



گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی

آزمون ماز | پایه یازدهم



۱/۸ پایانی نیم سال اول

☐☐☐☐☐☐☐☐

۱/۸ نیم سال دوم

☐☐☐☐☐☐☐☐

ویژه دانش آموزان پایه یازدهم

دفترچه شماره ۱

پنجشنبه ۲۳ بهمن ماه ۱۴۰۴

ردیف	ماده امتحانی	تعداد سؤال	شماره سؤال		مدت زمان پاسخ گویی	ملاحظات
			از	تا		
۱	ریاضیات	۳۰	۱	۳۰	۵۵ دقیقه	۳۰ سؤال ۵۵ دقیقه

برای شباهت حداکثری به کنکور، صفحه آرای، فونت و حتی اندازه متن در تمامی آزمون های ماز، کاملاً یکسان با استاندارد دفترچه های کنکور در نظر گرفته می شود.

بودجه بندی دروس این آزمون

آمار و احتمال

احتمال

(کل درس ۲: احتمال غیر هم شانس،
درس ۳: احتمال شرطی تا ابتدای
قانون احتمال کل)
صفحه های ۴۴ تا ۵۴

سهم در کنکور: ۱ سؤال

هندسه ۲

تبدیل های هندسی و کاربردها

(تبدیل های هندسی از ابتدای بازتاب
تا ابتدای تجانس)
صفحه های ۳۵ تا ۴۳

سهم در کنکور: —

حسابان ۱

تابع

(اعمال روی توابع)
توابع نمایی و لگاریتم (تابع نمایی،
تابع لگاریتمی و لگاریتم)
صفحه های ۶۳ تا ۸۵

سهم در کنکور: ۳ سؤال

شیمی ۲

در پی غذای سالم

(از ابتدای فصل تا انتهای آنتالپی پیوند
راهی برای تعیین ΔH واکنش)
صفحه های ۵۱ تا ۷۲

سهم در کنکور: ۲ سؤال

فیزیک ۲

جریان الکتریکی

ومدارهای جریان مستقیم
(از عوامل موثر بر مقاومت الکتریکی
تا ابتدای ترکیب مقاومت ها)
صفحه های ۵۱ تا ۷۰

سهم در کنکور: ۲ سؤال

استراتژی و هدف گذاری با ماز در سال تحصیلی ۱۴۰۴-۰۵

اگر قصد داری از نیمه دوم سال شروع کنی و با موفقیت همه رو شگفت زده کنی، این برنامه برای توئه!

گام اول (گرم کردن با آزمون ۹ بهمن):

با استفاده از مطالعه ای که برای امتحانات نیمسال اول داشته اید، در آزمون ۹ بهمن شرکت کنید و فقط به دید تمرین برای شروع (گرم کردن اولیه) به این آزمون نگاه کنید.

گام دوم (شروع پرانرژی در بهمن و اسفند):

در آزمون های ۲۳ بهمن، ۷ اسفند و ۲۱ اسفند، به مطالب سه هشتم ابتدایی نیمسال دوم مسلط می شوید.

گام سوم (جبران نیمسال اول در فرصت طلایی نوروز):

از ۲۲ اسفند تا ۶ فروردین، به جبران، مرور و جمع بندی نیمسال اول می پردازید و با آزمون ۶ فروردین به مطالب نیمسال اول مسلط می شوید.

گام چهارم (تکمیل یادگیری نیمسال دوم بعد از ایام نوروز):

از ۷ فروردین تا ۲۴ اردیبهشت، به مطالب پنج هشتم پایانی نیمسال دوم مسلط می شوید و با آمادگی کامل به استقبال امتحانات خرداد ماه می روید.

گام پنجم (بهترین پایان برای سال تحصیلی):

تکمیل یادگیری و جمع بندی کامل برای ورود پر قدرت به سال تحصیلی بعد؛ آزمون جامع کل پایه در ۲۸ خردادماه



۱- اگر $f = \left\{ (1, 2), (-1, 4), (0, 6), (3, -2), (5, \frac{1}{2}) \right\}$ و $g = \{ (-1, a), (0, -2), (5, -4), (2, 7) \}$ ، آن گاه به ازای کدام مقدار a ، مجموع اعضای برد تابع $f \cdot g$ برابر ۱۰ خواهد بود؟

- (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۵ (۴) ۷

۲- کدام یک از گزینه های زیر درست است؟

(۱) اگر f و g دو تابع مفروض بوده و $g(4) = 7$ و $f(7) = 5$ و $\text{fog}(4) = 35$ ، آن گاه

(۲) اگر $f(x) = \sqrt{x-1}$ و $f(x) = x^2 + 3$ ، $g(x) = x^2 + 3$ ، آن گاه $D_{\text{gof}} = \mathbb{R}$

(۳) نمودار توابع $f(x) = 2^x$ و $g(x) = 3^x$ فقط در یک نقطه، یکدیگر را قطع می کنند.

(۴) برد تابع $f(x) = \log_a^x$ که در آن $a > 0$ و $a \neq 1$ است، بازه $(0, +\infty)$ است.

۳- اگر f تابعی خطی باشد به طوری که تساوی $f(2x+1) = 4x+2+f(1)-f(x+1)$ برای آن برقرار باشد، آن گاه حاصل $f(4)+f(7)$ کدام است؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۱۴ (۳) ۱۶ (۴) ۱۸

۴- اگر $f(x) = \sqrt[4]{24-2x-x^2}$ و $g(x) = \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor$ ، آن گاه دامنه تابع $h(x) = \frac{(ff)(x)}{g(x)-1}$ شامل چند عدد صحیح است؟

- (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴) ۱۱

۵- اگر $f(x) = 2x^2 + 4x^2 - 2x - 1$ و $g(x) = \sqrt{x}$ باشد، آن گاه معادله $\text{gof}(x) = g^2(x) - 1$ چند جواب حقیقی دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) صفر

۶- اگر $f\left(\frac{3x}{x+1}\right) = \frac{2x+1}{x+2}$ و $g(x) = \left[-x - \frac{2}{3}\right]$ باشد، حاصل $\text{fog}(-\sqrt{3})$ کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است)

- (۱) ۰/۶ (۲) ۰/۸ (۳) ۰/۷ (۴) ۰/۵

۷- اگر توابع $g(x) = 4x - 1$ و $f = \{ (1, 2), (2, 3), (3, -1), (-1, 1) \}$ و $\text{fog}(x) = 16x^2 + 12x + 7$ مفروض باشند، در ضابطه تابع چند جمله ای $\text{gof}(x)$ ، مجموع ضرایب کدام است؟

- (۱) ۵۳ (۲) ۶۳ (۳) ۵۷ (۴) ۶۷

محل انجام محاسبات



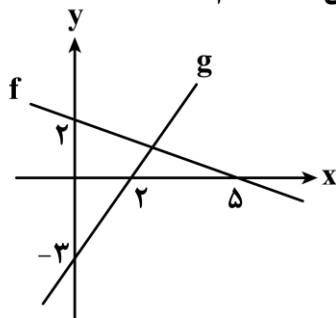
۸- اگر $f(x) = -4x^2 + 8x$ و $g(x) = 3^x$ باشد، آن گاه در تابع $y = g \circ f(x)$ ، میانگین کوچک ترین و بزرگ ترین عدد صحیح موجود در برد تابع کدام است؟

- (۱) ۴۰/۵ (۲) ۴۱ (۳) ۳۲/۵ (۴) ۳۲

۹- اگر $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, -1), (-1, 1)\}$ و $g = \{(1, 3), (2, -1), (3, 1), (-1, 2)\}$ باشد، تابع $f^{-1} \circ (f + g)$ شامل چند زوج مرتب است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۰- در شکل مقابل، نمودار توابع f و g رسم شده است. اگر $\frac{f \circ g(a)}{(f \cdot g)(a)} = \frac{1}{a}$ باشد، آن گاه a کدام است؟



- (۱) ۲
(۲) ۳
(۳) ۴
(۴) ۶

۱۱- اگر $(f + g)(x) = 2x^2 + 4x - 1$ و $(f - g)(x) = 2x - 21$ ، آن گاه حاصل ضرب جواب های معادله $(2g - f)(x) = 35$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۴ (۴) -۴

۱۲- توابع $f(x) = |2x - 4|$ و $g(x) = |6 - 2x|$ مفروض اند. روی بزرگ ترین بازه ای که تابع $f + g$ تابع ثابت است، ضابطه $g \circ f(x)$ کدام است؟

- (۱) $-4x + 14$ (۲) $4x - 14$ (۳) $4x - 12$ (۴) $-4x + 12$

محل انجام محاسبات

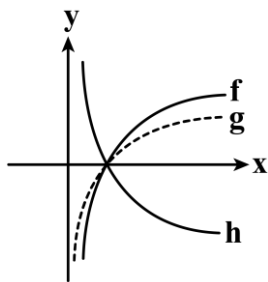
۱۳- اگر $f(x) = \frac{4x+5}{x^2+4nx+4n^2}$ و $g(x) = \frac{3x-1}{x^2+(3m+1)x+3m}$ و $D_{f.g} = \mathbb{R} - \{-1\}$ باشد، مقدار $m+n$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $-\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{5}{6}$ (۴) $-\frac{5}{6}$

۱۴- جواب معادله $12^{1^x} - 11^x = 20$ در کدام بازه قرار دارد؟

- (۱) $(0, 1)$ (۲) $(1, 2)$ (۳) $(2, 3)$ (۴) $(3, 4)$

۱۵- نمودار توابع $f(x) = \log_a^x$ ، $g(x) = \log_b^x$ و $h(x) = \log_c^x$ به صورت مقابل است. کدام گزینه زیر صحیح است؟

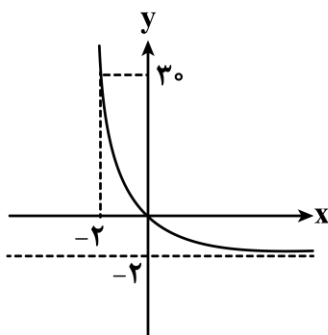


- (۱) $b < a < c$
(۲) $c < b < a$
(۳) $c < a < b$
(۴) $a < b < c$

۱۶- حاصل عبارت $A = \log_5^a + \log_6^{\frac{1}{216}} - \log_{\frac{1}{v}}^{\sqrt[3]{49}}$ برابر $-\frac{1}{3}$ است. مقدار a کدام است؟

- (۱) $5\sqrt{5}$ (۲) ۵ (۳) $\sqrt{5}$ (۴) ۲۵

۱۷- نمودار تابع $f(x) = a^{2x-1} - b$ به شکل مقابل است. فاصله نقطه‌ای به مختصات $A(2a, b)$ از مبدأ مختصات کدام است؟



- (۱) $\sqrt{3}$
(۲) $\sqrt{5}$
(۳) ۲
(۴) ۳

محل انجام محاسبات

۱۸- دامنه تابع $y = \sqrt{\log_2^{(x-2)} - \log_2^{(6-x)}}$ شامل چند عدد صحیح است؟

- (۱) ۵ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۹- تابع $f(x) = 5^{2x+3} \times k^{-x+1}$ به گونه ای است که با افزایش مقادیر x ، مقادیر تابع f نیز افزایش می یابند، در این صورت k چند مقدار صحیح می تواند اختیار کند؟

- (۱) ۲۵ (۲) ۲۴ (۳) ۵ (۴) ۴

۲۰- اگر $f(x) = \frac{2^x + 3}{2^x + 6}$ باشد، برد تابع f به صورت $R_f = (a, b)$ خواهد بود. حاصل $a + b$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{5}{2}$ (۳) ۳ (۴) $\frac{3}{2}$

۲۱- دایره $C(O, 5)$ را تحت بردار $\vec{V}$ انتقال می دهیم تا به دایره C' برسیم. اگر نسبت کمترین فاصله نقاط دو دایره به بیشترین فاصله نقاط دو دایره از هم برابر $\frac{1}{6}$ باشد، آنگاه طول بردار $\vec{V}$ برابر کدام است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۲ (۳) ۱۴ (۴) ۱۵

۲۲- دو نقطه $A(3, -1)$ و $B(1, 1)$ بازتاب یکدیگر نسبت به خط d هستند. کدام نقطه نمی تواند نقطه ثابت این تبدیل باشد؟

- (۱) $(3, 1)$ (۲) $(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$ (۳) $(-1, -3)$ (۴) $(0, 2)$

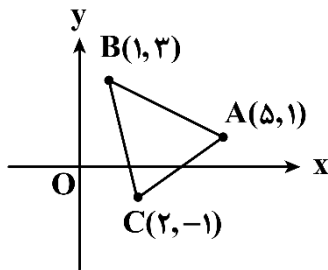
۲۳- مثلث $\triangle ABC$ ($\hat{B} = 90^\circ, AB = \sqrt{5}, BC = 2$) را به مرکز A با زاویه 90° در خلاف جهت حرکت عقربه های ساعت دوران می دهیم. تا به مثلث $\triangle A'B'C'$ برسیم. طول پاره خط CC' برابر کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{5}$ (۲) $3\sqrt{3}$ (۳) $5\sqrt{2}$ (۴) $3\sqrt{2}$

محل انجام محاسبات



۲۴- در مثلث $\triangle ABC$ بازتاب نقطه B نسبت به نیمساز داخلی زاویه $\hat{A}$ نقطه B' و بازتاب B' نسبت به نیمساز خارجی زاویه $\hat{A}$ نقطه B'' می باشد. طول پاره خط CB'' برابر کدام است؟



(۱) $\sqrt{5}$

(۲) $\sqrt{7}$

(۳) ۷

(۴) ۵

۲۵- D نقطه همرسی نیمسازهای زوایای داخلی مثلث $\triangle ABC$ با اضلاع $AB=4$ ، $AC=3$ و $BC=5$ است. اگر $\triangle A'B'C'$ انتقال یافته مثلث $\triangle ABC$ تحت بردار $\overrightarrow{AD}$ باشد، آنگاه مساحت ناحیه مشترک دو مثلث $\triangle ABC$ و تصویرش تحت این انتقال، برابر کدام است؟

(۱) $\frac{24}{25}$

(۲) $\frac{25}{24}$

(۳) $\frac{25}{12}$

(۴) ۲

۲۶- در فضای نمونه‌ای $S = \{a, b, c, d\}$ ، اگر $P(\{a, b\}) = \frac{9}{40}$ و $P(\{a, c\}) = \frac{7}{40}$ و $P(\{b, c\}) = \frac{3}{40}$ باشد، $P(d)$ کدام است؟

(۱) $\frac{11}{40}$

(۲) $\frac{17}{40}$

(۳) $\frac{21}{40}$

(۴) $\frac{23}{40}$

۲۷- جعبه‌ای محتوی ۹ کارت به شماره‌های ۱ تا ۹ است. دو کارت باهم از این جعبه خارج می‌کنیم. اگر مجموع دو کارت مضرب ۵ باشد، احتمال آن که هر دو عدد فرد باشند، کدام است؟

(۱) $\frac{2}{5}$

(۲) $\frac{2}{3}$

(۳) $\frac{1}{4}$

(۴) $\frac{3}{4}$

محل انجام محاسبات

۲۸- علی و احمد عضو تیم یازده نفره فوتبال مدرسه شان هستند که در آن قد هیچ دو نفری یکسان نیست. اگر بدانیم علی از احمد قدبلندتر است، احتمال آن که علی از نظر بلندی قد، نفر هشتم تیم باشد کدام است؟ (۷ نفر از علی قدبلندتر هستند).

$$\begin{array}{llll} \frac{2}{15} & (1) & \frac{2}{55} & (2) \\ \frac{4}{15} & (3) & \frac{3}{55} & (4) \end{array}$$

۲۹- فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی برابر $S = \{a, b, c, d\}$ است. اگر $P(a) = 2P(b) = 3P(c)$ و $3P(d) = 2P(a)$ باشد، مقدار $P(\{a, b\} | \{a, c, d\})$ کدام است؟

$$\begin{array}{llll} \frac{1}{2} & (1) & \frac{1}{3} & (2) \\ \frac{2}{5} & (3) & \frac{4}{15} & (4) \end{array}$$

۳۰- سه جعبه سیب داریم. در جعبه اول ۵ سیب قرمز و ۴ سیب زرد، در جعبه دوم فقط تعدادی سیب قرمز و در جعبه سوم دو سیب قرمز و دو سیب زرد داریم. از جعبه اول به تصادف یک سیب برداشته داخل جعبه دوم می‌اندازیم، سپس از جعبه دوم سیبی برداشته داخل جعبه سوم می‌اندازیم و سپس از جعبه سوم سیبی برمی‌داریم. احتمال آن که هر سه سیب برداشته شده قرمز باشند، کدام است؟

$$\begin{array}{llll} \frac{1}{3} & (1) & \frac{2}{5} & (2) \\ \frac{2}{3} & (3) & \frac{3}{5} & (4) \end{array}$$

محل انجام محاسبات



گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی

آزمون ماز پایه یازدهم



پایانی نیم سال اول $\frac{1}{8}$

☐☐☐☐☐☐☐☐

نیم سال دوم $\frac{1}{8}$

☐☐☐☐☐☐☐☒

ویژه دانش آموزان پایه یازدهم

دفترچه شماره ۲

پنجشنبه ۲۳ بهمن ماه ۱۴۰۴

ردیف	ماده امتحانی	تعداد سؤال	شماره سؤال		مدت زمان پاسخ گویی	ملاحظات
			از	تا		
۱	فیزیک	۲۰	۳۱	۵۰	۲۵ دقیقه	۴۰ سؤال
۲	شیمی	۲۰	۵۱	۷۰	۲۰ دقیقه	۴۵ دقیقه

برای شباهت حداکثری به کنکور، صفحه آرای، فونت و حتی اندازه متن در تمامی آزمون های ماز، کاملاً یکسان با استاندارد دفترچه های کنکور در نظر گرفته می شود.

بودجه بندی دروس این آزمون

آمار و احتمال

احتمال

(کل درس ۲: احتمال غیر هم شانس،
درس ۳: احتمال شرطی تا ابتدای
قانون احتمال کل)
صفحه های ۴۴ تا ۵۴

سهم در کنکور: ۱ سؤال

هندسه ۲

تبدیل های هندسی و کاربردها

(تبدیل های هندسی از ابتدای بازتاب
تا ابتدای تجانس)
صفحه های ۳۵ تا ۴۳

سهم در کنکور: —

حسابان ۱

تابع

(اعمال روی توابع)
توابع نمایی و لگاریتم (تابع نمایی،
تابع لگاریتمی و لگاریتم)
صفحه های ۶۳ تا ۸۵

سهم در کنکور: ۳ سؤال

شیمی ۲

در پی غذای سالم

(از ابتدای فصل تا انتهای آنتالپی پیوند
راهی برای تعیین ΔH واکنش)
صفحه های ۵۱ تا ۷۲

سهم در کنکور: ۲ سؤال

فیزیک ۲

جریان الکتریکی

ومدارهای جریان مستقیم
(از عوامل موثر بر مقاومت الکتریکی
تا ابتدای ترکیب مقاومت ها)
صفحه های ۵۱ تا ۷۰

سهم در کنکور: ۲ سؤال

استراتژی و هدف گذاری با ماز در سال تحصیلی ۱۴۰۴-۰۵

اگر قصد داری از نیمه دوم سال شروع کنی و با موفقیت همه رو شگفت زده کنی، این برنامه برای توئه!

گام اول (گرم کردن با آزمون ۹ بهمن):

با استفاده از مطالعه ای که برای امتحانات نیمسال اول داشته اید، در آزمون ۹ بهمن شرکت کنید و فقط به دید تمرین برای شروع (گرم کردن اولیه) به این آزمون نگاه کنید.

گام دوم (شروع پرانرژی در بهمن و اسفند):

در آزمون های ۲۳ بهمن، ۷ اسفند و ۲۱ اسفند، به مطالب سه هشتم ابتدایی نیمسال دوم مسلط می شوید.

گام سوم (جبران نیمسال اول در فرصت طلایی نوروز):

از ۲۲ اسفند تا ۶ فروردین، به جبران، مرور و جمع بندی نیمسال اول می پردازید و با آزمون ۶ فروردین به مطالب نیمسال اول مسلط می شوید.

گام چهارم (تکمیل یادگیری نیمسال دوم بعد از ایام نوروز):

از ۷ فروردین تا ۲۴ اردیبهشت، به مطالب پنج هشتم پایانی نیمسال دوم مسلط می شوید و با آمادگی کامل به استقبال امتحانات خرداد ماه می روید.

گام پنجم (بهترین پایان برای سال تحصیلی):

تکمیل یادگیری و جمع بندی کامل برای ورود پر قدرت به سال تحصیلی بعد؛ آزمون جامع کل پایه در ۲۸ خردادماه



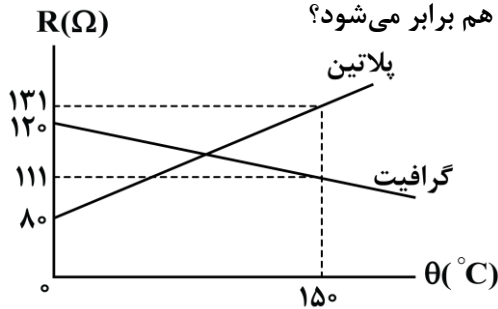
۳۱- با کاهش دمای یک مقاومت الکتریکی آن و رسانایی الکتریکی آن افزایش می یابد.

- (۱) رسانا - کاهش (۲) رسانا - افزایش (۳) نیم رسانا - کاهش (۴) نیم رسانا - افزایش

۳۲- دمای یک رسانای فلزی با ضریب دمایی مقاومت ویژه $4 \times 10^{-3} \text{ K}$ را 20°C افزایش می دهیم. مقاومت الکتریکی این رسانا چند درصد افزایش می یابد؟

- (۱) $0/4$ (۲) $0/8$ (۳) 4 (۴) 8

۳۳- شکل زیر، نمودار مقاومت الکتریکی یک قطعه گرافیتی و یک قطعه پلاتینی را در یک محدوده دمایی مشخص نشان می دهد. در دمای چند درجه سلسیوس مقاومت الکتریکی دو قطعه با هم برابر می شود؟



- (۱) ۱۰۰
(۲) ۱۱۰
(۳) ۱۲۰
(۴) ۱۲۵

۳۴- در ماشین های چمن زنی برقی، برای مسافت های حداکثر تا 35m از سیم های مسی به قطر $0/8\text{mm}$ و برای مسافت های طولانی تر از سیم های ضخیم تر به قطر $0/12\text{cm}$ استفاده می کنند. در این صورت، مقاومت الکتریکی سیم ۹۰ متری ماشین چمن زنی، چند برابر مقاومت الکتریکی سیم ۲۰ متری همین ماشین چمن زنی است؟ (دمای سیم ها را 20°C فرض کنید).

- (۱) ۲ (۲) ۲۰۰ (۳) ۴۰۰ (۴) ۴

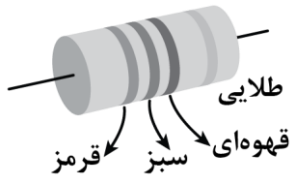
۳۵- مقاومت الکتریکی رسانای A، ۹ برابر مقاومت الکتریکی رسانای B است. اگر مقاومت ویژه رسانای B، ۴ برابر مقاومت ویژه رسانای A باشد، با ثابت ماندن جرم و دمای رسانا، رسانای B را آن قدر می کشیم تا مقاومت الکتریکی آن با مقاومت الکتریکی رسانای A برابر شود. در این حالت طول رسانای B چند برابر طول رسانای A است؟ (قطر مقطع رساناها در ابتدا یکسان است).

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) ۳ (۳) $\frac{1}{12}$ (۴) ۱۲

محل انجام محاسبات

۳۶- اندازه مقاومت ترکیبی شکل زیر، چه تعداد از مقادیر زیر بر حسب اهم می تواند باشد؟

(سبز = ۵، قرمز = ۲، قهوه ای = ۱ و طلایی = ۰.۵٪)



۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

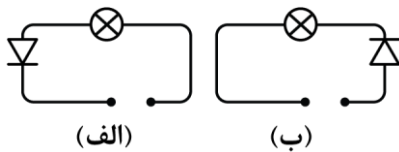
الف - ۲۴۰

ب - ۲۵۰

ج - ۲۵۵

د - ۲۶۰

۳۷- در مدارهای «الف» و «ب» به ترتیب از راست به چپ کدام باتری ها را قرار دهیم تا در هر دو مدار، لامپ روشن شود؟



(الف)

(ب)

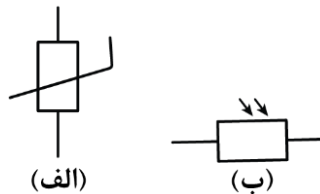
(۱) - + - , - + -

(۲) - - + , - + -

(۳) - + - , + - -

(۴) - - + , + - -

۳۸- شکل های «الف» و «ب» به ترتیب از راست به چپ نماد و هستند.



(الف)

(ب)

(۱) ترمیستور - LDR

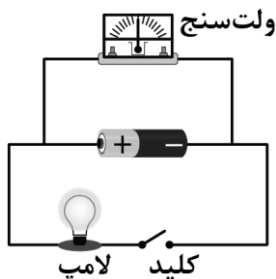
(۲) ترمیستور - LED

(۳) دیود - LDR

(۴) دیود - LED

۳۹- در مدار شکل زیر، ولت سنج ایده آل، قبل از بستن کلید، عدد ۱۶۷ و بعد از بستن کلید، عدد ۱۲۷ را نشان می دهد.

مقاومت الکتریکی لامپ، چند برابر مقاومت داخلی باتری است؟



(۱) ۲

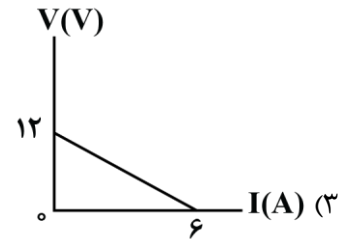
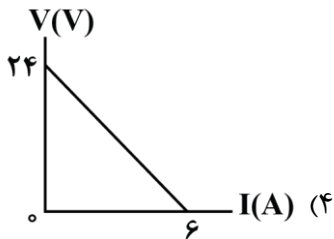
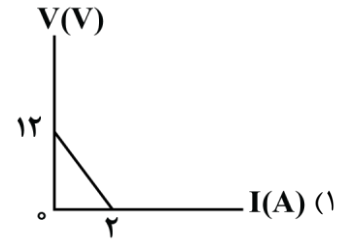
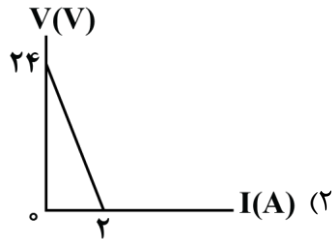
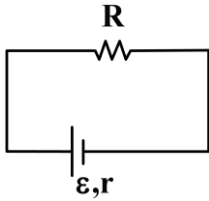
(۲) ۴

(۳) ۱

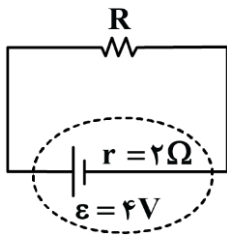
(۴) ۳

محل انجام محاسبات

۴۰- در مدار شکل زیر، توان خروجی باتری به ازای جریان $I_1 = 2A$ برابر با $16W$ و به ازای جریان $I_2 = 2/5A$ برابر با $17/5W$ است. در کدام گزینه نمودار اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر این باتری بر حسب جریان گذرنده از آن به درستی آمده است؟



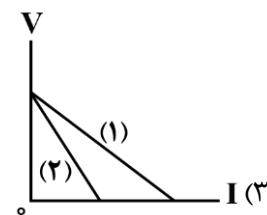
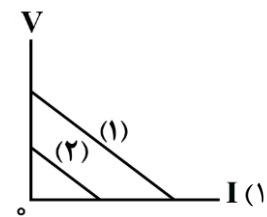
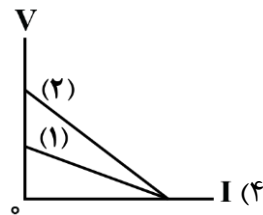
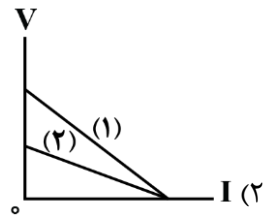
۴۱- در مدار شکل زیر، ۷ ساعت طول می کشد تا باتری 3500 میلی آمپر ساعتی به طور کامل تخلیه شود. مقاومت الکتریکی R چند اهم است؟



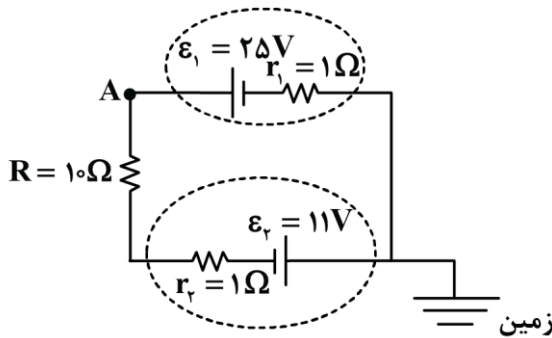
- (۱) ۷
- (۲) ۶
- (۳) ۵
- (۴) ۴

محل انجام محاسبات

۴۲- اگر باتری نو، شماره (۱) و باتری فرسوده، شماره (۲) باشد، نمودار ولتاژ - جریان برای یک باتری در حالت نو و فرسوده در کدام گزینه به درستی رسم شده است؟



۴۳- در مدار شکل مقابل، پتانسیل الکتریکی نقطه A چند ولت است؟



(۱) ۲۶

(۲) ۲۴

(۳) ۲۲

(۴) ۲۸

۴۴- یک باتری با نیروی محرکه ۱۲V و مقاومت داخلی ۱Ω در اختیار داریم. یک بار یک لامپ با مقاومت الکتریکی ۳Ω و بار دیگر لامپی با مقاومت الکتریکی ۵Ω را به دو سر این باتری متصل می کنیم. اختلاف توان خروجی از این باتری در دو حالت چند وات است؟

(۴) ۷

(۳) ۶

(۲) ۵

(۱) ۴

محل انجام محاسبات

۴۵- شکل زیر، نمودار توان خروجی یک باتری را بر حسب مقاومت خارجی متصل به آن در یک مدار تک حلقه ساده نشان می‌دهد. با توجه به این نمودار، کدام گزینه درست است؟

$P(W)$



(۱) با افزایش مقاومت خارجی مدار، همواره توان خروجی باتری، افزایش می‌یابد.

(۲) با افزایش مقاومت خارجی مدار، همواره توان خروجی باتری، کاهش می‌یابد.

(۳) هرچه مقدار مقاومت خارجی مدار، به مقدار مقاومت داخلی باتری، نزدیک‌تر باشد، توان خروجی باتری، بیشتر است.

(۴) هرچه مقدار مقاومت خارجی مدار، به مقدار مقاومت داخلی باتری، نزدیک‌تر باشد، توان خروجی باتری، کمتر است.

۴۶- روی یک کتری برقی، اعداد $220V$ و $2200W$ نوشته شده است و این کتری را به اختلاف پتانسیل الکتریکی $220V$ وصل می‌کنیم. اگر قیمت هر کیلووات ساعت برق مصرفی برابر با 100 تومان باشد، بهای برق مصرفی این کتری در مدت 2 ساعت چند تومان است؟

(۴) 4400

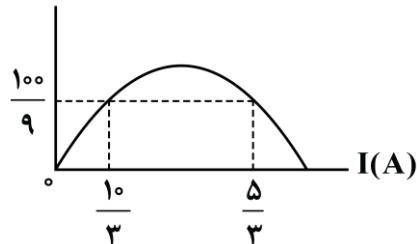
(۳) 2200

(۲) 440

(۱) 220

۴۷- نمودار توان خروجی یک باتری در یک مدار تک حلقه بر حسب جریان عبوری از آن، مطابق شکل زیر است. با توجه به این نمودار، به ازای جریان آمپر، توان خروجی باتری، بیشینه و برابر با وات است. (به ترتیب

$P(W)$



از راست به چپ)

(۱) 10 و $2/5$

(۲) $12/5$ و $2/5$

(۳) 20 و 5

(۴) 25 و 5

۴۸- بر روی یک لامپ، اعداد $200V$ و $100W$ نوشته شده است. در شرایطی که جریان عبوری از این لامپ برابر با $4A$ است، توان مصرفی لامپ چند وات است؟

(۴) 80

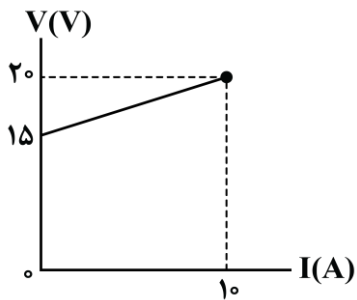
(۳) 64

(۲) 36

(۱) 20

محل انجام محاسبات

۴۹- نمودار اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر یک باتری بر حسب جریان عبوری از آن مطابق شکل زیر است. این باتری انرژی در مدار است و اگر آن را به طور جداگانه‌ای به یک مقاومت $5/5$ اهمی وصل کنیم، جریان



آمپر از آن عبور می‌کند.

