آزمون آزمایشی خیلی سبز

رشته ریاضی

پایه یازدهم	مرحله چهارم
۱۴۰۵-۰۶	۰۳/مهر/۱۴۰۵

مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخگویی	دهم	یازدهم
ریاضی (۱)	۱۵	۱	۱۵	۲۵ دقیقه	کل کتاب صفحهٔ ۱ تا ۱۷۰	–
هندسه (۱)	۱۰	۱۶	۲۵	۱۵ دقیقه	کل کتاب صفحهٔ ۹ تا ۹۶	–
فیزیک (۱)	۱۵	۲۶	۴۰	۲۰ دقیقه	کل کتاب صفحهٔ ۱ تا ۱۴۹	–
شیمی (۱)	۱۰	۴۱	۵۰	۱۰ دقیقه	کل کتاب صفحهٔ ۱ تا ۱۲۲	–
مجموع	۵۰ سؤال			۷۰ دقیقه	–	

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا	مسئول درس ـ گزینشگر
ریاضی (۱)	طراحان: میثم حصارکی ـ محسن علی‌نجاری کارشناسان علمی: علی افضل‌زاده ـ سروش موئینی ـ مازیار احمدی‌ناو	محسن علی‌نجاری
هندسه (۱)	طراح: امیرحسین ابومحبوب کارشناسان علمی: سیدعباس حسینی ـ محمد خندان	امیرحسین ابومحبوب
فیزیک (۱)	طراحان: یاشار انگوتی ـ نوید شاهی کارشناسان علمی: علیرضا جباری ـ هادی نجفی	نوید شاهی ـ یاشار انگوتی
شیمی (۱)	طراحان: هادی عبادی ـ یاسر عبداللهی ـ محمد عظیمیان‌زواره ـ محمد قهرمانی‌نژاد مهدیس محبت‌پناه ـ محمد مرادی ـ مرتضی نصیرزاده کارشناس علمی: مرتضی نصیرزاده ـ محمدمهدی کریمیان	یاسر عبداللهی

مدیر تألیف آزمون: دکتر فاطمه آقاجانپور

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

این آزمون نمره منفی دارد.

دفتر چه سؤالات آزمون های خیلی سبز، از همه نظر (تعداد سؤال ها، زمان پاسخگویی، نوع چینش گزینه ها، نوع صفحه آرایی، فونت سؤالات، سایز کلمات و اعداد، جای خالی محل انجام محاسبات و...) در شبیه ترین حالت به دفتر چه سؤالات کنکور سراسری طراحی می شود.

ویژه یازدهمی های ۱۴۰۵

Azmoonkheilisabz.com

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

ریاضی دهم

۱- در بین متغیرهای زیر، فراوانی کدام نوع کم‌تر است؟
«گروه خونی دانش‌آموزان یک کلاس / قد دانش‌آموزان شهر تهران / رشتهٔ تحصیلی دانش‌آموزان یک مدرسه / تعداد مورچه‌های جهان / میزان بارندگی سالانه در یک شهر»

۱) کمی پیوسته
۲) کیفی اسمی
۳) کمی گسسته
۴) کیفی ترتیبی

۲- برای چند عددطبیعی n، بازهٔ $(\frac{n+2}{n}, \frac{n+4}{3})$ شامل فقط یک عدد صحیح است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

۳- طول اضلاع یک مستطیل x و y هستند و z طول قطر آن است. اگر اعداد x، y و z با همین ترتیب، تشکیل دنبالهٔ حسابی و اعداد ۱۲، $3x$ و y نیز با همین ترتیب تشکیل دنبالهٔ هندسی دهند، مقدار z کدام است؟

۱) $\frac{16}{27}$
۲) $\frac{24}{27}$
۳) $\frac{64}{27}$
۴) $\frac{80}{27}$

۴- امید می‌خواهد ارتفاع یک ساختمان را که طول سایهٔ آن، ۱۵ متر است، حساب کند. قد امید ۱/۸ متر و طول سایهٔ او در همان لحظه ۰/۶ متر است. ارتفاع ساختمان بر حسب متر کدام است؟

۱) ۳۰
۲) ۴۲
۳) ۴۵
۴) ۶۰

۵- اگر $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$ و $\cos 3x = 1 - 2m$ باشد، مقدار m کدام می‌تواند باشد؟

۱) -1
۲) $\frac{1}{3}$
۳) ۱
۴) $-\frac{1}{3}$

۶- حاصل عبارت $\sqrt{\sqrt{3}-1}\sqrt{(2-\sqrt{3})^{-1}}\sqrt[4]{(2-\sqrt{3})^{-1}}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$
۲) $\frac{1}{\sqrt{2}}$
۳) $\sqrt[4]{2}$
۴) $\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$

۷- در حل معادلهٔ $3x^2 - 18x + 8 = 0$ به روش مربع کامل، به معادلهٔ $(x-\frac{k}{2})^2 = 19L$ رسیده‌ایم. حاصل $3L - k$ کدام است؟

۱) -5
۲) ۵
۳) ۶
۴) -6

۸- اگر سهمی به معادلهٔ $y = (1-2a)x^2 + 2x - 3$ نسبت به خط $x = -1$ متقارن باشد، این منحنی محور xها را با کدام طول منفی قطع می‌کند؟

۱) -4
۲) -3
۳) -2
۴) -1

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹- در بازهٔ (a,b) عبارت $-\frac{۱}{۳}x^۲+۱۷x-۴۸$ مثبت و عبارت $|\frac{x-۲}{۳}+۱|$ کوچک‌تر از ۲ است. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۵ ۳) ۳ ۴) ۲

۱۰- اگر تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x^۳-ax^۲-bx}{x^۲+۲x-۳}$ روی $\mathbb{R}-\{-۳,۱\}$ همانی و تابع g با ضابطهٔ $g(x)=|۲x-a+۲|+|۲x+b-۱|$ روی بازهٔ $[m,n]$ ثابت باشد، بیشترین مقدار $n-m$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۱۱- اگر برد تابع $f(x)=\begin{cases} ax-b & ; \quad x\geq ۱ \\ x^۲+۱ & ; \quad x<۱ \end{cases}$ برابر $\mathbb{R}$ باشد، مقدار $b-a$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) -۱

۱۲- به چند طریق می‌توان به ۶ سؤال چهارگزینه‌ای و ۴ سؤال دوگزینه‌ای جواب داد، در صورتی که مجبور نباشیم به همهٔ سؤالات پاسخ دهیم؟

۱) $۱۲^۴$ ۲) $۵^۶\times ۳^۴$ ۳) $۵^۶+۳^۴$ ۴) $۶^۴+۲^۴$

۱۳- اگر $(n+۱)!=۴۲(n-۱)!$ باشد، آن‌گاه $(\frac{n}{۳})!$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۲۴ ۳) ۲ ۴) ۱

۱۴- در یک ظرف، ۴ مهرهٔ آبی و ۷ مهرهٔ قرمز وجود دارد. چهار مهره را به صورت متوالی و بدون جای‌گذاری خارج می‌کنیم. احتمال آن‌که رنگ مهره‌های اول و سوم یکسان و رنگ مهره‌های دوم و چهارم نیز یکسان باشد (اما هر چهار مهره همرنگ نباشند)، کدام است؟

۱) $\frac{۷}{۵۵}$ ۲) $\frac{۱۴}{۵۵}$ ۳) $\frac{۳}{۱۱}$ ۴) $\frac{۲}{۱۱}$

۱۵- ۷ کتاب متمایز به طور تصادفی روی هم قرار گرفته‌اند که ۲ کتاب از میان آن‌ها، ریاضی است. با کدام احتمال، این ۲ کتاب ریاضی در جایگاه‌های دوم و ششم هستند؟

۱) $\frac{۱}{۱۴}$ ۲) $\frac{۱}{۱۲}$ ۳) $\frac{۱}{۴۲}$ ۴) $\frac{۱}{۲۱}$

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

هندسه دهم

۱۶- فرض کنید H نقطهٔ همرسی ارتفاع‌های مثلث ABC باشد. اگر زوایای $A\hat{H}C$، $B\hat{H}C$ و $A\hat{H}B$ با همین ترتیب یک دنبالهٔ حسابی تشکیل دهند، اندازهٔ زاویهٔ $\hat{A}$ برحسب درجه کدام است؟

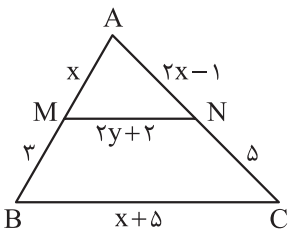
۱) ۴۵ ۲) ۶۰ ۳) ۷۵ ۴) ۹۰

۱۷- اگر O نقطهٔ همرسی نیمسازهای زوایای داخلی مثلث ABC و $OC > OB > OA$ باشد، کدام رابطه بین اضلاع این مثلث درست است؟

۱) $AB > AC > BC$ ۲) $AB > BC > AC$

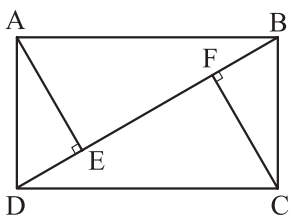
۳) $BC > AC > AB$ ۴) $BC > AB > AC$

۱۸- در شکل زیر، $MN \parallel BC$ است. حاصل $x + y$ کدام است؟



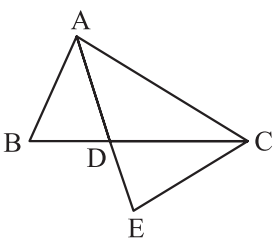
۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

۱۹- در شکل زیر، در مستطیل ABCD با اضلاع $AB = ۳\sqrt{۱۳}$ و $AD = ۲\sqrt{۱۳}$، پاره‌خط‌های AE و CF بر قطر BD عمود هستند. اگر عمودمنصف پاره‌خط EF، ضلع CD را در نقطهٔ M قطع کند، مساحت مثلث EMF کدام است؟



۱) ۱۰
۲) $\frac{۳۲}{۳}$
۳) $\frac{۲۱}{۲}$
۴) $\frac{۶۵}{۶}$

۲۰- در شکل زیر، AD نیمساز زاویهٔ A و $CD = CE$ است. اگر $BD = ۳$ و $CD = ۸$ باشد، نسبت مساحت مثلث CDE به مساحت مثلث ACD کدام است؟



۱) $\frac{۸}{۳}$
۲) $\frac{۳}{۸}$
۳) $\frac{۳}{۵}$
۴) $\frac{۵}{۳}$

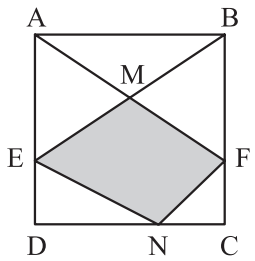
محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۱- در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A}=۹۰^\circ)$، اگر $AB=۲\sqrt{۳}$ و $AC=۲\sqrt{۶}$ باشد، فاصلهٔ رأس B از میانهٔ وارد بر وتر در این مثلث کدام است؟

۱) ۲ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) ۳ ۴) $۲\sqrt{۳}$

۲۲- در مربع $ABCD$ شکل زیر، اگر $ED=FC=\frac{AE}{۳}$ باشد، مساحت ناحیهٔ سایه‌زده چه کسری از مساحت مربع است؟



۱) $\frac{۵}{۱۶}$
۲) $\frac{۱}{۴}$
۳) $\frac{۳}{۸}$
۴) $\frac{۷}{۱۶}$

۲۳- در مثلث ABC، $BC=۱۵$ و طول میانه‌های BM و CN به ترتیب برابر ۱۳/۵ و ۱۸ است. طول میانهٔ سوم این مثلث کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۶/۵ ۳) ۲۲/۵ ۴) ۲۴

۲۴- دو خط متمایز $d_۱$ و $d_۲$ درون صفحهٔ P قرار دارند. از نقطهٔ A واقع در خارج صفحهٔ P، چند خط عبور می‌کند به طوری که هر دو خط $d_۱$ و $d_۲$ را قطع کند؟

۱) همواره صفر
۲) همواره یک
۳) صفر یا یک
۴) بی‌شمار

۲۵- از دوران مثلث متساوی‌الاضلاعی به طول ضلع a حول یکی از اضلاع آن، دو مخروط یکسان پدید آمده است. ارتفاع و شعاع قاعدهٔ هر کدام از آن‌ها به ترتیب از راست به چپ برابر کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}a$ و $\frac{a}{۲}$
۲) $\frac{a}{۲}$ و $\frac{\sqrt{۳}}{۲}a$
۳) a و $\frac{a}{۲}$
۴) $\frac{a}{۲}$ و a

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

فیزیک دهم

۲۶- فاصلهٔ ستاره‌ای تا کرهٔ زمین برابر $۸۱\times۱۰^{۱۲}\ km$ است. این فاصله برحسب یکای نجومی و به صورت نمادگذاری علمی کدام است؟ $(AU = ۱/۵\times۱۰^{۱۱}\ m)$

۱) ۵۴×۱۰^{۴}
۲) ۵۴×۱۰^{۳}
۳) $۵/۴\times۱۰^{۵}$
۴) $۵/۴\times۱۰^{۴}$

۲۷- مکعبی به ضلع $۲۰\ cm$ و جرم $۳۷/۵\ kg$ از آلیاژی به چگالی $۵\ g/cm^{۳}$ ساخته شده است. درون این مکعب، حفره‌ای کروی وجود دارد، قطر این حفره چند سانتی‌متر است؟ $(\pi = ۳)$

۱) ۴
۲) ۵
۳) ۸
۴) ۱۰

۲۸- چه تعداد از موارد زیر درست است؟

الف) فاصلهٔ مولکول‌ها در حالت جامد، کم‌تر از حالت مایع است.

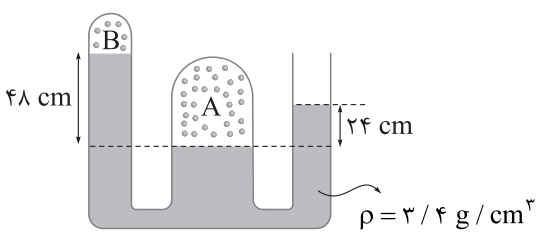
ب) شیشه یک نوع جامد بی‌شکل است که از سردشدن آهستهٔ مایع به وجود می‌آید.

پ) مولکول‌های آب، حرکات کاتوره‌ای و نامنظم دارند.

ت) کشش سطحی، ناشی از دگرچسبی مولکول‌های سطح مایع است.

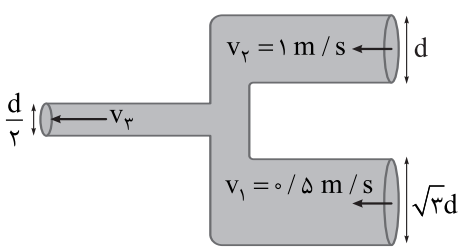
۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۲۹- در شکل زیر، فشار گاز محبوس A، چند برابر فشار گاز محبوس B است؟ $(\rho_{جیوه} = ۱۳/۶\ g/cm^{۳}\ ,\ P_{۰} = ۶۶\ cmHg)$



۱) $\frac{۵}{۶}$
۲) $\frac{۶}{۵}$
۳) $\frac{۴}{۳}$
۴) $\frac{۳}{۴}$

۳۰- در شکل زیر، جریان آب در لوله‌ها، پایا و از سمت راست به چپ است. با توجه به قطر مقطع لوله‌ها و تندی آب در لوله‌های ورودی، تندی آب در لولهٔ خروجی $(v_{۳})$، چند متر بر ثانیه است؟



۱) ۶
۲) ۸
۳) ۱۰
۴) ۱۲

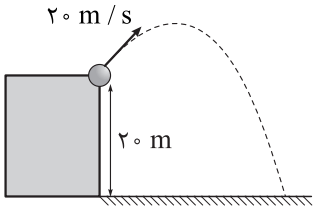
محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۱- اگر تندی جسمی، $8\ m/s$ افزایش یابد، انرژی جنبشی آن ۹۶ درصد تغییر می‌کند. تندی اولیهٔ این جسم چند متر بر ثانیه است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۴ ۳) ۱۸ ۴) ۲۰

۳۲- در شکل زیر، سنگی از ارتفاع ۲۰متری سطح زمین با تندی $20\ m/s$ پرتاب می‌شود. اگر از لحظهٔ پرتاب سنگ تا لحظهٔ برخورد آن به سطح زمین، اندازهٔ کار نیروی مقاومت هوا از کار نیروی وزن سنگ ۸۰ درصد کم‌تر باشد، تندی برخورد سنگ به سطح زمین، چند متر بر ثانیه است؟ $(g = 10\ m/s^2)$



۱) $10\sqrt{3}$

۲) $12\sqrt{3}$

۳) $10\sqrt{5}$

۴) $12\sqrt{5}$

۳۳- توان مصرفی یک پمپ آب، ۸ اسب بخار است. اگر این پمپ در هر ساعت $54\ m^3$ آب را از عمق ۲۵متری زمین به منبعی در سطح زمین منتقل کند، بازده آن چند درصد است؟ $(1\ hp = 750\ W,\ \rho_{آب} = 1\ g/cm^3,\ g = 10\ m/s^2)$

۱) ۷۵ ۲) ۷۲/۵ ۳) ۶۲/۵ ۴) ۶۰

۳۴- دمای جسمی $258\ K$ است. اگر دمای این جسم $25\ ^\circ C$ افزایش یابد. دمای آن در مقیاس فارنهایت چند برابر شده است؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

۳۵- روی یک ورقهٔ فلزی با ظرفیت گرمایی $400\ J/^\circ C$، حفره‌ای وجود دارد. به این ورقه چند کیلوژول گرما بدهیم تا مساحت حفرهٔ آن، یک درصد افزایش یابد؟ $(\alpha = 2/5\times10^{-5}\ K^{-1})$

۱) ۸ ۲) ۸۰ ۳) ۱۶ ۴) ۱۶۰

۳۶- یک قطعهٔ فلزی با دمای $52\ ^\circ C$ را درون ظرف عایقی در مجاورت یک قطعه یخ ۵۰گرمی با دمای $-10\ ^\circ C$، قرار می‌دهیم و دمای نهایی قطعهٔ فلز به $10\ ^\circ C$ می‌رسد. اگر تبادل گرمایی فقط بین قطعهٔ فلز و قطعهٔ یخ انجام شده باشد، ظرفیت گرمایی قطعهٔ فلز در SI کدام است؟ $(L_F = 336\ kJ/kg,\ c_{آب} = 2c_{یخ} = 4200\ \frac{J}{kg.K})$

۱) ۵۰۰ ۲) ۴۷۵ ۳) ۴۵۰ ۴) ۴۲۵

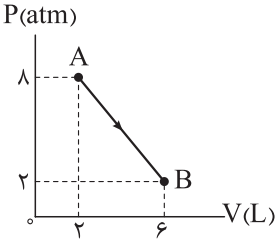
۳۷- دمای گاز درون یک کپسول برابر با $127\ ^\circ C$ و فشار پیمانه‌ای آن $5\ cmHg$ است. در حجم ثابت، دمای گاز را چند کلوین افزایش دهیم تا فشار پیمانه‌ای آن، ۱۰ برابر شود؟ $(P_\circ = 75\ cmHg)$

۱) ۶۲۵ ۲) ۵۵۰ ۳) ۲۵۰ ۴) ۲۲۵

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۸- نمودار $P-V$ مقدار معینی گاز کامل در طی فرایند AB به شکل زیر است. اگر انرژی درونی گاز در نقطهٔ A برابر $4800\ J$ باشد، در این فرایند، گاز چند ژول گرما و چگونه مبادله کرده است؟



۱) ۸۰۰، دریافت کرده است.

۲) ۸۰۰، از دست داده است.

۳) ۳۲۰۰، دریافت کرده است.

۴) ۳۲۰۰، از دست داده است.

۳۹- مقدار معینی گاز کامل با فشار و حجم معین در اختیار داریم. در آزمایش A، حجم این گاز را در طی فرایند هم‌دما نصف می‌کنیم. در آزمایش B، حجم همان گاز اولیه را به صورت بی‌دررو نصف می‌کنیم. دمای نهایی گاز، فشار نهایی گاز و کار انجام‌شده روی گاز به ترتیب در کدام آزمایش بزرگ‌تر است؟

۱) A ،B ،B

۲) B ،A ،A

۳) A ،A ،A

۴) B ،B ،B

۴۰- یک ماشین گرمایی درون‌سوز با بازده ۲۰ درصد، در هر ثانیه ۵۰ چرخه انجام می‌دهد و در هر چرخه، $4\ kJ$ کار تحویل می‌دهد. اگر گرمای حاصل از هر گرم سوخت $5\times10^{4}\ J/g$ باشد، ماشین در هر دقیقه چند گرم سوخت مصرف می‌کند؟

۱) ۹۶

۲) ۱۲۰

۳) ۹۶۰

۴) ۱۲۰۰

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

شیمی دهم

۴۱- در میان ۷ ایزوتوپ هیدروژن، در اتم a ایزوتوپ، شمار نوترون‌ها از شمار پروتون‌ها بیشتر و در اتم b ایزوتوپ، شمار نوترون‌ها با شمار پروتون‌ها برابر است. حاصل $(a-b)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

۴۲- کدام مورد درست است؟

۱) انرژی همانند ماده، در نگاه ماکروسکوپی پیوسته است.

۲) با استفاده از رنگ شعلهٔ سدیم سولفات، رنگ شعلهٔ لیتیم سولفات نیز قابل پیش‌بینی است.

۳) طیف نشری خطی گونه‌های تک‌الکترونی مانند ${}_{1}H$، ${}_{3}Li^{2+}$ و ${}_{2}He^{+}$ یکسان است.

۴) با توجه به عدم موفقیت بور در توجیه طیف نشری خطی هیدروژن، ساختار لایه‌ای توسط دانشمندان برای اتم پیشنهاد شد.

۴۳- کدام مطلب درست است؟

۱) اگر اتم عنصری دارای ۱۷ الکترون با $l=1$ باشد، در آرایش الکترونی فشردهٔ آن از نماد $[Ar]$ استفاده می‌شود.

۲) تمامی عنصرهایی که اتم آن‌ها حداکثر دارای ۱۰ الکترون با $l=2$ هستند، در دورهٔ چهارم جدول دوره‌ای واقع‌اند.

۳) شمار الکترون‌ها در سومین لایهٔ الکترونی اتم هیچ دو عنصر دستهٔ d دورهٔ چهارم، نمی‌تواند با هم یکسان باشد.

۴) اگر در آرایش الکترونی فشردهٔ اتم عنصر D از $[Ar]$ استفاده شود، شمار الکترون‌های با $l=1$ در اتم D به یقین با اتم ${}_{18}Ar$ متفاوت است.

۴۴- کدام مورد نادرست است؟

۱) آرگون گازی بی‌رنگ، بی‌بو و غیرسمی است که در پتروشیمی شیراز از تقطیر جزءبه‌جزء هوای مایع با خلوص بسیار زیاد تهیه می‌شود.

۲) هلیم از واکنش‌های هسته‌ای در ژرفای زمین تولید می‌شود و حدود ۷ درصد حجمی از مخلوط گاز طبیعی را تشکیل می‌دهد.

۳) تهیهٔ هلیم از هوا، مقرون‌به‌صرفه‌تر از تهیهٔ آن از تقطیر جزءبه‌جزء گاز طبیعی است.

۴) در فرایند تقطیر جزءبه‌جزء هوای مایع، آرگون دومین گاز خارج‌شده از ستون تقطیر است.

