



گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی

آزمون ماز پایه یازدهم



جمع بندی و مرور نیم سال اول



ویژه دانش آموزان پایه یازدهم

دفترچه شماره ۱

پنجشنبه ۹ بهمن ماه ۱۴۰۴

ردیف	ماده امتحانی	تعداد سؤال	شماره سؤال		مدت زمان پاسخ گویی	ملاحظات
			از	تا		
۱	ریاضیات	۳۵	۱	۳۵	۶۵ دقیقه	۳۵ سؤال ۶۵ دقیقه

بودجه بندی دروس این آزمون

آمار و احتمال

آشنایی با مبانی ریاضیات
(کل فصل ۱)
احتمال
(کل درس ۱: مبانی احتمال و
کل درس ۲: احتمال غیر هم شانس)
صفحه های ۱ تا ۴۷

سهم در کنکور: ۲ سؤال

هندسه ۲

دایره (کل فصل ۱)
تبدیل های هندسی و کاربردها
(تبدیل های هندسی تا ابتدای انتقال)
صفحه های ۹ تا ۳۸

سهم در کنکور: ۲ سؤال

حسابان ۱

جبر و معادله (کل فصل ۱) /
تابع (کل فصل ۲) /
توابع نمایی و لگاریتم (تابع نمایی)
صفحه های ۱ تا ۷۹

سهم در کنکور: ۵ سؤال

شیمی ۲

قدر هدایای زمینی را بدانیم
(کل فصل)
در پی غذای سالم
(از ابتدای فصل تا انتهای گرما
در واکنش های شیمیایی)
صفحه های ۱ تا ۶۵

سهم در کنکور: ۶ سؤال

فیزیک ۲

الکتریسیته ساکن +
جریان الکتریکی
و مدارهای جریان مستقیم
(تا ابتدای توان در مدارهای الکتریکی)
صفحه های ۱ تا ۶۶

سهم در کنکور: ۵ سؤال

استراتژی و هدف گذاری با ماز در نیم سال اول ۱۴۰۴

۸ آزمون در ۱۰۰ روز تحصیلی مفید برای تسلط کامل بر مباحث نیم سال اول / شروع حرکت و یادگیری استفاده از ماشین پیشرفت ماز

۱- شروع مسیر؛ آرامش و هماهنگی: سه مرحله آزمون پوششی؛ فرصت برای شروع حرکت با ماشین پیشرفت ماز
(تکرار مباحث آزمون های قبل و فرصت برای شروع مسیر پیشرفت)

۲- چالش استمرار؛ پیگیری و استقامت: سه مرحله آزمون برای آمادگی امتحانات و تکمیل یادگیری نیم سال اول
(زمان تسلط کامل بر نیم سال اول)

۳- جمع بندی پایان نیم سال اول: دو مرحله آزمون جمع بندی بعد از امتحانات ترم اول و تکمیل یادگیری نیم سال اول + مرور و جمع بندی
(ایستگاه جمع بندی و جبران)



۱- در یک دنباله حسابی جملات نهم و هفدهم قرینه یکدیگر هستند. جمع چند جمله از ابتدای دنباله صفر است؟

- (۱) ۲۹ (۲) ۲۷ (۳) ۲۵ (۴) ۳۱

۲- اگر جملات دنباله a_n در شرط $a_{n+1} = 2a_n + 1$ صدق کنند و $a_1 = 2$ باشد، حاصل $a_1 + a_2 + \dots + a_{20}$ چه عددی است؟

- (۱) $3 \times 2^{21} - 20$ (۲) $3 \times 2^{20} - 23$ (۳) $3 \times 2^{20} - 21$ (۴) $3 \times 2^{21} - 22$

۳- هرگاه α و β جوابهای معادله $x^2 - 3x + 1 = 0$ باشند، مقدار عددی $A = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta(3-\alpha)}} + \sqrt{\frac{\beta}{\alpha(3-\beta)}}$ چه عددی است؟

- (۱) $4\sqrt{3}$ (۲) $2\sqrt{5}$ (۳) $3\sqrt{2}$ (۴) $2\sqrt{3}$

۴- صفرهای تابع $f(x) = x^3 + ax^2 - 2ax - 8$ ، اعداد -2α ، α و -1 هستند، معادله درجه دومی که ریشههای آن α و $-\frac{\alpha}{2}$ باشند، کدام است؟

- (۱) $x^2 + 2x - 2 = 0$ (۲) $x^2 + x - 2 = 0$ (۳) $x^2 - x - 2 = 0$ (۴) $x^2 - 2x - 2 = 0$

۵- اگر محیط یک مستطیل برابر ۴ باشد، به طوری که اندازه طول و عرض آن متناسب با نسبت طلایی باشد، عرض مستطیل کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{5} + 3}{4}$ (۲) $\frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ (۳) $\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ (۴) $3 - \sqrt{5}$

۶- اگر معادلات $2\sqrt{x} + \sqrt{3x+1} = 4$ و $\sqrt{2x-1} + k\sqrt{x+3} = 5$ ریشه مشترک داشته باشند، k چه عددی است؟

- (۱) ۳ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۲ (۴) $\frac{1}{3}$

محل انجام محاسبات

۷- اگر مبدأ مختصات (O) و نقطه $A(2, 4)$ دو رأس مقابل مربع OBAC باشند، مختصات رأس B کدام می تواند باشد؟

- (۱) $(-2, \frac{7}{2})$ (۲) $(0, \frac{5}{2})$ (۳) $(4, \frac{1}{2})$ (۴) $(-1, 3)$

۸- خط $3x + 4y = k$ بر دایره ای به شعاع $\frac{k}{3}$ و مرکز $O(1, -2)$ مماس است. k کدام می تواند باشد؟

- (۱) ۵ (۲) $5/5$ (۳) ۷ (۴) $7/5$

۹- معادله $|x^2 - 2x| + |x - 1| = 1$ دارای چند جواب است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۰- اگر $f^{-1} = \{(1, -1), (2, -3), (3, 1), (-1, 3)\}$ و $g(x) = \frac{12x}{x+3}$ باشد، مجموع اعضای برد تابع $f + g$ کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۳

۱۱- توابع $f(x) = \sqrt{3x-6}$ و $g(x) = \sqrt{ax+8}$ مفروض اند. اگر b تنها عضو دامنه تابع $f + g$ باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

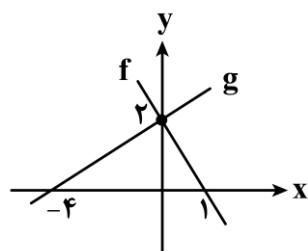
- (۱) -۲ (۲) -۶ (۳) ۲ (۴) ۶

۱۲- نمودار وارون تابع $f(x) = x^3 + ax + a$ از نقطه $A(5, 1)$ عبور می کند، مقدار $f(a)$ کدام است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۲ (۳) ۱۴ (۴) ۱۶

محل انجام محاسبات

۱۳- نمودار توابع f و g به صورت مقابل است. اگر $(f - g^{-1})(4) = (g.f^{-1})(4)$ باشد، مقدار a کدام است؟



(۱) ۲

(۲) $\frac{5}{2}$

(۳) ۳

(۴) $\frac{3}{2}$

۱۴- تابع $f(x) = x^2 + 4x$ با دامنه $(-\infty, -2]$ مفروض است. اگر $f^{-1}(x) = a + b\sqrt{x - 2a}$ باشد، مقدار $a + b$ کدام است؟

(۴) -۳

(۳) -۱

(۲) ۳

(۱) ۱

۱۵- تابع $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ مفروض است. اگر α و β ریشه های معادله $f(2x) + f^{-1}(x) = 0$ باشند، حاصل $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ کدام است؟

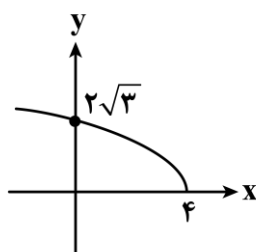
(۴) ۹

(۳) ۱۲

(۲) ۱۶

(۱) ۱۵

۱۶- نمودار تابع $f(x) = \sqrt{ax+b}$ به صورت مقابل است. دامنه تابع $y = f \circ f(x)$ شامل چند عدد صحیح است؟



(۱) ۳

(۲) ۴

(۳) ۵

(۴) ۶

محل انجام محاسبات

۱۷- دامنه تابع $f(x) = \sqrt{x - [2x]}$ به کدام صورت زیر است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

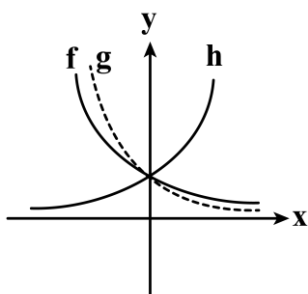
- (۱) $(-a, a]$ (۲) $(-\infty, a)$ (۳) $(a, +\infty)$ (۴) $[a, +\infty)$

۱۸- نمودار توابع $f(x) = a + 2^{x+b}$ و $g(x) = 2x^2 - 2x$ در نقاطی به طول ۱ و ۲ متقاطع اند. حاصل $\left[\frac{a}{2b}\right]$ کدام است؟

([] نماد جزء صحیح است.)

- (۱) -۱ (۲) -۳ (۳) -۲ (۴) ۱

۱۹- نمودار توابع $f(x) = a^x$ ، $g(x) = b^x$ و $h(x) = c^x$ به صورت مقابل است. در این صورت کدام گزینه صحیح است؟



(۱) $c < b < a$

(۲) $a < b < c$

(۳) $b < a < c$

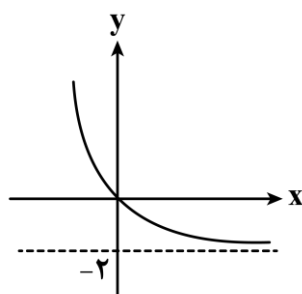
(۴) $c < a < b$

۲۰- اگر مجموع جواب های معادله $4^x + 12 = 2^{x+3}$ برابر k باشد، حاصل 2^{k-1} کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۱۲

محل انجام محاسبات

۲۱- هرگاه نمودار $f(x) = a + 2^{-bx+b}$ مطابق شکل مقابل باشد، مقدار $b-a$ کدام است؟



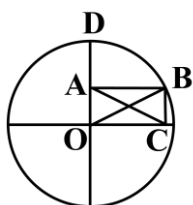
(۱) -۲

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) -۳

۲۲- در دایره $C(O, R)$ چهارضلعی $OABC$ مستطیل، $AC = ۵$ و $\widehat{ABO} = ۱۵^\circ$ می باشد. طول کمان $\widehat{BD}$ برابر کدام است؟



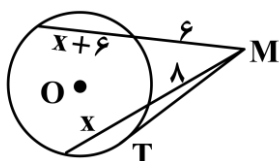
(۲) $\frac{۲۵}{۱۲}\pi$

(۱) $\frac{۷۵}{۱۲}\pi$

(۴) $\frac{۴۵}{۱۲}\pi$

(۳) $\frac{۱۱۵}{۱۲}\pi$

۲۳- پاره خط MT بر دایره $C(O, R)$ مماس است. اگر $OM = ۶\sqrt{۳}$ باشد، آن گاه مساحت این دایره چقدر است؟



(۱) ۶π

(۲) ۱۶π

(۳) ۸π

(۴) ۱۲π

۲۴- طول خط‌المركزین دو دایره $C(O, ۶m-۱)$ و $C'(O', m^2-۲)$ برابر ۶ است. اگر دو دایره فقط یک مماس مشترک داشته باشند، کمترین مقدار برای m کدام است؟

(۴) ۷

(۳) ۱

(۲) ۵

(۱) -۱

محل انجام محاسبات

۲۵- طول مماس مشترک خارجی دو دایره $3\sqrt{7}$ و طول مماس مشترک داخلی آن‌ها $\sqrt{15}$ و طول خط‌الممرکزین آن‌ها مساوی ۸ است. نسبت بیشترین فاصله بین نقاط این دو دایره به قدرمطلق تفاضل شعاع‌های دو دایره برابر کدام است؟

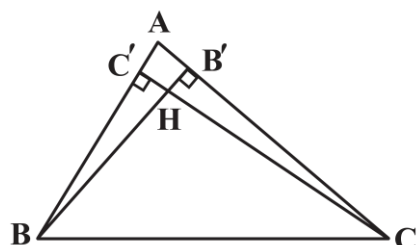
۱۰ (۴)

۱۵ (۳)

$\frac{15}{2}$ (۲)

$\frac{15}{7}$ (۱)

۲۶- در مثلث ABC نقطه H محل هم‌رسانی ارتفاع‌های مثلث است. اگر $CB' = 2/5$ ، $AB' = 1$ و $CH = 2/8$ باشد، آن‌گاه فاصله H از ضلع AB برابر کدام است؟



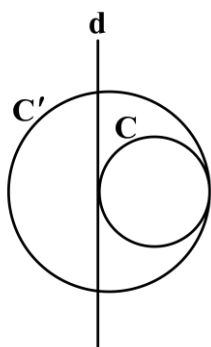
$\frac{13}{40}$ (۱)

$\frac{13}{20}$ (۲)

$\frac{14}{5}$ (۳)

$\frac{25}{8}$ (۴)

۲۷- دو دایره $C(O, 9)$ و $C'(O', 14)$ مماس داخلی هستند. خط d مماس بر دایره C و عمود بر خط‌الممرکزین دو دایره است. بازتاب دایره C نسبت به d را دایره C'' در نظر می‌گیریم. طول مماس مشترک خارجی دو دایره C' و C'' برابر کدام است؟



۱۱ (۱)

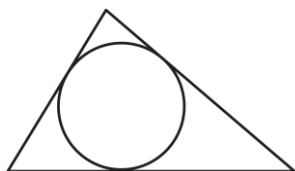
۱۲ (۲)

۱۳ (۳)

۱۴ (۴)

محل انجام محاسبات

۲۸- در شکل روبه‌رو محیط مثلث محیطی $4\sqrt{3}\pi$ است. اگر مساحت بین مثلث و دایره محاطی آن برابر ۳ باشد، محیط دایره محاطی چقدر است؟ ($\pi \approx 3$)



- (۱) ۳
(۲) ۶
(۳) $2\sqrt{3}$
(۴) $3\sqrt{2}$

۲۹- اگر $A = \{1, \{1, 2\}, \{1\}, \{2, 1\}\}$ باشد، آنگاه $P(A) - A$ چند عضو خواهد داشت؟ (منظور از $P(A)$ مجموعه توانی A است.)

- (۱) ۶
(۲) ۷
(۳) ۱۵
(۴) ۱۴

۳۰- اگر A, B و C سه مجموعه غیرتهی باشند، آنگاه مجموعه $(A \cup B) - (C \cap A')$ با کدام یک از مجموعه‌های زیر برابر است؟

- (۱) $A \cup (B - C)$
(۲) $A - (B \cup C)$
(۳) $A \cap (B - C)$
(۴) $A - (B \cap C)$

۳۱- اگر گزاره‌های p, q و r چنان باشند که ارزش گزاره مرکب $p \wedge (q \vee \sim r)$ درست باشد، آنگاه ارزش کدام یک از گزاره‌های زیر می‌تواند نادرست باشد؟

- (۱) $r \Rightarrow (p \wedge q)$
(۲) $\sim r \Rightarrow (p \vee q)$
(۳) $r \Rightarrow (p \wedge \sim q)$
(۴) $\sim r \Rightarrow (p \vee \sim q)$

محل انجام محاسبات

۳۲- مجموعه‌های A و B به ترتیب به صورت‌های $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ و $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ تعریف شده‌اند. هر یک از دو مؤلفه زوج مرتب (a, b) را به تصادف از بین اعداد $1, 2, 3, \dots, 10$ انتخاب می‌کنیم. احتمال آن‌که زوج مرتب حاصل در $A \times B$ بوده ولی در $B \times A$ نباشد، چند درصد است؟

- (۱) ۲۰٪ (۲) ۲۲٪ (۳) ۲۴٪ (۴) ۲۶٪

۳۳- در پرتاب چهارتاس، احتمال آن‌که دقیقاً دو تاس مثل هم باشند، چقدر است؟

- (۱) $\frac{1}{6}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{5}{9}$ (۴) $\frac{2}{3}$

۳۴- در جعبه‌ای ۴ مهره سفید، ۲ مهره سبز و n مهره قرمز وجود دارد. در انتخاب سه مهره به تصادف از درون جعبه احتمال آن‌که حداقل دو تا از مهره‌ها هم‌رنگ باشند $\frac{11}{15}$ است. n کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

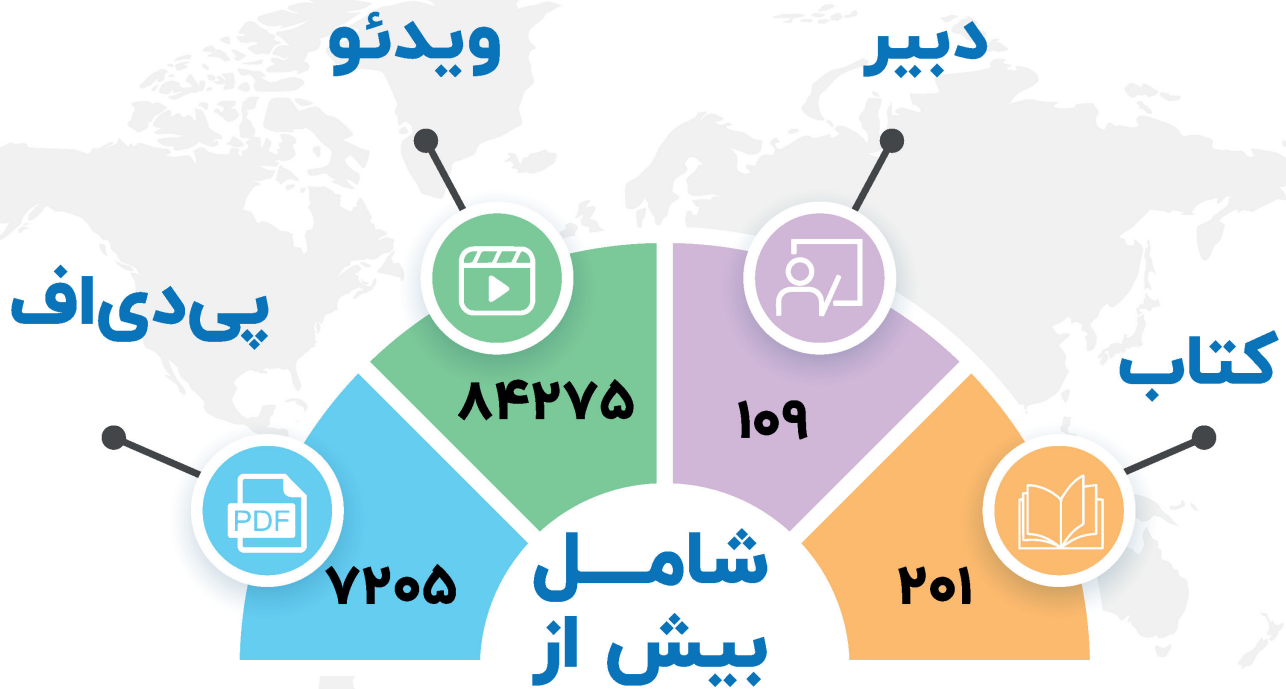
۳۵- در فضای نمونه‌ای $S = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ ، احتمال انتخاب هر عددی که شامل رقم ۴ باشد دو برابر احتمال انتخاب هر عدد دیگری است. اگر بدانیم $P(\{1, 11, 12, 13, 14, 15\}) = \frac{7}{100}$ ، آن‌گاه رقم یکان n کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

محل انجام محاسبات

مُنیاز اولین نشر آنلاین کنکور کشور

از سال ۹۷ تا کنون



برترین دبیران کنکور کشور در نشر آنلاین مُنیاز



گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی

آزمون ماز | پایه یازدهم



جمع بندی و مرور نیم سال اول



ویژه دانش آموزان پایه یازدهم

دفترچه شماره ۲

پنجشنبه ۹ بهمن ماه ۱۴۰۴

ردیف	ماده امتحانی	تعداد سؤال	شماره سؤال		مدت زمان پاسخ گویی	ملاحظات
			از	تا		
۱	فیزیک	۲۵	۳۶	۶۰	۳۵ دقیقه	۵۰ سؤال
۲	شیمی	۲۵	۶۱	۸۵	۲۵ دقیقه	۶۰ دقیقه

بودجه بندی دروس این آزمون

آمار و احتمال

آشنایی با مبانی ریاضیات
(کل فصل ۱)
احتمال
(کل درس ۱: مبانی احتمال و
کل درس ۲: احتمال غیر هم شانس)
صفحه های ۱ تا ۴۷

سهم در کنکور: ۲ سؤال

هندسه ۲

دایره (کل فصل ۱)
تبدیل های هندسی و کاربردها
(تبدیل های هندسی تا ابتدای انتقال)
صفحه های ۹ تا ۳۸

سهم در کنکور: ۲ سؤال

حسابان ۱

جبر و معادله (کل فصل ۱) /
تابع (کل فصل ۲) /
توابع نمایی و لگاریتم (تابع نمایی)
صفحه های ۱ تا ۷۹

سهم در کنکور: ۵ سؤال

شیمی ۲

قدر هدایای زمینی را بدانیم
(کل فصل)
در پی غذای سالم
(از ابتدای فصل تا انتهای گرما
در واکنش های شیمیایی)
صفحه های ۱ تا ۶۵

سهم در کنکور: ۶ سؤال

فیزیک ۲

الکتریسیته ساکن +
جریان الکتریکی
و مدارهای جریان مستقیم
(تا ابتدای توان در مدارهای الکتریکی)
صفحه های ۱ تا ۶۶

سهم در کنکور: ۵ سؤال

استراتژی و هدف گذاری با ماز در نیم سال اول ۱۴۰۴

۸ آزمون در ۱۰۰ روز تحصیلی مفید برای تسلط کامل بر مباحث نیم سال اول / شروع حرکت و یادگیری استفاده از ماشین پیشرفت ماز

۱- شروع مسیر؛ آرامش و هماهنگی: سه مرحله آزمون پوششی؛ فرصت برای شروع حرکت با ماشین پیشرفت ماز
(تکرار مباحث آزمون های قبل و فرصت برای شروع مسیر پیشرفت)

۲- چالش استمرار؛ پیگیری و استقامت: سه مرحله آزمون برای آمادگی امتحانات و تکمیل یادگیری نیم سال اول
(زمان تسلط کامل بر نیم سال اول)

۳- جمع بندی پایان نیم سال اول: دو مرحله آزمون جمع بندی بعد از امتحانات ترم اول و تکمیل یادگیری نیم سال اول + مرور و جمع بندی
(ایستگاه جمع بندی و جبران)



۳۶- جدول سری الکتریسیته مالشی مربوط به چهار جسم نقطه‌ای، رسانا و خنثای A، B، C و D مطابق شکل زیر است. دو جسم A و D را با هم و دو جسم B و C را نیز با هم مالش می‌دهیم و به ترتیب از راست به چپ، به تعداد 5×10^{12} و 10^{12} الکترون بین آن‌ها مبادله می‌شود. حال اگر دو جسم A و C را در فاصله ۲۴cm از یکدیگر قرار دهیم، بزرگی نیروی الکتریکی که این دو جسم به یکدیگر وارد می‌کنند، چند نیوتون می‌شود و نوع آن چیست؟

انتهای مثبت سری
A
B
C
D
انتهای منفی سری

$$(e = 1/6 \times 10^{-19} \text{C}, k = 9 \times 10^9 \frac{\text{N.m}^2}{\text{C}^2})$$

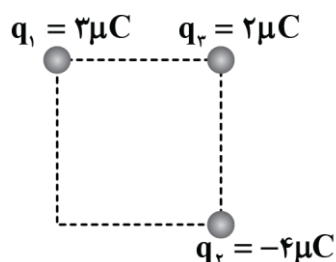
(۱) ۰/۰۲، دافعه

(۲) ۰/۲، دافعه

(۳) ۰/۲، جاذبه

(۴) ۰/۰۲، جاذبه

۳۷- مطابق شکل زیر، سه بار الکتریکی نقطه‌ای در سه رأس مربعی به ضلع ۳cm ثابت شده‌اند. نیروی الکتریکی خالص وارد شده بر بار q_3 چند نیوتون و در چه جهتی است؟ ($k = 9 \times 10^9 \frac{\text{N.m}^2}{\text{C}^2}$)



$$(k = 9 \times 10^9 \frac{\text{N.m}^2}{\text{C}^2})$$

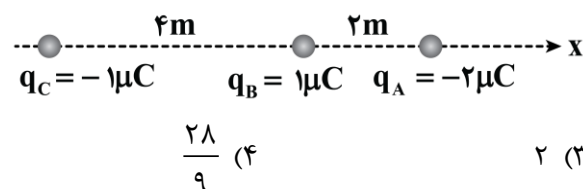
(۲) ۱۰۰، ↗

(۴) $20\sqrt{2}$ ، ↗

(۱) ۱۰۰، ↘

(۳) $20\sqrt{2}$ ، ↘

۳۸- مطابق شکل زیر، سه ذره باردار بر روی محور x قرار دارند. تعدادی الکترون از دو ذره A و B را به ذره C منتقل می‌کنیم تا بار هر یک از ذرات A و B برابر با $2 \mu\text{C}$ شود. در این صورت، بزرگی برآیند نیروهای الکتریکی وارد بر ذره B از طرف دو ذره دیگر چند برابر می‌شود؟

(۴) $\frac{28}{9}$

(۳) ۲

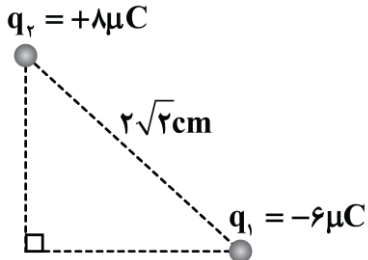
(۲) ۴

(۱) $\frac{9}{4}$

محل انجام محاسبات

۳۹- مطابق شکل زیر، دو بار الکتریکی نقطه‌ای q_1 و q_2 بر روی رئوس یک مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین قرار دارند.

بزرگی برابری میدان‌های الکتریکی حاصل از این دو بار در رأس قائم مثلث چند واحد SI است؟ $(k = 9 \times 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2})$



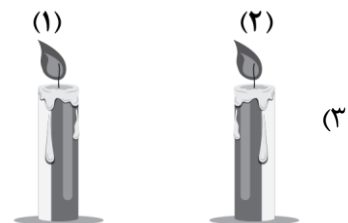
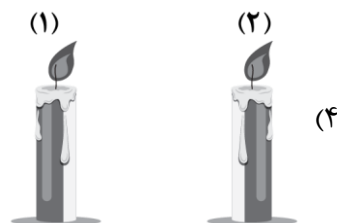
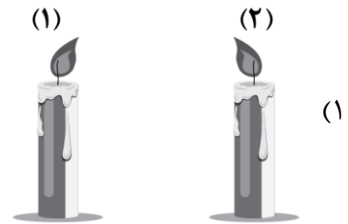
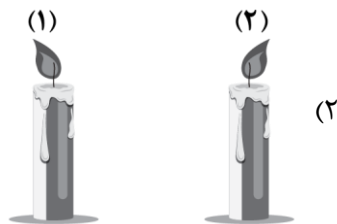
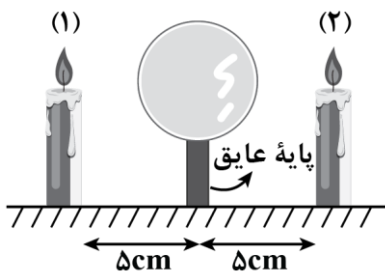
(۱) $2/25 \times 10^7$

(۲) $2/25 \times 10^8$

(۳) $2/25 \sqrt{2} \times 10^7$

(۴) $2/25 \sqrt{2} \times 10^8$

۴۰- در شکل زیر، دو شمع روشن در فاصله‌های یکسان از یک کره رسانای خنثی قرار دارند. میله‌ای رسانا با بار مثبت را به کره رسانا تماس می‌دهیم و بعد از تعادل الکتروستاتیکی، میله را دور می‌کنیم. کدام گزینه جهت انحراف شعله‌های شمع را به درستی نشان می‌دهد؟

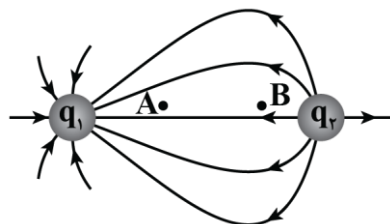


محل انجام محاسبات

۴۱- در یک میدان الکتریکی یکنواخت به بزرگی $2 \times 10^5 \frac{N}{C}$ که جهت آن قائم و رو به پایین است، ذره باردار به جرم $5g$ معلق و به حال سکون قرار دارد. بار این ذره چند میکروکولن است؟ ($g = 10 \frac{N}{kg}$)

- (۱) $2/5$ (۲) $-2/5$ (۳) $0/25$ (۴) $-0/25$

۴۲- شکل زیر، آرایش خطوط میدان الکتریکی بین دو بار الکتریکی نقطه‌ای q_1 و q_2 را نشان می‌دهد. چه تعداد از عبارات زیر درست است؟



الف- $q_2 < 0, q_1 > 0$

ب- $E_A > E_B$

ج- $V_A > V_B$

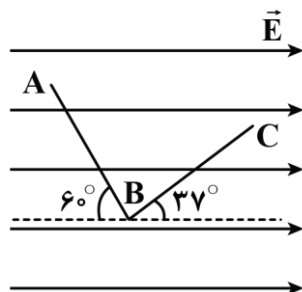
د- $|q_1| > |q_2|$

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۴۳- فاصله بین دو صفحه رسانای خنثای موازی برابر با $2/5 cm$ است. اگر این دو صفحه را به اختلاف پتانسیل الکتریکی V متصل کنیم، اندازه میدان الکتریکی یکنواخت بین این دو صفحه برابر با $2 \frac{kV}{m}$ می‌شود. V چند ولت است؟

- (۱) ۵ (۲) ۱۰ (۳) ۵۰ (۴) ۱۰۰

۴۴- در شکل زیر، بار الکتریکی نقطه‌ای $q = -2 \mu C$ از طریق مسیر نشان داده شده، درون میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{E}$ از نقطه A تا نقطه C منتقل می‌شود. اگر در این انتقال، انرژی پتانسیل الکتریکی بار الکتریکی نقطه‌ای به اندازه $0/21 J$ تغییر کند، بزرگی میدان الکتریکی $\vec{E}$ چند واحد SI است؟ ($AB = 6 cm, BC = 5 cm, \sin 37^\circ = 0/6$)



(۱) 1×10^5

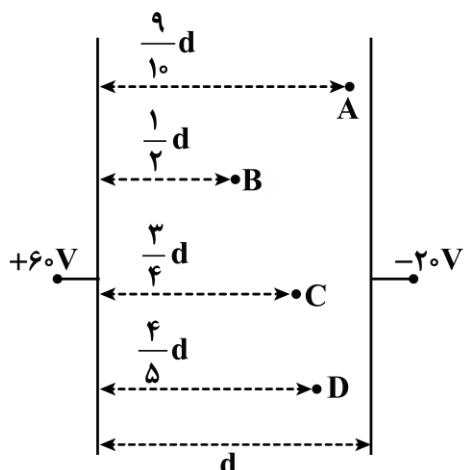
(۲) $1/5 \times 10^5$

(۳) 1×10^6

(۴) $1/5 \times 10^6$

محل انجام محاسبات

۴۵- در شکل مقابل، میدان الکتریکی یکنواختی بین دو صفحه رسانای موازی برقرار است. پتانسیل الکتریکی کدام یک از نقاط نشان داده شده A، B، C و D برابر صفر است؟



(۱) D

(۲) A

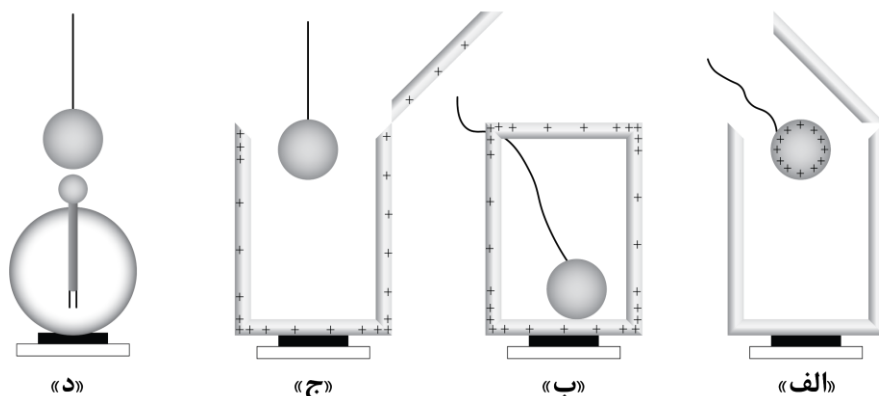
(۳) B

(۴) C

۴۶- اگر پایانه مثبت یک باتری ۱۲ ولتی را مرجع پتانسیل در نظر بگیریم، پتانسیل پایانه منفی آن ولت و اگر پایانه منفی آن را مرجع پتانسیل در نظر بگیریم، پتانسیل پایانه منفی ولت خواهد شد.

(۱) ۱۲- و صفر (۲) صفر و ۱۲- (۳) ۱۲- و ۱۲- (۴) صفر و صفر

۴۷- شکل های «الف» تا «د» مربوط به آزمایش بوده و نشان می دهد که بار اضافی داده شده به یک رسانا در آن توزیع می شود.



(۱) فاراده - سطح داخلی

(۲) لنز - سطح داخلی

(۳) لنز - سطح خارجی

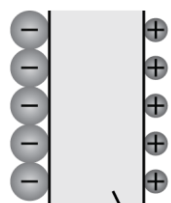
(۴) فاراده - سطح خارجی

محل انجام محاسبات

۴۸- بین دو نقطه با اختلاف پتانسیل الکتریکی $2/5 \text{ kV}$ ، تخلیه الکتریکی صورت گرفته و $1/8 \times 10^{23}$ الکترون بین این دو نقطه شارش پیدا کرده است. انرژی آزاد شده چند کیلووات ساعت است؟ ($e = 1/6 \times 10^{-19} \text{ C}$)

- (۱) ۸ (۲) ۱۰ (۳) ۱۶ (۴) ۲۰

۴۹- مطابق شکل زیر، یک یاخته عصبی (نورون) را می توان با یک خازن تخت مدل سازی کرد، به طوری که غشای سلول با ضخامت 10 nm به عنوان دی الکتریک با ثابت $\kappa = 3$ و یون های باردار با علامت مخالف که در دو طرف غشا هستند به عنوان بارهای روی صفحه های خازن عمل کنند. تعداد یون های مثبت لازم (با فرض آن که هر یون، دو بار یونیده باشد)، برای آن که یک اختلاف پتانسیل الکتریکی 32 mV ایجاد شود، چقدر است؟ (مساحت سطح 10^{-10} m^2 ،



$$\frac{C^2}{\text{N.m}^2} \quad \epsilon_0 = 9 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ و } e = 1/6 \times 10^{-19} \text{ C است.}$$

- (۱) $5/4 \times 10^4$ (۲) $2/7 \times 10^3$ (۳) $2/7 \times 10^4$ (۴) $5/4 \times 10^3$

۵۰- مساحت هر یک از صفحه های خازن تختی که بین آن هوا است برابر با 100 cm^2 و فاصله بین دو صفحه این خازن برابر با 45 mm است. اگر عایقی با ثابت دی الکتریک ۵ بین دو صفحه این خازن قرار دهیم، ظرفیت خازن چند

$$\text{نانوفاراد تغییر می کند؟ } \left(\epsilon_0 = 9 \times 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}} \right)$$

- (۱) ۰/۲ (۲) ۰/۸ (۳) ۲ (۴) ۸

محل انجام محاسبات

۵۱- خازن تختی به ظرفیت $4\mu F$ در اختیار داریم که فضای بین صفحات آن با هوا پر شده است. فاصله بین صفحات این خازن را نصف کرده و سپس فضای بین دو صفحه را با یک عایق پر می‌کنیم. اگر این خازن را با اختلاف پتانسیل الکتریکی $30V$ شارژ کنیم، انرژی ذخیره‌شده در آن $9mJ$ می‌شود. ضریب دی‌الکتریک عایق چقدر است؟

- (۱) ۲ (۲) $2/5$ (۳) ۳ (۴) $3/5$

۵۲- ظرفیت خازن تختی $5\mu F$ و اختلاف پتانسیل الکتریکی بین دو صفحه آن V است. اگر $5\mu C$ بار الکتریکی را از صفحه مثبت آن به صفحه منفی آن انتقال دهیم، انرژی ذخیره‌شده در آن $22/5\mu J$ افزایش می‌یابد. V چند ولت است؟

- (۱) ۴۰ (۲) ۲۰ (۳) ۲ (۴) ۴

۵۳- وقتی روی فرش راه می‌روید و بدنتان بار الکتریکی پیدا می‌کند، هنگام دست زدن به دستگیره فلزی در، با انتقال باری در حدود $1/5nC$ در مدت زمان $3ms$ ، شوک خفیفی را احساس کنید. اندازه جریان الکتریکی متوسطی که در این مدت بین شما و دستگیره در برقرار می‌شود، چند میکروآمپر است؟

- (۱) $5/0$ (۲) ۵ (۳) $2/0$ (۴) ۲

۵۴- یک وسیله الکتریکی با جریان $10mA$ کار می‌کند. اگر بخواهیم در فصل پاییز به مدت یک ماه و هر روز به مدت ۲ ساعت از این وسیله استفاده کنیم تا باتری آن به‌طور کامل خالی شود، باید از باتری با ظرفیت چند آمپر ساعت برای این وسیله استفاده کنیم؟

- (۱) $8/0$ (۲) $6/0$ (۳) ۶۰۰ (۴) ۸۰۰

محل انجام محاسبات

۵۵- یک لامپ چراغ قوه کوچک که رشته آن یک رسانای اهمی است، از یک باتری $2/5V$ ، جریانی برابر $0/4A$ می کشد. اگر باتری، ضعیف شود و ولتاژ آن 60% درصد کاهش یابد، جریان عبوری از لامپ چند میلی آمپر می شود؟ (از تغییر مقاومت الکتریکی رشته لامپ در اثر تغییر دما چشم پوشی شود).



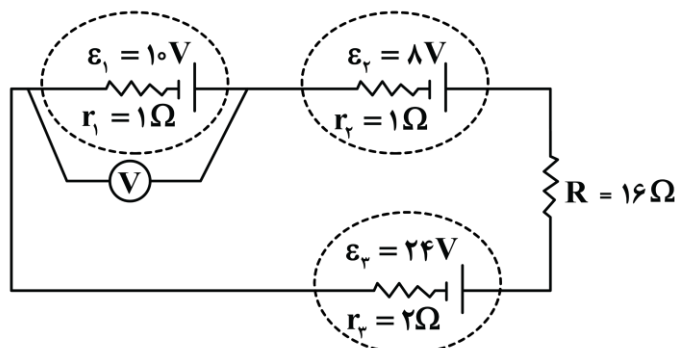
(۱) ۱۶۰

(۲) ۲۴۰

(۳) ۰/۲۴

(۴) ۰/۱۶

۵۶- در مدار شکل زیر، جهت جریان الکتریکی مدار بوده و مقدار نشان داده شده توسط ولت سنج ایده آل ولت است.



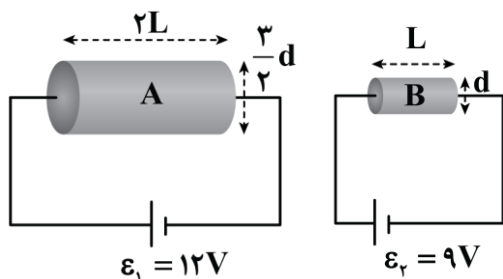
(۱) ساعتگرد، ۱۰/۳

(۲) ساعتگرد، ۹/۷

(۳) پادساعتگرد، ۱۰/۳

(۴) پادساعتگرد، ۹/۷

۵۷- مطابق شکل های زیر، دو استوانه مسی و توپُر A و B به باتری های ایده آل متصل شده اند. جریان الکتریکی عبوری از استوانه A، چند برابر جریان الکتریکی عبوری از استوانه B است؟



(۱) ۰/۵

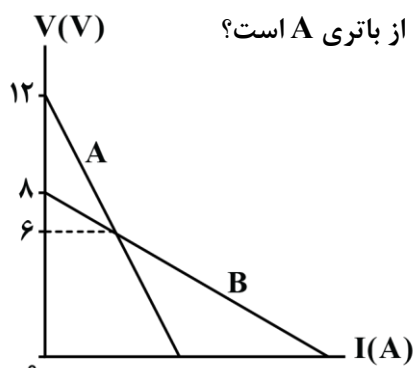
(۲) ۱

(۳) ۱/۵

(۴) ۲

محل انجام محاسبات

۵۸- نمودار اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سربattery های A و B بر حسب جریان الکتریکی عبوری از آنها مطابق شکل زیر است. حداکثر جریان عبوری از باتری B چند برابر حداکثر جریان عبوری از باتری A است؟



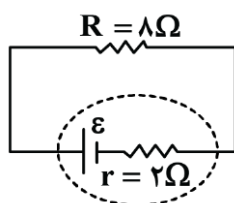
(۱) ۲

(۲) $\frac{1}{2}$

(۳) $\frac{36}{8}$

(۴) $\frac{8}{36}$

۵۹- در مدار شکل زیر، در هر دقیقه 180°C بار الکتریکی خالص در مدار شارش می‌کند. کاری که منبع نیروی محرکه الکتریکی روی این بارها انجام می‌دهد، چند کیلوژول است؟



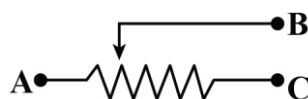
(۱) ۵/۴

(۲) ۵۴

(۳) ۲۴

(۴) ۲/۴

۶۰- در رئوستای نشان داده شده در شکل زیر، اختلاف پتانسیل الکتریکی ثابت V را یک بار به پایانه‌های A و B، یک بار به پایانه‌های A و C و یک بار هم به پایانه‌های B و C وصل می‌کنیم. در کدام گزینه، شدت جریان الکتریکی عبوری از رئوستا در این سه حالت به درستی مقایسه شده است؟



(۲) $I_{AB} = I_{BC} > I_{AC}$

(۱) $I_{AB} < I_{AC} = I_{BC}$

(۴) $I_{AB} > I_{BC} > I_{AC}$

(۳) $I_{AB} > I_{AC} > I_{BC}$

محل انجام محاسبات

۶۱- کدام یک از مطالب زیر درست است؟

- (۱) اگر دما در مقیاس درجه سلسیوس ۱۰ درصد افزایش یابد، در مقیاس کلوین بیش از ۱۰ درصد افزایش یافته است.
 (۲) در دما و فشار مشخص، مجموع انرژی گرمایی یک مول گاز H_2 و یک مول گاز Cl_2 بیشتر از دو مول گاز HCl است.
 (۳) نافلز به کاررفته در واکنش استخراج آهن در صنعت، تأمین کننده گرمای این واکنش نیز خواهد بود.
 (۴) گوارش مواد غذایی یک فرایند گرماده بوده و دمای بدن انسان را که $37^\circ C$ است، افزایش می دهد.
 ۶۲- با توجه به جدول زیر که گرمای ویژه برخی مواد را نشان می دهد، کدام گزینه نادرست است؟

($H = 1, O = 16: g.mol^{-1}$)

ماده	آب	اتانول	روغن زیتون
گرمای ویژه ($J.g^{-1}.^\circ C^{-1}$)	۴/۲	۲/۴	x

- (۱) گرمای ویژه علاوه بر دما و فشار، به نوع ماده بستگی دارد.
 (۲) ظرفیت گرمایی یک مول آب با ظرفیت گرمایی $31/5$ گرم اتانول برابر است.
 (۳) اگر جرم های برابری از آب و اتانول با دمای 70 درجه سلسیوس در اتاق وجود داشته باشد، آب سریع تر با محیط هم دما می شود.
 (۴) اگر 12 کیلوژول گرما دمای 150 گرم روغن زیتون را به اندازه 40 کلوین افزایش دهد، x به تقریب برابر با $0/48 cal.g^{-1}.^\circ C^{-1}$ است.

۶۳- اگر برای آن که دمای یک نمونه مکعبی سرب با ضلع ۲ سانتی متر از $10^\circ C$ به $15^\circ C$ برسد، به 57 ژول نیاز باشد، چگالی

این فلز چند کیلوگرم بر متر مکعب است؟ ($C_{Pb} = 0/125 J.g^{-1}.^\circ C^{-1}$)

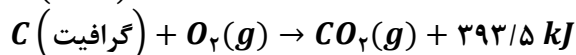
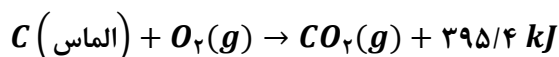
- (۱) ۱۱۴۰۰ (۲) ۱۱۴۰۰۰ (۳) ۱۷۱۰۰ (۴) ۱۷۱۰۰۰

۶۴- کدام یک از موارد زیر نادرست است؟

- (۱) یک ویژگی بنیادی در همه واکنش های شیمیایی، داد و ستد گرما با محیط پیرامون است.
 (۲) در واکنش اکسایش گلوکز همانند فرایند میعان، انرژی از سامانه به محیط منتقل می شود.
 (۳) اگر انحلال شکر در چای فرایندی گرماگیر باشد، بر اثر این انحلال، دمای چای افزایش می یابد.
 (۴) گرمای مبادله شده در واکنش $A(g) \rightarrow A(l)$ از گرمای مبادله شده در واکنش $A(g) \rightarrow A(s)$ کمتر است.

محل انجام محاسبات

۶۵- معادلات واکنش سوختن گرافیت و الماس به صورت زیر هستند:



چند مورد از مطالب زیر درست هستند؟ ($C = 12 \text{ g.mol}^{-1}$)

الف - گرافیت از الماس پایدارتر است.

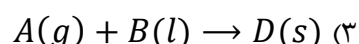
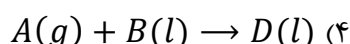
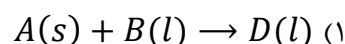
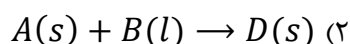
ب - واکنش تبدیل الماس به گرافیت، واکنشی گرماگیر است.

ج - در اثر سوختن ۳۰ گرم از هر آلوتروپ، اختلاف گرمای مبادله شده در دو واکنش برابر ۴۷۵۰ ژول است.

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۶۶- واکنش گرماده $A + B \rightarrow D$ را در نظر بگیرید. در میان گزینه های زیر گرمای مبادله شده به ازای مصرف یک مول

$B(l)$ در کدام واکنش کمترین است؟



۶۷- کدام مورد درباره واکنش یک مول گاز هیدروژن با یک مول گاز کلر در دمای اتاق، نادرست است؟

(۱) گرمای مبادله شده در این واکنش ناشی از تفاوت میان انرژی پتانسیل مواد واکنش دهنده و فراورده است.

(۲) در صورت انجام این واکنش در یک ظرف دربسته، فشار و دمای درون ظرف در طی واکنش ثابت می ماند.

(۳) در صورت استفاده از برم به جای گاز کلر، واکنش با شدت کمتری انجام خواهد شد.

(۴) سطح انرژی مواد واکنش دهنده از سطح انرژی مواد فراورده بالاتر است.

۶۸- کدام مورد درست است؟

(۱) اگر انرژی گرمایی دو نمونه ماده یکسان باشد، ممکن است انتقال گرما در بین آنها رخ دهد.

(۲) اگر دو نمونه ماده انرژی گرمایی یکسانی داشته باشند، میانگین انرژی جنبشی آنها نیز یکسان است.

(۳) اگر تغییر دمای محیط در یک واکنش شیمیایی مثبت باشد، گرما از محیط به سامانه جاری شده است.

(۴) گرمای آزاد شده در هر فرایندی که دمای سامانه در آن ثابت می ماند، ناشی از تغییر شیوه اتصال اتم ها به یکدیگر است.

۶۹- معادله موازنه نشده واکنش سوختن اتان به صورت $C_2H_6(g) + O_2(g) \rightarrow CO_2(g) + H_2O(l) + 3120 \text{ kJ}$

است. اگر در این واکنش از سوختن هر گرم اتان، ۴۶/۸ کیلوژول گرما آزاد شود، بازده این واکنش چند درصد است؟

($H = 1, C = 12 \text{ g.mol}^{-1}$)

(۱) ۳۷/۵ (۲) ۴۵ (۳) ۷۵ (۴) ۹۰

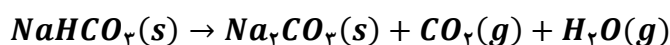
محل انجام محاسبات

۷۰- چند مورد درست است؟

- الف - شدیدترین واکنش در بین عناصر موجود در چهار دوره اول جدول تناوبی، مربوط به واکنش پتاسیم با فلوئور است.
 ب - می توان از هفتمین عنصر دسته S همانند هفتمین عنصر دسته p برای استخراج فلز گالیم استفاده نمود.
 ج - آرایش لایه ظرفیت دو کاتیون X^{2+} و Y^{+} به صورت $3d^{10}$ است، واکنش پذیری X از Y بیشتر است.
 د - فراورده گازی واکنش استخراج آهن در فولاد مبارکه با واکنش تهیه سیلیسیم یکسان است.

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۷۱- اگر ۱۰۵ گرم سدیم هیدروژن کربنات طبق واکنش موازنه نشده زیر تجزیه شود و ۲۰ لیتر گاز ناپذیری با چگالی $1/1 \text{ g.l}^{-1}$ تولید کند، بازده این واکنش چند درصد است؟ ($H = 1, C = 12, O = 16, Na = 23: \text{g.mol}^{-1}$)



(۱) ۷۰ (۲) ۷۵ (۳) ۸۰ (۴) ۹۰

۷۲- در دوره چهارم جدول تناوبی، عنصری که الکترون دارد، به طور قطع

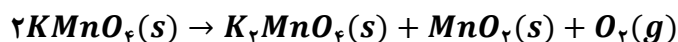
(۱) ۶ - در یک زیرلایه در لایه ظرفیت - واکنش پذیری بیشتر از نقره دارد.

(۲) ۳ - در یک لایه الکترونی - یک فلز اصلی است.

(۳) ۲ - در بیرونی ترین زیرلایه - چکش خوار است.

(۴) ۶ - ظرفیت - زیرلایه ای با ۴ الکترون دارد.

۷۳- در یک نمونه ناخالص از پتاسیم پرمنگنات (KMnO_4) به جرم ۵۰ گرم، $3/612 \times 10^{23}$ اتم اکسیژن وجود دارد. درصد خلوص این نمونه چقدر است و اگر این نمونه طبق معادله شیمیایی زیر تجزیه شود، چند میلی لیتر گاز در شرایط استاندارد تولید می شود؟ (در ناخالصی ها اتم اکسیژن وجود ندارد. $O = 16, K = 39, Mn = 55: \text{g.mol}^{-1}$)



(۱) ۴۷/۴ - ۱۶۸۰ (۲) ۵۱/۲ - ۱۶۸۰ (۳) ۴۷/۴ - ۳۳۶۰ (۴) ۵۱/۲ - ۳۳۶۰

۷۴- در میان فلزهای دوره سوم جدول تناوبی،

(۱) با افزایش شعاع اتمی، شرایط نگهداری فلز در آزمایشگاه آسان تر می شود.

(۲) کمترین خصلت فلزی مربوط به عنصری است که با چاقو بریده می شود.

(۳) فلز قلیایی در واکنش با گاز کلر نور قرمز رنگ تولید می کند.

(۴) با افزایش بار یون پایدار، واکنش پذیری فلز کاهش می یابد.

۷۵- کدام مورد عبارت زیر را به درستی تکمیل می کند؟

« هر عنصری از گروه چهاردهم جدول دوره ای که باشد، است. »

(۱) با عنصر دسته d هم دوره - دارای رسانایی الکتریکی بالایی

(۲) دارای ۸ الکترون با $n + l = 4$ - با یک هالوژن غیر گازی در دما و فشار اتاق، هم دوره

(۳) دارای سطح براق و صیقلی - دارای توانایی از دست دادن الکترون در واکنش های شیمیایی

(۴) دارای نماد دوحرفی - در دوره ای قرار دارد که شمار عناصر فلزی آن دوره از عناصر نافلزی آن بیشتر

محل انجام محاسبات

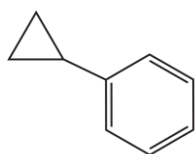
۷۶- کدام یک از مطالب زیر در مورد آهن و ترکیبات آن نادرست است؟

- (۱) آهنک استخراج و مصرف این فلز از آهنک بازگشت آن به طبیعت بیشتر است.
- (۲) اکسیدی از آن که در جوش دادن خطوط راه آهن به کار می‌رود، قرمز رنگ است.
- (۳) در هیدروکسید سبز رنگ این فلز، نسبت شمار کاتیون به آنیون برابر ۵/۰ است.
- (۴) از واکنش این فلز با محلول هیدروکلریک اسید، محلول زرد رنگ ایجاد می‌شود.

۷۷- از یک نمونه کلسیم اکسید با خلوص ۸۴ درصد برای جذب گاز گوگرد دی اکسید استفاده شده است. اگر بازده این واکنش ۷۵ درصد باشد، درصد جرمی کلسیم پس از انجام واکنش در جامد موجود در ظرف واکنش به تقریب چند درصد است؟ ($O = ۱۶, S = ۳۲, Ca = ۴۰: g.mol^{-1}$)

- (۱) ۳۳ (۲) ۳۵ (۳) ۲۷ (۴) ۳۹

۷۸- کدام مورد درباره ترکیبی با فرمول ساختاری زیر نادرست است؟ ($H = ۱, C = ۱۲: g.mol^{-1}$)



- (۱) شمار گروه‌های CH در ترکیب مورد نظر با این شمار در بنزن برابر است.
- (۲) شمار پیوندهای یگانه کربن-کربن در این ترکیب با این شمار در ۱-اوکتین برابر است.
- (۳) نسبت درصد جرمی اتم کربن به درصد جرمی اتم هیدروژن در این ترکیب برابر با ۱۰/۸ است.
- (۴) مقدار اختلاف جرم مولی این ترکیب با نفتالن، با شمار اتم‌های هیدروژن در هر مولکول بوتان برابر است.

۷۹- کدام یک از مطالب زیر نادرست است؟

- (۱) در ساختار لوویس اطلاعاتی از مولکول وجود دارد که از مدل گلوله-میله و مدل فضاپرکن نمی‌توان دریافت.
- (۲) بنزین ماده‌ای مناسب برای انحلال گریس است، اما استفاده طولانی مدت از آن به پوست آسیب می‌زند.
- (۳) سوخت فندک ماده‌ای غیر سمی بوده و می‌توان از آن برای جلوگیری از زنگ زدن آهن استفاده کرد.
- (۴) درصد جرمی کربن در نفتالن بیشتر از درصد جرمی این عنصر در یک نمونه گریس است.

۸۰- کدام یک از موارد زیر درست هستند؟

- الف - آلکانی با نام ۳-اتیل-۴،۳-دی متیل هگزان می‌تواند در سوخت هواپیما وجود داشته باشد.
- ب - فراورده واکنش به دام انداختن گاز گوگرد دی اکسید تولید شده در نیروگاه، کلسیم سولفات است.
- ج - زغال سنگ یکی از سوخت‌های فسیلی است که می‌تواند به عنوان سوخت، جایگزین نفت خام شود.
- د - در برج تقطیر مخلوط‌هایی با نقطه جوش نزدیک به هم در سینی‌هایی در فواصل یکسان، مایع می‌شوند.

- (۱) «الف» و «ج» (۲) «الف» و «د» (۳) «ب» و «ج» (۴) «ب» و «د»

۸۱- اگر چگالی یک نمونه آلکن گازی در شرایط استاندارد برابر ۱/۸۷۵ گرم بر لیتر باشد، در ساختار این ماده چند جفت

الکترون پیوندی میان اتم‌های کربن وجود دارد؟ ($H = ۱, C = ۱۲: g.mol^{-1}$)

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

محل انجام محاسبات

۸۲- در یک آلکان نسبت شمار اتم‌های هیدروژن به شمار اتم‌های کربن برابر $2/25$ است، برای این ترکیب چند ساختار متفاوت می‌توان یافت که نام‌گذاری آن‌ها طبق قواعد آیوپاک به هگزان ختم شود؟ ($H = 1, C = 12: g. mol^{-1}$)

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

۸۳- کدام یک از مطالب زیر نادرست است؟

- (۱) فراورده واکنش میان گاز اتن و آب، توانایی تشکیل پیوند هیدروژنی داشته و مایعی بی‌رنگ است.
- (۲) با افزایش شمار اتم‌های کربن در میان آلکین‌ها درصد جرمی اتم‌های هیدروژن افزایش می‌یابد.
- (۳) در میان آلکان‌های راست‌زنجیر، با افزایش درصد جرمی هیدروژن، گرانیوی کاهش می‌یابد.
- (۴) اگر نقطه جوش هیدروکربن A بیشتر از هیدروکربن B باشد، هیدروکربن A فرارتر است.

۸۴- کدام یک از مطالب زیر در مورد گاز آزادشده از معدن زغال سنگ نادرست است؟

- (۱) تنها هیدروکربنی است که در ساختار آن اتم کربنی وجود دارد که به چهار اتم هیدروژن متصل است.
- (۲) آلکینی با تعداد اتم‌های هیدروژن برابر با این ماده، در ساختار خود ۶ پیوند کووالانسی یگانه دارد.
- (۳) گازی بی‌بو، بی‌رنگ و غیرسمی است که قابلیت سوختن و انفجار دارد.
- (۴) نقطه جوش آن از سایر هیدروکربن‌های گازی کمتر است.

۸۵- اگر برای سوختن یک مول از یک هیدروکربن راست‌زنجیر ۱۲ کربنه، به $16/5$ مول اکسیژن نیاز باشد، در ساختار این هیدروکربن حداکثر چند پیوند دوگانه وجود دارد؟

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۶ (۴) ۵

محل انجام محاسبات

بودجه بندی دروس آزمون بعد...

تاریخ برگزاری: ۲۳ بهمن ماه

هندسه ۲

تبدیل های هندسی و کاربردها
(تبدیل های هندسی از ابتدای بازتاب تا ابتدای تجانس)
صفحه های ۳۵ تا ۴۳

حسابان ۱

تابع
(اعمال روی توابع)
توابع نمایی و لگاریتم
(تابع نمایی، تابع لگاریتمی و لگاریتم)
صفحه های ۶۳ تا ۸۵

فیزیک ۲

جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم
(از عوامل موثر بر مقاومت الکتریکی
تا ابتدای ترکیب مقاومت ها)
صفحه های ۵۱ تا ۷۰

آمار و احتمال

احتمال
(کل درس ۲: احتمال غیر هم شانس،
درس ۳: احتمال شرطی تا ابتدای قانون احتمال کل)
صفحه های ۴۴ تا ۵۴

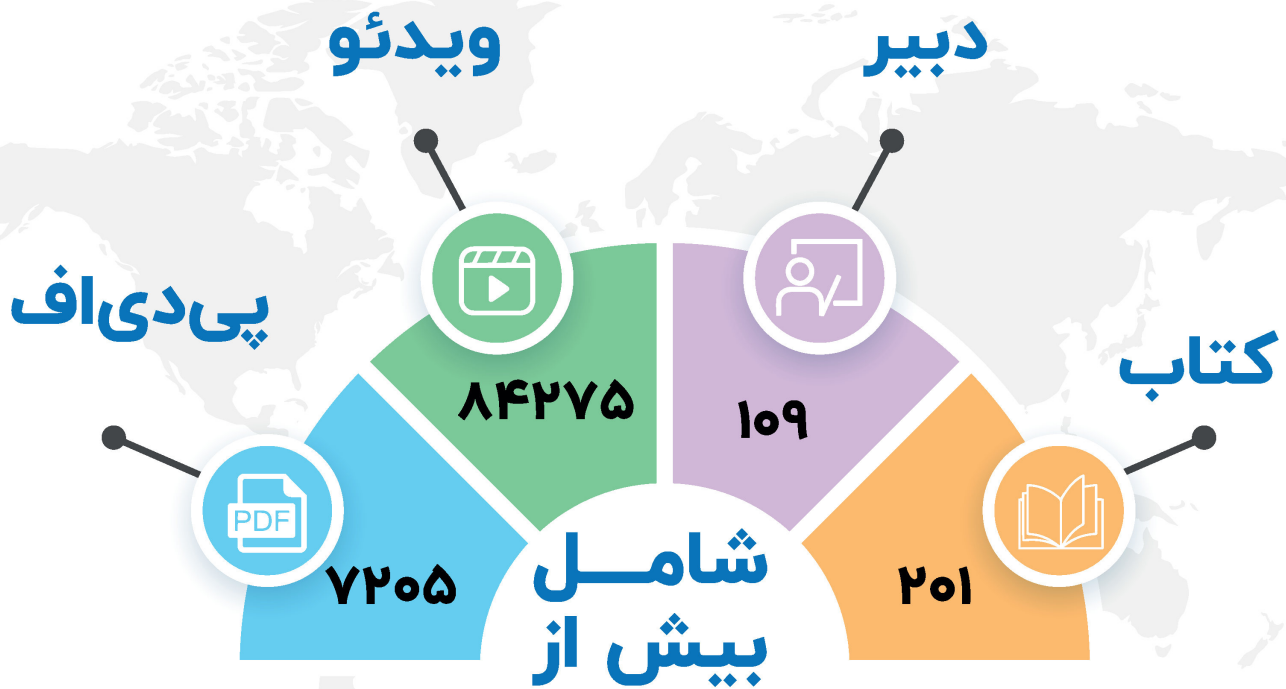
شیمی ۲

در پی غذای سالم
(از ابتدای فصل تا انتهای آنتالپی پیوند
راهی برای تعیین ΔH واکنش)
صفحه های ۵۱ تا ۷۲



مُنیاز اولین نشر آنلاین کنکور کشور

از سال ۹۷ تا کنون



برترین دبیران کنکور کشور در نشر آنلاین مُنیاز



گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی

آزمون ماز | پایه یازدهم



جمع بندی و مرور نیم سال اول



ویژه دانش آموزان پایه یازدهم

دفترچه پاسخ

پنجشنبه ۹ بهمن ماه ۱۴۰۴

✓ پاسخنامه سریع؛ برای بررسی فوری بعد از آزمون

✓ تحلیل تمام گزینه های هر سؤال؛ برای بررسی سؤالاتی که پاسخ نادرست داده اید

✓ نکات و درسنامه های آموزشی؛ برای یادگیری کامل مباحث هر سؤال

✓ مشاوره تستی؛ برای یادگیری انواع روش های حل تست

✓ استراتژی آزمون؛ برای یادگیری مدیریت زمان و مدیریت جلسه آزمون



دیس	مسئول درس	طراحان	ویراستاران
ریاضیات	حسین شفیع زاده سید جواد نظری مهرداد کیوان	حسین شفیع زاده – مهرداد کیوان حسن محمد بیگی – رسول حاجی زاده	مهرداد اسپید کار – حمیدرضا ولی پور مآندہ بادان فیروز – وحید بهروزی علیرضا ملک حسینی – علی اسدی
فیزیک	محمد جواد سورچی حسین عبدوی نژاد	حسین عبدوی نژاد – محمد جواد سورچی	حسین عبدوی نژاد محمد جواد سورچی مروارید شاه حسینی
شیمی	علی ترابی	علی ترابی – پرهام تیزیآ	محمد مهدی معظمی فرهنگ امیری – طاها حق بین محمد دارابی جم محمد مهدی میر آبادی

تیم اجرایی و تولید آزمون

نازنین امیری

مآندہ بادان فیروز

زهره جعفری

مروارید شاه حسینی

مدیر تولید آزمون: محدثه شیخعلی



یک تیم با بیش از ۵۰۰ نفر در حال کار هستند تا آزمون‌های ماز با حداکثر کیفیت حاضر بشن و به شما کمک کنن و مسیر موفقیت رو براتون ساده‌تر کنن. همیشه از نظرات و کامنت‌های خوبتون انرژی می‌گیریم. مرسی که همراهمون هستین. راستی! حتماً در نظرسنجی آزمون شرکت کنین و نظرات و پیشنهاداتتون رو برامون بنویسین.

دکتر رسول خنجری



دفتر رفع اشکال و یادداشت‌های ویژه

درس خوندن ذاتاً کار سخته، نه چون ما تنبلیم، بلکه چون مغز انسان دنبال کم کردن فشاره و طبیعی‌ترین واکنشش اینه که بهونه پیدا کنه برای توقف.

یکی از بهترین بهونه‌هاش هم اینه که وسط مطالعه به یه نکته‌ای برسیم که نفهمیدیم. همین «نفهمیدم» کافیه تا ذهن سریع ترمز بکشه و قانعمون کنه که الان ادامه نده، اول اینو حل کن، بعداً برگرد.

نتیجه‌ش هم معمولاً توقف مطالعه و به هم ریختن تمرکزه.

اما وقتی این مکانیزم رو بشناسیم، می‌تونیم جلوش رو بگیریم و نذاریم مغز از نفهمیدن به عنوان بهونه توقف استفاده کنه.

راه حل ساده‌ست!

هر جا وسط مطالعه به نکته‌ای رسیدی که نفهمیدی، لازم نیست همون لحظه متوقف بشی.

■ کافیه اون نکته رو کوتاه و مشخص توی دفتر رفع اشکال بنویسی و به خودت بگی بعداً برمی‌گردم سراغش.

همین کار باعث می‌شه خیالت راحت باشه چیزی از قلم نیفتاده و در عین حال ریتم مطالعه‌ت هم حفظ بشه.

دفتر رفع اشکال در واقع جاییه که سوال‌ها پارک می‌شن، نه اینکه وسط مسیر مطالعه‌ت سد راحت بشن.

الان البته به ابزار خیلی قوی هم در اختیار دانش‌آموزاست و اون هوش مصنوعیه.

■ هر جا رو نفهمیدی می‌تونی ارزش بخوای مرحله به مرحله و با مثال برات توضیح بده، اما باید حواست باشه که برای خیلی‌ها

وصل شدن به وب تمرکز رو می‌ریزه به هم.

نوتیفیکیشن‌ها، گشتن‌های بی‌هدف و پرسش ذهنی باعث می‌شه همون چند دقیقه تبدیل به یه وقفه‌ی طولانی بشه.

برای همین اگه می‌دونی تمرکزت می‌ریزه، بهتره باز هم نکته رو یادداشت کنی و بذاری برای یه زمان مشخص بعداً با کمک

چت‌جی‌پی‌تی، دبیر، کلاس یا کلیپ آموزشی برطرفش کنی.

اما داستان دفتر یادداشت‌های ویژه از به جای مهم‌تر شروع می‌شه؛ بعد از تست زدن.

■ معمولاً توصیه می‌کنیم برای درسای خوندنی دو روز بعد از مطالعه از اون مبحث تست بزنی، چون اونجاست که مشخص

می‌شه کدوم نکات واقعاً جا نیفتادن.

خیلی وقت‌ها نکاتی که فکر می‌کردی ساده‌ان یا اصلاً مهم نیستن، باعث غلط زدن تست‌ها می‌شن، یا یه سری ریزه کاری

هستن که سریع از ذهن می‌پرن.

این دقیقاً همون چیزاییه که باید به‌طور ویژه توی دفتر یادداشت‌های مخصوص نوشته بشه.

فرق یادداشت معمولی با یادداشت ویژه اینه که موقع مطالعه انگار مطالب رو می‌ریزی توی بند عمومی، اما وقتی بعد از تست از غلط‌ها نکتہ درمیاری، اون مطالب می‌رن توی انفرادی.

دفتر یادداشت‌های ویژه عصاره اشتباهات شفصی خودته؛ چیزایی که کنکور دقیقاً از همونا ضربه می‌زنه.

کسی که این دو تا دفتر رو درست و جدی استفاده می‌کنه، نه فقط بیشتر می‌خونه، بلکه هوشمندانه‌تر و حرفه‌ای‌تر درس می‌خونه.

به طور خلاصه اینک

- مغز برای فرار از فشار درس خورش دنبال نمونه‌ست و نفهمیدن به نکتہ بهترین ترمز مطالعه‌ست.
- راه درست اینه که وسط خورش توقف نکنیم و نکات نامفهوم رو توی دفتر رفع اشکال یادداشت کنیم تا بعداً سراغشون بریم و ریتم مطالعه‌مون حفظ بشه.
- هوش مصنوعی می‌تونه کمک‌کننده باشه، ولی اگه تمرکزت به هم می‌ریزه بهتره حل اشکال رو بذاری برای زمان مشخص بعدی.
- بعد از تست زدن، نکات ریز و دام‌داری که باعث غلط شدن تست‌ها می‌شن باید وارد دفتر یادداشت‌های ویژه بشن.
- این دفتر عصاره اشتباهات شخصیه و دقیقاً همون چیزیه که دانش آموز حرفه‌ای رو از بقیه جدا می‌کنه.

راهنمای پاسخنامه آزمون‌ها

زمان پاسخگویی:

سریع (زیر ۱ دقیقه) | استاندارد (۱-۲ دقیقه) |
زمان بر (بیشتر از ۲ دقیقه).

پاسخ: گزینه ۳

(متوسط - خط به خط - سریع) صفحه ۱۶ - ۱۱۰

سطح سؤال:

آسان (اعتماد به نفس) | متوسط (محک جدی)
دشوار (چالش رشد).

هشتگ سؤال:

شماره درس + شماره پایه
دسته بندی راحت تر سؤالات

سبک سؤال:

خط به خط (متن کتاب) | ترکیبی (چند مبحث) |
محاسباتی (فرمول ودقت) | مفهومی (درک عمیق).

شماره صفحه:

منبع اصلی رو راحت پیدا کنید.

یادتون باشه:

- ✓ هر سؤال یک فرصت یادگیری، نه یک مانع.
- ✓ پاسخنامه فقط جواب نیست؛ یک کارگاه آموزشی کامله.
- ✓ با هر آزمون و مرور این پاسخنامه، یک پله بالاتر می‌رید و یک قدم به رؤیایتون نزدیک‌تر می‌شید.
- ✓ موفقیت فقط برای کسانی که با برنامه و انگیزه حرکت می‌کنن. شما همون آدمید.



برای دیدن پاسخنامه ویدئویی آزمون
QRcode بالا را اسکن کنید!
یا بر روی لینک زیر کلیک کنید!
پاسخنامه ویدئویی آزمون

بودجه‌بندی
این آزمون

حسابان ۱: جبر و معادله + تابع + توابع نمایی و لگاریتم (تابع نمایی)، صفحه‌های ۱ تا ۷۹
هندسه ۲: دایره (کل فصل ۱)، تبدیل‌های هندسی و کاربردها (تا ابتدای انتقال)، صفحه‌های ۹ تا ۳۸
آمار و احتمال: آشنایی با مبانی ریاضیات (کل فصل ۱) + احتمال (درس ۱ و ۲)، صفحه‌های ۱ تا ۴۷

سهم در
کنکور

حسابان ۱: این مبحث در مجموع ۵ تست از ۱۰ تست کنکور را پوشش داده است.
هندسه ۲: این مبحث در مجموع ۲ تست از ۴ تست کنکور را پوشش داده است.
آمار و احتمال: این مبحث در مجموع ۲ تست از ۴ تست کنکور را پوشش داده است.

۱- در یک دنباله حسابی جملات نهم و هفدهم قرینه یکدیگر هستند. جمع چند جمله از ابتدای دنباله صفر است؟

۳۱ (۴)

۲۵ (۳)

۲۷ (۲)

۲۹ (۱)

(آسان - ترکیبی - سریع) - حسابان ۱ صفحه ۳ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۳

در دنباله حسابی جمله عمومی برابر است با $a_n = a_1 + (n-1)d$. پس داریم:

$$a_{17} = -a_9 \Rightarrow a_{17} + a_9 = 0 \Rightarrow a_1 + (17-1)d + a_1 + (9-1)d = 0 \Rightarrow 2a_1 + 24d = 0$$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

از طرفی می‌دانیم مجموع جملات دنباله حسابی برابر است با:

اکنون برای آن که $S_n = 0$ شود باید $2a_1 + (n-1)d = 0$ شود زیرا $\frac{n}{2}$ نمی‌تواند صفر شود.

بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{cases} 2a_1 + 24d = 0 \\ 2a_1 + (n-1)d = 0 \end{cases} \xrightarrow{d \neq 0} n-1 = 24 \Rightarrow n = 25$$

پس مجموع ۲۵ جمله اول برابر صفر خواهد بود.



تذکره!

توجه کنید که اگر $d = 0$ باشد، دنباله ثابت خواهد بود و جملات نهم و هفدهم نمی‌توانند قرینه یکدیگر باشند.



جرقه ذهنی

وقتی به این رسیدیم که $2a_1 + 24d = 0$ است، با توجه به فرمول $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$ می‌توان حدس زد که:

$$S_{25} = \frac{n}{2}(2a_1 + 24d) = 0 \Rightarrow n = 25$$



مجموع جملات دنباله حسابی

در یک دنباله حسابی با جمله اول a_1 برای محاسبه S_n داریم:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

اگر در رابطه بالا از تساوی $a_n = a_1 + (n-1)d$ استفاده کنیم، خواهیم داشت:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$



۲- اگر جملات دنباله a_n در شرط $a_{n+1} = 2a_n + 1$ صدق کنند و $a_1 = 2$ باشد، حاصل $a_1 + a_2 + \dots + a_{2^0}$ چه عددی است؟

$$3 \times 2^{21} - 22 \quad (4)$$

$$3 \times 2^{20} - 21 \quad (3)$$

$$3 \times 2^{20} - 23 \quad (2)$$

$$3 \times 2^{21} - 20 \quad (1)$$

(سخت - ترکیبی - زمان ۵ - حسابان ۱ صفحه ۵ - ۱۱۰)

پاسخ: گزینه ۲

در دنباله a_n با $a_1 = 2$ جملات دنباله را می نویسیم:

$$a_2 = 2a_1 + 1 = 5$$

$$a_3 = 2a_2 + 1 = 11 \Rightarrow a_n : 2, 5, 11, 23, \dots$$

$$a_4 = 2a_3 + 1 = 23$$

اگر به هر جمله یک واحد اضافه کنیم، آن گاه دنباله جدید b_n به دست می آید، که دنباله هندسی است، پس:

$$b_n : 3, 6, 12, 24, \dots \begin{cases} b_1 = 3 \\ r = 2 \end{cases} \Rightarrow b_n = b_1 \times r^{n-1} \Rightarrow b_n = 3 \times 2^{n-1}$$

از آن جایی که:

$$b_n = a_n + 1 \Rightarrow a_n = 3 \times 2^{n-1} - 1$$

پس داریم:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2^0} = 3 \times 2^0 - 1 + 3 \times 2^1 - 1 + 3 \times 2^2 - 1 + \dots + 3 \times 2^{19} - 1$$

$$= 3(2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{19}) - \underbrace{1 - 1 - 1 \dots - 1}_{2^0} = 3(1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{19}) - 2^0$$

از طرفی می دانیم $1, 2, 2^2, \dots, 2^{19}$ یک دنباله هندسی با جمله عمومی $t_n = 2^{n-1}$ جمله اول ۱ و $r = 2$ است و مجموع 2^0 جمله اول آن برابر است با:

$$S_n = \frac{t_1(r^n - 1)}{r - 1} \xrightarrow{n=2^0} S_{2^0} = \frac{1(2^{2^0} - 1)}{2 - 1} = 2^{2^0} - 1$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$3S_{2^0} - 2^0 \Rightarrow 3(2^{2^0} - 1) - 2^0 = 3 \times 2^{2^0} - 3 - 2^0 \Rightarrow a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2^0} = 3 \times 2^{2^0} - 23$$

مجموع جملات دنباله هندسی

در یک دنباله هندسی با جمله اول a_1 و قدرنسبت r مجموع n جمله اول برابر است با: ($r \neq 1$)

$$S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}$$

یادآوری!

جمله عمومی دنباله هندسی با جمله اول a_1 و قدرنسبت r برابر است با:

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$



۳- هرگاه α و β جواب های معادله $x^2 - 3x + 1 = 0$ باشند، مقدار عددی $A = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta(3-\alpha)}} + \sqrt{\frac{\beta}{\alpha(3-\beta)}}$ چه عددی است؟

(۱) $4\sqrt{3}$ (۲) $2\sqrt{5}$ (۳) $3\sqrt{2}$ (۴) $2\sqrt{3}$

(سخت - محاسباتی - استاندارد) - حسابان ۱ صفحه ۸ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۲

بررسی سریع:

$$x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow \alpha + \beta = 3 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 3 - \beta \\ \beta = 3 - \alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta^2}} + \sqrt{\frac{\beta}{\alpha^2}} = \frac{\sqrt{\alpha}}{|\beta|} + \frac{\sqrt{\beta}}{|\alpha|} \xrightarrow{\alpha, \beta > 0} A = \frac{\sqrt{\alpha}}{\beta} + \frac{\sqrt{\beta}}{\alpha}$$

$$\Rightarrow A^2 = \frac{\alpha}{\beta^2} + \frac{\beta}{\alpha^2} + \frac{2\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha\beta} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{(\alpha\beta)^2} + \frac{2\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha\beta}$$

$$\xrightarrow{A > 0} A = \sqrt{\frac{S^2 - 3SP}{P^2}} + \frac{2\sqrt{P}}{P} = \sqrt{\frac{27 - 9}{1}} + 2 = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

در معادله $x^2 - 3x + 1 = 0$ داریم:

$$S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = 3$$

$$\Rightarrow \alpha = 3 - \beta, \beta = 3 - \alpha$$

با توجه به روابط بالا A را ساده می کنیم:

$$A = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta(3-\alpha)}} + \sqrt{\frac{\beta}{\alpha(3-\beta)}} \Rightarrow A = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta^2}} + \sqrt{\frac{\beta}{\alpha^2}} = \frac{\sqrt{\alpha}}{|\beta|} + \frac{\sqrt{\beta}}{|\alpha|}$$

چون $\Delta > 0$ ، $S > 0$ و $P > 0$ ، پس هر دو ریشه معادله مثبت هستند ($\alpha, \beta > 0$)

$$A = \frac{\sqrt{\alpha}}{\beta} + \frac{\sqrt{\beta}}{\alpha}$$

در گام بعد طبق اتحاد $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ با به توان ۲ رساندن طرفین معادله داریم:

$$A^2 = \frac{\alpha}{\beta^2} + \frac{2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}}{\alpha\beta} + \frac{\beta}{\alpha^2} = \frac{\alpha}{\beta^2} + \frac{\beta}{\alpha^2} + \frac{2\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha\beta}$$

$$\Rightarrow A^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{(\alpha\beta)^2} + \frac{2\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha\beta}$$

با توجه به این که:

$$P = \alpha\beta = 1, S = \alpha + \beta = 3, \alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2SP$$

خواهیم داشت:

$$A^2 = \frac{S^2 - 2SP}{P^2} + \frac{2\sqrt{P}}{P} \Rightarrow A^2 = \frac{3^2 - 2(3)(1)}{1} + \frac{2\sqrt{1}}{1} = 20$$

$$\Rightarrow A = \pm\sqrt{20} \xrightarrow{A > 0} A = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$



مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها در معادله درجه دوم

اگر α و β ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ باشند، داریم:

$$S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a}$$

$$P = \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

مهم‌ترین روابط بین ریشه‌ها

اگر α و β ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ باشند، داریم:

$$\alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P$$

$$\alpha^3 + \beta^3 = S^3 - 3SP$$

$$|\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

$$\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{S + 2\sqrt{P}} \quad (\alpha, \beta > 0)$$

راهنمای زنگ بازی!

نیازی به حفظ کردن روابط بالا نیست، می‌تونی با بازی کردن با اتحادها عبارتی که برحسب β و α داده رو برحسب S و P بنویسی.

یه نمونه باحال ببین!

به کمک اتحاد مکعب دوجمله‌ای $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$ داریم:

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\underbrace{\alpha + \beta}_S)^3 - 3\underbrace{\alpha\beta}_P(\underbrace{\alpha + \beta}_S) \Rightarrow \alpha^3 + \beta^3 = S^3 - 3SP$$

علامت ریشه‌های حقیقی معادله درجه دوم

$$\left. \begin{array}{l} \Delta > 0 \\ \Delta = 0 \\ \Delta < 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} P > 0 \Rightarrow \text{معادله دو ریشه هم‌علامت دارد.} \\ P < 0 \Rightarrow \text{معادله دو ریشه غیر هم‌علامت دارد.} \end{array} \right\} \\ \left. \begin{array}{l} S > 0 \Rightarrow \text{دو ریشه مثبت دارد.} \\ S < 0 \Rightarrow \text{دو ریشه منفی دارد.} \end{array} \right\} \\ \left. \begin{array}{l} S > 0 \Rightarrow \text{یک ریشه مثبت و یک ریشه صفر دارد.} \\ S = 0 \Rightarrow \text{دو ریشه صفر دارد.} \\ S < 0 \Rightarrow \text{یک ریشه منفی و یک ریشه صفر دارد.} \end{array} \right\} \end{array}$$

تذکره!

مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های حقیقی زمانی معنی دارد که $\Delta \geq 0$ باشد.





۴- صفرهای تابع $f(x) = x^3 + ax^2 - 2ax - 8$ ، اعداد -2α ، α و -1 هستند، معادله درجه دومی که ریشه‌های آن α و $-\frac{\alpha}{2}$ باشند، کدام است؟

$$x^2 - 2x - 2 = 0 \quad (۴)$$

$$x^2 - x - 2 = 0 \quad (۳)$$

$$x^2 + x - 2 = 0 \quad (۲)$$

$$x^2 + 2x - 2 = 0 \quad (۱)$$

(آسان - خطبه‌خط - استاندارد) - حسابان ۱ صفحه ۱۳ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۳

بررسی سریع:

$$f(-1) = 0 \Rightarrow -1 + a + 2a - 8 = 0 \Rightarrow 3a = 9 \Rightarrow a = 3$$

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 6x - 8 \Rightarrow (x+1)(x^2 + 2x - 8) = 0$$

$$\Rightarrow (x+1)(x+4)(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -4 = -2\alpha \\ x = 2 = \alpha \end{cases}$$

معادله درجه دومی که $\alpha = 2$ و $-\frac{\alpha}{2} = -1$ ریشه‌های آن باشند:

$$S = 2 - 1 = 1 \Rightarrow x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

$$P = 2 \times (-1) = -2$$

چون $x = -1$ یکی از صفرهای تابع $f(x)$ است، پس در معادله $f(x) = 0$ صدق می‌کند:

$$f(-1) = 0 \Rightarrow -1 + a + 2a - 8 = 0 \Rightarrow 3a = 9 \Rightarrow a = 3$$

$$\Rightarrow f(x) = x^3 + 3x^2 - 6x - 8$$

در تابع $f(x)$ چون $x = -1$ یکی از صفرهای تابع است، پس $(x+1)$ یک عامل از $f(x)$ محسوب می‌شود. برای تعیین عامل‌های دیگر $f(x)$ را بر $(x+1)$ تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{array}{r} x^3 + 3x^2 - 6x - 8 \quad | \quad x+1 \\ - (x^3 + x^2) \quad \quad x^2 + 2x - 8 \\ \hline 2x^2 - 6x - 8 \\ - (2x^2 + 2x) \quad \quad \quad -8x - 8 \\ \hline -8x - 8 \\ - (-8x - 8) \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow f(x) = (x+1)(x^2 + 2x - 8)$$

حال از حل معادله $f(x) = 0$ داریم:

$$f(x) = 0 \Rightarrow (x+1)(x^2 + 2x - 8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x+1 = 0 \Rightarrow x = -1 \\ x^2 + 2x - 8 = (x+4)(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = 2 \end{cases} \end{cases}$$

پس صفرهای تابع $f(x)$ برابر $-1, 2, -4$ است و در نتیجه $\alpha = 2$ است.



اکنون معادله درجه دومی می نویسیم که ریشه هایش $\alpha = 2$ و $\frac{-\alpha}{2} = -1$ باشند:

$$S = -1 + 2 = 1$$

$$P = (-1) \times (2) = -2 \Rightarrow x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

صفرهای تابع

برای تابع $f(x)$ جوابهای معادله $f(x) = 0$ را در صورت وجود صفرهای تابع f می نامیم.

صفرهای تابع و تجزیه به عوامل

اگر $x = \alpha$ یکی از صفرهای تابع $f(x)$ باشد در این حالت $x = \alpha$ ریشه معادله $f(x) = 0$ است، در نتیجه $(x - \alpha)$ را یک عامل $f(x)$ می نامیم.

به نمونه باحال ببین!

اگر $x = -1$ یکی از صفرهای تابع $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$ باشد، صفرهای دیگر تابع را به دست آورید.

پاسخ تشریحی:

چون $x = -1$ یکی از صفرهای تابع است، پس $(x + 1)$ یک عامل $f(x)$ است و داریم:

$$\begin{array}{r} x^3 + 2x^2 - x - 2 \quad | \quad x + 1 \\ - x^3 + x^2 \quad \quad x^2 + x - 2 \\ \hline x^2 - x - 2 \\ - x^2 + x \quad \quad \quad \\ \hline -2x - 2 \\ - -2x - 2 \quad \quad \quad \\ \hline 0 \end{array}$$

$$f(x) = (x + 1)(x^2 + x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \\ x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow (x + 2)(x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \end{cases} \end{cases}$$

پس $x = -1, 1, -2$ صفرهای تابع $f(x)$ هستند.

۵- اگر محیط یک مستطیل برابر ۴ باشد، به طوری که اندازه طول و عرض آن متناسب با نسبت طلایی باشد، عرض مستطیل کدام است؟

$$\begin{array}{llll} (۴) & 3 - \sqrt{5} & (۳) & \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \\ (۲) & \frac{3 - \sqrt{5}}{2} & (۱) & \frac{\sqrt{5} + 3}{4} \end{array}$$

(متوسط - خط به خط - استاندارد) - حسابان ۱ صفحه ۱۹ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۴

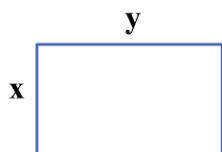
بررسی سریع:

$$\text{محیط مستطیل} = 2(x + y) = 4 \Rightarrow x + y = 2 \Rightarrow y = 2 - x$$

$$\frac{y}{x} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \xrightarrow{y=2-x} \frac{2-x}{x} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow x(1 + \sqrt{5}) = 4 - 2x$$

$$\Rightarrow (3 + \sqrt{5})x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{3 + \sqrt{5}} \times \frac{3 - \sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}} \Rightarrow x = \frac{4(3 - \sqrt{5})}{9 - 5} \Rightarrow x = 3 - \sqrt{5}$$

نسبت طلایی در مستطیل:



می‌دانیم در مستطیل با نسبت طلایی نسبت طول به عرض آن برابر $\frac{y}{x} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ است.

با توجه به این که محیط مستطیل ۴ است، داریم:

$$2(x+y) = 4 \Rightarrow x+y=2 \Rightarrow y=2-x$$

از طرفی نسبت طول به عرض آن عدد طلایی است:

$$\frac{y}{x} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \xrightarrow{y=2-x} \frac{2-x}{x} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad (1)$$

اکنون برای حل معادله گویای (۱) طرفین را در ۲x ضرب می‌کنیم:

$$\frac{2-x}{x} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \xrightarrow{\times 2x} 2(2-x) = (1+\sqrt{5})x$$

$$\Rightarrow 4-2x = (1+\sqrt{5})x \Rightarrow (1+\sqrt{5})x + 2x = 4$$

$$\Rightarrow (3+\sqrt{5})x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{3+\sqrt{5}}$$

در گام آخر جواب را گویا می‌کنیم.

$$x = \frac{4}{3+\sqrt{5}} \times \frac{3-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} = \frac{4(3-\sqrt{5})}{9-5} \Rightarrow x = 3-\sqrt{5}$$

نسبت طلایی

اگر در یک مستطیل با طول x و عرض y رابطه زیر برقرار باشد، در این صورت به آن مستطیل، «مستطیل طلایی» و به نسبت $\frac{x}{y}$ «نسبت طلایی» می‌گوییم.

$$\frac{x}{y} = \frac{x+y}{x}$$

اگر نسبت $\frac{x}{y}$ را برابر با t فرض کنیم، داریم:

$$\frac{x}{y} = t \xrightarrow{\frac{x+y}{x} = 1 + \frac{y}{x} = 1 + \frac{1}{t}} t = 1 + \frac{1}{t} \Rightarrow t^2 - t - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ t = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0 \text{ غق ق} \end{cases}$$

توجه داشته باشید که عدد $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ به عدد طلایی معروف است و مقدار تقریبی آن $1/618$ است. بنابراین می‌توان گفت که در یک مستطیل طلایی نسبت طول به عرض آن برابر است با:

$$t = \frac{x}{y} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

حل معادلات گویا!

یک راه برای حل معادلات گویا این است که، طرفین معادله را در کوچک‌ترین مضرب مشترک مخرج کسرها ضرب کنیم تا به یک معادله چندجمله‌ای برسیم که معمولاً درجه دو می‌باشد. باید دقت داشت که ریشه‌های مخرج کسرها جزء دامنه نمی‌باشند؛ بنابراین از مجموعه جواب حذف می‌شوند.



۶- اگر معادلات $2\sqrt{x} + \sqrt{3x+1} = 4$ و $\sqrt{2x-1} + k\sqrt{x+3} = 5$ ریشه مشترک داشته باشند، k چه عددی است؟

$$\frac{1}{3} \quad (4)$$

$$2 \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$3 \quad (1)$$

(سخت - محاسباتی - استاندارد) - حسابان ۱ صفحه ۲۲ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۳

$$2\sqrt{x} + \sqrt{3x+1} = 4 \Rightarrow \sqrt{3x+1} = 4 - 2\sqrt{x}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} 3x+1 = 16 + 4x - 16\sqrt{x} \Rightarrow 16\sqrt{x} = x + 15$$

$$\Rightarrow 15\sqrt{x} + \sqrt{x} = x + 15 \Rightarrow 15\sqrt{x} - 15 + \sqrt{x} - x = 0 \Rightarrow 15(\sqrt{x} - 1) - \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1) = 0$$

$$\Rightarrow (\sqrt{x} - 1)(15 - \sqrt{x}) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x} - 1 = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = 1 \Rightarrow x = 1 \\ 15 - \sqrt{x} = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = 15 \Rightarrow x = 225 \end{cases}$$

جوابها را در معادله چک می کنیم:

$$2\sqrt{x} + \sqrt{3x+1} = 4 \xrightarrow{x=1} 2 + 2 = 4 \checkmark$$

$$2\sqrt{x} + \sqrt{3x+1} = 4 \xrightarrow{x=225} 30 + 26 \neq 4 \times$$

پس $x = 1$ می تواند ریشه مشترک باشد، یعنی باید در معادله دیگر صدق کند:

$$\sqrt{2x-1} + k\sqrt{x+3} = 5 \xrightarrow{x=1} 1 + 2k = 5 \Rightarrow 2k = 4 \Rightarrow k = 2$$

استراتژی حل معادلات گنگ

برای حل معادلات گنگ به فرم $\sqrt{f(x)} = k$ مراحل زیر را طی می کنیم:

(۱) عبارت شامل رادیکال را به یک طرف تساوی و عبارات دیگر را به طرف دیگر تساوی منتقل می کنیم.

(۲) طرفین را به توان ۲ می رسانیم تا رادیکال نداشته باشیم.

(۳) با حل معادله نهایی (که معمولاً به فرم معادله درجه دوم است) جوابهای معادله را به دست می آوریم.

(۴) جوابهای به دست آمده را در معادله صدق می دهیم تا ببینیم قابل قبول است یا خیر.

نکته خیلی مهم!

در مرحله (۴) باید ریشه های معادله $\sqrt{f(x)} = k$ ، در دو شرط $k \geq 0$ و $f(x) \geq 0$ صدق کنند، در غیر این صورت غیر قابل قبول هستند.

تذکره!

در حل معادلات رادیکالی وقتی طرفین را به توان ۲ می رسانیم ممکن است جواب اضافه تولید شود، به همین دلیل حتماً جوابها را در معادله اصلی چک کنید.



۷- اگر مبدأ مختصات (O) و نقطه $A(2, 4)$ دو رأس مقابل مربع OBAC باشند، مختصات رأس B کدام می تواند باشد؟

$$(-1, 3) \quad (4)$$

$$(4, \frac{1}{2}) \quad (3)$$

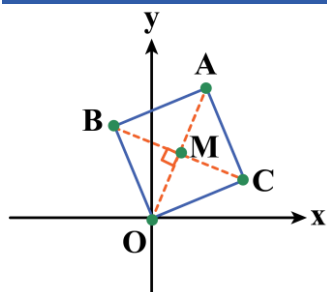
$$(0, \frac{5}{2}) \quad (2)$$

$$(-2, \frac{7}{2}) \quad (1)$$

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - حسابان ۱ صفحه ۳۱ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۴

ابتدا شکل فرضی سؤال را رسم می کنیم:





$O(0,0)$ و $A(2,4)$ دو رأس مقابل مربع هستند، پس وسط پاره خط AO محل تلاقی قطرهای مربع است:

$$M\left(\frac{x_A + x_O}{2}, \frac{y_A + y_O}{2}\right) \Rightarrow M\left(\frac{2+0}{2}, \frac{4+0}{2}\right) \Rightarrow M(1,2)$$

در گام بعد معادله قطر BC را می نویسیم:

$$m_{AO} = \frac{y_A - y_O}{x_A - x_O} = \frac{4}{2} = 2 \xrightarrow{\text{قطرها بر هم عمودند.}} m_{AO} \times m_{BC} = -1$$

$$\Rightarrow 2 \times m_{BC} = -1 \Rightarrow m_{BC} = -\frac{1}{2}$$

از طرفی می دانیم M روی خط BC است، پس:

$$y - y_M = m_{BC}(x - x_M) \Rightarrow y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 1) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

رأس B روی خط BC واقع شده:

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \Rightarrow B(\alpha, -\frac{1}{2}\alpha + \frac{5}{2})$$

همچنین می دانیم OA قطر مربع و OB ضلع مربع است، پس:

$$\frac{OA}{OB} = \sqrt{2} \Rightarrow OA = \sqrt{2}OB$$

$$\Rightarrow \sqrt{(2-0)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{2} \times \sqrt{(\alpha-0)^2 + (-\frac{1}{2}\alpha + \frac{5}{2}-0)^2} \Rightarrow \sqrt{2} \times \sqrt{\alpha^2 + (-\frac{1}{2}\alpha + \frac{5}{2})^2} = \sqrt{20}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} 2(\alpha^2 + (-\frac{1}{2}\alpha + \frac{5}{2})^2) = 20 \Rightarrow \alpha^2 + \frac{\alpha^2}{4} - \frac{5}{2}\alpha + \frac{25}{4} = 10$$

$$\xrightarrow{\times 4} 4\alpha^2 + \alpha^2 - 10\alpha + 25 = 40 \Rightarrow 5\alpha^2 - 10\alpha - 15 = 0$$

$$\xrightarrow{\div 5} \alpha^2 - 2\alpha - 3 = 0 \Rightarrow (\alpha - 3)(\alpha + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 3 \\ \alpha = -1 \end{cases}$$

پس B می تواند $(3,1)$ یا $(-1,3)$ باشد.

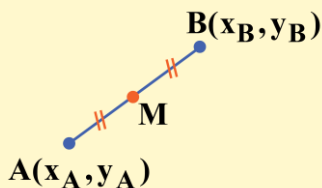
فاصله دو نقطه از هم

نقاط $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ را در نظر بگیرید، آن گاه طول پاره خط AB برابر است با:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

مختصات نقطه وسط پاره خط

اگر $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ دو نقطه در صفحه باشند و نقطه $M(x_M, y_M)$ وسط پاره خط AB باشد، مختصات M برابر است با:



$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$



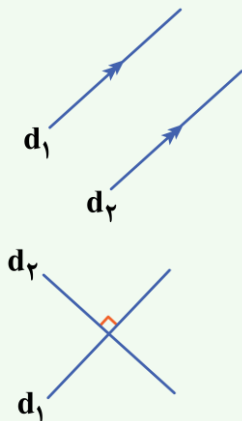
شیب خطوط موازی یا عمود

اگر دو خط با شیب‌های m_1 و m_2 موازی باشند، آن‌گاه:

$$m_1 = m_2$$

اگر دو خط با شیب‌های m_1 و m_2 بر هم عمود باشند، آن‌گاه:

$$m_1 m_2 = -1$$



۸- خط $3x + 4y = k$ بر دایره‌ای به شعاع $\frac{k}{3}$ و مرکز $O(1, -2)$ مماس است. k کدام می‌تواند باشد؟

(۴) ۷ / ۵

(۳) ۷

(۲) ۵ / ۵

(۱) ۵

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - حسابان ۱ صفحه ۳۳ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۴

می‌دانیم که فاصله مرکز دایره از خط مماس برابر شعاع دایره است. پس فاصله $O(1, -2)$ تا خط $3x + 4y - k = 0$ برابر شعاع دایره است:

$$R = \frac{|3(1) + 4(-2) - k|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|-5 - k|}{5}$$

$$\frac{|-k - 5|}{5} = \frac{k}{3} \Rightarrow |k + 5| = \frac{5}{3}k$$

از طرفی شعاع برابر $\frac{k}{3}$ است، پس:

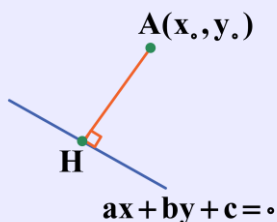
$$k \geq -5 \Rightarrow k + 5 = \frac{5}{3}k \Rightarrow -\frac{2}{3}k = -5 \Rightarrow k = \frac{15}{2} = 7.5 \checkmark$$

$$k < -5 \Rightarrow -k - 5 = \frac{5}{3}k \Rightarrow -\frac{8}{3}k = 5 \Rightarrow k = -\frac{15}{8} \times$$

فاصله نقطه از خط

فاصله نقطه $A(x_0, y_0)$ از خط $ax + by + c = 0$ برابر است با:

$$AH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

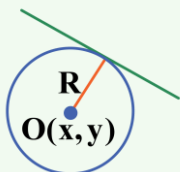


تذکره!

برای محاسبه فاصله نقطه از خط باید حتماً فرم خط به صورت $ax + by + c = 0$ باشد. یعنی حتماً توجه داشته باشید که عدد ثابت c را نیز به سمت چپ معادله خط برده و سپس در فرمول فاصله جای‌گذاری کنید.

شعاع و خط مماس بر دایره

اگر خطی بر دایره مماس باشد، آن‌گاه فاصله مرکز دایره تا خط برابر شعاع دایره است.





۹- معادله $|x^2 - 2x| + |x - 1| = 1$ دارای چند جواب است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

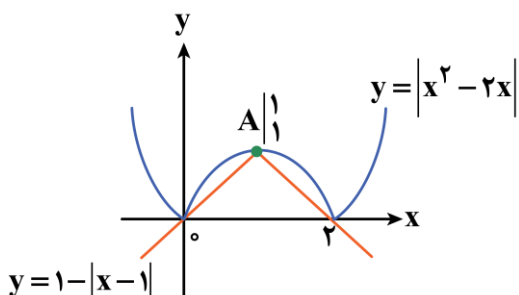
۲ (۲)

۱ (۱)

(متوسط - خطبه خط - سریع) - حسابان ۱ صفحه ۲۶ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۳

روش اول



اگر به کمک رسم نمودار و به روش هندسی عمل کنیم، داریم:

نمودار $y = |x^2 - 2x|$ و نمودار $y = 1 - |x - 1|$ را در یک دستگاه رسم می‌کنیم.

پس معادله ۳ جواب دارد که عبارتند از $x = 0, 1, 2$.

روش دوم

برای حل این معادله قدرمطلق نیاز داریم علامت قدرمطلق را برداریم، یعنی باید علامت عبارت درون قدرمطلقها را تشخیص دهیم و برداریم:

$$|x^2 - 2x| + |x - 1| = 1 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - x + 1 = 1 & x \leq 0 \\ -x^2 + 2x - x + 1 = 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ -x^2 + 2x + x - 1 = 1 & 1 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 2x + x - 1 = 1 & x \geq 2 \end{cases}$$

$$x \leq 0 \Rightarrow x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \checkmark \\ x = 3 \times \end{cases}$$

$$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow -x^2 + x = 0 \Rightarrow x(-x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \checkmark \\ x = 1 \checkmark \end{cases}$$

$$1 \leq x \leq 2 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow (x - 1)(x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \checkmark \\ x = 2 \checkmark \end{cases}$$

$$x \geq 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x - 2)(x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \times \\ x = 2 \checkmark \end{cases}$$

پس معادله ۳ جواب دارد که عبارتند از $x = 0, 1, 2$.

روش هندسی برای حل معادلات!

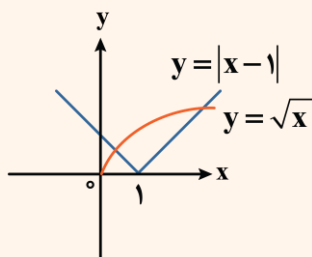
برای حل معادلاتی که در دو طرف تساوی، دو عبارت غیر همجنس داریم می‌توانیم از روش هندسی استفاده کنیم، بدین صورت که نمودار دو طرف تساوی را رسم کرده و نقاط برخورد را به عنوان جواب‌های معادله در نظر می‌گیریم.

یه نمونه باحال ببین!

معادله $|x - 1| = \sqrt{x}$ چند جواب دارد؟

پاسخ تشریحی:

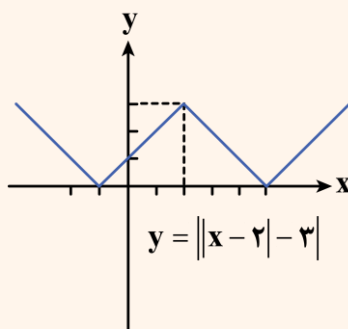
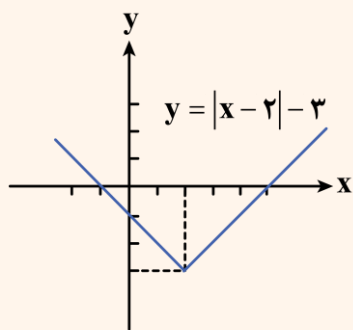
با رسم نمودار توابع $y = \sqrt{x}$ و $y = |x - 1|$ واضح است که نمودار دو تابع دو نقطه برخورد دارند، پس معادله دو جواب دارد. (یکی از جواب‌ها بین ۰ و ۱ و جواب دیگر بزرگتر از ۱ است).



رسم نمودارهای قدرمطلق

برای رسم نمودار $y = |f(x)|$ ابتدا نمودار $y = f(x)$ را رسم می‌کنیم. سپس قسمتی از نمودار این تابع که زیر محور x ها قرار دارد را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم و بخش پایین محور x ها را حذف می‌کنیم.

یه نمونه باحال ببین!



یادآوری انتقال توابع

توضیحات و نحوه رسم	نمودار جدید ($a, k > 0$)
نمودار تابع f را به اندازه a واحد در راستای محور x ها به سمت چپ منتقل می‌کنیم.	$f(x + a)$
نمودار تابع f را به اندازه a واحد در راستای محور x ها به سمت راست منتقل می‌کنیم.	$f(x - a)$
نمودار تابع f را به اندازه a واحد در راستای محور y ها به سمت بالا منتقل می‌کنیم.	$f(x) + a$
نمودار تابع f را به اندازه a واحد در راستای محور y ها به سمت پایین منتقل می‌کنیم.	$f(x) - a$
نمودار تابع f را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم.	$f(-x)$
نمودار تابع f را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم.	$-f(x)$

قدرمطلق را چگونه برداریم؟

قدرمطلق عدد حقیقی x را با $|x|$ نمایش می‌دهند و به صورت مقابل تعریف می‌شود:

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \rightarrow \text{خودش میاد بیرون} \\ -x & x < 0 \rightarrow \text{قرینه‌اش میاد بیرون} \end{cases}$$



توجه!

توجه کنید که چون قرینهٔ صفر خودش است می‌توانیم شرایط مرزی را به صورت زیر هم در نظر بگیریم:

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x \leq 0 \end{cases} \rightarrow \text{صفر چه خودش بیاد بیرون چه قرینه‌اش همون صفره.}$$

این نوع مرزبندی باعث می‌شه موقع چک کردن جواب‌ها تو شرط دامنه مطمئن باشیم چیزی از قلم نمی‌افته!



۱۰- اگر $f^{-1} = \{(1, -1), (2, -3), (3, 1), (-1, 3)\}$ و $g(x) = \frac{12x}{x+3}$ باشد، مجموع اعضای برد تابع $f+g$ کدام است؟

۳ (۴)

۴ (۳)

۲ (۲)

۶ (۱)

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - حسابان ۱ صفحه‌های ۵۴ و ۶۴ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۱

ابتدا با تعویض جای مؤلفه‌های اول و دوم هر زوج مرتب در f^{-1} تابع f را تشکیل می‌دهیم:

$$f = \{(-1, 1), (-3, 2), (1, 3), (3, -1)\}$$

با توجه به دامنهٔ f ، اعضای $f+g$ را به دست می‌آوریم.

$$(f+g)(-1) = 1 + g(-1) = 1 - 6 = -5$$

$$(f+g)(-3) = 2 + g(-3) \text{ تعریف نشده}$$

$$(f+g)(1) = 3 + g(1) = 3 + 3 = 6$$

$$(f+g)(3) = -1 + g(3) = -1 + 6 = 5$$

$$\Rightarrow R_{f+g} = \{-5, 6, 5\}$$

$$\text{جمع اعضای برد} = -5 + 6 + 5 = 6$$

چهار عمل اصلی روی توابع

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x) \quad D_{f \pm g} = D_f \cap D_g$$

$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x) \quad D_{f \times g} = D_f \cap D_g$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\}$$

طریقهٔ یافتن تابع وارون در نمایش زوج مرتبی

برای وارون کردن توابع در نمایش زوج مرتبی کافی است زوج مرتب (a, b) در تابع اصلی تبدیل به (b, a) در تابع وارون آن شود.





۱۱- توابع $f(x) = \sqrt{3x-6}$ و $g(x) = \sqrt{ax+8}$ مفروض اند. اگر b تنها عضو دامنه تابع $f+g$ باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

(۴) ۶

(۳) ۲

(۲) -۶

(۱) -۲

(متوسط - خط به خط - استاندارد) - حسابان ۱ صفحه ۶۵ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۱

می دانیم دامنه $f+g$ برابر $D_f \cap D_g$ است.

از طرفی دامنه f برابر است با:

$$f(x) = \sqrt{3x-6} \Rightarrow 3x-6 \geq 0 \Rightarrow 3x \geq 6 \Rightarrow x \geq 2$$

یعنی دامنه f برابر $[2, +\infty)$ است، پس باید دامنه g به صورت $(-\infty, 2]$ باشد، تا اشتراک آن ها تک نقطه ای $\{2\}$ شود، پس $b=2$ است.

در ضمن $x=2$ ریشه $ax+8=0$ است، پس:

$$ax+8=0 \xrightarrow{x=2} 2a=-8 \Rightarrow a=-4$$

$$a+b=-4+2=-2$$

در نتیجه خواهیم داشت:

دامنه توابع رادیکالی

برای محاسبه دامنه توابع رادیکالی با فرجه زوج به صورت زیر عمل می کنیم:

$$f(x) = \sqrt[n]{g(x)} \Rightarrow D_f = D_g \cap \{x | g(x) \geq 0\}$$

یعنی علاوه بر تعیین دامنه عبارت زیر رادیکال، زیر رادیکال با فرجه زوج باید همیشه نامنفی باشد.

به علاوه به یاد داشته باشید که، حاصل رادیکال با فرجه زوج همیشه عددی نامنفی است. پس در تساوی $\sqrt[n]{g(x)} = h(x)$ باید $h(x)$ هم نامنفی باشد.



۱۲- نمودار وارون تابع $f(x) = x^3 + ax + a$ از نقطه $A(5, 1)$ عبور می کند، مقدار $f(a)$ کدام است؟

(۴) ۱۶

(۳) ۱۴

(۲) ۱۲

(۱) ۱۰

(آسان - مفهومی - سریع) - حسابان ۱ صفحه ۵۸ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۳

بررسی سریع:

$$f^{-1}(5) = 1 \Rightarrow f(1) = 5$$

$$\Rightarrow f(1) = 1 + a + a = 5 \Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow a = 2$$

$$\Rightarrow f(a) = f(2) = 8 + 4 + 2 = 14$$

نقطه $A(5, 1)$ روی وارون f قرار دارد $\Leftrightarrow f^{-1}(5) = 1$

$$f(a) = b \Leftrightarrow f^{-1}(b) = a$$

از طرفی می دانیم که:

$$f^{-1}(5) = 1 \Rightarrow f(1) = 5$$

پس با توجه به آن داریم:

$$f(x) = x^3 + ax + a \xrightarrow{x=1} 1 + a + a = 5 \Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow a = 2$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$f(x) = x^3 + 2x + 2 \xrightarrow{x=a=2} f(a) = f(2) = 2^3 + 2(2) + 2$$

$$\Rightarrow f(2) = 8 + 4 + 2 = 14$$



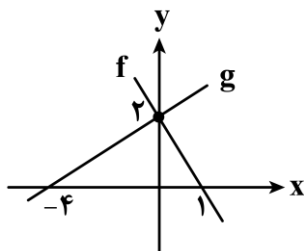
نکته

اگر f تابعی یک به یک باشد، داریم:

$$f(a) = b \Leftrightarrow f^{-1}(b) = a$$



۱۳- نمودار توابع f و g به صورت مقابل است. اگر $(g \cdot f^{-1})(4) = (f - g^{-1})(a)$ باشد، مقدار a کدام است؟



(۱) ۲

(۲) $\frac{5}{2}$

(۳) ۳

(۴) $\frac{3}{2}$

(سخت - ترکیبی - زمان بر) - حسابان ۱ صفحه های ۵۸ و ۶۵ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۲

بررسی سریع:

$$f(x) = ax + b \xrightarrow{(1,0)} f(x) = -2x + 2 \Rightarrow f^{-1}(x) = -\frac{1}{2}x + 1$$

$$g(x) = mx + n \xrightarrow{(-4,0)} g(x) = \frac{1}{2}x + 2 \Rightarrow g^{-1}(x) = 2x - 4$$

$$\Rightarrow (g \cdot f^{-1})(4) = (f - g^{-1})(a) \Rightarrow g(4) \times f^{-1}(4) = f(a) - g^{-1}(a) \Rightarrow -4 = -4a + 6 \Rightarrow a = \frac{5}{2}$$

گام اول

در گام اول ضابطه های f و g را می نویسیم:

$$(f(x) = ax + b) \Rightarrow \begin{cases} (1,0) \Rightarrow a + b = 0 \\ (0,2) \Rightarrow b = 2 \end{cases} \Rightarrow a + 2 = 0 \Rightarrow a = -2$$

$$\Rightarrow f(x) = -2x + 2$$

$$(g(x) = mx + n) \Rightarrow \begin{cases} (-4,0) \Rightarrow -4m + n = 0 \\ (0,2) \Rightarrow n = 2 \end{cases} \Rightarrow -4m + 2 = 0 \Rightarrow -4m = -2 \Rightarrow m = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{1}{2}x + 2$$

گام دوم

در گام دوم، ضابطه وارون توابع f و g را محاسبه می کنیم:

$$f(x) = -2x + 2 \Rightarrow y = -2x + 2 \Rightarrow 2x = -y + 2 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}y + 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = -\frac{1}{2}x + 1$$

$$g(x) = \frac{1}{2}x + 2 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + 2 \Rightarrow \frac{1}{2}x = y - 2 \Rightarrow x = 2y - 4 \Rightarrow g^{-1}(x) = 2x - 4$$

گام آخر

در گام آخر، با توجه به این که $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$ و $(f \cdot g)(x) = f(x) \times g(x)$ معادله داده شده را تشکیل می دهیم و مقدار a را محاسبه می کنیم:

$$\Rightarrow 4 \times (-1) = -2a + 2 - (2a - 4) \Rightarrow -4 = -4a + 6 \Rightarrow 4a = 10 \Rightarrow a = \frac{5}{2}$$



چطوری ضابطه وارون یه تابع وارون پذیر رو پیدا کنیم؟

- ۱) به جای $f(x)$ ، می نویسیم y و بعد سعی می کنیم که x را بر حسب y به دست آوریم (x رو در یک طرف تنها می کنیم).
- ۲) وقتی که x تنها شد به جای y می گذاریم x و به جای x می نویسیم $f^{-1}(x)$.



۱۴- تابع $f(x) = x^2 + 4x$ با دامنه $(-\infty, -2]$ مفروض است. اگر $f^{-1}(x) = a + b\sqrt{x-2a}$ باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

(۴) -۳

(۳) -۱

(۲) ۳

(۱) ۱

(متوسط - خط به خط - استاندارد) - حسابان ۱ صفحه ۶۱ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۴

روش اول

تابع f را به مربع کامل تبدیل می کنیم و داریم:

$$y = x^2 + 4x$$

$$y = x^2 + 4x + 4 - 4 \Rightarrow y = (x+2)^2 - 4$$

$$\Rightarrow y + 4 = (x+2)^2 \xrightarrow{\sqrt{\quad}} |x+2| = \sqrt{y+4} \xrightarrow{x \leq -2} \underbrace{|x+2|}_{-} = \sqrt{y+4}$$

$$\Rightarrow -x-2 = \sqrt{y+4} \Rightarrow x = -2 - \sqrt{y+4} \Rightarrow f^{-1}(x) = -2 - \sqrt{x+4}$$

$$a = -2, b = -1 \Rightarrow a + b = -3$$

روش دوم

از طریق حل معادله درجه دوم به روش دلتا (Δ) x را بر حسب y می نویسیم:

$$y = x^2 + 4x$$

$$x^2 + 4x - y = 0 \Rightarrow \Delta = 16 - 4(1)(-y) \Rightarrow \Delta = 16 + 4y$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 4y}}{2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{y+4}}{2} = -2 \pm \underbrace{\sqrt{y+4}}_{+} \xrightarrow{x \leq -2} x = -2 - \sqrt{y+4}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = -2 - \sqrt{x+4} \Rightarrow \begin{cases} b = -1 \\ a = -2 \end{cases} \Rightarrow a + b = -3$$



۱۵- تابع $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ مفروض است. اگر α و β ریشه های معادله $f(2x) + f^{-1}(x) = 0$ باشند، حاصل $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ کدام است؟

(۴) ۹

(۳) ۱۲

(۲) ۱۶

(۱) ۱۵

(متوسط - محاسباتی - زمان بر) - حسابان ۱ صفحه ۵۸ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۳

$$f(x) = \frac{2x-1}{x+1} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-x-1}{x-2}$$

بررسی سریع:

$$f(2x) + f^{-1}(x) = 0 \Rightarrow \frac{2(2x)-1}{2x+1} + \frac{-x-1}{x-2} = 0 \Rightarrow 2x^2 - 12x + 1 = 0$$

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{e}{f} = 12$$



SanjeshCloud

www.SanjeshCloud.ir



گام اول

برای وارون کردن تابع f دو روش وجود دارد:

روش اول

ابتدا x را بر حسب y می نویسیم سپس با تبدیل y به x ، $f^{-1}(x)$ را به دست می آوریم:

$$y = \frac{2x-1}{x+1} \Rightarrow 2x-1 = yx+y \Rightarrow 2x-xy = y+1 \Rightarrow x(2-y) = y+1 \Rightarrow x = \frac{y+1}{2-y}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+1}{-x+2}$$

روش دوم

برای محاسبه وارون تابع داریم:

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}$$

پس خواهیم داشت:

$$f(x) = \frac{2x-1}{x+1} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-x-1}{x-2} = \frac{x+1}{-x+2}$$

گام دوم

اکنون معادله $f(2x) + f^{-1}(x) = 0$ را حل می کنیم:

$$f(2x) + f^{-1}(x) = 0 \Rightarrow \frac{2(2x)-1}{2x+1} + \frac{x+1}{-x+2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{4x-1}{2x+1} = \frac{x+1}{x-2} \xrightarrow{\times(2x+1)(x-2)} 4x^2 - 9x + 2 = 2x^2 + 3x + 1 \Rightarrow 2x^2 - 12x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 144 - 4(2)(1) > 0 \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{12}{2} = 6, P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{6}{\frac{1}{2}} = 12$$

روش سریع محاسبه تابع وارون توابع گویا



وارون تابع $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0, ad-bc \neq 0$) به صورت زیر است:

$$f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}$$

اثبات: برای یافتن وارون همواره سعی داریم که x را تنها کنیم:

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow y = \frac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow ycx + yd = ax + b$$

$$\Rightarrow ycx - ax = b - yd \Rightarrow (yc - a)x = b - yd$$

$$\Rightarrow x = \frac{-dy + b}{cy - a}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-dx + b}{cx - a}$$





راهنمای زنگ بازی!

لازم نیست نکته وارون تابع گویا رو حفظ کنی. به طریقه به دست آوردن وارونش دقت کن تا برای همیشه تو ذهنت بمونه. 😊

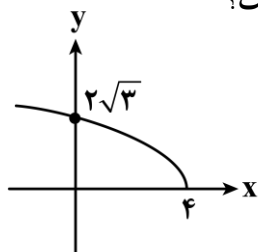


اگر $a + d = 0$ باشد، آن گاه:

$$f(x) = f^{-1}(x)$$



۱۶- نمودار تابع $f(x) = \sqrt{ax+b}$ به صورت مقابل است. دامنه تابع $y = f \circ f(x)$ شامل چند عدد صحیح است؟



۳ (۱)

۴ (۲)

۵ (۳)

۶ (۴)

(متوسط - ترکیبی - استاندارد) - حسابان ۱ صفحه‌های ۴۷ و ۶۸ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۴

$$f(0) = 2\sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{b} = 2\sqrt{3} \Rightarrow b = 12$$

$$f(4) = 0 \Rightarrow \sqrt{4a+b} = 0 \Rightarrow 4a+b=0 \Rightarrow 4a+12=0 \Rightarrow a=-3$$

$$f(x) = \sqrt{-3x+12}$$

بنابراین خواهیم داشت:

از طرفی مطابق نمودار $D_f = (-\infty, 4]$ است.

گام اول

به کمک تعریف دامنه ترکیب دو تابع داریم:

$$D_{f \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_f\}$$

$$\xrightarrow{(1)} x \in (-\infty, 4] \Rightarrow x \leq 4$$

$$\xrightarrow{(2)} f(x) \in (-\infty, 4] \Rightarrow f(x) \leq 4$$

گام دوم

$$f(x) \leq 4 \Rightarrow \sqrt{-3x+12} \leq 4 \xrightarrow{\text{توان ۲}} -3x+12 \leq 16 \Rightarrow -3x \leq 4 \Rightarrow x \geq -\frac{4}{3}$$

حل نامعادله $f(x) \leq 4$:

گام آخر

$$D_{f \circ f}(x) = \left[-\frac{4}{3}, 4\right]$$

در آخر از بازه‌های به دست آمده اشتراک می‌گیریم:

بازه به دست آمده شامل ۶ عدد صحیح $-1, 0, 1, 2, 3, 4$ است.

دامنه ترکیب دو تابع

دامنه $f \circ g$ مقداری از x می‌باشند که در دامنه g باشند و به ازای آن‌ها مقادیر $g(x)$ در دامنه f قرار بگیرد. به عبارت دیگر:

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$



SanjeshCloud

www.SanjeshCloud.ir



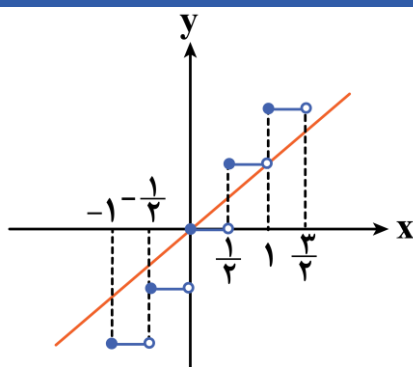
۱۷- دامنه تابع $f(x) = \sqrt{x - [2x]}$ به کدام صورت زیر است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

(۴) $[a, +\infty)$ (۳) $(a, +\infty)$ (۲) $(-\infty, a)$ (۱) $(-a, a]$

(سخت - ترکیبی - زمان ۲۰) - حسابان ۱ صفحه ۵۱ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۲

روش اول



نمودار توابع $y = x$ و $y = [2x]$ را رسم می‌کنیم.

با توجه به نمودار جواب نامعادله $x \geq [2x]$ برابر $(-\infty, \frac{1}{2})$ می‌شود که به صورت $(-\infty, a)$ است.

روش دوم

$$f(x) = \sqrt{x - [2x]} \Rightarrow D_f : x - [2x] \geq 0 \Rightarrow x \geq [2x]$$

$$[2x] = k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} x \geq [2x] \Rightarrow x \geq k \\ [2x] = k \Rightarrow k \leq 2x < k+1 \Rightarrow \frac{k}{2} \leq x < \frac{k+1}{2} \end{cases}$$

$$k < \frac{k+1}{2} \Rightarrow 2k < k+1 \Rightarrow k < 1 \Rightarrow k = 0, -1, -2, \dots$$

برای آن که مجموعه جواب فوق تهی نشود باید داشته باشیم:

اکنون با توجه به مقادیر k محدوده x را به دست می‌آوریم:

$$k = 0 \Rightarrow 0 \leq x < \frac{1}{2}$$

$$k = -1 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq x < 0$$

$$k = -2 \Rightarrow -1 \leq x < -\frac{1}{2}$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

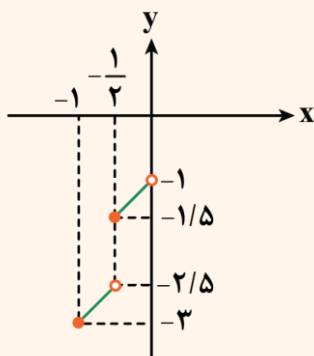
$$\xrightarrow{\text{به صورت}} x \in (-\infty, \frac{1}{2}) \xrightarrow{\text{اجتماع جوابها}} (-\infty, a)$$

روش کلی رسم توابع جزء صحیح

برای رسم توابع جزء صحیح به روش بازه‌بندی عمل می‌کنیم به این گونه که حاصل جزء صحیح را برابر عدد صحیح قرار می‌دهیم و مطابق ویژگی جزء صحیح تابع را چندضابطه‌ای می‌کنیم و بعد رسم می‌کنیم.

به نمونه باحال ببین!

$$f(x) = [2x+1] + x - 1$$



$$\vdots$$

$$[2x+1] = -1 \Rightarrow -1 \leq 2x+1 < 0 \Rightarrow -1 \leq x < -\frac{1}{2} \Rightarrow f(x) = -1 + x - 1 = x - 2$$

$$[2x+1] = 0 \Rightarrow 0 \leq 2x+1 < 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq x < 0 \Rightarrow f(x) = 0 + x - 1 = x - 1$$

$$\vdots$$

$$f(x) = \begin{cases} x - 2 & : -1 \leq x < -\frac{1}{2} \\ x - 1 & : -\frac{1}{2} \leq x < 0 \\ \vdots & \end{cases}$$

در مثال فوق ۲ بازه از آن رسم شده است، برای دیگر بازه‌ها هم می‌توان رسم کرد.



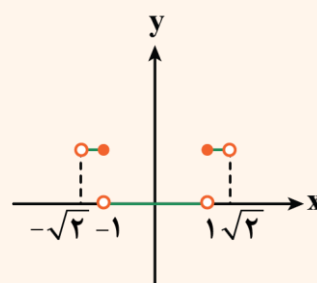
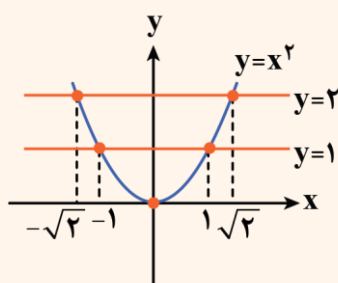
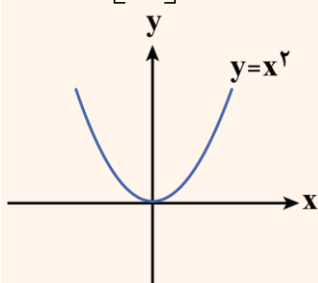


حالت‌های خاص:

۱) رسم نمودار $y = [f(x)]$: ابتدا نمودار $f(x)$ را رسم می‌کنیم. خطوط $y = k$ ($k \in \mathbb{Z}$) را طوری رسم می‌کنیم که نمودار تابع را قطع کند، قسمت‌هایی از منحنی که بین دو خط متوالی است روی خط پایین تصویر می‌کنیم.

 **یه نمونه باحال ببین!**

$$f(x) = \begin{bmatrix} x^2 \end{bmatrix}$$

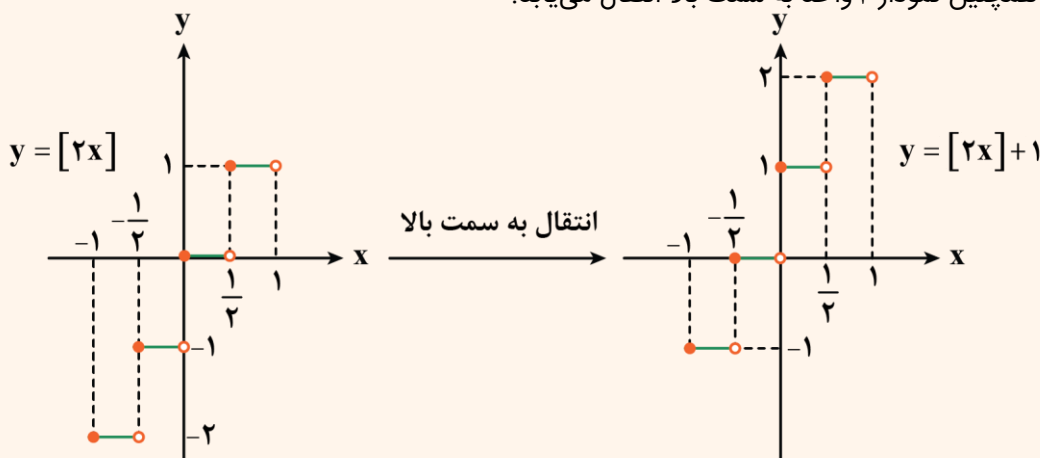


(۲) رسم نمودار $y = [ax]$: در رسم نمودار، $y = [ax]$ طول بازه‌ها روی محور x $\frac{1}{|a|}$ است.

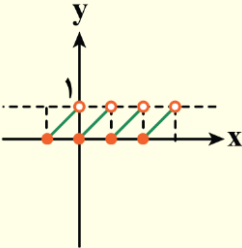
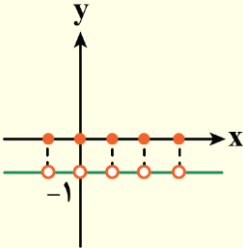
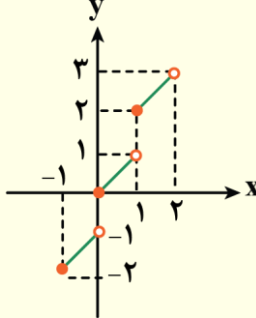
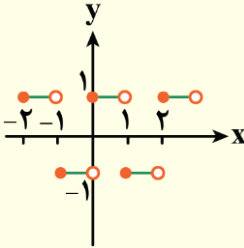
 **یه نمونه باحال ببین!**

$$y = [\Psi x] + v$$

می‌دانیم طول بازه‌های X ، $\frac{1}{2}$ است و همچنین نمودار α واحد به سمت بالا انتقال می‌یابد.



نمودارهای مهم جزء صحیح

ضابطه	$y = x - [x]$	$y = [x] + [-x]$	$y = x + [x]$	$y = (-1)^{[x]}$
نمودار				



۱۸- نمودار توابع $f(x) = a + 2^{x+b}$ و $g(x) = 2x^2 - 2x$ در نقاطی به طول ۱ و ۲ متقاطع‌اند. حاصل $\left[\frac{a}{2b}\right]$ کدام است؟ ([] نماد جزء

صحیح است.)

۱ (۴)

-۲ (۳)

-۳ (۲)

-۱ (۱)

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - حسابان ۱ صفحه ۷۵ - ۱۱۰۳

پاسخ: گزینه ۳

ضابطه دو تابع را برابر هم قرار می‌دهیم:

$$a + 2^{x+b} = 2x^2 - 2x$$

$$\begin{cases} x=1 \Rightarrow a + 2^{1+b} = 0 \\ x=2 \Rightarrow a + 2^{2+b} = 4 \end{cases}$$

دو رابطه را از هم کم می‌کنیم:

$$2^{2+b} - 2^{1+b} = 4 \Rightarrow 4 \times 2^b - 2 \times 2^b = 4 \Rightarrow 2^b(4-2) = 4 \Rightarrow 2^b \times 2 = 4 \Rightarrow 2^{b+1} = 2^2$$

$$\Rightarrow b+1=2 \Rightarrow b=1$$

$$a + 2^{b+1} = 0 \xrightarrow{b=1} a + 4 = 0 \Rightarrow a = -4$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\left[\frac{a}{2b}\right] = \left[\frac{-4}{2}\right] = -2$$

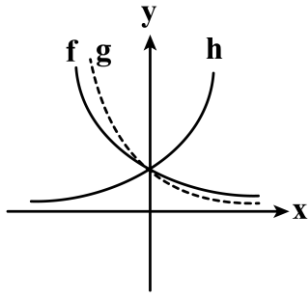
ویژگی‌های جزء صحیح



مثال	ویژگی
$[-1/4] = -2$ $[6] = 6$	۱) عددی که جزء صحیح می‌دهد همواره صحیح است. $[x] = k, k \in \mathbb{Z}$
$[x-2] = [x] - 2$	۲) اگر k عددی صحیح باشد، آن‌گاه: $[x+k] = [x] + k; k \in \mathbb{Z}$
$[2/5] = 2 \Rightarrow [2/5] < 2/5$	۳) به ازای هر $x, x \in \mathbb{R}$ دو حالت داریم: ۱) $[x] < x : x \notin \mathbb{Z}$ ۲) $[x] = x : x \in \mathbb{Z}$ در حالت کلی: $x-1 < [x] \leq x$
$[-1/2] = - \underbrace{[1/2]}_1 - 1 = -2$	۴) اگر $x \notin \mathbb{Z}$: $[-x] = -[x] - 1$
$[x] = -2 \Rightarrow -2 \leq x < -1$	۵) برای هر $k \in \mathbb{Z}$ از $[x] = k$ می‌توان نتیجه گرفت: $[x] = k \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k \leq x < k+1$



۱۹- نمودار توابع $f(x)=a^x$ ، $g(x)=b^x$ و $h(x)=c^x$ به صورت مقابل است. در این صورت کدام گزینه صحیح است؟



(۱) $c < b < a$

(۲) $a < b < c$

(۳) $b < a < c$

(۴) $c < a < b$

(آسان - خطبه خط - سریع) - حسابان ۱ صفحه ۷۶ - ۱۱۰۳

پاسخ: گزینه ۳

بررسی سریع:

برای x های مثبت هر چه پایه بزرگتر باشد، نمودار بالاتر است، پس:

$$x > 0 \Rightarrow g < f < h \Rightarrow b < a < c$$

با توجه به شکل، $c > 1$ و $0 < b < 1$ و $0 < a < 1$ است، پس گزینه های ۱ و ۴ نادرست اند.

برای $x > 0$ نمودار f بالاتر از نمودار g است، پس $b < a$ است.

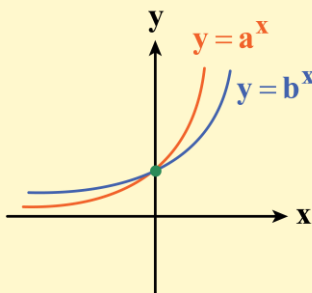
بنابراین $b < a < c$ و گزینه ۳ صحیح است.

مقایسه نمودار توابع نمایی

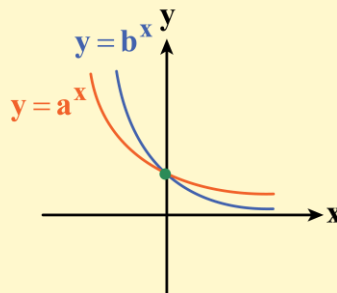
برای مقایسه نمودار دو تابع نمایی $y = a^x$ و $y = b^x$ ($a > b$) داریم:

(۱) هر دو نمودار از نقطه $(0, 1)$ می گذرند اما برای x های مثبت هر چه پایه بزرگتر باشد، نمودار بالاتر است و برای x های منفی هر چه پایه بزرگتر باشد نمودار پایین تر است.

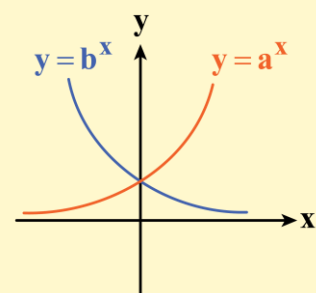
(۲) حال با توجه به مقادیر مختلف a و b داریم:



$a > b > 1$



$0 < b < a < 1$



$a > 1, 0 < b < 1$

۲۰- اگر مجموع جواب های معادله $4^x + 12 = 2^{x+3}$ برابر k باشد، حاصل 2^{k-1} کدام است؟

(۴) ۱۲

(۳) ۴

(۲) ۳

(۱) ۶

(متوسط - ترکیبی - استاندارد) - حسابان ۱ صفحه ۷۷ - ۱۱۰۳

پاسخ: گزینه ۱

فرض کنید $2^x = t$ باشد، پس:

$$4^x + 12 = 2^{x+3} \Rightarrow 2^{2x} + 12 = 2^3 \times 2^x$$

$$\Rightarrow t^2 + 12 = 8t \Rightarrow t^2 - 8t + 12 = 0$$

$$(t-2)(t-6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t-2=0 \Rightarrow t=2 \Rightarrow 2^{x_1} = 2 \\ t-6=0 \Rightarrow t=6 \Rightarrow 2^{x_2} = 6 \end{cases} \Rightarrow 2^{x_1} \times 2^{x_2} = 12$$





$$\Rightarrow 2^{x_1+x_2} = 12 \Rightarrow 2^k = 12$$

$$2^k = 12 \xrightarrow{\times 2^{-1}} 2^{k-1} = \frac{12}{2} \Rightarrow 2^{k-1} = 6$$

قوانین توان‌های گویا

اگر a و b دو عدد مثبت و r و s دو عدد حقیقی باشند، داریم:

$$1) a^{-r} = \frac{1}{a^r}$$

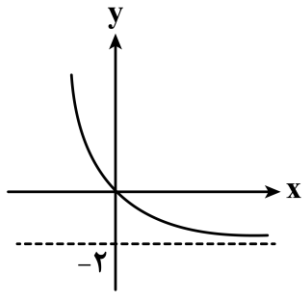
$$2) (a^r)^s = a^{rs}$$

$$3) a^r \times a^s = a^{r+s}$$

$$4) a^r \div a^s = a^{r-s}$$

$$5) (ab)^r = a^r \times b^r$$

$$6) a^r \div b^r = \left(\frac{a}{b}\right)^r$$



۲۱- هرگاه نمودار $f(x) = a + 2^{-bx+b}$ مطابق شکل مقابل باشد، مقدار $b-a$ کدام است؟

(۱) -۲

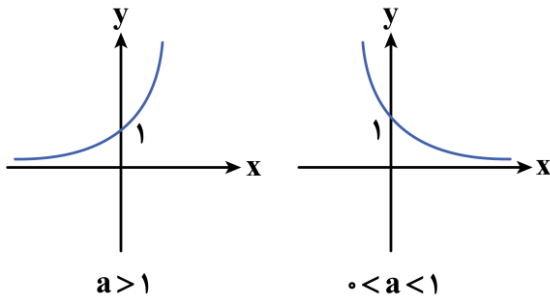
(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) -۳

(آسان - خطبه‌خط - سریع) حسابان ۱ صفحه ۷۵ - ۱۱۰۳

پاسخ: گزینه ۳



اگر به نمودار $y = a^x$ دقت کنید، نمودار به یکی از دو شکل مقابل است:

پس با توجه به نمودار f داریم $a = -2$ ، زیرا نمودار ۲ واحد به سمت پایین منتقل شده است. از طرفی:

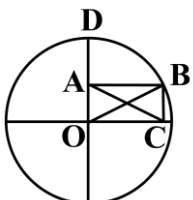
$$f(0) = 0 \Rightarrow -2 + 2^b = 0 \Rightarrow 2^b = 2 \Rightarrow b = 1$$

$$f(x) = -2 + 2^{-x+1} = 2^{1-x} - 2$$

$$a = -2, b = 1 \Rightarrow b - a = 1 - (-2) = 3$$



۲۲- در دایره $C(O, R)$ چهارضلعی $OABC$ مستطیل، $AC = 5$ و $\widehat{ABO} = 15^\circ$ می‌باشد. طول کمان $\widehat{BD}$ برابر کدام است؟



$$\frac{25}{12} \pi \quad (2)$$

$$\frac{45}{12} \pi \quad (4)$$

$$\frac{75}{12} \pi \quad (1)$$

$$\frac{115}{12} \pi \quad (3)$$

(آسان - مفهومی - استاندارد) هندسه ۲ صفحه ۱۲ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۲

در مستطیل قطرها برابرند، پس $OB = AC = 5$ ، در نتیجه شعاع این دایره برابر ۵ است.





از طرفی:

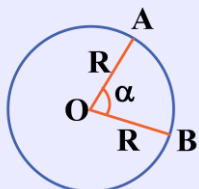
$$\left. \begin{array}{l} AB \parallel OC \\ \text{مورب } OB \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{A}BO = \hat{B}OC \xrightarrow{\hat{A}BO=15^\circ} \hat{B}OC = 15^\circ \Rightarrow \hat{D}OB = 75^\circ$$

$$\text{طول کمان} = \frac{75^\circ}{360^\circ} (2\pi \times 5) = \frac{75}{36} \pi = \frac{25}{12} \pi$$

بنابراین:

محاسبه طول کمان

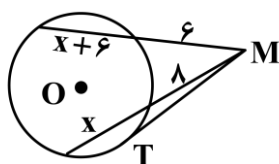
برای محاسبه طول کمانی از دایره که شعاع آن R و روبه‌رو به زاویه α باشد (برحسب درجه)، به صورت زیر عمل می‌کنیم:



$$\widehat{AB} = \frac{\alpha}{360^\circ} \times (2\pi R)$$



۲۳- پاره خط MT بر دایره C(O, R) مماس است. اگر $OM = 6\sqrt{3}$ باشد، آنگاه مساحت این دایره چقدر است؟



$$6\pi \quad (1)$$

$$16\pi \quad (2)$$

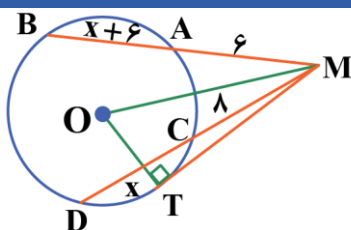
$$8\pi \quad (3)$$

$$12\pi \quad (4)$$

(متوسط - ترکیبی - استاندارد) - هندسه ۲ صفحه‌های ۱۸ و ۱۹ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۴

روش اول



به کمک روابط طولی، ابتدا مقدار x و سپس طول مماس MT را پیدا می‌کنیم:

$$MA \times MB = MC \times MD \Rightarrow 6 \times (12 + x) = 8 \times (8 + x) \xrightarrow{\div 2} 3(12 + x) = 4(8 + x)$$

$$\Rightarrow 36 + 3x = 32 + 4x \Rightarrow x = 4$$

$$MT^2 = MC \times MD \Rightarrow MT^2 = 8 \times (8 + x) \xrightarrow{x=4} MT^2 = 96 \Rightarrow MT = 4\sqrt{6}$$

بنابراین:

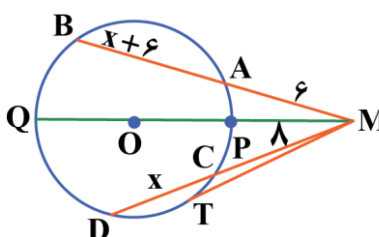
حال از O به نقطه تماس T وصل می‌کنیم. در این صورت مثلث OMT قائم‌الزاویه خواهد بود، پس:

$$OT^2 = OM^2 - MT^2 \Rightarrow R^2 = (6\sqrt{3})^2 - (4\sqrt{6})^2 = 12$$

بنابراین:

$$S \text{ دایره} = \pi R^2 = \pi \times 12 = 12\pi$$

روش دوم



از M به مرکز دایره یعنی O وصل کرده، امتداد می‌دهیم و نقاط برخورد خط OM را با دایره P و Q می‌نامیم. با توجه به شکل $MP = OM - R$ و $MQ = OM + R$ است، بنابراین:

$$MA \times MB = MC \times MD \Rightarrow 6(x + 12) = 8(8 + x)$$

$$\xrightarrow{\div 2} 3(x + 12) = 4(8 + x) \Rightarrow 3x + 36 = 32 + 4x \Rightarrow x = 4$$



از طرف دیگر:

$$MP \times MQ = MC \times MD \Rightarrow (OM - R) \times (OM + R) = 8 \times 12 \Rightarrow OM^2 - R^2 = 96$$

$$\xrightarrow{OM=6\sqrt{3}} 108 - R^2 = 96 \Rightarrow R^2 = 12$$

پس:

$$\text{مساحت دایره} = \pi R^2 = \pi \times 12 = 12\pi$$

روابط طولی در دایره



اگر AT در نقطه T بر دایره مماس باشد.	امتداد وترهای AB و CD خارج دایره در نقطه M همدیگر را قطع می کنند.	وترهای AB و CD داخل دایره یکدیگر را در نقطه M قطع می کنند.
$AT^2 = AB \times AC$	$MA \times MB = MC \times MD$	$MA \times MB = MC \times MD$

۲۴- طول خط‌المركزين دو دایره $C(O, 6m-1)$ و $C'(O', m^2-2)$ برابر ۶ است. اگر دو دایره فقط یک مماس مشترک داشته باشند، کمترین مقدار برای m کدام است؟

۷ (۴)

۱ (۳)

۵ (۲)

۱- (۱)

(متوسط - مفهومی - استاندارد) - هندسه ۲ صفحه ۲۲ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۲

دو دایره در صورتی که مماس درونی باشند فقط یک مماس مشترک دارند و شرط مماس درونی بودن دو دایره عبارتست از:

$$OO' = |R - R'| \Rightarrow 6 = |m^2 - 2 - 6m + 1| \Rightarrow 6 = |m^2 - 6m - 1|$$

بنابراین دو حالت زیر را خواهیم داشت:

حالت اول

$$m^2 - 6m - 1 = 6 \Rightarrow m^2 - 6m - 7 = 0 \Rightarrow (m - 7)(m + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 7 \end{cases}$$

مسلماً $m = -1$ قابل قبول نیست، زیرا به‌ازای آن، اندازه شعاع هر دو دایره منفی می‌شود که ممکن نیست.

حالت دوم

$$m^2 - 6m - 1 = -6 \Rightarrow m^2 - 6m + 5 = 0 \Rightarrow (m - 1)(m - 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 5 \end{cases}$$

در اینجا $m = 1$ قابل قبول نیست، زیرا به‌ازای آن، اندازه شعاع دایره C' منفی می‌شود که ممکن نیست.

پس کمترین مقدار m برابر ۵ است.



وضعیت دو دایره نسبت به هم

برای تشخیص وضعیت دو دایره $C_1: x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ و $C_2: x^2 + y^2 + a'x + b'y + c' = 0$ نسبت به هم، مختصات مرکز و اندازه شعاع دو دایره و همچنین طول خط‌المركزین یعنی $d = O_1O_2$ و $R_1 + R_2$ و $|R_1 - R_2|$ را پیدا کرده و d را با $R_1 + R_2$ و $|R_1 - R_2|$ مقایسه می‌کنیم:

وضعیت	متخارج	مماس خارج	مقاطع	مماس داخل	متداخل
رابطه	$d > R_1 + R_2$	$d = R_1 + R_2$	$ R_1 - R_2 < d < R_1 + R_2$	$d = R_1 - R_2 $	$d < R_1 - R_2 $
شکل					
تعداد مماس‌های مشترک داخلی	۲	۱	۰	۰	۰
تعداد مماس‌های مشترک خارجی	۲	۲	۲	۱	۰
تعداد مماس مشترک‌ها	$۲ + ۲ = ۴$	$۲ + ۱ = ۳$	$۲ + ۰ = ۲$	$۱ + ۰ = ۱$	$۰ + ۰ = ۰$



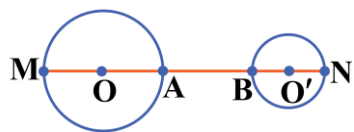
۲۵- طول مماس مشترک خارجی دو دایره $3\sqrt{7}$ و طول مماس مشترک داخلی آن‌ها $\sqrt{15}$ و طول خط‌المركزین آن‌ها مساوی ۸ است. نسبت بیشترین فاصله بین نقاط این دو دایره به قدرمطلق تفاضل شعاع‌های دو دایره برابر کدام است؟

$$\frac{15}{7} \quad (۱) \quad \frac{15}{2} \quad (۲) \quad ۱۵ \quad (۳) \quad ۱۰ \quad (۴)$$

(متوسط - ترکیبی - استاندارد) - هندسه ۲ صفحه ۲۳ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۳

چون طول مماس مشترک داخلی و مماس مشترک خارجی دو دایره داده شده، پس حتماً متخارج می‌باشند. خط‌المركزین دو دایره را امتداد می‌دهیم تا مطابق شکل دایره‌ها را در نقاط M و N قطع کند، در این صورت طول پاره خط MN بیشترین فاصله نقاط دو دایره و طول AB کمترین فاصله بین نقاط این دو دایره است. اکنون با استفاده از داده‌های سؤال داریم:



$$\text{طول مماس مشترک خارجی} = \sqrt{OO'^2 - (R - R')^2} \Rightarrow 3\sqrt{7} = \sqrt{8^2 - (R - R')^2} \xrightarrow{\text{توان ۲}} ۶۳ = ۶۴ - (R - R')^2$$

$$\Rightarrow (R - R')^2 = ۱ \xrightarrow[\text{بفرض } R > R']{} R - R' = ۱ \quad (۱)$$

$$\text{طول مماس مشترک داخلی} = \sqrt{OO'^2 - (R + R')^2} \Rightarrow \sqrt{15} = \sqrt{8^2 - (R + R')^2} \xrightarrow{\text{توان ۲}} ۱۵ = ۶۴ - (R + R')^2$$

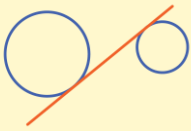
$$\Rightarrow (R + R')^2 = ۴۹ \Rightarrow R + R' = ۷ \quad (۲)$$

در نتیجه با استفاده از تساوی‌های (۱) و (۲) داریم:

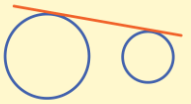
$$\frac{MN}{|R - R'|} = \frac{OO'^2 + (R + R')}{R - R'} = \frac{۸ + ۷}{۱} = ۱۵$$



محاسبه طول مماس مشترک



مماس مشترک داخلی یعنی خط مماسی که دو دایره، دو طرف آن واقع هستند.



مماس مشترک خارجی یعنی خط مماسی که هر دو دایره در یک طرف آن واقع هستند.

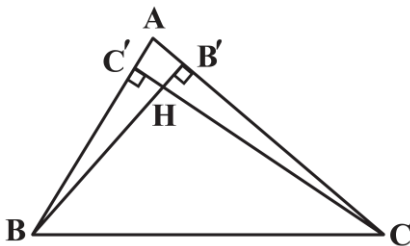
طول مماس‌های مشترک داخلی و خارجی دو دایره در صورت وجود از روابط زیر محاسبه می‌شوند:

$$\text{طول مماس مشترک خارجی} = \sqrt{d^2 - (R - R')^2}$$

$$\text{طول مماس مشترک داخلی} = \sqrt{d^2 - (R + R')^2}$$

اگر دو دایره مماس بیرون باشند، طول مماس مشترک خارجی دو دایره برابر $2\sqrt{RR'}$ می‌باشد.

۲۶- در مثلث ABC نقطه H محل هم‌رسی ارتفاع‌های مثلث است. اگر $CB' = 2/5$ ، $AB' = 1$ و $CH = 2/8$ باشد، آنگاه فاصله H از ضلع AB برابر کدام است؟

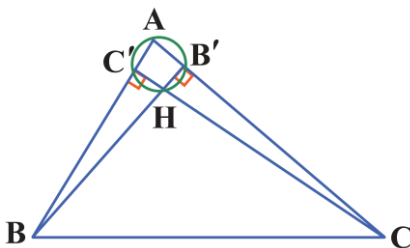


- (۱) $\frac{13}{40}$
(۲) $\frac{13}{20}$
(۳) $\frac{14}{5}$
(۴) $\frac{25}{8}$

(متوسط - ترکیبی - استاندارد) - هندسه ۲ صفحه ۲۷ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۱

چهارضلعی $AB'HC'$ محاطی است، زیرا مجموع دو زاویه مقابل B' و C' برابر 180° می‌باشد. با رسم دایره محیطی این چهارضلعی و با استفاده از روابط طولی در دایره می‌نویسیم:



$$CB' \times CA = CH \times CC' \Rightarrow 2/5(2/5 + 1) = 2/8 \times CC' \Rightarrow \frac{5}{2} \times \frac{7}{2} = \frac{28}{10} \times CC' \Rightarrow CC' = \frac{25}{8}$$

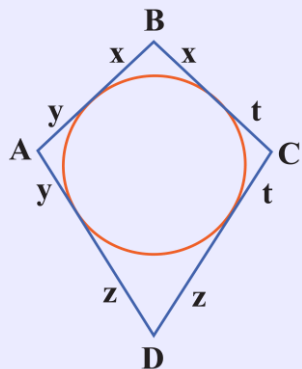
چون فاصله H از ضلع AB برابر HC' است، داریم:

$$HC' = CC' - CH = \frac{25}{8} - \frac{28}{10} = \frac{25}{8} - \frac{14}{5} = \frac{13}{40}$$



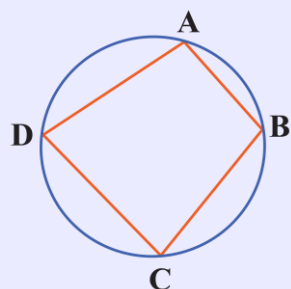
چهارضلعی‌های محیطی و محاطی

اگر ABCD یک چهارضلعی محیطی باشد، مجموع اضلاع روبه‌رو با هم برابر است و برعکس.



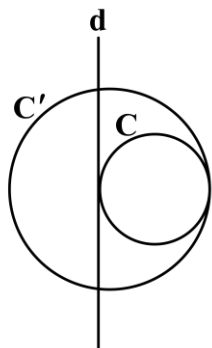
$$AB + CD = AD + BC = (x + y + z + t)$$

اگر ABCD یک چهارضلعی محاطی باشد، زوایای روبه‌رو مکمل همدیگر می‌باشند و برعکس.



$$\hat{A} + \hat{C} = \hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$$

۲۷- دو دایره $C(O, 9)$ و $C'(O', 14)$ مماس داخلی هستند. خط d مماس بر دایره C و عمود بر خط‌المركزین دو دایره است. بازتاب دایره C نسبت به d را دایره C'' در نظر می‌گیریم. طول مماس مشترک خارجی دو دایره C' و C'' برابر کدام است؟



۱۱ (۱)

۱۲ (۲)

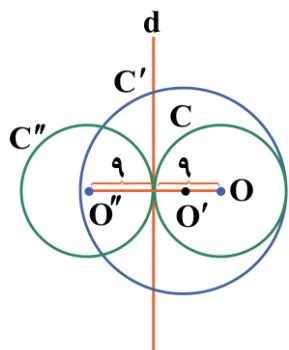
۱۳ (۳)

۱۴ (۴)

(متوسط - ترکیبی - استاندارد) - هندسه ۲ صفحه‌های ۲۰ و ۳۵ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۲

بازتاب مرکز دایره C یعنی O را نسبت به خط d نقطه O'' می‌نامیم. دایره C'' را به مرکز O'' و شعاع ۹ ترسیم می‌کنیم. در این صورت C'' بازتاب C نسبت به خط d است. با توجه به شکل می‌نویسیم:



$$\begin{cases} OO'' = 2 \times 9 = 18 \\ OO' = R' - R = 14 - 9 = 5 \end{cases} \Rightarrow O'O'' = OO'' - OO' = 18 - 5 = 13$$

بنابراین:

$$C'' \text{ و } C' \text{ طول مماس مشترک خارجی} = \sqrt{O'O''^2 - (R' - R'')^2} = \sqrt{13^2 - (14 - 9)^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$$



قلقشو یاد بگیر!

برای رسم بازتاب دایره $C(O, R)$ نسبت به خط d بازتاب مرکز O نسبت به d را نقطه O' می‌نامیم. چون بازتاب تبدیلی طولی (ایزومتري) است، پس دایره به مرکز O' و شعاع R بازتاب دایره $C(O, R)$ نسبت به خط d است.



۲۸- در شکل روبه‌رو محیط مثلث محیطی $4\sqrt{3}\pi$ است. اگر مساحت بین مثلث و دایره محاطی آن برابر ۳ باشد، محیط دایره محاطی

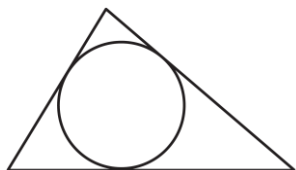
چقدر است؟ ($\pi \approx 3$)

۳ (۱)

$2\sqrt{3}$ (۳)

۶ (۲)

$3\sqrt{2}$ (۴)



(سخت - مفهومی - زمان‌بر) - هندسه ۲ صفحه ۲۵ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۲

با استفاده از فرض سؤال می‌نویسیم:

$$2P = 4\sqrt{3}\pi \Rightarrow P = 2\sqrt{3}\pi$$

$$r = \frac{S}{P} \Rightarrow S = Pr \Rightarrow S = 2\sqrt{3}\pi r \quad (1)$$

از طرف دیگر:

$$3 = \text{مساحت بین مثلث و دایره} \xrightarrow{(1)} 2\sqrt{3}\pi r - \pi r^2 = 3$$

$$\Rightarrow \pi r^2 - 2\sqrt{3}\pi r + 3 = 0 \Rightarrow (\sqrt{\pi}r - \sqrt{3})^2 = 0 \Rightarrow r = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\pi}}$$

بنابراین:

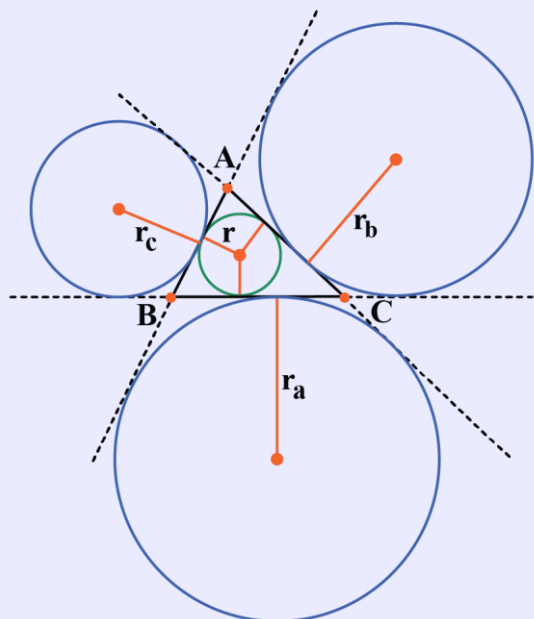
$$\text{محیط دایره} = 2\pi r = 2\pi \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\pi}} \right) = 2\sqrt{\pi}\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\sqrt{\pi} = 6$$

دایره‌های محاطی مثلث

مثلث ABC را در شکل زیر در نظر بگیرید:

دایره محاطی داخلی: دایره‌ای است که درون مثلث بوده و بر سه ضلع آن مماس است.

شعاع دایره محاطی داخلی:



$$r = \frac{S}{P}$$



دایره محاطی خارجی: دایره‌ای است که بیرون مثلث بوده و بر یک ضلع مثلث و امتداد دو ضلع دیگر آن مماس است.

شعاع دایره‌های محاطی خارجی:

$$r_a = \frac{S}{P - a}$$

$$r_b = \frac{S}{P - b}$$

$$r_c = \frac{S}{P - c}$$

ارتباط بین شعاع‌های دایره‌های محاطی داخلی و خارجی

به راحتی می‌توان اثبات کرد بین شعاع دایره محاطی داخلی و شعاع دایره‌های محاطی خارجی، رابطه زیر برقرار است:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$$

اگر h_a , h_b و h_c اندازه‌های سه ارتفاع مثلث ABC باشند و r شعاع دایره محاطی داخلی باشد، داریم:

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$$



۲۹- اگر $A = \{1, \{1, 2\}, \{1\}, \{2, 1\}\}$ باشد، آن‌گاه $P(A) - A$ چند عضو خواهد داشت؟ (منظور از $P(A)$ مجموعه توانی A است.)

۱۴ (۴)

۱۵ (۳)

۷ (۲)

۶ (۱)

(آسان - مفهومی - سریع) - آمار و احتمال صفحه ۱۷ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۲

ابتدا لازم است بدانید که مجموعه A مجموعه‌ای سه عضوی است، چون $\{1, 2\} = \{2, 1\}$. از طرفی برای کم کردن A از مجموعه توانی آن کافی است عضوهای مشترک را از $P(A)$ حذف کنیم. پس:

$$A = \{1, \{1, 2\}, \{1\}\} \Rightarrow P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{\{1, 2\}\}, \{\{1\}\}, \{1, \{1, 2\}\}, \{1, \{1\}\}, \{\{1\}, \{1, 2\}\}, A\} \Rightarrow P(A) \cap A = \{\{1\}\}$$

$$|P(A) - A| = |P(A)| - |P(A) \cap A| = 2^3 - |\{\{1\}\}| = 7$$

مجموعه توانی

اگر همه زیرمجموعه‌های یک مجموعه را در یک مجموعه بریزیم، به مجموعه حاصل مجموعه توانی می‌گویند و آن را با $P(A)$ نمایش می‌دهند. (حرف P اولین حرف واژه powerset به معنی مجموعه توانی است.)

یه نمونه باحال ببین!

اگر $A = \{\emptyset, a, \{b\}\}$ باشد، مجموعه توانی A را به دست آورید.

$$P(A) = \{\underbrace{\emptyset, \{\emptyset\}, \{a\}}_{\text{تک عضوها}}, \underbrace{\{\{b\}\}, \{\emptyset, a\}, \{a, \{b\}\}}_{\text{دو عضوها}}, \{\emptyset, \{b\}\}, A\}$$





۳۰- اگر A, B و C سه مجموعه غیرتهی باشند، آنگاه مجموعه $(A \cup B) - (C \cap A')$ با کدام یک از مجموعه‌های زیر برابر است؟

- (۱) $A \cup (B - C)$ (۲) $A - (B \cup C)$ (۳) $A \cap (B - C)$ (۴) $A - (B \cap C)$

(آسان - مفهومی - سریع) - آمار و احتمال صفحه ۲۸ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۱

با استفاده از قوانین جبرمجموعه‌ها داریم:

$$\begin{aligned}
 & (A \cup B) - (C \cap A') \\
 &= (A \cup B) \cap (C \cap A')' \quad (\text{تبدیل تفاضل به اشتراک}) \\
 &= (A \cup B) \cap (A \cup C') \quad (\text{دمورگان}) \\
 &= A \cup (B \cap C') \quad (\text{توزیع پذیری}) \\
 &= A \cup (B - C) \quad (\text{تبدیل اشتراک به تفاضل})
 \end{aligned}$$

راهنمای مسیрт

همیشه وقتی می‌خواهی ببینی که مجموعه‌ای که داری با چه مجموعه دیگری برابر سعی کن با استفاده از قوانین مجموعه‌ها به تغییراتی توی عبارتی که دادن ایجاد کنی و پله پله پیش بری تا به یه مجموعه معادل برسی. یه نکته درگوشی هم اینه که معمولاً از تبدیل تفاضل به اشتراک و برعکس خیلی استفاده می‌شه و حتی اکثراً اولین پله شروع همونه. پس سعی کنید خیلی باهاش دوست باشید!

$$A - B = A \cap B'$$

جمع‌بندی قوانین مجموعه‌ها

اگر U مجموعه مرجع و A, B و C زیرمجموعه‌های آن باشند؛ داریم:

$\underbrace{A - B}_{A - (A \cap B)} = A \cap B'$	تبدیل تفاضل به اشتراک
$\begin{cases} A \cup B = B \cup A \\ A \cap B = B \cap A \end{cases}$	جاب‌جایی
$\begin{cases} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{cases}$	توزیع‌پذیری
$\begin{cases} A' \cap B' = (A \cup B)' \\ A' \cup B' = (A \cap B)' \end{cases}$	قوانین دمورگان
$\begin{cases} A \cap (A \cup B) = A \\ A \cup (A \cap B) = A \end{cases}$	قانون جذب
$\begin{cases} (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \\ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \end{cases}$	شرکت‌پذیری



۳۱- اگر گزاره‌های p ، q و r چنان باشند که ارزش گزاره مرکب $p \wedge (q \vee \sim r)$ درست باشد، آن‌گاه ارزش کدام یک از گزاره‌های زیر می‌تواند نادرست باشد؟

(۱) $r \Rightarrow (p \wedge q)$ (۲) $\sim r \Rightarrow (p \vee q)$ (۳) $r \Rightarrow (p \wedge \sim q)$ (۴) $\sim r \Rightarrow (p \vee \sim q)$

(متوسط - ترکیبی - استاندارد) - آمار و احتمال صفحه ۱۰ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۳

تعبیر صورت سؤال

برای درست بودن ارزش ترکیب عطفی $p \wedge (q \vee \sim r)$ باید ارزش هر دوی p و $(q \vee \sim r)$ درست باشد. پس:

$$p \equiv T$$

$$(q \vee \sim r) \equiv T$$

از طرفی برای درست بودن $(q \vee \sim r)$ باید حداقل یکی از گزاره‌ها، یعنی q یا $\sim r$ درست باشند. پس از داده سؤال متوجه می‌شویم که: گزاره p درست است ولی ارزش q و r را نمی‌توان دقیق مشخص کرد.

بررسی گزینه‌ها:

۳

اگر p ، q و r به ترتیب T ، T و T باشند، آن‌گاه $p \wedge (q \vee \sim r)$ درست ولی گزاره موجود در گزینه ۳ یعنی $r \Rightarrow (p \wedge \sim q)$ نادرست است. چون:

$$r \Rightarrow (p \wedge \sim q) \xrightarrow{p, q, r \equiv T} T \Rightarrow (T \wedge \sim T) \equiv T \Rightarrow (T \wedge F) \equiv T \Rightarrow F \equiv F$$

۲ و ۴

با درست بودن p ، تالی گزاره‌های موجود در هر دو گزینه ۲ و ۴ درست شده و در هر شرایطی کل گزاره درست می‌شود.

۱

اگر $r \Rightarrow (p \wedge q)$ بخواهد نادرست باشد، باید r درست (و در نتیجه $\sim r$ معادل نادرست) و حداقل یکی از دو گزاره p یا q نادرست باشد که در این صورت $p \wedge (q \vee \sim r)$ هم نادرست شده و خلاف فرض می‌شود. پس این گزینه هم هیچ‌گاه نمی‌تواند نادرست باشد.

جدول ارزشی ترکیب فصلی، عطفی، شرطی و دو شرطی

p	q	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

p	q	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

p	q	$p \Leftrightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	د

یاد بگیر جدول ارزش رو حفظ کنی!

۱) ارزش ترکیب فصلی دو گزاره تنها زمانی نادرست است که هر دو نادرست باشند.

$$p \vee q \equiv F \longrightarrow p \equiv q \equiv F$$

۲) ارزش ترکیب عطفی دو گزاره تنها زمانی درست است که هر دو درست باشند.

$$p \wedge q \equiv T \longrightarrow p \equiv q \equiv T$$





۳) اگر حداقل یکی از گزاره‌ها در ترکیب فصلی درست باشد ارزش کل ترکیب فصلی درست است.

۴) اگر حداقل یکی از گزاره‌ها در ترکیب عطفی نادرست باشد ارزش کل ترکیب عطفی نادرست است.

۵) ارزش ترکیب شرطی تنها زمانی نادرست است که مقدم درست و تالی نادرست باشد.

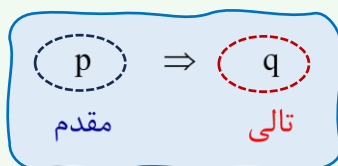
۶) ارزش ترکیب دوشروطی زمانی نادرست است که دو گزاره ارزش‌های متفاوت داشته باشند.

حالت‌های خاص گزاره شرطی

در ترکیب شرطی دو گزاره اگر:

۱) ارزش تالی درست باشد، ارزش کل گزاره درست است.

۲) ارزش مقدم نادرست باشد، ارزش کل گزاره درست است.



در حالت دوم گوییم، ارزش گزاره شرطی «به انتفای مقدم» درست است.

همارزی‌های مهم در گزاره‌ها

گزاره‌های همواره درست یا همواره نادرست

$$p \vee \sim p \equiv T$$

$$p \vee T \equiv T$$

$$p \wedge \sim p \equiv F$$

$$p \wedge F \equiv F$$

نقیض ترکیب فصلی و عطفی (قوانین دمورگان)

$$\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

$$\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

قوانین ترکیب‌های فصلی و عطفی

$$\begin{cases} p \vee p \equiv p \\ p \wedge p \equiv p \end{cases} \quad \text{خودتوانی}$$

$$\begin{cases} p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r \\ p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r \end{cases} \quad \text{شرکت‌پذیری}$$

$$\begin{cases} p \vee (p \wedge q) \equiv p \\ p \wedge (p \vee q) \equiv p \end{cases} \quad \text{جذب}$$

$$\begin{cases} p \vee q \equiv q \vee p \\ p \wedge q \equiv q \wedge p \end{cases} \quad \text{جاب‌جایی}$$

$$\begin{cases} p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \\ p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \end{cases} \quad \text{توزیع‌پذیری}$$

$$\begin{cases} p \vee (\sim p \wedge q) \equiv p \vee q \\ p \wedge (\sim p \vee q) \equiv p \wedge q \end{cases} \quad \text{هم‌پوشانی}$$

۳۲- مجموعه‌های A و B به ترتیب به صورت‌های $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ و $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ تعریف شده‌اند. هر یک از دو مؤلفه زوج مرتب (a, b) را به تصادف از بین اعداد ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ انتخاب می‌کنیم. احتمال آن‌که زوج مرتب حاصل در $A \times B$ بوده ولی در $B \times A$ نباشد، چند درصد است؟

(۴) ۲۶٪

(۳) ۲۴٪

(۲) ۲۲٪

(۱) ۲۰٪

(متوسط - ترکیبی - استاندارد) - آمار و احتمال صفحه ۳۰ و ۴۳ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۴

تعداد اعضای $A \times B$ برابر $|A| \times |B|$ است، یعنی:

$$|A| \times |B| = 7 \times 6 = 42$$



تعداد اعضای که هم در $A \times B$ و هم در $B \times A$ هستند، از ضرب دکارتی $A \cap B = \{4, 5, 6, 7\}$ در خودش به دست می آید که تعداد اعضای آن 4^2 یعنی ۱۶ است.

از تساوی $|E \cap F'| = |E| - |E \cap F|$ استفاده می کنیم:

$$|(A \times B) \cap (B \times A)'| = |A \times B| - |(A \times B) \cap (B \times A)| = 42 - 16 = 26$$

$$|S| = 10 \times 10 = 100$$

$$\Rightarrow P = \frac{26}{100} = 0.26 \Rightarrow 26\%$$

ضرب دکارتی دو مجموعه

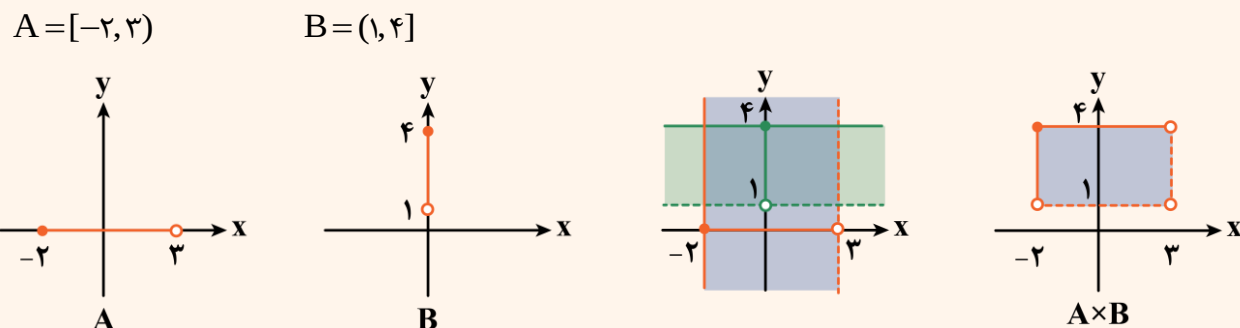
برای هر دو مجموعه A و B ضرب دکارتی آن ها به صورت زیر تعریف می شود:

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A \wedge y \in B\}$$

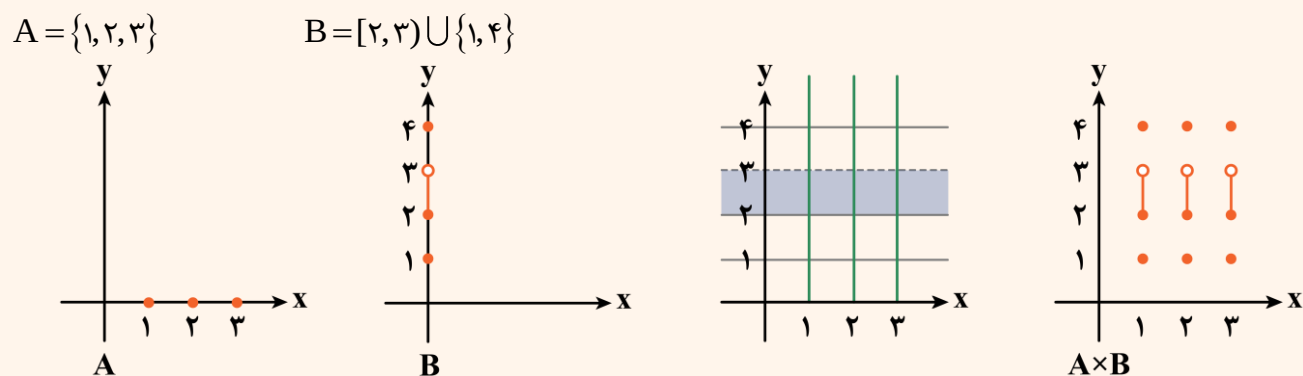
نمایش ضرب دکارتی روی محورهای مختصات

ابتدا مجموعه A را روی محور x ها، و مجموعه B را روی محور y ها مشخص می کنیم. سپس هر دو را در امتداد محور دیگر ادامه می دهیم. محل تلاقی هر دو ناحیه ذکر شده همان $A \times B$ است.

یه نمونه باحال ببین!



یه نمونه باحال ببین!



خواص ضرب دکارتی

۱) ضرب دکارتی خاصیت جابه جایی ندارد.

$$A \times B \neq B \times A$$



$$(A - C) \times B = A \times B - C \times B$$

$$(A \cup C) \times B = (A \times B) \cup (C \times B)$$

$$(A \times B) \cap (B \times A) = (A \cap B) \times (B \cap A) = (A \cap B)^2$$

تعداد اعضای ضرب دکارتی

$$|A \times B| = |A| \times |B|$$



۳۳- در پرتاب چهار تاس، احتمال آن که دقیقاً دو تاس مثل هم باشند، چقدر است؟

$$\frac{2}{3} \quad (۴)$$

$$\frac{5}{9} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{2} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{6} \quad (۱)$$

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - آمار و احتمال صفحه ۴۳ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۳

$$|S| = 6^4$$

ابتدا تعداد اعضای فضای نمونه‌ای را به دست می‌آوریم:

حال تعداد حالت‌های مطلوب را محاسبه می‌کنیم. برای آن توجه داریم برای این که فقط دو تاس عین هم باشند قطعاً دو تاس دیگر باید هم با یکدیگر متفاوت باشند و هم با تاس‌های مشابه. پس:

$$|A| = \binom{4}{2} \times (\quad \times \quad \times \quad) \times (\quad \times \quad \times \quad)$$

انتخاب ۲ تاس
از ۴ تاس

تاس اولی که
انتخاب شده
۶ حالت دارد.

تاس دومی که انتخاب
شده باید دقیقاً مشابه اولی
باشد پس ۱ انتخاب دارد.

تاسی که انتخاب نشده،
نباید عددی مشابه تاس‌های
انتخاب شده داشته باشد،
پس ۵ حالت دارد.

تاس بعدی که انتخاب نشده باید
باید با هر دو عدد قبلی متفاوت
بیاید پس $6 - 2 = 4$ حالت
دارد.

$$\Rightarrow P(A) = \frac{\binom{4}{2} \times 6 \times 5 \times 4}{6^4} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$$

تذکره!

انتخاب ۲ تاس از ۴ تاس رو جانندازید!





۳۴- در جعبه‌ای ۴ مهره سفید، ۲ مهره سبز و n مهره قرمز وجود دارد. در انتخاب سه مهره به تصادف از درون جعبه احتمال آن که حداقل

دو تا از مهره‌ها هم‌رنگ باشند $\frac{11}{15}$ است. n کدام است؟

(۴) ۶

(۳) ۵

(۲) ۴

(۱) ۳

(متوسط - محاسباتی - استاندارد ۶) - آمار و احتمال صفحه ۴۳ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۲

در انتخاب ۳ مهره، احتمال این که حداقل دو مهره هم‌رنگ باشند، یعنی یا دو مهره یا سه مهره هم‌رنگ بیاید که این معادل است با احتمال کل (همان ۱) منهای احتمال این که هر سه مهره ناهم‌رنگ بیاید:

$$P(\text{حداقل دو مهره هم‌رنگ}) = \frac{11}{15} \Rightarrow P(\text{هر سه ناهم‌رنگ}) = 1 - \frac{11}{15} = \frac{4}{15}$$

حال احتمال این که هر سه مهره ناهم‌رنگ بیایند بسیار ساده و سریع، به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\frac{\binom{4}{1} \binom{2}{1} \binom{n}{1}}{\binom{n+6}{3}} = \frac{4}{15} \Rightarrow \frac{8n}{\binom{n+6}{3}} = \frac{4}{15} \Rightarrow \binom{n+6}{3} = 3 \cdot n$$

$$\Rightarrow \binom{n+6}{3} = 3 \cdot n \Rightarrow \frac{(n+6)(n+5)(n+4)}{6} = 3 \cdot n \Rightarrow (n+6)(n+5)(n+4) = 18 \cdot n$$

از این جا به بعد را با عددگذاری پیش می‌رویم:

$$\Rightarrow n = 4$$

قلقشو یاد بگیر!

هر جا محاسبه مستقیم احتمال شامل تعداد حالت‌های زیادی بود که محاسبات را طولانی می‌کرد، به جای محاسبه مستقیم احتمال، احتمال متمم آن را حساب می‌کنیم.

۳۵- در فضای نمونه‌ای $S = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ ، احتمال انتخاب هر عددی که شامل رقم ۴ باشد دو برابر احتمال انتخاب هر عدد دیگری است.

اگر بدانیم $P(\{10, 11, 12, 13, 14, 15\}) = \frac{7}{100}$ ، آن گاه رقم یکان n کدام است؟

(۴) ۳

(۳) ۲

(۲) ۱

(۱) صفر

(سخت - محاسباتی - زمان‌بر ۶) - آمار و احتمال صفحه ۴۷ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۴

در این فضای نمونه‌ای احتمال انتخاب هر عددی فاقد ۴ را t می‌نامیم که در این صورت احتمال انتخاب هر عددی شامل ۴ برابر $2t$ خواهد شد:

$$P(\{10, 11, 12, 13, 14, 15\}) = \frac{7}{100} \Rightarrow \underbrace{P(10)}_t + \underbrace{P(11)}_t + \underbrace{P(12)}_t + \underbrace{P(13)}_t + \underbrace{P(14)}_{2t} + \underbrace{P(15)}_t = \frac{7}{100}$$

$$\Rightarrow 5t + 2t = \frac{7}{100} \Rightarrow t = \frac{1}{100}$$

اگر همه اعداد فاقد ۴ بودند آن گاه n برابر ۱۰۰ می‌شد، اما چون برخی اعداد شامل رقم ۴ هستند و شانس انتخابشان دو برابر است معلوم می‌شود که $n < 100$.



در بین اعداد ۱ تا ۸۰ به تعداد ۱۷ عدد شامل رقم ۴ هستند، بنابراین با فرض $74 \leq n < 84$:

$$P(1) + P(2) + P(3) + \dots + P(n) = \frac{n-17}{100} + 2\left(\frac{17}{100}\right) = 1 \Rightarrow \frac{n+17}{100} = 1 \Rightarrow n = 83$$

با فرض $74 < n$ و نیز $n \geq 84$ ، برای n مقداری به دست نمی آید. به عنوان مثال اگر حداکثر تعداد اعدادی که می توانند شامل رقم ۴ باشند را در هر حالت در نظر بگیریم می بینیم که:

$$n < 74 : P(1) + P(2) + P(3) + \dots + P(n) = \frac{n-16}{100} + 2\left(\frac{16}{100}\right) = 1 \Rightarrow \frac{n+16}{100} = 1 \Rightarrow n = 84 \quad \text{غلط}$$

$$n \geq 84 : P(1) + P(2) + P(3) + \dots + P(n) = \frac{n-18}{100} + 2\left(\frac{18}{100}\right) = 1 \Rightarrow \frac{n+18}{100} = 1 \Rightarrow n = 82 \quad \text{غلط}$$

فضای احتمال غیرهمشانس

یک فضای احتمال را **فضای احتمال غیرهمشانس** گوئیم، اگر حداقل دو پیشامد ساده (پیشامد تک عضوی) از فضای نمونه احتمالشان با یکدیگر برابر نباشد.

اما در **فضای احتمال همشانس** احتمال رخ دادن هر کدام از پیشامدهای تک عضوی برابر و مساوی با $\frac{1}{n(S)}$ است.

رفع ابهام!

تعداد اعدادی که رقم ۴ دارن چطور شمرده شد؟ به سادگی!

۴, ۱۴, ۲۴, ۳۴, ۴۰, ..., ۴۹, ۵۴, ۶۴, ۷۴, ۸۴, ۹۴

اعداد بالا تنها اعداد بین ۱ تا ۱۰۰ هستند که شامل رقم ۴ هستند. کافیست ببینیم در هر بازه چند تا از آن‌های قرار می گیرند.





برای دیدن پاسخنامه ویدئویی آزمون
QR Code بالا را اسکن یا روی آن کلیک کنید!

الکتریسیته ساکن + جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم
(تا ابتدای توان در مدارهای الکتریکی) - صفحه‌های ۱ تا ۶۶

بودجه‌بندی
این آزمون

در مجموع ۵ تست از ۳۵ تست کنکور را پوشش داده است.

سهم در
کنکور

۳۶- جدول سری الکتریسیته مالشی مربوط به چهار جسم نقطه‌ای، رسانا و خنثای A، B، C و D مطابق شکل زیر است. دو جسم A و D را با هم و دو جسم B و C را نیز با هم مالش می‌دهیم و به ترتیب از راست به چپ، به تعداد 5×10^{12} و 10^{12} الکترون بین آن‌ها مبادله می‌شود. حال اگر دو جسم A و C را در فاصله 24 cm از یکدیگر قرار دهیم، بزرگی نیروی الکتریکی که این دو جسم به

انتهای مثبت سری
A
B
C
D
انتهای منفی سری

یکدیگر وارد می‌کنند، چند نیوتون می‌شود و نوع آن چیست؟ $(e = 1/6 \times 10^{-19} \text{ C}, k = 9 \times 10^9 \frac{\text{N.m}^2}{\text{C}^2})$

- (۱) $0/02$ ، دافعه
- (۲) $0/2$ ، دافعه
- (۳) $0/2$ ، جاذبه
- (۴) $0/02$ ، جاذبه

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) (صفحه ۶ - ۱۱۰۱)

پاسخ: گزینه ۴

گام اول

در اثر مالش دو جسم A و D به تعداد 5×10^{12} الکترون بین آن‌ها مبادله شده است. از طرفی در جدول سری الکتریسیته مالشی، جسم A نسبت به جسم D به انتهای مثبت سری، نزدیک‌تر است، بنابراین جسم A دارای بار مثبت می‌شود و داریم:

$$q_A = +ne = +5 \times 10^{12} \times 1/6 \times 10^{-19} = 8 \times 10^{-7} \text{ C}$$

گام دوم

در اثر مالش دو جسم B و C به تعداد 10^{12} الکترون بین آن‌ها مبادله شده است. از طرفی در جدول سری الکتریسیته مالشی، جسم C نسبت به جسم B به انتهای منفی سری، نزدیک‌تر است، بنابراین جسم C دارای بار منفی می‌شود و داریم:

$$q_C = -n'e = -10^{12} \times 1/6 \times 10^{-19} = -1/6 \times 10^{-7} \text{ C}$$

گام آخر

حالا دو جسم A و C را که دارای بارهای ناهمنام هستند در فاصله 24 cm از یکدیگر قرار می‌دهیم و به کمک قانون کولن، بزرگی نیروی الکتریکی بین آن‌ها را به دست می‌آوریم:

$$F = \frac{k|q_A||q_C|}{r^2} = \frac{9 \times 10^9 \times 8 \times 10^{-7} \times 1/6 \times 10^{-7}}{(24 \times 10^{-2})^2} = 0/02 \text{ N}$$

چون بارهای q_A و q_C ناهمنام هستند، پس نیروی الکتریکی بین آن‌ها از نوع جاذبه می‌شود.

سوتی‌های پرتکرار

اگر در تعیین علامت بار دو جسم A و C دقت کافی نداشته باشید، در دام گزینه (۱) می‌افتید.

راهنمای مسیرت

بچه‌ها این سؤال هم در چهارچوب امتحان نهایی و هم کنکور هست و توصیه می‌کنیم، پاسخ این سؤال رو به خوبی بلد باشید.

۳۷- مطابق شکل زیر، سه بار الکتریکی نقطه‌ای در سه رأس مربعی به ضلع ۳cm ثابت شده‌اند. نیروی الکتریکی خالص وارد شده بر بار

$$q_1 = 3\mu\text{C} \quad q_2 = 2\mu\text{C}$$

$$q_3 = -4\mu\text{C} \quad (k = 9 \times 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2}) \text{ ؟ چند نیوتون و در چه جهتی است؟}$$

$$\begin{aligned} & \nearrow, 100 \quad (2) \\ & \nearrow, 20\sqrt{2} \quad (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \searrow, 100 \quad (1) \\ & \searrow, 20\sqrt{2} \quad (3) \end{aligned}$$

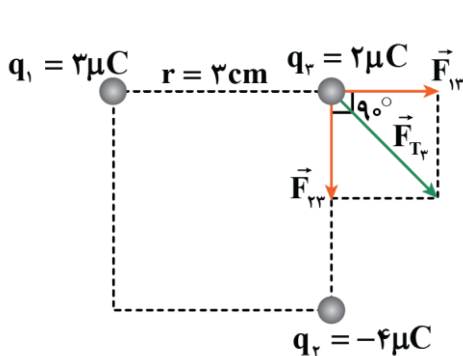
(متوسط - محاسباتی - استاندارد) (صفحه ۸ - ۱۱۰۱)

پاسخ: گزینه ۱

راه نجات سریع

ابتدا به کمک قانون کولن، نیروهای $\vec{F}_{13}$ و $\vec{F}_{23}$ رو حساب کن و بعدش برابند بزن.

بار q_1 همانم با بار q_2 بوده و آن را دفع می‌کند و بار q_2 ناهمنام با بار q_3 بوده و آن را جذب می‌کند، بنابراین با توجه به شکل زیر داریم:



$$\begin{cases} F_{13} = \frac{k|q_1||q_3|}{r_{13}^2} = \frac{9 \times 10^9 \times 3 \times 10^{-6} \times 4 \times 10^{-6}}{(3 \times 10^{-2})^2} = 60 \text{ N} \\ F_{23} = \frac{k|q_2||q_3|}{r_{23}^2} = \frac{9 \times 10^9 \times 2 \times 10^{-6} \times 4 \times 10^{-6}}{(3 \times 10^{-2})^2} = 80 \text{ N} \end{cases}$$

نیروهای $\vec{F}_{13}$ ، $\vec{F}_{23}$ بر هم عمودند $\Rightarrow F_{T3} = \sqrt{F_{13}^2 + F_{23}^2} \Rightarrow F_{T3} = \sqrt{60^2 + 80^2} = 100 \text{ N}$

پس نیروی الکتریکی خالص وارد شده بر بار q_3 دارای بزرگی 100 N و جهت $\searrow$ است.

اعداد فیثاغورسی

چند دسته عدد پرتکرار داریم که در رابطه فیثاغورس صدق می‌کنند و بهتر است همیشه آن‌ها را حفظ باشیم. این چند دسته عبارتند از:

$$3, 4, 5 \longrightarrow 3^2 + 4^2 = 5^2$$

$$5, 12, 13 \longrightarrow 5^2 + 12^2 = 13^2$$

$$8, 15, 17 \longrightarrow 8^2 + 15^2 = 17^2$$

$$9, 40, 41 \longrightarrow 9^2 + 40^2 = 41^2$$

این روش میانبر برای حذف محاسبات مربوط به رابطه فیثاغورس و سرعت عمل بیشتر است. وقتی دو عدد از بین این ۳ تا را داشته باشیم می‌توانیم بدون محاسبه، سومی را به دست بیاوریم.

k برابر سه‌تایی‌های فیثاغورسی هم فیثاغورسی‌اند!

این نکته تکمیلی رو هم برای اونایی که دیگه خیلی می‌خوان خفن باشن بگیریم. اگه k به عدد صحیح باشه داریم:

$$(3k)^2 + (4k)^2 = (5k)^2$$

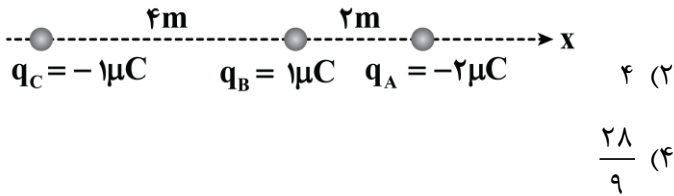
$$(5k)^2 + (12k)^2 = (13k)^2$$



تذکره!

توجه داشته باشید که هر ۳ عدد باید در یک ضریب یکسان ضرب شوند، تا همچنان رابطه فیثاغورس برقرار باشد.

۳۸- مطابق شکل زیر، سه ذره باردار بر روی محور x قرار دارند. تعدادی الکترون از دو ذره A و B را به ذره C منتقل می‌کنیم تا بار هر یک از ذرات A و B برابر با $2\mu C$ شود. در این صورت، بزرگی برآیند نیروهای الکتریکی وارد بر ذره B از طرف دو ذره دیگر چند برابر می‌شود؟



$$\frac{9}{4} \quad (1)$$

$$\frac{28}{9} \quad (4)$$

$$2 \quad (3)$$

(متوسط - محاسباتی - زمان ۵ - صفحه ۸ - ۱۱۰)

پاسخ: گزینه ۲

راه نجات سریع

با توجه به منزوی بودن این سه ذره و به کمک اصل پایستگی بار الکتریکی، بار جدید ذره C رو به دست بیار و یک بار برای حالت اول و یک بار هم برای حالت دوم، اندازه برآیند نیروهای الکتریکی وارد بر ذره B رو حساب کن و نسبت زن.

گام اول

به کمک اصل پایستگی بار الکتریکی داریم:

$$q'_A + q'_B + q'_C = q_A + q_B + q_C \Rightarrow 2 + 2 + q'_C = -2 + 1 - 1 \Rightarrow q'_C = -6\mu C$$

گام دوم

برای حالت اول داریم:

$$\begin{cases} F_{AB} = \frac{k|q_A||q_B|}{r_{AB}^2} = \frac{k \times 2 \times 1}{2^2} = \frac{k}{2} \\ F_{CB} = \frac{k|q_C||q_B|}{r_{CB}^2} = \frac{k \times 1 \times 1}{4^2} = \frac{k}{16} \end{cases} \Rightarrow F_{TB} = F_{AB} - F_{CB} = \frac{k}{2} - \frac{k}{16} = \frac{7k}{16}$$

گام سوم

برای حالت دوم داریم:

$$\begin{cases} F'_{AB} = \frac{k|q'_A||q'_B|}{r_{AB}^2} = \frac{k \times 2 \times 2}{4} = k \\ F'_{CB} = \frac{k|q'_C||q'_B|}{r_{CB}^2} = \frac{k \times 6 \times 2}{16} = \frac{3k}{4} \end{cases} \Rightarrow F'_{TB} = F'_{AB} + F'_{CB} = k + \frac{3k}{4} = \frac{7k}{4}$$

گام آخر

با توجه به نتایج به دست آمده در گام‌های دوم و سوم داریم:

$$\frac{F'_{TB}}{F_{TB}} = \frac{\frac{7k}{4}}{\frac{7k}{16}} = \frac{16}{4} = 4$$

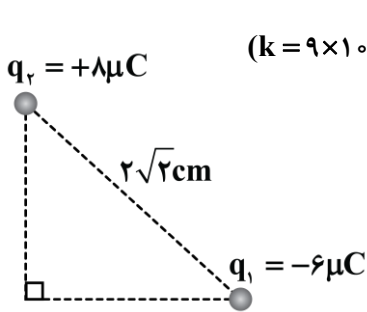


راهنمای مسیرت

بچه‌ها در این تیپ تست‌های مقایسه‌ای، همین‌که یک‌ها سازگار باشند، کافیت و نیازی به تبدیل یکا نیست. مثلاً در هر دو حالت، بارها بر حسب میکروکولن بودند و حتی می‌توانستیم مقدار k را نیز یک فرض کنیم. اگر حواستون به همچین چیزهای ساده‌ای جمع باشه، می‌تونین با حداقل بار محاسباتی، به حل مسأله بپردازین.



۳۹- مطابق شکل زیر، دو بار الکتریکی نقطه‌ای q_1 و q_2 بر روی رؤس یک مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین قرار دارند. بزرگی برایند



میدان‌های الکتریکی حاصل از این دو بار در رأس قائم مثلث چند واحد SI است؟ $(k = 9 \times 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2})$

(۱) $2/25 \times 10^7$

(۲) $2/25 \times 10^8$

(۳) $2/25\sqrt{2} \times 10^7$

(۴) $2/25\sqrt{2} \times 10^8$

(آسان - محاسباتی - استاندارد) (صفحه ۱۲ - ۱۱۰۱)

پاسخ: گزینه ۲

راه نجات سریع

به کمک رابطه $E = \frac{k|q|}{r^2}$ ، اندازه میدان الکتریکی هر یک از بارها رو در رأس قائم حساب کن. بعدش با یک فیثاغورس برای اندازه میدان‌ها، به خواسته سؤال برس.

گام اول

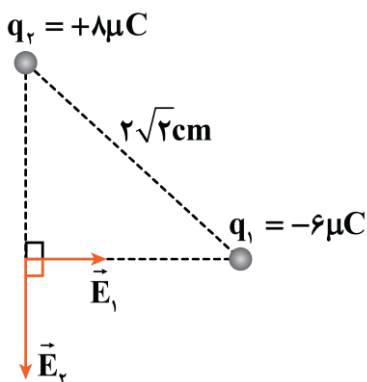
چون مثلث، قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است، پس فاصله هر یک از بارها تا رأس قائم، یکسان است. اگر این فاصله را r در نظر بگیریم، داریم:

$$r\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \Rightarrow r = 2\text{cm}$$

گام دوم

می‌دانیم میدان الکتریکی بارهای مثبت، شعاعی خارج‌شونده و بارهای منفی، شعاعی واردشونده است، بنابراین میدان الکتریکی حاصل از بار q_2 در رأس قائم مثلث، در جهت منفی محور y و میدان الکتریکی حاصل از بار q_1 در رأس قائم

مثلث، در جهت مثبت محور x است. حالا به کمک رابطه $E = \frac{k|q|}{r^2}$ داریم:



$$E_1 = k \frac{|q_1|}{r^2} = \frac{9 \times 10^9 \times 6 \times 10^{-6}}{(2 \times 10^{-2})^2} = \frac{9 \times 6 \times 10^3}{4 \times 10^{-4}} = \frac{27}{2} \times 10^7 \frac{N}{C}$$

$$E_2 = k \frac{|q_2|}{r^2} = \frac{9 \times 10^9 \times 8 \times 10^{-6}}{(2 \times 10^{-2})^2} = \frac{9 \times 8 \times 10^3}{4 \times 10^{-4}} = 18 \times 10^7 \frac{N}{C}$$

گام آخر

چون $\vec{E}_1$ و $\vec{E}_2$ بر هم عمود هستند، بنابراین بزرگی میدان الکتریکی برایند را به کمک رابطه فیثاغورس به‌دست می‌آوریم:

$$E_T = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} = \sqrt{\left(\frac{27}{2} \times 10^7\right)^2 + (18 \times 10^7)^2} = 9 \times 10^7 \times \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + (2)^2} = 9 \times 10^7 \times \frac{5}{2} = 2/25 \times 10^8 \frac{N}{C}$$

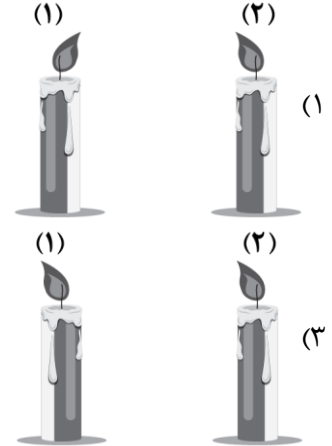
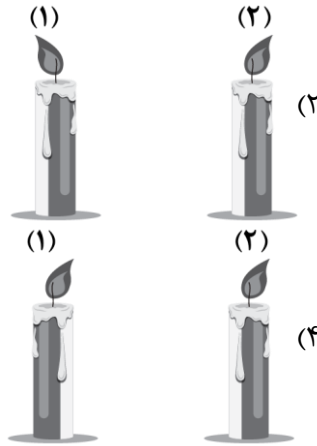
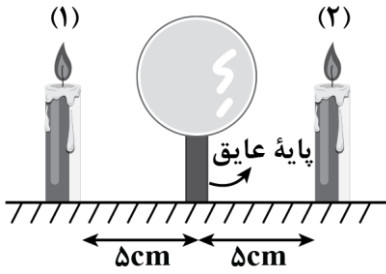
راهنمای مسیرت

بچه‌ها این سؤال کاملاً در چهارچوب مطالب کتاب درسی بوده و به شدت برای امتحان نهایی مناسبه.





۴۰- در شکل زیر، دو شمع روشن در فاصله‌های یکسان از یک کره رسانای خنثی قرار دارند. میله‌ای رسانا با بار مثبت را به کره رسانا تماس می‌دهیم و بعد از تعادل الکتروستاتیکی، میله را دور می‌کنیم. کدام گزینه جهت انحراف شعله‌های شمع را به درستی نشان می‌دهد؟



(آسان - مفهومی - سریع ۱ - صفحه ۱۳ - ۱۱۰۱)

پاسخ: گزینه ۲

میله رسانا دارای بار مثبت است و پس از تماس آن با کره رسانای خنثی و برقراری تعادل الکتروستاتیکی، کره رسانا نیز دارای بار مثبت می‌شود. می‌دانیم خطوط میدان الکتریکی بار مثبت به صورت شعاعی و در جهت دور شدن از آن است و از طرفی شعله شمع روشن، دارای یون‌های مثبت است، پس بر شعله‌های شمع (۱) و (۲) در جهت خطوط میدان الکتریکی کره رسانا نیرو وارد می‌شود و شعله شمع‌های (۱) و (۲) مطابق گزینه (۲) منحرف می‌شوند.

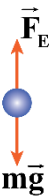


۴۱- در یک میدان الکتریکی یکنواخت به بزرگی $\frac{2 \times 10^5}{C} \frac{N}{C}$ که جهت آن قائم و رو به پایین است، ذره بارداری به جرم ۵g معلق و به حال سکون قرار دارد. بار این ذره چند میکروکولن است؟ ($g = 10 \frac{N}{kg}$)

- (۱) ۲/۵ (۲) -۲/۵ (۳) ۰/۲۵ (۴) -۰/۲۵

(متوسط - محاسباتی - استاندارد ۱ - صفحه ۱۹ - ۱۱۰۱)

پاسخ: گزینه ۴



نیروهای وارد بر ذره را رسم می‌کنیم و بزرگی نیروی الکتریکی را با توجه به معلق بودن ذره ($F_{net} = 0$) به دست می‌آوریم:

$$F_{net} = 0 \Rightarrow F_E = mg = 5 \times 10^{-3} \times 10 = 5 \times 10^{-2} N$$

کلام اول

کلام آخر

بار الکتریکی ذره را به دست می‌آوریم:

$$F_E = E|q| \Rightarrow 5 \times 10^{-2} = 2 \times 10^5 \times |q| \Rightarrow |q| = 2/5 \times 10^{-7} C = 0/25 \mu C$$

با توجه به این که میدان الکتریکی ($\vec{E}$) و نیروی الکتریکی ($\vec{F}_E$) در خلاف جهت هم هستند، بنابراین بار ذره، منفی است، در نتیجه:

$$q = -0/25 \mu C$$

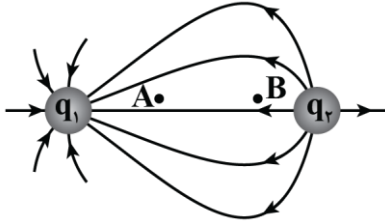


- (۱) اگر بار ذره مثبت باشد، نیروی وارد بر ذره از طرف میدان، هم جهت با خطوط میدان الکتریکی است.
(۲) اگر بار ذره منفی باشد، نیروی وارد بر ذره از طرف میدان، در خلاف جهت خطوط میدان الکتریکی است.





۴۲- شکل زیر، آرایش خطوط میدان الکتریکی بین دو بار الکتریکی نقطه‌ای q_1 و q_2 را نشان می‌دهد. چه تعداد از عبارات‌های زیر درست است؟



۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

الف - $q_2 < 0, q_1 > 0$

ب - $E_A > E_B$

ج - $V_A > V_B$

د - $|q_1| > |q_2|$

(آسان - مفهومی - سریع) - صفحه ۲۵ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۲

بررسی موارد:



می‌دانیم خطوط میدان الکتریکی از بارهای مثبت، خارج و به بارهای منفی وارد می‌شوند، بنابراین $q_2 > 0$ و $q_1 < 0$ است. (✖)



تراکم خطوط میدان الکتریکی در نقطه A بیشتر از نقطه B است، پس $E_A > E_B$ می‌شود. (✓)



می‌دانیم جهت خطوط میدان الکتریکی از پتانسیل الکتریکی بیشتر به پتانسیل کمتر است، بنابراین با حرکت از نقطه A به نقطه B، چون در خلاف جهت میدان الکتریکی جابه‌جا می‌شویم، پس پتانسیل الکتریکی افزایش می‌یابد و $V_B > V_A$ است. (✖)



تراکم خطوط میدان الکتریکی در اطراف بار q_1 بیشتر از بار q_2 است، بنابراین $|q_1| > |q_2|$ است. البته می‌توانیم بگوییم چون خطوط میدان الکتریکی در اطراف بار q_1 صاف‌تر و در اطراف بار q_2 خمیده‌تر هستند، پس $|q_1| > |q_2|$ است. (✓)



۴۳- فاصله بین دو صفحه رسانای خنثای موازی برابر با $2/5 \text{ cm}$ است. اگر این دو صفحه را به اختلاف پتانسیل الکتریکی V متصل کنیم،

اندازه میدان الکتریکی یکنواخت بین این دو صفحه برابر با $2 \frac{\text{kV}}{\text{m}}$ می‌شود. V چند ولت است؟

۱۰۰ (۴)

۵۰ (۳)

۱۰ (۲)

۵ (۱)

(آسان - محاسباتی - سریع) - صفحه ۲۶ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۳

طبق رابطه $|\Delta V| = Ed$ می‌توانیم بنویسیم:

$$|\Delta V| = Ed \rightarrow \frac{E = 2 \frac{\text{kV}}{\text{m}} = 2 \times 10^3 \frac{\text{V}}{\text{m}}}{d = 2/5 \text{ cm} = 2/5 \times 10^{-2} \text{ m}} \rightarrow |V| = 2 \times 10^3 \times 2/5 \times 10^{-2} = 50 \text{ V}$$

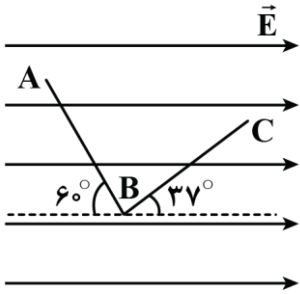
سوتی‌های پرتکرار

اگر به یکاها دقت نکنی به عدد $5 = 5/2 \times 2$ می‌رسی و توی دام گزینه (۱) می‌افتی!





۴۴- در شکل زیر، بار الکتریکی نقطه‌ای $q = -2\mu\text{C}$ از طریق مسیر نشان داده شده، درون میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{E}$ از نقطه A تا نقطه C منتقل می‌شود. اگر در این انتقال، انرژی پتانسیل الکتریکی بار الکتریکی نقطه‌ای به اندازه 21 J تغییر کند، بزرگی میدان الکتریکی $\vec{E}$ چند واحد SI است؟ ($\sin 37^\circ = 0.6$, $AB = 60\text{ cm}$, $BC = 50\text{ cm}$)



- (۱) 1×10^5
- (۲) $1/5 \times 10^5$
- (۳) 1×10^6
- (۴) $1/5 \times 10^6$

(متوسط - محاسباتی - استاندارد - صفحه ۲۲ - ۱۱۰۱)

پاسخ: گزینه ۲



در مسیرهای غیرمستقیم حرکت ذره باردار در درون میدان الکتریکی یکنواخت، اگر $d_{||}$ ، اندازه مؤلفه‌ای از جابه‌جایی باشد که در راستای میدان الکتریکی است، آن‌گاه داریم:

$$\Delta U_E = \pm E|q|d_{||}$$

علامت **مثبت** ← بار مثبت در خلاف جهت میدان الکتریکی یا بار منفی در جهت میدان الکتریکی، جابه‌جایی $\vec{d}_{||}$ داشته باشد.

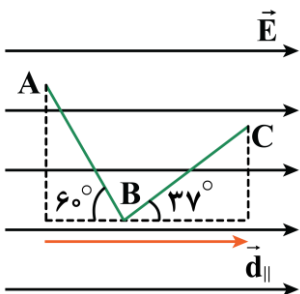
علامت **منفی** ← بار مثبت در جهت میدان الکتریکی یا بار منفی در خلاف جهت میدان الکتریکی، جابه‌جایی $\vec{d}_{||}$ داشته باشد.



(۱) در حرکت **خودبه‌خودی** بار (بار مثبت در جهت میدان الکتریکی و یا بار منفی در خلاف جهت میدان الکتریکی جابه‌جا شود)، انرژی پتانسیل الکتریکی، **کاهش** می‌یابد. ($\Delta U_E < 0$)

(۲) در حرکت **غیر خودبه‌خودی** بار (بار مثبت در خلاف جهت میدان الکتریکی و بار منفی در جهت میدان الکتریکی جابه‌جا شود)، انرژی پتانسیل الکتریکی، **افزایش** می‌یابد. ($\Delta U_E > 0$)

با توجه به شکل زیر، $\vec{d}_{||}$ در جهت میدان الکتریکی است، پس بار منفی در جهت میدان الکتریکی جابه‌جا شده و انرژی پتانسیل الکتریکی آن افزایش می‌یابد و داریم:

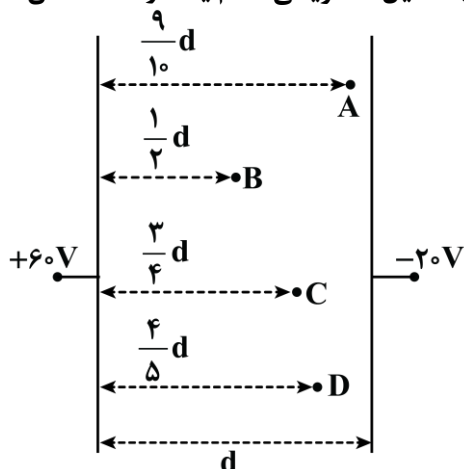


$$d_{||} = \overline{AB} \cos 60^\circ + \overline{BC} \cos 37^\circ = 60 \times \frac{1}{2} + 50 \times 0.6 = 30 + 30 = 60\text{ cm} = 0.6\text{ m}$$

$$\Delta U_E = +E|q|d_{||} \Rightarrow 21 = E \times 2 \times 10^{-6} \times 0.6 \Rightarrow E = 1.75 \times 10^6 \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

۴۵- در شکل مقابل، میدان الکتریکی یکنواختی بین دو صفحهٔ رسانای موازی برقرار است. پتانسیل الکتریکی کدام یک از نقاط نشان

داده شده A، B، C و D برابر صفر است؟



(۱) D

(۲) A

(۳) B

(۴) C

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) (صفحه ۲۶ - ۱۱۰۱)

پاسخ: گزینه ۴

راه نجات سریع

کافیه رابطه $E = \frac{\Delta V}{d}$ رو یک بار برای دو صفحه و یک بار هم برای یک نقطه با پتانسیل صفر بنویسی و مساوی هم بذاری. آخه میدان یکنواخته دیگه.

میدان الکتریکی بین دو صفحهٔ رسانا، یکنواخت است، بنابراین میدان الکتریکی بین دو صفحهٔ رسانا و میدان الکتریکی بین صفحهٔ مثبت و هر یک از نقاط نشان داده شده، یکسان هستند، بنابراین داریم:

$$E = \frac{\Delta V}{d} \text{ (بین دو صفحه)} = \frac{\Delta V}{d} \text{ (بین صفحه مثبت و نقطه مجهول)}$$

$$\Rightarrow \frac{60 - (-20)}{d} = \frac{60 - 0}{x} \Rightarrow \frac{80}{d} = \frac{60}{x} \Rightarrow x = \frac{3}{4}d$$

پس باید فاصلهٔ صفحهٔ موردنظر از صفحهٔ مثبت برابر با $\frac{3}{4}d$ باشد، یعنی نقطهٔ C موردنظر است.

تمرین

بچه‌ها یک بار به عنوان تمرین با صفحهٔ منفی هم حل کنید تا متوجه بشین کل ماجرا یکیه!

۴۶- اگر پایانهٔ مثبت یک باتری ۱۲ ولتی را مرجع پتانسیل در نظر بگیریم، پتانسیل پایانهٔ منفی آن ولت و اگر پایانهٔ منفی آن را مرجع پتانسیل در نظر بگیریم، پتانسیل پایانهٔ منفی ولت خواهد شد.

(۱) -۱۲ و صفر (۲) صفر و -۱۲ (۳) -۱۲ و -۱۲ (۴) صفر و صفر

(آسان - مفهومی - سریع) (صفحه ۲۵ - ۱۱۰۱)

پاسخ: گزینه ۱

می‌دانیم اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر یک باتری برابر است با $V_+ - V_- = V_{\text{باتری}}$ ، از طرفی پایانه‌ای که مرجع پتانسیل است، پتانسیل الکتریکی آن صفر است؛ بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$\text{حالت اول: } \begin{cases} V_+ = 0 \\ V_{\text{باتری}} = 12V \end{cases} \Rightarrow 12 = 0 - V_- \Rightarrow V_- = -12V$$

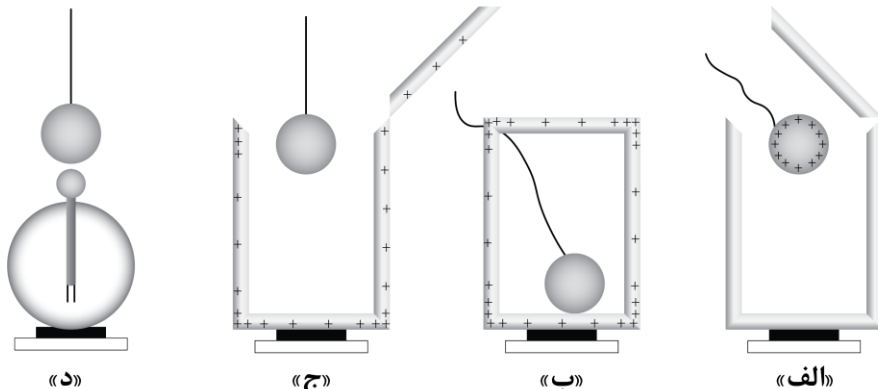
$$\text{حالت دوم: } V_- = 0 \Rightarrow \text{پایانهٔ منفی مرجع پتانسیل}$$

سوتی‌های پرتکرار

اگه فکر کنی پتانسیل پایانهٔ منفی همیشه منفیه توی دام گزینه (۳) می‌افتی.



۴۷- شکل های «الف» تا «د» مربوط به آزمایش بوده و نشان می دهد که بار اضافی داده شده به یک رسانا در آن توزیع می شود.



- توزیع می شود.
- (۱) فاراده - سطح داخلی
 - (۲) لنز - سطح داخلی
 - (۳) لنز - سطح خارجی
 - (۴) فاراده - سطح خارجی

(آسان - مفهومی - سریع ⚡ - صفحه ۲۸ - ۱۱۰)

پاسخ: گزینه ۴

شکل های داده شده آزمایش **فاراده** را نشان می دهند. از این آزمایش نتیجه می گیریم که بار اضافی داده شده به یک رسانا روی سطح **خارجی** آن توزیع می شود.

آزمایش فاراده

ظرف رسانایی با درپوش فلزی را در نظر بگیرید که روی پایه نارسایی قرار دارد و روی درپوش آن دسته ای عایق نصب شده است. ابتدا ظرف بدون بار است. یک گوی فلزی را که از نخ عایقی آویزان است، باردار و سپس وارد ظرف می کنیم (شکل «الف»). اکنون گوی را با کف ظرف تماس می دهیم و سپس درپوش فلزی را می بندیم (شکل «ب»). آن گاه درپوش فلزی را با دسته عایقش برمی داریم (شکل «ج»). پس از خارج کردن گوی فلزی از ظرف، آن را به کلاهک الکتروسکوپ نزدیک می کنیم. مشاهده می شود که عقربه های الکتروسکوپ تکان نمی خورند (شکل «د»). همچنین اگر ظرف را به کلاهک الکتروسکوپ نزدیک کنیم، مشاهده می شود که عقربه های الکتروسکوپ از هم فاصله می گیرند. از این آزمایش نتیجه می گیریم که **بار اضافی داده شده به یک رسانا روی سطح خارجی آن توزیع می شود.**



۴۸- بین دو نقطه با اختلاف پتانسیل الکتریکی $2/5 \text{ kV}$ ، تخلیه الکتریکی صورت گرفته و $1/8 \times 10^{23}$ الکترون بین این دو نقطه شارش پیدا کرده است. انرژی آزاد شده چند کیلووات ساعت است؟ ($e = 1/6 \times 10^{-19} \text{ C}$)

- (۱) ۸ (۲) ۱۰ (۳) ۱۶ (۴) ۲۰

(متوسط - محاسباتی - استاندارد ⚡ - صفحه ۲۳ - ۱۱۰)

پاسخ: گزینه ۴

راه نجات سریع

اول بار شارش یافته رو طبق رابطه $q = ne$ به دست بیار. بعدش با داشتن بار، ΔU_E و ΔV رو حساب کن.

گام اول

بار الکتریکی شارش یافته بین دو نقطه برابر است با:

$$q = ne \Rightarrow q = 1/8 \times 10^{23} \times 1/6 \times 10^{-19} = 1/8 \times 1/6 \times 10^4 \text{ C}$$

گام آخر

انرژی آزاد شده (ΔU_E) را حساب می کنیم:

$$\Delta V = \frac{|\Delta U_E|}{q} \Rightarrow 2500 = \frac{|\Delta U_E|}{1/8 \times 1/6 \times 10^4} \Rightarrow |\Delta U_E| = 25 \times 1/8 \times 1/6 \times 10^6 \text{ J} \times \frac{1 \text{ kWh}}{3/6 \times 10^6 \text{ J}} = 2 \text{ kWh}$$

تبدیل کیلووات ساعت به ژول

$$\text{kWh} \xrightarrow{\times 3/6 \times 10^6} \text{J} \xrightarrow{\div 3/6 \times 10^6} \text{kWh}$$



آزمون سراسری ریاضی خارج از کشور ۱۴۰۳

۶۵- بین دو نقطه به اختلاف پتانسیل الکتریکی ۲ کیلوولت، تخلیه الکتریکی صورت گرفته و ۸ کیلووات ساعت انرژی آزاد شده است. چند الکترون بین این دو نقطه شارش پیدا کرده است؟ ($e = 1/6 \times 10^{-19} C$)

- (۱) 9×10^{19} (۲) 9×10^{22} (۳) $3/6 \times 10^{20}$ (۴) $3/6 \times 10^{18}$

پاسخ تشریحی:

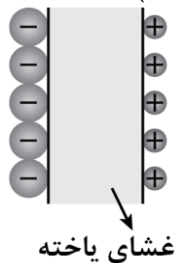
$$|\Delta V| = \frac{|\Delta U_E|}{|q|} = \frac{|\Delta U_E|}{ne} \Rightarrow 2 \times 10^3 V = \frac{8 \times 3/6 \times 10^6 J}{n \times 1/6 \times 10^{-19} C} \Rightarrow n = 9 \times 10^{22}$$

پاسخ: گزینه ۲



۴۹- مطابق شکل زیر، یک یاخته عصبی (نورون) را می توان با یک خازن تخت مدل سازی کرد، به طوری که غشای سلول با ضخامت 1.0 nm به عنوان دی الکتریک با ثابت $\kappa = 3$ و یون های باردار با علامت مخالف که در دو طرف غشا هستند به عنوان بارهای روی صفحه های خازن عمل کنند. تعداد یون های مثبت لازم (با فرض آن که هر یون، دو بار یونیده باشد)، برای آن که یک اختلاف پتانسیل الکتریکی

32 mV ایجاد شود، چقدر است؟ (مساحت سطح 1.0^{-10} m^2 ، $\epsilon_0 = 9 \times 10^{-12} \frac{C^2}{N.m^2}$ و $e = 1/6 \times 10^{-19} C$ است.)



- (۱) $5/4 \times 10^4$
(۲) $2/7 \times 10^3$
(۳) $2/7 \times 10^4$
(۴) $5/4 \times 10^3$

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) (۵ - صفحه ۳۶ - ۱۱۰۱)

پاسخ: گزینه ۳

کلم اول

ابتدا ظرفیت خازن تخت مدل سازی شده را به دست می آوریم:

$$C = \kappa \epsilon_0 \frac{A}{d} \Rightarrow C = \frac{3 \times 9 \times 10^{-12} \times 1.0^{-10}}{1.0 \times 10^{-9}} = 27 \times 10^{-14} F$$

کلم دوم

به کمک رابطه $C = \frac{Q}{V}$ ، بار الکتریکی هر یک از صفحات خازن را محاسبه می کنیم:

$$Q = CV \Rightarrow Q = 27 \times 10^{-14} \times 32 \times 10^{-3} = 27 \times 32 \times 10^{-17} C$$

کلم آخر

چون هر یون، دو بار یونیده است (یون های مثبت، ۲ الکترون از دست داده اند و یون های منفی، ۲ الکترون گرفته اند)، بنابراین تعداد یون های مثبت مورد نیاز برابر است با:

$$Q = n \times 2e \Rightarrow n = \frac{Q}{2e} = \frac{27 \times 32 \times 10^{-17}}{2 \times 1/6 \times 10^{-19}} = 2/7 \times 10^4$$

چون هر یون دو بار یونیده است

سوتی های پرتکرار

اگر به اشتباه، یون ها را یک بار یونیده بگیرید و از رابطه $n = \frac{Q}{e}$ حل کنید، در دام گزینه (۱) می افتین.



راهنمای مسیрт

این تست از دل کتاب درسی براتون طرح شده و به شدت سؤال مهمی هم برای امتحان نهایی و هم برای کنکورتون محسوب می‌شه. فقط به کوچولو تغییرش دادیم تا به ابتکار خوب هم در مورد این تست بهتون یاد داده باشیم.



- ۵۰- مساحت هر یک از صفحه‌های خازن تختی که بین آن هوا است برابر با 100 cm^2 و فاصله بین دو صفحه این خازن برابر با 0.45 mm است. اگر عایقی با ثابت دی‌الکتریک ۵ بین دو صفحه این خازن قرار دهیم، ظرفیت خازن چند نانوفاراد تغییر می‌کند؟
- $$\left(\epsilon_0 = 9 \times 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}} \right)$$
- (۱) ۰/۲ (۲) ۰/۸ (۳) ۲ (۴) ۸

(متوسط - محاسباتی - استاندارد ۱ - صفحه ۳۶ - ۱۱۰۱)

پاسخ: گزینه ۲

طبق رابطه $C = \kappa \epsilon_0 \frac{A}{d}$ می‌توانیم بنویسیم:

$$C_2 - C_1 = (\kappa_2 - \kappa_1) \epsilon_0 \frac{A}{d} \Rightarrow C_2 - C_1 = (5 - 1) \times 9 \times 10^{-12} \times \frac{100 \times 10^{-4}}{0.45 \times 10^{-3}} \Rightarrow C_2 - C_1 = 8 \times 10^{-11} \text{ F} = 0.8 \text{ nF}$$



کمترین مقدار ضریب دی‌الکتریک، مربوط به هوا است که برابر با یک می‌باشد و ضریب دی‌الکتریک سایر عایق‌ها از یک بیشتر است. ($\kappa \geq 1$)

راهنمای مسیрт

وقتی به رابطه‌ای مثل $C = \kappa \epsilon_0 \frac{A}{d}$ رو یاد می‌گیری، روابط نسبتی، روابط مربوط به تغییرات کمیت موردنظر و نمودارهای مربوط به اون رو یاد بگیر. اینجوری من طراح کمتر می‌تونم اذیتت کنم ☺



- ۵۱- خازن تختی به ظرفیت $4 \mu\text{F}$ در اختیار داریم که فضای بین صفحات آن با هوا پر شده است. فاصله بین صفحات این خازن را نصف کرده و سپس فضای بین دو صفحه را با یک عایق پر می‌کنیم. اگر این خازن را با اختلاف پتانسیل الکتریکی 30 V شارژ کنیم، انرژی ذخیره‌شده در آن 9 mJ می‌شود. ضریب دی‌الکتریک عایق چقدر است؟
- (۱) ۲ (۲) ۲/۵ (۳) ۳ (۴) ۳/۵

(متوسط - محاسباتی - استاندارد ۱ - صفحه ۳۹ - ۱۱۰۱)

پاسخ: گزینه ۲



ابتدا به کمک رابطه $C = \kappa \epsilon_0 \frac{A}{d}$ ، ظرفیت جدید خازن را به دست می‌آوریم:

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \times \frac{A_2}{A_1} \times \frac{d_1}{d_2} \xrightarrow{\kappa_1=1, A_2=A_1, d_2=\frac{1}{2}d_1, C_1=4\mu\text{F}} \frac{C_2}{4} = \kappa_2 \times 1 \times 2 \Rightarrow C_2 = 8\kappa_2$$



به کمک انرژی ذخیره‌شده در خازن در حالت دوم داریم:

$$U_2 = \frac{1}{2} C_2 V^2 \Rightarrow 9 \times 10^{-3} = \frac{1}{2} C_2 \times (30)^2 \Rightarrow C_2 = 2 \times 10^{-5} \text{ F} = 20 \mu\text{F} \xrightarrow{C_2=8\kappa_2} 20 = 8\kappa_2 \Rightarrow \kappa_2 = 2.5$$





۵۲- ظرفیت خازن تختی $5\mu F$ و اختلاف پتانسیل الکتریکی بین دو صفحه آن V است. اگر $5\mu C$ بار الکتریکی را از صفحه مثبت آن به صفحه منفی آن انتقال دهیم، انرژی ذخیره شده در آن $22/5\mu J$ افزایش می یابد. V چند ولت است؟

(۱) ۴۰ (۲) ۲۰ (۳) ۲ (۴) ۴

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) (صفحه ۳۹ - ۱۱۰۱)

پاسخ: گزینه ۴

کلم اول

فرض کنید بار اولیه خازن برابر با Q میکروکولن باشد. چون $5\mu C$ بار الکتریکی را از صفحه مثبت خازن به صفحه منفی آن منتقل کرده ایم، پس بار جدید خازن برابر با $Q' = Q + 5$ میکروکولن شده و انرژی ذخیره شده در خازن افزایش می یابد و به کمک رابطه $U = \frac{Q^2}{2C}$ داریم:

$$U_2 - U_1 = \frac{Q'^2 - Q^2}{2C} = \frac{(Q' - Q)(Q' + Q)}{2C} \Rightarrow 22/5 = \frac{5(2Q + 5)}{2 \times 5} \Rightarrow 2Q + 5 = 45 \Rightarrow Q = 20\mu C$$

کلم آخر

حالا که بار اولیه خازن را به دست آورده ایم، می توانیم به کمک رابطه $C = \frac{Q}{V}$ ، اختلاف پتانسیل الکتریکی بین صفحات خازن را در حالت اول به دست آوریم:

$$V = \frac{Q}{C} = \frac{20}{5} = 4V$$



۵۳- وقتی روی فرش راه می روید و بدنتان بار الکتریکی پیدا می کند، هنگام دست زدن به دستگیره فلزی در، با انتقال باری در حدود $1/5nC$ در مدت زمان $3ms$ ، شوک خفیفی را احساس کنید. اندازه جریان الکتریکی متوسطی که در این مدت بین شما و دستگیره در برقرار می شود، چند میکروآمپر است؟

(۱) ۵/۰ (۲) ۵ (۳) ۰/۲ (۴) ۲

(آسان - محاسباتی - سریع) (صفحه ۴۷ - ۱۱۰۲)

پاسخ: گزینه ۲

اندازه جریان الکتریکی متوسطی که در این مدت بین شما و دستگیره در برقرار می شود، برابر است با:

$$I_{av} = \frac{\Delta q}{\Delta t} \Rightarrow I_{av} = \frac{1/5 \times 10^{-9}}{3 \times 10^{-3}} = 5 \times 10^{-6} A = 5\mu A$$



۵۴- یک وسیله الکتریکی با جریان $10mA$ کار می کند. اگر بخواهیم در فصل پاییز به مدت یک ماه و هر روز به مدت ۲ ساعت از این وسیله استفاده کنیم تا باتری آن به طور کامل خالی شود، باید از باتری با ظرفیت چند آمپر ساعت برای این وسیله استفاده کنیم؟

(۱) ۸/۰ (۲) ۶/۰ (۳) ۶۰۰ (۴) ۸۰۰

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) (صفحه ۴۸ - ۱۱۰۲)

پاسخ: گزینه ۲

کلم اول

ابتدا مدت زمان کل کارکرد وسیله را در یک ماه حساب می کنیم:

$$\Delta t = 30 \times 2 = 60h$$

کلم آخر

به کمک رابطه $I = \frac{q}{t}$ داریم:

$$q = I\Delta t = (10mA) \times (60h) = 600mAh \Rightarrow q = 0/6Ah$$



۵۵- یک لامپ چراغ قوه کوچک که رشته آن یک رسانای اهمی است، از یک باتری $2/5V$ ، جریانی برابر $0/4A$ می‌کشد. اگر باتری، ضعیف شود و ولتاژ آن 60% درصد کاهش یابد، جریان عبوری از لامپ چند میلی‌آمپر می‌شود؟ (از تغییر مقاومت الکتریکی رشته لامپ در اثر تغییر دما چشم‌پوشی شود.)



- (۱) 160
- (۲) 240
- (۳) $0/24$
- (۴) $0/16$

(آسان - محاسباتی - سریع - صفحه ۴۹ - ۱۱۰۲)

پاسخ: گزینه ۱

رشته لامپ، رسانای اهمی است و تغییر مقاومت رشته لامپ در اثر تغییر دما قابل چشم‌پوشی است، پس مقاومت الکتریکی رشته لامپ، ثابت است و به کمک قانون اهم ($R = \frac{V}{I}$) داریم:

$$\frac{V_2}{I_2} = \frac{V_1}{I_1} \xrightarrow{V_2 = (1 - 0/6)V_1 = 0/4V_1, I_1 = 0/4A} \frac{0/4V_1}{I_2} = \frac{V_1}{0/4} \Rightarrow I_2 = 0/16A = 160mA$$

جرقه ذهنی

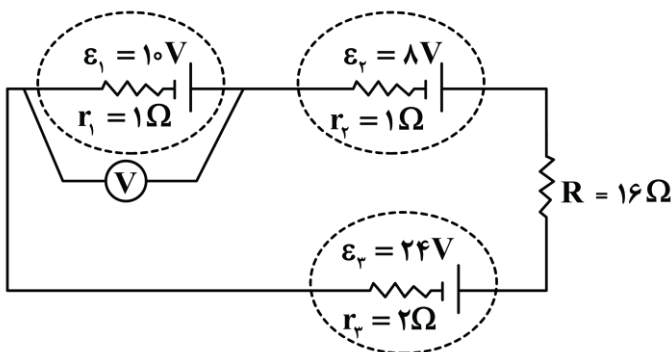
چون R ثابت است، پس درصد تغییر V و I یکسان است، بنابراین باید جریان عبوری هم 60% درصد کاهش یابد.

$$I_2 = 0/4I_1 = 0/4 \times 0/4 = 0/16A = 160mA$$

سوتی‌های پرتکرار

اگر جریان رو بر حسب میلی‌آمپر حساب نکنی، در دام گزینه (۴) می‌افتی.

۵۶- در مدار شکل زیر، جهت جریان الکتریکی مدار بوده و مقدار نشان داده شده توسط ولت‌سنج ایده‌آل ولت است.



- (۱) ساعتگرد، $10/3$
- (۲) ساعتگرد، $9/7$
- (۳) پادساعتگرد، $10/3$
- (۴) پادساعتگرد، $9/7$

(متوسط - محاسباتی - استاندارد - صفحه ۶۶ - ۱۱۰۲)

پاسخ: گزینه ۳

کلام اول

در مدار نشان داده شده، باتری‌های (۱) و (۲) با توجه به جهت پایانه مثبتشان می‌خواهند جریان الکتریکی ساعتگرد تولید کنند و باتری (۳) هم می‌خواهد جریان الکتریکی پادساعتگرد تولید کند، اما چون مجموع نیروی محرکه باتری‌های (۱) و (۲) کمتر از نیروی محرکه باتری (۳) است، پس باتری (۳) موفق می‌شود و جریان الکتریکی مدار در جهت **پادساعتگرد** می‌شود.



مقدار جریان الکتریکی عبوری مدار برابر است با:

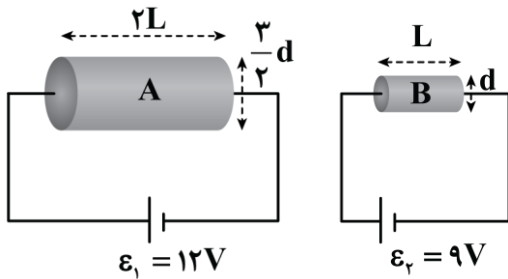
$$I = \frac{\varepsilon_3 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{R + r_1 + r_2 + r_3} = \frac{24 - (10 + 8)}{16 + 1 + 1 + 2} = \frac{6}{20} = 0.3 \text{ A}$$

ولت سنج ایده آل، اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر باتری (۱) را نشان می دهد و چون باتری (۱) شارژشونده است، بنابراین داریم:

$$V = \varepsilon_1 + r_1 I = 10 + (1 \times 0.3) = 10.3 \text{ V}$$



۵۷- مطابق شکل های زیر، دو استوانه مسی و توپُر A و B به باتری های ایده آل متصل شده اند. جریان الکتریکی عبوری از استوانه A، چند برابر جریان الکتریکی عبوری از استوانه B است؟



- (۱) ۰/۵
- (۲) ۱
- (۳) ۱/۵
- (۴) ۲

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) (صفحه ۶۵ - ۱۰۲)

پاسخ: گزینه ۳

ابتدا به کمک رابطه $R = \rho \frac{L}{A}$ ، نسبت مقاومت الکتریکی دو استوانه را به دست می آوریم:

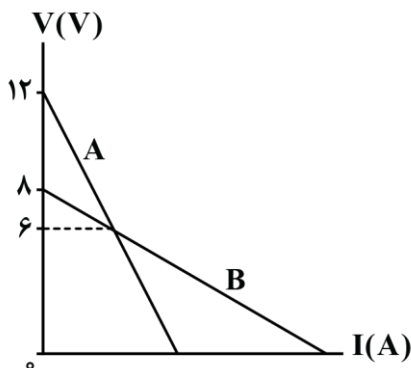
$$\frac{R_A}{R_B} = \frac{\rho_A}{\rho_B} \times \frac{L_A}{L_B} \times \frac{A_B}{A_A} \xrightarrow{\rho_A = \rho_B, A = \frac{1}{4}\pi d^2} \frac{R_A}{R_B} = 1 \times \frac{2L}{L} \times \left(\frac{d}{\frac{1}{2}d}\right)^2 = \frac{8}{9}$$

حالا به کمک رابطه $I = \frac{\varepsilon}{R + r}$ و با توجه به ایده آل بودن باتری ها ($r = 0$) داریم:

$$\frac{I_A}{I_B} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \times \frac{R_B}{R_A} = \frac{12}{9} \times \frac{9}{8} = 1.5$$



۵۸- نمودار اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سرباتری های A و B بر حسب جریان الکتریکی عبوری از آنها مطابق شکل زیر است. حداکثر جریان عبوری از باتری B چند برابر حداکثر جریان عبوری از باتری A است؟



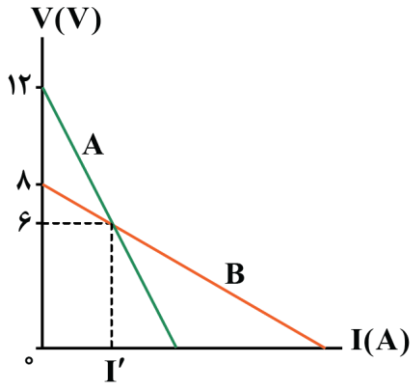
- (۱) ۲
- (۲) ۱/۲
- (۳) ۳/۶
- (۴) ۸/۳۶



به کمک رابطه $V = \varepsilon - rI$ و اطلاعات روی نمودار، نسبت مقاومت داخلی باتری‌ها رو حساب کن و آخر سر به کمک رابطه $I_{\max} = \frac{\varepsilon}{r}$ نسبت بیشینه جریان دو باتری رو به دست بیار.

کلم اول

می‌دانیم نمودار اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر باتری بر حسب جریان الکتریکی عبوری از آن، خطی با عرض از مبدأ نیروی محرکه باتری و اندازه شیب برابر با مقاومت داخلی باتری است، بنابراین به کمک اطلاعات روی نمودار داریم:



$$\begin{cases} \varepsilon_A = 12V \\ \varepsilon_B = 8V \end{cases} \quad (1)$$

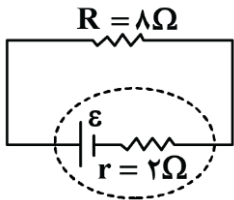
$$\begin{cases} A \text{ اندازه شیب} = r_A = \frac{12-6}{I'} \Rightarrow r_A = \frac{6}{I'} \\ B \text{ اندازه شیب} = r_B = \frac{8-6}{I'} \Rightarrow r_B = \frac{2}{I'} \end{cases} \Rightarrow \frac{r_A}{r_B} = 3 \quad (2)$$

کلم آخر

حداکثر جریان عبوری از باتری از رابطه $I_{\max} = \frac{\varepsilon}{r}$ به دست می‌آید و داریم:

$$\frac{(I_{\max})_B}{(I_{\max})_A} = \frac{\frac{\varepsilon_B}{r_B}}{\frac{\varepsilon_A}{r_A}} = \frac{\varepsilon_B}{\varepsilon_A} \times \frac{r_A}{r_B} \xrightarrow{(2), (1)} \frac{(I_{\max})_B}{(I_{\max})_A} = \frac{8}{12} \times 3 = 2$$

۵۹- در مدار شکل زیر، در هر دقیقه $180^\circ C$ بار الکتریکی خالص در مدار شارش می‌کند. کاری که منبع نیروی محرکه الکتریکی روی این بارها انجام می‌دهد، چند کیلوژول است؟



- (۱) ۵ / ۴
- (۲) ۵۴
- (۳) ۲۴
- (۴) ۲ / ۴

کلم اول

ابتدا جریان الکتریکی مدار را به کمک مقدار بار الکتریکی خالص شارش یافته به دست می‌آوریم:

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} \Rightarrow I = \frac{180}{60} = 3A$$

کلم دوم

نیروی محرکه باتری برابر است با:

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r} \Rightarrow \varepsilon = I(R + r) \Rightarrow \varepsilon = 3 \times (8 + 2) = 30V$$

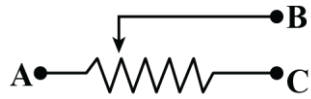


کار انجام شده توسط باتری، برای شارش بار الکتریکی خالص، برابر است با:

$$\Delta W = \varepsilon \Delta q = 30 \times 180 = 5400 \text{ J} \Rightarrow \Delta W = 5.4 \text{ kJ}$$



۶۰- در رئوستای نشان داده شده در شکل زیر، اختلاف پتانسیل الکتریکی ثابت V را یک بار به پایانه‌های A و B ، یک بار به پایانه‌های A و C و یک بار هم به پایانه‌های B و C وصل می‌کنیم. در کدام گزینه، شدت جریان الکتریکی عبوری از رئوستا در این سه حالت به درستی مقایسه شده است؟



$$I_{AB} = I_{BC} > I_{AC} \quad (۲)$$

$$I_{AB} > I_{BC} > I_{AC} \quad (۴)$$

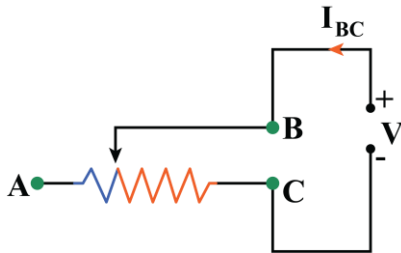
$$I_{AB} < I_{AC} = I_{BC} \quad (۱)$$

$$I_{AB} > I_{AC} > I_{BC} \quad (۳)$$

(متوسط - مفهومی - استاندارد ۵ - صفحه ۵۷ - ۱۱۰۲)

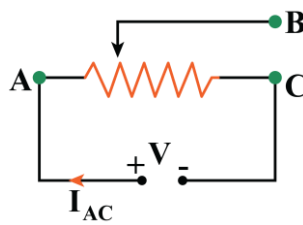
پاسخ: گزینه ۴

هر سه حالت مطرح شده را به دقت بررسی می‌کنیم. فقط حواستان باشد که در هر قسمت، آن بخش از مقاومت رئوستا را که جریان الکتریکی از آن می‌گذرد، با رنگ قرمز مشخص کرده‌ایم:



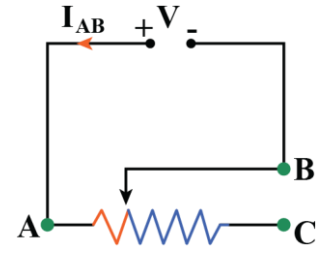
اختلاف پتانسیل V

به پایانه‌های B و C وصل است.



اختلاف پتانسیل V

به پایانه‌های A و C وصل است.



اختلاف پتانسیل V

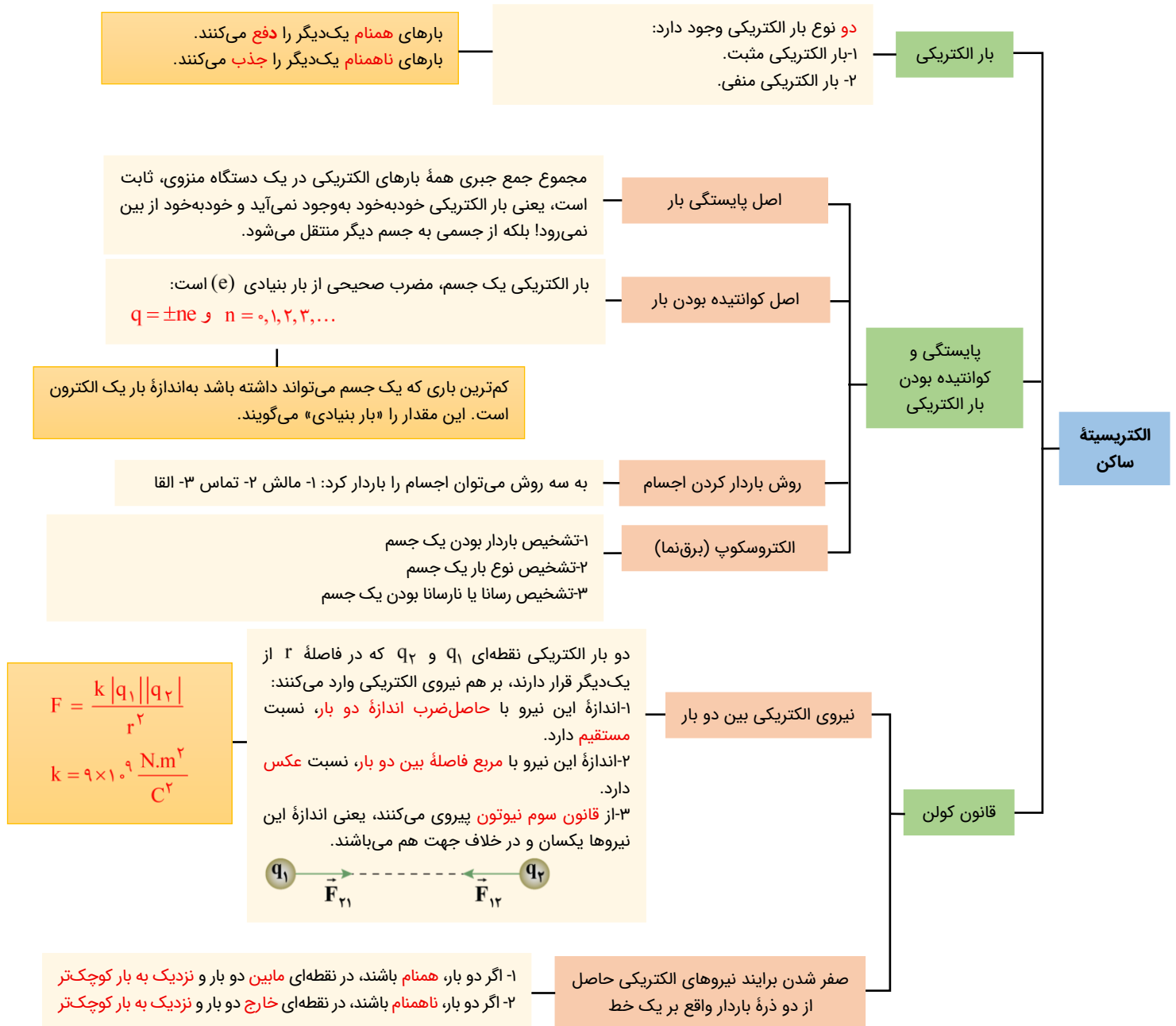
به پایانه‌های A و B وصل است.

با توجه به مسیر جریان الکتریکی در حالت‌های مختلف داریم:

$$R_{AB} < R_{BC} < R_{AC} \Rightarrow \frac{1}{R_{AB}} > \frac{1}{R_{BC}} > \frac{1}{R_{AC}} \Rightarrow \frac{V}{R_{AB}} > \frac{V}{R_{BC}} > \frac{V}{R_{AC}} \xrightarrow{I = \frac{V}{R}} I_{AB} > I_{BC} > I_{AC}$$



«مرور سریع»





هر بار الکتریکی در فضای اطراف خود خاصیتی ایجاد می‌کند که به موجب آن به هر بار دیگری که در آن فضا باشد، نیروی الکتریکی وارد می‌کند. این خاصیت، میدان الکتریکی نام دارد.

بزرگی میدان الکتریکی حاصل از بار q در فاصله r از آن :

$$E = \frac{k|q|}{r^2}$$

$$F = E|q_0|$$

اگر یک بار الکتریکی وارد میدان الکتریکی حاصل از بار الکتریکی دیگری شود (بار آزمون)، به آن از طرف میدان نیروی الکتریکی وارد می‌شود.

میدان الکتریکی

خطوط میدان الکتریکی

- ۱- خطوط میدان در هر نقطه، هم‌جهت با نیروی وارد بر بار مثبت واقع در آن نقطه است.
 - ۲- خطوط میدان الکتریکی به صورت شعاعی، از بار **مثبت**، **خارج** و به بار **منفی**، **وارد** می‌شود.
 - ۳- میدان الکتریکی، **کمیتی برداری** است و میدان الکتریکی در هر نقطه، برداری **مماس** بر خط میدان عبوری از آن نقطه و **هم‌جهت** با خط میدان است.
 - ۴- میزان تراکم خطوط میدان الکتریکی، نشان‌دهنده بزرگی میدان است. هر جا خطوط میدان به یک‌دیگر نزدیک‌تر، فشرده‌تر و پرتراکم‌تر باشند، میدان در آن ناحیه بزرگ‌تر است و بالعکس.
 - ۵- خطوط میدان، یک‌دیگر را قطع **نمی‌کنند**، یعنی از هر نقطه از فضا **یک** خط میدان می‌گذرد که همان میدان الکتریکی برابند است.
 - ۶- تعداد خطوط میدان الکتریکی که از یک بار الکتریکی خارج یا به آن داخل می‌شوند، با اندازه آن بار متناسب است.
- نکته: خط میدان در نزدیکی بار بزرگ‌تر، خمیدگی کم‌تری دارد.

کار نیروی الکتریکی

فرض کنید ذره‌ای با بار الکتریکی q در میدان الکتریکی یکنواخت به بزرگی E به اندازه d جابه‌جا شود. کاری که نیروی الکتریکی روی بار در این جابجایی انجام می‌دهد برابر است با:

$$W_E = |q|Ed \cos \theta$$

طبق قضیه کار - انرژی جنبشی، کار کل انجام‌شده روی یک جسم برابر با تغییر انرژی جنبشی آن است:

$$W_t = \Delta K$$

نکته: اگر تندی اولیه و ثانویه ذره باردار، یکسان باشد، در این صورت:

$$W_t = 0 \Rightarrow W_E = -W_{\text{خارجی}}$$

انرژی پتانسیل الکتریکی

تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی بار در یک جابه‌جایی، همواره برابر با منفی کار نیروی الکتریکی وارد بر آن بار در آن جابه‌جایی است.

$$\Delta U_E = -W_E$$

اگر جهت جابه‌جایی بار، در **خلاف** تمایل حرکت بار باشد ($\theta = 180^\circ$):

$$W_E < 0 \Rightarrow \Delta U_E > 0 \Rightarrow \Delta K < 0 \Rightarrow v_f < v_i$$

اگر جهت جابه‌جایی بار، **مطابق** تمایل حرکت بار باشد ($\theta = 0^\circ$):

$$W_E > 0 \Rightarrow \Delta U_E < 0 \Rightarrow \Delta K > 0 \Rightarrow v_f > v_i$$

اختلاف پتانسیل الکتریکی

بدون نظر گرفتن علامت بار الکتریکی:

۱- اگر در **جهت** خطوط میدان جابجا شویم، $\Delta V < 0$ است.

۲- اگر در **خلاف جهت** خطوط میدان جابجا شویم، $\Delta V > 0$ است.

۳- اگر **عمود** بر خطوط میدان جابجا شویم، $\Delta V = 0$ است.

انرژی و اختلاف پتانسیل الکتریکی

به تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی بر یکای بار الکتریکی در جابه‌جایی بین دو نقطه از میدان الکتریکی، اختلاف پتانسیل الکتریکی می‌گویند (تعریف کمی) و از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\Delta V = \frac{\Delta U_E}{q} = \frac{-W_E}{q} \Rightarrow |\Delta V| = E d'$$

اندازه جابه‌جایی در راستای میدان

هر باتری از **دو پایانه** تشکیل شده است، یکی **مثبت** و دیگری **منفی**. هنگامی که می‌گوییم باتری ۱۲ ولت است، یعنی پتانسیل الکتریکی پایانه مثبت (V_+) به اندازه ۱۲ ولت از پتانسیل الکتریکی پایانه منفی (V_-) بیش‌تر است.

باتری

$$V_{\text{باتری}} = V_+ - V_-$$



بار داده شده به جسم نارسانا در همان محل داده شده به جسم باقی می ماند و روی سطح جسم پخش نمی شود.

نارسانا

توزیع بار الکتریکی در اجسام

میدان الکتریکی خالص درون رسانای باردار یا رسانایی که درون میدان الکتریکی خارجی قرار می گیرد، صفر است.

بار داده شده به جسم رسانای منزوی، فقط روی سطح خارجی رسانا پخش می شود و هیچ باری داخل جسم رسانا باقی نمی ماند و این موضوع ارتباطی به توپیر یا توخالی بودن جسم رسانا ندارد. **نکته:** تراکم بار در نقاط تیز سطح جسم رسانای باردار از نقاط دیگر آن بیش تر است.

رسانا

همه نقاط رسانا پتانسیل الکتریکی یکسانی دارند.

الکتریسیته ساکن

ظرفیت خازن به اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر خازن و بار ذخیره شده در آن بستگی ندارد، بنابراین برای یک خازن، بار ذخیره شده در خازن با اختلاف پتانسیل دو سر خازن، رابطه مستقیم دارد.

$$C = \frac{Q}{V} \text{ یا } Q = CV \text{ یا } V = \frac{Q}{C}$$

رابطه مداری خازن

ظرفیت خازن تنها به ساختمان هندسی خازن و جنس دی الکتریک بین صفحات خازن بستگی دارد.

$$C = \kappa \epsilon_0 \frac{A}{d}$$

عوامل مؤثر بر ظرفیت خازن

$$U = \frac{1}{2} CV^2 \text{ یا } U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \text{ یا } U = \frac{1}{2} QV$$

انرژی ذخیره شده در خازن

اگر خازن پس از شارژ به باتری وصل باشد، حتماً از رابطه $E = \frac{V}{d}$ حل کنید؛ زیرا V ثابت است.

اگر خازن شارژ شده را از باتری جدا کنند، از رابطه $E = \frac{Q}{\kappa \epsilon_0 A}$ حل کنید؛ زیرا Q ثابت است.

میدان الکتریکی بین صفحه های خازن

خازن

الکترون‌ها چه در غیاب میدان و چه در حضور میدان به طور زیگزاگ و کاتوره‌ای حرکت می‌کنند، اما در غیاب میدان، برآیند حرکت زیگزاگی الکترون‌های آزاد در هر مقطع دلخواهی از رسانا صفر است ولی در حضور میدان، میدان الکتریکی به حرکت کاتوره‌ای الکترون‌ها جهت می‌دهد و باعث می‌شود الکترون‌ها با سرعت متوسطی به نام «سرعت سوق» در خلاف جهت میدان الکتریکی جابه‌جا شوند.

بار خالص شارش شده در واحد زمان را شدت جریان الکتریکی متوسط می‌گویند. اگر بار خالص Δq در مدت زمان Δt از مقطعی از رسانا عبور کند، جریان الکتریکی متوسط آن از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$I_{av} = \frac{\Delta q}{\Delta t}$$

جریان الکتریکی، یک کمیت **نرده‌ای** است و یکای اندازه‌گیری آن برابر با **آمپر** است.

جریان الکتریکی متوسط

از آمپرسنج برای اندازه‌گیری جریان عبوری از یک قطعه الکترونیکی استفاده می‌شود. آمپرسنج به صورت متوالی با آن قطعه بسته می‌شود. مقاومت الکتریکی آمپرسنج ایده‌آل ناچیز و تقریباً صفر است، بنابراین مثل یک سیم بدون مقاومت است.

شیب خط مماس بر نمودار $q - t$ در هر لحظه از زمان، برابر جریان الکتریکی در همان لحظه است.

شیب خط واصل بین دو نقطه از نمودار $q - t$ برابر با جریان الکتریکی متوسط در آن بازه زمانی است.

نمودار بار الکتریکی - زمان

در نمودار $I - t$ ، مساحت ناحیه محصور بین نمودار و محور زمان، نشان‌دهنده بار خالص عبوری می‌باشد. مساحت‌های بالای محور زمان را مثبت و مساحت‌های زیر محور زمان را منفی می‌گیریم.

نمودار جریان - زمان

مقاومت الکتریکی یک رسانا را به صورت نسبت اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر رسانا به شدت جریان عبوری از رسانا تعریف می‌کنند و با نماد R نشان داده می‌شود و یکای آن «ولت بر آمپر (اهم Ω)» است.

$$R = \frac{V}{I}$$

برای یک رسانای اهمی، مقاومت الکتریکی به اختلاف پتانسیل الکتریکی و جریان عبوری از رسانا بستگی **ندارد**، بنابراین برای یک رسانای اهمی، جریان عبوری از رسانا با اختلاف پتانسیل الکتریکی رسانا نسبت مستقیم دارد.

قانون اهم

شیب نمودار $V - I$ برای یک رسانای اهمی برابر با مقاومت رسانا است.

مقاومت الکتریکی

مقاومت الکتریکی رسانا در دمای ثابت به **طول رسانا** (L) **مساحت مقطع رسانا** (A) و جنس آن بستگی دارد.

مقاومت الکتریکی یک رسانا با توجه به ویژگی‌های ساختمانی آن از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$R = \rho \frac{L}{A}$$

نکته: ρ مقاومت ویژه **رسانا** برحسب اهم‌متر ($\Omega \cdot m$) است و به **ساختار اتمی** و **دمای** رسانا بستگی دارد.

مقاومت الکتریکی رسانایی با جرم m ، چگالی ρ' و مقاومت ویژه ρ از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$R = \rho \rho' \frac{L^2}{m}$$

عوامل مؤثر بر مقاومت

مقاومت الکتریکی یک رسانا با افزایش دما، افزایش می‌یابد و مقاومت الکتریکی یک نیم‌رسانا با افزایش دما کاهش می‌یابد.

جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم

کاری که منبع نیروی محرکه الکتریکی روی واحد بار الکتریکی مثبت انجام می‌دهد تا آن را از پایانه با پتانسیل الکتریکی کمتر به پایانه با پتانسیل الکتریکی بیشتر جابه‌جا کند، اصطلاحاً نیروی محرکه الکتریکی (emf) نامیده و با رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$\varepsilon = \frac{\Delta W}{\Delta q}$$

یکای نیروی محرکه الکتریکی برابر **ولت** است.

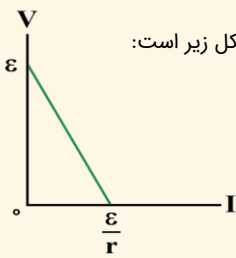
نیروی محرکه الکتریکی

منبع‌های نیروی محرکه واقعی در درون خود دارای مقاومتی هستند که به این مقاومت، **مقاومت داخلی (درونی)** باتری می‌گویند.

اگر مقاومت داخلی یک منبع نیروی محرکه، صفر باشد در این صورت آن را آرمانی می‌گویند.
نکته: منبع نیروی محرکه آرمانی در واقعیت وجود ندارد.

اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر باتری برابر است با:

$$V = \varepsilon - Ir$$



نکته: Ir را افت پتانسیل گویند.

نمودار اختلاف پتانسیل دو سر باتری بر حسب جریان عبوری از آن به شکل زیر است:

که قدر مطلق **شیب** این نمودار برابر با **مقاومت داخلی باتری** می‌باشد.

اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر باتری

نیروی محرکه الکتریکی و مدارها

اگر جریان الکتریکی I در مدار برقرار باشد، از نقطه اول شروع می‌کنیم و با رعایت پروتکل‌های زیر به مقصد می‌رسیم:

۱- اگر در جهت جریان I از مقاومت R عبور کنیم، پتانسیل به اندازه IR کاهش می‌یابد و اگر در خلاف جهت جریان حرکت کنیم، پتانسیل به همان اندازه افزایش می‌یابد.

۲- هنگامی که به یک باتری می‌رسیم، بدون توجه به جهت جریان، فقط به پایانه‌ها توجه می‌کنیم. اگر از پایانه مثبت باتری خارج شویم، پتانسیل به اندازه ε افزایش و اگر از پایانه منفی باتری خارج شویم، پتانسیل به اندازه ε کاهش می‌یابد.

محاسبه اختلاف پتانسیل الکتریکی دو نقطه از مدار

جریان الکتریکی و مدارهای مستقیم جریان

در مدار تک‌حلقه، جریان اصلی مدار برابر است با:

$$I = \frac{\varepsilon}{R_{eq} + r} \text{ و } R_{eq} = \text{مقاومت معادل مدار}$$

جریان الکتریکی

www.biomaze.ir



۶۲- با توجه به جدول زیر که گرمای ویژه برخی مواد را نشان می‌دهد، کدام گزینه نادرست است؟ ($H = 1, O = 16: g \cdot mol^{-1}$)

ماده	آب	اتانول	روغن زیتون
گرمای ویژه ($J \cdot g^{-1} \cdot ^\circ C^{-1}$)	۴/۲	۲/۴	x

- (۱) گرمای ویژه علاوه بر دما و فشار، به نوع ماده بستگی دارد.
- (۲) ظرفیت گرمایی یک مول آب با ظرفیت گرمایی $31/5$ گرم اتانول برابر است.
- (۳) اگر جرم‌های برابری از آب و اتانول با دمای 70 درجه سلسیوس در اتاق وجود داشته باشد، آب سریع‌تر با محیط هم‌دمای می‌شود.
- (۴) اگر 12 کیلوژول گرما دمای 150 گرم روغن زیتون را به اندازه 40 کلوین افزایش دهد، x به تقریب برابر با $0/48 cal \cdot g^{-1} \cdot ^\circ C^{-1}$ است.

(متوسط - مفهومی - استاندارد) - صفحه ۶۰-۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۳

ظرفیت گرمایی یک ماده برابر با mc (ظرفیت گرمایی ویژه $\times$ جرم) است. جرم هر دو ماده یکسان است ولی از آنجا که گرمای ویژه آب بیشتر از اتانول است، ظرفیت گرمایی آب نیز بیشتر خواهد بود. هر چه ظرفیت گرمایی یک ماده بیشتر باشد، برای تغییر دمای آن به مقدار مشخص انرژی بیشتری لازم است تا با محیط مبادله شود، در نتیجه آب دیرتر با محیط هم‌دمای می‌شود.

بررسی سایر گزینه‌ها:

ظرفیت گرمایی ویژه یا گرمای ویژه به دما، فشار و به نوع ماده بستگی دارد.

شاخص دمایی	واحد	وابستگی به نوع ماده	وابستگی به جرم ماده	وابستگی به دما و فشار
گرمای ویژه	$J \cdot g^{-1} \cdot K^{-1}$	دارد	ندارد	دارد
ظرفیت گرمایی	$J \cdot K^{-1}$	دارد	دارد	دارد

رابطه ظرفیت گرمایی به صورت زیر است:

$$C = mc$$

جرم یک مول آب برابر 18 گرم است، پس ظرفیت گرمایی آن برابر است با:

$$C_{\text{آب}} = 18 \times 4/2 = 75/6 J \cdot ^\circ C^{-1}$$

و این مقدار برای $31/5$ گرم اتانول برابر است با:

$$C_{\text{اتانول}} = 31/5 \times 2/4 = 75/6 J \cdot ^\circ C^{-1}$$

پس این دو مقدار باهم برابرند.

ارزش دمایی $1^\circ C$ برابر با $1 K$ است و هر یک کالری به تقریب برابر با $4/2 J$ است، بنابراین گرمای داده شده برحسب یکای کالری برابر است با:

$$? cal = 12 kJ \times \frac{1000 J}{1 kJ} \times \frac{1 cal}{4/2 J} \approx 2857 cal$$

حال طبق رابطه $Q = mc\Delta\theta$ داریم:

$$Q = mc\Delta\theta \Rightarrow 2857 = 150 \times c \times 40 \Rightarrow c \approx 0/48 cal \cdot g^{-1} \cdot ^\circ C^{-1}$$

بنابراین گرمای ویژه روغن زیتون (x) برابر $0/48$ کالری بر گرم بر درجه سلسیوس است.

۶۳- اگر برای آن که دمای یک نمونه مکعبی سرب با ضلع 2 سانتی متر از $10^\circ C$ به $15^\circ C$ برسد، به 57 ژول نیاز باشد، چگالی این فلز چند

کیلوگرم بر متر مکعب است؟ ($C_{pb} = 0/125 J \cdot g^{-1} \cdot ^\circ C^{-1}$)

(۴) ۱۷۱۰۰۰

(۳) ۱۷۱۰۰

(۲) ۱۱۴۰۰۰

(۱) ۱۱۴۰۰

حجم یک مکعب به ابعاد ۲ سانتی متر برابر ۸ سانتی متر مکعب است:

$$V = a^3 = 2^3 = 8 \text{ cm}^3$$

جرم نمونه سرب را با توجه به گرمای مبادله شده و تغییر دمای قطعه محاسبه می کنیم:

$$Q = mc\Delta\theta \Rightarrow 57 = m \times 0.125 \times (15 - 10) \Rightarrow m = \frac{57 \times 8}{5} \text{ g}$$

حال چگالی این سرب را به دست می آوریم:

$$d = \frac{m}{V} = \frac{\frac{57 \times 8}{5} \text{ g} \times \frac{1 \text{ kg}}{1000 \text{ g}}}{8 \text{ cm}^3 \times \frac{1 \text{ m}^3}{1000000 \text{ cm}^3}} = 11400 \text{ kg.m}^{-3}$$

پس چگالی این نمونه برابر ۱۱۴۰۰ کیلوگرم بر متر مکعب است.

رابطه گرما و دما

$$Q = mc\Delta\theta = C\Delta\theta$$

اگر مقدار Q بر حسب ژول (J) و مقدار تغییر دمای جسم بر حسب درجه سانتیگراد ($^{\circ}\text{C}$) و جرم جسم بر حسب گرم (g) باشد، یکای گرمای ویژه معادل با ژول بر گرم بر درجه سانتیگراد ($J \cdot g^{-1} \cdot ^{\circ}\text{C}^{-1}$) می شود. در نقطه مقابل، اگر مقدار تغییر دمای جسم بر حسب کلوین (K) بیان شود، یکای گرمای ویژه آن جسم معادل با ژول بر گرم بر کلوین ($J \cdot g^{-1} \cdot K^{-1}$) می شود. توجه داریم که مقدار گرمای ویژه یک جسم، فقط به نوع ماده سازنده آن جسم بستگی دارد و جرم آن جسم، تأثیری در مقدار گرمای ویژه آن جسم ندارد.

برای تمرین بیشتر، مثال زیر را حل کنید!

گرمای لازم برای افزایش دمای یک مول از هر گاز دو اتمی به اندازه 1°C ، برابر با ۲۸ ژول است. اگر ۷۶ گرم گاز فلوئور با دمای ۱۳ درجه سانتیگراد را با ۲۱۳ گرم گاز کلر با دمای ۶۸ درجه سانتیگراد در مخزنی با حجم معین مخلوط کنیم، دمای مخلوط گازی به چند درجه سانتیگراد می رسد؟

$$(F = 19, Cl = 35.5: g. mol^{-1})$$

$$50 (4) \quad 46 (3) \quad 42 (2) \quad 38 (1)$$

گرمای لازم برای افزایش دمای یک مول از هر دو گاز به اندازه یک درجه سلسیوس، برابر ۲۸ ژول است؛ یعنی برای افزایش دمای ۳۸ گرم فلوئور یا ۷۱ گرم کلر به اندازه یک درجه، ۲۸ ژول گرما لازم است. با این توصیف، در قدم اول گرمای ویژه این دو گاز را محاسبه می کنیم:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{فلوئور: } Q = mc\Delta\theta \Rightarrow 28 = 38 \times c \times 1 \Rightarrow c = \frac{14}{19} J. g^{-1}. ^{\circ}\text{C}^{-1} \\ \text{کلر: } Q = mc\Delta\theta \Rightarrow 28 = 71 \times c \times 1 \Rightarrow c = \frac{28}{71} J. g^{-1}. ^{\circ}\text{C}^{-1} \end{array} \right.$$

با توجه به قانون پایستگی انرژی، گرمایی که گاز کلر از دست می دهد با گرمایی که گاز فلوئور دریافت می کند برابر است؛ پس داریم:

$$\begin{aligned} |Q_{\text{گاز فلوئور}}| &= |Q_{\text{گاز کلر}}| \Rightarrow \Delta\theta_{\text{گاز فلوئور}} \times m_{\text{گاز فلوئور}} = \Delta\theta_{\text{گاز کلر}} \times m_{\text{گاز کلر}} \\ \Rightarrow \left| 213 \times \frac{28}{71} \times (\theta - 68) \right| &= \left| 76 \times \frac{14}{19} \times (\theta - 13) \right| \xrightarrow{\theta - 68 < 0 \text{ و } \theta - 13 > 0} 84 \times (68 - \theta) = 56 \times (\theta - 13) \\ \Rightarrow 3 \times (68 - \theta) &= 2 \times (\theta - 13) \Rightarrow 204 - 3\theta = 2\theta - 26 \Rightarrow 5\theta = 230 \Rightarrow \theta = 46 \end{aligned}$$

پس دما در تعادل گرمایی مورد نظر برابر ۴۶ درجه سانتیگراد است.

پاسخ: گزینه ۳



۶۴- کدام یک از موارد زیر نادرست است؟

- (۱) یک ویژگی بنیادی در همه واکنش های شیمیایی، داد و ستد گرما با محیط پیرامون است.
- (۲) در واکنش اکسایش گلوکز همانند فرایند میعان، انرژی از سامانه به محیط منتقل می شود.
- (۳) اگر انحلال شکر در چای فرایندی گرماگیر باشد، بر اثر این انحلال، دمای چای افزایش می یابد.
- (۴) گرمای مبادله شده در واکنش $A(g) \rightarrow A(l)$ از گرمای مبادله شده در واکنش $A(g) \rightarrow A(s)$ کمتر است.

با انجام یک واکنش گرماگیر، گرما از محیط به سامانه منتقل می شود که موجب کاهش دمای محیط می گردد. پس اگر انحلال یک ماده در



بررسی سایر گزینه‌ها:

۱ یک ویژگی بنیادی در هر واکنش شیمیایی داد و ستد گرما با محیط پیرامون است.

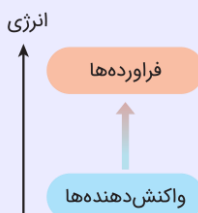
۲ واکنش اکسایش گلوکز همانند فرایند میعان (تبدیل گاز به مایع)، یک فرایند گرماده است و در فرایندهای گرماده انرژی از سامانه به محیط منتقل می‌شود.

۴ طبق شکل مقابل، انرژی آزاد شده در فرایند تبدیل حالت فیزیکی یک ماده از گاز به مایع ($A(g) \rightarrow A(l)$) کمتر از انرژی آزاد شده در فرایند تبدیل حالت فیزیکی آن ماده از گاز به جامد ($A(g) \rightarrow A(s)$) است.

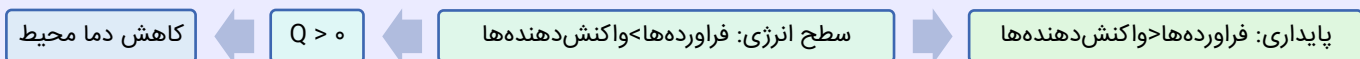


واکنش گرماگیر

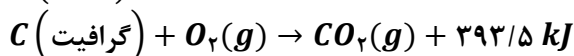
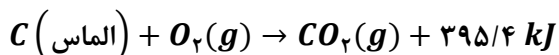
به واکنشی که در حین انجام گرفتن، گرما مصرف کند، واکنش گرماگیر می‌گوییم. در این فرایند مجموع سطح انرژی فراورده‌ها بیشتر از مجموع سطح انرژی واکنش‌دهنده‌ها است. برای افزایش سطح انرژی باید گرما از محیط پیرامون سامانه واکنش دریافت شود؛ پس در این واکنش‌ها انتقال گرما از محیط به سامانه دیده می‌شود. با گرفتن گرما از محیط، میزان انرژی گرمایی محیط و در نتیجه آن، دمای محیط کاهش می‌یابد. در این حالت علامت گرما (Q) مثبت است. از آن‌جا که سطح انرژی واکنش‌دهنده‌ها کمتر از فراورده‌ها است، واکنش‌دهنده‌ها پایدارتر از فراورده‌ها هستند. به بیان دیگر فراورده‌ها واکنش‌پذیری بیشتری نسبت به واکنش‌دهنده‌ها دارند. نمودار زیر مربوط به واکنش گرماگیر است:



در رابطه با این واکنش‌ها داریم:



۶۵ - معادلات واکنش سوختن گرافیت و الماس به صورت زیر هستند:



چند مورد از مطالب زیر درست هستند؟ ($C = 12 \text{ g.mol}^{-1}$)

الف - گرافیت از الماس پایدارتر است.

ب - واکنش تبدیل الماس به گرافیت، واکنشی گرماگیر است.

ج - در اثر سوختن ۳۰ گرم از هر آلوتروپ، اختلاف گرمای مبادله شده در دو واکنش برابر ۴۷۵۰ ژول است.

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)



بررسی موارد:

- الف) از آن جا که فراورده هر دو واکنش یکسان است، پس فراورده هر دو واکنش سطح انرژی یکسانی نیز دارند. چون گرمای آزاد شده در سوختن الماس بیشتر از گرافیت است، پس سطح انرژی الماس بالاتر از گرافیت بوده و در نتیجه گرافیت از الماس پایدارتر است.
- ب) با توجه به سطح انرژی بالاتر الماس نسبت به گرافیت، واکنش تبدیل الماس به گرافیت همراه با دادن گرما به محیط بوده و واکنش مورد نظر گرماده است.
- ج) اختلاف گرمای آزاد شده در اثر سوختن یک مول از الماس و گرافیت برابر با $\frac{1}{9}$ (۳۹۳/۵-۳۹۵/۴) کیلوژول است. پس اختلاف گرمای آزاد شده در اثر سوختن ۳۰ گرم از هر آلوتروپ برابر است با:

$$J = 30 \cdot g \cdot C \times \frac{1 \text{ mol } C}{12 \text{ g } C} \times \frac{1/9 \text{ kJ}}{1 \text{ mol } C} \times \frac{1000 \text{ J}}{1 \text{ kJ}} = 4750 \text{ J}$$

در نتیجه اختلاف گرمای آزاد شده از دو واکنش برابر ۴۷۵۰ ژول است.



در شیمی اگر بتوان برای یک ماده چند حالت در نظر گرفت، منظور پایدارترین حالت آن ماده در دمای ۲۵ درجه سانتیگراد (دمای اتاق) و فشار یک اتمسفر است مگر آن که شرایط دیگری قید شود. به عنوان مثال:

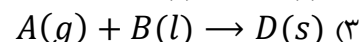
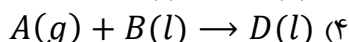
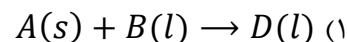
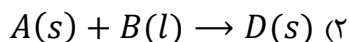
☆ وقتی از عبارت آب استفاده می شود، منظور حالت مایع آن است و نه بخار آب و یخ.

☆ الماس و گرافیت دو دگرشکل طبیعی کربن هستند. (کربن دگرشکل های دیگری مانند C_{60} و C_{70} دارد که مصنوعی هستند.) الماس قوی ترین رسانای گرما و گرافیت رسانای قوی جریان الکتریکی است. اما در کتاب درسی، کربن را رسانای جریان الکتریکی و عایق گرما معرفی می کند. علت این موضوع آن است که وقتی تنها از واژه کربن استفاده می شود، منظور پایدارترین فرم کربن در دما و فشار اتاق یعنی گرافیت است.

☆ گازهای نجیب در بازه های دمایی حالت مایع دارند، اما پایدارترین حالت آن ها در دما و فشار اتاق، گازی است.



۶۶- واکنش گرماده $A + B \rightarrow D$ را در نظر بگیرید. در میان گزینه های زیر گرمای مبادله شده به ازای مصرف یک مول $B(l)$ در کدام واکنش کمترین است؟



(آسان - مفهومی - سریع ۶) - صفحه ۶۴ - ۱۱۰۲)

پاسخ: گزینه ۱

در یک واکنش گرماده، با کاهش سطح انرژی واکنش دهنده ها یا افزایش سطح انرژی فراورده ها، میزان گرمای مبادله شده کاهش می یابد. سطح انرژی یک ماده در حالت های فیزیکی مختلف، متفاوت است. به عبارت دیگر، سطح انرژی ماده در حالت گازی بیشتر از سطح انرژی در حالت مایع و آن هم بیشتر از سطح انرژی در حالت جامد است. بنابر توضیحات داده شده، در این واکنش کمترین گرمای آزاد شده هنگامی است که واکنش دهنده A در حالت جامد و فراورده D در حالت مایع باشد.

تأثیر حالت فیزیکی مواد بر گرمای واکنش

گرمای مبادله شده در یک واکنش علاوه بر ماهیت واکنش دهنده ها و فراورده ها به حالت فیزیکی این مواد نیز بستگی دارد. هرچه سطح انرژی واکنش دهنده ها بیشتر باشد، گرمای مبادله شده منفی تر و هر چه سطح انرژی فراورده ها بیشتر باشد، گرمای مبادله شده مثبت تر می شود. سطح انرژی مواد در حالت های فیزیکی مختلف به صورت زیر است:

انرژی

حالت گاز

حالت مایع



SanjeshCloud

www.SanjeshCloud.ir



با توجه به توضیحات داده شده، واکنش‌های شیمیایی را به دو گروه زیر می‌توان دسته‌بندی کرد:

در واکنش گرماده: حالتی با سطح انرژی بیشتر در سمت واکنش‌دهنده‌ها و یا حالتی با سطح انرژی کمتر در سمت فراورده‌ها منجر به افزایش گرمای آزاد شده می‌شود. همچنین کاهش سطح انرژی در واکنش‌دهنده‌ها و یا افزایش سطح انرژی در فراورده‌ها منجر به کاهش مقدار گرمای آزاد شده می‌گردد. در واکنش گرماگیر: حالتی با سطح انرژی کمتر در سمت واکنش‌دهنده‌ها و یا حالتی با سطح انرژی بیشتر در سمت فراورده‌ها منجر به افزایش گرمای گرفته شده از محیط می‌گردد. همچنین افزایش سطح انرژی در واکنش‌دهنده‌ها و یا کاهش سطح انرژی در فراورده‌ها منجر به کاهش مقدار گرمای مبادله شده می‌شود.



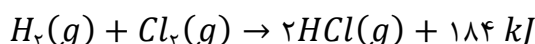
۶۷- کدام مورد دربارهٔ واکنش یک مول گاز هیدروژن با یک مول کلر در دمای اتاق، نادرست است؟

- (۱) گرمای مبادله شده در این واکنش ناشی از تفاوت میان انرژی پتانسیل مواد واکنش‌دهنده و فراورده است.
- (۲) در صورت انجام این واکنش در یک ظرف دربسته، فشار و دمای درون ظرف در طی واکنش ثابت می‌ماند.
- (۳) در صورت استفاده از برم به جای گاز کلر، واکنش با شدت کمتری انجام خواهد شد.
- (۴) سطح انرژی مواد واکنش‌دهنده از سطح انرژی مواد فراورده بالاتر است.

(متوسط - مفهومی - استاندارد) - صفحه ۶۳ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۳

معادله واکنش میان یک مول گاز هیدروژن و یک مول کلر در دمای اتاق به صورت زیر است:



در هالوژن‌ها با افزایش عدد اتمی، واکنش‌پذیری آن‌ها کاهش می‌یابد. اما نکته مهم این است که این واکنش در دمای اتاق انجام می‌شود و این در حالی است که برم در دمای ۲۰۰ درجه سلسیوس می‌تواند با گاز هیدروژن واکنش دهد و در نتیجه در دمای اتاق نمی‌تواند با گاز هیدروژن واکنش دهد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

این واکنش در دمای ثابت انجام می‌شود؛ پس گرمای آزاد شده در این واکنش نمی‌تواند ناشی از تفاوت انرژی گرمایی در مواد واکنش‌دهنده و فراورده باشد. بلکه به دلیل تغییر در شیوهٔ اتصال اتم‌ها به یکدیگر در طی این واکنش، ناشی از تفاوت میان انرژی پتانسیل مواد واکنش‌دهنده و فراورده است.

همان‌طور که بررسی شد، این واکنش در دمای ثابت انجام می‌شود. همچنین از آنجا که شمار مول‌های گازی در دو سمت واکنش یکسان است، فشار درون ظرف سربسته در طی واکنش تغییر نخواهد کرد.

همان‌طور که مشخص است، در این واکنش گرما آزاد می‌شود و یک واکنش گرماده است. در نتیجه سطح انرژی واکنش‌دهنده‌ها باید از سطح انرژی فراورده‌ها بالاتر باشد.

واکنش گرماده

به واکنشی که در حین انجام شدن آن گرما تولید شود، واکنش گرماده می‌گوییم. در این فرایند مجموع سطح انرژی فراورده‌ها کمتر از مجموع سطح انرژی واکنش‌دهنده‌ها است. این کاهش سطح انرژی منجر به آزاد شدن گرما از سامانه واکنش و انتقال گرما به محیط می‌شود. با انتقال گرما به محیط، میزان انرژی گرمایی محیط و در نتیجهٔ آن دمای محیط افزایش می‌یابد. در این حالت علامت گرما (Q) منفی است. از آنجا که سطح انرژی فراورده‌ها کمتر از واکنش‌دهنده‌ها است، فراورده‌ها پایدارتر از واکنش‌دهنده‌ها هستند. در واقع، واکنش‌دهنده‌ها واکنش‌پذیری بیشتری نسبت به فراورده‌ها دارند. نمودار زیر مربوط به واکنش گرماده است:

افزایش دما محیط

$Q < 0$

سطح انرژی: فراورده‌ها > واکنش‌دهنده‌ها

پایداری: فراورده‌ها < واکنش‌دهنده‌ها



۶۸- کدام مورد درست است؟

- (۱) اگر انرژی گرمایی دو نمونه ماده یکسان باشد، ممکن است انتقال گرما در بین آن‌ها رخ دهد.
- (۲) اگر دو نمونه ماده انرژی گرمایی یکسانی داشته باشند، میانگین انرژی جنبشی آن‌ها نیز یکسان است.
- (۳) اگر تغییر دمای محیط در یک واکنش شیمیایی مثبت باشد، گرما از محیط به سامانه جاری شده است.
- (۴) گرمای آزاد شده در هر فرایندی که دمای سامانه در آن ثابت می‌ماند، ناشی از تغییر شیوه اتصال اتم‌ها به یکدیگر است.



پاسخ: گزینه ۱

(متوسط - مفهومی - استاندارد ۶) - صفحه ۶۲ - ۱۱۰۲

ممکن است دمای دو نمونه ماده باهم متفاوت باشد اما انرژی گرمایی آنها باهم برابر باشد و همچنین می‌دانیم شرط انتقال گرما بین دو ماده متفاوت بودن دمای آنهاست. پس بین دو نمونه ماده با انرژی گرمایی یکسان امکان دارد گرما داد و ستد شود.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۲) انرژی گرمایی یک نمونه ماده به جرم و دمای آن نمونه بستگی دارد، پس اگر انرژی گرمایی دو نمونه ماده باهم برابر باشد، به‌طور قطع نمی‌توان گفت که دمای (میانگین انرژی جنبشی) این دو نمونه ماده باهم برابر است.

۳) در واکنشی که دمای محیط افزایش یابد ($\Delta\theta > 0$)، Q واکنش منفی است و این ویژگی نشان‌دهنده یک واکنش گرماده است که در آن گرما از سامانه به محیط جاری می‌شود.

۴) در فرایندهای فیزیکی مانند تبخیر که به‌طور مثال آب 100°C به بخار آب 100°C تبدیل می‌شود و دمای سامانه در این فرایند ثابت می‌ماند، اما شیوه اتصال آنها به یکدیگر تغییر نمی‌کند.



۶۹- معادله موازنه‌نشده واکنش سوختن اتان به‌صورت $C_2H_6(g) + O_2(g) \rightarrow CO_2(g) + H_2O(l) + 3120 \text{ kJ}$ است. اگر در این واکنش از سوختن هر گرم اتان، $46/8$ کیلوژول گرما آزاد شود، بازده این واکنش چند درصد است؟

($H = 1, C = 12: g.mol^{-1}$)

۹۰ (۴)

۷۵ (۳)

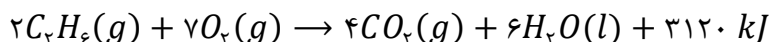
۴۵ (۲)

۳۷/۵ (۱)

(آسان - محاسباتی - استاندارد ۶) - صفحه ۶۴ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۴

واکنش موازنه‌شده به‌صورت زیر است:



راه حل مسئله

برای حل مسائل ترمودینامیک با گرمای واکنش مانند یک فراورده یا یک واکنش‌دهنده (بسته به محل قرارگیری آن در معادله واکنش) برخورد می‌کنیم. برای حل این سؤال نیز با گرما مثل یک فراورده برخورد کرده و مقدار گرمای داده‌شده در صورت سؤال، همان فراورده عملی است. پس مقدار گرمای تولیدشده به‌صورت نظری از سوختن یک گرم اتان را حساب می‌کنیم تا در نهایت بتوانیم بازده واکنش را حساب کنیم.

ابتدا مقدار گرمای تولیدشده به‌صورت نظری را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{گرما } 3120 \text{ kJ} \times \frac{1 \text{ mol } C_2H_6}{30 \text{ g } C_2H_6} \times \frac{1 \text{ g } C_2H_6}{1 \text{ mol } C_2H_6} = 52 \text{ kJ}$$

حال بازده درصدی واکنش را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{بازده درصدی} = \frac{\text{فراورده تولیدشده به صورت عملی}}{\text{فراورده تولیدشده به صورت نظری}} \times 100 \Rightarrow R = \frac{46/8}{52} \times 100 = 90\%$$

پس بازده انجام این واکنش برابر ۹۰ درصد است.

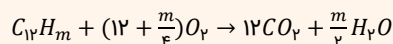


برای تمرین بیشتر، مثال زیر را حل کنید!

اگر در اثر سوختن یک مول از یک هیدروکربن ۱۲ کربنه در حضور ۱۶ مول گاز اکسیژن، ۱۴ مول فراورده تولید شود، بازده واکنش سوختن این هیدروکربن برابر با چند درصد است؟

۸۴ (۱) ۸۰ (۲) ۷۵ (۳) ۷۰ (۴)

اگر فرمول شیمیایی هیدروکربن مورد نظر را به صورت $C_{12}H_m$ در نظر بگیریم، معادله واکنش سوختن این هیدروکربن به صورت زیر می‌گردد:



از سوختن یک مول از این هیدروکربن، ۱۶ مول اکسیژن مصرف شده است؛ بنابراین داریم:

$$12 + \frac{m}{4} = 16 \Rightarrow \frac{m}{4} = 4 \Rightarrow m = 16$$

پس هیدروکربن مورد نظر معادل با $C_{12}H_{16}$ بوده و واکنش سوختن آن به صورت $C_{12}H_{16} + 16O_2 \rightarrow 12CO_2 + 8H_2O$ است. همان‌طور که مشخص است، از سوختن هر مول $C_{12}H_{16}$ ، ۲۰ مول فراورده به صورت نظری تولید می‌شود؛ بنابراین بازده درصدی واکنش برابر است با:

$$\text{درصد} = \frac{\text{فراورده عملی}}{\text{فراورده نظری}} \times 100 \Rightarrow A = \frac{14}{20} \times 100 = 70\%$$

بنابراین بازده واکنش سوختن این هیدروکربن، ۷۰ درصد است.

پاسخ: گزینه ۴



۷۰- چند مورد درست است؟

الف - شدیدترین واکنش در بین عناصر موجود در چهار دوره اول جدول تناوبی، مربوط به واکنش پتاسیم با فلوئور است.

ب - می‌توان از هفتمین عنصر دسته S همانند هفتمین عنصر دسته p برای استخراج فلز گالیم استفاده نمود.

ج - آرایش لایه ظرفیت دو کاتیون X^{2+} و Y^{+} به صورت $3d^{10}$ است، واکنش‌پذیری X از Y بیشتر است.

د - فراورده گازی واکنش استخراج آهن در فولاد مبارکه با واکنش تهیه سیلیسیم یکسان است.

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

(سخت - مفهومی - زمان بر) - صفحه ۴۸ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۲

عبارت‌های «الف» و «ج» درست هستند.

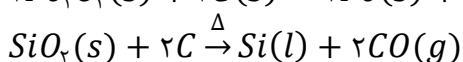
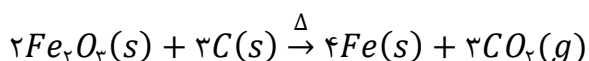
بررسی موارد:

شدیدترین واکنش بین فلز و نافلزی اتفاق می‌افتد که به ترتیب بیشترین خاصیت فلزی و خاصیت نافلزی را دارند، بین چهار دوره اول جدول دوره‌ای پتاسیم بیشترین خاصیت فلزی و فلوئور بیشترین خاصیت نافلزی را دارد پس شدیدترین واکنش بین این دو عنصر اتفاق می‌افتد.

برای استخراج فلز گالیم باید از عناصری استفاده کرد که واکنش‌پذیری بیشتری از گالیم دارند. هفتمین عنصر دسته S پتاسیم و هفتمین عنصر دسته p آلومینیوم است. فلز پتاسیم به دلیل شعاع اتمی بیشتر، واکنش‌پذیری بیشتری نیز نسبت به گالیم دارد و می‌توان برای استخراج گالیم از آن استفاده کرد. این در حالی است که آلومینیوم به دلیل اینکه در دوره بالاتری قرار گرفته است، واکنش‌پذیری کمتری نسبت به گالیم دارد و نمی‌توان از آن برای استخراج این فلز استفاده نمود.

عناصر X و Y به ترتیب روی و مس هستند که با تشکیل یون‌های X^{2+} و Y^{+} به زیرلایه $3d^{10}$ ختم می‌شوند. روی واکنش‌پذیری بیشتری نسبت به مس دارد.

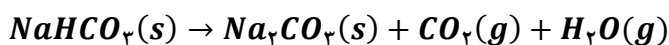
واکنش استخراج آهن در فولاد مبارکه و واکنش تهیه سیلیسیم به صورت زیر می‌باشد:



همان‌طور که مشخص است، فراورده گازی این دو واکنش یکسان نیست.



۷۱- اگر ۱۰۵ گرم سدیم هیدروژن کربنات طبق واکنش موازنه نشده زیر تجزیه شود و ۲۰ لیتر گاز نایطبی با چگالی $1.1 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1}$ تولید کند، بازده این واکنش چند درصد است؟ ($H = 1, C = 12, O = 16, Na = 23: \text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$)



(۴) ۹۰

(۳) ۸۰

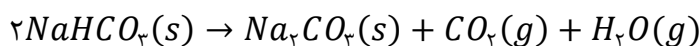
(۲) ۷۵

(۱) ۷۰

(آسان - محاسباتی - سریع) - صفحه ۲۴ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۳

معادله موازنه شده واکنش به صورت زیر است:



ابتدا مقدار نظری گاز کربن دی اکسید تولید شده (گاز نایطبی) در اثر تجزیه ۱۰۵ گرم واکنش دهنده را محاسبه می کنیم:

$$? \text{ L CO}_2 = 105 \text{ g NaHCO}_3 \times \frac{1 \text{ mol NaHCO}_3}{84 \text{ g NaHCO}_3} \times \frac{1 \text{ mol CO}_2}{2 \text{ mol NaHCO}_3} \times \frac{44 \text{ g CO}_2}{1 \text{ mol CO}_2} \times \frac{1 \text{ L CO}_2}{1.1 \text{ g CO}_2} = 25 \text{ L}$$

از آن جا که مقدار عملی گاز کربن دی اکسید تولید شده برابر با ۲۰ لیتر است، طبق رابطه بازده درصدی داریم:

$$\text{بازده درصدی} = \frac{\text{مقدار عملی}}{\text{مقدار نظری}} \times 100 = \frac{20}{25} \times 100 = 80\%$$

در نتیجه بازده واکنش برابر ۸۰ درصد است.



۷۲- در دوره چهارم جدول تناوبی، عنصری که الکترون دارد، به طور قطع

(۱) ۶ - در یک زیرلایه در لایه ظرفیت - واکنش پذیری بیشتر از نقره دارد.

(۲) ۳ - در یک لایه الکترونی - یک فلز اصلی است.

(۳) ۲ - در بیرونی ترین زیرلایه - چکش خوار است.

(۴) ۶ - ظرفیت - زیرلایه ای با ۴ الکترون دارد.

(سخت - استدلالی - زمان بر) - صفحه ۱۶ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۲

تنها لایه ای که می تواند در میان عناصر دوره چهارم، ۳ الکترون داشته باشد، لایه چهارم است و در عنصری با آرایش $4s^2 4p^1$ دیده می شود که همان گالیم از گروه سیزدهم است. گالیم یک عنصر فلزی بوده و چون در دسته p قرار دارد، یک عنصر اصلی محسوب می شود.

بررسی سایر گزینه ها:

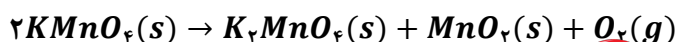
① در دوره چهارم جدول تناوبی دو زیرلایه می توانند ۶ الکترون بگیرند، زیرلایه $4p$ و $3d$. این دو زیرلایه در عناصر گروه هشتم و هجدهم ۶ الکترون دارند و در این دوره، آهن و کریپتون در این دو گروه قرار می گیرند. عناصر گروه هجدهم به گازهای نجیب شهرت دارند و واکنش پذیری آن ها از تمام عناصر دیگر کمتر خواهد بود.

③ در میان عناصر دوره چهارم، کلسیم و ۸ عنصر از دسته d ، ۲ الکترون در زیرلایه $4s$ و ژرمانیم دو الکترون در زیرلایه $4p$ دارد. در میان این ۱۰ عنصر، ژرمانیم شبه فلز و باقی فلز هستند. شبه فلزها چکش خوار نیستند و در اثر ضربه خرد می شوند.

④ بدون در نظر گرفتن عناصر دسته f ، در هر دوره از جدول تناوبی، عناصر گروه ششم و شانزدهم، ۶ الکترون ظرفیت دارند. در این میان آرایش الکترونی لایه ظرفیت گروه شانزدهم، $ns^2 np^4$ و گروه ششم $ns^1 d^5 (n-1)$ است. پس در دوره چهارم، کروم زیرلایه چهار الکترونی ندارد.



۷۳- در یک نمونه ناخالص از پتاسیم پرمنگنات (KMnO_4) به جرم ۵۰ گرم، $3/612 \times 10^{23}$ اتم اکسیژن وجود دارد. درصد خلوص این نمونه چقدر است و اگر این نمونه طبق معادله شیمیایی زیر تجزیه شود، چند میلی لیتر گاز در شرایط استاندارد تولید می شود؟ (در ناخالصی ها اتم اکسیژن وجود ندارد. $O = 16, K = 39, Mn = 55: \text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$)



(۴) ۵۱/۲ - ۳۳۶۰

(۲) ۵۱/۲ - ۳۳۶

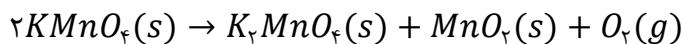
(۲) ۵۱/۲ - ۶۸۰

(۱) ۴۷/۴ - ۱۶۸۰





معادله این واکنش به صورت زیر است:



در ابتدا باید محاسبه کنیم در چند گرم پتاسیم پرمنگنات، $10^{23} \times \frac{3}{612} \text{ atom O}$ اکسیژن وجود دارد:

$$g KMnO_4 = \frac{3}{612} \times 10^{23} \text{ atom O} \times \frac{1 \text{ mol O}}{6.02 \times 10^{23} \text{ atom O}} \times \frac{1 \text{ mol } KMnO_4}{4 \text{ mol O}} \times \frac{158 \text{ g } KMnO_4}{1 \text{ mol } KMnO_4} = 23/7 \text{ g}$$

پس جرم پتاسیم پرمنگنات خالص برابر ۲۳/۷ گرم است. درصد خلوص این ترکیب برابر است با:

$$\text{درصد خلوص} = \frac{\text{جرم ماده خالص}}{\text{جرم ماده ناخالص}} \times 100 = \frac{23/7}{50} \times 100 = 47/4\%$$

پس درصد خلوص نمونه برابر ۴۷/۴ درصد است.

حال حجم گاز اکسیژن تولیدشده را در واکنش محاسبه می‌کنیم:

$$mL O_2 = 23/7 \text{ g } KMnO_4 \times \frac{1 \text{ mol } KMnO_4}{158 \text{ g } KMnO_4} \times \frac{1 \text{ mol } O_2}{2 \text{ mol } KMnO_4} \times \frac{22400 \text{ mL } O_2}{1 \text{ mol } O_2} = 1680 \text{ mL}$$

پس حجم گاز اکسیژن تولیدشده برابر ۱۶۸۰ میلی‌لیتر است.



۲۴ - در میان فلزهای دوره سوم جدول تناوبی،

- (۱) با افزایش شعاع اتمی، شرایط نگهداری فلز در آزمایشگاه آسان‌تر می‌شود.
- (۲) کمترین خصلت فلزی مربوط به عنصری است که با چاقو بریده می‌شود.
- (۳) فلز قلیایی در واکنش با گاز کلر نور قرمز رنگ تولید می‌کند.
- (۴) با افزایش بار یون پایدار، واکنش‌پذیری فلز کاهش می‌یابد.

در دوره سوم جدول تناوبی ۳ عنصر فلزی سدیم، منیزیم و آلومینیم وجود دارند که به ترتیب یون پایدار آن‌ها Na^+ ، Mg^{2+} و Al^{3+} است. در یک دوره از چپ به راست، واکنش‌پذیری فلزها کاهش می‌یابد. پس در این دوره با افزایش بار کاتیون فلز، واکنش‌پذیری آن کاهش پیدا می‌کند. شکل زیر روند تغییر خواص مواد را در جدول تناوبی نشان می‌دهد.

افزایش خاصیت فلزی کاهش خاصیت نافلزی افزایش شعاع اتمی افزایش واکنش‌پذیری نافلزها	۳ Li لیتیم ۶/۹۴	۴ Be بریلیم ۹/۰۱	۵ B بور ۱۰/۸۰	۶ C کربن ۱۲/۰۱	۷ N نیتروژن ۱۴/۰۱	۸ O اکسیژن ۱۶/۰۰	۹ F فلوئور ۱۹/۰۰
	۱۱ Na سدیم ۲۲/۹۹	۱۲ Mg منیزیم ۲۴/۳۱	۱۳ Al آلومینیم ۲۶/۹۸	۱۴ Si سیلیسیم ۲۸/۰۹	۱۵ P فسفر ۳۰/۹۷	۱۶ S گوگرد ۳۲/۰۷	۱۷ Cl کلر ۳۵/۴۵

بررسی سایر گزینه‌ها:

- (۱) در یک دوره از چپ به راست شعاع اتمی کاهش می‌یابد. همچنین در یک تناوب، از چپ به راست واکنش‌پذیری فلزها کاهش یافته و شرایط نگهداری آن‌ها، آسان‌تر خواهد شد. پس در این دوره با کاهش شعاع اتمی، شرایط نگهداری فلزها آسان‌تر می‌گردد.
- (۲) در یک دوره از چپ به راست خصلت فلزی کاهش می‌یابد. پس کمترین خصلت فلزی میان این ۳ عنصر، متعلق به آلومینیم است. در این دوره، سدیم به علت نرمی زیاد، با چاقو بریده می‌شود.
- (۳) فلز قلیایی دوره سوم جدول تناوبی، سدیم است که در واکنش با گاز کلر، نور زرد رنگ تولید می‌کند. همچنین لیتیم و پتاسیم دیگر فلزهای قلیایی در واکنش با گاز کلر به ترتیب نور قرمز و نور بنفش ساطع می‌کنند.





۷۵- کدام مورد عبارت زیر را به درستی تکمیل می کند؟

« هر عنصری از گروه چهاردهم جدول دوره‌ای که باشد، است.»

- (۱) با عناصر دسته d هم‌دوره - دارای رسانایی الکتریکی بالایی
- (۲) دارای ۸ الکترون با $n + l = 4$ - با یک هالوژن غیرگازی در دما و فشار اتاق، هم‌دوره
- (۳) دارای سطح براق و صیقلی - دارای توانایی از دست دادن الکترون در واکنش‌های شیمیایی
- (۴) دارای نماد دوحرفی - در دوره‌ای قرار دارد که شمار عناصر فلزی آن دوره از عناصر نافلزی آن بیشتر

(سخت - مفهومی - استاندارد) - صفحه ۷ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۲

زیرلایه‌هایی که $n + l$ آن‌ها برابر ۴ است، $3p$ و $4s$ می‌باشند. هنگامی که این دو زیرلایه پر از الکترون باشند، ۸ الکترون با $n + l = 4$ داریم. پس عنصر موجود در دوره چهارم (Ge) و عناصر پایین‌تر از آن دارای این ویژگی هستند. هالوژن‌هایی که در دما و فشار اتاق حالت گازی دارند، فلئور و کلر هستند که به ترتیب در دوره دوم و سوم قرار دارند. پس عناصر مورد نظر از گروه ۱۴ با یک هالوژن غیرگازی هم‌دوره هستند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) عناصر موجود در گروه چهاردهم از دوره چهارم به پایین با عناصر دسته d هم‌دوره هستند. عنصر ژرمانیم از این گروه که در دوره چهارم قرار دارد و یک عنصر شبه‌فلزی است، رسانایی الکتریکی کمی دارد.

۳) عناصر شبه‌فلزی و فلزی این گروه دارای سطح براق و صیقلی هستند، اما عناصر شبه‌فلزی در واکنش‌های شیمیایی نمی‌توانند الکترون از دست بدهند.

۴) از بین عناصر گروه چهاردهم، تنها عنصر کربن (C) نماد تک‌حرفی دارد و سایر عناصر نماد دوحرفی دارند. عنصر سیلیسیم (Si) که در دوره سوم قرار دارد، با سه عنصر فلزی و چهار عنصر نافلزی هم‌دوره است. پس در این دوره، شمار عناصر نافلزی از شمار عناصر فلزی بیشتر است.

خواص فلزها، نافلزها و شبه‌فلزها

جدول زیر خواص شیمیایی و فیزیکی فلزها، نافلزها و شبه‌فلزها را مقایسه می‌کند:

توضیح	نافلز	شبه‌فلز	فلز	
چکش‌خواری	-	-	+	
رسانایی الکتریکی	-	ضعیف	+	
رسانایی گرما	-	+	+	
توانایی تشکیل یون تک اتمی	+	-	+	
توانایی تشکیل پیوند کووالانسی	+	+	-	
مطابق کتاب درسی!!!	+	+	-	



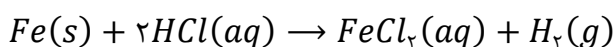
۷۶- کدامیک از مطالب زیر در مورد آهن و ترکیبات آن نادرست است؟

- (۱) آهنک استخراج و مصرف این فلز از آهنک بازگشت آن به طبیعت بیشتر است.
- (۲) اکسیدی از آن که در جوش دادن خطوط راه آهن به کار می‌رود، قرمز رنگ است.
- (۳) در هیدروکسید سبزرنگ این فلز، نسبت شمار کاتیون به آنیون برابر ۵/۰ است.
- (۴) از واکنش این فلز با محلول هیدروکلریک اسید، محلول زرد رنگ ایجاد می‌شود.

(آسان - خط به خط - استاندارد) - صفحه ۲۵ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۴

معادله واکنش فلز آهن با محلول هیدروکلریک اسید به صورت زیر است:



در این واکنش کاتیون Fe^{2+} تولید می‌شود که محلول‌های آن سبزرنگ است. این در حالی است که محلول‌های دارای یون Fe^{3+} ، زرد رنگ هستند.

www.biomaze.ir

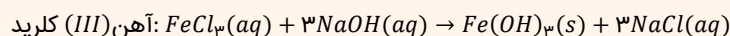


برای تمرین بیشتر، مثال زیر را حل کنید!

۱۴۲۰ گرم مخلوطی ناخالص از آهن(II) کلرید و آهن(III) کلرید را در مقدار کافی آب حل می‌کنیم. اگر این محلول با ۱/۵ لیتر محلول حاوی ۱۸ مول سدیم هیدروکسید واکنش داده و ۷۵۴ گرم رسوب آهن(II) هیدروکسید و آهن(III) هیدروکسید تولید کند، درصد جرمی یون کلرید در مخلوط اولیه چقدر است؟
($H = 1, O = 16, Cl = 35.5, Fe = 56; g.mol^{-1}$)

۳۶ (۱) ۴۵ (۲) ۵۰ (۳) ۵۴ (۴)

واکنش‌های انجام شده به صورت زیر هستند:



اگر در مخلوط اولیه مقدار آهن (II) کلرید و آهن (III) کلرید را به ترتیب x و y مول در نظر بگیریم، به ازای آهن (II) کلرید $2x$ مول و به ازای آهن (III) کلرید نیز $3y$ مول سدیم هیدروکسید مصرف می‌شود. همچنین در این دو واکنش، به ازای آهن (II) کلرید $90x$ گرم رسوب (معادل با x مول آهن (II) هیدروکسید) و به ازای آهن (III) کلرید نیز $107y$ گرم رسوب (معادل با y مول آهن (III) هیدروکسید) تولید می‌شود بنابراین داریم:

$$\left. \begin{aligned} 2x + 3y &= 18 \\ 90x + 107y &= 754 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = 6 \text{ و } y = 2$$

در مرحله‌ی بعد، مقدار یون کلرید را در مخلوط اولیه حساب می‌کنیم:

$$\left. \begin{aligned} \text{آهن(II): } g Cl^- &= 6 \text{ mol } FeCl_2 \times \frac{2 \text{ mol } Cl^-}{1 \text{ mol } FeCl_2} \times \frac{35.5 \text{ g } Cl^-}{1 \text{ mol } Cl^-} = 426 \text{ g} \\ \text{آهن(III): } g Cl^- &= 2 \text{ mol } FeCl_3 \times \frac{3 \text{ mol } Cl^-}{1 \text{ mol } FeCl_3} \times \frac{35.5 \text{ g } Cl^-}{1 \text{ mol } Cl^-} = 213 \text{ g} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{جرم } Cl^- = 426 + 213 = 639$$

در انتها، درصد جرمی یون کلرید را در مخلوط اولیه به دست می‌آوریم:

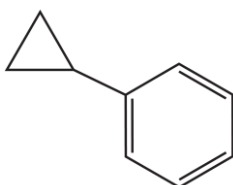
$$\text{درصد جرمی یون کلرید} = \frac{\text{جرم یون کلرید}}{\text{جرم مخلوط}} \times 100 \Rightarrow A = \frac{639}{1420} \times 100 = 45 \text{ درصد}$$

بنابراین، یون‌های کلرید ۴۵ درصد از جرم مخلوط اولیه را تشکیل می‌دادند.

پاسخ: گزینه ۲



۷۸- کدام مورد درباره ترکیبی با فرمول ساختاری زیر نادرست است؟ ($H = 1, C = 12; g.mol^{-1}$)



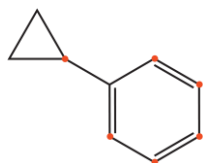
- (۱) شمار گروه‌های CH در ترکیب مورد نظر با این شمار در بنزن برابر است.
- (۲) شمار پیوندهای یگانه کربن-کربن در این ترکیب با این شمار در ۱-اوکتین برابر است.
- (۳) نسبت درصد جرمی اتم کربن به درصد جرمی اتم هیدروژن در این ترکیب برابر با ۱۰/۸ است.
- (۴) مقدار اختلاف جرم مولی این ترکیب با نفتالن، با شمار اتم‌های هیدروژن در هر مولکول بوتان برابر است.

(متوسط - مفهومی - زمان ۲۰ - صفحه ۴۳ - ۱۱۰۱)

پاسخ: گزینه ۲

شمار پیوندهای یگانه کربن-کربن در این ترکیب برابر با ۷ است، در حالی که این شمار در ۱-اوکتین (C_8H_{14}) برابر با ۶ است.

بررسی سایر گزینه‌ها:



همان‌طور که در شکل نشان داده شده است، شمار اتم‌های کربن متصل به یک اتم هیدروژن یا همان شمار گروه‌های CH در این ترکیب برابر با ۶ است که با این شمار در مولکول بنزن (حاوی شش گروه CH) برابر است.

فرمول مولکولی ترکیب مورد نظر به صورت C_9H_{10} است. حال باید نسبت خواسته شده را محاسبه کنیم، بنابراین داریم:

$$\frac{\text{درصد جرمی اتم کربن}}{\text{درصد جرمی اتم هیدروژن}} = \frac{\text{جرم کل مولکول}}{\text{جرم اتم هیدروژن}} = \frac{\text{جرم اتم کربن}}{\text{جرم اتم هیدروژن}} = \frac{9 \times 12}{10 \times 1} = 10/8$$

پس نسبت خواسته شده برابر ۱۰/۸ است.

تفاوت جرم مولی این ترکیب (۱۱۸) با جرم مولی نفتالن با فرمول مولکولی $C_{10}H_8$ (۱۲۸) برابر با ۱۰ است و با شمار اتم‌های هیدروژن

در بوتان (C_4H_{10}) برابر است.



۷۹- کدام یک از مطالب زیر نادرست است؟

- (۱) در ساختار لوویس اطلاعاتی از مولکول وجود دارد که از مدل گلوله-میله و مدل فضاپرکن نمی‌توان دریافت.
- (۲) بنزین ماده‌ای مناسب برای انحلال گریس است، اما استفاده طولانی مدت از آن به پوست آسیب می‌زند.
- (۳) سوخت فندک ماده‌ای غیر سمی بوده و می‌توان از آن برای جلوگیری از زنگ زدن آهن استفاده کرد.
- (۴) درصد جرمی کربن در نفتالن بیشتر از درصد جرمی این عنصر در یک نمونه گریس است.

پاسخ: گزینه ۳

(متوسط - مفهومی - استاندارد) - صفحه ۴۳ - ۱۱۰۱

با توجه به ناقطبی بودن آلکان‌ها و در نتیجه آب‌گریز بودن آن‌ها، از آلکان‌های مایع برای اندودن فلزها و جلوگیری از رسیدن آب به سطح فلزها، استفاده می‌شود. سوخت فندک بوتان بوده که در دمای اتاق یک آلکان گازی شکل است و نمی‌توان از آن به این منظور استفاده کرد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

(۱) برای نشان دادن ساختار مولکول‌های یک ماده می‌توان از مدل‌های مختلفی استفاده کرد. سه مورد از این مدل‌ها، ساختار لوویس، مدل فضاپرکن و مدل گلوله-میله است. در ساختار لوویس و مدل گلوله-میله برخلاف مدل فضاپرکن، مرتبه پیوندها مشخص می‌باشد. همچنین در مدل ساختار لوویس برخلاف مدل‌های گلوله-میله و فضاپرکن، شمار الکترون‌های ناپیوندی بر روی اتم‌ها مشخص است. بنزین و گریس هر دو ناقطبی هستند و به همین دلیل بنزین حلال مناسبی برای گریس است. از طرفی بنزین موجب انحلال چربی‌های موجود بر دست انسان نیز می‌شود و استفاده طولانی مدت از آن به بدن آسیب می‌زند. آلکان‌ها همانند سایر هیدروکربن‌های سیرشده، تمایل چندانی به انجام واکنش‌های شیمیایی ندارند که این موضوع موجب غیر سمی بودن آن‌ها شده و استنشاق آن‌ها بر شش‌ها و بدن تأثیر چندانی ندارد مگر آن که میزان بخارهای وارد شده به شش‌ها زیاد باشد که سبب کاهش مقدار اکسیژن در هوای دم شده و موجب خفگی و مرگ می‌شوند.

(۴) فرمول شیمیایی گریس و نفتالن به ترتیب $C_{18}H_{38}$ و $C_{10}H_8$ است. نسبت شمار اتم‌های کربن به شمار اتم‌های هیدروژن در نفتالن بیشتر از گریس بوده و بر همین اساس می‌توان گفت، درصد جرمی کربن در نفتالن بیشتر از گریس است. به‌طور کلی، درصد جرمی کربن در آلکان‌ها کمتر از هیدروکربن‌های سیرنشده و هیدروکربن‌های حلقوی می‌باشد.



۸۰- کدام یک از موارد زیر درست هستند؟

- الف - آلکانی با نام ۳-اتیل-۴،۳-دی متیل هگزان می‌تواند در سوخت هواپیما وجود داشته باشد.
 - ب - فراورده واکنش به دام انداختن گاز گوگرد دی‌اکسید تولیدشده در نیروگاه، کلسیم سولفات است.
 - ج - زغال سنگ یکی از سوخت‌های فسیلی است که می‌تواند به‌عنوان سوخت، جایگزین نفت خام شود.
 - د - در برج تقطیر مخلوط‌هایی با نقطه جوش نزدیک به هم در سینی‌هایی در فواصل یکسان، مایع می‌شوند.
- (۱) «الف» و «ج» (۲) «الف» و «د» (۳) «ب» و «ج» (۴) «ب» و «د»

پاسخ: گزینه ۱

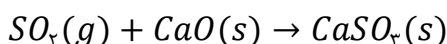
(متوسط - خط به خط - استاندارد) - صفحه ۴۷ - ۱۱۰۱

موارد «الف» و «ج» درست هستند.

بررسی موارد:

(الف) نفت سفید مخلوطی از آلکان‌هایی با ده تا پانزده کربن است که از آن برای تولید سوخت هواپیما استفاده می‌شود. حال آلکانی با نام ۳-اتیل-۴،۳-دی متیل هگزان دارای ده اتم کربن ($6+2+2$) است، پس می‌تواند در تهیه سوخت هواپیما نقش داشته باشد.

(ب) واکنش به دام انداختن گوگرد دی‌اکسید خارج شده از نیروگاه‌ها با استفاده از کلسیم اکسید به‌صورت زیر است:



همان‌طور که مشخص است، فراورده این واکنش کلسیم سولفیت ($CaSO_3$) است و نه کلسیم سولفات ($CaSO_4$).

(ج) زغال سنگ یکی از سوخت‌های فسیلی است که طول عمر ذخایر آن به ۵۰۰ سال می‌رسد. از این رو زغال سنگ می‌تواند به‌عنوان سوخت، جایگزین نفت شود.



مخلوط‌هایی با نقطه جوش نزدیک به هم از طریق سینی‌هایی که در فاصله‌های گوناگون (نه یکسان) برج قرار دارند از برج تقطیر خارج می‌شوند.



۸۱- اگر چگالی یک نمونه آلکن گازی در شرایط استاندارد برابر $1/875$ گرم بر لیتر باشد، در ساختار این ماده چند جفت الکترون پیوندی میان اتم‌های کربن وجود دارد؟ ($H = 1, C = 12: g. mol^{-1}$)

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

(متوسط - محاسباتی - سریع) - صفحه ۴۰ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۲

آلکن‌ها دسته‌ای از هیدروکربن‌های غیرحلقوی هستند که در ساختار آن‌ها تنها یک پیوند دوگانه $C = C$ وجود دارد. فرمول شیمیایی این دسته به صورت $C_n H_{2n}$ بوده که جرم مولی آن برابر $14n$ است.

پس یک مول آلکن گازی $14n$ گرم جرم و $22/4$ لیتر حجم دارد. بر این اساس با استفاده از چگالی این ماده، مقدار n را مشخص می‌کنیم:

$$d = \frac{m}{V} \Rightarrow 1/875 = \frac{14n}{22/4} = \frac{n}{1/6} \Rightarrow n = 1/875 \times 1/6 = 3$$

بنابراین در این آلکن ۳ اتم کربن وجود دارد. در هر آلکن n کربنه، $2 - n$ پیوند یگانه $C - C$ و یک پیوند دوگانه $C = C$ و در مجموع n جفت الکترون پیوندی میان اتم‌های کربن وجود دارد. پس در این آلکن نیز ۳ پیوند میان اتم‌های کربن دیده می‌شود:



۸۲- در یک آلکن نسبت شمار اتم‌های هیدروژن به شمار اتم‌های کربن برابر $2/25$ است، برای این ترکیب چند ساختار متفاوت می‌توان یافت که نام‌گذاری آن‌ها طبق قواعد آیوپاک به هگزان ختم شود؟ ($H = 1, C = 12: g. mol^{-1}$)

۸ (۴)

۷ (۳)

۶ (۲)

۵ (۱)

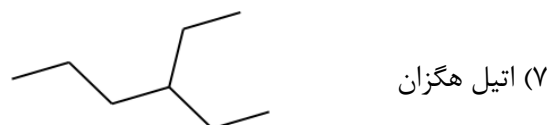
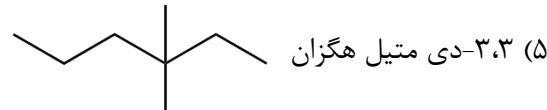
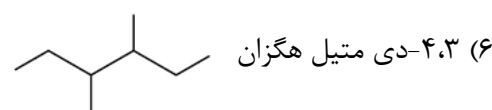
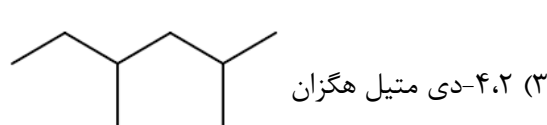
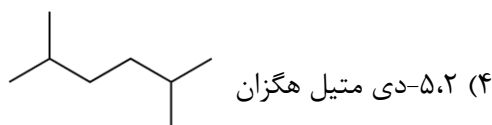
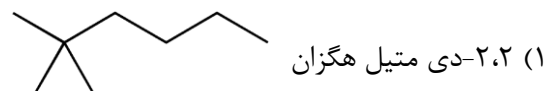
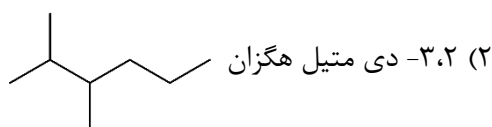
(سخت - مفهومی - زمان‌بر) - صفحه ۳۹ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۳

برای یافتن آلکن $(C_n H_{2n+2})$ مورد نظر داریم:

$$\frac{2n+2}{n} = 2/25 \Rightarrow 2n+2 = 2/25n \Rightarrow 0/25n = 2 \Rightarrow n = 8$$

پس آلکن مورد نظر ۸ کربن دارد. از آن جا که نام این آلکن به هگزان ختم می‌شود، در زنجیره اصلی آن ۶ کربن وجود دارد و دو اتم کربن دیگر یا در یک گروه اتیل قرار دارند یا در دو گروه متیل. بر این اساس، تمام ساختارهای این آلکن را مشخص می‌کنیم:



در نتیجه ۷ فرمول ساختاری متفاوت وجود دارند که نام آن‌ها به هگزان ختم می‌شود.



۸۳- کدام یک از مطالب زیر نادرست است؟

- (۱) فراورده واکنش میان گاز اتن و آب، توانایی تشکیل پیوند هیدروژنی داشته و مایعی بی‌رنگ است.
- (۲) با افزایش شمار اتم‌های کربن در میان آلکین‌ها درصد جرمی اتم‌های هیدروژن افزایش می‌یابد.
- (۳) در میان آلکان‌های راست‌زنجیر، با افزایش درصد جرمی هیدروژن، گرانی‌وی کاهش می‌یابد.
- (۴) اگر نقطه جوش هیدروکربن A بیشتر از هیدروکربن B باشد، هیدروکربن A فرارتر است.

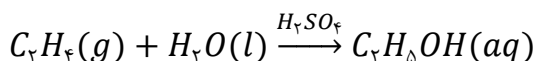
(متوسط - مفهومی - نوآورانه - استاندارد) - صفحه ۴۶ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۴

اگر نقطه جوش ماده A بیشتر از ماده B باشد، به معنای آن است که نیروی بین‌مولکولی در ماده A قوی‌تر از ماده B است. در این حالت تمایل ماده A به تبدیل شدن به گاز یا همان فراریت کمتر بوده و ماده B فرارتر خواهد بود.

بررسی سایر گزینه‌ها:

واکنش انجام گرفته به صورت زیر است:



در این واکنش اتانول تولید می‌شود که یک الکل دوکربنه، بی‌رنگ و فرار بوده و به هر نسبتی در آب حل می‌شود. به دلیل وجود هیدروژن متصل به اکسیژن در ساختار آن، این ماده را توانا در تشکیل پیوند هیدروژنی می‌کند.

با افزایش شمار اتم‌های کربن در آلکین‌ها، نسبت شمار اتم‌های کربن به شمار اتم‌های هیدروژن کاهش می‌یابد؛ پس با افزایش شمار اتم‌های کربن در آلکین‌ها، درصد جرمی کربن کاهش و درصد جرمی هیدروژن افزایش می‌یابد. همچنین در آلکان‌ها با افزایش شمار اتم‌های کربن، درصد جرمی کربن افزایش و درصد جرمی هیدروژن کاهش می‌یابد. در آلکن‌ها و سیکلوآلکان‌ها این دو درصد جرمی ثابت بوده و با افزایش اتم‌های کربن تغییر نمی‌کنند.

در آلکان‌ها با افزایش شمار اتم‌های کربن، درصد جرمی هیدروژن کاهش می‌یابد و از طرفی گرانی‌وی یا همان مقاومت در برابر جاری شدن افزایش می‌یابد. پس درصد جرمی هیدروژن و گرانی‌وی در آلکان‌ها نسبت عکس داشته و با افزایش درصد جرمی هیدروژن، گرانی‌وی کاهش می‌یابد و آلکان آسان‌تر جاری می‌شود.



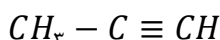
۸۴- کدام یک از مطالب زیر در مورد گاز آزاد شده از معدن زغال‌سنگ نادرست است؟

- (۱) تنها هیدروکربنی است که در ساختار آن اتم کربنی وجود دارد که به چهار اتم هیدروژن متصل است.
- (۲) آلکینی با تعداد اتم‌های هیدروژن برابر با این ماده، در ساختار خود ۶ پیوند کووالانسی یگانه دارد.
- (۳) گازی بی‌بو، بی‌رنگ و غیرسمی است که قابلیت سوختن و انفجار دارد.
- (۴) نقطه جوش آن از سایر هیدروکربن‌های گازی کمتر است.

(متوسط - مفهومی - نوآورانه - استاندارد) - صفحه ۳۵ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۲

در معدن زغال‌سنگ، گاز متان (CH_4) از زغال‌سنگ آزاد می‌شود. فرمول شیمیایی آلکین‌ها C_nH_{2n-2} است. پس آلکینی که در ساختار خود همانند متان ۴ هیدروژن داشته باشد، آلکینی ۳ کربنه به اسم پروپین است. در ساختار این ماده ۱ پیوند $C \equiv C$ ، ۱ پیوند $C - C$ و ۴ پیوند $C - H$ وجود دارد. پس در ساختار این ماده ۵ پیوند یگانه دیده می‌شود.

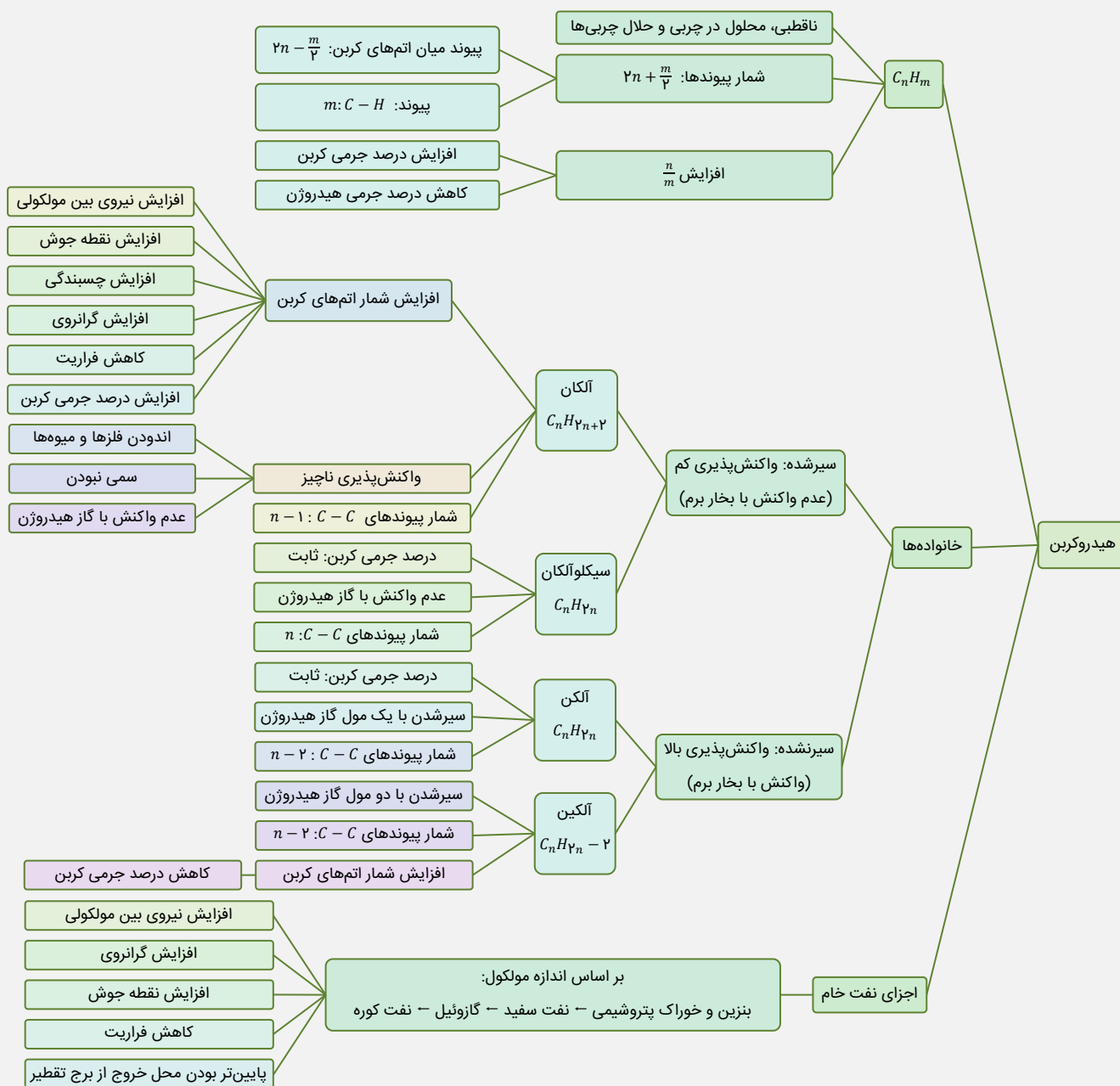


بررسی سایر گزینه‌ها:

تنها هیدروکربنی که در ساختار آن یک اتم کربن به چهار اتم هیدروژن متصل بوده، متان است. در ساختار هیدروکربن‌ها هر اتم کربن با ۴ پیوند کووالانسی به اتم‌های کربن و هیدروژن متصل است. اگر اتم کربنی به ۴ اتم هیدروژن متصل باشد، دیگر نمی‌تواند به اتم کربن دیگری متصل باشد و آن هیدروکربن تنها یک اتم کربن خواهد داشت که همان متان، اولین عضو خانواده آلکان‌ها و ساده‌ترین هیدروکربن است.

۴ (۱)

نمودار زیر خلاصه‌ای از مباحث شیمی آلی مطرح‌شده در فصل اول شیمی یازدهم است.



شب امتحان حوصله نداری دیگه درس بخونی؟! خب درساتو گوش کن!

✓ پادکست‌های شب امتحان، ویژه مرور و یادگیری
دروس و نکات مهم در لحظات آخر قبل امتحان



اسکن کن!

برای دریافت
روی لینک بزن!
digimaze.org



دیجی ماز