



گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی

آزمون ماز | پایه یازدهم



تسلط بر نیم سال اول



ویژه دانش آموزان پایه یازدهم

دفترچه شماره ۱

پنجشنبه ۲۷ آذرماه ۱۴۰۴

ردیف	ماده امتحانی	تعداد سؤال	شماره سؤال		مدت زمان پاسخ گویی	ملاحظات
			از	تا		
۱	ریاضیات	۳۰	۱	۳۰	۵۵ دقیقه	۳۰ سؤال ۵۵ دقیقه

برای شباهت حداکثری به کنکور، صفحه آرای، فونت و حتی اندازه متن در تمامی آزمون های ماز، کاملاً یکسان با استاندارد دفترچه های کنکور در نظر گرفته می شود.

بودجه بندی دروس این آزمون

آمار و احتمال

آشنایی با مبانی ریاضیات
(جبر مجموعه ها از ابتدای قوانین و اعمال بین مجموعه ها تا انتهای درس ۲) صفحه های ۳۴ تا ۲۱

سهم در کنکور: ۱ سؤال

هندسه ۲

دایره
(کل درس سوم: چند ضلعی های محاطی و محیطی) **تبدیل های هندسی و کاربردها** (تبدیل های هندسی تا پایان فعالیت) صفحه های ۲۴ تا ۳۳

سهم در کنکور: ۱ سؤال

حسابان ۱

تابع
(آشنایی بیشتر با تابع، انواع توابع، وارون توابع) صفحه های ۳۷ تا ۶۲

سهم در کنکور: —

شیمی ۲

قدر هدایای زمینی را بدانیم
(از ابتدای نفت هدیه ای شگفت انگیز تا انتهای فصل) صفحه های ۲۹ تا ۵۰

سهم در کنکور: ۲ سؤال

فیزیک ۲

الکتریسیته ساکن + جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم
(از خازن تا ابتدای عوامل موثر بر مقاومت الکتریکی) صفحه های ۳۲ تا ۵۱

سهم در کنکور: ۲ سؤال

استراتژی و هدف گذاری با ماز در نیم سال اول ۱۴۰۴

۸ آزمون در ۱۰۰ روز تحصیلی مفید برای تسلط کامل بر مباحث نیم سال اول / شروع حرکت و یادگیری استفاده از ماشین پیشرفت ماز

۱- **شروع مسیر؛ آرامش و هماهنگی:** سه مرحله آزمون پوششی؛ فرصت برای شروع حرکت با ماشین پیشرفت ماز (تکرار مباحث آزمون های قبل و فرصت برای شروع مسیر پیشرفت)

۲- **چالش استمرار؛ پیگیری و استقامت:** سه مرحله آزمون برای آمادگی امتحانات و تکمیل یادگیری نیم سال اول (زمان تسلط کامل بر نیم سال اول)

۳- **جمع بندی پایان نیم سال اول:** دو مرحله آزمون جمع بندی بعد از امتحانات ترم اول و تکمیل یادگیری نیم سال اول + مرور و جمع بندی (ایستگاه جمع بندی و جبران)



۱- در کدام یک از روابط زیر، y تابعی از x است؟

$$\begin{array}{ll} x^4 - y^3 = 1 & (۲) \\ x^3 - y^2 = 1 & (۱) \\ |x^3| - |y^3| = 1 & (۴) \\ |x^3 - y^3| = 1 & (۳) \end{array}$$

۲- تابع $f(x) = x^2 + 4x + a$ با دامنه $(-\infty, -2]$ مفروض است. به ازای کدام مقدار a ، وارون f خط $y = 2x - 8$ را در نقطه‌ای به طول ۲ قطع می‌کند؟

$$\begin{array}{llll} ۴ & (۱) & -۴ & (۲) \\ -۲ & (۳) & ۲ & (۴) \end{array}$$

۳- بازه $[2, +\infty)$ بزرگ‌ترین بازه‌ای است که تابع $f(x) = ax^2 + (a-2)x$ در آن بازه یک‌به‌یک است. مقدار $f(5)$ کدام است؟

$$\begin{array}{llll} ۴ & (۱) & ۳ & (۲) \\ ۲ & (۳) & ۱ & (۴) \end{array}$$

۴- نمودار توابع خطی $6x - 8y = a$ و $12x + by = 3$ نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم متقارن‌اند. مقدار $a+b$ کدام است؟

$$\begin{array}{llll} -۱۱ & (۱) & -۹ & (۲) \\ -۶ & (۳) & -۱۵ & (۴) \end{array}$$

۵- تابع $f(x) = ax^2 + (2a-3)x - b$ روی $\mathbb{R}$ وارون‌پذیر است. اگر $f^{-1}(b) = 6$ باشد، مقدار $f(b)$ کدام است؟

$$\begin{array}{llll} -۲۴ & (۱) & ۲۴ & (۲) \\ -۳۶ & (۳) & ۳۶ & (۴) \end{array}$$

۶- نمودار وارون تابع $f(x) = \frac{ax}{\sqrt{x^2+1}}$ از نقطه $A(-1, \frac{3}{4})$ عبور می‌کند. مقدار a کدام است؟

$$\begin{array}{llll} -\frac{5}{3} & (۴) & \frac{5}{3} & (۳) \\ \frac{5}{4} & (۲) & -\frac{5}{4} & (۱) \end{array}$$

محل انجام محاسبات



۷- اگر $f = \{(-1, m), (n^2 - 5, m), (n, 3), (2, 1), (m, 1)\}$ یک تابع یک به یک باشد، کدام تابع زیر ثابت است؟

$$y = (n + m)x + m \quad (۲)$$

$$y = (n - m)x + n \quad (۱)$$

$$y = (2n - m)x + m \quad (۴)$$

$$y = (2m - n)x + n \quad (۳)$$

۸- فرض کنید f خطی و $g(x) = \sqrt{f(x)}$ باشد، اگر نمودار f و g^{-1} در نقطه $A(3, 5)$ متقاطع باشند، مقدار $f(0)$ کدام است؟

(۴) ۲

(۳) -۲

(۲) ۱

(۱) -۱

۹- نمودار تابع $f(x) = x^2 - 2x - 4$ با دامنه $[1, +\infty)$ نمودار وارون خود را در نقطه‌ای به طول α قطع می‌کند، مقدار $f(2\alpha)$ کدام است؟

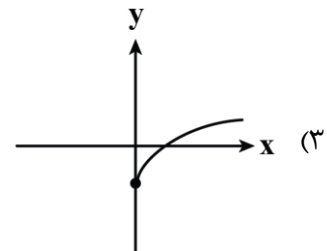
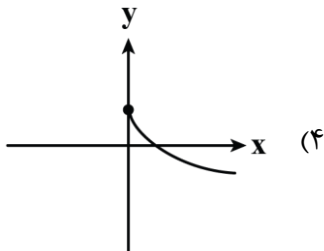
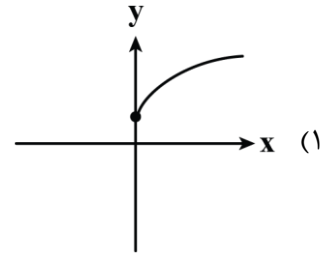
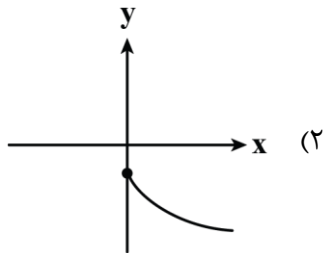
(۴) ۴۸

(۳) ۴۴

(۲) ۴۲

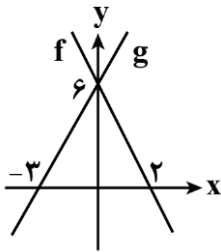
(۱) ۴۶

۱۰- دامنه تابع $f(x) = \sqrt{2ax - 3b}$ بازه $(-\infty, -3]$ است. نمودار تابع $g(x) = a\sqrt{x} + b$ به کدام صورت زیر می‌تواند باشد؟



محل انجام محاسبات

۱۱- نمودار توابع خطی f و g به صورت مقابل است. اگر $f^{-1}(a-1) + g^{-1}(a+1) = 1$ باشد، مقدار a کدام است؟



(۱) ۷

(۲) ۵

(۳) ۸

(۴) ۴

۱۲- از مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4\}$ به مجموعه $B = \{1, 3, 5, 7\}$ چند تابع یک به یک مانند f می توان نوشت به طوری که $f(1) = 7$ و $f(2) \neq 1$ باشد؟

(۴) ۴

(۳) ۹

(۲) ۶

(۱) ۸

۱۳- اگر $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ باشد، مجموع طول نقاط برخورد توابع f^{-1} و $\frac{1}{f}$ چقدر است؟

(۴) -۳

(۳) -۶

(۲) ۶

(۱) ۳

۱۴- به ازای چند مقدار صحیح m ، تابع $f(x) = \begin{cases} 3-2x & x \leq 1 \\ mx+3-2m & x > 1 \end{cases}$ با دامنه $\mathbb{R}$ یک به یک است؟

(۴) ۳

(۳) ۲

(۲) ۱

(۱) صفر

۱۵- تابع $f(x) = \begin{cases} x^2-2x & x \leq 2 \\ x-3 & x > 2 \end{cases}$ مفروض است. به ازای چند مقدار m تساوی $f(2-|m|) = f(3+|m|)$ برقرار است؟

(۴) ۴

(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) ۱

۱۶- حداقل چند عضو از رابطه $f = \left\{ (x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z}, \frac{12}{1+|y|} = |x| \right\}$ حذف شود تا تبدیل به یک تابع یک به یک شود؟

(۴) ۵

(۳) ۶

(۲) ۱۱

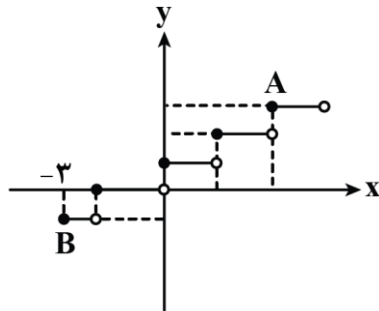
(۱) ۱۲

محل انجام محاسبات

۱۷- مجموعه جواب نامعادله $1 \leq \frac{1}{3}[-x] + 1 < 2$ به کدام صورت زیر است؟

- (۱) $[a, b]$ (۲) $(a, b]$ (۳) (a, b) (۴) $[a, b)$

۱۸- قسمتی از نمودار تابع $f(x) = \left[\frac{1}{3}x\right] + 1$ به صورت مقابل است. شیب پاره خط AB کدام است؟



- (۱) $\frac{4}{5}$
(۲) $\frac{4}{7}$
(۳) $\frac{3}{5}$
(۴) $\frac{3}{7}$

۱۹- معادله $2\left[\frac{4}{3}x\right] - 3x = 0$ چند جواب دارد؟

- (۱) ۹ (۲) ۷ (۳) ۳ (۴) ۲

۲۰- اگر $f(x) = x - [x]$ و $f\left(\frac{3m}{2}\right) = f(-2m)$ باشد، آن گاه m در بازه $(2, 3)$ چند جواب دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۲۱- نسبت مساحت شش ضلعی منتظم محاطی به مساحت شش ضلعی منتظم محیطی در دایره‌ای به شعاع $2\sqrt{3}$ چقدر است؟

- (۱) $\frac{5}{8}$ (۲) $\frac{6}{7}$ (۳) $\frac{7}{5}$ (۴) $\frac{8}{7}$

محل انجام محاسبات

۲۲- در مثلث $\triangle ABC$ به اضلاع $۴/۱$ و $۵/۹$ ، اگر r_a, r_b و r_c شعاع دایره‌های محاطی خارجی آن باشند، آنگاه حاصل

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$$

برابر کدام است؟

(۴) ۲/۵

(۳) ۲/۴

(۲) ۵/۸

(۱) ۵/۴

۲۳- اندازه قاعده‌های یک دوزنقه که هم محیطی و هم محاطی است با ریشه‌های معادله درجه دوم $3x^2 - 8\sqrt{3}x + 9 = 0$ برابر می‌باشد. مساحت این دوزنقه کدام است؟

(۴) ۱۲

(۳) ۸

(۲) ۲

(۱) ۴

۲۴- چه تعداد از گزاره‌های زیر، همواره درست هستند؟

(الف) انتقال، شیب خط را حفظ می‌کند.

(ب) دوران با زاویه 90° موقعیت شکل اولیه را حفظ می‌کند.

(ج) بازتاب نسبت به خط نمی‌تواند شیب خط را حفظ کند.

(د) در تبدیل دوران هرگز شیب خط حفظ نمی‌شود.

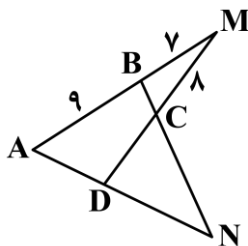
(۴) ۳

(۳) ۲

(۲) ۱

(۱) صفر

۲۵- در شکل مقابل، چهارضلعی $ABCD$ هم محاطی و هم محیطی است. نسبت محیط مثلث NCD به محیط مثلث BCM چقدر است؟



(۱) ۱/۸

(۲) ۱/۶

(۳) ۱/۵

(۴) ۱/۴

۲۶- اگر مجموعه مرجع مجموعه اعداد طبیعی یک رقمی، مجموعه‌های A ، B و C به صورت $A = \{1, 4, 5, 7\}$ ، $B = \{3, 4, 6, 8\}$ و $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ باشند، آنگاه مجموعه $[A - (B \cup C)] \cup B$ چند عضو خواهد بود؟

(۴) ۷

(۳) ۶

(۲) ۵

(۱) ۴

محل انجام محاسبات

۲۷- اگر هر دو رابطه $A \subseteq B$ و $C' \subseteq D'$ برقرار باشند، آنگاه کدام یک از روابط زیر حتماً برقرار خواهد بود؟

- (۱) $(A \cap C) \subseteq (B \cap D)$ (۲) $(A - C) \subseteq (B - D)$
(۳) $(A - D) \subseteq (B - C)$ (۴) $(C \cup A') \subseteq (D \cup B')$

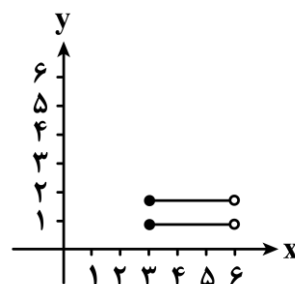
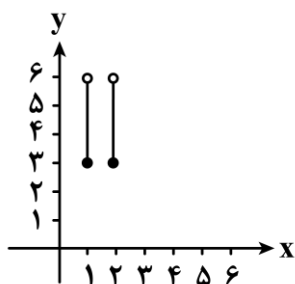
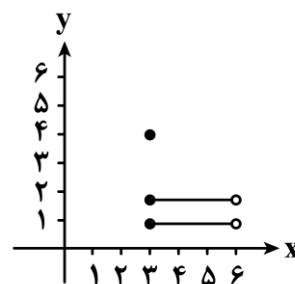
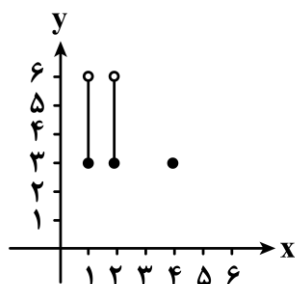
۲۸- کدام یک از تساوی‌های زیر برقرار نیست؟

- (۱) $A - (B \cup C) = (A - B) \cup (A - C)$ (۲) $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$
(۳) $(A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C)$ (۴) $(A - B) - C = A - (B \cup C)$

۲۹- در جبر مجموعه‌ها، اگر بدانیم $(A \cap B) \cup C' = A \cap (B \cup C')$ ، آنگاه کدام یک از مجموعه‌های زیر حتماً تهی است؟

- (۱) $A \cap B \cap C$ (۲) $A' \cap B' \cap C'$
(۳) $A \cup (B - C)$ (۴) $A - (B \cup C)$

۳۰- اگر $A = \{1, 2, 4\}$ و $B = [3, 6]$ ، آنگاه نمودار $A \times B - B^2$ کدام است؟



محل انجام محاسبات



گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی

آزمون ماز پایه یازدهم



تسلط بر نیم سال اول



ویژه دانش آموزان پایه یازدهم

دفترچه شماره ۲

پنجشنبه ۲۷ آذر ماه ۱۴۰۴

ردیف	ماده امتحانی	تعداد سؤال	شماره سؤال		مدت زمان پاسخ گویی	ملاحظات
			از	تا		
۱	فیزیک	۲۰	۳۱	۵۰	۲۵ دقیقه	۴۰ سؤال
۲	شیمی	۲۰	۵۱	۷۰	۲۰ دقیقه	۴۵ دقیقه

برای شباهت حداکثری به کنکور، صفحه آرای، فونت و حتی اندازه متن در تمامی آزمون های ماز، کاملاً یکسان با استاندارد دفترچه های کنکور در نظر گرفته می شود.

بودجه بندی دروس این آزمون

آمار و احتمال

آشنایی با مبانی ریاضیات

(جبر مجموعه ها از ابتدای قوانین و اعمال بین مجموعه ها تا انتهای درس ۲) صفحه های ۳۴ تا ۲۱

سهم در کنکور: ۱ سؤال

هندسه ۲

دایره

(کل درس سوم: چند ضلعی های محاطی و محیطی) **تبدیل های هندسی و کاربردها** (تبدیل های هندسی تا پایان فعالیت) صفحه های ۲۴ تا ۳۳

سهم در کنکور: ۱ سؤال

حسابان ۱

تابع

(آشنایی بیشتر با تابع، انواع توابع، وارون توابع) صفحه های ۳۷ تا ۶۲

سهم در کنکور: —

شیمی ۲

قدر هدایای زمینی را بدانیم

(از ابتدای نفت هدیه ای شگفت انگیز تا انتهای فصل) صفحه های ۲۹ تا ۵۰

سهم در کنکور: ۲ سؤال

فیزیک ۲

الکتریسیته ساکن + جریان الکتریکی

ومدارهای جریان مستقیم (از خازن تا ابتدای عوامل موثر بر مقاومت الکتریکی) صفحه های ۳۲ تا ۵۱

سهم در کنکور: ۲ سؤال

استراتژی و هدف گذاری با ماز در نیم سال اول ۱۴۰۴

۸ آزمون در ۱۰۰ روز تحصیلی مفید برای تسلط کامل بر مباحث نیم سال اول / شروع حرکت و یادگیری استفاده از ماشین پیشرفت ماز

۱- شروع مسیر؛ آرامش و هماهنگی: سه مرحله آزمون پوششی؛ فرصت برای شروع حرکت با ماشین پیشرفت ماز (تکرار مباحث آزمون های قبل و فرصت برای شروع مسیر پیشرفت)

۲- چالش استمرار؛ پیگیری و استقامت: سه مرحله آزمون برای آمادگی امتحانات و تکمیل یادگیری نیم سال اول (زمان تسلط کامل بر نیم سال اول)

۳- جمع بندی پایان نیم سال اول: دو مرحله آزمون جمع بندی بعد از امتحانات ترم اول و تکمیل یادگیری نیم سال اول + مرور و جمع بندی (ایستگاه جمع بندی و جبران)



۳۱- کدام یک از عبارتهای زیر دربارهٔ خازن‌ها درست است؟

الف - یکای ظرفیت خازن در SI، فاراد (F) است که معادل $\frac{C^2}{N.m}$ است.

ب - بار الکتریکی هریک از صفحات خازن متصل به باتری، یکسان است.

ج - $1\mu F$ ، ظرفیت خازنی است که اگر به ولتاژ $1\mu V$ متصل شود، در آن بار الکتریکی $1C$ ذخیره می‌شود.

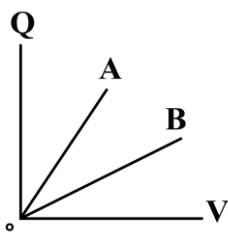
د - اگر ولتاژ خازنی را دو برابر کنیم، بار ذخیره‌شده در آن نیز دو برابر می‌شود.

(۱) «الف» و «ج» (۲) «ب» و «ج» (۳) «الف» و «د» (۴) «ب» و «د»

۳۲- نمودار بار الکتریکی خازن‌های تخت A و B برحسب اختلاف پتانسیل الکتریکی آن‌ها مطابق شکل است. اگر خازن

A را با یک باتری ۱۰ ولتی و خازن B را با یک باتری ۱۲ ولتی شارژ کنیم، آنگاه نسبت بار الکتریکی خازن B به بار

الکتریکی خازن A کدام گزینه می‌تواند باشد؟



(۱) ۴

(۲) ۳

(۳) ۲

(۴) ۱

۳۳- فضای بین صفحات خازنی با یک عایق به ثابت دی‌الکتریک ۴ پر شده است. اگر عایق بین دو صفحه را برداریم، در

این صورت فاصلهٔ بین صفحات خازن را چگونه تغییر دهیم، تا ظرفیت خازن نسبت به حالت اول، ۹۰ درصد کاهش

یابد؟

(۱) $\frac{2}{5}$ برابر کنیم. (۲) ۶۰ درصد کاهش دهیم. (۳) ۴۰ درصد افزایش دهیم. (۴) ۴ برابر کنیم.

۳۴- شکل زیر، خازن تختی را نشان می‌دهد که به‌طور کامل شارژ شده است. اگر پتانسیل الکتریکی قطب A باتری ۵V-

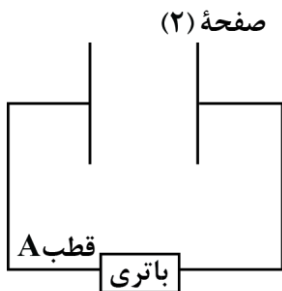
و بار و پتانسیل الکتریکی صفحهٔ (۲) خازن به ترتیب $20\mu C$ و ۵V باشد، ظرفیت خازن چند میکروفاراد است؟

(۱) $\frac{0}{2}$

(۲) ۲

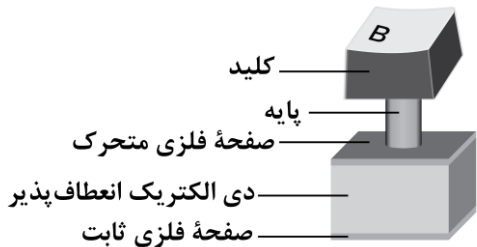
(۳) $\frac{0}{5}$

(۴) ۵



محل انجام محاسبات

۳۵- شکل زیر، مربوط به یکی از کلیدهای صفحه کلید رایانه‌ای است که بر مبنای تغییر ظرفیت خازن عمل می‌کند. فاصله بین صفحات فلزی نشان داده شده که مساحتشان 10^{-4} m^2 است، عموماً 5 mm است که با فشار دادن کلید، این فاصله ۹۶ درصد کاهش می‌یابد. اگر خازن از ماده‌ای با ثابت دی‌الکتریک ۵ پر شده باشد، تغییر ظرفیت آن بعد از فشار دادن کلید، چند پیکوفاراد خواهد شد؟ ($\epsilon_0 = 9 \times 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}}$)



(۱) ۲۱/۶

(۲) ۲۱۶

(۳) ۲۲/۵

(۴) ۲۲۵

۳۶- کدام یک از گزینه‌های زیر، به ترتیب از راست به چپ، عبارت زیر را به درستی تکمیل می‌کند؟
«در پدیده فروریزش الکتریکی در خازن، تعدادی الکترون از جدا شده و به سمت خازن حرکت می‌کنند.»

(۲) صفحه منفی - صفحه مثبت

(۱) صفحه مثبت - صفحه منفی

(۴) دی‌الکتریک - صفحه مثبت

(۳) دی‌الکتریک - صفحه منفی

۳۷- یک دستگاه رفع لرزش نامنظم قلب با خازنی به ظرفیت $10 \mu\text{F}$ در اختیار داریم که توسط یک باتری با اختلاف پتانسیل الکتریکی ثابت 5 kV شارژ شده است. با اتصال کفشک‌ها به بدن بیمار، ۸۰ درصد انرژی خازن در مدت 2 ms در بدن بیمار تخلیه می‌شود. توان متوسطی که در بدن بیمار تخلیه می‌شود، چند کیلووات است؟

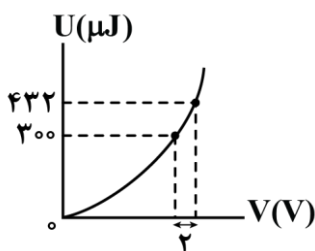
(۴) ۵۰

(۳) ۸۰

(۲) ۱۰۵

(۱) ۱۲۵

۳۸- نمودار انرژی ذخیره شده در یک خازن بر حسب اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر آن، مطابق شکل زیر است. اگر این خازن به گونه‌ای شارژ شود که بار الکتریکی ذخیره شده در آن $30 \mu\text{C}$ باشد، انرژی ذخیره شده در آن چند میکروژول است؟



(۱) ۵۰

(۲) ۶۰

(۳) ۷۵

(۴) ۱۰

محل انجام محاسبات

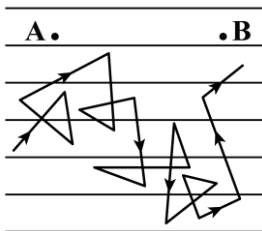
۳۹- خازن تختی به یک باتری که ولتاژ آن قابل تنظیم است، متصل است. اگر ولتاژ باتری را $5V$ افزایش دهیم، اندازه بار الکتریکی خازن $20nC$ و انرژی ذخیره شده در آن $J \times 10^{-7} \times 3/5$ افزایش می یابد. بار اولیه خازن برحسب نانوکولن کدام است؟

- (۱) 60 (۲) 80 (۳) 15 (۴) 20

۴۰- خازن تختی به ظرفیت نامعلوم در اختیار داریم. اگر حداقل کار مورد نیاز برای این که اختلاف پتانسیل الکتریکی خازن را از $0V$ به $6V$ برسانیم برابر با W_1 و حداقل کار مورد نیاز برای این که اختلاف پتانسیل الکتریکی خازن را از $6V$ به $10V$ برسانیم برابر با W_2 باشد، حاصل $\frac{W_2}{W_1}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{25}{9}$ (۲) 3 (۳) $\frac{16}{9}$ (۴) 2

۴۱- شکل زیر، مسیر زیگزاگی یک الکترون آزاد را در یک رسانای فلزی، در حضور میدان الکتریکی نشان می دهد. با توجه به این شکل، کدام یک از عبارات زیر درست هستند؟



- الف - سرعت سوق الکترون ها بسیار کم و به سمت راست است.
ب - پتانسیل الکتریکی نقطه A از نقطه B کم تر است.
ج - جهت قراردادی جریان الکتریکی، برخلاف جهت حرکت کاتوره های الکترون آزاد و به سمت چپ است.

د - الکترون آزاد دائماً در حال حرکت در خلاف جهت میدان الکتریکی است.

- (۱) «الف» و «ب» (۲) «ب» و «ج» (۳) «ج» و «د» (۴) «الف» و «د»

۴۲- کدام یک از گزینه های زیر معادل یکای $M\Omega$ است؟

- (۱) $\frac{kg \cdot km^2}{A^2 \cdot s^2}$ (۲) $\frac{kg \cdot m^2}{mA^2 \cdot s^2}$ (۳) $\frac{kg \cdot m^2}{A^2 \cdot ms^3}$ (۴) $\frac{g \cdot m^2}{A^2 \cdot ms^3}$

۴۳- ولتاژ باتری یک نوع ماشین حساب $2/5$ ولت است. اگر این ماشین حساب یک ساعت روشن باشد، باتری $1/8$ ژول انرژی به مدار آن می دهد. جریان الکتریکی عبوری متوسط در این مدت چند میلی آمپر است؟

- (۱) $0/1$ (۲) $0/15$ (۳) $0/2$ (۴) $0/25$

محل انجام محاسبات

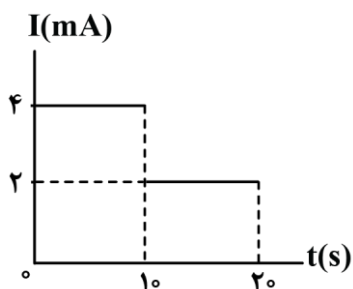
۴۴- ۲۵ درصد از بار الکتریکی باتری استاندارد خودرویی پس از مدت ۶ ساعت، با فراهم کردن جریان متوسط ۲/۵ آمپر تخلیه می‌شود. باتری این خودرو چند آمپر - ساعت است؟

- (۱) ۴۸ (۲) ۵۰ (۳) ۶۰ (۴) ۷۵

۴۵- معادله بار الکتریکی عبوری از یک رسانا برحسب زمان در SI به صورت $q = t^2 - 6t + 5$ است. در کدام یک از بازه‌های زمانی زیر، جریان الکتریکی متوسطی که از رسانا می‌گذرد، صفر آمپر است؟

- (۱) $[0, 5s]$ (۲) $[2s, 5s]$ (۳) $[2s, 4s]$ (۴) $[3s, 6s]$

۴۶- نمودار جریان الکتریکی عبوری از یک رسانا برحسب زمان، مطابق شکل است. بار الکتریکی خالصی که در بازه زمانی صفر تا ۱۵s از این رسانا شارش کرده چند کولن است؟



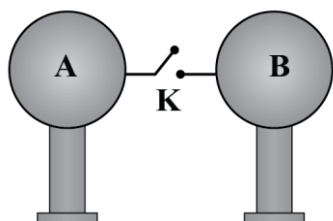
(۱) 5×10^1

(۲) 6×10^1

(۳) 5×10^{-2}

(۴) 6×10^{-2}

۴۷- در شکل زیر، دو کره مشابه و باردار A و B بر روی پایه‌های عایق قرار دارند. با بسته شدن کلید K، در مدت $2\mu s$ ، کره‌ها به تعادل الکتریکی می‌رسند و شدت جریان متوسط عبوری از کلید در این مدت، $25mA$ می‌شود. قبل از وصل کردن کلید، اختلاف بار الکتریکی دو کره چند نانوکولن بوده است؟



(۱) ۱۰۰

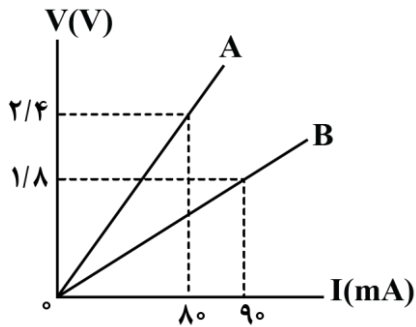
(۲) ۲

(۳) ۸۰

(۴) ۶

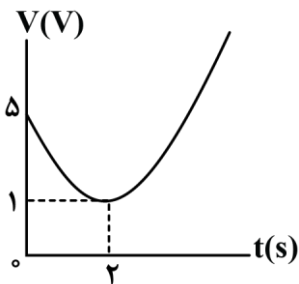
محل انجام محاسبات

۴۸- شکل زیر مربوط به نمودار اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر مقاومت‌های اهمی A و B بر حسب جریان عبوری از آنها است. اگر هریک از این مقاومت‌ها را به‌طور جداگانه به اختلاف پتانسیل الکتریکی $\frac{3}{6}$ ولت وصل کنیم، اختلاف جریان الکتریکی عبوری از آنها چند آمپر می‌شود؟



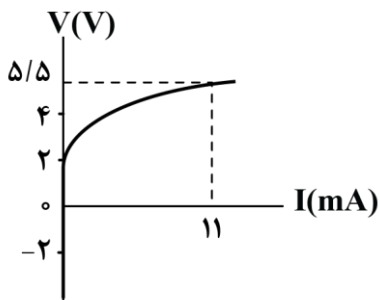
- (۱) $\frac{0}{3}$
 (۲) $\frac{0}{0.3}$
 (۳) $\frac{0}{6}$
 (۴) $\frac{0}{0.6}$

۴۹- نمودار اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر یک رسانای اهمی به مقاومت الکتریکی 40Ω بر حسب زمان، یک سهمی مطابق شکل است. با فرض ثابت بودن دما، در لحظه $t = 5s$ ، جریان الکتریکی عبوری از آن چند میلی‌آمپر است؟



- (۱) $\frac{0}{12}$
 (۲) ۱۲۰
 (۳) ۲۵۰
 (۴) $\frac{0}{25}$

۵۰- نمودار ولتاژ - جریان نشان داده‌شده در شکل زیر، مربوط به یک رسانای بوده که نمونه‌ای از آنها است.



- (۱) اهمی - سیم مسی
 (۲) غیر اهمی - سیم مسی
 (۳) اهمی - دیود نورگسیل
 (۴) غیر اهمی - دیود نورگسیل

محل انجام محاسبات

۵۱- کدام یک از مطالب زیر نادرست است؟

- (۱) نفت خام را پس از جدا کردن نمک‌ها، اسیدها و آب از آن پالایش می‌کنند.
- (۲) اغلب انفجارها در معادن زغال سنگ ناشی از تجمع گازی سبک، بی‌رنگ و بی‌بو است.
- (۳) کمتر از ۱۰ درصد از نفت خام به‌عنوان خوراک پتروشیمی در تولید مواد پتروشیمیایی به کار می‌رود.
- (۴) بیش از ۵۰ درصد از انتقال سوخت به مراکز توزیع با استفاده از راه آهن، نفت کش جاده‌پیما و کشتی‌های نفتی انجام می‌شود.