۴۵- شمار پیوندهای اشتراکی در ساختار لوویس کدام گونه با سه گونهٔ دیگر متفاوت است؟

۱) فسفر تری‌کلرید ۲) یون کربنات ۳) گوگرد دی‌اکسید ۴) کربن مونوکسید

۴۶- کدام مورد دربارهٔ شیمی سبز، نادرست است؟

۱) برای به دام انداختن کربن دی‌اکسید تولیدشده در نیروگاه‌ها و مراکز صنعتی، آن را با اکسید اسیدی واکنش می‌دهند.

۲) سوخت‌های سبز از پسماندهای گیاهانی مانند سویا، نیشکر و دانه‌های روغنی به دست می‌آیند.

۳) پلاستیک‌های سبز، پلیمرهای زیست‌تخریب‌پذیرند که بر پایهٔ مواد گیاهی مثل نشاسته ساخته می‌شوند.

۴) میدان‌های قدیمی گاز و چاه‌های قدیمی نفت و هم‌چنین سنگ‌های متخلخل در زیر زمین، جاهای مناسبی برای دفن گاز ${}_{2}CO$ هستند.

محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۷- در نمونه‌ای از پتاسیم نیترات، ۲۰ گرم اکسیژن وجود دارد. از تجزیهٔ این نمونه مطابق معادلهٔ زیر، به تقریب چند لیتر گاز نیتروژن در شرایط STP تولید می‌شود؟ $(N=14, O=16, K=39 : g.mol^{-1})$

$KNO_3(s) \rightarrow K_2O(s) + O_2(g) + N_2(g)$ (معادله موازنه شود.)

۱) ۲/۳۳ ۲) ۳/۳۶ ۳) ۴/۶۷ ۴) ۵/۸۰

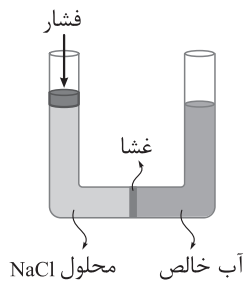
۴۸- در نمونه‌ای از کلسیم کلرید، مجموع شمار یون‌ها برابر $45/15 \times 10^{22}$ است. از واکنش کامل این نمونه با ۲ لیتر محلول نقره نیترات، چند گرم رسوب تشکیل می‌شود و غلظت مولی محلول نقره نیترات چند مولار است؟ $(Cl=35/5, Ag=108 : g.mol^{-1})$

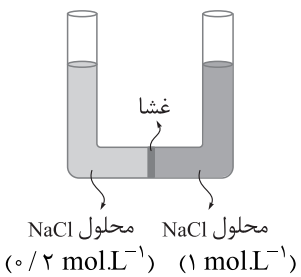
۱) ۰/۲۵ ـ ۷۱/۷۵ ۲) ۰/۲۵ ـ ۱۴۳/۵ ۳) ۰/۵ ـ ۷۱/۷۵ ۴) ۰/۵ ـ ۱۴۳/۵

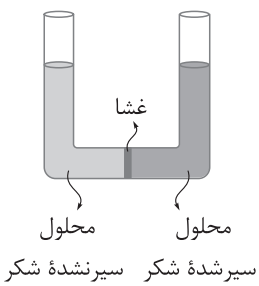
۴۹- معادلهٔ انحلال‌پذیری سدیم نیترات برحسب دما به صورت $S = 0/8\theta + 72$ است. دمای ۲۷۰ گرم محلول سیرشدهٔ این نمک را از $35\ ^\circ C$ به چند درجهٔ سلسیوس برسانیم تا جرم محلول باقی‌مانده پس از جداسازی رسوب، برابر با ۲۴۳ گرم باشد؟

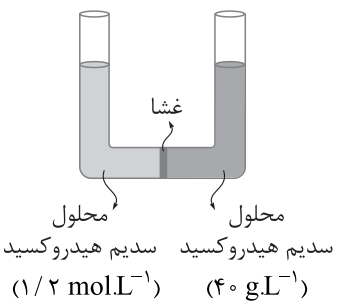
۱) ۳۰ ۲) ۲۵ ۳) ۱۵ ۴) ۱۰

۵۰- اگر در شکل‌های زیر، غشای نیمه‌تراوا فقط به مولکول‌های آب اجازهٔ عبور دهد، در کدام مورد، غلظت محلول در سمت چپ غشا به مرور کاهش می‌یابد؟ $(H=1,\ O=16,\ Na=23 : g.mol^{-1})$

۱)


۲)


۳)


۴)


محل انجام محاسبات

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ‌نامهٔ تشریحی آزمون را ساعت ۱۶ از صفحهٔ شخصی خودتان در سایت آزمون خیلی سبز دریافت کنید.

azmoon.kheilisabz.com

اساتید، مشاوران و دانش‌آموزان گرامی؛
نظرات، پیشنهادات، انتقادات و بازخوردهای خود نسبت به سؤالات این آزمون را می‌توانید از طریق آیدی Kheilisabz_edit@ در همهٔ پیام‌رسان‌ها با ما به اشتراک بگذارید.

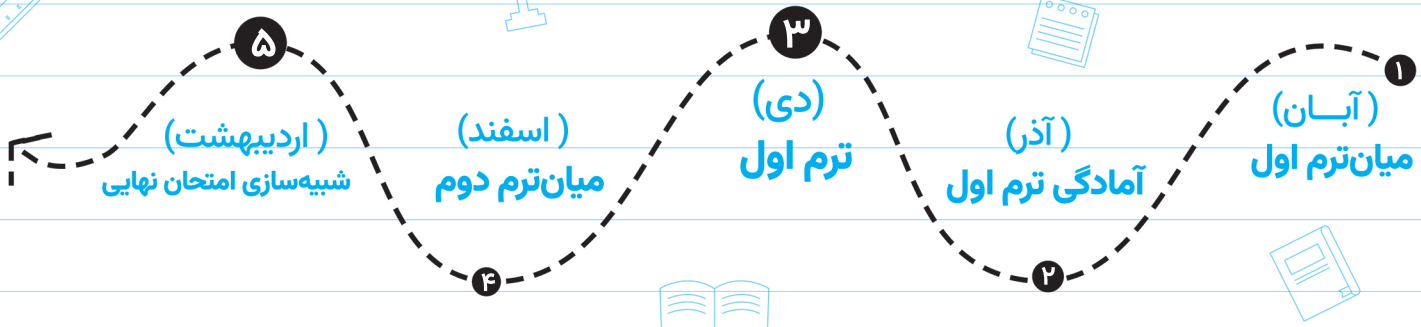
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

آزمون‌های تشریحی خیلی‌سبز

۵ مرحله در طول سال

شبیه‌سازی کامل امتحان نهایی

- منطبق بر بارم‌بندی آموزش و پرورش
- تشابه کامل فرم برگه سوال، پاسخبرگ، کلید، پاسخنامه و حتی فونت سوال‌ها با امتحان نهایی
- پوشش همه مطالب و انواع سوالات
- ارائه یک یا دو تست عینا مشابه امتحان نهایی
- هم‌سطح با دشواری سوالات امتحان نهایی



پاسخنامه‌های خیلی تشریحی

- ارائه پاسخ کامل و مرحله به مرحله
- محتوای یاددهنده شامل درسنامه
- ارائه نکات کلیدی هر سوال

تصحیح کاملا مکانیزه

- تصحیح کاملا حرفه‌ای توسط دو مصحّح
- تصحیح سوم در صورت اختلاف نظر دو مصحّح قبل
- تصحیح به صورت بررسی یک سوال برای گروهی از دانش‌آموزان
- امکان کامنت‌گذاری مصحّح در فرایند تصحیح
- امکان درخواست تصحیح مجدد در پنل ثبت اعتراض

کارنامه‌های بسیار کاربردی

- کارنامه تحلیلی و مقایسه‌ای
- نمره به تفکیک سوال
- کارنامه مبحثی

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ‌نامه آزمون آزمایشی خیلی سبز

رشته ریاضی

پایه یازدهم	مرحله چهارم
۱۴۰۵-۰۶	۰۳/مهر/۱۴۰۵

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا
ریاضی	میثم حصارکی ـ محسن علی‌نجاری
هندسه	امیرحسین ابومحبوب
فیزیک	یاشار انگوتی ـ نوید شاهی
شیمی	هادی عبادی ـ یاسر عبداللهی ـ محمد عظیمیان‌زواره ـ محمد قهرمانی‌نژاد ـ مهدیس محبت‌پناه محمد مرادی ـ مرتضی نصیرزاده

نام درس	مسئول درس	گزینشگر	مولف پاسخ‌نامه	کارشناسان علمی	ویراستاران به ترتیب حروف الفبا
ریاضی	محسن علی‌نجاری	محسن علی‌نجاری	محمدرضا راسخ	علی افضل‌زاده سروش موئینی مازیار احمدی‌ناو	محبوبه اصفهانی محمد بهرامی سهند محمدکریم‌نژاد
هندسه	امیرحسین ابومحبوب	امیرحسین ابومحبوب	امیرحسین ابومحبوب	سید عباس حسینی محمد خندان	منصور زرکش اصفهانی ابوالفضل ناصری مریم نظری
فیزیک	نوید شاهی	یاشار انگوتی	علی محمدی	علیرضا جباری هادی نجفی	مدیا عیدی مریم گلی‌حسنلو آراس محمدی امیر محمودی انزابی
شیمی	یاسر عبداللهی	یاسر عبداللهی	یاسر عبداللهی	مرتضی نصیرزاده محمدمهدی کریمیان	عماد ربیعی امیر قاسمی‌پور هادی عبادی

مدیر تألیف آزمون: دکتر فاطمه آقاجانپور

ویژه یازدهمی‌های ۱۴۰۵

Azmoonkheilisabz.com

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

آزمون آزمایشی خیلی سبز

ویژه یازدهمی‌های ۱۴۰۵

تیم اجرایی و تألیف آزمون	بیتا ابراهیمی ـ عادل حسینی ـ مینا کریم‌زاده

سرپرست تولید	الناز علی‌یاری‌زاده
ویراستاران فنی	نیلوفر اعتمادی ـ نیوشا پیمان ـ زهرا صفری الهه صفری ـ فاطمه علی‌اکبری ـ محیا غنی‌فرد ساناز فلاحی ـ نادره نازآوری ـ ساعده نمازی
رسام	ندا فخاری سارا گنجی آزادپور
صفحه‌آرایی	مریم حسین‌زاده ـ سپیده سخائی ـ الهام سهرابی طاهره صادق‌نژاد ـ مائده صبری ـ نیلوفر فرخجسته فاطمه قیاسوند ـ مهدیه گل‌پور ـ دریا لطفی

Azmoonkheilisabz.com
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

ریاضی دهم

۱ در بین متغیرهای زیر، فراوانی کدام نوع کم‌تر است؟

«گروه خونی دانش‌آموزان یک کلاس/ قد دانش‌آموزان شهر تهران/ رشتهٔ تحصیلی دانش‌آموزان یک مدرسه/ تعداد مورچه‌های جهان/ میزان بارندگی سالانه در یک شهر»

۱) کمی پیوسته
۲) کیفی اسمی
۳) کمی گسسته
۴) کیفی ترتیبی

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

متغیر و انواع آن در آمار:

متغیر: ویژگی‌ای از اعضای یک جامعه است که بررسی می‌شود و معمولاً از یک عضو به عضو دیگر تغییر می‌کند.

مقدار متغیر: عددی یا صفتی را که به ویژگی یک عضو نسبت داده می‌شود، مقدار متغیر می‌نامند.

۱) متغیرهای کمّی (قابل اندازه‌گیری): متغیرهایی را که قابل اندازه‌گیری‌اند، متغیرهای کمی می‌نامند. این متغیرها بر دو نوع‌اند:

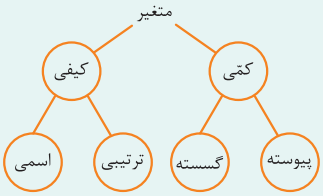
- **متغیر پیوسته:** متغیری است که اگر دو مقدار a و b را بتواند اختیار کند، هر مقدار بین آن‌ها را نیز بتواند اختیار کند (مثال: وزن افراد و دمای محیط).
- **متغیر گسسته:** متغیری است که پیوسته نباشد؛ یعنی فقط مقادیر مشخص و مجزایی را می‌پذیرد (مثال: تعداد خودروهایی که در طول یک روز از یک خیابان رد می‌شوند).

۲) متغیرهای کیفی (غیرقابل اندازه‌گیری): متغیرهایی را که قابل اندازه‌گیری نیستند، متغیرهای کیفی می‌نامند (مثال: میزان رضایت‌مندی از شغل).

این متغیرها نیز بر دو نوع‌اند:

- **متغیر ترتیبی:** متغیری است که در آن نوعی ترتیب طبیعی وجود دارد (مثال: پایهٔ تحصیلی مانند ابتدایی، متوسطهٔ دورهٔ اول، متوسطهٔ دورهٔ دوم).
- **متغیر اسمی (غیرترتیبی):** متغیری که هیچ‌گونه ترتیبی در مقادیر آن نیست (مثال: گروه خونی).

انواع متغیر در یک نگاه (نمودار درختی):



پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: ابتدا نوع هر یک از متغیرهای داده‌شده را مشخص می‌کنیم:

گروه خونی دانش‌آموزان یک کلاس: کیفی اسمی

قد دانش‌آموزان شهر تهران: کمی پیوسته

رشتهٔ تحصیلی دانش‌آموزان یک مدرسه: کیفی اسمی

تعداد مورچه‌های جهان: کمی گسسته

میزان بارندگی سالانه در یک شهر: کمی پیوسته

گام دوم: همان‌طور که مشخص است، فراوانی متغیر کیفی ترتیبی، صفر و از سایرین کم‌تر است.

کتاب درسی

نوع متغیرهای زیر را از نظر کمی، کیفی، گسسته، پیوسته، اسمی و ترتیبی مشخص کنید.

الف) میزان بارندگی برحسب سانتی‌متر در یک شهر

ب) گروه خونی دانش‌آموزان یک کلاس

(سؤال ۱۸ ـ امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۳)

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲ برای چند عددطبیعی n، بازهٔ $(\frac{n+۴}{۳}, \frac{n+۲}{n})$ شامل فقط یک عدد صحیح است؟

۱) صفر ۲) ۱

۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۲

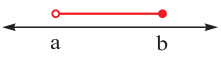
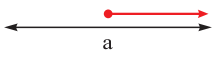
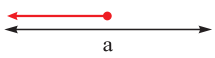
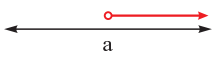
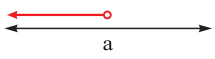
Hint

برای این‌که بازه اصلاً وجود داشته باشه، اولاً باید ابتدای بازه از انتهای بازه کوچک‌تر باشه؛ با یه طرفین‌وسطین ساده واسه n طبیعی، محدوده‌اش رو پیدا کنید!

درس Box

انواع بازه:

بازه‌ها، زیرمجموعه‌هایی از عددهای حقیقی هستند که کاربردهای زیادی دارند. انواع بازه‌ها را در جدول زیر نوشته‌ایم (با فرض $a < b$).

بازه	نوع بازه	نمایش مجموعه‌ای	نمایش روی محور اعداد حقیقی (هندسی)
(a,b)	باز	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	
$[a,b]$	بسته	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$	
$[a,b)$	نیم‌باز	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}$	
$(a,b]$	نیم‌باز	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\}$	
$[a,+\infty)$	نیم‌باز	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \ge a\}$	
$(-\infty,a]$	نیم‌باز	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \le a\}$	
$(a,+\infty)$	باز	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$	
$(-\infty,a)$	باز	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$	
$(-\infty,+\infty)$	باز	$\{x \in \mathbb{R}\}$	

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: برای این‌که بازه معنا داشته باشد، باید ابتدای بازه، کوچک‌تر از انتهای آن باشد:

$$\frac{n+۴}{۳} < \frac{n+۲}{n}$$

گام دوم: برای حل این نامعادله، با توجه به این‌که n یک عدد طبیعی است $(n \ge ۱)$، مخرج‌ها همواره مثبت هستند و می‌توانیم طرفین‌وسطین انجام دهیم:

$$n(n+۴) < ۳(n+۲) \Rightarrow n^۲ + ۴n < ۳n + ۶$$

$$\Rightarrow n^۲ + n - ۶ < ۰ \Rightarrow \underbrace{(n+۳)}_{\substack{n \ge ۱ \\ n+۳ \ge ۴}}(n-۲) < ۰ \Rightarrow n - ۲ < ۰ \Rightarrow n < ۲$$

گام سوم: تنها عدد طبیعی که در شرط $n < ۲$ صدق می‌کند، $n = ۱$ است که به ازای آن داریم:

$(\frac{۵}{۳}, ۳) \Rightarrow$ تنها شامل یک عدد صحیح $\{۲\}$ است.

بنابراین به ازای ۱ عدد طبیعی، بازهٔ مورد نظر، شامل فقط یک عدد صحیح است.

تیزبازی

چون n عددی طبیعی است، با جای‌گذاری داریم:

$n = ۱: (\frac{۵}{۳}, ۳)$ ✓

$n = ۲: (۲, ۲)$ ✗ بازه نیست.

$n = ۳: (\frac{۷}{۳}, \frac{۵}{۳})$ ✗ بازه نیست.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

$n = ۴: (\frac{۸}{۳}, \frac{۶}{۴}):$ بازه نیست. ✗

همان‌طور که مشاهده می‌شود، از $n \geq ۲$ دیگر بازه‌ای نداریم، پس فقط به ازای $n = ۱$ رابطه برقرار است.

کنکور

برای چند عدد طبیعی n، بازهٔ $(\frac{۳-n}{۲}, \frac{n+۳}{n})$ شامل فقط یک عدد صحیح است؟ *(سؤال ۱۱۲ کنکور تجربی ۱۴۰۴ ـ نوبت اول)*

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳ طول اضلاع یک مستطیل x و y هستند و z طول قطر آن است. اگر اعداد x، y و z با همین ترتیب، تشکیل دنبالهٔ حسابی و اعداد ۱۲ و $3x$ و y نیز با همین ترتیب تشکیل دنبالهٔ هندسی دهند، مقدار z کدام است؟

۱) $\frac{16}{27}$ ۲) $\frac{24}{27}$ ۳) $\frac{64}{27}$ ۴) $\frac{80}{27}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint از ویژگی واسطهٔ حسابی و قضیهٔ فیثاغورس استفاده کنید تا رابطهٔ بین طول و عرض و قطر دربیاد؛ بعدش با واسطهٔ هندسی کار رو تموم کنید!

درس Box

واسطهٔ حسابی:

در یک دنبالهٔ حسابی، اگر سه عدد a، c و b به طور متوالی (پشت سر هم) قرار گرفته باشند، به جملهٔ میانی یعنی c، «واسطهٔ حسابی» بین دو عدد a و b گفته می‌شود.

از آن‌جایی که در دنبالهٔ حسابی فاصلهٔ (قدرنسبت) جملات متوالی با هم برابر است، جملهٔ وسط همواره دقیقاً میانگینِ حسابی دو جملهٔ کناریِ خود است، بنابراین رابطهٔ زیر همواره برقرار خواهد بود:

$$c=\frac{a+b}{2}$$

واسطهٔ هندسی:

در یک دنبالهٔ هندسی، اگر سه عدد a، c و b به صورت متوالی قرار داشته باشند، به جملهٔ وسطی یعنی c، «واسطهٔ هندسی» بین دو عدد a و b می‌گویند.

در دنبالهٔ هندسی، چون نسبت هر جمله به جملهٔ قبلی‌اش مقداری ثابت است، مربع (توان دوم) جملهٔ وسط، همیشه با حاصل‌ضرب دو جملهٔ کناری‌اش برابر می‌شود، پس می‌توانیم این رابطهٔ مهم را بنویسیم:

$$c^2=a\times b$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا با توجه به رابطهٔ واسطهٔ حسابی، می‌توان نوشت:

$$2y=x+z \quad (1)$$

گام دوم: هم‌چنین بین اضلاع مستطیل و قطر آن، رابطهٔ فیثاغورس برقرار است، پس:

$$x^2+y^2=z^2 \Rightarrow y^2=z^2-x^2 \Rightarrow y^2=(z-x)(z+x)$$

$$\xrightarrow{(1)} y^2=2y(z-x) \xrightarrow{y\neq 0} \frac{y}{2}=z-x \quad (2)$$

گام سوم: حال به کمک رابطه‌های (۱) و (۲)، مقدار y و x را برحسب z می‌نویسیم:

$$\begin{cases}2y=z+x\\ \frac{y}{2}=z-x\end{cases} \Rightarrow 2z=\frac{5}{2}y \Rightarrow y=\frac{4}{5}z \Rightarrow x=\frac{3}{5}z \quad (3)$$

گام چهارم: حال در دنبالهٔ هندسی، با توجه به رابطهٔ واسطهٔ هندسی داریم:

$$(3x)^2=12y \Rightarrow 9x^2=12y \xrightarrow{(3)} 9(\frac{3}{5}z)^2=12(\frac{4}{5}z) \Rightarrow \frac{81}{25}z^2=\frac{48}{5}z$$

$$\xrightarrow{z\neq 0} z=\frac{48}{5}\times\frac{25}{81}=\frac{48\times 5}{81}=\frac{80}{27}$$

تیزبازی تنها مثلثی که اضلاع آن دنبالهٔ حسابی می‌سازند، مثلث معروف ۵ ـ ۴ ـ ۳ و مضارب آن است، پس:

$$x=3k \ , \ y=4k \ , \ z=5k \Rightarrow 9x^2=12y \Rightarrow 9(3k)^2=12(4k) \Rightarrow 81k^2=48k$$

$$\Rightarrow 81k^2-48k=0 \xrightarrow{k\neq 0} k=\frac{48}{81} \Rightarrow z=\frac{5\times 48}{81}=\frac{80}{27}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

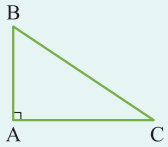
۴ **امید می‌خواهد ارتفاع یک ساختمان را که طول سایهٔ آن، ۱۵ متر است، حساب کند. قد امید ۱/۸ متر و طول سایهٔ او در همان لحظه ۰/۶ متر است. ارتفاع ساختمان بر حسب متر کدام است؟**

۱) ۳۰ ۲) ۴۲ ۳) ۴۵ ۴) ۶۰

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه:



در هر مثلث قائم‌الزاویه، برای معرفی و محاسبهٔ نسبت‌های مثلثاتی یک زاویهٔ حاده (تند)، ابتدا باید اضلاع مثلث را نسبت به آن زاویه نام‌گذاری کنیم (ضلع مقابل، ضلع مجاور و وتر) و سپس نسبت طول این اضلاع را به یکدیگر بسنجیم.

