



گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی

آزمون ماز پایه یازدهم



جمع بندی پایه یازدهم
(بر اساس استاندارد کنکور سراسری)



ویژه دانش آموزان پایه یازدهم

دفترچه پاسخ

پنجشنبه ۱۴ خردادماه ۱۴۰۵

✓ پاسخنامه سریع؛ برای بررسی فوری بعد از آزمون

✓ تحلیل تمام گزینه های هر سؤال؛ برای بررسی سؤالاتی که پاسخ نادرست داده اید

✓ نکات و درسنامه های آموزشی؛ برای یادگیری کامل مباحث هر سؤال

✓ مشاوره تستی؛ برای یادگیری انواع روش های حل تست

✓ استراتژی آزمون؛ برای یادگیری مدیریت زمان و مدیریت جلسه آزمون

دیس	مسئول درس	طراحان	ویراستاران
ریاضیات	مہرداد کیوان حسین شفیع زاده سید جواد نظری	مہرداد کیوان - حسین شفیع زاده حسن محمد بیگی - رسول حاجی زاده	ندا فرہختی مائدہ بادن فیروز - حمید رضا ولی پور یزدان نیک قدم - فواد خیر آبادی
فیزیک	حسین عبدوی نژاد محمد جواد سورچی	حسین عبدوی نژاد - محمد جواد سورچی زہرہ آقامحمدی - سجاد صادقی زاده سعید احمدی - مہدی پارسا مروارید شاہ حسینی	مروارید شاہ حسینی ایلیا فقیہ میرزایی
شیمی	علی ترابی	علی ترابی - پرهام تیزپا - فرهنگ امیری طاہا حق بین - عالیہ میرزایی	محمد مہدی معظمی طاہا حق بین محمد دارابی جم امیر علی حسینی فرد

تیم اجرایی و تولید آزمون

نازنین امیری

مائدہ بادن فیروز

زہرہ جعفری

مروارید شاہ حسینی

مدیر تولید آزمون: محدثہ شیخعلی



یک تیم با بیش از ۵۰۰ نفر در حال کار هستند تا آزمون‌های ما با حداکثر کیفیت حاضر بشن و به شما کمک کنن و مسیر موفقیت رو براتون ساده‌تر کنن. همیشه از نظرات و کامنت‌های خوبتون انرژی می‌گیریم. مرسی که همراهمون هستین. راستی! حتماً در نظر سنجی آزمون شرکت کنین و نظرات و پیشنهاداتتون رو برامون بنویسین.

دکتر رسول خنجری

سؤالای کنکور سخته؟

خیلیا نگران سخت بودن سؤالای کنکور و می ترسن اگه سؤال سخت باشه، رتبه شون خراب بشه. ولی واقعیت اینه که کنکور قرار نیست بینه چند تا سؤال بلدی؛ قراره مقایست کنه با بقیه. یعنی سختی یا آسونی سؤال تأثیری نداره، چون با «تراز» کردن نمره ها، اثرش حذف میشه.

نمره خام فقط نشون میده چند تا درست و غلط زدی، ولی «تراز» نمرت رو تو یه مقیاس استاندارد قرار میده تا بشه همه رو با هم مقایسه کرد. فرمول ساده اش اینه:

$$Z = \frac{X - M}{S}$$

میانگین کل داوطلب ها نمره خام
S انحراف معیار نمرات

اگه در آزمونی سخت درصدت بشه ۴۰ ولی میانگین ۲۰ باشه، و مثلاً انحراف معیار هم ۱۰ باشه نمره استاندارد Z برای تو میشه ۲، یعنی به اندازه ۲ انحراف معیار از میانگین بالاتری. توی کنکور سراسری همین نمره Z رو در ۲۱۸۰ ضرب میکنن و با ۵۰۰۰ جمع می کنن و میشه ترازت توی اون درس یعنی ۹۳۶۰، بعد تراز هر درس در ضریبش ضرب میشه (مثلاً زیست ۱۲، ریاضی و فیزیک ۷، شیمی ۹، زمین شناسی ۱)، و مجموعه ش تقسیم بر کل ضرایب میشه تراز نهایی.

پس چون میانگین و پراکندگی در محاسبه لحاظ میشه، سخت بودن آزمون به ضرر هیچ کس نیست؛

همه در یه شرایط مشابه مسابقه میدن. اگر آزمون سخت باشه، برای همه سخته! رتبه ت نه با تعداد

سؤالات درست، بلکه با عملکردت نسبت به بقیه تعیین می شه.

کنکور مثل یه کوهنوردیه؛ مهم نیست مسیر چقدر سخت باشه، مهم اینه تو چقدر آرام و بااستقامت جلو بری. طبیعیه بعضی سؤال رو بلد نباشی؛ بقیه هم همین طورن. چیزی که رتبه می سازه، تسلط و تمرکز توی لحظه ست.

✱ **یه نکته ظریف:** وقتی زیاد می گیم «آزمون خیلی سخته»، در واقع داریم به ذهنمون بهونه می دیم تا فشار کمتری تحمل کنه. در حالی که سختی برای همه یکسانه؛ فرق آدمای موفق اینه که با وجود سختی ادامه میدن.

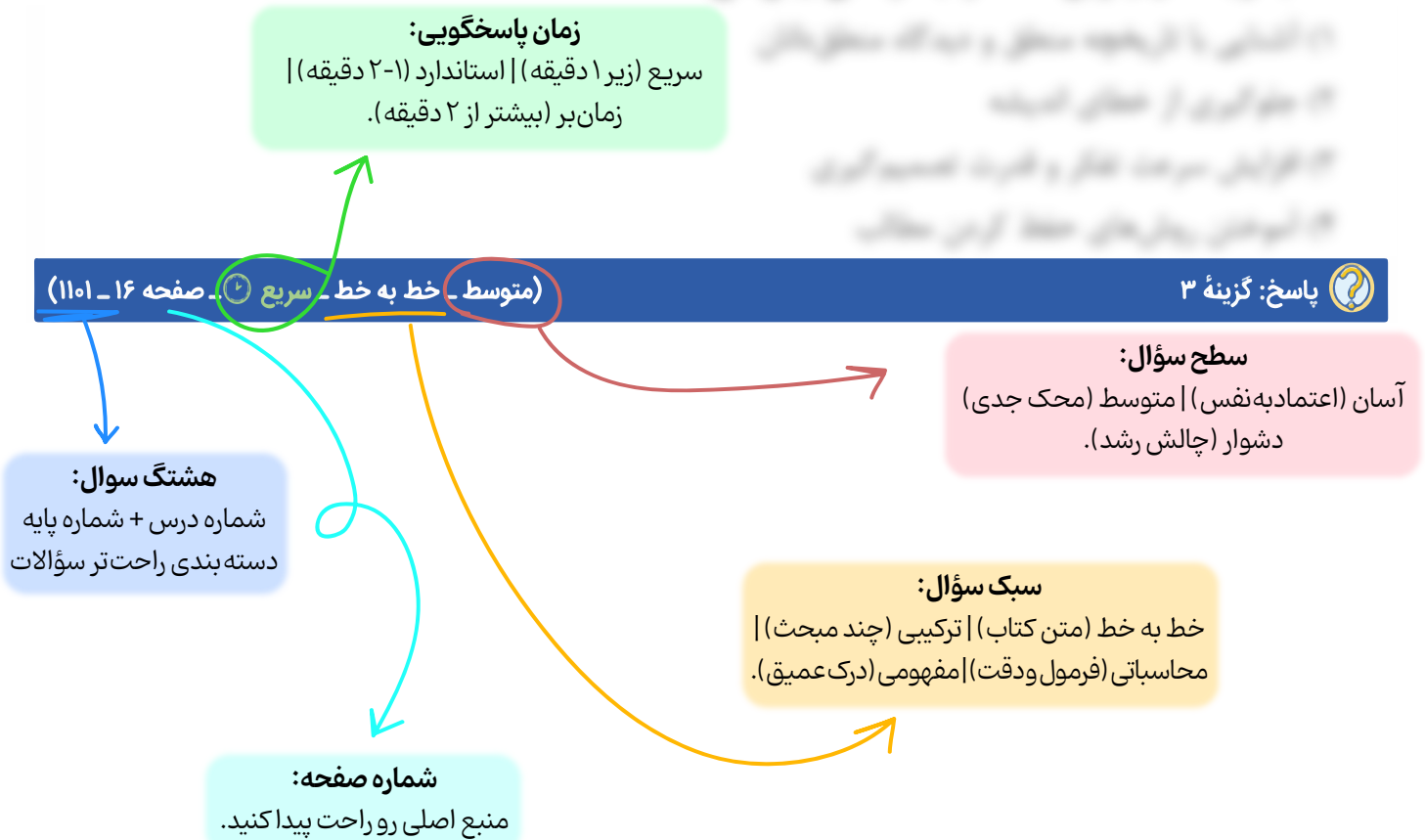
در آزمون های آزمایشی ما هم سؤالات تا حد ممکن شبیه کنکور واقعی طراحی میشن تا همون حس و فشار تجربه بشه اما در کنار این شبیه سازی، مهمه بدونی اساس محاسبه نمره و رتبه چیه وقتی بدونی تراز چطور حساب میشه، دیگه سختی سؤال ذهنت رو درگیر نمی کنه. و در آخر یادت باشه سر جلسه اگر با سؤال سخت مواجه شدی، گیر نکن. علامت بزن و برو سراغ سؤال های قابل حل. چون ارزش همه سؤال های یک درس برابره؛ مهم این نیست کدوم رو درست بزنی، مهم اینه چند تا درست بزنی. پس تمرکزت رو بذار روی سؤال هایی که بلدی و اجازه نده چند تا سؤال سخت بی خودی زمان و انرژی رو بدزده.

خلاصه اینکه...

خیلی از داوطلب ها نگرانن که اگه سؤال های کنکور یا آزمون های آزمایشی سخت باشه، رتبه شون خراب میشه. اما واقعیت اینه که کنکور یه آزمون رتبه بنریه و نمره ها رو با روش های آماری «تراز» می کنن تا اثر سختی یا آسونی سؤال ها حذف بشه. نمره خام فقط تعداد جواب های درست رو نشون میده، ولی توی تراز، نمره تو با توجه به میانگین و پراکندگی نمره بقیه سنجیده میشه؛ یعنی اگه آزمون سخت باشه، برای همه سخته. پس مهم تراز سختی آزمون، مدیریت جلسه ست: روی سؤال های خیلی سخت گیر نکن و برو سراغ سؤال هایی که بلدی. چون ارزش سؤال های هر درس یکیه و هرچه تعداد جواب های درستت بیشتر باشه، ترازت هم بالاتر میره.

راهنمای پاسخنامه آزمون‌ها

در ادامه، به منظور آشنایی بیشتر با نحوه پاسخ‌گویی به سوالات، راهنمای پاسخ‌نامه آزمون‌ها تهیه شده است. این راهنما شامل توضیحاتی در مورد نحوه پاسخ‌گویی به سوالات، نحوه علامت‌گذاری سوالات و نحوه پاسخ‌گویی به سوالات است.



یادتون باشه:

- ✓ هر سؤال یک فرصت یادگیری، نه یک مانع.
- ✓ پاسخ‌نامه فقط جواب نیست؛ یک کارگاه آموزشی کامله.
- ✓ با هر آزمون و مرور این پاسخ‌نامه، یک پله بالاتر می‌رید و یک قدم به رؤیایون نزدیک‌تر می‌شید.
- ✓ موفقیت فقط برای کسانی که با برنامه و انگیزه حرکت می‌کنن. شما همون آدمید.



برای دیدن پاسخنامه ویدیویی آزمون
QRcode بالا را اسکن کنید!
یا بر روی لینک زیر کلیک کنید!
پاسخنامه ویدیویی

حسابان ۱: کل کتاب
هندسه ۲: کل کتاب
آمار و احتمال: کل کتاب

بودجه‌بندی
این آزمون

حسابان ۱: این مباحث در مجموع ۱۰ تست از ۴۰ تست کنکور را پوشش داده است.
هندسه ۲: این مباحث در مجموع ۴ تست از ۴۰ تست کنکور را پوشش داده است.
آمار و احتمال: این مباحث در مجموع ۴ تست از ۴۰ تست کنکور را پوشش داده است.

سهم در
کنکور

۱- در یک دنباله حسابی غیر ثابت، مجموع n جمله ابتدایی دنباله برابر S_n است. اگر $2S_{13} = 3S_{26}$ باشد، جمله چندم این دنباله برابر صفر است؟

۳۳ (۴)

۳۲ (۳)

۲۰ (۲)

۱۹ (۱)

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - حسابان ۱ صفحه ۳ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۴

با استفاده از فرمول مجموع جملات دنباله حسابی $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$ داریم:

$$2S_{26} = 3S_{13} \Rightarrow S_{26} = \frac{3}{2}S_{13} \Rightarrow \frac{26}{2}(2a_1 + 25d) = \frac{3}{2} \times \frac{13}{2}(2a_1 + 12d)$$

$$\xrightarrow{\div \frac{13}{2}} 2(2a_1 + 25d) = \frac{3}{2}(2a_1 + 12d) \Rightarrow a_1 + 32d = 0 \Rightarrow a_{33} = 0$$

دام تستی!

اگر $a_1 + 32d$ را به اشتباه a_{32} در نظر بگیرید به گزینه «۳» می‌رسید.

مجموع جملات دنباله‌های حسابی

اگر $a_1, a_2, \dots$ یک دنباله حسابی با قدرنسبت d و جمله اول a_1 باشد، مجموع n جمله اول a_n از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

یادآوری!

جمله n -ام دنباله حسابی (a_n) با قدرنسبت d و جمله اول a_1 به صورت زیر است:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$



۲- اگر α, β و $f(x) = x^3 + mx^2 + x + 6$ باشند، حاصل $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}$ کدام است؟

$\frac{1}{3}$ (۴)

$\frac{8}{3}$ (۳)

$-\frac{8}{3}$ (۲)

$-\frac{1}{3}$ (۱)

(متوسط - ترکیبی - استاندارد) - حسابان ۱ صفحه ۱۳ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۱

$x = 2$ صفر تابع است، پس $f(2) = 0$ داریم:

$$f(2) = 0 \Rightarrow 8 + 4m + 2 + 6 = 0 \Rightarrow m = -4$$

$$\Rightarrow f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x-2)(x^2 - 2x - 3)$$



ریشه‌های دیگر معادله $f(x)=0$ برابر با -1 و 3 است.

$$X^T - \gamma X - \gamma = 0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} X = -1 \\ X = \gamma \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = -1 \end{cases} \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{3}{-1} + \frac{-1}{3} = -\frac{10}{3}$$

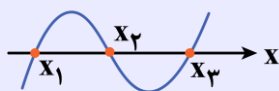
ریشه‌های دیگر معادله یعنی α و β از معادله $x^2 - 2x - 3 = 0$ به دست می‌آیند، پس داریم:

$$\frac{\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}}{\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}} = \frac{\alpha^{\text{r}} + \beta^{\text{r}}}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha + \beta)^{\text{r}} - \text{r}\alpha\beta}{\alpha\beta} = \frac{S^{\text{r}} - \text{r}P}{P} \stackrel{S=\text{r}}{=} \frac{\text{r} - \text{r}(-\text{r})}{-\text{r}} = -\frac{1}{\text{r}}$$

توجه کنید که چون $X = 2$ صفر تابع است، ضابطه تابع بر $(X - 2)$ بخش پذیر است و داریم:

$$\begin{array}{r} x^3 - 4x^2 + x + 6 \quad \bigg| \quad x - 2 \\ -(x^3 - 2x^2) \\ \hline -2x^2 + x + 6 \\ -(-2x^2 + 4x) \\ \hline -3x + 6 \\ -(-3x + 6) \\ \hline 0 \end{array}$$

صفرهای تابع f از حل معادله $f(x) = 0$ به دست می‌آیند که طول محل تلاقی نمودار با محور x ها هستند.



ا) اگر $x = k$ یکی از صفرهای تابع f باشد، $f(k) = 0$ است و ضابطهٔ تابع دارای عامل $(x - k)$ است.

۲) اگر α و β ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ باشند، آن‌گاه:

$$\left\{ \begin{array}{l} S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} : \text{مجموع ریشه‌ها} \\ P = \alpha\beta = \frac{c}{a} : \text{حاصل ضرب ریشه‌ها} \\ |\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} : \text{تفاضل ریشه‌ها} \end{array} \right.$$

۳- نمودار سهمی $y = ax^2 - 6ax + 1$ در نقطه A بر خط $y = 4$ مماس بوده و محور xها را در نقاط B و C قطع می‌کند. مساحت مثلث ABC چقدر است؟

$$1\sqrt{3} \quad (4)$$

$$6\sqrt{3} \quad (3)$$

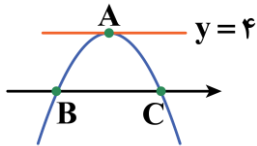
$$3\sqrt{6} \quad (2)$$

$$4\sqrt{6} \quad (1)$$

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - حسابان ۱ صفحه ۱۵ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۴

سهمی در نقطه رأس بر خط افقی $y = 4$ مماس است، پس:



$$A \Rightarrow y_A = 4$$

$$x_A = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6a}{2a} = 3 \Rightarrow A(3, 4)$$

$$y = ax^2 - 6ax + 1 \xrightarrow{A(3,4)} 4 = 9a - 18a + 1 \Rightarrow -9a = 3 \Rightarrow a = -\frac{1}{3}$$

حال با داشتن ضابطه f ، محل تلاقی نمودار f و محور xها را می‌یابیم:

$$y = -\frac{1}{3}x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow x^2 - 6x - 3 = 0 \xrightarrow{\Delta > 0} \text{تفاضل ریشه‌ها} = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

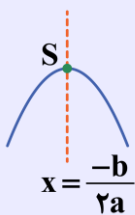
$$S = \frac{1}{2} y_A \times (x_C - x_B) = \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = 2\sqrt{36 + 12} = 8\sqrt{3}$$



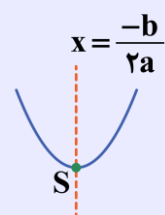
نمودار تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$; ($a \neq 0$) یک سهمی است که خط عمودی $x = -\frac{b}{2a}$ محور تقارن آن است. هر سهمی دارای

یک نقطه رأس S است که روی محور تقارن قرار دارد، پس: $x_S = -\frac{b}{2a}$.

$$a < 0 \quad (2)$$



$$a > 0 \quad (1)$$

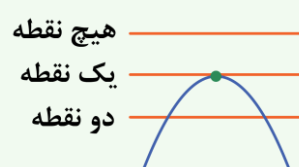


$$\begin{cases} \text{رأس سهمی: } (-\frac{b}{2a}, f(-\frac{b}{2a})) \\ \text{محور تقارن: } x = -\frac{b}{2a} \end{cases}$$

عرض رأس سهمی و خطوط افقی

(۱) عرض رأس سهمی را از رابطه $y_S = \frac{-\Delta}{4a}$ نیز می‌توان به دست آورد.

(۲) خط افقی $y = k$ سهمی را در هیچ نقطه یا یک نقطه یا دو نقطه قطع می‌کند و اگر خط افقی $y = k$ سهمی را در یک نقطه قطع کند، آن‌گاه در نقطه رأس بر سهمی مماس است.



۴- در یک مستطیل به طول a و عرض b رابطه $\frac{a}{b} = \frac{a+6b}{a}$ برقرار است. قطر مستطیل چند برابر محیط آن است؟

$$\frac{3\sqrt{2}}{10} \quad (4)$$

$$\frac{\sqrt{10}}{8} \quad (3)$$

$$\frac{\sqrt{10}}{6} \quad (2)$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{10} \quad (1)$$

(متوسط - خط به خط - استاندارد) حسابان ۱ صفحه ۱۹-۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۳

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{a} + \frac{6b}{a} \Rightarrow t = 1 + \frac{6}{t} \xrightarrow{\times t} t^2 - t - 6 = 0$$

فرض کنید $\frac{a}{b} = t$ باشد، پس:

$$\Rightarrow (t+2)(t-3) = 0 \xrightarrow{t>0} t = 3 \Rightarrow \frac{a}{b} = 3 \Rightarrow a = 3b$$

$$\Rightarrow 2(b+3b) = 8b \Rightarrow \text{محیط مستطیل} = 8b$$

$$\Rightarrow \frac{\text{قطر}}{\text{محیط}} = \frac{d}{8b} = \frac{\sqrt{b^2 + 9b^2}}{8b} = \frac{\sqrt{10}}{8}$$

حل معادلات گویا

برای حل معادلات گویا دو طرف معادله را در $k.m.m$ (مخرج مشترک کسرها) ضرب می‌کنیم تا مخرج از بین برود. سپس با حل معادله حاصل جواب‌هایی که **مخرج‌ها را صفر نکنند** یا **در شرایط مسئله صدق کنند** را به دست می‌آوریم.

• • •

۵- اگر $x = \alpha$ ریشه معادله $1 = 2x + \sqrt{6x+3}$ باشد، حاصل $2\alpha - \frac{1}{\alpha}$ کدام است؟

$$5 \quad (4)$$

$$6 \quad (3)$$

$$4 \quad (2)$$

$$3 \quad (1)$$

(متوسط - خط به خط - استاندارد) حسابان ۱ صفحه ۲۱-۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۴

$$\sqrt{6x+3} = 1-2x \xrightarrow{\text{توان ۲}} 6x+3 = 1-4x+4x^2 \Rightarrow 4x^2 - 10x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 5x - 1 = 0 \xrightarrow{\div x} 2x - 5 - \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow 2x - \frac{1}{x} = 5$$

α ریشه معادله است، پس داریم:

$$2\alpha - \frac{1}{\alpha} = 5$$

حل معادلات گنگ

برای حل معادلات رادیکالی، **رادیکال را در یک طرف تساوی** نگه می‌داریم و **بقیه عبارت‌ها را به طرف دیگر تساوی** می‌بریم، سپس دو طرف را به توان فرجه رادیکال می‌رسانیم تا رادیکال از بین برود. با حل معادله حاصل جواب‌ها را می‌یابیم.
دقت کنید که حتماً جواب‌ها را در معادله اولیه امتحان کنید.

• • •

۶- اگر $x = 2$ یک ریشه معادله $7 = ax + 3|x-3|$ باشد، ریشه دیگر کدام است؟

$$3/8 \quad (4)$$

$$3/4 \quad (3)$$

$$3/2 \quad (2)$$

$$3/6 \quad (1)$$

(آسان - محاسباتی - سریع) حسابان ۱ صفحه ۲۶ و ۲۷-۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۲

$$x = 2 \Rightarrow 2a + 3|2-3| = 7 \Rightarrow a = 2$$

ریشه معادله را در معادله جای گذاری می‌کنیم تا a به دست آید:

حال با تعیین علامت عبارت قدرمطلق $|x-3|$ معادله را حل می‌کنیم:

$$2x + 3|x-3| = 7 \Rightarrow \begin{cases} 2x + 9 - 3x = 7 & x < 3 \\ 2x + 3x - 9 = 7 & x \geq 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{16}{5} = 3 \frac{1}{5} \end{cases}$$

ریشه دیگر:

حل معادلات قدرمطلق

برای حل معادلات قدرمطلق، عبارات داخل قدرمطلق را **تعیین علامت** کرده، سپس در هر ناحیه، با توجه به علامت عبارت، قدرمطلق را برداشته و معادله حاصل را حل می‌کنیم و جواب مربوط به آن ناحیه را به دست می‌آوریم.

دقت کنید که حتماً جواب‌های به دست آمده در دامنه مجاز باشند.



۷- اگر $A(1, 5)$ و $B(0, 3)$ دو رأس مثلث قائم‌الزاویه ABC و طول وتر BC برابر ۵ باشد، مجموع مختصات رأس C واقع در ناحیه اول چقدر است؟

۹ (۴)

۸ (۳)

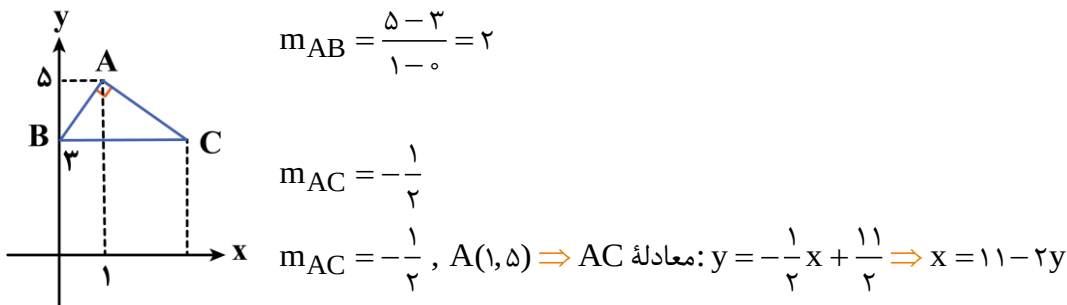
۷ (۲)

۱۰ (۱)

(متوسط - محاسباتی - زمان‌بر) - حسابان ۱ صفحه ۳۱ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۳

ابتدا شکل مناسبی برای مسئله رسم می‌کنیم:



AC بر AB عمود است، پس:

مختصات C را به صورت $(11-2y, y)$ در نظر می‌گیریم، داریم:

$$BC = 5 \xrightarrow{B(0,3) \rightarrow C(11-2y,y)} \sqrt{(11-2y)^2 + (y-3)^2} = 5 \Rightarrow (11-2y)^2 + (y-3)^2 = 25$$

$$\Rightarrow 5y^2 - 50y + 130 = 25 \xrightarrow{\div 5} y^2 - 10y + 21 = 0$$

$$\Rightarrow (y-3)(y-7) = 0 \Rightarrow y = 3 \text{ یا } 7$$

مختصات C به یکی از دو صورت $(5, 3)$ و $(-3, 7)$ است که چون C در ناحیه اول است، $C(5, 3)$ قابل قبول است و مجموع طول و عرض نقطه C برابر ۸ است.

هندسه تحلیلی

۱) نوشتن معادله خطی که دارای شیب m باشد و از نقطه $A(x_0, y_0)$ می‌گذرد:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

۲) شیب خطی که از دو نقطه $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ می‌گذرد:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

۳) فاصله دو نقطه $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ برابر است با:

$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

شیب خطوط موازی یا عمود برهم

اگر دو خط با هم موازی باشند، شیب آن‌ها با هم برابر است:

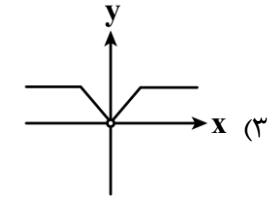
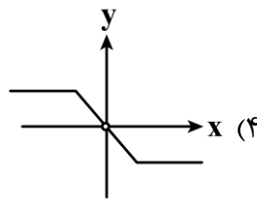
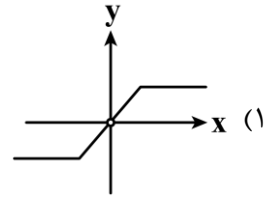
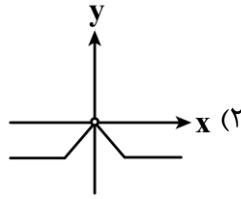
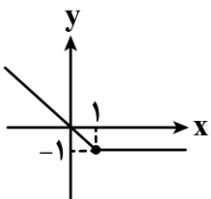
$$d \parallel d' \Rightarrow m_d = m_{d'}$$

اگر دو خط بر هم عمود باشند، شیب آن‌ها عکس و قرینه هم است:

$$m_d = \frac{-1}{m_{d'}} \text{ یا } m_d \times m_{d'} = -1$$



۸- نمودار تابع f به صورت مقابل است. نمودار تابع $y = \frac{|x|}{x} f(|x|)$ کدام است؟



(متوسط - مفهومی - استاندارد) - حسابان ۱ صفحه ۴۵ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۴

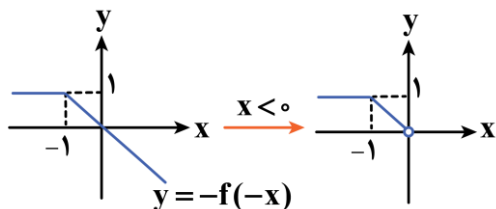
ابتدا ضابطه تابع f را با توجه به نمودار آن می‌نویسیم:

$$f(x) = \begin{cases} -x & x \leq 1 \\ -1 & x > 1 \end{cases}$$

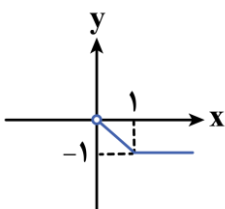
$$y = \frac{|x|}{x} f(|x|) = \begin{cases} -f(-x) & x < 0 \\ f(x) & x > 0 \end{cases}$$

$y = -f(-x)$ از قرینه نمودار $y = f(x)$ نسبت به محور x ها و نسبت به محور y ها به دست می‌آید.

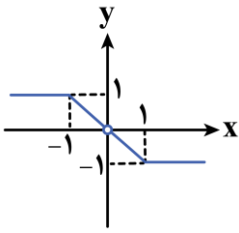
به عبارت دیگر، $y = -f(-x)$ از قرینه نمودار f نسبت به مبدأ مختصات به دست می‌آید.



برای $x > 0$ هم نمودار تابع همان نمودار $y = f(x)$ است:



با رسم این دو نمودار با هم، در یک دستگاه مختصات نمودار تابع $y = \frac{|x|}{x} f(|x|)$ به دست می‌آید:



تقارن و انتقال نمودارها

۱) برای رسم نمودار $y = f(x - a)$

♦ اگر $a > 0$: نمودار f را a واحد به **راست** انتقال می‌دهیم.

♦ اگر $a < 0$: نمودار f را $|a|$ واحد به **چپ** انتقال می‌دهیم.

۲) برای نمودار $y = f(x) + a$

♦ اگر $a > 0$: نمودار f را a واحد به **بالا** انتقال می‌دهیم.

♦ اگر $a < 0$: نمودار f را $|a|$ واحد به **پایین** انتقال می‌دهیم.

۳) برای رسم $y = f(-x)$ ، نمودار f را **نسبت به محور y** قرینه می‌کنیم و برای رسم نمودار $y = -f(x)$ را **نسبت به محور x** ها قرینه می‌کنیم.

در نتیجه برای رسم $y = -f(-x)$ ، نمودار f را هم نسبت به محور x ها و هم نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم یعنی **نسبت به مبدأ مختصات** قرینه می‌کنیم.

تعریف قدرمطلق

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$



۹- اگر $f \circ g^{-1}(x) = \frac{x}{2x+1}$ و $g(x) = 2 - \frac{3}{x}$ باشد، مقدار $g \circ f^{-1}(1)$ کدام است؟

- ۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) -۱

پاسخ: گزینه ۴

متوسط - محاسباتی - استاندارد ۱ - حسابان ۱ صفحه ۶۹ - ۱۱۰۲

در تساوی اول، به جای x قرار می‌دهیم $g(x)$ و داریم:

$$f \circ g^{-1}(g(x)) = \frac{g(x)}{2g(x)+1} \Rightarrow f(x) = \frac{2 - \frac{3}{x}}{4 - \frac{6}{x} + 1} = \frac{2x - 3}{5x - 6}$$

برای محاسبه $f^{-1}(1)$ ، $f(x) = 1$ را حل می‌کنیم تا x را بیابیم:

$$\frac{2x - 3}{5x - 6} = 1 \Rightarrow 2x - 3 = 5x - 6 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow f^{-1}(1) = 1$$

$$g \circ f^{-1}(1) = g(f^{-1}(1)) = g(1) = 2 - \frac{3}{1} = -1$$

 نکات ترکیب توابع

۱) اگر $f^{-1}(\alpha) = \beta$ باشد، آن گاه $f(\beta) = \alpha$ است، و برعکس.

۲) $f^{-1}(f(x)) = x$, $f(f^{-1}(x)) = x$
 $(x \in D_f)$ $(x \in R_f)$



۱۰- تابع $f(x) = m - 1 - \sqrt{x+m}$ مفروض است. اگر دامنه تابع f با برد تابع $-3f$ برابر باشد، مقدار $f^{-1}(-1)$ کدام است؟

(۱) $\frac{5}{4}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $-\frac{1}{3}$ (۴) $-\frac{2}{3}$

(متوسط - ترکیبی - استاندارد) - حسابان ۱ صفحه ۳۹ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۲

ابتدا دامنه تابع رادیکالی f را می‌یابیم:

$$f \text{ دامنه: } x + m \geq 0 \Rightarrow x \geq -m$$

$$\Rightarrow D_f = [-m, +\infty)$$

حال برای محاسبه برد ابتدا توجه می‌کنیم که چون حاصل رادیکال همیشه عددی مثبت است، داریم:

$$\sqrt{x+m} \geq 0$$

$$-\sqrt{x+m} \leq 0 \xrightarrow{+(m-1)} m-1-\sqrt{x+m} \leq m-1$$

$$f \text{ برد: } R_f = (-\infty, m-1]$$

برای محاسبه برد $-3f$ کافی است برد f را در -3 ضرب کنیم:

$$f(x) \leq m-1 \xrightarrow{\times(-3)} -3f(x) \geq -3m+3 \Rightarrow R_{(-3f)} = [-3m+3, +\infty)$$

از طرفی بنا به فرض داریم:

$$D_f = R_{(-3f)} \Rightarrow [-m, +\infty) = [-3m+3, +\infty)$$

پس $-m = -3m+3$ و در نتیجه $m = \frac{3}{2}$ است و داریم:

$$f(x) = \frac{3}{2} - 1 - \sqrt{x + \frac{3}{2}} = \frac{1}{2} - \sqrt{x + \frac{3}{2}}$$

$$f(x) = -1 \Rightarrow -1 = \frac{1}{2} - \sqrt{x + \frac{3}{2}} \Rightarrow \sqrt{x + \frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \Rightarrow x + \frac{3}{2} = \frac{9}{4} \Rightarrow x = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(-1) = \frac{3}{4}$$

 دامنه توابع رادیکالی

برای به دست آوردن دامنه توابع رادیکالی با فرجه زوج باید زیر رادیکال **نامنفی** باشد.



۱۱- اگر $2^{x^2} = \frac{3}{4} \times (0.25)^x$ و $x^2 + 2x = \log_2 m$ باشد، مقدار m کدام است؟

(۱) 0.75 (۲) 6 (۳) 3 (۴) $1/5$

(آسان - محاسباتی - سریع) - حسابان ۱ صفحه ۷۶ - ۱۱۰۳

پاسخ: گزینه ۴

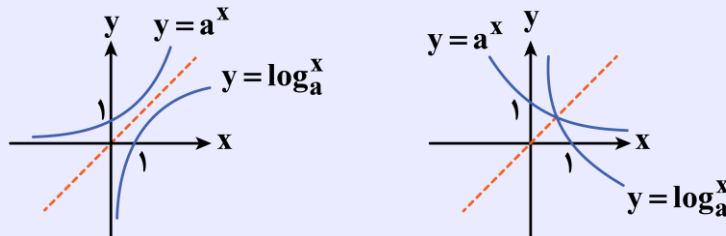
$$2^{x^2} = \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{4}\right)^x = \frac{3}{4} \times 2^{-2x} \xrightarrow{\times 2^{2x}} 2^{x^2+2x} = \frac{3}{4} (*)$$

از طرفی داریم:

$$x^2 + 2x = \log_2^m \xrightarrow{\text{تعریف log}} m = 2^{x^2+2x} \xrightarrow{(*)} m = \frac{2}{2} = 1/5$$

توابع نمایی و لگاریتمی

تابع $y = a^x$ با شرط $a > 0$ و $a \neq 1$ تابع نمایی است و توابع نمایی یک‌به‌یک و وارون‌پذیرند. وارون تابع نمایی $y = a^x$ تابع لگاریتمی $y = \log_a^x$ است.

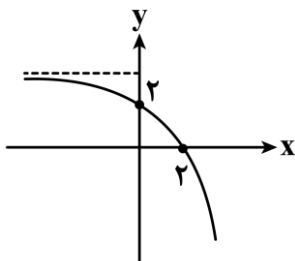


طبق تعریف لگاریتم داریم:

$$\log_a^x = b \Leftrightarrow x = a^b$$

حل معادلات نمایی

برای حل معادلات نمایی که مجهول مسئله در توان قرار گرفته است همه پایه‌ها را یکی می‌کنیم.

۱۲- نمودار تابع $f(x) = 3 - a \times 2^{b+cx}$ به صورت مقابل است. مقدار $f(-2)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{11}{4}$
- (۲) $\frac{9}{4}$
- (۳) $\frac{8}{3}$
- (۴) $\frac{7}{3}$

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - حسابان ۱ صفحه ۷۸ - ۱۱۰۳

پاسخ: گزینه ۳

$$f(0) = 2 \Rightarrow 3 - a \times 2^b = 2 \Rightarrow a \times 2^b = 1 \quad (I)$$

با توجه به نمودار داریم:

$$f(2) = 0 \Rightarrow 3 - a \times 2^{b+2c} = 0 \Rightarrow 3 - a \times 2^b \times 2^{2c} = 0 \xrightarrow{(I)} 3 - 1 \times 2^{2c} = 0 \Rightarrow 2^{2c} = 3 \quad (II)$$

$$f(-2) = 3 - a \times 2^{b-2c} = 3 - a \times 2^b \times (2^{2c})^{-1} \xrightarrow{(II), (I)} 3 - 1 \times \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$$



۱۳- اگر $x=1$ یک جواب معادله $x^2(a \log 2) - 2bx + a \log \sqrt{2} = 0$ باشد، حاصل $(\sqrt{8})^{\frac{a}{b}}$ کدام است؟

- (۱) ۱۰۰ (۲) ۱۰ (۳) ۲۵ (۴) ۵۰

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - حسابان ۱ صفحه ۸۷ - ۱۱۰۳

پاسخ: گزینه ۱

$x=1$ را در معادله جای گذاری می‌کنیم:

$$a \log 2 - 2b + a \log 2^{\frac{1}{2}} = 0 \Rightarrow a \log 2 + \frac{1}{2} a \log 2 = 2b$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} a \log 2 = 2b \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{3}{4} \log 2$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{4}{3} \times \frac{1}{\log_2 10} = \frac{4}{3} \log_2 10 \Rightarrow \frac{a}{b} = \log_2 10^{\frac{4}{3}} \Rightarrow 2^{\frac{a}{b}} = 10^{\frac{4}{3}} (*)$$

بنابراین داریم:

$$(\sqrt{10})^{\frac{a}{b}} = (2^{\frac{3}{2}})^{\frac{a}{b}} = (2^{\frac{3}{2}})^{\frac{3}{2}} = (10^{\frac{4}{3}})^{\frac{3}{2}} = 10^2 = 100$$

ویژگی‌های لگاریتم

اگر $a > 0$, $a \neq 1$ و $b > 0$ باشد، داریم:

۱) $\log_a b = c \Leftrightarrow b = a^c$

۲) $\log b = \log_{10} b \xrightarrow{\text{مثال}} \log 2 = \log_{10} 2$, $\log 10 = \log_{10} 10 = 1$

۳) $\log_a a = 1$, $\log_a 1 = 0$

۴) $\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c \xrightarrow{\text{مثال}} \begin{cases} \log 6 = \log 2 + \log 3 \\ \log 5 + \log 2 = \log 10 = 1 \end{cases}$

۵) $\log_a b^n = n \log_a b \xrightarrow{\text{مثال}} \log 8 = 3 \log 2$

۶) $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c \xrightarrow{\text{مثال}} \log \frac{2}{3} = \log 2 - \log 3$

۷) $\log_{a^n} b = \frac{1}{n} \log_a b \xrightarrow{\text{مثال}} \log_{10} 2 = \frac{1}{3} \log_{10} 2 = \frac{1}{3}$

۸) $\log_b^c = \frac{\log_a^c}{\log_a^b} (b \neq 1) \xrightarrow{\text{مثال}} \log_2^3 = \frac{\log 2}{\log 3}$

$\xrightarrow{\text{نتیجه}} \log_b^a \times \log_a^b = \frac{\log a}{\log b} \times \frac{\log b}{\log a} = 1 \xrightarrow{\text{نتیجه}} \log_b^a = \frac{1}{\log_a^b}$

۹) $a^{\log_b^c} = b^{\log_c^a} \xrightarrow{\text{نتیجه}} a^{\log_a^b} = b^{\log_b^a} = b^1 = b \Rightarrow a^{\log_a^b} = b$



۱۴- یک نوع عنصر، در پایان هر ماه، $\frac{1}{10}$ جرم اول آن ماه را از دست می‌دهد. پس از چند ماه، جرم باقی‌مانده، $\frac{1}{6}$ جرم اولیه خواهد بود؟

$$(\log 2 = 0.3, \log 3 = 0.48)$$

۲۱/۵ (۴)

۱۹/۵ (۳)

۱۷/۵ (۲)

۱۵/۵ (۱)

(سخت - محاسباتی - زمان‌بر) - حسابان ۱ صفحه ۸۹ - ۱۱۰۳

پاسخ: گزینه ۳

اگر جرم اولیه را واحد در نظر بگیریم، آن‌گاه هر ماه $(\frac{9}{10})$ جرم خود را از دست می‌دهد و $(\frac{9}{10})$ آن باقی می‌ماند.

بنابراین جرم باقی‌مانده پس از n ماه برابر $(\frac{9}{10})^n$ است.

$$(\frac{9}{10})^n = \frac{1}{6} \xrightarrow{\text{از طرفین log می‌گیریم}} \log(\frac{9}{10})^n = \log \frac{1}{6} \Rightarrow n \log \frac{9}{10} = -\log 6$$

$$\Rightarrow n = \frac{-\log 6}{\log \frac{9}{10}} = \frac{-\log(2 \times 3)}{\log(\frac{9}{10})} = \frac{-\log 2 - \log 3}{2 \log 3 - 1} = \frac{-0.3 - 0.48}{0.96 - 1} = \frac{0.78}{0.04} = 19.5$$

 مسائل کاهش جرم

اگر یک ماده در هر دوره زمانی t برابر از جرمش از بین برود و A_0 مقدار اولیه ماده باشد، پس از n دوره زمانی جرم باقی‌مانده آن برابر است با:

$$A_0(1-r)^n$$



۱۵- حاصل عددی عبارت $P = \frac{\sin 198^\circ - 3 \cos 252^\circ}{\cos 108^\circ + 2 \sin 162^\circ}$ چقدر است؟

- (۱) -۴ (۲) ۲ (۳) -۲ (۴) $\frac{4}{3}$

(آسان - ترکیبی - سریع) حسابان ۱ صفحه‌های ۱۰۰ تا ۱۰۳ - ۱۱۰۴

پاسخ: گزینه ۲

ابتدا باید هر زاویه را به صورت مجموع یا تفاضل با مضارب صحیح 90° یا 180° بنویسیم:

$$P = \frac{\overbrace{\sin(180^\circ + 18^\circ)}^{\text{ربع سوم}} - 3 \overbrace{\cos(270^\circ - 18^\circ)}^{\text{ربع سوم}}}{\underbrace{\cos(90^\circ + 18^\circ)}_{\text{ربع دوم}} + 2 \underbrace{\sin(180^\circ - 18^\circ)}_{\text{ربع دوم}}} = \frac{-\sin 18^\circ + 3 \sin 18^\circ}{-\sin 18^\circ + 2 \sin 18^\circ} = \frac{2 \sin 18^\circ}{\sin 18^\circ} = 2$$

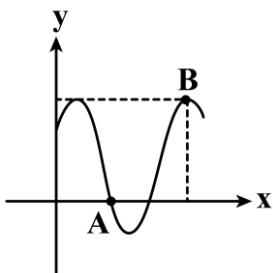
 قیّش رو یاد بگیر!

برای محاسبه نسبت‌های مثلثاتی کمان‌های $(90^\circ \pm \alpha)$ و $(180^\circ \pm \alpha)$ و $(270^\circ \pm \alpha)$ و $(360^\circ \pm \alpha)$ ابتدا باید ببینیم کمان موردنظر در کدام ناحیه مثلثاتی است (α را در حالت کلی حاده در نظر می‌گیریم)، با این کار علامت نسبت مثلثاتی به دست می‌آید. در ادامه، اگر کمان $(180^\circ \pm \alpha)$ یا $(360^\circ \pm \alpha)$ باشد نسبت مثلثاتی عوض نمی‌شود اما در کمان‌های $(90^\circ \pm \alpha)$ یا $(270^\circ \pm \alpha)$ نسبت‌ها عوض می‌شوند.

$$\sin \Leftrightarrow \cos \quad \tan \Leftrightarrow \cot$$



۱۶- قسمتی از نمودار تابع $f(x) = 1 + 2 \cos(x - \frac{\pi}{3})$ به صورت مقابل است. شیب خط گذرنده از نقاط A و B چند برابر $\frac{1}{\pi}$ است؟



- (۱) $\frac{9}{4}$
(۲) $\frac{3}{4}$
(۳) $\frac{4}{9}$
(۴) $\frac{4}{3}$

(آسان - خط به خط - سریع) حسابان ۱ صفحه ۱۰۷ - ۱۱۰۴

پاسخ: گزینه ۱

در نقطه A مقدار y برابر صفر است. پس:

$$0 = 1 + 2 \cos(x - \frac{\pi}{3}) \Rightarrow \cos(x - \frac{\pi}{3}) = \frac{-1}{2} \Rightarrow x - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = \pi$$

در نقطه B مقدار y برابر ماکزیمم است. پس:

$$\cos(x - \frac{\pi}{3}) = 1 \Rightarrow x - \frac{\pi}{3} = 2\pi \Rightarrow x = \frac{7\pi}{3}$$

پس مختصات نقاط A و B به صورت مقابل است:

$$A(\pi, 0), B(\frac{7\pi}{3}, 3)$$

در نتیجه شیب خط برابر است با:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3 - 0}{\frac{7\pi}{3} - \pi} = \frac{3}{\frac{4\pi}{3}} = \frac{9}{4\pi}$$

نمودار توابع سینوسی و کسینوسی

در توابع $y = a \sin(bx + c) + d$ و $y = a \cos(bx + c) + d$:(۱) محل تلاقی نمودار و محور x ها از حل معادله $y = 0$ در معادله به دست می آید.(۲) محل تلاقی نمودار و محور y ها با جای گذاری $x = 0$ در معادله به دست می آید.۱۷- اگر α در ناحیه اول و $\tan \alpha = \frac{4}{3}$ باشد، مقدار $\cos(\frac{5\pi}{4} - 2\alpha)$ کدام است؟

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}$$

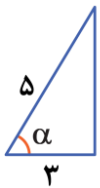
متوسط - محاسباتی - استاندارد - حسابان ۱ صفحه ۱۱۲ - ۱۱۴

پاسخ: گزینه ۲

روش اول

مثلی قائم الزاویه در نظر می گیریم که ضلع روبه رو به زاویه α در آن برابر با ۴ و ضلع مجاور آن ۳ باشد. $\Rightarrow \tan \alpha = \frac{4}{3}$

حال از رابطه فیثاغورس طول وتر برابر با ۵ به دست می آید و سینوس و کسینوس نیز به راحتی قابل محاسبه خواهند بود:



$$\tan \alpha = \frac{4}{3} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{4}{5}, \cos \alpha = \frac{3}{5}$$

$$\begin{cases} \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{9}{25} - \frac{16}{25} = -\frac{7}{25} \\ \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{24}{25} \end{cases}$$

$$\cos(\frac{5\pi}{4} - 2\alpha) = \cos \frac{5\pi}{4} \cos 2\alpha + \sin \frac{5\pi}{4} \sin 2\alpha = (-\frac{\sqrt{2}}{2})(-\frac{7}{25}) + (-\frac{\sqrt{2}}{2})(\frac{24}{25}) = -\frac{17\sqrt{2}}{50} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

روش دوم

$$\tan \alpha = \frac{4}{3} \Rightarrow 1 + \tan^2 \alpha = 1 + \frac{16}{9} = \frac{25}{9} \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{25}{9} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{9}{25} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = \frac{16}{25} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{4}{5}$$

$$\cos(\frac{5\pi}{4} - 2\alpha) = \cos(\pi + \frac{\pi}{4} - 2\alpha) = -\cos(\frac{\pi}{4} - 2\alpha)$$

$$= -(\cos \frac{\pi}{4} \cos 2\alpha + \sin \frac{\pi}{4} \sin 2\alpha) = -\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 2\alpha + \sin 2\alpha) = -\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha)$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{9}{25} - \frac{16}{25} + 2(\frac{3}{5})(\frac{4}{5})) = -\frac{\sqrt{2}}{2}(-\frac{7}{25} + \frac{24}{25}) = -\frac{17\sqrt{2}}{50} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$۱) \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$۲) \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$۳) \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$۴) \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

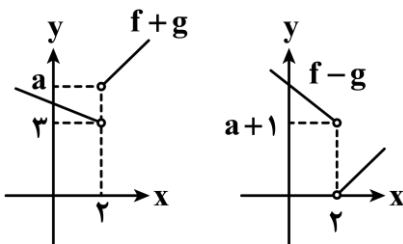
نتیجه:

$$۱) \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$۲) \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$



۱۸- نمودار توابع $f+g$ و $f-g$ به صورت مقابل است. اگر تابع $h(x) = 2[x] \cdot f(x)$ در $x=2$ حد داشته باشد، مقدار a کدام است؟



(۱) ۴

(۲) ۵

(۳) ۴/۵

(۴) ۵/۵

(سخت - مفهومی/ترکیبی - استاندارد) - حسابان ۱ صفحه ۱۲۴ - ۱۱۰۵

پاسخ: گزینه ۱

$$f(x) = \frac{(f+g)(x) + (f-g)(x)}{2}$$

ابتدا می‌توانیم تابع f را از روابط موجود استخراج کنیم:

$$\Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \frac{3+a+1}{2} = 2 + \frac{a}{2} \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \frac{a+0}{2} = \frac{a}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} h(x) = 2 \times \left[2^- \right] \times \left(2 + \frac{a}{2} \right) = 2 \times 1 \times \left(2 + \frac{a}{2} \right) = 4 + a \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) = 2 \times \left[2^+ \right] \times \frac{a}{2} = 4 \left(\frac{a}{2} \right) = 2a \end{cases}$$

$$h \text{ در } x=2 \text{ حد دارد.} \Rightarrow 2a = 4 + a \Rightarrow a = 4$$



فرض کنید f در همسایگی $x=a$ تعریف شده باشد.

(۱) اگر با نزدیک شدن مقادیر x به a از سمت راست (با مقادیر بزرگتر از a)، مقادیر $f(x)$ به ℓ_1 نزدیک شوند، آن‌گاه **حد راست** f در $x=a$ برابر ℓ_1 است:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \ell_1$$

(۲) اگر با نزدیک شدن مقادیر x به a از سمت چپ (با مقادیر کوچکتر از a)، مقادیر $f(x)$ به ℓ_2 نزدیک شوند، آن‌گاه **حد چپ** f در $x=a$ برابر ℓ_2 است:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \ell_2$$

می‌گوییم f در $x=a$ دارای حدی برابر ℓ است اگر **حد چپ و راست** با هم برابر و برابر با ℓ باشند.



$$n \leq x < n+1 \Rightarrow [x] = n$$

اگر n عددی صحیح باشد، آن‌گاه:



۱۹- اگر $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a + \sqrt{bx + 4c}}{x} = \frac{1}{4}$ باشد، حاصل $\frac{ab}{c}$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{1}{2}$

(سخت - محاسباتی - زمان بر) - حسابان ۱ صفحه ۱۴۲ - ۱۱۰۵

پاسخ: گزینه ۲

چون حد مخرج برابر با صفر است، به شرطی حد وجود دارد که صورت کسر در $x = 0$ برابر صفر باشد.

$$a + \sqrt{4c} = 0 \Rightarrow a = -2\sqrt{c} \Rightarrow a^2 = 4c$$

ابتدا صورت و مخرج کسر را در مزدوج صورت ضرب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a + \sqrt{bx + 4c}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a + \sqrt{bx + 4c})(a - \sqrt{bx + 4c})}{x(a - \sqrt{bx + 4c})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^2 - bx - 4c}{x(a - 2\sqrt{c})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4c - bx - 4c}{x(-2\sqrt{c})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-bx}{-2\sqrt{c}x} = \frac{b}{2\sqrt{c}} \Rightarrow \frac{b}{2\sqrt{c}} = \frac{1}{4} \Rightarrow b = \sqrt{c} \\ \Rightarrow \frac{ab}{c} &= \frac{-2\sqrt{c} \times \sqrt{c}}{c} = -2 \end{aligned}$$

قلقش رو یاد بگیر!

اگر $\lim_{x \rightarrow a} \frac{p(x)}{q(x)} = \ell$ باشد و $\lim_{x \rightarrow a} q(x) = 0$ ، آن‌گاه باید $\lim_{x \rightarrow a} p(x) = 0$ باشد تا بعد از رفع ابهام به حد ℓ برسیم.

همچنین اگر $\lim_{x \rightarrow a} \frac{p(x)}{q(x)} = \ell \neq 0$ باشد و $\lim_{x \rightarrow a} p(x) = 0$ باید $\lim_{x \rightarrow a} q(x) = 0$ ، چون اگر حد آن مخالف صفر باشد باید حد کسر صفر باشد که مخالف فرض ناصفر بودن مقدار حد است.

۲۰- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{4+2x}-2}{1-\cos\sqrt{x}}$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۱ (۴) $\frac{1}{4}$

(متوسط - ترکیبی - استاندارد) - حسابان ۱ صفحه ۱۴۴ - ۱۱۰۵

پاسخ: گزینه ۳

با جای‌گذاری صفر در صورت و مخرج به حد $\frac{0}{0}$ می‌رسیم، پس باید رفع ابهام کنیم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{4+2x}-2}{1-\cos\sqrt{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\sqrt{4+2x}-2)(\sqrt{4+2x}+2)}{2\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}(\sqrt{4+2x}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4+2x-4}{2\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}(\sqrt{4+2x}+2)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\frac{\sqrt{x}}{2})^2}{2\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}(\sqrt{4+2x}+2)} = 1 \end{aligned}$$

رفع ابهام

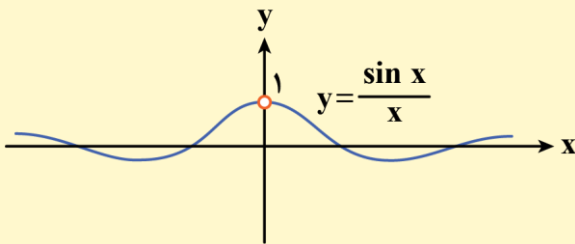
اگر حد تابع گویای f در $x = a$ برابر با $\frac{0}{0}$ شود، و در صورت یا مخرج عبارت رادیکالی داشته باشیم، به کمک ضرب کردن صورت و مخرج در مزدوج عبارت رادیکالی، عامل صفرکننده یعنی $(x - a)$ را حذف می‌کنیم.

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$$

این حد رو هیچ وقت یادت نره!

در کتاب به یک حد خاص و مهم اشاره شده که حاصل آن را از روی نمودار به دست می آوریم:



$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

در نتیجه:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \sin x}{bx} = \frac{a}{b}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{x} = a$$

دقت!

دقت کنید که **کمان جلوی سینوس** و **مخرج** باید **دقیقا یک چیز** باشند تا بتوانیم نتیجه بگیریم که وقتی هر دو به صفر میل می کنند حاصل حد برابر با ۱ است.

$$\lim_{\bigcirc \rightarrow 0} \frac{\sin \bigcirc}{\bigcirc} = 1$$

بنابراین بسیاری از اوقات لازم است با ضرب و تقسیم کردن کسر در یک عدد مخرج را دقیقا مشابه کمان جلوی سینوس کنیم.



۲۱- تابع $f(x) = \begin{cases} a[-x] + 2x & x \geq 2 \\ bx + [3x] & x < 2 \end{cases}$ در $x = 2$ پیوسته است. حاصل $a + 2b$ کدام است؟

۳- (۴)

۳ (۳)

۱ (۲)

-۱ (۱)

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - حسابان ۱ صفحه ۱۴۸ - ۱۱۰۵

پاسخ: گزینه ۱

بررسی سریع:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (a[-x] + 2x) = -3a + 4 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (bx + [3x]) = 2b + 5 \end{cases} \xrightarrow{f(2) = -2a + 4} \begin{cases} -3a + 4 = -2a + 4 \Rightarrow a = 0 \\ 2b + 5 = -2a + 4 \Rightarrow b = -\frac{1}{2} \Rightarrow a + 2b = -1 \end{cases}$$

برای پیوستگی باید حد راست و حد چپ با مقدار تابع در آن نقطه برابر باشند. پس ابتدا حدهای یک طرفه را محاسبه می کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (a[-x] + 2x) = a[-(2^+)] + 2(2) = a[-(2)^-] + 4 = -3a + 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (bx + [3x]) = 2b + [3(2^-)] = 2b + 5$$

چون $f(2) = -2a + 4$ ، پس:

$$\begin{cases} -3a + 4 = -2a + 4 \Rightarrow a = 0 \\ 2b + 5 = -2a + 4 \Rightarrow b = -\frac{1}{2} \Rightarrow a + 2b = -1 \end{cases}$$

پیوستگی

تابع f را در $x = a$ پیوسته می‌گوییم اگر حد چپ و حد راست و مقدار تابع در $x = a$ با هم برابر باشند:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$



۲۲- دو دایره $C(O, 2r-4)$ و $C'(O', 4r+2)$ فقط دارای سه مماس مشترک هستند. اگر $OO' = 5r+6$ باشد، آنگاه طول مماس مشترک خارجی آن‌ها چقدر است؟

$$2\sqrt{6} \quad (4)$$

$$24 \quad (3)$$

$$12\sqrt{2} \quad (2)$$

$$12 \quad (1)$$

(آسان - خطبه‌خط - سریع - هندسه ۲ صفحه ۲۲ - ۱۱۰)

پاسخ: گزینه ۳

دو دایره دارای سه مماس مشترک هستند هرگاه مماس بیرونی باشند، پس داریم:

$$OO' = R + R' \Rightarrow 5r + 6 = 4r + 2 + 3r - 4 \Rightarrow 2r = 8 \Rightarrow r = 4$$

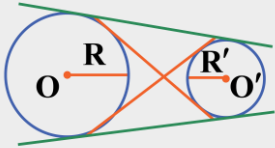
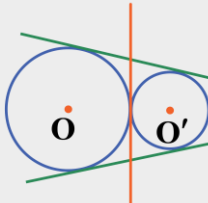
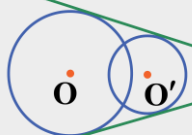
بنابراین شعاع‌های دو دایره برابر است با:

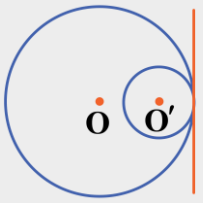
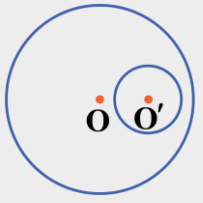
$$\begin{cases} R = 3r - 4 = 8 \\ R' = 4r + 2 = 18 \end{cases}$$

حال مماس مشترک خارجی این دو دایره را به دست می‌آوریم:

$$2\sqrt{RR'} = 2\sqrt{18 \times 8} = 2\sqrt{36 \times 4} = 2 \times 6 \times 2 = 24$$

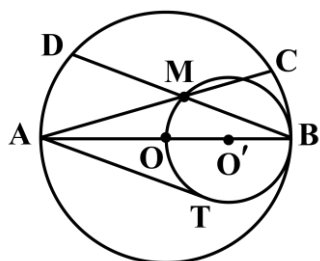
وضعیت نسبی دو دایره و مماس‌های مشترک آن‌ها

شرط	وضعیت	تعداد مماس‌های مشترک
$OO' > R + R'$	متخارج 	دارای دو مماس مشترک خارجی و دو مماس مشترک داخلی طول مماس مشترک داخلی $= \sqrt{OO'^2 - (R + R')^2}$ طول مماس مشترک خارجی $= \sqrt{OO'^2 - (R - R')^2}$
$OO' = R + R'$	مماس بیرون 	دارای دو مماس مشترک خارجی و یک مماس مشترک داخلی طول مماس مشترک داخلی $= 0$ طول مماس مشترک خارجی $= \sqrt{(R + R')^2 - (R - R')^2}$ $\downarrow$ OO' $= 2\sqrt{RR'}$
$ R - R' < OO' < R + R'$	مقاطع 	فقط دو مماس مشترک خارجی طول مماس مشترک خارجی $= \sqrt{OO'^2 - (R - R')^2}$

شرط	وضعیت	تعداد مماس‌های مشترک
$OO' = R - R' $	مماس درونی 	فقط یک مماس مشترک خارجی دارند.
$OO' < R - R' $	متداخل 	هیچ مماس مشترکی ندارند.



۲۲- در شکل مقابل، دو دایره با مراکز O و O' مماس داخل هستند. اگر طول قطر AB برابر ۱۶ و طول کمان AD برابر $\frac{8\pi}{3}$ باشد، حاصل



برابر کدام است؟ $\frac{MA \times MC}{AT}$

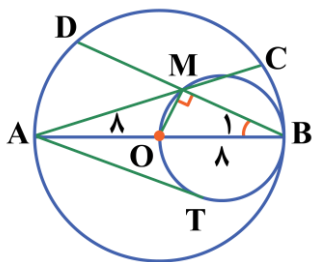
- (۱) ۱
(۲) $3\sqrt{2}$
(۳) ۲
(۴) $2\sqrt{3}$

(سخت - ترکیبی - زمان‌بر) - هندسه ۲ صفحه ۱۹ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۲

$$2R = 16 \Rightarrow R = 8$$

اگر شعاع دایره بزرگ‌تر را R در نظر بگیریم:



طول کمان AD از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\text{طول کمان } AD = \frac{\widehat{AD}}{360^\circ} 2\pi R \Rightarrow \frac{8\pi}{3} = \frac{\widehat{AD}}{360^\circ} 2\pi(8) \Rightarrow \widehat{AD} = 60^\circ \Rightarrow \hat{B}_1 = \frac{\widehat{AD}}{2} = 30^\circ$$

اکنون از مرکز O به M وصل می‌کنیم. در این صورت زاویه $\hat{M}$ محاطی روبه‌رو به قطر OB برای دایره کوچک‌تر است، پس $\hat{M} = 90^\circ$. بنابراین:

$$\hat{OMB} : \hat{B} = 30^\circ \Rightarrow \cos 30^\circ = \frac{MB}{OB} \Rightarrow MB = \frac{\sqrt{3}}{2} OB = \frac{\sqrt{3}}{2} (8) = 4\sqrt{3}$$

از طرف دیگر از مرکز O عمود OM بر وتر BD وارد شده است، پس OM وتر BD را نصف می‌کند، در نتیجه:

$$DM = BM = 4\sqrt{3}$$

اکنون با استفاده از روابط طولی در دایره می‌نویسیم:

$$MA \times MC = MB \times MD \Rightarrow MA \times MC = 4\sqrt{3} \times 4\sqrt{3} = 48$$

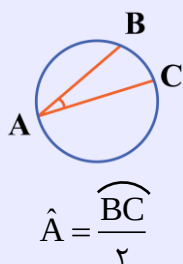
$$AT^2 = AO \times AB \Rightarrow AT^2 = 8 \times 16 \Rightarrow AT = 8\sqrt{2}$$

در نتیجه:

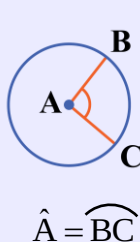
$$\frac{MA \times MC}{AT} = \frac{48}{8\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$$

زوايا در دایره

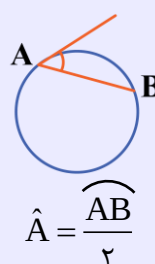
زاویه محاطی



زاویه مرکزی



زاویه ظلی



زاویه محاطی روبه‌رو به قطر

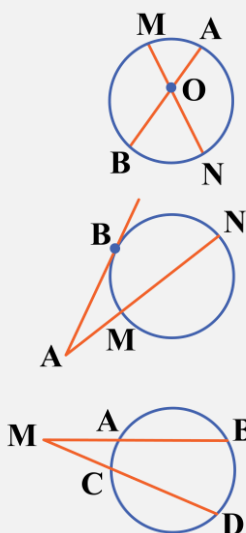
زاویه محاطی روبه‌روی قطر ۹۰° است.

طول کمان

طول کمان $\widehat{AB}$ در دایره‌ای به شعاع R برابر است با:

$$\frac{\theta}{360} \times 2\pi R \xrightarrow{\theta = \widehat{AB}} \frac{\widehat{AB}}{360} \times 2\pi R$$

روابط طولی در دایره



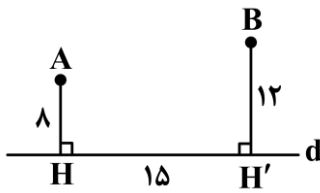
$$OM \times ON = OA \times OB$$

$$AB^2 = AM \times AN$$

$$MA \times MB = MC \times MD$$



۲۴- در شکل مقابل، نقطه M روی خط d به گونه‌ای قرار دارد که AM + MB کمترین مقدار ممکن باشد. طول MB برابر کدام است؟



(۱) ۲AH

(۲) BH'

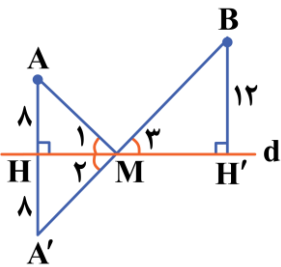
(۳) HH'

(۴) $\frac{AH + BH'}{2}$

(متوسط - مفهومی - استاندارد) - هندسه ۲ صفحه ۵۲ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۳

برای پیدا کردن M بازتاب A را نسبت به d نقطه A' می‌نامیم. از A' به B وصل می‌کنیم تا خط d را در نقطه M قطع کند. در این صورت بنا بر مسئله هرون، MA + MB کمترین مقدار ممکن را خواهد داشت، چون بازتاب تبدیل ایزومتري است دو مثلث AMH و A'MH به حالت (ض ض ض) همنهشت‌اند، پس:



از طرف دیگر، $\hat{M}_2 = \hat{M}_3$ ، پس $\hat{M}_1 = \hat{M}_3$. در نتیجه دو مثلث قائم‌الزاویه AMH و BMH' متشابه‌اند (دو زاویه برابر دارند)، پس داریم:

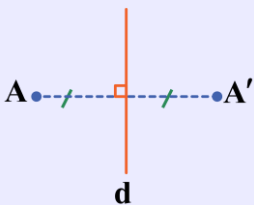
$$\triangle AMH \sim \triangle BMH' \Rightarrow \frac{MH}{MH'} = \frac{AH}{BH'} \Rightarrow \frac{MH}{MH'} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \xrightarrow{\text{ترکیب در صورت}} \frac{HH'}{MH'} = \frac{5}{3}$$

$$\xrightarrow{HH'=15} \frac{15}{MH'} = \frac{5}{3} \Rightarrow MH' = 9 \Rightarrow MB = \sqrt{MH'^2 + BH'^2} = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15$$

بنابراین $MB = HH'$ است.

بازتاب و ویژگی‌های آن

برای یافتن بازتاب نقطه‌ای مانند A نسبت به محور d، کافی است از A بر d عمود کنیم و به اندازه خودش امتداد دهیم تا به نقطه A' برسیم. در واقع d عمود منصف AA' است.



ویژگی‌های بازتاب

- (۱) ایزومتري است. (یعنی طول را حفظ می‌کند).
- (۲) زاویه‌ها را حفظ می‌کند.
- (۳) شیب خط‌ها را لزوماً حفظ نمی‌کند.
- (۴) جهت شکل را حفظ نمی‌کند.

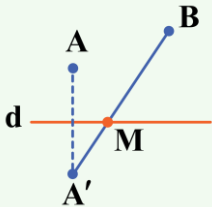
 یک مسئله مهم در بازتاب (مسئله هرون)

اگر A و B دو نقطه خارج خط d و در یک طرف آن باشند و M نقطه‌ای روی خط d باشد. برای یافتن M ای که $MA + MB$ کمترین مقدار باشد از بازتاب کمک می‌گیریم.

(۱) بازتاب A نسبت به خط d را می‌یابیم.

(۲) A' را به B وصل می‌کنیم.

(۳) محل تلاقی A'B و خط d نقطه M است.



۲۵- دو شهر A و B به فاصله ۱۰ کیلومتر از یکدیگر و به ترتیب به فاصله‌های ۳ و ۹ کیلومتر از ساحل دریا قرار دارند. می‌خواهیم جاده‌ای از A به B بسازیم به گونه‌ای که ۳ کیلومتر از این جاده در ساحل دریا باشد، طول کوتاه‌ترین مسیر ممکن برابر کدام است؟

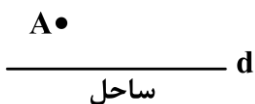
• B

(۱) ۱۳

(۲) ۱۵

(۳) ۱۶

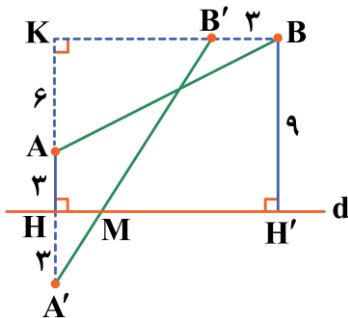
(۴) ۱۴



(متوسط - مفهومی - استاندارد) - هندسه ۲ صفحه ۵۳ - ۱۱۰۲

 پاسخ: گزینه ۳

نقطه B را به سمت A در راستای ساحل دریا (خط d) به اندازه ۳ کیلومتر انتقال می‌دهیم تا به B' برسیم، سپس بازتاب A نسبت به d را A' می‌نامیم و از A' به B' وصل می‌کنیم تا خط d را در M قطع کند، در این صورت بنا بر مسئله هرون طول مسیر مینیمم خواسته شده برابر $A'B' + ۳$ است.



اکنون از B بر امتداد AH عمود BK را وارد می‌کنیم و به کمک قضیه فیثاغورس می‌نویسیم:

$$\triangle ABK : AB^2 = AK^2 + BK^2 \xrightarrow[\substack{AB=10 \\ AK=6}]{AB=10} 10^2 = 6^2 + BK^2 \Rightarrow BK = 8$$

پس:

$$B'K = BK - BB' = 8 - 3 = 5$$

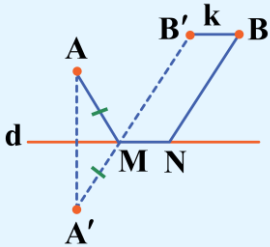
$$\triangle A'B'K : A'B'^2 = A'K^2 + B'K^2 \Rightarrow A'B'^2 = (3 + 3 + 6)^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169 \Rightarrow A'B' = 13$$

بنابراین طول کوتاه‌ترین مسیر ممکن این جاده برابر $A'B' + 3 = 13 + 3 = 16$ است.

اگر A و B در یک طرف خط d باشند و بخواهیم از A به B مسیری بسازیم که k واحد از مسیر روی خط d باشد، آن گاه مطابق شکل زیر داریم:

$$A' \Rightarrow A \text{ بازتاب} \Rightarrow AM = A'M$$

$$MNBB' \Rightarrow MB' = NB$$



بنابراین طول مسیر موردنظر برابر است با:

$$AM + MN + BN = \underbrace{A'M + MN + MB'}_{A'B'} = A'B' + BB' = A'B' + k$$

چون $A'B'$ خط راست است، پس کوتاه‌ترین مسیر است.



۲۶- در شکل مقابل، نقاط E, N, M, A روی یک دایره هستند. اگر BE و CM به ترتیب نیمسازهای $\hat{B}$ و $\hat{C}$ باشند و $AB = 10$ و $AC = 6$ ،

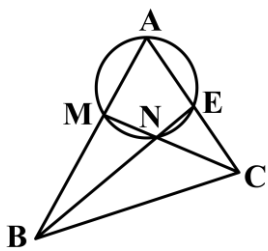
آن گاه طول ضلع BC برابر کدام است؟

(۱) $6\sqrt{2}$

(۲) $2\sqrt{19}$

(۳) $10\sqrt{2}$

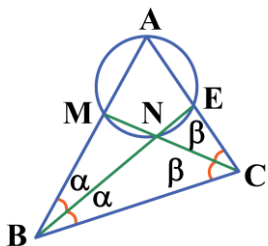
(۴) $2\sqrt{17}$



(متوسط - ترکیبی - استاندارد) - هندسه ۲ صفحه ۶۵ - ۱۱۰۳

پاسخ: گزینه ۲

می‌دانیم در مثلث ABC زاویه بین دو نیمساز داخلی $\hat{B}$ و $\hat{C}$ برابر $90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}$ است، پس:



$$\hat{BNC} = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2} \xrightarrow{M\hat{N}E = B\hat{N}C} M\hat{N}E = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2} \quad (1)$$

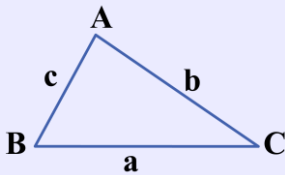
از طرف دیگر چهارضلی AMNE محاطی است، پس زوایای مقابل آن مکمل هستند، داریم:

$$\hat{A} + M\hat{N}E = 180^\circ \xrightarrow{(1)} \hat{A} + 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2} = 180^\circ \Rightarrow \frac{3}{2}\hat{A} = 90^\circ \Rightarrow \hat{A} = 60^\circ$$

اکنون با استفاده از قضیه کسینوس‌ها می‌نویسیم:

$$\triangle ABC: BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos 60^\circ \Rightarrow BC^2 = 10^2 + 6^2 - 2(10)(6)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow BC^2 = 100 + 36 - 60 = 76 \Rightarrow BC = \sqrt{76} = \sqrt{4 \times 19} = 2\sqrt{19}$$



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$$

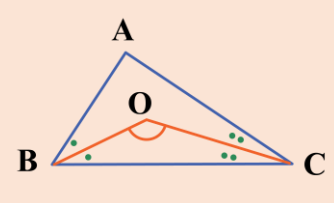
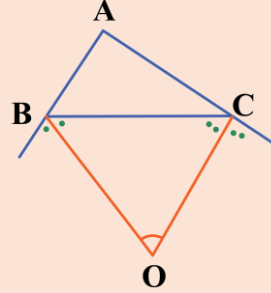
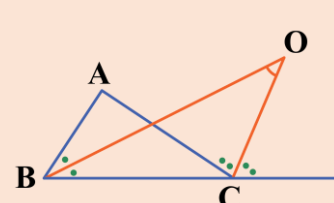
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

 چهارضلعی‌های محاطی و محیطی

در هر چهارضلعی محاطی، **زوایای روبه‌رو مکمل** اند و در هر چهارضلعی محیطی، **مجموع اضلاع روبه‌رو** با هم **برابر** است.

 زوایای بین دو نیمساز مثلث

۱) زاویه بین دو نیمساز زوایای داخلی مثلث	۲) زاویه بین دو نیمساز زوایای خارجی مثلث	۳) زاویه بین نیمساز زاویه داخلی و نیمساز زاویه خارجی
		
$\hat{O} = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}$	$\hat{O} = 90^\circ - \frac{\hat{A}}{2}$	$\hat{O} = \frac{\hat{A}}{2}$



۲۷- مثلث ABC به طول اضلاع $AB=9$ ، $AC=10$ و $BC=17$ را نسبت به ارتفاع AH بازتاب می‌دهیم تا به مثلث $A'B'C'$ برسیم. طول بزرگ‌ترین ارتفاع مثلث $A'B'C'$ کدام است؟

۹ (۴)

۸ (۳)

۴ (۲)

۶ (۱)

(متوسط - ترکیبی - استاندارد) - هندسه ۲ صفحه ۷۱ - ۱۱۰۳

پاسخ: گزینه ۳

بازتاب نسبت به خط، تبدیل ایزومتري است، پس دو مثلث ABC و $A'B'C'$ **همنهشت** هستند، بنابراین کافیت بزرگ‌ترین ارتفاع مثلث ABC را به دست آوریم.

می‌دانیم بزرگ‌ترین ارتفاع بر کوچک‌ترین ضلع مثلث وارد می‌شود، پس باید ارتفاع CH' وارد بر کوچک‌ترین ضلع یعنی AB را پیدا کنیم. برای این کار، ابتدا مساحت مثلث ABC را به کمک **قضیه هرون** به دست می‌آوریم.

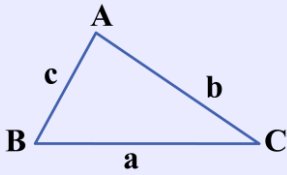
$$P_{\triangle ABC} = \frac{9+10+17}{2} = 18$$

$$S_{\triangle ABC} = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} = \sqrt{18(18-17)(18-10)(18-9)} = \sqrt{18 \times 1 \times 8 \times 9} = \sqrt{9 \times 16 \times 9} = 9 \times 4 = 36$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} CH' \times AB \Rightarrow CH' = \frac{2S_{\triangle ABC}}{AB} = \frac{2 \times 36}{9} = 8$$

بنابراین:

قضیه هرون برای مساحت

مساحت مثلث به اضلاع a, b, c برابر است با:

$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$$

که در آن P نصف محیط مثلث است:

$$P = \frac{a+b+c}{2}$$

۲۸- در مثلث ABC ، $AC = \frac{1}{4} AB = 2\sqrt{3}$ و $\hat{B} = 30^\circ$. طول نیمساز زاویه متوسط برابر کدام است؟

$$1\sqrt{3} \quad (4)$$

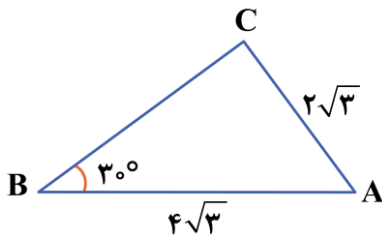
$$4 \quad (3)$$

$$3\sqrt{3} \quad (2)$$

$$8 \quad (1)$$

 پاسخ: گزینه ۳
 (سخت - ترکیبی - زمان بر) - هندسه ۲ صفحه ۷۴ - ۱۱۰۳

با توجه به داده‌های سؤال، شکل مقابل را خواهیم داشت.

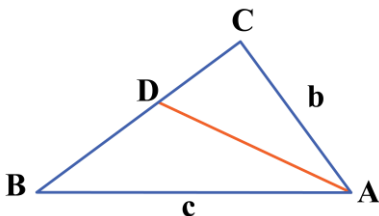


اکنون با استفاده از قضیه سینوس‌ها می‌نویسیم:

$$\frac{AC}{\sin \hat{B}} = \frac{AB}{\sin \hat{C}} \Rightarrow \frac{2\sqrt{3}}{\sin 30^\circ} = \frac{4\sqrt{3}}{\sin \hat{C}} \Rightarrow \frac{2\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{4\sqrt{3}}{\sin \hat{C}} \Rightarrow \sin \hat{C} = 1 \Rightarrow \hat{C} = 90^\circ$$

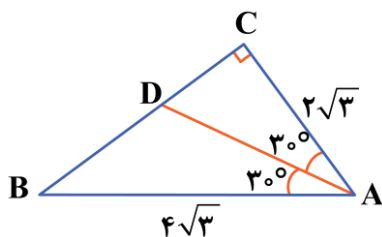
بنابراین مثلث ABC قائم‌الزاویه است، پس باید طول نیمساز زاویه متوسط یعنی زاویه $\hat{A} = 60^\circ$ را به دست آوریم. اگر AD نیمساز زاویه A باشد، داریم:

روش اول

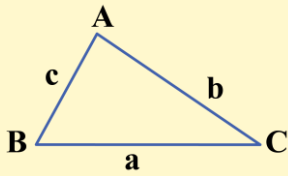


$$AD = \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{\hat{A}}{2} \Rightarrow AD = \frac{2(2\sqrt{3})(4\sqrt{3})}{2\sqrt{3} + 4\sqrt{3}} \cos 30^\circ \Rightarrow AD = \frac{16 \times 3}{6\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4$$

روش دوم



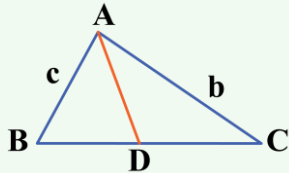
$$\triangle ACD : \cos 30^\circ = \frac{AC}{AD} \Rightarrow AD = \frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 4$$



$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R$$

که R شعاع دایره محیطی مثلث است.

 فرمول سریع محاسبه طول نیمساز



$$AD = \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{\hat{A}}{2}$$



۲۹- گزاره های p، q و r مفروض هستند. اگر $(p \Rightarrow q) \vee r \equiv F$ ، آن گاه گزاره r با کدام یک از گزاره های زیر می تواند هم ارز باشد؟

$$\sim q \Rightarrow \sim p \quad (۴)$$

$$\sim q \Rightarrow p \quad (۳)$$

$$q \Rightarrow \sim p \quad (۲)$$

$$q \Rightarrow p \quad (۱)$$

(متوسط - مفهومی - استاندارد) - آمار و احتمال صفحه ۱۱ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۴ 

وقتی ارزش ترکیب فصلی دو گزاره نادرست است، یعنی هر دو گزاره نادرست بوده اند، پس:

$$(p \Rightarrow q) \vee r \equiv F \Rightarrow \begin{cases} r \equiv F \\ (p \Rightarrow q) \equiv F \Rightarrow \begin{cases} p \equiv T \\ q \equiv F \end{cases} \end{cases}$$

حال باید در بین گزینه ها، گزاره ای را بیابیم که نادرست باشد، چون $r \equiv F$ است.

بررسی گزینه ها:

$$q \Rightarrow p \equiv (F \Rightarrow T) \equiv T$$

۱ به انتفای مقدم درست است. 

$$q \Rightarrow \sim p \equiv (F \Rightarrow F) \equiv T$$

۲ به انتفای مقدم درست است. 

$$\sim q \Rightarrow p \equiv (T \Rightarrow T) \equiv T$$

۳ 

$$\sim q \Rightarrow \sim p \equiv (T \Rightarrow F) \equiv F$$

۴ 

نقیض گزاره 

نقیض گزاره p را با $(\sim p)$ نمایش می دهند و ارزشی مخالف ارزش p دارد.

گزاره های مرکب

اگر p و q دو گزاره ساده باشند:

۱) ترکیب فصلی دو گزاره $(p \vee q)$ است که «p یا q» خوانده می شود. $p \vee q$ تنها زمانی نادرست است که هر دو گزاره نادرست باشند.

۲) ترکیب عطفی دو گزاره $(p \wedge q)$ است که «p و q» خوانده می شود. $p \wedge q$ تنها زمانی درست است که هر دو گزاره درست باشند.

۳) ترکیب شرطی دو گزاره $(p \Rightarrow q)$ است که «p آن گاه q» خوانده می شود. $p \Rightarrow q$ تنها زمانی نادرست است که p (مقدم) درست و q

تالی) نادرست باشد.

اگر p نادرست باشد می‌گوییم $p \Rightarrow q$ به **انتقای مقدم درست** است.



۳۰- اگر مجموعه‌های A و B چنان باشند که $n(A) = 4$ ، $n(B) = 3$ و $n(A \cap B) = 2$ ، آن‌گاه $P(A) - P(B)$ چند عضوی خواهد بود؟
(منظور از $P(X)$ مجموعه توانی مجموعه X است.)

۸ (۴)

۱۰ (۳)

۱۴ (۲)

۱۲ (۱)

(آسان - محاسباتی - سریع) - آمار و احتمال صفحه ۱۷ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۱

می‌دانیم:

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) \Rightarrow n(P(A) - P(B)) = n(P(A)) - n(P(A) \cap P(B))$$

$$= 2^4 - |P(A \cap B)| = 2^4 - 2^2 = 16 - 4 = 12$$

تعداد اعضای مجموعه‌ها

اگر A و B دو مجموعه از مجموعه مرجع U باشند، آن‌گاه $n(A)$ تعداد اعضای A است و داریم:

۱) $n(A') = n(U) - n(A)$

۲) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

۳) $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$

مجموعه توانی

اگر A مجموعه‌ای دلخواه باشد، $P(A)$ مجموعه توانی A است و شامل همه زیرمجموعه‌های A می‌باشد، پس اگر $n(A) = k$ باشد $n(P(A))$ یعنی تعداد اعضای $P(A)$ همان تعداد **زیرمجموعه‌های** A است و برابر با 2^k است.



۳۱- در پرتاب سه تاس متمایز با یکدیگر، اگر بدانیم اعداد رو شده همگی متمایزند، احتمال آن‌که کوچک‌ترین عدد ۲ باشد، چقدر است؟

۰/۴ (۴)

۰/۳ (۳)

۰/۲ (۲)

۰/۱ (۱)

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - آمار و احتمال صفحه ۵۰ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۳

از کاهش فضای نمونه‌ای استفاده می‌کنیم، می‌دانیم اعداد رو شده سه عدد متمایزند، پس داریم:

برای این‌که کوچک‌ترین عدد ۲ باشد دو عدد دیگر را از بین اعداد ۳ تا ۶ انتخاب می‌کنیم:

$$|S| = \binom{6}{3} \times 3!$$

$$|A| = \binom{4}{2} \times 3!$$

$$P(A) = \frac{\binom{4}{2} \times 3!}{\binom{6}{3} \times 3!} = \frac{6}{20} = 0/3$$

احتمال موردنظر

احتمال

اگر S مجموعه همه حالت‌های ممکن برای یک آزمایش تصادفی باشد، آن را فضای نمونه‌ای می‌نامیم و $|S|$ تعداد اعضای آن است. حال اگر $A \subseteq S$ باشد A را یک **پیشامد** از S می‌گوییم و احتمال وقوع آن برابر است با:

$$P(A) = \frac{|A|}{|S|}$$

اگر آزمایش تحت شرایط خاص انجام شده باشد، با محدود کردن فضای نمونه‌ای به همان حالات و شرایط خاص، اعضای آن را کاهش می‌دهیم.



۳۲- برای دو پیشامد مستقل A و B ، اگر $P(B-A) = ۰/۳$ و $P(A' \cap B') = ۰/۴۵$ باشد، آن‌گاه $P(B)$ چند درصد است؟

(۴) ۵۵٪

(۳) ۵۰٪

(۲) ۴۵٪

(۱) ۴۰٪

(متوسط - مفهومی/محاسباتی - استاندارد) - آمار و احتمال صفحه ۶۴ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۱

ابتدا با استفاده از اصول احتمال می‌دانیم:

$$P(A') = P(\underbrace{(B \cup B')}_S \cap A') = P((B \cap A') \cup (B' \cap A')) = \overbrace{P(B \cap A')}^{B-A} + P(B' \cap A') = \frac{3}{10} + \frac{45}{100} = \frac{75}{100}$$

توجه کنید که $(B \cap A')$ و $(B' \cap A')$ ناسازگارند (یعنی هیچ اشتراکی ندارند).
از طرفی:

A و B مستقل $\Rightarrow A'$ و B' مستقل $\Rightarrow P(A' \cap B') = P(A') \cdot P(B')$

$$\Rightarrow \frac{45}{100} = \frac{75}{100} \times P(B') \Rightarrow P(B') = \frac{45}{75} = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow P(B) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5} = ۴۰\%$$

اعمال روی پیشامدها

اگر A, B, C سه پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، آن‌گاه:

۱) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(توزیع‌پذیری اشتراک روی اجتماع)

۲) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(توزیع‌پذیری اجتماع روی اشتراک)

۳) $(A \cup B)' = A' \cap B'$, $(A \cap B)' = A' \cup B'$

(قوانین دمورگان)

۴) $A \cap A' = \emptyset$, $A \cup A' = S$, $A \cap S = A$

۵) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

(احتمال وقوع حداقل یکی از پیشامدهای A و B)

۶) $P(A') = 1 - P(A)$

۷) $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

دو پیشامد ناسازگار

اگر A و B ناسازگار باشند:

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

دو پیشامد مستقل

اگر A و B مستقل باشند:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$



۳۳- اگر فقط به یکی از داده‌های زیر، ۵ واحد اضافه کنیم، حداکثر مقدار ممکن برای دامنه میان چارکی کدام است؟
 ۳, ۷, ۴, ۲, ۷, ۷, ۵, ۱۱, ۶, ۵, ۱۰
 (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

(آسان - محاسباتی - استاندارد) - آمار و احتمال صفحه ۹۲ - ۱۱۰۳

پاسخ: گزینه ۲

داده‌ها را مرتب می‌کنیم:

$\overbrace{2, 3, 4, 5, 5}, 6, \overbrace{7, 7, 7, 10, 11}$
 میانه

مقادیر Q_1 و Q_3 به ترتیب برابر ۴ و ۷ و مقدار IQR برابر $7 - 4$ یعنی ۳ است. با اضافه کردن ۵ واحد به یکی از ۷ یا ۵ یا ۶ مقدار IQR (دامنه میان چارکی) بیشترین مقدار ممکن می‌شود و به عنوان مثال با اضافه کردن به یکی از ۷ها به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$\overbrace{2, 3, 4, 5, 5}, 6, \overbrace{7, 7, 10, 11, 12}$
 Q_1 میانه Q_3

$IQR = Q_3 - Q_1 = 10 - 4 = 6$ دامنه میان چارکی

رفع ابهام!

برای این که IQR بیشترین مقدار ممکن شود دو حالت داریم:

۱) Q_3 بزرگ‌تر شود (که با اضافه کردن ۵ واحد به یکی از داده‌های بزرگ‌تر از چارک سوم، عملاً Q_3 بزرگ‌تر نمی‌شود).

۲) Q_1 کوچک‌تر شود (که با اضافه کردن ۵ واحد به هر یک از داده‌ها، عملاً Q_1 کوچک‌تر نمی‌شود).

بنابراین می‌بایست اضافه شدن عدد ۵ به یکی از داده‌های بین چارک اول و سوم (یا احتمالاً خودشان) را بررسی کنیم تا Q_3 بیشترین افزایش را داشته باشد. با اضافه کردن ۵ به یکی از داده‌های ۵، ۶ یا ۷، دامنه میان چارکی به ۶ می‌رسد که بیشترین مقدار ممکن است.

دام تستی!

اگر بدون مرتب‌سازی و بررسی داده‌های جدید، ۵ واحد را به دامنه میان چارکی اولیه اضافه کنید، به اشتباه به گزینه «۴» می‌رسید.

چارک‌ها و دامنه میان چارکی

در گروهی از داده‌های آماری مرتب شده، پس از مشخص کردن میانه داده‌ها:

میانه نیمه اول داده‌ها (داده‌های کوچک‌تر از میانه) را چارک اول یا Q_1 می‌گویند.

میانه نیمه دوم داده‌ها (داده‌های بزرگ‌تر از میانه) را چارک سوم یا Q_3 می‌گویند.

توجه کنید که ...

چارک دوم همان میانه داده‌ها است. (میانه $= Q_2$)

دامنه میان چارکی

دامنه میان چارکی شاخصی برای پراکندگی داده‌ها است و برابر است با:

$$IQR = Q_3 - Q_1$$



۳۴- در انتخاب نمونه‌ای ۵ عضوی از بین داده‌های ۱، ۲، ۳، ...، ۲۰، اختلاف از میانگین اعضای نمونه، $x, y, 0, -2, -3$ شده است. اگر $|x - y|$ بیش‌ترین مقدار ممکن را داشته باشد، آنگاه میانگین اعضای نمونه کدام است؟

(۴) ۱۱

(۳) ۱۰

(۲) ۹

(۱) ۸

(سخت - محاسباتی/ترکیبی - استاندارد) - آمار و احتمال صفحه ۹۹ - ۱۱۰۴

پاسخ: گزینه ۱

داده‌های متناظر به x و y را به ترتیب a_1 و a_2 و میانگین اعضای نمونه را $\bar{a}$ می‌نامیم:

$$\begin{cases} x = a_1 - \bar{a} \\ y = a_2 - \bar{a} \end{cases} \Rightarrow |x - y|_{\max} = |a_1 - a_2|_{\max}$$

حاصل $|a_1 - a_2|$ وقتی ماکزیمم است که بیشترین و کمترین داده‌ها باشند، یعنی $\{a_1, a_2\} = \{1, 20\}$ که در این صورت با توجه به این که مجموع اختلاف از میانگین‌ها همیشه صفر است با فرض $x > y$ خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x + y + 0 - 2 - 3 = 0 \Rightarrow x + y = 5 \\ x - y = a_1 - a_2 = 20 - 1 = 19 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 19 \end{cases} \Rightarrow x = 12, y = -7$$

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 19 \end{cases}$$

$$x = a_1 - \bar{a} \Rightarrow 12 = 20 - \bar{a} \Rightarrow \bar{a} = 8$$

میانگین

در گروهی از داده‌های آماری میانگین برابر است با:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \rightarrow \begin{matrix} \text{مجموع داده‌ها} \\ \text{تعداد داده‌ها} \end{matrix}$$

حال اگر میانگین را از تک‌تک داده‌ها کم کنیم، به مقادیر حاصل، اختلاف از میانگین داده‌ها می‌گوییم:

$$x_1 - \bar{x}, x_2 - \bar{x}, \dots, x_n - \bar{x}$$

مجموع اختلاف از میانگین داده‌ها

مجموع اختلاف از میانگین همه داده‌ها برابر با صفر است.

$$(x_1 - \bar{x}) + (x_2 - \bar{x}) + \dots + (x_n - \bar{x}) = \underbrace{(x_1 + \dots + x_n)}_{n\bar{x}} - n\bar{x} = 0$$

•••

۳۵- در چه تعداد از موارد زیر روش «دادگان» بهترین روش از بین روش‌های چهارگانه برای گردآوری داده‌ها است؟

(الف) تیم‌های فوتبال ملی مورد علاقه دانش‌آموزان یک مدرسه

(ب) تعداد آرای کسب شده رئیس جمهورهای ایران از ابتدا تا کنون

(ج) تعداد قهرمانی تیم‌های مختلف در بوندسلیگای آلمان

(د) آمار تعداد شرکت‌کنندگان آزمون‌های ماز از آزمون شماره ۱ تا به حال

(ه) تعداد اتومبیل‌های تک سرنشین عبوری از اتوبان زنجان - قزوین بین ساعت ۷ تا ۸ هر روز

(۴) ۴

(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) ۱

(آسان - خط‌به‌خط - سریع) - آمار و احتمال صفحه ۱۰۸ - ۱۱۰۴

پاسخ: گزینه ۳

موارد (الف) و (ه) در آرشیو و بایگانی جایی قرار ندارند و می‌توان به ترتیب به شیوه‌های مصاحبه و مشاهده از آن‌ها مطلع شد ولی هر سه مورد دیگر در اطلاعات بایگانی مؤسسات و نهادهای مربوط موجود بوده و به شیوه «دادگان» قابل بررسی هستند.

روش‌های جمع‌آوری اطلاعات

- ۱) مشاهده و آزمایش
- ۲) مصاحبه: از طریق پرسش حضوری
- ۳) پرسش‌نامه: از طریق پرسش‌نامه‌های کتبی
- ۴) دادگان: از طریق داده‌های از پیش تهیه شده





برای دیدن پاسخنامه ویدئویی آزمون
بالا را اسکن یا روی آن کلیک کنید QR Code

کل کتاب فیزیک ۲

بودجه بندی
این آزمون

درمجموع ۱۲ تست از ۳۵ تست کنکور را پوشش داده است.

سهم در
کنکور

۳۶- جدول سری الکتروسیته مالشی چهار جسم نارسای A، B، C و D مطابق شکل زیر است. کدام یک از موارد زیر به ترتیب از راست به چپ، عبارت زیر را به درستی تکمیل می کند؟

«اگر جسم B را با جسم و جسم C را با جسم مالش دهیم، اجسام B و C یکدیگر را جذب می کنند.»

الف - A و D

ب - A و D

ج - D و D

انتهای مثبت سری
A
B
C
D
انتهای منفی سری

(۴) «الف»، «ب» و «ج»

(۳) «الف» و «ب»

(۲) فقط «ب»

(۱) فقط «الف»

(آسان - مفهومی - سریع) - صفحه ۴-۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۳

با توجه به جدول سری الکتروسیته مالشی، اگر جسم B را با جسم D مالش دهیم، الکترون از جسم B به جسم D منتقل می شود؛ بنابراین بار جسم B، مثبت می شود. از طرفی اگر جسم B را با جسم A مالش دهیم، الکترون از جسم A به جسم B منتقل می شود؛ بنابراین بار جسم B، منفی می شود.

به همین ترتیب با مالش جسم C به جسم D، بار جسم C، مثبت و با مالش جسم C به جسم A، بار جسم C، منفی می شود. در نتیجه برای این که اجسام B و C پس از مالش یکدیگر را جذب کنند، باید جسم B را با جسم A و جسم C را با جسم D مالش دهیم (مورد «الف») یا این که جسم B را با جسم D و جسم C را با جسم A مالش دهیم (مورد «ب»).

جدول سری الکتروسیته مالشی (تریوالکتریک)

یکی از روش های باردار کردن اجسام که معمولاً برای اجسام نارسا به کار می رود، روش مالش است. در مورد این روش خوب است نکات زیر را بدانیم:

۱- هنگامی که دو جسم از طریق مالش باردار می شوند، بار یکی از آن ها منفی و بار دیگری مثبت خواهد شد؛ بنابراین علامت بارها مخالف هم خواهد بود.

۲- چون در روش مالش، تعداد الکترون هایی که یک جسم از دست می دهد با تعداد الکترون هایی که جسم دیگر به دست می آورد، برابر است، اندازه بار دو جسم با هم برابر خواهد بود؛ به عبارت دیگر اگر بار یک جسم +q شود، بار دیگری -q خواهد بود.

۳- چون در روش مالش، علامت بار اجسام مخالف هم است، نیروی الکتریکی بین این دو جسم از نوع ربایشی خواهد بود.

۴- هنگامی که دو جسم را به هم مالش می دهیم تا باردار شوند، جسمی که الکترون خواه تر است (در سری الکتروسیته مالشی به انتهای منفی سری، نزدیک تر است)، الکترون می گیرد و بار آن منفی می شود. همچنین جسمی الکترون خواهی کمتری دارد (در سری الکتروسیته مالشی به انتهای مثبت سری نزدیک تر است)، الکترون از دست می دهد و علامت بار آن مثبت خواهد بود.

نکته

در مالش دو جسم به هم، باید دو جسم از جنس های مختلفی باشند تا در اثر مالش به هم، باردار شوند.

سری الکتروستاتیک مالشی جزء مفاهیم مهمه و ممکنه توی امتحان تشریحی هم مطرح بشه.



۳۷- دو گوی رسانای مشابه و بسیار کوچک با بارهای $q_1 = -2\mu\text{C}$ و $q_2 = 8\mu\text{C}$ به ترتیب در نقاط $A \left(\begin{smallmatrix} 2\text{cm} \\ 3\text{cm} \end{smallmatrix} \right)$ و $B \left(\begin{smallmatrix} -6\text{cm} \\ 9\text{cm} \end{smallmatrix} \right)$ قرار دارند. اگر

گوی‌ها را با هم تماس دهیم و سپس در همان مختصات قبلی قرار دهیم، بزرگی نیروی الکتریکی بین آن‌ها چند نیوتون کاهش

می‌یابد؟ $(k = 9 \times 10^9 \frac{\text{N.m}^2}{\text{C}^2})$

۸ / ۱ (۴)

۶ / ۳ (۳)

۳ / ۶ (۲)

۱ / ۸ (۱)

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - صفحه ۶ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۳

گام اول

فاصله گوی‌ها را به دست می‌آوریم:

$$r = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \xrightarrow[\Delta y = 9 - 3 = 6\text{cm}]{\Delta x = -6 - 2 = -8\text{cm}} r = \sqrt{(-8)^2 + (6)^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10\text{cm}$$

به دست آوردن فاصله بین دو نقطه با استفاده از مختصات آن‌ها

اگر دو نقطه به مختصات $A \left(\begin{smallmatrix} x_A \\ y_A \end{smallmatrix} \right)$ و $B \left(\begin{smallmatrix} x_B \\ y_B \end{smallmatrix} \right)$ داشته باشیم، فاصله بین این دو نقطه از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$r = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \Rightarrow r = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

گام دوم

بزرگی نیروی الکتریکی بین گوی‌ها را در حالت اول به دست می‌آوریم:

$$F = \frac{k|q_1||q_2|}{r^2} \xrightarrow[r = 10\text{cm} = 0.1\text{m}]{|q_1| = 2\mu\text{C}, |q_2| = 8\mu\text{C}} F = \frac{9 \times 10^9 \times 2 \times 10^{-6} \times 8 \times 10^{-6}}{(0.1)^2} = 144\text{N}$$

گام سوم

بار الکتریکی گوی‌ها را پس از تماس به دست می‌آوریم. با توجه به مشابه بودن گوی‌ها داریم:

$$q'_1 = q'_2 = \frac{q_1 + q_2}{2} \Rightarrow q'_1 = q'_2 = \frac{-2 + 8}{2} = 3\mu\text{C}$$

گام چهارم

بزرگی نیروی الکتریکی بین گوی‌ها را پس از تماس به دست می‌آوریم:

$$F' = \frac{k|q'_1||q'_2|}{r^2} \xrightarrow[r = 0.1\text{m}]{|q'_1| = |q'_2| = 3\mu\text{C}} F' = \frac{9 \times 10^9 \times 3 \times 10^{-6} \times 3 \times 10^{-6}}{(0.1)^2} = 81\text{N}$$

گام آخر

تغییر بزرگی نیروی الکتریکی برابر است با:

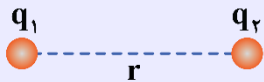
$$F' - F = 81 - 144 = -63\text{N}$$

یعنی بزرگی نیروی الکتریکی بین دو گوی، 63N کاهش می‌یابد.

نیروی الکتریکی بین دو ذره باردار



۱- مطابق قانون کولن، اگر بارهای q_1 و q_2 در فاصله r از هم قرار بگیرند، بزرگی نیروی الکتریکی‌ای که به هم وارد می‌کنند برابر است با:



$$F = k \frac{|q_1||q_2|}{r^2}$$

در رابطه بالا، k ثابت کولن است که یکای آن $\frac{N.m^2}{C^2}$ است.

۲- برای مقایسه نیروی الکتریکی بین بارها می‌توان نوشت:

$$F \propto \frac{|q_1||q_2|}{r^2} \Rightarrow \frac{F'}{F} = \frac{|q'_1|}{|q_1|} \times \frac{|q'_2|}{|q_2|} \times \left(\frac{r}{r'}\right)^2 \xrightarrow{\text{اگر اندازه بارها ثابت باشد}} \frac{F'}{F} = \left(\frac{r}{r'}\right)^2$$

تغییرات نیروی الکتریکی بین دو کره رسانای باردار پس از تماس



فرض کنید دو کره رسانای کوچک و **مشابه** باردار در اختیار داریم و می‌خواهیم ببینیم اگر آن‌ها را به هم تماس دهیم و دوباره در فاصله قبلی از یکدیگر قرار دهیم، بزرگی نیروی الکتریکی بین آن‌ها چگونه تغییر می‌کند. برای این کار دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

۱- بار الکتریکی اولیه کره‌ها همنام باشد:

در این حالت با تماس کره‌ها به یکدیگر و برابری بار آن‌ها، حاصل ضرب اندازه بارهای الکتریکی، افزایش می‌یابد و در نتیجه بزرگی نیروی الکتریکی هم افزایش می‌یابد. دقت کنید که اگر از ابتدا بار دو کره برابر بود، بزرگی نیروی الکتریکی بین آن‌ها تغییری نمی‌کرد. به عنوان مثال حالت زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{قبل از تماس: } \begin{cases} q_1 = 6\mu C \\ q_2 = 4\mu C \end{cases} \Rightarrow |q_1 q_2| = 24 \quad \text{پس از تماس: } \begin{cases} q'_1 = \frac{q_1 + q_2}{2} = 5\mu C \\ q'_2 = \frac{q_1 + q_2}{2} = 5\mu C \end{cases} \Rightarrow |q'_1 q'_2| = 25$$

همان‌طور که می‌بینید، حاصل ضرب اندازه بارها افزایش می‌یابد و در نتیجه بزرگی نیروی الکتریکی بین آن‌ها زیاد می‌شود.

۲- بار الکتریکی اولیه کره‌ها ناهمنام باشد:

در این حالت نمی‌توان اظهار نظر قطعی در مورد نیرو کرد. ممکن است نیرو افزایش یابد، کاهش یابد، ثابت بماند و یا حتی صفر شود. به مثال‌های زیر توجه کنید:

$$\text{قبل از تماس: } \begin{cases} q_1 = 5\mu C \\ q_2 = -5\mu C \end{cases} \Rightarrow |q_1 q_2| = 25 \quad \text{پس از تماس: } \begin{cases} q'_1 = 0 \\ q'_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow |q'_1 q'_2| = 0$$

در این حالت، نیرو کاهش می‌یابد و صفر می‌شود.

$$\text{قبل از تماس: } \begin{cases} q_1 = 20\mu C \\ q_2 = -2\mu C \end{cases} \Rightarrow |q_1 q_2| = 40 \quad \text{پس از تماس: } \begin{cases} q'_1 = 9\mu C \\ q'_2 = 9\mu C \end{cases} \Rightarrow |q'_1 q'_2| = 81$$

در این حالت، نیرو افزایش می‌یابد.



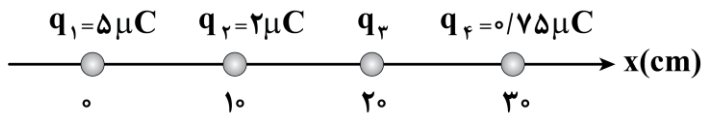
نکته

در هر دو حالت، بار کره‌ها پس از تماس، همنام می‌شود، پس کره‌ها پس از تماس حتماً یکدیگر را دفع خواهند کرد (به شرط این‌که پس از تماس، خنثی نشوند).



۳۸- در شکل زیر، چهار بار الکتریکی نقطه‌ای بر روی محور x ثابت شده‌اند. اگر بردار نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار q_3 از طرف سه بار دیگر در SI برابر با $9\vec{i}$ باشد، اندازه نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار q_1 از طرف سه بار دیگر چند نیوتون است؟

$$(k = 9 \times 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2})$$



(۱) ۱۲/۷۵

(۲) ۱۳/۱۲۵

(۳) ۱۳/۵

(۴) ۱۳/۸۷۵

(سخت - محاسباتی - زمان‌بر - صفحه ۱۴ - ۱۱۰۱)

پاسخ: گزینه ۴

گام اول

بزرگی میدان الکتریکی خالص حاصل از بارهای q_1, q_2, q_3 و q_4 را در محل بار q_3 به دست می‌آوریم:

$$E = \frac{k|q|}{r^2} \Rightarrow \begin{cases} E_1 = \frac{9 \times 10^9 \times 5 \times 10^{-6}}{(0/2)^2} = \frac{45}{4} \times 10^5 \frac{N}{C} \\ E_2 = \frac{9 \times 10^9 \times 2 \times 10^{-6}}{(0/1)^2} = 18 \times 10^5 \frac{N}{C} \\ E_4 = \frac{9 \times 10^9 \times 0.75 \times 10^{-6}}{(0/1)^2} = \frac{27}{4} \times 10^5 \frac{N}{C} \end{cases}$$

با توجه به جهت بردار میدان الکتریکی حاصل از هر بار در محل بار q_3 داریم:

$$\vec{E}_t = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_4 = \frac{45}{4} \times 10^5 \vec{i} + 18 \times 10^5 \vec{i} - \frac{27}{4} \times 10^5 \vec{i} = 22/5 \times 10^5 (\frac{N}{C}) \vec{i}$$

گام دوم

بار q_3 را به دست می‌آوریم:

$$\vec{F}_t = \vec{E}_t q_3 \Rightarrow \vec{F}_t = 9(N) \vec{i} \Rightarrow 9\vec{i} = 22/5 \times 10^5 \vec{i} \times q_3 \Rightarrow q_3 = 4 \times 10^{-6} C = 4 \mu C$$

گام سوم

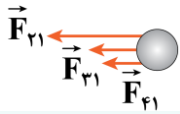
بزرگی نیروی هر یک از بارها بر بار q_1 را به دست می‌آوریم:

$$F_{21} = \frac{k|q_2||q_1|}{r_{21}^2} = \frac{9 \times 10^9 \times 2 \times 10^{-6} \times 5 \times 10^{-6}}{(0/1)^2} = 9 N$$

$$F_{31} = \frac{k|q_3||q_1|}{r_{31}^2} = \frac{9 \times 10^9 \times 4 \times 10^{-6} \times 5 \times 10^{-6}}{(0/2)^2} = 4/5 N$$

$$F_{41} = \frac{k|q_4||q_1|}{r_{41}^2} = \frac{9 \times 10^9 \times 0.75 \times 10^{-6} \times 5 \times 10^{-6}}{(0/3)^2} = 0/375 N$$

اندازه نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار q_1 را به دست می آوریم. با توجه به هم جهت بودن $\vec{F}_{21}$ و $\vec{F}_{31}$ و $\vec{F}_{41}$ داریم:



$$F_{t1} = F_{21} + F_{31} + F_{41} = 9 + 4/5 + 0/375 = 13/875 \text{ N}$$

جرعه ذهنی

با تکنیک ساده سازی در مکان بار q_2 داریم:

$$q' = q_2 + \left(\frac{r_{21}}{r_{31}}\right)^2 q_3 + \left(\frac{r_{21}}{r_{41}}\right)^2 q_4 \Rightarrow q' = 2 + \left(\frac{10}{20}\right)^2 \times 4 + \left(\frac{10}{30}\right)^2 \times \frac{3}{4} \Rightarrow q' = 2 + 1 + \frac{1}{12} = \frac{37}{12} \mu\text{C}$$

حال گویی به جای بارهای q_2 ، q_3 و q_4 یک بار q' در مکان بار q_2 داریم و تنها لازم است برای به دست آوردن بزرگی نیروی خالص وارد بر بار q_1 اندازه نیروی الکتریکی بین دو بار q' و q_1 را با استفاده از قانون کولن به دست آوریم:

$$F_t = \frac{90 |q'| |q_1|}{r_{21}^2} = \frac{90 \times \frac{37}{12} \times 5}{10^2} = 13/875 \text{ N}$$

میدان و نیروی الکتریکی

۱- میدان الکتریکی خاصیتی در اطراف ذرات باردار است که برابر نیروی وارد بر واحد بار الکتریکی است.

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

۲- در رابطه فوق، یکای F ، q و E به ترتیب نیوتون، کولن و نیوتون/کولن است. در ادامه این فصل خواهیم دید که علاوه بر نیوتون، یکای ولت/متر هم یکای میدان الکتریکی است.

۳- اگر یک ذره باردار درون میدان الکتریکی قرار گیرد، به آن نیرو وارد می شود که این نیرو برابر است با:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \Rightarrow \vec{F} = q\vec{E}$$

نکته

مطابق رابطه فوق نکات زیر قابل استنباط هستند:

۱- با ضرب کردن اندازه بار الکتریکی در اندازه میدان الکتریکی، اندازه نیروی الکتریکی وارد بر بار به دست می آید.

۲- اگر $q > 0$ باشد، $\vec{E}$ و $\vec{F}$ هم جهت هستند؛ بنابراین به بار مثبت در جهت میدان نیرو وارد می شود.

۳- اگر $q < 0$ باشد، $\vec{E}$ و $\vec{F}$ در خلاف جهت هم هستند؛ بنابراین به بار منفی در خلاف جهت میدان نیرو وارد می شود.

محاسبه نیروی الکتریکی در حضور چند بار

در سؤالاتی که چند بار الکتریکی وجود دارند و نیروی الکتریکی وارد بر یکی از آن ها را می خواهیم، گام های زیر را طی می کنیم.

گام اول: بردار نیروی الکتریکی که هر یک از بارها وارد می کنند را رسم می کنیم.

گام دوم: نیروهای الکتریکی را جداگانه محاسبه می کنیم.

گام سوم: بردارهای به دست آمده را به صورت برداری جمع می کنیم. اگر بردارها هم جهت باشند، اندازه آن ها جمع می شود، اگر خلاف جهت هم باشند، اندازه آن ها از هم کم می شود و اگر عمود بر هم باشند با کمک رابطه فیثاغورس برابند آن ها محاسبه می شود.

در ادامه با حل یک مثال، مطالب فوق را مرور می کنیم.



۳۹- دو کره A و B با حجم‌های $V_B = \frac{27}{8} V_A$ در اختیار داریم. اگر بار الکتریکی کره‌ها به صورت $Q_A = \frac{1}{27} Q_B$ باشد، چگالی سطحی

بار کره B چند برابر چگالی سطحی بار کره A است؟

$\frac{4}{3}$ (۴)

$\frac{3}{2}$ (۳)

$\frac{2}{3}$ (۲)

۱ (۱)

(متوسط - محاسباتی - استاندارد ۳ - صفحه ۳۰-۱۱۰)

پاسخ: گزینه ۳

کام‌اول

نسبت شعاع کره‌ها را به دست می‌آوریم:

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 \Rightarrow \frac{V_B}{V_A} = \left(\frac{R_B}{R_A}\right)^3 \Rightarrow \frac{27}{8} = \left(\frac{R_B}{R_A}\right)^3 \Rightarrow \frac{R_B}{R_A} = \frac{3}{2}$$

کام‌آخر

نسبت چگالی سطحی بار کره B به کره A را به دست می‌آوریم:

$$\sigma = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{\frac{4}{3} \pi R^2} \Rightarrow \frac{\sigma_B}{\sigma_A} = \frac{Q_B}{Q_A} \times \left(\frac{R_A}{R_B}\right)^2 \Rightarrow \frac{\sigma_B}{\sigma_A} = \frac{27}{8} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{3}{2}$$

سوتی‌های پرتکرار

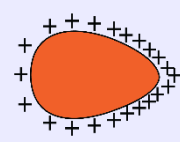
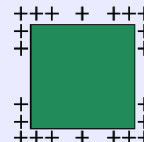
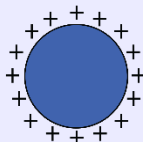
اگر در رابطه چگالی سطحی، اشتباهی حجم‌ها رو مقایسه کنید در دام گزینه (۱) می‌افتید!

چگالی سطحی بار الکتریکی

چگالی سطحی بار الکتریکی رسانا: برای این که بتوانیم تراکم بار الکتریکی در بخش‌های مختلف سطح یک جسم را باهم مقایسه کنیم کمیتی به نام چگالی سطحی بار را تعریف می‌کنیم. درواقع چگالی سطحی، پارامتری است که تراکم بار در قسمت‌های مختلف یک جسم را نشان می‌دهد:

چگالی سطحی بار $\left(\frac{C}{m^2}\right)$

$\uparrow$
 $\sigma = \frac{Q}{A} \rightarrow (C)$ بار الکتریکی
 $\rightarrow (m^2)$ مساحت



در رابطه بالا، A مساحت سطحی است که بار در آن پخش شده است. Q، بار و σ (بخوانید سیگما)، چگالی سطحی بار است.

نکته

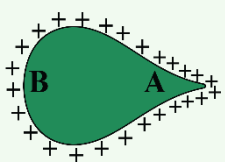
۱- در صورتی که کره رسانا n الکترون مبادله کند، چگالی سطحی آن برابر است با:

$$\sigma = \frac{q}{A} = \frac{ne}{\frac{4}{3} \pi r^2}$$

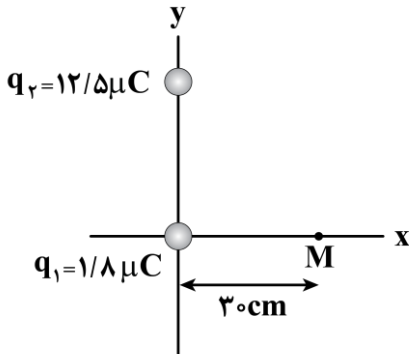
۲- فهمیدیم که اگر بار یک رسانا تغییر کند، بارها جابه‌جا می‌شوند تا در نهایت به تعادل الکتروستاتیکی برسند. پس از رسیدن به تعادل الکتریکی، پتانسیل تمام نقاط روی یک رسانا با یکدیگر برابر می‌شود:

$$V_A = V_B$$

$$\sigma_A > \sigma_B$$



۴۰- مطابق شکل زیر، بارهای q_1 و q_2 در صفحه مختصات xoy ثابت شده‌اند. اگر بردار برآیند میدان‌های الکتریکی حاصل از دو بار q_1 و q_2 در نقطه M برحسب SI به صورت $\vec{E}_M = (4/5\vec{i} - 3/6\vec{j}) \times 10^5$ باشد، فاصله بارهای q_1 و q_2 از یکدیگر چند سانتی‌متر است؟ $(k = 9 \times 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2})$



- (۱) ۵۰
(۲) ۳۰
(۳) $30\sqrt{2}$
(۴) ۴۰

(سخت - محاسباتی - زمان‌بر ۵ - صفحه ۱۴ - ۱۱۰۱)

پاسخ: گزینه ۴

گام اول

بزرگی میدان الکتریکی حاصل از بار q_1 را در نقطه M به دست می‌آوریم:

$$E_1 = \frac{k|q_1|}{r_1^2} \Rightarrow E_1 = \frac{9 \times 10^9 \times 1/8 \times 10^{-6}}{(0/3)^2} = 1/8 \times 10^5 \frac{N}{C}$$

با توجه به مثبت بودن بار q_1 ، میدان حاصل از بار q_1 در نقطه M در جهت محور x است؛ بنابراین داریم:

$$\vec{E}_1 = 1/8 \times 10^5 \left(\frac{N}{C}\right) \vec{i}$$

گام دوم

بزرگی میدان الکتریکی حاصل از بار q_2 را در نقطه M به دست می‌آوریم:

$$\vec{E}_M = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \Rightarrow 4/5 \times 10^5 \vec{i} - 3/6 \times 10^5 \vec{j} = 1/8 \times 10^5 \vec{i} + \vec{E}_2$$

$$\Rightarrow \vec{E}_2 = 2/7 \times 10^5 \vec{i} - 3/6 \times 10^5 \vec{j} \left(\frac{N}{C}\right)$$

$$\Rightarrow E_2 = \sqrt{(2/7 \times 10^5)^2 + (3/6 \times 10^5)^2} = 0/9 \times 10^5 \sqrt{3^2 + 4^2} = 4/5 \times 10^5 \frac{N}{C}$$

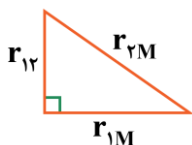
گام سوم

فاصله بار q_2 از نقطه M را به دست می‌آوریم:

$$E_2 = \frac{k|q_2|}{r_2^2} \Rightarrow 4/5 \times 10^5 = \frac{9 \times 10^9 \times 12/5 \times 10^{-6}}{r_2^2} \Rightarrow r_2 = 0/5 m = 5 cm$$

گام آخر

فاصله بارهای q_1 و q_2 از یکدیگر را به دست می‌آوریم:



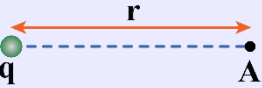
$$r_{12} = \sqrt{r_{1M}^2 + r_{2M}^2} \Rightarrow 50 = \sqrt{r_{1M}^2 + 30^2}$$

$$\Rightarrow 2500 = r_{1M}^2 + 900 \Rightarrow r_{1M}^2 = 1600 \Rightarrow r_{1M} = 40 cm$$

میدان الکتریکی حاصل از یک ذره باردار

۱- برای محاسبه بزرگی میدان الکتریکی حاصل از بار q در فاصله r از آن از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$E_A = k \frac{|q|}{r^2}$$



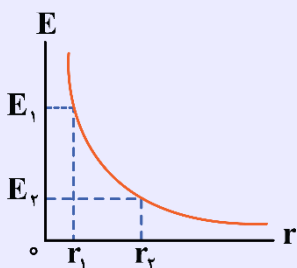
۲- جهت میدان الکتریکی حاصل از بار مثبت به صورت خارج شونده و جهت میدان الکتریکی حاصل از بار منفی به صورت داخل شونده است. به شکل‌های زیر دقت کنید:



دقت کنید که در محاسبه اندازه میدان الکتریکی فقط اندازه بار را در رابطه فوق قرار می‌دهیم و علامت بار را در محاسبه در نظر نمی‌گیریم.

نمودار بزرگی میدان الکتریکی بر حسب فاصله از بار

نمودار تغییرات بزرگی میدان الکتریکی حاصل از بار الکتریکی بر حسب فاصله از بار، مطابق شکل مقابل است: همان‌طور که واضح است با افزایش فاصله از بار، بزرگی میدان کاهش می‌یابد.

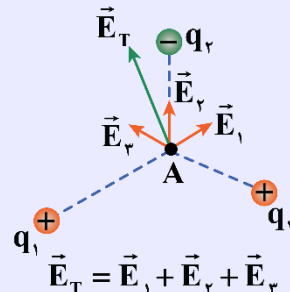
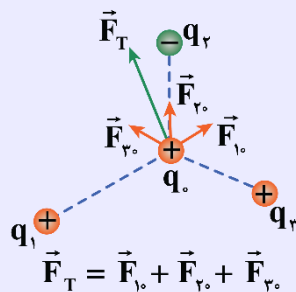


$$E = \frac{k|q|}{r^2} \xrightarrow{k|q| \text{ ثابت است}} E \propto \frac{1}{r^2}$$

اصل برهم‌نهی میدان‌های الکتریکی

این اصل بیان می‌دارد که میدان الکتریکی حاصل از چند بار الکتریکی نقطه‌ای در نقطه‌ای از فضا، برابر با جمع برداری میدان‌های الکتریکی‌ای است که هر یک از بارها به طور مستقل در آن نقطه ایجاد می‌کنند.

$$\vec{E}_T = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \dots$$



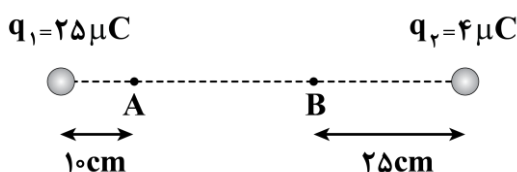
۱- نیروی $\vec{F}_T$ ، نیروی برابری دارد بر بار آزمون q است.

۲- میدان الکتریکی $\vec{E}_T$ در محل بار آزمون برابر با جمع برداری میدان‌های $\vec{E}_1$ ، $\vec{E}_2$ و $\vec{E}_3$ در محل این بار است.



۴۱- مطابق شکل زیر، دو گوی رسانای کوچک در فاصله 70cm از یکدیگر قرار دارند. با حرکت از نقطه A تا نقطه B به ترتیب از راست به

چپ، اندازه میدان الکتریکی و پتانسیل الکتریکی چگونه تغییر می‌کنند؟



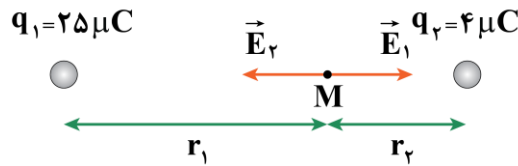
(۱) کاهش - کاهش

(۲) کاهش - ابتدا کاهش و سپس افزایش

(۳) ابتدا کاهش و سپس افزایش - کاهش

(۴) ابتدا کاهش و سپس افزایش - ابتدا کاهش و سپس افزایش

مطابق شکل زیر، میدان الکتریکی خالص ناشی از بارهای q_1 و q_2 در نقطه M صفر می شود؛ بنابراین داریم:

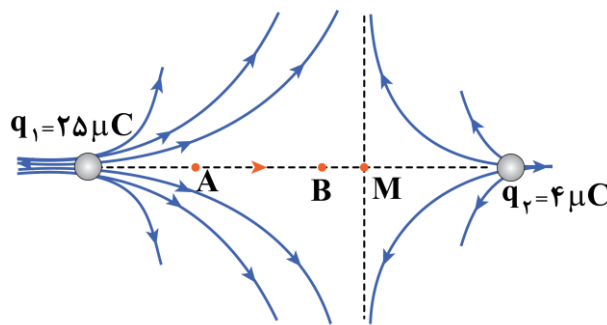


$$E_1 = E_2 \xrightarrow{E = k \frac{|q|}{r^2}} \frac{k|q_1|}{r_1^2} = \frac{k|q_2|}{r_2^2} \Rightarrow \frac{25}{r_1^2} = \frac{4}{r_2^2} \Rightarrow \frac{5}{r_1} = \frac{2}{r_2} \Rightarrow r_1 = \frac{2}{5} r_2$$

با توجه به شکل داریم:

$$r_1 = 70 - r_2 \xrightarrow{r_1 = \frac{2}{5} r_2} 70 - r_2 = \frac{2}{5} r_2 \Rightarrow \frac{3}{5} r_2 = 70 \Rightarrow r_2 = 116.67 \text{ cm}$$

در نتیجه خطوط میدان الکتریکی اطراف بارهای q_1 و q_2 به صورت زیر است:



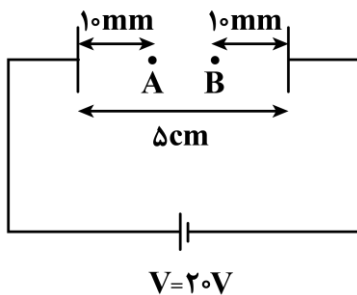
بنابراین با توجه به شکل بالا، با حرکت از نقطه A به نقطه B ، تراکم خطوط میدان و اندازه میدان الکتریکی کاهش می یابد. از طرفی با حرکت در جهت خطوط میدان الکتریکی، پتانسیل الکتریکی نیز کاهش می یابد.

سوتی های پرتکرار

اگر به فاصله نقطه B از بار q_2 دقت نکنید، در دام گزینه (۴) می افتید!



۴۲- مطابق شکل زیر، در فضای بین دو صفحه رسانا، ذره ای به جرم $12 \mu\text{g}$ و بار 5 nC از نقطه A رها می شود، تندی این ذره در نقطه B چند متر بر ثانیه است؟ (تنها نیروی وارد بر ذره، نیروی الکتریکی است.)



- (۱) $\sqrt{10}$
- (۲) $\frac{10}{\sqrt{10}}$
- (۳) 0.1
- (۴) 10

گام اول

با توجه به یکنواخت بودن میدان الکتریکی بین دو صفحه رسانا، اختلاف پتانسیل الکتریکی بین نقاط A و B را به دست می آوریم:

$$|\Delta V| = Ed \xrightarrow{E: \text{ثابت}} \frac{|\Delta V_{AB}|}{|\Delta V_t|} = \frac{d_{AB}}{d_t} \xrightarrow{\Delta V_t = 20 \text{ V}, d_t = 50 \text{ mm}} \frac{|\Delta V_{AB}|}{20} = \frac{30}{50} \Rightarrow |\Delta V_{AB}| = 12 \text{ V}$$

تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی ذره در جابه‌جایی از نقطه A تا نقطه B برابر است با:

$$\Delta V = \frac{\Delta U_E}{q} \xrightarrow[\substack{\Delta V = V_B - V_A = -12V \\ q = 5 \times 10^{-9} C}]{-12} = \frac{\Delta U_E}{5 \times 10^{-9}} \Rightarrow \Delta U_E = -6 \times 10^{-8} J$$

با توجه به قضیه کار - انرژی جنبشی داریم:

$$W_t = \Delta K \xrightarrow{W_t = W_E} W_E = \Delta K \xrightarrow{W_E = -\Delta U_E} \Delta K = -\Delta U_E = 6 \times 10^{-8} J$$

تندی ذره را در نقطه B به دست می‌آوریم:

$$\Delta K = \frac{1}{2} m (v_B^2 - v_A^2) \Rightarrow 6 \times 10^{-8} = \frac{1}{2} \times 12 \times 10^{-9} \times (v_B^2 - 0) \Rightarrow v_B = \sqrt{10} \frac{m}{s}$$



۴۳- خازن تختی که مساحت هر یک از صفحات آن 90 cm^2 و فاصله بین صفحات آن 2 mm و بین صفحات آن با دی‌الکتریکی با ثابت

۵ پُر شده است را به ولتاژ $36V$ وصل می‌کنیم. انرژی ذخیره‌شده در آن چند میکروژول است؟ $(\pi = 3, k = 9 \times 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2})$

۱۳۵ (۴)

۱۳/۵ (۳)

۱/۳۵ (۲)

۰/۱۳۵ (۱)

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) (صفحه ۳۹ - ۱۱۰۱)

پاسخ: گزینه ۱

ضریب گذردهی الکتریکی خلأ را به دست می‌آوریم:

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \Rightarrow \epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} = \frac{1}{4 \times 3.14 \times 9 \times 10^9} = \frac{10^{-9}}{12 \times 9} \frac{C^2}{N \cdot m^2} \text{ یا } \frac{F}{m}$$

ظرفیت خازن برابر است با:

$$C = \frac{\kappa \epsilon_0 A}{d} \xrightarrow[\substack{\kappa = 5, \epsilon_0 = \frac{10^{-9}}{12 \times 9} \frac{F}{m} \\ A = 90 \text{ cm}^2 = 9 \times 10^{-3} \text{ m}^2, d = 2 \text{ mm} = 2 \times 10^{-3} \text{ m}}]{5 \times \frac{10^{-9}}{12 \times 9} \times 9 \times 10^{-3}} C = \frac{5}{24} \times 10^{-9} F$$

انرژی ذخیره‌شده در خازن را به دست می‌آوریم:

$$U = \frac{1}{2} C V^2 \Rightarrow U = \frac{1}{2} \times \frac{5}{24} \times 10^{-9} \times (36)^2 = 135 \times 10^{-9} J \times \frac{1 \mu J}{10^{-6} J} = 0.135 \mu J$$



تذکر

حواست باشه این جا ϵ_0 رو مستقیماً نداده و باید طبق رابطه $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ به دستش بیاری. همون رابطه‌ای که سر کلاسا می‌گفتین به چه دردی می‌خوره! 😊



۴۴- خازن تختی را که بین صفحات آن هوا است، پس از شارژ کامل از باتری جدا کرده و فاصله بین صفحات آن را نصف و با دی‌الکتریکی

با ثابت ۲ پُر می‌کنیم. بزرگی میدان الکتریکی بین صفحات خازن چند درصد و چگونه تغییر می‌کند؟

(۲) ۱۰۰ درصد افزایش می‌یابد.

(۱) ۲۵ درصد کاهش می‌یابد.

(۴) ثابت می‌ماند و تغییری نمی‌کند.

(۳) ۵۰ درصد کاهش می‌یابد.

با توجه به این که خازن از باتری جدا شده است، درمی‌یابیم که بار ذخیره‌شده در آن ثابت می‌ماند؛ بنابراین داریم:

$$E = \frac{V}{d} \xrightarrow[\substack{V = \frac{Q}{C} \\ C = \frac{\kappa \epsilon_0 A}{d}}]{\substack{\text{ثابت: } A \text{ و ثابت: } Q}} E = \frac{Q}{\kappa \epsilon_0 A} \rightarrow \frac{E_2}{E_1} = \frac{\kappa_1}{\kappa_2} = \frac{1}{2} \Rightarrow E_1 = 2E_2$$

$$\frac{E_2 - E_1}{E_1} \times 100 = \frac{\frac{E_1}{2} - E_1}{E_1} \times 100 = -50\%$$

بنابراین بزرگی میدان الکتریکی بین صفحات خازن، ۵۰ درصد کاهش می‌یابد.

ظرفیت خازن

هرچه اختلاف پتانسیل الکتریکی بین دو صفحه خازن، بیشتر باشد، بار ذخیره‌شده در آن بیشتر می‌شود. نسبت بار ذخیره‌شده در خازن به اختلاف پتانسیل الکتریکی بین دو صفحه آن را ظرفیت خازن می‌نامند. ظرفیت خازن، عددی ثابت است و آن را با C نشان می‌دهند و واحد آن فاراد یا کولن بر ولت است:

$$C = \frac{Q}{V}$$

نکته

با تغییر بار ذخیره‌شده و یا اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر خازن، ظرفیت خازن تغییر نمی‌کند.

تذکر

اختلاف پتانسیل الکتریکی بین دو سر خازن با بار ذخیره‌شده در آن رابطه مستقیم دارد، یعنی هرچه اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر خازن افزایش یابد به همان نسبت، بار ذخیره‌شده در خازن افزایش می‌یابد تا ظرفیت خازن، ثابت بماند.

عوامل مؤثر بر ظرفیت خازن

ظرفیت خازن به ویژگی‌های هندسی و جنس عایق بین صفحه‌های خازن بستگی دارد.

$$C = \kappa \epsilon_0 \frac{A}{d} \rightarrow \begin{matrix} \text{مساحت صفحات (m}^2\text{)} \\ \text{فاصله بین صفحات (m)} \end{matrix}$$

ثابت دی‌الکتریک

۱- ظرفیت خازن با فاصله بین صفحات خازن، رابطه عکس دارد.

۲- ظرفیت خازن با مساحت مشترک صفحات خازن، رابطه مستقیم دارد.

نکته

۱- ضریب دی‌الکتریک، ضریبی بدون یکا است.

۲- ضریب دی‌الکتریک خلا برابر با یک است و ضریب دی‌الکتریک سایر نارساها از یک بیشتر است، بنابراین کمینه مقدار ممکن برای ضریب دی‌الکتریک برابر یک است.

انرژی ذخیره‌شده در یک خازن

اگر یک خازن با ظرفیت C ، توسط یک باتری با اختلاف پتانسیل V ، شارژ شود، در آن بار الکتریکی Q و انرژی الکتریکی U ذخیره می‌شود، رابطه بین این کمیت‌ها به صورت زیر است:

$$U = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

مقایسه انرژی ذخیره شده در یک خازن

۱- اگر ظرفیت و ولتاژ، خازن‌ها را بدانیم:

$$U = \frac{1}{2} CV^2 \Rightarrow \frac{U_2}{U_1} = \frac{C_2}{C_1} \times \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2$$

۲- اگر بار الکتریکی و ظرفیت خازن‌ها را بدانیم:

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \Rightarrow \frac{U_2}{U_1} = \frac{C_1}{C_2} \times \left(\frac{Q_2}{Q_1}\right)^2$$

۳- اگر بار الکتریکی و ولتاژ خازن‌ها را بدانیم:

$$U = \frac{1}{2} QV \Rightarrow \frac{U_2}{U_1} = \frac{Q_2}{Q_1} \times \frac{V_2}{V_1}$$



هنگامی که در ویژگی‌های یک خازن تغییر ایجاد کنیم، دو حالت زیر امکان پذیر است:

۱- اگر خازن پس از شارژ به باتری متصل باشد: در این حالت ولتاژ دو سر خازن با اعمال هر تغییراتی بر روی خازن، ثابت باقی می ماند. در این حالت هر تغییری در ساختمان خازن که موجب تغییر در ظرفیت خازن می شود باعث تغییراتی به نسبت مستقیم در بار و انرژی ذخیره شده در خازن می شود.

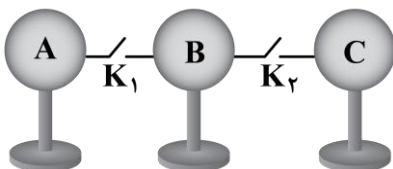
۲- اگر خازن پس از شارژ شدن از باتری جدا شود: در این حالت بار ذخیره شده در خازن با اعمال هر تغییراتی بر روی خازن، ثابت باقی می ماند. در این حالت هر تغییری در ساختمان خازن که موجب تغییر در ظرفیت خازن می شود باعث تغییراتی به نسبت معکوس در اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر خازن و انرژی ذخیره شده در خازن می شود.



در حالتی که خازن به باتری متصل است و اختلاف پتانسیل الکتریکی بین صفحات آن ثابت است، بهتر است میدان الکتریکی بین صفحات خازن را با رابطه $E = \frac{V}{d}$ تحلیل کنید که V اختلاف پتانسیل الکتریکی و d فاصله بین صفحات خازن است. برای حالتی هم که خازن شارژ شده را از باتری جدا می کنیم و بار آن ثابت می ماند، بهتر است بزرگی میدان الکتریکی بین صفحات خازن را با رابطه $E = \frac{Q}{\kappa \epsilon_0 A}$ تحلیل کنید که Q بار الکتریکی خازن، K ثابت دی الکتریک خازن و A مساحت مؤثر صفحات خازن است.



۴۵- سه کره رسانای مشابه با بارهای الکتریکی $q_A = 6\mu C$ ، $q_B = -10\mu C$ و $q_C = 8\mu C$ مطابق شکل زیر بر روی پایه های عایق قرار دارند. ابتدا کلید K_1 را وصل می کنیم و دو کره A و B در مدت زمان $2ms$ به تعادل می رسند. سپس کلید K_1 را باز و کلید K_2 را وصل می کنیم و دو کره B و C در مدت زمان $1ms$ به تعادل می رسند. اندازه جریان الکتریکی متوسط گذرنده از کلید K_2 چند برابر اندازه جریان الکتریکی متوسط گذرنده از کلید K_1 است؟



- (۱) $\frac{4}{3}$
(۲) $\frac{4}{5}$
(۳) $\frac{5}{4}$
(۴) $\frac{3}{4}$

گام اول

با بستن کلید K_1 ، دو کره مشابه A و B به هم متصل می‌شوند و اندازه بار خالص انتقال یافته بین آن‌ها برابر است با:

$$|\Delta q| = \left| \frac{q_A - q_B}{2} \right| = \left| \frac{6 - (-10)}{2} \right| = 8 \mu C$$

$$I_{K_1} = \frac{|\Delta q|}{\Delta t_1} = \frac{8 \times 10^{-6}}{0.2 \times 10^{-3}} = 0.04 A$$

گام دوم

با بستن کلید K_2 ، دو کره مشابه B و C به هم متصل می‌شوند و اندازه بار خالص انتقال یافته بین آن‌ها برابر است با:

$$|\Delta q'| = \left| \frac{q_C - q'_B}{2} \right| \xrightarrow{q'_B = \frac{q_A + q_B}{2} = \frac{6 - 10}{2} = -2 \mu C} |\Delta q'| = \left| \frac{8 - (-2)}{2} \right| = 5 \mu C$$

$$I_{K_2} = \frac{|\Delta q'|}{\Delta t_2} = \frac{5 \times 10^{-6}}{0.1 \times 10^{-3}} = 0.05 A$$

گام آخر

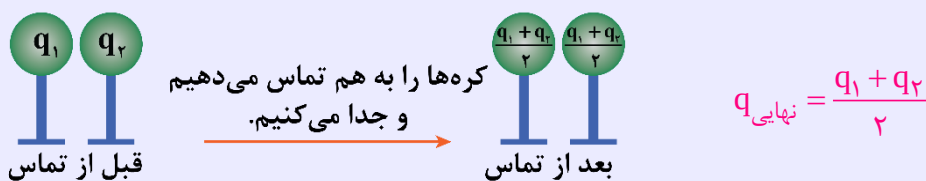
نسبت خواسته شده برابر است با:

$$\frac{I_{K_2}}{I_{K_1}} = \frac{0.05}{0.04} = \frac{5}{4}$$

بار الکتریکی

طبق قانون پایستگی بارهای الکتریکی، اگر چند جسم رسانا را به هم تماس دهیم، مجموع بار آن‌ها قبل از تماس با مجموع بار آن‌ها بعد از تماس، یکسان خواهد بود.

۱- هنگامی که دو کره رسانای مشابه را به هم تماس می‌دهیم، بار الکتریکی بین آن‌ها به گونه‌ای تقسیم می‌شود که بار نهایی دو کره با هم برابر باشد؛ بنابراین بار هر یک از کره‌ها پس از تماس برابر میانگین بار اولیه آن‌ها خواهد بود.

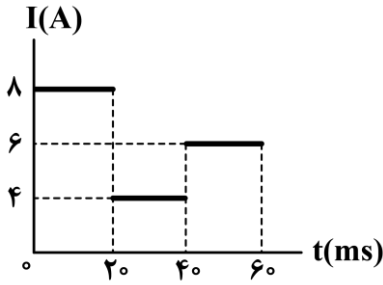


۲- نتیجه فوق برای تعداد بیشتری کره فلزی مشابه هم قابل تعمیم است. به طور کلی اگر n کره رسانای مشابه که دارای بارهای $q_1, q_2, \dots, q_n$ و q_n هستند را هم‌زمان به هم تماس دهیم، بار نهایی همه آن‌ها برابر می‌شود با:

$$q_{\text{نهایی}} = \frac{q_1 + q_2 + \dots + q_n}{n}$$



۴۶- نمودار جریان الکتریکی عبوری از مقطع یک رسانا برحسب زمان به شکل زیر است. مقدار بار الکتریکی خالصی که در بازه زمانی $t = 0$ تا $t = 30 \text{ ms}$ از مقطع این رسانا عبور می‌کند، چند برابر مقدار بار الکتریکی خالصی است که در بازه زمانی $t = 40 \text{ ms}$ تا $t = 60 \text{ ms}$ از مقطع این رسانا عبور می‌کند؟

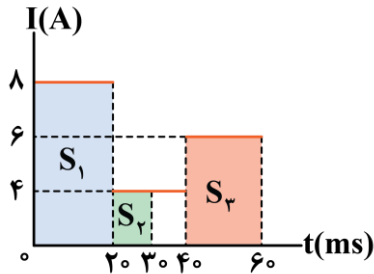


- (۱) $\frac{5}{3}$
(۲) $\frac{5}{4}$
(۳) $\frac{4}{5}$
(۴) $\frac{3}{5}$

(آسان - محاسباتی - استاندارد) (صفحه ۴۷ - ۱۱۰۲)

پاسخ: گزینه ۱

می‌دانیم مساحت محصور بین نمودار جریان - زمان و محور زمان برابر با بار الکتریکی خالصی است که از مقطع رسانا عبور می‌کند، بنابراین داریم:



$$S_1 = 20 \times 10^{-3} \times 8 = 16 \times 10^{-2}$$

$$S_2 = (30 - 20) \times 10^{-3} \times 4 = 4 \times 10^{-2}$$

$$S_3 = (60 - 40) \times 10^{-3} \times 6 = 12 \times 10^{-2}$$

$$\Delta q = S_1 + S_2 = 16 \times 10^{-2} + 4 \times 10^{-2} = 20 \times 10^{-2} \text{ C}$$

$$\Delta q' = S_3 = 12 \times 10^{-2} \text{ C}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta q}{\Delta q'} = \frac{20 \times 10^{-2}}{12 \times 10^{-2}} = \frac{5}{3}$$

سوتی پرتکرار

اگر حواستون به نسبت خواسته شده نباشه، در دام گزینه (۴) می‌افتید!

۴۷- دو سیم فلزی A و B دارای جرم و مقاومت الکتریکی یکسان هستند. اگر شعاع مقطع سیم B، $\sqrt{2}$ برابر شعاع مقطع سیم A بوده و چگالی آن، $\frac{1}{3}$ چگالی سیم A باشد، مقاومت ویژه سیم B چند برابر مقاومت ویژه سیم A است؟

- (۱) $\frac{4}{3}$ (۲) $\frac{27}{4}$ (۳) $\frac{4}{27}$ (۴) $\frac{3}{4}$

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) (صفحه ۵۷ - ۱۱۰۲)

پاسخ: گزینه ۱

به کمک رابطه $R = \frac{\rho m}{\rho' A^2}$ داریم (بچه‌ها ρ مقاومت ویژه و ρ' چگالی رسانا است):

$$R_A = R_B \Rightarrow \frac{R_A}{R_B} = 1 \Rightarrow \frac{\rho_A}{\rho_B} \times \frac{\rho'_B}{\rho'_A} \times \frac{m_A}{m_B} \times \left(\frac{A_B}{A_A}\right)^2 = 1 \quad \rho'_B = \frac{1}{3} \rho'_A, m_B = m_A, \frac{A_B}{A_A} = \left(\frac{r_B}{r_A}\right)^2 = (\sqrt{2})^2 = 2$$

$$\frac{\rho_A}{\rho_B} \times \frac{1}{3} \times 1 \times (2)^2 = 1 \Rightarrow \frac{\rho_B}{\rho_A} = \frac{4}{3}$$

عوامل مؤثر بر مقاومت الکتریکی رسانا

۱- مقدار مقاومت الکتریکی یک رسانا به ویژگی‌های ساختمانی و دمای آن وابسته است و ارتباطی با اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر رسانا و جریان عبوری از آن ندارد.
مقدار مقاومت الکتریکی یک سیم برحسب ویژگی‌های ساختمانی آن را می‌توانیم از رابطه زیر به دست آوریم:

$$R = \rho \frac{L}{A}$$

R : مقدار مقاومت الکتریکی با یکای اهم (Ω)
 ρ : مقاومت ویژه سیم با یکای اهم $\times$ متر ($\Omega \cdot m$)

L : طول سیم با یکای متر (m)
 A : سطح مقطع سیم با یکای مترمربع (m^2)

۲- با توجه به رابطه $R = \rho \frac{L}{A}$ ، برای مقایسه مقاومت الکتریکی دو سیم به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$R = \rho \frac{L}{A} \Rightarrow \frac{R_2}{R_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \times \frac{L_2}{L_1} \times \frac{A_1}{A_2} \xrightarrow[A \propto D^2]{D: \text{ قطر مقطع}} \frac{R_2}{R_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \times \frac{L_2}{L_1} \times \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2$$

این فرمول‌ها رو برای محاسبه مقاومت الکتریکی بر اساس ویژگی‌های ساختمانی آن به خاطر بسپار!

۱- محاسبه مقاومت الکتریکی رسانا به کمک طول و سطح مقطع:

$$R = \frac{\rho L}{A}$$

۲- محاسبه مقاومت الکتریکی رسانا به کمک طول و حجم:

$$R = \frac{\rho L^2}{V}$$

۳- محاسبه مقاومت الکتریکی رسانا به کمک سطح مقطع و حجم:

$$R = \frac{\rho V}{A^2}$$

۴- محاسبه مقاومت الکتریکی رسانا به کمک طول، جرم و چگالی:

$$R = \frac{\rho \rho' L^2}{m}$$

۵- محاسبه مقاومت الکتریکی رسانا به کمک سطح مقطع، جرم و چگالی:

$$R = \frac{\rho m}{\rho' A^2}$$

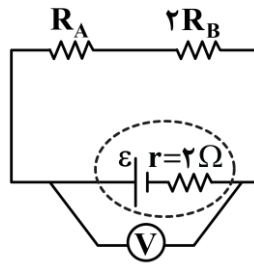
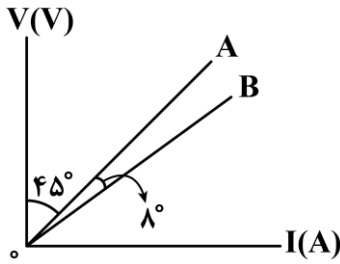
راهنمای مسیر

بچه‌ها روابط $R = \rho \rho' \frac{L^2}{m}$ و $R = \frac{\rho m}{\rho' A^2}$ خیلی مورد علاقه طراحان هست. توصیه می‌کنیم این دو رابطه رو هم گوشه ذهنتون داشته باشین تا سرعت حل مسأله‌تون حسابی بالا بره.



۴۸- نمودار ولتاژ - جریان دو رسانای اهمی A و B مطابق شکل زیر است. در مدار نشان داده شده، نیروی محرکه باتری چند ولت باشد تا

ولت‌سنج ایده آل مقدار ۲۰V را نشان دهد؟ ($\sin 37^\circ = 0.6$)



۳۶ (۱)

۲۴ (۲)

۳۵ (۳)

۲۵ (۴)

(متوسط - محاسباتی - استاندارد ۵ - صفحه ۶۴ - ۱۱۰۲)

پاسخ: گزینه ۱

گام اول

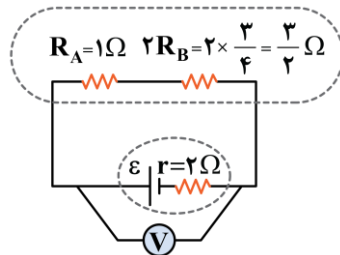
می‌دانیم شیب نمودار ولتاژ - جریان برابر با مقاومت الکتریکی رسانا است. بنابراین داریم:

$$R_A = \text{شیب نمودار A} = \tan \theta_A \xrightarrow{\theta_A = 90^\circ - (45^\circ) = 45^\circ} R_A = \tan 45^\circ = 1\Omega$$

$$R_B = \text{شیب نمودار B} = \tan \theta_B \xrightarrow{\theta_B = 90^\circ - (45^\circ + 8^\circ) = 37^\circ} R_B = \tan 37^\circ = \frac{3}{4}\Omega$$

گام آخر

در مدار نشان داده شده، ولت‌سنج ایده آل اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر باتری را نشان می‌دهد، بنابراین با استفاده از مقادیر به دست آمده برای R_A و R_B داریم:



$$\text{متوالی: } R_{eq} = R_A + 2R_B = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}\Omega$$

بنابراین عددی که ولت‌سنج نشان می‌دهد:

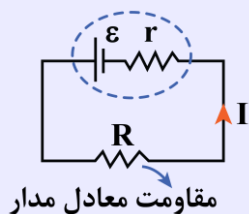
$$V = \frac{\varepsilon R_{eq}}{R_{eq} + r} \Rightarrow 20 = \frac{\frac{5}{2}\varepsilon}{\frac{5}{2} + 2} \Rightarrow 50 + 40 = \frac{5}{2}\varepsilon \Rightarrow 90 = \frac{5}{2}\varepsilon \Rightarrow \varepsilon = 36V$$

اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر باتری

اگر نیروی محرکه باتری برابر با ε ، مقاومت داخلی باتری برابر با r و جریان خروجی از باتری برابر با I باشد، در این صورت اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر باتری از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$V_{\text{باتری}} = \varepsilon - rI$$

در یک مدار تک حلقه به شکل مقابل داریم:



مقاومت معادل مدار

$$I = \frac{\varepsilon}{r + R}$$

۱- جریان خروجی از باتری برابر است با:

$$\text{افت پتانسیل در باتری} = rI = r \times \frac{\varepsilon}{r + R} = \frac{\varepsilon r}{r + R}$$

۲- افت پتانسیل در باتری برابر است با:

۳- اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر باتری برابر است با:

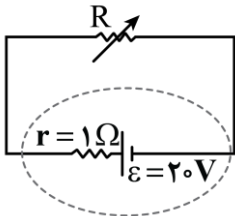
$$V_{\text{باتری}} = \varepsilon - rI = \varepsilon - r \times \frac{\varepsilon}{r + R} = \frac{\varepsilon R}{r + R}$$



اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر باتری با اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر مقاومت معادل R برابر است و هر دو برابر $\frac{\varepsilon R}{r+R}$ می‌باشد.



۴۹- در مدار شکل زیر، مقاومت رئوستا را از R_1 به R_2 افزایش می‌دهیم. توان خروجی باتری پیوسته کاهش یافته و به اندازه $64W$ تغییر می‌کند. حداقل مقدار $R_2 - R_1$ چند اهم است؟



- (۱) ۹
(۲) ۸
(۳) ۷
(۴) ۱۲

(سخت - محاسباتی - زمان‌بر - صفحه ۶۹ - ۱۱۰۲)

پاسخ: گزینه ۲

کلم اول

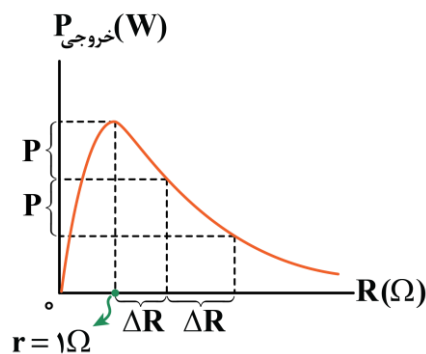
می‌دانیم توان خروجی باتری بر حسب مقاومت معادل مدار، از رابطه $P_{out} = \frac{\varepsilon^2 R_{eq}}{(R_{eq} + r)^2}$ به دست می‌آید، بنابراین داریم:

$$P_{out_2} - P_{out_1} = -64W \xrightarrow{\varepsilon=20V, r=1\Omega, R_{eq1}=R_1, R_{eq2}=R_2} \frac{400 \cdot R_2}{(R_2 + 1)^2} - \frac{400 \cdot R_1}{(R_1 + 1)^2} = -64$$

$$\Rightarrow \frac{R_2}{(R_2 + 1)^2} - \frac{R_1}{(R_1 + 1)^2} = -\frac{16}{100} \quad (1)$$

کلم آخر

با توجه به نمودار شکل زیر، برای این که به ازای یک تغییر توان ثابت، مقدار $R_2 - R_1$ حداقل شود، باید $R_1 = 1\Omega$ باشد. چرا که از $R = 1\Omega$ به بعد، با افزایش R ، آهنگ کاهش توان، کاهش می‌یابد و باید تغییر R خیلی زیاد باشد تا بتواند تغییر توان موردنظر را به وجود آورد، بنابراین برای داشتن حداقل تغییر مقاومت R ، باید R_1 از قله نمودار در نظر گرفته شود:



$$R_1 = 1\Omega \xrightarrow{(1)} \frac{R_2}{(R_2 + 1)^2} - \frac{1}{(1 + 1)^2} = -\frac{16}{100}$$

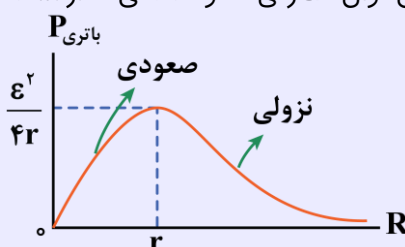
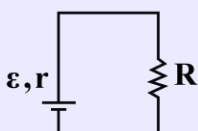
$$\Rightarrow \frac{R_2}{(R_2 + 1)^2} = \frac{9}{100} \xrightarrow{\frac{9}{100} = \frac{9}{(9+1)^2}} R_2 = 9\Omega$$

بنابراین:

$$(R_2 - R_1)_{min} = 9 - 1 = 8\Omega$$

نمودار توان خروجی از باتری بر حسب مقاومت خارجی مدار

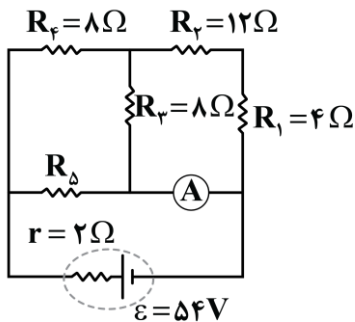
۱- در مدار تک حلقه زیر، نمودار توان خروجی باتری که برابر با مجموع توان مصرفی مقاومت‌های مدار است، بر حسب مقاومت R (مقاومت معادل) به صورت زیر است:



- ۲- مطابق نمودار فوق، هنگامی که مقاومت معادل مدار، بزرگ‌تر از مقاومت داخلی باتری است ($R > r$)، نمودار توان خروجی، نزولی است. این نکته به این معنی است که در این حالت با افزایش مقاومت معادل مدار، توان خروجی از باتری، کاهش می‌یابد.
- ۳- مطابق نمودار فوق، هنگامی که مقاومت معادل مدار، کوچک‌تر از مقاومت داخلی باتری است ($R < r$)، نمودار توان خروجی، صعودی است. این نکته به این معنی است که در این حالت با افزایش مقاومت معادل مدار، توان خروجی از باتری افزایش می‌یابد.
- ۴- همان‌طور که در نمودار توان خروجی می‌بینید، توان خروجی از باتری هنگامی بیشینه است که $R = r$ باشد. در این حالت توان خروجی از باتری برابر $\frac{\varepsilon^2}{4r}$ می‌باشد.



۵- در مدار شکل زیر، توان مصرفی مقاومت R_4 ، $\frac{9}{2}$ برابر توان مصرفی مقاومت R_5 است. جریان عبوری از آمپرسنج آرمانی، چند



آمپر است؟

- (۱) ۸
(۲) ۶
(۳) ۴
(۴) ۲

(سخت - محاسباتی - زمان‌بر ۱۰ - صفحه ۷۴ - ۱۱۰۴)

پاسخ: گزینه ۲

گام اول

اگر جریان عبوری از مقاومت‌های R_4 و R_5 را به ترتیب با x و y نشان دهیم، داریم:

$$P_{R_4} = \frac{9}{2} P_{R_5} \xrightarrow{P=RI^2} R_4 \times x^2 = \frac{9}{2} \times R_5 \times y^2 \Rightarrow 8 \times x^2 = \frac{9}{2} \times 8 \times y^2 \Rightarrow R_5 = \frac{160}{9} \times \frac{x^2}{y^2} \quad (1)$$

گام دوم

مجموع جریان عبوری از مقاومت‌های R_1, R_2 و R_3 از مقاومت R_4 عبور می‌کند، بنابراین، به کمک تکنیک تقسیم جریان در مقاومت‌های موازی داریم:

$$I_{R_{1,2}} = \frac{R_3}{R_{1,2} + R_3} \times I_{R_4} \xrightarrow{R_{1,2} = R_1 + R_2 = 16\Omega} I_{R_{1,2}} = \frac{8}{16 + 8} \times x = \frac{1}{3}x, \quad I_{R_3} = \frac{2}{3}x$$

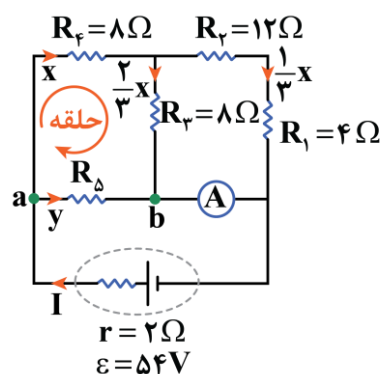
$$\xrightarrow{\text{حلقه}} -R_4 I_{R_4} - R_3 I_{R_3} + R_5 I_{R_5} = 0 \Rightarrow R_5 \times y = \frac{40}{3}x \quad (1)$$

$$\frac{160}{9} \times \frac{x^2}{y^2} \times y = \frac{40}{3}x \Rightarrow y = \frac{3 \times 160}{9 \times 40}x = \frac{4}{3}x$$

گام سوم

به کمک قانون جریان در نقطه a داریم:

$$I = x + y = x + \frac{4}{3}x = \frac{7}{3}x$$



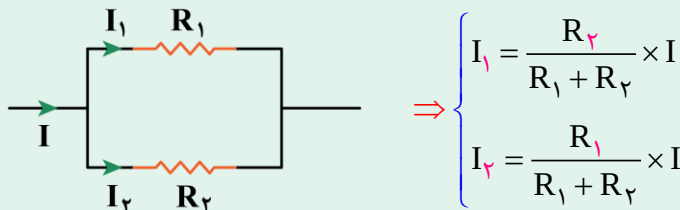
مقاومت R_5 و باتری، موازی با یکدیگر قرار دارند، بنابراین اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر آن‌ها برابر است، در نتیجه داریم:

$$V_{\text{مولد}} = V_{R_5} \Rightarrow \varepsilon - rI = R_5 \times y \Rightarrow 54 - \frac{14}{3}x = \frac{40}{3}x \Rightarrow 54 = \frac{54}{3}x \Rightarrow x = 3A$$

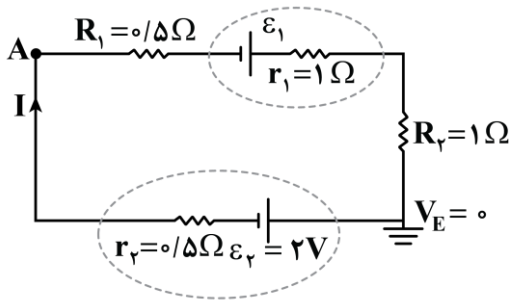
بنابراین:

$$y = \frac{4}{3}x = 4A \xrightarrow{\text{قانون جریان در نقطه b}} I_A = y + \frac{2}{3}x = 4 + 2 = 6A$$

تکنیک تقسیم جریان در دو مقاومت موازی



۵۱- در مدار شکل زیر، پتانسیل الکتریکی نقطه A برابر با $3/5V$ - است. اندازه توان ورودی به باتری (۲)، چند وات است؟



۱/۵ (۱)

۴/۵ (۲)

۷/۵ (۳)

۱۰/۵ (۴)

(آسان - محاسباتی - استاندارد) - صفحه ۶۹ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۴

کام اول

ابتدا با توجه به پتانسیل الکتریکی نقطه A، جریان الکتریکی عبوری از مدار را محاسبه می‌کنیم. اگر در جهت جریان الکتریکی، از نقطه E به نقطه A رفته و تغییرات پتانسیل الکتریکی را بنویسیم، داریم:

$$V_E - Ir_2 - \varepsilon_2 = V_A \xrightarrow{V_E=0, V_A=3/5V, r_2=0.5\Omega, \varepsilon_2=2V} 0 - 0.5I - 2 = -3/5 \Rightarrow 0.5I = 1/5 \Rightarrow I = 2A$$

کام آخر

اندازه توان ورودی به باتری (۲)، برابر است با:

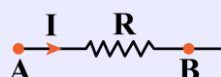
$$P_{\text{ورودی}} = |P_2| = |I\Delta V| = |I(V_A - V_E)| \xrightarrow{V_A=3/5V, I=2A, V_E=0} |P_2| = |2 \times (-3/5 - 0)| = 10/5W$$

اختلاف پتانسیل الکتریکی بین دو نقطه از یک مدار

در مدارهای الکتریکی با حرکت از یک نقطه مدار و محاسبه اختلاف پتانسیل الکتریکی اجزای مختلف، می‌توانیم به نقاط دیگر مدار برسیم و اختلاف پتانسیل الکتریکی نقاط مختلف مدار را به دست آوریم. برای این کار از تکنیک پتانسیل نویسی استفاده می‌کنیم که به شرح زیر است:

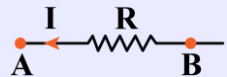
۱- هنگامی که به یک مقاومت الکتریکی (مقاومت داخلی باتری یا سایر مقاومت‌های مدار) رسیدیم به صورت زیر عمل می‌کنیم:

الف) اگر در حال حرکت در جهت جریان بودیم، پتانسیل الکتریکی به اندازه RI کاهش می‌یابد و تغییرات ولتاژ برابر $(-RI)$ است.

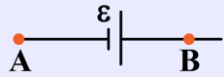


$$V_A - RI = V_B$$

ب) اگر در حال حرکت در خلاف جهت جریان بودیم، پتانسیل الکتریکی به اندازه RI افزایش می‌یابد و تغییرات ولتاژ برابر $(+RI)$ است.

$$V_A + RI = V_B$$


۲- هنگامی که به باتری آرمانی رسیدیم، اگر از سر مثبت باتری خارج شدیم، پتانسیل الکتریکی به اندازه ε زیاد می‌شود و تغییرات ولتاژ برابر $(+\varepsilon)$ است. همچنین اگر از سر منفی خارج شدیم، پتانسیل الکتریکی به اندازه ε کم می‌شود و تغییرات ولتاژ برابر $(-\varepsilon)$ است.

$$V_A + \varepsilon = V_B$$


تذکر

پتانسیل الکتریکی زمین که معمولاً با نماد $\perp$ در مدار مشخص می‌شود، طبق قرارداد، برابر صفر است.



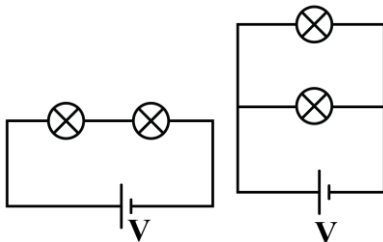
۵۲- دو لامپ مشابه با مقاومت الکتریکی یکسان R را یک‌بار به‌طور متوالی و بار دیگر به‌طور موازی به یکدیگر می‌بندیم و آن‌ها را به ولتاژ V وصل می‌کنیم. (مدارهای (۱) و (۲)). چه تعداد از عبارات‌های زیر در مورد این مدارها، درست است؟

الف- در مدار (۱) اگر یکی از لامپ‌ها بسوزد، لامپ دیگر خاموش می‌شود.

ب- اساس کار سیم‌کشی منازل، مطابق مدار (۲) است.

ج- در مدار (۲) لامپ‌ها پر نورتر از مدار (۱) هستند.

د- نسبت مجموع توان مصرف‌شده در مدار (۱) به مجموع توان مصرف‌شده در مدار (۲) برابر ۴ است.



(۱)

(۲)

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

(آسان - استدلالی - استاندارد) (صفحه ۷۴ - ۱۱۰۲)

پاسخ: گزینه ۳

بررسی موارد:



درست است، وقتی لامپی می‌سوزد، به معنی آن است که اتصال در آن قسمت از مدار قطع می‌شود. اگر لامپ‌ها به‌طور متوالی بسته شده باشند، قطع مدار در هر قسمت از مدار موجب قطع جریان در کل مدار و خاموش شدن لامپ‌های دیگر می‌شود.



درست است، در سیم‌کشی منازل، همه مصرف‌کننده‌ها به‌طور موازی به هم متصل می‌شوند.



درست است، در مدار (۲) که لامپ‌ها موازی‌اند، اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر هر یک از لامپ‌ها برابر با اختلاف پتانسیل الکتریکی دو

سر باتری، یعنی برابر V است و اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر هر یک از لامپ‌ها در مدار (۱) برابر با $\frac{V}{2}$ ، بنابراین طبق رابطه $P = \frac{V^2}{R}$

روشنایی هر یک از لامپ‌ها در مدار (۲) بیشتر از مدار (۱) است.



نادرست است، توان مصرف‌شده در هر مدار را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{مدار (۱):} \begin{cases} R_{eq1} = R + R = 2R \\ P_1 = \frac{V^2}{R_{eq1}} = \frac{V^2}{2R} \end{cases}$$

$$\text{مدار (۲):} \begin{cases} R_{eq_2} = \frac{R \times R}{R + R} = \frac{R}{2} \\ P_2 = \frac{V^2}{R_{eq_2}} = \frac{V^2}{\frac{R}{2}} = \frac{2V^2}{R} \end{cases}$$

بنابراین:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\frac{V^2}{2R}}{\frac{2V^2}{R}} = \frac{1}{4}$$



۱- در اتصال موازی مقاومت‌ها به یکدیگر، با توجه به برابر بودن اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر مقاومت‌ها و با توجه به رابطه $P = \frac{V^2}{R}$ ، توان مصرفی در هر مقاومت با مقدار هر مقاومت، رابطه عکس دارد.

$$P = \frac{V^2}{R} \xrightarrow{V: \text{ثابت}} \frac{P_2}{P_1} = \frac{R_1}{R_2}$$

یعنی در اتصال موازی مقاومت‌ها، هر چه مقاومت، بزرگ‌تر باشد، توان مصرفی آن کمتر است.

۲- در اتصال متوالی مقاومت‌ها به یکدیگر، با توجه به برابر بودن جریان عبوری از مقاومت‌ها و با توجه به رابطه $P = RI^2$ ، توان مصرفی هر مقاومت با مقدار هر مقاومت، رابطه مستقیم دارد.

$$P = RI^2 \xrightarrow{I: \text{ثابت}} \frac{P_2}{P_1} = \frac{R_2}{R_1}$$

یعنی در اتصال متوالی مقاومت‌ها، هر چه مقاومت، بزرگ‌تر باشد، توان مصرفی آن بیشتر است.



۵۳- در میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ به بزرگی $1/67G$ ، یک ذره α (هسته اتم هلیوم) با تندی ثابت v عمود بر خطوط میدان مغناطیسی حرکت می‌کند و بزرگی شتاب حاصل از نیروی مغناطیسی وارد بر آن برابر با $\frac{m}{s^2} \times 10^5 \times 4$ است. v چند متر بر ثانیه است؟
($e = 1/6 \times 10^{-19}C$, $m_\alpha = 6/68 \times 10^{-27}kg$)

(۴) ۰/۱

(۳) ۱۰۰

(۲) ۵۰

(۱) ۰/۰۵

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - صفحه ۸۹ - ۱۱۰۳

پاسخ: گزینه ۲

گام اول

با استفاده از قانون دوم نیوتون، اندازه نیروی مغناطیسی وارد بر ذره را به دست می‌آوریم:

$$F_{net} = ma \Rightarrow F_B = ma \Rightarrow F_B = 6/68 \times 10^{-27} \times 4 \times 10^5 = 6/68 \times 4 \times 10^{-22} N$$

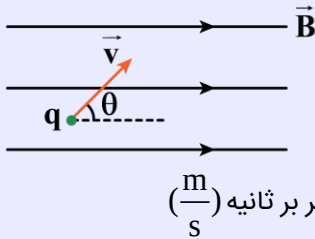
گام آخر

با توجه به رابطه اندازه نیروی مغناطیسی وارد بر ذره باردار متحرک در میدان مغناطیسی داریم:

$$F_B = |q|vB \sin \theta \Rightarrow 6/68 \times 4 \times 10^{-22} = 2 \times 1/6 \times 10^{-19} \times v \times 1/67 \times 10^{-4} \times 1 \Rightarrow v = \frac{4 \times 6/68 \times 10^{-22}}{2 \times 1/6 \times 1/67 \times 10^{-23}}$$

$$\Rightarrow v = 5 \cdot \frac{m}{s}$$

اگر حواستان به بار ذره هلیم (۲e) نباشد، در دام گزینه (۳) می‌افتید!



بزرگی نیروی مغناطیسی وارد بر ذره باردار متحرک از طرف میدان مغناطیسی

$$F = |q|vB\sin\theta$$

B: اندازه میدان مغناطیسی برحسب تسلا (T)

F: اندازه نیرو برحسب نیوتون (N)

v : تندی برحسب متر بر ثانیه ($\frac{m}{s}$)

$|q|$: اندازه بار الکتریکی برحسب کولن (C) θ : زاویه بین بردار $\vec{v}$ و بردار $\vec{B}$



۱- یکای میدان مغناطیسی در SI، **تسلا (T)** است که با توجه به رابطه $F = |q|vB\sin\theta$ ، یک تسلا برابر است با:

$$1T = 1 \frac{N.s}{C.m}$$

۲- **تسلا** یکای بسیار بزرگی است. برای اندازه‌گیری میدان مغناطیسی، می‌توان از یکای دیگری به نام **گاوس (G)** استفاده کرد. هر گاوس (G) برابر با $10^{-4}T$ است.

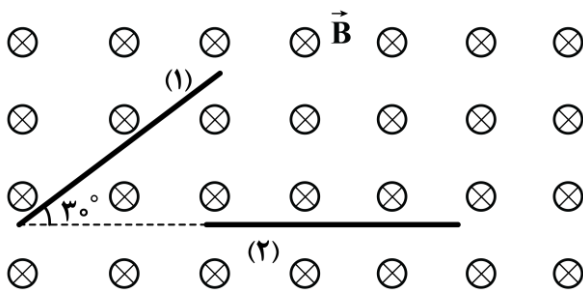
۳- در صورتی که بردار $\vec{v}$ **عمود** بر بردار $\vec{B}$ باشد، بزرگی نیروی مغناطیسی، **بیشینه** ($F_{max} = |q|vB$) و در صورتی که بردار $\vec{v}$ و $\vec{B}$ **هم‌راستا** باشند، بزرگی نیروی مغناطیسی، **صفر** است.

۴- نیروی $\vec{F}$ بر صفحه‌ای که توسط بردارهای سرعت و میدان مغناطیسی ساخته می‌شود، **عمود** است، بنابراین نیروی $\vec{F}$ بر مسیر حرکت ذره عمود است، در نتیجه **کار نیروی مغناطیسی بر روی ذره باردار متحرک، صفر است**، بنابراین **این نیرو تندی ذره را تغییر نمی‌دهد** و فقط **جهت سرعت را تغییر می‌دهد**.

۵- اگر مسیر حرکت ذره قسمتی از یک دایره باشد، نیروی مغناطیسی وارد بر ذره به سمت مرکز دایره است و بردار سرعت بر مسیر حرکت، مماس است.



۵۴- سیم‌های رسانای حامل جریان (۱) و (۲) به طول $2m$ مطابق شکل زیر در میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ به بزرگی $5T$ قرار گرفته‌اند. اگر اندازه نیروی مغناطیسی وارد بر هر دو سیم، برابر باشند، جریان سیم (۱) چند برابر جریان سیم (۲) است؟



(۱) ۱

(۲) $\frac{1}{2}$

(۳) ۲

(۴) $\frac{1}{4}$

(آسان - استدلالی - سریع) - صفحه ۹۳ - ۱۱۰۳

پاسخ: گزینه ۱

هر دو سیم، بر خطوط میدان مغناطیسی $\vec{B}$ عمود هستند. با توجه به رابطه اندازه نیروی مغناطیسی وارد بر سیم حامل جریان از طرف میدان مغناطیسی ($F = I\ell B\sin\theta$)، چون همه کمیت‌های F ، B و θ برای هر دو سیم، یکسان هستند، بنابراین جریان الکتریکی دو سیم نیز

$$\frac{I_1}{I_2} = 1$$

برابر است، بنابراین:

اندازه نیروی مغناطیسی وارد بر سیم حامل جریان

$$F = I\ell B \sin \theta$$

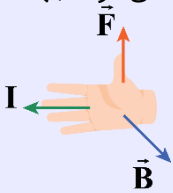
F : اندازه نیروی مغناطیسی بر حسب نیوتون (N)
 I : جریان الکتریکی بر حسب آمپر (A)
 B : بزرگی میدان مغناطیسی بر حسب تسلا (T)
 ℓ : طول بخشی از سیم (بر حسب m) که در میدان مغناطیسی B قرار دارد.
 θ : زاویه بین جهت جریان و جهت میدان مغناطیسی

نکات

- ۱- شکل سیم هرگونه باشد، نیروی مغناطیسی وارد بر آن، عمود بر راستای میدان است.
- ۲- اگر راستای سیم و خطوط میدان مغناطیسی، یکسان باشد، نیروی وارد بر آن صفر و اگر سیم عمود بر خطوط میدان مغناطیسی باشد، نیروی وارد بر آن بیشینه ($F_{\max} = I\ell B$) است.

جهت نیروی مغناطیسی وارد بر سیم حامل جریان

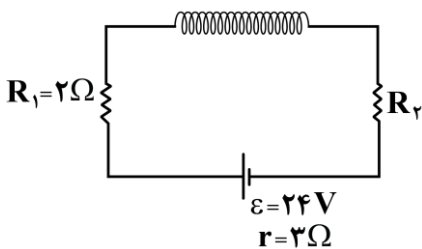
اگر از سیمی به طول ℓ که درون میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ قرار دارد، جریان I عبور کند، به آن نیروی مغناطیسی $\vec{F}$ وارد می‌شود. جهت این نیرو مطابق قاعده دست راست تعیین می‌شود.



اگر دست راست را طوری نگه داریم که انگشتان باز شده ما در جهت I باشد، به گونه‌ای که وقتی چهار انگشت را در جهت چرخش طبیعی خم کنیم، در جهت $\vec{B}$ قرار گیرد، انگشت شست ما در جهت نیروی وارد بر سیم حامل جریان خواهد بود.



۵۵- در مدار شکل زیر، طول سیملوله آرمانی 40cm است. در حالتی که توان خروجی باتری، بیشینه باشد، بزرگی میدان مغناطیسی درون سیملوله و روی محور آن برابر با 48G است. تعداد حلقه‌های سیملوله چقدر است؟ (مقاومت الکتریکی حلقه‌های سیملوله ناچیز است و $\mu_0 = 12 \times 10^{-7} \frac{\text{T.m}}{\text{A}}$)



ناچیز است و $\mu_0 = 12 \times 10^{-7} \frac{\text{T.m}}{\text{A}}$

(۱) ۲۰

(۲) ۲۰۰

(۳) ۴۰۰

(۴) ۴۰

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - صفحه ۱۰۰ - ۱۱۰۳

پاسخ: گزینه ۳

گام اول

می‌دانیم زمانی توان خروجی باتری، بیشینه می‌شود که مقاومت معادل مدار با مقاومت داخلی باتری برابر شود، بنابراین:

$$R_{\text{eq}} = r \Rightarrow R_{\text{eq}} = 3\Omega$$

گام دوم

جریان عبوری از سیملوله که همان جریان اصلی مدار است، برابر است با:

$$I = \frac{\varepsilon}{R_{\text{eq}} + r} \Rightarrow I = \frac{24}{3 + 3} = \frac{24}{6} = 4\text{A}$$

گام آخر

با توجه به رابطه بزرگی میدان مغناطیسی حاصل از سیملوله حامل جریان داریم:

$$B = \frac{\mu_0 NI}{\ell} \Rightarrow 48 \times 10^{-4} = \frac{12 \times 10^{-7} \times N \times 4}{40 \times 10^{-2}} \Rightarrow N = 400$$

میدان مغناطیسی حاصل از سیمولوله حامل جریان

سیمولوله سیم بلندی است که به صورت مارپیچی پیچیده شده و با عبور جریان از آن، میدان مغناطیسی، درون و اطراف آن تولید می‌شود. بزرگی میدان مغناطیسی درون سیمولوله آرمانی و روی محور آن از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$B = \frac{\mu_0 NI}{\ell}$$

ℓ : طول سیمولوله برحسب متر (m)

N: تعداد حلقه

I: جریان الکتریکی سیمولوله برحسب آمپر (A)

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{T.m}{A}$$

تراوایی مغناطیسی خلأ



اگر قطر سیمولوله در مقایسه با طول آن بسیار کوچک و حلقه‌های آن خیلی به هم نزدیک باشند، سیمولوله را سیمولوله آرمانی گویند.



۱- اگر سیمی به طول L را به صورت سیمولوله آرمانی به شعاع R دریاوریم، تقریباً تعداد حلقه‌های آن برابر با $N = \frac{L}{2\pi R}$ است.

۲- اگر قطر سیم به کاررفته در سیمولوله آرمانی D بوده و سیم‌ها بدون فاصله کنار هم پیچیده شده باشند، بزرگی میدان مغناطیسی درون سیمولوله برابر با $B = \frac{\mu_0 I}{D}$ است.



۵۶- پیچهای رسانا با ۱۰۰ حلقه و سطح مقطع 5 cm^2 عمود بر خطوط میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ به بزرگی 200 G قرار دارد. اگر در مدت زمان 25 ms ، پیچه 270° درجه حول محور خود بچرخد، بزرگی نیروی محرکه القایی متوسط در پیچه در این مدت چند ولت است؟

۰/۰۴ (۴)

۰/۴ (۳)

۲/۲۵ (۲)

۰/۸ (۱)

(متوسط - محاسباتی - استاندارد ۵ - صفحه ۱۱۳ - ۱۱۰۴)

پاسخ: گزینه ۳

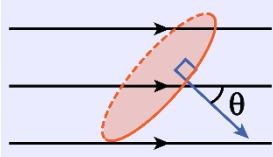
با توجه به قانون القای فاراده داریم:

$$|\varepsilon_{av}| = \left| -N \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \right| \Rightarrow |\varepsilon_{av}| = \left| -NAB \frac{(\cos \theta_2 - \cos \theta_1)}{\Delta t} \right|$$

$$\Rightarrow |\varepsilon_{av}| = \left| -100 \times 50 \times 10^{-4} \times 200 \times 10^{-4} \times \frac{(\cos 90^\circ - \cos 0^\circ)}{25 \times 10^{-3}} \right| \Rightarrow |\varepsilon_{av}| = 0.4 \text{ V}$$

شار مغناطیسی

شار مغناطیسی، کمیتی **نردهای** است و برای میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ که از پیچهای عبور می‌کند، برابر است با:



$$\Phi = AB \cos \theta$$

A: مساحت برحسب متر مربع (m^2)

θ : زاویه خطوط میدان با نیمخط عمود بر سطح حلقه

Φ : شار مغناطیسی برحسب وبر (Wb)

B: اندازه میدان مغناطیسی برحسب تسلا (T)



۱- یکای وبر (Wb) معادل $T.m^2$ است.

۲- زاویه خطوط میدان مغناطیسی با سطح حلقه (α) متمم زاویه خطوط میدان مغناطیسی با نیمخط عمود بر سطح حلقه (θ) است.

$$(\theta = 90^\circ - \alpha)$$

- ۳- بیشینه شار مغناطیسی عبوری از یک پیچه هنگامی رخ می‌دهد که خطوط میدان مغناطیسی بر سطح پیچه عمود باشند ($\Phi_{\max} = AB$) و هنگامی که سطح پیچه موازی خطوط میدان مغناطیسی است، شار مغناطیسی عبوری از پیچه صفر است.
- ۴- شار مغناطیسی عبوری از یک پیچه به تعداد حلقه‌های پیچه بستگی ندارد.

قانون فاراده

هرگاه شار مغناطیسی عبوری از یک حلقه رسانا تغییر کند، نیروی محرکه‌ای در حلقه القا می‌شود که بزرگی آن با آهنگ تغییر شار مغناطیسی عبوری از حلقه متناسب است.

تغییر شار مغناطیسی در یک حلقه ← ایجاد نیروی محرکه القایی ← ایجاد جریان القایی

نیروی محرکه القایی متوسط بنابر قانون فاراده برای پیچه یا سیملوله‌ای که از N حلقه مشابه تشکیل شده باشد از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\varepsilon_{av} = -N \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$$

N : تعداد حلقه

ε_{av} : نیروی محرکه القایی متوسط برحسب ولت (V)

Δt : مدت زمان تغییر شار مغناطیسی عبوری از حلقه برحسب ثانیه (s)

$\Delta \Phi$: تغییر شار مغناطیسی برحسب وبر (Wb)



در این رابطه نیروی محرکه القایی متوسط برحسب ولت است که یک ولت، معادل وبر بر ثانیه است.



علامت منفی در این رابطه، مخالفت نیروی محرکه القایی متوسط با تغییر شار مغناطیسی عبوری از پیچه را نشان می‌دهد.



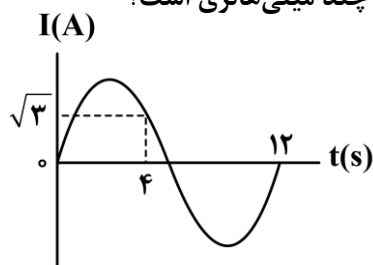
با توجه به روابط مربوط تغییرات شار مغناطیسی عبوری از پیچه‌ای رسانا، می‌توانیم روابط زیر را برای نیروی محرکه القایی متوسط در پیچه بنویسیم:

$$\varepsilon_{av} = -N \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \begin{cases} \text{تغییر } B \Rightarrow \varepsilon_{av} = -NA \cos \theta \frac{\Delta B}{\Delta t} = -NA \cos \theta \frac{(B_2 - B_1)}{\Delta t} \\ \text{تغییر } A \Rightarrow \varepsilon_{av} = -NB \cos \theta \frac{\Delta A}{\Delta t} = -NB \cos \theta \frac{(A_2 - A_1)}{\Delta t} \\ \text{تغییر } \theta \Rightarrow \varepsilon_{av} = -NBA \frac{\Delta \cos \theta}{\Delta t} = -NBA \frac{(\cos \theta_2 - \cos \theta_1)}{\Delta t} \end{cases}$$



۵۷- نمودار جریان متناوب عبوری برحسب زمان از یک سیملوله آرمانی بدون هسته که دارای ۲۰۰ حلقه است، مطابق شکل زیر است.

اگر بیشینه انرژی ذخیره شده در این سیملوله برابر با ۳۲mJ باشد، ضریب القاوری این سیملوله چند میلی‌هانری است؟



(۱) ۱۶

(۲) 16×10^{-3}

(۳) ۳۲

(۴) 32×10^{-3}

(متوسط - محاسباتی - استاندارد ۱ - صفحه ۱۲۴ - ۱۱۰۴)

پاسخ: گزینه ۱

گام اول

با توجه به معادله جریان متناوب داریم:

$$I = I_m \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) \Rightarrow \sqrt{3} = I_m \sin\left(\frac{2\pi}{16} \times 4\right) \Rightarrow \sqrt{3} = I_m \sin\left(\frac{2\pi}{4}\right) \Rightarrow \sqrt{3} = I_m \times \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow I_m = 2A$$

با توجه به رابطه انرژی ذخیره‌شده در القاگر داریم:

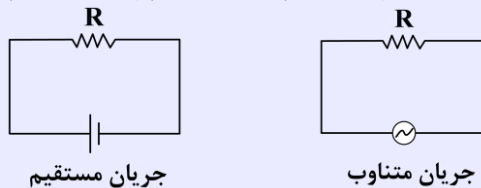
$$U = \frac{1}{2} LI^2 \Rightarrow 32 \times 10^{-3} = \frac{1}{2} \times L \times 2^2 \Rightarrow 32 \times 10^{-3} = 2L \Rightarrow L = 16 \times 10^{-3} \text{ H} = 16 \text{ mH}$$

سوتی‌های پرتکرار

اگر حواستان به یکای خواسته‌شده در انتهای سؤال نباشد، در دام گزینه (۲) می‌افتید!

جریان متناوب

نوعی جریان القایی است که اندازه و جهت آن با گذشت زمان تغییر می‌کند و تکرار می‌شود. جریان متناوب سینوسی، متداول‌ترین نوع جریان متناوب است.



با چرخش پیچه در میدان مغناطیسی، شار مغناطیسی تغییر می‌کند و در نتیجه جریان متناوب ایجاد می‌شود.

نکته

رایج‌ترین روش برای تغییر شار و در نتیجه تولید جریان القایی، تغییر زاویه θ در رابطه شار مغناطیسی است.

دوره تناوب (T):

مدت زمانی که طول می‌کشد که پیچه به‌طور یکنواخت یک دور کامل بچرخد را دوره تناوب گویند و واحد آن در SI برابر با ثانیه (s) است.

نکته

اگر دوره تناوب یک پیچه برابر با T باشد، پیچه در مدت زمان t به تعداد n دور خواهد چرخید.

$$n = \frac{t}{T}$$

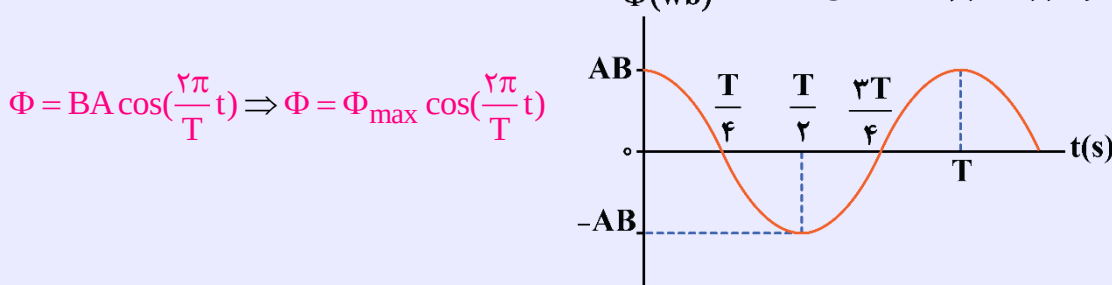
بسامد (f):

به تعداد چرخش پیچه در واحد زمان، بسامد گفته می‌شود و یکای آن در SI برابر با هرتز (Hz) یا یک بر روی ثانیه (s^{-1}) است.

$$\begin{cases} n = \frac{t}{T} \\ f = \frac{n}{t} \end{cases} \Rightarrow f = \frac{1}{T}$$

معادله شار متناوب

اگر پیچه‌ای با سطح مقطع A که عمود بر خطوط میدان مغناطیسی $\vec{B}$ قرار دارد، با دوره تناوب T در میدان مغناطیسی بچرخد، شار مغناطیسی که در لحظه t در پیچه القا می‌شود از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

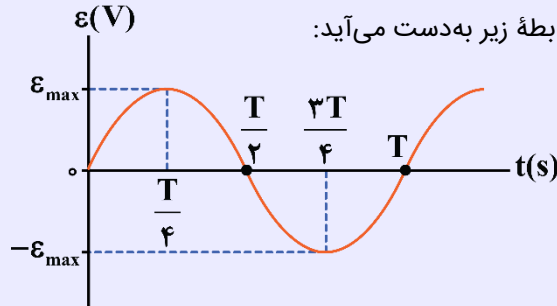


$$\Phi = BA \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right) \Rightarrow \Phi = \Phi_{\max} \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right)$$

معادله نیروی محرکه متناوب

نیروی محرکه‌ای که در لحظه t در پیچه القا می‌شود، از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\varepsilon = \varepsilon_m \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$



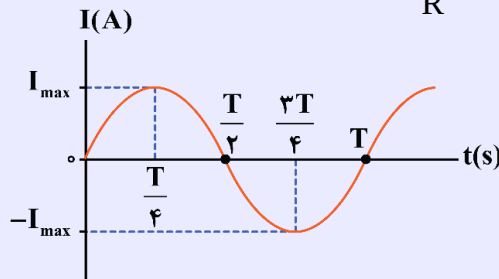
تذکر

در رابطه بالا ε_m ، بیشینه مقدار نیروی محرکه القایی در پیچه است.

معادله جریان متناوب

اگر مقاومت الکتریکی کل مدار پیچه برابر R باشد، با توجه به رابطه $I = \frac{\varepsilon}{R}$ ، جریانی که در پیچه در لحظه t القا می‌شود از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$I = I_m \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$



تذکر

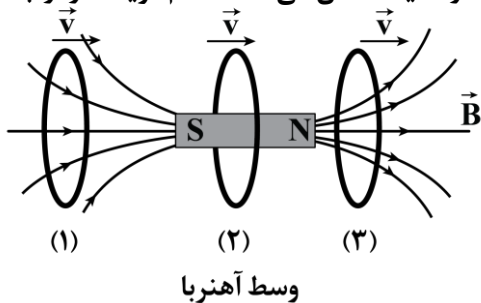
که در این رابطه I_m بیشینه جریان القاشده در پیچه و برابر با $\frac{\varepsilon_m}{R}$ است.

نکته

در هر بار چرخش پیچه، شار مغناطیسی، جریان و نیروی محرکه القایی، دو مرتبه بیشینه و دو مرتبه صفر می‌شوند.



۵۸- حلقه رسانایی به سمت یک آهنربای میله‌ای حرکت می‌کند. شکل زیر، حلقه را در سه وضعیت نشان می‌دهد. کدام گزینه در ارتباط با این حلقه درست است؟



وسط آهنربا

- (۱) جریان‌های القایی در حلقه در موقعیت‌های (۱) و (۲) در خلاف جهت هم هستند.
- (۲) جریان‌های القایی در حلقه در موقعیت‌های (۱) و (۳) در خلاف جهت هم هستند.
- (۳) جریان‌های القایی در حلقه در موقعیت‌های (۱) و (۳) هم جهت هستند.
- (۴) جریان‌های القایی در حلقه در موقعیت‌های (۲) و (۳) هم جهت هستند.

پاسخ: گزینه ۲

(آسان - مفهومی - سریع - صفحه ۱۱۷ - ۱۱۰۴)

در موقعیت (۲) تغییرات شار مغناطیسی عبوری از حلقه صفر است، بنابراین جریانی در حلقه القا نمی‌شود.

در موقعیت (۱) شار مغناطیسی عبوری از حلقه در حال افزایش و در موقعیت (۳) شار مغناطیسی عبوری از حلقه در حال کاهش است، بنابراین طبق قانون لنز، جهت جریان در جلوی حلقه در موقعیت (۱) به سمت بالا و در جلوی حلقه در موقعیت (۳) به سمت پایین است، بنابراین جریان‌های القایی در حلقه در موقعیت‌های (۱) و (۳) در خلاف جهت هم هستند.

قانون لنز

جهت جریان القایی در یک مدار یا پیچه به گونه‌ای است که آثار ناشی از آن (میدان مغناطیسی القایی) با عامل به وجود آورنده جریان القایی (تغییر شار مغناطیسی) مخالفت می‌کند. طبق الگوی زیر داریم:

$$\Delta\Phi: \begin{cases} \Delta\Phi > 0 \Rightarrow B \text{ القایی خلاف جهت خارجی} \\ \Delta\Phi < 0 \Rightarrow B \text{ القایی هم جهت با خارجی} \end{cases} \Rightarrow \text{استفاده از قاعده دست راست برای تعیین جهت جریان القایی}$$



۵۹- چه تعداد از عبارتهای زیر درست است؟

- الف- در مولدهای صنعتی جریان متناوب، جریان ورودی به مولد، یک جریان مستقیم است.
 ب- در مولدهای صنعتی، پیچه‌ها ساکن هستند و آهنربای الکتریکی در آنها می‌چرخد.
 ج- رایج‌ترین روش برای تغییر شار مغناطیسی عبوری از حلقه رسانا و تولید جریان القایی، تغییر زاویه بین خطوط میدان مغناطیسی و نیم‌خط عمود بر سطح حلقه رسانا است.
 د- در توزیع توان الکتریکی dc، افزایش و کاهش ولتاژ در مقایسه با ac، بسیار آسان‌تر است.
- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

(آسان - خطبه‌خط - سریع - صفحه ۱۲۶ - ۱۱۰۴)

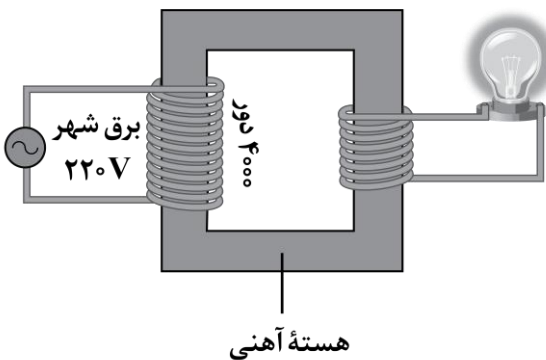
پاسخ: گزینه ۴

تنها عبارت «د» نادرست است.

در توزیع توان الکتریکی ac در مقایسه با dc، افزایش و کاهش ولتاژ بسیار آسان‌تر است.



۶۰- شکل زیر، یک مبدل با ولتاژ ورودی ۲۲۰V را نشان می‌دهد که حداکثر از ۴۰۰۰ حلقه تشکیل شده است. اگر مقاومت الکتریکی لامپ برابر با ۴Ω و حداکثر توانی که می‌تواند تحمل کند و نسوزد، برابر با ۱۰۰W باشد، حداکثر تعداد حلقه‌های ثانویه چه تعداد است؟



- (۱) ۳۶۱
 (۲) ۳۶۲
 (۳) ۳۶۳
 (۴) ۳۶۴

(متوسط - محاسباتی - استاندارد - صفحه ۱۲۷ - ۱۱۰۴)

پاسخ: گزینه ۳

گام اول

با توجه به بیشینه توان قابل تحمل لامپ، می‌توانیم بیشینه ولتاژ دو سر لامپ را به دست آوریم:

$$P_{\max} = \frac{V_{\max}^2}{R} \Rightarrow 100 = \frac{V_{\max}^2}{4} \Rightarrow V_{\max} = 20V$$

گام آخر

با توجه به رابطه مبدل‌ها داریم:

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{V_2}{V_1} \Rightarrow \frac{N_2}{4000} = \frac{20}{220} \Rightarrow N_2 = \frac{4000 \times 20}{220} = 363.63$$

حداکثر تعداد حلقه‌های ثانویه باید برابر با ۳۶۳ باشد.





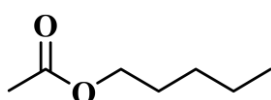
برای دیدن پاسخنامه ویدئویی آزمون
QRcode بالا را اسکن کنید
یا بر روی لینک زیر کلیک کنید
پاسخنامه ویدئویی آزمون

کل کتاب شیمی ۲

بودجه بندی
این آزمون

مباحث این آزمون در مجموع ۱۲ تست از ۳۰ تست کنکور را پوشش داده است.

سهم در
کنکور



۶۱- کدام مورد درباره ترکیبی با ساختار مقابل نادرست است؟

- (۱) بو و طعم میوه موز به دلیل وجود ترکیب مقابل در آن است.
- (۲) درصد جرمی اکسیژن در این ماده از عامل بو و طعم میوه آناناس بیشتر است.
- (۳) انحلال پذیری الکل سازنده آن در آب بیشتر از ۱ گرم در ۱۰۰ گرم آب است.
- (۴) شمار اتمهای کربن اسید سازنده آن با شمار اتمهای کربن در ساده ترین آمید برابر نیست.

(آسان - مفهومی - استاندارد) - صفحه ۱۱۷ - ۱۱۳

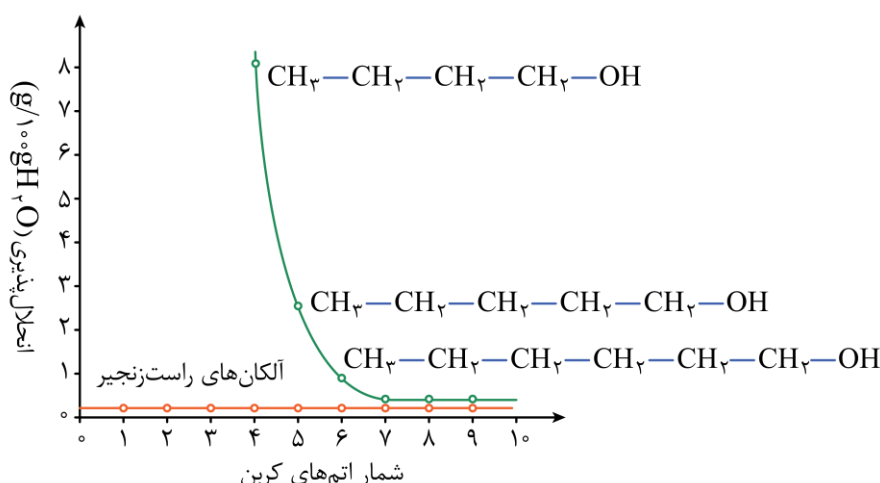
پاسخ: گزینه ۲

عامل بو و مزه میوه آناناس، استری به نام اتیل بوتانوات با فرمول شیمیایی $C_6H_{12}O_2$ است. در این ماده همانند استر مطرح شده در سؤال $(C_7H_{14}O_2)$ ، دو اتم اکسیژن وجود دارد؛ پس در یک مول از این دو ماده جرم برابری اکسیژن وجود دارد؛ اما در بین این دو ماده، جرم مولی $C_7H_{14}O_2$ بیشتر بوده و به همین علت، درصد جرمی اکسیژن در این ماده کمتر است.

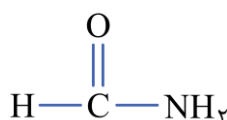
بررسی سایر گزینه ها:

۱) استر نشان داده شده پنتیل اتانوات بوده که عامل بو و طعم میوه موز است.

۳) پنتانول، الکل سازنده این استر است و از آنجا که الکل های دارای یک تا پنج اتم کربن در آب محلول هستند، پنتانول نیز در آب محلول بوده و انحلال پذیری آن باید بیشتر از یک گرم در صد گرم آب باشد. نمودار زیر انحلال پذیری الکل های راست زنجیر را نشان می دهد:



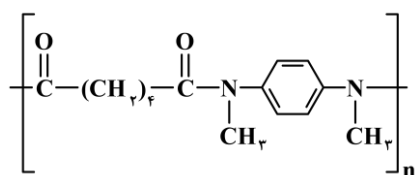
۴) کربوکسیلیک اسید سازنده این استر، استیک اسید (CH_3COOH) است و فرمول ساختاری ساده ترین آمید به صورت زیر است:



همان طور که مشخص است ساده ترین آمید دارای یک اتم کربن بوده و استیک اسید دارای دو اتم کربن است.



۶۲- تفاوت شمار اتم‌های هیدروژن در مونومرهای سازنده پلی آمید با ساختار زیر چقدر است و اگر جرم ۱ مول از این نمونه پلیمر ۸۶/۱ کیلوگرم باشد، تعداد واحد تکرارشونده در این پلیمر کدام است؟ ($H = 1, C = 12, N = 14, O = 16: g.mol^{-1}$)



(۱) ۳۵۰ - ۲

(۲) ۳۵۰ - ۴

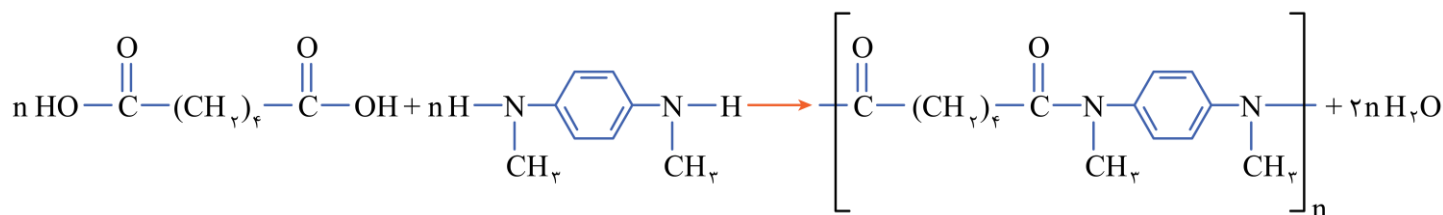
(۳) ۷۰۰ - ۲

(۴) ۷۰۰ - ۴

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - صفحه ۱۱۷ - ۱۱۳

پاسخ: گزینه ۱

واکنش تولید این پلی آمید به صورت زیر است:



با توجه به واکنش بالا، فرمول مولکولی دی اسید و دی آمین سازنده این پلی آمید به ترتیب برابر $C_8H_{16}N_2$ و $C_6H_4O_4$ است. در نتیجه اختلاف شمار اتم‌های هیدروژن آن‌ها برابر با ۲ است.

در یک مول از این پلی آمید با فرمول مولکولی $(C_{14}H_{18}N_2O_2)_n$ ، n مول واحد تکرارشونده وجود دارد. حال با توجه به اینکه جرم این مقدار پلی آمید برابر ۸۶/۱ کیلوگرم (۸۶۱۰۰ گرم) شده است، داریم:

$$86100 = 1 \times n \times (14 \times 12 + 18 \times 1 + 2 \times 14 + 2 \times 16) \Rightarrow 86100 = n \times 246 \Rightarrow n = 350$$

در نتیجه شمار واحدهای تکرارشونده در این پلی آمید برابر با ۳۵۰ است.

برای تمرین بیشتر، مثال زیر را حل کنید!

اگر از واکنش ۵۰ گرم از یک کربوکسیلیک اسید با ۶۰ گرم از یک الکل در محیط اسیدی، ۱۰۴ گرم استر تولید شود، از واکنش ۴۵ گرم از آن کربوکسیلیک اسید با مقدار کافی متیل آمین، چند گرم فراورده آلی تولید می‌شود؟ ($H = 1, C = 12, N = 14, O = 16: g.mol^{-1}$)

(۴) ۵۶/۲

(۳) ۴۲/۳

(۲) ۵۴/۶

(۱) ۴۸/۹

پاسخ: گزینه ۱

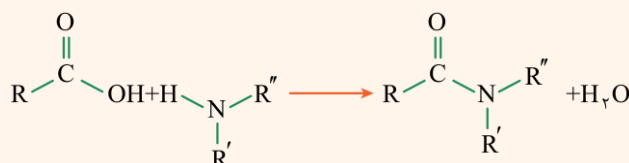
مجموع جرم واکنش دهنده‌ها برابر ۱۱۰ گرم و جرم استر تولید شده برابر ۱۰۴ گرم است؛ پس با توجه به قانون پایستگی جرم، جرم آب تولید شده برابر ۶ گرم می‌باشد. اگر جرم مولی کربوکسیلیک اسید را برابر x در نظر بگیریم، جرم کربوکسیلیک اسید را با توجه به مقدار آب تولید شده حساب می‌کنیم:

$$? g \text{RCOOH} = 6 g \text{H}_2\text{O} \times \frac{1 \text{mol H}_2\text{O}}{18 g \text{H}_2\text{O}} \times \frac{1 \text{mol RCOOH}}{1 \text{mol H}_2\text{O}} \times \frac{x g \text{RCOOH}}{1 \text{mol RCOOH}} = \frac{x}{3} g$$

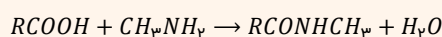
پس جرم مولی کربوکسیلیک اسید را به دست می‌آوریم:

$$\frac{x}{3} = 50 \Rightarrow x = 150$$

واکنش تولید یک آمید از کربوکسیلیک اسید سازنده آن و آمین سازنده آن به صورت زیر انجام می‌گیرد:



پس واکنش این کربوکسیلیک اسید با متیل آمین به صورت زیر است:



ابتدا جرم مولی قسمت R را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{جرم مولی کربوکسیلیک اسید} = R + C + 2O + H \Rightarrow 150 = R + 12 + 2 \times 16 + 1 \Rightarrow R = 105$$

حال جرم مولی آمید ($RCONHCH_3$) تولید شده را حساب می‌کنیم:

$$R + C + O + N + H + C + 3H \Rightarrow \text{جرم مولی آمید} = 105 + 12 + 16 + 14 + 1 + 12 + 3 \times 1 = 163$$

در نهایت جرم آمید تولیدشده را حساب می‌کنیم:

$$? \text{ g آمید} = 45 \text{ g RCOOH} \times \frac{1 \text{ mol RCOOH}}{150 \text{ g RCOOH}} \times \frac{1 \text{ mol آمید}}{1 \text{ mol RCOOH}} \times \frac{163 \text{ g آمید}}{1 \text{ mol آمید}} = 48/9 \text{ g}$$

پس مقدار آمید تولیدشده برابر ۴۸/۹ گرم است.

مونومرهای سازنده پلی‌آمیدها

قسمتی از یک پلی‌آمید که بین اتم‌های نیتروژن از گروه عاملی آمیدی قرار می‌گیرد، گروه R' موجود در ساختار دی‌آمین سازنده پلی‌آمید را تشکیل می‌دهد و قسمتی از مولکول پلی‌آمید که بین اتم‌های کربن گروه عاملی آمیدی قرار می‌گیرد نیز گروه R از مولکول دی‌اسید سازنده مولکول پلی‌آمید را تشکیل می‌دهد.



۶۳- با توجه به جدول زیر در میان استیک اسید و ایزومر استری آن (متیل متانوات)، پایدارتر است و در یک نمونه خالص

..... پیوند هیدروژنی وجود ندارد.

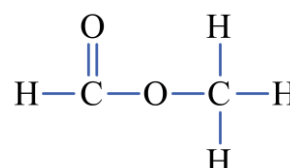
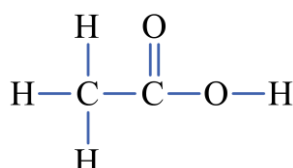
پیوند	$C=O$	$O-H$	$C-H$	$C-O$	$C-C$
میانگین آنتالپی پیوند ($kJ \cdot mol^{-1}$)	۷۹۹	۴۶۳	۴۱۵	۳۸۰	۳۴۸

(۱) اسید - استر (۲) استر - اسید (۳) استر - استر (۴) اسید - اسید

(متوسط - مفهومی و محاسباتی - استاندارد) - صفحه ۱۱۱ - ۱۱۳

پاسخ: گزینه ۱

ساختار استیک اسید و متیل متانوات (استر) به صورت زیر است:



در میان دو ایزومر، هر چه آنتالپی پیوندهای میان اتم‌های یک ماده بیشتر باشد، آن ماده پیوندهای قوی‌تری دارد و شکستن آن‌ها سخت‌تر است؛ به همین علت در واکنش‌های کمتری شرکت می‌کند و پایدارتر است. بر این اساس مجموع آنتالپی پیوند بین این دو ماده را مقایسه می‌کنیم:

$$4\Delta H(C-H) + \Delta H(C=O) + 2\Delta H(C-O) >? <$$

$$3\Delta H(C-H) + \Delta H(C-C) + \Delta H(C=O) + \Delta H(C-O) + \Delta H(O-H)$$

$$\Delta H(C-H) + \Delta H(C-O) >? < \Delta H(C-C) + \Delta H(O-H)$$

پس باید این دو مقدار را با هم مقایسه کرد:

$$\Delta H(C-C) + \Delta H(O-H) = 348 + 463 = 811$$

$$\Delta H(C-H) + \Delta H(C-O) = 415 + 380 = 795$$

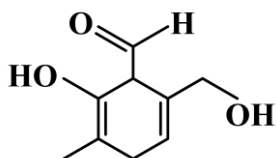
مجموع آنتالپی پیوندها در اسید بیشتر بوده و این ماده پایدارتر است.

همان‌طور که در ساختار این دو ماده مشخص است، در اسید برخلاف استر، اتم هیدروژن متصل به اکسیژن وجود دارد و در نمونه خالص این ماده می‌توان پیوند هیدروژنی را مشاهده کرد.

ایزومر پایدارتر

اتم‌های سازنده ایزومرها یکسان هستند و به صورت مجزا آنتالپی یکسانی دارند. به هنگام تشکیل مولکول‌ها و با ایجاد پیوند آنتالپی آن‌ها کاهش می‌یابد. در این حالت به هنگام تولید ماده‌ای که آنتالپی پیوند بیشتری دارد، گرمای بیشتری آزاد شده و آنتالپی ماده کمتر خواهد بود؛ هر چه آنتالپی یک ماده کمتر باشد، واکنش‌پذیری آن کمتر و پایدارتر است.





۶۴- کدام یک از مطالب زیر در مورد ترکیب مقابل درست است؟

- (۱) نسبت شمار اتم‌های هیدروژن به شمار جفت الکترون‌های ناپیوندی در آن برابر ۲ است.
- (۲) هر مول از این ماده با دو مول فرمیک اسید و یک مول متیل آمین واکنش می‌دهد.
- (۳) در ساختار این ماده چهار اتم کربن به هیچ اتم هیدروژنی متصل نیستند.
- (۴) در هر مولکول این ماده ۲۸ پیوند کووالانسی دیده می‌شود.

(دشوار - مفهومی - زمان‌بر ۵ - صفحه ۱۱۶ - ۱۱۰۳)

پاسخ: گزینه ۱

ابتدا فرمول شیمیایی ترکیب آلی مورد نظر را مشخص می‌کنیم:

شمار اتم‌های هیدروژن در یک ترکیب آلی

برای مشخص کردن فرمول شیمیایی ترکیب‌های آلی ($C_nH_mO_xN_yX_z$) با استفاده از ساختار آن، ابتدا شمار اتم‌های کربن، اکسیژن، نیتروژن و هالوژن (X) را می‌شماریم، سپس به کمک فرمول زیر شمار اتم‌های هیدروژن را مشخص می‌کنیم:

$$m = 2n + 2 + y - [2 \times (\text{تعداد پیوند دوگانه} + \text{تعداد حلقه}) + 4 \times (\text{تعداد پیوند سه‌گانه})] - z$$

در ساختار این ترکیب، ۹ اتم کربن، یک حلقه و ۳ پیوند دوگانه وجود دارد. پس شمار اتم‌های هیدروژن را حساب می‌کنیم:

$$m = 2 \times 9 + 2 - 2(1 + 3) = 12$$

پس فرمول شیمیایی این ترکیب به صورت $C_9H_{12}O_3$ است. همچنین در این ترکیب ۶ جفت الکترون ناپیوندی وجود دارد.

شمار جفت الکترون‌های ناپیوندی در یک ترکیب آلی

شمار جفت الکترون‌های ناپیوندی را از طریق جمع کردن شمار جفت الکترون‌های ناپیوندی موجود بر هر اتم مشخص می‌کنیم:

$$\text{شمار جفت الکترون‌های ناپیوندی} = 2x + y + 3z$$

در این فرمول x تعداد اتم اکسیژن، y تعداد اتم نیتروژن و z تعداد اتم هالوژن است.

پس نسبت خواسته شده برابر است با:

$$A = \frac{12}{6} = 2$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

(۲) در این ماده گروه عاملی کربوکسیل دیده نمی‌شود و به همین علت با آمین‌ها واکنش نمی‌دهد. در ساختار این ماده دو گروه الکلی و یک گروه آلدئیدی وجود دارد. پس هر مول از این ماده با دو مول اسید آلی واکنش می‌دهد. گروه‌های عاملی که تنها یک اتم اکسیژن در ساختار خود دارند، شامل هیدروکسیل (الکلی)، اتری و کربونیل (آلدئیدی و کتونی) هستند که در جدول زیر خلاصه می‌شوند:

خانواده	ساختار گروه	اولین عضو	فرمول عمومی
الکل‌ها (هیدروکسیل)	$-\text{OH}$	CH_3OH (متانول)	$C_nH_{2n+2}O$
اترها	$-\text{O}-$	CH_3OCH_3 (دی متیل اتر)	$C_nH_{2n+2}O$
آلدئیدها (کربونیل)	$\begin{array}{c} \text{O} \\ \parallel \\ -\text{C}-\text{H} \end{array}$	CH_2O (فرمالدهید)	$C_nH_{2n}O$
کتون‌ها (کربونیل)	$\begin{array}{c} \text{O} \\ \parallel \\ -\text{C}- \end{array}$	CH_3COCH_3 (استون)	$C_nH_{2n}O$

(۳) در ساختار این ماده ۳ اتم کربن با هیچ اتم هیدروژنی پیوند اشتراکی ندارند.

(۴) شمار جفت الکترون‌های پیوندی یا همان تعداد پیوندهای کووالانسی در این ترکیب برابر است با:

$$A = \frac{4 \times 9 + 12 + 2 \times 3}{2} = 27$$

شمار جفت الکترون‌های پیوندی در یک ترکیب آلی

برای مشخص کردن شمار پیوندهای اشتراکی موجود در ساختار ترکیب آلی $C_nH_mO_xN_yX_z$ از فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

$$\text{شمار پیوندهای اشتراکی} = \frac{4n + m + 2x + 3y + z}{2}$$

در این فرمول در واقع مجموع شمار الکترون‌های شرکت‌کننده در تشکیل پیوندهای کووالانسی در هر اتم را با یکدیگر جمع کرده و بر دو تقسیم می‌کنیم (هر پیوند کووالانسی از به اشتراک گذاشتن دو الکترون پیوندی به وجود می‌آید).



۶۵- پلیمر به کاررفته در ساخت یک هیدروکربن است که در ساختار آن، هر اتم کربن به چهار اتم متصل است.

(۱) پتو (۲) سرنگ (۳) ظرف یکبار مصرف (۴) کیسه خون

(آسان - مفهومی - سریع) - صفحه ۱۰۶ - ۱۱۰۳

پاسخ: گزینه ۲

پلیمرهای به کاررفته در پتو، سرنگ، ظرف یکبار مصرف و کیسه خون به ترتیب پلی‌سیانواتن، پلی‌پروپن، پلی‌استیرن و پلی‌وینیل کلرید هستند.

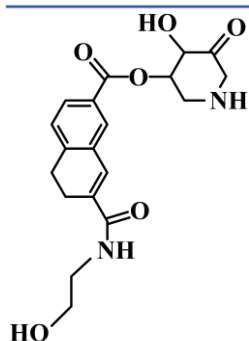
پلیمرها

جدول زیر ساختار برخی از پلیمرها و مونومرهای آن‌ها و همچنین کاربردهای این پلیمرها را نشان می‌دهد:

نام پلیمر	نام مونومر	ساختار مونومر	ساختار پلیمر	کاربرد
پلی‌اتن	اتن	$\text{H}_2\text{C}=\text{CH}_2$	$\text{-(CH}_2\text{-CH}_2\text{)}_n$	کیسه‌های پلاستیکی بطری پلاستیکی لوله پلاستیکی
پلی‌سیانواتن	سیانواتن	$\text{H}_2\text{C}=\text{CH-CN}$	$\text{-(CH}_2\text{-CH(CN))}_n$	پتو و پارچه
پلی‌پروپن	پروپن	$\text{H}_2\text{C}=\text{CH-CH}_3$	$\text{-(CH}_2\text{-CH(CH}_3\text{))}_n$	تهیه و تولید سرنگ
پلی‌استیرن	استیرن	$\text{H}_2\text{C}=\text{CH-C}_6\text{H}_5$	$\text{-(CH}_2\text{-CH(C}_6\text{H}_5\text{))}_n$	تولید ظرف یکبار مصرف
تفلون	تترافلوئورواتن	$\text{F}_2\text{C}=\text{CF}_2$	$\text{-(CF}_2\text{-CF}_2\text{)}_n$	نخ دندان کفی اتو تولید ظروف نجسب
پلی‌وینیل کلرید	وینیل کلرید (کلرواتن)	$\text{H}_2\text{C}=\text{CH-Cl}$	$\text{-(CH}_2\text{-CHCl)}_n$	کیسه‌های خون

هیدروکربن‌ها دسته‌ای از ترکیبات آلی هستند که تنها از دو عنصر هیدروژن و کربن ایجاد شده‌اند. از طرفی می‌دانیم هر اتم کربن در ترکیبات آلی، ۴ پیوند کووالانسی دارد و اگر این ۴ پیوند با چهار اتم مجزا باشد، یعنی همه پیوندها یگانه هستند و ترکیب مورد نظر سیر شده است. پس پلیمر مورد نظر باید یک هیدروکربن سیر شده باشد. در میان گزینه‌ها، پلی‌پروپن هیدروکربن سیر شده و پلی‌استیرن، هیدروکربن سیر نشده است.





۶۶- با توجه به ساختار داده شده، چند مورد درست است؟

- الف - برای این مولکول می‌توان ایزومر آلدئیدی و اسیدی در نظر گرفت.
 ب - در این مولکول همانند مولکول سلولز گروه عاملی اتری وجود دارد.
 ج - آمین تولیدشده از آب‌کافت پیوند آمیدی، می‌تواند در واکنش استری شدن شرکت نماید.
 د - این مولکول همانند ویتامین K دارای گروه کربونیل بوده و هر دو ترکیبی آروماتیک هستند.
- ۴ (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴)

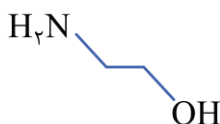
پاسخ: گزینه ۲

(دشوار - مفهومی - استاندارد) - صفحه ۱۱۹ - ۱۱۳

موارد «الف»، «ج» و «د» درست هستند.

بررسی موارد:

- الف) در ساختار این ماده ۶ اتم اکسیژن وجود دارد و برای آن می‌توان انواع ایزومرهای ترکیبات اکسیژن‌دار را در نظر گرفت.
 ب) در ساختار این مولکول گروه عاملی اتری (-O-) وجود ندارد. اما در مولکول سلولز بین واحدهای تکرارشونده پیوند اتری وجود دارد.
 ج) در واکنش این مولکول با آب (واکنش آب‌کافت) و شکست پیوند آمیدی، آمینی با فرمول ساختاری زیر حاصل می‌شود. از آنجا که آمین به‌دست آمده دارای گروه عاملی هیدروکسیل (-OH) است می‌تواند به‌عنوان الکل در واکنش استری شدن شرکت کند.



- د) این مولکول همانند ویتامین K در ساختار خود دارای گروه عاملی کربونیل است و هر دو ترکیب، دارای حلقه بنزنی بوده و در نتیجه هر دو ترکیب آروماتیک هستند. جدول زیر برخی ویژگی‌های ویتامین‌ها را بیان می‌کند.

ویتامین	ث	آ	دی	کا
گروه عاملی	استری ۱ × + هیدروکسیل ۴ ×	هیدروکسیل ۱ ×	هیدروکسیل ۱ ×	کتونی ۲ ×
فرمول مولکولی	$C_6H_8O_6$	$C_{27}H_{46}O$	$C_{28}H_{44}O$	$C_{31}H_{46}O_2$
نوع انحلال‌پذیری	محلول در آب	محلول در چربی	محلول در چربی	محلول در چربی
آروماتیک	نیست	نیست	نیست	هست



۶۷- کدام یک از مطالب زیر درست است؟

- ۱) گرافیت، دگرشکلی کدر از کربن بوده و ارزش سوختی کمتری نسبت به الماس دارد.
 ۲) به هنگام انجماد آب، شدت جنبش‌های نامنظم مولکول‌های آب و فاصله بین آن‌ها کاهش می‌یابد.
 ۳) تبدیل یک مول گاز کربن‌دی‌اکسید به اتم‌های سازنده گازی معادل آنتالپی پیوند کووالانسی $C=O$ است.
 ۴) در همه واکنش‌های شیمیایی، تبادل گرما میان سامانه و محیط پیرامون صورت گرفته و دمای محیط تغییر می‌کند.

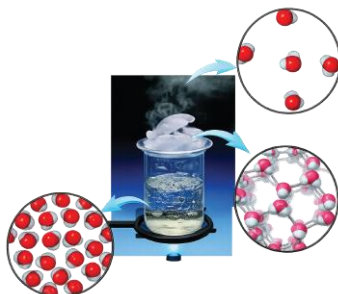
پاسخ: گزینه ۱

(آسان - مفهومی - سریع) - صفحه ۷۳ - ۱۱۲

کربن دارای دگرشکل‌های (آلوتروپ‌های) گوناگونی است که دو نمونه از این دگرشکل‌ها، الماس و گرافیت هستند. الماس، دگرشکل شفاف کربن و گرافیت، دگرشکل کدر کربن است. آنتالپی واکنش سوختن الماس منفی‌تر از گرافیت بوده و از سوختن مقداری برابر از این دو ماده، گرمای بیشتری از سوختن الماس حاصل می‌شود، پس ارزش سوختی الماس بیشتر از گرافیت خواهد بود.

بررسی سایر گزینه ها:

۲) طی انجماد آب، فاصله بین مولکول های H_2O افزایش پیدا می کند؛ چرا که بین مولکول های H_2O در حالت جامد، مقداری فضای خالی وجود دارد اما بین این مولکول ها در حالت مایع، فضای خالی وجود ندارد و به همین خاطر، در مقداری از یخ و آب با جرم برابر، حجم یخ بیشتر از آب است.



ذرات سازنده یک ماده در هر سه حالت فیزیکی در حال جنب و جوش هستند. این جنبش ها به صورت نامنظم بوده و در حالت گازی شدیدتر از مایع و در حالت مایع هم شدیدتر از حالت جامد است. همچنین هر چه دما بالاتر باشد، جنبش های نامنظم ذره ها شدیدتر است. پس جنبش ذرات سازنده با تبدیل آب از مایع به جامد، کاهش می یابد.

۳) به مقدار انرژی لازم برای شکستن یک مول پیوند اشتراکی میان دو اتم در حالت گازی، آنتالپی پیوند می گویند؛ بنابراین شرط آن که گرمای مبادله شده در یک واکنش برابر آنتالپی پیوند باشد، این است که در آن واکنش یک مول پیوند کووالانسی میان دو اتم شکسته شود و مواد شرکت کننده در واکنش نیز به حالت گازی باشند. واکنش تبدیل گاز کربن دی اکسید به اتم های سازنده گازی به صورت زیر انجام می شود:

$$O = C = O(g) \rightarrow C(g) + 2O(g)$$

در این واکنش دو مول پیوند $C = O$ شکسته می شوند و آنتالپی آن دو برابر آنتالپی پیوند است. یک ویژگی بنیادی در همه واکنش های شیمیایی دادوستد گرما با محیط پیرامون است؛ پس هر واکنشی یا گرماده است و یا گرماگیر و تغییر آنتالپی یک واکنش شیمیایی دقیقاً صفر نمی شود. (برخی واکنش های شیمیایی وجود دارند که تغییر آنتالپی آن ها ناچیز است، اما صفر نیست.) با این وجود در برخی واکنش ها با انتقال گرما از سامانه به محیط یا برعکس، دمای محیط ثابت می ماند. به عنوان مثال، تمام واکنش هایی که در بدن انسان انجام می شوند (مانند اکسایش گلوکز) در دمای $37^\circ C$ انجام می شوند.



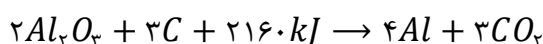
۶۸- گرمای مورد نیاز واکنش موازنه نشده $Al_2O_3 + C + 2160 kJ \rightarrow 2Al + 3CO$ ، از واکنش سوختن گاز متان تأمین می شود. برای تولید یک لیتر آلومینیم با چگالی $2/4$ گرم بر میلی لیتر، به چند لیتر متان در شرایط استاندارد لازم است؟ (آنتالپی سوختن متان برابر $-896 kJ \cdot mol^{-1}$ است. $H = 1, C = 12, Al = 27: g \cdot mol^{-1}$)

۱) ۱۲۰۰ (۲) ۶۰۰ (۳) ۱۶۰۰ (۴) ۸۰۰

(آسان - محاسباتی - استاندارد) - صفحه ۷۳ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۱

معادله موازنه شده واکنش تولید آلومینیم به کمک کربن به صورت زیر است:



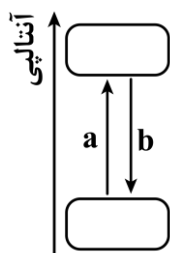
بر این اساس گرمای مصرف شده برای تولید یک لیتر آلومینیم را حساب می کنیم:

$$? kJ \text{ گرما} = 1 L Al \times \frac{1000 mL}{1 L} \times \frac{2/4 g Al}{1 mL Al} \times \frac{1 mol Al}{27 g Al} \times \frac{2160 kJ}{4 mol Al} = 48000 kJ$$

حال حجم گاز متان سوخته شده برای تولید این مقدار گرما را به دست می آوریم:

$$? L CH_4 = 48000 kJ \text{ گرما} \times \frac{1 mol CH_4}{896 kJ} \times \frac{22/4 L CH_4}{1 mol CH_4} = 1200 L$$

پس برای تولید یک لیتر آلومینیم باید ۱۲۰۰ لیتر گاز متان بسوزد.



۶۹- کدام گزینه عبارت زیر را به درستی در مورد نمودار مقابل تکمیل می کند؟

«اگر نمودار مربوط به واکنش باشد، واکنش در جهت انجام شده و»

- (۱) تبدیل الماس به گرافیت - b - پایداری ماده واکنش دهنده از ماده فراورده بیشتر است.
- (۲) تولید هیدرازین از عناصر سازنده آن - $a - \Delta H$ این واکنش را می توان به صورت تجربی تعیین کرد.
- (۳) تولید گاز HCl از اتم های گازی مجزا - a - مقدار (مول) گاز موجود در ظرف در طی واکنش ثابت می ماند.
- (۴) سوختن ساده ترین آلکن - b - در صورت استفاده از اتانول به جای آلکن، ΔH واکنش مثبت تر خواهد شد.

پاسخ: گزینه ۴

(متوسط - مفهومی - زمان بر ۵ - صفحه ۷۷ - ۱۱۰۲)

ساده ترین عضو از خانواده آلکن ها، اتن است. به طور کلی واکنش سوختن ترکیبات مختلف گرماده است و واکنش سوختن اتن نیز در جهت b (کاهش آنتالپی مواد در طی واکنش و آزاد شدن گرما) انجام می شود. قدر مطلق ΔH واکنش سوختن اتن در مقایسه با قدر مطلق ΔH واکنش سوختن اتانول بزرگ تر است، اما از آنجا که برای واکنش های گرماده علامت ΔH منفی است. در نتیجه ΔH واکنش سوختن اتن منفی تر است و در صورت استفاده از اتانول به جای اتن در این واکنش، مقدار ΔH واکنش سوختن مثبت تر می شود.

بررسی سایر گزینه ها:

۱) آنتالپی و سطح انرژی الماس بالاتر از گرافیت است؛ در نتیجه واکنش تبدیل الماس به گرافیت، یک واکنش گرماده است و در جهت b (کاهش آنتالپی مواد در طی واکنش و آزاد شدن گرما) انجام می شود. با توجه به اینکه سطح انرژی الماس (واکنش دهنده) از سطح انرژی گرافیت (فراورده) بالاتر است، پایداری الماس از گرافیت کمتر است.

۲) واکنش تشکیل هیدرازین از گاز نیتروژن و هیدروژن، یک واکنش گرماگیر است و در جهت a (افزایش آنتالپی مواد در طی واکنش و دریافت گرما) انجام می شود و ΔH این واکنش را نمی توان به صورت تجربی تعیین کرد.

۳) تولید گاز هیدروژن کلرید از اتم های گازی مجزا (اتم های H و Cl) مطابق واکنش: $H(g) + Cl(g) \rightarrow HCl(g)$ به علت اینکه این واکنش همراه با تشکیل پیوند $H-Cl$ است و تشکیل پیوند همراه با آزاد شدن انرژی است، این واکنش گرماده خواهد بود و در جهت b (کاهش آنتالپی مواد در طی واکنش و آزاد شدن گرما) انجام می شود. با توجه به واکنش، از آنجا که دو مول گاز مصرف شده و یک مول گاز تشکیل می شود، مقدار (مول) گازهای موجود در ظرف با انجام این واکنش کاهش می یابد.



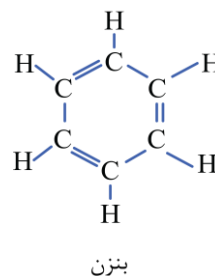
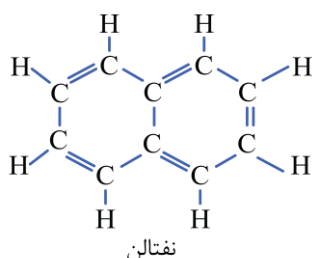
۷۰- در مقایسه بین بنزن و نفتالن، به ترتیب میانگین آنتالپی پیوندهای میان اتم های کربن در و درصد جرمی هیدروژن در بیشتر است.

- (۱) بنزن - نفتالن (۲) نفتالن - بنزن (۳) بنزن - بنزن (۴) نفتالن - نفتالن

پاسخ: گزینه ۳

(آسان - مفهومی - سریع ۵ - صفحه ۶۸ - ۱۱۰۲)

ساختار بنزن و نفتالن به صورت زیر است:



در هر مولکول بنزن ۳ پیوند دوگانه $C = C$ و ۳ پیوند یگانه $C - C$ وجود دارد، اما در ساختار نفتالن، ۵ پیوند دوگانه $C = C$ و ۶ پیوند یگانه $C - C$ دیده می شود؛ پس نسبت پیوندهای $C = C$ به پیوندهای $C - C$ در بنزن بیشتر بوده و به همین جهت، میانگین آنتالپی پیوند میان اتم های کربن در این ماده بیشتر است.

همچنین فرمول شیمیایی بنزن C_6H_6 و فرمول شیمیایی نفتالن $C_{10}H_8$ است. پس نسبت شمار اتم های هیدروژن به شمار اتم های کربن در بنزن بزرگ تر بوده و به همین علت درصد جرمی هیدروژن در این ماده بیشتر است.

درصد جرمی کربن در خانواده‌های هیدروکربنی

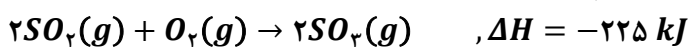
- ۱) آلکان‌ها: درصد جرمی کربن در اعضای این خانواده با افزایش شمار اتم‌های کربن افزایش می‌یابد.
- ۲) سیکلوآلکان‌ها: درصد جرمی کربن در این خانواده ثابت و به تقریب برابر ۸۵/۷ درصد است.
- ۳) آلکن‌ها: همانند سیکلوآلکان‌ها درصد جرمی کربن در این دسته تغییر نکرده و به تقریب برابر ۸۵/۷ درصد است.
- ۴) آلکین‌ها: در این خانواده با افزایش شمار اتم‌های کربن، درصد جرمی کربن کاهش می‌یابد.
- ۵) همچنین در مقایسه میان این گروه‌ها همواره رابطه زیر در مورد درصد جرمی کربن برقرار است:

آلکان‌ها > سیکلوآلکان‌ها = آلکن‌ها > آلکین‌ها

به‌طور کلی برای مقایسه درصد جرمی کربن در دو هیدروکربن، به نسبت شمار اتم‌های هیدروژن به کربن توجه می‌کنیم؛ هر چه این نسبت کوچک‌تر باشد، درصد جرمی کربن بیشتر و درصد جرمی هیدروژن کمتر است.



۷۱- اگر آنتالپی پیوند $S - O$ به اندازه ۲۱۴ کیلوژول بر مول از آنتالپی پیوند $O - O$ بیشتر باشد، با توجه به واکنش‌های زیر، برای شکستن پیوندهای موجود در ۸۰ گرم گاز اکسیژن چند کیلوژول گرما لازم است؟ ($O = ۱۶ \text{ g. mol}^{-1}$)



۱۴۸۷/۵ (۴)

۱۲۳۷/۵ (۳)

۱۱۸۷/۵ (۲)

۷۴۲/۵ (۱)

(دشوار - محاسباتی - زمان‌بر ۵ - صفحه ۶۹ - ۱۱۰۲)

پاسخ: گزینه ۳

در ابتدا برای واکنش سوختن گاز گوگرد دی‌اکسید با استفاده از آنتالپی پیوند معادله ΔH را می‌نویسیم:

$\Delta H_{\text{واکنش}} = [\text{مجموع آنتالپی پیوندها در مواد فراورده}] - [\text{مجموع آنتالپی پیوندها در مواد واکنش‌دهنده}]$

$$\Rightarrow [2 \times (\Delta H(S=O) + \Delta H(S-O)) + \Delta H(O=O)] - [2 \times (\Delta H(S=O) + 2\Delta H(S-O))] = -225 \text{ kJ}$$

$$\Rightarrow \Delta H(O=O) - 2\Delta H(S-O) = -225 \text{ kJ}$$

$$\Delta H(S-O) = \Delta H(O-O) + 214$$

از صورت سؤال داریم:

پس از دو معادله بالا می‌توان نتیجه گرفت:

$$\Delta H(O=O) - 2(\Delta H(O-O) + 214) = -225 \text{ kJ} \Rightarrow \Delta H(O=O) - 2.3 = 2\Delta H(O-O)$$

$$\Rightarrow \Delta H(O-O) = \frac{\Delta H(O=O) - 2.3}{2}$$

حال معادله ΔH را برای واکنش تجزیه گاز اوزون به اتم‌های گازی مجزا می‌نویسیم:

$$\Delta H(O=O) + \Delta H(O-O) = +641 \text{ kJ}$$

از دو معادله آخر داریم:

$$\Delta H(O=O) + \frac{\Delta H(O=O) - 2.3}{2} - \frac{2.3}{2} = +641 \text{ kJ} \Rightarrow 2\Delta H(O=O) + \Delta H(O=O) - 2.3 = 1282$$

$$\Rightarrow 3\Delta H(O=O) = 1284.3 \Rightarrow \Delta H(O=O) = 428.1 \text{ kJ. mol}^{-1}$$

در نهایت با توجه به آنتالپی پیوند $O=O$ ، مقدار گرمای لازم برای شکستن پیوندهای موجود در ۸۰ گرم اکسیژن را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{گرما } 495 \text{ kJ} \times \frac{1 \text{ mol } O_2}{32 \text{ g } O_2} \times \frac{1 \text{ mol } O=O}{1 \text{ mol } O_2} \times \frac{80 \text{ g } O_2}{1 \text{ mol } O_2} = 1237.5 \text{ kJ}$$

در نتیجه ۱۲۳۷/۵ کیلوژول گرما برای این کار لازم است.

یه نمونه باحال!

اگر در یک واکنش با تبدیل شدن ۳۰۸ گرم بوتانویک اسید مایع (C_3H_7COOH) به گاز کربن‌دی‌اکسید و گاز پروپان، ۲۱۰ کیلوژول گرما مصرف شود، مقدار تغییر آنتالپی واکنش $C_3H_7COOH(l) \rightarrow C_3H_7COOH(g)$ برابر چند کیلوژول است؟

($H = 1, C = 12, N = 14, O = 16: g.mol^{-1}$)

پیوند	$C - C$	$O - H$	$C - O$	$C = O$	$C - H$
میانگین آنتالپی پیوند (کیلوژول بر مول)	۳۴۹	۴۶۴	۳۸۱	۷۹۸	۴۱۵

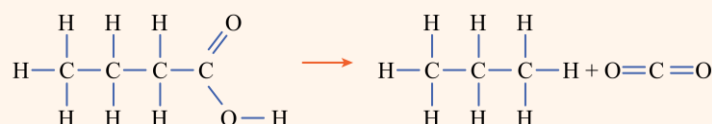
(۱) ۹۹ (۲) ۷۹ (۳) ۵۹ (۴) ۳۹

پاسخ: گزینه ۲

ابتدا ΔH دو واکنش $C_3H_7COOH(l) \rightarrow C_3H_8(g) + CO_2(g)$ و $C_3H_7COOH(g) \rightarrow C_3H_8(g) + CO_2(g)$ را حساب می‌کنیم.
اول $C_3H_7COOH(l) \rightarrow C_3H_8(g) + CO_2(g)$

$$? kJ = 1 \text{ mol } C_3H_7COOH \times \frac{210 \text{ kJ}}{1 \text{ mol } C_3H_7COOH} \times \frac{1 \text{ mol } C_3H_7COOH}{308 \text{ g } C_3H_7COOH} = 60 \text{ kJ} \xrightarrow{\text{گرما مصرف می‌شود}} \Delta H = +60 \text{ kJ}$$

سپس $C_3H_7COOH(g) \rightarrow C_3H_8(g) + CO_2(g)$: آنتالپی این واکنش را از طریق آنتالپی پیوندها محاسبه می‌کنیم. واکنش انجام شده به صورت زیر است:



ΔH واکنش = [مجموع آنتالپی پیوندها در مواد واکنش‌دهنده] - [مجموع آنتالپی پیوندها در مواد فراورده]

$$\Rightarrow \Delta H \text{ واکنش} = [7\Delta H(C-H) + 3\Delta H(C-C) + \Delta H(C=O) + \Delta H(C-O) + \Delta H(O-H)] - [8\Delta H(C-H) + 2\Delta H(C-C) + 2\Delta H(C=O)]$$

حذف پیوندهای تکراری

$$\Rightarrow \Delta H \text{ واکنش} = [\Delta H(C-C) + \Delta H(C-O) + \Delta H(O-H)] - [\Delta H(C-H) + \Delta H(C=O)]$$

$$\Rightarrow \Delta H \text{ واکنش} = (349 + 381 + 464) - (415 + 798) = 1194 - 1213 = -19 \text{ kJ}$$

از جمع واکنش $C_3H_7COOH(l) \rightarrow C_3H_8(g) + CO_2(g)$ و گزینه واکنش $C_3H_7COOH(g) \rightarrow C_3H_8(g) + CO_2(g)$

واکنش $C_3H_7COOH(l) \rightarrow C_3H_7COOH(g)$ به دست می‌آید، پس با توجه به قانون هس داریم:

$$\Delta H \text{ واکنش نهایی} = \Delta H \text{ واکنش اول} + (-\Delta H \text{ دوم}) = +60 + (-(-19)) = 79 \text{ kJ}$$

پس آنتالپی فرایند تبخیر یک مول بوتانویک اسید برابر ۷۹ + کیلوژول است.



۷۲- کدام مقایسه در مورد آنتالپی فرایند ذوب (A)، آنتالپی فرایند تبخیر (B) و آنتالپی فرایند فرازش (C) برای مقدار مشخص از یک ماده ناخالص درست است؟

(۱) $A > C > B$ (۲) $B > C > A$ (۳) $C > B > A$ (۴) $C > A > B$

(آسان - مفهومی - سریع - صفحه ۶۴ - ۱۱۰۲)

پاسخ: گزینه ۳

نمودار زیر سطح انرژی مواد در حالت فیزیکی متعدد را نشان می‌دهد:



در فرایند ذوب، جامد به مایع و در تبخیر مایع به گاز تبدیل می‌شود. تفاوت سطح انرژی یک ماده در حالت گازی و مایع بیشتر از تفاوت سطح انرژی یک ماده در حالت مایع و جامد است؛ پس گرمای گرفته‌شده برای تبدیل حالت ماده از جامد به مایع کمتر از گرمای لازم برای

تبدیل حالت همان ماده از مایع به گاز است. (علت این پدیده آن است که در حالت جامد نیروهای نگهدارنده اجزای سازنده ماده در کنار یکدیگر قوی هستند و در حالت مایع این نیروها ضعیف‌تر هستند، اما در حالت گازی بسیار ناچیز هستند و می‌توان آن‌ها را نادیده گرفت. پس در فرایند ذوب، گرما صرف کاهش این نیروها می‌شود؛ اما در فرایند تبخیر گرما صرف از بین رفتن این نیروها می‌شود.)
فرازش را می‌توان یک فرایند دو مرحله‌ای در نظر گرفت که ابتدا ذوب و سپس تبخیر انجام می‌شود. مطابق قانون هس، آنتالپی فرازش برابر مجموع آنتالپی ذوب و آنتالپی تبخیر است و مقدار آن از هر دو آنتالپی ذوب و تبخیر بیشتر است.



۷۲- اگر ۱ مول گاز نیتروژن و ۳ مول گاز هیدروژن مطابق معادله موازنه‌نشده $N_2(g) + 3H_2(g) \rightarrow 2NH_3(g)$ در یک ظرف سربسته ۲ لیتری واکنش دهند و سرعت متوسط واکنش برابر با $0.15 \text{ mol} \cdot L^{-1} \cdot \text{min}^{-1}$ باشد. پس از گذشت چند ثانیه از ابتدای واکنش فشار گازهای موجود در ظرف ۳۰ درصد کاهش می‌یابد؟

۳۰ (۴)

۶۰ (۳)

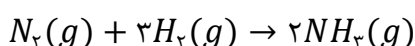
۱۲۰ (۲)

۲۴۰ (۱)

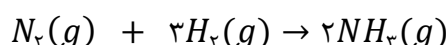
(دشوار - محاسباتی - زمان‌بر ۵ - صفحه ۹۳ - ۱۱۰۲)

پاسخ: گزینه ۲

معادله موازنه‌شده واکنش مورد نظر به صورت زیر است:



حال با توجه به اینکه در ابتدای واکنش ۱ مول گاز N_2 و ۳ مول گاز H_2 وجود دارند و با یکدیگر واکنش می‌دهند، داریم:



شمار مول‌ها در ابتدای واکنش	۱	۳	۰
شمار مول‌ها در ثانیه $n^{\text{ام}}$	$1 - x$	$3 - 3x$	$2x$

حال با توجه به رابطه $PV = nRT$ که در آن تغییرات فشار گازها با تغییرات شمار مول آن‌ها رابطه مستقیم و خطی دارد، از آنجا که در یک لحظه از واکنش، فشار گازهای موجود در ظرف ۳۰ درصد کاهش یافته است یا به عبارتی به ۷۰ درصد مقدار اولیه رسیده است، مجموع مقدار گازهای موجود در ظرف نیز باید به ۷۰ درصد (۰/۷ برابر) مقدار اولیه گازهای موجود در ظرف رسیده باشد؛ بنابراین داریم:

$$\frac{\text{مجموع مول گازها در ثانیه } n^{\text{ام}}}{\text{مجموع مول گازها در ابتدای واکنش}} = 0.7 \Rightarrow \frac{(1-x) + (3-3x) + 2x}{1+3} = 0.7 \Rightarrow -2x + 4 = 2/8 \Rightarrow 2x = 1/2 \Rightarrow x = 0.6$$

در نتیجه در شرایط مورد نظر ۰/۶ مول گاز نیتروژن و ۱/۸ مول گاز هیدروژن مصرف شده و ۱/۲ مول گاز آمونیاک تولید شده است. حال با توجه به این که ضریب استوکیومتری گاز نیتروژن برابر با ۱ است، سرعت متوسط مصرف آن با سرعت متوسط واکنش برابر است:

$$\bar{R}_{\text{واکنش}} = \bar{R}_{N_2} = \frac{|\Delta n(N_2)|}{V \cdot \Delta t} \Rightarrow 0.15 = \frac{(0.6)}{2 \times \Delta t} \Rightarrow \Delta t = 2 \text{ min} = 120 \text{ s}$$

در نتیجه پس از گذشت ۱۲۰ ثانیه از ابتدای واکنش فشار گازهای موجود در ظرف ۳۰ درصد کاهش می‌یابد.

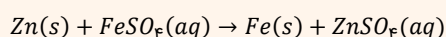
برای تمرین بیشتر، مثال زیر را حل کنید!

اگر در واکنش ۱۸۰۰ میلی‌لیتر محلول ۰/۵ مولار آهن (II) سولفات با فلز روی که منجر به تولید فلز آهن و محلول روی سولفات می‌شود، پس از گذشت ۱۰ دقیقه غلظت یون Fe^{2+} در محلول ۲ برابر غلظت یون Zn^{2+} شود، سرعت تولید فلز آهن در این بازه زمانی، چند میلی‌گرم بر ثانیه است؟ ($Fe = 56 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$)

۷ (۱) ۱۴ (۲) ۲۱ (۳) ۲۸ (۴)

پاسخ: گزینه ۴

واکنش انجام شده به صورت زیر است:



ابتدا شمار مول‌های اولیه آهن (II) سولفات را حساب می‌کنیم:

$$? \text{ mol } FeSO_4 = 1800 \text{ mL محلول} \times \frac{1 \text{ L}}{1000 \text{ mL}} \times \frac{0.5 \text{ mol } FeSO_4}{1 \text{ L محلول}} = 0.9 \text{ mol}$$

جدول زیر را بر اساس معادله واکنش مورد نظر رسم می‌کنیم:

ماده	$Zn(s)$	$FeSO_4(aq)$	$Fe(s)$	$ZnSO_4(aq)$
شمار مول‌های اولیه	-	۰/۹	۰	۰
مول تغییر	-	-x	+x	+x
شمار مول‌های ثانویه	-	۰/۹ - x	x	x

مقدار یون Fe^{2+} در محلول برابر مقدار ماده $FeSO_4$ و مقدار یون Zn^{2+} در محلول برابر مقدار ماده $ZnSO_4$ است. از نسبت غلظت این دو یون در دقیقه دهم، داریم:

$$\frac{[Fe^{2+}]}{[Zn^{2+}]} = 2 \Rightarrow \frac{\frac{n_{Fe^{2+}}}{V}}{\frac{n_{Zn^{2+}}}{V}} = 2 \Rightarrow \frac{n_{Fe^{2+}}}{n_{Zn^{2+}}} = 2 \Rightarrow \frac{0.9-x}{x} = 2 \Rightarrow x = 0.3 \text{ mol}$$

ابتدا جرم آهن تولیدشده را به دست می‌آوریم:

$$? \text{ mg } Fe = 0.3 \text{ mol } Fe \times \frac{56 \text{ g } Fe}{1 \text{ mol } Fe} \times \frac{1000 \text{ mg}}{1 \text{ g}} = 16800 \text{ mg}$$

حال سرعت متوسط تولید آهن را در ۱۰ دقیقه حساب می‌کنیم:

$$\bar{R} = \frac{\text{میلی‌گرم آهن تولید شده}}{\text{زمان بر حسب ثانیه}} \Rightarrow \bar{R} = \frac{16800 \text{ mg}}{10 \text{ min} \times \frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}}} = \frac{16800}{600} = 28 \text{ mg} \cdot \text{s}^{-1}$$

پس سرعت متوسط تولید آهن در این بازه زمانی، برابر ۲۸ میلی‌گرم بر ثانیه است.



۷۴- کدام مورد نادرست است؟

- ۱) با افزایش دما در واکنش‌های گرماده همانند واکنش‌های گرماگیر، طول مدت زمان انجام واکنش کاهش می‌یابد.
- ۲) در واکنش کلسیم کربنات با محلول هیدروکلریک اسید، سرعت متوسط تولید همهٔ فراورده‌ها برابر با سرعت متوسط واکنش است.
- ۳) اگر در یک واکنش شیمیایی Δn فراورده A سه برابر Δn فراورده B باشد، حتماً رابطه $\frac{\Delta n(A)}{\Delta t} = \frac{\Delta n(B)}{\Delta t}$ برقرار است.
- ۴) با کاهش حجم ظرف در یک واکنش شیمیایی گازی، شیب نمودار مول-زمان برای تمام مواد شرکت‌کننده در واکنش تندتر می‌شود.

(متوسط - مفهومی - استاندارد) - صفحه ۹۳ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۳

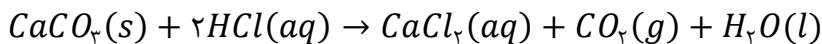
از آنجا که تغییرات مول مواد در واکنش متناسب با ضریب استوکیومتری آن‌ها است، اگر در یک واکنش شیمیایی Δn ماده A، سه برابر Δn ماده B باشد، ضریب استوکیومتری ماده A باید سه برابر ضریب استوکیومتری ماده B باشد. اما هیچ لزومی ندارد که ضریب ماده A و B به ترتیب ۳ و ۱ باشد و می‌تواند به ترتیب ۶ و ۲ و هر ضرایبی که از این نسبت پیروی کنند، باشد. با توجه به اینکه هر دو ماده، فراورده هستند، Δn هر دو ماده نیز مثبت است و رابطه $\frac{\Delta n(A)}{\Delta t} = \frac{\Delta n(B)}{\Delta t}$ واکش $\bar{R}$ تنها هنگامی که ضریب ماده A و B به ترتیب ۳ و ۱ باشد، برقرار است و برای سایر حالات درست نیست.

نکته: برای آن که سرعت تولید یا مصرف یک ماده برابر سرعت واکنش باشد، باید ضریب آن ماده برابر یک شود.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) به‌طور کلی در واکنش‌های شیمیایی چه در واکنش‌های گرماده چه در واکنش‌های گرماگیر با افزایش دما، سرعت انجام واکنش بیشتر می‌شود و طول مدت زمان انجام آن کاهش می‌یابد.

۲) واکنش کلسیم کربنات با محلول هیدروکلریک اسید به‌صورت زیر است:



با توجه به این که سرعت متوسط تولید یا مصرف مواد در واکنش متناسب با ضریب استوکیومتری آن‌ها است؛ از آنجا که ضریب استوکیومتری تمام فراورده‌های این واکنش با یکدیگر برابر است، سرعت متوسط تولید همه آن‌ها با یکدیگر برابر است.

۳) با کاهش حجم ظرف در یک واکنش شیمیایی گازی، غلظت مواد واکنش‌دهنده افزایش می‌یابد و سرعت انجام واکنش افزایش می‌یابد. شیب نمودار مول-زمان برای مواد شرکت‌کننده در واکنش نشان‌دهنده سرعت تولید یا مصرف آن‌ها است، در نتیجه با افزایش سرعت واکنش، شیب نمودار مول-زمان مواد شرکت‌کننده در واکنش تندتر می‌شود.



۷۵- اگر در واکنشی با معادله موازنه‌نشده $F_2(g) + HI(g) \rightarrow HF(g) + I_2(s)$ در شرایط استاندارد، حجم گاز موجود در ظرف واکنش در هر ثانیه به‌طور متوسط ۷۰۰ میلی‌لیتر کاهش یابد، سرعت متوسط مصرف گاز هیدروژن یدید برابر چند مول بر دقیقه است؟

۱/۸۷۵ (۴)

۳/۷۵ (۳)

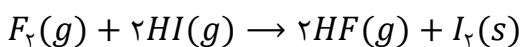
۱/۶۲۵ (۲)

۳/۲۵ (۱)

(آسان - محاسباتی - استاندارد ۱ - صفحه ۹۰ - ۱۱۰۲)

پاسخ: گزینه ۳

معادله موازنه‌شده واکنش به‌صورت زیر است:



در این واکنش به‌ازای مصرف در مجموع ۳ مول گاز (۲ مول HI و ۱ مول F_2)، ۲ مول گاز HF تولید می‌گردد. پس در این واکنش به‌ازای مصرف دو مول گاز HI ، حجم گاز به اندازه یک مول کاهش می‌یابد. بر این اساس، مقدار HI مصرف‌شده در یک ثانیه را به‌دست می‌آوریم:

$$? \text{ mol } HI = 700 \text{ mL گاز} \times \frac{1 \text{ L}}{1000 \text{ mL}} \times \frac{1 \text{ mol گاز}}{22.4 \text{ L گاز}} \times \frac{2 \text{ mol } HI}{1 \text{ mol گاز}} = \frac{1}{16} \text{ mol}$$

در نهایت سرعت متوسط مصرف HI را بر حسب مول بر دقیقه حساب می‌کنیم:

$$\bar{R}_{HI} = \frac{\text{مقدار } HI \text{ مصرف‌شده}}{\Delta t} = \frac{\frac{1}{16} \text{ mol}}{1 \text{ s} \times \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}}} = \frac{60}{16} = 3.75 \text{ mol} \cdot \text{min}^{-1}$$

پس سرعت متوسط مصرف این ماده برابر ۳/۷۵ مول بر دقیقه است.



۷۶- چند مورد از مطالب زیر درباره گلوکز نادرست است؟

الف - از واکنش قند جوانه گندم و آب همانند تجزیه نشاسته تولید می‌شود.

ب - قند خون نام دارد و درصد جرمی اکسیژن در آن بیشتر از کربن است.

ج - آنتالپی واکنش اکسایش آن قرینه آنتالپی واکنش فتوسنتز است.

د - واکنش تخمیر الکلی آن با تولید یک گاز ناقطبی همراه است.

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

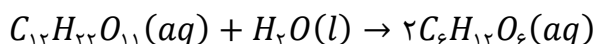
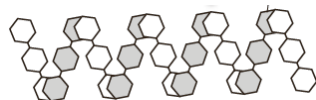
صفر (۱)

(متوسط - خط به خط - استاندارد ۱ - صفحه ۱۱۸ - ۱۱۰۳)

پاسخ: گزینه ۱

گلوکز یا همان قند خون، کربوهیدراتی با فرمول شیمیایی $C_6H_{12}O_6$ است. هیچ‌یک از عبارتهای مطرح‌شده در مورد این ماده نادرست نیستند.

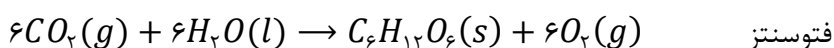
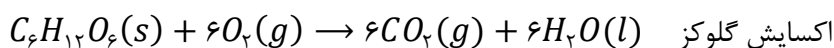
الف) قند موجود در جوانه گندم، مالتوز است و مطابق واکنش زیر در واکنش با آب، به گلوکز تبدیل می‌شود:



همچنین سلولز و نشاسته دو پلیمر تولیدشده از گلوکز هستند که با تجزیه شدن به این ماده تبدیل خواهند شد.

پ) گلوکز همان قند خون است که کربوهیدرات‌ها در بدن ما به این ماده شش کربنه تبدیل می‌شوند. در این ماده شمار اتم‌های کربن و اکسیژن برابر است که با توجه به جرم مولی بیشتر اتم‌های اکسیژن نسبت به کربن، در مقدار مشخصی از گلوکز، جرم اکسیژن بیشتری نسبت به کربن وجود دارد و به همین علت درصد جرمی اکسیژن بیشتر خواهد بود.

ج) معادله واکنش اکسایش گلوکز عکس معادله واکنش فتوسنتز است؛ پس آنتالپی این دو واکنش در یک منفی با یکدیگر تفاوت دارند و گزینه یکدیگر هستند.



د) معادله واکنش تخمیر این ماده در شرایط بی‌هوازی که با تولید اتانول (الکل) همراه است، به صورت زیر خواهد بود:



در این واکنش گاز کربن‌دی‌اکسید تولید می‌شود که یک گاز ناقطبی است.



۷۷- کدام یک از گزینه‌های زیر درست است؟

- (۱) سیلیسیم همانند اکسیژن در واکنش با عناصر نافلزی می‌تواند از این عناصر الکترون بگیرد.
- (۲) در بین دو نافلز هم‌گروه، عنصری با شعاع اتمی بزرگ‌تر، خصلت نافلزی کمتری دارد.
- (۳) طلا همانند سدیم عنصری نرم است و همانند ژرمانیم قابلیت مفتول شدن دارد.
- (۴) شعاع اتمی شبه‌فلز دوره سوم از عناصر فلزی این دوره بزرگ‌تر است.

(متوسط - مفهومی - استاندارد ۵ - صفحه ۱۷ - ۱۱۰۱)

پاسخ: گزینه ۲

در یک گروه از جدول تناوبی از بالا به پایین شعاع اتمی افزایش و خصلت نافلزی کاهش می‌یابد. پس در یک گروه هر چه شعاع اتمی نافلز بیشتر باشد، خصلت نافلزی یا همان واکنش‌پذیری آن کمتر خواهد بود.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) سیلیسیم یک عنصر شبه‌فلزی است که برای شرکت در واکنش‌های شیمیایی با عناصر دیگر، تنها می‌تواند الکترون به اشتراک بگذارد. اکسیژن نیز یک عنصر نافلزی است. عناصر نافلزی در واکنش با یکدیگر الکترون به اشتراک می‌گذارند و توانایی تشکیل یون را در واکنش با فلزها دارند.

۳) طلا و سدیم هر دو فلز نرم هستند. تمام فلزها برخلاف نافلزها و شبه‌فلزها چکش‌خوار هستند و قابلیت مفتول شدن و ورقه‌شدن را دارند. البته ممکن است یک فلز نرم‌تر از دیگری باشد و راحت‌تر مفتول شود. در این میان، ژرمانیم شبه‌فلزی است که در اثر ضربه چکش، خورد می‌شود و به مفتول تبدیل نمی‌شود.

۴) در یک دوره از جدول تناوبی از چپ به راست و با افزایش بار هسته و ثابت ماندن تعداد لایه‌های الکترونی، شعاع اتمی کاهش می‌یابد. شبه‌فلزها، دسته‌ای عناصر هستند که در جدول تناوبی بین فلزها و نافلزها قرار می‌گیرند. در این حالت در طرف سمت راست شبه‌فلز، نافلزها و در سمت چپ آن فلزها قرار دارند. پس شبه‌فلزها نسبت به فلزها در سمت راست قرار دارند و به همین علت، شعاع اتمی کمتری دارند.



۷۸- کدام موارد دربارهٔ عناصر واسطه موجود در دورهٔ چهارم جدول دوره‌ای، نادرست هستند؟

الف - در دو عنصر، ۲۰ درصد از الکترون‌های ظرفیتی دارای $n + l = 4$ هستند.

ب - این عناصر با هالوژنی هم‌دوره هستند که می‌تواند در دمای $473K$ با گاز هیدروژن واکنش دهد.

ج - در آرایش الکترونی فشرده عناصر این دسته، گاز نجیبی است که تمام لایه‌های الکترونی آن پر هستند.

د - استخراج عنصری که مجموع $n + l$ الکترون‌های ظرفیت آن برابر ۱۸ است، نسبت به ششمین عنصر واسطه دشوارتر است.

(۱) «الف» و «ج» (۲) «الف» و «د» (۳) «ب» و «ج» (۴) «ب» و «د»

پاسخ: گزینه ۱

(دشوار - مفهومی - زمان‌برد ۵ - صفحه ۴۹ - ۱۱۰۱)

عبارت‌های «الف» و «ج» نادرست هستند.

بررسی موارد:

الف در لایهٔ ظرفیت عناصر واسطهٔ دورهٔ چهارم زیرلایهٔ $4s$ دارای $n + l = 4$ است و تنها در نیکل که لایهٔ ظرفیت آن به صورت $4s^2 3d^8$

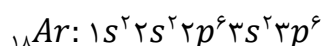
است، ۲۰ درصد الکترون‌های ظرفیت $(\frac{2}{2+8} \times 100 = 20\%)$ آن دارای این ویژگی می‌باشند.

پ هالوژن هم‌دوره با عناصر واسطهٔ دورهٔ چهارم، برم است. برم می‌تواند در دمای $200^\circ C$ ($473K$) با گاز هیدروژن واکنش دهد.

ج در آرایش الکترونی عناصر دوره دوم به بعد، برای جلوگیری از اضافه‌نویسی، می‌توان از آرایش فشرده استفاده کرد. به این منظور، گاز

نجیب دوره قبل را نوشته و زیرلایه‌هایی را که در آرایش آن گاز نجیب وجود ندارند، جلوی آن قرار می‌دهیم. در آرایش الکترونی فشرده

عناصر دوره چهارم، گاز نجیب دوره سوم یعنی آرگون دیده می‌شود. آرایش الکترونی آرگون به صورت زیر است:



در این عنصر دو لایه اول پر شده هستند؛ اما لایه سوم به علت عدم الکترون گرفتن زیرلایه $3d$ در این عنصر، پر نیست.

د فلز تیتانیوم که آرایش لایهٔ ظرفیت آن به صورت $4s^2 3d^2$ است، دارای ۲ الکترون با $n + l = 4$ (زیرلایهٔ $4s$) و ۲ الکترون با $n + l = 5$

(زیرلایهٔ $3d$) است. در نتیجه مجموع اعداد کوانتومی اصلی و فرعی الکترون‌های ظرفیت آن برابر با ۱۸ ($2 \times 4 + 2 \times 5$) است. ششمین

عنصر واسطه فلز آهن است و از آنجا که واکنش‌پذیری تیتانیوم از آهن بیشتر است، استخراج تیتانیوم نیز در مقایسه با آهن از سنگ معدن آن

دشوارتر است.



۷۹- کدام یک از گزینه‌های زیر نادرست است؟

(۱) واکنش $Cu + ZnSO_4$ به طور طبیعی انجام نمی‌شود.

(۲) واکنش‌پذیری فلز سدیم بیشتر از فلز منیزیم و لیتیم است.

(۳) واکنش آلومینیم و فلور، شدیدتر از واکنش آهن و اکسیژن رخ می‌دهد.

(۴) شرایط نگهداری فلز روییدیم در آزمایشگاه آسان‌تر از فلز کلسیم خواهد بود.

پاسخ: گزینه ۴

(آسان - مفهومی - استاندارد ۵ - صفحه ۲۱ - ۱۱۰۱)

هر چه واکنش‌پذیری یک فلز بیشتر باشد، تمایل بیشتری به واکنش دادن دارد و تأمین شرایط نگهداشتن (واکنش ندادن) آن دشوارتر است.

پس مقایسه دشواری شرایط نگهداری آن‌ها مطابق واکنش‌پذیری است. بر این اساس تأمین شرایط نگهداری فلز روییدیم و به طور کلی فلزهای

قلیایی در آزمایشگاه به علت واکنش‌پذیری بالاتر نسبت به فلزهای قلیایی خاکی مانند فلز کلسیم، سخت‌تر است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱ برای آن که یک واکنش به طور طبیعی انجام شود، باید واکنش‌پذیری واکنش‌دهنده‌ها بیشتر از فراورده‌ها باشد. واکنش‌پذیری مس از

روی کمتر بوده و به همین علت، فلز مس با ترکیبات روی واکنش نمی‌دهد.

۲ واکنش پذیری فلزها در یک گروه از بالا به پایین و از راست به چپ در یک دوره افزایش می یابد. پس واکنش پذیری سدیم که جایگاه آن در جدول تناوبی زیر لیتیم و سمت چپ منیزیم بوده، از هر دو بیشتر است.

۳ هر چه واکنش پذیری یک عنصر بیشتر باشد، واکنش های آن عنصر، شدیدتر و با آزاد کردن گرمای بیشتر است. با توجه به واکنش پذیری بیشتر فلز آلومینیم از فلز آهن و همچنین واکنش پذیری بیشتر نافلز فلوئور از نافلز اکسیژن، پس شدت واکنش میان آلومینیم و فلوئور از واکنش میان دو عنصر دیگر بیشتر خواهد بود.

تولید نور، آزادسازی گرما، تشکیل رسوب و خروج گاز نشانه هایی از تغییر شیمیایی هستند. هرچه شدت نور، مقدار گرمای تولیدشده یا آهنگ خروج گاز آزادشده بیشتر باشد، واکنش شیمیایی سریع تر و شدیدتر بوده و واکنش دهنده ها واکنش پذیری بیشتری دارند.



۸۰ - ۴۰۴ گرم پتاسیم نیترات با خلوص ۷۵ درصد مطابق واکنش موازنه نشده $KNO_3(s) \rightarrow KNO_2(s) + O_2(g)$ تجزیه می شود. اگر بازده واکنش برابر با ۵۰ درصد باشد، به تقریب چند درصد از جرم ماده جامد باقی مانده در انتهای واکنش را اتم نیتروژن تشکیل داده است؟ ($N = ۱۴, O = ۱۶, K = ۳۹: g.mol^{-1}$)

۱۷ (۴)

۱۱ (۳)

۶ (۲)

۹ (۱)

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - صفحه ۲۴ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۳

واکنش موازنه شده به صورت زیر است:



در ابتدا جرم پتاسیم نیترات خالص را به دست می آوریم:

$$\text{جرم ماده خالص} = \frac{\text{جرم ماده ناخالص}}{\text{درصد خلوص}} \times 100 \Rightarrow 75 = \frac{m_{KNO_3}}{40.4} \times 100 \Rightarrow m_{KNO_3} = 30.3 \text{ g}$$

در نتیجه جرم پتاسیم نیترات خالص برابر ۳۰۳ گرم است. حال جرم اتم نیتروژن موجود در این مقدار پتاسیم نیترات را محاسبه می کنیم:

$$? \text{ g N} = 30.3 \text{ g KNO}_3 \times \frac{1 \text{ mol KNO}_3}{101 \text{ g KNO}_3} \times \frac{1 \text{ mol N}}{1 \text{ mol KNO}_3} \times \frac{14 \text{ g N}}{1 \text{ mol N}} = 42 \text{ g}$$

پس در نمونه اولیه ۴۲ گرم اتم نیتروژن وجود دارد. حال با انجام واکنش و تولید مقداری گاز اکسیژن، جرم ماده جامد کاهش و جرم اتم های نیتروژن ثابت می ماند. پس جرم گاز اکسیژن تولیدشده را محاسبه کنیم تا جرم گاز کم شده از ماده جامد را به دست آوریم:

$$? \text{ g O}_2 = 30.3 \text{ g KNO}_3 \times \frac{1 \text{ mol KNO}_3}{101 \text{ g KNO}_3} \times \frac{1 \text{ mol O}_2}{2 \text{ mol KNO}_3} \times \frac{32 \text{ g O}_2}{1 \text{ mol O}_2} = 48 \text{ g}$$

مقدار به دست آمده، مقدار نظری گاز اکسیژن تولید شده است، با توجه به اینکه بازده واکنش برابر با ۵۰ درصد است، داریم:

$$\text{بازده درصدی} = \frac{\text{مقدار نظری}}{\text{مقدار عملی}} \times 100 \Rightarrow 50 = \frac{m_{O_2}}{48} \times 100 \Rightarrow m_{O_2} = 24 \text{ g}$$

در نتیجه جرم گاز اکسیژن تولیدشده یا کاهش جرم جامد موجود در ظرف برابر ۲۴ گرم است. از این رو درصد جرمی اتم نیتروژن در ماده جامد باقی مانده برابر است با:

$$\text{درصد جرمی نیتروژن} = \frac{\text{جرم نیتروژن}}{\text{جرم کل ماده}} \times 100 = \frac{42}{380} \times 100 \approx 11\%$$

در نتیجه به تقریب ۱۱ درصد جرم ماده جامد باقی مانده را اتم نیتروژن تشکیل داده است.



۸۱- اگر گرمای حاصل از سوختن ۰/۵ مول از یک آلکان با گرمای حاصل از سوختن ۷۲ گرم متانول برابر باشد و مقدار ارزش سوختی آلکان ۲ برابر مقدار ارزش سوختی متانول باشد. آلکان مورد نظر در مقایسه با بوتان به حالت مایع تبدیل می شود و اختلاف شمار اتم های هیدروژن آن با نفتالن برابر با است. ($H = 1, C = 12, O = 16: g. mol^{-1}$)

(۱) زودتر - ۴ (۲) دیرتر - ۴ (۳) زودتر - ۲ (۴) دیرتر - ۲

پاسخ: گزینه ۱

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - صفحه ۷۳ - ۱۱۰۲

اگر فرمول مولکولی آلکان مورد نظر را به صورت C_nH_{2n+2} فرض کنیم، جرم مولی آن برابر با $14n + 2$ گرم خواهد بود. حال با توجه به اینکه مقدار گرمای آزاد شده از سوختن ۰/۵ مول از این آلکان (x) با گرمای حاصل از سوختن ۷۲ گرم متانول (x) برابر است و ارزش سوختی آلکان ۲ برابر ارزش سوختی متانول است، داریم:

$$\frac{\text{ارزش سوختی آلکان}}{\text{ارزش سوختی متانول}} = 2 \Rightarrow \frac{\text{جرم آلکان}}{\text{جرم آلکان آزاد شده}} = 2 \Rightarrow \frac{\frac{x}{0.5 \times (14n + 2)}}{\frac{x}{72}} = 2 \Rightarrow \frac{72}{14n + 2} = 2 \Rightarrow 14n + 2 = 36 \Rightarrow n = 5$$

در نتیجه آلکان مورد نظر پنتان است.

پنتان در مقایسه با بوتان دارای شمار اتم کربن بیشتری است، در نتیجه نقطه جوش بالاتری دارد و در مقایسه با بوتان زودتر تبدیل به مایع می شود. اختلاف شمار اتم های هیدروژن پنتان با فرمول مولکولی C_5H_{12} با این شمار در نفتالن با فرمول مولکولی $C_{10}H_8$ برابر ۴ است.

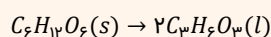
برای تمرین بیشتر، مثال زیر را حل کنید!

گلوکز طی واکنشی تخمیری به لاکتیک اسید ($C_3H_7O_3$) تبدیل می شود. اگر ارزش سوختی گلوکز و لاکتیک اسید به ترتیب برابر ۱۵/۶ و ۱۵/۱ کیلوژول بر گرم باشد، با تخمیر ۱۵۰ گرم گلوکز در این واکنش، کیلوژول گرما می شود.

(۱) ۷۵ - مصرف (۲) ۹۰ - تولید (۳) ۷۵ - تولید (۴) ۹۰ - مصرف

پاسخ: گزینه ۳

واکنش تخمیری انجام شده به صورت زیر است:



بر اساس قانون هس ΔH یک واکنش را می توان از طریق فرمول زیر محاسبه کرد:

$$\Delta H_{\text{واکنش}} = [\text{مجموع آنتالپی سوختن مواد فراورده}] - [\text{مجموع آنتالپی سوختن مواد واکنش دهنده}]$$

پس ابتدا آنتالپی سوختن گلوکز و لاکتیک اسید را حساب می کنیم:

$$\frac{|\Delta H_{\text{سوختن گلوکز}}|}{\text{جرم مولی گلوکز}} = 15.6 \Rightarrow \frac{|\Delta H_{\text{سوختن گلوکز}}|}{180} = 15.6$$

آنتالپی سوختن منفی است.

$$\Rightarrow \Delta H_{\text{سوختن گلوکز}} = -2808 \text{ kJ}$$

$$\frac{|\Delta H_{\text{سوختن لاکتیک اسید}}|}{\text{جرم مولی لاکتیک اسید}} = 15.1 \Rightarrow \frac{|\Delta H_{\text{سوختن لاکتیک اسید}}|}{90} = 15.1$$

آنتالپی سوختن همواره منفی است.

$$\Rightarrow \Delta H_{\text{سوختن لاکتیک اسید}} = -1359 \text{ kJ}$$

حال ΔH واکنش تخمیر گلوکز را حساب می کنیم:

$$\Delta H_{\text{واکنش}} = [\text{مجموع آنتالپی سوختن مواد فراورده}] - [\text{مجموع آنتالپی سوختن مواد واکنش دهنده}]$$

$$\Rightarrow \Delta H_{\text{واکنش}} = [2 \times (-1359)] - [-2808] = (-2718) - (-2808) = 90 \text{ kJ}$$

البته می توان ΔH این واکنش را بر اساس قانون هس و با استفاده از واکنش های سوختن لاکتیک اسید و گلوکز محاسبه کرد. با توجه به علامت ΔH ، با انجام این واکنش گرما تولید می شود. در نهایت، مقدار گرمای آزاد شده از تخمیر ۱۵۰ گرم گلوکز را به دست می آوریم:

$$? \text{ kJ گرما} = 150 \text{ g } C_6H_{12}O_6 \times \frac{1 \text{ mol } C_6H_{12}O_6}{180 \text{ g } C_6H_{12}O_6} \times \frac{90 \text{ kJ گرما}}{1 \text{ mol } C_6H_{12}O_6} = 75 \text{ kJ}$$

پس در این واکنش ۷۵ کیلوژول گرما آزاد شده است.

$$(\text{جرم مولی}) \times (\text{ارزش سوختی}) = -\Delta H \text{ سوختن}$$



۸۲- کدام یک از مطالب زیر در مورد نفت خام نادرست است؟

- (۱) اختلاف نقطه جوش هیدروکربن‌های موجود در نفت خام، کم است.
- (۲) بخش عمده هیدروکربن‌های موجود در طلای سیاه، سیرشده هستند.
- (۳) بخش عمده‌ای از نفت خام به‌عنوان خوراک پتروشیمی‌ها مصرف می‌شود.
- (۴) نفت برنت دریای شمال نسبت به نفت سنگین ایران آسان‌تر جاری می‌شود.

پاسخ: گزینه ۳

(آسان - مفهومی - سریع ۱۵ - صفحه ۴۵ - ۱۱۰۱)

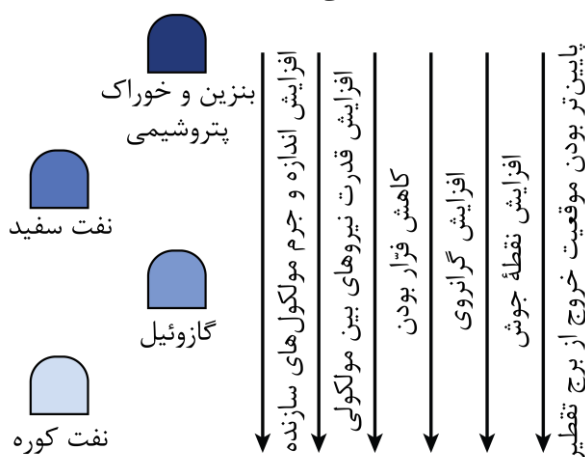
بخش عمده نفت خام به‌عنوان سوخت (بیشتر به‌عنوان سوخت وسایل نقلیه و سپس تولید گرما و الکتریسیته) مصرف می‌شود و مقدار کمی از نفت خام به‌عنوان خوراک پتروشیمی‌ها و برای تولید مواد پتروشیمیایی مصرف می‌شود.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) برای جدا کردن هیدروکربن‌ها در نفت خام از روش تقطیر جزء به جزء در برج تقطیر استفاده می‌شود. در این روش، اجزای مخلوط‌هایی (محلول‌هایی) که نقطه جوش نزدیک به هم دارند از یکدیگر جدا می‌گردند.

۲) نفت خام مخلوطی از هیدروکربن‌های گوناگون، برخی نمک‌ها، اسیدها، آب و ... است. بخش عمده هیدروکربن‌های موجود در نفت خام را آلکان‌ها تشکیل می‌دهند. آلکان‌ها جزء هیدروکربن‌های سیرشده بوده و تمایل چندانی به انجام واکنش‌های شیمیایی ندارند و به همین علت است که بخش عمده نفت تولیدشده در جهان (بیش از ۹۰ درصد) به‌عنوان سوخت به کار می‌رود.

۴) میزان نفت کوره که بیشترین گرانروی را میان اجزای نفت خام دارد، در نفت برنت دریای شمال نسبت به نفت سنگین ایران کمتر بوده و در عوض اجزایی با گرانروی کمتر در نفت برنت به مقدار بیشتری وجود دارند. بر همین اساس می‌توان گفت که گرانروی نفت برنت از نفت سنگین ایران کمتر بوده و این نفت در مقابل جاری شدن مقاومت کمتری از خود نشان می‌دهد و آسان‌تر جاری می‌گردد. نمودار زیر خواص اجزای مختلف نفت را با یکدیگر مقایسه می‌کند:



۸۴- اگر در اثر سوختن کامل یک هیدروکربن ۱۰ کربنه، حجم گاز کربن دی اکسید تولید شده ۲ برابر حجم بخار آب تولید شده باشد، هر مول از این ماده حداکثر با چند مول گاز هیدروژن واکنش می دهد؟

(۴) ۹

(۳) ۸

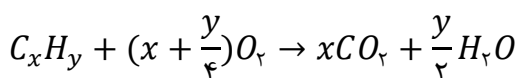
(۲) ۵

(۱) ۶

(متوسط - محاسباتی - سریع) - صفحه ۴۳ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۱

واکنش موازنه شده سوختن کامل یک هیدروکربن به صورت زیر است:



با توجه به این که حجم گاز کربن دی اکسید تولید شده ۲ برابر حجم بخار آب تولید شده است، ضریب استوکیومتری گاز کربن دی اکسید (x) باید دو برابر ضریب استوکیومتری بخار آب ($\frac{y}{2}$) باشد؛ بنابراین مقدار x برابر با مقدار y است و در این هیدروکربن شمار اتم های هیدروژن برابر با شمار اتم های کربن است.

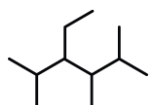
اکنون اگر تعداد اتم های کربن برابر با ۱۰ باشد، فرمول مولکولی آن به صورت $C_{10}H_{10}$ خواهد بود. برای اینکه این هیدروکربن با بیشترین مقدار گاز هیدروژن واکنش دهد، باید بیشترین تعداد پیوند دوگانه کربن-کربن را داشته باشد و در ساختار آن حلقه وجود نداشته باشد. در واقع باید علت کم بودن شمار اتم های هیدروژن نسبت به آلکان هم کربن وجود پیوندهای دوگانه یا سه گانه باشد و نه حلقه کربنی؛ بنابراین داریم:

$$H = 2n + 2 - (2 \times \text{شمار پیوند دوگانه}) \Rightarrow 10 = 22 - (2x) \Rightarrow x = 6$$

پس این هیدروکربن حداکثر ۶ پیوند دوگانه کربن-کربن دارد و از آنجا که به ازای هر پیوند دوگانه کربن-کربن، مولکول می تواند با یک مولکول گاز هیدروژن واکنش دهد، هر یک مول از این هیدروکربن دارای ۶ مول پیوند دوگانه بوده و می تواند با ۶ مول گاز هیدروژن واکنش دهد.



۸۴- نام آلکان مقابل بر اساس قواعد آیوپاک کدام یک از گزینه های زیر است؟



(۳) اتیل-۳-اتیل-۵،۴،۲-تری متیل هگزان

(۱) ۴-اتیل-۵،۳،۲-تری متیل هگزان

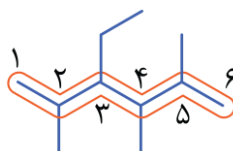
(۴) ۵،۳،۲-تری متیل-۳-اتیل هگزان

(۳) ۵،۳،۲-تری متیل-۴-اتیل هگزان

(آسان - مفهومی - سریع) - صفحه ۳۹ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۲

زنجیره اصلی و شماره گذاری آن برای آلکان مورد نظر به صورت زیر است:



اگر چه فاصله شاخه های فرعی از دو سمت مولکول برابر است اما به علت تقدم شاخه جانبی اتیل نسبت به شاخه جانبی متیل، از سمت چپ کربن ها را شماره گذاری می کنیم. همچنین در نوشتن نام نیز، اتیل بر متیل مقدم است و ابتدا گروه اتیل و سپس گروه متیل آورده می شود. پس نام این آلکان بر اساس قواعد آیوپاک، ۳-اتیل-۵،۴،۲-تری متیل هگزان است.



۸۵- کدام یک از مطالب زیر درست هستند؟

الف - استخراج کاتالیزگر واکنش سیر شدن ۱-هگزن به کمک گیاهان، صرفه اقتصادی ندارد.

ب - فلز واسطه موجود در کاتالیزگر واکنش بسپارش اتن، چگالی زیادی دارد و در برابر خوردگی مقاوم است.

ج - محلول کاتالیزگر واکنش گاز اتن و گاز کلر، در واکنش با محلول سدیم هیدروکسید، رسوب سبزرنگ تولید می کند.

د - کاتالیزگر واکنش استری شدن، کاتالیزگر واکنش آبکافت استرها و کاتالیزگر واکنش تولید اتانول از اتن، مشابه هستند.

(۴) «ب» و «د»

(۳) «ب» و «ج»

(۲) «الف» و «د»

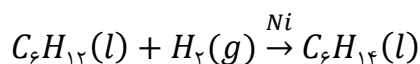
(۱) «الف» و «ج»

(متوسط - خط به خط و مفهومی - استاندارد) - صفحه ۱۲۳ - ۱۱۰۳

پاسخ: گزینه ۲

عبارت های (الف) و (د) درست هستند.

الف) واکنش سیرشدن ۱-هگزن به صورت زیر است:



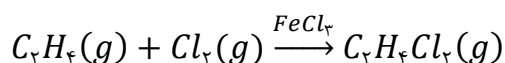
پس کاتالیزگر این واکنش، فلز نیکل است. استفاده از گیاه برای استخراج فلزها برای نیکل و روی برخلاف مس و طلا صرفه اقتصادی ندارد.

ب) دو کاتالیزگر در واکنش بسپارش گاز اتن شرکت دارند. در یکی از کاتالیزگرها فلز آلومینیم و در کاتالیزگر دیگر فلز تیتانیم وجود دارد.

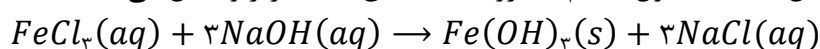
پس فلز واسطه موجود در کاتالیزگر واکنش بسپارش گاز اتن، تیتانیم است. تیتانیم فلزی محکم، با چگالی کم و مقاوم در برابر

خوردگی بوده و یکی از کاربردهای آن استفاده در بدنه دوچرخه است.

ج) واکنش گاز اتن و گاز کلر به صورت زیر است:



کاتالیزگر این واکنش، آهن (III) کلرید است. محلول این ماده با محلول سدیم هیدروکسید مطابق معادله زیر واکنش می دهد:



رسوب تولیدشده در این واکنش، قرمز رنگ است.

د) کاتالیزگر هر ۳ واکنش ذکرشده سولفوریک اسید (H_2SO_4) است. یک نکته که بد نیست به آن اشاره کنیم این است که کاتالیزگر

واکنش رفت کاتالیزگر واکنش برگشت نیز خواهد بود. به عنوان مثال، واکنش استری شدن و آبکافت استرها که معکوس یکدیگر

هستند، کاتالیزگر مشابه دارند.