۵۲- کدام یک از گزینه‌های زیر درست است؟

- (۱) نام‌گذاری یک آلکن راست زنجیر به‌صورت «۳-پنتن» صحیح است.
 - (۲) در هر آلکان شاخه‌دار، هر اتم کربن حداقل به یک اتم هیدروژن متصل است.
 - (۳) به هیدروکربن‌های سیرنشده با یک یا چند پیوند سه‌گانه کربن-کربن، آلکین گفته می‌شود.
 - (۴) برای نمایش ساده‌ترین آلکان دارای شاخه فرعی متیل به‌صورت پیوند-خط، سه خط تیره لازم است.
- ۵۳- اگر هر ۱۰۰ گرم از یک آلکین به تقریب در واکنش با $\frac{3}{2}$ گرم گاز هیدروژن به‌طور کامل، به یک ترکیب سیرشده تبدیل شود، در هر مولکول این آلکین، چند اتم کربن وجود دارد؟ ($H = 1, C = 12: g. mol^{-1}$)

- (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۱۰

- ۵۴- یک آلکان شاخه‌دار به اشتباه به‌صورت «۲-متیل-۴،۳-دی اتیل پنتان» نام‌گذاری شده است، نام صحیح این ترکیب طبق روش آیوپاک کدام است؟

- (۱) ۴،۲-دی متیل-۳-اتیل هگزان (۲) ۵،۳-دی متیل-۴-اتیل هگزان
(۳) ۳-اتیل-۴،۲-دی متیل هگزان (۴) ۴-اتیل-۵،۳-دی متیل هگزان

۵۵- چند مورد از مطالب زیر در مورد فلز تیتانیم نادرست است؟

- الف - اولین عنصری است که در آرایش الکترونی آن، ۵ زیرلایه دو الکترونی وجود دارد.
ب - در شرایط یکسان، سرعت واکنش خوردگی آن در مقایسه با فلز آهن بیشتر است.
ج - تعداد الکترون‌ها با $n + l = 4$ در هر اتم این فلز و هر اتم اولین فلز واسطه برابر است.
د - واکنش تولید آن از تیتانیم (IV) کلرید در حضور جو بی‌اثر (هوای بدون اکسیژن) انجام می‌شود.

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۵۶- کدام مورد نادرست است؟ ($H = 1, C = 12: g. mol^{-1}$)

- (۱) در آلکان‌ها با افزایش اندازه مولکول، میزان چسبندگی مولکول نیز افزایش می‌یابد.
- (۲) آلکان موجود در سوخت فندک نسبت به آلکان دارای ۸ اتم هیدروژن نقطه جوش بالاتری دارد.
- (۳) در اولین آلکان راست زنجیر مایع در دمای اتاق، نسبت تعداد اتم‌های هیدروژن به تعداد اتم‌های کربن برابر با $\frac{2}{4}$ است.
- (۴) گرانروی آلکانی به جرم مولی ۱۰۰ گرم بر مول نسبت به آلکانی که در هر مولکول آن ۵ پیوند $C - C$ وجود دارد، کمتر است.

محل انجام محاسبات



۵۷- اگر درصد جرمی گوگرد در زغال سنگ به تقریب برابر $1/6$ درصد باشد، برای جذب گاز گوگرد دی اکسید تولید شده در سوختن هر کیلوگرم زغال سنگ، به تقریب چند گرم کلسیم اکسید به خلوص 70% مصرف می شود؟
 $(O = 16, S = 32, Ca = 40: g.mol^{-1})$

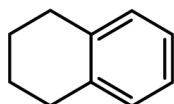
(۴) ۸

(۳) ۴

(۲) ۸۰

(۱) ۴۰

۵۸- کدام موارد درباره ترکیب مقابل درست هستند؟



الف - این ترکیب همانند بنزن یک هیدروکربن آروماتیک است.

ب - 25% درصد از اتم های کربن این ترکیب به هیچ اتم هیدروژنی متصل نیستند.

ج - ترکیب مورد نظر می تواند در اثر واکنش نفتالن با 2 مولکول گاز هیدروژن تولید شود.

د - تعداد اتم های هیدروژن در هر مولکول آن برابر با این تعداد در هر مولکول سیکلوپنتان است.

(۱) «الف» و «ج» (۲) «الف» و «د» (۳) «ب» و «ج» (۴) «ب» و «د»

۵۹- اگر با عبور هیدروکربنی گازی شکل از محلول برم، رنگ محلول از بین رود، ترکیب مورد نظر می تواند یک باشد و از این روش برای افتراق آلکن ها از استفاده می شود.

(۱) آلکان - سیکلوآلکان ها (۲) آلکین - سیکلوآلکان ها (۳) آلکین - آلکین ها (۴) آلکان - آلکین ها

۶۰- کدام مورد درباره نفت برنت دریای شمال که اجزای سازنده آن در شکل روبه رو نمایش داده شده، نادرست است؟
 (۱) وازلین نسبت به فرآرترین جزء سازنده آن دارای گرانروی بیشتری است.

(۲) ماده ای که کمترین سهم را در بین اجزای سازنده این نفت خام دارد، در تهیه سوخت هواپیما نقش دارد.

(۳) در تقطیر جزء به جزء آن، نفت سفید در قسمت های پایین تری نسبت به گازوئیل از برج تقطیر خارج می شود.

(۴) بیشتر بودن سهم بنزین و خوراک پتروشیمی در این نوع نفت نسبت به سایر نفت ها سبب شده بیشترین قیمت را داشته باشد.



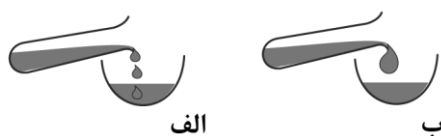
۶۱- کدام موارد از مقایسه های انجام شده درست هستند؟ $(H = 1, C = 12: g.mol^{-1})$

الف - اختلاف نقطه جوش: پروپان - بوتان < اتان - پروپان

ب - نسبت درصد جرمی کربن به هیدروژن: نفتالن < بنزن

ج - تمایل برای تبدیل به حالت گاز: نفت کوره > گازوئیل

د - نقطه جوش: آلکان «ب» > آلکان «الف»



(۱) «الف» و «ج» (۲) «الف» و «د» (۳) «ب» و «ج» (۴) «ب» و «د»

۶۲- یک هیدروکربن مشخص در یکی از خانواده های آلکان ها، آلکن ها یا آلکین ها قرار دارد. اگر در اثر سوختن کامل 0.5 مول از آن در شرایط استاندارد، 18 گرم آب و $33/6$ لیتر گاز کربن دی اکسید تولید شود، این ترکیب به کدام خانواده تعلق دارد و اختلاف تعداد اتم های هیدروژن در هر مولکول آن و ۱-پنتین چقدر است؟

$(H = 1, O = 16: g.mol^{-1})$

(۴) آلکین ها - ۶

(۳) آلکن ها - ۶

(۲) آلکین ها - ۴

(۱) آلکن ها - ۴

محل انجام محاسبات

۶۳- کدام یک از مطالب زیر نادرست است؟

- (۱) بیشترین درصد جرمی هیدروژن در میان هیدروکربن‌ها، متعلق به یک گاز بی‌بو با واکنش‌پذیری پایین است.
- (۲) درصد جرمی کربن در یک هیدروکربن سیرنشده به‌طور قطع بیشتر یا مساوی درصد جرمی کربن در پروپن است.
- (۳) درصد جرمی اتم‌های کربن در همه آلکان‌ها به‌طور قطع از درصد جرمی اتم‌های کربن در همه آلکین‌ها کمتر است.
- (۴) در میان دو هیدروکربن سیرشده و سیرنشده با فرمول شیمیایی مشابه، شمار پیوندهای $C-H$ در ماده سیرشده بیشتر است.

۶۴- کدام گزینه نادرست است؟

- (۱) در جوش کاربیدی از هیدروکربنی استفاده می‌شود که در آن نسبت تعداد اتم‌های H به C در هر مولکول آن برابر یک است.
- (۲) در فراورده‌های سوختن کامل مقداری بنزن، مقدار (مول) گاز کربن دی‌اکسید نسبت به مقدار آب برابر ۲ است.
- (۳) نفتالن یک جامد سفید رنگ است که در آن نسبت تعداد پیوندهای $C=C$ به $C-C$ برابر با ۱/۲ است.
- (۴) ۱-هگزن و سیکلوهگزان را می‌توان از طریق واکنش با گاز هیدروژن، از یکدیگر تشخیص داد.
- ۶۵- اگر در اثر سوختن جرم‌های برابری از بنزین و زغال سنگ، اختلاف جرم گاز کربن دی‌اکسید تولید شده برابر ۶۳ گرم باشد، مجموع جرم مصرف‌شده این دو سوخت چند گرم بوده است؟

نام سوخت	گرمای آزاد شده (kJ/g)	مقدار کربن دی‌اکسید تولیدی به ازای هر کیلوژول انرژی تولید شده (g)
بنزین	۴۸	۰/۰۶۳
زغال سنگ	۳۰	۰/۱۰۵

(۱) ۳۰۰ (۲) ۱۰۰۰ (۳) ۶۰۰ (۴) ۵۰۰

۶۶- کدام یک از مطالب زیر درست است؟

- (۱) اگر از سوختن یک ماده آلی، تنها دو ترکیب کربن دی‌اکسید و آب تولید شود، آن ترکیب آلی به‌طور قطع یک هیدروکربن است.
- (۲) در واکنش سوختن هیدروکربن‌ها، حجم گاز اکسیژن مصرف‌شده بیشتر از حجم گاز کربن دی‌اکسید تولیدشده است.
- (۳) در ساختار هیدروکربن‌های سیرنشده برخلاف هیدروکربن‌های سیرشده، جفت الکترون ناپیوندی وجود دارد.
- (۴) گشتاور دوقطبی همه هیدروکربن‌ها برابر صفر است و این ترکیبات آلی، ناقطبی محسوب می‌شوند.
- ۶۷- ۲۰ درصد از مولکول‌های درون مخلوط گازی از پروپان و پروپن، ۹ پیوند اشتراکی دارند. اگر با وارد کردن مقدار کافی گاز فلوئور به مخلوط، طبق واکنش $C_3H_6F_2(g) + F_2(g) \rightarrow C_3H_4F_6(g)$ ، ۳۲ گرم فراورده تولید شود، جرم گاز پروپان در مخلوط اولیه چند گرم است؟ ($H = 1, C = 12, F = 19: g. mol^{-1}$)

(۱) ۸/۸ (۲) ۱۴۰/۸ (۳) ۴/۴ (۴) ۷۰/۴

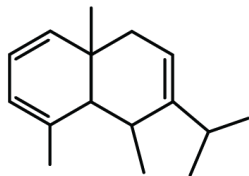
محل انجام محاسبات



۶۸- در یک نمونه هیدروکربن ۸ کربنه، درصد جرمی کربن ۸ برابر درصد جرمی هیدروژن است. در ساختار این هیدروکربن، چند اتم هیدروژن وجود دارد؟ ($H = 1, C = 12: g. mol^{-1}$)

- (۱) ۱۶ (۲) ۱۲ (۳) ۱۰ (۴) ۸

۶۹- کدام یک از مطالب زیر در مورد ترکیبی با ساختار مقابل درست است؟ ($H = 1, C = 12: g. mol^{-1}$)



(۱) برای سوختن هر مول از آن به ۲۴ مول گاز اکسیژن نیاز است.

(۲) درصد جرمی کربن در این ترکیب بیشتر از ۹۰ درصد است.

(۳) شمار پیوندهای $C - C$ در آن برابر ۱۴ است.

(۴) در ساختار آن ۳ گروه CH_3 دیده می شود.

۷۰- کدام مورد درباره ساده ترین عضو خانواده آلکن ها درست است؟

(۱) همانند گاز بوتن می تواند با برم مایع واکنش دهد.

(۲) گازی است که واکنش پذیری آن نسبت به گاز اتان کمتر است.

(۳) به عنوان گاز عمل آورنده استفاده می شود و نام گذشته آن گاز استیلن است.

(۴) با وارد کردن مقداری از این ترکیب در مخلوط آب و سولفوریک اسید، الکل دو کربنه دارای ۶ پیوند $C - H$ تولید می شود.

محل انجام محاسبات

بودجه بندی دروس آزمون بعد....

تاریخ برگزاری: ۲۵ دی ماه

هندسه ۲

دایره
(کل درس سوم: چند ضلعی های محاطی و محیطی)
تبدیل های هندسی و کاربردها
(تبدیل های هندسی تا ابتدای انتقال)
صفحه های ۲۴ تا ۳۸

حسابان ۱

تابع
(کل فصل ۲)
صفحه های ۳۷ تا ۷۰

فیزیک ۲

الکتریسیته ساکن + جریان الکتریکی
ومدارهای جریان مستقیم
(از خازن تا ابتدای نیروی محرکه الکتریکی و مدارها)
صفحه های ۳۲ تا ۶۱

آمار و احتمال

آشنایی با مبانی ریاضیات
(جبر مجموعه ها از ابتدای قوانین و
اعمال بین مجموعه ها تا انتهای درس ۲)
احتمال
(کل درس ۱: مبانی احتمال)
صفحه های ۲۱ تا ۴۳

شیمی ۲

قدر هدایای زمینی را بدانیم
(از ابتدای نفت هدیه ای شگفت انگیز تا انتهای فصل)
در پی غذای سالم
(از ابتدای فصل تا انتهای دمای یک ماده از چه خبر می دهد؟)
صفحه های ۲۹ تا ۵۸





گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی

آزمون ماز | پایه یازدهم



تسلط بر نیم سال اول



ویژه دانش آموزان پایه یازدهم

دفترچه پاسخ

پنجشنبه ۲۷ آذرماه ۱۴۰۴

✓ پاسخنامه سریع؛ برای بررسی فوری بعد از آزمون

✓ تحلیل تمام گزینه‌های هر سؤال؛ برای بررسی سؤالاتی که پاسخ نادرست داده‌اید

✓ نکات و درسنامه‌های آموزشی؛ برای یادگیری کامل مباحث هر سؤال

✓ مشاوره تستی؛ برای یادگیری انواع روش‌های حل تست

✓ استراتژی آزمون؛ برای یادگیری مدیریت زمان و مدیریت جلسه آزمون

دِرس	مَسْئولِ دِرس	طراحان	ویراستاران
ریاضیات	حسین شفیع زاده سید جواد نظری مهرداد کیوان	حسین شفیع زاده - مهرداد کیوان حسن محمد بیگی - رسول حاجی زاده	مهرداد اسپید کار - حمید رضا ولی پور مائده بادان فیروز - مهدی رمضانی فاطمه روان بخش - فؤاد خیر آبادی
فیزیک	محمد جواد سورچی حسین عبدوی نژاد	محمد جواد سورچی - حسین عبدوی نژاد سجاد صادقی زاده - مهدی پارسا محمد علی موسوی	حسین عبدوی نژاد محمد جواد سورچی حنا خلعتبری
شیمی	علی ترابی	علی ترابی - پرهام تیزپا	فرهنگ امیری منیب نظری - سعیده محبی محمد دارابی جم

تیم اجرایی و تولید آزمون

مجتبی آدمیان

نازنین امیری

مائده بادان فیروز

زهره جعفری

مدیر تولید آزمون: محدثه شیخعلی



یک تیم با بیش از ۵۰۰ نفر در حال کار هستند تا آزمون‌های ماز با حداکثر کیفیت حاضر بشن و به شما کمک کنن و مسیر موفقیت رو براتون ساده‌تر کنن. همیشه از نظرات و کامنت‌های خوبتون انرژی می‌گیریم. مرسی که همراهمون هستین. راستی! حتماً در نظر سنجی آزمون شرکت کنین و نظرات و پیشنهاداتتون رو برامون بنویسین.

دکتر رسول خنجری

چگونه مرور کنیم؟ سه مرحله‌ای تا حفظ پایدار

در مقاله‌های قبل گفتیم که «مرور» یک کار اضافه و حاشیه‌ای نیست؛ خودش بخش اصلی یادگیریه. خیلی از غلط‌های ما توی آزمون، مربوط به سؤال‌هایی‌ان که قبلاً بلد بودیم اما از ذهنمون سر خوردن و فراموش شدن؛ یعنی فهم اتفاق افتاده، اما ذخیره‌سازی کامل نشده. همینجاست که مرور درست وارد بازی می‌شه: هم کاری می‌کنه زحمتی که برای مطالعه کشیدی واقعاً ثبت بشه، هم باعث می‌شه عملکردت توی آزمون دقیقاً همون چیزی باشه که خوندی، نه کمتر.

یادداشت برداری؛ مهم‌ترین ابزار مرور

یادداشت‌ها چکیده‌ای از چیزهایی هستن که برات **سخت**، **فرار** یا **پرتکرار** بودن.

چرا این قدر مؤثرن؟

- چون وقتی با «زبان خودت» می‌نویسی، همون نظم ذهنی رو منتقل می‌کنی که باهاش یاد گرفتی.
 - **مرورش سریع‌تره**؛ چشم تو نوشته‌های خودتو خیلی راحت‌تر می‌خونه.
 - و مهم‌تر از همه: **۵ دقیقه مرور یادداشت‌ها = ۱۵ دقیقه مرور جزوه یا کتاب**.
- یادداشت درواقع دفترچه نیست؛ «نسخه فشرده فهم تو» هست.

همون چیزیه که مرور رو از یک کار سفت تبدیل می‌کنه به یک کار دقیق و سریع.

پادکست‌های شفاهی؛ مرور بدون نوشتن پشت میز

یک روش مدرن و کم‌هزینه برای مرور اینه که از یادداشت‌ها فایل صوتی بسازی.

چرا خوبه؟

■ مجبوری دوباره سازمان‌دهی کنی

چون مجبور می‌شی نکات رو مرتب، کوتاه و قابل فهم بگی؛ همین باعث میشه بفهمی کدوم بخش‌ها رو هنوز خوب یاد نگرفتی.

■ مرورت آزاد از میز و کتاب میشه

روی مبل، توی راه، قبل خواب، موقع خستگی... فقط هدفون بذار و بگذار صدای خودت نکات رو برات بازسازی کنه. اینجوری ساعت مطالعات بی‌دردسر زیاد میشه.

چند نکته ریز ولی مهم:

صدای واضح، جمله‌های کوتاه، مکث‌های کوچک، مثال‌های ساده، فایل‌های ۱۰-۱۵ دقیقه‌ای، و یک جمع‌بندی یک دقیقه‌ای در آخر.

لازم نیست صرفه‌ای باشه فقط نسخه شنیداری فهم تو باشه.

کی به کی مرور کنیم؟

مرور «هر وقت حسش بود» نیست؛ مغز زمان بندی خودش رو داره.

■ **مرور اول:** همون روز مطالعه (مهم ترین مرور)

اگر امروز ۹۰ دقیقه درس خوندی، فقط ۵-۱۰ دقیقه مرور شبانه جلوی فراموش شدن نصفش رو می گیره.

■ **مرور دوم:** هفته بعد (تثبیت دوباره)

این همون لحظه ای که مغز بخش زیادی از مطلب رو رها می کنه و اگه برنگردی، دوباره خوانی لازم میشه.

مرورهای بلندمدت:

با برنامه راهبردی آزمون انجام میشن؛

خودشون به موقع تو رو برمی گردونن سراغ مطالب تا تثبیت طولانی مدت شکل بگیره.

مرور یعنی اینکه قبل از اینکه مغز مطلب رو پرت کنه بیرون، دوباره بهش یادآوری کنی که
«این مهمه، خلش دارا»

جمع بندی: چرخه سه تایی مرور

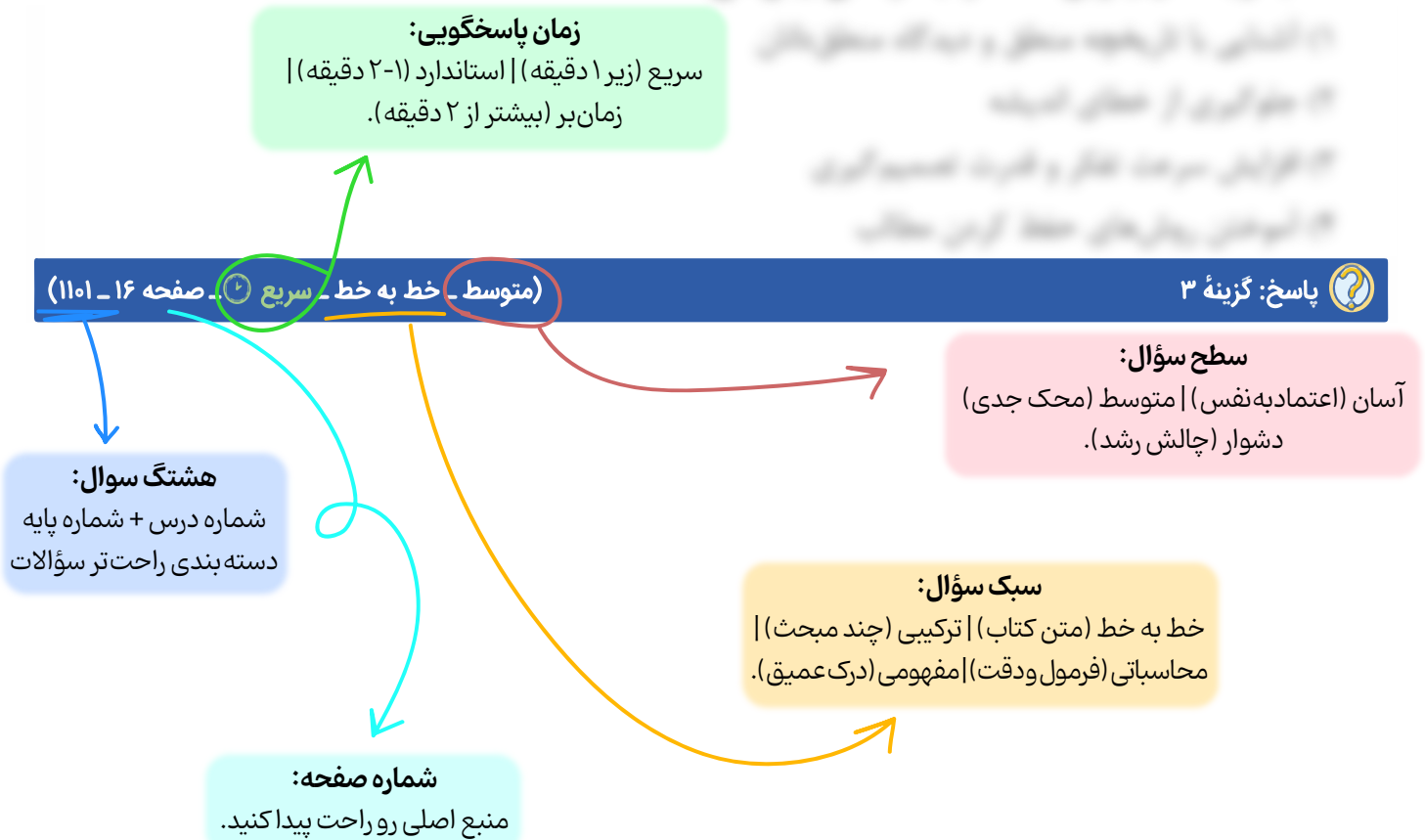
یک مرور مؤثر یعنی سه ابزار کنار هم:

- ۱) می نویسی ← فهم عمیق
- ۲) ضبط می کنی ← مرور راحت و سریع
- ۳) زمان بندی می کنی ← ماندگاری واقعی

اگر همین سه بخش رو نگه داری، هیچ مبحثی هدر نمی ره و یادگیریت از «مطالعه های فصلی و فزاین»
تبدیل میشه به «دانش همراه و پایدار»؛ همونی که روز از مون لازم داری.

راهنمای پاسخنامه آزمون‌ها

در ادامه این بخش، به توضیح نحوه پاسخ‌دهی به سوالات و نحوه استفاده از پاسخنامه‌ها پرداخته می‌شود. این بخش شامل توضیحاتی در مورد نحوه پاسخ‌دهی به سوالات و نحوه استفاده از پاسخنامه‌ها است.



یادتون باشه:

- ✓ هر سؤال یک فرصت یادگیری، نه یک مانع.
- ✓ پاسخ‌نامه فقط جواب نیست؛ یک کارگاه آموزشی کامله.
- ✓ با هر آزمون و مرور این پاسخ‌نامه، یک پله بالاتر می‌رید و یک قدم به رؤیایون نزدیک‌تر می‌شید.
- ✓ موفقیت فقط برای کسانی که با برنامه و انگیزه حرکت می‌کنن. شما همون آدمید.



برای دیدن پاسخنامه ویدئویی آزمون
QRcode بالا را اسکن کنید!
یا بر روی لینک زیر کلیک کنید!
پاسخنامه ویدئویی آزمون

بودجه بندی
این آزمون

حسابان ۱: تابع (درس‌های ۱ تا ۳)، صفحه‌های ۳۷ تا ۶۲
هندسه ۲: دایره (درس ۳)، تبدیل‌های هندسی و کاربردها (تا پایان فعالیت)، صفحه‌های ۲۴ تا ۳۳
آمار و احتمال: آشنایی با مبانی ریاضیات (از ابتدای قوانین و اعمال بین مجموعه‌ها)، صفحه‌های ۲۱ تا ۳۴

سهم در
کنکور

حسابان ۱: از این مبحث به‌طور مستقیم تستی در کنکور طرح نشده است
هندسه ۲: این مبحث در مجموع ۱ تست از ۴ تست کنکور را پوشش داده است.
آمار و احتمال: این مبحث در مجموع ۱ تست از ۴ تست کنکور را پوشش داده است.

۱- در کدام یک از روابط زیر، y تابعی از x است؟

$$(2) \quad x^4 - y^3 = 1$$

$$(1) \quad x^3 - y^2 = 1$$

$$(4) \quad |x^3| - |y^3| = 1$$

$$(3) \quad |x^3 - y^3| = 1$$

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - حسابان ۱ صفحه ۴۸ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۲

بررسی سریع:

در گزینه ۱، ۳ و ۴ به‌ازای یک x دو مقدار y به‌دست می‌آید.

روش اول

اگر به‌ازای یک x مشخص، بیش از یک y به‌دست آید، دیگر y تابعی از x نیست. برای گزینه‌های نادرست مثال نقض می‌آوریم:

$$x = 2 \Rightarrow y^2 = 7 \Rightarrow y = \pm\sqrt{7} \quad \times$$

$$x = 0 \Rightarrow |y^3| = 1 \Rightarrow y = \pm 1 \quad \times$$

$$x = 2 \Rightarrow |y^3| = 7 \Rightarrow y = \pm\sqrt[3]{7} \quad \times$$

۱

۳

۴

روش دوم

y را به صورت یک ضابطه صریح برحسب x می‌نویسیم:

بررسی گزینه‌ها:

$$x^3 - y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = x^3 - 1 \Rightarrow y = \pm\sqrt{x^3 - 1} \quad \times$$

۱ تابع نیست

$$x^4 - y^3 = 1 \Rightarrow y^3 = x^4 - 1 \Rightarrow y = \sqrt[3]{x^4 - 1} \quad \checkmark$$

۲ تابع است

$$|x^3 - y^3| = 1 \Rightarrow \begin{cases} x^3 - y^3 = 1 \Rightarrow y^3 = x^3 - 1 \Rightarrow y = \sqrt[3]{x^3 - 1} \\ x^3 - y^3 = -1 \Rightarrow y^3 = x^3 + 1 \Rightarrow y = \sqrt[3]{x^3 + 1} \end{cases} \quad \times$$

۳ تابع نیست

$$|x^3| - |y^3| = 1 \Rightarrow |y^3| = |x^3| - 1 \Rightarrow \begin{cases} y^3 = +(|x^3| - 1) \Rightarrow y = \sqrt[3]{|x^3| - 1} \\ y^3 = -(|x^3| - 1) \Rightarrow y = \sqrt[3]{-|x^3| + 1} \end{cases} \quad \times$$

۴ تابع نیست

تشخیص تابع بودن یک ضابطه

در یک ضابطه برحسب x و y ، اگر بتوان y را برحسب x به صورت صریح $y = f(x)$ نمایش داد به گونه‌ای که به‌ازای هر ورودی x فقط یک خروجی برای y داشته باشد، آن ضابطه یک تابع را نشان می‌دهد.

یه نمونه باحال ببین!

آیا رابطه $y^3 + x^2 - 2x = 0$ تابع است؟

$$y^3 = 2x - x^2 \Rightarrow y = \sqrt[3]{2x - x^2}$$

به ازای هر x فقط یک مقدار y وجود دارد، پس تابع است.

تذکر!

با مثال نقض می توان تابع نبودن یک رابطه را اثبات کرد به خصوص در مواردی که نوشتن رابطه صریح برحسب x دشوار باشد.

یه نمونه باحال ببین!

آیا رابطه $y^3 - y = x^3 + x$ تابع است؟

$$\Rightarrow y(y^2 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

چون به ازای $x = 0$ بیش از یک مقدار برای y به دست آمد، پس تابع نیست.



۲- تابع $f(x) = x^2 + 4x + a$ با دامنه $(-\infty, -2]$ مفروض است. به ازای کدام مقدار a ، وارون f خط $y = 2x - 8$ را در نقطه ای به طول ۲ قطع می کند؟

(۴) ۲

(۳) -۲

(۲) -۴

(۱) ۴

(آسان - ترکیبی - سریع) - حسابان ۱ صفحه ۶۱ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۴

بررسی سریع:

$$y = 2x - 8 \xrightarrow{x=2} (2, -4) \in f^{-1} \Rightarrow f(-4) = 2$$

$$f(x) = x^2 + 4x + a \xrightarrow{f(-4)=2} 16 - 16 + a = 2 \Rightarrow a = 2$$

نقطه ای به طول $x = 2$ روی خط $y = 2x - 8$ قرار دارد، پس:

$$y = 2x - 8 \xrightarrow{x=2} y = 4 - 8 = -4$$

پس مختصات آن به صورت $(2, -4)$ می باشد.

$$f(a) = b \Leftrightarrow f^{-1}(b) = a$$

از طرفی طبق فرض سوال $f^{-1}(2) = -4$ و همچنین می دانیم:

$$f(-4) = 2$$

پس نتیجه می شود:

$$f(x) = x^2 + 4x + a \xrightarrow{f(-4)=2} 16 - 16 + a = 2 \Rightarrow a = 2$$

بنابراین:

یه نکته طلایی!

اگر f تابعی یک به یک باشد، داریم:

$$f(a) = b \Leftrightarrow f^{-1}(b) = a$$



۳- بازه $[2, +\infty)$ بزرگ‌ترین بازه‌ای است که تابع $f(x) = ax^2 + (a-2)x$ در آن بازه یک‌به‌یک است، مقدار $f(5)$ کدام است؟
 ۱ (۴) ۲ (۳) ۳ (۲) ۴ (۱)

(آسان - مفهومی - سریع) - حسابان ۱ صفحه ۵۵ - ۱۱۰۲

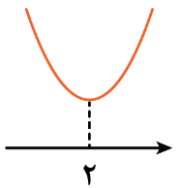
پاسخ: گزینه ۳

بررسی سریع:

$$x_{\text{رأس}} = 2 \Rightarrow -\frac{a-2}{2a} = 2 \Rightarrow a = \frac{2}{5}$$

$$\xrightarrow{a=\frac{2}{5}} f(x) = \frac{2}{5}x^2 + \left(\frac{2}{5} - 2\right)x \Rightarrow f(5) = 10 - 8 = 2$$

چون $[2, +\infty)$ بزرگ‌ترین بازه‌ای است که $f(x)$ در آن یک‌به‌یک است، پس $x=2$ دقیقاً رأس سهمی است.



$$x = -\frac{b}{2a} \Rightarrow -\frac{a-2}{2a} = 2 \Rightarrow a-2 = -4a \Rightarrow -5a = -2 \Rightarrow a = \frac{2}{5}$$

$$f(x) = ax^2 + (a-2)x \xrightarrow{a=\frac{2}{5}} f(x) = \frac{2}{5}x^2 + \left(\frac{2}{5} - 2\right)x$$

$$f(x) = \frac{2}{5}x^2 - \frac{8}{5}x \xrightarrow{x=5} f(5) = \frac{2}{5}(5)^2 - \frac{8}{5}(5)$$

$$\Rightarrow f(5) = 10 - 8 = 2$$

یادآوری!

در سهمی $f(x) = ax^2 + bx + c$ داریم: ($a \neq 0$)

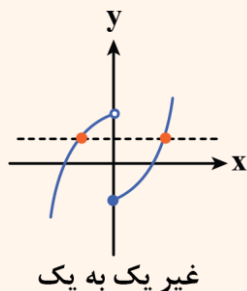
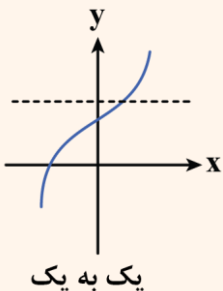
$$x_{\text{رأس}} = -\frac{b}{2a}$$

$$y_{\text{رأس}} = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{\Delta}{4a}$$

نمایش نموداری تابع یک‌به‌یک

در نمایش نموداری هیچ دو نقطه متمایزی عرض برابر ندارند، به عبارت دیگر در نمایش نموداری هر خط موازی محور x ها نمودار تابع یک‌به‌یک را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.

