

A

دفترچه پاسخ تشریحی

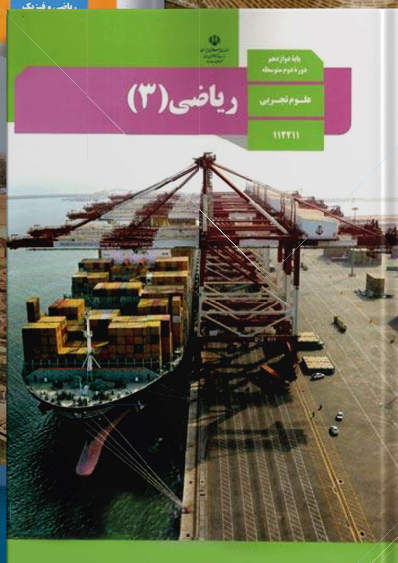
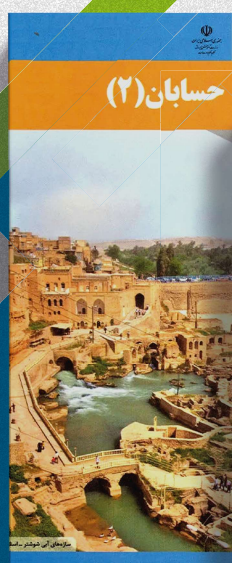
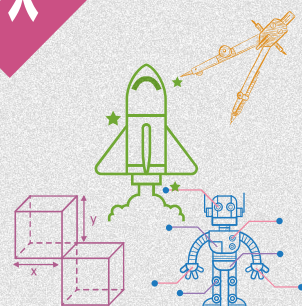
گروه آزمایشی علوم ریاضی

آزمون آزمایشی ۲۳ خرداد ۱۴۰۴

ویژه داوطلبان آزمون سراسری ۱۴۰۴

پایه
دوازدهم

مرحله
۲۸



۱۴۰۳-۱۴۰۴

گزیده دو
مؤسسه آموزشی فرهنگی

تذکرات مهم ↓

➡ آزمون آزمایشی مرحله ۲۹ گزینه دو، در روز جمعه ۲۷ خرداد ۱۴۰۴ برگزار می‌گردد.

➡ داوطلب گرامی، جهت استفاده از خدمات طلایی خود مانند کارنامه‌های هوشمند بعد از آزمون، آزمونک‌ها، بانک سؤال گزینه دو، رفع اشکال هوشمند، جزوه‌های کمک آموزشی، آرشیو آزمون‌های گزینه دو و...، با استفاده از شماره داوطلبی (به عنوان نام کاربری) و کد ملی خود (به عنوان رمز عبور) وارد وب سایت گزینه دو به آدرس www.gozine2.ir شوید.

🔗 در صورتی که اینترنتی ثبت نام کرده‌اید، رمز عبور شما همان رمزی است که خودتان انتخاب نموده‌اید.

➡ کارنامه‌های آزمون آزمایشی مرحله ۲۸ به صورت کامل، با فاصله زمانی کوتاهی پس از آزمون مطابق اطلاعیه اعلام شده، بر روی پایگاه اینترنتی گزینه دو به آدرس www.gozine2.ir قرار می‌گیرد. در صورت بروز اشکال در دریافت کارنامه، موضوع را از طریق نمایندگی شهر خود پیگیری نمایید.



داوطلب گرامی، شما می‌توانید با اسکن تصویر بالا به وسیله گوشی هوشمند و یا تبلت خود، به صفحه اینستاگرام مؤسسه گزینه دو وارد شوید.

📷 gozine2.ir

● مدیر واحد آموزش تخصصی: محمدرضا محمدهاشمی

● معاون تولید محتوا: علی الفتی

کارشناسان

طراحان

علی صادقی • نیکو دهقان

حسین شفیع زاده • ایمان اردستانی

مسئول درس: علی افضل زاده
دستیاران: عباس سعیدی - امین کبیریحسابان و
ریاضی پایه

محمد امین خدابنده • امیروردی

سید محسن میراسلامی • علی نعمت

مسئول درس: سعید اکبرزاده
دستیار: هادی کاظم نژاد

هندسه

محمد امین خدابنده • امیروردی

علیرضا شریف خطیبی • امیدرضا پورحسینی

مسئول درس: سعید اکبرزاده
دستیار: فرهاد فرزانیریاضیات
گسترده

پوپک مقدم

مهرداد کیوان • علی افضل زاده

مسئول درس: ایمان اردستانی
دستیاران: وحید جعفری - مهدی پوررضاییریاضی
تجربی

وحید رباعی

مسئول درس: حسین افسری
دستیاران: حسین اسدزاده - مهدی پوررضاییریاضی
انسانیگروه
ریاضیگروه ریاضی
تولید محتوا: علی الفتی

کارشناسان

طراحان

بتول خواجه پور • حسین ایمانی پور
مرتضی فرهنگدمحمد یازوکی • امیر کبیری راد
علی پناهی شایق • علیرضا اکبریور
بهرام میرحبیبی • مسعود حدادی
منصور کهن دل • فرزاد صادقیانمسئول درس: امیر کبیری راد
دستیار: پرسا کامکارزیست
شناسیسید علیرضا کشفیان • نرگس سادات حسینی
مریم کلی حسنلوعلی نعیمی • بهمن شاهمرادی
احمد رضوانی • احمد مصلائی
جمال خم خاجیمسئول درس: منصور داودوندی
دستیار: ساناز دریکوندی

فیزیک

محمد احمدی • حسین ایمانی پور

ماشاءالله سلیمانی • بهنام ابراهیم پور
مهرداد ملاصالحی • شهرام شاه پرویزی
محمدعلی توسلی فر • محمد احمدی

مسئول درس: شهرام شاه پرویزی

شیمی

فرزانه صاعدی • روزبه اسحاقیان
آنیته هرطونیانفرزانه رجایی • حسن علیمحمدی
فرزانه صاعدی

مسئول درس: شکبیا کریمی

زمین
شناسیگروه
علومگروه علوم
تولید محتوا: علی الفتی

کارشناسان

طراحان

سپهر سالار کیا • سید محمد صادق حسام زاده
محمدحسن مزروعی • عرشیا شریفیانابوالفضل قاضی • محمدرضا لمسه چی
علی عطری • عماد فیض آبادیمسئول درس: محمدرضا پیرو
دستیار: حسنا محمدیعلوم و
فنون ادبیهستی ناصح • نیایش غریبی
مهتاب شیرازیآزیتا بیدقی • فروغ تیموریان
علیرضا مختاری • محمدزمان کبیرمسئول درس: الهام رضایی
دستیار: فاطمه صفریجامعه
شناسی

ثنا کاشیان • فاطمه انوری

سیمین زاهدی • سیده ضحی سکاکی
مهدی جاهدیمسئول درس: سیده ضحی سکاکی
دستیار: حسین اصفهانیروان
شناسیفاطمه نظری • سارا حمزه
یکتا فضل الهی • مهتاب شیرازی
صبا پهلوانکاظم غلامی • اسرافیل قربانپور
حمید جوهری مجد • پدرام علیمرادی
پویا رضاداد • عرفان جالیزی

مسئول درس: پویا رضاداد

زبان
عربی

علی سلوکی • مهتاب شیرازی

شهرام امامی • بهروز یحیی
نگار مروتی • فاطمه نیتیمسئول درس: مهسا اصغری
دستیار: ثنا کاشیان

تاریخ

علی سلوکی • مهتاب شیرازی

بهروز یحیی • شهرام امامی
نگار مروتیمسئول درس: الناز گنج کار
دستیار: الهه ریاحی نسب

جغرافیا

مهدی مشایخی • مهتاب پیشه
محمدعلی مهرآبادی • فرار مختاری نژادحمید سودیان طهرانی • احمد خداداد حسینی
علی اکبر آخوندی • سعید رحیمیان
مهدی لاجوردیمسئول درس: سعید رحیمیان
دستیاران: منصور کاظم بیگی - محمدحسین خدامفلسفه
و منطق

کوثر رعدی

حسین خاکساری • میترا چینی ساز
طاهره کریمی • محمدرضا مبارکی
علی محسنی • آرش بدریمسئول درس: امیر محمدبیگی
دستیار: محمدرضا مبارکی

اقتصاد

گروه
انسانیگروه انسانی
تولید محتوا: علی الفتی

ریاضیات

۱- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضی ۱ (فصل ۱، درس‌های ۳ و ۴)



با توجه به اینکه جمله اول و سوم دنباله با هم برابرند، پس می‌توان جمله عمومی آن را به صورت $a_n = a(n-2)^2 + b$ در نظر گرفت:

$$\begin{cases} a_1 = 2 \Rightarrow a + b = 2 \\ a_7 = -1 \Rightarrow b = -1 \end{cases} \Rightarrow a = 3 \Rightarrow a_n = 3(n-2)^2 - 1$$

بنابراین واسطه حسابی بین جملات پنجم و هفتم برابر است با:

$$\text{واسطه حسابی} = \frac{a_5 + a_7}{2} = \frac{(3(5-2)^2 - 1) + (3(7-2)^2 - 1)}{2} = \frac{26 + 24}{2} = 50$$

همچنین جمله ششم این دنباله برابر ۴۷ است:

$$a_6 = 47 \Rightarrow \text{۳ واحد با واسطه حسابی اختلاف دارد.}$$

۲- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط * آمار و احتمال (فصل ۱، درس ۱)



- ترکیب عطفی، فصلی و شرطی دو گزاره به صورت زیر است:

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$
د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	ن
ن	د	ن	د	د
ن	ن	ن	ن	د

- گزاره دو شرطی $p \Leftrightarrow q$ زمانی درست است که گزاره‌های p و q هم‌ارزش باشند. یعنی هر دو «درست» یا هر دو «نادرست» باشند.

p	q	$p \Leftrightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	د



جدول ارزش گزاره $((p \Rightarrow q) \wedge \sim p) \Leftrightarrow (p \vee q)$ را تشکیل می‌دهیم:

p	q	$\sim p$	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge \sim p$	$p \vee q$	$((p \Rightarrow q) \wedge \sim p) \Leftrightarrow (p \vee q)$
د	د	ن	د	ن	د	ن
د	ن	ن	ن	ن	د	ن
ن	د	د	د	د	د	د
ن	ن	د	د	د	ن	ن

همان‌گونه که مشاهده می‌کنید در سه سطر ارزش گزاره نادرست است.

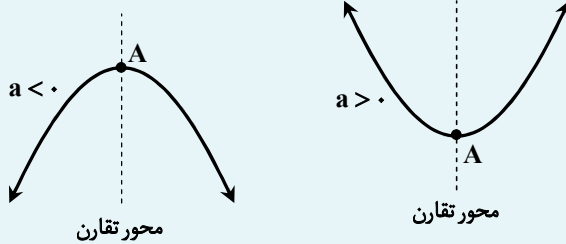
بنابراین گزینه ۳ پاسخ است.

۳- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: ساده * ریاضی ۱ (فصل ۴، درس ۲)



- نقطه A را در شکل‌های مقابل رأس سهمی می‌گوییم.



- اگر $a > 0$ باشد، A پایین‌ترین نقطه سهمی و اگر $a < 0$ باشد، A بالاترین نقطه سهمی است. همچنین خط عمودی که از رأس سهمی می‌گذرد، خط تقارن سهمی نامیده می‌شود.

چون سهمی، محور عرض‌ها را در $y = 4$ قطع می‌کند، پس $c = 4$ است.

سپس خط و سهمی را تقاطع می‌دهیم:

$$ax^2 + bx + 4 = 2x + 10 \Rightarrow ax^2 + (b-2)x - 6 = 0$$

ریشه‌های معادله به‌دست آمده همان ۲ و -۳ است، پس:

$$ax^2 + (b-2)x - 6 = (x-2)(x+3) \Rightarrow ax^2 + (b-2)x - 6 = x^2 + x - 6 \Rightarrow a = 1, b = 3$$

$$\Rightarrow \text{معادله سهمی: } y = x^2 + 3x + 4$$

در نتیجه محور تقارن این سهمی به‌صورت زیر است:

$$\text{محور تقارن: } x = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (فصل ۱، درس ۲)

۴- پاسخ: گزینه ۱

- به‌طور کلی در هر معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ اگر جمع ریشه‌ها S و ضرب ریشه‌ها P باشد، این روابط برقرار است.

$$S = -\frac{b}{a}, P = \frac{c}{a}$$



از روابط مجموع و حاصل‌ضرب در معادله درجه دو استفاده می‌کنیم:

$$S = -\frac{b}{a} \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{7}{\alpha} \quad (1)$$

$$P = \frac{c}{a} \Rightarrow \alpha\beta = \frac{9\beta}{\alpha} \xrightarrow{\beta \neq 0} \alpha^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 3 \xrightarrow{(1)} \beta = \frac{-7}{3} \quad \times \\ \alpha = -3 \xrightarrow{(1)} \beta = \frac{7}{3} \quad \checkmark \end{cases}$$

بنابراین مقدار خواسته شده برابر است با:

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{-3 + \frac{7}{3}}{-3 \times \frac{7}{3}} = \frac{7}{6}$$

۵- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (فصل ۱، درس ۵)



- اگر خطوط d_1 و d_2 به ترتیب با شیب‌های m_1 و m_2 بر هم عمود باشند، آنگاه $m_1 m_2 = -1$ و برعکس.
- به‌طور کلی، اگر در صفحه مختصات دو نقطه $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ را داشته باشیم، طول پاره خط AB برابر است با:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



به شکل فرضی مقابل توجه کنید. معادله AM و AC را به‌دست آورده و سپس با هم تقاطع می‌دهیم تا A به‌دست آید؛ ابتدا شیب خط AM را به‌دست می‌آوریم:

$$m_{BC} = \frac{6-4}{4-0} \Rightarrow m_{BC} = \frac{1}{2} \xrightarrow{BC \perp AM} m_{AM} = -2$$

با توجه به مختصات نقطه $H(1, 5)$ ، معادله AM به‌دست می‌آید:

$$y - 5 = -2(x - 1) \Rightarrow y = -2x + 7$$

اکنون به محاسبه شیب خط AC می‌پردازیم:

$$m_{BH} = \frac{5-4}{1-0} \Rightarrow m_{BH} = 1 \xrightarrow{AC \perp BN} m_{AC} = -1$$

با توجه به مختصات نقطه C ، معادله AC به‌دست می‌آید:

$$y - 6 = -(x - 4) \Rightarrow y = -x + 10$$

بنابراین مختصات نقطه A به‌دست می‌آید:

$$\text{تقاطع: } \begin{cases} y = -2x + 7 \\ y = -x + 10 \end{cases} \Rightarrow -2x + 7 = -x + 10 \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 13 \end{cases} \Rightarrow A(-3, 13)$$

پس طول پاره خط AH برابر است با:

$$AH = \sqrt{(-3-1)^2 + (13-5)^2} = \sqrt{16+64} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (فصل ۱، درس ۳)

۶- پاسخ: گزینه ۳



- برخی از معادلات که دارای عبارت‌های رادیکالی از مجهول هستند را معادلات گنگ می‌نامند. برای حل آن‌ها با به توان رساندن طرفین معادله (و در صورت لزوم تکرار این عمل) و ساده کردن به معادله‌ای بدون رادیکال می‌رسیم که آن را حل می‌کنیم، جواب‌های به‌دست آمده باید در معادله اصلی آزمایش شوند، زیرا عملیات توان‌رسانی ممکن است جواب‌های اضافی تولید کند.



برای حل معادله از تغییر متغیر $x^2 + x = t$ استفاده می‌کنیم:

$$\sqrt{2x^2 + 2x + 3} + x^2 + x = 6 \Rightarrow \sqrt{2t + 3} + t = 6 \Rightarrow \sqrt{2t + 3} = 6 - t$$

$$\xrightarrow{6-t \geq 0} 2t + 3 = t^2 - 12t + 36 \Rightarrow t^2 - 14t + 33 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 3 \checkmark \\ t = 11 \text{ غلط} \end{cases}$$

جواب $t = 11$ در محدوده $t \leq 6$ قرار نداشته و در معادله صدق نمی‌کند. پس $t = 3$ و داریم:

$$x^2 + x = 3 \Rightarrow x^2 + x - 3 = 0 \Rightarrow x_1 x_2 = -3$$

▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۱ (فصل ۲، درس ۲)

۷- پاسخ: گزینه ۳



- هر تابع که بتوان آن را به‌شکل $y = ax + b$ نمایش داد، یک «تابع خطی» نامیده می‌شود.
- برای تعیین دامنه تابع $y = \sqrt{f(x)}$ کافی است نامعادله $f(x) \geq 0$ حل شود.



ضابطه تابع خطی f را $f(x) = ax + b$ در نظر می‌گیریم؛ بنابراین رابطه داده شده در صورت سؤال به صورت زیر در می‌آید:

$$\begin{cases} f(2x+1) = a(2x+1) + b \\ f(x+2) = a(x+2) + b \end{cases} \Rightarrow a(2x+1) + b + a(x+2) + b = 3x + 3a + b \Rightarrow 3ax + 3a + 2b = 3x + 3a + b$$

عبارت به دست آمده به ازای تمام مقادیر x برقرار است، پس:

$$\begin{cases} 3a = 3 \\ 2b = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = x$$

اکنون دامنه تابع خواسته شده را به دست می‌آوریم:

$$y = \sqrt{f(x) - x^2} \Rightarrow y = \sqrt{x - x^2}$$

$$x - x^2 \geq 0$$

$$\frac{x}{x - x^2} \quad \begin{array}{c|ccc} & + & 0 & - & 0 & + \\ \hline x & & & & & \end{array} \Rightarrow 0 \leq x \leq 1$$

در نتیجه دامنه تابع خواسته شده $[0, 1]$ و گزینه ۳ درست است.

