



گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی

آزمون ماز | پایه یازدهم



مرور و تثبیت پایه دهم



ویژه دانش آموزان پایه یازدهم

دفترچه پاسخ

پنجشنبه ۱۳ شهریورماه ۱۴۰۴

- ✓ پاسخنامه سریع؛ برای بررسی فوری بعد از آزمون
- ✓ تحلیل تمام گزینه‌های هر سؤال؛ برای بررسی سؤالاتی که پاسخ نادرست داده‌اید
- ✓ نکات و درسنامه‌های آموزشی؛ برای یادگیری کامل مباحث هر سؤال
- ✓ مشاوره تستی؛ برای یادگیری انواع روش‌های حل تست
- ✓ استراتژی آزمون؛ برای یادگیری مدیریت زمان و مدیریت جلسه آزمون

دِرس	مَسْئُول دِرس	طِراحان	وِراستاران
ریاضیات	حسین شفیع زاده سیدجواد نظری مهرداد کیوان	مهرداد کیوان – حسین شفیع زاده سیدجواد نظری – محمد خانگلدی کاظم اجلالی – محمدپورسعید محمد رضا حسینی فرد – سوگند روشنی کیوان دارابی – رسول حاجی زاده	مهرداد اسپیدکار مائده بادان فیروز علیرضا ملک حسینی
فیزیک	سجاد صادقی زاده	سجاد صادقی زاده – محمدجواد سورچی حسین عبدوی نژاد – مجید رجبی وندچالی مهدی پارسا – ارسلان رحمانی – محمد باغبان محسن قندچلر – آروین صالحی محمدجواد حاجی وند – مهدی رحمت اللهی	حنا خلعتبری
شیمی	علی ترابی	علی ترابی – مهسا بایمانی نژاد پرهام تیزپا	محمد رضا جمشیدی متین قنبری پرهام امیری



یک تیم با بیش از ۵۰۰ نفر در حال کار هستن تا آزمون‌های ماز با حداکثر کیفیت حاضر بشن و به شما کمک کنن و مسیر موفقیت رو براتون ساده‌تر کنن. همیشه از نظرات و کامنت‌های خوبتون انرژی می‌گیریم. مرسی که همراهمون هستین. راستی! حتماً در نظرسنجی آزمون شرکت کنین و نظرات و پیشنهاداتتون رو برامون بنویسین.

درک اینکه کدوم سؤالات کنکور احتمالاً در کمتر از ۱ دقیقه حل می‌شن، یک مهارت استراتژیک کلیدی! در مقاله قبلی درباره اولویت‌بندی حرفه‌ای سؤالا صحبت کردیم تا بتونی سؤالای آسون بیشتری رو بزنی و حسرت به دل نمونی که چرا به چندتا سؤال آسون نرسیدم.

گفتیم که اولویت‌بندی سریع سؤالا بر اساس ۵ نکته مهم انجام می‌شه:

- ۱ **سؤالات محاسباتی و غیر محاسباتی:** معمولاً سؤالای غیر محاسباتی سریع‌تر جواب داده می‌شن.
- ۲ **توجه به طول سؤالات:** سؤالای طولانی‌تر اغلب وقت گیرتر هستن.
- ۳ **سؤالات تحلیلی:** این سؤالا معمولاً به دقت بیشتری نیاز دارن.
- ۴ **گیر نکنید:** اگر حس کردی سؤالی داره وقت رو می‌خوره، سریع رهاش کن.
- ۵ **اولویت‌بندی با اسکن:** یک نگاه سریع به همه سؤالات، کمک می‌کنه از همون اول بدونی کدوم آسون‌تر هست.

حالا می‌خوایم برای این مدیریت، یک کدگذاری یاد بگیریم:

بدون علامت: سؤالاتی که زیر یک دقیقه حل می‌شن و همون لحظه جواب میدی.

✗ سؤالات حذفی: سؤالایی که مطمئنی نباید درگیرشون بشی (نخوندی یا نمی‌تونی حتی یک گزینه رو حذف کنی).

— سؤالات وقت گیر: سؤالایی که باید بذاری برای دور دوم آزمون.

○ سؤالات نیمه‌کاره: سؤالایی که نصفه نیمه حل کردی (مثلاً دو گزینه رو حذف کردی ولی مطمئن نشدی).

سؤالاتی که یک یا دو گزینه‌اش رو با اطمینان حذف کردیم، بزنی؟!؟!!

کنکور چهار گزینه‌ای طراحی می‌شه و در هر سؤال، سه پاسخ اشتباه یکی از درست‌ها رو حذف می‌کنه. اگه شانس همه سؤالا رو بزنی، در مجموع چیزی به دست نمیاری.

ولی فرض کن در ۳۰ سؤال، بتونی برای هر سؤال فقط یک گزینه رو با اطمینان حذف کنی. بعد بین سه گزینه باقی‌مونده شانس بزنی. از نظر آماری، احتمالاً ۱۰ تا درست می‌زنی، ۲۰ تا غلط میشه که حدود ۷ تا از درستات رو از بین می‌بره. در نهایت ۳ تا درست برات می‌مونه. پس ارزشمند میشه!



نتیجه گیری:

پس قرار شد زمان آزمون رو به دو دور تقسیم کنیم:

دور اول: هر سؤالی که زیر یک دقیقه حل میشه، جواب می‌دیم. بقیه رو با **✗**، **—** یا **○** علامت می‌زنیم.
دور دوم: سراغ سؤالایی میریم که علامت زدیم (وقت گیر یا نیمه‌کاره).
اینطوری خیالمون راحت‌تره که زمان مدیریت شده و هیچ سؤال آسونی از قلم نیافته.

جمع‌بندی آخر...

این چیزی که خواندی، فقط به کتبه آموزشی نبود، بلکه یک مهارت. یعنی تا وقتی چندبار توی آزمون‌ها امتحانش کنی، به درد روز کتور می‌خوره. خوشبختانه توی آزمون‌های ماژ امکان علامت‌گذاری سؤالات وجود داره. پس می‌تونی با تمرین توی این آزمون‌ها، مهارت علامت‌گذاری رو به یک عادت حرفه‌ای تبدیل کنی.



برای دیدن پاسخنامه ویدئویی آزمون
QRcode بالا را اسکن کنید!
یا بر روی لینک زیر کلیک کنید!
پاسخنامه ویدئویی آزمون

ریاضی ۱: معادله‌ها و نامعادله‌ها، صفحه‌های ۶۹ تا ۹۳
هندسه ۱: چندضلعی‌ها، صفحه‌های ۵۴ تا ۶۴

بودجه‌بندی
این آزمون

ریاضی ۱: از این مبحث به طور مستقیم تستی در کنکور طرح نشده است.
هندسه ۱: از این مبحث به طور مستقیم تستی در کنکور طرح نشده است.

سهم در
کنکور

- ۱- اگر $x = -2$ یکی از ریشه‌های معادله $\sqrt{2}x^2 + 2(m-1)x - 4 = 0$ باشد، مجذور ریشه دیگر کدام است؟
(۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۸ (۴) ۱۶

(آسان - محاسباتی - ۱۰۰۴)

پاسخ: گزینه ۱

می‌دانیم که $x = -2$ یکی از ریشه‌های معادله است، بنابراین در آن صدق می‌کند:

$$\sqrt{2}x^2 + 2(m-1)x - 4 = 0 \xrightarrow{x=-2} 4\sqrt{2} - 4(m-1) - 4 = 0 \Rightarrow 4\sqrt{2} - 4m + 4 - 4 = 0 \Rightarrow 4m = 4\sqrt{2} \Rightarrow m = \sqrt{2}$$

بنابراین معادله به صورت $\sqrt{2}x^2 + 2(\sqrt{2}-1)x - 4 = 0$ است، پس:

$$\sqrt{2}x^2 + 2(\sqrt{2}-1)x - 4 = 0 \Rightarrow (\sqrt{2}x - 2)(x + 2) = 0$$

$$\begin{cases} \sqrt{2}x - 2 = 0 \Rightarrow \sqrt{2}x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \\ x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \end{cases}$$

در نتیجه، مجذور ریشه دیگر معادله برابر است با:

$$(\sqrt{2})^2 = 2$$



- ۲- اگر در حل معادله درجه دوم $(1-x)(2x+1)+2=0$ به روش مربع کامل، معادله را به فرم $(x+m)^2 = n^2$ بنویسیم، حاصل $m+n$ کدام می‌تواند باشد؟

$$\frac{1}{2} \quad (۴)$$

$$\frac{3}{2} \quad (۳)$$

$$-\frac{3}{2} \quad (۲)$$

$$-۱ \quad (۱)$$

(آسان - محاسباتی - ۱۰۰۴)

پاسخ: گزینه ۲

حل معادله درجه دوم به روش مربع کامل

اگر بخواهیم یک معادله درجه دوم را به روش مربع کامل حل کنیم، ابتدا باید معادله را به فرم $x^2 + ax = b$ در بیاوریم و سپس $(\frac{a}{2})^2$ را به طرفین اضافه کنیم. (دقت کنید که a ضریب x است).

توجه!

در این روش حتماً باید ضریب x^2 برابر یک باشد و اگر ضریب x^2 برابر یک نبود، ابتدا آن را به یک تبدیل می‌کنیم و سپس از روش بالا استفاده می‌کنیم.

ابتدا معادله داده شده را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$(1-x)(2x+1)+2=0 \Rightarrow -2x^2 + x + 3 = 0$$



سپس عدد ثابت را به سمت راست تساوی می‌بریم و طرفین تساوی را بر ضریب x^2 تقسیم می‌کنیم:

$$-2x^2 + x = -3 \xrightarrow[\div(-2)]{\text{طرفین}} x^2 - \frac{1}{2}x = \frac{3}{2}$$

حال ضریب x را نصف کرده و مربع آن را به طرفین تساوی اضافه می‌کنیم:

$$x^2 - \frac{1}{2}x + \left(-\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{3}{2} + \left(-\frac{1}{4}\right)^2 \Rightarrow x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} = \frac{3}{2} + \frac{1}{16} \Rightarrow \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{25}{16}$$

حال با مقایسه معادله فوق با معادله $(x+m)^2 = n^2$ داریم:

$$\begin{cases} m = -\frac{1}{4} \\ n = \pm \frac{5}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m+n=1 \\ m+n=-\frac{3}{2} \end{cases}$$

که فقط $m+n = -\frac{3}{2}$ در گزینه‌ها وجود دارد.



۳- مساحت یک مستطیل برابر ۱۲۰ واحد مربع و محیط آن برابر ۴۶ واحد است. اندازه قطر این مستطیل چقدر است؟

۱۹ (۴)

۱۸ (۳)

۱۷ (۲)

۱۶ (۱)

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۰۰۴)

پاسخ: گزینه ۲

روش اول

اگر طول مستطیل را برابر x و عرض آن را برابر y فرض کنیم با توجه به اطلاعات سؤال داریم:

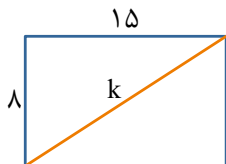
$$\begin{cases} 2x + 2y = 46 \Rightarrow x + y = 23 & \text{محیط مستطیل} \\ xy = 120 & \text{مساحت مستطیل} \end{cases}$$

حال اگر در رابطه $xy = 120$ ، به جای y ، عبارت $23 - x$ را جای گذاری کنیم:

$$xy = 120 \xrightarrow{y=23-x} x(23-x) = 120 \Rightarrow -x^2 + 23x - 120 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 23x + 120 = 0 \Rightarrow (x-15)(x-8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=15 \checkmark \\ x=8 \times \end{cases} \xrightarrow{y=23-x} \begin{cases} y=8 \checkmark \\ y=15 \times \end{cases}$$

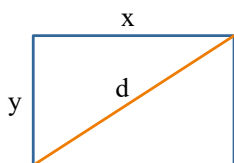
رئیس‌ترین طول مستطیل برابر ۱۵ و عرض آن برابر ۸ است. در نتیجه با توجه به شکل زیر و به کمک قضیه فیثاغورس داریم:



$$k^2 = (15)^2 + (8)^2 \Rightarrow k = \sqrt{225 + 64} = \sqrt{289} = 17$$

روش دوم

اگر طول و عرض مستطیل را به ترتیب x و y بنامیم، داریم:



$$d = \sqrt{x^2 + y^2}$$



با توجه به اطلاعات سؤال و با استفاده از اتحاد مربع دوجمله‌ای داریم:

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 2y = 46 \Rightarrow x + y = 23 \\ xy = 120 \end{array} \right\} \Rightarrow \underbrace{(x+y)^2}_{23} = x^2 + y^2 + \underbrace{2xy}_{120} \Rightarrow x^2 + y^2 = 529 - 240$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 289 \Rightarrow d = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{289} = 17$$

میانبر رو داشتی؟

در روش دوم به زیبایی از اتحاد مربع دوجمله‌ای استفاده کردیم و بدون حل معادله درجه دوم به جواب رسیدیم. پس اتحادها رو دریاب و حواست باشه که خیلی می‌تونن تو روش‌های خلاقانه و میانبر کمک کنن. 😊



۴- نمودار یک سهمی از نقاط $(2, 4)$ ، $(-1, -2)$ و $(-3, 4)$ عبور می‌کند. عرض از مبدأ این سهمی کدام است؟

۲ (۴)

۲ (۳)

$\frac{9}{4}$ (۲)

$-\frac{9}{4}$ (۱)

(آسان - محاسباتی - ۱۰۰۴)

پاسخ: گزینه ۴

روش اول

با توجه به نقاط داده شده می‌توان گفت که دو نقطه $A(-3, 4)$ و $B(2, 4)$ هم‌عرض هستند، بنابراین طول رأس سهمی وسط طول این دو نقطه است، یعنی:

$$x_S = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-3 + 2}{2} = -\frac{1}{2}$$

از طرفی، می‌دانیم که اگر نقطه (h, k) رأس یک سهمی باشد، معادله آن را می‌توانیم به صورت $y = a(x - h)^2 + k$ بنویسیم، پس تا به اینجا معادله سهمی به صورت $y = a(x + \frac{1}{2})^2 + k$ است. حال اگر مختصات دو نقطه را در معادله این سهمی جای‌گذاری کنیم، معادله آن به‌دست می‌آید:

$$(-1, -2) \in y \Rightarrow a(-1 + \frac{1}{2})^2 + k = -2 \Rightarrow \frac{1}{4}a + k = -2$$

$$(2, 4) \in y \Rightarrow a(2 + \frac{1}{2})^2 + k = 4 \Rightarrow \frac{25}{4}a + k = 4$$

$$\begin{cases} \frac{1}{4}a + k = -2 \\ \frac{25}{4}a + k = 4 \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} \begin{cases} a = 1 \\ k = -\frac{9}{4} \end{cases}$$

بنابراین، معادله سهمی به صورت $y = (x + \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}$ است؛ که برای پیدا کردن عرض از مبدأ سهمی، کافی است که در معادله به‌دست آمده، $x = 0$ را جای‌گذاری کنیم:

$$y = (x + \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4} \xrightarrow{x=0} \text{عرض از مبدأ سهمی} = \frac{1}{4} - \frac{9}{4} = -\frac{8}{4} = -2$$

آمده، $x = 0$ را جای‌گذاری کنیم:

روش دوم

اگر معادله سهمی به فرم $y = ax^2 + bx + c$ باشد، مختصات نقاط $(-3, 4)$ ، $(-1, -2)$ ، $(2, 4)$ در آن صدق می‌کند؛ بنابراین:

$$(2, 4) \rightarrow 4 = a \times 2^2 + b \times 2 + c \Rightarrow 4a + 2b + c = 4 \quad \text{(I)}$$

$$(-1, -2) \rightarrow -2 = a \times (-1)^2 + b \times (-1) + c \Rightarrow a - b + c = -2 \quad \text{(II)}$$

$$(-3, 4) \rightarrow 4 = a \times (-3)^2 + b \times (-3) + c \Rightarrow 9a - 3b + c = 4 \quad \text{(III)}$$

$$\begin{aligned} \text{(I)} - \text{(II)} &\rightarrow 3a + 3b = 6 \Rightarrow a + b = 2 \\ \text{(III)} - \text{(II)} &\rightarrow 8a - 2b = 6 \Rightarrow 4a - b = 3 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$



با جای گذاری $a = b = 1$ در یکی از معادلات (I)، (II) یا (III)، مقدار c به دست می آید.

$$a - b + c = -2 \Rightarrow 1 - 1 + c = -2 \Rightarrow c = -2$$

بنابراین معادله سهمی به فرم $y = x^2 + x - 2$ است، که عرض از مبدأ آن همان c یعنی -2 است.



۵- به ازای کدام مقدار m رأس سهمی به معادله $y = mx^2 + (m-1)x + 1$ ، روی نیمساز ناحیه دوم و چهارم قرار دارد؟

$$\sqrt{3} + 1 \quad (۴)$$

$$\sqrt{5} - 2 \quad (۳)$$

$$1 - \sqrt{3} \quad (۲)$$

$$2 - \sqrt{5} \quad (۱)$$

(سخت - مفهومی / محاسباتی - ۱۰۰۴)

پاسخ: گزینه ۱

ابتدا مختصات رأس سهمی را به دست می آوریم:

$$\begin{cases} x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{m-1}{2m} \\ y_S = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{(m-1)^2 - 4(m)(1)}{4m} = -\frac{m^2 - 2m + 1 - 4m}{4m} = -\frac{m^2 - 6m + 1}{4m} \end{cases}$$

می دانیم که رأس سهمی روی نیمساز ناحیه دوم و چهارم ($y = -x$) قرار دارد، بنابراین:

$$y_S = -x_S \Rightarrow -\frac{m^2 - 6m + 1}{4m} = -\left(-\frac{m-1}{2m}\right) \Rightarrow -\frac{m^2 - 6m + 1}{4m} = \frac{m-1}{2m}$$

توجه کنید برای این که معادله $y = mx^2 + (m-1)x + 1$ ، مربوط به یک سهمی باشد، باید ضریب x^2 مخالف صفر باشد، بنابراین $m \neq 0$ است.

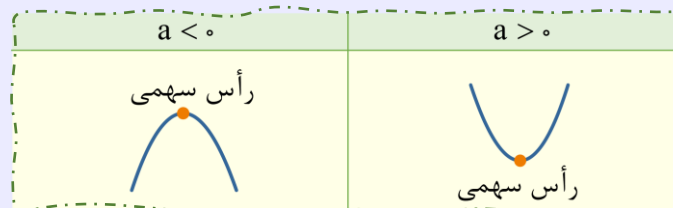
$$\xrightarrow{m \neq 0} -\frac{m^2 - 6m + 1}{4} = m - 1 \Rightarrow -m^2 + 6m - 1 = 2m - 2$$

$$\Rightarrow m^2 - 4m - 1 = 0 \xrightarrow{\Delta = 20} \begin{cases} m = \frac{4 + \sqrt{20}}{2} = \frac{4 + 2\sqrt{5}}{2} = 2 + \sqrt{5} \\ m = \frac{4 - \sqrt{20}}{2} = \frac{4 - 2\sqrt{5}}{2} = 2 - \sqrt{5} \end{cases}$$

که تنها $m = 2 - \sqrt{5}$ در گزینه ها وجود دارد.

رأس سهمی

رأس یک سهمی در واقع بالاترین نقطه یا پایین ترین نقطه از یک سهمی است که با توجه به علامت ضریب x^2 در تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ می توان گفت که اگر $a > 0$ باشد، رأس سهمی، پایین ترین نقطه و اگر $a < 0$ باشد، رأس سهمی، بالاترین نقطه آن است، ببینید:





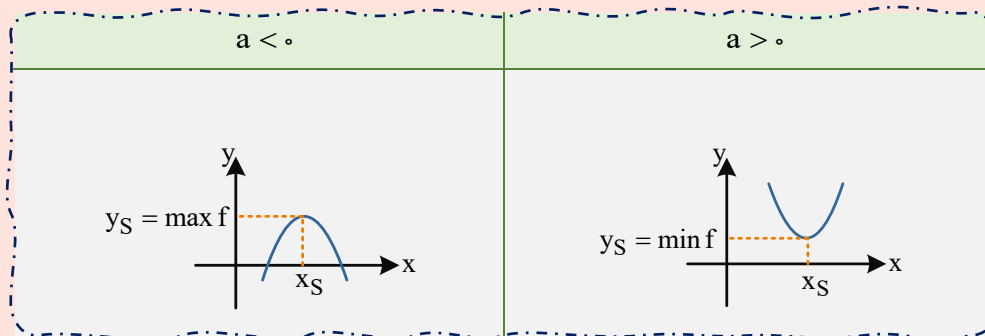
طول و عرض رأس سهمی

خب! مگه رأس سهمی به نقطه نیست؟ بله! پس باید طول و عرض داشته باشه، حالا می‌خوایم طول و عرض رأس یک سهمی رو توی نمایش‌های مختلف ضابطهٔ سهمی پیدا کنیم، جدول رو دریاب...

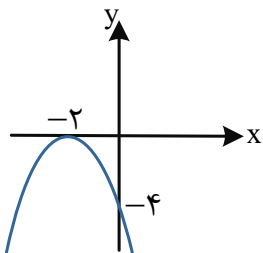
نوع نمایش سهمی	$f(x) = ax^2 + bx + c$	$f(x) = a(x - \alpha)(x - \beta)$	$f(x) = a(x - h)^2 + k$
طول رأس	$x_S = -\frac{b}{2a}$	$x_S = \frac{\alpha + \beta}{2}$	$x_S = h$
عرض رأس	$y_S = f(-\frac{b}{2a}) = -\frac{\Delta}{4a}$	$y_S = f(\frac{\alpha + \beta}{2})$	$y_S = k$

کمترین یا بیشترین مقدار در سهمی

توجه کنید که منظور از بیشترین مقدار (max) و یا کمترین مقدار (min) یک سهمی، همان عرض رأس سهمی (y_S) است که با توجه به علامت a در تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ داریم:



۶- نمودار سهمی $y = ax^2 + bx + c$ به صورت زیر است. مجموع طول نقاط برخورد نمودار این سهمی با نیمساز ناحیهٔ سوم کدام است؟



- (۱) -۴
- (۲) -۴ / ۵
- (۳) -۵
- (۴) -۵ / ۵

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۰۰۴)

پاسخ: گزینهٔ ۳

روش اول

ابتدا معادلهٔ سهمی را به دست می‌آوریم. می‌دانیم که سهمی از دو نقطهٔ $(-2, 0)$ و $(0, -4)$ عبور می‌کند، پس:

$$y = ax^2 + bx + c \Rightarrow \begin{cases} (0, -4) \in y \Rightarrow 0 + 0 + c = -4 \Rightarrow c = -4 \\ (-2, 0) \in y \Rightarrow 4a - 2b + c = 0 \xrightarrow{c=-4} 4a - 2b = 4 \quad (1) \end{cases}$$

از طرفی، با توجه به نمودار مشخص است که طول رأس سهمی نیز برابر -۲ است، پس:

$$x_S = -2 \Rightarrow -\frac{b}{2a} = -2 \Rightarrow b = 4a \quad (2)$$



حال با توجه به روابط (۱) و (۲) داریم:

$$4a - 2b = 4 \xrightarrow{b=4a} 4a - 8a = 4 \Rightarrow -4a = 4 \Rightarrow a = -1$$

$$b = 4a \xrightarrow{a=-1} b = -4$$

بنابراین، معادله سهمی به صورت $y = -x^2 - 4x - 4$ است. حال برای پیدا کردن طول نقاط برخورد سهمی با نیمساز ناحیه سوم ($y = x, x < 0$)، باید معادله این دو نمودار را با هم برابر قرار دهیم:

$$-x^2 - 4x - 4 = x \Rightarrow x^2 + 5x + 4 = 0 \Rightarrow (x+4)(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = -1 \end{cases} \xrightarrow{\text{مجموع}} -5$$

روش دوم

نقطه $(-2, 0)$ رأس سهمی است پس معادله سهمی به فرم $y = a(x+2)^2$ می‌باشد؛ که با توجه به این که سهمی از نقطه $(0, -4)$ می‌گذرد، مقدار a برابر می‌شود با:

$$y = a(x+2)^2 \xrightarrow{(0, -4)} -4 = a(0+2)^2 \Rightarrow a = -1$$

بنابراین معادله سهمی به صورت $y = -(x+2)^2$ می‌باشد. حال نقطه برخورد سهمی با نیمساز ناحیه سوم ($y = x, x < 0$) را محاسبه می‌کنیم.

$$-(x+2)^2 = x \Rightarrow x^2 + 4x + 4 = -x \Rightarrow x^2 + 5x + 4 = 0 \Rightarrow (x+1)(x+4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -4 \end{cases}$$

بنابراین مجموع طول نقاط برخورد سهمی با نیمساز ناحیه سوم برابر -5 است.