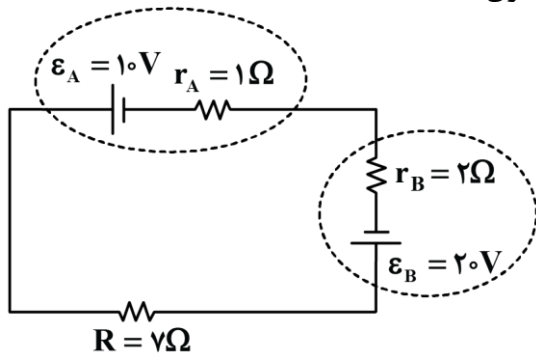
(۱) تولیدکننده - $2/5$

(۲) تولیدکننده - $1/5$

(۳) مصرف‌کننده - $1/5$

(۴) مصرف‌کننده - $2/5$

۵۰- در مدار شکل زیر، توان ورودی باتری A چند برابر توان خروجی باتری B است؟



(۱) $\frac{1}{2}$

(۲) $\frac{5}{9}$

(۳) $\frac{11}{18}$

(۴) $\frac{2}{3}$

محل انجام محاسبات



۵۱- کدام یک از مطالب زیر نادرست است؟

- (۱) از بین هوای ظهر و شب، نمونه هوای B می تواند نشان دهنده هوا در هنگام ظهر باشد.
- (۲) با افزایش دمای یک نمونه آب، به طوری که تبخیر نشود، انرژی گرمایی آن افزایش می یابد.
- (۳) جنبش نامنظم ذرات سازنده روغن در مقایسه با ذرات سازنده چربی در دمای اتاق، بیشتر است.
- (۴) با دادن گرمای یکسان به دو نمونه آب و روغن زیتون با جرم برابر، تغییر دمای نمونه روغن زیتون کمتر خواهد بود.

۵۲- کدام یک از مطالب زیر در مورد واکنش گرماگیر $H_2(g) + I_2(s) \rightarrow 2HI(g)$ درست است؟

- (۱) با انجام این واکنش میزان آنتالپی محیط اطراف، کاهش می یابد.
 - (۲) در معادله شیمیایی این واکنش نماد Q در سمت راست معادله قرار می گیرد.
 - (۳) با انجام این واکنش در دما و فشار ثابت، در یک ظرف با پیستون متحرک، حجم ظرف ثابت می ماند.
 - (۴) در دما و حجم ثابت، گرمای مبادله شده از مصرف یک مول گاز هیدروژن معادل آنتالپی این واکنش است.
- ۵۳- با انداختن یک گلوله آلومینیومی به جرم ۵۰ گرم و دمای 120°C در یک کیلوگرم آب با دمای 5°C ، دمای نهایی گلوله برابر چند کلون خواهد بود؟ ($c_{\text{آب}} = 4/2 \text{ J} \cdot \text{g}^{-1} \cdot ^\circ\text{C}^{-1}$, $c_{\text{آلومینیم}} = 0/9$)

- (۱) ۲۷۹/۲ (۲) ۲۸۰/۴ (۳) ۲۸۱/۶ (۴) ۲۷۹/۸

۵۴- چند مورد از مطالب زیر در مورد یخچال صحرایی درست است؟

- الف - جنس بدنه داخلی و خارجی یکسان است.
- ب - میان بدنه داخلی و خارجی همانند درپوش مرطوب است.
- ج - تبخیر آب در بدنه داخلی، عامل سرد شدن درون یخچال است.
- د - گرمای تبخیر آب از یخچال، از محیط اطراف یخچال تأمین می شود.

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۵۵- کدام مورد نادرست است؟

- (۱) ΔH واکنش تبدیل گاز اوزون به گاز اکسیژن با ΔH واکنش سوختن متان، هم علامت است.
- (۲) بخش عمده گرمای آزاد شده در واکنش های شیمیایی گرماده، بخشی از انرژی پتانسیل واکنش دهنده ها است.
- (۳) با انجام واکنش گرماگیر تجزیه دی نیتروژن تترا اکسید به نیتروژن دی اکسید، رنگ قهوه ای مخلوط از بین می رود.
- (۴) آنتالپی یک واکنش معادل تفاوت آنتالپی مواد واکنش دهنده و فراورده آن واکنش است و با Q_p نیز نمایش داده می شود.

۵۶- اگر دمای ۴۰۰ گرم آب A و ۱۰۰ گرم آب B به ترتیب برابر 20°C و 80°C باشد، کدام یک از مطالب زیر نادرست است؟

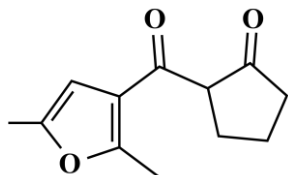
- (۱) با مخلوط کردن این دو آب، دمای نهایی به دمای اولیه آب B نزدیک تر است.
- (۲) میانگین انرژی جنبشی ذرات در نمونه B بیشتر از نمونه A است.
- (۳) ظرفیت گرمایی نمونه A بیشتر از ظرفیت گرمایی نمونه B است.
- (۴) گرمای ویژه این دو نمونه آب با هم برابر نیست.

محل انجام محاسبات

۵۷- اگر با دادن گرمای حاصل از سوختن کامل ۳/۹ گرم اتین به ۱۵ کیلوگرم طلا، دمای آن 100°C افزایش یابد، ΔH واکنش موازنه شده سوختن اتین برابر با چند کیلوژول است؟ ($H = 1, C = 12: g. mol^{-1}$ و $c_{\text{طلا}} = 0.125 J. g^{-1}. ^{\circ}\text{C}^{-1}$)

- (۱) -2500 (۲) -2400 (۳) -1250 (۴) -1200

۵۸- کدام یک از مطالب زیر در مورد ترکیبی با ساختار مقابل، نادرست است؟



- (۱) در هر مولکول آن، ۶ جفت الکترون ناپیوندی وجود دارد.
 (۲) دارای یک گروه عاملی اتری و دو گروه عاملی کتونی است.
 (۳) فرمول مولکولی ترکیب موردنظر به صورت $C_{12}H_{16}O_3$ است.
 (۴) شمار پیوندهای اشتراکی در این ترکیب برابر با ۳۴ عدد است.

۵۹- اگر در واکنش ماده A با از استفاده شود، مقدار گرمای مبادله شده می یابد.

- (۱) گرماده - الماس - گرافیت - افزایش
 (۲) گرماگیر - الماس - گرافیت - کاهش
 (۳) گرماگیر - الماس - گرافیت - کاهش
 (۴) گرماده - الماس - گرافیت - کاهش

۶۰- کدام موارد زیر نادرست هستند؟

- الف - واکنش شکستن پیوندهای اشتراکی موجود در یک مولکول، واکنشی گرماگیر است.
 ب - مقدار میانگین آنتالپی پیوند $C = C$ دو برابر مقدار میانگین آنتالپی پیوند $C - C$ است.
 ج - برای پیوندهای $O - O, O - H, C - H$ و $C \equiv O$ به کار بردن میانگین آنتالپی پیوند مناسب تر است.
 د - با افزایش خاصیت نافلزتی هالوژن ها، مقدار آنتالپی پیوند این عناصر با اتم هیدروژن افزایش می یابد.
 (۱) «الف» و «ج» (۲) «الف» و «د» (۳) «ب» و «ج» (۴) «ب» و «د»

۶۱- در واکنش $N_2(g) + 3H_2(g) \rightarrow 2NH_3(g)$ به ازای تولید ۵/۱ گرم گاز آمونیاک، چند کیلوژول گرما آزاد می شود؟ ($H = 1, N = 14: g. mol^{-1}$)

پیوند	$N - H$	$H - H$	$N \equiv N$
میانگین آنتالپی پیوند ($kJ. mol^{-1}$)	۳۹۱	۴۳۲	۹۴۰

- (۱) $13/5$ (۲) 33 (۳) 27 (۴) $16/5$

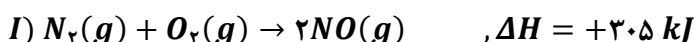
محل انجام محاسبات

۶۲- کدام یک از مطالب زیر درست است؟

- (۱) گروه‌های عاملی آرایش منظمی از مولکول‌ها هستند که به ترکیب‌های آلی خواص فیزیکی و شیمیایی ویژه‌ای می‌بخشند.
 (۲) مقدار گرمای مبادله شده در واکنش « $H_2 + Cl_2 \rightarrow 2H + 2Cl$ » کمتر از واکنش « $2H + 2Cl \rightarrow 2HCl$ » است.
 (۳) به کار بردن آنتالپی پیوند برای تعیین آنتالپی واکنش تولید آب از عناصر سازنده در دما و فشار اتاق مناسب است.
 (۴) مقدار آنتالپی پیوند همه پیوندهای اشتراکی یگانه از مقدار همه پیوندهای اشتراکی دوگانه کمتر است.

۶۳- مقدار ΔH واکنش $C_2H_4 + H_2 \rightarrow CH_4$ پس از موازنه برابر ۹۶- کیلوژول است. اگر طی این واکنش ۳ گرم گاز هیدروژن مصرف شود، کیلوژول گرما می‌شود. ($H = 1, C = 12: g.mol^{-1}$)

- (۱) ۴۸ - مصرف (۲) ۳۶ - تولید (۳) ۴۸ - تولید (۴) ۳۶ - مصرف

۶۴- واکنش سوختن گازهای N_2 و NO به صورت مقابل است:

اگر مجموع آنتالپی پیوندهای $N=O$ و $N-O$ برابر با ۸۴۰ کیلوژول بر مول باشد، آنتالپی پیوند $O=O$ برابر با چند کیلوژول بر مول است؟ (آنتالپی پیوند $N \equiv N$ برابر 940 kJ.mol^{-1} است.)



- (۱) ۴۲۵ (۲) ۴۴۵ (۳) ۴۶۵ (۴) ۴۹۵

۶۵- اگر ۴۴۸۰ میلی لیتر گاز متان در شرایط استاندارد با دریافت ۲۴۷/۲ کیلوژول گرما طبق واکنش زیر برخی از پیوندهای موجود در آن شکسته شود، آنتالپی پیوند $C-H$ در شرایط واکنش چند کیلوژول است؟

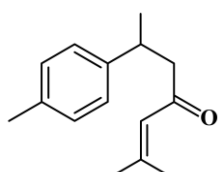


- (۱) ۴۰۸ (۲) ۴۱۲ (۳) ۴۱۶ (۴) ۴۲۰

۶۶- آنتالپی پیوند میان اتم کربن و اتم اکسیژن در کدام یک از مواد زیر کمتر است؟

- (۱) کربن مونواکسید (۲) کربن دی اکسید (۳) ساده ترین الکل (۴) ساده ترین کتون

۶۷- اگر ساختار مقابل نشان دهنده یک ترکیب آلی در زردچوبه باشد، کدام موارد درست هستند؟



- الف - سه اتم کربن در این ترکیب با هیچ اتم هیدروژنی پیوند ندارند.
 ب - برای سوختن کامل یک مول از این ترکیب ۱۹/۵ مول گاز اکسیژن لازم است.
 ج - پیوند $C=C$ در بین پیوندهای موجود در این ترکیب، دارای بیشترین مقدار آنتالپی پیوند است.
 د - تفاوت شمار اتم‌های هیدروژن در این ترکیب با مجموع شمار اتم‌ها در ۲-هگزن، برابر با ۲ است.

- (۱) «الف» و «ج» (۲) «الف» و «د» (۳) «ب» و «ج» (۴) «ب» و «د»

محل انجام محاسبات

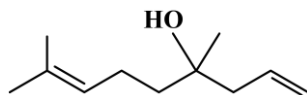
۶۸- کدام یک از مطالب زیر نادرست است؟ ($H = 1, C = 12, O = 16: g.mol^{-1}$)

(۱) اگر به جای یکی از اتم‌های هیدروژن در ساختار بنزن، گروه عاملی آلدهیدی قرار گیرد، ترکیب آلی موجود در بادام به دست می‌آید.

(۲) در یک نمونه خالص از عامل مزه دارچین برخلاف عامل بوی رازیانه پیوند هیدروژنی دیده نمی‌شود.

(۳) تفاوت جرم مولی ترکیب عامل بوی میخک با سیکلوهپتان برابر با ۱۶ گرم است.

(۴) ساختار مقابل مربوط به یک الکل سیرنشده است که خاصیت آروماتیکی ندارد.



۶۹- با توجه به جدول زیر، آنتالپی واکنش سیرشدن اتن برابر چند کیلوژول بر مول است؟

پیوند	$C - C$	$C - H$	$H - H$	$C = C$
میانگین آنتالپی پیوند ($kJ.mol^{-1}$)	۳۴۸	۴۱۵	۴۳۶	۶۱۴

(۱) -346 (۲) $+287$ (۳) -564 (۴) -128

۷۰- اگر مخلوطی از گازهای اکسیژن و اوزون که در مجموع دارای $2/5$ مول گاز است، در اثر $1456/5$ کیلوژول گرما به طور

کامل به اتم‌های گازی مجزا تبدیل شود، درصد مولی گاز اکسیژن در مخلوط اولیه چقدر است؟

پیوند	$O = O$	$O - O$
آنتالپی پیوند ($kJ.mol^{-1}$)	۴۹۵	۱۴۶

(۱) ۲۵ (۲) ۴۰ (۳) ۵۰ (۴) ۶۰

محل انجام محاسبات

بودجه بندی دروس آزمون بعد....

تاریخ برگزاری: ۷ اسفند ماه

هندسه ۲

تبدیل های هندسی و کاربردها
(تبدیل های هندسی از ابتدای انتقال تا انتهای درس ۱)
صفحه های ۳۸ تا ۴۹

حسابان ۱

توابع نمایی و لگاریتم
(از ابتدای تابع لگاریتمی و لگاریتم تا انتهای فصل ۳)
مثلثات (رادیان)
صفحه های ۸۰ تا ۹۷

فیزیک ۲

جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم
(تا پایان فصل دوم)
صفحه های ۶۷ تا ۸۲

آمار و احتمال

احتمال
(کل درس ۳: احتمال شرطی)
صفحه های ۴۸ تا ۶۲

شیمی ۲

در پی غذای سالم
(از ابتدای آنتالپی همان محتوای انرژی است تا انتهای جمع پذیری گرمای واکنش ها ، قانون هس)
صفحه های ۶۵ تا ۷۷





گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی

آزمون ماز | پایه یازدهم



پایانی نیم سال اول $\frac{1}{8}$

☐☐☐☐☐☐☐☐

نیم سال دوم $\frac{1}{8}$

☐☐☐☐☐☐☐☐

ویژه دانش آموزان پایه یازدهم

دفترچه پاسخ

پنجشنبه ۲۳ بهمن ماه ۱۴۰۴

✓ پاسخنامه سریع؛ برای بررسی فوری بعد از آزمون

✓ تحلیل تمام گزینه‌های هر سؤال؛ برای بررسی سؤالاتی که پاسخ نادرست داده‌اید

✓ نکات و درسنامه‌های آموزشی؛ برای یادگیری کامل مباحث هر سؤال

✓ مشاوره تستی؛ برای یادگیری انواع روش‌های حل تست

✓ استراتژی آزمون؛ برای یادگیری مدیریت زمان و مدیریت جلسه آزمون

دِرس	مَسْئُول دِرس	طِراحان	وِیرا سِتانان
ریاضیات	حسین شفیع زاده سید جواد نظری مهرداد کیوان	محمد پور سعید - حسن محمد بیگی علیرضا شریف خطیبی	مهرداد اسپیدکار - مائده بادن فیروز حمیدرضا ولی پور - مهدی رمضانی حسین صنمی - وحید بهروزی فؤاد خیرآبادی - علی اسدی
فیزیک	محمد جواد سورچی حسین عبدوی نژاد	محمد جواد سورچی - حسین عبدوی نژاد زهره آقامحمدی	محمد جواد سورچی مروارید شاه حسینی علیرضا ملک حسینی
شیمی	علی ترابی	علی ترابی - پرهام تیزپا	محمد مهدی معظمی فرهنگ امیری - طاها حق بین منیب نظری - محمد دارابی جم

تیم اجرایی و تولید آزمون

نازنین امیری

مائده بادن فیروز

زهره جعفری

مروارید شاه حسینی

مدیر تولید آزمون: محدثه شیخعلی



یک تیم با بیش از ۵۰۰ نفر در حال کار هستند تا آزمون‌های ماز با حداکثر کیفیت حاضر بشن و به شما کمک کنن و مسیر موفقیت رو براتون ساده‌تر کنن. همیشه از نظرات و کامنت‌های خوبتون انرژی می‌گیریم. مرسی که همراهمون هستین. راستی! حتماً در نظر سنجی آزمون شرکت کنین و نظرات و پیشنهاداتتون رو برامون بنویسین.

دکتر رسول خنجری

فرق کنکور و امتحان

فرق کنکور و امتحان مدرسه چیه و اینکه چرا مسبک مطالعه کنکوری باید فرق داشته باشه؟

خیلی از داوطلب‌ها با همون ذهنیتی که سال‌ها برای امتحان مدرسه درس خوندن، میان سراغ کنکور؛ بعد هم تعجب می‌کنن که چرا با وجود ساعت مطالعه بالا، درصدهاشون راضی‌کننده نیست. سؤال اصلی اینه:

آیا کنکور واقعاً با امتحان‌های مدرسه فرق داره؟

و آنگه فرق داره، این تفاوت باید روی روش مطالعه ما اثر بذاره یا نه؟

جواب کوتاهه: **بله، خیلی هم اثر می‌ذاره.**

کنکور و امتحان مدرسه حداقل پنج تفاوت جدی دارن که اگه درکشون نکنی، ناخودآگاه اشتباه درس می‌خونی. اولین تفاوت اینه که:

در کنکور، همه درس‌ها با هم سنجیده می‌شن؛

اما توی مدرسه، هر امتحان فقط مربوط به یه درسه. یعنی ذهنت توی کنکور باید بتونه بین ۱۳-۱۴ تا کتاب مختلف مدام سوییچ کنه.

تفاوت دوم، زمانه.

توی کنکور برای هر سؤال یکی دو دقیقه بیشتر فرصت نداری، در حالی که توی امتحان مدرسه معمولاً این فشار زمانی وجود نداره. سومین فرق خیلی مهمه:

تو کنکور فقط جواب نهایی مهمه؛

ولی تو امتحان مدرسه، راه‌حل هم نمره داره.

یعنی ممکنه کلی بلد باشی، ولی چون به جواب درست نرسیدی، هیچ امتیازی نگیری.

چهارمین تفاوت، تحمل جلسه‌ست.

کنکور دو و نیم تا سه ساعته؛

ولی امتحان‌های مدرسه معمولاً کوتاه‌ترن و فشار ذهنی کمتری دارن.

و تفاوت پنجم که خیلی تعیین‌کننده‌ست:

کنکور نمره منفی داره، ولی امتحان مدرسه نه.

چرا این تفاوت‌ها روش مطالعه رو عوض می‌کنن؟

همین پنج تفاوت کافیه تا بفهمیم

الگوی مطالعه کنکوری نمی‌تونه شبیه الگوی امتحان مدرسه باشه.

مثلاً «بُغچه‌خونی» (اینکه یکی دو روز کامل یه درس رو بخونی، امتحانش رو بدی و ببندی بزاری کنار) برای امتحان مدرسه جواب می‌داد، ولی برای کنکور راندمان پایینی داره.

کنکور جاییه که قراره همه مطالب همه درس‌ها همزمان توی ذهنت زنده باشن، نه اینکه هر کدوم ته یه انبار شلوغ تلنبار شده باشن.

تو کنکور باید مطالب طبقه‌بندی‌شده و مرتب توی ذهنت نشسته باشن تا بتونی توی همون یکی دو دقیقه طلایی، سریع فراخوانی‌شون کنی.

برای همین روش مطالعه درست اهمیت پیدا می‌کنه، روشی که توی مقالات ۱۰ و ۱۱ کامل درباره‌ش توضیح دادیم. با اون روش، مطالب انبار نمی‌شن؛

می‌رن تو قفسه‌های مشخص ذهن، و دقیقاً همون‌جایی هستن که موقع تست بهشون نیاز داری.

کنکور جای نیم‌نمره گرفتن نیست. توی کنکور خبری از ۰/۲۵ و نیم‌نمره نیست. **یا جواب درست رو می‌زنی، یا هیچ.** حتی بدتر از اون: **اگه جواب غلط بزنی، از کسی که سؤال رو سفید گذاشته عقب‌تر می‌افتی؛**

چون هم زمانش رو حفظ کرده، هم نمره منفی نگرفته.

به خاطر همینکه **مدیریت جلسه و تصمیم‌گیری لحظه‌ای** این قدر مهم می‌شه.

و ما توی مقالات ۲ تا ۵ مفصل درباره‌ش حرف زدیم.

از طرف دیگه، باید بتونی چند ساعت کامل تمرکز تو حفظ کنی؛ چیزی که فقط با تمرین در شرایط آزمون به دست میاد. برای همین

شرکت تو آزمون‌های آزمایشی ما، فقط منبش علمی نیست؛ تمرین کنکور دانه.

تکنیک‌های جادویی؟ نه، ولی یادشون بگیر و ازش استفاده کن.

یه سری تکنیک‌ها هستن که کمک می‌کنن با همون دانشی که داری، درصد بهتری بگیری.

نه معجزه‌ان، نه تقلب؛ فقط بلد بودن تصمیم درست تو زمان درسته.

یکی از مهم‌ترینشون: **شجاعت در زدن گزینه‌های شک‌دار؛ البته آگاهانه.**

کنکور چهار گزینه‌ایه و هر سه گزینه غلط، عملاً به نفع گزینه درست کار می‌کنن.

اگه همه سؤال‌ها رو شانسی بزنی، از نظر آماری نه جلو می‌افتی، نه عقب.

اما حالا به حالت واقعی‌تر رو در نظر بگیر:

فرض کن توی ۳۰ سؤال، بتونی فقط یک گزینه رو با اطمینان حذف کنی و بین سه گزینه باقی‌مونده یکی رو بزنی.

از نظر آماری، انتظار می‌ره حدود ۱۰ سؤال درست دریاد. ۲۰ غلط، حدود ۷ تا از اون درست‌ها رو می‌سوزونه، و تهش حدود

۳ پاسخ درست خالص برات می‌مونه. یعنی بدون اینکه دانش جدیدی اضافه کرده باشی، جلو افتادی.

اما این تکنیک فقط وقتی به نفعته که **دو شرط مهم** رعایت بشه:

■ اول اینکه **واقعاً و با اطمینان کامل، دو گزینه رو حذف کرده باشی.** نه با حس، نه با حدس، نه با «فکر کنم».

■ دوم اینکه **اگه بین دو گزینه نهایی شک داشتی، دیگه تحلیل اضافه نکن.**

تجربه نشون داده توی این مرحله، فکر کردن زیاد معمولاً آدم رو می‌بره سمت گزینه غلط.

یا انتخاب آگاهانه داری، یا انتخاب تصادفی، وسطش خطرناکه.

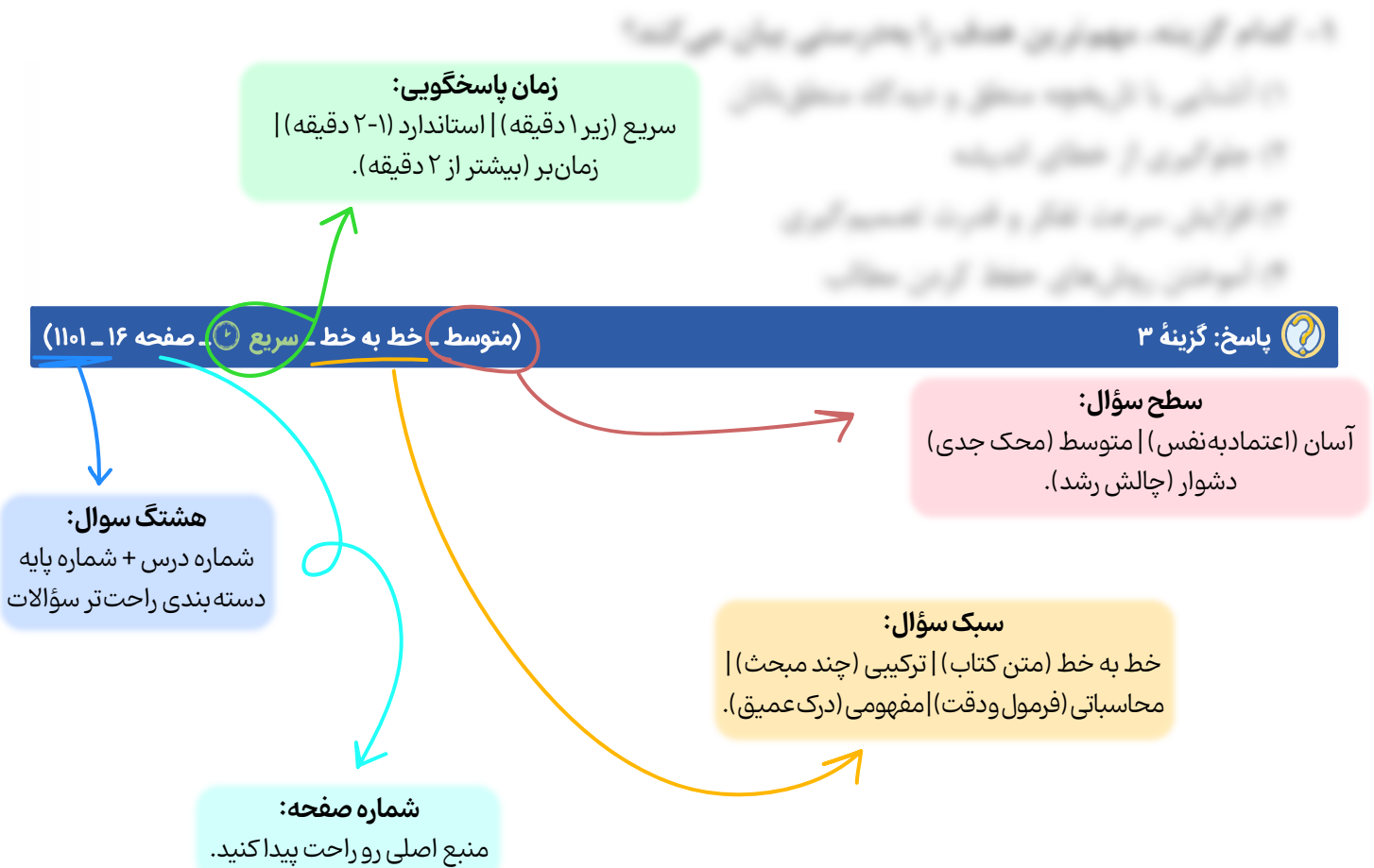
و مهم‌تر از همه:

این تصمیم‌ها رو باید توی آزمون‌های آزمایشی تمرین کنی.

نتیجه‌ش رو ببینی، درصد موفقیت رو بررسی کنی و آخرش به یک قاعده شفصی برسی.

کنکور جای تقلید کورکورانه نیست؛ جای شناخت خودته.

راهنمای پاسخنامه آزمون‌ها



یادتون باشه:

- ✓ هر سؤال یک فرصت یادگیری، نه یک مانع.
- ✓ پاسخنامه فقط جواب نیست؛ یک کارگاه آموزشی کامله.
- ✓ با هر آزمون و مرور این پاسخنامه، یک پله بالاتر می‌رید و یک قدم به رؤیایون نزدیک‌تر می‌شید.
- ✓ موفقیت فقط برای کسانی که با برنامه و انگیزه حرکت می‌کنن. شما همون آدمید.



برای دیدن پاسخنامه ویدئویی آزمون
QRcode بالا را اسکن کنید!
یا بر روی لینک زیر کلیک کنید!
پاسخنامه ویدئویی آزمون

حسابان ۱: تابع (اعمال روی توابع) + توابع نمایی و لگاریتم (تا تابع لگاریتمی و لگاریتم)، صفحه‌های ۶۳ تا ۸۵
هندسه ۲: تبدیل‌های هندسی و کاربردها (از ابتدای بازتاب تا ابتدای تجانس)، صفحه‌های ۳۵ تا ۴۳
آمار و احتمال: احتمال (درس ۲ و درس ۳ تا ابتدای قانون احتمال کل)، صفحه‌های ۴۴ تا ۵۴

بودجه‌بندی
این آزمون

حسابان ۱: این مبحث در مجموع ۳ تست از ۱۰ تست کنکور را پوشش داده است.
هندسه ۲: از این مبحث به‌طور مستقیم تستی در کنکور طرح نشده است.
آمار و احتمال: این مبحث در مجموع ۱ تست از ۴ تست کنکور را پوشش داده است.

سهم در
کنکور

۱- اگر $f = \left\{ (1, 2), (-1, 4), (0, 6), (3, -2), (5, \frac{1}{2}) \right\}$ و $g = \{ (-1, a), (0, -2), (5, -4), (2, 7) \}$ ، آن‌گاه به‌ازای کدام مقدار a ، مجموع اعضای

برد تابع $f.g$ برابر ۱۰ خواهد بود؟

۷ (۴)

۵ (۳)

۸ (۲)

۶ (۱)

(آسان - محاسباتی - استاندارد) - حسابان ۱ صفحه ۶۴ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۱

در گام اول اشتراک دامنه دو تابع را پیدا می‌کنیم تا بعد از آن بتوانیم ضرب دو تابع را به‌دست آوریم:

$$f = \{ (1, 2), (-1, 4), (0, 6), (3, -2), (5, \frac{1}{2}) \} \\ \Rightarrow D_{f.g} = D_f \cap D_g = \{ 1, -1, 0, 3, 5 \} \cap \{ -1, 0, 5, 2 \} = \{ -1, 0, 5 \}$$

$$g = \{ (-1, a), (0, -2), (5, -4), (2, 7) \}$$

$$f.g = \{ (-1, 4a), (0, -12), (5, -2) \}$$

$$f.g \text{ مجموع اعضای برد تابع } f.g = 4a + (-12) + (-2) = 4a - 14 = 10 \Rightarrow 4a = 24 \Rightarrow a = 6$$

چهار عمل اصلی روی توابع

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x) \quad D_{f \pm g} = D_f \cap D_g$$

$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x) \quad D_{f \times g} = D_f \cap D_g$$

$$\left(\frac{f}{g} \right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{ x | g(x) = 0 \}$$



۲- کدامیک از گزینه‌های زیر درست است؟

(۱) اگر f و g دو تابع مفروض بوده و $g(4) = 7$ و $f(7) = 5$ ، آن‌گاه $f \circ g(4) = 35$.

(۲) اگر $f(x) = \sqrt{x-1}$ و $g(x) = x^2 + 3$ ، آن‌گاه $D_{g \circ f} = \mathbb{R}$.

(۳) نمودار توابع $f(x) = 2^x$ و $g(x) = 3^x$ فقط در یک نقطه، یکدیگر را قطع می‌کنند.

(۴) برد تابع $f(x) = \log_a^x$ که در آن $a > 0$ و $a \neq 1$ است، بازه $(0, +\infty)$ است.

بررسی گزینه‌ها:

۱) نادرست است، زیرا:

$$\log(f) = f(g(f)) = f(7) = 5$$

۲) نادرست است، زیرا:

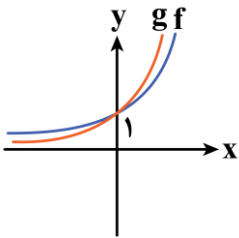
$$f(x) = \sqrt{x-1} \Rightarrow x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \Rightarrow D_{f(x)} = [1, +\infty)$$

$$g(x) = x^2 + 3 \Rightarrow D_g = \mathbb{R}$$

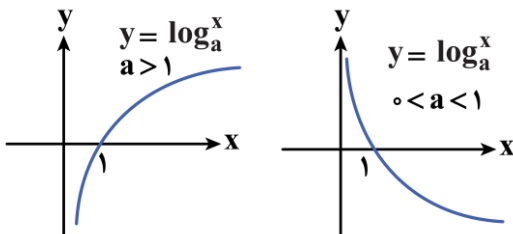
همواره برقرار است

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in [1, +\infty) \mid \sqrt{x-1} \in \mathbb{R}\} = [1, +\infty)$$

۳) گزینه ۳ صحیح است. زیرا:

با رسم نمودارهای توابع $f(x) = 2^x$ و $g(x) = 3^x$ در یک دستگاه محورهای مختصات مشخص می‌شود که فقط در نقطه $(0, 1)$ متقاطع‌اند.

۴) نادرست است، زیرا:

طبق نمودار تابع $f(x) = \log_a^x$ ، برد تابع که همان تصویر نمودار تابع روی محور عرض‌ها می‌باشد، برابر $\mathbb{R}$ است و دامنه آن برابر $(0, +\infty)$ است.

دامنه ترکیب دو تابع

دامنه $f \circ g$ مقادیری از x می‌باشند که در دامنه g باشند و به‌ازای آن‌ها مقادیر $g(x)$ در دامنه f قرار بگیرد. به عبارت دیگر:

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$



۳- اگر f تابعی خطی باشد به طوری که تساوی $f(2x+1) = 4x+2+f(1)-f(x+1)$ برای آن برقرار باشد، آنگاه حاصل $f(4)+f(7)$ کدام است؟

(۱) ۱۲ (۲) ۱۴ (۳) ۱۶ (۴) ۱۸

(آسان - محاسباتی - استاندارد) حسابان ۱ صفحه ۶۷ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۳

روش اول

$$f(2x+1) = 4x+2+f(1)-f(x+1) \Rightarrow f(2x+1)+f(x+1) = 4x+2+f(1)$$

$$x=0 \Rightarrow f(1)+f(1) = 2+f(1) \Rightarrow f(1) = 2$$

$$\Rightarrow f(2x+1)+f(x+1) = 4x+4$$

$$\xrightarrow{x=3} f(7)+f(4) = 4(3)+4 = 16$$

روش دوم

$$f(x) = ax + b$$

می دانیم تابع $f(x)$ خطی است، پس:

حال به کمک معادله داده شده a و b را به دست می آوریم:

$$f(2x+1) = a(2x+1) + b = 2ax + a + b$$

$$f(x+1) = a(x+1) + b = ax + a + b$$

$$f(1) = a(1) + b = a + b$$

$$\Rightarrow f(2x+1) = 4x+2+f(1)-f(x+1)$$

$$2ax + a + b = 4x+2+a+b - (ax+a+b) \Rightarrow 2ax + a + b = (4-a)x + 2$$

با توجه به معادله به دست آمده باید ضریب x و عدد ثابت در سمت راست و چپ با هم برابر باشند:

$$\begin{cases} 2a = 4 - a \Rightarrow 3a = 4 \Rightarrow a = \frac{4}{3} \\ a + b = 2 \Rightarrow \frac{4}{3} + b = 2 \Rightarrow b = 2 - \frac{4}{3} \Rightarrow b = \frac{2}{3} \end{cases}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$f(x) = \frac{4}{3}x + \frac{2}{3} \Rightarrow \begin{cases} f(4) = \frac{4}{3}(4) + \frac{2}{3} = \frac{18}{3} = 6 \\ f(7) = \frac{4}{3}(7) + \frac{2}{3} = \frac{30}{3} = 10 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(4)+f(7) = 6+10 = 16$$

یادآوری! (تابع خطی)

هر تابع به صورت $f(x) = ax + b$; $a \neq 0$ را یک تابع خطی می نامیم. (اگر $a = 0$ باشد، آنگاه تابع به صورت $f(x) = b$ درمی آید که تابع ثابت است.)