با فرض این‌که زاویهٔ A قائمه باشد (وتر مثلث ضلع BC است)، برای دو زاویهٔ حادهٔ B و C، چهار نسبت اصلی مثلثاتی به شکل زیر تعریف می‌شوند:

- **سینوس (sin)**: نسبت طول «ضلع مقابل» به آن زاویه، به طول «وتر» مثلث:

$$\sin\hat{B}=\frac{AC}{BC}\ ,\ \sin\hat{C}=\frac{AB}{BC}$$

- **کسینوس (cos)**: نسبت طول «ضلع مجاور» به آن زاویه، به طول «وتر» مثلث:

$$\cos\hat{B}=\frac{AB}{BC}\ ,\ \cos\hat{C}=\frac{AC}{BC}$$

- **تانژانت (tan)**: نسبت طول «ضلع مقابل» به زاویه، به طول «ضلع مجاور» همان زاویه:

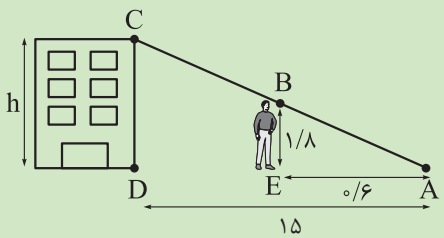
$$\tan\hat{B}=\frac{AC}{AB}\ ,\ \tan\hat{C}=\frac{AB}{AC}$$

- **کتانژانت (cot)**: نسبت طول «ضلع مجاور» به زاویه، به طول «ضلع مقابل» همان زاویه (این نسبت، دقیقاً معکوس نسبت تانژانت است.)

$$\cot\hat{B}=\frac{AB}{AC}\ ,\ \cot\hat{C}=\frac{AC}{AB}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: ابتدا شکل زیر را در نظر بگیرید:

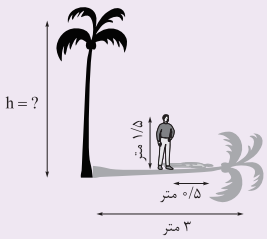


گام دوم: با توجه به شکل، در مثلث‌های ABE و ACD داریم:

$$\overset{\Delta}{ABE}:\ \tan\hat{A}=\frac{BE}{AE}=\frac{1/8}{0/6}=3$$
$$\overset{\Delta}{ACD}:\ \tan\hat{A}=\frac{CD}{AD}=\frac{h}{15}$$
$$\Rightarrow\ \frac{h}{15}=3\ \Rightarrow\ h=45$$

کتاب درسی

علی می‌خواهد ارتفاع یک درخت را که طول سایهٔ آن ۳ متر است، حساب کند. قد علی، ۱/۵ متر و طول سایهٔ او در همان لحظه، ۰/۵ متر است. ارتفاع درخت چه‌قدر است؟ (ریاضی (۱) ـ تمرین ۱ صفحهٔ ۳۴)



SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵ اگر $-\frac{\pi}{۴} < x < \frac{\pi}{۴}$ و $\cos ۳x = ۱ - ۲m$ باشد، مقدار m کدام می‌تواند باشد؟

۱) -۱ ۲) $\frac{۱}{۳}$

۳) ۱ ۴) $-\frac{۱}{۳}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint

اول، محدودهٔ زاویهٔ $۳x$ رو مشخص کنید و روی دایرهٔ مثلثاتی ببینید کسینوس تو این بازه بین چه اعدادی نوسان می‌کنه؛ بعدش عبارت $۱ - ۲m$ رو تو همون محدوده گیر بندازید!

درس Box

دایرهٔ مثلثاتی: دایرهٔ مثلثاتی، یک دایرهٔ استاندارد در صفحهٔ مختصات است که دو ویژگی اساسی دارد: ۱) مرکز آن دقیقاً روی مبدأ مختصات $O(۰,۰)$ قرار دارد. ۲) شعاع آن دقیقاً برابر با ۱ واحد است $(R = ۱)$.

برای اندازه‌گیری زاویه‌ها روی این دایره، یک قرارداد جهانی داریم: همیشه نقطهٔ $A(۱,۰)$ (محل تقاطع دایره با بخش مثبت محور طول‌ها) را به عنوان نقطهٔ شروع در نظر می‌گیریم. پاره‌خط OA، «ضلع ابتدایی» تمام زاویه‌هاست. حالا اگر این پاره‌خط را به اندازهٔ زاویهٔ α حول مبدأ دوران دهیم، به نقطهٔ جدیدی مثل P روی محیط دایره می‌رسیم. زاویهٔ α، همان زاویهٔ مثلثاتی متناظر با نقطهٔ P است. جهت چرخش پادساعتگرد (خلاف عقربه‌های ساعت) به عنوان جهت مثبت و چرخش ساعت‌گرد به عنوان جهت منفی در نظر گرفته می‌شود.

محورهای سینوس و کسینوس روی دایرهٔ مثلثاتی: زیبایی و قدرت دایرهٔ مثلثاتی در این است که نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه را مستقیماً به مختصات یک نقطه روی دایره تبدیل می‌کند! فرض کنید نقطهٔ $P(x,y)$ روی دایرهٔ مثلثاتی قرار دارد و زاویهٔ α را می‌سازد. اگر از نقطهٔ P به محورهای مختصات عمود کنیم، یک مثلث قائم‌الزاویه ساخته می‌شود که وتر آن همان شعاع دایره (یعنی ۱) است. طبق تعریف نسبت‌های مثلثاتی در این مثلث:

$\sin\alpha = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{y}{۱} = y$ $\quad$ $\cos\alpha = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{x}{۱} = x$

بنابراین:

- محور طول‌ها (محور xها) همان محور کسینوس‌ها است. طولِ نقطهٔ P دقیقاً مقدار $\cos\alpha$ را نشان می‌دهد.
- محور عرض‌ها (محور yها) همان محور سینوس‌ها است. عرضِ نقطهٔ P دقیقاً مقدار $\sin\alpha$ را نشان می‌دهد.
- حدود سینوس و کسینوس: چون نقطهٔ P همیشه روی محیط دایره‌ای به شعاع ۱ حرکت می‌کند، مختصات طول (x) و عرض (y) آن هرگز نمی‌تواند از ۱ بیشتر یا از -۱ کم‌تر شود. به همین دلیل، برای هر زاویهٔ دلخواه α، همواره داریم:

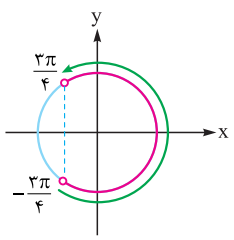
$-۱ \le \cos\alpha \le ۱$ $\quad$ $-۱ \le \sin\alpha \le ۱$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا توجه کنید که:

$$-\frac{\pi}{۴} < x < \frac{\pi}{۴} \Rightarrow -\frac{۳\pi}{۴} < ۳x < \frac{۳\pi}{۴}$$

گام دوم: حال با مشخص‌کردن محدودهٔ x روی دایرهٔ مثلثاتی، بیشترین و کم‌ترین مقدار $\cos ۳x$ را به دست می‌آوریم:



$$-\frac{\sqrt{۲}}{۲} < \cos ۳x \le ۱$$

گام سوم: با جای‌گذاری مقدار $\cos ۳x$ برحسب m داریم:

$$-\frac{\sqrt{۲}}{۲} < ۱ - ۲m \le ۱ \Rightarrow \frac{-\sqrt{۲}-۲}{۲} < -۲m \le ۰ \Rightarrow ۰ \le m < \frac{۲+\sqrt{۲}}{۴} \simeq ۰/۸۵$$

در نتیجه مقدار m می‌تواند برابر صفر باشد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۶ حاصل عبارت $\sqrt{\sqrt{۳}-۱}\sqrt[۴]{(۲-\sqrt{۳})^{-۱}}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$
۲) $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$
۳) $\sqrt[۴]{۲}$
۴) $\frac{۱}{\sqrt[۴]{۲}}$

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

روش‌های گویاکردن مخرج‌های گنگ:

بسته به ظاهر مخرج کسر، از یکی از سه ترفند زیر استفاده می‌کنیم:

- **از بین بردن ریشه (برای رادیکال‌های تکی):** اگر مخرج کسر فقط شامل یک عبارت رادیکالی به فرم $\sqrt[n]{a^m}$ باشد (با شرط $m<n$)، صورت و مخرج کسر را در عاملِ $\sqrt[n]{a^{n-m}}$ ضرب می‌کنیم.
- **استفاده از اتحاد مزدوج (برای جمع و تفریق ریشه‌های دوم):** اگر در مخرج کسر یکی از عبارت‌های دوجمله‌ای $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ یا $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ وجود داشته باشد، صورت و مخرج کسر را در **عبارت مزدوج آن** (یعنی همان عبارت ولی با علامتِ وسطِ قرینه) ضرب می‌کنیم. با این کار، مخرج کسر از طریق اتحاد مزدوج به فرم بدون رادیکالِ $a-b$ درمی‌آید.
- **استفاده از اتحاد چاق و لاغر (برای جمع و تفریق ریشه‌های سوم):** اگر در مخرج کسر، یکی از عبارت‌های لاغر ($\sqrt[۳]{a}-\sqrt[۳]{b}$ یا $\sqrt[۳]{a}+\sqrt[۳]{b}$) و یا یکی از عبارت‌های چاق ($\sqrt[۳]{a^۲}\pm\sqrt[۳]{ab}+\sqrt[۳]{b^۲}$) وجود داشته باشد، برای ساختن اتحاد مکعب دوجمله‌ای، صورت و مخرج کسر را در **عبارت غایب (مکمل آن)** ضرب می‌کنیم (پرانتز لاغر در چاق و چاق در لاغر).

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا توجه کنید که:

$$(۲-\sqrt{۳})^{-۱}=\frac{۱}{۲-\sqrt{۳}}\times\frac{۲+\sqrt{۳}}{۲+\sqrt{۳}}=\frac{۲+\sqrt{۳}}{۴-۳}=۲+\sqrt{۳}$$

گام دوم: حال عبارت داده‌شده را به شکل زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\sqrt[۴]{۲+\sqrt{۳}}\sqrt[۴]{(\sqrt{۳}-۱)^۲}=\sqrt[۴]{(۲+\sqrt{۳})(۴-۲\sqrt{۳})}=\sqrt[۴]{۸-۴\sqrt{۳}+۴\sqrt{۳}-۶}=\sqrt[۴]{۲}$$

کنکور

حاصل عبارت $\sqrt{۱+\sqrt{۷}}\sqrt[۴]{(۴+\sqrt{۷})^{-۱}}$ کدام است؟ (سؤال ۱۰۱ کنکور تجربی ۱۴۰۱)

۱) ۱
۲) $\sqrt[۴]{۲}$
۳) ۲
۴) $۲\sqrt[۴]{۲}$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷ در حل معادلهٔ $۳x^۲ - ۱۸x + ۸ = ۰$ به روش مربع کامل، به معادلهٔ $(x - \frac{k}{۲})^۲ = ۱۹L$ رسیده‌ایم. حاصل $۳L - k$ کدام است؟

۱) -۵ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) -۶

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint یادتون نره تو روش مربع کامل، اولِ کار باید کل معادله رو به ضریب $x^۲$ تقسیم کنید تا خیالتون راحت بشه، بعد برید سراغ نصف‌کردنِ ضریب x!

درس Box

معادلهٔ درجه‌دوم و روش‌های حل آن: هر معادله به صورت $ax^۲ + bx + c = ۰$ که در آن، $a \neq ۰$ را **معادلهٔ درجه‌دوم** می‌نامند. عددهای a، b و c را ضریب‌های این معادله می‌نامند و x مجهول است. منظور از حل‌کردن این معادله، پیداکردن عددهایی حقیقی مانند x است که به ازای آن‌ها تساوی برقرار است. اگر هیچ‌کدام از ضریب‌های a، b و c صفر نباشند، معادله را **کامل** می‌نامند.

روش تجزیه: گاهی با استفاده از اتحاد جمله‌مشترک یا روش‌های دیگر تجزیه، می‌توان معادلهٔ درجه‌دوم را به حاصل‌ضرب دو عبارت درجه‌اول تبدیل کرد. با برابر صفر قراردادن هر پرانتز، معادله به دو معادلهٔ درجه‌اول ساده تبدیل شده و جواب‌ها به دست می‌آیند.

روش ریشه‌گیری: اگر معادلهٔ درجه‌دوم پس از ساده‌سازی به فرم مربع کامل $(ax + b)^۲ = c$ درآید (با این شرط که $a \neq ۰$ و سمت راست یعنی $c \geq ۰$ باشد)، می‌توانیم با ریشه‌گیری از دو طرف تساوی، جواب‌های آن را به صورت زیر به دست آوریم:

$$ax + b = \pm\sqrt{c} \Rightarrow ax = -b \pm \sqrt{c} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-b - \sqrt{c}}{a} \\ x = \dfrac{-b + \sqrt{c}}{a} \end{cases}$$

روش مربع کامل کردن: اگر معادلهٔ درجه‌دوم به صورت $x^۲ + mx = n$ باشد، می‌توانیم با اضافه‌کردن مقدار $\frac{m^۲}{۴}$ (یعنی مربعِ نصفِ ضریب x) به هر دو طرف معادله، سمت چپ را به صورت مربع یک دوجمله‌ای درآوریم و سپس معادله را با روش ریشه‌گیری حل کنیم:

$$x^۲ + mx = n \Rightarrow x^۲ + mx + \frac{m^۲}{۴} = n + \frac{m^۲}{۴} \Rightarrow (x + \frac{m}{۲})^۲ = \frac{۴n + m^۲}{۴}$$

نکتهٔ مهم در روش مربع کامل کردن: در استفاده از روش مربع کامل‌کردن، همواره به یاد داشته باشید که ضریب $x^۲$ باید برابر با ۱ باشد. اگر ضریب $x^۲$ عددی غیر از ۱ بود، در اولین گام حتماً باید کل معادله (هر دو طرف) را بر ضریب $x^۲$ تقسیم کنیم و سپس مراحل را پیش ببریم.

روش کلی (روش دلتا Δ): برای حل هر معادلهٔ درجه‌دوم استاندارد به فرم $ax^۲ + bx + c = ۰$، ابتدا عبارتی به نام «مبین» یا «دلتا» را با فرمول $\Delta = b^۲ - ۴ac$ محاسبه می‌کنیم.

- اگر $\Delta \geq ۰$ باشد، معادله دارای جوابِ حقیقی است و این جواب‌ها از فرمول کلی زیر به دست می‌آیند:

$$x_۱ = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{۲a}, \quad x_۲ = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{۲a}$$

- اگر $\Delta < ۰$ باشد، معادله هیچ ریشهٔ حقیقی‌ای ندارد (جواب ندارد).

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: ابتدا معادلهٔ داده‌شده را به روش مربع کامل بازنویسی می‌کنیم:

$$۳x^۲ - ۱۸x + ۸ = ۰ \xrightarrow{\div ۳} x^۲ - ۶x + \frac{۸}{۳} = ۰ \Rightarrow x^۲ - ۶x = \frac{-۸}{۳}$$

$$\xrightarrow{+۹} x^۲ - ۶x + ۹ = \frac{-۸}{۳} + ۹ \Rightarrow (x - ۳)^۲ = \frac{۱۹}{۳}$$

گام دوم: با مقایسهٔ معادلهٔ به‌دست‌آمده با معادلهٔ صورت سؤال، داریم:

$$\begin{cases} \frac{k}{۲} = ۳ \Rightarrow k = ۶ \\ ۱۹L = \frac{۱۹}{۳} \Rightarrow L = \frac{۱}{۳} \end{cases} \Rightarrow ۳L - k = ۳(\frac{۱}{۳}) - ۶ = -۵$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۸ **اگر سهمی به معادلهٔ $y=(1-2a)x^2+2x-3$ نسبت به خط $x=-1$ متقارن باشد، این منحنی محور xها را با کدام طول منفی قطع می‌کند؟**

۱) -4 ۲) -3 ۳) -2 ۴) -1

پاسخ: گزینهٔ ۲

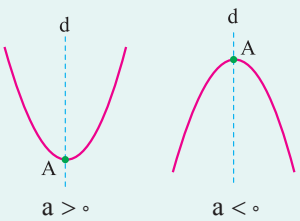
Hint خط تقارن سهمی همون طول رأس سهمیه! با فرمول طول رأس، ضریب مجهول رو پیدا کنید و بعدش برید سراغ پیداکردنِ محل برخورد نمودار با محور طول‌ها.

درس Box **سهمی و ویژگی‌های ظاهری آن:** به نمودار تابع درجه‌دوم با ضابطهٔ $y=ax^2+bx+c$ (که در آن $a,b,c,a\neq 0$ عددهایی حقیقی‌اند.)، **سهمی** می‌گویند.

شکل ظاهری سهمی کاملاً به علامت ضریب a بستگی دارد:

- اگر $a>0$ باشد، دهانهٔ سهمی رو به بالا باز می‌شود و نقطهٔ A در نمودار، **پایین‌ترین نقطهٔ** سهمی است.
- اگر $a<0$ باشد، دهانهٔ سهمی رو به پایین باز می‌شود و نقطهٔ A در نمودار، **بالاترین نقطهٔ** سهمی است.

در هر دو حالت، به نقطهٔ A **رأس سهمی** می‌گویند، هم‌چنین خط d که دقیقاً از رأس سهمی می‌گذرد و موازی با محور عرض‌ها (محور y) است، **محور تقارن سهمی** نامیده می‌شود (زیرا سهمی را به دو نیمهٔ کاملاً متقارن تقسیم می‌کند).



مختصات رأس و معادلهٔ خط تقارن سهمی: برای یافتن دقیق موقعیت سهمی در صفحهٔ مختصات، شناختن مختصات رأس و خط تقارن آن از روی معادلهٔ استاندارد $y=ax^2+bx+c$ بسیار ضروری است:

- **مختصات رأس سهمی:** نقطهٔ رأس سهمی، همواره دارای مختصات زیر است (که طول آن از روی ضرایب و عرض آن از روی مقدار دلتا به دست می‌آید):

$$\text{رأس سهمی}=\left(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a}\right)$$

- **معادلهٔ محور تقارن:** از آن‌جا که محور تقارن همواره یک خط کاملاً عمودی است که دقیقاً از نقطهٔ رأس سهمی عبور می‌کند، معادلهٔ آن برابر با طولِ همان نقطهٔ رأس خواهد بود:

$$x=-\frac{b}{2a}$$

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** با توجه به این‌که سهمی نسبت به خط $x=-1$ متقارن است، طول رأس آن $x_S=-1$ است:

$$x_s=\frac{-2}{2(1-2a)}=-1 \Rightarrow 1=1-2a \Rightarrow a=0$$

گام دوم: با جای‌گذاری مقدار a، معادلهٔ سهمی را نوشته و طول نقاط برخورد آن با محور xها را مشخص می‌کنیم:

$$a=0 \Rightarrow y=x^2+2x-3$$

$$x^2+2x-3=0 \Rightarrow (x-1)(x+3)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-3 \end{cases}$$

سهمی در نقطه‌ای با طول منفی $x=-3$ با محور xها برخورد دارد.

کتاب درسی **در سهمی $y=ax^2+2x+3$، خط $x=2$ محور تقارن آن است. مقدار a را به دست آورید.** (سؤال ۱۰ـ امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۳)

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹ در بازهٔ (a,b) عبارت $-\frac{۱}{۳}x^۲+۱۷x-۴۸$ مثبت و عبارت $|\frac{x-۲}{۳}+۱|$ کوچک‌تر از ۲ است. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۵ ۳) ۳ ۴) ۲

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint

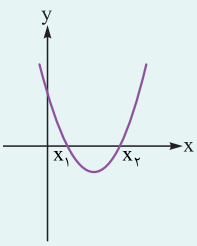
هر کدوم از نامعادلات رو جداگانه حل کنید (یکی با تعیین علامت و یکی با بازکردن قدرمطلق)؛ در آخر از جواب‌هاشون اشتراک بگیرید تا مرزهای بازهٔ نهایی مشخص بشه.

درس Box

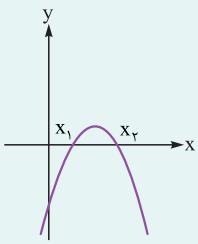
تعیین علامت چندجمله‌ای درجه‌دوم: چندجمله‌ای درجه‌دوم $P(x)=ax^۲+bx+c$ را در نظر بگیرید (با فرض $a\neq ۰$)، هنگام تعیین علامت این چندجمله‌ای، بسته به مقدار دلتا $(\Delta=b^۲-۴ac)$، دقیقاً با یکی از سه حالت زیر روبه‌رو می‌شویم:

حالت اول: $\Delta>۰$ در این حالت معادلهٔ $ax^۲+bx+c=۰$ دو ریشهٔ حقیقی و متمایز دارد. این جواب‌ها را $x_۱$ و $x_۲$ می‌نامیم و فرض می‌کنیم $x_۱<x_۲$، در این صورت علامت چندجمله‌ای **فقط در بین دو ریشه مخالف علامت** a و در خارج از دو ریشه موافق علامت a است:

x	$-\infty$		$x_۱$		$x_۲$		$+\infty$
$ax^۲+bx+c$	موافق علامت a	۰	مخالف علامت a	۰	موافق علامت a		



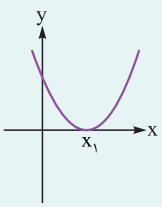
$a>۰$



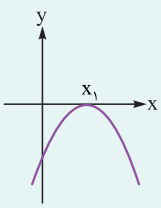
$a<۰$

حالت دوم: $\Delta=۰$ در این حالت معادله یک جواب (ریشهٔ مضاعف) دارد. این جواب را $x_۱$ می‌نامیم. چندجمله‌ای در ریشه برابر صفر است و در بقیهٔ نقاط، **همواره موافق علامت a** خواهد بود:

x	$-\infty$		$x_۱$		$+\infty$
$ax^۲+bx+c$	موافق علامت a	۰	موافق علامت a		



$a>۰$

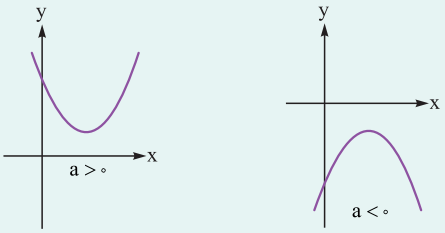


$a<۰$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

حالت سوم: $\Delta < 0$ در این حالت معادله هیچ جواب حقیقی‌ای ندارد (نمودار محور طول‌ها را قطع نمی‌کند). در این شرایط، علامت چندجمله‌ای در کل دامنهٔ اعداد حقیقی، **همواره موافق علامت a** است:

x	$-\infty$		$+\infty$
ax^2+bx+c		موافق علامت a	



نکته

حل نامعادلات قدرمطلقی: برای حل نامعادلاتی که شامل قدرمطلق هستند، با توجه به تعریف قدرمطلق (فاصله تا مبدأ)، می‌توانیم از ویژگی‌های استاندارد زیر استفاده کنیم:

- حالت $|x|<a$: اگر $a>0$ باشد، جواب نامعادله به فرم $-a<x<a$ است (اگر $a\le 0$ باشد، نامعادله جواب ندارد، چون قدرمطلق نمی‌تواند اکیداً منفی باشد).
- حالت $|x|\le a$: اگر $a\ge 0$ باشد، جواب نامعادله به فرم $-a\le x\le a$ است (اگر $a<0$ باشد، نامعادله جواب ندارد).
- حالت $|x|>a$: اگر $a\ge 0$ باشد، جواب نامعادله شامل دو بازهٔ جداگانه است: $x>a$ یا $x<-a$. (اگر $a<0$ باشد، مجموعه‌جواب نامعادله برابر کل اعداد حقیقی $(\mathbb{R})$ است، زیرا قدرمطلق همواره نامنفی و در نتیجه بزرگ‌تر از یک عدد منفی است).
- حالت $|x|\ge a$: اگر $a\ge 0$ باشد، جواب نامعادله شامل بازه‌های $x\ge a$ یا $x\le -a$ است (اگر $a\le 0$ باشد، مجموعه‌جواب نامعادله باز هم برابر $\mathbb{R}$ است).

