarrow n - p = 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} n + p = 132 \\ (n - p) = 20 \end{cases} \Rightarrow 2n = 142 \Rightarrow n = 71 \Rightarrow p = 71 - 20 = 51$$

عنصر ${}^{132}_{51}Sb$ در دوره پنجم و گروه ۱۵ جدول قرار دارد.

$$\text{اختلاف شمار نوترون و پروتون - بار + عدد جرمی} = \text{تعداد پروتون}$$

$$P = \frac{132 + (-3) - 17}{2} = 51$$

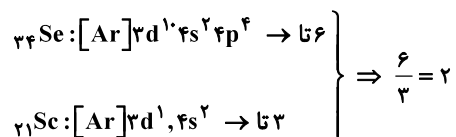
۷۷- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۱ (فصل ۱)

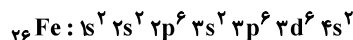


الف) در دوره چهارم جدول دوره‌ای از عنصر ۲۱ الی ۳۰ ده عنصر واسطه وجود دارد و فلزهای اصلی شامل سه عنصر K، Ca، و Ga است که نسبت آن‌ها برابر $\frac{10}{3}$ می‌شود.

ب) در اتم Se الکترون‌های s و p الکترون‌های ظرفیت و در اتم Sc الکترون‌های s و d الکترون‌های ظرفیت می‌باشند.



پ) هشتمین عنصر دوره چهارم جدول تناوبی، عنصر Fe ۲۶ است.



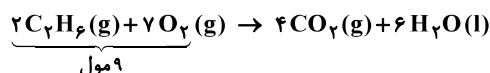
$l = 0$ (s) $\rightarrow$ الکترون ۸ ، $l = 2$ (d) $\rightarrow$ الکترون ۶ $\Rightarrow 8 + 6 = 14$

۷۸- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۱ (فصل ۲)



واکنش موازنه شده در شرایط STP:

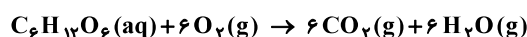


مخلوط گازهای O_2 و C_2H_6 را با نماد (Gas) نشان می‌دهیم:

$$? \text{ g CO}_2 = 60 \text{ L Gas} \times \frac{1 \text{ mol Gas}}{22.4 \text{ L Gas}} \times \frac{4 \text{ mol CO}_2}{1 \text{ mol Gas}} \times \frac{44 \text{ g CO}_2}{1 \text{ mol CO}_2} \approx 52.38 \text{ g CO}_2$$

۷۹- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۲)



$$(\text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6 = G = 180 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1})$$

$$? \text{ L CO}_2 = 36 \text{ g G} \times \frac{1 \text{ mol G}}{180 \text{ g G}} \times \frac{6 \text{ mol CO}_2}{1 \text{ mol G}} \times \frac{44 \text{ g CO}_2}{1 \text{ mol CO}_2} \times \frac{1 \text{ L CO}_2}{1/2 \text{ g CO}_2} = 44 \text{ L CO}_2$$

۸۰- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۳)



$$? \text{ g NO}_3^- = 3 \text{ mol NO}_3^- \times \frac{62 \text{ g NO}_3^-}{1 \text{ mol NO}_3^-} = 186 \text{ g NO}_3^-$$

$$\text{ppm} = \frac{\text{جرم حل شونده}}{\text{جرم محلول}} \times 10^6$$

$$\text{ppm} = \frac{186}{\text{جرم آب}} \times 10^6 = 100 \Rightarrow \text{جرم آب} = 186 \times 10^4 \text{ g}$$

$$\text{حجم آب} = 186 \times 10^4 \text{ g} \times \frac{1 \text{ mL}}{1 \text{ g}} \times \frac{1 \text{ L}}{1000 \text{ mL}} = 1860 \text{ L}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۳)

۸۱- پاسخ: گزینه ۲



ابتدا جرم محلول را حساب می‌کنیم:

$$d = \frac{m}{V} \Rightarrow m = 1/5 \times 500 = 750 \text{ g محلول}$$

$$\text{جرم } \text{Ca(OH)}_2 = \frac{\text{درصد جرمی}}{\text{جرم محلول}} \times 100 \Rightarrow 40 = \frac{x \text{ g}}{750} \times 100$$

$$x = 300 \text{ g Ca(OH)}_2$$

$$? \text{ mol Ca(OH)}_2 = 300 \text{ g Ca(OH)}_2 \times \frac{1 \text{ mol Ca(OH)}_2}{74 \text{ g Ca(OH)}_2} = 4/05 \text{ mol Ca(OH)}_2$$

$$\text{جرم حلال} = 750 - 300 = 450 \text{ g} \Rightarrow \text{جرم حل‌شونده} - \text{جرم محلول} = \text{جرم حلال}$$

▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۱ (فصل ۳)

۸۲- پاسخ: گزینه ۴



پاسخ قسمت اول:

$$S = 0/8\theta + 72$$

$$80 = 0/8\theta + 72 \Rightarrow 0/8\theta = 8 \Rightarrow \theta = 10^\circ \text{C}$$

پاسخ قسمت دوم:

$$S = 0/8\theta + 72$$

$$S = (0/8 \times 30) + 72 \Rightarrow S = 96 \text{ g}$$

▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۱ (فصل ۳)

۸۳- پاسخ: گزینه ۲



یون Mg^{2+} محلول در آب دریا با یون OH^- به شکل Mg(OH)_2 نامحلول رسوب داده می‌شود و در واکنش با HCl به شکل نمک MgCl_2 درمی‌آید. از برقکافت MgCl_2 مذاب فلز منیزیم استخراج می‌شود.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۲)

۸۴- پاسخ: گزینه ۴



کاهش جرم مخلوط با جرم گاز تولیدشده (کربن دی‌اکسید) برابر است. در پایان واکنش $2/2$ گرم کربن دی‌اکسید $(225/8 - 228)$ تولید شده است:

$$\text{خالص } \text{NaHCO}_3 = 2/2 \text{ g CO}_2 \times \frac{1 \text{ mol CO}_2}{44 \text{ g CO}_2} \times \frac{1 \text{ mol NaHCO}_3}{1 \text{ mol CO}_2} \times \frac{84 \text{ g NaHCO}_3}{1 \text{ mol NaHCO}_3} = 4/2 \text{ g NaHCO}_3$$

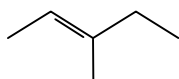
$$\text{درصد خلوص} = \frac{\text{مقدار NaHCO}_3 \text{ خالص}}{\text{مقدار NaHCO}_3 \text{ ناخالص}} \times 100 = \frac{4/2}{8} \times 100 = 52/5\%$$

▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۲ (فصل ۱)

۸۵- پاسخ: گزینه ۲



ساختار پیوند خط هیدروکربن موردنظر به صورت زیر است:

پس همانند سایر آلکن‌ها با گاز هیدروژن (H_2) واکنش داده و سیر می‌شود.

نباید سراغ اینا بری

گزینه ۱: هیدروکربن موردنظر از دسته آلکنها است و فرمول مولکولی آن C_6H_{12} است. پس نمی تواند با هگزان ایزومر باشد.
گزینه ۳: برای سوزاندن کامل یک مول از این هیدروکربن ۹ مول گاز اکسیژن لازم است.



گزینه ۴: با یک هیدروکربن سیرشده و حلقوی دارای ۶ اتم کربن، فرمول مولکولی یکسانی دارد.

۸۶- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۲)

جوابش اینه

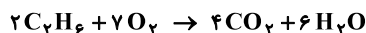
در هر مول از AX_2 ، ۲ مول پیوند شیمیایی وجود دارد و برای گزارش آنتالپی این پیوندها از «میانگین آنتالپی پیوند» استفاده می شود:

$$1 \text{ mol } (A - X) \times \frac{1 \text{ mol } AX_2}{2 \text{ mol } (A - X)} \times \frac{78 \text{ g } AX_2}{1 \text{ mol } AX_2} \times \frac{60 \text{ kJ}}{15/6 \text{ g } AX_2} = 150 \text{ kJ}$$

۸۷- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۲)

جوابش اینه

در معادله شیمیایی واکنش سوختن کامل گاز اتان، ضریب مولی آن برابر ۲ است، پس آنتالپی این واکنش به ازای سوزاندن کامل ۲ مول از گاز اتان گزارش می شود:



$$2 \text{ mol } C_2H_6 \times \frac{30 \text{ g } C_2H_6}{1 \text{ mol } C_2H_6} \times \frac{106 \text{ kJ}}{2 \text{ g } C_2H_6} = 3180 \text{ kJ}$$

پس آنتالپی واکنش سوختن اتان -1590 کیلوژول بر مول است.

۸۸- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۱)

جوابش اینه

نمودار نزولی مربوط به ماده B و نمودار صعودی مربوط به ماده D است؛ زیرا نمودار نزولی از $0/6$ مول به $0/15$ مول و در نتیجه $0/45$ مول کاهش یافته است؛ ولی نمودار صعودی از صفر به $0/3$ مول افزایش یافته است که نسبت $\frac{0/45}{0/3} = \frac{3}{2}$ است.

$$\left. \begin{aligned} \bar{R}_B : \frac{0/45 \text{ mol}}{\frac{40}{60} \text{ min}} &= \frac{0/45}{\frac{2}{3}} = \frac{0/45 \times 3}{2} \Rightarrow \bar{R}_{\text{واکنش}} = \frac{\bar{R}_B}{3} = \frac{0/45 \times 3}{3 \times 2} = 0/225 \text{ mol} \cdot \text{min}^{-1} \\ \bar{R}_D : \frac{0/1 \text{ mol}}{\frac{20}{60} \text{ min}} &= \frac{0/1}{\frac{1}{3}} = 0/3 \text{ mol} \cdot \text{min}^{-1} \\ \Rightarrow \frac{\bar{R}_{\text{واکنش}}}{\bar{R}_D} : \frac{0/225}{0/3} &= 0/75 \end{aligned} \right\}$$

۸۹- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۲)

جوابش اینه

با توجه به تغییر غلظت مواد، A و D واکنش دهنده ها و E فراورده واکنش است.

در بازه زمانی ۰ تا ۵، اندازه تغییر غلظت E، ۳ برابر D است، پس ضریب مولی E، ۳ برابر D است.

در بازه زمانی ۵ تا ۱۰، اندازه تغییر غلظت E، $1/5$ برابر A است، پس ضریب مولی E، ۳ و ضریب مولی A برابر ۲ است:



بر این اساس، با گذشت زمان شمار مول مواد موجود در ظرف واکنش تغییری نمی کند؛ زیرا مجموع ضرایب استوکیومتری مواد در دو سمت معادله یکسان است.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۲)

۹۰- پاسخ: گزینه ۲

نباید سراغ اینا بری

پ) بنزآلدئید و بنزوئیک اسید دارای گروه‌های عاملی اکسیژن‌دار و ترکیب‌هایی آروماتیک هستند.

ت) در ساختار ساده‌ترین کتون (C_3H_6O)، ساده‌ترین کربوکسیلیک اسید (CH_2O_2) و ساده‌ترین الکل (CH_4O)، به ترتیب، ۳، ۱ و ۱ اتم کربن وجود دارد.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۲)

۹۱- پاسخ: گزینه ۳

جوابش اینه

گزینه ۳: از واکنش ترکیب A با گاز هیدروژن، ۱- هگزانول حاصل می‌شود که در دمای اتاق کم محلول در آب است.

نباید سراغ اینا بری

گزینه ۱: نادرست؛ هر دو ترکیب آلی فرمول مولکولی $C_6H_{12}O$ داشته و ایزومر (همپار) محسوب می‌شوند.

گزینه ۲: نادرست؛ به دلیل محتوای انرژی متفاوت، به ازای سوزاندن یک مول از هریک از آن‌ها در شرایطی معین، مقدار گرمای متفاوتی حاصل می‌شود.

گزینه ۴: نادرست؛ با اینکه شمار و نوع اتم‌ها در مولکول‌های این دو ترکیب یکسان است، به دلیل تفاوت در پیوندها، مجموع آنتالپی‌های پیوندها برای دو ماده متفاوت است.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۳)

۹۲- پاسخ: گزینه ۴

نباید سراغ اینا بری

گزینه ۱: برخی از درشت مولکول‌ها مانند پلی‌اتن و نایلون ساختگی بوده و در طبیعت یافت نمی‌شوند و از واکنش بسیاری در صنعت تولید می‌شوند.

گزینه ۲: درشت مولکول‌ها شمار اتم بسیار زیادی دارند و برای برخی از آن‌ها نمی‌توان جرم مولی و فرمول مولکولی معینی در نظر گرفت.

گزینه ۳: مونومر یا تکپار، واکنش‌دهنده‌ها در واکنش پلیمری شدن هستند.

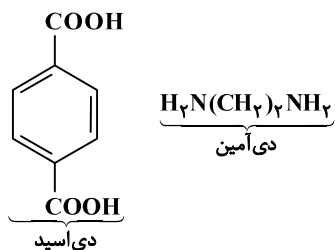
▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۳)

۹۳- پاسخ: گزینه ۴

جوابش اینه

ساختار به یک پلی آمید مربوط است که از واکنش دی آمین و دی اسید (آروماتیک است) حاصل می‌شود.

فرمول مونومر آروماتیک $C_8H_6O_4$ بوده که در مقایسه با مولکول $C_7H_6O_2$ ، یک اتم کربن و دو اتم اکسیژن بیشتر دارد.



نباید سراغ اینا بری

گزینه ۱: از دسته پلی آمیدها محسوب می‌شود و در شرایط مناسب در اثر واکنش با آب به مولکول‌های ساده‌تر تجزیه می‌شود.

گزینه ۲: گروه‌های عاملی مشابهی با کولار دارد و از واکنش دی آمین و دی اسید در شرایط مناسب تهیه می‌شود.

گزینه ۳: طی تولید این پلیمر، آب نیز به‌عنوان فراورده جانبی طی فرایند آمیادی شدن تولید می‌شود.

۹۴- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۲ (فصل ۳)



فرمول عمومی کربوکسیلیک اسیدهای یک عاملی با زنجیر هیدروکربنی سیرشده $C_nH_{2n}O_2$ و جرم مولی آنها $(14n + 32)$ گرم است که در واکنش استری شدن با از دست دادن گروه $-OH$ به میزان ۱۷ گرم از جرم مولی کاسته می شود. اتانول نیز با از دست دادن یک اتم H و جرم مولی $(46 - 1)$ گرم در ساختار استر شرکت می کند.

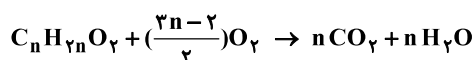
$$\begin{aligned} \text{آب} + \text{استر} &\rightarrow \text{اتانول} + \text{اسید} \\ \frac{17/6 \times \frac{75}{100}}{14n + 32} &= \frac{17/4g}{14n + 15 + 45} \Rightarrow n = 4 \end{aligned}$$

۹۵- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)



معادله کلی واکنش سوختن اسیدهای چرب با زنجیر هیدروکربنی سیرشده یک عاملی به صورت زیر است:



$$\frac{\text{جرم } O_2 \text{ مصرف شده}}{\text{جرم } H_2O \text{ تولید شده}} = \frac{116}{45} \Rightarrow \frac{\left(\frac{3n-2}{2}\right) \times 32}{n \times 18} = \frac{116}{45} \Rightarrow n = 2$$

به این ترتیب فرمول مولکولی اسید چرب یک عاملی توصیف شده به صورت $C_2H_4O_2$ بوده و صابون جامد حاصل از آن نیز

$C_2H_3O_2Na$ بوده که جرم مولی آن $82 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ است.

۹۶- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۱)



با توجه به ثابت بودن دما، مقدار K_a برای هر دو محلول $(\frac{1}{3}$ مولار و $\frac{1}{5}$ مولار) یکسان است؛ بنابراین برای به دست آوردن K_a می توان گفت:

$$K_a = \frac{M\alpha^2}{1-\alpha} = \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{2})^2}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{5} \times 10^{-2}$$

حال برای تعیین درجه یونش که برخلاف K_a به غلظت وابسته است، در محلول $\frac{1}{5}$ مولار این اسید خواهیم داشت:

$$K_a = \frac{M\alpha^2}{1-\alpha} \Rightarrow \frac{1}{5} \times 10^{-2} = \frac{\frac{1}{5}\alpha^2}{1-\alpha} \Rightarrow \frac{1}{5}\alpha^2 + \frac{1}{5}\alpha - \frac{1}{5} = 0 \Rightarrow \frac{1}{5}(\alpha^2 + \alpha - 1) = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{4}$$

۹۷- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۱)