یه نمونه بحال بین!

هر یک از توابع $f(x) = \frac{1}{3}x + 3$ و $g(x) = \sqrt{6}x - 1$ خطی هستند.



۴- اگر $f(x) = \sqrt[4]{24-2x-x^2}$ و $g(x) = \left[\frac{x}{3}\right]$ ، آن گاه دامنه تابع $h(x) = \frac{(f(x))}{g(x)-1}$ شامل چند عدد صحیح است؟
 (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴) ۱۱

پاسخ: گزینه ۲

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - حسابان ۱ صفحه ۶۴ - ۱۱۰۲

ابتدا دامنه تابع f و g را به دست می آوریم:

$$f(x) = \sqrt[4]{24-2x-x^2} \xrightarrow{\text{شرط دامنه}} 24-2x-x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2+2x-24 \leq 0$$

$$\Rightarrow (x+6)(x-4) \leq 0 \Rightarrow \begin{array}{c} -6 \quad 4 \\ + \quad - \quad + \end{array} \Rightarrow -6 \leq x \leq 4$$

$$\Rightarrow D_f = [-6, 4]$$

$$g(x) = \left[\frac{x}{3}\right] \Rightarrow D_g = \mathbb{R}$$

از آن جا که تابع $h(x)$ کسری است، برای به دست آوردن دامنه آن باید ریشه های مخرج را محاسبه کنیم:

$$g(x) - 1 = 0 \Rightarrow g(x) = 1 \Rightarrow \left[\frac{x}{3}\right] = 1 \Rightarrow 1 \leq \frac{x}{3} < 2 \Rightarrow 3 \leq x < 6$$

$$D_h = D_f \cap D_g - \{x | g(x) - 1 = 0\} = [-6, 4] - [3, 6) = [-6, 3)$$

دامنه تابع h شامل ۹ عدد صحیح است.

محاسبه دامنه انواع توابع

موارد زیادی پیش می آید که توابع را فقط با ارائه ضابطه معرفی می کنند و به دامنه اشاره نمی شود. در این موارد طبق قرارداد، دامنه تابع بزرگترین مجموعه ای است که تابع در آن تعریف شده باشد.

(۱) **دامنه توابع چندجمله ای:** دامنه توابع چندجمله ای به فرم $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ برابر $\mathbb{R}$ است.

(۲) **دامنه توابع گویا:** دامنه توابع کسری که صورت و مخرج آن ها چندجمله ای باشد (توابع گویا) برابر با مجموعه اعداد حقیقی به جز ریشه یا ریشه های مخرج خواهد بود.

(۳) **دامنه توابع رادیکالی:** بسته به زوج یا فرد بودن فرجه دو حالت در نظر می گیریم:

حالت ۱: اگر فرجه رادیکال فرد باشد، دامنه تابع رادیکالی، همان دامنه تابع زیر رادیکال است.

$$g(x) = \sqrt[2k+1]{f(x)} \Rightarrow D_g = D_f$$

حالت ۲: اگر فرجه رادیکال زوج باشد، باید زیر رادیکال مثبت یا صفر باشد.

$$y = \sqrt[2k]{f(x)} \Rightarrow f(x) \geq 0$$

بنابراین در این حالت دامنه تابع محدوده ای است که $f(x) \geq 0$ و $x \in D_f$ باشد.

(۴) **دامنه توابع چندضابطه ای:** دامنه توابع چندضابطه ای از اجتماع دامنه تک تک ضابطه ها به دست می آید.

(۵) **دامنه توابع لگاریتمی:** برای توابع لگاریتمی داریم:

$$y = \log_{g(x)}^{f(x)} \Rightarrow D_y = \{x | g(x) > 0, g(x) \neq 1, f(x) > 0\}$$

تذکر مهم!

اگر تابعی متشکل از چند نوع تابع مختلف باشد، باید همه محدودیت‌ها را همزمان در نظر بگیریم و در نهایت اشتراک همه شرط‌ها را پیدا کنیم.



۵- اگر $f(x) = 2x^4 + 4x^2 - 2x - 1$ و $g(x) = \sqrt{x}$ باشد، آنگاه معادله $gof(x) = g^2(x) - 1$ چند جواب حقیقی دارد؟

(۴) صفر

(۳) ۴

(۲) ۲

(۱) ۱

(متوسط - ترکیبی - زمان‌بر) - حسابان ۱ صفحه ۶۷ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۴

$$g(x) = \sqrt{x}, \quad f(x) = 2x^4 + 4x^2 - 2x - 1$$

$$gof(x) = g^2(x) - 1 \Rightarrow \sqrt{2x^4 + 4x^2 - 2x - 1} = x - 1$$

پس چون حاصل رادیکال باید نامنفی باشد، با شرط $x - 1 \geq 0$ یعنی $x \geq 1$ طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$2x^4 + 4x^2 - 2x - 1 = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow 2x^4 + 3x^2 - 2 = 0$$

$$x^2 = t; t \geq 0 \Rightarrow 2t^2 + 3t - 2 = 0 \Rightarrow t = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4}$$

$$\begin{cases} t_1 = -2 \Rightarrow x^2 = -2 & \text{غ ق ق} \\ t_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

هر دو جواب به دست آمده غیرقابل قبول هستند، زیرا در شرط $x \geq 1$ صدق نمی‌کنند، پس معادله مطلوب، فاقد ریشه حقیقی است.

تذکر!

در حل معادلات رادیکالی حتماً جواب‌های به دست آمده را در معادله اصلی چک کنید، زیرا با به توان رساندن طرفین ممکن است جواب اضافه تولید شود.



۶- اگر $f\left(\frac{3x}{x+1}\right) = \frac{2x+1}{x+2}$ و $g(x) = \left[-x - \frac{2}{3}\right]$ باشد، حاصل $fog(-\sqrt{3})$ کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است)

(۴) ۵/۰

(۳) ۷/۰

(۲) ۸/۰

(۱) ۶/۰

(متوسط - ترکیبی - استاندارد) - حسابان ۱ صفحه ۶۷ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۲

$$g(x) = \left[-x - \frac{2}{3}\right] \Rightarrow g(-\sqrt{3}) = \left[\sqrt{3} - \frac{2}{3}\right]$$

$$g(-\sqrt{3}) = \left[\sqrt{3} - \frac{2}{3}\right] = 1$$

$$\text{چون } \sqrt{3} \approx 1.73 \text{ و } \frac{2}{3} \approx 0.66 \Rightarrow \sqrt{3} - \frac{2}{3} \approx 1.07 \text{ پس } \left[\sqrt{3} - \frac{2}{3}\right] = 1$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$fog(-\sqrt{3}) = f(g(-\sqrt{3})) = f(1)$$

حال برای محاسبه $f(1)$ دو روش داریم.

روش اول

محاسبه مستقیم $f(1)$:

$$\frac{3x}{x+1} = 1 \Rightarrow x+1 = 3x \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{جای گذاری در } f\left(\frac{3x}{x+1}\right) = \frac{2x+1}{x+2}} f(1) = \frac{2\left(\frac{1}{2}\right) + 1}{\left(\frac{1}{2}\right) + 2} = \frac{2}{\frac{5}{2}} = \frac{4}{5} = 0.8$$

روش دوم

دقت کنید که عبارت $f\left(\frac{3x}{x+1}\right) = \frac{2x+1}{x+2}$ در واقع بیانگر ترکیب دو تابع $f(x)$ و $h(x) = \frac{3x}{x+1}$ است، که تابع درونی و ترکیب دو تابع معلوماند و تابع بیرونی معلوم نیست. روش دوم این است که ابتدا $f(x)$ و بعد $f(1)$ را به دست آوریم:

$$\frac{3x}{x+1} = t \Rightarrow tx + t = 3x \Rightarrow (3-t)x = t \Rightarrow x = \frac{t}{3-t}$$

$$\xrightarrow{x = \frac{t}{3-t}} f(t) = \frac{\frac{2t}{3-t} + 1}{\frac{t}{3-t} + 2} = \frac{\frac{t+3}{3-t}}{\frac{-t+6}{3-t}} = \frac{t+3}{6-t} \Rightarrow f(x) = \frac{x+3}{6-x}$$

$$x = 1 \Rightarrow f(1) = \frac{4}{5} = 0.8$$

اکنون $f(1)$ را محاسبه می کنیم:

جزء صحیح (براکت)

بزرگترین عدد صحیح کوچکتر یا مساوی x را جزء صحیح x می نامیم.

$$[x] = \text{بزرگترین عدد صحیح } n \text{ که } n \leq x \text{ باشد}$$

چند نمونه باحال ببین!

$$[2/8] = 2, \quad [-2/8] = -3, \quad [5] = 5$$



۷- اگر توابع $g(x) = 4x - 1$ و $f(x) = 16x^2 + 12x + 7$ مفروض باشند، در ضابطه تابع چند جمله ای $\text{gof}(x)$ ، مجموع ضرایب کدام است؟

۶۷ (۴)

۵۷ (۳)

۶۳ (۲)

۵۳ (۱)

(متوسط - محاسباتی - زمان بر) - حسابان ۱ صفحه ۶۷ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۴

روش اول

برای تعیین ضابطه $\text{gof}(x)$ ، باید ابتدا ضابطه $f(x)$ را به دست آوریم. برای این منظور از تغییر متغیر استفاده می کنیم:

$$f(g(x)) = 16x^2 + 12x + 7 \Rightarrow f(4x - 1) = 16x^2 + 12x + 7$$

$$\text{فرض: } 4x - 1 = t \Rightarrow 4x = t + 1 \Rightarrow x = \frac{t+1}{4}$$

$$f(t) = 16\left(\frac{t+1}{4}\right)^2 + 12\left(\frac{t+1}{4}\right) + 7 \Rightarrow f(t) = 16\left(\frac{t^2 + 2t + 1}{16}\right) + 12\left(\frac{t+1}{4}\right) + 7 \Rightarrow f(t) = t^2 + 2t + 1 + 3t + 3 + 7$$

$$\Rightarrow f(t) = t^2 + 5t + 11$$

$$\Rightarrow f(x) = x^2 + 5x + 11$$

در گام بعد، ضابطه $(\text{gof})(x)$ را تشکیل می دهیم:

$$\text{gof}(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 5x + 11) = 4(x^2 + 5x + 11) - 1$$

$$g \circ f(x) = 4x^2 + 20x + 43 \Rightarrow \text{مجموع ضرایب} = 4 + 20 + 43 = 67$$

روش دوم

مجموع ضرایب چندجمله‌ای $g(f(x))$ یعنی محاسبه $g(f(1))$ ، پس در گام اول $f(1)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$g(x) = 4x - 1 = 1 \Rightarrow 4x = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow{x=\frac{1}{2}} f(g(\frac{1}{2})) = 16(\frac{1}{2})^2 + 12(\frac{1}{2}) + 7 \Rightarrow f(1) = 17$$

در گام بعد، $g(f(1))$ یعنی $g(17)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$g(f(1)) = g(17) \Rightarrow g(17) = 4(17) - 1 = 67$$

پس مجموع ضرایب ۶۷ است.

تعیین ضابطه g وقتی f و $f \circ g$ معلوم باشند

اگر ضابطه‌های $f(x)$ و $f \circ g(x)$ معلوم باشند و بخواهیم ضابطه g را تعیین کنیم کافی است در ضابطه $f(x)$ به جای x عبارت $g(x)$ را قرار دهیم و تابع به دست آمده را مساوی $f \circ g(x)$ معلوم قرار دهیم تا تابع $g(x)$ به دست آید.

یه نمونه باحال ببین!

اگر $f \circ g(x) = \frac{3x}{x-1}$ و $f(x) = \frac{2x-1}{3}$ باشد، ضابطه $g(x)$ را به دست آورید.

پاسخ تشریحی:

با در نظر گرفتن $f(g(x)) = \frac{2x-1}{3}$ ، $f(x)$ را تعیین می‌کنیم:

$$f(g(x)) = \frac{2g(x)-1}{3} \Rightarrow \frac{2g(x)-1}{3} = \frac{3x}{x-1}$$

$$\Rightarrow 2g(x)-1 = \frac{9x}{x-1} \Rightarrow 2g(x) = \frac{9x}{x-1} + 1 = \frac{10x-1}{x-1} \Rightarrow g(x) = \frac{10x-1}{2x-2}$$

مجموع ضرایب چندجمله‌ای

برای محاسبه مجموع ضرایب چندجمله‌ای $f(x)$ کافی است $x=1$ را در آن قرار دهیم:

$$f(x) = \text{مجموع ضرایب چندجمله‌ای } f(1)$$

یه نمونه باحال ببین!

مجموع ضرایب چندجمله‌ای $f(x) = (2x+1)^4$ را به دست آورید.

پاسخ تشریحی:

بدون نیاز به بسط چندجمله‌ای با محاسبه $f(1)$ مجموع ضرایب به دست می‌آید.

$$f(1) = (2+1)^4 = 3^4 = 81$$

تذکره!

این روش فقط برای توابع چندجمله‌ای می‌باشد.

تعیین ضابطه f وقتی g و $f \circ g$ معلوم باشند

اگر ضابطه‌های $g(x)$ و $(f \circ g)(x)$ معلوم باشند و بخواهیم ضابطه $f(x)$ را به دست آوریم کافی است از تغییر متغیر $g(x) = t$ استفاده کنیم. یعنی x را بر حسب t به دست آورده و در ضابطه $f(g(x))$ جای گذاری کنیم.

یه نمونه باحال ببین!

اگر $(f \circ g)(x) = \frac{3x}{x-1}$ و $g(x) = \frac{2x-1}{3}$ باشد، ضابطه $f(x)$ را به دست آورید.

پاسخ تشریحی:

از تغییر متغیر استفاده می‌کنیم:

$$f(g(x)) = \frac{3x}{x-1} \Rightarrow f\left(\frac{2x-1}{3}\right) = \frac{3x}{x-1}$$

$$g(x) = \frac{2x-1}{3} = t \Rightarrow 2x-1 = 3t \Rightarrow 2x = 3t+1 \Rightarrow x = \frac{3t+1}{2}$$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{3\left(\frac{3t+1}{2}\right)}{\frac{3t+1}{2}-1} = \frac{\frac{9t+3}{2}}{\frac{3t+1-2}{2}} = \frac{9t+3}{3t-1}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{9x+3}{3x-1}$$



۸- اگر $f(x) = -4x^2 + 8x$ و $g(x) = 3^x$ باشد، آن گاه در تابع $y = g \circ f(x)$ ، میانگین کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عدد صحیح موجود در برد تابع کدام است؟

(۴) ۳۲

(۳) ۳۲/۵

(۲) ۴۱

(۱) ۴۰/۵

(متوسط - ترکیبی - استاندارد) حسابان ۱ صفحه ۶۷ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۲

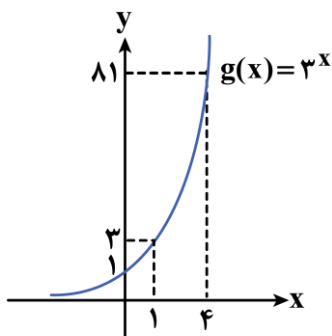
$$\left(-\infty, -\frac{\Delta}{4a}\right]$$

برد تابع $f(x) = -4x^2 + 8x$ که یک سهمی با دهانه رو به پایین است برابر است با:

$$y_S = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(8^2 - 4(-4)(0))}{4(-4)} = \frac{-64}{-16} = 4 \Rightarrow R_f = (-\infty, 4]$$

حال دقت شود که در تابع $y = g \circ f(x)$ ، مقادیر خروجی تابع f ، به عنوان ورودی، وارد تابع g خواهند شد، پس برد تابع f ، نقش دامنه تابع g را دارد.

با توجه به نمودار تابع g ، اگر دامنه تابع g بازه $(-\infty, 4]$ باشد، آن گاه برد آن برابر است با:



$$R_g = (0, 81]$$

پس برد تابع $y = g \circ f(x)$ بازه $(0, 81]$ است، که کوچک‌ترین عدد صحیح موجود در آن برابر ۱ و بزرگ‌ترین عدد صحیح موجود در آن برابر

$$\frac{1+81}{2} = 41$$

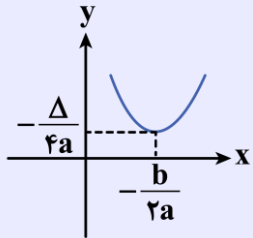
۸۱ است و میانگین آن‌ها برابر است با:

دام تستی!

دقت شود که $g(x) = 3^x$ در منفی بی نهایت فقط به صفر نزدیک می شود ولی هیچ گاه به صفر نمی رسد و برد تابع شامل صفر نمی شود. اگر به اشتباه در نظر گرفته شود که برد شامل صفر است در دام گزینه ۱ می افتید!

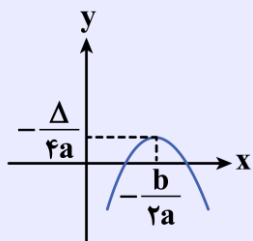
$\Rightarrow$ میانگین $= \frac{1+0}{2} = 0.5$

برد تابع درجه دوم



در تابع درجه دوم به شکل کلی $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) دو حالت داریم:

حالت ۱) اگر $a > 0$ باشد برد تابع به صورت $[-\frac{\Delta}{4a}, \infty)$ می باشد.



حالت ۲) اگر $a < 0$ باشد برد تابع به صورت $(-\infty, -\frac{\Delta}{4a}]$ می باشد.

همان طور که در شکل پیداست $y_S = -\frac{\Delta}{4a}$ عرض رأس سهمی است.



۹- اگر $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, -1), (-1, 1)\}$ و $g = \{(1, 2), (2, -1), (3, 1), (-1, 2)\}$ باشد، تابع $f^{-1} \circ (f+g)$ شامل چند زوج مرتب است؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

(آسان - ترکیبی - استاندارد) - حسابان ۱ صفحه ۶۷ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۲

گام اول

ابتدا تابع f^{-1} را به دست می آوریم:

$f = \{(1, 2), (2, 3), (3, -1), (-1, 1)\}$ $\xrightarrow[\text{در هر زوج مرتب}]{\text{تعویض جای X و Y}}$ $f^{-1} = \{(2, 1), (3, 2), (-1, 3), (1, -1)\}$

$\Rightarrow D_{f^{-1}} = \{-1, 1, 2, 3\}$

گام دوم

در گام بعد $f+g$ را به دست می آوریم:

$D_{f+g} = D_f \cap D_g \Rightarrow D_{f+g} = \{-1, 1, 2, 3\}$

$\Rightarrow f+g = \{(1, 2+3), (2, 3-1), (3, -1+1), (-1, 1+2)\}$

$\Rightarrow f+g = \{(1, 5), (2, 2), (3, 0), (-1, 3)\}$

گام سوم

اکنون با توجه به توابع $f+g$ و f^{-1} این دو را ترکیب می کنیم. ترکیب دو تابع $f+g$ و f^{-1} فقط برای عضوایی از دامنه $f+g$ تعریف شده است که به ازای آن ها خروجی تابع $f+g$ در دامنه f^{-1} قرار گیرد. پس:

$$f^{-1}((f+g)(x)) \Rightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow f^{-1}(5) = \text{تعریف نمی شود.} \\ x=2 \Rightarrow f^{-1}(2) = 1 \\ x=3 \Rightarrow f^{-1}(0) = \text{تعریف نمی شود.} \\ x=-1 \Rightarrow f^{-1}(3) = 2 \end{cases} \Rightarrow f^{-1} \circ (f+g) = \{(2, 1), (-1, 2)\}$$

پس $f^{-1} \circ (f + g)$ شامل دو زوج مرتب است.

ترکیب توابع

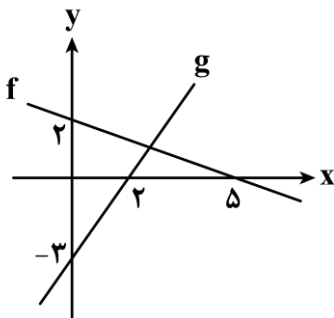
اگر دو تابع f و g طوری باشند که خروجی‌های $g(x)$ بتوانند ورودی‌های $f(x)$ باشند، می‌توان ترکیب دو تابع را که با $f \circ g(x)$ نشان داده می‌شود، به دست آورد.

$$\xrightarrow{\text{X ورودی}} \boxed{g} \rightarrow g(x) \rightarrow \boxed{f} \rightarrow f \circ g(x) \quad , \quad (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

تکنیک تعویض دو مؤلفه!

اگر $A(a, b)$ روی نمودار تابع f باشد، آن‌گاه $A'(b, a)$ روی نمودار f^{-1} است.

$$f(a) = b \Leftrightarrow f^{-1}(b) = a$$



۱۰- در شکل مقابل، نمودار توابع f و g رسم شده است. اگر $\frac{f \circ g(a)}{(f \circ g)(a)} = \frac{1}{a}$ باشد، آن‌گاه a کدام است؟

- (۱) ۲
(۲) ۳
(۳) ۴
(۴) ۶

(متوسط - محاسباتی - زمان ۲۰) - حسابان ۱ صفحه‌های ۶۴ و ۶۷ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۴

ابتدا ضابطه توابع f و g را می‌نویسیم:

$$A(0, 2), B(5, 0), m_{AB} = \frac{2-0}{0-5} = -\frac{2}{5}, \quad \text{عرض از مبدأ تابع خطی } f$$

$$f \text{ معادله: } y = -\frac{2}{5}x + 2 \Rightarrow f(x) = -\frac{2}{5}x + 2$$

$$C(2, 0), D(0, -3), m_{CD} = \frac{0+3}{2-0} = \frac{3}{2}, \quad \text{عرض از مبدأ تابع خطی } g$$

$$g \text{ معادله: } y = \frac{3}{2}x - 3 \Rightarrow g(x) = \frac{3}{2}x - 3$$

$$\frac{(f \circ g)(a)}{(f \circ g)(a)} = \frac{f(g(a))}{f(a) \cdot g(a)} = \frac{f(\frac{3}{2}a - 3)}{(-\frac{2}{5}a + 2)(\frac{3}{2}a - 3)} = \frac{-\frac{2}{5}(\frac{3}{2}a - 3) + 2}{-\frac{3}{5}a^2 + \frac{6}{5}a + 3a - 6}$$

$$\Rightarrow \frac{-\frac{3}{5}a + \frac{6}{5} + 2}{-\frac{3}{5}a^2 + \frac{21}{5}a - 6} = \frac{1}{a} \Rightarrow \frac{-\frac{3}{5}a + \frac{16}{5}}{-\frac{3}{5}a^2 + \frac{21}{5}a - 6} = \frac{1}{a}$$

$$\Rightarrow -\frac{3}{5}a^2 + \frac{16}{5}a = -\frac{3}{5}a^2 + \frac{21}{5}a - 6 \Rightarrow a = 6$$

 معادله خط گذرا از دو نقطه

معادله خطی که از دو نقطه $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ می‌گذرد برابر است با:

$$\text{شیب خط} = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

یا

$$y - y_2 = m(x - x_2)$$

حالت خاص:

اگر یکی از دو نقطه به صورت $A(0, b)$ و نقطه دیگر به صورت $B(x_2, y_2)$ باشد، کافی است پس از محاسبه شیب خط، از فرمول زیر استفاده کنیم:

$$\text{شیب خط} = m = \frac{y_2 - b}{x_2 - 0}$$

$$y = mx + b$$



۱۱- اگر $(f+g)(x) = 2x^2 + 4x - 1$ و $(f-g)(x) = 2x - 21$ ، آن‌گاه حاصل ضرب جواب‌های معادله $(2g-f)(x) = 35$ کدام است؟
 (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۴ (۴) -۴

(آسان - محاسباتی - استاندارد) حسابان ۱ صفحه ۶۴ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۴

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = 2x^2 + 4x - 1 \quad (I)$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = 2x - 21 \quad (II)$$

طرفین تساوی‌های فوق را یک‌بار جمع و یک‌بار تفریق می‌کنیم:

$$(I)+(II) \rightarrow 2f(x) = 2x^2 + 6x - 22 \Rightarrow f(x) = x^2 + 3x - 11$$

$$(I)-(II) \rightarrow 2g(x) = 2x^2 + 2x + 20 \Rightarrow g(x) = x^2 + x + 10$$

در قدم بعد ضابطه تابع $(2g-f)(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$(2g-f)(x) = 2g(x) - f(x) = 2x^2 + 2x + 20 - x^2 - 3x + 11$$

$$(2g-f)(x) = x^2 - x + 31$$

حال معادله $(2g-f)(x) = 35$ را تشکیل می‌دهیم:

$$x^2 - x + 31 = 35 \Rightarrow x^2 - x - 4 = 0 \xrightarrow{\Delta = 1 - 4(-4) > 0} \text{حاصل ضرب ریشه‌ها} = \frac{c}{a} = \frac{-4}{1} = -4$$



۱۲- توابع $f(x) = |2x - 4|$ و $g(x) = |6 - 2x|$ مفروض‌اند. روی بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع $f+g$ تابع ثابت است، ضابطه $g \circ f(x)$ کدام است؟
 (۱) $-4x + 14$ (۲) $4x - 14$ (۳) $4x - 12$ (۴) $-4x + 12$

(متوسط - ترکیبی - زمان‌بر) حسابان ۱ صفحه ۶۴ و ۶۷ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۱

ابتدا ضابطه $f+g$ را تشکیل می‌دهیم:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = |2x - 4| + |6 - 2x| = |2x - 4| + |2x - 6|$$

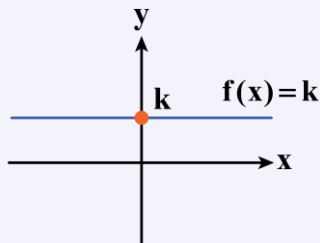
$$(f+g)(x) = \begin{cases} -2x + 4 - 2x + 6 & x < 2 \\ 2x - 4 - 2x + 6 & 2 \leq x \leq 3 \\ 2x - 4 + 2x - 6 & x > 3 \end{cases} \Rightarrow (f+g)(x) = \begin{cases} -4x + 10 & x < 2 \\ 2 & 2 \leq x \leq 3 \\ 4x - 10 & x > 3 \end{cases}$$

پس در بازه $[2, 3]$ تابع $f + g$ ثابت است و در این بازه $f(x) = 2x - 4$ و $g(x) = -2x + 6$ است و بنابراین داریم:

$$\text{gof}(x) = g(f(x)) = g(2x - 4) = -2(2x - 4) + 6 = -4x + 14$$

یادآوری تابع ثابت!

تابع ثابت تابعی است که به ازای تمام ورودی‌های دامنه، یک مقدار را به عنوان خروجی می‌دهد و ضابطه آن به صورت $f(x) = k$; $k \in \mathbb{R}$ می‌باشد و برد آن تک عضوی $\{k\}$ است.



۱۳- اگر $f(x) = \frac{4x+5}{x^2+2nx+2n^2}$ ، $g(x) = \frac{3x-1}{x^2+(3m+1)x+3m}$ و $D_{f.g} = \mathbb{R} - \{-1\}$ باشد، مقدار $m+n$ کدام است؟

$$-\frac{5}{8} (4) \qquad -\frac{5}{8} (3) \qquad -\frac{3}{4} (2) \qquad -\frac{3}{4} (1)$$

پاسخ: گزینه ۳

(سخت - مفہومی - زمان پر ۷) - حسابان ۱ صفحہ ۶۴ - ۱۱۰۲)

چون فقط $x = -1$ در دامنه تابع $f.g$ قرار ندارد، پس فقط $x = -1$ می‌تواند ریشهٔ مخرج توابع f یا g یا هر دو باشد یعنی مخرج این کسرها یا ریشه دارد یا اگر ریشه دارد فقط $x = -1$ می‌باشد.

از طرفی توجه شود که ضابطه‌های f و g به صورت زیر هستند:

$$f(x) = \frac{f_{X+\Delta}}{x^r + f_{nX} + f_n^r} = \frac{f_{X+\Delta}}{(x + rn)^r}$$

$$g(x) = \frac{rx - 1}{x^r + (rm + 1)x + rm} = \frac{rx - 1}{(x + 1)(x + rm)}$$

چون مخرج هر دو توابع f و g دارای ریشه هستند، پس ریشه آن‌ها فقط $x = -1$ است، بنابراین خواهیم داشت:

$$x + 7n = 0 \xrightarrow{x=-1} -1 + 7n = 0 \Rightarrow 7n = 1 \Rightarrow n = \frac{1}{7}$$

$$x + 3m = 0 \xrightarrow{x=-1} -1 + 3m = 0 \Rightarrow 3m = 1 \Rightarrow m = \frac{1}{3}$$

$$m + n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

در نتیجه:

یادآوری!

توابع گویا (کسری) وقتی مخرجشان صفر باشد تعریف نشده می‌شوند، در نتیجه تنها نقاطی که در دامنهٔ آن‌ها نیستند، ریشه‌های مخرج آن‌ها هستند.

۱۴- جواب معادله $11^x - 121^x = 20$ در کدام بازه قرار دارد؟

$$(3, 4) \quad (4) \qquad (2, 3) \quad (3) \qquad (1, 2) \quad (2) \qquad (0, 1) \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۱

(آسان۔ محاسباتی۔ استاندارد) ۶ - حسابان ۱ صفحه ۷۸ - ۱۱۰۳

با نگاهی دقیق به معادله متوجه می‌شویم که ۱۲۱ در واقع توان دوم ۱۱ است. پس معادله را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$(\tau_1)^X - 11^X = \tau_0 \Rightarrow (11^{\tau_1})^X - 11^X - \tau_0 = 0$$

حال با تغییر متغیر، معادله را به یک معادله درجه دوم تبدیل می‌کنیم:

$$\Rightarrow 11^{2x} - 11^x - 20 = 0 \xrightarrow{11^x = t} t^2 - t - 20 = 0$$

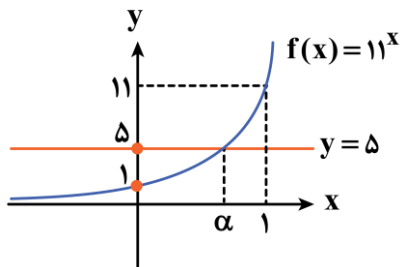
$$\Rightarrow (t-5)(t+4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t=5 \Rightarrow 11^x = 5 \xrightarrow{t>0} 11^x = 5 \checkmark (1) \\ t=-4 \Rightarrow 11^x = -4 \xrightarrow{t>0} \times \end{cases}$$

برای حل معادله (۱) دو روش وجود دارد.

روش اول

روش هندسی:

توابع $f(x) = 11^x$ و $y = 5$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم، داریم:



$\Rightarrow$ معادله دارای یک ریشه (α) در بازه $(0, 1)$ است.

روش دوم

استفاده از لگاریتم:

$$11^x = 5 \Rightarrow x = \log_{11} 5$$

حال با توجه به این که $\log_{11} 1 < \log_{11} 5 < \log_{11} 11$ خواهیم داشت $0 < \log_{11} 5 < 1$ یعنی جواب معادله در بازه $(0, 1)$ قرار دارد.

تابع لگاریتمی

تابع لگاریتمی: وارون تابع نمایی $f(x) = a^x$ را تابع لگاریتمی می‌نامیم و از این رو داریم:

$$y = \log_a x$$

معنای لگاریتم

$$y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$$

یعنی:

! دو خاصیت مهم لگاریتم!

با توجه به تعریف لگاریتم داریم:

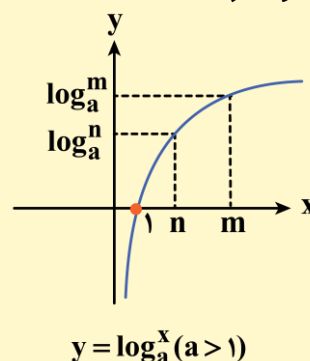
$$\log_a 1 = 0 \quad (a > 0, a \neq 1)$$

$$\log_a a = 1 \quad (a > 0, a \neq 1)$$

مبنا کوچک‌تر از ۱ یا بزرگ‌تر از ۱!