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: عبارت اول را تعیین علامت می‌کنیم:

$$-\frac{1}{3}x^2+17x-48=0 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-17\pm\sqrt{17^2-4\times\frac{1}{3}\times 48}}{-\frac{2}{3}}=\frac{-17\pm 15}{-\frac{2}{3}}=48\text{ و }3$$

x	$-\infty$		3		48	$+\infty$
$-\frac{1}{3}x^2+17x-48$	$-$	0	$+$	0	$-$	

$$\Rightarrow -\frac{1}{3}x^2+17x-48>0 \Rightarrow x\in(3,48) \quad (1)$$

یه جور دیگه

جواب‌های معادلهٔ $-\frac{1}{3}x^2+17x-48=0$ را به کمک روش روسی به دست می‌آوریم:

$$\xrightarrow{a\times c} r^2+17r+16=(r+1)(r+16)=0 \Rightarrow r_1=-1, r_2=-16 \xrightarrow{\div -\frac{1}{3}} x_1=3, x_2=48$$

گام دوم: هم‌چنین با توجه به ویژگی‌های قدرمطلق برای عبارت دوم داریم:

$$\left|\frac{x-2}{3}+1\right|<2 \Rightarrow -2<\frac{x-2}{3}+1<2 \Rightarrow -3<\frac{x-2}{3}<1 \Rightarrow -9<x-2<3 \Rightarrow -7<x<5 \quad (2)$$

گام سوم: برای این‌که هم‌زمان هر دو نامعادله برقرار باشند، از (۱) و (۲) اشتراک می‌گیریم:

$$(1)\cap(2): (3,48)\cap(-7,5)=(3,5)$$

بنابراین بزرگ‌ترین بازهٔ ممکن برای (a,b) بازهٔ $(3,5)$ و در نتیجه بیشترین مقدار $b-a$ برابر ۲ است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۰ اگر تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x^۳-ax^۲-bx}{x^۲+۲x-۳}$ روی $\mathbb{R}-\{-۳,۱\}$ همانی و تابع g با ضابطهٔ $g(x)=|۲x-a+۲|+|۲x+b-۱|$ روی بازهٔ $[m,n]$ ثابت باشد، بیشترین مقدار $n-m$ کدام است؟

۱) ۲
۲) ۱
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) $\frac{۳}{۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

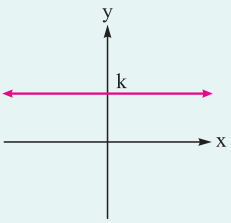
Hint تابع f که همانیه، یعنی خروجیش دقیقاً خود x می‌شه. برای تابع g هم ریشه‌های داخل قدرمطلق رو پیدا کنید و ببینید تو کدوم بازه، xها خط می‌خورن و یه عدد ثابت می‌مونه.

درس Box

معرفی تابع ثابت و ویژگی‌های آن:

تابع ثابت، به تابعی گفته می‌شود که خروجی آن فارغ از نوع ورودی، همواره یک مقدار مشخص و بدون تغییر است. به بیان ریاضی، برد این تابع تنها از یک عضو تشکیل شده است.

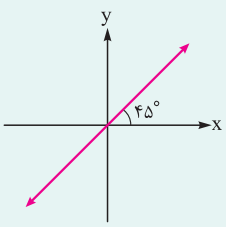
اگر تابع f را یک تابع ثابت در نظر بگیریم، فرمول یا ضابطهٔ آن به صورت $f(x)=k$ نوشته می‌شود که در آن k نمایانگر یک عدد حقیقی ثابت است. در شرایطی که دامنهٔ این تابع تمام اعداد حقیقی (مجموعهٔ $\mathbb{R}$) باشد، نمودار آن به شکل یک خط کاملاً افقی و موازی با محور طول‌ها (محور x) رسم می‌شود که از نقطهٔ k روی محور عرض‌ها می‌گذرد:



آشنایی با تابع همانی:

تابع همانی تابعی است که مانند یک آینه عمل می‌کند، یعنی هیچ تغییری روی ورودی‌های خود اعمال نمی‌کند و هر مقداری که از دامنه به آن داده شود، دقیقاً همان مقدار را در برد به عنوان خروجی تحویل می‌دهد، از این‌رو در تابع همانی همواره دامنه و برد با یکدیگر برابر هستند.

چنان‌چه دامنهٔ این تابع مجموعهٔ اعداد حقیقی در نظر گرفته شود؛ ضابطهٔ آن به صورت $y=x$ (یا $f(x)=x$) خواهد بود. نمودار چنین تابعی، یک خط راست است که از مبدأ مختصات عبور کرده و به عنوان نیمساز ربع اول و سوم شناخته می‌شود، بنابراین با بخش مثبت محور x، زاویهٔ دقیق ۴۵ درجه می‌سازد.



پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: تابع f، روی دامنه‌اش تابعی همانی است، پس ضابطهٔ آن باید به صورت $f(x)=x$ باشد:

$$\frac{x^۳-ax^۲-bx}{x^۲+۲x-۳}=x \Rightarrow x^۳-ax^۲-bx=x^۳+۲x^۲-۳x$$

$$(۲+a)x^۲+(b-۳)x=۰ \Rightarrow \begin{cases} a=-۲ \\ b=۳ \end{cases}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

تیزبازی

با فاکتورگیری از x در صورت ضابطهٔ تابع f داریم:

$$f(x)=\frac{x(x^{۲}-ax-b)}{x^{۲}+۲x-۳}$$

حال برای این‌که f تابعی همانی باشد، باید: $a=-۲, b=۳$

گام دوم: با جای‌گذاری مقادیر a و b، ضابطهٔ تابع g را بازنویسی کرده و به کمک ریشه‌های داخل قدرمطلق ضابطهٔ تابع را به صورت چندضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$g(x)=|۲x+۴|+|۲x+۲| \Rightarrow g(x)=\begin{cases}-۴x-۶ & ;\ x<-۲\\ ۲ & ;\ -۲\le x\le -۱\\ ۴x+۶ & ;\ x>-۱\end{cases}$$

با توجه به ضابطه‌های تابع g، بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع g روی آن ثابت است، بازهٔ $[-۲,-۱]$ است؛ بنابراین بیشترین مقدار $n-m$ برابر می‌شود با $-۱-(-۲)=۱$.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

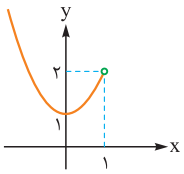
۱۱ اگر برد تابع $f(x)=\begin{cases} ax-b & ; \ x\geq ۱ \\ x^۲+۱ & ; \ x<۱ \end{cases}$ برابر $\mathbb{R}$ باشد، مقدار $b-a$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) صفر
۲) ۲
۳) ۱
۴) -۱

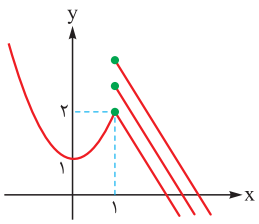
پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا نمودار تابع f را در محدودهٔ $x<۱$ رسم می‌کنیم:



گام دوم: حال برای این‌که برد تابع برابر $\mathbb{R}$ باشد، باید خط $y=ax-b$ دارای شیب منفی و مقدار آن در $x=۱$ بزرگ‌تر یا مساوی ۱ باشد:



$$x=۱: a-b\geq ۱ \Rightarrow b-a\leq -۱$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۲ به چند طریق می‌توان به ۶ سؤال چهارگزینه‌ای و ۴ سؤال دوگزینه‌ای جواب داد، در صورتی که مجبور نباشیم به همهٔ سؤالات پاسخ دهیم؟

۱) $۱۲^۴$
۲) $۵^۶ \times ۳^۴$
۳) $۵^۶ + ۳^۴$
۴) $۶^۴ + ۲^۴$

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint

وقتی مجبور نیستید به سؤالی جواب بدید، «سفیدگذاشتن» هم خودش یه گزینهٔ جدید حساب می‌شه! پس به گزینه‌های هر سؤال یکی اضافه کنید و از اصل ضرب کمک بگیرید.

درس Box

اصل ضرب در آنالیز ترکیبی:

شرایطی را در نظر بگیرید که انجام یک کار، نیازمند طی‌کردن دقیقاً k مرحلهٔ پی‌درپی و وابسته به هم باشد. اگر بتوانید مرحلهٔ اول را به $m_۱$ طریق، مرحلهٔ دوم را به $m_۲$ طریق و در نهایت مرحلهٔ kاُم را به m_k طریق انجام دهید، برای محاسبهٔ تعداد کل حالت‌های انجام این کار چندمرحله‌ای، باید تعداد انتخاب‌های هر مرحله را در یکدیگر ضرب کنید؛ در نتیجه، کل کار مورد نظر به تعداد دفعات زیر قابل انجام است:

$$m_۱ \times m_۲ \times \ldots \times m_k$$

اصل جمع در آنالیز ترکیبی:

تصور کنید برای انجام یک کار مشخص، k مسیر یا روش کاملاً مجزا پیش روی شماست. اگر روش اول به $m_۱$ طریق، روش دوم به $m_۲$ طریق و به همین ترتیب روش kام به m_k طریق قابل انجام باشد، در صورتی که مجاز باشید برای انجام کار مورد نظر **فقط یکی** از این k روش را انتخاب کنید، کافی است تعداد حالت‌های هر روش را با هم جمع کنید.

بنابراین، کل راه‌های ممکن برای انجام آن کار برابر خواهد بود با:

$$m_۱ + m_۲ + \ldots + m_k$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: برای ۶ سؤال، چهار گزینه برای جواب‌دادن و یک حالت هم برای پاسخ‌ندادن داریم:

$۵^۶$:کل حالت‌ها برای ۶ سؤال

گام دوم: برای ۴ سؤال نیز دو گزینه برای جواب‌دادن و یک حالت هم برای پاسخ‌ندادن داریم:

$۳^۴$:کل حالت‌ها برای ۴ سؤال

گام سوم: تعداد کل حالت‌های جواب‌دادن به این ۱۰ سؤال برابر است با:

$$۵^۶ \times ۳^۴$$

کتاب درسی

یک آزمون چندگزینه‌ای شامل ۱۰ سؤال چهارگزینه‌ای و ۵ سؤال دوگزینه‌ای (بله ـ خیر) است. فردی قصد دارد به سؤال‌ها به صورت تصادفی جواب دهد. او به چند روش می‌تواند این کار را انجام دهد، اگر:

الف) اگر مجبور باشد به همهٔ سؤال‌ها جواب دهد؟

ب) بتواند سؤال‌ها را بدون جواب هم بگذارد؟

(ریاضی (۱) ـ تمرین ۶ صفحهٔ ۱۲۶ ـ کتاب درسی)

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۳ اگر $(n-1)! = ۴۲(n+1)!$ باشد، آن‌گاه $(\frac{n}{۳})!$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۲۴ ۳) ۲ ۴) ۱

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

فاکتوریل: اگر n عددی طبیعی باشد، حاصل‌ضرب تمام اعداد طبیعی از ۱ تا n (یعنی $n\times\dots\times۲\times۱$) را با نماد $n!$ نشان می‌دهیم و آن را «**n فاکتوریل**» می‌خوانیم، هم‌چنین در ریاضیات، یک قرارداد بسیار مهم داریم:

$$۰! = ۱\ ,\ ۱! = ۱$$

ویژگی بازگشتی فاکتوریل: توجه کنید که همیشه می‌توانیم فاکتوریل یک عدد را برحسب فاکتوریلِ عددِ قبل از آن بازنویسی کنیم. این ویژگی در ساده‌کردن کسرها به شدت کاربرد دارد:

$$n! = (n-۱)!\times n$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا با توجه به تعریف فاکتوریل، معادله را به صورت زیر بازنویسی و مقدار n را به دست می‌آوریم:

$$(n+۱)(n)(n-۱)! = ۴۲(n-۱)! \Rightarrow (n+۱)(n) = ۴۲ = ۷\times۶ \Rightarrow n = ۶$$

گام دوم: حال با داشتن مقدار n می‌توان نوشت:

$$(\frac{n}{۳})! = (\frac{۶}{۳})! = ۲! = ۲$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۴ در یک ظرف، چهار مهرهٔ آبی و ۷ مهرهٔ قرمز وجود دارد. چهار مهره را به صورت متوالی و بدون جای‌گذاری خارج می‌کنیم. احتمال آن‌که رنگ مهره‌های اول و سوم یکسان و رنگ مهره‌های دوم و چهارم نیز یکسان باشد (اما هر چهار مهره همرنگ نباشند)، کدام است؟

۱) $\frac{۷}{۵۵}$ ۲) $\frac{۱۴}{۵۵}$ ۳) $\frac{۳}{۱۱}$ ۴) $\frac{۲}{۱۱}$

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

ترکیب‌های r‌تایی و محاسبهٔ تعداد آن‌ها: به هر انتخاب r شیء متمایز $(۰ \le r \le n)$ که در آن ترتیب انتخاب مهم نیست، یک ترکیب r‌تایی از n شیء می‌گوییم.

تعداد ترکیب‌های r‌تایی: تعداد ترکیب‌های r شیء از n شیء متمایز $(۰ \le r \le n)$ را با نماد $C(n,r)$ یا $\binom{n}{r}$ نشان می‌دهیم که مقدار آن از طریق فرمول فاکتوریلِ زیر محاسبه می‌شود:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

مفاهیم اولیهٔ احتمال (آزمایش تصادفی): برای ورود به بحث احتمال، ابتدا باید با سه مفهوم کلیدی آشنا شویم:

- **آزمایش تصادفی:** آزمایشی را که همهٔ حالت‌های ممکنِ نتیجهٔ آن را بدانیم، اما نتیجهٔ آن از پیش معلوم نباشد، آزمایش تصادفی می‌نامند (مانند پرتاب یک تاس یا سکه).
- **فضای نمونه‌ای:** مجموعهٔ همهٔ حالت‌های ممکنِ یک آزمایش تصادفی را فضای نمونه‌ایِ این آزمایش تصادفی می‌نامند (معمولاً با حرف S نشان داده می‌شود).
- **پیشامد تصادفی:** هر زیرمجموعه از فضای نمونه‌ای را یک پیشامد تصادفی از این فضای نمونه‌ای می‌نامند (معمولاً با حروفی مثل A و B نشان داده می‌شوند).

احتمال رخداد یک پیشامد: فرض کنید فضای نمونه‌ای S، مجموعه‌ای متناهی (قابل شمارش) و ناتهی باشد و A نیز پیشامدی از این فضای نمونه‌ای باشد.

در این صورت، احتمال رخداد پیشامد را با نماد $P(A)$ نشان می‌دهیم. این احتمال به ساده‌ترین شکل ممکن، از تقسیم تعداد حالت‌های مطلوب (تعداد اعضای پیشامد A) بر تعداد کل حالت‌های ممکن (تعداد اعضای فضای نمونه‌ای S) به دست می‌آید:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا توجه کنید که تعداد کل حالت‌های خارج‌کردن ۴ مهره به صورت متوالی و بدون جای‌گذاری برابر است با:

$$n(S) = \underbrace{\binom{۱۱}{۱}}_{\text{مهرهٔ اول}} \times \underbrace{\binom{۱۰}{۱}}_{\text{مهرهٔ دوم}} \times \underbrace{\binom{۹}{۱}}_{\text{مهرهٔ سوم}} \times \underbrace{\binom{۸}{۱}}_{\text{مهرهٔ چهارم}} = ۱۱\times۱۰\times۹\times۸$$

گام دوم: حال تعداد حالت‌هایی که در آن رنگ مهره‌های اول و سوم و مهره‌های دوم و چهارم یکسان باشد (اما هر چهار مهره همرنگ نباشند)، برابر است با:

$$n(A) = \underbrace{\binom{۴}{۱}}_{\text{اول آبی}} \times \underbrace{\binom{۷}{۱}}_{\text{دوم قرمز}} \times \underbrace{\binom{۳}{۱}}_{\text{سوم آبی}} \times \underbrace{\binom{۶}{۱}}_{\text{چهارم قرمز}} + \underbrace{\binom{۷}{۱}}_{\text{یا}} \times \underbrace{\binom{۴}{۱}}_{\text{اول قرمز}} \times \underbrace{\binom{۶}{۱}}_{\text{دوم آبی}} \times \underbrace{\binom{۳}{۱}}_{\text{سوم قرمز}} \times \underbrace{\binom{۱}{۱}}_{\text{چهارم آبی}} = ۲(۷\times۶\times۴\times۳)$$

گام سوم: احتمال مورد نظر برابر است با:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۲\times۷\times\cancel{۶}^{۲}\times\cancel{۴}\times\cancel{۳}}{۱۱\times۱۰\times\cancel{۹}\times\cancel{۸}} = \frac{۱۴}{۱۱۰} = \frac{۷}{۵۵}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۵ **۷ کتاب متمایز به طور تصادفی روی هم قرار گرفته‌اند که ۲ کتاب از میان آن‌ها، ریاضی است. با کدام احتمال، این ۲ کتاب ریاضی در جایگاه‌های دوم و ششم هستند؟**

۱) $\frac{۱}{۱۴}$ ۲) $\frac{۱}{۱۲}$ ۳) $\frac{۱}{۴۲}$ ۴) $\frac{۱}{۲۱}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint جایگاه‌های دوم و ششم رو برای کتاب‌های ریاضی رزرو کنید! اول حالت‌های چیدمان این دو کتاب تو جاهای خودشون رو حساب کنید و بعد برید سراغ جایگشت بقیهٔ کتاب‌ها تو جاهای خالی.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** ابتدا تعداد حالت‌های کل یعنی تعداد حالت‌های قرارگرفتن ۷ کتاب متمایز کنار هم را حساب می‌کنیم:

$$n(S) = ۷!$$

گام دوم: حال تعداد حالت‌هایی که ۲ کتاب ریاضی در جایگاه‌های دوم و ششم قرار بگیرند را به دست می‌آوریم:

۵		۴	۳	۲		۱
	ریاضی				ریاضی	

$$n(A) = \underset{\text{جایگشت ۲ کتاب ریاضی}}{۲!} \times ۵! = ۲ \times ۵!$$

گام سوم: احتمال مورد نظر برابر است با:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۲ \times ۵!}{۷!} = \frac{۲ \times ۵!}{۷ \times ۶ \times ۵!} = \frac{۱}{۲۱}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

هندسه دهم

۱۶ **فرض کنید H نقطهٔ همرسی ارتفاع‌های مثلث ABC باشد. اگر زوایای $A\hat{H}C$، $B\hat{H}C$ و $A\hat{H}B$ با همین ترتیب یک دنبالهٔ حسابی تشکیل دهند، اندازهٔ زاویهٔ $\hat{A}$ برحسب درجه کدام است؟**

۱) ۴۵ ۲) ۶۰ ۳) ۷۵ ۴) ۹۰

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint

دقت کنید که جملهٔ وسط، واسطهٔ حسابی دو جملهٔ دیگر است.

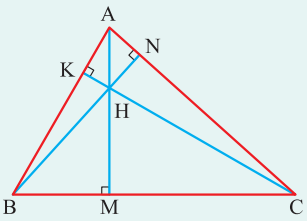
درس Box

ارتفاع‌های هر مثلث در یک نقطه همرس‌اند. نقطهٔ همرسی ارتفاع‌ها:

۱) در مثلث حاده‌الزاویه درون مثلث است.

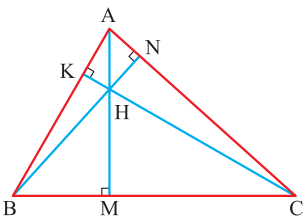
۲) در مثلث قائم‌الزاویه روی مثلث (روی رأس قائمه) است.

۳) در مثلث منفرجه‌الزاویه، بیرون مثلث است.



پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: اندازهٔ زوایای $A\hat{H}C$، $B\hat{H}C$ و $A\hat{H}B$ مطابق فرض، یک دنبالهٔ حسابی تشکیل داده‌اند، یعنی $B\hat{H}C$ واسطهٔ حسابی $A\hat{H}C$ و $A\hat{H}B$ است. از طرفی مطابق شکل، واضح است که مجموع اندازه‌های این سه زاویه، برابر با 360° می‌باشد، پس داریم:



$$B\hat{H}C = \frac{A\hat{H}C + A\hat{H}B}{2} \Rightarrow A\hat{H}C + A\hat{H}B = 2B\hat{H}C$$

$$A\hat{H}B + A\hat{H}C + B\hat{H}C = 360^\circ \Rightarrow 2B\hat{H}C + B\hat{H}C = 360^\circ \Rightarrow 3B\hat{H}C = 360^\circ \Rightarrow B\hat{H}C = 120^\circ$$

گام دوم: دو زاویهٔ BHC و KHN متقابل به رأس هستند، پس $K\hat{H}N = B\hat{H}C = 120^\circ$. از طرفی، مجموع زوایای چهارضلعی AKHN برابر 360° است، پس می‌توان نوشت:

$$\hat{A} + \hat{K} + K\hat{H}N + \hat{N} = 360^\circ \Rightarrow \hat{A} + 90^\circ + 120^\circ + 90^\circ = 360^\circ \Rightarrow \hat{A} = 60^\circ$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۷ اگر O نقطهٔ همرسی نیمسازهای زوایای داخلی مثلث ABC و $OC > OB > OA$ باشد، کدام رابطه بین اضلاع این مثلث درست است؟

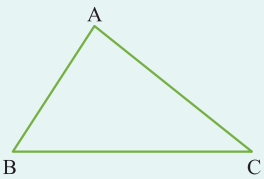
۱) $AB > AC > BC$
۲) $AB > BC > AC$
۳) $BC > AC > AB$
۴) $BC > AB > AC$

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint در هر کدام از مثلث‌های OAC، OAB و OBC از قضیهٔ ضلع برتر استفاده کنید.

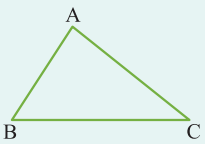
درس Box

۱) **قضیهٔ ضلع برتر**: اگر در یک مثلث، دو ضلع نابرابر باشند، آن‌گاه زاویهٔ روبه‌رو به ضلع بزرگ‌تر، از زاویهٔ روبه‌رو به ضلع کوچک‌تر، بزرگ‌تر است:



$$AC > AB \Rightarrow \hat{B} > \hat{C}$$

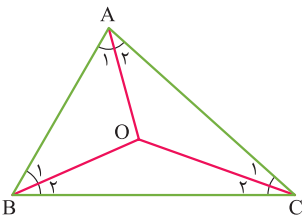
۲) **قضیهٔ زاویهٔ برتر**: اگر در یک مثلث، دو زاویه نابرابر باشند، آن‌گاه ضلع روبه‌رو به زاویهٔ بزرگ‌تر، از ضلع روبه‌رو به زاویهٔ کوچک‌تر، بزرگ‌تر است.



$$\hat{B} > \hat{C} \Rightarrow AC > AB$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: مطابق شکل، فرض کنید O نقطهٔ همرسی نیمسازهای زوایای داخلی مثلث ABC باشد. در این صورت OA، OB و OC نیمسازهای زوایای A، B و C هستند و در نتیجه $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \frac{\hat{A}}{2}$، $\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \frac{\hat{B}}{2}$ و $\hat{C}_1 = \hat{C}_2 = \frac{\hat{C}}{2}$ است.