۷- اگر خط $2x - 1 = 0$ محور تقارن سهمی $y = (1+3k)x^2 - (k-1)x + 1$ باشد، در این صورت، کدام یک از نقاط زیر، روی سهمی به

معادله $y = kx^2 - 2(1-k)x + 2$ قرار ندارد؟

(۴) $(-1, 5)$

(۳) $(-3, 4)$

(۲) $(-4, 2)$

(۱) $(1, -3)$

(متوسط - محاسباتی - ۱۰۰۴)

پاسخ: گزینه ۳

می‌دانیم که خط $2x - 1 = 0$ ، محور تقارن سهمی $y = (1+3k)x^2 - (k-1)x + 1$ است، پس:

$$2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{معادله محور تقارن: } x = \frac{1}{2} \Rightarrow x_S = \frac{1}{2}$$

$$x_S = -\frac{b}{2a} \Rightarrow -\frac{-(k-1)}{2(1+3k)} = \frac{1}{2} \Rightarrow 1+3k = k-1 \Rightarrow 2k = -2 \Rightarrow k = -1$$

حال به کمک $k = -1$ ، معادله سهمی $y = kx^2 - 2(1-k)x + 2$ را بازنویسی می‌کنیم:

$$y = kx^2 - 2(1-k)x + 2 \xrightarrow{k=-1} y = -x^2 - 4x + 2$$

از بین نقاط موجود در گزینه‌ها، فقط مختصات نقطه $(-3, 4)$ در معادله سهمی $y = -x^2 - 4x + 2$ صدق نمی‌کند.





x	۱	۳
p(x)	-	+

۸- جدول تعیین علامت $p(x) = x^3 + ax^2 + bx - 3$ به صورت مقابل است. مقدار $b - a$ کدام است؟

۱۲ (۲)	-۲ (۱)
-۱۲ (۴)	۲ (۳)

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۰۰۴)

پاسخ: گزینه ۲

روش اول

با توجه به جدول تعیین علامت واضح است که $x = 1$ ریشه مضاعف معادله است چون در دو طرف آن تغییر علامت رخ نداده. داریم:

$$p(x) = (x - 1)^2(x - 3)$$

$$p(x) = (x^2 - 2x + 1)(x - 3) = (x^3 - 5x^2 + 7x - 3) = (x^3 + ax^2 + bx - 3)$$

$$a = -5, \quad b = 7$$

$$\Rightarrow b - a = 12$$

روش دوم

به کمک جدول تعیین علامت می توان گفت:

$$P(1) = P(3) = 0$$

$$P(1) = 1 + a + b - 3 = 0 \Rightarrow a + b = 2$$

$$P(3) = 27 + 9a + 3b - 3 = 0 \Rightarrow 9a + 3b = -24 \Rightarrow \begin{cases} a = -5 \\ b = 7 \end{cases}$$

بنابراین:

$$b - a = 7 - (-5) = 12$$

ایستگاه تعیین علامت تابع درجه دوم



برای تعیین علامت یک تابع درجه دوم به فرم $f(x) = ax^2 + bx + c$, $(a \neq 0)$, ابتدا ریشه(های) عبارت $f(x) = 0$ را در صورت وجود به دست می آوریم. حال با توجه به علامت Δ سه حالت ممکن است اتفاق بیافتد:

حالت اول

اگر $\Delta > 0$ باشد، معادله $f(x) = 0$ دو ریشه متمایز به صورت α و β خواهد داشت. با فرض $\alpha < \beta$ جدول تعیین علامت آن (با توجه به علامت a) به صورت زیر است:

$\Delta > 0$																
$a < 0$	$a > 0$															
<table><tr><th>x</th><th>α</th><th>β</th></tr><tr><td>f(x)</td><td>-</td><td>+</td><td>-</td></tr></table>	x	α	β	f(x)	-	+	-	<table><tr><th>x</th><th>α</th><th>β</th></tr><tr><td>f(x)</td><td>+</td><td>-</td><td>+</td></tr></table>		x	α	β	f(x)	+	-	+
x	α	β														
f(x)	-	+	-													
x	α	β														
f(x)	+	-	+													
<table><tr><th>x</th><th>α</th><th>β</th></tr><tr><td>f(x)</td><td>a موافق علامت</td><td>a مخالف علامت</td><td>a موافق علامت</td></tr></table>			x	α	β	f(x)	a موافق علامت	a مخالف علامت	a موافق علامت							
x	α	β														
f(x)	a موافق علامت	a مخالف علامت	a موافق علامت													



حالت دوم

اگر $\Delta = 0$ باشد، معادله $f(x) = 0$ یک ریشه مضاعف به صورت $x = -\frac{b}{2a}$ خواهد داشت و جدول تعیین علامت آن (با توجه به علامت a) به صورت زیر است:

$\Delta = 0$									
$a < 0$	$a > 0$								
<table border="1"> <tr> <td>x</td><td>$-\frac{b}{2a}$</td></tr> <tr> <td>$f(x)$</td><td>- 0 -</td></tr> </table>	x	$-\frac{b}{2a}$	$f(x)$	- 0 -	<table border="1"> <tr> <td>x</td><td>$-\frac{b}{2a}$</td></tr> <tr> <td>$f(x)$</td><td>+ 0 +</td></tr> </table>	x	$-\frac{b}{2a}$	$f(x)$	+ 0 +
x	$-\frac{b}{2a}$								
$f(x)$	- 0 -								
x	$-\frac{b}{2a}$								
$f(x)$	+ 0 +								
<table border="1"> <tr> <td>x</td><td>$-\frac{b}{2a}$</td></tr> <tr> <td>$f(x)$</td><td>موافق علامت a 0 موافق علامت a</td></tr> </table>		x	$-\frac{b}{2a}$	$f(x)$	موافق علامت a 0 موافق علامت a				
x	$-\frac{b}{2a}$								
$f(x)$	موافق علامت a 0 موافق علامت a								

حالت سوم

اگر $\Delta < 0$ باشد، معادله $f(x) = 0$ ریشه حقیقی ندارد و جدول تعیین علامت آن (با توجه به علامت a) به صورت زیر است:

$\Delta < 0$									
$a < 0$	$a > 0$								
<table border="1"> <tr> <td>x</td><td></td></tr> <tr> <td>$f(x)$</td><td>-</td></tr> </table>	x		$f(x)$	-	<table border="1"> <tr> <td>x</td><td></td></tr> <tr> <td>$f(x)$</td><td>+</td></tr> </table>	x		$f(x)$	+
x									
$f(x)$	-								
x									
$f(x)$	+								
<table border="1"> <tr> <td>x</td><td></td></tr> <tr> <td>$f(x)$</td><td>موافق علامت a</td></tr> </table>		x		$f(x)$	موافق علامت a				
x									
$f(x)$	موافق علامت a								

همان‌طور که از حالت سوم هم مشخص است:

▲ اگر $\Delta < 0$ و $a > 0$ باشد، عبارت درجه دوم، **همواره مثبت** است.

▲ اگر $\Delta < 0$ و $a < 0$ باشد، عبارت درجه دوم، **همواره منفی** است.





۹- به ازای کدام مقادیر m ، معادله درجه دوم $(m+1)x^2 - 2mx + m + 2 = 0$ ریشه حقیقی ندارد؟

(۱) $m < \frac{2}{3}$ (۲) $m > \frac{2}{3}$ (۳) $m < -\frac{2}{3}$ (۴) $m > -\frac{2}{3}$

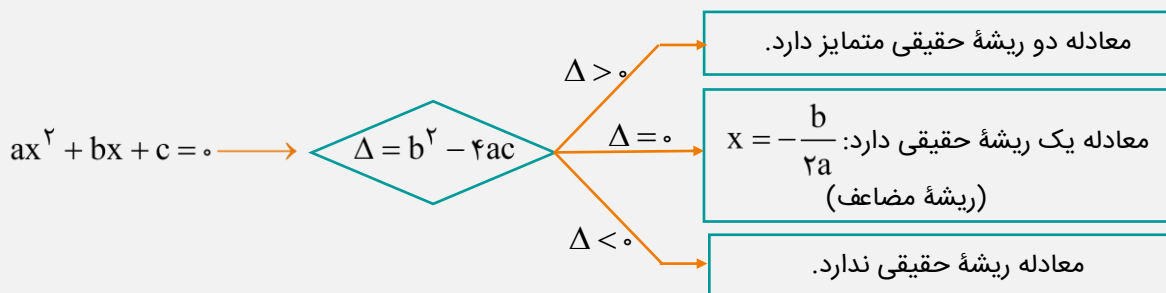
(آسان - محاسباتی - ۱۰۰۴)

پاسخ: گزینه ۴

Δ باید کوچک‌تر از صفر باشد.

$$\Delta < 0 \Rightarrow 4m^2 - 4(m+1)(m+2) < 0 \xrightarrow{\div 4} m^2 - (m+1)(m+2) < 0 \Rightarrow -3m - 2 < 0 \Rightarrow m > -\frac{2}{3}$$

بریم با هم ببینیم که "حالات مختلف معادله درجه ۲" چگونه است!



۱۰- اگر مجموعه جواب نامعادله $(a+4)x^2 + 2x - a + 6 < 0$ به شکل $(-\infty, b)$ باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

(۱) -۱۱ (۲) -۱۰ (۳) -۹ (۴) -۱۳

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۰۰۴)

پاسخ: گزینه ۳

بازه‌های جواب نامعادله درجه دوم چه شکلی‌ان؟

مجموعه جواب نامعادله درجه دوم، نمی‌تواند به شکل یک بازه نیم‌باز، یعنی به صورت $(a, +\infty)$ یا $(-\infty, a)$ باشد.

بنابر نکته بالا نامعادله $(a+4)x^2 + 2x - a + 6 < 0$ درجه دوم نیست. پس ضریب x^2 باید صفر باشد:

$$a + 4 = 0 \Rightarrow a = -4$$

حال با جای‌گذاری مقدار a در نامعادله داریم:

$$2x + 10 < 0 \Rightarrow 2x < -10 \Rightarrow x < -5 \xrightarrow{\text{مجموعه جواب}} (-\infty, -5) \Rightarrow b = -5 \Rightarrow a + b = -9$$

۱۱- اگر نمودار سهمی $f(x) = (m-1)x^2 - mx + m - 2$ همواره بالای خط $y = mx - 6$ باشد، حدود m کدام است؟

(۱) $m > 1$ (۲) $\frac{3}{4} < m < 1$ (۳) $1 < m < \frac{4}{3}$ (۴) $m > \frac{4}{3}$

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۰۰۴)

پاسخ: گزینه ۴

بالاتر بودن نمودار $f(x)$ به معنای بزرگ‌تر بودن ضابطه جبری آن است.

$$f(x) > mx - 6 \Rightarrow (m-1)x^2 - mx + m - 2 > mx - 6 \Rightarrow (m-1)x^2 - 2mx + m + 4 > 0$$

نابرابری باید همواره برقرار باشد، پس: $\Delta < 0$, $a > 0$ است.

$$\begin{cases} m-1 > 0 \Rightarrow m > 1 \\ m^2 - (m-1)(m+4) < 0 \Rightarrow m^2 - (m^2 + 3m - 4) < 0 \Rightarrow 4 - 3m < 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} m > \frac{4}{3} \\ m > 1 \end{cases} \rightarrow m > \frac{4}{3}$$

•• ای ••

۱۲- اگر یکی از جواب‌های معادله $x^2 - mx - 5 = 0$ بزرگ‌تر از ۳ و جواب دیگر آن کوچک‌تر از ۳ باشد، حدود m کدام است؟

$$m < \frac{5}{4} \quad (۴)$$

$$\frac{5}{4} < m < \frac{4}{3} \quad (۳)$$

$$m > \frac{5}{4} \quad (۲)$$

$$m > \frac{4}{3} \quad (۱)$$

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۰۰۴)

پاسخ: گزینه ۱

گام اول

ضریب x^2 برابر ۱ است، پس ضریب x^2 مثبت است. جدول تعیین علامت با توجه به توضیحات بالا به صورت زیر است، حال دقت کنید که در صورت سؤال گفته شده است که یک ریشه بزرگ‌تر از ۳ و یک ریشه کوچک‌تر از ۳ است، این یعنی عدد ۳ بین دو ریشه قرار دارد، با توجه به این موضوع، عدد ۳ را هم وارد جدول می‌کنیم:

ریشه دوم	۳	ریشه اول
+	-	+

گام دوم

همانطور که از جدول بالا پیداست، عبارت داده شده به ازای $x = 3$ باید منفی شود، پس:

$$y = x^2 - mx - 5 \xrightarrow[\text{y} < 0]{\text{x} = 3} 9 - 3m - 5 < 0 \Rightarrow 3m > 4 \Rightarrow m > \frac{4}{3}$$

•• ای ••

۱۳- مجموعه جواب نامعادله $x^2 + ax + b < 0$ بازه $(2, 3)$ است. مجموعه جواب نامعادله $-x^2 + bx + a > 0$ کدام است؟

$$(1, 5) \quad (۲)$$

$$(-3, -2) \quad (۱)$$

$$(-\infty, 1) \cup (5, +\infty) \quad (۴)$$

$$(-\infty, -3) \cup (-2, +\infty) \quad (۳)$$

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۰۰۴)

پاسخ: گزینه ۲

گام اول

با توجه به قسمت اول صورت سؤال، واضح است که $x = 2$ و $x = 3$ ریشه‌های عبارت $x^2 + ax + b$ هستند، پس با جای‌گذاری آن‌ها و b را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} 2^2 + 2a + b &= 0 \Rightarrow 2a + b = -4 \\ 3^2 + 3a + b &= 0 \Rightarrow 3a + b = -9 \end{aligned} \xrightarrow{(-)} a = -5 \Rightarrow b = 6$$

گام دوم

حالا که a و b را به دست آوردیم، باید نامعادله $-x^2 + 6x - 5 > 0$ را حل کنیم:

۱	۵
-	+

$$\begin{aligned} -x^2 + 6x - 5 &= 0 \xrightarrow{a+b+c=0} x = 1, x = 5 \\ \Rightarrow 1 < x < 5 &\Rightarrow x \in (1, 5) \end{aligned}$$

•• ای ••



۱۴- هرگاه بازه (α, β) مجموعه جواب نامعادله $2 < \frac{3x+2}{x+2} < 1$ باشد، مقدار $\frac{\alpha+\beta}{2}$ کدام است؟

$$\frac{3}{2} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{2} \quad (۳)$$

$$۱ \quad (۲)$$

$$-\frac{1}{2} \quad (۱)$$

(آسان - محاسباتی - ۱۰۰۴)

پاسخ: گزینه ۲

$$\frac{3x+2}{x+2} < 2 \Rightarrow \frac{x-2}{x+2} < 0 \Rightarrow -2 < x < 2$$

$$\frac{3x+2}{x+2} > 1 \Rightarrow \frac{2x}{x+2} > 0 \Rightarrow x > 0 \text{ یا } x < -2$$

پس جواب نهایی بازه $(0, 2)$ است. پس $\beta = 2$ و $\alpha = 0$ ، لذا $\frac{\alpha+\beta}{2} = 1$ است.

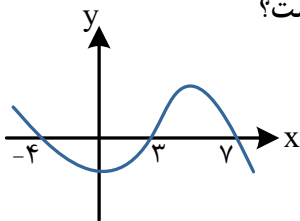
جرعه ذهنی!

تعیین علامت نامعادله کسری $\frac{x-2}{x+2} < 0$ مثل تعیین علامت نامعادله درجه دوم $(x-2)(x+2) < 0$ است. با این تفاوت که «در ریشه مخرج تعریف نشده» است. پس خیلی راحت از این که علامت، بین دو ریشه مخالف علامت a است، به $-2 < x < 2$ رسیدیم.

بعدی رو خودت بگو چطوری تعیین علامت کردیم؟

••• ای •••

۱۵- اگر نمودار $f(x)$ مطابق شکل مقابل باشد، مجموعه جواب نامعادله $xf(x) \geq 0$ شامل چند عدد صحیح است؟



$$۱۰ \quad (۱)$$

$$۹ \quad (۲)$$

$$۸ \quad (۳)$$

$$۱۱ \quad (۴)$$

(متوسط - مفهومی - ۱۰۰۴)

پاسخ: گزینه ۱

راهنمای زرنگ‌بازی!

مجموعه جواب نامعادله $xf(x) \geq 0$ ، دامنه بخش‌هایی از نمودار f است که در ناحیه اول یا سوم قرار دارد.

طبق نکته بالا، مجموعه جواب نامعادله داده شده $[-4, 0] \cup [3, 7]$ است، که شامل اعداد صحیح $-4, -3, -2, -1, 0, 3, 4, 5, 6, 7$ است. تعداد این اعداد ۱۰ تا است.

••• ای •••

۱۶- مجموعه جواب نامعادله $||x-3|-2| \leq 1$ شامل چند عدد صحیح است؟

$$۷ \quad (۴)$$

$$۶ \quad (۳)$$

$$۵ \quad (۲)$$

$$۴ \quad (۱)$$

(متوسط - محاسباتی - ۱۰۰۴)

پاسخ: گزینه ۳

$$\Rightarrow ||x-3|-2| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq |x-3|-2 \leq 1$$

$$\Rightarrow 1 \leq |x-3| \leq 3 \Rightarrow \begin{cases} |x-3| \geq 1 & (۱) \\ |x-3| \leq 3 & (۲) \end{cases}$$

$$(۱) \Rightarrow |x-3| \geq 1 \Rightarrow \begin{cases} x-3 \geq 1 \Rightarrow x \geq 4 \\ x-3 \leq -1 \Rightarrow x \leq 2 \end{cases} \quad (۳)$$

$$(۲) \Rightarrow |x-3| \leq 3 \Rightarrow -3 \leq x-3 \leq 3 \Rightarrow 0 \leq x \leq 6 \quad (۴)$$

$$(۳) \cap (۴) \Rightarrow 0 \leq x \leq 2, 4 \leq x \leq 6 \xrightarrow{x \in \mathbb{Z}} x \in \{0, 1, 2, 4, 5, 6\}$$



پس شامل ۶ عدد صحیح است.

خب، بالاخره رسیدیم به نامعادلات قدرمطلق!

دو حالت برای نامعادلات قدرمطلق داریم: ($a > 0$)

$$-a < f(x) < a \iff |f(x)| < a \quad (1)$$

$$f(x) < -a \text{ یا } f(x) > a \iff |f(x)| > a \quad (2)$$

اینم نوشابه اضافی واسه بچه‌های عشق فرمول 😊

با فرض ($b > 0$):

$$\text{نتیجه: } -b < f(x) < -a \text{ یا } a < f(x) < b \iff a < |f(x)| < b$$



۱۷- در بازه (α, β) نمودار تابع $f(x) = x(4-x) + 3$ بالاتر از $y = 3x + |x|$ قرار گرفته است. بیشترین مقدار $\beta - \alpha$ کدام است؟

(۴) ۱

(۳) $2\sqrt{3}$

(۲) $\sqrt{3}$

(۱) $1 + \sqrt{3}$

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۰۰۴)

پاسخ: گزینه ۱

$$x \leq 0: f(x) > 3x + |x| \Rightarrow 4x - x^2 + 3 > 2x \Rightarrow x^2 - 2x - 3 < 0 \Rightarrow (x+1)(x-3) < 0 \Rightarrow -1 < x < 3$$

با توجه به آن که $x \leq 0$ ، پس فعلاً $-1 < x \leq 0$ قابل قبول است.

$$x > 0: f(x) > 3x + |x| \Rightarrow 4x - x^2 + 3 > 4x \Rightarrow x^2 < 3 \Rightarrow -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$$

با توجه به آن که $x > 0$ ، پس $0 < x < \sqrt{3}$ قابل قبول است. پس در نهایت، بازه $(-1, \sqrt{3})$ قابل قبول است. بنابراین $\beta - \alpha = 1 + \sqrt{3}$ است.



۱۸- مجموعه جواب نامعادله $\frac{x+1}{x-1} + \frac{x-1}{x+1} \geq 4$ شامل چند عدد صحیح است؟

(۴) بی‌شمار

(۳) ۲

(۲) ۱

(۱) صفر

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۰۰۴)

پاسخ: گزینه ۱

نامعادله را ساده می‌کنیم:

$$\frac{x+1}{x-1} + \frac{x-1}{x+1} \geq 4 \Rightarrow \frac{(x+1)^2 + (x-1)^2}{x^2-1} \geq 4 \Rightarrow \frac{2(x^2+1)}{x^2-1} \geq 4 \Rightarrow \frac{x^2+1}{x^2-1} \geq 2 \Rightarrow \frac{x^2+1}{x^2-1} - 2 \geq 0 \Rightarrow \frac{-x^2+3}{x^2-1} \geq 0$$

جدول تعیین علامت را رسم می‌کنیم:

x	$-\sqrt{3}$	-1	1	$\sqrt{3}$
P	-	+	-	+

ت.ن ت.ن

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 < x \leq \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} \leq x < -1 \end{cases}$$

در بازه‌های فوق هیچ عدد صحیحی وجود ندارد.



مجموعه جواب نامعادله $\frac{7x-8}{x^2-x-2} > \frac{x}{x-2}$ به صورت کدام بازه است؟

- (۱) $(-4, -2) \cup (1, 2)$
 (۲) $(2, 4)$
 (۳) $(-1, 2) \cup (2, 4)$
 (۴) $(-1, 2)$

پاسخ تشریحی:

$$\frac{7x-8}{x^2-x-2} - \frac{x}{x-2} > 0 \Rightarrow \frac{7x-8}{(x-2)(x+1)} - \frac{x \times (x+1)}{(x-2) \times (x+1)} > 0 \Rightarrow \frac{-x^2+6x-8}{(x-2)(x+1)} > 0 \Rightarrow \frac{-(x-2)(x-4)}{(x-2)(x+1)} > 0$$

این جا قبل از این که $x-2$ رو از صورت و مخرج ساده کنیم حواسمون رو جمع می‌کنیم که عدد ۲ چون ریشه مخرج شده از دامنه حذف می‌شه و نمی‌تونه توی مجموعه جواب باشه.

$$\Rightarrow \frac{-x+4}{x+1} > 0$$

x	-1	2	4	
-x+4	+	+	+	-
x+1	-	+	+	+
-x+4	-	+	+	-
x+1	-	+	+	-

ت.ن ت.ن

پس با توجه به جدول تعیین علامت، مجموعه جواب به صورت $(-1, 2) \cup (2, 4)$ است.