یه نمونه باحال ببین!

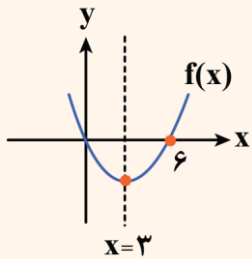


تذکره!

بعضی از توابع در دامنه خود یک‌به‌یک نیستند ولی با محدود کردن دامنه می‌توان آن‌ها را به تابعی یک‌به‌یک تبدیل کرد.

یه نمونه باحال ببین!

نمودار تابع $f(x) = x^2 - 6x$ را در نظر بگیرید. با توجه به شکل آن مشخص است تابع $f(x)$ روی دامنه‌اش یک‌به‌یک نیست، ولی بازه‌های $(-\infty, 3]$ و $[3, +\infty)$ بزرگ‌ترین بازه‌هایی هستند که در هر کدام، یک‌به‌یک است.



• • iko • •

۴- نمودار توابع خطی $6x - 8y = a$ و $12x + by = 3$ نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم متقارن‌اند، مقدار $a+b$ کدام است؟

(۴) -۱۵

(۳) -۶

(۲) -۹

(۱) -۱۱

(متوسط - خط‌به‌خط - استاندارد) - حسابان ۱ صفحه ۶۱ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۱

توابع f و f^{-1} نسبت به خط $y = x$ متقارن‌اند، پس این دو تابع داده شده وارون یکدیگرند.

$$6x - 8y = a \xrightarrow[\text{(تعویض X و Y)}]{\text{وارون کردن}} 6y - 8x = a$$

پس این خط همان خط $12x + by = 3$ است، بنابراین باید ضرایب آن‌ها، نظیر به نظیر متناسب باشند.

$$\begin{cases} 6y - 8x = a \\ by + 12x = 3 \end{cases} \Rightarrow \frac{6}{b} = \frac{-8}{12} = \frac{a}{3} \quad \begin{matrix} \text{(II)} \\ \text{(I)} \end{matrix}$$

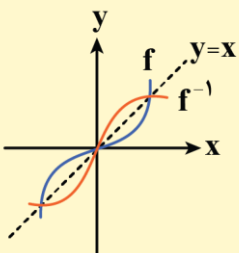
$$\text{(I)} \Rightarrow \frac{6}{b} = \frac{-8}{12} \Rightarrow -8b = 6 \times 12 \Rightarrow b = -9$$

$$\text{(II)} \Rightarrow \frac{-8}{12} = \frac{a}{3} \Rightarrow 12a = -3 \times 8 \Rightarrow a = -2$$

بنابراین جواب نهایی:

$$a + b = -9 - 2 = -11$$

یک تقارن زیبا!



توابع f و f^{-1} نسبت به خط $y = x$ متقارن‌اند.

• • iko • •

- ۵- تابع $f(x) = ax^2 + (2a-3)x - b$ روی $\mathbb{R}$ وارون پذیر است، اگر $f^{-1}(b) = 6$ باشد، مقدار $f(b)$ کدام است؟
 (۱) -۲۴ (۲) ۲۴ (۳) -۳۶ (۴) ۳۶

(متوسط - مفهومی - استاندارد) حسابان ۱ صفحه ۶۰ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۴

تابع درجه دوم نمی تواند روی $\mathbb{R}$ وارون پذیر باشد، پس باید ضریب x^2 صفر باشد، یعنی $a = 0$ است.

$$f(x) = -3x - b$$

$$f^{-1}(b) = 6 \Rightarrow f(6) = b \Rightarrow -18 - b = b \Rightarrow 2b = -18 \Rightarrow b = -9$$

$$f(x) = -3x + 9 \xrightarrow{x=-9} f(b) = f(-9) = 36$$



- ۶- نمودار وارون تابع $f(x) = \frac{ax}{\sqrt{x^2+1}}$ از نقطه $A(-1, \frac{3}{4})$ عبور می کند. مقدار a کدام است؟

- (۱) $-\frac{5}{4}$ (۲) $\frac{5}{4}$ (۳) $\frac{5}{3}$ (۴) $-\frac{5}{3}$

(آسان - خطبه خط - سریع) حسابان ۱ صفحه ۵۸ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۴

اگر $f^{-1}(a) = b$ ، آن گاه $f(b) = a$ است.

$$f^{-1}(-1) = \frac{3}{4} \Rightarrow f\left(\frac{3}{4}\right) = -1$$

$$f(x) = \frac{ax}{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow \frac{\frac{3}{4}a}{\sqrt{\frac{9}{16}+1}} = -1 \Rightarrow \frac{\frac{3}{4}a}{\sqrt{\frac{25}{16}}} = -1 \Rightarrow \frac{\frac{3}{4}a}{\frac{5}{4}} = -1$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4}a = -\frac{5}{4} \Rightarrow 3a = -5 \Rightarrow a = -\frac{5}{3}$$

قلقشو یاد بگیر!

می دانیم با جابه جایی x و y یک نقطه روی تابع f ، نقطه ای روی تابع f^{-1} حاصل می شود، یعنی:

$$\underbrace{(b, a) \in f^{-1}}_{f^{-1}(b)=a} \Leftrightarrow \underbrace{(a, b) \in f}_{f(a)=b}$$



- ۷- اگر $f = \{(-1, m), (n^2 - 5, m), (n, 3), (2, 1), (m, 1)\}$ یک تابع یک به یک باشد، کدام تابع زیر ثابت است؟

- (۲) $y = (n+m)x + m$
 (۴) $y = (2n-m)x + m$

- (۱) $y = (n-m)x + n$
 (۳) $y = (2m-n)x + n$

(متوسط - ترکیبی - استاندارد) حسابان ۱ صفحه ۵۶ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۲

$$n^2 - 5 = -1 \Rightarrow n^2 = 4 \Rightarrow n = \pm 2$$

دو زوج مرتب $(n^2 - 5, m)$ و $(-1, m)$ مؤلفه دوم (y) برابر دارند، پس:

تألمت اول

$$n = 2 \Rightarrow f = \{(-1, m), (2, 3), (2, 1), (m, 1)\}$$

چون دو زوج مرتب $(2, 3), (2, 1)$ مؤلفه اول (x) برابر و مؤلفه دوم نابرابر دارند، پس f تابع نیست و $n = 2$ غیر قابل قبول است.

$$n = -2 \Rightarrow f = \{(-1, m), (-2, 3), (2, 1), (m, 1)\}$$

$$m = 2$$

دو زوج مرتب $(m, 1), (2, 1)$ مؤلفه دوم (y) برابر دارند، پس:
با توجه به $m = 2$ و $n = -2$ گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

بررسی گزینه‌ها:

$$y = (n - m)x + n \xrightarrow[n=m=2]{n=-2} y = -4x - 2$$

❶ تابع خطی ✗

$$y = (n + m)x + m \xrightarrow[n=m=2]{n=-2} y = 2$$

❷ تابع ثابت ✓

$$y = (2m - n)x + n \xrightarrow[n=m=2]{n=-2} y = 6x - 2$$

❸ تابع خطی ✗

$$y = (2n - m)x + m \xrightarrow[n=m=2]{n=-2} y = -6x + 2$$

❹ تابع خطی ✗

یادآوری تابع ثابت!

تابعی که برد آن تنها شامل یک عضو باشد را تابع ثابت می‌نامند و ضابطه آن به صورت $k \in \mathbb{R}$; $f(x) = k$ است.

تابع یک‌به‌یک در نمایش زوج مرتبی

برای آن‌که تابعی مانند f یک‌به‌یک باشد، باید هم تابع باشد [یعنی هیچ دو زوج مرتب متمایزی مؤلفه‌های اول برابر نداشته باشند] و هم یک‌به‌یک باشد [یعنی هیچ دو زوج مرتب متمایزی مؤلفه‌های دوم برابر نداشته باشند].

نتیجه کلی: در حالت زوج مرتبی، تابع زمانی یک‌به‌یک است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی نه مؤلفه اول (x) یکسان و نه مؤلفه دوم (y) یکسان داشته باشند.



۸- فرض کنید f خطی و $g(x) = \sqrt{f(x)}$ باشد، اگر نمودار f و g^{-1} در نقطه $A(3, 5)$ متقاطع باشند، مقدار $f(0)$ کدام است؟

(۱) -۱ (۲) ۱ (۳) -۲ (۴) ۲

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط - خط به خط - استاندارد) - حسابان ۱ صفحه ۵۸ - ۱۱۰۲

با توجه به فرض سوال، $f(3) = 5$ ، $g^{-1}(3) = 5$ ، $f(x) = ax + b$ و $g(x) = \sqrt{ax + b}$ است و همچنین می‌دانیم:

$$۱) f(3) = 5 \Rightarrow 3a + b = 5$$

$$g^{-1}(b) = a \Leftrightarrow g(a) = b \text{، پس:}$$

$$۲) g^{-1}(3) = 5 \Rightarrow g(5) = 3 \Rightarrow \sqrt{5a + b} = 3 \Rightarrow 5a + b = 9$$

$$\begin{cases} 3a + b = 5 & \text{(I)} \\ 5a + b = 9 & \text{(II)} \end{cases}$$

معادله (I) را از (II) کم می‌کنیم:

$$5a + b - 3a - b = 9 - 5 \Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow a = 2$$

$$3a + b = 5 \Rightarrow b = 5 - 3a \xrightarrow{a=2} b = 5 - 6 = -1$$

$$f(x) = 2x - 1 \xrightarrow{x=0} f(0) = -1$$

بنابراین داریم:



- ۹- نمودار تابع $f(x) = x^2 - 2x - 4$ با دامنه $[1, +\infty)$ نمودار وارون خود را در نقطه‌ای به طول α قطع می‌کند، مقدار $f(2\alpha)$ کدام است؟
- (۱) ۴۶ (۲) ۴۲ (۳) ۴۴ (۴) ۴۸

پاسخ: گزینه ۳

(متوسط - مفهومی - سریع) - حسابان ۱ صفحه ۶۱ - ۱۱۰۲

چون نمودار $f(x)$ در بازه $[1, +\infty)$ اکیداً صعودی است، پس برای یافتن نقطه برخورد f با f^{-1} در این سوال، کافی است نمودار f را با خط $y = x$ تقاطع دهیم.

$$f(x) = x \Rightarrow x^2 - 2x - 4 = x$$

$$x \geq 1: x^2 - 3x - 4 = 0 \xrightarrow{b=a+c} \begin{cases} x = -1 \text{ ✗} \\ x = -\frac{c}{a} = 4 \text{ ✓} \end{cases}$$

$$\alpha = 4, f(2\alpha) = f(8)$$

$$\Rightarrow f(8) = 64 - 16 - 4 = 44$$

حالت‌های خاص حل معادله درجه دوم

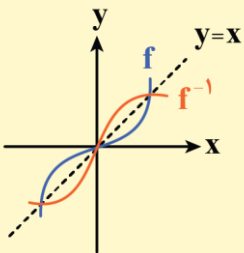
در حالت‌های خاص حل معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ داریم:

$$1) b = a + c \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -\frac{c}{a} \end{cases}$$

$$2) a + b + c = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{c}{a} \end{cases}$$

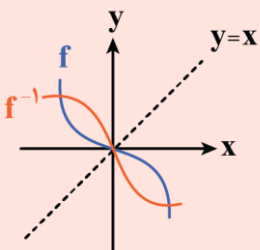
نقاط برخورد تابع با وارونش

اگر f اکیداً صعودی باشد، محل تلاقی دو تابع f و f^{-1} در صورت وجود روی نیمساز ناحیه اول و سوم است و برای یافتن طول‌های محل تلاقی کافی است به جای معادله $f(x) = f^{-1}(x)$ ، معادله $f(x) = x$ را حل کنیم.



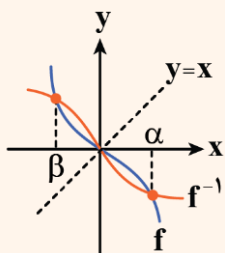
تذکره!

اگر f اکیداً نزولی باشد، ممکن است f و f^{-1} نقاط تلاقی غیر از نیمساز ناحیه اول و سوم داشته باشند. (البته این نقاط نسبت به خط $y = x$ تقارن دارند).



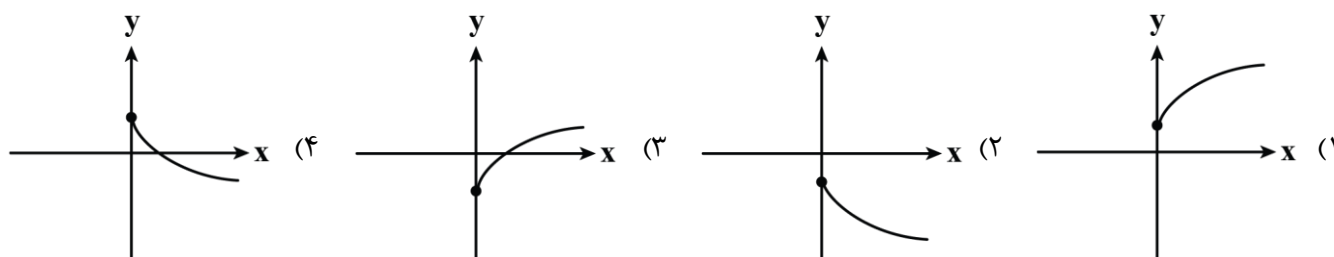
یه نمونه باحال ببین!

چون f اکیداً نزولی است مشاهده می‌شود که α و β جواب‌های $f^{-1}(x) = f(x)$ هستند اما جواب‌های $f(x) = x$ نیستند.



• • •

۱۰- دامنه تابع $f(x) = \sqrt{2ax - 3b}$ بازه $(-\infty, -3]$ است. نمودار تابع $g(x) = a\sqrt{x} + b$ به کدام صورت زیر می‌تواند باشد؟



پاسخ: گزینه ۴

(متوسط - مفهومی - استاندارد) - حسابان ۱ صفحه ۴۷ و ۵۳ - ۱۱۰۲

دامنه تابع به صورت $x \leq -3$ است.

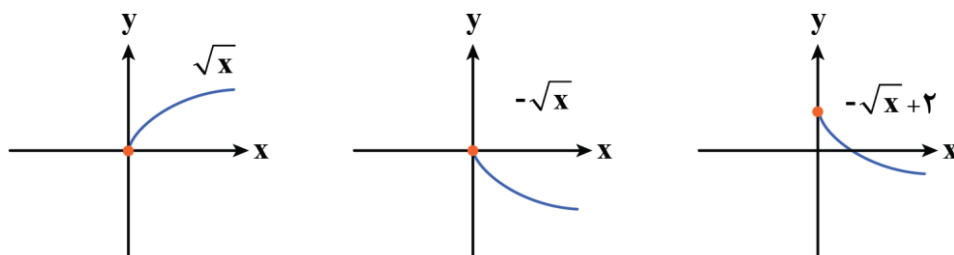
از طرفی شرط دامنه را می‌نویسیم:

پس $a < 0$ و $\frac{3b}{2a} = -3$ یا $b = -2a$ است.

برای سادگی کار می‌توان مقادیر فرضی $a = -1$ و $b = 2$ را در نظر گرفت.

$$g(x) = a\sqrt{x} + b = -\sqrt{x} + 2$$

نمودار g به صورت مقابل است:



نمودار به دست آمده مشابه گزینه ۴ است.

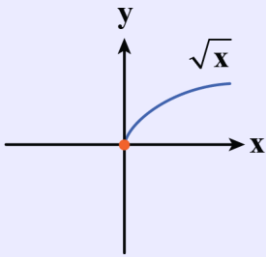
توابع رادیکالی

به طور کلی توابع به فرم $y = \sqrt[n]{f(x)}$ را توابع رادیکالی می‌نامند.

دامنه تابع رادیکالی: برای محاسبه دامنه تابع $y = \sqrt[n]{f(x)}$ (با فرجه زوج) کافی است نامعادله $f(x) \geq 0$ را حل کنیم و حاصل را با دامنه تابع f اشتراک بگیریم.

$$D = D_f \cap \{x | f(x) \geq 0\}$$

رسم توابع رادیکالی: بهترین روش برای رسم توابع رادیکالی استفاده از تبدیلات نمودارها روی نمودار پایه‌ای زیر است. با دانستن این نمودار و انتقال‌ها می‌توان به سادگی تابع $a\sqrt{bx+c}+d$ را رسم کرد.



جمع‌بندی رسم نمودار تابع

اگر نمودار تابع $y = f(x)$ را در اختیار داشته باشیم، برای رسم نمودار تابع $y = af(bx+c)+d$ به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

الف) تأثیرات روی دامنه

(۱) تأثیر عدد ثابت c: اگر $c > 0$ باشد، نمودار تابع را به اندازه c واحد به سمت چپ و اگر $c < 0$ باشد، نمودار تابع را به اندازه $|c|$ واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم.

(۲) تأثیر ضریب x: طول تمامی نقاط را در $\frac{1}{|b|}$ ضرب می‌کنیم. (اگر b منفی باشد نمودار تابع نسبت به محور y قرینه هم می‌شود).

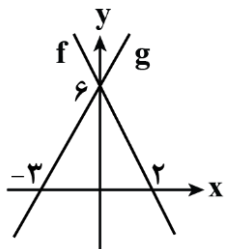
ب) تأثیرات روی برد

(۳) تأثیر ضریب f: عرض تمامی نقاط را در $|a|$ ضرب می‌کنیم. (اگر a منفی باشد نمودار تابع نسبت به محور x ها قرینه هم می‌شود).

(۴) تأثیر عدد ثابت d: اگر $d > 0$ باشد، نمودار تابع را به اندازه d واحد به سمت بالا و اگر $d < 0$ باشد، نمودار تابع را به اندازه $|d|$ واحد به سمت پایین منتقل می‌کنیم.



۱۱- نمودار توابع خطی f و g به صورت مقابل است. اگر $f^{-1}(a-1) + g^{-1}(a+1) = 1$ باشد، مقدار a کدام است؟



- (۱) ۷
- (۲) ۵
- (۳) ۸
- (۴) ۴

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) حسابان ۱ صفحه ۵۹ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۱

گام اول

ضابطه توابع f و g را می‌نویسیم:

$$\begin{aligned}
 g(x) = ax + b &\Rightarrow \begin{cases} (-3, 0) \Rightarrow -3a + b = 0 \\ (0, 6) \Rightarrow 0 + b = 6 \Rightarrow b = 6 \end{cases} \Rightarrow -3a + 6 = 0 \Rightarrow -3a = -6 \Rightarrow a = 2 \\
 \Rightarrow g(x) &= 2x + 6 \\
 f(x) = mx + n &\Rightarrow \begin{cases} (2, 0) \Rightarrow 2m + n = 0 \\ (0, 6) \Rightarrow 0 + n = 6 \Rightarrow n = 6 \end{cases} \Rightarrow 2m + 6 = 0 \Rightarrow 2m = -6 \Rightarrow m = -3 \\
 \Rightarrow f(x) &= -3x + 6
 \end{aligned}$$

ضابطه وارون توابع f و g را محاسبه می‌کنیم:

$$g(x) = 2x + 6 \Rightarrow y = 2x + 6 \Rightarrow y - 6 = 2x \Rightarrow x = \frac{y-6}{2} \Rightarrow g^{-1}(x) = \frac{x-6}{2}$$

$$f(x) = -3x + 6 \Rightarrow y = -3x + 6 \Rightarrow y - 6 = -3x \Rightarrow x = \frac{y-6}{-3} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-6}{-3}$$

معادله داده‌شده را تشکیل می‌دهیم و مقدار a را به دست می‌آوریم:

$$f^{-1}(a-1) + g^{-1}(a+1) = 1 \Rightarrow \frac{(a-1)-6}{-3} + \frac{(a+1)-6}{2} = 1 \Rightarrow \frac{a-7}{-3} + \frac{a-5}{2} = 1$$

$$\xrightarrow{\times 6} -2(a-7) + 3(a-5) = 6 \Rightarrow -2a + 14 + 3a - 15 = 6 \Rightarrow a = 15 - 14 + 6 \Rightarrow a = 7$$



۱۲- از مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4\}$ به مجموعه $B = \{1, 3, 5, 7\}$ چند تابع یک به یک مانند f می‌توان نوشت به طوری که $f(1) = 7$ و $f(2) \neq 1$ باشد؟

۴ (۴)

۹ (۳)

۶ (۲)

۸ (۱)

(آسان - ترکیبی - استاندارد) حسابان ۱ صفحه ۵۶ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۴

بررسی سریع:

$$f = \{(1, 7), (2, 0), (3, 0), (4, 0)\}$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 \times & 2 \times & 1 = 4 \end{array}$$

تابع f را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$f = \{(1, 7), (2, f(2)), (3, f(3)), (4, f(4))\}$$

$f(2)$ می‌دانیم $f(1) = 7$ و $f(2) \neq 1$ و چون تابع یک به یک است، بنابراین فقط دو حالت از مجموعه B برای $f(2)$ وجود دارد.

$f(3)$ چون $f(1) = 7$ و یکی از عضوهای مجموعه برای $f(2)$ انتخاب شد و می‌دانیم تابع یک به یک است، پس $f(2) \neq f(3)$ ، بنابراین دو حالت از مجموعه B برای $f(3)$ وجود دارد.

$f(4)$ چون $f(1) = 7$ و دو عضو برای $f(2)$ و $f(3)$ انتخاب شده و تابع یک به یک است تنها یک حالت از مجموعه B ممکن است.

$$2 \times 2 \times 1 = 4 \text{ کل حالات}$$



۱۳- اگر $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ باشد، مجموع طول نقاط برخورد توابع f^{-1} و $\frac{1}{f}$ چقدر است؟

-۳ (۴)

-۶ (۳)

۶ (۲)

۳ (۱)

(متوسط - مفهومی - زمان‌بر) حسابان ۱ صفحه ۵۸ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۳

برای محاسبه وارون تابع دو روش داریم:

با عوض کردن جای x و y و سپس محاسبه y بر حسب x ، وارون f به دست می‌آید:

$$y = \frac{2x+1}{x-1} \xrightarrow{\text{وارون}} x = \frac{2y+1}{y-1} \Rightarrow xy - x = 2y + 1 \Rightarrow y = \frac{x+1}{x-2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-2}$$

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}$$

برای به دست آوردن وارون تابع داریم:

پس:

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-1} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-2}$$

گام دوم

اکنون معادله $f^{-1} = \frac{1}{f}$ را حل می کنیم:

$$\frac{1}{f} = \frac{x-1}{2x+1} \Rightarrow \frac{x-1}{2x+1} = \frac{x+1}{x-2} \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 2x^2 + 3x + 1 \Rightarrow x^2 + 6x - 1 = 0$$

$$\Delta = 36 - 4(-1) = 40 > 0$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -6$$

روش سریع تابع وارون!

وارون تابع $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ به صورت $f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}$ می باشد.

تذکره!

علامت -1 در f^{-1} توان نیست یعنی $f^{-1}(x)$ به معنی $\frac{1}{f(x)}$ نمی باشد، بلکه به معنای وارون تابع f است.

• • iBiomaze • •

۱۴- به ازای چند مقدار صحیح m تابع $f(x) = \begin{cases} 3-2x & x \leq 1 \\ mx+3-2m & x > 1 \end{cases}$ با دامنه $\mathbb{R}$ یک به یک است؟

۳ (۴)

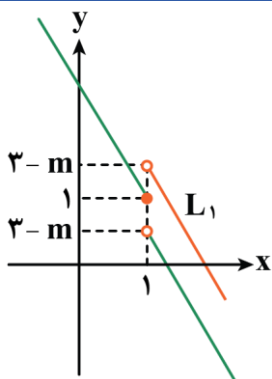
۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

(سخت - ترکیبی - زمان بر) - حسابان ۱ صفحه ۵۷ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۱



می دانیم نمودار یک تابع زمانی یک به یک است که خطوط افقی نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کنند، پس با توجه به نمودار ضابطه اول، شیب خط ضابطه دوم نیز باید منفی باشد.

مقدار ضابطه اول به ازای $x=1$ برابر ۱ است و مقدار ضابطه دوم به ازای $x=1$ نباید بیشتر از ۱ باشد، زیرا اگر بیشتر باشد نمودار مانند خط L_1 رسم می شود که شرط یک به یک بودن را ندارد.

$$\begin{cases} m < 0 \Rightarrow \text{شیب ضابطه دوم} \end{cases} \quad \text{(I)}$$

$$\begin{cases} 3-m \leq 1 \Rightarrow m \geq 2 \end{cases} \quad \text{(II)}$$

اشتراک (I) و (II) تهی می شود. پس به ازای هیچ مقداری از m تابع نمی تواند یک به یک باشد.

• • iBiomaze • •

۱۵- تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & x \leq 2 \\ x - 3 & x > 2 \end{cases}$ مفروض است. به ازای چند مقدار m تساوی $f(2 - |m|) = f(3 + |m|)$ برقرار است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

(متوسط - محاسباتی - زمان پُر - حسابان ۱ صفحه ۵۳ - ۱۱۰۲)

پاسخ: گزینه ۳

دو حالت در نظر می گیریم:

حالت اول

به ازای $m = 0$ داریم:

$$f(2) = f(3) \Rightarrow 4 - 4 = 3 - 3$$

پس $m = 0$ ، یک جواب قابل قبول است.

حالت دوم

به ازای $m \neq 0$ ، حاصل $2 - |m|$ از ۲ کمتر و $3 + |m|$ از ۳ بیشتر است. پس:

$$f(2 - |m|) = f(3 + |m|) \Rightarrow (2 - |m|)^2 - 2(2 - |m|) = 3 + |m| - 3$$

$$|m| = a \Rightarrow 4 - 4a + a^2 - 4 + 2a = a \Rightarrow a^2 = 3a \Rightarrow a = 0 \text{ یا } 3$$

$$\Rightarrow |m| = 0 \text{ یا } |m| = 3 \Rightarrow m = 0, 3, -3$$

پس در مجموع ۳ مقدار قابل قبول برای آن وجود دارد.



۱۶- حداقل چند عضو از رابطه $f = \left\{ (x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z}, \frac{12}{1+|y|} = |x| \right\}$ حذف شود تا تبدیل به یک تابع یک به یک شود؟

(۱) ۱۲ (۲) ۱۱ (۳) ۶ (۴) ۵

(متوسط - خط به خط - زمان پُر - حسابان ۱ صفحه ۵۵ - ۱۱۰۲)

پاسخ: گزینه ۲

با توجه به این که x و y صحیح اند، پس $1 + |y|$ یکی از مقسوم علیه های ۱۲ است.

$$1 + |y| = 1, 2, 3, 4, 6, 12$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |x| = 12 \\ |y| = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 12 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} |x| = 6 \\ |y| = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 6 \\ y = \pm 1 \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} |x| = 4 \\ |y| = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 4 \\ y = \pm 2 \end{cases}$$

$$\text{یا} \quad \begin{cases} |x| = 3 \\ |y| = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 3 \\ y = \pm 3 \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} |x| = 2 \\ |y| = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 2 \\ y = \pm 5 \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} |x| = 1 \\ |y| = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \pm 11 \end{cases}$$

به جز دسته اول یعنی $|x| = 12$ و $|y| = 0$ که فقط یک عضو باید حذف شود از سایر دسته ها، حداقل باید دو عضو حذف شود، پس جمعاً حداقل باید ۱۱ عضو حذف شود.



۱۷- مجموعه جواب نامعادله $-1 < \frac{1}{4}[-x] + 1 \leq 2$ به کدام صورت زیر است؟

(۴) $[a, b]$

(۳) (a, b)

(۲) $(a, b]$

(۱) $[a, b]$

(متوسط - مفهومی - سریع) حسابان ۱ صفحه ۵۲ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۲

بررسی سریع:

$$-1 < \frac{1}{4}[-x] + 1 \leq 2 \Rightarrow -3 < x \leq 3 \Rightarrow (a, b]$$

$$-1 < \frac{1}{4}[-x] + 1 \leq 2 \Rightarrow -4 < [-x] \leq 2 \Rightarrow -3 \leq -x < 3 \Rightarrow -3 < x \leq 3$$

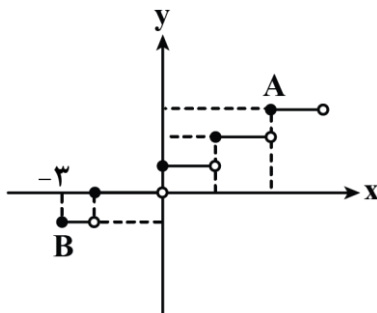
پس جواب برابر بازه $(-3, 3]$ است که به صورت $(a, b]$ می‌باشد.

دام تستی!

اگر تو مرحله آخر نامساوی‌ها رو جابه‌جا نکنی به گزینه اشتباه ۴ می‌رسی!



۱۸- قسمتی از نمودار تابع $f(x) = \left[\frac{1}{4}x\right] + 1$ به صورت مقابل است. شیب پاره خط AB کدام است؟



(۱) $\frac{4}{5}$

(۲) $\frac{4}{7}$

(۳) $\frac{3}{5}$

(۴) $\frac{3}{7}$

(متوسط - خط به خط - استاندارد) حسابان ۱ صفحه ۵۳ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۲

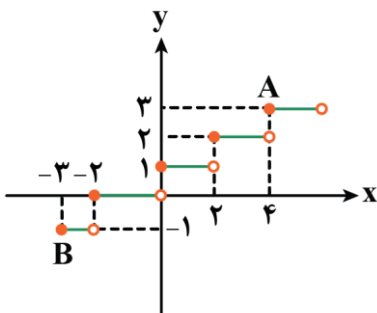
بررسی سریع:

با توجه به ضریب x طول هر پله ۲ واحد است و نمودار ۱ واحد به بالا رفته. پس:

$$\begin{cases} A(4, 3) \\ B(-3, -1) \end{cases}$$

$$AB \text{ شیب: } m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{3 - (-1)}{4 - (-3)} = \frac{4}{7}$$

روش اول



با توجه به ضریب $\frac{1}{4}$ داخل جزء صحیح، محور x ها، به بازه‌هایی به طول دو واحد تقسیم‌بندی می‌شود

و بعد نمودار $\left[\frac{1}{4}x\right]$ یک واحد به سمت بالا می‌آید.

$$\begin{cases} A(4, 3) \\ B(-3, -1) \end{cases}$$

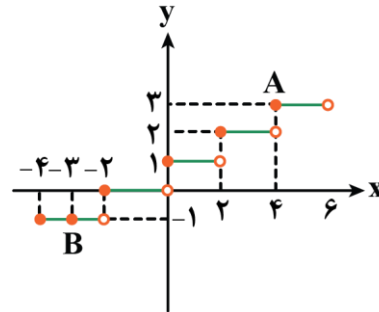
$$AB \text{ شیب: } m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{3 - (-1)}{4 - (-3)} = \frac{4}{7}$$

$$f(x) = \left[\frac{1}{2}x \right] + 1$$

رسم نمودار تابع به روش بازه‌بندی:

حدود $\frac{1}{2}x$	$-2 \leq \frac{1}{2}x < -1$	$-1 \leq \frac{1}{2}x < 0$	$0 \leq \frac{1}{2}x < 1$	$1 \leq \frac{1}{2}x < 2$	$2 \leq \frac{1}{2}x < 3$
$\left[\frac{1}{2}x \right]$	-2	-1	0	1	2
$f(x) = \left[\frac{1}{2}x \right] + 1$	$f(x) = -2 + 1 = -1$	$f(x) = -1 + 1 = 0$	$f(x) = 0 + 1 = 1$	$f(x) = 1 + 1 = 2$	$f(x) = 2 + 1 = 3$
حدود x	$-4 \leq x < -2$	$-2 \leq x < 0$	$0 \leq x < 2$	$2 \leq x < 4$	$4 \leq x < 6$

$$f(x) = \begin{cases} -1 & : -4 \leq x < -2 \\ 0 & : -2 \leq x < 0 \\ 1 & : 0 \leq x < 2 \\ 2 & : 2 \leq x < 4 \\ 3 & : 4 \leq x < 6 \end{cases} \Rightarrow$$



$$A(4, 3)$$

$$B(-3, -1)$$

پس مختصات نقاط A و B به صورت مقابل است:

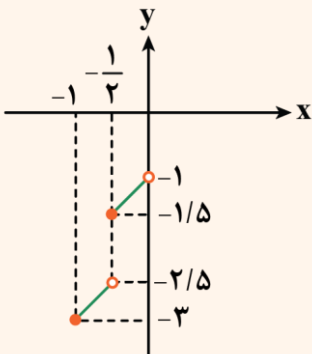
$$\Rightarrow m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{3 - (-1)}{4 - (-3)} = \frac{4}{7}$$

روش کلی رسم توابع جزء صحیح

برای رسم توابع جزء صحیح به روش بازه‌بندی عمل می‌کنیم به این گونه که حاصل جزء صحیح را برابر عدد صحیح قرار می‌دهیم و مطابق ویژگی جزء صحیح تابع را چندضابطه‌ای می‌کنیم و بعد رسم می‌کنیم.

یه نمونه باحال ببین!

$$f(x) = [2x + 1] + x - 1$$



$$\vdots$$

$$[2x + 1] = -1 \Rightarrow -1 \leq 2x + 1 < 0 \Rightarrow -1 \leq x < -\frac{1}{2} \Rightarrow f(x) = -1 + x - 1 = x - 2$$

$$[2x + 1] = 0 \Rightarrow 0 \leq 2x + 1 < 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq x < 0 \Rightarrow f(x) = 0 + x - 1 = x - 1$$

$$\vdots$$

$$f(x) = \begin{cases} \vdots \\ x - 2 & : -1 \leq x < -\frac{1}{2} \\ \vdots \\ x - 1 & : -\frac{1}{2} \leq x < 0 \\ \vdots \end{cases}$$

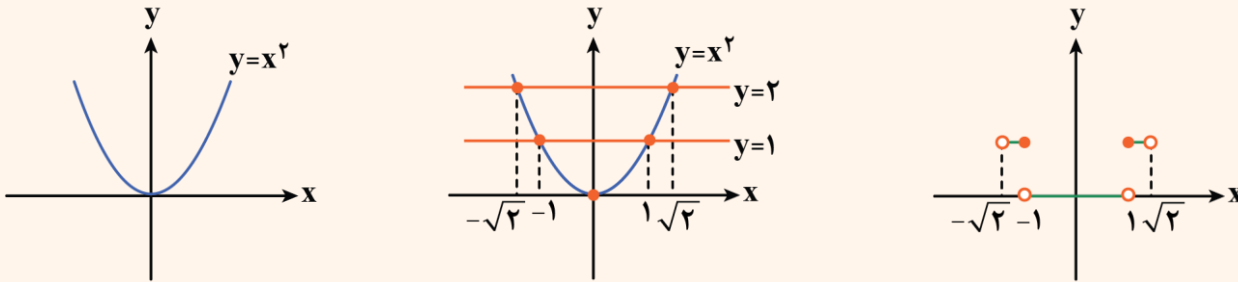
در مثال فوق ۲ بازه از آن رسم شده است برای دیگر بازه‌ها هم می‌توان رسم کرد.

حالت‌های خاص:

۱) رسم نمودار $y = [f(x)]$: ابتدا نمودار $f(x)$ را رسم می‌کنیم. خطوط $y = k$ ($k \in \mathbb{Z}$) را طوری رسم می‌کنیم که نمودار تابع را قطع کنند، قسمت‌هایی از منحنی که بین دو خط متوالی است روی خط پایین تصویر می‌کنیم.

یه نمونه باحال ببین!

$$f(x) = [x^2]$$

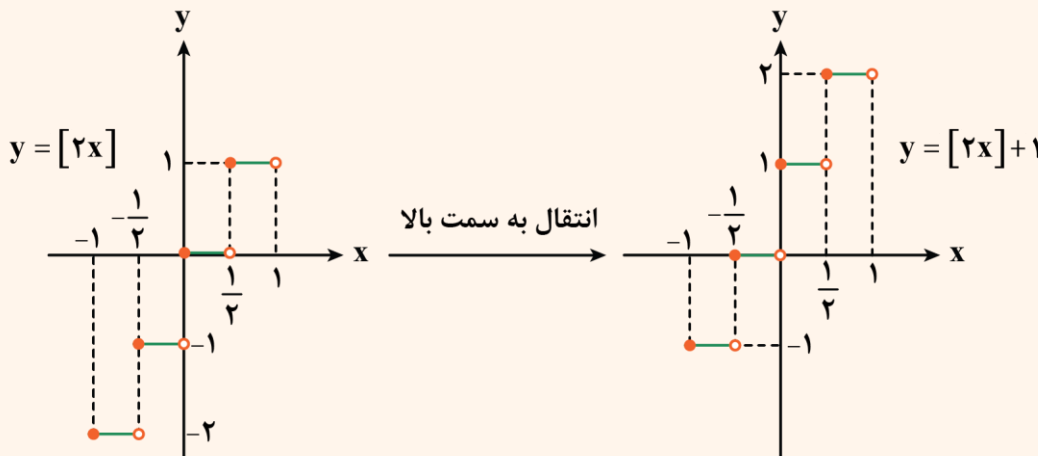


۲) رسم نمودار $y = [ax]$: در رسم نمودار $y = [ax]$ طول بازه‌ها روی محور x ، $\frac{1}{|a|}$ است.

یه نمونه باحال ببین!

$$y = [2x] + 1$$

می‌دانیم طول بازه‌های x ، $\frac{1}{2}$ است و همچنین نمودار ۱ واحد به سمت بالا انتقال می‌یابد.



۱۹- معادله $2\left[\frac{4}{3}x\right] - 3x = 0$ چند جواب دارد؟

۲ (۴)

۳ (۳)

۷ (۲)

۹ (۱)

(سخت - مفهومی - زمان‌بر) - حسابان ۱ صفحه ۵۱ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۱

$$2\left[\frac{4}{3}x\right] - 3x = 0 \Rightarrow 2\left[\frac{4}{3}x\right] = 3x \Rightarrow \left[\frac{4}{3}x\right] = \frac{3}{2}x \quad (*)$$

$$\frac{4}{3}x = k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3}x = k \Rightarrow x = \frac{3k}{4}$$

می‌دانیم که حاصل جزء صحیح عددی صحیح است، پس داریم:

$x = \frac{2k}{3}$ را در معادله (*) جایگزین می‌کنیم:

$$\left[\frac{4}{3} \left(\frac{2k}{3} \right) \right] = k \Rightarrow \left[\frac{8}{9} k \right] = k$$

با توجه به ویژگی‌های جزء صحیح داریم:

$$\left[\frac{8}{9} k \right] = k \Rightarrow k \leq \frac{8}{9} k < k+1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{8k}{9} \geq k \Rightarrow 8k \geq 9k \Rightarrow -k \geq 0 \Rightarrow k \leq 0 & \text{(I)} \\ \frac{8k}{9} < k+1 \Rightarrow 8k < 9k+9 \Rightarrow -k < 9 \Rightarrow k > -9 & \text{(II)} \end{cases}$$

اشتراک بازه‌های (I) و (II) را به دست می‌آوریم:

$$-9 < k \leq 0$$

چون k صحیح است ۹ مقدار برای آن وجود دارد.

ویژگی‌های جزء صحیح

مثال	ویژگی
$[-1/4] = -2$ $[6] = 6$	(۱) عددی که جزء صحیح می‌دهد همواره صحیح است. $[x] = k, k \in \mathbb{Z}$
$[x-2] = [x] - 2$	(۲) اگر k عددی صحیح باشد، آن‌گاه: $[x+k] = [x] + k; k \in \mathbb{Z}$
$[2/5] = 2 \Rightarrow [2/5] < 2/5$	(۳) به‌ازای هر $x \in \mathbb{R}, x \leq [x]$ دو حالت داریم: ۱) $[x] < x : x \notin \mathbb{Z}$ ۲) $[x] = x : x \in \mathbb{Z}$ در حالت کلی: $x-1 < [x] \leq x$
$[-1/2] = - \underbrace{[1/2]}_1 - 1 = -2$	(۴) اگر $x \notin \mathbb{Z}$ باشد: $[-x] = -[x] - 1$
$[x] = -2 \Rightarrow -2 \leq x < -1$	(۵) برای هر $k \in \mathbb{Z}$ از $[x] = k$ می‌توان نتیجه گرفت: $[x] = k \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k \leq x < k+1$



۲۰- اگر $f(x) = x - [x]$ و $f(\frac{3m}{4}) = f(-2m)$ باشد، آن‌گاه m در بازه (۲, ۳) چند جواب دارد؟

۴ (۴)

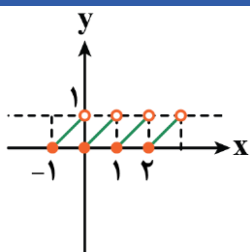
۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

(سخت - محاسباتی - زمان‌بر) - حسابان ۱ صفحه ۵۱ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۳



نمودار تابع $y = x - [x]$ به صورت مقابل است.

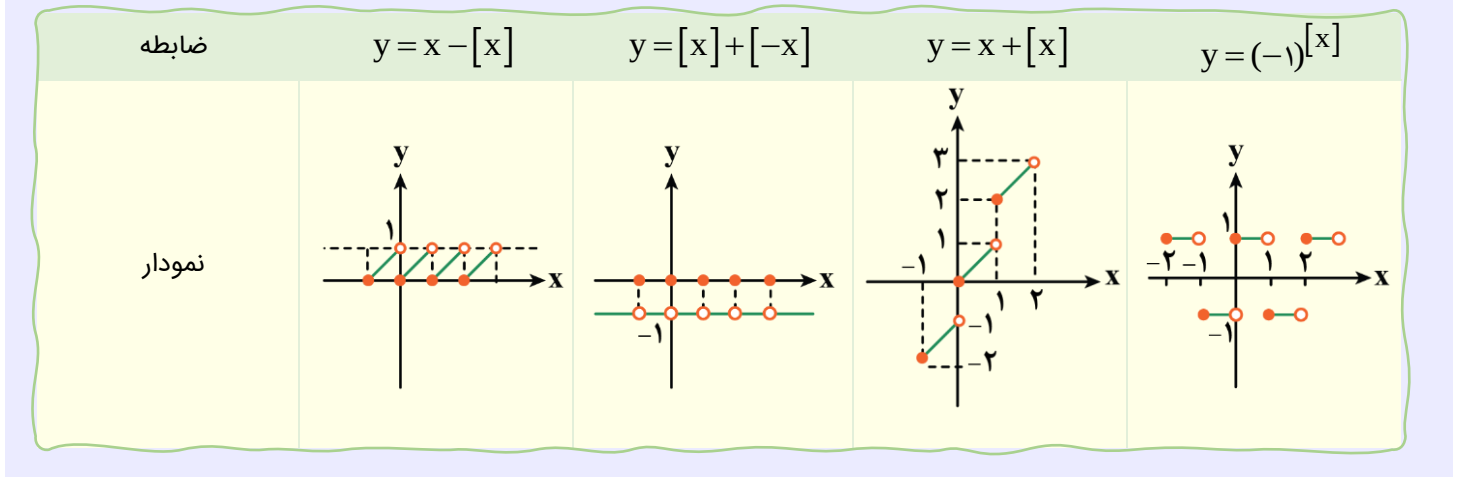
اگر $f(a) = f(b)$ باشد، آن‌گاه $a - b$ برابر یک عدد صحیح است.

$$f\left(\frac{3m}{2}\right) = f(-2m) \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} \frac{3m}{2} - (-2m) = k \Rightarrow \frac{5m}{2} = k \Rightarrow m = \frac{2k}{5}$$

$$2 < m < 3 \Rightarrow 2 < \frac{2k}{5} < 3 \Rightarrow 5 < k < \frac{15}{2}$$

پس برای k ، سه مقدار ۸، ۹، ۱۰ یافت می‌شود.

نمودارهای مهم جزء صحیح



۲۱- نسبت مساحت شش ضلعی منتظم محاطی به مساحت شش ضلعی منتظم محیطی در دایره‌ای به شعاع $2\sqrt{3}$ چقدر است؟

۰/۸ (۴)

۰/۷۵ (۳)

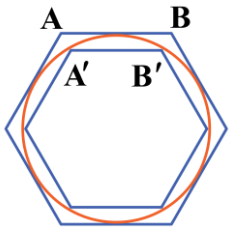
۰/۶ (۲)

۰/۵ (۱)

(متوسط - ترکیبی - استاندارد) - هندسه ۲ صفحه ۳۰ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۳

می‌دانیم اگر در دایره به شعاع r دو n ضلعی منتظم محاطی و محیطی رسم کنیم، آن‌گاه:



$$AB = 2r \tan \frac{180^\circ}{n}$$

طول ضلع n ضلعی منتظم محیطی

$$A'B' = 2r \sin \frac{180^\circ}{n}$$

طول ضلع n ضلعی منتظم محاطی

از طرف دیگر هر دو n - ضلعی منتظم، متشابه هستند، پس نسبت تشابه دو n ضلعی منتظم محاط و محیط بر دایره به شعاع r برابر است با:

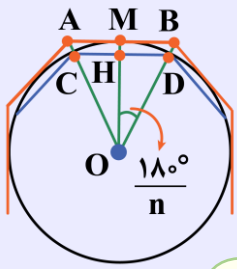
$$k = \frac{A'B'}{AB} = \frac{2r \sin \frac{180^\circ}{n}}{2r \tan \frac{180^\circ}{n}} = \cos \frac{180^\circ}{n}$$

بنابراین نسبت مساحت شش ضلعی منتظم محاطی به مساحت شش ضلعی منتظم محیطی برابر است با:

$$\frac{S'}{S} = k^2 = \cos^2 \frac{180^\circ}{6} = \cos^2 30^\circ = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} = 0.75$$

۱۱ ضلعی منتظم محیطی و محاطی

هر n ضلعی منتظم قابل محاط شدن در یک دایره و همچنین قابل محیط شدن بر یک دایره است.



در یک دایره به شعاع r ، طول n ضلعی منتظم محاطی و محیطی و مساحت آن‌ها از روابط زیر محاسبه می‌شود:

$$AB = 2r \tan \frac{180^\circ}{n} \Rightarrow S = nr^2 \tan \frac{180^\circ}{n}$$

طول ضلع n ضلعی منتظم محیطی

$$CD = 2r \sin \frac{180^\circ}{n} \Rightarrow S = \frac{n}{2} r^2 \sin \frac{360^\circ}{n}$$

طول ضلع n ضلعی منتظم محاطی

نکات مهم!

- (۱) هر دو n ضلعی منتظم همواره با یکدیگر متشابه‌اند.
- (۲) نسبت مساحت دو شکل متشابه برابر مربع نسبت تشابه است.



۲۲- در مثلث ABC به اضلاع $۹/۰$ و $۴/۱$ ، اگر r_a, r_b و شعاع دایره‌های محاطی خارجی آن باشند، آن‌گاه حاصل $\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$

برابر کدام است؟

(۴) $۲/۵$

(۳) $۲/۴$

(۲) $۰/۸$

(۱) $۰/۴$

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - هندسه ۲ صفحه ۲۹ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۴

می‌دانیم مثلث با اضلاع ۹، ۴۰ و ۴۱ قائم‌الزاویه است، پس اعداد ۹، ۴۰ و ۴۱ فیثاغورسی هستند، بنابراین مضارب آن‌ها یعنی ۹/۰، ۴/۱ و هم فیثاغورسی می‌باشند، در نتیجه:

$$S = \frac{1}{2} (9/0)(4) = 1/8$$

مساحت مثلث ABC

$$P = \frac{4/1 + 4 + 9/0}{2} = 4/5$$

نصف محیط مثلث ABC

$$r = \frac{S}{P} = \frac{1/8}{4/5} = \frac{5}{40} = \frac{1}{8}$$

شعاع دایره محاطی داخلی

از طرف دیگر، بین شعاع دایره‌های محاطی خارجی و شعاع دایره محاطی داخلی، رابطه $\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$ برقرار است، بنابراین جواب برابر

است با:

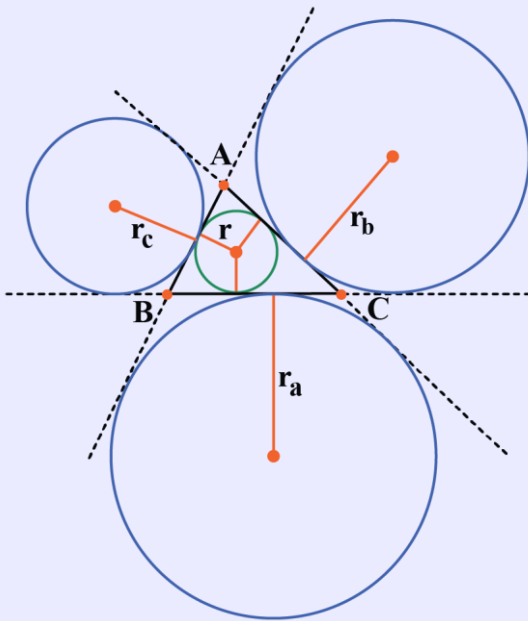
$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r} = \frac{5}{2} = ۲/۵$$

 دایره‌های محاطی مثلث

مثلث ABC را در شکل زیر در نظر بگیرید:

دایره محاطی داخلی: دایره‌ای است که درون مثلث بوده و بر سه ضلع آن مماس است.

شعاع دایره محاطی داخلی:



$$r = \frac{S}{P}$$

دایره محاطی خارجی: دایره‌ای است که بیرون مثلث بوده و بر یک ضلع مثلث و امتداد دو ضلع دیگر آن مماس است.

شعاع دایره‌های محاطی خارجی:

$$r_a = \frac{S}{P - a}$$

$$r_b = \frac{S}{P - b}$$

$$r_c = \frac{S}{P - c}$$

 ارتباط بین شعاع‌های دایره‌های محاطی داخلی و خارجی

به راحتی می‌توان اثبات کرد بین شعاع دایره محاطی داخلی و شعاع دایره‌های محاطی خارجی، رابطه زیر برقرار است:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$$

اگر h_a ، h_b و h_c اندازه‌های سه ارتفاع مثلث ABC باشند، داریم:

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$$

 میانبر سه‌تایی فیثاغورسی رو که بلدی نه؟

چند دسته عدد پرتکرار داریم که در رابطه فیثاغورس صدق می‌کنند و بهتر است همیشه آن‌ها را حفظ باشیم. این چند دسته عبارتند از:

$$3, 4, 5 \longrightarrow 3^2 + 4^2 = 5^2$$

$$5, 12, 13 \longrightarrow 5^2 + 12^2 = 13^2$$

$$9, 40, 41 \longrightarrow 9^2 + 40^2 = 41^2$$

این روش میانبر برای حذف محاسبات مربوط به رابطه فیثاغورس و سرعت عمل بیشتر است. وقتی دو عدد از بین این ۳ تا را داشته باشیم می‌توانیم بدون محاسبه، سومی را به دست بیاوریم.

ک برابر سه‌تایی‌های فیثاغورسی هم فیثاغورسی‌اند!

این نکته تکمیلی رو هم برای اونایی که دیگه خیلی می‌خوان خفن باشن بگیریم. اگه k به عدد صحیح باشه داریم:

$$(3k)^2 + (4k)^2 = (5k)^2$$

$$(5k)^2 + (12k)^2 = (13k)^2$$

$$(2 \times 3)^2 + (2 \times 4)^2 = (2 \times 5)^2 \Rightarrow 6^2 + 8^2 = 10^2$$

مثلا:

تذکر!

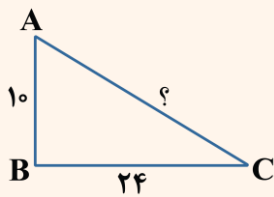
توجه داشته باشید که هر ۳ عدد باید در یک ضریب یکسان ضرب شوند، تا همچنان رابطه فیثاغورس برقرار باشد.

یه نمونه باحال ببین!

برای به دست آوردن طول ضلع AC با دقت به طول دو ضلع دیگر می‌بینیم:

$$10 = 2 \times 5$$

$$24 = 2 \times 12$$



$$2 \times 12 = 24$$

پس با سه‌تایی فیثاغورسی ۵، ۱۲ و ۱۳ سر و کار داریم که همگی دو برابر شده‌اند. در نتیجه عدد سوم برابر است با:



۲۳- اندازه قاعده‌های یک دوزنقه که هم محیطی و هم محاطی است با ریشه‌های معادله درجه دوم $3x^2 - 8\sqrt{3}x + 9 = 0$ برابر می‌باشد.

مساحت این دوزنقه کدام است؟

۱۲ (۴)

۸ (۳)

۲ (۲)

۴ (۱)

(متوسط - ترکیبی - استاندارد) - هندسه ۲ صفحه ۲۹ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۱

در صورتی که a و b طول قاعده‌های یک دوزنقه هم محاطی و هم محیطی باشند، آن‌گاه مساحت این دوزنقه برابر است با: $\sqrt{ab} \times \frac{a+b}{2}$.

از طرف دیگر a و b ریشه‌های معادله درجه دوم $3x^2 - 8\sqrt{3}x + 9 = 0$ هستند، پس:

$$ab = \text{ضرب ریشه‌ها} = \frac{9}{3} = 3, \quad a + b = \text{جمع ریشه‌ها} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

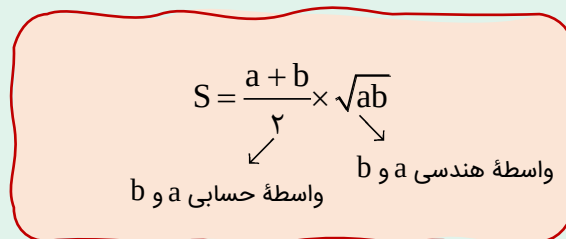
بنابراین:

$$\text{مساحت دوزنقه} = \sqrt{ab} \times \frac{a+b}{2} = \sqrt{3} \times \frac{8\sqrt{3}}{6} = \frac{8 \times 3}{6} = 4$$

قلقلشو یاد بگیر!

مساحت یک دوزنقه که هم محیطی و هم محاطی است برابر میانگین حسابی دو قاعده در میانگین هندسی آن‌هاست. اگر a و b طول قاعده‌های دوزنقه باشند، مساحت آن برابر است با:

$$S = \frac{a+b}{2} \times \sqrt{ab}$$





۲۴- چه تعداد از گزاره‌های زیر، همواره درست هستند؟

(الف) انتقال، شیب خط را حفظ می‌کند.

(ب) دوران با زاویه 90° موقعیت شکل اولیه را حفظ می‌کند.

(ج) بازتاب نسبت به خط نمی‌تواند شیب خط را حفظ کند.

(د) در تبدیل دوران هرگز شیب خط حفظ نمی‌شود.

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

(آسان - خط به خط - سریع) - هندسه ۲ صفحه ۳۳ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۲

بررسی موارد:



تبدیل انتقال، شیب خط را حفظ می‌کند، پس این گزاره درست است.



دوران 90° موقعیت شکل را تغییر می‌دهد، پس این گزاره نادرست است.



در صورتی که خط بر محور بازتاب عمود باشد یا با محور بازتاب موازی باشد، آن‌گاه بازتاب شیب خط را حفظ می‌کند، پس این گزاره هم نادرست است.

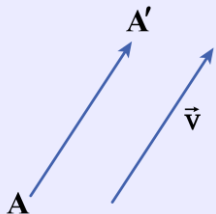


در دوران با زاویه 180° یا مضارب آن، شیب خط حفظ می‌شود، پس این گزاره نیز نادرست است.

بنابراین فقط ۱ گزاره یعنی گزاره (الف) درست می‌باشد.

ویژگی‌های تبدیلات هندسی

انتقال: انتقال با بردار $\vec{v}$ تبدیلی است در یک صفحه که در آن هر نقطه مانند A به نقطه‌ای مانند A' در آن صفحه تصویر می‌شود به طوری که $\vec{AA'} = \vec{v}$ به شکل مقابل توجه کنید:

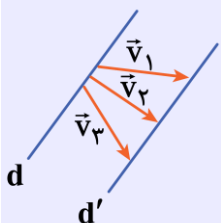


ویژگی‌های انتقال:

(۱) انتقال یک تبدیل طولیاست.

(۲) انتقال یافته هر خط، خطی موازی آن است، بنابراین انتقال شیب خط را حفظ می‌کند.

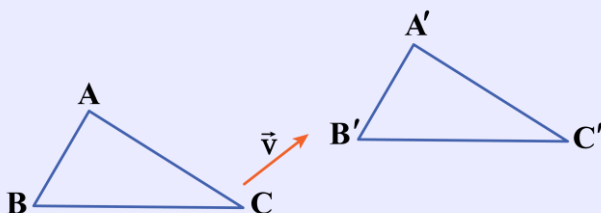
(۳) هر دو خط موازی d و d' انتقال یافته یکدیگرند و بی‌شمار بردار انتقال برای آن‌ها وجود دارد. (باید ابتدا و انتهای بردار روی دو خط باشد).



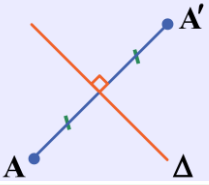
(۴) انتقال نقطه ثابت ندارد مگر آن‌که بردار انتقال صفر باشد.

(۵) انتقال اندازه زاویه را حفظ می‌کند.

(۶) انتقال جهت شکل را تغییر نمی‌دهد.



بازتاب: بازتاب نسبت به خط Δ تبدیلی است که تحت آن تصویر هر نقطه مانند A نسبت به خط Δ نقطه A' است، به طوری که خط AA' عمود منصف AA' باشد، به شکل زیر توجه کنید:



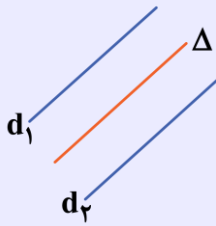
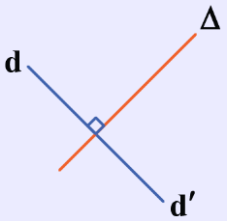
نقطه ثابت بازتاب

اگر نقطه A روی محور بازتاب باشد، تصویر آن بر خودش منطبق می‌شود. (نقطه ثابت بازتاب)

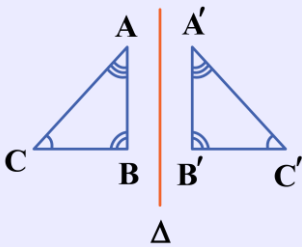


ویژگی‌های بازتاب:

- ۱) بازتاب، یک تبدیل طولیاست.
- ۲) بازتاب یک خط راست، یک خط راست است.
- ۳) بازتاب شیب خط را حفظ نمی‌کند، مگر که آن خط با محور بازتاب موازی یا بر آن عمود باشد.



۴) بازتاب اندازه زاویه‌ها را حفظ می‌کند.



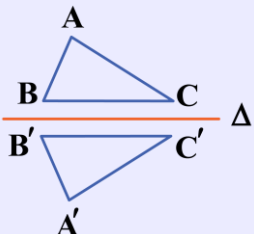
$$\hat{A} = \hat{A}'$$

$$\hat{B} = \hat{B}'$$

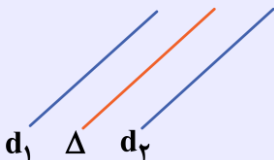
$$\hat{C} = \hat{C}'$$

۵) در بازتاب می‌توان بی‌شمار نقطه ثابت یافت. (نقاطی که روی محور بازتاب واقع شوند، ثابت باقی می‌مانند).

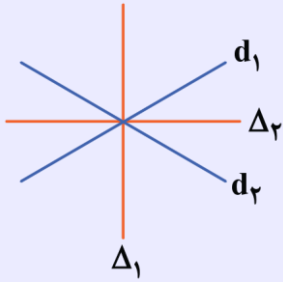
۶) بازتاب جهت شکل را حفظ نمی‌کند.



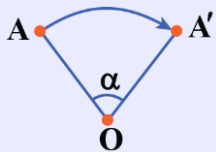
۷) هر دو خط موازی، نسبت به خط موازی وسط آن دو خط، بازتاب یکدیگرند.



۸) هر دو خط متقاطع، نسبت به نیمسازهای زاویه‌های بین آن دو خط، بازتاب یکدیگرند، پس ۲ خط متقاطع دارای محور بازتاباند.



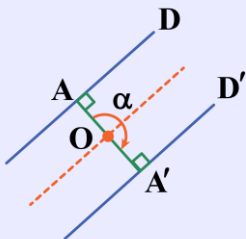
دوران: دوران به مرکز نقطه ثابت O و زاویه α تبدیلی است که تحت آن تصویر هر نقطه مانند A از صفحه، نقطه‌ای مانند A' از همان صفحه است. به شکل مقابل توجه کنید.



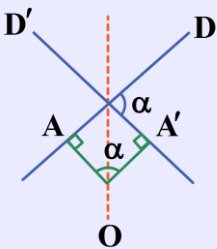
نقطه O را مرکز دوران و زاویه α را زاویه دوران می‌گوییم. جهت دوران (ساعتگرد یا پادساعتگرد) نیز مهم است.

ویژگی‌های دوران:

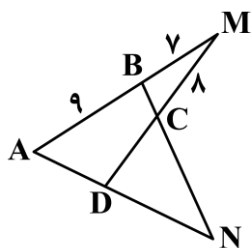
- ۱) دوران تبدیلی طولپاست.
- ۲) مرکز دوران، نقطه ثابت دوران است.
- ۳) دوران شیب خط را حفظ نمی‌کند مگر آن که زاویه دوران مضرب طبیعی 180° باشد، بنابراین در حالت کلی دوران شیب خط را حفظ نمی‌کند.
- ۴) دوران با زاویه $n \times 36^\circ$ ($n \in \mathbb{N}$) هر نقطه را بر خودش تصویر می‌کند.
- ۵) دوران جهت شکل را حفظ می‌کند.
- ۶) دوران یافته هر خط، خطی است که با خط اول همان زاویه دوران را می‌سازد.
- ۷) هر دو خط موازی، دوران یافته یکدیگر با زاویه دوران $(2n+1) \times 180^\circ$ ($n \in \mathbb{N}$) هستند، به طوری که مرکز دوران روی خط وسط آن دو خط واقع است.



۸) هر دو خط متقاطع، دوران یافته یکدیگرند به طوری که زاویه دوران، یکی از زوایای بین دو خط است و مرکز دوران روی نیمساز زاویه دیگر بین ۲ خط است.



۲۵- در شکل مقابل، چهارضلعی ABCD هم محاطی و هم محیطی است. نسبت محیط مثلث NCD به محیط مثلث BCM چقدر است؟



$$1/8 \quad (1)$$

$$1/6 \quad (2)$$

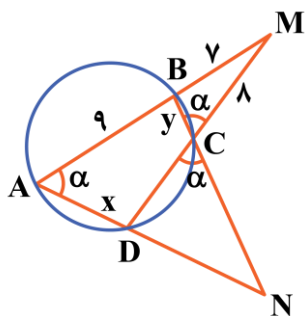
$$1/5 \quad (3)$$

$$1/4 \quad (4)$$

(سخت - ترکیبی - زمان‌بر) - هندسه ۲ صفحه ۲۸ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۱

چهارضلعی ABCD محاطی است. پس دایره‌ای وجود دارد که از رأس‌های آن عبور می‌کند. با رسم دایره محیطی این چهارضلعی و استفاده از روابط طولی در دایره می‌نویسیم:



$$MB \times MA = MC \times MD \Rightarrow 7 \times 16 = 8(8 + CD) \Rightarrow 112 = 64 + 8CD \Rightarrow CD = 6$$

از طرف دیگر، چهارضلعی ABCD محیطی است، پس مجموع اضلاع مقابل آن با هم برابرند، بنابراین:

$$AB + DC = AD + BC \Rightarrow 9 + 6 = x + y \Rightarrow x + y = 15 \quad (1)$$

در ضمن دو مثلث BCM و AMD با داشتن دو زاویه مساوی متشابه‌اند، در نتیجه:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{C} = \alpha \\ \hat{M} = \hat{M} \end{array} \right\} \xrightarrow{(2)} \triangle BCM \sim \triangle AMD \Rightarrow \frac{MB}{MD} = \frac{BC}{AD} \Rightarrow \frac{7}{16} = \frac{y}{x} \Rightarrow x = 2y \xrightarrow{(1)} y = 5, x = 10$$

همچنین دو مثلث NCD و ABN متشابه‌اند، پس:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{C} = \alpha \\ \hat{N} = \hat{N} \end{array} \right\} \xrightarrow{(3)} \triangle NCD \sim \triangle ABN \Rightarrow \frac{NC}{AN} = \frac{ND}{BN} = \frac{CD}{AB} \Rightarrow \frac{NC}{ND + 10} = \frac{ND}{NC + 5} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3NC = 2ND + 20 \\ 3ND = 2NC + 10 \end{cases} \xrightarrow{+} NC + ND = 30$$

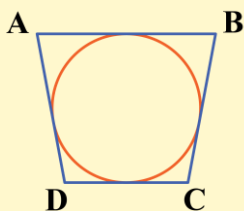
بنابراین محیط مثلث NCD برابر $NC + ND + CD = 30 + 6 = 36$ و محیط مثلث BCM برابر $BM + MC + BC = 7 + 8 + 5 = 20$ است.

$$\frac{\text{محیط } \triangle NCD}{\text{محیط } \triangle BCM} = \frac{36}{20} = 1/8$$

است، پس:

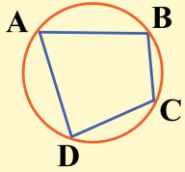
توی چهارضلعی‌های محیطی و محاطی چه اتفاقی می‌فته؟

در چهارضلعی محیطی، جمع اضلاع روبه‌رو با هم برابرند.