گام دوم: با استفاده از قضیهٔ ضلع برتر در مثلث‌های OBC و OAB داریم:

$$\begin{cases} \overset{\Delta}{OBC} : OC > OB \Rightarrow \hat{B}_2 > \hat{C}_2 \Rightarrow \frac{\hat{B}}{2} > \frac{\hat{C}}{2} \Rightarrow \hat{B} > \hat{C} \\ \overset{\Delta}{OAB} : OB > OA \Rightarrow \hat{A}_1 > \hat{B}_1 \Rightarrow \frac{\hat{A}}{2} > \frac{\hat{B}}{2} \Rightarrow \hat{A} > \hat{B} \end{cases} \Rightarrow \hat{A} > \hat{B} > \hat{C}$$

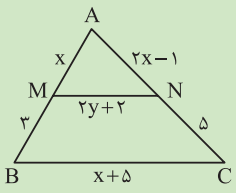
گام سوم: به کمک قضیهٔ زاویهٔ برتر و با توجه به نتیجهٔ حاصل از گام دوم می‌توان نوشت:

$$\hat{A} > \hat{B} > \hat{C} \Rightarrow BC > AC > AB$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

مشابه کتاب درسی

۱۸ در شکل زیر، $MN \parallel BC$ است. حاصل $x+y$ کدام است؟



۱) ۳

۲) ۴

۳) ۵

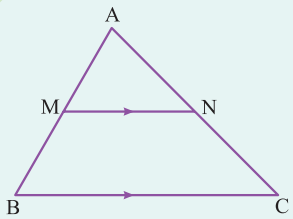
۴) ۶

مشاوره این سؤال از مبحث قضیهٔ تالس و مشابه تمرین ۳ صفحهٔ ۳۶ کتاب درسی هندسه (۱) طراحی شده است. سؤالات مربوط به قضیهٔ تالس در مثلث و ذوزنقه از پرتکرارترین سؤالات کنکورهای سال‌های گذشته بوده‌اند که به طور مستقیم یا ترکیبی با مباحث دیگر به کار رفته‌اند.

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint ابتدا به کمک قضیهٔ تالس، مقدار x را پیدا کرده و سپس از تعمیم قضیهٔ تالس استفاده کنید.

درس Box فرض کنید در مثلث ABC، پاره‌خط MN موازی با ضلع BC باشد. در این صورت:



۱) **قضیهٔ تالس:**

$$MN \parallel BC \Rightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$$

۲) **تعمیم قضیهٔ تالس:**

$$MN \parallel BC \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** طبق قضیهٔ تالس در مثلث ABC داریم:

$$MN \parallel BC \Rightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \Rightarrow \frac{x}{۳} = \frac{۲x-۱}{۵} \Rightarrow ۵x = ۶x - ۳ \Rightarrow x = ۳$$

گام دوم: حال از تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث ABC کمک می‌گیریم:

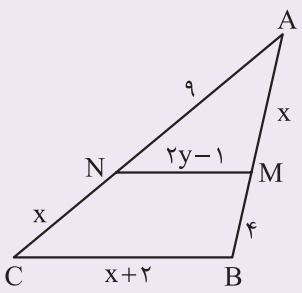
$$MN \parallel BC \Rightarrow \frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB} \Rightarrow \frac{۲y+۲}{x+۵} = \frac{x}{x+۳}$$

$$\xrightarrow{x=۳} \frac{۲y+۲}{۸} = \frac{۳}{۶} \Rightarrow \frac{y+۱}{۴} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow y+۱ = \frac{۴}{۲} = ۲ \Rightarrow y = ۱$$

گام سوم: حاصل عبارت $x+y$ برابر است با:

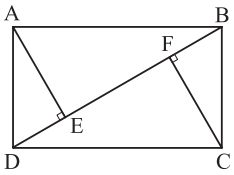
$$x+y = ۳+۱ = ۴$$

کتاب درسی **در شکل زیر $MN \parallel BC$؛ مقادیر x و y را به دست آورید.** (هندسه (۱) ـ تمرین ۳ صفحهٔ ۳۶ کتاب درسی)



SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۹ در شکل زیر، در مستطیل ABCD با اضلاع $AB = ۳\sqrt{۱۳}$ و $AD = ۲\sqrt{۱۳}$، پاره‌خط‌های AE و CF بر قطر BD عمود هستند. اگر عمودمنصف پاره‌خط EF، ضلع CD را در نقطهٔ M قطع کند، مساحت مثلث EMF کدام است؟

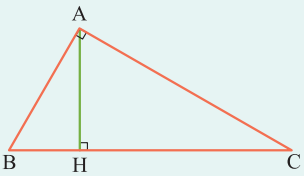


۱) ۱۰ ۲) $\frac{۳۲}{۳}$ ۳) $\frac{۲۱}{۲}$ ۴) $\frac{۶۵}{۶}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint با استفاده از روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه، اندازهٔ پاره‌خط‌های DE و BF و به کمک آن EF را پیدا کنید.

درس Box **روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه:** فرض کنید AH ارتفاع وارد بر وتر در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC باشد. در این صورت روابط زیر برقرار است:



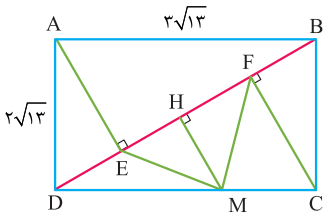
۱) $AH \times BC = AB \times AC$

۲) $AH^۲ = BH \times CH$

۳) $AB^۲ = BH \times BC$

۴) $AC^۲ = CH \times BC$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ **گام اول:** طبق قضیهٔ فیثاغورس در مثلث ABD داریم:



$$BD^۲ = AB^۲ + AD^۲ = (۳\sqrt{۱۳})^۲ + (۲\sqrt{۱۳})^۲ = ۹\times۱۳ + ۴\times۱۳ = ۱۳\times۱۳ \Rightarrow BD = ۱۳$$

از طرفی، طبق روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABD می‌توان نوشت:

$$AD^۲ = DE \times BD \Rightarrow (۲\sqrt{۱۳})^۲ = DE \times ۱۳ \Rightarrow DE = ۴$$

به طور مشابه $BF = ۴$ و در نتیجه داریم:

$$EF = BD - (DE + BF) = ۱۳ - ۲\times۴ = ۵$$

گام دوم: طبق روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ BCD داریم:

$$CF^۲ = BF \times DF = ۴\times۹ = ۳۶ \Rightarrow CF = ۶$$

گام سوم: مطابق شکل، H وسط پاره‌خط EF است و عمودمنصف EF، ضلع CD را در نقطهٔ M قطع می‌کند، بنابراین $DH = DE + \frac{EF}{۲} = ۴ + \frac{۵}{۲} = \frac{۱۳}{۲}$ و در نتیجه، طبق تعمیم قضیهٔ تالس می‌توان نوشت:

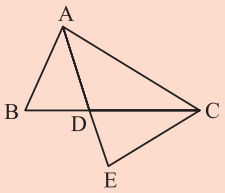
$$\overset{\Delta}{DFC} : MH \parallel CF \Rightarrow \frac{MH}{CF} = \frac{DH}{DF} \Rightarrow \frac{MH}{۶} = \frac{\frac{۱۳}{۲}}{۹} \Rightarrow MH = \frac{۱۳}{۳}$$

گام چهارم: مساحت مثلث EMF برابر است با:

$$S_{EMF} = \frac{۱}{۲} MH \times EF = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱۳}{۳} \times ۵ = \frac{۶۵}{۶}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۰ در شکل زیر، AD نیمساز زاویهٔ A و CD = CE است. اگر BD = ۳ و CD = ۸ باشد، نسبت مساحت مثلث CDE به مساحت مثلث ACD کدام است؟



۱) $\frac{۸}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۸}$ ۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۵}{۳}$

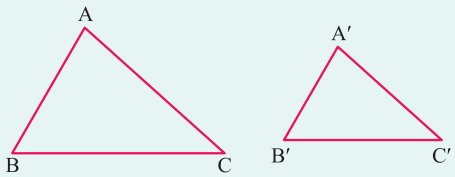
مشاوره این سؤال به صورت ترکیبی از دو مبحث تشابه مثلث‌ها و نسبت مساحت‌ها و قاعده‌های دو مثلث و مشابه سؤال ۱۵۵ کنکور تجربی خارج از کشور ۹۹ طراحی شده است.

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint نشان دهید دو مثلث ABD و ACE متشابه هستند.

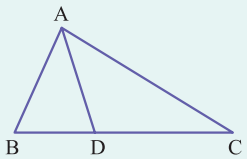
درس Box

۱) **تشابه مثلث‌ها**: هرگاه دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر هم‌اندازه باشند، دو مثلث متشابه‌اند:



$$\hat{B}=\hat{B}' \ , \ \hat{C}=\hat{C}' \Rightarrow \overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{A'B'C'}$$

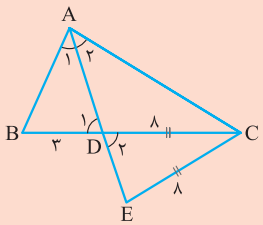
۲) اگر دو مثلث در یک رأس مشترک بوده و قاعدهٔ مقابل به این رأس آن‌ها روی یک خط راست باشد، نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر با نسبت اندازهٔ قاعده‌های آن‌ها است:



$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}}=\frac{BD}{CD}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: طبق فرض CD = CE، پس مثلث CDE متساوی‌الساقین است و در نتیجه $\hat{D}_۲=\hat{E}$. از طرفی، دو زاویهٔ $\hat{D}_۱$ و $\hat{D}_۲$ متقابل به رأس هستند، پس $\hat{D}_۱=\hat{E}$. حال برای دو مثلث ABD و ACE داریم:



$$\begin{cases}\hat{A}_۱=\hat{A}_۲\\ \hat{D}_۱=\hat{E}\end{cases} \xrightarrow{(\text{از ز})} \overset{\Delta}{ABD} \sim \overset{\Delta}{ACE} \Rightarrow \frac{AD}{AE}=\frac{BD}{CE}=\frac{۳}{۸}$$

$$\xrightarrow{\text{تفضیل نسبت در مخرج}} \frac{AD}{AE-AD}=\frac{۳}{۸-۳} \Rightarrow \frac{AD}{DE}=\frac{۳}{۵}$$

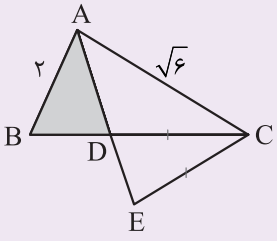
گام دوم: دو مثلث ACD و CDE در ارتفاع رسم‌شده از رأس مشترک‌اند، پس نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر نسبت قاعده‌ها است، یعنی داریم:

$$\frac{S_{ACD}}{S_{CDE}}=\frac{AD}{DE}=\frac{۳}{۵} \Rightarrow \frac{S_{CDE}}{S_{ACD}}=\frac{۵}{۳}$$

کنکور

در شکل زیر، AD نیمساز زاویهٔ A و CE = CD است. نسبت مساحت‌های دو مثلث ABD و ACE، کدام است؟

(سؤال ۱۵۵ کنکور تجربی ۱۳۹۹ (خارج از کشور))



۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۱ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A}=۹۰^\circ)$، اگر $AB=۲\sqrt{۳}$ و $AC=۲\sqrt{۶}$ باشد، فاصلهٔ رأس B از میانهٔ وارد بر وتر در این مثلث کدام است؟

۱) ۲
۲) $۲\sqrt{۲}$
۳) ۳
۴) $۲\sqrt{۳}$

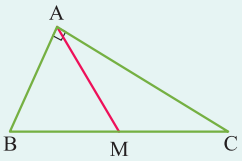
پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint

مساحت مثلث ABC و اندازهٔ میانهٔ AM را تعیین کنید.

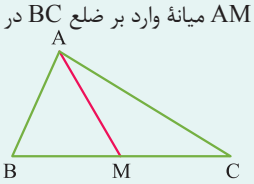
درس Box

۱) در هر مثلث قائم‌الزاویه، اندازهٔ میانهٔ وارد بر وتر، نصف اندازهٔ وتر است. به عنوان مثال، در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A}=۹۰^\circ)$، اگر M وسط ضلع BC باشد، آن‌گاه:



$$AM=\frac{۱}{۲}BC$$

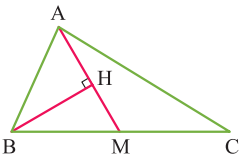
۲) با رسم هر کدام از میانه‌های یک مثلث، دو مثلث هم‌مساحت پدید می‌آید. به عنوان مثال، اگر AM میانهٔ وارد بر ضلع BC در مثلث ABC باشد، آن‌گاه:



$$S_{AMB}=S_{AMC}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: طبق قضیهٔ فیثاغورس در مثلث ABC داریم:



$$BC^۲=AB^۲+AC^۲=(۲\sqrt{۳})^۲+(۲\sqrt{۶})^۲=۳۶ \Rightarrow BC=۶$$

از طرفی، اندازهٔ میانهٔ وارد بر وتر در یک مثلث قائم‌الزاویه، نصف اندازهٔ وتر است، پس:

$$AM=\frac{۱}{۲}BC=\frac{۱}{۲}\times ۶=۳$$

گام دوم: مساحت مثلث ABC برابر است با:

$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}AB\times AC=\frac{۱}{۲}\times ۲\sqrt{۳}\times ۲\sqrt{۶}=۶\sqrt{۲}$$

از طرفی با رسم هر میانه، دو مثلث هم‌مساحت ایجاد می‌شود، پس برای میانهٔ AM می‌توان نوشت:

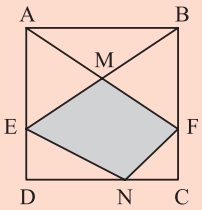
$$S_{AMB}=\frac{۱}{۲}S_{ABC}=۳\sqrt{۲}$$

گام سوم: در مثلث AMB، BH ارتفاع وارد بر قاعدهٔ AM است، پس داریم:

$$S_{AMB}=\frac{۱}{۲}\times BH\times AM \Rightarrow ۳\sqrt{۲}=\frac{۱}{۲}BH\times ۳ \Rightarrow BH=۲\sqrt{۲}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۲ در مربع ABCD شکل زیر، اگر $ED = FC = \frac{AE}{۳}$ باشد، مساحت ناحیهٔ سایه‌زده چه کسری از مساحت مربع است؟



۱) $\frac{۵}{۱۶}$

۲) $\frac{۱}{۴}$

۳) $\frac{۳}{۸}$

۴) $\frac{۷}{۱۶}$

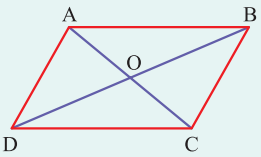
مشاوره این سؤال از مبحث مساحت چندضلعی‌ها و مشابه سؤال ۱۴۹ کنکور ریاضی ۱۴۰۰ طراحی شده است. سؤالات متعددی در این زمینه (مساحت متوازی‌الاضلاع، ذوزنقه، شش‌ضلعی منتظم و ...) در میان سؤالات کنکورهای گذشته دیده می‌شود.

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint از E به F وصل کنید و مساحت دو مثلث EMF و ENF را برحسب مساحت مربع به دست آورید.

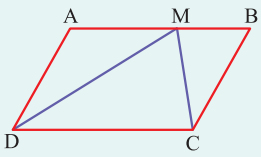
درس Box

۱) از رسم دو قطر یک متوازی‌الاضلاع (مستطیل، لوزی، مربع)، چهار مثلث هم‌مساحت پدید می‌آید:



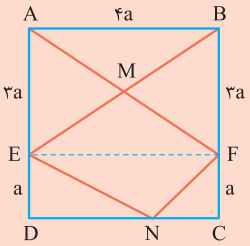
$$S_{OAB} = S_{OBC} = S_{OCD} = S_{ODA}$$

۲) اگر از یک نقطه واقع بر یکی از اضلاع یک متوازی‌الاضلاع (مستطیل، لوزی، مربع) به دو رأس مقابل آن ضلع وصل کنیم، مثلثی پدید می‌آید که مساحت آن نصف مساحت متوازی‌الاضلاع (مستطیل، لوزی، مربع) است:



پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: دو نقطهٔ E و F را به یکدیگر وصل می‌کنیم تا دو مثلث EMF و ENF پدید آید. فرض کنید طول هر ضلع مربع برابر ۴a باشد. در این صورت $ED = a$ و $AE = ۳a$ است. چهارضلعی ABFE مستطیل و AF و BE قطرهای آن هستند، بنابراین طبق مورد (۱) درس‌باکس داریم:



$$S_{EMF} = \frac{۱}{۴}S_{ABFE} = \frac{۱}{۴} \times ۴a \times ۳a = ۳a^۲$$

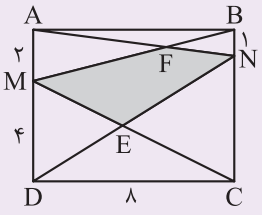
گام دوم: در مستطیل EFCD، N نقطهٔ دلخواهی روی ضلع CD است، پس طبق مورد (۲) درس‌باکس می‌توان نوشت:

$$S_{ENF} = \frac{۱}{۲}S_{EFCD} = \frac{۱}{۲} \times ۴a \times a = ۲a^۲$$

گام سوم: با توجه به نتایج گام‌های اول و دوم داریم:

$$\frac{S_{EMFN}}{S_{ABCD}} = \frac{S_{EMF} + S_{ENF}}{S_{ABCD}} = \frac{۳a^۲ + ۲a^۲}{۴a \times ۴a} = \frac{۵}{۱۶}$$

کنکور مستطیل ABCD مطابق شکل زیر مفروض است. مساحت چهارضلعی MENF، کدام است؟ (سؤال ۱۴۹ کنکور ریاضی ۱۴۰۰)



۱) $\frac{۱۰۴}{۹}$

۲) ۱۳

۳) $\frac{۴۷}{۳}$

۴) ۱۶

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

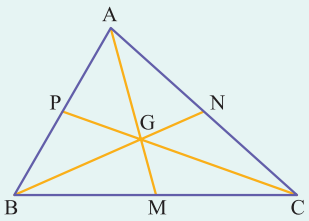
۲۳ در مثلث ABC، $BC = ۱۵$ و طول میانه‌های BM و CN به ترتیب برابر $۱۳/۵$ و ۱۸ است. طول میانهٔ سوم این مثلث کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) $۱۶/۵$ ۳) $۲۲/۵$ ۴) ۲۴

پاسخ: گزینهٔ ۳

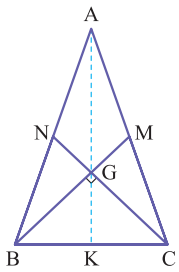
Hint نوع مثلثی که سه رأس آن B، C و نقطهٔ همرسی میانه‌های مثلث ABC است را تعیین کنید.

درس Box میانه‌های هر مثلث در نقطه‌ای درون آن مثلث همرس‌اند. نقطهٔ همرسی میانه‌ها، هر کدام از میانه‌ها را به نسبت ۲ به ۱ تقسیم می‌کند، یعنی فاصلهٔ نقطهٔ همرسی میانه‌ها از هر رأس، $\frac{۲}{۳}$ اندازهٔ میانهٔ نظیر آن رأس و فاصلهٔ این نقطه از وسط هر ضلع، $\frac{۱}{۳}$ اندازهٔ میانهٔ نظیر آن ضلع است:



$$\begin{cases} AG = \frac{۲}{۳}AM \ , \ GM = \frac{۱}{۳}AM \\ BG = \frac{۲}{۳}BN \ , \ GN = \frac{۱}{۳}BN \\ CG = \frac{۲}{۳}CP \ , \ GP = \frac{۱}{۳}CP \end{cases}$$

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول**: فرض کنید G نقطهٔ همرسی میانه‌های مثلث ABC باشد. در این صورت طبق درس‌باکس داریم:



$$\begin{cases} BG = \frac{۲}{۳}BM = \frac{۲}{۳} \times \frac{۲۷}{۲} = ۹ \\ CG = \frac{۲}{۳}CN = \frac{۲}{۳} \times ۱۸ = ۱۲ \end{cases}$$

گام دوم: طول اضلاع مثلث BGC در رابطهٔ فیثاغورس صدق می‌کند، یعنی $۱۵^۲ = ۹^۲ + ۱۲^۲$، بنابراین مثلث BGC قائم‌الزاویه و BC وتر آن است. می‌دانیم اندازهٔ میانهٔ وارد بر وتر در یک مثلث قائم‌الزاویه، نصف اندازهٔ وتر است، پس:

$$GK = \frac{۱}{۲}BC = \frac{۱۵}{۲}$$

گام سوم: طبق درس‌باکس، فاصلهٔ نقطهٔ G از وسط ضلع BC، $\frac{۱}{۳}$ طول میانهٔ نظیر این ضلع است، بنابراین داریم:

$$GK = \frac{۱}{۳}AK \Rightarrow \frac{۱۵}{۲} = \frac{۱}{۳}AK \Rightarrow AK = \frac{۴۵}{۲} = ۲۲/۵$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۴ **دو خط متمایز d_1 و d_2 درون صفحهٔ P قرار دارند. از نقطهٔ A واقع در خارج صفحهٔ P، چند خط عبور می‌کند به طوری که هر دو خط d_1 و d_2 را قطع کند؟**

۱) همواره صفر
۲) همواره یک
۳) صفر یا یک
۴) بی‌شمار

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint

ابتدا تعیین کنید که دو خط d_1 و d_2 چه وضعی نسبت به یکدیگر دارند.

درس Box

دو خط در فضا نسبت به هم یکی از سه حالت زیر را دارند:

۱) **موازی**: دو خط را که نقطهٔ اشتراکی ندارند و صفحه‌ای شامل هر دوی آن‌ها وجود دارد، موازی می‌نامیم.

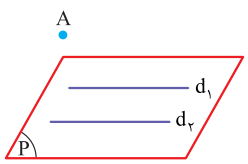
۲) **متقاطع**: دو خط که در یک نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند، متقاطع می‌نامیم. همواره یک صفحهٔ یکتا شامل دو خط متقاطع وجود دارد.

۳) **متنافر**: دو خط را که هیچ صفحه‌ای شامل هر دوی آن‌ها وجود ندارد، متنافر می‌نامیم.

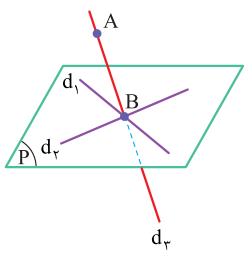
پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: با توجه به توضیحات ارائه‌شده در درس‌باکس، هرگاه دو خط متمایز d_1 و d_2 درون صفحه‌ای مانند P قرار داشته باشند، نسبت به هم موازی یا متقاطع هستند.

