



گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی

آزمون ماز | پایه یازدهم



جمع بندی و مرور نیم سال اول



ویژه دانش آموزان پایه یازدهم

دفترچه شماره ۱

پنجشنبه ۶ فروردین ماه ۱۴۰۵

ردیف	ماده امتحانی	تعداد سؤال	شماره سؤال		مدت زمان پاسخ گویی	ملاحظات
			از	تا		
۱	ریاضیات	۳۵	۱	۳۵	۶۵ دقیقه	۳۵ سؤال ۶۵ دقیقه

برای شباهت حداکثری به کنکور، صفحه آرای، فونت و حتی اندازه متن در تمامی آزمون های ماز، کاملاً یکسان با استاندارد دفترچه های کنکور در نظر گرفته می شود.

بودجه بندی دروس این آزمون

آمار و احتمال

آشنایی با مبانی ریاضیات

(کل فصل ۱)

احتمال

(کل درس ۱: مبانی احتمال
و کل درس ۲: احتمال غیرهم شانس)
صفحه های ۱ تا ۴۷

سهم در کنکور: ۲ سؤال

هندسه ۲

دایره (کل فصل ۱)

تبدیل های هندسی و کاربردها

(تبدیل های هندسی تا ابتدای انتقال)
صفحه های ۹ تا ۳۸

سهم در کنکور: ۲ سؤال

حسابان ۱

جبر و معادله (کل فصل ۱) /

تابع (کل فصل ۲) /

توابع نمایی و لگاریتم (تابع نمایی)
صفحه های ۱ تا ۷۹

سهم در کنکور: ۵ سؤال

شیمی ۲

قدر هدایای زمینی را بدانیم

(کل فصل)

در پی غذای سالم

(از ابتدای فصل تا انتهای گرما

در واکنش های شیمیایی)

صفحه های ۱ تا ۶۵

سهم در کنکور: ۶ سؤال

فیزیک ۲

الکتریسیته ساکن + جریان الکتریکی

ومدارهای جریان مستقیم

(تا ابتدای توان در مدارهای الکتریکی)

صفحه های ۱ تا ۶۶

سهم در کنکور: ۵ سؤال

استراتژی و هدف گذاری با ماز در سال تحصیلی ۱۴۰۴-۰۵

اگر قصد داری از نیمه دوم سال شروع کنی و با موفقیت همه رو شگفت زده کنی، این برنامه برای توئه!

گام اول (گرم کردن با آزمون ۹ بهمن):

با استفاده از مطالعه ای که برای امتحانات نیمسال اول داشته اید، در آزمون ۹ بهمن شرکت کنید و فقط به دید تمرین برای شروع (گرم کردن اولیه) به این آزمون نگاه کنید.

گام دوم (شروع پرانرژی در بهمن و اسفند):

در آزمون های ۲۳ بهمن، ۷ اسفند و ۲۱ اسفند، به مطالب سه هشتم ابتدایی نیمسال دوم مسلط می شوید.

گام سوم (جبران نیمسال اول در فرصت طلایی نوروز):

از ۲۲ اسفند تا ۶ فروردین، به جبران، مرور و جمع بندی نیمسال اول می پردازید و با آزمون ۶ فروردین به مطالب نیمسال اول مسلط می شوید.

گام چهارم (تکمیل یادگیری نیمسال دوم بعد از ایام نوروز):

از ۷ فروردین تا ۲۴ اردیبهشت، به مطالب پنج هشتم پایانی نیمسال دوم مسلط می شوید و با آمادگی کامل به استقبال امتحانات خرداد ماه می روید.

گام پنجم (بهترین پایان برای سال تحصیلی):

تکمیل یادگیری و جمع بندی کامل برای ورود پر قدرت به سال تحصیلی بعد؛ آزمون جامع کل پایه در ۲۸ خردادماه



۱- اگر مجموع ۱۲ جمله اول یک دنباله هندسی غیر ثابت ۱۳ برابر مجموع ۴ جمله اول آن باشد، جمله دوازدهم چند برابر جمله چهارم است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۹

۲- در دنباله حسابی $a_n = an + b$ ، اگر $4S_n = S_{2n}$ برقرار باشد، کدام گزینه صحیح است؟

- (۱) $2a - b = 0$ (۲) $2a + b = 0$ (۳) $a + 2b = 0$ (۴) $a - 2b = 0$

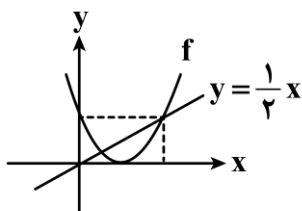
۳- مجموع ریشه های معادله $ax^2 + 2x + 3 = 0$ از حاصل ضرب ریشه ها یک واحد بیشتر است. a کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۵ (۴) -۵

۴- اگر $x = -2$ یکی از صفرهای تابع $f(x) = x^3 + x^2 + ax - 6$ باشد، مجموع مربعات سایر صفرهای تابع کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹

۵- نمودار سهمی $f(x) = ax^2 + bx + c$ به صورت مقابل است. b کدام است؟



- (۱) -۱ (۲) -۲ (۳) -۳ (۴) -۴

۶- اشکان قصد دارد ۱۰۰ کیلوگرم محلول آب نمک به غلظت ۱۰ درصد را به محلول با غلظت ۲۰ درصد تبدیل کند. او m کیلوگرم نمک به محلول اضافه کرده و n کیلوگرم از محلول را تبخیر می کند. اگر $n - m = 5$ باشد، mn کدام است؟

- (۱) ۱۲۶ (۲) ۱۵۰ (۳) ۱۷۲ (۴) ۲۰۴

۷- معادله $\sqrt{x+20} + \sqrt{3x+52} = 4$ چند جواب دارد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴

۸- نقاط $A(2, 4)$ ، $B(4, -3)$ ، $C(7, y)$ و $D(x, 8)$ رئوس متوازی الاضلاع $ABCD$ می باشند. طول قطر BD کدام است؟

- (۱) $\sqrt{118}$ (۲) $\sqrt{122}$ (۳) $\sqrt{124}$ (۴) $\sqrt{130}$

محل انجام محاسبات

۹- خط $y = 2x + 1$ بر خط $y = ax - 1$ عمود است. طول محل تلاقی دو خط کدام است؟

- (۱) $0/6$ (۲) $-0/6$ (۳) $0/8$ (۴) $-0/8$

۱۰- کدام خط در تلاقی با نمودار $y = 2x|4 - x|$ دو نقطه مشترک دارد؟

- (۱) $y = 8$ (۲) $y = 4$ (۳) $y = 12$ (۴) $y = 16$

۱۱- کدام گزینه درست نیست؟

- (۱) برد تابع زیرمجموعه هم دامنه تابع است.
 (۲) اگر دو تابع برابر باشند، دامنه و برد آنها برابر است.
 (۳) هم دامنه تابع می تواند زیرمجموعه برد تابع باشد.
 (۴) اگر دامنه و برد دو تابع برابر باشند، دو تابع برابر هستند.

۱۲- توابع $f(x) = \frac{a}{x-2}$ و $g(x) = \frac{cx - \frac{1}{2}}{ax^2 + bx + 2}$ برابرند. $a - b + 2c$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۳ (۴) -۳

۱۳- تابع $f(x) = \begin{cases} 3x-2 & x \leq -2 \\ x^2 + 2ax - 2 & x > -2 \end{cases}$ روی $\mathbb{R}$ یک به یک است. اگر a عددی صحیح باشد، مقدار $f(a)$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۸ (۳) ۱۰ (۴) -۲

۱۴- مجموعه جواب معادله $9 = \left[2x - \frac{1}{2}\right] + \left[2x + \frac{1}{2}\right]$ شامل چند عدد صحیح است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

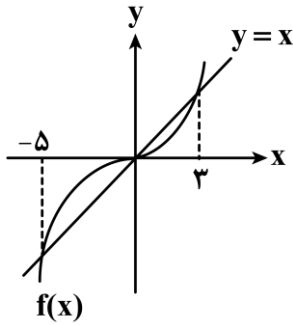
۱۵- وارون تابع $f(x) = a + \sqrt{x-1}$ خط $y = 2x - 1$ را در نقطه ای به طول ۳ قطع می کند. $f^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{5}{4}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{7}{4}$

محل انجام محاسبات

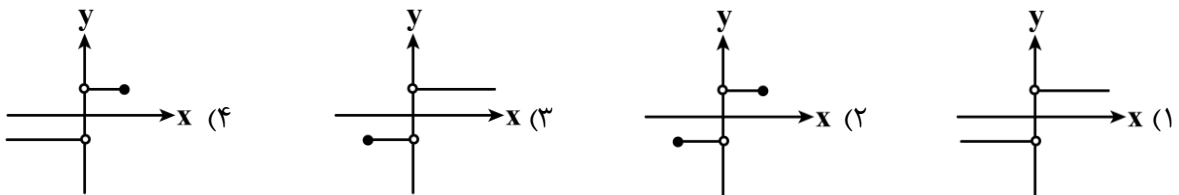


۱۶- نمودار تابع f و خط $y = x$ رسم شده است. دامنه تابع $g(x) = \sqrt{\frac{x}{f^{-1}(x) - x}}$ شامل چند عدد صحیح است؟



- (۱) ۲
(۲) ۴
(۳) ۶
(۴) بیش از ۶

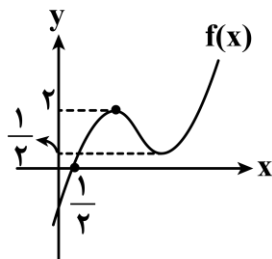
۱۷- اگر $f(x) = \sqrt{x+1}$ و $g(x) = x^2 - 1$ باشد، نمودار $h(x) = \frac{fog(x)}{gof(x)}$ به کدام صورت است؟



۱۸- مجموع ریشه‌های معادله $|x-2| + 1 = |4x-x^2|$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۸

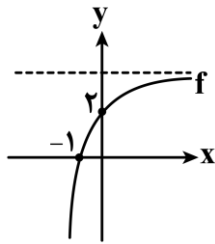
۱۹- نمودار $y = f(x)$ رسم شده است. اگر $g(x) = |x-1|$ باشد، معادله $fogof(x) = 0$ چند ریشه متمایز دارد؟



- (۱) ۳
(۲) ۴
(۳) ۵
(۴) ۶

محل انجام محاسبات

۲۰- نمودار تابع $f(x) = 3 + k2^{ax+b}$ به صورت مقابل است. $f(1)$ کدام است؟



(۱) $\frac{17}{6}$

(۲) $\frac{7}{3}$

(۳) $\frac{8}{3}$

(۴) $\frac{13}{6}$

۲۱- مجموعه جواب نامعادله $(\frac{5}{4})^{3-x^2} > (0/16)^{2x+1}$ شامل چند عدد صحیح است؟

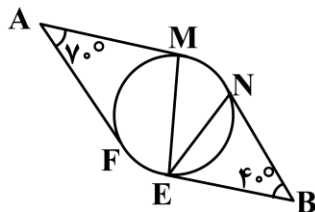
(۴) ۶

(۳) ۵

(۲) ۴

(۱) ۳

۲۲- در شکل مقابل، اضلاع زاویه های $\hat{A}$ و $\hat{B}$ بر دایره مماس اند. اگر وتر EF برابر شعاع دایره باشد، زاویه $\hat{MEN}$ چند درجه است؟



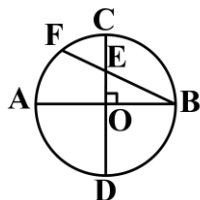
(۱) 50°

(۲) 55°

(۳) $27/5^\circ$

(۴) 25°

۲۳- مطابق شکل زیر، دو قطر AB و CD از دایره بر هم عمودند. اگر $BE = 2\sqrt{2}$ و $EF = \sqrt{2}$ باشد، آن گاه مساحت دایره برابر کدام است؟



(۱) 6π

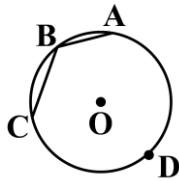
(۲) 36π

(۳) 8π

(۴) 12π

محل انجام محاسبات

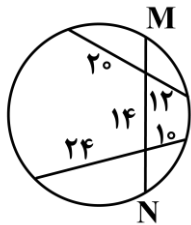
- ۲۴- در دایره به مرکز O و شعاع $\frac{15}{\pi}$ ، AB یک ضلع از ده ضلعی منتظم محاط در دایره و BC یک ضلع از شش ضلعی منتظم محاط در دایره است. طول کمان $\widehat{ADC}$ برابر کدام است؟



- (۱) ۱۱
(۲) ۱۳
(۳) ۲۲
(۴) ۲۶

- ۲۵- دو دایره $C(O, 5)$ و $C'(O', 5)$ مفروض‌اند. اگر $OO' = 5$ باشد، آن‌گاه چند محور بازتاب وجود دارد به طوری که یکی از دو دایره را بر دیگری تصویر کند؟

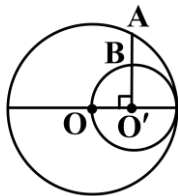
- (۱) هیچ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بی‌شمار



- ۲۶- در دایره شکل مقابل، طول وتر MN برابر کدام است؟

- (۱) ۱۷
(۲) ۲۴
(۳) ۳۴
(۴) ۳۸

- ۲۷- در شکل مقابل، دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ مماس داخل هستند. اگر AO' عمود بر OO' و $AB = 9 - 3\sqrt{3}$ باشد، آن‌گاه حاصل $R + R'$ برابر کدام است؟



- (۱) $6\sqrt{3}$
(۲) $8\sqrt{3}$
(۳) $9\sqrt{3}$
(۴) $12\sqrt{3}$

- ۲۸- در مثلث ABC نقطه H پای ارتفاع وارد بر ضلع BC است. اگر A' بازتاب رأس A نسبت به عمود منصف BC باشد و چهارضلعی $ABCA'$ محیطی شود، با فرض $BC = 9$ و $BH = \frac{2}{5}$ ، مساحت چهارضلعی $ABCA'$ برابر کدام است؟

- (۱) ۳۶ (۲) ۳۲ (۳) ۳۴ (۴) ۳۹

محل انجام محاسبات

۲۹- اگر ارزش گزاره $(p \wedge q) \Rightarrow \sim r$ نادرست باشد، ارزش گزاره $p \Rightarrow (r \Rightarrow \sim q)$ با ارزش کدام گزاره یکسان است؟

- (۱) $r \Leftrightarrow p$ (۲) $\sim r \Rightarrow (p \vee q)$ (۳) $\sim p \Rightarrow (q \wedge r)$ (۴) $r \Rightarrow \sim q$

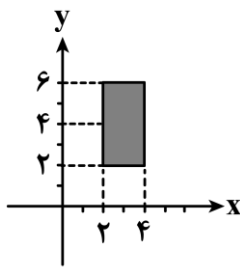
۳۰- اگر ارزش گزاره $p \Leftrightarrow (q \wedge r)$ درست باشد، احتمال آن که ارزش گزاره های p و r همزمان درست باشند، کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{5}$ (۲) $\frac{2}{5}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{6}$

۳۱- متمم مجموعه $(A' \cap (A' \cup B)) \cup ((A - B)' - B)$ کدام است؟

- (۱) U (۲) A' (۳) $B \cap A$ (۴) A

۳۲- اگر نمودار $B \times A$ به صورت مقابل باشد، مساحت مربوط به مجموعه $(A \times A) \cap (B \times B)$ کدام است؟



- (۱) ۶
(۲) $\frac{15}{2}$
(۳) $\frac{9}{2}$
(۴) ۴

۳۳- از بین اعداد طبیعی ۴ رقمی به تصادف یک عدد برمی داریم. با کدام احتمال لااقل یک بار رقم ۵ ظاهر می شود؟

- (۱) $\circ / 255$ (۲) $\circ / 320$ (۳) $\circ / 352$ (۴) $\circ / 452$

۳۴- در پرتاب ۲ تاس همزمان احتمال آن که فقط یکی از تاس ها مضرب ۳ باشد و مجموع دو تاس مضرب ۵ نشود، کدام است؟

- (۱) $\frac{5}{18}$ (۲) $\frac{7}{18}$ (۳) $\frac{17}{36}$ (۴) $\frac{1}{3}$

۳۵- اگر در فضای نمونه ای $\{a, b, c, d\}$ داشته باشیم $P(a) = 2P(\{b, c\})$ و $P(c) = 2P(b)$ و $P(d) = \circ / 1$ ، احتمال وقوع پیشامد $\{b, c\}$ کدام است؟

- (۱) $\circ / 4$ (۲) $\circ / 3$ (۳) $\circ / 25$ (۴) $\circ / 2$

محل انجام محاسبات



گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی

آزمون ماز پایه یازدهم



جمع بندی و مرور نیم سال اول



ویژه دانش آموزان پایه یازدهم

دفترچه شماره ۲

پنجشنبه ۶ فروردین ماه ۱۴۰۵

ردیف	ماده امتحانی	تعداد سؤال	شماره سؤال		مدت زمان پاسخ گویی	ملاحظات
			از	تا		
۱	فیزیک	۲۵	۳۶	۶۰	۳۵ دقیقه	۵۰ سؤال
۲	شیمی	۲۵	۶۱	۸۵	۲۵ دقیقه	۶۰ دقیقه

برای شباهت حداکثری به کنکور، صفحه آرای، فونت و حتی اندازه متن در تمامی آزمون های ماز، کاملاً یکسان با استاندارد دفترچه های کنکور در نظر گرفته می شود.

بودجه بندی دروس این آزمون

آمار و احتمال

آشنایی با مبانی ریاضیات

(کل فصل ۱)

احتمال

(کل درس ۱: مبانی احتمال
و کل درس ۲: احتمال غیرهم شانس)
صفحه های ۱ تا ۴۷

سهم در کنکور: ۲ سؤال

هندسه ۲

دایره (کل فصل ۱)

تبدیل های هندسی و کاربردها

(تبدیل های هندسی تا ابتدای انتقال)
صفحه های ۹ تا ۳۸

سهم در کنکور: ۲ سؤال

حسابان ۱

جبر و معادله (کل فصل ۱) /

تابع (کل فصل ۲) /

توابع نمایی و لگاریتم (تابع نمایی)
صفحه های ۱ تا ۷۹

سهم در کنکور: ۵ سؤال

شیمی ۲

قدر هدایای زمینی را بدانیم

(کل فصل)

در پی غذای سالم

(از ابتدای فصل تا انتهای گرما

در واکنش های شیمیایی)

صفحه های ۱ تا ۶۵

سهم در کنکور: ۶ سؤال

فیزیک ۲

الکتریسیته ساکن + جریان الکتریکی

ومدارهای جریان مستقیم

(تا ابتدای توان در مدارهای الکتریکی)

صفحه های ۱ تا ۶۶

سهم در کنکور: ۵ سؤال

استراتژی و هدف گذاری با ماز در سال تحصیلی ۱۴۰۴-۰۵

اگر قصد داری از نیمه دوم سال شروع کنی و با موفقیت همه رو شگفت زده کنی، این برنامه برای توئه!

گام اول (گرم کردن با آزمون ۹ بهمن):

با استفاده از مطالعه ای که برای امتحانات نیمسال اول داشته اید، در آزمون ۹ بهمن شرکت کنید و فقط به دید تمرین برای شروع (گرم کردن اولیه) به این آزمون نگاه کنید.

گام دوم (شروع پرانرژی در بهمن و اسفند):

در آزمون های ۲۳ بهمن، ۷ اسفند و ۲۱ اسفند، به مطالب سه هشتم ابتدایی نیمسال دوم مسلط می شوید.

گام سوم (جبران نیمسال اول در فرصت طلایی نوروز):

از ۲۲ اسفند تا ۶ فروردین، به جبران، مرور و جمع بندی نیمسال اول می پردازید و با آزمون ۶ فروردین به مطالب نیمسال اول مسلط می شوید.

گام چهارم (تکمیل یادگیری نیمسال دوم بعد از ایام نوروز):

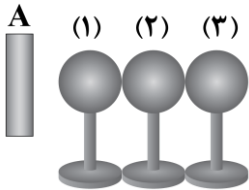
از ۷ فروردین تا ۲۴ اردیبهشت، به مطالب پنج هشتم پایانی نیمسال دوم مسلط می شوید و با آمادگی کامل به استقبال امتحانات خرداد ماه می روید.

گام پنجم (بهترین پایان برای سال تحصیلی):

تکمیل یادگیری و جمع بندی کامل برای ورود پر قدرت به سال تحصیلی بعد؛ آزمون جامع کل پایه در ۲۸ خردادماه



۳۶- مطابق شکل زیر، سه کره مشابه فلزی و خنثی بر روی پایه‌های عایق قرار دارند. میله A را با پارچه B مالش داده و به کره (۱) نزدیک می‌کنیم. در حضور میله A، کره‌های (۲) و (۳) را در حالی که با هم در تماس هستند از کره (۱) جدا کرده و میله را دور می‌کنیم. سپس کره (۲) را از کره (۳) جدا کرده و با کره (۱) تماس می‌دهیم. اگر بار نهایی کره (۱) برابر با $2\mu C$ شود، بار نهایی کره (۳) میکروکولن می‌شود و در جدول سری الکتروسیسته مالشی، میله A نسبت به پارچه B به (از) سر مثبت سری الکتروسیسته مالشی، است.



(۱) ۸- و نزدیک‌تر

(۲) ۴ و نزدیک‌تر

(۳) ۴- و دورتر

(۴) ۸ و دورتر

۳۷- چه تعداد از موارد مطرح‌شده زیر را می‌توان به کمک یک الکتروسکوپ انجام داد؟

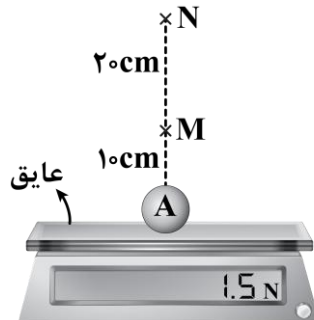
الف- تشخیص باردار بودن جسم

ب- تشخیص نوع بار جسم

ج- تعیین رسانا یا نارسانا بودن یک جسم

(۱) ۲ (۲) ۱ (۳) صفر (۴) ۳

۳۸- مطابق شکل زیر، کره فلزی کوچک A با بار الکتریکی $q_A = 5\mu C$ را بر روی یک ترازوی دیجیتال با سطح عایق قرار داده‌ایم و ترازو عدد $1/5 N$ را نشان می‌دهد. اگر یک کره فلزی کوچک B با بار $q_B = 1\mu C$ را در نقطه M و یک بار هم کره فلزی کوچک C با بار $q_C = -1\mu C$ را در نقطه N قرار دهیم، اختلاف مقادیر نشان داده‌شده توسط این ترازو



در این دو حالت چند نیوتون می‌شود؟ $(k = 9 \times 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2})$

(۱) ۶ / ۵

(۲) ۵

(۳) ۲

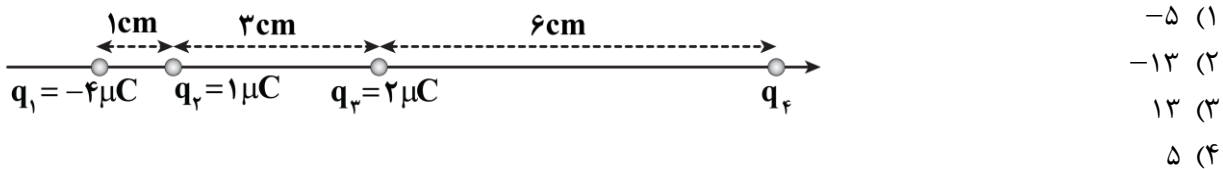
(۴) ۴

محل انجام محاسبات

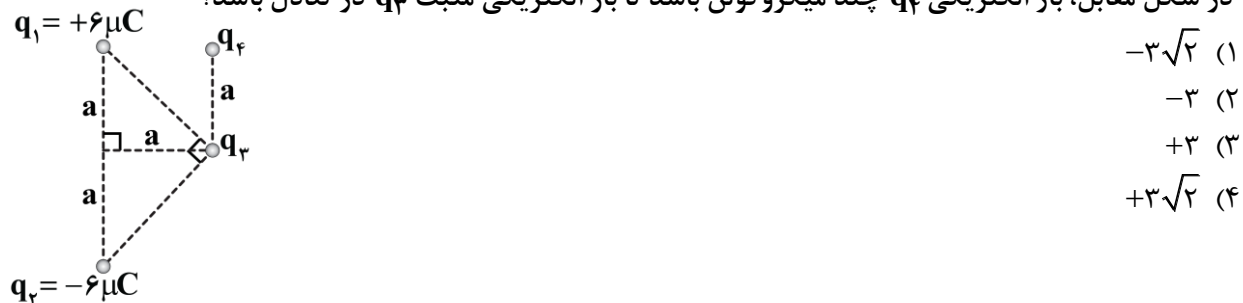
- ۳۹- دو گوی فلزی مشابه و باردار با بارهای q_1 و q_2 در فاصله 30cm از هم قرار داشته و با نیرویی به بزرگی 0.6N یکدیگر را جذب می کنند. اگر دو گوی را با هم تماس داده و بعد از تعادل الکتریکی در همان فاصله قبلی قرار دهیم، گوی ها با نیرویی به بزرگی 0.25N یکدیگر را دفع می کنند. اندازه بار اولیه گوی ها چند میکروکولن می توانند باشند؟
- (۱) ۳ و ۲ (۲) $2/4$ و $2/5$ (۳) ۱ و ۶ (۴) ۴ و $1/5$

- ۴۰- در شکل زیر، چهار بار الکتریکی نقطه ای بر روی محور x ثابت شده اند و برآیند نیروهای الکتریکی وارد بر بار q_3 از

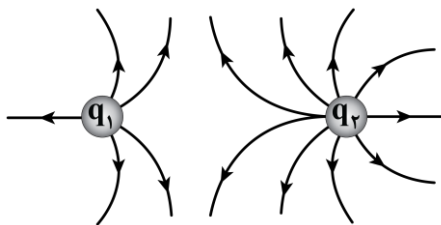
طرف سه بار دیگر صفر است. بار الکتریکی q_4 چند میکروکولن است؟ $(k = 9 \times 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2})$



- ۴۱- در شکل مقابل، بار الکتریکی q_4 چند میکروکولن باشد تا بار الکتریکی مثبت q_3 در تعادل باشد؟



- ۴۲- با توجه به شکل زیر که خطوط میدان الکتریکی در اطراف دو ذره با بارهای الکتریکی q_1 و q_2 را نشان می دهد،

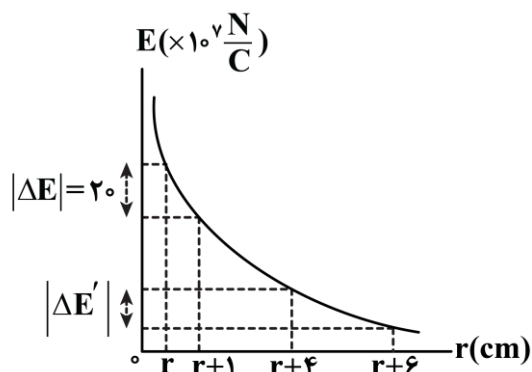


کدام یک از گزینه های زیر صحیح است؟

- (۱) $|q_1| > |q_2|$, $q_2 < 0$, $q_1 < 0$
(۲) $|q_1| > |q_2|$, $q_2 > 0$, $q_1 > 0$
(۳) $|q_1| < |q_2|$, $q_2 > 0$, $q_1 > 0$
(۴) $|q_1| < |q_2|$, $q_2 < 0$, $q_1 < 0$

محل انجام محاسبات

۴۳- نمودار اندازه میدان الکتریکی حاصل از بار الکتریکی نقطه‌ای $q = 16 \mu\text{C}$ بر حسب فاصله از آن، مطابق شکل زیر



است. مقدار $|\Delta E'|$ چند واحد SI است؟ $(k = 9 \times 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2})$

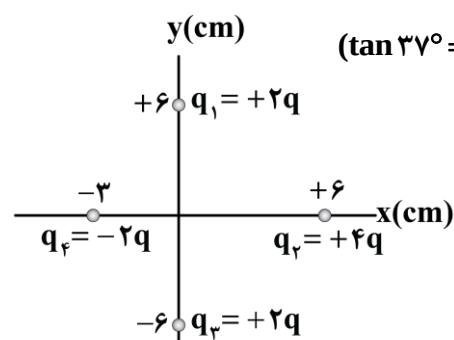
(۱) $2/75 \times 10^7$

(۲) $1/75 \times 10^4$

(۳) $1/75 \times 10^7$

(۴) $2/75 \times 10^4$

۴۴- چهار بار الکتریکی نقطه‌ای مطابق شکل زیر، در مکان‌های ثابتی بر روی محورهای مختصات قرار گرفته‌اند. اگر بار الکتریکی q_1 را در راستای محور y به اندازه 4 cm به مبدأ نزدیک کنیم، بردار میدان الکتریکی برآیند در مبدأ



مختصات نسبت به حالت اول چند درجه و در چه جهتی می‌چرخد؟ $(\tan 37^\circ = \frac{3}{4})$

(۱) 53° و ساعتگرد

(۲) 37° و ساعتگرد

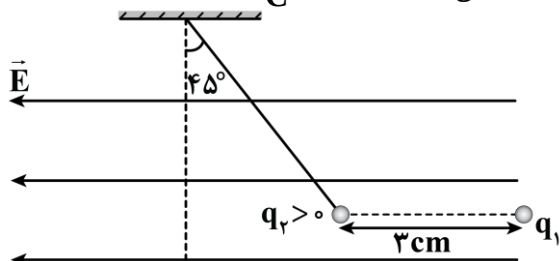
(۳) 37° و پادساعتگرد

(۴) 53° و پادساعتگرد

محل انجام محاسبات

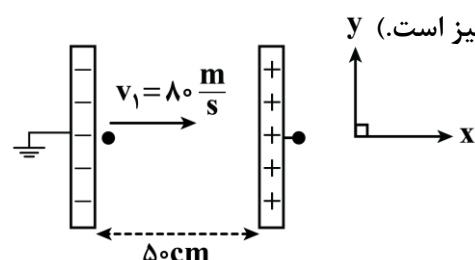
۴۵- در شکل زیر، بار الکتریکی نقطه‌ای $q_1 = -2 \mu\text{C}$ در جای خود ثابت بوده و گلوله باردار آونگ با انحراف 45° از راستای قائم در درون میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{E} = (-1/5 \times 10^6 \frac{\text{N}}{\text{C}}) \hat{i}$ به تعادل رسیده است. اگر نخ آونگ، عایق

بوده و جرم گلوله آونگ برابر با $5g$ باشد، q_2 چند میکروکولن است؟ $(k = 9 \times 10^9 \frac{\text{N.m}^2}{\text{C}^2}, g = 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}})$



- (۱) ۰/۱
(۲) ۰/۱۵
(۳) ۰/۲
(۴) ۰/۲۵

۴۶- مطابق شکل زیر، ذره‌ای به جرم 50 ng و بار الکتریکی 8 nC را با تندی اولیه $80 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ از نزدیکی صفحه رسانای منفی در جهت محور x شلیک می‌کنیم و ذره در فاصله 10 cm از صفحه رسانای مثبت متوقف می‌شود. پتانسیل الکتریکی



- (۱) ۱۰
(۲) ۱۵
(۳) ۲۰
(۴) ۲۵

۴۷- برای یک رسانای باردار منزوی، تراکم بار الکتریکی و شدت میدان الکتریکی در نقاط نوک تیز سطح جسم رسانای باردار، نسبت به سایر نقاط سطح آن به ترتیب از راست به چپ چگونه است؟
(۱) بیشتر و کمتر (۲) بیشتر و بیشتر (۳) کمتر و کمتر (۴) کمتر و بیشتر

محل انجام محاسبات

۴۸- خازن تختی با دی الکتریک هوا به یک باتری با اختلاف پتانسیل ثابت وصل است. چه تعداد از عبارات‌های زیر، در مورد این خازن، درست است؟

الف- با افزایش فاصله بین صفحات خازن، بار الکتریکی ذخیره شده در خازن، کاهش می‌یابد.

ب- اگر مساحت صفحات خازن را ۲۰ درصد کاهش دهیم، انرژی الکتریکی ذخیره شده در خازن، ۲۵ درصد افزایش می‌یابد.

ج- اگر فاصله بین صفحات خازن را $\frac{1}{3}$ برابر کرده و فضای بین صفحات را با دی الکتریکی با ثابت ۴ پر کنیم، ظرفیت خازن، ۲ برابر می‌شود.

(۱) صفر (۲) ۳ (۳) ۱ (۴) ۲

۴۹- اختلاف پتانسیل الکتریکی بین دو صفحه یک خازن تخت به ظرفیت $4\mu F$ را از V_1 به V_2 افزایش می‌دهیم. با این کار، $12\mu C$ بر بار الکتریکی و $54\mu J$ بر انرژی الکتریکی ذخیره شده در خازن افزوده می‌شود. نسبت $\frac{V_2}{V_1}$ در کدام گزینه به درستی آمده است؟

(۱) $1/8$ (۲) ۲ (۳) $2/6$ (۴) ۳

۵۰- خازن تختی به مساحت صفحات 10cm^2 را که فضای بین صفحات آن با دی الکتریکی با ثابت ۴ پر شده است را توسط یک باتری به طور کامل شارژ می‌کنیم. اگر خازن را از باتری جدا کرده و به تعداد 9×10^8 الکترون از صفحه منفی آن جدا کرده و به صفحه مثبت منتقل کنیم، بزرگی میدان الکتریکی بین صفحات خازن چند کیلوولت بر متر و چگونه

تغییر می‌کند؟ $\left(e = 1.6 \times 10^{-19} \text{C}, \epsilon_0 = 9 \times 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N.m}^2} \right)$

(۱) ۴ و افزایش (۲) ۳۶ و افزایش (۳) ۳۶ و کاهش (۴) ۴ و کاهش

محل انجام محاسبات



۵۱- یکای فرعی کدامیک از کمیت‌های زیر، برابر با $\frac{A^2 \cdot s^4}{kg \cdot m^2}$ است؟

- (۱) انرژی پتانسیل الکتریکی
(۲) میدان الکتریکی
(۳) ظرفیت خازن
(۴) ضریب گذردهی الکتریکی خلأ

۵۲- چه تعداد از عبارت‌های زیر نادرست هستند؟

الف- وقتی در داخل یک رسانای فلزی، میدان الکتریکی برقرار شود، الکترون‌های آزاد رسانای فلزی به‌طور آهسته در جهت میدان الکتریکی، سوق پیدا می‌کنند.

ب- سرعت حرکت کاتوره‌ای الکترون‌های آزاد یک رسانای فلزی بسیار بیشتر از سرعت سوق این الکترون‌ها بعد از اعمال اختلاف پتانسیل الکتریکی به دو سر آن رسانای فلزی است.

ج- در نبود اختلاف پتانسیل الکتریکی، شارش بار خالصی از مقطع معین رسانا نداریم.

د- در یک رسانای فلزی، جهت جریان الکتریکی در خلاف جهت میدان الکتریکی داخل رسانا است.

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۵۳- ظرفیت باتری رایانه‌ای $60Ah$ است. در ابتدا از این باتری به مدت ۲ ساعت، جریان $5A$ و در t ساعت بعدی جریان $4A$ گرفته می‌شود. اگر بار الکتریکی قابل انتقال توسط این باتری در پایان برابر با $64800C$ باشد، t بر حسب ساعت در کدام گزینه به‌درستی آمده است؟

- (۱) ۲ (۲) ۸ (۳) ۴ (۴) ۱۶

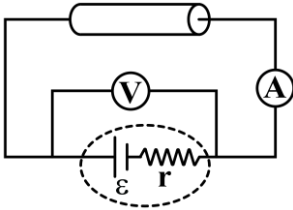
۵۴- جنس و دمای دو رسانای استوانه‌ای شکل توپر A و B ، یکسان است. اگر قطر مقطع رسانای A ، برابر با شعاع مقطع رسانای B و جرم آن ۲ برابر جرم رسانای B باشد، مقاومت الکتریکی رسانای B چند برابر مقاومت الکتریکی رسانای A است؟

- (۱) ۳۲ (۲) ۸ (۳) $\frac{1}{8}$ (۴) $\frac{1}{۳۲}$

محل انجام محاسبات

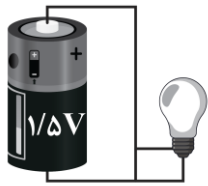


۵۵- در مدار شکل زیر، یک رسانای توپر استوانه‌ای شکل به دو سر یک باتری، متصل شده است. در این حالت، آمپرسنج عدد A_1 را نشان می‌دهد. اگر طول رسانا را ۲ برابر کنیم، عددی که آمپرسنج نشان می‌دهد، ۲۵ درصد تغییر می‌کند. اگر در حالت دوم، فقط قطر مقطع رسانای اولیه را نصف کنیم، عددی که آمپرسنج نشان می‌دهد، نسبت به حالت ابتدایی (A_1) چند درصد و چگونه تغییر می‌کند؟ (آمپرسنج را آرمانی در نظر بگیرید.)

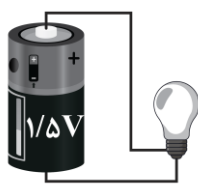


- (۱) ۵۰ و افزایش
- (۲) ۵۰ و کاهش
- (۳) ۷۵ و افزایش
- (۴) ۷۵ و کاهش

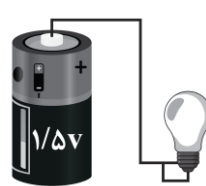
۵۶- در کدام یک از شکل‌های زیر، لامپ روشن می‌شود؟



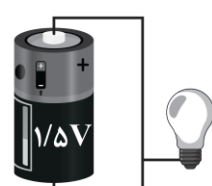
«ا»



«ب»



«ج»



«د»

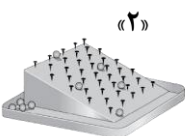
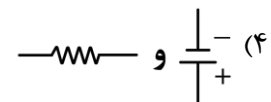
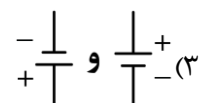
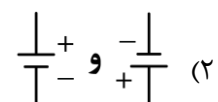
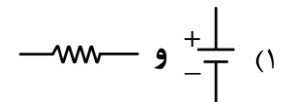
(۴) فقط «ج»

(۳) «ج» و «د»

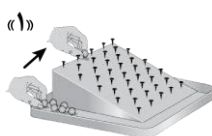
(۲) «ب» و «ج»

(۱) «الف» و «ب»

۵۷- شکل‌های زیر، یک مشابهت‌سازی مکانیکی برای درک مقاومت و نیروی محرکه الکتریکی را نشان می‌دهند که در آن بر سطح شیب‌داری میخ‌هایی تعبیه شده و تپله‌ها از ارتفاع بالای سطح شیب‌دار، رها می‌شوند و دوباره به بالای سطح شیب‌دار بازگردانده می‌شوند. نمادهای داده شده در کدام یک از گزینه‌های زیر به ترتیب از راست به چپ، معادل شکل‌های (۱) و (۲) هستند؟



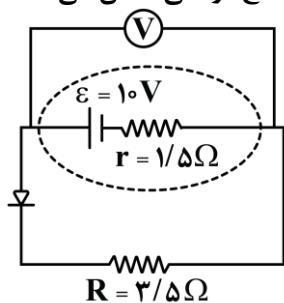
«۱»



«۲»

محل انجام محاسبات

۵۸- در مدار شکل زیر، اگر جای قطب‌های مثبت و منفی باتری را عوض کنیم، عددی که ولت‌سنج آرمانی نشان می‌دهد،



چند ولت و چگونه تغییر می‌کند؟

(۱) ۲ و کاهش

(۲) ۲ و افزایش

(۳) ۳ و کاهش

(۴) ۳ و افزایش

۵۹- دمای یک سیم رسانا را از 10°C به 260°C می‌رسانیم. اگر ضریب دمایی مقاومت ویژه آن $2 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1}$ باشد،

مقاومت الکتریکی این سیم چند درصد افزایش یافته است؟

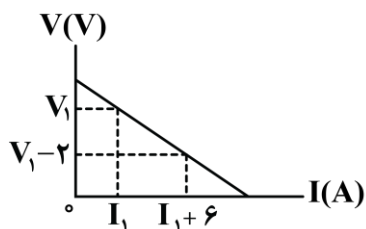
(۴) ۶۰

(۳) ۵۰

(۲) ۳۰

(۱) ۲۵

۶۰- نمودار اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر یک باتری بر حسب جریان الکتریکی عبوری از آن، مطابق شکل زیر است.