پاسخ: گزینه ۳

دام تستی!

گاهی وقتا طراحا خیلی شیطون می‌شن و مثلا بازه $(-1, 4)$ رو هم توی گزینه‌ها قرار می‌دن. اینجا اگه خواست نباشه که ۲ باید حذف بشه تست رو اشتباه می‌زنی. پس همیشه خواست به «حذف ریشه‌های مخرج قبل از ساده کردن» عبارت باشه.

راهنمای ز رنگ بازی!

می‌تونستی برای تعیین علامت کسر $\frac{-x+4}{x+1}$ به جای یه جدول تعیین علامت به اون بزرگی و سه تا سطر، از جدول تعیین علامت معادله درجه دوم $(-x+4)(x+1)$ استفاده کنی. البته اگه یادت نمی‌ره ریشه‌های مخرج رو حتما حذف کنی! چون در ضرب یا تقسیم، مثبت یا منفی شدن علامت‌ها مثل همدیگه‌ست و در تعیین علامت هم فقط علامت برای ما مهمه! می‌دونی که چی می‌گم؟ 😊



۱۹- در بازه (a, b) ، عبارت $6x^2 - 5x - 6$ منفی و عبارت $|2x-3| - x$ کم‌تر از ۲ است. حاصل $b-a$ کدام است؟

$\frac{5}{6}$ (۴)

$\frac{7}{6}$ (۳)

$\frac{2}{3}$ (۲)

$\frac{4}{3}$ (۱)

(متوسط - محاسباتی - ۱۰۰۴)

پاسخ: گزینه ۳

هر دو عبارت را تعیین علامت می‌کنیم:

$$6x^2 - 5x - 6 < 0 \Rightarrow (2x-3)(3x+2) < 0 \Rightarrow -\frac{2}{3} < x < \frac{3}{2} \quad (۱)$$

$$|2x-3| - x < 2 \Rightarrow \begin{cases} 2x-3-x < 2; x \geq \frac{3}{2} \\ 3-2x-x < 2; x < \frac{3}{2} \end{cases}$$



$$\Rightarrow \begin{cases} x < 5 ; x \geq \frac{3}{2} \\ x > \frac{1}{3} ; x < \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{3} < x < 5 \quad (2)$$

$$b - a = \frac{3}{2} - \frac{1}{3} = \frac{7}{6}$$

اشتراک دو بازه بالا به صورت بازه $(\frac{1}{3}, \frac{3}{2})$ است. پس:



۲۰- مجموعه جواب نامعادله $x^2 - 3x + 1 < \frac{x^3 - 8}{x^2 + 2x + 4}$ به صورت $\mathbb{R} - [a, b]$ است. $b - a$ کدام است؟

$$\frac{5}{2} \quad (4)$$

$$2 \quad (3)$$

$$\frac{3}{2} \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

(سخت - مفهومی / محاسباتی - ۱۰۰۴)

پاسخ: گزینه ۳

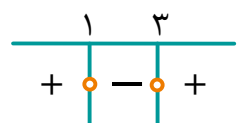
گام اول

ابتدا عبارت سمت چپ را به کمک اتحاد چاق و لاغر ساده می‌کنیم:

$$\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x^2+2x+4} < x^2-3x+1 \Rightarrow x-2 < x^2-3x+1 \Rightarrow x^2-4x+3 > 0$$

گام دوم

حال عبارت به‌دست آمده را تعیین علامت می‌کنیم:



$$x^2 - 4x + 3 = 0 \xrightarrow{a+b+c=} x = 1, x = 3$$

$$\Rightarrow x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty) \Rightarrow x \in \mathbb{R} - [1, 3]$$

گام سوم

با توجه به مجموعه جواب به‌دست آمده و صورت سؤال واضح است که $a = 1$ و $b = 3$ ، در نتیجه:

$$b - a = 3 - 1 = 2$$

قلقشو یاد بگیر!

در اتحاد چاق و لاغر، پرانتر چاق، یک عبارت درجه دوم همیشه مثبت یا همیشه منفی است. این یعنی ریشه ندارد و هیچ‌جا صفر نمی‌شود.

کارآگاه بازی!

حالا فهمیدی چرا علی‌رغم تأکید همیشگی‌مون به حذف ریشه‌های مخرج، در گام اول هیچ حرفی از حذف ریشه مخرج نزدیم؟ چون اصلا عبارت مخرج ریشه نداشت!



۲۱- تعداد قطرهای یک n ضلعی محدب، ۴ برابر تعداد ضلع‌های آن است. تعداد قطرهای این چندضلعی کدام است؟

$$44 \quad (4)$$

$$33 \quad (3)$$

$$22 \quad (2)$$

$$11 \quad (1)$$

(آسان - محاسباتی - ۱۰۰۳)

پاسخ: گزینه ۴

$$\frac{n(n-3)}{2} = 4n \Rightarrow \frac{n-3}{2} = 4 \Rightarrow n-3 = 8 \Rightarrow n = 11$$

$$\text{تعداد قطرها} = \frac{n(n-3)}{2} \xrightarrow{n=11} \text{تعداد قطرها} = \frac{11(11-3)}{2} = 44$$



بریم تعداد قطرهای n ضلعی‌ها رو بررسی کنیم

تعداد قطرهای یک n ضلعی محدب برابر است با:

$$\frac{n(n-3)}{2}$$

نتیجه ۱) تعداد قطرهای یک n ضلعی محدب، $\frac{n-3}{2}$ برابر تعداد ضلع‌های آن است.

نتیجه ۲) تعداد قطرهای یک n ضلعی محدب، $\frac{n(n-5)}{2}$ تا بیشتر از تعداد ضلع‌های آن است.



۲۲- کدام گزینه نادرست است؟

- ۱) هر چهارضلعی که در آن هر دو زاویه روبه‌رو برابر باشند، متوازی‌الاضلاع است.
- ۲) هر چهارضلعی که در آن هر دو زاویه مجاور مکمل باشند، متوازی‌الاضلاع است.
- ۳) هر چهارضلعی که دو ضلع مقابل آن برابر و دو ضلع مقابل دیگر موازی باشند، متوازی‌الاضلاع است.
- ۴) هر چهارضلعی که در آن دو ضلع مقابل، موازی و برابر باشند، متوازی‌الاضلاع است.

(آسان - مفهومی - ۱۰۰۳)

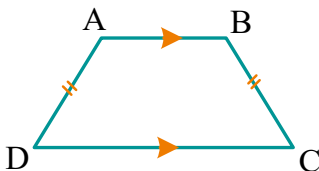
پاسخ: گزینه ۳

متوازی‌الاضلاع چیست؟

شرایط زیر معادل با متوازی‌الاضلاع بودن ۴ ضلعی است:

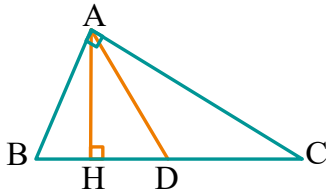
- ۱) ضلع‌های روبه‌رو، دوجه‌دو موازی باشند.
- ۲) ضلع‌های روبه‌رو، دوجه‌دو مساوی باشند.
- ۳) زاویه‌های روبه‌رو، دوجه‌دو مساوی باشند.
- ۴) زاویه‌های مجاور، دوجه‌دو مکمل باشند.
- ۵) قطر‌ها، منصف یکدیگر باشند.
- ۶) دو ضلع مقابل، موازی و برابر باشند.

گزینه‌های ۱، ۲ و ۴ به ترتیب با توجه به قسمت‌های ۳، ۴ و ۶ کلاس درس درست است؛ ولی در یک دوزنقه متساوی‌الساقین، دو قاعده موازی و دو ساق برابرند، ولی متوازی‌الاضلاع نیست، پس جواب گزینه ۳ می‌باشد.





۲۳- با توجه به شکل مقابل، اگر $AD = DC$ ، $BH = ۲$ و $HD = ۴$ باشد، اندازه AB کدام است؟



- (۱) ۷
(۲) $۳\sqrt{۵}$
(۳) ۶
(۴) $۲\sqrt{۶}$

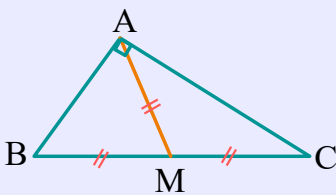
(متوسط - ترکیبی / محاسباتی - ۱۰۰۳)

پاسخ: گزینه ۴

میانۀ وارد بر وتر

در هر مثلث قائم الزاویه، میانه وارد بر وتر، نصف وتر است و بالعکس. یعنی اگر در مثلثی، اندازه یکی از میانه‌ها نصف ضلع نظیر آن باشد، آن مثلث قطعاً قائم الزاویه است.

نتیجه: اگر در یک مثلث قائم الزاویه پاره‌خطی از رأس قائمه به نقطه‌ای روی وتر وصل کنیم به طوری که اندازه این پاره‌خط با یکی از قطعه‌های ایجاد شده روی وتر برابر باشد، آن پاره‌خط حتماً میانه وارد بر وتر است.

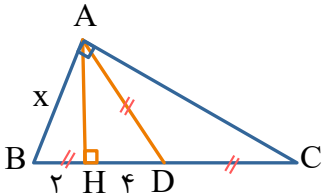


$$\hat{A} = 90^\circ \Leftrightarrow AM = \frac{BC}{2}$$

روش اول

با توجه به اطلاعات سؤال، می‌دانیم که $AD = DC$ است. بنابراین طبق نکته بالا می‌توان نتیجه گرفت که AD میانه وارد بر وتر بوده و $AD = DC = BD = ۶$ است.

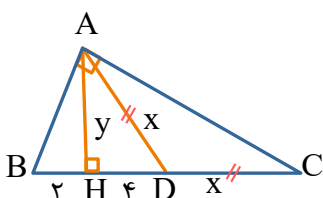
بنابراین به کمک روابط طولی در مثلث قائم الزاویه، داریم:



$$AB^2 = BH \times BC \Rightarrow AB = \sqrt{2 \times 12} = \sqrt{24} \Rightarrow AB = 2\sqrt{6}$$

روش دوم

با فرض $AD = DC = x$ و $AH = y$ و طبق روابط طولی در مثلث قائم الزاویه داریم:



$$\left. \begin{aligned} \triangle AHD &\Rightarrow y^2 + 4^2 = x^2 \Rightarrow y^2 = x^2 - 16 \\ \triangle ABC &\Rightarrow AH^2 = BH \times HC \Rightarrow y^2 = 2 \times (4 + x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow x^2 - 16 = 2(4 + x)$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x - 24 = 0 \Rightarrow (x - 6)(x + 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \quad \checkmark \\ x = -4 \quad \times \end{cases}$$

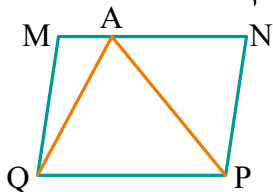
بنابراین:

$$AB^2 = BH \times BC \Rightarrow AB^2 = 2 \times (2 + 4 + 6) \Rightarrow AB^2 = 24 \Rightarrow AB = 2\sqrt{6}$$





۲۴- در متوازی‌الاضلاع شکل مقابل، $M\hat{N}P = 5M\hat{Q}A$ و $A\hat{P}Q = 4A\hat{P}N$ است. حاصل $M\hat{A}Q + N\hat{A}P$ کدام است؟

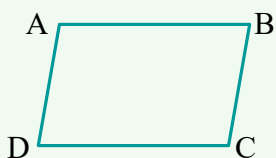
(۱) 144° (۲) 154° (۳) 132° (۴) 92°

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۰۰۳)

پاسخ: گزینه ۱

نکاتی در مورد زوایا در متوازی‌الاضلاع

زوایای مقابل در متوازی‌الاضلاع با هم برابرند و زوایای مجاور نیز با یکدیگر مکمل‌اند. برای درک بهتر، به شکل روبه‌رو دقت کنید.



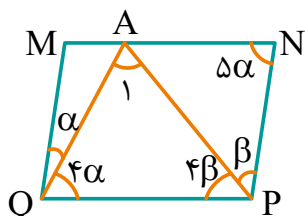
$$\hat{A} = \hat{C} \quad \text{و} \quad \hat{A} + \hat{B} = 180^\circ$$

$$\hat{B} = \hat{D} \quad \text{و} \quad \hat{A} + \hat{D} = 180^\circ$$

گام اول

ابتدا از داده‌های صورت سؤال استفاده می‌کنیم و آن‌ها را روی شکل پیاده می‌کنیم:
زاویه MQA را برابر α در نظر می‌گیریم، سپس طبق صورت سؤال:

$$M\hat{N}P = 5M\hat{Q}A = 5\alpha$$



از طرفی می‌دانیم که زوایای مقابل در متوازی‌الاضلاع با هم برابرند، پس $M\hat{Q}P = 5\alpha$ است. بنابراین:

$$A\hat{Q}P = M\hat{Q}P - M\hat{Q}A = 5\alpha - \alpha = 4\alpha$$

به گفته صورت سؤال، $A\hat{P}Q = 4A\hat{P}N$ ، پس اگر $A\hat{P}N$ را برابر β در نظر بگیریم، $A\hat{P}Q$ برابر 4β خواهد بود، در نتیجه:

$$N\hat{P}Q = 5\beta$$

گام دوم

زوایای مجاور در متوازی‌الاضلاع مکمل یکدیگرند، با توجه به گام اول نیز می‌دانیم: $M\hat{Q}P = 5\alpha$ و $N\hat{P}Q = 5\beta$ ، پس:

$$M\hat{Q}P + N\hat{P}Q = 180^\circ \Rightarrow 5\alpha + 5\beta = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 36^\circ$$

گام سوم

خواسته سؤال، $M\hat{A}Q + N\hat{A}P$ است که با توجه به شکل گام اول، برابر می‌شود با $180^\circ - A_1$ ، پس:

$$A_1 = 180^\circ - (4\alpha + 4\beta) \Rightarrow A_1 = 180^\circ - 4(\alpha + \beta) \Rightarrow A_1 = 180^\circ - 4(36^\circ) = 36^\circ$$

$$M\hat{A}Q + N\hat{A}P = 180^\circ - A_1 = 180^\circ - 36^\circ = 144^\circ$$





۲۵- وسط‌های اضلاع لوزی به قطرهای ۱۲ و ۱۶ را به هم وصل کرده‌ایم تا چهارضلعی ABCD به‌دست آید. محیط این چهارضلعی کدام است؟

۲۸ (۴)

۲۲ (۳)

۱۷ (۲)

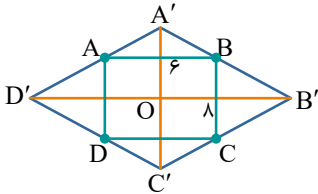
۱۵ (۱)

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۰۰۳)

پاسخ: گزینه ۴

می‌دانیم از وصل کردن وسط اضلاع لوزی، مستطیل به‌دست می‌آید. برای به‌دست آوردن محیط مستطیل ایجاد شده خواهیم داشت:

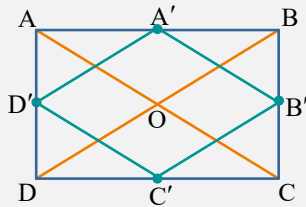
$$ABCD \text{ محیط مستطیل } = 2(AB + BC) = 2\left(\frac{1}{2}B'D' + \frac{1}{2}A'C'\right) = B'D' + A'C' = 12 + 16 = 28$$



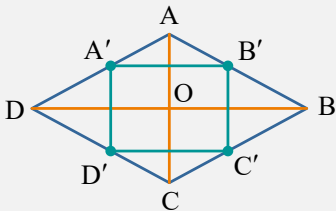
پاره‌خط میانگین در چهارضلعی

از به هم وصل کردن وسط اضلاع یک چهارضلعی محدب به یکدیگر، یک متوازی‌الاضلاع پدید می‌آید، حال اگر:

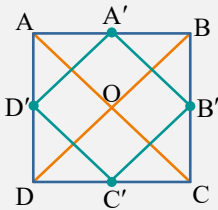
(۱) قطرهای چهارضلعی اولیه مساوی باشد ← چهارضلعی حاصل لوزی است.



(۲) قطرهای چهارضلعی اولیه بر هم عمود باشد ← چهارضلعی حاصل مستطیل است.



(۳) قطرهای چهارضلعی اولیه بر هم عمود و مساوی باشد ← چهارضلعی حاصل مربع است.



میانبری برای محاسبه محیط چهارضلعی به‌دست آمده

محیط متوازی‌الاضلاع حاصل برابر است با مجموع قطرهای چهارضلعی اولیه. یعنی در تمام شکل‌های بالا:

$$A'B'C'D' \text{ محیط } = AC + BD$$



۲۶- در مثلث قائم الزاویه ای با زاویه حاده 75° ، مجموع طول میانه و ارتفاع وارد بر وتر $18\sqrt{2}$ واحد است. مساحت این مثلث، کدام است؟

(۴) ۱۴۴

(۳) ۱۵۰

(۲) ۱۲۰

(۱) ۱۳۶

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۰۰۳)

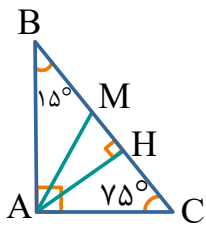
پاسخ: گزینه ۴

ارتفاع و میانه وارد بر وتر در مثلث قائم الزاویه

(۱) میانه: در مثلث قائم الزاویه، میانه وارد بر وتر، نصف وتر است.

(۲) ارتفاع: در مثلث قائم الزاویه ای که یک زاویه 15° (یا 75°) داشته باشد، ارتفاع وارد بر وتر، ربع وتر است.

با توجه به نکات، مطابق شکل، داریم:



$$AM + AH = 18\sqrt{2} \Rightarrow \frac{1}{2}BC + \frac{1}{4}BC = 18\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4}BC = 18\sqrt{2} \Rightarrow BC = 24\sqrt{2} \Rightarrow AH = 6\sqrt{2}$$

بنابراین مساحت مثلث، برابر است با:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times AH \times BC = \frac{1}{2} \times 6\sqrt{2} \times 24\sqrt{2} = 144$$



۲۷- متوازی الاضلاع ABCD به طول اضلاع $AB=8$ و $AD=6$ را در نظر بگیرید که دو قطر برابر دارد. اگر از رأس A، عمودی بر قطر BD رسم کنیم، فاصله رأس D تا پای عمود چقدر است؟

(۴) ۴/۲

(۳) ۵/۸

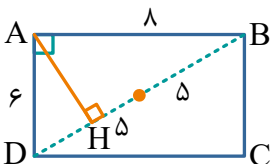
(۲) ۳/۶

(۱) ۶/۴

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۰۰۳)

پاسخ: گزینه ۲

متوازی الاضلاعی که دو قطر برابر دارد، مستطیل است. در نتیجه:



$$\begin{cases} BD^2 = AB^2 + AD^2 \\ BD^2 = 6^2 + 8^2 = 100 \Rightarrow BD = 10 \end{cases}$$

$$AD^2 = DH \times BD$$

$$36 = DH \times 10 \Rightarrow DH = 3/10$$

بنابر روابط طولی در مثلث قائم الزاویه ABD داریم:

میانبر سه تایی فیثاغورثی رو که بلدی نه؟

دو دسته عدد پرتکرار داریم که در رابطه فیثاغورث صدق می کنند و بهتر است همیشه آن ها را حفظ باشیم. این روش میانبر برای حذف محاسبات مربوط به رابطه فیثاغورث و سرعت عمل بیشتر است. وقتی دو عدد از بین این ۳ تا را داشته باشیم می توانیم بدون محاسبه سومی را به دست بیاوریم:

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

$$5^2 + 12^2 = 13^2$$

k برابر سه تایی های فیثاغورثی هم فیثاغورثی اند!

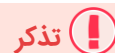
این نکته تکمیلی هم برای اونایی که دیگه خیلی می خوان خفن باشن بگیریم. اگر k یک عدد صحیح باشه داریم:

$$(3k)^2 + (4k)^2 = (5k)^2$$

$$(5k)^2 + (12k)^2 = (13k)^2$$

$$(2 \times 3)^2 + (2 \times 4)^2 = (2 \times 5)^2 \Rightarrow 6^2 + 8^2 = 10^2$$

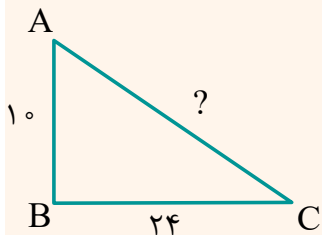
مثلا:



توجه داشته باشید که هر ۳ عدد باید در یک ضریب یکسان ضرب شوند، تا همچنان رابطه فیثاغورث برقرار باشد.

یه نمونه باحال ببین

برای به دست آوردن طول ضلع AC با دقت به طول دو ضلع دیگر می‌بینیم:



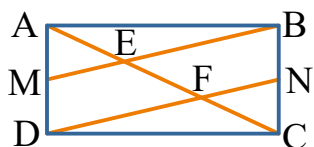
$$10 = 2 \times 5$$

$$24 = 2 \times 12$$

پس با سه‌تایی فیثاغورثی ۵، ۱۲ و ۱۳ سر و کار داریم و عدد سوم برابر است با: $2 \times 13 = 26$



۲۸- در مستطیل شکل زیر، به ابعاد 18×6 ، نقاط M و N به ترتیب وسط اضلاع AD و BC هستند. حاصل $EF(AE + FC)$ ، کدام است؟



(۱) ۶۰

(۲) ۴۰

(۳) ۸۰

(۴) ۵۰

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۰۰۳)

پاسخ: گزینه ۳

با توجه به اطلاعات مسأله، واضح است که چهارضلعی MBND متوازی‌الاضلاع است، زیرا:

$$\begin{aligned} & \parallel \\ MD = BN & \Rightarrow MB \parallel DN \quad (۱) \end{aligned}$$

حال با توجه به رابطه (۱)، به کمک قضیه تالس در مثلث‌های $\triangle ADF$ و $\triangle CBE$ ، داریم:

$$\left. \begin{aligned} \triangle ADF : ME \parallel DF & \Rightarrow \frac{AE}{EF} = \frac{AM}{MD} = 1 \Rightarrow AE = EF \\ \triangle CBE : NF \parallel BE & \Rightarrow \frac{FC}{EF} = \frac{CN}{NB} = 1 \Rightarrow FC = EF \end{aligned} \right\} \Rightarrow AE = EF = FC \quad (۲)$$

اینک به کمک قضیه فیثاغورس در مثلث $\triangle ADC$ ، داریم:

$$\begin{aligned} AD &= 6 \\ DC &= 18 \\ AC^2 &= AD^2 + DC^2 = 36 + 324 = 360 \Rightarrow AC = \sqrt{360} = 6\sqrt{10} \end{aligned}$$

پس با توجه به رابطه (۲)، خواهیم داشت:

$$AE = EF = FC = \frac{AC}{3} = \frac{6\sqrt{10}}{3} = 2\sqrt{10}$$

بنابراین حاصل $EF(AE + FC)$ برابر است با:

$$2\sqrt{10}(2\sqrt{10} + 2\sqrt{10}) = 2\sqrt{10} \times 4\sqrt{10} = 80$$

متوازی‌الاضلاعی که قطرهایش با هم برابرند چیه؟ مستطیل.

مستطیل نوعی متوازی‌الاضلاع است که در آن، قطرهایش با هم برابرند.

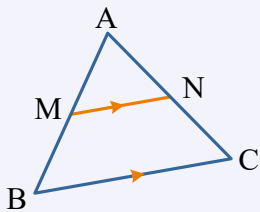
متوازی‌الاضلاع چیست؟

هر چهارضلعی که دو ضلع مقابلش، موازی و مساوی باشند، متوازی‌الاضلاع است.