گام دوم: اگر دو خط d_1 و d_2 موازی باشند، آن‌گاه از نقطهٔ A خارج از صفحهٔ P، هیچ خطی عبور نمی‌کند که هر دو خط d_1 و d_2 را قطع کند:



گام سوم: اگر دو خط d_1 و d_2 در نقطه‌ای مانند B متقاطع باشند، آن‌گاه خطی مانند d_3 که از دو نقطهٔ A و B عبور می‌کند، تنها خطی است که از A گذشته و هر دو خط d_1 و d_2 را قطع می‌کند:



SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۵ **از دوران مثلث متساوی‌الاضلاعی به طول ضلع a حول یکی از اضلاع آن، دو مخروط یکسان پدید آمده است. ارتفاع و شعاع قاعدهٔ هر کدام از آن‌ها به ترتیب از راست به چپ برابر کدام است؟**

۱) $\frac{a}{۲}$ و $\frac{\sqrt{۳}}{۲}a$

۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}a$ و $\frac{a}{۲}$

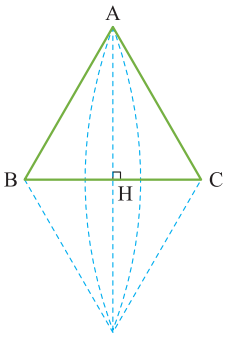
۳) $\frac{a}{۲}$ و a

۴) a و $\frac{a}{۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint دقت کنید دو مخروط پدیدآمده، از قاعده به هم چسبیده‌اند.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول**: مطابق شکل، مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را حول ضلع BC دوران می‌دهیم. در این صورت دو مخروط یکسان پدید می‌آید که از قاعده به هم چسبیده‌اند:



گام دوم: همان‌طور که در شکل مشاهده می‌شود، ارتفاع هر کدام از دو مخروط برابر نصف اندازهٔ ضلع مثلث، یعنی $BH = CH = \frac{a}{۲}$ است. هم‌چنین شعاع قاعدهٔ دو مخروط برابر طول ارتفاع مثلث، یعنی $AH = \frac{\sqrt{۳}}{۲}a$ است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۶ فاصلهٔ ستاره‌ای تا کرهٔ زمین برابر $81\times10^{12}\ km$ است. این فاصله برحسب یکای نجومی و به صورت نمادگذاری علمی کدام است؟ $(AU = 1/5\times10^{11}\ m)$

۱) 54×10^{4}
۲) 54×10^{3}
۳) $5/4\times10^{5}$
۴) $5/4\times10^{4}$

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

۱) **تبدیل زنجیره‌ای**: برای تبدیل یکای یک کمیت به یکاهای دیگر، از روش تبدیل زنجیره‌ای استفاده می‌کنیم. مثلاً برای این‌که ببینیم $20\ in$ معادل چند cm است، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

الف) ابتدا تساوی بین هر یک را می‌نویسیم، تا ضریب تبدیل مناسب به دست آید:

$$1\ in = 2/54\ cm \Rightarrow \frac{1\ in}{2/54\ cm} = 1 \quad \text{یا} \quad \frac{2/54\ cm}{1\ in} = 1$$

ب) سپس به کمک ضریب تبدیل مناسب، تبدیل زنجیره‌ای را می‌نویسیم:

$$20\ in = 20\ in \times \frac{2/54\ cm}{1\ in} = 50/8\ cm$$

۲) **نمادگذاری علمی**:

برای آن‌که نوشتن و محاسبهٔ مقدارهای خیلی بزرگ یا خیلی کوچک ساده شود از روشی به نام نمادگذاری علمی استفاده می‌کنیم. در این روش، اندازهٔ هر کمیت فیزیکی به صورت کلی $x\times10^{n}$ نوشته می‌شود که در آن $1 < x \leq 10$ و n عددی صحیح است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ با استفاده از روش تبدیل زنجیره‌ای، یکای خواسته‌شده را به دست می‌آوریم:

$$81\times10^{12}\ km \times \frac{10^{3}\ m}{1\ km} \times \frac{1\ AU}{1/5\times10^{11}\ m} = 54\times10^{4} = 5/4\times10^{5}\ AU$$

کتاب درسی

الف) یکای نجومی برابر میانگین فاصلهٔ زمین تا خورشید است $(1\ AU \approx 1/50\times10^{11}\ m)$. با توجه به جدول ۱ ـ ۳، فاصلهٔ منظومهٔ شمسی تا نزدیک‌ترین ستاره برحسب یکای نجومی چه‌قدر است؟

(فیزیک (۱) ـ تمرین ۱ـ۱ (قسمت الف) صفحهٔ ۸ کتاب درسی)

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۷ مکعبی به ضلع ۲۰ cm و جرم ۳۷/۵ kg از آلیاژی به چگالی ۵ g/cm^3 ساخته شده است. درون این مکعب، حفره‌ای کروی وجود دارد، قطر این حفره چند سانتی‌متر است؟ ($\pi = 3$)

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۸ ۴) ۱۰

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

نسبت جرم به حجم یک جسم را چگالی آن جسم می‌گوییم.

جرم (kg) / چگالی (kg/m^3)

$$\rho = \frac{m}{V}$$

حجم (m^3)

حجم کره از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$V_{کره} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

نکته هنگامی‌که جسم حفره‌دار است، حجم مادهٔ به‌کاررفته در آن، برابر است با اختلاف حجم ظاهری و حجم حفره؛ یعنی:

$$V_{واقعی} = V_{ظاهری} - V_{حفره}$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا حجم واقعی جسم را از رابطهٔ چگالی به دست می‌آوریم:

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow V_{واقعی} = \frac{m}{\rho} \xrightarrow[\rho = 5\ g/cm^3]{m = 37/5\ kg = 37/5 \times 10^3\ g} V_{واقعی} = \frac{37/5 \times 10^3\ g}{5\ g/cm^3} = 7500\ cm^3$$

گام دوم: اکنون حجم ظاهری و واقعی را از هم کم می‌کنیم تا حجم حفره به دست آید:

$$V_{ظاهری} = (20)^3 = 8000\ cm^3$$

$$V_{حفره} = 8000 - 7500 = 500\ cm^3$$

گام سوم: با توجه به کروی‌بودن حفره، قطر آن را محاسبه می‌کنیم:

$$V_{حفره} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \times 3 \times r^3 = 500 \Rightarrow r = 5\ cm \Rightarrow D = 2r = 10\ cm$$

گول نخوری حواست باشه که قطر خواسته‌شده، نه شعاع کره.

تیزبازی *از همون اول چون قطر برحسب سانتی‌متر خواسته شده بود، فرمول چگالی رو طوری نوشتیم که حجم برحسب* cm^3 *در بیاد.*

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۸ چه تعداد از موارد زیر درست است؟

الف) فاصلهٔ مولکول‌ها در حالت جامد، کم‌تر از حالت مایع است.

ب) شیشه یک نوع جامد بی‌شکل است که از سردشدن آهستهٔ مایع به وجود می‌آید.

پ) مولکول‌های آب، حرکات کاتوره‌ای و نامنظم دارند.

ت) کشش سطحی، ناشی از دگرچسبی مولکول‌های سطح مایع است.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box



SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir



پاسخ خیلی تشریحی ✔ بررسی موارد:

الف) فاصلهٔ مولکول‌های جامد و مایع تقریباً یکسان است. ✘

ب) جامد بی‌شکل از سردشدن سریع مایع به دست می‌آید. ✘

پ) درست ✓

ت) کشش سطحی، ناشی از هم‌چسبی مولکول‌های مایع است. ✘

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

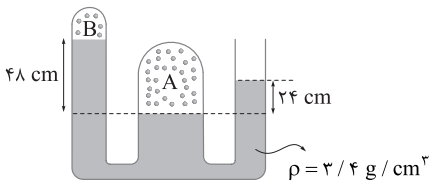
۲۹ در شکل زیر، فشار گاز محبوس A، چند برابر فشار گاز محبوس B است؟ ($\rho_{\text{جیوه}} = ۱۳/۶\ g/cm^۳$, $P_۰ = ۶۶\ cmHg$)

۱) $\frac{۵}{۶}$

۲) $\frac{۶}{۵}$

۳) $\frac{۴}{۳}$

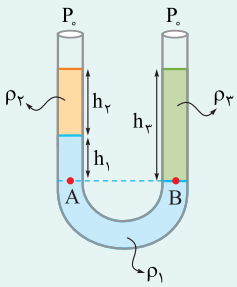
۴) $\frac{۳}{۴}$



پاسخ: گزینهٔ ۲

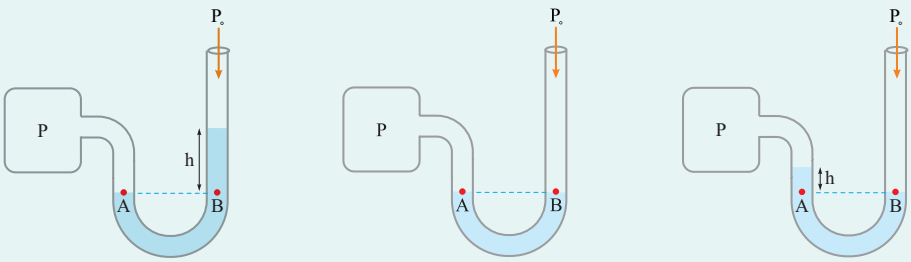
درس Box

۱) در لوله‌های Uشکل، دو نقطهٔ هم‌تراز که در مایع یکسانی قرار دارند، فشار برابری دارند، مثال:



$$P_A = P_B \Rightarrow \rho_۲gh_۲ + \rho_۱gh_۱ + P_۰ = \rho_۳gh_۳ + P_۰ \Rightarrow \rho_۲h_۲ + \rho_۱h_۱ = \rho_۳h_۳$$

۲) مانومتر: وسیله‌ای است که برای اندازه‌گیری فشار یک شارهٔ محصور (P) به کار می‌رود.

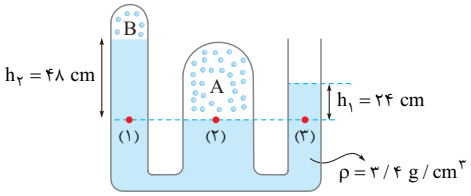


رابطهٔ فشار:	$P + \rho gh = P_۰$	$P = P_۰$	$P = P_۰ + \rho gh$
فشار مطلق (P):	$P_۰ - \rho gh$	$P_۰$	$P_۰ + \rho gh$
فشار پیمانه‌ای (P_g):	$-\rho gh$	صفر	$+\rho gh$

اختلاف فشار مطلق با فشار جوّ را فشار پیمانه‌ای (P_g) می‌گوییم: $P_g = P - P_۰$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: با توجه به نکات درس‌باکس، از برابری فشار در نقاط هم‌تراز (۱)، (۲) و (۳) داریم:



$$P_۲ = P_۳ \Rightarrow P_A = \rho gh_۱ + P_۰$$

$$P_۱ = P_۳ \Rightarrow P_B + \rho gh_۲ = P_۰ + \rho gh_۱ \Rightarrow$$

$$P_B = P_۰ - \rho g(h_۲ - h_۱)$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

گام دوم: با توجه به این‌که چگالی مایع و جیوه را داریم، نسبت ارتفاع مایع به ارتفاع ستون جیوه را به دست می‌آوریم تا بتوانیم به راحتی محاسبات را انجام دهیم.

$$P_{\text{مایع}} = P_{\text{جیوه}} \Rightarrow \rho_{\text{مایع}} g h_{\text{مایع}} = \rho_{\text{جیوه}} g h_{\text{جیوه}} \Rightarrow \frac{\rho_{\text{مایع}}}{\rho_{\text{جیوه}}} = \frac{h_{\text{جیوه}}}{h_{\text{مایع}}}$$

$$\Rightarrow h_{\text{جیوه}} = \frac{\rho_{\text{مایع}}}{\rho_{\text{جیوه}}} \times h_{\text{مایع}} \xrightarrow[\rho_{\text{جیوه}}=۱۳/۶\ g/cm^۳]{\rho_{\text{مایع}}=۳/۴\ g/cm^۳} h_{\text{جیوه}} = \frac{۳/۴}{۱۳/۶} \times h_{\text{مایع}} = \frac{h_{\text{مایع}}}{۴}$$

$$\begin{cases} h_۱ = \frac{۲۴}{۴} = ۶\ \text{cmHg} \\ h_۲ = \frac{۴۸}{۴} = ۱۲\ \text{cmHg} \end{cases}$$

گام سوم: اکنون فشارها را به دست می‌آوریم و نسبت $\frac{P_A}{P_B}$ را می‌گیریم:

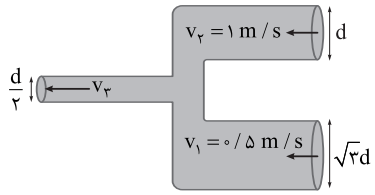
$$P_A = \rho g h_۱ + P_۰ = ۶\ \text{cmHg} + ۶۶\ \text{cmHg} = ۷۲\ \text{cmHg}$$

$$P_B = P_۰ - \rho g (h_۲ - h_۱) = ۶۶\ \text{cmHg} - ۶\ \text{cmHg} = ۶۰\ \text{cmHg}$$

$$\Rightarrow \frac{P_A}{P_B} = \frac{۷۲\ \text{cmHg}}{۶۰\ \text{cmHg}} = \frac{۶}{۵}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۰ در شکل زیر، جریان آب در لوله‌ها، پایا و از سمت راست به چپ است. با توجه به قطر مقطع لوله‌ها و تندی آب در لوله‌های ورودی، تندی آب در لولهٔ خروجی ($v_۳$)، چند متر بر ثانیه است؟



۱) ۶

۲) ۸

۳) ۱۰

۴) ۱۲

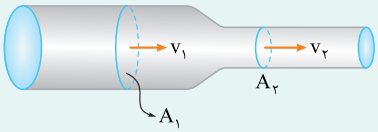
پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint کافی است معادلهٔ پیوستگی را برای مجموعهٔ ورودی به لوله و خروجی از لوله بنویسید.

درس Box

معادلهٔ پیوستگی:

همانند شکل زیر، اگر شارهٔ تراکم‌ناپذیری درون لوله با جریان لایه‌ای در حال حرکت باشد، در حالت پایا، آهنگ شارش حجمی شاره از همهٔ مقاطع لوله یکسان است:



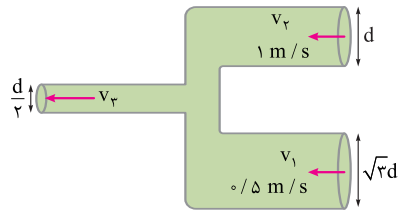
$$A_۱v_۱ = A_۲v_۲$$

$v_۱$ = تندی شاره هنگام عبور از مساحت $A_۱(m/s)$

$v_۲$ = تندی شاره هنگام عبور از مساحت $A_۲(m/s)$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: طبق معادلهٔ پیوستگی، حاصل‌ضرب Av ورودی باید با Av خروجی برابر شود و با توجه به دوقسمتی‌بودن ورودی Av هر دو قسمت با هم جمع می‌شوند.



$$A_۱v_۱ + A_۲v_۲ = A_۳v_۳$$

گام دوم: مساحت هر سه مقطع را جداگانه حساب می‌کنیم:

$$A_۱ = \pi(\frac{\sqrt{۳}}{۲}d)^۲ = \frac{۳\pi}{۴}d^۲$$

$$A_۲ = \pi(\frac{d}{۲})^۲ = \frac{\pi d^۲}{۴}$$

$$A_۳ = \pi(\frac{d}{۴})^۲ = \frac{\pi d^۲}{۱۶}$$

گام سوم: با جای‌گذاری داده‌ها خواهیم داشت:

$$[\frac{۳\pi}{۴}d^۲ \times ۰/۵] + [\frac{\pi d^۲}{۴} \times ۱] = \frac{\pi d^۲}{۱۶}v_۳ \Rightarrow \frac{۳}{۸} + \frac{۱}{۴} = \frac{۱}{۱۶}v_۳ \Rightarrow v_۳ = ۱۰\ m/s$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۱ اگر تندی جسمی، $8\ m/s$ افزایش یابد، انرژی جنبشی آن ۹۶ درصد تغییر می‌کند. تندی اولیهٔ این جسم چند متر بر ثانیه است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۴ ۳) ۱۸ ۴) ۲۰

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint با استفاده از رابطهٔ نسبتی انرژی جنبشی، مقدار تندی اولیه را به دست آورید.

درس Box

انرژی جنبشی:

هر چیزی که حرکت کند، انرژی دارد و انرژی وابسته به حرکت یک جسم را انرژی حرکتی یا انرژی جنبشی می‌نامیم. هر چه جسمی تندتر حرکت کند، انرژی جنبشی بیشتری دارد و هنگامی که جسم ساکن باشد، انرژی جنبشی آن صفر است، برای جسمی به جرم m که با تندی v حرکت می‌کند. انرژی جنبشی از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$K=\frac{1}{2}mv^2$$

رابطهٔ نسبتی انرژی جنبشی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{K_2}{K_1}=\frac{m_2}{m_1}\times\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ رابطهٔ انرژی جنبشی را به صورت نسبتی می‌نویسیم:

$$\frac{K_2}{K_1}=\frac{m_2}{m_1}\times\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 \xrightarrow[v_2=v_1+8]{K_2=1/96K_1} \frac{1/96K_1}{K_1}=\left(\frac{v_1+8}{v_1}\right)^2 \xrightarrow{\sqrt{\ }} 1/4=\frac{v_1+8}{v_1} \Rightarrow 1/4v_1=v_1+8$$

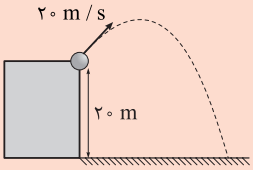
$$\Rightarrow v_1=20\,m/s$$

کنکور جرم اتومبیلی m و تندی آن v است. اگر $6\ m/s$ بر تندی اتومبیل اضافه شود، انرژی جنبشی آن ۶۹ درصد افزایش می‌یابد. v چند کیلومتر بر ساعت است؟ (سؤال ۷۴ کنکور ریاضی ۱۴۰۴ (خارج از کشور))

۱) ۳۶ ۲) ۶۰ ۳) ۷۲ ۴) ۹۰

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۲ در شکل زیر، سنگی از ارتفاع ۲۰متری سطح زمین با تندی $20\ m/s$ پرتاب می‌شود. اگر از لحظهٔ پرتاب سنگ تا لحظهٔ برخورد آن به سطح زمین، اندازهٔ کار نیروی مقاومت هوا از کار نیروی وزن سنگ ۸۰ درصد کم‌تر باشد، تندی برخورد سنگ به سطح زمین، چند متر بر ثانیه است؟ $(g = 10\ m/s^2)$



۱) $10\sqrt{3}$
۲) $12\sqrt{3}$
۳) $10\sqrt{5}$
۴) $12\sqrt{5}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

۱) اگر جسمی به جرم m از ارتفاع h_1 تا ارتفاع h_2 جابه‌جا شود، تغییرات انرژی پتانسیل گرانشی جسم از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

تغییرات انرژی پتانسیل گرانشی (J) — تغییرات ارتفاع (m)

$$\Delta U = mg\Delta h = mg(h_2 - h_1)$$

جرم (kg) — شتاب گرانش (N/kg)

نکته

کار نیروی وزن برابر با منفی تغییرات انرژی پتانسیل گرانشی جسم است:

$$W_{mg} = -\Delta U$$

۲) انرژی مکانیکی جسم، برابر با مجموع انرژی‌های جنبشی و پتانسیل جسم است:

$$E = K + U$$

E : انرژی مکانیکی (J)

K : انرژی جنبشی (J)

U : انرژی پتانسیل گرانشی (J)

۳) تغییرات انرژی مکانیکی برابر با کار نیروی اتلافی است:

کار نیروی اتلافی (J) — انرژی مکانیکی ثانویه (J)

$$W_f = E_2 - E_1$$

انرژی مکانیکی اولیه (J)

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: کار نیروی مقاومت هوا برابر است با تغییرات انرژی مکانیکی. اگر سطح زمین را مبدأ پتانسیل در نظر بگیریم، داریم:

$$E_2 - E_1 = W_f$$

$$\underbrace{U_2}_{\text{صفر}} + K_2 - (U_1 + K_1) = W_f \quad , \quad |W_f| = U_1 - \frac{80}{100}U_1 = 0/2U_1 \Rightarrow W_f = -0/2U_1 = -0/2\,mgh_1$$

گام دوم: با جای‌گذاری داده‌ها، تندی برخورد سنگ به سطح زمین را محاسبه می‌کنیم:

$$0 + \frac{1}{2}mv_2^2 - (mgh_1 + \frac{1}{2}mv_1^2) = -0/2mgh_1 \xrightarrow{h_1=20\,m\ ,\ v_1=20\,m/s\ ,\ g=10\,m/s^2}$$

$$\frac{1}{2}v_2^2 - (10\times 20 + \frac{1}{2}(20)^2) = -0/2\times 10\times 20 \Rightarrow \frac{v_2^2}{2} - (200+200) = -40$$

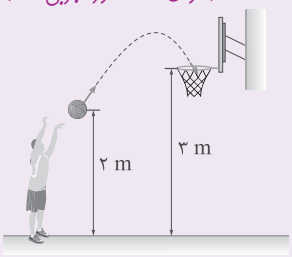
$$\Rightarrow \frac{v_2^2}{2} = 400 - 40 \Rightarrow v_2^2 = 720 \Rightarrow v_2 = 12\sqrt{5}\ m/s$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

کنکور

در شکل زیر، توپ با تندی اولیهٔ $8\ m/s$ پرتاب می‌شود. اگر کار نیروی مقاومت هوا تا رسیدن توپ به سبد، $\frac{1}{8}K_0$ باشد، تندی توپ در لحظهٔ ورود به سبد، چند متر بر ثانیه است؟ (K_0 انرژی جنبشی اولیه و $g = 10\ m/s^2$ است.)

(سؤال ۲۰۸ کنکور تجربی ۱۴۰۱)



۱) $2\sqrt{2}$

۲) $4\sqrt{2}$

۳) ۵

۴) ۶

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۳ توان مصرفی یک پمپ آب، ۸ اسب بخار است. اگر این پمپ در هر ساعت $54\ m^3$ آب را از عمق ۲۵متری زمین به منبعی در سطح زمین منتقل کند، بازده آن چند درصد است؟ $(1\ hp = 750\ W,\ \rho_{آب} = 1\ g/cm^3,\ g = 10\ m/s^2)$

۱) ۷۵ ۲) ۷۲/۵ ۳) ۶۲/۵ ۴) ۶۰

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

۱) **توان**: در فیزیک، آهنگ انجام کار را با کمیتی به نام توان توصیف می‌کنیم. توان همانند کار و انرژی، کمیتی است نرده‌ای و به صورت آهنگ انجام کار بیان می‌شود. یکای آن در SI وات $(W = \frac{J}{s})$ است.

کار (J) توان (W)

$$P = \frac{W}{t}$$

زمان (s)

۲) **بازده**: تنها بخشی از انرژی ورودی قابل استفاده است که به آن انرژی خروجی یا کار مفید می‌گویند، نسبت انرژی خروجی به انرژی ورودی را بازده می‌نامیم.

بازده هر سامانه را برحسب درصد بیان می‌کنند که همواره عددی کوچک‌تر از ۱۰۰ است. از رابطهٔ زیر می‌توان بازده هر سامانه را برحسب درصد محاسبه کرد.

$$\text{بازده برحسب درصد} = \frac{\text{انرژی خروجی}}{\text{انرژی ورودی}} \times 100 = \frac{P_{خروجی}}{P_{ورودی}} \times 100$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: توان مصرفی یک وسیله همان توان ورودی آن است و داریم:

$$P_{ورودی} = 8\ hp \times \frac{750\ W}{1\ hp} = 6000\ W \Rightarrow \text{در مدت ۱ ساعت (انرژی ورودی)}: E = Pt = 6000 \times 3600 = 216 \times 10^5\ J$$

گام دوم: انرژی مصرف‌شده برای انتقال آب، برابر انرژی خروجی پمپ است:

$$E_{خروجی} = mgh = \rho Vgh = 1000 \times 54 \times 10 \times 25 = 135 \times 10^5\ J$$

$$\text{بازده} = \frac{E_{خروجی}}{E_{ورودی}} \times 100 = \frac{135 \times 10^5}{216 \times 10^5} \times 100 = 62/5\%$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۴ دمای جسمی $258\ K$ است. اگر دمای این جسم $25\ ^\circ C$ افزایش یابد. دمای آن در مقیاس فارنهایت چند برابر شده است؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint ابتدا دماهای اولیه و ثانویه را برحسب درجهٔ سلسیوس به دست آورید، سپس آن‌ها را به فارنهایت تبدیل کرده و به صورت نسبتی بنویسید.

درس Box

مقیاس دمایی:

رابطهٔ کلوین با سلسیوس به صورت زیر است:

$$T = \theta + 273 \ , \ \Delta T = \Delta\theta$$

مقیاس فارنهایت:

رابطهٔ درجهٔ فارنهایت $(^\circ F)$ و درجهٔ سلسیوس $(^\circ C)$ به صورت زیر است.

$$F = \frac{9}{5}\theta + 32 \ , \ \Delta F = \frac{9}{5}\Delta\theta$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا دمای اولیهٔ جسم را برحسب درجهٔ سلسیوس می‌نویسیم و سپس آن را به فارنهایت تبدیل می‌کنیم:

$$T_1 = \theta_1 + 273 \xrightarrow{T_1 = 258\ K} \theta_1 = 258 - 273 = -15\ ^\circ C$$

$$F_1 = \frac{9}{5}\theta_1 + 32 \xrightarrow{\theta_1 = -15\ ^\circ C} F_1 = \frac{9}{5} \times -15 + 32 = 5\ ^\circ F$$

گام دوم: حالا با توجه به مقدار افزایش دما، θ_2 را به دست می‌آوریم و سپس F_2 را محاسبه می‌کنیم:

$$\theta_2 = \theta_1 + 25 \xrightarrow{\theta_1 = -15\ ^\circ C} \theta_2 = 10\ ^\circ C$$

$$F_2 = \frac{9}{5}\theta_2 + 32 \xrightarrow{\theta_2 = 10\ ^\circ C} F_2 = 50\ ^\circ F$$

گام سوم: حالا خواستهٔ سؤال را به دست می‌آوریم:

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{50}{5} = 10$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۵ روی یک ورقهٔ فلزی با ظرفیت گرمایی $400\ J/^\circ C$، حفره‌ای وجود دارد. به این ورقه چند کیلوژول گرما بدهیم تا مساحت حفرهٔ آن، یک درصد افزایش یابد؟ $(\alpha = 2/5\times10^{-5}\ K^{-1})$

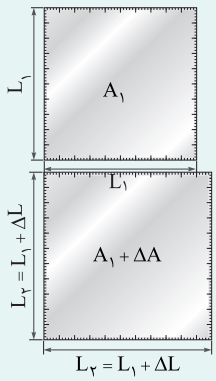
۱) ۸ ۲) ۸۰ ۳) ۱۶ ۴) ۱۶۰

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

۱) انبساط سطحی:

سطح بیشتر اجسام با افزایش دما زیاد می‌شود. تجربه نشان می‌دهد با انبساط جسم جامد، شکل آن عوض نمی‌شود و همهٔ ابعاد آن به تناسب افزایش می‌یابد. اگر مساحت اولیهٔ جسم جامد، A_1 و افزایش دما، ΔT باشد، افزایش مساحت جسم به اندازهٔ ΔA خواهد بود که این افزایش مساحت به طور تقریبی از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:



$$A_2 = A_1(1+2\alpha\Delta T)\ ;\ \Delta A = 2\alpha A_1 \Delta T$$

در این رابطه به α، ضریب انبساط طولی می‌گویند.

$$\text{درصد تغییرات سطح} = \frac{\Delta A}{A_1}\times100 = \frac{2\alpha A_1\Delta\theta}{A_1}\times100 = 2\alpha\Delta\theta\times100$$

۲) گرما:

اگر جسمی با محیط اطراف خود، گرمای Q را مبادله کند و در اثر این مبادلهٔ گرما، دمایش به اندازهٔ ΔT تغییر کند، Q متناسب با ΔT است که ضریب این تناسب را با C نشان می‌دهند و آن را ظرفیت گرمایی جسم می‌گویند، به طوری که داریم:

$$Q = C\Delta T$$

نکته

- اگر جسم گرما بگیرد و دمای جسم بالا رود، Q مثبت است.
- اگر جسم گرما از دست بدهد و دمای جسم پایین بیاید، Q منفی است.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا با استفاده از رابطهٔ انبساط سطحی، مقدار افزایش دما را به دست می‌آوریم:

$$\frac{\Delta A}{A}\times100 = \%1$$

$$\frac{A\,2\alpha\Delta\theta}{A}\times100 = 1 \xrightarrow{\alpha = 2/5\times10^{-5}\ \frac{1}{K}} 2\times2/5\times10^{-5}\times\Delta\theta\times100 = 1 \Rightarrow \Delta\theta = 200\ ^\circ C$$

گام دوم: حالا گرمای مورد نیاز را به دست می‌آوریم:

$$Q = C\Delta\theta \xrightarrow[\Delta\theta = 200\ ^\circ C]{C = 400\ J/^\circ C} Q = 400\times200 = 80000\ J = 80\ kJ$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۶ یک قطعهٔ فلزی با دمای $52\,^\circ C$ را درون ظرف عایقی در مجاورت یک قطعه یخ ۵۰گرمی با دمای $-10\,^\circ C$، قرار می‌دهیم و دمای نهایی قطعهٔ فلز به $10\,^\circ C$ می‌رسد. اگر تبادل گرمایی فقط بین قطعهٔ فلز و قطعهٔ یخ انجام شده باشد، ظرفیت گرمایی قطعهٔ فلز در SI کدام است؟ $(c_{آب} = 2c_{یخ} = 4200 \frac{J}{kg.K},\ L_F = 336\ kJ/kg)$

۱) ۵۰۰
۲) ۴۷۵
۳) ۴۵۰
۴) ۴۲۵

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

گرمای نهان ذوب ـ انجماد:

گرمای منتقل‌شده برای تغییر حالت جسم از جامد به مایع یا از مایع به جامد، با جرم جسم نسبت مستقیم دارد. نسبت این گرما به جرم جسم را گرمای نهان ویژهٔ ذوب می‌گویند که به اختصار، آن را گرمای نهان ذوب می‌نامیم و آن را با L_F نشان می‌دهیم.

$$Q = \pm mL_F$$

گرمای نهان ذوب به جنس جسم ماده بستگی دارد و یکای آن در SI ژول بر کیلوگرم (J/kg) است.

وقتی تغییر حالت از جامد به مایع انجام می‌شود، جسم گرما می‌گیرد، یعنی علامت Q مثبت است.

$$Q = +mL_F$$

وقتی تغییر حالت از مایع به جامد انجام شود، جسم گرما از دست می‌دهد، یعنی علامت Q منفی است.

$$Q = -mL_F$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

طبق طرح‌وارهٔ زیر داریم:

یخ $-10\,^\circ C$ $\xrightarrow{Q_1}$ یخ $0\,^\circ C$ $\xrightarrow{Q_2}$ آب $10\,^\circ C$ $\xrightarrow{Q_3}$ آب $10\,^\circ C$ + فلز $52\,^\circ C$ $\xrightarrow{Q_4}$ فلز $10\,^\circ C$

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 = 0$$

$$\Rightarrow mc_{یخ}(0-(-10)) + mL_F + mc_{آب}(10-0) + C_{فلز}(10-52) = 0 \xrightarrow[L_F = 80 c_{آب}]{c_{یخ} = \frac{1}{2} c_{آب}}$$

$$= 0/05 \times \frac{c}{2} \times 10 + 0/05 \times 80c + 0/05 \times 10 \times c - 42C_{فلز} = 0$$

$$\Rightarrow 4200(0/25 + 4 + 0/5) = 42C_{فلز} \Rightarrow C_{فلز} = 475\ J/K$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۷ دمای گاز درون یک کپسول برابر با $۱۲۷\ ^\circ C$ و فشار پیمانه‌ای آن $۵\ cmHg$ است. در حجم ثابت، دمای گاز را چند کلوین افزایش دهیم تا فشار پیمانه‌ای آن، ۱۰ برابر شود؟ $(P_\circ = ۷۵\ cmHg)$

۱) ۶۲۵ ۲) ۵۵۰

۳) ۲۵۰ ۴) ۲۲۵

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint کافی است رابطهٔ نسبتی مقدار معینی گاز کامل در حجم ثابت (رابطهٔ گی‌لوساک) را بنویسید.

درس Box

قانون گی‌لوساک:

بررسی گاز در حجم ثابت:

اگر حجم مقدار معینی از یک گاز کامل، ثابت نگه داشته شود، فشار آن با دما (برحسب کلوین) متناسب است.

$$\frac{P_۲}{P_۱} = \frac{T_۲}{T_۱}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ با استفاده از فشار پیمانه‌ای گاز درون کپسول، فشار مطلق آن را به دست می‌آوریم:

$$P_۱ = P_\circ + P_g = ۷۵ + ۵ = ۸۰\ cmHg$$

$$P_۲ = P_\circ + ۱۰\, P_g = ۷۵ + ۵۰ = ۱۲۵\ cmHg$$

$$\frac{P_۲}{p_۱} = \frac{T_۲}{T_۱} \xrightarrow{T_۱ = \theta_۱ + ۲۷۳ = ۱۲۷ + ۲۷۳ = ۴۰۰\ K} \frac{۱۲۵\ cmHg}{۸۰\ cmHg} = \frac{T_۲}{۴۰۰} \Rightarrow T_۲ = ۶۲۵\ K$$

$$\Rightarrow \Delta T = ۶۲۵ - ۴۰۰ = ۲۲۵ K$$

کنکور دمای گاز درون یک کپسول، صفر درجهٔ سلسیوس و فشار پیمانه‌ای گاز نیز صفر است. در حجم ثابت، دمای گاز را به آرامی به چند درجهٔ سلسیوس برسانیم تا فشار پیمانه‌ای آن برابر ۱۰ سانتی‌متر جیوه شود؟ $(P_\circ = ۷۵\ cmHg)$

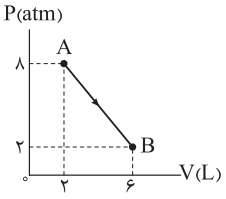
(سؤال ۷۵ کنکور ریاضی ۱۴۰۴ - نوبت دوم)

۱) ۱۷ / ۲ ۲) ۳۶ / ۴

۳) ۵۸ / ۳ ۴) ۶۴ / ۶

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۸ نمودار $P-V$ مقدار معینی گاز کامل در طی فرایند AB به شکل زیر است. اگر انرژی درونی گاز در نقطهٔ A برابر ۴۸۰۰ J باشد، در این فرایند، گاز چند ژول گرما و چگونه مبادله کرده است؟



۱) ۸۰۰، دریافت کرده است.

۲) ۸۰۰، از دست داده است.

۳) ۳۲۰۰، دریافت کرده است.

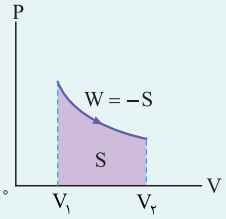
۴) ۳۲۰۰، از دست داده است.

پاسخ: گزینهٔ ۱

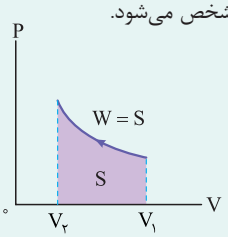
درس Box

۱) کار انجام‌شده توسط گاز در نمودار $P-V$:

- اندازهٔ کار انجام‌شده برابر مساحت بین نمودار $(P-V)$ و محور V است، $(|W|=S)$.
- علامت کار هم با توجه به انبساط یا تراکم دستگاه مشخص می‌شود.



(↑ : حجم ⇒ $W<0$)



(↓ : حجم ⇒ $W>0$)

۲) انرژی درونی (U):

۱) مجموع انرژی‌های جنبشی و پتانسیل ذرات یک ماده، انرژی درونی آن نامیده می‌شود و با (U) نمایش داده می‌شود.

۲) انرژی درونی گازهای آرمانی (با جرم ثابت) فقط تابع دمای مطلق گاز است و با آن رابطهٔ مستقیم دارد. به این معنا که با افزایش دمای گاز، انرژی درونی آن نیز به طور متناسب افزایش پیدا می‌کند. یعنی:

$$\frac{U_2}{U_1}=\frac{T_2}{T_1}\ ,\ \frac{\Delta U}{U_1}=\frac{\Delta T}{T_1}\ ,\ \frac{\Delta U}{U_2}=\frac{\Delta T}{T_2}\ ,\ PV=nRT \Rightarrow \frac{U_2}{U_1}=\frac{P_2V_2}{P_1V_1}$$

۳) قانون اول ترمودینامیک:

قانون اول ترمودینامیک در واقع همان قانون پایستگی انرژی است، با در نظر گرفتن این‌که گرما نیز صورتی از انرژی است، اگر دستگاه در فرایندی گرمای Q را بگیرد و کار W روی آن انجام شود، تغییر انرژی درونی آن از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\Delta U=W+Q$$

اگر W کار دستگاه روی محیط در نظر گرفته شود، با توجه به این‌که در هر فرایند ترمودینامیکی، کار دستگاه روی محیط (W') قرینهٔ کار محیط روی دستگاه است، $W'=-W$.

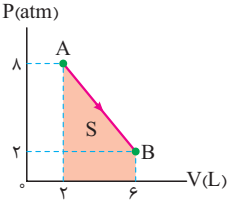
پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا انرژی درونی گاز در نقطهٔ انتهای فرایند و تغییر انرژی درونی گاز در فرایند را به دست می‌آوریم:

$$\frac{U_B}{U_A}=\frac{P_BV_B}{P_AV_A} \Rightarrow \frac{U_B}{۴۸۰۰}=\frac{۶\times۲}{۲\times۸}$$

$$\Rightarrow U_B=۳۶۰۰ \Rightarrow \Delta U=U_B-U_A=۳۶۰۰-۴۸۰۰=-۱۲۰۰\ J$$

گام دوم: می‌دانیم مساحت زیر نمودار $P-V$ برابر با کار انجام‌شده است. فرایند انبساطی است، پس علامت کار دستگاه منفی است.



$$S=|W|$$

$$W=-S=-\frac{(۲+۸)\times۴}{۲}\times۱۰^{-۳}\times۱۰^{۵}=-۲۰۰۰\ J$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

گام سوم: اکنون با استفاده از قانون اول ترمودینامیک، گرمای مبادله شده را به دست می‌آوریم:

$$\Delta U = W + Q \Rightarrow -۱۲۰۰ = -۲۰۰۰ + Q$$

$$\Rightarrow Q = +۸۰۰\,J \Rightarrow$$ محیط $۸۰۰\,J$ گرما به دستگاه داده است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۹ مقدار معینی گاز کامل با فشار و حجم معین در اختیار داریم. در آزمایش **A**، حجم این گاز را در طی فرایند هم‌دما نصف می‌کنیم. در آزمایش **B**، حجم همان گاز اولیه را به صورت بی‌دررو نصف می‌کنیم. دمای نهایی گاز، فشار نهایی گاز و کار انجام‌شده روی گاز به ترتیب در کدام آزمایش بزرگ‌تر است؟

۱) A ،B ،B
۲) B ،A ،A
۳) A ،A ،A
۴) B ،B ،B

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint نمودار (P ـ V) هر دو فرایند را رسم کنید و به سؤالات پاسخ دهید.

درس Box

فرایند تراکم هم‌دما:

- گاز با منبع گرما در تماس بوده و مبادلهٔ گرما سبب می‌شود که دمای گاز ثابت بماند.
- با کاهش حجم، فشار گاز افزایش می‌یابد.

فرایند تراکم بی‌دررو:

- گرمای مبادله‌شده صفر است.
- محیط روی دستگاه کار انجام می‌دهد. $\Delta U = W$
- چون $W > 0$ ، پس:

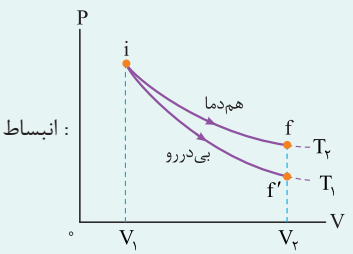
$$\Delta U > 0 \Rightarrow \Delta T > 0 \Rightarrow T_2 > T_1$$

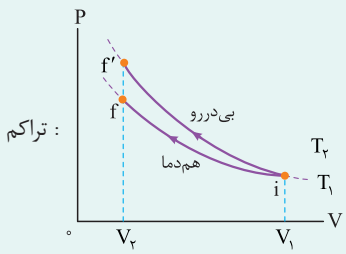
بنابراین، نمودار بی‌دررو همیشه شیب تندتری نسبت به نمودار هم‌دما دارد؛ زیرا در تراکم بی‌دررو، افزایش فشار بیشتر از فرایند هم‌دما است.

کمی متفاوت‌تر ...

به طور کلی شیب منحنی‌های بی‌دررو بیشتر از منحنی‌های هم‌دما است.

یعنی به ازای یک تغییر حجم معین، تغییر فشار فرایند بی‌دررو بیشتر از تغییر فشار فرایند هم‌دما است.

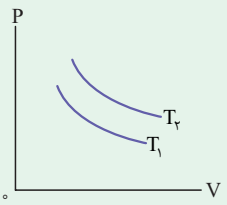




نتیجهٔ کلی:

نمودار بی‌دررو در تراکم، بالاتر از فرایند هم‌دما و در انبساط پایین‌تر از فرایند هم‌دما قرار می‌گیرد.

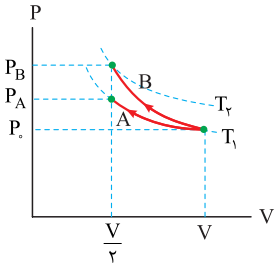
نکته اگر دو فرایند هم‌دما در یک دستگاه مختصات P ـ V رسم شوند، نموداری که بالاتر قرار می‌گیرد، دمای بیشتری دارد.



$T_2 > T_1$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

پاسخ خیلی تشریحی ✔ با توجه به نکات درس‌باکس و رسم نمودار $P - V$ هر دو فرایند داریم:



$T_2 > T_1$

فرایند A : هم‌دما

فرایند B : بی‌دررو

بالارفتن در منحنی‌های هم‌دما نشان می‌دهد که $T_B > T_A$ است.

مساحت زیر نمودار بی‌دررو بیشتر است و چون فرایند از نوع تراکم است، $W > 0$ است. $\Leftarrow W_B > W_A$

شیب در نمودار بی‌دررو بیشتر است $\Leftarrow P_B > P_A$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۰ یک ماشین گرمایی درون‌سوز با بازده ۲۰ درصد، در هر ثانیه ۵۰ چرخه انجام می‌دهد و در هر چرخه، $4\ kJ$ کار تحویل می‌دهد. اگر گرمای حاصل از هر گرم سوخت $5\times10^{4}\ J/g$ باشد، ماشین در هر دقیقه چند گرم سوخت مصرف می‌کند؟

۱) ۹۶ ۲) ۱۲۰

۳) ۹۶۰ ۴) ۱۲۰۰

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

۱) بازده ماشین گرمایی (η)، برابر با نسبت کار انجام‌شده توسط دستگاه به گرمای داده‌شده به آن است.

$$\eta=\frac{|W|}{Q_H}\Rightarrow\eta=\frac{Q_H-|Q_L|}{Q_H}\Rightarrow\eta=1-\frac{|Q_L|}{Q_H}$$

با توجه به قانون اول ترمودینامیک (قانون پایستگی انرژی) برای یک ماشین گرمایی داریم:

$$Q_H=|Q_L|+|W|$$

و چون Q_H را از محیط می‌گیرد و W و Q_L را به محیط می‌دهد، پس $Q_H>0$، $Q_L<0$ و $W<0$ است.

۲) قانون دوم ترمودینامیک به بیان ماشین گرمایی:

ممکن نیست دستگاه چرخه‌ای را بپیماید که در طی آن مقدرای گرما را از منبع دمای بالا جذب و تمام آن را به کار تبدیل کند.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: ابتدا Q_H هر چرخه را به دست می‌آوریم:

$$\eta=\frac{|W|}{Q_H}\Rightarrow Q_H=\frac{|W|}{\eta}=\frac{4}{0/2}=20\ kJ$$

گام دوم: حالا گرمای دریافتی توسط ماشین را در هر ثانیه و هر دقیقه به دست می‌آوریم:

$$Q_{\text{هر ثانیه}}=20\times50=1000\ kJ$$

$$Q_{\text{هر دقیقه}}=60\times1000=60000\ kJ=6\times10^{7}\ J$$

گام سوم: جرم سوخت مصرفی در هر دقیقه را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{جرم سوخت}=\frac{6\times10^{7}\ J}{5\times10^{4}\ J/g}=1200\ g$$

کتاب درسی

یک ماشین گرمایی درون‌سوز در هر چرخه $8/00\ kJ$ گرما از سوزاندن سوخت دریافت می‌کند و $4\,2/00\ kJ$ کار تحویل می‌دهد. گرمای حاصل از سوخت $5/0\times10^{4}\ J/g$ است و ماشین در هر ثانیه $4\,0/0$ چرخه را می‌پیماید. کمیت‌های زیر را حساب کنید.

(فیزیک (۱) ـ سؤال ۱۴ صفحهٔ ۱۴۹ کتاب درسی)

الف) بازده ماشین، ب) سوخت مصرف‌شده در هر چرخه و پ) توان ماشین.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

شیمی دهم

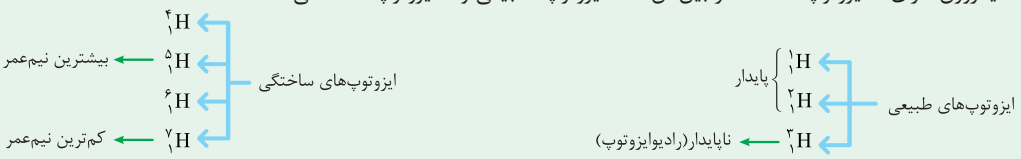
۴۱ در میان ۷ ایزوتوپ هیدروژن، در اتم **a** ایزوتوپ، شمار نوترون‌ها از شمار پروتون‌ها بیشتر و در اتم **b** ایزوتوپ، شمار نوترون‌ها با شمار پروتون‌ها برابر است. حاصل **(a − b)** کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۴

نکته

هیدروژن دارای ۷ ایزوتوپ است که از بین آن‌ها، ۳ ایزوتوپ، طبیعی و ۴ ایزوتوپ، ساختگی هستند.



در بین همهٔ اتم‌ها، $_1^1H$ تنها اتمی است که نوترون ندارد و عدد اتمی آن با عدد جرمی‌اش برابر است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

در ایزوتوپ $_1^2H$، شمار نوترون‌ها $(n = 1)$ با شمار پروتون‌ها $(p = 1)$ برابر است $(b = 1)$.

در ایزوتوپ‌های $_1^3H, _1^4H, _1^5H, _1^6H, _1^7H$، شمار نوترون بیشتر از ۱ است؛ بنابراین در این ایزوتوپ‌ها، شمار نوترون‌ها از شمار پروتون‌ها بیشتر می‌باشد $(a = 5)$، پس $a - b$ برابر ۴ است.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۲ کدام مورد درست است؟

۱) انرژی همانند ماده، در نگاه ماکروسکوپی پیوسته است.

۲) با استفاده از رنگ شعلهٔ سدیم سولفات، رنگ شعلهٔ لیتیم سولفات نیز قابل پیش‌بینی است.

۳) طیف نشری خطی گونه‌های تک‌الکترونی مانند $_{1}H$، $_{3}Li^{2+}$ و $_{2}He^{+}$ یکسان است.

۴) با توجه به عدم موفقیت بور در توجیه طیف نشری خطی هیدروژن، ساختار لایه‌ای توسط دانشمندان برای اتم پیشنهاد شد.

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✔

انرژی نیز همانند ماده در نگاه ماکروسکوپی، پیوسته اما در نگاه میکروسکوپی، گسسته یا کوانتومی است.