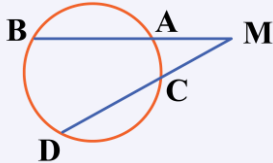
$$AB + CD = AD + BC$$

در چهارضلعی محاطی، زاویه‌های مقابل مکمل یکدیگرند.



$$\hat{A} + \hat{C} = \hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$$

یادآوری رابطه طولی مهم در دایره!



$$MA \times MB = MC \times MD$$



۲۶- اگر مجموعه مرجع مجموعه اعداد طبیعی یک رقمی، مجموعه‌های A ، B و C به صورت $A = \{1, 4, 5, 7\}$ ، $B = \{3, 4, 6, 8\}$ و $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ باشند، آنگاه مجموعه $[A - (B \cup C)] \cup B$ چند عضوی خواهد بود؟

۷ (۴)

۶ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)

(آسان - خطبه‌خط - سریع) - آمار و احتمال صفحه ۲۹ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۱

بررسی سریع:

$$[A - (B \cup C)] \cup B = [\{1, 4, 5, 7\} - \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}] \cup \{3, 4, 6, 8\} = \emptyset \cup \{3, 4, 6, 8\} = \{3, 4, 6, 8\}$$

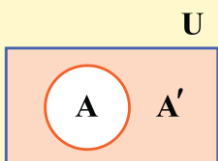
$$U = \{1, 2, \dots, 9\}$$

مجموعه مرجع برابر است با:

با نوشتن اعضا مجموعه خواسته شده برابر است با:

$$[A - (B \cup C)] \cup B = [\underbrace{\{1, 4, 5, 7\} - \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}}_{\emptyset}] \cup \{3, 4, 6, 8\} = \emptyset \cup \{3, 4, 6, 8\} = \{3, 4, 6, 8\}$$

مجموعه مرجع



مجموعه مرجع (U): مجموعه‌ای است که تمامی مجموعه‌های مورد بحث، زیر مجموعه آن هستند.

متمم مجموعه A (A'): اعضای از مجموعه مرجع که در مجموعه A حضور ندارند.

$$A' = U - A$$



۲۷- اگر هر دو رابطه $A \subseteq B$ و $C' \subseteq D'$ برقرار باشند، آنگاه کدام یک از روابط زیر حتماً برقرار خواهد بود؟

$$(A - C) \subseteq (B - D) \quad (۲)$$

$$(A \cap C) \subseteq (B \cap D) \quad (۱)$$

$$(C \cup A') \subseteq (D \cup B') \quad (۴)$$

$$(A - D) \subseteq (B - C) \quad (۳)$$

(متوسط - ترکیبی - استاندارد) - آمار و احتمال صفحه ۲۹ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۲

بررسی سریع:

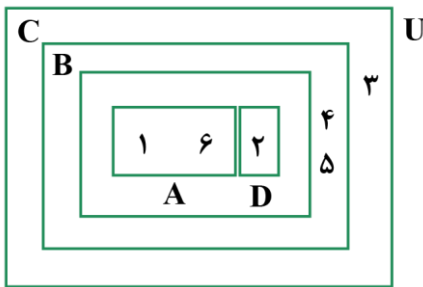
$$\left. \begin{matrix} A \subseteq B \\ C' \subseteq D' \end{matrix} \right\} \Rightarrow (A \cap C') \subseteq (B \cap D') \Rightarrow (A - C) \subseteq (B - D)$$

با استفاده از $\left. \begin{matrix} A \subseteq B \\ C \subseteq D \end{matrix} \right\} \Rightarrow (A \cap C) \subseteq (B \cap D)$ و تبدیل اشتراک به تفاضل داریم:

$$\left. \begin{matrix} A \subseteq B \\ C' \subseteq D' \end{matrix} \right\} \Rightarrow (A \cap C') \subseteq (B \cap D') \Rightarrow (A - C) \subseteq (B - D)$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

برای سایر گزینه‌ها مثال نقض $A = \{1, 6\}$ ، $B = \{1, 2, 6\}$ ، $C = \{1, 2, 4, 5, 6\}$ و $D = \{2\}$ و مجموعه مرجع $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ وجود دارد.



۱ پس گزینه ۱ نادرست است. $(A \cap C) = A$ ، $(B \cap D) = D$ و $A \not\subseteq D$

۳ پس گزینه ۳ نادرست است. $(A - D) = A$ ، $(B - C) = \emptyset$ و $A \not\subseteq \emptyset$

۴ پس گزینه ۴ نادرست است. $(C \cup A') = U$ ، $(D \cup B') = \{2, 3, 4, 5\}$ و $U \not\subseteq \{2, 3, 4, 5\}$

دو نکته طلایی!

$$\left. \begin{matrix} A \subseteq B \\ C \subseteq D \end{matrix} \right\} \Rightarrow (A \cap C) \subseteq (B \cap D)$$

$$\left. \begin{matrix} A \subseteq B \\ C \subseteq D \end{matrix} \right\} \Rightarrow (A \cup C) \subseteq (B \cup D)$$



۲۸- کدام یک از تساوی‌های زیر برقرار نیست؟

(۲) $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$

(۴) $(A - B) - C = A - (B \cup C)$

(۱) $A - (B \cup C) = (A - B) \cup (A - C)$

(۳) $(A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C)$

(متوسط - خطبه خط - استاندارد) - آمار و احتمال صفحه ۲۹ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۱

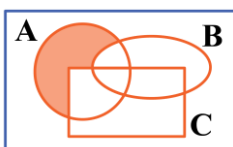
بررسی سریع:

$$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$$

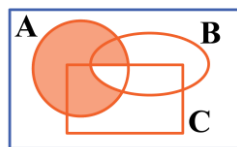
می‌دانیم:

پس گزینه ۱ نادرست است.

نمودار ون مربوط به سمت چپ و راست تساوی گزینه ۱ در شکل‌های زیر آمده است:



سمت چپ



سمت راست

①

مجموعه‌ای که با مجموعه طرف چپ تساوی گزینه ۱ برابر است با استفاده از قوانین مجموعه‌ها به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
 & A - (B \cup C) \\
 &= A \cap (B \cup C)' \quad \text{تبدیل تفاضل به اشتراک} \\
 &= \underbrace{A}_{(A \cap A)} \cap (B' \cap C') \quad \text{دمورگان} \\
 &= (A \cap B') \cap (A \cap C') \quad \text{شرکت‌پذیری اشتراک} \\
 &= (A - B) \cap (A - C)
 \end{aligned}$$

②

اثبات درستی:

$$\begin{aligned}
 & (A \cup B) - C \\
 &= (A \cup B) \cap C' \quad \text{تبدیل تفاضل به اشتراک} \\
 &= (A \cap C') \cup (B \cap C') \quad \text{توزیع‌پذیری اشتراک روی اجتماع} \\
 &= (A - C) \cup (B - C) \quad \text{تبدیل اشتراک به تفاضل}
 \end{aligned}$$

③

اثبات درستی:

$$\begin{aligned}
 & (A \cap B) - C \\
 &= (A \cap B) \cap \underbrace{C'}_{(C' \cap C')} \quad \text{تبدیل تفاضل به اشتراک} \\
 &= (A \cap C') \cap (B \cap C') \quad \text{شرکت‌پذیری اشتراک} \\
 &= (A - C) \cap (B - C)
 \end{aligned}$$

④

اثبات درستی:

$$\begin{aligned}
 & (A - B) - C \\
 &= (A \cap B') \cap C' \quad \text{تبدیل تفاضل به اشتراک} \\
 &= A \cap (B' \cap C') \quad \text{شرکت‌پذیری اشتراک} \\
 &= A \cap (B \cup C)' \quad \text{دمورگان} \\
 &= A - (B \cup C) \quad \text{تبدیل اشتراک به تفاضل}
 \end{aligned}$$

جمع‌بندی قوانین مجموعه‌ها

اگر U مجموعه مرجع و A ، B و C زیرمجموعه‌های آن باشند؛ داریم:

$$\underbrace{A - B}_{A - (A \cap B)} = A \cap B' \quad \text{تبدیل تفاضل به اشتراک}$$

$$\begin{cases} A \cup B = B \cup A \\ A \cap B = B \cap A \end{cases} \quad \text{جاب‌جایی}$$

$$\begin{cases} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{cases}$$

توزیع پذیری:

$$\begin{cases} A' \cap B' = (A \cup B)' \\ A' \cup B' = (A \cap B)' \end{cases}$$

قوانین دمورگان:

$$\begin{cases} A \cap (A \cup B) = A \\ A \cup (A \cap B) = A \end{cases}$$

قانون جذب:

$$\begin{cases} (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \\ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \end{cases}$$

شرکت پذیری:



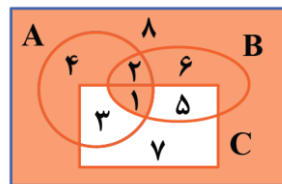
۲۹- در جبر مجموعه‌ها، اگر بدانیم $(A \cap B) \cup C' = A \cap (B \cup C')$ ، آن‌گاه کدام یک از مجموعه‌های زیر حتماً تهی است؟

- (۱) $A \cap B \cap C$ (۲) $A' \cap B' \cap C'$ (۳) $A \cup (B - C)$ (۴) $A - (B \cup C)$

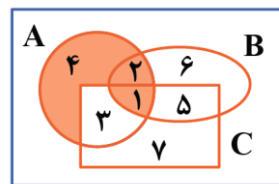
(سخت - ترکیبی - زمان‌بر) - آمار و احتمال صفحه ۲۹ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۲

نمودار ون سمت چپ و راست تساوی داده شده به شکل زیر هستند:



چپ

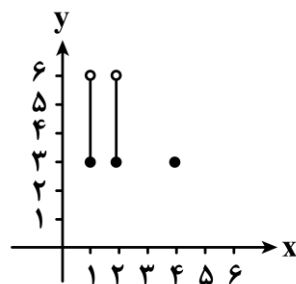


راست

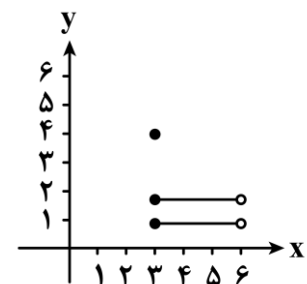
شرط لازم و کافی برای برقراری تساوی آن است که ناحیه‌های ۶ و ۸ تهی باشند، ناحیه ۶ به صورت $B - (A \cup C)$ است و ناحیه ۸ به صورت $A' \cap B' \cap C'$.



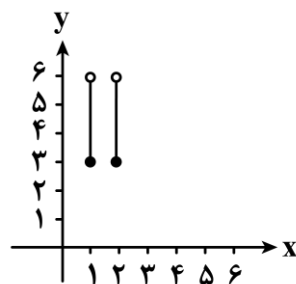
۳۰- اگر $A = \{1, 2, 4\}$ و $B = [3, 6]$ ، آن‌گاه نمودار $A \times B - B^2$ کدام است؟



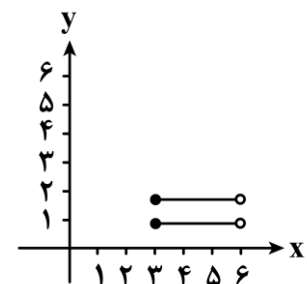
(۲)



(۱)



(۴)



(۳)

بررسی سریع:

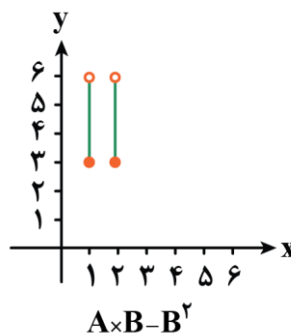
$$A \times B - B^2 = (A - B) \times B = \{1, 2\} \times [3, 6]$$

مجموعه به دست آمده در گزینه ۴ آمده است.

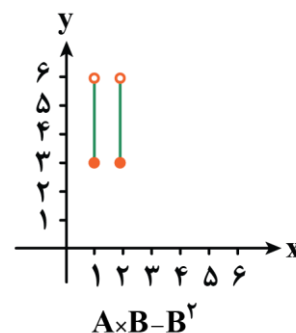
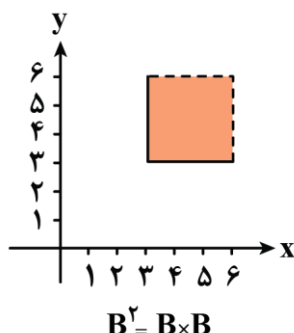
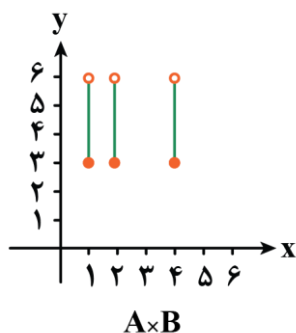
روش اول

با توجه به این که می‌توان از B فاکتور گرفت داریم:

$$A \times B - B^2 = (A - B) \times B = \{1, 2\} \times [3, 6]$$



روش دوم



ضرب دکارتی دو مجموعه

برای هر دو مجموعه A و B ضرب دکارتی آن‌ها به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$$

خواص ضرب دکارتی

(۱) ضرب دکارتی خاصیت جابه‌جایی ندارد.

$$A \times B \neq B \times A$$

(۲)

$$(A - C) \times B = A \times B - C \times B$$

$$(A \cup C) \times B = (A \times B) \cup (C \times B)$$



برای دیدن پاسخنامه ویدئویی آزمون
QR Code بالا را اسکن یا روی آن کلیک کنید!

الکتریسیته ساکن + جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم
(از خازن تا ابتدای عوامل مؤثر بر مقاومت الکتریکی) - صفحه‌های ۳۲ تا ۵۱

بودجه‌بندی
این آزمون

درمجموع ۱ الی ۲ تست از ۳۵ تست کنکور را پوشش داده است.

سهم در
کنکور

۳۱- کدام یک از عبارات‌های زیر دربارهٔ خازن‌ها درست است؟

الف - یکای ظرفیت خازن در SI، فاراد (F) است که معادل $\frac{C^2}{N.m}$ است.

ب - بار الکتریکی هریک از صفحات خازن متصل به باتری، یکسان است.

ج - $1\mu F$ ، ظرفیت خازنی است که اگر به ولتاژ $1\mu V$ متصل شود، در آن بار الکتریکی ۱C ذخیره می‌شود.

د - اگر ولتاژ خازنی را دو برابر کنیم، بار ذخیره‌شده در آن نیز دو برابر می‌شود.

(۱) «الف» و «ج» (۲) «ب» و «ج» (۳) «الف» و «د» (۴) «ب» و «د»

(متوسط - مفهومی - استاندارد) - صفحه ۲۹ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۳

راه نجات سریع

توی این سؤال‌ها هر وقت دیدی یکی از عبارات حلش طول می‌کشه، ازش رد شو و با رد گزینه به جواب برس! الان اینجا بررسی مورد «الف»
سخته و طول می‌کشه پس بهتره با تأیید یا رد بقیه عبارات ادامه بدی.

بررسی موارد:

الف

طبق رابطه‌های $F = k \frac{|q_1||q_2|}{r^2}$ و $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ ، درمی‌یابیم یکای ϵ_0 به صورت $\frac{C^2}{N.m^2}$ است. از طرفی طبق رابطه $C = \kappa\epsilon_0 \frac{A}{d}$ ، درمی‌یابیم

یکای ϵ_0 به صورت $\frac{F}{m}$ نیز است؛ بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{F}{m} = \frac{C^2}{N.m^2} \Rightarrow F = \frac{C^2}{N.m} \quad (\checkmark)$$

پ

بار الکتریکی هریک از صفحات خازن متصل به باتری، هم‌اندازه و غیرهم‌نام است (Q و -Q)؛ بنابراین بار الکتریکی آن‌ها یکسان نیست. (*)

تذکر!

بچه‌ها دقت کنید که اگر این‌جا می‌گفتیم اندازهٔ بار هریک از صفحات خازن یکسانه، اون وقت درست می‌شد!

ج

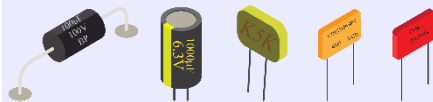
طبق رابطه $Q = C.V$ ، درمی‌یابیم $1pC = 1\mu F \times 1\mu V$ است؛ بنابراین $1\mu F$ ظرفیت خازنی است که اگر به ولتاژ $1\mu V$ وصل شود، در آن بار $1pC$ ذخیره می‌شود. (*)

د

می‌دانیم با تغییر ولتاژ خازن، ظرفیت آن ثابت می‌ماند. از طرفی طبق رابطه $Q = CV$ ، با دو برابر کردن ولتاژ خازن، بار ذخیره‌شده در آن نیز دو برابر می‌شود. (✓)

خازن

خازن یک وسیله الکتریکی است که می‌تواند بار و انرژی الکتریکی را در خود ذخیره کند. خازن‌ها به‌طور گسترده‌ای در مدارهای الکترونیکی و وسایلی مانند رادیو، تلویزیون، رایانه، گوشی همراه و ... به‌کار می‌روند.



چند مثال از کاربرد خازن

- ✓ باتری‌های یک دوربین با باردارکردن یک خازن، انرژی را در خازن فلاش دوربین ذخیره می‌کنند.
- ✓ در مدار یک تقویت‌کننده (آمپلی‌فایر) چندین خازن به‌کار رفته‌اند.
- ✓ خازن دستگاه رفع لرزشی (دستگاهی برای توقف لرزش بطنی افراد دچار حمله قلبی).

تفاوت خازن و باتری

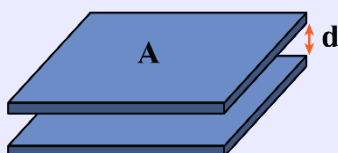
باتری‌ها معمولاً انرژی را با آهنگ نسبتاً کمی به مدار می‌دهند اما خازن می‌تواند انرژی را با آهنگ بسیار زیادی به مدار بدهد.

اجزای خازن

خازن شامل دو رسانا با هر شکلی است که این رساناها را صفحه‌های خازن می‌نامیم.

خازن تخت

خازن تخت شامل دو صفحه رسانای موازی با مساحت A است که به فاصله d از هم قرار گرفته‌اند.



✓ فاصله بین صفحات خازن تخت در برابر ابعاد صفحه‌ها ناچیز است.

نکته

وقتی یک خازن، باردار می‌شود صفحه‌های آن دارای بارهایی با بزرگی یکسان ولی با علامت مخالف می‌شوند، یعنی بار صفحات، $+Q$ و $-Q$ خواهد شد. وقتی گفته می‌شود بار خازن، Q است، یعنی بار صفحه مثبت خازن، $+Q$ و بار صفحه منفی خازن، $-Q$ می‌باشد.

ظرفیت خازن

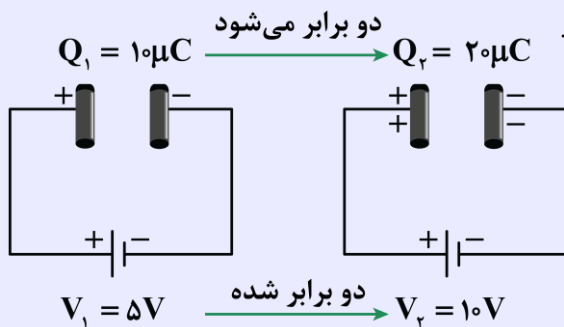
۱- نسبت بار ذخیره‌شده در خازن به اختلاف پتانسیل دو سر خازن، مقداری ثابت است که به آن ظرفیت خازن گویند:

ظرفیت خازن برحسب فاراد (F)

$$C = \frac{Q}{V} \rightarrow \text{بار ذخیره‌شده در خازن برحسب کولن (C)} \rightarrow \frac{Q}{V} \rightarrow \text{اختلاف پتانسیل دو سر خازن برحسب ولت (V)}$$

۲- فاراد یکای بسیار بزرگی است و ظرفیت اکثر خازن‌های متداول در محدوده پیکوفاراد تا میلی‌فاراد است.

۳- ظرفیت خازن به‌اندازه بار خازن و نیز اختلاف پتانسیل دو صفحه آن بستگی ندارد.



$$C_1 = \frac{Q_1}{V_1} = \frac{10 \mu C}{5V} = 2 \mu F \quad \text{و} \quad C_2 = \frac{Q_2}{V_2} = \frac{20 \mu C}{10V} = 2 \mu F$$

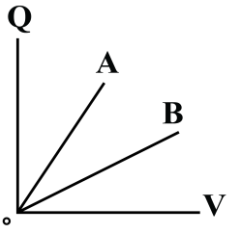
پس هرچه اختلاف پتانسیل دو سر خازن افزایش یابد، به همان نسبت بار ذخیره‌شده در خازن زیاد می‌شود و ظرفیت خازن، ثابت می‌ماند.

$$C = \frac{Q}{V} \Rightarrow Q = C \times V \Rightarrow \Delta Q = C \cdot \Delta V$$

$\uparrow$ برابر $\uparrow$ برابر
 $\downarrow$ ثابت



۳۲- نمودار بار الکتریکی خازن‌های تخت A و B بر حسب اختلاف پتانسیل الکتریکی آن‌ها مطابق شکل است. اگر خازن A را با یک باتری ۱۰ ولتی و خازن B را با یک باتری ۱۲ ولتی شارژ کنیم، آنگاه نسبت بار الکتریکی خازن B به بار الکتریکی خازن A کدام گزینه می‌تواند باشد؟



- (۱) ۴
(۲) ۳
(۳) ۲
(۴) ۱

(آسان - نموداری - سریع - صفحه ۲۹ - ۱۱۰۱)

پاسخ: گزینه ۴

می‌دانیم شیب نمودار بار الکتریکی خازن بر حسب اختلاف پتانسیل الکتریکی آن برابر با ظرفیت خازن است. با توجه به نمودار داده‌شده، شیب نمودار A بیش‌تر از شیب نمودار B است و داریم:

$$A \text{ شیب} > B \text{ شیب} \xrightarrow{\text{شیب} = C} C_A > C_B \xrightarrow{C = \frac{Q}{V}} \frac{Q_A}{V_A} > \frac{Q_B}{V_B}$$

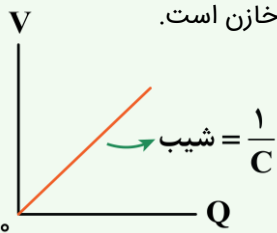
$$\xrightarrow{V_A = 10V, V_B = 12V} \frac{Q_A}{10} > \frac{Q_B}{12} \Rightarrow \frac{Q_B}{Q_A} < \frac{12}{10} \Rightarrow \frac{Q_B}{Q_A} < 1.2$$

با توجه به گزینه‌ها، گزینه (۴) در شرط $\frac{Q_B}{Q_A} < 1.2$ صدق می‌کند.

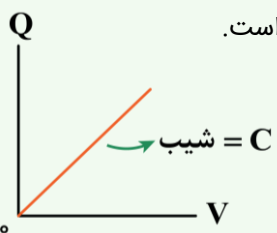


نکته

۱- در نمودار اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر خازن بر حسب بار الکتریکی آن، شیب نمودار برابر با عکس ظرفیت خازن است.



۲- در نمودار بار الکتریکی خازن بر حسب اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر آن، شیب نمودار برابر با ظرفیت خازن است.



۳۳- فضای بین صفحات خازنی با یک عایق به ثابت دی‌الکتریک ۴ پر شده است. اگر عایق بین دو صفحه را برداریم، در این صورت

فاصله بین صفحات خازن را چگونه تغییر دهیم، تا ظرفیت خازن نسبت به حالت اول، ۹۰ درصد کاهش یابد؟

- (۱) ۲/۵ برابر کنیم. (۲) ۶۰ درصد کاهش دهیم. (۳) ۴۰ درصد افزایش دهیم. (۴) ۴ برابر کنیم.

طبق رابطه $C = \kappa \epsilon_0 \frac{A}{d}$ می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \times \frac{A_2}{A_1} \times \frac{d_1}{d_2} \xrightarrow{C_2=C_1-\frac{90}{100}C_1=0.1C_1, \kappa_1=4, \kappa_2=1, A: \text{ثابت}} \rightarrow 0.1 = \frac{1}{4} \times 1 \times \frac{d_1}{d_2}$$

$$\Rightarrow \frac{d_2}{d_1} = \frac{1}{4} = 0.25$$

بنابراین باید فاصله بین صفحات خازن را ۲/۵ برابر کنیم.

سوتی‌های پرتکرار

اگر با نسبت $\frac{d_1}{d_2}$ یعنی برعکس اون چیزی که سؤال می‌خواهد پیش بری، $\frac{d_2}{d_1} = 0.25$ رو به دست میاری و پاسخ ۶۰ درصد کاهش و گزینه (۲) رو به اشتباه انتخاب می‌کنی.

عوامل مؤثر بر ظرفیت خازن

ظرفیت خازن به مشخصات ساختمانی خازن بستگی دارد و به Q و V ربطی ندارد.
رابطه ظرفیت خازن براساس مشخصات ساختمانی آن به صورت زیر است:

ضریب گذردهی الکتریکی خلأ $(\frac{F}{m})$ ظرفیت خازن بر حسب فاراد (F)
 $C = \kappa \epsilon_0 \frac{A}{d} \rightarrow (m^2)$ مساحت هریک از صفحات خازن (مساحت مؤثر) بر حسب مترمربع
 $\frac{A}{d} \rightarrow (m)$ فاصله بین دو صفحه خازن از هم (ضخامت قسمت نارسنای خازن) بر حسب متر
 $\uparrow$ ثابت دی‌الکتریک (واحد ندارد).
 $\downarrow$



یه نمونه باحال

در یک میکروفون خازنی، با ارتعاش صفحه متحرک (دیافراگم) خازن بر اثر صدا، فاصله بین صفحه‌های خازن تغییر می‌کند؛ بنابراین ظرفیت خازن تخت تغییر می‌کند که به ایجاد یک سیگنال الکتریکی می‌انجامد.



نکته

برای مقایسه ظرفیت خازن داریم:

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \times \frac{A_2}{A_1} \times \frac{d_1}{d_2}$$

دی الکتریک

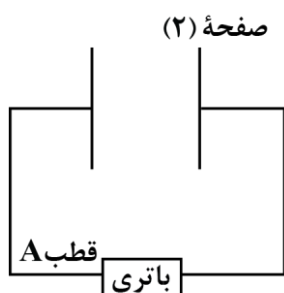
فضای بین صفحه‌های خازن را با ماده‌ای عایقی پر می‌کنیم که به این ماده عایق، دی الکتریک گفته می‌شود. ✓ ضریب دی الکتریک برای خلأ و هوا برابر ۱ و برای سایر نارساها از ۱ بیش‌تر است.

اثرات استفاده از دی الکتریک

- ۱- افزایش ظرفیت خازن
- ۲- افزایش حداکثر ولتاژ قابل تحمل خازن



۳۴- شکل زیر، خازن تختی را نشان می‌دهد که به‌طور کامل شارژ شده است. اگر پتانسیل الکتریکی قطب A باتری ۵V- و بار و پتانسیل الکتریکی صفحه (۲) خازن به ترتیب ۲۰μC و ۵V باشد، ظرفیت خازن چند میکروفراد است؟



- (۱) ۰/۲
- (۲) ۲
- (۳) ۰/۵
- (۴) ۵

(آسان - مفهومی/محاسباتی - استاندارد ۲۰ - صفحه ۲۹ - ۱۱۰۱)

پاسخ: گزینه ۲

راه نجات سریع

اول با داشتن پتانسیل یکی از قطب‌های باتری و پتانسیل صفحه متصل به قطب دیگر، ولتاژ دو سر خازن رو حساب کن. بعدش با داشتن مقدار بار یک صفحه، بار خازن رو به دست بیار. در نهایت طبق رابطه $C = \frac{Q}{V}$ ، ظرفیت خازن رو به دست بیار.

گام اول

اختلاف پتانسیل باتری را به دست می‌آوریم. با توجه به این که خازن به‌طور کامل شارژ شده است، درمی‌یابیم ولتاژ دو سر خازن و باتری باهم برابرند؛ در نتیجه پتانسیل الکتریکی صفحه (۲) خازن و قطب دیگر باتری باهم یکسان‌اند؛ بنابراین داریم:

$$\begin{cases} V_+ = V_r = 5V \\ V_- = V_A = -5V \end{cases} \Rightarrow \Delta V_{\text{باتری}} = V = V_+ - V_- = 5 - (-5) = 10V$$

گام دوم

می‌دانیم بار ذخیره شده در خازن برابر با اندازه بار یکی از صفحات خازن است؛ بنابراین با توجه به این که بار صفحه (۲) خازن ۲۰μC است، درمی‌یابیم بار ذخیره شده در خازن همان ۲۰μC است.

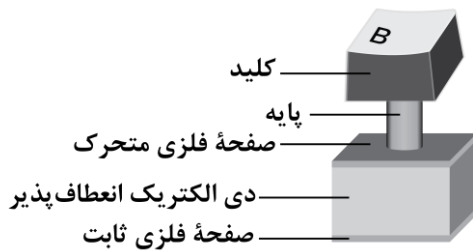
گام آخر

در نهایت، ظرفیت خازن را حساب می‌کنیم:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q=20\mu C}{V=10V} \rightarrow C = \frac{20}{10} = 2\mu F$$



۳۵- شکل زیر، مربوط به یکی از کلیدهای صفحه کلید رایانه‌ای است که بر مبنای تغییر ظرفیت خازن عمل می‌کند. فاصله بین صفحات فلزی نشان داده شده که مساحتشان 10^{-4} m^2 است، عموماً 5 mm است که با فشار دادن کلید، این فاصله 96% کاهش می‌یابد. اگر خازن از ماده‌ای با ثابت دی‌الکتریک 5 پر شده باشد، تغییر ظرفیت آن بعد از فشار دادن کلید، چند پیکوفاراد خواهد شد؟ $(\epsilon_0 = 9 \times 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}})$



شد؟ $(\epsilon_0 = 9 \times 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}})$

(۱) ۲۱/۶

(۲) ۲۱۶

(۳) ۲۲/۵

(۴) ۲۲۵

(آسان - محاسباتی - استاندارد) - صفحه ۳۱ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۱

راه نجات سریع

کافی به کمک رابطه $C = \kappa \epsilon_0 \frac{A}{d}$ ، ظرفیت خازن رو برای دو فاصله مختلف بنویسی و اختلاف بزنی.

به کمک رابطه $C = \frac{\kappa \epsilon_0 A}{d}$ داریم:

$$C_2 - C_1 = \frac{\kappa \epsilon_0 A}{d_2} - \frac{\kappa \epsilon_0 A}{d_1} = \kappa \epsilon_0 A \left(\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1} \right) \quad \kappa=5, \epsilon_0=9 \times 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}}, A=10^{-4} \text{ m}^2$$

$$d_1=5 \text{ mm}=5 \times 10^{-3} \text{ m}, d_2=0.4 d_1=0.2 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$C_2 - C_1 = 5 \times 9 \times 10^{-12} \times 10^{-4} \times \left(\frac{1}{0.2 \times 10^{-3}} - \frac{1}{5 \times 10^{-3}} \right)$$

$$\Rightarrow C_2 - C_1 = 45 \times 10^{-16} \times (5 \times 10^3 - 0.2 \times 10^3) = 216 \times 10^{-13} \text{ F} = 21.6 \text{ pF}$$

راهنمای مسیрт

این سؤال برای کنکور و صدا البته برای امتحان نهایی خیلی مناسبه! چون از دل کتاب درسی طرح شده. پس حتماً صفر تا صد مطالب کتاب درسی رو خط به خط کار کنین تا خیر نهایی و کنکورتون بشه.

سوتی‌های پرتکرار

اگر خواست به خواسته سؤال نباشه و فکر کنی ظرفیت خازن در حالت دوم خواسته شده، در دام گزینه (۳) می‌افتی.



۳۶- کدام یک از گزینه‌های زیر، به ترتیب از راست به چپ، عبارت زیر را به درستی تکمیل می‌کند؟

«در پدیده فروریزش الکتریکی در خازن، تعدادی الکترون از جدا شده و به سمت خازن حرکت می‌کنند.»

(۲) صفحه منفی - صفحه مثبت

(۱) صفحه مثبت - صفحه منفی

(۴) دی‌الکتریک - صفحه مثبت

(۳) دی‌الکتریک - صفحه منفی

(آسان - مفهومی - سریع) - صفحه ۳۲ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۴

دراثر فروریزش الکتریکی در خازن، تعدادی الکترون از دی‌الکتریک کنده شده و در خلاف جهت میدان الکتریکی، به سمت صفحه مثبت حرکت می‌کنند و مسیرهایی رسانا درون دی‌الکتریک ایجاد می‌شوند.

راهنمای مسیрт

این سؤال از مفاهیم اولیه فروریزش خازن مطرح شده، اگه نتونستی جواب درست بدی، حتماً بخش فروریزش رو دوباره بخون.



اختلاف پتانسیل یا میدان الکتریکی بین صفحه‌های خازن را تا حد معینی می‌توانیم افزایش دهیم. اگر اختلاف پتانسیل یا میدان الکتریکی را از آن حد بیش‌تر کنیم، خازن دچار فروریزش الکتریکی می‌شود.

فروریزش الکتریکی

اثر دیگر حضور دی‌الکتریک‌ها در خازن، افزایش حداکثر ولتاژ قابل‌تحمل خازن است. اگر اختلاف پتانسیل دو صفحه یک خازن را به‌اندازه کافی زیاد کنیم، تعدادی از الکترون‌های اتم‌های ماده دی‌الکتریک، توسط میدان الکتریکی ایجادشده بین دو صفحه، کنده می‌شوند و مسیریابی رسانا درون دی‌الکتریک ایجاد می‌شود که سبب تخلیه خازن می‌گردد. به این پدیده فروریزش الکتریکی ماده دی‌الکتریک می‌گویند. فروریزش الکتریکی در عایق بین دو صفحه خازن‌ها معمولاً با ایجاد یک جرقه همراه است و در بیش‌تر مواقع خازن را می‌سوزاند. خازن‌ها معمولاً با مقدار ظرفیت آن‌ها و اختلاف پتانسیل بیشینه‌ای که می‌توانند تحمل کنند مشخص می‌شوند.



۳۷- یک دستگاه رفع لرزش نامنظم قلب با خازنی به ظرفیت $10 \mu F$ در اختیار داریم که توسط یک باتری با اختلاف پتانسیل الکتریکی ثابت $5 kV$ شارژ شده است. با اتصال کفشک‌ها به بدن بیمار، ۸۰ درصد انرژی خازن در مدت $2 ms$ در بدن بیمار تخلیه می‌شود. توان متوسطی که در بدن بیمار تخلیه می‌شود، چند کیلووات است؟

۵۰ (۴)

۸۰ (۳)

۱۰۵ (۲)

۱۲۵ (۱)

(متوسط - محاسباتی - استاندارد ۶ - صفحه ۳۴ - ۱۱۰۱)

پاسخ: گزینه ۴ 

راه نجات سریع

به کمک بازده، انرژی تخلیه‌شده در بدن بیمار رو حساب کن و آخر سر توان تخلیه‌شده در بدن بیمار رو به‌دست بیار.

گام اول

امیدوارم حواستان باشد که ۸۰ درصد انرژی خازن در بدن بیمار تخلیه می‌شود و داریم:

$$U = \frac{4}{5} U_{\text{خازن}} \xrightarrow{U_{\text{خازن}} = \frac{1}{2} CV^2} U = \frac{4}{5} \times \frac{1}{2} CV^2 = \frac{2}{5} CV^2 \quad C = 10 \mu F = 10^{-5} F, V = 5 kV = 5 \times 10^3 V$$

$$U = \frac{2}{5} \times 10^{-5} \times (5 \times 10^3)^2 = \frac{2}{5} \times 10^{-5} \times 25 \times 10^6 = 100 J$$

گام آخر

توان متوسطی که در بدن بیمار تخلیه می‌شود، برابر است با:

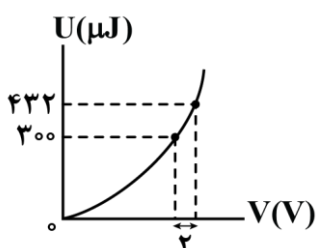
$$P_{av} = \frac{U}{t} \quad U = 100 J, t = 2 ms = 2 \times 10^{-3} s \rightarrow P_{av} = \frac{100}{2 \times 10^{-3}} = 50 \times 10^3 W = 50 kW$$

رازهای پشت سؤال

مثال ۱۶-۱ کتاب درسی رو به کوچولو تغییر دادیم و این سؤال رو براتون طرح کردیم. خیلی وقت‌ها طراحان کنکور هم دقیقاً یک همچین نگاهی به کتاب درسی دارند و ما دوست داریم بچه‌های ماز هم با این ترفندهای طرح تست آشنا بشن.



۳۸- نمودار انرژی ذخیره‌شده در یک خازن برحسب اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر آن، مطابق شکل زیر است. اگر این خازن به‌گونه‌ای شارژ شود که بار الکتریکی ذخیره‌شده در آن $30 \mu C$ باشد، انرژی ذخیره‌شده در آن چند میکروژول است؟



۵۰ (۱)

۶۰ (۲)

۷۵ (۳)

۱۰ (۴)

اول به کمک نمودار و طبق رابطه $U = \frac{1}{2} CV^2$ ، ظرفیت خازن رو به دست بیار. بعدش با داشتن ظرفیت و بار خازن طبق رابطه $U = \frac{Q^2}{2C}$ ، انرژی ذخیره شده در خازن رو حساب کن.

گام اول

طبق نمودار زیر و با استفاده از رابطه $U = \frac{1}{2} CV^2$ می‌توانیم بنویسیم:

$$U = \frac{1}{2} CV^2 \xrightarrow{C: \text{ثابت}} \frac{U_2}{U_1} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2$$

$$\xrightarrow{V_2 = V_1 + 2} \frac{432}{300} = \left(\frac{V_1 + 2}{V_1}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{36}{25} = \left(\frac{V_1 + 2}{V_1}\right)^2 \Rightarrow \frac{6}{5} = \frac{V_1 + 2}{V_1}$$

$$\Rightarrow 6V_1 = 5V_1 + 10 \Rightarrow V_1 = 10V$$

حالا با داشتن U_1 و V_1 ، ظرفیت خازن را به دست می‌آوریم:

$$U_1 = \frac{1}{2} CV_1^2 \xrightarrow{\frac{U_1 = 300 \mu J}{V_1 = 10 V}} 300 = \frac{1}{2} C \times (10)^2 \Rightarrow C = 6 \mu F$$

گام آخر

انرژی ذخیره شده در خازن را وقتی که بار ذخیره شده در آن $30 \mu C$ است، به دست می‌آوریم:

$$U = \frac{Q^2}{2C} \Rightarrow U = \frac{30^2}{2 \times 6} = \frac{900}{12} = 75 \mu J$$



۳۹- خازن تختی به یک باتری که ولتاژ آن قابل تنظیم است، متصل است. اگر ولتاژ باتری را $5V$ افزایش دهیم، اندازه بار الکتریکی

خازن $20 nC$ و انرژی ذخیره شده در آن $J \times 10^{-7} \times \frac{3}{5}$ افزایش می‌یابد. بار اولیه خازن بر حسب نانوکولن کدام است؟

۲۰ (۴)

۱۵ (۳)

۸۰ (۲)

۶۰ (۱)

اول برو به کمک تغییر ولتاژ و تغییر بار، ظرفیت خازن رو پیدا کن. بعدش با تحلیل تغییر انرژی خازن به خواسته سؤال برس.

گام اول

ابتدا ظرفیت الکتریکی خازن را به دست می‌آوریم:

$$Q = CV \xrightarrow{\text{چون ظرفیت الکتریکی خازن ثابت است.}} \Delta Q = C \Delta V \xrightarrow{\Delta Q = 20 nC, \Delta V = 5V} 20 = C \times 5$$

$$\Rightarrow C = 4 nF$$

ظرفیت الکتریکی و تغییر انرژی خازن را داریم و به دنبال یافتن بار اولیه هستیم. پس با رابطه $U = \frac{Q^2}{2C}$ ادامه می‌دهیم:

$$U_2 - U_1 = \frac{Q_2^2}{2C} - \frac{Q_1^2}{2C} \Rightarrow \Delta U = \frac{1}{2C} (Q_2 - Q_1)(Q_2 + Q_1) \xrightarrow[\Delta U = 3/5 \times 10^{-7} = 350 \text{ nJ}, Q_2 - Q_1 = 20 \text{ nC}]{C = 4 \text{ nF}}$$

$$350 = \frac{1}{2 \times 4} \times (20)(Q_2 + Q_1) \Rightarrow Q_2 + Q_1 = 140 \text{ nC}$$

کام آخر

حالا به کمک حل دستگاه داریم:

$$\begin{cases} Q_2 - Q_1 = 20 \\ Q_2 + Q_1 = 140 \end{cases} \xrightarrow{\text{اختلاف طرفین}} 2Q_1 = 120 \Rightarrow Q_1 = 60 \text{ nC}$$

سوتی‌های پرتکرار

اگر به اشتباه، بار ثانویه خازن رو حساب کنی در دام گزینه (۲) می‌افتی.

آزمون سراسری تجربی تیرماه ۱۴۰۲

۶۲- ظرفیت خازنی $40 \mu\text{F}$ است. اگر بار الکتریکی آن $\frac{3}{2}$ برابر شود، انرژی ذخیره شده در آن $25 \mu\text{J}$ افزایش می‌یابد. بار اولیه خازن چند

میکروکولن است؟

۱۲۰ (۴)

۸۰ (۳)

۶۰ (۲)

۴۰ (۱)

پاسخ تشریحی:

اگر بار اولیه خازن برابر $q_1 = q$ باشد، بار نهایی آن برابر $q_2 = \frac{3}{2}q$ است و می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} U_1 = \frac{1}{2} \frac{q_1^2}{C} = \frac{q^2}{80} \\ U_2 = \frac{1}{2} \frac{q_2^2}{C} = \frac{\left(\frac{3}{2}q\right)^2}{80} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underbrace{U_2 - U_1}_{25 \mu\text{J}} = \frac{\frac{9}{4}q^2 - q^2}{80} = \frac{\frac{5}{4}q^2}{80}$$

$$\Rightarrow 25 = \frac{\frac{5}{4}q^2}{80} \Rightarrow q^2 = 1600 \Rightarrow q = 40 \mu\text{C}$$

پاسخ: گزینه ۱



۴۰- خازن تختی به ظرفیت نامعلوم در اختیار داریم. اگر حداقل کار مورد نیاز برای این که اختلاف پتانسیل الکتریکی خازن را از 6V به 10V برسانیم برابر با W_1 و حداقل کار مورد نیاز برای این که اختلاف پتانسیل الکتریکی خازن را از 6V به 10V برسانیم برابر با W_2 باشد، حاصل $\frac{W_2}{W_1}$ کدام است؟

۲ (۴)

$\frac{16}{9}$ (۳)

۳ (۲)

$\frac{25}{9}$ (۱)

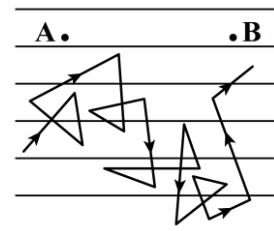
این که در صورت سؤال گفته شده «حداقل کار مورد نیاز»، تعبیرش این است که کار انجام شده صرفاً جهت افزایش انرژی الکتریکی ذخیره شده در خازن شده است؛ بنابراین داریم:

$$\begin{cases} W_2 = \Delta U_2 \\ W_1 = \Delta U_1 \end{cases} \xrightarrow{U = \frac{1}{2} CV^2} \frac{W_2}{W_1} = \frac{\frac{1}{2} C(V_2^2 - V_1^2)}{\frac{1}{2} C(V_2^2 - V_1^2)} \Rightarrow \frac{W_2}{W_1} = \frac{V_2^2 - V_1^2}{V_2^2 - V_1^2}$$

$$\xrightarrow{V_1 = 0V, V_2 = 6V, V_3 = 10V} \frac{W_2}{W_1} = \frac{100 - 36}{36 - 0} = \frac{64}{36} = \frac{16}{9}$$



۴۱- شکل زیر، مسیر زیگزاگی یک الکترون آزاد را در یک رسانای فلزی، در حضور میدان الکتریکی نشان می‌دهد. با توجه به این شکل، کدام یک از عبارات زیر درست هستند؟



- الف - سرعت سوق الکترون‌ها بسیار کم و به سمت راست است.
 ب - پتانسیل الکتریکی نقطه A از نقطه B کم‌تر است.
 ج - جهت قراردادی جریان الکتریکی، برخلاف جهت حرکت کاتوره‌ای الکترون آزاد و به سمت چپ است.
 د - الکترون آزاد دائماً در حال حرکت در خلاف جهت میدان الکتریکی است.

(۱) «الف» و «ب» (۲) «ب» و «ج» (۳) «ج» و «د» (۴) «الف» و «د»

این سؤال به تست خوب برای به چالش کشیدن اطلاعات از صفحه‌های اول فصل (۲) هست. اگر نتوانستی جواب درست بدی، پیشنهاد می‌کنم اول برو درس‌نامه این قسمت رو بخون بعدش پاسخش رو تحلیل کن.

بررسی موارد:

- (الف) با توجه به مسیر زیگزاگی الکترون آزاد در شکل، درمی‌یابیم سرعت سوق از نقطه A به سمت نقطه B یعنی به سمت راست است. از طرفی می‌دانیم مقدار سرعت سوق بسیار کم است. (✓)
- (ب) می‌دانیم جهت سرعت سوق الکترون (به سمت راست) در خلاف جهت میدان الکتریکی است؛ بنابراین جهت میدان الکتریکی به سمت چپ است. از طرفی می‌دانیم با حرکت در جهت خطوط میدان، پتانسیل الکتریکی کاهش می‌یابد؛ در نتیجه وقتی از نقطه B به سمت نقطه A پیش می‌رویم (حرکت در جهت خطوط میدان) پتانسیل الکتریکی کاهش می‌یابد؛ پس پتانسیل الکتریکی نقطه A کم‌تر از پتانسیل الکتریکی نقطه B است. (✓)
- (ج) جهت قراردادی جریان الکتریکی در خلاف جهت سرعت سوق است و به جهت سرعت کاتوره‌ای الکترون آزاد ارتباطی ندارد. (✗)
- (د) الکترون آزاد به صورت کاتوره‌ای و نامنظم حرکت می‌کند و جهت خاصی ندارد؛ بنابراین نمی‌توانیم بگوییم دائماً در خلاف جهت میدان داخل رسانا حرکت می‌کند. (✗)

جریان الکتریکی

شکل زیر حرکت الکترون‌ها را درون یک رسانای فلزی در حضور میدان الکتریکی نشان می‌دهد:



در مورد این شکل به نکات زیر توجه کنید:

- ۱- در غیاب میدان الکتریکی، الکترون‌ها به صورت کاتوره‌ای، تصادفی و با سرعت زیاد در همه جهات حرکت می‌کنند و بار الکتریکی به طور خالص منتقل نمی‌شود؛ بنابراین جریان الکتریکی درون رسانا ایجاد نمی‌شود.
- ۲- در حضور میدان الکتریکی، الکترون‌ها با سرعتی متوسط موسوم به سرعت **سوق** در خلاف جهت میدان الکتریکی حرکت می‌کنند. علت این حرکت آن است که میدان الکتریکی، نیرویی در خلاف جهت میدان به الکترون‌ها وارد می‌کند.
- ۳- به دلیل حرکت الکترون‌ها با سرعت سوق در خلاف جهت میدان، بار الکتریکی منفی به طور خالص در خلاف جهت میدان الکتریکی به حرکت درمی‌آید؛ بنابراین جریان الکتریکی در جهت میدان الکتریکی در رسانا ایجاد می‌شود. دقت کنید که طبق قرارداد، جهت جریان الکتریکی در خلاف جهت حرکت بارهای منفی است.
- ۴- میدان الکتریکی و جریان الکتریکی هم جهت هستند، درحالی‌که جهت سرعت سوق الکترون‌ها در خلاف جهت آن‌هاست.
- ۵- سرعت سوق الکترون‌ها بسیار کم و از مرتبه $10^{-4} \frac{m}{s}$ است، در صورتی‌که سرعت حرکت کاتوره‌ای آن‌ها بسیار زیاد و از مرتبه $10^6 \frac{m}{s}$ است.
- ۶- آهنگ شارش بار الکتریکی در یک سیم معادل با جریان الکتریکی گذرنده از آن سیم است:

$$I_{av} = \frac{\Delta q}{\Delta t}$$

Δt : مدت زمان عبور بار الکتریکی با یکای ثانیه (s)

Δq : بار الکتریکی شارش شده با یکای کولن (C)

I_{av} : جریان الکتریکی متوسط با یکای آمپر (A)

۷- یکای جریان الکتریکی برابر آمپر (A) است که معادل با $\frac{\text{کولن}}{\text{ثانیه}}$ می‌باشد. دقت کنید که آمپر یکی از هفت یکای اصلی SI می‌باشد.

۸- طبق رابطه $\Delta q = I_{av} \Delta t$ ، علاوه بر کولن، می‌توان یکای آمپر - ساعت را هم برای بار الکتریکی استفاده کرد. هر آمپر - ساعت معادل با ۳۶۰۰ کولن است.

۹- در سؤالاتی که تعداد الکترون‌های عبوری از یک مقطع رسانا را در مدت زمان Δt می‌خواهیم، می‌توان به صورت زیر عمل کرد:

$$\begin{cases} I_{av} = \frac{\Delta q}{\Delta t} \Rightarrow I_{av} = \frac{ne}{\Delta t} \Rightarrow n = \frac{I_{av} \Delta t}{e} \\ \Delta q = ne \end{cases}$$



۴۲- کدام یک از گزینه‌های زیر معادل یکای $M\Omega$ است؟

$$\frac{g.m^2}{A^2.ms^3} \quad (۴)$$

$$\frac{kg.m^2}{A^2.ms^3} \quad (۳)$$

$$\frac{kg.m^2}{mA^2.s^2} \quad (۲)$$

$$\frac{kg.km^2}{A^2.s^2} \quad (۱)$$

(سخت - مفهومی/ترکیبی - زمان بر ۵ - صفحه ۴۳ - ۱۱۰۲)

پاسخ: گزینه ۴

راه نجات سریع

اول یکای اهم رو برحسب یکاهای اصلی به دست بیار و با توجه به توان یکای زمان در گزینه‌ها، دوتا گزینه رو رد کن. بعدش گزینه‌های باقی‌مونده رو برحسب یکای SI بنویس ببین کدام گزینه معادل $10^6 \Omega$ می‌شه.

گام اول

به کمک قانون اهم، یکای اهم را برحسب یکاهای اصلی به دست می‌آوریم:

$$R = \frac{V}{I} \xrightarrow{V = \frac{\Delta U_E}{q}} R = \frac{\Delta U_E}{qI} \xrightarrow{q = It} R = \frac{\Delta U_E}{I^2 t}$$

$$\Rightarrow [R] = \frac{[\Delta U_E]}{[I]^2 [t]} \Rightarrow \Omega = \frac{J}{A^2 \cdot s} \xrightarrow{J = \frac{kg \cdot m^2}{s^2}} \Omega = \frac{kg \cdot m^2}{A^2 \cdot s^3}$$

$$\Rightarrow \Omega = \frac{kg \cdot m^2}{A^2 \cdot s^3}$$

بنابراین گزینه‌های (۱) و (۲) که یکای زمان (s)، در آن‌ها توان (۲) دارد، نادرست هستند.

گام دوم

بررسی سایر گزینه‌ها:

۳

$$\frac{kg \cdot m^2}{A^2 \cdot ms^3} = \frac{kg \cdot m^2}{A^2 \times 10^{-9} s^3} = 10^9 \frac{kg \cdot m^2}{A^2 \cdot s^3} = G\Omega \quad (\times)$$

۴

$$\frac{g \cdot m^2}{A^2 \cdot ms^3} = \frac{10^{-3} kg \cdot m^2}{A^2 \times 10^{-9} s^3} = 10^6 \frac{kg \cdot m^2}{A^2 \cdot s^3} = M\Omega \quad (\checkmark)$$

قانون اهم 

مطابق قانون اهم، رابطه ولتاژ و جریان برای یک مقاومت الکتریکی اهمی به صورت زیر است:

$$V = RI$$

V: اختلاف پتانسیل با یکای ولت (V) I: جریان الکتریکی با یکای آمپر (A) R: مقاومت الکتریکی با یکای اهم (Ω)



۴۳- ولتاژ باتری یک نوع ماشین حساب ۲/۵ ولت است. اگر این ماشین حساب یک ساعت روشن باشد، باتری ۱/۸ ژول انرژی به مدار آن می‌دهد. جریان الکتریکی عبوری متوسط در این مدت چند میلی‌آمپر است؟

۰/۲۵ (۴)

۰/۲ (۳)

۰/۱۵ (۲)

۰/۱ (۱)

(متوسط - محاسباتی - استاندارد ۶ - صفحه ۴۲ - ۱۱۰۲)

پاسخ: گزینه ۳ 

راه نجات سریع 

اول به کمک رابطه $\Delta V = \frac{\Delta U_E}{q}$ ، بار الکتریکی عبوری از مدار رو حساب کن بعدش با داشتن بار عبوری و مدت‌زمان، جریان الکتریکی متوسط رو به دست بیار.

گام اول

بار الکتریکی عبوری از مدار را حساب می‌کنیم:

$$\Delta V = \frac{\Delta U_E}{q} \Rightarrow 2/5 = \frac{1/8}{q} \Rightarrow q = 0/72 C$$

گام آخر

جریان عبوری متوسط را به دست می‌آوریم:

$$I_{av} = \frac{\Delta q}{\Delta t} \Rightarrow I_{av} = \frac{0/72}{3600} = \frac{1}{5000} A \Rightarrow I_{av} = 0/2 mA$$



۴۴- ۲۵ درصد از بار الکتریکی باتری استاندارد خودرویی پس از مدت ۶ ساعت، با فراهم کردن جریان متوسط ۲/۵ آمپر تخلیه می‌شود. باتری این خودرو چند آمپر - ساعت است؟

۷۵ (۴)

۶۰ (۳)

۵۰ (۲)

۴۸ (۱)

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) (صفحه ۴۲ - ۱۱۰۲)

پاسخ: گزینه ۳

راه نجات سریع

اول با یک تناسب ساده مدت زمان تخلیه کامل باتری خودرو رو به دست بیار. بعدش با داشتن جریان و مدت زمان تخلیه باتری، آمپر - ساعت اون رو حساب کن.

کلم اول

با توجه به این که در مدت ۶ ساعت، ۲۵ درصد از بار الکتریکی باتری خودرو تخلیه شده، درمی‌یابیم برای این که باتری به طور کامل تخلیه شود، باید به مدت ۲۴ ساعت همین جریان متوسط (۲/۵ A) را فراهم کند. به تناسب زیر توجه کنید:

درصد تخلیه	۲۵	۱۰۰
مدت زمان	۶h	Δt

$$\Rightarrow \Delta t = \frac{6 \times 100}{25} = 24h$$

کلم آخر

آمپر - ساعت باتری خودرو را به دست می‌آوریم:

$$I_{av} = \frac{\Delta q}{\Delta t} \Rightarrow 2/5 = \frac{\Delta q}{24} \Rightarrow \Delta q = 60 \cdot A \cdot h$$

بنابراین باتری این خودرو ۶۰ آمپر - ساعت است.

۴۵- معادله بار الکتریکی عبوری از یک رسانا بر حسب زمان در SI به صورت $q = t^2 - 6t + 5$ است. در کدام یک از بازه‌های زمانی زیر، جریان الکتریکی متوسطی که از رسانا می‌گذرد، صفر آمپر است؟

[۳s, ۶s] (۴)

[۲s, ۴s] (۳)

[۲s, ۵s] (۲)

[۰s, ۵s] (۱)

(آسان - مفهومی/محاسباتی - سریع) (صفحه ۴۱ - ۱۱۰۱)

پاسخ: گزینه ۳

معادله بار الکتریکی عبوری از رسانا بر حسب زمان، یک تابع درجه ۲ (سهمی) است. از طرفی هم رابطه جریان الکتریکی متوسطی که از این رسانا عبور می‌کند، به صورت $I_{av} = \frac{\Delta q}{\Delta t}$ است؛ بنابراین برای این که $I_{av} = 0$ شود، باید $\Delta q = 0$ باشد؛ یعنی باید $q_{t_2} = q_{t_1}$ باشد که

تعبیرش این می‌شود که باید این دو نقطه در سهمی اشاره شده، روبه روی هم باشند و این زمانی رخ می‌دهد که رأس $t = \frac{t_1 + t_2}{2}$ باشد؛ بنابراین داریم:

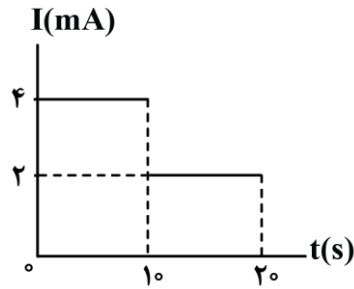
$$t_{\text{رأس}} = \frac{-b}{2a} = \frac{6}{2} = 3s \Rightarrow \frac{t_1 + t_2}{2} = 3 \Rightarrow t_1 + t_2 = 6s$$

فقط در گزینه (۳) این شرط صدق می‌کند.

راهنمای مسیرت

گاهی وقت‌ها بچه‌ها می‌گن آقا من خیلی فیزیک می‌خونم ولی درصدم از یک حدی بالاتر نمی‌ره. وقتی چند جلسه باهاشون کار می‌کنم، متوجه می‌شم معمولاً به کوچولو ریاضی‌شون مشکل داره. بچه‌ها خودتون رو به سواد ریاضی خوب مسلط کنید تا چرخ فیزیکتون راحت‌تر و بهتر بچرخه.

۴۶- نمودار جریان الکتریکی عبوری از یک رسانا بر حسب زمان، مطابق شکل است. بار الکتریکی خالصی که در بازه زمانی صفر تا ۱۵s از این رسانا شارش کرده چند کولن است؟



- (۱) 5×10^1
- (۲) 6×10^1
- (۳) 5×10^{-2}
- (۴) 6×10^{-2}

(آسان - محاسباتی/نموداری - استاندارد) - صفحه ۴۲ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۳

گام اول

در بازه زمانی صفر تا ۱۰s، $I_1 = 4 \text{ mA}$ است و داریم:

$$\Delta q_{0-10s} = I_1 \Delta t_1 = 4 \times 10^{-3} \times 10 = 4 \times 10^{-2} \text{ C}$$

گام دوم

در بازه زمانی ۱۰s تا ۱۵s، $I_2 = 2 \text{ mA}$ است و داریم:

$$\Delta q_{10s-15s} = I_2 \Delta t_2 = 2 \times 10^{-3} \times 5 = 10^{-2} \text{ C}$$

گام آخر

بار الکتریکی خالصی که در بازه زمانی صفر تا ۱۵s شارش کرده، از جمع جبری بارهای خالص شارش یافته‌ای که در گام‌های اول و دوم به دست آوردیم، محاسبه می‌شود:

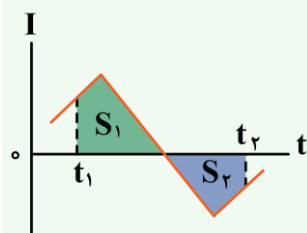
$$\Delta q_{0-15s} = \Delta q_{0-10s} + \Delta q_{10s-15s} = 4 \times 10^{-2} + 10^{-2} = 5 \times 10^{-2} \text{ C}$$

دام طرح

اگر خواست به یکای محور جریان که میلی‌آمپر هست نباشه و از تبدیل یکا غافل بشی در دام گزینه (۱) می‌افتی.

نکته

مساحت محصور بین نمودار جریان - زمان و محور زمان، برابر با بار الکتریکی خالص شارش یافته در رسانا است:

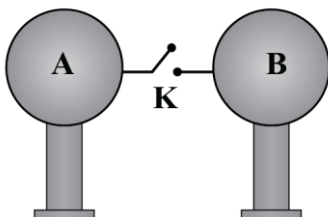


$$\Delta q = S_1 - S_2$$

$$I_{av} = \frac{S_1 - S_2}{t_2 - t_1}$$

• • •

۴۷- در شکل زیر، دو کره مشابه و باردار A و B بر روی پایه‌های عایق قرار دارند. با بسته شدن کلید K، در مدت $2 \mu s$ ، کره‌ها به تعادل الکتریکی می‌رسند و شدت جریان متوسط عبوری از کلید در این مدت، 25 mA می‌شود. قبل از وصل کردن کلید، اختلاف بار الکتریکی دو کره چند نانوکولن بوده است؟



- (۱) ۱۰۰
- (۲) ۲
- (۳) ۸۰
- (۴) ۶

چون کره‌ها مشابه هستند، از لحظه وصل کردن کلید تا لحظه‌ای که کره‌ها به تعادل الکتریکی می‌رسند، مقدار بار الکتریکی خالص شارش یافته برابر با $\Delta q = \left| \frac{q_A - q_B}{2} \right|$ می‌شود؛ بنابراین داریم:

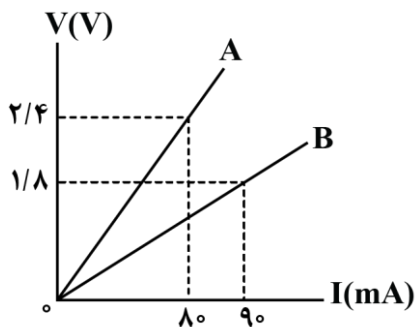
$$I_{av} = \frac{\Delta q}{\Delta t} \Rightarrow \Delta q = I_{av} \Delta t \quad I_{av} = 25 \text{ mA} = 25 \times 10^{-3} \text{ A}, \Delta t = 2 \mu\text{s} = 2 \times 10^{-6} \text{ s} \rightarrow$$

$$25 \times 10^{-3} = \frac{\Delta q}{2 \times 10^{-6}} \Rightarrow \Delta q = 5 \times 10^{-8} \text{ C}$$

$$\Delta q = \left| \frac{q_A - q_B}{2} \right| \rightarrow \left| \frac{q_A - q_B}{2} \right| = 5 \times 10^{-8} \Rightarrow |q_A - q_B| = 10^{-7} \text{ C} = 10 \text{ nC}$$



۴۸- شکل زیر مربوط به نمودار اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر مقاومت‌های اهمی A و B بر حسب جریان عبوری از آن‌ها است. اگر هریک از این مقاومت‌ها را به‌طور جداگانه به اختلاف پتانسیل الکتریکی ۳/۶ ولت وصل کنیم، اختلاف جریان الکتریکی عبوری از آن‌ها چند آمپر می‌شود؟



۱) ۰/۳

۲) ۰/۰۳

۳) ۰/۶

۴) ۰/۰۶

به کمک شیب نمودار $V-I$ ، مقاومت الکتریکی A و B رو به دست بیار و بعد به کمک رابطه $R = \frac{V}{I}$ ، جریان عبوری از اون‌ها رو حساب کن و اختلاف بزن.

می‌دانیم شیب نمودار اختلاف پتانسیل الکتریکی بر حسب جریان عبوری از یک رسانای اهمی، ثابت و برابر با مقاومت الکتریکی رسانای موردنظر است؛ بنابراین به کمک اطلاعات روی نمودار داریم:

$$R_A = \text{شیب نمودار A} = \frac{V_A}{I_A} = \frac{2/4}{80 \times 10^{-3}} = 30 \Omega$$

$$R_B = \text{شیب نمودار B} = \frac{V_B}{I_B} = \frac{1/8}{90 \times 10^{-3}} = 20 \Omega$$

حالا به کمک مقادیر R_A و R_B و با استفاده از رابطه $R = \frac{V}{I}$ داریم:

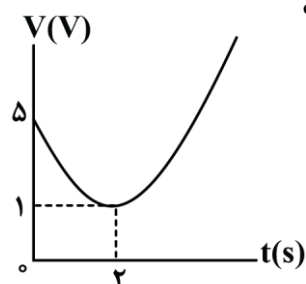
$$I_A = \frac{V}{R_A} \xrightarrow{V=3/6V, R_A=30\Omega} I_A = \frac{3/6}{30} = 0/12A$$

$$I_B = \frac{V}{R_B} \xrightarrow{V=3/6V, R_B=20\Omega} I_B = \frac{3/6}{20} = 0/18A$$

$$\Rightarrow I_B - I_A = 0/18 - 0/12 = 0/06A$$



۴۹- نمودار اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر یک رسانای اهمی به مقاومت الکتریکی 40Ω بر حسب زمان، یک سهمی مطابق شکل است. با فرض ثابت بودن دما، در لحظه $t=5s$ ، جریان الکتریکی عبوری از آن چند میلی آمپر است؟



(۱) ۰/۱۲

(۲) ۱۲۰

(۳) ۲۵۰

(۴) ۰/۲۵

(متوسط - محاسباتی/نموداری - استاندارد ۶ - صفحه ۴۴ - ۱۱۰۲)

پاسخ: گزینه ۳

راه نجات سریع

به کمک رأس و عرض سهمی، معادله سهمی رو پیدا کن و در لحظه $t = 5s$ ، اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر مقاومت رو به دست بیا. در آخر هم با رابطه $R = \frac{V}{I}$ تمومش کن.

کام‌لول

ابتدا معادله اختلاف پتانسیل الکتریکی را بر حسب زمان به دست می آوریم:

$$V = A(t - t_{\text{رأس}})^2 + V_{\text{رأس}} \xrightarrow{t_{\text{رأس}}=2s, V_{\text{رأس}}=1V} V = A(t - 2)^2 + 1$$

$$\xrightarrow{t=5s, V=5V} 5 = A(5 - 2)^2 + 1 \Rightarrow 5 = 4A + 1 \Rightarrow A = 1 \Rightarrow V = (t - 2)^2 + 1$$

کام‌آفر

به کمک معادله $V = (t - 2)^2 + 1$ ، در لحظه $t = 5s$ داریم:

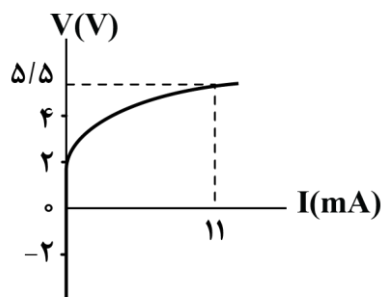
$$V_{5s} = (5 - 2)^2 + 1 = 10V \xrightarrow{I = \frac{V}{R}} I = \frac{10}{40} = 0/25A = 250mA$$

سوتی‌های پرتکرار

اگر حواست نباشه که جریان بر حسب میلی آمپر خواسته شده، در دام گزینه (۴) می افتی.



۵۰- نمودار ولتاژ - جریان نشان داده شده در شکل زیر، مربوط به یک رسانای بوده که نمونه‌ای از آن‌ها است.