قضیه تالس رو یادته؟

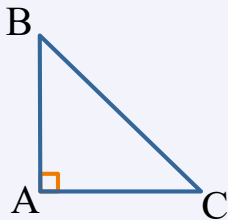
طبق قضیه تالس، مطابق شکل، داریم:



$$MN \parallel BC \Rightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$$

قضیه فیثاغورس که دیگه از راهنمایی باهاته!

طبق قضیه فیثاغورس در هر مثلث قائم‌الزاویه داریم:



$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$



۲۹- چهارضلعی ABCD، کایت است. اگر $AB = AD$ ، $AE = ۱۸$ ، $EC = ۴$ و $\hat{BCD} = ۲\hat{BAD}$ باشند، اندازه FD چقدر است؟

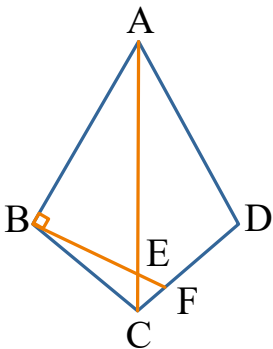
($AB \perp BF$)

۴ (۱)

۵ (۲)

۶ (۳)

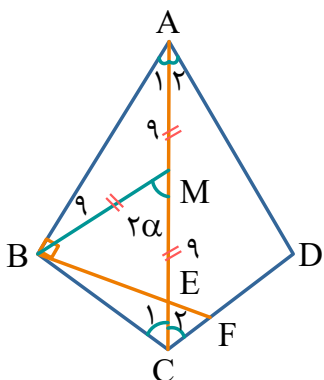
۷ (۴)



(سخت - مفهومی / محاسباتی - ۱۰۰۳)

پاسخ: گزینه ۲

می‌دانیم که زاویه BCD دو برابر زاویه BAD است، حال اگر زاویه BCD را برابر ۴α فرض کنیم با توجه به این که AC نیمساز زاویه‌های A و C است، داریم:

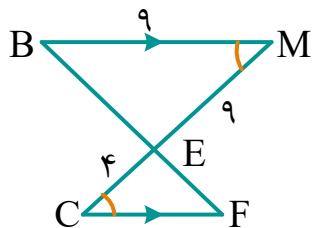


$$\begin{cases} \hat{C}_1 = \hat{C}_2 = 2\alpha \\ \hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \alpha \end{cases}$$

می‌دانیم که در یک مثلث قائم‌الزاویه، میانه وارد بر وتر، نصف وتر است حال اگر در مثلث قائم‌الزاویه ABE، میانه BM را رسم کنیم، با توجه به این که $AE = ۱۸$ است، $BM = AM = ME = ۹$ بوده و مثلث AMB متساوی‌الساقین است. لذا در این مثلث زاویه‌های ABM و $\hat{A}_1$ با هم برابرند و با کمی دقت می‌توان فهمید که چون زاویه BME، زاویه خارجی مثلث AMB است پس با جمع زاویه‌های داخلی $BME = ۲\alpha$ غیرمجاور برابر است لذا



از طرفی می‌دانیم که زاویه $\hat{C}_\gamma$ نیز برابر 2α است پس می‌توانیم نتیجه بگیریم که $BM \parallel CD$ است. لذا به کمک تشابه مثلث‌ها داریم: (با توجه به فرض سؤال، $EC = 4$ است)



$$\frac{BE}{EF} = \frac{ME}{EC} = \frac{BM}{CF} \Rightarrow \frac{9}{4} = \frac{9}{CF} \Rightarrow CF = 4$$

از طرفی چون $\hat{C}_\gamma = \hat{C}_\gamma = \hat{BME} = 2\alpha$ است، بنابراین مثلث $\triangle BMC$ متساوی‌الساقین است و داریم:

$$BC = BM = 9$$

و چون چهارضلعی ABCD کایت است، پس $BC = CD = 9$ در نتیجه:

$$CD = CF + FD \xrightarrow{CD=9, CF=4} 9 = 4 + FD \Rightarrow FD = 5$$



۳۰- در متوازی‌الاضلاع به اضلاع ۶ و ۱۱ واحد، طول قطر چهارضلعی حاصل از برخورد نیمسازهای داخلی متوازی‌الاضلاع، چقدر است؟

۴ / ۵ (۴)

۵ (۳)

۴ / ۵ (۲)

۴ (۱)

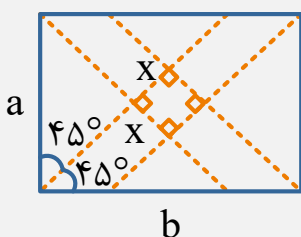
(سخت - مفهومی / محاسباتی - ۱۰۰۳)

پاسخ: گزینه ۳

شکل حاصل از برخورد نیمسازهای داخلی چهارضلعی

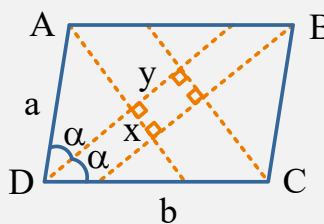
بر خلاف نیمسازهای داخلی تمام مثلث‌ها که هم‌مرس هستند، نیمسازهای داخلی همهٔ چهارضلعی‌ها هم‌مرس نیستند و از برخورد آن‌ها با هم (در صورت هم‌مرس نبودن) یک چهارضلعی دیگر حاصل می‌شود که نوع چهارضلعی ایجاد شده، به نوع چهارضلعی اولیه بستگی دارد. در کتاب درسی فقط به متوازی‌الاضلاع (حالت‌های خاص آن) پرداخته شده است.

(۲) از تقاطع نیمسازهای داخلی هر مستطیل، همواره یک مربع حاصل می‌شود.



طول اضلاع این مربع، $x = \frac{|a-b|}{\sqrt{2}}$ است.

(۱) از تقاطع نیمسازهای داخلی هر متوازی‌الاضلاع، همواره یک مستطیل حاصل می‌شود.



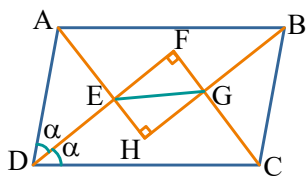
2α یکی از زاویه‌های متوازی‌الاضلاع است.

طول اضلاع این مستطیل، $y = |a-b| \cos \alpha$ ، $x = |a-b| \sin \alpha$ است.

روش اول

مطابق درسنامه، طول اضلاع این مستطیل به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{cases} x = |a-b| \sin \alpha \Rightarrow x = |11-6| \sin \alpha \Rightarrow x = 5 \sin \alpha \\ y = |a-b| \cos \alpha \Rightarrow y = |11-6| \cos \alpha \Rightarrow y = 5 \cos \alpha \end{cases}$$



$$EG^2 = EF^2 + FG^2$$

$$\Rightarrow EG^2 = 25 \sin^2 \alpha + 25 \cos^2 \alpha = 25 (\underbrace{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}_{=1})$$

$$EG^2 = 25 \Rightarrow EG = 5$$

روش دوم

در متوازی الاضلاعی به اضلاع a و b واحد، طول قطر چهارضلعی حاصل از برخورد نیمسازهای داخلی متوازی الاضلاع، برابر $|a - b|$ است لذا:
طول قطر مستطیل $= |a - b| = |11 - 6| = 5$





برای دیدن پاسخنامه ویدئویی آزمون
QR Code بالا را اسکن یا روی آن کلیک کنید!

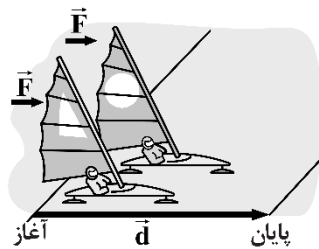
کار، انرژی و توان (از ابتدای کار و انرژی جنبشی تا انتهای فصل سوم) صفحه‌های ۶۱ تا ۸۲

بودجه‌بندی
این آزمون

۱ یا ۲ تست از ۳۵ تست کنکور

سهم در
کنکور

۳۱- دو قایق مخصوص با جرم‌های متفاوت، روی سطح افقی یخ‌زده و بدون اصطکاک دریاچه‌ای مطابق شکل زیر، قرار دارند. قایق‌ها تحت اثر نیروهای مساوی باد، شروع به حرکت می‌کنند و از خط پایان به فاصله d می‌گذرند. چند مورد از موارد زیر درست است؟



الف: انرژی جنبشی قایق سبک‌تر در خط پایان، بیش‌تر است.

ب: تندی هر دو قایق در خط پایان یکسان است.

پ: کل کار انجام‌شده روی قایق سنگین‌تر، بیش‌تر است.

۱ (۲)

۱ (۱) صفر

۳ (۴)

۲ (۳)

(متوسط - مفهومی/محاسباتی - ۱۰۰۳)

پاسخ: گزینه ۱

طبق قضیه کار - انرژی جنبشی داریم:

$$W_t = \Delta K \Rightarrow \cancel{W_{\text{وزن}}} + \cancel{W_{\text{نیروی شناوری}}} + W_F = K_2 - K_1$$

قایق‌ها در ابتدا ساکن هستند؛ بنابراین $K_1 = 0$ است. نیروی وزن و نیروی شناوری بر جابه‌جایی عمود هستند بنابراین کار آن‌ها صفر است؛ بنابراین:

$$Fd \cos 0^\circ = K_2 \Rightarrow K_2 = F.d$$

طبق رابطه فوق، انرژی جنبشی قایق‌ها به جرم آن‌ها بستگی ندارد. («الف» ✗)

از طرفی، طبق رابطه $K = \frac{1}{2}mv^2$ و یکسان بودن انرژی جنبشی، قایقی که سبک‌تر است، تندی بیش‌تری دارد. («ب» ✗)

کل کار انجام‌شده بر روی هر دو قایق یکسان است؛ زیرا: طبق رابطه زیر، F و d برای هر دو قایق یکسان است. («پ» ✗)

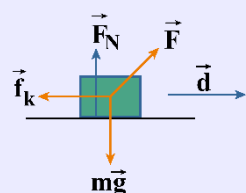
$$W_t = \cancel{W_{mg}} + \cancel{W_{\text{نیروی شناوری}}} + W_F = F.d$$

روش‌های محاسبه کار کل

۱- قضیه کار - انرژی جنبشی: اگر در سؤال، تندی یا انرژی جنبشی را بدهند، برای محاسبه کار کل بهتر است از قضیه کار - انرژی جنبشی استفاده کنیم:

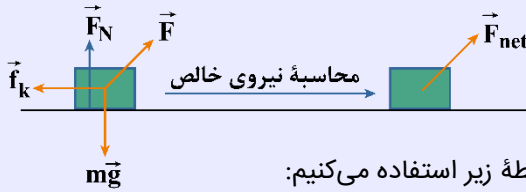
$$W_t = K_2 - K_1 \xrightarrow{K = \frac{1}{2}mv^2} W_t = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2)$$

۲- کار تک‌تک نیروها را جداگانه به دست می‌آوریم و در نهایت همه آن‌ها را جمع جبری می‌کنیم:



$$W_t = W_{mg} + W_{fk} + W_{FN} + W_F + \dots$$

۳- ابتدا برابری نیروهای وارد بر جسم را به دست آورده و در نهایت کار نیروی برابری (نیروی خالص) را محاسبه می‌کنیم:



$$W_t = W_{F_{net}} \Rightarrow W_t = F_{net} d \cos \theta$$

✓ اگر شتاب حرکت جسم را داشته باشیم برای محاسبه کار انجام شده بر روی جسم از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$W_t = F_{net} d \cos \theta \xrightarrow{F_{net}=ma} W_t = m a d \cos \theta$$

فقط در حرکت تندشونده روی خط راست که شتاب، هم‌جهت جابه‌جایی است ($\theta = 0^\circ$)، نیازی به محاسبه $\cos \theta$ نیست زیرا:

$$W_t = m a d \cos \theta \xrightarrow[\cos \theta = 1]{\theta = 0^\circ} W_t = m a d$$



در اکثر سؤالات نیاز است تا کار کل را از دو روش بالا به دست آورده و مساوی هم قرار دهیم تا مجهول مسئله محاسبه شود.



۳۲- کودکی، سنگی را از بالای یک ساختمان پرتاب می‌کند. در کدام گزینه، کار نیروی وزن سنگ و تغییر انرژی پتانسیل گرانشی آن الزاماً قرینه یکدیگرند؟

- (۲) فقط در پرتاب در راستای قائم رو به پایین
(۴) در هر حالتی قرینه یکدیگرند.

- (۱) فقط در پرتاب در راستای قائم رو به بالا
(۳) فقط در پرتاب در راستای قائم

(آسان - مفهومی - ۱۰۰۳)

پاسخ: گزینه ۴

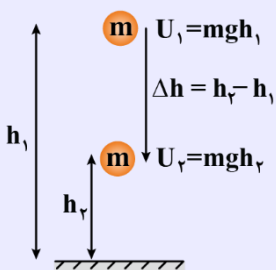
طبق درس‌نامه زیر، گزینه (۴) صحیح است.



کار نیروی وزن، مستقل از مسیر حرکت است و فقط به جابه‌جایی قائم جسم بستگی دارد.



کار نیروی وزن و تغییر انرژی پتانسیل گرانشی یک جسم، همواره قرینه یکدیگرند و این رابطه برای هر مسیر دلخواهی برقرار است.



تغییر انرژی پتانسیل گرانشی

با تغییر ارتفاع، انرژی پتانسیل گرانشی جسم تغییر می‌کند:

$$\Delta U = U_2 - U_1 = mgh_2 - mgh_1 = mg(h_2 - h_1) \Rightarrow \Delta U = mg\Delta h$$

کار نیروی وزن و تغییر انرژی پتانسیل گرانشی:

کار نیروی وزن برابر با منفی تغییر انرژی پتانسیل گرانشی است.

$$\left. \begin{array}{l} \Delta U_g = mg\Delta h \\ W_{mg} = -mg\Delta h \end{array} \right\} \Rightarrow W_{mg} = -\Delta U_g$$



۱- هنگامی که جسمی رو به پایین حرکت می‌کند h کاهش می‌یابد (Δh منفی)، نیروی وزن جسم کار مثبت انجام می‌دهد و انرژی پتانسیل گرانشی کاهش می‌یابد.

۲- هنگامی که جسمی رو به بالا حرکت می‌کند h افزایش می‌یابد (Δh مثبت)، نیروی وزن جسم کار منفی انجام می‌دهد و انرژی پتانسیل گرانشی افزایش می‌یابد.



۳- اگر ارتفاع جسم تغییر نکند، کار نیروی وزن صفر می‌شود و انرژی پتانسیل گرانشی ثابت می‌ماند.

حالت (۱)	حالت (۲)	حالت (۳)	حالت (۳)

نکته ۲

اگر مبدأ پتانسیل را تغییر دهیم انرژی پتانسیل تغییر می‌کند ولی کار نیروی وزن و تغییر انرژی پتانسیل ثابت می‌ماند. پس انرژی پتانسیل به مبدأ بستگی دارد ولی کار نیروی وزن و تغییر انرژی پتانسیل به مبدأ وابسته نیست.

نکته ۳

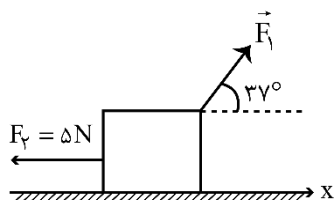
در تست‌ها اگر مبدأ پتانسیل را مشخص کردند همان نقطه را مبدأ گرفته و سؤال را حل کنید؛ ولی اگر مبدأ پتانسیل مشخص نشد هر نقطه‌ای را که تمایل داشتید مبدأ بگیرید ولی ترجیحاً بهتر است پایین‌ترین نقطه‌ای که جسم در آن قرار می‌گیرد را مبدأ پتانسیل بگیرید.

نکته ۴

در محاسبه انرژی پتانسیل گرانشی، تغییر انرژی پتانسیل گرانشی و کار نیروی وزن ارتفاع قائم مهم است یعنی مسافت طی‌شده و مسیر حرکت اهمیتی ندارد.



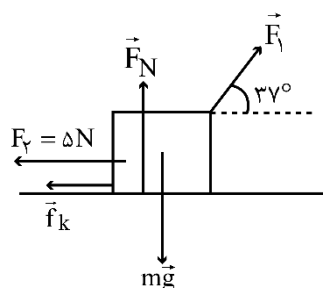
۳۳- مطابق شکل زیر، به جسمی به جرم m که روی سطح افقی ساکن است، نیروهای $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ به صورت هم‌زمان وارد می‌شوند. اگر پس از ۵ متر جابه‌جایی روی سطح افقی در جهت محور x ، کار کل انجام‌شده روی جسم ۲۰ J باشد، اندازه نیروی $\vec{F}_1$ چند نیوتون است؟
($\cos 37^\circ = 0.8$ و بزرگی نیروی اصطکاک وارد بر جسم ۱۵ N است.)



- (۱) ۴۰
- (۲) ۳۰
- (۳) ۲۰
- (۴) ۱۵

(متوسط - محاسباتی - ۱۰۰۳)

پاسخ: گزینه ۲



$$W_t = 20 \text{ J}$$

$$\rightarrow W_{F_1} + W_{F_2} + W_{f_k} + \cancel{W_{mg}} + \cancel{W_{F_N}} = 20$$

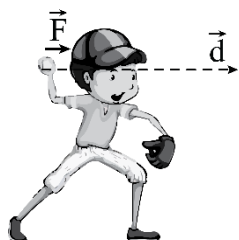
$$\rightarrow (F_1 \times 5 \times \underbrace{\cos 37^\circ}_{0.8}) - \underbrace{F_2 \times 5}_{5} - 15 \times 5 = 20$$

$$\rightarrow 4F_1 = 120 \rightarrow F_1 = 30 \text{ N}$$





۳۴- ورزشکاری سعی می‌کند توپ بیسبالی به جرم 200g را با حداکثر تندی $30 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ پرتاب کند. به همین دلیل، ورزشکار نیرویی به بزرگی $F=60\text{N}$ را تا لحظه پرتاب توپ و در امتداد جابه‌جایی $d=2\text{m}$ ، مطابق شکل بر آن وارد می‌کند. کار نیروی مقاومت هوا در این جابه‌جایی چند ژول است؟



(۱) ۳۰

(۲) -۳۰

(۳) -۱۵

(۴) ۱۵

(متوسط - محاسباتی - ۱۰۰۳)

پاسخ: گزینه ۲

هرچند تا نیرو هم که داشته باشیم به کمک قضیه کار - انرژی جنبشی قطعاً می‌تونیم از پس کارشون بریم:

$$W_t = \Delta K \Rightarrow W_F + W_{f_D} = \frac{1}{2} m(v_f^2 - v_i^2) \Rightarrow Fd + W_{f_D} = \frac{1}{2} m(v_f^2 - v_i^2)$$

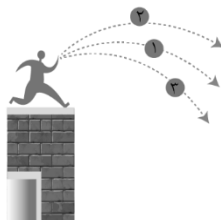
$$\Rightarrow 60 \times 2 + W_{f_D} = \frac{1}{2} \times 200 \times 10^{-3} (30^2 - 0^2) \Rightarrow 120 + W_{f_D} = 90 \Rightarrow W_{f_D} = -30\text{J}$$

راهنمای مسیرت

در تمام مسائلی که اصطکاک یا مقاومت هوا وجود نداره، می‌شه اون سؤال رو باز طراحی کرد و از نیروهای مقاوم هم استفاده کرد. به همین دلیل توی این سؤال که اتفاقاً از تمرینات کتاب درسی هست، سعی کردیم این کار رو انجام بدیم و شما رو با جنبه‌های دیگر طرح سؤال از تمرینات کتاب درسی آشنا کنیم.



۳۵- مطابق شکل زیر، شخصی سه توپ مشابه (۱)، (۲) و (۳) را به ترتیب با تندی‌های ۷، ۲۷ و ۴۷ از بالای ساختمانی در جهت‌های نشان داده شده پرتاب می‌کند. اگر توپ‌های (۱) و (۲) به ترتیب با تندی‌های $10\sqrt{5} \frac{\text{m}}{\text{s}}$ و $20\sqrt{2} \frac{\text{m}}{\text{s}}$ به زمین برسند، تندی توپ (۳) هنگام برخورد به زمین چند متر بر ثانیه است؟ (مقاومت هوا ناچیز است و $g=10 \frac{\text{N}}{\text{kg}}$)



(۱) $20\sqrt{5}$

(۲) $20\sqrt{3}$

(۳) ۴۰

(۴) ارتفاع ساختمان باید معلوم باشد.

(متوسط - مفهومی و محاسباتی - ۱۰۰۳)

پاسخ: گزینه ۱

انرژی مکانیکی

۱- در سؤالاتی که نیروهای غیرپایستار مثل اصطکاک وجود ندارند، انرژی مکانیکی پایسته می‌ماند و می‌توانیم در حل سؤال از پایستگی انرژی مکانیکی استفاده کنیم.

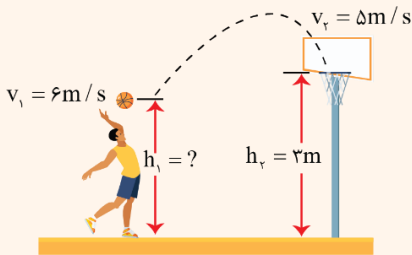
$$E \rightarrow E_1 = E_2$$

$$\rightarrow U_1 + K_1 = U_2 + K_2$$

۲- در رابطه فوق K انرژی جنبشی است و U انرژی پتانسیل می‌باشد. دقت کنید که در سؤالات این بخش انرژی پتانسیل می‌تواند به فرم پتانسیل گرانشی و یا پتانسیل کشسانی باشد و نیاز است در حل سؤالات هر دو نوع انرژی پتانسیل را در نظر بگیرید.



در شکل زیر ورزشکار، توپ را با تندی اولیه $\frac{m}{s}$ ۶ پرتاب می‌کند و اندازه سرعت توپ هنگام ورود به سبد $\frac{m}{s}$ ۵ است. فاصله نقطه پرتاب توپ تا سطح زمین (h_1) چند متر است؟ ($g = 10 \frac{N}{kg}$ و مقاومت هوا ناچیز است).



پاسخ:

کافی است بین نقطه پرتاب و سبد رابطه پایستگی انرژی را بنویسیم.

$$U_1 + K_1 = U_2 + K_2 \rightarrow mgh_1 + \frac{1}{2}mv_1^2 = mgh_2 + \frac{1}{2}mv_2^2$$

$$\xrightarrow{\text{ساده کردن } m} 10 \cdot h_1 + \frac{1}{2} \times 6^2 = 10 \times 3 + \frac{1}{2} \times 5^2 \rightarrow h_1 = 2/45 \text{ m}$$

دقت کنید که چون فقط یک شکل از فنر در کتاب درسی باقی مانده است، احتمال طرح سؤال از آن بسیار کم است.