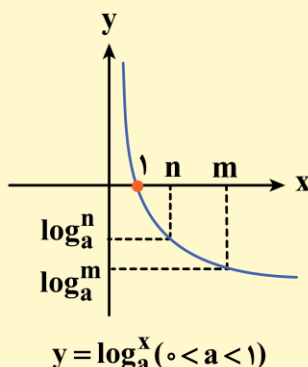
برای تابع $y = \log_a x$ دو حالت وجود دارد:

حالت ۱



$$y = \log_a x \quad (a > 1)$$

حالت ۲



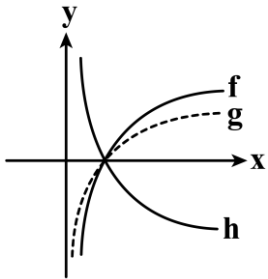
$$y = \log_a x \quad (0 < a < 1)$$

$$n < m \Leftrightarrow \log_a^n > \log_a^m$$

$$n < m \Leftrightarrow \log_a^n < \log_a^m$$



۱۵- نمودار توابع $f(x) = \log_a^x$, $g(x) = \log_b^x$ و $h(x) = \log_c^x$ به صورت مقابل است. کدام گزینه زیر صحیح است؟



(۱) $b < a < c$

(۲) $c < b < a$

(۳) $c < a < b$

(۴) $a < b < c$

(آسان - خطبه خط - سریع) - حسابان ۱ صفحه ۸۳ - ۱۱۰۳

پاسخ: گزینه ۳

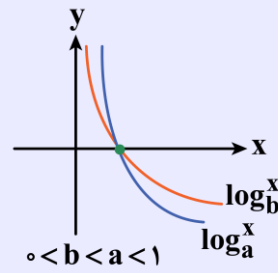
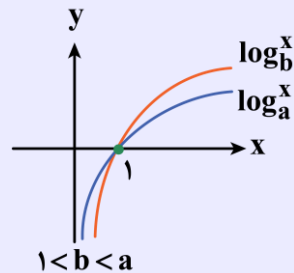
نقطه برخورد نمودارها، $x=1$ است. به ازای $x > 1$ نمودار f از g بالاتر است، پس $a < b$ است. در ضمن a و b از یک بزرگ ترند. با افزایش x عرض نقاط h کاهش می یابد، پس $0 < c < 1$. پس $a < b < c$ است.

مقایسه نمودارهای لگاریتمی

در حالتی که $1 < b < a$ یا $0 < b < a < 1$ باشد هر دو نمودار از نقطه $(1, 0)$ می گذرند.

اما موقعیت آنها نسبت به هم برای x های بزرگ تر یا کوچک تر از ۱ متفاوت است.

برای x های بزرگ تر از یک هر چه مبنا بزرگ تر باشد نمودار آن پایین تر است و برای x های بین صفر و یک هر چه مبنا بزرگ تر باشد نمودار بالاتر می باشد.



۱۶- حاصل عبارت $A = \log_5^a + \log_6^{\frac{1}{216}} - \log_{\frac{1}{7}}^{\sqrt[3]{49}}$ برابر $-\frac{1}{3}$ است. مقدار a کدام است؟

(۴) ۲۵

(۳) $\sqrt{5}$

(۲) ۵

(۱) $5\sqrt{5}$

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - حسابان ۱ صفحه ۸۲ - ۱۱۰۳

پاسخ: گزینه ۴

ابتدا لگاریتم دوم و سوم در عبارت A را محاسبه می کنیم:

$$A = \log_5^a + \log_6^{\frac{1}{216}} - \log_{\frac{1}{7}}^{\sqrt[3]{49}} \Rightarrow \log_5^a + \log_6^{\frac{1}{216}} - \log_{\frac{1}{7}}^{\sqrt[3]{49}} = -\frac{1}{3}$$

می‌دانیم طبق تعریف لگاریتم $\log_b^a = c \Leftrightarrow b^c = a$ پس خواهیم داشت:

$$\log_{\frac{1}{e}}^{\frac{1}{e}} = t \Rightarrow e^t = \frac{1}{\frac{1}{e}} \Rightarrow e^t = e^{-3} \Rightarrow t = -3$$

$$\log_{\frac{1}{v}}^{\sqrt[3]{49}} = t' \Rightarrow \left(\frac{1}{v}\right)^{t'} = \sqrt[3]{v^2} \Rightarrow v^{-t'} = v^{\frac{2}{3}} \Rightarrow t' = -\frac{2}{3}$$

$$\log_5^a - 3 + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3} \Rightarrow \log_5^a = 2 \Rightarrow a = 5^2 = 25$$

توان‌های گویا

هرگاه $a > 0$ برای هر دو عدد طبیعی m و n داریم:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

قوانین توان‌های گویا

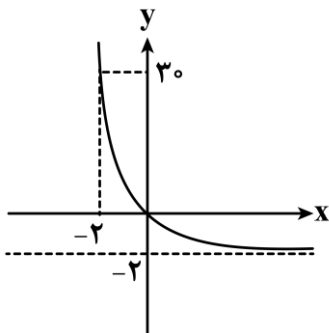
اگر a و b دو عدد مثبت و r و s دو عدد حقیقی باشند، داریم:

$$1) a^{-r} = \frac{1}{a^r} \quad 2) (a^r)^s = a^{rs} \quad 3) a^r \times a^s = a^{r+s}$$

$$4) a^r \div a^s = a^{r-s} \quad 5) (ab)^r = a^r \times b^r \quad 6) a^r \div b^r = \left(\frac{a}{b}\right)^r$$



۱۷- نمودار تابع $f(x) = a^{2x-1} - b$ به شکل مقابل است. فاصله نقطه‌ای به مختصات $A(2a, b)$ از مبدأ مختصات کدام است؟



- (۱) $\sqrt{3}$
- (۲) $\sqrt{5}$
- (۳) ۲
- (۴) ۳

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - حسابان ۱ صفحه ۷۴ - ۱۱۰۳

پاسخ: گزینه ۲

با مقایسه نمودار داده‌شده و نمودار تابع نمایی $f(x) = a^x$ معلوم می‌شود که نمودار $f(x) = a^x$ ۲ واحد به سمت پایین منتقل شده است، پس $b = 2$ است.

$$f(x) = a^{2x-1} - b \xrightarrow{b=2} f(x) = a^{2x-1} - 2$$

از طرفی می‌دانیم تابع از نقطه $(0, 0)$ می‌گذرد، پس:

$$\xrightarrow{(0,0)} f(0) = 0 \Rightarrow a^{-1} - 2 = 0 \Rightarrow \frac{1}{a} = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$A(1, 2)$$

بنابراین نقطه $A(2a, b)$ برابر است با:

$$OA = \sqrt{(1-0)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

در نتیجه فاصله نقطه $A(1, 2)$ تا مبدأ $O(0, 0)$ برابر است با:

 فاصله دو نقطه از هم

نقاط $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ را در نظر بگیرید، آن گاه طول پاره خط AB برابر است با:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$



۱۸- دامنه تابع $y = \sqrt{\log_2^{(x-2)} - \log_2^{(6-x)}}$ شامل چند عدد صحیح است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۵ (۱)

(متوسط - ترکیبی/محاسباتی - استاندارد ۶) - حسابان ۱ صفحه ۸۵ - ۱۱۰۳

پاسخ: گزینه ۲ 

اگر $a > b > 0$ ، آن گاه چون مبنا ۲ است که از ۱ بزرگ تر است، پس $\log_2^a > \log_2^b$ و برعکس.

$$\log_2^{(x-2)} - \log_2^{(6-x)} \geq 0 \Rightarrow \log_2^{(x-2)} \geq \log_2^{(6-x)} \Rightarrow x-2 \geq 6-x \Rightarrow 2x \geq 8 \Rightarrow x \geq 4 \quad (1)$$

از طرفی عبارت مقابل لگاریتم باید مثبت باشد.

$$\begin{cases} x-2 > 0 \Rightarrow x > 2 \\ 6-x > 0 \Rightarrow x < 6 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} 2 < x < 6 \quad (2)$$

بنابراین از اشتراک (۱) و (۲) خواهیم داشت:

$$\xrightarrow{\text{اشتراک (۱), (۲)}} 4 \leq x < 6$$

که شامل دو عدد صحیح ۴ و ۵ است.

نامعادلات لگاریتمی

به روابط زیر که از روی شکل تابع لگاریتم و افزایشی یا کاهشی بودن نمودار آن به دست می آید، توجه کنید:
الف) اگر $a > 1$ باشد:

$$\log_a^x > \log_a^y \xrightarrow{a > 1} x > y$$

ب) اگر $0 < a < 1$ باشد:

$$\log_a^x > \log_a^y \xrightarrow{0 < a < 1} x < y$$

نوشابه اضافی! (صرفاً برای علاقه مندان)

اگر یک سمت نامعادله عدد باشد:

$$\log_a^x > y \xrightarrow{a > 1} x > a^y$$

$$\log_a^x < y \xrightarrow{a > 1} x < a^y$$

$$\log_a^x > y \xrightarrow{0 < a < 1} x < a^y$$

$$\log_a^x < y \xrightarrow{0 < a < 1} x > a^y$$

در ادامه سال تحصیلی بعد از خوندن ویژگی های لگاریتم می تونید به این فکر کنید که چطور این جواب ها به دست اومدن؟ 😊



تذکر!

در هر یک از روابط بالا فرض شده که تمام عبارت‌ها تعریف شده‌اند.



۱۹- تابع $f(x) = 5^{2x+3} \times k^{-x+1}$ به گونه‌ای است که با افزایش مقادیر x ، مقادیر تابع f نیز افزایش می‌یابند، در این صورت k چند مقدار صحیح می‌تواند اختیار کند؟

۴ (۴)

۵ (۳)

۲۴ (۲)

۲۵ (۱)

(متوسط - ترکیبی - استاندارد) - حسابان ۱ صفحه ۷۷ - ۱۱۰۳

پاسخ: گزینه ۲

ابتدا ضابطه تابع را با استفاده از قوانین توان‌های گویا ساده‌تر می‌کنیم:

$$f(x) = 5^{2x+3} \times k^{-x+1} = 5^{2x} \times 5^3 \times k^{-x} \times k$$

$$f(x) = 125k \times \left(\frac{25}{k}\right)^x$$

برای این که تابع f به گونه‌ای باشد که با افزایش مقادیر x ، مقادیر تابع f نیز افزایش یابند، باید $\frac{25}{k} > 1$ و $k > 0$ باشد، بنابراین باید $0 < k < 25$ باشد که در این صورت k مقادیر صحیح ۱، ۲، ۳، ...، ۲۴ را می‌تواند اختیار کند که تعداد آن‌ها برابر ۲۴ است.

افزایش یا کاهش؟ مسئله این است!

در تابع $f(x) = a^x$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{اگر } a > 1 \text{ با افزایش مقدار } x \text{، مقدار } f(x) \text{ افزایش می‌یابد.} \\ \text{اگر } 0 < a < 1 \text{ با افزایش مقدار } x \text{، مقدار } f(x) \text{ کاهش می‌یابد.} \end{array} \right.$



۲۰- اگر $f(x) = \frac{2^x + 3}{2^x + 6}$ باشد، برد تابع f به صورت $R_f = (a, b)$ خواهد بود. حاصل $a + b$ کدام است؟

 $\frac{3}{2}$ (۴)

۳ (۳)

 $\frac{5}{2}$ (۲)

۱ (۱)

(سخت - محاسباتی - زمان‌بر) - حسابان ۱ صفحه ۷۵ - ۱۱۰۳

پاسخ: گزینه ۴

$$f(x) = \frac{2^x + 3}{2^x + 6} = \frac{2^x + 6 - 3}{2^x + 6} = \frac{2^x + 6}{2^x + 6} - \frac{3}{2^x + 6} \Rightarrow f(x) = 1 - \frac{3}{2^x + 6}$$

می‌دانیم که برای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم:

$$2^x > 0$$

حال سعی می‌کنیم ضابطه f را از روی این نامساوی بسازیم:

$$2^x > 0 \Rightarrow 2^x + 6 > 6$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{1}{2^x + 6} < \frac{1}{6} \Rightarrow 0 < \frac{3}{2^x + 6} < \frac{3}{6} \Rightarrow 0 < \frac{-3}{2^x + 6} < -\frac{1}{2} \Rightarrow 1 > 1 - \frac{3}{2^x + 6} > \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} < f(x) < 1 \Rightarrow R_f = \left(\frac{1}{2}, 1\right) \Rightarrow a = \frac{1}{2}, b = 1$$

$$\Rightarrow a + b = \frac{3}{2}$$

برای به دست آوردن برد توابع معمولاً از یک نامساوی درست شروع می‌کنیم و سپس با ساختن عبارت تابع که به دنبال محدوده آن هستیم، برد را می‌یابیم.



۲۱- دایره $C(O, 5)$ را تحت بردار $\vec{V}$ انتقال می‌دهیم تا به دایره C' برسیم. اگر نسبت کمترین فاصله نقاط دو دایره به بیشترین فاصله نقاط دو دایره از هم برابر $\frac{1}{6}$ باشد، آن‌گاه طول بردار $\vec{V}$ برابر کدام است؟

۱۵ (۴)

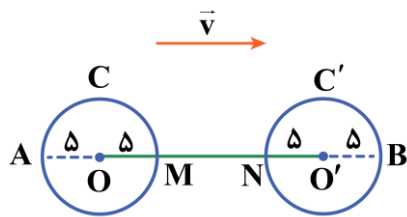
۱۴ (۳)

۱۲ (۲)

۱۰ (۱)

(آسان - مفهومی - استاندارد) - هندسه ۲ صفحه ۳۹ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۳



برای انتقال دادن دایره $C(O, 5)$ تحت بردار $\vec{V}$ ، ابتدا مرکز O را تحت این بردار منتقل می‌کنیم تا به نقطه O' برسیم سپس دایره‌ای به مرکز O' و شعاع ۵ رسم می‌کنیم، در این صورت مطابق شکل MN فاصله نزدیک‌ترین نقاط دو دایره و AB فاصله دورترین نقاط دو دایره است.

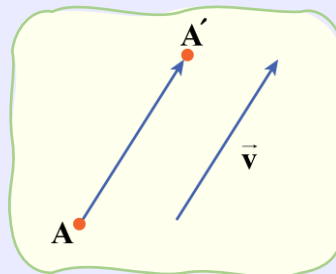
$$\Rightarrow \frac{MN}{AB} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{OO' - 10}{OO' + 10} = \frac{1}{6} \Rightarrow 6OO' - 60 = OO' + 10 \Rightarrow 5OO' = 70 \Rightarrow OO' = 14$$

طول بردار $\vec{V}$ برابر همان OO' یعنی ۱۴ است.



انتقال

انتقال با بردار $\vec{V}$ تبدیلی است در یک صفحه که در آن هر نقطه مانند A به نقطه‌ای مانند A' در آن صفحه تصویر می‌شود به طوری که $\vec{AA'} = \vec{V}$. به شکل مقابل توجه کنید:



ویژگی‌های انتقال:

۱) انتقال یک تبدیل طولپاست. (یعنی طول را حفظ می‌کند).

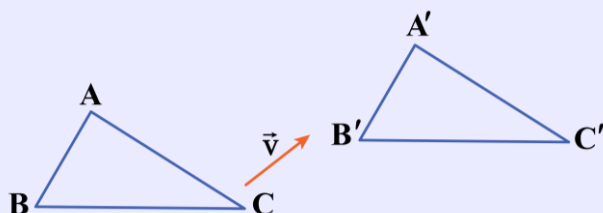
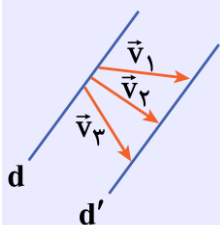
۲) انتقال یافته هر خط، خطی موازی آن است، بنابراین انتقال، شیب خط را حفظ می‌کند.

۳) هر دو خط موازی d و d' انتقال یافته یکدیگرند و بی‌شمار بردار انتقال برای آن‌ها وجود دارد. (باید ابتدا و انتهای بردار روی دو خط باشد).

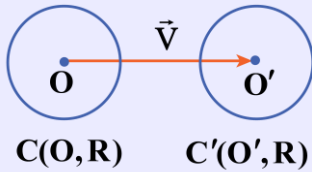
۴) انتقال، نقطه ثابت تبدیل ندارد مگر آن که بردار انتقال صفر باشد.

۵) انتقال، اندازه زاویه را حفظ می‌کند.

۶) انتقال، جهت شکل را تغییر نمی‌دهد.



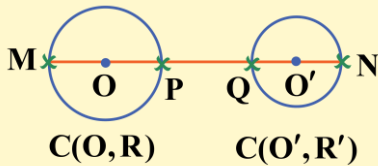
۷) اگر بخواهیم دایره $C(O, R)$ را با بردار انتقال $\vec{V}$ انتقال دهیم، دایره‌ای با مرکز O' و شعاع R ایجاد می‌شود، به طوری که:



$$\vec{OO'} = \vec{V}$$

محاسبه بیشترین و کمترین فاصله نقاط دو دایره متخارج

• بیشترین فاصله نقاط دو دایره:



$$MN = OO' + (R + R')$$

• کمترین فاصله نقاط دو دایره:

$$PQ = OO' - (R + R')$$

۲۲- دو نقطه $A(3, -1)$ و $B(1, 1)$ بازتاب یکدیگر نسبت به خط d هستند. کدام نقطه نمی‌تواند نقطه ثابت این تبدیل باشد؟

- (۱) $(3, 1)$ (۲) $(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$ (۳) $(-1, -3)$ (۴) $(0, 2)$

(متوسط - مفهومی - استاندارد) - هندسه ۲ صفحه ۳۶ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۴

دو نقطه A و B بازتاب هم نسبت به خط d هستند، پس d عمودمنصف پاره خط AB است. معادله خط d را پیدا می‌کنیم، می‌دانیم هر نقطه روی خط d نقطه ثابت تبدیل بازتاب می‌باشد.

برای پیدا کردن معادله خط d ، شیب AB را عکس و قرینه می‌کنیم تا شیب خط d پیدا شود و نقطه M وسط پاره خط AB نقطه‌ای روی خط d است. داریم:

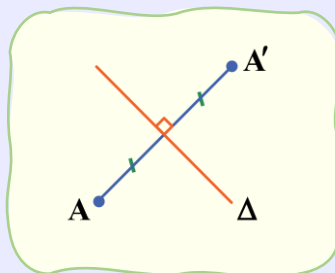
$$m_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1+1}{1-3} = -1 \Rightarrow m_d = 1, M = \frac{A+B}{2} = (2, 0)$$

$$d \text{ معادله محور } y - 0 = 1(x - 2) \Rightarrow y = x - 2$$

دیده می‌شود که نقاط $(3, 1)$ ، $(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$ و $(-1, -3)$ روی خط d صدق می‌کنند پس نقطه ثابت این تبدیل هستند ولی نقطه $(0, 2)$ روی این خط قرار ندارد، پس نقطه ثابت این تبدیل نیست.

بازتاب

بازتاب نسبت به خط Δ تبدیلی است که تحت آن تصویر هر نقطه مانند A نسبت به خط Δ نقطه A' است به طوری که خط Δ عمودمنصف AA' باشد. به شکل زیر توجه کنید:



در واقع خط Δ ، عمودمنصف پاره خط AA' می‌باشد.

نقطه ثابت تبدیل در بازتاب



اگر نقطه A روی محور بازتاب باشد، تصویر آن بر خودش منطبق می‌شود. (نقطه ثابت بازتاب)

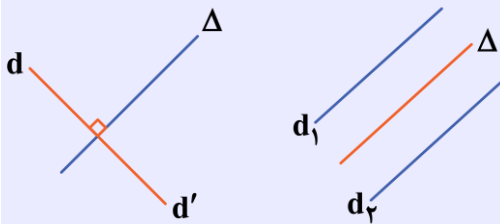


ویژگی‌های بازتاب:

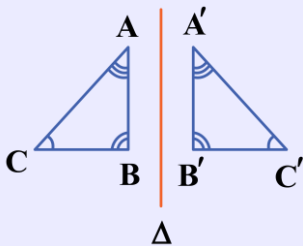
۱) بازتاب، یک تبدیل طولپاست. (یعنی طول را حفظ می‌کند).

۲) بازتاب یک خط راست، یک خط راست است.

۳) بازتاب، شیب خط را حفظ نمی‌کند، مگر که آن خط با محور بازتاب موازی یا بر آن عمود باشد.



۴) بازتاب، اندازه زاویه‌ها را حفظ می‌کند.



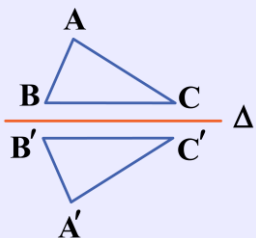
$$\hat{A} = \hat{A}'$$

$$\hat{B} = \hat{B}'$$

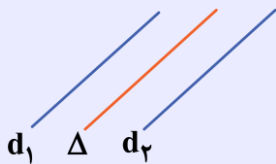
$$\hat{C} = \hat{C}'$$

۵) در بازتاب می‌توان بی‌شمار نقطه ثابت یافت. (نقاط روی محور بازتاب)

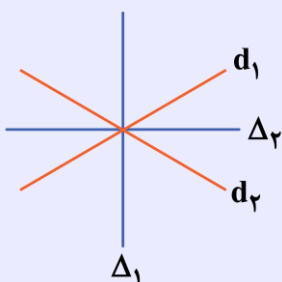
۶) بازتاب، جهت شکل را حفظ نمی‌کند.



۷) هر دو خط موازی، نسبت به خط موازی وسط آن دو خط، بازتاب یکدیگرند.



۸) هر دو خط متقاطع، نسبت به نیمسازهای زاویه‌های بین آن دو خط، بازتاب یکدیگرند، پس ۲ خط متقاطع دارای ۲ محور بازتاب‌اند.



۲۳- مثلث $\triangle ABC$ ($\hat{B} = 90^\circ, AB = \sqrt{5}, BC = 2$) را به مرکز A با زاویه 90° در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت دوران می‌دهیم. تا

به مثلث $\triangle A'B'C'$ برسیم. طول پاره خط CC' برابر کدام است؟

(۴) $3\sqrt{2}$

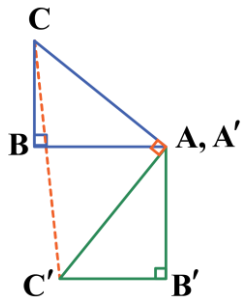
(۳) $5\sqrt{2}$

(۲) $3\sqrt{3}$

(۱) $2\sqrt{5}$

(متوسط - خط به خط - سریع) - هندسه ۲ صفحه ۴۱ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۴



نقطه A مرکز این دوران است پس دوران نقطه A بر خودش منطبق می‌شود چون مرکز دوران نقطه ثابت تبدیل است. در ضمن در شکل، B' دوران یافته B و C' دوران یافته C با زاویه 90° به مرکز A می‌باشند، پس $AC = AC'$ و $\angle CAC' = 90^\circ$ است.

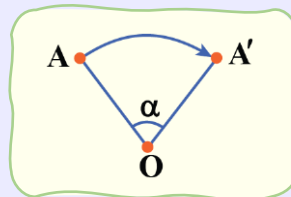
در نتیجه مثلث $\triangle ACC'$ قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است، بنابراین:

$$\triangle ABC: AC^2 = AB^2 + BC^2 = 5 + 4 = 9 \Rightarrow AC = 3 = AC'$$

$$\triangle ACC': CC'^2 = AC^2 + AC'^2 = 3^2 + 3^2 = 18 \Rightarrow CC' = 3\sqrt{2}$$

دوران

دوران به مرکز نقطه ثابت O و زاویه α تبدیلی است که تحت آن تصویر هر نقطه مانند A از صفحه، نقطه‌ای مانند A' از همان صفحه است. به شکل مقابل توجه کنید.



نقطه O را مرکز دوران و زاویه α را زاویه دوران می‌گوییم. جهت دوران (ساعتگرد یا پادساعتگرد) نیز مهم است.

ویژگی‌های دوران:

(۱) دوران تبدیلی طولیاست. (یعنی طول را حفظ می‌کند).

(۲) مرکز دوران، نقطه ثابت دوران است.

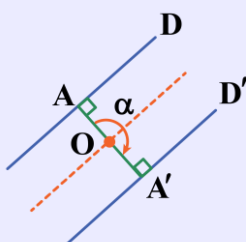
(۳) دوران شیب خط را حفظ نمی‌کند مگر آن که زاویه دوران مضرب طبیعی 18° باشد، بنابراین در حالت کلی دوران شیب خط را حفظ نمی‌کند.

(۴) دوران با زاویه $n \times 36^\circ$ ($n \in \mathbb{N}$) هر نقطه را بر خودش تصویر می‌کند.

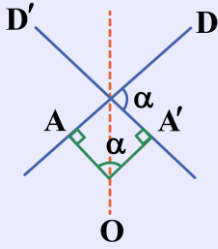
(۵) دوران جهت شکل را حفظ می‌کند.

(۶) دوران یافته هر خط، خطی است که با خط اول همان زاویه دوران را می‌سازد.

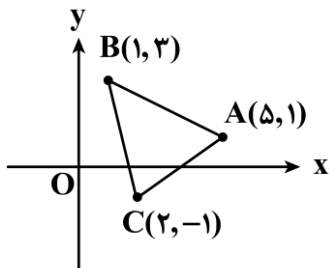
(۷) هر دو خط موازی، دوران یافته یکدیگر با زاویه دوران 18° (یا مضارب فرد آن) هستند، به‌طوری‌که مرکز دوران روی خط وسط آن دو خط واقع است.



۸ هر دو خط متقاطع، دوران یافته یکدیگرند به طوری که زاویه دوران، یکی از زوایای بین دو خط و مرکز دوران روی نیمساز زاویه دیگر بین ۲ خط است.



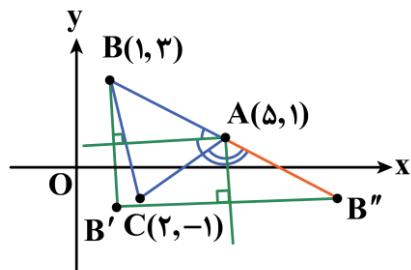
۲۴- در مثلث $\triangle ABC$ بازتاب نقطه B نسبت به نیمساز داخلی زاویه $\hat{A}$ نقطه B' و بازتاب B' نسبت به نیمساز خارجی زاویه $\hat{A}$ نقطه B'' می باشد. طول پاره خط CB'' برابر کدام است؟



- (۱) $\sqrt{5}$
- (۲) $\sqrt{7}$
- (۳) ۷
- (۴) ۵

(متوسط - ترکیبی - استاندارد) - هندسه ۲ صفحه ۴۳ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۳



دو نیمساز داخلی و خارجی زاویه $\hat{A}$ بر هم عمودند و از طرف دیگر می دانیم حاصل دو بازتاب نسبت به دو خط متقاطع، یک دوران با زاویه مساوی دو برابر زاویه بین دو محور بازتاب است، پس نقطه B'' دوران یافته نقطه B به مرکز A با زاویه 180° است، پس A وسط دو نقطه B و B'' است. داریم:

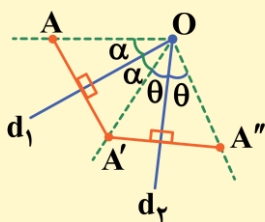
$$A = \frac{B + B''}{2} \Rightarrow B'' = 2A - B = 2(5, 1) - (1, 3) = (9, -1)$$

$$CB'' = 9 - 2 = 7$$

بنابراین چون خط CB'' افقی است طول خط برابر با اختلاف طول دو نقطه است و داریم:

ترکیب دو بازتاب = یک دوران

اگر نقطه A را یک بار نسبت به خط d_1 بازتاب دهیم تا نقطه A' به دست آید و A' را نسبت به خط d_2 بازتاب دهیم تا نقطه A'' به دست آید، می توان گفت دوران یافته نقطه A با زاویه ۲ برابر زاویه بین خط d_1 و d_2 می باشد. به شکل دقت کنید:



۲۵- D نقطه همرسی نیمسازهای زوایای داخلی مثلث ABC با اضلاع $AB=4$ ، $AC=3$ و $BC=5$ است. اگر $\triangle A'B'C'$ انتقال یافته مثلث

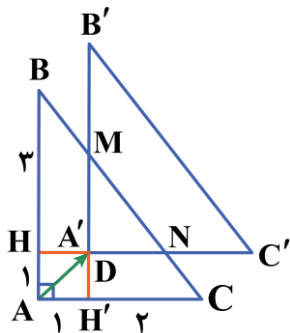
$\triangle ABC$ تحت بردار $\overrightarrow{AD}$ باشد، آنگاه مساحت ناحیه مشترک دو مثلث ABC و تصویرش تحت این انتقال، برابر کدام است؟

- (۱) $\frac{24}{25}$ (۲) $\frac{25}{24}$ (۳) $\frac{25}{12}$ (۴) ۲

پاسخ: گزینه ۲

(سخت - مفهومی - زمان ۵ - هندسه ۲ صفحه ۳۹ - ۱۱۰۲)

مثلث با اضلاع ۳، ۴ و ۵ قائم الزویه است، پس $\hat{A} = 90^\circ$ است. در شکل D نقطه همرسی نیمسازهای داخلی مثلث ABC است و $\triangle A'B'C'$ انتقال یافته $\triangle ABC$ تحت بردار $\overrightarrow{AD}$ می باشد. می دانیم فاصله نقطه تلاقی نیمسازهای داخلی هر مثلث تا اضلاع مثلث برابر شعاع دایره محاطی داخلی است، پس:



$$DH = DH' = r = \frac{S}{P} = \frac{\frac{1}{2}(3)(4)}{\frac{1}{2}(3+4+5)} = \frac{12}{12} = 1$$

چون $\hat{A} = 90^\circ$ است، پس چهارضلعی AHDH' مربع به طول ضلع ۱ است، در نتیجه:

$$BH = AB - AH = 4 - 1 = 3 \text{ و } CH' = AC - AH' = 3 - 1 = 2$$

و داریم:

$$\triangle ABC : MH' \parallel AB \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{MH'}{AB} = \frac{CH'}{AC} \Rightarrow \frac{MH'}{4} = \frac{2}{3} \Rightarrow MH' = \frac{8}{3} \Rightarrow MD = MH' - DH' \Rightarrow MD = \frac{8}{3} - 1 = \frac{5}{3}$$

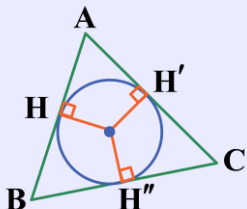
$$\triangle ABC : NH \parallel AC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{NH}{AC} = \frac{BH}{AB} \Rightarrow \frac{NH}{3} = \frac{3}{4} \Rightarrow NH = \frac{9}{4} \Rightarrow DN = NH - DH \Rightarrow DN = \frac{9}{4} - 1 = \frac{5}{4}$$

بنابراین:

$$S_{\triangle DMN} = \frac{1}{2} MD \times DN = \frac{1}{2} \left(\frac{5}{3}\right) \left(\frac{5}{4}\right) = \frac{25}{24}$$

نیمساز

محل برخورد نیمسازهای مثلث، مرکز دایره محاطی مثلث است. شعاع دایره محاطی مثلث از رابطه زیر به دست می آید:



$$r = \frac{S}{P} \rightarrow \begin{array}{l} \text{مساحت مثلث} \\ \text{نصف محیط مثلث} \end{array}$$

۲۶- در فضای نمونه‌ای $S = \{a, b, c, d\}$ ، اگر $P(\{a, b\}) = \frac{9}{40}$ و $P(\{a, c\}) = \frac{7}{40}$ و $P(\{b, c\}) = \frac{3}{40}$ باشد، $P(d)$ کدام است؟

$$\frac{23}{40} \quad (۴)$$

$$\frac{21}{40} \quad (۳)$$

$$\frac{17}{40} \quad (۲)$$

$$\frac{11}{40} \quad (۱)$$

(آسان - مفهومی - استاندارد) - آمار و احتمال صفحه ۴۶ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۳

از آن جا که مجموع احتمال تمام تک‌عضوی‌ها باید برابر با ۱ باشد، داریم:

$$P(a) + P(b) + P(c) + P(d) = 1$$

حال طبق فرض سؤال:

$$\left. \begin{array}{l} P(a) + P(b) = \frac{9}{40} \\ P(a) + P(c) = \frac{7}{40} \\ P(b) + P(c) = \frac{3}{40} \end{array} \right\} \xrightarrow{+} 2(P(a) + P(b) + P(c)) = \frac{19}{20}$$

$$\Rightarrow P(a) + P(b) + P(c) = \frac{19}{40} \Rightarrow P(d) = 1 - \frac{19}{40} = \frac{21}{40}$$

احتمال غیرهم‌شانس

اگر $S = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ فضای نمونه‌ای متناهی باشد و S_i ها غیرهم‌شانس باشند (یعنی مثلاً احتمال وقوع S_1 با احتمال وقوع S_2 فرق داشته باشد) آن‌گاه S را فضای نمونه‌ای غیرهم‌شانس می‌گویند.

به زبون خودمونی یعنی اعضای S شانس برابر نداشته باشند و شانسی یکی بیشتر از بقیه باشه! در فضاهای نمونه‌ای غیرهم‌شانس داریم:

$$P(S) = 1 \quad (۱)$$

$$\sum_{i=1}^n P(S_i) = P(S_1) + P(S_2) + \dots + P(S_n) = 1$$

(به عبارت دیگه مجموع احتمال‌های اعضای فضای نمونه‌ای همیشه برابره یکه.)

(۲) اگر A پیشامدی از فضای نمونه‌ای S باشد، یعنی $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\} \subseteq S$ ، آن‌گاه:

$$P(A) = P(\{a_1, \dots, a_m\}) = P(a_1) + P(a_2) + \dots + P(a_m)$$

در این صورت، چون $A \subseteq S$ بنابراین همواره: $0 \leq P(A) \leq 1$

تذکره!

$$P(\{a\}) = P(a)$$

یادتون باشه که برای پیشامدهای ساده می‌تونیم پیشامد رو بدون علامت مجموعه بنویسیم:



۲۷- جعبه‌ای محتوی ۹ کارت به شماره‌های ۱ تا ۹ است. دو کارت باهم از این جعبه خارج می‌کنیم. اگر مجموع دو کارت مضرب ۵ باشد، احتمال آن‌که هر دو عدد فرد باشند، کدام است؟

$$\frac{3}{4} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{4} \quad (۳)$$

$$\frac{2}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{2}{5} \quad (۱)$$

(آسان - مفهومی - استاندارد) - آمار و احتمال صفحه ۵۰ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۳

با توجه به فضای نمونه داریم:

$A =$ پیشامد فرد بودن هر دو عدد ظاهر شده

$B =$ پیشامد مضرب ۵ بودن مجموع عدد دو کارت $= \{\{۱,۴\}, \{۱,۹\}, \{۲,۳\}, \{۲,۸\}, \{۳,۷\}, \{۴,۶\}, \{۶,۹\}, \{۷,۸\}\}$

$A \cap B =$ پیشامد فرد بودن هر دو عدد ظاهر شده $= \{\{۱,۹\}, \{۳,۷\}\}$

توجه داریم که چون دو کارت را با هم خارج می‌کنیم پیشامدهای $\{۲,۳\}$ و $\{۳,۲\}$ فرقی با هم ندارند و یک پیشامد شمرده می‌شوند. زیرا ترتیب مهم نیست و اولین عدد و دومین عدد وقتی دو کارت را همزمان خارج می‌کنیم معنایی ندارد.

احتمال مطلوب سؤال برابر است با:

$P(A|B) =$ پیشامد فرد بودن هر دو عدد ظاهر شده به شرط مضرب ۵ بودن مجموعشان

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{8}{9}} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

هر دو کارت فرد باشند.
↑
 $P(A|B)$
↓
مجموع دو کارت مضرب ۵ باشد.

احتمال شرطی و احتمال کل

اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، $P(A|B)$ یعنی احتمال وقوع A به شرط وقوع B که برابر است با:

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

و آن را **احتمال شرطی** می‌نامند.

در واقع این‌جا چون B رخ داده است، دیگر فضای نمونه‌ای همه S نیست و به B محدود شده و انگار B فضای نمونه‌ای جدیدی است و می‌خواهیم در این فضای جدید احتمال وقوع پیشامد A را بیابیم.

بنابراین می‌توان نتیجه گرفت:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(B) \times P(A|B)$$

$P(A \cap B) = P(B) \times P(A|B)$ به **قانون ضرب احتمال** معروف است.



۲۸- علی و احمد عضو تیم یازده نفره فوتبال مدرسه شان هستند که در آن قد هیچ دو نفری یکسان نیست. اگر بدانیم علی از احمد قدبلندتر است، احتمال آن که علی از نظر بلندی قد، نفر هشتم تیم باشد کدام است؟ (۷ نفر از علی قدبلندتر هستند).

$$\frac{3}{55} \quad (۴)$$

$$\frac{4}{15} \quad (۳)$$

$$\frac{2}{55} \quad (۲)$$

$$\frac{2}{15} \quad (۱)$$

(متوسط - مفهومی - استاندارد) - آمار و احتمال صفحه ۵۱ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۴

مسئله احتمال شرطی را بیان می کند.

$B =$ علی از احمد قدبلندتر باشد.

$A =$ علی هشتمین نفر از نظر بلندی قد باشد.

$P(A|B) =$ علی هشتمین نفر از نظر بلندی قد باشد به شرط این که علی از احمد قدبلندتر باشد.

(۱) احتمال این که بین دو نفر یکی قدبلندتر باشد، $\frac{1}{2}$ است.

(۲) از طرفی افراد دیگر به جز علی و احمد که ۹ نفر هستند و هیچ دو نفری قد یکسانی ندارند، هیچ محدودیتی برای این که چندمین نفر از لحاظ بلندی قد باشند ندارند، پس به ۹! طریق ممکن است به ترتیب قد چیده شوند.

(۳) چون علی از احمد قدبلندتر است پس باید احمد کوتاه تر باشد و این یعنی از نفر هشتم به بعد خواهد بود. که می تواند نفر نهم، دهم یا یازدهم باشد. که به سه حالت می تواند اتفاق بیافتد.

جای احمد (جایگاه های ۹، ۱۰، ۱۱)

جای علی نفر هشتم جای ۹ نفر دیگر

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1 \times 3 \times 9!}{11!}}{\frac{1}{2}} = \frac{6 \times 9!}{11!} = \frac{6}{11 \times 10} = \frac{3}{55}$$

علی نفر هشتم

علی بلندتر از احمد



۲۹- فضای نمونه ای یک آزمایش تصادفی برابر $S = \{a, b, c, d\}$ است. اگر $P(a) = 2P(b) = 2P(c) = 2P(d)$ باشد، مقدار $P(\{a, b\} | \{a, c, d\})$ کدام است؟

$$\frac{4}{15} \quad (۴)$$

$$\frac{2}{5} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{2} \quad (۱)$$

(متوسط - ترکیبی - زمان بر) - آمار و احتمال صفحه ۵۱ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۱

ابتدا با استفاده از اصول احتمال و مفروضات سؤال، احتمال هر پیشامد ساده را محاسبه می کنیم:

$$P(a) + P(b) + P(c) + P(d) = 1 \Rightarrow P(a) + \frac{P(a)}{2} + \frac{P(a)}{2} + \frac{P(a)}{2} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{6P(a) + 3P(a) + 3P(a) + 3P(a)}{6} = 1 \Rightarrow \frac{15P(a)}{6} = 1 \Rightarrow P(a) = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

برای محاسبه احتمال مطلوب به $P(c)$ و $P(d)$ نیاز داریم:

$$P(a) = \frac{2}{5} \Rightarrow \begin{cases} P(c) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{15} \\ P(d) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{15} \end{cases}$$

$$\Rightarrow P(\{a, b\} | \{a, c, d\}) = \frac{P(\{a, b\} \cap \{a, c, d\})}{P(\{a, c, d\})} = \frac{P(a)}{P(a) + P(c) + P(d)} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{5} + \frac{2}{15} + \frac{4}{15}} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{12}{15}} = \frac{30}{60} = \frac{1}{2}$$



۳۰- سه جعبه سیب داریم. در جعبه اول ۵ سیب قرمز و ۴ سیب زرد، در جعبه دوم فقط تعدادی سیب قرمز و در جعبه سوم دو سیب قرمز و دو سیب زرد داریم. از جعبه اول به تصادف یک سیب برداشته داخل جعبه دوم می‌اندازیم، سپس از جعبه دوم سیبی برداشته داخل جعبه سوم می‌اندازیم و سپس از جعبه سوم سیبی برمی‌داریم. احتمال آن‌که هر سه سیب برداشته شده قرمز باشند، کدام است؟

$$\frac{3}{5} \quad (۴)$$

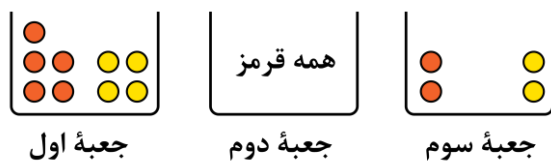
$$\frac{2}{3} \quad (۳)$$

$$\frac{2}{5} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{3} \quad (۱)$$

(متوسط - مفهومی - استاندارد ۶) - آمار و احتمال صفحه ۵۳ - ۱۱۰۲

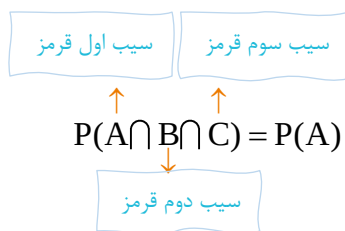
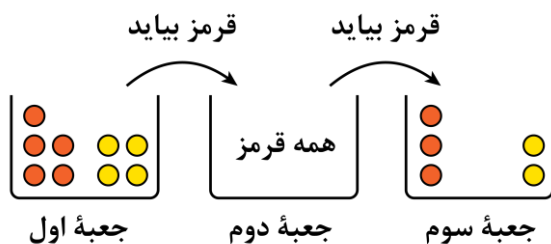
پاسخ: گزینه ۱



در ابتدا سه جعبه به صورت مقابل هستند:

بعد از انتقال‌ها داریم:

اگر از ظرف اول سیب قرمز برداشته شود و به ظرف دوم اضافه شود، ظرف دوم همچنان فقط سیب قرمز دارد.



$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B|A) \times P(C|A \cap B) = \frac{\binom{5}{1}}{\binom{9}{1}} \times 1 \times \frac{\binom{3}{1}}{\binom{5}{1}} = \frac{1}{3}$$

تعمیم قانون ضرب احتمال برای سه پیشامد

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B|A) \times P(C|A \cap B)$$





برای دیدن پاسخنامه ویدئویی آزمون
بالا را اسکن یا روی آن کلیک کنید! QR Code

جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم

(از عوامل موثر بر مقاومت الکتریکی تا ابتدای ترکیب مقاومت‌ها) - صفحه‌های ۵۱ تا ۷۰

بودجه‌بندی

این آزمون

سهم در

کنکور

درمجموع ۲ تست از ۳۵ تست کنکور را پوشش داده است.

۳۱- با کاهش دمای یک مقاومت الکتریکی آن و رسانایی الکتریکی آن افزایش می‌یابد.

(۱) رسانا - کاهش

(۲) رسانا - افزایش

(۳) نیم‌رسانا - کاهش

(۴) نیم‌رسانا - افزایش

(آسان - خطبه‌خط - سریع ۵ - صفحه ۵۲ - ۱۱۰۲)

پاسخ: گزینه ۱

با کاهش دمای یک رسانا، مقاومت الکتریکی آن کاهش و رسانایی الکتریکی آن افزایش می‌یابد.



نکته

۱- مقاومت ویژه یک ماده به ساختار اتمی و دمای آن بستگی دارد. رساناهای الکتریکی خوب، مقاومت ویژه بسیار کم و عایق‌ها (نارساناها) خوب، مقاومت ویژه بسیار زیادی دارند.

۲- دسته‌ای از مواد مانند ژرمانیم و سیلیسیم خالص نیز وجود دارند که مقاومت ویژه آن‌ها بین مقاومت ویژه رساناها و نارساناها است. به این دسته از مواد، نیم‌رسانا می‌گویند.

۳- مقاومت ویژه رساناهای فلزی با افزایش دما، زیاد می‌شود؛ درحالی‌که مقاومت ویژه نیم‌رساناها با افزایش دما، کاهش می‌یابد.



تذکر

نیم‌رساناها در دماهای پایین شبیه به نارساناها و در دماهای بالا شبیه به رساناها رفتار می‌کنند.



راهنمای مسیر

این تیپ سوالات در امتحان تشریحی هم می‌آید. خواستیم بگیم حواسمون به امتحان تشریحی هم هست!



۳۲- دمای یک رسانای فلزی با ضریب دمایی مقاومت ویژه $4 \times 10^{-3} \text{ K}$ را 20°C افزایش می‌دهیم. مقاومت الکتریکی این رسانا چند درصد افزایش می‌یابد؟

(۴) ۸

(۳) ۴

(۲) ۸ / ۰

(۱) ۴ / ۰

(آسان - محاسباتی - استاندارد ۵ - صفحه ۵۴ - ۱۱۰۲)

پاسخ: گزینه ۴

طبق رابطه زیر می‌توانیم بنویسیم:

$$\text{درصد تغییرات مقاومت} = \frac{\Delta R}{R_1} \times 100 = \frac{R_1 \alpha \Delta \theta}{R_1} \times 100 = \alpha \Delta \theta \times 100$$

$$\Rightarrow \text{درصد تغییرات مقاومت} = 4 \times 10^{-3} \times 20 \times 100 = 0.8\%$$

اثر تغییر دما بر مقاومت الکتریکی

- ۱- در مقاومت‌های نیم‌رسانا مانند مقاومت‌های ژرمانیم و سیلیسیم با افزایش دما، مقاومت الکتریکی کاهش می‌یابد.
۲- در مقاومت‌های فلزی، با افزایش دما، مقاومت الکتریکی هم افزایش می‌یابد. برای محاسبه تغییرات مقاومت الکتریکی فلزات برحسب دما از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$\Delta R = R_T - R_1 = R_1 \alpha \Delta \theta$$

$$\Rightarrow R_T = R_1 (1 + \alpha \Delta \theta)$$

- ۳- در مسائل مربوط به اثر دما بر مقاومت، ممکن است خواسته‌های زیر مطرح شود:

الف) مقاومت الکتریکی چند برابر می‌شود؟

در این حالت نسبت $\frac{R_T}{R_1}$ را می‌خواهیم و داریم:

$$R_T = R_1 (1 + \alpha \Delta \theta) \Rightarrow \frac{R_T}{R_1} = 1 + \alpha \Delta \theta$$

ب) مقاومت الکتریکی چقدر تغییر می‌کند؟

در این حالت $R_T - R_1$ موردنظر است و داریم:

$$\Delta R = R_T - R_1 = R_1 \alpha \Delta \theta$$

ج) مقاومت الکتریکی چند درصد تغییر کرده است؟

در این حالت $\frac{\Delta R}{R_1}$ را می‌خواهیم و داریم:

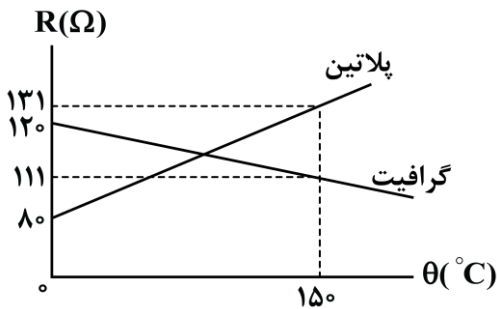
$$\frac{\Delta R}{R_1} = \frac{R_1 \alpha \Delta \theta}{R_1} = \alpha \Delta \theta$$

$$\Rightarrow \text{درصد تغییر مقاومت} = \alpha \Delta \theta \times 100$$



- ۳۳- شکل زیر، نمودار مقاومت الکتریکی یک قطعه گرافیتی و یک قطعه پلاتینی را در یک محدوده دمایی مشخص نشان می‌دهد. در

دمای چند درجه سلسیوس مقاومت الکتریکی دو قطعه با هم برابر می‌شود؟



- (۱) ۱۰۰
(۲) ۱۱۰
(۳) ۱۲۰
(۴) ۱۲۵

(سخت - محاسباتی - استاندارد) - صفحه ۵۴ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۱

روش اول

کام اول

ضرب دمایی مقاومت ویژه هر دو ماده را به دست می‌آوریم. با توجه به نمودار، داریم: (P: پلاتین و G: گرافیت)

$$\Delta R_P = R_{P0} \alpha_P \Delta \theta \Rightarrow 131 - 80 = 80 \times \alpha_P \times 150 \Rightarrow \alpha_P = \frac{51}{12000} = \frac{17}{4000} K^{-1}$$

$$\Delta R_G = R_{G0} \alpha_G \Delta \theta \Rightarrow 111 - 120 = 120 \times \alpha_G \times 150 \Rightarrow \alpha_G = -\frac{9}{18000} = -\frac{1}{2000} K^{-1}$$

کام آخر

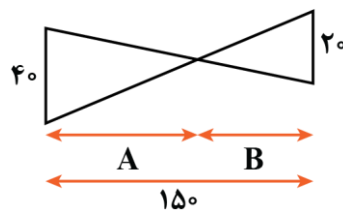
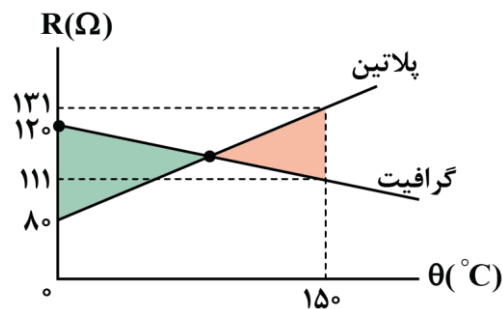
دمایی که مقاومت الکتریکی دو ماده یکسان می‌شود، را به دست می‌آوریم. برای این که مقاومت هر دو یکسان شود، باید اختلاف تغییر مقاومت دو رسانا برابر با اختلاف مقاومت اولیه آن‌ها باشد؛ در نتیجه داریم:

$$\begin{cases} \Delta R_G = R_{G_0} \alpha_G \Delta \theta \Rightarrow \Delta R_G = 120 \times \left(-\frac{1}{2000}\right) \times \Delta \theta = -\frac{3}{50} \Delta \theta \\ \Delta R_P = R_{P_0} \alpha_P \Delta \theta \Rightarrow \Delta R_P = 80 \times \left(\frac{17}{4000}\right) \times \Delta \theta = \frac{17}{50} \Delta \theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta R_P - \Delta R_G = 40 \Rightarrow \left(\frac{17}{50} - \left(-\frac{3}{50}\right)\right) \Delta \theta = 40 \Rightarrow \frac{2}{5} \Delta \theta = 40$$

$$\Rightarrow \Delta \theta = 100^\circ \text{C} \Rightarrow \theta - 0 = 100^\circ \text{C} \Rightarrow \theta = 100^\circ \text{C}$$

روش دوم



با توجه به تشابه دو مثلث داریم:

$$\frac{A}{B} = \frac{40}{20} \Rightarrow A = 2B$$

$$A + B = 2B + B = 3B = 150 \Rightarrow B = 50, A = 100$$

$$\Rightarrow A = \theta - 0 = 100 \Rightarrow \theta = 100^\circ \text{C}$$

۳۴- در ماشین‌های چمن‌زنی برقی، برای مسافت‌های حداکثر تا ۳۵m از سیم‌های مسی به قطر ۸mm و برای مسافت‌های طولانی‌تر از سیم‌های ضخیم‌تر به قطر ۱۲mm استفاده می‌کنند. در این صورت، مقاومت الکتریکی سیم ۹۰ متری ماشین چمن‌زنی، چند برابر مقاومت الکتریکی سیم ۲۰ متری همین ماشین چمن‌زنی است؟ (دمای سیم‌ها را ۲۰°C فرض کنید).

۴ (۴)

۴۰۰ (۳)

۲۰۰ (۲)

۲ (۱)

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - صفحه ۵۲ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۱

اگر سیم ۹۰ متری را با اندیس (۲) و سیم ۲۰ متری را با اندیس (۱) نشان دهیم، به کمک رابطه $R = \rho \frac{L}{A}$ داریم:

$$\begin{aligned} \frac{R_2}{R_1} &= \frac{\rho_2}{\rho_1} \times \frac{L_2}{L_1} \times \frac{A_1}{A_2} \xrightarrow[\text{قطر سیم } D]{\rho_1 = \rho_2, A = \frac{1}{4} \pi D^2} \frac{R_2}{R_1} = \frac{L_2}{L_1} \times \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2 \xrightarrow[D_2 = 0.12 \text{ cm} = 1/2 \text{ mm}]{L_2 = 90 \text{ m}, L_1 = 20 \text{ m}, D_1 = 8 \text{ mm}} \\ \frac{R_2}{R_1} &= \frac{90}{20} \times \left(\frac{8}{1/2}\right)^2 = \frac{9}{2} \times \frac{4}{9} = 2 \end{aligned}$$

سوتی‌های پرتکرار

اگر حواستون به سازگار کردن یکای قطر سیم‌ها نباشه در دام گزینه (۲) می‌افتید.

عوامل مؤثر بر مقاومت الکتریکی

۱- مقدار مقاومت الکتریکی یک رسانا به ویژگی‌های ساختمانی و دمای آن وابسته است و بستگی به اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر رسانا و جریان عبوری از آن ندارد. مقدار مقاومت الکتریکی یک رسانا برحسب ویژگی‌های ساختمانی آن را می‌توانیم از رابطه زیر به دست آوریم:

$$R = \rho \frac{L}{A}$$

R : مقدار مقاومت الکتریکی با یکای اهم (Ω)
 ρ : مقاومت ویژه رسانا با یکای اهم $\times$ متر ($\Omega \cdot m$)

L : طول رسانا با یکای متر (m)
 A : سطح مقطع رسانا با یکای مترمربع (m^2)

۲- با توجه به رابطه $R = \rho \frac{L}{A}$ ، برای مقایسه مقاومت الکتریکی دو رسانا به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$R = \rho \frac{L}{A} \Rightarrow \frac{R_2}{R_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \times \frac{L_2}{L_1} \times \frac{A_1}{A_2} \xrightarrow[D: \text{قطر مقطع}]{A \propto D^2} \frac{R_2}{R_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \times \frac{L_2}{L_1} \times \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2$$

راهنمای مسیر

این سوال برگرفته از تمرین کتاب درسی هست. یادت باشه از سوالات کتاب درسی غافل نشی!



۳۵- مقاومت الکتریکی رسانای A ، ۹ برابر مقاومت الکتریکی رسانای B است. اگر مقاومت ویژه رسانای B ، ۴ برابر مقاومت ویژه رسانای A باشد، با ثابت ماندن جرم و دمای رسانا، رسانای B را آن قدر می‌کشیم تا مقاومت الکتریکی آن با مقاومت الکتریکی رسانای A برابر شود. در این حالت طول رسانای B چند برابر طول رسانای A است؟ (قطر مقطع رساناها در ابتدا یکسان است.)

$\frac{1}{3}$ (۱) ۳ (۲) $\frac{1}{12}$ (۳) ۱۲ (۴)

(متوسط - محاسباتی - استاندارد ۵ - صفحه ۵۲ - ۱۱۰۲)

پاسخ: گزینه ۳

با مقایسه مقاومت الکتریکی دو رسانای A و B داریم:

$$R = \rho \frac{L}{A} \Rightarrow \frac{R_A}{R_B} = \frac{\rho_A}{\rho_B} \times \frac{L_A}{L_B} \times \frac{A_B}{A_A} \xrightarrow[\rho_B = 4\rho_A, A_A = A_B]{R_A = 9R_B} 9 = \frac{1}{4} \times \frac{L_A}{L_B} \times 1 \Rightarrow L_A = 36L_B$$

برای این که مقاومت الکتریکی رسانای B با مقاومت الکتریکی رسانای A برابر شود، باید مقدار مقاومت الکتریکی رسانای B با ثابت ماندن جرمش، ۹ برابر شود؛ بنابراین داریم:

$$R = \rho \frac{L}{A} \xrightarrow{V=AL \Rightarrow A=\frac{V}{L}} R = \frac{\rho L^2}{V} \xrightarrow[\rho, V: \text{ثابت}]{R'_B = 9R_B} \frac{R'_B}{R_B} = \left(\frac{L'_B}{L_B}\right)^2 \xrightarrow{R'_B = 9R_B} 9 = \left(\frac{L'_B}{L_B}\right)^2 \Rightarrow L'_B = 3L_B$$

در نهایت داریم:

$$\frac{L'_B}{L_A} = \frac{3L_B}{36L_B} = \frac{1}{12}$$

این فرمول‌ها رو برای محاسبه مقاومت الکتریکی بر اساس ویژگی‌های ساختمانی آن به خاطر بسپار!

۱- محاسبه مقاومت الکتریکی رسانا به کمک طول و سطح مقطع:

$$R = \rho \frac{L}{A}$$

۲- محاسبه مقاومت الکتریکی رسانا به کمک طول و حجم:

$$R = \frac{\rho L^2}{V}$$

۳- محاسبه مقاومت الکتریکی رسانا به کمک **سطح مقطع** و **حجم**:

$$R = \frac{\rho V}{A^2}$$

۴- محاسبه مقاومت الکتریکی رسانا به کمک **طول**، **جرم** و **چگالی**:

$$R = \frac{\rho \rho' L^2}{m}$$

۵- محاسبه مقاومت الکتریکی رسانا به کمک **سطح مقطع**، **جرم** و **چگالی**:

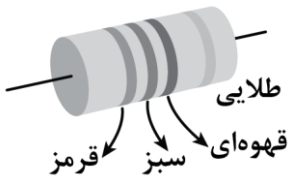
$$R = \frac{\rho m}{\rho' A^2}$$

راهنمای مسیر

این مدل سوالات مورد علاقه طراح کنکور هستند. در برنامه این بخش رو خوب بخون.



۳۶- اندازه مقاومت ترکیبی شکل زیر، چه تعداد از مقادیر زیر بر حسب اهم می تواند باشد؟ (سبز = ۵، قرمز = ۲، قهوه‌ای = ۱ و طلایی = ۵٪)



الف - ۲۴۰

ب - ۲۵۰

ج - ۲۵۵

د - ۲۶۰

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

(متوسط - محاسباتی - استاندارد ۶ - صفحه ۵۸ - ۱۱۰۲)

پاسخ: گزینه ۴

با توجه به کدگذاری رنگی مقاومت‌های ترکیبی می توانیم بنویسیم:

$$R' = \overline{AB} \times 10^C \xrightarrow{A=2, B=5, C=1} R' = 25 \times 10^1 = 250 \Omega$$

از طرفی با توجه به این که حلقه تُلرانس، طلایی است، محدوده R را به دست می آوریم:

$$R' - \frac{5}{100} R' \leq R \leq R' + \frac{5}{100} R' \xrightarrow{\substack{R'=250\Omega \\ \frac{5}{100}R'=12.5\Omega}} 250 - 12.5 \leq R \leq 250 + 12.5$$

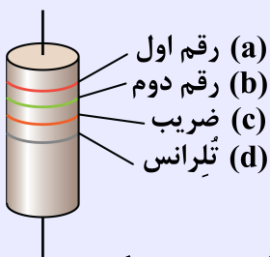
$$\Rightarrow 237.5 \leq R \leq 262.5$$

بنابراین همه مقادیر داده شده، می توانند اندازه مقاومت ترکیبی باشند.

کدگذاری رنگی مقاومت‌های ترکیبی

برای خواندن مقدار مقاومت‌هایی که کدگذاری رنگی شده‌اند، به صورت زیر عمل می کنیم:

$$R = \overline{ab} \times 10^c \pm d\%$$

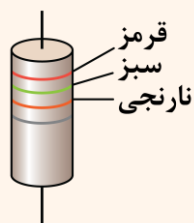


مطابق رابطه فوق، کافی است رقم مربوط به دو رنگ اول را پشت سر هم بنویسیم و سپس آن را در ۱۰ به توان رقم سوم ضرب کنیم. رنگ حلقه چهارم که تُلرانس نامیده می شود، مقدار مجاز انحراف از مقدار دقیق مقاومت را برحسب درصد مشخص می کند.

تذکر

نبود نوار چهارم به معنای آن است که تُلرانس، ۲۰ درصد است.

یه نمونه باحال



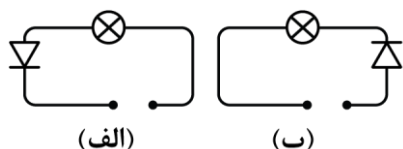
مقدار مقاومت الکتریکی شکل مقابل چند اهم است؟ (۲ = قرمز، ۳ = نارنجی و ۵ = سبز)

پاسخ تشریحی:

$$R = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{رنگ سبز} \\ \downarrow \\ \text{رنگ قرمز}}}{2} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{رنگ نارنجی}}}{5} \times 10^{\underset{\substack{\uparrow \\ \text{رنگ نارنجی}}}{3}} = 25000 \Omega$$



۳۷- در مدارهای «الف» و «ب» به ترتیب از راست به چپ کدام باتری‌ها را قرار دهیم تا در هر دو مدار، لامپ روشن شود؟

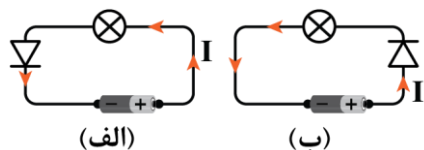


- (۱) $\begin{matrix} + & - \end{matrix}$, $\begin{matrix} - & + \end{matrix}$
- (۲) $\begin{matrix} - & + \end{matrix}$, $\begin{matrix} - & + \end{matrix}$
- (۳) $\begin{matrix} + & - \end{matrix}$, $\begin{matrix} + & - \end{matrix}$
- (۴) $\begin{matrix} - & + \end{matrix}$, $\begin{matrix} + & - \end{matrix}$

(آسان - مفهومی - سریع) صفحه ۶۰ - ۱۱۰۲

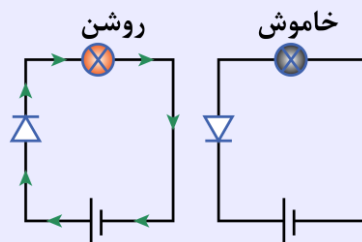
پاسخ: گزینه ۲

می‌دانیم دیود یک‌سوکننده جریان مدار است و با توجه به شکل مدارهای «الف» و «ب»، دیود در هر دو مدار اجازه عبور جریان در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت را می‌دهد؛ بنابراین برای این که لامپ، روشن شود، باید باتری‌هایی در مدار قرار گیرند که جریان پادساعتگرد ایجاد می‌کنند؛ در نتیجه مطابق شکل مقابل داریم:



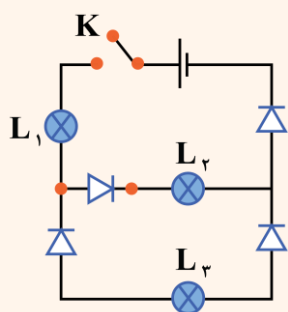
دیود

دیود، قطعه‌ای است که هرگاه در مداری قرار گیرد، جریان را تنها از یک سو عبور می‌دهد و مقاومت آن در برابر عبور جریان در این سو ناچیز است. به همین دلیل، **دیود** را اغلب به عنوان **یک‌سوکننده جریان** در نظر می‌گیرند و آن را با نماد $\rightarrow$ در مدارهای الکتریکی نشان می‌دهند. **پیکان در این نماد، جهتی را نشان می‌دهد که جریان می‌تواند از دیود عبور کند.** مثلاً مدارهای ساده زیر نشان می‌دهد که با تعویض جهت دیود، جریان از مدار عبور نمی‌کند و لامپ خاموش می‌شود. همچنین **از دیود در مدارهای یک‌سوکننده برای تبدیل جریان‌های متناوب به جریان‌های مستقیم استفاده می‌شود.**



یه نمونه باحال

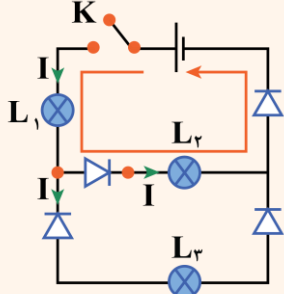
در مدار مقابل، با بستن کلید K، چه تعداد از لامپ‌ها روشن می‌شود؟



- (۱) صفر
- (۲) ۱
- (۳) ۲
- (۴) ۳

پاسخ تشریحی:

با توجه به این که دیود جریان را در یک جهت عبور می‌دهد، مسیر عبور جریان در مدار، مطابق شکل زیر است؛ بنابراین لامپ‌های L_1 و L_2 روشن می‌شوند.

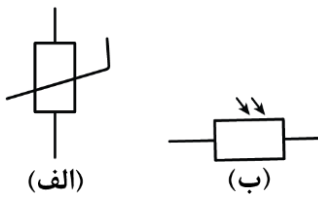


از این لامپ جریانی نمی‌گذرد.

پاسخ: گزینه ۳



۳۸- شکل‌های «الف» و «ب» به ترتیب از راست به چپ نماد و هستند.



(۱) ترمیستور - LDR

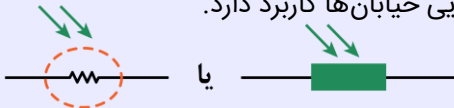
(۲) ترمیستور - LED

(۳) دیود - LDR

(۴) دیود - LED

مقاومت نوری (LDR)

نوعی مقاومت است که مقاومت الکتریکی آن به نور تابیده شده به آن بستگی دارد. به طوری که در اثر افزایش شدت نور، مقاومت الکتریکی اش کاهش می‌یابد و در چشم‌های الکترونیکی، دزدگیرها، کنترل‌کننده‌های خودکار و چراغ‌های روشنایی خیابان‌ها کاربرد دارد.



نماد مداری LDR به صورت مقابل است:

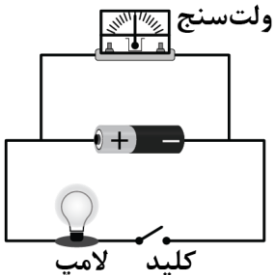
(آسان - خط‌به‌خط - سریع ۵ - صفحه ۵۹ - ۱۱۰۲)

پاسخ: گزینه ۱

شکل «الف» نماد ترمیستور و شکل «ب» نماد مقاومت نوری (LDR) است.



۳۹- در مدار شکل زیر، ولت‌سنج ایده‌آل، قبل از بستن کلید، عدد ۱۶۷ و بعد از بستن کلید، عدد ۱۲۷ را نشان می‌دهد. مقاومت الکتریکی لامپ، چند برابر مقاومت داخلی باتری است؟



(۱) ۲

(۲) ۴

(۳) ۱

(۴) ۳

(متوسط - محاسباتی - استاندارد ۵ - صفحه ۶۴ - ۱۱۰۲)

پاسخ: گزینه ۴

ولت‌سنج ایده‌آل که موازی با باتری است، اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر باتری را نشان می‌دهد.

حالت اول

کلید باز است: در این حالت، جریانی در مدار برقرار نمی‌شود و اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر باتری برابر با نیروی محرکه الکتریکی آن می‌شود:

$$V_1 = \varepsilon \xrightarrow{V_1 = 167} \varepsilon = 167V$$

کلید بسته است: در این حالت، جریان الکتریکی در مدار برقرار می‌شود، بنابراین اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر باتری برابر است با :

$$V_{\gamma} = \varepsilon - rI \xrightarrow[\text{مقاومت داخلی باتری } r]{I = \frac{\varepsilon}{R+r}, R = \text{مقاومت لامپ}} V_{\gamma} = \varepsilon - \frac{r\varepsilon}{R+r} = \frac{R\varepsilon}{R+r}$$

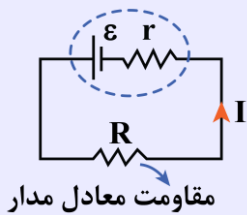
$$\xrightarrow{V_{\gamma} = 12V, \varepsilon = 16V} 12 = \frac{16R}{R+r} \Rightarrow 3 = \frac{4R}{R+r} \Rightarrow 4R = 3R + 3r \Rightarrow R = 3r$$

اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر باتری

اگر نیروی محرکه باتری برابر با ε ، مقاومت داخلی باتری برابر با r و جریان خروجی از باتری برابر با I باشد، در این صورت اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر باتری از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$V_{\text{باتری}} = \varepsilon - rI$$

در یک مدار تک حلقه به شکل مقابل داریم:



مقاومت معادل مدار

$$I = \frac{\varepsilon}{r+R}$$

۱- جریان خروجی از باتری برابر است با:

$$\text{افت پتانسیل در باتری} = rI = r \times \frac{\varepsilon}{r+R} = \frac{\varepsilon r}{r+R}$$

۲- افت پتانسیل در باتری برابر است با:

$$V_{\text{باتری}} = \varepsilon - rI = \varepsilon - r \times \frac{\varepsilon}{r+R} = \frac{\varepsilon R}{r+R}$$

۳- اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر باتری برابر است با:



تذکر

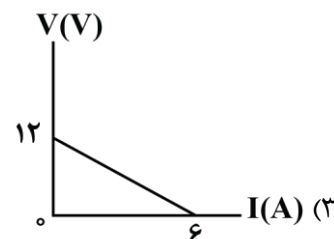
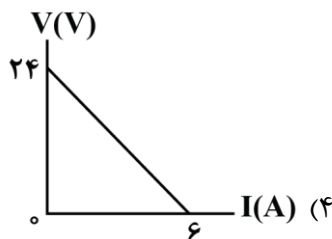
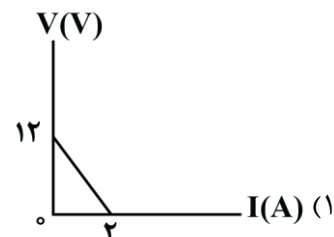
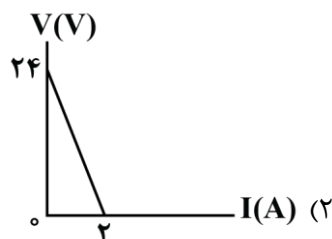
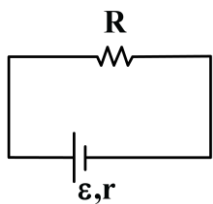
اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر باتری با اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر مقاومت معادل R برابر است و هر دو برابر $\frac{\varepsilon R}{r+R}$ می‌باشد.

راهنمای مسیرت

این سؤال از دل کتاب درسی و کاملاً خلاقانه طرح شده تا یک دید جدیدی به شما از نوع سؤالاتی که می‌شه طرح کرد داده بشه.



۴۰- در مدار شکل زیر، توان خروجی باتری به ازای جریان $I_1 = 2A$ برابر با $16W$ و به ازای جریان $I_2 = 2/5A$ برابر با $17/5W$ است. در کدام گزینه نمودار اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر این باتری بر حسب جریان گذرنده از آن به درستی آمده است؟



(متوسط - محاسباتی - استاندارد) (صفحه ۶۹ - ۱۱۰۲)

پاسخ: گزینه ۳

توان خروجی باتری برابر است با:

$$P = VI \xrightarrow{V=\varepsilon-Ir} P = (\varepsilon - Ir)I \Rightarrow P = \varepsilon I - rI^2$$

با جایگذاری I و P در دو حالت داریم:

$$\begin{cases} I_1 = 2A \\ P_1 = 16W \end{cases} \Rightarrow 16 = 2\varepsilon - 4r \quad (1)$$

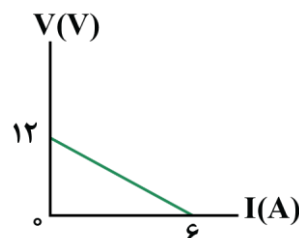
$$\begin{cases} I_2 = 2/5A \\ P_2 = 17/5W \end{cases} \Rightarrow 17/5 = 2/5\varepsilon - 6/25r \quad (2)$$

با توجه به معادلات (۱) و (۲) داریم:

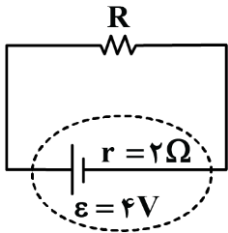
$$\begin{cases} 16 = 2\varepsilon - 4r \xrightarrow{\div 2} (\varepsilon - 2r) \times (-1) \\ 17/5 = 2/5\varepsilon - 6/25r \xrightarrow{\div 2/5} \varepsilon - 3/5r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\varepsilon = -\varepsilon + 2r \\ \varepsilon = \varepsilon - 3/5r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = 2\Omega \\ \varepsilon = 12V \end{cases}$$

اکنون با نوشتن معادله اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر باتری بر حسب جریان عبوری از آن، داریم:

$$V = \varepsilon - Ir \Rightarrow V = 12 - 2I \Rightarrow \begin{cases} V = 0 \Rightarrow I = 6A \\ I = 0 \Rightarrow V = 12V \end{cases}$$



۴۱- در مدار شکل زیر، ۷ ساعت طول می‌کشد تا باتری ۳۵۰۰ میلی‌آمپر ساعتی به‌طور کامل تخلیه شود. مقاومت الکتریکی R چند اهم است؟



- (۱) ۷
(۲) ۶
(۳) ۵
(۴) ۴

(متوسط - محاسباتی - سریع) - صفحه ۶۵ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۲

راه نجات سریع

ابتدا جریان عبوری از باتری رو به کمک رابطه $I = \frac{q}{t}$ حساب کن. بعدش با رابطه $I = \frac{\varepsilon}{R + r}$ به خواسته سؤال برس.

گام اول

ابتدا به کمک رابطه $I = \frac{q}{t}$ ، جریان الکتریکی عبوری از باتری را به‌دست می‌آوریم:

$$I = \frac{q}{t} \xrightarrow{q=3500 \text{ mAh} = 3/5 \text{ Ah}, t=7 \text{ h}} I = \frac{3/5}{7} = 0/5 \text{ A}$$

گام آخر

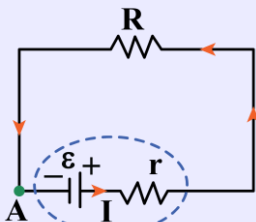
حالا کافیت رابطه جریان الکتریکی در مدار تک‌حلقه را بنویسیم:

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r} \xrightarrow{I=0/5 \text{ A}, \varepsilon=4 \text{ V}, r=2 \Omega} 0/5 = \frac{4}{R + 2} \Rightarrow R + 2 = 8 \Rightarrow R = 6 \Omega$$

مدار تک‌حلقه

مدار تک‌حلقه، یعنی مداری که از یک مسیر بسته تشکیل شده و در آن مسیر، تعدادی باتری و مقاومت به‌هم وصل شده‌اند. در هر مسیر بسته‌ای (در هر حلقه‌ای) اگر یک دور کامل بزنیم، باید جمع جبری اختلاف پتانسیل‌های الکتریکی اجزای آن حلقه، مساوی صفر باشد.

در مدار شکل زیر، از یک نقطه دلخواه مثل A شروع به حرکت کنید و دوباره به همان نقطه برسید:



$$V_A + \varepsilon - rI - RI = V_A \Rightarrow (r + R)I = \varepsilon \Rightarrow I = \frac{\varepsilon}{R + r}$$

در یک مدار تک‌حلقه ساده مطابق شکل زیر، جریان الکتریکی از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r}$$

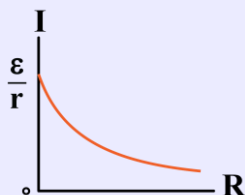
ε: نیروی محرکه باتری بر حسب ولت (V)

r: مقاومت داخلی باتری بر حسب اهم (Ω)

I: جریان گذرنده از مدار بر حسب آمپر (A)

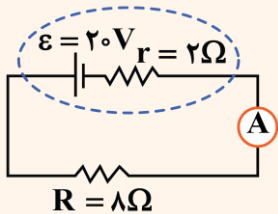
R: مقاومت خارجی مدار بر حسب اهم (Ω)

نمودار جریان بر حسب مقاومت خارجی مدار به‌صورت مقابل است:



یه نمونه باحال

در مدار شکل مقابل، آمپرسنج آرمانی چند آمپر را نشان می‌دهد؟



پاسخ تشریحی:

جریان عبوری از مدار را حساب می‌کنیم:

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r} \xrightarrow{\varepsilon=20V, R=8\Omega, r=2\Omega} I = \frac{20}{8+2} = \frac{20}{10} = 2A$$

نکته

در رابطه $\Delta q = I \Delta t$ ، اگر I برحسب آمپر (A) و Δt برحسب ساعت (h) باشد، یکای Δq برابر آمپر-ساعت (Ah) می‌شود:

$$\Delta q = I \times \Delta t \Rightarrow 1C = 1A \times 1s$$

$\downarrow$
Ah

$\downarrow$
A

$\downarrow$
h

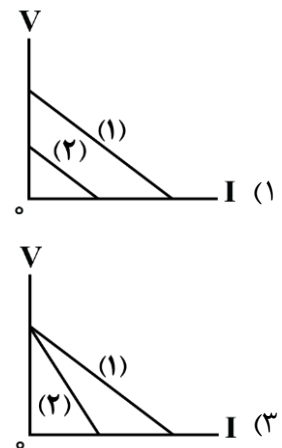
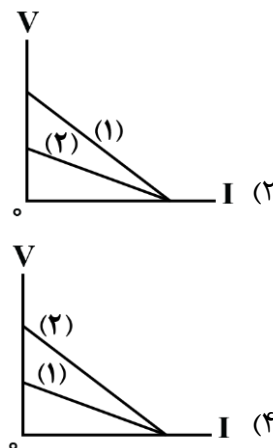
پس یک آمپر-ساعت مقدار باری است که در اثر عبور جریان یک آمپر در مدت زمان یک ساعت از هر سطح مقطع رسانا می‌گذرد.

$$1Ah = 1A \times 3600s = 3600As = 3600C \quad Ah \xrightarrow[\div 3600]{\times 3600} C$$

یک آمپر-ساعت معادل ۳۶۰۰ کولن است



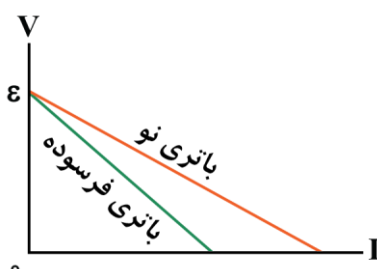
۴۲- اگر اگر باتری نو، شماره (۱) و باتری فرسوده، شماره (۲) باشد، نمودار ولتاژ - جریان برای یک باتری در حالت نو و فرسوده در کدام گزینه به درستی رسم شده است؟



پاسخ: گزینه ۳

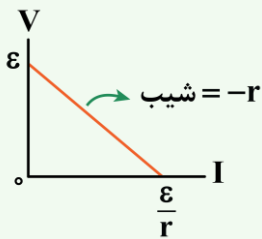
(متوسط - مفهومی - سریع) صفحه ۶۶ - ۱۱۰۲

می‌دانیم عرض از مبدأ نمودار $V-I$ باتری برابر با نیروی محرکه و مقدار شیب این نمودار برابر با مقاومت داخلی باتری است. از طرفی با فرسوده شدن باتری، نیروی محرکه (عرض از مبدأ) ثابت می‌ماند و مقاومت داخلی باتری (مقدار شیب نمودار) افزایش می‌یابد؛ بنابراین نمودار $V-I$ باتری نو و فرسوده به شکل زیر است:





مطابق رابطه $V_{\text{باتری}} = \mathcal{E} - rI$ ، نمودار ولتاژ - جریان یک باتری (مولد) مطابق شکل مقابل است.



۱- بیشینه ولتاژ باتری (مولد) برابر نیروی محرکه آن است.

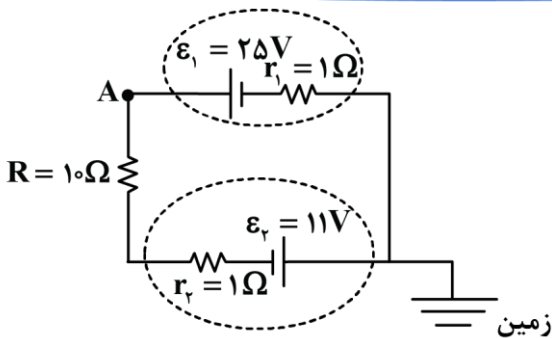
۲- اندازه شیب نمودار برابر مقاومت داخلی باتری است.

۳- عرض از مبدأ نمودار برابر $\mathcal{E}$ و طول از مبدأ آن برابر $\frac{\mathcal{E}}{r}$ است.

۴- بیشینه جریان خروجی از باتری برابر $\frac{\mathcal{E}}{r}$ است.



۴۳- در مدار شکل مقابل، پتانسیل الکتریکی نقطه A چند ولت است؟



۲۶ (۱)

۲۴ (۲)

۲۲ (۳)

۲۸ (۴)

(متوسط - محاسباتی - استاندارد ۵ - صفحه ۶۶ - ۱۱۰۲)

پاسخ: گزینه ۳

کام‌اول

جریان حاصل از هر دو باتری، پادساعتگرد است، بنابراین جریان اصلی مدار برابر است با:

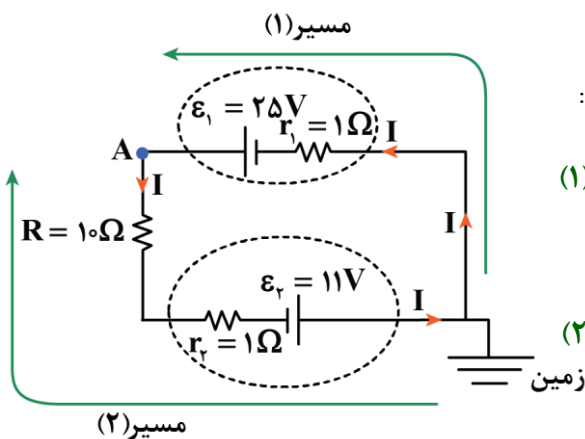
$$I = \frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2}{R + r_1 + r_2} \Rightarrow I = \frac{25 + 11}{10 + 1 + 1} = \frac{36}{12} = 3A$$

کام‌آخ

طبق هر یک از مسیرهای زیر می‌توانیم پتانسیل الکتریکی نقطه A را به‌دست آوریم:

$$\text{مسیر (۱):} \begin{cases} V_{\text{زمین}} - r_1 I + \mathcal{E}_1 = V_A \\ \Rightarrow 0 - 1(3) + 25 = V_A \Rightarrow V_A = 22V \end{cases}$$

$$\text{مسیر (۲):} \begin{cases} V_{\text{زمین}} - \mathcal{E}_2 + r_2 I + RI = V_A \\ \Rightarrow 0 - 11 + 1(3) + 10(3) = V_A \Rightarrow V_A = 22V \end{cases}$$

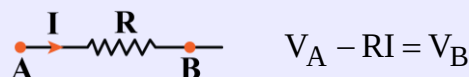


اختلاف پتانسیل الکتریکی بین دو نقطه از یک مدار

در مدارهای الکتریکی با حرکت از یک نقطه مدار و محاسبه اختلاف پتانسیل الکتریکی اجزای مختلف، می‌توانیم به نقاط دیگر مدار برسیم و اختلاف پتانسیل الکتریکی نقاط مختلف مدار را به‌دست آوریم. برای این کار از تکنیک پتانسیل‌نویسی استفاده می‌کنیم که به شرح زیر است:

۱- هنگامی که به یک مقاومت الکتریکی (مقاومت داخلی باتری یا سایر مقاومت‌های مدار) رسیدیم به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

الف) اگر در حال حرکت در جهت جریان بودیم، پتانسیل الکتریکی به اندازه RI کاهش می‌یابد و تغییرات ولتاژ برابر $(-RI)$ است.



ب) اگر در حال حرکت در خلاف جهت جریان بودیم، پتانسیل الکتریکی به اندازه RI افزایش می‌یابد و تغییرات ولتاژ برابر $(+RI)$ است.

$$\begin{array}{c} \text{A} \xrightarrow{I} \text{---} R \text{---} \text{B} \\ V_A + RI = V_B \end{array}$$

۲- هنگامی که به باتری آرمانی رسیدیم، اگر از سر مثبت باتری خارج شدیم، پتانسیل الکتریکی به اندازه ε زیاد می‌شود و تغییرات ولتاژ برابر $(+\varepsilon)$ است. همچنین اگر از سر منفی خارج شدیم، پتانسیل الکتریکی به اندازه ε کم می‌شود و تغییرات ولتاژ برابر $(-\varepsilon)$ است.

$$\begin{array}{c} \text{A} \xrightarrow{\varepsilon} \text{---} \text{B} \\ V_A + \varepsilon = V_B \end{array}$$

تذکر

پتانسیل الکتریکی زمین که معمولاً با نماد $\perp$ در مدار مشخص می‌شود، طبق قرارداد، برابر صفر است.



۴۴- یک باتری با نیروی محرکه $12V$ و مقاومت داخلی 1Ω در اختیار داریم. یک بار یک لامپ با مقاومت الکتریکی 3Ω و بار دیگر لامپی با مقاومت الکتریکی 5Ω را به دو سر این باتری متصل می‌کنیم. اختلاف توان خروجی از این باتری در دو حالت چند وات است؟

۴ (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴)

(متوسط - ترکیبی - استاندارد ۱۱۰۲ - صفحه ۶۷ - ۱۱۰۲)

پاسخ: گزینه ۴

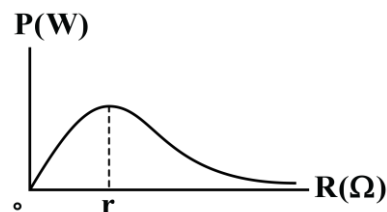
می‌دانیم توان خروجی باتری با توان مصرفی مقاومت خارجی برابر است؛ در نتیجه می‌توانیم بنویسیم:

$$P = RI^2 \xrightarrow{I = \frac{\varepsilon}{R+r}} P = \frac{R\varepsilon^2}{(R+r)^2} \begin{cases} P_1 = \frac{3 \times 12^2}{(3+1)^2} = \frac{3 \times 144}{16} = 27W \\ P_2 = \frac{5 \times 12^2}{(5+1)^2} = \frac{5 \times 144}{36} = 20W \end{cases}$$

$$\Rightarrow |P_1 - P_2| = |27 - 20| = 7W$$



۴۵- شکل زیر، نمودار توان خروجی یک باتری را بر حسب مقاومت خارجی متصل به آن در یک مدار تک حلقه ساده نشان می‌دهد. با توجه به این نمودار، کدام گزینه درست است؟



- (۱) با افزایش مقاومت خارجی مدار، همواره توان خروجی باتری، افزایش می‌یابد.
- (۲) با افزایش مقاومت خارجی مدار، همواره توان خروجی باتری، کاهش می‌یابد.
- (۳) هرچه مقدار مقاومت خارجی مدار، به مقدار مقاومت داخلی باتری، نزدیک‌تر باشد، توان خروجی باتری، بیشتر است.
- (۴) هرچه مقدار مقاومت خارجی مدار، به مقدار مقاومت داخلی باتری، نزدیک‌تر باشد، توان خروجی باتری، کمتر است.

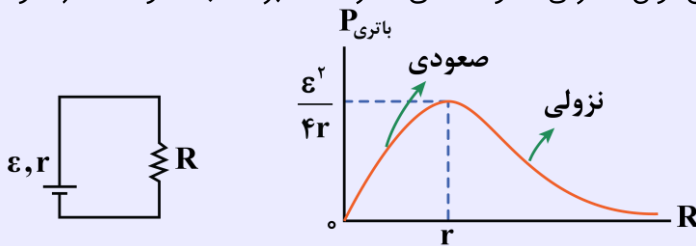
(آسان - مفهومی - استاندارد ۱۱۰۲ - صفحه ۶۷ - ۱۱۰۲)

پاسخ: گزینه ۳

با توجه به نمودار درمی‌یابیم، هرچه مقاومت خارجی مدار به مقاومت داخلی باتری، نزدیک‌تر باشد، توان خروجی باتری، بیشتر است.

نمودار توان خروجی از باتری بر حسب مقاومت خارجی مدار

۱- در مدار تک حلقه زیر، نمودار توان خروجی باتری که برابر با مجموع توان مصرفی مقاومت‌های مدار است، بر حسب مقاومت R (مقاومت معادل) به صورت زیر است:



۲- مطابق نمودار فوق، هنگامی که مقاومت معادل مدار، بزرگ‌تر از مقاومت داخلی باتری است ($R > r$)، نمودار توان خروجی، نزولی است. این نکته به این معنی است که در این حالت با افزایش مقاومت معادل مدار، توان خروجی از باتری، کاهش می‌یابد.

۳- مطابق نمودار فوق، هنگامی که مقاومت معادل مدار، کوچک‌تر از مقاومت داخلی باتری است ($R < r$)، نمودار توان خروجی، صعودی است. این نکته به این معنی است که در این حالت با افزایش مقاومت معادل مدار، توان خروجی از باتری افزایش می‌یابد.

۴- همان‌طور که در نمودار توان خروجی می‌بینید، توان خروجی از باتری هنگامی بیشینه است که $R = r$ باشد. در این حالت توان خروجی از باتری برابر $\frac{\epsilon^2}{4r}$ می‌باشد.



اگر به ازای دو مقاومت خارجی R_1 و R_2 ، توان خروجی باتری، یکسان باشد، مقاومت داخلی باتری، واسطه هندسی مقاومت‌های R_1 و R_2 است، یعنی:

$$R_1 R_2 = r^2 \Rightarrow r = \sqrt{R_1 R_2}$$



۴۶- روی یک کتری برقی، اعداد $220V$ و $2200W$ نوشته شده است و این کتری را به اختلاف پتانسیل الکتریکی $220V$ وصل می‌کنیم. اگر قیمت هر کیلووات ساعت برق مصرفی برابر با 100 تومان باشد، بهای برق مصرفی این کتری در مدت 2 ساعت چند تومان است؟

(۱) ۲۲۰	(۲) ۴۴۰	(۳) ۲۲۰۰	(۴) ۴۴۰۰
---------	---------	----------	----------

(متوسط - خط به خط - استاندارد) - صفحه ۶۷ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۲

گام اول

انرژی مصرفی توسط کتری در مدت زمان 2 ساعت را به دست می‌آوریم:

$$U = Pt \xrightarrow[t=2h]{P=2200W=2/2kW} U = 2/2 \times 2 = 4/4 kWh$$

گام آخر

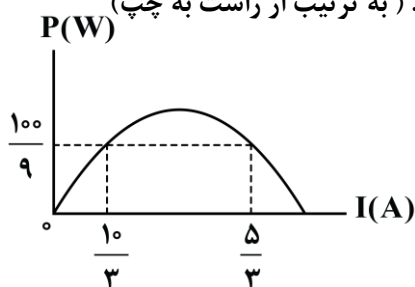
بهای برق مصرفی برابر است با:

$$\text{تومان} = 4/4 kWh \times \frac{100 \text{ تومان}}{1 kWh} = 440$$



۴۷- نمودار توان خروجی یک باتری در یک مدار تک حلقه بر حسب جریان عبوری از آن، مطابق شکل زیر است. با توجه به این نمودار،

به ازای جریان آمپر، توان خروجی باتری، بیشینه و برابر با وات است. (به ترتیب از راست به چپ)



(۱) ۲/۵ و ۱۰

(۲) ۲/۵ و ۱۲/۵

(۳) ۵ و ۲۰

(۴) ۵ و ۲۵

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) (صفحه ۶۹ - ۱۱۰۲)

پاسخ: گزینه ۲

می دانیم نمودار توان خروجی باتری بر حسب جریان عبوری از آن به صورت سهمی است؛ بنابراین این نمودار نسبت به رأس سهمی، متقارن است؛ در نتیجه جریان در رأس سهمی به صورت زیر است:

$$I' = \frac{\frac{1}{3} + \frac{5}{3}}{2} = 2/5 A$$

از طرفی می دانیم جریان در رأس سهمی (جریانی که باتری بیشترین توان خروجی را دارد)، هنگامی است که مقاومت خارجی مدار و داخلی باتری مدار برابر باشند؛ در نتیجه داریم:

$$I = \frac{\varepsilon}{R+r} \xrightarrow{R=r} I' = \frac{\varepsilon}{2r} \xrightarrow{I=2/5 A} 2/5 = \frac{\varepsilon}{2r} \Rightarrow \varepsilon = 5r$$

در نهایت با توجه به مقدار توان مصرفی به ازای جریان $\frac{5}{3} A$ ، داریم:

$$P = \varepsilon I - rI^2 \xrightarrow{\substack{I=\frac{5}{3} A \\ P=\frac{10}{9} W}} \frac{10}{9} = \varepsilon \left(\frac{5}{3}\right) - r \left(\frac{5}{3}\right)^2 \Rightarrow \frac{10}{9} = \frac{5\varepsilon}{3} - \frac{25r}{9}$$

$$\Rightarrow 10\varepsilon - 25r = 100 \xrightarrow{\varepsilon=5r} 10(5r) - 25r = 100 \Rightarrow 50r = 100 \Rightarrow r = 2\Omega \xrightarrow{\varepsilon=5r} \varepsilon = 10V$$

بیشینه توان خروجی باتری برابر است با:

$$P_{\max} = \frac{\varepsilon^2}{4r} \xrightarrow{\substack{\varepsilon=10V \\ r=2\Omega}} P_{\max} = \frac{10^2}{4 \times 2} = 12/5 W$$

انواع توان باتری

باتری توان کل را تولید می کند. بخشی از این توان توسط مقاومت داخلی باتری مصرف می شود و به شکل حرارت و گرما تلف می شود و باقی مانده توان کل به نام توان مفید (توان خروجی) باتری به سایر اجزای مدار تحویل داده شده و توسط آن ها مصرف می شود؛ یعنی توان مفید باتری همان مجموع توان مصرفی سایر اجزای مدار است.

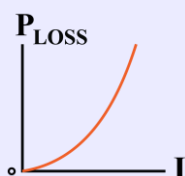
مصرفی کل = $P_{\text{مفید یا خروجی باتری}}$

توان کل یا توان تولیدی باتری



$$P_{\text{کل}} = \varepsilon I \xrightarrow{I = \frac{\varepsilon}{R+r}} P_{\text{کل}} = \frac{\varepsilon^2}{R+r}$$

توان اتلافی یا توان حرارتی یا توان مصرفی باتری یا توان غیرمفید



$$P_{\text{اتلافی}} = rI^2 \xrightarrow{I = \frac{\varepsilon}{R+r}} P_{\text{اتلافی}} = \frac{r\varepsilon^2}{(R+r)^2}$$

توان مفید یا توان خروجی باتری یا توان مصرفی سایر اجزای مدار

$$P_{\text{خروجی}} = P_{\text{کل}} - P_{\text{اتلافی}} \Rightarrow P_{\text{خروجی}} = \varepsilon I - rI^2$$

$$P_{\text{خروجی}} = 0 \Rightarrow I(\varepsilon - rI) = 0 \Rightarrow I = 0 \text{ یا } I = \frac{\varepsilon}{r}$$

حال به بررسی چند حالت مهم می‌پردازیم:

$I = 0$: یعنی جریان مدار، قطع باشد و از باتری، جریانی عبور نکند، بنابراین:

$$P_{\text{خروجی}} = P_{\text{کل}} = P_{\text{اتلافی}} = 0$$

$I = \frac{\varepsilon}{r}$: این حالت زمانی رخ می‌دهد که دو سر باتری توسط یک سیم بدون مقاومت، به هم وصل شده باشد؛ یعنی باتری اتصال کوتاه شده باشد ($R = 0$):

$$P_{\text{خروجی}} = 0, P_{\text{کل}} = P_{\text{اتلافی}} = \frac{\varepsilon^2}{r}$$

در این حالت، باتری هرچه توان، تولید کند، همه را خودش تلف می‌کند. ضمناً در این حالت، $P_{\text{کل}}$ و $P_{\text{اتلافی}}$ بیشینه هستند.

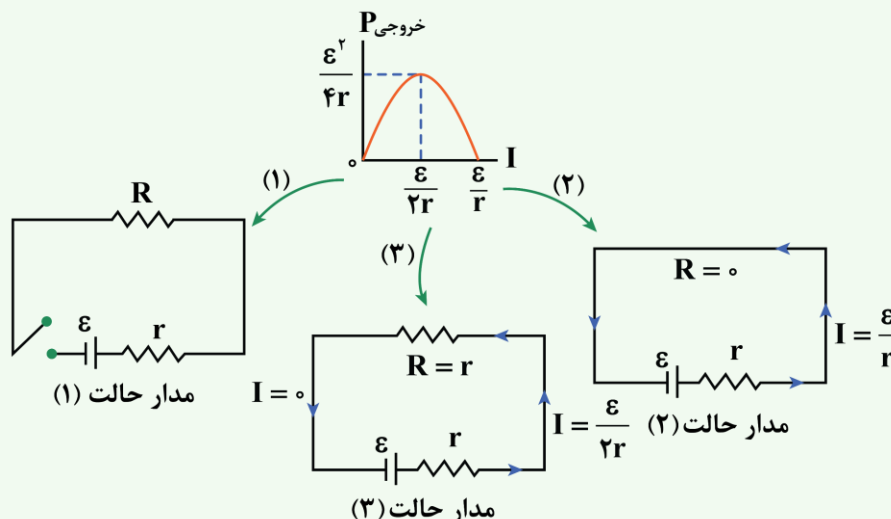
$R = r$: در این حالت، $I = \frac{\varepsilon}{2r}$ و توان مفید باتری، بیشینه و برابر $\frac{\varepsilon^2}{4r}$ است.

$$R = r \Leftrightarrow I = \frac{\varepsilon}{2r}, P_{\text{خروجی,max}} = \frac{\varepsilon^2}{4r}$$



نکته

نمودار توان خروجی باتری یا همان توان مصرفی سایر اجزای مدار (R) برحسب جریان مدار به شکل زیر است. در نقاط ۳ گانه مهم نیز، شکل مدار رسم شده است:



۴۸- بر روی یک لامپ، اعداد $200V$ و $100W$ نوشته شده است. در شرایطی که جریان عبوری از این لامپ برابر با $0.4A$ است، توان مصرفی لامپ چند وات است؟

۸۰ (۴)

۶۴ (۳)

۳۶ (۲)

۲۰ (۱)

(آسان - محاسباتی - استاندارد) (صفحه ۶۷ - ۱۱۰۲)

پاسخ: گزینه ۳

گام اول

مقاومت الکتریکی لامپ برابر است با:

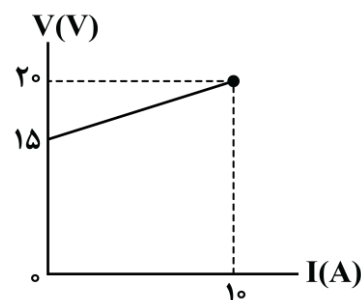
$$P = \frac{V^2}{R} \xrightarrow[V=200V]{P=100W} R = \frac{(200)^2}{100} = 400 \Omega$$

گام آخر

توان مصرفی لامپ برابر است با:

$$P = RI^2 \xrightarrow[R=400\Omega]{I=0.4A} P = 400 \times (0.4)^2 = 64W$$

۴۹- نمودار اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر یک باتری بر حسب جریان عبوری از آن مطابق شکل زیر است. این باتری انرژی در مدار است و اگر آن را به طور جداگانه‌ای به یک مقاومت $5/5$ اهمی وصل کنیم، جریان آمپر از آن عبور می‌کند.



(۱) تولیدکننده - $2/5$

(۲) تولیدکننده - $1/5$

(۳) مصرف‌کننده - $1/5$

(۴) مصرف‌کننده - $2/5$

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) (صفحه ۶۷ - ۱۱۰۲)

پاسخ: گزینه ۴

با توجه به نمودار $V-I$ باتری، درمی‌یابیم معادله ولتاژ - جریان آن به صورت $V = \varepsilon + rI$ است؛ در نتیجه جریان الکتریکی عبوری از باتری خلاف جهت جریانی است که باتری به تنهایی در مدار ایجاد می‌کند؛ بنابراین این باتری، مصرف‌کننده انرژی است. از طرفی با توجه به رابطه $V = \varepsilon + rI$ برای این باتری مقادیر ε و r را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} I=0 \Rightarrow V=\varepsilon=15V \\ I=10A \Rightarrow V=\varepsilon+rI \Rightarrow 20=15+r(10) \Rightarrow 10r=5 \Rightarrow r=0.5\Omega \end{cases}$$

حالا اگر این باتری را به طور جداگانه‌ای به مقاومت خارجی $5/5\Omega$ وصل کنیم، داریم:

$$I = \frac{\varepsilon}{R+r} \Rightarrow I = \frac{15}{5/5+0.5/5} = 2/5A$$

محاسبه اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر یک منبع نیروی محرکه الکتریکی

اگر جریان از پایانه مثبت باتری خارج شود، باتری تولیدکننده انرژی خواهد بود، اما اگر در مداری، جریان از پایانه منفی باتری خارج شود، آن مولد، مصرف‌کننده انرژی خواهد شد که به دید یک مصرف‌کننده به آن نگاه می‌کنیم.

۱- اگر جریان عبوری از باتری، از پایانه مثبت باتری خارج شود (تولیدکننده انرژی):



$$V_A + \varepsilon - rI = V_B \Rightarrow V_B - V_A = \varepsilon - rI$$



۲- اگر جریان عبوری از باتری، از پایانه منفی باتری خارج شود (مصرف کننده انرژی):



$$V_A - \varepsilon - rI = V_B \Rightarrow V_A - V_B = \varepsilon + rI$$

$$\Rightarrow |V_{\text{مولد}}| = \varepsilon + rI$$



اگر مقاومت داخلی باتری برابر با صفر باشد ($r=0$)، باتری، آرمانی است.

در این حالت، اندازه اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر باتری برابر با نیروی محرکه باتری (ε) می‌شود.