- (۱) اهمی - سیم مسی
- (۲) غیراهمی - سیم مسی
- (۳) اهمی - دیود نورگسیل
- (۴) غیراهمی - دیود نورگسیل

پاسخ: گزینه ۴

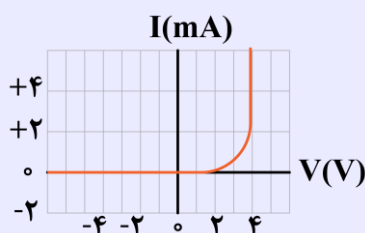
(آسان - نموداری - سریع) - صفحه ۴۴ - ۱۱۰۲

چون نمودار ولتاژ - جریان خطی نیست، پس مربوط به یک رسانای غیراهمی است. دیود نورگسیل (LED) نمونه‌ای از مقاومت‌های غیراهمی است.

رازهای پشت سؤال

این سؤال رو از دل کتاب درسی براتون طرح کردیم تا به اهمیت شکل‌های کتاب درسی و تیپ سؤالاتی که می‌شه ازشون طرح کرد، پی ببرین.

برخلاف مقاومت‌های اهمی که در آن‌ها ولتاژ و جریان باهم رابطه مستقیم و خطی دارند، ولتاژ و جریان مقاومت‌های غیراهمی دارای رابطه غیرخطی با یکدیگر هستند، مثلاً شکل زیر، نمودار جریان - ولتاژ برای یک دیود نورگسیل (LED) را نشان می‌دهد که یک مقاومت غیراهمی است.



دقت کنید که در دمای ثابت، نسبت ولتاژ به جریان $(\frac{V}{I})$ در مقاومت‌های اهمی همواره ثابت است، درحالی‌که این نسبت در مقاومت‌های غیراهمی متغیر می‌باشد.



۵۱- کدام یک از مطالب زیر نادرست است؟

- (۱) نفت خام را پس از جدا کردن نمک‌ها، اسیدها و آب از آن پالایش می‌کنند.
- (۲) اغلب انفجارها در معادن زغال سنگ ناشی از تجمع گازی سبک، بی‌رنگ و بی‌بو است.
- (۳) کمتر از ۱۰ درصد از نفت خام به‌عنوان خوراک پتروشیمی در تولید مواد پتروشیمیایی به کار می‌رود.
- (۴) بیش از ۵۰ درصد از انتقال سوخت به مراکز توزیع با استفاده از راه آهن، نفت کش جاده‌پیما و کشتی‌های نفتی انجام می‌شود.

پاسخ: گزینه ۴

(آسان - خط به خط - سریع - صفحه ۴۷ - ۱۱۰۱)

حدود ۶۶ درصد انتقال سوخت به مراکز توزیع و استفاده از آن از طریق خطوط لوله و بقیه آن با استفاده از راه آهن، نفت کش جاده‌پیما و کشتی‌های نفتی انجام می‌شود، در نتیجه مقدار آن کمتر از ۵۰ درصد است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

- (۱) پس از جدا کردن نمک‌ها، اسیدها و آب، نفت خام را پالایش می‌کنند و جدا کردن این مواد از نفت خام، جزء پالایش محسوب نمی‌شود.
- (۲) بیشتر انفجارها در معادن زغال سنگ به دلیل تجمع گاز متان آزاد شده از زغال سنگ رخ می‌دهد. متان گازی سبک، بی‌رنگ و بی‌بو است و هرگاه مقدار آن در هوای معدن به بیش از ۵ درصد برسد، احتمال انفجار وجود دارد.
- (۳) بیش از ۹۰ درصد از نفت خام صرف سوزاندن و تأمین انرژی می‌شود و تنها مقدار کمی (کمتر از ۱۰ درصد) به‌عنوان خوراک پتروشیمی در تولید مواد پتروشیمیایی به کار می‌رود.



۵۲- کدام یک از گزینه‌های زیر درست است؟

- (۱) نام‌گذاری یک آلکن راست زنجیر به‌صورت «۳-پنتن» صحیح است.
- (۲) در هر آلکان شاخه‌دار، هر اتم کربن حداقل به یک اتم هیدروژن متصل است.
- (۳) به هیدروکربن‌های سیرنشده با یک یا چند پیوند سه‌گانه کربن-کربن، آلکین گفته می‌شود.
- (۴) برای نمایش ساده‌ترین آلکان دارای شاخه فرعی متیل به‌صورت پیوند-خط، سه خط تیره لازم است.

پاسخ: گزینه ۴

(متوسط - مفهومی - استاندارد - صفحه ۴۲ - ۱۱۰۱)

متیل پروپان ساده‌ترین آلکان دارای شاخه فرعی متیل است و برای رسم فرمول پیوند-خط آن به ۳ خط تیره نیاز داریم.



بررسی سایر گزینه‌ها:

- (۱) ساختار آلکن مطرح شده به‌صورت مقابل است:
 
- برای نام‌گذاری صحیح آن باید از سمتی شماره‌گذاری را شروع کنیم که زودتر به پیوند دوگانه برسیم. از آن‌جا که از سمت چپ روی کربن شماره ۲ دوم پیوند دوگانه قرار دارد، نام‌گذاری این ترکیب به‌صورت «۲-پنتن» است.
- (۲) در بعضی از آلکان‌های شاخه‌دار، اتم‌های کربنی وجود دارند که به هیچ اتم هیدروژنی اتصال ندارند به‌طور مثال کربن دوم در ترکیب دی‌متیل پروپان به هیچ اتم هیدروژنی اتصال ندارد.
- (۳) به هیدروکربن‌های سیرنشده با یک پیوند (و نه چند) سه‌گانه کربن-کربن، آلکین گفته می‌شود.

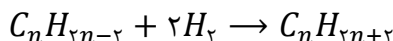
۵۳- اگر هر ۱۰۰ گرم از یک آلکین به تقریب در واکنش با ۳/۲ گرم گاز هیدروژن به طور کامل، به یک ترکیب سیرشده تبدیل شود، در هر مولکول این آلکین، چند اتم کربن وجود دارد؟ ($H = 1, C = 12: g. mol^{-1}$)

(۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۱۰

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - صفحه ۴۲ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۳

آلکین‌ها با فرمول شیمیایی C_nH_{2n-2} یک دسته از هیدروکربن‌های سیر نشده هستند و برای سیر شدن با گاز هیدروژن واکنش می‌دهند. معادله واکنش آلکین‌ها با گاز هیدروژن به صورت زیر است:



راه حل مسئله

در این واکنش هر ۴ گرم گاز هیدروژن با یک مول آلکین واکنش می‌دهد. پس اگر حساب کنیم که ۴ گرم گاز هیدروژن با چند گرم آلکین واکنش می‌دهد، جرم مولی آلکین و بعد از آن تعداد اتم کربن آن را حساب می‌کنیم.

مطابق فرض مسئله، هر ۱۰۰ گرم از این آلکین با ۳/۲ گرم گاز هیدروژن واکنش می‌دهد. همچنین مطابق معادله واکنش، هر مول از این هیدروکربن با ۲ مول گاز هیدروژن واکنش می‌دهد. پس اگر جرم آلکینی را که با ۲ مول گاز هیدروژن واکنش می‌دهد، مشخص کنیم، جرم مولی آلکین را محاسبه کرده‌ایم. پس جرم مولی آلکین برابر است با:

$$? g C_nH_{2n-2} = 2 mol H_2 \times \frac{2 g H_2}{1 mol H_2} \times \frac{100 g C_nH_{2n-2}}{3/2 g H_2} = 125 g$$

پس جرم مولی آلکین مورد نظر به تقریب برابر ۱۲۵ گرم بوده و با توجه به این که جرم مولی آلکین n کربنی، برابر $14n - 2$ است، تعداد اتم‌های کربن آن را مشخص می‌کنیم:

$$14n - 2 = 125 \Rightarrow n = \frac{125 + 2}{14} = \frac{127}{14} \approx 9$$

پس در هر مولکول این آلکین، ۹ اتم کربن وجود دارد.



۵۴- یک آلکان شاخه‌دار به اشتباه به صورت «۲-متیل-۳،۴-دی اتیل پنتان» نام گذاری شده است، نام صحیح این ترکیب طبق روش آیوپاک کدام است؟

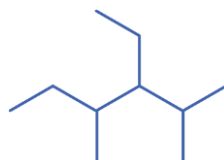
(۱) ۵،۳-دی متیل-۴-اتیل هگزان
(۲) ۴-اتیل-۵،۳-دی متیل هگزان

(۱) ۴،۲-دی متیل-۳-اتیل هگزان
(۳) ۳-اتیل-۴،۲-دی متیل هگزان

(آسان - استدلالی - سریع) - صفحه ۳۹ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۳

ساختار ترکیب مورد نظر که به اشتباه نام گذاری شده، به صورت زیر است:



برای نام گذاری این آلکان ابتدا زنجیره اصلی را باید مشخص کنیم. زنجیره اصلی این ترکیب با رنگ نارنجی مشخص شده است:



زنجیره اصلی این ترکیب ۶ کربنه است و چون از سمت راست ترکیب زودتر به اولین شاخه فرعی می‌رسیم، شماره گذاری را از سمت راست آغاز می‌کنیم. بر روی کربن‌های دوم و چهارم شاخه فرعی متیل و روی کربن سوم شاخه فرعی اتیل وجود دارد. در نام گذاری شاخه اتیل بر متیل مقدم بوده و برای نوشتن نام، ابتدا شماره و تعداد شاخه اتیل و سپس شماره و تعداد شاخه متیل نوشته می‌شود. نام گذاری صحیح این ترکیب به صورت «۳-اتیل-۴،۲-دی متیل هگزان» است.



۵۵- چند مورد از مطالب زیر در مورد فلز تیتانیوم نادرست است؟

- الف - اولین عنصری است که در آرایش الکترونی آن، ۵ زیرلایه دو الکترونی وجود دارد.
 ب - در شرایط یکسان، سرعت واکنش خوردگی آن در مقایسه با فلز آهن بیشتر است.
 ج - تعداد الکترون‌ها با $n + l = 4$ در هر اتم این فلز و هر اتم اولین فلز واسطه برابر است.
 د - واکنش تولید آن از تیتانیوم (IV) کلرید در حضور جو بی‌اثر (هوای بدون اکسیژن) انجام می‌شود.
- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

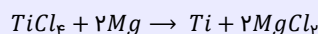
(دشوار - مفهومی - زمان بر ۵ - صفحه ۴۹ - ۱۱۰۱)

پاسخ: گزینه ۲

تیتانیوم (Ti_{22})، دومین فلز واسطه بوده و در دوره و گروه چهارم قرار دارد.

تیتانیوم

این فلز از عناصر واسطه دسته d بوده و در دوره و گروه چهارم قرار دارد. از ویژگی‌های منحصر به فرد تیتانیوم در مقابل سایر فلزها، چگالی کم، مقاوم در برابر خوردگی و محکم بودن را می‌توان مثال زد. این ویژگی‌ها، تیتانیوم را گزینه مناسبی برای تولید بدنه دوچرخه کرده‌اند. یکی از واکنش‌هایی که منجر به تولید تیتانیوم می‌شود، واکنش تیتانیوم (IV) کلرید با فلز منیزیم است. با توجه به اینکه، واکنش‌پذیری منیزیم بیشتر از تیتانیوم است، فلز منیزیم می‌تواند فلز تیتانیوم را از ترکیبات آن خارج کند. معادله واکنش تولید تیتانیوم به صورت زیر است:

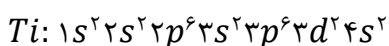


این واکنش در حضور گاز آرگون انجام می‌شود و اگر جو طبیعی (حاوی گاز اکسیژن و نیتروژن) اطراف این واکنش وجود داشته باشد، به علت واکنش گاز اکسیژن و نیتروژن با منیزیم، از انجام این واکنش ممانعت می‌شود. همچنین واکنش‌پذیری فلز تیتانیوم از فلز آهن بیشتر است.

عبارت‌های (ب) و (د) نادرست هستند.

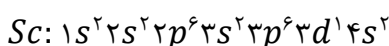
بررسی موارد:

یک زیرلایه دو الکترونی یا یک زیرلایه s پر شده است و یا یک زیرلایه پرنشده دیگر. با توجه به قاعده آفا (زیرلایه‌ها به ترتیب سطح انرژی پر می‌شوند و هنگامی که یک زیرلایه پر شود، زیرلایه بعدی شروع به دریافت الکترون می‌کند)، هر اتم می‌تواند تنها یک زیرلایه پرنشده داشته باشد، پس برای آن که عنصری برای اولین بار ۵ زیرلایه دو الکترونی داشته باشد، ۴ زیرلایه باید از زیرلایه‌های s باشد و زیرلایه بعدی یک زیرلایه ۲ الکترونی پرنشده باشد. که این زیرلایه را می‌توان از میان $3d$ یا $4p$ انتخاب کرد، که زیرلایه $3d$ زودتر الکترون می‌گیرد. پس عنصر مورد نظر ۲ الکترون در این زیرلایه دارد که همان تیتانیوم خواهد بود. آرایش الکترونی این فلز به صورت زیر است:



تیتانیوم فلزی محکم بوده و در برابر خوردگی مقاوم است. به همین دلیل اگر چه واکنش‌پذیری آن از آهن بیشتر است، اما سرعت خوردگی آن از آهن کمتر خواهد بود.

اولین فلز واسطه اسکندیم است که یک الکترون کمتر از دومین فلز واسطه یعنی تیتانیوم در زیرلایه $3d$ داشته که $n + l = 5$ دارد. پس شمار الکترون‌هایی با $n + l = 4$ در این دو فلز یکسان است.

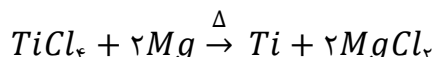


آرایش الکترونی اسکندیم به صورت مقابل است:

این دو فلز ۸ الکترون با $n + l = 4$ دارند که در دو زیرلایه $3p$ و $4s$ قرار دارند.

در جو بی‌اثر گاز نیتروژن وجود دارد که با منیزیم واکنش‌دهنده در واکنش استخراج تیتانیوم واکنش می‌دهد و جلوی انجام واکنش اصلی را می‌گیرد.

از واکنش فلز منیزیم با تیتانیوم (IV) کلرید برای تولید تیتانیوم در صنعت استفاده می‌شود که به صورت زیر انجام می‌گردد:



این واکنش به علت واکنش سریع گاز اکسیژن و نیتروژن موجود در هوا با فلز منیزیم و از بین رفتن واکنش‌دهنده در هوا، باید به جای هوا در حضور آرگون انجام شود.

۵۶- کدام مورد نادرست است؟ ($H = 1, C = 12: g.mol^{-1}$)

- (۱) در آلکان‌ها با افزایش اندازه مولکول، میزان چسبندگی مولکول نیز افزایش می‌یابد.
- (۲) آلکان موجود در سوخت فندک نسبت به آلکان دارای ۸ اتم هیدروژن نقطه جوش بالاتری دارد.
- (۳) در اولین آلکان راست زنجیر مایع در دمای اتاق، نسبت تعداد اتم‌های هیدروژن به تعداد اتم‌های کربن برابر با ۲/۴ است.
- (۴) گرانروی آلکانی به جرم مولی ۱۰۰ گرم بر مول نسبت به آلکانی که در هر مولکول آن ۵ پیوند $C - C$ وجود دارد، کمتر است.

پاسخ: گزینه ۴

(متوسط - استدلالی - استاندارد) - صفحه ۳۵ - ۱۱۰۱

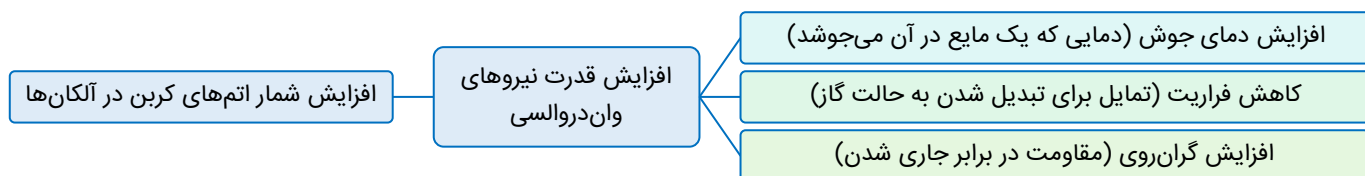
اگر جرم مولی یک آلکان با فرمول مولکولی C_nH_{2n+2} برابر با ۱۰۰ گرم بر مول باشد، تعداد اتم‌های کربن در هر مولکول آن برابر خواهد بود با:

$$12 \times n + 1 \times (2n + 2) = 100 \Rightarrow 14n + 2 = 100 \Rightarrow n = 7$$

پس آلکان مورد نظر هپتان است.

در هر مولکول از یک آلکان (C_nH_{2n+2}) ، $n - 1$ پیوند کربن-کربن وجود دارد. پس آلکانی که دارای ۵ پیوند کربن-کربن است، هگزان (C_6H_{14}) است.

حال از آن جا که با افزایش شمار اتم‌های کربن در آلکان‌ها گرانروی افزایش می‌یابد، پس گرانروی هپتان نسبت به هگزان بیشتر است. نمودار زیر برخی از خواص آلکان‌ها را برحسب افزایش تعداد اتم‌های کربن در آن‌ها نشان می‌دهد:



بررسی سایر گزینه‌ها:

- ۱ در آلکان‌ها با افزایش شمار اتم‌های کربن، اندازه مولکول افزایش می‌یابد و همچنین میزان چسبندگی آن‌ها نیز افزایش می‌یابد.
- ۲ بوتان (C_4H_{10}) که به‌عنوان سوخت در فندک استفاده می‌شود، نسبت به پروپان (C_3H_8) که دارای ۸ اتم هیدروژن است، دارای تعداد اتم کربن بیشتری است و از آن جا که در آلکان‌ها با افزایش شمار اتم‌های کربن دمای نقطه جوش افزایش می‌یابد، پس دارای نقطه جوش بالاتری است.
- ۳ پنتان با فرمول مولکولی C_5H_{12} اولین آلکان مایع در دمای اتاق است که نسبت تعداد اتم‌های هیدروژن به تعداد اتم‌های کربن در هر مولکول آن برابر با ۲/۴ $\frac{12}{5}$ است.



۵۷- اگر درصد جرمی گوگرد در زغال سنگ به تقریب برابر ۱/۶ درصد باشد، برای جذب گاز گوگرد دی‌اکسید تولیدشده در سوختن هر کیلوگرم زغال سنگ، به تقریب چند گرم کلسیم اکسید به خلوص ۷۰ درصد مصرف می‌شود؟

($O = 16, S = 32, Ca = 40: g.mol^{-1}$)

۸ (۴)

۴ (۳)

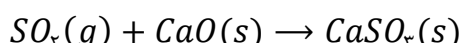
۸۰ (۲)

۴۰ (۱)

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - صفحه ۴۶ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۱

واکنش میان گاز گوگرد دی‌اکسید و کلسیم اکسید به‌صورت زیر است:



راه حل مسئله

کلید حل این سؤال، به دست آوردن مقدار گوگرد موجود در زغال سنگ است. با توجه به پایستگی اتم‌ها در یک واکنش شیمیایی، هر چه اتم گوگرد در زغال سنگ است به گوگرد دی‌اکسید منتقل می‌شود. پس می‌توان با توجه به جرم زغال سنگ، مقدار گوگرد موجود در آن و در نتیجه مقدار گوگرد موجود در گاز گوگرد دی‌اکسید و مقدار این گاز را حساب کنیم. در نهایت جرم کلسیم اکسید مصرف‌شده را به دست می‌آوریم.

از سوختن زغال سنگ علاوه بر آب، کربن دی‌اکسید و کربن مونوکسید، اکسید نیتروژن و گوگرد دی‌اکسید نیز تولید می‌شود که به معنای وجود گوگرد و نیتروژن در این ماده است. پس گوگرد موجود در زغال سنگ به هنگام سوختن به گاز گوگرد دی‌اکسید تبدیل می‌شود.

بر این اساس مقدار گاز گوگرد دی اکسید تولید شده را حساب می کنیم:

$$? \text{ mol } SO_2 = 1 \text{ kg سنگ} \times \frac{1000 \text{ g}}{1 \text{ kg}} \times \frac{1/6 \text{ g S}}{100 \text{ g سنگ}} \times \frac{1 \text{ mol S}}{32 \text{ g S}} \times \frac{1 \text{ mol } SO_2}{1 \text{ mol S}} = 0.5 \text{ mol}$$

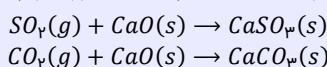
حال جرم کلسیم اکسید ناخالصی را که با این مقدار گوگرد دی اکسید واکنش می دهد، مشخص می کنیم:

$$? \text{ g CaO ناخالص} = 0.5 \text{ mol } SO_2 \times \frac{1 \text{ mol CaO}}{1 \text{ mol } SO_2} \times \frac{56 \text{ g CaO}}{1 \text{ mol CaO}} \times \frac{100 \text{ g CaO}}{70 \text{ g CaO خالص}} = 40 \text{ g}$$

پس در این واکنش ۴۰ گرم کلسیم اکسید مصرف می گردد.

کلسیم اکسید، جاذب آلاینده ها

زغال سنگ یکی از سوخت های فسیلی است که می تواند جایگزین مناسبی برای نفت خام باشد. اما جایگزینی زغال سنگ به جای نفت خام، باعث ورود مقدار بیشتری آلاینده به هوا کره می شود. گوگرد دی اکسید و کربن دی اکسید بخشی از آلاینده های حاصل از سوختن زغال سنگ هستند که برای به دام انداختن آن ها در نیروگاه ها از کلسیم اکسید استفاده می شود. معادله واکنش های ذکر شده به صورت زیر است:



۵۸- کدام موارد درباره ترکیب مقابل درست هستند؟

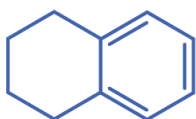
الف - این ترکیب همانند بنزن یک هیدروکربن آروماتیک است.

ب - ۲۵ درصد از اتم های کربن این ترکیب به هیچ اتم هیدروژنی متصل نیستند.

ج - ترکیب مورد نظر می تواند در اثر واکنش نفتالن با ۲ مولکول گاز هیدروژن تولید شود.

د - تعداد اتم های هیدروژن در هر مولکول آن برابر با این تعداد در هر مولکول سیکلوپنتان است.

(۱) «الف» و «ج» (۲) «الف» و «د» (۳) «ب» و «ج» (۴) «ب» و «د»



(متوسط - مفهومی - نوآورانه - زمان بر) - صفحه ۴۳ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۱

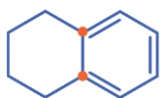
موارد «الف» و «ج» درست هستند.

بررسی موارد:

(الف) در این ترکیب همانند بنزن حلقه بنزنی مشاهده می شود، پس هر دو ترکیب مربوط به یک هیدروکربن آروماتیک هستند.

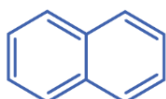
(پ) در شکل مقابل دو اتم کربن در ساختار این ترکیب که با هیچ اتم هیدروژنی پیوند ندارند، مشخص شده اند.

پس می توانیم بگوییم ۲۰٪ (۲۰٪ = ۲/۱۰ × ۱۰۰) از اتم های کربن این ترکیب به هیچ اتم هیدروژنی متصل نیستند.



(ج) هر مولکول نفتالن با فرمول مولکولی $C_{10}H_8$ که ساختار آن در پایین نشان داده شده است می تواند در اثر واکنش با

۲ مولکول گاز هیدروژن ترکیب مورد نظر را با فرمول مولکولی $C_{10}H_{12}$ تولید کند.



فرمول مولکولی سیکلو آلکان ها به صورت C_nH_{2n} است و از آن جا که سیکلوپنتان ۵ اتم کربن دارد، فرمول مولکولی آن به صورت C_5H_{10}

است. تعداد اتم های هیدروژن ترکیب مطرح شده برابر ۱۲ بوده و با این تعداد در سیکلوپنتان برابر نیست.

سیکلو (Cyclo) پیشوندی به معنای حلقوی است که برای نام‌گذاری برخی از ترکیبات آلی حلقوی به کار می‌رود. هیدروکربن‌های حلقوی مطرح شده در کتاب درسی شامل سیکلوآلکان‌ها و ترکیبات آروماتیک هستند. برای نام‌گذاری سیکلوآلکان‌ها از پیشوند سیکلو استفاده می‌شود. سیکلوپروپان ساده‌ترین سیکلوآلکان به شمار می‌رود. در جدول زیر فرمول ساختاری چهار عضو نخست سیکلوآلکان‌ها را مشاهده می‌کنیم:

فرمول مولکولی	C_3H_6	C_4H_8	C_5H_{10}	C_6H_{12}
نام	سیکلوپروپان	سیکلوبوتان	سیکلوپنتان	سیکلوهگزان
ساختار				



۵۹- اگر با عبور هیدروکربنی گازی شکل از محلول برم، رنگ محلول از بین رود، ترکیب مورد نظر می‌تواند یک باشد و از این روش برای افتراق آلکن‌ها از استفاده می‌شود.

(۱) آلکان - سیکلوآلکان‌ها (۲) آلکین - سیکلوآلکان‌ها (۳) آلکین - آلکین‌ها (۴) آلکان - آلکین‌ها

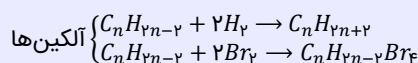
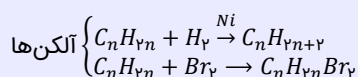
(آسان - مفهومی - نوآورانه - سریع) - صفحه ۴۲ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۲

از واکنش برم با ترکیبات آلی برای شناسایی سیرشده بودن یا نبودن این مواد استفاده می‌شود. در این فرایند اگر ترکیبی با برم یا بخار آن واکنش دهد، به معنای سیرنشده بودن آن ماده است و در این حالت رنگ قرمز برم از بین می‌رود. ولی اگر ترکیبی رنگ برم را تغییر ندهد به معنای واکنش ندادن آن ماده با برم بوده و معادل سیرشده بودن آن ترکیب است.

تشخیص سیر نشده بودن هیدروکربن

هیدروکربن‌های سیرشده، مانند آلکان‌ها و سیکلوآلکان‌ها، با محلول برم، آب و گاز هیدروژن واکنش نمی‌دهند، اما آلکن‌ها و آلکین‌ها، به دلیل این که سیرنشده هستند می‌توانند با این مواد واکنش داده و به ترکیبی سیرشده تبدیل شوند. واکنش کلی آلکن‌ها و آلکین‌ها با گاز هیدروژن و محلول برم به صورت زیر است:



ترکیب مورد نظر سؤال، رنگ برم را از بین برده است و به همین علت ترکیب مورد نظر را سیرنشده در نظر می‌گیریم. آلکان‌ها و سیکلوآلکان‌ها، دو خانواده از هیدروکربن‌های سیرشده و آلکن‌ها و آلکین‌ها دو خانواده از هیدروکربن‌های سیرنشده هستند. از این واکنش برای افتراق هیدروکربن سیرشده از هیدروکربن سیرنشده استفاده می‌شود. آلکن سیرنشده بوده و ترکیب دیگر باید سیرشده باشد تا بتوان آن را از آلکن تشخیص داد.



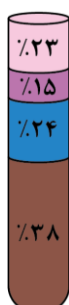
۶۰- کدام مورد درباره نفت برنت دریای شمال که اجزای سازنده آن در شکل زیر نمایش داده شده، نادرست است؟

(۱) وازلین نسبت به فرآورترین جزء سازنده آن دارای گرانروی بیشتری است.

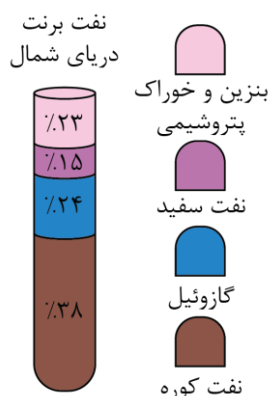
(۲) ماده‌ای که کمترین سهم را در بین اجزای سازنده این نفت خام دارد، در تهیه سوخت هواپیما نقش دارد.

(۳) در تقطیر جزء به جزء آن، نفت سفید در قسمت‌های پایین‌تری نسبت به گازوئیل از برج تقطیر خارج می‌شود.

(۴) بیشتر بودن سهم بنزین و خوراک پتروشیمی در این نوع نفت نسبت به سایر نفت‌ها سبب شده بیشترین قیمت را داشته باشد.

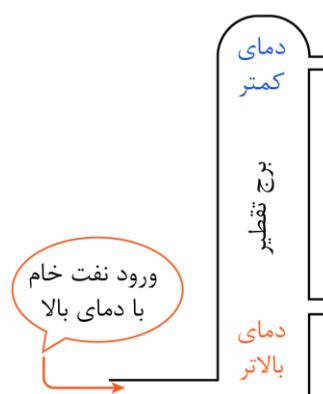


اجزای سازنده نفت برنت دریای شمال که در شکل مشخص شده است از بالا به پایین به ترتیب بنزین و خوراک پتروشیمی، نفت سفید، گازوئیل و نفت کوره است.



در تقطیر جزء به جزء نفت خام، هر چه نقطه جوش یک ماده بیشتر باشد، در قسمت‌های پایین‌تر از برج تقطیر جدا می‌شود. از آن‌جا که اندازه مولکول‌های گازوئیل از نفت سفید بزرگ‌تر است، در نتیجه نقطه جوش بالاتری نیز خواهد داشت و در نقاط پایین‌تری از برج تقطیر خارج خواهد شد.

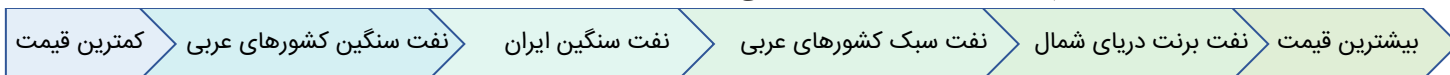
بررسی سایر گزینه‌ها:



در شکل نشان داده شده از بالا به پایین میزان فرآریت مواد کاهش می‌یابد. پس فرآرترین جزء سازنده نفت خام بنزین و خوراک پتروشیمی است و از آن‌جا که این جزء دارای اندازه مولکولی کوچک‌تر و شمار اتم‌های کربن کمتری نسبت به سایر اجزاء است، در نتیجه تعداد اتم‌های کربن آن نسبت به نفت سفید که مخلوطی از آلکان‌های ۱۰ تا ۱۵ اتم کربن است کمتر می‌باشد. پس وازلین با فرمول مولکولی $C_{25}H_{52}$ نسبت به بنزین و خوراک پتروشیمی (ترکیب‌هایی با کمتر از ده اتم کربن) گران‌روی بیشتری دارد.

نفت سفید با سهم ۱۵٪ کمترین سهم را در بین اجزای سازنده این نفت خام دارد و در تهیه سوخت هواپیما نیز نقش دارد.

هر چه یک نفت سبک‌تر باشد قیمت آن نیز بیشتر است. از آن‌جا که درصد جزء بنزین و خوراک پتروشیمی در نفت برنت دریای شمال نسبت به سایر نفت‌ها بیشتر است، این نوع نفت سبک‌تر خواهد بود و در نتیجه قیمت این نفت نیز نسبت به سایر نفت‌ها بیشتر خواهد بود. نمونه‌های گوناگون نفت خام به صورت زیر قیمت‌گذاری می‌شوند:



۶۱- کدام موارد از مقایسه‌های انجام شده درست هستند؟ ($H = 1, C = 12: g. mol^{-1}$)



(۴) «ب» و «د»

(۳) «ب» و «ج»

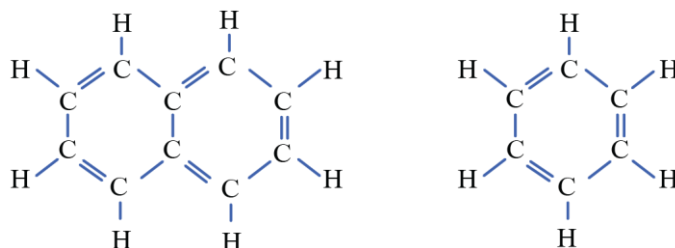
(۲) «الف» و «د»

(۱) «الف» و «ج»

- الف - اختلاف نقطه جوش: پروپان - بوتان < اتان - پروپان
- ب - نسبت درصد جرمی کربن به هیدروژن: نفتالن < بنزن
- ج - تمایل برای تبدیل به حالت گاز: نفت کوره > گازوئیل
- د - نقطه جوش: آلکان «ب» > آلکان «الف»

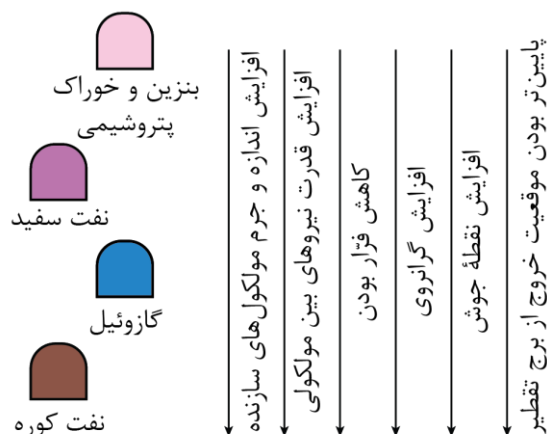
الف) در آلکان‌ها با افزایش شمار اتم‌های کربن، اختلاف نقطه جوش بین دو آلکان متوالی کاهش می‌یابد؛ در نتیجه اختلاف نقطه جوش بین پروپان و بوتان کمتر از اختلاف نقطه جوش بین اتان و پروپان است.

پ) بنزن و نفتالن دو عضو آروماتیک هیدروکربن‌ها هستند که ساختار آن‌ها به صورت زیر است:



نسبت شمار اتم‌های هیدروژن به شمار اتم‌های کربن در نفتالن ($C_{10}H_8$) کمتر از بنزن (C_6H_6) است. پس درصد جرمی کربن در نفتالن بیشتر و درصد جرمی هیدروژن کمتر است و به همین علت نسبت درصد جرمی کربن به درصد جرمی هیدروژن در نفتالن بیشتر خواهد بود.

ج) گازوئیل نسبت به نفت کوره دارای مولکول‌های کوچک‌تری است و در نتیجه فرآریت (تمایل برای تبدیل به حالت گاز) بیشتری دارد. تصویر زیر، ویژگی‌های مختلف اجزای سازنده نفت خام را در مقایسه با یکدیگر نشان می‌دهد:



د) از آن‌جا که آلکان «ب» نسبت به آلکان «الف» دارای گران‌روی بیشتری است، در نتیجه دارای اندازه مولکولی بزرگ‌تر و نقطه جوش بالاتری خواهد بود.



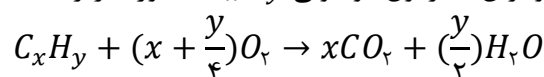
۶۲- یک هیدروکربن مشخص در یکی از خانواده‌های آلکان‌ها، آلکن‌ها یا آلکین‌ها قرار دارد. اگر در اثر سوختن کامل ۰/۵ مول از آن در شرایط استاندارد، ۱۸ گرم آب و ۳۳/۶ لیتر گاز کربن دی‌اکسید تولید شود، این ترکیب به کدام خانواده تعلق دارد و اختلاف تعداد اتم‌های هیدروژن در هر مولکول آن و ۱-پنتین چقدر است؟ ($H = 1, O = 16: g. mol^{-1}$)

(۱) آلکن‌ها - ۴ (۲) آلکین‌ها - ۴ (۳) آلکن‌ها - ۶ (۴) آلکین‌ها - ۶

(متوسط - محاسباتی - نوآورانه - استاندارد) - صفحه ۴۲ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۲

معادله موازنه‌شده واکنش سوختن یک هیدروکربن با فرمول مولکولی C_xH_y به صورت زیر است:



اگر فرمول شیمیایی ترکیب مورد نظر مشخص شود، مسئله حل خواهد شد. این سؤال را نیز می‌توان به کمک پایستگی اتم‌ها در واکنش‌های شیمیایی حل کرد. در واقع اتم کربن موجود در کربن دی‌اکسید و هیدروکربن و همچنین اتم هیدروژن موجود در آب و هیدروکربن برابر است. بر این اساس می‌توان مقدار دو اتم کربن و هیدروژن موجود در نیم مول هیدروکربن را حساب کرد. در این مرحله به فرمول شیمیایی هیدروکربن می‌رسیم.

در ابتدا باید فرمول مولکولی هیدروکربن مورد نظر را پیدا کنیم، بنابراین طبق روابط استوکیومتری تعداد اتم‌های کربن این ترکیب برابر است با:

$$33/6 \text{ L CO}_2 = 0/5 \text{ mol C}_x\text{H}_y \times \frac{x \text{ mol CO}_2}{1 \text{ mol C}_x\text{H}_y} \times \frac{22/4 \text{ L CO}_2}{1 \text{ mol CO}_2} \Rightarrow x = 3$$

پس تعداد اتم‌های کربن در این ترکیب برابر با ۳ است. حال تعداد اتم‌های هیدروژن در این ترکیب را مشخص می‌کنیم:

$$18 \text{ g H}_2\text{O} = 0/5 \text{ mol C}_x\text{H}_y \times \frac{\left(\frac{y}{2}\right) \text{ mol H}_2\text{O}}{1 \text{ mol C}_x\text{H}_y} \times \frac{18 \text{ g H}_2\text{O}}{1 \text{ mol H}_2\text{O}} \Rightarrow \frac{y}{4} = 1 \Rightarrow y = 4$$

پس تعداد اتم‌های هیدروژن در این ترکیب برابر با ۴ است.

در نتیجه فرمول مولکولی این ترکیب C_3H_4 است که مانند اعضای خانواده آلکین‌ها به صورت C_nH_{2n-2} قرار دارد، پس به خانواده آلکین‌ها تعلق دارد.

اختلاف تعداد اتم‌های هیدروژن در این ترکیب با ۱-پنتین (C_5H_8) برابر با ۴ ($8 - 4 = 4$) است.

یه نمونه باحال!

مقداری نفتالین ناخالص با خلوص ۵۱/۲ درصد را در حضور مقدار کافی اکسیژن به‌طور کامل می‌سوزانیم. اگر طی این فرایند ۵۷/۶ گرم بخار آب تولید شده باشد، جرم نمونه ناخالص نفتالین برابر با چند گرم بوده و حجم گاز اکسیژن مصرف‌شده در این واکنش در شرایط استاندارد تقریباً چند لیتر است؟ ($H = 1, C = 12, O = 16; \text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$)

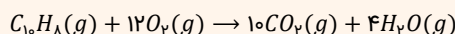
$$269 - 160 (4)$$

$$269 - 200 (3)$$

$$215 - 200 (2)$$

$$215 - 160 (1)$$

معادله موازنه‌شده واکنش سوختن نفتالین به‌صورت زیر است:



با توجه به جرم بخار آب تولیدشده در این فرایند، جرم نفتالین خالص مصرف‌شده را محاسبه می‌کنیم:

$$? \text{ g C}_{10}\text{H}_8 = 57/6 \text{ g H}_2\text{O} \times \frac{1 \text{ mol H}_2\text{O}}{18 \text{ g H}_2\text{O}} \times \frac{1 \text{ mol C}_{10}\text{H}_8}{4 \text{ mol H}_2\text{O}} \times \frac{128 \text{ g C}_{10}\text{H}_8}{1 \text{ mol C}_{10}\text{H}_8} = 102/4 \text{ g}$$

در مرحله بعد، با توجه به درصد خلوص داده‌شده، جرم نمونه ناخالص نفتالین را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{جرم نمونه خالص} = \frac{\text{جرم نمونه ناخالص}}{\text{درصد خلوص}} \times 100 \Rightarrow 51/2 = \frac{102/4}{x} \times 100 \Rightarrow x = 200 \text{ g}$$

بر این اساس، جرم نمونه ناخالص نفتالین برابر با ۲۰۰ گرم است.

در نهایت حجم اکسیژن مصرف‌شده را نیز به دست می‌آوریم:

$$? \text{ L O}_2 = 57/6 \text{ g H}_2\text{O} \times \frac{1 \text{ mol H}_2\text{O}}{18 \text{ g H}_2\text{O}} \times \frac{12 \text{ mol O}_2}{4 \text{ mol H}_2\text{O}} \times \frac{22/4 \text{ L O}_2}{1 \text{ mol O}_2} = 215/04 \text{ L}$$

پس حجم گاز اکسیژن مصرف‌شده در این واکنش به‌تقریب برابر ۲۱۵ لیتر بوده است.

پاسخ: گزینه ۲



۶۳- کدام یک از مطالب زیر نادرست است؟

(۱) بیشترین درصد جرمی هیدروژن در میان هیدروکربن‌ها، متعلق به یک گاز بی‌بو با واکنش‌پذیری پایین است.

(۲) درصد جرمی کربن در یک هیدروکربن سیرنشده به‌طور قطع بیشتر یا مساوی درصد جرمی کربن در پروپن است.

(۳) درصد جرمی اتم‌های کربن در همه آلکان‌ها به‌طور قطع از درصد جرمی اتم‌های کربن در همه آلکین‌ها کمتر است.

(۴) در میان دو هیدروکربن سیرشده و سیرنشده با فرمول شیمیایی مشابه، شمار پیوندهای $C - H$ در ماده سیرشده بیشتر است.

(دشوار - استدلالی - نوآورانه - استاندارد) - صفحه ۴۲ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۴

در هیدروکربن‌ها شمار پیوندهای $C - H$ برابر شمار اتم‌های هیدروژن است. پس اگر در دو هیدروکربن متفاوت، شمار اتم‌های هیدروژن برابر باشد، شمار پیوندهای هیدروژن و کربن نیز برابر خواهد بود.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) برای مقایسه درصد جرمی کربن و هیدروژن در هیدروکربن‌ها، کافی است به نسبت تعداد اتم هیدروژن به تعداد اتم کربن دقت کرد. هر چه این نسبت بیشتر باشد، درصد جرمی هیدروژن بیشتر و درصد جرمی کربن کمتر خواهد بود. بیشترین نسبت هیدروژن به کربن در هیدروکربن‌ها متعلق به متان (نخستین آلکان) بوده که برابر ۴ است. پس بیشترین درصد جرمی هیدروژن در این هیدروکربن دیده می‌شود. متان یک گاز بی‌بو، بی‌رنگ و غیرسمی است که واکنش‌پذیری پایینی دارد. (به‌طور کلی واکنش‌پذیری آلکان‌ها پایین است).



بیشترین تعداد هیدروژنی که یک هیدروکربن با n اتم کربن دارد، متعلق به آلکانی با این تعداد اتم کربن بوده و برابر $2n + 2$ است.



۲) برای این گزینه نیز به نسبت تعداد هیدروژن به تعداد کربن توجه می‌کنیم. ساده‌ترین حالت هیدروکربن‌های سیرنشده، یک پیوند دوگانه $C = C$ است و در این حالت ترکیب مورد نظر آلکن خواهد بود. در این آلکن‌ها نسبت شمار اتم‌های هیدروژن به شمار اتم‌های کربن برابر ۲ است و بیشترین مقدار را در میان هیدروکربن‌های سیرنشده به خود اختصاص می‌دهد. پس هر هیدروکربن سیرنشده‌ای وجود داشته باشد، نسبت شمار اتم‌های هیدروژن به شمار اتم‌های کربن در آن ۲ یا کمتر از ۲ خواهد بود. پس درصد جرمی کربن در یک ترکیب سیرنشده یا برابر و یا بیشتر از یک آلکن (مانند پروپن) است.



بیشترین تعداد هیدروژنی که یک هیدروکربن سیرنشده با n اتم کربن دارد، متعلق به آلکنی با این تعداد اتم کربن بوده و برابر $2n$ است.



۳) باز هم به نسبت تعداد اتم هیدروژن به تعداد اتم کربن توجه می‌کنیم. در آلکان‌ها (C_nH_{2n+2}) ، آلکن‌ها (C_nH_{2n}) و آلکین‌ها (C_nH_{2n-2}) این نسبت به ترتیب، بیشتر از ۲، ۲ و کمتر از ۲ است. پس درصد جرمی اتم‌های کربن در همه آلکان‌ها به‌طور قطع از درصد جرمی اتم‌های کربن در همه آلکین‌ها کمتر خواهد بود.

$$\frac{\text{شمار اتم H}}{\text{شمار اتم C}} \begin{cases} \text{آلکان: } \frac{2n+2}{n} = 2 + \frac{2}{n} > 2 \\ \text{آلکن: } \frac{2n}{n} = 2 \\ \text{آلکین: } \frac{2n-2}{n} = 2 - \frac{2}{n} < 2 \end{cases}$$



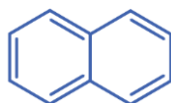
۶۴- کدام گزینه نادرست است؟

- ۱) در جوش کاربیدی از هیدروکربنی استفاده می‌شود که در آن نسبت تعداد اتم‌های H به C در هر مولکول آن برابر یک است.
- ۲) در فراورده‌های سوختن کامل مقداری بنزن، مقدار (مول) گاز کربن دی‌اکسید نسبت به مقدار آب برابر با ۲ است.
- ۳) نفتالن یک جامد سفید رنگ است که در آن نسبت تعداد پیوندهای $C = C$ به $C - C$ برابر با $1/2$ است.
- ۴) ۱-هگزن و سیکلوهگزان را می‌توان از طریق واکنش با گاز هیدروژن، از یکدیگر تشخیص داد.

(متوسط - مفهومی - نوآورانه - استاندارد) - صفحه ۴۳ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۳

نفتالن یک جامد سفیدرنگ بوده و ساختار شیمیایی آن به صورت زیر است:

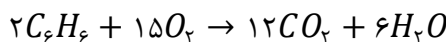


در هر مولکول آن ۵ پیوند $C = C$ و ۶ پیوند $C - C$ وجود دارد و نسبت خواسته شده برابر با $5/6 \approx 0.83$ است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) در جوش کاربیدی از سوختن گاز اتین، دمای لازم برای جوش دادن قطعه‌های فلزی تأمین می‌شود. در اتین با فرمول مولکولی C_2H_2 نسبت اتم‌های H به C برابر با یک است.

معادله موازنه شده سوختن کامل بنزن (C_6H_6) به صورت زیر است:



همان‌طور که مشخص است ضریب مولی گاز کربن دی‌اکسید دو برابر ضریب مولی آب است و در اثر سوختن کامل مقداری بنزن، مقدار مولی گاز کربن دی‌اکسید نسبت به آب برابر ۲ خواهد بود.

۱- هگزن برخلاف سیکلوهگزان دارای پیوند دوگانه است به همین علت می‌تواند با گاز هیدروژن واکنش دهد. در نتیجه می‌توان آن‌ها را از طریق واکنش با گاز هیدروژن تفکیک کرد.



۶۵- اگر در اثر سوختن جرم‌های برابری از بنزین و زغال سنگ، اختلاف جرم گاز کربن دی‌اکسید تولید شده برابر ۶۳ گرم باشد، مجموع جرم مصرف‌شده این دو سوخت چند گرم بوده است؟

نام سوخت	گرمای آزاد شده (kJ/g)	مقدار کربن دی‌اکسید تولیدی به ازای هر کیلوژول انرژی تولید شده (g)
بنزین	۴۸	۰/۰۶۳
زغال سنگ	۳۰	۰/۱۰۵

۵۰۰ (۴)

۶۰۰ (۳)

۱۰۰۰ (۲)

۳۰۰ (۱)

(متوسط - محاسباتی - نوآورانه - استاندارد) - صفحه ۴۶ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۲

جرم برابری (m) از بنزین و زغال سنگ مصرف شده است و می‌توانیم مقدار کربن دی‌اکسید تولیدشده ناشی از مصرف هر کدام از سوخت‌ها را محاسبه کنیم. این مقدار برای بنزین برابر است با:

$$? g CO_2 = m g \text{ بنزین} \times \frac{48 kJ}{1 g \text{ بنزین}} \times \frac{0.063 g CO_2}{1 kJ} = 3.024 m g$$

و این مقدار برای زغال سنگ برابر است با:

$$? g CO_2 = m g \text{ زغال سنگ} \times \frac{30 kJ}{1 g \text{ زغال سنگ}} \times \frac{0.105 g CO_2}{1 kJ} = 3.15 m g$$

حال که اختلاف این دو مقدار برابر ۶۳ گرم است، داریم:

$$3.15 m - 3.024 m = 63 \Rightarrow 0.126 m = 63 \Rightarrow m = 500 g$$

پس جرم هر سوخت برابر ۵۰۰ گرم و در مجموع ۱۰۰۰ گرم سوخت، مصرف شده است.



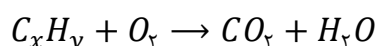
۶۶- کدام یک از مطالب زیر درست است؟

- ۱) اگر از سوختن یک ماده آلی، تنها دو ترکیب کربن دی‌اکسید و آب تولید شود، آن ترکیب آلی به‌طور قطع یک هیدروکربن است.
- ۲) در واکنش سوختن هیدروکربن‌ها، حجم گاز اکسیژن مصرف‌شده بیشتر از حجم گاز کربن دی‌اکسید تولیدشده است.
- ۳) در ساختار هیدروکربن‌های سیرنشده برخلاف هیدروکربن‌های سیرشده، جفت الکترون ناپیوندی وجود دارد.
- ۴) گشتاور دوقطبی همه هیدروکربن‌ها برابر صفر است و این ترکیبات آلی، ناقطبی محسوب می‌شوند.

(متوسط - مفهومی - نوآورانه - استاندارد) - صفحه ۴۶ - ۱۱۰۱

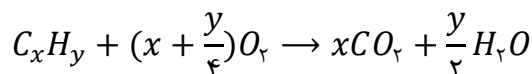
پاسخ: گزینه ۲

واکنش سوختن هیدروکربن‌ها به صورت زیر است:



در این واکنش برای تأمین اکسیژن موجود در هر مول گاز کربن دی‌اکسید، یک مول گاز اکسیژن باید مصرف شود. این در حالی است که آب نیز حاوی اتم‌های اکسیژن است و بخشی از اتم‌های اکسیژن موجود در گاز اکسیژن، در آب قرار می‌گیرند. پس در واکنش سوختن هیدروکربن‌ها، ضریب اکسیژن همواره بیشتر از ضریب کربن دی‌اکسید خواهد بود.

در واکنش کامل سوختن یک مول از هیدروکربنی با فرمول شیمیایی C_xH_y ، x مول کربن دی‌اکسید و $\frac{y}{4}$ مول آب تولید می‌شود. همچنین در این واکنش $x + \frac{y}{4}$ مول گاز اکسیژن نیز مصرف می‌شود.



بررسی گزینه‌ها:

۱) تولید اکسید هیدروژن (آب) و اکسید کربن (کربن دی‌اکسید) در هنگام سوختن یک ماده به معنای وجود این دو عنصر در ماده مورد نظر است. اما چون در این دو اکسید، اتم اکسیژن وجود دارد، مشخص نیست که این اکسیژن‌ها به‌طور کامل از گاز اکسیژن به فراورده‌ها رسیده‌اند یا این که در ساختار ترکیب آلی نیز اتم اکسیژن وجود داشته است. به‌عنوان مثال از سوختن گلوکز یا اتانول نیز تنها آب و کربن دی‌اکسید تولید می‌شود و این دو ماده هیدروکربن محسوب نمی‌شوند.

۲) هیدروکربن‌ها از دو عنصر کربن و هیدروژن به وجود آمده‌اند که هیچ‌کدام جفت الکترون ناپیوندی ندارند. (کربن در کربن مونوکسید جفت الکترون ناپیوندی دارد اما در همه ترکیب‌های آلی جفت الکترون ناپیوندی ندارد).

تفاوت هیدروکربن‌های سیرنشده و هیدروکربن‌های سیرشده در وجود پیوندهای دوگانه یا سه‌گانه میان اتم‌های کربن در هیدروکربن‌های سیرنشده است.

۳) گشتاور دوقطبی در متان صفر و در سایر هیدروکربن‌ها به‌تقریب برابر صفر است و به همین علت این ترکیبات ناقطبی به شمار می‌روند.

۶۷- ۲۰ درصد از مولکول‌های درون مخلوط گازی از پروپان و پروپن، ۹ پیوند اشتراکی دارند. اگر با وارد کردن مقدار کافی گاز فلئور به مخلوط، طبق واکنش $C_3H_6(g) + F_2(g) \rightarrow C_3H_6F_2(g)$ ، ۳۲ گرم فراورده تولید شود، جرم گاز پروپان در مخلوط اولیه چند گرم است؟ ($H = 1, C = 12, F = 19: g \cdot mol^{-1}$)

۷۰/۴ (۴)

۴/۴ (۳)

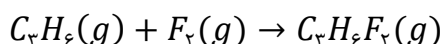
۱۴۰/۸ (۲)

۸/۸ (۱)

(آسان - محاسباتی - نوآورانه - استاندارد) - صفحه ۴۱ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۴

معادله واکنش انجام‌شده به‌صورت زیر است:



راه حل مسئله

برای مشخص کردن جرم پروپان، باید مقدار پروپان را به کمک نسبت مولی آن با پروپن حساب کرد. پیش از آن باید مقدار پروپن را از روابط استوکیومتری واکنش بالا به دست آوریم.

تعداد پیوندهای اشتراکی در آلکان‌ها و آلکن‌ها به‌ترتیب برابر $3n + 1$ و $3n$ است و به‌ترتیب تعداد پیوندها در پروپان و پروپن برابر ۱۰ و ۹ است. پس نتیجه می‌گیریم که در مخلوط گازی اولیه ۲۰ درصد مول را پروپن و ۸۰ درصد را پروپان تشکیل می‌دهد. پس مقدار مولی پروپان ۴ برابر پروپن است.

ابتدا مقدار گاز پروپن شرکت‌کننده در این واکنش را حساب می‌کنیم:

$$n_{C_3H_6} = 32 \text{ g } C_3H_6F_2 \times \frac{1 \text{ mol } C_3H_6F_2}{140 \text{ g } C_3H_6F_2} \times \frac{1 \text{ mol } C_3H_6}{1 \text{ mol } C_3H_6F_2} = 0.4 \text{ mol}$$

در نتیجه مقدار مولی گاز پروپن برابر با ۰/۴ مول بوده و پروپان نیز برابر ۱/۶ مول است. پس جرم پروپان برابر خواهد بود با:

$$m = n \times M = 0.4 \times 44 = 17.6 \text{ g}$$

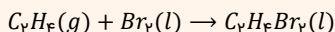
جرم گاز پروپان در مخلوط اولیه برابر با ۷۰/۴ گرم است.

یه نمونه باحال!

اگر ۱۵۰ گرم از یک نمونه از مخلوط گازی پروپان و اتن با ۱۵۰ میلی‌لیتر برم مایع با چگالی ۳/۲ گرم بر میلی‌لیتر به‌طور کامل واکنش بدهد، در هر گرم از این مخلوط گازی تقریباً چند اتم کربن وجود دارد؟ ($H = 1, C = 12, Br = 80: g. mol^{-1}$)

$$4/2 \times 10^{22} \quad (1) \quad 6/3 \times 10^{22} \quad (2) \quad 4/2 \times 10^{22} \quad (3) \quad 6/3 \times 10^{22} \quad (4)$$

در مخلوط گازی مورد نظر، تنها اتن با برم مایع واکنش می‌دهد. واکنش مورد نظر به‌صورت زیر انجام می‌پذیرد:



در ابتدا مقدار گاز اتن مصرف شده را محاسبه می‌کنیم:

$$? g C_3H_6 = 150 mL Br_2 \times \frac{3/2 g Br_2}{1 mL Br_2} \times \frac{1 mol Br_2}{160 g Br_2} \times \frac{1 mol C_3H_6}{1 mol Br_2} \times \frac{42 g C_3H_6}{1 mol C_3H_6} = 4.5 g$$

بنابراین در یک نمونه ۱۵۰ گرمی از این مخلوط، ۸۴ گرم اتن و ۶۶ گرم پروپان وجود دارد. حال مقدار اتم کربن در این نمونه ۱۵۰ گرمی را به دست می‌آوریم:

$$\left. \begin{aligned} \text{پروپان: } ? mol C &= 66 g C_3H_6 \times \frac{1 mol C_3H_6}{42 g C_3H_6} \times \frac{3 mol C}{1 mol C_3H_6} = 4.5 mol \\ \text{اتن: } ? mol C &= 4.5 g C_3H_6 \times \frac{1 mol C_3H_6}{42 g C_3H_6} \times \frac{2 mol C}{1 mol C_3H_6} = 0.5 mol \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{مقدار } C = 4.5 + 0.5 = 5 mol$$

بنابراین در ۱۵۰ گرم از این مخلوط، ۱۰/۵ مول اتم کربن وجود دارد. پس تعداد اتم‌های کربن در یک گرم از این مخلوط برابر است با:

$$? \text{ اتم } C = 1 g \text{ مخلوط} \times \frac{10/5 mol C}{150 g \text{ مخلوط}} \times \frac{6.02 \times 10^{23} \text{ اتم } C}{1 mol C} = 4/214 \times 10^{22}$$

پس در هر گرم از این مخلوط، $4/214 \times 10^{22}$ اتم کربن وجود دارد.

پاسخ: گزینه ۱



۶۸- در یک نمونه هیدروکربن ۸ کربنه، درصد جرمی کربن ۸ برابر درصد جرمی هیدروژن است. در ساختار این هیدروکربن، چند اتم

هیدروژن وجود دارد؟ ($H = 1, C = 12: g. mol^{-1}$)

$$16 \quad (1) \quad 12 \quad (2) \quad 10 \quad (3) \quad 8 \quad (4)$$

(آسان - محاسباتی - کنکوری - سریع) - صفحه ۳۲ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۲

هیدروکربن‌ها از دو عنصر هیدروژن و کربن به وجود آمده‌اند و فرمول شیمیایی آن‌ها به‌صورت C_xH_y در نظر گرفته می‌شود. با توجه به رابطه درصد جرمی، نسبت درصد جرمی کربن به درصد جرمی هیدروژن در این ترکیب‌ها برابر است با:

راه حل مسئله

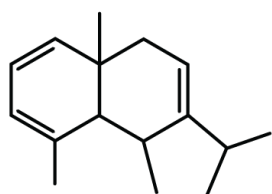
کلید حل این سؤال، این نکته است که نسبت درصد جرمی دو عنصر در یک ترکیب برابر نسبت جرم اتم‌های این دو عنصر است. در این نسبت با قرار دادن ۸ در تعداد اتم‌های کربن، تعداد اتم‌های هیدروژن محاسبه می‌شود.

$$\frac{\text{درصد جرمی کربن}}{\text{درصد جرمی هیدروژن}} = \frac{\text{جرم اتم‌های کربن}}{\text{جرم اتم‌های هیدروژن}} \times \frac{100}{100} = \frac{12 \times x}{1 \times y} = 8 \Rightarrow \frac{12 \times 8}{y} = 8 \Rightarrow y = 12$$

پس در این هیدروکربن ۸ کربنه، ۱۲ اتم هیدروژن وجود دارد.



۶۹- کدام یک از مطالب زیر در مورد ترکیبی با ساختار مقابل درست است؟ ($H = 1, C = 12: g. mol^{-1}$)



(۱) برای سوختن هر مول از آن به ۲۴ مول گاز اکسیژن نیاز است.

(۲) درصد جرمی کربن در این ترکیب بیشتر از ۹۰ درصد است.

(۳) شمار پیوندهای $C - C$ در آن برابر ۱۴ است.

(۴) در ساختار آن ۳ گروه CH_3 دیده می‌شود.

در ساختار این ترکیب ۱۶ اتم کربن، ۳ پیوند $C = C$ و ۲ حلقه وجود دارد؛ پس شمار هیدروژن‌های موجود در این ترکیب را حساب می‌کنیم:

$$\text{شمار حلقه‌ها} + \text{شمار پیوندهای } C = C = 2 \times (1 + \text{شمار اتم‌های کربن}) - 2 \times (C = C)$$

$$-4 \times (C \equiv C) \Rightarrow H = 2 \times (16 + 1) - 2 \times (2 + 3) = 24$$

پس فرمول شیمیایی این ترکیب به صورت $C_{16}H_{24}$ است.

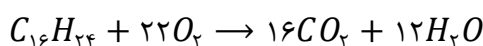
در ساختار این ترکیب ۳ پیوند $C = C$ و ۱۴ پیوند $C - C$ و ۲۴ پیوند $C - H$ وجود دارد.



در یک هیدروکربن با فرمول شیمیایی C_xH_y ، $2x + \frac{y}{2}$ پیوند کووالانسی، y پیوند $C - H$ و $2x - \frac{y}{2}$ پیوند بین اتم‌های کربن وجود دارد. پس در این ترکیب $20 = 32 - 12 = 2 \times 16 - \frac{24}{2}$ پیوند میان اتم‌های کربن دیده می‌شود که ۶ مورد آن مربوط به سه پیوند دوگانه و ۱۴ مورد دیگر پیوند یگانه هستند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱ واکنش سوختن کامل این ترکیب به صورت زیر است:



پس برای سوختن یک مول از این ترکیب به ۲۲ مول گاز اکسیژن نیاز است.



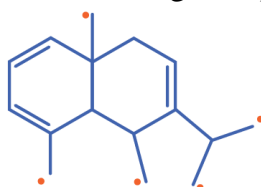
برای سوختن هر مول هیدروکربن با فرمول شیمیایی C_xH_y به $x + \frac{y}{4}$ مول گاز اکسیژن نیاز است:

$$16 + \frac{24}{4} = 16 + 6 = 22$$

۲ درصد جرمی کربن در این ترکیب برابر است با:

$$\text{درصد جرمی کربن} = \frac{\text{جرم اتم‌های کربن}}{\text{جرم مولکول}} \times 100 \Rightarrow A = \frac{16 \times 12}{16 \times 12 + 1 \times 24} \times 100 = \frac{16 \times 12}{(16 + 2) \times 12} \times 100 = \frac{800}{9} \approx 88/9$$

۳ گروه‌های CH_3 موجود در این ترکیب در شکل زیر مشخص شده‌اند:



وقتی گفته می‌شود شاخه‌های فرعی متیل، منظور ساختارهای $-CH_3$ است که به یک حلقه یا یک زنجیره اصلی متصل هستند ولی وقتی گفته می‌شود گروه متیل، منظور تعداد اتم‌های کربن متصل به ۳ اتم هیدروژن است. یعنی همان $-CH_3$ بدون در نظر گرفتن آن که به چه ساختاری متصل است. به عنوان مثال شاخه فرعی اتیل، خود یک گروه CH_3 و یک گروه CH_2 دارد ولی به عنوان شاخه متیل شناخته نمی‌شود در حالی که یک گروه CH_3 دارد.



۷۰- کدام مورد درباره ساده‌ترین عضو خانواده آلکن‌ها درست است؟

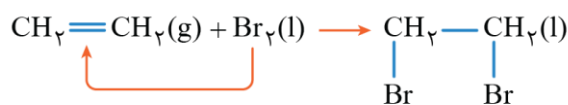
۱) همانند گاز بوتن می‌تواند با برم مایع واکنش دهد.

۲) گازی است که واکنش‌پذیری آن نسبت به گاز اتان کمتر است.

۳) به عنوان گاز عمل‌آورنده استفاده می‌شود و نام گذشته آن گاز استیلن است.

۴) با وارد کردن مقداری از این ترکیب در مخلوط آب و سولفوریک اسید، الکل دوکربنه دارای ۶ پیوند $C - H$ تولید می‌شود.

ساده‌ترین عضو از خانواده آلکن‌ها، اتن (C_2H_4) بوده و واکنش آن با برم به صورت زیر است:

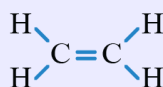


۲،۱- دی برمواتان

همه آلکن‌ها می‌توانند با برم مایع که به رنگ قرمز وجود دارد، واکنش دهند و رنگ قرمز محلول را از بین ببرند.

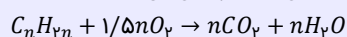
آلکن‌ها:

آلکن‌ها دسته‌ای از هیدروکربن‌ها هستند که در ساختار خود یک پیوند دوگانه $C=C$ دارند؛ بنابراین آلکن‌ها حداقل دو اتم کربن در ساختار خود دارند و آلکن یک کربنه وجود ندارد. فرمول مولکولی این هیدروکربن‌های سیرنشده به صورت C_nH_{2n} است؛ یعنی نسبت هیدروژن به کربن در آلکن‌ها ثابت و مساوی ۲ است؛ پس درصد جرمی کربن در آلکن‌ها ثابت و برابر ۸۵/۷ درصد می‌باشد. نخستین عضو خانواده آلکن‌ها و ساده‌ترین هیدروکربن سیرنشده، گاز اتن با ساختار زیر است:



نام دیگر گاز اتن، اتیلن است. از این گاز به عنوان عمل‌آورنده در کشاورزی استفاده می‌شود؛ به این صورت که اتن آزادشده از موز یا گوجه‌فرنگی رسیده می‌تواند موجب رسیدن سریع‌تر میوه‌های نارس شود.

آلکن‌ها به علت وجود پیوند دوگانه $C=C$ و اتصال دو اتم کربن شرکت‌کننده در پیوند دوگانه به ۳ اتم دیگر، واکنش‌پذیری بالایی دارند. این دو اتم کربن تمایل دارند که در حین واکنش با تبدیل پیوند دوگانه $C=C$ به پیوند یگانه $C-C$ ، با یک اتم دیگر نیز پیوند برقرار کنند. واکنش گاز اتن با آب، هیدروژن و برم مثالی از این واکنش‌ها هستند. یکی دیگر از واکنش‌های آلکن‌ها، سوختن آن‌ها است که به صورت زیر انجام می‌پذیرد.



بررسی سایر گزینه‌ها:

۲) واکنش‌پذیری آلکن‌ها به دلیل وجود پیوند دوگانه نسبت به آلکان‌ها بیشتر است، پس واکنش‌پذیری اتن و سایر آلکن‌ها نسبت به همه آلکان‌ها بیشتر خواهد بود.

۳) در کشاورزی، از گاز اتن به عنوان «گاز عمل‌آورنده» استفاده می‌شود و در گذشته گاز اتن را با نام گاز اتیلن می‌خواندند.

۴) در صورت واکنش اتن با مخلوط آب و سولفوریک اسید، اتانول با ساختار شیمیایی زیر تولید می‌شود که در هر مولکول آن ۵ پیوند $C-H$ وجود دارد.