با توجه به پایستگی انرژی، برای هر سه توپ می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} E_A &= E_B \\ \Rightarrow U_A + K_A &= U_B + K_B \\ \Rightarrow mgh + \frac{1}{2}mv_o^2 &= \frac{1}{2}mv'^2 \\ \Rightarrow v' &= \sqrt{2gh + v_o^2} \quad \text{رابطه (۱)} \end{aligned}$$

بنابراین تندی نهایی گلوله‌ها به ارتفاع و تندی اولیه بستگی دارد. حال کافی است در رابطه (۱)، مقادیر $v_o = v$ و $v_o = 2v$ را برای توپ‌های (۱) و (۲) قرار دهیم.

$$\begin{cases} \text{توپ (۱): } 10\sqrt{5} = \sqrt{2gh + v^2} \Rightarrow 500 = 2 \times 10 \times h + v^2 \\ \text{توپ (۲): } 20\sqrt{2} = \sqrt{2gh + (2v)^2} \Rightarrow 800 = 2 \times 10 \times h + 4v^2 \end{cases}$$

با کم کردن دو طرف دو رابطه بالا از هم داریم:

$$800 - 500 = 4v^2 - v^2 \Rightarrow 300 = 3v^2 \Rightarrow v = 10 \frac{m}{s}$$

با جای‌گذاری $v = 10 \frac{m}{s}$ در رابطه $500 = 20h + v^2$ ، مقدار h هم به‌دست می‌آید.

$$500 = 20h + v^2 \xrightarrow{v=10 \frac{m}{s}} h = 20 \text{ m}$$

در نهایت گلوله (۳) با تندی $4v = 40 \frac{m}{s}$ پرتاب می‌شود و تندی آن هنگام رسیدن به زمین برابر است با:

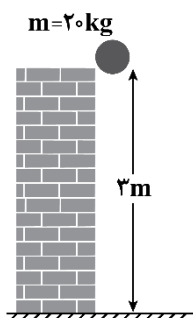
$$\text{توپ (۳): } v_3 = \sqrt{2gh + (4v)^2} = \sqrt{2 \times 10 \times 20 + 40^2} = 20\sqrt{5} \frac{m}{s}$$

این سؤال براساس یکی از تمرین‌های انتهای فصل سوم کتاب درسی فیزیک دهم طرح شده است.





۳۶- جسمی به جرم 20 kg از ارتفاع 3 متری سطح زمین، مطابق شکل رها می‌شود. کار نیروی وزن جسم در این جابه‌جایی چند ژول



است؟ $(g = 9.8 \frac{\text{N}}{\text{kg}})$

- (۱) ۶۰۰
- (۲) -۶۰۰
- (۳) -۵۸۸
- (۴) ۵۸۸

(آسان - محاسباتی - ۱۰۰۳)

پاسخ: گزینه ۴

روش اول:

گام اول:

اگر سطح زمین را مبدأ انرژی پتانسیل گرانشی در نظر بگیریم، داریم:

$$\Delta U = mg\Delta h = mg(h_f - h_i) = 20 \times 9.8 (0 - 3) = -588 \text{ J}$$

گام آخر:

می‌دانیم کار نیروی وزن، قرینه تغییر انرژی پتانسیل گرانشی جسم است؛ بنابراین داریم:

$$W_{mg} = -\Delta U = -(-588) = 588 \text{ J}$$

روش دوم:

با استفاده از رابطه $W_F = Fd \cos \theta$ داریم:

$$W_{mg} = mgd \cos \theta = 20 \times 9.8 \times 3 \times \cos 0^\circ = 588 \text{ J}$$

سوتی‌های پرتکرار

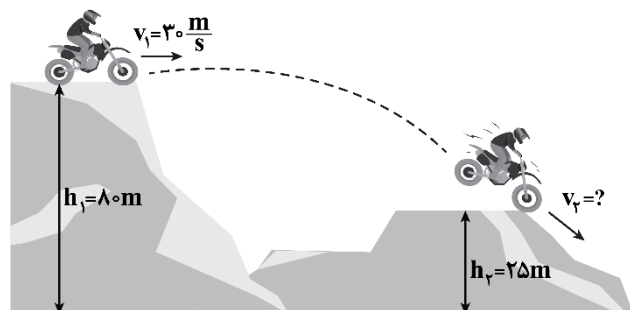
اگر g رو 10 بگیریم در دام گزینه (۱) می‌افتی و اگر به علامت کار نیروی وزن در جابه‌جایی جسم به سمت پایین حواست نباشه در دام گزینه (۲) یا (۳) می‌افتی. پس گول سادگی سؤال رو نخور.

راهنمای مسیرت

این‌که در بیش از ۹۰ درصد سؤالات فیزیک، g رو 10 می‌گیرن دلیل نمی‌شه شما این رو پایه کارت کنی و حتماً در داده‌های صورت سؤال دقت کافی داشته باشین.



۳۷- موتورسواری مطابق شکل با تندی $30 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ از تپه اول می‌پرد. اگر کار نیروهای اتلافی ناچیز باشد، تندی موتورسوار در لحظه



رسیدن به تپه دوم چند متر بر ثانیه است؟ $(g = 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}})$

- (۱) $20\sqrt{2}$
- (۲) $10\sqrt{2}$
- (۳) $20\sqrt{5}$
- (۴) $10\sqrt{5}$

چون کار نیروهای اتلافی ناچیز است، پس انرژی مکانیکی موتورسوار پایسته بوده و داریم:

$$E_1 = E_2 \Rightarrow K_1 + U_1 = K_2 + U_2 \Rightarrow \frac{1}{2} m v_1^2 + m g h_1 = \frac{1}{2} m v_2^2 + m g h_2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} (30)^2 + 10 \times 80 = \frac{1}{2} v_2^2 + 10 \times 25 \Rightarrow 900 + 1600 = v_2^2 + 500 \Rightarrow v_2^2 = 2000$$

$$\Rightarrow v_2 = 20 \sqrt{5} \frac{m}{s}$$

راهنمای مسیرت

ایده این سؤال همیشه مورد علاقه ما طراحان هست. پس یک بار با دقت ویژه این سؤال رو یاد بگیر تا برای همیشه از این سؤال و سؤالای مشابهش خیالت تخت بشه.

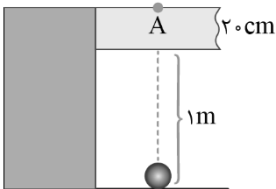
جرعه ذهنی

$$v_2^2 - v_1^2 = -2g(h_2 - h_1)$$

$$v_2^2 - 900 = -20(-55) \Rightarrow v_2^2 = 2000 \Rightarrow v_2 = 20 \sqrt{5} \frac{m}{s}$$



۳۸- گلوله‌ای به جرم ۲۰g با تندی $100 \frac{m}{s}$ به سمت بالا شلیک شده و بعد از برخورد به مانع با تندی $10 \frac{m}{s}$ از نقطه A خارج می‌شود. اگر از اثر مقاومت هوا صرف نظر شود، چند ژول از انرژی اولیه به انرژی درونی مجموعه گلوله و مانع تبدیل شده است؟ (سطح زمین مبدأ گرانش فرض شود، $g = 10 \frac{m}{s^2}$)



(۲) ۸۷/۶
(۴) ۹۹

(۱) ۹۶/۶
(۳) ۹۸/۷۶

انرژی درونی

به مجموع انرژی‌های ذره‌های سازنده یک جسم انرژی درونی می‌گویند.

افزایش انرژی درونی معمولاً به صورت گرم شدن ظاهر می‌شود.

هر چه تعداد ذرات سازنده یک جسم بیشتر باشد و انرژی هر ذره آن زیادتر باشد، انرژی درونی بیشتر است.

قانون پایستگی انرژی

هرگاه سامانه‌ای با محیط اطرافش تبادل انرژی نداشته باشد (سامانه منزوی) مجموع کل انرژی‌های آن پایسته می‌ماند. یعنی انرژی را نمی‌توان خلق یا نابود کرد و تنها می‌توان آن را از شکلی به شکل دیگر تبدیل کرد.

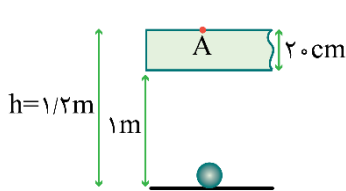


مثلاً در شکل زیر هنگامی که توپ را پرتاب می‌کنیم بعد از طی مسافتی متوقف می‌شود.

در این حالت انرژی جنبشی جسم به انرژی دیگری به نام انرژی درونی تبدیل شده است که قبلاً به آن پرداختیم. بعد از تبدیل انرژی‌ها به انرژی درونی چون اغلب فایده‌ای برای ما ندارد به آن انرژی تلف شده می‌گویند.

اگر علاوه بر نیروهای پایستار (فتر، وزن، الکتریکی) نیروهای اتلافی کار انجام دهند:

$$E_2 - E_1 = W_{\text{نیروهای اتلافی}} < 0$$



$$E_2 = U_2 + K_2 = mgh + \frac{1}{2}mv_2^2 = 0.02 \times 10 \times 1/2 + \frac{1}{2} \times 0.02 \times 10^2 = 0.24 + 1 = 1.24 \text{ J}$$

$$E_1 = K_1 = \frac{1}{2} \times \frac{20}{1000} \times 1000^2 = 100 \text{ J}$$

کار نیروهای اتلافی که به انرژی درونی تبدیل شده است. $E_2 - E_1 = 1.24 - 100 = -98.76 \text{ J} \rightarrow$



۳۹- شخصی یک تکه سنگ ۱۰۰ گرمی را از زمین برداشته و با تندی $16 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ از ارتفاع ۱/۵ متری سطح زمین به سمت چراغی در ارتفاع

۶ متری از سطح زمین پرتاب می‌کند. اگر سنگ با تندی $10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ به چراغ برخورد کند، کار نیروی مقاومت هوا چند ژول است؟

$$(g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2})$$

$$-7/8 \text{ (۴)}$$

$$-4/5 \text{ (۳)}$$

$$-3/3 \text{ (۲)}$$

$$-1/8 \text{ (۱)}$$

(آسان - محاسباتی - ۱۰۰۳)

پاسخ: گزینه ۲

انرژی درونی و مکانیکی

همان‌طور که می‌دانیم، در صورتی که نیروهای غیرپایستار مانند نیروی مقاومت هوا و اصطکاک در مسئله وجود نداشتند، انرژی مکانیکی پایسته می‌ماند. در این درس‌نامه می‌خواهیم ببینیم در حضور این نیروها، انرژی مکانیکی چگونه تغییر خواهد کرد. به نکات زیر توجه کنید.

۱- کار نیروهای اصطکاک و مقاومت هوا منفی است. این کار باعث کاهش یافتن انرژی مکانیکی جسم می‌شود؛ به عبارت دیگر:

$$E_2 - E_1 = W_f$$

با توجه به این که علامت کار منفی است، E_2 کوچک‌تر از E_1 می‌باشد.

۲- انرژی مکانیکی که جسم از دست می‌دهد صرف افزایش انرژی درونی محیط و جسم می‌شود؛ به عبارت دیگر تغییرات انرژی درونی محیط و جسم برابر $E_1 - E_2$ خواهد بود.

روش اول:

طبق قانون پایستگی انرژی می‌توانیم بنویسیم:

$$W_f = E_2 - E_1 = (U_2 + K_2) - (U_1 + K_1) = (mgh_2 + \frac{1}{2}mv_2^2) - (mgh_1 + \frac{1}{2}mv_1^2)$$

$$\Rightarrow W_f = (0.1 \times 10 \times 6 + \frac{1}{2} \times 0.1 \times 100) - (0.1 \times 10 \times 1/5 + \frac{1}{2} \times 0.1 \times 16^2)$$

$$\Rightarrow W_f = (6 + 5) - (1/5 + 12/8) = -3/3 \text{ J}$$

روش دوم:

طبق قضیه کار - انرژی جنبشی می‌توانیم بنویسیم:

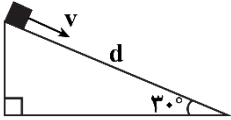
$$W_t = \Delta K \rightarrow W_{mg} + W_f = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2)$$

$$\frac{W_{mg} = -mg\Delta h = -0.1 \times 10 \times (6 - 1/5) = -4/5 \text{ J}}{m = 0.1 \text{ kg}, v_1 = 16 \frac{\text{m}}{\text{s}}, v_2 = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}} \rightarrow -4/5 + W_f = \frac{1}{2} \times 0.1 (100 - 256) = -7/8$$

$$\Rightarrow W_f = -3/3 \text{ J}$$



۴۰- مطابق شکل، بر روی یک سطح شیب‌دار به طول d ، بسته‌ای به جرم ۲ kg را مماس بر سطح با تندی v به سمت پایین پرتاب می‌کنیم و بسته در پایین سطح شیب‌دار متوقف می‌شود. چنان‌چه، بسته را مماس بر سطح و با همان تندی v از پایین سطح شیب‌دار به سمت بالا پرتاب کنیم، چه مسافتی را بر روی سطح طی می‌کند؟ (نیروی اصطکاک جنبشی بین بسته و سطح، ثابت و برابر با ۲۰ N است و $g = ۱۰ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$).



$$\frac{1}{2}d \quad (۲)$$

$$d \quad (۴)$$

$$\frac{1}{3}d \quad (۱)$$

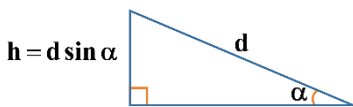
$$\frac{2}{3}d \quad (۳)$$

(سخت - محاسباتی - ۱۰۰۳)

پاسخ: گزینه ۱

$$f_k = mg = ۲۰\text{ N}$$

طبق قضیه کار و انرژی جنبشی داریم:



$$W_{F_N} + W_{mg} + W_{f_k} = \Delta K = K_2 - K_1$$

هنگام پایین آمدن:

$$mg \times d \sin \alpha - f_k d = 0 - \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow$$

$$۲ \times ۱۰ \times d \times \frac{1}{2} - ۲۰ \times d = -\frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = ۱۰d \quad (۱)$$

هنگام بالا رفتن:

$$-mg \times d' \sin \alpha - f_k d' = 0 - \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow$$

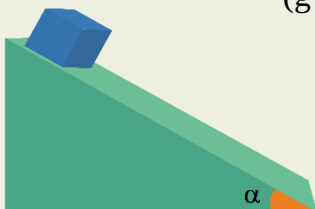
$$-۲ \times ۱۰ \times d' \times \frac{1}{2} - ۲۰ \times d' = -\frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = ۳۰d' \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱), (۲)} ۳۰d' = ۱۰d \Rightarrow d' = \frac{1}{3}d$$

کنکور سراسری ریاضی ۱۴۰۳

۷۳- مطابق شکل جسمی به جرم ۱۰ g از بالای سطح شیب‌داری با تندی $۴ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ از ارتفاع ۱۰ متری مماس بر سطح شیب‌دار پرتاب می‌شود

و با تندی $۱۰ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ به پایین سطح شیب‌دار می‌رسد. کار نیروهای مقاوم روی جسم چند ژول است؟ ($g = ۱۰ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$)



$$-۲/۱ \quad (۱)$$

$$-۲/۴ \quad (۲)$$

$$-۴/۲ \quad (۳)$$

$$-۵/۸ \quad (۴)$$

پاسخ تشریحی:

بر جسم سه نیروی mg و $\vec{F}_N$ و $\vec{f}$ وارد می‌شوند:

$$W_{mg} = -mg\Delta h = -۱۰ \times ۱۰ \times (-۱۰) = +۱۰\text{ J}$$

چون $\vec{F}_N$ عمود بر جابه‌جایی است، پس کار آن صفر است.



$$W_{FN} = 0$$

$$W_t = \Delta K \rightarrow W_{mg} + W_{FN} + W_f = \frac{1}{2}m(v_f^2 - v_i^2)$$

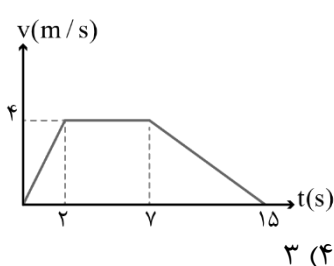
$$\rightarrow +10 + 0 + W_f = \frac{1}{2} \times 0.1 \times (10^2 - 4^2)$$

$$\rightarrow W_f = 4/2 - 10 \rightarrow W_f = -5/8 J$$

پاسخ: گزینه ۴



۴۱- جسمی به جرم 20 kg کف آسانسوری قرار دارد. آسانسور به سمت بالا شروع به حرکت می‌کند و نمودار سرعت - زمان حرکت



آن مطابق شکل است. چه تعداد از عبارت‌های زیر صحیح است؟ ($g = 10 \frac{N}{kg}$)

- الف) کار نیروی وزن روی جسم در کل حرکت برابر 8 kJ است.
 ب) کار نیرویی که کف آسانسور بر جسم وارد می‌کند، در کل حرکت برابر 8 kJ است.
 ج) کار کل انجام شده روی جسم در ۲ ثانیه سوم حرکت صفر است.
 ۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

(متوسط - نموداری - ۱۰۰۳)

پاسخ: گزینه ۴

ابتدا به کمک مساحت زیر نمودار سرعت - زمان، جابه‌جایی آسانسور به سمت بالا را بدست می‌آوریم.

$$d = \frac{5 + 15}{2} \times 4 = 40 \text{ m}$$

کار نیروی وزن برابر است با:

$$W_{\text{وزن}} = -mgd = -20 \times 10 \times 40 = -8000 \text{ J} = -8 \text{ kJ}$$

با توجه به آن که تندی اولیه و نهایی جسم برابر است، طبق قضیه کار و انرژی جنبشی، کار کل انجام شده روی جسم صفر است و در نتیجه کار نیروی کف آسانسور قرینه کار وزن است.

$$W_N = -W_{\text{وزن}} = -(-8 \text{ kJ}) = +8 \text{ kJ}$$

همچنین دقت کنید که در ۲ ثانیه سوم، تندی جسم ثابت است و در نتیجه کار کل انجام شده روی آن صفر است. مطابق توضیحات فوق، هر سه عبارت صحیح هستند.

اگر؟

اگر کار نیروی کف آسانسور بر جسم را در ۲ ثانیه اول حرکت می‌خواستیم پاسخ چه بود؟
 پاسخ: جابه‌جایی آسانسور در ۲ ثانیه اول برابر مساحت زیر نمودار سرعت - زمان است.

$$d = \frac{2 \times 4}{2} = 4 \text{ m}$$

با استفاده از قضیه کار و انرژی جنبشی می‌توان نوشت:

$$W_{\text{کل}} = \Delta K = \frac{1}{2}m(v_f^2 - v_i^2) \rightarrow W_{\text{وزن}} + W_N = \frac{1}{2}m(v_f^2 - v_i^2)$$

$$\rightarrow -mgd + W_N = \frac{1}{2}m(v_f^2 - v_i^2) \rightarrow (-20 \times 10 \times 4) + W_N = 10(4^2 - 0)$$

$$\rightarrow W_N = 960 \text{ N}$$





۴۲- جسمی به جرم 2 kg را از بالنی که در ارتفاع 10 m متری سطح زمین با تندی $10\frac{\text{m}}{\text{s}}$ به سمت بالا در حرکت است، رها می‌کنیم. اگر تا لحظه رسیدن جسم به سطح زمین، 75% درصد از انرژی جنبشی اولیه به انرژی درونی تبدیل شود، تندی جسم در لحظه رسیدن به سطح زمین چند متر بر ثانیه است؟ ($g = 10\frac{\text{N}}{\text{kg}}$)

۱۸ (۴)

۲۰ (۳)

۱۵ (۲)

۱۰ (۱)

(متوسط - محاسباتی - ۱۰۰۳)

پاسخ: گزینه ۲

انرژی مکانیکی اولیه جسم برابر است با:

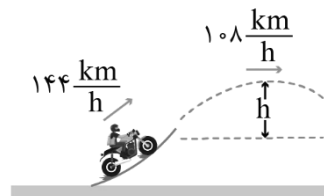
$$\begin{cases} K_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2} \times 2 \times 10^2 = 100\text{ J} \\ U_1 = mgh = 2 \times 10 \times 10 = 200\text{ J} \end{cases} \rightarrow E_1 = U_1 + K_1 = 300\text{ J}$$

75% درصد انرژی جنبشی اولیه، یعنی 75 J از انرژی مکانیکی جسم به انرژی درونی تبدیل می‌شود، بنابراین انرژی مکانیکی نهایی جسم برابر $E_2 = E_1 - 75 = 225\text{ J}$ خواهد بود و در نتیجه تندی جسم هنگام رسیدن به زمین برابر می‌شود با:

$$K_2 = 225\text{ J} \xrightarrow{K = \frac{1}{2}mv^2} 225 = \frac{1}{2} \times 2 \times v^2 \rightarrow v = 15\frac{\text{m}}{\text{s}}$$



۴۳- در شکل مقابل، موتورسواری با تندی $144\frac{\text{km}}{\text{h}}$ از انتهای سکویی می‌پرد و تندی حرکت آن در بالاترین نقطه مسیرش به $108\frac{\text{km}}{\text{h}}$ می‌رسد. ارتفاع h چند متر است؟ ($g = 10\frac{\text{N}}{\text{kg}}$ و مقاومت هوا ناچیز است.)



۳۵ (۱)

۳۰ (۲)

۴۰ (۳)

۲۵ (۴)

(آسان - محاسباتی - ۱۰۰۳)

پاسخ: گزینه ۱

بین محل پرش و بالاترین نقطه مسیر از پایستگی انرژی مکانیکی استفاده می‌کنیم:

$$E_1 = E_2 \rightarrow \frac{1}{2}mv_1^2 = mgh + \frac{1}{2}mv_2^2$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} \times (40)^2 = (10 \times h) + \frac{1}{2} \times 30^2$$

$$\rightarrow 800 = 10h + 450 \rightarrow h = 35\text{ m}$$

دقت کنید که در روابط فوق، تندی‌ها باید برحسب $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ جایگذاری شوند.

$$v_1 = 144\frac{\text{km}}{\text{h}} = 40\frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad v_2 = 108\frac{\text{km}}{\text{h}} = 30\frac{\text{m}}{\text{s}}$$



۴۴- توپ فوتبالی به جرم 450 g از نقطه پناستی با تندی $18\frac{\text{m}}{\text{s}}$ به طرف دروازه شوت می‌شود و با تندی $12\frac{\text{m}}{\text{s}}$ به تیرک افقی که

ارتفاع آن $2/44\text{ m}$ است، برخورد می‌کند. اندازه کار نیروی مقاومت هوا در این مسیر چند ژول بوده است؟ ($g = 10\frac{\text{N}}{\text{kg}}$)

۲/۸۸ (۴)

۱۹/۰۸ (۳)

۲۹/۵۲ (۲)

۵۱/۴۸ (۱)

روش اول:

با استفاده از قضیه کار - انرژی جنبشی می‌توان نوشت:

$$W_t = \Delta K$$

$$W_{mg} + W_{fD} = \Delta K \Rightarrow -mg\Delta h + W_{fD} = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2)$$

$$\Rightarrow -0.45 \times 10 \times 2/44 + W_{fD} = \frac{1}{2}(0.45)(12^2 - 18^2)$$

$$\Rightarrow -10/98 + W_{fD} = -40/5 \Rightarrow W_{fD} = -29/52J$$

روش دوم:

کار نیروی اتلافی برابر تغییرات انرژی مکانیکی است؛ بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

لحظه شوت زدن توپ ۱)

لحظه برخورد توپ به تیرک ۲)

$$E_2 - E_1 = W_f \xrightarrow{E_1 = K_1 + U_1} K_2 + U_2 - K_1 = W_f$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv_2^2 + mgh - \frac{1}{2}mv_1^2 = W_f \xrightarrow{m=45 \cdot g=0.45kg, v_1=18 \frac{m}{s}}{v_2=12 \frac{m}{s}, h=2/44m}$$

$$W_f = (\frac{1}{2} \times 0.45 \times 144) + (0.45 \times 10 \times 2/44) - (\frac{1}{2} \times 0.45 \times 324) = -29/52J$$

انرژی درونی

«انرژی درونی یک جسم، مجموع انرژی ذره‌های تشکیل‌دهنده آن است.»

عوامل مؤثر بر انرژی درونی یک جسم:

۱- تعداد ذرات جسم: هرچه تعداد ذرات یک جسم بیشتر باشد، انرژی درونی جسم بیشتر است.

۲- انرژی هر ذره: هرچه ذرات جسم انرژی بیشتری داشته باشند، انرژی درونی جسم بیشتر است.

قضیه کار و انرژی درونی

اگر در طول مسیر، نیروهای اصطکاک و مقاومت هوا به جسم وارد شوند و روی جسم، کار منفی انجام دهند، بخشی از انرژی مکانیکی جسم را به انرژی درونی جسم، سطح مسیر و هوا تبدیل می‌کنند.

کاهش انرژی مکانیکی به صورت افزایش انرژی درونی جسم و محیط اطراف آن (سطح مسیر و هوا) درمی‌آید.

تغییر انرژی مکانیکی جسم = کار انجام‌شده توسط نیروهای اتلافی

$$W_f = E_2 - E_1$$

W_f : تلفات انرژی (تغییر انرژی درونی سامانه) می‌باشد که در تست‌ها با حالت‌های زیر مواجه خواهید شد:

۱- اگر در سؤال، بحث نیروی اصطکاک و مقاومت هوا شد، به جای تلفات انرژی باید کار نیروی اصطکاک و مقاومت هوا را قرار دهید.

$$W_{fk} = -f_k \times L, \quad W_{fair} = -f_{air} \times L$$

۲- علامت تلفات انرژی باید حتماً منفی باشد. مثلاً اگر در سؤال گفته شد تلفات انرژی ۷ ژول است باید در رابطه $-7J$ را قرار دهید.

۳- ممکن است تلفات انرژی را برحسب درصد بدهند. مثلاً اگر گفته شود تلفات انرژی ۳۰ درصد انرژی جنبشی اولیه است، شما در رابطه

به جای تلفات $K_1 - \frac{30}{100}$ را قرار دهید.



۱- کار نیروهای اصطکاک و مقاومت هوا منفی است. این کار باعث کاهش یافتن انرژی مکانیکی جسم می‌شود؛ به عبارت دیگر:

$$E_f - E_i = W_f$$

با توجه به این‌که علامت کار منفی است، E_f کوچک‌تر از E_i می‌باشد.

۲- انرژی مکانیکی که جسم از دست می‌دهد، صرف افزایش انرژی درونی محیط و جسم می‌شود؛ به عبارت دیگر تغییرات انرژی درونی محیط و جسم برابر $E_i - E_f$ خواهد بود.

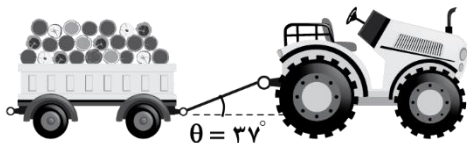
یه نمونه باحال



در شکل مقابل، توپ در حال حرکتی که انرژی جنبشی دارد را با دست متوقف می‌کنیم. انرژی جنبشی توپ در اثر برخورد با مولکول‌های هوا و دست باعث گرم شدن مولکول‌های هوا و دست می‌شود. درواقع گفته می‌شود انرژی درونی مولکول‌های هوا و دست افزایش می‌یابد، پس انرژی جنبشی توپ از بین نرفته و تبدیل به انرژی درونی شده است.



۴۵- در شکل زیر، جرم کل سورتمه و بار آن ۱۹۲۰ کیلوگرم است و تراکتور تحت زاویه $\theta = 37^\circ$ ، نیروی ثابت ۸۰۰۰N را بر آن وارد می‌کند. در نتیجه، سورتمه از حال سکون در مسیر مستقیم و افقی شروع به حرکت می‌کند. پس از جابه‌جایی d ، ناگهان زنجیر پاره می‌شود و سورتمه به اندازه $d' = \frac{4}{3}d$ جابه‌جا می‌شود و می‌ایستد. اگر نیروی اصطکاک بین سورتمه و زمین پس از پاره شدن طناب، ۲۵ درصد کاهش یابد، نیروی اصطکاک جنبشی بین سورتمه و زمین قبل از پاره شدن طناب چند نیوتون بوده است؟
($\cos 37^\circ = 0.8$)



- (۱) ۲۴۰۰
- (۲) ۳۲۰۰
- (۳) ۴۰۰۰
- (۴) ۶۴۰۰

(سخت - محاسباتی - ۱۰۰۳)

پاسخ: گزینه ۲

انرژی جنبشی سورتمه در لحظه پاره شدن زنجیر را برابر K در نظر می‌گیریم. طبق قضیه کار - انرژی جنبشی داریم:

$$W_t = \Delta K \Rightarrow \cancel{W_{mg}} + \cancel{W_{F_N}} + W_F + W_{f_k} = K - 0$$

F نیروی کشش زنجیر و F_N نیروی عمودی سطح و f_k نیروی اصطکاک جنبشی است.

mg و F_N بر جابه‌جایی عمود هستند؛ بنابراین کار آن‌ها صفر است.

$$\text{رابطه (۱): } K = Fd \cos \theta + f_k d \cos 180^\circ = 8000 \times d \times 0.8 + f_k \times d \times (-1) = 6400d - f_k d$$

بعد از پاره شدن زنجیر و حذف نیروی تراکتور، نیروی عمودی سطح و در نتیجه نیروی اصطکاک تغییر می‌کند.

$$W_t = \Delta K \Rightarrow \cancel{W_{mg}} + \cancel{W_{F_N}} + W_{f'_k} = 0 - K \Rightarrow -f'_k d' = -K$$

$$\frac{f'_k = \frac{3}{4}f_k}{d' = \frac{4}{3}d} \rightarrow K = \frac{3}{4}f_k \times \frac{4}{3}d = f_k d \quad \text{رابطه (۲)}$$

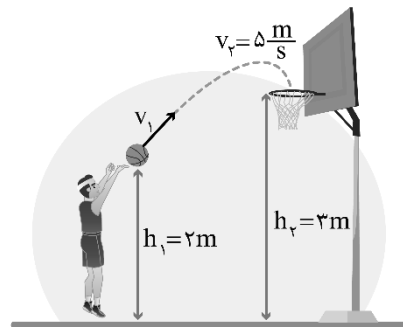
$$\xrightarrow{\text{(۲) و (۱)}} f_k d = 6400d - f_k d$$

$$\Rightarrow 2f_k = 6400 \Rightarrow f_k = 3200 \text{ N}$$





۴۶- مطابق شکل زیر، ورزشکاری توپ را با تندی اولیه v_1 به سمت سبد پرتاب می‌کند. در طول مسیر، $\frac{1}{8}$ انرژی جنبشی اولیه توپ صرف افزایش انرژی درونی محیط و $\frac{1}{4}$ آن صرف افزایش انرژی درونی توپ می‌شود. اگر توپ با تندی $\frac{5}{8} \frac{m}{s}$ به سبد برسد، v_1 چند متر بر ثانیه است؟ ($g = 10 \frac{N}{kg}$)



- (۱) ۶
- (۲) $6\sqrt{2}$
- (۳) ۸
- (۴) $8\sqrt{2}$

(متوسط - محاسباتی - ۱۰۰۳)

پاسخ: گزینه ۲

$$E_2 - E_1 = W_f \rightarrow (U_2 + K_2) - (U_1 + K_1) = \underbrace{\left(-\frac{1}{4}K_1\right)}_{\text{توپ}} + \underbrace{\left(-\frac{1}{8}K_1\right)}_{\text{محیط}}$$

$$\rightarrow (mgh_2 + \frac{1}{2}mv_2^2) - (mgh_1 + \frac{1}{2}mv_1^2) = -\frac{3}{8} \times \frac{1}{2}mv_1^2$$

$$\rightarrow (10 \times 3 + \frac{1}{2} \times 5^2) - (10 \times 2 + \frac{1}{2}v_1^2) = -\frac{3}{16}v_1^2$$

$$\rightarrow 22/5 = \frac{5}{16}v_1^2 \rightarrow v_1^2 = 72 \rightarrow v_1 = \sqrt{72} = 6\sqrt{2} \frac{m}{s}$$

۴۷- شخصی در شرایط خلأ، جسمی به جرم ۲۰۰ گرم را از سطح زمین برمی‌دارد و تا ارتفاع ۳ متری بالا می‌برد و سپس جسم را با تندی ۷ پرتاب می‌کند. اگر در این حرکت، شخص ۱۶ J+ کار روی جسم انجام داده باشد، تندی ۷ چند متر بر ثانیه است؟

$$(g = 10 \frac{N}{kg})$$

۱۰ (۴)

۲/۵ (۳)

۲۰ (۲)

۵ (۱)

(متوسط - محاسباتی - ۱۰۰۳)

پاسخ: گزینه ۴

روی جسم دو نیرو کار انجام می‌دهند، یکی نیروی وزن است و یکی نیرویی که شخص به جسم وارد می‌کند. چون جسم به سمت بالا حرکت کرده است، کار نیروی وزن منفی است، پس طبق قضیه کار-انرژی جنبشی می‌توان نوشت:

$$W_T = \Delta K \rightarrow W_{\text{شخص}} + W_{\text{وزن}} = K_2 - K_1 \rightarrow W_{\text{شخص}} - mg\Delta h = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2)$$

$$\rightarrow 16 - 0.2 \times 10 \times 3 = \frac{1}{2} \times 0.2 \times (v_2^2 - 0) \rightarrow v_2^2 = 100 \rightarrow v_2 = 10 \frac{m}{s}$$

۴۸- در شکل زیر، توان مفید متوسط شخصی به جرم ۹۰ kg در بالا رفتن از پله‌ها برابر ۱۲۰ W است. اگر ارتفاع هر پله ۲۵ cm باشد،

این شخص در هر دقیقه چند پله را بالا می‌رود؟ ($g = 10 \frac{N}{kg}$)

- (۱) ۸
- (۲) ۱۶
- (۳) ۳۲
- (۴) ۶۴





توان شخص برابر کار انجام شده توسط شخص در واحد زمان می باشد، پس:

$$P = \frac{W}{t} = \frac{mg\Delta h}{t} \Rightarrow 120 = \frac{90 \times 10 \times \Delta h}{60} \Rightarrow \Delta h = 8m$$

با توجه به ارتفاع هر یک از پله ها که ۰/۲۵m است تعداد پله ها را به دست می آوریم:

$$\text{تعداد پله ها} = \frac{8}{0.25} = 32$$

توان (P)

توان (P): آهنگ انجام کار را توان می گویند که از رابطه زیر به دست می آید:

$$P_{av} = \frac{W}{\Delta t}$$

توان، یک کمیت نرده ای است که یکای آن در SI، وات (W) است که معادل با ژول بر ثانیه ($\frac{J}{s}$) می باشد.

توان موتور وسایل نقلیه را برحسب اسب بخار (hp) بیان می کنند.

$$1hp \approx 746W$$

نکته

۱- توان درواقع بیانگر آهنگ انجام کار است؛ بنابراین هرچه توان، بیشتر باشد، یعنی مقدار کار معینی در مدت زمان کمتری صورت می گیرد یا در مدت زمان معین، کار بیشتری انجام می شود.

۲- توان مصرفی یک وسیله برابر آهنگ مصرف انرژی توسط آن وسیله است و داریم:

$$P_{\text{مصرفی}} = \frac{E_{\text{مصرفی}}}{\Delta t}$$

یه نمونه باحال

شخصی به جرم ۷۲kg در مدت زمان ۹۰s از تعداد ۵۰ پله با تندی ثابت بالا می رود. توان متوسط مفید او چند وات است؟

(ارتفاع هر پله را ۳۰cm فرض کنید و $g = 10 \frac{N}{kg}$).

پاسخ تشریحی:

$$P_{av} = \frac{W}{\Delta t} = \frac{mgh}{\Delta t} \Rightarrow P_{av} = \frac{72 \times 10 \times (50 \times 0.3)}{90}$$

$$\Rightarrow P_{av} = 8 \times 15 \Rightarrow P_{av} = 120W$$



۴۹- جرم اتاقک آسانسوری ۶۶۰kg است و باری به جرم ۵۴۰kg درون آن قرار دارد. اگر آسانسور با تندی ثابت $\frac{8}{s}$ به اندازه ۶۰ متر بالا برود، توان متوسط موتور آسانسور چند کیلووات است؟ ($g = 10 \frac{N}{kg}$)

۶/۶ (۴)

۸/۴ (۳)

۸ (۲)

۹/۶ (۱)

نکته

اگر یک آسانسور با تندی ثابت v حرکت کند، توان متوسط آن برابر است با:

$$P = Fv$$

در این رابطه، F نیروی موتور آسانسور است.



چون آسانسور با تندی ثابت بالا می‌رود، نیروی موتور آن دقیقاً هم‌اندازهٔ مجموع وزن اتاقک و بار درون آن است.

$$F = (m_{\text{اتاقک}} + m_{\text{بار}})g = (660 + 540) \times 10 = 12000 \text{ N}$$

بنابراین توان موتور آسانسور برابر است با:

$$P = Fv \rightarrow P = 12000 \times 0.8 = 9600 \text{ W} = 9.6 \text{ kW}$$



۵۰- پمپ آبی در مدت ۲ ساعت، ۱۲۶ تن آب را از سطح زمین تا ارتفاع ۱۲ متر بالا می‌برد. اگر بازده این پمپ ۶۰ درصد باشد، توان این

پمپ چند کیلووات است؟ ($g = 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}}$)

۱۴ (۴)

۷ (۳)

۳/۵ (۲)

۱/۷۵ (۱)

(آسان - محاسباتی - ۱۰۰۳)

پاسخ: گزینه ۲

ابتدا توان مفید پمپ را به دست می‌آوریم:

$$P_{\text{مفید}} = \frac{W_{\text{مفید}}}{\Delta t} = \frac{mg\Delta h}{\Delta t} = \frac{126 \times 10^3 \times 10 \times 12}{2 \times 60 \times 60} = 2100 \text{ W}$$

حال برای محاسبهٔ توان ورودی پمپ می‌توان نوشت:

$$Ra = \frac{P_{\text{مفید}}}{P_{\text{ورودی}}} \times 100 \Rightarrow \frac{60}{100} = \frac{2100}{P_{\text{ورودی}}} \Rightarrow P_{\text{ورودی}} = 3500 \text{ W} = 3.5 \text{ kW}$$

توان (P)

توان (P): آهنگ انجام کار را توان می‌گویند که از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$P_{\text{av}} = \frac{W}{\Delta t}$$

توان، یک کمیت نرده‌ای است که یکای آن در SI، وات (W) است که معادل با ژول بر ثانیه ($\frac{\text{J}}{\text{s}}$) می‌باشد.

توان موتور وسایل نقلیه را برحسب اسب بخار (hp) بیان می‌کنند.

$$1 \text{ hp} \approx 746 \text{ W}$$

نکته ۱

۱- توان درواقع بیانگر آهنگ انجام کار است؛ بنابراین هرچه توان، بیشتر باشد، یعنی مقدار کار معینی در مدت‌زمان کمتری صورت می‌گیرد یا در مدت‌زمان معین، کار بیشتری انجام می‌شود.

۲- توان مصرفی یک وسیله برابر آهنگ مصرف انرژی توسط آن وسیله است و داریم:

$$P_{\text{مصرفی}} = \frac{E_{\text{مصرفی}}}{\Delta t}$$

یه نمونهٔ باحال

شخصی به جرم ۷۲ kg در مدت‌زمان ۹۰ s از تعداد ۵۰ پله با تندی ثابت بالا می‌رود. توان متوسط مفید او چند وات است؟

(ارتفاع هر پله را ۳۰ cm فرض کنید و $g = 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}}$).

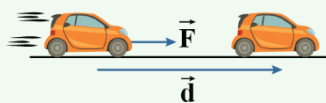
پاسخ تشریحی:

$$P_{\text{av}} = \frac{W}{\Delta t} = \frac{mgh}{\Delta t} \Rightarrow P_{\text{av}} = \frac{72 \times 10 \times (50 \times 0.3)}{90}$$

$$\Rightarrow P_{\text{av}} = 120 \text{ W}$$



اگر بر جسمی نیروی ثابت $\vec{F}$ وارد شود و جسم با سرعت ثابت حرکت کند، برای محاسبه توان نیروی $\vec{F}$ می‌توان از رابطه زیر استفاده کرد:



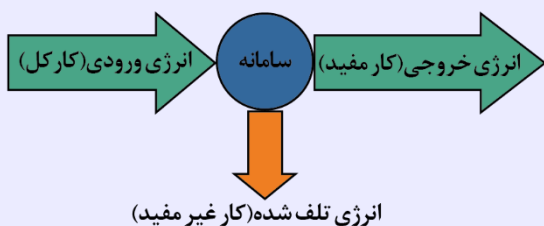
$$P_{av} = Fv \cos \theta$$

✓ برای محاسبه توان نیروی خودرویی که با تندی ثابت در حال حرکت است، می‌توان از این رابطه استفاده کرد.

راندمان (بازده)

$$Ra = \frac{\text{توان مفید (خروجی)}}{\text{انرژی کل (ورودی)}} \times 100 = \frac{\text{انرژی مفید (خروجی)}}{\text{انرژی کل (ورودی)}} \times 100$$

✓ بازده، یکا ندارد و درصد آن همواره کوچک‌تر مساوی ۱۰۰ است.



ماشین آرمانی: $Ra = 100\%$

$$P_{کل} = P_{مفید} + P_{غیرمفید}$$

انواع توان

۱- **توان کل (توان ورودی):** توانی که به دستگاه می‌دهیم تا برای ما کار انجام دهد.

✓ وقتی گفته می‌شود توان دستگاه مثلاً ۲۰۰ وات است، منظور توان کل دستگاه است.

✓ توان کل اصولاً روی دستگاه نوشته می‌شود.

۲- **توان غیرمفید (توان تلف‌شده در داخل دستگاه):** این توان داخل دستگاه به صورت گرما و ... تلف می‌شود و صرف هدف اصلی دستگاه نمی‌شود.

۳- **توان مفید (خروجی):** این توان از دستگاه خارج شده و صرف هدف اصلی دستگاه می‌شود.

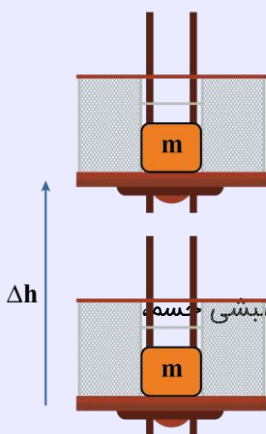
این توان را در عمل و به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$P_{مفید} = \frac{W_{مفید}}{\Delta t}$$

نحوه محاسبه توان مفید بالابر و پمپ:

کار مفیدی که بالابر و پمپ بر روی جسم انجام می‌دهند، صرف افزایش انرژی مکانیکی جسم می‌شود، بنابراین:

$$P_{مفید} = \frac{W_{مفید}}{\Delta t} = \frac{\Delta E}{\Delta t} \quad \text{و} \quad \Delta E = mg\Delta h + \frac{1}{2}m(v_f^2 - v_i^2)$$



✓ در اکثر سؤالات، تندی جسم تغییر نمی‌کند (مثلاً جسم در ابتدا و انتها ساکن است)، در این حالت تغییر انرژی جابجایی جسم:

صفر است و کار مفید برابر تغییر انرژی پتانسیل گرانشی جسم است:

$$P_{مفید} = \frac{mg\Delta h}{\Delta t}$$

توان مفید پمپ (بالابر)





شیمی ۱: رد پای گازها در زندگی
صفحه‌های ۶۶ تا ۸۴

بودجه‌بندی
این آزمون

شیمی ۱: تست از ۳۰ تست کنکور

سهم در
کنکور

۵۱- کدام یک از مطالب زیر، نادرست است؟

- (۱) گاز اکسیژن راحت‌تر از گاز نیتروژن، با هیدروژن واکنش می‌دهد.
- (۲) آمونیاک از جمله کودهای نیتروژن دار است که مستقیم به خاک تزریق می‌شود.
- (۳) طی واکنش عناصر سازنده آب با یکدیگر، در حضور کاتالیزگر، نور و گرمای زیادی تولید می‌شود.
- (۴) فراوان‌ترین گاز هواکره به جو بی‌اثر شهرت یافته و دارای نقطه جوشی در حدود 196 K است.

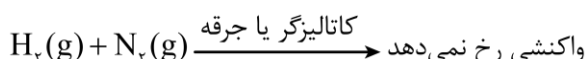
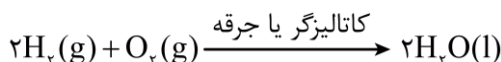
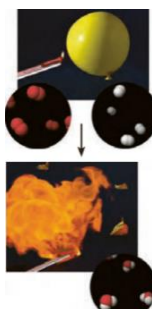
(آسان - مفهومی - ۱۰۰۲)

پاسخ: گزینه ۴

فراوان‌ترین گاز هواکره، نیتروژن است که به جو بی‌اثر شهرت یافته و دارای نقطه جوشی در حدود $196\text{ }^{\circ}\text{C}$ - است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

واکنش‌پذیری اکسیژن از نیتروژن بیشتر است. به‌عنوان مثال مخلوطی از اکسیژن و هیدروژن در حضور کاتالیزگر یا جرقه، واکنش می‌دهند و آب تولید می‌شود؛ در صورتی که مخلوط نیتروژن و هیدروژن در دمای اتاق، حتی با وجود کاتالیزگر یا جرقه واکنش نمی‌دهند.

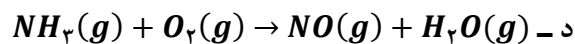
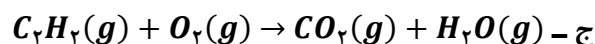
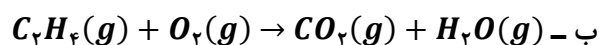
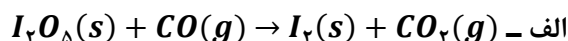


۲) آمونیاک از جمله کودهای نیتروژن دار است که مستقیم به خاک تزریق می‌شود.

۳) طی واکنش عناصر سازنده آب با یکدیگر یعنی واکنش گازهای اکسیژن و هیدروژن، در حضور کاتالیزگر، نور و گرمای زیادی تولید می‌شود.



۵۲- با توجه به واکنش‌های زیر که در ظرف سربسته و دمای ثابت انجام می‌گیرد، اگر واکنش‌دهنده‌ها به‌طور کامل مصرف شوند، به ترتیب در کدام ظرف افزایش فشار و در کدام ظرف کاهش فشار خواهیم داشت؟



(۱) «د» و «ج»

(۲) «الف» و «ب»

(۳) «ج» و «د»

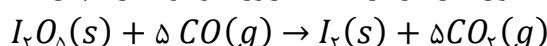
(۴) «ب» و «ج»

(متوسط - مفهومی - ۱۰۰۲)

پاسخ: گزینه ۱

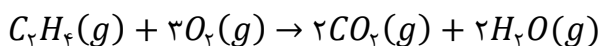
با توجه به اینکه واکنش‌ها در حجم (ظرف سربسته) و دمای ثابت انجام می‌شوند، اگر مجموع مول گازهای فراورده‌ها بیشتر از مجموع مول گازهای واکنش‌دهنده‌ها باشد، با توجه به رابطه (عدد ثابت $\frac{PV}{nT}$)، فشار نیز افزایش می‌یابد؛ اما اگر مجموع مول گازهای فراورده‌ها کمتر از مجموع مول گازهای واکنش‌دهنده‌ها باشد، یعنی کاهش مقدار n داشته باشیم، فشار نیز کاهش می‌یابد. پس ابتدا واکنش‌ها را موازنه می‌کنیم و اختلاف مول مواد گازی را به دست می‌آوریم:

الف) ۵ مول گاز در سمت واکنش‌دهنده و ۵ مول گاز نیز در سمت فراورده وجود دارد؛ پس تغییر حجم و فشار در این واکنش نداریم.

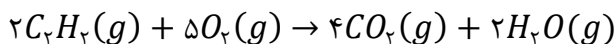




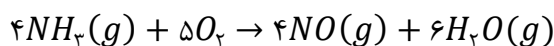
در واکنش زیر، مجموع مول مواد گازی در دو طرف واکنش یکسان است. پس در این واکنش نیز، تغییر حجم و فشار نداریم.



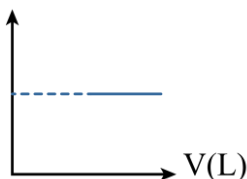
۷ مول ماده گازی در سمت واکنش دهنده‌ها و ۶ مول ماده گازی در سمت فراورده‌ها داریم. پس مجموع مول مواد گازی کاهش یافته و فشار نیز کاهش می‌یابد.



۹ مول ماده گازی در سمت واکنش دهنده‌ها و ۱۰ مول ماده گازی در سمت فراورده‌ها داریم. پس مجموع مول مواد گازی افزایش یافته و فشار نیز افزایش می‌یابد.



۵۳- نمودار زیر، می‌تواند تغییرات کدام مورد بر حسب حجم باشد؟ (P و V ، به ترتیب بیانگر فشار و حجم هستند).



الف - مول گاز

ب - PV (در دمای ثابت)

ج - $\frac{V}{T}$ (در فشار ثابت)

د - P

(۱) «ب» و «د»

(۲) «ب» و «ج»

(۳) «الف» و «د»

(۴) «الف» و «ج»

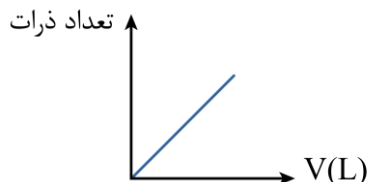
(متوسط - مفهومی - ۱۰۰۲)

پاسخ: گزینه ۲

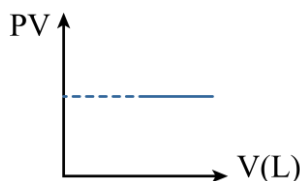
موارد (ب) و (ج) درست هستند.



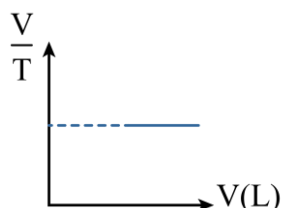
حجم گاز با مول آن نسبت مستقیم دارد و نمودار مول گاز بر حسب حجم به صورت خطی است. به عنوان مثال با دو برابر کردن مول گاز در شرایط ثابت، حجم آن نیز دو برابر می‌شود.



با توجه به رابطه $(\text{عدد ثابت} = \frac{PV}{T})$ ، در شرایطی که دما ثابت باشد، حاصل PV ، همواره مقدار ثابتی است و با تغییرات حجم، تغییری نمی‌کند. پس نمودار PV بر حسب حجم به صورت زیر است:

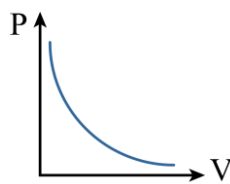


با توجه به رابطه $(\text{عدد ثابت} = \frac{PV}{T})$ ، در شرایطی که فشار ثابت باشد، حاصل $\frac{V}{T}$ ، همواره مقدار ثابتی است و با تغییرات حجم، تغییری نمی‌کند. پس نمودار $\frac{V}{T}$ بر حسب حجم به صورت زیر است:





به طور کلی حجم با فشار رابطه عکس دارد و با افزایش حجم یک نمونه گاز، فشار آن کاهش می یابد.



biomaze

۵۴- اگر دمای مناسب برای انجام فرایند هابر در حدود 450°C باشد، برای جداسازی آمونیاک، دمای مخلوط را برحسب کلوین به تقریب چند درصد باید کاهش دهیم؟

۲۵ (۴)

۳۳ (۳)

۷۵ (۲)

۶۷ (۱)

(متوسط - مفهومی - ۱۰۰۲)

پاسخ: گزینه ۱

در فرایند هابر، برای جداسازی آمونیاک، دمای مخلوط واکنش را تا حدود نقطه جوش آمونیاک یعنی 33°C کاهش می دهند. مطابق صورت سؤال دمای انجام واکنش برحسب کلوین برابر با $723 = 450 + 273$ است و به $240 = 33 - 273$ می رسد. پس 483 درجه سلسیوس کاهش دما داریم. درصد آن برابر است با:

$$\frac{483}{723} \times 100 \approx 67\%$$

پس دمای مخلوط برحسب کلوین، ۶۷٪ کاهش می یابد.

biomaze

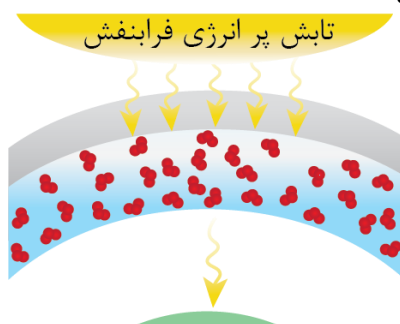
۵۵- کدام یک از مطالب زیر نادرست است؟

- (۱) سبک زندگی بیانگر میزان اثرگذاری هر انسان بر روی هواکره بوده و ردپا نیز اصطلاحی است که به این اثر نسبت داده اند.
- (۲) اگر حجم مقداری از گازهای CO و CO_2 با جرم یکسان در فشار 5 atm با هم برابر باشد، دمای گاز CO پایین تر است.
- (۳) لایه اوزون، بخشی از استراتوسفر با بیشترین غلظت اوزون بوده و به طور کامل مانع عبور پرتوهای فرابنفش می شود.
- (۴) با افزایش فشار روی مقداری گاز اکسیژن که در یک سیلندر با پیستون متحرک است، چگالی گاز افزایش می یابد.

(متوسط - مفهومی و حفظی - ۱۰۰۲)

پاسخ: گزینه ۳

لایه اوزون، منطقه ای از استراتوسفر (دومین لایه هواکره) است که بیشترین غلظت اوزون را داشته و به طور عمده مانع عبور پرتوهای فرابنفش می شود. تصویر زیر، نمایی از لایه اوزون را نشان می دهد:



همان طور که مشخص است، مقدار کمی از پرتوهای فرابنفش خورشیدی از لایه اوزون رد شده و به سطح زمین رسیده اند. همان طور که می دانیم، در مولکول اوزون سه پیوند اشتراکی وجود دارد. هنگامی که تابش پراثری فرابنفش به این مولکول می رسد، یک پیوند اشتراکی در این مولکول می شکند و مولکول اوزون به یک اتم اکسیژن و یک مولکول اکسیژن تبدیل می شود. ذره های تولید شده می توانند دوباره در واکنش با یکدیگر، مولکول اوزون را تولید کنند، اما در این واکنش، مقداری انرژی به صورت تابش فروسرخ آزاد می شود. با تکرار پیوسته این دو واکنش، لایه اوزون بخش قابل توجهی از تابش فرابنفش را جذب می کند و تابش های کم انرژی تر فروسرخ را به زمین گسیل می دارد.



بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) سبک زندگی انسان، نوع وسایلی که در زندگی استفاده می‌کند و رفتارهایی که در شرایط مختلف محیطی انجام می‌دهد، روی هواکره تأثیر می‌گذارد. برای مثال، نوع وسیله نقلیه‌ای که برای رفتن به مدرسه استفاده می‌کنیم، غذایی که می‌خوریم و وسایل گرمایشی که استفاده می‌کنیم، به دلیل مصرف انرژی الکتریکی، مقداری کربن دی‌اکسید وارد هواکره می‌کند و درصد گازهای هواکره را تغییر می‌دهد. در واقع سبک زندگی می‌تواند بیانگر میزان اثرگذاری هر انسان روی کره زمین و هواکره باشد. ردپا اصطلاحی است که به این اثر نسبت داده‌اند. یکی از این ردپاها، ردپای کربن دی‌اکسید است. برای اینکه مقدار کربن دی‌اکسید در هواکره از مقدار طبیعی آن فراتر نرود، باید مقدار اضافی کربن دی‌اکسید به وسیله گیاهان یا دیگر پدیده‌های طبیعی مصرف شود.

۲) مولکول کربن دی‌اکسید، در مقایسه با مولکول کربن مونوکسید، یک اتم اکسیژن بیشتر داشته و بر این اساس، می‌توان گفت جرم مولی این ماده در مقایسه با کربن مونوکسید بیشتر است. با توجه به توضیحات داده شده، اگر نمونه‌هایی به جرم برابر از گازهای کربن مونوکسید و کربن دی‌اکسید داشته باشیم، شمار مول‌های گاز کربن مونوکسید (گازی با جرم مولی کمتر) بیشتر از شمار مول‌های گاز کربن دی‌اکسید خواهد بود. رابطه کلی قانون گازها که از آن برای مقایسه مؤلفه‌های مختلف مواد گازی استفاده می‌شود، به شرح زیر است:

$$PV = nRT$$

طبق فرض سؤال، شمار مول‌های گاز کربن مونوکسید بیشتر است؛ اما فشار و حجم دو نمونه گازی با هم برابر است، پس دمای نمونه گاز کربن مونوکسید باید کمتر از دمای نمونه کربن دی‌اکسید باشد.

۴) با توجه به قانون گازها، با افزایش فشار روی مقداری گاز اکسیژن که در یک سیلندر با پیستون متحرک است، حجم گاز مورد نظر کاهش پیدا می‌کند، درحالی که جرم آن ثابت باقی مانده است. با کاهش حجم یک گاز، چگالی گاز مورد نظر افزایش می‌یابد.



۵۶- در شرایطی که چگالی گاز اکسیژن برابر با x گرم بر لیتر باشد، جرم چند لیتر گاز گوگرد دی‌اکسید برابر با $3/2x$ گرم است؟ ($S = 32, O = 16; g.mol^{-1}$)

۱/۶ (۴)

۲/۴ (۳)

۳ (۲)

۳/۲ (۱)

(متوسط - مفهومی - ۱۰۰۲)

پاسخ: گزینه ۴

طبق قانون آووگادرو در دما و فشار یکسان، حجم یک مول از گازهای مختلف با هم برابر است. با توجه به این قانون، اگر جرم مولی گاز A برابر با a باشد و جرم مولی گاز B برابر با b گرم بر مول باشد و حجم مولی گازها برابر با V باشد، داریم:

$$\frac{\text{چگالی گاز A}}{\text{چگالی گاز B}} = \frac{\frac{a}{V}}{\frac{b}{V}} = \frac{a}{b}$$

پس می‌توان گفت که نسبت میان چگالی گاز A به چگالی گاز B برابر با نسبت جرم مولی این دو گاز است. توجه داریم که استفاده از این رابطه فقط در شرایطی کاربرد دارد که دما و فشار نمونه‌های مختلف گازی با هم برابر باشد.

جرم مولی گازهای اکسیژن و گوگرد دی‌اکسید به ترتیب برابر با ۳۲ و ۶۴ گرم است. پس چگالی SO_2 برابر است با:

$$\frac{\text{چگالی گاز } SO_2}{\text{چگالی گاز } O_2} = \frac{\text{جرم مولی } SO_2}{\text{جرم مولی } O_2} \rightarrow \frac{\text{چگالی گاز } SO_2}{x} = \frac{64}{32} \rightarrow \text{چگالی گاز } SO_2 = 2x$$

چگالی از تقسیم جرم بر حجم به دست می‌آید:

$$\frac{m}{V} = 2x \rightarrow \frac{3/2x}{V} = 2x \rightarrow V = 1/6$$

پس جرم ۱/۶ لیتر از گاز SO_2 برابر با $3/2x$ گرم است.



۵۷- در سیلندری با پیستون متحرک، مقداری گاز نیتروژن وجود دارد. با افزایش

(۲) دمای گاز، فشار آن کاهش می‌یابد.

(۱) مقدار گاز، فشار آن نیز، افزایش می‌یابد.

(۴) مقدار گاز، حجم آن کاهش می‌یابد.

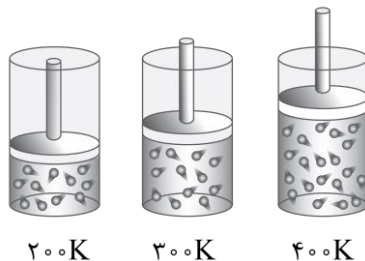
(۳) حجم گاز، دمای آن نیز، افزایش می‌یابد.



(متوسط - مفهومی - ۱۰۰۲)

پاسخ: گزینه ۳

هنگامی که گازی را در سیلندری با پیستون متحرک قرار می‌دهیم، فشار آن ثابت می‌ماند. پس با تغییر مقدار و یا حجم گاز، فشار تغییری نخواهد کرد. در فشار ثابت، با افزایش حجم، دما نیز افزایش می‌یابد. به شکل زیر دقت کنید. مقداری گاز در پیستون متحرک وجود دارد که با افزایش حجم، دما نیز افزایش یافته اما فشار ثابت است (زیرا نیروی پیستون ثابت است):



۲۰۰K

۳۰۰K

۴۰۰K



۵۸- کدام موارد از عبارتهای داده شده درست هستند؟

- الف - در دمای اتاق، نمونه‌هایی از فلئوئور و برم به شکل ظرف محتوی آن در می‌آیند و همانند گازهای نجیب، تراکم‌پذیر هستند.
 ب - گاز نیتروژن، از مولکول‌های دواتمی ساخته شده و به خاطر واکنش‌پذیری ناچیز، به جو بی اثر شهرت یافته است.
 ج - طبق قانون آووگادرو، در دما و فشار ثابت، حجم یک مول از مواد گازی گوناگون برابر با ۲۲/۴ لیتر خواهد بود.
 د - در واکنش تولید اوزون تروپوسفری، اکسیدی از نیتروژن که قهوه‌ای رنگ است، به مصرف می‌رسد.
- (۱) «الف» و «ج» (۲) «الف» و «د» (۳) «ب» و «ج» (۴) «ب» و «د»

(متوسط - مفهومی و حفظی - ۱۰۰۲)

پاسخ: گزینه ۴

عبارتهای (ب) و (د) درست هستند.

بررسی موارد:

الف در دمای اتاق، فلئوئور به شکل گاز و برم به شکل مایع است. این دو ماده، اعضای از خانواده هالوژن‌ها هستند. گازها و مایع‌ها، برخلاف مواد جامد به شکل ظرف محتوی خود در می‌آیند، ولی مایع‌ها برخلاف مواد گازی تراکم‌ناپذیر هستند و بر اثر تغییر فشار، دچار تغییر حجم نمی‌شوند. مواد جامد نیز تراکم‌ناپذیر بوده و به شکل ظرف محتوی خود در نمی‌آیند.

ویژگی‌های مواد در حالت‌های فیزیکی گوناگون

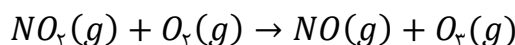
ماده به حالت گاز، شکل معینی ندارد، بلکه به شکل ظرف محتوی آن در می‌آید. برای مثال اگر مقداری گاز را در ظرفی به حجم ۲۰ لیتر قرار دهیم، مولکول‌های گاز در کل ظرف پخش می‌شوند؛ در نتیجه حجم گاز نیز برابر با حجم ظرف یعنی ۲۰ لیتر می‌شود. مایع‌ها، به شکل ظرف محتوی آن‌ها در می‌آیند ولی حجم آن‌ها، لزوماً با حجم ظرف برابر نیست. مواد جامد نیز، به شکل ظرف در نمی‌آیند و حجم آن‌ها نیز با حجم ظرف لزوماً برابر نیست. گازها، برخلاف مایع‌ها و جامدها تراکم‌پذیر هستند، یعنی اگر به یک نمونه گاز درون سرنگ یا سیلندری با پیستون روان، فشار وارد کنیم، گاز متراکم می‌شود و فاصله مولکول‌های آن کاهش می‌یابد؛ در نتیجه حجم گاز نیز کاهش می‌یابد.

ب گاز نیتروژن، به خاطر پیوندهای سه‌گانه و محکمی که میان اتم‌های موجود در هر مولکول آن وجود دارد، پایداری بالایی داشته و نسبت به گاز اکسیژن، واکنش‌پذیری کمتری دارد. در نتیجه، در محیط‌هایی که گاز اکسیژن، عامل ایجاد تغییر شیمیایی است (برای مثال، در هنگام بسته‌بندی مواد غذایی) به جای این گاز از گاز نیتروژن استفاده می‌کنند.

ج بر طبق قانون آووگادرو، در دما و فشار ثابت، حجم یک مول از گازهای گوناگون، مستقل از نوع گاز مورد نظر، با هم برابر است. برای مثال، در دما و فشار یکسان، مقدار مول برابر از گازهای آرگون و نیتروژن، حجم برابری دارند. توجه داریم که تنها در شرایط استاندارد (دمای 0°C و فشار 1 atm) حجم مولی گازها برابر با ۲۲/۴L است، اما اگر حجم و یا فشار گازها را تغییر بدهیم، حجم مولی آن‌ها نیز دچار تغییر می‌شود.



در واکنش تولید اوزون تروپوسفری، اکسیدی از نیتروژن که بی‌رنگ است (گاز NO)، به همراه گاز اوزون حاصل می‌شود. توجه داریم که اکسید قهوه‌ای رنگ نیتروژن (گاز NO_2) در واکنش تولید اوزون تروپوسفری مصرف می‌شود. معادله این واکنش به صورت زیر است:



گاز نیتروژن به‌عنوان اصلی‌ترین جزء سازنده هواکره، واکنش‌پذیری بسیار کمی داشته و به‌طور معمول، با اکسیژن موجود در هوا واکنش نمی‌دهد. این گاز تنها هنگام رعد و برق و یا در دمای بالای موتور خودروها با اکسیژن واکنش داده و اکسیدهای نیتروژن را تولید می‌کند. همین اکسیدهای نیتروژن، در نهایت منجر به تولید گاز اوزون در لایه تروپوسفر می‌شوند.



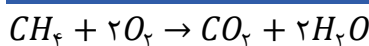
۵۹- مقدار آب تولید شده در سوختن ۴۸ گرم متان، از سوختن چند گرم C_3H_8 تولید می‌شود؟



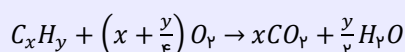
(متوسط - مسئله - ۱۰۰۲)

پاسخ: گزینه ۳

فرمول شیمیایی گاز متان، CH_4 است. معادله واکنش سوختن آن به صورت روبه‌رو است:

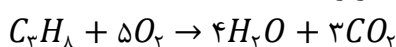


واکنش کلی سوختن هیدروکربن‌ها (ترکیباتی که فقط از هیدروژن و کربن تشکیل شده‌اند مانند متان) به صورت زیر است:



به عبارتی از سوختن کامل همه آن‌ها، CO_2 و H_2O تولید می‌شود. ضریب CO_2 ، برابر با زیروند کربن در C_xH_y و ضریب H_2O ، برابر با نصف ضریب هیدروژن در C_xH_y است.

پس واکنش موازنه شده سوختن C_3H_8 نیز، به صورت زیر است:



ابتدا مقدار آب تولید شده در واکنش اول را محاسبه می‌کنیم:

$$? \text{ mol } H_2O = 48 \text{ g } CH_4 \times \frac{1 \text{ mol } CH_4}{16 \text{ g } CH_4} \times \frac{2 \text{ mol } H_2O}{1 \text{ mol } CH_4} = 6$$

پس در واکنش اول، ۶ مول آب تولید می‌شود. اکنون باید ببینیم که از سوختن چند گرم C_3H_8 ، ۶ مول آب به دست می‌آید:

$$? \text{ g } C_3H_8 = 6 \text{ mol } H_2O \times \frac{1 \text{ mol } C_3H_8}{4 \text{ mol } H_2O} \times \frac{44 \text{ g } C_3H_8}{1 \text{ mol } C_3H_8} = 66$$

بنابراین از سوختن ۶۶ گرم C_3H_8 ، ۶ مول آب به دست می‌آید.



۶۰- اگر فشار نمونه‌ای گازی را ۲۵٪ افزایش و حجم آن را ۲۵٪ کاهش دهیم، دما چند درصد تغییر می‌یابد؟

۶/۲۵ (۴) ۱۲/۵ (۳) ۲/۵ (۲) ۱۰ (۱)

(متوسط - مسئله - ۱۰۰۲)

پاسخ: گزینه ۴

هنگامی که فشار ۲۵٪ افزایش یابد، یعنی به مقدار ۱۰۰ درصد اولیه، ۲۵ درصد افزوده شده و به ۱۲۵٪ معادل $\frac{125}{100} = \frac{5}{4}$ مقدار اولیه رسیده است. پس ۱/۲۵ یا $\frac{5}{4}$ برابر شده است. هم‌چنین هنگامی که حجم ۲۵٪ کاهش یابد، یعنی به ۷۵٪ معادل $\frac{75}{100} = \frac{3}{4}$ حجم اولیه رسیده است. پس داریم:

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2} \rightarrow \frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{\frac{5}{4} P_1 \times \frac{3}{4} V_1}{T_2} \rightarrow T_2 = \frac{15}{16} T_1$$

هنگامی که دما $\frac{15}{16}$ برابر شود، یعنی $\frac{1}{16}$ آن کاهش یافته است. اکنون این مقدار را به درصد تبدیل می‌کنیم:

$$\frac{1}{16} \times 100 = 6/25\%$$

پس دما ۶/۲۵٪ کاهش یافته است.





برای محاسبات سریعتر، معادل کسرهای زیر را حفظ باشید:

$$\frac{1}{2} = 0.5 \quad \frac{1}{4} = 0.25 \quad \frac{3}{4} = 0.75 \quad \frac{1}{8} = 0.125 \quad \frac{3}{8} = 0.375 \quad \frac{1}{16} = 0.0625$$



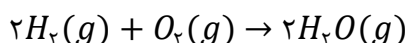
۶۱- در واکنش سوختن گاز هیدروژن و تولید بخار آب، مقداری گرما آزاد می‌شود. اگر در ابتدا، واکنش دهنده‌ها در شرایط STP باشند و در پایان واکنش حجم مخلوط گازی ثابت بماند، دما چند کلوین تغییر یافته است؟ (فشار ثابت است).

(۱) $136/5$ (۲) $409/5$ (۳) 182 (۴) 455

پاسخ: گزینه ۱

(متوسط - مسئله ۱۰۰۲)

واکنش مورد نظر به صورت زیر است:



طی این واکنش، ۳ مول گاز، به ۲ مول گاز تبدیل می‌شود. پس اگر شرایط قبل و بعد از واکنش یکسان بود، انتظار داشتیم که حجم مخلوط کاهش یابد اما با توجه به صورت سؤال، گرما آزاد شده و دما افزایش یافته است. از آنجا که فشار ثابت است، حجم نیز افزایش یافته است. اگر تصور کنیم که در ابتدا ۳ مول گاز در شرایط STP داشتیم، حجم آن برابر با $22/4 \times 3$ لیتر می‌شود. در نهایت نیز ۲ مول گاز با حجم مشابه داریم. پس حجم مولی گازها در شرایط پایان واکنش برابر با $22/4 \times 1/5$ لیتر است:

$$3 \times 22/4 = 2 \times V \rightarrow V = 1/5 \times 22/4$$

حال شرایط نهایی را با شرایط استاندارد مقایسه می‌کنیم:

$$\frac{1 \times 22/4}{273} = \frac{P \times V}{T} \rightarrow \frac{1 \times 22/4}{273} = \frac{1 \times 1/5 \times 22/4}{T} \rightarrow T = 409/5$$

مخلوط اولیه نیز در شرایط استاندارد بوده است. پس دمای مخلوط از ۲۷۳ به ۴۰۹/۵ کلوین تغییر یافته است. اختلاف آن‌ها برابر است با:

$$409/5 - 273 = 136/5$$



۶۲- کدام یک از مطالب زیر نادرست است؟

- (۱) با افزایش مقدار CO_2 هواکره، بخشی از آن در آب دریاها و اقیانوس‌ها حل شده و خاصیت اسیدی آب افزایش می‌یابد.
- (۲) به ازای تولید مقدار مشخص انرژی الکتریکی به کمک باد، در مقایسه با انرژی خورشید، CO_2 کمتری تولید می‌شود.
- (۳) روغن‌های گیاهی به کمک پسماند گیاهی و دانه‌های روغنی به دست آمده و از جمله مواد زیست‌تخریب‌پذیر هستند.
- (۴) بخش قابل توجه از گرمای خورشیدی جذب شده توسط زمین، توسط امواجی با $\lambda < 400nm$ بازتاب می‌شوند.

پاسخ: گزینه ۴

(متوسط - شیمی سبز و اوزون - مفهومی - ۱۰۰۲)

بخش عمده‌ای از پرتوهای خورشیدی، جذب زمین شده و زمین نیز بخش قابل توجهی از گرمای جذب شده را به صورت تابش فروسرخ از دست می‌دهد. توجه داریم که انرژی پرتوهای فروسرخ کمتر از انرژی امواج مرئی است؛ در نتیجه طول موج این پرتوها نیز بیشتر از امواج مرئی است. می‌دانیم که طول موج امواج مرئی بین ۴۰۰ تا ۷۰۰ نانومتر است، در نتیجه طول موج امواج فروسرخ بیشتر از ۷۰۰ نانومتر است. شکل زیر نحوه رسیدن پرتوهای خورشیدی به زمین و نحوه بازتاب این پرتوها از سطح زمین را بررسی می‌کند:





بررسی سایر گزینه‌ها:

- ۱ اکسیدهای نافلزی، اغلب خاصیت اسیدی دارند. چون گاز کربن دی‌اکسید یک اکسید نافلزی با خاصیت اسیدی است، با افزایش مقدار CO_2 در هواکره، بخش زیادی از آن در آب دریاها و اقیانوس‌ها حل شده و خاصیت اسیدی آب افزایش می‌یابد. برای خنثی کردن آب اسیدی موجود در دریاها و دریاچه‌ها، می‌توان از یک اکسید بازی مثل آهک (کلسیم اکسید) استفاده کرد.
- ۲ ردپای CO_2 نشان می‌دهد در تولید یک محصول یا بر اثر انجام یک فعالیت، چه مقدار از این گاز تولید و وارد هواکره می‌شود. به ازای تولید یک مقدار مشخص انرژی الکتریکی با استفاده از باد، در مقایسه با انرژی خورشید، مقدار گاز CO_2 کمتری تولید می‌شود. نمودار زیر، مقدار گاز CO_2 تولید شده در روش‌های مختلف را مقایسه می‌کند:



توجه داریم که گاز طبیعی، نفت و زغال سنگ، از جمله سوخت‌های فسیلی به شمار رفته و در مقایسه با سایر منابع انرژی مثل خورشید و باد، ردپای کربن دی‌اکسید بیشتری را ایجاد می‌کنند.

سوخت سبز، سوختی است که در ساختار خود افزون بر کربن و هیدروژن، اکسیژن نیز دارد و از پسماندهای گیاهی مانند شاخ و برگ گیاه سویا، نیشکر و دانه‌های روغنی به دست می‌آید. این مواد، همانند پلاستیک‌های سبز، زیست تخریب‌پذیر هستند و از این رو به وسیلهٔ جانداران ذره‌بینی به مواد ساده‌تر تجزیه می‌شوند. اتانول و روغن‌های گیاهی نمونه‌هایی از این نوع سوخت‌ها هستند.

شیمی سبز و ابعاد آن

شیمی سبز شاخه‌ای از علم شیمی است که در آن شیمی‌دان‌ها در جستجوی فرایندها و فرآورده‌هایی هستند که به کمک آن‌ها بتوان کیفیت زندگی را با بهره‌گیری از منابع طبیعی افزایش داد و هم‌زمان از طبیعت محافظت کرد. در این راستا بایستی تولید و مصرف مواد شیمیایی را که ردپاهای سنگینی روی کرهٔ زمین برجای می‌گذارند، کاهش داد یا به‌طور کامل متوقف کرد. شاخه‌های مختلفی از علم شیمی مثل الکتروشیمی و ...، به برقراری اصول شیمی سبز کمک می‌کنند. به‌طور کلی، اقدامات زیر در راستای پیاده‌سازی اصول شیمی سبز انجام می‌شوند:

تولید سوخت سبز: سوخت سبز، سوختی است که در ساختار خود افزون بر کربن و هیدروژن، اکسیژن نیز دارد و از پسماندهای گیاهی مانند شاخ و برگ گیاه سویا، نیشکر و دانه‌های روغنی به دست می‌آید. این مواد زیست‌تخریب‌پذیرند، از این رو به وسیله جانداران ذره‌بینی به مواد ساده‌تر تجزیه می‌شوند. اتانول و روغن‌های گیاهی نمونه‌هایی از این نوع سوخت‌ها هستند.

تبدیل CO_2 به مواد معدنی: برای جلوگیری از ورود کربن دی‌اکسید تولید شده توسط نیروگاه‌ها و مراکز صنعتی، این گاز را با منیزیم اکسید یا کلسیم اکسید واکنش می‌دهند. معادله واکنش‌های شیمیایی انجام شده به‌صورت زیر است:



تولید پلاستیک‌های سبز: پلاستیک‌های سبز یا زیست‌تخریب‌پذیر، پلیمرهایی هستند که بر پایهٔ مواد گیاهی مانند نشاسته ساخته می‌شوند و به همین دلیل، در ساختار آن‌ها اتم‌های اکسیژن نیز وجود دارد. این پلاستیک‌ها در مدت زمان نسبتاً کوتاهی توسط جانداران ذره‌بینی تجزیه می‌شوند و به طبیعت باز می‌گردند. برای مثال، پلی‌لاکتیک اسید نمونه‌ای از پلیمرهای سازنده این پلاستیک‌ها است.

دفن کردن کربن دی‌اکسید: کربن دی‌اکسید را می‌توان به‌جای رها کردن در هواکره، در مکان‌های عمیق و امن در زیر زمین ذخیره و نگهداری کرد. سنگ‌های متخلخل در زیر زمین، میدان‌های قدیمی گاز و چاه‌های قدیمی نفت که خالی از این مواد هستند، مکان‌های مناسبی برای دفن این گاز هستند.



۶۳- از میان مواد شرکت‌کننده در واکنش تولید اوزون تروپوسفری، در نام‌گذاری چند ماده از پیشوندهای یونانی استفاده می‌شود و

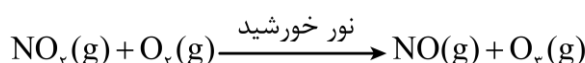
ماده‌ای که بیشترین شمار جفت الکترون ناپیوندی را دارد، در کدام سمت واکنش قرار دارد؟

- | | |
|---------------------|---------------------|
| ۱) - واکنش‌دهنده‌ها | ۲) - فرآورده‌ها |
| ۳) - فرآورده‌ها | ۴) - واکنش‌دهنده‌ها |

(آسان - مفهومی - ۱۰۰۲)

پاسخ: گزینه ۲

فرایند تولید اوزون در تروپوسفر به‌صورت زیر است:





نام دو اکسید NO و NO_2 به ترتیب نیتروژن مونوکسید و نیتروژن دی اکسید است. در نام گذاری ترکیبات مولکولی ناشی از ترکیب دو نافلز با یکدیگر، از پیشوند استفاده می شود.

مواد شرکت کننده در واکنش بالا به ترتیب از چپ به راست دارای ۵، ۴، ۳ و ۶ جفت الکترون ناپیوندی هستند؛ پس بیشترین شمار جفت الکترون ناپیوندی مربوط به اوزون است که در سمت فراورده ها قرار دارد.



۶۴- چه تعداد از مطالب زیر، در مورد فرایند هابر درست است؟

الف - نقطه جوش گاز هیدروژن در حدود $120K$ است.

ب - بزرگ ترین چالش هابر، یافتن شرایط بهینه برای انجام این واکنش بود.

ج - کاتالیزگر آن فلزی از عناصر دسته d با قابلیت تشکیل دو نوع یون است.

د - این واکنش همانند واکنش تبدیل اوزون به اکسیژن در استراتوسفر، برگشت پذیر است.

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

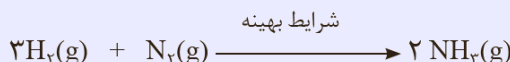
(متوسط - حفظی و مفهومی - ۱۰۰۲)

پاسخ: گزینه ۳

موارد (ب)، (ج) و (د) درست هستند.

گاز نیتروژن واکنش پذیری ناچیزی دارد و بزرگ ترین چالش در تهیه آمونیاک از نیتروژن و هیدروژن این است که در دما و فشار اتاق حتی در حضور کاتالیزگر و یا جرقه نیز، واکنشی بین آن ها انجام نمی شود.

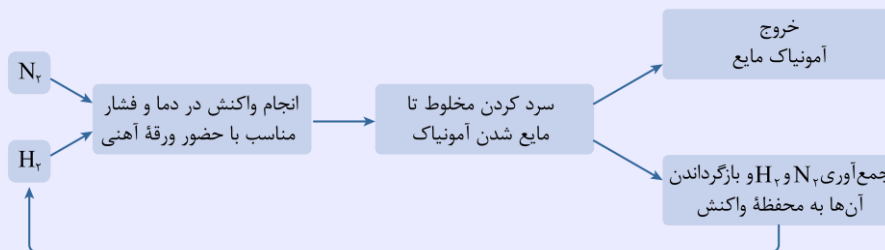
واکنشی رخ نمی دهد $H_2(g) + N_2(g) \xrightarrow{\text{کاتالیزگر یا جرقه}}$
دانشمندی به نام هابر، واکنش را بارها در دماها و فشارهای گوناگون انجام داد تا بتواند شرایط بهینه آن را پیدا کند.



سرانجام دریافت که اگر مخلوط این گازها از روی یک ورقه آهنی (کاتالیزگر) در دما و فشار مناسب عبور دهد با انجام واکنش، مقدار قابل توجهی آمونیاک تولید می شود؛ طی این واکنش ۳ مول هیدروژن به همراه ۱ مول نیتروژن مصرف می شود و ۲ مول آمونیاک به دست می آید. اما همه واکنش دهنده ها به فراورده تبدیل نخواهند شد؛ زیرا این واکنش برگشت پذیر است؛ با این توصیف در ظرف واکنش مخلوطی از سه گاز هیدروژن، نیتروژن و آمونیاک وجود دارد. با توجه به نقطه جوش آن ها می توان دریافت با کاهش دما به دماهای پایین تر از نقطه جوش آمونیاک (پایین تر از $-33^\circ C$ ؛ به عنوان مثال $-40^\circ C$)، آمونیاک به مایع تبدیل می شود و می توان آن را از مخلوط جداسازی کرد.

ماده	نقطه جوش ($^\circ C$)
H_2	-۲۵۳
N_2	-۱۹۶
NH_3	-۳۳

به طور خلاصه فرایند هابر را می توان به صورت زیر نوشت:



بررسی موارد:

الف - نقطه جوش گاز هیدروژن $-253^\circ C$ معادل $20K$ است.

پ - بزرگ ترین چالش هابر، یافتن شرایط بهینه برای انجام این واکنش بود.

ج - کاتالیزگر فرایند هابر آهن است که فلزی از عناصر دسته d با قابلیت تشکیل دو نوع یون با بارهای ۲+ و ۳+ است.

د - این واکنش همانند واکنش تبدیل اوزون به اکسیژن در استراتوسفر و همچنین واکنش انجام شده در باتری های قابل شارژ، برگشت پذیر است.





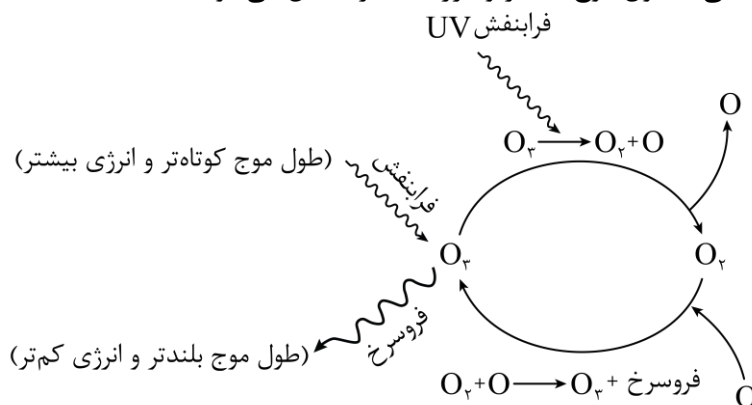
۶۵- در لایه اوزون، با انجام واکنش $2O_3 \rightleftharpoons 3O_2$ در جهت، پرتو تولید می‌شود.

- (۱) برگشت - فروسرخ (۲) رفت - فرابنفش (۳) رفت - فروسرخ (۴) برگشت - فرابنفش

پاسخ: گزینه ۳

(آسان - مفهومی - ۱۰۰۲)

در معادله $2O_3 \rightleftharpoons 3O_2$ ، در واکنش برگشت پرتو فرابنفش جذب شده و در واکنش رفت پرتو فروسرخ آزاد می‌شود. با تکرار این چرخه، پرتوهای پرنانرژی خورشید، به پرتوهایی با طول موج بیشتر و انرژی کمتر تبدیل می‌شود.



۶۶- کدام یک از مطالب زیر، نادرست است؟

- (۱) اتانول همانند گلوکز، در ساختار خود سه نوع عناصر اکسیژن، کربن و هیدروژن دارد.
- (۲) شتر، با اکسایش چربی‌های ذخیره شده در کوهان خود، شرایط بی‌آبی را در بیابان‌های گرم سپری می‌کند.
- (۳) با وارد کردن ۳ مول گاز هیدروژن و ۱ مول گاز نیتروژن در شرایط فرایند هابر، ۲ مول آمونیاک به دست می‌آید.
- (۴) گاز شهری به‌طور عمده از متان تشکیل شده و در محیط کم اکسیژن، به‌صورت ناقص می‌سوزد و بخار آب و CO تولید می‌کند.

پاسخ: گزینه ۳

(متوسط - مفهومی - ۱۰۰۲)

طی فرایند هابر، ۳ مول هیدروژن به همراه ۱ مول نیتروژن مصرف می‌شود و ۲ مول آمونیاک به دست می‌آید. اما همه واکنش‌دهنده‌ها به فراورده تبدیل نخواهند شد؛ زیرا این واکنش برگشت‌پذیر است. پس همه ۳ مول هیدروژن و ۱ مول نیتروژن به‌طور کامل مصرف نمی‌شوند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

- (۱) اتانول با فرمول شیمیایی C_2H_5OH همانند گلوکز با فرمول شیمیایی $C_6H_{12}O_6$ ، در ساختار خود سه نوع عنصر اکسیژن، کربن و هیدروژن دارد.
- (۲) شتر جانوری است که می‌تواند چندین روز را بدون نوشیدن آب در هوای گرم بیابان سپری کند. در این شرایط، چربی ذخیره شده در کوهان این جانور اکسایش یافته و افزون بر تولید انرژی، آب مورد نیاز جانور را نیز تأمین می‌کند.
- (۴) گاز شهری به‌طور عمده از متان تشکیل شده و در محیط کم اکسیژن، به‌صورت ناقص می‌سوزد و بخار آب، CO و گرما تولید می‌کند.

۶۷- به ازای تولید برق یکسان، میزان کربن دی‌اکسید تولید شده از، بیشتر از است.

- (۱) منبعی که یکی از فراورده‌های سوختن آن، SO_3 است - باد
- (۲) انرژی خورشید - گرمای زمین
- (۳) منبعی که حدود ۷٪ جرمی آن را گاز He تشکیل می‌دهد - باد
- (۴) گرمای زمین - گاز طبیعی

پاسخ: گزینه ۲

(آسان - حفظی - ۱۰۰۲)

به ازای تولید برق یکسان، میزان کربن دی‌اکسید تولید شده از انرژی خورشید، بیشتر از گرمای زمین است.

ترتیب مقدار کربن دی‌اکسید تولید شده، به ازای هر کیلووات ساعت تولید برق، در منابع مختلف به‌صورت زیر است:

زغال سنگ < نفت خام < گاز طبیعی < انرژی خورشید < گرمای زمین < باد



بررسی سایر گزینه‌ها:

- ۱) تنها اکسیدی از گوگرد که از سوختن زغال سنگ خارج می‌شود، گاز SO_2 یا همان گوگرد دی‌اکسید است. گاز SO_2 وارد اتمسفر می‌شود و در آنجا با اکسیژن واکنش می‌دهد و به SO_3 تبدیل می‌شود.
- ۲) حدود ۷٪ حجمی و نه جرمی گاز طبیعی را گاز He تشکیل می‌دهد.
- ۳) به ازای تولید برق یکسان، میزان کربن دی‌اکسید تولید شده از گاز طبیعی، بیشتر از گرمای زمین است.



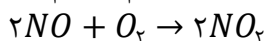
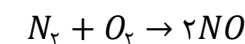
۶۸- با توجه به واکنش‌های سه مرحله‌ای تولید اوزون تروپوسفری از نیتروژن موجود در هواکره، کدام یک از مطالب زیر، نادرست است؟

- ۱) به ازای مصرف هر مول اکسید نیتروژن در واکنش‌های مرحله دوم و سوم، یک مول گاز اکسیژن نیز در هر واکنش مصرف می‌شود.
- ۲) با مصرف هر مول گاز نیتروژن در این واکنش‌ها، در نهایت دو مول گاز اوزون تروپوسفری تولید می‌شود.
- ۳) در واکنش سوم برخلاف واکنش دوم، از مقدار گاز قهوه‌ای رنگ هواکره کاسته می‌شود.
- ۴) برای تولید هر مول اوزون تروپوسفری، به ۲ مول گاز اکسیژن نیاز است.

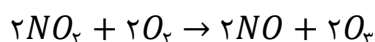
(متوسط - مفهومی - ۱۰۰۲)

پاسخ: گزینه ۱

از سوختن هر مول گاز N_2 به هنگام رعد و برق، طی دو مرحله، دو مول گاز NO_2 تولید می‌شود. بدین صورت که ابتدا ۲ مول NO تولید شده و سپس این دو مول NO مجدداً می‌سوزد و دو مول NO_2 تولید می‌کند:



در مرحله بعد نیز، دو مول NO_2 مطابق معادله زیر، واکنش می‌دهد:

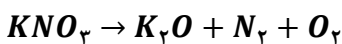


بررسی گزینه‌ها:

- ۱) به ازای مصرف هر مول اکسید نیتروژن در واکنش‌های مرحله دوم و سوم، به ترتیب نیم و یک مول گاز اکسیژن مصرف می‌شود. پس گزینه اول نادرست است.
- ۲) همان‌طور که در واکنش‌های بالا می‌بینید، با مصرف هر مول گاز نیتروژن در این واکنش‌ها، در نهایت دو مول گاز اوزون تروپوسفری تولید می‌شود.
- ۳) در واکنش سوم برخلاف واکنش دوم، NO_2 مصرف شده و از مقدار گاز قهوه‌ای رنگ هواکره کاسته می‌شود.
- ۴) در واکنش‌های بالا، برای تولید ۲ مول اوزون، مجموعاً ۴ مول گاز اکسیژن مصرف شده است؛ پس برای تولید هر مول اوزون تروپوسفری، به ۲ مول گاز اکسیژن نیاز است.



۶۹- در دمای $409/5K$ و فشار $3 atm$ از تجزیه چند مول KNO_3 مطابق واکنش زیر، $8/4$ لیتر گاز اکسیژن تولید می‌شود؟



(۴) $0/5$

(۳) $0/6$

(۲) $0/4$

(۱) $0/75$

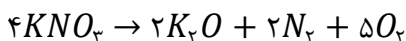
(متوسط - مسئله - ۱۰۰۲)

پاسخ: گزینه ۳

ابتدا حجم مولی گازها را در شرایط داده شده به دست می‌آوریم. بدین منظور شرایط داده شده را با شرایط STP مقایسه می‌کنیم:

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2} \rightarrow \frac{1 \times 22/4}{273} = \frac{3 \times V_2}{409/5} \rightarrow V_2 = 11/2$$

حال واکنش را موازنه می‌کنیم:



اکنون جرم KNO_3 را محاسبه می‌کنیم:

$$? g KNO_3 = 8/4 LO_2 \times \frac{1 mol O_2}{11/2 LO_2} \times \frac{4 mol KNO_3}{5 mol O_2} = 0/6$$

بنابراین $0/6$ مول KNO_3 مصرف می‌شود.





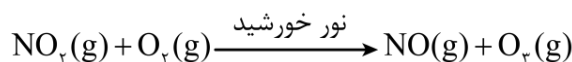
۷۰- کدام یک از مطالب زیر، در مورد واکنش تولید اوزون تروپوسفری نادرست است؟ ($O = 16 \text{ g.mol}^{-1}$)

- (۱) از مصرف ۳۲ گرم از یکی از آلوتروپ‌های اکسیژن، ۴۸ گرم از آلوتروپ دیگر تولید می‌شود.
- (۲) از مصرف ۳/۵ مول واکنش‌دهنده، $10^{23} \times 4/214$ مولکول فراورده تولید می‌شود.
- (۳) از مصرف ۴/۶ گرم گاز قهوه‌ای رنگ، $10^{22} \times 6/02$ مولکول اوزون تولید می‌شود.
- (۴) از مصرف ۲ مول اکسید نیتروژن، ۴ مول فراورده مولکولی تولید می‌شود.

پاسخ: گزینه ۲

(متوسط - مسئله - ۱۰۰۲)

واکنش تولید اوزون تروپوسفری، به صورت زیر است:



ضرایب همه مواد در این واکنش یکسان است. پس اگر ۳/۵ مول واکنش‌دهنده مصرف شود، ۳/۵ مول فراورده نیز تولید می‌شود. این ۳/۵ مول معادل $10^{24} \times 2/107$ است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) در این واکنش یک مول O_3 مصرف و یک مول O_2 تولید می‌شود. جرم هر مول O_3 برابر با ۳۲ گرم و جرم هر مول O_2 برابر با ۴۸ گرم است.

۲) گاز NO_2 قهوه‌ای رنگ است. باید ببینیم از ۴/۶ گرم گاز NO_2 ، چه تعداد گاز O_3 تولید می‌شود:

$$O_3 = 4/6 \text{ g } NO_2 \times \frac{1 \text{ mol } NO_2}{46 \text{ g } NO_2} \times \frac{1 \text{ mol } O_3}{1 \text{ mol } NO_2} \times \frac{6/02 \times 10^{23} O_3}{1 \text{ mol } O_3} = 6/02 \times 10^{22}$$

۳) از مصرف هر مول اکسید نیتروژن (NO_2)، دو مول فراورده تولید می‌شود. هر دو فراورده ساختار مولکولی دارند؛ پس می‌توان گفت از مصرف ۲ مول از آن، ۴ مول فراورده مولکولی تولید می‌شود.