۸- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۱ (فصل ۲، درس ۳)



- اگر رابطه بین دو مجموعه به صورت زوج‌های مرتب داده شده باشد، رابطه‌ای را که از جابه‌جایی دو مؤلفه هر زوج مرتب رابطه به دست می‌آید، وارون آن رابطه می‌نامیم.

- اگر f یک تابع باشد وارون آن را با f^{-1} نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in f\}$$



فرض می‌کنیم $f^{-1}(2a) = 2f^{-1}(a) = b$ ، پس:

$$\begin{cases} f^{-1}(2a) = b \Rightarrow 2a = f(b) \Rightarrow 2a = b + \sqrt[3]{b-6} \\ f^{-1}(a) = \frac{b}{2} \Rightarrow a = f\left(\frac{b}{2}\right) \Rightarrow a = \frac{b}{2} + \sqrt[3]{\frac{b}{2}-6} \Rightarrow 2a = b + 2\sqrt[3]{\frac{b}{2}-6} \end{cases}$$

دو رابطه به دست آمده با یکدیگر برابر هستند:

$$\sqrt[3]{b-6} = 2\sqrt[3]{\frac{b}{2}-6} \xrightarrow{\text{توان ۳}} b-6 = 8\left(\frac{b}{2}-6\right) \Rightarrow b = 14 \Rightarrow a = 8 \Rightarrow [a] = 8$$

۹- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (فصل ۳، درس ۳)



$$y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$$

$$\log_c ab = \log_c a + \log_c b$$

- قانون ضرب $\log$:



با توجه به شرط $x-1 > 0$ معلوم می‌شود که x مثبت است، پس $|x| = x$.

$$\log_7(x-1) + \log_7(4-x) = 1 \Rightarrow \log_7(x-1)(4-x) = 1 \Rightarrow (x-1)(4-x) = 7 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = 2, 3$$

بنابراین α و β برابر ۲ و ۳ هستند. اکنون به حل نامعادله مورد نظر می‌پردازیم:

$$2^\alpha < (0.5)^{\beta-x} \Rightarrow 2^\alpha < 2^{x-\beta} \xrightarrow{2>1} \alpha < x-\beta \Rightarrow x > \alpha+\beta \Rightarrow x > 5$$

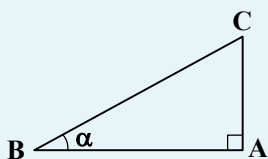
پایه‌نمایی بزرگ‌تراز ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضی ۱ (فصل ۲، درس ۱)

۱۰- پاسخ: گزینه ۲



- مثلث قائم الزویه‌ای که یکی از زوایای حاده آن α باشد را در نظر بگیرید. نسبت مثلثاتی تانژانت زاویه α به صورت زیر تعریف می‌شود:

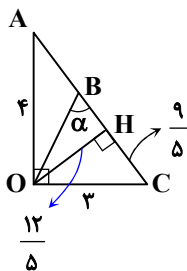


$$\tan \alpha = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{AC}{AB}$$

تانژانت:



با استفاده از قضیه فیثاغورس طول وتر AC برابر ۵ است. از نقطه O ضلع بر AC عمود رسم می‌کنیم. با توجه به روابط طولی در مثلث قائم الزویه AOC داریم:



$$OH \times AC = AO \times OC \Rightarrow OH \times 5 = 4 \times 3 \Rightarrow OH = \frac{12}{5}$$

$$OC^2 = CH \times AC \Rightarrow 9 = CH \times 5 \Rightarrow CH = \frac{9}{5}$$

اکنون تعریف تانژانت را در مثلث قائم الزویه BOH می‌نویسیم:

$$\tan \alpha = \frac{OH}{BH} \Rightarrow \frac{12}{5} = \frac{OH}{BH} \Rightarrow BH = \frac{5}{2} \Rightarrow AB = 5 - \frac{5}{2} = \frac{5}{2}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۲، درس ۲)

۱۱- پاسخ: گزینه ۱



- رابطه تانژانت مجموع (یا تفاضل) زوایا: $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$, $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$



ابتدا با استفاده از فرض داده شده، مقدار $\tan x$ را پیدا می‌کنیم: $\sin(x + \frac{3\pi}{4}) = 2 \sin x \Rightarrow -\cos x = 2 \sin x \Rightarrow \tan x = -\frac{1}{2}$

بنابراین مقدار $\tan 2x$ برابر است با: $\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{-1}{1 - \frac{1}{4}} = -\frac{4}{3}$

اکنون مقدار خواسته شده را محاسبه می‌کنیم:

$$\tan(2x - \frac{\pi}{4}) = \frac{\tan 2x - 1}{1 + \tan 2x} = \frac{-\frac{4}{3} - 1}{1 - \frac{4}{3}} = 7$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۲، درس ۲)

۱۲- پاسخ: گزینه ۴



- (نسبت‌های مثلثاتی دو برابر کمان): $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$
 - جواب‌های کلی معادله $\sin x = \sin \alpha$ به صورت $x = (2k + 1)\pi - \alpha$ و $x = 2k\pi + \alpha$ می‌باشد که $k \in \mathbb{Z}$.
 - جواب‌های کلی معادله $\cos x = \cos \alpha$ به صورت $x = 2k\pi \pm \alpha$ می‌باشند که $k \in \mathbb{Z}$.



ابتدا معادله را در بازه $(0, 2\pi)$ حل می‌کنیم:

$$\cos x + \sin 2x = 0 \Rightarrow \cos x + 2 \sin x \cos x = 0 \Rightarrow \cos x (1 + 2 \sin x) = 0$$

$$\begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \\ \text{یا} \\ 1 + 2 \sin x = 0 \Rightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \end{cases}$$

بزرگ‌ترین جواب به دست آمده $\frac{11\pi}{6}$ است. پس $\alpha = \frac{11\pi}{6}$ و در نتیجه:

$$\sin \alpha + \cos 2\alpha = \sin \frac{11\pi}{6} + \cos \frac{11\pi}{3} = \sin \left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) + \cos \left(4\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (فصل ۵، درس ۴)

۱۳- پاسخ: گزینه ۴



حد تابع f را وقتی $x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+$ محاسبه می‌کنیم: (توجه شود در همسایگی راست $\frac{\pi}{4}$ ، یعنی در نیمه دوم ربع اول، مقدار سینوس بیشتر از کسینوس است.)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^+} \frac{\sqrt{1 - \sin 2x}}{\tan x - \cot x} = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^+} \frac{\sqrt{(\sin x - \cos x)^2}}{\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^+} \frac{|\sin x - \cos x|}{\frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x \cos x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^+} \frac{(\sin x - \cos x) \sin x \cos x}{(\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^+} \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (فصل ۵، درس ۵)

۱۴- پاسخ: گزینه ۱



ابتدا حد چپ و راست تابع در $x = 2$ و مقدار $f(2)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= a[2^-] + b[(-2)^-] = a - 3b \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (3x + 2) = 8 \\ f(2) &= 2a - 2b \end{aligned}$$

برای آنکه f در $x = 2$ پیوسته باشد، این سه مقدار را با یکدیگر مساوی قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} a - 3b = 8 \\ 2a - 2b = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -2 \\ a = 2 \end{cases} \Rightarrow ab = -4$$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۲ (فصل ۳، درس ۲)

۱۵- پاسخ: گزینه ۲



خط $y = L$ را مجانب افقی نمودار $y = f(x)$ می‌نامیم به شرطی که حداقل یکی از دو شرط $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ برقرار باشد.



برای محاسبه مجانب‌های افقی تابع f حد این تابع را وقتی $x \rightarrow +\infty$ و $x \rightarrow -\infty$ محاسبه می‌کنیم:

$$\text{مجانب‌های افقی: } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|a|x - 2x}{-x} = 2 - |a| \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-|a|x - 2x}{x} = -2 - |a| \end{cases}$$

مجاانب‌های افقی تابع دو خط $y = b$ و $y = -b$ هستند. از آنجا که b عددی مثبت است، پس:

$$\begin{cases} 2 - |a| = b \\ -2 - |a| = -b \end{cases} \Rightarrow a = 0, b = 2$$

اکنون به محاسبه حد خواسته شده می‌پردازیم:

$$\lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{4 - 2x}{2 - |x|} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2(2 - x)}{2 - x} = 2$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۴، درس ۲)

۱۶- پاسخ: گزینه ۴



- (تعریف): مشتق راست و مشتق چپ تابع f در $x = a$ را با $f'_+(a)$ و $f'_-(a)$ نمایش می‌دهیم و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \quad f'_-(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

یا به طور معادل (تعریف دوم مشتق):

$$f'_+(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \quad f'_-(a) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

- به طور کلی اگر n یک عدد صحیح باشد و $f(x) = x^n$ ، آنگاه: $f'(x) = nx^{n-1}$.



ابتدا حد موردنظر را با استفاده از متغیر متغیر $H = -2h$ بر حسب مشتق تابع f پیدا می‌کنیم: (واضح است که وقتی $h \rightarrow 0^+$ آنگاه $H \rightarrow 0^-$).

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1-2h) - f(1)}{h} = \lim_{H \rightarrow 0^-} \frac{f(1+H) - f(1)}{-\frac{H}{2}} = -2 \lim_{H \rightarrow 0^-} \frac{f(1+H) - f(1)}{H} = -2f'_-(1)$$

بنابراین می‌بایست مشتق چپ تابع f در $x = 1$ را محاسبه کنیم.

در همسایگی چپ $x = 1$ داریم:

$$f(x) = \frac{1}{x} \left| x^2 + [(-1)^+] \right| = \frac{1}{x} \left| x^2 - 1 \right| = -\frac{1}{x} (x^2 - 1) = \frac{1 - x^2}{x} = \frac{1}{x} - x$$

حال از تابع فوق مشتق می‌گیریم:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} - 1 \Rightarrow f'_-(1) = -2$$

بنابراین حاصل موردنظر برابر است با:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1-2h) - f(1)}{h} = -2f'_-(1) = 4$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۴، درس ۲)

۱۷- پاسخ: گزینه ۴



- اگر $f(x) = \sqrt{ax+b}$ و $ax+b > 0$ ، آنگاه $f'(x) = \frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$.

$$y = f(u) \Rightarrow y' = u'f'(u)$$

- اگر f تابعی بر حسب u و u تابعی از x باشد:



ابتدا ضابطه f' را محاسبه می‌کنیم:

$$f'(x) = 2 + \frac{1}{2\sqrt{x+2}}$$

اکنون از دو طرف تساوی داده شده طبق قانون $(f(u))' = u'f'(u)$ مشتق می‌گیریم:

$$g(x^3) = f\left(\frac{f}{x}\right) \Rightarrow 3x^2 g'(x^3) = -\frac{f}{x^2} f'\left(\frac{f}{x}\right)$$

با جای گذاری $x = 2$ در رابطه به دست آمده، داریم:

$$x = 2 \Rightarrow 12g'(8) = -f'(2) \Rightarrow g'(8) = -\frac{1}{12} \times \underbrace{\left(3 + \frac{1}{4}\right)}_{f'(2)} \Rightarrow g'(8) = -\frac{13}{48}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۵، درس ۱)

۱۸- پاسخ: گزینه ۳



- (آزمون مشتق اول): فرض کنیم تابع f بر بازه‌ای باز مانند I ($I \subseteq D_f$) پیوسته باشد و $c \in I$ یک نقطه بحرانی تابع f باشد، هرگاه f بر این بازه به جز احتمالاً در نقطه c ، مشتق پذیر باشد، در این صورت:
اگر به ازای تمام مقادیر x در بازه‌ای مانند (a, c) ، $f'(x) < 0$ ، و به ازای تمام مقادیر x در بازه‌ای مانند (c, b) ، $f'(x) > 0$ ، آنگاه $f(c)$ یک مقدار مینیمم نسبی f است.



ابتدا نقطه مینیمم نسبی تابع f را محاسبه می‌کنیم:

$$f'(x) = 1 - \frac{3}{3\sqrt[3]{(x+2)^2}} = \frac{\sqrt[3]{(x+2)^2} - 1}{\sqrt[3]{(x+2)^2}}$$

$$f' = 0 \Rightarrow (x+2)^2 = 1 \Rightarrow x = -1 \text{ یا } -3$$

x	-3	-2	-1
f'	+	-	+
f	↗	↘	↗

min

پس $x = -1$ طول نقطه مینیمم نسبی است و از آنجاکه $f(-1) = -4$ ، پس نقطه $A(-1, -4)$ نقطه مینیمم نسبی است. اگر این نقطه را یک واحد به راست و چهار واحد به بالا انتقال دهیم بر مبداء منطبق می‌شود، پس $b = -1$ و $a = 4$ و در نتیجه $a + b = 3$.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۵، درس ۲)

۱۹- پاسخ: گزینه ۱



- (تعریف): فرض کنیم تابع f در نقطه $x = c$ پیوسته است. در این صورت نقطه $(c, f(c))$ نقطه عطف تابع f است، هرگاه هر دو شرط زیر برقرار باشند:
الف) نمودار f در نقطه $(c, f(c))$ خط مماس داشته باشد.
ب) جهت تقعر f در نقطه $(c, f(c))$ تغییر کند.



ضابطه تابع f را به صورت یک تابع چندضابطه‌ای نوشته و از آن، دو مرتبه مشتق می‌گیریم:

$$f(x) = \begin{cases} (x+2)(x-1)^2 & x \geq -2 \\ -(x+2)(x-1)^2 & x < -2 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 3(x^2 - 1) & x > -2 \\ -3(x^2 - 1) & x < -2 \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} 6x & x > -2 \\ -6x & x < -2 \end{cases}$$

نقطه $x = 0$ نقطه عطف تابع است؛ زیرا مشتق دوم در این نقطه تغییر علامت داده و $f'(0)$ موجود است، پس برای یافتن شیب خط مماس باید $f'(0)$ را محاسبه کنیم:

$$m = f'(0) = -3$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضی ۱ (فصل ۶، درس ۱)

۲۰- پاسخ: گزینه ۳



- اصل جمع: اگر کاری را بتوان به دو روش انجام داد، به طوری که در روش اول m انتخاب و در روش دوم n انتخاب وجود داشته باشد، برای انجام کار مورد نظر $m + n$ روش وجود دارد.

- تعمیم اصل ضرب: اگر انجام کاری شامل k مرحله باشد؛ به طوری که برای انجام مرحله اول m_1 روش، برای انجام مرحله دوم m_2 روش، ... و برای انجام مرحله k ام m_k روش وجود داشته باشد (با فرض اینکه در هر مرحله انتخاب تمام روش‌های آن مرحله ممکن باشد)، کار مورد نظر با $m_1 \times m_2 \times \dots \times m_k$ روش قابل انجام است.



با توجه به اینکه اعداد چهاررقمی بزرگ‌تر از ۳۰۰۰ را می‌خواهیم، پس هزارگان یکی از ارقام ۳، ۴، ۵ و ۶ است. از طرفی چون اعداد زوج را می‌خواهیم، یکان یکی از ارقام ۰، ۲، ۴ و ۶ است، پس حالات زیر را در نظر می‌گیریم.

الف) یکان ۰ یا ۲ باشد:

$$\frac{۶, ۵, ۴, ۳}{۴} \times \frac{۲ یا ۰}{۲} = ۱۶۰$$

ب) یکان ۴ یا ۶ باشد:

$$\frac{۶ یا ۴}{۳} \times \frac{۵, ۳, یکی از ۴ یا ۶}{۲} = ۱۲۰$$

$$۱۶۰ + ۱۲۰ = ۲۸۰ = \text{کل حالات}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * آمار و احتمال (فصل ۱، درس ۲)

۲۱- پاسخ: گزینه ۱



- فرض کنید A یک مجموعه n عضوی باشد، تعداد زیرمجموعه‌های A برابر با 2^n است.



حالات زیر را خواهیم داشت:

$$\{۲, ۳\} \Rightarrow \text{حالت ۱}$$

$$\begin{array}{c} ۲, ۳, ۴, ۷ \\ \downarrow \downarrow \\ ۲ \times ۲ \end{array} \Rightarrow \text{حالت ۴}$$

$$\begin{array}{c} ۲, ۳, ۴, ۷, ۹ \\ \downarrow \downarrow \downarrow \\ ۲ \times ۲ \times ۲ \end{array} \Rightarrow \text{حالت ۸}$$

$$\begin{array}{c} ۲, ۳, ۴, ۷, ۹, ۱۲, ۱۷ \\ \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \\ ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \end{array} \Rightarrow \text{حالت ۳۲}$$

$$\{۳, ۴\} \Rightarrow \text{حالت ۱}$$

$$\begin{array}{c} ۳, ۴, ۷, ۹, ۱۲ \\ \downarrow \downarrow \downarrow \\ ۲ \times ۲ \times ۲ \end{array} \Rightarrow \text{حالت ۸}$$

$$\{۴, ۷\} \Rightarrow \text{حالت ۱}$$

$$\begin{array}{c} ۴, ۷, ۹ \\ \downarrow \\ ۲ \end{array} \Rightarrow \text{حالت ۲}$$

$$\begin{array}{c} ۴, ۷, ۹, ۱۲, ۱۷ \\ \downarrow \downarrow \downarrow \\ ۲ \times ۲ \times ۲ \end{array} \Rightarrow \text{حالت ۸}$$

$$\begin{array}{c} ۷, ۹, ۱۲ \\ \downarrow \\ ۲ \end{array} \Rightarrow \text{حالت ۲}$$

$$\{۹, ۱۲\} \Rightarrow \text{حالت ۱}$$

$$\{۱۲, ۱۷\} \Rightarrow \text{حالت ۱}$$

$$۱ + ۴ + ۸ + ۳۲ + ۱ + ۸ + ۱ + ۲ + ۸ + ۲ + ۱ + ۱ = ۶۹$$

۲۲- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * آمار و احتمال (فصل ۳، درس‌های ۲ و ۳)



– (میانگین یا متوسط داده‌ها): میانگین یا متوسط n داده $x_1, x_2, \dots, x_n$ را با نماد $\bar{x}$ نشان می‌دهیم و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

– (انحراف معیار داده‌ها): اگر n داده از جامعه به صورت $x_1, x_2, \dots, x_n$ داشته باشیم، انحراف معیار آن‌ها را با نماد σ نشان می‌دهیم، که به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$$

که در آن $x_i - \bar{x}$ ، را انحراف داده نام از میانگین داده‌ها می‌گویند.

– (واریانس داده‌ها): توان دوم انحراف معیار داده‌ها را واریانس داده‌ها گویند و آن را با نماد σ^2 نشان می‌دهیم.

– ضریب تغییرات داده‌ها: معیاری است که از تقسیم انحراف معیار داده‌ها (σ) به میانگین داده‌ها ($\bar{x}$) به دست می‌آید و آن را با نماد CV نشان می‌دهند:

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$$

هر قدر ضریب تغییرات کمتر باشد، میزان پراکندگی داده‌ها کمتر خواهد شد که این موضوع برای ما مطلوب است.

– اگر واریانس یا انحراف معیار برابر صفر باشد، آنگاه تمام داده‌ها برابرند و بالعکس.



واریانس ۴ داده آماری برابر صفر است، پس این ۴ داده با هم برابر هستند و آن‌ها را به صورت x, x, x, x در نظر می‌گیریم. با افزودن اعداد طبیعی زوج کوچک‌تر از ۱۰ به این داده‌ها، داریم:

$$2, 4, 6, 8, x, x, x, x \Rightarrow \text{میانگین} = \frac{2+4+6+8+4x}{8} = 5 \Rightarrow \frac{20+4x}{8} = 5 \Rightarrow 20+4x=40 \Rightarrow 4x=20 \Rightarrow x=5$$

حال ضریب تغییرات داده‌های جدید را محاسبه می‌کنیم:

داده‌ها $2, 4, 6, 8, 5, 5, 5, 5 \Rightarrow \text{میانگین} = 5$

$$\sigma^2 = \frac{(2-5)^2 + (4-5)^2 + (6-5)^2 + (8-5)^2 + 4(5-5)^2}{8} = \frac{9+1+1+9}{8} = \frac{20}{8} = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{2} \Rightarrow CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{\frac{\sqrt{10}}{2}}{5} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

۲۳- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * آمار و احتمال (فصل ۲، درس ۴)



– در فضای نمونه‌ای متناهی با احتمال غیرهم‌شانس، اگر $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ فضای نمونه‌ای و $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ یک زیرمجموعه k عضوی S باشد، همواره داریم:

$$0 \leq P(A) \leq 1 \quad (1)$$

$$P(S) = 1 \quad (2)$$

$$P(A) = P(a_1) + P(a_2) + \dots + P(a_k) \quad (3)$$

– پیشامدهای A و B را مستقل می‌گوییم، هرگاه وقوع یکی از آن‌ها در احتمال وقوع دیگری تأثیری نداشته باشد. به عبارت دیگر دو پیشامد A و B مستقل‌اند، اگر و تنها اگر $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. دو پیشامدی که مستقل نباشند، وابسته نامیده می‌شوند.



با توجه به فرض سؤال، داریم:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$P(2) = P(4) = P(6) = x \Rightarrow P(1) = P(3) = P(5) = 2x$$

حال با استفاده از نکته بالا، داریم:

$$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1 \Rightarrow 2x + x + 2x + x + 2x + x = 1 \Rightarrow 9x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{9}$$

پیشامد خواسته شده و احتمال آن به صورت زیر است:

$$A = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$$

$$P(A) = 2x \times 2x + 2x \times x + x \times 2x + x \times x = 4x^2 + 2x^2 + 2x^2 + x^2 = 9x^2 \Rightarrow P(A) = 9 \times \left(\frac{1}{9}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * آمار و احتمال (فصل ۲، درس‌های ۱ و ۳)

۲۴- پاسخ: گزینه ۱



- برای هر دو پیشامد دلخواه A و B داریم: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

- برای هر دو پیشامد دلخواه A و B داریم $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

- برای پیشامد دلخواه A داریم: $P(A') = 1 - P(A)$

- در صورتی که B پیشامدی باشد که $P(B) > 0$ ، برای هر پیشامد A، «احتمال A به شرط رخ دادن B» (که آن را «P ی A به شرط B» نیز می‌خوانیم) به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$



احتمال آنکه سعید از نمایشگاه کتاب بازدید کند را با $P(A)$ و احتمال آنکه رضا از نمایشگاه کتاب بازدید کند را با $P(B)$ نشان می‌دهیم. با توجه به مفروضات سؤال، داریم:

$$P(A) = 0.7 \quad , \quad P(B) = 0.6$$

$$P(A|B') = 0.75 \Rightarrow \frac{P(A \cap B')}{P(B')} = 0.75 \Rightarrow \frac{P(A - B)}{1 - P(B)} = 0.75 \Rightarrow \frac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(B)} = 0.75$$

$$\Rightarrow \frac{0.7 - P(A \cap B)}{1 - 0.6} = 0.75 \Rightarrow \frac{0.7 - P(A \cap B)}{0.4} = 0.75 \Rightarrow 0.7 - P(A \cap B) = 0.3 \Rightarrow P(A \cap B) = 0.4$$

خواسته سؤال $P(B'|A')$ است که داریم:

$$P(B'|A') = \frac{P(B' \cap A')}{P(A')} = \frac{P(A \cup B)'}{P(A')} = \frac{1 - P(A \cup B)}{1 - P(A)} = \frac{1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)}{1 - P(A)}$$

$$= \frac{1 - 0.7 - 0.6 + 0.4}{1 - 0.7} = \frac{0.1}{0.3} = \frac{1}{3}$$

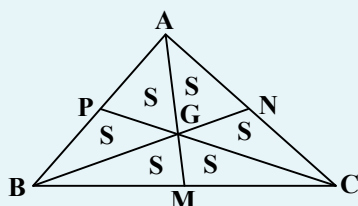
▲ مشخصات سؤال: ساده * هندسه ۱ (فصل ۳، درس ۲)

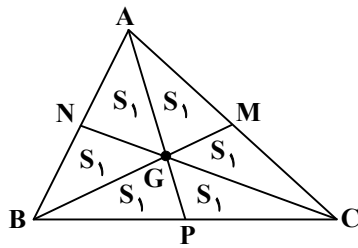
۲۵- پاسخ: گزینه ۴



- سه میانه هر مثلث آن را به شش مثلث هم‌مساحت تقسیم می‌کند.

$$S_{\triangle APG} = S_{\triangle ANG} = S_{\triangle BPG} = S_{\triangle BMG} = S_{\triangle CMG} = S_{\triangle CNG} = S = \frac{1}{6} S_{\triangle ABC}$$





طبق ویژگی میانه‌ها، اگر مطابق شکل، سه میانه BM ، CN و AP را رسم کنیم، شش مثلث هم مساحت ایجاد می‌شود که مساحت هر مثلث $\frac{1}{6}$ مساحت مثلث ABC است، پس داریم:

$$S_{NGMCMCB} = 64 \Rightarrow 4S_1 = 64 \Rightarrow S_1 = 16$$

$$S_{\triangle ABC} = 6S_1 = 6 \times 16 = 96$$

▲ مشخصات سؤال: ساده * هندسه ۱ (فصل ۴، درس ۲)

۲۶- پاسخ: گزینه ۴

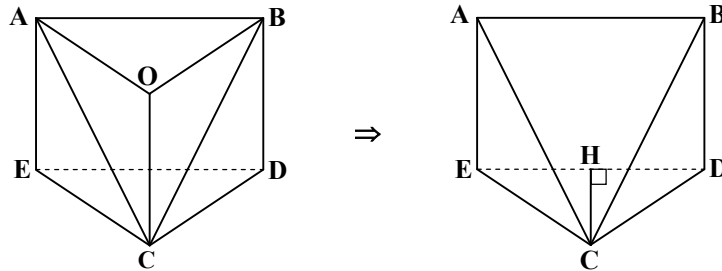


$$V_{\text{هرم}} = \frac{1}{3} \times (\text{مساحت قاعده}) \times (\text{ارتفاع})$$

- حجم هرم از رابطه زیر به دست می‌آید:



اگر منشور قائم را توسط صفحه گذرنده از سه نقطه A ، B و C برش بزنیم، داریم:



شکل باقی‌مانده، هرمی به رأس C و قاعده $ABDE$ است، که برای محاسبه حجم آن باید طول ارتفاع CH را به دست آوریم. مثلث CED

$$CH = \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 6 = 3\sqrt{3}$$

متساوی‌الاضلاع است و ارتفاع این مثلث، از رابطه زیر به دست می‌آید:

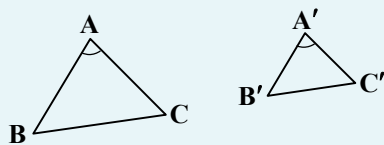
$$V_{\text{هرم}} = \frac{1}{3} S_{ABDE} \times CH = \frac{1}{3} \times 6^2 \times 3\sqrt{3} = 36\sqrt{3}$$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * هندسه ۱ (فصل ۲، درس ۳)

۲۷- پاسخ: گزینه ۳



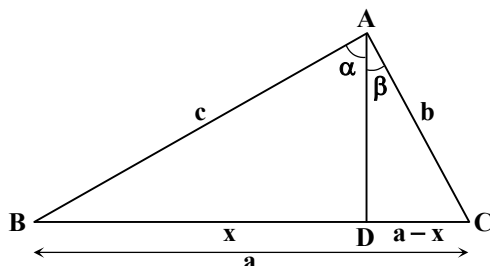
- هرگاه اندازه‌های دو ضلع از مثلثی با اندازه‌های دو ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند و زاویه بین آن‌ها، هم‌اندازه باشند، دو مثلث متشابه‌اند.



$$\hat{A} = \hat{A}', \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$



با فرض $BD = x$ ، طبق اطلاعات سؤال، داریم:



$$x = BD = \frac{a^2 - b^2}{a}$$

$$ax = a^2 - b^2 \Rightarrow a^2 - ax = b^2$$

$$a(a-x) = b^2 \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{a-x}{b}$$

در دو مثلث ABC و ADC ، زاویه C مشترک است و $\frac{b}{a} = \frac{a-x}{b}$ و یا به عبارتی $\frac{AC}{BC} = \frac{DC}{AC}$ ، پس این دو مثلث به حالت تساوی یک زاویه و تناسب اضلاع آن زاویه، با هم متشابه‌اند و در نتیجه:

$$\hat{B} = \beta, \hat{A} = 2\hat{B} \Rightarrow \hat{A} = 2\beta, \hat{A} = \alpha + \beta \Rightarrow 2\beta = \alpha + \beta \Rightarrow \alpha = 2\beta$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۲ (فصل ۳، درس ۱)

۲۸- پاسخ: گزینه ۲



- قضیه سینوس‌ها: در مثلث ABC با اضلاع $BC = a$ ، $AC = b$ و $AB = c$ داریم:

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R$$

که R شعاع دایره محیطی مثلث است.



بر طبق قضیه سینوس‌ها در مثلث ABC داریم:

$$\begin{aligned} \frac{a}{\sin A} &= \frac{b}{\sin B} \Rightarrow \frac{a^2}{\sin^2 A} = \frac{b^2}{\sin^2 B} \Rightarrow \frac{a^2}{1 - \cos^2 A} = \frac{b^2}{1 - \cos^2 B} \\ \Rightarrow a^2 - a^2 \cos^2 B &= b^2 - b^2 \cos^2 A \\ \Rightarrow a^2 \cos^2 B - b^2 \cos^2 A &= a^2 - b^2 \\ \Rightarrow \frac{a^2 \cos^2 B - b^2 \cos^2 A}{a^2 - b^2} &= 1 \end{aligned}$$

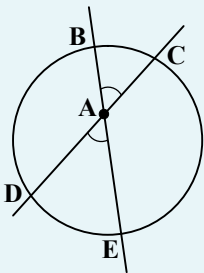
▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۲ (فصل ۱، درس‌های ۱ و ۳)

۲۹- پاسخ: گزینه ۳

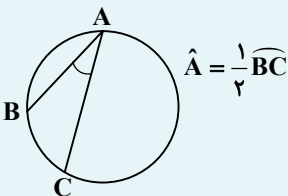


- زاویه‌ای که از برخورد دو وتر در داخل دایره تشکیل می‌شود، از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\hat{DAE} = \hat{BAC} = \frac{1}{2}(\widehat{BC} + \widehat{DE})$$

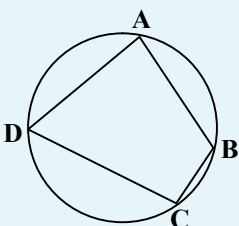


- اندازه هر زاویه محاطی برابر است با نصف اندازه کمان مقابل به آن زاویه.



$$\hat{A} = \frac{1}{2}\widehat{BC}$$

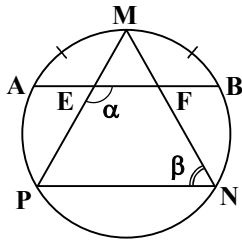
- یک چهارضلعی محاطی است، اگر و فقط اگر دو زاویه مقابل آن مکمل باشند.



$$ABCD \text{ محاطی است} \Leftrightarrow \hat{A} + \hat{C} = \hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$$



طبق شکل مقابل، با استفاده از نکات بالا، داریم:



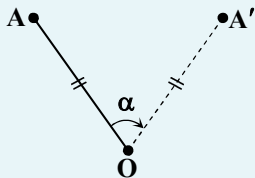
$$\begin{cases} \hat{\alpha} = \frac{\widehat{AM} + \widehat{BNP}}{2} \\ \hat{\beta} = \frac{\widehat{AM} + \widehat{AP}}{2} \end{cases} \Rightarrow \hat{\alpha} + \hat{\beta} = \frac{2\widehat{AM} + \widehat{BNP} + \widehat{AP}}{2}$$

M وسط کمان AB است، پس $2\widehat{AM} = \widehat{AB}$ ؛ بنابراین:

$$\hat{\alpha} + \hat{\beta} = \frac{\widehat{AB} + \widehat{BNP} + \widehat{AP}}{2} = \frac{260^\circ}{2} = 130^\circ$$

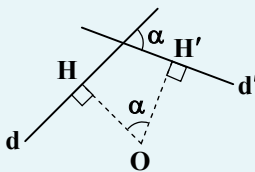
پس چهارضلعی EFNP محاطی است.

۳۰- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * هندسه ۲ (فصل ۲، درس ۱)

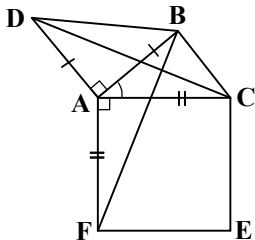


- دوران R به مرکز نقطه ثابت O و زاویه α ، تبدیلی از صفحه است که در آن اگر A' تصویر نقطه A باشد، داریم:

$$OA = OA' \text{ و } \widehat{AOA'} = \alpha$$



- در دوران به مرکز O و زاویه α ، زاویه بین خط و دوران یافته‌اش (زاویه‌ای که مرکز دوران در آن قرار ندارد) برابر با α است.



مطابق شکل، $AB = AD$ ، $AC = AF$ و $\widehat{DAB} = \widehat{CAF} = 90^\circ$ است.

بنابراین، D و C دوران یافته B و F در دوران به مرکز A و زاویه 90° هستند.

پس دوران یافته BF در دوران به مرکز A و زاویه 90° ، بر پاره خط DC تصویر می‌شود. چون در دوران، زاویه بین خط و دوران یافته‌اش، با زاویه دوران برابر است، پس زاویه بین BF و CD همان زاویه 90° است.

۳۱- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۳ (فصل ۱، درس ۱)



- توان‌های ماتریس مربعی A به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$A^2 = A \cdot A, A^3 = A \cdot A^2 = A^2 \cdot A, A^4 = A \cdot A^3 = A^3 \cdot A^2 = A^3 \cdot A, A^{n+1} = A \cdot A^n = A^n \cdot A$$



ابتدا A^2 را محاسبه می‌کنیم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & -16 \\ 12 & -8 \end{bmatrix} = -4 \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

حال A^3 را به دست می‌آوریم:

$$A^3 = A^2 \cdot A = -4 \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = -4 \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix} = -4 \times 16I = -64I$$

برای محاسبه $A^{۱۴۰۳}$ ، داریم:

$$A^3 = -2^6 I \Rightarrow (A^3)^{۴۶۷} = (-2^6 I)^{۴۶۷} \Rightarrow A^{۱۴۰۱} = (-2^6)^{۴۶۷} I \Rightarrow A^{۱۴۰۱} \times A^2 = -2^{۲۸۰۲} I \times A^2$$

$$\Rightarrow A^{۱۴۰۳} = -2^{۲۸۰۲} A^2 = -2^{۲۸۰۲} (-4) \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = 2^{۲۸۰۴} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$n = ۲۸۰۴$$

▲ مشخصات سؤال: ساده * هندسه ۳ (فصل ۳، درس ۱)

۳۲- پاسخ: گزینه ۱



- طول هر بردار مانند $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ در $\mathbb{R}^3$ از رابطه زیر به دست می آید.

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$



بردارهای $\vec{b} + 2\vec{a}$ و $\vec{b} - 2\vec{a}$ را یافته و سپس اندازه آن‌ها را محاسبه می کنیم:

$$\vec{a} = (1, -1, 1), \vec{b} = (2, 3, 1)$$

$$\begin{cases} \vec{b} + 2\vec{a} = (2, 3, 1) + 2(1, -1, 1) = (4, 1, 3) \Rightarrow |\vec{b} + 2\vec{a}| = \sqrt{16 + 1 + 9} = \sqrt{26} \\ \vec{b} - 2\vec{a} = (2, 3, 1) - 2(1, -1, 1) = (0, 5, -1) \Rightarrow |\vec{b} - 2\vec{a}| = \sqrt{0 + 25 + 1} = \sqrt{26} \end{cases}$$

خواسته سؤال برابر است با:

$$\frac{|\vec{b} + 2\vec{a}|}{|\vec{b} - 2\vec{a}|} = \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{26}} = 1$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۳ (فصل ۱، درس ۲)

۳۳- پاسخ: گزینه ۱



- اگر A ماتریسی مربعی از مرتبه n باشد، ($1 \leq n \leq 3$) در این صورت دترمینان ماتریس A را با نماد $\det(A) = |A|$ نمایش می دهیم و داریم:

$$I) A = [k]_{1 \times 1} \Rightarrow |A| = k$$

$$II) A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = ad - bc$$

$$III) A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = a_{11} \times (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \times (-1)^{1+2} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \times (-1)^{1+3} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$|A| = a_{11} \times \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

(برای هر ماتریس 3×3 دلخواه می توان دترمینان A را برحسب هر سطر یا ستونی به دست آورد که حاصل در همه حالت‌ها یکسان خواهد بود.)



دترمینان A را با بسط برحسب سطر اول به دست می آوریم:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & |A| & 0 \\ 1 & 3 & 2|A| \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} -1 & |A| & 0 \\ 1 & 3 & 2|A| \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$|A| = -1 \times \begin{vmatrix} 3 & 2|A| \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - |A| \begin{vmatrix} 1 & 2|A| \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow |A| = -(6+2|A|) - |A|(2-6|A|) \Rightarrow |A| = -6-2|A|-2|A|+6|A|^2$$

$$6|A|^2 - 5|A| - 6 = 0 \Rightarrow (2|A| - 3)(3|A| + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} |A| = \frac{3}{2} \\ |A| = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

خواسته سؤال را ساده می‌کنیم:

$$||A|A|A| = ||A|^3|A|A| = ||A|^4A| = (|A|^4)^3|A| = |A|^{13}$$

پس جواب سؤال یا $(\frac{3}{2})^{13}$ و یا $(-\frac{2}{3})^{13}$ است.

۳۴- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * هندسه ۳ (فصل ۲، درس‌های ۱ و ۳)

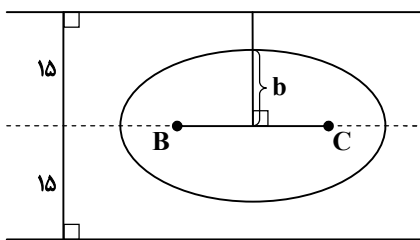
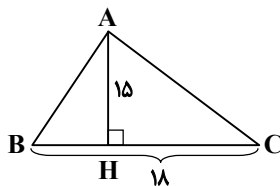


- مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط d به فاصله ثابت k قرار دارند، دو خط موازی d ، به فاصله k از آن و در دو طرف آن است.
- بیضی مکان هندسی نقاطی از صفحه است که مجموع فواصل آن‌ها از دو نقطه ثابت برابر با مقدار ثابت است و این مقدار ثابت از فاصله دو نقطه ثابت، بیشتر است.
- در بیضی بین a ، b و c همواره رابطه $a^2 = b^2 + c^2$ برقرار است.



طبق فرض سؤال و شکل فرضی مقابل، داریم:

$$BC = 18, AB + AC + BC = 48 \Rightarrow AB + AC = 30$$



طبق رابطه بالا، مجموع فواصل A از نقاط B و C مقدار ثابت ۳۰ است، پس مکان هندسی رأس A ، بیضی است با کانون‌های B و C و مقدار ثابت ۳۰ و چون ارتفاع $AH = 15$ نیز ثابت است، مکان دوم رأس A ، دو خط موازی BC به فاصله ۱۵ از آن است. پس نقطه A باید محل تلاقی این دو خط با بیضی باشد.

$$BC = 2c = 18 \Rightarrow c = 9$$

$$AB + AC = 2a = 30 \Rightarrow a = 15$$

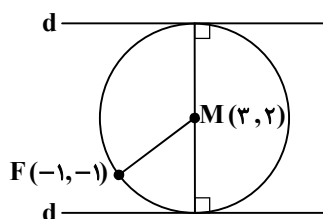
$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12$$

مطابق شکل چون $12 < 15$ ، دو خط موازی، بیضی را قطع نمی‌کنند و مثلی با شرایط گفته شده وجود ندارد.

۳۵- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * هندسه ۳ (فصل ۲، درس ۳)

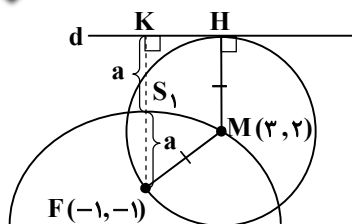


- سهمی، مکان هندسی نقاطی از یک صفحه است که از یک خط ثابت در آن صفحه و از یک نقطه ثابت غیرواقع بر آن خط در آن صفحه به یک فاصله باشند.
- در هر سهمی، فاصله رأس تا کانون با فاصله رأس تا خط هادی برابر است که به این فاصله، فاصله کانونی سهمی می‌گوییم.



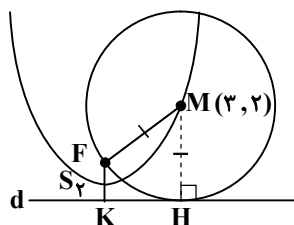
بر طبق تعریف سهمی، فاصله هر نقطه از سهمی تا کانون، با فاصله آن از خط هادی برابر است. پس اگر دایره‌ای به مرکز $M(3,2)$ و شعاع MF رسم کنیم، خط هادی بر این دایره مماس است.

مطابق شکل، این دایره را رسم کرده‌ایم و چون سهمی قائم است، باید خط هادی، مماسی افقی بر این دایره باشد. دو سهمی مطابق شکل خواهیم داشت:



$$MF = \sqrt{(3+1)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{16+9} = 5$$

$$MH = MF = 5 \Rightarrow d: y = 2 + 5 = 7 \Rightarrow FK = y_K - y_F = 7 - (-1) = 8 = 2a \Rightarrow a = 4 \Rightarrow S_1(-1, -1+4) \Rightarrow S_1(-1, 3)$$



$$MH = MF = 5 \Rightarrow d: y = 2 - 5 = -3 \Rightarrow FK = y_F - y_K = -1 - (-3) = 2 = 2a$$

$$\Rightarrow a = 1 \Rightarrow S_2(-1, -1-1) \Rightarrow S_2(-1, -2)$$

فاصله S_1 تا S_2 برابر است با:

$$S_1S_2 = 3 - (-2) = 5$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (فصل ۱، درس ۲)

۳۶- پاسخ: گزینه ۲



- اگر عدد a عدد b را بشمارد، آنگاه هر مضرب صحیح عدد b را نیز می‌شمارد؛ یعنی:

$$a | b \Rightarrow a | mb$$

$$a | b \Leftrightarrow a^n | b^n, (n \in \mathbb{N})$$

- در ک.م.م و ب.م.م می‌توان از عامل مشترک فاکتور گرفت؛ یعنی:

$$[ka, kb] = |k| [a, b] \quad (ka, kb) = |k| (a, b)$$

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}; a | b \Rightarrow \begin{cases} (a, b) = |a| \\ [a, b] = |b| \end{cases}$$



$$a^{\wedge} | b^{\Delta} \Rightarrow a^{\wedge} | b^{\Delta} \times b^{\gamma} \Rightarrow a^{\wedge} | b^{\wedge} \Rightarrow a | b$$

با توجه به فرض سؤال و نکات بالا، داریم:

حال خواسته سؤال را به‌دست می‌آوریم:

$$[2a^2b, 4b^4] = 2b [a^2, 2b^3]$$

$$a | b \Rightarrow a^2 | b^2 \Rightarrow a^2 | b^2 \times 2b \Rightarrow a^2 | 2b^3 \Rightarrow [a^2, 2b^3] = 2b^3$$

$$2b [a^2, 2b^3] = 2b \times 2b^3 = 4b^4$$

بنابراین:

▲ مشخصات سؤال: دشوار * ریاضیات گسسته (فصل ۱، درس‌های ۲ و ۳)

۳۷- پاسخ: گزینه ۳



- عدد طبیعی d را ب.م.م دو عدد صحیح a و b می‌نامیم (a و b هر دو با هم صفر نیستند) و می‌نویسیم $(a, b) = d$ ، هرگاه دو شرط «الف» و «ب» برقرار باشد.

$$\text{الف) } d | a, d | b$$

$$\text{ب) } \forall m > 0; m | a, m | b \Rightarrow m \leq d$$

- اگر عدد a عدد b را بشمارد، آنگاه هر مضرب صحیح عدد b را نیز می‌شمارد؛ یعنی:

$$a | b \Rightarrow a | mb$$

- هرگاه عددی دو عدد را بشمارد، آنگاه مجموع و تفاضل آن دو عدد را نیز می‌شمارد:

$$a | b \wedge a | c \Rightarrow a | b \pm c$$

- می‌توان به دو طرف یا یک طرف یک رابطه هم‌نهشتی هر مضربی از پیمانه را اضافه یا از آن کم کرد.

$$a \equiv b \Rightarrow \begin{cases} a + mt \equiv b + mk \\ a - mt \equiv b - mk \end{cases}$$

- اگر بخواهیم دو طرف یک رابطه هم‌نهشتی را بر عددی تقسیم کنیم، باید پیمانه آن هم‌نهشتی را بر ب.م.م آن عدد و پیمانه تقسیم کنیم.

$$ac \equiv bc, (c, m) = d \Rightarrow a \equiv \frac{m}{d} b$$



با فرض اینکه ب.م.م دو عبارت $5n-2$ و $7n+1$ برابر d باشد، داریم:

$$(5n-2, 7n+1) = d \Rightarrow \begin{cases} d \mid 5n-2 \xrightarrow{\times 7} d \mid 35n-14 \\ d \mid 7n+1 \xrightarrow{\times 5} d \mid 35n+5 \end{cases} \xrightarrow{-} d \mid 19 \Rightarrow d=1 \text{ یا } d=19$$

پس این دو عدد نسبت به هم اولند یا ب.م.م آن‌ها ۱۹ می‌شود پس به‌ازای $d=19$ داریم:

$$19 \mid 5n-2 \Rightarrow 5n-2 \equiv 0 \pmod{19} \Rightarrow 5n \equiv 2 \pmod{19}$$

$$\Rightarrow 5n \equiv 2+2 \times 19 \pmod{19} \Rightarrow 5n \equiv 40 \pmod{19}$$

$$\xrightarrow[\substack{\div 5 \\ (5,19)=1}]{\div 5} n \equiv 8 \pmod{19} \Rightarrow n = 19k + 8$$

اعداد طبیعی دورقمی n را می‌یابیم.

$$10 \leq n \leq 99 \Rightarrow 10 \leq 19k + 8 \leq 99 \Rightarrow 2 \leq 19k \leq 91 \Rightarrow \frac{2}{19} \leq k \leq \frac{91}{19} \Rightarrow 1 \leq k \leq 4 \Rightarrow k = 1, 2, 3, 4$$

بنابراین تعداد اعداد دورقمی n که به‌ازای آن‌ها دو عبارت $5n-2$ و $7n+1$ نسبت به هم اول هستند، به‌صورت زیر است.

$$90 - 4 = 86 = \text{جواب} \Rightarrow \text{تعداد کل اعداد دورقمی}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (فصل ۲، درس‌های ۱ و ۲)

۳۸- پاسخ: گزینه ۲



- مجموعه همسایه‌های یک رأس: فرض کنیم $v \in V(G)$ ، به مجموعه رأس‌هایی از گراف G که به رأس v متصل هستند، «همسایگی باز رأس v » می‌گوییم و با $N_G(v)$ نمایش می‌دهیم. اضافه کردن خود رأس v به $N_G(v)$ «همسایگی بسته رأس v » را به‌دست می‌دهد که آن را با $N_G[v]$ نمایش می‌دهیم. می‌توان این دو مجموعه را به‌صورت زیر نمایش داد:

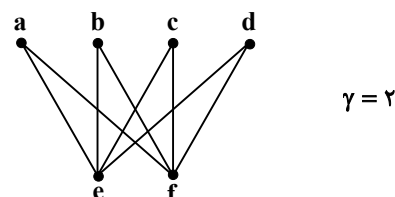
$$N_G(v) = \{u \in V(G); uv \in E(G)\}$$

$$N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$$

- در بین تمام مجموعه‌های احاطه‌گر گراف G ، مجموعه یا مجموعه‌های احاطه‌گری که کمترین تعداد عضو را دارند مجموعه احاطه‌گر مینیمم و تعداد اعضای چنین مجموعه‌ای را عدد احاطه‌گری گراف G می‌نامیم و آن را با $\gamma(G)$ نمایش می‌دهیم.



رأس‌های a, b, c, d و مجموعه همسایگی باز برابر دارند، در نتیجه هیچ دو رأسی از این رؤس مجاور نیستند و هر چهار رأس به رؤس یکسان متصل هستند. همچنین دو رأس e و f مجموعه همسایگی باز برابر دارند، در نتیجه مجاور نیستند و این دو رأس به رؤس یکسان متصل هستند، بنابراین گراف به‌صورت زیر است.



با انتخاب یک رأس از ۴ رأس بالایی و یک رأس از ۲ رأس پایینی یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم و همچنین دو رأس پایینی با هم دیگر نیز یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم به‌دست می‌آید، پس داریم:

$$\text{تعداد } \gamma - \text{مجموعه‌ها} = \binom{4}{1} \times \binom{2}{1} + \binom{2}{2} = 4 \times 2 + 1 = 9$$

۳۹- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (فصل ۳، درس‌های ۱ و ۲)



- قضیه جایگشت با تکرار: اگر n شیء مفروض باشند، به طوری که n_1 تای آنها از نوع اول و یکسان و n_2 تای آنها از نوع دوم و یکسان و ... و n_k تای آنها از نوع k ام و یکسان باشند در این صورت تعداد کل جایگشت‌های این اشیاء برابر است با:

$$\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \dots \times n_k!}$$

- برای دو مجموعه A و B از مجموعه مرجع S داریم:

$$۱) |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$۲) |A - B| = |A| - |A \cap B|$$

$$۳) |\bar{A} \cap \bar{B}| = |\overline{A \cup B}| = |S| - |A \cup B|$$



فرض می‌کنیم A مجموعه همه جایگشت‌هایی از کلمه داده شده هستند که در آنها دو حرف s کنار هم هستند و B مجموعه همه جایگشت‌هایی هستند که دو حرف o کنار هم باشند، داریم:

$$|S| = \frac{6!}{2! \times 2!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2! \times 2!} = 180$$

$$|A| = \frac{5!}{2!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2!} = 60$$

$$|B| = \frac{5!}{2!} = 60$$

$$|A \cap B| = 4! = 24$$

خواسته سؤال $|\bar{A} \cap \bar{B}|$ است که داریم:

$$|\bar{A} \cap \bar{B}| = |\overline{A \cup B}| = |S| - |A \cup B| = |S| - |A| - |B| + |A \cap B|$$

$$\Rightarrow |\bar{A} \cap \bar{B}| = 180 - 60 - 60 + 24 = 84$$

▲ مشخصات سؤال: ساده * ریاضیات گسسته (فصل ۳، درس ۲)

۴۰- پاسخ: گزینه ۱



- تعمیم اصل لانه کبوتری: هرگاه $(kn + 1)$ کبوتر یا بیشتر در n لانه قرار بگیرند، در این صورت لانه‌ای وجود دارد که حداقل $(k + 1)$ کبوتر در آن قرار گرفته است.



حرف اول نام آنها، ۳۲ حالت و ماه تولد آنها، ۱۲ حالت دارد پس تعداد لانه‌ها به صورت زیر است:

$$\text{تعداد لانه‌ها} = 32 \times 12 = 384$$

۳۰۰۰ نفر شهر کبوترها هستند و داریم:

$$\begin{array}{r} 3000 \overline{) 384} \\ 2688 \overline{) 7} \\ 312 \end{array}$$

بنابراین طبق تعمیم اصل لانه کبوتری، حداقل $8 = 7 + 1$ نفر وجود دارد که حرف اول نام آنها و ماه تولد آنها یکسان است.

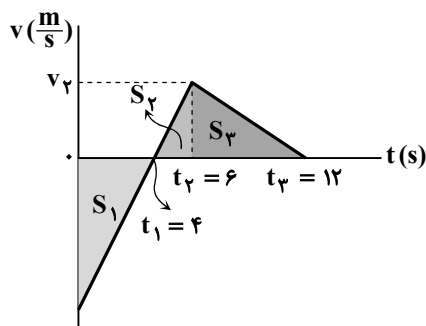
فیزیک

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)

۴۱- پاسخ: گزینه ۲



با توجه به شکل روبه‌رو، می‌نویسیم:



$$\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{t_1}{t_2 - t_1}\right)^2 = \left(\frac{4}{6-4}\right)^2 = 4$$

$$\frac{S_2}{S_3} = \frac{\frac{1}{2} v_2 (t_3 - t_2)}{\frac{1}{2} v_2 (t_3 - t_1)} = \frac{12-6}{6-4} = 3$$

$$S_1 + S_2 + S_3 = 128 \Rightarrow 4S_2 + S_2 + 3S_2 = 128$$

$$\Rightarrow 8S_2 = 128 \Rightarrow S_2 = 16$$

$$S_2 = \frac{v_2 (t_3 - t_1)}{2} \Rightarrow 16 = \frac{v_2 (6-4)}{2} \Rightarrow v_2 = 16 \frac{m}{s}$$

متحرک در بازه زمانی t_1 تا t_3 در جهت محور x حرکت می‌کند. در این مدت، داریم:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{S_1 + S_2}{\Delta t} = \frac{\frac{v_2 \Delta t}{2}}{\Delta t} = \frac{v_2}{2} = \frac{16}{2} = 8 \frac{m}{s}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)

۴۲- پاسخ: گزینه ۳



در بازه زمانی t_1 تا t_2 مکان متحرک منفی است و بردار مکان آن در خلاف جهت محور x است. از طرفی در لحظه‌های t_1 و t_2 مکان متحرک صفر است. به این ترتیب کافی است تفریق ریشه‌های معادله مکان را بیابیم که برابر است با:

$$|t_2 - t_1| = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a} \Rightarrow |t_2 - t_1| = \frac{\sqrt{24^2 - 4 \times 4 \times 27}}{4} = 3 \text{ s}$$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۳ (فصل ۱)

۴۳- پاسخ: گزینه ۲



معادله‌های مکان - زمان و سرعت - زمان متحرک A را تعیین می‌کنیم. این متحرک در ۵ ثانیه اول از مکان $x_0 = 10 \text{ m}$ به مبدأ محور ($x = 0$) می‌رسد.

$$\Delta x(., 5s) = \frac{1}{2} at^2 + v_0 t \Rightarrow 0 - 10 = \frac{1}{2} a \times 5^2 + v_0 \times 5$$

$$\Rightarrow 2/5a + v_0 = -2 \quad (1) \text{ رابطه}$$

سرعت متحرک A در لحظه $t = 2 \text{ s}$ صفر می‌شود:

$$v = at + v_0 \Rightarrow 0 = a \times 2 + v_0 \quad (2) \text{ رابطه}$$

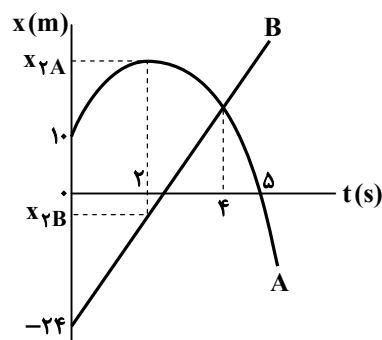
از حل معادله‌های (۱) و (۲)، $a = -4 \frac{m}{s^2}$ و $v_0 = 8 \frac{m}{s}$ به دست می‌آیند.

$$v_A = at + v_0 = -4t + 8 \quad x_A = \frac{1}{2} at^2 + v_0 t + x_0 = -2t^2 + 8t + 10$$

در لحظه $t = 4 \text{ s}$ که دو متحرک به هم می‌رسند، تندی برابری دارند.

$$v_A = -4 \times 4 + 8 = -16 + 8 = -8 \frac{m}{s}$$

$$v_B = |v_A| = 8 \frac{m}{s} \Rightarrow x_B = v_B t + x_{0B} = 8t - 24$$



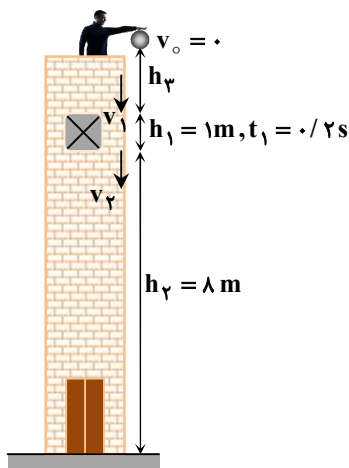
سرعت متحرک B همواره مثبت و سرعت متحرک A در ۲ ثانیه اول مثبت است؛ بنابراین این دو متحرک در ۲ ثانیه اول هم‌سو حرکت می‌کنند. فاصله این دو متحرک در مبدأ زمان برابر است با: $d_o = x_{oA} - x_{oB} = 10 - (-24) = 34 \text{ m}$
فاصله دو متحرک را در لحظه $t = 2 \text{ s}$ با d نشان می‌دهیم:

$$d = x_{2A} - x_{2B} = (-2 \times 2^2 + 8 \times 2 + 10) - (8 \times 2 - 24) = 18 - (-8) = 26 \text{ m}$$

$$d - d_o = 26 - 34 = -8 \text{ m}$$

علامت منفی به معنی کاهش فاصله است.

۴۴- پاسخ: گزینه ۱ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۳ (فصل ۱)



در شکل روبه‌رو، فرض کرده‌ایم گلوله با تندی v_1 از بالای پنجره و با تندی v_2 از پایین پنجره عبور می‌کند. در این صورت:

$$h_1 = \frac{1}{2}gt_1^2 + v_1t_1 \Rightarrow 1 = \frac{1}{2} \times 10 \times 0.2^2 + v_1 \times 0.2 \Rightarrow 1 = 0.2 + 0.2v_1$$

$$\Rightarrow 0.2v_1 = 0.8 \Rightarrow v_1 = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_1^2 - v_o^2 = 2gh_p \Rightarrow 4^2 - 0^2 = 2 \times 10 \times h_p \Rightarrow 16 = 20h_p \Rightarrow h_p = 0.8 \text{ m}$$

$$H = h_1 + h_p + h_2 = 1 + 8 + 0.8 = 9.8 \text{ m}$$

۴۵- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل‌های ۱ و ۲)



ابتدا مسافتی را که خودرو در زمان واکنش راننده طی می‌کند، حساب می‌کنیم:

$$L_R = v_o t_R \xrightarrow{(v_o = 72 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}})} L_R = 20 \times 0.5 = 10 \text{ m}$$

کل مسافت توقف (L_S) برابر مجموع مسافت‌هایی است که خودرو در زمان واکنش راننده و در مدت ترمز (L_b) طی می‌کند.

$$L_S = L_R + L_b \Rightarrow 50 = 10 + L_b \Rightarrow L_b = 40 \text{ m}$$

با توجه به مسافت ترمز، شتاب حرکت خودرو را در این مدت حساب می‌کنیم:

$$v^2 - v_o^2 = 2a\Delta x \Rightarrow 0^2 - 20^2 = 2a \times 40 \Rightarrow a = -5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

بزرگی نیروی خالص وارد بر راننده برابر است با: $|F_{\text{net}}| = m|a| = 80 \times 5 = 400 \text{ N}$

۴۶- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)



با انتخاب جهت مثبت رو به بالا، داریم:

اگر طول اولیه فنر را L_o بگیریم، طول فنر با اتصال به وزنه به $L = 55 \text{ cm}$ می‌رسد. وقتی آسانسور با تندی ثابت حرکت می‌کند، شتاب

صفر و نیروی فنر با نیروی وزن متوازن است؛ بنابراین داریم: رابطه (۱) $F_e = mg \Rightarrow k(55 - L_o) = 6 \times 10$

در حالتی که آسانسور با شتاب ثابت متوقف می‌شود، چون جهت شتاب رو به پایین است، طول فنر ۳ cm کاهش می‌یابد و به 52 cm

می‌رسد و داریم: $v = at + v_o \Rightarrow 0 = a \times 1/6 + 4 \Rightarrow a = -2/5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

رابطه (۲) $F_{\text{net}} = ma \Rightarrow k(L - L_o) - mg = ma \Rightarrow k(52 - L_o) - 6 \times 10 = 6 \times (-2/5) \Rightarrow k(52 - L_o) = 45$

$$\xrightarrow{(1) \text{ و } (2)} \begin{cases} k(55 - L_o) = 60 \\ k(52 - L_o) = 45 \end{cases} \Rightarrow L_o = 43 \text{ cm}$$

۴۷- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)



نیروی وارد بر گوی را به راحتی می توانیم حساب کنیم:

$$\vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} \Rightarrow \vec{F} = m \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = 0.1 \times \frac{(3\vec{i} - 3\vec{j}) - 0}{0.2} = 1.5\vec{i} - 1.5\vec{j}$$

$$|\vec{F}| = \sqrt{1.5^2 + (-1.5)^2} = 1.5\sqrt{2} \text{ N}$$

مطابق قانون سوم نیوتون، نیروی وارد بر توپ همین اندازه را دارد.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

۴۸- پاسخ: گزینه ۱



شتاب مرکز گرای ماهواره برابر شتاب گرانش در محل قرارگیری ماهواره است.

$$a = g = G \frac{M_e}{r^2} \Rightarrow \frac{a_A}{a_B} = \left(\frac{r_B}{r_A}\right)^2 \Rightarrow r = \left(\frac{r_B}{r_A}\right)^2 \Rightarrow r_B = 2r_A$$

مربع دوره گردش ماهواره به دور زمین با توان سوم شعاع دوران ماهواره نسبت مستقیم دارد:

$$T^2 \propto r^3$$

$$\left(\frac{T_A}{T_B}\right)^2 = \left(\frac{r_A}{r_B}\right)^3 = \left(\frac{r_A}{2r_A}\right)^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{T_A}{T_B} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۳ (فصل ۳)

۴۹- پاسخ: گزینه ۲

تندی انتشار نور در آب را با v و مسافتی را که در مدت 1 ns در آب طی می کند، با L نشان می دهیم:

$$\begin{cases} L = vt \\ \lambda = \frac{c}{f} \end{cases} \Rightarrow \frac{L}{\lambda} = \frac{vtf}{c} = \frac{(2/25 \times 10^5) \times (10^{-9}) \times (6 \times 10^{14})}{3 \times 10^8} = 4/5 \times 10^5$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۳)

۵۰- پاسخ: گزینه ۴



ابتدا بسامد زاویه ای وزنه را حساب می کنیم:

$$k = m\omega^2 \Rightarrow 100 = 2\omega^2 \Rightarrow \omega^2 = 50$$

نقطه تعادل در وسط نقاط بازگشتی قرار دارد:

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{15 + 25}{2} = 20 \text{ cm}$$

جابه جایی نوسانگر از نقطه تعادل را در لحظه ای که شتاب آن $-\frac{m}{s^2}$ است با Δx و مکان نوسانگر را با x نشان می دهیم:

$$a = -\omega^2 \Delta x \Rightarrow -2 = -50 \Delta x \Rightarrow \Delta x = 0.04 \text{ m} = 4 \text{ cm}$$

$$x = x_0 + \Delta x = 20 + 4 = 24 \text{ cm}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۳)

۵۱- پاسخ: گزینه ۳



$$\beta_A - \beta_B = 10 \log \frac{I_A}{I_B} \Rightarrow 10 \log \frac{I_A}{I_B} = 13/5 \Rightarrow \log \frac{I_A}{I_B} = 1/25 = 1 + \frac{0.7}{2} = \log 10 + \frac{1}{2} \log 5 = \log 10 + \log 5^{1/2}$$

$$= \log 10 + \log \sqrt{5} = \log 10\sqrt{5} \Rightarrow \frac{I_A}{I_B} = 10\sqrt{5}$$

۵۲- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۴)



زاویه تابش برابر زاویه‌ای است که جبهه موج با مرز جدایی دو محیط می‌سازد ($\theta_1 = 37^\circ$) و زاویه شکست برابر زاویه‌ای است که پرتو شکسته با خط عمود بر مرز جدایی دو محیط در نقطه شکست می‌سازد:

$$\theta_r = 90^\circ - 37^\circ = 53^\circ$$

طبق قانون شکست عمومی موج داریم:

$$\frac{v_r}{v_1} = \frac{\sin \theta_r}{\sin \theta_1}$$

$$\lambda = \frac{v}{f} \xrightarrow{(f_r=f_1)} \frac{\lambda_r}{\lambda_1} = \frac{v_r}{v_1} \Rightarrow \frac{\lambda_r}{\lambda_1} = \frac{\sin \theta_r}{\sin \theta_1} \Rightarrow \frac{\lambda_r}{\lambda_1} = \frac{\sin 53^\circ}{\sin 37^\circ} = \frac{0.8}{0.6} = \frac{4}{3} \Rightarrow \lambda_r = \frac{4}{3} \lambda_1$$

با توجه به فرض صورت سؤال، داریم:

$$\Delta \lambda = 5 \text{ cm} \Rightarrow \lambda_r - \lambda_1 = 5 \Rightarrow \frac{4}{3} \lambda_1 - \lambda_1 = 5$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} \lambda_1 = 5 \Rightarrow \lambda_1 = 15 \text{ cm}$$

۵۳- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۴)



تندی انتشار موج در تار برابر است با:

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{FL}{m}} = \sqrt{\frac{18 \times 1}{2 \times 10^{-3}}} = \sqrt{900} = 30 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

بسامدهای تشدید تار از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$f_n = \frac{nv}{2L} = \frac{n \times 30}{2 \times 1} = 15n$$

گوش انسان در صورتی یک صوت را می‌شنود که بسامد آن در محدوده (۲۰ kHz و ۲۰ Hz) باشد:

$$f_n > 20 \text{ Hz} \Rightarrow 15n > 20 \Rightarrow n > \frac{4}{3} \Rightarrow n_{\min} = 2 \Rightarrow f_{\min} = 15 \times 2 = 30 \text{ Hz}$$

۵۴- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۳ (فصل ۵)

بسامد اولین خط را با f_1 و بسامد دومین خط را با f_2 نشان می‌دهیم. مطابق رابطه ریذبرگ، داریم:

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right) \Rightarrow f = \frac{c}{\lambda} = Rc \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right) \xrightarrow{Rc = (1.09 \times 10^7 \text{ nm}^{-1}) \times (3 \times 10^8 \times 10^9 \frac{\text{nm}}{\text{s}}) = 3 \times 10^{15} \text{ Hz}} f = 3 \times 10^{15} \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f_1 = 3 \times 10^{15} \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{(n'+1)^2} \right) \\ f_2 = 3 \times 10^{15} \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{(n'+2)^2} \right) \end{cases}$$

$$f_2 - f_1 = 3 \times 10^{15} \left(\frac{1}{(n'+1)^2} - \frac{1}{(n'+2)^2} \right) \Rightarrow \frac{11}{3} \times 10^{13} = 3 \times 10^{15} \left(\frac{1}{(n'+1)^2} - \frac{1}{(n'+2)^2} \right) \Rightarrow \frac{1}{(n'+1)^2} - \frac{1}{(n'+2)^2} = \frac{11}{900}$$

رابطه بالا به ازای $n' = 4$ درست است:

$$\frac{1}{5^2} - \frac{1}{6^2} = \frac{36 - 25}{25 \times 36} = \frac{11}{900}$$

۵۵- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۳ (فصل ۵)



همه جمله‌ها درست بیان شده است.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۶)

۵۶- پاسخ: گزینه ۲



تعداد هسته‌های کربن ۱۴ باقی‌مانده را با N و تعداد هسته‌های اولیه آن را با N_0 نشان می‌دهیم.

$$N = \frac{N_0}{2^n} \Rightarrow \frac{6/25}{100} N_0 = \frac{N_0}{2^n} \Rightarrow \frac{1}{16} = \frac{1}{2^n} \Rightarrow 2^n = 16 \Rightarrow n = 4$$

$$\frac{t}{T_{1/2}} = 4 \Rightarrow \frac{t}{5730} = 4 \Rightarrow t = 22920 \text{ سال}$$

▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۳ (فصل ۶)

۵۷- پاسخ: گزینه ۳



برای ایجاد واکنش گداخت، باید هسته‌ها را علیرغم نیروی رانشی فوق‌العاده بین آن‌ها آن قدر به هم نزدیک کرد تا نیروی کوتاه‌برد هسته‌ای بتواند آن‌ها را کنار هم نگه دارد. به همین خاطر انجام این واکنش نیاز به صرف انرژی بسیار زیادی دارد که از لحاظ اقتصادی و فنی قابل توجه نیست.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۴)

۵۸- پاسخ: گزینه ۳



$$V_f = V_i(1 + \beta \Delta T) \quad \beta_{\text{جامد}} \approx 3\alpha$$

می‌بایست حجم ثانویه (نهایی) ظرف و مایع را مساوی قرار دهیم تا پیدا کنیم که مایع در چه دمایی از ظرف لبریز می‌شود.

$$9500(1 + 1/10 \times 10^{-3} \Delta\theta) = 200 \times 50(1 + 3 \times 1/5 \times 10^{-5} \Delta\theta) \Rightarrow (1/10 \times 10^{-3} \times 9500 - 10000 \times 4/5 \times 10^{-5}) \Delta\theta = 500$$

$$\Rightarrow 10^{-5} [110 \times 9500 - 10000 \times 4/5] \Delta\theta = 500 \Rightarrow [11 \times 95 - 45] \Delta\theta = 5 \times 10^4 \xrightarrow{1 \times 95 = 1045} \Delta\theta = \frac{5 \times 10^4}{1000} = 50^\circ\text{C}$$

$$\theta - 10 = 50 \Rightarrow \theta = 60^\circ\text{C}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۴)

۵۹- پاسخ: گزینه ۲



$$Q = \underbrace{200 \times 10 \times 2/1}_{\substack{\text{دمای یخ } 10^\circ\text{C} \\ \text{بالا برده شده}}} + \underbrace{200 \times 336}_{\substack{\text{یخ ذوب شده} \\ \text{بالا برده شده}}} + \underbrace{200 \times 4/2 \times 40}_{\substack{\text{دمای آب از } 40^\circ\text{C} \\ \text{بالا برده شده}}} + \underbrace{800 \times 4/2 \times (-10)}_{\substack{\text{دمای آب از } 50^\circ\text{C} \\ \text{به } 40^\circ\text{C} \text{ رسیده}}} \Rightarrow Q = 200 \times 2/1 + 200 \times 336 = 4200 \times (1 + 16)$$

$$= 17 \times 4200 \text{ J}$$

گرمایی که دستگاه گرم‌کننده تولید کرده علاوه بر این مقدار، ۸۶۰۰ ژول دیگر هم هست که از ظرف خارج شده است.

$$Q = P \cdot \Delta t \Rightarrow 0/4 \times 10^3 \times \Delta t = 17 \times 4200 + 8600 \Rightarrow \Delta t = \frac{17 \times 4200 + 8600}{400} = 17 \times 10/5 + 21/5 = 178/5 + 21/5 = 200 \text{ s}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۵)

۶۰- پاسخ: گزینه ۲



$$\frac{P_A V_A}{T_A} = \frac{P_B V_B}{T_B} \Rightarrow \frac{1/5 V_A}{450} = \frac{2 V_B}{600} \Rightarrow V_A = V_B$$

فرایند AB هم حجم است زیرا علاوه بر اینکه نمودار $P-T$ آن خطی است، V_B و V_A هم برابرند. یعنی نمودار $P-T$ یک خط مبدأ گذر است. توجه کنید که فرایند BC هم فشار است.

$$\text{هم حجم: } W = 0 \Rightarrow W_{ABC} = W_{BC} = -nR\Delta T$$

$$\Rightarrow W_{BC} = -5 \times \frac{25}{3} \times (900 - 600) = -12500 \text{ J}$$

گاز ۱۲۵۰۰ ژول کار انجام می‌دهد.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۵)

۶۱- پاسخ: گزینه ۳



$$\eta = \frac{|W|}{Q_H} = \frac{|W|}{|W| + |Q_L|} = \frac{3}{10} \Rightarrow 9|W| = 3|Q_L| \Rightarrow |Q_L| = \frac{3}{9}|W|$$

کار انجام شده در هر چرخه برابر است با:

$$|W| = P \cdot \Delta t \Rightarrow |W| = 750 \times \frac{60}{600} = 90 \text{ J}$$

$$|Q_L| = \frac{3}{9} \times 90 = 30 \text{ J}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۱)

۶۲- پاسخ: گزینه ۱



دقت دستگاه‌های اندازه‌گیری دیجیتال برابر کمترین ارزش مکانی است که دستگاه نشان می‌دهد؛ بنابراین داریم:

$$I_A = 3510/4 \text{ mA} \Rightarrow \text{دقت آمپرسنج A} = 0/1 \text{ mA} = 10^{-1} \times 10^{-3} \text{ A} = 10^{-4} \text{ A} = 10^{-4} \times 10^6 \mu\text{A} = 10^2 \mu\text{A}$$

$$I_B = 3/530 \text{ A} \Rightarrow \text{دقت آمپرسنج B} = 0/001 \text{ A} = 10^{-3} \text{ A} = 10^{-3} \times 10^6 \mu\text{A} = 10^3 \mu\text{A}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۳)

۶۳- پاسخ: گزینه ۴



از سطح زمین تا ارتفاع ۴۰ متری از سطح زمین قضیه کار-انرژی جنبشی را برای وزنه می‌نویسیم.

$$W_t = \Delta K$$

$$W_{mg} + W_{fD} + W_{\text{موتور}} = \frac{1}{2} m (v_f^2 - v_i^2)$$

$$\Rightarrow (-5 \times 10 \times 40) + (-9 \times 40) + (600 \times 5) = \frac{5}{2} v_f^2$$

$$\Rightarrow -2000 - 360 + 3000 = \frac{5}{2} v_f^2 \Rightarrow v_f^2 = \frac{2}{5} \times 640 = 4 \times 64$$

$$\Rightarrow v_f = 2 \times 8 = 16 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۲)

۶۴- پاسخ: گزینه ۲



در ارتفاع ۱۵ سانتی‌متر از کف ظرف فشار دو طرف برابر است.

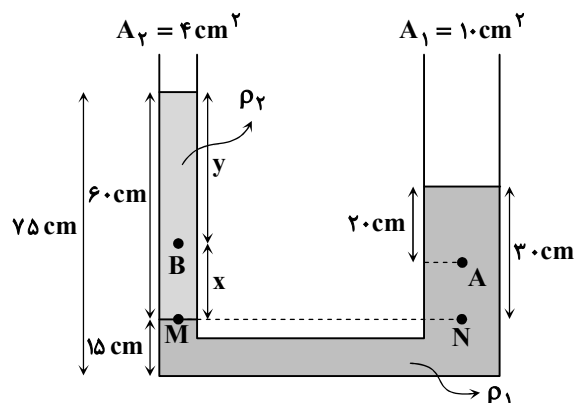
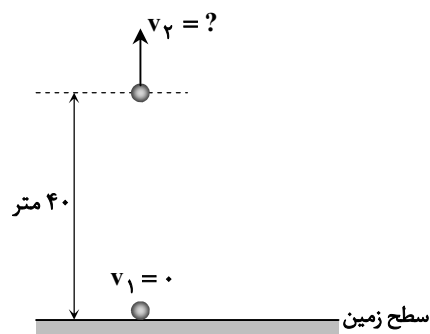
$$P_M = P_N \Rightarrow P_0 + \frac{60}{100} \rho_2 g = P_0 + \frac{30}{100} \rho_1 g$$

$$\Rightarrow 60 \rho_2 = 30 \rho_1 \Rightarrow \rho_2 = \frac{1}{2} \rho_1$$

فشار در نقطه A فشار حاصل از ۲۰ سانتی‌متر مایع با چگالی ρ_1 است و فشار در نقطه B فشار حاصل از y سانتی‌متر مایع با چگالی ρ_2 است:

$$P_0 + \rho_2 g y = P_0 + \rho_1 g \times 20 \Rightarrow \rho_2 y = \rho_1 \times 20$$

$$\frac{\rho_2 = \frac{1}{2} \rho_1}{\rho_2 = \frac{1}{2} \rho_1} \rightarrow y = 40 \text{ cm} \Rightarrow x = 60 - 40 = 20 \text{ cm}$$



▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۳)

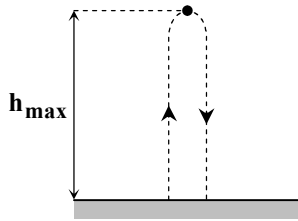
۶۵- پاسخ: گزینه ۳



در لحظه t ، انرژی جنبشی گلوله $\frac{1}{4}$ برابر انرژی مکانیکی آن و انرژی پتانسیل گلوله به مقدار 100 J کمتر از انرژی مکانیکی آن است؛ بنابراین:

$$\begin{cases} K = \frac{1}{4}E \\ U = E - 100 \end{cases} \Rightarrow K + U = \frac{1}{4}E + (E - 100) \Rightarrow K + U = \frac{5}{4}E - 100 \Rightarrow E = \frac{5}{4}E - 100 \Rightarrow \frac{1}{4}E = 100 \Rightarrow E = 400\text{ J}$$

در بالاترین نقطه مسیر حرکت گلوله، انرژی جنبشی گلوله برابر صفر و انرژی پتانسیل آن، بیشینه است؛ بنابراین:



$$E = K + U \Rightarrow 400 = 0 + mgh_{\max} \Rightarrow 400 = 2 \times 10 \times h_{\max} \Rightarrow h_{\max} = 20\text{ m}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۱)

۶۶- پاسخ: گزینه ۲



$$Q = C \cdot V \Rightarrow Q_2 - Q_1 = C(V_2 - V_1) \Rightarrow 90 = (30 - 20)C \Rightarrow C = 9\text{ nF} = 9 \times 10^{-9}\text{ F}$$

$$C = \frac{\kappa \epsilon_0 A}{d} = \frac{4 \times 9 \times 10^{-12} \times A}{5 \times 10^{-5}} = 9 \times 10^{-9} \Rightarrow A = \frac{5}{400}\text{ m}^2 = \frac{500}{4}\text{ cm}^2 = 125\text{ cm}^2$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۱)

۶۷- پاسخ: گزینه ۳



$$W_{\text{میدان}} = -\Delta U = -q \cdot \Delta V$$

$$\Rightarrow 5 \times 10^{-3} = |20 \times 10^{-6} \times (V_A - V_C)| \Rightarrow |V_A - V_C| = \frac{5000}{2} = 250\text{ V}$$

توجه می‌کنیم که BC بر خطوط میدان عمود است؛ پس $V_B = V_C$ و این ۲۵۰ ولت اختلاف پتانسیل میان A و B است. از سوی دیگر می‌دانیم که هرگاه در جهت خطوط میدان الکتریکی حرکت کنیم، پتانسیل الکتریکی کم می‌شود؛ پس $V_D > V_A > V_B$ است.

با توجه به اینکه میدان یکنواخت است ($|\Delta V| = E|\Delta x|$ و Δx جابه‌جایی در امتداد میدان است)، می‌توان نوشت:

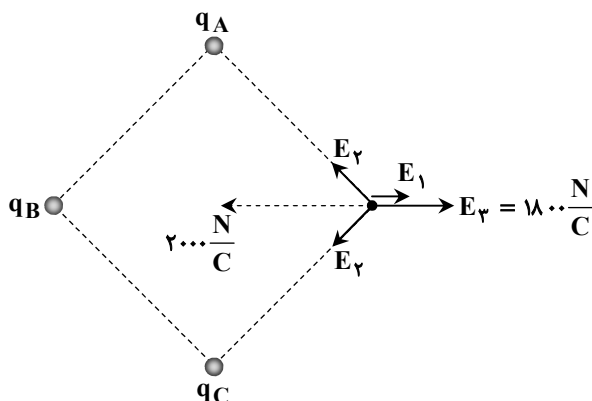
$$\begin{cases} DA = 3\text{ cm} \\ AB = 10\text{ cm} \end{cases} \Rightarrow V_D - V_A = 3(V_A - V_B) = 750\text{ V} \Rightarrow V_A - V_D = -750\text{ V}$$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۲ (فصل ۱)

۶۸- پاسخ: گزینه ۲



در نقطه D وضعیت میدان‌های الکتریکی به شکل زیر است:

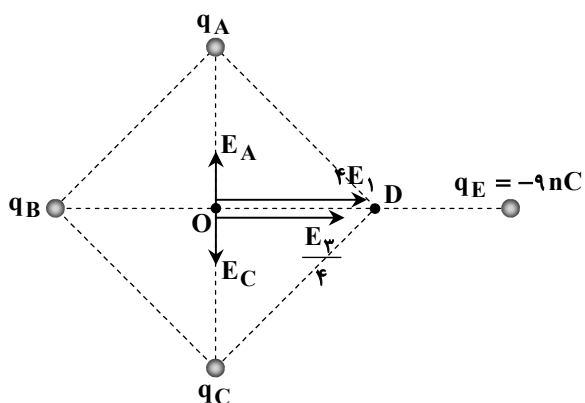


$$(-9\text{ nC}) : E_3 = \frac{9 \times 10^9 \times 9 \times 10^{-9}}{(15\sqrt{2} \times 10^{-2})^2} = \frac{9 \times 9 \times 10^4}{15 \times 15 \times 2}$$

$$= \frac{0.6 \times 0.6}{2} \times 10^4 = 1800 \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

$$(-10\sqrt{2}\text{ nC}) : E_2 = \frac{9 \times 10^9 \times 10\sqrt{2} \times 10^{-9}}{30 \times 30 \times 10^{-4}}$$

$$= \frac{9\sqrt{2} \times 10^2}{9} = 1000\sqrt{2} \frac{\text{N}}{\text{C}}$$



برای $2000 \frac{N}{C}$ می‌شود $E_1 \sqrt{2}$ یعنی $2000 \frac{N}{C}$ برای آنکه میدان خالص در D صفر باشد، باید میدان q_B در D برابر $2000 \frac{N}{C}$ به طرف راست باشد. در نقطه O وضعیت به شکل مقابل است: برایند میدان حاصل از بارهای q_C و q_A در O صفر است. ضمناً:

$$E_1 = 4E_2 \Rightarrow BO = \frac{1}{2}BD$$

$$E_3 = 2E_4 \Rightarrow EO = 2ED$$

$$E_O = 4 \times 2000 + \frac{1800}{4} = 1250 \frac{N}{C}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۲)

۶۹- پاسخ: گزینه ۴



ولتاژ دو سر رسانای A با مجموع ولتاژ دو سر رساناهای B و C برابر است: $V_A = V_B + V_C$ با توجه به آنکه رساناهای B و C کاملاً مشابه‌اند و به صورت متوالی به هم بسته شده‌اند، داریم:

$$R_B = R_C, I_B = I_C \xrightarrow{V=RI} V_B = V_C$$

$$\text{در نتیجه: } V_A = V_C + V_C = 2V_C$$

از نسبت توان‌های مصرفی رساناهای A و C داریم:

$$P_C = 2P_A \Rightarrow \frac{V_C^2}{R_C} = \frac{2 \times (2V_C)^2}{R_A} \Rightarrow R_A = 12R_C$$

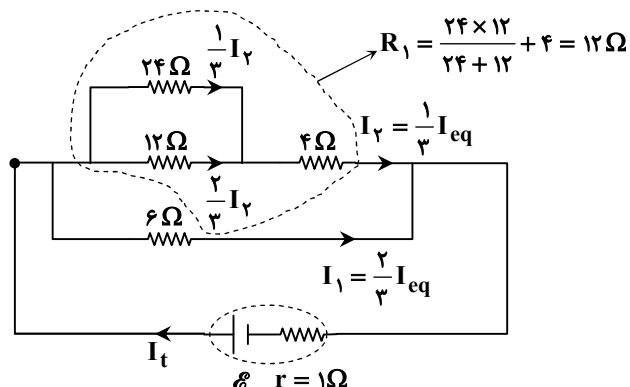
$$R = \frac{\rho L}{A} \Rightarrow \frac{R_A}{R_C} = \frac{\rho_A}{\rho_C} \cdot \frac{L_A}{L_C} \cdot \frac{A_C}{A_A} \Rightarrow 12 = \frac{\rho_A}{\rho_C} \times 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{\rho_A}{\rho_C} = 16$$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۲ (فصل ۲)

۷۰- پاسخ: گزینه ۳



مقاومت آمپرسنج آرمانی ناچیز است یعنی نقش آن در مدار مثل سیم می‌شود، پس مقاومت‌های ۱۲ و ۲۴ اهم باهم موازی هستند.



جریان کل I_t بین 6Ω و R_1 به نسبت عکس مقاومت‌ها تقسیم می‌شود.

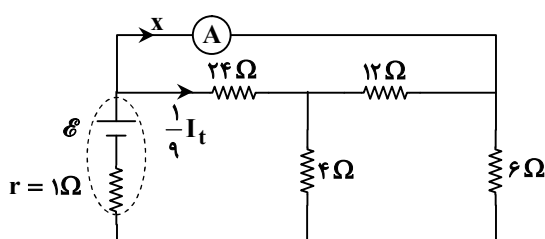
یعنی $\frac{1}{3} I_{eq}$ از بخش بالایی عبور می‌کند. به همین ترتیب جریان

$\frac{1}{3} I_{eq}$ هم به نسبت ۲ به ۱ بین 12Ω و 24Ω تقسیم می‌شود.

$$\text{رابطه (۱): } R_{eq} = \frac{12 \times 6}{12 + 6} = 4 \Omega \Rightarrow I_{eq} = \frac{E}{4 + 1} = \frac{E}{5}$$

$$I_{eq} = x + \frac{1}{9} I_{eq} \Rightarrow x = \frac{8}{9} I_{eq} = 1/6$$

$$\Rightarrow I_{eq} = 1/8 A \xrightarrow{\text{رابطه (۱)}} E = 9 V$$



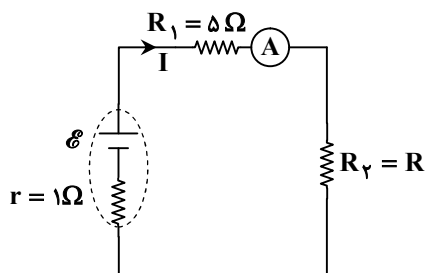
▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۲ (فصل ۲)

۷۱- پاسخ: گزینه ۴



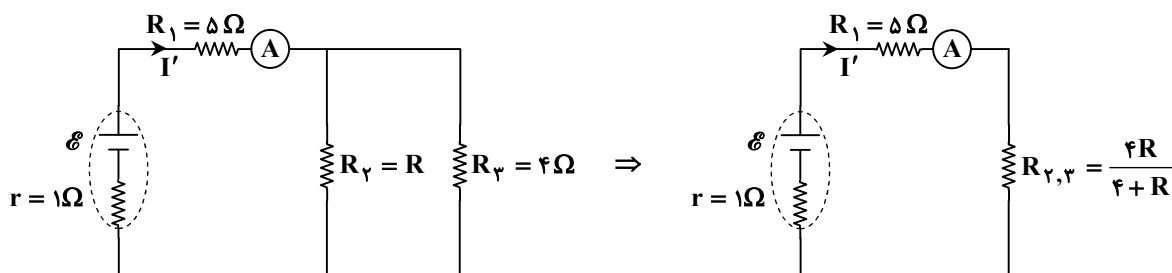
مدار داده شده را در دو حالت بررسی می کنیم.

حالت اول: کلید k باز است. در این حالت مدار به شکل مقابل، ساده می شود:



$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_{eq} + r} = \frac{\mathcal{E}}{(R_1 + R_Y) + r} = \frac{\mathcal{E}}{(5 + R) + 1} = \frac{\mathcal{E}}{6 + R}$$

حالت دوم: کلید k بسته است. در این حالت مدار را به شکل زیر، ساده می کنیم:



$$I' = \frac{\mathcal{E}}{R'_{eq} + r} = \frac{\mathcal{E}}{(R_1 + R_{Y,Z}) + r} = \frac{\mathcal{E}}{5 + R_{Y,Z} + 1} = \frac{\mathcal{E}}{6 + R_{Y,Z}}$$

با توجه به فرض سؤال که پس از بستن کلید k، جریان عبوری از آمپرسنج ۲ برابر می شود، داریم:

$$I' = 2I \Rightarrow \frac{\mathcal{E}}{6 + R_{Y,Z}} = 2 \times \frac{\mathcal{E}}{6 + R} \Rightarrow 6 + R = 12 + 2R_{Y,Z} \Rightarrow R = 6 + 2R_{Y,Z} \Rightarrow R = 6 + 2 \times \frac{4R}{4 + R}$$

$$\Rightarrow R = 6 + \frac{8R}{4 + R} \Rightarrow 4R + R^2 = 24 + 6R + 8R \Rightarrow R^2 - 10R - 24 = 0 \Rightarrow \begin{cases} R = 12\Omega \checkmark \\ R = -2\Omega \times \end{cases}$$

▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۲ (فصل ۳)

۷۲- پاسخ: گزینه ۱



فقط جمله «ب» درست است.

مواد فرومغناطیس نرم و سخت به طور طبیعی دارای حوزه های مغناطیسی هستند.

مواد فرومغناطیس نرم برای هسته سیم پیچ در آهنربای الکتریکی مناسب هستند.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۳)

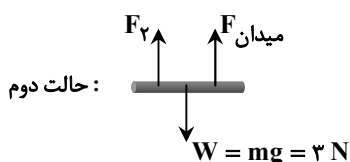
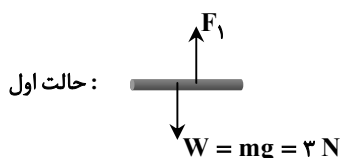
۷۳- پاسخ: گزینه ۳



نیروی فنر طبق قانون هوک ($F = kx$) متناسب با تغییر طول آن است. در حالت اول تغییر طول فنرها ۵ سانتی متر و در حالت دوم ۳

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{3}{5}$$

در هر دو حالت نیروی خالص وارد بر میله صفر است.



$$F_1 - 3 = 0 \Rightarrow F_1 = 3 \text{ N}$$

$$F_2 = \frac{3}{5} F_1 = \frac{9}{5} \text{ N}$$

$$F_2 + F_{\text{میدان}} - 3 = 0 \Rightarrow F_{\text{میدان}} = \frac{6}{5} \text{ N}$$

$$F_{\text{میدان}} = BIL \sin \theta \Rightarrow \frac{6}{5} = B \times 5 \times 0.8 \Rightarrow B = \frac{6}{20} \text{ T} = 300 \text{ G}$$

ضمناً طبق قانون دست راست جهت جریان در میله از شرق به غرب (←) است.

۷۴- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۴)



انرژی ذخیره شده در سیم لوله از رابطه $U = \frac{1}{2} LI^2$ حساب می شود؛ پس ابتدا نسبت $\frac{L_1}{L_2}$ را حساب می کنیم.

$$N = \frac{\text{طول سیم}}{\text{محیط هر دور}} \Rightarrow \frac{N_1}{N_2} = \frac{\frac{100}{\pi \times 1}}{\frac{480}{\pi \times 3}} = \frac{100}{160} = \frac{5}{8}$$

$$A = \pi \times r^2 \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

$$L = \frac{\mu_0 N^2 A}{\ell} \Rightarrow \frac{L_1}{L_2} = \left(\frac{5}{8}\right)^2 \times \frac{1}{9} \times \frac{120}{30} = \frac{25 \times 4}{9 \times 64} = \frac{25}{9 \times 16}$$

$$U_1 = U_2 \Rightarrow L_1 I_1^2 = L_2 I_2^2 \Rightarrow \frac{L_1}{L_2} = \left(\frac{I_2}{I_1}\right)^2 \Rightarrow \frac{25}{9 \times 16} = \left(\frac{I_2}{I_1}\right)^2 \Rightarrow \frac{I_2}{I_1} = \frac{5}{3 \times 4} \Rightarrow I_2 = \frac{5}{3 \times 4} \times 1/2 = 0.5 \text{ A}$$

▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۲ (فصل ۴)

۷۵- پاسخ: گزینه ۲



یکای تغییرات شار مغناطیسی در SI، وبر (Wb) و یکای زمان در SI برابر ثانیه (s) است. با توجه به رابطه $\mathcal{E}_{av} = -N \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$ ، یکای وبر بر ثانیه $\left(\frac{\text{Wb}}{\text{s}}\right)$ معادل یکای کمیت نیروی محرکه یعنی ولت (V) است.

شیمی

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۱)

۷۶- پاسخ: گزینه ۲



در یون $^{24}_{12}\text{Mg}^{2+}$ و یون $^{18}_8\text{O}^{2-}$ به ترتیب، ۳۴ و ۲۸ ذره زیراتمی وجود دارد که تفاوت آن ها برابر ۶ است و در رادیوایزوتوپ طبیعی هیدروژن (^1_1H) شمار نوترون ها برابر ۲ است. پس نسبت خواسته شده برابر است با: $\frac{6}{2} = 3$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۱ (فصل ۱)

۷۷- پاسخ: گزینه ۳



در دوره چهارم جدول تناوبی، بیرونی ترین زیرلایه الکترونی در دومین عنصر دسته s (فلز Ca، ۲۰) و ۸ عنصر از عناصر دسته d (به جز $^{24}_{24}\text{Cr}$ و $^{29}_{29}\text{Cu}$) به $4s^2$ پایان می یابد.
گزینه ۳: درست؛ در اتم عنصر X به یقین ۱۲ الکترون با عدد کوانتومی $l = 1$ ($2p^6, 3p^6$) وجود دارد.



گزینه ۱: نادرست؛ اگر عنصر X به دسته s تعلق داشته باشد، آنگاه در اتم آن تمام زیرلایه های اشغال شده از الکترون، پر شده هستند ولی اگر به دسته d تعلق داشته باشد، لزوماً چنین نیست و زیرلایه $3d$ ممکن است پر شده نباشد.
گزینه ۲: نادرست؛ اگر عنصر X متعلق به دسته s باشد، اتم های عنصر X با از دست دادن ۲ الکترون به کاتیونی با آرایش الکترونی مشابه با آرگون دست می یابند.
گزینه ۴: نادرست؛ عنصر X به یقین فلز است ولی نماد شیمیایی آن ممکن است تک حرفی (V، ۲۳) باشد.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۱)

۷۸- پاسخ: گزینه ۲



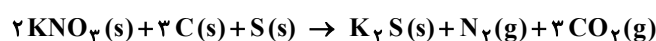
$$\frac{2}{2} g N_x O_y \times \frac{1 \text{ mol } N_x O_y}{(14x + 16y) g N_x O_y} \times \frac{x \text{ mol } N}{1 \text{ mol } N_x O_y} = 0.1 \text{ mol } N \Rightarrow x = 2y \Rightarrow N_2 O$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۲)

۷۹- پاسخ: گزینه ۱



معادله موازنه شده به صورت زیر است، که در آن مجموع ضرایب ترکیب‌های یونی (K_2S و KNO_3) برابر ۳ و مجموع ضرایب مواد مولکولی (S ، N_2 و CO_2) برابر ۵ است، پس: $\frac{3}{5} = 0.6$



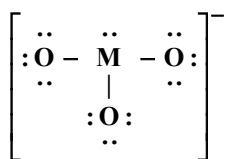
- $C(s)$ یک جامد کووالانسی است و ماده مولکولی به شمار نمی آید.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۲)

۸۰- پاسخ: گزینه ۴



در ساختار لوویس هر اتم اکسیژن ۳ جفت الکترون ناپیوندی داشته و با یک پیوند یگانه به اتم M متصل است و اتم M نیز دارای یک جفت الکترون ناپیوندی است، پس اتم M دارای ۷ الکترون ظرفیتی بوده و به گروه ۱۷ جدول تعلق دارد.



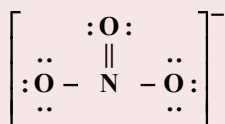
$$M \text{ دارای } 7 \text{ الکترون ظرفیتی است. } M = 1 \Rightarrow \frac{M + 2 \times 3 - 1}{2} = 3 \Rightarrow \frac{M + 5}{2} = 3 \Rightarrow M = 1$$

بار + مجموع ظرفیت‌های کووالانسی = تعداد پیوندهای اشتراکی



گزینه ۱: اتم عنصر M دارای ۷ الکترون ظرفیتی است و در ترکیب‌های یونی به صورت M^{-1} یافت می‌شود.

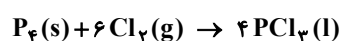
گزینه ۲: ساختار لوویس MO_3^- با ساختار لوویس یون نیترات متفاوت است.



گزینه ۳: در ساختار یون MO_3^- ، ۳ جفت الکترون پیوندی و ۱۰ جفت الکترون ناپیوندی وجود دارد.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۲)

۸۱- پاسخ: گزینه ۲



$$? LCl_2 : 5/5 g PCl_3 \times \frac{1 \text{ mol } PCl_3}{137.5 g PCl_3} \times \frac{6 \text{ mol } Cl_2}{4 \text{ mol } PCl_3} \times \frac{22/4 L Cl_2}{1 \text{ mol } Cl_2} = 1/344 L Cl_2$$

۸۲- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۳)



با افزودن ۳۵ گرم جامد به ۴۰ گرم محلول، مخلوطی با جرم ۷۵ گرم به دست می آید؛ که پس از هم زدن، ۲/۸ گرم نمک ته نشین شده و محلولی سیر شده به جرم ۷۲/۲ گرم حاصل می شود که با توجه به انحلال پذیری می توان جرم آب این محلول را محاسبه کرد:

$$72/2 \text{ g} \times \frac{100 \text{ g H}_2\text{O}}{190 \text{ g محلول}} = 38 \text{ g H}_2\text{O}$$

پس در محلول اولیه ۲ گرم سدیم نیترات در ۳۸ گرم آب حل شده بود که درصد جرمی آن برابر ۵ درصد می شود:

$$\text{درصد جرمی} = \frac{2}{40} \times 100 = 5$$

۸۳- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۱ (فصل ۳)

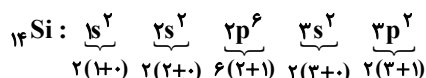


ماده A مولکول قطبی و نقطه جوش کمتر از دمای اتاق دارد. که هر چهار گاز H_2S ، O_3 ، CO و HCl چنین هستند. ماده B مولکول ۳ اتمی و ناقطبی دارد. (کربن دی اکسید) ولی گازهای O_3 و SO_2 قطبی هستند. ماده C مولکول های ۲ اتمی و قطبی (ناجور هسته) دارد و انحلال پذیری کمتری از کربن دی اکسید در آب دارد. (نیتروژن مونواکسید)

۸۴- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۲ (فصل ۱)

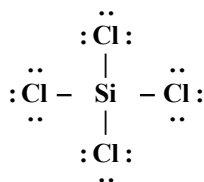


عنصر A، سیلیسیم است که مجموع $n + l$ تمام الکترون های آن برابر ۳۸ است.



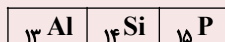
مورد «سوم»: درست؛ دو عنصر Si و Sn هم گروه هستند.

مورد «چهارم»: درست؛ در مولکول سیلیسیم تتراکلرید (SiCl_4) تمام اتم ها به آرایش پایدار هشت تایی رسیده اند.



مورد «اول»: نادرست؛ اتم سیلیسیم شبه فلز است و توانایی گرفتن الکترون را ندارد. در ضمن برای رسیدن به آرایش پایدار گاز نجیب به چهار الکترون نیاز دارد.

مورد «دوم»: نادرست؛ نماد شیمیایی عنصر بعد از آن، که فسفر (P) است به صورت تک حرفی است.

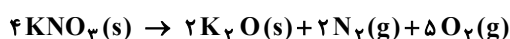


۸۵- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۱)



معادله موازنه شده واکنش چنین است:



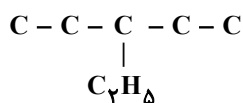
$$\frac{60/6 \text{ g} \times \frac{80}{100} \times \frac{R}{100}}{4 \times 101 \text{ g KNO}_3} = \frac{\text{گاز نیتروژن و اکسیژن } 12/96 \text{ g}}{(\text{نیتروژن } 2 \times 28 \text{ g}) + (5 \times 32 \text{ g اکسیژن})} \Rightarrow R = 50$$

۸۶- پاسخ: گزینه ۱

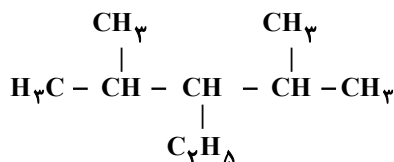
▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۲ (فصل ۱)



در زنجیر خطی پنتان تنها به شرطی شاخه فرعی اتیل وجود دارد که اتیل به کربن شماره ۳ به صورت زیر وصل باشد:



دو شاخه فرعی متیل با عددهای متفاوت نیز تنها می توانند به کربن های شماره ۲ و ۴ متصل شوند. پس ساختار آلکان مورد نظر به صورت زیر است:



گزینه ۱: درست؛ نام آلکان به صورت ۳-اتیل، ۲ و ۴-دی متیل پنتان است که مجموع سه عدد ذکر شده برابر ۹ است. عدد اتمی عنصر فلوئور که اکسندترین عنصر است نیز برابر ۹ است.

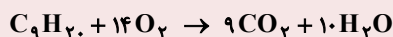


شمار پیوندهای اشتراکی در آلکان ها را می توان از رابطه « $3n + 1$ » به دست آورد که در آن n همان تعداد اتم های کربن موجود در ساختار آلکان ها است.



گزینه ۲: نادرست؛ مجموع شمار پیوندهای اشتراکی در آن برابر ۲۸ است.

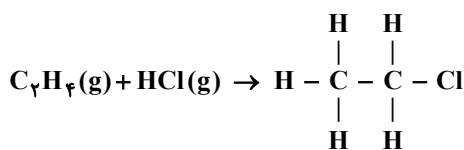
گزینه ۳: نادرست



گزینه ۴: نادرست؛ در ساختار آن سه اتم کربن از زنجیر اصلی که دارای شاخه فرعی هستند تنها به یک اتم هیدروژن متصل هستند.

۸۷- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۲ (فصل ۲)



چهار پیوند C-H در دو سمت معادله یکسان است، پس آن ها را در نظر نمی گیریم.

$$\Delta H = [\Delta H(\text{C}=\text{C}) + \Delta H(\text{H}-\text{Cl})] - [\Delta H(\text{C}-\text{H}) + \Delta H(\text{C}-\text{C}) + \Delta H(\text{C}-\text{Cl})]$$

$$\Delta H = (612 + 431) - (412 + 348 + 326) = -43$$

براساس قانون هس گرمای لازم برای تبدیل گرافیت به الماس برابر است با:

$$\text{C}(\text{s, گرافیت}) \rightarrow \text{C}(\text{s, الماس}) \quad \Delta H = \Delta H(\text{سوختن الماس}) - \Delta H(\text{سوختن گرافیت}) = -393 / 5 - (-395 / 4) = +1 / 9$$

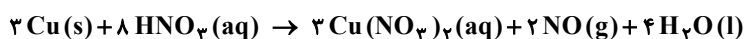
$$43 \text{ kJ} \times \frac{1 \text{ mol گرافیت}}{1 / 9 \text{ kJ}} \times \frac{12 \text{ g گرافیت}}{1 \text{ mol گرافیت}} = 271 / 5$$

۸۸- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۲ (فصل ۲)



معادله موازنه شده واکنش چنین است:



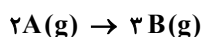
با توجه به اینکه ظرف سرباز است، پس گاز NO از ظرف خارج شده و گزارش غلظت مولی برای آن معنایی ندارد، پس نمودار رسم شده مربوط به مس (II) نیترات است.

$$\bar{R}_{(\text{Cu}(\text{NO}_3)_2)} = \frac{\Delta[\text{Cu}(\text{NO}_3)_2]}{\Delta t} = \frac{0.5 \text{ mol}}{L \times 8 \text{ s}} \times \frac{6 \text{ s}}{1 \text{ min}}$$

$$\bar{R}_{(\text{واکنش})} = \frac{\bar{R}_{(\text{Cu}(\text{NO}_3)_2)}}{3} = \frac{0.5 \times 60}{8 \times 3} = 0.125 \text{ mol.L}^{-1} \cdot \text{min}^{-1}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۲)

۸۹- پاسخ: گزینه ۳



معادله واکنش چنین است:



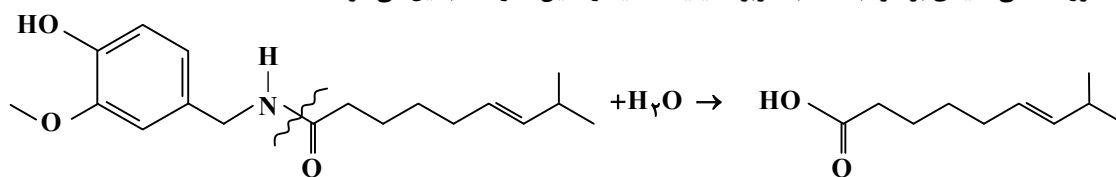
گزینه ۱: نادرست؛ مقایسه غلظت مولی گازهای A و B در زمان‌های متفاوت بستگی به غلظت اولیه A و مقدار مصرف A دارد و ممکن است غلظت A از غلظت B کمتر، بیشتر و یا حتی در لحظه‌ای خاص برابر شود.
گزینه ۲: نادرست؛ اگر واکنش کامل باشد به ازای مصرف ۲ مول A، ۳ مول B تولید می‌شود.
گزینه ۴: نادرست؛ با فرض بسته بودن سامانه، لزومی ندارد که واکنش به تعادل برسد، مگر اینکه واکنش تبدیل B به A امکان‌پذیر و خودبه‌خودی باشد.

▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۲ (فصل ۳)

۹۰- پاسخ: گزینه ۳



گزینه ۳: درست؛ گروه عاملی آمیدی بر اثر آبکافت به کربوکسیلیک اسید و آمین سازنده تبدیل می‌شود.



فرمول مولکولی کربوکسیلیک اسید تولیدشده $\text{C}_{11}\text{H}_{18}\text{O}_2$ است.



گزینه ۱: نادرست؛ در ساختار این ماده گروه عاملی آمیدی یافت می‌شود.

گزینه ۲: نادرست؛ فرمول مولکولی این ماده $\text{C}_{18}\text{H}_{27}\text{NO}_3$ است.

$$\text{شمار جفت الکترون‌های پیوندی} = \frac{\text{مجموع ظرفیت‌های کووالانسی}}{2} = \frac{(18 \times 4) + (27 \times 1) + (1 \times 3) + (3 \times 2)}{2} = 54$$

هر اتم اکسیژن و هر اتم نیتروژن به ترتیب دو و یک جفت الکترون ناپیوندی دارند که در مجموع برابر ۷ می‌شود.

$$\frac{54}{7} \approx 7.7$$

پس:



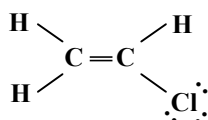
گزینه ۴: نادرست؛ در ساختار این ماده چهار اتم کربن وجود دارد که به هیچ اتم هیدروژنی متصل نیستند. (سه اتم کربن در حلقه و C در آمید)

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۳)

۹۱- پاسخ: گزینه ۲



مورد «اول»: درست



مورد «چهارم»: درست

نباید سراغ اینا بری

مورد «دوم»: نادرست؛ سلولز نوعی پلیمر طبیعی است ولی جرم مولی آن از مجموع جرم مولی مونومرهای سازنده آن (گلوکز) کمتر است؛ زیرا مولکول‌های گلوکز با از دست دادن H_2O به یکدیگر متصل شده‌اند.

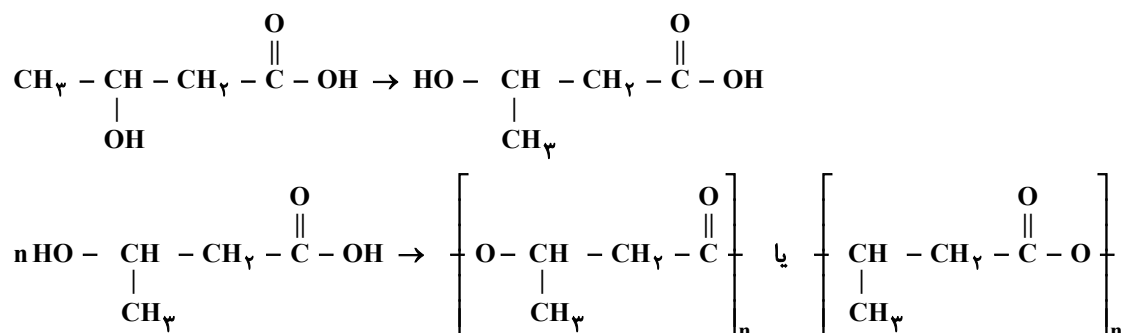
مورد «سوم»: نادرست؛ از آبکافت اتیل فرمات، اتانول و فرمیک اسید به دست می‌آید که اتانول ساده‌ترین الکل نیست. ساده‌ترین الکل، متانول است.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۳)

۹۲- پاسخ: گزینه ۱

جوابش اینه

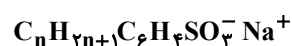
مونومر دارای دو گروه عاملی اسیدی و الکلی است؛ بنابراین از پلیمر شدن آن یک پلی‌استر به دست می‌آید.



▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۱)

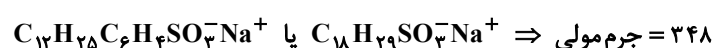
۹۳- پاسخ: گزینه ۳

جوابش اینه



$$\text{تعداد پیوندهای اشتراکی} = \frac{\text{بار} + \text{مجموع ظرفیت کووالانسی}}{2} \Rightarrow \frac{4 \times (n+6)C + 1 \times (2n+5)H + 2 \times (2)O + 2 \times (1)S + (-1)}{2} = 54$$

$$\Rightarrow 4n + 24 + 2n + 5 + 6 + 2 - 1 = 108 \Rightarrow n = 12$$



فرمول شیمیایی صابون جامد با زنجیر هیدروکربنی سیر شده $C_n H_{2n+1} COONa$ است. پس:



در نتیجه اختلاف شمار اتم‌های H در این دو پاک‌کننده برابر است با:

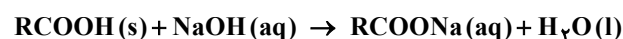
$$35 - 29 = 6$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)

۹۴- پاسخ: گزینه ۲

جوابش اینه

الف) درست



پ) درست؛ واکنش گرماده است.

نباید سراغ اینا بری

ب) نادرست؛ عدد اکسایش برخی از اتم‌های H از +۱ در واکنش‌دهنده‌ها به صفر در مولکول H_2 کاهش می‌یابد و اکسند است.

ت) نادرست؛ گاز هیدروژن از طریق ایجاد فشار باعث جدا شدن چربی از سطح لوله می‌شود.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)

۹۵- پاسخ: گزینه ۳



گزینه ۱: نادرست؛ در مقایسه اسیدهای آلی یک عاملی با زنجیر هیدروکربنی سیر شده و فرمول کلی $C_nH_{2n}O_2$ با افزایش شمار اتم‌های کربن، قدرت اسیدی کاهش می‌یابد.

گزینه ۲: نادرست؛ فقط محلول حاصل از CaO خاصیت بازی دارد.

گزینه ۴: نادرست؛ HNO_2 اسید ضعیف است، پس $[HNO_2] > [H^+] = [NO_2^-] > [OH^-]$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)

۹۶- پاسخ: گزینه ۱



$$pH = 4/4 \Rightarrow [H^+] = 10^{-pH} = 10^{-4/4} = 4 \times 10^{-5}$$

$$K_a = \frac{[H^+]^2}{M - [H^+]} \approx \frac{[H^+]^2}{M} \Rightarrow 4 \times 10^{-8} = \frac{(4 \times 10^{-5})^2}{M} \Rightarrow M = 0.04 \frac{\text{mol}}{\text{L}}$$

$$2L \times \frac{0.04 \text{ mol}}{1L} \times \frac{xg}{1 \text{ mol}} = 7.04 \text{ g} \Rightarrow x = 88 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

فرمول کلی کربوکسیلیک اسیدهای یک عاملی با زنجیر هیدروکربنی سیر شده به صورت $C_nH_{2n}O_2$ است.

$$C_nH_{2n}O_2 = 14n + 2 \times 2 = 88 \Rightarrow n = 4 \Rightarrow C_4H_8O_2$$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۲)

۹۷- پاسخ: گزینه ۲



معادله کلی سلول چنین است:

جرم دو تیغه را در ابتدا m در نظر می‌گیریم که از جرم تیغه آندی کاسته و بر جرم تیغه کاتدی افزوده می‌شود.

$$Mg \text{ جرم تیغه} = m - 72 \Rightarrow 3/612 \times 10^{21} e^- \times \frac{1 \text{ mole}^-}{6.02 \times 10^{23} e^-} \times \frac{1 \text{ mol Mg}}{2 \text{ mole}^-} \times \frac{24 \text{ g Mg}}{1 \text{ mol Mg}} \times \frac{10^{-3} \text{ mg}}{1 \text{ g}} = 72$$

$$Ag \text{ جرم تیغه} = m + 648 \Rightarrow 3/612 \times 10^{21} e^- \times \frac{1 \text{ mole}^-}{6.02 \times 10^{23} e^-} \times \frac{2 \text{ mol Ag}}{2 \text{ mole}^-} \times \frac{108 \text{ g Ag}}{1 \text{ mol Ag}} \times \frac{10^{-3} \text{ mg}}{1 \text{ g}} = 648$$

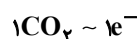
$$\text{اختلاف جرم دو تیغه} = (m + 648) - (m - 72) = 648 + 72 = 720$$

$$emf = E^\circ_{\text{کاتد}} - E^\circ_{\text{آند}}$$

$$\left. \begin{aligned} emf (Mg - Ag) &= 0.8 - (-2/37) = 3/17 \\ emf (Zn - SHE) &= 0 - (-0.76) = 0.76 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{3/17}{0.76} \approx 4/1$$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۲)

۹۸- پاسخ: گزینه ۳



گزینه ۳: درست؛ هر اتم کربن ۱ واحد تغییر عدد اکسایش دارد، پس:



گزینه ۱: نادرست؛ مجموع ضرایب استوکیومتری واکنش دهنده‌ها برابر ۱۰ است.

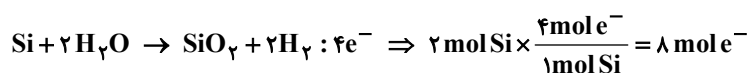
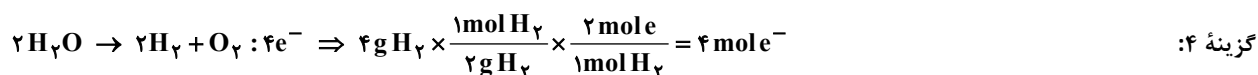
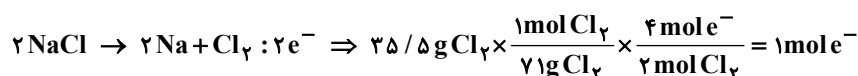
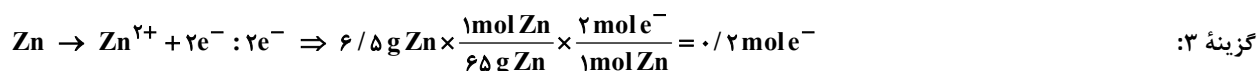
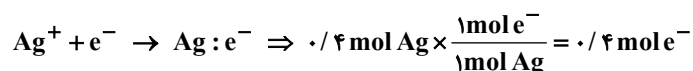
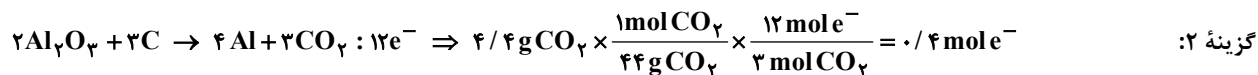
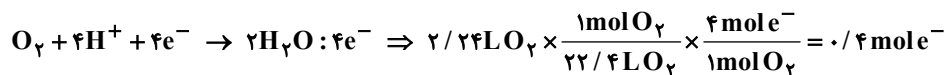
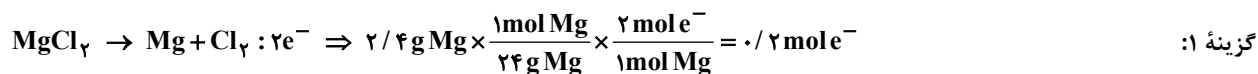
گزینه ۲: نادرست؛ عدد اکسایش اتم‌های H ، S و O ثابت و بدون تغییر است.

گزینه ۴: نادرست؛ در این واکنش، عدد اکسایش هر اتم منگنز، ۵ واحد تغییر کرده، ولی در فرایند تبدیل پارازایلن به ترفتالیک اسید هریک

مول MnO_4^- به یک مول MnO_2 تبدیل می‌شود و تغییر عدد اکسایش هر اتم Mn برابر ۳ است.

▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۲)

۹۹- پاسخ: گزینه ۲



▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۳)

۱۰۰- پاسخ: گزینه ۲



گزینه ۳: درست؛ فقط CO و HF مواد مولکولی هستند.



گزینه ۱: درست؛ در آمونیاک قدرت نافلزی اتم مرکزی N از اتمهای جانبی H بیشتر است و بار جزئی منفی دارد ولی در CHCl_3 و OF_2 اتمهای مرکزی اکسیژن و کربن بار جزئی مثبت دارند.
گزینه ۲: نادرست؛ یخ جامد مولکولی است.
گزینه ۴: درست؛ دی متیل اتر برخلاف پروپان قطبی است و نقطه جوش بالاتری دارد.

▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۳)

۱۰۱- پاسخ: گزینه ۴

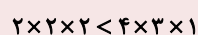
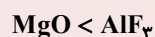


عنصرهای A, B, C, D, E و F به ترتیب Na, Mg, Al, P, S و Cl هستند.

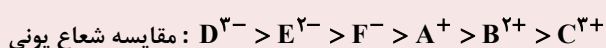
گزینه ۴: درست؛ اگر آنتالپی فروپاشی لیتیم فلوئورید برابر $105.0 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ باشد، مقایسه آنتالپی فروپاشی فلوئورید در دو ترکیب B و C به صورت زیر است:



گزینه ۱: نادرست؛ آنتالپی فروپاشی شبکه متناسب با حاصل ضرب بار یونها در شمار یونهای سازنده ترکیب است.

گزینه ۲: نادرست؛ بیشترین مقدار بار مربوط به یونهای Al^{3+} و P^{3-} است. اما شعاع Al^{3+} کمتر و در نتیجه چگالی بار بیشتری دارد.

گزینه ۳: نادرست



۱۰۲- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۳)



گزینه ۳: درست؛ عدد اکسایش یک ویژگی شیمیایی است و با مدل دریای الکترونی توجیه نمی‌شود.



گزینه ۱: نادرست؛ آلیاژ نیتینول که از دو فلز Ti و Ni ساخته شده است به آلیاژ هوشمند معروف است.
گزینه ۲: نادرست؛ طول موج نور سبز از نور آبی بیشتر است.

عدد اکسایش	V ²⁺	V ³⁺	V ⁴⁺	V ⁵⁺
رنگ محلول	بنفش	سبز	آبی	زرد

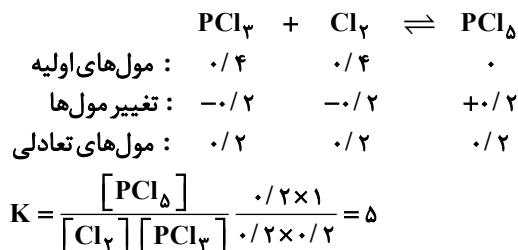
گزینه ۴: نادرست؛ مقاومت در برابر سایش فولاد و تیتانیم تقریباً برابر است.

۱۰۳- پاسخ: گزینه ۲

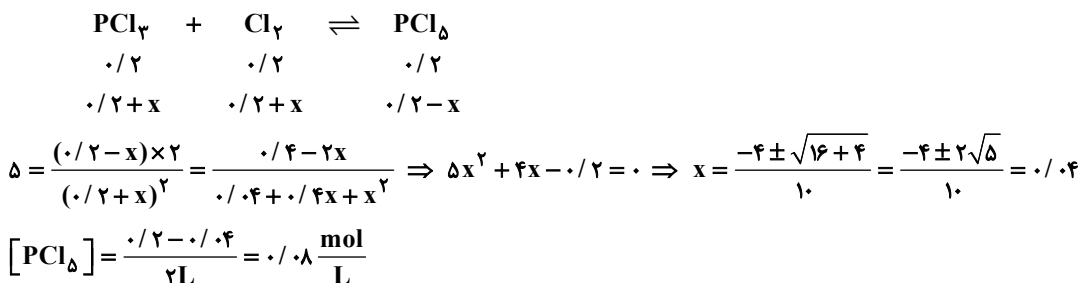
▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۴)



ابتدا ثابت تعادل را به دست می‌آوریم:



با افزایش حجم، تعادل در جهت برگشت جابه‌جا می‌شود ولی مقدار K ثابت می‌ماند.



۱۰۴- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۴)

گزینه ۴: درست؛ تشکیل N_2H_4 از عنصرهای گازی سازنده‌اش گرماگیر ولی تشکیل آمونیاک از عنصرهای گازی سازنده‌اش گرماده است.

گزینه ۱: نادرست؛ $\Delta H > 0$ است. سطح انرژی فراورده‌ها از واکنش‌دهنده‌ها بالاتر است.
گزینه ۲: نادرست؛ با افزایش دما درصد مولی NH_3 کم می‌شود.
گزینه ۳: نادرست؛ ثابت تعادل فقط به دما وابسته است.

۱۰۵- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۴)



کاربرد اتیل استات اشتباه بیان شده است؛ زیرا از آن به عنوان حلال چسب استفاده می‌شود.