مقاومت داخلی باتری چند اهم است؟

(۲) ۵/۰

(۱) ۲۵/۰

(۴) ۱/۳

(۳) ۲/۳

محل انجام محاسبات

- (۱) عدم توزیع یکسان منابع و عناصر در جهان، پدیدآورنده تجارت جهانی است.
- (۲) بررسی و یافتن الگوهای رفتار فیزیکی عناصر از جمله اهداف علم شیمی است.
- (۳) گسترش صنعت خودرو به ماده‌ای بستگی دارد که از آهن خالص تشکیل می‌شود.
- (۴) امروزه میزان مصرف مواد معدنی از مجموع سوخت‌های فسیلی و فلزها بیشتر است.

- (۱) تنها فلز این دسته است که توانایی رسیدن به آرایش گاز نجیب را دارد.
- (۲) در اکسید آن، شمار کاتیون‌ها $\frac{1}{5}$ برابر شمار آنیون‌ها است.
- (۳) شعاع اتمی آن از سایر فلزهای هم‌دوره کوچک‌تر است.
- (۴) تنها توانایی تشکیل یک یون بایدار دارد.

واکنش می دهد و جرم توده جامد موجود در ظرف ۱۲/۸ گرم افزایش می یابد. درصد خلوص آهن در نمونه اولیه کدام است؟
($S = ۳۲, Fe = ۵۶: g.mol^{-1}$)

۶۴- با توجه به شکل زیر که نشان‌دهندهٔ پنج دورهٔ اول جدول دوره‌ای است، کدام مورد دربارهٔ عناصر مشخص‌شده نادرست است؟

[illegible]

(۴) از عنصر B همانند عنصر F می‌توان برای تهیه فلز تیتانیوم استفاده کرد.

(۱) قرمز (۲) بنفش (۳) زرد (۴) سبز

محل انجام محاسبات



۶۶- واکنش تبدیل گاز اوزون به گاز اکسیژن با معادله $3O_2(g) \rightarrow 2O_3(g)$ در دو ظرف متفاوت انجام می‌شود. اگر در پایان واکنش در یکی از این ظروف جرم دو گاز و در ظرف دیگر مقدار (مول) دو گاز برابر باشد، تفاوت بازده واکنش در این دو ظرف برابر چند درصد است؟

- (۱) ۲۰ (۲) ۱۵ (۳) ۱۰ (۴) ۵

۶۷- کدام یک از مطالب زیر نادرست است؟

- (۱) فلز مس در سنگ معدن خود به صورت سولفیدی از این فلز وجود دارد.
 (۲) در آزمایشگاه تأمین شرایط نگهداری فلزهای قلیایی آسان تر از فلزهای قلیایی خاکی است.
 (۳) مس از منابع تجدیدناپذیر است که طی فرایند فرسایش در نهایت به سنگ معدن خود تبدیل می‌شود.
 (۴) واکنش پذیری تیتانیم و آهن از طلا بیشتر بوده و طلا و تیتانیم برخلاف آهن در برابر خوردگی مقاوم هستند.

۶۸- با توجه به جدول زیر، کدام موارد درباره عناصر مشخص شده درست هستند؟

عنصر	A	B	X	Y
شمار الکترون‌های ظرفیتی	۳	۴	۶	۷
شمار الکترون‌ها با $l = 1$	۱۳	۸	۱۲	۵

- الف - شدت انجام واکنش عنصر Y با فلز سدیم نسبت به واکنش گاز اکسیژن با همین فلز، بیشتر است.
 ب - کاتیونی از عنصر X در تشکیل ترکیب X_2O_3 شرکت دارد که آرایش الکترونی آن به $3d^5$ ختم می‌شود.
 ج - عنصر B نسبت به عنصر بعدی خود در جدول تناوبی شعاع اتمی و تمایل تبدیل شدن به یون تک اتمی بیشتری دارد.
 د - عنصر هم‌دوره با عنصر A که دارای شمار الکترون‌های ظرفیتی برابری با آن است، در ساخت تلویزیون رنگی نقش دارد.
- (۱) «الف» و «ج» (۲) «الف» و «د» (۳) «ب» و «ج» (۴) «ب» و «د»
- ۶۹- اگر درصد خلوص اکسید آهن در سنگ معدن آن، برابر ۷۲ درصد باشد، درصد جرمی آهن در سنگ معدن آن چقدر است؟ ($O = 16, Fe = 56: g.mol^{-1}$)

- (۱) ۵۶ (۲) ۵۰/۴ (۳) ۳۷/۸ (۴) ۴۲

۷۰- اگر معادله زیر نشان‌دهنده واکنش تهیه عنصر اصلی سازنده سلول‌های خورشیدی باشد، کدام مورد نادرست است؟
 $XO_2(s) + 2A(s) \rightarrow X(l) + 2AO(g)$

- (۱) عنصر A همانند عنصر X در اثر ضربه خرد می‌شود.
 (۲) در دوره‌ای که عنصر X قرار دارد، چهار عنصر جریان گرما را عبور می‌دهند.
 (۳) از میان دو عنصر X و A عنصری که واکنش‌پذیری کمتری دارد، رسانایی الکتریکی بیشتری دارد.
 (۴) از میان عناصر موجود در بین عنصر A و سومین عنصر گروه چهاردهم، شش عنصر گازی در دما و فشار اتاق وجود دارد.

محل انجام محاسبات



۷۱- اگر فلز آلومینیم مطابق معادله موازنه نشده $Al(s) + CO_2(g) \rightarrow Al_2O_3(s) + C(s)$ با مقدار کافی کربن دی اکسید با بازده ۵۰ درصد واکنش دهد و ۱۹/۲ گرم کربن تولید کند، در این واکنش چند گرم فلز آلومینیم مصرف شده است؟

($C = ۱۲, Al = ۲۷: g.mol^{-1}$)

۱۷۲/۸ (۴)

۱۱۵/۲ (۳)

۵۷/۶ (۲)

۸۶/۴ (۱)

۷۲- مجموع عددهای موجود در نام ترکیب $CH_3CH_2C(CH_3)_2CH(C_2H_5)CH_2CH_3$ طبق قواعد آیوپاک برابر چند است؟

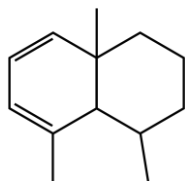
۱۲ (۴)

۱۰ (۳)

۸ (۲)

۷ (۱)

۷۳- کدام یک از مطالب زیر نادرست است؟



(۱) سوخت فندک ایزومر ساده ترین آلکان شاخه دار است.

(۲) ساختار مقابل مربوط به یک هیدروکربن سیر نشده و غیر آروماتیک است.

(۳) گاز تولید شده از دفن کاغذ، عامل اصلی انفجار در معادن زغال سنگ است.

(۴) با کاهش دمای مخلوطی از گازهای اتان و بوتان، ابتدا اتان به حالت مایع درمی آید.

۷۴- اگر شمار اتم های هیدروژن در یک آلکن و یک آلکین برابر باشد، تفاوت شمار اتم های کربن در این دو ماده برابر بوده و درصد جرمی کربن در بیشتر از درصد جرمی کربن در ترکیب دیگر است.

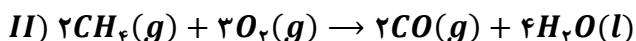
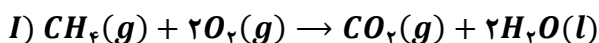
۱ - آلکن (۴)

۱ - آلکین (۳)

۲ - آلکین (۲)

۲ - آلکن (۱)

۷۵- به هنگام سوختن کامل متان، در کنار واکنش اصلی (واکنش I)، واکنش سوختن ناقص (واکنش II) نیز رخ می دهد. اگر در مجموع این دو واکنش، نسبت مقدار (مول) اکسیژن مصرف شده به مقدار سوخت مصرف شده برابر با ۱/۸ باشد، بازده واکنش سوختن کامل برابر چند درصد است؟



۶۰ (۴)

۷۵ (۳)

۹۰ (۲)

۵۰ (۱)

۷۶- کدام گزینه درست است؟ ($H = ۱, C = ۱۲: g.mol^{-1}$)

(۱) ماده گریس نسبت به مخلوط نفت سفید فراریت کمتر و گرانروی بیشتری دارد.

(۲) مولکول های چربی در مقایسه با مولکول های روغن با مقدار بیشتری از مولکول های برم واکنش می دهند.

(۳) پلیمری شدن یکی از واکنش های آلکین ها است که با استفاده از آن می توان انواع پلاستیک ها را تولید کرد.

(۴) برای نام گذاری یکی از آلکان های راست زنجیر گازی شکل در دمای اتاق از شمار اتم های کربن استفاده می شود.

محل انجام محاسبات

۷۷- اگر از سوختن یک مول هیدروکربن سیرشده حلقوی، ۱۸ مول کربن دی اکسید و ۱۵ مول آب تولید شود، در ساختار این ماده چند حلقه وجود دارد؟

- (۱) ۶ (۲) ۵ (۳) ۴ (۴) ۳

۷۸- کدام یک از مطالب زیر در مورد ۱-هگزن درست است؟

- (۱) درصد جرمی کربن در آن کمتر از ۱-هپتن است.
 (۲) این هیدروکربن در دمای اتاق، مایعی سفیدرنگ است.
 (۳) در آن چهار اتم کربن به دو اتم هیدروژن متصل هستند.
 (۴) کاتالیزگر واکنش سیرشدن آن فلزی از تناوب پنجم است.

۷۹- به ازای تولید جرم های برابر اتانول از دو ماده اولیه اتن و گلوکز، جرم گلوکز مصرف شده در واکنش دوم به تقریب چند برابر جرم اتن مصرف شده در واکنش اول است؟ ($H = 1, C = 12, O = 16: g.mol^{-1}$)

- (۱) ۳/۲ (۲) ۰/۳۱ (۳) ۶/۴ (۴) ۰/۱۶

۸۰- اگر در اثر سوختن ۱/۵ مول از یک آلکان، تفاوت حجم گاز کربن دی اکسید تولید شده و حجم گاز اکسیژن مصرف شده برابر با ۹۰ لیتر باشد، در ساختار این آلکان چند اتم هیدروژن وجود دارد؟ (حجم مولی گازها در شرایط آزمایش، برابر با ۲۴ L فرض شود.)

- (۱) ۱۴ (۲) ۱۲ (۳) ۱۶ (۴) ۱۰

۸۱- کدام یک از مطالب زیر نادرست است؟

- (۱) به طور کلی در هالوژن ها با افزایش واکنش پذیری، جنبش نامنظم ذرات افزایش می یابد.
 (۲) در گرمایشی، گرمای واکنش ها هم به صورت کمی و هم به صورت کیفی بررسی می شود.
 (۳) ارزش دمایی یک واحد از یکای دما در SI برابر با ارزش دمایی یک واحد از یکای رایج دما است.
 (۴) گرما همواره از جسمی با انرژی گرمایی بالاتر، به جسمی با انرژی گرمایی پایین تر منتقل می شود.
 ۸۲- اگر برای افزایش دمای آلیاژ ۲۵۰ گرمی از دو فلز آلومینیم و آهن به اندازه $20^{\circ}C$ به 2736 ژول گرما نیاز باشد، در این آلیاژ نسبت شمار اتم های فلز واکنش پذیرتر به شمار اتم های فلز دیگر به تقریب برابر کدام گزینه است؟

($Al = 27, Fe = 56: g.mol^{-1}$ و $c_{Fe} = 0.45, c_{Al} = 0.9: J.^{\circ}C^{-1}.g^{-1}$)

- (۱) ۱/۸ (۲) ۰/۶ (۳) ۰/۸ (۴) ۱/۳

محل انجام محاسبات



۸۳- اگر جرم آب در ظرف A بیشتر از ظرف B باشد و دمای آب در آن‌ها به ترتیب برابر با 40°C و 313°C کلورین باشد، کدام موارد از مقایسه‌های انجام شده درست هستند؟



الف - انرژی گرمایی: $B > A$

ب - ظرفیت گرمایی: $A > B$

ج - میانگین انرژی جنبشی ذرات: $A > B$

د - دمای نهایی آب پس از ورود یک گلوله یکسان با دمای 80°C به ظرف: $B > A$

(۱) «الف» و «ج» (۲) «الف» و «د» (۳) «ب» و «ج» (۴) «ب» و «د»

۸۴- کدام یک از موارد زیر نادرست است؟

- (۱) در واکنش شیمیایی تبدیل الماس به دگرشکل خود یعنی گرافیت، نماد Q در سمت راست واکنش قرار می‌گیرد.
- (۲) بخش عمده انرژی موجود در شیر در طی فرایندی در بدن آزاد می‌شود که ماده اولیه سوخت و ساز سلول‌ها را فراهم می‌کند.
- (۳) از بین دو نمونه جدا از هم آب و اتانول با دمای 60°C با جرم‌های برابر از این دو ماده، آب سریع‌تر با محیط هم‌دمای خواهد شد.
- (۴) اگر در واکنش $CH_4(g) + 2O_2(g) \rightarrow CO_2(g) + 2H_2O(g)$ به جای بخار آب، آب تولید شود، گرمای آزاد شده افزایش می‌یابد.

۸۵- چند مورد از عبارات‌های زیر درست است؟

- الف - زغال کک، واکنش‌دهنده‌ای رایج در استخراج فلزی که بیشترین مصرف سالانه را در بین صنایع گوناگون دارد، است.
- ب - اگر انرژی گرمایی جسم A بیشتر از انرژی گرمایی جسم B باشد، دمای جسم A نیز به‌طور قطع بیشتر است.
- ج - شیر و فراورده‌های آن، منبع مهمی برای تأمین عنصری است که ۸ الکترون با $n + l = 4$ دارد.
- د - در فرایند چگالش یک ماده در مقایسه با فرایند میعان آن ماده، گرمای بیشتری آزاد می‌شود.

(۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

محل انجام محاسبات

بودجه بندی دروس آزمون بعد....

تاریخ برگزاری: ۱۴ فروردین ماه

هندسه ۲

تبدیل های هندسی و کاربردها
(تبدیل های هندسی از ابتدای انتقال تا انتهای درس ۱
و کل درس ۲: کاربرد تبدیل ها)
صفحه های ۳۸ تا ۵۴

حسابان ۱

توابع نمایی و لگاریتم
(از ابتدای تابع لگاریتمی و لگاریتم تا انتهای فصل ۳)
مثلثات (کل فصل ۴)
صفحه های ۸۰ تا ۱۱۲

فیزیک ۲

جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم
+ مغناطیس
(تا ابتدای میدان مغناطیسی حاصل از سیملوله حامل جریان)
صفحه های ۶۷ تا ۹۹

آمار و احتمال

احتمال (کل درس ۳: احتمال شرطی،
کل درس ۴: پیشامدهای مستقل و وابسته)
آمار توصیفی (کل درس ۱: توصیف و نمایش داده ها)
صفحه های ۴۸ تا ۷۸

شیمی ۲

در پی غذای سالم
(از ابتدای آنتالپی همان محتوای انرژی است تا انتهای
خوراکی های طبیعی رنگین، باز دارنده های مفید و موثر)
صفحه های ۶۵ تا ۹۲





گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی

آزمون ماز | پایه یازدهم



جمع بندی و مرور نیم سال اول



ویژه دانش آموزان پایه یازدهم

دفترچه پاسخ

پنجشنبه ۶ فروردین ماه ۱۴۰۵

✓ پاسخنامه سریع؛ برای بررسی فوری بعد از آزمون

✓ تحلیل تمام گزینه های هر سؤال؛ برای بررسی سؤالاتی که پاسخ نادرست داده اید

✓ نکات و درسنامه های آموزشی؛ برای یادگیری کامل مباحث هر سؤال

✓ مشاوره تستی؛ برای یادگیری انواع روش های حل تست

✓ استراتژی آزمون؛ برای یادگیری مدیریت زمان و مدیریت جلسه آزمون

دِرس	مَسْئُول دِرس	طِراحان	وِیرا سِتان
ریاضیات	حسین شفیع زاده سید جواد نظری مهرداد کیوان	محمد خانگلدی - حسن محمد بیگی علیرضا شریف خطیبی	ندا فرهختی - مائده بادان فیروز مهرداد اسپیدکار - حمیدرضا ولی پور یزدان نیک قدم - فؤاد خیرآبادی علی اسدی
فیزیک	حسین عبدوی نژاد محمد جواد سورچی	حسین عبدوی نژاد محمد جواد سورچی مروارید شاه حسینی	مروارید شاه حسینی ایلیا فقیه میرزایی علیرضا ملک حسینی
شیمی	علی ترابی	علی ترابی - پرهام تیزپا فرهنگ امیری - طاهّا حق بین	محمد مهدی معظمی طاهّا حق بین امیرعلی حسینی فرد محمد دارابی جم

تیم اجرایی و تولید آزمون

نازنین امیری

مائده بادان فیروز

زهره جعفری

مروارید شاه حسینی

مدیر تولید آزمون: محدثه شیخعلی



یک تیم با بیش از ۵۰۰ نفر در حال کار هستند تا آزمون‌های ماز با حداکثر کیفیت حاضر بشن و به شما کمک کنن و مسیر موفقیت رو براتون ساده‌تر کنن. همیشه از نظرات و کامنت‌های خوبتون انرژی می‌گیریم. مرسی که همراهمون هستین. راستی! حتماً در نظر سنجی آزمون شرکت کنین و نظرات و پیشنهاداتتون رو برامون بنویسین.

دکتر رسول خنجری

وقتی در شرایط بحرانی مثل جنگ زندگی می‌کنی و برای کنکور درس می‌خونی، باید بدونی که طبیعی‌ترین اتفاق دنیا اینه که نتونی مثل روزهای عادی تمرکز داشته باشی. اضطراب، اخبار ناراحت‌کننده و ناامنی محیط، همگی ذهن رو درگیر می‌کنه. اما نباید بذاری این شرایط تو رو کاملاً متوقف کنه؛ بعضی روش‌ها می‌تونن اضطراب رو کم کنن و دوباره بخشی از تمرکزت رو برگردونن. چند راهکار رو با هم مرور کنیم:

۱. اخبار رو در «ساعات مشخص» پیگیری کن

ذهنی که مدام در معرض اخباره، خصوصاً خبر جنگ، وارد حالت بقا می‌شه؛ یعنی فقط دنبال ایمنی می‌گرده، نه یادگیری. برای همین بهتره فقط در دو یا سه زمان مشخص از روز اخبار رو بررسی کنی (مثلاً نیم‌ساعت عصر و نیم‌ساعت شب) و در بقیه‌ی روز به خودت اجازه بده از فضای ذهنی جنگ فاصله بگیری. بذار ذهنت حداقل چند ساعت در سکوت فکری نفس بکشه.

۲. برنامه‌های کوچک، هدف‌های کوتاه

در این شرایط نباید از خودت انتظار عملکرد صد در صد داشته باشی. مغز خسته و مضطرب، یادگیری رو سخت‌تر می‌کنه. به جاش، هدف‌های کوچک و قابل انجام تعریف کن؛ مثلاً فقط یک فصل از سه درس در روز، یا مرور با فلش‌کارت‌ها و یادداشت‌ها. کوچیک اما مداوم، ارزشمندتر از تلاش‌های سنگین و ناپایداره.

۳. مراقب گفت‌وگوی درونی‌ات باش

وقتی حس می‌کنی «دلت به درس نمی‌ره»، لزوماً تنبلی نیست. ذهن تو درگیره و دائم داره برای خودش استدلال می‌تراشه: «الان چه فایده‌ای داره؟»، «دنیا به هم ریخته، درس خوندن برای چیه؟» اما این‌ها پای استدلال‌های ضعیف ذهن خسته است، نه صدای منطق واقعی تو. اگه با مهربانی به خودت گوش کنی و این افکار رو موقت بدونی، دوباره می‌تونی به مسیر برگردی.

۴. پیوند با معنا؛ چرا درس می‌خونی؟

یادآوری کن که هدف واقعی تو فقط کنکور نیست؛ آینده‌ای است که می‌خوای بسازی، دانشیه که می‌خوای یاد بگیری تا فردا مفیدتر باشی.

اتصال با معنای بزرگ‌تر از شرایط فعلی، قوی‌ترین سوخت روانی برای دوام آوردنه.

۵. پناه ببر به نظم‌های کوچک

در بی‌نظمی بیرون، سعی کن نظم‌های کوچیک برای خودت بسازی: زمان مشخص برای بیدار شدن، گوش دادن به موسیقی ملایم موقع مطالعه، یا داشتن دفتر مخصوص یادداشت‌های روزانه.

این روتین‌های کوچیک، حس کنترل رو برمی‌گردونن. حتی اگه نمی‌تونی مثل گذشته مطالعه کنی، باز هم «هر مقدار» مطالعه در این شرایط ارزشمندنه. تو داری در وضعیتی غیرعادی، مقاومت می‌کنی و همین مقاومت، بزرگ‌ترین نشانه‌ی قدرت توست.

چطور تمرکز کنیم وقتی ذهن پر از نگرانیه؟

در شرایط بحرانی، مشکل اصلی کمبود وقت نیست، پراکندگی ذهنه. ذهن تو بین کتاب، اخبار، نگرانی از آینده و احساس ناامنی رفت و برگشت داره. اما تمرکز مهارتیه که می‌شه پایدارش کرد، حتی وسط آشوب بیرونی. حالا چند نکته رو در این باره مرور کنیم:

۱. با افکار مزاحم دشمنی نکن

خیلی از دانش‌آموزا فکر می‌کنن باید افکار حواس‌پرت‌کن رو سرکوب کنن، اما هرچه بیشتر مقاومت کنی، اون فکر قوی‌تر برمی‌گرده.

به جاش یک برگه کنار دستت بگذار. هر وقت فکری به ذهنت آمد (مثلاً «اگه دوباره بمباران بشه چی؟» یا «فلان خبر جدید چی شد؟») اون رو یادداشت کن و به خودت بگو:

«می‌نویسمش، بعد از مطالعه سراغت میام.» به این کار ذهنی می‌گن «وعده‌ی بازگشت» و کمک می‌کنه ذهنت بدونه قرار نیست نادیده گرفته بشه، فقط به تعویق افتاده.

۲. از خودت توقع تمرکز صددرصد نداشته باش

تمرکز کامل در این شرایط مثل دویدن توی بارونه؛ می‌شه دوید، ولی با لباس خیس. قرار نیست بی‌نقص باشی فقط ادامه بده، آهسته و پیوسته.

۳. نگرانی‌ات رو در جای درست قرار بده

نگرانی درباره‌ی آینده، درباره‌ی عزیزان، درباره‌ی کشور... طبیعیه. اما بدون:

نگرانی تو «هیچ تغییری در شرایط جنگ ایجاد نمی‌کنه»،

اما «تأثیر عمیقی توی آینده‌ی خودت» داره.

اگر اجازه بدی این نگرانی تمام انرژی رو بخوره، تو رو از فردایی که می‌خوای برای خودت بسازی دور می‌کنه.

یاد بگیر انرژی‌ات رو در مسیر درست خرج کنی؛ درست همون جایی که کنترل داری: درس، آرامش، و پیشرفت شخصی.

۴. مراقبه یا تمرکز حسی کوتاه

قبل از درس خوندن، یک دقیقه فقط نفس بکش و روی صداهای اطرافت تمرکز کن. یا چند ثانیه دستت رو روی سینه بذار و ضربان قلبت رو حس کن. اگه با هر مختصاتی با معنویت ارتباط داری، ازش استفاده کن؛ وصل شدن به قدرت ماورای بشری این مواقع آرومت می‌کنه.

این تمرین‌های کوچیک ذهن رو از حالت بحرانی به حالت یادگیری می‌بره.

۵. یاداش به ذهن پایدار

بعد از هر جلسه مطالعه (مثلاً ۴۵ تا ۶۰ دقیقه)، خودت رو تشویق کن. یک چای بنوش، آهنگ آرومی گوش بده یا با کسی که دوست داری تماس کوتاهی بگیر. ذهن تو نیاز داره بدونه تلاشت بی‌نتیجه نمونده.

فراوانی پاسخ در سؤالات چند قسمتی

سؤالات چند قسمتی (ترکیبی) یعنی در صورت سؤال چند گزاره داده می‌شود و باید تشخیص بدی کدام گزاره‌ها درستن و بعد گزینه‌ای رو انتخاب کنی که ترکیب اون‌ها رو نشون می‌ده.

در این نوع سؤالات می‌تونی از تکنیک «فراوانی پاسخ» استفاده کنی؛ یعنی بررسی کنی هر گزاره در چند گزینه تکرار شده. اگه یک گزاره در بیشتر گزینه‌ها اومده باشه، احتمال درست بودنش بیشتره (چون طراح معمولاً گزینه‌ها رو بر اساس گزاره‌های درست می‌چینه).

مثال ساده

فرض کن سؤال می‌پرسه:

کدام موارد درباره گیاهان درست است؟

الف) فتوسنتز انجام می‌دهند.

ب) دارای کلروپلاست هستند.

ج) همگی آوند دارند.

گزینه‌ها:

۱. «الف»

۲. «الف» و «ب»

۳. «ب» و «ج»

۴. «الف»، «ب» و «ج»

مرحله ۱: فراوانی گزاره‌ها در گزینه‌ها

الف ← در گزینه‌های ۱، ۲، ۴ (سه بار)

ب ← در گزینه‌های ۲، ۳، ۴ (سه بار)

ج ← در گزینه‌های ۳، ۴ (دو بار)

نتیجه: چون الف و ب بیشتر تکرار شدن، احتمال درست بودنشون بیشتره. پس گزینه‌ای که الف و ب رو داره منطقی‌تره.

پاسخ محتمل: گزینه ۲

مثال کنکوری‌تر

فرض کن سؤال می‌گه:

کدام موارد درباره DNA درست است؟

الف) از نوکلئوتید ساخته شده است.

ب) دارای قند دئوکسی‌ریبوز است.

ج) در همه جانداران خطی است.

د) دارای بازهای نیتروژنی است.

گزینه‌ها:

۱. «الف» و «ب»

۲. «الف» و «د»

۳. «الف»، «ب» و «د»

۴. «ب» و «ج»

فراوانی گزاره‌ها

الف ← گزینه‌های ۱، ۲، ۳ (۳ بار)

ب ← گزینه‌های ۱، ۳، ۴ (۳ بار)

ج ← گزینه ۴ (۱ بار)

د ← گزینه‌های ۲، ۳ (۲ بار)

تحلیل

گزاره ج فقط یک بار اومده؛ پس احتمال غلط بودنش زیاده.

گزاره‌های الف و ب بیشترین تکرار رو دارن، پس احتمال درست بودنشون بیشتره.

گزینه‌ای که با این الگو سازگاره:

گزینه ۳ (الف، ب و د)

فلاصه تکنیک

۱. گزاره‌ها رو جدا کن (الف، ب، ج، د).

۲. بین هر کدوم در چند گزینه تکرار شدن.

۳. گزاره‌هایی که بیشتر تکرار شدن احتمالاً درست‌ترند.

۴. گزاره‌هایی که خیلی کم تکرار شدن معمولاً غلط‌اند.

۵. گزینه‌ای رو انتخاب کن که با این الگو سازگار باشه.

نکته مهم:

این روش وقتی کاربرد داره که بین چند گزینه شک داشته باشی؛ یعنی یک تکنیک افزایش احتمال پاسخ درست است، نه جایگزین دانستن مطلب.

در تست‌های چند گزاره‌ای کنکور، علاوه بر توجه به فراوانی گزاره‌ها در گزینه‌ها، یک ترفند ساده‌ی دیگه هم می‌تونه بهت کمک کنه و اون بررسی «وابستگی گزاره‌ها» است.

در بسیاری از سؤال‌ها بعضی گزاره‌ها از نظر منطقی به هم مرتبط هستند؛ یعنی اگه یکی از اونا درست باشه، معمولاً اون یکی هم باید درست باشه، یا برعکس اگه یکی نادرست باشه احتمالاً اون یکی هم نادرسته.

طراحان تست معمولاً این گزاره‌های مرتبط رو در گزینه‌ها کنار هم قرار می‌دن.

برای مثال فرض کن در سؤالی دو گزاره داریم که از نظر مفهومی به هم نزدیکن؛ مثلاً یکی درباره وجود یک ساختار در سلول صحبت می‌کنه و گزاره دیگه درباره نقش همون ساختار توضیح می‌ده. منطقیه که اگه اون ساختار اصلاً وجود نداشته باشه، نقش اون هم نمی‌تونه درست باشه.

در چنین حالتی اگر در گزینه‌ها بینیم این دو گزاره در بیشتر موارد کنار هم اومدن، احتمالاً هر دو با هم درست یا هر دو با هم نادرست هستند.

بنابراین اگر مطمئن بشی یکی از اونا غلطه، می‌تونی گزینه‌هایی رو که هر دو رو با هم آوردن سریع حذف کنی.

برای نمونه فرض کن چهار گزینه این‌طور باشن: «الف و ب»، «الف و ج»، «ب و ج» و «الف و ب و ج». اگر با کمی فکر کردن متوجه بشی گزاره «الف» احتمالاً نادرسته، بلافاصله می‌تونی هر گزینه‌ای که «الف» داره رو کنار بذاری. در این حالت فقط گزینه «ب و ج» باقی می‌مونه و پاسخ به راحتی پیدا می‌شه. این کار باعث می‌شه بدون اینکه همه گزاره‌ها رو با قطعیت بدونیم، بتونیم تعداد گزینه‌ها رو کم کنیم و احتمال انتخاب پاسخ درست رو بالا ببریم.

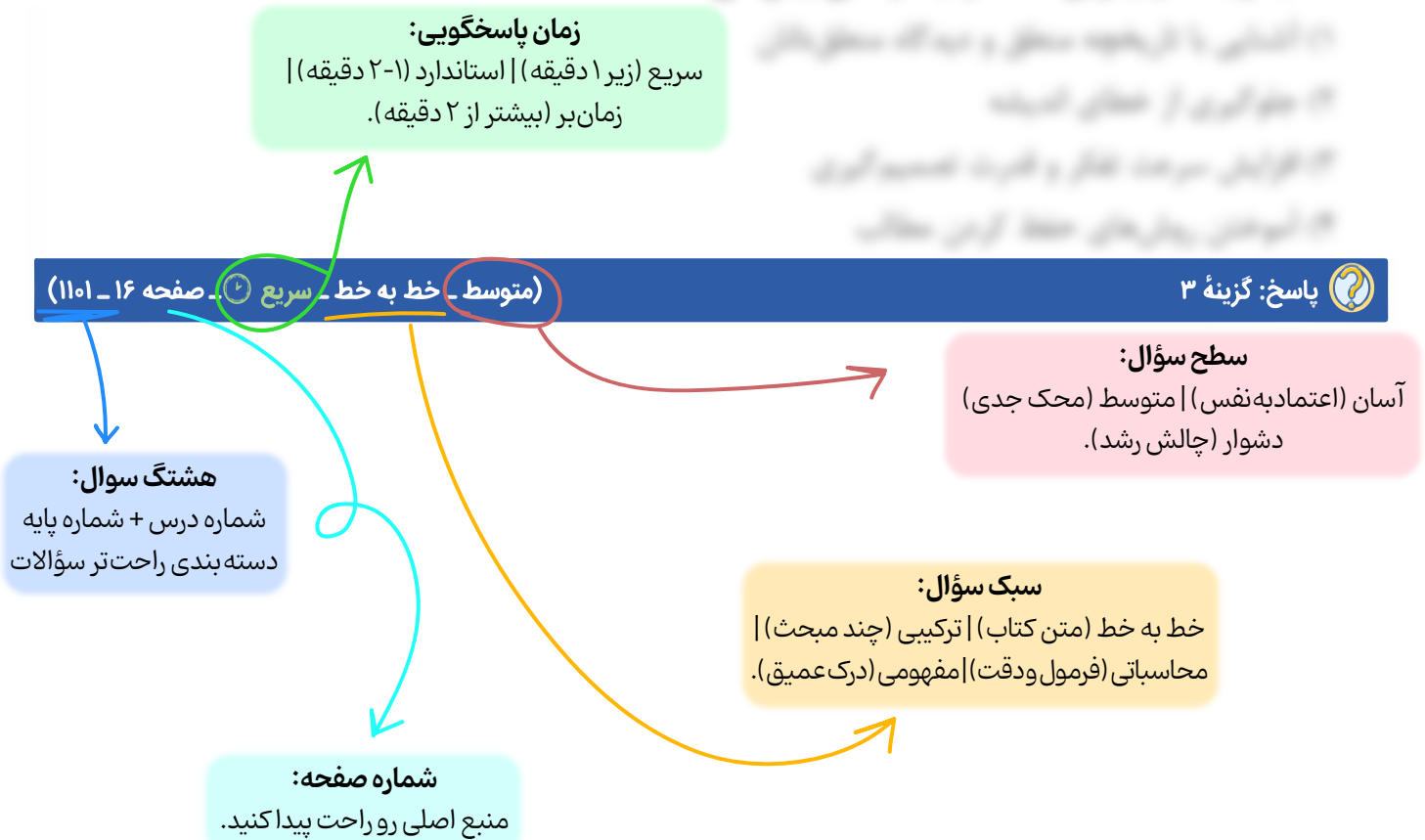
بنابراین در سؤالاتی که چند گزاره با هم مطرح می‌شن، فقط به تک‌تک گزاره‌ها نگاه نکن؛ سعی کن رابطه‌ی بین اونا رو هم ببینی.

خیلی وقت‌ها همین توجه ساده به ارتباط منطقی گزاره‌ها می‌تونه راه رسیدن به پاسخ درست رو کوتاه‌تر کنه و سرعت عملت رو در جلسه‌ی آزمون بالا ببره.

فقط یادت باشه این تکنیک‌ها رو اول در آزمون‌های آزمایشی امتحان کنی و ببینی چقدر برات جواب می‌ده. اگر تمرین کردی و به اونها مسلط شدی، اون وقت در سؤال‌هایی که شک داری و دانشت کامل نیست استفاده کن. این روش‌ها قرار نیست حتماً تو رو به جواب قطعی برسونن؛ فقط کمک می‌کنن احتمال درست زدن تست بیشتر بشه.

راهنمای پاسخنامه آزمون‌ها

در ادامه، راهنمای پاسخنامه آزمون‌ها را به شما معرفی می‌کنیم. این راهنما به شما کمک می‌کند تا با آشنایی با فرمت پاسخنامه، بتوانید به راحتی سوالات را پاسخ دهید. این راهنما به شما کمک می‌کند تا با آشنایی با فرمت پاسخنامه، بتوانید به راحتی سوالات را پاسخ دهید. این راهنما به شما کمک می‌کند تا با آشنایی با فرمت پاسخنامه، بتوانید به راحتی سوالات را پاسخ دهید.



یادتون باشه:

- ✓ هر سؤال یک فرصت یادگیری، نه یک مانع.
- ✓ پاسخنامه فقط جواب نیست؛ یک کارگاه آموزشی کامله.
- ✓ با هر آزمون و مرور این پاسخنامه، یک پله بالاتر می‌رید و یک قدم به رؤیایون نزدیک‌تر می‌شید.
- ✓ موفقیت فقط برای کسانی که با برنامه و انگیزه حرکت می‌کنن. شما همون آدمید.



برای دیدن پاسخنامه ویدئویی آزمون
QRcode بالا را اسکن کنید!
یا بر روی لینک زیر کلیک کنید!
پاسخنامه ویدئویی آزمون

بودجه‌بندی
این آزمون

حسابان ۱: جبر و معادله + تابع + توابع نمایی و لگاریتم (درس ۱)، صفحه‌های ۱ تا ۷۹
هندسه ۲: دایره + تبدیل‌های هندسی و کاربردها (تا ابتدای انتقال)، صفحه‌های ۹ تا ۳۸
آمار و احتمال: آشنایی با مبانی ریاضیات + احتمال (درس ۱ و ۲)، صفحه‌های ۱ تا ۴۷

سهم در
کنکور

حسابان ۱: این مبحث در مجموع ۵ تست از ۱۰ تست کنکور را پوشش داده است.
هندسه ۲: این مبحث در مجموع ۲ تست از ۴ تست کنکور را پوشش داده است.
آمار و احتمال: این مبحث در مجموع ۲ تست از ۴ تست کنکور را پوشش داده است.

۱- اگر مجموع ۱۲ جمله اول یک دنباله هندسی غیرثابت ۱۳ برابر مجموع ۴ جمله اول آن باشد، جمله دوازدهم چند برابر جمله چهارم است؟

۹ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

(سخت - محاسباتی - استاندارد) - حسابان ۱ صفحه ۵ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۴

ترجمه صورت سؤال

مجموع ۱۲ جمله اول یک دنباله هندسی غیرثابت ۱۳ برابر مجموع ۴ جمله اول آن است یعنی:

طبق ترجمه صورت سؤال و فرمول مجموع جملات دنباله هندسی داریم:

$$S_{12} = 13S_4 \Rightarrow \frac{a(q^{12} - 1)}{q - 1} = 13 \times \frac{a(q^4 - 1)}{q - 1} \xrightarrow[q \neq 1]{a \neq 0} \frac{q^{12} - 1}{q^4 - 1} = 13 \xrightarrow{\text{اتحاد چاق و لاغر}} \frac{(q^4 - 1)(q^8 + q^4 + 1)}{q^4 - 1} = 13$$

$$q^8 + q^4 - 12 = 0 \Rightarrow (q^4 + 4)(q^4 - 3) = 0 \Rightarrow q^4 = 3$$

$$\frac{a_{12}}{a_4} = \frac{aq^{11}}{aq^3} = q^8 = (q^4)^2 = 3^2 = 9$$

خواهیم داشت:

مجموع جملات دنباله هندسی

در یک دنباله هندسی با جمله اول a و قدرنسبت q ، مجموع n جمله اول آن برابر است با:

$$S_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1} \text{ یا } \frac{a(1 - q^n)}{1 - q}$$

یه نمونه باحال ببین!

مجموع ۱۰ جمله اول دنباله هندسی $\frac{1}{2}, 1, 2, \dots$ برابر است با:

$$S_{10} = \frac{a(1 - q^{10})}{1 - q} \xrightarrow[q=2]{q=\frac{1}{2}} S_{10} = \frac{2(1 - (\frac{1}{2})^{10})}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2(1 - \frac{1}{1024})}{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow S_{10} = 4(\frac{1023}{1024}) = \frac{1023}{256}$$



۲- در دنباله حسابی $a_n = an + b$ ، اگر $S_n = S_{2n}$ برقرار باشد، کدام گزینه صحیح است؟

(۴) $a - 2b = 0$

(۳) $a + 2b = 0$

(۲) $2a + b = 0$

(۱) $2a - b = 0$

(سخت - محاسباتی - زمان‌بر) - حسابان ۱ صفحه ۳ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۳

$d = a, a_1 = a + b$

اولاً چون $a_n = an + b$ ، بنابراین:

در دنباله حسابی می‌دانیم $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$ ، پس:

$$4S_n = S_{2n} \Rightarrow \frac{4n}{2}(2a_1 + (n-1)d) = \frac{2n}{2}(2a_1 + (2n-1)d)$$

$$\Rightarrow 2a_1 + 2nd - 2d = 2a_1 + 2nd - d \Rightarrow d = 2a_1$$

$$\xrightarrow[d=a_1+a+b]{d=a} a = 2a + 2b \Rightarrow a + 2b = 0$$

پس داریم:

مجموع جملات دنباله حسابی

در یک دنباله حسابی با جمله اول a_1 و قدرنسبت d ، مجموع n جمله اول برابر است با:

$$S_n = a_1 + \underbrace{(a_1 + d)}_{a_2} + \dots + \underbrace{(a_1 + (n-1)d)}_{a_n}$$



$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

یه نمونه باحال ببین!

(۱) مجموع ۱۰ جمله اول دنباله حسابی $1, 4, \dots$ برابر است با:

$$S_{10} = \frac{1}{2}(2a_1 + 9d) \xrightarrow{a_1=-2, d=3} S_{10} = \frac{1}{2}(2(-2) + 9(3)) = 5 \times 23 = 115$$

(۲) حاصل $-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{7}{2} + \dots + \frac{35}{2}$ برابر است با:

$$\begin{cases} a_1 = -\frac{1}{2} \\ a_2 = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow d = \frac{3}{2} - (-\frac{1}{2}) = 2$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d = \frac{35}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} + (n-1) \times 2 = \frac{35}{2}$$

$$\Rightarrow 2(n-1) = \frac{36}{2} = 18 \Rightarrow n-1 = 9 \Rightarrow n = 10$$

بنابراین داریم:

$$S_{10} = \frac{1}{2}(a_1 + a_{10}) = 5(-\frac{1}{2} + \frac{35}{2}) = 5(17) = 85$$



۳- مجموع ریشه‌های معادله $ax^2 + 2x + 3 = 0$ از حاصل ضرب ریشه‌ها یک واحد بیشتر است. a کدام است؟
 (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۵ (۴) -۵

(آسان - محاسباتی - سریع) حسابان ۱ صفحه ۸ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۴

$$\left. \begin{array}{l} \text{مجموع ریشه‌ها} = S = -\frac{2}{a} \\ \text{حاصل ضرب ریشه‌ها} = P = \frac{3}{a} \end{array} \right\} \Rightarrow -\frac{2}{a} - \frac{3}{a} = 1 \Rightarrow -\frac{5}{a} = 1 \Rightarrow a = -5$$

مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله درجه ۲

در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ با شرط وجود جواب‌های α و β ، بدون حل معادله می‌توان مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها را به دست آورد:

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \quad \text{مجموع ریشه‌ها:}$$

$$P = \alpha\beta = \frac{c}{a} \quad \text{حاصل ضرب ریشه‌ها:}$$

یه نمونه باحال ببین!

در معادله درجه دوم $2x^2 + 3x - 1 = 0$ ، چون $ac < 0$ ، پس معادله دارای دو جواب است، زیرا:

$$\Delta = b^2 - 4ac \xrightarrow{ac < 0} \Delta > 0 \quad \text{معادله دو جواب حقیقی دارد.}$$

مجموع و حاصل ضرب جواب‌ها برابر است با:

$$\left\{ \begin{array}{l} S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{3}{2} \\ P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{-1}{2} \end{array} \right.$$



۴- اگر $x = -2$ یکی از صفرهای تابع $f(x) = x^3 + x^2 + ax - 6$ باشد، مجموع مربعات سایر صفرهای تابع کدام است؟
 (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹

(متوسط - محاسباتی - سریع) حسابان ۱ صفحه ۱۳ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۲

بررسی سریع:

$$f(-2) = 0 \Rightarrow -8 + 4 - 2a - 6 = 0 \Rightarrow a = -5$$

$$f(x) = x^3 + x^2 - 5x - 6 = (x+2)(x^2 - x - 3)$$

تجزیه f:

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = S^2 - 2P = 1^2 - 2(-3) = 1 + 6 = 7 \quad \text{مجموع مربعات دیگر ریشه‌ها، ریشه‌های } x^2 - x - 3 \text{ است:}$$

$f(-2)$ برابر صفر است. پس:

$$f(-2) = 0 \Rightarrow -8 + 4 - 2a - 6 = 0 \Rightarrow a = -5$$

چون $x = -2$ ریشه $f(x) = 0$ است، پس $f(x)$ بر $x + 2$ بخش پذیر است. بنابراین f را بر $x + 2$ تقسیم کرده و آن را تجزیه می کنیم:

$$\begin{array}{r} x^3 + x^2 - 5x - 6 \quad | \quad x + 2 \\ -(x^3 + 2x^2) \\ \hline -x^2 - 5x - 6 \\ -(-x^2 - 2x) \\ \hline -3x - 6 \\ -(-3x - 6) \\ \hline 0 \end{array}$$

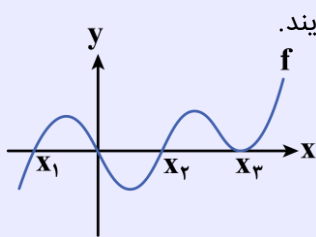
در نتیجه تابع f به صورت زیر تجزیه می شود:

$$f(x) = x^3 + x^2 - 5x - 6 = (x + 2)(x^2 - x - 3)$$

اگر α و β ریشه های معادله $x^2 - x - 3 = 0$ باشند (سایر صفرهای تابع)، خواهیم داشت:

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = S^2 - 2P = 1^2 - 2(-3) = 1 + 6 = 7$$

صفرهای تابع



طول نقاط تلاقی نمودار تابع f و محور x ها را صفرهای تابع f می نامند که از حل معادله $f(x) = 0$ به دست می آیند.

$x_1, 0, x_2, x_3$: صفرهای تابع مقابل

ارتباط صفرهای تابع چندجمله ای و تجزیه!

اگر $x = a$ یکی از ریشه های معادله $f(x) = 0$ باشد، آن گاه $f(x)$ بر $(x - a)$ بخش پذیر است و می توان با تقسیم $f(x)$ بر $(x - a)$ آن را تجزیه کرد.

یادآوری تقسیم چندجمله ای

برای تقسیم چندجمله ای $p(x)$ بر $q(x)$ کافی است هر بار بزرگ ترین جمله $p(x)$ (از نظر توان) را بر بزرگ ترین جمله $q(x)$ تقسیم کنیم و در خارج قسمت بنویسیم، سپس جمله به دست آمده از تقسیم این دو جمله را در $q(x)$ ضرب می کنیم و از $p(x)$ کم می کنیم تا وقتی که درجه چندجمله ای حاصل از درجه q کمتر شود.

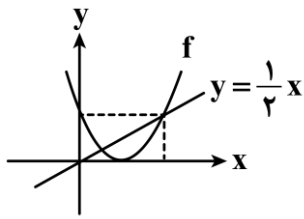
یه نمونه باحال ببین!

$$\begin{array}{r} 4x^3 - 2x^2 + 1 \quad | \quad x^2 + 1 \\ -(4x^3 + 4x) \\ \hline -2x^2 - 4x + 1 \\ -(-2x^2 - 2) \\ \hline -4x + 3 \end{array} \quad \begin{array}{l} \frac{4x^3}{x^2} = 4x \Rightarrow 4x(x^2 + 1) = 4x^3 + 4x \\ \frac{-2x^2}{x^2} = -2 \Rightarrow -2(x^2 + 1) = -2x^2 - 2 \end{array}$$

درجه $(-4x + 3)$ از درجه $x^2 + 1$ کمتر شد و همین جا تقسیم را تمام می کنیم، در این صورت باقی مانده $(-4x + 3)$ و خارج قسمت

$$4x^3 - 2x^2 + 1 = \underbrace{(x^2 + 1)}_{q(x)} \underbrace{(-4x + 3)}_{\text{خارج قسمت}} + \underbrace{(-4x + 3)}_{\text{باقی مانده}}$$

برابر با $(4x - 2)$ است و می توان نوشت:



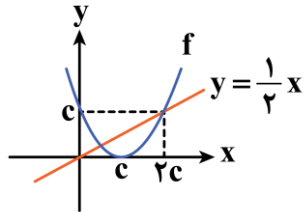
۵- نمودار سهمی $f(x) = ax^2 + bx + c$ به صورت مقابل است. b کدام است؟

- (۱) -۱
(۲) -۲
(۳) -۳
(۴) -۴

(سخت - ترکیبی - زمان ۲۰) - حسابان ۱ صفحه های ۱۵ و ۱۶ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۲

روش اول



دقت کنید که $f(0) = c$ ، پس سهمی از نقاط $(0, c)$ و $(2c, c)$ عبور کرده است و داریم:

$$x_S = \frac{2c + 0}{2} = c$$

پس رأس سهمی نقطه $S(c, 0)$ است.

با داشتن مختصات رأس سهمی، معادله سهمی را می نویسیم:

$$y = a(x - c)^2 = ax^2 - 2acx + ac^2 \Rightarrow \begin{cases} -2ac = b \\ ac^2 = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -2 \\ ac = 1 \end{cases} \Rightarrow b = -2$$

روش دوم

با توجه به شکل $A(2c, c)$ روی نمودار سهمی و خط قرار دارد، پس $x = 2c$ جواب معادله تلاقی خط و سهمی است:

$$ax^2 + bx + c = \frac{1}{2}x \xrightarrow{x=2c} 4ac^2 + 2bc + c = c \xrightarrow{\div c} 4ac + 2b = 0 \Rightarrow b = -2ac$$

$$x_S = \frac{2c + 0}{2} = c \Rightarrow \frac{-b}{2a} = c \Rightarrow b = -2ac$$

و یا:

و چون سهمی بر محور x مماس است، معادله $f(x) = 0$ دارای ریشه مضاعف است:

$$\Delta = 0 \Rightarrow b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow b^2 = 4ac \xrightarrow{ac = \frac{b}{2}} b^2 = 4(-\frac{b}{2}) \Rightarrow b^2 + 2b = 0 \Rightarrow b(b + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ b = -2 \end{cases}$$

معادله سهمی

اگر رأس یک سهمی $S(\alpha, \beta)$ باشد، معادله سهمی برابر است با:

$$y - \beta = a(x - \alpha)^2$$

که با داشتن یک نقطه از سهمی می توان ضریب a را هم به دست آورد.

تبدیل معادله سهمی به فرم مربع کامل

برای تبدیل معادله سهمی از فرم $y = ax^2 + bx + c$ به فرم $y - \beta = a(x - \alpha)^2$ کافیست در طرف دوم از a فاکتور بگیریم و سپس مربع کامل بسازیم.

روش هندسی حل معادله

برای حل معادله $f(x) = g(x)$ به کمک رسم کافی است نمودار توابع f و g را در یک دستگاه مختصات رسم کنیم. طول نقاط تلاقی دو نمودار جواب های معادله $f(x) = g(x)$ است.

توجه!

از این روش بیشتر در محاسبه تعداد جواب‌های معادله $f(x) = g(x)$ کمک می‌گیریم.

تعداد برخوردهای تابع f با محور x ها 

جواب‌های معادلهٔ درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ صفرهای تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ است که همان طول نقاط تلاقی تابع f و محور x ‌ها است. بنابراین اگر $\Delta > 0$ باشد، نمودار f محور x ‌ها را در ۲ نقطه قطع می‌کند، اگر $\Delta = 0$ باشد، نمودار f بر محور x ‌ها مماس است (در نقطهٔ رأس سهمی) و اگر $\Delta < 0$ باشد، نمودار f محور x ‌ها را قطع نمی‌کند.



۶- اشکان قصد دارد ۱۰۰ کیلوگرم محلول آب‌نمک به غلظت ۱۰ درصد را به محلول با غلظت ۲۰ درصد تبدیل کند. او m کیلوگرم نمک به محلول اضافه کرده و n کیلوگرم از محلول را تبخیر می‌کند. اگر $n - m = 5$ باشد، mn کدام است؟

٢٠٤ (٤

۱۷۲ (۳)

150 (2)

١٢٤ (١)

(متوسط - محاسباتی - استاندارد ۶) - حسابان ۱ صفحه ۱۸ - ۱۱۰۱)

 پاسخ: گزینه ۱

$$\text{مقدار نمک در محلول اولیه} = \frac{10}{100} \times 100 = 10 \text{ (کیلوگرم)}$$

۱۰ کیلوگرم نمک موجود است. حال اگر m کیلوگرم نمک به محلول اضافه کنیم و n کیلوگرم از محلول را تبخیر کنیم، داریم:

$$\text{غلظت محلول جدید} = \frac{10 + m}{100 + m - n} = \frac{20}{100} = \frac{1}{5} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 50 + 5m = 100 + m - n \Rightarrow 4m + n = 50$$

$$\left. \begin{array}{l} 4m + n = 50 \\ \text{از طرفی: } n - m = 5 \end{array} \right\} \xrightarrow{-} 5m = 45 \Rightarrow m = 9 \Rightarrow n = 14$$

بنابراین:

$$mn = 9 \times 14 = 126$$

حل معادلات گویا

برای حل معادلات گویا کافی است طرفین تساوی را در $k.m$ مخرج‌ها یا همان مخرج مشترک ضرب کنیم تا مخرج از بین برود و سپس با حل معادله حاصل جواب‌ها را به دست می‌آوریم. توجه دارید که جواب‌هایی قابل قبول هستند که مخرج‌ها را صفر نکنند.

یه نمونه باحال بین!

$$\frac{2}{x-1} + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x^2-x}$$

$$\xrightarrow{\times(x-1)} r(x+x-1) = x+1 \Rightarrow r(x) = r \Rightarrow x = 1$$

اما $x = 1$ مخرج بعضی از کسرها را صفر می‌کند و غیرقابل قبول است. پس معادله هیچ جواب قابل قبولی ندارد.

قَلِقْشُو يَاد بَغِير!

در حل معادله‌های گویا به شکل $\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{r(x)}{t(x)}$ از طرفین وسطین کمک می‌گیریم:

$$p(x).t(x) = r(x).q(x)$$



۷- معادله $\sqrt{x+20} + \sqrt{3x+52} = 4$ چند جواب دارد؟

۴ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - حسابان ۱ صفحه ۲۲ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۲

ابتدا یک رادیکال را در یک سمت نگه داشته و مابقی عبارات را به سمت دیگر می‌بریم:

$$\sqrt{3x+52} = 4 - \sqrt{x+20} \xrightarrow{\text{توان ۲}} 3x+52 = 16 + x + 20 - 8\sqrt{x+20}$$

$$\Rightarrow 2x+16 = -8\sqrt{x+20} \xrightarrow{\div 2} x+8 = -4\sqrt{x+20}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} x^2 + 16x + 64 = 16(x+20) \Rightarrow x^2 + 16x + 64 = 16x + 320 \Rightarrow x^2 = 256 \Rightarrow \begin{cases} x = 16 \text{ غ ق} \\ x = -16 \text{ صح} \end{cases}$$

تنها یک مقدار یعنی $x = -16$ در معادله اولیه صدق می‌کند.

حل معادلات رادیکالی

برای حل یک معادله رادیکالی، عبارت رادیکالی را در یک طرف تساوی نگه می‌داریم و بقیه عبارات را به طرف دیگر تساوی می‌بریم. سپس با توان‌رسانی رادیکال را از بین می‌بریم و معادله حاصل را حل می‌کنیم.

اگر معادله شامل k عبارت رادیکالی باشد باید k بار عملیات توان‌رسانی را انجام دهید تا همه رادیکال‌ها از بین بروند.

توجه!

توجه کنید که در نهایت جواب‌های حاصل را در معادله اصلی امتحان کنید، چون با توان‌رسانی ممکن است جواب اضافی ایجاد شود.

یه نمونه باحال ببین!

$$\sqrt{x+1} + 2x = 1 \Rightarrow \sqrt{x+1} = 1 - 2x \xrightarrow{\text{توان ۲}} x+1 = 1 + 4x^2 - 4x \Rightarrow 4x^2 - 5x = 0 \Rightarrow x(4x-5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{5}{4} \end{cases}$$

$$x = 0: \sqrt{0+1} + 0 = 1 \Rightarrow 1 = 1 \checkmark$$

$$x = \frac{5}{4}: \sqrt{\frac{5}{4}+1} + \frac{5}{2} = 1 \Rightarrow \frac{3}{2} + \frac{5}{2} = 1 \Rightarrow 4 = 1 \times$$

پس فقط $x = 0$ قابل قبول است.۸- نقاط $A(2,4)$ ، $B(4,-3)$ ، $C(7,y)$ و $D(x,8)$ رئوس متوازی‌الاضلاع ABCD می‌باشند. طول قطر BD کدام است؟ $\sqrt{130}$ (۴) $\sqrt{124}$ (۳) $\sqrt{122}$ (۲) $\sqrt{118}$ (۱)

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - حسابان ۱ صفحه ۳۲ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۲

می‌دانیم در متوازی‌الاضلاع ABCD:

$$x_A + x_C = x_B + x_D \Rightarrow 2 + 7 = 4 + x \Rightarrow x = 5$$

$$BD = \sqrt{(x_B - x_D)^2 + (y_B - y_D)^2} = \sqrt{(4-5)^2 + (-3-8)^2} = \sqrt{1+121} = \sqrt{122}$$

بنابراین خواهیم داشت:

طول پاره‌خط و نقطه وسط آن

اگر A و B دو سر پاره‌خط AB باشند، آن‌گاه:

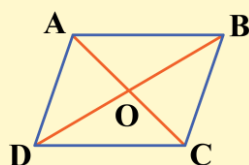
$$M \text{ وسط پاره‌خط } AB = \frac{A+B}{2} = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right)$$

$$AB \text{ طول پاره خط} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

مختصات رئوس متوازی الاضلاع



در هر متوازی الاضلاع از آن جا که قطر ها یکدیگر را نصف می کنند، داریم:



$$O = \frac{A+C}{2} = \frac{B+D}{2}$$

در نتیجه:

$$\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases}$$



۹- خط $y = 2x + 1$ بر خط $y = ax - 1$ عمود است. طول محل تلاقی دو خط کدام است؟

(۴) ۰/۸

(۳) ۰/۸

(۲) ۰/۶

(۱) ۰/۶

(آسان - ترکیبی - سریع) - حسابان ۱ صفحه ۳۱ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۴

ضریب x در فرم $y = mx + b$ همان شیب خط است. پس:

$$y = 2x + 1 \Rightarrow m_1 = 2$$

$$y = ax - 1 \Rightarrow m_2 = a$$

دو خط بر هم عمودند، بنابراین حاصل ضرب شیب آن ها برابر -1 است.

$$m_1 m_2 = -1 \Rightarrow 2a = -1 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

محل تلاقی دو خط را به دست می آوریم:

$$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = -\frac{x}{2} - 1 \end{cases} \Rightarrow 2x + 1 = -\frac{x}{2} - 1 \Rightarrow \frac{5}{2}x = -2 \Rightarrow x = -\frac{4}{5} = -0.8$$

خطوط موازی و عمود

۱) دو خط d و d' ، اگر با هم موازی باشند شیب آن ها برابر است:

$$d \parallel d' \Leftrightarrow m_d = m_{d'}$$

۲) دو خط متقاطع d و d' ، اگر بر هم عمود باشند، شیب آن ها عکس و قرینه یکدیگر است:

$$d \perp d' \Leftrightarrow m_d = \frac{-1}{m_{d'}} \quad \text{یا} \quad m_d m_{d'} = -1$$

شیب خط $y = ax + b$ برابر با a است.



۱۰- کدام خط در تلاقی با نمودار $y = 2x|4-x|$ دو نقطه مشترک دارد؟

$$y = 16 \quad (۴)$$

$$y = 12 \quad (۳)$$

$$y = 4 \quad (۲)$$

$$y = 8 \quad (۱)$$

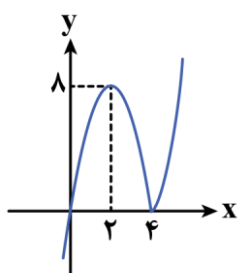
(سخت - ترکیبی - زمان بر) - حسابان ۱ صفحه ۲۸ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۱

اگر تابع را به صورت دو ضابطه‌ای بنویسیم، آن گاه:

$$y = \begin{cases} 2x^2 - 8x & x \geq 4 \\ 8x - 2x^2 & x < 4 \end{cases} \xrightarrow{\text{مربع کامل}} y = \begin{cases} 2(x-2)^2 - 8 & x \geq 4 \\ -2(x-2)^2 + 8 & x < 4 \end{cases}$$

حال با توجه به فرم مربع کامل شده تابع می‌توانیم نمودار آن را به شکل زیر رسم کنیم:



دو خط $y = 0$ و $y = 8$ نمودار تابع را در دو نقطه متمایز قطع می‌کنند که با توجه به گزینه‌ها $y = 8$ را انتخاب می‌کنیم.

رسم توابع قدرمطلق

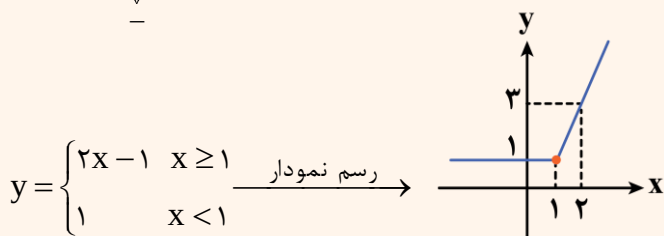
۱) برای رسم نمودار توابع قدرمطلق در حالت کلی، عبارت داخل قدرمطلق را تعیین علامت می‌کنیم، سپس با توجه به علامت قدرمطلق در هر ناحیه، قدرمطلق را برمی‌داریم و تابع را به صورت چندضابطه‌ای می‌نویسیم و سپس نمودار هر ضابطه را در دامنه آن رسم می‌کنیم.

یه نمونه باحال ببین!

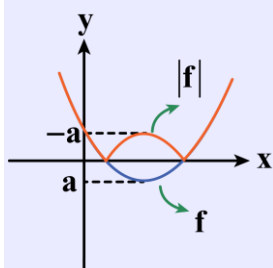
$$y = |x-1| + x$$

$$x \geq 1: |x-1| = x-1 \Rightarrow y = x-1+x = 2x-1$$

$$x < 1: |x-1| = -x+1 \Rightarrow y = -x+1+x = 1$$



۲) برای رسم تابع $y = |f(x)|$ از روی نمودار f کافی است قسمت‌هایی از نمودار f را که زیر محور x قرار دارد نسبت به محور x قرینه کنیم و بقیه نمودار ثابت بماند.



۱۱- کدام گزینه درست نیست؟

- (۱) برد تابع زیرمجموعه هم دامنه تابع است.
 (۲) اگر دو تابع برابر باشند، دامنه و برد آنها برابر است.
 (۳) هم دامنه تابع می تواند زیرمجموعه برد تابع باشد.
 (۴) اگر دامنه و برد دو تابع برابر باشند، دو تابع برابر هستند.

پاسخ: گزینه ۴

(آسان - مفهومی - سریع) - حسابان ۱ صفحه ۴۲ - ۱۱۰۲

بررسی گزینه ها:

۱ و ۲

با توجه به متن کتاب درسی، گزینه های «۱» و «۲» درست می باشند.

۳

اگر برد تابع با هم دامنه برابر باشد هم دامنه زیرمجموعه برد قرار می گیرد، بنابراین گزینه «۳» نیز درست است. دقت کنید که گفته شده هم دامنه تابع می تواند زیرمجموعه برد تابع باشد و گفته نشده لزوماً هم دامنه، زیر مجموعه برد است.

۴

گزینه ۴ نادرست است. مثال نقض: دامنه و برد تابع $y = 2x$ و $y = x$ برابر $\mathbb{R}$ است، اما این دو تابع برابر نیستند.

دامنه و برد تابع

در تابع $f: A \rightarrow B$ ، A یعنی مجموعه x ها را دامنه تابع ($A = D_f$) می گویند و B را هم دامنه تابع می گویند. برد تابع f برابر است با:

$$R_f = \{f(x) | x \in A\} \subseteq B$$
که شامل همه y ها است.بنابراین برد تابع لزوماً همه B نیست بلکه زیرمجموعه ای از آن است.

یه نمونه باحال ببین!

دامنه: $D_f = A = \{-1, 0, 1, 2\}$ $f: \{-1, 0, 1, 2\} \rightarrow \mathbb{Z}$ به طوری که $f(x) = x^2 - 1$ ، در این صورت: $\mathbb{Z}$ هم دامنه تابع است و داریم:

$$\begin{cases} f(-1) = f(1) = 0 \\ f(0) = -1 \\ f(2) = 3 \end{cases} \Rightarrow R_f = \{0, -1, 3\} = \text{برد} \subseteq \mathbb{Z}$$

نکته!

در دو تابع برابر، دامنه ها با هم برابر و بردها هم با هم برابر هستند.

دو تابع مساوی

دو تابع f و g تنها وقتی با هم برابرند که اولاً دامنه آنها برابر باشد و دوماً ضابطه آنها برابر باشد، یعنی به ازای هر x از دامنه $f(x) = g(x)$ باشد.

$$\begin{cases} ۱) D_f = D_g = D \\ ۲) \forall x \in D : f(x) = g(x) \end{cases}$$

نمودار دو تابع مساوی

در دو تابع مساوی نمودارها کاملاً بر هم منطبق اند.



۱۲- توابع $f(x) = \frac{a}{x-2}$ و $g(x) = \frac{cx - \frac{1}{2}}{ax^2 + bx + 2}$ برابرند. $a - b + 2c$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۳ (۴) -۳

(متوسط - ترکیبی - زمان ۵) - حسابان ۱ صفحه ۴۱ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۳

دامنه تابع f برابر $\mathbb{R} - \{2\}$ است. بنابراین دامنه g نیز باید $\mathbb{R} - \{2\}$ باشد یعنی مخرج کسر در تابع g به صورت $a(x-2)^2$ است:

$$ax^2 + bx + 2 = a(x-2)^2 \Rightarrow ax^2 + bx + 2 = ax^2 - 4ax + 4a \Rightarrow \begin{cases} 4a = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \\ b = -4a \Rightarrow b = -2 \end{cases}$$

$$f(x) = g(x) \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}}{x-2} = \frac{cx - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}(x-2)^2}$$

خواهیم داشت:

$$\Rightarrow cx - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(x-2) \Rightarrow cx = \frac{x}{2} \Rightarrow c = \frac{1}{2}$$

$$a - b + 2c = \frac{1}{2} + 2 + \frac{1}{2} = 3$$

بنابراین:



۱۳- تابع $f(x) = \begin{cases} 3x-2 & x \leq -2 \\ x^2 + 2ax - 2 & x > -2 \end{cases}$ روی $\mathbb{R}$ یک به یک است. اگر a عددی صحیح باشد، مقدار $f(a)$ کدام است؟

(۱) ۴ (۲) ۸ (۳) ۱۰ (۴) -۲

(سخت - ترکیبی - زمان ۵) - حسابان ۱ صفحه های ۵۵ و ۵۶ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۳

باید نمودار تقریبی f به صورت زیر باشد تا روی $\mathbb{R}$ یک به یک شود، در نتیجه طول رأس سهمی نباید بزرگتر از (-2) باشد، پس داریم:

$$x_S = \frac{-2a}{2} = -a$$

$$\Rightarrow -a \leq -2 \Rightarrow a \geq 2 \quad (1)$$

از طرفی برای این که ضابطه f واقعاً یک به یک باشد، باید عرض های سهمی بزرگتر یا مساوی -8 باشند:

$$2 - 4a \geq -8 \Rightarrow a \leq \frac{5}{2} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow 2 \leq a \leq \frac{5}{2} \xrightarrow{a \in \mathbb{Z}} a = 2$$

$$f(a) = f(2) = 2^2 + 2 \times 2 \times 2 - 2 = 10$$

پس فقط $a = 2$ قابل قبول است و داریم:

دام تستی!

اگر اشتباهی $x = 2$ را در ضابطه اول جای گذاری کنید به عدد ۴ می رسید و در دام گزینه ۱ می افتید!

توابع یک به یک

تابع f را یک به یک می گوئیم اگر به ازای هر y از برد f ، تنها یک x از دامنه f وجود داشته باشد که $f(x_0) = y$ باشد، یعنی ۲ یا بیشتر از ۲ تا x به یک y نظیر نشده باشد.

در نمودار توابع یک به یک، هر خط افقی نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می کند.



۱۴- مجموعه جواب معادله $\left[2x - \frac{1}{2}\right] + \left[2x + \frac{1}{2}\right] = 9$ شامل چند عدد صحیح است؟ ([نماد جزء صحیح است.)

(۴) ۳

(۳) ۲

(۲) ۱

(۱) صفر

(متوسط - محاسباتی - سریع) حسابان ۱ صفحه ۵۰ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۱

اگر $2x - \frac{1}{2} = k$ باشد $k + 1 = 2x + \frac{1}{2}$ است، بنابراین:

$$[k] + [k+1] = 9 \Rightarrow 2[k] + 1 = 9 \Rightarrow [k] = 4$$

$$\Rightarrow 4 \leq k < 5 \Rightarrow 4 \leq 2x - \frac{1}{2} < 5 \Rightarrow \frac{9}{2} \leq 2x < \frac{11}{2} \Rightarrow \frac{9}{4} \leq x < \frac{11}{4}$$

هیچ عدد صحیحی در مجموعه جواب بالا وجود ندارد.

فلیشو یاد بگیر!

وقتی مانند این سؤال یک تساوی براکتی داریم سعی کنید رابطه بین مقادیر داخل براکت را بیابید و سپس برحسب رابطه‌ای که می‌یابید مقادیر براکت‌ها را بیابید.

• • i/o • •

۱۵- وارون تابع $f(x) = a + \sqrt{x-1}$ خط $y = 2x - 1$ را در نقطه‌ای به طول ۳ قطع می‌کند. $f^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)$ کدام است؟

(۴) $\frac{7}{4}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{5}{4}$

(۱) ۱

(متوسط - محاسباتی - سریع) حسابان ۱ صفحه ۵۸ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۲

اگر طول نقطه برخورد f^{-1} با خط $y = 2x - 1$ برابر ۳ باشد عرض آن برابر ۵ است. بنابراین $(3, 5)$ روی نمودار f^{-1} است، پس:

$$f^{-1}(3) = 5 \Rightarrow f(5) = 3 \Rightarrow a + 2 = 3 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow f(x) = 1 + \sqrt{x-1}$$

خواهیم داشت:

$$f^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) = k \Rightarrow f(k) = \frac{3}{2} \Rightarrow 1 + \sqrt{k-1} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{k-1} = \frac{1}{2} \Rightarrow k-1 = \frac{1}{4} \Rightarrow k = \frac{5}{4}$$

وارون تابع

وارون تابع f را که با f^{-1} نمایش می‌دهیم، رابطه‌ای است که در نمایش زوج مرتبی از جابه‌جایی x ها و y ها در تابع f به‌دست می‌آید. به عبارت دیگر، اگر $(a, b) \in f$ باشد یعنی $f(a) = b$ باشد، آن‌گاه $(b, a) \in f^{-1}$ است یعنی $f^{-1}(b) = a$ است.

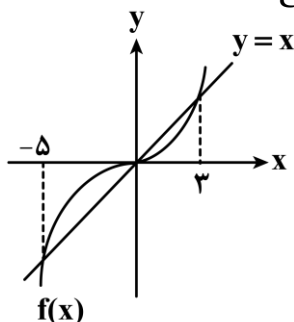
توجه!

وارون یک تابع مانند f تنها زمانی خود نیز یک تابع است که f یک‌به‌یک باشد.

در این صورت f را وارون‌پذیر می‌گویند و f^{-1} را تابع وارون f می‌نامند.

• • i/o • •

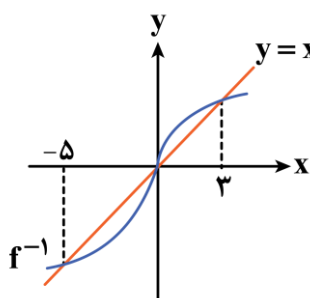
۱۶- نمودار تابع f و خط $y = x$ رسم شده است. دامنه تابع $g(x) = \sqrt{\frac{x}{f^{-1}(x) - x}}$ شامل چند عدد صحیح است؟



- (۱) ۲
(۲) ۴
(۳) ۶
(۴) بیش از ۶

پاسخ: گزینه ۳

(متوسط - مفهومی - استاندارد) حسابان ۱ صفحه ۵۹ - ۱۱۰۲



برای یافتن دامنه g باید شرط $\frac{x}{f^{-1}(x) - x} \geq 0$ را بررسی کنیم. با قرینه کردن نمودار f نسبت به خط $y = x$ نمودار تابع f^{-1} را رسم می‌کنیم:

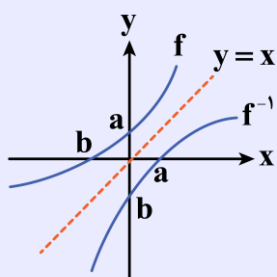
با توجه به نمودار اگر $x > 0$ باشد، برای نامنفی بودن $\frac{x}{f^{-1}(x) - x}$ باید $f^{-1}(x) - x > 0$ باشد، در نتیجه:

$$f^{-1}(x) > x \xrightarrow{x > 0} 0 < x < 3$$

اگر $x < 0$ باشد، برای نامنفی بودن $\frac{x}{f^{-1}(x) - x}$ باید $f^{-1}(x) - x < 0$ باشد، در نتیجه:

$$f^{-1}(x) < x \xrightarrow{x < 0} -5 < x < 0$$

در $x = 0$ نیز تابع $g(x)$ تعریف نشده است. زیرا مخرج کسر به‌ازای $x = 0$ صفر می‌شود. بنابراین دامنه تابع بازه $(0, 3) \cup (-5, 0)$ است که شامل ۶ عدد صحیح ۲، ۱، -۱، -۲، -۳، -۴ است.



نمودار وارون تابع

برای رسم نمودار وارون تابع f ، کافی است نمودار f را نسبت به خط $y = x$ قرینه کنیم.

توجه!

توجه کنید که اگر (x, y) نقطه‌ای روی نمودار f باشد (y, x) نقطه‌ای روی نمودار f^{-1} است.

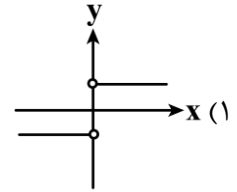
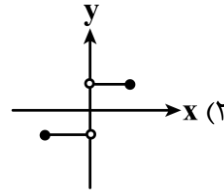
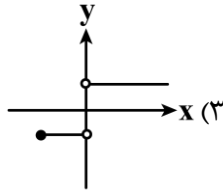
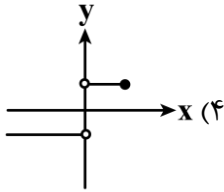
دامنه توابع رادیکالی

برای محاسبه دامنه توابع رادیکالی با فرجه زوج به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$f(x) = \sqrt[n]{g(x)} \Rightarrow D_f = D_g \cap \{x | g(x) \geq 0\}$$

یعنی علاوه بر تعیین دامنه عبارت زیر رادیکال، زیر رادیکال با فرجه زوج باید همیشه نامنفی باشد.

۱۷- اگر $f(x) = \sqrt{x+1}$ و $g(x) = x^2 - 1$ باشد، نمودار $h(x) = \frac{f \circ g(x)}{g \circ f(x)}$ به کدام صورت است؟



(متوسط - ترکیبی - استاندارد) - حسابان ۱ صفحه ۶۸ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۳

دامنه تابع f برابر $[-1, +\infty)$ و دامنه تابع g برابر $\mathbb{R}$ است.

همواره برقرار

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 \geq -1\} = \mathbb{R}$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in [-1, +\infty) \mid \sqrt{x+1} \in \mathbb{R}\} = [-1, +\infty)$$

همواره برقرار

$$D_h = D_{f \circ g} \cap D_{g \circ f} - \{x \mid g \circ f(x) = 0\} = [-1, +\infty) - \{x \mid (f(x))^2 - 1 = 0\}$$

از حل معادله $(f(x))^2 - 1 = 0$ داریم:

$$(\sqrt{x+1})^2 - 1 = 0 \Rightarrow x + 1 - 1 = 0 \Rightarrow x = 0$$

در نتیجه:

$$D_h = [-1, +\infty) - \{0\}$$

تا همین مرحله و بدون محاسبه مقدار تابع h ، فقط با توجه به دامنه می‌بینیم که تنها در گزینه ۳ دامنه تابع مشابه جواب درست است. از طرفی خواهیم داشت:

$$h(x) = \frac{f \circ g(x)}{g \circ f(x)} = \frac{\sqrt{g(x)+1}}{f^2(x)-1} = \frac{\sqrt{x^2}}{(\sqrt{x+1})^2-1} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & -1 \leq x < 0 \end{cases}$$

با توجه به دامنه تابع:

اعمال روی توابع

اگر f و g دو تابع دلخواه با دامنه‌های D_f و D_g باشند، آنگاه:

۱) $D_{(f+g)} = D_f \cap D_g$, $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

۲) $D_{(f-g)} = D_f \cap D_g$, $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$

۳) $D_{(fg)} = D_f \cap D_g$, $(fg)(x) = f(x) \times g(x)$

۴) $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}$, $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

۵) $D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$, $f \circ g(x) = f(g(x))$



۱۸- مجموع ریشه‌های معادله $|4x - x^2| = |x - 2| + 1$ کدام است؟

۸ (۴)

۴ (۳)

۲ (۲)

صفر (۱)

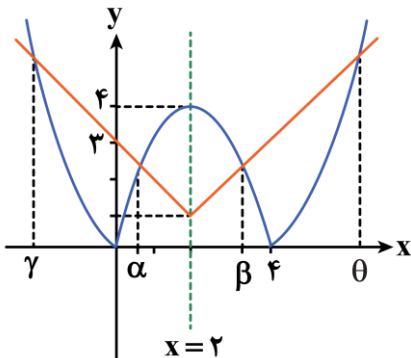
پاسخ: گزینه ۴

سخت - مفهومی - زمان‌بر - حسابان ۱ صفحه‌های ۱۴ و ۲۴ - ۱۱۰۱

روش اول

روش هندسی:

نمودار دو تابع $y = |x - 2| + 1$ و $y = |4x - x^2|$ را رسم می‌کنیم:



هر دو تابع نسبت به خط $x = 2$ متقارن هستند، بنابراین محل برخورد آن‌ها با هم نیز نسبت به خط $x = 2$ متقارن است، در نتیجه:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\alpha + \beta}{2} = 2 &\Rightarrow \alpha + \beta = 4 \\ \frac{\gamma + \theta}{2} = 2 &\Rightarrow \gamma + \theta = 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma + \theta = 8$$

روش دوم

روش جبری:

$$|(x - 2)^2 - 4| = |x - 2| + 1 \xrightarrow{x - 2 = t} |t^2 - 4| = |t| + 1$$

t	-2	0	2
$t^2 - 4$	+	-	-
t	-	0	+

$$1) t \leq -2: t^2 - 4 = -t + 1 \Rightarrow t^2 + t - 5 = 0 \xrightarrow[\Delta = 21]{t \leq -2} t_1 = \frac{-1 - \sqrt{21}}{2}$$

$$2) -2 < t < 0: -t^2 + 4 = -t + 1 \Rightarrow t^2 - t - 3 = 0 \xrightarrow[\Delta = 13]{-2 < t < 0} t_2 = \frac{1 - \sqrt{13}}{2}$$

$$3) 0 \leq t \leq 2: -t^2 + 4 = t + 1 \Rightarrow t^2 + t - 3 = 0 \xrightarrow[\Delta = 13]{0 \leq t \leq 2} t_3 = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}$$

$$4) t > 2: t^2 - 4 = t + 1 \Rightarrow t^2 - t - 5 = 0 \xrightarrow[\Delta = 21]{t > 2} t_4 = \frac{1 + \sqrt{21}}{2}$$

بنابراین:

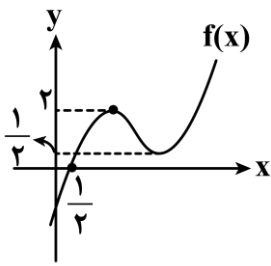
$$\frac{-1 - \sqrt{21}}{2} + \frac{1 - \sqrt{13}}{2} + \frac{-1 + \sqrt{13}}{2} + \frac{1 + \sqrt{21}}{2} = 0 \Rightarrow t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 0 \Rightarrow x_1 - 2 + x_2 - 2 + x_3 - 2 + x_4 - 2 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8$$

دام تستی!

اگر به «مجموع» دقت نکنید و تنها «تعداد» ریشه‌ها را بشمارید در دام گزینه ۳ می‌افتید!





۱۹- نمودار $y=f(x)$ رسم شده است. اگر $g(x)=|x-1|$ باشد، معادله $\text{fogof}(x)=0$ چند ریشه متمایز دارد؟

- (۱) ۳
(۲) ۴
(۳) ۵
(۴) ۶

پاسخ: گزینه ۳

سخت - مفهومی - استاندارد (۶) - حسابان ۱ صفحه ۶۷ - ۱۱۰۲

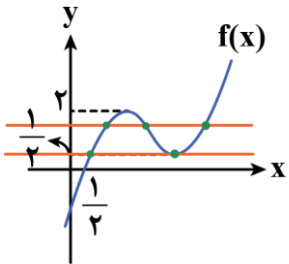
$$\text{fogof}(x)=0 \Rightarrow f(g(f(x)))=0$$

معادله را مرحله به مرحله حل می‌کنیم:

با توجه به نمودار فقط $f(\frac{1}{2})$ برابر صفر است، بنابراین:

$$g(f(x))=\frac{1}{2} \Rightarrow |f(x)-1|=\frac{1}{2} \Rightarrow f(x)-1=\pm\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} f(x)=\frac{3}{2} \\ f(x)=\frac{1}{2} \end{cases}$$

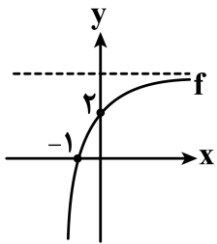
خط $y=\frac{3}{2}$ نمودار f را در ۳ نقطه و خط $y=\frac{1}{2}$ نمودار f را در ۲ نقطه متمایز قطع می‌کنند، بنابراین معادله مجموعاً ۵ ریشه متمایز دارد.



•• ای ••

۲۰- نمودار تابع $f(x)=3+k \cdot 2^{ax+b}$ به صورت مقابل است. $f(1)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{17}{6}$
(۲) $\frac{7}{3}$
(۳) $\frac{8}{3}$
(۴) $\frac{13}{6}$



پاسخ: گزینه ۳

متوسط - مفهومی - استاندارد (۶) - حسابان ۱ صفحه ۷۵ - ۱۱۰۳

دو شرط $f(0)=2$ و $f(-1)=0$ را بررسی می‌کنیم.

$$f(0)=2 \Rightarrow 3+k \times 2^b=2 \Rightarrow k \times 2^b=-1 \quad (۱)$$

$$f(-1)=0 \Rightarrow 3+k \times 2^{-a+b}=0 \xrightarrow{(۱)} 3+2^{-a} \times \underbrace{k \times 2^b}_{-1}=0 \Rightarrow 2^{-a}=3 \Rightarrow 2^a=\frac{1}{3} \quad (۲)$$

$$f(1)=3+k \times 2^{a+b} \stackrel{(۱),(۲)}{=} 3+\underbrace{2^a}_{\frac{1}{3}} \times \underbrace{k \times 2^b}_{-1}=3-\frac{1}{3}=\frac{8}{3}$$

•• ای ••

۲۱- مجموعه جواب نامعادله $(\frac{5}{2})^{3-x^2} > (\frac{16}{5})^{2x+1}$ شامل چند عدد صحیح است؟

(۴) ۶

(۳) ۵

(۲) ۴

(۱) ۳

(متوسط - مفهومی - استاندارد) - حسابان ۱ صفحه ۷۷ - ۱۱۰۳

پاسخ: گزینه ۳

$$\left(\frac{5}{2}\right)^{3-x^2} > \left(\frac{16}{5}\right)^{2x+1}$$

ابتدا پایه‌ها را در دو طرف نامساوی یکسان می‌کنیم:

$$\Rightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^{x^2-3} > \left(\frac{4}{25}\right)^{2x+1} \Rightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^{x^2-3} > \left(\frac{2}{5}\right)^{4x+2} \xrightarrow{0 < \frac{2}{5} < 1} x^2 - 3 < 4x + 2$$

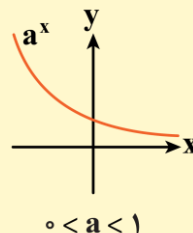
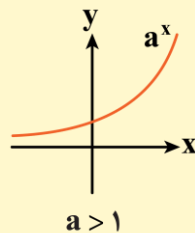
$$\Rightarrow x^2 - 4x - 5 < 0 \Rightarrow (x-5)(x+1) < 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -1 < x < 5$$

مجموعه جواب حاصل شامل ۵ عدد صحیح ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ است.

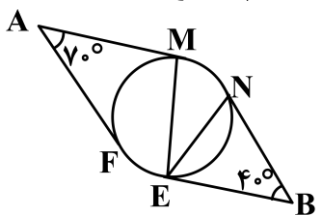
حل نامعادلات نمایی

(۱) اگر $0 < a < 1$ باشد، در تابع $y = a^x$ هر چه به سمت x های بزرگ‌تر می‌رویم مقادیر کوچک‌تری می‌گیریم، بنابراین اگر $a^u < a^v$ ، آن‌گاه $u > v$ است.

(۲) اگر $a > 1$ باشد، در تابع $y = a^x$ هر چه به سمت x های بزرگ‌تر می‌رویم مقادیر بزرگ‌تری می‌گیریم، بنابراین اگر $a^u < a^v$ ، آن‌گاه $u < v$ است.



۲۲- در شکل مقابل، اضلاع زاویه‌های $\hat{A}$ و $\hat{B}$ بر دایره مماس‌اند. اگر وتر EF برابر شعاع دایره باشد، زاویه $\hat{MEN}$ چند درجه است؟

(۱) 50° (۲) 55° (۳) $27/5^\circ$ (۴) 25°

(متوسط - مفهومی - استاندارد) - هندسه ۲ صفحه ۱۷ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۴

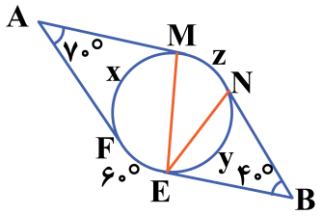
روش اول

طول وتر EF برابر شعاع دایره است، پس اندازه کمان $\widehat{EF}$ برابر 60° است، زیرا اگر از مرکز دایره به نقاط E و F وصل کنیم، مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع شعاع دایره ایجاد می‌شود. با توجه به شکل می‌نویسیم:

$$\left. \begin{aligned} 70^\circ &= \frac{z + y + 60^\circ - x}{2} \\ 40^\circ &= \frac{z + x + 60^\circ - y}{2} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{جمع کنیم}} 110^\circ = \frac{2z + 120^\circ}{2} \Rightarrow 110^\circ = z + 60^\circ \Rightarrow z = 50^\circ$$

بنابراین:

$$\hat{MEN} = \frac{z}{2} = 25^\circ \quad \text{زاویه محاطی}$$



از آن جایی که طول وتر EF برابر شعاع دایره است، پس اندازه کمان EF برابر 60° می باشد و مطابق نکته انتهای سؤال داریم:

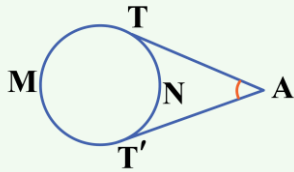
$$x + 70^\circ = 180^\circ \Rightarrow x = 110^\circ$$

$$y + 40^\circ = 180^\circ \Rightarrow y = 140^\circ$$

$$x + \widehat{EF} + y + z = 360^\circ \Rightarrow 110^\circ + 60^\circ + 140^\circ + z = 360^\circ \Rightarrow z = 50^\circ \Rightarrow \widehat{MEN} = \frac{50^\circ}{2} = 25^\circ$$

 نکته حیاتی از دایره

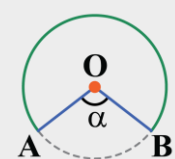
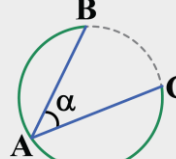
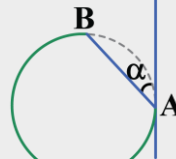
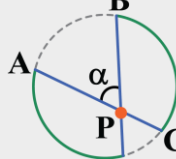
مطابق شکل زیر، اگر AT و AT' بر دایره مماس باشند:

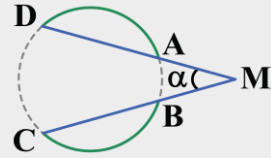
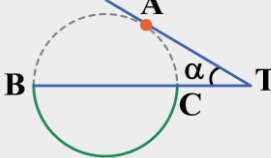
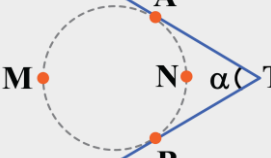


$$\widehat{TNT'} + \hat{A} = 180^\circ$$

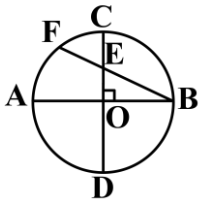
$$\widehat{TMT'} - \hat{A} = 180^\circ$$

 جمع بندی تمام زاویه های مربوط به دایره

زاویه مرکزی	زاویه محاطی	زاویه ظلی	زاویه بین دو وتر
برابر با کمان مقابل	برابر با نصف کمان مقابل	برابر با نصف کمان مقابل	نصف مجموع کمان های مقابل
			
$\alpha = \widehat{AB}$	$\alpha = \frac{\widehat{BC}}{2}$	$\alpha = \frac{\widehat{AB}}{2}$	$\alpha = \frac{\widehat{AB} + \widehat{CD}}{2}$

زاویه بین امتداد دو وتر	زاویه بین وتر و مماس	زاویه بین دو مماس
نصف تفاضل کمان های مقابل	نصف تفاضل کمان های مقابل	نصف تفاضل کمان های مقابل
		
$\alpha = \frac{\widehat{CD} - \widehat{AB}}{2}$	$\alpha = \frac{\widehat{AB} - \widehat{AC}}{2}$	$\alpha = \frac{\widehat{AMB} - \widehat{ANB}}{2}$

۲۲- مطابق شکل زیر، دو قطر AB و CD از دایره بر هم عمودند. اگر $BE = 2\sqrt{2}$ و $EF = \sqrt{2}$ باشد، آن‌گاه مساحت دایره برابر کدام است؟



(۱) 6π

(۲) 36π

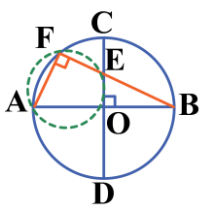
(۳) 8π

(۴) 12π

(متوسط - ترکیبی - استاندارد) - هندسه ۲ صفحه ۲۷ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۱

روش اول



از A به F وصل می‌کنیم، در این صورت زاویه $\hat{F}$ محاطی روبه‌رو به قطر AB بوده، پس $\hat{F} = 90^\circ$ است. در نتیجه زوایای مقابل چهارضلعی AFEO مکمل‌اند، پس این چهارضلعی محاطی است.

با رسم دایره محیطی این چهارضلعی و با استفاده از رابطه طولی در دایره می‌نویسیم:

$$BE \times BF = BO \times AB \xrightarrow{BO=R} 2\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = R \times 2R \Rightarrow R^2 = 6$$

بنابراین مساحت دایره $\pi R^2 = 6\pi$ است.

روش دوم

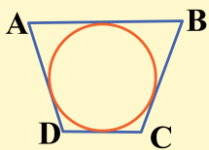
دو مثلث قائم‌الزاویه OEB و ABF متشابه‌اند. با نوشتن نسبت اضلاع آن‌ها داریم:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{O} = \hat{F} \\ \hat{B} = \hat{B} \end{array} \right\} \xrightarrow{(ز)} \triangle OEB \sim \triangle ABF \Rightarrow \frac{OB}{FB} = \frac{BE}{AB} \Rightarrow \frac{R}{3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2R}$$

$$R^2 = 6 \Rightarrow S_{\text{دایره}} = \pi R^2 = 6\pi$$

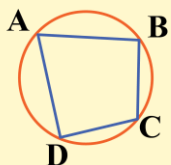
توی چهارضلعی‌های محیطی و محاطی چه اتفاقی می‌فته؟

در چهارضلعی محیطی، جمع اضلاع روبه‌رو با هم برابرند.



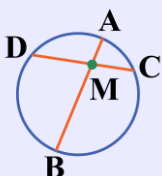
$$AB + CD = AD + BC$$

در چهارضلعی محاطی، زاویه‌های مقابل مکمل یکدیگرند.

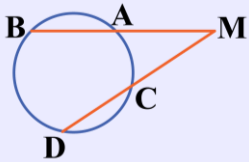


$$\hat{A} + \hat{C} = \hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$$

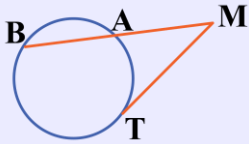
روابط طولی در دایره



$$MA \times MB = MC \times MD$$



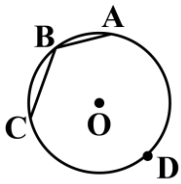
$$MA \times MB = MC \times MD$$



$$MA \times MB = MT^2$$



۲۴- در دایره به مرکز O و شعاع $\frac{15}{\pi}$ ، یک ضلع از ده ضلعی منتظم محاط در دایره و BC یک ضلع از شش ضلعی منتظم محاط در دایره است. طول کمان $\widehat{ADC}$ برابر کدام است؟



(۱) ۱۱

(۲) ۱۳

(۳) ۲۲

(۴) ۲۶

(متوسط - ترکیبی - استاندارد) - هندسه ۲ صفحه ۲۹ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۳

می‌دانیم هر n ضلعی منتظم دایره را به n کمان مساوی تقسیم می‌کند، پس $\widehat{AB} = \frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$ و $\widehat{BC} = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$ ، در نتیجه

$$\widehat{ABC} = 36^\circ + 60^\circ = 96^\circ \text{ پس:}$$

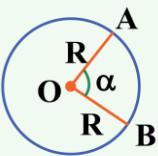
$$\widehat{ADC} = 360^\circ - 96^\circ = 264^\circ$$

$$\widehat{ADC} \text{ کمان} = \frac{264^\circ}{360^\circ} \times 2\pi \left(\frac{15}{\pi}\right) = 22$$

بنابراین:

طول کمان

برای محاسبه طول کمانی از دایره که شعاع آن R و روبه‌رو به زاویه α (برحسب درجه) باشد، به صورت زیر عمل می‌کنیم:



$$\widehat{AB} = \frac{\alpha}{360^\circ} \times (2\pi R)$$



۲۵- دو دایره $C(O, 5)$ و $C'(O', 5)$ مفروض‌اند. اگر $OO' = 5$ باشد، آن‌گاه چند محور بازتاب وجود دارد به‌طوری که یکی از دو دایره را بر دیگری تصویر کند؟

(۴) بی‌شمار

(۳) ۲

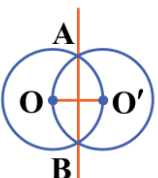
(۲) ۱

(۱) هیچ

(آسان - ترکیبی - سریع) - هندسه ۲ صفحه ۳۵ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۲

دو دایره C' و C در نقاط A و B متقاطع‌اند، زیرا $|R - R'| < OO' < R + R'$.



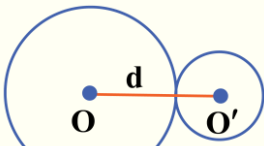
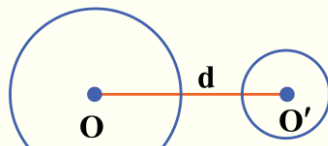
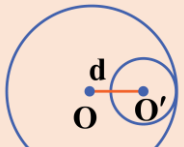
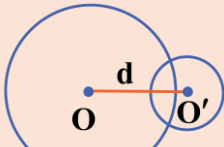
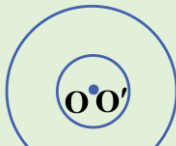
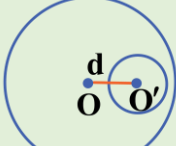
پس این دو دایره فقط نسبت به خط AB بازتاب یکدیگر هستند. توجه کنید در واقع خط AB عمود منصف OO' است.

دقت!

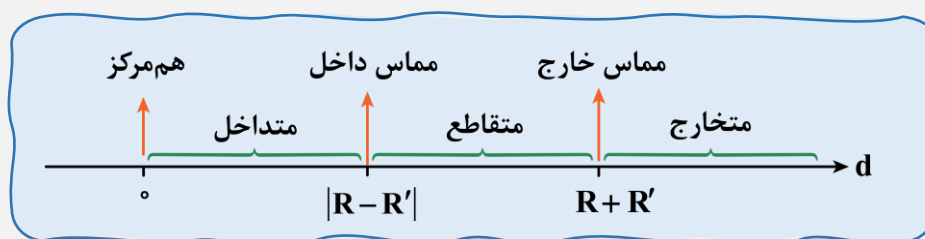
شاید تصور کنید خط OO' هم می‌تواند جواب این سؤال باشد، اما نادرست است. زیرا OO' محور تقارن این شکل است ولی دو دایره به نسبت OO' بازتاب یکدیگر نیستند. یعنی دایره C بازتاب دایره C' نسبت به خط OO' نیست.

وضعیت دو دایره نسبت به هم

دو دایره C و C' دارای وضعیت‌های زیر نسبت به هم هستند:

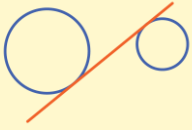
۲. مماس خارج  $d = R + R'$ ۱ = تعداد مماس مشترک داخلی ۲ = تعداد مماس مشترک خارجی	۱. متخارج  $d > R + R'$ ۲ = تعداد مماس مشترک داخلی ۲ = تعداد مماس مشترک خارجی
۴. مماس داخل  $d = R - R'$ ۰ = تعداد مماس مشترک داخلی ۱ = تعداد مماس مشترک خارجی	۳. متقاطع  $R - R' < d < R + R'$ ۰ = تعداد مماس مشترک داخلی ۲ = تعداد مماس مشترک خارجی
۶. هم‌مرکز  $d = ۰$ ۰ = تعداد مماس مشترک داخلی ۰ = تعداد مماس مشترک خارجی	۵. متداخل  $d < R - R'$ ۰ = تعداد مماس مشترک داخلی ۰ = تعداد مماس مشترک خارجی

وضعیت دو دایره در یک نگاه

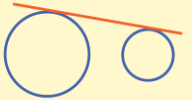


مماس مشترک دو دایره

مماس مشترک داخلی یعنی خط مماسی که هر کدام از دایره‌ها در یک طرف آن واقع هستند.

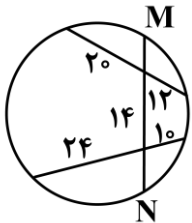


مماس مشترک خارجی یعنی خط مماسی که هر دو دایره در یک طرف آن واقع هستند.



۲۶- در دایره شکل مقابل، طول وتر MN برابر کدام است؟

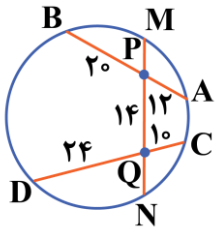
- (۱) ۱۷
(۲) ۲۴
(۳) ۳۴
(۴) ۳۸



(متوسط - خط به خط - استاندارد) - هندسه ۲ صفحه ۱۸ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۳

با استفاده از روابط طولی در دایره می‌نویسیم:



$$\left. \begin{aligned} AP \times BP &= MP \times PN \Rightarrow 12 \times 20 = MP(14 + QN) \\ CQ \times DQ &= QN \times QM \Rightarrow 10 \times 24 = QN(14 + MP) \end{aligned} \right\} \Rightarrow MP(14 + QN) = QN(14 + MP)$$

$$\Rightarrow 14MP + MP \times QN = 14NQ + MP \times QN \Rightarrow MP = QN$$

بنابراین:

$$12 \times 20 = MP(14 + MP) \Rightarrow MP^2 + 14MP - 240 = 0$$

$$\Rightarrow (MP + 24)(MP - 10) = 0 \Rightarrow \begin{cases} MP + 24 = 0 \Rightarrow MP = -24 \\ MP - 10 = 0 \Rightarrow MP = 10 \end{cases}$$

$$MN = 10 + 14 + 10 = 34$$

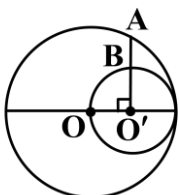
در نتیجه $QN = MP = 10$ می‌باشد، پس:



۲۷- در شکل مقابل، دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ مماس داخل هستند. اگر AO' عمود بر OO' و $AB = 9 - 3\sqrt{3}$ باشد، آن‌گاه حاصل

$R + R'$ برابر کدام است؟

- (۱) $6\sqrt{3}$
(۲) $8\sqrt{3}$
(۳) $9\sqrt{3}$
(۴) $12\sqrt{3}$



با توجه به شکل، چون دو سر یک قطر دایره C' روی شعاع دایره C قرار دارد، پس $R = 2R'$ است. اکنون در مثلث قائم‌الزاویه AOO' می‌نویسیم:

$$OA^2 = OO'^2 + O'A^2 \xrightarrow{OA=R, OO'=R', O'A=AB+R'} R^2 = R'^2 + (R' + AB)^2$$

$$\Rightarrow (2R')^2 = R'^2 + (R' + 9 - 3\sqrt{3})^2 \Rightarrow 3R'^2 = (R' + 9 - 3\sqrt{3})^2$$

$$\xrightarrow{\text{جذر}} \sqrt{3}R' = R' + 9 - 3\sqrt{3} \Rightarrow (\sqrt{3} - 1)R' = 3\sqrt{3}(\sqrt{3} - 1) \Rightarrow R' = 3\sqrt{3} \Rightarrow R = 6\sqrt{3}$$

$$R + R' = 6\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$$

بنابراین:



۲۸- در مثلث ABC نقطه H پای ارتفاع وارد بر ضلع BC است. اگر A' بازتاب رأس A نسبت به عمودمنصف BC باشد و چهارضلعی $ABCA'$ محیطی شود، با فرض $BC = 9$ و $BH = 2/5$ ، مساحت چهارضلعی $ABCA'$ برابر کدام است؟

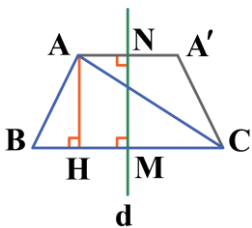
۳۹ (۴)

۳۴ (۳)

۳۲ (۲)

۳۶ (۱)

در شکل مقابل، خط d عمودمنصف BC است پس در واقع C بازتاب B نسبت به خط d است و A' بازتاب A نسبت به خط d می‌باشد.



$$A'C = AB$$

چون بازتاب، تبدیلی ایزومتری است، داریم:

بنابراین چهارضلعی $ABCA'$ دوزنقه متساوی‌الساقین است، بنابر فرض این دوزنقه محیطی هم هست که مساحت آن به‌صورت زیر به دست می‌آید:

واسطه حسابی دو قاعده $\times$ واسطه هندسی دو قاعده = مساحت دوزنقه متساوی‌الساقین محیطی

از طرف دیگر، چهارضلعی $ANMH$ مستطیل است، پس:

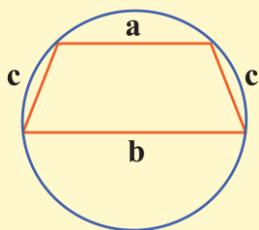
$$AN = MH = BM - BH = \frac{BC}{2} - BH = \frac{9}{2} - \frac{5}{2} = 2 \Rightarrow AA' = 2AN = 4$$

$$S_{ABCA'} = \sqrt{AA' \times BC} \times \frac{AA' + BC}{2} = \sqrt{4 \times 9} \times \frac{4 + 9}{2} = 6 \times \frac{13}{2} = 39$$

بنابراین:

دوزنقه محاطی و محیطی

۱) هر دوزنقه محاطی حتماً متساوی‌الساقین است و برعکس اگر دوزنقه‌ای متساوی‌الساقین باشد، حتماً محاطی است. (زیرا وترهای بین دو خط موازی در دایره با هم برابرند.)



۲) در دوزنقه‌های متساوی‌الساقین که محیطی هم باشند، داریم:

$$a + b = c + c \Rightarrow c = \frac{a + b}{2}$$

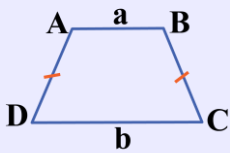
یعنی طول ساق واسطه حسابی قاعده‌ها است.

همچنین طول ارتفاع دوزنقه واسطه هندسی قاعده‌ها است، یعنی:

$$h = \sqrt{ab}$$

مساحت دوزنقه محاطی و محیطی

اگر یک دوزنقه هم محیطی و هم محاطی (متساوی‌الساقین) باشد، آن‌گاه مساحت آن برابر حاصل ضرب واسطه حسابی دو قاعده در واسطه هندسی دو قاعده است.



$$S_{ABCD} = \frac{a + b}{2} \times \sqrt{ab}$$



۲۹- اگر ارزش گزاره $(p \wedge q) \Rightarrow \sim r$ نادرست باشد، ارزش گزاره $p \Rightarrow (r \Rightarrow \sim q)$ با ارزش کدام گزاره یکسان است؟

- (۱) $r \Leftrightarrow p$ (۲) $\sim r \Rightarrow (p \vee q)$ (۳) $\sim p \Rightarrow (q \wedge r)$ (۴) $r \Rightarrow \sim q$

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - آمار و احتمال صفحه ۹ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۴

ابتدا از داده سؤال استفاده می‌کنیم و تا جای ممکن ارزش گزاره‌های ساده p ، q و r را تعیین می‌کنیم:

$$(p \wedge q) \Rightarrow \sim r \equiv F \xrightarrow{\text{مقدم} \equiv T, \text{تالی} \equiv F} \begin{cases} p \wedge q \equiv T \rightarrow p \equiv T, q \equiv T \\ \sim r \equiv F \rightarrow r \equiv T \end{cases}$$

حال ارزش گزاره داده شده را با توجه به این که $r \equiv T$ و $q \equiv T$ ، $p \equiv T$ است، مشخص می‌کنیم:

$$\begin{matrix} T & T & F \\ p & \Rightarrow & (r \Rightarrow \sim q) \end{matrix} \xrightarrow{\quad} \begin{matrix} T & F \\ p & \Rightarrow & (r \Rightarrow \sim q) \end{matrix} \equiv F$$

بررسی گزینه‌ها:

با ارزش‌گذاری گزینه‌ها داریم:

$$\begin{matrix} T & T \\ r & \Leftrightarrow p \end{matrix} \equiv T$$

$$\begin{matrix} F & T & T \\ \sim r & \Rightarrow & (p \vee q) \end{matrix} \equiv T$$

$$\begin{matrix} F & T & T \\ \sim p & \Rightarrow & (q \wedge r) \end{matrix} \equiv T$$

$$\begin{matrix} T & F \\ r & \Rightarrow \sim q \end{matrix} \equiv F$$

در نتیجه تنها ارزش گزاره $r \Rightarrow \sim q$ مانند گزاره $p \Rightarrow (r \Rightarrow \sim q)$ نادرست است.

 جدول ارزشی ترکیب فصلی، عطفی، شرطی و دو شرطی

p	q	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

p	q	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

p	q	$p \Leftrightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	د

 مهم‌ترین دانسته‌های ترکیب فصلی

۱) ارزش ترکیب فصلی دو گزاره تنها زمانی نادرست است که هر دو نادرست باشند.

$$p \vee q \equiv F \longrightarrow p \equiv q \equiv F$$

۲) اگر حداقل یکی از گزاره‌ها در ترکیب فصلی درست باشد ارزش کل ترکیب فصلی درست است.

 مهم‌ترین دانسته‌های ترکیب عطفی

۱) ارزش ترکیب عطفی دو گزاره تنها زمانی درست است که هر دو درست باشند.

$$p \wedge q \equiv T \longrightarrow p \equiv q \equiv T$$

۲) اگر حداقل یکی از گزاره‌ها در ترکیب عطفی نادرست باشد ارزش کل ترکیب عطفی نادرست است.

 مهم‌ترین دانسته‌های ترکیب شرطی و دوشروطی

۱) ارزش ترکیب شرطی تنها زمانی نادرست است که مقدم درست و تالی نادرست باشد.

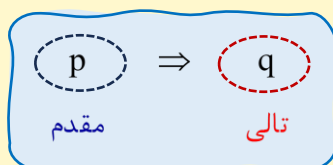
۲) ارزش ترکیب دوشروطی زمانی نادرست است که دو گزاره ارزش‌های متفاوت داشته باشند.

 حالت‌های خاص گزاره شرطی

در ترکیب شرطی دو گزاره اگر:

۱) ارزش تالی درست باشد، ارزش کل گزاره درست است.

۲) ارزش مقدم نادرست باشد، ارزش کل گزاره درست است.



در حالت دوم گوییم، ارزش گزاره شرطی «به انتفای مقدم» درست است.

 هم‌ارزی‌های مهم در گزاره‌ها

گزاره‌های همواره درست یا همواره نادرست	
$p \vee \sim p \equiv T$	$p \vee T \equiv T$
$p \wedge \sim p \equiv F$	$p \wedge F \equiv F$

نقیض ترکیب فصلی و عطفی (قوانین دمورگان)

$$\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

$$\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

قوانین ترکیب‌های فصلی و عطفی

$$\begin{cases} p \vee p \equiv p \\ p \wedge p \equiv p \end{cases} \quad \text{خودتوانی}$$

$$\begin{cases} p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r \\ p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r \end{cases} \quad \text{شرکت‌پذیری}$$

$$\begin{cases} p \vee (p \wedge q) \equiv p \\ p \wedge (p \vee q) \equiv p \end{cases} \quad \text{جذب}$$

$$\begin{cases} p \vee q \equiv q \vee p \\ p \wedge q \equiv q \wedge p \end{cases} \quad \text{جاب‌جایی}$$

$$\begin{cases} p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \\ p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \end{cases} \quad \text{توزیع‌پذیری}$$

$$\begin{cases} p \vee (\sim p \wedge q) \equiv p \vee q \\ p \wedge (\sim p \vee q) \equiv p \wedge q \end{cases} \quad \text{هم‌پوشانی}$$



۳۰- اگر ارزش گزاره $p \Leftrightarrow (q \wedge r)$ درست باشد، احتمال آن‌که ارزش گزاره‌های p و r همزمان درست باشند، کدام است؟

$$\frac{1}{6} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{4} \quad (۳)$$

$$\frac{2}{5} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{5} \quad (۱)$$

(متوسط - ترکیبی - زمان‌بر) - آمار و احتمال صفحه ۱۰ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۳

روش اول

چون ارزش گزاره $p \Leftrightarrow (q \wedge r)$ درست است، پس گزاره‌های p و $q \wedge r$ هم‌ارزش هستند. حال هر دو حالت ممکن را بررسی می‌کنیم:

$$p \equiv T, q \wedge r \equiv T \longrightarrow p \equiv T, q \equiv T, r \equiv T$$

$$p \equiv F, q \wedge r \equiv F \begin{cases} p \equiv F, q \equiv F, r \equiv T \\ p \equiv F, q \equiv T, r \equiv F \\ p \equiv F, q \equiv F, r \equiv F \end{cases}$$

$$P(\text{مطلوب}) = \frac{1}{4}$$

از بین ۴ حالت موجود تنها در ۱ حالت هر دو گزاره p و r همزمان درست هستند. احتمال مطلوب برابر است با:

روش دوم

مطابق جدول ارزش‌ها در ۴ حالت ارزش گزاره $p \Leftrightarrow (q \wedge r)$ درست است و در یک حالت از این ۴ حالت p و r همزمان درست هستند.

p	q	r	$q \wedge r$	$p \Leftrightarrow (q \wedge r)$
د	د	د	د	د
د	د	ن	ن	ن
د	ن	د	ن	ن
د	ن	ن	ن	ن
ن	د	د	د	ن
ن	د	ن	ن	د
ن	ن	د	ن	د
ن	ن	ن	ن	د

بنابراین احتمال مورد نظر برابر با $\frac{1}{4}$ است.

دام تستی!

اگر اشتباهی ترکیب دوشروطی را ترکیب شرطی ببینید، در دام گزینه ۱ می افتید!



۳۱- متمم مجموعه $(A' \cap (A' \cup B)) \cup ((A - B)' - B)$ کدام است؟

۴) A

۳) $B \cap A$

۲) A'

۱) U

(آسان - محاسباتی - استاندارد) - آمار و احتمال صفحه ۲۹ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۴

قانون جذب
 $A' \cap (A' \cup B) = A' \quad (۱)$

قانون تفاضل
 دموگران
 $(A - B)' - B = (A \cap B)' \cap B' = (A' \cup B) \cap B' = (A' \cap B') \cup (B \cap B') = A' \cap B' \quad (۲)$

جذب
 متمم
 $(۱), (۲) \Rightarrow (A' \cap (A' \cup B)) \cup ((A - B)' - B) = A' \cup (A' \cap B') = A' \xrightarrow{\text{متمم}} A$

دام تستی!

اگر در انتها متمم نگیرید، در دام گزینه ۲ می افتید!

قوانین مجموعه ها

اگر U مجموعه مرجع و A، B و C زیرمجموعه های آن باشند؛ داریم:

تبدیل تفاضل به اشتراک (قانون تفاضل):
 $\underbrace{A - B}_{A - (A \cap B)} = A \cap B'$

جابه جایی:
 $\begin{cases} A \cup B = B \cup A \\ A \cap B = B \cap A \end{cases}$

توزیع پذیری:
 $\begin{cases} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{cases}$

قانون جذب:
 $\begin{cases} A \cap (A \cup B) = A \\ A \cup (A \cap B) = A \end{cases}$

قوانین دموگران:
 $\begin{cases} A' \cap B' = (A \cup B)' \\ A' \cup B' = (A \cap B)' \end{cases}$

شرکت پذیری:
 $\begin{cases} (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \\ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \end{cases}$



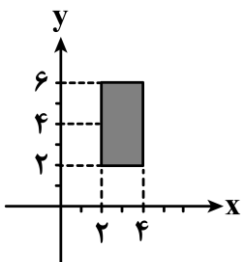
۳۲- اگر نمودار $B \times A$ به صورت مقابل باشد، مساحت مربوط به مجموعه $(A \times A) \cap (B \times B)$ کدام است؟

۱) ۶

۲) $\frac{15}{2}$

۳) $\frac{9}{2}$

۴) ۴



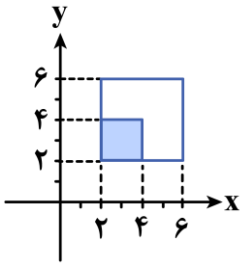
با توجه به نمودار $B \times A$ و تعریف آن داریم:

$$B \times A = \{(x, y) | x \in B, y \in A\} \Rightarrow \begin{cases} 2 \leq x \leq 4 \\ 2 \leq y \leq 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \{x | x \in \mathbb{R}, 2 \leq x \leq 6\} \\ B = \{x | x \in \mathbb{R}, 2 \leq x \leq 4\} \end{cases}$$

$$A \times A = \{(x, y) | 2 \leq x \leq 6, 2 \leq y \leq 6\}$$

$$B \times B = \{(x, y) | 2 \leq x \leq 4, 2 \leq y \leq 4\}$$

با رسم نمودار مجموعه $(A \times A) \cap (B \times B)$ مشخص است که نمودار حاصل سطح یک مربع 2×2 می شود، پس مساحت آن $S = 4$ است.



ضرب دکارتی دو مجموعه

برای هر دو مجموعه A و B ضرب دکارتی آن‌ها به صورت زیر تعریف می شود:

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A \wedge y \in B\}$$

نمایش ضرب دکارتی روی محورهای مختصات

ابتدا مجموعه A را روی محور x ها، و مجموعه B را روی محور y ها مشخص می کنیم. سپس هر دو را در امتداد محور دیگر ادامه می دهیم. محل تلاقی هر دو ناحیه ذکر شده همان $A \times B$ است.

خواص ضرب دکارتی

(۱) ضرب دکارتی خاصیت جابه جایی ندارد.

$$A \times B \neq B \times A$$

(۲)

$$(A - C) \times B = A \times B - C \times B$$

$$(A \cup C) \times B = (A \times B) \cup (C \times B)$$

$$(A \times B) \cap (B \times A) = (A \cap B) \times (B \cap A) = (A \cap B)^2$$



۳۳- از بین اعداد طبیعی ۴ رقمی به تصادف یک عدد برمی داریم. با کدام احتمال لااقل یک بار رقم ۵ ظاهر می شود؟

۰/۴۵۲ (۴)

۰/۳۵۲ (۳)

۰/۳۲۰ (۲)

۰/۲۵۵ (۱)

(متوسط - مفهومی - استاندارد) - آمار و احتمال صفحه ۴۱ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۳

اگر A پیشامد حداقل یکبار ظاهر شدن عدد ۵ باشد، داریم:

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{8 \times 9 \times 9 \times 9}{9 \times 10 \times 10 \times 10} = 1 - \frac{8 \times 9 \times 9}{10^3} = 1 - \frac{648}{1000} = 0/352$$

↓
اصلاً ظاهر نشود

قلقشو یاد بگیر!

بسیاری از اوقات استفاده از روش متمم سریعتر از استفاده از روش مستقیم است. همان طور که در این سؤال هم مشاهده شد روش مستقیم می تواند به مراتب خیلی طولانی تر و با خطای بیشتر همراه باشد. پس با تعریف درست پیشامدها و استفاده از اطلاعات مسئله می توانیم با روش احتمال متمم سریعتر به جواب برسیم.



۳۴- در پرتاب ۲ تاس همزمان احتمال آن که فقط یکی از تاس ها مضرب ۳ باشد و مجموع دو تاس مضرب ۵ نشود، کدام است؟

$\frac{1}{3}$ (۴)

$\frac{17}{36}$ (۳)

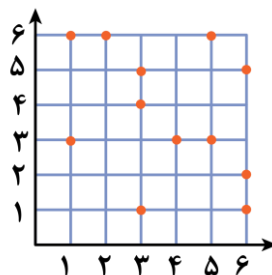
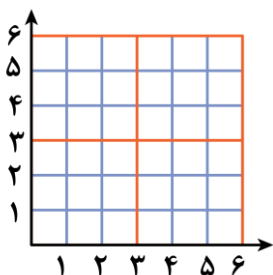
$\frac{7}{18}$ (۲)

$\frac{5}{18}$ (۱)

(سخت - مفهومی - استاندارد) - آمار و احتمال صفحه ۴۰ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۴

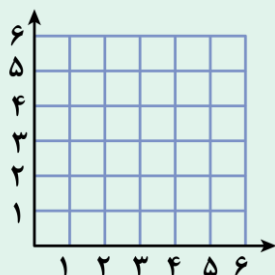
مطابق نمودار مقابل نقاط مشخص شده همان حالت های مطلوب است. ابتدا چون می دانیم که دقیقاً یکی از تاس ها باید مضرب ۳ باشد خطوط روی ۳ و ۶ را در نظر می گیریم، در عین حال چون فقط یکی مضرب ۳ است محل تلاقی این ۴ خط قطعاً مد نظر نیست. سپس تک تک نقاط دیگر روی این ۴ خط را بررسی می کنیم و اگر جمع دو مؤلفه آن مضرب ۵ نباشد آن را قبول می کنیم.



$$P(A) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

قلقشو یاد بگیر!

یک روش سریع برای تعیین تعداد حالت های مطلوب در پرتاب دو تاس استفاده از مربع 6×6 است که هر نقطه آن متناظر یک حالت از پرتاب دو تاس است. به عنوان مثال نقطه (i, j) متناظر این است که تاس اول i بیاید و تاس دوم j بیاید.



۳۵- اگر در فضای نمونه‌ای $\{a, b, c, d\}$ داشته باشیم $P(a) = 2P(\{b, c\})$ و $P(c) = 2P(b)$ و $P(d) = 0/1$ ، احتمال وقوع پیشامد $\{b, c\}$ کدام است؟

۰/۲ (۴)

۰/۲۵ (۳)

۰/۳ (۲)

۰/۴ (۱)

(آسان - محاسباتی - استاندارد) - آمار و احتمال صفحه ۴۶ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۲

اگر فرض کنیم $P(b) = x$ ، آن‌گاه: $P(c) = 2x$.

$$P(a) = 2P(\{b, c\}) = 2P(b) + 2P(c) \Rightarrow P(a) = 2x + 4x = 6x$$

$$\xrightarrow{P(S)=1} P(a) + P(b) + P(c) + P(d) = 1 \Rightarrow 6x + x + 2x + 0/1 = 1 \Rightarrow 9x = 0/9 \Rightarrow x = 0/9$$

$$\Rightarrow P(\{b, c\}) = P(b) + P(c) = x + 2x = 3x = 0/3$$

احتمال غیرهم‌شانس

اگر $S = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ فضای نمونه‌ای متناهی باشد و S_i ها غیرهم‌شانس باشند (یعنی مثلاً احتمال وقوع S_1 با احتمال وقوع S_2 فرق داشته باشد) آن‌گاه S را فضای نمونه‌ای غیرهم‌شانس می‌گویند.
به زبون خودمون یعنی اعضای S شانس برابر نداشته باشند و شانسی یکی بیشتر از بقیه باشه!

در فضاهای نمونه‌ای غیرهم‌شانس داریم:

$$(1) P(S) = 1 \text{ یعنی:}$$

$$\sum_{i=1}^n P(S_i) = P(S_1) + P(S_2) + \dots + P(S_n) = 1$$

(به عبارت دیگه مجموع احتمال‌های فضای نمونه‌ای همیشه برابره یکه).

(۲) اگر A پیشامدی از فضای نمونه‌ای S باشد، یعنی $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\} \subseteq S$ ، آن‌گاه:

$$P(A) = P(\{a_1, \dots, a_m\}) = P(a_1) + P(a_2) + \dots + P(a_m)$$

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

در این صورت، چون $A \subseteq S$ بنابراین همواره:

یه نمونه باحال ببین!

در پرتاب تاس، اگر احتمال رو شدن اعداد زوج دو برابر اعداد فرد باشد، احتمال این‌که در پرتاب این تاس عددی اول بیاید چقدر است؟

پاسخ تشریحی:

$$P(1) = P(3) = P(5) = x, \quad P(2) = P(4) = P(6) = 2x$$

$$S = \{1, 2, \dots, 6\} \text{ فضای نمونه}$$

بنابراین داریم:

$$\sum_{i=1}^6 P(i) = P(1) + P(2) + \dots + P(6) = 1 \Rightarrow x + 2x + x + 2x + x + 2x = 1 \Rightarrow 9x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{9}$$

$$P(\text{یک عدد فرد}) = \frac{1}{9}, \quad P(\text{یک عدد زوج}) = \frac{2}{9}$$

$$A = \{2, 3, 5\}$$

و اگر A پیشامد اول بودن عدد ظاهرشده باشد، داریم:

$$P(A) = P(2) + P(3) + P(5) = 2x + x + x = 4x = 4\left(\frac{1}{9}\right) = \frac{4}{9}$$



برای دیدن پاسخنامه ویدئویی آزمون
بالا را اسکن یا روی آن کلیک کنید! QR Code

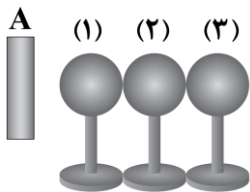
الکتریسیته ساکن + جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم (تا ابتدای توان در مدارهای الکتریکی)
صفحه‌های ۱ تا ۶۶

بودجه‌بندی
این آزمون

در مجموع ۵ تست از ۳۵ تست کنکور را پوشش داده است.

سهم در
کنکور

۳۶- مطابق شکل زیر، سه کره مشابه فلزی و خنثی بر روی پایه‌های عایق قرار دارند. میله A را با پارچه B مالش داده و به کره (۱) نزدیک می‌کنیم. در حضور میله A، کره‌های (۲) و (۳) را در حالی که با هم در تماس هستند از کره (۱) جدا کرده و میله را دور می‌کنیم. سپس کره (۲) را از کره (۳) جدا کرده و با کره (۱) تماس می‌دهیم. اگر بار نهایی کره (۱) برابر با $-2\mu\text{C}$ شود، بار نهایی کره (۳) میکروکولن می‌شود و در جدول سری الکتریسیته مالشی، میله A نسبت به پارچه B به (از) سر مثبت سری الکتریسیته مالشی، است.



- (۱) ۸- و نزدیک‌تر
(۲) ۴ و نزدیک‌تر
(۳) ۴- و دورتر
(۴) ۸ و دورتر

(متوسط - استدلالی - استاندارد) - صفحه ۴ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۲

گام اول

با نزدیک کردن میله A به کره رسانای (۱)، با توجه به القای بار الکتریکی، بارهای همانم با بار میله در نیمه سمت راست کره (۳) و بارهای ناهمنام با بار میله در نیمه سمت چپ کره (۱)، قرار می‌گیرند. می‌دانیم اندازه بار القاشده یکسان است، پس با فرض این که بار جذب شده به میله q باشد، پس بار دفع شده از میله برابر با $-q$ می‌شود.

گام دوم

وقتی در حضور میله، کره‌های (۲) و (۳) را در حالی که با هم در تماس هستند از کره (۱) جدا می‌کنیم، بار کره (۱) برابر با q شده و مجموع بار کره‌های (۲) و (۳) نیز برابر با $-q$ می‌شود.

گام سوم

حال اگر کره (۲) را از کره (۳) جدا کنیم، با توجه به مشابه بودن کره‌ها، بار کره (۲) برابر با $\frac{-q}{2}$ می‌شود.

گام چهارم

با تماس کره (۲) با بار $\frac{-q}{2}$ با کره (۱) با بار $+q$ ، با توجه به مشابه بودن دو کره، بار نهایی کره‌های (۱) و (۲) برابر با میانگین بارهایشان می‌شود:

$$(۱) \text{ بار نهایی کره } = \frac{q - \frac{q}{2}}{2} = \frac{q}{4} = -2 \Rightarrow q = -8\mu\text{C}$$

بنابراین:

$$(۳) \text{ بار نهایی کره } = \frac{-q}{2} = 4\mu\text{C}$$

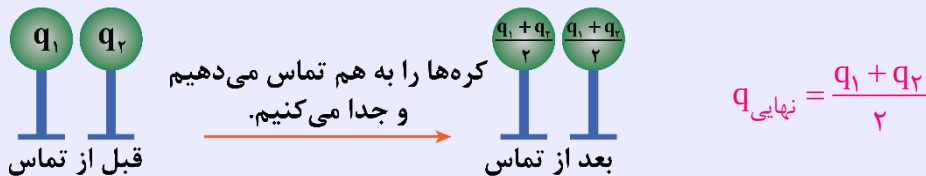
گام آخر

چون بار جذب شده به میله را q گرفته بودیم و $q < 0$ شد، پس میله A دارای بار مثبت بوده و نسبت به پارچه B به سر مثبت سری، نزدیک‌تر است.

بار الکتریکی

طبق قانون پایستگی بارهای الکتریکی، اگر چند جسم رسانا را به هم تماس دهیم، مجموع بار آن‌ها قبل از تماس با مجموع بار آن‌ها بعد از تماس، یکسان خواهد بود.

۱- هنگامی که دو کرهٔ رسانای **مشابه** را به هم تماس می‌دهیم، بار الکتریکی بین آن‌ها به گونه‌ای تقسیم می‌شود که بار نهایی دو کره با هم برابر باشد؛ بنابراین بار هر یک از کره‌ها پس از تماس برابر میانگین بار اولیهٔ آن‌ها خواهد بود.



۲- نتیجهٔ فوق برای تعداد بیشتری کرهٔ فلزی مشابه هم قابل تعمیم است. به طور کلی اگر n کرهٔ رسانای مشابه که دارای بارهای $q_1, q_2, \dots, q_n$ و q_n هستند را هم‌زمان به هم تماس دهیم، بار نهایی همهٔ آن‌ها برابر می‌شود با:

$$q_{\text{نهایی}} = \frac{q_1 + q_2 + \dots + q_n}{n}$$

یه نمونهٔ باحال

سه کرهٔ رسانای کوچک و مشابه A, B و C به ترتیب دارای بارهای الکتریکی -20 nC ، 10 nC و -8 nC هستند. ابتدا کرهٔ A را به کرهٔ C تماس می‌دهیم و جدا می‌کنیم و سپس کرهٔ B را به کرهٔ C تماس می‌دهیم و جدا می‌کنیم. اگر تعداد الکترون‌های جابه‌جاشده بین کره‌های A و C برابر n_1 و تعداد الکترون‌های جابه‌جاشده بین کره‌های B و C برابر n_2 باشد، نسبت $\frac{n_2}{n_1}$ چقدر است؟

پاسخ تشریحی:

ابتدا کره‌های A و C به هم متصل شده‌اند و بار آن‌ها پس از تماس برابر است با:

$$q'_A = q'_C = \frac{q_A + q_C}{2} = \frac{-20 - 8}{2} = -14 \text{ nC}$$

بنابراین $\Delta q_1 = |-14 - (-8)| = 6 \text{ nC}$ بار الکتریکی بین کره‌های A و C جابه‌جا شده است.

در ادامه کره‌های B و C را به هم متصل می‌کنیم و بار آن‌ها پس از تماس برابر است با:

$$q''_B = q'_C = \frac{q_B + q'_C}{2} = \frac{10 - 14}{2} = -2 \text{ nC}$$

بنابراین $\Delta q_2 = |-2 - 10| = 12 \text{ nC}$ بار الکتریکی بین دو کره جابه‌جا شده است.

در نهایت برای مقایسهٔ تعداد الکترون‌های جابه‌جاشده بین کره‌ها در دو حالت، کافی است بار جابه‌جاشده را مقایسه کنیم.

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\Delta q_2}{\Delta q_1} = \frac{12}{6} = 2$$

یادآوری

هنگامی که دو جسم را به هم مالش می‌دهیم تا باردار شوند، جسمی که الکترون خواه‌تر است (در جدول سری الکتریسیتهٔ مالشی (تریبو الکتریک) به انتهای منفی سری، نزدیک‌تر است)، الکترون می‌گیرد و بار آن منفی می‌شود. همچنین جسمی که الکترون‌خواهی کمتری دارد (در جدول سری الکتریسیتهٔ مالشی به انتهای مثبت سری، نزدیک‌تر است)، الکترون از دست می‌دهد و بار آن مثبت خواهد بود.

راهنمای مسیر

بچه‌ها این تست خلاقانه رو براتون طرح کردیم تا دو مفهوم مهم القا و تماس رو برای حل این تست استفاده کنید و مطمئن بشید که تمام نکات مربوط به این دو روش رو کامل بلدین. اگر نتوانستین این تست رو درست جواب بدین، حتماً گام‌های طی‌شده در پاسخنامه رو به دقت مطالعه کنید تا متوجه نقاط ضعفتون بشید و برای برطرف شدنشون تلاش کنید.

۳۷- چه تعداد از موارد مطرح شده زیر را می توان به کمک یک الکتروسکوپ انجام داد؟

الف- تشخیص باردار بودن جسم

ب- تشخیص نوع بار جسم

ج- تعیین رسانا یا نارسانا بودن یک جسم

۳ (۴)

۳ (۳) صفر

۱ (۲)

۲ (۱)

(آسان - خطبه خط - سریع - صفحه ۳ - ۱۱۰۱)

پاسخ: گزینه ۴

تمام موارد مطرح شده را می توان به کمک الکتروسکوپ انجام داد.



نکته

می توان کاربردهای زیر را برای الکتروسکوپ در نظر گرفت:

۱- تشخیص باردار بودن جسم: کافی است جسم را به کلاهک یک الکتروسکوپ خنثی نزدیک کنیم. اگر ورقه ها باز شوند، جسم، باردار است.

۲- تشخیص نوع بار جسم: کافی است جسم را به کلاهک یک الکتروسکوپ باردار که نوع بار آن را می دانیم، نزدیک کنیم. اگر فاصله ورقه ها بیشتر شد، بار جسم، هم علامت با بار الکتروسکوپ است و اگر فاصله ورقه ها کمتر شد، علامت بار جسم، مخالف علامت بار الکتروسکوپ است.

۳- تشخیص رسانا یا نارسانا بودن جسم: جسم را به کلاهک الکتروسکوپ باردار تماس می دهیم. اگر فاصله ورقه ها از هم تغییر محسوسی نکند، جسم، نارسانا است و اگر این فاصله تغییر کند، جسم، رسانا است.



راهنمای مسیر

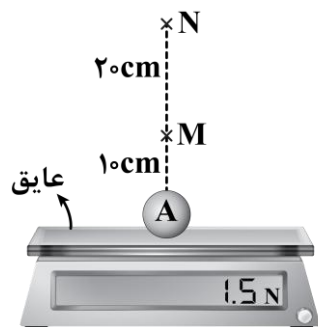
بچه ها دیگه انصافاً کاربردهای الکتروسکوپ رو حفظ باشید. چون برای امتحان نهایی هم می شه این تیپ سؤال رو طرح کرد.



۳۸- مطابق شکل زیر، کره فلزی کوچک A با بار الکتریکی $q_A = 5\mu C$ را بر روی یک ترازوی دیجیتال با سطح عایق قرار داده ایم و ترازو

عدد $1/5 N$ را نشان می دهد. اگر یک بار کره فلزی کوچک B با بار $q_B = 1\mu C$ را در نقطه M و یک بار هم کره فلزی کوچک C با بار

$q_C = -1\mu C$ را در نقطه N قرار دهیم، اختلاف مقادیر نشان داده شده توسط این ترازو در این دو حالت چند نیوتون می شود؟



$$(k = 9 \times 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2})$$

۶ / ۵ (۱)

۵ (۲)

۲ (۳)

۴ (۴)

(متوسط - محاسباتی - استاندارد - صفحه ۶ - ۱۱۰۱)

پاسخ: گزینه ۲

گام اول

در حالت اول، کره B با بار الکتریکی $q_B = 1\mu C$ را در نقطه M قرار می دهیم. چون بار کره ها همنام است، بنابراین نیروی الکتریکی وارد شده به کره A از طرف کره B، در راستای قائم و به سمت پایین بوده (دافعه) و باعث افزایش عدد ترازو می شود:

$$F_{BA} = \frac{90 |q_A| |q_B|}{r_{AB}^2} = \frac{90 \times 5 \times 1}{(10)^2} = 4/5 N$$

$$\text{عدد ترازو} = 1/5 + F_{BA} = 1/5 + 4/5 = 6/5 N$$

در حالت دوم، کره C با بار الکتریکی $q_C = -1\mu C$ را در نقطه N قرار می‌دهیم. چون بار کره‌ها ناهمنام است، بنابراین نیروی الکتریکی وارد شده به کره A از طرف کره C، در راستای قائم و به سمت بالا بوده (جاذبه) و باعث کاهش عدد ترازو می‌شود:

$$F_{CA} = \frac{90 |q_C| |q_A|}{r_{CA}^2} = \frac{90 \times 1 \times 5}{(30)^2} = 0.5 N$$

$$\text{عدد ترازو} = 1.5 - 0.5 = 1 N$$

عدد نشان داده شده توسط ترازو در حالت‌های اول و دوم به ترتیب ۶ N و ۱ N است که اختلاف آن‌ها برابر با $6 - 1 = 5 N$ است.

اگر حواستان به جهت نیروها نباشد در دام گزینه (۴) می‌افتید!

هدف از طراحی این تست، این بوده که دانش‌آموز علاوه بر اندازه نیروی الکتریکی بین دو بار، به نوع نیرو (جاذبه یا دافعه) نیز توجه کافی داشته باشد تا بتواند به گزینه درست برسد.



۳۹- دو گوی فلزی مشابه و باردار با بارهای q_1 و q_2 در فاصله 30 cm از هم قرار داشته و با نیرویی به بزرگی $0.6 N$ یکدیگر را جذب می‌کنند. اگر دو گوی را با هم تماس داده و بعد از تعادل الکتریکی در همان فاصله قبلی قرار دهیم، گوی‌ها با نیرویی به بزرگی $0.25 N$ یکدیگر را دفع می‌کنند. اندازه بار اولیه گوی‌ها چند میکروکولن می‌توانند باشند؟

$$(1) \text{ } 2 \text{ و } 3 \quad (2) \text{ } 4/2 \text{ و } 5/2 \quad (3) \text{ } 1 \text{ و } 6 \quad (4) \text{ } 4 \text{ و } 5/1$$

(سخت - استدلالی - زمان‌بر - صفحه ۶ - ۱۱۰۱)

پاسخ: گزینه ۱

در ابتدا، دوگوی باردار یکدیگر را جذب کرده‌اند، پس به راحتی می‌توان نتیجه گرفت که بار یکی از گوی‌ها مثبت ($q_1 > 0$) و بار گوی دیگر منفی ($q_2 < 0$) است، بنابراین به کمک قانون کولن و با استفاده از تکنیک ۹۰ داریم:

$$F_1 = \frac{90 |q_1| |q_2|}{r^2} \xrightarrow[r=30 \text{ cm}, F_1=0.6 \text{ N}]{|q_1|=q_1, |q_2|=-q_2} 0.6 = \frac{-90 q_1 q_2}{(30)^2} \Rightarrow q_1 q_2 = -6 \Rightarrow q_2 = \frac{-6}{q_1} \quad (1)$$

با توجه به مشابه بودن گوی‌ها، با اتصال دو گوی به هم و برقراری تعادل الکتریکی، بار نهایی گوی‌ها یکسان و برابر با میانگین بار اولیه آن‌ها می‌شود و داریم:

$$F_2 = \frac{90 |q'_1| |q'_2|}{r^2} \xrightarrow[q'=q'_2=\frac{q_1+q_2}{2}]{q'_1=q'_2=\frac{q_1+q_2}{2}} F_2 = \frac{90 \times \left| \frac{q_1+q_2}{2} \right|^2}{r^2} = \frac{90 \times (q_1+q_2)^2}{4r^2}$$

$$\xrightarrow[r=30 \text{ cm}, F_2=0.25 \text{ N}]{F_2=0.25 \text{ N}} 0.25 = \frac{90 \times (q_1+q_2)^2}{4 \times (30)^2} \Rightarrow |q_1+q_2| = 1 \xrightarrow{(1)} \left| q_1 - \frac{6}{q_1} \right| = 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} q_1 - \frac{6}{q_1} = 1 \Rightarrow q_1^2 - q_1 - 6 = 0 \Rightarrow (q_1 - 3)(q_1 + 2) = 0 \xrightarrow{q_1 > 0} q_1 = 3\mu C \Rightarrow q_2 = -2\mu C \\ \text{یا} \\ q_1 - \frac{6}{q_1} = -1 \Rightarrow q_1^2 + q_1 - 6 = 0 \Rightarrow (q_1 + 3)(q_1 - 2) = 0 \xrightarrow{q_1 > 0} q_1 = 2\mu C \Rightarrow q_2 = -3\mu C \end{array} \right.$$

نیروی الکتریکی بین دو ذره باردار

۱- مطابق قانون کولن، اگر بارهای q_1 و q_2 در فاصله r از هم قرار بگیرند، نیروی الکتریکی‌ای که به هم وارد می‌کنند برابر است با:

$$F = k \frac{|q_1||q_2|}{r^2}$$

در رابطه بالا، k ثابت کولن است که یکای آن $\frac{N \cdot m^2}{C^2}$ است.

۲- برای مقایسه نیروی الکتریکی بین بارها می‌توان نوشت:

$$F \propto \frac{|q_1||q_2|}{r^2} \Rightarrow \frac{F'}{F} = \frac{|q'_1|}{|q_1|} \times \frac{|q'_2|}{|q_2|} \times \left(\frac{r}{r'}\right)^2 \xrightarrow{\text{اگر اندازه بارها ثابت باشد}} \frac{F'}{F} = \left(\frac{r}{r'}\right)^2$$

تغییرات نیروی الکتریکی بین دو کره رسانای باردار پس از تماس

فرض کنید دو کره رسانای کوچک و مشابه باردار در اختیار داریم و می‌خواهیم ببینیم اگر آن‌ها را به هم تماس دهیم و دوباره در فاصله قبلی از یکدیگر قرار دهیم، بزرگی نیروی الکتریکی بین آن‌ها چگونه تغییر می‌کند. برای این کار دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

۱- بار الکتریکی اولیه کره‌ها همنام باشد:

در این حالت با تماس کره‌ها به یکدیگر و برابر شدن بار آن‌ها، حاصل ضرب اندازه بارهای الکتریکی، افزایش می‌یابد و در نتیجه بزرگی نیروی الکتریکی هم افزایش می‌یابد. دقت کنید که اگر از ابتدا بار دو کره برابر بود، بزرگی نیروی الکتریکی بین آن‌ها تغییری نمی‌کرد. به عنوان مثال حالت زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{قبل از تماس: } \begin{cases} q_1 = 6\mu C \\ q_2 = 4\mu C \end{cases} \Rightarrow |q_1 q_2| = 24 \quad \text{پس از تماس: } \begin{cases} q'_1 = \frac{q_1 + q_2}{2} = 5\mu C \\ q'_2 = \frac{q_1 + q_2}{2} = 5\mu C \end{cases} \Rightarrow |q'_1 q'_2| = 25$$

همان‌طور که می‌بینید، حاصل ضرب اندازه بارها افزایش می‌یابد و در نتیجه بزرگی نیروی الکتریکی بین آن‌ها زیاد می‌شود.

۲- بار الکتریکی اولیه کره‌ها ناهمنام باشد:

در این حالت نمی‌توان اظهار نظر قطعی در مورد نیرو کرد. ممکن است نیرو افزایش یابد، کاهش یابد، ثابت بماند و یا حتی صفر شود. به مثال‌های زیر توجه کنید:

$$\text{قبل از تماس: } \begin{cases} q_1 = 5\mu C \\ q_2 = -5\mu C \end{cases} \Rightarrow |q_1 q_2| = 25 \quad \text{پس از تماس: } \begin{cases} q'_1 = 0 \\ q'_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow |q'_1 q'_2| = 0$$

در این حالت، نیرو کاهش می‌یابد و صفر می‌شود.

$$\text{قبل از تماس: } \begin{cases} q_1 = 20\mu C \\ q_2 = -2\mu C \end{cases} \Rightarrow |q_1 q_2| = 40 \quad \text{پس از تماس: } \begin{cases} q'_1 = 9\mu C \\ q'_2 = 9\mu C \end{cases} \Rightarrow |q'_1 q'_2| = 81$$

در این حالت، نیرو افزایش می‌یابد.



در هر دو حالت، بار کره‌ها پس از تماس همنام می‌شود، پس کره‌ها پس از تماس حتماً یکدیگر را دفع خواهند کرد (به شرط این‌که پس از تماس، خنثی نشوند).

۶۱- دو کره فلزی خیلی کوچک و مشابه دارای بار الکتریکی ناهمنام $q_1 > 0$ و $|q_2| > q_1$ هستند و در فاصله ۶۰ سانتی متری هم قرار دارند و برهم نیروی الکتریکی 9 N وارد می کنند. اگر کره ها را به هم تماس دهیم و دوباره به همان فاصله قبلی از هم دور کنیم، نیروی الکتریکی

$1/6$ نیوتون به هم وارد می کنند. q_1 چند میکروکولن است؟ $(k = 9 \times 10^9 \frac{\text{N.m}^2}{\text{C}^2})$

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵ (۵)

پاسخ تشریحی:

در حالت اول، اگر رابطه قانون کولن را بنویسیم:

$$F = 90 \times \frac{|q_1||q_2|}{r^2} \Rightarrow 9 = 90 \times \frac{|q_1||q_2|}{60^2} \Rightarrow |q_1||q_2| = 36(\mu\text{C})^2$$

بعد از تماس:

$$q'_1 = q'_2 = \frac{q_1 + q_2}{2} \Rightarrow \text{بار جدید هر کره}$$

و نیروی بین دو بار در حالت جدید:

$$F' = 90 \times \frac{|q'_1||q'_2|}{r^2} \Rightarrow 1/6 = 90 \times \frac{\left(\frac{|q_1 + q_2|}{2}\right)\left(\frac{|q_1 + q_2|}{2}\right)}{60^2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |q_1 + q_2| = 16 \\ |q_1||q_2| = 36 \end{cases} \xrightarrow[\substack{\text{حل} \\ q_1 > 0, q_2 < 0}]{\text{}} \begin{cases} q_1 = +2 \mu\text{C} \\ q_2 = -18 \mu\text{C} \end{cases}$$

پاسخ: گزینه ۲

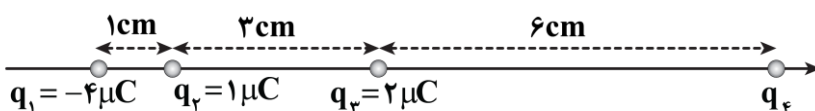
راهنمای مسیر

تماس دو بار الکتریکی مشابه به هم و تحلیل نحوه تغییر نوع و اندازه نیروی الکتریکی بین آن ها، از موارد بسیار مورد علاقه طراحان کنکور هست. به همین دلیل ما هم یک تست به این مورد اختصاص دادیم تا خیال خودمون و شما رو از بابت وجود این تیپ سوال ها در آزمون راحت کنیم. به شدت توصیه می کنیم گام های طی شده در طی این تست رو با دقت بخونید و یاد بگیرید.



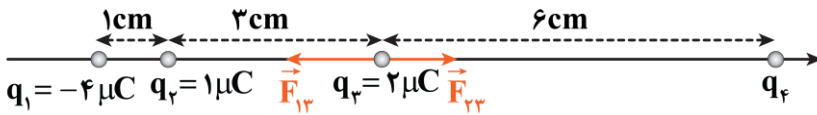
۴۰- در شکل زیر، چهار بار الکتریکی نقطه ای بر روی محور x ثابت شده اند و بر اینند نیروهای الکتریکی وارد بر بار q_3 از طرف سه بار

دیگر صفر است. بار الکتریکی q_4 چند میکروکولن است؟ $(k = 9 \times 10^9 \frac{\text{N.m}^2}{\text{C}^2})$



- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵ (۵)

ابتدا نیروهای الکتریکی وارد شده بر بار q_3 از طرف بارهای q_1 و q_2 را رسم کرده و اندازه هر یک را به دست می‌آوریم:



$$F_{13} = \frac{90 |q_1| |q_3|}{r_{13}^2} = \frac{90 \times 4 \times 2}{(4)^2} = 45 \text{ N}$$

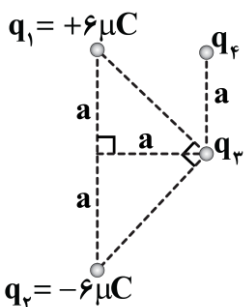
$$F_{23} = \frac{90 |q_2| |q_3|}{r_{23}^2} = \frac{90 \times 1 \times 2}{(3)^2} = 20 \text{ N}$$

با توجه به این که نیروهای $\vec{F}_{13}$ و $\vec{F}_{23}$ در خلاف جهت هم بوده و $F_{13} > F_{23}$ است، پس باید نیروی $\vec{F}_{43}$ هم جهت با نیروی $\vec{F}_{23}$ باشد، تا برابری نیروهای وارد شده بر بار q_3 صفر شود. پس نتیجه می‌گیریم که اولاً q_4 باید q_3 را جذب کند، یعنی $q_4 < 0$ باشد و دوماً باید داشته باشیم:

$$F_{43} + F_{23} = F_{13} \Rightarrow F_{43} + 20 = 45 \Rightarrow F_{43} = 25 \text{ N} \Rightarrow \frac{90 |q_4| |q_3|}{r_{43}^2} = 25$$

$$\Rightarrow \frac{90 \times |q_4| \times 2}{(6)^2} = 25 \Rightarrow |q_4| = 5 \mu\text{C} \Rightarrow q_4 = -5 \mu\text{C}$$

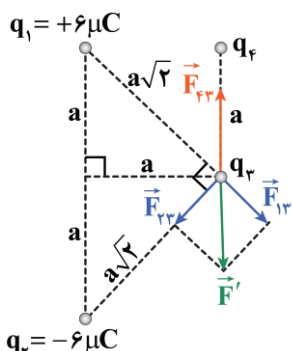
این که بر روی یک محور چند تا بار الکتریکی نقطه‌ای داده می‌شود و با در تعادل بودن یکی از بارها، مواردی مثل نیروی برابری وارد بر یک بار دیگر یا میدان برابری در یک نقطه معین پرسیده می‌شود، همواره مورد توجه طراحان محترم هست و با بلد بودن همین تست، خیالتون همه‌جوره راحت می‌شود.



۴۱- در شکل مقابل، بار الکتریکی q_4 چند میکروکولن باشد تا بار الکتریکی مثبت q_3 در تعادل باشد؟

- (۱) $-3\sqrt{2}$
- (۲) -3
- (۳) $+3$
- (۴) $+3\sqrt{2}$

بار الکتریکی مثبت q_1 ، بار الکتریکی مثبت q_3 را در جهت نشان داده شده با نیروی $\vec{F}_{13}$ دفع می‌کند و بار الکتریکی منفی q_2 ، بار الکتریکی مثبت q_3 را در جهت نشان داده شده با نیروی $\vec{F}_{23}$ جذب می‌کند. با توجه به شکل، نیروهای هم‌اندازه $\vec{F}_{13}$ و $\vec{F}_{23}$ بر هم عمود هستند و برابری آنها ($\vec{F}'$) در راستای قائم و رو به پایین به بار q_3 وارد می‌شود.



$$\begin{cases} |q_1| = |q_2| \\ r_{13} = r_{23} \end{cases} \Rightarrow F_{13} = F_{23} \Rightarrow F' = \sqrt{2} F_{13} \quad (1)$$

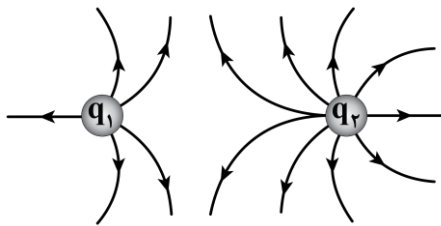
برای این که بار q_3 در تعادل باشد، باید نیرویی که بار q_4 به بار q_3 وارد می کند، هم اندازه و در خلاف جهت نیروی $\vec{F}'$ باشد. پس باید بار q_4 منفی باشد و داریم:

$$F_{q_3} = F' \xrightarrow{(1)} F_{q_3} = \sqrt{2} F_{13} \Rightarrow \frac{F_{q_3}}{F_{13}} = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{|q_4|}{|q_1|} \times \left(\frac{r_{13}}{r_{q_3}} \right)^2 = \sqrt{2}$$

$$\xrightarrow{|q_1| = 6 \mu C, r_{13} = a\sqrt{2}, r_{q_3} = a} \frac{|q_4|}{6} \times \left(\frac{a\sqrt{2}}{a} \right)^2 = \sqrt{2} \Rightarrow |q_4| = 3\sqrt{2} \mu C \xrightarrow{q_4 < 0} q_4 = -3\sqrt{2} \mu C$$



۴۲- با توجه به شکل زیر که خطوط میدان الکتریکی در اطراف دو ذره با بارهای الکتریکی q_1 و q_2 را نشان می دهد، کدام یک از گزینه های زیر صحیح است؟



- (۱) $|q_1| > |q_2|$, $q_2 < 0$, $q_1 < 0$
- (۲) $|q_1| > |q_2|$, $q_2 > 0$, $q_1 > 0$
- (۳) $|q_1| < |q_2|$, $q_2 > 0$, $q_1 > 0$
- (۴) $|q_1| < |q_2|$, $q_2 < 0$, $q_1 < 0$

(آسان - مفهومی - سریع ۵ - صفحه ۱۸ - ۱۱۰۱)

پاسخ: گزینه ۳

کلام اول

خطوط میدان الکتریکی هر دو ذره باردار، به صورت خارج شونده است، پس $q_1 > 0$ و $q_2 > 0$ است.

کلام آخر

تراکم خطوط میدان الکتریکی در اطراف بار q_2 بیشتر است، پس $|q_2| > |q_1|$ است.

خطوط میدان الکتریکی

۱- برای مجسم کردن میدان الکتریکی در فضای اطراف اجسام باردار از خطوط میدان الکتریکی استفاده می کنیم. این خطوط ویژگی های زیر را دارا می باشند:

(الف) از بار مثبت خارج می شوند و به بار منفی وارد می شوند.

(ب) بردار میدان الکتریکی در هر نقطه هم جهت با خط مماس بر خطوط میدان الکتریکی در آن نقطه است.

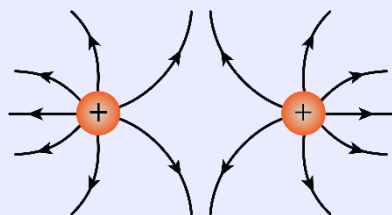
(ج) هرچه تراکم خطوط میدان الکتریکی در ناحیه ای از فضا بیشتر باشد، اندازه میدان الکتریکی در آن ناحیه بزرگ تر است.

(د) خطوط میدان الکتریکی یکدیگر را قطع نمی کنند و از هر نقطه از فضا فقط یک خط میدان عبور می کند.

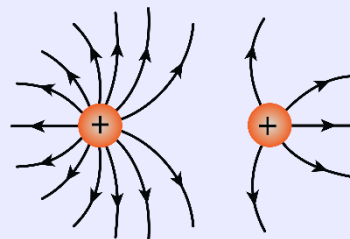
۲- خطوط میدان الکتریکی در اطراف یک ذره باردار منزوی مطابق شکل های زیر است:



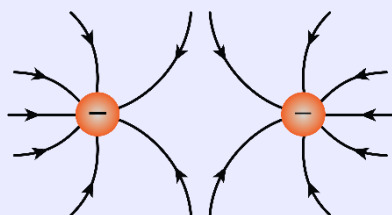
۳- خطوط میدان الکتریکی در اطراف دو ذره باردار مطابق شکل‌های زیر است:



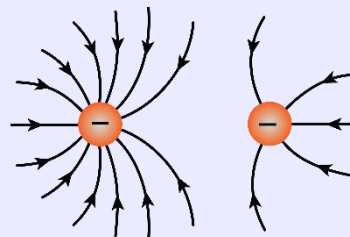
خطوط میدان الکتریکی
در اطراف دو بار مثبت هم‌اندازه



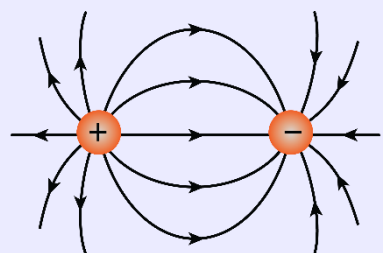
خطوط میدان الکتریکی
در اطراف دو بار مثبت غیرهم‌اندازه



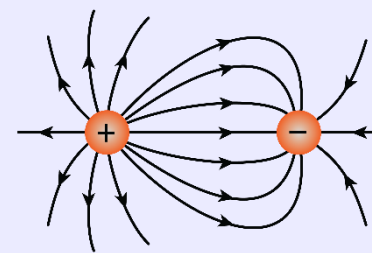
خطوط میدان الکتریکی
در اطراف دو بار منفی هم‌اندازه



خطوط میدان الکتریکی
در اطراف دو بار منفی غیرهم‌اندازه



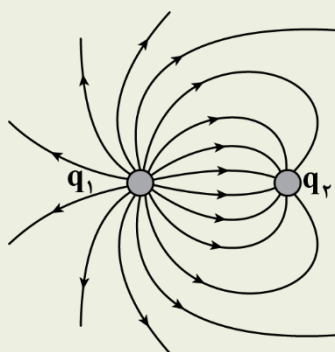
خطوط میدان بارهای
مثبت و منفی هم‌اندازه



خطوط میدان بارهای
مثبت و منفی غیرهم‌اندازه

آزمون سراسری ریاضی اردیبهشت‌ماه ۱۴۰۴

۴۲- در شکل زیر، با توجه به خطوط میدان الکتریکی، کدام رابطه‌ها در مورد بارهای الکتریکی درست است؟



(۱) $|q_2| < |q_1|$, $q_1 < 0$

(۲) $|q_1| < |q_2|$, $q_1 < 0$

(۳) $|q_2| < |q_1|$, $q_2 < 0$

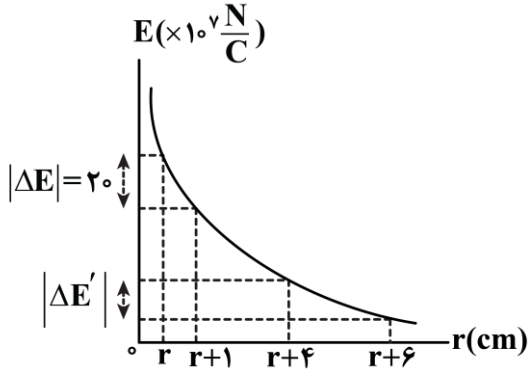
(۴) $|q_1| < |q_2|$, $q_2 < 0$

پاسخ تشریحی:

جهت خطوط میدان الکتریکی از بار مثبت به سمت بار منفی است. در نتیجه با توجه به شکل خطوط میدان، بار q_1 مثبت ($q_1 > 0$) و بار q_2 منفی ($q_2 < 0$) است. همچنین تراکم خطوط میدان در اطراف بار q_1 بیشتر است، در نتیجه اندازه بار q_1 از اندازه بار q_2 بزرگ‌تر است. ($|q_2| < |q_1|$)

پاسخ: گزینه ۳

۴۳- نمودار اندازه میدان الکتریکی حاصل از بار الکتریکی نقطه‌ای $q = 16 \mu C$ بر حسب فاصله از آن، مطابق شکل زیر است. مقدار $|\Delta E'|$



چند واحد SI است؟ $(k = 9 \times 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2})$

(۱) $2/75 \times 10^7$

(۲) $1/75 \times 10^4$

(۳) $1/75 \times 10^7$

(۴) $2/75 \times 10^4$

(سخت - محاسباتی - زمان‌بر - صفحه ۱۲ - ۱۱۰۱)

پاسخ: گزینه ۳

کام‌اول

با توجه به نمودار، اختلاف اندازه میدان الکتریکی در دو فاصله $r_1 = r$ و $r_2 = r + 1 \text{ cm}$ برابر با $20 \times 10^7 \frac{N}{C}$ است، بنابراین داریم:

$$|\Delta E| = E_1 - E_2 = 20 \times 10^7 \xrightarrow{E = \frac{k|q|}{r^2}} k|q| \left(\frac{1}{(r \times 10^{-2})^2} - \frac{1}{((r+1) \times 10^{-2})^2} \right) = 2 \times 10^8$$

$$\xrightarrow{k = 9 \times 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2}, |q| = 16 \mu C = 16 \times 10^{-6} C} 9 \times 16 \times 10^3 \times \left(\frac{10^4}{r^2} - \frac{10^4}{(r+1)^2} \right) = 2 \times 10^8$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r^2} - \frac{1}{(r+1)^2} = \frac{5}{36} \xrightarrow{\frac{5}{36} = \frac{1}{4} - \frac{1}{9} = \frac{1}{(2)^2} - \frac{1}{(3)^2}} r = 2 \text{ cm}$$

تذکر

بچه‌ها این تیپ ابتکارهای حل مسئله رو حواستون باشه.

کام‌آخر

$|\Delta E'|$ ، اختلاف اندازه میدان الکتریکی در دو فاصله $r_3 = r + 6 = 8 \text{ cm}$ و $r_2 = r + 4 = 6 \text{ cm}$ است و داریم:

$$|\Delta E'| = E_3 - E_2 = k|q| \left(\frac{1}{r_3^2} - \frac{1}{r_2^2} \right) = 9 \times 10^9 \times 16 \times 10^{-6} \times \left(\frac{1}{(6 \times 10^{-2})^2} - \frac{1}{(8 \times 10^{-2})^2} \right)$$

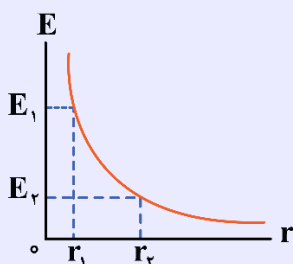
$$\Rightarrow |\Delta E'| = 9 \times 16 \times 10^7 \times \left(\frac{1}{36} - \frac{1}{64} \right) = 9 \times 16 \times 10^7 \times \left(\frac{16-9}{9 \times 64} \right) = \frac{7}{4} \times 10^7 = 1/75 \times 10^7 \frac{N}{C}$$

نمودار بزرگی میدان الکتریکی حاصل از یک بار الکتریکی نقطه‌ای بر حسب فاصله از آن

نمودار تغییرات بزرگی میدان الکتریکی بر حسب فاصله از بار، مطابق شکل مقابل است:

همان‌طور که واضح است با افزایش فاصله از بار، بزرگی میدان کاهش می‌یابد.

$$E = \frac{k|q|}{r^2} \xrightarrow{k|q| \text{ ثابت است}} E \propto \frac{1}{r^2}$$



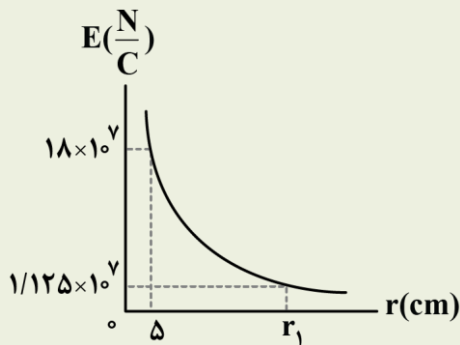


اگر بزرگی میدان الکتریکی حاصل از بار q در فاصله r_1 برابر با E_1 و در فاصله r_2 برابر با E_2 باشد، داریم:

$$\frac{E_2}{E_1} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2$$

آزمون سراسری ریاضی خارج از کشور ۱۳۹۹

۵۹- نمودار تغییرات میدان الکتریکی حاصل از بار نقطه‌ای q بر حسب فاصله از آن به صورت شکل زیر است. اندازه q چند میکروکولن و r_1 چند



سانتی متر است؟ $(k = 9 \times 10^9 \frac{N.m^2}{C^2})$

(۱) ۱۰، ۵۰

(۲) ۲۰، ۵۰

(۳) ۱۰، ۲۵

(۴) ۲۰، ۲۵

پاسخ تشریحی:

با توجه به نمودار داده شده داریم:

$$E = k \frac{|q|}{r^2} \Rightarrow \frac{E_2}{E_1} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \Rightarrow \frac{18 \times 10^7}{1/125 \times 10^7} = \left(\frac{r_1}{5}\right)^2 \Rightarrow r_1 = 20 \text{ cm}$$

و بار الکتریکی برابر است با:

$$E = \frac{k|q|}{r^2} \Rightarrow 18 \times 10^7 = \frac{9 \times 10^9 \times |q|}{(5 \times 10^{-2})^2} \Rightarrow |q| = 50 \times 10^{-6} \text{ C} = 50 \mu\text{C}$$

پاسخ: گزینه ۲

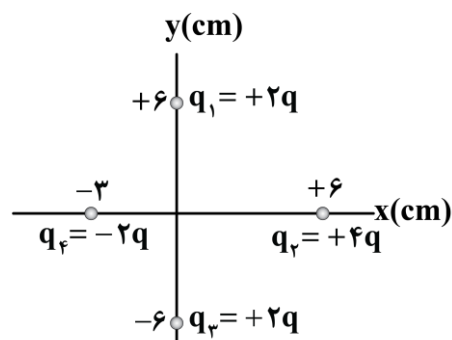
راهنمای مسیر

در مسیر حل این تست به یک معادله گویای سخت می‌رسید! ولی با ابتکاری که در پاسخ‌نامه نوشتیم، سه سوت می‌تونین از پس اون معادله بریاین. پس حواستون به پاسخ‌نامه باشه. راستی همین ابتکار در فصل ۴ فیزیک دوازدهم هم لازمتون می‌شه.



۴۴- چهار بار الکتریکی نقطه‌ای مطابق شکل زیر، در مکان‌های ثابتی بر روی محورهای مختصات قرار گرفته‌اند. اگر بار الکتریکی q_1 را

در راستای محور y به اندازه 4 cm به مبدأ نزدیک کنیم، بردار میدان الکتریکی برآیند در مبدأ مختصات نسبت به حالت اول چند



درجه و در چه جهتی می‌چرخد؟ $(\tan 37^\circ = \frac{3}{4})$

(۱) ۵۳ و ساعتگرد

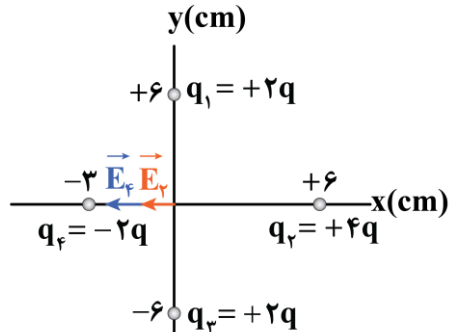
(۲) ۳۷ و ساعتگرد

(۳) ۳۷ و پادساعتگرد

(۴) ۵۳ و پادساعتگرد

گام اول

ابتدا میدان الکتریکی برابری را برای مرحله اول محاسبه می کنیم. بچه ها با توجه به شکل، بارهای q_1 و q_3 برابر بوده و در یک راستا، در فاصله یکسانی از مبدأ مختصات هستند، در نتیجه میدان های الکتریکی حاصل از آنها در مبدأ مختصات $(\vec{E}_3, \vec{E}_1)$ خنثی می شوند، پس کافیست میدان الکتریکی برابری را به کمک میدان های الکتریکی حاصل از بارهای q_2 و q_4 به دست آوریم:



$$\begin{cases} E_2 = \frac{k|q_2|}{r_2^2} = \frac{1 \times 4}{36} = \frac{1}{9} \\ E_4 = \frac{k|q_4|}{r_4^2} = \frac{1 \times 2}{9} = \frac{2}{9} \end{cases} \Rightarrow E_{t1} = E_2 + E_4 = \frac{1}{3}$$

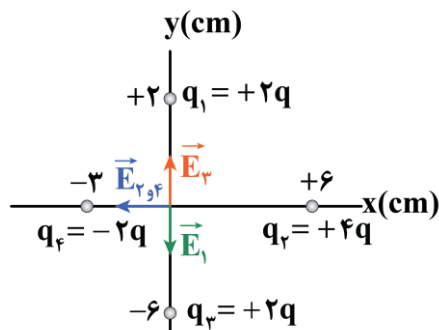
تذکر

راستی بچه ها چون قرار است میدان برابری را در دو حالت مقایسه کنیم، می توان $k=1$ و $q=1$ در نظر بگیریم و فاصله ها را نیز بر حسب سانتی متر استفاده کنیم

پس در حالت اول، $E_{t1} = \frac{1}{3}$ و در جهت منفی محور x است.

گام دوم

بارهای q_2 و q_4 نه خودشان و نه فاصله شان تغییری نکرده است، پس برابری میدان های حاصل از این دو بار برابر با برابری میدان های حاصل از آنها در مرحله اول است، بنابراین $E_{2,4} = \frac{1}{3}$ است.

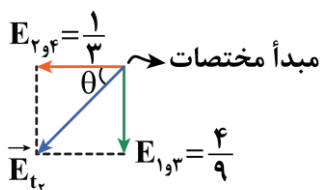


$$\begin{cases} E_1 = \frac{k|q_1|}{r_1^2} = \frac{1 \times 2}{4} = \frac{1}{2} \\ E_3 = \frac{k|q_3|}{r_3^2} = \frac{1 \times 2}{36} = \frac{1}{18} \end{cases}$$

$\vec{E}_1, \vec{E}_3$ در خلاف جهت هم اند. $\rightarrow E_{1,3} = E_1 - E_3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{18} = \frac{4}{9}$

گام آخر

با محاسبه زاویه θ داریم:

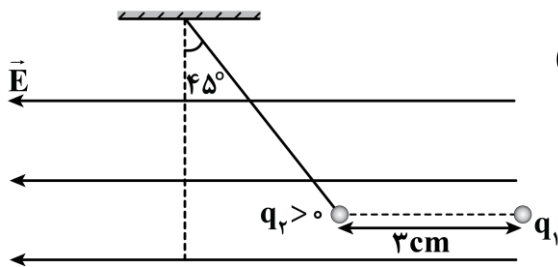


$$\tan \theta = \frac{E_{1,3}}{E_{2,4}} = \frac{\frac{4}{9}}{\frac{1}{3}} = \frac{4}{3} \Rightarrow \theta = 53^\circ$$

پس میدان الکتریکی برابری را در مبدأ مختصات، به اندازه 53° و در جهت پادساعتگرد می چرخد.



۴۵- در شکل زیر، بار الکتریکی نقطه‌ای $q_1 = -0.2 \mu\text{C}$ در جای خود ثابت بوده و گلوله باردار آونگ با انحراف 45° از راستای قائم در درون میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{E} = (-1/5 \times 10^6 \frac{\text{N}}{\text{C}}) \vec{i}$ به تعادل رسیده است. اگر نخ آونگ، عایق بوده و جرم گلوله آونگ برابر



با g باشد، q_2 چند میکروکولن است؟ $(k = 9 \times 10^9 \frac{\text{N.m}^2}{\text{C}^2}, g = 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}})$

- (۱) ۰/۱
(۲) ۰/۱۵
(۳) ۰/۲
(۴) ۰/۲۵

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) (صفحه ۱۹ - ۱۱۰)

پاسخ: گزینه ۱

با توجه به این که بار q_2 مثبت است، باید نیروی جاذبه $\vec{F}_{12}$ قوی‌تر از نیروی حاصل از میدان الکتریکی باشد تا آونگ به سمت راست منحرف شده و به تعادل برسد. با فرض این که بار q_2 بر حسب میکروکولن باشد، اندازه نیروهای $\vec{F}_{12}$ و $\vec{F}_E$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} F_{12} = \frac{90 |q_1| |q_2|}{r^2} = \frac{90 \times 0.2 \times q_2}{9} = 2q_2 \\ F_E = E |q_2| = 1/5 \times 10^6 \times q_2 \times 10^{-6} = 1/5 q_2 \end{cases}$$

گلوله آونگ در حال تعادل است، بنابراین برآیند نیروهای وارد بر آن در دو راستای عمودی و افقی برابر صفر است:

$$F_{\text{net}_y} = 0 \Rightarrow mg = T \cos 45^\circ \Rightarrow 5 \times 10^{-3} \times 10 = T \times \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow T = 0.05\sqrt{2} \text{ N}$$

$$F_{\text{net}_x} = 0 \Rightarrow F_E + T \sin 45^\circ = F_{12} \Rightarrow F_E + 0.05\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = F_{12} \Rightarrow 1/5 q_2 + 0.05 = 2q_2 \Rightarrow q_2 = 0.1 \mu\text{C}$$

روش سریع‌تر:

$$F_{12} - E |q_2| = mg \tan \theta \Rightarrow \frac{90 \times 0.2 \times q_2}{9} - 1/5 \times 10^6 \times q_2 \times 10^{-6} = 5 \times 10^{-3} \times 10 \times 1 \Rightarrow q_2 = 0.1 \mu\text{C}$$



نکته

جهت نیروی الکتریکی وارد بر ذره باردار از طرف میدان الکتریکی به صورت زیر تعیین می‌شود:

۱- اگر $q > 0$ باشد، $\vec{E}$ و $\vec{F}$ هم‌جهت هستند؛ بنابراین به بار مثبت در جهت میدان الکتریکی، نیرو وارد می‌شود.

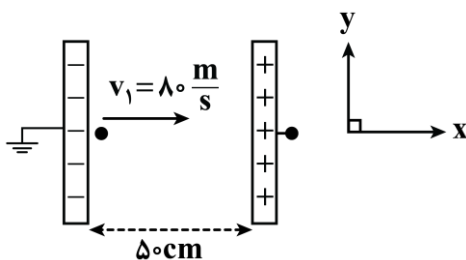
۲- اگر $q < 0$ باشد، $\vec{E}$ و $\vec{F}$ در خلاف جهت هم هستند؛ بنابراین به بار منفی در خلاف جهت میدان الکتریکی، نیرو وارد می‌شود.



۴۶- مطابق شکل زیر، ذره‌ای به جرم 50 ng و بار الکتریکی 8 nC را با تندی اولیه $80 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ از نزدیکی صفحه رسانای منفی در جهت محور

x شلیک می‌کنیم و ذره در فاصله 10 cm از صفحه رسانای مثبت متوقف می‌شود. پتانسیل الکتریکی صفحه مثبت چند ولت است؟

(اثر نیروی وزن و تمام نیروهای مقاوم، ناچیز است.)



- (۱) ۱۰
(۲) ۱۵
(۳) ۲۰
(۴) ۲۵

گام اول

چون اثر نیروی وزن و تمام نیروهای مقاوم ناچیز است، پس ذره فقط تحت تأثیر نیروی حاصل از میدان الکتریکی یکنواخت بین صفحات، در جهت محور X حرکت می‌کند تا متوقف شود. به کمک قضیه کار - انرژی جنبشی داریم:

$$W_t = \Delta K \Rightarrow W_E = \frac{1}{2} m (v_f^2 - v_i^2) \xrightarrow{m=50 \text{ ng} = 50 \times 10^{-12} \text{ kg}, v_i = 80 \frac{\text{m}}{\text{s}}, v_f = 0}$$

$$W_E = \frac{1}{2} \times 50 \times 10^{-12} \times (0^2 - 80^2) = -1/6 \times 10^{-7} \text{ J}$$

تذکر

بچه‌ها ذره بعد از توقف در خلاف جهت محور X به حرکت خود ادامه می‌دهد، اما این قسمت حرکت اهمیتی برای ما ندارد.

گام دوم

ذره با بار مثبت در خلاف جهت میدان الکتریکی پرتاب شده، بنابراین:

$$W_E = E |q| d \cos \theta \Rightarrow -1/6 \times 10^{-7} = E \times 8 \times 10^{-9} \times 0/4 \times \cos 180^\circ \Rightarrow E = 50 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

گام آخر

اختلاف پتانسیل الکتریکی بین دو نقطه برابر است با:

$$\Delta V = Ed = 50 \times 0/5 = 25 \text{ V} \Rightarrow V_+ - V_- = 25 \xrightarrow{V_- = 0} V_+ = 25 \text{ V}$$

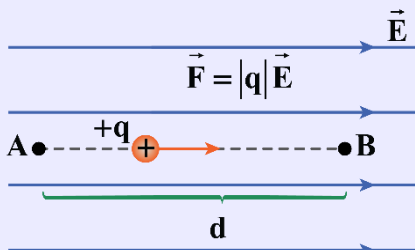
کار نیروی الکتریکی

کار نیروی الکتریکی وارد بر یک ذره باردار در میدان الکتریکی $\vec{E}$ در یک جابه‌جایی مشخص، برابر با قرینه تغییرات انرژی پتانسیل الکتریکی در همان جابه‌جایی است.

$$W_E = -\Delta U_E$$

تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی یک ذره باردار در میدان الکتریکی یکنواخت

فرض کنید ذره باردار +q در یک میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{E}$ تحت اثر میدان الکتریکی، جابه‌جایی $\vec{d}$ را انجام می‌دهد. طبق تعریف کار یک نیرو، خواهیم داشت:



$$W_E = F_E d \cos \theta = |q| E d \cos \theta$$

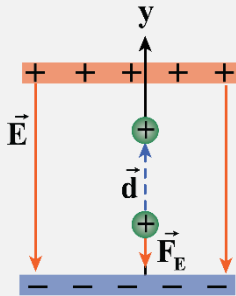
$$\Delta U_E = -W_E = -|q| E d \cos \theta$$

θ زاویه بین نیروی الکتریکی $\vec{F}_E$ و جابه‌جایی $\vec{d}$ است.

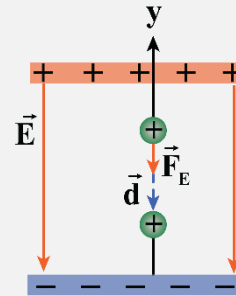
نکات

- ۱- به‌سادگی می‌توان دریافت، اگر بار الکتریکی مثبت، در جهت میدان الکتریکی جابه‌جا شود، انرژی پتانسیل الکتریکی آن کاهش یافته است و اگر بار الکتریکی منفی، در جهت میدان الکتریکی جابه‌جا شود، انرژی پتانسیل الکتریکی آن افزایش می‌یابد.
- ۲- اگر یک بار الکتریکی را در یک میدان الکتریکی رها کنیم، همواره به سمتی می‌رود که انرژی پتانسیل الکتریکی آن کاهش می‌یابد و اگر برای جابه‌جایی آن مجبور باشیم به‌زور این کار را انجام دهیم، انرژی پتانسیل الکتریکی آن افزایش می‌یابد.

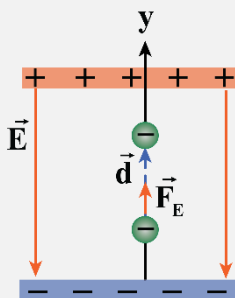
در شکل‌های زیر، چند حالت مربوط به جابه‌جایی بارهای مختلف و تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی نشان داده شده است.



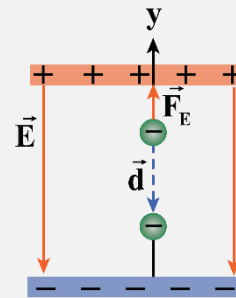
(الف) بار مثبت در جهت میدان الکتریکی $\vec{E}$ حرکت می‌کند: میدان الکتریکی، کار مثبت W_E را روی بار انجام می‌دهد. انرژی پتانسیل الکتریکی U_E کاهش می‌یابد.



(ب) بار مثبت در خلاف جهت میدان الکتریکی $\vec{E}$ حرکت می‌کند: میدان الکتریکی، کار منفی W_E را روی بار انجام می‌دهد. انرژی پتانسیل الکتریکی U_E افزایش می‌یابد.



(ج) بار منفی در جهت میدان الکتریکی $\vec{E}$ حرکت می‌کند: میدان الکتریکی، کار مثبت W_E را روی بار انجام می‌دهد. انرژی پتانسیل الکتریکی U_E کاهش می‌یابد.



(د) بار منفی در خلاف جهت میدان الکتریکی $\vec{E}$ حرکت می‌کند: میدان الکتریکی، کار منفی W_E را روی بار انجام می‌دهد. انرژی پتانسیل الکتریکی U_E افزایش می‌یابد.

تکنیک

در مسیرهای غیرمستقیم حرکت ذره باردار در درون میدان الکتریکی یکنواخت، اگر $d_{||}$ ، اندازه مؤلفه‌ای از جابه‌جایی باشد که در راستای میدان الکتریکی است، آن‌گاه داریم:

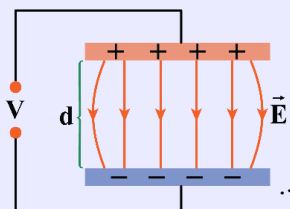
$$\Delta U_E = \pm E |q| d_{||}$$

علامت مثبت $\leftarrow$ بار مثبت در خلاف جهت میدان الکتریکی یا بار منفی در جهت میدان الکتریکی، جابه‌جایی $d_{||}$ داشته باشد.
علامت منفی $\leftarrow$ بار مثبت در جهت میدان الکتریکی یا بار منفی در خلاف جهت میدان الکتریکی، جابه‌جایی $d_{||}$ داشته باشد.

میدان الکتریکی یکنواخت

۱- اگر دو صفحه بزرگ رسانا را با بارهای $+q$ و $-q$ باردار کنیم و در مقابل هم در فاصله d قرار دهیم، به دور از لبه صفحه‌ها، میدان الکتریکی یکنواختی بین آن‌ها ایجاد می‌شود که اندازه آن از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$E = \frac{V}{d}$$



۲- مطابق رابطه $E = \frac{V}{d}$ ، یکای میدان الکتریکی علاوه بر نیوتون کولن که در گذشته خواندیم، می‌تواند ولت متر هم باشد.

نکته

در یک میدان الکتریکی یکنواخت اگر فاصله دو نقطه در راستای خطوط میدان d باشد، داریم:

$$\frac{\Delta V_{AB}}{\Delta V_{CD}} = \frac{d_{AB}}{d_{CD}}$$

بچه‌ها استفاده از قضیه کار - انرژی جنبشی و تحلیل اختلاف پتانسیل الکتریکی هم در کتاب درسی بهش پرداخته شده و هم در کنکور ارزش سوالات متنوعی طرح می‌شه. همین تست حتی برای امتحان نهایی هم شانس مطرح شدنش به شدت بالا هست.



۴۷- برای یک رسانای باردار منزوی، تراکم بار الکتریکی و شدت میدان الکتریکی در نقاط نوک تیز سطح جسم رسانای باردار، نسبت به سایر نقاط سطح آن به ترتیب از راست به چپ چگونه است؟

- (۱) بیشتر و کمتر (۲) بیشتر و بیشتر (۳) کمتر و کمتر (۴) کمتر و بیشتر

(آسان - خطبه خط - سریع - صفحه ۳۰ - ۱۱۰)

پاسخ: گزینه ۲

تراکم بار و شدت میدان الکتریکی در نقاط نوک تیز سطح جسم رسانای باردار منزوی از نقاط دیگر سطح آن بیشتر است.

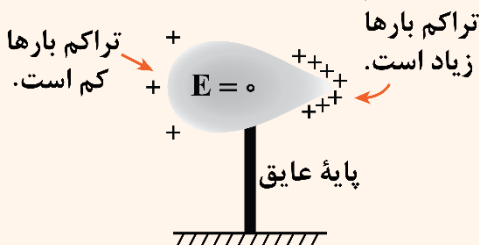
توزیع بار در جسم رسانا

در رساناهای منزوی، بار الکتریکی به گونه‌ای در سطح جسم پخش می‌شود که ویژگی‌های زیر را داشته باشد:

- ۱- بار الکتریکی در سطح خارجی رسانا پخش می‌شود.
- ۲- تجمع و تراکم بارها در نقاط نوک تیز سطح جسم رسانا بیشتر از سایر نقاط روی سطح رسانا است.
- ۳- میدان الکتریکی درون رسانا، صفر است.
- ۴- خطوط میدان الکتریکی در خارج از رسانا بر سطح آن عمود است.
- ۵- پتانسیل الکتریکی همه نقاط رسانا با هم برابر است، به عبارت دیگر اختلاف پتانسیل الکتریکی بین نقاط مختلف یک رسانا برابر صفر است.

یه نمونه باحال

جسم فلزی دوکی شکل زیر را در نظر بگیرید. اگر این جسم را باردار کنیم، تراکم بارها در قسمت نوک تیز بیشتر از سایر قسمت‌های آن است و در نتیجه در این نقاط تراکم خطوط میدان الکتریکی بیشتر و میدان الکتریکی در نزدیکی این نقاط، قوی‌تر است.



۴۸- خازن تختی با دی الکتریک هوا به یک باتری با اختلاف پتانسیل ثابت وصل است. چه تعداد از عبارت‌های زیر، در مورد این خازن، درست است؟

الف- با افزایش فاصله بین صفحات خازن، بار الکتریکی ذخیره شده در خازن، کاهش می‌یابد.

ب- اگر مساحت صفحات خازن را ۲۰ درصد کاهش دهیم، انرژی الکتریکی ذخیره شده در خازن، ۲۵ درصد افزایش می‌یابد.

ج- اگر فاصله بین صفحات خازن را $\frac{1}{4}$ برابر کرده و فضای بین صفحات را با دی الکتریک با ثابت ۴ پر کنیم، ظرفیت خازن، ۲ برابر می‌شود.

- (۱) صفر (۲) ۳ (۳) ۱ (۴) ۲

عبارت‌های «ب» و «ج» نادرست هستند.

بررسی موارد:



$$C = \kappa \epsilon_0 \frac{A}{d} \xrightarrow{d \uparrow} C \downarrow \xrightarrow{V = \frac{Q}{C} = \text{ثابت}} Q \downarrow \quad (\checkmark)$$



چون اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر خازن، ثابت است، داریم:

$$U = \frac{1}{2} C V^2 \Rightarrow \frac{U_2}{U_1} = \frac{C_2}{C_1} \xrightarrow{\frac{C_2}{C_1} = \frac{A_2}{A_1}} \frac{U_2}{U_1} = \frac{A_2}{A_1} \xrightarrow{A_2 = (1 - 0.2) A_1 = 0.8 A_1} \frac{U_2}{U_1} = 0.8$$

پس انرژی ذخیره شده در خازن نیز، ۲۰ درصد کاهش می‌یابد. (*)



$$C = \kappa \epsilon_0 \frac{A}{d} \Rightarrow \frac{C_2}{C_1} = \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \times \frac{d_1}{d_2} = \frac{4}{1} \times \frac{1}{2} = 2 \quad (*)$$

خازن متصل به باتری

اگر در حالتی که خازن به باتری متصل است، در ساختمان آن تغییر ایجاد کنیم، در این حالت اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر خازن، ثابت می‌ماند. در این حالت هر تغییری در ساختمان خازن که موجب تغییر در ظرفیت خازن می‌شود باعث تغییراتی به نسبت **مستقیم** در بار و انرژی ذخیره شده در خازن می‌شود.

در این حالت کمیت‌های مربوط به خازن با نسبت زیر تغییر می‌کنند:

$$\begin{cases} V = \text{ثابت} \\ U \propto Q \propto C \end{cases} \Rightarrow \frac{U_2}{U_1} = \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{C_2}{C_1}$$



۴۹ - اختلاف پتانسیل الکتریکی بین دو صفحه یک خازن تخت به ظرفیت $4 \mu F$ را از V_1 به V_2 افزایش می‌دهیم. با این کار، $12 \mu C$ بر بار

الکتریکی و $54 \mu J$ بر انرژی الکتریکی ذخیره شده در خازن افزوده می‌شود. نسبت $\frac{V_2}{V_1}$ در کدام گزینه به درستی آمده است؟

- (۱) ۱/۸ (۲) ۲ (۳) ۲/۶ (۴) ۳



به کمک رابطه $C = \frac{Q}{V}$ داریم:

$$\Delta V = \frac{\Delta Q}{C} \xrightarrow{\Delta Q = 12 \mu C, C = 4 \mu F} \Delta V = \frac{12}{4} = 3V \Rightarrow V_2 - V_1 = 3V \quad (*)$$

برای بررسی تغییرات انرژی ذخیره شده در خازن، به کمک رابطه $U = \frac{1}{2} CV^2$ داریم:

$$U_2 - U_1 = \frac{1}{2} C \times (V_2^2 - V_1^2) \Rightarrow 54 = \frac{1}{2} \times 4 \times \underbrace{(V_2 - V_1)}_{3V} (V_2 + V_1) \Rightarrow 54 = 6 \times (V_2 + V_1) \Rightarrow V_2 + V_1 = 9V \quad (2)$$

به کمک روابط (۱) و (۲) داریم:

$$\begin{cases} V_2 - V_1 = 3 \\ V_2 + V_1 = 9 \end{cases} \Rightarrow V_2 = 6V, V_1 = 3V \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = 2$$



نکته

ظرفیت خازن به اندازه بار ذخیره شده در خازن و نیز اختلاف پتانسیل الکتریکی بین دو صفحه آن بستگی ندارد. پس هرچه اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر خازن، افزایش یابد، به همان نسبت بار ذخیره شده در خازن زیاد می شود و ظرفیت خازن، ثابت می ماند.

$$C = \frac{Q}{V} \Rightarrow \overset{\uparrow \text{برابر } n}{Q} = \underset{\downarrow \text{ثابت}}{C} \times \overset{\uparrow \text{برابر } n}{V} \Rightarrow \Delta Q = C \Delta V$$

آزمون سراسری تجربی تیرماه ۱۴۰۲

۶۲- ظرفیت خازنی $40 \mu F$ است. اگر بار الکتریکی آن $\frac{3}{4}$ برابر شود، انرژی ذخیره شده در آن $25 \mu J$ افزایش می یابد. بار اولیه خازن چند میکروکولن است؟

(۱) ۴۰ (۲) ۶۰ (۳) ۸۰ (۴) ۱۲۰

پاسخ تشریحی:

اگر بار اولیه خازن برابر $Q_1 = Q$ باشد، بار نهایی آن برابر $Q_2 = \frac{3}{4}Q$ است و می توان نوشت:

$$\begin{cases} U_1 = \frac{1}{2} \frac{Q_1^2}{C} = \frac{Q^2}{80} \\ U_2 = \frac{1}{2} \frac{Q_2^2}{C} = \frac{\left(\frac{3}{4}Q\right)^2}{80} \end{cases} \Rightarrow \underbrace{U_2 - U_1}_{25 \mu J} = \frac{\frac{9}{16}Q^2 - \frac{1}{2}Q^2}{80} = \frac{\frac{5}{16}Q^2}{80} \Rightarrow 25 = \frac{\frac{5}{16}Q^2}{80} \Rightarrow Q^2 = 1600 \Rightarrow Q = 40 \mu C$$

پاسخ: گزینه ۱



۵۰- خازن تختی به مساحت صفحات 10 cm^2 را که فضای بین صفحات آن با دی الکتریکی با ثابت ۴ پر شده است را توسط یک باتری به طور کامل شارژ می کنیم. اگر خازن را از باتری جدا کرده و به تعداد 9×10^8 الکترون از صفحه منفی آن جدا کرده و به صفحه مثبت منتقل کنیم، بزرگی میدان الکتریکی بین صفحات خازن چند کیلوولت بر متر و چگونه تغییر می کند؟

$$(e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}, \epsilon_0 = 9 \times 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N.m}^2})$$

(۱) ۴ و افزایش (۲) ۳۶ و افزایش (۳) ۳۶ و کاهش (۴) ۴ و کاهش

گام اول

خازن شارژ شده را از باتری جدا کرده و 9×10^8 الکترون را از صفحه منفی خازن به صفحه مثبت آن انتقال داده‌ایم، پس بار الکتریکی خازن به اندازه q' کاهش می‌یابد:

$$q' = ne = 9 \times 10^8 \times 1.6 \times 10^{-19} = 1.44 \times 10^{-10} \text{ C} \Rightarrow Q_2 - Q_1 = -q' = -1.44 \times 10^{-10} \text{ C}$$

گام آخر

با توجه به اطلاعات مسأله، بهتر است اندازه میدان الکتریکی بین صفحات خازن را به کمک رابطه $E = \frac{Q}{\kappa \epsilon_0 A}$ بررسی کنیم:

$$E_2 - E_1 = \frac{Q_2 - Q_1}{\kappa \epsilon_0 A} \xrightarrow[\epsilon_0 = 9 \times 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N.m}^2}, A = 10 \text{ cm}^2 = 10^{-3} \text{ m}^2]{Q_2 - Q_1 = -1.44 \times 10^{-10} \text{ C}, \kappa = 4}$$

$$E_2 - E_1 = \frac{-1.44 \times 10^{-10}}{4 \times 9 \times 10^{-12} \times 10^{-3}} = -4 \times 10^3 \frac{\text{V}}{\text{m}} = -4 \frac{\text{kV}}{\text{m}}$$

بنابراین بزرگی میدان الکتریکی بین صفحات خازن، $4 \frac{\text{kV}}{\text{m}}$ کاهش می‌یابد.



نکته

برای محاسبه بزرگی میدان الکتریکی بین صفحات خازن می‌توان از روابط زیر استفاده کرد:

۱- اگر اختلاف پتانسیل الکتریکی بین صفحات خازن و فاصله بین صفحات خازن را بدانیم:

$$E = \frac{V}{d}$$

۲- اگر بار الکتریکی ذخیره شده در خازن و مساحت صفحه‌های خازن را بدانیم:

$$E = \frac{V}{d} = \frac{Q}{Cd} = \frac{Q}{\kappa \epsilon_0 \frac{A}{d} \times d} \Rightarrow E = \frac{Q}{\kappa \epsilon_0 A}$$



۵۱- یکای فرعی کدام یک از کمیت‌های زیر، برابر با $\frac{\text{A}^2 \cdot \text{s}^4}{\text{kg} \cdot \text{m}^2}$ است؟

- (۱) انرژی پتانسیل الکتریکی
(۲) میدان الکتریکی
(۳) ظرفیت خازن
(۴) ضریب گذردهی الکتریکی خلأ

با توجه به رابطه $q = It$ ، یکی از یکاهای بار الکتریکی، آمپر ثانیه است ($C = A \cdot s$)، بنابراین داریم:

$$\frac{\text{A}^2 \cdot \text{s}^4}{\text{kg} \cdot \text{m}^2} = \frac{(\text{A} \cdot \text{s})^2}{\text{kg} \cdot \text{m}^2} = \frac{\text{C}^2}{\text{J}} \xrightarrow[U = \frac{Q^2}{2C} \Rightarrow J = \frac{C^2}{F}]{\text{C}^2} \frac{\text{C}^2}{\text{J}} = \frac{\text{C}^2}{\frac{\text{C}^2}{F}} = F$$

پس یکای $\frac{\text{A}^2 \cdot \text{s}^4}{\text{kg} \cdot \text{m}^2}$ مربوط به ظرفیت خازن است.

بازی با یکاها دیگه پای ثابت کنکورتون شده! بچه‌ها برای هر کمیت فیزیکی سعی کنید همین بازی با یکا رو انجام بدین تا مشکلی نداشته باشید.



۵۲- چه تعداد از عبارت‌های زیر نادرست هستند؟

- الف- وقتی در داخل یک رسانای فلزی، میدان الکتریکی برقرار شود، الکترون‌های آزاد رسانای فلزی به‌طور آهسته در جهت میدان الکتریکی، سوق پیدا می‌کنند.
- ب- سرعت حرکت کاتوره‌ای الکترون‌های آزاد یک رسانای فلزی بسیار بیشتر از سرعت سوق این الکترون‌ها بعد از اعمال اختلاف پتانسیل الکتریکی به دو سر آن رسانای فلزی است.
- ج- در نبود اختلاف پتانسیل الکتریکی، شارش بار خالصی از مقطع معین رسانا نداریم.
- د- در یک رسانای فلزی، جهت جریان الکتریکی در خلاف جهت میدان الکتریکی داخل رسانا است.
- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

(آسان - خط‌به‌خط - سریع - صفحه ۴۷ - ۱۱۰۲)

پاسخ: گزینه ۲

عبارت‌های «الف» و «د» نادرست هستند.

بررسی موارد نادرست:



اگر به دو سر یک رسانای فلزی، اختلاف پتانسیل الکتریکی اعمال کنیم، میدان الکتریکی درون رسانا ایجاد می‌شود. این میدان الکتریکی باعث می‌شود که الکترون‌های آزاد در **خلاف جهت** میدان الکتریکی، سوق پیدا کنند.



در یک رسانای فلزی، جهت جریان الکتریکی در **جهت** میدان الکتریکی داخل رسانا است.



۵۳- ظرفیت باتری رایانه‌ای 60Ah است. در ابتدا از این باتری به مدت ۲ ساعت، جریان 5A و در t ساعت بعدی جریان 4A گرفته می‌شود. اگر بار الکتریکی قابل انتقال توسط این باتری در پایان برابر با 64800C باشد، t بر حسب ساعت در کدام گزینه به درستی آمده است؟

- (۱) ۲ (۲) ۸ (۳) ۴ (۴) ۱۶

(متوسط - محاسباتی - استاندارد - صفحه ۴۸ - ۱۱۰۲)

پاسخ: گزینه ۲

گام اول

مقدار بار باقی‌مانده در باتری در انتها برابر با 64800C است، ابتدا این بار را بر حسب آمپر - ساعت به دست می‌آوریم:

$$64800\text{C} \div 3600 = 18\text{Ah}$$

گام دوم

با توجه به پایستگی بار الکتریکی داریم:

$$60 = (2 \times 5) + (t \times 4) + 18 \Rightarrow 60 = 10 + 4t + 18 \Rightarrow 4t = 60 - 28 \Rightarrow 4t = 32 \Rightarrow t = 8\text{h}$$

آمپر - ساعت

یکای تجاری میزان بار ذخیره‌شده در باتری، آمپر - ساعت (Ah) می‌باشد. اصولاً مقدار بار باتری اتومبیل را بر حسب آمپر - ساعت (Ah) و حداکثر بار باتری گوشی‌های همراه را با میلی‌آمپر - ساعت (mAh) مشخص می‌کنند. درواقع آمپر - ساعت یک باتری، حداکثر باری است که باتری می‌تواند از مدار عبور دهد تا به‌طور ایمن تخلیه شود.



در رابطه $\Delta q = I \Delta t$ ، اگر I برحسب آمپر (A) و Δt برحسب ساعت (h) باشد، یکای Δq برابر آمپر-ساعت (Ah) می‌شود:

$$\Delta q = I \times \Delta t \Rightarrow 1C = 1A \times 1s$$

$\downarrow$
Ah

$\downarrow$
A

$\downarrow$
h

پس یک آمپر-ساعت مقدار باری است که در اثر عبور جریان یک آمپر در مدت یک ساعت از هر سطح مقطع رسانا می‌گذرد.

$$1Ah = 1A \times 3600s = 3600As = 3600C$$

یک آمپر-ساعت معادل ۳۶۰۰ کولن است.

$$Ah \xrightleftharpoons[\div 3600]{\times 3600} C$$



۵۴- جنس و دمای دو رسانای استوانه‌ای شکل توپر A و B، یکسان است. اگر قطر مقطع رسانای A، برابر با شعاع مقطع رسانای B و جرم آن ۲ برابر جرم رسانای B باشد، مقاومت الکتریکی رسانای B چند برابر مقاومت الکتریکی رسانای A است؟

$$\frac{1}{32} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{8} \quad (۳)$$

$$۸ \quad (۲)$$

$$۳۲ \quad (۱)$$

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - صفحه ۵۲ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۴

به کمک رابطه $R = \frac{\rho m}{\rho' A^2}$ که در آن چگالی و ρ مقاومت ویژه جسم است، داریم:

$$\frac{R_B}{R_A} = \frac{m_B}{m_A} \times \left(\frac{A_A}{A_B}\right)^2 \xrightarrow{A \propto r^2} \frac{R_B}{R_A} = \frac{m_B}{m_A} \times \left(\frac{r_A}{r_B}\right)^4 \xrightarrow{D_A = r_B \Rightarrow 2r_A = r_B, m_A = 2m_B} \frac{R_B}{R_A} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{32}$$

$$\frac{R_B}{R_A} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{32}$$

سوئی‌های پرتکرار

اگر خواسته سؤال رو به دقت نخونده باشی و نسبت مقاومت‌ها رو برعکس حساب کرده باشی، در دام گزینه (۱) می‌افتی.

این فرمول‌ها رو برای محاسبه مقاومت الکتریکی بر اساس ویژگی‌های ساختمانی آن به خاطر بسپار!

۱- محاسبه مقاومت الکتریکی رسانا به کمک **طول** و **جرم**:

$$R = \frac{\rho L^2}{V}$$

۲- محاسبه مقاومت الکتریکی رسانا به کمک **سطح مقطع** و **جرم**:

$$R = \frac{\rho V}{A^2}$$

۳- محاسبه مقاومت الکتریکی رسانا به کمک **طول**، **جرم** و **چگالی**:

$$R = \frac{\rho \rho' L^2}{m}$$

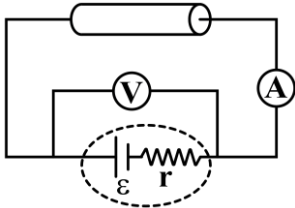
۴- محاسبه مقاومت الکتریکی رسانا به کمک **سطح مقطع**، **جرم** و **چگالی**:

$$R = \frac{\rho m}{\rho' A^2}$$

بچه‌ها در سال‌های اخیر، استفاده از روابط $R = \rho \rho' \frac{L^2}{m}$ و $R = \frac{\rho m}{\rho' A^2}$ خیلی مورد توجه طراحان قرار گرفته! این دو تا رابطه رو حفظ باش تا توی این تیپ سؤالات، به راحتی به جواب برسی.



۵۵- در مدار شکل زیر، یک رسانای توپر استوانه‌ای شکل به دو سر یک باتری، متصل شده‌است. در این حالت، آمپرسنج عدد A_1 را نشان می‌دهد. اگر طول رسانا را ۲ برابر کنیم، عددی که آمپرسنج نشان می‌دهد، ۲۵ درصد تغییر می‌کند. اگر در حالت دوم، فقط قطر مقطع رسانای اولیه را نصف کنیم، عددی که آمپرسنج نشان می‌دهد، نسبت به حالت ابتدایی (A_1) چند درصد و چگونه تغییر می‌کند؟ (آمپرسنج را آرمانی در نظر بگیرید.)



- (۱) ۵۰ و افزایش
- (۲) ۵۰ و کاهش
- (۳) ۷۵ و افزایش
- (۴) ۷۵ و کاهش

سخت - محاسباتی - زمان‌بر (۵) - صفحه ۶۴ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۲

گام اول

اگر طول رسانا را ۲ برابر کنیم، با توجه به رابطه $R = \rho \frac{L}{A}$ داریم:

$$\frac{R'}{R} = \frac{L'}{L} \xrightarrow{L'=2L} \frac{R'}{R} = 2$$

با توجه به افزایش مقاومت الکتریکی رسانا، بنابراین با توجه به رابطه $I = \frac{\varepsilon}{R+r}$ ، جریان خروجی از باتری کاهش می‌یابد، در نتیجه داریم:

$$I' = I - \frac{25}{100} I \Rightarrow I' = \frac{75}{100} I \Rightarrow I' = \frac{3}{4} I$$

$$\Rightarrow \frac{\varepsilon}{R'+r} = \frac{3}{4} \times \frac{\varepsilon}{R+r} \xrightarrow{R'=2R} \frac{1}{2R+r} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{R+r}$$

$$\Rightarrow 4R + 4r = 6R + 3r \Rightarrow 6R - 4R = 4r - 3r \Rightarrow 2R = r \quad (1)$$

گام دوم

اگر قطر مقطع رسانای اولیه را نصف کنیم، با توجه به رابطه $R = \rho \frac{L}{A}$ داریم:

$$\frac{R''}{R} = \left(\frac{d}{d''}\right)^2 \xrightarrow{d''=\frac{1}{2}d} \frac{R''}{R} = (2)^2 \Rightarrow \frac{R''}{R} = 4 \Rightarrow R'' = 4R \quad (2)$$

جریان خروجی از باتری در این حالت برابر است با:

$$I'' = \frac{\varepsilon}{R''+r} \xrightarrow{(2), (1)} I'' = \frac{\varepsilon}{4R+2R} = \frac{\varepsilon}{6R}$$

گام سوم

$$I = \frac{\varepsilon}{R+r} \xrightarrow{(1)} I = \frac{\varepsilon}{R+2R} = \frac{\varepsilon}{3R}$$

درصد تغییرات جریان خروجی از باتری برابر است با:

$$\frac{I'' - I}{I} \times 100 = \frac{\frac{\varepsilon}{6R} - \frac{\varepsilon}{3R}}{\frac{\varepsilon}{3R}} \times 100 = \frac{-\varepsilon}{\frac{\varepsilon}{3R}} \times 100 = -50\%$$

جریان خروجی از باتری نسبت به حالت اولیه ۵۰ درصد کاهش می یابد.

عوامل مؤثر بر مقاومت الکتریکی رسانا

۱- مقدار مقاومت الکتریکی یک رسانا به ویژگی‌های ساختمانی و دمای آن وابسته است و ارتباطی با اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر رسانا و جریان عبوری از آن ندارد.

مقدار مقاومت الکتریکی یک سیم برحسب ویژگی‌های ساختمانی آن را می‌توانیم از رابطه زیر به دست آوریم:

$$R = \rho \frac{L}{A}$$

R : مقدار مقاومت الکتریکی با یکای اهم (Ω) ρ : مقاومت ویژه سیم با یکای اهم $\times$ متر ($\Omega \cdot m$)

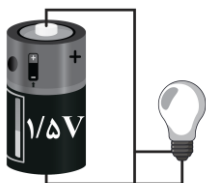
L : طول سیم با یکای متر (m) A : سطح مقطع سیم با یکای مترمربع (m^2)

۲- با توجه به رابطه $R = \rho \frac{L}{A}$ ، برای مقایسه مقاومت الکتریکی دو سیم به صورت زیر عمل می‌کنیم:

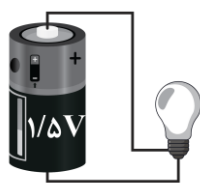
$$R = \rho \frac{L}{A} \Rightarrow \frac{R_2}{R_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \times \frac{L_2}{L_1} \times \frac{A_1}{A_2} \xrightarrow{D: \text{ قطر مقطع}} \frac{R_2}{R_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \times \frac{L_2}{L_1} \times \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2$$



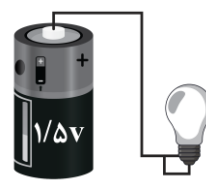
۵۶- در کدام یک از شکل‌های زیر، لامپ روشن می‌شود؟



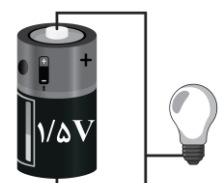
«ا»



«ب»



«ج»



«د»

(۴) فقط «ج»

(۳) «ج» و «د»

(۲) «ب» و «ج»

(۱) «الف» و «ب»

(آسان - مفهومی - سریع ۵ - صفحه ۴۶ - ۱۱۰۲)

پاسخ: گزینه ۴

برای این که لامپ روشن شود، باید به آن ولتاژ اعمال شود؛ بنابراین اگر دو سر یک لامپ با سیم بدون مقاومت به هم وصل شود، ولتاژ (اختلاف پتانسیل) اعمال شده به آن صفر است؛ در نتیجه:

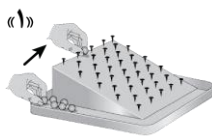
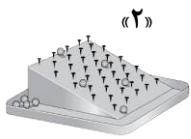
لامپ «الف» روشن نمی‌شود.

لامپ‌های «ب» و «د» اتصال کوتاه شده و دو سر آن پتانسیل یکسان دارند؛ بنابراین روشن نمی‌شوند.

دو سر لامپ «ج» به باتری وصل شده و پتانسیل یکسانی ندارند؛ بنابراین $\Delta V \neq 0$ است و روشن می‌شود.



۵۷- شکل‌های زیر، یک مشابهت‌سازی مکانیکی برای درک مقاومت و نیروی محرکه الکتریکی را نشان می‌دهند که در آن بر سطح شیب‌داری میخ‌هایی تعبیه شده و تیل‌ها از ارتفاع بالای سطح شیب‌دار، رها می‌شوند و دوباره به بالای سطح شیب‌دار بازگردانده می‌شوند. نمادهای داده‌شده در کدام یک از گزینه‌های زیر به ترتیب از راست به چپ، معادل شکل‌های (۱) و (۲) هستند؟



$$(2) \quad \begin{array}{c} | \\ + \\ \hline - \end{array} \text{ و } \begin{array}{c} | \\ - \\ \hline + \end{array}$$

$$(4) \quad \begin{array}{c} | \\ - \\ \hline + \end{array} \text{ و } \begin{array}{c} | \\ + \\ \hline - \end{array}$$

$$(1) \quad \begin{array}{c} | \\ + \\ \hline - \end{array} \text{ و } \begin{array}{c} | \\ - \\ \hline + \end{array}$$

$$(3) \quad \begin{array}{c} | \\ - \\ \hline + \end{array} \text{ و } \begin{array}{c} | \\ + \\ \hline - \end{array}$$

(آسان - مفهومی - استاندارد ۱ - صفحه ۶۱ - ۱۱۰۲)

پاسخ: گزینه ۱

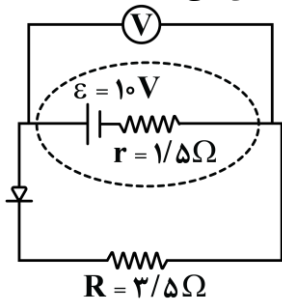
با توجه به شکل، در بخش (۱) گلوله‌ها بالا آورده می‌شوند و بر روی آن‌ها کار انجام می‌شود که این شبیه‌سازی کاری است که منبع نیروی محرکه بر روی بار الکتریکی انجام می‌دهد که با توجه به جهت حرکت گلوله که شبیه‌سازی جریان الکتریکی است، درمی‌یابیم منبع نیروی محرکه باید به شکل مقابل باشد:

$$\begin{array}{c} | \\ + \\ \hline - \end{array}$$

از طرفی بخش (۲) که میخ‌ها را در مسیر حرکت گلوله نشان می‌دهد، یون‌های شبکه اتمی را شبیه‌سازی می‌کند که نقش مقاومت ($\text{---}\text{---}\text{---}$) را ایفا می‌کنند.



۵۸- در مدار شکل زیر، اگر جای قطب‌های مثبت و منفی باتری را عوض کنیم، عددی که ولت‌سنج آرمانی نشان می‌دهد، چند ولت و چگونه تغییر می‌کند؟



(۱) ۲ و کاهش

(۲) ۲ و افزایش

(۳) ۳ و کاهش

(۴) ۳ و افزایش

(متوسط - محاسباتی - استاندارد ۲ - صفحه ۶۴ - ۱۱۰۲)

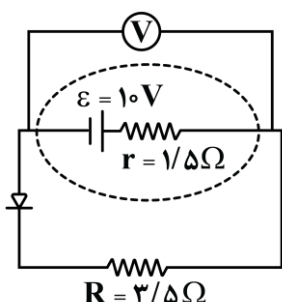
پاسخ: گزینه ۴

با توجه به شکل مدار درمی‌یابیم دیود وقتی که جریان عبوری از آن رو به پایین است (حالت اول) مقاومتش ناچیز و وقتی جریان عبوری از آن رو به بالا است (حالت دوم)، مقاومتش بسیار زیاد است و اجازه عبور جریان نمی‌دهد.

حالت اول

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r} \xrightarrow{\varepsilon = 10V, R = 3/5\Omega, r = 1/5\Omega} I = \frac{10}{3/5 + 1/5} = 2A$$

$$V = \varepsilon - rI \xrightarrow{\varepsilon = 10V, r = 1/5\Omega, I = 2A} V = 10 - 1/5 \times 2 = 9V$$



$$I' = 0$$

$$V' = \varepsilon - rI' = \varepsilon = 10V$$

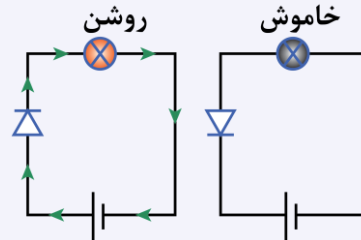
حالت دوم

بنابراین در حالت دوم، عددی که ولت‌سنج نشان می‌دهد، ۳V افزایش می‌یابد.



دیود

دیود، قطعه‌ای است که هرگاه در مداری قرار گیرد، جریان را تنها از یک سو عبور می‌دهد و مقاومت آن در برابر عبور جریان در این سو ناچیز است. به همین دلیل، **دیود** را اغلب به عنوان **یک سوکننده جریان** در نظر می‌گیرند و آن را با نماد $\rightarrow|$ در مدارهای الکتریکی نشان می‌دهند. **پیکان در این نماد، جهتی را نشان می‌دهد که جریان می‌تواند از دیود عبور کند.** مثلاً مدارهای ساده زیر نشان می‌دهد که با تعویض جهت دیود، جریان از مدار عبور نمی‌کند و لامپ خاموش می‌شود. همچنین **از دیود در مدارهای یک سوکننده برای تبدیل جریان‌های متناوب به جریان‌های مستقیم استفاده می‌شود.**



۵۹- دمای یک سیم رسانا را از 10°C به 260°C می‌رسانیم. اگر ضریب دمایی مقاومت ویژه آن $2 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1}$ باشد، مقاومت الکتریکی

این سیم چند درصد افزایش یافته است؟

- (۱) ۲۵ (۲) ۳۰ (۳) ۵۰ (۴) ۶۰

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) (صفحه ۵۴ - ۱۱۰۲)

پاسخ: گزینه ۳

طبق رابطه $\Delta R = R_1 \alpha \Delta T$ می‌توانیم بنویسیم:

$$\text{درصد تغییر مقاومت} = \frac{\Delta R}{R_1} \times 100 = \frac{R_1 \alpha \Delta T}{R_1} \times 100 = \alpha \Delta T \times 100$$

$$\frac{\alpha = 2 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1}}{\Delta T = \Delta \theta = 260 - 10 = 250 \text{ K}} \rightarrow \text{درصد تغییر مقاومت} = 2 \times 10^{-3} \times 250 \times 100 = 50\%$$

بنابراین مقاومت الکتریکی سیم، ۵۰ درصد افزایش می‌یابد.

اثر تغییر دما بر مقاومت الکتریکی

در مقاومت‌های فلزی، با افزایش دما، مقاومت الکتریکی هم افزایش می‌یابد. برای محاسبه تغییرات مقاومت الکتریکی فلزات برحسب دما از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$\Delta R = R_f - R_1 = R_1 \alpha \Delta \theta \Rightarrow R_f = R_1 (1 + \alpha \Delta \theta)$$

در مسائل مربوط به اثر دما بر مقاومت، ممکن است خواسته‌های زیر مطرح شود:

الف) مقاومت الکتریکی چند برابر می‌شود؟

در این حالت نسبت $\frac{R_f}{R_1}$ را می‌خواهیم و داریم:

$$R_f = R_1 (1 + \alpha \Delta \theta) \Rightarrow \frac{R_f}{R_1} = 1 + \alpha \Delta \theta$$

ب) مقاومت الکتریکی چقدر تغییر می‌کند؟

در این حالت $R_f - R_1$ موردنظر است و داریم:

$$\Delta R = R_f - R_1 = R_1 \alpha \Delta \theta$$

ج) مقاومت الکتریکی چند درصد تغییر کرده است؟

در این حالت $\frac{\Delta R}{R_1}$ را می‌خواهیم و داریم:

$$\frac{\Delta R}{R_1} \times 100 = \frac{R_1 \alpha \Delta \theta}{R_1} \times 100 = \alpha \Delta \theta \times 100$$

$$\Rightarrow \text{درصد تغییر مقاومت} = \alpha \Delta \theta \times 100$$

راهنمای مسیر

انقدر که از درصد تغییرات توی انبساط گرمایی دهم سؤال اومده از تغییر مقاومت نیومده. پس یه سؤال مثل این می‌تونه سوال احتمالی کنکور باشه.



۶- نمودار اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر یک باتری بر حسب جریان الکتریکی عبوری از آن، مطابق شکل زیر است. مقاومت داخلی

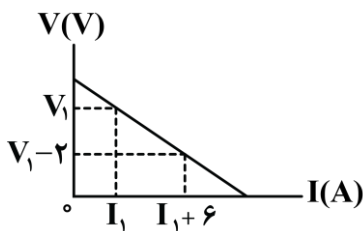
باتری چند اهم است؟

۰/۵ (۲)

۰/۲۵ (۱)

$\frac{1}{3}$ (۴)

$\frac{2}{3}$ (۳)



(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - صفحه ۶۴ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۴

با توجه به رابطه اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر باتری داریم:

$$\begin{cases} V_1 = \varepsilon - rI_1 \\ V_2 = \varepsilon - rI_2 \end{cases} \Rightarrow V_1 - V_2 = -r(I_1 - I_2) \Rightarrow 2 = -r \times (-6) \Rightarrow r = \frac{1}{3} \Omega$$

ولتاژ باتری

رابطه اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر یک باتری (مولد) به صورت زیر است:

$$V_{\text{باتری}} = \varepsilon - rI$$

در رابطه فوق، ε برابر نیروی محرکه باتری و r برابر مقاومت داخلی آن است.

نکته

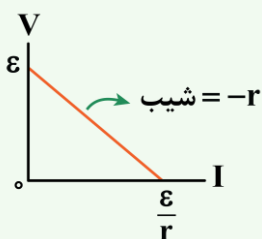
مطابق رابطه $V_{\text{باتری}} = \varepsilon - rI$ ، نمودار ولتاژ - جریان یک باتری (مولد) مطابق شکل زیر است.

۱- بیشینه ولتاژ باتری (مولد) برابر نیروی محرکه آن است.

۲- اندازه شیب نمودار برابر مقاومت داخلی باتری است.

۳- عرض از مبدأ نمودار برابر ε و طول از مبدأ آن برابر $\frac{\varepsilon}{r}$ است.

۴- بیشینه جریان خروجی از باتری برابر $\frac{\varepsilon}{r}$ است.



راهنمای مسیر

سؤالات نموداری اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر باتری واقعی بر حسب جریان عبوری از آن خیلی مهم!





برای دیدن پاسخنامه ویدئویی آزمون
QRcode بالا را اسکن کنید!
یا بر روی لینک زیر کلیک کنید!
پاسخنامه ویدئویی آزمون

بودجه‌بندی
این آزمون

قدر هدایای زمینی را بدانیم (کل فصل)
در پی غذای سالم (از ابتدای فصل تا انتهای گرما در واکنش‌های شیمیایی)
صفحه‌های ۱ تا ۶۵

سهم در
کنکور

مباحث این آزمون در مجموع ۶ تست از ۳۰ تست کنکور را پوشش داده است.

۶۱- کدام یک از مطالب زیر نادرست است؟

- (۱) عدم توزیع یکسان منابع و عناصر در جهان، پدیدآورنده تجارت جهانی است.
- (۲) بررسی و یافتن الگوهای رفتار فیزیکی عناصر از جمله اهداف علم شیمی است.
- (۳) گسترش صنعت خودرو به ماده‌ای بستگی دارد که از آهن خالص تشکیل می‌شود.
- (۴) امروزه میزان مصرف مواد معدنی از مجموع سوخت‌های فسیلی و فلزها بیشتر است.

پاسخ: گزینه ۳

(آسان - خط به خط - سریع ۶ - صفحه ۱۱۰۱)

گسترش فناوری به میزان دسترسی به مواد مناسب وابسته بوده و کشف و درک خواص یک ماده جدید، پرچمدار توسعه فناوری است. صنعت خودرو با شناخت و دسترسی به فولاد، گسترش یافت. فولاد آلیاژی از آهن با خلوص تقریبی ۹۵ درصد است.

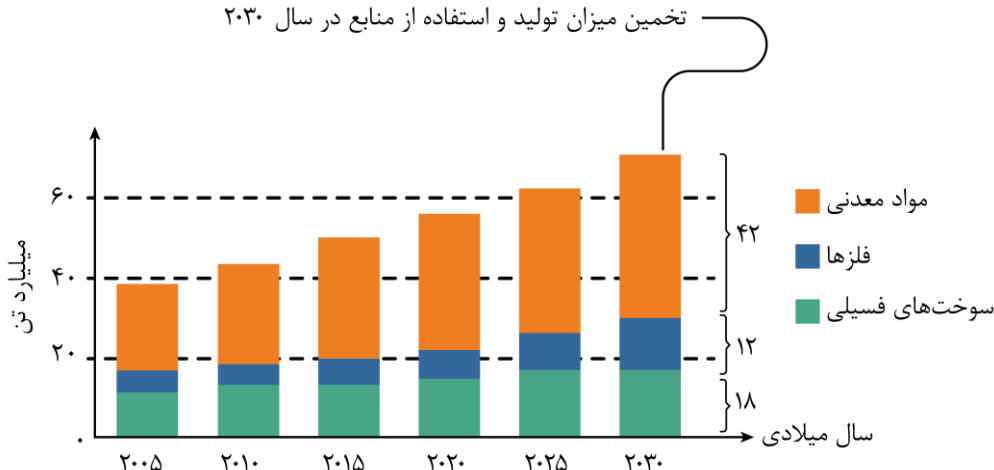
بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) کره زمین انباری از منابع و عناصر ارزشمند است که این منابع به‌طور یکسان توزیع نشده‌اند. همین عدم توزیع یکسان، موجب پیدایش تجارت جهانی برای تأمین نیاز کشورها شده است.

۲) علم شیمی را می‌توان مطالعه هدف‌دار، منظم و هوشمندانه رفتار عنصرها و مواد برای یافتن روندها و الگوهای رفتار فیزیکی و شیمیایی آن‌ها دانست.

۴) نمودار زیر میزان تولید و مصرف منابع گوناگون را در سالیان گذشته نشان می‌دهد.

تخمین میزان تولید و استفاده از منابع در سال ۲۰۳۰



بر اساس این نمودار، در حال حاضر (و در کل این نمودار) میزان مصرف مواد معدنی همواره از مجموع مصرف سوخت‌های فسیلی و فلزها بیشتر است.



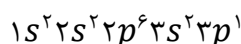
۶۲- کدام یک از مطالب زیر در مورد اولین فلز دسته p نادرست است؟

- (۱) تنها فلز این دسته است که توانایی رسیدن به آرایش گاز نجیب را دارد.
- (۲) در اکسید آن، شمار کاتیون ها $1/5$ برابر شمار آنیون ها است.
- (۳) شعاع اتمی آن از سایر فلزهای هم دوره کوچک تر است.
- (۴) تنها توانایی تشکیل یک یون پایدار دارد.

پاسخ: گزینه ۲

(متوسط - مفهومی - استاندارد) - صفحه ۱۳ - ۱۱۰۱

اولین فلز دسته p آلومینیم از گروه سیزدهم و دوره سوم جدول تناوبی است. آرایش الکترونی این فلز به صورت زیر است:



یون آلومینیم بار $3+$ و یون اکسید بار $2-$ دارد. پس فرمول شیمیایی اکسید این ماده Al_2O_3 بوده و نسبت شمار کاتیون به شمار آنیون در این ترکیب برابر $\frac{2}{3}$ است.

بررسی سایر گزینه ها:

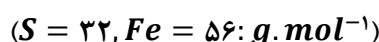
این عنصر برای تبدیل شدن به کاتیون ۳ الکترون لایه سوم خود را از دست داده و به آرایش گاز نجیب نئون می رسد. سایر عناصر فلزی این دسته، برای رسیدن به آرایش گاز نجیب علاوه بر از دست دادن تمام الکترون های لایه ظرفیت خود باید ۱۰ الکترون زیر لایه $d^{10}(n-1)$ را از دست دهند که امکان پذیر نبوده و یون ایجاد شده پایدار نیست. پس در حیطه کتاب درسی تنها فلزی از دسته p که می تواند به آرایش گاز نجیب برسد، آلومینیم است.

در دوره سوم جدول تناوبی ۳ فلز سدیم، منیزیم و آلومینیم حضور دارند که در جدول تناوبی آلومینیم نسبت به دو عنصر دیگر، در سمت راست قرار می گیرد. در یک دوره از چپ به راست، شعاع اتمی کاهش می یابد. پس در میان این ۳ عنصر فلزی، آلومینیم کمترین شعاع اتمی را دارد.

یون Al^{3+} تنها یون پایدار این فلز بوده و به همین علت در نام گذاری ترکیبات یونی این فلز، نیازی به نوشتن بار یون آن وجود ندارد.



۶۳- در ظرفی ۵۶ گرم از یک نمونه آهن ناخالص با مقدار کافی گوگرد مطابق معادله موازنه نشده $Fe(s) + S_8(g) \rightarrow FeS(s)$ واکنش می دهد و جرم توده جامد موجود در ظرف $12/8$ گرم افزایش می یابد. درصد خلوص آهن در نمونه اولیه کدام است؟



۶۰ (۴)

۵۰ (۳)

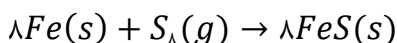
۴۰ (۲)

۲۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - صفحه ۲۳ - ۱۱۰۱

معادله موازنه شده واکنش مورد نظر به صورت زیر است:



همانطور که در واکنش بالا مشخص است، علت افزایش جرم توده جامد موجود در ظرف به دلیل اضافه شدن مقداری گاز گوگرد به این توده جامد است. در نتیجه، مقدار جرم افزایش یافته برابر با مقدار گاز گوگرد مصرف شده است. بر این اساس جرم آهن مصرف شده را حساب می کنیم:

$$? g Fe = 12/8 g S_8 \times \frac{1 mol S_8}{256 g S_8} \times \frac{8 mol Fe}{1 mol S_8} \times \frac{56 g Fe}{1 mol Fe} = 22/4 g$$

در نتیجه جرم آهن خالص برابر با $22/4$ گرم است و درصد خلوص نمونه اولیه برابر است با:

$$\text{درصد خلوص} = \frac{\text{جرم ماده خالص}}{\text{جرم کل}} \times 100 \Rightarrow P = \frac{22/4}{56} \times 100 = 40\%$$

بنابراین درصد خلوص نمونه آهن برابر با ۴۰ درصد است.

۶۴- با توجه به شکل زیر که نشان‌دهندهٔ پنج دورهٔ اول جدول دوره‌ای است، کدام مورد دربارهٔ عناصر مشخص‌شده نادرست است؟

[illegible]

- (۱) مقایسهٔ تمایل برخی عناصر برای تبدیل شدن به آنیون به صورت « $H > G > J$ » است.
 (۲) استخراج عنصر E برخلاف عنصر D به روش گیاه‌پالایی مقرون به صرفه است.
 (۳) مقایسهٔ شعاع اتمی برخی عناصر به صورت « $C > F > B > A$ » است.
 (۴) از عنصر B همانند عنصر F می‌توان برای تهیهٔ فلز تیتانیوم استفاده کرد.

پاسخ: گزینه ۱

(سخت - استدلالی - زمان پر ۶) - صفحہ ۲۵ - ۱۱۰۱)

در یک دوره از جدول دوره‌ای از چپ به راست خاصیت نافلزی افزایش و در یک گروه از جدول دوره‌ای خاصیت نافلزی از بالا به پایین کاهش می‌یابد. در نتیجه تمایل به تشکیل آنیون یا همان خاصیت نافلزی عنصر G از عناصر H و J بیشتر است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

- عناصر E و D به ترتیب مس و نیکل هستند که استخراج فلز مس برخلاف نیکل به روش گیاه‌پالایی مقرون به صرفه است.
- در یک دوره از جدول دوره‌ای از چپ به راست شعاع اتمی کاهش و در یک گروه از جدول دوره‌ای شعاع اتمی از بالا به پایین افزایش می‌یابد؛ در نتیجه مقایسه شعاع اتمی عناصر A, B, F و C به صورت « $C > F > B > A$ » خواهد بود.
- عناصر B و F به ترتیب منیزیم و سدیم هستند. از آنجا که واکنش‌پذیری فلزهای سدیم و منیزیم بیشتر از تیتانیم بوده، می‌توان برای استخراج و تهیه فلز تیتانیم از آن‌ها استفاده نمود.



۶۵- در کلرید یک فلز قلبایی، تمام یون‌ها آرایش یکسان دارند. در تولید این ترکیب از عناصر سازنده چه نوری ساطع می‌شود؟

(۴) سبز

(۳) زرد

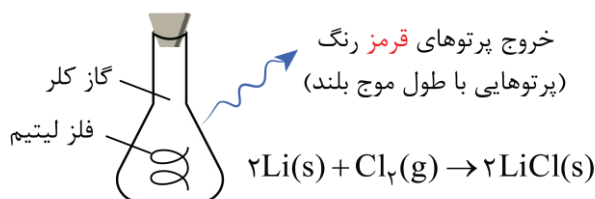
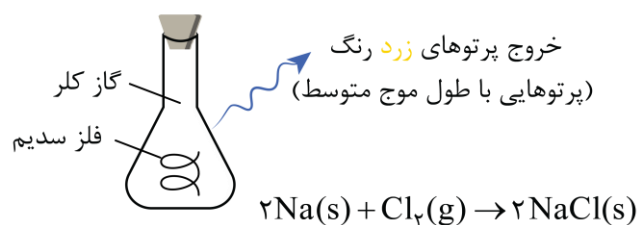
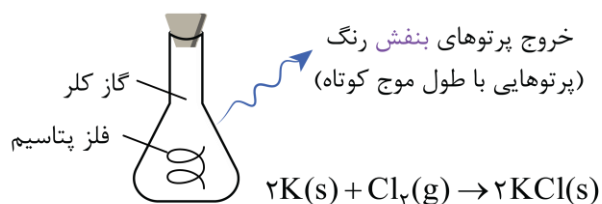
(۲) بنفش

(۱) قرمز

پاسخ: گزینه ۲

(آسان - مفہومی - سریع ۶ - صفحہ ۱۲ - ۱۱۰۱)

کلر، هالوژنی از دوره سوم بوده و آرایش الکترونی یون کلرید مشابه آرایش الکترونی آرگون است. همچنین در میان فلزهای قلیایی، آرایش الکترونی یون پتاسیم (از دوره چهارم) مشابه آرایش الکترونی گاز نجیب دوره سوم است. پس ترکیب حاصل پتاسیم کلرید بوده که از واکنش پتاسیم و گاز کلر ایجاد می‌شود. شکل زیر واکنش فلزهای لیتیم، سدیم و پتاسیم را با گاز کلر نمایش می‌دهد:



بر این اساس در این واکنش نور بنفش رنگ ساطع می‌شود.

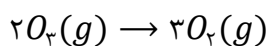
۶۶- واکنش تبدیل گاز اوزون به گاز اکسیژن با معادله $3O_2(g) \rightarrow 2O_3(g)$ در دو ظرف متفاوت انجام می‌شود. اگر در پایان واکنش در یکی از این ظروف جرم دو گاز و در ظرف دیگر مقدار (مول) دو گاز برابر باشد، تفاوت بازده واکنش در این دو ظرف برابر چند درصد است؟

(۲) ۱۵ (۳) ۱۰ (۴) ۵

پاسخ: گزینه ۳

سخت - محاسباتی - استاندارد (صفحه ۲۳ - ۱۱۰۱)

واکنش انجام شده به صورت زیر است:



این واکنش در دو ظرف انجام می‌شود. بازده هر ظرف را حساب می‌کنیم:

ظرف اول: در این ظرف در پایان واکنش x گرم اوزون و x گرم اکسیژن وجود دارد. پس جرم فراورده عملی برابر x گرم است. همچنین چون جرم اکسیژن تولید شده برابر با جرم اوزون مصرف شده است، مقدار اولیه اوزون برابر $2x$ گرم بوده که انتظار داریم همین جرم اکسیژن به عنوان فراورده نظری تولید شود؛ پس بازده درصدی واکنش برابر ۵۰ درصد خواهد بود.

$$\text{بازده درصدی} = \frac{\text{فراورده عملی}}{\text{فراورده نظری}} \times 100 \Rightarrow R = \frac{x}{2x} \times 100 = 50\%$$

ظرف دوم: در این ظرف x مول اوزون و x مول اکسیژن وجود دارد. پس مقدار فراورده عملی برابر x مول است. همچنین x مول اکسیژن تولید شده از $\frac{2}{3}x$ مول اوزون تولید شده است و مقدار اولیه اوزون برابر $\frac{5}{3}x = x + \frac{2}{3}x$ مول بوده است؛ بنابراین مقدار فراورده نظری برابر است با:

$$? \text{ mol } O_2 = \frac{5}{3}x \text{ mol } O_3 \times \frac{3 \text{ mol } O_2}{2 \text{ mol } O_3} = \frac{5}{2}x \text{ mol}$$

بنابراین بازده درصدی واکنش برابر خواهد بود با:

$$\text{بازده درصدی} = \frac{\text{فراورده عملی}}{\text{فراورده نظری}} \times 100 \Rightarrow R = \frac{x}{\frac{5}{2}x} \times 100 = 40\%$$

پس تفاوت بازده درصدی واکنش در دو ظرف برابر ۱۰ درصد است.



در کسر بازده درصدی باید فراورده عملی و نظری (صورت و مخرج کسر) واحد یکسان داشته باشند و نیاز نیست حتماً از واحدهای جرم استفاده کرد. به عنوان مثال در سؤال بالا از مول استفاده شد. همچنین می‌توان از واحدهای حجم نیز استفاده کرد. تنها شرط، یکسان بودن یکای صورت و مخرج است.



۶۷- کدام یک از مطالب زیر نادرست است؟

- (۱) فلز مس در سنگ معدن خود به صورت سولفیدی از این فلز وجود دارد.
- (۲) در آزمایشگاه تأمین شرایط نگهداری فلزهای قلیایی آسان تر از فلزهای قلیایی خاکی است.
- (۳) مس از منابع تجدیدناپذیر است که طی فرایند فرسایش در نهایت به سنگ معدن خود تبدیل می‌شود.
- (۴) واکنش پذیری تیتانیم و آهن از طلا بیشتر بوده و طلا و تیتانیم برخلاف آهن در برابر خوردگی مقاوم هستند.

پاسخ: گزینه ۲

متوسط - مفهومی - استاندارد (صفحه ۵۰ - ۱۱۰۱)

هر چه واکنش پذیری فلزها بیشتر باشد، تمایل آن‌ها به تبدیل شدن آن‌ها به ترکیب بیشتر بوده و شرایط نگهداری آن‌ها دشوارتر است. واکنش پذیری فلزهای قلیایی (گروه اول) از واکنش پذیری فلزهای قلیایی خاکی (گروه دوم) بیشتر بوده و شرایط نگهداری آن‌ها سخت تر است. نمودار زیر خواص شیمیایی دو فلز را مقایسه می‌کند. وجود هر یک از این ویژگی‌ها میان دو فلز، گزاره‌های دیگر را تأیید می‌کند؛ یعنی هر یک از این مقایسه‌ها درست باشد، سایر مقایسه‌ها نیز صحیح خواهند بود.

واکنش پذیری: $B > A$

واکنش پذیری ترکیب:
ترکیب $B > A$

پایداری ترکیب:
ترکیب $B < A$

واکنش فلز B با
محلول نمک فلز A
به طور طبیعی

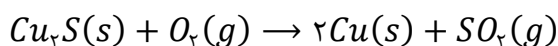
عدم واکنش فلز A با
محلول نمک فلز B
به طور طبیعی

دشواری استخراج:
 $A < B$

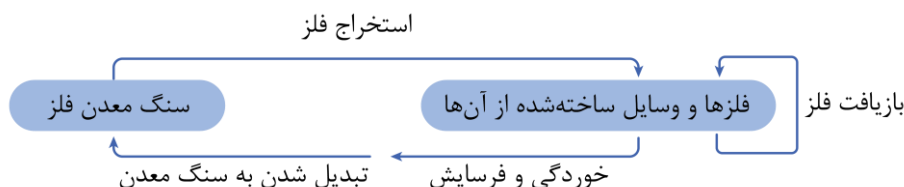
آسان بودن شرایط
نگهداری: $A > B$

بررسی سایر گزینه ها:

سنگ معدن مس، حاوی Cu_2S است و واکنش استخراج مس به صورت زیر خواهد بود:



فلزها از منابع تجدیدناپذیر هستند که چرخه عمر آنها به صورت زیر است:



فرایند فرسایش موجب بازگشت مواد به طبیعت می شود. در مورد فلزها، موجب تبدیل وسیله فلزی به سنگ معدن خواهد شد.

واکنش پذیری فلز طلا ناچیز بوده و واکنش پذیری آن از فلز تیتانیوم و فلز آهن کمتر است. (همچنین واکنش پذیری فلز تیتانیوم نیز از فلز آهن بیشتر است.) طلا و تیتانیوم در مقابل خوردگی مقاوم هستند و به همین علت از آنها به ترتیب در تزئین ساختمان و ساخت بدنه های مختلف استفاده می شود. در مقابل، آهن در مجاورت هوا و رطوبت زنگ می زند و دچار خوردگی می شود. (علت مقاومت طلا در برابر خوردگی واکنش پذیری پایین آن و همچنین علت عدم خوردگی تیتانیوم ساختار اکسید آن است که به سطح فلز می چسبد و مانع از اکسید شدن نقاط زیرین می شود. با این پدیده در شیمی دوازدهم آشنا می شوید.)

۶۸- با توجه به جدول زیر، کدام موارد درباره عناصر مشخص شده درست هستند؟

عنصر	A	B	X	Y
شمار الکترون های ظرفیتی	۳	۴	۶	۷
شمار الکترون ها با $l = 1$	۱۳	۸	۱۲	۵

الف - شدت انجام واکنش عنصر Y با فلز سدیم نسبت به واکنش گاز اکسیژن با همین فلز، بیشتر است.

ب - کاتیونی از عنصر X در تشکیل ترکیب X_2O_3 شرکت دارد که آرایش الکترونی آن به $3d^5$ ختم می شود.

ج - عنصر B نسبت به عنصر بعدی خود در جدول تناوبی شعاع اتمی و تمایل تبدیل شدن به یون تک اتمی بیشتری دارد.

د - عنصر هم دوره با عنصر A که دارای شمار الکترون های ظرفیتی برابری با آن است، در ساخت تلویزیون رنگی نقش دارد.

(۱) «الف» و «ج» (۲) «الف» و «د» (۳) «ب» و «ج» (۴) «ب» و «د»

(سخت - مفهومی - زمان بر) - صفحه ۱۶ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۲

با توجه به جدول زیر عناصر A، B، X و Y به ترتیب گالیوم، سیلیسیم، کروم و فلئور است.

عناصر	آرایش لایه ظرفیت	زیرلایه ها با $l = 1$
Ga	$4s^2 4p^1$	$2p^6 3p^6 4p^1$
Si	$3s^2 3p^2$	$2p^6 3p^2$
Cr	$3d^5 4s^1$	$2p^6 3p^6$
F	$2s^2 2p^5$	$2p^5$

عبارت های «الف» و «د» درست هستند.

فلوئور (عنصر Y) بیشترین خصلت نافلزی را در بین عناصر نافلزی جدول دوره‌ای دارد و با فلزها شدیدتر واکنش می‌دهد. در نتیجه شدت واکنش آن با فلز سدیم در مقایسه با شدت واکنش گاز اکسیژن با همین فلز، بیشتر است.

در تشکیل ترکیب Cr_2O_3 ، کاتیون Cr^{3+} شرکت دارد و آرایش الکترونی این کاتیون به صورت $[Ar]3d^3$ است، در نتیجه آرایش الکترونی آن به زیرلایه $3d^3$ ختم می‌شود.

در یک دوره با افزایش عدد اتمی، شعاع اتمی کاهش می‌یابد. پس شعاع اتمی سیلیسیم از عنصر بعد از خود بیشتر است. همچنین عنصر بعد از سیلیسیم، فسفر نافلزی است که توانایی تبدیل شدن به آنیون را دارد؛ ولی خود سیلیسیم توانایی تشکیل یون تک اتمی را ندارد.

اسکاندیم عنصر هم‌دوره با گالیوم (عنصر A) است و آرایش الکترونی لایه ظرفیت آن به صورت $3d^1 4s^2$ بوده و همانند گالیوم دارای ۳ الکترون در لایه ظرفیت خود است. اسکاندیم نخستین فلز واسطه در جدول دوره‌ای است و در تلویزیون رنگی و برخی شیشه‌ها وجود دارد.



۶۹- اگر درصد خلوص اکسید آهن در سنگ معدن آن، برابر ۷۲ درصد باشد، درصد جرمی آهن در سنگ معدن آن چقدر است؟
($O = 16, Fe = 56: g.mol^{-1}$)

۴۲ (۴)

۳۷/۸ (۳)

۵۰/۴ (۲)

۵۶ (۱)

(آسان - محاسباتی - سریع - صفحه ۲۳ - ۱۱۰)

پاسخ: گزینه ۲

آهن در سنگ معدن خود به شکل ترکیب Fe_2O_3 قرار دارد و به کانه هماتیت شهرت دارد. درصد خلوص این نمونه برابر ۷۲ درصد است، پس در ۱۰۰ گرم از این سنگ ۷۲ گرم Fe_2O_3 قرار دارد. همچنین منظور از درصد جرمی آهن، جرم آهن موجود در ۱۰۰ گرم سنگ است. بنابراین اگر جرم آهن موجود در ۷۲ گرم Fe_2O_3 را حساب کنیم، برابر درصد جرمی آهن در این سنگ است.

$$? g Fe = 72 g Fe_2O_3 \times \frac{1 mol Fe_2O_3}{160 g Fe_2O_3} \times \frac{2 mol Fe}{1 mol Fe_2O_3} \times \frac{56 g Fe}{1 mol Fe} = 50/4 g$$

پس درصد جرمی آهن در سنگ معدن آن برابر ۵۰/۴ درصد است.



۷۰- اگر معادله زیر نشان‌دهنده واکنش تهیه عنصر اصلی سازنده سلول‌های خورشیدی باشد، کدام مورد نادرست است؟
 $XO_2(s) + 2A(s) \rightarrow X(l) + 2AO(g)$

(۱) عنصر A همانند عنصر X در اثر ضربه خرد می‌شود.

(۲) در دوره‌ای که عنصر X قرار دارد، چهار عنصر جریان گرما را عبور می‌دهند.

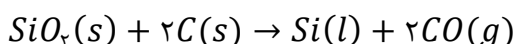
(۳) از میان دو عنصر X و A عنصری که واکنش‌پذیری کمتری دارد، رسانایی الکتریکی بیشتری دارد.

(۴) از میان عناصر موجود در بین عنصر A و سومین عنصر گروه چهاردهم، شش عنصر گازی در دما و فشار اتاق وجود دارد.

(متوسط - مفهومی - استاندارد - صفحه ۴۸ - ۱۱۰)

پاسخ: گزینه ۳

سیلیسیم عنصر اصلی سازنده سلول‌های خورشیدی است که از واکنش زیر تهیه می‌شود:



در نتیجه عناصر X و A به ترتیب سیلیسیم و کربن هستند.

همانطور که از واکنش بالا مشخص است، واکنش‌پذیری کربن از سیلیسیم بیشتر است. سیلیسیم شبه‌فلز بوده و رسانایی الکتریکی اندک دارد. در مقابل کربن تنها نافلز است که رسانایی الکتریکی دارد و از قضا، رسانایی الکتریکی آن بسیار بالا است. پس از این دو عنصر، عنصری که واکنش‌پذیری بیشتری دارد، رسانایی الکتریکی بیشتری نیز دارد.

کربن، نافلز یایی

کربن، نافلزی از گروه ۱۴ جدول تناوبی است. این عنصر، خواص و ویژگی‌های خاص و متمایزی نسبت به سایر نافلزها دارد:

(۱) کربن برخلاف اکثر نافلزها، تمایلی به گرفتن الکترون نداشته و در واکنش‌های شیمیایی، الکترون‌های خود را با سایر اتم‌ها به اشتراک می‌گذارد.

(۲) کربن برخلاف سایر نافلزها رسانای قوی جریان الکتریکی است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) کربن یک عنصر نافلزی و سیلیسیم یک عنصر شبه فلزی است و هر دو عنصر در اثر ضربه خرد می‌شوند.

مقایسه خواص فیزیکی فلزها، شبه فلزها و نافلزها:

۱) شبه فلزها و فلزها برخلاف نافلزها در حالت جامد، سطح درخشان و صیقلی دارند و رسانای جریان الکتریکی و گرما هستند.

۲) شبه فلزها و نافلزها برخلاف فلزها در حالت جامد در اثر ضربه چکش خرد می‌شوند.

۲) عنصر سیلیسیم (عنصر X) در دوره سوم قرار دارد. در دوره سوم عناصر سدیم، منیزیم، آلومینیم و سیلیسیم (چهار عنصر) می‌توانند جریان گرما را از خود عبور دهند.

۴) سومین عنصر گروه چهاردهم، ژرمانیم است و از بین عناصر موجود در بین کربن (عنصر A) و ژرمانیم، عناصر نیتروژن، اکسیژن، فلوئور، نئون، کلر، آرگون (۶ عنصر) به صورت گازی در دما و فشار اتاق موجود هستند.



۷۱- اگر فلز آلومینیم مطابق معادله موازنه نشده $Al(s) + CO_2(g) \rightarrow Al_2O_3(s) + C(s)$ با مقدار کافی کربن دی‌اکسید با بازده ۵۰ درصد واکنش دهد و ۱۹/۲ گرم کربن تولید کند، در این واکنش چند گرم فلز آلومینیم مصرف شده است؟

($C = ۱۲, Al = ۲۷: g.mol^{-1}$)

۱۷۲/۸ (۴)

۱۱۵/۲ (۳)

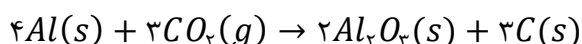
۵۷/۶ (۲)

۸۶/۴ (۱)

(آسان - محاسباتی - استاندارد) - صفحه ۲۳ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۳

واکنش موازنه شده به صورت زیر است:



ابتدا جرم کربن تولید شده به صورت نظری را مشخص می‌کنیم:

$$\text{مقدار نظری} = \frac{\text{مقدار عملی}}{\text{مقدار نظری}} \times 100 \Rightarrow 50 = \frac{19/2}{x} \times 100 \Rightarrow x = 38/4 g$$

بر این اساس جرم آلومینیم مصرف شده را حساب می‌کنیم:

$$? g Al = 38/4 g C \times \frac{1 mol C}{12 g C} \times \frac{4 mol Al}{3 mol C} \times \frac{27 g Al}{1 mol Al} = 115/2 g$$

پس جرم آلومینیم مصرف شده برابر ۱۱۵/۲ گرم است.



۷۲- مجموع عددهای موجود در نام ترکیب $CH_3CH_2C(CH_3)_2CH(C_2H_5)CH_2CH_3$ طبق قواعد آیوپاک برابر چند است؟

۱۲ (۴)

۱۰ (۳)

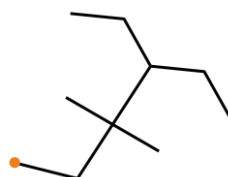
۸ (۲)

۷ (۱)

(آسان - مفهومی - سریع) - صفحه ۳۹ - ۱۱۰۱

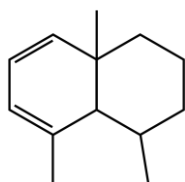
پاسخ: گزینه ۳

فرمول ساختاری ترکیب $CH_3CH_2C(CH_3)_2CH(C_2H_5)CH_2CH_3$ به صورت زیر است:



شماره گذاری را از سمتی آغاز می‌کنیم که زودتر به تعداد شاخه فرعی بیشتری برسیم، بر این اساس شماره گذاری این ترکیب را از سمت کربن مشخص شده آغاز می‌کنیم. در نتیجه نام گذاری این ترکیب طبق قواعد آیوپاک به صورت ۴-اتیل-۳،۳-دی متیل هگزان است و مجموع شماره‌های موجود در نام آن برابر با ۱۰ است.





۷۳- کدام یک از مطالب زیر نادرست است؟

- (۱) سوخت فندک ایزومر ساده‌ترین آلکان شاخه‌دار است.
- (۲) ساختار مقابل مربوط به یک هیدروکربن سیرنشده و غیرآروماتیک است.
- (۳) گاز تولیدشده از دفن کاغذ، عامل اصلی انفجار در معادن زغال سنگ است.
- (۴) با کاهش دمای مخلوطی از گازهای اتان و بوتان، ابتدا اتان به حالت مایع درمی‌آید.

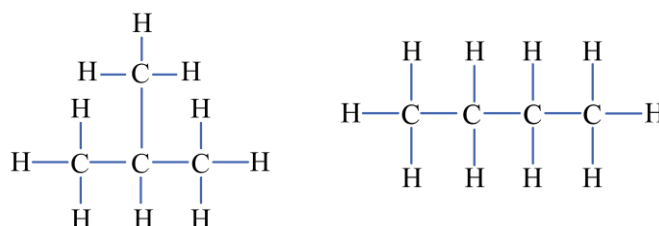
(متوسط - مفهومی - استاندارد) - صفحه ۴۶ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۴

اتان (C_2H_6) و بوتان (C_4H_{10}) هر دو در دمای اتاق آلکان گازی هستند. چون بوتان، جرم بیشتری دارد، نقطه جوش بیشتری نیز نسبت به اتان دارد و به هنگام سرد کردن مخلوط این دو، دمای مخلوط زودتر به نقطه جوش بوتان رسیده و این گاز زودتر به حالت مایع در می‌آید.

بررسی سایر گزینه‌ها:

(۱) سوخت فندک گاز بوتان است که در حالت فشرده به صورت مایع در آمده است. بوتان آلکان راست زنجیر چهار کربنه است.



ساده‌ترین آلکان شاخه‌دار نیز متیل پروپان است که یک آلکان چهار کربنه است. این دو ترکیب یعنی متیل پروپان و بوتان، ایزومر یکدیگر هستند.

(۲) در ساختار این ترکیب دو حلقه ۶ کربنی وجود دارد که هیچ کدام ۳ پیوند $C = C$ ندارند. پس این ترکیب حلقه بنزنی (آروماتیکی) نداشته و هیدروکربن آروماتیک به حساب نمی‌آید.

(۳) یکی از راه‌های دفع کردن کاغذ، دفن کردن آن بوده که با تولید گاز متان همراه است. این گاز که ساده‌ترین هیدروکربن به شمار می‌رود، بی‌بو و بی‌رنگ بوده که در معادن زغال سنگ نیز وجود دارد و اگر درصد آن در هوا به بالای ۵ درصد برسد، می‌تواند موجب انفجار شود.



۷۴- اگر شمار اتم‌های هیدروژن در یک آلکن و یک آلکین برابر باشد، تفاوت شمار اتم‌های کربن در این دو ماده برابر بوده و درصد جرمی کربن در بیشتر از درصد جرمی کربن در ترکیب دیگر است.

(۱) ۲ - آلکن (۲) ۲ - آلکین (۳) ۱ - آلکین (۴) ۱ - آلکن

(متوسط - مفهومی - سریع) - صفحه ۴۲ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۳

فرمول شیمیایی آلکن‌ها C_nH_{2n} و فرمول شیمیایی آلکین‌ها C_mH_{2m-2} است. پس اگر تعداد اتم‌های هیدروژن در این دو ماده برابر باشد، داریم:

$$2m - 2 = 2n \Rightarrow 2m - 2n = 2 \Rightarrow 2(m - n) = 2 \Rightarrow m - n = 1$$

بر این اساس تفاوت شمار اتم‌های کربن در این دو ماده برابر یک است. البته با مثال زدن نیز می‌توان به این تفاوت رسید. به عنوان مثال پروپین (C_3H_4) و اتن (C_2H_2).

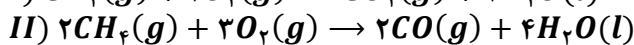
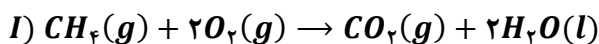
برای مقایسه درصد جرمی کربن در دو هیدروکربن به نسبت شمار اتم‌های هیدروژن به شمار اتم‌های کربن توجه می‌کنیم. هر چه این نسبت کمتر باشد، درصد جرمی کربن بیشتر است. شمار اتم‌های هیدروژن این دو ترکیب برابر است و شمار اتم‌های کربن در آلکین بیشتر بوده و بر همین اساس می‌توان گفت این نسبت در آلکین کمتر است. به زبان ریاضی:

$$\frac{2m - 2}{m} ? \frac{2n}{n} \xrightarrow{2m-2=2n, m=n+1} \frac{2n}{n+1} ? \frac{2n}{n} \Rightarrow \frac{2n}{n+1} < \frac{2n}{n}$$

پس درصد جرمی کربن در آلکین بیشتر است. البته باز هم می‌توانستیم با مثال پروپین و اتن ساده‌تر این مسئله را حل کنیم.

نکته: درصد جرمی کربن در همه آلکین‌ها < همه آلکن‌ها < همه آلکان‌ها است.

۷۵- به هنگام سوختن کامل متان، در کنار واکنش اصلی (واکنش I)، واکنش سوختن ناقص (واکنش II) نیز رخ می‌دهد. اگر در مجموع این دو واکنش، نسبت مقدار (مول) اکسیژن مصرف شده به مقدار سوخت مصرف شده برابر با ۱/۸ باشد، بازده واکنش سوختن کامل برابر چند درصد است؟



۶۰ (۴)

۷۵ (۳)

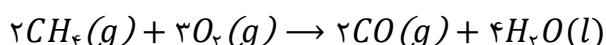
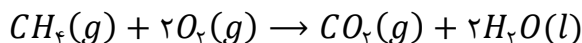
۹۰ (۲)

۵۰ (۱)

(سخت - محاسباتی - استاندارد) - صفحه ۲۳ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۴

واکنش‌های انجام شده به صورت زیر هستند:



اگر مقدار (مول) متان مصرف شده در واکنش اول و دوم به ترتیب برابر x و y باشد، مطابق دو واکنش مقدار اکسیژن مصرف شده به ترتیب برابر $2x$ و $1.5y$ خواهد بود. پس از نسبت اکسیژن مصرف شده به سوخت مصرف شده داریم:

$$A = \frac{2x + 1.5y}{x + y} \Rightarrow 1/8 = \frac{2x + 1.5y}{x + y} \Rightarrow 2x + 1.5y = 1/8x + 1/8y \Rightarrow 0.2x = 0.3y \Rightarrow x = 1.5y$$

بنابراین y مول متان در واکنش دوم و $1.5y$ مول متان در واکنش اصلی مصرف شده است. پس در مجموع $2.5y$ مول متان، $1.5y$ مول در واکنش اصلی مصرف می‌شود. پس بازده واکنش اصلی برابر است با:

یک روش غیر علمی ولی جواب!!! (ممنوع در امتحان نهایی)

در یک واکنش برای محاسبه بازده، می‌توان به جای استفاده از فرآورده نظری و عملی از واکنش دهنده نظری و عملی استفاده کرد. در این روش واکنش دهنده عملی مقدار واکنش دهنده‌ای است که از طریق رابطه استوکیومتری ساده از فرآورده عملی محاسبه می‌شود و در واکنش شرکت می‌کند. همچنین واکنش دهنده نظری برابر کل واکنش دهنده مورد نظر است.

$$\text{بازده درصدی} = \frac{\text{مقدار واکنش دهنده عملی}}{\text{مقدار واکنش دهنده نظری}} \times 100$$

این روش به خصوص در مسائلی کاربرد دارد که مقدار واکنش دهنده باقی مانده پس از اتمام واکنش مشخص باشد.

★ توجه: این روش از نظر علمی قابل اثبات است، اما در عمل چون عبارتی به اسم واکنش دهنده عملی یا نظری وجود ندارد (این نام گذاری برای ساده سازی است.) قابل استفاده در حل تشریحی نبوده و باید مقدار فرآورده عملی و نظری مشخص شود. اما در سؤالات تستی، یک روش سریع و قابل استفاده است.

$$\text{بازده درصدی} = \frac{\text{مقدار واکنش دهنده عملی}}{\text{مقدار واکنش دهنده نظری}} \times 100 \Rightarrow R = \frac{1.5y}{2.5y} \times 100 = 60\%$$

پس بازده واکنش سوختن کامل برابر ۶۰ درصد بوده است.



۷۶- کدام گزینه درست است؟ ($H = 1, C = 12: g.mol^{-1}$)

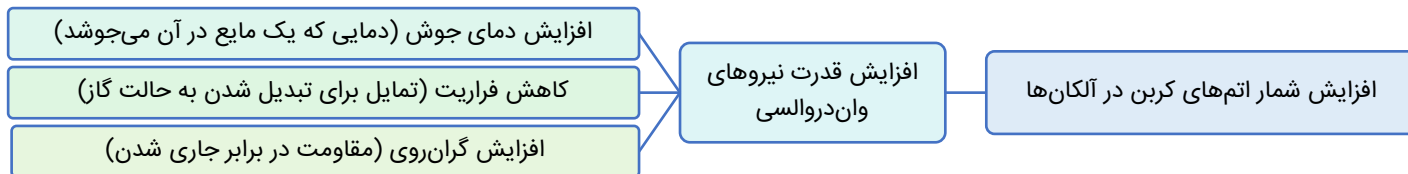
- (۱) ماده گریس نسبت به مخلوط نفت سفید فراریت کمتر و گران روی بیشتری دارد.
- (۲) مولکول‌های چربی در مقایسه با مولکول‌های روغن با مقدار بیشتری از مولکول‌های برم واکنش می‌دهند.
- (۳) پلیمری شدن یکی از واکنش‌های آلکین‌ها است که با استفاده از آن می‌توان انواع پلاستیک‌ها را تولید کرد.
- (۴) برای نام گذاری یکی از آلکان‌های راست‌زنجیر گازی شکل در دمای اتاق از شمار اتم‌های کربن استفاده می‌شود.

(متوسط - مفهومی - استاندارد) - صفحه ۵۸ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۱

گریس آلکانی با ۱۸ اتم کربن است و نفت سفید مخلوطی از آلکان‌هایی با ۱۰ تا ۱۵ اتم کربن است. از آنجا که در آلکان‌ها با افزایش شمار اتم‌های کربن، میزان فراریت کاهش و گران روی افزایش می‌یابد؛ در نتیجه گریس نسبت به نفت سفید دارای فراریت کمتری و گران روی بیشتر خواهد بود.

روند تغییر خواص فیزیکی آلکان‌ها با توجه به تعداد اتم‌های کربن موجود در ساختار این مواد، به صورت زیر است:



بررسی سایر گزینه‌ها:

۲) از آنجا که مولکول‌های روغن پیوندهای دوگانه بیشتری نسبت به مولکول‌های چربی دارند و سیر نشده‌تر هستند، در نتیجه مولکول‌های روغن می‌توانند با مقدار بیشتری برم مایع واکنش دهند.

۳) پلیمری شدن یکی از واکنش‌های آلکن‌ها است که با استفاده از آن می‌توان انواع پلاستیک‌ها، لاستیک‌ها و انواع الیاف را تهیه کرد.

۴) متان، اتان، پروپان و بوتان، آلکان‌های راست‌زنجیر گازی در دمای اتاق هستند. برای نام‌گذاری آلکان‌های راست‌زنجیر، به پیشوند شمار اتم‌ها کربن، پسوند «ان» اضافه می‌کنیم. از این قاعده برای آلکان‌های راست‌زنجیر کمتر از ۵ اتم کربن نمی‌توان استفاده کرد و نام آن‌ها به ترتیب متان، اتان، پروپان و بوتان است.



۷۷- اگر از سوختن یک مول هیدروکربن سیر شده حلقوی، ۱۸ مول کربن دی‌اکسید و ۱۵ مول آب تولید شود، در ساختار این ماده چند حلقه وجود دارد؟

۳ (۴)

۴ (۳)

۵ (۲)

۶ (۱)

(سخت - محاسباتی - استاندارد ۶ - صفحه ۴۳ - ۱۱۰۱)

پاسخ: گزینه ۳

از سوختن یک مول هیدروکربن، به تعداد اتم کربن آن، گاز کربن دی‌اکسید و نصف شمار اتم هیدروژن آن، آب تولید می‌شود. پس این هیدروکربن ۱۸ اتم کربن و ۳۰ اتم هیدروژن در ساختار خود دارد.

این هیدروکربن سیر شده بوده و علت کاهش تعداد اتم‌های هیدروژن آن نسبت به یک آلکان ۱۸ کربنه ($C_{18}H_{38}$) وجود حلقه در ساختار این ماده است. (پیوند دوگانه یا سه‌گانه که عوامل دیگر کاهش تعداد اتم‌های هیدروژن هستند، در هیدروکربن سیر شده وجود ندارند). هر حلقه دو هیدروژن از تعداد اتم‌های هیدروژن آلکان کم خواهد کرد. پس در این آلکان که ۸ اتم هیدروژن کمتر دارد، شمار حلقه‌ها ۴ عدد خواهد بود. همچنین می‌توانیم از طریق فرمول تعداد اتم‌های هیدروژن یک هیدروکربن نیز تعداد حلقه‌ها را به دست آوریم:

(تعداد پیوند سه‌گانه) $\times 4 -$ (تعداد پیوند دوگانه + تعداد حلقه) $\times 2 -$ شمار اتم‌های کربن $\times 2 =$ شمار اتم‌های هیدروژن
چون ترکیب سیر شده است در ساختار آن هیچ پیوند دوگانه یا سه‌گانه‌ای وجود ندارد و رابطه بالا به صورت زیر در می‌آید:

$$30 = 2 \times 18 + 2 - 2 \times (\text{تعداد حلقه}) \Rightarrow \text{تعداد حلقه} = \frac{2 \times 18 + 2 - 30}{2} = 18 + 1 - 15 = 4$$

پس تعداد حلقه‌ها در این ترکیب برابر ۴ است.

تعداد اتم‌های هیدروژن (m) در هیدروکربن n کربنه با توجه به ساختار:

$$m = 2n + 2 - 2 \times (\text{تعداد پیوند دوگانه}) - 4 \times (\text{تعداد پیوند سه‌گانه})$$



۷۸- کدام یک از مطالب زیر در مورد ۱-هگزن درست است؟

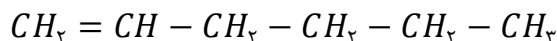
۱) درصد جرمی کربن در آن کمتر از ۱-هپتن است.

۲) این هیدروکربن در دمای اتاق، مایعی سفیدرنگ است.

۳) در آن چهار اتم کربن به دو اتم هیدروژن متصل هستند.

۴) کاتالیزگر واکنش سیر شدن آن فلزی از تناوب پنجم است.

۱- هگزن یک آلکن ۶ کربنه است که پیوند دوگانه آن بر روی کربن شماره ۱ بوده و ساختار آن به صورت زیر می باشد:



همان طور که مشخص است، در ساختار این ماده ۴ اتم کربن به ۲ اتم هیدروژن متصل هستند.

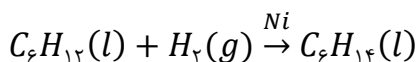
بررسی سایر گزینه ها:

۱) درصد جرمی کربن در آلکن ها مقداری ثابت است. در واقع برای مقایسه درصد جرمی کربن در هیدروکربن ها، به نسبت شمار اتم های هیدروژن به شمار اتم های کربن توجه می کنیم؛ هر چه این نسبت کمتر باشد، درصد جرمی کربن در آن ترکیب بیشتر است. در آلکن ها نسبت شمار اتم های هیدروژن به شمار اتم های کربن همواره برابر ۲ بوده و درصد جرمی این عنصر مقداری ثابت است.

نکته: درصد جرمی کربن با افزایش شمار اتم های کربن در آلکن ها افزایش، در آلکین ها کاهش و در آلکن ها و سیکلوآلکن ها ثابت است.

۲) ۱- هگزن همانند هگزان در دمای اتاق مایعی بی رنگ است.

۴) کاتالیزگر واکنش سیرشدن آلکن ها، فلز نیکل از دوره چهارم و گروه دهم جدول تناوبی است.



۷۹- به ازای تولید جرم های برابر اتانول از دو ماده اولیه اتن و گلوکز، جرم گلوکز مصرف شده در واکنش دوم به تقریب چند برابر جرم اتن مصرف شده در واکنش اول است؟ ($H = 1, C = 12, O = 16: g \cdot mol^{-1}$)

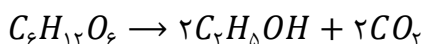
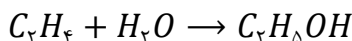
۰/۱۶ (۴)

۶/۴ (۳)

۰/۳۱ (۲)

۳/۲ (۱)

واکنش های انجام شده به صورت زیر هستند:



راه حل مسئله

برای حل این سؤال، مقدار گلوکز و اتن مصرف شده در دو واکنش را به ازای تولید مقدار اتانول برابر در دو واکنش محاسبه می کنیم و سپس نسبت این دو مقدار را به دست می آوریم.

چون جرم اتانول تولید شده در دو واکنش برابر است، پس می توان مقدار اتانول تولید شده در این دو واکنش را x مول در نظر گرفت و جرم دو ماده مصرف شده در هر واکنش را به دست آورد:

$$g \ C_2H_4 = x \ mol \ C_2H_5OH \times \frac{1 \ mol \ C_2H_4}{1 \ mol \ C_2H_5OH} \times \frac{28 \ g \ C_2H_4}{1 \ mol \ C_2H_4} = 28x \ g$$

$$g \ C_6H_{12}O_6 = x \ mol \ C_2H_5OH \times \frac{1 \ mol \ C_6H_{12}O_6}{2 \ mol \ C_2H_5OH} \times \frac{180 \ g \ C_6H_{12}O_6}{1 \ mol \ C_6H_{12}O_6} = 90x \ g$$

حال نسبت بین این دو را محاسبه می کنیم:

$$A = \frac{90x}{28x} = \frac{45}{14} \approx 3/2$$

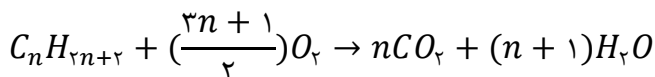
پس نسبت مورد نظر به تقریب برابر ۳/۲ است.

- ۸۰- اگر در اثر سوختن ۱/۵ مول از یک آلکان، تفاوت حجم گاز کربن دی اکسید تولید شده و حجم گاز اکسیژن مصرف شده برابر با ۹۰ لیتر باشد، در ساختار این آلکان چند اتم هیدروژن وجود دارد؟ (حجم مولی گازها در شرایط آزمایش، برابر با ۲۴ L فرض شود).
- (۱) ۱۴ (۲) ۱۲ (۳) ۱۶ (۴) ۱۰

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - صفحه ۳۷ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۴

معادله واکنش سوختن کامل یک آلکان به صورت زیر است:



حجم اکسیژن مصرف شده و کربن دی اکسید تولید شده در اثر سوختن ۱/۵ مول آلکان را در این واکنش محاسبه می کنیم:

$$? L CO_2 = \frac{1}{5} mol C_nH_{2n+2} \times \frac{n mol CO_2}{1 mol C_nH_{2n+2}} \times \frac{24 L CO_2}{1 mol CO_2} = 36n L$$

$$? L O_2 = \frac{1}{5} mol C_nH_{2n+2} \times \frac{\frac{3n+1}{2} mol O_2}{1 mol C_nH_{2n+2}} \times \frac{24 L O_2}{1 mol O_2} = 54n + 18 L$$

پس تفاوت حجم این دو گاز برابر است با:

$$A = 54n + 18 - 36n = 18n + 18 \Rightarrow 90 = 18n + 18 \Rightarrow 18n = 72 \Rightarrow n = 4$$

بنابراین فرمول شیمیایی این آلکان به صورت C_4H_{10} است و در ساختار آن ۱۰ اتم هیدروژن وجود دارد.



۸۱- کدام یک از مطالب زیر نادرست است؟

- (۱) به طور کلی در هالوژن ها با افزایش واکنش پذیری، جنبش نامنظم ذرات افزایش می یابد.
- (۲) در گرمایشی، گرمای واکنش ها هم به صورت کمی و هم به صورت کیفی بررسی می شود.
- (۳) ارزش دمایی یک واحد از یکای دما در SI برابر با ارزش دمایی یک واحد از یکای رایج دما است.
- (۴) گرما همواره از جسمی با انرژی گرمایی بالاتر، به جسمی با انرژی گرمایی پایین تر منتقل می شود.

(متوسط - مفهومی - استاندارد) - صفحه ۶۲ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۴

گرما برای توصیف یک فرآیند به کار رفته و همواره از جسمی با دمای بیشتر به جسمی با دمای کمتر منتقل می شود. ممکن است در میان دو ماده، یکی دمای کمتر و انرژی گرمایی بیشتر داشته باشد؛ مانند مقدار زیادی آب سرد در مقابل گلوله آهنی داغ. در این حالت دما از ماده با انرژی گرمایی کمتر ولی دمای بیشتر یعنی گلوله، به آب منتقل می شود. در واقع در تبادل گرما بین دو جسم به طور طبیعی، دمای دو ماده مهم است و نه انرژی گرمایی آن دو!

بررسی سایر گزینه ها:

یکی از عوامل مؤثر بر میزان جنبش های نامنظم ذره های سازنده یک ماده، حالت آن ماده است که مقایسه این جنبش ها در حالت های مختلف به صورت زیر است:

جامد > مایع > گاز

در گروه هفدهم، واکنش پذیری از بالا به پایین کاهش می یابد. پس دو هالوژن گازی کلر و فلوئور واکنش پذیری بیشتری نسبت به هالوژن مایع یعنی برم دارند. همچنین واکنش پذیری هالوژن جامد (مثل ید) از هالوژن های مایع و گازی کمتر است. پس ترتیب واکنش پذیری هالوژن ها به صورت مقابل خواهد بود:

جامد > مایع > گاز

بنابراین هر چه واکنش پذیری هالوژن بیشتر باشد، جنبش نامنظم ذرات آن نیز بیشتر است.

۲- ترموشیمی یا گرمایشی، شاخه ای از علم شیمی است که به بررسی کمی و کیفی گرمای واکنش های شیمیایی، تغییر آن و تأثیری که بر حالت ماده دارد، می پردازد.

یکای دما در سیستم SI، کلوین (K) و یکای رایج آن، درجه سانتی گراد ($^{\circ}C$) است. ارزش دمایی یک کلوین و یک درجه سانتی گراد برابر می باشد؛ یعنی افزایش دما به اندازه یک درجه سانتی گراد معادل افزایش دما به اندازه یک کلوین است. رابطه میان دما بر حسب کلوین (T) و درجه سانتی گراد (θ) به صورت مقابل است:

$$T = 273 + \theta$$

یکای دما:

یکای رایج دما، درجه سلسیوس ($^{\circ}C$) است؛ درحالی که یکای دما در SI کلوین (K) است. دمای یک جسم در مقیاس سلسیوس با نماد θ و در مقیاس کلوین با نماد T نشان داده می شود. توجه داریم که رابطه بین این دو مقیاس دمایی به صورت $T(K) = \theta(^{\circ}C) + 273$ است. با توجه به این رابطه، ارزش دمایی $1^{\circ}C$ با ارزش دمایی $1K$ برابر خواهد بود؛ پس تغییر دمای یک جسم در مقیاس سلسیوس ($\Delta\theta$) برابر با میزان تغییر دمای آن جسم در مقیاس کلوین (ΔT) است.



۸۲- اگر برای افزایش دمای آلیاژ $250^{\circ}C$ گرمی از دو فلز آلومینیم و آهن به اندازه $20^{\circ}C$ به 2736 ژول گرما نیاز باشد، در این آلیاژ نسبت شمار اتم های فلز واکنش پذیرتر به شمار اتم های فلز دیگر به تقریب برابر کدام گزینه است؟

$$(Al = 27, Fe = 56: g \cdot mol^{-1} \text{ و } c_{Fe} = 0.45, c_{Al} = 0.9: J \cdot ^{\circ}C^{-1} \cdot g^{-1})$$

۱/۳ (۴)

۰/۸ (۳)

۰/۶ (۲)

۱/۸ (۱)

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - صفحه ۶۰ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۲

اگر جرم آلومینیم در این آلیاژ برابر x گرم باشد، $250 - x$ گرم آهن در این آلیاژ موجود خواهد بود. با توجه به گرمای مبادله شده داریم:

$$Q = m_{Al}c_{Al}\Delta\theta + m_{Fe}c_{Fe}\Delta\theta = (m_{Al}c_{Al} + m_{Fe}c_{Fe})\Delta\theta \Rightarrow 2736 = (x \times 0.9 + (250 - x) \times 0.45) \times 20$$

$$\Rightarrow x \times 0.9 + (250 - x) \times 0.45 = 136/8$$

$$\Rightarrow 0.45x + 250 \times 0.45 = 136/8 \Rightarrow x + 250 = \frac{136/8}{0.45} = \frac{2736}{9} = 304 \Rightarrow x = 54 g$$

در نتیجه در این آلیاژ 54 گرم آلومینیم (معادل 2 مول) و 196 گرم آهن (معادل $3/5$ مول) وجود دارد. پس نسبت مقدار آلومینیم (فلز واکنش پذیرتر) به نسبت مقدار آهن در این آلیاژ برابر است با:

$$A = \frac{2}{3/5} \approx 0.6$$

بنابراین نسبت خواسته شده به تقریب برابر 0.6 است.



۸۳- اگر جرم آب در ظرف A بیشتر از ظرف B باشد و دمای آب در آنها به ترتیب برابر با 40 درجه سلسیوس و 313 کلوین باشد، کدام

موارد از مقایسه های انجام شده درست هستند؟

الف - انرژی گرمایی: $B > A$

ب - ظرفیت گرمایی: $A > B$

ج - میانگین انرژی جنبشی ذرات: $A > B$

د - دمای نهایی آب پس از ورود یک گلوله یکسان با دمای $80^{\circ}C$ به ظرف: $B > A$

(۴) «ب» و «د»

(۳) «ب» و «ج»

(۲) «الف» و «د»

(۱) «الف» و «ج»

(متوسط - مفهومی - استاندارد) - صفحه ۶۰ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۴

دمای آب در ظرف B برابر 313 کلوین است و این مقدار دما بر حسب سلسیوس برابر است با:

$$T = \theta + 273 \Rightarrow 313 = \theta + 273 \Rightarrow \theta = 40^{\circ}C$$

پس دمای آب در دو ظرف برابر است.

عبارت های «ب» و «د» درست هستند.

- الف) انرژی گرمایی یک نمونه به جرم و دمای آن نمونه وابسته است. از آنجا که دمای دو نمونه آب یکسان است و جرم آب موجود در ظرف A بیشتر است، انرژی گرمایی نمونه آب موجود در ظرف A از نمونه آب موجود در ظرف B بیشتر خواهد بود.
- ب) ظرفیت گرمایی یک ماده در دما و فشار مشخص به جرم و گرمای ویژه آن ماده (mc) بستگی دارد. از آنجا که ماهیت این دو نمونه یکسان است (هر دو نمونه، آب هستند)، گرمای ویژه یکسانی دارند. جرم آب موجود در ظرف A بیشتر بوده و در نتیجه ظرفیت گرمایی نمونه آب موجود در ظرف A از نمونه آب موجود در ظرف B بیشتر است.
- ج) دمای یک نمونه ماده بیانگر میانگین انرژی جنبشی آن نمونه است؛ از آنجا که دمای دو نمونه آب با یکدیگر برابر است، در نتیجه میانگین انرژی جنبشی این دو نمونه آب نیز برابر است.
- د) هر چه ظرفیت گرمایی یک نمونه ماده بیشتر باشد، در صورت مجاورت آن با ماده‌ای دیگر با دمای متفاوت، دمای تعادل مجموعه به دمای اولیه آن نمونه ماده نزدیک‌تر خواهد بود. با این توصیف از آنجا که ظرفیت گرمایی نمونه آب موجود در ظرف A بیشتر است، در صورت ورود یک گلوله با دمای ۸۰ درجه سلسیوس، دمای آن گلوله بیشتر کاهش می‌یابد و دمای تعادل پایین‌تر خواهد بود. پس دمای نهایی مجموعه پس از ورود یک گلوله با دمای ۸۰°C به ظرف B در مقایسه با دمای نهایی مجموعه پس از ورود یک گلوله مشابه در ظرف A، بیشتر خواهد بود.



۸۴- کدام یک از موارد زیر نادرست است؟

- ۱) در واکنش شیمیایی تبدیل الماس به دگرشکل خود یعنی گرافیت، نماد Q در سمت راست واکنش قرار می‌گیرد.
- ۲) بخش عمده انرژی موجود در شیر در طی فرایندی در بدن آزاد می‌شود که ماده اولیه سوخت و ساز سلول‌ها را فراهم می‌کند.
- ۳) از بین دو نمونه جدا از هم آب و اتانول با دمای ۶۰°C با جرم‌های برابر از این دو ماده، آب سریع‌تر با محیط هم‌دمای خواهد شد.
- ۴) اگر در واکنش $CH_4(g) + 2O_2(g) \rightarrow CO_2(g) + 2H_2O(g)$ به جای بخار آب، آب تولید شود، گرمای آزاد شده افزایش می‌یابد.

(آسان - مفهومی - سریع) - صفحه ۶۴ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۳

آب گرمای ویژه بیشتری نسبت به اتانول داشته و با توجه به جرم‌های برابر این دو، آب ظرفیت گرمایی بالاتری دارد. به همین علت آب برای رسیدن به دمای پایین‌تر باید گرمای بیشتری از دست دهد و به همین خاطر، دیرتر به دمای مورد نظر می‌رسد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

- ۱) گرافیت از الماس پایدارتر است، در نتیجه واکنش تبدیل الماس به گرافیت همراه با آزاد شدن گرما است. در واکنش‌های گرماده نماد Q در سمت راست (فراورده‌ها) واکنش قرار می‌گیرد.
- ۲) بخش عمده انرژی موجود در شیر هنگام فرایند گوارش و سوخت‌وساز در بدن آزاد می‌شود. این فرایندها شامل مجموعه‌ای از واکنش‌های شیمیایی گوناگونی هستند که منجر به تولید انرژی و مواد اولیه مورد نیاز سوخت‌وساز یاخته‌ها خواهند شد.
- ۴) در صورت انجام واکنش گرماده سوختن متان در دمای اتاق، حالت فیزیکی آب تولیدی به صورت مایع خواهد بود. سطح انرژی مواد در حالت مایع پایین‌تر از حالت گازی است و تغییر حالت فیزیکی آب تولیدشده، تفاوت سطح انرژی مواد واکنش‌دهنده با فراورده بیشتر شده و گرمای بیشتری در طی واکنش آزاد خواهد شد.



۸۵- چند مورد از عبارت‌های زیر درست است؟

- الف - زغال کک، واکنش‌دهنده‌ای رایج در استخراج فلزی که بیشترین مصرف سالانه را در بین صنایع گوناگون دارد، است.
 ب - اگر انرژی گرمایی جسم A بیشتر از انرژی گرمایی جسم B باشد، دمای جسم A نیز به‌طور قطع بیشتر است.
 ج - شیر و فراورده‌های آن، منبع مهمی برای تأمین عنصری است که ۸ الکترون با $n + l = 4$ دارد.
 د - در فرایند چگالش یک ماده در مقایسه با فرایند میعان آن ماده، گرمای بیشتری آزاد می‌شود.

(۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

پاسخ: گزینه ۲

(آسان - خط به خط - سریع ۶ - صفحه ۶۴ - ۱۱۰۲)

عبارت‌های «الف»، «ج» و «د» درست هستند.

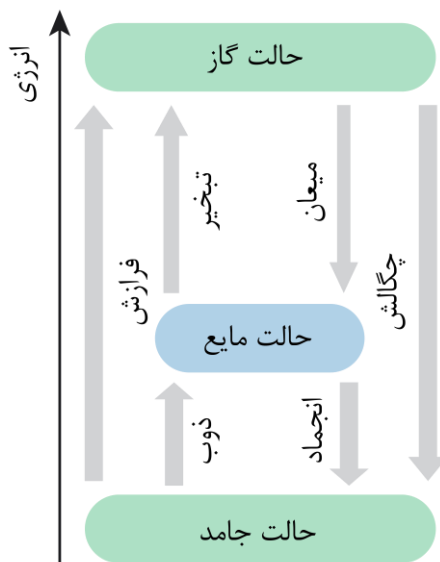
بررسی موارد:

الف) زغال کک واکنش‌دهنده‌ای رایج در استخراج آهن و تأمین‌کننده انرژی لازم برای انجام واکنش است. همچنین آهن فلزی است که بیشترین مصرف سالانه را در بین صنایع گوناگون دارد.

ب) انرژی گرمایی یک نمونه ماده به جرم و دمای آن نمونه وابسته است و اگر انرژی گرمایی یک جسم بیشتر از جسمی دیگر باشد، به‌طور قطع نمی‌توان گفت دمای آن جسم نیز بیشتر است.

ج) شیر و فراورده‌های آن، منبع مهمی برای تأمین کلسیم است و در آرایش الکترونی این عنصر زیرلایه‌های $4s^2$ ، $3p^6$ دارای $n + l = 4$ هستند. همانطور که مشخص است ۸ الکترون با این ویژگی در این عنصر وجود دارند.

د) با توجه به نمودار زیر، می‌توان فهمید مقدار اختلاف انرژی مواد در حالات گاز و جامد بیشتر از این مقدار در حالات گاز و مایع است؛ در نتیجه در فرایند چگالش یک ماده در مقایسه با فرایند میعان آن ماده، گرمای بیشتری آزاد می‌شود.



شب امتحان حوصله نداری دیگه درس بخونی؟! خب درساتو گوش کن!

✓ پادکست های شب امتحان، ویژه مرور و یادگیری
دروس و نکات مهم در لحظات آخر قبل امتحان



اسکن کن!

برای دریافت
روی لینک بزن!
digimaze.org



دیجی ماز