آزمون سراسری تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۶۴- ولت‌سنجی آرمانی، اختلاف پتانسیل دو سر یک باتری را که به مداری وصل نیست، ۱۲ ولت نشان می‌دهد. حال اگر یک مقاومت ۸ اهمی را به دو سر آن ببندیم، ولت‌سنج اختلاف پتانسیل دو سر باتری را ۹/۶ ولت نشان می‌دهد. مقاومت داخلی باتری چند اهم است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

پاسخ تشریحی:

در ابتدا که باتری در مدار نیست، عدد ولت‌سنج برابر با نیروی محرکه است:

$$\varepsilon = V_1 = 12V$$

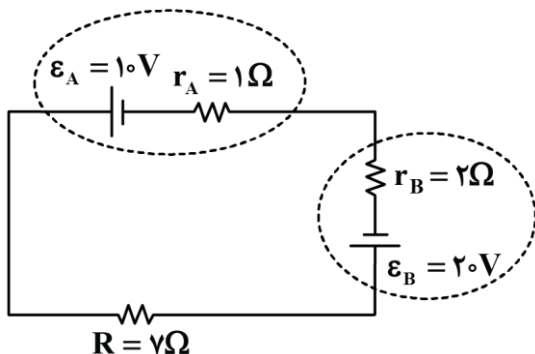
وقتی که باتری در مدار قرار می‌گیرد، افت پتانسیل خواهد داشت و ولتاژ دو سر آن برابر است با:

$$V = \frac{R\varepsilon}{R+r} \Rightarrow 9/6 = \frac{8 \times 12}{8+r} \Rightarrow r = 2\Omega$$

پاسخ: گزینه ۲



۵۰- در مدار شکل زیر، توان ورودی باتری A چند برابر توان خروجی باتری B است؟



- (۱) ۱/۲
(۲) ۵/۹
(۳) ۱۱/۱۸
(۴) ۲/۳

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - صفحه ۶۹ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۳

گام اول

با توجه به اینکه $\varepsilon_B > \varepsilon_A$ است، پس جریان اصلی مدار، ساعتگرد است و داریم:

$$I = \frac{\varepsilon_B - \varepsilon_A}{R + r_A + r_B} \Rightarrow I = \frac{20 - 10}{7 + 1 + 2} = \frac{10}{10} = 1A$$

گام آخر

نسبت توان ورودی باتری A به توان خروجی باتری B برابر است با:

$$\frac{P_{A \text{ ورودی}}}{P_{B \text{ خروجی}}} = \frac{\varepsilon_A I + r_A I^2}{\varepsilon_B I - r_B I^2} = \frac{\varepsilon_A + r_A I}{\varepsilon_B - r_B I} = \frac{10 + 1(1)}{20 - 2(1)} = \frac{11}{18}$$



۱- در مدارهای چندباتری، اگر جریان از **سر مثبت** یک باتری خارج شود، این باتری در نقش **مولد محرکه (تولیدکننده انرژی)** است و وظیفه رساندن انرژی به سایر اجزای مدار را بر عهده دارد. ولتاژ این باتری و توان **خروجی** از آن برابر است با:

$$V = \varepsilon - rI$$

$$P_{\text{خروجی}} = VI = (\varepsilon - rI)I = \varepsilon I - rI^2$$

۲- در مدارهای چندباتری، اگر جریان از **سر منفی** یک باتری خارج شود، این باتری در نقش **مولد ضد محرکه (مصرف کننده انرژی)** است و مانند مقاومت های مدار، انرژی را مصرف می کند. اندازه ولتاژ این باتری و توان **ورودی** از آن برابر است با:

$$V = \varepsilon + rI$$

$$P_{\text{مصرفی}} = VI = (\varepsilon + rI)I = \varepsilon I + rI^2$$





برای دیدن پاسخنامه ویدئویی آزمون
QRcode بالا را اسکن کنید!
یا بر روی لینک زیر کلیک کنید!
پاسخنامه ویدئویی آزمون

در پی غذای سالم (از ابتدای فصل تا انتهای آنتالپی پیوند راهی برای تعیین ΔH واکنش)
صفحه‌های ۵۱ تا ۷۲

بودجه‌بندی
این آزمون

مباحث این آزمون در مجموع ۲ تست از ۳۰ تست کنکور را پوشش داده است.

سهم در
کنکور



۵۱- کدام یک از مطالب زیر نادرست است؟

- (۱) از بین هوای ظهر و شب، نمونه هوای B می‌تواند نشان‌دهنده هوا در هنگام ظهر باشد.
- (۲) با افزایش دمای یک نمونه آب، به‌طوری‌که تبخیر نشود، انرژی گرمایی آن افزایش می‌یابد.
- (۳) جنبش نامنظم ذرات سازنده روغن در مقایسه با ذرات سازنده چربی در دمای اتاق، بیشتر است.
- (۴) با دادن گرمای یکسان به دو نمونه آب و روغن زیتون با جرم برابر، تغییر دمای نمونه روغن زیتون کمتر خواهد بود.

(آسان - خط به خط - سریع ۵ - صفحه ۶۰ - ۱۱۰۲)

پاسخ: گزینه ۴

از آن جا که گرمای یکسانی به دو نمونه آب و روغن زیتون با جرم برابر داده‌ایم، طبق رابطه $Q = mc\Delta\theta$ ماده‌ای با گرمای ویژه کمتر تغییر دمای بیشتری خواهد داشت. حال چون روغن زیتون گرمای ویژه کمتری دارد، تغییر دمای این نمونه بیشتر از آب خواهد بود.

بررسی سایر گزینه‌ها:

- ۱) از آن جا که جنبش نامنظم ذره‌های نمونه هوای B بیشتر از نمونه هوای A است، در نتیجه دمای نمونه هوای B بیشتر از نمونه هوای A است. چون دمای هوا در هنگام ظهر بیشتر است، پس نمونه هوای B می‌تواند نشان‌دهنده هوا در هنگام ظهر باشد.
- ۲) انرژی گرمایی یک نمونه به جرم (شمار مولکول‌ها) و دمای آن بستگی دارد. در نتیجه با افزایش دمای یک نمونه آب (به شرط عدم تبخیر آب) انرژی گرمایی آن به دلیل افزایش دما، افزایش می‌یابد.
- ۳) در دمای اتاق، روغن دارای حالت فیزیکی مایع بوده اما چربی جامد است. از آن جا که جنبش نامنظم ذره‌ها در حالت مایع بیشتر و شدیدتر از جامد است، در نتیجه جنبش نامنظم ذره‌های سازنده روغن در مقایسه با ذره‌های سازنده چربی در دمای اتاق، بیشتر است.



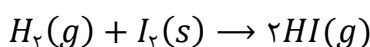
۵۲- کدام یک از مطالب زیر در مورد واکنش گرماگیر $H_2(g) + I_2(s) \rightarrow 2HI(g)$ درست است؟

- (۱) با انجام این واکنش میزان آنتالپی محیط اطراف، کاهش می‌یابد.
- (۲) در معادله شیمیایی این واکنش نماد Q در سمت راست معادله قرار می‌گیرد.
- (۳) با انجام این واکنش در دما و فشار ثابت، در یک ظرف با پیستون متحرک، حجم ظرف ثابت می‌ماند.
- (۴) در دما و حجم ثابت، گرمای مبادله‌شده از مصرف یک مول گاز هیدروژن معادل آنتالپی این واکنش است.

(متوسط - مفهومی - استاندارد ۵ - صفحه ۶۶ - ۱۱۰۲)

پاسخ: گزینه ۱

واکنش انجام‌شده به‌صورت زیر است:



این واکنش گرماگیر است و برای انجام آن گرما از محیط به سامانه منتقل می‌شود. پس انرژی گرمایی یا همان انرژی جنبشی محیط پیرامون کاهش می‌یابد که موجب کاهش انرژی کل یا همان آنتالپی خواهد شد. پس در یک واکنش با علامت آنتالپی مثبت، مقدار آنتالپی سامانه افزایش و مقدار آنتالپی محیط کاهش می‌یابد.

واکنش‌های گرماده و گرماگیر

جدول زیر اطلاعاتی را در مورد واکنش‌های گرماده و گرماگیر ارائه می‌دهد:

واکنش‌های گرماده	واکنش‌های گرماگیر	وضعیت گرما
آزاد کردن گرما	جذب گرما	وضعیت گرما
سمت فراورده‌ها $A \rightarrow B + Q$ گرما	سمت واکنش‌دهنده‌ها $A + Q \rightarrow B$ گرما	جهت قرارگیری گرما
$Q < 0$	$Q > 0$	علامت گرما (Q)
$\Delta H < 0$	$\Delta H > 0$	علامت آنتالپی (ΔH)
واکنش‌دهنده‌ها < فراورده‌ها	واکنش‌دهنده‌ها > فراورده‌ها	سطح انرژی
واکنش‌دهنده‌ها > فراورده‌ها	واکنش‌دهنده‌ها < فراورده‌ها	پایداری
واکنش‌دهنده‌ها < فراورده‌ها	واکنش‌دهنده‌ها > فراورده‌ها	فعالیت شیمیایی
افزایش	کاهش	دمای محیط

بررسی سایر گزینه‌ها:

۲) در یک واکنش گرماگیر، علامت Q که نشان‌دهنده گرما است، در سمت واکنش‌دهنده‌ها یا همان سمت چپ قرار می‌گیرد؛ زیرا در واکنش‌های گرماگیر، گرما به مانند یک واکنش‌دهنده بوده و مصرف می‌شود.

۳) در این واکنش یک مول گاز مصرف‌شده و دو مول گاز تولیدشده است. پس حجم در دما و فشار ثابت با توجه به افزایش شمار مول‌های گاز افزایش خواهد یافت.

۴) آنتالپی یک واکنش معادل گرمای مبادله‌شده آن واکنش در دما و فشار مشخص است. در این واکنش با توجه به افزایش شمار مول‌های گاز، در حجم و دمای ثابت، فشار افزایش می‌یابد و ثابت نیست.



۵۳- با انداختن یک گلوله آلومینیمی به جرم ۵۰ گرم و دمای 120°C در یک کیلوگرم آب با دمای 5°C ، دمای نهایی گلوله برابر چند

کلوین خواهد بود؟ ($c_{\text{آب}} = 4/2 \text{ J} \cdot \text{g}^{-1} \cdot ^{\circ}\text{C}^{-1}$, $c_{\text{آلومینیم}} = 0/9$)

۲۷۹/۸ (۴)

۲۸۱/۶ (۳)

۲۸۰/۴ (۲)

۲۷۹/۲ (۱)

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - صفحه ۶۰ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۱

بررسی سریع:

این روش در فصل دمای فیزیک دهم نیز کاربرد ویژه‌ای دارد:
دمای تعادل چند جسم غیر هم‌دما پس از تماس:

$$\theta = \frac{m_1 c_1 \theta_1 + m_2 c_2 \theta_2 + m_3 c_3 \theta_3 + \dots}{m_1 c_1 + m_2 c_2 + m_3 c_3 + \dots}$$

$$\theta = \frac{m_{\text{آلومینیم}}^{\text{آلومینیم}} c_{\text{آلومینیم}}^{\text{آلومینیم}} \theta_{\text{آلومینیم}}^{\text{آلومینیم}} + m_{\text{آب}}^{\text{آب}} c_{\text{آب}}^{\text{آب}} \theta_{\text{آب}}^{\text{آب}}}{m_{\text{آلومینیم}}^{\text{آلومینیم}} c_{\text{آلومینیم}}^{\text{آلومینیم}} + m_{\text{آب}}^{\text{آب}} c_{\text{آب}}^{\text{آب}}} \Rightarrow \theta = \frac{1000 \times 4/2 \times 5 + 50 \times 0/9 \times 120}{1000 \times 4/2 + 50 \times 0/9} = \frac{21000 + 5400}{4200 + 45} = \frac{26400}{4245} \approx 6/2^{\circ}\text{C}$$

برای محاسبه دمای نهایی باید در نظر بگیریم با تبادل گرما، آب و آلومینیم هم‌دمای می‌شوند و همچنین گرمای از دست داده آلومینیم و گرمای گرفته آب برابر است.

از آن‌جا که مقدار گرمایی که گلوله آلومینیمی از دست می‌دهد با مقدار گرمایی که آب دریافت می‌کند، برابر است، دمای نهایی را به صورت زیر حساب می‌کنیم:

$$|Q_{\text{آب}}| = |Q_{\text{آلومینیم}}| \Rightarrow |m_{\text{آب}} c_{\text{آب}} \Delta\theta_{\text{آب}}| = |m_{\text{آلومینیم}} c_{\text{آلومینیم}} \Delta\theta_{\text{آلومینیم}}|$$

$$\Rightarrow |1000 \times 4/2 \times \Delta\theta_{\text{آب}}| = |50 \times 0.9 \times \Delta\theta_{\text{آلومینیم}}| \Rightarrow 4200 |\Delta\theta_{\text{آب}}| = 45 |\Delta\theta_{\text{آلومینیم}}| \Rightarrow 4200(\theta - 5) = 45(120 - \theta)$$

$$4200\theta - 21000 = 5400 - 45\theta \Rightarrow 4245\theta = 26400 \Rightarrow \theta = \frac{26400}{4245} \approx 6/2^{\circ}\text{C}$$

در نهایت θ را بر حسب کلونین به دست می‌آوریم:

$$T = \theta + 273 \Rightarrow T = 6/2 + 273 = 279/2 \text{ K}$$

پس دمای نهایی برابر $279/2$ کلونین است.



۵۴- چند مورد از مطالب زیر در مورد یخچال صحرایی درست است؟

الف - جنس بدنه داخلی و خارجی یکسان است.

ب - میان بدنه داخلی و خارجی همانند درپوش مرطوب است.

ج - تبخیر آب در بدنه داخلی، عامل سردشدن درون یخچال است.

د - گرمای تبخیر آب از یخچال، از محیط اطراف یخچال تأمین می‌شود.

۴ (۴)

۳ (۳)

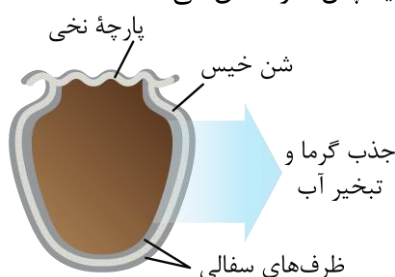
۲ (۲)

۱ (۱)

(متوسط - خط به خط - استاندارد) - صفحه ۶۵-۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۲

یخچال صحرایی برای خنک نگه‌داشتن مواد غذایی توسط محمد باه آبا ساخته شده است. در این یخچال دو ظرف سفالی که از خاک رس ساخته شده‌اند، درون یکدیگر قرار گرفته‌اند و فضای خالی بین این دو ظرف، توسط شن خیس پر شده است. درپوش این مجموعه، پوششی نخی و مرطوب است. شکل زیر ساختار یکی از این یخچال‌ها را نشان می‌دهد:



عبارت‌های (الف) و (ب) درست هستند.

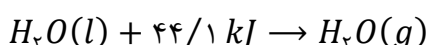
بررسی موارد:

(الف) هم بدنه داخلی و هم بدنه خارجی یخچال ظروف سفالی هستند که آب را از خود عبور می‌دهند.

(ب) درپوش دستگاه، نخی و مرطوب است. همچنین بین دو بدنه این یخچال، شن‌های خیس قرار دارند و محیطی مرطوب است.

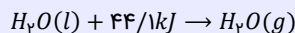
(ج) در یخچال صحرایی آب در بدنه ظرف بیرونی نفوذ کرده و به آرامی تبخیر می‌شود. پس تبخیر در سطح ظرف بیرونی انجام خواهد گرفت.

(د) واکنش انجام‌شده در یخچال صحرایی به صورت زیر است:



گرمای مورد نیاز تبخیر، از محیط درون ظرف داخلی گرفته می‌شود و به همین علت دمای آن را پایین می‌آورد.

یخچال صحرایی دستگاهی ساده و ارزان است که توسط محمد باه آبا، معلم نیجریایی طراحی شده است. این دستگاه از دو ظرف سفالی درون هم ساخته شده و فضای میان این دو ظرف با شن خیس پر می‌شود. درپوش این مجموعه، پوششی نخی و مرطوب است که از این محل تهویه هوا به آسانی انجام می‌شود. آب در بدنه سفالی ظرف بیرونی نفوذ کرده و به آرامی با گرفتن گرمای مواد درون ظرف سفالی داخلی تبخیر می‌شود. آب با جذب گرما از مواد درون ظرف، منجر به خنک شدن و سالم ماندن مواد غذایی درون این یخچال می‌شود. فرایند انجام‌شده به صورت زیر است:



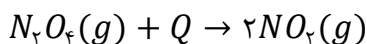
۵۵- کدام مورد نادرست است؟

- (۱) ΔH واکنش تبدیل گاز اوزون به گاز اکسیژن با ΔH واکنش سوختن متان، هم علامت است.
- (۲) بخش عمده گرمای آزادشده در واکنش‌های شیمیایی گرماده، بخشی از انرژی پتانسیل واکنش‌دهنده‌ها است.
- (۳) با انجام واکنش گرماگیر تجزیه دی‌نیتروژن تترااکسید به نیتروژن دی‌اکسید، رنگ قهوه‌ای مخلوط از بین می‌رود.
- (۴) آنتالپی یک واکنش معادل تفاوت آنتالپی مواد واکنش‌دهنده و فراورده آن واکنش است و با Q_p نیز نمایش داده می‌شود.

(متوسط - خط به خط - استاندارد) - صفحه ۶۷ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۳

واکنش تجزیه دی‌نیتروژن تترااکسید (گاز بی‌رنگ) به صورت زیر است:



همان‌طور که مشخص است، این واکنش یک واکنش گرماگیر است. اما فراورده این واکنش یعنی گاز NO_2 ، یک گاز قهوه‌ای رنگ است و با انجام این واکنش رنگ مخلوط قهوه‌ای می‌شود.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) واکنش « $2O_3(g) \rightarrow 3O_2(g) + Q$ » همانند واکنش سوختن متان همراه با آزاد کردن گرما بوده و علامت ΔH در هر دو واکنش منفی است.

۲) بخش عمده گرمای مصرف یا تولیدشده در واکنش‌های شیمیایی، مربوط به اختلاف انرژی پتانسیل واکنش‌دهنده‌ها و فراورده‌ها است. در یک واکنش گرماده، سطح انرژی واکنش‌دهنده‌ها بیشتر از فراورده‌ها بوده و برای انجام این واکنش، بخشی از انرژی واکنش‌دهنده‌ها که معادل اختلاف انرژی واکنش‌دهنده‌ها و فراورده‌ها است، آزاد می‌گردد.

۳) تغییر آنتالپی یک واکنش برابر اختلاف آنتالپی واکنش‌دهنده‌ها و فراورده‌های موجود در آن واکنش است. برای یک واکنش اغلب به جای تغییر آنتالپی از واژه آنتالپی استفاده می‌شود. تغییر آنتالپی یک واکنش شیمیایی معادل گرمایی است که در دما و فشار ثابت، در اثر انجام آن واکنش میان سامانه و محیط منتقل می‌گردد؛ بر این اساس می‌توان گفت Q_p برابر ΔH واکنش است.

آنتالپی

ذره‌های سازنده یک نمونه ماده افزون بر جنبش‌های نامنظم، دارای انرژی پتانسیل نیز هستند. نمونه ماده با مقدار مشخص در دما و فشار معین توصیف می‌شود. اگر این نمونه را در این شرایط یک سامانه در نظر بگیریم، انرژی کل سامانه در دما و فشار معین را هم‌ارز با محتوای انرژی یا آنتالپی آن سامانه می‌دانیم. پس هر سامانه در دما و فشار معین، آنتالپی مشخصی دارد که با نماد « H » نشان داده می‌شود. در واکنش‌های شیمیایی که در دما و فشار ثابت انجام می‌گیرند، گرمای واکنش معادل تغییر آنتالپی مواد شرکت‌کننده در واکنش است. تغییر آنتالپی واکنش را با نماد « ΔH » نمایش می‌دهند. مقدار ΔH معادل گرمای مبادله‌شده در واکنش بوده و علامت آن نشان‌دهنده گرماگیر یا گرماده بودن آن واکنش است؛ به گونه‌ای که اگر علامت منفی یا مثبت شد به ترتیب واکنش گرماده و گرماگیر بوده است. در واکنش‌های گرماگیر ($\Delta H > 0$) سطح آنتالپی فراورده‌ها بیشتر از واکنش‌دهنده‌ها است؛ در حالی که در واکنش‌های گرماده ($\Delta H < 0$) سطح انرژی فراورده‌ها کمتر از واکنش‌دهنده‌ها می‌باشد.



۵۶- اگر دمای ۴۰۰ گرم آب A و ۱۰۰ گرم آب B به ترتیب برابر $20^\circ C$ و $80^\circ C$ باشد، کدام یک از مطالب زیر نادرست است؟

- (۱) با مخلوط کردن این دو آب، دمای نهایی به دمای اولیه آب B نزدیک‌تر است.
- (۲) میانگین انرژی جنبشی ذرات در نمونه B بیشتر از نمونه A است.
- (۳) ظرفیت گرمایی نمونه A بیشتر از ظرفیت گرمایی نمونه B است.
- (۴) گرمای ویژه این دو نمونه آب با هم برابر نیست.

با توجه به برابر بودن گرمای رسیده به جسم سرد و گرمای از دست رفته جسم گرم، جسمی که ظرفیت گرمایی بیشتری دارد، تغییر دمای کمتری دارد و دمای نهایی به دمای آن جسم نزدیک‌تر است.

$$|Q_A| = |Q_B| \Rightarrow |C_A \Delta \theta_A| = |C_B \Delta \theta_B| \Rightarrow \frac{C_A}{C_B} = \frac{|\Delta \theta_B|}{|\Delta \theta_A|}$$

جرم نمونه A بسیار بیشتر از جرم نمونه B بوده و به همین علت ظرفیت گرمایی بیشتری داشته و دمای آن به دمای نهایی نزدیک‌تر است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۲) دمای یک ماده، معیاری برای توصیف میانگین تندی یا میانگین انرژی جنبشی ذرات سازنده آن ماده است. پس در نمونه B که دمای آن بیشتر است، میانگین انرژی جنبشی ذرات بیشتر خواهد بود.

۳) ظرفیت گرمایی نمونه A به علت جرم بیشتر آن بیشتر است.

۴) اگر چه گرمای ویژه به جرم ماده بستگی ندارد، اما به نوع ماده، دما و فشار آن بستگی دارد. پس با وجود یکسان بودن نوع دو ماده A و B به علت متفاوت بودن دمای دو نمونه، گرمای ویژه این دو نمونه یکسان نیست.



۵۷- اگر با دادن گرمای حاصل از سوختن کامل ۳/۹ گرم اتین به ۱۵ کیلوگرم طلا، دمای آن 100°C افزایش یابد، ΔH واکنش موازنه‌شده

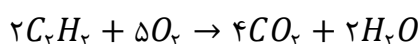
سوختن اتین برابر با چند کیلوژول است؟ ($H = 1$, $C = 12$; $g \cdot mol^{-1}$) و $c_{\text{طلا}} = 0.125 J \cdot g^{-1} \cdot ^\circ C^{-1}$)

- (۱) -2500 (۲) -2400 (۳) -1250 (۴) -1200

ابتدا با محاسبه گرمای رسیده به طلا، گرمای تولیدشده در واکنش سوختن را محاسبه می‌کنیم و سپس آنتالپی واکنش را به دست می‌آوریم. در ابتدا مقدار گرمای لازم برای افزایش دمای ۱۵ کیلوگرم طلا به اندازه 100°C را محاسبه می‌کنیم:

$$Q = mc\Delta\theta = 15000 \times 0.125 \times 100 = 187500 J = 187.5 kJ$$

واکنش موازنه‌شده سوختن کامل اتین به صورت زیر است:



حال چون این مقدار گرما از سوختن ۳/۹ گرم اتین فراهم شده است، می‌توانیم ΔH این واکنش را محاسبه کنیم. بنابراین داریم:

$$? kJ = 2 mol C_2H_2 \times \frac{26 g C_2H_2}{1 mol C_2H_2} \times \frac{187.5 kJ}{3.9 g C_2H_2} = 2500 kJ$$

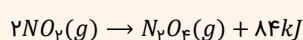
در نتیجه ΔH این واکنش برابر با -2500 کیلوژول است.

برای تمرین بیشتر، مثال زیر را حل کنید!

تغییر آنتالپی واکنش موازنه شده تبدیل گاز نیتروژن دی‌اکسید به گاز دی‌نیتروژن تترااکسید، برابر با -84 کیلوژول بر مول است. 345 گرم نیتروژن دی‌اکسید را وارد یک مخزن با پیستون متحرک می‌کنیم. اگر پس از گذشتن یک بازه زمانی، چگالی گازهای موجود در مخزن، $1/5$ برابر شود، چند کیلوژول گرما در طول این مدت زمان آزاد شده است؟ ($N = 14$, $O = 16$; $g \cdot mol^{-1}$)

- (۱) 315 (۲) 210 (۳) 168 (۴) 126

پاسخ: گزینه ۲



واکنش انجام‌شده به صورت روبه‌رو است:

ابتدا شمار مول‌های گاز نیتروژن دی‌اکسید واردشده به مخزن را محاسبه می‌کنیم:

$$? mol NO_2 = 345 g NO_2 \times \frac{1 mol NO_2}{46 g NO_2} = 7.5 mol$$

با توجه به قانون پایستگی جرم، جرم مواد موجود در این ظرف در طول واکنش ثابت می‌ماند. از آن جا که چگالی گازهای درون مخزن، $1/5$ برابر شده و جرم این گازها نیز ثابت مانده است، پس می‌توان گفت حجم گازهای موجود در ظرف $\frac{1}{5}$ برابر شده است.

با توجه به قانون گازها، حجم گازهای موجود در ظرف، با شمار مول‌های آن‌ها رابطه مستقیم دارد؛ پس داریم:

حجم گازها	مجموع مول‌های گازی	مول N_2O_F	مول NO_2
V	$V/5$	0	$V/5$
$\frac{2}{3}V$	$V/5 - x$	x	$V/5 - 2x$

با توجه به داده‌های جدول بالا، مقدار x را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{V}{\frac{2}{3}V} = \frac{V/5}{V/5 - x} \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{V/5}{V/5 - x} \Rightarrow x = 2/5$$

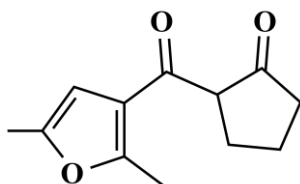
با توجه به مقدار x ، شمار مول‌های نیتروژن دی‌اکسید مصرف‌شده ($2x$) برابر با ۵ مول و شمار مول‌های دی‌نیتروژن تتراکسید تولیدشده نیز برابر با ۲/۵ مول است. انرژی آزادشده از این واکنش را بر حسب مقدار نیتروژن دی‌اکسید مصرف‌شده به دست می‌آوریم:

$$? \text{ kJ} = 5 \text{ mol } NO_2 \times \frac{84 \text{ kJ}}{2 \text{ mol } NO_2} = 210 \text{ kJ}$$

پس در این واکنش ۲۱۰ کیلوژول گرما آزاد شده است.



۵۸- کدام یک از مطالب زیر در مورد ترکیبی با ساختار مقابل، نادرست است؟



- (۱) در هر مولکول آن، ۶ جفت الکترون ناپیوندی وجود دارد.
- (۲) دارای یک گروه عاملی اتری و دو گروه عاملی کتون است.
- (۳) فرمول مولکولی ترکیب موردنظر به صورت $C_{12}H_{16}O_3$ است.
- (۴) شمار پیوندهای اشتراکی در این ترکیب برابر با ۳۴ عدد است.

(متوسط - مفهومی - استاندارد) - صفحه ۷۱ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۳

فرمول مولکولی ترکیب مورد نظر به صورت $C_{12}H_{16}O_3$ است.

در ساختار این ماده ۱۲ اتم کربن، ۴ پیوند دوگانه و ۲ حلقه وجود دارد. پس تعداد اتم‌های هیدروژن برابر است با:

$$m = 2 \times (12 - (2 + 4)) + 2 = 14$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

① به ازای هر اتم اکسیژن در یک ترکیب آلی، دو جفت الکترون ناپیوندی وجود دارد. در این ترکیب ۳ اتم اکسیژن وجود دارند، در نتیجه ۶ جفت الکترون ناپیوندی یا ۱۲ الکترون ناپیوندی در آن وجود دارد.

② همان‌طور که در ساختار این ترکیب مشخص است، این ترکیب دارای یک گروه عاملی اتری ($-O-$) و دو گروه عاملی کتون ($C=O$) است.

④ شمار پیوندهای اشتراکی در این ترکیب برابر است با:

$$\begin{aligned} \text{شمار پیوندهای اشتراکی} &= \frac{4 \times (\text{شمار اتم‌های } C) + 1 \times (\text{شمار اتم‌های } H) + 2 \times (\text{شمار اتم‌های } O)}{2} \\ &= \frac{4 \times 12 + 1 \times 14 + 2 \times 3}{2} = 34 \end{aligned}$$

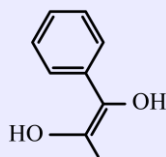
در واقع شمار پیوندهای اشتراکی در یک ترکیب آلی برابر نصف مجموع شمار تک الکترون‌های اطراف هر عنصر است. پس شمار پیوندهای اشتراکی در ترکیب مورد نظر برابر ۳۴ است.

شمار اتم‌های هیدروژن در ترکیبات آلی اکسیژن‌دار

یک راه حل تستی خیلی مهم برای شمارش اتم‌های هیدروژن موجود در یک ترکیب آلی که از اتم‌های هیدروژن، کربن و اکسیژن یا فقط از اتم‌های کربن و هیدروژن تشکیل شده است، وجود دارد. برای محاسبه شمار اتم‌های هیدروژن به این روش، ابتدا تعداد اتم‌های کربن موجود در ترکیب مورد نظر را محاسبه می‌کنیم و مقدار آن را برابر با n در نظر می‌گیریم. تعداد حلقه‌های کربنی موجود در ترکیب را برابر با a و تعداد پیوندهای دوگانه موجود در هر ترکیب را برابر با b و تعداد پیوندهای سه‌گانه را برابر با c در نظر می‌گیریم. با توجه به مقادیر a و b و c ، می‌توانیم به کمک رابطه زیر، شمار اتم‌های هیدروژن را محاسبه کنیم.

$$\text{شمار اتم‌های هیدروژن} = 2(n - (a + b + 2c)) + 2$$

در واقع می‌توان گفت که یک ترکیب آلی با n اتم کربن، حداکثر $2n + 2$ اتم هیدروژن دارد (مثل آلکان‌های راست زنجیر) و به ازای اضافه شدن هر حلقه کربنی و یا هر پیوند دوگانه به این ترکیب، ۲ عدد از تعداد اتم‌های هیدروژن آن کاسته می‌شود. به عنوان مثال، ترکیبی با ساختار زیر را در نظر بگیرید:



این ترکیب در ساختار مولکولی خود دارای ۹ اتم کربن، ۱ حلقه کربنی و ۴ پیوند دوگانه است. پس داریم:

$$2(n - (a + b + 2c)) + 2 = 2(9 - (1 + 4 + (2 \times 0))) + 2 = 10$$

فرمول شیمیایی این ترکیب، به صورت $C_9H_{10}O_2$ است.



۵۹- اگر در واکنش ماده A با از استفاده شود، مقدار گرمای مبادله شده می‌یابد.

- (۲) گرماگیر - گرافیت - الماس - کاهش
(۴) گرماده - گرافیت - الماس - کاهش

- (۱) گرماده - الماس - گرافیت - افزایش
(۳) گرماگیر - الماس - گرافیت - کاهش

(آسان - مفهومی - سریع ۵ - صفحه ۶۴ - ۱۱۰۲)

پاسخ: گزینه ۲

در هر واکنش با افزایش سطح انرژی فراورده‌ها یا کاهش سطح انرژی واکنش‌دهنده‌ها، آنتالپی واکنش مثبت‌تر می‌شود. همچنین با کاهش سطح انرژی فراورده‌ها یا افزایش سطح انرژی واکنش‌دهنده‌ها، آنتالپی واکنش منفی‌تر می‌شود.

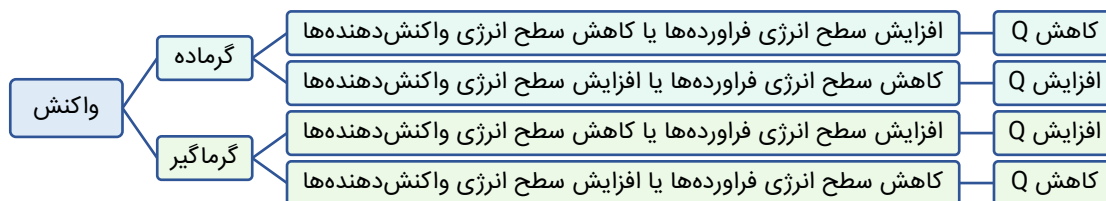
آنتالپی واکنش‌دهنده‌ها - آنتالپی فراورده‌ها = آنتالپی واکنش

سطح انرژی الماس بیشتر از سطح انرژی گرافیت است.

اگر به جای الماس به عنوان واکنش‌دهنده از گرافیت استفاده شود، سطح انرژی واکنش‌دهنده کاهش می‌یابد و موجب مثبت‌تر شدن آنتالپی واکنش می‌شود. حال اگر واکنش گرماده باشد، قدر مطلق آنتالپی واکنش و در نتیجه گرمای مبادله شده کاهش می‌یابد. همچنین اگر واکنش گرماگیر باشد، قدر مطلق آنتالپی افزایش یافته و گرمای مبادله شده افزایش می‌یابد.

از طرفی اگر به جای گرافیت از الماس به عنوان واکنش‌دهنده استفاده شود، سطح انرژی واکنش‌دهنده افزایش می‌یابد و موجب منفی‌تر شدن آنتالپی واکنش خواهد شد. اگر واکنش گرماده باشد، قدر مطلق آنتالپی واکنش و گرمای مبادله شده افزایش می‌یابد. همچنین اگر این واکنش گرماگیر باشد، قدر مطلق آنتالپی واکنش و در نتیجه گرمای مبادله شده کاهش می‌یابد.

برای بررسی و مقایسه مقدار گرمای مبادله شده (بدون در نظر گرفتن علامت) در یک واکنش شیمیایی، از نمودار زیر نیز می‌توان استفاده کرد:



۶۰- کدام موارد زیر نادرست هستند؟

الف - واکنش شکستن پیوندهای اشتراکی موجود در یک مولکول، واکنشی گرماگیر است.

ب - مقدار میانگین آنتالپی پیوند $C = C$ دو برابر مقدار میانگین آنتالپی پیوند $C - C$ است.

ج - برای پیوندهای $O - O$ ، $C - H$ و $C \equiv O$ به کار بردن میانگین آنتالپی پیوند مناسب‌تر است.

د - با افزایش خاصیت نافلزی هالوژن‌ها، مقدار آنتالپی پیوند این عناصر با اتم هیدروژن افزایش می‌یابد.

- (۱) «الف» و «ج» (۲) «الف» و «د» (۳) «ب» و «ج» (۴) «ب» و «د»

(سخت - مفهومی - زمانبر ۳ - صفحه ۶۸ - ۱۱۰۲)

پاسخ: گزینه ۳

عبارت‌های (ب) و (ج) نادرست هستند.

الف) برای تبدیل مولکول‌ها به اتم‌های مجزا از هم، انرژی لازم است. پس در واکنش شکستن پیوندهای اشتراکی موجود در یک مولکول گرما از محیط گرفته می‌شود و به سامانه منتقل می‌شود، در نتیجه این واکنش یک واکنش گرماگیر است.

ب) یک رابطه خطی بین مقدار آنتالپی پیوند با شمار پیوند بین دو اتم مشخص وجود ندارد، یعنی مقدار آنتالپی پیوند $C=C$ $(614 \text{ kJ.mol}^{-1})$ دقیقاً دو برابر این مقدار در $C-C$ $(348 \text{ kJ.mol}^{-1})$ نیست و مقداری از دو برابر آن کمتر است.

ج) برای مولکول‌هایی که اتم مرکزی آن به چند اتم کناری یکسان با پیوندهای اشتراکی متصل است، به کار بردن میانگین آنتالپی پیوند مناسب‌تر است. در نتیجه استفاده از میانگین آنتالپی پیوند برای پیوندهای $O-O$ و $C-H$ مناسب است. اما برای پیوند $C \equiv O$ که تنها پیوند موجود در مولکول CO است، نیازی به استفاده از واژه میانگین برای بیان آنتالپی پیوند نیست.



شاید متوجه شده باشید، پیوند $O=O$ علاوه بر گاز اکسیژن در گاز اوزون نیز وجود دارد. دو دلیل برای آن که کتاب از عبارت میانگین آنتالپی پیوند برای این پیوند استفاده نکرده است، وجود دارد.

۱) در کتاب‌های مرجع کتاب درسی، از مقدار ۴۹۵ کیلوژول بر مول، برای آنتالپی پیوند موجود در مولکول اکسیژن استفاده می‌شود.

۲) اساساً این پیوند در ساختار گاز اوزون وجود ندارد که مرتبط با مبحث رزونانس است که از کتاب درسی نظام جدید حذف شده است.

د) در هالوژن‌ها از بالا به پایین شعاع اتمی افزایش و خاصیت نافلزی کاهش می‌یابد. با افزایش شعاع اتمی هالوژن‌ها، طول پیوند $H-X$ بلندتر می‌شود و به همین علت آنتالپی پیوند کاهش می‌یابد. پس در پیوندهای اتم هیدروژن با یک اتم هالوژن $(H-X)$ ، هر چه هالوژن خاصیت نافلزی بیشتری داشته باشد مقدار آنتالپی آن پیوند نیز بیشتر است. به طور مثال آنتالپی پیوند $H-F$ از آنتالپی پیوند $H-Cl$ بیشتر می‌باشد.



۶۱- در واکنش $N_2(g) + 3H_2(g) \rightarrow 2NH_3(g)$ به ازای تولید ۵/۱ گرم گاز آمونیاک، چند کیلوژول گرما آزاد می‌شود؟ $(H = 1, N = 14: g.mol^{-1})$

پیوند	$N \equiv N$	$H-H$	$N-H$
میانگین آنتالپی پیوند $(kJ.mol^{-1})$	۹۴۰	۴۳۲	۳۹۱

۱۶/۵ (۴)

۲۷ (۳)

۳۳ (۲)

۱۳/۵ (۱)

(آسان - محاسباتی - استاندارد) - صفحه ۶۹ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۴

با استفاده از آنتالپی پیوندها می‌توانیم آنتالپی واکنش را محاسبه کنیم:

$$\Delta H_{\text{واکنش}} = [\text{مجموع آنتالپی پیوندها در مواد واکنش‌دهنده}] - [\text{مجموع آنتالپی پیوندها در مواد فراورده}]$$

$$\Rightarrow \Delta H = [\Delta H(N \equiv N) + 3\Delta H(H-H)] - [6\Delta H(N-H)]$$

$$\Rightarrow \Delta H = 940 + 3 \times 432 - 6 \times 391 = 940 + 1296 - 2346 = -110 \text{ kJ}$$

پس آنتالپی واکنش برابر با -110 کیلوژول است.

حال مقدار گرمای آزاد شده به ازای تولید ۵/۱ گرم آمونیاک را محاسبه می‌کنیم:

$$? \text{ گرمای } kJ = 5/1 \text{ g } NH_3 \times \frac{1 \text{ mol } NH_3}{17 \text{ g } NH_3} \times \frac{110 \text{ kJ}}{2 \text{ mol } NH_3} = 16/5 \text{ kJ}$$

پس مقدار گرمای آزاد شده در این واکنش برابر با ۱۶/۵ کیلوژول است.

آنتالپی پیوند، راهی به آنتالپی واکنش

آنتالپی یک واکنش را می‌توانیم از راه‌های مختلفی به دست آوریم. یکی از این راه‌ها، استفاده از آنتالپی پیوند است که شرط استفاده از این روش گازی بودن حالت واکنش‌دهنده‌ها و فراورده‌ها است. در این روش، در نظر می‌گیریم که تمام پیوندهای کووالانسی میان اتم‌های واکنش‌دهنده شکسته و اتم‌های گازی تولید می‌شود که گرمای لازم برای این قسمت برابر مجموع آنتالپی شکستن پیوندها در واکنش‌دهنده‌ها است. پس از آن اتم‌های گازی با تشکیل پیوندهای اشتراکی جدید فراورده‌ها را تولید می‌کنند. گرمای آزاد شده در این قسمت، قرینه گرمای لازم برای شکستن تمام پیوندهای کووالانسی در میان فراورده‌ها (مجموع آنتالپی پیوندها در مواد فراورده) - است. پس آنتالپی یک واکنش که همه مواد شرکت‌کننده در آن به‌صورت گازی هستند را می‌توان از طریق فرمول زیر حساب کرد.

$$\Delta H_{\text{واکنش}} = [\text{مجموع آنتالپی پیوندها در مواد فراورده}] - [\text{مجموع آنتالپی پیوندها در مواد واکنش‌دهنده}]$$



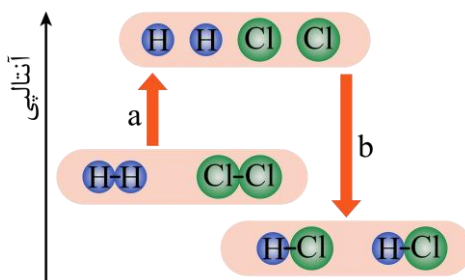
۶۲- کدام یک از مطالب زیر درست است؟

- ۱) گروه‌های عاملی آرایش منظمی از مولکول‌ها هستند که به ترکیب‌های آلی خواص فیزیکی و شیمیایی ویژه‌ای می‌بخشند.
- ۲) مقدار گرمای مبادله‌شده در واکنش « $H_2 + Cl_2 \rightarrow 2H + 2Cl$ » کمتر از واکنش « $2H + 2Cl \rightarrow 2HCl$ » است.
- ۳) به‌کار بردن آنتالپی پیوند برای تعیین آنتالپی واکنش تولید آب از عناصر سازنده در دما و فشار اتاق مناسب است.
- ۴) مقدار آنتالپی پیوند همه پیوندهای اشتراکی یگانه از مقدار همه پیوندهای اشتراکی دوگانه کمتر است.

پاسخ: گزینه ۲

(متوسط - خط به خط - استاندارد ۵ - صفحه ۷۰ - ۱۱۰۲)

همان‌طور که در شکل مشخص است، مقدار انرژی مبادله‌شده در واکنش « $H_2 + Cl_2 \rightarrow 2H + 2Cl$ » یا همان قدر مطلق مقدار a از مقدار انرژی مبادله‌شده در واکنش « $2H + 2Cl \rightarrow 2HCl$ » یا همان قدر مطلق مقدار b کمتر است.



بررسی سایر گزینه‌ها:

- ۱) گروه‌های عاملی، آرایش منظمی از اتم‌ها هستند که به مولکول‌های آلی دارای آن، خواص فیزیکی و شیمیایی منحصر به فردی می‌بخشند.
- ۲) به‌کار بردن آنتالپی پیوند برای تعیین ΔH واکنش‌هایی که همه مواد شرکت‌کننده در آن‌ها به حالت گازند، مناسب است. فراورده حاصل از واکنش تولید آب از عناصر سازنده یعنی آب، در دما و فشار اتاق به حالت مایع قرار دارد. در نتیجه به‌کار بردن آنتالپی پیوند برای محاسبه ΔH این واکنش مناسب نیست.
- ۳) امکان دارد آنتالپی پیوند یک پیوند اشتراکی یگانه از آنتالپی پیوند یک پیوند اشتراکی دوگانه بیشتر باشد. مانند پیوند $H-F$ که آنتالپی آن $(567 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1})$ از آنتالپی پیوند $O=O$ $(495 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1})$ بیشتر است.



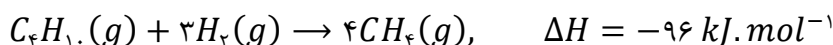
۶۳- مقدار ΔH واکنش $C_4H_{10} + H_2 \rightarrow CH_4$ پس از موازنه برابر ۹۶- کیلوژول است. اگر طی این واکنش ۳ گرم گاز هیدروژن مصرف شود، کیلوژول گرما می شود. ($H = 1, C = 12: g. mol^{-1}$)

(۱) ۴۸ - مصرف (۲) ۳۶ - تولید (۳) ۴۸ - تولید (۴) ۳۶ - مصرف

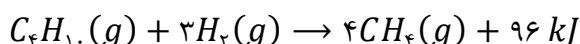
(آسان - محاسباتی - سریع - صفحه ۶۴ - ۱۱۰۲)

پاسخ: گزینه ۳

معادله موازنه شده واکنش انجام شده به صورت زیر است:



چون مقدار ΔH منفی است، پس واکنش مورد نظر گرماده بوده و طی انجام شدن آن، گرما تولید می شود. معادله این واکنش را می توان به صورت زیر نوشت:



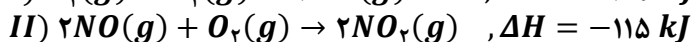
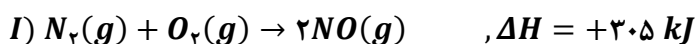
بر این اساس مقدار گرمای تولید شده به ازای مصرف ۳ گرم گاز هیدروژن را در این واکنش محاسبه می کنیم:

$$? \text{ kJ گرما} = 3 \text{ g } H_2 \times \frac{1 \text{ mol } H_2}{2 \text{ g } H_2} \times \frac{96 \text{ kJ گرما}}{3 \text{ mol } H_2} = 48 \text{ kJ}$$

بنابراین در این واکنش ۴۸ کیلوژول گرما تولید می شود.



۶۴- واکنش سوختن گازهای N_2 و NO به صورت مقابل است:



اگر مجموع آنتالپی پیوندهای $N=O$ و $N-O$ برابر با ۸۴۰ کیلوژول بر مول باشد، آنتالپی پیوند $O=O$ برابر با چند کیلوژول بر مول است؟ (آنتالپی پیوند $N \equiv N$ برابر $940 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ است.)



(۴) ۴۹۵

(۳) ۴۶۵

(۲) ۴۴۵

(۱) ۴۲۵

(سخت - محاسباتی - زمان بر - صفحه ۶۹ - ۱۱۰۲)

پاسخ: گزینه ۳

برای حل این سؤال باید از خلاقیت استفاده کرد و از آنتالپی واکنش ها، رابطه میان پیوندهای $N-O$ و $N=O$ با پیوند $O=O$ را به دست آورد و از این طریق با توجه به مجموع آنتالپی دو پیوند $N-O$ و $N=O$ ، مقدار آنتالپی پیوند $O=O$ را محاسبه می کنیم.

محاسبه آنتالپی واکنش به کمک آنتالپی پیوند به صورت زیر است:

$$\Delta H_{\text{واکنش}} = [\text{مجموع آنتالپی پیوندها در مواد واکنش دهنده}] - [\text{مجموع آنتالپی پیوندها در مواد فراورده}]$$

حال این رابطه در واکنش سوختن گاز نیتروژن مطابق زیر است:

$$305 = [\Delta H(N \equiv N) + \Delta H(O = O)] - [2\Delta H(N = O)] \Rightarrow 305 = 940 + \Delta H(O = O) - 2\Delta H(N = O)$$

$$\Rightarrow \Delta H(O = O) - 2\Delta H(N = O) = -635 \text{ kJ} (*)$$

و همچنین این رابطه را برای واکنش سوختن گاز NO نیز داریم:

$$-115 = [2\Delta H(N = O) + \Delta H(O = O)] - [2\Delta H(N = O) + 2\Delta H(N - O)]$$

$$\Rightarrow \Delta H(O = O) - 2\Delta H(N - O) = -115 \text{ kJ} (**)$$

با جمع کردن دو معادله (*) و (**) به معادله زیر می رسیم:

$$2\Delta H(O = O) - 2(\Delta H(N = O) + \Delta H(N - O)) = -635 - 115 \Rightarrow 2\Delta H(O = O) - 2(840) = -750$$

$$\Rightarrow 2\Delta H(O = O) = 930 \Rightarrow \Delta H(O = O) = 465 \text{ kJ}$$

در نتیجه آنتالپی پیوند $O=O$ برابر با ۴۶۵ کیلوژول بر مول است.

برای تمرین بیشتر، مثال زیر را حل کنید!

اگر گرمای لازم برای شکستن پیوندهای اشتراکی در یک لیتر از گازهای H_2 ، Br_2 و HBr و تبدیل آن‌ها به اتم‌های گازی سازنده، به ترتیب برابر $۷/۸$ ، $۱۷/۶$ و $۱۴/۵$ کیلوژول باشد، بر اثر تولید گرم ۱۳۵ گرم HBr طی واکنش موازنه‌نشده $H_2(g) + Br_2(g) \rightarrow HBr(g)$ ، چند کیلوژول گرما تولید می‌شود؟ (حجم یک مول گاز در شرایط داده شده برابر ۲۵ لیتر است. $H = ۱, Br = ۸۰: g \cdot mol^{-1}$)

(۱) ۷۵ (۲) ۴۵ (۳) ۹۰ (۴) ۱۵۰

پاسخ: گزینه ۱

واکنش انجام‌شده به صورت $H - H(g) + Br - Br(g) \rightarrow ۲H - Br(g)$ است. ابتدا باید آنتالپی پیوندهای کووالانسی میان اتم‌ها را به دست آوریم تا بتوانیم ΔH واکنش را محاسبه کنیم:

$$\begin{cases} Br_2(g): 2Br(g) : \Delta H(Br - Br) = 1 \text{ mol } (Br - Br) \times \frac{1 \text{ mol } Br_2}{1 \text{ mol } (Br - Br)} \times \frac{17.6 \text{ kJ}}{1 \text{ mol } Br_2} \times \frac{1}{1 \text{ L } Br_2} = 195 \text{ kJ} \\ H_2(g): 2H(g) : \Delta H(H - H) = 1 \text{ mol } (H - H) \times \frac{1 \text{ mol } H_2}{1 \text{ mol } (H - H)} \times \frac{7.8 \text{ kJ}}{1 \text{ mol } H_2} \times \frac{1}{1 \text{ L } H_2} = 440 \text{ kJ} \\ HBr(g): H(g) + Br(g) : \Delta H(H - Br) = 1 \text{ mol } (H - Br) \times \frac{1 \text{ mol } HBr}{1 \text{ mol } (H - Br)} \times \frac{14.5 \text{ kJ}}{1 \text{ mol } HBr} \times \frac{1}{1 \text{ L } HBr} = 362/5 \text{ kJ} \end{cases}$$

حال ΔH واکنش را به دست می‌آوریم:

$$\Delta H \text{ واکنش} = [\text{مجموع آنتالپی پیوندها در مواد واکنش‌دهنده}] - [\text{مجموع آنتالپی پیوندها در مواد فراورده}]$$

$$\Rightarrow \Delta H \text{ واکنش} = [\Delta H(Br - Br) + \Delta H(H - H)] - [2\Delta H(H - Br)] = (195 + 440) - 2 \times 362/5 = -90 \text{ kJ}$$

در انتها گرمای آزاد شده را حساب می‌کنیم:

$$? \text{ گرمای آزاد شده} = 135 \text{ g } HBr \times \frac{1 \text{ mol } HBr}{81 \text{ g } HBr} \times \frac{90 \text{ kJ}}{1 \text{ mol } HBr} = 150 \text{ kJ}$$

پس گرمای آزادشده در این واکنش ۷۵ کیلوژول بوده است.



۶۵- اگر ۴۴۸۰ میلی‌لیتر گاز متان در شرایط استاندارد با دریافت $۲۴۷/۲$ کیلوژول گرما طبق واکنش زیر برخی از پیوندهای موجود در

آن شکسته شود، آنتالپی پیوند $C - H$ در شرایط واکنش چند کیلوژول است؟



(۴) ۴۲۰

(۳) ۴۱۶

(۲) ۴۱۲

(۱) ۴۰۸

متوسط - محاسباتی - استاندارد (۵) - صفحه ۶۷ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۲

در این واکنش ۳ پیوند $C - H$ می‌شکند. پس اگر آنتالپی این واکنش را به دست آوریم، مساوی با ۳ برابر آنتالپی این پیوند است. در ابتدا مقدار (مول) گاز متان را محاسبه می‌کنیم:

$$? \text{ mol } CH_4 = 4480 \text{ mL } CH_4 \times \frac{1 \text{ mol } CH_4}{22400 \text{ mL } CH_4} = 0.2 \text{ mol}$$

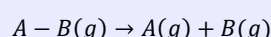
حال باید توجه کرد که انرژی مصرف‌شده صرف شکستن سه پیوند $C - H$ موجود در 0.2 مول متان شده، یعنی این انرژی سبب شکسته شدن 0.6 مول پیوند $C - H$ شده است، بنابراین آنتالپی پیوند $C - H$ برابر است با:

$$? \text{ گرمای آزاد شده} = 1 \text{ mol } C - H \times \frac{247/2 \text{ kJ}}{0.6 \text{ mol } C - H} = 412 \text{ kJ}$$

در نتیجه آنتالپی پیوند $C - H$ برابر با ۴۱۲ کیلوژول بر مول است.

آنتالپی پیوند

به مقدار انرژی لازم برای شکستن یک مول پیوند اشتراکی میان دو اتم در حالت گازی، آنتالپی پیوند می‌گویند. برای شکستن پیوند همواره به انرژی نیاز است؛ بنابراین آنتالپی پیوند همواره مثبت است. تغییر آنتالپی واکنش زیر، معادل آنتالپی پیوند $A - B$ است:



بنابراین، شرط آن که گرمای مبادله‌شده در یک واکنش برابر آنتالپی پیوند باشد این است که در آن واکنش یک مول پیوند کووالانسی میان دو اتم شکسته شود و مواد شرکت‌کننده در واکنش نیز به حالت گازی باشند.



۶۶- آنتالپی پیوند میان اتم کربن و اتم اکسیژن در کدام یک از مواد زیر کمتر است؟

- (۱) کربن مونواکسید (۲) کربن دی‌اکسید (۳) ساده‌ترین الکل (۴) ساده‌ترین کتون

پاسخ: گزینه ۳

(آسان - مفهومی - سریع) - صفحه ۶۸ - ۱۱۰۲

پیوند کربن-اکسیژن در کربن مونواکسید سه‌گانه، در کربن دی‌اکسید و کتون‌ها دوگانه و در الکل‌ها یگانه است. پس آنتالپی پیوند در میان این چهار ماده، در ساده‌ترین الکل یعنی متانول کمتر است.

مقایسه آنتالپی پیوندها

آنتالپی پیوند میان دو اتم که نشان‌دهنده قدرت پیوند است، به جاذبه میان الکترون‌های پیوندی و هسته این دو اتم بستگی دارد. مسلماً هر چه جاذبه میان دو اتم بیشتر باشد، پیوند نیز قوی‌تر است. به‌طور کلی هرچه فاصله هسته‌ها از الکترون‌ها کمتر باشد، جاذبه آن پیوند بیشتر می‌شود؛ بنابراین هر چه طول پیوند کمتر باشد، آنتالپی پیوند نیز بیشتر است.

به‌طور کلی، هر چه شعاع اتم‌های دخیل در پیوند کوچک‌تر و مرتبه پیوند بیشتر باشد، شعاع پیوند کمتر می‌شود. بنابراین، به‌صورت کلی آنتالپی پیوند سه‌گانه نسبت به پیوند دوگانه و آن هم نسبت به پیوند یگانه بیشتر است. برای مثال، داریم:

$$\Delta H(N-N) < \Delta H(N=N) < \Delta H(N \equiv N)$$

$$\Delta H(C-C) < \Delta H(C=C) < \Delta H(C \equiv C)$$

همچنین غالباً، هر چه شعاع اتم‌های تشکیل‌دهنده پیوند کوچک‌تر باشد، آنتالپی پیوند بیشتر خواهد بود. به‌طور مثال، داریم:

$$F < Cl < Br < I \Rightarrow \Delta H(H-F) > \Delta H(H-Cl) > \Delta H(H-Br) > \Delta H(H-I)$$



۶۷- اگر ساختار مقابل نشان‌دهنده یک ترکیب آلی در زردچوبه باشد، کدام موارد درست هستند؟

الف - سه اتم کربن در این ترکیب با هیچ اتم هیدروژنی پیوند ندارند.

ب - برای سوختن کامل یک مول از این ترکیب ۱۹/۵ مول گاز اکسیژن لازم است.

ج - پیوند $C=C$ در بین پیوندهای موجود در این ترکیب، دارای بیشترین مقدار آنتالپی پیوند است.

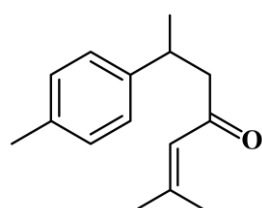
د - تفاوت شمار اتم‌های هیدروژن در این ترکیب با مجموع شمار اتم‌ها در ۲-هگزن، برابر با ۲ است.

(۱) «الف» و «ج»

(۲) «الف» و «د»

(۳) «ب» و «ج»

(۴) «ب» و «د»



(سخت - مفهومی - زمانبر) - صفحه ۷۲ - ۱۱۰۲

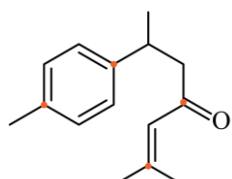
پاسخ: گزینه ۴

فرمول مولکولی ترکیب مورد نظر به‌صورت $C_{15}H_{20}O$ است.

در ساختار این ماده ۱۵ اتم کربن، ۵ پیوند دوگانه و ۱ حلقه وجود دارد. پس تعداد اتم‌های هیدروژن برابر است با:

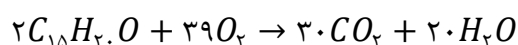
$$m = 2 \times (15 - (1 + 5)) + 2 = 20$$

عبارت‌های (ب) و (د) درست هستند.



همان‌طور که در شکل نشان داده شده است، در این مولکول چهار اتم کربن با هیچ اتم هیدروژنی پیوند ندارند.

واکنش موازنه‌شده سوختن کامل این ترکیب مطابق زیر است:



حال همان‌طور که مشخص است برای سوختن کامل ۲ مول از این ترکیب، ۳۹ مول گاز اکسیژن لازم است. پس برای سوختن کامل یک مول از آن، نصف این مقدار یعنی ۱۹/۵ مول گاز اکسیژن نیاز است.

یک فرمول کاربردی

در آزمون‌های قبلی با مقدار گاز اکسیژن لازم برای سوختن یک مول از هیدروکربن‌ها آشنا شدیم، برای ترکیبات آلی اکسیژن‌دار تنها کافی است که نصف تعداد اتم‌های اکسیژن را از مقدار به دست آمده کم کنیم. در واقع برای سوختن یک مول ترکیب آلی اکسیژن‌دار ($C_nH_mO_x$)، به اندازه مجموع تعداد اتم‌های کربن و ربع اتم‌های هیدروژن منهای نصف تعداد اتم‌های اکسیژن، به گاز اکسیژن نیاز است.

$$n + \frac{m}{4} - \frac{x}{2}$$

برای سوختن یک مول از این ترکیب به $19/5 = 15 + \frac{20}{4} - \frac{1}{2}$ مول گاز اکسیژن نیاز است.

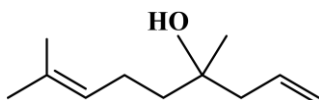
پیوندهای موجود در این ترکیب عبارت است از $C-H$, $C-C$, $C=O$ و $C=C$. از بین پیوندهای موجود، پیوند $C=O$ دارای بیشترین مقدار آنتالپی پیوند است.

شمار اتم‌های موجود در ۲-هگزین (C_6H_{12}) برابر با ۱۸ بوده و اختلاف آن با شمار اتم‌های هیدروژن در ترکیب مورد نظر ($C_{15}H_{32}O$) برابر با ۲ است.



۶۸- کدام یک از مطالب زیر نادرست است؟ ($H = 1, C = 12, O = 16: g.mol^{-1}$)

- (۱) اگر به جای یکی از اتم‌های هیدروژن در ساختار بنزن، گروه عاملی آلدهیدی قرار گیرد، ترکیب آلی موجود در بادام به دست می‌آید.
- (۲) در یک نمونه خالص از عامل مزه دارچین برخلاف عامل بوی رازیانه پیوند هیدروژنی دیده نمی‌شود.
- (۳) تفاوت جرم مولی ترکیب عامل بوی میخک با سیکلوهپتان برابر با ۱۶ گرم است.
- (۴) ساختار مقابل مربوط به یک الکل سیرنشده است که خاصیت آروماتیکی ندارد.



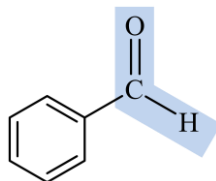
(سخت - مفهومی - زمانبر) - صفحه ۷۲ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۲

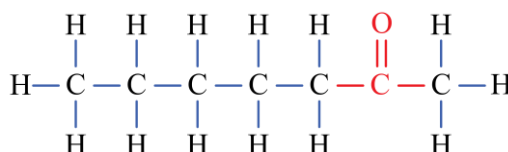
ترکیب آلی عامل بو و مزه دارچین و رازیانه به ترتیب دارای گروه عاملی آلدهیدی و اتری هستند. در ساختار این دو گروه هیچ اتم هیدروژنی به اکسیژن متصل نیست و در یک نمونه خالص از آن‌ها پیوند هیدروژنی دیده نمی‌شود.

بررسی سایر گزینه‌ها:

با قرار گرفتن یک گروه عاملی آلدهیدی به جای یکی از اتم‌های هیدروژن در بنزن، بنزآلدهید به دست می‌آید که ترکیب آلی موجود در بادام است.



ترکیب آلی موجود در میخک ۲-هپتانون با فرمول مولکولی $C_7H_{14}O$ و ساختار زیر است. همچنین فرمول مولکولی سیکلوهپتان نیز به صورت C_7H_{14} می‌باشد. همان‌طور که مشخص است تفاوت جرم مولی آن‌ها برابر با جرم مولی یک اتم اکسیژن می‌باشد. پس تفاوت جرم مولی آن‌ها برابر با ۱۶ خواهد بود.



ساختار نشان داده شده که دارای گروه عاملی هیدروکسیل است و به همین علت می‌توان به آن الکل گفت. از طرفی در ساختار این ماده پیوند دوگانه میان اتم‌های کربن وجود دارد و به همین علت یک ترکیب سیرنشده است. البته این ترکیب سیرنشده در ساختار خود حلقه بنزی ندارد و به همین علت یک ترکیب آروماتیک محسوب نمی‌شود. در حد کتاب درسی، به ترکیباتی آروماتیک گفته می‌شود که در ساختار خود حلقه بنزی دارند که از ۶ کربن با ۳ پیوند $C=C$ و ۳ پیوند $C-C$ تشکیل شده است.



۶۹- با توجه به جدول زیر، آنتالپی واکنش سیرشدن اتن برابر چند کیلوژول بر مول است؟

پیوند	$C-C$	$C-H$	$H-H$	$C=C$
میانگین آنتالپی پیوند ($kJ.mol^{-1}$)	۳۴۸	۴۱۵	۴۳۶	۶۱۴

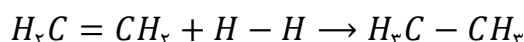
(۴) -۱۲۸

(۳) -۵۶۴

(۲) +۲۸۷

(۱) -۳۴۶

واکنش سیرشدن اتن به صورت زیر است:



در این واکنش یک پیوند $C = C$ و یک پیوند $H - H$ می شکند و دو پیوند $C - H$ و یک پیوند $C - C$ ایجاد می شود. پس آنتالپی این واکنش برابر است با:

$$\Delta H_{\text{واکنش}} = [\text{مجموع آنتالپی پیوندهای شکسته شده در مواد واکنش دهنده}] - [\text{مجموع آنتالپی پیوندهای ایجاد شده در مواد فراورده}]$$

$$\Delta H_{\text{واکنش}} = [\Delta H(C = C) + \Delta H(H - H)] - [\Delta H(C - C) + 2\Delta H(C - H)]$$

$$= (614 + 436) - (348 + 2 \times 415)$$

$$\Rightarrow \Delta H_{\text{واکنش}} = 1050 - 1178 = -128 \text{ kJ}$$

بنابراین آنتالپی این واکنش برابر ۱۲۸ - کیلوژول است.

محاسبه سریع تر آنتالپی واکنش به کمک آنتالپی پیوند

$$\Delta H_{\text{واکنش}} = [\text{مجموع آنتالپی پیوندهای شکسته شده در مواد واکنش دهنده}] - [\text{مجموع آنتالپی پیوندهای ایجاد شده در مواد فراورده}]$$



۷۰- اگر مخلوطی از گازهای اکسیژن و اوزون که در مجموع دارای ۲/۵ مول گاز است، در اثر ۱۴۵۶/۵ کیلوژول گرما به طور کامل به اتم های گازی مجزا تبدیل شود، درصد مولی گاز اکسیژن در مخلوط اولیه چقدر است؟

پیوند	$O = O$	$O - O$
آنتالپی پیوند ($\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$)	۴۹۵	۱۴۶

۶۰ (۴)

۵۰ (۳)

۴۰ (۲)

۲۵ (۱)

فرمول ساختاری گازهای اکسیژن و اوزون به ترتیب به صورت « $O = O$ » و « $O = O - O$ » است. اگر فرض کنیم x مول گاز اکسیژن در این مخلوط وجود داشته باشد. از آن جا که در این مخلوط ۲/۵ مول گاز وجود دارد، در نتیجه $x - ۲/۵$ مول گاز اوزون در این مخلوط موجود است.

ابتدا مقدار (مول) پیوندهای $O = O$ و $O - O$ موجود در این مخلوط را حساب می کنیم:

$$? \text{ mol } O = O = x \times 1 + (2/5 - x) \times 1 = 2/5 \text{ mol}$$

$$? \text{ mol } O - O = (2/5 - x) \times 1 = 2/5 - x \text{ mol}$$

از گرمای داده شده به این مخلوط که سبب شکسته شدن تمام پیوندهای موجود در این مخلوط شده است، داریم:

$$Q = n_{O=O} \times 495 + n_{O-O} \times 146 \Rightarrow 1456/5 = 2/5 \times 495 + (2/5 - x) \times 146 \Rightarrow 1456/5$$

$$= 1237/5 + 365 - 146x \Rightarrow 146x = 146 \Rightarrow x = 1$$

در نتیجه مقدار (مول) گاز اکسیژن در مخلوط برابر با ۱ مول است.

حال باید درصد مولی گاز اکسیژن را در مخلوط اولیه محاسبه کنیم، بنابراین داریم:

$$\text{درصد مولی گاز اکسیژن} = \frac{\text{مقدار مول گاز اکسیژن}}{\text{مقدار مول گازهای مخلوط}} \times 100 \Rightarrow A = \frac{1}{2/5} \times 100 = 40\%$$

در نتیجه درصد مولی گاز اکسیژن در مخلوط اولیه برابر با ۴۰ درصد است.





بیست شو

جامع ترین بسته آمادگی امتحان نهایی

- ✓ درسنامه کامل و مفهومی
- ✓ دوپینگ فوری شب امتحان (جزوه خلاصه نکات مهم)
- ✓ سوالات تشریحی تألیفی میکرو طبقه بندی شده
- ✓ ۵ آزمون جامع شبیه ساز امتحان نهایی
- ✓ آزمون ویژه پیش بینی امتحان خرداد ۱۴۰۵



اسکن کن!

برای دریافت
روی لینک بزن!

digimaze.org