ابتدا لازم است غلظت یون OH^- موجود در مخلوط اولیه را به شکل زیر محاسبه کنیم:

$$[OH^-] = \frac{n_b M_b V_b - n_a M_a V_a}{V_b + V_a} = \frac{(2 \times \frac{1}{4} \times 40) - (1 \times \frac{1}{2} \times 80)}{40 + 80} = \frac{20}{120} \Rightarrow [OH^-] = \frac{1}{6} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$[H^+][OH^-] = 10^{-14} \Rightarrow [H^+] = \frac{10^{-14}}{1/6} = 6 \times 10^{-15} \Rightarrow pH = -\log 6 \times 10^{-15} = 14 - 0.78 = 13.22$$



$$pOH = -\log [OH^-] = -\log 2 \times 10^{-1} = 1 - 0.3 = 0.7 \Rightarrow pH = 14 - 0.7 = 13.3$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۲)

۹۸- پاسخ: گزینه ۲



گزینه ۲: درست؛ اختلاف قدرت کاهندگی دو فلز B و A بیشتر از اختلاف قدرت کاهندگی دو فلز C و A است، پس ولتاژ سلول گالوانی (B - A) بیشتر از ولتاژ سلول گالوانی (C - A) است.



گزینه ۱: نادرست؛ از آنجاکه هر چه تغییر دمای محلول بیشتر باشد، قدرت کاهندگی فلز قرار گرفته در آن بیشتر است، پس می توان گفت: $B > C > A$: قدرت کاهندگی
گزینه ۳: نادرست؛ با توجه به اینکه در سری الکتروشیمیایی طلا بالاتر از نقره قرار دارد، اگر تیغه Au در محلول $AgNO_3$ قرار داده شود، واکنشی بین آن ها صورت نگرفته و در نتیجه دما نیز تغییری نمی کند.
گزینه ۴: نادرست؛ در سلول گالوانی متشکل از نیم سلول های B و C، الکتروود B با قدرت کاهندگی بیشتر نقش آند را داشته و الکتروود C نیز کاتد خواهد بود. در این سلول آنیون ها از مدار درونی از سمت کاتد (C) به سمت آند (B) حرکت می کنند.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۲)

۹۹- پاسخ: گزینه ۲



برای پاسخ به این سؤال ابتدا موقعیت گونه های داده شده را در سری الکتروشیمیایی از پتانسیل مثبت تر به منفی تر مرتب می کنیم:

$$Cl_2(g) + 2e^- \rightleftharpoons 2Cl^-(aq) \quad E^\circ = +1/36V$$

$$Fe^{3+}(aq) + e^- \rightleftharpoons Fe^{2+}(aq) \quad E^\circ = +0/77V$$

$$I_2(s) + 2e^- \rightleftharpoons 2I^-(aq) \quad E^\circ = +0/54V$$

$$2H^+(aq) + 2e^- \rightleftharpoons H_2(g) \quad E^\circ = 0/0V$$

$$Sn^{2+}(aq) + 2e^- \rightleftharpoons Sn(s) \quad E^\circ = -0/14V$$

$$Fe^{2+}(aq) + 2e^- \rightleftharpoons Fe(s) \quad E^\circ = -0/41V$$

$$Ce^{4+}(aq) + e^- \rightleftharpoons Ce^{3+}(aq) \quad E^\circ = -1/22V$$

واکنش هایی انجام پذیر هستند که در آن ها گونه کاهنده تر (پایین و سمت راست) با گونه اکسنده تر (بالا و سمت چپ) در سری الکتروشیمیایی واکنش بدهد. به این ترتیب تنها واکنش انجام پذیر به صورت خودبه خودی واکنش آخر خواهد بود و سایر واکنش ها انجام پذیر نیستند.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۲)

۱۰۰- پاسخ: گزینه ۳



در این فرایند، کلید آهنی به عنوان کاتد عمل کرده و نقره نیز نقش آند را دارد. جرم نقره ای که بر روی کلید می نشیند به صورت زیر به دست می آید:

$$Ag^+(aq) + e^- \rightarrow Ag(s) \quad ? g Ag \cdot 1/5 mole e^- \times \frac{1 mole Ag}{1 mole e^-} \times \frac{108 g Ag}{1 mole Ag} = 16/2 g Ag$$

این مقدار نقره به جرم کلید آهنی اضافه شده و از جرم تیغه آند کاسته خواهد شد؛ بنابراین می توان گفت:

$$\left. \begin{aligned} \text{جرم کلید پس از آبکاری} &= 30 + 16/2 = 46/2 \\ \text{جرم تیغه نقره پس از آبکاری} &= 60 - 16/2 = 43/8 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{46/2}{43/8} \approx 1/05$$

▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۳ (فصل ۳)

۱۰۱- پاسخ: گزینه ۴



گرافیت یک جامد کووالانسی است ولی بلور آن دویعدی است.



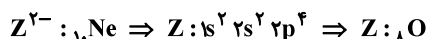
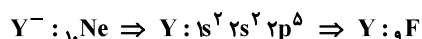
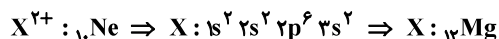
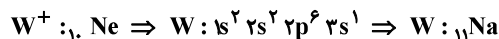
گزینه ۱: درست؛ در سیلیس اتم های Si و O به شکل $Si-O-Si$ و یک درمیان به هم متصل هستند.
گزینه ۲: درست؛ نیروی جاذبه بین اتم ها در هر لایه از گرافیت از نوع کووالانسی ولی جاذبه های بین اتم های کربن بین لایه ها از نوع جاذبه ضعیف واندروالسی است.
گزینه ۳: درست

۱۰۲- پاسخ: گزینه ۴

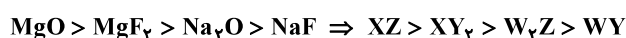
▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۳)



با توجه به یکسان بودن آرایش الکترونی یون‌های داده‌شده با آرایش الکترونی ${}_1\text{Ne}$ (که به صورت $1s^2 2s^2 2p^6$ است) می‌توان گفت:



به این ترتیب با استفاده از این یون‌ها می‌توان چهار ترکیب یونی NaF ، MgF_2 ، Na_2O و MgO را ساخت که ترتیب آنتالپی فروپاشی شبکه بلور آن‌ها عبارت است از:

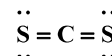
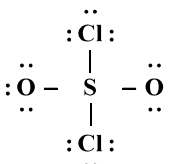
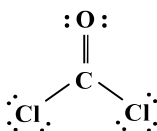
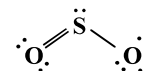
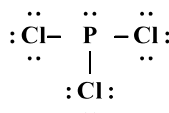
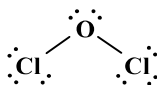


▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۳)

۱۰۳- پاسخ: گزینه ۱



اگر توزیع الکترون‌ها در اطراف اتم مرکزی کاملاً متقارن باشد، آن مولکول ناکتیوی خواهد بود. برای این منظور لازم است اتم مرکزی در اطراف خود فاقد الکترون‌های ناپیوندی بوده و از طرفی تمام اتم‌های اطراف آن یکسان باشند. در بین مولکول‌های داده‌شده (با ساختارهای لوویس زیر) فقط CS_2 چنین شرایطی دارد:



▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۴)

۱۰۴- پاسخ: گزینه ۴

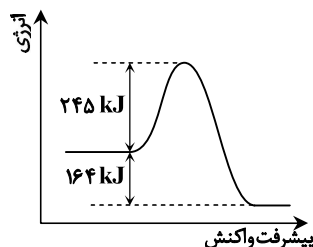


با توجه به اطلاعات داده‌شده، نمودار انرژی - پیشرفت این واکنش به صورت زیر خواهد بود:
(الف) نادرست: استفاده از کاتالیزگر تأثیری در گرمای حاصل از واکنش ندارد و ΔH واکنش بدون تغییر خواهد ماند.

(ب) نادرست: انرژی فعال‌سازی واکنش در جهت برگشت مقداری مثبت و برابر $+40.9 \text{ kJ}$ است. از سویی در واکنش‌های گرماده سطح انرژی واکنش‌دهنده(ها) به قله نزدیک‌تر است.
(پ) درست: توجه داشته باشید که در این واکنش N_2 تولید (و نه مصرف) می‌شود. مقدار گرمای حاصل از تولید 25 / مول N_2 نیز عبارت است از:

$$25 \text{ mol N}_2 \times \frac{164 \text{ kJ}}{2 \text{ mol N}_2} = 2050 \text{ kJ}$$

(ت) درست

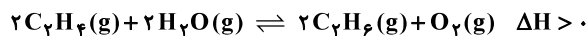
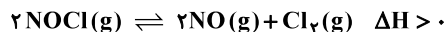


۱۰۵- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۴)



در ابتدا لازم است واکنش‌های داده‌شده را موازنه کنیم:



در واکنش‌های گرماگیر (واکنش‌های اول و دوم) کاهش دما منجر به جابه‌جایی تعادل در جهت برگشت می‌شود، درحالی‌که در واکنش‌های گرماده (واکنش‌های سوم و چهارم) با کاهش دما تعادل در جهت رفت جابه‌جا می‌شود.

از طرفی با کاهش فشار (افزایش حجم)، تعادل در جهت رسیدن به تعداد مول‌های گازی بیشتر جابه‌جا خواهد شد؛ بنابراین با کاهش فشار در واکنش‌های اول و چهارم، تعادل در جهت رفت جابه‌جا شده و در واکنش دوم در جهت برگشت جابه‌جا می‌شود. اما در واکنش سوم، به دلیل برابر بودن تعداد مول‌های گازی در دو طرف واکنش، تغییر فشار تأثیری بر روی جابه‌جایی تعادل ندارد. به این ترتیب تأثیر کاهش دما و کاهش فشار در واکنش‌های دوم و چهارم هم‌جهت است.

تعلیم و تربیت اسلامی

۱۰۶- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: ساده * دین و زندگی ۲ (درس ۱۲)

- پیامبر اکرم صلی الله علیه و آله: «برای دختران و پسران خود امکان ازدواج فراهم کنید تا خداوند اخلاقتان را نیکو کند و در رزق و روزی آن‌ها توسعه دهد و عفاف و غیرت آن‌ها را زیاد گرداند.»
- پیامبر اکرم صلی الله علیه و آله: «کسی که ازدواج کند، نصف دین خود را حفظ کرده است؛ پس باید برای نصف دیگر، از خدا پروا داشته باشد.»

▲ مشخصات سؤال: ساده * دین و زندگی ۲ (درس ۱۲)

۱۰۷- پاسخ: گزینه ۱

- از نظر قرآن کریم، مهم‌ترین معیار همسر شایسته، با ایمان بودن اوست.
- پیشوایان دین از ما خواسته‌اند که در مورد همسر آینده با پدر و مادر خود مشورت کنیم تا به انتخاب درست برسیم.

▲ مشخصات سؤال: ساده * دین و زندگی ۲ (درس ۱۱)

۱۰۸- پاسخ: گزینه ۳

- اگر کالای گران‌قیمتی، مانند طلا (یا وجود آدمی) داشته باشیم، اما ارزش و قیمت آن را ندانیم، به آسانی فریب می‌خوریم و آن را به بهای اندک می‌فروشیم.
- هر انسانی در درون خود گاه و بیگاه با تمایلات و خواسته‌هایی روبه‌رو می‌شود که پاسخ مثبت دادن به آن‌ها، عزت نفس را ضعیف می‌کند و انسان را به سوی خواری و ذلت سوق می‌دهد.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * دین و زندگی ۱ (درس ۸)

۱۰۹- پاسخ: گزینه ۳

- از امیرالمؤمنین علی علیه السلام پرسیدند: زیرک‌ترین انسان کیست؟ فرمود: کسی که از خود و عمل خود برای بعد از مرگ حساب بکشد و این حساب کشیدن در واقع همان محاسبه و ارزیابی است.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * دین و زندگی ۱ (درس ۹)

۱۱۰- پاسخ: گزینه ۴

- علی علیه السلام می‌فرماید: «ارزش هر انسانی، به اندازه چیزی است که دوست می‌دارد.» که با این بیت تناسب معنایی دارد.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * دین و زندگی ۱ (درس ۱۰)

۱۱۱- پاسخ: گزینه ۲

- یاد خدا (لذکرالله) ثمره برتر (اکبر) نماز است.
- دقت کنید که نماز دارای دو ثمره است، یکی دور شدن از گناه و دیگری یاد خدا که یاد خدا مهم‌تر است.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * دین و زندگی ۱ (درس ۱۱)

۱۱۲- پاسخ: گزینه ۴

- زن مظهر جمال و زیبایی است ← نعمت زیبایی بیشتری دارد ← مسئولیت بیشتری در قبال آن دارد.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * دین و زندگی ۱ (درس ۱۲)

۱۱۳- پاسخ: گزینه ۱

- قرآن کریم و پیشوایان معصوم علیهم السلام حدود حجاب را مشخص و ما را به رعایت عفاف دعوت کرده‌اند.
- چگونگی و نوع پوشش، تا حدود زیادی تابع آداب و رسوم ملت‌ها و اقوام است.

۱۱۴- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * دین و زندگی ۱ (درس ۱۱)

- امام صادق علیه السلام: «لباس نازک و بدن نما نپوشید؛ زیرا چنین لباسی نشانه سستی و ضعف در دینداری فرد است.»
- احساسات لطیف زن که بیانگر زیبایی‌های درونی وی است، ...

۱۱۵- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * دین و زندگی ۲ (درس ۱۱)

گوینده این سخن، حضرت زینب (س) است و ایشان از اسوه‌های عزت در برابر ستمگری است که با تأسی از این آیه شریفه «من کان یرید ... هرکس عزت می‌خواهد، (بداند) که هر چه عزت است، از آن خداست.» این سخن را فرموده‌اند.

۱۱۶- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * دین و زندگی ۲ (درس ۱۱)

در آیه شریفه «لَّذِینَ احْسَنُوا الْحَسَنَی وَ زَیَادَةً وَ لَا یَرْهَقُ وَجُوهَهُمْ قَتَرٌ وَ لَا ذَلَّةٌ، لِیَ کَسَانِی کَهِ نَیْکُوکَارِی پِیشَه کَرْدَنَد، پاداشی نیک و چیزی فزون تر است و بر چهره آنان غبار خواری و ذلت نمی‌نشیند.» راه پیشنهادی قرآن برای رسیدن به عزت، «نیکوکاری» عنوان شده است.

۱۱۷- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط * دین و زندگی ۲ (درس ۱۲)

در آیه شریفه «وَمِنَ آیَاتِهِ اَنْ خَلَقَ لَکُمْ مِنْ اَنْفُسِکُمْ اَزْوَاجًا لِتَسْکُنُوْا اِلَیْهَا وَ جَعَلَ بَیْنَکُمْ مَوَدَّةً وَ رَحْمَةً ...» به یک ویژگی مهم که بعد از ازدواج ایجاد می‌شود اشاره شده که همان آرامش «لتسکنوا» می‌باشد.

■ مهم‌ترین معیار همسر شایسته از دیدگاه قرآن کریم، با ایمان بودن است.

۱۱۸- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * دین و زندگی ۲ (درس ۱۲)

کلمات «انس»، «انسان» و «بنی آدم» در قرآن اختصاص به جنس خاصی ندارد و هر آیه‌ای که با این کلمات همراه باشد، به زن و مرد، هر دو مربوط می‌شود؛ زیرا حقیقت انسان را روح او تشکیل می‌دهد و روح انسان نه مذکر است و نه مؤنث.

۱۱۹- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط * مهارت معلمی (فصل ۱)

مهندسی که کشف معدن می‌کند ← شبیه معلمی که کشف استعداد می‌کند.

مهندسی که استخراج مواد می‌کند ← شبیه معلمی که شاگرد را از انحراف خارج می‌کند.

مهندسی که ذوب مواد می‌کند ← شبیه معلمی که ایجاد علاقه به درس می‌کند.

مهندسی که قطعه‌سازی و طراحی می‌کند ← شبیه معلمی که با تدریس شاگرد می‌سازد.

مهندسی که مونتاژ قطعات و نظارت می‌کند ← شبیه معلمی که با سعه‌صدر تربیت‌شدگان را متصل می‌کند و جامعه می‌سازد.

۱۲۰- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: دشوار * مهارت معلمی (فصل ۱)

قرآن کریم در این آیه، وظیفه انبیاء را رهاسازی افکار جامعه از غل و زنجیرها برمی‌شمرد که به آن گرفتار شده‌اند و می‌فرماید «و از آنان بار گران (تکالیف سخت) و بندهایی را که بر آنان بوده است برمی‌دارد و آزادشان می‌کند.»

بررسی سایر گزینه‌ها:

- گزینه ۱: آیاتش مربوط به غفلت است
- «غافلون»
 - «ینسوه الله» ← غفلت از خدا
 - «سوا یوم الحساب» ← غفلت از روز قیامت
 - «کذلک ... فَتَنَیْتِهَا» ← غفلت از آیات
 - «وَلَمْ نَکُ نُطْعِمِ الْمَسْکِیْنَ» ← غفلت از محرومان
- گزینه ۲: آیاتش مربوط به ماندگاری و زمان می‌باشد
- «واجعل ... الی الآخرین»
 - «و جعلها کلمة باقية»
 - «سپه‌دین»
 - «کلمة باقية فی عقبه ...»
- گزینه ۴: آیاتش به «حیاء» اشاره دارد
- «یا ایها الذین آمنوا ... یحیکم»
 - «مَنْ عَمِلَ صَالِحًا ... فَلَنُحْیِیَنَّ حَیَاةً طَیِّبَةً ...»

۱۲۱- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * مهارت معلمی (فصل ۲)

بی تکلفی

- در پیامبر صلی الله علیه و آله: «ما آنا مِنَ الْمُتَکَلِّفِینَ» بی تکلفی در
- نوع غذا
- معاشرت با مستضعفین
- شوخی کردن
- مسابقات شتردوانی
- چرا از من ترسیدی؟
- در امام علی علیه السلام: پیراهن خود را وصله زد و گفت: قلب را خاشع می‌کند و مؤمنان از آن الگو می‌گیرند.
- در معلمان: نباید با خواسته‌های غیرمعقول و خارج از عرف، مردم را دچار زحمت کند.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * مهارت معلمی (فصل ۲)

۱۲۲- پاسخ: گزینه ۱

انصاف یعنی اگر به فردی انتقاد داریم، نقاط قوت او را هم بگوییم.

آیات:

(الف) ﴿وَمِنْ أَهْلِ الْكِتَابِ﴾

(ب) قرآن کریم غالباً با کلمه «منهم» از بعضی افراد انتقاد می‌کند.

(ج) قرآن کریم غالباً حساب خوبان را با «أَلَا» استثنا می‌کند.

(د) قرآن کریم اگر تجلیل و تقدیر می‌کند، همه را مشمول آن نمی‌داند مثلاً ﴿فَإِنَّ اللَّهَ أَعَدَّ لِلْمُحْسِنَاتِ مِنْكُنَّ أَجْرًا عَظِيمًا﴾: همه زنان پیامبر نیکوکار نبودند.

(ه) قرآن هنگام تحریم قمار و شراب به منافع آن اشاره می‌کند.

(و) امام صادق علیه السلام به شاگردانش گفت: اشکال شما این است که گاهی به خاطر تعصب حرف حق طرف مقابل را نمی‌پذیری.

(ز) انسان مطالبی را که از دیگران آموخته به خودش نسبت ندهد.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * مهارت معلمی (فصل ۳)

۱۲۳- پاسخ: گزینه ۴

■ اگر در سؤال گفته شده: ﴿قَوْلًا سَدِيدًا﴾ موجب ۱- اصلاح عمل ۲- بخشش گناهان

در گزینه ۴ هم گفته شد ﴿ادْفَعْ بِالَّتِي هِيَ أَحْسَنُ﴾، کینه و دشمنی را به دوستی و گرمی تبدیل می‌کند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه ۱: اشاره به قاطعیت در راه حق و نترسیدن از سرزنش‌ها

گزینه ۲: اشاره به احترام به همکاران و پیشکسوتان

گزینه ۳: اشاره به شهامت در گفتن نمی‌دانم

▲ مشخصات سؤال: متوسط * مهارت معلمی (فصل ۳)

۱۲۴- پاسخ: گزینه ۳

بر اساس این آیه اگر در بحبوحه جنگ یکی از مشرکین برای تحقیق از ما امان درخواست کرد، پس باید به او پناه بدهیم تا کلام خدا را بشنود یعنی حتی در شرایط جنگی هم باید به رشد فکری افراد اهمیت بدهیم.

▲ مشخصات سؤال: ساده * مهارت معلمی (فصل ۳)

۱۲۵- پاسخ: گزینه ۴

■ دشمن‌شناسی از وظایف معلم است و بر اساس آیات قرآن می‌توان شگردهای دشمن را شناخت:

(الف) فساد «خبالا»

(ب) فشار «عنتم»

(ج) نفاق «ما تخفی صدورهم»

■ آرزوهای دشمن برای ما «وَدَّ»

(الف) غفلت از سلاح و سرمایه ﴿وَدَّ الَّذِينَ ... عَنْ أَسْلِحَتِكُمْ وَأَمْتِنَتِكُمْ﴾

(ب) ضعف و سازش کاری ﴿وَدَّوْا لَوْ تَدَّهِنُ ...﴾

هوش و استعداد معلّمی

۱۲۶- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: ساده * هوش کلامی

۱۲۷- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط * هوش کلامی

۱۲۸- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: دشوار * هوش کلامی

۱۲۹- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: ساده * هوش کلامی

۱۳۰- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط * هوش کلامی

۱۳۱- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: ساده * هوش کلامی

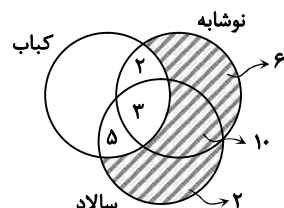
۱۳۲- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: دشوار * هوش کلامی

۱۳۳- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: دشوار * استعداد تحلیلی (استعداد تحلیلی)

نقاط اشتراک نوشابه و سالاد با کباب را حذف می‌کنیم.



۲ نفر فقط سالاد خورده‌اند.

$$\begin{cases} 20 - (5 + 3 + 10) = 2 \\ 21 - (2 + 3 + 10) = 6 \end{cases} \Rightarrow 6 + 10 + 2 = \boxed{18}$$

۶ نفر فقط نوشابه خورده‌اند.

۱۳۴- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: دشوار * استعداد تحلیلی (استعداد تحلیلی)

۲۱ نفر در صف را با شماره‌های ۱ تا ۲۱ شماره‌گذاری می‌کنیم. دو حالت برای نفر اول در نظر می‌گیریم. (یا راست‌گو است و یا دروغ‌گو)
حالت اول (نفر اول راست‌گو باشد): بنابراین حرفش درست است و تمام افرادی که پشت سر او هستند، دروغ‌گو هستند. حال از بین تمام افراد پشت سر او به نفر ۲۱ توجه کنید. او نیز دروغ‌گو است. برای درست شدن صحبتش، حرفش را متمم کنید. یعنی کسی که جلوی من ایستاده راست‌گو است. بنابراین نفر ۲۰ راست‌گو می‌شود. با تشکیل الگو متوجه می‌شویم که نفرات فرد دروغ‌گو و نفرات زوج راست‌گو هستند. یعنی نفر ۱ که فرد است باید دروغ‌گو باشد ولی با فرض اول در تناقض است. پس این حالت حذف می‌شود.
حالت دوم (نفر اول دروغ‌گو باشد): با حذف حالت اول، متوجه می‌شویم این حالت قطعاً صحیح است. اگر نفر اول دروغ‌گو باشد بنابراین نفر دوم که گفته است جلوی من دروغ‌گو است، حرفش درست است و راست‌گو می‌شود. بنابراین شماره‌های فرد دروغ‌گو و شماره‌های زوج راست‌گو می‌شوند. (با تشکیل الگو)

۱۳۵- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * استعداد تحلیلی (استعداد تحلیلی)

۷۰	?
۱۰۰	۳۰

$$\Rightarrow \frac{70 \times 30}{100} = 21 = \text{سؤال}$$

حدنصاب سؤال‌های صحیح
کل سؤالات

از آنجایی که به ۵ سؤال کمتر از حدنصاب پاسخ درست داده، بنابراین از ۲۱ سؤال کم می‌شود. $21 - 5 = 16$

۱۳۶- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط * استعداد تحلیلی (استعداد تحلیلی)

عقربه ساعت‌شمار هر ساعت، ۳۰ درجه و عقربه دقیقه‌شمار هر ساعت ۳۶۰ درجه حرکت می‌کنند. از ۳:۳۵ تا ۵:۱۵، یک ساعت و ۴۰ دقیقه است که برابر ۱۰۰ دقیقه است.

درجه	زمان
۳۰	۶۰
?	۱۰۰

$$\Rightarrow \frac{100 \times 30}{60} = 50$$

۱۳۷- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط * استعداد تحلیلی (استعداد تحلیلی)

اگر قیمت اولیه این مدل خاص از خودرو را x در نظر بگیریم:

$$x \times \frac{80}{100} \times \frac{150}{100} \Rightarrow x \times \frac{120}{100} = 1/2 x$$

$1/2 x$ همان $120x\%$ یا $(100+20)x$ است که معنی افزایش ۲۰٪ در فروش را می‌دهد.

۱۳۸- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: دشوار * استعداد تحلیلی (استعداد تحلیلی)

بعد از تشکیل الگو و پیدا کردن رابطه به فرمول زیر می‌رسیم:

$$(n \text{ تعداد خط}) \frac{n \times (n-1)}{2} \xrightarrow{n=10} \frac{10 \times 9}{2} = 45$$

۱۳۹- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * استعداد تحلیلی (استعداد تحلیلی)

چون حروف الفبا هر ۲۲ تا تکرار می‌شوند پس ۱۶۶ را بر ۲۲ تقسیم می‌کنیم. بنابراین در گام آخر باید ۶ تا حرف جلو برویم که به حرف «ج» می‌رسیم.

۱۶۶	۲۲	۵	۶
- ۱۶۰			
		۶	

۵ بار الفبا را به صورت کامل جلو رفتیم و
۶ تای دیگر هم باید جلو ببریم.

۱۴۰- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط * استعداد تحلیلی (استعداد تحلیلی)

$$(1) \quad 25 = (10 + 9 + 8) - 2 \text{ : شکل (۱)}$$

$$(2) \quad 14 = (5 + 8 + 4) - 3 \text{ : شکل (۲)}$$

$$(3) \quad 4 = (2 + 7 + 1) - 6 \text{ : شکل (۳)}$$

۱۴۱- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط * استعداد تحلیلی (استعداد تحلیلی)

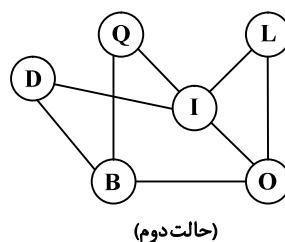
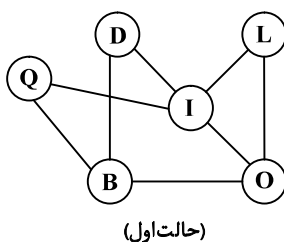
جهت نوشتن اعداد مهم است.

۱۴۲- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: دشوار * استعداد تحلیلی (استعداد تحلیلی)

۱۴۳- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: دشوار * استعداد تحلیلی (استعداد تحلیلی)



با توجه به گزینه‌ها، گزینه ۴ صحیح است.

۱۴۴- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * استعداد تحلیلی (استعداد تحلیلی)

در هر ردیف با برداشتن خانه‌های رنگی ستون‌های چپ و راست، خانه‌های رنگی ستون وسط مشخص می‌شود.

۱۴۵- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: ساده * استعداد تحلیلی (استعداد تحلیلی)

در هر ردیف و هر ستون تنها یک‌بار از هر شکل آمده است. جهت فلش در ردیف‌های اول و سوم هر بار ۹۰ درجه پادساعتگرد و در ردیف وسط، ۹۰ درجه ساعتگرد دوران می‌کند.