



گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی

آزمون ماز | پایه یازدهم



۲
نیم سال دوم



ویژه دانش آموزان پایه یازدهم

دفترچه پاسخ

پنجشنبه ۲۷ فروردین ماه ۱۴۰۵

✓ پاسخنامه سریع؛ برای بررسی فوری بعد از آزمون

✓ تحلیل تمام گزینه‌های هر سؤال؛ برای بررسی سؤالاتی که پاسخ نادرست داده‌اید

✓ نکات و درسنامه‌های آموزشی؛ برای یادگیری کامل مباحث هر سؤال

✓ مشاوره تستی؛ برای یادگیری انواع روش‌های حل تست

✓ استراتژی آزمون؛ برای یادگیری مدیریت زمان و مدیریت جلسه آزمون

دِرس	مَسْئولِ دِرس	طِراحان	وِیرا سِتانان
ریاضیات	حسین شفیع زاده سید جواد نظری مهرداد کیوان	امیر حسین شریفیان - حسن محمد بیگی علیرضا شریف خطیبی	ندا فرهختی - مهرداد اسپیدکار مائده بادان فیروز - حمیدرضا ولی پور یزدان نیک قدم - فؤاد خیر آبادی علی اسدی
فیزیک	حسین عبدوی نژاد محمد جواد سورچی	حسین عبدوی نژاد - مهدی پارسا مروارید شاه حسینی	مروارید شاه حسینی علیرضا ملک حسینی
شیمی	علی ترابی	علی ترابی - پرهام تیزپا فرهنگ امیری - طاهّا حق بین	محمد مهدی معظمی محمد دارابی جم - طاهّا حق بین امیرعلی حسینی فرد

تیم اجرایی و تولید آزمون

نازنین امیری

مائده بادان فیروز

زهره جعفری

مروارید شاه حسینی

مدیر تولید آزمون: محدثه شیخعلی



یک تیم با بیش از ۵۰۰ نفر در حال کار هستند تا آزمون‌های ماز با حداکثر کیفیت حاضر بشن و به شما کمک کنن و مسیر موفقیت رو براتون ساده‌تر کنن. همیشه از نظرات و کامنت‌های خوبتون انرژی می‌گیریم. مرسی که همراهمون هستین. راستی! حتماً در نظر سنجی آزمون شرکت کنین و نظرات و پیشنهاداتتون رو برامون بنویسین.

دکتر رسول خنجری

تنظیم خواب توی دوران درس خوندن و استرس کنکور کاملاً طبیعیه که یه کم بهم بریزه، اما نباید فکر کنیم چیز بی اهمیتیته. اتفاقاً خیلی مهمه.

روز کنکور باید دقیقاً تو یه بازه زمانی مشخص، یعنی حدود ۷ تا ۱۱ صبح، توی اوج هشیاری باشی و خوابت نیاد. پس اگه تا الان عادت داشتی شبها تا دیر وقت بیدار بمونی و صبحها بخوابی، باید کم کم این روند رو عوض کنی تا ساعت هشیاریت بیفته همون ۷ تا ۱۱.

از طرفی متخصصها می گن **نوجوانها بهتره بین ۶ تا ۸ ساعت خواب کافی داشته باشن** تا بدن و مغز فرصت داشته باشن خودشونو ریکاوری کنن و مطالب جدید رو مرتب کنن. اینجوری هم انرژی بیشتری داری، هم تمرکزت برای درس خوندن روز بعد بالاتر میره.

بعضیا می گن با اینکه خیلی خسته‌ان، وقتی می رن توی رختخواب خوابشون نمی بره. این اتفاق توی دوران درس خوندن زیاد پیش میاد. وقتی بیشتر وقت صرف مطالعه می شه، ذهنت خیلی بیشتر از بدنت خسته می شه. برای همین ممکنه با اینکه از نظر ذهنی خسته‌ای، چون بدنت فعالیت زیادی نداشته، نتونی راحت بخوابی.

توی این مواقع یه پیاده روی کوتاه شبانه یا یه فعالیت فیزیکی ساده مثل کمک کردن توی کارهای خونه می تونه کمک کنه بدنت هم کمی خسته بشه و راحت تر به خواب بری. حتی می تونی توی همین زمانها ویس هایی رو که برای مرور درسها ضبط کردی گوش بدی؛ اینجوری هم ذهنت درگیر مرور مطالب می شه هم بدنت در حال حرکت و فعالیت قرار می گیره. در کل فعالیت هایی مثل قدم زدن می تونن به تقویت حافظه، افزایش خلاقیت و بهتر شدن توانایی حل مسئله کمک کنن و در عین حال باعث بشن خستگی ذهن و جسم متعادل تر بشه و خواب راحت تری داشته باشی.

وقتی احساس کردی که حالا به اندازه کافی خسته هستی و خوابت میاد برو سراغ تختخواب و این نکات رو رعایت کن:

- ۱- هیچ کاری جز خوابیدن توی تختخواب مجاز نیست، نباید با موبایل بری توی تختخواب. گشتن توی شبکه های مجازی به دلیل محرک بودن کلیپها و محتوای آن، بیشتر باعث هشیاری می شه. انگار قبل خواب داری خودت با دست خودت مغزت رو وادار می کنی هشیار بمونه و نخوابه.

- ۲- التماس چشماتو نکن که خوابت ببره، فقط بیست دقیقه توی رختخواب بمون اگه خوابت نبرد، پاشو و خودت رو مشغول مطالعه یا به کار دیگه کن.

- ۳- ساعت بیداری رو درست تنظیم کن: دیدی بعضی وقتا که از خواب بیدار می شی، به اندازه کافی انرژی داری و سر حالی؟! و بعضی وقتها هم برعکس، خیلی بی حوصله ای و هنوز خوابت میاد و جدا شدن از تختخواب برات سخته. این مسئله مربوط به دوره خوابه. یک دوره کامل خواب حدود ۸۰ تا ۹۰ دقیقه طول می کشه به این صورت که توی ۴۰ تا ۶۰ دقیقه بعد از شروع خواب، بدن به حالت خواب عمیق فرو می ره و کم کم به دقیقه ۸۰ تا ۹۰ که می رسی، از عمق خوابت کم می شه و بدن آماده بیدار شدن، اگه توی این تایم بیدار نشی، خوابت دوباره وارد دوره بعدی می شه و این مسیر تا صبح ادامه داره.

حالا اگه بتونی زمان خوابت رو ضریبی از یک‌ونیم ساعت قرار بدی، وقتی بیدار می‌شی تقریباً سرحالی و بیدار شدن برات آسونه، اما اگه تایم بیدار شدنت بیفته وسط دوره، خسته و کسل بیدار می‌شی و بیرون اومدن از تختخواب برات خیلی مشکله. بخوام دقیق‌تر بگم مثلاً اگه ۱۲ شب خوابت بیره حدود ساعتی ۶ یا ۷ونیم خیلی راحت‌تر بیدار می‌شی؛ پس اگه ساعت رو برای بیداری تنظیم می‌کنی حتماً این نکته رو درنظر بگیر. حالا این ۹۰ دقیقه اون‌قدر هم دقیق نیست و قابل کشفه.

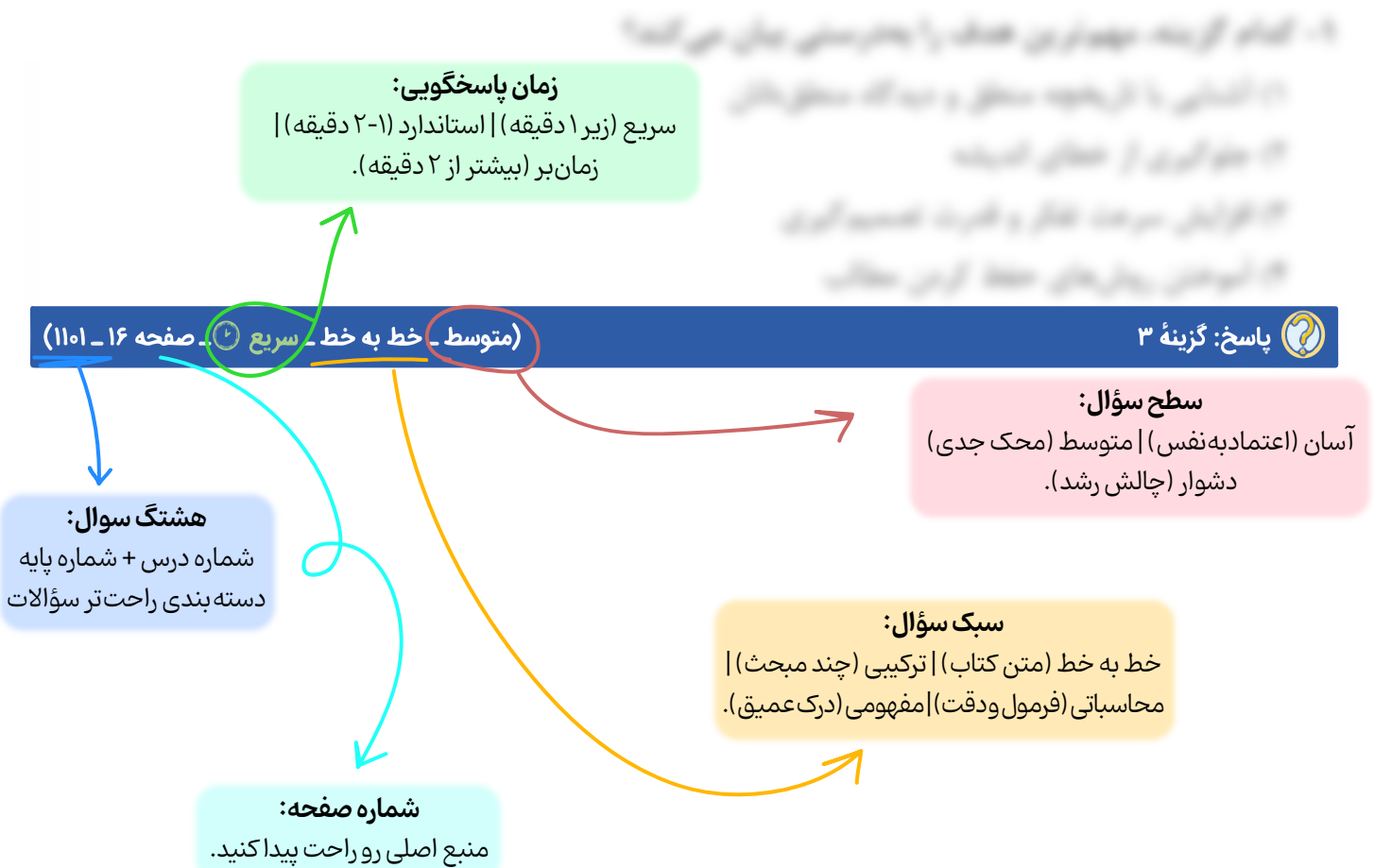
■ **۶- در طول روز بهتره سراغ خواب عمیق نری، چون خواب عمیق در روز معمولاً باعث می‌شه شب سخت‌تر بخوابی و ریتم خوابت به هم بریزه.** اگر وسط روز خسته شدی، می‌تونی از چرت‌های کوتاه استفاده کنی. این چرت‌ها معمولاً کمتر از ۱۰ دقیقه طول می‌کشن و کمک می‌کنن سریع انرژی بگیری بدون اینکه خواب شب به هم بخوره.

برای این نوع چرت لازم نیست روی تخت بخوابی. حتی بهتره روی صندلی یا روی زمین، با کمترین امکانات و در یک وضعیت نیمه‌راحت استراحت کنی. هدف اینه که فقط چند دقیقه به بدنت فرصت استراحت بدی، نه اینکه وارد خواب عمیق بشی. اگه به این نوع چرت زدن عادت کنی، می‌تونه خیلی کمک‌کننده باشه؛ چون در زمان کوتاه، خستگی و کسالت رو کمتر می‌کنه و دوباره تمرکزت برمی‌گرده.

خلاصه اینکه

- در دوران کنکور ممکنه برنامه خواب به کم به هم بریزه، اما تنظیمش خیلی مهمه؛ چون روز کنکور بایر بین ۷ تا ۱۱ صبح در اوج هشیاری باشی و برای این کار حدود ۴ تا ۸ ساعت خواب باکیفیت لازم داری.
- اگر با وجود خستگی خوابت نمی‌بره، معمولاً به خاطر خستگی ذهنی بیشتر از جسمیه؛ یک پیاده‌روی کوتاه یا فعالیت سبک می‌تونه کمک‌کنه راحت‌تر بخوابی.
- شب فقط برای خواب به تخت برو و از موبایل دوری کن؛ اگر هم در طول روز خسته شدی، به جای خواب طولانی یک چرت کوتاه کمتر از ۱۰ دقیقه بزنی تا انرژی بگیری بدون اینکه خواب شب به هم بریزه.

راهنمای پاسخنامه آزمون‌ها



یادتون باشه:

- ✓ هر سؤال یک فرصت یادگیری، نه یک مانع.
- ✓ پاسخنامه فقط جواب نیست؛ یک کارگاه آموزشی کامله.
- ✓ با هر آزمون و مرور این پاسخنامه، یک پله بالاتر می‌رید و یک قدم به رؤیایون نزدیک‌تر می‌شید.
- ✓ موفقیت فقط برای کسانی که با برنامه و انگیزه حرکت می‌کنن. شما همون آدمید.



برای دیدن پاسخنامه ویدئویی آزمون
QRcode بالا را اسکن کنید!
یا بر روی لینک زیر کلیک کنید!
پاسخنامه ویدئویی آزمون

بودجه‌بندی
این آزمون

حسابان ۱: مثلثات (درس ۳ و ۴) + حد و پیوستگی (درس ۱ و ۲)، صفحه‌های ۱۰۵ تا ۱۲۹
هندسه ۲: تبدیل‌های هندسی و کاربردها (درس ۲) + روابط طولی در مثلث (درس ۱)، صفحه‌های ۵۰ تا ۶۳
آمار و احتمال: آمار توصیفی، صفحه‌های ۶۹ تا ۹۴

سهم در
کنکور

حسابان ۱: از این مبحث به‌طور مستقیم تستی در کنکور طرح نشده است.
هندسه ۲: این مبحث در مجموع ۲ تست از ۴ تست کنکور را پوشش داده است.
آمار و احتمال: این مبحث در مجموع ۱ تست از ۴ تست کنکور را پوشش داده است.

۱- خط $y=1$ در بازه $[-\pi, 2\pi]$ نمودار تابع $y=2\sin(x-\frac{\pi}{3})$ را در چند نقطه قطع می‌کند؟

۴ (۴)

۳ (۳)

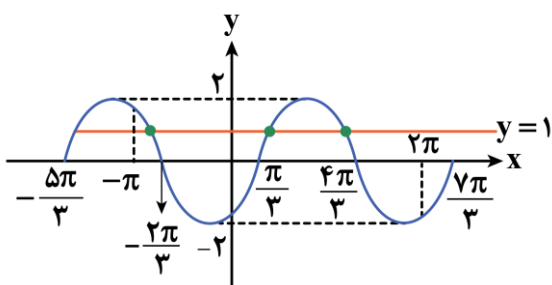
۲ (۲)

۱ (۱)

(متوسط - ترکیبی/محاسباتی - استاندارد) - حسابان ۱ صفحه ۱۰۸ - ۱۱۰۴

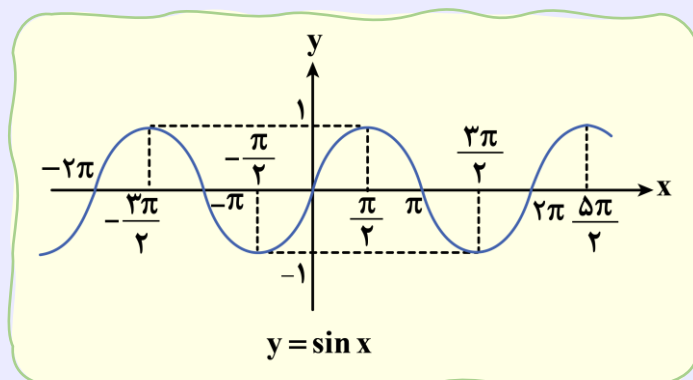
پاسخ: گزینه ۳

ابتدا نمودار تابع $y=2\sin(x-\frac{\pi}{3})$ را رسم می‌کنیم. به این منظور نمودار $y=\sin x$ را $\frac{\pi}{3}$ به سمت راست منتقل کرده و عرض نقاط را دو برابر می‌کنیم. در نهایت تعداد نقاط تلاقی نمودار به‌دست آمده با خط $y=1$ را در بازه داده شده می‌یابیم:



با توجه به شکل، دو نمودار در بازه $[-\pi, 2\pi]$ ، سه نقطه تلاقی دارند.

نمودار تابع سینوس و ویژگی‌ها



۱) مقدار تابع در مضارب صحیح π برابر با صفر است پس محل تلاقی نمودار $y = \sin x$ و محور x ها نقاط $x = k\pi$ می‌باشند.

۲) مقدار تابع $y = \sin x$ در نقاط $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ برابر با مقدار ماکزیمم (یعنی ۱) و در نقاط $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$ برابر با مقدار مینیمم (یعنی -۱) است.

۳) $\sin(2k\pi + x) = \sin x$

۴) نمودار نسبت به مبدأ مختصات متقارن است، پس:

$$\sin(-x) = -\sin x$$

انتقال افقی و انبساط/انقباض عمودی

۱) برای رسم نمودار $y = f(x - a)$ از روی نمودار $y = f(x)$ ، کافی است f را در راستای افقی انتقال دهیم.

الف) اگر $a > 0$ باشد، نمودار f را a واحد به راست انتقال می‌دهیم.

ب) اگر $a < 0$ باشد، نمودار f را $|a|$ واحد به چپ انتقال می‌دهیم.

۲) برای رسم نمودار $y = kf(x)$ از روی نمودار $y = f(x)$ ، همه عرض‌ها را k برابر می‌کنیم. بنابراین:

الف) اگر $k > 1$ ، نمودار f در راستای قائم منبسط می‌شود.

ب) اگر $0 < k < 1$ ، نمودار f در راستای قائم منقبض می‌شود.

ج) اگر $k < 0$ باشد، ابتدا نمودار f به اندازه $|k|$ طبق حالت الف یا ب، منبسط/منقبض می‌شود، سپس نسبت به محور x ها قرینه می‌شود.



۲- نمودار کدام تابع زیر بر محور x ها مماس است؟

۴) $y = 2 + \cos x$

۳) $y = \sin(x + \frac{\pi}{2})$

۲) $y = 1 - \sin x$

۱) $y = \cos(x - \frac{\pi}{4})$

(آسان - مفهومی - سریع) - حسابان ۱ صفحه‌های ۱۰۵ تا ۱۰۹ - ۱۱۰۴

پاسخ: گزینه ۲

بررسی سریع:

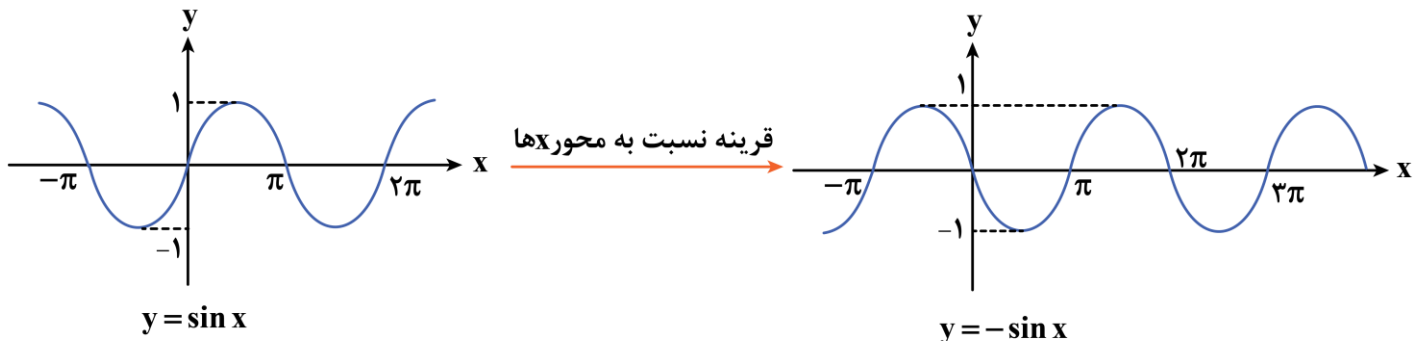
برای آن که نمودار موردنظر بر محور x ها مماس باشد، باید تغییرات نمودار $y = \sin x$ یا $y = \cos x$ در راستای قائم باشد.

گزینه‌های (۱) و (۳)، انتقال افقی نمودارهای $y = \sin x$ و $y = \cos x$ هستند.

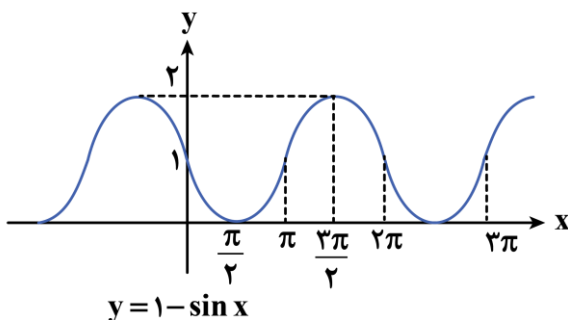
گزینه (۴) انتقال عمودی نمودار $y = \cos x$ است و داریم: نمی‌تواند بر محور x ها مماس باشد. $\Rightarrow 1 \leq 2 + \cos x \leq 3$

روش اول

بیشترین و کمترین مقدار تابع $y = \sin x$ به ترتیب برابر ۱ و -۱ است. نمودار تابع $y = 1 - \sin x$ به صورت زیر بر محور x ها مماس است.



حال نمودار $y = -\sin x$ را ۱ واحد به بالا انتقال می‌دهیم:



روش دوم

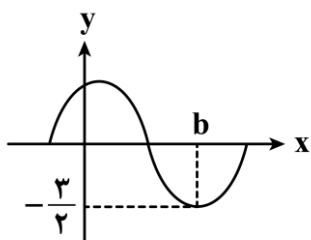
به طور کلی معادلات $\sin x = \pm 1$ و $\cos x = \pm 1$ دارای ریشه مضاعف هستند، پس تابع نظیر روابط $y = 1 \pm \sin x$ و $y = 1 \pm \cos x$ بر محور x ها مماس هستند.

انتقال و قرینه سازی عمودی

- ۱) برای رسم نمودار $y = f(x) + k$ از روی نمودار $y = f(x)$ ، کافی است نمودار f را در راستای قائم انتقال دهیم:
 الف) اگر $k > 0$ ، نمودار f را k واحد به بالا انتقال می دهیم.
 ب) اگر $k < 0$ ، نمودار f را $|k|$ واحد به پایین انتقال می دهیم.
 ۲) برای رسم نمودار $y = -f(x)$ کافی است نمودار f را نسبت به محور x ها قرینه کنیم تا همه y ها قرینه شوند.



۳- بخشی از نمودار تابع $y = a \cos(x - \frac{\pi}{6})$ مطابق شکل است. a و b کدام هستند؟



$$a = \frac{3}{2}, b = \frac{5\pi}{6} \quad (1)$$

$$a = \frac{3}{2}, b = \frac{7\pi}{6} \quad (2)$$

$$a = -\frac{3}{2}, b = \frac{5\pi}{6} \quad (3)$$

$$a = -\frac{3}{2}, b = \frac{7\pi}{6} \quad (4)$$

(متوسط - مفهومی - استاندارد ۶ - حسابان ۱ صفحه ۱۰۷ - ۱۱۰۴)

پاسخ: گزینه ۲

اولاً داریم:

$$x = 0 \Rightarrow a \cos(-\frac{\pi}{6}) > 0 \Rightarrow a > 0$$

$$\underbrace{\cos(-\frac{\pi}{6})}_{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

از طرفی با توجه به مقدار مینیمم $-\frac{3}{2}$ و این که انتقال عمودی نداریم، نمودار در راستای محور y ها $1/5$ برابر شده، همچنین موج آن شبیه نمودار $y = \cos x$ است نه $y = -\cos x$. بنابراین a مثبت است و $a = \frac{3}{2}$. برای محاسبه b دو روش داریم:

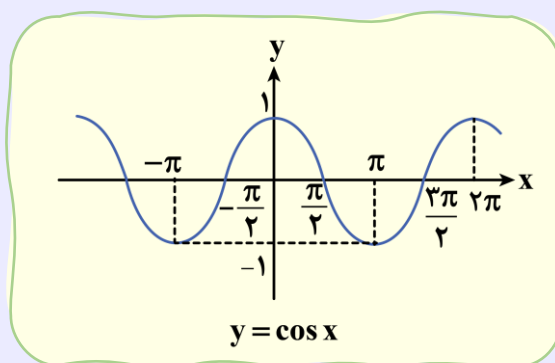
روش اول

با توجه به ضابطه، نمودار به اندازه $\frac{\pi}{6}$ به سمت راست منتقل شده، پس b که در حالت طبیعی برابر π است، اکنون برابر $\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$ می باشد.

روش دوم

$$(b, -\frac{3}{2}) \Rightarrow -\frac{3}{2} = \frac{3}{2} \cos(b - \frac{\pi}{6}) \Rightarrow \cos(b - \frac{\pi}{6}) = -1 \Rightarrow b - \frac{\pi}{6} = \pi \Rightarrow b = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$$

نمودار کسینوس

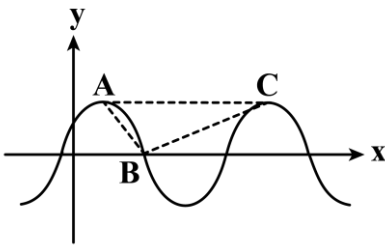


- ۱) مقدار تابع در نقاط $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ برابر با صفر است یعنی نقاط $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ محل تلاقی نمودار $y = \cos x$ با محور x ها می باشند.
- ۲) مقدار تابع در نقاط $x = 2k\pi$ برابر با مقدار ماکزیمم (یعنی ۱) و در نقاط $x = (2k+1)\pi$ برابر با مقدار مینیمم (یعنی -۱) است.
- ۳) $\cos(2k\pi + x) = \cos x$
- ۴) نمودار نسبت به محور y ها متقارن است. پس:

$$\cos(-x) = \cos x$$



۴- شکل مقابل، بخشی از نمودار تابع $y = k \sin(x + \frac{\pi}{3})$ است. اگر مساحت مثلث ABC برابر 4π باشد، k چقدر است؟



- (۱) $\frac{1}{4}$
 (۲) $\frac{1}{2}$
 (۳) ۲
 (۴) ۴

(متوسط - مفهومی - استاندارد ۶) - حسابان ۱ صفحه ۱۰۷ - ۱۱۰۴

پاسخ: گزینه ۴

نمودار $y = k \sin(x + \frac{\pi}{3})$ از k برابر شدن عرض های نمودار $y = \sin(x + \frac{\pi}{3})$ به دست می آید. پس عرض نقطه A که معادل ارتفاع مثلث است برابر $|k|$ می باشد. در این جا چون انتقال افقی فقط به اندازه $\frac{\pi}{3}$ به چپ است و موج نمودار شبیه نمودار $y = \sin x$ است نه $y = -\sin x$ پس $k > 0$ است.

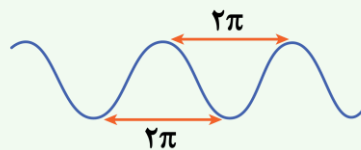
همچنین قاعده مثلث برابر طول پاره خط AC می باشد که با توجه به نمودار تابع سینوس برابر 2π است، بنابراین داریم:

$$S = \frac{1}{2} \times AC \times k \Rightarrow 4\pi = \frac{1}{2} \times 2\pi \times k \Rightarrow k = 4$$

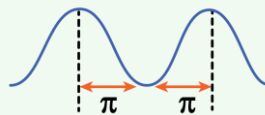
به نکته طلایی!

در نمودار توابع $y = a \sin(x + b) + c$ و $y = a \cos(x + b) + c$:

۱) فاصله بین دو قله (دو ماکزیمم) یا دو دره (دو مینیمم) برابر با (2π) است.



۲) فاصله بین یک قله (یک ماکزیمم) و یک دره (یک مینیمم) برابر با π است.



۵- مقدار $\sin \frac{5\pi}{12}$ برابر کدام گزینه است؟

$$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{8} \quad (۴)$$

$$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{8} \quad (۳)$$

$$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \quad (۲)$$

$$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \quad (۱)$$

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - حسابان ۱ صفحه ۱۱۱ - ۱۱۰۴

پاسخ: گزینه ۱

روش اول

$$\sin \frac{5\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

روش دوم

$$\begin{aligned} \sin \frac{5\pi}{12} &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right) = \cos \frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) \\ &= \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

روش سوم

$$\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right) = \cos \frac{\pi}{12}$$

$$\cos \frac{\pi}{6} = 2 \cos^2 \frac{\pi}{12} - 1$$

از طرفی داریم:

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \cos^2 \frac{\pi}{12} - 1 \Rightarrow \cos^2 \frac{\pi}{12} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4} \Rightarrow \cos^2 \frac{\pi}{12} = \frac{1}{2} \times \frac{4 + 2\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2} \frac{(1 + \sqrt{3})^2}{4}$$

$$\Rightarrow \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1 + \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

نسبت‌های مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا

$$۱) \sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$۲) \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

نسبت‌های مثلثاتی دوبرابر زوایا

$$۱) \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$۲) \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \xrightarrow{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1} \begin{cases} \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 \\ \cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \end{cases}$$



۶- ساده شده عبارت $\tan^2 \alpha + \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}$ به ازای $x = \frac{\pi}{12}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\sqrt{6} - \sqrt{3}$ (۴) $2 - \sqrt{3}$

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - حسابان ۱ صفحه ۱۱۲ - ۱۱۰۴

پاسخ: گزینه ۱

روش اول

$$\tan^2 \alpha + \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \tan^2 \alpha + \frac{2 \cos^2 \alpha - 1}{\cos^2 \alpha} = \tan^2 \alpha + 2 - \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \tan^2 \alpha + 2 - (1 + \tan^2 \alpha) = 1$$

روش دوم

$$\tan^2 \alpha + \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{2 \cos^2 \alpha - 1}{\cos^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = 1$$

روابط مثلثاتی

۱) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha, \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$

۲) $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ ۳) $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ ۴) $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$

• • ایو • •

۷- اگر $\sin(\frac{\pi}{4} + \alpha) \sin(\frac{\pi}{4} - \alpha) + \cos(\frac{\pi}{4} + \alpha) \cos(\frac{\pi}{4} - \alpha) = \frac{1}{4}$ باشد، مقدار $\tan^2 \alpha$ کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{5}$ (۲) $\frac{3}{5}$ (۳) $\frac{5}{3}$ (۴) $\frac{5}{2}$

(سخت - ترکیبی/محاسباتی - استاندارد) - حسابان ۱ صفحه ۱۱۱ - ۱۱۰۴

پاسخ: گزینه ۲

اگر $A = \frac{\pi}{4} + \alpha$ و $B = \frac{\pi}{4} - \alpha$ را در نظر بگیریم، داریم:

$$\sin A \sin B + \cos A \cos B = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos(A - B) = \frac{1}{4}$$

از آن جا که $A - B = (\frac{\pi}{4} + \alpha) - (\frac{\pi}{4} - \alpha) = 2\alpha$ ، پس:

$$\cos 2\alpha = \frac{1}{4}$$

روش اول

$$\cos 2\alpha = \frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} 1 - 2 \sin^2 \alpha = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{3}{8} \\ 2 \cos^2 \alpha - 1 = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{5}{8} \end{cases} \Rightarrow \tan^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{3}{5}$$

روش دوم

پس از محاسبه $\cos 2\alpha$ می توانستیم از رابطه $\tan^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$ نیز استفاده کنیم:

$$\tan^2 \alpha = \frac{1 - \frac{1}{4}}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}} = \frac{3}{5}$$

پس از محاسبه $\cos 2\alpha$ می‌توانستیم از رابطه $\cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$ نیز استفاده کنیم:

$$\cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} \xrightarrow{\tan^2 \alpha = x} \frac{1}{4} = \frac{1 - x}{1 + x} \Rightarrow 1 + x = 4 - 4x \Rightarrow 5x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{5} \Rightarrow \tan^2 \alpha = \frac{3}{5}$$

نکته‌های طلایی!

$$۱) \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \frac{2 \sin^2 \alpha}{2 \cos^2 \alpha} = \tan^2 \alpha$$

$$۴) \sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$$

$$۲) \tan \alpha + \cot \alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha}$$

$$۵) \cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$$

$$۳) \tan \alpha - \cot \alpha = -2 \cot(2\alpha)$$

$$۶) \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$



۸- اگر $\tan \alpha = -2$ باشد، مقدار $\sin 4\alpha$ برابر کدام گزینه است؟

$$-\frac{24}{25} \quad (۴)$$

$$\frac{24}{25} \quad (۳)$$

$$-\frac{12}{25} \quad (۲)$$

$$\frac{12}{25} \quad (۱)$$

(سخت - ترکیبی/محاسباتی - زمان ۵ دقیقه) - حسابان ۱ صفحه ۱۱۲ - ۱۱۴

پاسخ: گزینه ۳

روشن اول

$$\sin 4\alpha = 2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha = 2(2 \sin \alpha \cos \alpha)(2 \cos^2 \alpha - 1) = 4 \sin \alpha \cos \alpha (2 \cos^2 \alpha - 1)$$

اکنون مقادیر $\sin \alpha$ ، $\cos \alpha$ و $\cos^2 \alpha$ را محاسبه می‌کنیم:

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow 1 + (-2)^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{5} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5} \Rightarrow \sin \alpha = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}$$

چون $\tan \alpha < 0$ ، پس $\sin \alpha$ و $\cos \alpha$ مختلف‌العلامت هستند و داریم:

$$\sin \alpha \cos \alpha = -\frac{2}{5}$$

اکنون داریم:

$$\sin 4\alpha = 4 \sin \alpha \cos \alpha (2 \cos^2 \alpha - 1) = 4 \left(-\frac{2}{5}\right) \left(2 \times \frac{1}{5} - 1\right) = 4 \left(-\frac{2}{5}\right) \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{24}{25}$$

روشن دوم

با استفاده از روابط $\sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$ و $\cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$ داریم:

$$\sin 2\alpha = \frac{2(-2)}{1 + (-2)^2} = \frac{-4}{5} \quad \cos 2\alpha = \frac{1 - (-2)^2}{1 + (-2)^2} = \frac{-3}{5}$$

$$\sin 4\alpha = 2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha = 2 \left(-\frac{4}{5}\right) \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{24}{25}$$

و در نتیجه:



۹- مقدار عددی $\sin^4 \frac{\pi}{8} + \cos^4 \frac{\pi}{8}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) ۱

پاسخ: گزینه ۳

متوسط - ترکیبی/محاسباتی - سریع

روش اول

با توجه به اتحاد $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$ داریم:

$$\begin{aligned} \sin^4 \frac{\pi}{8} + \cos^4 \frac{\pi}{8} &= \left(\sin^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{\pi}{8} \right)^2 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{8} \cos^2 \frac{\pi}{8} \\ &= 1 - \frac{1}{2} \left(2 \sin^2 \frac{\pi}{8} \cos^2 \frac{\pi}{8} \right) = 1 - \frac{1}{2} \left(\sin^2 \left(2 \times \frac{\pi}{8} \right) \right) \\ &= 1 - \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = 1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

روش دوم

$$\begin{aligned} \cos^2 \frac{\pi}{4} &= 2 \cos^2 \frac{\pi}{8} - 1 \Rightarrow \cos^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1 + \sqrt{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4} \\ \sin^2 \frac{\pi}{4} &= 1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{8} \Rightarrow \sin^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1 - \sqrt{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \\ \sin^4 \frac{\pi}{8} + \cos^4 \frac{\pi}{8} &= \left(\frac{2 - \sqrt{2}}{4} \right)^2 + \left(\frac{2 + \sqrt{2}}{4} \right)^2 = \frac{6 - 4\sqrt{2}}{16} + \frac{6 + 4\sqrt{2}}{16} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

توان‌های ۴ و ۶ در سینوس و کسینوس

$$۱) \sin^4 \theta + \cos^4 \theta = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\theta$$

$$۲) \cos^4 \theta - \sin^4 \theta = \cos 2\theta$$

$$۳) \sin^6 \theta + \cos^6 \theta = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2\theta$$

$$۴) \sin^6 \theta - \cos^6 \theta = \cos 2\theta \left(\frac{1}{4} \sin^2 2\theta - 1 \right) = -\frac{3}{4} \cos 2\theta - \frac{1}{4} \cos^3 2\theta$$

• • زیمنه • •

۱۰- با فرض $\sin x + \cos x = \frac{\sqrt{6}}{2}$ ، مقدار عددی $\cos^2 2x$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{4}{5}$

پاسخ: گزینه ۳

سخت - ترکیبی/محاسباتی - استاندارد

روش اول

طرفین فرض را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\begin{aligned} (\sin x + \cos x)^2 &= \left(\frac{\sqrt{6}}{2} \right)^2 \Rightarrow \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \Rightarrow 1 + \sin 2x = \frac{3}{2} \Rightarrow \sin 2x = \frac{1}{2} \\ \left(\frac{1}{2} \right)^2 + \cos^2 2x &= 1 \Rightarrow \cos^2 2x = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

اکنون با استفاده از رابطه $\sin^2 2x + \cos^2 2x = 1$ داریم:

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4}) \Rightarrow \frac{\sqrt{6}}{2} = \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4})$$

$$\Rightarrow \sin(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$$

$$\Rightarrow \cos^2 x = \cos^2 \frac{\pi}{6} = (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 = \frac{3}{4}$$

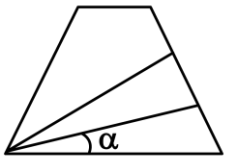
دو فرمول راهگشا!

$$۱) \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \cos(x - \frac{\pi}{4})$$

$$۲) \sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin(x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \cos(x + \frac{\pi}{4})$$

•• iro ••

۱۱- در دوزنقه متساوی الساقین مقابل که طول قاعده‌های آن ۳ و ۹ و طول ساق‌های آن ۹ است، یک ساق را به سه قسمت مساوی تقسیم کرده‌ایم. $\cos 2\alpha$ کدام است؟



$$\frac{3}{5} \quad (۲)$$

$$\frac{7}{9} \quad (۴)$$

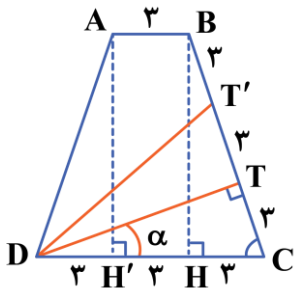
$$\frac{1}{3} \quad (۱)$$

$$\frac{5}{7} \quad (۳)$$

(سخت - ترکیبی/محاسباتی - زمان‌بر ۵) - حسابان ۱ صفحه ۱۱۱ - ۱۱۰۴

پاسخ: گزینه ۴

مطابق شکل عمودهایی بر قاعده وارد می‌کنیم. مثلث‌های قائم‌الزاویه BHC و AH'D به حالت تساوی وتر ($AD = BC$) و یک ضلع ($AH' = BH$) هم‌نهشت هستند، بنابراین $DH' = CH$ و چون چهارضلعی ABHH' مستطیل است، پس $HH' = 3$ و در نتیجه:

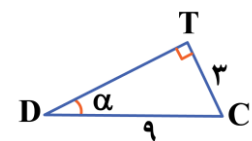


$$DH' = CH = 3$$

اکنون مثلث‌های BHC و TDC نیز هم‌نهشت هستند:

$$\begin{cases} BC = CD = 9 \\ \hat{C} \text{ مشترک} \\ CH = TC = 3 \end{cases} \xrightarrow{\text{ض‌ض}} \triangle BHC \cong \triangle TDC \Rightarrow \hat{T} = \hat{H} = 90^\circ$$

در مثلث قائم‌الزاویه DTC رابطه فیثاغورس را می‌نویسیم:



$$DT^2 + TC^2 = DC^2 \Rightarrow DT^2 + 3^2 = 9^2 \Rightarrow DT^2 = 72 \Rightarrow DT = 6\sqrt{2}$$

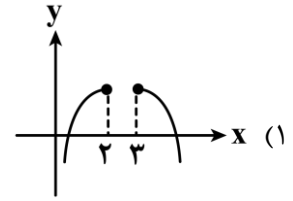
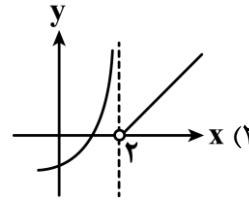
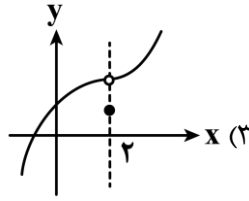
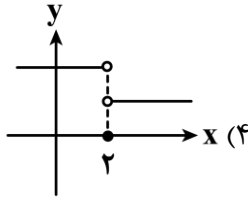
$$\cos \alpha = \frac{DT}{DC} = \frac{6\sqrt{2}}{9} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

اکنون داریم:

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 2 \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} \right)^2 - 1 = 2 \times \frac{8}{9} - 1 = \frac{7}{9}$$

•• iro ••

۱۲- کدام گزینه نمودار تابعی است که در همسایگی $x=2$ تعریف شده اما در این نقطه فاقد حد است؟



(آسان - مفهومی - سریع) - حسابان ۱ صفحه‌های ۱۱۸، ۱۲۶ و ۱۲۷ - ۱۱۰۵

پاسخ: گزینه ۴

بررسی گزینه‌ها:

۱

در همسایگی راست ۲ تعریف نشده است.

۲

در نقطه $x=2$ تعریف نشده است، پس در همسایگی ۲ تعریف نشده است. (در همسایگی محذوف $x=2$ تعریف شده است).

۳

در همسایگی ۲ تعریف شده و در این نقطه دارای حد است.

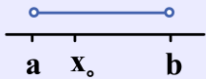
۴

در همسایگی ۲ تعریف شده اما حد چپ و راست در این نقطه متفاوت است. پس تابع در $x=2$ فاقد حد است.

پس گزینه ۴ جواب است.

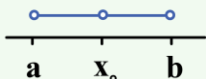
همسایگی

هر بازه باز شامل x_0 را یک همسایگی x_0 می‌نامیم. به عبارت دیگر، اگر $x_0 \in (a, b)$ ، آن گاه (a, b) را همسایگی x_0 می‌نامیم.

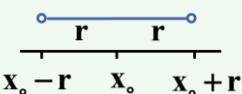


انواع همسایگی

۱) $(a, b) - \{x_0\}$ را یک همسایگی محذوف از x_0 می‌نامیم.



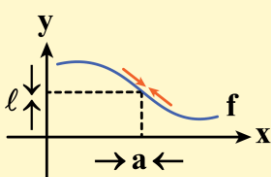
۲) $(x_0 - r, x_0 + r)$ را یک همسایگی متقارن به طول $(2r)$ برای x_0 می‌نامیم.



۳) $(x_0, x_0 + r)$ را همسایگی راست x_0 و $(x_0 - r, x_0)$ را یک همسایگی چپ برای x_0 می‌نامیم.

مفهوم حد

اگر f در یک همسایگی از x_0 (یا همسایگی محذوف) تعریف شده باشد، به طوری که با نزدیک شدن مقادیر x به a در این همسایگی، مقادیر $f(x)$ به عدد ℓ نزدیک شوند، آن گاه می‌گوییم f در $x=a$ حدی برابر با ℓ دارد و می‌نویسیم:



$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$$

۱) اگر مقادیر x ، از سمت راست به a نزدیک شوند یعنی x ها بزرگتر از a باشند و مقادیر $f(x)$ به ℓ_1 نزدیک شوند، می‌گوییم **حد راست** f در $x = a$ برابر ℓ_1 است:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \ell_1$$

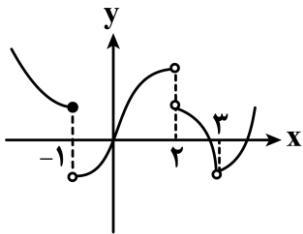
۲) اگر مقادیر x از سمت چپ به a نزدیک شوند، یعنی x ها کوچکتر از a باشند و مقادیر $f(x)$ به ℓ_2 نزدیک شوند، می‌گوییم **حد چپ** f در $x = a$ برابر ℓ_2 است:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \ell_2$$

🎯 چه موقع تابع دارای حد است؟

واضح است که f در $x = a$ دارای حدی برابر ℓ است، اگر:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \ell$$



۱۳- نمودار تابع f مطابق شکل است. در کدام نقطه، تابع حد ندارد ولی مقدار دارد؟

(۱) $x = 2$

(۲) $x = -1$

(۳) $x = 0$

(۴) $x = 3$

(آسان - مفهومی - سریع ۶) - حسابان ۱ صفحه‌های ۱۱۹ و ۱۲۷ - ۱۱۰۵

پاسخ: گزینه ۲

بررسی گزینه‌ها:

۱

در نقطه $x = 2$ تابع، نه حد دارد و نه مقدار. (حد چپ $\neq$ حد راست و $f(2)$ تعریف نشده است).

۲

در نقطه $x = -1$ تابع حد ندارد ولی مقدار دارد. (حد چپ $\neq$ حد راست)

۳

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$$

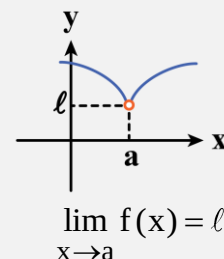
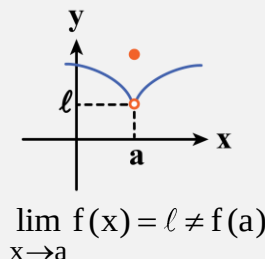
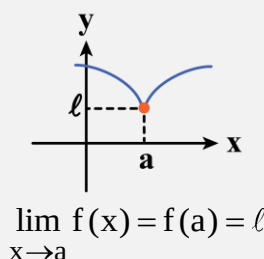
در نقطه $x = 0$ تابع هم حد دارد و هم مقدار:

۴

در نقطه $x = 3$ تابع حد دارد ولی مقدار ندارد.

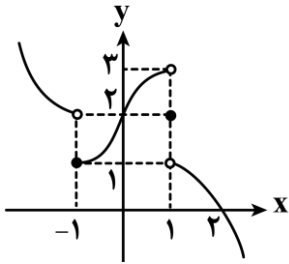
📁 جمع‌بندی طلایی!

در نقطه $x = a$ تابع f می‌تواند **حد داشته باشد ولی مقدار نداشته باشد** یا **مقدار آن با حد آن فرق داشته باشد**.



اما $f(a)$ تعریف نشده است.





۱۴- نمودار تابع f مطابق شکل روبه‌رو است. حاصل $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) + f(1)$ کدام است؟

- (۱) ۴
(۲) ۵
(۳) ۶
(۴) ۷

(آسان - مفهومی - سریع) حسابان ۱ صفحه ۱۲۷ - ۱۱۰۵

پاسخ: گزینه ۲

وقتی x با مقادیر بیشتر از -1 به -1 نزدیک می‌شود، مقدار تابع به 1 نزدیک می‌شود، پس:

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = 1$$

وقتی x با مقادیر کمتر از 0 به 0 نزدیک می‌شود، مقدار تابع به 2 نزدیک می‌شود، پس:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2$$

همچنین با توجه به نمودار مقدار $f(1)$ برابر 2 می‌باشد، بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) + f(1) = 1 + 2 + 2 = 5$$



۱۵- به‌ازای چه مقادیری از m بازه $(m^2 + 3m - 8, 3m + 5)$ همسایگی نقطه $x = 2$ می‌باشد؟

- (۱) $(-5, 2)$ (۲) $(-1, 2)$ (۳) $(-\infty, -5) \cup (2, +\infty)$ (۴) $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) حسابان ۱ صفحه ۱۱۸ - ۱۱۰۵

پاسخ: گزینه ۲

باید $2 \in (m^2 + 3m - 8, 3m + 5)$ باشد، بنابراین:

$$m^2 + 3m - 8 < 2 < 3m + 5$$

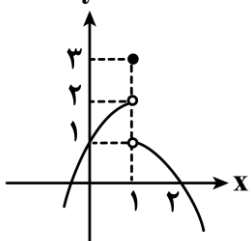
$$\Rightarrow \begin{cases} 1) m^2 + 3m - 8 < 2 \Rightarrow m^2 + 3m - 10 < 0 \Rightarrow (m+5)(m-2) < 0 \Rightarrow -5 < m < 2 \\ 2) 3m + 5 > 2 \Rightarrow 3m > -3 \Rightarrow m > -1 \end{cases}$$

از اشتراک دو محدوده به‌دست آمده داریم:

$$m \in (-1, 2)$$



۱۶- نمودار تابع f مطابق شکل زیر است. مقادیر $\lim_{x \rightarrow 1^+} [f(x)]$ و $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ به ترتیب کدام هستند؟ ([] نماد جزء صحیح است.)



- (۱) صفر و صفر
(۲) صفر و ۱
(۳) ۱ و صفر
(۴) ۱ و ۱

(متوسط - مفهومی - سریع) حسابان ۱ صفحه ۱۲۹ - ۱۱۰۵

پاسخ: گزینه ۲

چون با نزدیک شدن x به 1 از سمت راست، تابع با مقادیر کمتر از 1 به 1 نزدیک می‌شود، پس:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} [f(x)] = [1^-] = 0$$

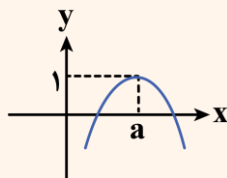
وقتی x با مقادیر بیشتر از 1 به 1 نزدیک می‌شود، مقدار تابع به 1 نزدیک می‌شود و بنابراین $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$ بوده و در نتیجه:

$$\left[\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \right] = [1] = 1$$

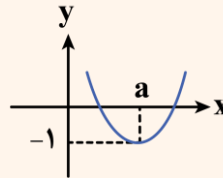
توجه!

در حالت کلی:

$$\left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right] \neq \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]$$


 دو نمونه باحال ببین!


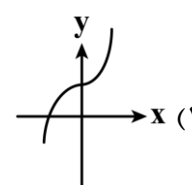
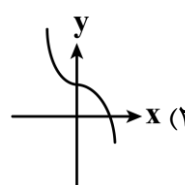
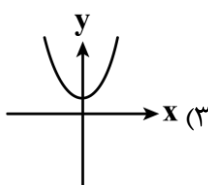
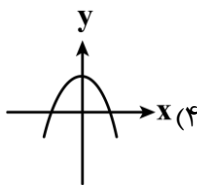
$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1 \Rightarrow \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right] = 1 \\ \lim_{x \rightarrow a} [f(x)] = [1^-] = 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -1 \Rightarrow \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right] = -1 \\ \lim_{x \rightarrow a} [f(x)] = [(-1)^+] = -1 \end{cases}$$



۱۷- در کدام نمودار رابطه $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x)] = f(0)$ می تواند برقرار باشد؟ ([] نماد جزء صحیح است.)



متوسط - مفهومی/ترکیبی - استاندارد ۶ - حسابان ۱ صفحه های ۱۲۶ و ۱۲۷ - ۱۱۰۵

پاسخ: گزینه ۳

اگر محل تلاقی نمودار با محور y ها را a بنامیم، $(f(0) = a)$ باید حتماً صحیح باشد، چون در غیر این صورت $f(0) = a$ عددی غیر صحیح و $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x)]$ عددی صحیح خواهد بود و برابر نخواهند شد. لذا با فرض $a \in \mathbb{Z}$ به بررسی گزینه ها می پردازیم.

بررسی گزینه ها:

۱

اگر x با مقادیر بیشتر از صفر به صفر نزدیک شود $f(x)$ با مقادیر بیشتر از a به a نزدیک می شود و $\lim_{x \rightarrow 0^+} [f(x)] = [a^+] = a$ و اگر x با مقادیر کمتر از صفر به صفر نزدیک شود $f(x)$ با مقادیر کمتر از a به a نزدیک می شود و $\lim_{x \rightarrow 0^-} [f(x)] = [a^-] = a - 1$ ، پس $[f(x)]$ در $x = 0$ فاقد حد است.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} [f(x)] = a - 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} [f(x)] = a$$

۲ مشابه گزینه ۱ داریم:

پس $[f(x)]$ در $x = 0$ فاقد حد است.

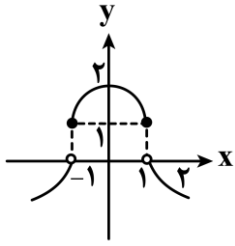
۳

با نزدیک شدن x به صفر (چه از راست چه از چپ) $f(x)$ با مقادیر بیشتر از a به a نزدیک می شود، پس $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x)] = [a^+] = a$ با $f(0) = a$ برابر است. در نتیجه گزینه ۳ جواب است.

۴

با نزدیک شدن x به صفر (چه از چپ و چه از راست) $f(x)$ با مقادیر کمتر از a به a نزدیک می شود، پس $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x)] = [a^-] = a - 1$ و با $f(0) = a$ برابر نیست. ($[f(x)]$ در $x = 0$ دارای حد است ولی حد آن با مقدار تابع برابر نیست.)

۱۸- نمودار تابع f مطابق شکل مقابل است. حاصل $\lim_{x \rightarrow -1^+} [f \circ f(x)]$ کدام است؟



(۱) -۱

(۲) صفر

(۳) ۱

(۴) ۲

(سخت - مفهومی/ترکیبی - استاندارد) - حسابان ۱ صفحه‌های ۱۲۶ و ۱۲۷ - ۱۱۰۵

پاسخ: گزینه ۱

وقتی x از سمت راست به -۱ نزدیک می‌شود، $f(x)$ با مقادیر بیشتر از ۱ به ۱ نزدیک می‌شود و وقتی x با مقادیر بیشتر از ۱ به ۱ نزدیک می‌شود، $f(x)$ با مقادیر کمتر از صفر به صفر نزدیک می‌شود، پس داریم:

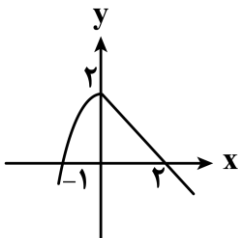
$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} [f \circ f(x)] = \lim_{x \rightarrow 1^+} [f(x)] = \left[\circ^- \right] = -1$$

دام تستی!

اگر به بראکت و مقادیر کمتر از صفر در گام آخر توجه نکنی در دام گزینه ۲ می‌افتی!



۱۹- نمودار تابع f مطابق شکل زیر است. حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \left[f\left(-\frac{2}{f(x)}\right) \right]$ کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)



(۱) -۱

(۲) صفر

(۳) ۲

(۴) وجود ندارد.

(سخت - مفهومی/ترکیبی - استاندارد) - حسابان ۱ صفحه‌های ۱۲۸ و ۱۲۹ - ۱۱۰۵

پاسخ: گزینه ۱

با نزدیک شدن x به صفر، $f(x)$ با مقادیر کمتر از ۲ به ۲ نزدیک می‌شود، پس می‌توان نوشت:

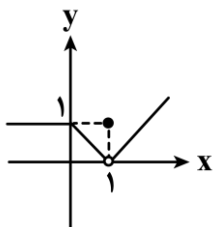
$$f(x) < 2 \Rightarrow \frac{1}{f(x)} > \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{f(x)} < -\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{2}{f(x)} < -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[f\left(-\frac{2}{f(x)}\right) \right] = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} [f(x)] = \left[\circ^- \right] = -1$$

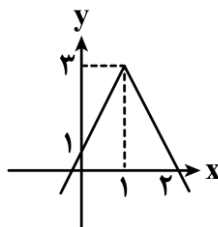
و بنابراین داریم:



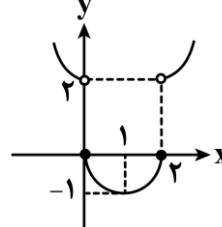
۲۰- نمودار تابع f به کدام صورت باشد تا تابع $f \circ f$ در $x = 0$ فاقد حد باشد؟



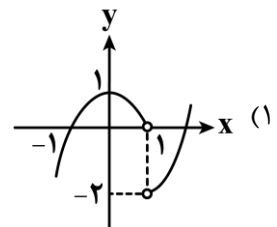
(۴)



(۳)



(۲)



(۱)

(سخت - ترکیبی - زمان‌بر) - حسابان ۱ صفحه ۱۲۶ - ۱۱۰۵

پاسخ: گزینه ۴

بررسی گزینه‌ها:

۱

$$\lim_{x \rightarrow 0} f \circ f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0$$

با نزدیک شدن x به صفر، $f(x)$ با مقادیر کمتر از ۱ به ۱ نزدیک می‌شود و داریم:

۲

با نزدیک شدن x به صفر، مقدار $f(x)$ با توجه به جهت میل کردن x تفاوت دارد، پس ناگزیر می‌بایست حد چپ و راست را جداگانه بررسی کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f \circ f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2 \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f \circ f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} fof(x) = 2$$

چون حد چپ و راست برابرند، پس:

۳

با نزدیک شدن x به صفر، $f(x)$ به ۱ نزدیک می شود و چون تابع f در $x = 1$ حدی برابر ۳ دارد، پس حد تابع fof برابر با ۳ است:

$$\lim_{x \rightarrow 0} fof(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$$

۴

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} fof(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0$$

با نزدیک شدن x به صفر از سمت راست، $f(x)$ با مقادیر کمتر از ۱ به ۱ نزدیک می شود، پس:

با نزدیک شدن x به صفر از سمت چپ، مقدار تابع f دقیقاً برابر ۱ است، پس:

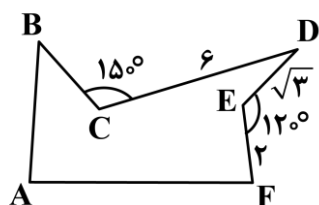
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} fof(x) = f(1) = 1$$

چون حد چپ و راست برابر نیست، پس در گزینه ۴ $\lim_{x \rightarrow 0} fof(x)$ وجود ندارد.



۲۱- زمینی به شکل مقابل داریم. می خواهیم بدون آن که محیط این زمین تغییر کند مساحتش را تا بیشترین حد ممکن افزایش دهیم،

اگر میزان این افزایش مساحت برابر ۱۵ واحد مربع باشد، اندازه BC برابر کدام است؟



(۱) ۲

(۲) ۳

(۳) ۴

(۴) ۵

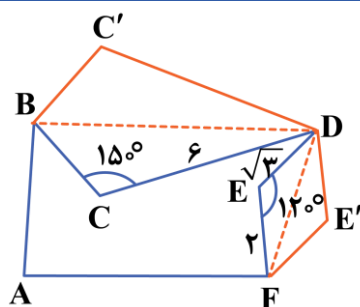
متوسط - خط به خط - استاندارد - هندسه ۲ صفحه ۵۱ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۳

بازتاب نقطه C نسبت به BD را C' و بازتاب نقطه E نسبت به DF را نقطه E' می نامیم. در این

صورت محیط چندضلعی $ABC'D'E'F$ با محیط چندضلعی $ABCDEF$ برابر است ولی مساحت

آن به اندازه $2S_{\triangle DEF} + 2S_{\triangle BCD}$ افزایش یافته است، بنابراین:

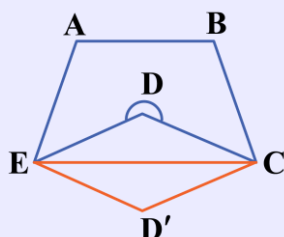


$$15 = 2S_{\triangle DEF} + 2S_{\triangle BCD} \Rightarrow 15 = 2\left(\frac{1}{2} DE \times EF \times \sin 120^\circ\right) + 2\left(\frac{1}{2} BC \times CD \times \sin 150^\circ\right)$$

$$\Rightarrow 15 = \sqrt{3} \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + BC \times 4 \times \frac{1}{2} \Rightarrow 15 = 3 + 2BC \Rightarrow BC = 6$$

افزایش مساحت

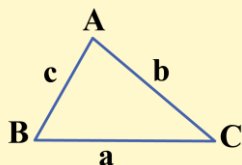
در مسائلی که صحبت از افزایش مساحت یک چندضلعی مقعر بدون تغییر محیط آن باشد، کافی است مطابق شکل زیر قسمت هایی از چندضلعی که دارای زاویه بیشتر از 180° هستند را بازتاب دهیم، ببینید:



اکنون محیط چندضلعی $ABCDE$ با چندضلعی $ABCD'E$ برابر است.

مساحت مثلث با داشتن دو ضلع و زاویه بین

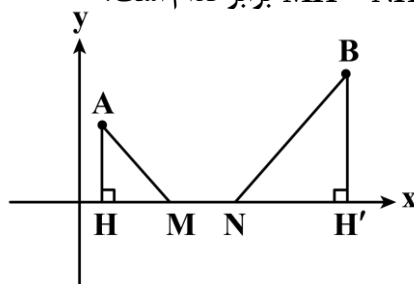
مساحت هر مثلث برابر است با $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب ۲ ضلع در سینوس زاویه بین دو ضلع.



$$S = \frac{1}{2} ab \sin \hat{C} = \frac{1}{2} bc \sin \hat{A} = \frac{1}{2} ac \sin \hat{B}$$



۲۲- مطابق شکل مقابل، نقاط $A(1, 6)$ و $B(17, 9)$ را در دستگاه مختصات در نظر گرفته و نقاط M و N را روی محور x ها به فاصله ۴ از یکدیگر چنان انتخاب می‌کنیم که طول مسیر $AMNB$ کم‌ترین مقدار ممکن باشد. حاصل $MH' - NH$ برابر کدام است؟



(۱) ۴/۲

(۲) ۳/۶

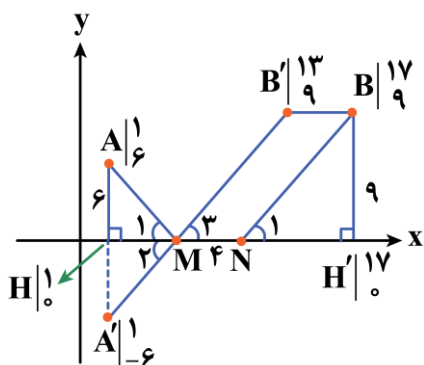
(۳) ۲/۴

(۴) ۴/۸

(سخت - ترکیبی - زمان‌بر) - هندسه ۲ صفحه ۵۳ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۳

با توجه به شکل، نقاط H و H' دارای مختصات $H(1, 0)$ و $H'(17, 0)$ هستند، پس $HH' = 16$ می‌باشد.



از طرف دیگر، نقطه B را به اندازه ۴ واحد در راستای محور x به سمت A انتقال می‌دهیم تا به نقطه $B'(13, 9)$ برسیم و همچنین بازتاب $A(1, 6)$ نسبت به محور x ، نقطه $A'(1, -6)$ می‌باشد. حال از A' به B' وصل می‌کنیم تا محور x را در نقطه M قطع کند و N روی محور x به فاصله ۴ از M در سمت راست آن انتخاب می‌گردد. حال بنابر مسئله هرون، مسیر $AMNB$ کم‌ترین مقدار ممکن است.

با توجه به شکل، زاویه‌های $\hat{M}_1, \hat{M}_2, \hat{M}_3$ و $\hat{N}_1$ مساوی‌اند، پس داریم:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{M}_1 = \hat{N}_1 \\ \hat{H} = \hat{H}' = 90^\circ \end{array} \right\} \xrightarrow{(22)} \triangle AMH \sim \triangle BNH' \Rightarrow \frac{MH}{NH'} = \frac{AH}{BH'} \quad (1)$$

$$NH' = HH' - (MH + MN) = 16 - (4 + x) = 12 - x$$

اکنون فرض می‌کنیم $MH = x$ ، پس:

بنابراین:

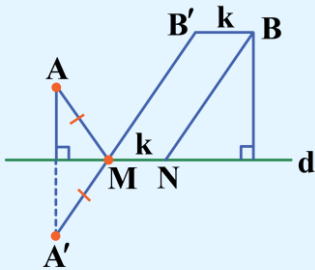
$$\xrightarrow{(1)} \frac{x}{12-x} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \Rightarrow 3x = 24 - 2x \Rightarrow 5x = 24 \Rightarrow x = \frac{24}{5} = 4\frac{4}{5}$$

در نتیجه:

$$MH' - NH = (MN + NH') - (MN + MH) = NH' - MH = (12 - x) - x = 12 - 2x = 12 - 2(4\frac{4}{5}) = 2\frac{2}{5}$$

این استراتژی را همیشه به خاطر داشته باشید!

مسئله هرون: دو نقطه A و B در یک طرف خط d قرار دارند. باید نقاط M و N به فاصله ثابت k از هم روی خط d طوری قرار بگیرند که طول مسیر $AMNB$ کمترین مقدار شود. برای این خواسته می‌توان مطابق شکل از نقطه B ، k واحد موازی خط d به طرف A حرکت کرد تا نقطه B' حاصل شود، سپس بازتاب نقطه A نسبت به خط d را A' می‌نامیم. محل برخورد $A'B'$ با خط d همان نقطه M است. حال از M به اندازه k واحد روی خط d به راست می‌رویم تا نقطه N حاصل شود. $AMNB$ کوتاه‌ترین مسیر موردنظر مسئله است.



۲۳- مساحت دایره محیطی مثلث ABC با معلومات $\hat{A} = 105^\circ$ ، $\hat{C} = 45^\circ$ و $AC = 4$ برابر کدام است؟

(۴) 32π

(۳) 16π

(۲) 8π

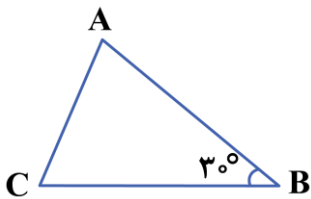
(۱) 4π

(آسان - مفهومی - سریع) - هندسه ۲ صفحه ۶۲ - ۱۱۰۳

پاسخ: گزینه ۳

مجموع زوایای داخلی مثلث ABC برابر 180° است، پس:

$$\hat{B} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{C}) = 180^\circ - (105^\circ + 45^\circ) = 30^\circ$$



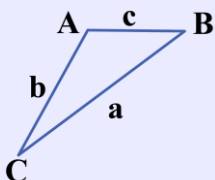
اکنون با استفاده از قضیه سینوس‌ها می‌نویسیم:

$$\frac{AC}{\sin \hat{B}} = 2R \Rightarrow \frac{4}{\sin 30^\circ} = 2R \Rightarrow \frac{4}{\frac{1}{2}} = 2R \Rightarrow R = 4$$

بنابراین مساحت دایره محیطی مثلث برابر است با:

$$S = \pi R^2 = 16\pi$$

قضیه سینوس‌ها در مثلث



$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R$$

↓
شعاع دایره محیطی مثلث است



۲۴- نقطه تلاقی عمودمنصف‌های اضلاع مثلث ABC بیرون این مثلث قرار دارد. اگر $\hat{C} = 45^\circ$ و $\sqrt{3}AB = \sqrt{2}AC$ ، آن‌گاه کدام گزینه همواره درست است؟

$$\hat{B} = 8\hat{A} \quad (۴)$$

$$\hat{A} = 6\hat{B} \quad (۳)$$

$$\hat{A} = 8\hat{B} \quad (۲)$$

$$\hat{B} = 6\hat{A} \quad (۱)$$

(متوسط - مفهومی - استاندارد) - هندسه ۲ صفحه ۶۳ - ۱۱۰۳

پاسخ: گزینه ۴

نقطه تلاقی عمودمنصف‌های اضلاع مثلث ABC بیرون آن است، پس این مثلث منفرجه‌الزاویه است، یعنی یکی از زوایای آن بیشتر از 90° است. اکنون با استفاده از قضیه سینوس‌ها می‌نویسیم:

$$\frac{AB}{\sin \hat{C}} = \frac{AC}{\sin \hat{B}} \Rightarrow \frac{AB}{\sin 45^\circ} = \frac{AC}{\sin \hat{B}} \xrightarrow[\text{بنابر فرض } AB = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} AC]{\text{بنابر فرض}} \frac{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} AC}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{AC}{\sin \hat{B}} \Rightarrow \sin \hat{B} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

بنابراین $\hat{B} = 60^\circ$ یا $\hat{B} = 120^\circ$.

چون این مثلث دارای زاویه منفرجه است پس $\hat{B} = 60^\circ$ قابل قبول نیست، در نتیجه $\hat{B} = 120^\circ$ می‌باشد.

$$\hat{A} = 180^\circ - (\hat{B} + \hat{C}) \Rightarrow \hat{A} = 180^\circ - (120^\circ + 45^\circ) = 15^\circ$$

بنابراین:

$$\hat{A} = 15^\circ, \hat{B} = 120^\circ \Rightarrow \frac{\hat{B}}{\hat{A}} = \frac{120^\circ}{15^\circ} = 8 \Rightarrow \hat{B} = 8\hat{A}$$

رفع ابهام!

توجه کنید اگر $\hat{B} = 60^\circ$ را انتخاب می‌کردیم، آن‌گاه با فرض $\hat{C} = 45^\circ$ ، اندازه زاویه $\hat{A}$ برابر 75° می‌شد، در این صورت همه زاویه‌های این مثلث حاده می‌شوند، یعنی نقطه تلاقی عمودمنصف‌های اضلاع، درون مثلث قرار می‌گیرد که خلاف فرض سوال است.

هم‌رسی‌های معروف در مثلث

(۱) محل برخورد میانه‌ها و نیمسازها: محل برخورد نیمسازهای زوایای داخلی هر مثلث، همواره درون مثلث قرار دارد.

(۲) محل برخورد ارتفاع‌ها و عمودمنصف‌ها:

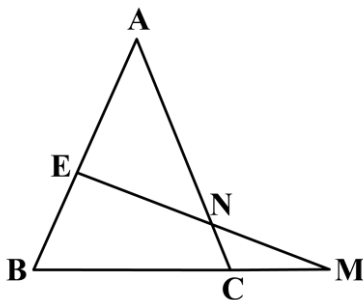
(الف) اگر تمامی زوایای مثلث تند (حاده) باشند، محل برخورد ارتفاع‌ها و عمودمنصف‌ها درون مثلث است.

(ب) اگر مثلث قائم‌الزاویه باشد، محل برخورد ارتفاع‌ها در رأس قائمه مثلث و محل برخورد عمودمنصف‌های مثلث، وسط وتر مثلث قرار دارد یعنی این دو نقطه (محل برخورد ارتفاع‌ها و محل برخورد عمودمنصف‌ها) روی محیط مثلث قرار دارند.

(ج) اگر مثلث یک زاویه باز (منفرجه) داشته باشد، محل برخورد ارتفاع‌ها و همچنین عمودمنصف‌ها خارج مثلث قرار دارد.



۲۵- در مثلث ABC، اگر $AB = AC$ ، $BE = 7$ ، $MN = 6$ و $CN = 5$ باشد، آن‌گاه اندازه ME برابر کدام است؟



$$\frac{21}{2} \quad (۱)$$

$$\frac{44}{5} \quad (۲)$$

$$\frac{39}{5} \quad (۳)$$

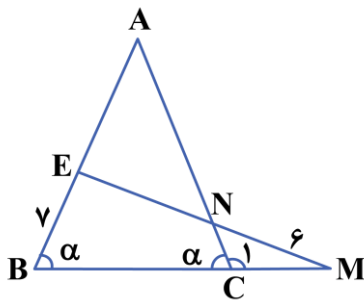
$$\frac{42}{5} \quad (۴)$$

(متوسط - مفهومی - زمان‌بر) - هندسه ۲ صفحه ۶۳ - ۱۱۰۳

پاسخ: گزینه ۴

مثلث ABC متساوی‌الساقین است، پس:

$$AB = AC \Rightarrow \hat{B} = \hat{C} = \alpha \Rightarrow \hat{C}_1 = 180^\circ - \alpha$$



اکنون با استفاده از قضیه سینوس‌ها می‌نویسیم:

$$\triangle MNC: \frac{NC}{\sin \hat{M}} = \frac{MN}{\sin \hat{C}_1} \Rightarrow \frac{5}{\sin \hat{M}} = \frac{6}{\sin \hat{C}_1} \Rightarrow \frac{5}{\sin \hat{M}} = \frac{6}{\sin(180^\circ - \alpha)} \xrightarrow{\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha} \sin \hat{M} = \frac{5 \sin \alpha}{6} \quad (1)$$

$$\triangle BME: \frac{BE}{\sin \hat{M}} = \frac{ME}{\sin \hat{B}} \Rightarrow \frac{7}{\sin \hat{M}} = \frac{ME}{\sin \alpha} \Rightarrow \sin \hat{M} = \frac{7 \sin \alpha}{ME} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \frac{5 \sin \alpha}{6} = \frac{7 \sin \alpha}{ME} \Rightarrow \frac{5}{6} = \frac{7}{ME} \Rightarrow ME = \frac{42}{5}$$



۲۶- در نمودار دایره‌ای، زاویه مربوط به دسته به نمایندگی ۱۱/۷۵ برابر ۶۰° است. تقریباً چند درصد داده‌ها کمتر از ۱۰ هستند؟

دسته‌ها	۳-۶/۵	۶/۵-۱۰	۱۰-۱۳/۵	۱۳/۵-۱۷
فراوانی مطلق	۴	۷	x	۴
	۷۰ (۴)		۶۵ (۳)	

۶۱ (۲)

۵۷ (۱)

(آسان - مفهومی - سریع) - آمار و احتمال صفحه ۷۲ - ۱۱۰۳

پاسخ: گزینه ۲

چون ۱۱/۷۵ وسط بازه (۱۰, ۱۳/۵) است نماینده دسته (۱۰-۱۳/۵) می‌باشد و زاویه مربوط به آن در نمودار دایره‌ای از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$60^\circ = \frac{x}{4+7+x+4} \times 360^\circ \Rightarrow 60^\circ = \frac{x}{15+x} \times 360^\circ \Rightarrow 15+x=6x \Rightarrow 5x=15 \Rightarrow x=3$$

داده‌های کمتر از ۱۰ مربوط به دو دسته (۳-۶/۵) و (۶/۵-۱۰) می‌شوند، پس ۷+۴=۱۱ داده کمتر از ۱۰ داریم، در نتیجه:

$$\frac{11}{4+7+3+4} \times 100 \approx 61$$

تقریباً ۶۱ درصد داده‌ها کمتر از ۱۰ می‌باشند.

جدول فراوانی داده‌ها

بسیاری از اوقات به جای خود داده‌ها حدود داده‌ها را داریم. یعنی می‌دانیم که اگر داده‌ای در دسته نام باشد حدود آن در چه بازه‌ای است اما مقدار دقیق هر داده را نمی‌دانیم. در این شرایط وسط هر بازه را به عنوان نماینده داده‌های آن دسته حساب می‌کنیم. همچنین با استفاده از جدولی به شکل زیر وضعیت داده‌ها را نمایش می‌دهیم:

حدود دسته‌ها	$a_1 - b_1$	$a_2 - b_2$	$a_3 - b_3$	$\dots$	$a_k - b_k$
فراوانی مطلق	x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_k

با داشتن جدول بالا مشخص است که مرکز هر دسته (نماینده هر دسته) برابر است با:

$$\frac{a_i + b_i}{2} \quad 1 \leq i \leq k$$

یه نمونه باحال ببین!

میانگین داده‌ها در جدول زیر ۴ است. درصد فراوانی دسته آخر را به دست آورید.

حدود دسته‌ها	۰-۲	۲-۴	۴-۶	۶-۸
فراوانی مطلق	۵	۷	۴	x

پاسخ تشریحی:

ابتدا مرکز هر دسته را محاسبه می‌کنیم و با اضافه کردن یک سطر به انتهای جدول آن‌ها را در جای خود قرار می‌دهیم:

حدود دسته‌ها	۰-۲	۲-۴	۴-۶	۶-۸
فراوانی مطلق	۵	۷	۴	x
مراکز دسته‌ها	$\frac{0+2}{2} = 1$	$\frac{2+4}{2} = 3$	$\frac{4+6}{2} = 5$	$\frac{6+8}{2} = 7$

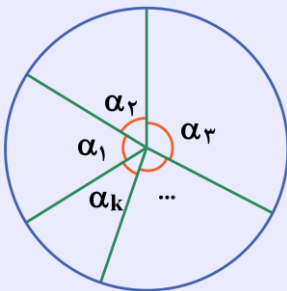
حال برای محاسبه میانگین از مراکز دسته‌ها استفاده می‌کنیم:

$$\bar{x} = \frac{5(1) + 7(3) + 4(5) + x(7)}{5 + 7 + 4 + x} \Rightarrow 4 = \frac{46 + 7x}{16 + x} \Rightarrow 46 + 7x = 64 + 4x \Rightarrow 3x = 18 \Rightarrow x = 6$$

$$\text{درصد فراوانی نسبی دسته آخر} = \frac{6}{22} \times 100 \approx 27.27\%$$

نمودار دایره‌ای برای نمایش داده‌ها

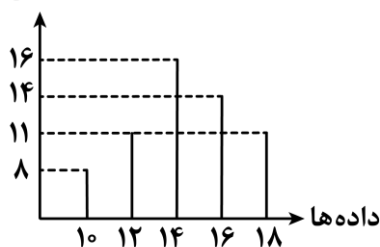
برای نمایش داده‌ها با استفاده از نمودار دایره‌ای، فراوانی نسبی هر داده در 360° را در نظر گرفته و آن را به منزله زاویه مرکزی نظیر این داده در دایره قرار می‌دهیم. به عنوان مثال اگر جامعه n عضو و k نوع داده داشته باشد برای هر $1 \leq i \leq k$ ، زاویه نظیر داده دسته iام در دایره است و داریم:



$$\alpha_i = \frac{\text{تعداد اعضای دسته } i\text{-ام}}{\text{تعداد اعضای کل جامعه}} \times 360^\circ = \frac{f_i}{n} \times 360^\circ$$



فراوانی



۲۷- با توجه به نمودار میله‌ای مقابل، مجموع میانگین، میانه و مد (نما) داده‌ها کدام است؟

- (۱) ۴۰/۳
(۲) ۴۱/۲
(۳) ۴۲
(۴) ۴۲/۳

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - آمار و احتمال صفحه ۸۳ - ۱۱۰۳

پاسخ: گزینه ۴

محاسبه مد یا نماداده:

عدد ۱۴ بیشترین فراوانی را دارد پس مد یا نما همان ۱۴ است.

محاسبه میانه:

$$n = 8 + 11 + 14 + 16 + 11 = 60$$

تعداد کل داده‌ها برابر است با:

پس میانگین داده‌های با شماره ۳۰ و ۳۱ همان میانه است که هر دو عدد ۱۴ هستند.

(چون مجموع تعداد داده‌های ۱۰، ۱۲، ۱۴ مساوی ۳۵ است، یعنی داده‌های ۳۰ام و ۳۱ام هر دو در دسته ۱۴ هستند و هر دو برابر با ۱۴ هستند، پس میانگینشان همان ۱۴ می‌شود)، پس:

۱۴ = میانه

محاسبه میانگین:

برای ساده‌تر شدن محاسبات از همه داده‌ها ۱۴ واحد کم می‌کنیم و میانگین را محاسبه کرده و سپس در نهایت میانگین به‌دست آمده را با ۱۴ جمع می‌کنیم:

$$\bar{X} = 14 + \frac{8(10-14) + 11(12-14) + 16(14-14) + 14(16-14) + 11(18-14)}{8+11+16+14+11} = 14 + \frac{18}{60} = 14 + \frac{3}{10} = 14\frac{3}{10}$$

کام‌آخ

$$\text{میانگین} + \text{مد} + \text{میانه} = 14\frac{3}{10} + 14 + 14 = 42\frac{3}{10}$$

میانگین

میانگین ($\bar{X}$): اگر مجموع تمام داده‌ها را به تعدادشان تقسیم کنیم، میانگین به‌دست می‌آید. به میانگین **مرکز ثقل** هم گفته می‌شود.

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

میانه

میانه (Q_2): ابتدا تمام داده‌ها را به ترتیب صعودی یا نزولی مرتب می‌کنیم:

اگر تعداد داده‌ها فرد بود $\Leftarrow$ داده وسط = میانه = Q_2
اگر تعداد داده‌ها زوج بود $\Leftarrow$ میانگین دو داده وسط = میانه = Q_2

مد (نماداده)

مد (نما): داده‌ای که بیش‌ترین فراوانی را در بین داده‌ها دارد، مد یا نمای داده‌ها نامیده می‌شود.

نکات مهم!

۱) اگر تمام داده‌ها با هم برابر باشند، مد ندارند.

۲) اگر دو داده بیش‌ترین فراوانی را داشته باشند، داده‌ها دو مد دارند.

قلقشو یاد بگیر!

برای آسان‌تر شدن محاسبات در زمان محاسبه میانگین می‌توانیم عددی ثابت را از همه داده‌ها کم کنیم و سپس میانگین داده‌های جدید را محاسبه کنیم. در نهایت برای رسیدن به میانگین داده‌های اولیه باید عدد کم شده را به میانگین به‌دست آمده اضافه کنیم.



۲۸- اگر میانگین چند داده آماری مثبت و غیریکسان، برابر ۱۰ باشد و هر یک از داده‌ها را سه برابر و با عدد ۱۵ جمع کنیم، ضریب تغییرات داده‌های جدید چند برابر ضریب تغییرات داده‌های اولیه خواهد شد؟

$$\frac{2}{5} \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} \quad (3)$$

$$\frac{2}{3} \quad (2)$$

$$\frac{1}{3} \quad (1)$$

(متوسط - مفهومی - استاندارد) - آمار و احتمال صفحه ۹۰ - ۱۱۰۳

پاسخ: گزینه ۲

با توجه به فرمول ضریب تغییرات $CV = \frac{\sigma}{\bar{X}}$ نیاز داریم که بدانیم انحراف معیار و میانگین هر کدام با تغییر داده‌ها چگونه تغییر می‌کنند؟

فرض کنید n داده $X_1, X_2, \dots, X_n$ با میانگین $\bar{X}$ و انحراف معیار σ را داشته باشیم.

اگر داده‌های آماری را سه برابر و با ۱۵ جمع کنیم:

(۱) میانگین نیز به همان صورت عوض می‌شود، زیرا هر داده را ۳ برابر کرده و با ۱۵ جمع می‌کنیم و سپس میانگین را حساب می‌کنیم.

$$\bar{x}_{\text{جدید}} = \frac{(3x_1 + 15) + (3x_2 + 15) + \dots + (3x_n + 15)}{n} = \frac{3(x_1 + x_2 + \dots + x_n) + 15n}{n} = 3 \underbrace{\frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_n)}{n}}_{\bar{x}} + 15$$

$$\bar{x}_{\text{جدید}} = 3\bar{x} + 15$$

(۲) واریانس ۹ برابر و انحراف معیار ۳ برابر می‌شود. زیرا:

$$\sigma_{\text{جدید}}^2 = \frac{((3x_1 + 15) - (3\bar{x} + 15))^2 + \dots + ((3x_n + 15) - (3\bar{x} + 15))^2}{n}$$

$$\sigma_{\text{جدید}}^2 = \frac{(3x_1 - 3\bar{x})^2 + \dots + (3x_n - 3\bar{x})^2}{n} = \frac{3^2(x_1 - \bar{x})^2 + \dots + 3^2(x_n - \bar{x})^2}{n}$$

$$\sigma_{\text{جدید}}^2 = \frac{3^2(x_1 - \bar{x})^2 + \dots + 3^2(x_n - \bar{x})^2}{n} = 3^2 \underbrace{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}_{\sigma^2} = 3^2 \sigma^2$$

در نتیجه:

$$\sigma_{\text{جدید}} = \sqrt{\sigma_{\text{جدید}}^2} = \sqrt{3^2 \sigma^2} = 3\sigma$$

پس برای نسبت ضریب تغییرات جدید به ضریب تغییرات قدیم برابر است با:

$$\frac{CV_2}{CV_1} = \frac{\frac{\sigma_2}{\bar{x}_2}}{\frac{\sigma_1}{\bar{x}_1}} = \frac{\frac{3\sigma_1}{(3 \times 10) + 15}}{\frac{\sigma_1}{10}} = \frac{\frac{3}{45}}{\frac{1}{10}} = \frac{30}{45} = \frac{2}{3}$$

معیارهای پراکندگی

(۲) انحراف معیار: $\sigma = \sqrt{\text{واریانس}}$

(۱) واریانس: $\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$

(۴) دامنه تغییرات: $R = x_{\max} - x_{\min}$

(۳) ضریب تغییرات: $CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$

اثر تغییرات روی داده‌ها در مشخصه‌های عددی مربوط به داده‌ها

(۱) اگر همه داده‌ها با مقداری ثابت جمع شوند واریانس تغییری نمی‌کند.

(۲) اگر داده‌ها k برابر شوند، واریانس k^2 برابر می‌شود.

(۳) اگر داده‌ها k برابر شوند، انحراف معیار $|k|$ برابر می‌شود.

(۴) اگر داده‌ها با عددی جمع شوند یا عددی از آن‌ها کم شود، یا در عددی ضرب یا بر آن تقسیم شوند، همین تغییرات روی میانگین هم اعمال می‌شوند:

$$\forall 1 \leq i \leq n, k \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} ; x'_i = kx_i + b \Rightarrow \bar{x}_{\text{جدید}} = k\bar{x}_{\text{اولیه}} + b$$



۲۹- اگر انحراف ۵ داده آماری از میانگین این داده‌ها به ترتیب $m, 2, -2, -3, -1$ باشد، واریانس این ۵ داده آماری کدام است؟

(۴) ۶/۸

(۳) ۶/۵

(۲) ۵/۸

(۱) ۵/۵

(آسان - مفهومی - سریع) - آمار و احتمال صفحه ۸۸ - ۱۱۰۳

پاسخ: گزینه ۴

می‌دانیم مجموع انحراف داده‌ها از میانگین همیشه صفر است، پس:

$$(-1) + (-3) + (-2) + 2 + m = 0 \Rightarrow m = 4$$

حال با داشتن اختلاف هر داده از میانگین به راحتی اطلاعات مسئله را در فرمول واریانس جای گذاری می‌کنیم و داریم:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{(-1)^2 + (-3)^2 + (-2)^2 + 2^2 + 4^2}{5} = \frac{34}{5} = 6/8$$

واریانس

برای محاسبه واریانس n داده آماری $x_1, x_2, \dots, x_n$ داریم:

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n} \quad \text{یا} \quad \sigma^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} - \bar{x}^2$$

قلقشو یاد بگیر!

گاهی اوقات مانند این سؤال راحت‌تر است $(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2$ را به دست آوریم که مجموع مربعات اختلاف از میانگین‌ها است.

گاهی راحت‌تر است $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$ را به دست آوریم که مجموع مربعات داده‌ها است.

مجموع اختلاف داده‌ها از میانگین

همواره برای هر مجموعه‌ای از داده‌ها، مجموع اختلاف داده‌ها از میانگین برابر صفر است.

$$(x_1 - \bar{x}) + (x_2 - \bar{x}) + \dots + (x_n - \bar{x}) = (x_1 + x_2 + \dots + x_n) - (\underbrace{\bar{x} + \bar{x} + \dots + \bar{x}}_{n \text{ بار}}) = n\bar{x} - n\bar{x} = 0$$

$$(x_1 - \bar{x}) + (x_2 - \bar{x}) + \dots + (x_n - \bar{x}) = 0$$



۳۰- طبق تحقیقات ۱۰ سال گذشته در یک شهرستان، تعداد دانش‌آموزان دوره ابتدایی که مشکل ضعیفی چشم داشتند به صورت زیر

است. در نمایش نمودار جعبه‌ای، ضریب تغییرات داده‌های داخل جعبه کدام است؟ ($\sqrt{5} \approx 2/2$)

۵۰، ۵۴، ۳۷، ۴۲، ۳۲، ۵۷، ۴۶، ۵۶، ۳۹، ۵۹

(۴) ۰/۱۵

(۳) ۰/۱۱

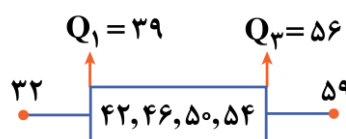
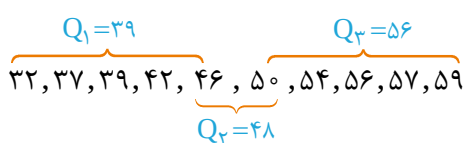
(۲) ۰/۰۹

(۱) ۰/۰۶

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - آمار و احتمال صفحه ۹۲ - ۱۱۰۳

پاسخ: گزینه ۲

ابتدا داده‌ها را مرتب می‌کنیم و چارک‌ها را پیدا می‌کنیم:



ابتدا میانگین و انحراف معیار را محاسبه می‌کنیم:

$$\bar{x} = \frac{42 + 46 + 50 + 54}{4} = 48$$

$$\sigma^2 = \frac{(42-48)^2 + (46-48)^2 + (50-48)^2 + (54-48)^2}{4} \Rightarrow \sigma^2 = 20 \Rightarrow \sigma = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

اکنون ضریب تغییرات را محاسبه می‌کنیم:

$$\Rightarrow CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{2\sqrt{5}}{48} = \frac{2 \times 2.2}{48} \approx 0.09$$

چارک‌ها

چارک‌ها (Q): چارک اول، دوم و سوم مقادیری هستند که داده‌های مرتب شده را به چهار قسمت مساوی تقسیم می‌کنند. چارک دوم همان میانه (Q_2) است.

روش محاسبه چارک اول (Q_1) و چارک سوم (Q_3):

۱) داده‌ها را به صورت صعودی مرتب کرده و میانه را می‌یابیم.

۲) میانه داده‌های مرتب شده کوچک‌تر از میانه را چارک اول (Q_1) می‌نامیم.

۳) میانه داده‌های مرتب شده بزرگ‌تر از میانه را چارک سوم (Q_3) می‌نامیم.

نمودار جعبه‌ای

نمودار جعبه‌ای، نموداری است که می‌تواند نحوه پراکندگی داده‌ها را به نمایش بگذارد. این نمودار براساس ۵ شاخص مهم آماری زیر رسم می‌شود:

۲) چارک اول (Q_1)

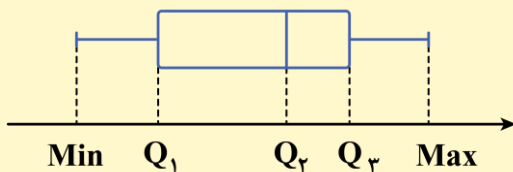
۱) کوچک‌ترین داده (Min)

۴) چارک سوم (Q_3)

۳) میانه یا چارک دوم (Q_2)

۵) بزرگ‌ترین داده (Max)

داده‌های بزرگ‌تر از Q_1 و کوچک‌تر از Q_3 (بین Q_1 و Q_3) را داده‌های **داخل جعبه** و داده‌های بزرگ‌تر از Q_3 و کوچک‌تر از Q_1 را داده‌های **بیرون جعبه** و Q_1 و Q_3 را داده‌های **روی جعبه** می‌نامند.



دامنه میان‌چارکی داده‌ها

به اختلاف Q_3 و Q_1 دامنه میان‌چارکی داده‌ها می‌گویند.

$$IQR = Q_3 - Q_1$$



برای دیدن پاسخنامه ویدئویی آزمون
بالا را اسکن یا روی آن کلیک کنید QR Code

مغناطیس + القای الکترومغناطیسی و جریان متناوب

(از نیروی مغناطیسی وارد بر سیم حامل جریان تا ابتدای قانون لنز) - صفحه‌های ۹۱ تا ۱۱۷

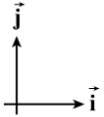
بودجه‌بندی
این آزمون

درمجموع ۴ تست از ۳۵ تست کنکور را پوشش داده است.

سهم در
کنکور

۳۱- از سیمی به طول ۱m جریان I در جهت محور x عبور می‌کند. اگر کل این سیم در میدان مغناطیسی $\vec{B} = 8\vec{i} + 6\vec{j}$ یکنواخت

برحسب تسلا قرار گیرد، نیرویی به بزرگی ۶۰N از طرف میدان مغناطیسی به آن وارد می‌شود. I چند آمپر است؟



۶ (۴)

۷/۵ (۳)

۰/۱ (۲)

۱۰ (۱)

(متوسط - محاسباتی - سریع) - صفحه ۹۳ - ۱۱۰۳

پاسخ: گزینه ۱

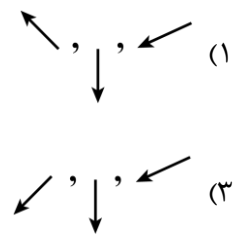
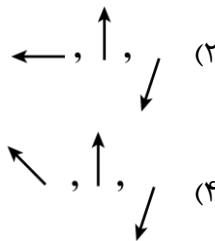
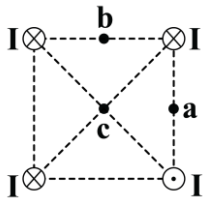
مؤلفه‌ای از میدان مغناطیسی که هم‌راستا با جریان سیم است، نمی‌تواند نیرویی به سیم وارد کند، بنابراین در این سوال فقط مؤلفه قائم میدان مغناطیسی به سیم نیرو وارد می‌کند، درنتیجه داریم:

$$F = I\ell B \sin \theta \xrightarrow{\theta=90^\circ} 60 = I \times 1 \times 6 \times 1 \Rightarrow I = 10 \text{ A}$$



۳۲- در شکل زیر، چهار سیم بلند و موازی حامل جریان الکتریکی I که همگی عمود بر صفحه‌اند، در رأس‌های یک مربع قرار گرفته‌اند.

جهت میدان مغناطیسی برآیند در نقاط a، b و c به ترتیب از راست به چپ در کدام گزینه به‌درستی نشان داده شده است؟ (نقاط a و b در وسط اضلاع مربع و نقطه c در مرکز مربع است.)

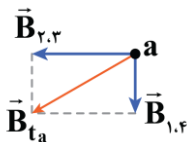
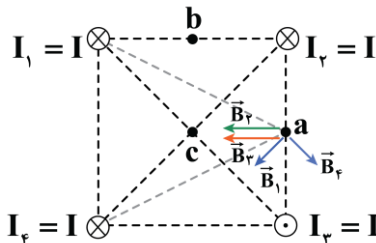


(متوسط - مفهومی - زمان‌بر) - صفحه ۹۶ - ۱۱۰۳

پاسخ: گزینه ۳

می‌دانیم میدان مغناطیسی حاصل از سیم بلند و مستقیم حامل جریان، با اندازه جریان سیم، رابطه مستقیم و با فاصله از سیم، رابطه عکس

دارد ($B \propto \frac{I}{r}$)، بنابراین داریم:



تعیین جهت میدان مغناطیسی برآیند در نقطه a:

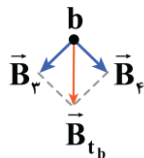
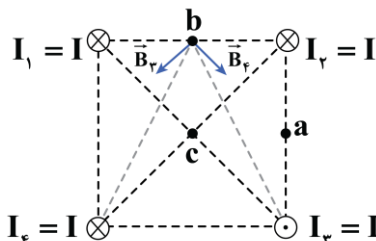
$$r_{1a} = r_{4a}, I_1 = I_4 \Rightarrow B_1 = B_4$$

$$r_{2a} = r_{3a}, I_2 = I_3 \Rightarrow B_2 = B_3$$

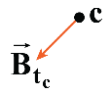
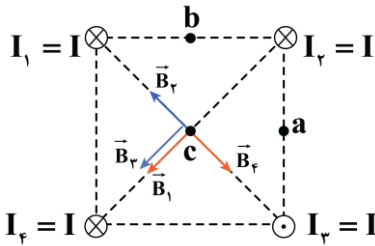
تعیین جهت میدان مغناطیسی برآیند در نقطه b:

I_1 و I_2 هم‌جهت و هم‌اندازه‌اند و نقطه b در وسط این دو سیم است، پس میدان مغناطیسی حاصل از این دو سیم در نقطه b، یکدیگر را خنثی می‌کنند و فقط به تحلیل میدان حاصل از I_3 و I_4 در نقطه b می‌پردازیم:

$$r_{3b} = r_{4b}, I_3 = I_4 \Rightarrow B_3 = B_4$$



تعیین جهت میدان مغناطیسی برآیند در نقطه c:



$$\vec{B}_2 = \vec{B}_4 \text{ و } \vec{B}_1 = \vec{B}_3 \Rightarrow \vec{B}_2 + \vec{B}_4 = 2\vec{B}_2 \text{ و } \vec{B}_1 + \vec{B}_3 = 2\vec{B}_1$$

$$I_2 = I_4, I_1 = I_3 \Rightarrow B_2 = B_4 \text{ و } B_1 = B_3$$

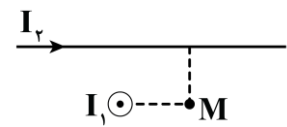
$$I_2 = I_4, I_1 = I_3 \Rightarrow B_2 = B_4 \text{ و } B_1 = B_3$$



هرچه جریان سیم، بزرگتر و فاصله از سیم، کمتر باشد، بزرگی میدان مغناطیسی حاصل از سیم حامل جریان، بزرگتر است.



۳۳- مطابق شکل زیر، دو سیم مستقیم و بلند حامل جریان‌های I_1 و I_2 در ارتفاع معینی از سطح زمین قرار دارند. نقطه M دقیقاً در سمت راست سیم حامل جریان I_1 و در پایین سیم حامل جریان I_2 قرار دارد. اگر بزرگی میدان مغناطیسی حاصل از سیم‌های I_1 و I_2 در محل نقطه M به ترتیب از راست به چپ برابر با $1G$ و $3G$ باشد، بزرگی میدان مغناطیسی برآیند در نقطه M چند گاوس است؟ (میدان مغناطیسی زمین را $0.45G$ و به سمت شمال فرض کنید).



غرب / شرق

$$\frac{9}{5} \quad (2)$$

$$\frac{7}{4} \quad (1)$$

$$\frac{6}{5} \quad (4)$$

$$\frac{5}{4} \quad (3)$$

(متوسط - استدلالی - استاندارد) - صفحه ۹۶ - ۱۱۰۳

پاسخ: گزینه ۳

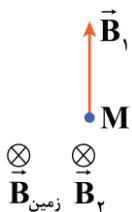
گام اول

به کمک قاعده دست راست، جهت میدان مغناطیسی حاصل از سیم‌های حامل جریان‌های I_1 و I_2 را در نقطه M به دست می‌آوریم. $\vec{B}_1$: اگر انگشت شست دست راست را در جهت I_1 قرار دهیم، جهت چرخش چهار انگشت در نقطه M به سمت بالا می‌شود. $\vec{B}_2$: اگر انگشت شست دست راست را در جهت I_2 قرار دهیم، جهت چرخش چهار انگشت در نقطه M در جهت شمال (درون سو) خواهد بود.

می‌دانیم جهت میدان مغناطیسی زمین در جهت شمال (درون سو) است.

گام آخر

حالا بریم سراغ محاسبه بزرگی میدان برآیند در نقطه M:

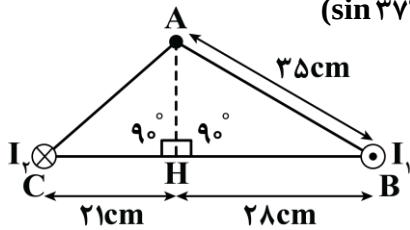


$$\begin{cases} B_1 = 1G \\ B_2 + B_{\text{زمین}} = 0.3G + 0.45G = \frac{3}{4}G \end{cases} \xrightarrow{\vec{B}_1, \vec{B}_{\text{زمین}} + \vec{B}_2 \text{ بر هم عمودند.}} B_M = \sqrt{B_1^2 + (B_2 + B_{\text{زمین}})^2}$$

$$\Rightarrow B_M = \sqrt{1^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{5}{4}G$$



۳۴- دو سیم موازی بسیار بلند حامل جریان‌های I_1 و I_2 ، مطابق شکل زیر عمود بر صفحه قرار دارند و بزرگی میدان مغناطیسی حاصل از هر یک از این سیم‌ها در نقطه A برابر با $5T$ است. زاویه‌ای که بردار برآیند میدان‌های مغناطیسی حاصل از سیم‌های حامل جریان‌های I_1 و I_2 در نقطه A با خط AH می‌سازد، چند درجه است؟ $(\sin 37^\circ = \cos 53^\circ = 0.6)$



- (۱) ۴
(۲) ۵
(۳) ۶
(۴) ۱۲

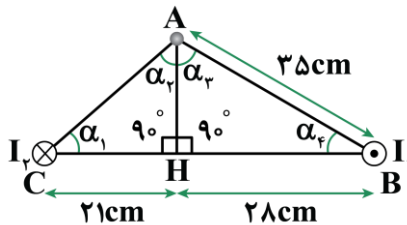
(متوسط - استدلالی - استاندارد) (صفحه ۹۶ - ۱۱۰۳)

پاسخ: گزینه ۱

به کمک قضیه فیثاغورس طول خط AH را به دست می‌آوریم:

$$AH^2 + 28^2 = 35^2 \Rightarrow AH = 21 \text{ cm}$$

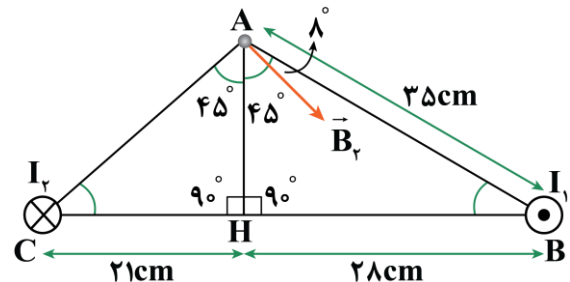
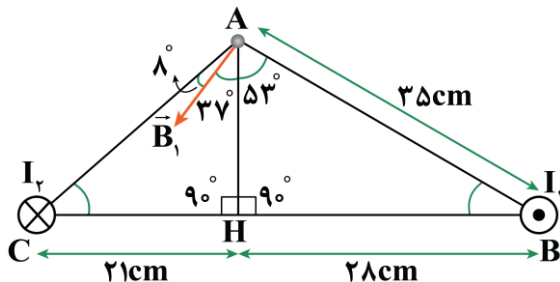
در مثلث AHC طول ضلع‌های AH و CH با هم برابر است، پس این مثلث، قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین می‌باشد:



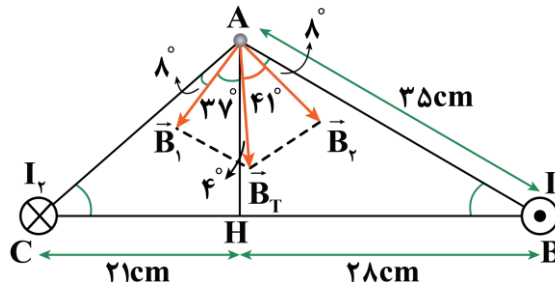
$$AH = CH = 21 \text{ cm} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 45^\circ$$

$$\text{در مثلث } AHB: \sin \alpha_3 = \frac{28}{35} = 0.8 \Rightarrow \alpha_3 = 53^\circ$$

جهت میدان مغناطیسی حاصل از سیم حامل جریان، عمود بر خط واصل سیم و نقطه موردنظر (نقطه A) است. با توجه به این نکته و به کمک قاعده دست راست، جهت میدان مغناطیسی هر یک از سیم‌ها را در نقطه A مشخص می‌کنیم.



با توجه به هم‌اندازه بودن $\vec{B}_1$ و $\vec{B}_2$ می‌توان نتیجه گرفت که بردار میدان خالص دو سیم، دقیقاً وسط بردار میدان‌های $\vec{B}_1$ و $\vec{B}_2$ قرار می‌گیرد (نیمساز).



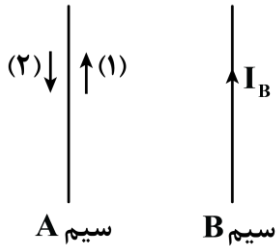
با توجه به زاویه‌ها، بردار میدان خالص، سمت راست AH قرار می‌گیرد و با خط AH زاویه 4° می‌سازد.

راهنمای مسیر

مشابه همین سؤال در کنکور تجربی ۱۳۹۴ داده شده که طراح می‌توانست ایده‌های جالب‌تری در سؤال مطرح کند. ممکن است همین سؤال را با یک ایده دیگر در آزمون‌های بعدی بدهیم. مثلاً زاویه میدان خالص با ضلع AH مجهول مسئله باشد.



۳۵- مطابق شکل زیر، دو سیم بلند و موازی A و B که حامل جریان هستند، در یک صفحه قرار دارند. بزرگی میدان مغناطیسی حاصل از جریان سیم B در محل سیم A برابر با 50 mG بوده و بر $1/5 \text{ m}$ از سیم A از طرف سیم B نیروی جاذبه‌ای به بزرگی $6 \times 10^{-6} \text{ N}$ وارد می‌شود. جریان عبوری از سیم A چند آمپر و در چه جهتی است؟



- (۱) $8/0^\circ$ و در جهت (۱)
 (۲) $6/0^\circ$ و در جهت (۱)
 (۳) $6/0^\circ$ و در جهت (۲)
 (۴) $8/0^\circ$ و در جهت (۲)

(متوسط - استدلالی - استاندارد) (صفحه ۹۷ - ۱۱۰۳)

پاسخ: گزینه ۱

می‌دانیم اگر جریان‌های دو سیم موازی، هم‌جهت باشند، نیروی مغناطیسی بین دو سیم از نوع جاذبه (ربایشی) خواهد بود، پس جریان عبوری از سیم A در جهت (۱) و هم‌جهت با جریان سیم B است. بزرگی نیروی مغناطیسی وارد بر سیم A از طرف سیم B برابر است با:

$$F_{BA} = I_A \ell_A B_B \sin \theta \quad \xrightarrow{F_{BA} = 6 \times 10^{-6} \text{ N}, \ell_A = 1/5 \text{ m}} \quad 6 \times 10^{-6} = I_A \times 1/5 \times 5 \times 10^{-6} \times 1 \Rightarrow I_A = 8/0 \text{ A}$$

$B_B = 50 \text{ mG} = 5 \times 10^{-6} \text{ T}, \theta = 90^\circ$

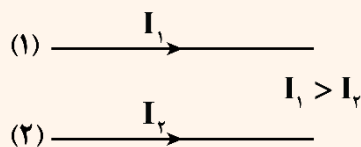
نیروی بین سیم‌های موازی حامل جریان

دو سیم موازی حامل جریان به هم نیرو وارد می‌کنند:

- ۱- اگر جریان‌های دو سیم، هم‌جهت باشند، یکدیگر را جذب می‌کنند.
 ۲- اگر جریان‌های دو سیم، در خلاف جهت یکدیگر باشند، یکدیگر را دفع می‌کنند.

یه نمونه باحال

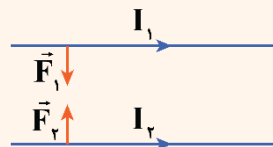
در شکل زیر، دو سیم بلند (۱) و (۲)، موازی هم در یک صفحه قرار دارند و بر هم نیروی مغناطیسی وارد می‌کنند. اگر نیروی وارد بر هر متر سیم (۱)، $\vec{F}_1$ و نیروی وارد بر هر متر از سیم (۲)، $\vec{F}_2$ باشد، $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ به ترتیب از راست به چپ در چه جهتی هستند و اندازه آن‌ها چگونه است؟



- (۱) $F_1 = F_2$ و $\uparrow$ و $\downarrow$
 (۲) $F_1 = F_2$ و $\downarrow$ و $\uparrow$
 (۳) $F_1 > F_2$ و $\uparrow$ و $\downarrow$
 (۴) $F_1 < F_2$ و $\downarrow$ و $\uparrow$

پاسخ تشریحی:

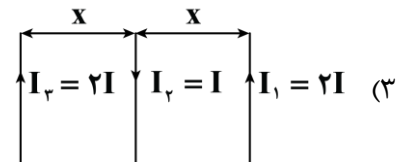
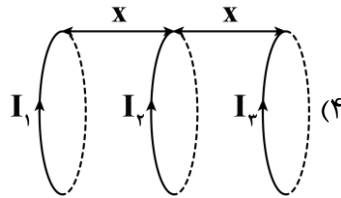
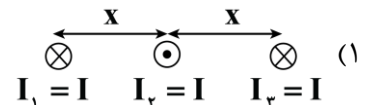
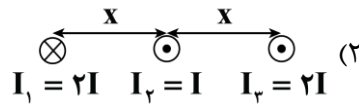
با توجه به این‌که جهت جریان الکتریکی در دو سیم (۱) و (۲) یکسان است؛ بنابراین دو سیم یکدیگر را جذب می‌کنند. از طرفی طبق قانون سوم نیوتون، اندازه نیروی سیم (۱) بر سیم (۲) با اندازه نیروی سیم (۲) بر سیم (۱)، برابر است.



پاسخ: گزینه ۱



۳۶- در هر کدام از گزینه‌های زیر، سیم‌های حامل جریان با طول برابر در فاصله‌های یکسانی از یکدیگر قرار دارند. در کدام گزینه برای نیروهای مغناطیسی وارد بر هر سه سیم یا حلقه حامل جریان، صفر است؟

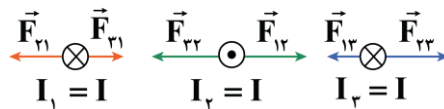


(سخت - مفهومی - زمان‌بر - صفحه ۹۷ - ۱۱۰۳)

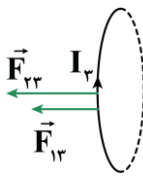
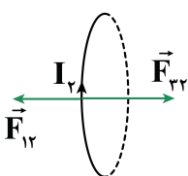
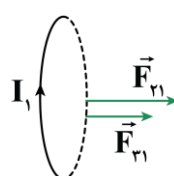
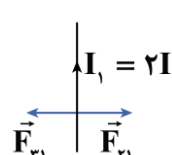
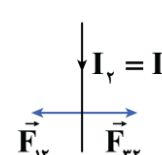
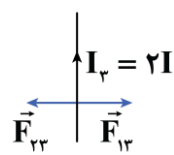
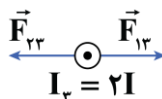
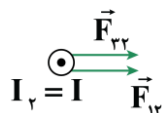
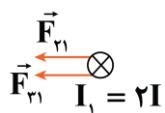
پاسخ: گزینه ۳

بررسی گزینه‌ها:

$$\begin{cases} I_2 = I_3 = I \\ r_{21} < r_{31} \end{cases} \Rightarrow F_{21} > F_{31}$$



$$\begin{cases} I_1 = I_2 = I \\ r_{13} < r_{12} \end{cases} \Rightarrow F_{13} > F_{12}$$



با توجه به شکل‌ها گزینه (۳) صحیح است.

نکات

هرگاه دو سیم بلند حامل جریان داشته باشیم، میدان مغناطیسی می‌تواند در بین دو سیم یا خارج از فاصله دو سیم، صفر شود:

۱- اگر جریان سیم‌ها هم‌جهت باشند، برایند میدان‌های مغناطیسی حاصل از دو سیم، در خطی به موازات آن دو سیم و در بین آن‌ها و نزدیک به سیم حامل جریان کوچکتر، صفر می‌شود.

تذکر

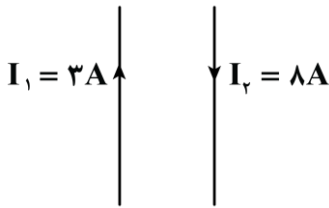
اگر جریان‌ها هم‌اندازه و هم‌جهت باشند، درست در وسط فاصله بین آن‌ها برایند میدان‌های مغناطیسی حاصل از دو سیم، صفر می‌شود.

۲- اگر جریان سیم‌ها در خلاف جهت هم باشند، برایند میدان‌های مغناطیسی حاصل از دو سیم، در خطی به موازات آن دو سیم و در خارج فاصله دو سیم و در نزدیکی سیم حامل جریان کوچکتر می‌تواند صفر شود.

تذکر

اگر جریان‌ها هم‌اندازه و در خلاف جهت هم باشند، در هیچ نقطه‌ای برایند میدان‌های مغناطیسی حاصل از دو سیم صفر نمی‌شود.

۳۷- در شکل زیر، دو سیم بلند و موازی حامل جریان با طول یکسان در یک صفحه قرار دارند. اگر بزرگی میدان مغناطیسی حاصل از سیم حامل جریان I_1 در محل سیم حامل جریان I_2 برابر با $45^\circ G$ باشد، بزرگی میدان مغناطیسی حاصل از سیم حامل جریان I_2 در محل سیم حامل جریان I_1 چند تسلا است؟



- (۱) 1200°
(۲) $0/12^\circ$
(۳) 1680°
(۴) $0/168^\circ$

(متوسط - استدلالی - استاندارد) (صفحه ۹۷ - ۱۱۰۳)

پاسخ: گزینه ۲

طبق قانون سوم نیوتون، نیرویی که سیم حامل جریان I_2 بر یک متر از سیم حامل جریان I_1 وارد می‌کند، هم‌اندازه با نیرویی است که سیم حامل جریان I_1 بر یک متر از سیم حامل جریان I_2 وارد می‌کند، بنابراین:

$$F_2 = F_1 \Rightarrow B_1 I_2 \ell_2 = B_2 I_1 \ell_1 \Rightarrow 45^\circ \times 8 \times 1 = B_2 \times 3 \times 1 \Rightarrow B_2 = 120^\circ G = 0/12T$$

سوتی‌های پرتکرار

اگر حواستان به یکای خواسته‌شده در انتهای سوال نباشد، در دام گزینه (۱) می‌افتید!

اندازه نیروی مغناطیسی که دو سیم حامل جریان به یکدیگر وارد می‌کنند

فرض کنید سیم (۱) دارای طول ℓ_1 و حامل جریان I_1 و سیم (۲) دارای طول ℓ_2 و حامل جریان I_2 است. میدان مغناطیسی حاصل از سیم (۱) در مکان سیم (۲) را $\vec{B}_1$ و میدان مغناطیسی حاصل از سیم (۲) در مکان سیم (۱) را $\vec{B}_2$ می‌نامیم، در این صورت داریم:

۱- اندازه نیرویی که سیم (۱) به سیم (۲) وارد می‌کند، برابر است با:

$$F_{12} = B_1 I_2 \ell_2$$

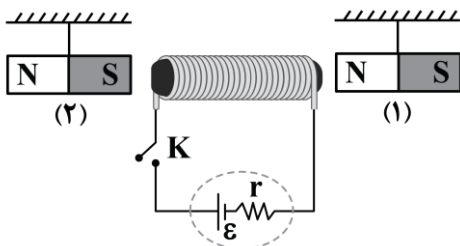
۲- اندازه نیرویی که سیم (۲) به سیم (۱) وارد می‌کند، برابر است با:

$$F_{21} = B_2 I_1 \ell_1$$

نکته

نیرویی که دو سیم موازی هم طول حامل جریان به یکدیگر وارد می‌کنند، طبق **قانون سوم نیوتون** با یکدیگر **هم‌اندازه و در خلاف جهت** یکدیگر هستند.

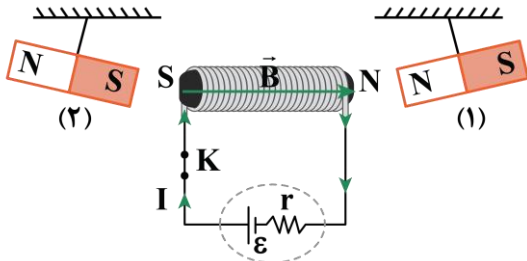
••• ایو •••



۳۸- در شکل مقابل، با وصل کردن کلید K، کدام یک از اتفاقات زیر رخ می‌دهد؟

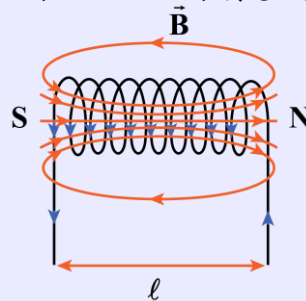
- (۱) آهنربای میله‌ای (۱) به طرف سیملوله جذب شده و آهنربای میله‌ای (۲) از سیملوله دفع می‌شود.
(۲) هر دو آهنربای میله‌ای (۱) و (۲) جذب سیملوله می‌شوند.
(۳) آهنربای میله‌ای (۱) از سیملوله دفع شده و آهنربای میله‌ای (۲) به طرف سیملوله جذب می‌شود.
(۴) هر دو آهنربای میله‌ای (۱) و (۲) از سیملوله دفع می‌شوند.

با وصل کردن کلید K، جریان الکتریکی در سیملوله برقرار شده و میدان مغناطیسی داخل سیملوله به کمک قاعده دست راست، مطابق شکل زیر می‌شود. با توجه به شکل، قطب S سیملوله، قطب S آهنربای میله‌ای (۲) را دفع می‌کند و قطب N سیملوله، قطب N آهنربای میله‌ای (۱) را دفع می‌کند، بنابراین هر دو آهنربای میله‌ای (۱) و (۲) از سیملوله دفع می‌شوند.



جهت میدان مغناطیسی سیملوله

به کمک قاعده دست راست به دست می‌آید. این گونه که چرخش چهار انگشت دست راست در جهت جریان و شست، جهت میدان مغناطیسی داخل سیملوله را نشان می‌دهد.

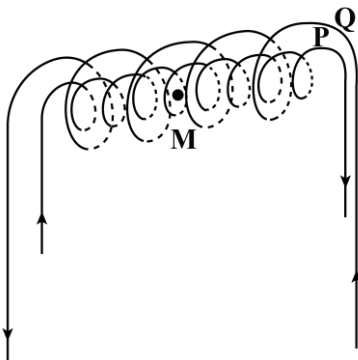


راهنمای مسیر

بچه‌ها این سؤال از دل کتاب درسی براتون طرح شده تا دید خوبی نسبت به میدان مغناطیسی سیملوله بهتون بده. چه برای کنکور و چه برای امتحان نهایی، حواستون به این سؤال باشه.



۳۹- در شکل زیر، دو سیملوله آرمانی P و Q هم‌محور بوده و طول یکسانی دارند. اگر تعداد حلقه‌های سیملوله Q، $\frac{5}{4}$ برابر تعداد حلقه‌های سیملوله P باشد، آن‌گاه باید جریان عبوری از سیملوله Q، چند برابر جریان عبوری از سیملوله P باشد تا برابری میدان‌های مغناطیسی حاصل از دو سیملوله در نقطه M (روی محور دو سیملوله) صفر باشد؟



- (۱) $\frac{5}{4}$
- (۲) $\frac{1}{4}$
- (۳) ۴
- (۴) $\frac{4}{5}$

طبق قاعده دست راست، میدان مغناطیسی حاصل از سیملوله P در نقطه M در خلاف جهت میدان مغناطیسی حاصل از سیملوله Q در این نقطه است، پس کفایت $B_P = B_Q$ باشد تا برابری میدان‌ها در نقطه M صفر شود:

$$B_P = B_Q \Rightarrow \frac{\mu_0 N_P I_P}{\ell_P} = \frac{\mu_0 N_Q I_Q}{\ell_Q} \Rightarrow N_P I_P = N_Q I_Q \Rightarrow \frac{I_Q}{I_P} = \frac{N_P}{N_Q} = \frac{4}{5}$$

میدان مغناطیسی حاصل از سیمولۀ حامل جریان

سیمولۀ سیم بلندی است که به صورت مارپیچی پیچیده شده و با عبور جریان از آن، میدان مغناطیسی، درون و اطراف آن تولید می‌شود. بزرگی میدان مغناطیسی درون سیمولۀ آرمانی و روی محور آن از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$B = \frac{\mu_0 NI}{\ell}$$

ℓ : طول سیمولۀ برحسب متر (m)

N: تعداد حلقه

I: جریان الکتریکی سیمولۀ برحسب آمپر (A)

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{T.m}{A}$$

تراوایی مغناطیسی خلأ



اگر قطر سیمولۀ در مقایسه با طول آن بسیار کوچک و حلقه‌های آن خیلی به هم نزدیک باشند، سیمولۀ را سیمولۀ آرمانی گویند.

یه نمونه باحال

سیمولۀ آرمانی به طول ۶۰cm، دارای ۲۰۰ حلقه است و از آن جریان ۵A عبور می‌کند. بزرگی میدان مغناطیسی درون سیمولۀ چند تسلا

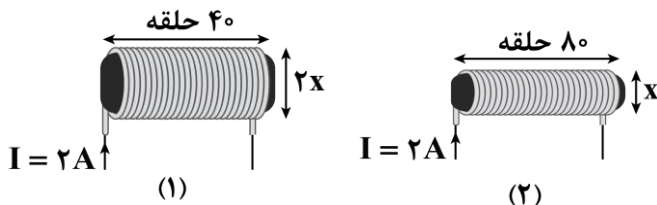
$$\text{است؟ } (\mu_0 = 12 \times 10^{-7} \frac{T.m}{A})$$

پاسخ تشریحی:

$$B = \frac{\mu_0 NI}{\ell} \xrightarrow{N=200, I=5A, \ell=0.6m, \mu_0=12 \times 10^{-7} \frac{T.m}{A}} B = \frac{12 \times 10^{-7} \times 200 \times 5}{0.6} = 2 \times 10^{-3} T$$



۴۰- مطابق شکل زیر، با سیمی به قطر مقطع یکنواخت D دو سیمولۀ آرمانی و منظم ساخته‌ایم. به طوری که در هر دو حالت، حلقه‌ها بدون فاصله کنار هم قرار دارند. از هر دو سیمولۀ جریان ۲A عبور می‌دهیم. اگر بزرگی میدان مغناطیسی درون سیمولۀ (۱) برابر با ۴۰۰G باشد، بزرگی میدان مغناطیسی سیمولۀ (۲) درون آن چند گاوس است؟ (میدان مغناطیسی داخل هر دو سیمولۀ را یکنواخت فرض کنید).



- (۱) ۲۵۰
- (۲) ۴۰۰
- (۳) ۵۰۰
- (۴) ۸۰۰

(آسان - محاسباتی - سریع - صفحه ۱۰۰ - ۱۱۰۳)

پاسخ: گزینه ۲

با توجه به این که حلقه‌ها بدون فاصله کنار هم پیچیده شده‌اند، طول سیمولۀ برابر ND خواهد بود، بنابراین:

$$B = \frac{\mu_0 NI}{\ell} \xrightarrow{\ell=ND} B = \frac{\mu_0 NI}{ND} \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{D} \xrightarrow{I_1=I_2=2A, D_1=D_2=D} B_1 = B_2 = 400 G$$

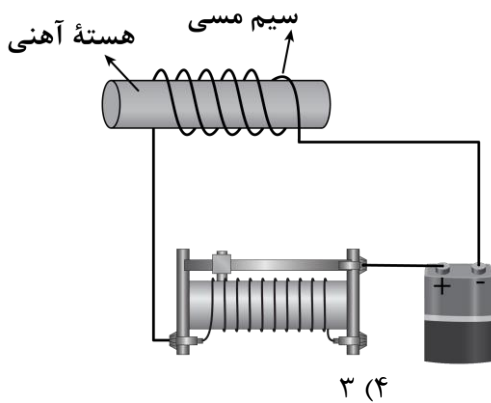


۱- اگر سیمی به طول L را به صورت سیمولۀ آرمانی به شعاع R دریاوریم، تقریباً تعداد حلقه‌های آن برابر با $N = \frac{L}{2\pi R}$ است.

۲- اگر قطر سیم به کاررفته در سیمولۀ آرمانی D بوده و سیم‌ها بدون فاصله کنار هم پیچیده شده باشند، بزرگی میدان مغناطیسی درون سیمولۀ برابر با $B = \frac{\mu_0 I}{D}$ است.



۴۱- با توجه به مدار شکل زیر، در چه تعداد از عبارت‌های زیر، بزرگی میدان مغناطیسی داخل سیم‌لوله افزایش می‌یابد؟



الف- لغزنده را به سمت راست حرکت دهیم.

ب- به جای سیم مسی ($\rho_{\text{مس}} = 1/7 \times 10^{-8} \Omega.m$) از یک سیم نقره‌ای

($\rho_{\text{نقره}} = 1/6 \times 10^{-8} \Omega.m$) با همان طول و سطح مقطع استفاده کنیم.

ج- هسته آهنی سیم‌لوله را از آن خارج کنیم.

د- حلقه‌های سیم‌لوله را به هم نزدیک کنیم.

(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) ۳

پاسخ: گزینه ۳

(متوسط - مفهومی - استاندارد) - صفحه ۱۰۰ - ۱۱۰۳

در موارد «ب» و «د» بزرگی میدان مغناطیسی سیم‌لوله افزایش می‌یابد.

بررسی موارد:



با حرکت لغزنده به سمت راست، مقاومت الکتریکی روستا افزایش و جریان مدار کاهش می‌یابد، به همین دلیل بزرگی میدان مغناطیسی

سیم‌لوله کاهش می‌یابد.

$$\uparrow R = \rho \frac{L}{A} \Rightarrow \downarrow I = \frac{\varepsilon}{R+r} \Rightarrow \downarrow B = \frac{\mu_0 NI}{L}$$



مقاومت ویژه نقره کمتر از مس است، پس می‌توان نوشت:

$$\downarrow R = \frac{\downarrow \rho L}{A} \Rightarrow \uparrow I = \frac{\varepsilon}{\downarrow R+r} \Rightarrow \uparrow B = \frac{\mu_0 NI}{L}$$



وجود هسته آهنی باعث تقویت میدان مغناطیسی سیم‌لوله می‌شود، پس با خارج کردن هسته آهنی، بزرگی میدان مغناطیسی سیم‌لوله

کاهش می‌یابد.



با نزدیک کردن حلقه‌های سیم‌لوله به هم تعداد دورها در واحد طول سیم‌لوله افزایش می‌یابد، بنابراین بزرگی میدان مغناطیسی سیم‌لوله

افزایش می‌یابد.



۴۲- چه تعداد از عبارت‌های زیر نادرست است؟

الف- اتم‌های مواد فرومغناطیسی و دیامغناطیسی، به‌طور ذاتی دارای خاصیت مغناطیسی هستند.

ب- دوقطبی‌های مغناطیسی مواد پارامغناطیسی به‌صورت کاتوره‌ای سمت‌گیری کرده‌اند و در حضور میدان مغناطیسی خارجی قوی،

خاصیت مغناطیسی ضعیف و دائمی پیدا می‌کنند.

ج- برای هسته یک آهنربای الکتریکی از مواد فرومغناطیسی نرم مانند فولاد استفاده می‌شود.

(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) ۳

تمام عبارات‌های مطرح شده، نادرست هستند.

بررسی موارد نادرست:

الف)

اتم‌های مواد فرومغناطیسی و پارامغناطیسی، به‌طور ذاتی دارای خاصیت مغناطیسی هستند.

ب)

دوقطبی‌های مغناطیسی مواد پارامغناطیسی به‌صورت کاتوره‌ای سمت‌گیری کرده‌اند و در حضور میدان مغناطیسی خارجی قوی، خاصیت مغناطیسی ضعیف و موقت پیدا می‌کنند.

ج)

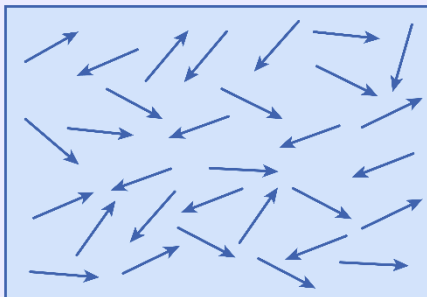
فولاد یک ماده فرومغناطیسی سخت بوده و برای استفاده به‌عنوان هسته آهنربای الکتریکی مناسب نیست.

تذکر

مواد فرومغناطیسی سخت برای ساخت آهنربای دائمی مناسب هستند.

مواد پارامغناطیسی

اتم‌های مواد پارامغناطیسی، به‌طور ذاتی خاصیت مغناطیسی دارند، اما دوقطبی‌های مغناطیسی وابسته به آن‌ها، به‌طور کاتوره‌ای سوگیری کرده‌اند و میدان مغناطیسی خالصی ایجاد نمی‌کنند.



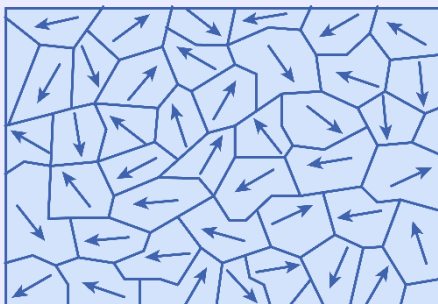
جسم پارامغناطیس
در غیاب میدان مغناطیسی

با قراردادن مواد پارامغناطیسی درون میدان مغناطیسی خارجی قوی، دوقطبی‌های مغناطیسی آن‌ها، مانند عقربه قطب‌نما در نزدیکی آهنربا رفتار می‌کنند و به مقدار مختصری در راستای خط‌های میدان مغناطیسی منظم می‌شوند. با دورکردن آهنربا از این مواد، دوقطبی‌های مغناطیسی آن‌ها، دوباره به‌طور کاتوره‌ای سوگیری می‌کنند.

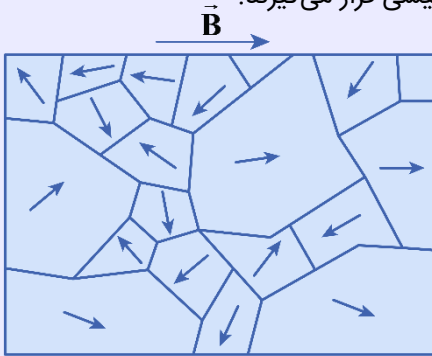
به این ترتیب، می‌توان گفت مواد پارامغناطیسی در حضور میدان‌های مغناطیسی قوی، خاصیت مغناطیسی ضعیف و موقت پیدا می‌کنند. اورانیم، پلاتین، آلومینیم، سدیم، اکسیژن و اکسید نیتروژن از جمله مواد پارامغناطیسی هستند.

مواد فرومغناطیسی

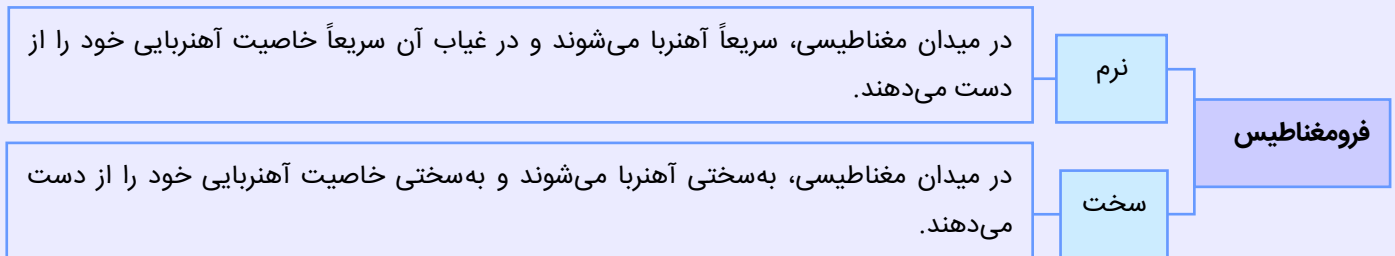
در این مواد، دوقطبی‌های مغناطیسی به‌صورت گروهی، حوزه‌های مغناطیسی تشکیل می‌دهند.



با قرارگرفتن این مواد در میدان مغناطیسی خارجی، حوزه‌هایی که دوقطبی‌های آن‌ها در جهت میدان مغناطیسی هستند، گسترش می‌یابند و ماده خاصیت مغناطیسی پیدا می‌کند. در حالت اشباع، تمام دوقطبی‌ها در راستای میدان مغناطیسی قرار می‌گیرند.



مواد فرومغناطیسی به دو دسته تقسیم می‌شوند:



موادی مانند آهن، کبالت و نیکل فرومغناطیس نرم هستند و در هستهٔ سیم‌لوله‌ها و ساخت آهنرباهای الکتریکی کاربرد دارند و آلیاژ آن‌ها مانند فولاد و آلیاژهای آهن، کبالت و نیکل فرومغناطیس سخت هستند و در ساخت آهنرباهای دائمی کاربرد دارند.

مواد دیامغناطیسی

اتم‌های مواد دیامغناطیسی نظیر مس، نقره، سرب و بیسموت به‌طور ذاتی فاقد خاصیت مغناطیسی‌اند؛ به عبارت دیگر، هیچ‌یک از اتم‌های این مواد دارای دوقطبی مغناطیسی خالصی نیستند. با این وجود، حضور میدان مغناطیسی خارجی می‌تواند سبب القای دوقطبی‌های مغناطیسی در خلاف جهت میدان خارجی، در این مواد شود (توسط آهنربا دفع می‌شوند).

القای خاصیت مغناطیسی

وقتی که مواد پارامغناطیسی یا فرومغناطیسی در میدان مغناطیسی قرار بگیرند، دوقطبی‌های آن‌ها همانند عقربهٔ مغناطیسی عمل کرده و در جهت میدان قرار می‌گیرند. بنابراین بر خاصیت مغناطیسی آن‌ها افزوده می‌شود و اثر آهنربایی از خود نشان می‌دهند.

اگر این میدان مغناطیسی حذف شود:

در مواد پارامغناطیسی، دوقطبی‌ها به وضعیت اولیه‌شان برمی‌گردند.

در مواد فرومغناطیسی نرم، حوزه‌ها به حالت اولیه برمی‌گردند.

در مواد فرومغناطیسی سخت، حوزه‌ها تقریباً در همین وضعیت باقی می‌مانند و حالت آهنربای دائم تشکیل می‌دهند.



۴۳- اتم‌های مواد اشاره‌شده در کدام گزینه، دارای دوقطبی خالص نیستند ولی حضور میدان مغناطیسی خارجی، می‌تواند سبب القای دوقطبی‌های مغناطیسی در خلاف جهت میدان مغناطیسی خارجی شود؟

- (۱) مس، سدیم و نیکل (۲) مس، اکسیژن و کبالت (۳) مس، نقره و سرب (۴) نقره، سرب و اکسید نیتروژن

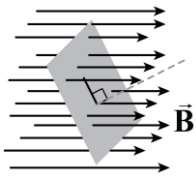
(آسان - خط‌به‌خط - سریع ۱ - صفحه ۱۰۲ - ۱۱۰۳)

پاسخ: گزینه ۳

اتم‌های مواد دیامغناطیسی، نظیر مس، نقره، سرب و بیسموت، به‌طور ذاتی فاقد خاصیت مغناطیسی هستند. به عبارت دیگر، هیچ‌یک از اتم‌های این مواد، دارای دوقطبی مغناطیسی خالصی نیستند. با وجود این، حضور میدان مغناطیسی خارجی می‌تواند سبب القای دوقطبی‌های مغناطیسی در خلاف جهت میدان خارجی، در مواد دیامغناطیسی شود.



۴۴- مطابق شکل زیر، قاب رسانای مستطیلی شکلی به مساحت 8cm^2 ، درون میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ به بزرگی 250G قرار دارد. اگر شار مغناطیسی گذرنده از این قاب برابر با 16mWb باشد، زاویه بین قاب و خطوط میدان مغناطیسی چند درجه است؟
($\sin 37^\circ = 0.6$)



۳۷ (۲)

۳۰ (۱)

۶۰ (۴)

۵۳ (۳)

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - صفحه ۱۱۱ - ۱۱۰۴

پاسخ: گزینه ۳

گام اول

به کمک رابطه شار مغناطیسی گذرنده از یک قاب رسانا داریم:

$$\Phi = BA \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{\Phi}{BA} \quad \begin{matrix} \Phi = 16\text{mWb} = 16 \times 10^{-4}\text{Wb}, B = 250\text{G} = 2/5 \times 10^{-1}\text{T} \\ A = 8\text{cm}^2 = 8 \times 10^{-4}\text{m}^2 \end{matrix}$$

$$\cos \theta = \frac{16 \times 10^{-4}}{2/5 \times 10^{-1} \times 8 \times 10^{-4}} = 0.8 \Rightarrow \theta = 37^\circ$$

گام آخر

حالا که زاویه بین نیم خط عمود بر سطح قاب و خطوط میدان برابر با 37° است، پس زاویه بین سطح قاب و خطوط میدان (α) برابر است با:
 $\alpha = 90^\circ - \theta = 90^\circ - 37^\circ = 53^\circ$

سوتی‌های پرتکرار

اگر به اشتباه، زاویه بین نیم خط عمود بر سطح قاب و خطوط میدان رو به عنوان خواسته سؤال در نظر بگیرید، در دام گزینه (۲) می‌افتید!

تذکر

بچه‌ها حواستون باشه که در این تیپ تست‌ها به زاویه داده شده یا خواسته شده دقت کنید. چرا که در رابطه $\Phi = BA \cos \theta$ ، θ زاویه بین نیم خط عمود بر سطح قاب و خطوط میدان است و بالطبع متمم این زاویه، می‌شود زاویه میان سطح قاب و خطوط میدان!

شار مغناطیسی

$\Phi = AB \cos \theta$

A: مساحت بر حسب متر مربع (m^2)

θ : زاویه خطوط میدان با نیم خط عمود بر سطح حلقه

Φ : شار مغناطیسی بر حسب وبر (Wb)

B: اندازه میدان مغناطیسی بر حسب تسلا (T)

نکات

- ۱- یکای وبر (Wb) معادل T.m^2 است.
- ۲- زاویه خطوط میدان مغناطیسی با سطح حلقه (α) متمم زاویه خطوط میدان مغناطیسی با نیم خط عمود بر سطح حلقه (θ) است.
($\theta = 90^\circ - \alpha$)
- ۳- بیشینه شار مغناطیسی عبوری از یک پیچه هنگامی رخ می‌دهد که خطوط میدان مغناطیسی بر سطح پیچه عمود باشند ($\Phi_{\max} = AB$) و هنگامی که سطح پیچه موازی خطوط میدان مغناطیسی است، شار مغناطیسی عبوری از پیچه صفر است.
- ۴- شار مغناطیسی عبوری از یک پیچه به تعداد حلقه‌های پیچه بستگی ندارد.

۴۵- از یک سیم مسی به طول 1.0 m ، سیملوله‌ای آرمانی به طول 2.0 cm با حلقه‌های نزدیک به هم چنان طراحی شده است که جریان بیشینه‌ای به شدت $1/5\text{ A}$ می‌تواند از آن عبور کند. اگر با عبور این جریان از سیملوله، اندازه میدان مغناطیسی درون سیملوله برابر با $1/8\text{ G}$ شود، با فرض این که میدان مغناطیسی داخل سیملوله یکنواخت باشد، شار مغناطیسی عبوری از هر حلقه آن چند واحد

SI می‌شود؟ $(\mu_0 = 12 \times 10^{-7} \frac{\text{T.m}}{\text{A}}, \pi = 3)$

- (۱) 6×10^{-6} (۲) 6×10^{-5} (۳) $3/75 \times 10^{-6}$ (۴) $3/75 \times 10^{-5}$

(متوسط - محاسباتی - زمان‌بر ۵ - صفحه ۱۱۱ - ۱۱۰۴)

پاسخ: گزینه ۳

گام اول

با توجه به رابطه بزرگی میدان مغناطیسی داخل سیملوله، تعداد حلقه‌های سیملوله را به دست می‌آوریم:

$$B = \frac{\mu_0 NI}{\ell} \Rightarrow N = \frac{B\ell}{\mu_0 I} \xrightarrow{B=1/8\text{ G}=1/8 \times 10^{-4}\text{ T}, \ell=2.0\text{ cm}=0.02\text{ m}, \mu_0=12 \times 10^{-7} \frac{\text{T.m}}{\text{A}}, I=1/5\text{ A}} N = \frac{1/8 \times 10^{-4} \times 0.02}{12 \times 10^{-7} \times 1/5} = 20$$

گام دوم

با توجه به این که سیملوله آرمانی است، با استفاده از تعداد حلقه‌های سیملوله، شعاع سطح مقطع سیملوله را محاسبه می‌کنیم:

$$N = \frac{L}{2\pi r} \Rightarrow 20 = \frac{1.0}{2 \times 3.14 \times r} \Rightarrow r = \frac{1.0}{20 \times 2 \times 3.14} = \frac{1}{12}\text{ m}$$

گام سوم

مساحت هر حلقه سیملوله برابر است با:

$$A = \pi r^2 = 3.14 \times \left(\frac{1}{12}\right)^2 = \frac{1}{48}\text{ m}^2$$

گام آخر

شار مغناطیسی عبوری از هر حلقه سیملوله برابر است با:

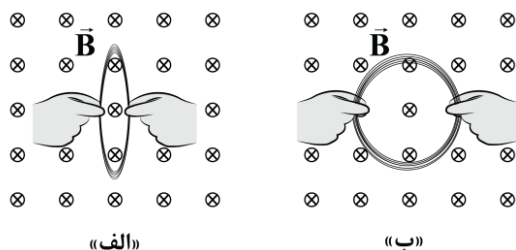
$$\Phi = BA \cos \theta = 1/8 \times 10^{-4} \times \frac{1}{48} \times \cos 0^\circ = 3/75 \times 10^{-6}\text{ Wb}$$



۴۶- حلقه‌ای رسانا به مساحت 15 cm^2 مطابق شکل «الف»، درون میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ به بزرگی 0.8 T قرار دارد. اگر مطابق

شکل «ب» و بدون تغییر میدان مغناطیسی $\vec{B}$ ، مساحت حلقه را در مدت زمان 0.5 s به 25 cm^2 برسانیم، آهنگ تغییر شار مغناطیسی

عبوری از حلقه در این مدت چند واحد SI می‌شود؟



- (۱) $1/6 \times 10^{-3}$
(۲) 0.16×10^{-4}
(۳) $1/6 \times 10^{-2}$
(۴) 0.16×10^{-3}

(متوسط - محاسباتی - استاندارد ۵ - صفحه ۱۱۱ - ۱۱۰۴)

پاسخ: گزینه ۴

طبق رابطه شار مغناطیسی گذرنده از یک قاب رسانا و با توجه به این که فقط مساحت حلقه رسانا تغییر می‌کند، داریم:

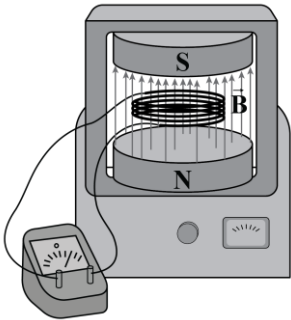
$$\text{آهنگ تغییر شار} = \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = \frac{B \cos \theta \Delta A}{\Delta t} \xrightarrow{B=0.8\text{ T}, \Delta A=A_2-A_1=25-15=10\text{ cm}^2=10^{-3}\text{ m}^2, \theta=0^\circ, \Delta t=0.5\text{ s}} \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = \frac{0.8 \times 1 \times 10^{-3}}{0.5} = 0.16 \times 10^{-3} \frac{\text{Wb}}{\text{s}}$$



با تغییر هر یک از عوامل مساحت حلقهٔ رسانا، بزرگی میدان مغناطیسی یکنواخت و زاویهٔ بین سطح حلقه و خطوط میدان مغناطیسی، شار مغناطیسی عبوری از حلقهٔ رسانا تغییر می‌کند.



۴۷- پیچه‌ای رسانا شامل ۵۰۰ حلقه که مساحت هر حلقه آن 20 cm^2 است، بین قطب‌های یک آهنربای الکتریکی قرار گرفته است. مقاومت الکتریکی پیچه 10Ω بوده و خطوط میدان مغناطیسی آهنربای الکتریکی بر سطح پیچه عمودند. اگر میدان در مدت زمان 0.15 s از 0.18 T ، رو به بالا به 0.12 T ، رو به پایین برسد، اندازهٔ نیروی محرکهٔ القایی متوسط و اندازهٔ جریان القایی متوسط در پیچه برحسب SI، به ترتیب از راست به چپ در کدام گزینه به درستی آمده‌اند؟



- (۱) ۱ و ۰/۱
- (۲) ۲ و ۰/۲
- (۳) ۳ و ۰/۳
- (۴) ۴ و ۰/۴

(متوسط - محاسباتی - زمان‌بر - صفحه ۱۱۳ - ۱۱۰۴)

پاسخ: گزینه ۲

گام اول

ابتدا تغییرات شار مغناطیسی ناشی از تغییرات اندازه و جهت میدان را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} \Phi_1 = AB_1 \cos \theta_1 \xrightarrow{A=20 \text{ cm}^2 = 2 \times 10^{-3} \text{ m}^2, B_1=0.18 \text{ T}, \theta_1=0^\circ} \Phi_1 = 2 \times 10^{-3} \times 0.18 \times 1 = 0.36 \times 10^{-3} \text{ Wb} \\ \Phi_2 = AB_2 \cos \theta_2 \xrightarrow{A=2 \times 10^{-3} \text{ m}^2, B_2=0.12 \text{ T}, \theta_2=180^\circ} \Phi_2 = 2 \times 10^{-3} \times 0.12 \times (-1) = -0.24 \times 10^{-3} \text{ Wb} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta \Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = -0.24 \times 10^{-3} - 0.36 \times 10^{-3} = -0.6 \times 10^{-3} \text{ Wb}$$

گام آخر

اندازهٔ نیروی محرکهٔ القایی متوسط در پیچه برابر است با:

$$|\varepsilon_{av}| = \left| -N \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \right| = \left| -500 \times \frac{-0.6 \times 10^{-3}}{0.15} \right| = 2 \text{ V}$$

اندازهٔ جریان القایی متوسط در پیچه برابر است با:

$$I_{av} = \frac{|\varepsilon_{av}|}{R} = \frac{2}{10} = 0.2 \text{ A}$$

قانون فاراده

هرگاه شار مغناطیسی عبوری از یک حلقهٔ رسانا تغییر کند، نیروی محرکه‌ای در حلقه القا می‌شود که بزرگی آن با آهنگ تغییر شار مغناطیسی عبوری از حلقه متناسب است.

تغییر شار مغناطیسی در یک حلقه ← ایجاد نیروی محرکهٔ القایی ← ایجاد جریان القایی

نیروی محرکهٔ القایی متوسط بنابر قانون فاراده برای پیچه یا سیم‌لوله‌ای که از N حلقهٔ مشابه تشکیل شده باشد از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\varepsilon_{av} = -N \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$$

N: تعداد حلقه

ε_{av} : نیروی محرکهٔ القایی متوسط برحسب ولت (V)

Δt : مدت زمان تغییر شار مغناطیسی عبوری از حلقه برحسب ثانیه (s)

$\Delta \Phi$: تغییر شار مغناطیسی برحسب وبر (Wb)



در این رابطه نیروی محرکه القایی متوسط برحسب **ولت** است که یک ولت، معادل **وبر بر ثانیه** است.



علامت منفی در این رابطه، مخالفت نیروی محرکه القایی متوسط با تغییر شار مغناطیسی عبوری از پیچه را نشان می‌دهد.

جریان القایی در یک پیچه با تغییر شار مغناطیسی عبوری از آن

اگر نیروی محرکه القایی متوسط در حلقه برابر با ε_{av} و مقاومت الکتریکی حلقه R باشد، اندازه جریان القایی متوسط در حلقه از رابطه زیر به دست می‌آید:

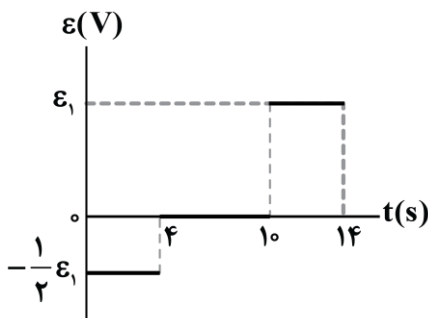
$$I_{av} = \frac{|\varepsilon_{av}|}{R} = \left| -\frac{N}{R} \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \right|$$

بار الکتریکی خالص شارش یافته در پیچه رسانایی با مقاومت الکتریکی R در اثر تغییر شار مغناطیسی عبوری از آن از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\Delta q = I_{av} \Delta t = \left| -\frac{N}{R} \Delta\Phi \right|$$



۴۸- شکل زیر، نمودار نیروی محرکه القایی برحسب زمان در یک پیچه با 50 حلقه و مقاومت الکتریکی 6Ω را نشان می‌دهد. اگر اندازه نیروی محرکه القایی متوسط در پیچه در بازه زمانی $t=0$ تا $t=10$ برابر با $12V$ باشد، تعداد الکترون‌های القایی شارش یافته در پیچه در بازه زمانی $t=10$ تا $t=14$ چقدر است؟ ($e=1.6 \times 10^{-19} C$)



(۱) 5×10^{20}

(۲) 5×10^{19}

(۳) $2/5 \times 10^{20}$

(۴) $2/5 \times 10^{19}$

(سخت - استدلالی - زمان‌بر - صفحه ۱۱۳ - ۱۱۴)

پاسخ: گزینه ۳



می‌دانیم مساحت سطح محصور بین نمودار نیروی محرکه - زمان و محور زمان برابر با قدر مطلق حاصل ضرب تعداد حلقه‌ها در تغییر شار مغناطیسی است، بنابراین در بازه زمانی $t=0$ تا $t=10$ داریم:

$$N \times |\Delta\Phi_{0-10s}| = S_{0-10s} = S_{0-4s} + S_{4-10s} = S_{0-4s} \Rightarrow N \times |\Delta\Phi_{0-10s}| = 4 \times \frac{1}{2} \varepsilon_1 = 2\varepsilon_1$$

$$|\varepsilon_{av_{0-10s}}| = \left| -N \frac{\Delta\Phi_{0-10s}}{\Delta t} \right| = N \frac{|\Delta\Phi_{0-10s}|}{\Delta t} \Rightarrow 12 = \frac{2\varepsilon_1}{10} \Rightarrow \varepsilon_1 = 60V$$



در بازه زمانی $t=10$ تا $t=14$ داریم:

$$N \times |\Delta\Phi_{10-14s}| = S_{10-14s} = (14-10) \times \varepsilon_1 = 4 \times 60 = 240 Wb$$

اندازه بار القایی شارش یافته در بازه زمانی $t=10$ تا $t=14$ برابر است با:

$$|\Delta q| = N \frac{|\Delta\Phi_{10-14s}|}{R} = \frac{240}{6} = 40 C$$

تعداد الکترون‌های القایی شارش یافته در پیچه در بازه زمانی $t = 10\text{s}$ تا $t = 14\text{s}$ را به کمک رابطه $|\Delta q| = ne$ به دست می‌آوریم:

$$n = \frac{|\Delta q|}{e} = \frac{40}{1/6 \times 10^{-19}} = 2/5 \times 10^{20}$$



مقدار بار شارش یافته در پیچه به مدت زمان تغییر شار مغناطیسی، بستگی ندارد و تنها به بزرگی تغییرات شار مغناطیسی وابسته است.

نمودار نیروی محرکه القایی متوسط بر حسب زمان

مساحت محصور بین نمودار و محور زمان برابر با حاصل ضرب تعداد حلقه‌های آن پیچه (سیملوله) در اندازه تغییرات شار مغناطیسی عبوری از آن پیچه در آن مدت زمان است

$$S = |N\Delta\Phi|$$

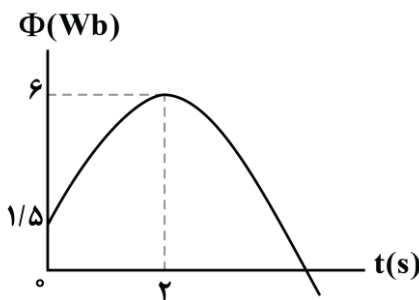


اگر این مساحت بالای محور زمان باشد، تغییرات شار مغناطیسی گذرنده از حلقه در آن بازه زمانی، منفی است و اگر این مساحت پایین محور زمان باشد، تغییرات شار مغناطیسی گذرنده از حلقه در این بازه زمانی، مثبت است.



۴۹- نمودار شار مغناطیسی عبوری از حلقه‌ای رسانا مطابق سهمی نشان داده شده در شکل زیر است. بزرگی نیروی محرکه القایی متوسط

در این حلقه در بازه زمانی $t = 2\text{s}$ تا $t = 4\text{s}$ چند ولت است؟



- (۱) $1/5$
- (۲) $4/5$
- (۳) $2/25$
- (۴) $0/75$

(متوسط - استدلالی - استاندارد ۱۱۳ - صفحه ۱۱۴)

پاسخ: گزینه ۳



با توجه به اطلاعات روی نمودار، ابتدا معادله شار - زمان را به دست می‌آوریم:

$$\Phi = a(t - t_{\text{رأس}})^2 + \Phi_{\text{رأس}} \xrightarrow{t=0 \Rightarrow \Phi=1/5 \text{ Wb}} 1/5 = a(0 - 2)^2 + 6$$

$$\Rightarrow -4/5 = 4a \Rightarrow a = -\frac{9}{10} \Rightarrow \Phi = -\frac{9}{10}(t - 2)^2 + 6$$



در بازه زمانی $t = 2\text{s}$ تا $t = 4\text{s}$ ، تغییرات شار مغناطیسی عبوری از حلقه برابر است با:

$$\begin{cases} t_1 = 2\text{s} \Rightarrow \Phi_1 = 6 \text{ Wb} \\ t_2 = 4\text{s} \Rightarrow \Phi_2 = -\frac{9}{10}(4 - 2)^2 + 6 = -\frac{9}{10} + 6 = \frac{51}{10} \text{ Wb} \end{cases} \Rightarrow \Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = -\frac{9}{10} + 6 - 6 = -\frac{9}{10} \text{ Wb}$$

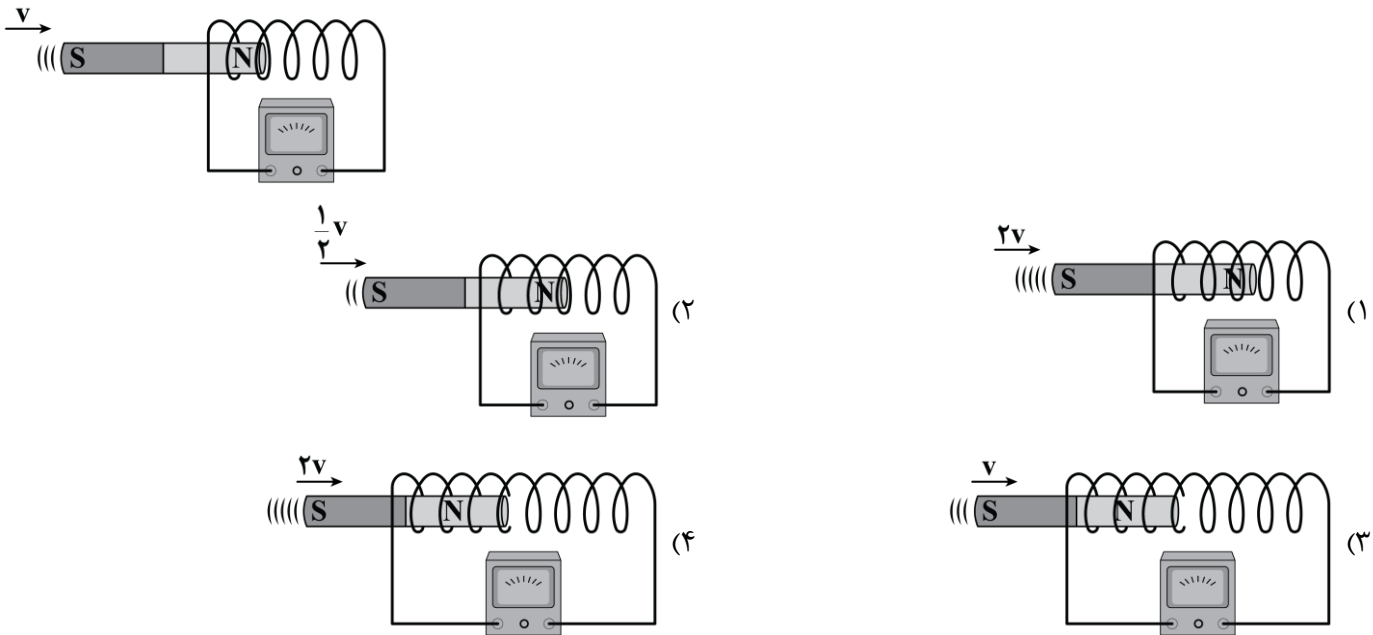


بزرگی نیروی محرکه القایی متوسط در حلقه را به دست می‌آوریم:

$$|\varepsilon_{\text{av}}| = \left| -N \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \right| = \left| -1 \times \frac{-\frac{9}{10}}{2} \right| = \frac{9}{4} = 2/25 \text{ V}$$



۵۰- مطابق شکل زیر، آهنربایی میله‌ای را با تندی ثابت v وارد یک سیملوله می‌کنیم و ولت‌سنج حساس، نیروی محرکه القایی در سیملوله را نشان می‌دهد. تغییرات نشان داده شده در کدام یک از گزینه‌ها، باعث بیشترین افزایش در مقدار نشان داده شده توسط ولت‌سنج حساس می‌شود؟ (آهنرباها مشابه بوده و مساحت حلقه‌ها در تمام سیملوله‌ها یکسان است).



(آسان - مفهومی - سریع - صفحه ۱۱۳ - ۱۱۰۴)

پاسخ: گزینه ۴

برای حل این تست به دو تا نکته باید دقت کنیم:

- (۱) هرچه تندی حرکت آهنربا بیشتر باشد، تغییرات شار مغناطیسی گذرنده از سیملوله در مدت زمان کمتری رخ می‌دهد ($\Delta t \downarrow$) و طبق رابطه $|\mathcal{E}_{av}| = -N \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$ ، اندازه نیروی محرکه القایی متوسط در سیملوله افزایش می‌یابد ($|\mathcal{E}_{av}| \uparrow$).
- (۲) هرچه تعداد حلقه‌های سیملوله بیشتر باشد، اندازه نیروی محرکه القایی متوسط در سیملوله نیز بیشتر می‌شود، زیرا $|\mathcal{E}_{av}|$ متناسب با N است.

حالا به کمک این دو نکته متوجه می‌شویم در گزینه (۴) هم تندی حرکت آهنربا و هم تعداد حلقه‌های سیملوله افزایش یافته‌اند، پس **اندازه نیروی محرکه القایی متوسط در سیملوله گزینه (۴)، افزایش بیشتری نسبت به سایر گزینه‌ها خواهد داشت.**



- ۱- هر چه تغییرات شار مغناطیسی عبوری از یک سیملوله (پیچه) سریع‌تر رخ دهد و همین طور تعداد حلقه‌ها بیشتر باشد، نیروی محرکه القایی متوسط در پیچه بیشتر خواهد بود.
- ۲- هرچه مقاومت الکتریکی پیچه (سیملوله) که شار مغناطیسی عبوری از آن تغییر می‌کند، بیشتر باشد، جریان کوچک‌تری در آن القا می‌شود.





برای دیدن پاسخنامه ویدئویی آزمون
QRcode بالا را اسکن کنید!
یا بر روی لینک زیر کلیک کنید!
پاسخنامه ویدئویی آزمون

در پی غذای سالم (از ابتدای سرعت تولید یا مصرف مواد شرکت کننده در واکنش از دیدگاه کمی تا پایان فصل)
پوشاک، نیازی پایان ناپذیر (از ابتدای فصل تا انتهای الیاف و درشت مولکول ها)
صفحه های ۸۵ تا ۱۰۴

بودجه بندی
این آزمون

مباحث این آزمون در مجموع ۳ تست از ۳۰ تست کنکور را پوشش داده است.

سهم در
کنکور

۵۱- کدام یک از مطالب زیر درست است؟

- (۱) همه درشت مولکول ها، پلیمر هستند.
- (۲) ذرات سازنده همه بسپارها، مولکول ها هستند.
- (۳) نیروی بین مولکولی در آب قوی تر از روغن زیتون است.
- (۴) هیچ ماده با تعداد اتم کم در یک مولکول، حالت جامد ندارد.

(متوسط - مفهومی - استاندارد) - صفحه ۱۰۳ - ۱۱۰۳

پاسخ: گزینه ۲

مواد مولکولی بر اساس جرم مولی و تعداد اتم ها به دو دسته درشت مولکول و مولکول های کوچک تا متوسط تقسیم می شوند. همچنین خود درشت مولکول ها نیز بر اساس وجود یا عدم وجود بخش تکرارشونده به دو دسته پلیمری و غیر پلیمری تقسیم خواهند شد. پس هر پلیمری (بسپار) جزء ترکیبات مولکولی بوده و ذرات سازنده آن، مولکول ها هستند.

بررسی سایر گزینه ها:

برخی درشت مولکول ها در ساختار خود بخش تکرارشونده ندارند و به همین دلیل پلیمر نیستند، یکی از این مواد روغن زیتون است. این ماده با این که درشت مولکول بوده، ولی به دلیل نداشتن واحد تکرارشونده، پلیمر نیست. در واقع در ساختار این ماده بخش های تکراری دیده نمی شوند اما به علت تعداد بالای اتم های موجود در ساختار آن، درشت مولکول به حساب می آید. تنها ماده درشت مولکول غیر پلیمر مطرح شده در کتاب درسی، روغن زیتون است.

روغن زیتون یک درشت مولکول بوده و جرم مولی بسیار زیادی دارد در مقابل اما، آب مولکول کوچکی دارد. نیروی بین مولکولی در درشت مولکول ها نسبت به سایر ترکیبات مولکولی با مولکول های کوچک تا متوسط، بسیار بیشتر بوده و این امر موجب بیشتر بودن نقطه جوش آن ها نیز می شود.

عنصر ید یک ماده مولکولی دو اتمی است که جامدی بنفش رنگ می باشد.

مواد مولکولی

مواد مولکولی، موادی هستند که ذره های تشکیل دهنده آن ها مولکول ها هستند. این مواد به دو دسته کوچک مولکول و درشت مولکول تقسیم بندی می شوند.
(۱) کوچک مولکول ها اتم های سازنده کمی دارند؛ در نتیجه جرم مولی آن ها کم تا متوسط است. از جمله کوچک مولکول ها می توان به کربن دی اکسید، آب، متان، برخی هیدروکربن ها و ... اشاره کرد.

(۲) درشت مولکول ها، اتم های سازنده زیادی دارند و در نتیجه جرم مولی آن ها زیاد بوده و نیروی بین مولکولی بیشتری نسبت به مولکول های کوچک دارند که به همین علت در دمای اتاق اغلب به حالت جامد هستند. برخی از درشت مولکول ها دارای واحد تکرارشونده هستند و پلیمر یا بسپار نام دارند. (مانند پروتئین موجود در پشم و ابریشم، انسولین، سلولز، نشاسته، پلی اتن، نایلون و ...) اما برخی درشت مولکول ها واحد تکرارشونده ندارند و پلیمر نیستند. تنها درشت مولکول غیر پلیمری مطرح شده در کتاب درسی، روغن زیتون است.



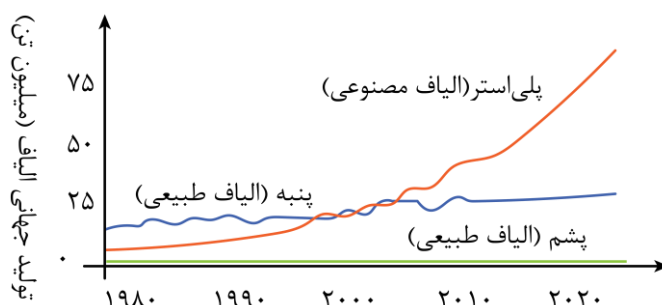
۵۲- کدام مورد درست است؟

- (۱) الیافی که دومین فراوانی را در بین الیاف تولیدشده در جهان دارند، در تهیهٔ رویهٔ مبلی، پرده و گاز استریل استفاده می‌شوند.
- (۲) انسان با بهره‌مندی از هوش و تجربه‌های برگرفته از طبیعت توانست نخستین پوشش خود را از بافت‌های گیاهی تهیه کند.
- (۳) در سال ۲۰۱۴ میلادی نزدیک به صد میلیون تن الیاف ساختگی در جهان تولید و مصرف شده است.
- (۴) روند تولید الیاف پلی‌استری همانند الیاف پشمی در طی سال‌های اخیر، افزایشی بوده است.

پاسخ: گزینه ۱

(آسان - خط به خط - سریع ۵ - صفحه ۱۰۱ - ۱۱۰۳)

مطابق نمودار زیر، در طی سال‌های گذشته بیشتر الیاف تولیدشده در جهان مربوط به الیاف پلی‌استر و سپس الیاف پنبه بوده است:



روند تولید الیاف در سالیان اخیر

از سال ۱۹۸۰ تا به الان، تولید الیاف **نخی** و **پلی‌استری** افزایش پیدا کرده است اما میزان تولید الیاف پشمی، در طول این سال‌ها نسبتاً **ثابت** بوده است. همچنین شیب روند افزایش تولید **الیاف پلی‌استری** نیز **تندتر** از شیب روند **افزایش** تولید الیاف **پنبه‌ای** بوده است که موجب پیشی گرفتن الیاف پلی‌استری از الیاف پنبه‌ای شده است.

الیاف پنبه (نخی) که در طی سال‌های اخیر **دومین** فراوانی را در بین الیاف تولید شده در جهان دارند، در تهیهٔ رویهٔ مبلی، پرده، تور ماهیگیری، گاز استریل و ... استفاده می‌شوند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

(۲) انسان با بهره‌مندی از هوش و تجربه‌های برگرفته از طبیعت توانست نخستین پوشش خود را از پشم، مو و پوست جانوران تهیه کند. او با گذشت زمان از بافت‌های گیاهی نیز برای پوشش خود استفاده کرد.

ترتیب پوشش‌های انسان



بافت‌های جانوری مثل پشم، مو و پوست



بافت‌های گیاهی

(۳) در سال ۲۰۱۴ میلادی نزدیک به صد میلیون تن الیاف (نه فقط ساختگی) در جهان تولید و مصرف شده است.

(۴) روند تولید الیاف پلی‌استری برخلاف الیاف پشمی در طی سال‌های اخیر، افزایشی بوده است.

۵۳- کدام یک از موارد زیر نادرست هستند؟

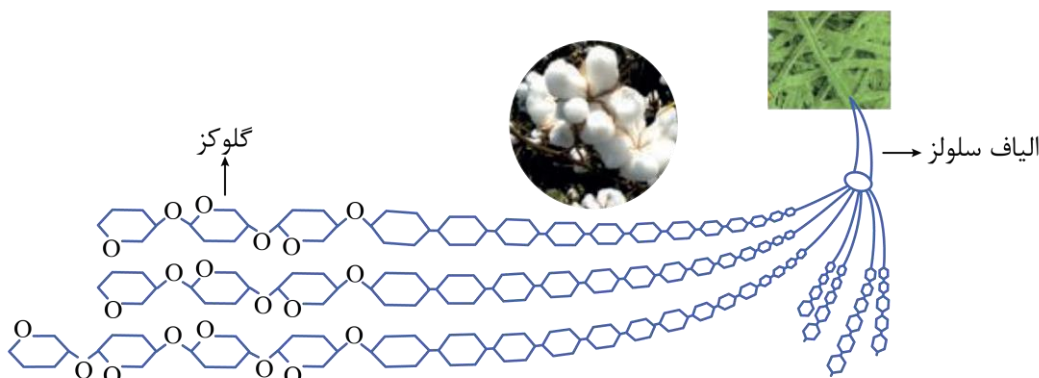
- الف - حدود نیمی از لباس‌های تولیدی در جهان از پنبه تهیه می‌شود.
 - ب - آب، اتان، کربن مونوکسید و آلومینیم اکسید، جزء مواد مولکولی هستند.
 - ج - نشاستهٔ گندم و انسولین درشت مولکول بوده و دارای واحدهای تکرارشونده در ساختار خود هستند.
 - د - هر مولکول سلولز از اتصال شمار بسیار زیادی مولکول گلوکز ایجاد شده و شمار اتم‌های هر مولکول گلوکز، بسیار زیاد است.
- (۱) «الف» و «ج» (۲) «الف» و «د» (۳) «ب» و «ج» (۴) «ب» و «د»

پاسخ: گزینه ۴

(متوسط - مفهومی - استاندارد ۵ - صفحه ۱۰۲ - ۱۱۰۳)

موارد «ب» و «د» نادرست هستند.

- الف) آمارها نشان می‌دهند که حدود نیمی از لباس‌های تولیدی در جهان از پنبه تهیه می‌شوند.
- پ) آب، اتان و کربن مونوکسید، هر سه ماده مولکولی هستند؛ زیرا ذره‌های سازنده آن‌ها مولکول‌ها هستند. اما آلومینیوم اکسید (Al_2O_3) یک ترکیب یونی است و ذره‌های سازنده آن یون‌ها هستند.
- ج) مولکول نشاسته گندم همانند مولکول انسولین بسیار بزرگ است به طوری که شمار اتم‌های آن‌ها به ده‌ها هزار می‌رسد، از این رو یک درشت مولکول هستند. از آنجا که نشاسته گندم همانند انسولین یک پلیمر بوده، هر دو دارای واحدهای تکرارشونده در ساختار خود هستند.
- د) شکل زیر ساختار سلولز را نمایش می‌دهد:



هر مولکول سلولز از اتصال شمار بسیار زیادی مولکول گلوکز به یکدیگر ساخته می‌شود. با این توصیف شمار اتم‌های سازنده هر مولکول سلولز (نه گلوکز)، بسیار زیاد بوده و اندازه مولکول آن بزرگ است. گلوکز یک مولکول با شمار اتم کم می‌باشد.



۵۴- اگر مراحل تولید لباس از الیاف آن به صورت زیر باشد، به ترتیب نام ماده B و نام فرایند A کدام است؟

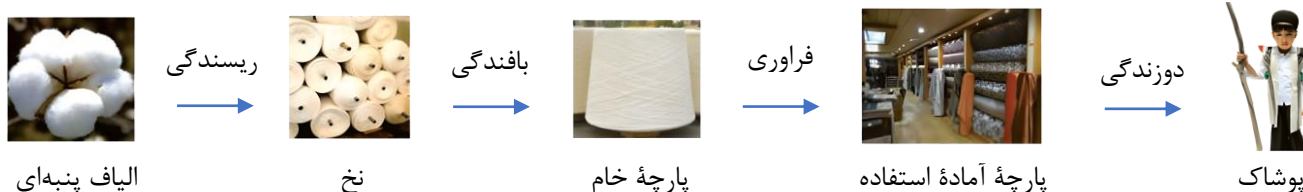
«الیاف $\xleftarrow{\text{ریسندگی}} B \xleftarrow{X} \text{پارچه آماده استفاده} \xleftarrow{A} \text{لباس}$ »

۱) نخ - بافندگی ۲) پارچه خام - بافندگی ۳) نخ - دوزندگی ۴) پارچه خام - دوزندگی

(آسان - خط به خط - سریع ۵ - صفحه ۱۰۱ - ۱۱۰۳)

پاسخ: گزینه ۳

مراحل تولید لباس از الیاف پنبه به صورت زیر است:



در نتیجه فرایند A ، دوزندگی و نام ماده B نخ است.

پوشاک

انسان در گذشته از مواد طبیعی مانند پشم گوسفند و شتر، پوست، چرم، پنبه و ... پوشاک خود را تأمین می‌کرد. با گذشت زمان و افزایش جمعیت روش‌های سنتی پاسخگوی نیازهای جامعه نبود. به همین دلیل صنعت نساجی به شکل امروزه پدیدار شد. موفقیت صنعت نساجی در گرو تأمین الیاف مورد نیاز بود. پنبه، از سلولز تشکیل شده که خود سلولز نیز از گلوکز با فرمول $C_6H_{12}O_6$ تشکیل می‌شود. از پنبه علاوه بر تولید پوشاک، در تهیه رویه مبلی، پرده، تور ماهیگیری، گاز استریل و ... استفاده می‌شود.



۵۵- کدام یک از مطالب زیر در مورد اکسیدهای گوگرد نادرست است؟

- (۱) یکی از عوامل باران اسیدی، اکسیدی با تعداد اتم‌های اکسیژن بیشتر است.
- (۲) میانگین آنتالپی پیوندهای میان گوگرد و اکسیژن در گوگرد دی‌اکسید بیشتر است.
- (۳) نسبت شمار جفت الکترون‌های پیوندی به ناپیوندی در گوگرد دی‌اکسید کمتر است.
- (۴) اگر واکنش $2SO_2 + O_2 \rightarrow 2SO_3$ گرماده باشد، گوگرد تری‌اکسید پایدارتر است.

پاسخ: گزینه ۳

(متوسط - مفهومی - استاندارد) - صفحه ۹۰ - ۱۱۰۲

گوگرد دو اکسید شناخته شده دارد؛ گوگرد دی‌اکسید (SO_2) و گوگرد تری‌اکسید (SO_3). ساختار این دو ماده به صورت زیر است:



همان طور که مشخص است، نسبت شمار جفت الکترون‌های پیوندی به شمار جفت الکترون‌های ناپیوندی در این دو ماده یکسان و برابر $\frac{2}{6} = \frac{4}{8} = 0.5$ است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

- (۱) یکی از آلاینده‌های هوا که باعث تولید باران اسیدی می‌شود، گاز گوگرد تری‌اکسید است که مطابق واکنش زیر تولید می‌شود:
 $2SO_2(g) + O_2(g) \rightarrow 2SO_3(g)$
- (۲) مطابق ساختار این دو ماده، در گوگرد دی‌اکسید یک پیوند دوگانه و یک پیوند یگانه وجود دارد، درحالی‌که در گوگرد تری‌اکسید یک پیوند دوگانه و دو پیوند یگانه وجود دارد. پس تعداد پیوندهای قوی‌تر در دو ماده یکسان و تعداد پیوندهای ضعیف‌تر در گوگرد دی‌اکسید کمتر است. پس به‌طور میانگین پیوندها در گوگرد دی‌اکسید آنتالپی پیوند بیشتری داشته و قوی‌تر هستند.
- (۴) در واکنش‌های گرماده، سطح انرژی فراورده‌ها کمتر از واکنش‌دهنده‌ها بوده و به همین علت فراورده‌ها پایدارتر هستند. بنابراین بر اساس واکنش گرماده بالا، گوگرد تری‌اکسید (فراورده) پایدارتر از گوگرد دی‌اکسید (واکنش‌دهنده) است.

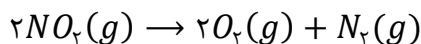


۵۶- مقداری نیتروژن دی‌اکسید در یک ظرف سربسته به عناصر سازنده تجزیه می‌شود. اگر سرعت متوسط مصرف NO_2 در ۱۰۰ ثانیه آغازین واکنش برابر $1/8$ مول بر دقیقه باشد، در پایان ثانیه صدم، چند مولکول نیتروژن در ظرف واکنش وجود دارد؟
 (۱) $1/8.06 \times 10^{23}$ (۲) $9/0.3 \times 10^{23}$ (۳) $1/8.06 \times 10^{24}$ (۴) $9/0.3 \times 10^{24}$

پاسخ: گزینه ۲

(آسان - محاسباتی - استاندارد) - صفحه ۸۹ - ۱۱۰۲

معادله موازنه شده واکنش انجام شده به صورت زیر است:



راحل مسئله

تعداد مولکول‌های گاز نیتروژن تولید شده را با استفاده از مقدار گاز نیتروژن دی‌اکسید مصرف شده محاسبه می‌کنیم. مقدار نیتروژن دی‌اکسید مصرف شده را نیز از سرعت مصرف این ماده به دست می‌آوریم.

ابتدا با استفاده از سرعت متوسط مصرف NO_2 مقدار مصرف شده این گاز را محاسبه می‌کنیم:

$$\bar{R}_{NO_2} = \frac{-\Delta n}{\Delta t} \Rightarrow 1/8 \text{ mol} \cdot \text{min}^{-1} = \frac{-\Delta n}{100 \text{ s} \times \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}}} \Rightarrow -\Delta n = 3 \text{ mol}$$

حال تعداد مولکول‌های گاز نیتروژن تولید شده را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$? \text{ molecule } N_2 = 3 \text{ mol } NO_2 \times \frac{1 \text{ mol } N_2}{2 \text{ mol } NO_2} \times \frac{6/0.2 \times 10^{23} \text{ molecule } N_2}{1 \text{ mol } N_2} = 9/0.3 \times 10^{23} \text{ molecule}$$

پس در ظرف واکنش در پایان ثانیه صدم، $9/0.3 \times 10^{23}$ مولکول نیتروژن وجود دارد.

۵۷- در یک واکنش شیمیایی، مواد گازی A ، B و X شرکت دارند و رابطه $\frac{\Delta n(A)}{\Delta t} = -\frac{\Delta n(B)}{\Delta t} = \frac{\Delta n(X)}{\Delta t}$ در آن برقرار است. اگر پس از گذشت ۷۰ ثانیه از ابتدای واکنش ۷۸/۴ لیتر فراورده در شرایط استاندارد تولید شود، سرعت متوسط واکنش در طول این بازه زمانی برابر چند مول بر دقیقه است؟

(۴) ۰/۵

(۳) ۰/۷۵

(۲) ۱/۵

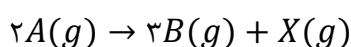
(۱) ۳

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - صفحه ۹۲ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۳

راه حل مسئله

برای محاسبه سرعت واکنش ابتدا باید ضریب ماده مورد نظر را در واکنش موازنه شده محاسبه کنیم و سپس مقدار یکی از فراورده‌های تولید شده را به دست آوریم. از آنجا که نسبت مربوط به ماده A علامت منفی دارد ولی نسبت مربوط به دو ماده دیگر علامت مثبت دارد، می‌توان فهمید ماده A واکنش دهنده و مواد B و X فراورده واکنش هستند. همچنین با توجه به ضریب موجود در مخرج کسرهای ضریب این مواد نیز در معادله واکنش مشخص است:



حال از آنجا که ۷۸/۴ لیتر فراورده در مدت زمان ۷۰ ثانیه تولید شده است، مقدار (مول) گاز X تولید شده برابر است با:

$$? \text{ mol } X = 78.4 \text{ L فراورده} \times \frac{1 \text{ mol فراورده}}{22.4 \text{ L فراورده}} \times \frac{1 \text{ mol } X}{4 \text{ mol فراورده}} = \frac{7}{8} \text{ mol}$$

با توجه به این که ضریب استوکیومتری ماده X برابر ۱ است، سرعت متوسط واکنش برابر با سرعت متوسط تولید این ماده خواهد بود:

$$\bar{R}_{\text{واکنش}} = \bar{R}_X = \frac{\Delta n(X)}{\Delta t} = \frac{\frac{7}{8} \text{ mol}}{70 \text{ s} \times \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}}} = 0.75 \text{ mol} \cdot \text{min}^{-1}$$

در نتیجه سرعت متوسط واکنش در طول بازه زمانی مورد نظر برابر با ۰/۷۵ مول بر دقیقه است.



۵۸- ۷۲ گرم گاز گوگرد دی اکسید مطابق واکنش $2SO_2(g) + O_2(g) \rightarrow 2SO_3(g)$ می‌سوزد. اگر پس از گذشت ۵۰ ثانیه از ابتدای واکنش، جرم گاز گوگرد دی اکسید باقی مانده با جرم گاز تولید شده برابر شود، سرعت متوسط واکنش در طول این بازه زمانی برابر با چند مول بر دقیقه است؟ ($O = 16, S = 32: g \cdot \text{mol}^{-1}$)

(۴) ۱/۲

(۳) ۰/۶

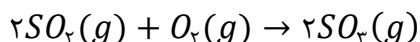
(۲) ۰/۳

(۱) ۰/۱۵

(سخت - محاسباتی - زمان بر) - صفحه ۹۲ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۲

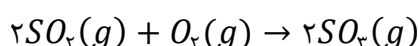
معادله موازنه شده سوختن گوگرد دی اکسید به صورت زیر است:



راه حل مسئله

برای حل این مسئله باید مقدار گوگرد دی اکسید مصرف شده، تا رسیدن به جرم برابر گوگرد دی اکسید و گوگرد تری اکسید را محاسبه کنیم و به کمک آن سرعت انجام واکنش را مشخص کنیم.

از آنجا که در ابتدای واکنش ۷۲ گرم گاز گوگرد دی اکسید ($\frac{72}{64}$ مول) وارد واکنش شده است و پس از گذشت ۵۰ ثانیه از ابتدای واکنش جرم گاز گوگرد دی اکسید باقی مانده با جرم گاز گوگرد تری اکسید تولید شده برابر شده است، داریم:



شمار مول در ابتدای واکنش :	$\frac{72}{64}$	.
شمار مول در ثانیه ۵۰ واکنش :	$\frac{72}{64} - 2x$	$2x$

چون جرم گاز گوگرد دی اکسید باقی مانده با جرم گاز گوگرد تری اکسید تولید شده برابر است، جرم این دو ماده را برابر قرار می دهیم:

$$m_{\text{گوگرد تری اکسید}} = m_{\text{گوگرد دی اکسید}} \Rightarrow \left(\frac{72}{64} - 2x\right) \times 64 = 2x \times 80 \Rightarrow 72 - 128x = 160x \Rightarrow 288x = 72 \Rightarrow x = 0.25 \text{ mol}$$

در نهایت سرعت متوسط واکنش را در این بازه زمانی به دست می آوریم:

$$\bar{R}_{\text{واکنش}} = \frac{\bar{R}_{SO_2}}{2} = -\frac{\Delta n(SO_2)}{2 \times \Delta t} = -\frac{(-2x) \text{ mol}}{2 \times 50 \text{ s} \times \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}}} = -\frac{(-0.5) \text{ mol}}{\frac{10}{6} \text{ min}} = 0.3 \text{ mol} \cdot \text{min}^{-1}$$

در نتیجه سرعت متوسط واکنش برابر با ۰/۳ مول بر دقیقه است.



۵۹- کدام یک از مطالب زیر درست است؟

- (۱) با اکسایش هر مول چربی موجود در کوهان شتر، ۱۱۴ مول CO_2 تولید شده و آب و انرژی مورد نیاز حیوان تأمین می شود.
- (۲) در برخی واکنش ها سرعت انجام واکنش برابر با سرعت تولید یا مصرف هیچ یک از مواد شرکت کننده در واکنش نخواهد بود.
- (۳) استفاده از بازدارنده در یک واکنش شیمیایی سرعت واکنش و در نتیجه مقدار نهایی فراورده های تولید شده را کاهش می دهد.
- (۴) اگر فردی نیاز فوری به انرژی داشته باشد، خوردن ماده غذایی چرب نسبت به ماده غذایی پر کربوهیدرات برای او مناسب تر است.

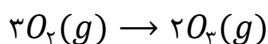
(متوسط - مفهومی - استاندارد) - صفحه ۹۸ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۲

رابطه میان سرعت متوسط یک ماده و سرعت متوسط واکنش به صورت زیر است:

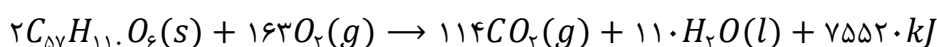
$$\bar{R}_{\text{واکنش}} = \frac{\bar{R}_{\text{ماده}}}{\text{ضریب}}$$

پس برای آن که سرعت یک واکنش با یکی از مواد شرکت کننده در واکنش برابر باشد، باید ضریب آن ماده برابر یک باشد. در برخی واکنش ها ضریب هیچ یک از مواد شرکت کننده در واکنش برابر یک نیست. به عنوان مثال در واکنش تولید اوزون از اکسیژن ضریب اوزون ۲ و ضریب اکسیژن ۳ است و سرعت واکنش با هیچ کدام از این دو ماده برابر نخواهد بود:



بررسی سایر گزینه ها:

۱) با اکسایش چربی موجود در کوهان شتر علاوه بر آب مورد نیاز حیوان، انرژی لازم برای فعالیت های این جانور تأمین می شود. واکنش اکسایش این چربی به صورت زیر است:



به طور کلی در واکنش سوختن یک مول ترکیب آلی n کربنه، n مول کربن دی اکسید تولید می شود. پس در واکنش اکسایش یک مول از این چربی ۵۷ کربنه، ۵۷ مول کربن دی اکسید تولید می شود.

۳) بازدارنده ها موجب کاهش سرعت واکنش می شوند اما تأثیری بر مقدار فراورده در انتهای واکنش ندارند. در واقع تنها کاهش مقدار واکنش دهنده ها بر روی مقدار فراورده نهایی تأثیرگذار است و موجب افزایش یا کاهش آن می شود.

۴) اگر بدن فردی نیاز فوری به تأمین انرژی داشته باشد باید از خوراکی هایی استفاده شود که میزان کربوهیدرات بیشتری دارند؛ زیرا کربوهیدرات ها به سرعت به قند خون تبدیل می شوند. همچنین مواد چرب به علت ارزش سوختی بیشتر، برای تأمین انرژی فعالیت های فیزیکی که در مدت طولانی تری انجام می شوند، مناسب تر هستند.



۶۰- یکی از الگوهای کاهش ردپای غذا بوده که با اصل از اصول شیمی سبز همخوانی بیشتری دارد.

- (۱) استفاده از غذاهای بومی و فصلی - کاهش مصرف انرژی
- (۲) استفاده از غذاهای بومی و فصلی - کاهش تولید زباله و پسماند
- (۳) کاهش مصرف گوشت و لبنیات - کاهش مصرف انرژی
- (۴) کاهش مصرف گوشت و لبنیات - کاهش تولید زباله و پسماند

پاسخ: گزینه ۱

(آسان - خط به خط - سریع ۵ - صفحه ۹۵ - ۱۱۰۲)

استفاده از غذاهای بومی و فصلی در الگوی کاهش ردپای غذا، بیانی از کاهش مصرف انرژی از اصول شیمی سبز است. در جدول زیر هر یک از الگوهای کاهش ردپای غذا مقابل اصلی از شیمی سبز قرار دارد که با آن همخوانی بیشتری دارد.

الگوی کاهش ردپای غذا منطبق با اصول شیمی سبز	اصل شیمی سبز
استفاده از غذاهای بومی و فصلی	کاهش مصرف انرژی
خرید به اندازه نیاز	کاهش تولید زباله و پسماند
کاهش مصرف غذاهای فراوری شده	طراحی مواد و فراورده‌های شیمیایی سالم‌تر
کاهش مصرف گوشت و لبنیات	کاهش ورود مواد شیمیایی ناخواسته به محیط زیست



۶۱- در واکنش کلسیم اکسید با $\frac{2}{5}$ مول گاز کربن دی‌اکسید در یک ظرف سربسته، هر دقیقه فشار گاز ۲۰ درصد کاهش می‌یابد. سرعت متوسط مصرف کلسیم اکسید در مجموع دقیقه دوم و سوم این واکنش برابر چند میلی گرم بر ثانیه است؟

($O = ۱۶, Ca = ۴۰; g.mol^{-1}$)

۸۴۰ (۴)

۶۷۲ (۳)

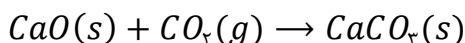
۴۲۰ (۲)

۳۳۶ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

(سخت - محاسباتی - زمان‌بر ۵ - صفحه ۸۹ - ۱۱۰۲)

معادله واکنش انجام شده به صورت زیر است:



راه حل مسئله

برای حل این مسئله باید مقدار کربن دی‌اکسید مصرف شده در دقیقه دوم و سوم را محاسبه کنیم. به این منظور با توجه به کاهش ۲۰ درصدی فشار و در نتیجه مقدار گاز درون ظرف، مقدار گاز درون ظرف ۲۰ درصد کاهش می‌یابد. پس مقدار گاز کربن دی‌اکسید مصرف شده در ثانیه‌های اول، دوم و سوم مشخص می‌شود. در نهایت جرم کلسیم اکسید و در نتیجه سرعت متوسط مصرف آن را در دقیقه‌های دوم و سوم محاسبه می‌کنیم.

با توجه به قانون گازها در حجم و دمای ثابت، فشار گاز تنها با مقدار آن گاز رابطه مستقیم دارد. پس اگر هر دقیقه ۲۰ درصد از فشار گاز درون ظرف کم می‌شود، به معنای آن است که هر دقیقه ۲۰ درصد از مقدار گاز موجود در ظرف کاهش و مقدار گاز به ۸۰ درصد می‌رسد. پس داریم:

زمان (دقیقه)	۰	۱	۲	۳
مقدار CO_2 مصرف شده (mol)	۰	$\frac{2}{5} \times \frac{0.2}{1} = 0.08$	$2 \times \frac{0.2}{1} = 0.4$	$\frac{1}{6} \times \frac{0.2}{1} = 0.033$
مقدار CO_2 باقی مانده (mol)	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5} \times \frac{0.8}{1} = 0.32$	$2 \times \frac{0.8}{1} = 1.6$	$\frac{1}{6} \times \frac{0.8}{1} = 0.133$

پس در دقیقه دوم و سوم در مجموع 0.472 مول گاز CO_2 مصرف شده است. بر این اساس جرم کلسیم اکسید مصرف شده در این بازه را به دست می‌آوریم:

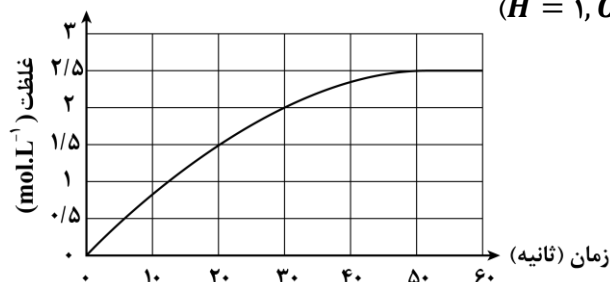
$$? g CaO = 0.472 mol CO_2 \times \frac{1 mol CaO}{1 mol CO_2} \times \frac{56 g CaO}{1 mol CaO} = 0.472 \times 56 g$$

در نهایت سرعت متوسط مصرف کلسیم اکسید را محاسبه می‌کنیم:

$$\bar{R}_{CaO} = \frac{\text{مصرف شده } CaO \text{ به میلی گرم}}{\text{زمان به ثانیه}} = \frac{0.472 \times 56 g \times \frac{1000 mg}{1 g}}{2 min \times \frac{60 s}{1 min}} = \frac{72 \times 56}{2 \times 60} = \frac{36 \times 56}{60} = 6 \times 56 = 336 mg.s^{-1}$$

پس سرعت مصرف کلسیم اکسید در بازه مورد نظر برابر ۳۳۶ میلی گرم بر ثانیه بوده است.

۶۲- واکنش $NH_4NO_3(s) \rightarrow N_2O(g) + 2H_2O(l)$ در یک ظرف ۴ لیتری انجام شد. اگر نمودار زیر مربوط به یکی از مواد شرکت‌کننده در واکنش باشد، سرعت متوسط واکنش از ابتدا تا انتهای واکنش برابر با چند مول بر ثانیه بوده و پس از گذشت چند ثانیه از ابتدای واکنش ۲۱۶ گرم آب تولید می‌شود؟ ($H = 1, O = 16: g.mol^{-1}$)



(۱) $20 - 0/2$

(۲) $20 - 0/1$

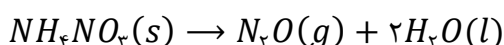
(۳) $30 - 0/2$

(۴) $30 - 0/1$

(متوسط - محاسباتی - زمان بر ۵ - صفحه ۹۲ - ۱۱۰۲)

پاسخ: گزینه ۱

معادله واکنش به صورت زیر است:



با توجه به این که غلظت ماده نشان داده شده با گذشت زمان افزایش می‌یابد، متوجه می‌شویم که این ماده مربوط به یکی از مواد فراورده است. سپس از آن جا که غلظت این ماده در طی واکنش تغییر کرده است، متوجه می‌شویم این یک فراورده گازی یا محلول است؛ زیرا غلظت مواد جامد و مایع با گذشت زمان در طی واکنش ثابت می‌ماند. در نتیجه این نمودار مربوط به گاز N_2O است. با توجه به نمودار، واکنش در ثانیه ۵۰ اتمام می‌یابد و مقدار تغییر غلظت گاز N_2O در طی این بازه زمانی برابر با ۲/۵ مول بر لیتر است. از آنجا که حجم ظرفی که واکنش در آن انجام می‌شود برابر با ۴ لیتر است، مقدار تغییر مول این گاز برابر است با:

$$\Delta n = 10 \text{ mol} \Rightarrow n = 2/5 \times 4 \Rightarrow \Delta n = 10 \text{ mol}$$

بنابراین سرعت متوسط واکنش برابر است با:

$$\bar{R}_{\text{واکنش}} = \frac{\bar{R}_{N_2O}}{1} = \frac{\Delta n(N_2O)}{\Delta t} = \frac{10 \text{ mol}}{50 \text{ s}} = 0/2 \text{ mol.l}^{-1} \text{ s}^{-1}$$

در نتیجه سرعت متوسط واکنش از ابتدا تا انتهای واکنش برابر با ۰/۲ مول بر ثانیه است.

حال مقدار مول گاز N_2O تولیدشده را به ازای تولید ۲۱۶ گرم آب در این واکنش، محاسبه می‌کنیم:

$$? \text{ mol } N_2O = 216 \text{ g } H_2O \times \frac{1 \text{ mol } H_2O}{18 \text{ g } H_2O} \times \frac{1 \text{ mol } N_2O}{2 \text{ mol } H_2O} = 6 \text{ mol}$$

در نهایت غلظت این ماده را حساب می‌کنیم:

$$\Delta[N_2O] = \frac{\Delta n(N_2O)}{V} = \frac{6}{4} = 1/5 \text{ mol.l}^{-1}$$

پس تا زمانی که غلظت گاز N_2O برابر با ۱/۵ مول بر لیتر شود، ۲۱۶ گرم آب تولیدشده است. این غلظت در زمان ۲۰ ثانیه ایجاد می‌شود.



۶۳- فرایند انحلال نمک در آب بوده و از این نمک در تولید بسته مناسب برای درمان آسیب دیدگی ورزشکاران استفاده می شود.

- (۱) کلسیم کلرید - گرماگیر - سرمازا
(۲) کلسیم کلرید - گرماده - گرمازا
(۳) آمونیوم نیترات - گرماده - سرمازا
(۴) آمونیوم نیترات - گرماگیر - گرمازا

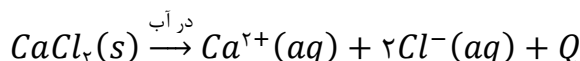
پاسخ: گزینه ۲

(آسان - مفهومی - سریع) - صفحه ۹۶ - ۱۱۰۲

فرایندهای انحلال آمونیوم نیترات و کلسیم کلرید در آب به ترتیب گرماگیر و گرماده هستند؛ پس با حل شدن این دو ماده در آب به ترتیب دمای آب کاهش و افزایش می یابد و از این مواد برای تولید بسته های سرمازا و گرمازا در ورزش استفاده می شود.

نوع بسته	نمک بسته	علامت آنتالپی	واکنش انحلال
سرمازا	آمونیوم نیترات (NH_4NO_3)	مثبت	$NH_4NO_3(s) + Q \xrightarrow{\text{در آب}} NH_4^+(aq) + NO_3^-(aq)$
گرمازا	کلسیم کلرید ($CaCl_2$)	منفی	$CaCl_2(s) \xrightarrow{\text{در آب}} Ca^{2+}(aq) + 2Cl^-(aq) + Q$

در فرایند گرماده انحلال کلسیم کلرید، گرما تولید می شود و این گرما موجب افزایش دمای محلول بسته محتوی این ماده می شود.



پس از این ماده برای تولید بسته گرمازا استفاده می شود.



۶۴- ۴۲۰ گرم سدیم هیدروژن کربنات در یک ظرف مطابق واکنش $2NaHCO_3(s) \rightarrow Na_2CO_3(s) + CO_2(g) + H_2O(g)$ تجزیه می شود. جدول زیر، جرم جامد درون ظرف را در طی انجام واکنش نشان می دهد. نسبت سرعت متوسط واکنش در ۳۰ ثانیه اول در مقیاس مول بر دقیقه به سرعت متوسط مصرف سدیم هیدروژن کربنات در ۲۰ ثانیه پایانی در مقیاس مول بر ثانیه کدام است؟ ($H = 1, C = 12, O = 16: g. mol^{-1}$)

زمان (s)	۰	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰	۵۰	۶۰
جرم جامد (g)	۴۲۰	۳۵۸	۳۲۰/۸	۲۹۶	۲۸۰/۵	۲۶۸/۱	۲۶۵

۱۲۵ (۴)

۱۶۰ (۳)

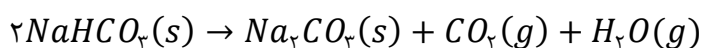
۲۵۰ (۲)

۳۲۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - صفحه ۹۳ - ۱۱۰۲

معادله واکنش انجام شده به صورت زیر است:



کاهش جرم مخلوط ناشی از تولید و آزاد شدن گاز کربن دی اکسید و بخار آب است. در نتیجه به ازای مصرف ۲ مول سدیم هیدروژن کربنات، یک مول گاز کربن دی اکسید (۴۴ گرم) و یک مول بخار آب (۱۸ گرم) تولید شده و در مجموع، جرم مخلوط ۶۲ گرم کاهش می یابد. در ابتدا، از آنجا که جرم مخلوط در ۳۰ ثانیه اول واکنش ۱۲۴ گرم ($420g - 296g$) کاهش یافته است، مقدار $NaHCO_3$ مصرف شده را حساب می کنیم:

$$? mol NaHCO_3 = 124 g \text{ کاهش جرم} \times \frac{2 mol NaHCO_3}{62 g \text{ کاهش جرم}} = 4 mol$$

حال سرعت متوسط واکنش را در مقیاس مول بر دقیقه در این بازه زمانی به دست می آوریم:

$$\bar{R}_{\text{واکنش}} = \frac{\bar{R}_{NaHCO_3}}{2} = \frac{-\Delta n(NaHCO_3)}{2\Delta t} = \frac{4 mol}{2 \times 30 s \times \frac{1 min}{60 s}} = 4 mol \cdot min^{-1}$$

سپس، از آنجا که در ۲۰ ثانیه پایانی ثبت شده در جدول (از ثانیه ۴۰ تا ثانیه ۶۰) جرم مخلوط ۱۵/۵ گرم ($280/5g - 265g$) کاهش یافته است، داریم:

$$? mol NaHCO_3 = 15/5 g \text{ کاهش جرم} \times \frac{2 mol NaHCO_3}{62 g \text{ کاهش جرم}} = 0/5 mol$$

حال سرعت متوسط مصرف سدیم هیدروژن کربنات در مقیاس مول بر ثانیه را در این بازه زمانی محاسبه می‌کنیم:

$$\bar{R}_{NaHCO_3} = \frac{-\Delta n(NaHCO_3)}{\Delta t} = \frac{-0.25 \text{ mol}}{20 \text{ s}} = -0.0125 \text{ mol.s}^{-1}$$

در نهایت نسبت خواسته شده را به دست می‌آوریم:

$$\frac{\bar{R}_{\text{واکنش}}(0.5 - 3.0 \text{ s})}{\bar{R}_{NaHCO_3}(4.0 \text{ s} - 6.0 \text{ s})} = \frac{4}{-0.0125} = 160$$

بنابراین نسبت مورد نظر برابر ۱۶۰ است.

سرعت متوسط واکنش

سرعت متوسط واکنش به معنای تعداد انجام معادله واکنش در واحد زمان است و از تقسیم سرعت تولید یا مصرف یک ماده شرکت‌کننده در واکنش به ضریب آن ماده در معادله واکنش به دست می‌آید:

$$\bar{R}_{\text{واکنش}} = \frac{\bar{R}_x}{\text{ضریب } x} = \frac{\bar{R}_y}{\text{ضریب } y} = \frac{\bar{R}_z}{\text{ضریب } z} = \dots$$

به عنوان مثال در واکنشی با معادله $2A(g) \rightarrow 3B(g) + X(g)$ سرعت متوسط واکنش به صورت زیر محاسبه می‌شود:

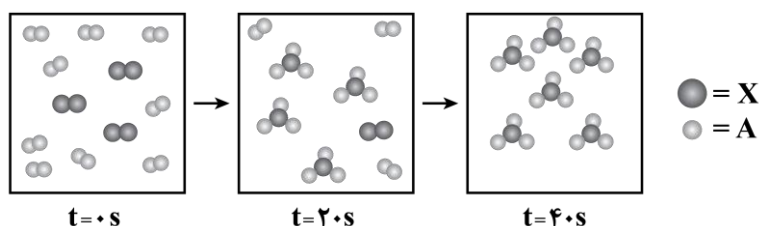
$$\bar{R}_{\text{واکنش}} = \frac{\bar{R}_A}{2} = \frac{\bar{R}_B}{3} = \bar{R}_X$$



همان‌طور که مشخص است، سرعت واکنش برابر سرعت ماده‌ای است که ضریب آن در معادله واکنش برابر یک باشد.



۶۵- واکنش موازنه نشده $X_2(g) + A_2(g) \rightarrow XA_3(g)$ مطابق شکل زیر در یک ظرف ۲ لیتری انجام می‌شود. سرعت متوسط مصرف گاز A_2 در ۲۰ ثانیه اول واکنش برابر با چند مول بر لیتر بر ثانیه بوده و سرعت متوسط واکنش از ابتدا تا انتهای واکنش برابر با چند مول بر دقیقه است؟ (هر ذره معادل ۰/۱ مول است.)



$$(1) \quad 0.45 - 0.03$$

$$(2) \quad 0.45 - 0.15$$

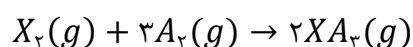
$$(3) \quad 0.225 - 0.03$$

$$(4) \quad 0.225 - 0.15$$

(متوسط - محاسباتی - استاندارد ۱ - صفحه ۹۳ - ۱۱۰۲)

پاسخ: گزینه ۲

معادله موازنه شده واکنش به صورت زیر است:



از آنجا که در ۲۰ ثانیه اول واکنش ۶ ذره گاز A_2 که معادل ۰/۶ مول (6×0.1) از آن بوده، مصرف شده است، سرعت متوسط مصرف آن در طول این بازه زمانی را حساب می‌کنیم:

$$\bar{R}_{A_2} = -\frac{\Delta n(A_2)}{V \cdot \Delta t} = -\frac{(-0.6 \text{ mol})}{2 \text{ L} \times 20 \text{ s}} = 0.015 \text{ mol.L}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$$

پس سرعت متوسط مصرف گاز A_2 در طول بازه زمانی خواسته شده برابر ۰/۰۱۵ مول بر لیتر بر ثانیه است.

در طول واکنش (۴۰ ثانیه) ۳ ذره گاز X_2 که معادل ۰/۳ مول (3×0.1) از آن است، مصرف شد. بر این اساس سرعت متوسط واکنش از ابتدا تا انتهای واکنش را حساب می‌کنیم:

$$\bar{R}_{\text{واکنش}} = \bar{R}_{X_2} = -\frac{\Delta n(X_2)}{\Delta t} = -\frac{(-0.3 \text{ mol})}{40 \text{ s} \times \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}}} = 0.45 \text{ mol.min}^{-1}$$

در نتیجه سرعت متوسط واکنش از ابتدا تا انتهای واکنش برابر با ۰/۴۵ مول بر دقیقه است.



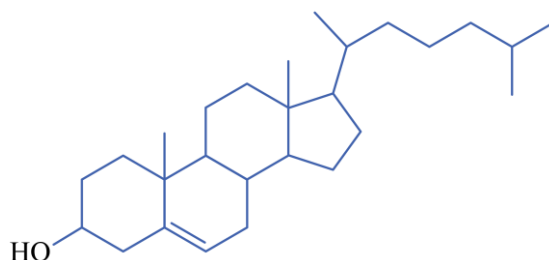
۶۶- چند مورد از مطالب زیر در مورد کلسترول درست است؟

- الف - یک ماده آروماتیک محسوب می‌شود.
 ب - در ساختار هر مولکول آن ۴ حلقه شش کربنی وجود دارد.
 ج - ماده‌ای است که در غذاهای گیاهی وجود دارد و موجب سکتته می‌شود.
 د - یک الکل سیرنشده است که مقدار اضافی آن در رگ‌ها رسوب می‌کند.
 هـ - ضعیف‌ترین و قوی‌ترین پیوند کووالانسی در ساختار این ماده، بین اتم‌های یک عنصر برقرار هستند.
- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

(سخت - مفهومی - استاندارد) - صفحه ۹۶ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۲

کلسترول ترکیبی با ساختار زیر است:



فرمول مولکولی این ماده به صورت $C_{27}H_{46}O$ می‌باشد.
 عبارت‌های (د) و (هـ) در مورد این ماده درست هستند.

بررسی موارد:

الف) در ساختار این ماده، چهار حلقه کربنی وجود دارد که هیچ کدام حلقه آروماتیک یا حلقه بنزنی نیست. حلقه بنزنی یک حلقه شش کربنه با ۳ پیوند دوگانه $C=C$ است. در حد کتاب درسی، تنها ترکیبی آروماتیک است که حلقه بنزنی داشته باشد.

پ) در ساختار این ماده ۳ حلقه ۶ کربنی و یک حلقه ۵ کربنی وجود دارد.

ج) کلسترول یکی از مواد آلی موجود در غذاهای جانوری است و رسوب مقدار اضافی آن در رگ‌ها می‌تواند موجب گرفتگی رگ‌ها و سکتته شود.

د) در ساختار این ماده یک پیوند دوگانه $C=C$ وجود دارد که آن را یک ترکیب سیرنشده می‌کند. همچنین در ساختار این ماده، گروه

$-OH$ ، گروه هیدروکسیل یا همان عامل الکلی وجود دارد و این ماده را در دسته الکل‌ها قرار می‌دهد. مقدار اضافی این ماده در دیواره

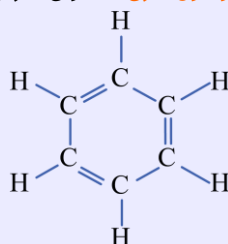
رگ‌ها رسوب می‌کند و می‌تواند باعث گرفتگی رگ‌ها و حتی مرگ شود. (کلسترول یک ماده ضروری برای بدن انسان بوده و با توجه

به عدم تولید آن در بدن، بدون آن مرگ حتمی است و باید مقدار کافی از آن در غذای مصرفی وجود داشته باشد).

هـ) ضعیف‌ترین و قوی‌ترین پیوند کووالانسی در این ترکیب به ترتیب $C-C$ و $C=C$ هستند که هر دو میان اتم‌های کربن مشاهده می‌شوند.

حلقه بنزنی، نماد ترکیبات آروماتیک

حلقه بنزنی، یک حلقه ۶ ضلعی ساخته شده از اتم‌های کربن است که در آن پیوندهای بین اتم‌های کربن یکی در میان دوگانه هستند. بنزن، بنزوئیک اسید، بنزالدهید، نفتالن، ترکیب آلی عامل طعم و بوی گیاه رازیانه، ترکیب‌های آلی موجود در دارچین و زردچوبه و ویتامین (کا)، مهم‌ترین ترکیبات آروماتیک مطرح شده در کتاب درسی شیمی یازدهم هستند. تصویر زیر، نمایی از مولکول بنزن به عنوان سرگروه ترکیبات آروماتیک را نشان می‌دهد.



۶۷- کدام یک از موارد زیر نادرست است؟

- (۱) میوه‌ها و سبزیجات حاوی ترکیب‌های آلی سیرنشده‌ای به نام ریزمغذی‌ها هستند که در حفظ سلامت بافت‌ها و اندام‌ها دخالت دارند.
- (۲) در سال ۲۰۴۰ با الگوی مصرفی کنونی، مساحتی حدود دو برابر مساحت کره زمین برای تأمین غذا مورد نیاز است.
- (۳) تهیه غذا بیشترین عامل تولید گازهای گلخانه‌ای پس از سوختن سوخت‌های فسیلی در کارخانه‌ها و خودروها است.
- (۴) چهره پنهان ردپای غذا، تولید گازهای گلخانه‌ای به ویژه کربن‌دی‌اکسید است.

پاسخ: گزینه ۳

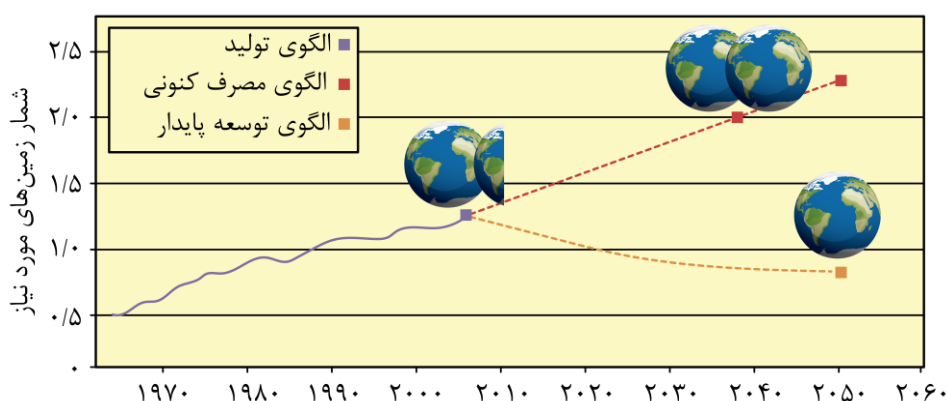
(آسان - خط به خط - سریع ۵ - صفحه ۹۴ - ۱۱۰۲)

مقدار کربن‌دی‌اکسید تولیدشده در فرایند تهیه غذا به‌عنوان چهره پنهان ردپای غذا شناخته می‌شود و این مقدار حتی به مراتب بیشتر از کربن‌دی‌اکسید تولیدشده از سوختن سوخت‌ها در خودروها، کارخانه‌ها و ... است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱ پژوهش‌های علمی نشان داده‌اند که میوه‌ها و سبزیجات محتوی ترکیب‌های آلی سیرنشده‌ای به نام ریزمغذی‌ها هستند، ترکیب‌هایی که در حفظ سلامت بافت‌ها و اندام‌ها دخالت دارند.

۲ نمودار زیر از کتاب درسی مساحت مورد نیاز برای تأمین غذای ساکنان کره زمین را نشان می‌دهد:



طبق پیش‌بینی با توجه به الگوی مصرفی کنونی، در سال ۲۰۴۰ به مساحتی حدود دو برابر مساحت کره زمین برای تأمین غذا نیاز است. چهره پنهان ردپای غذا، تولید گازهای گلخانه‌ای به ویژه کربن‌دی‌اکسید است. آن‌چنان‌که سهم تولید این گاز در ردپای غذا به مراتب بیشتر از سوختن سوخت‌ها در خودروها، کارخانه‌ها و ... است.



۶۸- با قرار دادن مقدار کافی از فلز روی در ۵۰۰ میلی‌لیتر محلول ۰/۶ مولار نقره نیترات، واکنش زیر انجام می‌شود. اگر پس از گذشت ۲ دقیقه از ابتدای واکنش، غلظت یون Ag^+ در محلول به ۰/۱۲ مولار برسد، سرعت متوسط تولید فلز نقره در طول این بازه زمانی برابر با چند گرم بر ثانیه است؟ (حجم محلول ثابت می‌ماند. $Ag = 108 : g.mol^{-1}$)

موازنه شود: $Zn(s) + AgNO_3(aq) \rightarrow Zn(NO_3)_2(aq) + Ag(s)$

۰/۲۱۶ (۴)

۰/۱۰۸ (۳)

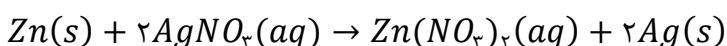
۰/۰۵۴ (۲)

۰/۰۲۷ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

(متوسط - محاسباتی - استاندارد ۵ - صفحه ۸۹ - ۱۱۰۲)

واکنش موازنه‌شده به‌صورت زیر است:



غلظت یون نقره (Ag^+) در ابتدای واکنش برابر با غلظت محلول نقره نیترات ($AgNO_3$) یعنی ۰/۶ مولار است. با توجه به این‌که پس از گذشت ۲ دقیقه از ابتدای واکنش، غلظت یون Ag^+ در محلول به ۰/۱۲ مولار رسیده است، تغییر غلظت یون نقره برابر با $0.6 - 0.12 = 0.48$ مولار است. بنابراین تغییر مقدار یون Ag^+ برابر است با:

$$\Delta[Ag^+] = \frac{\Delta n(Ag^+)}{V} \Rightarrow 0.48 = \frac{\Delta n(Ag^+)}{0.5 L} \Rightarrow \Delta n(Ag^+) = 0.24 mol$$

حال مقدار فلز نقره تولیدشده در این بازه زمانی را محاسبه می‌کنیم:

$$? g Ag = 0.24 mol Ag^+ \times \frac{2 mol Ag}{2 mol Ag^+} \times \frac{108 g Ag}{1 mol Ag} = 0.24 \times 108 g$$

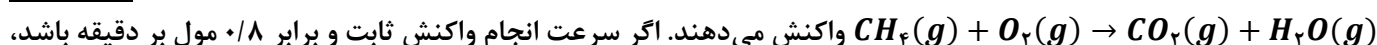
در نهایت سرعت متوسط تولید فلز نقره در بازه زمانی مورد نظر را حساب می‌کنیم:

$$\bar{R}_{Ag} = \frac{\Delta m(Ag)}{\Delta t} = \frac{0.24 \times 108 g}{2 min \times \frac{60 s}{1 min}} = 0.216 g.s^{-1}$$

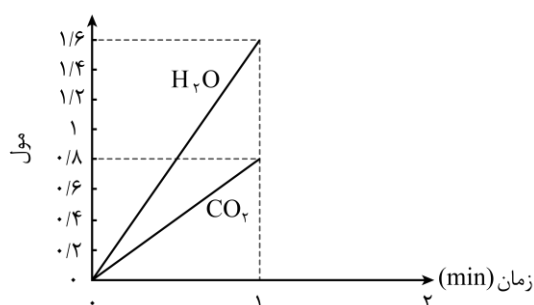
در نتیجه سرعت متوسط تولید فلز نقره در این بازه زمانی برابر با ۰/۲۱۶ گرم بر ثانیه است.



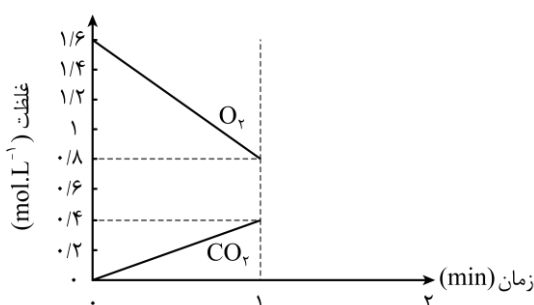
۶۹- ۴/۸ مول از گازهای اکسیژن و متان (متناسب با ضرایب استوکیومتری) در یک ظرف ۲ لیتری به‌طور کامل مطابق معادله موازنه‌نشده



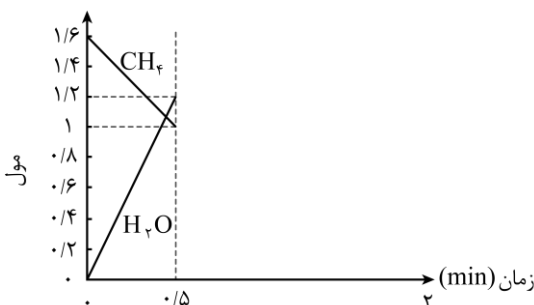
واکنش می‌دهند. اگر سرعت انجام واکنش ثابت و برابر ۰/۸ مول بر دقیقه باشد، کدام نمودار در رابطه با این واکنش نادرست است؟



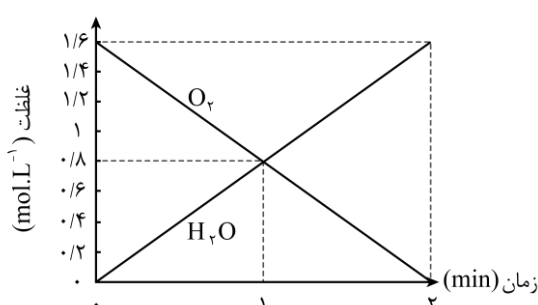
(۲)



(۱)



(۴)

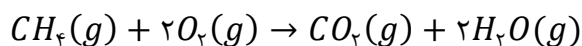


(۳)

(سخت - مفهومی - زمان‌بر - صفحه ۹۳ - ۱۱۰۲)

پاسخ: گزینه ۴

معادله موازنه‌شده سوختن کامل متان به‌صورت زیر است:



۴/۸ مول از گازهای متان و اکسیژن متناسب با ضریب استوکیومتری آن‌ها وارد واکنش شده است، در نتیجه ۱/۶ مول گاز متان و ۳/۲ مول گاز اکسیژن در ابتدای واکنش وجود دارد. سرعت واکنش ثابت و برابر ۰/۸ مول بر دقیقه است. پس مقدار (مول) متان مصرف شده در ۳۰ ثانیه یا ۰/۵ دقیقه اول واکنش برابر است با:

$$\bar{R}_{\text{واکنش}} = \bar{R}_{CH_4} \Rightarrow 0.8 = -\frac{\Delta n(CH_4)}{\Delta t} \Rightarrow 0.8 = -\frac{\Delta n(CH_4)}{0.5} \Rightarrow \Delta n(CH_4) = -0.4 mol$$

در نتیجه پس از گذشت ۳۰ ثانیه از اول واکنش ۰/۴ مول گاز متان مصرف شده و مقدار (مول) آن به ۱/۲ (۱/۶ - ۰/۴) می‌رسد. درحالی‌که در نمودار گزینه چهارم این مقدار برابر ۱ است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

مقدار (مول) گاز اکسیژن مصرفی در یک دقیقه اول واکنش برابر است با:

$$\bar{R}_{\text{واکنش}} = \bar{R}_{O_2} \Rightarrow 0.8 = -\frac{\Delta n(O_2)}{2 \Delta t} \Rightarrow 0.8 = -\frac{\Delta n(O_2)}{2 \times 1} \Rightarrow \Delta n(O_2) = -1.6 mol$$

با توجه به اینکه حجم ظرف واکنش برابر ۲ لیتر است، غلظت گاز اکسیژن در ابتدای واکنش برابر ۱/۶ مول بر لیتر خواهد بود. حال طبق رابطه غلظت ($\text{غلظت} = \frac{\text{مقدار مول}}{\text{حجم}}$)، از آنجا که ۱/۶ مول گاز اکسیژن در طول این بازه زمانی مصرف شده است، تغییر غلظت آن برابر با ۰/۸ مول بر لیتر خواهد بود و غلظت آن پس از یک دقیقه از ابتدای واکنش به ۰/۸ مول بر لیتر می‌رسد. با توجه به اینکه ضریب استوکیومتری گاز کربن دی‌اکسید نصف گاز اکسیژن است، تغییر غلظت آن نیز نصف گاز اکسیژن بوده و غلظت آن پس از یک دقیقه از ابتدای واکنش به ۰/۴ مول بر لیتر می‌رسد.

۲

مطابق محاسبات گزینه قبل مقدار (مول) گاز کربن دی‌اکسید تولیدشده در یک دقیقه اول واکنش برابر است با:

$$n = CV \rightarrow n = 0.4 \times 2 = 0.8 \text{ mol}$$

و از آنجا که ضریب استوکیومتری بخار آب دو برابر گاز کربن دی‌اکسید است، تغییر مقدار مول آن نیز دو برابر خواهد بود. در نتیجه پس از گذشت ۱ دقیقه از ابتدای واکنش مقدار (مول) بخار آب به ۱/۶ مول می‌رسد.

۳

با توجه به محاسبات انجام‌شده، تغییر غلظت گاز اکسیژن در یک دقیقه اول برابر با ۰/۸ مول بر لیتر است و غلظت آن نیز به ۰/۸ مول می‌رسد. از آنجا که ضریب استوکیومتری بخار آب با گاز اکسیژن برابر است، تغییر غلظت بخار آب در این بازه زمانی نیز برابر ۰/۸ مول بر لیتر خواهد بود و غلظت آن نیز به ۰/۸ مول بر لیتر می‌رسد. حال با توجه به اینکه سرعت واکنش ثابت است، زمان اتمام واکنش برابر است با:

$$\bar{R}_{\text{واکنش}} = \frac{\bar{R}_{O_2}}{2} \Rightarrow 0.8 = -\frac{\Delta n(O_2)}{2 \Delta t} \Rightarrow 0.8 = -\frac{(-3/2)}{2 \times \Delta t} \Rightarrow \Delta t = 2 \text{ min}$$

در نتیجه واکنش پس از گذشت ۲ دقیقه پایان می‌یابد و واکنش‌دهنده‌ها به‌طور کامل مصرف می‌شوند و مقدار (مول) گاز کربن دی‌اکسید و بخار آب به‌ترتیب به ۱/۶ مول و ۳/۲ مول می‌رسد. غلظت گاز کربن دی‌اکسید و بخار آب نیز در انتهای واکنش به‌ترتیب به ۰/۸ مول و ۱/۶ مول می‌رسد.



۷۰- اگر در واکنش سوختن کامل یک هیدروکربن با فرمول مولکولی C_8H_y ، نسبت سرعت متوسط مصرف گاز اکسیژن به سرعت متوسط تشکیل آب برابر ۲/۵ باشد. در ساختار این هیدروکربن چند اتم هیدروژن وجود دارد؟

۶ (۴)

۸ (۳)

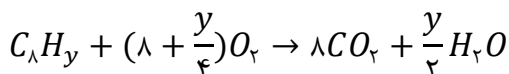
۱۰ (۲)

۱۲ (۱)

(متوسط - محاسباتی - سریع - صفحه ۹۲ - ۱۱۰۲)

پاسخ: گزینه ۳

معادله موازنه‌شده سوختن کامل هیدروکربن مورد نظر (C_8H_y) به‌صورت زیر است:



از آنجا که سرعت تولید یا مصرف مواد در یک واکنش متناسب با ضریب استوکیومتری آن‌ها است، داریم:

$$\frac{\bar{R}_{O_2}}{\bar{R}_{H_2O}} = \frac{\left(8 + \frac{y}{4}\right)}{\frac{y}{2}} = 2/5 \Rightarrow 1/25 y = 0.25 y + 8 \Rightarrow y = 8$$

در نتیجه شمار اتم‌های هیدروژن در این هیدروکربن برابر با ۸ است.

راز سرعت واکنش در یک نگاه

در یک واکنش شیمیایی، سرعت متوسط تولید یا مصرف مواد مختلف، متناسب با ضریب استوکیومتری این مواد در معادله موازنه‌شده واکنش مورد نظر است. به‌عنوان مثال، اگر در طول بازه زمانی Δt تغییر مقدار مواد شرکت‌کننده در واکنش $2A(s) \rightarrow C(s) + 4B(g)$ را بررسی کنیم، با توجه به ضرایب مواد شرکت‌کننده در آن، رابطه $|2\Delta n_A| = |4\Delta n_C| = |\Delta n_B|$ بین مقدار تغییر شمار مول‌های این مواد برقرار است. بر این اساس، تساوی $|2\bar{R}_A| = |4\bar{R}_C| = |\bar{R}_B|$ بین سرعت متوسط مصرف یا تولید مواد نیز برقرار می‌شود؛ پس داریم:

$$\frac{\bar{R}_A}{\bar{R}_B} = \frac{2}{4} = 0.5$$

$$\frac{\bar{R}_A}{\bar{R}_C} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\frac{\bar{R}_C}{\bar{R}_B} = \frac{1}{4} = 0.25$$



شب امتحان حوصله نداری دیگه درس بخونی؟! خب درساتو گوش کن!

✓ پادکست های شب امتحان، ویژه مرور و یادگیری
دروس و نکات مهم در لحظات آخر قبل امتحان



اسکن کن!

برای دریافت
روی لینک بزن!
digimaze.org



دیجی ماز