



گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی

آزمون ماز | پایه یازدهم



۳
نیم سال دوم



ویژه دانش آموزان پایه یازدهم

دفترچه پاسخ

پنجشنبه ۱۰ اردیبهشت ماه ۱۴۰۵

✓ پاسخنامه سریع؛ برای بررسی فوری بعد از آزمون

✓ تحلیل تمام گزینه‌های هر سؤال؛ برای بررسی سؤالاتی که پاسخ نادرست داده‌اید

✓ نکات و درسنامه‌های آموزشی؛ برای یادگیری کامل مباحث هر سؤال

✓ مشاوره تستی؛ برای یادگیری انواع روش‌های حل تست

✓ استراتژی آزمون؛ برای یادگیری مدیریت زمان و مدیریت جلسه آزمون

دِرس	مَسْئولِ دِرس	طراحان	ویراستاران
ریاضیات	حسین شفیع زاده سید جواد نظری مهرداد کیوان	سید جواد نظری – حسن محمدبیگی علیرضا شریف خطیبی	ندا فرهختی – مهرداد اسپیدکار مائده بادان فیروز – حمیدرضا ولی پور یزدان نیک قدم – فؤاد خیر آبادی علی اسدی
فیزیک	حسین عبدوی نژاد محمد جواد سورچی	محمد جواد سورچی	مروارید شاه حسینی نوید ذکی علیرضا ملک حسینی
شیمی	علی ترابی	علی ترابی – پرهام تیزی – فرهنگ امیری طاها حق بین – محمد دارابی جم	محمد مهدی معظمی فرهنگ امیری – معید ابری محمد دارابی جم امیرعلی حسینی فرد

تیم اجرایی و تولید آزمون

نازنین امیری

مائده بادان فیروز

زهره جعفری

مروارید شاه حسینی

مدیر تولید آزمون: محدثه شیخعلی



یک تیم با بیش از ۵۰۰ نفر در حال کار هستند تا آزمون‌های ماز با حداکثر کیفیت حاضر بشن و به شما کمک کنن و مسیر موفقیت رو براتون ساده‌تر کنن. همیشه از نظرات و کامنت‌های خوبتون انرژی می‌گیریم. مرسی که همراهمون هستین. راستی! حتماً در نظرسنجی آزمون شرکت کنین و نظرات و پیشنهاداتتون رو برامون بنویسین.

دکتر رسول خنجری

تغذیه

برای یه دانش آموز کنکوری، تغذیه فقط یه چیز فرعی و حاشیه‌ای نیست؛ واقعاً بخش مهمی از برنامه مطالعه‌ست. مغز تو قراره ساعت‌ها تمرکز کنه، اطلاعات رو تحلیل کنه و مطالب رو نگه داره، پس اگر سوخت کافی و درست نرسه، حتی با بهترین برنامه‌ریزی هم بازدهی میاد پایین.

تغذیه درست کمک می‌کنه قند فونت ثابت بمونه، تمرکزت بهتر بشه و فستگلی دیرتر سراغت بیاد.

مغز فقط حدود دو درصد وزن بدنه، ولی تقریباً بیست درصد انرژی بدن رو مصرف می‌کنه. سوخت اصلیش هم گلوکزه؛ یعنی قند ساده. خوراکی‌های شیرین می‌تونن عملکرد ذهنی رو برای مدت کوتاهی بالا ببرن، اما تحقیقات نشون داده که حدود ۲۵ گرم کربوهیدرات ساده (مثل یک عدد موز متوسط یا یک برش نان) می‌تونه مفید باشه؛ درحالی‌که مصرف زیادترش (مثلاً دو برابر) ممکنه برعکس باعث افت تمرکز و کندی فکر بشه. **برای اینکه مغز درست کار کنه، بدنت نیاز به ویتامین‌ها، مواد معدنی، پروتئین، کربوهیدرات پیچیده، و چربی‌های سالم مثل امگا ۳ داره. میوه و سبزیجات تازه، غلات کامل، حبوبات، لبنیات کم‌چرب و آجیل‌های خام می‌تونن اینا رو برات تأمین کنن.**

صبحونه رو جدی بگیر!

خوردن صبحونه قبل از شروع مطالعه - یا حداکثر تا یک‌ونیم ساعت بعدش - واقعاً ضروریه. چون معمولاً قند خون اول صبح پایینه و اگر با همون وضعیت بری سر درس، مغزت خوب کار نمی‌کنه. یه صبحونه ساده مثل نون و پنیر و گردو، یا نیمرو و املت، خیلی بهتر از کیک و بیسکویتته. کیک و بیسکویت فقط شکم رو پر می‌کنن اما ارزش غذایی کمی دارن و قندشون باعث نوسان انرژی و خواب‌آلودگی می‌شه.

توی دوران مطالعه هیچ وعده‌ای رو حذف نکن. به برنامه غذایی میان‌وعده‌های سالم مثل میوه و آجیل اضافه کن. این کار از افت قند خون جلوگیری می‌کنه؛ چیزی که برای فکر کردن لازم داری. هله‌هوله‌هایی مثل چیپس و پفک در کوتاه‌مدت خوشحال‌کننده ولی هیچ فایده‌ای برات ندارن و حتی باعث کاهش انرژی، بی‌حوصلگی، عدم تمرکز و سردرد می‌شن. به جاش خرما، گردو، بادام، پسته (ترجیحاً خام) دم دست باشه.

کم‌آبی بدن هم باعث سردرد و افت عملکرد ذهنی می‌شه، پس آب کافی بخور. نوشیدنی‌های کافئین‌دار مثل چای و قهوه اگر در حد دو سه بار در روز باشن خوبه؛ بیشترش ممکنه باعث تپش قلب، اضطراب، مشکلات گوارشی و بی‌خوابی بشه. اگه حس می‌کنی بیشتر نوشیدنی لازم داری، دمنوش‌ها انتخاب خیلی بهتری هستن.

اگر زیاد احساس خستگی، بی‌حالی یا خواب‌آلودگی داری، ممکنه کمبود ویتامین D یا ویتامین‌های گروه B داشته باشی. با مشورت متخصص تغذیه، می‌تونی یک مکمل مناسب انتخاب کنی.

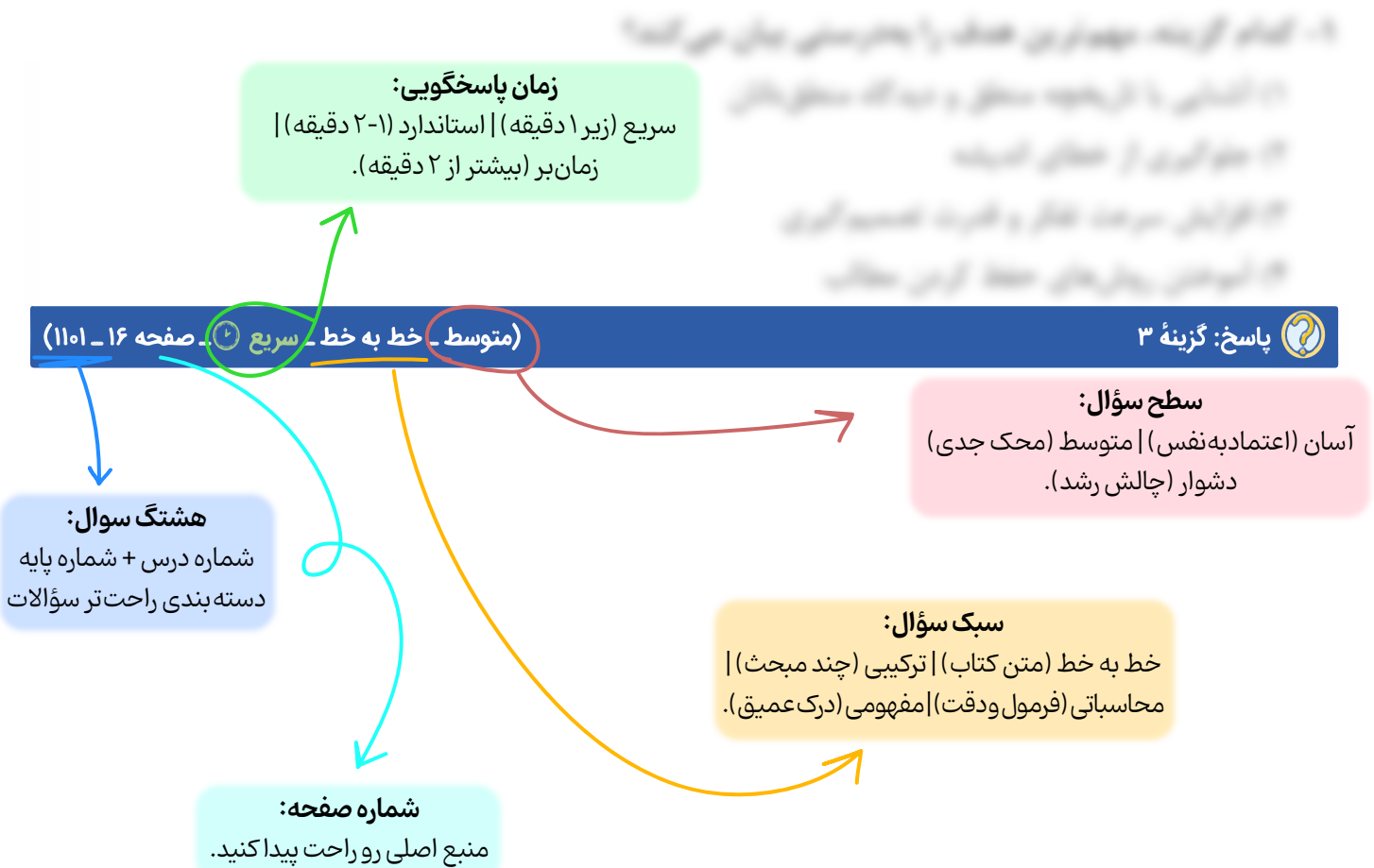
روز قبل کنکور غذاهای جدید امتحان نکن. چیزهایی بخور که قبلاً خوردی و مطمئنی به معده‌ات می‌سازه. روز قبل آزمون جای ریسک کردن نیست.

برای خواب بهتر، بهتره دو تا سه ساعت قبل از خواب غذاهای پرکربوهیدرات مثل برنج، نان و شیرینی نخوری. هرچی قند خونت قبل خواب پایدارتر و پایین‌تر باشه، راحت‌تر می‌خوابی و صبح سر حال‌تر هستی.

خلاصه اینکه

تغذیه درست برای یه دانش آموز کنکوری مثل سوخت تمیز برای موتور مغزه؛ مغز برای تمرکز و یادگیری به قند خون ثابت، ویتامین‌ها، پروتئین و چربی‌های سالم نیاز داره. حذف وعده‌ها، خوردنی‌های بی‌ارزش مثل چیپس و نوشابه، یا مصرف زیاد قند باعث افت انرژی و تمرکز می‌شن. صبحونه کامل، میان‌وعده‌های سالم، آب کافی و خواب منظم، کلید حفظ انرژی و عملکرد ذهنی تاروز کنکورن.

راهنمای پاسخنامه آزمون‌ها



یادتون باشه:

- ✓ هر سؤال یک فرصت یادگیری، نه یک مانع.
- ✓ پاسخ نامه فقط جواب نیست؛ یک کارگاه آموزشی کامله.
- ✓ با هر آزمون و مرور این پاسخ نامه، یک پله بالاتر می رید و یک قدم به رؤیایون نزدیک تر می شید.
- ✓ موفقیت فقط برای کسانی که با برنامه و انگیزه حرکت می کنن. شما همون آدمید.



برای دیدن پاسخنامه ویدئویی آزمون
QRcode بالا را اسکن کنید!
یا بر روی لینک زیر کلیک کنید!
پاسخنامه ویدئویی آزمون

بودجه بندی این آزمون

حسابان ۱: حد و پیوستگی (درس ۱، ۲ و ۳)، صفحه های ۱۱۳ تا ۱۴۰
هندسه ۲: روابط طولی در مثلث (درس ۱ و ۲)، صفحه های ۵۹ تا ۶۷
آمار و احتمال: آمار توصیفی (درس ۲ و ۳) + آمار استنباطی (درس ۱)، صفحه های ۸۰ تا ۱۱۱

سهم در کنکور

حسابان ۱: از این مبحث به طور مستقیم تستی در کنکور طرح نشده است.
هندسه ۲: این مبحث در مجموع ۲ تست از ۴ تست کنکور را پوشش داده است.
آمار و احتمال: این مبحث در مجموع ۱ تست از ۴ تست کنکور را پوشش داده است.

۱- به ازای کدام مجموعه مقادیر x ، بازه $(x^2 - 2, 3x + 5)$ یک همسایگی عدد ۲ می باشد؟

- (۱) $(-2, 2)$ (۲) $(-1, 2)$ (۳) $(-2, 1)$ (۴) $\emptyset$

پاسخ: گزینه ۲ (آسان - خط به خط - سریع) - حسابان ۱ صفحه ۱۱۸ - ۱۱۰۵

بازه $(x^2 - 2, 3x + 5)$ یک همسایگی عدد ۲ است، پس:

$$2 \in (x^2 - 2, 3x + 5) \Rightarrow x^2 - 2 < 2 < 3x + 5$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2 < 2 \Rightarrow x^2 < 4 \Rightarrow -2 < x < 2 \\ 3x + 5 > 2 \Rightarrow 3x > -3 \Rightarrow x > -1 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} x \in (-1, 2)$$

همسایگی یک نقطه

هر بازه باز مانند (a, b) که شامل نقطه x است، را یک همسایگی از x می گویند.



۲- اجتماع بازه های $(2, a+b)$ و $(4a-b, 7)$ یک همسایگی محذوف عدد ۵ است. بازه (a, b) یک همسایگی کدام عدد است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{5}{2}$ (۴) $\frac{7}{2}$

پاسخ: گزینه ۳ (آسان - مفهومی - سریع) - حسابان ۱ صفحه ۱۱۸ - ۱۱۰۵

می دانیم که یکی از مدل های نمایش همسایگی محذوف عدد x_0 به صورت $(x_0, b) \cup (a, x_0)$ است، پس:

$$(2, a+b) \cup (4a-b, 7) = (2, 7) - \{5\} = (2, 5) \cup (5, 7)$$

بنابراین با مقایسه $(2, a+b) \cup (4a-b, 7)$ و $(2, 5) \cup (5, 7)$ خواهیم داشت:

$$\begin{cases} a+b=5 \\ 4a-b=5 \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} \begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases} \Rightarrow (a, b) = (2, 3)$$

بازه $(2, 3)$ یک همسایگی عدد $\frac{5}{2}$ است.

همسایگی محذوف

اگر $x_0 \in (a, b)$ ، آنگاه (a, b) یک همسایگی از x_0 و $(a, b) - \{x_0\}$ یک همسایگی محذوف از x_0 است که آن را به صورت $(a, x_0) \cup (x_0, b)$ هم می توان نمایش داد.



۳- اگر توابع f و g در نقطه $x=2$ حد داشته باشند و $\lim_{x \rightarrow 2} (f+2g)(x) = 9$ و $\lim_{x \rightarrow 2} (f-g)(x) = 3$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} (f^2 - g^2)(x)$ کدام است؟

۲۱ (۴)

۲۳ (۳)

۲۵ (۲)

۲۷ (۱)

(آسان - مفهومی - استاندارد) - حسابان ۱ صفحه ۱۳۳ - ۱۱۰۵

پاسخ: گزینه ۴

فرض می کنیم که:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = a \\ \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = b \end{cases}$$

از طرفی بنا بر فرض داریم:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2} (f+2g)(x) = 9 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) + 2 \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 9 \Rightarrow a + 2b = 9 \\ \lim_{x \rightarrow 2} (f-g)(x) = 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) - \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 3 \Rightarrow a - b = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + 2b = 9 \\ a - b = 3 \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} \begin{cases} a = 5 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5 \\ b = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 2 \end{cases}$$

حال به سراغ خواسته سوال می رویم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (f^2 - g^2)(x) = (\lim_{x \rightarrow 2} f(x))^2 - (\lim_{x \rightarrow 2} g(x))^2 = 5^2 - 2^2 = 25 - 4 = 21$$

قضایای حد

اگر توابع f و g در $x=a$ دارای حد باشند، آن گاه:

(۱) **حد مجموع (تفاضل) دو تابع** در یک نقطه برابر است با **مجموع (تفاضل) حدهای دو تابع** در آن نقطه. یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f \pm g) = (\lim_{x \rightarrow a} f) \pm (\lim_{x \rightarrow a} g)$$

(۲) **حد حاصل ضرب دو تابع** در یک نقطه برابر است با **حاصل ضرب حدهای دو تابع** در آن نقطه. یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow a} (fg) = (\lim_{x \rightarrow a} f)(\lim_{x \rightarrow a} g)$$

(۳) **حد k برابر تابع** در یک نقطه برابر است با **k برابر حد تابع** در آن نقطه. یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow a} (kf) = k(\lim_{x \rightarrow a} f)$$

(۴) **حد تقسیم دو تابع** در یک نقطه برابر است با **تقسیم حدهای دو تابع** در آن نقطه. یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f}{g} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f}{\lim_{x \rightarrow a} g}; \lim_{x \rightarrow a} g \neq 0$$

۴- اگر $\lim_{x \rightarrow 2} (3x - \frac{f(x+2)}{x^2-1}) = 5$ باشد، آن گاه مقدار $\lim_{x \rightarrow 1} (x + \frac{f(2x+2)}{x})$ کدام است؟

(۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

آسان - محاسباتی - سریع - حسابان ۱ صفحه ۱۳۲ - ۱۱۰۵

پاسخ: گزینه ۱

به کمک قضایای حد خواهیم داشت:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (3x - \frac{f(x+2)}{x^2-1}) = 5 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} (3x) - \frac{\lim_{x \rightarrow 2} f(x+2)}{\lim_{x \rightarrow 2} (x^2-1)} = 5$$

$$\Rightarrow 3(2) - \frac{\lim_{x \rightarrow 2} f(x+2)}{(2)^2-1} = 5 \xrightarrow[t \rightarrow 4]{x+2=t} \frac{\lim_{t \rightarrow 4} f(t)}{3} = 1 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 4} f(t) = 3 \quad (*)$$

حال به سراغ خواسته سؤال می‌رویم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x + \frac{f(2x+2)}{x}) = \lim_{x \rightarrow 1} x + \frac{\lim_{x \rightarrow 1} f(2x+2)}{\lim_{x \rightarrow 1} x} = 1 + \frac{\lim_{x \rightarrow 1} f(2x+2)}{1}$$

اگر $x \rightarrow 1$ ، آن گاه $2x+2 \rightarrow 4$ ، بنابراین اگر $2x+2 = t$ را فرض کنیم، داریم:

$$\lim_{t \rightarrow 4} (1 + \lim_{t \rightarrow 4} f(t)) = 1 + 3 = 4 \quad (*)$$



۵- حاصل $\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{|\sin x|}{\sin x} - \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \frac{\cos x}{|\cos x|}$ کدام است؟

(۱) صفر (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) -۲

آسان - مفهومی - سریع - حسابان ۱ صفحه ۱۳۷ - ۱۱۰۵

پاسخ: گزینه ۳

بررسی سریع:

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{|\sin x|}{\sin x} - \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \frac{\cos x}{|\cos x|} = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\sin x}{\sin x} - \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \frac{\cos x}{-\cos x} = 1 - (-1) = 2$$

حاصل هر یک از حدها را به صورت جداگانه مورد بررسی قرار می‌دهیم:

$$x \rightarrow \pi^- \Rightarrow x \in (\frac{\pi}{2}, \pi) \Rightarrow \sin x > 0 \Rightarrow |\sin x| = \sin x$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{x \text{ در ربع دوم است}}$

پس:

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{|\sin x|}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\sin x}{\sin x} = 1$$

از طرفی:

$$x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+ \Rightarrow x \in (\frac{\pi}{2}, \pi) \Rightarrow \cos x < 0 \Rightarrow |\cos x| = -\cos x$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{x \text{ در ربع دوم است}}$

پس:

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \frac{\cos x}{|\cos x|} = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \frac{\cos x}{(-\cos x)} = -1$$

در نتیجه حاصل حد خواسته شده برابر است با:

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{|\sin x|}{\sin x} - \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \frac{\cos x}{|\cos x|} = 1 - (-1) = 2$$

قلقلش رو یاد بگیر!

برای محاسبه حد توابع **شامل قدرمطلق**، ابتدا با توجه به همسایگی‌ای که حدگیری در آن انجام می‌شود، علامت عبارت داخل قدرمطلق را مشخص می‌کنیم و با توجه به آن قدرمطلق را برمی‌داریم و حد تابع حاصل را به دست می‌آوریم.



۶- حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x[x] + |x-1|}{x + [1-x] - 1}$ کدام است؟ ([] علامت جزء صحیح است.)

(۴) -۲

(۳) ۲

(۲) -۱

(۱) ۱

(آسان - مفهومی - سریع) - حسابان ۱ صفحه ۱۳۸ - ۱۱۰۵

پاسخ: گزینه ۲

بررسی سریع:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x[x] + |x-1|}{x + [1-x] - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x(0) + 1-x}{x + 0 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1-x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x-1)}{x-1} = -1$$

می‌دانیم که $x \rightarrow 1^-$ میل می‌کند، بنابراین ابتدا با توجه به این موضوع، قدرمطلق را تعیین علامت و جزء صحیح را تعیین مقدار می‌کنیم. چون با مقادیر x کوچک‌تر از ۱ به سمت ۱ میل می‌کنیم می‌توانیم به‌طور مثال همسایگی چپ (۱، ۰) از ۱ را در نظر بگیریم:

$$x \rightarrow 1^- : 0 < x < 1 \Rightarrow \begin{cases} [x] = [1^-] = 0 \\ -1 < x-1 < 0 \Rightarrow |x-1| = -(x-1) = 1-x \\ -1 < -x < 0 \Rightarrow 0 < 1-x < 1 \Rightarrow [1-x] = [0^+] = 0 \end{cases}$$

بنابراین حاصل حد برابر است با:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x[x] + |x-1|}{x + [1-x] - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x(0) + 1-x}{x + 0 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1-x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x-1)}{x-1} = -1$$

قلقلش رو یاد بگیر!

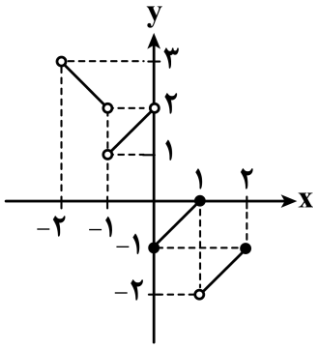
برای محاسبه حد توابع **شامل جزء صحیح**، با توجه به همسایگی‌ای که حدگیری در آن انجام می‌شود، مقدار عبارت داخل جزء صحیح را مشخص می‌کنیم و سپس از تابع حاصل حد می‌گیریم.

توجه!

صفر به دست آمده از براکت‌ها **صفر مطلق** است، نه صفر حدی.



۷- با توجه به نمودار تابع f در شکل‌های مقابل، حاصل $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(-x) + \lim_{x \rightarrow 0^-} f(|x|) + \lim_{x \rightarrow 1^+} f(2-x)$ کدام است؟



- (۱) ۱
(۲) -۱
(۳) ۳
(۴) -۳

(متوسط - مفهومی - استاندارد) حسابان ۱ صفحه ۱۲۵ - ۱۱۰۵

پاسخ: گزینه ۴

بررسی سریع:

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(-x) + \lim_{x \rightarrow 0^-} f(|x|) + \lim_{x \rightarrow 1^+} f(2-x) \\ &= \lim_{t \rightarrow 1^+} f(t) + \lim_{x \rightarrow 0^-} f(-x) + \lim_{s \rightarrow 1^-} f(s) \\ &= -2 - 1 + 0 = -3 \end{aligned}$$

ابتدا به محاسبه هر یک از حدها می‌پردازیم:

$$x \rightarrow (-1)^- : x < -1 \Rightarrow -x > 1 \Rightarrow (-x) \rightarrow 1^+$$

پس اگر $x \rightarrow (-1)^-$ ، آن‌گاه $(-x) \rightarrow 1^+$ میل می‌کند، حال اگر $-x$ را برابر t فرض کنیم، داریم:

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(-x) = \lim_{t \rightarrow 1^+} f(t) = -2$$

از طرف دیگر برای حد دوم، خواهیم داشت:

$$x \rightarrow 0^- : \begin{cases} x < 0 \Rightarrow |x| = -x \\ -x > 0 \Rightarrow (-x) \rightarrow 0^+ \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(|x|) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(-x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = -1$$

در نهایت در حد سوم داریم:

$$x \rightarrow 1^+ : x > 1 \Rightarrow -x < -1 \Rightarrow 2-x < 1 \Rightarrow (2-x) \rightarrow 1^-$$

حال اگر $2-x$ را برابر t فرض کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(2-x) = \lim_{t \rightarrow 1^-} f(t) = 0$$

در نتیجه حاصل حد خواسته شده برابر است با:

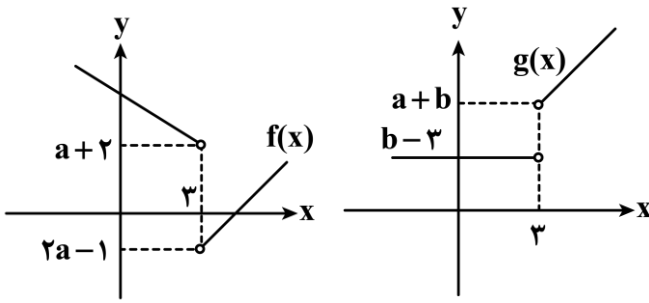
$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(-x) + \lim_{x \rightarrow 0^-} f(|x|) + \lim_{x \rightarrow 1^+} f(2-x) = -2 - 1 + 0 = -3$$

یه نکته طلایی!

اگر $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$ باشد، آن‌گاه:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = \lim_{x \rightarrow b} f(x)$$

۸- با توجه به نمودار توابع f و g در شکل مقابل، اگر $\lim_{x \rightarrow 3} (f(x) + g(x)) = 4$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ کدام است؟



- (۱) $\frac{1}{2}$
 (۲) $-\frac{1}{2}$
 (۳) $\frac{1}{5}$
 (۴) $-\frac{1}{5}$

(متوسط - مفهومی/محاسباتی - استاندارد) حسابان ۱ صفحه ۱۳۳ - ۱۱۰۵

پاسخ: گزینه ۴

می‌دانیم که $\lim_{x \rightarrow 3} (f(x) + g(x)) = 4$ ، پس با بررسی هر کدام از حدهای راست و چپ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} (f(x) + g(x)) = 4 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 3^+} g(x) = 4 \Rightarrow (2a - 1) + (a + b) = 4 \Rightarrow 3a + b = 5 \quad (۱)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} (f(x) + g(x)) = 4 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) = 4 \Rightarrow (a + 2) + (b - 3) = 4 \Rightarrow a + b = 5 \quad (۲)$$

همچنین:

$$\begin{cases} 3a + b = 5 \\ a + b = 5 \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} \begin{cases} a = 0 \\ b = 5 \end{cases}$$

بنابراین حاصل حد خواسته شده برابر است با:

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)}{\lim_{x \rightarrow 3^+} g(x)} = \frac{2a - 1}{a + b} = \frac{a=0}{b=5} = -\frac{1}{5}$$



۹- تابع $f(x) = \begin{cases} x - [x] & \text{زوج} \\ [x] - x + 1 & \text{فرد} \end{cases}$ در بازه $(0, 5)$ در چند نقطه حد ندارد؟ ([] علامت جزء صحیح است.)

- (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) صفر

(متوسط - مفهومی - استاندارد) حسابان ۱ صفحه ۱۲۶ - ۱۱۰۵

پاسخ: گزینه ۴

ابتدا ضابطه f را ساده‌تر می‌کنیم و نمودار تابع f را رسم می‌کنیم:

$$0 < x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \text{ (زوج)} \xrightarrow{\text{ضابطه بالایی}} f(x) = x$$

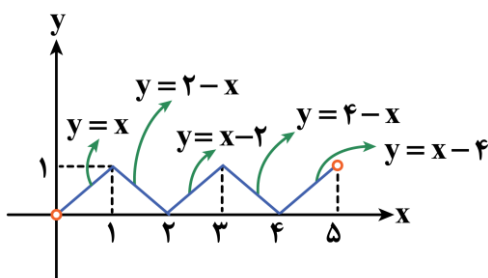
$$1 \leq x < 2 \Rightarrow [x] = 1 \text{ (فرد)} \xrightarrow{\text{ضابطه پایینی}} f(x) = 1 - x + 1 = 2 - x$$

$$2 \leq x < 3 \Rightarrow [x] = 2 \text{ (زوج)} \xrightarrow{\text{ضابطه بالایی}} f(x) = x - 2$$

$$3 \leq x < 4 \Rightarrow [x] = 3 \text{ (فرد)} \xrightarrow{\text{ضابطه پایینی}} f(x) = 3 - x + 1 = 4 - x$$

$$4 \leq x < 5 \Rightarrow [x] = 4 \text{ (زوج)} \xrightarrow{\text{ضابطه بالایی}} f(x) = x - 4$$

حال نمودار f را رسم می‌کنیم:



با توجه به نمودار تابع f ، این تابع در تمام نقاط بازه $(0, 5)$ حد دارد. پس هیچ نقطه‌ای در این بازه نیست که تابع در آن حد نداشته باشد.



۱۰- حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{24}} \frac{\tan x + \cot x}{\cos 2x}$ کدام است؟

$$\frac{8}{\sqrt{3}} \quad (۴)$$

$$\frac{4}{\sqrt{3}} \quad (۳)$$

$$۸ \quad (۲)$$

$$۴ \quad (۱)$$

(متوسط - ترکیبی/محاسباتی - استاندارد) - حسابان ۱ صفحه ۱۳۷ - ۱۱۰۵

پاسخ: گزینه ۲

ابتدا به کمک روابط مثلثاتی حاصل $\tan x + \cot x$ را به صورت زیر بازنویسی می کنیم:

$$\tan x + \cot x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\frac{1}{2} \sin 2x} = \frac{2}{\sin 2x}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{24}} \frac{\tan x + \cot x}{\cos 2x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{24}} \frac{\frac{2}{\sin 2x}}{\cos 2x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{24}} \frac{2}{\sin 2x \cos 2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{24}} \frac{2}{\frac{1}{2} \sin 4x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{24}} \frac{4}{\sin 4x} = \frac{4}{\sin(4 \times \frac{\pi}{24})} = \frac{4}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{4}{\frac{1}{2}} = 8 \end{aligned}$$

بنابراین حاصل حد برابر است با:



۱۱- اگر $f(x) = \begin{cases} \cos(\pi[-2x]) & ; x > 0 \\ \frac{\sin|x|}{x} + \frac{\sin x}{|x|} & ; x < 0 \end{cases}$ باشد، مجموع حد چپ و حد راست تابع f در $x = 0$ کدام است؟ [علامت جزء صحیح است.]

$$۳ \quad (۴)$$

$$۱ \quad (۳)$$

$$-۱ \quad (۲)$$

$$-۳ \quad (۱)$$

(متوسط - مفهومی - استاندارد) - حسابان ۱ صفحه ۱۲۷ - ۱۱۰۵

پاسخ: گزینه ۱

حد چپ و حد راست f را در $x = 0$ محاسبه می کنیم.

محاسبه حد راست در $x = 0$: وقتی $x \rightarrow 0^+$ ، چون $x > 0$ از ضابطه بالایی پیروی می کنیم:

$$\begin{aligned} x \rightarrow 0^+ : 2x \rightarrow 0^+ \Rightarrow -2x \rightarrow 0^- \Rightarrow [-2x] &= \left[0^- \right] = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \cos(\pi \underbrace{[-2x]}_{-1}) = \cos(-\pi) = \cos \pi = -1 \end{aligned}$$

محاسبه حد چپ در $x = 0$: وقتی $x \rightarrow 0^-$ ، چون $x < 0$ از ضابطه پایینی پیروی می کنیم:

$$\begin{aligned} x \rightarrow 0^- : x < 0 \Rightarrow |x| &= -x \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\sin|x|}{x} + \frac{\sin x}{|x|} \right) \stackrel{|x|=-x}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\sin(-x)}{x} + \frac{\sin x}{-x} \right) \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= -2 \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = -2(1) = -2 \end{aligned}$$

بنابراین خواسته سؤال برابر است با:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1 - 2 = -3$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1$$



۱۲- حاصل کدام یک از حدهای زیر، موجود نیست؟ ([] علامت جزء صحیح است.)

$$\begin{aligned} (۱) \quad & \lim_{x \rightarrow 0^-} (|x| + [x]) \\ (۲) \quad & \lim_{x \rightarrow 0^+} \tan([x]) \\ (۳) \quad & \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} [\cos x] \\ (۴) \quad & \lim_{x \rightarrow 2^-} \log(1 - [x]) \end{aligned}$$

(متوسط - مفهومی/ترکیبی - استاندارد) - حسابان ۱ صفحه ۱۳۷ - ۱۱۰۵

پاسخ: گزینه ۴

بررسی گزینه ها:

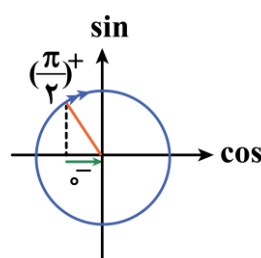
$$\begin{aligned} x \rightarrow 0^- : & \begin{cases} x < 0 \Rightarrow |x| = -x \Rightarrow [x] = [-x] \stackrel{-x > 0}{=} [0^+] = 0 \\ [x] = [0^-] = -1 \end{cases} \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} (|x| + [x]) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} |x| + \lim_{x \rightarrow 0^-} [x] = 0 + (-1) = -1 \end{aligned}$$

۱

$$\begin{aligned} x \rightarrow 0^+ : [x] &= [0^+] = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \tan([x]) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \tan(0) = 0 \end{aligned}$$

۲

$$\begin{aligned} x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+ : \cos x &\rightarrow 0^- \Rightarrow [\cos x] = [0^-] = -1 \\ \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} [\cos x] &= -1 \end{aligned}$$



۳

$$\begin{aligned} x \rightarrow 2^- : [x] &= [2^-] = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} \log(1 - [x]) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \log(0) \Rightarrow \text{وجود ندارد} \end{aligned}$$

۴



۱۳- اگر $f(x) = \begin{cases} 5 - [x] & ; x \leq -2 \\ 2[x] - 1 & ; x > -2 \end{cases}$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x^2 - 2) + \lim_{x \rightarrow 0^+} f(-2 - x^2)$ کدام است؟ ([] علامت جزء صحیح است.)

(۱) -۴ (۲) -۳ (۳) ۳ (۴) ۴

متوسط - مفهومی - استاندارد (۱) - حسابان ۱ صفحه ۱۲۷ - ۱۱۰۵

پاسخ: گزینه ۳

بررسی سریع:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x^2 - 2) = \lim_{t \rightarrow (-2)^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow (-2)^+} (2[t] - 1) = -5$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(-2 - x^2) = \lim_{t \rightarrow (-2)^-} f(t) = \lim_{t \rightarrow (-2)^-} (5 - [t]) = 5 - [(-2)^-] = 5 - (-3) = 8$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x^2 - 2) + \lim_{x \rightarrow 0^+} f(-2 - x^2) = -5 + 8 = 3$$

حاصل هر یک از حدها را به صورت جداگانه محاسبه می کنیم:

$$x \rightarrow 0^- \Rightarrow x^2 \rightarrow 0^+ \Rightarrow x^2 - 2 \rightarrow (-2)^+$$

حال اگر $x^2 - 2 = t$ را فرض کنیم، خواهیم داشت:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x^2 - 2) = \lim_{t \rightarrow (-2)^+} f(t) \xrightarrow{\text{ضابطه پایینی}} \lim_{t \rightarrow (-2)^+} (2[t] - 1) = 2[(-2)^+] - 1 = 2(-2) - 1 = -5$$

به سراغ حد دوم می رویم:

$$x \rightarrow 0^+ \Rightarrow x^2 \rightarrow 0^+ \Rightarrow -x^2 \rightarrow 0^- \Rightarrow -2 - x^2 \rightarrow (-2)^-$$

اگر $-2 - x^2 = t$ را برابر فرض کنیم، داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(-2 - x^2) = \lim_{t \rightarrow (-2)^-} f(t) \xrightarrow{\text{ضابطه بالایی}} \lim_{t \rightarrow (-2)^-} (5 - [t]) = 5 - [(-2)^-] = 5 - (-3) = 8$$

در نتیجه حاصل خواسته شده برابر است با:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x^2 - 2) + \lim_{x \rightarrow 0^+} f(-2 - x^2) = -5 + 8 = 3$$

•••

۱۴- اگر $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1} & ; x \geq 1 \\ x+3 & ; x < 1 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} 4+2^{x-1} & ; x \geq 1 \\ f(2x-1)+1 & ; x < 1 \end{cases}$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} f(g(x))$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) وجود ندارد.

سخت - ترکیبی/محاسباتی - استاندارد (۱) - حسابان ۱ صفحه ۱۳۵ - ۱۱۰۵

پاسخ: گزینه ۲

بررسی سریع:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(g(x)) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(\overbrace{4+2^{x-1}}^t) = \lim_{t \rightarrow 5^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow 5^+} \sqrt{t-1} = \sqrt{4} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(g(x)) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(f(2x-1)+1) = \lim_{k \rightarrow 1^-} f(f(k)+1) = \lim_{k \rightarrow 1^-} f(\overbrace{(k+3)+1}^t)$$

$$= \lim_{t \rightarrow 5^-} f(t) = \lim_{t \rightarrow 5^-} \sqrt{t-1} = \sqrt{4} = 2$$

پس حاصل حد برابر با ۲ است.

برای محاسبه $\lim_{x \rightarrow 1} f(g(x))$ ، ابتدا از تابع درونی شروع می‌کنیم:

گام اول

محاسبه حد راست در $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (4 + 2^{x-1}) = 4 + 2^{1-1} = 4 + 2^0 = 5$$

بنابراین اگر $x \rightarrow 1^+$ ، آن‌گاه $g(x) \rightarrow 5^+$ ، حال اگر $g(x)$ را برابر t فرض کنیم، خواهیم داشت:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(g(x)) = \lim_{t \rightarrow 5^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow 5^+} \sqrt{t-1} = \sqrt{4} = 2$$

گام دوم

محاسبه حد چپ در $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (f(2x-1) + 1)$$

توجه داشته باشد که اگر $x \rightarrow 1^-$ ، آن‌گاه $(2x-1) \rightarrow 1^-$ میل خواهد کرد، بنابراین در تابع f از ضابطه پایین استفاده می‌کنیم، پس اگر $2x-1 = k$ فرض کنیم، داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (f(2x-1) + 1) = \lim_{k \rightarrow 1^-} f(k) + 1 = \lim_{k \rightarrow 1^-} (k+3) + 1 = (1+3) + 1 = 5$$

بنابراین اگر $x \rightarrow 1^-$ ، آن‌گاه $g(x) \rightarrow 5^-$ ، حال اگر $g(x)$ را برابر t فرض کنیم، خواهیم داشت:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(g(x)) = \lim_{t \rightarrow 5^-} f(t) = \lim_{t \rightarrow 5^-} \sqrt{t-1} = \sqrt{4} = 2$$

گام سوم

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(g(x)) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(g(x)) = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(g(x)) = 2$$

بنابراین:



۱۵- اگر $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 4}{f(x)} = 4$ باشد، آن‌گاه ضابطه تابع f کدام یک از گزینه‌های زیر می‌تواند باشد؟ ([] علامت جزء صحیح است.)

$$y = \frac{\sin(-x)}{x} \quad (۴) \quad y = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & ; x < 0 \\ \frac{|x|}{x} & ; x > 0 \end{cases} \quad (۳) \quad y = (-1)^{[x]+1} \quad (۲) \quad y = \sqrt{x} - \sqrt{x} - 1 \quad (۱)$$

(متوسط - مفهومی - استاندارد) - حسابان ۱ صفحه ۱۳۲ - ۱۱۰۵

پاسخ: گزینه ۴

با استفاده از قضایای حد داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 4}{f(x)} = 4 \Rightarrow \frac{\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - 4)}{\lim_{x \rightarrow 0} f(x)} = 4 \Rightarrow \frac{-4}{\lim_{x \rightarrow 0} f(x)} = 4 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$$

حال به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم. ببینیم حد کدام تابع در صفر برابر با (-1) است.

بررسی گزینه‌ها:

۱) ابتدا دامنه تابع را تعیین می‌کنیم:

$$y = \sqrt{x} - \sqrt{x} - 1$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x - \sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow x \geq \sqrt{x} \Rightarrow x^2 \geq x \Rightarrow x^2 - x \geq 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} x \leq 0 \cup x \geq 1$$

اشتراک مجموعه جواب‌های به دست آمده برای x به صورت $\{0\} \cup [1, +\infty)$ خواهد بود و چون این تابع در همسایگی $x=0$ تعریف نمی‌شود، بنابراین در $x=0$ حد ندارد.

۲

$$y = (-1)^{[x]+1}$$

حد چپ و حد راست این تابع را در $x=0$ بررسی می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (-1)^{[x]+1} = (-1)^{[0^+]+1} = (-1)^1 = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (-1)^{[x]+1} = (-1)^{[0^-]+1} = (-1)^{-1+1} = (-1)^0 = 1$$

حد چپ و راست برابر نیستند، بنابراین در $x=0$ حد ندارد.

۳

حد چپ و حد راست این تابع را در $x=0$ بررسی می‌کنیم. توجه داشته باشید که برای محاسبه **حد راست** از **ضابطه پایین** و برای محاسبه **حد چپ** از **ضابطه بالا** استفاده می‌کنیم.

$$y = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & ; x < 0 \\ \frac{|x|}{x} & ; x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \rightarrow 0^+ : |x| = x \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1 \\ x \rightarrow 0^- : |x| = -x \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{-x} = -1 \end{cases} \Rightarrow \text{در } x=0 \text{ حد ندارد}$$

۴

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(-x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{x} = - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = -1 \quad \checkmark$$

پس حد تابع $y = \frac{\sin(-x)}{x}$ در $x=0$ برابر با -1 است.

تذکره!

می‌توانستیم ضابطه تابع در گزینه ۳ را ساده کنیم:

$$y = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & ; x < 0 \\ \frac{|x|}{x} & ; x > 0 \end{cases} \Rightarrow y = \begin{cases} \frac{x}{-x} & ; x < 0 \\ \frac{x}{x} & ; x > 0 \end{cases} \Rightarrow y = \begin{cases} -1 & ; x < 0 \\ 1 & ; x > 0 \end{cases}$$

پس در $x=0$ حد چپ برابر با (-1) و حد راست برابر با 1 است.



۱۶- نمودار تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ از نقاط $(0, 2)$ و $(1, 0)$ عبور کرده و محور تقارن آن $x = -1$ است. اگر $g(x) = x + 3$ باشد،

مقدار $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(f \circ g)(x) - 2}{g^{-1}(x - 2)}$ کدام است؟

$$\frac{9}{2} \quad (4)$$

$$4 \quad (3)$$

$$\frac{7}{2} \quad (2)$$

$$3 \quad (1)$$

(سخت - ترکیبی/محاسباتی - زمان بر) - حسابان ۱ صفحه ۱۳۴ - ۱۱۰۵

پاسخ: گزینه ۳

ابتدا ضابطه تابع f را به دست می آوریم:

$$x_S = -1 \Rightarrow -\frac{b}{2a} = -1 \Rightarrow b = 2a$$

$$(0, 2) \in f \Rightarrow a(0)^2 + b(0) + c = 2 \Rightarrow c = 2$$

$$(1, 0) \in f \Rightarrow a + b + c = 0 \xrightarrow[\substack{b=2a \\ c=2}]{\quad} a + 2a + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{2}{3} \\ b = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

در نتیجه ضابطه تابع f به صورت $f(x) = -\frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + 2$ است. اکنون به محاسبه حد تابع $f \circ g(x)$ در $x = 1$ می پردازیم.

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 3) = 4 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(g(x)) = \lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} \left(-\frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + 2\right) = -\frac{32}{3} - \frac{16}{3} + 2 = -14$$

به کمک ضابطه تابع g ، ضابطه وارون آن را پیدا کرده و خواهیم داشت:

$$g(x) = x + 3 \Rightarrow y = x + 3 \Rightarrow x = y - 3 \Rightarrow g^{-1}(x) = x - 3$$

حال به سراغ خواسته سؤال می رویم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(f \circ g)(x) - 2}{g^{-1}(x - 2)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} f(g(x)) - 2}{\lim_{x \rightarrow 1} g^{-1}(x - 2)} = \frac{-14 - 2}{\lim_{x \rightarrow 1} (x - 2 - 3)} = \frac{-16}{-4} = 4$$



۱۷- تابع با ضابطه $f(x) = a \left[\frac{1-x}{3} \right] + b \left[\frac{2x-1}{5} \right]$ در نقطه $x = -2$ حد دارد. اگر $a + b = \frac{-1}{4}$ باشد، حاصل $[b]$ کدام است؟ $[]$ علامت

(جزء صحیح است.)

$$-2 \quad (4)$$

$$2 \quad (3)$$

$$1 \quad (2)$$

$$-1 \quad (1)$$

(سخت - مفهومی/محاسباتی - زمان بر) - حسابان ۱ صفحه ۱۲۶ - ۱۱۰۵

پاسخ: گزینه ۱

بررسی سریع:

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = a \left[\frac{1 - (-2)^+}{3} \right] + b \left[\frac{2(-2)^+ - 1}{5} \right] = a \left[1^- \right] + b \left[(-1)^+ \right] = -b$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = a \left[\frac{1 - (-2)^-}{3} \right] + b \left[\frac{2(-2)^- - 1}{5} \right] = a \left[1^+ \right] + b \left[(-1)^- \right] = a - 2b$$

$$a - 2b = -b \Rightarrow a = b \xrightarrow[\substack{a+b=-\frac{1}{4}}]{\quad} a = b = -\frac{1}{4}$$

چون حد راست و چپ تابع در $x = -2$ برابرند، پس:

$$[b] = \left[-\frac{1}{4} \right] = -1$$

می‌دانیم که تابع f در نقطه $x = -2$ حد دارد، بنابراین $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x)$ است، پس حد چپ و راست f در $x = -2$ را مساوی هم قرار می‌دهیم.

♦ محاسبه حد راست در $x = -2$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \left(a \left[\frac{1-x}{3} \right] + b \left[\frac{2x-1}{5} \right] \right) = a \left[\frac{1-(-2)^+}{3} \right] + b \left[\frac{2(-2)^+ - 1}{5} \right] \\ &= a \left[\frac{3^-}{3} \right] + b \left[\frac{(-5)^+}{5} \right] = a \left[1^- \right] + b \left[(-1)^+ \right] = a(0) + b(-1) = -b \end{aligned}$$

♦ محاسبه حد چپ در $x = -2$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \left(a \left[\frac{1-x}{3} \right] + b \left[\frac{2x-1}{5} \right] \right) = a \left[\frac{1-(-2)^-}{3} \right] + b \left[\frac{2(-2)^- - 1}{5} \right] \\ &= a \left[\frac{3^+}{3} \right] + b \left[\frac{(-5)^-}{5} \right] = a \left[1^+ \right] + b \left[(-1)^- \right] = a(1) + b(-2) = a - 2b \end{aligned}$$

می‌دانیم که $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x)$ است، پس:

$$-b = a - 2b \Rightarrow b = a$$

از طرفی بنا بر فرض $a + b = \frac{-1}{4}$ است، در نتیجه $a = b = -\frac{1}{8}$ بوده و $[b]$ برابر است با:

$$[b] = \left[-\frac{1}{8} \right] = -1$$



۱۸- با فرض $f(x) = \sin^2 x$ ، حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} [f(x)] - \left[\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) \right]$ کدام است؟ ([] علامت جزء صحیح است)

(۴) صفر (۳) -۱ (۲) ۱ (۱) ۲

(متوسط - مفهومی/ترکیبی - استاندارد) - حسابان ۱ صفحه ۱۳۷ - ۱۱۰۵

پاسخ: گزینه ۳

ابتدا به محاسبه حد قسمت اول می‌پردازیم:

$$x \rightarrow \frac{\pi}{2} : \sin x \rightarrow 1^- \Rightarrow \sin^2 x \rightarrow 1^-$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} [\sin^2 x] = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} [1^-] = 0$$

در نتیجه:

حال به سراغ محاسبه حد قسمت دوم می‌رویم:

$$\left[\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) \right] = \left[\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin^2 x \right] = [1] = 1$$

در نتیجه حاصل خواسته شده برابر است با:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} [f(x)] - \left[\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) \right] = 0 - 1 = -1$$

دام تستی!

اگر $\left[\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) \right]$ را مشابه $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} [f(x)]$ برابر با صفر به دست آورید، حاصل عبارت صفر به دست می آید و به گزینه «۴» می رسید.



۱۹- با فرض $f(x) = \frac{x-a}{\sqrt{x+1}}$ ، اگر $\lim_{x \rightarrow 3} f(f(x)) = 3$ باشد، مقدار a کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) -۲ (۴) -۳

(سخت - ترکیبی/محاسباتی - استاندارد ۵) - حسابان ۱ صفحه ۱۳۶ - ۱۱۰۵

پاسخ: گزینه ۴

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-a}{\sqrt{x+1}} = \frac{3-a}{\sqrt{3+1}} = \frac{3-a}{2}$$

ابتدا از تابع درونی شروع می کنیم:

بنابراین اگر $x \rightarrow 3$ ، آن گاه $f(x) \rightarrow \frac{3-a}{2}$ میل خواهد کرد، حال اگر $f(x)$ را برابر t فرض کنیم، خواهیم داشت:

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(f(x)) = 3 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \frac{3-a}{2}} f(t) = 3 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \frac{3-a}{2}} \frac{t-a}{\sqrt{t+1}} = 3 \Rightarrow \frac{\frac{3-a}{2} - a}{\sqrt{\frac{3-a}{2} + 1}} = 3$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{3-3a}{2}}{\sqrt{\frac{5-a}{2}}} = 3 \xrightarrow{\div 3} \frac{1-a}{\sqrt{\frac{5-a}{2}}} = 1 \Rightarrow 1-a = \sqrt{\frac{5-a}{2}} \quad (*)$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} 1 - 2a + a^2 = 4\left(\frac{5-a}{2}\right) \Rightarrow a^2 - 2a + 1 = 10 - 2a \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = \pm 3$$

$$1-a \geq 0 \Rightarrow a \leq 1$$

توجه داریم که در معادله (*) داریم:

بنابراین تنها $a = -3$ قابل قبول است.

حل معادلات رادیکالی

برای حل معادله رادیکالی، کافی است دو طرف تساوی را به **توان ۲** برسانیم، سپس معادله حاصل را حل می کنیم و جواب ها را در معادله اولیه **امتحان** می کنیم.



۲۰- اگر تابع $f(x) = \begin{cases} a[2x] + \sqrt{1-x^2} + b & ; |x| \leq 1 \\ x^2 + (c+1)x + 1 & ; |x| > 1 \end{cases}$ در تمام اعداد حقیقی حد داشته باشد، مقدار $a^2 + b^2 + c^2$ کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۵ (۳) ۴ (۴) ۳

(سخت - مفهومی/محاسباتی - زمان بر ۵) - حسابان ۱ صفحه ۱۲۶ - ۱۱۰۵

پاسخ: گزینه ۲

ابتدا هر یک از ضابطه ها را به صورت جداگانه بررسی می کنیم:

$$g(x) = a[2x] + \sqrt{1-x^2} + b; |x| \leq 1 \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

♦ ضابطه بالا:

دامنه این تابع به صورت $[-1, 1]$ است که در این بازه، تابع $y = [2x]$ در نقاط به طول های $x = -\frac{1}{2}$ ، $x = 0$ و $x = \frac{1}{2}$ که عبارت داخل جزء صحیح عددی صحیح می شود، پرش دارد و در این نقاط حد چپ و حد راست با هم برابر نیستند، بنابراین برای این که تابع g در تمامی نقاط

دامنه خود حد داشته باشد باید عامل پرش از بین برود به عبارت دیگر باید $a = 0$ باشد. در این صورت $g(x) = \sqrt{1-x^2} + b$ روی دامنه خود حد دارد.

$$h(x) = x^2 + (c+1)x + 1 ; |x| > 1 \text{ (یا } x > 1 \text{ یا } x < -1)$$

♦ ضابطه پایین:

این تابع چندجمله‌ای، در تمام نقاط دامنه خود، حد دارد.

از طرفی برای این که تابع f در تمام اعداد حقیقی حد داشته باشد، باید حد چپ و حد راست تابع در نقاط مرزی $x = 1$ و $x = -1$ نیز موجود و با هم برابر باشند، پس داریم:

♦ بررسی حد چپ و راست در $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \xrightarrow{\text{ضابطه پایینی}} \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + (c+1)x + 1) = 1 + (c+1) + 1 = c+3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \xrightarrow{\text{ضابطه بالایی}} \lim_{x \rightarrow 1^-} (a[2x] + \sqrt{1-x^2} + b) \stackrel{a=0}{=} 0 + 0 + b = b$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \Rightarrow c+3 = b \quad (1)$$

♦ بررسی حد چپ و راست در $x = -1$:

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) \xrightarrow{\text{ضابطه پایینی}} \lim_{x \rightarrow (-1)^-} (x^2 + (c+1)x + 1) = 1 + (c+1)(-1) + 1 = 1-c$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) \xrightarrow{\text{ضابطه بالایی}} \lim_{x \rightarrow (-1)^+} (a[2x] + \sqrt{1-x^2} + b) \stackrel{a=0}{=} 0 + 0 + b$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) \Rightarrow 1-c = b \quad (2)$$

حال به کمک روابط (۱) و (۲) خواهیم داشت:

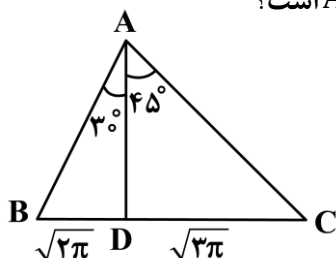
$$\begin{cases} c+3 = b \\ 1-c = b \end{cases} \Rightarrow c+3 = 1-c \Rightarrow c = -1 \xrightarrow{1-c=b} b = 2$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = (0)^2 + (2)^2 + (-1)^2 = 4 + 1 = 5$$

در نتیجه حاصل عبارت خواسته شده برابر است با:



۲۱- در شکل مقابل، مساحت دایره محیطی مثلث ADC چند درصد مساحت دایره محیطی مثلث ABD است؟



(۱) ۷۲

(۲) ۳۶

(۳) ۷۵

(۴) ۴۸

(آسان - ترکیبی - سریع) - هندسه ۲ صفحه ۶۲ - ۱۱۰۳

پاسخ: گزینه ۳

فرض کنیم شعاع دایره محیطی مثلث ADC برابر R و شعاع دایره محیطی مثلث ABD برابر R' باشد، حال به کمک قضیه سینوس‌ها داریم:

$$\triangle ADC : \frac{DC}{\sin 45^\circ} = 2R \Rightarrow \frac{\sqrt{3}\pi}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2R \Rightarrow R = \frac{\sqrt{3}\pi}{\sqrt{2}}$$

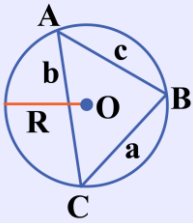
$$\triangle ABD: \frac{BD}{\sin 30^\circ} = 2R' \Rightarrow \frac{\sqrt{2}\pi}{\frac{1}{2}} = 2R' \Rightarrow R' = \sqrt{2}\pi$$

$$\frac{\text{مساحت دایره محیطی } \triangle ADC}{\text{مساحت دایره محیطی } \triangle ABD} = \frac{\pi R^2}{\pi R'^2} = \frac{R^2}{R'^2} = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}\pi}{\sqrt{2}}\right)^2}{(\sqrt{2}\pi)^2} = \frac{3\pi}{2\pi} = \frac{3}{4}$$

بنابراین:

پس نسبت مساحت‌ها برابر $\frac{3}{4} \times 100 = 75\%$ است.

 قضیه سینوس‌ها در مثلث



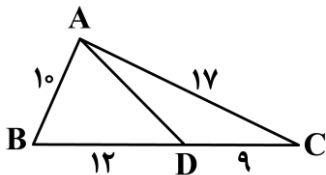
$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R$$

↓
شعاع دایره محیطی مثلث می‌باشد



۲۲- در شکل مقابل، $\cos \hat{ADC}$ برابر کدام است؟

- (۱) $-0/9$
- (۲) $-0/7$
- (۳) $-0/8$
- (۴) $-0/6$



(متوسط - مفهومی - استاندارد) - هندسه ۲ صفحه ۶۷ - ۱۱۰۳

پاسخ: گزینه ۴

 روش اول

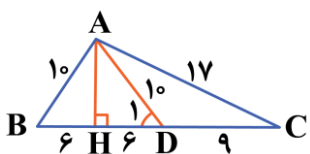
ابتدا با استفاده از قضیه استوارت طول پاره خط AD را به دست می‌آوریم. ببینید:

$$\triangle ABC: AB^2 \times DC + AC^2 \times BD = AD^2 \times BC + BD \times DC \times BC$$

$$\Rightarrow 10^2 \times 9 + 17^2 \times 12 = AD^2 \times 21 + 12 \times 9 \times 21 \xrightarrow{\div 3} 100 \times 3 + 289 \times 4 = AD^2 \times 7 + 4 \times 9 \times 21$$

$$\Rightarrow 7AD^2 = 4(25 \times 3 + 289 - 9 \times 21) \Rightarrow 7AD^2 = 4 \times 175 \Rightarrow AD^2 = 4 \times 25 \Rightarrow AD = 10$$

اکنون در مثلث متساوی‌الساقین ABD ($AB = AD = 10$)، ارتفاع AH را رسم می‌کنیم در این صورت $BH = DH = 6$ می‌باشد، پس:

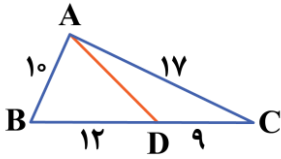


$$\triangle ADH: \cos \hat{D}_1 = \frac{DH}{AD} = \frac{6}{10}$$

چون دو زاویه $\hat{ADC}$ و $\hat{D}_1$ مکمل‌اند، در نتیجه:

$$\cos \hat{ADC} = -\cos \hat{D}_1 = -\frac{6}{10} = -0/6$$

در مثلث ABC به کمک قضیه کسینوس ها، $\cos \hat{B}$ را محاسبه می کنیم:



$$\triangle ABC: AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \times BC \times \cos \hat{B} \Rightarrow 17^2 = 10^2 + 21^2 - 2 \times 10 \times 21 \times \cos \hat{B}$$

$$\Rightarrow 289 = 100 + 441 - 420 \cos \hat{B}$$

$$\Rightarrow 420 \cos \hat{B} = 252 \Rightarrow \cos \hat{B} = \frac{252}{420} = \frac{3}{5}$$

حال به کمک قضیه کسینوس ها در مثلث ABD به محاسبه AD می پردازیم:

$$AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2AB \times BD \times \cos \hat{B} \Rightarrow AD^2 = 10^2 + 12^2 - 2 \times 10 \times 12 \times \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow AD^2 = 100 + 144 - 144 \Rightarrow AD = 10$$

اکنون در مثلث ADC سرآه محاسبه $\cos \hat{ADC}$ می رویم. بنابراین:

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2AD \times DC \times \cos \hat{ADC} \Rightarrow 17^2 = 10^2 + 9^2 - 2 \times 10 \times 9 \times \cos \hat{ADC}$$

$$\Rightarrow 289 = 100 + 81 - 180 \cos \hat{ADC} \Rightarrow 180 \cos \hat{ADC} = -108 \Rightarrow \cos \hat{ADC} = \frac{-108}{180} = -\frac{3}{5} = -0.6$$

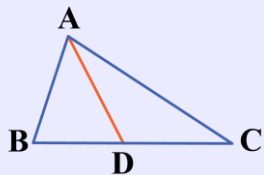
قسمتی از مسیر با روش دوم یکسان می باشد. بعد از محاسبه $\cos \hat{B} = \frac{3}{5}$ و $AD = 10$ داریم:

$$AB = AD \Rightarrow \triangle ABD \text{ متساوی الساقین است} \Rightarrow \cos \hat{ADB} = \cos \hat{ABD} = \frac{3}{5} \xrightarrow{\hat{ADB} + \hat{ADC} = 180^\circ}$$

$$\Rightarrow \cos \hat{ADC} = -\cos \hat{ADB} = -\frac{3}{5} = -0.6$$

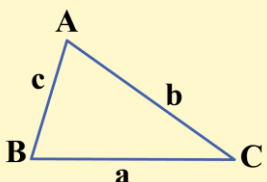
قضیه استوارت

اگر در مثلث ABC یک نقطه دلخواه مانند D روی ضلع BC در نظر گرفته شود و از رأس A به آن وصل شود، طول پاره خط AD از رابطه زیر محاسبه می شود:



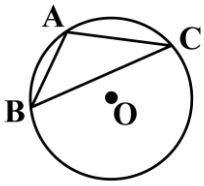
$$AB^2 \times DC + AC^2 \times BD = AD^2 \times BC + BD \times DC \times BC$$

قضیه کسینوس ها در مثلث



$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A} \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B} \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C} \end{cases}$$

۲۳- در شکل مقابل، O مرکز دایره محیطی مثلث ABC است. اگر $AB=3$ ، $AC=4$ و $S_{\triangle ABC}=3\sqrt{3}$ باشد، آنگاه مساحت این دایره



برابر کدام است؟ ($\pi \approx 3$)

- (۱) ۱۳
(۲) ۳۷
(۳) ۲۳
(۴) ۳۶

(متوسط - ترکیبی - استاندارد) - هندسه ۲ صفحه ۶۵ - ۱۱۰۳

پاسخ: گزینه ۲

در قدم اول به کمک مساحت مثلث ABC، مقدار $\sin \hat{A}$ را به دست می آوریم:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin \hat{A} \Rightarrow 3\sqrt{3} = \frac{1}{2} (3)(4) \sin \hat{A} \Rightarrow \sin \hat{A} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

پس $\hat{A} = 60^\circ$ یا $\hat{A} = 120^\circ$ می باشد. چون مرکز دایره محیطی مثلث ABC بیرون آن قرار دارد پس زاویه $\hat{A}$ منفرجه است، در نتیجه $\hat{A} = 120^\circ$ قابل قبول می باشد.

اکنون با استفاده از قضیه کسینوس ها، طول BC را به دست می آوریم:

$$\triangle ABC: BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos \hat{A} \Rightarrow BC^2 = 3^2 + 4^2 - 2(3)(4) \cos 120^\circ$$

$$\xrightarrow{\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}} BC^2 = 9 + 16 + 12 = 37 \Rightarrow BC = \sqrt{37}$$

در قدم آخر به کمک قضیه سینوس ها، شعاع دایره محیطی این مثلث یعنی R را محاسبه می کنیم.

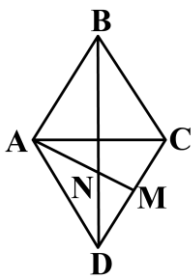
$$\triangle ABC: \frac{BC}{\sin \hat{A}} = 2R \Rightarrow \frac{\sqrt{37}}{\sin 120^\circ} = 2R \Rightarrow \frac{\sqrt{37}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2R \Rightarrow R = \frac{\sqrt{37}}{\sqrt{3}}$$

$$37 = \text{مساحت دایره محیطی} = \pi R^2 = \pi \left(\frac{37}{3}\right) \xrightarrow{\pi \approx 3} \text{مساحت دایره محیطی} = 37$$

بنابراین:



۲۴- در لوزی ABCD نقطه M وسط ضلع CD است. اگر قطر بزرگ لوزی ۳ برابر قطر کوچک آن باشد، حاصل $\frac{AB}{MN}$ برابر کدام است؟



- (۱) $2\sqrt{5}$
(۲) $2\sqrt{10}$
(۳) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$
(۴) $\frac{\sqrt{10}}{2}$

(متوسط - محاسباتی - زمان بر) - هندسه ۲ صفحه ۶۷ - ۱۱۰۳

پاسخ: گزینه ۱

روش اول

بنابر فرض سوال $BD = 3AC$ می باشد. در نظر می گیریم $AC = 2x$ ، پس $BD = 6x$ است.

چون در لوزی قطر ها عمود منصف یکدیگرند، نتیجه می گیریم $OB = 3x$ و $OA = x$ است.

پس:

$$\triangle OAB: AB^2 = OB^2 + OA^2 = 9x^2 + x^2 = 10x^2 \Rightarrow AB = x\sqrt{10}$$



از طرف دیگر با استفاده از قضیه میانه‌ها در مثلث ADC می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} \triangle ACD: \text{میانه } AM &\Rightarrow AC^2 + AD^2 = 2AM^2 + \frac{DC^2}{2} \Rightarrow (2x)^2 + (x\sqrt{10})^2 = 2AM^2 + \frac{(x\sqrt{10})^2}{2} \\ \Rightarrow 4x^2 + 10x^2 &= 2AM^2 + 5x^2 \Rightarrow AM^2 = \frac{9x^2}{2} \Rightarrow AM = \frac{3x}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

در ضمن نقطه تلاقی میانه‌ها، هر میانه را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم می‌کند، پس در مثلث ADC که N نقطه تلاقی میانه‌هاست. (وقتی دو میانه از N رد شده‌اند و می‌دانیم میانه‌ها در هر مثلث همواره هم‌رسند، پس محل هم‌رسی آن‌ها همان N است.) نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{aligned} MN &= \frac{1}{3} AM = \frac{1}{3} \left(\frac{3x}{\sqrt{2}} \right) = \frac{x}{\sqrt{2}} \\ \frac{AB}{MN} &= \frac{x\sqrt{10}}{\frac{x}{\sqrt{2}}} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

بنابراین:

روش دوم

در روش اول نتیجه گرفتیم $AB = x\sqrt{10}$ می‌باشد.
از طرف دیگر در مثلث ADC، N نقطه تلاقی میانه‌ها است، پس:

$$ON = \frac{1}{3} OD \xrightarrow{OD=OB=2x} ON = x$$

$$\triangle OAN: AN^2 = OA^2 + ON^2 = x^2 + x^2 = 2x^2 \Rightarrow AN = x\sqrt{2}$$

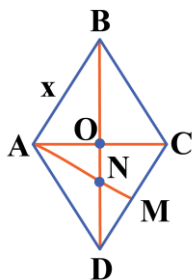
$$\triangle ACD: \text{N نقطه تلاقی میانه‌هاست} \Rightarrow MN = \frac{1}{3} AN = \frac{1}{3} (x\sqrt{2})$$

$$\frac{AB}{MN} = \frac{x\sqrt{10}}{\frac{x\sqrt{2}}{3}} = \frac{3\sqrt{10}}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{5}$$

بنابراین:

روش سوم

طول ضلع لوزی را x فرض می‌کنیم. با استفاده از قضیه کسینوس‌ها می‌نویسیم:



$$\triangle ABD: BD^2 = x^2 + x^2 - 2x^2 \cos \hat{A} = 2x^2 (1 - \cos \hat{A})$$

$$\triangle ABC: AC^2 = x^2 + x^2 - 2x^2 \cos \hat{B} = 2x^2 (1 - \cos \hat{B})$$

$$\cos \hat{A} = -\cos \hat{B}$$

توجه کنید زوایای مجاور لوزی مکمل‌اند، پس:

$$\Rightarrow \frac{BD^2}{AC^2} = \frac{2x^2 (1 - \cos \hat{A})}{2x^2 (1 - \cos \hat{B})} \Rightarrow \frac{BD^2}{AC^2} = \frac{1 - \cos \hat{A}}{1 - \cos \hat{B}} \Rightarrow \frac{BD^2}{AC^2} = \frac{1 + \cos \hat{B}}{1 - \cos \hat{B}} \Rightarrow 9 - 9 \cos \hat{B} = 1 + \cos \hat{B}$$

$$\Rightarrow 10 \cos \hat{B} = 8 \Rightarrow \cos \hat{B} = \frac{4}{5} \Rightarrow \cos \hat{D} = \frac{4}{5}$$

حال به کمک قضیه کسینوس‌ها در مثلث ADM داریم:

$$AM^2 = AD^2 + DM^2 - 2AD \times DM \times \cos \hat{D} \Rightarrow AM^2 = x^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 - 2x \times \left(\frac{x}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow AM^2 = x^2 + \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow AM^2 = \frac{5}{4}x^2 - \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow AM^2 = \left(\frac{5}{4} - \frac{1}{2}\right)x^2$$

$$\Rightarrow AM^2 = \frac{3}{4}x^2 \Rightarrow AM = \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

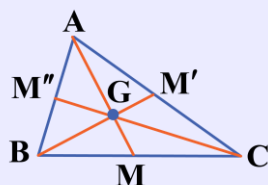
در مثلث ADC، AM و DO میانه‌های مثلث هستند. از آن جایی که نقطه N (محل برخورد میانه‌ها) طول میانه را با نسبت ۱ به ۲ تقسیم می‌کند، داریم:

$$NM = \frac{1}{3}AM = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}x \Rightarrow NM = \frac{\sqrt{3}}{6}x$$

بنابراین:

$$\frac{AB}{NM} = \frac{x}{\frac{\sqrt{3}}{6}x} = 2\sqrt{3}$$

محاسبه طول میانه‌ها در مثلث



$$4m_a^2 + \frac{a^2}{3} = b^2 + c^2$$

$$4m_b^2 + \frac{b^2}{3} = a^2 + c^2$$

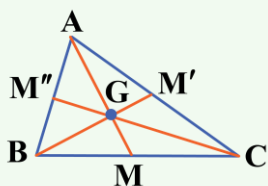
$$4m_c^2 + \frac{c^2}{3} = a^2 + b^2$$

محل برخورد میانه‌ها در مثلث را مرکز ثقل مثلث می‌گوییم.



نکته!

مرکز ثقل (G) طول هر میانه را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم می‌کند، بنابراین:



$$GM = \frac{1}{3}AM \text{ و } AG = \frac{2}{3}AM$$

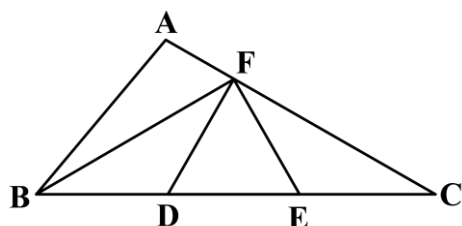
$$GM' = \frac{1}{3}BM' \text{ و } BG = \frac{2}{3}BM'$$

$$GM'' = \frac{1}{3}CM'' \text{ و } CG = \frac{2}{3}CM''$$



۲۵- در شکل مقابل نقاط D و E ضلع BC را به سه قسمت مساوی تقسیم کرده و مثلث EFD متساوی الاضلاع است. اگر $\frac{BF}{AC} = \frac{3}{4}$ و

$AB = \sqrt{7}$ باشد، آنگاه طول FC برابر کدام است؟

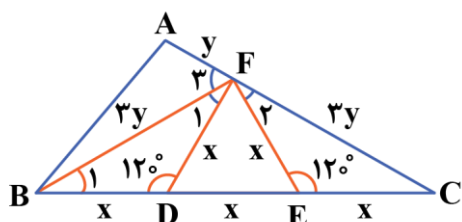


- (۱) ۱
(۲) ۳
(۳) $\frac{\sqrt{7}}{2}$
(۴) $\frac{3\sqrt{7}}{2}$

(سخت - ترکیبی - زمان ۵) - هندسه ۲ صفحه ۶۵ - ۱۱۰۳

پاسخ: گزینه ۲

در نظر می گیریم $BD = DE = EC = x$. چون مثلث DEF متساوی الاضلاع است، پس $DF = EF = x$ می باشد.



در نتیجه هر دو مثلث BDF و EFC متساوی الساقین با زاویه رأس 120° هستند، پس: $\hat{B}_1 = \hat{F}_1 = \hat{F}_2 = \hat{C} = 30^\circ$ می باشد، در نتیجه $BF = FC$ است.

از طرف دیگر:

$$\frac{BF}{AC} = \frac{3}{4} \Rightarrow BF = 3y, AC = 4y \xrightarrow{BF=FC} FC = 3y \Rightarrow AF = y$$

در ضمن:

$$\hat{F}_3 = 180^\circ - (\hat{F}_1 + \hat{DFE} + \hat{F}_2) = 180^\circ - (30^\circ + 60^\circ + 30^\circ) = 60^\circ$$

اکنون با استفاده از قضیه کسینوس ها می نویسیم:

$$\triangle ABF: AB^2 = AF^2 + BF^2 - 2AF \times BF \times \cos 60^\circ \Rightarrow (\sqrt{7})^2 = y^2 + 9y^2 - 2(y)(3y)(\frac{1}{2})$$

$$\Rightarrow 7 = 10y^2 - 3y^2 \Rightarrow 7 = 7y^2 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow FC = 3y = 3$$



۲۶- در نمودار جعبه ای مربوط به داده های زیر، ضریب تغییرات اعداد داخل جعبه، چند برابر $\sqrt{5}$ است؟

۱۰، ۵، ۱، ۹، ۵، ۴، ۷، ۱، ۱۲

$\frac{1}{15}$ (۴)

$\frac{1}{5}$ (۳)

$\frac{2}{15}$ (۲)

$\frac{2}{5}$ (۱)

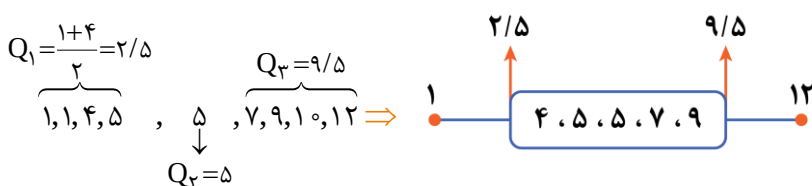
(آسان - محاسباتی - استاندارد ۵) - آمار و احتمال صفحه ۹۲ - ۱۱۰۳

پاسخ: گزینه ۲

۱، ۱، ۴، ۵، ۵، ۷، ۹، ۱۰، ۱۲

ابتدا داده ها را به صورت صعودی مرتب می کنیم:

چون تعداد داده ها ۹ تا (فرد) است میانه، داده وسط می باشد.



حال به محاسبه ضریب تغییرات داده‌های درون جعبه می‌پردازیم:

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{4+5+5+7+9}{5} = 6$$

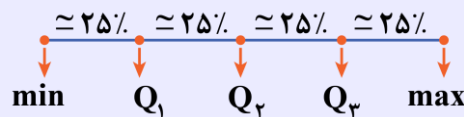
$$\Rightarrow \sigma^2 = \frac{(4-6)^2 + 2(5-6)^2 + (7-6)^2 + (9-6)^2}{5} = \frac{4+2+1+9}{5} = \frac{16}{5}$$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{4\sqrt{5}}{5} \Rightarrow CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{\frac{4\sqrt{5}}{5}}{6} = \frac{4\sqrt{5}}{30} = \frac{2}{15}\sqrt{5}$$

میانه و چارک‌ها در داده‌های آماری

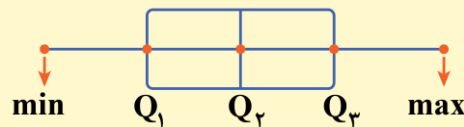
توجه کنید اگر داده‌ها را از **کوچک به بزرگ** مرتب کنیم در صورتی که تعداد داده‌ها **فرد** باشد، **عدد وسط** و اگر تعداد داده‌ها **زوج** باشد **میانگین دو عدد وسط**، همان **میانه** یا **چارک دوم** را نشان می‌دهد که برای نمایش آن از Q_2 استفاده می‌کنیم.

نیمی از داده‌ها قبل از میانه و نیم دیگری از داده‌ها بعد از میانه هستند. **میانه نیمه اول داده‌ها** همان **چارک اول** (Q_1) و **میانه نیمه دوم** داده‌ها همان **چارک سوم** (Q_3) را نشان می‌دهد. با مشخص کردن چارک اول، دوم (میانه) و سوم داده‌ها، تقریباً ۲۵٪ داده‌ها در هر یک از چهار محدوده زیر قرار می‌گیرند.



نمودار جعبه‌ای

مطابق شکل زیر، روی **دو ضلع مستطیل** در نمودار جعبه‌ای، **چارک‌های اول و سوم** قرار می‌گیرند و عدد وسط در **مرکز مستطیل**، همان **میانه** است. همچنین در ابتدا و انتهای نمودار جعبه‌ای، **کمترین** و **بیشترین** داده، درج می‌شوند.



دامنه میان چارکی

به اختلاف بین اندازه چارک سوم و چارک اول دامنه میان چارکی می‌گویند و آن را با IQR نمایش می‌دهند.

$$IQR = Q_3 - Q_1$$



۲۷- جدول زیر، مقادیر انحراف داده‌های آماری از k را نشان می‌دهد. واریانس این داده‌ها کدام است؟

$x_i - k$	۱۲	۱۵	۱۸	۲۱	۲۴
f_i	۴	۳	۹	۷	۲
	۱۲/۲۴ (۲)				
	۱۱/۵ (۴)				
	۱۲/۵ (۱)				
	۱۱/۷۵ (۳)				

(متوسط - محاسباتی - زمان بر ۵) - آمار و احتمال صفحه ۸۸ - ۱۱۰۳

پاسخ: گزینه ۲

می‌دانیم اگر همه داده‌ها با یک عدد جمع یا تفریق شوند واریانس تغییر نمی‌کند. بنابراین اگر همه داده‌ها را با k جمع کنیم، واریانس تغییری نمی‌کند، پس می‌توان فرض کرد، داده‌های اصلی همان $x_i - k$ هستند که در جدول آمده‌اند.

برای راحتی در محاسبه می‌توانیم همگی داده‌ها را از ۱۸ کم کنیم و می‌دانیم واریانس تغییری نمی‌کند فرض کنیم:

y_i	-۶	-۳	۰	۳	۶
f_i	۴	۳	۹	۷	۲

$$\bar{y}_i = \frac{\sum_{i=1}^5 f_i y_i}{n} \Rightarrow \bar{y} = \frac{4(-6) + 3(-3) + 9(0) + 7(3) + 2(6)}{4+3+9+7+2} = 0$$

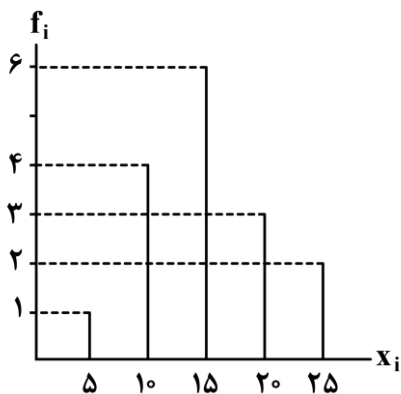
$$\Rightarrow \sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^5 f_i (y_i - \bar{y})^2}{n} = \frac{4(-6)^2 + 3(-3)^2 + 9(0)^2 + 7(3)^2 + 2(6)^2}{4+3+9+7+2}$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = \frac{144 + 27 + 0 + 72 + 72}{25} = \frac{306}{25} = 12.24$$



۲۸- نمودار میله‌ای تعدادی داده آماری مطابق شکل مقابل است. اگر از این داده‌ها، ۵ داده ۱۰، ۱۰، ۱۵، ۱۵، ۱۵ حذف شود، مجموع نما (مد)،

میان و میانگین داده‌های باقی‌مانده به‌طور تقریبی کدام است؟



۶۵ (۱)

۶۶ / ۳ (۲)

۶۰ / ۳ (۳)

۵۹ (۴)

(متوسط - مفهومی - استاندارد) - آمار و احتمال صفحه ۸۳ - ۱۱۰۳

پاسخ: گزینه ۲

با حذف ۵ داده ذکر شده در صورت سؤال، جدول فراوانی به شکل زیر خواهد بود:

x_i	۵	۱۰	۱۵	۲۰	۲۵
f_i	۱	۲	۳	۳	۲

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^5 f_i x_i}{n} \Rightarrow \bar{x} = \frac{5 + 20 + 45 + 60 + 50}{1+2+3+3+2} = \frac{180}{11} \approx 16.36$$

تعداد داده‌ها ۱۱ تا است پس داده ششم، میان و میانگین! پس از نوشتن داده‌ها به‌صورت صعودی میانه مشخص می‌شود:

۵، ۱۰، ۱۰، ۱۵، ۱۵، ۱۵، ۲۰، ۲۰، ۲۰، ۲۵، ۲۵ $\Rightarrow$ میانه = ۱۵

از طرفی بیشترین فراوانی را ۲ عدد دارند، پس ۲ عدد به‌عنوان مد یا نما داریم: ۱۵ و ۲۰.

$$15 + 20 + 15 + 16.36 / 3 \approx 66.36 / 3$$

پس مجموع مد، میان و میانگین برابر است با:

فرمول‌های کاربردی در علم آمار

اگر $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ داده‌های آماری باشند، آن‌گاه:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

(۱) میانگین:

$$R = x_{\max} - x_{\min}$$

(۲) دامنه تغییرات:

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n} \quad \text{یا} \quad \sigma^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} - \bar{x}^2$$

(۳) واریانس:

$$\sigma = \sqrt{\text{واریانس}}$$

(۴) انحراف معیار:

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$$

(۵) ضریب تغییرات:

کلاس درس آشنایی با نمادها

در محاسبه میانگین، اگر فراوانی داده‌های $x_1, x_2, \dots, x_n$ به ترتیب $f_1, f_2, \dots, f_n$ باشند، فرمول‌های کاربردی آمار به صورت زیر در خواهند آمد:

$$\bar{x} = \frac{f_1 x_1 + f_2 x_2 + \dots + f_n x_n}{f_1 + f_2 + \dots + f_n} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i x_i}{\sum_{i=1}^n f_i}$$

$$\sigma^2 = \frac{f_1 (x_1 - \bar{x})^2 + f_2 (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + f_n (x_n - \bar{x})^2}{f_1 + f_2 + \dots + f_n} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n f_i}$$

برای محاسبه دامنه تغییرات، انحراف معیار و ضریب تغییرات مانند قبل عمل می‌کنیم.

توجه!

اگر دو داده بیشترین فراوانی را داشته باشند، هر دو **مُد** حساب می‌شوند، اما اگر بیشتر از دو داده همگی بیشترین فراوانی را داشته باشند، جامعه **مُد** ندارد.



۲۹- در جدول فراوانی داده‌ها، اگر میانه $7/5$ باشد، میانگین داده‌ها به ازای بیشترین مقدار a کدام است؟ ($a \in \mathbb{Z}$)

مرکز دسته	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	a
فراوانی	۳	۱	۱۰	۹	۵	۱	۱

۷ (۴)

۷/۵ (۳)

۸ (۲)

۸/۵ (۱)

(سخت - مفهومی/محاسباتی - زمان بر) - آمار و احتمال صفحه ۸۲-۱۱۰۳

پاسخ: گزینه ۳

$$n = 3 + 1 + 10 + 9 + 5 + 1 + 1 = 30 \text{ (زوج)}$$

فراوانی کل در جدول داده شده برابر است با:

$$\text{میانۀ} = \frac{\text{داده ۱۶ام} + \text{داده ۱۵ام}}{2}$$

پس میانه برابر است با:

به غیر از داده a ، ۱۵ داده بزرگ‌تر از ۷ داریم و همچنین ۱۴ داده کوچک‌تر یا مساوی ۷ داریم:

$$\begin{cases} a > 7 \Rightarrow \text{میانۀ} = 8 \Rightarrow \text{داده پانزدهم و شانزدهم مساوی ۸ می‌شوند} \\ a \leq 7 \Rightarrow \text{میانۀ} = 7/5 \Rightarrow \text{داده پانزدهم برابر ۷ و داده شانزدهم برابر ۸ می‌شود} \end{cases}$$

بنابراین $a \leq 7$ است و بیشترین مقدار a همان ۷ می‌شود. پس فراوانی داده ۷ مساوی ۱۱ می‌شود.

برای ساده‌تر شدن محاسبه میانگین، عددی دلخواه مانند ۸ را از همه داده‌ها کم می‌کنیم و در نهایت جواب آخر را با عدد ۸ جمع می‌کنیم. ببینید:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^6 f_i x_i}{n} = \frac{3(-3) + 1(-2) + 11(-1) + 9(0) + 5(1) + 1(2)}{30} + 8 = \frac{-15}{30} + 8 = 7/5$$

اگر داده‌ها در a ضرب و با b جمع (تفریق) شوند...

(۱) میانگین نیز در a ضرب و با b جمع (تفریق) می‌شود.

(۲) واریانس در a^2 ضرب می‌شود. (جمع و تفریق شدن b با داده‌ها، تأثیری بر واریانس ندارد).

(۳) انحراف معیار در $|a|$ ضرب می‌شود. (جمع و تفریق شدن b با داده‌ها تأثیری بر انحراف معیار ندارد).

(۴) ضریب تغییرات باید بررسی شود. تأثیر یکسانی ندارد.



۳- در یک نمونه‌گیری سامانمند بین ۲۰۰۰ داوطلب آزمون کنکور سراسری می‌خواهیم نظرات ۵۰ نفر را در رابطه با سطح آزمون بررسی کنیم. اگر داوطلب شماره ۵ انتخاب شود، کدام داوطلب انتخاب نشده است؟

۱۳۷۵ (۴)

۱۳۶۵ (۳)

۱۱۶۵ (۲)

۷۶۵ (۱)

(متوسط - مفهومی - استاندارد) - آمار و احتمال صفحه ۱۰۱ - ۱۱۰۴

پاسخ: گزینه ۴

ابتدا با تقسیم تعداد داوطلبان بر ۵۰ (تعداد اعضای نمونه و همان تعداد دسته‌ها) تعداد اعضای هر دسته حاصل می‌شود.

این عدد $d = \left[\frac{2000}{50} \right] = 40$ همان قدرنسبت دنباله حسابی نیز می‌باشد یعنی شماره افراد انتخاب شده همان جملات دنباله حسابی است.

پس جمله عمومی دنباله حسابی به شکل زیر می‌باشد:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_n = 5 + (n-1) \times 40$$

$$\Rightarrow a_n = 40n - 35$$

بررسی گزینه‌ها:

①

$$a_n = 40n - 35 \Rightarrow 765 = 40n - 35 \Rightarrow n = 20 \quad \checkmark$$

②

$$a_n = 40n - 35 \Rightarrow 1165 = 40n - 35 \Rightarrow n = 30 \quad \checkmark$$

③

$$a_n = 40n - 35 \Rightarrow 1365 = 40n - 35 \Rightarrow n = 35 \quad \checkmark$$

④

$$a_n = 40n - 35 \Rightarrow 1375 = 40n - 35 \Rightarrow n = 35 / 25 \quad \times$$

یعنی داوطلبان با شماره‌های ۷۶۵، ۱۱۶۵ و ۱۳۶۵ انتخاب می‌شوند و هیچ‌گاه داوطلب با شماره ۱۳۷۵ انتخاب نمی‌شود.

نمونه‌گیری سامانمند

در نمونه‌گیری سامانمند یا سیستماتیک اگر بخواهیم از بین n داده، k داده را انتخاب و مطالعه کنیم، کافی است داده‌ها را به k دسته با اندازه

$d = \left[\frac{n}{k} \right]$ تقسیم کنیم (اندازه طبقات برابر است) حال اگر از طبقه اول مثلاً داده‌ای نام انتخاب شود، از همه طبقات نیز داده‌ای نام انتخاب می‌شود

یعنی داده‌های انتخابی تشکیل یک دنباله حسابی با قدرنسبت d (اندازه دسته‌ها یا طبقات) می‌دهند.

توجه!

تعداد جملات یک دنباله فقط می‌تواند عددی طبیعی باشد.





برای دیدن پاسخنامه ویدئویی آزمون
بالا را اسکن یا روی آن کلیک کنید! QR Code

مغناطیس + القای الکترومغناطیسی و جریان متناوب

(از میدان مغناطیسی حاصل از سیم‌لوله حامل جریان تا ابتدای جریان متناوب) - صفحه‌های ۹۹ تا ۱۲۲

بودجه‌بندی

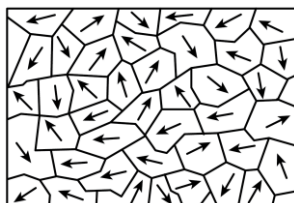
این آزمون

در مجموع ۳ تست از ۳۵ تست کنکور را پوشش داده است.

سهم در

کنکور

۳۱- شکل زیر، دوقطبی‌های مغناطیسی یک ماده را نشان می‌دهد. کدام گزینه در مورد آن درست است؟



- (۱) شکل می‌تواند مربوط به آلومینیم باشد.
- (۲) این ماده به‌طور ذاتی دارای خاصیت مغناطیسی است و دوقطبی‌های آن‌ها حتی در نبود میدان مغناطیسی خارجی، در ناحیه‌هایی همسو می‌شوند.
- (۳) ابعاد حوزه‌ها در شکل از مرتبه دهم تا هزارم نانومتر است.
- (۴) اگر این ماده را در میدان مغناطیسی خارجی قوی قرار دهیم، قطعاً حجم حوزه‌های آن به‌سرعت تغییر می‌کند.

(آسان - خطبه‌خط - سریع ۵ - صفحه ۱۰۳ - ۱۱۰۳)

پاسخ: گزینه ۲

با توجه به این که ماده دارای حوزه مغناطیسی است، بنابراین شکل داده‌شده مربوط به یک ماده فرومغناطیسی می‌باشد. همچنین با توجه به این که حجم حوزه‌ها تقریباً برابر است، می‌توان نتیجه گرفت که شکل مربوط به یک فرومغناطیس در نبود میدان مغناطیسی خارجی است.

بررسی گزینه‌ها:

①

آلومینیم، یک ماده پارامغناطیسی است.

②

اتم‌های مواد فرومغناطیس به‌طور ذاتی دارای دوقطبی‌های مغناطیسی هستند. برهم‌کنش‌های قوی بین دوقطبی‌های مغناطیسی در این مواد موجب می‌شود که این دوقطبی‌ها حتی در نبود میدان مغناطیسی خارجی، در ناحیه‌هایی که حوزه‌های مغناطیسی نامیده می‌شوند، همسو شوند.

③

ابعاد حوزه‌های مغناطیسی در مواد فرومغناطیسی در نبود میدان مغناطیسی خارجی از مرتبه دهم تا هزارم میلی‌متر است.

④

ممکن است ماده فرومغناطیس سخت باشد و با قرار گرفتن در یک میدان مغناطیسی خارجی قوی، حجم حوزه‌های آن به‌سرعت تغییر نکند.



نکات

۱- برای خاصیت آهنربایی هر ماده **فرومغناطیسی**، مقدار **اشباع** وجود دارد.

۲- در فرومغناطیس نرم برخلاف فرومغناطیس سخت، حجم حوزه‌های مغناطیسی به سهولت تغییر می‌کنند. [در اثر حضور و حذف میدان خارجی]



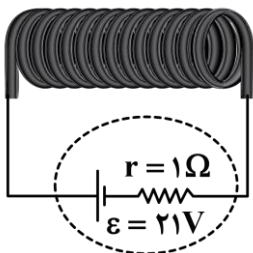
راهنمای مسیر

شکل‌های کتاب درسی در مورد ماده فرومغناطیسی، در عدم حضور در میدان، حضور در میدان ضعیف و حضور در میدان قوی رو خوب به خاطرات بسپار!



۳۲- مطابق شکل زیر، با سیمی به طول ۲m، سطح مقطع 3mm^2 و مقاومت ویژه $9 \times 10^{-6} \Omega \cdot \text{m}$ سیملوله‌ای آرمانی ساخته‌ایم که حلقه‌های آن بدون فاصله کنار هم قرار گرفته‌اند. بزرگی میدان مغناطیسی روی محور این سیملوله چند گاوس است؟

$$\left(\mu_0 = 12 \times 10^{-7} \frac{\text{T} \cdot \text{m}}{\text{A}}, \pi = 3 \right)$$



(۱) ۹

(۲) ۱۲

(۳) ۱۸

(۴) ۲۴

گام اول

مقاومت الکتریکی سیم تشکیل دهنده سیملوله را به دست می آوریم:

$$R = \frac{\rho L}{A} \xrightarrow[\substack{L=2\text{m}, A=3\text{mm}^2}]{\substack{\rho=9 \times 10^{-6} \Omega \cdot \text{m}}} R = \frac{9 \times 10^{-6} \times 2}{3 \times 10^{-6}} = 6 \Omega$$

گام دوم

جریان عبوری از سیملوله را به دست می آوریم:

$$I = \frac{\varepsilon}{R_{\text{eq}} + r} \xrightarrow[\substack{R=6 \Omega, r=1 \Omega}]{\substack{\varepsilon=21\text{V}}} I = \frac{21}{6+1} = 3\text{A}$$

گام آخر

با توجه به این که حلقه های سیملوله بدون فاصله کنار هم قرار گرفته اند، بزرگی میدان مغناطیسی سیملوله از رابطه زیر به دست می آید:

$$B = \frac{\mu_0 NI}{\ell} \xrightarrow{\ell=ND} B = \frac{\mu_0 NI}{ND} = \frac{\mu_0 I}{D}$$

$$A = \pi r^2 \Rightarrow 3 = 3 \times r^2 \Rightarrow r^2 = 1 \Rightarrow r = 1\text{mm} \Rightarrow D = 2\text{mm}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{D} \Rightarrow B = \frac{12 \times 10^{-7} \times 3}{2 \times 10^{-3}} = 18 \times 10^{-4} \text{T} = 18\text{G}$$



۳۲- با سیمی به طول $2/4\text{m}$ سیملوله ای آرمانی با 20° حلقه که بدون فاصله کنار هم قرار گرفته اند، ساخته ایم. اگر از این سیملوله، جریان 3A عبور کند و قطر سیم تشکیل دهنده سیملوله برابر با 6mm باشد، شار مغناطیسی گذرنده از داخل سیملوله چند میکروبر است؟ ($\mu_0 = 12 \times 10^{-7} \frac{\text{T} \cdot \text{m}}{\text{A}}$, $\pi = 3$)

۲۸/۸ (۴)

۱۴/۴ (۳)

۷/۲ (۲)

۳/۶ (۱)

راه نجات سریع

اول با استفاده از تعداد حلقه، طول سیم، شعاع سیملوله رو حساب کن. بعدش اندازه میدان مغناطیسی حاصل از سیملوله رو به دست بیار و در نهایت با داشتن مساحت حلقه های سیملوله و میدان مغناطیسی، شار مغناطیسی عبوری از سیملوله رو حساب کن.

گام اول

شعاع مقطع سیملوله برابر است با:

$$N = \frac{L}{2\pi r} \Rightarrow 20 = \frac{2/4}{2 \times 3 \times r} \Rightarrow r = 0.02\text{m}$$

گام دوم

بزرگی میدان مغناطیسی حاصل از سیملوله که از داخل آن می گذرد، را به دست می آوریم:

$$B = \frac{\mu_0 NI}{\ell} \xrightarrow[\substack{\ell=\text{حلقه ها بدون فاصله}}]{\substack{\ell=ND}} B = \frac{\mu_0 I}{D} \Rightarrow B = \frac{12 \times 10^{-7} \times 3}{0.06 \times 10^{-3}} = 6 \times 10^{-3} \text{T}$$

گام آخر

شار مغناطیسی عبوری از سیملوله برابر است با:

$$\Phi = AB \cos \theta \xrightarrow{A=\pi r^2} \Phi = (3 \times 4 \times 10^{-4}) \times 6 \times 10^{-3} \times 1 = 72 \times 10^{-7} \text{Wb} = 7.2 \mu\text{Wb}$$

اگر قطر سیم به کاررفته در سیملوله آرمانی D بوده و سیم‌ها بدون فاصله کنار هم پیچیده شده باشند، بزرگی میدان مغناطیسی درون سیملوله برابر با $B = \frac{\mu_0 I}{D}$ است.



۳۴- شار مغناطیسی عبوری از هر حلقه پیچیده‌ای رسانا با ۱۵۰ حلقه طبق معادله $\Phi = -0.2t + 0.25$ در SI تغییر می‌کند. اگر مقاومت الکتریکی پیچ ۵۵ باشد، بار القایی خالص عبوری از پیچ در اثر تغییر شار مغناطیسی عبوری از آن در ۱۰ ثانیه دوم، چند کولن است؟

۶۰ (۴)

۳۰ (۳)

۶ (۲)

۳ (۱)

(متوسط - محاسباتی - استاندارد - صفحه ۱۱۱ - ۱۱۰۴)

پاسخ: گزینه ۴

روش اول

گام اول

آهنگ تغییر شار مغناطیسی را به دست می‌آوریم. با توجه به این که معادله $\Phi - t$ درجه اول است و شیب نمودار $\Phi - t$ مقداری ثابت است،

$$\Phi - t \text{ شیب نمودار} = -0.2 \Rightarrow \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = -0.2 \frac{\text{Wb}}{\text{s}}$$

داریم:

تذکر

اگر معادله شار مغناطیسی عبوری از یک حلقه بر حسب زمان به صورت یک معادله درجه یک باشد، اندازه نیروی محرکه القایی متوسط در حلقه در هر بازه زمانی، ثابت و برابر اندازه شیب آن خط است و هیچ ارتباطی با بازه زمانی ندارد.

گام دوم

نیروی محرکه القایی متوسط در پیچ را به دست می‌آوریم:

$$|\varepsilon_{av}| = \left| -N \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \right| = |-150 \times (-0.2)| = 30 \text{ V}$$

گام سوم

$$I_{av} = \frac{|\varepsilon_{av}|}{R} = \frac{30}{5} = 6 \text{ A}$$

جریان القایی متوسط در پیچ را به دست می‌آوریم:

گام آخر

بار القایی در پیچ را به دست می‌آوریم:

$$|\Delta q| = I_{av} \times \Delta t = 6 \times 10 = 60 \text{ C}$$

روش دوم

گام اول

تغییر شار مغناطیسی عبوری از پیچ در ۱۰ ثانیه دوم را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} t_1 = 10 \text{ s} \Rightarrow \Phi_1 = -0.2 \times (10) + 0.25 = -1.75 \text{ Wb} \\ t_2 = 20 \text{ s} \Rightarrow \Phi_2 = -0.2 \times (20) + 0.25 = -3.75 \text{ Wb} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta \Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = -3.75 - (-1.75) = -2 \text{ Wb}$$

گام آخر

بار القایی در پیچ را به دست می‌آوریم:

$$\Delta q = \left| -\frac{N}{R} \Delta \Phi \right| = \left| -\frac{150}{5} \times (-2) \right| = 60 \text{ C}$$

 قانون فاراده

هرگاه شار مغناطیسی عبوری از یک حلقهٔ رسانا تغییر کند، نیروی محرکه‌ای در حلقه القا می‌شود که بزرگی آن با آهنگ تغییر شار مغناطیسی عبوری از حلقه متناسب است.

تغییر شار مغناطیسی در یک حلقه ← ایجاد نیروی محرکه القایی ← ایجاد جریان القایی

نیروی محرکه القایی متوسط بنابر قانون فاراده برای پیچه یا سیم‌لوله‌ای که از N حلقهٔ مشابه تشکیل شده باشد از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\varepsilon_{av} = -N \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

N : تعداد حلقه

ε_{av} : نیروی محرکه القایی متوسط برحسب ولت (V)

Δt : مدت زمان تغییر شار مغناطیسی عبوری از حلقه برحسب ثانیه (s)

$\Delta\Phi$: تغییر شار مغناطیسی برحسب وبر (Wb)



در این رابطه نیروی محرکه القایی متوسط برحسب **ولت** است که یک ولت، معادل **وبر بر ثانیه** است.



تذکر

علامت منفی در این رابطه، مخالفت نیروی محرکه القایی متوسط با تغییر شار مغناطیسی عبوری از پیچه را نشان می‌دهد.

جریان القایی در یک پیچه با تغییر شار مغناطیسی عبوری از آن

اگر نیروی محرکه القایی متوسط در حلقه برابر با ε_{av} و مقاومت الکتریکی حلقه R باشد، اندازهٔ جریان القایی متوسط در حلقه از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$I_{av} = \frac{|\varepsilon_{av}|}{R} = \left| -\frac{N \Delta\Phi}{R \Delta t} \right|$$



نکات

۱- هر چه مقاومت الکتریکی پیچه یا مداری که در آن شار مغناطیسی تغییر می‌کند، بیشتر باشد، جریان کوچک‌تری در آن القا می‌شود.

۲- هر چه تغییرات شار مغناطیسی عبوری از یک پیچهٔ رسانا سریع‌تر رخ دهد و همین‌طور تعداد حلقه‌های پیچه بیشتر باشد، بزرگی نیروی محرکه القایی متوسط و جریان القایی متوسط در پیچه بیشتر خواهد بود.

بار الکتریکی خالص شارش‌یافته در پیچهٔ رسانایی با مقاومت الکتریکی R در اثر تغییر شار مغناطیسی عبوری از آن از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\Delta q = I_{av} \Delta t = \left| -\frac{N}{R} \Delta\Phi \right|$$



نکته

مقدار بار القایی شارش‌شده در پیچه به مدت زمان تغییر شار مغناطیسی (آهنگ تغییر شار مغناطیسی) بستگی ندارد.



۳۵- با استفاده از سیمی، قابی به شکل مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع 40 cm می‌سازیم و آن را در داخل یک میدان مغناطیسی یکنواخت به بزرگی 0.4 T قرار می‌دهیم. اگر با همان مقدار سیم، یک حلقهٔ دایره‌ای شکل بسازیم و داخل همان میدان مغناطیسی قرار دهیم، شار مغناطیسی عبوری چند میلی‌وبر تغییر می‌کند؟ (در هر دو حالت، سطح قاب و حلقه عمود بر خطوط میدان مغناطیسی است و $\pi = 3$)

(۴) $16\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)$

(۳) $16\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)$

(۲) $1/6\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)$

(۱) $1/6\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)$

گام اول

با توجه به ثابت بودن طول سیم، مساحت قاب را در هر حالت به دست می آوریم:

$$\text{حالت اول: } L = 3a = 120 \text{ cm} \Rightarrow A_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 0.16 = 0.04\sqrt{3} \text{ m}^2$$

$$\text{حالت دوم: } L = 120 \text{ cm} \Rightarrow 120 = 2\pi r \Rightarrow r = 20 \text{ cm} = 0.2 \text{ m} \Rightarrow A_2 = \pi r^2 = 3 \times 0.04 = 0.12 \text{ m}^2$$

گام آخر

با توجه به ثابت بودن میدان مغناطیسی و زاویه سطح قاب با خطوط میدان در دو حالت، تغییر شار مغناطیسی عبوری از قاب در دو حالت برابر است با:

$$\Phi = AB \cos \theta \Rightarrow \Phi_2 - \Phi_1 = B \cos \theta (A_2 - A_1)$$

$$\xrightarrow{B=0.4 \text{ T}, \cos \theta=1} \Phi_2 - \Phi_1 = 0.4 \times 1 \times ((0.04 \times 3) - (0.04\sqrt{3}))$$

$$= 0.04\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)$$

$$\Rightarrow \Phi_2 - \Phi_1 = 0.16\sqrt{3}(\sqrt{3}-1) \text{ Wb} = 16\sqrt{3}(\sqrt{3}-1) \text{ mWb}$$

راهنمای مسیر

بهبود پیشنهاد می‌کنم، مساحت‌های شکل‌های هندسی مهم رو یاد بگیری. چون جاهای مختلف فیزیک به کارت میان.



۳۶- سطح حلقه‌ای رسانا به مساحت 20 cm^2 با خطوط میدان مغناطیسی یکنواختی به بزرگی 3000 G ، زاویه 37° می‌سازد. زاویه سطح حلقه با خطوط میدان مغناطیسی را چند درجه و چگونه تغییر دهیم تا شار مغناطیسی گذرنده از حلقه 0.06 mWb کاهش یابد؟
 $(\sqrt{2} = 1/4, \sqrt{3} = 1/7, \sin 37^\circ = 0.6)$

(۱) ۷ و کاهش (۲) ۷ و افزایش (۳) ۸ و کاهش (۴) ۸ و افزایش

راه نجات سریع

برای این که ادامه سؤال رو با آرامش خاطر بیشتر جواب بدی، می‌تونی اولش با بررسی کیفی کاهش یا افزایش زاویه، دو تا گزینه رو حذف کنی!

گام اول

شار مغناطیسی عبوری از حلقه را در حالت اول حساب می‌کنیم:

$$\Phi_1 = AB \cos \theta_1 \xrightarrow[A=20 \text{ cm}^2=20 \times 10^{-4} \text{ m}^2]{B=3000 \text{ G}=0.3 \text{ T}, \theta_1=90^\circ-37^\circ=53^\circ} \Phi_1 = 20 \times 10^{-4} \times 0.3 \times 0.6 = 0.36 \times 10^{-3} \text{ Wb} = 0.36 \text{ mWb}$$

گام دوم

شار مغناطیسی عبوری از حلقه را در حالت دوم به دست می‌آوریم:

$$\Phi_2 = \Phi_1 - 0.06 \Rightarrow \Phi_2 = 0.36 - 0.06 = 0.3 \text{ mWb}$$

گام سوم

زاویه θ_2 را به دست می‌آوریم:

$$\Phi_2 = AB \cos \theta_2 \Rightarrow 3 \times 10^{-4} = 20 \times 10^{-4} \times 0.3 \times \cos \theta_2 \Rightarrow \cos \theta_2 = 0.5 \Rightarrow \theta_2 = 60^\circ$$

تغییر زاویه سطح حلقه با خطوط میدان را به دست می آوریم:

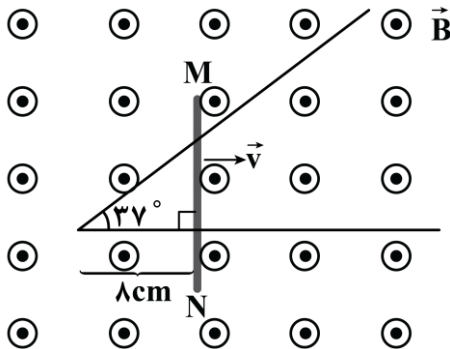
$$\alpha_2 - \alpha_1 = (90^\circ - \theta_2) - (90^\circ - \theta_1) = \theta_1 - \theta_2 \Rightarrow \alpha_2 - \alpha_1 = 53^\circ - 6^\circ = -47^\circ$$

بنابراین زاویه سطح حلقه با خطوط میدان باید ۷ درجه کاهش یابد.



۳۷- مطابق شکل زیر، میله رسانای بسیار بلند و متحرک MN بر روی دو میله ثابت که با هم زاویه 37° می سازند، درون میدان مغناطیسی یکنواختی به بزرگی ۲T قرار دارد. میله متحرک MN را چند سانتی متر به سمت راست جابه جا کنیم تا شار مغناطیسی عبوری از

مسیر بسته به اندازه $14/4 \text{ mWb}$ افزایش یابد؟ $(\sin 37^\circ = 0/6)$



(۱) ۴

(۲) ۱۲

(۳) ۱۶

(۴) ۸

(سخت - استدلالی - استاندارد) (صفحه ۱۱۱ - ۱۱۰۴)

پاسخ: گزینه ۴

گام اول

شار مغناطیسی عبوری از مسیر بسته را در دو حالت حساب می کنیم:

$$\begin{cases} \cos 37^\circ = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} \Rightarrow 0/8 = \frac{\lambda}{\text{وتر}} \Rightarrow \text{وتر} = 10 \text{ cm} \\ \sin 37^\circ = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} \Rightarrow 0/6 = \frac{\text{مقابل}}{10} \Rightarrow \text{مقابل} = 6 \text{ cm} \end{cases} \Rightarrow A_1 = \frac{8 \times 6}{2} = 24 \text{ cm}^2$$

$$\Phi_1 = A_1 B \cos \theta = 24 \times 10^{-4} \times 2 \times 1 = 4/8 \text{ mWb}$$

$$\Phi_2 = \Phi_1 + 14/4 \text{ mWb} = 4/8 + 14/4 = 19/2 \text{ mWb}$$

گام دوم

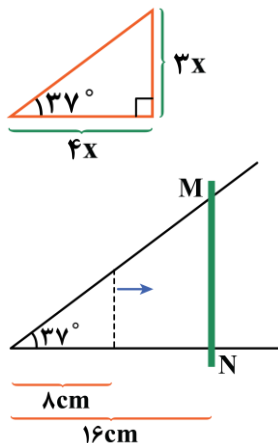
مساحت مسیر بسته (مثلث) را در حالت دوم به دست می آوریم:

$$\Phi_2 = A_2 B \cos \theta \Rightarrow 19/2 \times 10^{-4} = A_2 \times 2 \times 1 \Rightarrow A_2 = 96 \times 10^{-4} \text{ m}^2 = 96 \text{ cm}^2$$

گام آخر

با استفاده از نسبت های مثلثاتی زاویه 37° ، ضلع افقی مثلث و جابه جایی میله عمودی را به دست می آوریم:

$$A_2 = \frac{4x \times 3x}{2} = 6x^2 = 96 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = 4 \text{ cm} \Rightarrow 4x = 16 \text{ cm}$$



بنابراین میله به اندازه $16 - 8 = 8 \text{ cm}$ به سمت راست حرکت می کند.



۳۸- پیچهای رسانا با ۲۰۰ حلقه که شعاع هر حلقه آن ۲cm است، در میدان مغناطیسی یکنواختی به بزرگی ۲۵۰G قرار دارد و سطح پیچه بر خطوط میدان مغناطیسی، عمود است. اگر در مدت زمان ۲ms میدان مغناطیسی، بدون تغییر جهت به ۵۰G برسد، بزرگی نیروی محرکه القایی متوسط در پیچه چند ولت خواهد شد؟ ($\pi = 3$)

۲/۴ (۴)

۰/۲۴ (۳)

۰/۰۲۴ (۲)

(۱) صفر

(آسان - محاسباتی - استاندارد) - صفحه ۱۱۳ - ۱۱۴

پاسخ: گزینه ۴

طبق قانون القای الکترومغناطیس فاراده می توانیم بنویسیم:

$$|\varepsilon_{av}| = \left| -N \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \right| \xrightarrow{\Delta\Phi = A \cos\theta \Delta B} |\varepsilon_{av}| = \left| -NA \cos\theta \frac{\Delta B}{\Delta t} \right|$$

$$\xrightarrow{N=200, A=\pi r^2=3 \times 4 \times 10^{-4} \text{ m}^2, \Delta t=2 \text{ ms}=2 \times 10^{-3} \text{ s}} |\varepsilon_{av}| = \left| -200 \times (3 \times 4 \times 10^{-4}) \times 1 \times \left(\frac{-200 \times 10^{-4}}{2 \times 10^{-3}} \right) \right|$$

$$\xrightarrow{\alpha=90^\circ \Rightarrow \theta=0^\circ \Rightarrow \cos\theta=1, \Delta B=50-250=-200 \text{ G}=-200 \times 10^{-4} \text{ T}} |\varepsilon_{av}| = 2/4 \text{ V}$$

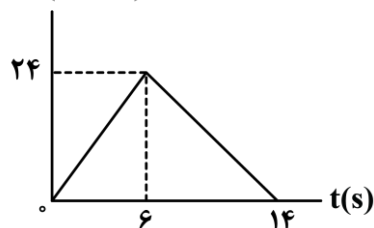


با توجه به روابط مربوط تغییرات شار مغناطیسی عبوری از پیچه‌ای رسانا، می‌توانیم روابط زیر را برای نیروی محرکه القایی متوسط در پیچه بنویسیم:

$$\varepsilon_{av} = -N \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \begin{cases} \text{B تغییر کند} \Rightarrow \varepsilon_{av} = -NA \cos\theta \frac{\Delta B}{\Delta t} = -NA \cos\theta \frac{(B_2 - B_1)}{\Delta t} \\ \text{A تغییر کند} \Rightarrow \varepsilon_{av} = -NB \cos\theta \frac{\Delta A}{\Delta t} = -NB \cos\theta \frac{(A_2 - A_1)}{\Delta t} \\ \theta \text{ تغییر کند} \Rightarrow \varepsilon_{av} = -NBA \frac{\Delta \cos\theta}{\Delta t} = -NBA \frac{(\cos\theta_2 - \cos\theta_1)}{\Delta t} \end{cases}$$



۳۹- نمودار شار مغناطیسی عبوری از یک پیچه رسانا شامل ۲۰ حلقه، مطابق شکل زیر است. اندازه نیروی محرکه القایی متوسط در این پیچه در بازه زمانی $t_1 = 5\text{s}$ تا $t_2 = 10\text{s}$ چند ولت است؟



$1/6 \times 10^{-3}$ (۱)

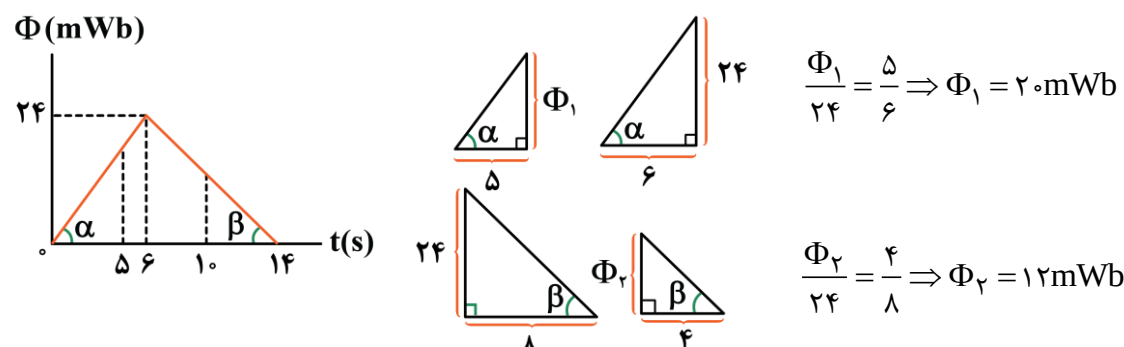
$1/6 \times 10^{-2}$ (۲)

$3/2 \times 10^{-3}$ (۳)

$3/2 \times 10^{-2}$ (۴)

(متوسط - استدلالی - استاندارد) - صفحه ۱۱۳ - ۱۱۴

پاسخ: گزینه ۴

با استفاده از تشابه مثلثات، شار مغناطیسی عبوری از پیچه در لحظه‌های $t_1 = 5\text{s}$ و $t_2 = 10\text{s}$ را به دست می‌آوریم:



می‌تونی توی این سؤال به‌جای استفاده از تشابه، با شیب خط‌های (۱) و (۲) هم شار مغناطیسی لحظات 5 s و 10 s رو به‌دست بیاری.

کام‌آخ

طبق قانون القای الکترومغناطیسی فاراده، اندازه نیروی محرکه القایی متوسط در پیچه در بازه زمانی $t_1 = 5\text{ s}$ تا $t_2 = 10\text{ s}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$|\varepsilon_{av}| = \left| -N \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \right| \Rightarrow |\varepsilon_{av}| = \left| -20 \times \frac{(12-20) \times 10^{-3}}{5} \right| = 3/2 \times 10^{-2} \text{ V}$$



نکته

بزرگی نیروی محرکه القایی متوسط و بزرگی جریان القایی متوسط در یک حلقهٔ رسانا متناسب با شیب پاره‌خط واصل بین دو نقطه از نمودار شار مغناطیسی عبوری از آن حلقه برحسب زمان است.

اگر شیب نمودار $\Phi - t$ در یک بازهٔ زمانی، ثابت باشد، نیروی محرکه القایی و جریان القایی در تمام لحظات این بازهٔ زمانی، مقدار ثابتی خواهد داشت. این مقدار ثابت برابر با نیروی محرکه القایی متوسط و جریان الکتریکی القایی متوسط در کل آن بازهٔ زمانی است.

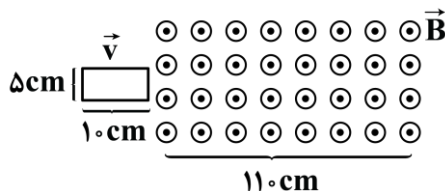


علامت نیروی محرکه القایی در یک پیچهٔ رسانا از روی نمودار شار مغناطیسی بر حسب زمان

- ۱- اگر شیب خط نمودار $\Phi - t$ ، مثبت باشد، نیروی محرکه القایی، مقداری **ثابت و منفی** است.
- ۲- اگر شیب خط نمودار $\Phi - t$ ، صفر باشد، نیروی محرکه القایی، صفر است.
- ۳- اگر شیب خط نمودار $\Phi - t$ ، منفی باشد، نیروی محرکه القایی، مقداری **ثابت و مثبت** است.



۴- مطابق شکل زیر، یک پیچهٔ رسانای مستطیلی شکل با 50° حلقه، مقاومت الکتریکی $1/50\Omega$ و به ابعاد $5\text{ cm} \times 10\text{ cm}$ با سرعت ثابت، وارد میدان مغناطیسی یکنواختی به بزرگی 3 T می‌شود. اگر این پیچه در طول عبور از میدان مغناطیسی به مدت 5 s به‌طور کامل داخل میدان قرار داشته باشد، در لحظه‌ای که نیمی از پیچه داخل میدان است، جریان القایی در پیچه چند آمپر است؟



(۱) ۰/۱

(۲) ۰/۱۱

(۳) ۱

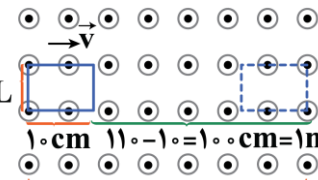
(۴) ۱/۱

(سخت - محاسباتی - استاندارد ۱۰ - صفحه ۱۱۳ - ۱۱۰۴)

پاسخ: گزینه ۱

کام‌اول

با استفاده از مدت‌زمانی که پیچه به‌طور کامل در میدان مغناطیسی قرار دارد و فاصله‌ای که در این مدت طی می‌کند، اندازهٔ سرعت حرکت پیچه که مقداری ثابت است را به‌دست می‌آوریم:

$$v = \frac{d}{\Delta t} \Rightarrow v = \frac{1}{5} = 0/2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$


کام‌آخ

وقتی پیچه در حال ورود به میدان مغناطیسی است، به‌ازای هر حلقهٔ آن، نیروی محرکه القایی از رابطهٔ $|\varepsilon| = BLv$ به‌دست می‌آید؛ بنابراین

برای N حلقه و طبق رابطهٔ $I = \frac{|\varepsilon|}{R}$ داریم:

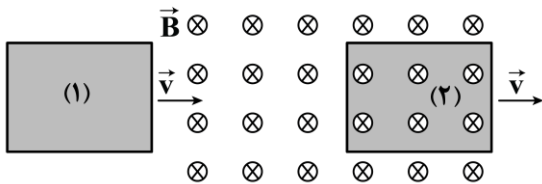
$$I = \left| \frac{N}{R} BLv \right| \xrightarrow[B=0/2\text{ T}, L=5\text{ cm}, v=0/2\frac{\text{m}}{\text{s}}]{N=50, R=1/50\Omega} I = \left| \frac{50}{1/50} \times 0/2 \times 0/5 \times 0/2 \right| = 0/1 \text{ A}$$

اگر حواستان به این نباشد که مستطیل ۱m را به طور کامل در میدان قرار دارد نه ۱۱cm، در دام گزینه (۲) می‌افتید!



۴۱- مطابق شکل زیر، قاب رسانای (۱) با تندی ثابت در حال ورود به میدان مغناطیسی یکنواخت و قاب رسانای (۲) با تندی ثابت در حال خروج از میدان مغناطیسی یکنواخت می‌باشد. اگر بزرگی میدان مغناطیسی خارجی در حال افزایش باشد، کدام یک از

عبارت‌های زیر درست هستند؟



الف- جهت جریان القایی در قاب (۱) می‌تواند ساعتگرد یا پادساعتگرد باشد.

ب- جهت جریان القایی در قاب (۲) می‌تواند ساعتگرد یا پادساعتگرد باشد.

ج- جهت جریان القایی در قاب (۲) فقط می‌تواند پادساعتگرد باشد.

د- جهت جریان القایی در قاب (۱) فقط می‌تواند پادساعتگرد باشد.

(۴) «ج» و «د»

(۳) «ب» و «د»

(۲) «الف» و «ج»

(۱) «الف» و «ب»

(متوسط - مفهومی - استاندارد) صفحه ۱۱۷ - ۱۱۰۴

پاسخ: گزینه ۳

خروج قاب (۲) از میدان مغناطیسی سبب کاهش شار مغناطیسی عبوری از آن می‌شود. از طرفی افزایش میدان مغناطیسی سبب افزایش شار مغناطیسی عبوری از قاب (۲) می‌شود؛ بنابراین با توجه به این که نمی‌دانیم تغییرات هر کدام چقدر است، ممکن است شار مغناطیسی عبوری از قاب (۲) ثابت، افزایشی و یا کاهشی باشد، در نتیجه جریان القایی در قاب (۲) ممکن است وجود نداشته باشد و یا ساعتگرد و یا پادساعتگرد باشد (درستی عبارت «ب» و نادرستی عبارت «ج»)

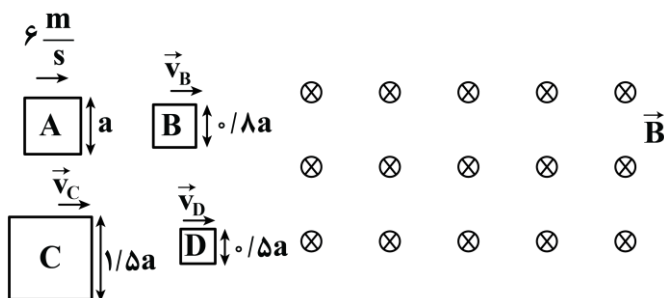
با ورود قاب (۱) به میدان مغناطیسی، شار مغناطیسی عبوری از آن افزایش می‌یابد. از طرفی افزایش میدان مغناطیسی نیز سبب افزایش شار مغناطیسی عبوری از قاب (۱) می‌شود، در نتیجه در مجموع شار مغناطیسی عبوری از قاب (۱) افزایش می‌یابد، بنابراین طبق قانون لنز جهت جریان القایی در قاب (۱) در جهتی خواهد بود که میدان مغناطیسی حاصل از آن برون‌سو شود، در نتیجه طبق قاعده دست راست، جهت **جریان القایی در قاب (۲) فقط می‌تواند پادساعتگرد باشد.** (درستی عبارت «د» و نادرستی عبارت «الف»)



۴۲- مطابق شکل زیر، چهار حلقهٔ رسانای مربعی شکل با تندی ثابت وارد میدان مغناطیسی یکنواختی به بزرگی $2T$ می‌شوند. اگر

اندازهٔ جریان القایی در همهٔ حلقه‌ها در لحظهٔ ورود، یکسان و اندازهٔ سرعت حلقهٔ A برابر با $6 \frac{m}{s}$ باشد، اندازهٔ سرعت حلقه‌های B،

C و D به ترتیب از راست به چپ چند متر بر ثانیه است؟ (جنس و قطر مقطع سیم به کاررفته در همهٔ حلقه‌ها یکسان است).



(۱) ۶، ۶ و ۶

(۲) ۳ و ۹، ۴/۸ و ۳

(۳) ۱۲ و ۴، ۷/۵ و ۱۲

(۴) ۱۲ و ۹، ۷/۵ و ۱۲

طبق رابطه $R = \frac{\rho L}{A}$ و با توجه به یکسان بودن جنس و قطر مقطع سیم به کاررفته در همه حلقه‌ها درمی‌یابیم که مقاومت الکتریکی هر

$$\frac{R_B}{R_A} = \frac{L_B}{L_A} = \frac{4 \times 0.8a}{4 \times a} = 0.8 \Rightarrow R_B = 0.8 R_A$$

حلقه با طول سیم به کاررفته در آن رابطه مستقیم دارد؛ بنابراین داریم:

$$\frac{R_C}{R_A} = \frac{L_C}{L_A} = \frac{4 \times 1.5a}{4 \times a} = 1.5 \Rightarrow R_C = 1.5 R_A$$

$$\frac{R_D}{R_A} = \frac{L_D}{L_A} = \frac{4 \times 0.5a}{4 \times a} = 0.5 \Rightarrow R_D = 0.5 R_A$$

طبق رابطه $I_{av} = \frac{|\varepsilon_{av}|}{R}$ و با توجه به یکسان بودن جریان القایی متوسط در همه حلقه‌ها درمی‌یابیم که اندازه نیروی محرکه القایی متوسط

در هر حلقه با مقاومت الکتریکی آن حلقه، رابطه مستقیم دارد؛ بنابراین داریم:

$$\frac{|\varepsilon_B|}{|\varepsilon_A|} = \frac{R_B}{R_A} = 0.8 \Rightarrow |\varepsilon_B| = 0.8 |\varepsilon_A|$$

$$\frac{|\varepsilon_C|}{|\varepsilon_A|} = \frac{R_C}{R_A} = 1.5 \Rightarrow |\varepsilon_C| = 1.5 |\varepsilon_A|$$

$$\frac{|\varepsilon_D|}{|\varepsilon_A|} = \frac{R_D}{R_A} = 0.5 \Rightarrow |\varepsilon_D| = 0.5 |\varepsilon_A|$$

طبق رابطه $|\varepsilon_{av}| = BLv$ برای لحظه ورود حلقه‌ها داریم:

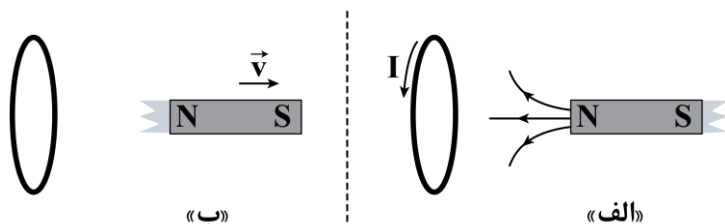
$$|\varepsilon_{av}| = BLv \xrightarrow{\text{یکسان: } B} \frac{|\varepsilon_2|}{|\varepsilon_1|} = \frac{L_2}{L_1} \times \frac{v_2}{v_1} \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \frac{|\varepsilon_2|}{|\varepsilon_1|} \times \frac{L_1}{L_2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{v_B}{v_A} = \frac{|\varepsilon_B|}{|\varepsilon_A|} \times \frac{L_A}{L_B} = 0.8 \times \frac{a}{0.8a} = 1 \\ \frac{v_C}{v_A} = \frac{|\varepsilon_C|}{|\varepsilon_A|} \times \frac{L_A}{L_C} = 1.5 \times \frac{a}{1.5a} = 1 \\ \frac{v_D}{v_A} = \frac{|\varepsilon_D|}{|\varepsilon_A|} \times \frac{L_A}{L_D} = 0.5 \times \frac{a}{0.5a} = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow v_A = v_B = v_C = v_D = 6 \frac{m}{s}$$

اگر فکر کنید چون جریان القایی در حلقه‌ها یکسان است، پس نیروی محرکه القایی درون حلقه‌ها نیز یکسان است، در دام گزینه (۳) می‌افتید!

۴۳- با توجه به جهت جریان القایی در حلقه شکل «الف»، جهت حرکت آهنربا در شکل «الف» به سمت است و با توجه به حرکت آهنربا در شکل «ب»، حلقه رسانا آهنربا را می‌کند.



- (۱) راست - دفع
- (۲) راست - جذب
- (۳) چپ - دفع
- (۴) چپ - جذب

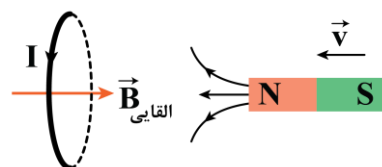
(آسان - مفهومی - سریع - صفحه ۱۱۷ - ۱۱۰۴)

پاسخ: گزینه ۴

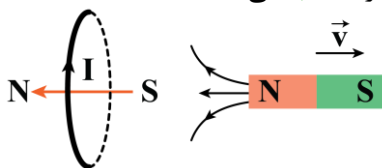
به بررسی شکل‌ها می‌پردازیم:



با توجه به جهت جریان القایی در حلقه، درمی‌یابیم که میدان مغناطیسی ناشی از جریان القایی در حلقه در خلاف جهت میدان مغناطیسی حاصل از آهنربای میله‌ای است؛ بنابراین نتیجه می‌گیریم که شار مغناطیسی عبوری از حلقه در حال افزایش بوده است؛ پس آهنربا به سمت حلقه، یعنی به سمت چپ حرکت کرده است.



با توجه به دور شدن آهنربا از حلقه، شار مغناطیسی عبوری از حلقه کاهش می‌یابد؛ بنابراین مطابق شکل زیر، میدان مغناطیسی حاصل از جریان القایی در حلقه باید هم‌جهت با میدان مغناطیسی آهنربای میله‌ای باشد، بنابراین حلقه، آهنربا را جذب می‌کند.



قانون لنز

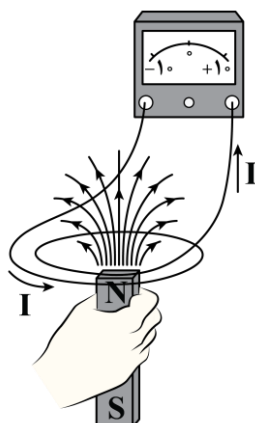
جهت جریان القایی در یک مدار یا پیچ به گونه‌ای است که آثار ناشی از آن (میدان مغناطیسی القایی) با عامل به وجود آورنده جریان القایی (تغییر شار مغناطیسی) مخالفت می‌کند. طبق الگوی زیر داریم:

$$\Delta\Phi: \begin{cases} \Delta\Phi > 0 \Rightarrow B_{\text{القایی}} \text{ خلاف جهت خارجی } B \\ \Delta\Phi < 0 \Rightarrow B_{\text{القایی}} \text{ هم‌جهت با خارجی } B \end{cases} \Rightarrow \text{استفاده از قاعده دست راست برای تعیین جهت جریان القایی}$$



۴۴- در شکل زیر، می‌خواهیم بدون تغییر جهت، اندازه جریان القایی در حلقه کاهش یابد. برای این منظور کدام یک از کارهای زیر را باید انجام دهیم؟

- (۱) آهنربا را با سرعت بیشتری به حلقه نزدیک کنیم.
- (۲) آهنربا را با سرعت کمتری به حلقه نزدیک کنیم.
- (۳) آهنربا را با سرعت بیشتری از حلقه دور کنیم.
- (۴) آهنربا را با سرعت کمتری از حلقه دور کنیم.



پاسخ: گزینه ۴

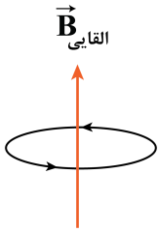
(متوسط - مفهومی - سریع ۵ - صفحه ۱۱۷ - ۱۱۰۴)


 راه نجات سریع

اول جهت حرکت آهنربا رو به دست بیاور. بعدش ببین برای این که مقدار جریان القایی کمتر بشه باید سرعت بیشتر بشه یا کمتر!

گام اول

جهت میدان مغناطیسی ناشی از جریان القایی در حلقه را طبق قاعده دست راست می یابیم:



گام دوم

حال باید جهت حرکت آهنربا را به دست آوریم. با توجه به این که جهت میدان القایی در حلقه، هم جهت با جهت میدان مغناطیسی حاصل از آهنربا است، طبق قانون لنز درمی یابیم که آهنربا در حال دور شدن از حلقه است.

گام آخر

برای این که اندازه جریان القایی در حلقه، بدون تغییر جهت کاهش یابد، باید آهنگ تغییر شار مغناطیسی عبوری از حلقه، کاهش یابد که به این منظور باید آهنربا با سرعت کمتری از حلقه دور شود.

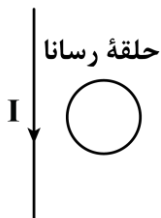

 یادآوری

- ۱- هر چه مقاومت الکتریکی پیچه یا مداری که در آن شار مغناطیسی تغییر می کند، بیشتر باشد، جریان کوچکتری در آن القا می شود.
- ۲- هر چه تغییرات شار مغناطیسی عبوری از یک پیچه رسانا سریع تر رخ دهد و همین طور تعداد حلقه های پیچه بیشتر باشد، بزرگی نیروی محرکه القایی متوسط و جریان القایی متوسط در پیچه بیشتر خواهد بود



۴۵- در شکل زیر، اگر جریان عبوری از سیم، افزایش یابد، جهت میدان مغناطیسی حاصل از جریان القایی در حلقه رسانا در محل سیم

راست به کدام سمت است؟



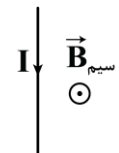
- (۱) درون سو
- (۲) برون سو
- (۳) بالا
- (۴) پایین

پاسخ: گزینه ۲

(آسان - مفهومی - سریع ۵ - صفحه ۱۱۷ - ۱۱۰۴)

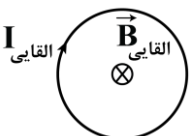
گام اول

طبق قاعده دست راست، جهت میدان مغناطیسی حاصل از سیم را در محل حلقه به دست می آوریم:



گام دوم

با توجه به افزایش جریان سیم و با استفاده از قانون لنز، جهت میدان مغناطیسی القایی در داخل حلقه را به دست می آوریم:
افزایش جریان سیم $\rightarrow$ افزایش میدان خارجی (میدان مغناطیسی حاصل از سیم حامل جریان) $\rightarrow$ افزایش شار مغناطیسی عبوری از حلقه
 $\rightarrow$ جهت میدان القایی در خلاف جهت میدان مغناطیسی خارجی، یعنی درون سو $\rightarrow$ جهت جریان القایی در حلقه، ساعتگرد است.



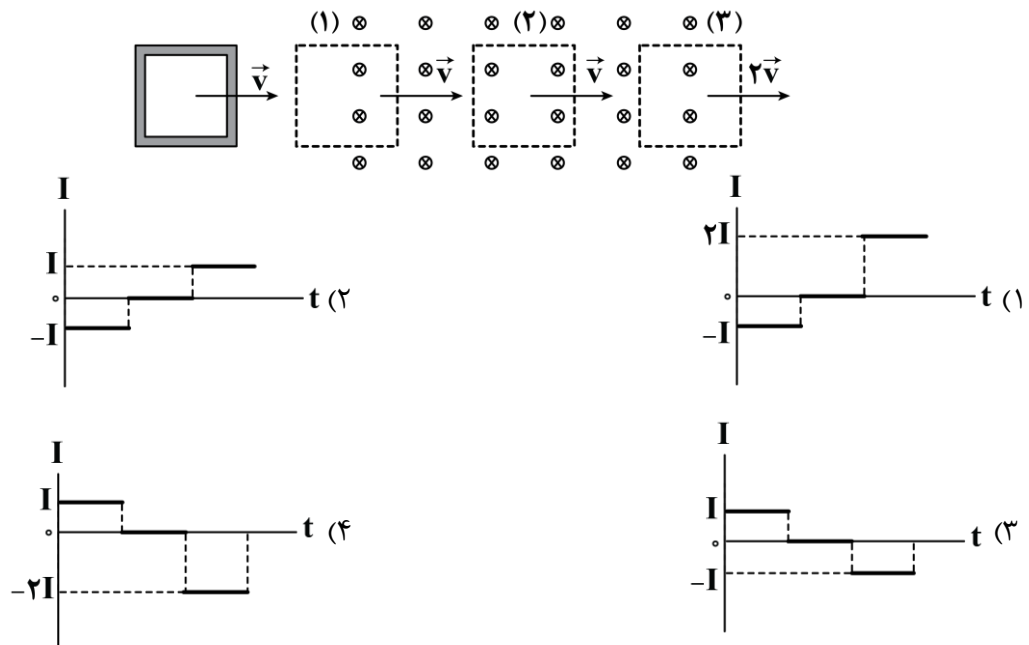
گام آخر

با توجه به این که جهت میدان مغناطیسی در بیرون حلقه در خلاف جهت آن در داخل حلقه است، درمی یابیم که جهت میدان مغناطیسی حاصل از حلقه در محل سیم (بیرون حلقه)، برون سو است.

حواست باشه جهت میدان مغناطیسی ناشی از حلقه رو در محل سیم می‌خواد، نه داخل حلقه. توی دام گزینه (۱) نیفتی!



۴۶- شکل زیر، مراحل عبور یک حلقهٔ رسانا از یک میدان مغناطیسی یکنواخت را نشان می‌دهد. اگر در مرحله (۱) حلقه در حال ورود و در مرحله (۳) حلقه در حال خروج از میدان مغناطیسی باشد، نمودار جریان القایی در حلقهٔ رسانا برحسب زمان، در کدام گزینه به درستی آمده است؟ (جریان ساعتگرد، مثبت فرض شود).

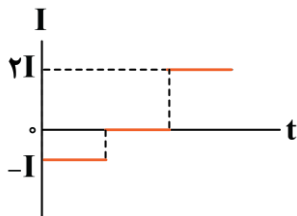


پاسخ: گزینه ۱

(متوسط - مفهومی - استاندارد) صفحه ۱۱۷ - ۱۱۰۴

طبق رابطه $I = \frac{BLv}{R}$ درمی‌یابیم اندازهٔ جریان القایی در بخش (۳) که حلقه با اندازهٔ سرعت ۲۷ حرکت می‌کند باید ۲ برابر بخش (۱) باشد.

از طرفی **جریان القایی در بخش (۲) که حلقه به‌طور کامل در میدان مغناطیسی قرار دارد، صفر است** (رد گزینه‌های (۲) و (۳)) از طرفی طبق قانون لنز، هنگام ورود حلقه با افزایش شار مغناطیسی عبوری از حلقه، میدان مغناطیسی حاصل از جریان القایی باید در خلاف جهت میدان مغناطیسی خارجی، یعنی برون‌سو باشد؛ بنابراین طبق قاعدهٔ دست راست، جهت جریان القایی در حلقه در لحظهٔ ورود باید **پادساعتگرد (منفی)** باشد و هنگام خروج حلقه نیز طبق قانون لنز، میدان مغناطیسی حاصل از جریان القایی باید هم‌جهت با میدان مغناطیسی خارجی، یعنی درون‌سو باشد؛ بنابراین جهت جریان القایی در حلقه در لحظهٔ خروج باید **ساعتگرد (مثبت)** باشد؛ در نتیجه نمودار جریان القایی در حلقه برحسب زمان به‌صورت زیر است:

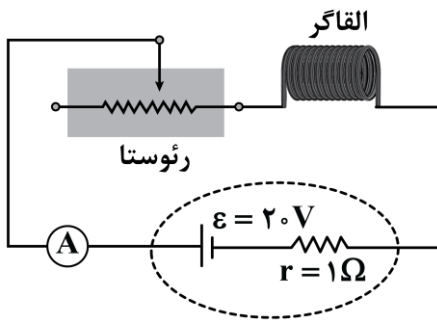


سوتی‌های پرتکرار

اگر حواستان به ۲۷ در مرحله (۳) نباشد، در دام گزینه (۲) می‌افتید و اگر حواستان به منفی بودن جریان پادساعتگرد نباشد، در دام گزینه (۴) می‌افتید!



۴۷- در مدار شکل زیر، اگر مقاومت رئوستا را از ۳Ω به ۴Ω برسانیم، القاگر آرمانی با ضریب القاوری ۲mH میلی ژول انرژی



- (۱) ۹ و از مدار می گیرد.
 (۲) ۹ و به مدار می دهد.
 (۳) ۱۸ و از مدار می گیرد.
 (۴) ۱۸ و به مدار می دهد.

(متوسط - استدلالی - استاندارد) (صفحه ۱۲۱ - ۱۱۰۴)

پاسخ: گزینه ۲

کام اول

جریان الکتریکی مدار را در دو حالت به دست می آوریم:

$$I = \frac{\varepsilon}{R_{eq} + r} \Rightarrow \begin{cases} I_1 = \frac{20}{3+1} = 5A \\ I_2 = \frac{20}{4+1} = 4A \end{cases}$$

تذکر

مقاومت الکتریکی القاگر آرمانی، صفر است.

کام آخر

تغییر انرژی ذخیره شده در القاگر را به دست می آوریم:

$$U = \frac{1}{2} LI^2 \Rightarrow U_2 - U_1 = \frac{1}{2} \times 2 \times 10^{-3} (4^2 - 5^2) = -9 \times 10^{-3} \text{ J} = -9 \text{ mJ}$$

با توجه به کاهش انرژی ذخیره شده در القاگر، درمی یابیم که القاگر، ۹mJ انرژی به مدار می دهد.

•• bio ••

۴۸- دو سیملوله آرمانی A و B با طول های یکسان، در اختیار داریم. اگر سطح مقطع سیملوله A، ۲۰ درصد از سطح مقطع سیملوله B بزرگ تر و تعداد حلقه های سیملوله B، ۱۵۰ دور بیشتر از تعداد حلقه های سیملوله A باشد و ضریب القاوری سیملوله A، ۷۰ درصد کمتر از ضریب القاوری سیملوله B باشد، سیملوله A از چند حلقه تشکیل شده است؟ (هر دو سیملوله بدون هسته هستند).

- (۱) ۳۰ (۲) ۷۵ (۳) ۱۵۰ (۴) ۳۰۰

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) (صفحه ۱۱۹ - ۱۱۰۴)

پاسخ: گزینه ۳

با توجه به رابطه ضریب القاوری داریم:

$$L = \frac{\mu_0 N^2 A}{\ell} \Rightarrow \frac{L_A}{L_B} = \left(\frac{N_A}{N_B}\right)^2 \times \frac{A_A}{A_B} \times \frac{\ell_B}{\ell_A} \xrightarrow{A_A = A_B + \frac{20}{100} A_B = \frac{12}{10} A_B, N_B = N_A + 150, \ell_A = \ell_B, L_A = L_B - \frac{70}{100} L_B = \frac{3}{10} L_B} \frac{1}{3} = \left(\frac{N_A}{N_A + 150}\right)^2 \times \frac{12}{10} \times 1$$

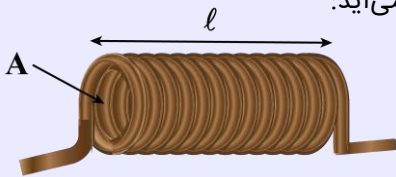
$$\Rightarrow \left(\frac{N_A}{N_A + 150}\right)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{N_A}{N_A + 150} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2N_A = N_A + 150$$

$$\Rightarrow N_A = 150$$

ضریب القاوری

ویژگی‌های فیزیکی هر القاگر، توسط ضریب القاوری آن تعیین می‌شود. ضریب القاوری که با نماد L نمایش داده می‌شود به عواملی همچون **تعداد دور، طول و سطح مقطع القاگر و جنس هسته‌ای که داخل آن قرار می‌گیرد**، بستگی دارد. برای مثال، ضریب القاوری سیم‌لوله‌ای آرمانی و بدون هسته، که دارای طول ℓ ، سطح مقطع A و N حلقه نزدیک به هم است، از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$L = \mu_0 \frac{AN^2}{\ell}$$



یکای SI ضریب القاوری، **اهم.ثانیه** ($\Omega \cdot s$) است که به احترام جوزف هانری، **هانری** نامیده و با نماد H نشان داده می‌شود.

به نمونه باحال

ضریب القاوری سیم‌لوله آرمانی بدون هسته‌ای به طول $62/8 \text{ cm}$ و سطح مقطع 10 cm^2 شامل 2000 حلقه نزدیک به هم است. چند

هانری است؟ ($\mu_0 = 12 \times 10^{-7} \frac{\text{T.m}}{\text{A}}$)

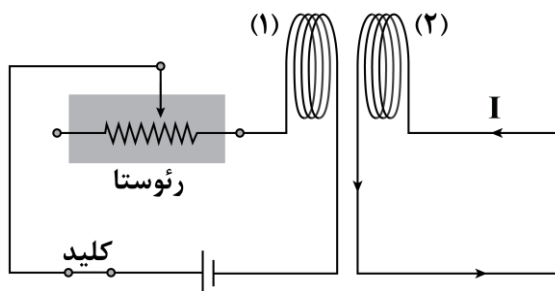
پاسخ تشریحی:

با توجه به داده‌های مسئله داریم:

$$L = \mu_0 \frac{AN^2}{\ell} = (12 \times 10^{-7} \frac{\text{T.m}}{\text{A}}) \times \frac{(10 \times 10^{-4} \text{ m}^2) \times (2000)^2}{0.628 \text{ m}} \approx 8 \times 10^{-3} \text{ H} \approx 8 \text{ mH}$$



۴۹- با توجه به جهت جریان القایی در القاگر (۲)، کدامیک از اتفاقات زیر در این لحظه ممکن نیست رخ داده باشد؟



(۱) نزدیک کردن القاگر (۱) به القاگر (۲)

(۲) قطع شدن کلید

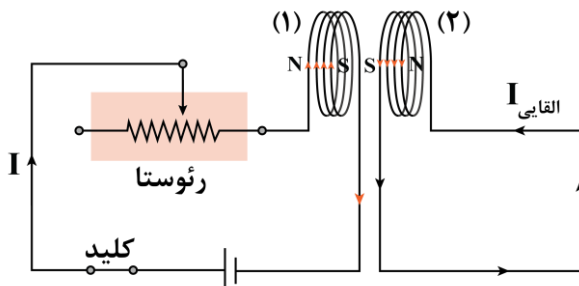
(۳) حرکت لغزنده رئوستا به سمت راست

(۴) تعویض باتری متصل به القاگر (۱) با یک باتری با مقاومت داخلی کمتر

(متوسط - مفهومی - استاندارد) (صفحه ۱۲۰ - ۱۱۰۴)

پاسخ: گزینه ۲

با توجه به شکل زیر، درمی‌یابیم جهت جریان در القاگر (۲) در خلاف جهت جریان در القاگر (۱) بوده، بنابراین با توجه به قاعده دست راست و جهت میدان‌های مغناطیسی در القاگرهای (۱) و (۲) می‌توان فهمید که دو القاگر یکدیگر را دفع می‌کنند؛ بنابراین در این لحظه **شار مغناطیسی عبوری از القاگر (۲) در حال افزایش است**.



بررسی گزینه‌ها:



اگر القاگر (۱) را به القاگر (۲) نزدیک کنیم، شار مغناطیسی عبوری از القاگر (۲) **افزایش** می‌یابد.

۲

در لحظه قطع کلید، به علت کاهش جریان عبوری از القاگر (۱)، میدان مغناطیسی حاصل از آن کاهش یافته و به دنبال آن شار مغناطیسی عبوری از القاگر (۲) کاهش می یابد.

۳

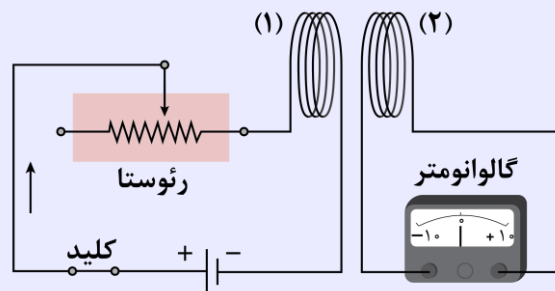
با حرکت لغزنده به سمت راست، مقاومت الکتریکی مدار، کاهش و جریان القاگر (۱) افزایش می یابد؛ بنابراین میدان مغناطیسی حاصل از آن افزایش یافته، در نتیجه شار مغناطیسی عبوری از القاگر (۲) افزایش می یابد.

۴

با جایگزینی باتری با مقاومت داخلی کمتر، جریان القاگر (۱) افزایش می یابد، بنابراین میدان مغناطیسی حاصل از آن افزایش یافته، در نتیجه شار مغناطیسی عبوری از القاگر (۲) افزایش می یابد.

القای متقابل

شکل زیر، اسباب آزمایش ساده‌ای را برای بررسی اثر القای متقابل نشان می دهد. جریان عبوری از پیچه (۱)، میدان مغناطیسی $\vec{B}$ را به وجود می آورد. این میدان $\vec{B}$ ، شار مغناطیسی را از پیچه (۲) می گذراند که در مجاورت آن قرار دارد. با تغییر دادن مقاومت رُوستا و تغییر جریان در پیچه (۱)، میدان مغناطیسی پیچه (۱) و در نتیجه شار مغناطیسی عبوری از پیچه (۲) نیز تغییر می کند. بنابر قانون فاراده، این تغییر شار، نیروی محرکه‌ای را در پیچه (۲) القا می کند که به ایجاد جریان القایی در این پیچه می انجامد. همچنین تغییر جریان در پیچه (۲)، سبب ایجاد نیروی محرکه القایی در پیچه (۱) می شود. این فرایند، **القای متقابل** نامیده می شود و به کمک آن می توان انرژی را از یک پیچه، به پیچه دیگر منتقل کرد.



••• **بی** •••



۵۰- با توجه به شکل مقابل، انرژی لازم برای جرقه زدن شمع خودرو چگونه تأمین می شود؟

- (۱) از چرخش پیچه در یک میدان مغناطیسی یکنواخت
- (۲) از چرخش آهنربا در یک پیچه ثابت
- (۳) از یک خازن که با باتری خودرو شارژ شده است.
- (۴) از انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی پیچه احتراق

(آسان - خطبه خط - سریع ۱ - صفحه ۱۲۲ - ۱۱۰۳)

پاسخ: گزینه ۴

طبق متن کتاب درسی، انرژی لازم برای جرقه زدن شمع خودرو، از انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی پیچه احتراق تأمین می شود.

••• **بی** •••



برای دیدن پاسخنامه ویدئویی آزمون
QRcode بالا را اسکن کنید!
یا بر روی لینک زیر کلیک کنید!
پاسخنامه ویدئویی آزمون

پوشاک، نیازی پایان‌ناپذیر (از ابتدای فصل تا انتهای خود را بیازمایید صفحه ۱۱۵)
صفحه‌های ۹۹ تا ۱۱۵

بودجه‌بندی
این آزمون

مباحث این آزمون در مجموع ۲ تست از ۳۰ تست کنکور را پوشش داده است.

سهم در
کنکور

۵۱- کدام یک از مطالب زیر درست است؟

- (۱) الیاف ساختگی برخلاف الیاف طبیعی، کاربردهای دیگری به جز تولید پوشاک و لباس دارند.
- (۲) در صنعت نساجی، فراورده فرایند بافندگی، طی فرایند ریسندگی مصرف می‌شود.
- (۳) اگر ماده‌ای واحد تکرارشونده داشته باشد، یک درشت مولکول محسوب می‌شود.
- (۴) نقطه جوش درشت مولکول‌ها بالا بوده و حالت فیزیکی همه آن‌ها جامد است.

(آسان - مفهومی - استاندارد) - صفحه ۱۰۳ - ۱۱۰۳

پاسخ: گزینه ۳

مواد مولکولی بر اساس جرم مولی و تعداد اتم‌ها به دو دسته **درشت مولکول** و **مولکول‌های کوچک** تا متوسط تقسیم می‌شوند. همچنین خود درشت مولکول‌ها نیز بر اساس وجود یا عدم وجود بخش تکرارشونده به دو دسته **پلیمری** و **غیرپلیمری** تقسیم خواهند شد. پس هر ماده که **واحد تکرارشونده** داشته باشد، **پلیمر** است و می‌دانیم که همه پلیمرها یک **درشت مولکول** نیز به حساب می‌آیند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) هر دو الیاف طبیعی و مصنوعی یا همان **ساختگی** در تولید **پوشاک** نقش دارند. از دیگر کاربردهای پنبه می‌توان به تولید رویه مبل، پرده، تور ماهیگیری و گاز استریل اشاره کرد. همچنین از الیاف مصنوعی مانند پلی‌استرها در تهیه انواع پوشش‌ها، ظروف نجسب، یکبار مصرف و پلاستیکی، فرش و پرده استفاده می‌شود.

۲) در صنعت نساجی، الیاف طی فرایند **ریسندگی** به **نخ** تبدیل شده و **نخ** نیز طی فرایند **با فندگی** به **پارچه خام** تبدیل می‌شود. پس از آن نیز با **فراوری**، **پارچه آماده دوزندگی** تولید می‌شود که از آن **پوشاک** تهیه می‌کنند. نمودار زیر مراحل تبدیل مواد به یکدیگر را در صنعت نساجی نمایش می‌دهد:



الیاف پنبه‌ای

ریسندگی



نخ

با فندگی



پارچه خام

فراوری



پارچه آماده استفاده

دوزندگی



پوشاک

۴) درشت مولکول‌ها دسته‌ای از مواد هستند که تعداد اتم‌های زیاد در مولکول خود دارند و به همین دلیل جرم مولی آن‌ها بسیار بزرگ است. نیروی بین مولکولی در درشت مولکول‌ها نسبت به سایر ترکیبات مولکولی با مولکول‌های کوچک تا متوسط، بسیار بیشتر بوده و این امر موجب بیشتر بودن نقطه جوش آن‌ها نیز می‌شود. اگرچه اکثر درشت مولکول‌ها **جامد** هستند، اما برخی از آن‌ها در دمای اتاق حالت **مایع** دارند، مانند روغن‌ها.

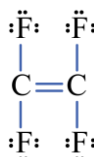
۵۲- کدام گزینه نادرست است؟ ($H = 1, C = 12, N = 14, F = 19, Cl = 35.5 : g.mol^{-1}$)

- (۱) اگر یکی از اتم‌های هیدروژن اتن با دومین هالوژن جدول دوره‌ای جایگزین شود، مونومر سازنده پلی‌وینیل کلرید تشکیل می‌شود.
- (۲) نسبت شمار جفت الکترون‌های ناپیوندی به شمار پیوندهای اشتراکی در مونومر سازنده تفلون برابر با ۲/۴ است.
- (۳) درصد جرمی کربن در پلیمری که از آن برای تولید پتو استفاده می‌شود، به تقریب برابر با ۶۸ درصد است.
- (۴) هر یک از مولکول‌های استیرن می‌تواند با ۴ مولکول گاز هیدروژن به‌طور کامل واکنش دهد.

پاسخ: گزینه ۲

(سخت - مفهومی - زمان بر - صفحه ۱۰۶ - ۱۱۰۳)

تترافلورواتن مونومر سازنده تفلون است و فرمول ساختاری آن به‌صورت زیر است:



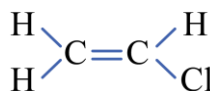
با توجه به ساختار این مولکول، در هر مولکول آن ۶ پیوند اشتراکی وجود دارد و هر اتم فلوئور دارای ۳ جفت الکترون ناپیوندی است؛ بنابراین نسبت شمار جفت الکترون‌های ناپیوندی به شمار پیوندهای اشتراکی برابر است با:

$$\frac{4 \times 3}{6} = 2$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱- در صورت جایگزینی یکی از اتم‌های هیدروژن موجود در ساختار اتن با کلر (دومین هالوژن جدول دوره‌ای)، مولکول کلرواتن یا همان

وینیل کلرید به‌دست می‌آید که این ترکیب مونومر سازنده پلی‌وینیل کلرید است.



۳- پلیمر موجود در پتو، پلی‌سیانو اتن است و فرمول مولکولی مونومر آن (سیانواتن) به‌صورت C_3H_3N است. از آن‌جا که درصد جرمی

یک اتم در پلیمرهای افزایشی برابر با درصد جرمی همان اتم در ساختار مونومر آن پلیمر است، درصد جرمی کربن در این پلیمر برابر خواهد بود با:

$$\text{درصد جرمی کربن} = \frac{\text{جرم کربن}}{\text{جرم کل ترکیب}} \times 100 = \frac{3 \times 12}{3 \times 12 + 3 \times 1 + 1 \times 14} \times 100 = \frac{36}{53} \times 100 \approx 68$$

در نتیجه درصد جرمی کربن در پلی‌سیانو اتن به‌تقریب برابر با ۶۸ درصد است.

۴- در ساختار مولکول استیرن ۴ پیوند دوگانه کربن-کربن وجود دارد. در نتیجه یک مولکول از آن می‌تواند با ۴ مولکول گاز هیدروژن

واکنش دهد و تبدیل به یک ترکیب سیرشده شود.

جدول زیر ساختار برخی از پلیمرها و مونومرهای آنها و همچنین کاربردهای این پلیمرها را نشان می‌دهد:

نام پلیمر	نام مونومر	ساختار مونومر	ساختار پلیمر	کاربرد
پلی‌اتن	اتن	$\text{H}_2\text{C}=\text{CH}_2$	$\text{-(CH}_2\text{-CH}_2\text{)}_n$	کیسه‌های پلاستیکی بطری پلاستیکی لوله پلاستیکی
پلی‌سیانواتن	سیانواتن	$\text{H}_2\text{C}=\text{CH-CN}$	$\text{-(CH}_2\text{-CH(CN))}_n$	پتو و پارچه
پلی‌پروپن	پروپن	$\text{H}_2\text{C}=\text{CH-CH}_3$	$\text{-(CH}_2\text{-CH(CH}_3\text{))}_n$	تهیه و تولید سرنگ
پلی‌استیرن	استیرن	$\text{H}_2\text{C}=\text{CH-C}_6\text{H}_5$	$\text{-(CH}_2\text{-CH(C}_6\text{H}_5\text{))}_n$	تولید ظرف یکبار مصرف
تفلون	تترافلورواتن	$\text{F}_2\text{C}=\text{CF}_2$	$\text{-(CF}_2\text{-CF}_2\text{)}_n$	نخ دندان کفی اتو تولید ظروف نجسب
پلی‌وینیل کلرید	وینیل کلرید (کلرواتن)	$\text{H}_2\text{C}=\text{CH-Cl}$	$\text{-(CH}_2\text{-CHCl)}_n$	کیسه‌های خون



۵۳- اگر در ۰/۴ مول از یک نمونه پلی‌اتن $4/816 \times 10^{26}$ پیوند اشتراکی $C-H$ وجود داشته باشد، شمار واحدهای تکرارشونده در این پلیمر کدام است و جرم این نمونه پلیمر برابر چند کیلوگرم است؟ ($H = 1, C = 12: g.mol^{-1}$)

۱) $500 - 6/72$ ۲) $600 - 5/6$ ۳) $500 - 5/6$ ۴) $600 - 6/72$

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - صفحه ۱۰۵ - ۱۱۰۳

پاسخ: گزینه ۳

در هر واحد تکرارشونده پلی‌اتن با فرمول شیمیایی $(C_2H_4)_n$ ، ۴ پیوند $C-H$ وجود دارد. پس در یک مولکول با n واحد تکرارشونده، $4n$ پیوند $C-H$ دیده می‌شود. پس تعداد پیوندهای اشتراکی $C-H$ موجود در ۰/۴ مول از این ماده برابر است با:

$$? \text{ پیوند } C-H = \frac{4n \text{ پیوند } C-H}{1 \text{ مولکول } (C_2H_4)_n} \times \frac{6/02 \times 10^{23} \text{ مولکول } (C_2H_4)_n}{1 \text{ mol } (C_2H_4)_n} \times 0/4 \text{ mol } (C_2H_4)_n = 4/816 \times 10^{26}$$

از رابطه بالا داریم:

$$0/4 \times 6/02 \times 10^{23} \times 4n = 4/816 \times 10^{26} \Rightarrow 0/4 \times 4n = 800 \Rightarrow n = 500$$

در نتیجه شمار واحدهای تکرارشونده در این پلیمر برابر با ۵۰۰ است. حال جرم پلیمر برابر است با:

$$\text{جرم پلیمر} = \text{مول} \times (\text{جرم مولی پلیمر}) = 0/4 \times (500 \times 28) = 200 \times 28 = 5600 \text{ g} = 5/6 \text{ kg}$$

در نتیجه جرم این نمونه پلیمر برابر با ۵/۶ کیلوگرم است.

برای تمرین بیشتر، مثال زیر را حل کنید!

جرم مولی یک نمونه از پلی اتن، با جرم مولی یک نمونه از پلی پروپین برابر است. در این شرایط، شمار واحدهای تکرارشونده در مولکول های پلی اتن، چند برابر شمار واحدهای تکرارشونده در مولکول های پلی پروپین است؟ ($H = 1, C = 12: g. mol^{-1}$)

۱/۵ (۴)

۲ (۳)

۰/۵ (۲)

۰/۶۷ (۱)


پاسخ: گزینه ۴

فرمول شیمیایی پلی اتن به صورت $(C_2H_4)_n$ و فرمول شیمیایی پلی پروپین نیز به صورت $(C_3H_6)_n$ است. با توجه به فرمول شیمیایی این پلیمرها، جرم مولی یک نمونه از پلی اتن با n واحد تکرارشونده، برابر با $28 \times n$ و جرم مولی یک نمونه از پلی پروپین با n' واحد تکرارشونده برابر با $42 \times n'$ گرم بر مول است. با توجه به جرم مولی هر ترکیب، شمار واحدهای تکرارشونده موجود در آنها را با هم مقایسه می کنیم:

$$\text{جرم مولی پلی اتن} = \text{جرم مولی پلی پروپین} \Rightarrow 42 \times n' = 28 \times n \Rightarrow \frac{n}{n'} = 1/5$$

پس نسبت خواسته شده برابر ۱/۵ است.


۵۴- کدام یک از مطالب زیر در مورد پلی پروپین نادرست است؟

- (۱) نوع نیروی بین مولکولی در این ماده، مشابه نوع نیروی بین مولکولی در مونومرهای سازنده این ماده است.
- (۲) یکی از کاربردهای این ماده استفاده از آن در ساخت سرنگ های پزشکی است.
- (۳) درصد جرمی کربن در این ماده بیشتر از درصد جرمی کربن در پلی اتن است.
- (۴) فرمول دقیق مولکول های سازنده این ماده مشخص نیست.


پاسخ: گزینه ۳

(متوسط - مفهومی - استاندارد) - صفحه ۱۰۶ - ۱۱۰۳

پلی پروپین با ساختار زیر، از بسپارش دومین عضو خانواده آلکن ها (پروپن) تولید می شود.



فرمول شیمیایی پلی اتن و پلی پروپین به ترتیب به صورت $[C_2H_4]_n$ و $[C_3H_6]_n$ هستند. در هر دو ماده تعداد اتم های هیدروژن ۲ برابر تعداد اتم های کربن بوده و به همین دلیل می توان گفت درصد جرمی کربن در این دو ماده برابر است.

بررسی سایر گزینه ها:

۱ نیروی بین مولکولی به دو دسته **وان دروآلسی** و **هیدروژنی** تقسیم می شود. پلی پروپین همانند پروپن (مونومر سازنده آن) یک هیدروکربن است و در ساختار آن اتم هیدروژنی به نیتروژن، اکسیژن یا فلئوئور متصل نیست و این مواد توانایی تشکیل پیوند هیدروژنی ندارند. پس در این دو ماده نیروی بین مولکولی از نوع **وان دروآلسی** است.

۲ یکی از کاربردهای **پلی پروپین**، **تولید سرنگ** است.

۴ تعیین دقیق مونومرهای شرکت کننده در یک واکنش پلیمری شدن ممکن نیست و تاکنون هیچ قاعده ای برای اتصال شمار مونومرها به یکدیگر ارائه نشده است. به همین دلیل برای پلیمرها نمی توان فرمول مولکولی دقیقی نوشت.



۵۵- در اثر سوختن کامل ۱ مول پلی استیرن که تفاوت جرم اتم های کربن با اتم های هیدروژن در آن برابر ۲۲ کیلوگرم است، در شرایط استاندارد چند متر مکعب گاز کربن دی اکسید تولید می شود؟ ($H = 1, C = 12: g. mol^{-1}$)

۶۷/۲ (۴)

۵۶ (۳)

۴۴/۸ (۲)

۲۲/۴ (۱)


پاسخ: گزینه ۲

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - صفحه ۱۰۶ - ۱۱۰۳

در ابتدا با توجه به این که مجموع جرم مونومرها با جرم پلیمر برابر است، اگر n مول استیرن (C_8H_8) وارد واکنش پلیمری شدن شود، جرم اتم های کربن و هیدروژن برابر است با:

$$\text{جرم اتم های کربن} = n \times 8 \times 12 = 96n$$

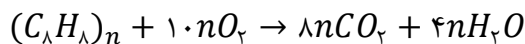
$$\text{جرم اتم های هیدروژن} = n \times 8 \times 1 = 8n$$

حال با توجه به اینکه تفاوت جرم اتم‌های کربن با اتم‌های هیدروژن در این پلیمر برابر ۲۲ کیلوگرم (۲۲۰۰۰ گرم) است، داریم:

$$96n - 8n = 22000 \Rightarrow 88n = 22000 \Rightarrow n = 250$$

در نتیجه تعداد واحد تکرارشونده (n) در این پلیمر برابر با ۲۵۰ است.

معادله سوختن کامل پلی‌استیرن به صورت زیر است:



حجم گاز کربن دی‌اکسید تولیدشده را در اثر سوختن کامل ۱ مول پلی‌استیرن با فرمول مولکولی $(C_8H_8)_n$ محاسبه می‌کنیم:

$$? m^3 CO_2 = 1 \text{ mol } (C_8H_8)_n \times \frac{8n \text{ mol } CO_2}{1 \text{ mol } (C_8H_8)_n} \times \frac{22/4 \text{ L } CO_2}{1 \text{ mol } CO_2} \times \frac{1 \text{ m}^3 CO_2}{1000 \text{ L } CO_2} = \frac{8n \times 22/4}{1000} \text{ m}^3$$

اکنون با توجه به اینکه تعداد واحد تکرارشونده (n) در این پلیمر برابر با ۲۵۰ است، حجم گاز کربن دی‌اکسید تولیدشده را به دست می‌آوریم:

$$V_{CO_2} = \frac{8n \times 22/4}{1000} = \frac{8 \times 250 \times 22/4}{1000} = \frac{2000 \times 22/4}{1000} = 44/8 \text{ m}^3$$

در نتیجه حجم گاز کربن دی‌اکسید تولیدشده برابر با ۴۴/۸ مترمکعب است.



۵۶- کدام مورد درست است؟

- (۱) پلیمر موجود در کیسه خون، یک هیدروکربن سیرشده بوده و هر اتم کربن آن با چهار پیوند اشتراکی به چهار اتم دیگر متصل است.
- (۲) از گرما دادن به ساده‌ترین آلکن در فشار بالا، جامد سفید رنگی با جرم مولی نزدیک به ده‌ها هزار گرم بر مول، تولید می‌شود.
- (۳) هر ترکیب آلی که در ساختار خود دارای پیوند دوگانه است، می‌تواند در واکنش پلیمری شدن شرکت نماید.
- (۴) پلیمرهای هیدروکربنی تولیدشده از هیدروکربن‌های سیرنشده همواره سیرشده هستند.

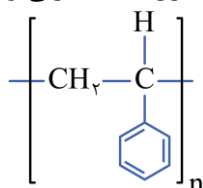
(متوسط - مفهومی - استاندارد) - صفحه ۱۰۶ - ۱۱۰۳

پاسخ: گزینه ۲

هرگاه اتن (ساده‌ترین و نخستین عضو خانواده آلکن‌ها) را در فشار بالا گرما دهیم، جامد سفید رنگی به دست می‌آید. بررسی‌ها نشان می‌دهد که جرم مولی این فراورده اغلب به ده‌ها هزار گرم بر مول می‌رسد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

- (۱) پلیمر موجود در کیسه خون، پلی‌وینیل کلرید است که علاوه بر هیدروژن و کربن، عنصر کلر نیز در این پلیمر دیده می‌شود و به همین علت یک هیدروکربن محسوب نمی‌شود. در این پلیمر هیچ پیوند دوگانه یا سه‌گانه‌ای دیده نمی‌شود و این ماده سیرشده است؛ پس هر اتم کربن در این ماده به چهار اتم دیگر متصل است.
- (۳) هر ترکیب آلی که در ساختار خود پیوند دوگانه کربن-کربن ($C=C$) در زنجیره کربنی داشته باشد، می‌تواند در واکنش پلیمری شدن (بسپارش) شرکت نماید. در نتیجه نمی‌توان گفت هر ترکیب آلی دارای پیوند دوگانه، می‌تواند در این نوع واکنش پلیمری شدن شرکت کند.
- (۴) اگر چه به هنگام تشکیل پلیمرهای افزایشی از مونومرهای دارای پیوند $C=C$ ، یکی از این پیوندها شکسته و به دو پیوند یگانه تبدیل می‌شود؛ اما ممکن است در این مونومر پیوندهای دوگانه یا سه‌گانه دیگری نیز وجود داشته باشند که در واکنش بسپارش شرکت نکنند و در پلیمر وجود داشته باشد. به عنوان مثال در پلی‌استیرن حلقه بنزنی وجود دارد و این پلیمر هیدروکربنی، سیرنشده است.



 بسپارش اتن

هرگاه گاز اتن (C_2H_4) را در فشار بالا گرما دهیم، مولکول‌های این ماده به‌عنوان مونومر در واکنش بسپارش (پلیمری شدن) شرکت کرده و یک جامد سفید رنگ به نام پلی‌اتن را تولید می‌کنند. واکنش بسپارش مولکول‌های اتن به‌صورت زیر است:



بررسی‌ها نشان می‌دهد که جرم مولی پلی‌اتن تولید شده اغلب به ده‌ها هزار گرم بر مول می‌رسد. زیاد بودن جرم مولی این ترکیب نشان می‌دهد که در ساختار هر مولکول از آن هزاران اتم کربن و هیدروژن در اتصال با یکدیگر وجود دارند. همان‌طور که مشخص است در این نوع از واکنش پلیمری شدن، جرم پلیمر تولید شده با مجموع جرم مونومرهای مصرف شده برابر بوده و همه اتم‌های موجود در ساختار مونومرها، در ساختار پلیمر حاصل نیز شرکت می‌کنند. به پلیمر تولید شده در این نوع واکنش‌ها، پلیمر افزایشی گفته می‌شود.



۵۷- کدام موارد درباره پلی‌اتن‌های A و B که به ترتیب در کیسه پلاستیکی و درب بطری استفاده می‌شوند، درست هستند؟

الف - چگالی پلی‌اتن B از پلی‌اتن A بیشتر است و هر دو بر روی آب شناور می‌مانند.

ب - نیروی وان‌دروالسی بین مولکول‌های پلی‌اتن A نسبت به پلی‌اتن B قوی‌تر است.

ج - در پلی‌اتن A همانند پلی‌اتن B هر اتم کربن به دو اتم کربن دیگر اتصال دارد.

د - نسبت شمار اتم‌های هیدروژن به کربن در پلی‌اتن A با پلی‌اتن B برابر است.

۱) «الف» و «ج» ۲) «الف» و «د» ۳) «ب» و «ج» ۴) «ب» و «د»

 پاسخ: گزینه ۲

(متوسط - مفهومی - زمان‌بر) - صفحه ۱۰۹ - ۱۱۰۳

پلی‌اتن مورد استفاده در کیسه پلاستیکی و درب بطری به ترتیب پلی‌اتن سبک و پلی‌اتن سنگین هستند. در نتیجه پلی‌اتن A یک پلی‌اتن سبک و پلی‌اتن B یک پلی‌اتن سنگین است.

 پلی‌اتن‌ها

جدول زیر، برخی از خواص پلی‌اتن‌های سبک و سنگین را با یکدیگر مقایسه می‌کند:

ویژگی	پلی‌اتن سبک	پلی‌اتن سنگین
چگالی	کمتر	بیشتر
ساختار	شاخه‌دار	بدون شاخه
نیروی بین مولکولی	ضعیف‌تر	قوی‌تر
استحکام	کمتر	بیشتر
نقطه جوش	پایین‌تر	بالا‌تر
ظاهر	شفاف	کدر
انعطاف‌پذیری	کم	ندارد
کاربرد	کیسه‌های پلاستیکی	لوله‌های پلاستیکی، دبه‌های آب و بطری

عبارت‌های «الف» و «د» درست هستند.

بررسی موارد:

الف) چگالی پلی‌اتن B (سنگین) از چگالی پلی‌اتن A (سبک) بیشتر است. اما هر دو نوع پلی‌اتن دارای چگالی کمتری نسبت به آب هستند، در نتیجه بر روی آب شناور می‌مانند.

ب) استحکام پلی‌اتن سنگین از پلی‌اتن سبک بیشتر بوده، در نتیجه نیروی وان‌دروالسی بین مولکول‌های پلی‌اتن سنگین بیشتر است. پس نیروی وان‌دروالسی بین مولکول‌های پلی‌اتن B نسبت به پلی‌اتن A قوی‌تر است.

ج) ساختار پلی‌اتن سنگین بدون شاخه است و هر اتم کربن به دو اتم کربن اتصال دارد. اما ساختار پلی‌اتن سبک شاخه‌دار است و بعضی از اتم‌های کربن موجود در آن به بیش از دو اتم کربن اتصال دارند. در نتیجه در پلی‌اتن B برخلاف پلی‌اتن A هر اتم کربن به دو اتم کربن دیگر اتصال دارد.

د) این دو نوع پلیمر از مونومرهای یکسان تشکیل شده‌اند، در نتیجه فرمول مولکولی هر دو به‌صورت $(C_2H_4)_n$ است و نسبت شمار اتم‌های هیدروژن به کربن در هر یک از آن‌ها برابر با ۲ است.

۵۸- اگر در واکنش سوختن یک مول الکل تک عاملی، $12/5$ مول اکسیژن مصرف شده و 9 مول گاز کربن دی اکسید تولید شود، در هر مولکول از این الکل چند اتم هیدروژن وجود دارد؟

۲۰ (۴)

۱۴ (۳)

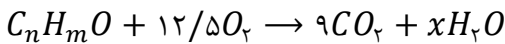
۱۸ (۲)

۱۶ (۱)

(متوسط - محاسباتی - سریع) صفحه ۱۱۱ - ۱۱۰۳

پاسخ: گزینه ۱

در فرمول شیمیایی الکل یک عاملی، یک اتم اکسیژن وجود دارد. پس فرمول شیمیایی این ماده به صورت C_nH_mO است. در واکنش سوختن ترکیبات آلی اکسیژن دار، آب و کربن دی اکسید تولید می شود. معادله موازنه شده واکنش انجام شده به صورت زیر است:



را حل مسئله

برای مشخص کردن تعداد اتم های هیدروژن ماده آلی باید تعداد اتم های هیدروژن موجود در مولکول های آب تولید شده از سوختن این ماده را محاسبه کنیم. مقدار آب تولید شده در واکنش سوختن را نیز از برابری اتم های اکسیژن دو سمت واکنش محاسبه می کنیم. از موازنه اتم های اکسیژن، مقدار x را محاسبه می کنیم:

$$1 + 12/5 \times 2 = 9 \times 2 + x \rightarrow x = 8$$

حال از موازنه اتم های هیدروژن، مقدار m را به دست می آوریم:

$$m = 2x = 2 \times 8 = 16$$

پس در هر مولکول این ماده 16 اتم هیدروژن دیده می شود.



۵۹- با توجه به جدول زیر، کدام مورد درست است؟

فرمول الکل راست زنجیر سیر شده	انحلال پذیری ($100g H_2O / g$)
A	به هر نسبتی حل می شود
B	$2/8$
$CH_3CH_2CH_2CH_2CH_2CH_2OH$	x
C	$0/006$

- (۱) مقدار x می تواند برابر با $1/05$ گرم باشد.
- (۲) اتانول برخلاف متانول می تواند بیانگر الکل A باشد.
- (۳) شمار پیوندهای اشتراکی موجود در الکل C می تواند برابر با ۲۹ باشد.
- (۴) در الکل B برخلاف الکل سازنده استر موجود در موز، بخش قطبی بر ناقطبی غلبه دارد و نیروی بین مولکولی غالب از نوع هیدروژنی است.

(متوسط - مفهومی - زمان بر) صفحه ۱۱۲ - ۱۱۰۳

پاسخ: گزینه ۳

الکل های راست زنجیر تا ۵ اتم کربن در آب حل می شوند و از آنجا که انحلال پذیری الکل C کمتر از این مقدار است، پس شمار اتم های کربن آن بیش از ۵ عدد است. فرمول مولکولی الکل های راست زنجیر سیر شده به صورت $C_nH_{2n+1}OH$ یا $C_nH_{2n+2}O$ بوده و تعداد پیوندهای کووالانسی در آن برابر است با:

$$\text{شمار اتم های } (O) \times 2 + (\text{شمار اتم های } H) \times 1 + (\text{شمار اتم های } C) \times 4 = \text{شمار پیوندهای اشتراکی}$$

$$\Rightarrow 29 = \frac{4 \times n + 1 \times (2n + 2) + 2 \times 1}{2} \Rightarrow 6n + 4 = 58 \Rightarrow 6n = 54 \Rightarrow n = 9$$

پس الکل مورد نظر ۹ کربنه بوده و در آب نامحلول است.

بررسی سایر گزینه ها:

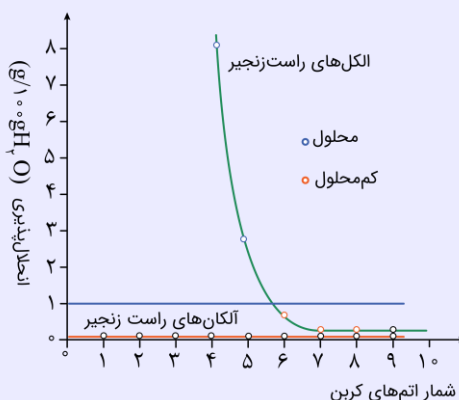
۱) فرمول الکل نشان داده شده مربوط به ۱-هگزانول با ۶ اتم کربن است. انحلال پذیری این ماده در آب باید کمتر از ۱ گرم باشد. (الکلهایی با ۶ تا ۸ اتم کربن در آب کم محلول هستند و انحلال پذیری آنها بین ۰/۱ تا ۱ گرم خواهد بود.)

۲) با افزایش شمار اتمهای کربن انحلال پذیری الکلهای در آب کاهش می یابد. پس اگر الکل ۲ کربنه (اتانول) مطابق کتاب درسی به هر نسبتی در آب حل شود، الکل تک کربنه (متانول) نیز به هر نسبتی در آب حل می شود. (الکلهای دارای یک تا سه اتم کربن به هر نسبتی در آب حل می شوند.)

۳) در الکلهای کوچک و پنج کربن، بخش قطبی بر ناقطبی غلبه دارد و الکل در آب محلول بوده و نیروی بین مولکولی غالب در آنها از نوع هیدروژنی است. از آنجا که انحلال پذیری الکل B بیشتر از یک گرم در ۱۰۰ گرم آب است، این الکل در آب محلول بوده و الکل سازنده استر موجود در موز (پنتیل اتانوات) پنتانول است. در نتیجه، در هر یک از این الکلهای بخش قطبی بر ناقطبی غلبه دارد و نیروی بین مولکولی غالب از نوع هیدروژنی است.

انحلال پذیری الکلهای

بین مولکولهای الکل، پیوند هیدروژنی و نیروی واندروالسی وجود دارد. با افزایش شمار اتمهای کربن (افزایش زنجیره هیدروکربنی)، نیروی واندروالسی بر پیوند هیدروژنی غلبه کرده و خاصیت ناقطبی الکل را افزایش می دهد. در الکلهای کوچک و تا ۵ اتم کربن، بخش قطبی بر ناقطبی غلبه کرده و الکل در آب محلول است.



- ◆ الکلهای کوچک و تا ۳ اتم کربن به هر نسبتی در آب حل می شوند؛ در نتیجه نمی توان محلول سیر شده ای از آنها را تهیه کرد.
- ◆ الکلهایی با ۶، ۷ و ۸ اتم کربن، جزء مواد کم محلول در آب دسته بندی می شوند.
- ◆ انحلال پذیری الکلهای در آب به صورت مولکولی است؛ در نتیجه محلول آنها **رسانای جریان برق** نیست.
- ◆ مطابق نمودار با افزایش شمار اتمهای کربن در الکلهای راست زنجیر، اختلاف انحلال پذیری دو الکل متوالی **کاهش** می یابد.



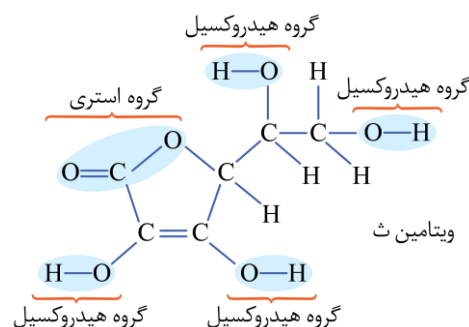
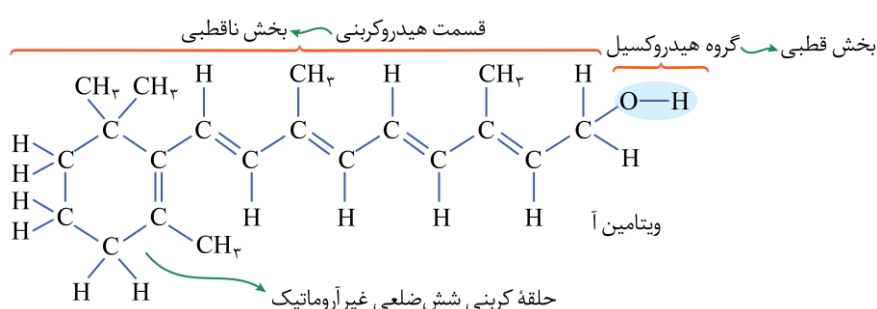
۶۰- ویتامین یک بوده و برخلاف ویتامین یک است.

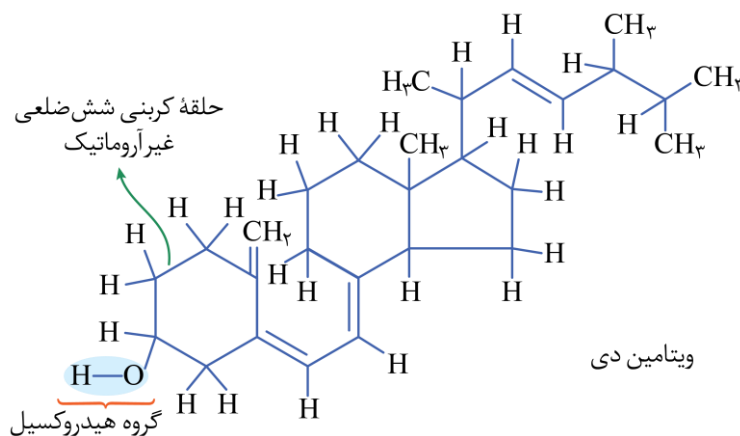
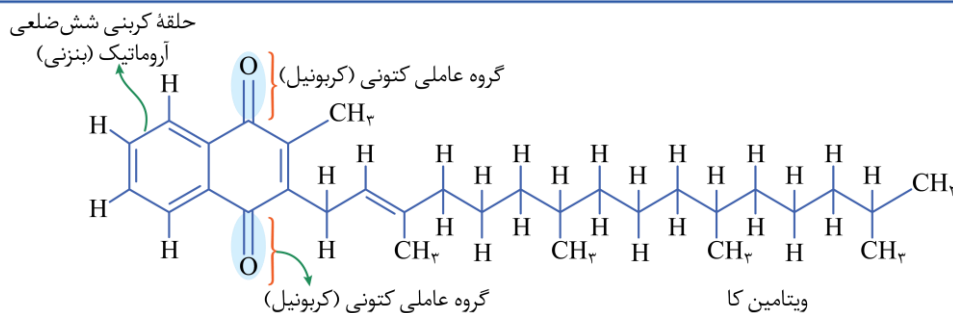
- (۱) کا - کتون - دی - ترکیب آروماتیک
(۲) دی - ترکیب آروماتیک - کا - الکل
(۳) آ - الکل - کا - ترکیب آروماتیک
(۴) آ - ترکیب آروماتیک - دی - الکل

(آسان - خط به خط - سریع ۱ - صفحه ۱۱۴ - ۱۱۰۳)

پاسخ: گزینه ۱

ساختار ویتامین ها و گروه های عاملی آنها در تصویر زیر مشخص شده اند:





ویتامین کا یک کتون آروماتیک است. در واقع ویتامین کا در میان این ۴ ماده تنها ماده آروماتیک محسوب می شود. همچنین ویتامین های دی و آ نوعی الکل سیر نشده هستند.

ویژگی های ویتامین ها

همچنین جدول زیر ویژگی های ویتامین های مطرح شده در کتاب درسی را بیان می کند.

ویتامین	ث	آ	دی	کا
گروه عاملی	استری ۱ × + هیدروکسیل ۴ ×	هیدروکسیل ۱ ×	هیدروکسیل ۱ ×	کتونی ۲ ×
فرمول مولکولی	$C_{60}H_{80}O_6$	$C_{28}H_{44}O$	$C_{28}H_{44}O$	$C_{31}H_{46}O_2$
نوع انحلال پذیری	محلول در آب	محلول در چربی	محلول در چربی	محلول در چربی
آروماتیک	نیست	نیست	نیست	هست
تعداد حلقه	پنج ضلعی ۱ ×	شش ضلعی ۱ ×	پنج ضلعی ۱ × شش ضلعی ۲ ×	شش ضلعی ۲ ×
پیوند هیدروژنی	دارد	دارد	دارد	ندارد



۶۱- کدام گزینه درباره پلیمری که پلانکت به طور اتفاقی آن را کشف کرد، نادرست است؟

- (۱) در تهیه نخ دندان کاربرد دارد.
- (۲) پلیمر مورد نظر نجسب بوده و در حلال هایی مانند اتانول حل می شود.
- (۳) مونومر سازنده این پلیمر یک نوع گاز سردکننده به نام تترافلوئورواتن است.
- (۴) این پلیمر برخلاف مونومر آن، از نظر شیمیایی بی اثر است و با مواد شیمیایی واکنش نمی دهد.

(آسان - مفهومی - استاندارد) - صفحه ۱۰۷ - ۱۱۰۳

پاسخ: گزینه ۲

تفلون یا همان پلی تترافلوئورواتن، پلیمری است که پلانکت آن را به طور اتفاقی کشف کرد. این پلیمر نجسب است و در حلال های آلی نظیر اتانول حل نمی شود.

بررسی سایر گزینه ها:

- ۱) تفلون، کاربردهای گسترده‌ای در صنعت و زندگی دارد. به‌طور مثال در تهیه نخ دندان کاربرد دارد.
- ۳) پلانکت و گروه پژوهشی او در حال بررسی و مطالعه انواع سردکننده‌ها بودند که یکی از گازهایی که آن‌ها استفاده می‌کردند، گاز تترافلوئورواتن بود. این گاز مونومر سازنده تفلون است.
- ۴) تفلون از نظر شیمیایی بی‌اثر است و با مواد شیمیایی واکنش نمی‌دهد. اما مونومر آن یعنی تترافلوئورواتن به دلیل داشتن پیوند دوگانه کربن-کربن ($C=C$) می‌تواند در واکنش‌های شیمیایی شرکت کند.

 تفلون

یکی از پلیمرهای ساختگی تفلون است. این پلیمر از بسپارش مونومری به نام تترافلوئورواتن به وجود می‌آید. این پلیمر افزایشی ویژگی‌های بسیار زیادی داشته که کاربردهای این ماده را وسیع کرده است. این ماده، نقطه ذوب بالایی داشته و در برابر گرما مقاوم است؛ به گونه‌ای که از آن در ساخت کفی اتو استفاده می‌شود. تفلون از نظر شیمیایی بی‌اثر بوده و با مواد شیمیایی واکنش نمی‌دهد و همچنین این ماده در حلال‌های آلی حل نمی‌شود و نجسب است؛ به همین خاطر بوده که از این پلیمر برای تولید ظروف آشپزخانه استفاده می‌شود. کاربردهای دیگر تفلون، تولید نخ دندان و نوارهای آب‌بندی لوله‌ها است.

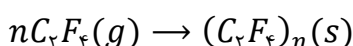


- ۶۲- اگر درصد جرمی فلوئور در یک نمونه ناخالص از تفلون برابر $60/8$ درصد باشد، برای تولید یک کیلوگرم از این تفلون چند لیتر مونومر مصرف می‌شود؟ (حجم یک مول گاز در شرایط واکنش تولید تفلون برابر 25 لیتر است. $C = 12, F = 19: g.mol^{-1}$)
- (۱) ۱۰۰ (۲) ۲۰۰ (۳) ۴۰۰ (۴) ۸۰۰

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) صفحه ۱۰۷ - ۱۱۳

پاسخ: گزینه ۲

فرمول شیمیایی تفلون یا همان پلی تترافلوئورواتن به صورت $(C_2F_4)_n$ بوده و واکنش تولید آن از مونومر سازنده به صورت زیر است:



 راه حل مسئله

تفلون یک پلیمر افزایشی (برابری جرم مونومر و پلیمر) است. پس با محاسبه جرم تفلون، جرم و در نهایت حجم مونومر سازنده آن به دست می‌آید.

با توجه به درصد جرمی فلوئور در تفلون ناخالص، جرم تفلون خالص در یک کیلوگرم از ماده را به دست می‌آوریم:

$$? g (C_2F_4)_n = 1 kg \text{ ماده} \times \frac{1000 g}{1 kg} \times \frac{60/8 g F}{100 g \text{ ماده}} \times \frac{1 mol F}{19 g F} \times \frac{1 mol (C_2F_4)_n}{4n mol F} \times \frac{100n g (C_2F_4)_n}{1 mol (C_2F_4)_n} = 800 g$$

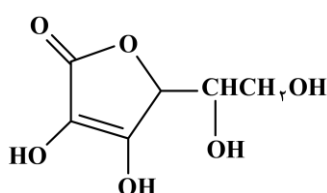
پس جرم پلی تترافلوئورواتن و در نتیجه جرم تترافلوئورواتن مصرف شده برابر ۸۰۰ گرم است. در نهایت حجم این گاز را حساب می‌کنیم:

$$? L C_2F_4 = 800 g C_2F_4 \times \frac{1 mol C_2F_4}{100 g C_2F_4} \times \frac{25 L C_2F_4}{1 mol C_2F_4} = 200 L$$

بنابراین از ۲۰۰ لیتر گاز برای تولید ۱ کیلوگرم از این تفلون ناخالص استفاده می‌شود.



- ۶۳- اگر ساختار مقابل مربوط به ویتامین ث باشد، کدام گزینه در مورد آن نادرست است؟ ($H = 1, C = 12, O = 16: g.mol^{-1}$)



- (۱) مصرف بیش از اندازه این ویتامین برخلاف ویتامین آ برای بدن مشکل خاصی ایجاد نمی‌کند.
- (۲) این ترکیب همانند ویتامین دی توانایی تشکیل پیوند هیدروژنی بین مولکول‌های خود را دارد.
- (۳) نسبت شمار کل پیوندهای اشتراکی به شمار پیوندهای $C-H$ در این مولکول برابر با $5/5$ است.
- (۴) با جایگزینی گروه‌های هیدروکسیل با گروه متیل، جرم مولی ترکیب حدود $5/4$ درصد کاهش می‌یابد.

فرمول مولکولی ویتامین ث به صورت « $C_6H_8O_6$ » است و جرم مولی آن برابر است با:

$$M_1 = 6 \times 12 + 8 \times 1 + 6 \times 16 = 72 + 8 + 96 = 176 \text{ g.mol}^{-1}$$

با توجه به ساختار ویتامین ث، این مولکول دارای چهار گروه هیدروکسیل ($-OH$) است که جرم هر گروه برابر با ۱۷ گرم است و در صورت جایگزینی آن‌ها با گروه متیل ($-CH_3$) به جرم ۱۵ گرم، جرم مولی کل ترکیب ۸ گرم ($4 \times 2 \text{ g}$) کاهش خواهد یافت. در نتیجه مقدار درصد کاهش جرم مولی برابر خواهد بود با:

$$\text{درصد تغییرات} = \frac{\Delta M}{M_1} \times 100 = \frac{-8}{176} \times 100 \approx -4/5$$

در نتیجه جرم مولی ترکیب به مقدار ۴/۵ درصد کاهش می‌یابد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱ در ویتامین ث (C) برخلاف ویتامین آ (A) بخش قطبی بر ناقطبی غلبه دارد؛ در نتیجه ویتامین ث (C) برخلاف ویتامین آ (A) در آب محلول است و مصرف بیش از اندازه ویتامین‌های محلول در آب برخلاف ویتامین‌های نامحلول در آب (محلول در چربی) برای بدن مشکل خاصی ایجاد نمی‌کند.

۲ ویتامین ث همانند ویتامین دی به دلیل داشتن گروه عاملی هیدروکسیل در ساختار خود، توانایی تشکیل پیوند هیدروژنی بین مولکول‌های خود را دارد.

۳ شمار پیوندهای اشتراکی در این مولکول با فرمول مولکولی $C_6H_8O_6$ برابر است با:

$$\begin{aligned} \text{شمار پیوندهای اشتراکی} &= \frac{4 \times (\text{شمار اتم‌های } C) + 1 \times (\text{شمار اتم‌های } H) + 2 \times (\text{شمار اتم‌های } O)}{2} \\ &= \frac{4 \times 6 + 1 \times 8 + 2 \times 6}{2} = \frac{44}{2} = 22 \end{aligned}$$

با توجه به ساختار این مولکول از بین ۸ اتم هیدروژن، ۴ اتم هیدروژن به اکسیژن (در گروه عاملی هیدروکسیل) اتصال دارد؛ در نتیجه ۴ اتم هیدروژن به کربن اتصال دارد. پس این مولکول دارای ۴ پیوند $C-H$ است و نسبت خواسته شده برابر است با:

$$\frac{22}{4} = 5/5$$

در نتیجه نسبت شمار پیوندهای اشتراکی به شمار پیوندهای $C-H$ در این مولکول برابر با ۵/۵ است.



۶۴ - کدام گزینه عبارت زیر را به درستی تکمیل می‌کند؟

«ماده همانند درشت مولکول بوده و از نظر داشتن واحد تکرارشونده با یکدیگر هستند.»

- (۱) نایلون - نفتالن - متفاوت
- (۲) پلی‌استر - نشاسته - متفاوت
- (۳) انسولین - پلی‌پروپن - مشابه
- (۴) نشاسته - بنزوئیک اسید - مشابه

نایلون، پلی‌استر، نشاسته، انسولین و پلی‌پروپن درشت مولکول و پلیمر هستند و در ساختار خود واحد تکرارشونده دارند.

همچنین نفتالن و بنزوئیک اسید دو ماده مولکولی با مولکول‌های متوسط هستند و درشت مولکول محسوب نمی‌شوند و همچنین واحد تکرارشونده نیز ندارند.



۶۵- ۰/۳ مول از یک الکل در واکنش با مقدار کافی اسید آلی با بازده ۶۰ درصد، ۲۳/۴ گرم استر تولید می‌کند. اگر جرم مولی اسید ۵۶ گرم از الکل بیشتر باشد، کدام گزینه نشان‌دهنده استر تولید شده در این واکنش است؟ (بخش هیدروکربنی الکل و اسید آلی مصرف شده، راست‌زنجیر و سیر شده است. $H = 1, C = 12, O = 16: g.mol^{-1}$)

(۱) اتیل پنتانوات (۲) متیل بوتانوات (۳) متیل هگزانوات (۴) پروپیل هگزانوات

پاسخ: گزینه ۱

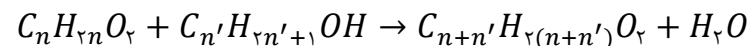
سخت - محاسباتی - استاندارد (۱) - صفحه ۱۱۴ - ۱۱۰۳

فرمول مولکولی کربوکسیلیک اسید یک عاملی را به صورت $C_nH_{2n}O_2$ و فرمول مولکولی الکل یک عاملی را به صورت $C_{n'}H_{2n'+1}OH$ فرض می‌کنیم؛ از آنجا که جرم مولی کربوکسیلیک اسید نسبت به الکل ۵۶ گرم بیشتر است، داریم:

$$M_{\text{کربوکسیلیک اسید}} - M_{\text{الکل}} = 56 \Rightarrow (12n + 2n + 32) - (12n' + 2n' + 1 + 16 + 1) = 56 \Rightarrow 14n - 14n' + 14 = 56$$

$$\Rightarrow 14n - 14n' = 42 \Rightarrow n - n' = 3 \quad (*)$$

معادله واکنش کربوکسیلیک اسید با الکل به صورت زیر است:



با توجه به اینکه ۲۳/۴ گرم استر در این واکنش با بازده ۶۰ درصد تولید شده، جرم نظری استر تولید شده در این واکنش برابر است با:

$$\text{بازده درصدی} = \frac{\text{مقدار عملی}}{\text{مقدار نظری}} \times 100 \Rightarrow 60 = \frac{23/4}{m} \times 100 \Rightarrow m = 39 \text{ g}$$

با توجه به معادله، در این واکنش از ۰/۳ مول الکل، ۰/۳ مول استر به صورت نظری تولید می‌شود. پس جرم مولی این استر برابر ۱۳۰ گرم بر مول است.

$$130 = \text{جرم مولی} \Rightarrow \text{جرم مولی} \times 0/3 = 39 \Rightarrow \text{جرم مولی} \times \text{مول} = \text{جرم}$$

بنابراین داریم:

$$130 = 12 \times (n + n') + 1 \times 2(n + n') + 2 \times 16 = 14 \times (n + n') + 32$$

$$\Rightarrow 14 \times (n + n') = 98 \Rightarrow n + n' = 7 \quad (**)$$

اکنون با جمع کردن دو معادله (*) و (**)، داریم:

$$n + n' + n - n' = 3 + 7 \Rightarrow 2n = 10 \Rightarrow n = 5$$

در نتیجه شمار اتم‌های کربن کربوکسیلیک اسید مورد نظر برابر با ۵ است و با توجه به معادله (**) که مجموع اتم‌های کربن کربوکسیلیک اسید و الکل برابر ۷ بوده، شمار اتم‌های کربن الکل مورد نظر برابر با ۲ است. در نتیجه استر مورد نظر از واکنش پنتانویک اسید با اتانول به دست آمده و نام آن به صورت اتیل پنتانوات خواهد بود.

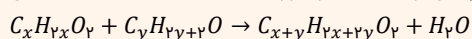
برای تمرین بیشتر، سؤال زیر را حل کنید!

از واکنش ۸۸ گرم بوتانویک اسید با مقدار کافی از یک الکل سیر شده در واکنشی با بازده ۶۰ درصد، ۷۸ گرم از یک ترکیب آلی حاصل می‌شود. در هر مولکول الکل مصرف شده، چند پیوند اشتراکی وجود دارد؟ (زنجیر هیدروکربنی الکل، فاقد حلقه است و $H = 1, C = 12, O = 16: g.mol^{-1}$)

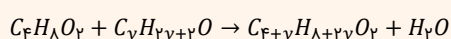
(۱) ۱۴ (۲) ۱۱ (۳) ۸ (۴) ۵

پاسخ: گزینه ۲

از واکنش کربوکسیلیک اسید یک عاملی با الکل یک عاملی، استر یک عاملی و آب تولید می‌شود. کاتالیزگر این واکنش، سولفوریک اسید (H_2SO_4) است. این واکنش را می‌توان به صورت مقابل نمایش داد:



بوتانویک اسید، کربوکسیلیک اسیدی با فرمول مولکولی $C_4H_8O_2$ است. اگر y را تعداد اتم‌های کربن در الکل سیر شده و فاقد حلقه در نظر بگیریم، فرمول مولکولی الکل‌های یک عاملی به صورت $C_yH_{2y+2}O$ خواهد بود. بر این اساس می‌توان به واکنش زیر رسید:



ابتدا می‌توان مقدار نظری استر را از روی مصرف ۸۸ گرم بوتانویک اسید به دست آورد:

$$? \text{ g } C_{4+y}H_{8+2y}O_2 = 88 \text{ g } C_4H_8O_2 \times \frac{1 \text{ mol } C_{4+y}H_{8+2y}O_2}{1 \text{ mol } C_4H_8O_2} \times \frac{(14y+88) \text{ g } C_{4+y}H_{8+2y}O_2}{1 \text{ mol } C_{4+y}H_{8+2y}O_2} = 14y + 88 \text{ g}$$

اکنون بر اساس فرمول بازده درصدی می‌توان مقدار y را محاسبه کرد:

$$\text{بازده درصدی واکنش} = \frac{\text{مقدار عملی}}{\text{مقدار نظری}} \times 100 \Rightarrow 60 = \frac{78}{14y+88} \times 100 \Rightarrow y = 3$$

الکل مصرف شده در واکنش، پروپانول بوده و فرمول مولکولی آن به صورت C_3H_8O است. بر این اساس می‌توان نوشت:

$$\text{تعداد پیوندهای اشتراکی} = \frac{(4 \times 3) + (1 \times 2) + 1}{2} = 11$$

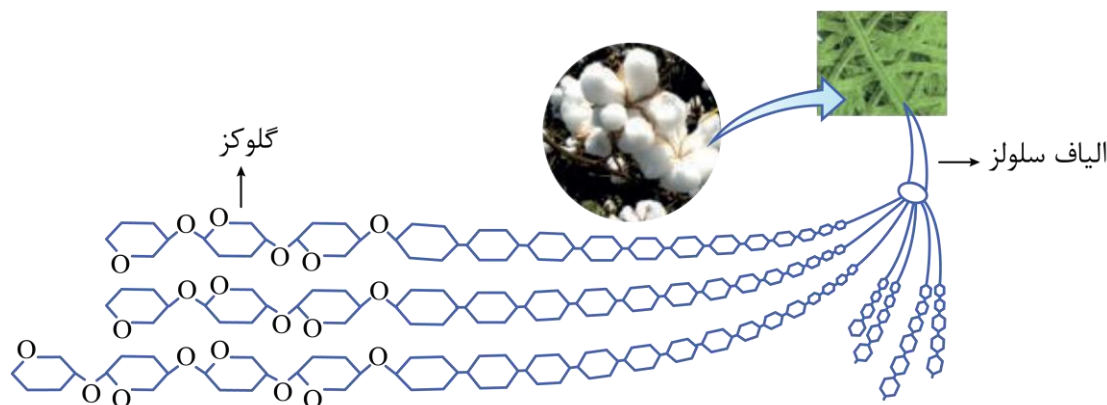
در هر مولکول از پروپانول، ۱۱ پیوند اشتراکی وجود دارد.

۶۶- واحدهای تکرارشونده در ساختار سلولز با اتم‌های به یکدیگر متصل هستند و در ساختار مونومر سازنده آن، حلقه ۶ کربنه وجود
 (۱) اکسیژن - دارد (۲) کربن - ندارد (۳) اکسیژن - ندارد (۴) کربن - دارد

(متوسط - خط به خط - سریع ۱ - صفحه ۱۰۲ - ۱۱۰۳)

پاسخ: گزینه ۳

شکل زیر از کتاب درسی ساختار سلولز را نشان می‌دهد:



همان‌طور که در شکل بالا مشخص است، بین گلوکزها یا همان مونومرهای سازنده در ساختار سلولز، اتم‌های اکسیژن وجود دارند که با دو پیوند یگانه به دو اتم کربن متصل است. (گروه عاملی اتری) همچنین اگر چه ساختار گلوکز به صورت شش ضلعی بوده، اما یکی از رئوس این شش ضلعی اتم اکسیژن است و نمی‌توان به شش ضلعی مورد نظر، حلقه شش کربنی گفت.



۶۷- چند مورد از مطالب زیر در مورد واکنش استری شدن درست است؟

الف - کاتالیزگر این واکنش از ۳ عنصر نافلزی تشکیل شده است.

ب - به واکنش میان یک الکل و اسید آلی، واکنش استری شدن می‌گویند.

ج - فراورده آلی نسبت به واکنش‌دهنده‌ها، انحلال‌پذیری بیشتری در آب دارد.

د - متیل پروپانوات از شرکت فرمیک اسید و پروپانول در این واکنش تشکیل می‌شود.

(۴) ۱

(۳) ۲

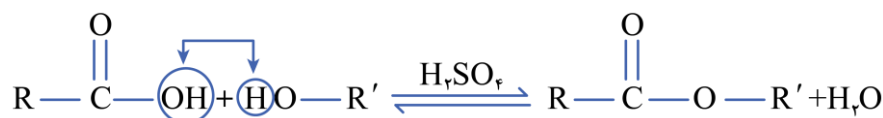
(۲) ۳

(۱) ۴

(متوسط - محاسباتی - استاندارد ۱ - صفحه ۱۱۴ - ۱۱۰۳)

پاسخ: گزینه ۳

واکنش کربوکسیلیک اسید با الکل برای تولید استر، استری شدن نام دارد و معادله این واکنش به صورت زیر است:



عبارت‌های (الف) و (ب) درست هستند.

بررسی موارد:

(الف) کاتالیزگر این واکنش سولفوریک اسید (H_2SO_4) است. در فرمول این ماده ۳ عنصر نافلزی وجود دارد.

(ب) واکنش استری شدن در واقع واکنش میان الکل و کربوکسیلیک اسید است که موجب تولید استر می‌شود.

(ج) فراورده این واکنش نسبت به هر یک از واکنش‌دهنده‌های آن، بخش ناقطبی (R' و R) بزرگ‌تری دارد. به همین علت می‌توان گفت

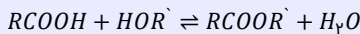
استر تولیدشده نسبت به الکل و اسید انحلال‌پذیری کمتری دارد.

(د) نام یک استر از دو جزء تشکیل می‌شود؛ بخش الکی به شکل آلکیل (پسوند یل) و بخش اسیدی که به شکل استری (پسوند ات)

نوشته می‌شود. پس متیل پروپانوات از واکنش میان متانول و پروپانویک اسید ایجاد می‌شود.

 استری شدن

واکنش کربوکسیلیک اسید با الکل برای تولید استر، یک واکنش برگشت پذیر بوده و کاتالیزگر آن سولفوریک اسید (H_2SO_4) است. این واکنش در محیط اسیدی سریع تر انجام می شود و می توان آن را به صورت زیر نمایش داد:



به واکنش رفت، استری شدن و به واکنش برگشت، آبکافت (هیدرولیز) استرها گفته می شود.



۶۸- در طی واکنش استری شدن یک کربوکسیلیک اسید با یک الکل در شرایط مناسب واکنش داده است. اگر درصد جرمی آب تولید شده در بین فراورده های واکنش برابر ۱۵ درصد باشد، استر تولید شده در این واکنش می تواند در کدام میوه یافت شود؟ (بخش یا بخش های هیدروکربنی استر تولید شده راست زنجیر و سیر شده هستند. $H = 1, C = 12, O = 16: g.mol^{-1}$)

(۱) موز (۲) آناناس (۳) سیب (۴) انگور

پاسخ: گزینه ۳  (سخت - محاسباتی - استاندارد) - صفحه ۱۱۵ - ۱۱۰۳

معادله واکنش استری شدن به صورت زیر است:

آب + استر $\rightarrow$ الکل + کربوکسیلیک اسید
فرمول مولکولی استرها به صورت $C_nH_{2n}O_2$ است. در این واکنش به ازای تولید یک مول استر (به جرم $14n + 32$ گرم)، یک مول آب (به جرم ۱۸ گرم) نیز تولید می شود. پس برای به دست آوردن درصد جرمی آب تولید شده در این واکنش داریم:

$$\text{درصد جرمی آب} = \frac{\text{جرم آب}}{\text{جرم فراورده ها}} \times 100 \Rightarrow 15 = \frac{18}{(14n + 32) + 18} \times 100 \Rightarrow \frac{18}{14n + 50} = \frac{3}{20} \Rightarrow \frac{3}{7n + 25} = \frac{1}{20}$$

$$\Rightarrow 7n + 25 = 60 \Rightarrow n = 5$$

در نتیجه استر تولید شده دارای ۵ اتم کربن است. استر موجود در سیب، متیل بوتانوات بوده که دارای ۵ اتم کربن می باشد. پس استر تولید شده می تواند استر موجود در سیب باشد.

بررسی سایر گزینه ها:

- ۱ استر موجود در موز، پنتیل اتانوات است که دارای ۷ اتم کربن است. 
- ۲ استر موجود در آناناس، اتیل بوتانوات است که دارای ۶ اتم کربن است. 
- ۴ استر موجود در انگور، اتیل هپتانوات است که دارای ۹ اتم کربن است. 

اسید و الکل سازنده ترکیب استری موجود در میوه ها

الکل سازنده	کربوکسیلیک اسید سازنده	نام میوه
CH_3CH_2-OH اتانول	$CH_3CH_2CH_2-C(=O)OH$ بوتانویک اسید	آناناس
$CH_3CH_2CH_2CH_2CH_2-OH$ ۱-پنتانول	$CH_3-C(=O)OH$ اتانویک اسید	موز
CH_3-OH متانول	$CH_3CH_2CH_2-C(=O)OH$ بوتانویک اسید	سیب
CH_3CH_2-OH اتانول	$CH_3CH_2CH_2CH_2CH_2CH_2-C(=O)OH$ هپتانویک اسید	انگور



۶۹- اگر درصد جرمی کربن در یک کربوکسیلیک اسید یک عاملی، $\frac{3}{75}$ برابر درصد جرمی اکسیژن در این ماده باشد، در ساختار این

اسید چند اتم کربن وجود دارد؟ ($H = 1, C = 12, O = 16: g. mol^{-1}$)

۱۰ (۴)

۹ (۳)

۸ (۲)

۷ (۱)

(آسان - محاسباتی - سریع) - صفحه ۱۱۱ - ۱۱۰۳

پاسخ: گزینه ۴

در کربوکسیلیک اسید یک عاملی، یک گروه $-COOH$ وجود دارد. پس در مولکول این ماده ۲ اتم اکسیژن دیده می شود و فرمول شیمیایی این ماده به صورت $C_nH_mO_2$ است. درصد جرمی کربن و اکسیژن در این ماده برابر است با:

$$C \text{ درصد جرمی} = \frac{\text{جرم اتم های } C}{\text{جرم مولکول}} \times 100 = \frac{12n}{M} \times 100$$

$$O \text{ درصد جرمی} = \frac{\text{جرم اتم های } O}{\text{جرم مولکول}} \times 100 = \frac{2 \times 16}{M} \times 100$$

بر این اساس، به کمک نسبت درصد جرمی این دو عنصر، مقدار n را مشخص می کنیم:

$$\frac{C \text{ درصد جرمی}}{O \text{ درصد جرمی}} = \frac{\frac{12n}{M} \times 100}{\frac{2 \times 16}{M} \times 100} \Rightarrow \frac{3}{75} = \frac{3n}{8} \Rightarrow 30 = 3n \Rightarrow n = 10$$

پس کربوکسیلیک اسید مورد نظر ۱۰ کربنه است.



۷۰- کدام گزینه نادرست است؟

- (۱) در صورت وجود پیوند $O - H$ در ترکیب $C_2H_4O_2$ ، این ترکیب به طور قطع اتانویک اسید است.
- (۲) از واکنش فورمیک اسید با متانول در شرایط مناسب، ساده ترین استر تولید می شود.
- (۳) بوتانویک اسید در مقایسه با استیک اسید ویژگی چربی دوستی بیشتری دارد.
- (۴) پنتانویک اسید نسبت به متیل بوتانوات دارای نقطه جوش بالاتری است.

(متوسط - مفهومی - استاندارد) - صفحه ۱۱۳ - ۱۱۰۳

پاسخ: گزینه ۱

ترکیب آلی مورد نظر با فرمول مولکولی $C_2H_4O_2$ می تواند مربوط به اتانویک اسید باشد که دارای یک گروه عاملی کربوکسیل ($-COOH$) است. اما به طور مثال این فرمول مولکولی نیز می تواند مربوط به یک ترکیب آلی دو کربنه دارای یک گروه عاملی آلدئیدی ($-COH$) و یک گروه عاملی هیدروکسیل ($-OH$) باشد. پس این ترکیب به طور قطع نمی تواند فقط اتانویک اسید باشد.

بررسی سایر گزینه ها:

(۲) ساده ترین استر متیل متانوات است که از واکنش متانویک اسید (فورمیک اسید) با متانول به دست می آید.

(۳) در کربوکسیلیک اسیدها، با افزایش شمار اتم های کربن و در نتیجه افزایش طول زنجیر کربنی، قطبیت مولکول کاهش می یابد و انحلال پذیری آن در آب کمتر شده و ویژگی چربی دوستی آن بیشتر می شود. از آنجا که بوتانویک اسید ۴ کربنه و استیک اسید ۲ کربنه است، ویژگی چربی دوستی بوتانویک اسید بیشتر خواهد بود.

(۴) پنتانویک اسید و متیل بوتانوات ایزومر یکدیگر هستند و جرم مولی برابر دارند، ولی پنتانویک اسید برخلاف متیل بوتانوات به دلیل داشتن گروه کربوکسیل ($-COOH$) توانایی برقراری پیوند هیدروژنی را دارد، در نتیجه دارای نقطه جوش بالاتری است.



شب امتحان حوصله نداری دیگه درس بخونی؟! **خب درساتو گوش کن!**

✓ پادکست های شب امتحان، ویژه مرور و یادگیری
دروس و نکات مهم در لحظات آخر قبل امتحان



اسکن کن!

برای دریافت
روی لینک بزن!
digimaze.org



دیجی ماز