بررسی گزینه‌های نادرست:

گزینهٔ (۲): *نه!* رنگ شعلهٔ لیتیم و همهٔ ترکیب‌های آن، سرخ و رنگ شعلهٔ سدیم و همهٔ ترکیب‌های آن، زرد است.

گزینهٔ (۳): از اون‌جایی که انرژی لایه‌های الکترونی اطراف هستهٔ هر اتم، به عدد اتمی آن (Z) وابسته است، انرژی لایه‌ها و تفاوت انرژی میان آن‌ها در اتم عنصرهای گوناگون متفاوت است، در نتیجه هر عنصر، طیف نشری خطی مخصوص به خود را دارد.

گزینهٔ (۴): اگر چه مدل بور با موفقیت توانست طیف نشری خطی هیدروژن را توجیه کند اما توانایی توجیه طیف نشری خطی دیگر عنصرها را نداشت.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۳ کدام مطلب درست است؟

۱) اگر اتم عنصری دارای ۱۷ الکترون با $l=1$ باشد، در آرایش الکترونی فشردهٔ آن از نماد $[Ar]$ استفاده می‌شود.

۲) تمامی عنصرهایی که اتم آن‌ها حداکثر دارای ۱۰ الکترون با $l=2$ هستند، در دورهٔ چهارم جدول دوره‌ای واقع‌اند.

۳) شمار الکترون‌ها در سومین لایهٔ الکترونی اتم هیچ دو عنصر دستهٔ d دورهٔ چهارم، نمی‌تواند با هم یکسان باشد.

۴) اگر در آرایش الکترونی فشردهٔ اتم عنصر D از $[Ar]$ استفاده شود، شمار الکترون‌های با $l=1$ در اتم D به یقین با اتم ${}_{18}Ar$ متفاوت است.

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✔

عدد کوانتومی $l=1$ مربوط به زیرلایه‌های p است؛ بنابراین در آرایش الکترونی اتم عنصری دارای ۱۷ الکترون با $l=1$، زیرلایه‌های $2p^6$، $3p^6$ و $4p^5$ وجود دارد: در نتیجه این عنصر متعلق به دورهٔ چهارم جدول تناوبی است و برای نوشتن آرایش الکترونی فشردهٔ آن باید از گاز نجیب آرگون استفاده کرد:

$$X:[{}_{18}Ar]\,3d^{10}4s^2 4p^5$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۲): اولین و دومین عنصر دورهٔ پنجم نیز دارای ۱۰ الکترون با $l=2$ $(3d^{10})$ هستند:

$${}_{37}Rb:[{}_{36}Kr]\,5s^1,\ {}_{38}Sr:[{}_{36}Kr]\,5s^2$$

از عدد اتمی ۳۹ به بعد، زیرلایهٔ 4d نیز اشغال می‌شود و شمار الکترون‌ها با $l=2$، بیشتر از ۱۰ خواهد شد.

گزینهٔ (۳): مثلاً در هر دو اتم ${}_{24}Cr$ و ${}_{25}Mn$، لایهٔ سوم، ۱۳ الکترونی $(3s^2 3p^6 3d^5)$ است:

$${}_{24}Cr:[{}_{18}Ar]\,3d^5 4s^1,\ {}_{25}Mn:[{}_{18}Ar]\,3d^5 4s^2$$

گزینهٔ (۴): در آرایش الکترونی فشردهٔ اتم عنصرهای دورهٔ چهارم، از گاز نجیب آرگون استفاده می‌شود. برای ۱۲ عنصر اول دورهٔ چهارم (از عدد اتمی ۱۹ تا ۳۰) مانند ${}_{18}Ar$، زیرلایه‌های 2p و 3p تنها زیرلایه‌های با $l=1$ هستند:

$${}_{18}Ar:1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 \Rightarrow l=1 \text{ با الکترون } 12$$

$${}_{19}K:[Ar]\,4s^1 \Rightarrow l=1 \text{ با الکترون } 12$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۴ کدام مورد نادرست است؟

۱) آرگون گازی بی‌رنگ، بی‌بو و غیرسمی است که در پتروشیمی شیراز از تقطیر جزءبه‌جزء هوای مایع با خلوص بسیار زیاد تهیه می‌شود.

۲) هلیم از واکنش‌های هسته‌ای در ژرفای زمین تولید می‌شود و حدود ۷ درصد حجمی از مخلوط گاز طبیعی را تشکیل می‌دهد.

۳) تهیهٔ هلیم از هوا، مقرون‌به‌صرفه‌تر از تهیهٔ آن از تقطیر جزءبه‌جزء گاز طبیعی است.

۴) در فرایند تقطیر جزءبه‌جزء هوای مایع، آرگون دومین گاز خارج‌شده از ستون تقطیر است.

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔

مقدار هلیم در کرهٔ زمین خیلی کم است، ولی مقدار این گاز در لایه‌های زیرین پوستهٔ زمین، بیشتر از مقدار آن در هوا است. به همین دلیل **منابع زمینی هلیم**، از هوا، سرشارتر و **برای تولید هلیم در مقیاس صنعتی، مناسب‌ترند**، به عبارت دیگر، با توجه به بالاتربودن درصد حجمی هلیم در گاز طبیعی (۷٪) نسبت به هوا (۰/۰۰۰۵٪)، برای تهیهٔ گاز هلیم، تقطیر جزءبه‌جزء گاز طبیعی مقرون‌به‌صرفه‌تر است.

در مورد گزینهٔ (۴) می‌دانید که هر چه نقطهٔ جوش ماده‌ای پایین‌تر باشد، در ستون تقطیر زودتر از هوای مایع جدا می‌شود:

مقایسهٔ نقطهٔ جوش: $N_2 < Ar < O_2$

$-196\ ^\circ C \quad -186\ ^\circ C \quad -183\ ^\circ C$

ترتیب جداشدن گازها: $N_2 \rightarrow Ar \rightarrow O_2$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

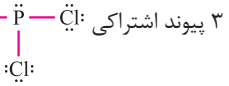
۴۵ شمار پیوندهای اشتراکی در ساختار لوویس کدام گونه با سه گونهٔ دیگر متفاوت است؟

۱) فسفر تری‌کلرید
۲) یون کربنات
۳) گوگرد دی‌اکسید
۴) کربن مونوکسید

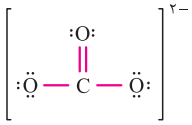
پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✔ ساختار لوویس گونه‌های داده‌شده به صورت زیر است:

(۱): PCl_3 ⇒ ۳ پیوند اشتراکی

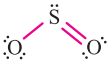


(۲): CO_3^{2-} ⇒



۴ پیوند اشتراکی

(۳): SO_2 ⇒



۳ پیوند اشتراکی

(۴): CO ⇒ ۳ پیوند اشتراکی

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۶ کدام مورد دربارهٔ شیمی سبز، نادرست است؟

۱) برای به دام انداختن کربن دی‌اکسید تولیدشده در نیروگاه‌ها و مراکز صنعتی، آن را با اکسید اسیدی واکنش می‌دهند.

۲) سوخت‌های سبز از پسماندهای گیاهانی مانند سویا، نیشکر و دانه‌های روغنی به دست می‌آیند.

۳) پلاستیک‌های سبز، پلیمرهای زیست‌تخریب‌پذیرند که بر پایهٔ مواد گیاهی مثل نشاسته ساخته می‌شوند.

۴) میدان‌های قدیمی گاز و چاه‌های قدیمی نفت و هم‌چنین سنگ‌های متخلخل در زیر زمین، جاهای مناسبی برای دفن گاز CO_2 هستند.

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✔ برای به دام‌انداختن CO_2 تولیدشده در نیروگاه‌ها، آن را با اکسیدهای MgO و CaO واکنش می‌دهند. به طور کلی، اکسیدهای فلزی، اکسیدهای بازی محسوب می‌شوند:

$$CO_2(g) + CaO(s) \rightarrow CaCO_3(s)$$

$$CO_2(g) + MgO(s) \rightarrow MgCO_3(s)$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۷ در نمونه‌ای از پتاسیم نیترات، ۲۰ گرم اکسیژن وجود دارد. از تجزیهٔ این نمونه مطابق معادلهٔ زیر، به تقریب چند لیتر گاز نیتروژن در شرایط STP تولید می‌شود؟ $(N = ۱۴, O = ۱۶, K = ۳۹ : g.mol^{-۱})$

$KNO_۳(s) \rightarrow K_۲O(s) + O_۲(g) + N_۲(g)$ (معادله موازنه شود.)

۱) ۲ / ۳۳
۲) ۳ / ۳۶
۳) ۴ / ۶۷
۴) ۵ / ۸۰

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: موازنهٔ معادلهٔ واکنش:

$$۴KNO_۳ \rightarrow ۲K_۲O + ۵O_۲ + ۲N_۲$$

گام دوم: محاسبهٔ تعداد مول $KNO_۳$ به کمک جرم اکسیژن موجود در آن:

$$KNO_۳ \sim ۳O$$

$$۲۰\ g\ O \times \frac{۱\ mol\ O}{۱۶\ g\ O} \times \frac{۱\ mol\ KNO_۳}{۳\ mol\ O} = \frac{۵}{۱۲}\ mol\ KNO_۳$$

گام سوم: محاسبهٔ حجم گاز نیتروژن به کمک تعداد مول $KNO_۳$:

$$\frac{۵}{۱۲}\ mol\ KNO_۳ \times \frac{۲\ mol\ N_۲}{۴\ mol\ KNO_۳} \times \frac{۲۲/۴\ L\ N_۲}{۱\ mol\ N_۲} = \frac{\overset{۵۶}{\cancel{۲۲۴}}}{۱۲ \times \underset{۱}{\cancel{۴}}} = \frac{۱۴}{۳} \simeq ۴/۶۷\ L\ N_۲$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۸ در نمونه‌ای از کلسیم کلرید، مجموع شمار یون‌ها برابر $۴۵/۱۵\times۱۰^{۲۲}$ است. از واکنش کامل این نمونه با ۲ لیتر محلول نقره نیترات، چند گرم رسوب تشکیل می‌شود و غلظت مولی محلول نقره نیترات چند مولار است؟

$(Cl=۳۵/۵\ ,\ Ag=۱۰۸ : g.mol^{-۱})$

۱) ۷۱/۷۵ ـ ۰/۲۵
۲) ۱۴۳/۵ ـ ۰/۲۵
۳) ۷۱/۷۵ ـ ۰/۵
۴) ۱۴۳/۵ ـ ۰/۵

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا مقدار مول کلسیم کلرید ($CaCl_۲$) را محاسبه می‌کنیم:

$$۱CaCl_۲ \sim ۱Ca^{۲+} \sim ۲Cl^- \sim ۳\ \text{یون}$$

$$?\ mol\ CaCl_۲ = ۴۵/۱۵\times۱۰^{۲۲}\ \text{یون} \times \frac{۱\ mol\ \text{یون}}{۶/۰۲\times۱۰^{۲۳}\ \text{یون}} \times \frac{۱\ mol\ CaCl_۲}{۳\ mol\ \text{یون}} = ۰/۲۵\ mol$$

یه‌جور دیگه

استفاده از کسر تناسب:

$$\frac{\text{مول}}{\underbrace{\text{ضریب}}_{CaCl_۲}} = \frac{\text{تعداد}}{\underbrace{\text{ضریب}\times۶/۰۲\times۱۰^{۲۳}}_{\text{یون‌ها}}} = \frac{x}{۱} = \frac{۴۵/۱۵\times۱۰^{۲۲}}{۳\times۶/۰۲\times۱۰^{۲۳}} \Rightarrow x = ۰/۲۵\ mol$$

گام دوم: معادلهٔ واکنش $CaCl_۲$ با $AgNO_۳$ به صورت زیر است:

$$CaCl_۲(aq) + ۲AgNO_۳(aq) \rightarrow Ca(NO_۳)_۲(aq) + ۲AgCl(s)$$

گام سوم: جرم $AgCl$ تولیدشده و غلظت مولی $AgNO_۳$ مصرف‌شده به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$?\ g\ AgCl = ۰/۲۵\ mol\ CaCl_۲ \times \frac{۲\ mol\ AgCl}{۱\ mol\ CaCl_۲} \times \frac{۱۴۳/۵\ g\ AgCl}{۱\ mol\ AgCl} = ۷۱/۷۵\ g$$

$$?\ mol\ AgNO_۳ = ۰/۲۵\ mol\ CaCl_۲ \times \frac{۲\ mol\ AgNO_۳}{۱\ mol\ CaCl_۲} = ۰/۵\ mol$$

$$M_{AgNO_۳} = \frac{AgNO_۳\ \text{مول}}{\text{لیتر محلول}} = \frac{۰/۵}{۲} = ۰/۲۵\ mol.L^{-۱}$$

یه‌جور دیگه

استفاده از کسر تناسب:

$$\frac{\text{مول}}{\underbrace{\text{ضریب}}_{CaCl_۲}} = \frac{\text{جرم}}{\underbrace{\text{جرم مولی}\times\text{ضریب}}_{AgCl}} = \frac{\underbrace{\text{حجم}\times\text{غلظت مولی}}_{\text{ضریب}}}{AgNO_۳} \Rightarrow \frac{۰/۲۵}{۱} = \frac{x}{۲\times۱۴۳/۵} = \frac{y\times۲}{۲} \Rightarrow \begin{cases} x = ۷۱/۷۵\ g \\ y = ۰/۲۵\ mol.L^{-۱} \end{cases}$$

کنکور

اگر مجموع غلظت مولی یون‌ها در یک نمونه محلول سدیم سولفات، برابر ۰/۱۲ باشد، چند میلی‌لیتر از آن در واکنش با مقدار کافی محلول باریم کلرید، ۱۳/۹۸ گرم رسوب تشکیل می‌دهد؟ (سؤال ۸۶ کنکور ۱۴۰۴ ـ (خارج از کشور))

$(Ba=۱۳۷, S=۳۲, O=۱۶ : g.mol^{-۱})$

$$Na_۲SO_۴(aq) + BaCl_۲(aq) \rightarrow BaSO_۴(s) + ۲NaCl(aq)$$

۱) ۵۰۰
۲) ۷۵۰
۳) ۱۵۰۰
۴) ۳۰۰۰

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۹ **معادلهٔ انحلال‌پذیری سدیم نیترات برحسب دما به صورت $S = ۰/۸\theta + ۷۲$ است. دمای ۲۷۰ گرم محلول سیرشدهٔ این نمک را از $۳۵\ ^\circ C$ به چند درجهٔ سلسیوس برسانیم تا جرم محلول باقی‌مانده پس از جداسازی رسوب، برابر با ۲۴۳ گرم باشد؟**

۱) ۳۰ ۲) ۲۵ ۳) ۱۵ ۴) ۱۰

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔

جرم محلول از ۲۷۰ به ۲۴۳ گرم رسیده است، پس طی فرایند کاهش دما، $۲۷ = ۲۴۳ - ۲۷۰$ گرم نمک رسوب کرده است:

$$S_۱ = (۰/۸ \times ۳۵) + ۷۲ = ۱۰۰\ g \Rightarrow \text{جرم محلول سیرشده به ازای ۱۰۰ گرم آب} = ۱۰۰ + ۱۰۰ = ۲۰۰\ g$$

فرض می‌کنیم انحلال‌پذیری نمک در دمای نهایی برابر $S_۲$ باشد:

$$\text{جرم رسوب به ازای ۱۰۰ گرم آب} = S_۱ - S_۲$$

$$\text{رسوب}\ \overset{۱}{\cancel{۲۷}}\ g = \overset{۱۰}{\cancel{۲۷۰}}\ g\ \text{محلول سیرشده} \times \frac{(۱۰۰ - S_۲)\ g\ \text{رسوب}}{۲۰۰\ g\ \text{محلول سیرشده}}$$

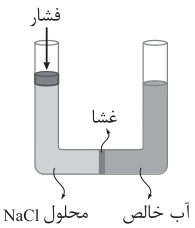
$$\Rightarrow ۱۰۰ - S_۲ = ۲۰ \Rightarrow S_۲ = ۸۰$$

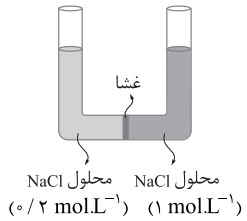
حالا به کمک معادلهٔ انحلال‌پذیری، باید ببینیم در چه دمایی، انحلال‌پذیری نمک برابر ۸۰ است:

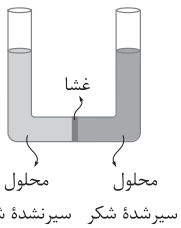
$$S = ۰/۸\theta + ۷۲ \Rightarrow ۸۰ = ۰/۸\theta + ۷۲ \Rightarrow ۰/۸\theta = ۸ \Rightarrow \theta = ۱۰\ ^\circ C$$

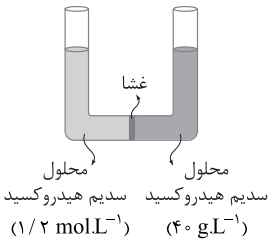
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۰ اگر در شکل‌های زیر، غشای نیمه‌تراوا فقط به مولکول‌های آب اجازهٔ عبور دهد، در کدام مورد، غلظت محلول در سمت چپ غشا به مرور کاهش می‌یابد؟ $(H = ۱, O = ۱۶, Na = ۲۳ : g.mol^{-۱})$

۱)


۲)


۳)


۴)


پاسخ: گزینهٔ ۴

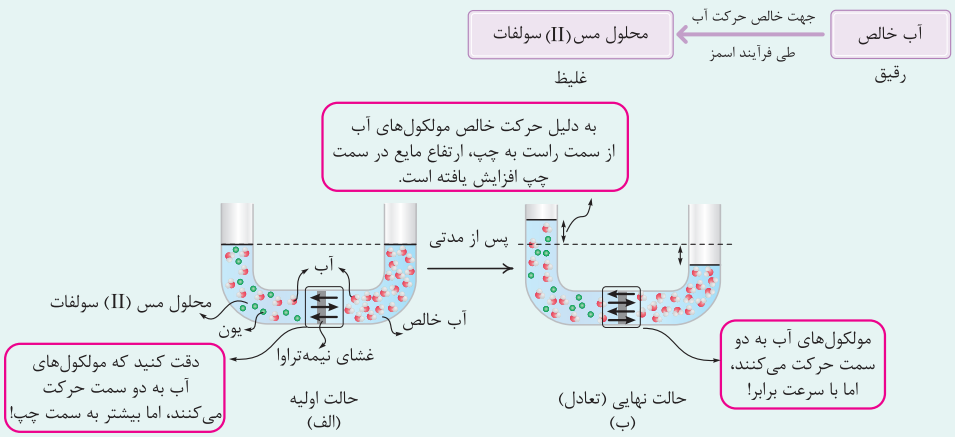
درس Box

اسمز و اسمز معکوس

اسمز (گذرندگی): به زبان ساده، اسمز یعنی حرکت مولکول‌های آب از محیط رقیق‌تر (پرآب‌تر) به محیط غلیظ‌تر (کم‌آب‌تر) از طریق یک غشای نیمه‌تراوا! ***اگر بخوایم اسمز رو خیلی شیک‌تر تعریف کنیم، باید بگیم که:***

«به حرکت **خودبه‌خودی** مولکول‌های حلال از طریق یک غشای نیمه‌تراوا از یک محلول با غلظت پایین‌تر به محلولی با غلظت بالاتر (یا از سمت حلال خالص به سمت محلول)، اسمز یا گذرندگی می‌گویند.»

فرض کنید مطابق شکل زیر «الف»، حجم‌های برابری از آب مقطر و محلول مس (II) سولفات به کمک یک غشای نیمه‌تراوا از هم جدا شده‌اند. محلول سمت چپ به دلیل حل‌شونده‌ای که دارد، نسبت به مایع سمت راست (آب خالص)، کم‌آب‌تر و غلیظ‌تر است؛ بنابراین به دلیل پدیدهٔ اسمز، مولکول‌های آب به طور عمده از جایی که تعداد مولکول‌های بیشتری دارد (آب خالص) به جایی که تعداد مولکول‌های کم‌تری دارد (محلول مس (II) سولفات) وارد می‌شود؛ در نتیجه پس از مدتی از شکل «الف» می‌رسیم به شکل «ب»!



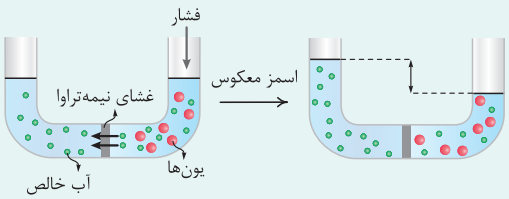
اسمز وارونه (معکوس):

خواندیم که در فرایند اسمز، مولکول‌های آب به طور **خودبه‌خودی** از محلول رقیق‌تر وارد محلول غلیظ‌تر می‌شوند. در فرایندی به نام اسمز معکوس، ***همان‌طور که از اسمش معلومه***، اتفاقی برخلاف فرایند اسمز رخ می‌دهد؛ یعنی آب از محلول غلیظ‌تر وارد محلول رقیق‌تر می‌شود. از اون‌جایی که این فرایند برخلاف قاعدهٔ کلی و طبیعی است، ***باید زور بالا سرش باشه!*** به عبارت دیگر اسمز معکوس با اعمال فشار انجام خواهد شد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

اسمز معکوس ← فرایندی غیر خودبه‌خودی است که طی آن با اعمال فشار بر سطح محلول غلیظ‌تر، مولکول‌های آب برخلاف روند طبیعی (فرایند اسمز) از محلول غلیظ‌تر وارد محلول رقیق‌تر می‌شوند.

مثال: اگر حجم‌های برابری از آب خالص و آب‌نمک با یک غشای نیمه‌تراوا از هم جدا شده باشند، با اعمال فشار بر محلول آب‌نمک، مولکول‌های آب از محلول آب‌نمک به سمت آب خالص رفته و حجم آب خالص افزایش می‌یابد. ***واضح و مبرهن است*** که با جابه‌جایی مولکول‌های آب، محلول غلیظ اولیه به مرور غلیظ‌تر می‌شود.



پاسخ خیلی تشریحی ✔

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): با ایجاد فشار بر محلول سمت چپ، آب از سمت چپ به سمت راست جابه‌جا می‌شود، با خروج آب از محلول سمت چپ، این محلول غلیظ‌تر می‌شود.

گزینهٔ (۲): غلظت محلول سمت چپ کم‌تر از غلظت محلول سمت راست است؛ بنابراین آب از سمت چپ به راست جابه‌جا می‌شود؛ بنابراین با گذشت زمان، غلظت محلول سمت راست، کاهش و غلظت محلول سمت چپ، افزایش می‌یابد.

گزینهٔ (۳): محلول سیرنشدهٔ شکر نسبت به محلول سیرشدهٔ آن، غلظت کم‌تری دارد؛ در نتیجه آب از سمت چپ به راست جابه‌جا خواهد شد و غلظت محلول سمت چپ با گذشت زمان افزایش می‌یابد.

گزینهٔ (۴): ابتدا باید غلظت محلول سمت راست را به مول بر لیتر تبدیل کنیم:

$$۴۰\,\frac{g}{L}\times\frac{۱\,mol}{۴۰\,g\ NaOH}=۱\,mol.L^{-۱}$$

بنابراین غلظت محلول سمت راست کم‌تر از غلظت محلول سمت چپ است و آب از سمت راست به چپ جابه‌جا می‌شود؛ بدین ترتیب با ورود آب به محلول سمت چپ، این محلول رقیق‌ترشده و غلظت آن کاهش می‌یابد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir