آزمون آزمایشی خیلی سبز

رشته ریاضی

پایه یازدهم	مرحله سوم
۰۶ - ۱۴۰۵	۱۳/شهریور/۱۴۰۵

ویژه یازدهمی‌های ۱۴۰۵

ویژگی‌های برنامه راهبردی آزمون‌های آزمایشی خیلی سبز در تابستان ۰۶-۱۴۰۵

پایه / مرحله	اول ۲مرداد	دوم ۲۳مرداد	سوم ۱۳ شهریور	چهارم ۳مهر
دهم	✓	✓	✓	✓
یازدهم	–	✓	✓	–

۱- دوره دروس پایه دهم

۲- مطالعه‌بخشی از دروس پایه یازدهم

۳- امکان فرایند ترکیبی هر کدام از موارد فوق

- با توجه به موارد فوق، دفترچه آزمون خیلی سبز در این آزمون از ۲ قسمت تشکیل شده است که هر داوطلب باید در جلسه آزمون به یک یا دو قسمت (که قبلاً در پنل کاربری انتخاب کرده است) پاسخ دهد.
- آزمون مرحله سوم (همین دفترچه‌ای که در دست دارید) ادامه پیشروی پایه دهم و یازدهم است.
- تمامی سرفصل‌های یازدهم، مجدداً از مهر، در برنامه راهبردی دیده شده است.

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا	مسئول درس- گزینشگر
ریاضی (۱) حسابان (۱)	طراحان: مازیار احمدی‌ناو - میثم حصارکی - محسن علی‌نجاری کارشناسان علمی: علی افضل‌زاده - سروش موئینی	محسن علی‌نجاری
هندسه (۱) هندسه (۲)	طراحان: امیرحسین ابومحبوب - سید عباس حسینی کارشناس علمی: سیدعباس حسینی	امیرحسین ابومحبوب
آمار و احتمال	طراحان: مصطفی دیداری - سوگند روشنی - سعید قندچی کارشناس علمی: سعید قندچی	مصطفی دیداری
فیزیک (۱) فیزیک (۲)	طراحان: یاشار انگوتی - نوید شاهی کارشناسان علمی: علیرضا جباری - سعید محبی - هادی نجفی	نوید شاهی - یاشار انگوتی
شیمی (۱) شیمی (۲)	طراحان: یاسر عبداللهی - ارژنگ خانلری - مهدی براتی - محمد قهرمانی‌نژاد - روح‌الله حاجی‌سلیمانی کارشناس علمی: مرتضی نصیرزاده - محمدمهدی کریمیان - یاشار ذریه	یاسر عبداللهی

مدیر تألیف آزمون: دکتر فاطمه آقاجانپور

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

این آزمون نمره منفی دارد.

دفترچه سؤالات آزمون‌های خیلی سبز، از همه نظر (تعداد سؤال‌ها، زمان پاسخگویی، نوع چینش گزینه‌ها، نوع صفحه‌آرایی، فونت سؤالات، سایز کلمات و اعداد، جای خالی محل انجام محاسبات و...) در شبیه‌ترین حالت به دفترچه سؤالات کنکور سراسری طراحی می‌شود.

Azmoonkheilisabz.com

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پایه دهم

چنان‌چه پایهٔ دهم را در پنل کاربری خود انتخاب کرده‌اید، به سؤالات این دفترچه مطابق جدول زیر در زمان مقرر پاسخ دهید.

مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخگویی	بودجه‌بندی دروس
حسابان	۱۵	۱	۱۵	۲۵ دقیقه	ریاضی (۱) فصل ۴ (درس ۲ و ۳) فصل ۵ و فصل ۶ (درس ۱) صفحهٔ ۷۸ تا ۱۲۶
هندسه	۱۰	۱۶	۲۵	۱۵ دقیقه	هندسه (۱) فصل ۲ (درس ۴) و فصل ۳ صفحهٔ ۴۵ تا ۷۶
فیزیک	۱۵	۲۶	۴۰	۲۰ دقیقه	فیزیک (۱) فصل ۴ صفحهٔ ۸۳ تا ۱۲۶
شیمی	۱۰	۴۱	۵۰	۱۰ دقیقه	شیمی (۱) فصل ۲ (از ابتدای رفتار گازها) و فصل ۳ (تا ابتدای محلول و مقدار حل‌شونده‌ها) صفحهٔ ۷۶ تا ۹۲
مجموع	۵۰ سؤال			۷۰ دقیقه	–

آزمون آزمایشی خیلی سبز – رشته ریاضی

پایه یازدهم – مرحله سوم – ۱۳ شهریور ۱۴۰۵

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

ریاضی دهم

۱- کدام‌یک از روابط زیر بیانگر یک تابع نیست؟

۱) رابطه‌ای که به ضلع یک مثلث متساوی‌الاضلاع، مساحت آن را نسبت می‌دهد.

۲) رابطه‌ای که به هر عدد حقیقی مثبت، ریشهٔ مرتبهٔ زوج و مثبت آن را نسبت می‌دهد.

۳) رابطه‌ای که به هر زاویه مانند α، مقدار $\sin\alpha$ را نسبت می‌دهد.

۴) رابطه‌ای که به هر عدد حقیقی مثبت، ریشهٔ چهارم آن را نسبت می‌دهد.

۲- تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}2x^2-1 & ; \ x>-1\\ \frac{x^2}{5}+3 & ; \ x\le -1\end{cases}$ مفروض است. حاصل $f(-\sqrt{5})-f(\sqrt{6})$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) -11 ۳) -7 ۴) ۱۳

۳- در تابع $f=\{(a,3),(4,2a-b),(3,5)\}$، دامنه و برد با هم برابرند. مقدار ab کدام است؟

۱) ۴۰ ۲) ۳۰ ۳) ۲۰ ۴) ۱۰

۴- مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $\frac{-(x^2-9)}{3x+2}\ge 0$ کدام است؟

۱) $(-\infty,-3]\cup(-\frac{2}{3},3]$ ۲) $(-\infty,-3]\cup[3,+\infty)$

۳) $(-\infty,-3]\cup[-\frac{2}{3},3]$ ۴) $[-3,-\frac{2}{3}]\cup[3,+\infty)$

۵- سهمی $y=ax^2+bx-c$، محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۱۲ و محور xها را در نقاطی به طول‌های ۳ و -4 قطع می‌کند. حاصل $ac-b$ کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) -11 ۳) ۱۳ ۴) -13

۶- نقاط $A(2a-1,a+2)$ و $B(5-2a,a+2)$ دو نقطهٔ متمایز با مؤلفه‌های صحیح و مثبت روی یک سهمی هستند. اگر نقطهٔ $S(b-2,b)$ رأس این سهمی باشد، حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۵ ۴) ۶

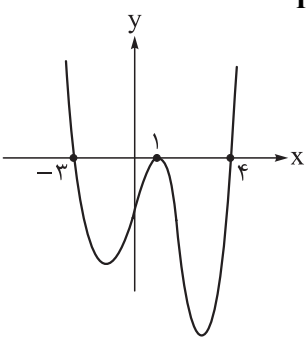
۷- بازهٔ $(-1,-\frac{1}{2})$ بزرگ‌ترین بازه‌ای است که سهمی $y=-2x^2-3x+c$ بالای نمودار تابع $y=\frac{2|x|}{x}$ قرار می‌گیرد. مقدار c کدام است؟

۱) -1 ۲) -2 ۳) -3 ۴) -4

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸- اگر نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت زیر باشد، مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $\frac{-(x+۳)}{f(x)} \geq ۰$ کدام است؟



۱) $(-\infty,۴)-\{-۳,۱\}$
۲) $(۱,۴)$
۳) $(-۳,۱)$
۴) $(۴,+\infty)$

۹- مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $|۱+(۲x+۱)-۳|<۳$ به صورت $[۰,۲]-(a,b)$ است. مقدار $-\frac{۱}{a}-b+۱$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) $-۲/۵$ ۳) $-۰/۴$ ۴) $-۳/۱$

۱۰- اگر دامنهٔ تابع خطی f برابر با $[-۱,۲]$ و برد آن $[۰,۱]$ باشد، مقدار $f(۱)$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۲}{۵}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

۱۱- اگر $f=\{(b,b-۲),(۲,-k^۲+k),(k,-۶)\}$ تابعی ثابت، g تابعی همانی با دامنهٔ $\mathbb{R}$ و $g(۳a-۱)=a+۲$ باشد، اختلاف مقادیر ممکن برای عبارت $۲a+b-k$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۲- مساحت سطح محدود به نمودارهای توابع $y=|x-۲|-۳$ و $y=-|x-۲|+۱$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

۱۳- کدام انتقال‌های متوالی، نمودار تابع $y=x^۲+۳x$ را بر نمودار تابع $y=x^۲-x$ منطبق می‌کنند؟

الف) ۲ واحد به چپ
ب) ۲ واحد به راست
ج) ۲ واحد به پایین
د) ۲ واحد به بالا

۱) الف ـ د ۲) ب ـ د ۳) الف ـ ج ۴) ب ـ ج

۱۴- با جایگشت حروف کلمهٔ «NEGARIN»، چند کلمهٔ هفت‌حرفی می‌توان ساخت که حرف دوم و ششم آن N باشد؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۶۰ ۳) ۱۶۰ ۴) ۸۰

۱۵- با ارقام ۸، ۷، ۵، ۳، ۲ و ۰، چند عدد چهاررقمی زوج و بزرگ‌تر از ۴۰۰۰، بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

۱) ۲۴ ۲) ۳۶ ۳) ۷۲ ۴) ۹۶

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

هندسه دهم

۱۶- کدام دو شکل لزوماً متشابه نیستند؟

۱) دو شش‌ضلعی منتظم

۲) دو مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین

۳) دو لوزی که یک زاویهٔ برابر دارند.

۴) دو مستطیل که اندازهٔ قطر آن‌ها برابر است.

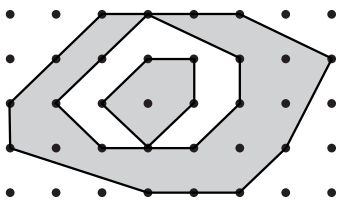
۱۷- نسبت مساحت‌های دو شش‌ضلعی متشابه $\frac{۴}{۲۵}$ است. اگر محیط یکی از آن‌ها برابر ۱۰ واحد باشد، اختلاف مقادیر ممکن برای محیط شش‌ضلعی دیگر کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۸ ۳) ۲۱ ۴) ۲۴

۱۸- با افزودن سه واحد به تعداد اضلاع یک nضلعی، تعداد قطرهای آن دو برابر شده است. با افزودن چند واحد به تعداد اضلاع این nضلعی، تعداد قطرهای آن پنج برابر می‌شود؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۱۹- در شکل مقابل، مساحت ناحیهٔ سایه‌زده کدام است؟



۱) ۱۵ / ۵

۲) ۱۶

۳) ۱۴ / ۵

۴) ۱۵

۲۰- در یک مثلث قائم‌الزاویه، زاویهٔ بین ارتفاع و میانهٔ وارد بر وتر ۳۶° است. اندازهٔ کوچک‌ترین زاویهٔ این مثلث چند درجه است؟

۱) ۱۸ ۲) ۲۴ ۳) ۲۷ ۴) ۳۶

۲۱- در یک مثلث متساوی‌الساقین، اندازهٔ هر ساق دو برابر اندازهٔ قاعده است. مجموع فواصل هر نقطهٔ واقع بر قاعدهٔ این مثلث از دو ساق آن، چند برابر اندازهٔ قاعده است؟

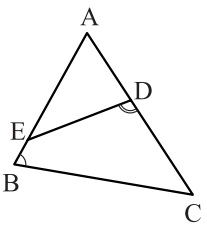
۱) $\frac{\sqrt{۵}}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۱۵}}{۴}$

۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۶}}{۴}$

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۲- در شکل زیر، دوزاویهٔ $\hat{B}$ و $C\hat{D}E$ مکمل یکدیگرند. اگر $AE = DC = ۶$ و $AD = ۴$ باشد، مساحت چهارضلعی $DEBC$ چند درصد مساحت مثلث ABC است؟



۱) ۶۰
۲) ۶۴
۳) ۷۰
۴) ۷۵

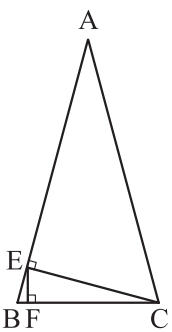
۲۳- در مثلث ABC با مساحت ۴۸، دو میانهٔ AM و BN بر هم عمودند. اگر اندازهٔ AM دو برابر اندازهٔ BN باشد، اندازهٔ ضلع AC کدام است؟

۱) $۴\sqrt{۵}$
۲) $۲\sqrt{۱۷}$
۳) $۸\sqrt{۵}$
۴) $۴\sqrt{۱۷}$

۲۴- در یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین به طول قاعده‌های ۴ و ۱۲ و مساحت ۴۸، وسط‌های اضلاع را به هم وصل می‌کنیم. محیط چهارضلعی حاصل کدام است؟

۱) ۱۲
۲) ۱۶
۳) ۲۰
۴) ۲۴

۲۵- در شکل زیر، مثلث ABC متساوی‌الساقین است $(AB = AC)$. اگر اندازهٔ ارتفاع CE نصف اندازهٔ ضلع AB بوده و مساحت مثلث BEC برابر ۲ باشد، اندازهٔ پاره‌خط BF کدام است؟



۱) $۲-\sqrt{۳}$
۲) $\sqrt{۲}-۱$
۳) $\frac{۱}{۴}$
۴) $\frac{۱}{۲}$

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

فیزیک دهم

۲۶- دمای شهری در دو روز مختلف یک سال، $18/5\ ^\circ F$ و $63/5\ ^\circ F$ است. اختلاف دما در این دو روز چند کلوین است؟

۱) ۲۰ ۲) ۲۵ ۳) ۲۷/۵ ۴) ۳۰

۲۷- کدام‌یک از دماسنج‌های زیر، جزء دماسنج‌های معیار نیست؟

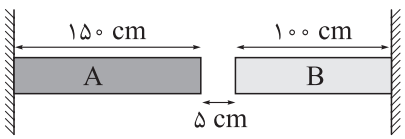
۱) ترموکوپل

۲) دماسنج گازی

۳) دماسنج مقاومت پلاتینی

۴) تف‌سنج

۲۸- در شکل زیر، دو میلهٔ فلزی A و B بین دو دیوارهٔ ثابت قرار دارند. اگر دمای این دو میله $200\ ^\circ C$ افزایش یابد، دو میله به یکدیگر می‌رسند. اگر ضریب انبساط طولی این دو میله به ترتیب α_A و α_B باشد، کدام رابطهٔ زیر در SI درست است؟



۱) $2\alpha_A + 3\alpha_B = 2\times10^{-4}$

۲) $3\alpha_A + 2\alpha_B = 2\times10^{-4}$

۳) $2\alpha_A + 3\alpha_B = 5\times10^{-4}$

۴) $3\alpha_A + 2\alpha_B = 5\times10^{-4}$

۲۹- روی یک ورقهٔ مسی، حفره‌ای ایجاد کرده‌ایم. اگر دمای ورقه $150\ ^\circ C$ افزایش یابد، مساحت حفره، چند درصد و چگونه تغییر می‌کند؟ $(\alpha_{مس} = 1/8\times10^{-5}\ K^{-1})$

۱) ۰/۲۷، کاهش می‌یابد. ۲) ۰/۲۷، افزایش می‌یابد.

۳) ۰/۵۴، کاهش می‌یابد. ۴) ۰/۵۴، افزایش می‌یابد.

۳۰- یک ارلن شیشه‌ای با ضریب انبساط طولی $9\times10^{-6}\ K^{-1}$ و حجم $250\ cm^3$ به طور کامل پر از گلیسیرین با ضریب انبساط حجمی $49\times10^{-5}\ K^{-1}$ است. اگر دمای این مجموعه را $40\ ^\circ C$ افزایش دهیم، چند سانتی‌متر مکعب گلیسیرین از ارلن بیرون می‌ریزد؟

۱) ۴/۹ ۲) ۴/۸۱ ۳) ۴/۶۳ ۴) ۴/۵۴

۳۱- دمای یک قطعهٔ توپر سربی تقریباً چند درجهٔ فارنهایت و چگونه تغییر کند تا چگالی آن ۰/۴۵ درصد، کاهش یابد؟ $(\alpha_{سرب} = 3\times10^{-5}K^{-1})$

۱) ۵۰، کاهش یابد. ۲) ۵۰، افزایش یابد.

۳) ۹۰، کاهش یابد. ۴) ۹۰، افزایش یابد.

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۲- برای این‌که $۲\ kg$ آب با دمای $۲۰\ ^\circ C$ را در فشار $۱\ atm$ به نقطهٔ جوش آن برسانیم، چند کیلوژول گرما لازم است؟ $(c_{آب} = ۴۲۰۰ \frac{J}{kg.K})$

۱) ۸۴۰ ۲) ۷۴۲ ۳) ۶۷۲ ۴) ۶۲۲

۳۳- به دو کرهٔ توپر مسی A و B به ترتیب $۱۰\ kJ$ و $۸۰\ kJ$ گرما می‌دهیم. اگر شعاع کرهٔ A، دو برابر شعاع کرهٔ B باشد، افزایش دمای کرهٔ B چند برابر افزایش دمای کرهٔ A خواهد بود؟

۱) ۱ ۲) ۸ ۳) ۳۲ ۴) ۶۴

۳۴- یک قطعه فلز ۶۰۰ گرمی را تا دمای $۱۰۰\ ^\circ C$ گرم می‌کنیم و سپس آن را در گرماسنجی با ظرفیت گرمایی $۲۱۰\ J/K$ که حاوی $۵۰۰\ g$ آب با دمای اولیه $۲۰\ ^\circ C$ است، می‌اندازیم. اگر دمای نهایی مجموعه $۳۰\ ^\circ C$ شود، گرمای ویژهٔ قطعهٔ فلز در SI کدام است؟ $(c_{آب} = ۴۲۰۰\ J/kg.^\circ C)$

۱) ۵۰۰ ۲) ۵۲۵ ۳) ۵۵۰ ۴) ۵۷۵

۳۵- در طی یک آزمایش، مقداری یخ با دمای $-۲۰\ ^\circ C$ توسط یک گرمکن با توان ثابت در مدت $۲\ min$، به آب با دمای $۱۰\ ^\circ C$ تبدیل می‌شود. در این آزمایش چند ثانیه طول کشیده است تا دمای آب از $۳\ ^\circ C$ به $۸\ ^\circ C$ برسد؟

$(L_F = ۳۳۶\ kJ/kg$ و $c_{آب} = ۲c_{یخ} = ۴۲۰۰ \frac{J}{kg.K})$

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۳۶- مقداری آب به جرم $۲\ kg$ و دمای $۵۰^\circ C$، در فشار $۱\ atm$، با توان ثابت $۱۹۶۸\ W$ گرما دریافت می‌کند. چند ثانیه طول می‌کشد تا آب به طور کامل بخار شود؟ ($c = ۴۲۰۰ \frac{J}{kg.K}$، $L_V = ۲۲۵۰\ J/g$ و تبخیر سطحی ناچیز است.)

۱) ۲۵۰۰ ۲) ۲۵۵۰ ۳) ۲۶۰۰ ۴) ۲۶۵۰

۳۷- چه تعداد از موارد زیر درست است؟

الف) در روزهای سرد سال، پوشیدن لباس‌های با رنگ تیره، مناسب‌تر است.

ب) در فلزات، فقط الکترون‌های آزاد در انتقال گرما نقش دارند.

پ) در ساحل یک دریا، در هنگام شب، پدیدهٔ همرفت موجب نسیمی از دریا به سمت ساحل می‌شود.

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

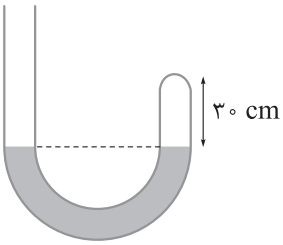
۳۸- تعداد مولکول‌های هوای درون اتاقی به ابعاد $۴m$، $۵m$ و $۳m$ در فشار $۱\ atm$ و دمای ۲۷°، برابر کدام است؟ (هوا را یک گاز آرمانی فرض کنید، $R = ۸ \frac{J}{mol.K}$ و $N_a = ۶\times۱۰^{۲۳}$)

۱) ۱۵×۱۰^{۲۵} ۲) ۱۵×۱۰^{۲۶} ۳) ۱۸×۱۰^{۲۵} ۴) ۱۸×۱۰^{۲۶}

محل انجام محاسبات

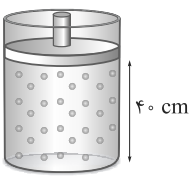
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۹- در لولهٔ U شکل زیر، در شاخهٔ سمت راست، مقداری گاز کامل با دمای $۲۷\ ^\circ C$ محبوس و مایع درون لوله، جیوه است. دمای گاز محبوس را چند درجهٔ سلسیوس افزایش دهیم تا جیوه در شاخهٔ سمت چپ، $۵\ cm$ بالاتر بیاید؟ ($P_۰ = ۷۰\ cmHg$ و سطح مقطع لوله در همه‌جا یکسان است.)



۱) ۱۰۰
۲) ۱۲۰
۳) ۱۲۵
۴) ۱۵۰

۴۰- در شکل زیر، $۰/۰۵\ mol$ گاز کامل، زیر پیستونی با وزن $۱۲۰\ N$ و مساحت $۲۰\ cm^۲$ قرار دارد. اگر فشار هوا برابر با $۰/۹\ atm$ باشد، دمای این گاز چند درجهٔ سلسیوس است؟ ($R = ۸\ \frac{J}{mol.K}$ و اصطکاک ناچیز است.)



۱) ۳۰۰
۲) ۳۲۰
۳) ۲۷
۴) ۴۷

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

شیمی دهم

۴۱- کدام مورد درست است؟

۱) گازها برخلاف جامدها و مانند مایع‌ها، حجم و شکل معینی ندارند.

۲) قراردادن بادکنک‌های پرشده از هوا درون نیتروژن مایع، سبب می‌شود که حجم آن‌ها به شدت کاهش یابد.

۳) عبارت «۳/۲ گرم گاز اکسیژن در دمای $25\ ^\circ C$» توصیف کاملاً دقیقی از یک نمونه گاز است.

۴) با افزایش فشار بر یک نمونهٔ گاز، حجم مولکول‌های آن کم‌تر می‌شود.

۴۲- درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر، به ترتیب چگونه است؟ $(C=12, O=16 : g.mol^{-1})$

الف) در دما و فشار یکسان، حجم ۰/۴ مول گاز کربن دی‌اکسید بیشتر از حجم ۰/۴ مول گاز اکسیژن است.

ب) براساس قانون آووگادرو، حجم مولی گازها در فشار و دمای ثابت برابر با ۲۲/۴ لیتر است.

پ) در شرایط استاندارد (STP)، ۲۲/۴ لیتر از گازهای مختلف جرم برابری دارند.

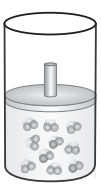
ت) طبق قانون آووگادرو، در فشار ۵ اتمسفر و دمای $25\ ^\circ C$، یک مول از گازهای مختلف حجم ثابت و برابری دارند.

۱) نادرست ـ نادرست ـ نادرست ـ درست
۲) نادرست ـ درست ـ نادرست ـ نادرست
۳) درست ـ درست ـ نادرست ـ درست
۴) درست ـ نادرست ـ نادرست ـ نادرست

۴۳- در ظرفی به حجم ۷ لیتر از گاز اکسیژن در دمای ۲۷۳ K و فشار ۱ atm، به تقریب چه تعداد مولکول O_2 وجود دارد؟

۱) $15/5\times10^{22}$
۲) $18/8\times10^{22}$
۳) $18/8\times10^{23}$
۴) $15/5\times10^{23}$

۴۴- با توجه به جدول زیر که چند نمونهٔ گازی را در شرایط STP نشان می‌دهد، کدام موارد درست است؟ (هر ذره معادل ۰/۰۲ مول است و $Ne=20, O=16, C=12, H=1 : g.mol^{-1}$)

شمارهٔ نمونه	(۱)	(۲)	(۳)	(۴)
گاز	H_2	Ne	CO_2	O_2
ظرف محتوی گاز				

الف) حجم نمونهٔ (۳) برابر ۴۸/۴ لیتر است.

ب) اکسیژن موجود در ظرف (۴) برای سوختن کامل ۱ مول پروپان کافی است.

پ) شمار اتم‌ها در ظرف‌های (۳) و (۴) برابر است.

ت) جرم گاز موجود در ظرف (۲)، ۱۰ برابر ظرف (۱) است.

۱) «الف» ـ «پ»
۲) «الف» ـ «ت»
۳) «ب» ـ «پ»
۴) «ب» ـ «ت»

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۵- واکنش آلومینیم با نمکی از آمونیوم به صورت زیر انجام می‌شود:

$Al(s) + NH_4ClO_4(s) \rightarrow Al_2O_3(s) + AlCl_3(s) + H_2O(l) + N_2(g)$ (معادله موازنه شود.)

نسبت جرمی آلومینیم اکسید به گاز نیتروژن تولیدشده در این واکنش کدام است؟

$(N = 14, O = 16, Al = 27 : g.mol^{-1})$

۱) ۱/۳۳ ۲) ۲/۵۷ ۳) ۳/۶۴ ۴) ۴/۸۶

۴۶- در دما و فشار معین، پتاسیم نیترات (KNO_3) مطابق معادلهٔ موازنه‌نشدهٔ زیر تجزیه می‌شود:

$KNO_3(s) \rightarrow K_2O(s) + N_2(g) + O_2(g)$

اگر با تجزیهٔ ۵۰/۵ گرم پتاسیم نیترات، ۳۵ لیتر گاز تولید شود، حجم مولی گازها در شرایط واکنش چند لیتر است؟

$(N = 14, O = 16, K = 39 : g.mol^{-1})$

۱) ۲۰ ۲) ۲۸ ۳) ۳۲ ۴) ۴۰

۴۷- کدام مورد، نادرست است؟

۱) نزدیک به $\frac{3}{4}$ سطح زمین را آب تشکیل می‌دهد.

۲) پس از اقیانوس‌ها، بیشترین مقدار آب جهان در کوه‌های یخ ذخیره شده است.

۳) با توجه به خروج مقداری ماده از آب دریاها و اقیانوس‌ها، جرم کل مواد حل‌شده در آب‌های کرهٔ زمین رو به کاهش است.

۴) دریاها مخلوطی همگن از انواع یون‌ها و مولکول‌ها در آب هستند.

۴۸- برای شناسایی یون‌های کلسیم، باریم و نقره به ترتیب می‌توان از محلول‌های ..... ، ..... و ..... استفاده کرد.

۱) سدیم کلرید ـ سدیم فسفات ـ منیزیم نیترات ۲) سدیم فسفات ـ سدیم سولفات ـ پتاسیم نیترات

۳) پتاسیم نیترات ـ پتاسیم فسفات ـ سدیم کلرید ۴) پتاسیم فسفات ـ پتاسیم سولفات ـ سدیم کلرید

۴۹- فرمول شیمیایی چه تعداد از ترکیب‌های زیر درست است؟

- آلومینیم سولفات: $AlSO_4$
- باریم هیدروکسید: $Ba(OH)_2$
- سدیم فسفات: Na_3PO_4
- آمونیوم کربنات: $(NH_4)_2CO_3$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۵۰- اگر در مقداری معین از یک نمونهٔ آب، به ترتیب ۷۲ و ۱۸۴ گرم از یون‌های Mg^{2+} و Na^+ و مقدار کافی یون SO_4^{2-} وجود داشته باشد، پس از تبخیر آب، نسبت جرم نمک منیزیم به شمار مول‌های نمک سدیم، به تقریب کدام است؟

$(O = 16, Na = 23, Mg = 24, S = 32 : g.mol^{-1})$

۱) ۹۰ ۲) ۸۰ ۳) ۳۰ ۴) ۵۰

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پایه یازدهم

چنان‌چه پایهٔ یازدهم را در پنل کاربری خود انتخاب کرده‌اید، به سؤالات این دفترچه مطابق جدول زیر در زمان مقرر پاسخ دهید.

مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخگویی	بودجه‌بندی دروس
حسابان	۱۵	۵۱	۶۵	۲۵ دقیقه	حسابان (۱) فصل ۱ (درس ۱ تا ۳) صفحهٔ ۱ تا ۲۲
هندسه	۱۰	۶۶	۷۵	۱۵ دقیقه	هندسه (۲) فصل ۱ (درس ۱) صفحهٔ ۹ تا ۱۷
آمار و احتمال	۱۰	۷۶	۸۵	۱۵ دقیقه	آمار و احتمال فصل ۱ (درس ۱) صفحهٔ ۱ تا ۱۵
فیزیک	۱۵	۸۶	۱۰۰	۲۰ دقیقه	فیزیک (۲) فصل ۱ (تا ابتدای خطوط میدان الکتریکی) صفحهٔ ۱ تا ۱۷
شیمی	۱۰	۱۰۱	۱۱۰	۱۰ دقیقه	شیمی (۲) فصل ۱ (تا ابتدای دنیای واقعی واکنش‌ها) صفحهٔ ۱ تا ۲۲
مجموع	۶۰ سؤال			۸۵ دقیقه	–

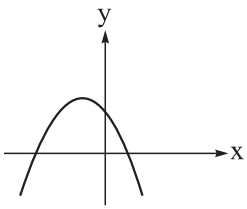
آزمون آزمایشی خیلی سبز – رشته ریاضی

پایه یازدهم – مرحله سوم – ۱۳ شهریور ۱۴۰۵

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

حسابان یازدهم

۵۱- شکل زیر نمودار تابع درجه‌دوم $y = ax^2 + bx + c$ است. کدام گزینه نادرست است؟



۱) عبارت $\sqrt{b} + \sqrt{-a}$ تعریف‌نشده است.

۲) عبارت $a^2 + c$ مثبت است.

۳) مقدار $\frac{c}{b}$ منفی است.

۴) مقدار $\frac{a}{|a|}$ برابر ۱ است.

۵۲- معادلهٔ ارتفاع یک موشک برحسب زمان به صورت $y = -4t^2 + 40t + 69$ است. بیشترین ارتفاع موشک از سطح زمین کدام است؟

۱) ۲۰۰ ۲) ۱۶۹ ۳) ۱۹۶ ۴) ۱۸۰

۵۳- تعداد جواب‌های معادلهٔ $|x| = x^2 - 2x + 1$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۵۴- مجموع پنج جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی برابر ۳۵ و مجموع مربعات جملات دوم تا چهارم برابر با ۱۶۵ است. جملهٔ دوم این دنباله کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۳ ۳) ۱۰ ۴) ۷

۵۵- در یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ عمومی a_n، مجموع سه جملهٔ اول، ۱۵ و مجموع شش جملهٔ بعدی، ۴۰۸۰ است. حاصل $\frac{a_7}{a_4}$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۱۶- یا ۱۷- ۲) ۱۶ یا ۱۷- ۳) ۱۶- یا ۱۷ ۴) ۱۶ یا ۱۷

۵۶- اگر x_1 و x_2 جواب‌های معادلهٔ $x^2 - mx + 3 = 0$ باشند و رابطهٔ $2x_1x_2^2 = 9$ بین آن‌ها برقرار باشد، مقدار m کدام است؟

۱) ۷- ۲) $\frac{7}{2}$ ۳) $-\frac{7}{2}$ ۴) ۷

۵۷- اگر α و β جواب‌های معادلهٔ $x^2 - mx + m - 1 = 0$ باشند، کم‌ترین مقدار عبارت $\alpha^2 + \beta^2$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) ۲ ۴) ۱

۵۸- یک جواب معادلهٔ $x^2 + 2ax + 3 = 0$ از دو برابر جواب دیگر، یک واحد کوچک‌تر است. اختلاف مقادیر ممکن برای a کدام است؟

۱) $\frac{15}{2}$ ۲) $\frac{15}{4}$ ۳) ۱۵ ۴) $\frac{15}{8}$

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۹- به ازای کدام مقادیر a، نمودار تابع درجه‌دوم $y = ax^۲ + (a-۳)x + ۲a - ۱$ فقط از ناحیهٔ سوم دستگاه مختصات عبور نمی‌کند؟

۱) $[\frac{۱}{۲}, +\infty)$ ۲) $(۳, +\infty)$ ۳) $(-\frac{۷}{۹}, ۱)$ ۴) $[\frac{۱}{۲}, ۱)$

۶۰- اگر $x = ۲$ یکی از جواب‌های معادلهٔ $\frac{x-a}{x} + \frac{x^۲ - ۴x + ۷}{x-۱} = ۱$ باشد، مجموع مربعات جواب‌های دیگر کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۷ ۳) ۱۳ ۴) ۵

۶۱- دو نقاش، با هم دیواری را طی مدت ۱۶ ساعت رنگ می‌کنند؛ اما اگر هر کدام به تنهایی کار کنند، نقاش دوم ۲۴ ساعت زودتر کار خود را تمام می‌کند. نقاش اول در چه مدت‌زمانی (برحسب ساعت) به تنهایی کار را تمام می‌کند؟

۱) ۴۸ ۲) ۳۶ ۳) ۳۲ ۴) ۲۸

۶۲- ۷ کیلوگرم رنگ با غلظت ۵۰ درصد را با ۸ کیلوگرم رنگ با غلظت ۲۰ درصد مخلوط می‌کنیم. چند کیلوگرم از آب این محلول باید تبخیر شود تا غلظت آن به ۶۰ درصد برسد؟

۱) ۵ ۲) ۵/۵ ۳) ۶ ۴) ۶/۵

۶۳- معادلهٔ $\sqrt{-x+۳} - x = -۲$ چند جواب دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۶۴- معادلهٔ $\sqrt{۳x+۴} - \sqrt{-x+۱} = ۱$ چند جواب دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۶۵- اگر $\sqrt{x+۳} + \sqrt{x-۵} = ۴$ باشد، حاصل $\sqrt{x+۳} - \sqrt{x-۵}$ کدام است؟

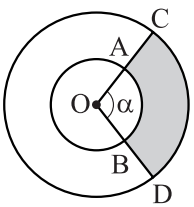
۱) ۱ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

هندسه یازدهم

۶۶- در شکل زیر، دو دایرهٔ هم‌مرکز به شعاع‌های R و r مفروض‌اند (R > r). کدام گزینه نادرست است؟



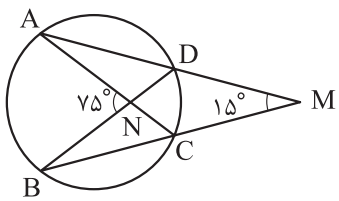
۱) اندازهٔ زاویه‌های مرکزی $A\hat{O}B$ و $C\hat{O}D$ برابر است.

۲) مساحت ناحیهٔ هاشورخورده برابر $\frac{\pi}{۳۶۰}\alpha(R^۲ - r^۲)$ است (α برحسب درجه).

۳) طول کمان $\overset{\frown}{CD}$ بزرگ‌تر از طول کمان $\overset{\frown}{AB}$ است.

۴) اندازهٔ کمان $\overset{\frown}{CD}$ بزرگ‌تر از اندازهٔ کمان $\overset{\frown}{AB}$ است.

۶۷- در شکل زیر، نسبت اندازهٔ کمان AB به اندازهٔ کمان CD کدام است؟



۱) ۳

۲) ۲

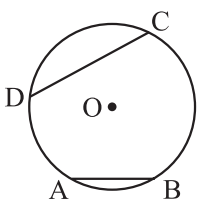
۳) $\frac{۳}{۲}$

۴) $\frac{۵}{۳}$

۶۸- دو کمان AB و MN به ترتیب در دو دایرهٔ C(O,R) و C′(O′,۲R) مفروض‌اند. اگر طول کمان MN سه برابر طول کمان AB باشد، مساحت قطاع MO′N چند برابر مساحت قطاع AOB است؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۹ ۴) ۱۲

۶۹- در شکل زیر اندازهٔ کمان AB برابر ۶۰° و فاصلهٔ مرکز دایره از وتر AB، دو برابر فاصلهٔ آن از وتر CD است. اگر اندازهٔ شعاع دایره برابر ۴ باشد، طول وتر CD کدام است؟



۱) ۶

۲) $۴\sqrt{۳}$

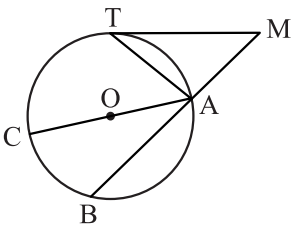
۳) $۲\sqrt{۱۳}$

۴) $۲\sqrt{۱۵}$

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷۰- در شکل مقابل خط MT بر دایره مماس است. اگر $\frac{\overset{\frown}{AT}}{۲}=\frac{\overset{\frown}{AB}}{۳}=\frac{\overset{\frown}{BT}}{۴}$ باشد، اندازهٔ زاویهٔ $C\hat{A}T$ چند برابر اندازهٔ زاویهٔ M است؟ (O مرکز دایره است.)



۱) ۱
۲) $\frac{۳}{۲}$
۳) $\frac{۴}{۳}$
۴) $\frac{۵}{۴}$

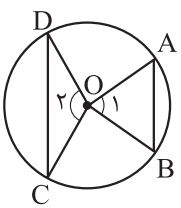
۷۱- فاصلهٔ نزدیک‌ترین نقطهٔ خط d تا مرکز دایرهٔ $C(۰,۷-۲x)$، برابر $\frac{۵x-x^۲}{۲}$ است. اگر خط و دایره هیچ نقطهٔ اشتراکی نداشته باشند، چند مقدار طبیعی برای x وجود دارد؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۷۲- خط d و دایرهٔ $C(O,۶)$ مفروض‌اند، به طوری که روی خط d، دو نقطهٔ A و B به فاصلهٔ ۶ واحد از نقطهٔ O وجود دارند. اگر $AB=۸$ باشد، آن‌گاه چند نقطه روی خط d وجود دارد که فاصلهٔ آن‌ها از نقطهٔ O برابر ۴ باشد؟

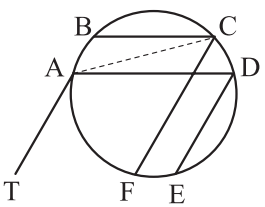
۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) بی‌شمار

۷۳- در شکل مقابل، دو زاویهٔ $O_۱$ و $O_۲$ مکمل یکدیگرند. اگر $CD=۲AB=۴\sqrt{۵}$ باشد، اندازهٔ شعاع دایره کدام است؟



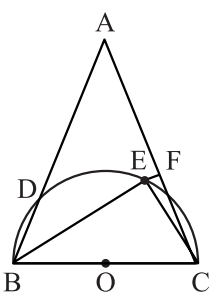
۱) ۵
۲) $\sqrt{۳۰}$
۳) ۶
۴) $۳\sqrt{۵}$

۷۴- در شکل مقابل $BC \parallel AD$، $DE \parallel CF$ و TA در نقطهٔ A بر دایره مماس است. اگر اندازهٔ کمان‌های $\overset{\frown}{DE}$، $\overset{\frown}{BC}$ و $\overset{\frown}{AF}$ به ترتیب جملات متوالی یک دنبالهٔ حسابی باشند، آن‌گاه اندازهٔ زاویهٔ $C\hat{A}T$ کدام است؟



۱) ۱۰۵°
۲) ۱۱۰°
۳) ۱۲۰°
۴) ۱۲۵°

۷۵- در شکل زیر، نقطهٔ E روی نیم‌دایره‌ای به مرکز O قرار دارد، به گونه‌ای که $BE=۱۶$ و $EC=۱۲$ است. اگر $\overset{\frown}{DE}=\overset{\frown}{EC}$، F وسط AC و $AB=۲۴$ باشد، اندازهٔ پاره‌خط EF کدام است؟



۱) ۱/۵
۲) ۲
۳) ۲/۵
۴) ۳

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

آمار و احتمال

۷۶- در پرتاب یک تاس، مجموعه‌جواب گزاره‌نمای $P(A) = \frac{۱}{۳}$ چند عضو دارد؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۵ ۳) ۲۰ ۴) ۲۱

۷۷- گزاره‌های $r \Leftrightarrow \sim p$ و $(\sim p \vee q) \Rightarrow ((\sim p \wedge q) \vee r)$ هر دو نادرست هستند. کدام نتیجه‌گیری درست است؟

۱) p نادرست، r نادرست، q نادرست

۲) p نادرست، r درست، q نادرست

۳) p درست، r درست، q نادرست

۴) p نادرست، r نادرست، q درست

۷۸- گزارهٔ $[(\sim q \Rightarrow \sim p) \wedge p] \Rightarrow q$ هم‌ارز کدام گزاره است؟

۱) F ۲) T ۳) $\sim q$ ۴) $\sim p$

۷۹- عکس نقیض گزارهٔ $p \wedge q \Rightarrow \sim p \vee r$ به کدام صورت است؟

۱) $\sim p \wedge \sim q \Rightarrow p \vee \sim r$

۲) $\sim p \vee r \Rightarrow \sim (p \wedge q)$

۳) $p \vee \sim r \Rightarrow \sim p \wedge \sim q$

۴) $p \wedge \sim r \Rightarrow \sim p \vee \sim q$

۸۰- اگر p گزاره‌ای درست، q گزاره‌ای نادرست و r گزاره‌ای دلخواه باشد، کدام گزینه در مورد ارزش گزارهٔ $(\sim p \Rightarrow r) \Rightarrow \sim q$ درست است؟

۱) همواره درست است.

۲) همواره نادرست است.

۳) فقط اگر r درست باشد، درست است.

۴) فقط اگر r نادرست باشد، درست است.

۸۱- کدام‌یک از گزاره‌های زیر را می‌توانیم به جای ? در جدول زیر قرار دهیم؟

p	q	?
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

۱) $(\sim p \vee q) \Rightarrow (p \Rightarrow \sim q)$

۲) $(\sim p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \Leftrightarrow q)$

۳) $(\sim p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \Leftrightarrow q)$

۴) $(\sim p \wedge q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow \sim q)$

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸۲- اگر مجموعهٔ A شامل اعداد اول تک‌رقمی باشد، چه تعداد از گزاره‌های زیر درست است؟

الف) $\forall x \in A ; \frac{x^2-4}{x-2} = x+2$

ب) $\exists x \in A ; x^2 + x - 12 = 0$

پ) $\forall x \in A ; |2-x| < 5$

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۸۳- نقیض گزارهٔ «بعضی از اعداد صحیح، فرد نیستند.» به کدام صورت است؟

۱) همهٔ اعداد صحیح، فرد هستند.

۲) همهٔ اعداد غیرصحیح، زوج هستند.

۳) بعضی از اعداد صحیح، فرد هستند.

۴) همهٔ اعداد صحیح، زوج هستند.

۸۴- گزارهٔ « $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} ; \cos x \times \cos y > 0$ » را در نظر بگیرید. ارزش آن و نقیض آن در کدام گزینه به درستی آمده است؟

۱) درست ـ $\exists x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} ; \cos x \times \cos y \leq 0$

۲) نادرست ـ $\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} ; \cos x \times \cos y < 0$

۳) درست ـ $\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} ; \cos x \times \cos y > 0$

۴) نادرست ـ $\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} ; \cos x \times \cos y \leq 0$

۸۵- جدول ارزش گزارهٔ $r \vee p \Rightarrow \square \vee \sim p$ دارای ۱۶ ردیف است. به جای $\square$ کدام گزاره را می‌توانیم قرار دهیم؟

۱) $q \vee p$ ۲) $\sim q \vee \sim r$

۳) $\sim q \vee s$ ۴) $(p \vee r) \wedge (q \vee r)$

محل انجام محاسبات

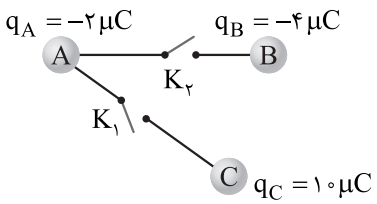
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

فیزیک یازدهم

۸۶- عدد اتمی منگنز $Z = ۲۵$ است. بار الکتریکی هستهٔ اتم منگنز چند پیکوکولن است؟ $(e = ۱/۶\times۱۰^{-۱۹}\ C)$

۱) ۴×۱۰^{-۵} ۲) ۴×۱۰^{-۶} ۳) $۶/۴\times۱۰^{-۵}$ ۴) $۶/۴\times۱۰^{-۶}$

۸۷- مطابق شکل مقابل، سه کرهٔ فلزی هم‌اندازه و باردار A، B و C توسط کلیدهای $K_۱$ و $K_۲$ با یکدیگر ارتباط دارند و هر دو کلید باز هستند. در ابتدا کلید $K_۱$ را بسته و سپس باز می‌کنیم، در ادامه اگر کلید $K_۲$ را ببندیم از این کلید چند الکترون و در چه جهتی عبور می‌کند؟ $(e = ۱/۶\times۱۰^{-۱۹}\ C)$ و هیچ باری روی سیم‌های رابط باقی نمی‌ماند.)



۱) $۲/۵\times۱۰^{۱۳}$ از B به A ۲) $۲/۵\times۱۰^{۱۳}$ از A به B

۳) ۴×۱۰^{۱۳} از B به A ۴) ۴×۱۰^{۱۳} از A به B

۸۸- در اتم هلیم $(_۲^۴He)$، الکترون‌ها در فاصلهٔ تقریبی $m\ ۵\times۱۰^{-۱۱}$ از هستهٔ اتم قرار دارند. بزرگی نیروی جاذبهٔ الکتریکی بین هر الکترون و هستهٔ اتم هلیم، تقریباً چند نیوتون است؟ $(k = ۹\times۱۰^{۹}\ \frac{N.m^۲}{C^۲}$ و $e = ۱/۶\times۱۰^{-۱۹}\ C)$

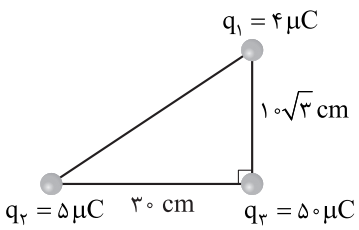
۱) ۹×۱۰^{-۸} ۲) ۹×۱۰^{-۹} ۳) ۱۸×۱۰^{-۸} ۴) ۱۸×۱۰^{-۹}

۸۹- دو ذرهٔ باردار A و B با بارهای $q_A = q$ و $q_B = -۲q$ در فاصلهٔ r، بر یکدیگر نیروی الکتریکی F وارد می‌کنند. اگر ۷۵ درصد از بار الکتریکی ذرهٔ B را به ذرهٔ A منتقل کنیم، فاصلهٔ بین این دو ذره را باید چند درصد و چگونه تغییر دهیم تا بزرگی نیروی الکتریکی بین دو ذره برابر با $\frac{F}{۲}$ شود؟

۱) ۵۰ درصد کاهش ۲) ۵۰ درصد افزایش

۳) ۲۵ درصد کاهش ۴) ۲۵ درصد افزایش

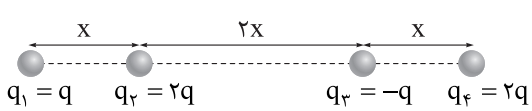
۹۰- در مثلث شکل مقابل، اندازهٔ نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار الکتریکی $q_۳$، چند نیوتون است؟ $(k = ۹\times۱۰^{۹}\ \frac{N.m^۲}{C^۲})$



۱) ۸۵ ۲) ۷۵

۳) ۷۰ ۴) ۶۵

۹۱- چهار ذرهٔ باردار مطابق شکل مقابل، روی محور x ثابت شده‌اند. بزرگی نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار $q_۲$ چند برابر بزرگی نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار $q_۳$ است؟



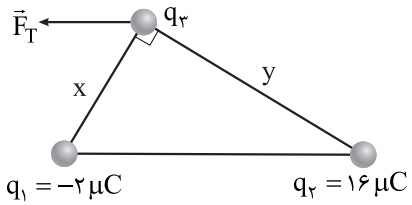
۱) ۲ ۲) $\frac{۳}{۲}$

۳) $\frac{۳۷}{۲۵}$ ۴) $\frac{۲۷}{۲۵}$

محل انجام محاسبات

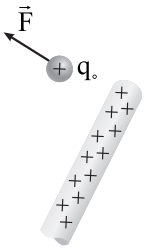
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹۲- در مثلث قائم‌الزاویهٔ شکل مقابل، $\vec{F}_T$، نیروی خالص وارد بر بار الکتریکی $q_۳$ و موازی خط واصل بارهای $q_۱$ و $q_۲$ است. $\frac{x}{y}$ کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$
۳) ۲
۴) $\sqrt{۲}$

۹۳- در شکل مقابل، میلهٔ باردار بر بار آزمون $q_۰ = ۳۰\,nC$، نیروی $\vec{F}$ به بزرگی $۶\times۱۰^{-۵}\,N$ را وارد می‌کند. میدان الکتریکی حاصل از میله در محل بار آزمون چند نیوتون بر کولن و در چه جهتی است؟



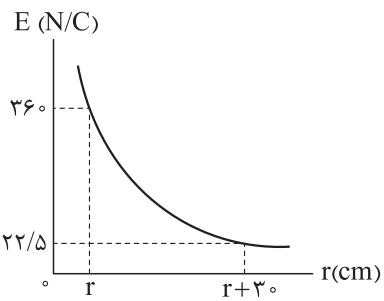
۱) ۲۰۰۰، ↖
۲) ۲۰۰۰، ↘
۳) ۱۸۰۰، ↖
۴) ۱۸۰۰، ↘

۹۴- بزرگی میدان الکتریکی حاصل از بار الکتریکی نقطه‌ای $q = ۱\,\mu C$ در فاصلهٔ $۳\,m$ از آن چند نیوتون بر کولن است؟

$(k = ۹\times۱۰^{۹}\,\frac{N.m^۲}{C^۲})$

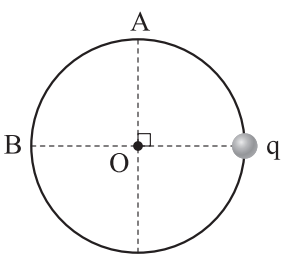
۱) ۱۰۰
۲) ۳۰۰
۳) ۱۰۰۰
۴) ۳۰۰۰

۹۵- نمودار تغییرات اندازهٔ میدان الکتریکی حاصل از یک بار الکتریکی نقطه‌ای برحسب فاصله از آن به شکل مقابل است. اندازهٔ میدان الکتریکی در فاصلهٔ $۲۰\,cm$ از این بار چند نیوتون بر کولن است؟



۱) ۲۷۰
۲) ۱۸۰
۳) ۹۰
۴) ۴۵

۹۶- در شکل زیر، بار الکتریکی q روی محیط دایره‌ای قرار دارد. اگر اختلاف بزرگی میدان الکتریکی حاصل از این بار در نقاط A و B برابر با $۲۰۰\,N/C$ باشد، بزرگی میدان الکتریکی حاصل از این بار در مرکز دایره (نقطهٔ O) چند نیوتون بر کولن است؟

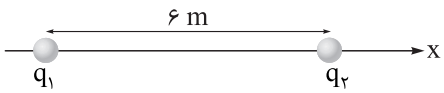


۱) $۲۰۰\sqrt{۲}$
۲) ۴۰۰
۳) $۴۰۰\sqrt{۲}$
۴) ۸۰۰

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹۷- مطابق شکل زیر، دو ذره با بارهای $q_1 = 4\,nC$ و $q_2 = -6\,nC$ در فاصلهٔ $6\,m$ از یکدیگر ثابت شده‌اند. بردار میدان الکتریکی خالص در وسط خط واصل دو ذره در SI کدام است؟ $(k = 9\times10^9\ \frac{N.m^2}{C^2})$



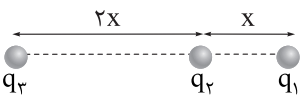
۱) $10\vec{i}$

۲) $-10\vec{i}$

۳) $2\vec{i}$

۴) $-2\vec{i}$

۹۸- در شکل زیر، میدان الکتریکی خالص در محل هر یک از بارها، برابر صفر است. مجموع بار الکتریکی این سه ذره، چند برابر بار q_2 است؟



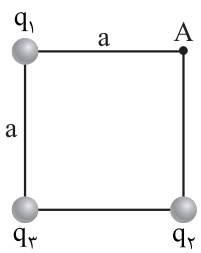
۱) ۱۰/۲۵

۲) ۱۲/۲۵

۳) $-10/25$

۴) $-12/25$

۹۹- در شکل زیر، سه ذرهٔ باردار $q_1 = q$، $q_2 = -q$ و $q_3 = 2q$ روی سه رأس مربعی به ضلع a، ثابت شده‌اند. اگر اندازهٔ میدان الکتریکی حاصل از بار q در فاصلهٔ a از آن برابر E باشد، اندازهٔ میدان الکتریکی خالص در نقطهٔ A چند برابر E است؟



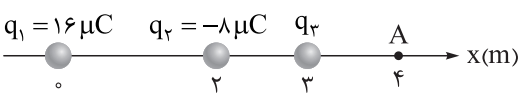
۱) $\sqrt{2}$

۲) $\sqrt{3}$

۳) ۲

۴) $\sqrt{5}$

۱۰۰- در شکل زیر، سه ذرهٔ باردار روی محور x ثابت شده‌اند. اگر بزرگی میدان الکتریکی خالص در نقطهٔ A، برابر $27\times10^3\ N/C$ باشد، بار q_3 چند میکروکولن می‌تواند باشد؟ $(k = 9\times10^9\ \frac{N.m^2}{C^2})$



۱) ۱

۲) -2

۳) ۳

۴) -4

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

شیمی یازدهم

۱۰۱- درستی یا نادرستی کدام گزینه با دیگر گزینه‌ها متفاوت است؟

۱) در دمای $25\ ^{\circ}C$، حالت فیزیکی ژرمانیم با دیگر عنصرهای هم‌دورهٔ آن متفاوت است.

۲) به طور معمول، فلزها واکنش‌پذیری زیاد و نافلزها، واکنش‌پذیری کمی دارند.

۳) گازهای نجیب، همگی عنصرهایی از دستهٔ p هستند که در گروه ۱۸ قرار دارند.

۴) عدد اتمی یک عنصر فلزی، به یقین بیشتر از عدد اتمی نافلز هم‌گروه آن است.

۱۰۲- در بین عنصرهایی با عددهای اتمی .....، عنصری با عدد اتمی .....، ..... را دارد.

۱) ۸، ۹، ۱۶ ـ کوچک‌تر ـ کم‌ترین خصلت نافلزی

۲) ۱۲، ۳۷، ۳۸ ـ بزرگ‌تر ـ بیشترین شعاع اتمی

۳) ۱۶، ۱۷، ۳۵ ـ کوچک‌تر ـ بیشترین واکنش‌پذیری

۴) ۱۵، ۲۳، ۳۲ ـ بزرگ‌تر ـ کم‌ترین تعداد الکترون‌های ظرفیتی

۱۰۳- کدام مورد، درست است؟

۱) در جدول تناوبی، هر دوره از سمت چپ، با یک فلز قلیایی شروع می‌شود.

۲) هر چه عدد اتمی یک عنصر بیشتر باشد، بار مثبت هستهٔ آن، بیشتر و در نتیجه شعاع اتمی آن کوچک‌تر است.

۳) فلز قلیایی خاکی یک دوره، نسبت به فلز قلیایی همان دوره، واکنش‌پذیری کم‌تری دارد.

۴) خارجی‌ترین زیرلایه در آرایش الکترونی اتم فلزهای واسطه، زیرلایه با $l = 2$ است.

۱۰۴- با افزایش عدد اتمی عنصرها در گروه هالوژن‌ها، کدام دو ویژگی آن‌ها با هم افزایش می‌یابد؟

۱) شمار الکترون‌های ظرفیت ـ واکنش‌پذیری

۲) دمای لازم برای واکنش با گاز هیدروژن ـ نقطهٔ ذوب

۳) نقطهٔ ذوب ـ خصلت نافلزی

۴) شعاع اتمی ـ شمار الکترون‌ها در خارجی‌ترین زیرلایهٔ اتم

۱۰۵- با توجه به شکل زیر که عنصرهای واسطهٔ دورهٔ چهارم با نمادهای فرضی A تا J را نشان می‌دهد، کدام موارد درست است؟



الف) A در تلویزیون رنگی و برخی شیشه‌ها وجود دارد.

ب) نماد شیمیایی همهٔ این عنصرها دوحرفی است.

پ) این عنصرها با از دست دادن الکترون و تشکیل کاتیون به آرایش گاز نجیب نمی‌رسند.

ت) واکنش‌پذیری عنصر I از عنصر J کم‌تر است.

۱) «الف» ـ «ب»

۲) «پ» ـ «ت»

۳) «الف» ـ «ت»

۴) «ب» ـ «پ»

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۰۶- آرایش الکترونی اتم a عنصر از دورهٔ چهارم، به زیرلایه‌ای با دو الکترون ختم می‌شود. a کدام است و چند درصد از این عنصرها، جزء عنصرهای اصلی‌اند؟

۱) ۱۰، ۲۰ ۲) ۸، ۲۵ ۳) ۱۰، ۳۰ ۴) ۸، ۵۰

۱۰۷- کدام مورد دربارهٔ طلا ($Au : [Xe]\ 4f^{14}5d^{10}6s^{1}$)، نادرست است؟

۱) در دورهٔ ششم جدول تناوبی قرار دارد و عدد اتمی آن برابر ۷۹ است.

۲) پرتوهای خورشیدی را بازتاب می‌کند و فلزی نرم است.

۳) آرایش الکترونی آن برخلاف اولین عنصر هم‌گروه آن، از قاعدهٔ آفبا پیروی نمی‌کند.

۴) استخراج آن از سنگ معدن، آثار زیان‌بار زیست‌محیطی بر جای می‌گذارد.

۱۰۸- کدام گزینه نادرست است؟

۱) برخی نافلزها مانند اکسیژن، نیتروژن، هیدروژن و گوگرد، به شکل آزاد در طبیعت دیده می‌شوند.

۲) فلزهای نقره، مس و پلاتین در طبیعت به حالت آزاد وجود دارند.

۳) در بین فلزها، تنها طلا به شکل کلوخه‌ها یا رگه‌های زردرنگ در خاک یافت می‌شود.

۴) فلزی که بیشترین مصرف در جهان را دارد، اغلب به حالت اکسید در طبیعت یافت می‌شود.

۱۰۹- در جدول زیر واکنش‌پذیری سه دسته از فلزها با هم مقایسه شده است. اگر فلز پتاسیم در دستهٔ A قرار گیرد، فلزهای مس، روی و طلا به ترتیب از راست به چپ، در کدام دسته‌ها قرار می‌گیرند؟

رفتار	واکنش‌پذیری		
	زیاد	کم	ناچیز
نام فلز	A	X	D

۱) X, D, D ۲) D, X, D ۳) D, D, X ۴) D, X, X

۱۱۰- اگر مقایسهٔ پایداری ترکیب‌های یونی حاصل از سه فلز X، Y و Z به صورت $Z < Y < X$ باشد، استخراج فلز ..... دشوارتر است و اگر X و Y، هم‌گروه و Y و Z هم‌دوره باشند، عدد اتمی فلز ..... کم‌تر است.

۱) Z _ X ۲) Y _ Z ۳) Y _ X ۴) X _ Z

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir



azmoon.kheilisabz.com

پاسخ‌نامهٔ تشریحی آزمون را ساعت ۱۶ از صفحهٔ شخصی خودتان در سایت آزمون خیلی سبز دریافت کنید.

اساتید، مشاوران و دانش‌آموزان گرامی؛

نظرات، پیشنهادات، انتقادات و بازخوردهای خود نسبت به سؤالات این آزمون را می‌توانید از طریق آیدی Kheilisabz_edit@ در همهٔ پیام‌رسان‌ها با ما به اشتراک بگذارید.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ‌نامه آزمون آزمایشی خیلی سبز

رشته ریاضی

پایه یازدهم	مرحله سوم
۰۶-۱۴۰۵	۱۳/شهریور/۱۴۰۵

ویژه یازدهمی‌های ۱۴۰۵

ویژگی‌های برنامه راهبردی آزمون‌های آزمایشی خیلی سبز در تابستان ۰۶-۱۴۰۵

۱- دوره دروس پایه دهم

۲- مطالعه بخشی از دروس پایه یازدهم

۳- امکان فرایند ترکیبی هر کدام از موارد فوق

مرحله / پایه	اول ۲مرداد	دوم ۲۳مرداد	سوم ۱۳ شهریور	چهارم ۳مهر
دهم	✓	✓	✓	✓
یازدهم	–	✓	✓	–

با توجه به موارد فوق، دفترچه آزمون خیلی سبز در این آزمون از ۲ قسمت تشکیل شده است که هر داوطلب باید در جلسه آزمون به یک یا دو قسمت (که قبلاً در پنل کاربری انتخاب کرده است) پاسخ دهد.

آزمون مرحله سوم (همین دفترچه‌ای که در دست دارید) ادامه پیشروی پایه دهم و یازدهم است.

تمامی سرفصل‌های یازدهم، مجدداً از مهر، در برنامه راهبردی دیده شده است.

Azmoonkheilisabz.com

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

آزمون آزمایشی خیلی سبز

ویژه یازدهمی‌های ۱۴۰۵

تیم اجرایی و تألیف آزمون	بیتا ابراهیمی ـ عادل حسینی ـ مینا کریم‌زاده

سرپرست تولید	الناز علی‌یاری‌زاده
ویراستاران فنی	نیلوفر اعتمادی ـ نیوشا پیمان ـ زهرا صفری الهه صفری ـ فاطمه علی‌اکبری ـ محیا غنی‌فرد ساناز فلاحی ـ نادره نازآوری ـ ساعده نمازی
رسام	ندا فخاری سارا گنجی آزادپور
صفحه‌آرایی	مریم حسین‌زاده ـ سپیده سخائی ـ الهام سهرابی طاهره صادق‌نژاد ـ مائده صبری ـ نیلوفر فرخجسته فاطمه قیاسوند ـ مهدیه گل‌پور ـ دریا لطفی

Azmoon.kheilisabz.com

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ‌نامه آزمون آزمایشی خیلی سبز

پایه یازدهم ـ مرحله سوم ـ ۱۳ شهریور ۱۴۰۵

پایه دهم

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا
ریاضی (۱)	مازیار احمدی‌ناو ـ میثم حصارکی ـ محسن علی‌نجاری
هندسه (۱)	امیرحسین ابومحبوب ـ سید عباس حسینی
فیزیک (۱)	یاشار انگوتی ـ نوید شاهی
شیمی (۱)	مهدی براتی ـ روح‌الله حاجی‌سلیمانی ـ ارژنگ خانلری ـ یاسر عبداللهی ـ محمد قهرمانی‌نژاد

نام درس	مسئول درس	گزینشگر	مؤلف پاسخ‌نامه	کارشناسان علمی	ویراستاران به ترتیب حروف الفبا
ریاضی (۱)	محسن علی‌نجاری	محسن علی‌نجاری	محمدرضا راسخ	علی افضل‌زاده سروش موئینی	محبوبه اصفهانی محمد بهرامی سهند محمدکریم‌نژاد
هندسه (۱)	امیرحسین ابومحبوب	امیرحسین ابومحبوب	امیرحسین ابومحبوب	سید عباس حسینی	منصور زرکش اصفهانی ماهان فنی‌فر ابوالفضل ناصری مریم نظری
فیزیک (۱)	نوید شاهی	یاشار انگوتی	علی محمدی	علیرضا جباری سعید محبی هادی نجفی	مدیا عیدی علیرضا جعفری آثار احسان محمدی ادریس محمدی امیر محمودی انزابی نادره نازآوری
شیمی (۱)	یاسر عبداللهی	یاسر عبداللهی	یاسر عبداللهی	مرتضی نصیرزاده محمدمهدی کریمیان یاشار ذریه	عرشیا شفیعی هادی عبادی محمد نوروزی‌مال

مدیر تألیف آزمون: دکتر فاطمه آقاجانپور

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

ریاضی دهم

۱ **کدام‌یک از روابط زیر بیانگر یک تابع نیست؟**

۱) رابطه‌ای که به ضلع یک مثلث متساوی‌الاضلاع، مساحت آن را نسبت می‌دهد.

۲) رابطه‌ای که به هر عدد حقیقی مثبت، ریشهٔ مرتبهٔ زوج و مثبت آن را نسبت می‌دهد.

۳) رابطه‌ای که به هر زاویه مانند α، مقدار $\sin\alpha$ را نسبت می‌دهد.

۴) رابطه‌ای که به هر عدد حقیقی مثبت، ریشهٔ چهارم آن را نسبت می‌دهد.

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint **قانون طلایی تابع یادتون نره:** هر ورودی فقط و فقط یه خروجی! بگردید دنبال اون گزینه‌ای که واسه یه عدد، دوتا جواب با علامت‌های مختلف بهتون می‌ده.

درس Box **اصلاً تابع یعنی چی؟**

بیایید با مفهوم جذاب «تابع» آشنا بشیم! فرض کنید دوتا گروه یا مجموعه داریم به اسم‌های A (مجموعهٔ مبدأ) و B (مجموعهٔ مقصد). رابطهٔ بین این دوتا گروه، فقط در صورتی می‌تونه با افتخار به خودش بگه «تابع» که یه قانون طلایی رو رعایت کنه: باید به تک‌تک اعضای مجموعهٔ اول یعنی A، دقیقاً و فقط یک خروجی مشخص از مجموعهٔ دوم یعنی B نسبت بده، نه کم‌تر و نه بیشتر!

نکته **چک‌لیست چهارمرحله‌ای تشخیص تابع:**

برای این‌که خیلی سریع و راحت تشخیص بدیم یه رابطه تابعه یا نه، کافیه این ۴تا شرط خودمونی رو روش چک کنیم:

- **همه باید تو بازی باشن:** توی مجموعهٔ A هیچ‌کس نباید بیکار بمونه! یعنی همهٔ اعضای A باید حتماً یه خروجی برای خودشون پیدا کنن.
- **دورویی ممنوع:** هیچ عضوی از A حق نداره هم‌زمان به دوتا (یا چندتا) خروجی متفاوت تو B وصل بشه. (هر ورودی، فقط یه خروجی!)
- **سینگل‌های مقصد مهم نیستن:** تو مجموعهٔ B ممکنه بعضی از اعضا اصلاً انتخاب نشن و به قول معروف تنها بمونن. این موضوع اصلاً برای تابع‌بودن ما مشکلی ایجاد نمی‌کنه.
- **انتخاب مشترک، مجازه:** هیچ ایرادی نداره اگه چندتا عضو مختلف از مجموعهٔ A، همگی برن سراغ یک خروجی مشترک تو مجموعهٔ B، (مثل چندتا دانش‌آموز مختلف که همشون تو یه کلاس می‌شینن!)

پاسخ خیلی تشریحی با توجه به تعریف تابع، تنها در گزینهٔ (۴) به ازای هر ورودی دو خروجی داریم که به معنای تابع‌نبودن آن رابطه است. هر عدد حقیقی مثبت دارای دو ریشهٔ چهارم با علامت‌های متفاوت است.

کتاب درسی **کدام‌یک از روابط زیر یک تابع را معلوم می‌کند؟ توضیح دهید.** *(ریاضی (۱) ـ تمرین ۱ صفحهٔ ۱۰۰ کتاب درسی)*

الف) رابطه‌ای که به ضلع یک مربع، محیط مربع را نسبت می‌دهد.

ب) رابطه‌ای که به هر فرد، دمای بدن او را در یک زمان معین نسبت می‌دهد.

ج) رابطه‌ای که به هر فرد، گروه خونی او را نسبت می‌دهد.

د) رابطه‌ای که به هر دانش‌آموز، دوستان او را نسبت می‌دهد.

ه) رابطه‌ای که به هر عدد، ریشه‌های دوم آن عدد را نسبت می‌دهد.

و) رابطه‌ای که به هر عدد، ریشهٔ سوم آن را نسبت می‌دهد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲ تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}2x^{۲}-۱ & ; \ x>-۱\\ \frac{x^{۲}}{۵}+۳ & ; \ x\le -۱\end{cases}$ مفروض است. حاصل $f(-\sqrt{۵})-f(\sqrt{۶})$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) -۱۱ ۳) -۷ ۴) ۱۳

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint در توابع چندضابطه‌ای عجله نکنید! اول ببینید عددی که قراره جای‌گذاری کنید تو کدوم محدوده قرار می‌گیره، بعد برید سراغ همون شاخه (ضابطه) و عدد رو بذارید توش.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ ابتدا توجه کنید که $-۱<\sqrt{۶}$ و $-\sqrt{۵}<-۱$ در نتیجه:

$$f(\sqrt{۶})=۲(\sqrt{۶})^{۲}-۱=۱۱$$
$$f(-\sqrt{۵})=\frac{(-\sqrt{۵})^{۲}}{۵}+۳=۴ \Rightarrow f(-\sqrt{۵})-f(\sqrt{۶})=۴-۱۱=-۷$$

امتحان نهایی

تابع $f(x)=\begin{cases}x^{۲} & x<۰\\ ۳ & x\ge ۰\end{cases}$ را رسم کنید، $f(-۴)$ و $f(۰)$ را به دست آورید. (سؤال ۱۱ ـ امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۳)

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳ در تابع $f=\{(a,۳),(۴,۲a-b),(۳,۵)\}$، دامنه و برد با هم برابرند. مقدار ab کدام است؟

۱) ۴۰ ۲) ۳۰ ۳) ۲۰ ۴) ۱۰

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint

خیلی ساده، اولی‌ها (دامنه) رو تو یه مجموعه و دومی‌ها (برد) رو تو یه مجموعهٔ دیگه بنویسید. چون این دوتا با هم برابرن، کافیه اعضا رو نظیربه‌نظیر مساوی هم قرار بدید.

درس Box

دامنه و برد تابع: وقتی یه تابع رو به شکل مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب (یعنی پرانتزهایی مثل (x,y)) بهمون می‌دن، خیلی راحت و سریع می‌تونیم دامنه و بردش رو مشخص کنیم.

دامنه (ورودی‌ها): اگر تمام عددهای اول (یا همون مؤلفه‌های اول) تو این زوج‌های مرتب رو جدا کنیم و تو یه مجموعه بریزیم، به اون مجموعه می‌گیم «دامنهٔ» تابع.

برد (خروجی‌ها): حالا اگه تمام عددهای دوم (یا همون مؤلفه‌های دوم) رو جدا کنیم و کنار هم بذاریم. مجموعه‌ای که ساخته می‌شه، همون «برد» تابعه.

پس یادتون باشه، اولی‌ها می‌شن دامنه، دومی‌ها می‌شن برد!

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا مجموعه‌های دامنه و برد تابع f را مشخص می‌کنیم:

$$D_f=\{a,۴,۳\}$$

$$R_f=\{۳,۲a-b,۵\}$$

گام دوم: با توجه به برابری مجموعه‌های دامنه و برد تابع f داریم:

$$\begin{cases} a=۵ \\ ۲a-b=۴ \end{cases} \xrightarrow{a=۵} ۱۰-b=۴ \Rightarrow b=۶$$

$$\Rightarrow ab=۵\times۶=۳۰$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴ مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $\frac{-(x^۲-۹)}{۳x+۲} \geq ۰$ کدام است؟

۱) $(-\infty,-۳]\cup(-\frac{۲}{۳},۳]$

۲) $(-\infty,-۳]\cup[۳,+\infty)$

۳) $(-\infty,-۳]\cup[-\frac{۲}{۳},۳]$

۴) $[-۳,-\frac{۲}{۳}]\cup[۳,+\infty)$

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint

ریشه‌های صورت و مخرج رو جداگانه پیدا کنید و بفرستیدشون تو جدول تعیین علامت، فقط حواستون به ریشه‌های مخرج باشه که کسر رو تعریف‌نشده می‌کنه.

درس Box

قواعد تعیین علامت ضرب و تقسیم عبارات:

- وقتی با عبارتی روبه‌رو هستیم که شامل ضرب یا تقسیم چند بخش مختلف است، بهترین راهکار این است که ابتدا وضعیت علامت هر جزء را به صورت مجزا بررسی کنیم و سپس با ترکیب نتایج، علامت کل عبارت را به دست آوریم.
- قاعدهٔ کلی در ضرب و تقسیم عبارات جبری به این صورت است که ترکیب دو عبارت با علامت‌های یکسان نتیجه‌ای مثبت، و ترکیب دو عبارت با علامت‌های متفاوت، نتیجه‌ای منفی خواهد داشت. علاوه بر این، چنان‌چه حداقل یکی از عوامل ضرب صفر شود، کل حاصل‌ضرب صفر خواهد شد. در مورد کسرها نیز باید دقت کرد که صفرشدن مخرج باعث می‌شود عبارت کلاً تعریف‌نشده در نظر گرفته شود.

نکته

تکنیک سرعتی در تعیین علامت:

برای سرعت‌بخشیدن، به فرایند تعیین علامت، کافی است تمام ریشه‌های مربوط به صورت و مخرج را یافته و آن‌ها را به ترتیب در جدول تعیین علامت قرار دهید. سپس با جای‌گذاری یک عدد دلخواه در یکی از بازه‌ها (مثلاً بازهٔ سمت راست جدول)، علامت آن بخش را مشخص کنید. برای به دست آوردن علامت سایر بازه‌ها، به طور معمول هنگام عبور از هر ریشه، علامت را قرینه می‌کنیم. دقت داشته باشید که یک استثنای بسیار مهم در این روند وجود دارد. در ریشه‌هایی که از عبارات توان‌دار زوج (به فرم $A^{۲k}$) یا قدرمطلق (به فرم $|A|$) به دست می‌آیند هنگام عبور از ریشه، علامت عبارت هیچ‌گونه تغییری نخواهد کرد و در هر دو سمت این نوع ریشه‌ها، علامت یکسان باقی می‌ماند.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا ریشه‌های صورت و مخرج عبارت را مشخص می‌کنیم:

$$x^۲-۹=۰ \Rightarrow x=\pm ۳$$
$$۳x+۲=۰ \Rightarrow x=-\frac{۲}{۳}$$

گام دوم: حال با توجه به نکته، جدول تعیین علامت را می‌نویسیم و مجموعهٔ جواب‌ها را مشخص می‌کنیم:

x		-۳		$-\frac{۲}{۳}$		۳	
$-\frac{(x^۲-۹)}{۳x+۲}$	$+$	۰	$-$	ت‌ن	$+$	۰	$-$

$$\Rightarrow x\in(-\infty,-۳]\cup(-\frac{۲}{۳},۳]$$

تیزپاری

با کمک گزینه‌ها نیز می‌توانستیم به پاسخ صحیح برسیم. مثلاً با جای‌گذاری $x=۴$ در نامعادله داریم:

$$x=۰ \geq -\frac{۷}{۱۴}$$

پس گزینه‌هایی که شامل $x=۴$ هستند یعنی گزینهٔ (۲) و (۴) حذف می‌شوند.

هم‌چنین بین دو گزینهٔ (۱) و (۳)، $x=-\frac{۲}{۳}$ مخرج عبارت را صفر می‌کند و در نتیجه گزینهٔ (۳) نیز رد می‌شود و پاسخ، گزینهٔ (۱) است.

امتحان نهایی

مجموعه‌جواب نامعادلهٔ $\frac{-(x-۴)^۲}{۲x+۱} \geq ۰$ را به دست آورید. *(سؤال ۹ ـ امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۳)*

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵ سهمی $y = ax^2 + bx - c$، محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۱۲ و محور xها را در نقاطی به طول‌های ۳ و -4 قطع می‌کند. حاصل $ac - b$ کدام است؟

۱) ۱۱
۲) -11
۳) ۱۳
۴) -13

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint

یادتون باشه وقتی محل برخورد با محور xها رو داریم، راحت می‌تونیم اسکلت اصلی معادلهٔ سهمی رو بسازیم، حالا فقط کافیه اون یکی نقطه رو توش جای‌گذاری کنید تا ضریب مجهول خودش رو نشون بده!

درس Box

معادلهٔ سهمی با استفاده از ریشه‌ها:

معادلهٔ هر سهمی که محور x را در دو نقطه به طول‌های x_1 و x_2 قطع می‌کند، به صورت $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ است که $a \neq 0$.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: با توجه به درس‌باکس معادلهٔ سهمی را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$y = a(x + 4)(x - 3)$$

گام دوم: سهمی محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۱۲ قطع می‌کند، پس نقطهٔ $(0, 12)$ روی آن قرار دارد و می‌توان نوشت:

$$12 = a(0 + 4)(0 - 3) \Rightarrow 12 = -12a \Rightarrow a = -1$$

$$\Rightarrow y = -1(x + 4)(x - 3) \Rightarrow y = -x^2 - x + 12$$

گام سوم: حال با توجه به معادلهٔ به‌دست‌آمده، مقادیر $c = -12$ و $b = -1$ و $a = -1$ است و داریم:

$$ac - b = (-1)(-12) - (-1) = 12 + 1 = 13$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶ نقاط $A(2a-1,a+2)$ و $B(5-2a,a+2)$ دو نقطهٔ متمایز با مؤلفه‌های صحیح و مثبت روی یک سهمی هستند. اگر نقطهٔ $S(b-2,b)$ رأس این سهمی باشد، حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint هر وقت روی سهمی دو تا نقطهٔ هم‌عرض دیدید، بدونید که طول رأس سهمی میانگین طول اون‌هاست! از این میانگین‌گیری استفاده کنید تا مختصات رأس سریع به دست بیاد.

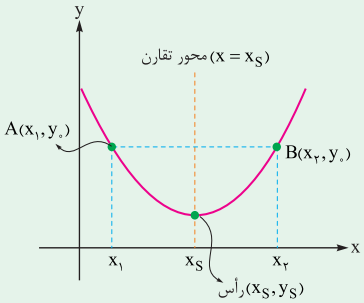
نکته **نقاط هم‌عرض و ارتباط آن‌ها با رأس سهمی:**

به دلیل وجود محور تقارن در نمودار توابع درجه‌دوم (سهمی)، اگر روی یک سهمی دو نقطهٔ متمایز پیدا کنیم که دارای عرض‌های یکسان باشند (اصطلاحاً نقاط هم‌عرض نامیده شوند)، این دو نقطه نسبت به محور تقارن سهمی کاملاً قرینهٔ یکدیگرند.

این ویژگی یک کاربرد بسیار مهم دارد: طول رأس سهمی (x_S) همواره میانگین طول‌های هر دو نقطهٔ هم‌عرض است. یعنی اگر دو نقطهٔ $A(x_1,y_0)$ و $B(x_2,y_0)$ روی سهمی باشند، برای پیداکردن طول رأس سهمی کافی است از طول‌های این دو نقطه، میانگین بگیریم:

$$x_S=\frac{x_1+x_2}{2}$$

یکی از معروف‌ترین حالت‌های استفاده از این نکته، زمانی است که ریشه‌های معادلهٔ سهمی (محل برخورد با محور x) را در اختیار داریم. از آن‌جا که در هر دو ریشه، مقدار y برابر صفر است (نقاط هم‌عرض هستند)، طول رأس سهمی دقیقاً میانگین دو ریشهٔ آن خواهد بود:



پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** با توجه به نکته، چون عرض نقاط A و B برابر هستند، داریم:

$$x_S=\frac{x_A+x_B}{2}\Rightarrow x_S=\frac{2a-1+5-2a}{2}\Rightarrow x_S=2\Rightarrow b-2=2\Rightarrow b=4\Rightarrow S(2,4)$$

گام دوم: مطابق فرض، مؤلفه‌های نقاط داده‌شده سهمی صحیح و مثبت هستند، پس:

$$\begin{cases}5-2a>0\Rightarrow a<\frac{5}{2}\\ 2a-1>0\Rightarrow a>\frac{1}{2}\end{cases}\xrightarrow{\cap}\frac{1}{2}<a<\frac{5}{2}\Rightarrow a=\{1,2\}$$

به ازای $a=2$ عرض نقاط A و B با عرض رأس سهمی برابر می‌شود که غیر قابل قبول است، پس مقدار $a=1$ قابل قبول است.

گام سوم: خواستهٔ سؤال برابر می‌شود با:

$$a+b=1+4=5$$

کنکور نقاط $A(2a+3,a-2)$ و $B(7-2a,a-2)$ دو نقطهٔ متمایز با مؤلفه‌های طبیعی از یک سهمی هستند. اگر نقطهٔ $S(b,b-2)$ رأس این سهمی باشد، فاصلهٔ نقطهٔ برخورد سهمی با محور عرض‌ها تا مبدأ مختصات کدام است؟

(سؤال ۵ کنکور ریاضی ۱۴۰۴ ـ نوبت دوم)

۱) $\frac{13}{4}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{8}$ ۴) $\frac{13}{8}$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷ بازهٔ $(-۱,-\frac{۱}{۲})$ بزرگ‌ترین بازه‌ای است که سهمی $y=-۲x^۲-۳x+c$ بالای نمودار تابع $y=\frac{۲|x|}{x}$ قرار می‌گیرد. مقدار c کدام است؟

۱) -۱ ۲) -۲ ۳) -۳ ۴) -۴

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint اول ببینید تو بازهٔ داده‌شده، قدرمطلق چه‌طور رفتار می‌کنه و ساده‌اش کنید. بعد یه نامعادلهٔ درجه‌دو می‌سازیم که ریشه‌هاش دقیقاً همون مرزهای بازهٔ ما هستن!

درس Box

تعیین علامت چندجمله‌ای درجه‌دوم:

چندجمله‌ای درجه‌دوم $ax^۲+bx+c$ را در نظر بگیرید $(a\neq ۰)$، هنگام تعیین علامت این چندجمله‌ای سه حالت ممکن است پیش بیاید. فرض کنید $\Delta=b^۲-۴ac$.

حالت اول: $\Delta>۰$؛ در این حالت معادلهٔ $ax^۲+bx+c=۰$ دو جواب دارد. این جواب‌ها را $x_۱$ و $x_۲$ بنامید و فرض کنید $x_۱<x_۲$، در این صورت جدول تعیین علامت $ax^۲+bx+c$ به شکل زیر است:

x	$-\infty$		$x_۱$		$x_۲$		$+\infty$
$ax^۲+bx+c$	موافق علامت a		۰	مخالف علامت a	۰	موافق علامت a	

حالت دوم: $\Delta=۰$؛ در این حالت معادلهٔ $ax^۲+bx+c=۰$ یک جواب (ریشهٔ مضاعف) دارد. این جواب را $x_۱$ بنامید. در این صورت جدول تعیین علامت $ax^۲+bx+c$ به شکل زیر است:

x	$-\infty$		$x_۱$		$+\infty$
$ax^۲+bx+c$	موافق علامت a		۰	موافق علامت a	

حالت سوم: $\Delta<۰$؛ در این صورت معادلهٔ $ax^۲+bx+c=۰$ جواب حقیقی ندارد. جدول تعیین علامت $ax^۲+bx+c$ به شکل زیر است:

x	$-\infty$		$+\infty$
$ax^۲+bx+c$	موافق علامت a		

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا توجه کنید که در بازهٔ $(-۱,-\frac{۱}{۲})$ تابع $y=\frac{۲|x|}{x}$ به صورت $y=-۲$ در می‌آید. حال برای نامعادلهٔ ذکرشده داریم:

$$-۲x^۲-۳x+c>-۲ \Rightarrow ۲x^۲+۳x-(c+۲)<۰$$

گام دوم: چون بازهٔ $(-۱,-\frac{۱}{۲})$ بزرگ‌ترین بازه‌ای است که در آن نامعادلهٔ فوق برقرار است، پس $x_۱=-۱$ و $x_۲=-\frac{۱}{۲}$ ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲+۳x-(c+۲)=۰$ هستند و داریم:

$$x_۱x_۲=\frac{-(c+۲)}{۲} \Rightarrow \frac{۱}{۲}=\frac{-(c+۲)}{۲} \Rightarrow -c-۲=۱ \Rightarrow c=-۳$$

گول نخوری دقت کنید که حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ $-۲x^۲-۳x+c=-۲$ را در نظر بگیرید. اگر به اشتباه حاصل ضرب ریشه‌های خود سهمی را در نظر بگیرید به گزینهٔ (۱) می‌رسید:

$$-۲x^۲-۳x+c=۰ \Rightarrow -\frac{c}{۲}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow c=-۱$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

کنکور

بازهٔ $(0, \frac{1}{2})$، بزرگ‌ترین بازه‌ای است که نمودار تابع $y = 2x^2 + \frac{3}{2}x + c$ پایین نمودار تابع $y = \frac{x}{|x|}$ قرار می‌گیرد. مقدار c کدام است؟ (سؤال ۱۱۵ کنکور تجربی ۱۴۰۳ ـ نوبت دوم)

۱) $-\frac{3}{4}$

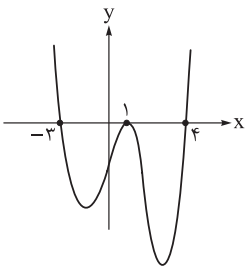
۲) $-\frac{1}{2}$

۳) $-\frac{1}{4}$

۴) $-\frac{3}{8}$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸ اگر نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت زیر باشد، مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $\frac{-(x+۳)}{f(x)} \geq ۰$ کدام است؟



۱) $(-\infty,۴)-\{-۳,۱\}$

۲) $(۱,۴)$

۳) $(-۳,۱)$

۴) $(۴,+\infty)$

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint

واسه پیداکردن ریشه‌های مخرج، کافیه به محل برخورد نمودار با محور xها نگاه کنید! بعد ریشهٔ صورت رو هم بیارید تا با هم تو یه جدول تعیین علامت مرتب کار رو تمام کنیم.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: ابتدا ریشه‌های صورت و مخرج را مشخص می‌کنیم:

$$x+۳=۰ \Rightarrow x=-۳$$

$$f(x)=۰ \Rightarrow x=-۳ \ , \ x=۱ \ , \ x=۴$$

گام دوم: حال به کمک درس‌باکس‌های قبلی و با توجه به مرتبهٔ ریشه‌ها، جدول تعیین علامت را رسم و مجموعه جواب‌های نامعادلهٔ خواسته‌شده را مشخص می‌کنیم:

$$-\frac{(x+۳)}{f(x)} \geq ۰$$

x		-۳		۱		۴	
$\frac{-(x+۳)}{f(x)}$	$+$	تعریف نشده	$+$	تعریف نشده	$+$	تعریف نشده	$-$

$$\Rightarrow x \in (-\infty,۴)-\{-۳,۱\}$$

تیزبازی

از خود گزینه‌ها کمک می‌گیریم، برای مثال با جای‌گذاری $x=۰$، داریم:

$$-\frac{۳}{f(۰)}=\frac{-۳}{\text{عدد منفی}}>۰$$

پس یکی از گزینه‌های (۱) یا (۳) که شامل $x=۰$ هستند، پاسخ صحیح است.

هم‌چنین با جای‌گذاری $x=۲$ داریم:

$$\frac{-(۲+۳)}{f(۲)}=\frac{-۵}{\text{عددی منفی}}>۰$$

↓ از روی نمودار منفی

پس گزینهٔ (۳) نیز به علت نداشتن $x=۲$ رد می‌شود و جواب گزینهٔ (۱) است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹ مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $۳<|۳-(۲x+۱)|+۱<۸$ به صورت $(a,b)-[۰,۲]$ است. مقدار $-\frac{۱}{a}-b+۱$ کدام است؟

۱) -۱
۲) $-۲/۵$
۳) $-۰/۴$
۴) $-۳/۱$

$۳<|۳-(۲x+۱)|+۱<۸ \Rightarrow ۲<|۳-(۲x+۱)|<۷$

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint

طبق خاصیت قدرمطلق، عبارت داخلش رو بین مثبت و منفی عدد اون طرف نامعادله گیر بندازید! حالا کم‌کم x رو تنها کنید تا محدوده‌اش مشخص بشه.

درس Box

قواعد و تکنیک‌های حل نامعادلات قدرمطلقی: جهت یافتن مجموعه جواب در نامعادلات شامل عبارت‌های قدرمطلقی، بهره‌گیری از مفهوم پایهٔ قدرمطلق و خواص کلیدی زیر بسیار کارگشا خواهد بود:

- در شرایطی که $a>۰$ باشد، نامعادلهٔ $|x|<a$ معادل با بازهٔ $-a<x<a$ است. اما چنان‌چه $a\leq ۰$ باشد، این نامعادله فاقد هر گونه جواب حقیقی خواهد بود.
- برای $a\geq ۰$، رابطهٔ $|x|\leq a$ به فرم $-a\leq x\leq a$ بسط داده می‌شود. در مقابل، اگر $a<۰$ در نظر گرفته شود، هیچ x حقیقی در این نامعادله صدق نمی‌کند (مجموعه جواب تهی است).
- هرگاه $a\geq ۰$ فرض شود، جواب‌های نامعادلهٔ $|x|>a$ شامل دو محدودهٔ مجزای $x>a$ یا $x<-a$ می‌گردد. ولی اگر a مقداری منفی $(a<۰)$ داشته باشد، همواره این نامعادله برقرار بوده و پاسخ آن تمام اعداد حقیقی $(\mathbb{R})$ است.
- در حالتی که $a\geq ۰$ باشد، حل نامعادلهٔ $|x|\geq a$ به صورت اجتماع دو بازهٔ $x\geq a$ یا $x\leq -a$ نوشته می‌شود. ضمناً اگر $a\leq ۰$ باشد، گسترهٔ جواب‌های این نامعادله کل مجموعهٔ اعداد حقیقی یعنی $\mathbb{R}$ را در بر می‌گیرد.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا نامعادلهٔ سمت راست را به کمک درس‌باکس حل می‌کنیم:

$$|۳-(۲x+۱)|<۷ \Rightarrow -۷<۳-(۲x+۱)<۷ \Rightarrow -۱۰<-(۲x+۱)<۴$$

$$\Rightarrow -۴<۲x+۱<۱۰ \Rightarrow -\frac{۵}{۲}<x<\frac{۹}{۲}\ (۱)$$

گام دوم: هم‌چنین برای نامعادلهٔ سمت چپ داریم:

$$|۳-(۲x+۱)|>۲ \Rightarrow \begin{cases} ۳-(۲x+۱)>۲ \Rightarrow ۲x+۱<۱ \Rightarrow x<۰ & (۲) \\ \text{یا} \\ ۳-(۲x+۱)<-۲ \Rightarrow ۲x+۱>۵ \Rightarrow x>۲ & (۳) \end{cases}$$

گام سوم: از اشتراک مجموعهٔ (۱) با اجتماع مجموعه‌های (۲) و (۳) داریم:

$$(۱)\cap((۲)\cup(۳)) \Rightarrow x\in(-\frac{۵}{۲},۰)\cup(۲,\frac{۹}{۲}) \Rightarrow x\in(-\frac{۵}{۲},\frac{۹}{۲})-[۰,۲]$$

$$\Rightarrow a=-\frac{۵}{۲}\ ,\ b=\frac{۹}{۲} \Rightarrow -\frac{۱}{a}-b+۱=\frac{۲}{۵}-\frac{۹}{۲}+۱=-۳/۱$$

یه‌جور دیگه

$$۳<|۲-۲x|+۱<۸ \Rightarrow ۲<۲|x-۱|<۷ \Rightarrow ۱<|x-۱|<\frac{۷}{۲}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۱<x-۱<\frac{۷}{۲} \Rightarrow ۲<x<\frac{۹}{۲} \\ \text{یا} \\ -\frac{۷}{۲}<x-۱<-۱ \Rightarrow -\frac{۵}{۲}<x<۰ \end{cases} \xrightarrow{\text{اجتماع}} x\in(-\frac{۵}{۲},\frac{۹}{۲})-[۰,۲]$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۰ اگر دامنهٔ تابع خطی f برابر با $[-۱,۲]$ و برد آن $[۰,۱]$ باشد، مقدار $f(۱)$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۲}{۵}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint

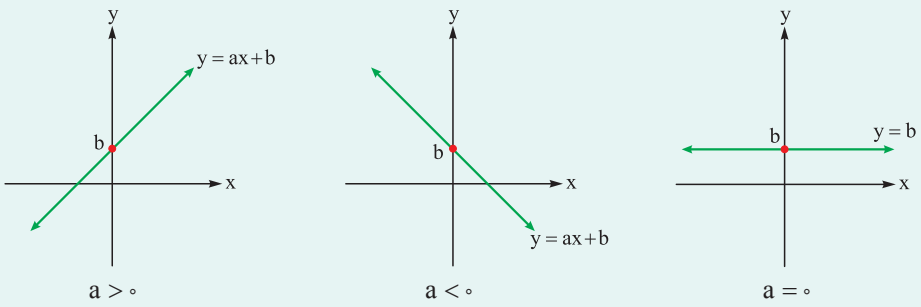
تو توابع خطی، سر و ته بازهٔ دامنه، دقیقاً وصل می‌شن به سر یا ته بازهٔ برد!

درس Box

معرفی تابع خطی و بررسی نمودار آن: به تابعی که ضابطهٔ استاندارد آن به صورت $f(x)=ax+b$ بیان می‌شود، در ریاضیات «تابع خطی» می‌گویند.

در صورتی که دامنهٔ این تابع شامل تمام اعداد حقیقی (مجموعهٔ $\mathbb{R}$) باشد، نمودار آن بر روی دستگاه مختصات یک خط کاملاً راست خواهد بود. در این معادله، ضریب a بیانگر شیب خط و مقدار b نشان‌دهندهٔ عرض از مبدأ (محل برخورد خط با محور y) است. وضعیت برد این تابع مستقیماً به مقدار شیب آن وابسته است:

- در حالتی که خط دارای شیب باشد (یعنی $a\neq ۰$)، برد تابع نامحدود بوده و برابر با کل مجموعهٔ $\mathbb{R}$ است.
- در حالتی که خط کاملاً افقی و بدون شیب باشد (یعنی $a=۰$)، خروجی تابع همواره یک مقدار ثابت است و برد آن تنها شامل مجموعهٔ تک‌عضوی $\{b\}$ خواهد بود.



نکته

تعیین برد تابع خطی در دامنه‌های محدودشده: زمانی که دامنهٔ تابع خطی $f(x)=ax+b$ روی بازهٔ مشخصی محدود می‌شود، برای یافتن برد تابع باید رفتار آن را براساس علامت شیب (a) تحلیل کنیم.

حالت اول: تابع با شیب مثبت $(a>۰)$ در این شرایط، تابع رفتار صعودی دارد؛ بنابراین مقادیر متناظر ابتدا و انتهای بازهٔ دامنه، به همان ترتیب در برد نیز قرار می‌گیرند:

- اگر دامنه، بازهٔ $[m,n]$ باشد، برد تابع بازهٔ $[f(m),f(n)]$ خواهد بود.
- اگر دامنه، بازهٔ $[m,+\infty)$ باشد، برد تابع بازهٔ $[f(m),+\infty)$ خواهد بود.
- اگر دامنه، بازهٔ $(-\infty,m]$ باشد، برد تابع بازهٔ $(-\infty,f(m)]$ خواهد بود.

حالت دوم: تابع با شیب منفی $(a<۰)$ در این حالت، تابع رفتاری نزولی دارد؛ به همین دلیل جای ابتدا و انتهای بازه، هنگام محاسبهٔ برد معکوس می‌شود:

اگر دامنه، بازهٔ $[m,n]$ باشد، برد تابع بازهٔ $[f(n),f(m)]$ خواهد بود.

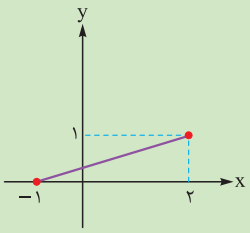
اگر دامنه، بازهٔ $[m,+\infty)$ باشد، برد تابع بازهٔ $(-\infty,f(m)]$ خواهد بود.

اگر دامنه، بازهٔ $(-\infty,m]$ باشد، برد تابع بازهٔ $[f(m),+\infty)$ خواهد بود.

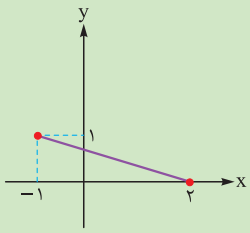
قاعدهٔ کلی: مستقل از مثبت یا منفی بودن شیب، چنان‌چه مرز یک بازه، در دامنهٔ تابع «باز» در نظر گرفته شده باشد (استفاده از پرانتز)، مرز متناظر آن در خروجی برد نیز حتماً باید «باز» باقی بماند.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** برای تابع خطی f با توجه به دامنه و برد آن دو حالت زیر را برای نمودار آن داریم:



(۱)



(۲)

گام دوم: ضابطهٔ تابع f در نمودار (۱) به صورت زیر است:

$$f(x)=ax+b \Rightarrow \begin{cases} f(-1)=0 \Rightarrow -a+b=0 \Rightarrow a=b \\ f(2)=1 \Rightarrow 2a+b=1 \Rightarrow 3a=1 \Rightarrow a=b=\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3} \Rightarrow f(1)=\frac{2}{3}$$

گام سوم: به طور مشابه برای نمودار (۲) نیز می‌توان نوشت:

$$f(x)=ax+b \Rightarrow \begin{cases} f(2)=0 \Rightarrow 2a+b=0 \\ f(-1)=1 \Rightarrow -a+b=1 \Rightarrow -3a=1 \Rightarrow a=-\frac{1}{3}\ ,\ b=\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)=-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3} \Rightarrow f(1)=\frac{1}{3}$$

با توجه به گزینه‌ها، پاسخ صحیح گزینهٔ (۱) است.

کتاب درسی

نمودار تابعی را رسم کنید که دامنهٔ آن [۰,۲] و برد آن [−۲,۱] باشد. چه تعداد از این‌گونه توابع می‌توان رسم کرد؟

(ریاضی (۱) ـ تمرین ۱۷ صفحهٔ ۱۰۸ کتاب درسی)

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۱ اگر $f=\{(b,b-۲),(۲,-k^۲+k),(k,-۶)\}$ تابعی ثابت، g تابعی همانی با دامنهٔ $\mathbb{R}$ و $g(۳a-۱)=a+۲$ باشد، اختلاف مقادیر ممکن برای عبارت $۲a+b-k$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

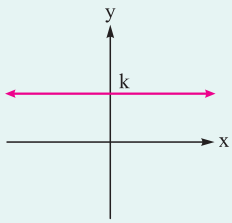
پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint یادتون باشه تابع ثابت همیشه یه خروجی تکراری داره و تابع همانی مثل آینه عمل می‌کنه و خود ورودی رو پس می‌ده، همین دوتا ویژگی رو تبدیل به معادله کنید تا مجهولات پیدا بشن!

درس Box

معرفی تابع ثابت و ویژگی‌های آن:

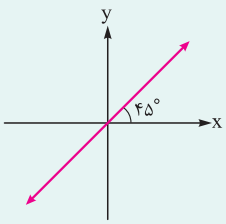
تابع ثابت به تابعی گفته می‌شود که خروجی آن فارغ از نوع ورودی، همواره یک مقدار مشخص و بدون تغییر است. به بیان ریاضی، برد این تابع تنها از یک عضو تشکیل شده است.



اگر تابع f را یک تابع ثابت در نظر بگیریم، فرمول یا ضابطهٔ آن به صورت $f(x)=k$ نوشته می‌شود؛ که در آن k نمایانگر یک عدد حقیقی ثابت است. در شرایطی که دامنهٔ این تابع تمام اعداد حقیقی (مجموعهٔ $\mathbb{R}$) باشد، نمودار آن به شکل یک خط کاملاً افقی و موازی با محور طول‌ها (محور x) رسم می‌شود که از نقطهٔ k روی محور عرض‌ها می‌گذرد.

آشنایی با تابع همانی:

تابع همانی تابعی است که مانند یک آینه عمل می‌کند؛ یعنی هیچ تغییری روی ورودی‌های خود اعمال نمی‌کند و هر مقداری که از دامنه به آن داده شود، دقیقاً همان مقدار را در برد به عنوان خروجی تحویل می‌دهد. از این رو، در تابع همانی همواره دامنه و برد با یکدیگر برابر هستند.



چنان‌چه دامنهٔ این تابع مجموعهٔ اعداد حقیقی در نظر گرفته شود، ضابطهٔ آن به صورت $y=x$ (یا $f(x)=x$) خواهد بود. نمودار چنین تابعی، یک خط راست است که از مبدأ مختصات عبور کرده و به عنوان نیمساز ربع اول و سوم شناخته می‌شود؛ بنابراین با بخش مثبت محور x زاویهٔ دقیق ۴۵ درجه می‌سازد.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا با توجه به این‌که f تابعی ثابت است، داریم:

$$b-۲=-۶ \Rightarrow b=-۴$$

$$-k^۲+k=-۶ \Rightarrow k^۲-k-۶=۰ \Rightarrow k=۳ \ , \ k=-۲$$

گام دوم: هم‌چنین g تابعی همانی است:

$$۳a-۱=a+۲ \Rightarrow ۲a=۳ \Rightarrow a=\frac{۳}{۲}$$

گام سوم: حال، اختلاف مقادیر ممکن برای $۲a+b-k$ را مشخص می‌کنیم:

$$(۱): ۲a+b-k=۲(\frac{۳}{۲})-۴-۳=-۴$$

$$(۲): ۲a+b-k=۲(\frac{۳}{۲})-۴+۲=۱$$

$$|(۱)-(۲)|=|-۴-۱|=|-۵|=۵$$

تیزبازی چون مقادیر a و b ثابت بودن، کافی بود اختلاف مقادیر ممکن برای k رو حساب کنی:

$$|۳-(-۲)|=۵$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۲ مساحت سطح محدود به نمودارهای توابع $y=|x-۲|-۱$ و $y=-|x-۲|+۳$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint

نمودارهای توابع قدرمطلقی رو با انتقال افقی و عمودی رسم کنید تا شکل هندسی‌مون ساخته بشه. حالا فقط کافیه نقاط برخوردشون رو پیدا کنید و مساحت شکل رو حساب کنید.

درس Box

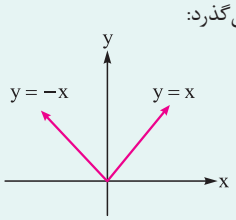
معرفی تابع قدرمطلق:

تابع قدرمطلق، تابعی است که به هر ورودی از دامنه‌اش، مقدار قدرمطلق آن را نسبت می‌دهد. اگر این تابع را با f نشان دهیم، ضابطهٔ جبری آن به صورت $f(x)=|x|$ بیان می‌شود.

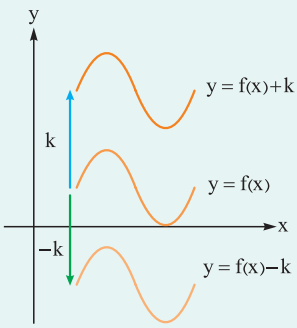
در صورتی که دامنهٔ این تابع شامل تمام اعداد حقیقی $(\mathbb{R})$ باشد، می‌توان ضابطهٔ آن را به صورت یک تابع دوضابطه‌ای به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$f(x)=|x|=\begin{cases}x & ; \ x\geq ۰\\ -x & ; \ x<۰\end{cases}$$

نمودار این تابع از دو نیم‌خط تشکیل شده است که به شکل حرف V درآمده و از مبدأ مختصات می‌گذرد:



انتقال عمودی توابع:



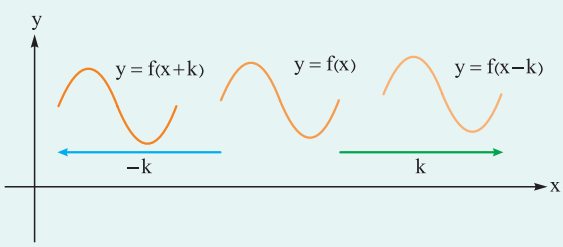
در انتقال عمودی، تغییرات مستقیماً بر روی خروجی تابع (یعنی مقادیر y) اعمال می‌شوند و نمودار در راستای محور عرض‌ها جابه‌جا می‌گردد. فرض کنید نمودار تابع $f(x)$ را داریم و k یک عدد حقیقی مثبت $(k>۰)$ است:

- برای رسم نمودار تابع $y=f(x)+k$: کافی است نمودار اصلی f را بدون تغییر شکل، دقیقاً k واحد به سمت **بالا** منتقل کنیم.
- برای رسم نمودار تابع $y=f(x)-k$: کافی است نمودار اصلی f را k واحد به سمت **پایین** منتقل کنیم.

انتقال افقی توابع:

برخلاف انتقال عمودی، در انتقال افقی تغییرات بر روی ورودی تابع (یعنی متغیر x) اعمال می‌شود و نمودار در راستای محور طول‌ها حرکت می‌کند. با فرض داشتن تابع $f(x)$ و مقدار مثبت $k>۰$:

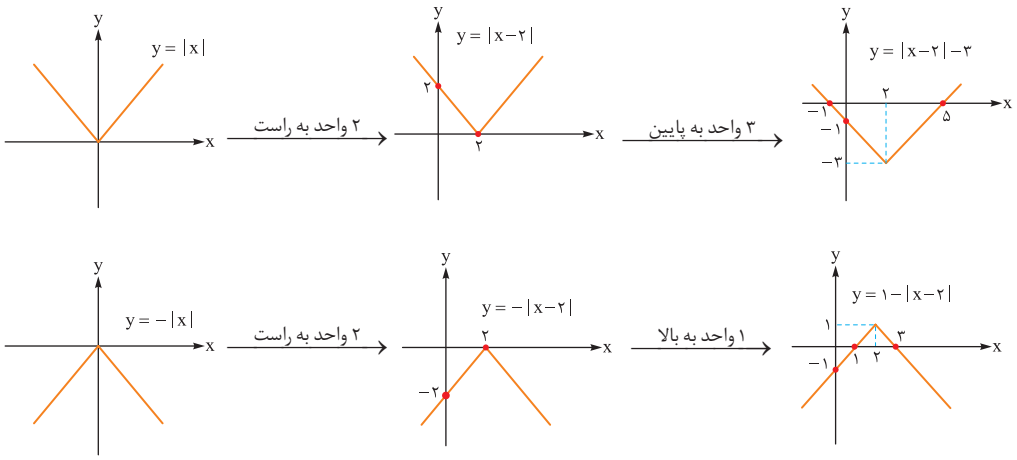
- برای رسم نمودار $y=f(x+k)$، باید کل نمودار f را به اندازهٔ k واحد به سمت **چپ** منتقل کنیم (تغییر در جهت منفی محور x).
- برای رسم نمودار $y=f(x-k)$، باید کل نمودار f را به اندازهٔ k واحد به سمت **راست** منتقل کنیم (تغییر در جهت مثبت محور x).



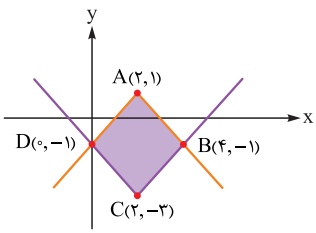
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: ابتدا نمودارهای توابع داده‌شده را با انتقال‌های افقی و عمودی از روی نمودارهای توابع $y=|x|$ و $y=-|x|$ رسم می‌کنیم:



گام دوم: حال دو نمودار را روی یک دستگاه مختصات رسم کرده و مختصات نقاط برخورد را مشخص می‌کنیم:



$$B: x \geq 2: \quad x-2-3=1-(x-2) \Rightarrow 2x=8 \Rightarrow x=4$$

گام سوم: ناحیهٔ محدود به نمودار دو تابع، مربع ABCD است که مساحت آن برابر است با:

$$S_{ABCD}=\frac{AC\times BD}{2}=\frac{4\times 4}{2}=8$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۳ کدام انتقال‌های متوالی، نمودار تابع $y = x^۲ + ۳x$ را بر نمودار تابع $y = x^۲ - x$ منطبق می‌کنند؟

الف) ۲ واحد به چپ

ب) ۲ واحد به راست

ج) ۲ واحد به پایین

د) ۲ واحد به بالا

۱) الف ـ د
۲) ب ـ د
۳) الف ـ ج
۴) ب ـ ج

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint راحت‌ترین راه واسه فهمیدن این‌که نمودار چه‌قدر جابه‌جا شده، اینه که مختصات رأس هر دو سهمی رو پیدا کنید. ببینید از رأس اولی تا رأس دومی چه‌قدر و کدوم طرفی رفتیم!

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** ابتدا ضابطه‌های داده‌شده را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$y = x^۲ + ۳x = (x + \frac{۳}{۲})^۲ - \frac{۹}{۴}$$

$$y = x^۲ - x = (x - \frac{۱}{۲})^۲ - \frac{۱}{۴}$$

گام دوم: حال از روی ضابطه‌های بازنویسی‌شده، برای این‌که نمودار $y = x^۲ + ۳x$ بر روی نمودار $y = x^۲ - x$ منطبق شود، باید ۲ واحد به راست $(x \to x - ۲)$ و ۲ واحد به بالا $(y \to y - ۲)$ منتقل شود:

$$y = (x - ۲ + \frac{۳}{۲})^۲ - \frac{۹}{۴} + ۲ = (x - \frac{۱}{۲})^۲ - \frac{۱}{۴} = x^۲ - x$$

یه‌جور دیگه با مشخص‌کردن رأس سهمی‌های داده‌شده و انتقال‌های آن‌ها برای منطبق‌شدن روی هم می‌توان به سؤال پاسخ داد:

$$y_۱ = x^۲ + ۳x \Rightarrow S_۱(-\frac{۳}{۲}, -\frac{۹}{۴})$$

$$y_۲ = x^۲ - x \Rightarrow S_۲(\frac{۱}{۲}, -\frac{۱}{۴})$$

x: از $-\frac{۳}{۲}$ به $\frac{۱}{۲}$ (۲ واحد به راست)

y: از $-\frac{۹}{۴}$ به $-\frac{۱}{۴}$ (۲ واحد به بالا)

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۴ با جایگشت حروف کلمهٔ «NEGARIN»، چند کلمهٔ هفت‌حرفی می‌توان ساخت که حرف دوم و ششم آن N باشد؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۶۰

۳) ۱۶۰ ۴) ۸۰

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint اول تکلیف اون حروفی که جاشون ثابته رو روشن کنید و بذاریدشون سر جاشون. بعد برای جاهای خالی، از اصل ضرب استفاده کنید.

درس Box

جایگشت‌های n شیء متمایز:

وقتی قصد داریم n شیء کاملاً متفاوت را در یک ردیف خطی کنار یکدیگر قرار دهیم، به هر حالت ممکن از این چیدمان، یک «جایگشت» از آن اشیا گفته می‌شود.

برای محاسبهٔ مجموع تمام حالت‌هایی که می‌توانیم این n شیء را جابه‌جا کرده و در یک ردیف بچینیم. از یک رابطهٔ بسیار ساده در ترکیبات استفاده می‌کنیم: تعداد کل این جایگشت‌ها دقیقاً برابر با $n!$ (ان فاکتوریل) است.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا جایگاه حروف N را مشخص می‌کنیم:

_ N _ _ _ N _

گام دوم: حال برای ۵ جایگاه باقی‌مانده، بقیهٔ حروف را قرار می‌دهیم:

تعداد کلمات: $۵\times۴\times۳\times۲\times۱=۱۲۰$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۵ با ارقام ۸، ۷، ۵، ۳، ۲ و ۰، چند عدد چهاررقمی زوج و بزرگ‌تر از ۴۰۰۰، بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

۱) ۲۴ ۲) ۳۶ ۳) ۷۲ ۴) ۹۶

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint

چون هم‌زمان هم شرط زوج‌بودن داریم و هم شرط بزرگ‌تربودن از یه عدد، حالت‌ها رو براساس رقم اول از هم جدا کنید تا با اصل ضرب راحت حل بشه.

درس Box

اصل جمع در آنالیز ترکیبی:

تصور کنید برای انجام یک کار مشخص، k مسیر یا روش کاملاً مجزا پیش روی شماست. اگر روش اول به m_1 طریق، روش دوم به m_2 طریق و به همین ترتیب روش kاُم به m_k طریق قابل انجام باشد، در صورتی که مجاز باشید برای انجام کار مورد نظر **فقط یکی** از این k روش را انتخاب کنید. کافی است تعداد حالت‌های هر روش را با هم جمع کنید، بنابراین، کل راه‌های ممکن برای انجام آن کار برابر خواهد بود با:

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_k$$

اصل ضرب در آنالیز ترکیبی:

حالا شرایطی را در نظر بگیرید که انجام یک کار، نیازمند طی‌کردن دقیقاً k مرحلهٔ پی‌درپی و وابسته به هم باشد. اگر بتوانید مرحلهٔ اول را به m_1 طریق، مرحلهٔ دوم را به m_2 طریق و در نهایت مرحلهٔ kاُم را به m_k طریق انجام دهید، برای محاسبهٔ تعداد کل حالت‌های انجام این کار چندمرحله‌ای، باید تعداد انتخاب‌های هر مرحله را در یکدیگر ضرب کنید، در نتیجه، کل کار مورد نظر به تعداد دفعات زیر قابل انجام است:

$$m_1 \times m_2 \times \ldots \times m_k$$

پاسخ خیلی تشریحی

با توجه به این‌که می‌خواهیم عدد زوج و بزرگ‌تر از ۴۰۰۰ باشد، روی رقم اول و آخر محدودیت داریم، بنابراین ابتدا رقم یکان را زوج انتخاب می‌کنیم:

$$\begin{cases} \frac{۳}{\{۵,۷,۸\}} \times \frac{۴}{-} \times \frac{۳}{-} \times \frac{۱}{\{۲\}} = ۳۶ \\ \frac{۳}{\{۵,۷,۸\}} \times \frac{۴}{-} \times \frac{۳}{-} \times \frac{۱}{\{۰\}} = ۳۶ \xrightarrow{\text{حاصل‌جمع}} \text{عدد } ۳۶ + ۳۶ + ۲۴ = ۹۶ \\ \frac{۲}{\{۵,۷\}} \times \frac{۴}{-} \times \frac{۳}{-} \times \frac{۱}{\{۸\}} = ۲۴ \end{cases}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

هندسه دهم

۱۶ **کدام دو شکل لزوماً متشابه نیستند؟**

۱) دو شش‌ضلعی منتظم

۲) دو مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین

۳) دو لوزی که یک زاویهٔ برابر دارند.

۴) دو مستطیل که اندازهٔ قطر آن‌ها برابر است.

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint

دو چندضلعی در صورتی متشابه‌اند که اندازهٔ زوایای نظیر در آن‌ها یکسان بوده و اضلاع متناظر آن‌ها متناسب باشند.

درس Box

۱) دو nضلعی منتظم همواره متشابه‌اند. با توجه به این موضوع دو مربع یا دو مثلث متساوی‌الاضلاع همواره با یکدیگر متشابه‌اند.

۲) دو مثلث قائم‌الزاویه در صورتی متشابه‌اند که یک زاویهٔ حادهٔ برابر داشته باشند؛ بنابراین دو مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین همواره با یکدیگر متشابه‌اند.

۳) دو مثلث متساوی‌الساقین در صورتی متشابه‌اند که زاویهٔ رأس آن‌ها برابر باشد.

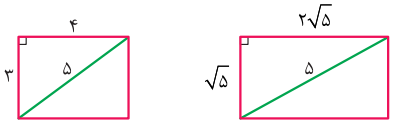
۴) دو لوزی متشابه‌اند هرگاه یک زاویهٔ برابر داشته باشند و یا اندازهٔ قطرهای آن‌ها متناسب باشد.

۵) دو مستطیل متشابه‌اند هرگاه زاویهٔ بین قطرهای آن‌ها برابر باشد.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: با توجه به موارد (۱)، (۲) و (۴) درس‌باکس، به ترتیب در گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳)، دو چندضلعی متشابه‌اند.

گام دوم: دو مستطیل که اندازهٔ قطر آن‌ها برابر است، لزوماً متشابه نیستند. به عنوان مثال اندازهٔ قطر هر دو مستطیل رسم‌شده در شکل برابر ۵ است ولی $\frac{\sqrt{5}}{3} \neq \frac{2\sqrt{5}}{4}$، پس اضلاع دو مستطیل متناسب نبوده و در نتیجه متشابه نیستند.



SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۷ **نسبت مساحت‌های دو شش‌ضلعی متشابه $\frac{۴}{۲۵}$ است. اگر محیط یکی از آن‌ها برابر ۱۰ واحد باشد، اختلاف مقادیر ممکن برای محیط شش‌ضلعی دیگر کدام است؟**

۱) ۱۵

۲) ۱۸

۳) ۲۱

۴) ۲۴

مشاوره این سؤال مشابه کار در کلاس ۲ صفحهٔ ۴۸ کتاب درسی طراحی شده است و به موضوع محیط و مساحت در چندضلعی‌های متشابه اختصاص دارد.

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint دقت کنید که عدد ۱۰ می‌تواند محیط شش‌ضلعی کوچک‌تر یا بزرگ‌تر باشد.

درس Box

۱) نسبت محیط‌های دو nضلعی متشابه برابر نسبت تشابه آن دو nضلعی است.

۲) نسبت مساحت‌های دو nضلعی متشابه برابر مربع نسبت تشابه آن دو nضلعی است.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: مساحت‌های دو شش‌ضلعی متشابه را به ترتیب با S و S' و محیط‌های آن‌ها را با P و P' نمایش می‌دهیم. با توجه به توضیحات درس‌باکس، نسبت مساحت‌های این دو شش‌ضلعی متشابه، مربع نسبت محیط‌های آن‌ها است. ابتدا فرض می‌کنیم محیط شش‌ضلعی کوچک‌تر برابر ۱۰ باشد. در این صورت داریم:

$$\frac{S}{S'}=(\frac{P}{P'})^۲ \Rightarrow \frac{۴}{۲۵}=(\frac{۱۰}{P'})^۲ \xrightarrow{\text{جذر}} \frac{۲}{۵}=\frac{۱۰}{P'} \Rightarrow P'=۲۵$$

گام دوم: این بار فرض می‌کنیم محیط شش‌ضلعی بزرگ‌تر برابر ۱۰ باشد و در نتیجه داریم:

$$\frac{S}{S'}=(\frac{P}{P'})^۲ \Rightarrow \frac{۴}{۲۵}=(\frac{P}{۱۰})^۲ \xrightarrow{\text{جذر}} \frac{۲}{۵}=\frac{P}{۱۰} \Rightarrow P=۴$$

گام سوم: با توجه به مقادیر به‌دست‌آمده برای محیط شش‌ضلعی دوم، اختلاف این مقادیر برابر است با:

اختلاف مقادیر محیط $= ۲۵ - ۴ = ۲۱$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۸ **با افزودن سه واحد به تعداد اضلاع یک nضلعی، تعداد قطرهای آن دو برابر شده است. با افزودن چند واحد به تعداد اضلاع این nضلعی، تعداد قطرهای آن پنج برابر می‌شود؟**

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint رابطهٔ نسبت تعداد قطرهای یک $(n+3)$ضلعی به تعداد قطرهای یک nضلعی را بنویسید تا مقدار n را محاسبه کنید.

درس Box تعداد قطرهای یک nضلعی محدب برابر است با:

$$\frac{n(n-3)}{2}$$

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** مطابق فرض با تبدیل nضلعی به $(n+3)$ضلعی، تعداد قطرهای آن دو برابر شده است؛ بنابراین داریم:

$$\frac{\frac{(n+3)(n+3-3)}{2}}{\frac{n(n-3)}{2}}=2 \Rightarrow \frac{n(n+3)}{n(n-3)}=2 \Rightarrow \frac{n+3}{n-3}=2 \Rightarrow n+3=2n-6 \Rightarrow n=9$$

گام دوم: فرض کنید k واحد به تعداد اضلاع این ۹ضلعی اضافه کنیم. طبق فرض تعداد قطرها باید ۵ برابر شود، پس می‌توان نوشت:

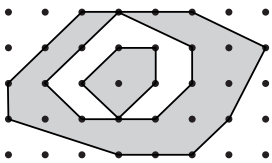
$$\frac{\frac{(9+k)(9+k-3)}{2}}{\frac{9\times 6}{2}}=5 \Rightarrow \frac{(k+9)(k+6)}{54}=5 \Rightarrow k^2+15k+54=270$$

$$\Rightarrow k^2+15k-216=0 \Rightarrow (k+24)(k-9)=0 \Rightarrow \begin{cases} k=-24 \text{ غ ق ق} \\ k=9 \end{cases}$$

بنابراین در این مرحله باید ۹ واحد به تعداد اضلاع nضلعی افزوده شود.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۹ در شکل مقابل، مساحت ناحیهٔ سایه‌زده کدام است؟



۱) ۱۵/۵

۲) ۱۶

۳) ۱۴/۵

۴) ۱۵

مشاوره این سؤال مشابه تمرین ۸ صفحهٔ ۷۳ کتاب درسی هندسه (۱) و از مبحث مساحت چندضلعی‌های شبکه‌ای طراحی شده است. مسائل این مبحث معمولاً به سادگی و با استفاده از فرمول پیک حل می‌شود.

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

فرمول پیک برای محاسبهٔ مساحت چندضلعی‌های شبکه‌ای:

اگر تعداد نقاط مرزی و درونی یک چندضلعی شبکه‌ای به ترتیب برابر b و i باشد، مساحت این چندضلعی از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$S=\frac{b}{2}+i-1$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: با پیداکردن تعداد نقاط مرزی و درونی، مساحت هر کدام از چندضلعی‌های بیرونی، میانی و درونی را محاسبه می‌کنیم:

چندضلعی بیرونی: $b_1=12\ ,\ i_1=16 \Rightarrow S_1=\frac{12}{2}+16-1=21$

چندضلعی میانی: $b_2=8\ ,\ i_2=5 \Rightarrow S_2=\frac{8}{2}+5-1=8$

چندضلعی درونی: $b_3=5\ ,\ i_3=1 \Rightarrow S_3=\frac{5}{2}+1-1=2/5$

گام دوم: مساحت ناحیهٔ سایه‌زده برابر است با:

$$S=(S_1-S_2)+S_3=(21-8)+2/5=15/5$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۰ در یک مثلث قائم‌الزاویه، زاویهٔ بین ارتفاع و میانهٔ وارد بر وتر ۳۶° است. اندازهٔ کوچک‌ترین زاویهٔ این مثلث چند درجه است؟

۱) ۱۸

۲) ۲۴

۳) ۲۷

۴) ۳۶

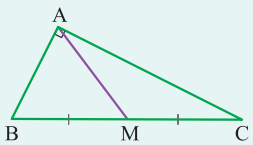
مشاوره اندازهٔ میانهٔ وارد بر وتر در بسیاری از مسائل ترکیبی با روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه و ویژگی‌های زوایای مهم در این نوع مثلث (۱۵°، ۳۰°، ۴۵° و ۶۰°) مورد استفاده قرار می‌گیرد.

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint دقت کنید که با رسم میانهٔ وارد بر وتر در یک مثلث قائم‌الزاویه، دو مثلث متساوی‌الساقین تشکیل می‌شود.

درس Box

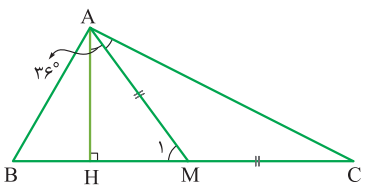
۱) اندازهٔ میانهٔ وارد بر وتر در یک مثلث قائم‌الزاویه، نصف اندازهٔ وتر آن مثلث است. به عبارت دیگر اگر در شکل زیر $\hat{A} = ۹۰^\circ$ و M وسط ضلع BC باشد، آن‌گاه $AM = \frac{۱}{۲}BC$.



۲) زاویهٔ بین میانه و ارتفاع وارد بر وتر در یک مثلث قائم‌الزاویه، برابر است با قدرمطلق تفاضل دو زاویهٔ حادهٔ مثلث.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: مطابق شکل در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، میانهٔ AM و ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. طبق فرض $M\hat{A}H = ۳۶^\circ$ است، پس داریم:



$$\overset{\Delta}{AMH}: \hat{M}_۱ = ۹۰^\circ - ۳۶^\circ = ۵۴^\circ$$

گام دوم: می‌دانیم اندازهٔ میانهٔ وارد بر وتر در مثلث قائم‌الزاویه، نصف اندازهٔ وتر است، پس $AM = \frac{۱}{۲}BC$ و در نتیجه $AM = MC$ و مثلث AMC متساوی‌الساقین است، یعنی $M\hat{A}C = \hat{C}$.

گام سوم: زاویهٔ $\hat{M}_۱$ برای مثلث AMC، زاویهٔ خارجی است، پس می‌توان نوشت:

$$\hat{M}_۱ = M\hat{A}C + \hat{C} = ۲\hat{C} \Rightarrow ۲\hat{C} = ۵۴^\circ \Rightarrow \hat{C} = ۲۷^\circ$$

یه‌جور دیگه فرض کنید در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A} = ۹۰^\circ$)، $\hat{B} > \hat{C}$ باشد. در این صورت طبق مورد (۲) درس‌باکس داریم:

$$|\hat{B} - \hat{C}| = ۳۶^\circ \xrightarrow[\text{از طرفی}]{\hat{B} > \hat{C}} \begin{cases} \hat{B} - \hat{C} = ۳۶^\circ \\ \hat{B} + \hat{C} = ۹۰^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{B} = ۶۳^\circ \\ \hat{C} = ۲۷^\circ \end{cases}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۱ در یک مثلث متساوی‌الساقین، اندازهٔ هر ساق دو برابر اندازهٔ قاعده است. مجموع فواصل هر نقطهٔ واقع بر قاعدهٔ این مثلث از دو ساق آن، چند برابر اندازهٔ قاعده است؟

۱) $\frac{\sqrt{۵}}{۲}$

۲) $\frac{\sqrt{۱۵}}{۴}$

۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۴) $\frac{\sqrt{۶}}{۴}$

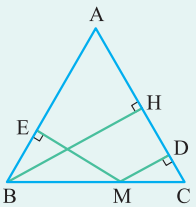
پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint

ابتدا اندازهٔ ارتفاع وارد بر قاعدهٔ این مثلث را محاسبه کنید.

درس Box

۱) مجموع فواصل هر نقطهٔ واقع بر قاعدهٔ یک مثلث متساوی‌الساقین از دو ساق آن، برابر طول ارتفاع وارد بر ساق است. در شکل زیر داریم:



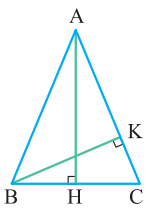
$$MD + ME = BH$$

۲) حاصل‌ضرب طول هر ضلع یک مثلث در ارتفاع وارد بر آن همواره مقدار ثابتی است. به عبارت دیگر در مثلث ABC داریم:

$$a \times h_a = b \times h_b = c \times h_c$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: مثلث متساوی‌الساقین ABC را با فرض $AB = AC = ۲BC$ در نظر بگیرید. ارتفاع‌های نظیر دو رأس A و B را رسم می‌کنیم. می‌دانیم مجموع فواصل هر نقطهٔ واقع بر قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقین از دو ساق آن، برابر طول ارتفاع وارد بر ساق است؛ بنابراین باید طول ارتفاع BK را پیدا کنیم:



گام دوم: فرض کنید $BC = ۲x$ باشد. در این صورت $AB = ۴x$ است. از طرفی ارتفاع وارد بر قاعده در مثلث متساوی‌الساقین، میانهٔ نظیر قاعده است، پس $BH = \frac{BC}{۲} = x$ و در نتیجه داریم:

$$\overset{\Delta}{ABH} : AH^۲ = AB^۲ - BH^۲ = ۱۶x^۲ - x^۲ = ۱۵x^۲ \Rightarrow AH = \sqrt{۱۵}x$$

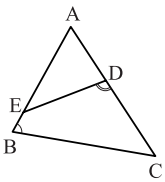
گام سوم: می‌دانیم حاصل‌ضرب طول هر ضلع در ارتفاع آن مقدار ثابتی است؛ بنابراین می‌توان نوشت:

$$AH \times BC = BK \times AC \Rightarrow \frac{BK}{BC} = \frac{AH}{AC} = \frac{\sqrt{۱۵}x}{۴x} = \frac{\sqrt{۱۵}}{۴}$$

طبق مورد (۱) درس‌باکس، مجموع فواصل هر نقطه واقع بر قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقین از دو ساق آن برابر ارتفاع وارد بر ساق است، پس اندازهٔ ارتفاع وارد بر ساق، $\frac{\sqrt{۱۵}}{۴}$ برابر اندازهٔ قاعده است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۲ در شکل زیر، دوزاویهٔ $\hat{B}$ و $C\hat{D}E$ مکمل یکدیگرند. اگر $DC = AE = ۶$ و $AD = ۴$ باشد، مساحت چهارضلعی DEBC چند درصد مساحت مثلث ABC است؟



۱) ۶۰

۲) ۶۴

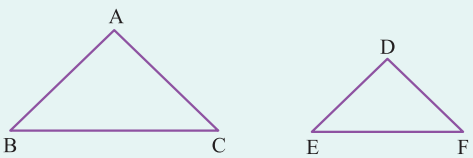
۳) ۷۰

۴) ۷۵

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint با توجه به فرض، دو زاویهٔ $\hat{B}$ و $A\hat{D}E$ هم‌اندازه‌اند.

درس Box فرض کنید دو مثلث ABC و DEF متشابه باشند و نسبت تشابه آن‌ها برابر k باشد، یعنی $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} = k$. در این صورت:



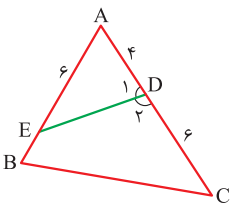
۱) نسبت محیط‌های دو مثلث برابر نسبت تشابه است:

$$\frac{P_{ABC}}{P_{DEF}} = k$$

۲) نسبت مساحت‌های دو مثلث برابر مربع نسبت تشابه است:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{DEF}} = k^{۲}$$

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** ابتدا نشان می‌دهیم دو زاویهٔ $\hat{B}$ و $\hat{D}_۱$ برابرند:



$$\begin{cases} \text{طبق فرض: } \hat{B} + \hat{D}_۲ = ۱۸۰^\circ \\ \text{از طرفی: } \hat{D}_۱ + \hat{D}_۲ = ۱۸۰^\circ \end{cases} \Rightarrow \hat{B} = \hat{D}_۱$$

حال برای دو مثلث ADE و ABC داریم:

$$\begin{cases} \hat{A} = \hat{A} \\ \hat{D}_۱ = \hat{B} \end{cases} \xrightarrow{(زز)} \overset{\Delta}{ADE} \sim \overset{\Delta}{ABC}$$

گام دوم: می‌دانیم نسبت مساحت‌ها در دو مثلث متشابه برابر مربع نسبت تشابه است، پس می‌توان نوشت:

$$\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = (\frac{AE}{AC})^{۲} = (\frac{۶}{۱۰})^{۲} = \frac{۹}{۲۵} \xrightarrow{\text{تفضیل نسبت در صورت}} \frac{S_{ABC} - S_{ADE}}{S_{ABC}} = \frac{۲۵-۹}{۲۵}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{DEBC}}{S_{ABC}} = \frac{۱۶}{۲۵} = \frac{۶۴}{۱۰۰}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۳ در مثلث ABC با مساحت ۴۸، دو میانهٔ AM و BN بر هم عمودند. اگر اندازهٔ AM دو برابر اندازهٔ BN باشد، اندازهٔ ضلع AC کدام است؟

۱) $۴\sqrt{۵}$

۲) $۲\sqrt{۱۷}$

۳) $۸\sqrt{۵}$

۴) $۴\sqrt{۱۷}$

مشاوره این سؤال از مبحث همرسی میانه‌های مثلث و مشابه سؤال ۲۸ کنکور ریاضی نوبت دوم ۱۴۰۲ طراحی شده است. سؤالات این قسمت به طور مستقیم یا به صورت ترکیبی با مطالب هندسهٔ یازدهم از پرتکرارترین سؤالات هندسه پایه در کنکور محسوب می‌شوند.

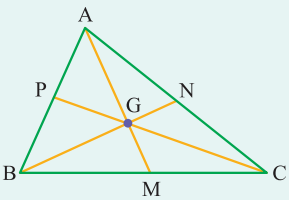
پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint

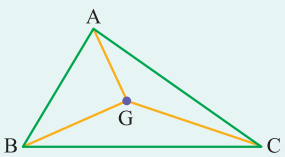
یکی از مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ای که از برخورد دو میانهٔ AM و BN پدید می‌آید را در نظر گرفته و به کمک آن اندازهٔ این دو میانه را تعیین کنید.

درس Box

۱) میانه‌های هر مثلث در نقطه‌ای درون آن مثلث همرس‌اند. نقطهٔ همرسی میانه‌ها، هر کدام از میانه‌ها را به نسبت $\frac{۲}{۳}$ به $\frac{۱}{۳}$ تقسیم می‌کند، یعنی فاصلهٔ نقطهٔ همرسی میانه‌ها از هر رأس، $\frac{۲}{۳}$ اندازهٔ میانهٔ نظیر آن رأس و فاصلهٔ این نقطه از وسط هر ضلع، $\frac{۱}{۳}$ طول میانهٔ آن ضلع است.



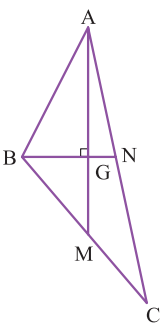
۲) اگر از نقطهٔ همرسی میانه‌های هر مثلث به ۳ رأس آن مثلث وصل کنیم، ۳ مثلث هم‌مساحت پدید می‌آید. در شکل زیر، اگر G نقطهٔ همرسی میانه‌های مثلث ABC باشد، آن‌گاه:



$$S_{AGB} = S_{AGC} = S_{BGC}$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: می‌دانیم میانه‌های هر مثلث، یکدیگر را به نسبت $\frac{۲}{۳}$ به $\frac{۱}{۳}$ قطع می‌کنند. از طرفی طبق فرض میانهٔ AM دو برابر میانهٔ BN است، پس داریم:



$$\frac{AG}{BG} = \frac{\frac{۲}{۳}AM}{\frac{۲}{۳}BN} = \frac{AM}{BN} = ۲ \xrightarrow{BG=x} AG = ۲x$$

گام دوم: طبق مورد (۲) درس‌باکس، $S_{AGB} = \frac{۱}{۳}S_{ABC} = ۱۶$ و در نتیجه داریم:

$$S_{AGB} = \frac{۱}{۲}AG \times BG \Rightarrow ۱۶ = \frac{۱}{۲}(۲x)(x) = x^۲ \Rightarrow x = ۴$$

گام سوم: با توجه به نتیجهٔ گام دوم $AG = ۸$ و $GN = \frac{۱}{۲}BG = ۲$؛ بنابراین می‌توان نوشت:

$$\overset{\Delta}{AGN} : AN^۲ = AG^۲ + GN^۲ = ۸^۲ + ۲^۲ = ۶۸ \Rightarrow AN = \sqrt{۶۸} = ۲\sqrt{۱۷} \Rightarrow AC = ۲AN = ۴\sqrt{۱۷}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۴ **در یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین به طول قاعده‌های ۴ و ۱۲ و مساحت ۴۸، وسط‌های اضلاع را به هم وصل می‌کنیم. محیط چهارضلعی حاصل کدام است؟**

۱) ۱۲

۲) ۱۶

۳) ۲۰

۴) ۲۴

مشاوره ایدهٔ این سؤال از تمرین ۷ صفحهٔ ۶۴ کتاب درسی هندسه (۱) گرفته شده است و رابطهٔ محیط شکل حاصل از وصل‌کردن وسط‌های اضلاع یک چهارضلعی با نکات و ویژگی‌های ذوزنقه ترکیب شده است.

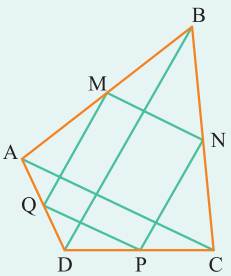
پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint

طول قطر ذوزنقه را محاسبه کنید.

درس Box

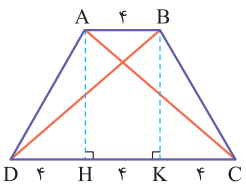
اگر وسط‌های اضلاع هر چهارضلعی را به طور متوالی به هم وصل کنیم، یک متوازی‌الاضلاع پدید می‌آید. محیط این متوازی‌الاضلاع برابر مجموع اندازه‌های دو قطر چهارضلعی اولیه است، زیرا در شکل زیر اگر نقاط M، N، P و Q، وسط‌های اضلاع چهارضلعی ABCD باشند، آن‌گاه طبق تعمیم قضیهٔ تالس داریم:



$$\left.\begin{matrix} MN = PQ = \frac{1}{2}AC \\ MQ = NP = \frac{1}{2}BD \end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{محیط } MNPQ = AC + BD$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: مطابق شکل از دو رأس A و B، عمودهای AH و BK را بر قاعدهٔ CD رسم می‌کنیم. چهارضلعی ABKH مستطیل است، پس $HK = AB = ۴$. از طرفی دو مثلث قائم‌الزاویهٔ AHD و BKC هم‌نهشت هستند، پس:



$$DH = CK = \frac{۱۲ - ۴}{۲} = ۴$$

گام دوم: با استفاده از مساحت ذوزنقه، اندازهٔ ارتفاع AH را پیدا می‌کنیم:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}AH(AB + CD) \Rightarrow ۴۸ = \frac{1}{2}AH(۴ + ۱۲) \Rightarrow AH = ۶$$

گام سوم: در مثلث قائم‌الزاویهٔ AHC طبق قضیهٔ فیثاغورس داریم:

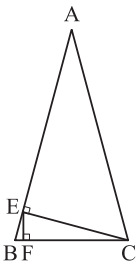
$$AC^۲ = AH^۲ + CH^۲ = ۶^۲ + ۸^۲ = ۱۰^۲ \Rightarrow AC = ۱۰$$

گام چهارم: طبق توضیحات درس‌باکس، محیط چهارضلعی حاصل از وصل‌کردن وسط‌های اضلاع ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین ABCD برابر است با:

$$AC + BD = ۲ \times ۱۰ = ۲۰$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۵ در شکل زیر، مثلث ABC متساوی‌الساقین است $(AB = AC)$. اگر اندازهٔ ارتفاع CE نصف اندازهٔ ضلع AB بوده و مساحت مثلث BEC برابر ۲ باشد، اندازهٔ پاره‌خط BF کدام است؟



۱) $2-\sqrt{3}$

۲) $\sqrt{2}-1$

۳) $\frac{1}{4}$

۴) $\frac{1}{2}$

مشاوره این سؤال مشابه سؤال ۲۷ کنکور ریاضی داخل نوبت اول ۱۴۰۴ طراحی شده است و مفاهیم مربوط به زوایای 15° و 30° در مثلث قائم‌الزاویه را در بر می‌گیرد.

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint در مثلث ACE، اندازهٔ زوایای $\hat{A}$ و $A\hat{C}E$ را تعیین کنید.

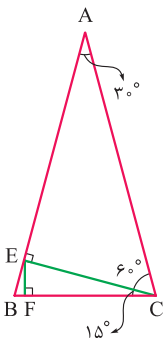
درس Box

۱) در یک مثلث قائم‌الزاویه، اندازهٔ ضلع روبه‌رو به زاویهٔ 30°، نصف اندازهٔ وتر است. برعکس اگر در یک مثلث قائم‌الزاویه، اندازهٔ یک ضلع نصف اندازهٔ وتر باشد، زاویهٔ مقابل به آن ضلع، 30° است.

۲) در یک مثلث قائم‌الزاویه که یکی از زوایای حادهٔ آن 15° است، اندازهٔ ارتفاع وارد بر وتر، $\frac{1}{4}$ اندازهٔ وتر است.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: طبق فرض $CE = \frac{1}{2}AB$. از طرفی $AB = AC$، پس در مثلث قائم‌الزاویهٔ AEC، $CE = \frac{1}{2}AC$ و در نتیجه زاویهٔ روبه‌رو به ضلع CE، یعنی زاویهٔ A برابر 30° است:



$$A\hat{C}E = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$

گام دوم: در مثلث متساوی‌الساقین ABC داریم:

$$\hat{B} = \hat{C} = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ$$

$$B\hat{C}E = 75^\circ - 60^\circ = 15^\circ$$

گام سوم: مثلث قائم‌الزاویهٔ BEC دارای یک زاویهٔ 15° است، پس اندازهٔ ارتفاع وارد بر وتر در این مثلث، $\frac{1}{4}$ اندازهٔ وتر است؛ بنابراین با فرض $EF = x$، $BC = 4x$ بوده و در نتیجه داریم:

$$S_{BEC} = \frac{1}{2}EF \times BC \Rightarrow 2 = \frac{1}{2}x \times 4x \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow \begin{cases} EF = 1 \\ BC = 4 \end{cases}$$

گام چهارم: با فرض $BF = t$ و طبق روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ BEC داریم:

$$EF^2 = BF \times FC \Rightarrow 1^2 = t(4-t) \Rightarrow t^2 - 4t + 1 = 0 \xrightarrow{+3} t^2 - 4t + 4 = 3$$

$$\Rightarrow (t-2)^2 = 3 \Rightarrow t - 2 = \pm\sqrt{3} \xrightarrow{BF<FC} t = 2 - \sqrt{3}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

فیزیک دهم

۲۶ دمای شهری در دو روز مختلف یک سال، $18/5\ ^\circ F$ و $63/5\ ^\circ F$ است. اختلاف دما در این دو روز چند کلوین است؟

۱) ۲۰ ۲) ۲۵ ۳) ۲۷/۵ ۴) ۳۰

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint اختلاف دما برحسب فارنهایت را به دست آورید، سپس آن را به سلسیوس تبدیل کنید. با توجه به $\Delta\theta = \Delta T$ مسئله حل می‌شود.

درس Box

مقیاس‌های دمایی:

کلوین:

در دمای $-273/15\ ^\circ C$، انرژی جنبشی مولکول‌ها به حداقل مقدار ممکن می‌رسد، در مقیاس کلوین، این دما را با $0\ K$ نشان می‌دهند.

فاصلهٔ بین درجه‌های متوالی در مقیاس‌های سلسیوس و کلوین یکسان است.

$$T = \theta + 273 \ ; \ \Delta T = \Delta\theta$$

مقیاس فارنهایت:

یکای رایج دیگر دما که هنوز هم در صنعت و هواشناسی کاربرد دارد، فارنهایت است.

نماد یکای این مقیاس F بوده و دما برحسب فارنهایت را با $^\circ F$ نشان می‌دهند.

در مقیاس فارنهایت، نقطهٔ انجماد آب $32\ ^\circ F$ و نقطهٔ جوش آب $212\ ^\circ F$ است. رابطهٔ مقیاس دمای فارنهایت $(^\circ F)$ و سلسیوس $(^\circ C)$ به صورت زیر است:

$$F = \frac{9}{5}\theta + 32 \ ; \ \Delta F = \frac{9}{5}\Delta\theta$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ ابتدا اختلاف دما را برحسب درجهٔ فارنهایت به دست می‌آوریم، سپس آن را برحسب سلسیوس و کلوین می‌نویسیم:

$$\Delta F = F_2 - F_1 = 63/5 - 18/5 = 45\ ^\circ F$$

$$\Delta F = \frac{9}{5}\Delta\theta \Rightarrow 45 = \frac{9}{5}\Delta\theta \Rightarrow \Delta\theta = 25^\circ C$$

$$\Delta\theta = \Delta T = 25\ K$$

کنکور دمای شهری در دو روز مختلف در یک سال، $40\ ^\circ C$ و $-10\ ^\circ C$ است. اختلاف دما در این دو روز، چند درجهٔ فارنهایت است؟

(سؤال ۴۶ کنکور تجربی ۱۴۰۲ (خارج از کشور))

۱) ۳۰ ۲) ۵۰ ۳) ۵۴ ۴) ۹۰

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۷ کدام‌یک از دماسنج‌های زیر، جزء دماسنج‌های معیار نیست؟

۱) ترموکوپل

۲) دماسنج گازی

۳) دماسنج مقاومت پلاتینی

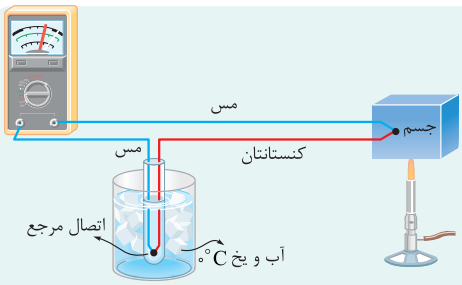
۴) تف‌سنج

مشاوره حتماً دماسنج‌های معیار رو به خاطر بسپار.
حتماً به این بخش کتاب که در مورد دماسنج‌ها هست خوب مسلط باشید، گاهی نمره‌های منفی بچه‌ها توی اشتباهات متن‌های مفهومی این‌چنینی حاصل می‌شه.

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

مدار سادهٔ یک ترموکوپل:

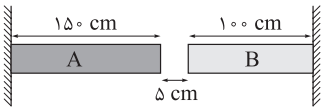


- دماسنج
  - معیار
    - گازی
    - مقاومت پلاتینی
    - تف‌سنج یا پیرومتر (نوری معیار است، اما تابشی نه!)
  - غیرمعیار
    - الکلی
    - جیوه‌ای
    - بیشینه ـ کمینه: دماسنج مایعی است و در باغداری و هواشناسی کاربرد دارد.
    - نواری دوفلزه
    - ترموکوپل
      - تاریخچه: تا ۱۹۹۰ معیار بود و سپس به دلیل دقت کم‌تر، از مجموعهٔ دماسنج‌های معیار کنار گذاشته شد.
      - ساختار: دو سیم رسانا و غیرهم‌جنس در دو نقطهٔ اتصال مرجع و جسم (جرم کم محل اتصال ← زمان کم به تعادل رسیدن ← سرعت) به هم متصل شده‌اند، ولت‌سنج وسط یکی از سیم‌ها قرار دارد، جنس سیم‌ها بر گسترهٔ دماسنجی مؤثر است.
      - ویژگی‌ها
        - کاربرد فراوان در صنعت، آزمایشگاه و مدار الکتریکی
        - طیف وسیع دماهای قابل اندازه‌گیری

پاسخ خیلی تشریحی ✔ با توجه به درس‌باکس، ترموکوپل یک دماسنج غیرمعیار است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۸ در شکل زیر، دو میلهٔ فلزی A و B بین دو دیوارهٔ ثابت قرار دارند. اگر دمای این دو میله $200\ ^\circ C$ افزایش یابد، دو میله به یکدیگر می‌رسند. اگر ضریب انبساط طولی این دو میله به ترتیب α_A و α_B باشد، کدام رابطهٔ زیر در SI درست است؟



۱) $2\alpha_A + 3\alpha_B = 2\times10^{-4}$

۲) $3\alpha_A + 2\alpha_B = 2\times10^{-4}$

۳) $2\alpha_A + 3\alpha_B = 5\times10^{-4}$

۴) $3\alpha_A + 2\alpha_B = 5\times10^{-4}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint جمع تغییرات طولی دو میله باید فاصلهٔ بین آن دو را پر کند و با آن برابر باشد.

درس Box

انبساط گرمایی:

در انبساط یک جسم، فاصلهٔ بین تمام نقاط جسم افزایش می‌یابد.

در انبساط جامد، به دلیل ثابت‌ماندن شکل ظاهری، انبساط جسم به ۳ صورت طولی، سطحی و حجمی مشاهده می‌شود، در صورتی که مایعات و گازها فقط به صورت انبساط حجمی خود را نشان می‌دهند.

یک میلهٔ نازک به طول L_1 را در نظر می‌گیریم. با توجه به نتایج آزمایش‌های دقیق، اگر بر دمای میله به اندازهٔ ΔT افزوده شود، مقدار افزایش طول میله با L_1 نسبت مستقیم دارد. $\propto$ نماد تناسب است.

$$\Delta L \propto L_1$$

تغییر طول میله (ΔL) با تغییر دما نیز متناسب است، یعنی:

$$\Delta L \propto \Delta\theta \quad \text{یا} \quad \Delta L \propto \Delta T$$

در حالت کلی می‌توان نوشت:

$$\Delta L \propto L_1 \Delta T$$

عامل دیگری که در مقدار انبساط مؤثر است، جنس میله است و اثر آن، به صورت ضریب انبساط طولی α، نمایش داده می‌شود و رابطهٔ انبساط طولی را کامل می‌کند:

$$\Delta L = \alpha L_1 \Delta T$$

رابطهٔ فوق رو می‌شه این‌طوری هم نوشت:

$$L_2 = L_1(1+\alpha\Delta T)$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ جمع تغییرات طولی دو میله را برابر با فاصلهٔ بین آن‌ها قرار می‌دهیم:

$$\Delta L_1 + \Delta L_2 = 5\times10^{-2}\,m$$

$$\Rightarrow \alpha_1 L_1\Delta\theta + \alpha_2 L_2\Delta\theta = \Delta\theta(\alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2) = 5\times10^{-2}\ m$$

$$\Rightarrow 200(150\alpha_A + 100\alpha_B)\times10^{-2} = 5\times10^{-2}\ m$$

$$\Rightarrow 30000\alpha_A + 20000\alpha_B = 5 \Rightarrow 3\alpha_A + 2\alpha_B = 5\times10^{-4}$$

تیزبازی *همون اول می‌تونستی از شر تبدیل یکا خلاص بشی، چون یکاهای دو طرف تساوی یکسان بود!*

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۹ روی یک ورقهٔ مسی، حفره‌ای ایجاد کرده‌ایم. اگر دمای ورقه $150\ ^\circ C$ افزایش یابد، مساحت حفره، چند درصد و چگونه تغییر می‌کند؟ $(\alpha_{مس} = 1/8\times10^{-5}\ K^{-1})$

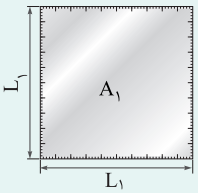
۱) ۰/۲۷، کاهش می‌یابد.
۲) ۰/۲۷، افزایش می‌یابد.
۳) ۰/۵۴، کاهش می‌یابد.
۴) ۰/۵۴، افزایش می‌یابد.

پاسخ: گزینهٔ ۴

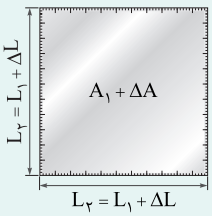
درس Box

انبساط سطحی:

سطح بیشتر اجسام با افزایش دما زیاد می‌شود. تجربه نشان می‌دهد که با انبساط جسم جامد، شکل آن عوض نمی‌شود و همهٔ ابعاد آن به یک نسبت افزایش می‌یابند. اگر مساحت اولیهٔ جسم جامد A_1 و افزایش دما ΔT باشد، افزایش مساحتی به اندازهٔ ΔA پیدا می‌کند، این افزایش مساحت به طور تقریبی از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:



$$A_2 = A_1(1+2\alpha\Delta T)$$



در این رابطه به 2α، ضریب انبساط سطحی می‌گویند.

نکته

$$\text{درصد تغییرات سطح} = \frac{\Delta A}{A_1}\times100 = \frac{2\alpha A_1\Delta\theta}{A_1}\times100 = 2\alpha\Delta\theta\times100$$

پاسخ خیلی تشریحی

با توجه به نکات گفته‌شده در درس‌باکس، داریم:

$$\text{درصد تغییرات سطح} = \frac{\Delta A}{A_1}\times100 = 2\alpha\Delta\theta\times100 = 2\times(1/8\times10^{-5})\times(150)\times100 = \%0/54$$

۰/۵۴ درصد افزایش می‌یابد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۰ یک ارلن شیشه‌ای با ضریب انبساط طولی $۹\times۱۰^{-۶}\ K^{-۱}$ و حجم $۲۵۰\ cm^۳$ به طور کامل پر از گلیسیرین با ضریب انبساط حجمی $۴۹\times۱۰^{-۵}\ K^{-۱}$ است. اگر دمای این مجموعه را $۴۰\ ^\circ C$ افزایش دهیم، چند سانتی‌متر مکعب گلیسیرین از ارلن بیرون می‌ریزد؟

۱) ۴/۹ ۲) ۴/۸۱
۳) ۴/۶۳ ۴) ۴/۵۴

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint اختلاف انبساط حجمی مایع و ظرف، حجم همان مقداری از گلیسیرین است که از ظرف بیرون می‌ریزد.

درس Box

انبساط حجمی:

حجم بیشتر اجسام با افزایش دما زیاد می‌شود. اگر حجم اولیهٔ جسم (جامد یا مایع) $V_۱$ و افزایش دما ΔT باشد، جسم افزایش حجمی به اندازهٔ ΔV پیدا می‌کند که از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\Delta V = V_۱\beta\Delta T$$

$$V_۲ = V_۱(۱+\beta\Delta T)$$

در این رابطه، β ضرب انبساط حجمی است.

انبساط طولی بیشتر جامدها در راستاهای مختلف، با ضریب انبساط طولی یکسان صورت می‌گیرد. می‌توان نشان داد که ضریب انبساط حجمی این جامدها با تقریب مناسبی سه برابر ضریب انبساط طولی آن‌هاست.

$$\beta = ۳\alpha$$

- چون مایع‌ها شکل معینی ندارند، انبساط آن‌ها را فقط به صورت حجمی بررسی می‌کنیم و β در مایعات مقادیر مشخصی دارد.
- توجه کنید باید یکای ΔV و $V_۱$ یکسان باشد.

پاسخ خیلی تشریحی

$$\Delta V_{\text{ظرف}} = V_۱ ۳\alpha_{\text{ظرف}}\Delta T \quad ; \quad \Delta V_{\text{گلیسیرین}} = V_۱\beta_{\text{گلیسیرین}}\Delta T$$

چون یکای حجم اولیه و حجم نهایی $cm^۳$ هست، نیازی به تبدیل یکا نداریم.

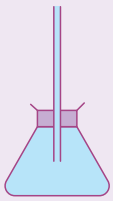
$$\text{حجم مایع بیرون‌ریخته} = \Delta V_{\text{گلیسیرین}} - \Delta V_{\text{ظرف}} = V_۱\Delta T(\beta_{\text{گلیسیرین}} - ۳\alpha_{\text{ظرف}})$$

$$\Rightarrow V_{\text{بیرون‌ریخته}} = ۲۵۰\times۴۰(۴۹\times۱۰^{-۵} - ۳\times۹\times۱۰^{-۶}) = ۲۵۰\times۴۰\times۴۶/۳\times۱۰^{-۵} = ۴/۶۳\ cm^۳$$

گول نخوری *حتماً حواست باشه که برای ظرف، ضریب انبساط طولی داده شده و باید اون رو در ۳ ضرب کنی تا به ضریب انبساط حجمی تبدیل بشه.*

کتاب درسی

ارلنی شیشه‌ای با ضریب انبساط طولی $۹/۰\times۱۰^{-۶}\ \frac{۱}{^\circ C}$ را که در دمای $۲۰/۰\ ^\circ C$ گنجایشی برابر با $۲۰۰\ cm^۳$ دارد، مطابق شکل با گلیسیرین در همان دما پر کرده‌ایم، اگر دمای ظرف و گلیسیرین را به $۶۰\ ^\circ C$ برسانیم:



الف) آیا گلیسیرین از ظرف بیرون می‌ریزد؟ *(فیزیک (۱) ـ مثال ۴ ـ ۴ صفحهٔ ۹۴ کتاب درسی)*

ب) اگر پاسخ قسمت (الف) مثبت است، حجم گلیسیرین سرریزشده چه‌قدر است؟

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۱ دمای یک قطعهٔ توپر سربی تقریباً چند درجهٔ فارنهایت و چگونه تغییر کند تا چگالی آن ۰/۴۵ درصد، کاهش یابد؟ $(\alpha_{\text{سرب}} = ۳\times۱۰^{-۵}\,K^{-۱})$

۱) ۵۰، کاهش یابد.
۲) ۵۰، افزایش یابد.
۳) ۹۰، کاهش یابد.
۴) ۹۰، افزایش یابد.

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

تغییرات چگالی با دما:

به طور معمول، افزایش دما سبب افزایش حجم می‌شود، اما جرم ماده تغییر نمی‌کند. رابطهٔ $\rho = \frac{m}{V}$ نیز نشان می‌دهد که با افزایش حجم، مقدار ρ کاهش می‌یابد. رابطهٔ بین چگالی ماده در دو دمای اولیه و ثانویه:

$$\rho_۲ = \frac{\rho_۱}{۱+\beta\Delta T}$$

پس با افزایش دما، چگالی کاهش خواهد یافت.

نکتهٔ بسیار مهم:

رابطهٔ تقریبی چگالی برحسب دما به شکل زیر است:

$$\rho_۲ = \rho_۱(۱-\beta\Delta T)$$

این رابطه برای جامدها با تقریب بسیار خوب و برای مایع‌ها با تقریب کم‌تری به کار می‌رود.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

با توجه به نکات گفته‌شده در درس‌باکس، درصد تغییرات چگالی از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\text{درصد تغییرات} = \frac{\Delta\rho}{\rho_۱}\times۱۰۰ = \frac{-\rho_۱\beta\Delta T}{\rho_۱}\times۱۰۰ = -\beta\Delta T\times۱۰۰ = -۳\alpha\Delta T\times۱۰۰$$

$$-۰/۴۵ = -۳\times۳\times۱۰^{-۵}\times\Delta T\times۱۰۰ \Rightarrow \Delta T = \frac{۴۵\times۱۰^{-۲}}{۹\times۱۰^{-۳}} = ۵۰\,K$$

$$\Delta F = \frac{۹}{۵}\Delta T = \frac{۹}{۵}(۵۰) = ۹۰^\circ F$$

پس دما باید $۹۰^\circ F$ افزایش یابد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

به سبک امتحان نهایی

۳۲ برای این‌که ۲ kg آب با دمای ۲۰ °C را در فشار ۱ atm به نقطهٔ جوش آن برسانیم، چند کیلوژول گرما لازم است؟ $(c_{\text{آب}} = ۴۲۰۰ \frac{J}{kg.K})$

۱) ۸۴۰ ۲) ۷۴۲ ۳) ۶۷۲ ۴) ۶۲۲

مشاوره حتماً همهٔ سؤالات آزمون رو بخونین؛ مطمئن باشین این‌چنین سؤالات باقلوایی برای همه وجود داره.

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

گرما:

اگر جسمی با محیط اطراف خود گرمای Q را مبادله کند و در اثر این مبادلهٔ گرما، دمایش به اندازهٔ ΔT تغییر کند، Q متناسب با ΔT است که ضریب این تناسب را با C نشان می‌دهند، به طوری که:

$$Q = C\Delta T$$

ظرفیت گرمایی ویژه:

ظرفیت گرمایی یکای جرم اجسام را ظرفیت گرمایی ویژه یا به سادگی گرمای ویژه می‌گویند. گرمای ویژه را با c نشان می‌دهند و طبق تعریف، رابطه‌اش با ظرفیت گرمایی (C) به این صورت است:

$$C = mc$$

پس می‌توانیم رابطهٔ گرما را بازنویسی کنیم:

$$Q = mc\Delta T$$

$$(J/kg.K)$$

گرمای ویژهٔ یک جسم به جنس مادهٔ تشکیل‌دهندهٔ آن و دما بستگی دارد، *یعنی جرم دیگه مهم نی.*

نکته

اگر جسم گرما بگیرد و دمای جسم بالا رود، Q مثبت است.

اگر جسم گرما از دست بدهد و دمای جسم پایین بیاید، Q منفی است.

$$(\Delta T > ۰ \xrightarrow{\text{گرما بگیرد}} Q > ۰)$$

$$(\Delta T < ۰ \xrightarrow{\text{گرما بدهد}} Q < ۰)$$

پاسخ خیلی تشریحی

$$Q = mc\Delta T = ۲ \times ۴۲۰۰ \times (۱۰۰ - ۲۰) = ۶۷۲۰۰۰ \text{ J}$$

$$\Rightarrow Q = ۶۷۲ \text{ kJ}$$

کتاب درسی

مقدار ۲/۰ L آب با دمای ۲۰ °C در اختیار داریم. چه‌قدر گرما لازم است تا دمای این آب را به نقطهٔ جوش آن (در دمای ۱۰۰ °C) برسانیم؟

(فیزیک (۱) ـ مثال ۴ ـ ۶ صفحهٔ ۹۸ کتاب درسی)

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۳ به دو کرهٔ توپر مسی A و B به ترتیب ۱۰ kJ و ۸۰ kJ گرما می‌دهیم. اگر شعاع کرهٔ A، دو برابر شعاع کرهٔ B باشد، افزایش دمای کرهٔ B چند برابر افزایش دمای کرهٔ A خواهد بود؟

۱) ۱ ۲) ۸ ۳) ۳۲ ۴) ۶۴

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

اگر در سؤالات مربوط به گرما، ابعاد و حجم اجسام مطرح شود، از رابطهٔ گرما به صورت زیر استفاده می‌کنیم:

$$\left.\begin{matrix} Q = mc\Delta T \\ m = \rho V \end{matrix}\right\} Q = \rho V c \Delta T$$

پاسخ خیلی تشریحی

با توجه به درس‌باکس، رابطهٔ مقایسه‌ای گرما را می‌نویسیم:

$$\frac{Q_B}{Q_A} = \frac{\rho_B}{\rho_A} \times \frac{V_B}{V_A} \times \frac{c_B}{c_A} \times \frac{\Delta\theta_B}{\Delta\theta_A}$$

از آن‌جا که جنس هر دو کره یکسان است، دارای ظرفیت گرمایی ویژه و چگالی یکسانی هستند و داریم:

$$\frac{Q_B}{Q_A} = \left(\frac{r_B}{r_A}\right)^3 \times \frac{\Delta\theta_B}{\Delta\theta_A} \Rightarrow \frac{80\,kJ}{10\,kJ} = \left(\frac{r_B}{2r_B}\right)^3 \times \frac{\Delta\theta_B}{\Delta\theta_A} \Rightarrow \frac{\Delta\theta_B}{\Delta\theta_A} = \frac{80\times 8}{10\times 1} = 64$$

کنکور

به دو کرهٔ توپر آلومینیمی A و B، به ترتیب ۵kJ و ۲۰kJ گرما می‌دهیم. اگر افزایش دمای کرهٔ A، دو برابر افزایش دمای کرهٔ B باشد، شعاع کرهٔ B چند برابر شعاع کرهٔ A است؟ (سؤال ۷۵ کنکور تجربی ۱۴۰۴ ـ نوبت اول)

۱) $2\sqrt{2}$ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) ۴ ۴) ۲

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۴ یک قطعه فلز ۶۰۰ گرمی را تا دمای $100\ ^\circ C$ گرم می‌کنیم و سپس آن را در گرماسنجی با ظرفیت گرمایی $210\ J/K$ که حاوی $500\ g$ آب با دمای اولیه $20\ ^\circ C$ است، می‌اندازیم. اگر دمای نهایی مجموعه $30\ ^\circ C$ شود، گرمای ویژهٔ قطعهٔ فلز در SI کدام است؟ $(c_{آب} = 4200\ J/kg.^\circ C)$

۱) ۵۰۰ ۲) ۵۲۵

۳) ۵۵۰ ۴) ۵۷۵

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

تعادل گرمایی:

اگر اتلاف گرما ناچیز باشد، در تبادل گرما بین دو جسم، با دماهای متفاوت بنا به قانون پایستگی انرژی، گرمایی که جسم B با دمای بالا از دست می‌دهد، توسط جسم A با دمای پایین‌تر دریافت می‌شود و مجموع گرمای مبادله‌شده صفر است. در این حالت، دمای جسم گرم (θ_B) تا دمای تعادل (θ) کاهش می‌یابد و دمای جسم سرد (θ_A) تا دمای تعادل (θ) افزایش می‌یابد.

θ_A $\theta_A < \theta_B$ θ_B

$$\underbrace{Q_A}_{Q_A>0\ \text{گرما گرفته}} + \underbrace{Q_B}_{Q_B<0\ \text{گرما از دست داده}} = 0 \Rightarrow m_A c_A(\theta_e - \theta_A) + m_B c_B(\theta_B - \theta_e) = 0$$

همواره دمای تعادل، بین بیشترین و کم‌ترین دماهای اولیهٔ اجسام قرار دارد.

می‌توان برای تعادل گرمایی دو جسم این‌طور در نظر گرفت که جسمی که باید گرما بگیرد تا به دمای تعادل برسد در یک طرف معادله و جسمی که باید گرما از دست بدهد و با کاهش دما به دمای تعادل برسد، در طرف دیگر معادله قرار گیرد:

$$|Q_A| = |Q_B| \rightarrow m_A c_A |\theta - \theta_A| = m_B c_B |\theta_B - \theta|$$

جسم A با دمای θ_A که کم‌تر از θ است. ← گرفتن گرما، $Q_A > 0$ ← دمای تعادل θ ← از دست دادن گرما، $Q_B < 0$ ← جسم B با دمای θ_B که بیشتر از θ است.

استراتژی حل سؤالات دمای تعادل به صورت زیر است:

گرمای مبادله‌شدهٔ هر جسم را به صورت $Q = mc|\theta - \theta_1|$ بنویسید. اگر به جای گرمای ویژهٔ جسم، ظرفیت گرمایی آن داده شود، در رابطهٔ بالا به جای mc، ظرفیت گرمایی (C) را قرار می‌دهیم. اگر تبادل گرما با محیط ناچیز باشد، می‌توان نوشت:

$$Q_A + Q_B + Q_C + \cdots = 0$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

$$Q_{آب} + Q_{گرماسنج} + Q_{فلز} = 0 \Rightarrow mc_{آب}\Delta\theta_{آب} + C_{گرماسنج}\Delta\theta_{گرماسنج} + mc_{فلز}\Delta\theta_{فلز} = 0$$

$$\Rightarrow 0/5 \times 4200 \times (30-20) + 210 \times (30-20) + 0/6 \times c_{فلز} \times (30-100) = 0$$

$$c_{فلز} = 550 \frac{J}{kg.K}$$

کتاب درسی

برای اندازه‌گیری گرمای ویژهٔ فلزی با جنس نامعلوم، قطعه‌ای ۰/۶۰۰ کیلوگرمی از آن را تا $100/0\ ^\circ C$ گرم می‌کنیم و سپس آن را در گرماسنجی با ظرفیت گرمایی $1/80 \times 10^2\ J/K$ که حاوی $0/500\ kg$ آب با دمای اولیهٔ $17/3\ ^\circ C$ است، می‌اندازیم. اگر دمای نهایی مجموعه $20/0\ ^\circ C$ شود، گرمای ویژهٔ این فلز چه‌قدر است؟

(فیزیک (۱) ـ مثال ۴ ـ ۹ صفحهٔ ۱۰۲ کتاب درسی)

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۵ در طی یک آزمایش، مقداری یخ با دمای $-۲۰\ ^\circ C$ توسط یک گرمکن با توان ثابت در مدت $۲\ min$، به آب با دمای $۱۰\ ^\circ C$ تبدیل می‌شود. در این آزمایش چند ثانیه طول کشیده است تا دمای آب از $۳\ ^\circ C$ به $۸\ ^\circ C$ برسد؟

$(L_F = ۳۳۶ \frac{kJ}{kg}$ و $c_{آب} = ۲c_{یخ} = ۴۲۰۰ \frac{J}{kg.K})$

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

توان گرمایی:

اهنگ گرمای تولیدشده توسط یک گرمکن را توان گرمایی آن گویند.

$$P_{گرمایی} = \frac{Q}{t}$$

معمولاً توان گرمایی یک جسم گرماده، ثابت است.

گرمای نهان ذوب ـ انجماد:

گرمای منتقل‌شده برای تغییر حالت جسم از جامد به مایع یا از مایع به جامد، با جرم جسم نسبت مستقیم دارد. نسبت این گرما به جرم جسم را گرمای نهان ویژهٔ ذوب می‌گویند که به اختصار، آن را گرمای نهان ذوب می‌نامیم و آن را با L_F نشان می‌دهیم:

$$L_F = \frac{Q}{m}$$

$Q = +mL_F$ ذوب

$Q = -mL_F$ انجماد

گرمای نهان ذوب بستگی به جنس جسم و فشار وارد بر آن دارد و یکای آن در SI ژول بر کیلوگرم (J/kg) است.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: مراحل تبدیل یخ $-۲۰\ ^\circ C$ به آب $۱۰\ ^\circ C$:

یخ $-۲۰\ ^\circ C$ $\xrightarrow{Q_۱ = mc_{یخ} \times ۲۰}$ یخ $۰\ ^\circ C$ $\xrightarrow{Q_۲ = +mL_F}$ آب $۰\ ^\circ C$ $\xrightarrow{Q_۳ = mc_{آب} \times ۱۰}$ آب $۱۰\ ^\circ C$

$$Q_۱ = mc_{یخ} \times ۲۰, Q_۲ = +mL_f, Q_۳ = mc_{آب} \times ۱۰$$

گام دوم: محاسبهٔ توان گرمکن:

$$Q = Q_۱ + Q_۲ + Q_۳ = \Delta t$$

$$\Rightarrow Q = ۲۰ \times ۲۱۰۰ \times m + m \times ۳۳۶۰۰۰ + ۴۲۰۰ \times ۱۰ \times m = ۴۲۰۰۰۰\, m = P \times ۶۰ \times ۲$$

$$\Rightarrow P = ۳۵۰۰\, m$$

گام سوم: محاسبهٔ زمان رسیدن آب $۳\ ^\circ C$ به آب $۸\ ^\circ C$ توسط گرمکن:

$$Q' = \Delta t'$$

$$\Rightarrow Q' = mc\Delta\theta = m \times ۴۲۰۰ \times (۸-۳) = ۲۱۰۰۰\, m \Rightarrow ۲۱۰۰۰\, \cancel{m} = ۳۵۰۰\, \cancel{m} \Delta t' \Rightarrow \Delta t' = \frac{۲۱۰۰۰}{۳۵۰۰} = ۶\ s$$

تیزبازی

در سؤالات گرمای نهان، برای ساده‌ترشدن محاسبات، توصیه اینه که گرمای ویژه و هم‌چنین گرمای نهان همهٔ اجسام رو بر مبنای $c_{آب}$ بنویسید و تا مرحلهٔ آخر هیچ محاسبهٔ عددی‌ای انجام ندین؛ برای این‌کار اعداد زیر رو به خاطر بسپرین.

$$L_F = ۸۰\, c_{آب} \quad ؛ \quad c_{یخ} = \frac{c_{آب}}{۲}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۶ مقداری آب به جرم $2\ kg$ و دمای $50^\circ C$، در فشار $1\ atm$، با توان ثابت $1968\ W$ گرما دریافت می‌کند. چند ثانیه طول می‌کشد تا آب به طور کامل بخار شود؟ ($c = 4200\ J/kg.K$ ، $L_V = 2250\ J/g$ و تبخیر سطحی ناچیز است.)

۱) ۲۵۰۰ ۲) ۲۵۵۰

۳) ۲۶۰۰ ۴) ۲۶۵۰

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

رابطهٔ گرمای نهان تبخیر و میعان:

تجربه نشان می‌دهد که گرمای منتقل‌شده برای تبخیر هر مایع با جرم آن نسبت مستقیم دارد. نسبت این گرما به جرم مایع بخارشده را گرمای نهان ویژهٔ تبخیر می‌نامیم که برای سادگی گرمای نهان تبخیر نامیده می‌شود و آن را با L_V نشان می‌دهیم.

گرمای نهان تبخیر هر مایع به جنس و دمای آن بستگی دارد و یکای آن در SI ژول بر کیلوگرم (J/kg) است.

$+$ هنگام تبخیر و $-$ هنگام میعان به کار می‌روند.

$$Q = \pm mL_V \ , \ L_V = \frac{Q}{m}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: ابتدا گرمای لازم برای بخارشدن $2kg$ آب $50\ ^\circ C$ را به دست می‌آوریم:

آب ۲ kg، ۵۰ °C $\xrightarrow{mc\Delta\theta}$ آب ۲ kg، ۱۰۰ °C $\xrightarrow{mL_V}$ بخار ۲ kg، ۱۰۰ °C

$$Q_{کل} = 2\times4200\times(100-50)+2\times2250000 = 4920000\ J$$

گام دوم: گرمای به‌دست‌آمده را برابر با گرمای تولیدشدهٔ گرمکن قرار می‌دهیم:

$$Q_{گرمکن} = Q_{کل} \Rightarrow Pt = Q_{کل}$$

$$\Rightarrow 1968\times t = 4920000 \Rightarrow t = 2500\ s$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۷ چه تعداد از موارد زیر درست است؟

الف) در روزهای سرد سال، پوشیدن لباس‌های با رنگ تیره، مناسب‌تر است.

ب) در فلزات، فقط الکترون‌های آزاد در انتقال گرما نقش دارند.

پ) در ساحل یک دریا، در هنگام شب، پدیدهٔ همرفت موجب نسیمی از دریا به سمت ساحل می‌شود.

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

سه روش برای انتقال گرما وجود دارد: ۱) رسانش گرمایی ۲) همرفت ۳) تابش گرمایی

نکته

در فرایند انتقال گرما، ممکن است یک، دو یا هر سه روش فوق انجام گیرد.



- همرفت
  - تعریف: انتقال گرما در مایعات و گازها که همراه با جابه‌جایی بخشی از خود ماده است.
  - فرایند: گرم‌شدن شاره ← افزایش حجم و کاهش چگالی ← افزایش نیروی شناوری و بالارفتن ← انتقال انرژی همراه ماده
  - عامل مؤثر: هرچه ضریب انبساط حجمی مایع بیشتر باشد، همرفت بهتر انجام می‌پذیرد.
  - انواع
    - طبیعی: همرفت بدون کمک پمپ مانند گرم‌شدن هوای اتاق با شوفاژ، گرم‌شدن آب درون قابلمه، جریان بادهای ساحلی (در روز به سمت ساحل و در شب به سمت دریا)، انتقال گرما از مرکز خورشید به سطح آن
    - واداشته: همرفت به کمک پمپ مانند سیستم گرم‌کنندهٔ مرکزی در ساختمان‌ها، سیستم خنک‌کنندهٔ موتور اتومبیل و دستگاه گردش خون
- تابش گرمایی
  - تعریف: تمام اجسام در هر دمایی تابش گرمایی (امواج الکترومغناطیسی) دارند. ← دماهای کم‌تر از ۵۰۰ درجه عمدتاً فروسرخ
  - عوامل مؤثر
    - دما: رابطهٔ مستقیم
    - مساحت: رابطهٔ مستقیم
    - رنگ: هرچه تیره‌تر، تابش بیشتر ← خنک‌شدن سریع‌تر آب در قوری سیاه‌رنگ
    - صیقلی‌بودن: هرچه ناصاف‌تر، تابش بیشتر
  - مثال
    - تابش خورشید، رادیاتور و لامپ رشته‌ای
    - کلم اسکانک یکی از چند گیاهی است که با تابش فروسرخ، برف اطرافش را آب می‌کند.
    - نوعی مار زنگی که با تابش فروسرخ طعمه‌های خون‌گرم خود را در تاریکی شب تشخیص می‌دهد.
  - کاربرد
    - دمانگار: وسیله‌ای برای آشکارسازی پرتوهای فروسرخ (گرم قرمز و سرد آبی) و ایجاد تصویری به نام دمانگاشت
    - تفسنج: وسیله‌ای برای اندازه‌گیری دما بدون تماس، به‌خصوص در دماهای بالای $1100^\circ C$
      - تابشی: معیار نیست.
      - نوری: معیار است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

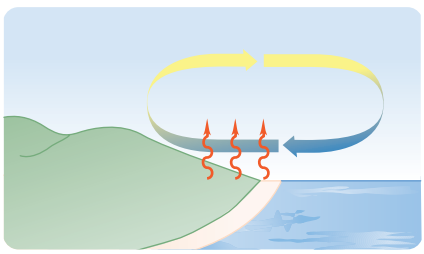


پاسخ خیلی تشریحی ✔ بررسی موارد:

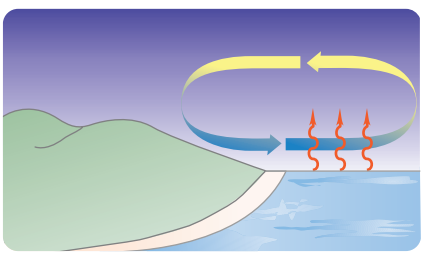
الف) درست

ب) نادرست؛ سهم الکترون‌های آزاد بیشتر از ارتعاش اتم‌ها است.

پ) نادرست؛ در شب، نسیم از ساحل به دریا می‌رود.



روز



شب

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۸ تعداد مولکول‌های هوای درون اتاقی به ابعاد ۴m، ۵m و ۳m در فشار ۱atm و دمای ۲۷°، برابر کدام است؟ (هوا را یک گاز آرمانی فرض کنید، $R = ۸ \frac{J}{mol.K}$ و $N_a = ۶ \times ۱۰^{۲۳}$)

۱) ۱۵×۱۰^{۲۵}
۲) ۱۵×۱۰^{۲۶}
۳) ۱۸×۱۰^{۲۵}
۴) ۱۸×۱۰^{۲۶}

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

قانون گازهای آرمانی (کامل):

به گازهایی که به اندازهٔ کافی رقیق باشند، یا چگالی آن‌ها به حد کافی کم باشد و مولکول‌های آن‌ها به حدی از هم دورند که بر هم تأثیر چندانی نمی‌گذارند، گاز آرمانی (کامل) می‌گویند.

این روابط را می‌توانیم در شکل کلی موسوم به قانون گازهای آرمانی به صورت زیر ترکیب کنیم:

$$\frac{PV}{nT} = \text{ثابت}$$

این مقدار ثابت را با R نشان می‌دهند و به آن ثابت جهانی گازها می‌گویند. آزمایش نشان می‌دهد که مقدار R برابر است با:

$$n = \frac{m}{M}$$

(n: تعداد مول‌ها، m: جرم گاز، M: جرم مولی)

$$R = ۸/۳۱۴ \ J/mol.K$$

بنابراین، قانون گازهای کامل را می‌توان چنین نوشت:

$$PV = nRT$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ با استفاده از قانون گازهای آرمانی داریم:

$$T = \theta + ۲۷۳ = ۲۷ + ۲۷۳ = ۳۰۰K$$

$$PV = nRT \Rightarrow ۱۰^{۵} \times (۳ \times ۴ \times ۵) = n \times ۸ \times ۳۰۰$$

$$\Rightarrow n = ۲۵۰۰$$

تعداد مولکول = عدد آووگادرو × تعداد مول

$$\Rightarrow \text{تعداد مولکول} = ۲۵۰۰ \times ۶ \times ۱۰^{۲۳} = ۱۵ \times ۱۰^{۲۶}$$

کتاب درسی

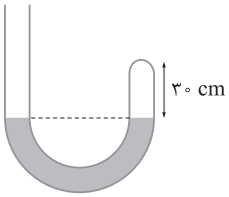
الف) تعداد مولکول‌های هوایی که در اتاقی به ابعاد ۴/۰۰ m، ۶/۰۰ m و ۳/۰۰ m در فشار ۱/۰۰ atm و دمای ۲۰ °C وجود دارد، چه‌قدر است؟ ($R = ۸/۳۱ \ J/mol.K$)

ب) جرم هوای درون اتاق چه‌قدر است؟ جرم مولی متوسط گازهای موجود در هوا، ۰/۰۲۹ kg/mol است.

(فیزیک (۱) ـ مثال ۴ ـ ۱۸ صفحهٔ ۱۲۳ کتاب درسی)

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۹ در لولهٔ U شکل زیر، در شاخهٔ سمت راست، مقداری گاز کامل با دمای $27\ ^\circ C$ محبوس و مایع درون لوله، جیوه است. دمای گاز محبوس را چند درجهٔ سلسیوس افزایش دهیم تا جیوه در شاخهٔ سمت چپ، $5\ cm$ بالاتر بیاید؟ ($P_0 = 70\ cmHg$ و سطح مقطع لوله در همه‌جا یکسان است.)



در این سؤال باید دقت کنید که حجم گاز و فشار آن تغییر می‌کنند؛ حجم گاز به اندازهٔ حجمی که مایع جابه‌جا شده افزایش می‌یابد و فشار آن نیز به اندازهٔ دو برابر فشار ستون مایع جابه‌جاشده تغییر می‌کند.

۱) ۱۰۰
۲) ۱۲۰
۳) ۱۲۵
۴) ۱۵۰

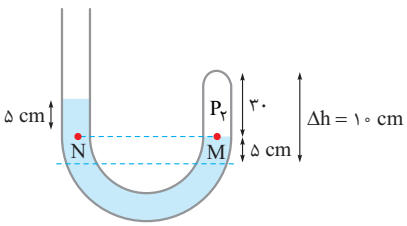
پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✔ همان‌طور که می‌دانید، طبق معادلهٔ حالت گازهای آرمانی داریم:

$$PV = nRT$$

حال فرمول مقایسه‌ای را می‌نویسیم. با توجه به این‌که تعداد مول گاز تغییر نمی‌کند:

$$\frac{P_2}{P_1} \times \frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1}$$



همان‌طور که در شکل می‌بینید، اختلاف ارتفاع ستون جیوه در ۲ سمت لولهٔ U شکل $10\ cm$ است و داریم:

$$P_1 = P_0 = 70\ cmHg\ ;\ P_2 = P_0 + 10\ cmHg$$

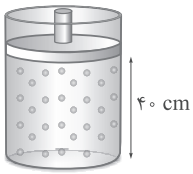
$$V_1 = Ah\ ;\ V_2 = A(h+5) \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{h+5}{h} = \frac{35}{30}$$

$$\frac{P_2}{P_1} \times \frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1} \xrightarrow{T=\theta+273=27+273=300K} \frac{80}{70} \times \frac{35}{30} = \frac{T_2}{300} \Rightarrow T_2 = 400\ K$$

$$\Delta T = 400 - 300 = 100\ K$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۰ در شکل زیر، $0/05\ mol$ گاز کامل، زیر پیستونی با وزن $120\ N$ و مساحت $20\ cm^2$ قرار دارد. اگر فشار هوا برابر با $0/9\ atm$ باشد، دمای این گاز چند درجهٔ سلسیوس است؟ ($R = 8\ \frac{J}{mol.K}$ و اصطکاک ناچیز است.)



۱) ۳۰۰

۲) ۳۲۰

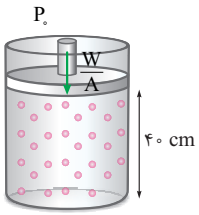
۳) ۲۷

۴) ۴۷

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: فشار گاز درون سیلندر را حساب می‌کنیم:



$$P = P_0 + \frac{mg}{A} = 9\times10^4 + \frac{120}{20\times10^{-4}} \Rightarrow P = 9\times10^4 + 6\times10^4 = 15\times10^4\ Pa$$

(وزن پیستون ↑ mg، A ↓ سطح مقطع)

گام دوم: حال با استفاده از معادلهٔ حالت گاز کامل، دمای گاز محبوس را به دست می‌آوریم:

$$V = Ah = 20\times40\times10^{-6} = 8\times10^{-4}\ m^3$$

$$PV = nRT \Rightarrow 15\times10^4\times8\times10^{-4} = 5\times10^{-2}\times8\times T$$

$$\Rightarrow T = 300\ K \Rightarrow \theta = 300 - 273 = 27\ ^\circ C$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

شیمی دهم

۴۱ **کدام مورد درست است؟**

۱) گازها برخلاف جامدها و مانند مایع‌ها، حجم و شکل معینی ندارند.

۲) قراردادن بادکنک‌های پرشده از هوا درون نیتروژن مایع، سبب می‌شود که حجم آن‌ها به شدت کاهش یابد.

۳) عبارت «۳/۲ گرم گاز اکسیژن در دمای $25\ ^{\circ}C$» توصیف کاملاً دقیقی از یک نمونه گاز است.

۴) با افزایش فشار بر یک نمونهٔ گاز، حجم مولکول‌های آن کم‌تر می‌شود.

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✔ نیتروژن مایع، بسیار سرد است و قراردادن بادکنک درون آن، باعث کاهش حجم بادکنک خواهد شد، زیرا حجم گاز با دما رابطهٔ مستقیم دارد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): مایع‌ها مانند جامدها، حجم معینی دارند.

حالت	شکل معین	حجم معین	تابع شکل ظرف	تراکم‌پذیر
جامد (s)	دارد	دارد	نیست	نیست
مایع (l)	ندارد	دارد	است	نیست
گاز (g)	ندارد	ندارد	است	است

گزینهٔ (۳): برای توصیف دقیق یک نمونهٔ گاز، علاوه بر مقدار و دما، فشار آن نیز باید مشخص باشد.

گزینهٔ (۴): در دمای ثابت، با کاهش فشار، حجم گاز و در واقع فاصلهٔ بین مولکول‌های آن افزایش می‌یابد، نه حجم خود مولکول‌ها!

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۲ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر، به ترتیب چگونه است؟ $(C = ۱۲, O = ۱۶ : g.mol^{-۱})$

الف) در دما و فشار یکسان، حجم ۰/۴ مول گاز کربن دی‌اکسید بیشتر از حجم ۰/۴ مول گاز اکسیژن است.

ب) براساس قانون آووگادرو، حجم مولی گازها در فشار و دمای ثابت برابر با ۲۲/۴ لیتر است.

پ) در شرایط استاندارد (STP)، ۲۲/۴ لیتر از گازهای مختلف جرم برابری دارند.

ت) طبق قانون آووگادرو، در فشار ۵ اتمسفر و دمای $۲۵\ ^\circ C$، یک مول از گازهای مختلف حجم ثابت و برابری دارند.

۱) نادرست ـ نادرست ـ نادرست ـ درست

۲) نادرست ـ درست ـ نادرست ـ نادرست

۳) درست ـ درست ـ نادرست ـ درست

۴) درست ـ نادرست ـ نادرست ـ نادرست

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

قانون آووگادرو:

در دما و فشار ثابت، حجم هر گازی به تعداد مول‌های آن بستگی دارد؛ پس اگر تعداد مول‌های دو یا چند گاز برابر باشد، حجم آن‌ها نیز با هم برابر خواهد بود. *این کشف بزرگ!* نخستین بار در سال ۱۸۱۱ توسط *بناب آووگادرو* ارائه و بعدها به **قانون آووگادرو** مشهور شد. طبق این قانون، *معلومه که* حجم یک گاز **مستقل از نوع گاز** است و فقط به شمار مول‌های آن بستگی دارد. مثلاً در دما و فشار یکسان، حجم ۰/۵ مول گاز (He) با حجم ۰/۵ مول گاز متان $(CH_۴)$ *هیچ فرقی نداره!*

از اون‌جایی که یک مول از گازهای مختلف، دارای تعداد مولکول‌های برابری $(۶/۰۲ \times ۱۰^{۲۳}$ مولکول) هستند، می‌توان گفت که در دما و فشار یکسان، تعداد مولکول‌های برابر از گازهای مختلف، حجم یکسانی را اشغال می‌کنند. مثلاً در دما و فشار یکسان، حجم اشغال‌شده توسط ۶ مولکول اکسیژن $(O_۲)$ با حجم اشغال‌شده توسط ۶ مولکول کربن دی‌اکسید $(CO_۲)$، با هم برابر است.

- دو بیان از قانون آووگادرو
  - در دما و فشار یکسان، حجم یک مول از گازهای گوناگون با هم برابر است.
  - در دما و فشار یکسان، تعداد مولکول‌های برابر از گازهای مختلف، حجم یکسانی اشغال می‌کنند.

از آن‌جا که حجم گازها علاوه بر مقدار گاز، تابعی از فشار و دمای آن‌ها است، شیمی‌دان‌ها به طور معمول حجم گازها را در دمای $۰\ ^\circ C$ $(۲۷۳\ K)$ و فشار ۱ atm $(۷۶۰$ mmHg یا ۷۶ cmHg$)$ بیان می‌کنند که به این شرایط، شرایط استاندارد یا همان STP می‌گویند.

در شرایط استاندارد (STP)، همواره ۱ مول از هر گازی، ۲۲/۴ لیتر یا ۲۲,۴۰۰ میلی‌لیتر حجم دارد که به این مقدار، **حجم مولی** گازها در شرایط STP می‌گویند.

- شرایط استاندارد (STP)
  - دمای $۰\ ^\circ C$ یا ۲۷۳ K
  - فشار ۱ atm یا ۷۶ cmHg یا ۷۶۰ mmHg
- حجم مولی گازها: ۲۲/۴ L یا ۲۲,۴۰۰ mL

پاسخ خیلی تشریحی

عبارت‌های «الف»، «ب» و «پ» نادرست و عبارت «ت» درست است.

بررسی عبارت‌ها:

الف) در دما و فشار یکسان، حجم مولی گازها برابر است؛ بنابراین حجم ۰/۴ مول $CO_۲$ با حجم ۰/۴ مول $O_۲$ برابر است.

ب) حجم مولی گازها در هر دما و فشاری *که* برابر ۲۲/۴ لیتر نیست!

پ) در شرایط STP، ۲۲/۴ لیتر از گازهای مختلف، تعداد مول برابری دارند. با توجه به متفاوت‌بودن جرم مولی گازها، تعداد مول یکسان از آن‌ها به معنی برابربودن جرم آن‌ها نیست!

ت) طبق قانون آووگادرو، در دما و فشار یکسان، حجم ۱ مول از گازهای مختلف با هم برابر است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۳ در ظرفی به حجم ۷ لیتر از گاز اکسیژن در دمای ۲۷۳ K و فشار ۱ atm، به تقریب چه تعداد مولکول O_2 وجود دارد؟

۱) $۱۵/۵\times۱۰^{۲۲}$
۲) $۱۸/۸\times۱۰^{۲۲}$
۳) $۱۸/۸\times۱۰^{۲۳}$
۴) $۱۵/۵\times۱۰^{۲۳}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

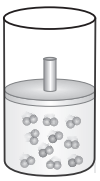
پاسخ خیلی تشریحی ✔ دمای ۲۷۳ K و فشار ۱ atm، همان شرایط STP است که در آن، حجم هر مول گاز معادل با ۲۲/۴ لیتر است؛ به این ترتیب خواهیم داشت:

$$۷\ L\ O_2\times\frac{۱\ mol\ O_2}{۲۲/۴\ L\ O_2}\times\frac{۶/۰۲\times۱۰^{۲۳}\ \text{مولکول}}{۱\ mol\ O_2}=\frac{۷\times۶/۰۲\times۱۰^{۲۳}\times۱۰}{\cancel{۲۲۴}\ ۷\times۳۲}$$

$$=\frac{۶۰۲}{۳۲}\times۱۰^{۲۲}=۱۸/۸۱۲۵\times۱۰^{۲۲}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۴ با توجه به جدول زیر که چند نمونهٔ گازی را در شرایط STP نشان می‌دهد، کدام موارد درست است؟ (هر ذره معادل ۰/۰۲ مول است و $g.mol^{-1}$: $Ne=۲۰, O=۱۶, C=۱۲, H=۱$)

شمارهٔ نمونه	(۱)	(۲)	(۳)	(۴)
گاز	$H_۲$	Ne	$CO_۲$	$O_۲$
ظرف محتوی گاز				

الف) حجم نمونهٔ (۳) برابر ۴/۴۸ لیتر است.

ب) اکسیژن موجود در ظرف (۴) برای سوختن کامل ۱ مول پروپان کافی است.

پ) شمار اتم‌ها در ظرف‌های (۳) و (۴) برابر است.

ت) جرم گاز موجود در ظرف (۲)، ۱۰ برابر ظرف (۱) است.

۱) «الف» ـ «پ»
۲) «الف» ـ «ت»
۳) «ب» ـ «پ»
۴) «ب» ـ «ت»

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✔ عبارت‌های «الف» و «ت» درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

الف) نمونهٔ (۳) دارای $۱۰\times۰/۰۲=۰/۲$ مول گاز است:

$$۰/۲\ mol\ CO_۲\times\frac{۲۲/۴\ L\ CO_۲}{۱\ mol\ CO_۲}=۴/۴۸\ L\ CO_۲$$

ب) در ظرف (۴)، $۱۰\times۰/۰۲=۰/۲$ مول گاز اکسیژن وجود دارد.

$$C_۳H_۸+۵O_۲\rightarrow ۳CO_۲+۴H_۲O$$

$$۰/۲\ mol\ O_۲\times\frac{۱\ mol\ C_۳H_۸}{۵\ mol\ O_۲}=۰/۰۴\ mol\ C_۳H_۸$$

پ) ظرف‌های (۳) و (۴) به ترتیب دارای ۰/۲ مول $CO_۲$ و ۰/۲ مول $O_۲$ هستند. با توجه به این‌که $CO_۲$، مولکولی ۳ اتمی و $O_۲$ مولکولی ۲ اتمی است، شمار اتم‌ها در این دو ظرف برابر نیست:

شمار مول اتم‌های ظرف (۳) $=۰/۲\times۳=۰/۶\ mol$

شمار مول اتم‌های ظرف (۴) $=۰/۲\times۲=۰/۴\ mol$

ت) ظرف‌های (۱) و (۲) به ترتیب دارای $۵\times۰/۰۲=۰/۱$ مول $H_۲$ و $۵\times۰/۰۲=۰/۱$ مول Ne هستند.

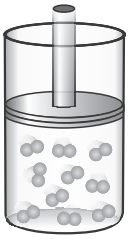
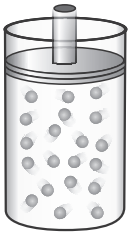
$$\frac{\text{جرم گاز در ظرف (۲)}}{\text{جرم گاز در ظرف (۱)}}=\frac{۰/۱\ mol\ Ne\times\frac{۲۰\ g\ Ne}{۱\ mol\ Ne}}{۰/۱\ mol\ H_۲\times\frac{۲\ g\ H_۲}{۱\ mol\ H_۲}}=\frac{۲۰}{۲}=۱۰$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

کنکور

با توجه به شکل داده‌شده که ظرف‌های محتوی گازهای مختلف را در دما و فشار یکسان نشان می‌دهد، کدام مورد درست است؟ (هر ذره، معادل ۰/۱ مول است. $He = ۴ , C = ۱۲ , N = ۱۴ , O = ۱۶ , Ne = ۲۰ : g.mol^{-۱}$)

(سؤال ۷۹ کنکور تجربی ۱۴۰۳ ـ نوبت اول)

شمارهٔ نمونه	(۱)	(۲)	(۳)	(۴)	(۵)
گاز	CO	Ne	$CO_۲$	$N_۲$	He
ظرف محتوی گاز					

۱) شمار اتم‌های نمونهٔ (۴)، دو برابر شمار مولکول‌های نمونهٔ (۱) است.

۲) حجم گاز نمونهٔ (۴)، دو برابر حجم گاز نمونهٔ (۱) و برابر ۲۲/۴ لیتر است.

۳) مجموع جرم گاز در نمونه‌های (۱) و (۳)، ۲/۹ برابر جرم گاز در نمونهٔ (۲) است.

۴) جرم گاز نمونهٔ (۵)، ۸۰ درصد جرم گاز نمونهٔ (۲) و حجم آن، ۴ برابر حجم گاز نمونهٔ (۱) است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۵ واکنش آلومینیم با نمکی از آمونیوم به صورت زیر انجام می‌شود:

$Al(s) + NH_4ClO_4(s) \rightarrow Al_2O_3(s) + AlCl_3(s) + H_2O(l) + N_2(g)$ (معادله موازنه شود.)

نسبت جرمی آلومینیم اکسید به گاز نیتروژن تولیدشده در این واکنش کدام است؟

$(N = 14, O = 16, Al = 27 : g.mol^{-1})$

۱) ۱/۳۳ ۲) ۲/۵۷

۳) ۳/۶۴ ۴) ۴/۸۶

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔ ابتدا معادلهٔ واکنش را موازنه می‌کنیم.

$$-Al(s) + -NH_4ClO_4(s) \rightarrow -Al_2O_3(s) + -AlCl_3(s) + -H_2O(l) + -N_2(g)$$

پیچیده‌ترین ترکیب NH_4ClO_4 است، موازنه را با عنصر O نمی‌توان آغاز کرد، زیرا در سمت راست معادله، در ساختار دو ماده وجود دارد. بین عنصرهای N، H و Cl، موازنه را با H که زیروند بزرگ‌تری دارد، شروع می‌کنیم. برای این منظور، به NH_4ClO_4، ضریب ۱ و به H_2O، ضریب ۲ می‌دهیم تا تعداد اتم هیدروژن در دو سمت معادله برابر ۴ شود.

$$-Al(s) + 1NH_4ClO_4(s) \rightarrow -Al_2O_3(s) + -AlCl_3(s) + 2H_2O(l) + -N_2(g)$$

در سمت چپ معادله، ۴ اتم اکسیژن وجود دارد و در سمت راست، فعلاً ۲ اتم اکسیژن! بنابراین برای موازنهٔ اتم‌های O، ضریب Al_2O_3 باید $\frac{2}{3}$ باشد. برای از بین بردن ضریب کسری، همهٔ اعداد را در ۳ ضرب می‌کنیم:

$$-Al(s) + 3NH_4ClO_4(s) \rightarrow 2Al_2O_3(s) + -AlCl_3(s) + 6H_2O(l) + -N_2(g)$$

به منظور موازنهٔ Cl و N، ضریب $AlCl_3$ و N_2 به ترتیب باید برابر ۱ و $\frac{3}{2}$ باشد. همهٔ ضرایب را در ۲ ضرب می‌کنیم و در آخر به منظور موازنهٔ Al، ضریب Al را برابر ۱۰ قرار می‌دهیم.

$$10Al(s) + 6NH_4ClO_4(s) \rightarrow 4Al_2O_3(s) + 2AlCl_3(s) + 12H_2O(l) + 3N_2(g)$$

با توجه به معادله، نسبت مول Al_2O_3 به N_2 تولیدشده برابر $\frac{4}{3}$ است. اگر این نسبت را در نسبت جرم مولی مواد ضرب کنیم، نسبت جرم آن‌ها به دست می‌آید:

جرم = مول × جرم مولی

$$\frac{\text{جرم } Al_2O_3}{\text{جرم } N_2} = \frac{\text{مول } Al_2O_3}{\text{مول } N_2} \times \frac{\text{جرم مولی } Al_2O_3}{\text{جرم مولی } N_2} = \frac{4}{3} \times \frac{102}{28} = \frac{34}{7} \simeq 4/86$$

معادل با نسبت ضرایب استوکیومتری

کتاب درسی

واکنش آلومینیم با نمکی از آمونیوم به صورت زیر انجام می‌شود.

(شیمی (۱) ـ سؤال ۶ تمرین‌های دوره‌ای صفحهٔ ۸۳ کتاب درسی)

$Al(s) + NH_4ClO_4(s) \rightarrow Al_2O_3(s) + AlCl_3(s) + H_2O(l) + N_2(g)$ (واکنش شیمیایی، موازنه نشده است.)

الف) با مصرف ۲/۱۶ کیلوگرم فلز آلومینیم چند لیتر گاز در STP تولید می‌شود؟

ب) نسبت جرم آلومینیم کلرید به آلومینیم اکسید تولیدشده را حساب کنید.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۶ در دما و فشار معین، پتاسیم نیترات (KNO_3) مطابق معادلهٔ موازنه‌نشدهٔ زیر تجزیه می‌شود:

$$KNO_3(s) \rightarrow K_2O(s) + N_2(g) + O_2(g)$$

اگر با تجزیهٔ ۵۰/۵ گرم پتاسیم نیترات، ۳۵ لیتر گاز تولید شود، حجم مولی گازها در شرایط واکنش چند لیتر است؟

$(N = 14, O = 16, K = 39 : g.mol^{-1})$

۱) ۲۰ ۲) ۲۸ ۳) ۳۲ ۴) ۴۰

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔

معادلهٔ موازنه‌شدهٔ واکنش به صورت زیر است:

$$4KNO_3 \rightarrow 2K_2O + 2N_2 + 5O_2$$

اگر حجم مولی گازها را x لیتر بر مول در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$50/5\ g\ KNO_3 \times \frac{1\ mol\ KNO_3}{101\ g\ KNO_3} \times \frac{7\ mol\ \text{گاز}}{4\ mol\ KNO_3} \times \frac{x\ L\ \text{گاز}}{1\ mol\ \text{گاز}} = 35\ L\ \text{گاز}$$

$$\Rightarrow x = \frac{35 \times 101 \times 4}{50/5 \times 7} = 40\ L$$

یه‌جور دیگه

$$\frac{\text{جرم}}{\underbrace{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}_{KNO_3}} = \frac{\text{حجم}}{\underbrace{\text{حجم مولی} \times \text{ضریب}}_{N_2+O_2}} \Rightarrow \frac{50/5}{4 \times 101} = \frac{35}{7 \times x} \Rightarrow x = 40\ L$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۷ **کدام مورد، نادرست است؟**

۱) نزدیک به $\frac{۳}{۴}$ سطح زمین را آب تشکیل می‌دهد.

۲) پس از اقیانوس‌ها، بیشترین مقدار آب جهان در کوه‌های یخ ذخیره شده است.

۳) با توجه به خروج مقداری ماده از آب دریاها و اقیانوس‌ها، جرم کل مواد حل‌شده در آب‌های کرهٔ زمین رو به کاهش است.

۴) دریاها مخلوطی همگن از انواع یون‌ها و مولکول‌ها در آب هستند.

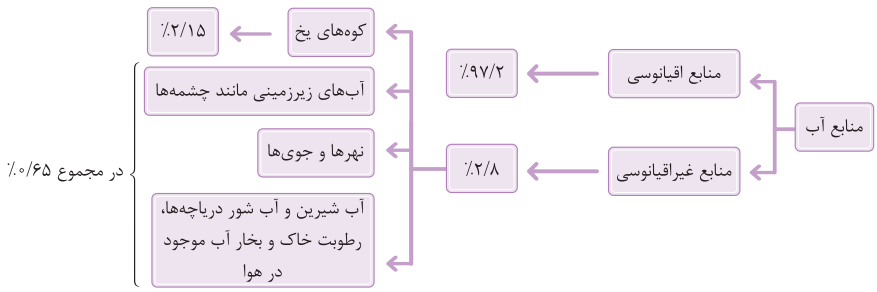
پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔ جرم کل مواد حل‌شده در آب‌های کرهٔ زمین تقریباً ثابت است، زیرا با وجود خروج مقداری ماده از آب دریاها و اقیانوس‌ها، مقداری ماده نیز وارد این آب‌ها می‌شود.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): نزدیک به ۷۵ درصد یا $\frac{۳}{۴}$ سطح زمین را آب تشکیل می‌دهد.

گزینهٔ (۲):



گزینهٔ (۴): *کاملاً درسته!*

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۸ **برای شناسایی یون‌های کلسیم، باریم و نقره به ترتیب می‌توان از محلول‌های ..... ، ..... و ..... استفاده کرد.**

۱) سدیم کلرید ـ سدیم فسفات ـ منیزیم نیترات

۲) سدیم فسفات ـ سدیم سولفات ـ پتاسیم نیترات

۳) پتاسیم نیترات ـ پتاسیم فسفات ـ سدیم کلرید

۴) پتاسیم فسفات ـ پتاسیم سولفات ـ سدیم کلرید

پاسخ: گزینهٔ ۴

نکته برای شناسایی یون‌های محلول در آب می‌توان محلول دیگری به آن اضافه کرد که با یون مورد نظر تشکیل رسوب (مادهٔ نامحلول در آب) دهد. در واقع اگر با اضافه‌کردن یک محلول به محلول حاوی یک یون مشخص، رسوب تشکیل شود، حضور آن یون در محلول اولیه *بر همگان* آشکار می‌شود. *بر شما واجبه که* مهم‌ترین ترکیب‌های یونی نامحلول در آب را بشناسین:

مهم‌ترین ترکیب‌های یونی نامحلول (رسوب) در آب ← $AgCl$ ، $Ca_3(PO_4)_2$ ، $BaSO_4$ ، $Mg(OH)_2$ ، $Al(OH)_3$ (سفیدرنگ) ، $Fe(OH)_2$ (سبزرنگ) ، $Fe(OH)_3$ (قرمز ـ قهوه‌ای (آجری) رنگ)

پاسخ خیلی تشریحی با توجه به رسوب‌بودن کلسیم فسفات، باریم سولفات و نقره کلرید، گزینهٔ (۴) *درسته!*

کاتیون مورد شناسایی	آنیونی که باید اضافه کنیم	رسوب تشکیل‌شده
$Ca^{+}(aq)$	$PO_4^{3-}(aq)$	$Ca_3(PO_4)_2(s)$
$Ba^{2+}(aq)$	$SO_4^{2-}(aq)$	$BaSO_4(s)$
$Ag^{+}(aq)$	$Cl^{-}(aq)$	$AgCl(s)$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۹ فرمول شیمیایی چه تعداد از ترکیب‌های زیر درست است؟

- آلومینیم سولفات: $AlSO_4$
- باریم هیدروکسید: $Ba(OH)_2$
- سدیم فسفات: Na_3PO_4
- آمونیوم کربنات: $(NH_4)_2CO_3$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی به‌جز آلومینیم سولفات، فرمول بقیهٔ ترکیب‌ها درست است.

$Al^{3+}SO_4^{2-} \Rightarrow Al_2(SO_4)_3$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۰ اگر در مقداری معین از یک نمونهٔ آب، به ترتیب ۷۲ و ۱۸۴ گرم از یون‌های Mg^{2+} و Na^{+} و مقدار کافی یون SO_4^{2-} وجود داشته باشد، پس از تبخیر آب، نسبت جرم نمک منیزیم به شمار مول‌های نمک سدیم، به تقریب کدام است؟

$(O=16, Na=23, Mg=24, S=32 : g.mol^{-1})$

۱) ۹۰ ۲) ۸۰ ۳) ۳۰ ۴) ۵۰

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی با تبخیر آب، نمک‌های $MgSO_4$ و Na_2SO_4 تشکیل می‌شوند:

$$Mg^{2+} + SO_4^{2-} \rightarrow MgSO_4$$

$$?\,g\,MgSO_4 = 72\,g\,Mg^{2+} \times \frac{1\,mol\,Mg^{2+}}{24\,g\,Mg^{2+}} \times \frac{1\,mol\,MgSO_4}{1\,mol\,Mg^{2+}} \times \frac{120\,g\,MgSO_4}{1\,mol\,MgSO_4} = 360\,g$$

$$2Na^{+} + SO_4^{2-} \rightarrow Na_2SO_4$$

$$?\,g\,Na_2SO_4 = 184\,g\,Na^{+} \times \frac{1\,mol\,Na^{+}}{23\,g\,Na^{+}} \times \frac{1\,mol\,Na_2SO_4}{2\,mol\,Na^{+}} = 4\,mol$$

$$\text{نسبت خواسته‌شده} = \frac{\text{جرم نمک منیزیم}}{\text{شمار مول های نمک سدیم}} = \frac{360}{4} = 90$$

کنکور

اگر در مقداری معین از یک نمونهٔ آب، به ترتیب ۷۲ و ۱۸۴ گرم از یون‌های Mg^{2+} و Na^{+} و مقدار کافی از یون‌های SO_4^{2-} وجود داشته باشد، پس از تبخیر آب، نسبت جرم نمک بدون آب سدیم به جرم نمک بدون آب منیزیم، به تقریب کدام است؟

$(S=32, Mg=24, Na=23, O=16 : g.mol^{-1})$

(سؤال ۲۴۹ کنکور تجربی ۱۳۹۸)

۱) ۲/۲۵ ۲) ۲/۱۵ ۳) ۱/۵۸ ۴) ۱/۴۵

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ‌نامه آزمون آزمایشی خیلی سبز

پایه یازدهم ـ مرحله سوم ـ ۱۳ شهریور ۱۴۰۵

پایه یازدهم

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا
حسابان (۱)	مازیار احمدی‌ناو ـ میثم حصارکی ـ محسن علی‌نجاری
هندسه (۲)	امیرحسین ابومحبوب ـ سید عباس حسینی
آمار و احتمال	مصطفی دیداری ـ سوگند روشنی ـ سعید قندچی
فیزیک (۲)	یاشار انگوتی ـ نوید شاهی
شیمی (۲)	مهدی براتی ـ روح الله حاجی‌سلیمانی ـ ارژنگ خانلری ـ یاسر عبداللهی ـ محمد قهرمانی‌نژاد

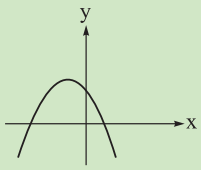
حسابان (۱)	محسن علی‌نجاری	محسن علی‌نجاری	محمدرضا راسخ	علی افضل‌زاده سروش موئینی	محبوبه اصفهانی محمد بهرامی سهند محمدکریم‌نژاد
هندسه (۲)	امیرحسین ابومحبوب	امیرحسین ابومحبوب	امیرحسین ابومحبوب	سید عباس حسینی	منصور زرکش اصفهانی ماهان فنی‌فر ابوالفضل ناصری مریم نظری
آمار و احتمال	مصطفی دیداری	مصطفی دیداری	مصطفی دیداری	سعید قندچی	عباس حسینی منصور زرکش اصفهانی عادل حسینی
فیزیک (۲)	نوید شاهی	یاشار انگوتی	مریم گلی‌حسن‌لو	علیرضا جباری سعید محبی هادی نجفی	مدیا عیدی علیرضا جعفری آثار ادریس محمدی احسان محمدی امیر محمودی انزابی نادره نازآوری
شیمی (۲)	یاسر عبداللهی	یاسر عبداللهی	یاسر عبداللهی	مرتضی نصیرزاده محمدمهدی کریمیان یاشار ذریه	عماد ربیعی عرشیا شفیعی هادی عبادی محمد نوروزی‌مال

مدیر تألیف آزمون: دکتر فاطمه آقاجانپور

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

حسابان یازدهم

۵۱ شکل زیر نمودار تابع درجه‌دوم $y = ax^2 + bx + c$ است. کدام گزینه نادرست است؟



۱) عبارت $\sqrt{-a} + \sqrt{b}$ تعریف‌نشده است.

۲) عبارت $a^2 + c$ مثبت است.

۳) مقدار $\frac{c}{b}$ منفی است.

۴) مقدار $\frac{a}{|a|}$ برابر ۱ است.

پاسخ: گزینهٔ ۴

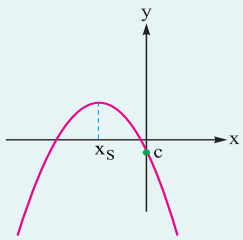
Hint از روی جهت بازشدن دهانهٔ سهمی و محل برخوردش با محور عرض‌ها، علامت‌های a و c خیلی سریع *لو می‌رن*! برای علامت b هم کافیه به موقعیت طول رأس سهمی نگاهی بندازید.

درس Box

تشخیص سریع علامت ضرایب از روی نمودار سهمی:

وقتی نمودار یک سهمی با ضابطهٔ استاندارد $y = ax^2 + bx + c$ در اختیار ماست، می‌توانیم با دقت به ویژگی‌های ظاهری آن، علامت هر سه ضریب a، b و c را بدون هیچ محاسبهٔ پیچیده‌ای تعیین کنیم. مراحل کار به این شکل است:

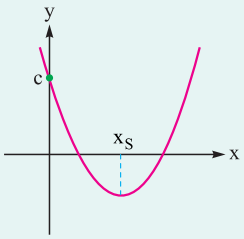
- **تشخیص علامت a (از روی جهت دهانهٔ سهمی):** اگر دهانهٔ سهمی رو به بالا باشد (فرم ∪)، قطعی است که $a > 0$ می‌باشد. در مقابل، اگر دهانهٔ سهمی رو به پایین باشد (فرم ∩)، نتیجه می‌گیریم که $a < 0$ است.
- **تشخیص علامت c (از روی عرض از مبدأ):** محل برخورد نمودار سهمی با محور عرض‌ها (محور y)، دقیقاً نشان‌دهندهٔ مقدار c است؛ بنابراین اگر سهمی، محور y را در قسمت بالایی (بخش مثبت‌ها) قطع کند $c > 0$، و اگر در قسمت پایینی (بخش منفی‌ها) قطع کند $c < 0$ خواهد بود.
- **تشخیص علامت b (از روی موقعیت طول رأس سهمی):** می‌دانیم طول رأس سهمی از رابطهٔ $x_S = -\frac{b}{2a}$ به دست می‌آید. پس از این‌که علامت a را از مرحلهٔ اول پیدا کردیم، به موقعیت رأس سهمی روی محور x نگاه می‌کنیم. با دانستن علامت x_S (سمت راست یا چپ محور عرض‌ها) و علامت a، می‌توانیم علامت b را استنتاج کنیم.



دهانه رو به پایین $\Rightarrow a < 0$

برخورد در بخش منفی yها $\Rightarrow c < 0$

$x_S < 0 \Rightarrow -\frac{b}{2a} < 0 \xrightarrow{a<0} b < 0$



دهانه رو به بالا $\Rightarrow a > 0$

برخورد در بخش مثبت yها $\Rightarrow c > 0$

$x_S > 0 \Rightarrow -\frac{b}{2a} > 0 \xrightarrow{a>0} b < 0$

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** ابتدا از روی نمودار علامت‌های c و b و a را مشخص می‌کنیم:

دهانهٔ سهمی رو به پایین $\Rightarrow a < 0$

محل برخورد با محور yها مثبت $\Rightarrow c > 0$

رأس سهمی منفی $\Rightarrow -\frac{b}{2a} < 0 \Rightarrow b < 0$ (منفی)

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

گام دوم: حال به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

گزینهٔ (۱): $a<0 \ , \ b<0 \Rightarrow \sqrt{-a}+\sqrt{b}$ تعریف‌نشده

گزینهٔ (۲): $a^2>0 \ , \ c>0 \Rightarrow a^2+c>0$

گزینهٔ (۳): $c>0 \ , \ b<0 \Rightarrow \frac{c}{b}<0$

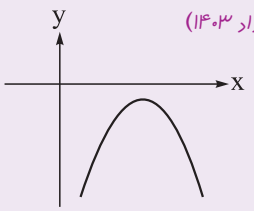
گزینهٔ (۴): $a<0 \Rightarrow \frac{a}{|a|}=\frac{a}{-a}=-1$

بنابراین گزینهٔ (۴) نادرست است.

امتحان نهایی

شکل زیر نمودار سهمی $y=ax^2+bx+c$ می‌باشد، علامت ضرایب b و c را تعیین کنید.

(سؤال ۴ ـ امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۳)



SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۲ معادلهٔ ارتفاع یک موشک برحسب زمان به صورت $y = -۴t^۲ + ۴۰t + ۶۹$ است. بیشترین ارتفاع موشک از سطح زمین کدام است؟

۱) ۲۰۰
۲) ۱۶۹
۳) ۱۹۶
۴) ۱۸۰

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint معادلهٔ ارتفاع ـ زمان یه سهمی رو به پایینه؛ پس برای پیداکردن بیشترین ارتفاع، فقط کافیه مختصات رأس این سهمی رو محاسبه کنید و مقدارش رو به دست بیارید.

پاسخ خیلی تشریحی با توجه به این‌که معادلهٔ داده‌شده، یک سهمی رو به پایین است، بیشترین مقدار آن برابر است با:

$$t_S = -\frac{b}{۲a} = \frac{-۴۰}{۲(-۴)} = ۵$$

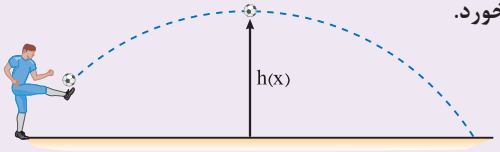
$$y_S = -۴(۵)^۲ + ۴۰(۵) + ۶۹ = -۱۰۰ + ۲۰۰ + ۶۹ = ۱۶۹$$

کتاب درسی

یک توپ فوتبال بر اثر ضربهٔ بازیکن، طبق شکل زیر حرکت می‌کند تا دوباره به زمین بخورد. در هر لحظه، ارتفاع توپ از سطح زمین را می‌توانیم با رابطهٔ $h(x) = -۰/۰۳x(x-۳۶)$ مدل‌سازی کنیم که x فاصلهٔ افقی توپ از نقطهٔ اولیه است (x برحسب متر است). *(تمرین ۳ (قسمت ب) ـ صفحهٔ ۱۵ کتاب درسی)*

الف) توپ چند متر افقی را طی می‌کند تا دوباره به زمین بخورد.

ب) توپ حداکثر تا چه ارتفاعی بالا می‌رود.



SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۳ تعداد جواب‌های معادلهٔ $|x| = x^۲ - ۲x + ۱$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

پاسخ: گزینهٔ ۳

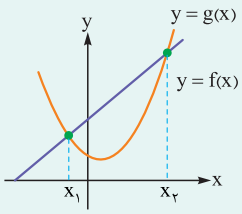
Hint

به جای حل جبری طولانی، از روش هندسی کمک بگیرید! نمودار دو طرف تساوی رو تو یه دستگاه مختصات رسم کنید؛ تعداد نقاط برخوردشون همون تعداد جواب‌های معادله‌ست.

درس Box

روش هندسی (نموداری) حل معادلات:

گاهی اوقات حل جبری یک معادله کار دشوار یا زمانبری است. در این شرایط می‌توانیم از روش هندسی کمک بگیریم که دید بسیار خوبی از مسئله به ما می‌دهد.

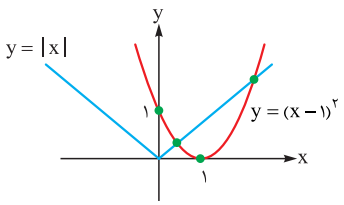


فرض کنید دو تابع متمایز با ضابطه‌های $f(x)$ و $g(x)$ داریم. برای پیداکردن جواب‌های معادلهٔ $f(x) = g(x)$، کافی است نمودار هر دو تابع را در یک دستگاه مختصات یکسان رسم کنیم. طول نقطه‌های برخورد این دو نمودار (یعنی مختصات x آن‌ها)، دقیقاً نشان‌دهندهٔ جواب‌های معادلهٔ مورد نظر ما هستند. به طور متقابل، هر جوابی که از حل این معادله به دست می‌آید، در واقع طول یکی از نقاط این دو نمودار است.

$x_۱$ و $x_۲$ همان جواب‌های معادلهٔ $f(x) = g(x)$ هستند.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا نمودارهای توابع $y = x^۲ - ۲x + ۱$ و $y = |x|$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:



گام دوم: با توجه به شکل، دو نمودار در دو نقطه برخورد دارند، پس معادله دارای دو جواب است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۴ **مجموع پنج جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی برابر ۳۵ و مجموع مربعات جملات دوم تا چهارم برابر با ۱۶۵ است. جملهٔ دوم این دنباله کدام می‌تواند باشد؟**

۱) ۱۶ ۲) ۱۳ ۳) ۱۰ ۴) ۷

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint برای این‌که محاسبات این دنبالهٔ حسابی طولانی نشه، ۵ جمله رو نسبت به جملهٔ مرکزی متقارن فرض کنید؛ این‌طوری موقع جمع‌زدن، قدرنسبت‌ها خیلی راحت با هم ساده می‌شن!

نکته **ترفند انتخاب متقارن جملات در دنبالهٔ حسابی:**

در حل مسائل دنباله‌های حسابی، زمانی که تعداد مشخصی از جملات متوالی مجهول هستند (مخصوصاً وقتی مجموع آن‌ها داده شده است)، برای ساده‌ترشدن محاسبات و حذف سریع متغیرها، بهترین راهکار این است که جملات را به صورت متقارن نسبت به یک جملهٔ مرکزی در نظر بگیریم.

بر این اساس، حالت‌های پرکاربرد زیر را به خاطر بسپارید:

برای سه عدد متوالی: آن‌ها را به فرم $a-d\ ,\ a\ ,\ a+d$ فرض می‌کنیم. (در این حالت قدرنسبت دنباله برابر d است).

برای چهار عدد متوالی: آن‌ها را به فرم $a-۳d\ ,\ a-d\ ,\ a+d\ ,\ a+۳d$ فرض می‌کنیم (دقت کنید که در این حالت خاص، برای حفظ تقارن، قدرنسبت دنباله برابر $۲d$ در نظر گرفته می‌شود).

برای پنج عدد متوالی: آن‌ها را به فرم $a-۲d\ ,\ a-d\ ,\ a\ ,\ a+d\ ,\ a+۲d$ فرض می‌کنیم. (در این‌جا نیز قدرنسبت دنباله همان d است).

با این انتخاب هوشمندانه، به محض این‌که بخواهید مجموع این جملات را حساب کنید، مقادیر d با یکدیگر ساده شده و مقدار a خیلی سریع به دست می‌آید!

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** ۵ جملهٔ اول دنباله را به صورت $a-۲d\ ,\ a-d\ ,\ a\ ,\ a+d\ ,\ a+۲d$ در نظر می‌گیریم که در آن d قدرنسبت دنباله و $a-۲d$ جملهٔ اول آن است:

$$a-۲d+a-d+a+a+d+a+۲d=۳۵ \Rightarrow ۵a=۳۵ \Rightarrow a=۷$$

هم‌چنین مجموع مربعات جمله‌های دوم، سوم و چهارم را برابر ۱۶۵ قرار می‌دهیم:

$$(a-d)^۲+a^۲+(a+d)^۲=۱۶۵ \Rightarrow ۳a^۲+۲d^۲=۱۶۵ \xrightarrow{a=۷} ۳\times۴۹+۲d^۲=۱۶۵ \Rightarrow ۲d^۲=۱۸ \Rightarrow d=\pm۳$$

گام دوم: با توجه به مقادیر به‌دست‌آمده جملات دنباله به صورت زیر هستند:

$d=۳: ۱, \boxed{۴}, ۷, ۱۰, ۱۳, \dots$

$d=-۳: ۱۳, \boxed{۱۰}, ۷, ۴, ۱, \dots$

بنابراین جملهٔ دوم دنباله می‌تواند ۴ یا ۱۰ باشد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۵ در یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ عمومی a_n، مجموع سه جملهٔ اول ۱۵ و مجموع شش جملهٔ بعدی ۴۰۸۰ است. حاصل $\frac{a_۷}{a_۴}$ کدام می‌تواند باشد؟

($a_۹$ تا $a_۴$)

۱) ۱۶− یا ۱۷−
۲) ۱۶ یا ۱۷−
۳) ۱۶− یا ۱۷
۴) ۱۶ یا ۱۷

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint

کافیه فرمول مجموع جملات دنبالهٔ هندسی رو برای دو حالت داده‌شده بنویسید و بعد این دو رابطه رو به هم تقسیم کنید تا معادله‌ای برحسب قدرنسبت به دست بیاد.

نکته

جملهٔ عمومی و مجموع جملات در دنبالهٔ هندسی:

در یک دنبالهٔ هندسی، اگر اولین جمله را با $a_۱$ و قدرنسبت (عامل ضرب ثابت بین جملات) را با q نشان دهیم (با این شرط مهم که $q \neq ۱$ باشد)، برای پیداکردن هر جملهٔ دلخواه، در جایگاه nام (که به آن جملهٔ عمومی می‌گویند)، از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

$$a_n = a_۱ q^{n-۱}$$

هم‌چنین، هر زمان که بخواهیم مجموع n جملهٔ ابتدایی این دنباله را خیلی سریع و بدون جمع‌کردن تک‌تک آن‌ها با هم حساب کنیم، فرمول کاربردی و مهم زیر به کمک ما می‌آید:

$$S_n = a_۱ \frac{q^n - ۱}{q - ۱}$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: فرض می‌کنیم قدرنسبت دنبالهٔ هندسی q باشد. با توجه به رابطهٔ مجموع n جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی، داریم:

$$\begin{cases} S_۳ = \frac{a_۱ \times (۱-q^۳)}{۱-q} = ۱۵ \\ S_{۹\text{تا}۴} = \frac{a_۴ \times (۱-q^۶)}{۱-q} = ۴۰۸۰ \end{cases} \Rightarrow \frac{S_{۹\text{تا}۴}}{S_۳} = \frac{a_۴}{a_۱} \times \frac{۱-q^۶}{۱-q^۳} = \frac{۴۰۸۰}{۱۵} \Rightarrow \frac{S_{۹\text{تا}۴}}{S_۳} = \frac{a_۱ q^۳}{a_۱} \times \frac{(۱-q^۳)(۱+q^۳)}{۱-q^۳} = ۲۷۲$$

$$\Rightarrow q^۳ + q^۶ = ۲۷۲ \xrightarrow{t=q^۳} t^۲ + t - ۲۷۲ = ۰ \Rightarrow (t-۱۶)(t+۱۷) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} t = q^۳ = ۱۶ \\ t = q^۳ = -۱۷ \end{cases}$$

گام دوم: حال برای نسبت خواسته‌شده، داریم:

$$\frac{a_۷}{a_۴} = \frac{a_۱ q^۶}{a_۱ q^۳} = q^۳ = ۱۶ \quad \text{یا} \quad -۱۷$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۶ اگر x_1 و x_2 جواب‌های معادلهٔ $x^2 - mx + 3 = 0$ باشند و رابطهٔ $2x_1x_2^2 = 9$ بین آن‌ها برقرار باشد، مقدار m کدام است؟

۱) -7 ۲) $\frac{7}{2}$ ۳) $-\frac{7}{2}$ ۴) 7

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint

اصلاً نیازی به پیداکردن خود ریشه‌ها نیست؛ فقط از روی ضرایب، حاصل‌ضرب ریشه‌ها (P) رو حساب کنید و بذارید تو رابطه‌ای که صورت سؤال داده تا یکی از ریشه‌ها خودش رو نشون بده!

نکته

روابط کاربردی بین ضرایب و ریشه‌های معادلهٔ درجه‌دوم:

در هر معادلهٔ درجه‌دوم با فرم استاندارد $ax^2 + bx + c = 0$، چنان‌چه دلتای معادله مثبت باشد (یعنی $\Delta = b^2 - 4ac > 0$)، مطمئن می‌شویم که معادله دو ریشهٔ حقیقی و متمایز دارد. این ریشه‌ها از طریق فرمول‌های زیر محاسبه می‌شوند:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad , \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

یک ترفند بسیار مهم و کنکوری این است که برای یافتن مجموع و حاصل‌ضرب این ریشه‌ها، اصلاً نیازی به محاسبهٔ تک‌تک آن‌ها نداریم! با تعریف متغیر S برای مجموع ریشه‌ها و متغیر P برای حاصل‌ضرب آن‌ها، می‌توانیم مستقیماً از روی ضرایب معادله به جواب برسیم:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$P = x_1.x_2 = \frac{c}{a}$$

علاوه بر این، اگر بخواهیم فاصلهٔ بین این دو ریشه را (که همان قدرمطلق تفاضل آن‌هاست) پیدا کنیم. فرمول سریع زیر به کمک ما می‌آید:

$$|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: با توجه به رابطهٔ بین ضرایب و ریشه‌های معادلهٔ درجه‌دوم می‌توان نوشت:

$$P = x_1x_2 = \frac{c}{a} = 3$$

گام دوم: حال با جای‌گذاری مقدار به‌دست‌آمدهٔ فوق در رابطهٔ داده‌شده، داریم:

$$2x_1x_2x_2 = 9 \Rightarrow 2 \times 3 \times x_2 = 9 \Rightarrow x_2 = \frac{3}{2} \Rightarrow x_1 = 2$$

گام سوم: حال به کمک رابطهٔ مجموع ریشه‌ها، مقدار m را محاسبه می‌کنیم:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \Rightarrow m = \frac{7}{2}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۷ اگر α و β جواب‌های معادلهٔ $x^۲ - mx + m - ۱ = ۰$ باشند، کم‌ترین مقدار عبارت $\alpha^۲ + \beta^۲$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) ۲ ۴) ۱

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint اول عبارت مجموع مربعات ریشه‌ها رو با استفاده از اتحادها برحسب مجموع (S) و حاصل‌ضرب (P) ریشه‌ها بازنویسی کنید. بعدش دنبال مینیمم این تابع درجهٔ دوم جدید توی نقطهٔ رأس سهمی بگردید!

نکته **محاسبهٔ عبارات جبری ریشه‌ها برحسب S و P:**

اگر α و β را به عنوان جواب‌ها (ریشه‌ها)ی یک معادلهٔ درجه‌دوم در نظر بگیریم. در بسیاری از مسائل نیازی به یافتن مقادیر دقیق خود ریشه‌ها نداریم. بلکه می‌توانیم عبارات متقارن ساخته‌شده از آن‌ها را با استفاده از اتحادها، مستقیماً برحسب مجموع ریشه‌ها (S) و حاصل‌ضرب ریشه‌ها (P) بازنویسی و محاسبه کنیم:

- **مجموع معکوس‌های جواب‌ها:**

$$\frac{۱}{\alpha} + \frac{۱}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{S}{P}$$

- **مجموع مربع‌های جواب‌ها:**

$$\alpha^۲ + \beta^۲ = (\alpha + \beta)^۲ - ۲\alpha\beta = S^۲ - ۲P$$

- **مجموع مکعب‌های جواب‌ها:**

$$\alpha^۳ + \beta^۳ = (\alpha + \beta)^۳ - ۳\alpha\beta(\alpha + \beta) = S^۳ - ۳PS$$

- **قدرمطلق تفاضل جواب‌ها:**

$$|\alpha - \beta| = \sqrt{(\alpha - \beta)^۲} = \sqrt{(\alpha + \beta)^۲ - ۴\alpha\beta} = \sqrt{S^۲ - ۴P}$$

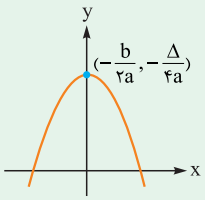
نکته **بیشترین و کم‌ترین مقدار (اکسترمم) تابع درجه‌دوم:**

تابع درجه‌دوم با ضابطهٔ کلی $y = ax^۲ + bx + c$ (با فرض $a \neq ۰$) را در نظر بگیرید. نمودار این تابع یک سهمی است و نقطهٔ رأس این سهمی، محل رخ‌دادن بیشترین (ماکزیمم) یا کم‌ترین (مینیمم) مقدار تابع است. این اتفاق همواره در طولِ زیر رخ می‌دهد:

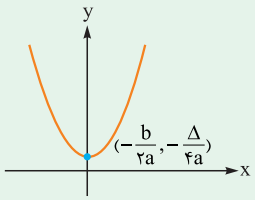
$$x = -\frac{b}{۲a}$$

برای محاسبهٔ مقدار این ماکزیمم یا مینیمم (یعنی مقدار y در نقطهٔ رأس)، نیازی به جای‌گذاری نیست و می‌توانیم مستقیماً از روی علامت ضریب a و مقدار دلتا $(\Delta = b^۲ - ۴ac)$ نتیجه‌گیری کنیم:

- **در صورتی که $a > ۰$ باشد؛** دهانهٔ سهمی رو به بالا باز می‌شود؛ بنابراین تابع در نقطهٔ رأس خود دارای **کم‌ترین مقدار (مینیمم)** است. این مقدار مینیمم برابر با $-\frac{\Delta}{۴a}$ خواهد بود.
- **در صورتی که $a < ۰$ باشد؛** دهانهٔ سهمی رو به پایین باز می‌شود، در نتیجه تابع در نقطهٔ رأس خود به **بیشترین مقدار (ماکزیمم)** می‌رسد. این مقدار ماکزیمم نیز دقیقاً با همان فرمول $-\frac{\Delta}{۴a}$ محاسبه می‌شود.



$a < ۰$، دارای ماکزیمم



$a > ۰$، دارای مینیمم

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول:** ابتدا مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ درجه‌دوم داده‌شده را برحسب ضرایب آن می‌نویسیم:

$$S = \alpha + \beta = m$$

$$P = \alpha\beta = m - ۱$$

گام دوم: حال مقدار خواسته‌شده را به کمک S و P معادلهٔ بازنویسی می‌کنیم:

$$\alpha^۲ + \beta^۲ = (\alpha + \beta)^۲ - ۲\alpha\beta = m^۲ - ۲m + ۲$$

گام سوم: عبارت به‌دست‌آمده یک سهمی رو به بالاست و کم‌ترین مقدار آن در رأس است:

$$m_{min} = \frac{-(-۲)}{۲} = ۱ \Rightarrow (\alpha^۲ + \beta^۲)_{min} = (۱)^۲ - ۲(۱) + ۲ = ۱$$

کنکور

اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^۲ + x - ۱ - m^۲ = ۰$ باشد، کم‌ترین مقدار ممکن برای $\alpha^۲ + \beta^۲$ کدام است؟

(سؤال ۱۱۸ کنکور تجربی ۱۴۰۴ ـ نوبت اول)

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۷

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۸ یک جواب معادلهٔ $x^۲ + ۲ax + ۳ = ۰$ از دو برابر جواب دیگر، یک واحد کوچک‌تر است. اختلاف مقادیر ممکن برای a کدام است؟

۱) $\frac{۱۵}{۲}$ ۲) $\frac{۱۵}{۴}$ ۳) ۱۵ ۴) $\frac{۱۵}{۸}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint اول رابطهٔ بین دو ریشه رو بنویسید. بعد با استفاده از فرمول حاصل‌ضرب ریشه‌ها، (P) مقادیر ریشه‌ها رو پیدا کنید تا بتونید به کمک فرمول مجموع (S) مجهول مدنظر رو گیر بندازید.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** اگر $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های معادله باشند، رابطهٔ $x_۲ = ۲x_۱ - ۱$ بین آن‌ها برقرار است. حال به کمک ضرب ریشه‌ها داریم:

$$P = x_۱x_۲ = ۳ \Rightarrow x_۱(۲x_۱ - ۱) = ۳ \Rightarrow ۲x_۱^۲ - x_۱ - ۳ = ۰ \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} x_۱ = -۱ \\ x_۱ = \frac{۳}{۲} \end{cases}$$

گام دوم: حال با توجه به مجموع ریشه‌ها می‌توان نوشت:

$$S = x_۱ + x_۲ = -۲a$$

$$x_۱ = -۱ \Rightarrow x_۲ = -۳ \Rightarrow -۲a = -۴ \Rightarrow a = ۲$$

$$x_۱ = \frac{۳}{۲} \Rightarrow x_۲ = ۲ \Rightarrow -۲a = \frac{۷}{۲} \Rightarrow a = -\frac{۷}{۴}$$

$$\Rightarrow \text{اختلاف مقادیر } a = |۲ - (-\frac{۷}{۴})| = \frac{۱۵}{۴}$$

کنکور

به ازای دو مقدار a، یک ریشهٔ معادلهٔ $۳x^۲ - ax + ۴ = ۰$، سه برابر ریشهٔ دیگر است. اختلاف این دو مقدار a، کدام است؟ (سؤال ۱۰۷ کنکور تجربی ۱۴۰۱)

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۶ ۴) ۱۸

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۹ به ازای کدام مقادیر a، نمودار تابع درجه‌دوم $y = ax^2 + (a-3)x + 2a - 1$ فقط از ناحیهٔ سوم دستگاه مختصات عبور نمی‌کند؟

۱) $[\frac{1}{2}, +\infty)$

۲) $(3, +\infty)$

۳) $(-\frac{7}{9}, 1)$

۴) $[\frac{1}{2}, 1)$

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint

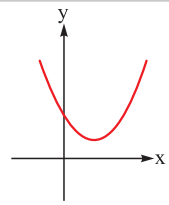
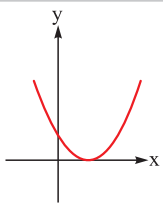
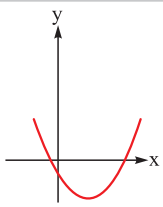
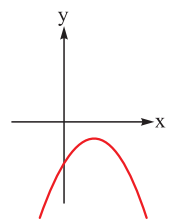
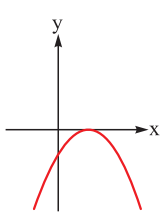
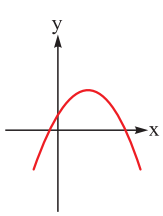
برای این‌که نمودار اصلاً وارد ناحیهٔ سوم نشه، اولاً باید دهانه‌اش رو به بالا باشه و دوماً تمام ریشه‌ها (محل برخورد با محور x) نامنفی باشن، پس باید شرایط مثبت‌بودن دلتا و S و نامنفی‌بودن P رو با هم اشتراک بگیرید!

درس Box

سهمی در صفحهٔ مختصات:

با توجه به علامت ضرایب a، b و c، نمودار تابع درجه‌دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ (که یک سهمی است) می‌تواند از دو، سه یا هر چهار ناحیهٔ صفحهٔ مختصات عبور کند.

۱) اگر $a > 0$ باشد (دهانه رو به بالا)، نمودار حتماً از ناحیه‌های **اول و دوم** می‌گذرد. اگر $a < 0$ باشد (دهانه رو به پایین)، نمودار حتماً از ناحیه‌های **سوم و چهارم** عبور می‌کند.

	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
$a > 0$	 شکل (۱)	 شکل (۲)	 شکل (۳)
$a < 0$	 شکل (۴)	 شکل (۵)	 شکل (۶)

با تحلیل ریشه‌های معادلهٔ $f(x) = 0$ و مقدار دلتا، می‌توانیم دقیقاً مشخص کنیم سهمی از چند ناحیه عبور می‌کند.

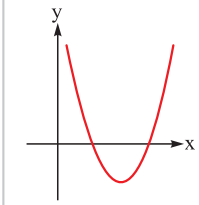
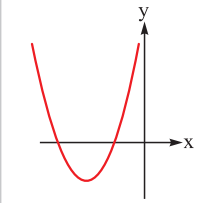
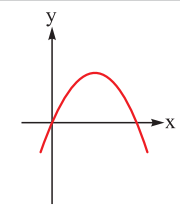
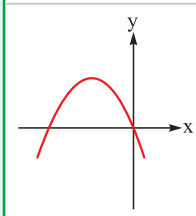
۲) اگر $\Delta \leq 0$ باشد، سهمی فقط از **دو ناحیهٔ** صفحهٔ مختصات می‌گذرد (و برعکس). برای درک بهتر به شکل‌های (۱)، (۲)، (۴) و (۵) در جدول قبل توجه کنید.

۳) اگر معادلهٔ $f(x) = 0$ دو جواب **مختلف‌العلامت** داشته باشد (یعنی حاصل‌ضرب ریشه‌ها منفی باشد: $\frac{c}{a} < 0$)، سهمی از **هر چهار ناحیهٔ** صفحهٔ مختصات عبور خواهد کرد (مانند شکل‌های (۳) و (۶)).

۴) اگر معادلهٔ $f(x) = 0$ دو جواب **هم‌علامت** داشته باشد (یعنی $\Delta > 0$ و $\frac{c}{a} > 0$)، یا این‌که یک جواب **صفر** و یک جواب **مخالف**

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

صفر داشته باشد ($c = 0$)، در این صورت سهمی از **سه ناحیهٔ** صفحهٔ مختصات می‌گذرد. حالت‌های مربوط به این نکته در جدول زیر رسم شده‌اند:

	$-\frac{b}{a} > 0$ (طول رأس مثبت)		$-\frac{b}{a} < 0$ (طول رأس منفی)	
$a > 0$				
$a < 0$				

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول:** برای عبور سهمی از نواحی اول و دوم، باید دهانهٔ سهمی رو به بالا باشد:

$$a > 0 \quad (1)$$

گام دوم: برای ورود نمودار به ناحیهٔ چهارم، سهمی باید دو ریشهٔ حقیقی متمایز داشته باشد:

$$\Delta > 0 \Rightarrow (a-3)^2 - 4(a)(2a-1) > 0 \Rightarrow a^2 - 6a + 9 - 8a^2 + 4a > 0$$

$$\Rightarrow -7a^2 - 2a + 9 > 0 \Rightarrow -\frac{9}{7} < a < 1 \quad (2)$$

گام سوم: برای این‌که قسمت منفی سهمی وارد ناحیهٔ سوم نشود، تمام قسمت زیر محور طول‌ها باید در سمت راست محور yها قرار بگیرد، یعنی هر دو صفر سهمی باید نامنفی باشند:

$$P \geq 0 \Rightarrow \frac{2a-1}{a} \geq 0 \xrightarrow{a>0} a \geq \frac{1}{2} \quad (3)$$

$$S > 0 \Rightarrow -\frac{(a-3)}{a} > 0 \xrightarrow{a>0} 3 - a > 0 \Rightarrow a < 3 \quad (4)$$

گام چهارم: از اشتراک محدوده‌های به‌دست‌آمده داریم:

$$(1) \cap (2) \cap (3) \cap (4) : \; a \in [\frac{1}{2}, 1)$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶۰ اگر $x=۲$ یکی از جواب‌های معادلهٔ $\frac{x-a}{x}+\frac{x^۲-۴x+۷}{x-۱}=۱$ باشد، مجموع مربعات جواب‌های دیگر کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۷ ۳) ۱۳ ۴) ۵

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint

اول عدد داده‌شده رو تو معادله جای‌گذاری کنید تا پارامتر مجهول پیدا بشه. بعدش با مخرج‌مشترک‌گیری معادله رو حل کنید، فقط حواستون باشه که جواب‌های نهایی نباید مخرج رو صفر کنن!

درس Box

راهنمای حل معادله‌های شامل عبارت‌های گویا:

برای حل معادله‌هایی که دارای عبارات گویا (کسری) هستند، گام‌های اساسی و استانداردی وجود دارد که باید به ترتیب طی شوند؛

- **حذف مخرج‌ها:** ابتدا کوچک‌ترین مضرب‌مشترک (ک. م.م) تمام مخرج‌های موجود در معادله را پیدا می‌کنیم. با ضرب‌کردن هر دو طرف معادله در این ک.م.م تمامی کسرها از بین رفته و یک معادلهٔ جبری ساده‌تر و بدون مخرج به دست می‌آید.
- **حل معادلهٔ حاصل:** معادلهٔ ساده‌شدهٔ جدید را با استفاده از روش‌های معمول (مانند حل معادلهٔ درجهٔ اول یا دوم) حل کرده و مقادیر مجهول را پیدا می‌کنیم.

آزمون و بررسی جواب‌ها (گام حیاتی): این مرحله بسیار مهم است! جواب‌هایی که به دست آورده‌ایم، کاندیدای پاسخ نهایی هستند و باید حتماً ارزیابی شوند. برای پذیرش یک جواب باید دو شرط زیر برقرار باشند:

۱) جای‌گذاری آن در معادلهٔ اصلی، مخرج هیچ‌یک از کسرها را صفر نکند (زیرا کسر با مخرج صفر در ریاضیات تعریف نشده است).

۲) با دامنهٔ تعریف و شرایط اولیهٔ مسئله مطابقت داشته باشد.

هر پاسخی که این شروط را نقض کند، به عنوان یک «جواب غیر قابل قبول» (یا ریشهٔ زائد) در نظر گرفته شده و از مجموعهٔ جواب نهایی حذف می‌گردد.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: با توجه به این‌که $x=۲$ یکی از جواب‌های معادله است، با جای‌گذاری آن در معادله داریم:

$$\frac{۲-a}{۲}+\frac{۴-۸+۷}{۲-۱}=۱ \Rightarrow \frac{۲-a}{۲}=-۲ \Rightarrow ۲-a=-۴ \Rightarrow a=۶$$

گام دوم: حال با جای‌گذاری مقدار a معادله را بازنویسی و به کمک درس‌باکس آن را حل می‌کنیم:

$$\frac{x-۶}{x}+\frac{x^۲-۴x+۷}{x-۱}=۱ \xrightarrow{\times x(x-۱)} (x-۱)(x-۶)+x(x^۲-۴x+۷)=x(x-۱)$$

$$\Rightarrow x^۲-۷x+۶+x^۳-۴x^۲+۷x=x^۲-x \Rightarrow x^۳-۴x^۲+x+۶=۰$$

$$\Rightarrow x^۳+x^۲-۵x^۲-۵x+۶x+۶=۰ \Rightarrow x^۲(x+۱)-۵x(x+۱)+۶(x+۱)=۰$$

$$\Rightarrow (x+۱)(x^۲-۵x+۶)=۰ \Rightarrow (x+۱)(x-۲)(x-۳)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=-۱ \\ x=۲ \\ x=۳ \end{cases}$$

گام سوم: مجموع مربعات ریشه‌های دیگر برابر است با:

$$۳^۲+(-۱)^۲=۱۰$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶۱ دو نقاش، با هم دیواری را طی مدت ۱۶ ساعت رنگ می‌کنند؛ اما اگر هر کدام به تنهایی کار کنند، نقاش دوم ۲۴ ساعت زودتر کار خود را تمام می‌کند. نقاش اول در چه مدت‌زمانی (برحسب ساعت) به تنهایی کار را تمام می‌کند؟

۱) ۴۸ ۲) ۳۶ ۳) ۳۲ ۴) ۲۸

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint تو مسائل کار مشترک، زمان‌ها رو مستقیماً با هم جمع نکنید؛ بلکه سرعت کار هر نقاش رو به صورت کسری (یک بر روی زمان) بنویسید و یه معادلهٔ منطقی برای کل کار بسازید.

درس Box

استراتژی حل مسائل کار مشترک:

برای حل مسائلی که در آن‌ها دو یا چند نفر (یا چند دستگاه) یک کار را به صورت مشترک انجام می‌دهند، کلید اصلی این است که محاسبات را براساس «سرعت کار» یا «حجم کار در واحد زمان» پیش ببریم. در این تیپ مسائل هرگز نباید زمان‌ها را مستقیماً با هم جمع یا تفریق کنید!

- **تعریف سرعت (راندمان) کار:** همواره فرض کنید که یک پروژه، معادل با یک واحد کامل (عدد ۱) است. اگر فردی بتواند کل این کار را به تنهایی در x روز (یا ساعت) تمام کند. سرعت او به این معناست که در هر یک روز، دقیقاً $\frac{۱}{x}$ از کل کار را انجام می‌دهد.
- **تقسیم کار به مراحل:** اگر در طول مسئله، شرایط تغییر کرد (مثلاً پس از چند روز یک نفر کار را رها کرد)، اصلاً نگران نشوید! فقط کافی است بررسی کنید تا آن لحظه، دقیقاً چه کسری از کل کار به صورت مشترک انجام شده است، سپس باقی‌ماندهٔ کار را برای نفراتی که در صحنه مانده‌اند، محاسبه کنید.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: فرض می‌کنیم نقاش اول در مدت t_A و نقاش دوم در مدت t_B کار را به تنهایی انجام می‌دهند. در نتیجه با توجه به اطلاعات مسئله می‌توان نوشت:

$$\frac{۱}{t_A}+\frac{۱}{t_B}=\frac{۱}{۱۶}\ ,\ t_B=t_A-۲۴ \Rightarrow t_A>۲۴$$

گام دوم: با جای‌گذاری مقدار t_B برحسب t_A در معادله و حل آن داریم:

$$\frac{۱}{t_A}+\frac{۱}{t_A-۲۴}=\frac{۱}{۱۶} \Rightarrow \frac{۲t_A-۲۴}{t_A^{۲}-۲۴t_A}=\frac{۱}{۱۶} \Rightarrow ۳۲t_A-۳۸۴=t_A^{۲}-۲۴t_A$$

$$\Rightarrow t_A^{۲}-۵۶t_A+۳۸۴=۰ \Rightarrow t_A=\frac{۵۶\pm\sqrt{۱۶۰۰}}{۲} \Rightarrow \begin{cases} t_A=۴۸ \\ t_A=۸ \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

تیزبازی به جای حل معادلهٔ $\frac{۱}{t_A}+\frac{۱}{t_A-۲۴}=\frac{۱}{۱۶}$ می‌تونستی از گزینه‌ها استفاده کنی و در معادله جای‌گذاری کنی تا جواب معادله مشخص بشه!

کتاب درسی

ماشین A کاری را به تنهایی ۱۵ ساعت زودتر از ماشین B انجام می‌دهد. اگر هر دو ماشین یک کار را در ۱۸ ساعت انجام دهند، چه زمانی برای هر کدام از ماشین‌ها لازم است تا آن کار را به تنهایی انجام دهند؟

(حسابان (۱) ـ تمرین ۹ صفحهٔ ۲۲ کتاب درسی)

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶۲ ۷ کیلوگرم رنگ با غلظت ۵۰ درصد را با ۸ کیلوگرم رنگ با غلظت ۲۰ درصد مخلوط می‌کنیم. چند کیلوگرم از آب این محلول باید تبخیر شود تا غلظت آن به ۶۰ درصد برسد؟

۱) ۵ ۲) ۵/۵

۳) ۶ ۴) ۶/۵

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint اول مقدار خالص رنگ رو تو کل مخلوط حساب کنید. یادتون باشه وقتی محلول تبخیر می‌شه، آب کم می‌شه پس فقط از مخرج کسر غلظت (یعنی کل محلول) کم می‌شه و صورت کسر ثابت می‌مونه!

درس Box **استراتژی حل مسائل غلظت و مخلوط‌ها:** مسائل مربوط به غلظت محلول‌ها (مثل آب‌نمک، اسید و ...) بر پایهٔ یک مفهوم بسیار ساده بنا شده‌اند: درک رابطهٔ بین مقدار مادهٔ خالص و کل حجم یا وزن مخلوط. در این تیپ سؤالات، همیشه با یک کسر طلایی سروکار داریم:

$$\text{غلظت (درصد)} = \frac{\text{مقدار مادهٔ خالص (حل‌شونده)}}{\text{مقدار کل محلول}} \times ۱۰۰$$

برای حل گام‌به‌گام این مسائل، مسیر زیر را طی کنید:

- **گام اول (کالبدشکافی محلول اولیه):** قبل از اعمال هرگونه تغییری، دقیقاً حساب کنید که در محلول اولیه چقدر مادهٔ خالص (مثلاً نمک) و چقدر حلال (مثلاً آب) وجود دارد. این کار با ضرب‌کردن درصد غلظت در کل جرم محلول به دست می‌آید.
- **گام دوم (ردیابی تغییرات):** حالا باید ببینیم صورت و مخرج کسر ما چه تغییری می‌کند، آیا آب تبخیر شده است؟ آیا نمک اضافه شده است؟ این تغییرات را به صورت متغیرهای جبری (مثل x) وارد کسر کنید.
- **گام سوم (تشکیل معادله):** کسر جدید را مساوی با غلظت هدف (درصدی که مسئله از ما خواسته) قرار داده و با یک طرفین‌وسطین ساده، مجهول را پیدا کنید.

نکته **تأثیر عملیات مختلف روی کسر غلظت:** برای این‌که در تشکیل معادلهٔ جدید اشتباه نکنید، تأثیر هر عملیات فیزیکی روی صورت و مخرج کسر را به خاطر بسپارید:

- **تبخیرکردن آب:** آب خالص بخار می‌شود، اما نمک ته‌نشین شده و در ظرف باقی می‌ماند؛ بنابراین، مقدار تبخیرشده (مثلاً x) **فقط از مخرج کسر (کل محلول)** کم می‌شود و صورت کسر ثابت می‌ماند.
- **اضافه‌کردن آب خالص:** مقدار آب اضافه‌شده **فقط به مخرج کسر** افزوده می‌شود (باز هم مقدار خالص نمک در صورت کسر دست‌نخورده باقی می‌ماند).
- **اضافه‌کردن مادهٔ خالص (مثل نمک):** این‌جا باید خیلی دقت کنید! وقتی مادهٔ خالص اضافه می‌کنیم. هم مقدار خالص ما بیشتر می‌شود و هم وزن کل ظرف سنگین‌تر می‌شود پس مقدار اضافه‌شده **هم به صورت کسر و هم به مخرج کسر** اضافه می‌گردد.

فرمول‌سازی ترکیبی: اگر در یک مسئله، هم‌زمان مادهٔ خالص اضافه کنیم و آب را تبخیر کنیم، کسر جدید به این شکل ساخته می‌شود:

$$\text{غلظت جدید} = \frac{\text{نمک اضافه‌شده} + \text{نمک اولیه}}{\text{آب تبخیرشده} - \text{نمک اضافه‌شده} + \text{کل محلول اولیه}}$$

با جای‌گذاری اعداد معلوم و قراردادن یک مجهول (مثل x) برای خواستهٔ مسئله، به راحتی به جواب می‌رسید.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** ابتدا مقدار رنگ موجود در کل مخلوط رنگ را محاسبه می‌کنیم:

$$۷ \times \frac{۵۰}{۱۰۰} + ۸ \times \frac{۲۰}{۱۰۰} = ۳/۵ + ۱/۶ = ۵/۱$$

گام دوم: حال برای این‌که مشخص کنیم با چه مقدار تبخیر محلول، غلظت آن ۶۰ درصد می‌شود، باید معادلهٔ زیر را حل کنیم:

$$\frac{۶۰}{۱۰۰} = \frac{۵/۱}{۷+۸-x} \Rightarrow \frac{۶}{۱۰} = \frac{۵/۱}{۱۵-x} \Rightarrow ۹۰-۶x = ۵۱ \Rightarrow ۶x = ۳۹ \Rightarrow x = \frac{۱۳}{۲} = ۶/۵$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶۳ معادلهٔ $\sqrt{-x+3}-x=-2$ چند جواب دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint

دو طرف معادله رو به توان ۲ برسونید تا رادیکال بپره، اما یادتون نره که گام حیاتی اینه که جواب‌های آخر رو حتماً تو معادلهٔ اولیه چک کنید تا ریشهٔ زائد رو حذف کنید!

درس Box

راهنمای حل معادله‌های گنگ (رادیکالی):

در دنیای جبر، به معادله‌هایی که متغیر مجهول آن‌ها زیر چتر رادیکال قرار گرفته باشد، اصطلاحاً «معادله‌های گنگ» گفته می‌شود. برای نجات‌دادن مجهول از زیر رادیکال و حل این نوع معادله‌ها، باید مراحل زیر را طی کنیم:

- **رادیکال‌زدایی یا توان‌رساندن:** راهکار اصلی این است که هر دو طرف معادله را به توان مناسب با فرجهٔ رادیکال برسانیم. (مثلاً برای رادیکال‌های مربعی، دو طرف را به توان دو می‌رسانیم). اگر معادله شامل چند رادیکال بود و با یک بار به توان رساندن همهٔ آن‌ها از بین نرفتند، این فرایند را تا جایی تکرار می‌کنیم که به یک معادلهٔ معمولی بدون رادیکال برسیم.
- **حل معادلهٔ حاصل:** پس از حذف کامل رادیکال‌ها، معادلهٔ جبری به‌دست‌آمده را با روش‌های استانداردی که قبلاً آموخته‌ایم، حل‌کرده و مقادیر مجهول را پیدا می‌کنیم.
- **گام حیاتی:** در فرایند حل معادله‌های گنگ، وقتی دو طرف تساوی را به یک توان زوج می‌رسانیم، ساختار معادله تغییر می‌کند و ممکن است ریشه‌هایی تولید شوند که در واقع جواب معادلهٔ اولیه نیستند (به این‌ها ریشه‌های زائد یا اضافی می‌گویند).

بنابراین، **تحت هر شرایطی الزامی است** که جواب‌های به‌دست‌آمده از مرحلهٔ آخر را حتماً در «معادلهٔ اصلی و اولیه» (قبل از اعمال هر گونه توان) جای‌گذاری کنید. تنها، جواب‌هایی به عنوان پاسخ نهایی و قابل‌قبول تأیید می‌شوند که پس از جای‌گذاری باعث شوند دو طرف معادلهٔ اصلی با هم برابر شوند. جواب‌هایی که تساوی را نقض کنند، مردود خواهند بود.

پاسخ خیلی تشریحی

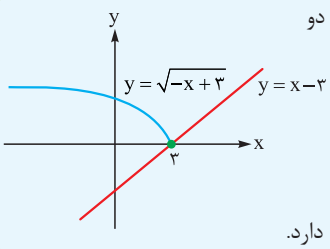
معادله را به صورت زیر بازنویسی و با به توان ۲ رساندن طرفین تساوی، آن را حل می‌کنیم و جواب‌های به‌دست‌آمده را در معادلهٔ اصلی امتحان می‌کنیم:

$$\sqrt{-x+3}=x-3 \Rightarrow -x+3=x^2-6x+9 \Rightarrow x^2-5x+6=0 \Rightarrow \begin{cases} x=3 \text{ ق ق} \\ x=2 \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

بنابراین معادله ۱ جواب دارد.

یه‌جور دیگه

با توجه به این‌که مسئله از ما تنها تعداد جواب‌های معادله را می‌خواهد با رسم نمودار دو تابع در طرفین معادله، تعداد نقاط برخورد نمودارها را مشخص می‌کنیم.



با توجه به شکل، دو نمودار تنها در یک نقطه برخورد دارند، پس معادله تنها یک جواب دارد.

امتحان نهایی

معادلهٔ $\sqrt{x+1}=x-5$ را حل کنید. (سؤال ۵ ـ امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۳)

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶۴ معادلهٔ $\sqrt{3x+4}-\sqrt{-x+1}=1$ چند جواب دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint وقتی دوتا رادیکال داریم، طرفین رو به توان دو برسونید و این فرایند رو تا جایی تکرار کنید که به یه معادلهٔ چندجمله‌ای برسید. در آخر، آزمایش‌کردن جواب‌ها تو معادلهٔ اصلی فراموش نشه.

پاسخ خیلی تشریحی معادله را به صورت زیر بازنویسی و با به توان ۲ رساندن طرفین تساوی، آن را حل می‌کنیم و جواب‌های به‌دست‌آمده را در معادلهٔ اصلی صدق می‌دهیم:

$$\sqrt{3x+4}=1+\sqrt{-x+1} \Rightarrow 3x+4=1-x+1+2\sqrt{-x+1} \Rightarrow 4x+2=2\sqrt{-x+1}$$

$$\Rightarrow 2x+1=\sqrt{-x+1} \Rightarrow 4x^2+4x+1=-x+1 \Rightarrow 4x^2+5x=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \text{ ق ق} \\ x=-\frac{5}{4} \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

بنابراین معادله، تنها دارای یک جواب است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶۵ اگر $\sqrt{x+3}+\sqrt{x-5}=4$ باشد، حاصل $\sqrt{x+3}-\sqrt{x-5}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint

برای ساده‌کردن این عبارت رادیکالی تودرتو، بهترین کار اینه که عبارت رو در مزدوج خودش ضرب کنید تا با کمک اتحادها از شر رادیکال‌های مزاحم خلاص بشید.

پاسخ خیلی تشریحی

با ضرب $A=\sqrt{x+3}-\sqrt{x-5}$ در مزدوج خودش داریم:

$$(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-5})(\sqrt{x+3}+\sqrt{x-5})=4A \Rightarrow x+3-(x-5)=4A \Rightarrow 4A=8 \Rightarrow A=2$$

یه‌جور دیگه

جواب معادلهٔ $\sqrt{x+3}+\sqrt{x-5}=4$، $x=6$ است:

$$\sqrt{x+3}=4-\sqrt{x-5} \xrightarrow{\text{توان ۲}} x+3=16+x-5-8\sqrt{x-5} \Rightarrow \sqrt{x-5}=1 \Rightarrow x=6$$

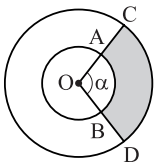
بنابراین داریم:

$$\sqrt{6+3}-\sqrt{6-5}=3-1=2$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

هندسه یازدهم

۶۶ **در شکل زیر، دو دایرهٔ هم‌مرکز به شعاع‌های R و r مفروض‌اند (R > r). کدام گزینه نادرست است؟**



۱) اندازهٔ زاویه‌های مرکزی $A\hat{O}B$ و $C\hat{O}D$ برابر است.

۲) مساحت ناحیهٔ هاشورخورده برابر $\frac{\pi}{۳۶۰}\alpha(R^۲-r^۲)$ است (α برحسب درجه).

۳) طول کمان $\overset{\frown}{CD}$ بزرگ‌تر از طول کمان $\overset{\frown}{AB}$ است.

۴) اندازهٔ کمان $\overset{\frown}{CD}$ بزرگ‌تر از اندازهٔ کمان $\overset{\frown}{AB}$ است.

مشاوره این سؤال با توجه به تعاریف و مفاهیم اولیهٔ دایره در صفحهٔ ۱۲ کتاب درسی طراحی شده است.

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint به تفاوت مفهوم طول و اندازهٔ کمان دقت کنید.

درس Box

اندازهٔ کمان: همان اندازهٔ زاویهٔ مرکزی مقابل به کمان بوده و واحد آن درجه است.

طول کمان: طول کمان برحسب واحد طول (متر، سانتی‌متر، ...) بیان می‌شود و مقدار آن بستگی به شعاع دایره و اندازهٔ کمان دارد.

طول کمان روبه‌رو به زاویهٔ مرکزی α در دایره‌ای به شعاع R، برابر $L=\frac{\pi R\alpha}{۱۸۰^\circ}$ است.

مساحت قطاع: مساحت قطاع متناظر با زاویهٔ مرکزی α در دایره‌ای به شعاع R، از رابطهٔ $S=\frac{\pi R^۲\alpha}{۳۶۰^\circ}$ به دست می‌آید.

پاسخ خیلی تشریحی

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): اندازهٔ زاویه‌های مرکزی $A\hat{O}B$ و $C\hat{O}D$ هر دو برابر α است.

گزینهٔ (۲): مساحت ناحیهٔ هاشورخورده برابر است با:

$$\text{مساحت قطاع AOB} - \text{مساحت قطاع COD} = \frac{\pi R^۲\alpha}{۳۶۰^\circ} - \frac{\pi r^۲\alpha}{۳۶۰^\circ} = \frac{\pi\alpha}{۳۶۰^\circ}(R^۲-r^۲)$$

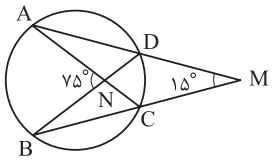
گزینهٔ (۳): با توجه به شکل داریم:

$$R>r \Rightarrow \frac{\pi R\alpha}{۱۸۰^\circ} > \frac{\pi r\alpha}{۱۸۰^\circ} \Rightarrow \text{طول کمان CD} > \text{طول کمان AB}$$

گزینهٔ (۴): اندازهٔ دو کمان $\overset{\frown}{CD}$ و $\overset{\frown}{AB}$ هر دو برابر α است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶۷ در شکل زیر، نسبت اندازهٔ کمان AB به اندازهٔ کمان CD کدام است؟



۱) ۳

۲) ۲

۳) $\frac{۳}{۲}$

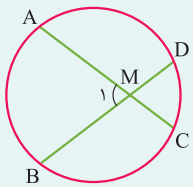
۴) $\frac{۵}{۳}$

مشاوره این سؤال از مبحث زاویهٔ بین دو وتر یا امتداد آن‌ها و مشابه تمرین ۲ صفحهٔ ۱۶ کتاب درسی طراحی شده است.

پاسخ: گزینهٔ ۳

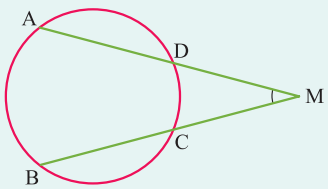
درس Box

۱) هرگاه دو وتر درون دایره یکدیگر را قطع کنند، اندازهٔ زاویهٔ بین آن‌ها برابر نصف مجموع کمان‌های مقابل به آن زاویه است، یعنی در شکل مقابل داریم:



$$\hat{M}_۱ = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD}}{۲}$$

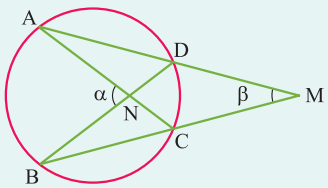
۲) هرگاه امتداد دو وتر بیرون دایره یکدیگر را قطع کنند، اندازهٔ زاویهٔ بین آن‌ها برابر نصف اختلاف کمان‌های مقابل به آن زاویه است، یعنی در شکل مقابل داریم:



$$\hat{M} = \frac{\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{CD}}{۲}$$

نکته

در شکل مقابل:



$$\begin{cases} \overset{\frown}{AB} = \alpha + \beta \\ \overset{\frown}{CD} = \alpha - \beta \end{cases}$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: فرض کنید $\overset{\frown}{AB} = \alpha$ و $\overset{\frown}{CD} = \beta$ باشد. آن‌گاه طبق روابط ارائه‌شده در درس‌باکس می‌توان نوشت:

$$\hat{M} = \frac{\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{CD}}{۲} \Rightarrow ۱۵^\circ = \frac{\alpha - \beta}{۲} \Rightarrow \alpha - \beta = ۳۰^\circ$$

$$A\hat{N}B = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD}}{۲} \Rightarrow ۷۵^\circ = \frac{\alpha + \beta}{۲} \Rightarrow \alpha + \beta = ۱۵۰^\circ$$

گام دوم: از طریق حل دستگاه دو معادله ـ دو مجهول، مقادیر α و β و نسبت آن‌ها را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases} \alpha - \beta = ۳۰^\circ \\ \alpha + \beta = ۱۵۰^\circ \end{cases} \Rightarrow ۲\alpha = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \alpha = ۹۰^\circ \Rightarrow \beta = ۶۰^\circ$$

بنابراین داریم:

$$\frac{\overset{\frown}{AB}}{\overset{\frown}{CD}} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{۹۰^\circ}{۶۰^\circ} = \frac{۳}{۲}$$

تیزبازی

طبق نکتهٔ موجود در درس‌باکس داریم:

$$\begin{cases} \overset{\frown}{AB} = A\hat{N}B + \hat{M} = ۷۵^\circ + ۱۵^\circ = ۹۰^\circ \\ \overset{\frown}{CD} = A\hat{N}B - \hat{M} = ۷۵^\circ - ۱۵^\circ = ۶۰^\circ \end{cases} \qquad \frac{\overset{\frown}{AB}}{\overset{\frown}{CD}} = \frac{۹۰^\circ}{۶۰^\circ} = \frac{۳}{۲}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

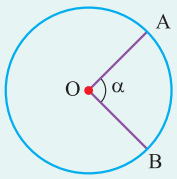
۶۸ دو کمان AB و MN به ترتیب در دو دایرهٔ $C(O,R)$ و $C'(O',2R)$ مفروض‌اند. اگر طول کمان MN سه برابر طول کمان AB باشد، مساحت قطاع $MO'N$ چند برابر مساحت قطاع AOB است؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۹ ۴) ۱۲

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint ابتدا نسبت اندازه‌های دو زاویهٔ مرکزی مقابل به کمان‌های AB و MN را به دست آورید.

درس Box کمان AB مقابل به زاویهٔ مرکزی α را در دایرهٔ $C(O,R)$ در نظر بگیرید:



الف) اگر طول کمان AB را با L نمایش دهیم، آن‌گاه مقدار آن به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\text{اندازهٔ کمان AB}}{۳۶۰^\circ}=\frac{\text{طول کمان AB}}{\text{محیط دایره}}\Rightarrow\frac{\alpha}{۳۶۰^\circ}=\frac{L}{۲\pi R}\Rightarrow L=\frac{\pi R\alpha}{۱۸۰^\circ}$$

ب) اگر مساحت قطاع AOB را با S نمایش دهیم، آن‌گاه مقدار آن به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\text{اندازهٔ کمان AB}}{۳۶۰^\circ}=\frac{\text{مساحت قطاع AOB}}{\text{مساحت دایره}}\Rightarrow\frac{\alpha}{۳۶۰^\circ}=\frac{S}{\pi R^۲}\Rightarrow S=\frac{\pi R^۲\alpha}{۳۶۰^\circ}$$

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** فرض کنید اندازهٔ کمان‌های AB و MN (زاویه‌های مرکزی مقابل به این دو کمان) به ترتیب برابر α و α' و طول این دو کمان به ترتیب برابر L و L' باشد. در این صورت داریم:

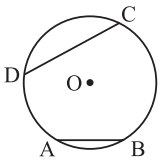
$$\frac{L'}{L}=\frac{\frac{\pi(۲R)\alpha'}{۱۸۰^\circ}}{\frac{\pi R\alpha}{۱۸۰^\circ}}\Rightarrow ۳=\frac{۲\alpha'}{\alpha}\Rightarrow\alpha'=\frac{۳}{۲}\alpha$$

گام دوم: اگر مساحت قطاع‌های AOB و $MO'N$ را به ترتیب با S و S' نمایش دهیم، آن‌گاه:

$$\frac{S'}{S}=\frac{\frac{\pi(۲R)^۲\alpha'}{۳۶۰^\circ}}{\frac{\pi R^۲\alpha}{۳۶۰^\circ}}=\frac{۴R^۲}{R^۲}\times\frac{\frac{۳}{۲}\alpha}{\alpha}=۴\times\frac{۳}{۲}=۶$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶۹ در شکل زیر اندازهٔ کمان AB برابر ۶۰° و فاصلهٔ مرکز دایره از وتر AB، دو برابر فاصلهٔ آن از وتر CD است. اگر اندازهٔ شعاع دایره برابر ۴ باشد، طول وتر CD کدام است؟



۱) ۶
۲) $۴\sqrt{۳}$
۳) $۲\sqrt{۱۳}$
۴) $۲\sqrt{۱۵}$

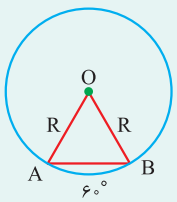
پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint

مثلث AOB متساوی‌الاضلاع است.

درس Box

۱) هرگاه در یک دایره، اندازهٔ کمانی برابر ۶۰° باشد، اندازهٔ وتر متناظر با آن کمان برابر اندازهٔ شعاع دایره است. به عنوان مثال اگر در شکل زیر $\overset{\frown}{AB} = ۶۰^\circ$ باشد، آن‌گاه:

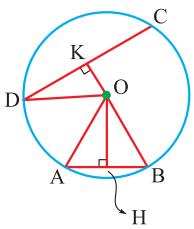


$$\left.\begin{matrix}\overset{\frown}{AB} = ۶۰^\circ \Rightarrow A\hat{O}B = ۶۰^\circ \\ OA = OB = R\end{matrix}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{AOB} \text{ متساوی الاضلاع است.} \Rightarrow AB = OA = OB = R$$

۲) اگر از مرکز یک دایره بر وتری از آن دایره عمود رسم کنیم، این خط عمود، وتر را نصف می‌کند.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: اندازهٔ کمان AB برابر ۶۰° است، پس طبق مورد اول درس‌باکس، اندازهٔ وتر AB برابر شعاع دایره یعنی ۴ است. در نتیجه مثلث AOB متساوی‌الاضلاع بوده و طول ارتفاع OH در این مثلث برابر است با:



$$OH = \frac{\sqrt{۳}}{۲} AB = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times ۴ = ۲\sqrt{۳}$$

گام دوم: طبق فرض فاصلهٔ نقطهٔ O از وتر AB، دو برابر فاصلهٔ آن از وتر CD است، پس $OK = \frac{۱}{۲} \times ۲\sqrt{۳} = \sqrt{۳}$ و در نتیجه در مثلث قائم‌الزاویهٔ OKD داریم:

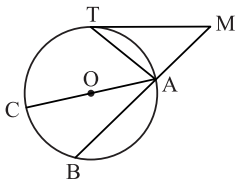
$$DK^۲ = OD^۲ - OK^۲ = ۴^۲ - (\sqrt{۳})^۲ = ۱۳ \Rightarrow DK = \sqrt{۱۳}$$

گام سوم: طبق مورد دوم درس‌باکس، نقطهٔ K وسط وتر CD است، پس:

$$CD = ۲DK = ۲\sqrt{۱۳}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷۰ در شکل زیر خط MT بر دایره مماس است. اگر $\frac{\overset{\frown}{AT}}{۲}=\frac{\overset{\frown}{AB}}{۳}=\frac{\overset{\frown}{BT}}{۴}$ باشد، اندازهٔ زاویهٔ $C\hat{A}T$ چند برابر اندازهٔ زاویهٔ M است؟ (O مرکز دایره است.)



۱) ۱

۲) $\frac{۳}{۲}$

۳) $\frac{۴}{۳}$

۴) $\frac{۵}{۴}$

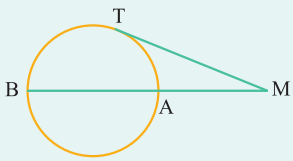
پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint

مجموع کمان‌های دایره را برابر ۳۶۰° قرار دهید.

درس Box

۱) زاویهٔ بین امتداد یک وتر و خط مماس بر دایره، برابر نصف اختلاف کمان‌های محصور بین آن وتر و خط مماس بر دایره است، یعنی در شکل مقابل داریم:



$$\hat{M}=\frac{\overset{\frown}{BT}-\overset{\frown}{AT}}{۲}$$

۲) اندازهٔ زاویهٔ محاطی در یک دایره برابر نصف اندازهٔ کمان مقابل به آن زاویه است.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: مجموع کمان‌های دایره برابر ۳۶۰° است؛ بنابراین داریم:

$$\frac{\overset{\frown}{AT}}{۲}=\frac{\overset{\frown}{AB}}{۳}=\frac{\overset{\frown}{BT}}{۴}=x \Rightarrow \begin{cases}\overset{\frown}{AT}=۲x\\ \overset{\frown}{AB}=۳x\\ \overset{\frown}{BT}=۴x\end{cases}$$

$$\overset{\frown}{AT}+\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BT}=۳۶۰^\circ \Rightarrow ۲x+۳x+۴x=۳۶۰^\circ \Rightarrow ۹x=۳۶۰^\circ \Rightarrow x=۴۰^\circ$$

گام دوم: طبق مورد اول درس‌باکس، اندازهٔ زاویهٔ M برابر است با:

$$\hat{M}=\frac{\overset{\frown}{BT}-\overset{\frown}{AT}}{۲}=\frac{۴x-۲x}{۲}=x=۴۰^\circ$$

گام سوم: زاویهٔ $C\hat{A}T$ زاویهٔ محاطی روبه‌رو به کمان CT است؛ بنابراین داریم:

$$C\hat{A}T=\frac{\overset{\frown}{CT}}{۲}=\frac{۱۸۰^\circ-\overset{\frown}{AT}}{۲}=\frac{۱۸۰^\circ-۲x}{۲}=۹۰^\circ-x=۵۰^\circ$$

گام چهارم: با توجه به گام‌های دوم و سوم، نسبت اندازهٔ دو زاویه برابر است با:

$$\frac{C\hat{A}T}{\hat{M}}=\frac{۵۰^\circ}{۴۰^\circ}=\frac{۵}{۴}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷۱ فاصلهٔ نزدیک‌ترین نقطهٔ خط d تا مرکز دایرهٔ $C(O,7-2x)$، برابر $\frac{5x-x^2}{2}$ است. اگر خط و دایره هیچ نقطهٔ اشتراکی نداشته باشند، چند مقدار طبیعی برای x وجود دارد؟

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

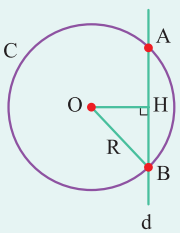
مشاوره اوضاع نسبی خط و دایره در صفحه‌های ۱۰ و ۱۱ کتاب درسی هندسه (۲) مورد بررسی قرار گرفته است. این روابط در کتاب هندسهٔ دوازدهم با معادلهٔ دایره ترکیب می‌شوند و مسائل متعددی از آن‌ها در امتحان نهایی و کنکور طراحی می‌شود.

پاسخ: گزینهٔ ۱

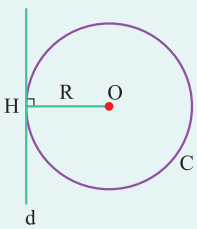
Hint خط و دایره نقطهٔ اشتراکی ندارند، پس فاصلهٔ مرکز دایره از خط d، بیشتر از شعاع دایره است.

درس Box **وضعیت نسبی خط و دایره:** خط و دایره براساس مقایسهٔ بین اندازهٔ شعاع و فاصلهٔ مرکز دایره از خط، یکی از سه حالت زیر را دارند:

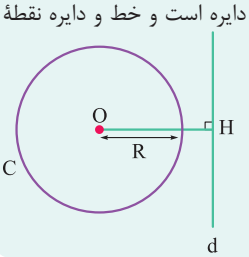
۱) اگر فاصلهٔ مرکز دایره از خط d، کوچک‌تر از شعاع دایره باشد $(OH < R)$، آن‌گاه خط و دایره متقاطع‌اند و دو نقطهٔ مشترک دارند:



۲) اگر فاصلهٔ مرکز دایره از خط d، برابر شعاع دایره باشد $(OH = R)$، آن‌گاه خط بر دایره مماس است و یک نقطهٔ مشترک دارند:



۳) اگر فاصلهٔ مرکز دایره از خط d، بزرگ‌تر از شعاع دایره باشد $(OH > R)$، آن‌گاه خط بیرون دایره است و خط و دایره نقطهٔ مشترکی ندارند:



پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** طبق فرض سؤال خط و دایره هیچ نقطهٔ اشتراکی ندارند، پس فاصلهٔ مرکز دایره از خط d، بزرگ‌تر از شعاع دایره است و در نتیجه داریم:

$$\frac{5x-x^2}{2} > 7-2x \xrightarrow{\times 2} 5x-x^2 > 14-4x \Rightarrow x^2-9x+14 < 0$$

$$\Rightarrow (x-2)(x-7) < 0 \Rightarrow 2 < x < 7 \qquad (1)$$

گام دوم: اندازهٔ شعاع دایره و همین‌طور فاصلهٔ مرکز دایره از خط d، مقادیری مثبت هستند، پس:

$$7-2x > 0 \Rightarrow x < \frac{7}{2} \qquad (2)$$

$$5x-x^2 > 0 \Rightarrow x(5-x) > 0 \Rightarrow 0 < x < 5 \qquad (3)$$

گام سوم: اشتراک روابط (۱)، (۲) و (۳) به صورت $2 < x < \frac{7}{2}$ است و تنها عدد طبیعی ممکن $x = 3$ است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷۲ خط d و دایرهٔ $C(O,۶)$ مفروض‌اند، به طوری که روی خط d، دو نقطهٔ A و B به فاصلهٔ ۶ واحد از نقطهٔ O وجود دارند. اگر $AB = ۸$ باشد، آن‌گاه چند نقطه روی خط d وجود دارد که فاصلهٔ آن‌ها از نقطهٔ O برابر ۴ باشد؟

۱) صفر

۲) ۱

۳) ۲

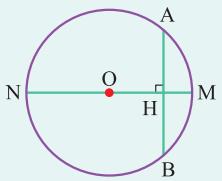
۴) بی‌شمار

مشاوره قضیه‌های مربوط به وتر در دایره که در قالب فعالیت صفحهٔ ۱۳ کتاب درسی هندسه (۲) بیان شده است، از نکات کلیدی فصل دایره محسوب می‌شوند و در حل سؤالات متعددی از این فصل مورد استفاده قرار می‌گیرند.

پاسخ: گزینهٔ ۱

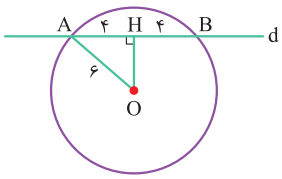
Hint فاصلهٔ نقطهٔ O از خط d را محاسبه کنید.

درس Box در هر دایره، قطر عمود بر یک وتر، آن وتر و کمان‌های نظیر آن وتر را نصف می‌کند.



$$OH \perp AB \Rightarrow \begin{cases} AH = BH \\ \overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{BM} \\ \overset{\frown}{AN} = \overset{\frown}{BN} \end{cases}$$

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** فاصلهٔ نقاط A و B از مرکز دایرهٔ C دقیقاً برابر شعاع دایره است، پس این دو نقطه روی این دایره واقع‌اند و AB وتری از دایرهٔ C است:



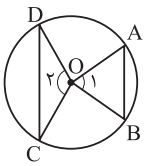
گام دوم: از مرکز دایره، عمود OH را بر وتر AB رسم می‌کنیم. طبق توضیحات درس‌باکس، H وسط پاره‌خط AB است، پس $AH = BH = ۴$ و در نتیجه طبق قضیهٔ فیثاغورس در مثلث OAH می‌توان نوشت:

$$OH^۲ = OA^۲ - AH^۲ = ۶^۲ - ۴^۲ = ۲۰ \Rightarrow OH = ۲\sqrt{۵}$$

گام سوم: با توجه به مقدار به‌دست‌آمده برای اندازهٔ پاره‌خط OH، کم‌ترین فاصلهٔ نقاط واقع بر خط d از نقطهٔ O، برابر $۲\sqrt{۵}$ است. از طرفی $۲\sqrt{۵} > ۴$؛ بنابراین هیچ نقطه‌ای روی خط d وجود ندارد که از نقطهٔ O به فاصلهٔ ۴ واحد باشد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷۳ در شکل زیر، دو زاویهٔ O_1 و O_2 مکمل یکدیگرند. اگر $CD = 2AB = 4\sqrt{5}$ باشد، اندازهٔ شعاع دایره کدام است؟



۱) ۵

۲) $\sqrt{30}$

۳) ۶

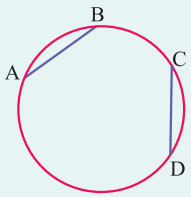
۴) $3\sqrt{5}$

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint کمانی هم‌اندازه با $\overset{\frown}{AB}$ در مجاورت $\overset{\frown}{CD}$ ایجاد کنید.

درس Box

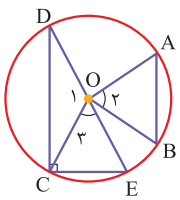
۱) وترهای نظیر دو کمان برابر، هم‌اندازه‌اند و برعکس کمان‌های نظیر دو وتر هم‌اندازه، با یکدیگر برابرند:



$$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD} \Leftrightarrow AB = CD$$

۲) اندازهٔ زاویهٔ محاطی روبه‌رو به قطر دایره، برابر 90° است.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** شعاع OD را از سمت O امتداد می‌دهیم تا دایره را در نقطهٔ E قطع کند، فرض کنید $\hat{O}_1 = \alpha$ باشد:



$$\hat{O}_1 + \hat{O}_2 = 180^\circ \xrightarrow{\hat{O}_1 = \alpha} \hat{O}_2 = 180^\circ - \alpha$$

از طرفی DE قطر دایره است؛ بنابراین:

$$D\hat{O}E = 180^\circ \Rightarrow \hat{O}_1 + \hat{O}_3 = 180^\circ \Rightarrow \hat{O}_3 = 180^\circ - \alpha$$

یعنی دو زاویهٔ $\hat{O}_2$ و $\hat{O}_3$ برابر یکدیگرند.

گام دوم: می‌دانیم وترهای نظیر دو کمان برابر، هم‌اندازه‌اند؛ بنابراین داریم:

$$\hat{O}_3 = \hat{O}_2 \Rightarrow \overset{\frown}{CE} = \overset{\frown}{AB} \Rightarrow CE = AB = 2\sqrt{5}$$

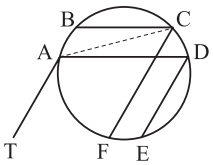
گام سوم: طبق قضیهٔ فیثاغورس در مثلث CDE می‌توان نوشت:

$$DE^2 = CE^2 + CD^2 = (2\sqrt{5})^2 + (4\sqrt{5})^2 = 20 + 80 = 100 \Rightarrow DE = 10$$

بنابراین طول قطر دایره برابر ۱۰ و اندازهٔ شعاع دایره برابر ۵ است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷۴ در شکل زیر $BC \parallel AD$ ، $CF \parallel DE$ و TA در نقطهٔ A بر دایره مماس است. اگر اندازهٔ کمان‌های $\overset{\frown}{DE}$ ، $\overset{\frown}{BC}$ و $\overset{\frown}{AF}$ به ترتیب جملات متوالی یک دنبالهٔ حسابی باشند، آن‌گاه اندازهٔ زاویهٔ $C\hat{A}T$ کدام است؟



۱) ۱۰۵°

۲) ۱۱۰°

۳) ۱۲۰°

۴) ۱۲۵°

مشاوره این سؤال مشابه سؤال ۱۳۳ کنکور ریاضی ۱۴۰۱ خارج از کشور طراحی شده است و به موضوع وترهای موازی در دایره و اندازهٔ زاویهٔ ظلی می‌پردازد.

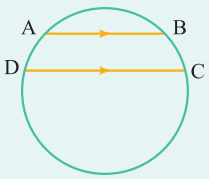
پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint

مقدار جملات دنبالهٔ حسابی را برحسب جملهٔ وسط یعنی کمان $\overset{\frown}{BC}$ بنویسید.

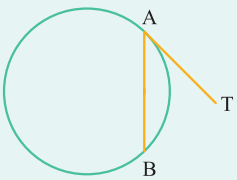
درس Box

۱) در هر دایره، اندازهٔ کمان‌های محصور به دو وتر موازی برابر یکدیگرند.



$$AB \parallel CD \Rightarrow \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BC}$$

۲) زاویهٔ ظلی در دایره، زاویه‌ای است که یک ضلع آن وتری از دایره و ضلع دیگر آن خط مماس بر دایره است. اندازهٔ زاویهٔ ظلی نصف اندازهٔ کمان مقابل آن است:



$$B\hat{A}T = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: فرض کنید $\overset{\frown}{AB} = x$ باشد. در این‌صورت داریم:

$$AD \parallel BC \Rightarrow \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{AB} = x$$

$$CF \parallel DE \Rightarrow \overset{\frown}{EF} = \overset{\frown}{CD} = x$$

گام دوم: اندازهٔ کمان‌های $\overset{\frown}{DE}$ ، $\overset{\frown}{BC}$ و $\overset{\frown}{AF}$ یک دنبالهٔ حسابی تشکیل می‌دهند. اگر قدرنسبت دنبالهٔ حسابی برابر d باشد، آن‌گاه با فرض $\overset{\frown}{BC} = y$ داریم:

$$\begin{cases} \overset{\frown}{DE} = y - d \\ \overset{\frown}{AF} = y + d \end{cases}$$

گام سوم: مجموع کمان‌های دایره برابر ۳۶۰° است، پس:

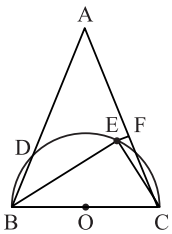
$$\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{DE} + \overset{\frown}{EF} + \overset{\frown}{AF} = ۳۶۰^\circ \Rightarrow x + y + x + y - d + x + y + d = ۳۶۰^\circ \Rightarrow x + y = ۱۲۰^\circ$$

گام چهارم: زاویهٔ $C\hat{A}T$ زاویه‌ای ظلی است؛ بنابراین:

$$C\hat{A}T = \frac{\overset{\frown}{CEA}}{۲} = \frac{۲x + ۲y}{۲} = x + y = ۱۲۰^\circ$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷۵ در شکل زیر، نقطهٔ E روی نیم‌دایره‌ای به مرکز O قرار دارد، به گونه‌ای که $BE = ۱۶$ و $EC = ۱۲$ است. اگر $\overset{\frown}{DE} = \overset{\frown}{EC}$، F وسط AC و $AB = ۲۴$ باشد، اندازهٔ پاره‌خط EF کدام است؟



۱) ۱/۵

۲) ۲

۳) ۲/۵

۴) ۳

مشاوره این سؤال مشابه سؤال ۲۶ کنکور ریاضی ۱۴۰۴، نوبت دوم طراحی شده است.

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint

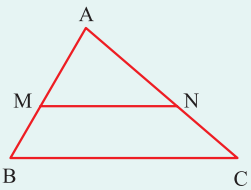
زاویهٔ BEC زاویهٔ محاطی روبه‌رو به قطر نیم‌دایره است.

درس Box

۱) اندازهٔ زاویهٔ محاطی روبه‌رو به قطر در هر دایره برابر ۹۰° است.

۲) اگر اندازهٔ دو کمان از یک دایره برابر باشد، آن‌گاه اندازهٔ وترهای نظیر آن دو کمان نیز برابر است.

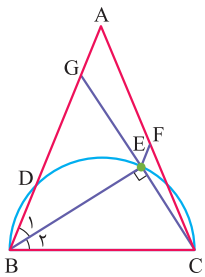
یادآوری: عکس قضیهٔ تالس: اگر خطی دو ضلع مثلثی را قطع کند و روی آن‌ها، چهار پاره‌خط با اندازه‌های نظیربه‌نظیر متناسب جدا کند، آن‌گاه خط مورد نظر با ضلع سوم مثلث موازی است:



$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \Rightarrow MN \parallel BC$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: پاره‌خط CE را از سمت E ادامه می‌دهیم تا AB را در نقطه‌ای مانند G قطع کند. زاویهٔ $\hat{BEC}$ زاویهٔ محاطی روبه‌رو به قطر BC و در نتیجه اندازهٔ آن برابر ۹۰° است، یعنی BE ارتفاع رأس B در مثلث BCG است. از طرفی طبق فرض داریم:



$$\overset{\frown}{DE} = \overset{\frown}{EC} \Rightarrow \frac{\overset{\frown}{DE}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{EC}}{۲} \xrightarrow{\text{زاویهٔ محاطی}} \hat{B}_۱ = \hat{B}_۲$$

بنابراین BE نیمساز زاویهٔ B در مثلث BCG است.

گام دوم: ارتفاع و نیمساز نظیر رأس B در مثلث BCG بر هم منطبق‌اند، پس این مثلث متساوی‌الساقین است، یعنی $BG = BC$.

از طرفی در مثلث قائم‌الزاویهٔ BEC داریم:

$$BC^۲ = BE^۲ + EC^۲ = ۱۶^۲ + ۱۲^۲ = ۲۰^۲ \Rightarrow BC = ۲۰ \Rightarrow BG = ۲۰$$

حال با توجه به اندازهٔ AB می‌توان نوشت:

$$AG = AB - BG = ۲۴ - ۲۰ = ۴$$

گام سوم: در مثلث متساوی‌الساقین BCG، BE میانهٔ وارد بر ضلع CG است، یعنی E وسط این ضلع است و در نتیجه داریم:

$$\overset{\Delta}{AGC}: \frac{CE}{EG} = \frac{CF}{FA} = ۱ \xrightarrow{\text{عکس تالس}} EF \parallel AG \Rightarrow \frac{EF}{AG} = \frac{CF}{CA} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow EF = \frac{۱}{۲} AG = ۲$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

آمار و احتمال

۷۶ در پرتاب یک تاس، مجموعه‌جواب گزاره‌نمای $P(A)=\frac{۱}{۳}$ چند عضو دارد؟

به ازای آن‌ها، گزاره درست می‌شود.

۱) ۱۰
۲) ۱۵
۳) ۲۰
۴) ۲۱

مشاوره منطق حجم نسبتاً کمی دارد ولی یک سؤال از آن در کنکور می‌آید.

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint

تعداد پیشامدهای ۲عضوی را شمارش کنید.

درس Box

- هر جملهٔ خبری که شامل یک یا چند متغیر است و با جای‌گذاری مقادیری به جای متغیر(ها) به یک گزاره تبدیل شود، **گزاره‌نما** نامیده می‌شود. گزاره‌نماها را برحسب تعداد متغیر به‌کاررفته در آن‌ها، یک‌متغیره، دومتغیره و ... می‌نامیم.
- در هر گزاره‌نما به مجموعهٔ مقادیری که می‌توان آن‌ها را به جای متغیرهای آن قرار داد، تا این‌که گزاره‌نما به گزاره تبدیل شود، **دامنهٔ متغیر** گزاره‌نما می‌گویند و آن را با حرف D نمایش می‌دهند.
- در هر گزاره‌نما، به مجموعهٔ عضوهایی از دامنهٔ متغیر که به ازای آن‌ها، گزاره‌نما تبدیل به گزاره‌ای با ارزش درست شود، **مجموعه‌جواب** گزاره‌نما می‌گویند و آن را با حرف S نمایش می‌دهند و همواره داریم: $S \subseteq D$

نکته

تعداد راه‌های انتخاب r شیء از n شیء متمایز برابر است با: $\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: $\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$ است. اگر A زیرمجموعه‌ای دوعضوی از فضای نمونهٔ پرتاب تاس (یعنی $\{۱,۲,...,۶\}$) باشد، $P(A)=\frac{۱}{۳}$ شده و گزاره درست می‌شود.

گام دوم: کافی است تعداد حالت‌های انتخاب ۲ عضو از ۶ عضو را به دست آوریم:

$$\binom{۶}{۲}=\frac{۶!}{۲!۴!}=\frac{۶\times۵}{۲}=۱۵$$

A هر کدام از پیشامدهای ۲عضوی می‌تواند باشد، پس مجموعه‌جواب ۱۵ عضو دارد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷۷ گزاره‌های $r \Leftrightarrow \sim p$ و $((\sim p \wedge q) \vee r) \Rightarrow (\sim p \vee q)$ هر دو نادرست هستند. کدام نتیجه‌گیری درست است؟

۱) p نادرست، r نادرست، q نادرست

۲) p نادرست، r درست، q نادرست

۳) p درست، r درست، q نادرست

۴) p نادرست، r نادرست، q درست

مشاوره مشابه این سؤال بارها در کنکور آمده است، حتماً آن را تحلیل کنید.

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint ارزش p و r باید مثل هم باشد.

درس Box

جدول ارزش گزاره‌ها:

ترکیب	فارسی	جدول ارزش	نکات
نقیض $\sim p$	چنین نیست که p	p: د، ن — $\sim p$: ن، د	۱) ارزش آن برعکس p است. ۲) $\sim(\sim p) \equiv p$
عطفی $p \wedge q$	p و q	p: د، د، ن، ن — q: د، ن، د، ن — $p \wedge q$: د، ن، ن، ن	۱) فقط در حالتی که هر دو درست باشند، $p \wedge q$ درست می‌شود. ۲) اگر یکی هم نادرست باشد، $p \wedge q$ نادرست می‌شود. ۳) $p \wedge T \equiv p$ ۴) $p \wedge F \equiv F$ ۵) $p \wedge \sim p \equiv F$
فصلی $p \vee q$	p یا q	p: د، د، ن، ن — q: د، ن، د، ن — $p \vee q$: د، د، د، ن	۱) اگر حداقل یکی درست باشد، $p \vee q$ درست می‌شود. ۲) فقط در حالتی که هر دو نادرست باشند، $p \vee q$ نادرست است. ۳) $p \vee T \equiv T$ ۴) $p \vee F \equiv p$ ۵) $\sim p \vee p \equiv T$ ۶) پخشی: $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$، $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ ۷) دمورگان: $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$، $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$ ۸) جذب: $p \vee (p \wedge q) \equiv p$، $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

ترکیب	فارسی	جدول ارزش	نکات
شرطی $p \Rightarrow q$	اگر p آن‌گاه q	$p \Rightarrow q$ | q | p د | د | د ن | د | د د | ن | ن د | ن | ن	۱) p را فرض (مقدم) و q را حکم (تالی) می‌گوییم. ۲) فقط در حالتی که فرض درست و حکم نادرست باشد، نادرست است و در بقیهٔ حالات درست است. ۳) اگر فرض (p) نادرست باشد، $p \Rightarrow q$ (صرف‌نظر از ارزش q) درست است، در این حالت می‌گوییم گزاره به انتفای مقدم درست است. ۴) اگر حکم (q) درست باشد، $p \Rightarrow q$ (صرف‌نظر از ارزش p) درست است. ۵) هم‌ارزی‌های مهم ترکیب شرطی: $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$ $\sim (p \Rightarrow q) \equiv \sim (\sim p \vee q) \equiv p \wedge \sim q$ $p \Rightarrow q \equiv \underbrace{\sim q \Rightarrow \sim p}_{\text{(عکس نقیض)}}$
دوشرطی $p \Leftrightarrow q$	p اگر و فقط اگر q p شرط لازم و کافی برای q است. اگر p آن‌گاه q و برعکس	$p \Leftrightarrow q$ | q | p د | د | د ن | ن | د ن | د | ن د | ن | ن	۱) فقط در حالتی درست است که ارزش دو گزاره یکسان باشد. ۲) هم‌ارزی ترکیب دوشرطی: $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ترکیب دوشرطی دو گزاره وقتی نادرست است که گزاره‌ها ارزش‌های مختلفی داشته باشند، پس ارزش r و $\sim p$ نقیض یکدیگر است (یکی درست و دیگری نادرست)؛ بنابراین ارزش r و p مانند هم است.

گام دوم: ترکیب شرطی دو گزاره نیز فقط در حالتی که مقدم درست و تالی نادرست باشد، نادرست است؛ پس چون گزارهٔ شرطی داده‌شده نادرست است، $\sim p \vee q$ درست و $(\sim p \wedge q) \vee r$ نادرست است.

گام سوم: ترکیب فصلی $(\vee)$ نیز وقتی نادرست است که هر دو گزاره نادرست باشند، پس r نادرست (در نتیجه p هم نادرست) و $\sim p \wedge q$ نیز نادرست است.

گام چهارم: چون $\sim p$ درست پس q باید نادرست باشد، پس در کل p نادرست، q نادرست و r نیز نادرست است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷۸ گزارهٔ $[(\sim q \Rightarrow \sim p) \wedge p] \Rightarrow q$ هم‌ارز کدام گزاره است؟

۱) F

۲) T

۳) $\sim q$

۴) $\sim p$

مشاوره هم‌ارزی گزاره، سؤال پرتکرار کنکور است. حواستان باشد به جای رسم جدول که طولانی است بهتر است برخی از ردیف‌های جدول ارزش گزارهٔ داده‌شده را بررسی کرده و رد گزینه کنید.

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint فرض کنید q درست باشد.

درس Box

جبر گزاره‌ها:

گزاره	اسم قانون
$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$ $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$	قوانین شرکت‌پذیری
$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	قوانین پخشی (عکس آن فاکتورگیری)
$\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$ $\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$	قوانین دمورگان
$p \vee (p \wedge q) \equiv p$ $p \wedge (p \vee q) \equiv p$	قوانین جذب
$p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$	ترکیب شرطی
$p \vee \sim p \equiv T \quad p \vee T \equiv T \quad p \vee F \equiv p$ $p \wedge \sim p \equiv F \quad p \wedge T \equiv p \quad p \wedge F \equiv F$	مقدماتی

پاسخ خیلی تشریحی با جبر گزاره‌ها هم می‌توانیم ثابت کنیم که گزارهٔ داده‌شده هم‌ارز T است. از هم‌ارزی ترکیب شرطی به صورت $\bigcirc \Rightarrow \square \equiv \sim \square \vee \bigcirc$ داریم:

$$\sim q \Rightarrow \sim p \equiv \sim (\sim q) \vee \sim p \equiv q \vee \sim p$$

طبق قانون پخش داریم:

$$(\sim q \Rightarrow \sim p) \wedge p \equiv (q \vee \sim p) \wedge p \equiv (q \wedge p) \vee \overbrace{(p \wedge \sim p)}^{F} \equiv q \wedge p$$

$$q \wedge p \Rightarrow q \equiv \sim (q \wedge p) \vee q \equiv (\sim q \vee \sim p) \vee q \equiv \overbrace{(\sim q \vee q)}^{T} \vee \sim p \equiv T$$

تیزپاری **گام اول**: اگر q درست باشد و صرف‌نظر از ارزش فرض گزارهٔ شرطی (یعنی کروشه)، کل گزاره درست است، اما ارزش گزینه‌های (۱) و (۳) در این حالت نادرست است، پس گزینه‌های (۱) و (۳) نمی‌توانند هم‌ارز باشند.

گام دوم: اگر q درست و p نیز درست باشد، باز هم کل گزاره درست است ولی $\sim p$ نادرست، پس گزینهٔ (۴) نیز نمی‌تواند هم‌ارز باشد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

کنکور

گزارهٔ $q \Leftrightarrow \sim p$ هم‌ارز منطقی کدام گزاره است؟ (سؤال ۴ کنکور ریاضی ۱۴۰۴ ـ نوبت اول)

۱) $(\sim p \wedge q) \wedge (\sim p \vee q)$

۲) $\sim [\sim (\sim p \vee q) \vee (\sim p \wedge q)]$

۳) $(\sim p \vee q) \vee (\sim p \wedge q)$

۴) $\sim [\sim (\sim p \wedge q) \wedge (\sim p \vee q)]$

کنکور

گزارهٔ $(p \wedge q) \Rightarrow r$ هم‌ارز منطقی کدام گزاره است؟ (سؤال ۴ کنکور ریاضی ۱۴۰۴ ـ نوبت دوم)

۱) $p \Rightarrow (\sim r \Rightarrow \sim q)$

۲) $r \Rightarrow (\sim p \Rightarrow \sim q)$

۳) $\sim p \Rightarrow (\sim r \Rightarrow \sim q)$

۴) $\sim r \Rightarrow (p \Rightarrow q)$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷۹ عکس نقیض گزارهٔ $p \wedge q \Rightarrow \sim p \vee r$ به کدام صورت است؟

۱) $\sim p \wedge \sim q \Rightarrow p \vee \sim r$

۲) $\sim p \vee r \Rightarrow \sim (p \wedge q)$

۳) $p \vee \sim r \Rightarrow \sim p \wedge \sim q$

۴) $p \wedge \sim r \Rightarrow \sim p \vee \sim q$

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint برای عکس نقیض کردن یک گزارهٔ شرطی، کافی است جای فرض و حکم را عوض کرده و هر دو را نقیض کنیم.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول**: عکس نقیض گزارهٔ شرطی $p \Rightarrow q$ به صورت $\sim q \Rightarrow \sim p$ است، پس عکس نقیض گزارهٔ داده‌شده به صورت زیر است:

$$\sim (\sim p \vee r) \Rightarrow \sim (p \wedge q)$$

گام دوم: طبق قوانین دمورگان داریم:

$$\sim (\sim p \vee r) \equiv p \wedge \sim r \quad \text{و} \quad \sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

پس عکس نقیض گزارهٔ داده‌شده به صورت زیر است:

$$p \wedge \sim r \Rightarrow \sim p \vee \sim q$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸۰ **اگر p گزاره‌ای درست، q گزاره‌ای نادرست و r گزاره‌ای دلخواه باشد، کدام گزینه در مورد ارزش گزارهٔ $(\sim p \Rightarrow r) \Rightarrow \sim q$ درست است؟**

۱) همواره درست است.

۲) همواره نادرست است.

۳) فقط اگر r درست باشد، درست است.

۴) فقط اگر r نادرست باشد، درست است.

مشاوره در امتحان نهایی معمولاً جدول ارزش یک گزاره از شما خواسته می‌شود، اما چنین سؤالی نیز به صورت جای خالی می‌تواند مطرح شود.

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint p را درست و q را نادرست فرض کرده و ارزش گزارهٔ داده‌شده را بدون توجه به r بررسی کنید.

پاسخ خیلی تشریحی جدول ارزش گزارهٔ داده‌شده را در حالتی که p درست و q نادرست باشد، تشکیل می‌دهیم:

p	q	$\sim p$	$\sim p \Rightarrow r$	$\sim q$	$(\sim p \Rightarrow r) \Rightarrow \sim q$
د	ن	ن	د	د	د

پس گزارهٔ داده‌شده صرف‌نظر از ارزش r، درست است.

تیزپازی چون q نادرست است پس $\sim q$ درست است، پس حکم درست است در نتیجه کل گزاره درست می‌باشد.

کنکور **اگر p گزارهٔ درست، q گزارهٔ نادرست و r گزارهٔ دلخواه باشد، گزارهٔ $(p \Rightarrow r) \Rightarrow (r \Rightarrow q)$ هم‌ارز منطقی کدام گزاره است؟** *(سؤال ۲ کنکور ریاضی ۱۴۰۳ ـ نوبت اول)*

۱) r

۲) T

۳) $\sim r$

۴) $\sim T$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸۱ کدام‌یک از گزاره‌های زیر را می‌توانیم به جای ? در جدول زیر قرار دهیم؟

p	q	?
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

۱) $(\sim p \vee q) \Rightarrow (p \Rightarrow \sim q)$
۲) $(\sim p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \Leftrightarrow q)$
۳) $(\sim p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \Leftrightarrow q)$
۴) $(\sim p \wedge q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow \sim q)$

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint ببینید کدام گزاره در حالت ردیف اول، درست و در ردیف آخر نیز درست می‌شود.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: اگر p و q هر دو درست باشند، گزینهٔ (۱) نادرست است، پس نمی‌تواند در ? قرار گیرد.

p	q	$\sim p \vee q$	$p \Rightarrow \sim q$	$(\sim p \vee q) \Rightarrow (p \Rightarrow \sim q)$
د	د	د	ن	ن

گام دوم: طبق جدول زیر گزینهٔ (۲) نیز نمی‌تواند در ? قرار گیرد.

p	q	$\sim p \vee q$	$\sim p \Leftrightarrow q$	$(\sim p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \Leftrightarrow q)$
د	د	د	ن	ن

گام سوم: طبق ردیف چهارم جدول، گزینهٔ (۴) نادرست است در صورتی که در جدول داده‌شده باید درست باشد، پس گزینهٔ (۴) نیز نمی‌تواند قرار گیرد و گزینهٔ (۳) پاسخ سؤال می‌شود.

p	q	$\sim p \wedge q$	$p \Rightarrow \sim q$	$(\sim p \wedge q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow \sim q)$
ن	ن	ن	د	ن

یه‌جور دیگه

در گزینهٔ (۳) داریم:

p	q	$\sim p$	$\sim p \wedge q$	$\sim p \Leftrightarrow q$	$(\sim p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \Leftrightarrow q)$
د	د	ن	ن	ن	د
د	ن	ن	ن	د	ن
ن	د	د	د	د	د
ن	ن	د	ن	ن	د

مثل جدول داده‌شده

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

امتحان نهایی

با واردکردن جدول زیر در پاسخ‌برگ و سپس تکمیل آن، نشان دهید که: $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim p \vee q)$

(سؤال ۳ ـ امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۳)

p	q			
د	د			
د	ن			
ن	د			
ن	ن			

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸۲ اگر مجموعهٔ A شامل اعداد اول تک‌رقمی باشد، چه تعداد از گزاره‌های زیر درست است؟

مشاوره ارزش سور و نقیض آن پای ثابت امتحان نهایی است.

الف) $\forall x \in A ; \frac{x^2-4}{x-2} = x+2$

ب) $\exists x \in A ; x^2 + x - 12 = 0$

پ) $\forall x \in A ; |2-x| < 5$

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint $\forall$ به معنی «به ازای هر» و $\exists$ به معنی «وجود دارد»، است.

درس Box

سورها و ارزش آن‌ها:

نوع سور	نماد	فارسی	ارزش	
عمومی	$\forall$	به ازای هر	$\forall x \in U ; p(x)$	وقتی درست است که به ازای هر x عضو U، $p(x)$ درست باشد.
وجودی	$\exists$	به ازای برخی (یا وجود دارد.)	$\exists x \in U ; p(x)$	وقتی درست است که به ازای حداقل یک x از U، $p(x)$ درست باشد (یک عدد وجود داشته باشد و مجموعه‌جواب تهی نباشد).

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: A شامل مجموعهٔ اعداد اول تک‌رقمی است، پس: $A = \{2,3,5,7\}$

گام دوم: گزارهٔ «الف» نادرست است، چون به ازای $x = 2$، عبارت $\frac{x^2-4}{x-2}$ تعریف‌نشده است، ولی $x+2 = 4$ می‌شود.

گام سوم: عدد $x = 3$ وجود دارد که به ازای آن $3^2 + 3 - 12 = 0$ پس «ب» درست است.

گام چهارم: به ازای همهٔ اعداد عضو A به غیر از ۷، هر کدام را که به جای x قرار دهیم تساوی درست می‌شود، اما به ازای $x = 7$ داریم $|2-7| \not< 5$، پس «پ» نیز نادرست است؛ بنابراین فقط یک گزاره درست است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸۳ نقیض گزارهٔ «بعضی از اعداد صحیح، فرد نیستند.» به کدام صورت است؟

۱) همهٔ اعداد صحیح، فرد هستند.

۲) همهٔ اعداد غیرصحیح، زوج هستند.

۳) بعضی از اعداد صحیح، فرد هستند.

۴) همهٔ اعداد صحیح، زوج هستند.

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint برای نقیض‌کردن نوع سور عوض شده و گزاره نیز نقیض می‌شود.

درس Box **نقیض گزاره‌ها**: برای نقیض‌کردن هر کدام از گزاره‌ها به صورت زیر عمل می‌کنیم:

گزاره	نقیض	توضیح
p	$\sim p$	فعل جمله را منفی می‌کنیم.
$p \vee q$	$\sim p \wedge \sim q$	نقیض (p یا q) به صورت نقیض p و نقیض q می‌شود.
$p \wedge q$	$\sim p \vee \sim q$	نقیض (p و q) به صورت نقیض p یا نقیض q می‌شود.
$p \Rightarrow q$	$p \wedge \sim q$	نقیض (اگر p آن‌گاه q) به صورت (p و نقیض q است)
$p \Leftrightarrow q$	$p \Leftrightarrow \sim q$ یا $\sim p \Leftrightarrow q$	یکی از p یا q را نقیض می‌کنیم.
$\forall x \in U ; p(x)$	$\exists x \in U ; \sim p(x)$	«هر» تبدیل به «وجود دارد» شده و $p(x)$ را هم نقیض می‌کنیم.
$\exists x \in U ; p(x)$	$\forall x \in U ; \sim p(x)$	«وجود دارد» تبدیل به «هر» شده و $p(x)$ را هم نقیض می‌کنیم.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ **گام اول**: طبق درس‌باکس، برای نقیض‌کردن سور وجودی، کافی است سور وجودی را تبدیل به سور عمومی کرده و گزارهٔ $p(x)$ را نقیض کنیم.

گام دوم: نقیض گزارهٔ «بعضی از اعداد صحیح، $\overbrace{\text{فرد نیستند}}^{p(x)}$.» به صورت «هر عدد صحیح (همهٔ اعداد صحیح)، $\underbrace{\text{فرد هستند}}_{\sim p(x)}$.» می‌باشد.

تیزبازی نقیض سور وجودی ($\exists$) به صورت سور عمومی ($\forall$) می‌شود، پس گزینه‌های (۳) و (۴) چشم‌بسته غلط هستند. برای نقیض‌کردن دامنهٔ متغیر تغییری نمی‌کند، پس گزینهٔ (۲) هم نادرست است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸۴ گزارهٔ «$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ ;\ \cos x \times \cos y > 0$» را در نظر بگیرید. ارزش آن و نقیض آن در کدام گزینه به درستی آمده است؟

۱) درست ـ $\exists x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ ;\ \cos x \times \cos y \leq 0$

۲) نادرست ـ $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\ ;\ \cos x \times \cos y < 0$

۳) درست ـ $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\ ;\ \cos x \times \cos y > 0$

۴) نادرست ـ $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\ ;\ \cos x \times \cos y \leq 0$

مشاوره در کتاب درسی گزاره‌ای که هم‌زمان در آن سور عمومی و وجودی باشد، نیامده است ولی مشابه این سؤال یک بار تا حالا در کنکور آمده است، پس بهتر است مفهوم آن را به خوبی درک کنید.

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint به ازای هر x که در نظر بگیرید باید یک y وجود داشته باشد که $\cos x \cos y > 0$ باشد.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: گزاره نادرست است، چون مثلاً اگر $x = \frac{\pi}{2}$ در نظر بگیریم $\underbrace{\cos \frac{\pi}{2}}_{0} \cos y = 0$، پس هیچ yای وجود ندارد که به ازای $x = \frac{\pi}{2}$، گزارهٔ $\cos x \cos y > 0$ درست باشد.

گام دوم: برای نقیض‌کردن، سور عمومی را به وجودی و برعکس تبدیل کرده و گزارهٔ $\cos x \cos y > 0$ را نقیض می‌کنیم، پس نقیض گزارهٔ داده‌شده برابر است با:

$$\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} : \cos x \cos y \leq 0$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸۵ **جدول ارزش گزارهٔ $p \vee r \Rightarrow \square \vee \sim p$ دارای ۱۶ ردیف است. به جای $\square$ کدام گزاره را می‌توانیم قرار دهیم؟**

۱) $p \vee q$

۲) $\sim r \vee \sim q$

۳) $s \vee \sim q$

۴) $(q \vee r) \wedge (p \vee r)$

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint

۴ گزاره باید داشته باشیم.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: جدول ارزش ترکیب n گزاره تعداد 2^n ردیف دارد.

گام دوم: $2^n = 16$ پس $n = 4$؛ بنابراین گزارهٔ داده‌شده باید ترکیبی از ۴ گزاره باشد.

گام سوم: در گزارهٔ داده‌شده، دو گزارهٔ p و r وجود دارد، پس به غیر از این دو، دو گزارهٔ دیگر مثل q و s باید در $\square$ قرار داشته باشد؛ بنابراین فقط گزینهٔ (۳) می‌تواند درست باشد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

فیزیک یازدهم

۸۶ عدد اتمی منگنز $Z = ۲۵$ است. بار الکتریکی هستهٔ اتم منگنز چند پیکوکولن است؟ $(e = ۱/۶ \times ۱۰^{-۱۹}\ C)$

۱) ۴×۱۰^{-۵}

۲) ۴×۱۰^{-۶}

۳) $۶/۴ \times ۱۰^{-۵}$

۴) $۶/۴ \times ۱۰^{-۶}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint

عدد اتمی هر عنصر، برابر با تعداد پروتون‌های داخل هسته است.

درس Box

اصل کوانتیده‌بودن بار الکتریکی: بار یک جسم همواره مضرب صحیحی از بار الکترون $(e = ۱/۶ \times ۱۰^{-۱۹}\ C)$ است. در واقع، هرگاه از یک جسم خنثی n الکترون بگیریم، بار جسم برابر با $+ne$ و اگر به آن n الکترون بدهیم، بار جسم برابر با $-ne$ می‌شود:

$$q = \pm ne \quad (n = ۱, ۲, ۳, \ldots)$$

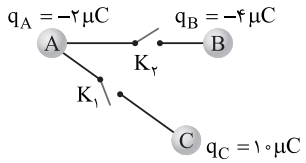
پاسخ خیلی تشریحی ✔

در هستهٔ اتم، پروتون با بار مثبت و نوترون بدون بار (خنثی) است، پس بار الکتریکی هستهٔ اتم ناشی از پروتون‌های داخل هسته است. عدد اتمی منگنز برابر با تعداد پروتون‌های داخل هسته است، پس:

$$q = +ne = ۲۵ \times ۱/۶ \times ۱۰^{-۱۹} = ۴۰ \times ۱۰^{-۱۹}\ C = ۴۰ \times ۱۰^{-۱۹} \times \cancel{C} \times \frac{۱\ pC}{۱۰^{-۱۲}\ \cancel{C}} = ۴ \times ۱۰^{-۶}\ pC$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸۷ مطابق شکل زیر، سه کرهٔ فلزی هم‌اندازه و باردار A، B و C توسط کلیدهای K_1 و K_2 با یکدیگر ارتباط دارند و هر دو کلید باز هستند. در ابتدا کلید K_1 را بسته و سپس باز می‌کنیم. در ادامه اگر کلید K_2 را ببندیم از این کلید چند الکترون و در چه جهتی عبور می‌کند؟ ($e = 1/6\times10^{-19}\ C$ و هیچ باری روی سیم‌های رابط باقی نمی‌ماند.)



۱) $2/5\times10^{13}$ از B به A

۲) $2/5\times10^{13}$ از A به B

۳) 4×10^{13} از B به A

۴) 4×10^{13} از A به B

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

اصل پایستگی بار الکتریکی: جمع جبری کل بارهای الکتریکی در یک دستگاه، همواره مقداری ثابت است، یعنی بار نه به وجود می‌آید و نه از بین می‌رود، بلکه فقط از جسمی به جسم دیگر منتقل می شود. پس وقتی دو جسم را در تماس با هم قرار می‌دهیم، مجموع جبری بار اجسام قبل از تماس با مجموع بارها بعد از تماس برابر است، یعنی:

$$\underbrace{q_1+q_2}_{\text{بارها قبل از تماس}} = \underbrace{q'_1+q'_2}_{\text{بارها بعد از تماس}}$$

اگر دو کرهٔ رسانای مشابه را در تماس با هم قرار دهیم و از هم جدا کنیم، بار هر کره پس از تماس از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

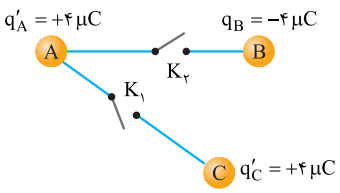
$$q_1+q_2=q'_1+q'_2 \xrightarrow{q'_1=q'_2} q_1+q_2=2q'_1 \Rightarrow q'_1=q'_2=\frac{q_1+q_2}{2}$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: با بستن کلید K_1، بین دو کرهٔ فلزی A و C بارها جابه‌جا می‌شوند تا بار هر دو کره برابر شود و به تعادل برسند، به کمک اصل پایستگی بار الکتریکی داریم:

$$q_A+q_C=q'_A+q'_C \xrightarrow{q'_A=q'_C=q} q_A+q_C=2q \Rightarrow q=\frac{-2+10}{2}=4\ \mu C$$

در نتیجه، با بازکردن کلید K_1، شکل بارها به صورت زیر می‌شود:



گام دوم: در ادامه، با بستن کلید K_2، به کمک اصل پایستگی بار الکتریکی بین دو کرهٔ A و B داریم:

$$q'_A+q_B=q''_A+q'_B \xrightarrow{q''_A=q'_B=q''} q'_A+q_B=2q'' \Rightarrow q''=\frac{4-4}{2}=0$$

پس در حالت جدید، کره‌های A و B خنثی می‌شوند، یعنی الکترون از کرهٔ B به سمت کرهٔ A حرکت می‌کند تا بار دو کره برابر صفر شود و به تعادل برسند (رد گزینه‌های (۲) و (۴)).

گام سوم: برای محاسبهٔ تعداد الکترون جابه‌جاشده از رابطهٔ $q = ne$ داریم:

$$\Delta q=ne \Rightarrow n=\frac{\Delta q}{e}=\frac{4\times10^{-6}}{1/6\times10^{-19}}=25\times10^{12}=2/5\times10^{13}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸۸ در اتم هلیم ($_{۲}^{۴}He$)، الکترون‌ها در فاصلهٔ تقریبی m ۵×۱۰^{-۱۱} از هستهٔ اتم قرار دارند. بزرگی نیروی جاذبهٔ الکتریکی بین هر الکترون و هستهٔ اتم هلیم، تقریباً چند نیوتون است؟ ($e=۱/۶\times۱۰^{-۱۹}\ C$ و $k=۹\times۱۰^{۹}\ \frac{N.m^۲}{C^۲}$)

۱) ۹×۱۰^{-۸}

۲) ۹×۱۰^{-۹}

۳) ۱۸×۱۰^{-۸}

۴) ۱۸×۱۰^{-۹}

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

طبق قانون کولن، دو بار الکتریکی $q_۱$ و $q_۲$ که در فاصلهٔ r از هم قرار دارند، به هم نیروی الکتریکی وارد می‌کنند که بزرگی این نیرو از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$F(\text{نیروی الکتریکی (N)}) = k(\text{ثابت کولن } \frac{N.m^۲}{C^۲})\frac{\overbrace{|q_۱||q_۲|}^{\text{بارهای نقطه‌ای (C)}}}{r^۲(\text{فاصلهٔ دو بار از هم (m)})}$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: با توجه به این‌که در هستهٔ اتم هلیم، ۲ پروتون وجود دارد، بار الکتریکی هستهٔ آن را محاسبه می‌کنیم:

$$q=ne \xrightarrow{n=۲\ ,\ e=۱/۶\times۱۰^{-۱۹}\ C} q_{\text{هسته}}=۲\times۱/۶\times۱۰^{-۱۹}=۳/۲\times۱۰^{-۱۹}\ C$$

گام دوم: به کمک قانون کولن داریم:

$$F=k\frac{|q_e||q_{\text{هسته}}|}{r^۲}\xrightarrow[q_{\text{هسته}}=۳/۲\times۱۰^{-۱۹}C,\ r=۵\times۱۰^{-۱۱}m]{k=۹\times۱۰^{۹}\frac{N.m^۲}{C^۲},\ q_e=۱/۶\times۱۰^{-۱۹}C} F=۹\times۱۰^{۹}\times\frac{۱/۶\times۱۰^{-۱۹}\times۳/۲\times۱۰^{-۱۹}}{(۵\times۱۰^{-۱۱})^۲}\simeq۱۸/۴\times۱۰^{-۸}$$

$$N\simeq۱۸\times۱۰^{-۸}\ N$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸۹ دو ذرهٔ باردار A و B با بارهای $q_A = q$ و $q_B = -2q$ در فاصلهٔ r، بر یکدیگر نیروی الکتریکی F وارد می‌کنند. اگر ۷۵ درصد از بار الکتریکی ذرهٔ B را به ذرهٔ A منتقل کنیم، فاصلهٔ بین این دو ذره را باید چند درصد و چگونه تغییر دهیم تا بزرگی نیروی الکتریکی بین دو ذره برابر با $\frac{F}{2}$ شود؟

۱) ۵۰ درصد کاهش
۲) ۵۰ درصد افزایش
۳) ۲۵ درصد کاهش
۴) ۲۵ درصد افزایش

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint

قانون کولن را به صورت نسبتی بنویسید.

درس Box

رابطهٔ کولن برای دو حالت به صورت نسبتی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{cases} F = k\frac{|q_1||q_2|}{r^2} \\ F' = k\frac{|q_1'||q_2'|}{r'^2} \end{cases} \Rightarrow \frac{F}{F'} = \frac{q_1}{q_1'} \times \frac{q_2}{q_2'} \times (\frac{r'}{r})^2$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ۷۵ درصد از بار الکتریکی ذرهٔ B به ذرهٔ A منتقل شده، یعنی:

$$q_B' = q_B - \frac{3}{4}q_B = -2q - \frac{3}{4}(-2q) = -\frac{q}{2}$$

$$q_A' = q_A + \frac{3}{4}q_B = q + \frac{3}{4}(-2q) = -\frac{q}{2}$$

گام دوم: قانون کولن را به صورت نسبتی می‌نویسیم:

$$\frac{F}{F'} = \frac{|q_A|}{|q_A'|} \times \frac{|q_B|}{|q_B'|} \times (\frac{r'}{r})^2 \Rightarrow \frac{F}{\frac{F}{2}} = \frac{q}{\frac{q}{2}} \times \frac{2q}{\frac{q}{2}} \times (\frac{r'}{r})^2 \Rightarrow 2 = 2 \times 4 \times (\frac{r'}{r})^2 \Rightarrow (\frac{r'}{r})^2 = \frac{1}{4}$$

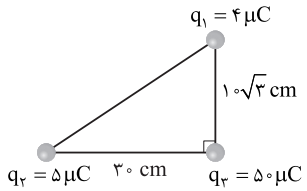
$$\Rightarrow \frac{r'}{r} = \frac{1}{2} \Rightarrow r' = \frac{1}{2}r$$

$$\text{درصد تغییرات فاصله} = \frac{r' - r}{r} \times 100 = \frac{\frac{1}{2}r - r}{r} \times 100 = -\%50$$

یعنی فاصله را باید ۵۰ درصد کاهش دهیم.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹۰ در مثلث شکل زیر، اندازهٔ نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار الکتریکی q_3، چند نیوتون است؟ $(k = 9\times10^9 \frac{N.m^2}{C^2})$



۱) ۸۵

۲) ۷۵

۳) ۷۰

۴) ۶۵

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint

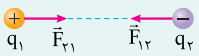
نیروهای وارد بر بار q_3 را رسم کنید و اندازهٔ آن‌ها را محاسبه کرده و در نهایت برایند نیروها را به دست آورید.

درس Box

بارهای الکتریکی همنام، یکدیگر را دفع می‌کنند:

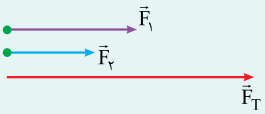


بارهای الکتریکی ناهمنام، یکدیگر را جذب می‌کنند:



اگر به جای دو ذره، تعدادی بار الکتریکی نقطه‌ای داشته باشیم، نیروی الکتریکی وارد بر هر ذره، برایند نیروهایی است که هر یک از ذره‌های دیگر در غیاب سایر ذره‌ها، بر آن ذره وارد می‌کنند. برای محاسبهٔ نیروی الکتریکی خالص وارد بر هر بار الکتریکی، سه حالت زیر رخ می‌دهد:

الف) نیروها هم‌راستا و هم‌جهت:



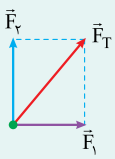
$$F_T = F_1 + F_2$$

ب) نیروها هم‌راستا و خلاف جهت:



$$F_T = F_1 - F_2$$

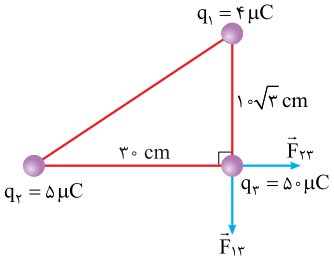
پ) نیروها عمود بر هم:



$$F_T = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** نیروهای وارد بر بار q_3 را رسم کرده و اندازهٔ هر کدام را محاسبه می‌کنیم:



$$F_{13} = k\frac{|q_1||q_3|}{r_{13}^2} \xrightarrow[q_3=50\times10^{-6}\,C,\ r_{13}=10\sqrt{3}\times10^{-2}\,m]{k=9\times10^9\,\frac{N.m^2}{C^2},\ q_1=4\times10^{-6}\,C} F_{13} = 9\times10^9\times\frac{4\times10^{-6}\times50\times10^{-6}}{(10\sqrt{3}\times10^{-2})^2} \Rightarrow F_{13} = 60\,N$$

$$F_{23} = k\frac{|q_2||q_3|}{r_{23}^2} \xrightarrow{q_2=5\times10^{-6}\,C,\ r_{23}=30\times10^{-2}\,m} F_{23} = 9\times10^9\times\frac{5\times10^{-6}\times50\times10^{-6}}{(30\times10^{-2})^2} \Rightarrow F_{23} = 25\,N$$

گام دوم: دو نیروی $\vec{F}_{23}$ و $\vec{F}_{13}$ بر هم عمود هستند، پس از رابطهٔ فیثاغورس، نیروی الکتریکی خالص وارد بر q_3 را به دست می‌آوریم:

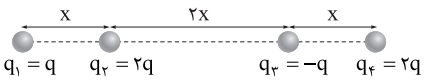
$$F_{net} = \sqrt{F_{13}^2 + F_{23}^2} = \sqrt{\underbrace{60^2}_{5\times12} + \underbrace{25^2}_{5\times5}} = \underbrace{65}_{5\times13}\,N$$

تیزبازی برای محاسبهٔ نیروی الکتریکی بین دو بار، هرگاه بارها برحسب میکروکولن و فاصلهٔ آن‌ها برحسب سانتی‌متر باشد، می‌توان از رابطهٔ $F = 90\times\frac{|q_1||q_2|}{r^2}$، نیرو را برحسب نیوتون محاسبه کرد تا سریع‌تر به جواب رسید. مثلاً داریم:

$$F_{13} = 90\times\frac{|q_1||q_3|}{r_{13}^2} = 90\times\frac{4\times50}{(10\sqrt{3})^2} = 60\,N$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹۱ چهار ذرهٔ باردار مطابق شکل زیر، روی محور x ثابت شده‌اند. بزرگی نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار $q_۲$ چند برابر بزرگی نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار $q_۳$ است؟



۱) ۲

۲) $\frac{۳}{۲}$

۳) $\frac{۳۷}{۲۵}$

۴) $\frac{۲۷}{۲۵}$

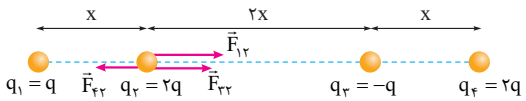
پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint

نیروهای وارد بر بارهای $q_۲$ و $q_۳$ را محاسبه و نیروی خالص وارد بر هر کدام را به دست آورید و سپس نسبت نیروهای خالص $(\frac{F_{net,۲}}{F_{net,۳}})$ را طبق خواستهٔ سؤال محاسبه کنید.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: نیروهای وارد بر بار $q_۲$ را رسم کرده و اندازهٔ آن‌ها را برحسب $F = \frac{kq^۲}{x^۲}$ می‌نویسیم:

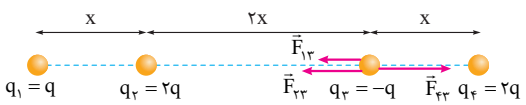


$$F = k\frac{|q||q'|}{r^۲} \Rightarrow \begin{cases} F_{۱۲} = k\frac{|q_۱||q_۲|}{r_{۱۲}^۲} = k\frac{q(۲q)}{x^۲} = ۲\frac{kq^۲}{x^۲} = ۲F \\ F_{۳۲} = k\frac{|q_۳||q_۲|}{r_{۳۲}^۲} = k\frac{q(۲q)}{۴x^۲} = \frac{۱}{۲}\frac{kq^۲}{x^۲} = \frac{F}{۲} \\ F_{۴۲} = k\frac{|q_۴||q_۲|}{r_{۴۲}^۲} = k\frac{(۲q)(۲q)}{۹x^۲} = \frac{۴}{۹}\frac{kq^۲}{x^۲} = \frac{۴}{۹}F \end{cases}$$

گام دوم: دو نیروی $\vec{F}_{۱۲}$ و $\vec{F}_{۳۲}$ هم‌جهت‌اند و برایند آن‌ها در خلاف جهت $\vec{F}_{۴۲}$ است، پس برای محاسبهٔ نیروی الکتریکی خالص وارد بر $q_۲$ داریم:

$$F_{net,۲} = |F_{۱۲} + F_{۳۲} - F_{۴۲}| = |۲F + \frac{F}{۲} - \frac{۴F}{۹}| = \frac{۳۷F}{۱۸}$$

گام سوم: گام‌های اول و دوم را برای بار $q_۳$ تکرار می‌کنیم:



$$F = k\frac{|q||q'|}{r^۲} \Rightarrow \begin{cases} F_{۱۳} = k\frac{|q_۱||q_۳|}{r_{۱۳}^۲} = k\frac{(q)(q)}{۹x^۲} = \frac{F}{۹} \\ F_{۲۳} = k\frac{|q_۲||q_۳|}{r_{۲۳}^۲} = k\frac{(۲q)(q)}{۴x^۲} = \frac{F}{۲} \\ F_{۴۳} = k\frac{|q_۴||q_۳|}{r_{۴۳}^۲} = k\frac{q(۲q)}{x^۲} = ۲F \end{cases}$$

$$F_{net,۳} = |F_{۱۳} + F_{۲۳} - F_{۴۳}| = |\frac{F}{۹} + \frac{F}{۲} - ۲F| = \frac{۲۵F}{۱۸}$$

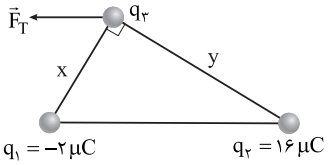
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

گام چهارم: حالا خواستهٔ سؤال را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{F_{net,۲}}{F_{net,۳}} = \frac{\frac{۳۷F}{۱۸}}{\frac{۲۵F}{۱۸}} = \frac{۳۷}{۲۵}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹۲ در مثلث قائم‌الزاویهٔ شکل زیر، $\vec{F}_T$ نیروی خالص وارد بر بار الکتریکی $q_۳$ و موازی خط واصل بارهای $q_۱$ و $q_۲$ است. $\frac{x}{y}$ کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۲}$

۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

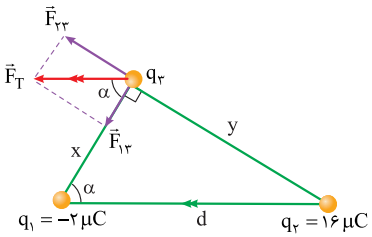
۳) ۲

۴) $\sqrt{۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint مؤلفه‌های عمودی نیروها یکدیگر را خنثی کرده‌اند، پس اندازهٔ آن‌ها با هم برابر است.

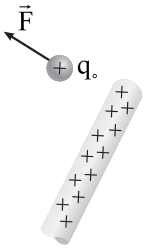
پاسخ خیلی تشریحی در شکل زیر، با توجه به روابط مثلثاتی داریم:



$$\begin{cases}\tan\alpha = \frac{F_{۲۳}}{F_{۱۳}} \\ \tan\alpha = \frac{y}{x}\end{cases} \Rightarrow \frac{\frac{k|q_۲||q_۳|}{y^۲}}{\frac{k|q_۱||q_۳|}{x^۲}} = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{\frac{|q_۲|}{y^۲}}{\frac{|q_۱|}{x^۲}} = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{x^۳}{y^۳} = \frac{|q_۱|}{|q_۲|} \Rightarrow \frac{x}{y} = \sqrt[۳]{\frac{۲}{۱۶}} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{۱}{۲}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹۳ در شکل زیر، میلهٔ باردار بر بار آزمون $q_0 = 30\ nC$، نیروی $\vec{F}$ به بزرگی $6\times10^{-5}\ N$ را وارد می‌کند. میدان الکتریکی حاصل از میله در محل بار آزمون چند نیوتون بر کولن و در چه جهتی است؟



۱) ۲۰۰۰، ↖

۲) ۲۰۰۰، ↘

۳) ۱۸۰۰، ↖

۴) ۱۸۰۰، ↘

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

۱) اگر ذره‌ای با بار q_0 در میدان الکتریکی $\vec{E}$ قرار بگیرد از طرف میدان به ذره نیروی الکتریکی وارد می‌شود:

میدان الکتریکی (N / C)

نیروی الکتریکی (N) ← $\vec{F} = q_0 \vec{E}$

بار الکتریکی (C)

- اگر $q_0 > 0 \Leftarrow$ $\vec{F}$ و $\vec{E}$ هم‌جهت هستند.
- اگر $q_0 < 0 \Leftarrow$ $\vec{F}$ و $\vec{E}$ در خلاف جهت هم هستند.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

چون بار آزمون مثبت است، پس نیروی الکتریکی و میدان الکتریکی هم‌جهت هستند (رد گزینه‌های (۲) و (۴)). برای محاسبهٔ اندازهٔ میدان الکتریکی از رابطهٔ $E = \frac{F}{q_0}$ داریم:

$$E = \frac{F}{q_0} \xrightarrow[q_0 = 30\times10^{-9}\ C]{F = 6\times10^{-5}\ N} E = \frac{6\times10^{-5}}{30\times10^{-9}} = 2\times10^{3}\ N/C$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹۴ بزرگی میدان الکتریکی حاصل از بار الکتریکی نقطه‌ای $q = ۱\,\mu C$ در فاصلهٔ $۳\,m$ از آن چند نیوتون بر کولن است؟ $(k = ۹\times ۱۰^{۹}\ \frac{N.m^{۲}}{C^{۲}})$

۱) ۱۰۰
۲) ۳۰۰
۳) ۱۰۰۰
۴) ۳۰۰۰

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint

بزرگی میدان الکتریکی حاصل از ذرهٔ باردار q در فاصلهٔ r از آن، از رابطهٔ $E = \frac{k|q|}{r^{۲}}$ محاسبه می‌شود. پس کافی است با توجه به تبدیل یکاها، یک جای‌گذاری ساده انجام دهید.

درس Box

هر بار الکتریکی نقطه‌ای q در اطراف خود خاصیتی به نام میدان الکتریکی ایجاد می‌کند. اندازهٔ این میدان در نقطه‌ای به فاصلهٔ r از بار q از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$E = k\frac{|q|}{r^{۲}}$$

- E: میدان الکتریکی (N/C)
- k: ثابت کولن $(\frac{N.m^{۲}}{C^{۲}})$
- $|q|$: اندازهٔ بار الکتریکی (C)
- r: فاصله (m)

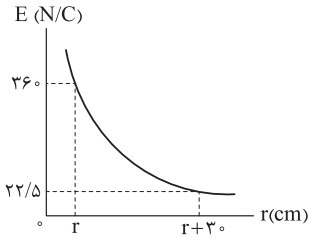
پاسخ خیلی تشریحی ✔

فقط کافی است داده‌ها را در رابطهٔ میدان الکتریکی جای‌گذاری کنیم:

$$E = k\frac{|q|}{r^{۲}} \xrightarrow[r=۳\,m]{k=۹\times ۱۰^{۹}\ \frac{N.m^{۲}}{C^{۲}},\ q=۱\,\mu C=۱\times ۱۰^{-۶}\,C} E = ۹\times ۱۰^{۹}\times\frac{۱\times ۱۰^{-۶}}{۳^{۲}} = ۱۰^{۳}\ N/C$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹۵ نمودار تغییرات اندازهٔ میدان الکتریکی حاصل از یک بار الکتریکی نقطه‌ای برحسب فاصله از آن به شکل زیر است. اندازهٔ میدان الکتریکی در فاصلهٔ ۲۰ cm از این بار چند نیوتون بر کولن است؟



۱) ۲۷۰
۲) ۱۸۰
۳) ۹۰
۴) ۴۵

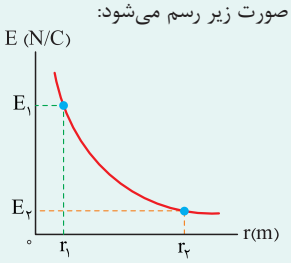
پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint

به کمک دو نقطهٔ مشخص‌شده در نمودار، رابطهٔ نسبتی میدان الکتریکی را بنویسید و اندازهٔ r را محاسبه کنید. یک بار دیگر رابطهٔ نسبتی میدان الکتریکی را برای r و $r' = ۲۰\ cm$ بنویسید تا میدان الکتریکی در فاصلهٔ r' به دست آید.

درس Box

۱) با توجه به رابطهٔ $E = \frac{k|q|}{r^۲}$، نمودار میدان الکتریکی برحسب فاصله از بار الکتریکی به صورت زیر رسم می‌شود:



۲) طبق رابطهٔ $E = \frac{k|q|}{r^۲}$، برای محاسبهٔ میدان الکتریکی حاصل از بار q در فاصله‌های مختلف، رابطهٔ نسبتی زیر برقرار است:

$$\frac{E_۲}{E_۱} = (\frac{r_۱}{r_۲})^۲$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: به کمک رابطهٔ نسبتی $E = \frac{k|q|}{r^۲}$ برای دو نقطهٔ r و $(r+۳۰)\ cm$ داریم:

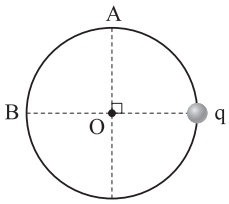
$$\frac{E_۱}{E_۲} = (\frac{r_۲}{r_۱})^۲ \Rightarrow \frac{E_۱}{E_۲} = (\frac{r+۳۰}{r})^۲ \Rightarrow \frac{۳۶۰}{۲۲/۵} = (\frac{r+۳۰}{r})^۲ \Rightarrow ۴ = \frac{r+۳۰}{r} \Rightarrow r = ۱۰\ cm$$

گام دوم: رابطهٔ نسبتی را برای فواصل $r = ۱۰\ cm$ و $r' = ۲۰\ cm$ تکرار می‌کنیم تا E' به دست آید:

$$\frac{E'}{E} = (\frac{r}{r'})^۲ \Rightarrow \frac{E'}{۳۶۰} = (\frac{۱۰}{۲۰})^۲ \Rightarrow E' = ۳۶۰ \times \frac{۱}{۴} = ۹۰\ N/C$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹۶ در شکل زیر، بار الکتریکی q روی محیط دایره‌ای قرار دارد. اگر اختلاف بزرگی میدان الکتریکی حاصل از این بار در نقاط A و B برابر با ۲۰۰ N / C باشد، بزرگی میدان الکتریکی حاصل از این بار در مرکز دایره (نقطهٔ O) چند نیوتون بر کولن است؟



۱) $200\sqrt{2}$

۲) ۴۰۰

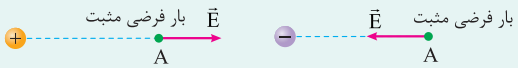
۳) $400\sqrt{2}$

۴) ۸۰۰

پاسخ: گزینهٔ ۴

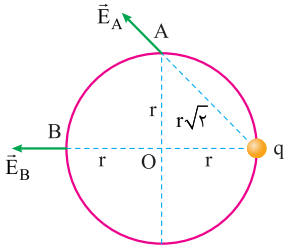
درس Box

برای تعیین جهت میدان الکتریکی بار q در هر نقطه از فضا، کافی است بار مثبت (بار آزمون) را در آن نقطه فرض کنیم. در نتیجه، جهت میدان الکتریکی هم‌جهت با نیروی الکتریکی وارد بر بار آزمون از طرف بار q است:



پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: میدان الکتریکی حاصل از بار q در نقاط A و B برحسب فاصله به صورت زیر نوشته می‌شود (بار q را مثبت فرض می‌کنیم):



$$E_A = \frac{kq}{(r\sqrt{2})^2} = \frac{kq}{2r^2} \quad , \quad E_B = \frac{kq}{(2r)^2} = \frac{kq}{4r^2}$$

گام دوم: طبق صورت سؤال، اختلاف بزرگی دو میدان، برابر با ۲۰۰ N / C است، پس با جای‌گذاری روابط گام اول در رابطهٔ $\Delta E = 200\ N/C$، بزرگی $\frac{kq}{r^2}$ که برابر با میدان الکتریکی در نقطهٔ O است را به دست می‌آوریم:

$$\Delta E = E_A - E_B \Rightarrow 200 = \frac{kq}{2r^2} - \frac{kq}{4r^2} \Rightarrow 200 = \frac{2kq - kq}{4r^2} \Rightarrow 200 = \frac{kq}{4r^2}$$

$$\Rightarrow \frac{kq}{r^2} = 800\ N/C \xrightarrow{E_O = k\frac{q}{r^2}} E_O = 800\ N/C$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

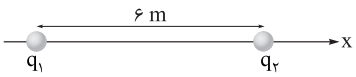
۹۷ مطابق شکل زیر، دو ذره با بارهای $q_۱ = ۴\ nC$ و $q_۲ = -۶\ nC$ در فاصلهٔ $۶\ m$ از یکدیگر ثابت شده‌اند. بردار میدان الکتریکی خالص در وسط خط واصل دو ذره در SI کدام است؟ $(k = ۹\times۱۰^۹\ \frac{N.m^۲}{C^۲})$

۱) $۱۰\vec{i}$

۲) $-۱۰\vec{i}$

۳) $۲\vec{i}$

۴) $-۲\vec{i}$



مشاوره میدان الکتریکی خالص حاصل از چند ذره، در اغلب کنکورهای اخیر مطرح شده است.

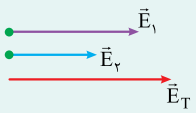
پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

اگر به جای یک ذرهٔ باردار، تعدادی بار الکتریکی نقطه‌ای داشته باشیم، میدان الکتریکی در هر نقطه از فضای پیرامون بارها، برایند میدان‌هایی است که هر یک از ذره‌های دیگر به تنهایی در آن نقطه ایجاد می‌کنند.

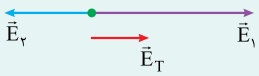
برای محاسبهٔ میدان الکتریکی خالص وارد بر هر بار الکتریکی، سه حالت زیر رخ می‌دهد:

الف) میدان‌ها هم‌راستا و هم‌جهت:



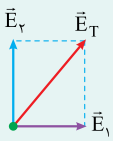
$$E_T = E_۱ + E_۲$$

ب) میدان‌ها هم‌راستا و خلاف جهت:



$$E_T = E_۱ - E_۲$$

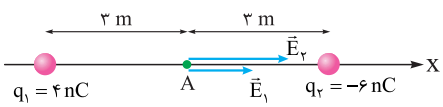
پ) میدان‌ها عمود بر هم:



$$E_T = \sqrt{E_۱^۲ + E_۲^۲}$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: بار آزمون $q_۰ > ۰$ را در نقطهٔ A (وسط خط واصل دو ذره) قرار داده و میدان الکتریکی حاصل از دو ذرهٔ باردار $q_۱$ و $q_۲$ را در نقطهٔ A محاسبه می‌کنیم:



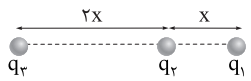
$$E = k\frac{|q|}{r^۲} \xrightarrow[q_۲=۶\ nC=۶\times۱۰^{-۹}\ C\ ,\ r=۳\ m]{k=۹\times۱۰^۹\ \frac{N.m^۲}{C^۲}\ ,\ q_۱=۴\ nC=۴\times۱۰^{-۹}\ C} \begin{cases} E_۱ = ۹\times۱۰^۹ \times \frac{۴\times۱۰^{-۹}}{۳^۲} = ۴\ N/C \\ E_۲ = ۹\times۱۰^۹ \times \frac{۶\times۱۰^{-۹}}{۳^۲} = ۶\ N/C \end{cases}$$

گام دوم: میدان‌های $\vec{E}_۱$ و $\vec{E}_۲$ هم‌راستا و هر دو در جهت محور x هستند، پس میدان الکتریکی خالص برابر است با:

$$E_T = E_۱ + E_۲ = ۴ + ۶ = ۱۰\ N/C \Rightarrow \vec{E} = (۱۰\ N/C)\vec{i}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹۸ در شکل زیر، میدان الکتریکی خالص در محل هر یک از بارها، برابر صفر است. مجموع بار الکتریکی این سه ذره، چند برابر بار $q_۲$ است؟



۱) ۱۰ / ۲۵

۲) ۱۲ / ۲۵

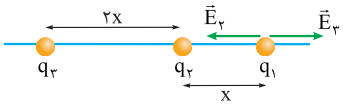
۳) −۱۰ / ۲۵

۴) −۱۲ / ۲۵

پاسخ: گزینهٔ ۳

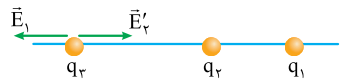
Hint از صفربودن میدان الکتریکی در محل بارهای $q_۱$ و $q_۳$ کمک بگیرید و اندازه و علامت هر دو بار $q_۱$ و $q_۳$ را برحسب $q_۲$ بنویسید و در نهایت، خواستهٔ سؤال را محاسبه کنید.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** میدان الکتریکی در محل هر یک از بارها صفر است، پس میدان الکتریکی حاصل از بارهای $q_۲$ و $q_۳$ در محل بار $q_۱$ باید هم‌اندازه و در خلاف جهت هم باشند، یعنی بارهای $q_۲$ و $q_۳$ ناهمنام هستند:



$$E_۲ = E_۳ \Rightarrow \frac{k|q_۲|}{x^۲} = \frac{k|q_۳|}{۹x^۲} \Rightarrow |q_۳| = ۹|q_۲| \xrightarrow{\text{بارها ناهمنام}} q_۳ = -۹q_۲$$

گام دوم: میدان الکتریکی حاصل از بارهای $q_۱$ و $q_۲$ هم در محل بار $q_۳$ باید هم‌اندازه و در خلاف جهت هم باشند و چون $q_۲$ و $q_۳$ ناهمنام هستند، باید $q_۱$ و $q_۳$ همنام باشند (یعنی $q_۱$ و $q_۲$ ناهمنام هستند):



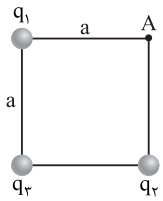
$$E_۱ = E'_۲ \Rightarrow \frac{k|q_۱|}{۹x^۲} = \frac{k|q_۲|}{۴x^۲} \Rightarrow |q_۱| = \frac{۹}{۴}|q_۲| \xrightarrow{\text{بارها ناهمنام}} q_۱ = -\frac{۹}{۴}q_۲$$

گام سوم: سؤال، نسبت مجموع بار الکتریکی سه ذره به بار $q_۲$ را می‌خواهد:

$$\frac{q_{net}}{q_۲} = \frac{q_۱ + q_۲ + q_۳}{q_۲} = \frac{-\frac{۹}{۴}q_۲ + q_۲ - ۹q_۲}{q_۲} = \frac{q_۲(-\frac{۹}{۴} + ۱ - ۹)}{q_۲} = -\frac{۴۱}{۴} = -۱۰/۲۵$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹۹ در شکل زیر، سه ذرهٔ باردار $q_1 = q$، $q_2 = -q$ و $q_3 = 2q$ روی سه رأس مربعی به ضلع a، ثابت شده‌اند. اگر اندازهٔ میدان الکتریکی حاصل از بار q در فاصلهٔ a از آن برابر E باشد، اندازهٔ میدان الکتریکی خالص در نقطهٔ A چند برابر E است؟



۱) $\sqrt{2}$

۲) $\sqrt{3}$

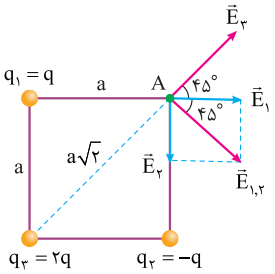
۳) ۲

۴) $\sqrt{5}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint ابتدا میدان الکتریکی حاصل از هر کدام از بارها را در رأس A رسم کرده و اندازهٔ میدان الکتریکی حاصل از هر بار را برحسب E بنویسید؛ سپس با محاسبهٔ میدان الکتریکی خالص برحسب E، خواستهٔ سؤال را به دست آورید.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** میدان الکتریکی حاصل از هر کدام از بارها را در نقطهٔ A رسم و اندازهٔ آن را برحسب E محاسبه می‌کنیم (q را مثبت فرض می‌کنیم):



$$E_1 = \frac{kq}{a^2} = E \quad , \quad E_2 = \frac{kq}{a^2} = E$$

$$E_3 = \frac{k(2q)}{(a\sqrt{2})^2} = \frac{2kq}{2a^2} = E$$

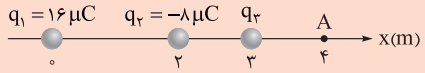
گام دوم: $\vec{E}_1$ و $\vec{E}_2$ بر هم عمود و برایند آن‌ها بر $\vec{E}_3$ عمود است:

$$E_{1,2} = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} = \sqrt{E^2 + E^2} = E\sqrt{2}$$

$$E_T = \sqrt{E_{1,2}^2 + E_3^2} = \sqrt{2E^2 + E^2} = E\sqrt{3} \Rightarrow \frac{E_T}{E} = \sqrt{3}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۰۰ در شکل زیر، سه ذرهٔ باردار روی محور x ثابت شده‌اند. اگر بزرگی میدان الکتریکی خالص در نقطهٔ A، برابر $27\times10^{3}\ N/C$ باشد، بار q_3 چند میکروکولن می‌تواند باشد؟ $\left(k=9\times10^{9}\ \frac{N.m^2}{C^2}\right)$



۱) ۱

۲) -2

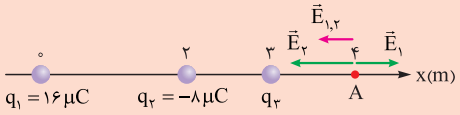
۳) ۳

۴) -4

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: میدان الکتریکی حاصل از بارهای q_1 و q_2 را در نقطهٔ A رسم و محاسبه می‌کنیم:



$$E_1=\frac{kq_1}{r^2}\xrightarrow[r=4\ m]{k=9\times10^{9}\ \frac{N.m^2}{C^2},\ q_1=16\times10^{-6}C}E_1=\frac{9\times10^{9}\times16\times10^{-6}}{4^2}=9\times10^{3}\ N/C$$

$$E_2=\frac{kq_2}{r^2}\xrightarrow[r=2\ m]{|q_2|=8\times10^{-6}C}E_2=\frac{9\times10^{9}\times8\times10^{-6}}{2^2}=18\times10^{3}\ N/C$$

گام دوم: برایند میدان‌های الکتریکی $\vec{E}_1$ و $\vec{E}_2$ را محاسبه می‌کنیم:

$$E_{1,2}=|E_2-E_1|=|18\times10^{3}-9\times10^{3}|=9\times10^{3}\ N/C$$ (در خلاف جهت محور x)

گام سوم: برای این‌که میدان الکتریکی خالص در نقطهٔ A برابر با $27\times10^{3}\ N/C$ باشد، دو حالت ممکن است:

حالت اول: $\vec{E}_3$ در خلاف جهت محور x باشد که یعنی $q_3<0$ است:

$$E_T=E_{1,2}+E_3\ \Rightarrow\ 27\times10^{3}=9\times10^{3}+E_3\Rightarrow E_3=\frac{k|q_3|}{r^2}=18\times10^{3}\ N/C$$

$$\Rightarrow\frac{9\times10^{9}\times|q_3|}{1^2}=18\times10^{3}\Rightarrow|q_3|=2\times10^{-6}\ C=2\ \mu C\xrightarrow{q_3<0}q_3=-2\ \mu C$$

حالت دوم: $\vec{E}_3$ در جهت محور x باشد که یعنی $q_3>0$ است:

$$E_T=|E_3-E_{1,2}|\ \Rightarrow\ 27\times10^{3}=|E_3-9\times10^{3}|\ \Rightarrow\ E_3=\frac{k|q_3|}{r^2}=36\times10^{3}\ N/C$$

$$\Rightarrow\frac{9\times10^{9}\times|q_3|}{1^2}=36\times10^{3}\ \Rightarrow\ |q_3|=4\times10^{-6}\ C=4\ \mu C\xrightarrow{q_3>0}q_3=4\ \mu C$$

از دو جواب به‌دست‌آمده، فقط $q_3=-2\ \mu C$ در گزینه‌ها وجود دارد.

تیزپازی

بار خالصی که در محل بار q_3، میدان الکتریکی خالص $27\times10^{3}\ N/C$ را ایجاد می‌کند، محاسبه می‌کنیم:

$$E=\frac{k|q|}{r^2}\ \Rightarrow\ 27\times10^{3}=\frac{9\times10^{9}\times|q|}{1^2}\ \Rightarrow\ |q|=3\ \mu C\ \Rightarrow\ q=\pm3\ \mu C$$

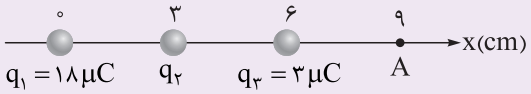
میدان الکتریکی هر کدام از بارهای q_1 و q_2 با انتقال به محل بار q_3 با مربع فاصله رابطهٔ عکس دارند، یعنی:

$$\frac{q_1}{r_1^2}+\frac{q_2}{r_2^2}+q_3=|q|\Rightarrow\begin{cases}\frac{16}{4^2}+\frac{-8}{2^2}+q_3=3\ \Rightarrow\ q_3=3-1+2=4\ \mu C\\ \frac{16}{4^2}+\frac{-8}{2^2}+q_3=-3\ \Rightarrow\ q_3=-3-1+2=-2\ \mu C\end{cases}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

کنکور

مطابق شکل، سه ذرهٔ باردار روی محور x ثابت شده‌اند. بزرگی میدان الکتریکی خالص در نقطهٔ A، برابر $۳\times۱۰^{۷}\ N/C$ است. بار $q_۲$ چند میکروکولن می‌تواند باشد؟ $(k = ۹\times۱۰^{۹}\ \frac{N.m^{۲}}{C^{۲}})$ (سؤال ۶۰ کنکور تجربی ۱۴۰۳ ـ نوبت دوم)



۱) ۴

۲) ۸

۳) −۱۶

۴) −۳۲

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

شیمی یازدهم

۱۰۱ **درستی یا نادرستی کدام گزینه با دیگر گزینه‌ها متفاوت است؟**

۱) در دمای $25\ ^{\circ}C$، حالت فیزیکی ژرمانیم با دیگر عنصرهای هم‌دورهٔ آن متفاوت است.

۲) به طور معمول، فلزها واکنش‌پذیری زیاد و نافلزها، واکنش‌پذیری کمی دارند.

۳) گازهای نجیب، همگی عنصرهایی از دستهٔ p هستند که در گروه ۱۸ قرار دارند.

۴) عدد اتمی یک عنصر فلزی، به یقین بیشتر از عدد اتمی نافلز هم‌گروه آن است.

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔ گزینهٔ (۴) برخلاف سایر گزینه‌ها درست است.

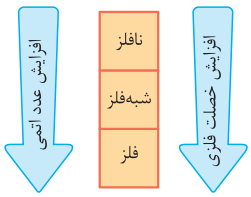
بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): ژرمانیم ($_{32}Ge$) در دورهٔ چهارم جدول قرار دارد و در دمای اتاق به حالت جامد است. در دورهٔ چهارم، به‌جز $_{35}Br$ و $_{36}Kr$، بقیهٔ عنصرها به حالت جامدند.

گزینهٔ (۲): *چه ربطی داره؟* هم در بین فلزها و هم در بین نافلزها، عنصرهایی با واکنش‌پذیری زیاد و کم وجود دارد!

گزینهٔ (۳): هلیم ($1s^2$) برخلاف سایر گازهای نجیب، به دستهٔ s تعلق دارد.

گزینهٔ (۴): در یک گروه از بالا به پایین، خصلت فلزی عنصرها افزایش می‌یابد، یعنی عنصرهای فلزی در دوره‌های پایین‌تری نسبت به عنصرهای نافلزی قرار دارند.



SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۰۲ **در بین عنصرهایی با عددهای اتمی .....، عنصری با عدد اتمی .....، ..... را دارد.**

۱) ۸، ۹، ۱۶ ـ کوچک‌تر ـ کم‌ترین خصلت نافلزی

۲) ۱۲، ۳۷، ۳۸ ـ بزرگ‌تر ـ بیشترین شعاع اتمی

۳) ۱۶، ۱۷، ۳۵ ـ کوچک‌تر ـ بیشترین واکنش‌پذیری

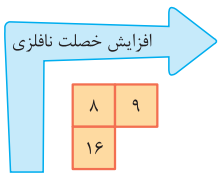
۴) ۱۵، ۲۳، ۳۲ ـ بزرگ‌تر ـ کم‌ترین تعداد الکترون‌های ظرفیتی

پاسخ: گزینهٔ ۴

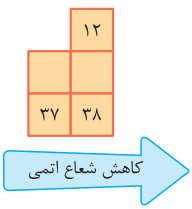
پاسخ خیلی تشریحی

بررسی گزینه‌ها:

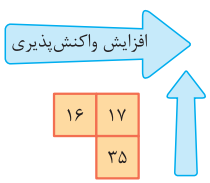
گزینهٔ (۱): در یک گروه از بالا به پایین، خصلت نافلزی کاهش و در یک دوره از چپ به راست، خصلت نافلزی افزایش می‌یابد؛ بنابراین در بین عنصرهایی با عددهای اتمی ۸، ۹ و ۱۶، عنصری با عدد اتمی بزرگ‌تر، کم‌ترین خصلت نافلزی را دارد.



گزینهٔ (۲): در بین عنصرهایی با عددهای اتمی ۱۲، ۳۷ و ۳۸، عنصری با عدد اتمی ۳۸، بزرگ‌ترین شعاع را ندارد، زیرا در یک دوره از چپ به راست، شعاع اتمی کاهش می‌یابد، یعنی شعاع اتمی عنصر ۳۸ از عنصر ۳۷، کوچک‌تر است.



گزینهٔ (۳): در بین عنصرهایی با عددهای اتمی ۱۶، ۱۷ و ۳۵، بیشترین واکنش‌پذیری مربوط به عنصری با عدد اتمی ۱۷ است.



گزینهٔ (۴): عنصرهایی با عدد اتمی ۱۵، ۲۳ و ۳۲ به ترتیب در گروه‌های ۱۵، ۵ و ۱۴ قرار دارند و دارای ۵، ۵ و ۴ الکترون ظرفیتی‌اند؛ پس می‌توان گفت که کم‌ترین تعداد الکترون‌های ظرفیتی، مربوط به عنصری با عدد اتمی بزرگ‌تر است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۰۳ کدام مورد، درست است؟

۱) در جدول تناوبی، هر دوره از سمت چپ، با یک فلز قلیایی شروع می‌شود.

۲) هر چه عدد اتمی یک عنصر بیشتر باشد، بار مثبت هستهٔ آن، بیشتر و در نتیجه شعاع اتمی آن کوچک‌تر است.

۳) فلز قلیایی خاکی یک دوره، نسبت به فلز قلیایی همان دوره، واکنش‌پذیری کم‌تری دارد.

۴) خارجی‌ترین زیرلایه در آرایش الکترونی اتم فلزهای واسطه، زیرلایه با $l = ۲$ است.

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔

فلزهای قلیایی و قلیایی خاکی به ترتیب در گروه‌های ۱ و ۲ قرار دارند. در یک دوره، از چپ به راست، با کاهش شعاع اتمی، واکنش‌پذیری فلزها کاهش می‌یابد؛ از این‌رو واکنش‌پذیری یک فلز قلیایی خاکی نسبت به فلز قلیایی هم‌دورهٔ آن کم‌تر است.

واکنش‌پذیری: $_{۱۱}Na$ (فلز قلیایی) $>$ $_{۱۲}Mg$ (فلز قلیایی خاکی)

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): دورهٔ اول جدول، فقط شامل دو عنصر $_{۱}H$ و $_{۲}He$ است و فلز قلیایی ندارد. فلزهای قلیایی از دورهٔ دوم به بعد، *سروکلشون پیدا می‌شه!*

گزینهٔ (۲): با افزایش عدد اتمی و در نتیجه شمار پروتون‌های یک اتم، بار مثبت هسته بیشتر می‌شود، اما لزوماً شعاع اتم کاهش نمی‌یابد، مثلاً در یک گروه از بالا به پایین، اثر افزایش تعداد لایه‌های الکترونی اشغال‌شده بیشتر است، به همین دلیل شعاع اتمی عنصرها با افزایش عدد اتمی، بیشتر می‌شود.

گزینهٔ (۴): زیرلایه با $l = ۲$ در آرایش الکترونی اتم عنصرهای دورهٔ چهارم، همان ۳d است. *درسته که* طبق قاعدهٔ آفبا، زیرلایهٔ ۳d بعد از ۴s از الکترون اشغال می‌شود، اما خارجی‌ترین زیرلایه در اتم عنصرهای واسطهٔ دورهٔ چهارم، ۴s است:

$_{۲۱}Sc : [Ar]\underbrace{۳d^{۱}}\underbrace{۴s^{۲}}$ ← خارجی‌ترین زیرلایه (n بزرگ‌تر)

↓ آخرین زیرلایهٔ در حال پرشدن

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۰۴ **با افزایش عدد اتمی عنصرها در گروه هالوژن‌ها، کدام دو ویژگی آن‌ها با هم افزایش می‌یابد؟**

۱) شمار الکترون‌های ظرفیت ـ واکنش‌پذیری

۲) دمای لازم برای واکنش با گاز هیدروژن ـ نقطهٔ ذوب

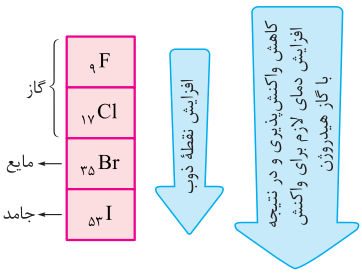
۳) نقطهٔ ذوب ـ خصلت نافلزی

۴) شعاع اتمی ـ شمار الکترون‌ها در خارجی‌ترین زیرلایهٔ اتم

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی

نافلزهای گروه ۱۷ جدول دوره‌ای به هالوژن‌ها معروف‌اند.



دقت کنید که آرایش همهٔ عنصرهای گروه ۱۷ به ns^2np^5 ختم می‌شود، یعنی همهٔ آن‌ها ۷ الکترون ظرفیتی دارند و شمار الکترون‌ها در خارجی‌ترین زیرلایهٔ آن‌ها برابر ۵ است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۰۵ با توجه به شکل زیر که عنصرهای واسطهٔ دورهٔ چهارم با نمادهای فرضی A تا J را نشان می‌دهد، کدام موارد درست است؟



الف) A در تلویزیون رنگی و برخی شیشه‌ها وجود دارد.

ب) نماد شیمیایی همهٔ این عنصرها دوحرفی است.

پ) این عنصرها با از دست دادن الکترون و تشکیل کاتیون به آرایش گاز نجیب نمی‌رسند.

ت) واکنش‌پذیری عنصر I از عنصر J کم‌تر است.

۱) «الف» ـ «ب»
۲) «پ» ـ «ت»
۳) «الف» ـ «ت»
۴) «ب» ـ «پ»

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔ عبارت‌های «الف» و «ت» درست‌اند.

عدد اتمی عنصرهای واسطهٔ دورهٔ چهارم از ۲۱ تا ۳۰ است.

$$\underset{\downarrow}{A}\ ,\ \underset{\downarrow}{B}\ ,\ \underset{\downarrow}{C}\ ,\ \underset{\downarrow}{D}\ ,\ \underset{\downarrow}{E}\ ,\ \underset{\downarrow}{F}\ ,\ \underset{\downarrow}{G}\ ,\ \underset{\downarrow}{H}\ ,\ \underset{\downarrow}{I}\ ,\ \underset{\downarrow}{J}$$
$$\quad {}_{21}Sc\quad {}_{22}Ti\quad {}_{23}V\quad {}_{24}Cr\quad {}_{25}Mn\quad {}_{26}Fe\quad {}_{27}Co\quad {}_{28}Ni\quad {}_{29}Cu\quad {}_{30}Zn$$

بررسی عبارت‌ها:

الف) اسکاندیم در تلویزیون رنگی و برخی شیشه‌ها وجود دارد.

ب) در بین عنصرهای واسطهٔ دورهٔ چهارم، نماد شیمیایی یک عنصر (وانادیم، V)، تک‌حرفی است.

پ) برخی عنصرهای واسطه نیز با تشکیل کاتیون به آرایش گاز نجیب می‌رسند.

$${}_{21}Sc : [Ar]3d^1 4s^2 \Rightarrow {}_{21}Sc^{3+} : [Ar]$$

ت) واکنش‌پذیری فلز مس ($_{29}Cu$) از فلز روی ($_{30}Zn$) کم‌تر است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۰۶ آرایش الکترونی اتم a عنصر از دورهٔ چهارم، به زیرلایه‌ای با دو الکترون ختم می‌شود. a کدام است و چند درصد از این عنصرها، جزء عنصرهای اصلی‌اند؟

۱) ۲۰ ،۱۰
۲) ۲۵ ،۸
۳) ۳۰ ،۱۰
۴) ۵۰ ،۸

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✔

خارجی‌ترین زیرلایه در آرایش الکترونی اتم عنصرهای دورهٔ چهارم، 4s یا 4p است. می‌خواهیم این زیرلایه‌ها دوالکترونی باشند. برای 4p، فقط یک حالت ($_{32}Ge : [Ar]3d^{10}4s^2 4p^2$)، وجود دارد، اما برای 4s، ۹ حالت مختلف وجود دارد:

$$[Ar]: \underset{\downarrow}{4s^2}\ ,\underset{\downarrow}{3d^1 4s^2}\ ,\underset{\downarrow}{3d^2 4s^2}\ ,\underset{\downarrow}{3d^3 4s^2}\ ,\underset{\downarrow}{3d^5 4s^2}\ ,\underset{\downarrow}{3d^6 4s^2}\ ,\underset{\downarrow}{3d^7 4s^2}\ ,\underset{\downarrow}{3d^8 4s^2}\ ,\underset{\downarrow}{3d^{10} 4s^2}$$
$$\quad {}_{20}Ca \quad {}_{21}Sc \quad {}_{22}Ti \quad {}_{23}V \quad {}_{25}Mn \quad {}_{26}Fe \quad {}_{27}Co \quad {}_{28}Ni \quad {}_{30}Zn$$

بنابراین در مجموع، آرایش الکترونی اتم ۱۰ عنصر به زیرلایهٔ دوالکترونی ختم می‌شود. در بین این عنصرها، فقط دو عنصر ($_{20}Ca$ و $_{32}Ge$)، جزء عنصرهای اصلی (دستهٔ s و p) محسوب می‌شوند.

$$\text{درصد عنصرهای اصلی} = \frac{2}{10} \times 100 = \%20$$

کنکور

با کدام گزینه‌ها، مفهوم علمی جملهٔ زیر به درستی کامل می‌شود؟ (سؤال ۲۳۷ کنکور ۱۴۰۰ تجربی (خارج از کشور))

«در میان عنصرهای واسطهٔ دورهٔ چهارم جدول تناوبی، دو عنصر وجود دارند که در اتم آن‌ها .....»

آ) ده الکترون، عددهای کوانتومی $n = 3$ و $l = 2$ دارند.

ب) یک الکترون، عددهای کوانتومی $n = 3$ و $l = 0$ دارد.

پ) در آخرین لایهٔ الکترونی، تنها یک الکترون وجود دارد.

ت) دوازده الکترون، عددهای کوانتومی $n = 3$ و $l = 1$ دارند.

۱) آ و ب
۲) پ و ت
۳) آ و پ
۴) ب و ت

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۰۷ کدام مورد دربارهٔ طلا ($Au : [Xe]4f^{14}5d^{10}6s^1$)، نادرست است؟

۱) در دورهٔ ششم جدول تناوبی قرار دارد و عدد اتمی آن برابر ۷۹ است.

۲) پرتوهای خورشیدی را بازتاب می‌کند و فلزی نرم است.

۳) آرایش الکترونی آن برخلاف اولین عنصر هم‌گروه آن، از قاعدهٔ آفبا پیروی نمی‌کند.

۴) استخراج آن از سنگ معدن، آثار زیان‌بار زیست‌محیطی بر جای می‌گذارد.

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): بزرگ‌ترین ضریب در آرایش الکترونی اتم طلا برابر ۶ است؛ بنابراین عنصر طلا در دورهٔ ششم جدول تناوبی قرار دارد.

از طرفی با توجه به این‌که عدد اتمی زنون (Xe) برابر ۵۴ است، خواهیم داشت:

$$Au : [_{54}Xe]4f^{14}5d^{10}6s^1 \Rightarrow \text{عدد اتمی } Au = 54+14+10+1=79$$

گزینهٔ (۲): *کاملاً درسته!*

ویژگی‌های طلا	کاربرد
چکش‌خواری بالا و نرم‌بودن	ساخت برگه‌ها و رشته‌سیم‌های بسیار نازک (نخ طلا)
رسانایی الکتریکی بالا و حفظ این رسانایی در شرایط دمایی گوناگون	در وسایل الکتریکی مثل لپ‌تاپ و قطعهٔ الکتریکی مربوط به چرخ ویلچر
واکنش‌ندادن با گازهای موجود در هواکره و مواد موجود در بدن انسان	ساخت جواهرات و استفاده در دندان‌پزشکی
توانایی بازتاب زیاد پرتوهای خورشیدی	کلاه فضانوردی

گزینهٔ (۳): عنصر طلا در گروه ۱۱ قرار دارد. اولین عنصر گروه ۱۱، مس ($_{29}Cu : [Ar]3d^{10}4s^1$) است. آرایش الکترونی طلا مانند مس از قاعدهٔ آفبا پیروی نمی‌کند، زیرا طبق قاعدهٔ آفبا، زیرلایهٔ 6s باید زودتر از 5d از الکترون پر شود (به جای $5d^9 6s^2$، شده $5d^{10}6s^1$)!

گزینهٔ (۴): فلز طلا به دلیل پایداری شیمیایی بالا و واکنش‌پذیری بسیار کم، در طبیعت به شکل فلزی و عنصری (به حالت آزاد) یافت می‌شود، اما مقدار طلا در معادن آن بسیار کم است، به طوری که برای استخراج مقدار کمی از آن باید از حجم انبوهی خاک معدن استفاده کرد، به همین دلیل استخراج طلا با تولید پسماند زیادی همراه است و آثار زیان‌بار زیست‌محیطی را به دنبال دارد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۰۸ کدام گزینه نادرست است؟

۱) برخی نافلزها مانند اکسیژن، نیتروژن، هیدروژن و گوگرد، به شکل آزاد در طبیعت دیده می‌شوند.

۲) فلزهای نقره، مس و پلاتین در طبیعت به حالت آزاد وجود دارند.

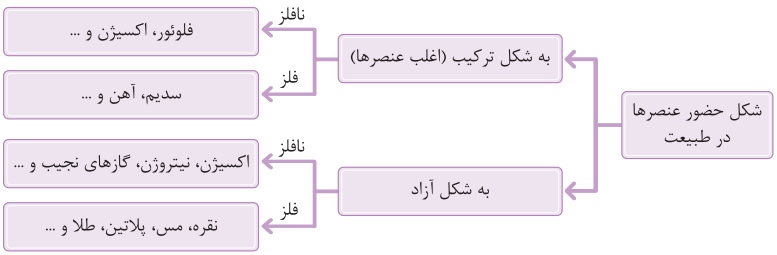
۳) در بین فلزها، تنها طلا به شکل کلوخه‌ها یا رگه‌های زردرنگ در خاک یافت می‌شود.

۴) فلزی که بیشترین مصرف در جهان را دارد، اغلب به حالت اکسید در طبیعت یافت می‌شود.

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی

هیدروژن، به شکل آزاد در طبیعت وجود ندارد.



گزینهٔ (۴) به فلز آهن (Fe) اشاره دارد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۰۹ **در جدول زیر واکنش‌پذیری سه دسته از فلزها با هم مقایسه شده است. اگر فلز پتاسیم در دستهٔ A قرار گیرد، فلزهای مس، روی و طلا به ترتیب از راست به چپ، در کدام دسته‌ها قرار می‌گیرند؟**

رفتار	واکنش‌پذیری		
	زیاد	کم	ناچیز
نام فلز	A	X	D

۱) X, D, D
۲) D, X, D
۳) D, D, X
۴) D, X, X

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✔

واکنش‌پذیری هر عنصر به معنای **تمایل اتم آن به انجام واکنش شیمیایی** است. هر چه واکنش‌پذیری اتم‌های عنصری بیشتر باشد، در شرایط یکسان تمایل آن برای انجام واکنش و تبدیل‌شدن به ترکیب بیشتر است.

واکنش‌پذیری فلزهای قلیایی (مانند سدیم و پتاسیم) از واکنش‌پذیری فلزهای واسطه (مانند آهن و روی) بیشتر است. هم‌چنین واکنش‌پذیری فلزهای واسطه‌ای مانند آهن و روی از فلزهای واسطه‌ای مانند مس، نقره و طلا بیشتر است.

رفتار	واکنش‌پذیری		
	زیاد	کم	ناچیز
نام فلز	سدیم، پتاسیم	آهن، روی	مس، نقره، طلا

با توجه به جدول بالا می‌توان گفت:

- در شرایط یکسان، تمایل فلزهای سدیم و پتاسیم برای تبدیل‌شدن به کاتیون، بیشتر از دیگر فلزهای موجود در این جدول است.
- بین سه فلز Zn، Na و Ag، فلز Na سریع‌تر در هوای مرطوب واکنش می‌دهد *پس واکنش‌پذیریش بیشتره!*
- از اون‌جایی که فلزهای قلیایی سدیم و پتاسیم واکنش‌پذیری بالایی دارند، تأمین شرایط نگه‌داری این فلزها دشوارتر از بقیه است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۱۰ **اگر مقایسهٔ پایداری ترکیب‌های یونی حاصل از سه فلز X، Y و Z به صورت $Z < Y < X$ باشد، استخراج فلز ..... دشوارتر است و اگر X و Y، هم‌گروه و Y و Z هم‌دوره باشند، عدد اتمی فلز ..... کم‌تر است.**

۱) $Z - X$
۲) $Y - Z$
۳) $Y - X$
۴) $X - Z$

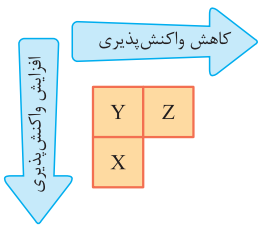
پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی

هر چه فلزی فعالیت شیمیایی بیشتری داشته باشد و واکنش‌پذیرتر باشد، ترکیب یونی حاصل از آن پایدار بوده و در نتیجه استخراج آن فلز دشوارتر می‌باشد.

واکنش‌پذیری: $X > Y > Z$

با توجه به روند تغییر واکنش‌پذیری عنصرها در جدول، جایگاه سه فلز به صورت زیر است:



SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir