



گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی

آزمون ماز | پایه یازدهم



جمع بندی پایه یازدهم
(بر اساس تمرینات کتاب درسی و سوالات امتحانی)



ویژه دانش آموزان پایه یازدهم

دفترچه پاسخ

پنجشنبه ۲۸ خردادماه ۱۴۰۵

- ✓ پاسخنامه سریع؛ برای بررسی فوری بعد از آزمون
- ✓ تحلیل تمام گزینه های هر سؤال؛ برای بررسی سؤالاتی که پاسخ نادرست داده اید
- ✓ نکات و درسنامه های آموزشی؛ برای یادگیری کامل مباحث هر سؤال
- ✓ مشاوره تستی؛ برای یادگیری انواع روش های حل تست
- ✓ استراتژی آزمون؛ برای یادگیری مدیریت زمان و مدیریت جلسه آزمون

دیس	مسئول درس	طراحان	ویراستاران
ریاضیات	مہرداد کیوان حسین شفیع زاده سید جواد نظری	مہرداد کیوان - حسین شفیع زاده حسن محمد بیگی - رسول حاجی زاده	ندا فرہختی مائدہ بادن فیروز - حمید رضا ولی پور یزدان نیک قدم - فواد خیر آبادی
فیزیک	حسین عبدوی نژاد محمد جواد سورچی	حسین عبدوی نژاد - محمد جواد سورچی سجاد صادقی زاده - سعید احمدی مہدی پارسا - مروارید شاہ حسینی	مروارید شاہ حسینی ایلیا فقیہ میرزایی علیرضا ملک حسینی
شیمی	علی ترابی	علی ترابی - فرہنگ امیری پرہام تیزی - طاہا حق بین	محمد مہدی معظمی طاہا حق بین محمد دارابی جم امیر علی حسینی فرد

تیم اجرایی و تولید آزمون

نازنین امیری

مائدہ بادن فیروز

زہرہ جعفری

مروارید شاہ حسینی

مدیر تولید آزمون: محدثہ شیخعلی



یک تیم با بیش از ۵۰۰ نفر در حال کار هستند تا آزمون‌های ما را با حداکثر کیفیت حاضر بشن و به شما کمک کنند و مسیر موفقیت رو براتون ساده تر کنند. همیشه از نظرات و کامنت‌های خوبتون انرژی می‌گیریم. مرسی که همراهمون هستید. راستی! حتماً در نظر سنجی آزمون شرکت کنید و نظرات و پیشنهاداتتون رو برامون بنویسین.

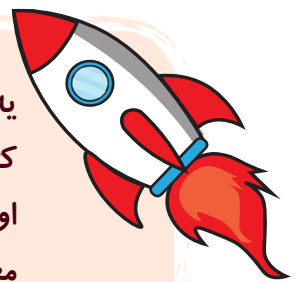
دکتر رسول خنجری



Hi !

بچه‌ها!!!

الان که آخرین آزمون رو دادین، رسماً وارد مود تابستون شدین ولی یه نکته مهم رو یادتون باشه؛ اگه تابستون کلاً کتاب و درس رو بذارین کنار، اول مهر دوباره باید از صفر راه بیفتین. ما نمی‌گیم مثل سال تحصیلی درس بخونین؛ فقط روزی حدود دو ساعت، یا هفته‌ای حدود ۱۰ ساعت، یه برنامه سبک داشته باشین تا از فضای درس فاصله نگیرین. همین مقدار کم باعث میشه ذهنتون آماده و سر حال بمونه و شروع سال تحصیلی براتون خیلی راحت‌تر باشه.



یه حرکت خفن‌تر هم هست!

کتاب‌های پایه بعدی رو یه کم پیش‌خوانی کنین. نه اینکه کامل یاد بگیرین؛ فقط یه آشنایی اولیه پیدا کنین و ببینین قراره با چه مباحثی روبه‌رو بشین. این کار یه مزیت بزرگ داره؛ وقتی معلم درس جدید رو شروع می‌کنه، مطالب براتون کاملاً ناآشنا نیست و راحت‌تر با کلاس همراه می‌شین.

معمولاً دانش‌آموزی که فعال‌تره و بیشتر در بحث‌های کلاس شرکت می‌کنه، فرصت‌های بیشتری برای یادگیری پیدا می‌کنه. وقتی چند بار جواب درست بدی، هم اعتمادبه‌نفست بیشتر میشه و هم معلم متوجه آمادگی و تلاش تو میشه. این یعنی رشد سریع‌تر!



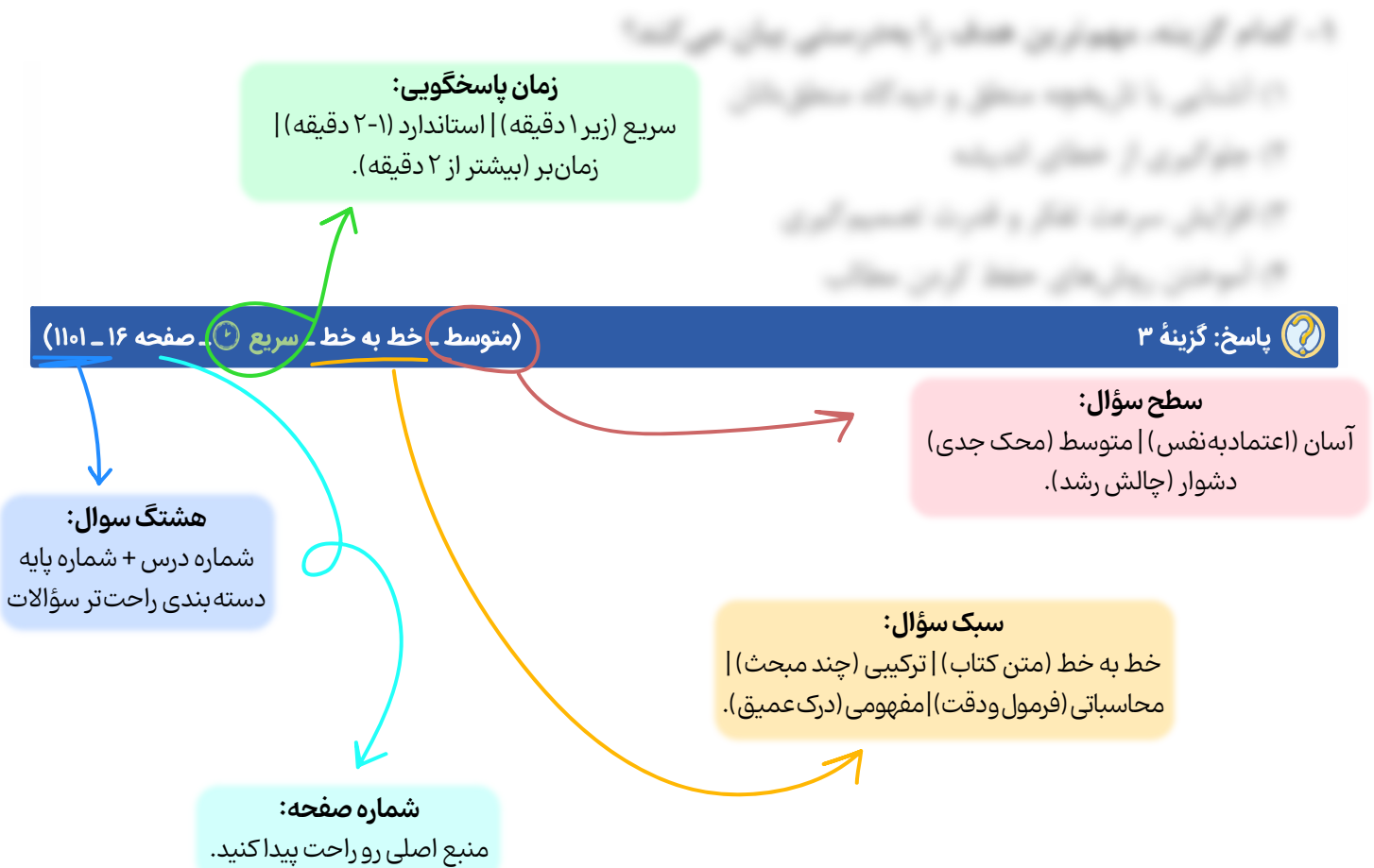
یه راز مهم آخرش بگم؟

اول مهر اگه آماده و بانگیزه وارد کلاس بشی، از همون روزهای اول یه تصویر قوی از خودت می‌سازی. بعد از اون هم خودت و هم اطرافیانت انتظار بیشتری ازت دارن و همین موضوع می‌تونه به حفظ روند پیشرفتت کمک کنه.

پس تابستون فقط فصل استراحت نیست؛ فرصتیه برای اینکه با روزی دو ساعت سرمایه‌گذاری، نسخه قوی‌تر خودت رو برای سال بعد بسازی

برای اینکه بتونی منظم‌تر پیش بری و روند پیشرفتت رو ببینی، می‌تونی تابستون رو همراه آزمون‌های ماز جلو ببری.

راهنمای پاسخنامه آزمون‌ها



یادتون باشه:

- ✓ هر سؤال یک فرصت یادگیری، نه یک مانع.
- ✓ پاسخنامه فقط جواب نیست؛ یک کارگاه آموزشی کامله.
- ✓ با هر آزمون و مرور این پاسخنامه، یک پله بالاتر می‌رید و یک قدم به رؤیایون نزدیک‌تر می‌شید.
- ✓ موفقیت فقط برای کسانی که با برنامه و انگیزه حرکت می‌کنن. شما همون آدمید.



برای دیدن پاسخنامه ویدئویی آزمون
QRcode بالا را اسکن کنید!
یا بر روی لینک زیر کلیک کنید!
پاسخنامه ویدئویی

حسابان ۱: کل کتاب
هندسه ۲: کل کتاب
آمار و احتمال: کل کتاب

بودجه‌بندی
این آزمون

حسابان ۱: این مباحث در مجموع ۱۰ تست از ۴۰ تست کنکور را پوشش داده است.
هندسه ۲: این مباحث در مجموع ۴ تست از ۴۰ تست کنکور را پوشش داده است.
آمار و احتمال: این مباحث در مجموع ۴ تست از ۴۰ تست کنکور را پوشش داده است.

سهم در
کنکور

۱- مجموع اعداد دو رقمی مضرب ۷ برابر k است. مقدار $\sqrt{k+1}$ کدام است؟

۲۸ (۴)

۲۷ (۳)

۲۶ (۲)

۲۵ (۱)

(آسان - خطبه‌خط - سریع) - حسابان ۱ صفحه ۶ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۳

ابتدا تعداد جملات را به دست می‌آوریم. قدرنسبت دنباله حسابی برابر ۷ است. جملات دنباله به صورت زیر است:

$$14, 21, 28, \dots, 98 \Rightarrow a_1 = 14, d = 7$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$98 = 14 + (n-1) \times 7 \Rightarrow n = 13$$

$$S_{13} = \frac{13}{2} (a_1 + a_{13}) = \frac{13}{2} (14 + 98) = 728$$

$$\Rightarrow \sqrt{k+1} = \sqrt{729} = 27$$

دنباله حسابی

در دنباله حسابی هر جمله با اضافه شدن عددی ثابت (d) به نام قدرنسبت به جمله قبل از آن به دست می‌آید، پس جمله عمومی (جمله n ام) آن برابر است با:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

مجموع n جمله اول از یک دنباله حسابی برابر است با:

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n) = \frac{n}{2} (2a_1 + (n-1)d)$$



۲- مجموع ریشه‌های معادله $x^2 + (m+2)x + m - 2 = 0$ واحد از حاصل ضرب ریشه‌های آن بیشتر است. مقدار m کدام است؟

صفر (۴)

۱ (۳)

۴ (۲)

-۴ (۱)

(آسان - خطبه‌خط - سریع) - حسابان ۱ صفحه ۸ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۴

ترجمه فارسی به ریاضی

$$S = P + m$$

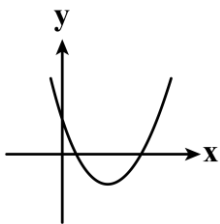
«مجموع ریشه‌ها m واحد از حاصل ضرب ریشه‌ها بیشتر است.» یعنی:

$$\begin{cases} S = -\frac{b}{a} \\ P = \frac{c}{a} \end{cases} \Rightarrow \frac{-(m+2)}{1} = m + \frac{m-2}{1} \Rightarrow -m-2 = m-2 \Rightarrow 2m = 0 \Rightarrow m = 0$$

در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ با شرط $\Delta > 0$ ، مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها (بدون حل آن) برابر است با:

• $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$: مجموع ریشه‌ها:

• $P = x_1 x_2 = \frac{c}{a}$: حاصل ضرب ریشه‌ها:



۳- نمودار سهمی $y = x^2 - 2(2a+1)x - a$ به صورت مقابل است. حدود a کدام است؟

(۲) $-\frac{1}{2} < a < -\frac{1}{4}$

(۱) $-\frac{1}{2} < a < 0$

(۴) $a < -1$

(۳) $-\frac{1}{4} < a < 0$

(متوسط - ترکیبی - استاندارد ۱) - حسابان ۱ صفحه ۱۲ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۳

صفرهای سهمی هر دو مثبت‌اند، به عبارت دیگر معادله $y = 0$ دارای دو ریشه متمایز مثبت است، پس $\Delta > 0$ ، $S > 0$ و $P > 0$ است:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4(2a+1)^2 + 4a > 0 \Rightarrow (2a+1)^2 + a > 0 \Rightarrow 4a^2 + 5a + 1 > 0 \xrightarrow[\text{تعیین علامت}]{4+1=5} a < -1 \text{ یا } a > -\frac{1}{4} \\ 2(2a+1) > 0 \Rightarrow 2a+1 > 0 \Rightarrow a > -\frac{1}{2} \\ -a > 0 \Rightarrow a < 0 \end{cases}$$

از اشتراک شرایط بالا به نامساوی $-\frac{1}{4} < a < 0$ می‌رسیم.

صفرهای تابع

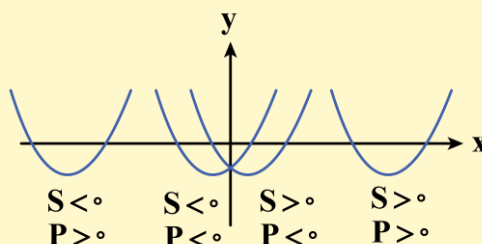
صفرهای تابع $y = f(x)$ محل تلاقی نمودار f و محور x هستند و از حل معادله $y = 0$ به دست می‌آیند.

در تابع درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$ با شرط $\Delta > 0$ ، صفرهای تابع که از حل معادله $ax^2 + bx + c = 0$ به دست می‌آیند محل تلاقی سهمی و محور x هستند.

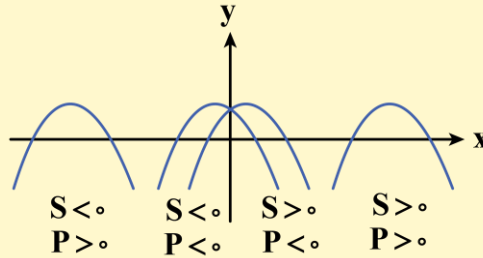
حالات مختلف برای مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها

اگر $\Delta > 0$ باشد:

$a > 0$:



$a < 0$:



۴- حاصل ضرب جواب‌های معادله $|x+1| + 2|x| = 5$ کدام است؟

$\frac{4}{3}$ (۴)

$-\frac{16}{3}$ (۳)

$-\frac{8}{3}$ (۲)

$\frac{32}{3}$ (۱)

(متوسط - خط‌به‌خط - استاندارد) - حسابان ۱ صفحه ۲۴ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۲

با توجه به تعیین علامت درون قدرمطلق‌ها برای x ، سه حالت در نظر می‌گیریم:

x	-1	0
$x+1$	-	+
x	-	+

۱) $x < -1$ $\xrightarrow{x+1 < 0, x < 0} -x-1-2x=5 \Rightarrow x=-2$ ✓

۲) $-1 \leq x \leq 0$ $\xrightarrow{x+1 \geq 0, x \leq 0} x+1-2x=5 \Rightarrow x=-4$ ✗

۳) $x > 0$ $\xrightarrow{x+1 > 0, x > 0} x+1+2x=5 \Rightarrow x=\frac{4}{3}$ ✓

حاصل ضرب جواب‌ها برابر $-\frac{8}{3}$ است.

حل معادلات قدرمطلق

برای حل معادلات قدرمطلق عبارات داخل قدرمطلق را تعیین علامت می‌کنیم و در هر قسمت با توجه به علامت عبارت، قدرمطلق را حذف می‌کنیم و معادله حاصل را حل می‌کنیم و چک می‌کنیم که جواب به دست آمده مربوط به محدوده x های همان قسمت باشد.



۵- اگر $A(3, a)$ ، $B(1, 1)$ و $C(1-a, 5)$ سه رأس مستطیل $ABCD$ باشند، مساحت مستطیل چقدر است؟

۵ (۴)

۸ (۳)

۱۰ (۲)

۶ (۱)

(متوسط - ترکیبی - استاندارد) - حسابان ۱ صفحه ۳۰ و ۳۱ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۲

شکل فرضی مقابل را در نظر می‌گیریم:



ابتدا مقدار a را می‌یابیم. اضلاع AB و BC بر هم عمودند، بنابراین:

$$m_{AB} = \frac{a-1}{3-1} = \frac{a-1}{2}$$

$$m_{BC} = \frac{5-1}{1-a-1} = -\frac{4}{a}$$

$$AB \perp BC \Rightarrow m_{AB} \times m_{BC} = -1 \Rightarrow \frac{a-1}{2} \times \left(-\frac{4}{a}\right) = -1 \Rightarrow -4a + 4 = -2a \Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow a = 2$$

حال با داشتن a طول اضلاع را می‌یابیم:

$$\begin{cases} A(3, 2) \\ B(1, 1) \end{cases} \Rightarrow AB = \sqrt{(3-1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{5}$$

$$\begin{cases} B(1, 1) \\ C(-1, 5) \end{cases} \Rightarrow BC = \sqrt{(1-(-1))^2 + (1-5)^2} = \sqrt{20}$$

$$S = AB \times BC = \sqrt{5} \times \sqrt{20} = 10$$

و مساحت مستطیل برابر است با:

فاصله دو نقطه

فاصله دو نقطه $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ برابر است با:

$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

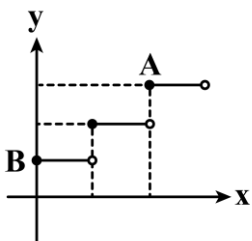
شیب خطوط موازی یا عمود برهم

اگر دو خط با هم موازی باشند، شیب آن‌ها با هم برابر است:

$$d \parallel d' \Rightarrow m_d = m_{d'}$$

اگر دو خط بر هم عمود باشند، شیب آن‌ها عکس و قرینه هم است:

$$m_d = \frac{-1}{m_{d'}} \text{ یا } m_d \times m_{d'} = -1$$



۶- نمودار تابع $f(x) = 2\left[\frac{x}{3}\right] + 1$ به صورت مقابل است. شیب پاره خط AB کدام است؟

$\frac{2}{3}$ (۲)
 $\frac{4}{3}$ (۴)

$\frac{3}{2}$ (۱)
 $\frac{2}{3}$ (۳)

(متوسط - خط به خط - استاندارد) - حسابان ۱ صفحه ۵۳ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۲

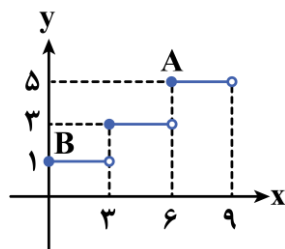
$$0 \leq x < 3 \Rightarrow 0 \leq \frac{x}{3} < 1 \Rightarrow \left[\frac{x}{3}\right] = 0 \Rightarrow f(x) = 2(0) + 1 = 1$$

$$3 \leq x < 6 \Rightarrow 1 \leq \frac{x}{3} < 2 \Rightarrow \left[\frac{x}{3}\right] = 1 \Rightarrow f(x) = 2(1) + 1 = 3$$

$$6 \leq x < 9 \Rightarrow 2 \leq \frac{x}{3} < 3 \Rightarrow \left[\frac{x}{3}\right] = 2 \Rightarrow f(x) = 2(2) + 1 = 5$$

محور x ها را به صورت زیر بازه بندی می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 3 \\ 3 & 3 \leq x < 6 \\ 5 & 6 \leq x < 9 \end{cases}$$



$$\Rightarrow \begin{cases} A(6, 5) \\ B(0, 1) \end{cases} \Rightarrow m = \frac{5-1}{6-0} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

جزء صحیح

برای رسم توابع شامل جزء صحیح یا حل معادلات شامل جزء صحیح، دامنه تابع را به زیر بازه‌هایی تقسیم می‌کنیم که در هر کدام از آن بازه‌ها عبارت داخل جزء صحیح عدد صحیح ثابتی شود، با جای‌گذاری آن به جای جزء صحیح تابع را ساده می‌کنیم و به صورت تابع چندضابطه‌ای می‌نویسیم.



۷- تابع $f(x) = x^2 - 2x + 4$ با دامنه $(-\infty, 1]$ مفروض است. اگر $f^{-1}(x) = 1 + a\sqrt{x+b}$ باشد، حاصل $a+b$ کدام است؟

(۱) -۴ (۲) ۴ (۳) ۲ (۴) -۲

(متوسط - خط‌به‌خط - استاندارد) - حسابان ۱ صفحه ۶۱ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۱

$$y = x^2 - 2x + 4 = (x-1)^2 + 3$$

$$\Rightarrow y - 3 = (x-1)^2 \Rightarrow x-1 = \pm\sqrt{y-3}$$

دامنه f و در نتیجه برد f^{-1} برابر بازه $(-\infty, 1]$ است، پس حالت $-\sqrt{y-3}$ قابل قبول است.

$$x-1 = -\sqrt{y-3} \Rightarrow x = 1 - \sqrt{y-3} \Rightarrow f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x-3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -3 \end{cases} \Rightarrow a+b = -4$$

تابع وارون

برای یافتن ضابطه تابع وارون تابع f یک‌به‌یک، کافی است x را بر حسب y بنویسیم (x را تنها کنیم) سپس با جابه‌جایی x و y ، ضابطه f^{-1} به دست می‌آید.

برد و دامنه تابع و وارون آن

$$D_{f^{-1}} = R_f$$

$$R_{f^{-1}} = D_f$$



۸- اگر $f(x) = 2 + \sqrt{3-x}$ و $g(x) = 2 + \sqrt{4-x}$ باشد، دامنه $\text{gof}(x)$ شامل چند عدد صحیح است؟

(۱) ۵ (۲) ۴ (۳) ۳ (۴) ۲

(متوسط - مفهومی - استاندارد) - حسابان ۱ صفحه ۶۷ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۱

$$\begin{cases} 4-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 4 \Rightarrow D_g = (-\infty, 4] \\ 3-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 3 \Rightarrow D_f = (-\infty, 3] \end{cases}$$

$$D_{\text{gof}} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \leq 3 \mid 2 + \sqrt{3-x} \leq 4\} = \{x \leq 3 \mid 3-x \leq 4\} = \{x \leq 3 \mid x \geq -1\} = [-1, 3]$$

این بازه شامل ۵ عدد صحیح ۱، ۰، ۱، ۲، ۳ است.

تابع مرکب

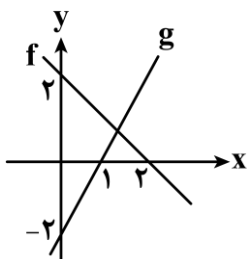
اگر f و g دو تابع با دامنه‌های D_f و D_g باشند، آن‌گاه:

$$\bullet \text{fog}(x) = f(g(x))$$

$$\bullet D_{\text{fog}} = \{x \mid x \in D_g, g(x) \in D_f\}$$

به طور مشابه:

- $\text{gof}(x) = g(f(x))$
- $D_{\text{gof}} = \{x \mid x \in D_f, f(x) \in D_g\}$

۹- نمودار توابع خطی f و g به صورت مقابل است. ضابطه تابع $(f+g)$ کدام است؟

(۱) $2-x$

(۲) $2x-2$

(۳) $2-2x$

(۴) $4-x$

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - حسابان ۱ صفحه ۶۹ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۱

ضابطه‌های f و g یعنی معادله خط‌ها را می‌نویسیم:

$$f: (0, 2)(2, 0) \Rightarrow m = \frac{2-0}{0-2} = -1, \text{ عرض از مبدأ} = 2 \Rightarrow y = -x + 2$$

$$g: (0, -2)(1, 0) \Rightarrow m = \frac{-2-0}{0-1} = 2, \text{ عرض از مبدأ} = -2 \Rightarrow y = 2x - 2$$

$$\begin{cases} f(x) = -x + 2 \\ g(x) = 2x - 2 \end{cases} \Rightarrow (f+g)(x) = x: \text{ تابع همانی}$$

$$\Rightarrow (f+g) \circ f(x) = (f+g)(f(x)) = f(x) = 2-x$$


 اعمال روی توابع

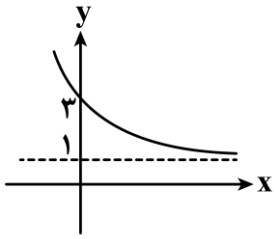
$$\bullet (f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad D_{f+g} = D_f \cap D_g$$

$$\bullet (f-g)(x) = f(x) - g(x) \quad D_{f-g} = D_f \cap D_g$$

$$\bullet (fg)(x) = f(x) \times g(x) \quad D_{(fg)} = D_f \cap D_g$$

$$\bullet \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}$$





۱۰- نمودار تابع $f(x) = a + 2^{b-x}$ به صورت مقابل است. مقدار $\log_2^{(3+ab)}$ کدام است؟

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۴

(متوسط - خط به خط - استاندارد) - حسابان ۱ صفحه ۷۸ - ۱۱۰۳

پاسخ: گزینه ۲

$$R_f = (1, +\infty)$$

با توجه به شکل، $a=1$ است.

$$f(0) = 3 \Rightarrow 1 + 2^b = 3 \Rightarrow 2^b = 2 \Rightarrow b = 1$$

$$\log_2^{(3+ab)} = \log_2^{(3+1)} = \log_2^4 = 2$$

بنابراین:

تابع نمایی

تابع نمایی $y = a + k^{(x+b)}$ از انتقال نمودار $y = k^x$ به اندازه $|a|$ واحد در راستای عمودی و $|b|$ واحد در راستای افقی به دست می آید. توجه کنید که برد تابع $y = k^{(x+b)}$ برابر با $(0, +\infty)$ است و برد تابع $y = a + k^{(x+b)}$ برابر با $(a, +\infty)$ است.

لگاریتم

$$\log_a^b = c \Leftrightarrow b = a^c$$

ویژگی های لگاریتم

بر این اساس به شرط تعریف شده بودن هر کدام از لگاریتم ها، می توان گفت:

$$۱) \log_a^a = 1, \log_a^1 = 0$$

$$۳) \log_b^a = \frac{1}{\log_a^b}$$

$$۲) \log_{a^m}^{b^n} = \frac{n}{m} \log_a^b$$

$$۴) \log_a^{(bc)} = \log_a^b + \log_a^c$$

$$۵) \log_a^{\frac{b}{c}} = \log_a^b - \log_a^c$$

$$۶) c \log_a^b = b \log_a^c \xrightarrow{\text{نتیجه}} a \log_a^b = b \log_a^a = b$$



۱۱- اگر $x=1$ یک جواب معادله $\log_2^x + \log_2^{(k-x)} = 2$ باشد، جواب دیگر معادله کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{4}$ (۲) ۲ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) ۴

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - حسابان ۱ صفحه ۸۸ - ۱۱۰۳

پاسخ: گزینه ۴

روش اول

می دانیم $\log_c^a + \log_c^b = \log_c^{ab}$. پس:

$$\log_2^x + \log_2^{(k-x)} = 2 \Rightarrow \log_2^{x(k-x)} = 2 \Rightarrow x(k-x) = 4 \Rightarrow x^2 - kx + 4 = 0$$

$$\xrightarrow{x=1} 1 - k + 4 = 0 \Rightarrow k = 5$$

$$\Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 4: \text{ریشه دیگر} \end{cases}$$

ریشه‌های معادله در معادله صدق می‌کنند:

$$\log_7^x + \log_7^{(k-x)} = 2 \xrightarrow{x=1} \log_7^1 + \log_7^{(k-1)} = 2$$

$$\Rightarrow \log_7^{(k-1)} = 2 \Rightarrow k-1=4 \Rightarrow k=5$$

$$\Rightarrow \log_7^x + \log_7^{(5-x)} = 2 \Rightarrow \log_7^{x(5-x)} = 2$$

$$\Rightarrow x(5-x) = 4 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=4 \end{cases}$$

جواب دیگر: ۴

••• i/o •••

۱۲- اگر $\log_3^5 = 1/5$ و $\log_3^2 = 1/6$ باشد، حاصل $\log_3^6$ کدام است؟

(۴) ۳/۶

(۳) ۳/۷۵

(۲) ۳/۵

(۱) ۳/۸۵

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - حسابان ۱ صفحه ۹۰ - ۱۱۰۳

پاسخ: گزینه ۳

می‌دانیم که $\log_b^a = \frac{1}{\log_a^b}$ است. پس:

$$\log_3^6 = \log_3^{(3 \times 2)} = \log_3^3 + \log_3^2 = 1 + \log_3^{(4 \times 5)} = 1 + \log_3^4 + \log_3^5$$

$$= 1 + 2\log_3^2 + \log_3^5 = 1 + \frac{2}{\log_3^2} + \log_3^5$$

$$= 1 + \frac{2}{1/6} + 1/5 = 1 + \frac{12}{1} + 1/5 = 1 + 12 + 1/5 = 13 + 1/5 = 3/75$$

••• i/o •••

۱۳- طول کمان مقابل به زاویه α (برحسب رادیان) در دایره‌ای به شعاع ۶ برابر 4π است. حاصل $\sin \alpha \cdot \cos 2\alpha$ کدام است؟

(۴) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$

(۳) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

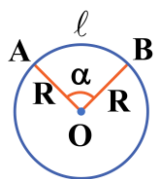
(۲) $\frac{1}{4}$

(۱) $-\frac{1}{4}$

(متوسط - ترکیبی - استاندارد) - حسابان ۱ صفحه ۹۴ - ۱۱۰۴

پاسخ: گزینه ۴

با استفاده از فرمول طول کمان داریم:



$$l = R\alpha \Rightarrow 4\pi = 6\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{2\pi}{3}$$

$$\sin \alpha \cdot \cos 2\alpha = \sin \frac{2\pi}{3} \cos \frac{4\pi}{3} = \sin(\pi - \frac{\pi}{3}) \cos(\pi + \frac{\pi}{3})$$

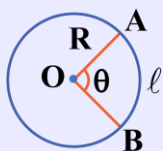
$$= (\sin \frac{\pi}{3})(-\cos \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}(-\frac{1}{2}) = -\frac{\sqrt{3}}{4}$$

بنابراین:

طول کمان

در دایره‌ای به شعاع R، طول کمان مقابل به زاویه مرکزی θ (رادیان) برابر است با:

$$l = R\theta$$



- $\sin(\pi + \theta) = -\sin \theta$
- $\cos(\pi + \theta) = -\cos \theta$
- $\tan(\pi + \theta) = +\tan \theta$
- $\cot(\pi + \theta) = +\cot \theta$
- $\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$
- $\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$
- $\tan(\pi - \theta) = -\tan \theta$
- $\cot(\pi - \theta) = -\cot \theta$



۱۴- حاصل $A = \frac{2\cos 110^\circ - \sin 20^\circ}{\cos 250^\circ + 3\sin 160^\circ}$ کدام است؟

$$\frac{1}{4} \quad (۴)$$

$$-\frac{1}{2} \quad (۳)$$

$$-\frac{3}{2} \quad (۲)$$

$$\frac{3}{4} \quad (۱)$$

(متوسط - ترکیبی - استاندارد ۱) - حسابان ۱ صفحه ۱۰۰ تا ۱۰۳ - ۱۱۰۴

پاسخ: گزینه ۳ 

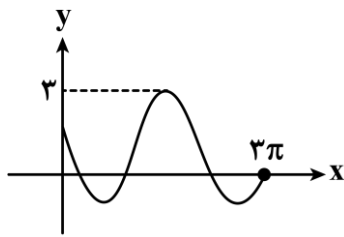
$$A = \frac{2\cos(90^\circ + 20^\circ) - \sin(180^\circ + 20^\circ)}{\cos(270^\circ - 20^\circ) + 3\sin(180^\circ - 20^\circ)} = \frac{-2\sin 20^\circ - (-\sin 20^\circ)}{-\sin 20^\circ + 3\sin 20^\circ} = \frac{-\sin 20^\circ}{2\sin 20^\circ} = -\frac{1}{2}$$

نسبت‌های مثلثاتی $(\frac{\pi}{2} \pm \theta)$ و $(\frac{3\pi}{2} \pm \theta)$ 

فرض می‌کنیم که θ یک زاویه حاده است:

ربع اول	ربع دوم
$\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos \theta$	$\sin(\frac{\pi}{2} + \theta) = \cos \theta$
$\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin \theta$	$\cos(\frac{\pi}{2} + \theta) = -\sin \theta$
$\tan(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cot \theta$	$\tan(\frac{\pi}{2} + \theta) = -\cot \theta$
$\cot(\frac{\pi}{2} - \theta) = \tan \theta$	$\cot(\frac{\pi}{2} + \theta) = -\tan \theta$
ربع سوم	ربع چهارم
$\sin(\frac{3\pi}{2} - \theta) = -\cos \theta$	$\sin(\frac{3\pi}{2} + \theta) = -\cos \theta$
$\cos(\frac{3\pi}{2} - \theta) = -\sin \theta$	$\cos(\frac{3\pi}{2} + \theta) = \sin \theta$
$\tan(\frac{3\pi}{2} - \theta) = \cot \theta$	$\tan(\frac{3\pi}{2} + \theta) = -\cot \theta$
$\cot(\frac{3\pi}{2} - \theta) = \tan \theta$	$\cot(\frac{3\pi}{2} + \theta) = -\tan \theta$





۱۵- قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a + b \sin(x - \frac{\pi}{6})$ به صورت مقابل است. مقدار $a - 2b$ کدام است؟

- (۱) -۳
(۲) ۴
(۳) ۵
(۴) -۱۵

(متوسط - ترکیبی - استاندارد) - حسابان ۱ صفحه ۱۰۹ - ۱۱۰۴

پاسخ: گزینه ۳

با توجه به نمودار، $b < 0$ است و ماکزیمم برابر ۳ است، پس:

$$\sin(x - \frac{\pi}{6}) = -1 \Rightarrow y_{\max} = a - b = 3 \quad (1)$$

نقطه $A(3\pi, 0)$ را در ضابطه تابع قرار می‌دهیم:

$$f(3\pi) = 0 \Rightarrow a + b \sin(3\pi - \frac{\pi}{6}) = 0 \Rightarrow a + b \sin(\pi - \frac{\pi}{6}) = 0 \Rightarrow a + \frac{b}{2} = 0 \Rightarrow b = -2a \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow a - (-2a) = 3 \Rightarrow 3a = 3 \Rightarrow a = 1$$

پس $a = 1$ ، $b = -2$ و در نتیجه $a - 2b = 5$ است.

نمودار تابع سینوسی

در تابع $y = a + b \sin(cx)$ می‌دانیم:

- اگر $bc > 0$ باشد، تابع از نقطه‌ای روی محور y ‌ها در جهت مثبت محور x ‌ها به بالا می‌رود. (به عبارتی در شروع صعودی است.)
- اگر $bc < 0$ باشد، تابع از نقطه‌ای روی محور y ‌ها در جهت مثبت محور x ‌ها به پایین می‌رود. (به عبارتی در شروع نزولی است.)

آنچه خواهید دید... (برای علاقه‌مندان)

دوره تناوب تابع برابر است با:

$$T = \frac{2\pi}{|c|}$$

مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع برابر است با: $y_{\max} = a + |b|$ ، $y_{\min} = a - |b|$

۱۶- اگر α در ناحیه اول، β در ناحیه سوم، $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ و $\sin \beta = -\frac{5}{13}$ باشد، مقدار $\sin(\alpha - \beta)$ چقدر است؟

- (۱) $\frac{33}{65}$ (۲) $-\frac{33}{65}$ (۳) $\frac{63}{65}$ (۴) $-\frac{63}{65}$

(سخت - محاسباتی - زمان‌بر) - حسابان ۱ صفحه ۱۱۲ - ۱۱۰۴

پاسخ: گزینه ۲

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \xrightarrow{\cos \alpha = \frac{3}{5}} \sin^2 \alpha + \frac{9}{25} = 1 \xrightarrow{\alpha \text{ ناحیه اول}} \sin \alpha = \frac{4}{5}$$

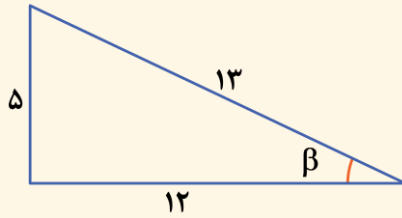
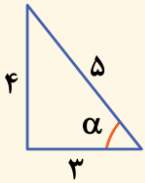
$$\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1 \xrightarrow{\sin \beta = -\frac{5}{13}} \frac{25}{169} + \cos^2 \beta = 1 \xrightarrow{\beta \text{ ناحیه سوم}} \cos \beta = -\frac{12}{13}$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta = \frac{4}{5} \left(-\frac{12}{13}\right) - \frac{3}{5} \left(-\frac{5}{13}\right) = \frac{-48 + 15}{65} = -\frac{33}{65}$$



میانبر!

با میانبر استفاده از تعریف نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه (و ۳ تایی فیثاغورسی در این سؤال) می‌توانستیم به سرعت مقدار سینوس و کسینوس را محاسبه کنیم و علامت آن را از روی ناحیه تعیین کنیم. (البته هیچ وقت در امتحان نهایی این کار رو نکنید! این روش فقط برای حل تستیه نه تشریحی!)

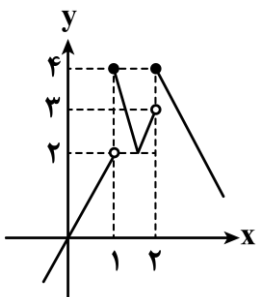


نسبت‌های مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا

$$\bullet \sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

$$\bullet \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$\bullet \tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$$



۱۷- نمودار تابع f به صورت مقابل است. حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left[f\left(\frac{2}{x}\right) \right] + \left[\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \right]$ کدام است؟

(۱) ۳

(۲) ۶

(۳) ۵

(۴) ۴

(سخت - مفهومی/ترکیبی - استاندارد) - حسابان ۱ صفحه ۱۳۵ - ۱۱۰۵

پاسخ: گزینه ۴

وقتی $x \rightarrow 1^+$ ، آن گاه $2^- \rightarrow \frac{2}{x}$ ، پس: $f\left(\frac{2}{x}\right) \rightarrow f(2^-)$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left[f\left(\frac{2}{x}\right) \right] = [f(2^-)] = [3^-] = 2$$

وقتی $x \rightarrow 1^-$ ، آن گاه: $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$

$$\left[\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \right] = [2] = 2$$

پس:

بنابراین جواب برابر $4 = 2 + 2$ است.

دام تستی!

اگر اشتباهی قسمت دوم رو $1 = [2^-]$ حساب کنی تو دام «گزینه ۱» می‌افتی!



۱۸- اگر $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{a - \sqrt{3x+1}}{x^2 - 1} = \frac{a}{b}$ باشد، مقدار b کدام است؟

$$\frac{16}{3} \quad (4)$$

$$\frac{8}{3} \quad (3)$$

$$-\frac{8}{3} \quad (2)$$

$$-\frac{16}{3} \quad (1)$$

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - حسابان ۱ صفحه ۱۴۴ - ۱۱۰۵

پاسخ: گزینه ۱

حاصل حد عدد $\frac{a}{b}$ شده و مخرج کسر به ازای $x=1$ برابر صفر است، پس صورت کسر هم باید به ازای $x=1$ صفر باشد و در نتیجه:

$$a - \sqrt{3+1} = 0 \Rightarrow a = \sqrt{4} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt{3x+1}}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2 - \sqrt{3x+1})(2 + \sqrt{3x+1})}{(x-1)(x+1)(2 + \sqrt{3x+1})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4 - 3x - 1}{(x-1) \times 8} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-3(x-1)}{8(x-1)} = -\frac{3}{8}$$

$$\Rightarrow -\frac{3}{8} = \frac{a}{b} = \frac{2}{b} \Rightarrow b = -\frac{16}{3}$$

رفع ابهام

برای رفع ابهام از حدهایی که به $\frac{0}{0}$ تبدیل می‌شوند (حدودی که حد صورت و حد مخرج برابر صفر است) کافی است عامل صفرکننده را در صورت و مخرج ساده کنیم.

اگر صورت (یا مخرج) شامل عبارت رادیکالی باشد، با ضرب صورت و مخرج در مزدوج صورت (یا مخرج) یا استفاده از اتحاد چاق و لاغر می‌توان عامل صفرکننده را استخراج و ساده کرد.

• • •

۱۹- به ازای کدام مقدار a ، تابع $f(x) = (a - [x])(x + [x])$ در $x=2$ حد دارد؟

$$3 \quad (4)$$

$$\frac{7}{3} \quad (3)$$

$$\frac{8}{3} \quad (2)$$

$$5 \quad (1)$$

(متوسط - خطبه‌خط - سریع) - حسابان ۱ صفحه ۱۴۰ - ۱۱۰۵

پاسخ: گزینه ۱

حد چپ و راست باید برابر باشند.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &\stackrel{[x]=2}{=} (a-2)(2+2) = 4a-8 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &\stackrel{[x]=1}{=} (a-1)(2+1) = 3a-3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 4a-8 = 3a-3 \Rightarrow a = 5$$

وجود حد

شرط آن که تابع f در $x=a$ دارای حد باشد آن است که حد چپ و حد راست f در $x=a$ موجود و با هم مساوی باشند:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \ell$$

• • •

۲۰- کدام تابع زیر روی بازه $(0, 1)$ پیوسته است؟

$$y = \sqrt{x-1} \quad (۴)$$

$$y = \frac{1}{2x-1} \quad (۳)$$

$$y = [x] \quad (۲)$$

$$y = [-x] \quad (۱)$$

(آسان - مفهومی - سریع) - حسابان ۱ صفحه ۱۵۰ - ۱۱۰۵

پاسخ: گزینه ۱

برای پیوسته بودن روی بازه $(0, 1)$ باید روی بازه $(0, 1)$ پیوسته و در $x = 1$ از چپ پیوسته باشد.

بررسی گزینه‌ها:

۱

$$0 < x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -x < 0 \Rightarrow [-x] = -1$$

پس تابع $y = [-x]$ در بازه $(0, 1)$ با تابع ثابت $y = -1$ برابر است و بنابراین پیوسته است.

۲

در $x = 1$ از چپ ناپیوسته است.

۳

در $x = \frac{1}{2}$ ناپیوسته است. (تابع گویا در ریشه مخرج تعریف نشده است.)

۴

بازه $(0, 1)$ در دامنه تابع نیست.

پیوستگی در نقطه

تابع f در $x = a$ پیوسته است اگر f در $x = a$ دارای حد باشد و حد تابع در $x = a$ با مقدار تابع برابر باشد، به عبارت دیگر:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$$

پیوستگی در بازه

۱) تابع f در بازه (a, b) پیوسته است اگر در تمام نقاط این بازه پیوسته باشد.

۲) تابع f در بازه $[a, b]$ پیوسته است اگر در (a, b) پیوسته و در $x = a$ از راست پیوسته باشد.

۳) تابع f در بازه $(a, b]$ پیوسته است اگر در (a, b) پیوسته و در $x = b$ از چپ پیوسته باشد.

۴) تابع f در بازه $[a, b]$ پیوسته است اگر در (a, b) پیوسته، در $x = a$ از راست پیوسته و در $x = b$ از چپ پیوسته باشد.



$$۲۱- \text{تابع } f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{ax^2} & x < 0 \\ 2x + 6 & x \geq 0 \end{cases} \text{ در } x = 0 \text{ پیوسته است. مقدار } \frac{1}{a} \text{ کدام است؟}$$

۴ (۴)

۶ (۳)

۱۲ (۲)

۸ (۱)

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - حسابان ۱ صفحه ۱۵۱ - ۱۱۰۵

پاسخ: گزینه ۲

حد چپ، حد راست و مقدار تابع در $x = 0$ را برابر هم قرار می‌دهیم:

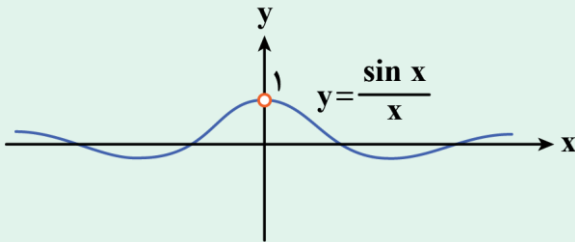
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - \cos x}{ax^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{ax^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{4a \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{2}{4a} \times \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2a} \times 1 = \frac{1}{2a}$$

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 6$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2a} = 6 \Rightarrow 12a = 1 \Rightarrow \frac{1}{a} = 12$$

یک حد فوق مهم که باید از کتاب درسی بلد باشی!

در کتاب به یک حد خاص و مهم اشاره شده که حاصل آن را از روی نمودار به دست می آوریم:



$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

در نتیجه:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \sin x}{bx} = \frac{a}{b}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{x} = a$$

دقت!

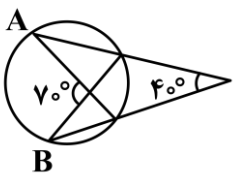
دقت کنید که **کمان جلوی سینوس** و **مخرج** باید **دقیقا یک چیز** باشند تا بتوانیم نتیجه بگیریم که وقتی هر دو به صفر میل می کنند حاصل حد برابر با ۱ است.

$$\lim_{\bigcirc \rightarrow 0} \frac{\sin \bigcirc}{\bigcirc} = 1$$

بنابراین بسیاری از اوقات لازم است با ضرب و تقسیم کردن کسر در یک عدد **مخرج** را **دقیقا مشابه کمان جلوی سینوس** کنیم.



۲۲- در دایره شکل مقابل به شعاع $\frac{18}{\pi}$ ، طول کمان $\widehat{AB}$ برابر کدام است؟



۱۱ (۱)

۷ (۲)

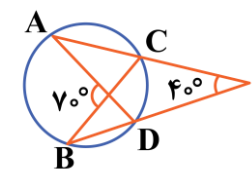
۹ (۳)

۳ (۴)

(آسان - خطبه خط - سریع - هندسه ۲ صفحه ۱۶ - ۱۱۰۱)

پاسخ: گزینه ۱

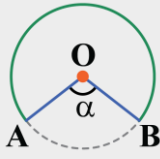
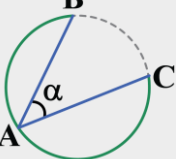
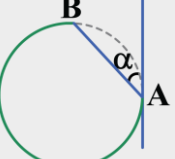
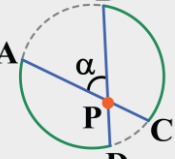
با توجه به شکل، اندازه کمان $\widehat{AB}$ را پیدا می کنیم:

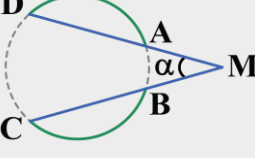
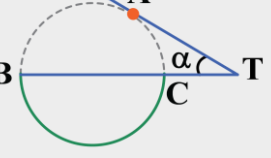
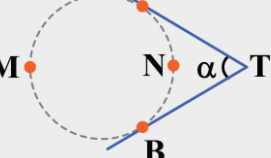


$$\left. \begin{aligned} 70^\circ &= \frac{\widehat{AB} + \widehat{CD}}{2} \Rightarrow \widehat{AB} + \widehat{CD} = 140^\circ \\ 40^\circ &= \frac{\widehat{AB} - \widehat{CD}}{2} \Rightarrow \widehat{AB} - \widehat{CD} = 80^\circ \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{جمع می کنیم}} 2\widehat{AB} = 220^\circ \Rightarrow \widehat{AB} = 110^\circ$$

بنابراین:

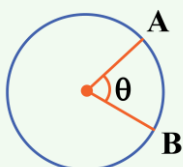
$$\widehat{AB} \text{ طول کمان } = \frac{110^\circ}{360^\circ} 2\pi R = \frac{11}{36} 2\pi \left(\frac{18}{\pi}\right) = 11$$

زاویه مرکزی	زاویه محاطی	زاویه ظلی	زاویه بین دو وتر
برابر با کمان مقابل	برابر با نصف کمان مقابل	برابر با نصف کمان مقابل	نصف مجموع کمان‌های مقابل
			
$\alpha = \widehat{AB}$	$\alpha = \frac{\widehat{BC}}{2}$	$\alpha = \frac{\widehat{AB}}{2}$	$\alpha = \frac{\widehat{AB} + \widehat{CD}}{2}$

زاویه بین امتداد دو وتر	زاویه بین وتر و مماس	زاویه بین دو مماس
نصف تفاضل کمان‌های مقابل	نصف تفاضل کمان‌های مقابل	نصف تفاضل کمان‌های مقابل
		
$\alpha = \frac{\widehat{CD} - \widehat{AB}}{2}$	$\alpha = \frac{\widehat{AB} - \widehat{AC}}{2}$	$\alpha = \frac{\widehat{AMB} - \widehat{ANB}}{2}$

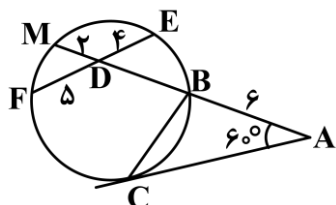
طول کمان

در دایره‌ای به شعاع R، طول کمان $\widehat{AB}$ مقابل زاویه مرکزی θ درجه برابر است با:



$$\widehat{AB} = \frac{\theta}{360^\circ} \times 2\pi R$$

۲۲- با توجه به شکل مقابل، اگر AC بر دایره مماس باشد، آنگاه مساحت مثلث ABC برابر کدام است؟

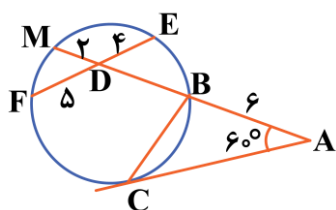


- (۱) ۲۴
- (۲) ۲۷
- (۳) $12\sqrt{3}$
- (۴) $18\sqrt{3}$

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - هندسه ۲ صفحه ۱۹ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۲

با استفاده از روابط طولی در دایره می‌نویسیم:

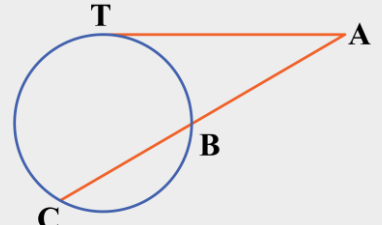
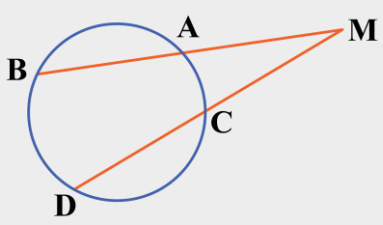
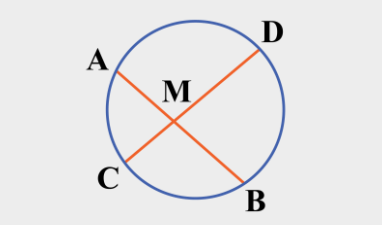


$$\begin{cases} DE \times DF = DM \times DB \Rightarrow 2 \times 4 = 5 \times DB \Rightarrow DB = 1.6 \\ AC^2 = AB \times AM \Rightarrow AC^2 = 6(6 + 1.6 + 2) = 6 \times 9.6 \Rightarrow AC = 6\sqrt{3} \end{cases}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \times AC \sin 60^\circ = \frac{1}{2} (6)(6\sqrt{3})\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 27$$

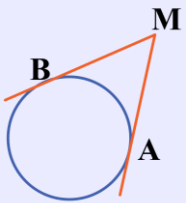
بنابراین:

روابط طولی در دایره

اگر AT در نقطه T بر دایره مماس باشد.	امتداد وترهای AB و CD خارج دایره در نقطه M همدیگر را قطع می‌کنند.	وترهای AB و CD داخل دایره یکدیگر را در نقطه M قطع می‌کنند.
		
$AT^2 = AB \times AC$	$MA \times MB = MC \times MD$	$MA \times MB = MC \times MD$

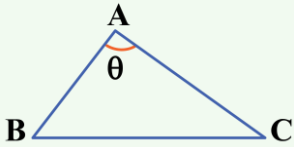
طول مماس بر دایره

طول دو مماس رسم شده بر دایره از نقطه‌ای خارج دایره با هم برابر است.



$$MA = MB$$

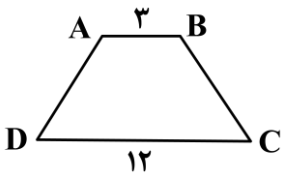
مساحت مثلث با طول دو ضلع و زاویه بین

در هر مثلث با اضلاع AB، AC و زاویه بین $\hat{A} = \theta$ داریم:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin \theta$$



۲۴- در دوزنقه متساوی الساقین ABCD در شکل مقابل، اگر قطر AC بر ساق AD عمود باشد، آنگاه نسبت شعاع دایره محیطی این دوزنقه به شعاع دایره محاطی آن کدام است؟

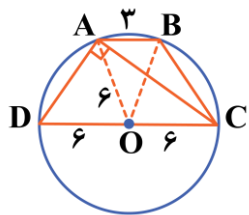


- (۱) ۳
(۲) ۲
(۳) ۴
(۴) $\frac{3}{2}$

(سخت - مفهومی - زمان بر) - هندسه ۲ صفحه ۲۹ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۲

بنابر فرض قطر AC بر ساق AD عمود است، پس مثلث ADC قائم الزویه است و CD قطر دایره محیطی آن است، در نتیجه شعاع دایره محیطی مثلث ADC مساوی نصف وتر DC یعنی برابر ۶ است.



$$OA = OD = OC = 6$$

از طرف دیگر، اگر O مرکز دایره محیطی $\triangle ADC$ باشد، نتیجه می گیریم:
بنابراین:

$$\Rightarrow \begin{cases} OD = OC \\ AD = BC \xrightarrow{\text{(ضرض)}} \triangle OAD \cong \triangle OBC \Rightarrow OA = OB = 6 \\ \hat{D} = \hat{C} \end{cases}$$

دوزنقه متساوی الساقین است.

پس رأس B هم روی دایره محیطی $\triangle ADC$ است، در نتیجه دایره محیطی مثلث ADC، دایره محیطی دوزنقه هم می باشد. یعنی شعاع دایره محیطی این دوزنقه برابر ۶ است. ($R = 6$)
در ضمن قطر دایره محاطی دوزنقه متساوی الساقین محیطی، واسطه هندسی دو قاعده است، پس:

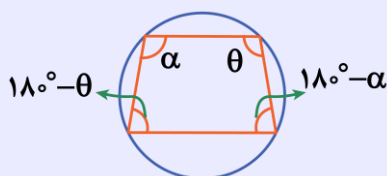
$$(2r)^2 = AB \times DC \Rightarrow 4r^2 = 3 \times 12 \Rightarrow r = 3$$

بنابراین:

$$\frac{\text{شعاع دایره محیطی دوزنقه}}{\text{شعاع دایره محاطی دوزنقه}} = \frac{R}{r} = \frac{6}{3} = 2$$

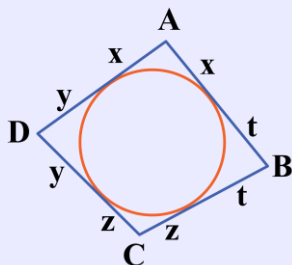
چهارضلعی های محیطی و محاطی

♦ یک چهارضلعی محاطی است اگر و تنها اگر زاویه های روبه رو مکمل باشند.



از مهم ترین چهارضلعی های محاطی دوزنقه متساوی الساقین است.

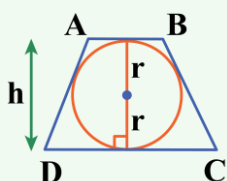
♦ یک چهارضلعی محیطی است اگر و تنها اگر مجموع اضلاع روبه رو با هم برابر باشند.



$$AB + CD = AD + BC = x + y + z + t$$

دوزنقه متساوی الساقین محیطی

دوزنقه ای که هم محاطی و هم محیطی باشد یک دوزنقه متساوی الساقین محیطی است.



در این ذوزنقه‌ها:

۱) طول ساق‌ها میانگین حسابی طول قاعده‌ها است:

$$AD = BC = \frac{AB + CD}{2}$$

۲) طول ارتفاع (قطر دایره محیطی) میانگین هندسی طول قاعده‌ها است:

$$h^2 = (2r)^2 = AB \times CD$$



۲۵- چه تعداد از گزاره‌های زیر همواره درست هستند؟

الف) تبدیل بازتاب نسبت به خط، بی‌شمار نقطه ثابت دارد.

ب) هر تبدیلی که اندازه زاویه را حفظ کند تبدیلی طولی است.

ج) در تجانس با نسبت $\frac{1}{4}$ - جهت شکل عوض می‌شود.

د) انتقال یافته هر خط تحت برداری که موازی آن باشد خود آن خط است.

(۴) ۲

(۳) ۴

(۲) ۳

(۱) ۱

(آسان - مفهومی - سریع ۵) - هندسه ۲ صفحه ۴۸ - ۱۱۰۲

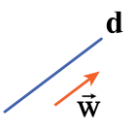
پاسخ: گزینه ۴

بررسی گزینه‌ها:

الف) در تبدیل بازتاب نسبت به خط همه نقاط واقع بر محور بازتاب نقطه ثابت هستند. پس مورد «الف» درست است.

ب) تجانس تبدیلی است که اندازه زاویه را حفظ می‌کند ولی طولی نیست. پس مورد «ب» نادرست است.

ج) تجانس با نسبت مثبت یا منفی جهت شکل را عوض نمی‌کند. پس مورد «ج» نادرست است.

د) انتقال یافته هر خط تحت بردار موازی منطبق می‌شود. در شکل مقابل، بردار $\vec{w}$ با خط d موازی است پس انتقال یافته d تحت $\vec{w}$ بر خود d منطبق می‌شود. پس مورد «د» درست است.

یعنی در مجموع ۲ گزاره همواره درست هستند.

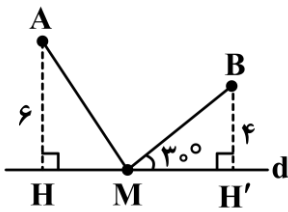
ویژگی‌های تبدیل‌های هندسی

در تبدیل‌های هندسی، ویژگی‌های زیر برقرار است:

ویژگی‌ها					تبدیل‌ها
طولیا	حفظ شیب	حفظ اندازه زاویه	حفظ جهت	نقطه ثابت تبدیل	
✓	✓	✓	✓	x	انتقال
✓	x	✓	x	✓ (محور بازتاب)	بازتاب (محوری)
✓	x	✓	✓	✓ (فقط مرکز دوران)	دوران
x	✓	✓	✓	✓ (فقط مرکز تجانس)	تجانس



۲۶- با توجه به شکل مقابل، نقطه M را روی خط d به گونه‌ای در نظر می‌گیریم که $MA + MB$ کمترین مقدار ممکن باشد، طول پاره خط AB چقدر است؟

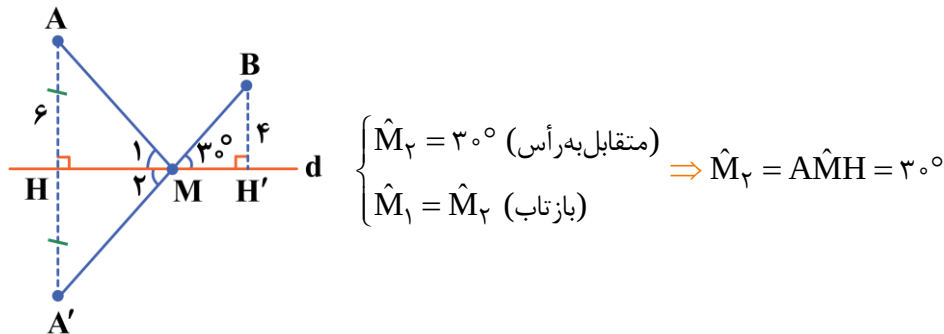


- (۱) ۱۷
(۲) $4\sqrt{19}$
(۳) ۱۸
(۴) $4\sqrt{17}$

(متوسط - ترکیبی - استاندارد) - هندسه ۲ صفحه ۵۲ و ۶۵ - ۱۱۰۲ و ۱۱۰۳

پاسخ: گزینه ۲

با توجه به مسئله هرون، چون نقطه M روی خط d به گونه‌ای قرار دارد که $MA + MB$ کمترین مقدار ممکن را دارد، پس دو زاویه $\widehat{BMH'}$ و $\widehat{AMH}$ مساوی‌اند. در نتیجه:



$$\begin{cases} \widehat{M}_r = 30^\circ \text{ (متقابل به رأس)} \\ \widehat{M}_l = \widehat{M}_r \text{ (بازتاب)} \end{cases} \Rightarrow \widehat{M}_r = \widehat{AMH} = 30^\circ$$

$$\triangle AMH: \widehat{M}_l = 30^\circ \xrightarrow{\sin 30^\circ = \frac{1}{2}} AH = \frac{1}{2} AM \xrightarrow{AH=6} AM = 12$$

$$\triangle BMH': \widehat{BMH'} = 30^\circ \xrightarrow{\sin 30^\circ = \frac{1}{2}} BH' = \frac{1}{2} BM \xrightarrow{BH'=4} BM = 8$$

از طرف دیگر:

$$\widehat{AMH} + \widehat{BMH'} + \widehat{AMB} = 180^\circ \Rightarrow 30^\circ + 30^\circ + \widehat{AMB} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{AMB} = 120^\circ$$

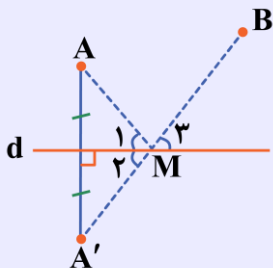
اکنون در $\triangle AMB$ به کمک قضیه کسینوس‌ها، طول AB را پیدا می‌کنیم:

$$AB^2 = AM^2 + BM^2 - 2AM \times BM \cos 120^\circ \Rightarrow AB^2 = 12^2 + 8^2 - 2(12)(8)\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow AB^2 = 144 + 64 + 96 = 304 = 16 \times 19 \Rightarrow AB = 4\sqrt{19}$$

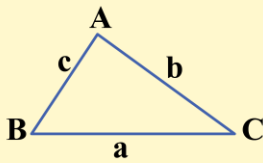
مسئله هرون

برای یافتن نقطه M روی خط d که مجموع فواصل آن از دو نقطه A و B بیرون خط d در یک سمت آن، کمترین مقدار باشد، باید بازتاب A را نسبت به خط d بیابیم و آن را به B وصل کنیم. محل تلاقی آن با d نقطه M است. با توجه به ویژگی‌های بازتاب داریم:



$$\begin{aligned} \widehat{M}_l &= \widehat{M}_r = \widehat{M}_s \\ AM &= A'M \\ AM + MB &= A'B \end{aligned}$$

در مثلث ABC به اضلاع a, b, c داریم:



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times \cos \hat{A}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \times \cos \hat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \times \cos \hat{C}$$



۲۷- در مثلث ABC، $AB = 12$ ، $AC = 16$ و $BC = 14$ است. اگر امتداد نیمساز زاویه داخلی $\hat{A}$ دایره محیطی مثلث را در P قطع کند، اندازه پاره خط AP کدام است؟

۱۸ (۴)

۱۶ (۳)

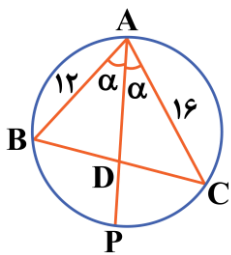
۱۲ (۲)

۱۴ (۱)

(متوسط - ترکیبی/محاسباتی - استاندارد) - هندسه ۲ صفحه ۶۹ - ۱۱۰۳

پاسخ: گزینه ۳

در شکل مقابل، نیمساز AD دایره محیطی $\triangle ABC$ را در نقطه P قطع کرده است. با استفاده از قضیه نیمسازها می‌نویسیم:



$$AD \text{ نیمساز} \Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{BD}{14} = \frac{3}{7} \Rightarrow BD = 6$$

پس $DC = 14 - 6 = 8$ ، در نتیجه طول نیمساز AD برابر است با:

$$AD \text{ نیمساز} \Rightarrow AD^2 = AB \times AC - BD \times DC = 12 \times 16 - 6 \times 8 = 12(16 - 4) \Rightarrow AD^2 = 12^2 \Rightarrow AD = 12$$

اکنون با استفاده از رابطه طولی در دایره داریم:

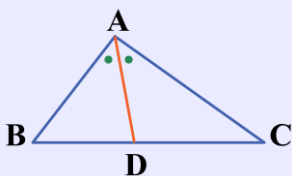
$$AD \times DP = BD \times DC \Rightarrow 12 \times DP = 6 \times 8 \Rightarrow DP = 4$$

بنابراین:

$$AP = AD + DP = 12 + 4 = 16$$

قضیه نیمسازها

۱) در هر مثلث، هر نیمساز زاویه داخلی ضلع مقابل را به نسبت اندازه‌های ضلع‌های آن زاویه تقسیم می‌کند و برعکس.



$$AD \text{ نیمساز} \Leftrightarrow \frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$$

۲) در هر مثلث، مربع اندازه هر نیمساز زاویه داخلی برابر است با:

$$AD^2 = AB \times AC - BD \times DC$$



۲۸- در مثلث ABC با $AB=4$ ، $AC=6$ و $BC=8$ ، نقطه M وسط ضلع BC است. مساحت دایره محیطی مثلث AMC چند برابر π است؟

$\frac{32}{3}$ (۴)

۳۲ (۳)

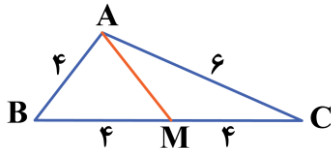
۱۶ (۲)

$\frac{16}{3}$ (۱)

(سخت - مفهومی/ترکیبی - زمان ۵ دقیقه) - هندسه ۲ صفحه ۶۷ - ۱۱۰۳

پاسخ: گزینه ۴

ابتدا با استفاده از قضیه میانه‌ها اندازه میانه AM را پیدا می‌کنیم.



$$2AM^2 = AB^2 + AC^2 - \frac{BC^2}{2} \Rightarrow 2AM^2 = 4^2 + 6^2 - \frac{8^2}{2}$$

$$\Rightarrow 2AM^2 = 16 + 36 - 32 \Rightarrow AM^2 = 10 \Rightarrow AM = \sqrt{10}$$

اکنون در $\triangle AMC$ کسینوس زاویه $\hat{C}$ را به کمک قضیه کسینوس‌ها محاسبه می‌کنیم.

$$\triangle AMC: AM^2 = AC^2 + MC^2 - 2AC \cdot MC \cdot \cos \hat{C} \Rightarrow 10 = 6^2 + 4^2 - 2(6)(4) \cos \hat{C} \Rightarrow \cos \hat{C} = \frac{7}{8}$$

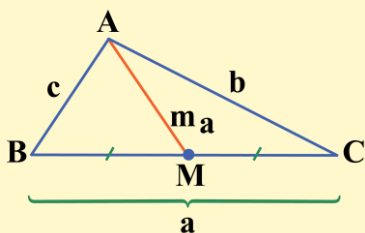
$$\Rightarrow \sin \hat{C} = \sqrt{1 - \cos^2 \hat{C}} = \sqrt{1 - \left(\frac{7}{8}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{8}$$

از طرف دیگر در $\triangle AMC$ به کمک قضیه سینوس‌ها شعاع دایره محیطی آن یعنی R را می‌توان به دست آورد:

$$\frac{AM}{\sin \hat{C}} = 2R \Rightarrow \frac{\sqrt{10}}{\frac{\sqrt{15}}{8}} = 2R \Rightarrow R = \frac{4\sqrt{10}}{\sqrt{15}} \Rightarrow \text{مساحت دایره محیطی} = \pi R^2 = \pi \times \frac{16 \times 10}{15} = \frac{32}{3} \pi$$

قضیه طول میانه‌ها

در مثلث ABC ، اگر $AM = m_a$ باشد، آن‌گاه:



$$2m_a^2 = b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2}$$

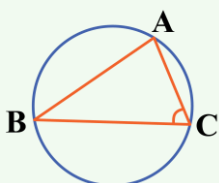
به طور مشابه:

$$2m_b^2 = a^2 + c^2 - \frac{b^2}{2}$$

$$2m_c^2 = a^2 + b^2 - \frac{c^2}{2}$$

قضیه سینوس‌ها

در مثلث ABC ، اگر شعاع دایره محیطی برابر با R باشد، آن‌گاه:



$$2R = \frac{AB}{\sin \hat{C}} = \frac{AC}{\sin \hat{B}} = \frac{BC}{\sin \hat{A}}$$

۲۹- اگر ارزش گزاره ترکیبی $(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge q)$ درست باشد، آن گاه گزاره ترکیبی $(p \wedge \sim q) \Rightarrow q$ با کدام گزاره هم ارز است؟

(۴) $\sim q$ (۳) q (۲) F (۱) T

(متوسط - مفهومی/ترکیبی - سریع) - آمار و احتمال صفحه ۱۰ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۱

یا هر دو گزاره $p \vee q$ و $p \wedge q \sim$ درست هستند:

$$\sim p \wedge q \equiv T \Rightarrow \begin{cases} \sim p \equiv T \Rightarrow p \equiv F \\ q \equiv T \end{cases}$$

یا هر دو گزاره $p \vee q$ و $p \wedge q \sim$ نادرست هستند:

$$p \vee q \equiv F \Rightarrow \begin{cases} p \equiv F \\ q \equiv F \end{cases}$$

بنابراین به هر حال p نادرست است. پس:

$$(p \wedge \sim q) \Rightarrow q \equiv (F \wedge \sim q) \Rightarrow q \equiv F \Rightarrow q \equiv T$$

گزاره‌های مرکب

اگر p و q دو گزاره ساده باشند:

(۱) ترکیب فصلی دو گزاره $(p \vee q)$ است که « p یا q » خوانده می‌شود. $p \vee q$ تنها زمانی نادرست است که هر دو گزاره نادرست باشند.

(۲) ترکیب عطفی دو گزاره $(p \wedge q)$ است که « p و q » خوانده می‌شود. $p \wedge q$ تنها زمانی درست است که هر دو گزاره درست باشند.

(۳) ترکیب شرطی دو گزاره $(p \Rightarrow q)$ است که « p آن گاه q » خوانده می‌شود. $p \Rightarrow q$ تنها زمانی نادرست است که p (مقدم) درست و q (تالی) نادرست باشد.

(۴) ترکیب دو شرطی دو گزاره $(p \Leftrightarrow q)$ است که « p اگر و تنها اگر q » و «اگر p آن گاه q و برعکس» خوانده می‌شود. $p \Leftrightarrow q$ زمانی درست است که ارزش هر دو گزاره p و q یکسان باشد.



۳۰- مجموعه‌های $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ، $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ و $C = \{1, 2, 5, 7\}$ مفروض‌اند. مجموعه $(A \times B) - (A \times C)$ چند عضو دارد؟

(۴) ۱۲

(۳) ۹

(۲) ۸

(۱) ۴

(آسان - محاسباتی - سریع) - آمار و احتمال صفحه ۳۰ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۴

روش اول

به طور مستقیم $|(A \times B) \cap (A \times C)|$ شمرده شود:

$$|(A \times B) - (A \times C)| = |A \times B| - |(A \times B) \cap (A \times C)|$$

$$= 20 - |\{(1, 2), (1, 5), (2, 2), (2, 5), (3, 2), (3, 5), (4, 2), (4, 5)\}| = 20 - 8 = 12$$

روش دوم

با استفاده از خواص ضرب دکارتی ابتدا ساده می‌کنیم:

$$|(A \times B) - (A \times C)| = |A \times (B - C)| = |A| \cdot |B - C| = 4 \times |\{2, 4, 6\}| = 4 \times 3 = 12$$

خواص ضرب دکارتی

حاصل ضرب دکارتی نسبت به اجتماع، اشتراک، تفاضل و تفاضل متقارن خاصیت پخشی دارد، هم از چپ و هم از راست.

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C) \quad (B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$$

$$A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C) \quad (B - C) \times A = (B \times A) - (C \times A)$$

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C) \quad (B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$$

روابطی در مورد تعداد اعضای مجموعه ضرب دکارتی

$$n(A \times B) = n(B \times A) = n(A) \cdot n(B)$$

$$n[(A \times B) \cap (B \times A)] = [n(A \cap B)]^2$$

$$n[(A \times B) \cup (B \times A)] = n(A \times B) + n(B \times A) - [n(A \cap B)]^2$$

$$n[(A \times B) - (B \times A)] = n(A \times B) - [n(A \cap B)]^2$$



۳۱- از بین اعداد متوالی $\{۲۰, ۲۱, ۲۲, \dots, ۲۶۰\}$ عددی به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که عدد انتخابی حداقل بر یکی از اعداد ۳

یا ۴ بخش‌پذیر باشد، تقریباً کدام است؟

۴ / ۶

۳ / ۵

۲ / ۴

۱ / ۳

(متوسط - مفهومی/محاسباتی - استاندارد ۵) - آمار و احتمال صفحه ۴۳ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۳

$$n(S) = 260 - 20 + 1 = 241$$

تعداد کل اعداد:

$$n(A) = \left[\frac{260}{3} \right] - \left[\frac{19}{3} \right] = 86 - 6 = 80$$

تعداد مضرب‌های عدد ۳:

$$n(B) = \left[\frac{260}{4} \right] - \left[\frac{19}{4} \right] = 65 - 4 = 61$$

تعداد مضرب‌های عدد ۴:

تعداد مضرب‌های مشترک ۳ و ۴ (ک.م.م ۳ و ۴، عدد ۱۲ است):

$$n(A \cap B) = \left[\frac{260}{12} \right] - \left[\frac{19}{12} \right] = 21 - 1 = 20$$

می‌خواهیم تعداد اعدادی که حداقل بر یکی از اعداد ۳ یا ۴ بخش‌پذیر هستند را پیدا کنیم، پس:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 80 + 61 - 20 = 121$$

بنابراین احتمال موردنظر تقریباً برابر است با:

$$P(A \cup B) = \frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{121}{241} \approx 0.5$$

تعداد مضارب صحیح

تعداد مضرب‌های عدد صحیح n در بازه $[a, b]$ برابر است با:

$$\left[\frac{b}{n} \right] - \left[\frac{a-1}{n} \right] \quad ([] , \text{ نماد جزء صحیح است})$$



۳۲- در پرتاب یک تاس، احتمال «رو» شدن هر عددی مانند i از فضای نمونه برابر $\frac{k}{i}$ است. با محاسبه k ، احتمال وقوع پیشامد $\{3, 4\}$ کدام است؟

$$\frac{7}{25} \quad (4)$$

$$\frac{5}{21} \quad (3)$$

$$\frac{3}{11} \quad (2)$$

$$\frac{2}{7} \quad (1)$$

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - آمار و احتمال صفحه ۴۵ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۳

با توجه به اطلاعات مسئله با فضای احتمال غیرهم‌شانسی مواجه هستیم. از آنجا که در هر صورت احتمال کل فضای نمونه برابر ۱ است داریم:

$$P(S) = 1 \Rightarrow \frac{k}{1} + \frac{k}{2} + \frac{k}{3} + \frac{k}{4} + \frac{k}{5} + \frac{k}{6} = 1$$

$$\Rightarrow k \times \left(\frac{60 + 30 + 20 + 15 + 12 + 10}{60} \right) = 1 \Rightarrow k = \frac{60}{147}$$

$$P(\{3, 4\}) = P(3) + P(4) = \frac{60}{147} + \frac{60}{147} = \frac{20}{147} + \frac{15}{147} = \frac{35}{147} = \frac{5}{21}$$

احتمال غیرهم‌شانسی

هرگاه حداقل دو پیشامد ساده از فضای نمونه‌ای $S = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ احتمال نابرابر داشته باشند، S را فضای نمونه‌ای با احتمال غیرهم‌شانسی می‌گوییم.

ویژگی‌های احتمال غیرهم‌شانسی

(۱) در فضای نمونه‌ای غیرهم‌شانسی $S = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ داریم:

$$P(S) = P(S_1) + P(S_2) + \dots + P(S_n) = 1$$

(۲) اگر $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ یک پیشامد k عضوی از فضای نمونه‌ای S باشد:

$$P(A) = P(a_1) + P(a_2) + \dots + P(a_k) \quad (ب)$$

$$0 \leq P(A) \leq 1 \quad (الف)$$



۳۳- تعداد اعضای مجموعه‌های A ، B و $B - A$ از یک فضای نمونه ۲۳ عضوی مانند S که همه اعضای آن هم‌شانسی هستند، به ترتیب برابر ۱۶، ۱۱ و ۲ است. کدام یک از اعداد زیر کوچک‌تر از بقیه است؟

$$P(A|B) \quad (2)$$

$$P(B) \quad (1)$$

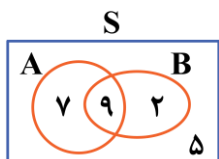
$$P((A \cap B) | (A \cup B)) \quad (4)$$

$$P(B|A) \quad (3)$$

(آسان - مفهومی - زمان‌بر) - آمار و احتمال صفحه ۵۰ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۱

به نمودار ون به‌صورت زیر توجه کنید:



$$n(B - A) = 2 \xrightarrow{n(B)=11} n(A \cap B) = 9$$

$$1) P(B) = \frac{11}{23} \approx 0.47$$

$$2) P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{9}{11} \approx 0.81$$

$$۳) P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{9}{16} \approx 0.56$$

$$۴) P((A \cap B)|(A \cup B)) = \frac{P[(A \cap B) \cap (A \cup B)]}{P(A \cup B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A \cup B)} = \frac{n(A \cap B)}{n(A \cup B)} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2} = 0.5$$

همان طور که می بینید، $P(B)$ از همه کمتر است.

احتمال شرطی

اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، $P(A|B)$ یعنی احتمال وقوع A به شرط وقوع B که برابر است با:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

و آن را **احتمال شرطی** می نامند. در واقع این جا چون B رخ داده است، دیگر فضای نمونه‌ای همه S نیست و به B محدود شده و انگار B فضای نمونه‌ای جدیدی است و می خواهیم در این **فضای جدید** احتمال وقوع پیشامد A را بیابیم.



۳۴- واریانس n داده آماری برابر ۶ است. با اضافه کردن ۱۳ داده جدید که همگی با میانگین برابرند واریانس برابر با ۴ می شود. رقم یکان n کدام است؟

۳ (۴)

۹ (۳)

۶ (۲)

۲ (۱)

(آسان - محاسباتی - استاندارد) - آمار و احتمال صفحه ۸۹ - ۱۱۰۳

پاسخ: گزینه ۲

$$\sigma_1^2 = 6 \Rightarrow \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n} = 6 \Rightarrow (x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2 = 6n$$

۱۳ داده‌ای که با میانگین برابر هستند، اختلاف از میانگینشان صفر است، پس:

$$\sigma_1^2 = 4 \Rightarrow \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2 + 13(0)}{n + 13} = 4 \Rightarrow \frac{6n + 0}{n + 13} = 4$$

$$\Rightarrow 2n = 52 \Rightarrow n = 26$$

معیارهای پراکندگی و میانگین

اگر $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ داده‌های آماری باشند، آن گاه:

$$\bar{x} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

(۱) میانگین:

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n} \quad \text{یا} \quad \sigma^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} - \bar{x}^2$$

(۲) واریانس:

$$\sigma = \sqrt{\text{واریانس}}$$

(۳) انحراف معیار:

$$R = x_{\max} - x_{\min}$$

(۴) دامنه تغییرات:

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$$

(۵) ضریب تغییرات:



۳۵- در جامعه‌ای ۶ عضوی با داده‌های ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۹ نمونه‌ای دو عضوی انتخاب می‌کنیم. احتمال آن که برآورد نقطه‌ای میانگین، کم‌تر از پارامتر باشد، چقدر است؟

$$\frac{8}{15} \quad (۴)$$

$$\frac{7}{15} \quad (۳)$$

$$\frac{3}{5} \quad (۲)$$

$$\frac{2}{5} \quad (۱)$$

(متوسط - مفهومی - استاندارد) - آمار و احتمال صفحه ۱۱۳ - ۱۱۴

پاسخ: گزینه ۴

اینجا پارامتر جامعه و آماره نمونه میانگین است. پارامتر مربوط به جامعه است، پس:

$$\text{پارامتر} = \frac{۱+۲+۳+۴+۵+۹}{۶} = ۴$$

نمونه‌های دو عضوی‌ای آماره کم‌تر از ۴ دارند که مجموع دو عضو کم‌تر از ۸ باشد، که به شکل زیر هستند:

$$\{۱, ۲\}, \{۱, ۳\}, \{۱, ۴\}, \{۱, ۵\}, \{۲, ۳\}, \{۲, ۴\}, \{۲, ۵\}, \{۳, ۴\}$$

$$\Rightarrow P = \frac{۸}{\binom{۶}{۲}} = \frac{۸}{۱۵}$$

قلقلشو یاد بگیر!

هر مشخصه عددی (مانند میانگین، میانه، مد، واریانس و ...) وقتی برای کل جامعه محاسبه شود پارامتر (پارامتر جامعه)، و وقتی برای یک نمونه محاسبه شود آماره (آماره نمونه) است.





برای دیدن پاسخنامه ویدئویی آزمون
بالا را اسکن یا روی آن کلیک کنید QR Code

کل کتاب فیزیک ۲

بودجه‌بندی
این آزمون

درمجموع ۱۲ تست از ۳۵ تست کنکور را پوشش داده است.

سهم در
کنکور

۳۶- دو بار الکتریکی نقطه‌ای $q_1 = 4\mu C$ و $q_2 = -3\mu C$ که در فاصله r از هم قرار دارند، نیروی الکتریکی به بزرگی F به هم وارد می‌کنند. اگر فاصله این دو بار الکتریکی از یکدیگر را 3cm افزایش دهیم، بزرگی نیروی الکتریکی که به هم وارد می‌کنند، ۷۵ درصد کاهش

می‌یابد. F چند نیوتون است؟ $(k = 9 \times 10^9 \frac{N.m^2}{C^2})$

۱۲۰ (۴)

۹۶ (۳)

۶۰ (۲)

۴۸ (۱)

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - صفحه ۶ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۴

گام اول

با استفاده از قانون کولن می‌توانیم بنویسیم:

$$F = k \frac{|q_1||q_2|}{r^2} \xrightarrow{\text{بارها ثابت اند.}} \frac{F'}{F} = \left(\frac{r}{r'}\right)^2 \xrightarrow{\frac{F' = F - \frac{75}{100}F = \frac{25}{100}F}{r' = r + 3(\text{cm})}} \frac{25}{100} = \left(\frac{r}{r+3}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{r}{r+3} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2r = r+3 \Rightarrow r = 3\text{cm}$$

گام آخر

بزرگی نیروی الکتریکی که دو بار در فاصله r به یکدیگر وارد می‌کنند، برابر است با:

$$F = \frac{k|q_1||q_2|}{r^2} \xrightarrow{|q_1| = 4 \times 10^{-6} \text{C}, |q_2| = 3 \times 10^{-6} \text{C} \quad r = 3\text{cm} = 3 \times 10^{-2} \text{m}} F = \frac{9 \times 10^9 \times 4 \times 10^{-6} \times 3 \times 10^{-6}}{9 \times 10^{-4}} = 120 \text{N}$$

این سوال، مشابه امتحان نهایی رشته ریاضی سال ۱۴۰۳ است.

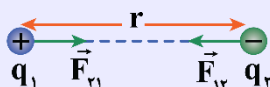
قانون کولن

اگر دو بار q_1 و q_2 در فاصله r از یکدیگر باشند، نیروی الکتریکی F بر حسب نیوتون (N) را به یکدیگر وارد می‌کنند که بزرگی آن از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

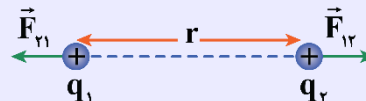
$$\text{ثابت کولن } (9 \times 10^9 \frac{N.m^2}{C^2})$$

$$F = k \frac{|q_1||q_2|}{r^2} \rightarrow \begin{matrix} \text{اندازه بار الکتریکی بر حسب کولن (C)} \\ \text{فاصله بین دو بار بر حسب متر (m)} \end{matrix}$$

اگر بارهای q_1 و q_2 هم‌نام باشند، نیروی الکتریکی بین آن‌ها دافعه و اگر ناهم‌نام باشند، نیروی بین آن‌ها جاذبه است.



نیروی الکتریکی بین دو بار
الکتریکی ناهم‌نام، جاذبه است.



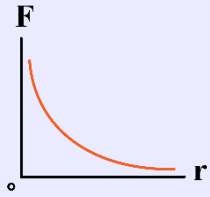
نیروی الکتریکی بین دو بار
الکتریکی هم‌نام، دافعه است.

در رابطه بالا، k ثابت کولن است که یکای آن $\frac{N.m^2}{C^2}$ است.

۱- برای مقایسه نیروی الکتریکی بین بارها می‌توان نوشت:

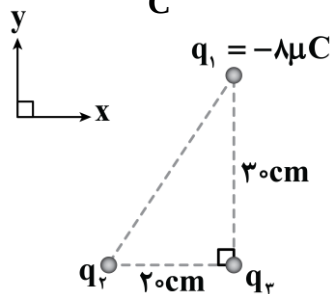
$$F \propto \frac{|q_1||q_2|}{r^2} \Rightarrow \frac{F'}{F} = \frac{|q'_1q'_2|}{|q_1q_2|} \times \left(\frac{r}{r'}\right)^2 \xrightarrow{\text{اگر اندازه بارها ثابت باشد.}} \frac{F'}{F} = \left(\frac{r}{r'}\right)^2$$

۲- نمودار تغییرات نیروی الکتریکی بر حسب فاصله دو بار، مطابق شکل به صورت نزولی خواهد بود.



۳۷- مطابق شکل زیر، سه بار الکتریکی نقطه‌ای بر روی سه رأس مثلث قائم‌الزاویه‌ای ثابت شده‌اند. اگر بردار نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار q_3 از طرف دو بار دیگر در SI برابر با $\vec{F}_3 = 9\vec{i} - 4\vec{j}$ باشد، بار q_3 بر حسب میکروکولن و بزرگی میدان الکتریکی حاصل از بار

q_2 در محل بار q_3 بر حسب نیوتون بر کولن، به ترتیب از راست به چپ در کدام گزینه به درستی آمده‌اند؟ $(k = 9 \times 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2})$



(۱) -5 و $1/8 \times 10^{-6}$

(۲) -5 و 8×10^{-5}

(۳) $+5$ و $1/8 \times 10^{-6}$

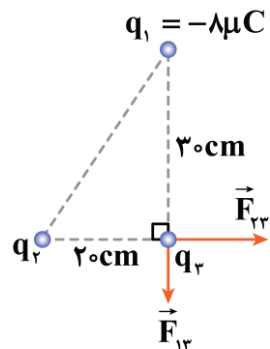
(۴) $+5$ و 8×10^{-5}

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - صفحه ۱۱ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۱

گام اول

با توجه به بردار نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار q_3 متوجه می‌شویم که بار منفی q_1 بار q_3 را با نیرویی به بزرگی $4N$ دفع کرده است، پس بار q_3 همانم با بار q_1 و منفی است:



$$F_{13} = \frac{k|q_1||q_3|}{r_{13}^2} \Rightarrow 4 = \frac{9 \times 10^9 \times 8 \times 10^{-6} \times |q_3|}{(3)^2}$$

$$\Rightarrow 4 = 8 \times 10^{-5} \times |q_3| \Rightarrow |q_3| = 5 \times 10^{-6} C = 5 \mu C$$

$$\Rightarrow q_3 = -5 \mu C$$

گام دوم

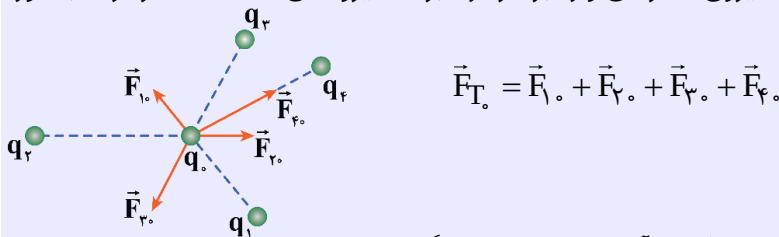
بزرگی نیروی الکتریکی وارد شده بر بار q_3 از طرف بار q_2 برابر با $9N$ است و چون به دنبال بزرگی میدان الکتریکی حاصل از بار q_2 در محل بار q_3 هستیم، می‌توانیم بنویسیم:

$$F_{23} = E_2|q_3| \Rightarrow 9 = E_2 \times 5 \times 10^{-6} \Rightarrow E_2 = 1/8 \times 10^{-6} \frac{N}{C}$$

این سوال، مشابه امتحان شبه‌نهایی سال ۱۴۰۵ است.

اصل برهم‌نهی نیروهای الکتریکی

هرگاه تعدادی بار الکتریکی در یک ناحیه از فضا قرار داشته باشند، نیروی الکتریکی وارد بر هر ذره، برابند نیروهایی است که سایر ذرات به‌طور مستقل بر آن ذره وارد می‌کنند.



$$\vec{F}_{T_0} = \vec{F}_{1_0} + \vec{F}_{2_0} + \vec{F}_{3_0} + \vec{F}_{4_0}$$

محاسبه نیروی الکتریکی در حضور چند بار

در سؤالاتی که چند بار الکتریکی وجود دارند و نیروی الکتریکی وارد بر یکی از آن‌ها را می‌خواهیم، گام‌های زیر را طی می‌کنیم.

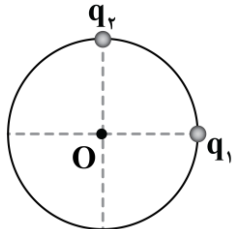
گام اول: بردار نیروی الکتریکی که هر یک از بارها وارد می‌کنند را رسم می‌کنیم.

گام دوم: نیروهای الکتریکی را جداگانه محاسبه می‌کنیم.

گام سوم: بردارهای به‌دست‌آمده را به‌صورت برداری جمع می‌کنیم. اگر بردارها هم‌جهت باشند، اندازه آن‌ها جمع می‌شود، اگر خلاف جهت هم باشند، اندازه آن‌ها از هم کم می‌شود و اگر عمود بر هم باشند با کمک رابطه فیثاغورس برابند آن‌ها محاسبه می‌شود.



۳۸- مطابق شکل زیر، دو بار الکتریکی نقطه‌ای $q_1 = 4\text{pC}$ و $q_2 = -3\text{pC}$ روی محیط یک دایره قرار دارند. اگر بزرگی میدان الکتریکی



خالص در مرکز دایره برابر با $50 \frac{\text{N}}{\text{C}}$ باشد، شعاع دایره چند سانتی‌متر است؟ $(k = 9 \times 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2})$

- | | |
|-------|--------|
| (۱) ۳ | (۲) ۶ |
| (۳) ۹ | (۴) ۱۲ |

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - صفحه ۱۲ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۱

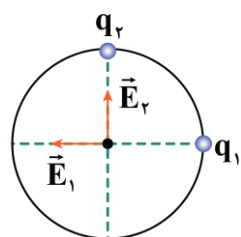
گام اول

بزرگی میدان الکتریکی حاصل از هر یک از بارهای q_1 و q_2 را در مرکز دایره محاسبه می‌کنیم:

$$E_1 = \frac{k|q_1|}{r^2} \Rightarrow E_1 = \frac{9 \times 10^9 \times 4 \times 10^{-12}}{r^2} = \frac{36 \times 10^{-3}}{r^2}$$

$$E_2 = \frac{k|q_2|}{r^2} \Rightarrow E_2 = \frac{9 \times 10^9 \times 3 \times 10^{-12}}{r^2} = \frac{27 \times 10^{-3}}{r^2}$$

با توجه به علامت بارهای q_1 و q_2 ، بردار میدان الکتریکی حاصل از هرکدام از بارها را در مرکز دایره رسم می‌کنیم:



گام دوم

بزرگی میدان الکتریکی خالص در مرکز دایره برابر است با:

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} = \sqrt{\left(\frac{36 \times 10^{-3}}{r^2}\right)^2 + \left(\frac{27 \times 10^{-3}}{r^2}\right)^2} = \frac{45 \times 10^{-3}}{r^2}$$

گام آخر

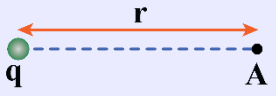
شعاع دایره (r) را به‌دست می‌آوریم:

$$E = \frac{45 \times 10^{-3}}{r^2} \xrightarrow{E = 50 \frac{\text{N}}{\text{C}}} 50 = \frac{45 \times 10^{-3}}{r^2} \Rightarrow r^2 = \frac{45 \times 10^{-3}}{50} = 9 \times 10^{-4} \xrightarrow{\text{از طرفین جذر می‌گیریم}} r = 0.03 \text{ m} = 3 \text{ cm}$$

ایده این سوال برگرفته از امتحان نهایی رشته تجربی سال ۱۴۰۳ است.

میدان الکتریکی حاصل از یک ذره باردار

۱- برای محاسبه میدان الکتریکی حاصل از بار q در فاصله r از آن از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

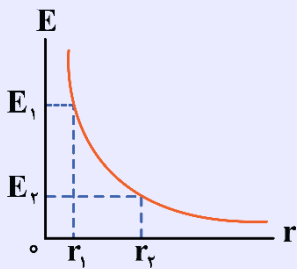


$$E_A = k \frac{|q|}{r^2}$$

۲- جهت میدان حاصل از بار مثبت به صورت خارج شونده و جهت میدان حاصل از بار منفی به صورت داخل شونده است. به شکل‌های زیر دقت کنید:



نمودار تغییرات بزرگی میدان الکتریکی برحسب فاصله از بار، مطابق شکل مقابل است: همان‌طور که واضح است با افزایش فاصله از بار، بزرگی میدان کاهش می‌یابد.



$$E = k \frac{|q|}{r^2} \xrightarrow{\text{ثابت است } k|q|} E \propto \frac{1}{r^2} \Rightarrow \frac{E_2}{E_1} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2$$

۳۹- بار الکتریکی روی سطح رسانای بزرگی، دور از لبه‌ها به‌طور یکنواخت توزیع شده است. اگر در بخشی از این سطح به شکل مربعی به ضلع 2mm ، 14pC بار قرار گرفته باشد، چگالی سطحی بار روی این سطح چند میکروکولن بر متر مربع است؟

۷۰ (۴)

۳۵ (۳)

۷ (۲)

۳/۵ (۱)

(آسان - محاسباتی - سریع ۱ - صفحه ۲۹ - ۱۱۰)

پاسخ: گزینه ۱

گام اول

مساحت سطح را به دست می‌آوریم:

$$A = a^2 = 2^2 = 4\text{mm}^2 = 4 \times 10^{-6}\text{m}^2$$

گام آخر

چگالی سطحی بار را حساب می‌کنیم:

$$\sigma = \frac{Q}{A} \Rightarrow \sigma = \frac{14 \times 10^{-12}}{4 \times 10^{-6}} = 3.5 \times 10^{-6} \frac{\text{C}}{\text{m}^2} \times \frac{1\mu\text{C}}{10^{-6}\text{C}} = 3.5 \frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2}$$

این سوال مشابه امتحان نهایی رشته ریاضی سال ۱۴۰۴ است.

چگالی سطحی بار الکتریکی

چگالی سطحی بار الکتریکی رسانا: برای این که بتوانیم تراکم بار الکتریکی در بخش‌های مختلف سطح یک جسم را باهم مقایسه کنیم کمیتی به نام چگالی سطحی بار را تعریف می‌کنیم. درواقع چگالی سطحی، پارامتری است که تراکم بار در قسمت‌های مختلف یک جسم را نشان می‌دهد:

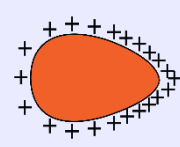
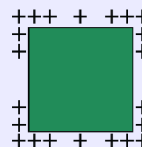
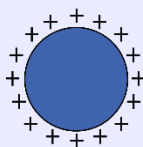
چگالی سطحی بار $\left(\frac{\text{C}}{\text{m}^2}\right)$

$$\uparrow$$

بار الکتریکی (C) $\rightarrow q$

مساحت (m^2) $\rightarrow A$

$$\sigma = \frac{q}{A}$$



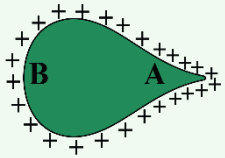
در رابطه بالا، A مساحت سطحی است که بار در آن پخش شده است.



۱- در صورتی که کره رسانا n الکترون مبادله کند چگالی سطحی آن برابر است با:

$$\sigma = \frac{q}{A} = \frac{ne}{4\pi r^2}$$

۲- فهمیدیم که اگر بار یک رسانا تغییر کند، بارها جابه‌جا می‌شوند تا در نهایت به تعادل الکتروستاتیکی برسند. پس از رسیدن به تعادل الکتریکی، پتانسیل تمام نقاط روی یک رسانا با یکدیگر برابر می‌شود:



$$V_A = V_B$$

$$\sigma_A > \sigma_B$$



۴۰- در یک میدان الکتریکی یکنواخت، ذره بارداری با بار الکتریکی $q = -5nC$ از نقطه‌ای با پتانسیل الکتریکی $V_1 = 15V$ تا نقطه‌ای با پتانسیل الکتریکی V_2 آزادانه جابه‌جا می‌شود. اگر انرژی جنبشی ذره در این جابه‌جایی $1\mu J$ افزایش یابد، V_2 چند ولت است؟ (تنها نیروی مؤثر بر ذره، نیروی الکتریکی است.)

۲۱۵ (۴)

۳۵ (۳)

-۱۸۵ (۲)

-۵ (۱)

(آسان - محاسباتی - سریع - صفحه ۲۳ - ۱۱۰۱)

پاسخ: گزینه ۴

گام اول

تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی ذره را به دست می‌آوریم. با توجه به این که فقط نیروی الکتریکی بر ذره وارد می‌شود، می‌توانیم بنویسیم:

$$\Delta U_E = -\Delta K \Rightarrow \Delta U_E = -10^{-6} J$$

گام آخر

پتانسیل الکتریکی V_2 را به دست می‌آوریم:

$$\Delta V = \frac{\Delta U_E}{q} \xrightarrow[\substack{\Delta U_E = -10^{-6} J \\ q = -5nC = -5 \times 10^{-9} C}]{\Delta U_E = -10^{-6} J} \Delta V = \frac{-10^{-6}}{-5 \times 10^{-9}} = 200 V$$

$$\Delta V = V_2 - V_1 \xrightarrow[V_1 = 15V]{\Delta V = 200 V} 200 = V_2 - 15 \Rightarrow V_2 = 215 V$$

این سوال، مشابه امتحان نهایی رشته ریاضی سال ۱۴۰۴ است.

تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی و اختلاف پتانسیل الکتریکی

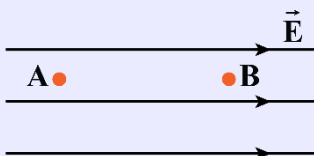
۱- هنگامی که بار q بین دو نقطه که اختلاف پتانسیل آن‌ها برابر ΔV است، جابه‌جا شود، انرژی پتانسیل الکتریکی آن تغییر می‌کند. تغییرات انرژی پتانسیل الکتریکی بار یعنی ΔU به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\Delta U = q\Delta V$$

۲- مطابق رابطه بالا، بار مثبت با حرکت به سمت پتانسیل‌های بیشتر، انرژی پتانسیل الکتریکی‌اش زیاد می‌شود و انرژی پتانسیل الکتریکی بار منفی با حرکت به سمت پتانسیل‌های کمتر بیشتر می‌شود.

۳- اگر یک بار الکتریکی در جهت خودبه‌خودی حرکت کند، انرژی پتانسیل الکتریکی آن حتماً کم می‌شود. جهت حرکت خودبه‌خودی بار مثبت در جهت خطوط میدان الکتریکی است، در حالی که جهت حرکت خودبه‌خودی بار منفی در خلاف جهت میدان الکتریکی است.

۴- با حرکت در جهت خطوط میدان الکتریکی، پتانسیل الکتریکی (V) کاهش می‌یابد.



$$V_B < V_A$$



نوع و اندازه بار ذره در نحوه تغییرات انرژی پتانسیل الکتریکی (ΔU) مؤثر است؛ ولی در نحوه تغییرات پتانسیل الکتریکی (ΔV) تأثیری ندارد. همچنین با حرکت در جهت عمود بر خطوط میدان الکتریکی، پتانسیل الکتریکی ثابت می‌ماند.



با تقسیم رابطه $\Delta U = -E|q|d \cos \alpha$ بر q می‌توانیم تغییرات پتانسیل الکتریکی یعنی ΔV را محاسبه کنیم:

$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q} = \frac{-E|q|d \cos \alpha}{q} = -Ed \cos \alpha$$

$$\Rightarrow \Delta V = -Ed \cos \alpha \Rightarrow |\Delta V| = Ed_{||}$$

منظور از $d_{||}$ ، جابه‌جایی در راستای موازی با خطوط میدان الکتریکی است.



۴۱- صفحات باردار یک خازن تخت که بین آن‌ها هوا است، پس از شارژ شدن از باتری جدا کرده و به ولت‌سنج وصل می‌کنیم. اگر در این حالت بین صفحات این خازن، دی‌الکتریک از جنس شیشه قرار دهیم، عدد ولت‌سنج و ولتاژ فروریزش خازن به ترتیب از راست به چپ، چگونه تغییر می‌کنند؟

۱) کاهش - افزایش ۲) کاهش - ثابت ۳) ثابت - ثابت ۴) ثابت - افزایش

(آسان - مفهومی - سریع ۵ - صفحه ۳۶ - ۱۱۰۱)

پاسخ: گزینه ۱

وقتی خازن فقط به ولت‌سنج وصل بوده و از باتری جدا شده است، بار ذخیره‌شده در آن ثابت می‌ماند؛ بنابراین ولتاژ خازن با ظرفیت خازن رابطه معکوس دارد؛ در نتیجه با قرار دادن دی‌الکتریک بین صفحات خازن، ظرفیت خازن افزایش یافته، بنابراین ولتاژ آن کاهش می‌یابد؛ پس عدد ولت‌سنج کاهش می‌یابد.

از طرفی با قرار دادن دی‌الکتریک بین صفحات خازن، ولتاژ فروریزش آن افزایش می‌یابد.

این سوال، مشابه امتحان نهایی رشته ریاضی سال ۱۴۰۳ است.



هنگامی که در ویژگی‌های یک خازن تغییر ایجاد کنیم، دو حالت زیر امکان‌پذیر است:

- ۱- اگر خازن پس از شارژ به باتری متصل باشد: در این حالت ولتاژ دو سر خازن با اعمال هر تغییری بر روی خازن، ثابت باقی می‌ماند. در این حالت هر تغییری در ساختمان خازن که موجب تغییر در ظرفیت خازن می‌شود باعث تغییراتی به نسبت مستقیم در بار و انرژی ذخیره‌شده در خازن می‌شود.
- ۲- اگر خازن پس از شارژ شدن از باتری جدا شود: در این حالت بار ذخیره‌شده در خازن با اعمال هر تغییری بر روی خازن، ثابت باقی می‌ماند. در این حالت هر تغییری در ساختمان خازن که موجب تغییر در ظرفیت خازن می‌شود باعث تغییراتی به نسبت معکوس در اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر خازن و انرژی ذخیره‌شده در خازن می‌شود.

دی‌الکتریک 

فضای بین صفحه‌های خازن را با ماده عایقی پر می‌کنیم که به این ماده عایق، دی‌الکتریک گفته می‌شود. ✓ ضریب دی‌الکتریک برای خلأ و هوا برابر ۱ و برای سایر نارساها از ۱ بیشتر است.

اثرات استفاده از دی‌الکتریک

- ۱- افزایش ظرفیت خازن
- ۲- افزایش حداکثر ولتاژ قابل تحمل خازن



۴۲- با توجه به اعداد روی خازن شکل زیر، حداکثر بار ذخیره شده در این خازن و حداکثر انرژی ذخیره شده در آن بر حسب SI به ترتیب از راست به چپ، در کدام گزینه به درستی آمده اند؟



(۲) $2/4 \times 10^{-3}$ و $0/036$

(۱) $2/4 \times 10^{-3}$ و $0/36$

(۴) $2/4 \times 10^{-2}$ و $0/036$

(۳) $2/4 \times 10^{-2}$ و $0/36$

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) (صفحه ۳۹ - ۱۱۰۱)

پاسخ: گزینه ۱

اعداد روی خازن، بیشینه ولتاژ قابل تحمل خازن ($300V$) و ظرفیت خازن ($8\mu F$) هستند؛ بنابراین داریم:

$$Q = CV \xrightarrow[C=8\mu F]{V_{\max}=300V} Q_{\max} = 8 \times 10^{-6} \times 300 = 2/4 \times 10^{-3} C$$

$$U = \frac{1}{2} CV^2 \Rightarrow U_{\max} = \frac{1}{2} \times 8 \times 10^{-6} \times (300)^2 = 0/36 J$$

این سوال، مشابه امتحان نهایی رشته تجربی سال ۱۴۰۳ است.

ظرفیت خازن

هرچه اختلاف پتانسیل الکتریکی بین دو صفحه خازن، بیشتر باشد، بار ذخیره شده در آن بیشتر می شود. نسبت بار ذخیره شده در خازن به اختلاف پتانسیل الکتریکی بین دو صفحه آن را ظرفیت خازن می نامند. ظرفیت خازن، عددی ثابت است و آن را با C نشان می دهند و واحد آن فاراد یا کولن بر ولت است:

$$C = \frac{Q}{V}$$

نکته

با تغییر بار ذخیره شده و یا اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر خازن، ظرفیت خازن تغییر نمی کند.

تذکر

اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر خازن با بار ذخیره شده در آن رابطه مستقیم دارد، یعنی هرچه اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر خازن افزایش یابد به همان نسبت بار ذخیره شده در خازن افزایش می یابد تا ظرفیت خازن ثابت بماند.

نکته

اگر یک خازن با ظرفیت C ، توسط یک مولد با اختلاف پتانسیل V شارژ شود، در آن بار الکتریکی Q و انرژی الکتریکی U ذخیره می شود، رابطه بین این کمیت ها به صورت زیر است:

$$U = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$



۴۳- اختلاف پتانسیل الکتریکی بین صفحات خازن تختی که مساحت هر یک از صفحات آن 10 cm^2 بوده و فضای بین صفحات آن با دی الکتریکی به ثابت ۴ و ضخامت ۹mm به طور کامل پر شده است، برابر با $180V$ است. ظرفیت خازن بر حسب پیکوفاراد و اندازه میدان الکتریکی یکنواخت بین صفحات آن بر حسب کیلوولت بر متر، به ترتیب از راست به چپ در کدام گزینه به درستی آمده اند؟

$$(\epsilon_0 = 9 \times 10^{-12} \frac{F}{m})$$

(۴) ۳۰ و ۱۰

(۳) ۴۰ و ۲۰

(۲) ۱۰ و ۳۰

(۱) ۲۰ و ۴۰

به کمک مشخصات ساختمانی خازن، ظرفیت خازن را به دست می آوریم:

$$C = \kappa \frac{\epsilon_0 A}{d} \xrightarrow[\substack{d=9\text{mm}=9 \times 10^{-3}\text{m}}]{\substack{\kappa=4, A=100\text{cm}^2=10^{-2}\text{m}^2}} C = \frac{4 \times 9 \times 10^{-12} \times 10^{-2}}{9 \times 10^{-3}} = 40 \times 10^{-12}\text{F} \Rightarrow C = 40\text{pF}$$

بزرگی میدان الکتریکی یکنواخت بین صفحات خازن برابر است با:

$$E = \frac{\Delta V}{d} = \frac{180}{9 \times 10^{-3}} = 20 \times 10^3 \frac{\text{V}}{\text{m}} = 20 \frac{\text{kV}}{\text{m}}$$

عوامل مؤثر بر ظرفیت خازن

ظرفیت خازن به ویژگی‌های **هندسی** و **جنس عایق بین صفحه‌های خازن** بستگی دارد.

$$C = \kappa \epsilon_0 \frac{A}{d} \rightarrow \begin{matrix} \text{مساحت صفحات (m}^2\text{)} \\ \text{فاصله بین صفحات (m)} \end{matrix}$$

ثابت دی‌الکتریک

۱- ظرفیت خازن با **فاصله بین صفحات خازن**، رابطه **عکس** دارد.

۲- ظرفیت خازن با **مساحت مشترک صفحات خازن**، رابطه **مستقیم** دارد.

نکته

۱- ضریب دی‌الکتریک، ضریبی بدون یکا است.

۲- ضریب دی‌الکتریک خلا برابر با یک است و ضریب دی‌الکتریک سایر نارساها از یک بیشتر است، بنابراین کمینه مقدار ممکن برای ضریب دی‌الکتریک برابر یک است.

نکته

برای محاسبه بزرگی میدان الکتریکی بین صفحات خازن می‌توان از روابط زیر استفاده کرد:

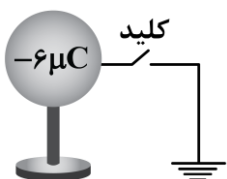
۱- اگر اختلاف پتانسیل الکتریکی بین صفحات خازن و فاصله بین صفحات خازن را بدانیم:

$$E = \frac{V}{d}$$

۲- اگر بار الکتریکی ذخیره شده در خازن و مساحت صفحه‌های خازن را بدانیم:

$$E = \frac{V}{d} = \frac{Q}{Cd} = \frac{Q}{\kappa \epsilon_0 \frac{A}{d} \times d} \Rightarrow E = \frac{Q}{\kappa \epsilon_0 A}$$

۴۴- در شکل زیر، کره رسانایی با بار الکتریکی $-6\mu\text{C}$ ، بر روی یک پایه عایق قرار دارد. اگر کلید را وصل کنیم، کره توسط سیم رسانا به زمین وصل شده و در مدت زمان 3ms خنثی می‌شود. جریان الکتریکی متوسط عبوری از سیم چند میلی آمپر و در چه جهتی است؟



(۱) و از کره به سمت زمین

(۲) و از زمین به سمت کره

(۳) و از زمین به سمت کره

(۴) و از کره به سمت زمین

بار الکتریکی کره، منفی است. پس با اتصال کره به زمین، الکترون‌های اضافی کره از طریق سیم رسانا به زمین منتقل می‌شوند تا کره از نظر الکتریکی خنثی شود. می‌دانیم جهت جریان الکتریکی متوسط باید در خلاف جهت شارش خالص الکترون‌ها باشد. پس جریان الکتریکی متوسط از زمین به سمت کره برقرار می‌شود:

$$I_{av} = \frac{|\Delta q|}{\Delta t} = \frac{6 \times 10^{-6}}{3 \times 10^{-3}} = 2 \times 10^{-3} \text{ A} \Rightarrow I_{av} = 2 \text{ mA}$$

این سوال، مشابه سوالات نهایی سال‌های گذشته و امتحان شبه‌نهایی سال ۱۴۰۵ است.

جریان الکتریکی

آهنگ شارش بار الکتریکی در یک سیم معادل با جریان الکتریکی گذرنده از آن سیم است:

$$I_{av} = \frac{\Delta q}{\Delta t}$$

Δq : بار الکتریکی شارش شده با یکای کولن (C)

Δt : مدت زمان عبور بار الکتریکی با یکای ثانیه (s)

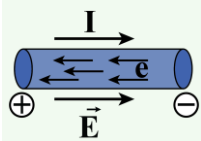
I_{av} : جریان الکتریکی متوسط با یکای آمپر (A)

در مورد جریان الکتریکی به نکات زیر توجه کنید:

۱- جریان الکتریکی یک کمیت نرده‌ای است.

۲- یکای جریان الکتریکی برابر با آمپر است که معادل با کولن بر ثانیه می‌باشد. دقت کنید که آمپر یکی از هفت یکای اصلی SI است.

نکته



۱- جهت جریان الکتریکی با میدان الکتریکی هم‌سو است.

۲- جهت حرکت الکترون‌ها یا همان سرعت سوق الکترون‌ها در خلاف جریان الکتریکی است.

۳- میدان و جریان الکتریکی همیشه از پتانسیل الکتریکی بیشتر به کمتر جاری می‌شود.



۴۵- در ساخت دزدگیر، حسگر دما در زنگ خطر آتش و برای به‌دست آوردن مقاومت‌های پایین بسیار دقیق به ترتیب از راست به چپ از

کدام مقاومت‌ها استفاده می‌کنیم؟

(۲) دیود نورگسیل - ترموستات - مقاومت ترکیبی

(۱) مقاومت نوری - ترمیستور - مقاومت پیچ‌های

(۴) دیود نورگسیل - ترمیستور - مقاومت ترکیبی

(۳) مقاومت نوری - ترموستات - مقاومت پیچ‌های

در ساخت دزدگیر از مقاومت نوری، در حسگر دما از ترمیستور و برای به‌دست آوردن مقاومت‌های پایین بسیار دقیق از مقاومت‌های پیچ‌های استفاده می‌کنیم.

این سوال، مشابه امتحان نهایی رشته ریاضی سال ۱۴۰۴ است.



۴۶- در دمای ثابت، سیمی به طول L را آنقدر می‌کشیم تا بدون تغییر جرم، مقاومت الکتریکی آن ۲/۲۵ برابر شود. طول سیم چقدر

افزایش یافته است؟

(۴) ۱/۵L

(۳) ۱/۲۵L

(۲) ۵/۰L

(۱) ۲۵/۰L

با توجه به ثابت ماندن جرم و حجم سیم می‌توانیم بنویسیم:

$$R = \frac{\rho L}{A} \xrightarrow{A = \frac{V}{L}} R = \frac{\rho L^2}{V} \xrightarrow{\rho, V: \text{ثابت}} \frac{R_2}{R_1} = \left(\frac{L_2}{L_1}\right)^2$$

$$\xrightarrow{R_2 = 2/25 R_1} 2/25 = \left(\frac{L_2}{L_1}\right)^2 \Rightarrow \frac{L_2}{L_1} = 1/5 \Rightarrow L_2 = 1/5 L_1$$

$$\xrightarrow{L_1 = L} L_2 - L_1 = 1/5 L - L = -4/5 L$$

بنابراین طول سیم به اندازه $4/5 L$ افزایش یافته است.

سوتی‌های پرتکرار

اگر بعد از این‌که فهمیدی طول سیم $1/5$ برابر شده، عجله کنی توی دام گزینه (۴) میفتی!

این فرمول‌ها رو برای محاسبه مقاومت الکتریکی بر اساس ویژگی‌های ساختمانی آن به خاطر بسپار!

۱- محاسبه مقاومت الکتریکی رسانا به کمک طول و سطح مقطع:

$$R = \frac{\rho L}{A}$$

۲- محاسبه مقاومت الکتریکی رسانا به کمک طول و حجم:

$$R = \frac{\rho L^2}{V}$$

۳- محاسبه مقاومت الکتریکی رسانا به کمک سطح مقطع و حجم:

$$R = \frac{\rho V}{A^2}$$

۴- محاسبه مقاومت الکتریکی رسانا به کمک طول، جرم و چگالی:

$$R = \frac{\rho \rho' L^2}{m}$$

۵- محاسبه مقاومت الکتریکی رسانا به کمک سطح مقطع، جرم و چگالی:

$$R = \frac{\rho m}{\rho' A^2}$$



۴۷- روی یک کتری برقی دو عدد $220V$ و $2kW$ نوشته شده است. اگر از این کتری جریان $5A$ عبور کند، توان مصرفی آن تقریباً چند درصد کمتر از توان اسمی آن است؟

۸۰ (۴)

۷۰ (۳)

۳۰ (۲)

۲۰ (۱)

گام اول

مقاومت الکتریکی کتری برقی را به دست می‌آوریم:

$$P_{\text{اسمی}} = \frac{V_{\text{اسمی}}^2}{R} \Rightarrow 2000 = \frac{220 \times 220}{R} \Rightarrow R = 24/2 \Omega$$

توان مصرفی را به دست می آوریم:

$$P = RI^2 \xrightarrow[\substack{I=5A \\ R=24/2\Omega}]{R=24/2\Omega} P = 24 / 2 \times 25 = 60.5W$$

درصد اختلاف توان مصرفی و توان اسمی را به دست می آوریم:

$$\frac{P - P_{\text{اسمی}}}{P_{\text{اسمی}}} \times 100 = \frac{60.5 - 2000}{2000} \times 100 \approx -70\%$$

ایده این سوال برگرفته از امتحان نهایی رشته تجربی سال ۱۴۰۳ است.

توان اسمی

مقدار توانی است که در صورت اتصال به ولتاژ اسمی مصرف می کند:

$$P_{\text{اسمی}} = \frac{V_{\text{اسمی}}^2}{R}$$

تذکر

ولتاژ اسمی، مناسب ترین اختلاف پتانسیل الکتریکی است که می توان به دو سر یک قطعه الکترونیکی اعمال کرد. در اکثر مواقع در صورت اعمال ولتاژی بیشتر از ولتاژ اسمی به دو سر قطعه الکترونیکی، آن قطعه الکترونیکی ممکن است آسیب ببیند.

نکته

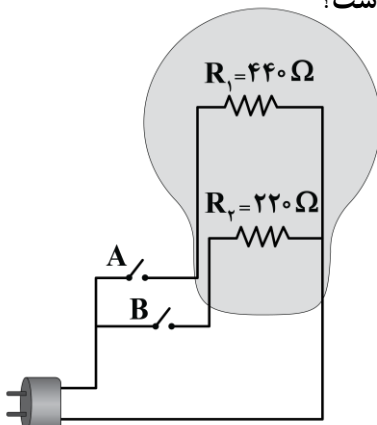
- ۱- مقدار مقاومتی که به کمک مقادیر توان اسمی و ولتاژ اسمی برای یک قطعه الکترونیکی به دست می آید، مقاومت الکتریکی آن قطعه در حالت روشن بودن است و این مقاومت از مقاومت آن قطعه در حالت خاموش خیلی بیشتر است.
- ۲- اگر یک قطعه الکترونیکی به ولتاژی کمتر از ولتاژ اسمی متصل شود، توان مصرفی آن قطعه کمتر از توان اسمی آن می شود.

تذکر

به کمک رابطه $R = \frac{V_{\text{اسمی}}^2}{P_{\text{اسمی}}}$ ، می توانیم مقاومت الکتریکی وسیله را در حالتی که به $V_{\text{اسمی}}$ متصل است و روشن است، پیدا کنیم. از طرفی هم چون افزایش دمای وسیله باعث افزایش مقاومت الکتریکی آن شده، بنابراین مقدار مقاومت به دست آمده برای لامپ خیلی بیشتر از مقدار مقاومت واقعی لامپ (مقاومت لامپ در حالت خاموش) است.



۴۸- یک لامپ سه راهه $220V$ که دو رشته دارد، مطابق شکل زیر برای کار در سه توان مختلف ساخته شده است. وقتی دو سر لامپ به اختلاف پتانسیل $220V$ وصل شود، اختلاف بیشترین و کمترین توان مصرفی لامپ چند وات است؟



- (۱) ۲۰۰
- (۲) ۲۲۰
- (۳) ۴۰۰
- (۴) ۴۴۰

بیشترین و کمترین مقاومت را به دست می آوریم. با توجه به موازی بودن مقاومت های R_1 و R_2 ، درمی یابیم کمترین مقاومت مربوط به حالتی است که هر دو کلید A و B بسته باشند و بیشترین مقاومت هنگامی است که فقط کلید A بسته باشد؛ بنابراین داریم:

$$R_{\min} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{440 \times 220}{440 + 220} = \frac{440}{3} \Omega$$

$$R_{\max} = R_1 = 440 \Omega$$

اختلاف بیشترین و کمترین توان مصرفی لامپ را به دست می آوریم:

$$P = \frac{V^2}{R} \Rightarrow P_{\max} - P_{\min} = \frac{V^2}{R_{\min}} - \frac{V^2}{R_{\max}} = V^2 \left(\frac{1}{R_{\min}} - \frac{1}{R_{\max}} \right)$$

$$\Rightarrow P_{\max} - P_{\min} = (220)^2 \times \left(\frac{1}{\frac{440}{3}} - \frac{1}{440} \right) = (220)^2 \times \left(\frac{1}{220} - \frac{1}{440} \right) = 220 \text{ W}$$

این سوال، مشابه امتحان نهایی رشته ریاضی سال ۱۴۰۴ است.

۱- در اتصال موازی مقاومت ها به یکدیگر، با توجه به برابر بودن اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر مقاومت ها و با توجه به رابطه $P = \frac{V^2}{R}$ ، توان مصرفی در هر مقاومت با مقدار هر مقاومت، رابطه عکس دارد.

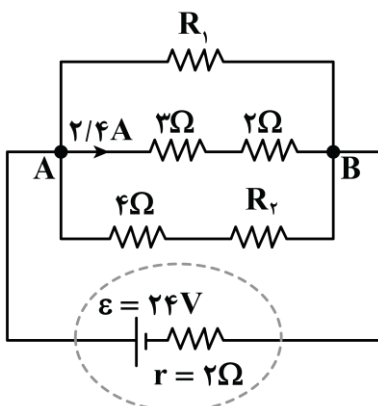
$$P = \frac{V^2}{R} \xrightarrow{V: \text{ثابت}} \frac{P_2}{P_1} = \frac{R_1}{R_2}$$

یعنی در اتصال موازی مقاومت ها، هر چه مقاومت، بزرگتر باشد، توان مصرفی آن کمتر است.

۲- در اتصال متوالی مقاومت ها به یکدیگر، با توجه به برابر بودن جریان عبوری از مقاومت ها و با توجه به رابطه $P = RI^2$ ، توان مصرفی هر مقاومت با مقدار هر مقاومت، رابطه مستقیم دارد.

$$P = RI^2 \xrightarrow{I: \text{ثابت}} \frac{P_2}{P_1} = \frac{R_2}{R_1}$$

یعنی در اتصال متوالی مقاومت ها، هرچه مقاومت، بزرگتر باشد، توان مصرفی آن بیشتر است.

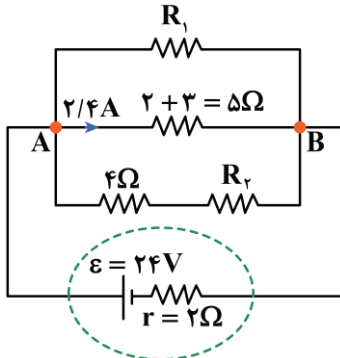


۴۹- در مدار شکل زیر، مقاومت معادل بین دو نقطه A و B چند اهم است؟

- ۱ (۱)
- ۲ (۲)
- ۴ (۳)
- ۶ (۴)

گام اول

اختلاف پتانسیل الکتریکی بین دو نقطه A و B را به دست می آوریم. با توجه به شکل زیر، درمی یابیم اختلاف پتانسیل الکتریکی بین دو نقطه A و B همان اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر باتری و همان اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر مقاومت معادل 5Ω است؛ بنابراین داریم:



$$V_{AB} = R_{5\Omega} I_{5\Omega} = 5 \times 2/4 = 12V$$

گام دوم

جریان خروجی از باتری را به دست می آوریم:

$$V_{\text{باتری}} = \varepsilon - rI \Rightarrow 12 = 24 - 2I \Rightarrow I = 6A$$

گام آخر

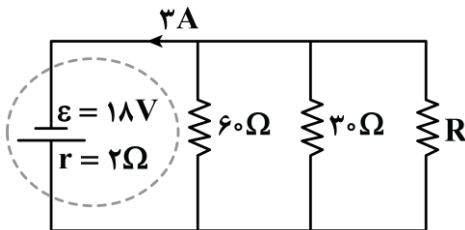
مقاومت معادل AB را به دست می آوریم:

$$I = \frac{\varepsilon}{R_{eq} + r} \Rightarrow 6 = \frac{24}{R_{eq} + 2} \Rightarrow R_{eq} = 2\Omega$$

این سوال، مشابه تمرین ۶-۲ کتاب درسی است.



۵۰- در مدار شکل زیر، توان خروجی باتری و مقدار مقاومت الکتریکی R برحسب SI به ترتیب از راست به چپ در کدام گزینه به درستی آمده اند؟



- (۱) ۳ و ۳۶
- (۲) ۵ و ۳۶
- (۳) ۳ و ۲۴
- (۴) ۵ و ۲۴

گام اول

ابتدا توان خروجی باتری را به دست می آوریم:

$$P_{\text{خروجی}} = \varepsilon I - rI^2 \xrightarrow{\varepsilon=18V, I=3A, r=2\Omega} P_{\text{خروجی}} = (18 \times 3) - 2(3)^2 = 54 - 18 = 36W$$

گام دوم

به کمک جریان خروجی از باتری، مقدار مقاومت معادل مدار را محاسبه می کنیم:

$$I = \frac{\varepsilon}{R_{eq} + r} \Rightarrow 3 = \frac{18}{R_{eq} + 2} \Rightarrow R_{eq} + 2 = 6 \Rightarrow R_{eq} = 4\Omega$$

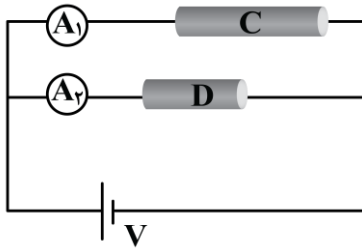
با توجه به مدار، مقاومت‌های R ، 30Ω و 60Ω موازی هستند، بنابراین داریم:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{30} + \frac{1}{60} + \frac{1}{R} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{1}{20} + \frac{1}{R} \Rightarrow \frac{1}{R} = \frac{1}{4} - \frac{1}{20} = \frac{5-1}{20} = \frac{4}{20} \Rightarrow \frac{1}{R} = \frac{1}{5} \Rightarrow R = 5\Omega$$

این سوال، مشابه امتحان شبه‌نهایی سال ۱۴۰۵ می‌باشد.



۵۱- مطابق شکل زیر، دو رسانای استوانه‌ای شکل توپر و هم‌جنس به یک باتری متصل هستند. اگر طول رسانای C ، ۲ برابر طول رسانای D و جریان عبوری از آمپرسنج آرمانی A_2 ، ۸ برابر جریان عبوری از آمپرسنج آرمانی A_1 باشد، شعاع سطح مقطع رسانای C چند برابر شعاع سطح مقطع رسانای D است؟



$$\begin{aligned} (1) & \quad 2 \\ (2) & \quad \frac{1}{2} \\ (3) & \quad \frac{1}{4} \\ (4) & \quad 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1) & \quad 2 \\ (2) & \quad \frac{1}{2} \\ (3) & \quad \frac{1}{4} \\ (4) & \quad 4 \end{aligned}$$

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) (صفحه ۷۴ - ۱۱۰۲)

پاسخ: گزینه ۲

کام اول

در مقاومت‌های موازی جریان به نسبت عکس مقاومت‌ها تقسیم می‌شود، بنابراین:

$$\frac{R_C}{R_D} = \frac{I_D}{I_C} \Rightarrow \frac{R_C}{R_D} = 8$$

کام دوم

با توجه به رابطه مقاومت الکتریکی داریم:

$$\frac{R_C}{R_D} = \frac{\rho_C}{\rho_D} \times \frac{L_C}{L_D} \times \left(\frac{r_D}{r_C}\right)^2 \Rightarrow 8 = 1 \times 2 \times \left(\frac{r_D}{r_C}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{r_D}{r_C}\right)^2 = 4 \Rightarrow \frac{r_D}{r_C} = 2 \Rightarrow \frac{r_C}{r_D} = \frac{1}{2}$$

این سوال، مشابه امتحان نهایی رشته تجربی سال ۱۴۰۳ می‌باشد.

عوامل مؤثر بر مقاومت الکتریکی

۱- مقدار مقاومت الکتریکی یک سیم به ویژگی‌های ساختمانی و دمای آن وابسته است و ربطی به ولتاژ و جریان آن ندارد. مقدار مقاومت یک سیم برحسب ویژگی‌های ساختمانی آن را می‌توانیم از رابطه زیر به دست آوریم:

$$R = \rho \frac{L}{A}$$

ρ : مقاومت ویژه سیم با یکای اهم $\times$ متر ($\Omega \cdot m$)

R : مقدار مقاومت الکتریکی با یکای اهم (Ω)

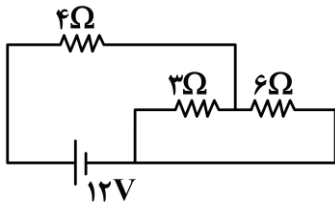
A : سطح مقطع سیم با یکای مترمربع (m^2)

L : طول سیم با یکای متر (m)

۲- با توجه به رابطه $R = \rho \frac{L}{A}$ ، برای مقایسه مقاومت الکتریکی دو سیم به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$R = \rho \frac{L}{A} \Rightarrow \frac{R_2}{R_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \times \frac{L_2}{L_1} \times \frac{A_1}{A_2} \xrightarrow[\text{قطر مقطع: } D]{A \propto D^2} \frac{R_2}{R_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \times \frac{L_2}{L_1} \times \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2$$





۵۲- در مدار شکل مقابل، توان مصرفی مقاومت ۳ اهمی چند وات است؟ (باتری، آرمانی است.)

(۲) $\frac{4}{3}$
(۴) $\frac{16}{3}$

(۱) $\frac{3}{4}$
(۳) $\frac{3}{16}$

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - صفحه ۷۳ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۴

گام اول

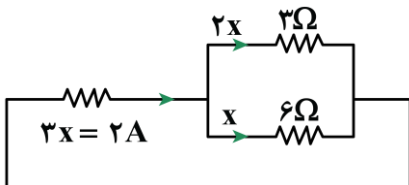
مقاومت معادل مدار را حساب می‌کنیم. مقاومت‌های ۳Ω و ۶Ω با هم موازی هستند و معادل آن‌ها با مقاومت ۴Ω متوالی است؛ بنابراین داریم:

$$R_{eq} = \left(\frac{3 \times 6}{3 + 6} \right) + 4 = 2 + 4 = 6\Omega$$

گام دوم

جریان خروجی از باتری را به دست می‌آوریم:

$$I = \frac{\varepsilon}{R_{eq} + r} \Rightarrow I = \frac{12}{6 + 0} = 2A$$

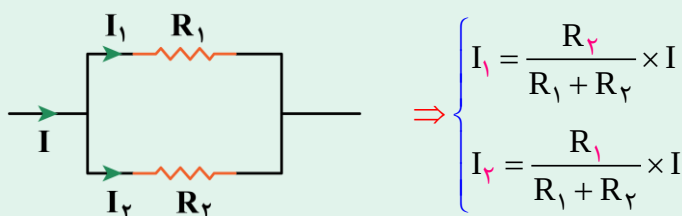


جریان گذرنده از مقاومت ۳ اهمی را به دست می‌آوریم. مطابق شکل مقابل داریم:

$$3x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{3} \Rightarrow I_{3\Omega} = 2x = \frac{4}{3}A$$

گام سوم

تکنیک تقسیم جریان در دو مقاومت موازی



گام آخر

توان مصرفی مقاومت ۳Ω را به دست می‌آوریم:

$$P = RI^2 \Rightarrow P_{3\Omega} = 3 \times \left(\frac{4}{3} \right)^2 = \frac{16}{3} W$$

این سوال برگرفته از امتحان نهایی رشته ریاضی سال ۱۴۰۳ است.



۵۳- پروتونی با تندی $3 \times 10^5 \frac{m}{s}$ درون میدان مغناطیسی یکنواختی به اندازه $60G$ در حرکت است. جهت حرکت پروتون با جهت خطوط

میدان مغناطیسی زاویه 60° می‌سازد. بزرگی نیروی مغناطیسی وارد بر این پروتون چند نیوتون است؟ ($e = 1.6 \times 10^{-19}$)

(۱) $7/2 \times 10^{-16}$ (۲) $7/2\sqrt{3} \times 10^{-16}$ (۳) $1/44 \times 10^{-16}$ (۴) $1/44\sqrt{3} \times 10^{-16}$

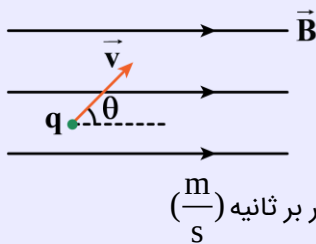
طبق رابطه بزرگی نیروی مغناطیسی وارد بر ذره باردار متحرک می‌توانیم بنویسیم:

$$F = |q|vB \sin \theta$$

$|q| = 1/6 \times 10^{-19} \text{ C}, v = 3 \times 10^5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$
 $B = 60 \text{ G} = 60 \times 10^{-4} \text{ T}, \theta = 60^\circ$

$$F = 1/6 \times 10^{-19} \times 3 \times 10^5 \times 60 \times 10^{-4} \times \sin 60^\circ$$

$$\Rightarrow F = 1/6 \times 3 \times 60 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 10^{-18} = 144\sqrt{3} \times 10^{-18} = 1/44\sqrt{3} \times 10^{-16} \text{ N}$$



بزرگی نیروی مغناطیسی وارد بر ذره باردار متحرک از طرف میدان مغناطیسی

$$F = |q|vB \sin \theta$$

B: اندازه میدان مغناطیسی بر حسب تسلا (T)

F: اندازه نیرو بر حسب نیوتون (N)

|q|: اندازه بار الکتریکی بر حسب کولن (C) θ : زاویه بین بردار $\vec{v}$ و بردار $\vec{B}$ v: تندی بر حسب متر بر ثانیه ($\frac{\text{m}}{\text{s}}$)



۱- یکای میدان مغناطیسی در SI، **تسلا (T)** است که با توجه به رابطه $F = |q|vB \sin \theta$ ، یک تسلا برابر است با:

$$1 \text{ T} = 1 \frac{\text{N.s}}{\text{C.m}}$$

۲- **تسلا** یکای بسیار بزرگی است. برای اندازه‌گیری میدان مغناطیسی، می‌توان از یکای دیگری به نام **گاوس (G)** استفاده کرد. هر گاوس (G) برابر با 10^{-4} T است.

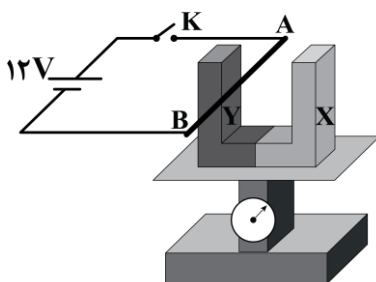
۳- در صورتی که بردار $\vec{v}$ **عمود** بر بردار $\vec{B}$ باشد، بزرگی نیروی مغناطیسی، **بیشینه** ($F_{\text{max}} = |q|vB$) و در صورتی که بردار $\vec{v}$ و $\vec{B}$ **هم‌راستا** باشند، بزرگی نیروی مغناطیسی، **صفر** است.

۴- نیروی $\vec{F}$ بر صفحه‌ای که توسط بردارهای سرعت و میدان مغناطیسی ساخته می‌شود، **عمود** است، بنابراین نیروی $\vec{F}$ بر مسیر حرکت ذره عمود است، در نتیجه **کار نیروی مغناطیسی بر روی ذره باردار متحرک، صفر است**، بنابراین **این نیرو تندی ذره را تغییر نمی‌دهد** و فقط **جهت سرعت را تغییر می‌دهد**.

۵- اگر مسیر حرکت ذره قسمتی از یک دایره باشد، نیروی مغناطیسی وارد بر ذره به سمت مرکز دایره است و بردار سرعت بر مسیر حرکت، مماس است.



۵۴- آزمایش شکل زیر، مربوط به اندازه‌گیری بزرگی نیروی مغناطیسی وارد شده بر سیم حامل جریان AB است. اگر با بستن کلید، عدد نشان‌داده شده توسط ترازو به اندازه 3 N افزایش یابد، با فرض این‌که مقاومت الکتریکی و طول سیم رسانای AB به ترتیب برابر با 10Ω و 5 cm باشد، بزرگی میدان مغناطیسی بین قطب‌های آهنربای نعلی شکل بر حسب تسلا و نوع قطب X آهنربا به ترتیب از راست به چپ در کدام گزینه به درستی آمده‌اند؟ (سیم AB به طور کامل در فضای بین دو قطب آهنربا قرار دارد.)



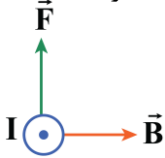
(۱) 5 T و 5 T

(۲) 5 T و 5 T

(۳) 5 S و 5 S

(۴) 5 S و 5 S

با بستن کلید، جریان الکتریکی در سیم رسانای AB و در جهت A به B (برون سو) برقرار می‌شود. از طرفی نیز چون اندازه مقدار نشان داده شده توسط ترازو افزایش یافته است، پس سیم رسانای AB آهنربا را به سمت پایین هل داده است و طبق قانون سوم نیوتون، نتیجه می‌گیریم که آهنربا باید نیروی مغناطیسی رو به بالا را به سیم وارد کند. بنابراین طبق قاعده دست راست، باید میدان مغناطیسی ناشی از آهنربا به سمت راست باشد. می‌دانیم در خارج از آهنربا، میدان مغناطیسی از قطب N به قطب S است، پس قطب X باید قطب S باشد.



عدد نشان داده شده توسط ترازو به اندازه ۰/۳ N افزایش یافته است، پس اندازه نیروی مغناطیسی وارد شده بر سیم AB باید برابر با ۰/۳ N باشد و داریم:

$$I = \frac{V}{R} = \frac{12}{10} = 1.2 \text{ A}$$

$$F = BIl \sin \theta \Rightarrow 0.3 = B \times 1.2 \times 50 \times 10^{-2} \times \sin 90^\circ \Rightarrow 0.3 = 0.6 \times B \Rightarrow B = 0.5 \text{ T}$$

این سوال، مشابه امتحان شبه‌نهایی سال ۱۴۰۵ می‌باشد.

اندازه نیروی مغناطیسی وارد بر سیم حامل جریان

$$F = IlB \sin \theta$$

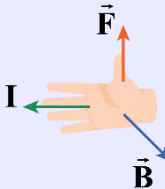
F: اندازه نیروی مغناطیسی بر حسب نیوتون (N)
I: جریان الکتریکی بر حسب آمپر (A)
B: بزرگی میدان مغناطیسی بر حسب تسلا (T)
l: طول بخشی از سیم (بر حسب m) که در میدان مغناطیسی B قرار دارد.
θ: زاویه بین جهت جریان و جهت میدان مغناطیسی

نکات

- ۱- شکل سیم هرگونه باشد، نیروی مغناطیسی وارد بر آن، عمود بر راستای میدان است.
- ۲- اگر راستای سیم و خطوط میدان مغناطیسی، یکسان باشد، نیروی وارد بر آن صفر و اگر سیم عمود بر خطوط میدان مغناطیسی باشد، نیروی وارد بر آن بیشینه ($F_{\max} = IlB$) است.

جهت نیروی مغناطیسی وارد بر سیم حامل جریان

اگر از سیمی به طول l که درون میدان مغناطیسی یکنواخت B قرار دارد، جریان I عبور کند، به آن نیروی مغناطیسی F وارد می‌شود. جهت این نیرو مطابق قاعده دست راست تعیین می‌شود.
اگر دست راست را طوری نگه داریم که انگشتان باز شده ما در جهت I باشد، به گونه‌ای که وقتی چهار انگشت را در جهت چرخش طبیعی خم کنیم، در جهت B قرار گیرد، انگشت شست ما در جهت نیروی وارد بر سیم حامل جریان خواهد بود.



عبور سیم حامل جریان الکتریکی از بین قطب‌های یک آهنربای لاشکل که بر روی ترازو قرار دارد

اگر فرض کنیم وزن آهنربا به تنهایی برابر با mg باشد، آن‌گاه داریم:

$$\text{عدد ترازو} = mg + F_B$$

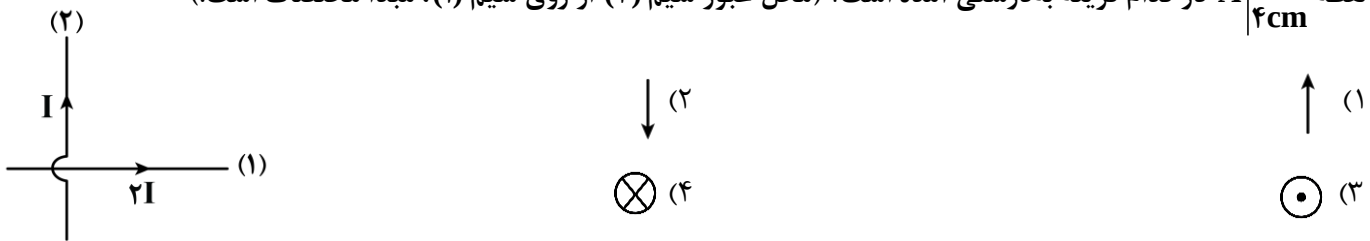
اگر F_B وارد بر سیم به سمت بالا باشد ← عدد ترازو افزایش می‌یابد.

$$\text{عدد ترازو} = mg - F_B$$

اگر F_B وارد بر سیم به سمت پایین باشد ← عدد ترازو کاهش می‌یابد.

۵۵- مطابق شکل زیر، دو سیم حامل جریان بر محورهای مختصات منطبق‌اند. جهت برآیند میدان‌های مغناطیسی حاصل از دو سیم در

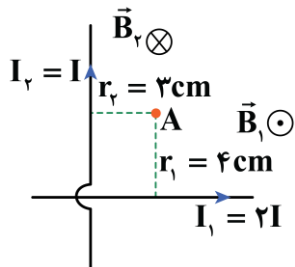
نقطه A در کدام گزینه به‌درستی آمده است؟ (محل عبور سیم (۲) از روی سیم (۱)، مبدأ مختصات است.)



(آسان - محاسباتی - سریع - صفحه ۹۶ - ۱۱۰۳)

پاسخ: گزینه ۳

ابتدا طبق قاعده دست راست، جهت میدان مغناطیسی حاصل از هر سیم را در نقطه A به‌دست می‌آوریم. از طرفی می‌دانیم بزرگی میدان مغناطیسی حاصل از سیم راست حامل جریان، با اندازه جریان الکتریکی، رابطه مستقیم و با فاصله نقطه از سیم، رابطه معکوس دارد، بنابراین با توجه به شکل مقابل داریم:

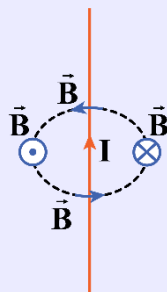
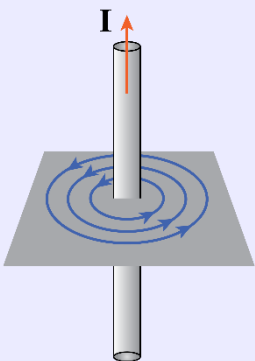


$$\frac{B_1}{B_2} = \frac{I_1}{I_2} \times \frac{r_2}{r_1} = 2 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{2} \xrightarrow{B_1 > B_2} \vec{B}_A : \odot$$

ایده این سوال برگرفته از امتحان نهایی رشته تجربی سال ۱۴۰۳ است.

میدان مغناطیسی سیم راست حامل جریان

طبق آزمایش اورستند، سیم راست حامل جریان اطراف خودش میدان مغناطیسی ایجاد می‌کند. خطوط این میدان مغناطیسی به‌صورت دایره‌های هم‌مرکز در اطراف سیم هستند و جهت این خطوط به کمک قاعده دست راست تعیین می‌شود.



شست دست راست در جهت جریان و چرخش چهار انگشت جهت میدان مغناطیسی را نشان می‌دهد.

نکته

هرچه جریان سیم بزرگ‌تر و فاصله از سیم کم‌تر باشد، میدان مغناطیسی ناشی از سیم حامل جریان بزرگ‌تر است.

۵۶- با سیمی به طول ۱۸۰ m پیچه مسطحی به شعاع ۶ cm و N حلقه می‌سازیم. اگر جریان ۲ A / ° از این پیچه عبور کند، اندازه میدان

مغناطیسی در مرکز آن چند گاوس می‌شود؟ ($\mu_0 = 12 \times 10^{-7} \frac{T \cdot m}{A}$, $\pi = 3$)

- ۱۰ (۱) 10^{-3} (۲) 2×10^{-3} (۳) ۲۰ (۴)

تعداد حلقه‌های پیچه را به دست می‌آوریم:

$$N = \frac{L}{2\pi R} \Rightarrow N = \frac{180}{2 \times 3 \times 10^{-2}} = 500$$

بزرگی میدان مغناطیسی حاصل از پیچه را در مرکز آن به دست می‌آوریم:

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2R} \Rightarrow B = \frac{12 \times 10^{-7} \times 500 \times 0.2}{2 \times 0.06} = 10^{-3} T \times \frac{1G}{10^{-4} T} = 10 G$$

این سوال، مشابه امتحان نهایی رشته ریاضی سال ۱۴۰۴ است.

میدان مغناطیسی حاصل از یک پیچه حامل جریان

اگر از یک پیچه رسانا با N حلقه جریان I عبور کند و شعاع حلقه R باشد، بزرگی میدان مغناطیسی در داخل پیچه از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2R}$$

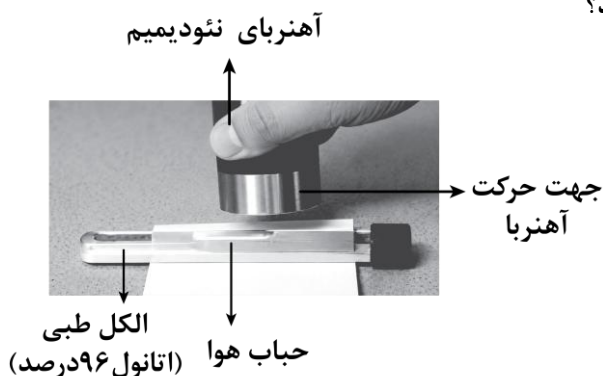
B: بزرگی میدان مغناطیسی در مرکز پیچه برحسب تسلا (T) $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{T.m}{A}$: تراوایی مغناطیسی خلأ

N: تعداد حلقه I: جریان الکتریکی برحسب آمپر (A) R: شعاع حلقه برحسب متر (m)

بزرگی میدان مغناطیسی در مرکز پیچه با تعداد حلقه‌های پیچه و جریان عبوری از آن رابطه مستقیم و با شعاع پیچه رابطه عکس دارد.



۵۷- مطابق شکل زیر، یک لوله آزمایش را تا نزدیکی لبه آن از الکل طبی پر می‌کنیم. درب لوله را بسته و به‌طور افقی قرار می‌دهیم. با حرکت دادن آهنربا به سمت راست، حباب هوا به کدام سمت حرکت می‌کند؟



- (۱) با توجه به این که حباب هوا، یک ماده فرومغناطیسی است، به سمت راست حرکت می‌کند.
- (۲) با توجه به این که حباب هوا، یک ماده دیامغناطیسی است، به سمت چپ حرکت می‌کند.
- (۳) با توجه به این که الکل، یک ماده دیامغناطیسی است، حباب هوا به سمت راست حرکت می‌کند.
- (۴) با توجه به این که الکل، یک ماده فرومغناطیسی است، حباب هوا به سمت چپ حرکت می‌کند.

با حرکت آهنربا به سمت راست، با توجه به این که الکل، یک ماده دیامغناطیسی است، توسط آهنربا رانده می‌شود؛ بنابراین حباب هوا همراه با آهنربا به سمت راست حرکت می‌کند.

این سوال برگرفته از فعالیت ۷-۳ کتاب درسی است.



۵۸- کدام یک از گزینه‌های زیر به ترتیب از راست به چپ، عبارت‌های «الف» تا «د» را به درستی تکمیل می‌کند؟

الف - سامانه تنظیم حد تندی خودرو بر اساس کار می‌کند.

ب - یکای آهنگ تغییر شار مغناطیسی، است.

ج -، یک کمیت نرده‌ای با یکای $\frac{\text{kg.m}^2}{\text{A.s}^2}$ است.

د - رایج‌ترین روش برای تولید جریان متناوب از طریق است.

(۱) تغییر مقاومت الکتریکی - ولت - شار مغناطیسی - تغییر زاویه پیچه با خطوط میدان مغناطیسی

(۲) تغییر مقاومت الکتریکی - وبر - میدان مغناطیسی - تغییر مساحت پیچه

(۳) القای الکترومغناطیسی - وبر - میدان مغناطیسی - تغییر مساحت پیچه

(۴) القای الکترومغناطیسی - ولت - شار مغناطیسی - تغییر زاویه پیچه با خطوط میدان مغناطیسی

(آسان - خطبه‌خط - سریع - صفحه ۱۲۳ - ۱۱۰۴)

پاسخ: گزینه ۴

بررسی موارد:

(الف)

سامانه تنظیم حد تندی خودرو بر اساس **القای الکترومغناطیسی** کار می‌کند.

(ب)

یکای آهنگ تغییر شار مغناطیسی، **ولت** است.

(ج)

شار مغناطیسی، یک کمیت نرده‌ای با یکای $\frac{\text{kg.m}^2}{\text{A.s}^2}$ است.

(د)

رایج‌ترین روش برای تولید جریان متناوب از طریق **تغییر زاویه پیچه با خطوط میدان مغناطیسی** است.



۵۹- معادله جریان - زمان یک مولد جریان متناوب برحسب یکاهای SI به صورت $I = 8 \sin(\frac{7\pi}{12} t)$ است. اگر ضریب القاوری القاگر

5mH باشد، در کدام لحظه برحسب ثانیه پس از لحظه $t = 0$ انرژی ذخیره شده در القاگر برای اولین بار برابر با 40mJ می‌شود؟

(۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{2}{7}$ (۳) $\frac{22}{7}$ (۴) $\frac{34}{7}$

(متوسط - محاسباتی - استاندارد - صفحه ۱۲۴ - ۱۱۰۴)

پاسخ: گزینه ۲

کام اول

اندازه جریان الکتریکی عبوری از القاگر را به دست می‌آوریم:

$$U = \frac{1}{2} LI^2 \xrightarrow[L=5\text{mH}]{U=40\text{mJ}} 40 = \frac{1}{2} \times 5 \times 10^{-3} \times I^2 \Rightarrow |I| = 4\text{A}$$

کام آخر

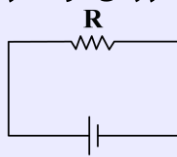
لحظه‌ای که برای اولین بار اندازه جریان الکتریکی $|I| = 4\text{A}$ می‌شود، را به دست می‌آوریم:

$$I = 8 \sin(\frac{7\pi}{12} t) \Rightarrow |I| = 8 \left| \sin(\frac{7\pi}{12} t) \right| \xrightarrow{|I|=4\text{A}} 4 = 8 \left| \sin(\frac{7\pi}{12} t) \right|$$

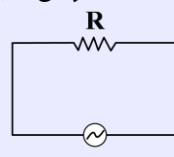
$$\Rightarrow \left| \sin(\frac{7\pi}{12} t) \right| = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin(\frac{7\pi}{12} t) = \pm \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{اولین بار}} \frac{7\pi}{12} t = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = \frac{2}{7}\text{s}$$

جریان متناوب

نوعی جریان القایی است که اندازه و جهت آن با گذشت زمان تغییر می‌کند و تکرار می‌شود. جریان متناوب سینوسی، متداول‌ترین نوع جریان متناوب است.



جریان مستقیم



جریان متناوب

با چرخش پیچه در میدان مغناطیسی، شار مغناطیسی تغییر می‌کند و در نتیجه جریان متناوب ایجاد می‌شود.

نکته

رایج‌ترین روش برای تغییر شار و در نتیجه تولید جریان القایی، تغییر زاویه θ در رابطه شار مغناطیسی است.

دوره تناوب (T):

مدت زمانی که طول می‌کشد که پیچه به طور یکنواخت یک دور کامل بچرخد را دوره تناوب گویند و واحد آن در SI برابر با ثانیه (s) است.

نکته

اگر دوره تناوب یک پیچه برابر با T باشد، پیچه در مدت زمان t به تعداد n دور خواهد چرخید.

$$n = \frac{t}{T}$$

بسامد (f):

به تعداد چرخش پیچه در واحد زمان، بسامد گفته می‌شود و یکای آن در SI برابر با هرتز (Hz) یا یک بر روی ثانیه (s^{-1}) است.

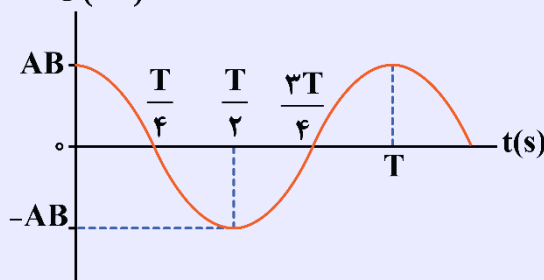
$$\begin{cases} n = \frac{t}{T} \\ f = \frac{n}{t} \end{cases} \Rightarrow f = \frac{1}{T}$$

معادله شار متناوب

اگر پیچه‌ای با سطح مقطع A که عمود بر خطوط میدان مغناطیسی $\vec{B}$ قرار دارد، با دوره تناوب T در میدان مغناطیسی بچرخد، شار مغناطیسی که در لحظه t در پیچه القا می‌شود از رابطه زیر به دست می‌آید:

$\Phi(\text{wb})$

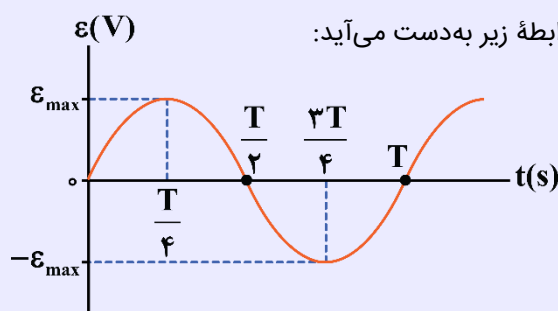
$$\Phi = BA \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \Rightarrow \Phi = \Phi_{\max} \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$



معادله نیروی محرکه متناوب

نیروی محرکه‌ای که در لحظه t در پیچه القا می‌شود، از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\varepsilon = \varepsilon_m \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$





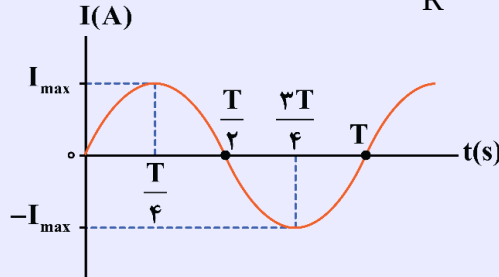
تذکر در رابطه با ε_m ، بیشینه مقدار نیروی محرکه القایی در پیچه است.



معادله جریان متناوب

اگر مقاومت الکتریکی کل مدار پیچه برابر R باشد، با توجه به رابطه $I = \frac{\varepsilon}{R}$ ، جریانی که در پیچه در لحظه t القا می‌شود از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$I = I_m \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right)$$



تذکر که در این رابطه I_m بیشینه جریان القاشده در پیچه و برابر با $\frac{\varepsilon_m}{R}$ است.

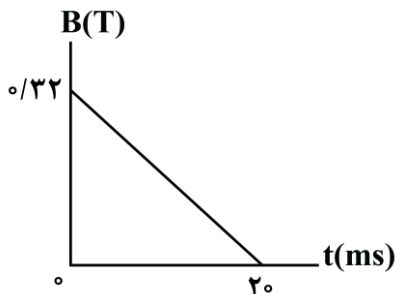


نکته

در هر بار چرخش پیچه، شار مغناطیسی، جریان و نیروی محرکه القایی، دو مرتبه بیشینه و دو مرتبه صفر می‌شوند.



۶۰- مقاومت الکتریکی پیچه‌ای با 200 حلقه که مساحت هر حلقه آن 20 cm^2 است، برابر با 1Ω است و این پیچه عمود بر خطوط یک میدان مغناطیسی قرار گرفته است. اگر نمودار بزرگی این میدان مغناطیسی برحسب زمان مطابق شکل زیر باشد، جریان القایی متوسط در این پیچه در بازه زمانی $t = 10 \text{ ms}$ تا $t = 20 \text{ ms}$ چند آمپر است؟



(۱) $6/4$

(۲) $0/64$

(۳) $3/2$

(۴) $0/32$

(متوسط - محاسباتی - استاندارد - صفحه ۱۱۳ - ۱۱۰۴)

پاسخ: گزینه ۲

شیب نمودار داده شده برابر با آهنگ تغییرات بزرگی میدان مغناطیسی است و با توجه به این که شیب نمودار داده شده ثابت است، بنابراین آهنگ تغییرات بزرگی میدان مغناطیسی در بازه زمانی $t = 0$ تا $t = 20 \text{ ms}$ برابر با آهنگ تغییرات بزرگی میدان مغناطیسی در بازه زمانی $t = 10 \text{ ms}$ تا $t = 20 \text{ ms}$ است، بنابراین:

$$I_{av} = \left| -\frac{NA \cos \theta}{R} \frac{\Delta B}{\Delta t} \right| = \left| -\frac{200 \times 20 \times 10^{-4} \times 1}{10} \times \frac{0 - 0/32}{20 \times 10^{-3}} \right| = 0/64 \text{ A}$$



نکته

از روی نمودار بزرگی میدان مغناطیسی برحسب زمان $(B - t)$ هم می‌توان با به دست آوردن شیب نمودار به $\left(\frac{\Delta B}{\Delta t}\right)$ و در نهایت به ε_{av} رسید.

قانون فاراده

هرگاه شار مغناطیسی عبوری از یک حلقهٔ رسانا تغییر کند، نیروی محرکه‌ای در حلقه القا می‌شود که بزرگی آن با آهنگ تغییر شار مغناطیسی عبوری از حلقه متناسب است.

تغییر شار مغناطیسی در یک حلقه ← ایجاد نیروی محرکه القایی ← ایجاد جریان القایی

نیروی محرکه القایی متوسط بنابر قانون فاراده برای پیچه یا سیملوله‌ای که از N حلقهٔ مشابه تشکیل شده باشد از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\varepsilon_{av} = -N \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$$

N: تعداد حلقه

ε_{av} : نیروی محرکه القایی متوسط برحسب ولت (V)

Δt : مدت زمان تغییر شار مغناطیسی عبوری از حلقه برحسب ثانیه (s)

$\Delta \Phi$: تغییر شار مغناطیسی برحسب وبر (Wb)

نکته

در این رابطه نیروی محرکه القایی متوسط برحسب **ولت** است که یک ولت، معادل **وبر بر ثانیه** است.

تذکر

علامت منفی در این رابطه، مخالفت نیروی محرکه القایی متوسط با تغییر شار مغناطیسی عبوری از پیچه را نشان می‌دهد.

نکته

با توجه به روابط مربوط تغییرات شار مغناطیسی عبوری از پیچه‌ای رسانا، می‌توانیم روابط زیر را برای نیروی محرکه القایی متوسط در پیچه بنویسیم:

$$\varepsilon_{av} = -N \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \begin{cases} \text{تغییر } B \Rightarrow \varepsilon_{av} = -NA \cos \theta \frac{\Delta B}{\Delta t} = -NA \cos \theta \frac{(B_2 - B_1)}{\Delta t} \\ \text{تغییر } A \Rightarrow \varepsilon_{av} = -NB \cos \theta \frac{\Delta A}{\Delta t} = -NB \cos \theta \frac{(A_2 - A_1)}{\Delta t} \\ \text{تغییر } \theta \Rightarrow \varepsilon_{av} = -NBA \frac{\Delta \cos \theta}{\Delta t} = -NBA \frac{(\cos \theta_2 - \cos \theta_1)}{\Delta t} \end{cases}$$

جریان القایی در یک پیچه با تغییر شار مغناطیسی عبوری از آن

اگر نیروی محرکه القایی متوسط در حلقه برابر با ε_{av} و مقاومت الکتریکی حلقه R باشد، اندازهٔ جریان القایی متوسط در حلقه از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$I_{av} = \frac{|\varepsilon_{av}|}{R} = \left| -\frac{N \Delta \Phi}{R \Delta t} \right|$$

نکات

- ۱- هر چه مقاومت الکتریکی پیچه یا مداری که در آن شار مغناطیسی تغییر می‌کند، بیشتر باشد، جریان کوچک‌تری در آن القا می‌شود.
- ۲- هر چه تغییرات شار مغناطیسی عبوری از یک پیچهٔ رسانا سریع‌تر رخ دهد و همین‌طور تعداد حلقه‌های پیچه بیشتر باشد، بزرگی نیروی محرکه القایی متوسط و جریان القایی متوسط در پیچه بیشتر خواهد بود.





برای دیدن پاسخنامه ویدئویی آزمون
QRcode بالا را اسکن کنید
یا بر روی لینک زیر کلیک کنید
پاسخنامه ویدئویی آزمون

کل کتاب شیمی ۲

بودجه بندی
این آزمون

مباحث این آزمون در مجموع ۱۱ الی ۱۲ تست از ۳۰ تست کنکور را پوشش داده است.

سهم در
کنکور

۶۱- کدام یک از مطالب زیر درست است؟

- (۱) در یک واکنش گازی گرماگیر، مجموع آنتالپی پیوندهای اشتراکی در فراورده‌ها بیشتر از واکنش‌دهنده‌ها است.
- (۲) در یک واکنش گرماده، علامت تغییر آنتالپی، مثبت بوده و در معادله Q در سمت فراورده‌ها نوشته می‌شود.
- (۳) در یک واکنش گرماگیر، واکنش‌پذیری فراورده‌ها بیشتر از واکنش‌پذیری واکنش‌دهنده‌ها است.
- (۴) در یک واکنش گرماده، سطح انرژی واکنش‌دهنده‌ها پایین‌تر از سطح انرژی فراورده‌ها است.

(متوسط - مفهومی - استاندارد ۱) - صفحه ۶۹ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۳

در واکنش‌های گرماگیر فعالیت شیمیایی یا همان واکنش‌پذیری فراورده‌ها بیشتر از واکنش‌دهنده‌ها است و به همین علت است که در این واکنش‌ها، پایداری واکنش‌دهنده‌ها بیشتر خواهد بود. جدول زیر اطلاعاتی را در مورد واکنش‌های گرماده و گرماگیر ارائه می‌دهد:

واکنش‌های گرماده	واکنش‌های گرماگیر	وضعیت گرما
آزاد کردن گرما	جذب گرما	
سمت فراورده‌ها $A \rightarrow B + Q$ گرما	سمت واکنش‌دهنده‌ها $A + Q \rightarrow B$ گرما	جهت قرارگیری گرما
$Q < 0$	$Q > 0$	علامت گرما (Q)
$\Delta H < 0$	$\Delta H > 0$	علامت آنتالپی (ΔH)
واکنش‌دهنده‌ها < فراورده‌ها	واکنش‌دهنده‌ها > فراورده‌ها	سطح انرژی
واکنش‌دهنده‌ها > فراورده‌ها	واکنش‌دهنده‌ها < فراورده‌ها	پایداری
واکنش‌دهنده‌ها < فراورده‌ها	واکنش‌دهنده‌ها > فراورده‌ها	فعالیت شیمیایی
افزایش	کاهش	دمای محیط

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) در یک واکنش گازی، رابطه $\Delta H = [\text{مجموع آنتالپی پیوندها در مواد فراورده}] - [\text{مجموع آنتالپی پیوندها در مواد واکنش‌دهنده}]$ برقرار است.

پس اگر مقدار آنتالپی مثبت باشد، باید مجموع آنتالپی پیوندهای اشتراکی در واکنش‌دهنده‌ها بیشتر باشد.

۲) در واکنش‌های گرماده علامت تغییر آنتالپی واکنش منفی بوده و در این واکنش‌ها Q یا همان نماد گرما در سمت فراورده‌ها قرار دارد.

۴) در واکنش گرماده، سطح انرژی یا همان آنتالپی واکنش‌دهنده‌ها بالاتر از سطح انرژی فراورده‌ها است.



۶۲- کدام یک از مطالب زیر نادرست است؟ ($H = 1 : g \cdot mol^{-1}$)

- (۱) در صورت نیاز فوری بدن انسان به انرژی، استفاده از موادی با درصد چربی بیشتر توصیه می‌شود.
- (۲) اگر از سوختن ۱/۵ گرم بنزن، ۶۰ کیلوژول گرما آزاد شود، ارزش سوختی آن برابر $40 kJ \cdot g^{-1}$ است.
- (۳) اگر از سوختن نیم گرم گاز هیدروژن، ۱۴۳ کیلوژول گرما تولید شود، آنتالپی سوختن آن برابر $-572 kJ \cdot mol^{-1}$ است.
- (۴) انحلال نمک آمونیوم نترات در آب گرماگیر بوده و از این فرایند برای سرد کردن محل آسیب‌دیدگی ورزشکاران استفاده می‌شود.

پاسخ: گزینه ۱

(سخت - مفهومی - زمان‌بر ۵ - صفحه ۷۳ - ۱۱۰۲)

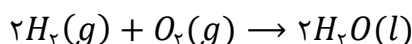
کربوهیدرات‌ها، چربی‌ها و پروتئین‌ها منبعی برای تأمین انرژی یاخته‌های بدن هستند. از میان این سه ماده، تنها کربوهیدرات‌ها به سرعت شکسته شده و به گلوکز تبدیل می‌شوند. گلوکز با انحلال در خون، خود را به یاخته‌ها می‌رساند و به هنگام اکسایش در یاخته، انرژی تولید می‌کند؛ پس برای تأمین نیاز فوری و ضروری بدن انسان به انرژی، بهتر است از موادی با درصد کربوهیدرات بیشتر استفاده کرد؛ اما برای تأمین انرژی فعالیت‌های فیزیکی در مدت طولانی، به‌علت ارزش سوختی بیشتر چربی‌ها، استفاده از موادی با درصد چربی بالاتر، مناسب‌تر است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۲) ارزش سوختی یک ماده برابر مقدار گرمای آزادشده از سوختن یک گرم از آن ماده است. پس ارزش سوختی بنزن برابر است با:

$$\text{ارزش سوختی} = \frac{\text{گرمای تولیدشده}}{\text{جرم سوخت}} \Rightarrow x = \frac{60}{1/5} = 40 kJ \cdot g^{-1}$$

۳) آنتالپی سوختن برابر با آنتالپی واکنشی است که در آن یک مول سوخت بسوزد. واکنش انجام‌شده به‌صورت زیر است:



پس گرمای حاصل از سوختن یک مول هیدروژن را حساب می‌کنیم:

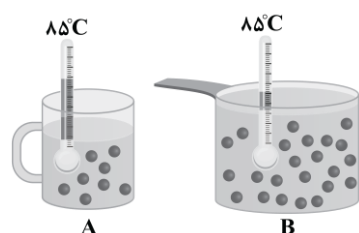
$$? kJ \text{ گرما} = 1 mol H_2 \times \frac{2 g H_2}{1 mol H_2} \times \frac{143 kJ \text{ گرما}}{0.5 g H_2} = 572 kJ$$

بر این اساس و با در نظر گرفتن علامت آنتالپی، آنتالپی سوختن هیدروژن به‌صورت -572 کیلوژول بر مول است.

۴) انحلال آمونیوم نترات در آب، یک واکنش گرماگیر است. با انحلال این نمک در آب، گرما مصرف‌شده و دمای محلول پایین می‌آید. به همین علت در تولید کیسه سرد برای آسیب‌های ورزشی، از بسته حاوی این نمک استفاده می‌شود. در مقابل انحلال نمک کلسیم کلرید در آب، گرماده بوده و با آزاد کردن گرما و افزایش دمای محلول همراه است و به این علت برای کیسه گرم از این نمک استفاده می‌شود.



۶۳- با توجه به شکل مقابل، کدام یک از مطالب زیر نادرست است؟



- (۱) میانگین تندی ذرات آب در دو ظرف برابر است.
- (۲) گرمای ویژه آب درون ظرف B بیشتر از آب ظرف A است.
- (۳) مجموع انرژی جنبشی ذرات آب ظرف B بیشتر از این مقدار در ظرف A است.
- (۴) با افزایش دمای ظرف A، میزان جنبش‌های نامنظم ذرات آب درون آن، بیشتر می‌شود.

پاسخ: گزینه ۲

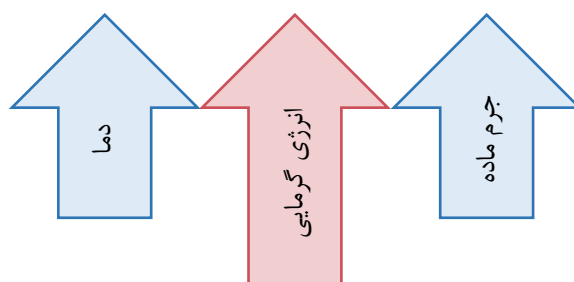
(آسان - مفهومی - سریع ۵ - صفحه ۶۰ - ۱۱۰۲)

ظرفیت گرمایی (C) یک ماده، مقدار گرمایی است که در دما و فشار مشخص به آن ماده داده می‌شود تا دمای آن به اندازه $1^\circ C$ بالا رود، همچنین ظرفیت گرمایی ویژه یا گرمای ویژه (C) یک ماده، مقدار گرمایی است که به یک گرم از ماده در دما و فشار مشخص داده می‌شود تا دمای آن $1^\circ C$ افزایش یابد. پس گرمای ویژه، به نوع، فشار و دمای ماده بستگی داشته اما به جرم بستگی ندارد. ظرفیت گرمایی به هر چهار پارامتر یادشده وابسته است.

شاخص دمایی	واحد	وابستگی به نوع ماده	وابستگی به جرم ماده	وابستگی به دما و فشار
گرمای ویژه	$J \cdot g^{-1} \cdot K^{-1}$	دارد	ندارد	دارد
ظرفیت گرمایی	$J \cdot K^{-1}$	دارد	دارد	دارد

بررسی سایر گزینه‌ها:

- ۱) دمای یک ماده، معیاری برای توصیف میانگین تندی و میانگین انرژی جنبشی ذره‌های سازنده آن ماده است و هرچه دمای یک ماده بیشتر باشد این دو میانگین نیز بیشتر خواهند بود. با توجه به هم‌دما بودن دو آب، میانگین تندی ذرات آب هر دو ظرف با یکدیگر برابر هستند و این مقایسه ارتباطی با جرم آب نخواهد داشت.
- ۳) مجموع انرژی جنبشی ذرات یک ماده یا همان انرژی گرمایی، به جرم و دمای آن ماده بستگی دارد و هر چه این دو مقدار بیشتر باشند، انرژی گرمایی نیز بیشتر خواهد بود. در میان این دو ظرف نیز، با توجه به برابر بودن دمای دو ظرف و همچنین جرم بیشتر آب درون ظرف B، می‌توان نتیجه گرفت، مجموع انرژی جنبشی ذرات در این ظرف بیشتر است.



- ۴) ذرات سازنده یک ماده در هر سه حالت فیزیکی در حال جنب‌وجوش هستند. این جنبش‌ها به‌صورت نامنظم بوده و در حالت گازی شدیدتر از مایع و در حالت مایع هم شدیدتر از حالت جامد است. همچنین هر چه دما بالاتر باشد، جنبش‌های نامنظم ذره‌ها شدیدتر است. پس با افزایش دما، انتظار می‌رود که مقدار جنبش نامنظم ذرات افزایش یابد.



۶۴- کربونیل سولفید ماده‌ای گازی با فرمول SCO است که بر اساس معادله $2SCO(g) + 3O_2(g) \rightarrow 2CO_2(g) + 2SO_2(g)$ می‌سوزد. با توجه به جدول زیر، تغییر آنتالپی این واکنش برابر چند کیلوژول بر مول است؟

پیوند	$C = S$	$S = O$	$S - O$	$C = O$	$O = O$
میانگین آنتالپی پیوند (کیلوژول بر مول)	۴۸۰	۵۲۳	۳۲۴	۸۰۲	۴۹۶

(۴) ۸۱۰+

(۳) ۸۱۰-

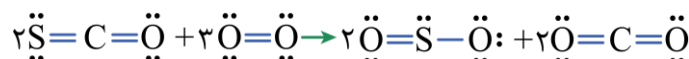
(۲) ۸۵۰-

(۱) ۸۵۰+

(آسان - محاسباتی - استاندارد) - صفحه ۶۹ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۲

واکنش انجام شده به‌صورت زیر است:



آنتالپی این واکنش را از طریق آنتالپی پیوند محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta H_{\text{واکنش}} = [\text{مجموع آنتالپی پیوندها در مواد واکنش‌دهنده}] - [\text{مجموع آنتالپی پیوندها در مواد فراورده}]$$

$$\Rightarrow \Delta H_{\text{واکنش}} = [2\Delta H(S=C) + 3\Delta H(C=O) + 3\Delta H(O=O)]$$

$$- [2\Delta H(S=O) + 2\Delta H(S-O) + 4\Delta H(C=O)]$$

$$\Rightarrow \Delta H_{\text{واکنش}} = [2\Delta H(S=C) + 3\Delta H(O=O)] - [2\Delta H(S=O) + 2\Delta H(S-O) + 2\Delta H(C=O)]$$

$$\Rightarrow \Delta H_{\text{واکنش}} = (2 \times 480 + 3 \times 496) - (2 \times 523 + 2 \times 324 + 2 \times 802) = 2448 - 3298 = -850 \text{ kJ}$$

پس آنتالپی این واکنش برابر ۸۵۰- کیلوژول بر مول است.

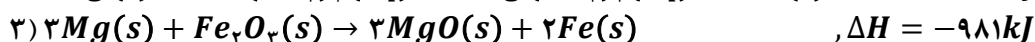
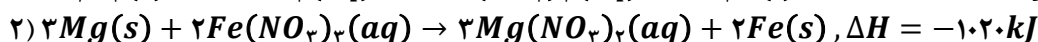
آنتالپی پیوند، راهی به آنتالپی واکنش

آنتالپی یک واکنش را می‌توانیم از راه‌های مختلفی به‌دست آوریم. یکی از این راه‌ها، استفاده از آنتالپی پیوند است که شرط استفاده از این روش، گازی بودن حالت واکنش‌دهنده‌ها و فراورده‌ها است. در این روش، در نظر می‌گیریم که تمام پیوندهای کووالانسی میان اتم‌های واکنش‌دهنده شکسته و اتم‌های گازی تولید می‌شوند که گرمای لازم برای این قسمت برابر مجموع آنتالپی شکستن پیوندها در واکنش‌دهنده‌ها است. پس از آن اتم‌های گازی با تشکیل پیوندهای اشتراکی جدید، فراورده‌ها را تولید می‌کنند. گرمای آزاد شده در این قسمت، قرینه‌ی گرمای لازم برای شکستن تمام پیوندهای کووالانسی در میان فراورده‌ها (مجموع آنتالپی پیوندها در مواد فراورده) - است. پس آنتالپی یک واکنش که همگی مواد شرکت‌کننده در آن به‌صورت گازی هستند را می‌توان از طریق فرمول زیر حساب کرد:

$$\Delta H = [\text{مجموع آنتالپی پیوندها در مواد فراورده}] - [\text{مجموع آنتالپی پیوندها در مواد واکنش‌دهنده}] = \Delta H$$



۶۵- با توجه به واکنش‌های زیر:



آنتالپی واکنش $MgO(s) + 2HNO_3(aq) \rightarrow Mg(NO_3)_2(aq) + H_2O(l)$ برابر با چند کیلوژول است؟

$$\begin{array}{ccccccc} -378 & (4) & -1032 & (3) & +302 & (2) & -352 & (1) \end{array}$$

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - صفحه ۷۵ - ۱۱۰۲

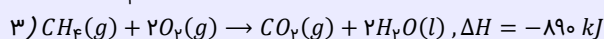
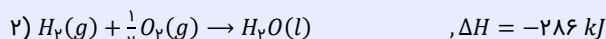
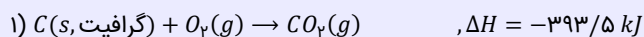
پاسخ: گزینه ۴

آنتالپی واکنش $MgO(s) + 2HNO_3(aq) \rightarrow Mg(NO_3)_2(aq) + H_2O(l)$ را با استفاده از قانون هس حساب می‌کنیم:

قانون هس

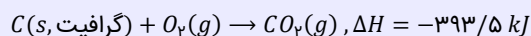
گرمای یک واکنش معین به راهی که برای انجام واکنش در پیش گرفته می‌شود، بستگی ندارد. بر اساس قانون هس، اگر معادله واکنش را بتوان از جمع دو یا چند معادله دیگر به‌دست آورد، ΔH آن واکنش را نیز می‌توان از جمع ΔH ‌های واکنش‌های دیگر محاسبه کرد.

به‌عنوان مثال، آنتالپی واکنش $CH_4(g) + 2H_2(g) \rightarrow C(s, \text{گرافیت}) + 2H_2O(l)$ را با استفاده از واکنش‌های زیر حساب می‌کنیم:

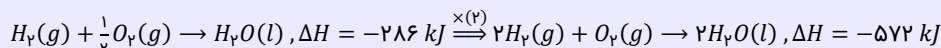


ابتدا از میان مواد شرکت‌کننده در واکنش‌ها، موادی که غیر تکراری هستند را انتخاب می‌کنیم و ضریب و جهت آن‌ها را مطابق واکنش اصلی قرار می‌دهیم؛ در این‌جا $C(s, \text{گرافیت})$ از واکنش اول، $H_2(g)$ از واکنش دوم و $CH_4(g)$ از واکنش سوم، غیر تکراری هستند؛ بنابراین واکنش‌ها را بر اساس ضریب این سه ماده در واکنش اصلی تغییر می‌دهیم:

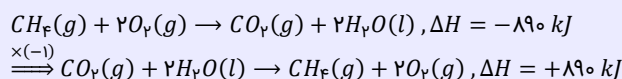
واکنش اول: ضریب و جهت $C(s, \text{گرافیت})$ مشابه واکنش اصلی است؛ پس این واکنش را بدون تغییر قرار می‌دهیم.



واکنش دوم: ضریب $H_2(g)$ نصف واکنش اصلی است؛ پس این واکنش را در ۲ ضرب می‌کنیم:



واکنش سوم: جهت $CH_4(g)$ برعکس واکنش اصلی است؛ پس این واکنش را در (-۱) ضرب می‌کنیم:



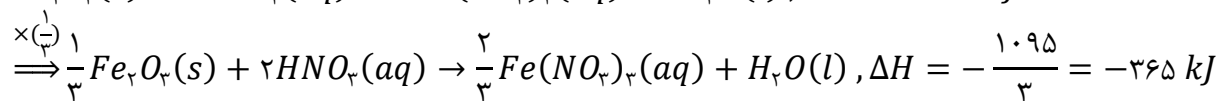
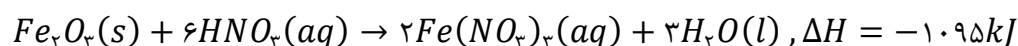
حال، ΔH واکنش اصلی را بر اساس قانون هس به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta H = (-393/5) + (-572) + (+890) = -75/5 kJ$$

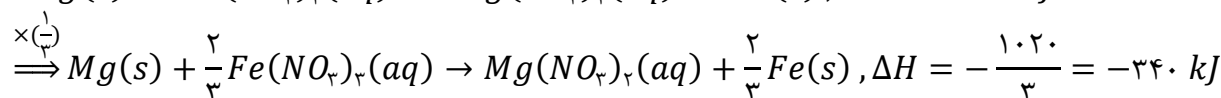
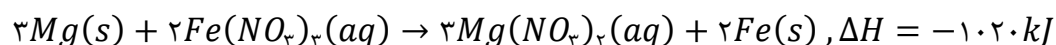
توجه: اگر پس از در نظر گرفتن مواد غیر تکراری، واکنشی باقی ماند، در میان مواد شرکت‌کننده در این واکنش به دنبال ماده‌ای می‌گردیم که در واکنش اصلی نبوده و تنها در یک واکنش دیگر دیده شود. ضریب این ماده را در این واکنش برابر واکنش دیگر قرار می‌دهیم، اما جهت آن را عکس قرار می‌دهیم تا با یکدیگر حذف شوند و در واکنش مجموع نیایند.

در میان مواد شرکت کننده در واکنش های اول تا سوم، HNO_3 در واکنش اول، $Mg(NO_3)_2$ در واکنش دوم و MgO در واکنش سوم غیر تکراری هستند، پس ضریب و جهت این مواد را در این سه واکنش مطابق واکنش اصلی قرار می دهیم:

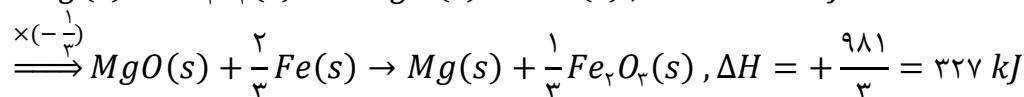
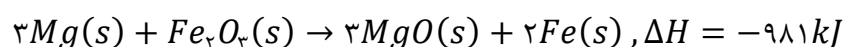
• واکنش اول:



• واکنش دوم:



• واکنش سوم:



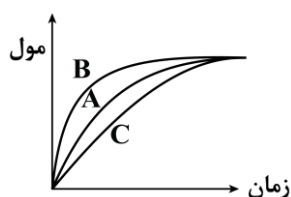
حال مطابق قانون هس، آنتالپی واکنش اصلی از مجموع آنتالپی سه واکنش بالا به دست می آید:

$$\Delta H = (-365) + (-340) + (327) = -378 kJ$$

پس آنتالپی این واکنش برابر -378 کیلوژول است.



۶۶- با در نظر گرفتن نمودار روبه رو کدام یک از مطالب زیر نادرست است؟



- (۱) لیکوپن موجود در گیاه توت فرنگی، نمودار برخی واکنش ها در بدن انسان را از A به B می برد.
- (۲) در معادله واکنش، هر چه ضریب ماده بیشتر باشد، سرعت تولید یا مصرف آن نیز بیشتر است.
- (۳) انتظار داریم با افزایش دما یا اضافه شدن کاتالیزگر مناسب به واکنش، نمودار از C به B رود.
- (۴) در یک واکنش گازی در یک ظرف بسته، با گذشت زمان سرعت واکنش کاهش می یابد.

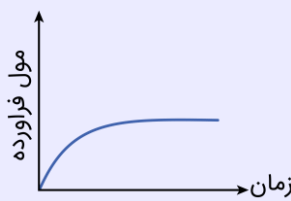
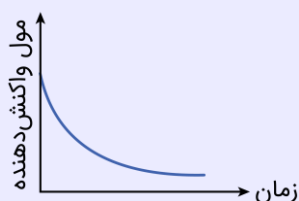
(متوسط - مفهومی - استاندارد ۵ - صفحه ۹۱ - ۱۱۰۲)

پاسخ: گزینه ۱

ریزمغذی ها، گروهی از مواد آلی موجود در سبزیجات و میوه جات هستند. برخی از انواع ریزمغذی ها، به عنوان بازدارنده از انجام واکنش نامطلوب و ناخواسته به دلیل حضور رادیکال ها جلوگیری می کنند. لیکوپن یکی از این بازدارنده ها است که در هندوانه و گوجه فرنگی وجود دارد. بازدارنده ها و محدودکننده ها اگر چه سرعت برخی واکنش ها را کم می کنند، اما تأثیری بر مقدار محصول نهایی ندارند. پس انتظار داریم با اثر لیکوپن بر واکنش، شیب نمودار مول - زمان کاهش یابد؛ یعنی نمودار از A به C برود.

شیب نمودار مول - زمان

در اکثر واکنش ها سرعت متوسط مصرف واکنش دهنده ها و سرعت متوسط تولید فراورده ها با گذشت زمان کاهش می یابد (مگر در برخی واکنش ها مانند تبدیل کلسیم کربنات به کلسیم اکسید و کربن دی اکسید) و نمودار مول - زمان مربوط به واکنش دهنده ها و فراورده ها خطی نیست و به صورت زیر است:



هرچه شیب نمودار مول - زمان، در یک بازه زمانی مشخص برای ماده ای در واکنش بیشتر باشد، سرعت متوسط آن ماده در آن بازه زمانی بیشتر است. می توان گفت هرچه ضریب استوکیومتری یک ماده در واکنش موازنه شده بیشتر باشد، سرعت متوسط آن ماده، بیشتر بوده و شیب نمودار مول - زمان برای آن ماده در نمودار تندتر است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۲) هر چه ضریب مواد در معادله واکنش بیشتر باشد، سرعت تولید یا مصرف آن ماده در این واکنش بیشتر بوده و به همین علت شیب نمودار مول - زمان آن بیشتر خواهد بود.

۳) افزایش دما همانند افزودن کاتالیزگر موجب افزایش سرعت واکنش و در نتیجه افزایش شیب نمودار مول - زمان واکنش می‌شود. در این حالت نمودار از C به B می‌رود.

۴) در اکثر واکنش‌ها با گذشت زمان و مصرف مواد واکنش‌دهنده که موجب کاهش غلظت واکنش‌دهنده‌ها می‌شود، سرعت واکنش کاهش می‌یابد. واکنش‌هایی که تنها واکنش‌دهنده جامد یا مایع خالص دارند، سرعت ثابت دارند و سرعت آن‌ها با مصرف مواد تغییر نمی‌کند.

عوامل مؤثر بر سرعت واکنش

۱) واکنش‌پذیری: میزان واکنش‌پذیری واکنش‌دهنده به نوع و خواص شیمیایی آن ماده بستگی دارد. هر چه واکنش‌پذیری یک ماده بیشتر باشد، سرعت آن واکنش نیز افزایش می‌یابد. به عنوان مثال، می‌دانیم واکنش‌پذیری فلزهای قلیایی در جدول تناوبی از بالا به پایین افزایش می‌یابد؛ پس واکنش‌پذیری پتاسیم بیشتر از سدیم و آن هم بیشتر از لیتیم است. همان‌طور که در شکل زیر می‌بینیم سرعت و شدت واکنش این سه عنصر با گاز کلر متفاوت بوده و میزان نور تولیدشده از واکنش پتاسیم با کلر بیشتر از سدیم و لیتیم می‌باشد.



لیتیم سدیم پتاسیم

۲) دما: افزایش دما نیز با افزایش سرعت و انرژی جنبشی ذرات سازنده مواد واکنش‌دهنده، احتمال برخورد ذرات به یکدیگر و انجام واکنش را افزایش داده و منجر به افزایش سرعت واکنش می‌شود.

توجه: از آن‌جا که علت افزایش سرعت واکنش در نتیجه افزایش دما، مربوط به تغییر آنتالپی واکنش نیست، افزایش دما، هم سرعت واکنش گرماگیر و هم سرعت واکنش گرماده را زیاد می‌کند.

۳) غلظت: با افزایش غلظت مواد واکنش‌دهنده، احتمال حضور ذرات در کنار یکدیگر و برخورد آن‌ها و انجام گرفتن واکنش افزایش می‌یابد. این امر موجب زیاد شدن سرعت واکنش می‌شود. توجه داریم که در گازها، با افزایش فشار یا کاهش حجم، غلظت گاز افزایش یافته و سرعت واکنش زیاد می‌شود.

توجه: از آن‌جا که ما نمی‌توانیم غلظت مواد جامد را تغییر دهیم، افزایش غلظت تنها در واکنش‌هایی که واکنش‌دهنده گازی یا محلول دارند، موجب افزایش سرعت می‌شود. همچنین افزایش فشار نیز، تنها در واکنش‌هایی که واکنش‌دهنده‌ای با حالت گازی دارند، منجر به افزایش غلظت و در نتیجه سرعت واکنش می‌شود.



۶۷- اگر در واکنش $3H_2(g) + N_2(g) \rightarrow 2NH_3(g)$ به مدت ۲ دقیقه، ۱۴۴ گرم گاز هیدروژن مصرف شود، سرعت متوسط واکنش

در این بازه زمانی چند مول بر ثانیه بوده است؟ ($H = 1 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$)

۰/۲ (۴)

۰/۱۵ (۳)

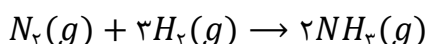
۰/۳ (۲)

۰/۱ (۱)

(آسان - محاسباتی - سریع) - صفحه ۹۲ - ۱۱۰۲

پاسخ: گزینه ۴

معادله واکنش به صورت زیر است:



ابتدا مقدار هیدروژن مصرف شده را حساب می‌کنیم:

$$? \text{ mol } H_2 = 144 \text{ g } H_2 \times \frac{1 \text{ mol } H_2}{2 \text{ g } H_2} = 72 \text{ mol}$$

پس در این مدت، ۷۲ مول هیدروژن مصرف می‌شود. حال سرعت واکنش را حساب می‌کنیم:

$$\bar{R}_{\text{واکنش}} = \frac{\bar{R}_{H_2}}{H_2 \text{ ضریب}} = \frac{\text{مقدار هیدروژن مصرف شده}}{\Delta t} = \frac{72 \text{ mol}}{3} = \frac{72 \text{ mol}}{120 \text{ s}} = \frac{72}{3 \times 120} = 0.2 \text{ mol} \cdot \text{s}^{-1}$$

بنابراین سرعت انجام واکنش برابر ۰/۲ مول بر ثانیه است.

سرعت متوسط واکنش

سرعت متوسط واکنش به معنای تعداد انجام معادله واکنش در واحد زمان است و از تقسیم سرعت تولید یا مصرف یک ماده شرکت‌کننده در واکنش به ضریب آن ماده در معادله واکنش به دست می‌آید:

$$\bar{R}_{\text{واکنش}} = \frac{\bar{R}_x}{x \text{ ضریب}} = \frac{\bar{R}_y}{y \text{ ضریب}} = \frac{\bar{R}_z}{z \text{ ضریب}} = \dots$$

به عنوان مثال در واکنشی با معادله $2A(g) \rightarrow 3B(g) + X(g)$ سرعت متوسط واکنش به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\bar{R}_{\text{واکنش}} = \frac{\bar{R}_A}{2} = \frac{\bar{R}_B}{3} = \bar{R}_X$$



همان طور که مشخص است، سرعت واکنش برابر سرعت ماده‌ای است که ضریب آن در معادله واکنش برابر یک باشد.



۶۸- در کدام گزینه کاربرد ماده، نادرست ذکر شده است؟

- (۱) پلی پروپن: کیسه خون (۲) نفتالن: ضد بید (۳) اتیلن: عمل آورنده کشاورزی (۴) تفلون: کفی اتو

(آسان - خط به خط - سریع ۵ - صفحه ۱۰۶ - ۱۱۰۳)

پاسخ: گزینه ۱

پلیمر به کاررفته در ساخت کیسه خون، پلی‌وینیل کلرید است. همچنین از پلی‌پروپن برای تولید سرنگ استفاده می‌شود.



جدول زیر ساختار برخی از پلیمرها و مونومرهای آن‌ها و همچنین کاربردهای این پلیمرها را نشان می‌دهد:

نام پلیمر	نام مونومر	ساختار مونومر	ساختار پلیمر	کاربرد
پلی‌اتن	اتن	$\text{H}_2\text{C}=\text{CH}_2$	$\text{-(CH}_2\text{-CH}_2\text{)}_n$	کیسه‌های پلاستیکی بطری پلاستیکی لوله پلاستیکی
پلی‌سیانواتن	سیانواتن	$\text{H}_2\text{C}=\text{CH-CN}$	$\text{-(CH}_2\text{-CH(CN))}_n$	پتو و پارچه
پلی‌پروپن	پروپن	$\text{H}_2\text{C}=\text{CH-CH}_3$	$\text{-(CH}_2\text{-CH(CH}_3\text{))}_n$	تهیه و تولید سرنگ
پلی‌استیرن	استیرن	$\text{H}_2\text{C}=\text{CH-C}_6\text{H}_5$	$\text{-(CH}_2\text{-CH(C}_6\text{H}_5\text{))}_n$	تولید ظرف یکبار مصرف
تفلون	تترافلوئورواتن	$\text{F}_2\text{C}=\text{CF}_2$	$\text{-(CF}_2\text{-CF}_2\text{)}_n$	نخ دندان کفی اتو تولید ظروف نجسب
پلی‌وینیل کلرید	وینیل کلرید (کلرواتن)	$\text{H}_2\text{C}=\text{CH-Cl}$	$\text{-(CH}_2\text{-CHCl)}_n$	کیسه‌های خون

بررسی سایر گزینه‌ها:

نفتالن یک هیدروکربن آروماتیک است که در ساختار آن دو حلقه بنزنی یافت می‌شود. از این ترکیب به عنوان ضد بید برای فرش‌ها و لباس‌ها استفاده می‌شود.

- ۳) اتیلن یا همان اتن، نخستین عضو خانواده آلکن‌ها است که از آن به‌عنوان عمل آورنده در کشاورزی استفاده می‌شود. همچنین از استیلن یا همان اتین به‌عنوان نخستین عضو خانواده آلکین‌ها، در برش کاری و جوش کاری فلزها استفاده می‌شود.
- ۴) تفلون یا همان پلی‌تترافلوروواتن یک پلیمر با ویژگی‌های منحصر به فرد است. به‌عنوان مثال این ماده نقطه ذوب بالایی دارد و در برابر گرما مقاوم است؛ به همین علت از این ماده در کفی اتو و ساخت ظروف خانگی استفاده می‌شود. از دیگر کاربردهای این ماده می‌توان به نخ دندان و نوار تفلونی اشاره کرد.



۶۹- کدام یک از مطالب زیر نادرست است؟

- ۱) برای مشخص کردن شمار دقیق واکنش‌دهنده‌های واکنش بسپارش قاعده خاصی در شیمی وجود ندارد.
- ۲) پلی لاکتیک اسید یک پلیمر سبز است که در طبیعت به مونومرهای سازنده خود تبدیل نمی‌شود.
- ۳) در محیط گرم و مرطوب نسبت به محیط سرد و خشک، لیاف پلی‌استری زودتر تجزیه می‌شوند.
- ۴) اگر در واکنش تولید پلی‌استر، به جای اسید از آمین استفاده شود، پلی‌آمید تولید می‌شود.

(متوسط - مفهومی - استاندارد) - صفحه ۱۲۱ - ۱۱۳

پاسخ: گزینه ۴

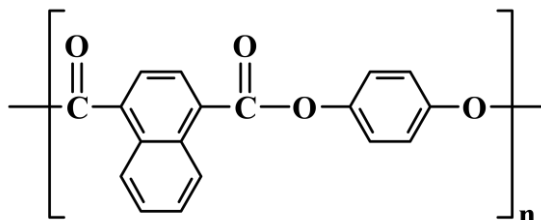
پلی‌استرها از واکنش میان الکل‌ها و اسیدهای دو عاملی تشکیل می‌شوند. اگر به جای دی‌الکل‌ها از دی‌آمین‌ها استفاده شود، پلیمر تشکیل شده پلی‌آمید خواهد بود.

بررسی سایر گزینه‌ها:

- ۱) تعیین دقیق مونومرهای شرکت‌کننده در یک واکنش پلیمری شدن ممکن نیست و تاکنون هیچ قاعده‌ای برای اتصال شمار مونومرها به یکدیگر ارائه نشده است. به همین دلیل برای پلیمرها نمی‌توان فرمول مولکولی دقیقی نوشت.
- ۲) پلیمرهای سبز یا همان پلیمرهای دوست‌دار محیط زیست، پلیمرهایی هستند که توسط جانداران ذره‌بینی تجزیه می‌شوند. این پلیمرها پس از رها شدن در طبیعت به مولکول‌های ساده مانند کربن‌دی‌اکسید و آب تبدیل می‌شوند و نه مونومرهای سازنده. یکی از پلیمرهای سبز، پلی‌لاکتیک اسید است.
- ۳) آب واکنش‌دهنده فرایند تجزیه پلیمرهای موجود در لباس مثل پنبه، پلی‌استر و پلی‌آمید است و به همین علت در محیط مرطوب این لباس‌ها بیشتر آسیب می‌بینند. همچنین گرما سرعت تمام واکنش‌ها مثل تجزیه این مواد را افزایش می‌دهد. پس در محیط گرم این مواد بیشتر آسیب می‌بینند.



۷۰- تفاوت جرم مولی دو نوع مونومر ترکیب زیر برابر چند گرم بر مول است؟ ($H = 1, C = 12, O = 16: g. mol^{-1}$)



۱۰۴ (۴)

۶ (۳)

۱۰۶ (۲)

۴ (۱)

(سخت - محاسباتی - زمان‌بر) - صفحه ۱۱۵ - ۱۱۳

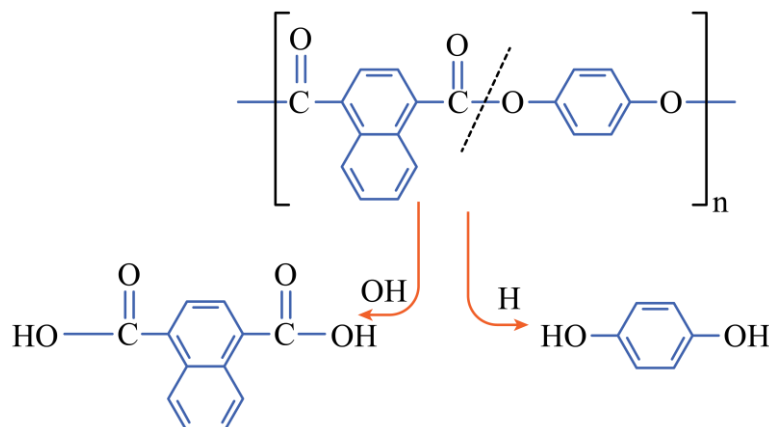
پاسخ: گزینه ۲

با توجه به ساختار پلی‌استر، باید ساختار دی‌الکل و دی‌اسید سازنده این پلیمر را پیدا کنیم.



قسمتی از یک پلی‌استر که بین اتم‌های اکسیژن گروه عاملی استری قرار می‌گیرد، گروه R موجود در ساختار دی‌الکل سازنده پلی‌استر را تشکیل می‌دهد و قسمتی از مولکول پلی‌استر که بین اتم‌های کربن گروه عاملی استری قرار می‌گیرد، گروه R از مولکول دی‌اسید سازنده مولکول پلی‌استر را تشکیل می‌دهد.

برای پیدا کردن ساختار دی‌اسید و دی‌الکل، به روش زیر عمل می‌کنیم:



فرمول شیمیایی دی‌اسید و دی‌الکل سازنده این پلی‌استر به ترتیب به صورت $C_{12}H_8O_4$ و $C_6H_6O_2$ است. حال تفاوت جرم مولی این دو ماده را حساب می‌کنیم:

$$C_{12}H_8O_4: 12 \times 12 + 8 \times 1 + 4 \times 16 = 216$$

$$C_6H_6O_2: 6 \times 12 + 6 \times 1 + 2 \times 16 = 110$$

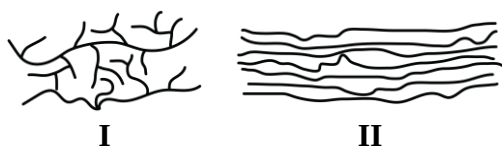
پس تفاوت جرم مولی دو مونومر برابر با ۱۰۶ گرم بر مول است.

بخش الکی، اسیدی و آمینی در پلیمرهای تراکمی

قسمتی از یک پلی‌آمید که بین اتم‌های نیتروژن گروه عاملی آمیدی قرار می‌گیرد، گروه R موجود در ساختار دی‌آمین سازنده پلی‌آمید را تشکیل می‌دهد و قسمتی از مولکول پلی‌آمید که بین اتم‌های کربن گروه عاملی آمیدی قرار می‌گیرد، گروه R از مولکول دی‌اسید سازنده مولکول پلی‌آمید را تشکیل می‌دهد. قسمتی از یک پلی‌استر که بین اتم‌های اکسیژن گروه عاملی استری قرار می‌گیرد، گروه R موجود در ساختار دی‌الکل سازنده پلی‌استر را تشکیل می‌دهد و قسمتی از مولکول پلی‌استر که بین اتم‌های کربن گروه عاملی استری قرار می‌گیرد، گروه R از مولکول دی‌اسید سازنده مولکول پلی‌استر را تشکیل می‌دهد.



۷۱- با توجه به شکل مقابل که نشان‌دهنده دو نوع مختلف پلی‌اتن بوده، چند مورد از مطالب زیر درست است؟



I

II

الف - ترکیب «I» برخلاف ترکیب «II» شفاف است.

ب - ترکیب «II» انعطاف‌پذیرتر از ترکیب «I» است.

ج - تنها یک نوع نحوه اتصال مونومرها در ترکیب «I» دیده می‌شود.

د - بین دو نمونه هم حجم این دو ماده، نمونه ترکیب «I» جرم بیشتری دارد.

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

(متوسط - مفهومی - استاندارد) - صفحه ۱۰۹ - ۱۱۳

پاسخ: گزینه ۱

پلی‌اتن‌ها، یکی از مهم‌ترین پلیمرهای مصنوعی هستند که سالانه میلیون‌ها تن از آن‌ها در شرکت‌های پتروشیمیایی تولید می‌شود. این پلیمرها از بسپارش مولکول‌های اتن ساخته می‌شوند و در شرایط گوناگون به دو دسته سبک و سنگین تقسیم‌بندی می‌شوند. شکل زیر ساختار پلی‌اتن شاخه‌دار (سمت راست) و پلی‌اتن بدون شاخه (سمت چپ) را نشان می‌دهد:



پس ترکیب «I» و «II» به ترتیب پلی اتن سبک و پلی اتن سنگین هستند. جدول زیر، برخی از خواص پلی اتن های سبک و سنگین را با یکدیگر مقایسه می کند:

ویژگی	پلی اتن سبک	پلی اتن سنگین
چگالی	کمتر	بیشتر
ساختار	شاخه دار	بدون شاخه
نیروی بین مولکولی	ضعیف تر	قوی تر
استحکام	کمتر	بیشتر
نقطه جوش	پایین تر	بالا تر
ظاهر	شفاف	کدر
انعطاف پذیری	کم	ندارد
کاربرد	کیسه های پلاستیکی	لوله های پلاستیکی، دبه های آب و بطری

تنها عبارت «الف» درست است.

بررسی موارد:

الف) پلی اتن سبک یا شاخه دار شفاف و پلی اتن سنگین یا بدون شاخه کدر است.

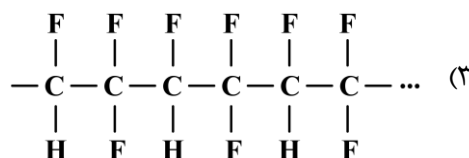
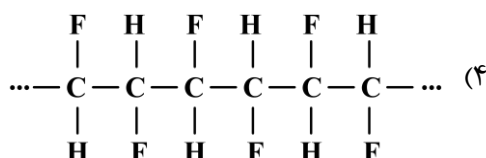
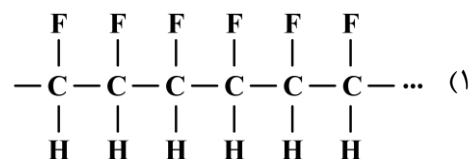
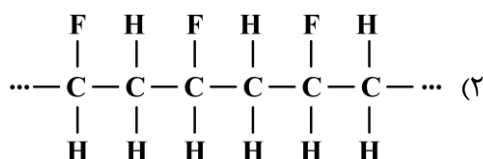
پ) انعطاف پذیری پلی اتن سبک بیشتر از پلی اتن سنگین است.

ج) اگر مولکول های اتن پشت سر هم به یکدیگر متصل شوند، پلی اتن بدون شاخه یا سنگین ایجاد می شود؛ اما اگر برخی از مولکول های اتن از کناره ها به یکدیگر افزوده شوند، پلی اتن شاخه دار یا سبک تولید می شود؛ بنابراین در تشکیل پلی اتن سنگین همه مولکول های اتن پشت سر هم وصل می شوند و در تشکیل پلی اتن سبک، مولکول های اتن هم پشت سر هم (در هر شاخه) و هم از کناره ها (برای تولید شاخه) به یکدیگر متصل می شوند.

د) پلی اتن سنگین چگالی بیشتری نسبت به پلی اتن سبک دارد و در حجم برابر دارای جرم بیشتری است.

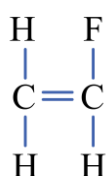


۷۲- ساختار پلیمر حاصل از بسپارش ترکیب $CHF = CH_2$ کدام یک از گزینه های زیر است؟

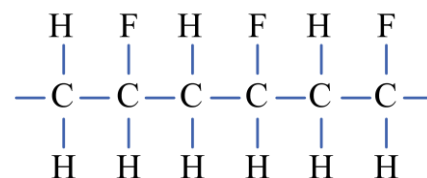
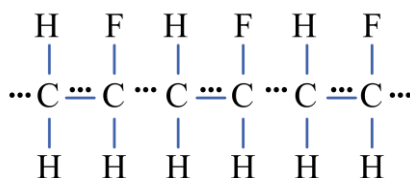
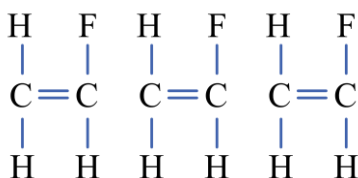


(آسان - مفهومی - سریع ۵) - صفحه ۱۰۵ - ۱۱۰۳

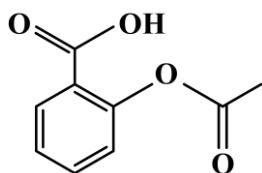
پاسخ: گزینه ۲



برای مشخص کردن پلیمر افزایشی حاصل از یک مونومر، ابتدا مونومر را به صورت ساختاری درمی آوریم که دو کربن پیوند دوگانه مرکز آن ساختار باشند و چهار گروه یا اتم متصل به آن را مشخص می کنیم. پس از آن پیوند دوگانه را به پیوند یگانه تبدیل می کنیم و از دو طرف یک پیوند یگانه میان کربن مونومرهای مختلف برقرار می کنیم.



پس ساختار پلیمر حاصل به صورت بالا خواهد بود.



۷۳- کدام یک از مطالب زیر در مورد ترکیب مقابل درست است؟

(۱) فرمول شیمیایی آن $C_9H_8O_4$ است.

(۲) اسید سازنده این ماده در آب نامحلول است.

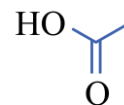
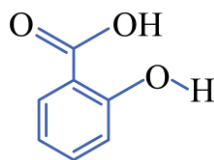
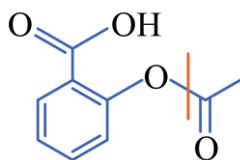
(۳) در ساختار این ماده دو گروه عاملی مشابه وجود دارد.

(۴) در ساختار الکل سازنده این ماده، گروه کربوکسیل وجود دارد.

(سخت - مفهومی - زمان ۵ - صفحه ۱۱۹ - ۱۱۰۳)

پاسخ: گزینه ۴

این ماده یک استر است و اسید و الکل سازنده آن به صورت زیر مشخص می شود.



همان طور که مشخص است، در الکل سازنده این ماده، گروه کربوکسیل نیز دیده می شود.

بررسی سایر گزینه ها:

(۱) در هر مولکول این ماده، ۹ اتم کربن، ۸ اتم هیدروژن و ۴ اتم اکسیژن وجود دارد. پس فرمول شیمیایی این ماده به صورت $C_9H_8O_4$ می باشد.

(۲) ساختار اسید سازنده این ماده CH_3-COOH است که بخش قطبی آن $(-COOH)$ بر بخش ناقطبی آن غالب بوده و به همین علت، این ماده در آب محلول خواهد بود.

(۳) در ساختار این ماده یک گروه کربوکسیل $(-COOH)$ و یک گروه استری $(-COO-)$ دیده می شود.



۷۴- کدام یک از مطالب زیر درست است؟

(۱) از بنزوئیک اسید می توان در تولید پلی استر استفاده کرد.

(۲) نیروی بین مولکولی غالب در پلی استرها پیوند هیدروژنی است.

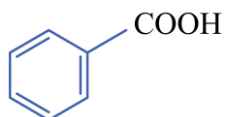
(۳) نقطه جوش بوتانوئیک اسید، بیشتر از نقطه جوش اتیل اتانوات است.

(۴) کاتالیزگر واکنش های استری شدن و تولید اتانول از اتن متفاوت است.

(متوسط - مفهومی - استاندارد ۵ - صفحه ۱۱۴ - ۱۱۰۳)

پاسخ: گزینه ۳

بوتانوئیک اسید $(CH_3CH_2CH_2COOH)$ و اتیل اتانوات $(CH_3COOCH_2CH_3)$ ایزومر یکدیگر هستند و جرم مولی یکسانی دارند. اما بوتانوئیک اسید، برخلاف اتیل اتانوات توانایی تشکیل پیوند هیدروژنی دارد و به همین علت، نیروی بین مولکولی قوی تر و نقطه جوش بیشتری دارد.



بررسی سایر گزینه ها:

۱) ساختار بنزوئیک اسید به صورت مقابل است:

برای آن که یک اسید آلی مونومر پلی استر باشد، باید یا دو گروه عاملی اسیدی داشته باشد یا یک گروه عاملی اسیدی و یک گروه عاملی الکی که بنزوئیک اسید این ویژگی را ندارد.

۲) در ساختار پلی استرها اتم های اکسیژن به هیدروژن متصل نیستند و این مواد توانایی تشکیل پیوند هیدروژنی را ندارند و به همین علت نیروی بین مولکولی غالب در آنها، نیروی وان دروالسی است.

۴) کاتالیزگر واکنش استری شدن، آبکافت استرها و واکنش تولید اتانول از اتن، H_2SO_4 است.



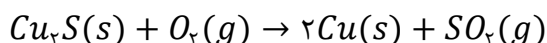
۷۵- اگر با مصرف ۴۰۰ گرم مس (I) سولفید ناخالص در واکنش شیمیایی $Cu_2S(s) + O_2(g) \rightarrow 2Cu(s) + SO_2(g)$ ، ۲۵۶ گرم مس خام تهیه شود، درصد خلوص این ماده چقدر است؟ ($S = ۳۲, Cu = ۶۴: g \cdot mol^{-1}$)

۴۰ (۱) ۳۲ (۲) ۶۴ (۳) ۸۰ (۴)

(آسان - محاسباتی - سریع - صفحه ۲۳ - ۱۱۰۱)

پاسخ: گزینه ۴

معادله واکنش انجام شده به صورت زیر است:



در ابتدا، جرم مس (I) سولفید خالص مصرف شده را به دست می آوریم:

$$? g Cu_2S = ۲۵۶ g Cu \times \frac{۱ mol Cu}{۶۴ g Cu} \times \frac{۱ mol Cu_2S}{۲ mol Cu} \times \frac{۱۶۰ g Cu_2S}{۱ mol Cu_2S} = ۳۲۰ g Cu_2S$$

پس درصد خلوص نمونه مس (I) سولفید برابر است با:

$$\text{درصد خلوص مس } (I) \text{ سولفید} = \frac{\text{جرم مس } (I) \text{ سولفید خالص}}{\text{جرم مس } (I) \text{ سولفید ناخالص}} \times ۱۰۰ \Rightarrow P = \frac{۳۲۰ g}{۴۰۰ g} \times ۱۰۰ = ۸۰\%$$

درصد خلوص این ماده برابر ۸۰ درصد است.

درصد خلوص

اغلب مواد موجود در طبیعت، صنعت و آزمایشگاه، ناخالص هستند؛ بنابراین، برای بیان میزان خلوص بودن یک ماده از درصد خلوص استفاده می کنیم. درصد خلوص به معنی مقدار گرم ماده خالص موجود در صد گرم ماده ناخالص است. درصد خلوص از رابطه زیر محاسبه می شود.

$$\text{درصد خلوص ماده} = \frac{\text{جرم ماده خالص (g)}}{\text{جرم ماده ناخالص (g)}} \times ۱۰۰$$

نکته بسیار مهم

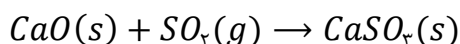
به هنگام محاسبه درصد خلوص، نیاز نیست حتماً از واحد گرم استفاده شود و تنها یکسان بودن واحدهای صورت و مخرج، کافی است.



۷۶- کدام یک از مطالب زیر درست است؟

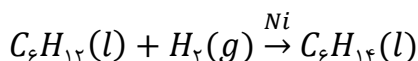
- ۱) در واکنش سیر شدن ۱-هگزن کاتالیزگر، فلز روی بوده و فراورده آن در جلوگیری از خوردگی فلز به کار می رود.
- ۲) از کلسیم اکسید برای به دام انداختن گاز گوگرد دی اکسید تولید شده در سوختن زغال سنگ استفاده می شود.
- ۳) شستن زغال سنگ برای بهبود کارایی زغال سنگ، موجب حذف نیتروژن از زغال سنگ خواهد شد.
- ۴) بخار بنزین سمی بوده و ورود آن به شش ها می تواند موجب خفگی و در نهایت مرگ شود.

برای کاهش ورود گاز گوگرد دی اکسید تولیدشده در فرایند سوختن زغال سنگ به محیط زیست و بهبود کارایی زغال سنگ، می توان از شست و شوی زغال سنگ و یا از CaO برای به دام انداختن گاز گوگرد دی اکسید استفاده کرد. واکنش گاز SO_2 و کلسیم اکسید به صورت زیر است:



بررسی سایر گزینه ها:

۱- هگزن یک آلکن ۶ کربنه است که در واکنش سیرشدن با کاتالیزگری فلز نیکل به هگزان که یک آلکان مایع است، تبدیل می شود:



آلکان ها به علت ناقطبی بودن در آب نامحلول هستند و به همین دلیل، اندودن آلکان های مایع بر سطح فلزها، مانع از رسیدن آب به فلز و خوردگی آن می شود.

۳- در شست و شوی زغال سنگ، گوگرد موجود در زغال سنگ حذف شده و به این ترتیب از سوختن زغال، مقدار SO_2 کمتری تولید می شود.

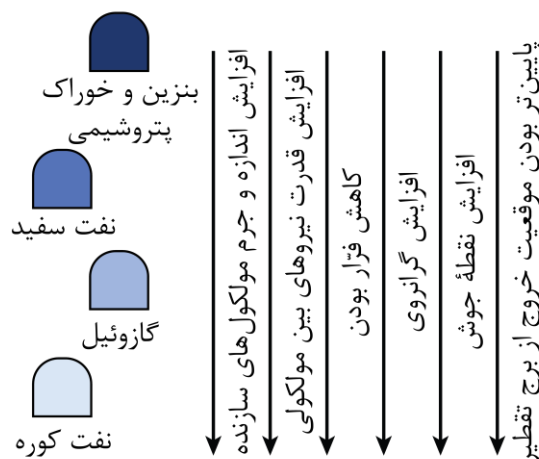
۴- از آن جا که آلکان ها سیرشده هستند، غیرسمی و بی اثر هستند و استنشاق جزئی آن ها اثری بر ریه نمی گذارد. البته، اگر حجم بخار آن ها (مانند بخار بنزین) بالا باشد، مانع از انتقال گازهای تنفسی در ریه شده و منجر به تنگی نفس و یا حتی مرگ هم می شود. از دیگر آسیب های آلکان ها بر بدن آن است که آلکان های مایع با حل کردن چربی های محافظت کننده پوست منجر به خشکی پوست می شوند. تماس دراز مدت با این مواد به بافت پوست آسیب می رساند.



۷۷- کدام یک از گزینه های زیر نادرست است؟

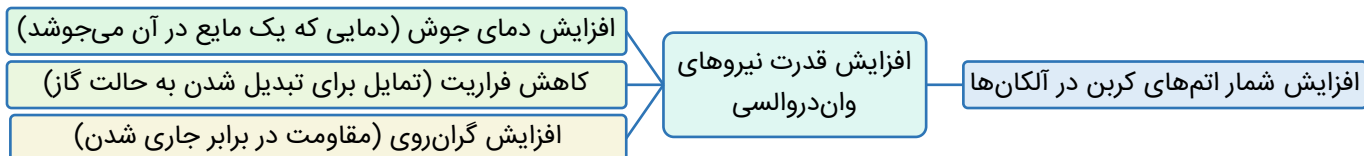
- ۱) گرانروی به معنای مقاومت در برابر جاری شدن و فرار بودن به معنای تمایل به تبخیر است.
- ۲) نفت سفید نسبت به نفت کوره، مولکول های درشت تری دارد و ماده ای چسبنده تر است.
- ۳) گشتاور دوقطبی آلکان ها به تقریب صفر بوده و این مواد با بخار برم واکنش نمی دهند.
- ۴) گریس با فرمول شیمیایی $C_{18}H_{38}$ نقطه جوش بیشتری نسبت به دکان دارد.

اگر اجزاء نفت خام را پس از پالایش در چهار دسته بنزین، نفت سفید، گازوئیل و نفت کوره در نظر بگیریم؛ نفت کوره نسبت به نفت سفید مولکول های درشت تری دارد و به همین علت دارای نیروی بین مولکولی قوی تر بوده و این ماده چسبنده تر است. تصویر زیر، ویژگی های مختلف اجزای سازنده نفت خام را در مقایسه با یکدیگر نشان می دهد:



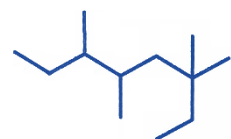
بررسی سایر گزینه‌ها:

۱ به مقاومتی که یک مایع در برابر جاری شدن از خود نشان می‌دهد، **گرانروی** گفته می‌شود. همچنین به تمایل یک مایع برای تبدیل شدن به گاز، فرار بودن می‌گویند. در آلکان‌ها با افزایش شمار اتم‌های کربن، جرم و حجم مولکول افزایش می‌یابد و به دنبال آن، نیروی بین مولکولی افزایش می‌یابد. افزایش نیروی بین مولکولی نیز موجب افزایش گرانشی، نقطه جوش و چسبندگی و کاهش فراریت می‌شود. نمودار زیر برخی از خواص آلکان‌ها را بر حسب افزایش تعداد اتم‌های کربن در آن‌ها نشان می‌دهد:



۳ گشتاور دو قطبی آلکان‌ها حدود صفر است و این مواد ناقطبی هستند. آلکان‌ها سیرشده هستند و با بخار برم واکنش نمی‌دهند. در واقع برای افتراق مواد آلی سیرشده و سیرنشده از **بخار قرمز رنگ** برم استفاده می‌شود. اگر بخار قرمز رنگ برم در مجاورت ماده آلی، **کم‌رنگ** شود، به معنای واکنش برم و ماده آلی بوده و یعنی ماده آلی **سیرنشده** است؛ اما ترکیبات سیرشده با این گاز قرمز رنگ واکنش نمی‌دهند.

۴ گریس را می‌توان ماده‌ای با فرمول شیمیایی $C_{18}H_{38}$ دانست و دکان نیز یک آلکان ۱۰ کربنه است. در آلکان‌ها با افزایش شمار اتم‌های کربن، جرم و حجم مولکول‌ها افزایش می‌یابد که موجب تقویت نیروی بین مولکولی و در نتیجه افزایش نقطه جوش می‌شود. پس نقطه جوش گریس بیشتر از دکان است.

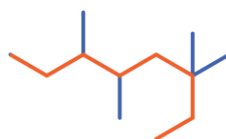


۷۸- نام آلکان مقابل بر اساس قواعد آیوپاک کدام یک از گزینه‌های زیر است؟
 (۱) ۵-اتیل-۵،۴،۳-تری متیل هپتان
 (۲) ۶،۶،۴،۳-تترا متیل اوکتان
 (۳) ۶،۵،۳،۳-تترا متیل اوکتان
 (۴) ۲-اتیل-۵،۴،۲-تری متیل هپتان

(آسان - مفهومی - سریع - صفحه ۳۹ - ۱۱۰۱)

پاسخ: گزینه ۳

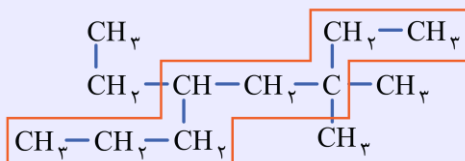
ساختار این هیدروکربن، پس از مشخص کردن زنجیره اصلی (رنگ نارنجی) به صورت زیر است. توجه داریم که زنجیره اصلی را باید به نحوی انتخاب کنیم که بیشترین تعداد کربن ممکن در آن جا داده شود.



در این ترکیب ۴ شاخه فرعی متیل بر روی یک زنجیره اصلی ۸ کربنه (اوکتان) قرار دارند. اگر چه فاصله شاخه فرعی اول از دو سمت مولکول برابر است اما چون شاخه فرعی دوم از سمت چپ بر روی کربن شماره ۴ و از سمت راست بر روی شماره ۳ است، شماره‌گذاری از سمت راست خواهد بود. پس این ۴ گروه بر کربن‌های سوم (۲ عدد)، پنجم و ششم زنجیره اصلی قرار دارند. پس نام این آلکان بر اساس قواعد آیوپاک، ۶،۵،۳،۳-تترا متیل اوکتان است.

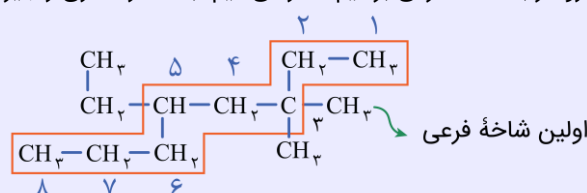
نام‌گذاری آلکان‌های شاخه‌دار

برای نام‌گذاری آلکان شاخه‌دار به روش آیوپاک طبق مراحل زیر پیش می‌رویم:
(۱) طولانی‌ترین زنجیره کربنی مستقیم ممکن را انتخاب می‌کنیم؛ مانند:



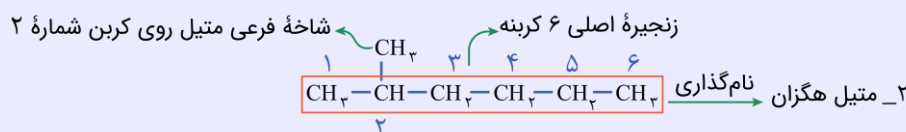
توجه داریم که اگر به چند صورت مختلف بتوان بلندترین زنجیره را مشخص کرد؛ زنجیره‌ای که تعداد بیشتری از شاخه‌های فرعی را داشته باشد، به عنوان زنجیره اصلی در نظر گرفته می‌شود.

(۲) شماره‌گذاری زنجیره اصلی را از هر طرف که زودتر به شاخه فرعی برسیم، آغاز می‌کنیم. به شماره‌گذاری زنجیره کربنی در ماده زیر دقت کنید:



اگر فاصله اولین شاخه فرعی از دو سمت هیدروکربن به یک اندازه باشد، از هر سمت که زودتر به دومین شاخه فرعی برسیم، شماره‌گذاری را آغاز می‌کنیم. اگر فاصله دومین شاخه فرعی نیز از دو سمت به یک اندازه باشد، به شاخه سوم توجه می‌کنیم و به همین صورت ادامه می‌دهیم؛ اما اگر از هر دو سمت فاصله شاخه‌ها یکسان بود، از سمتی شماره‌گذاری می‌کنیم که زودتر به شاخه‌ای برسیم که حرف اول نام آن در الفبای انگلیسی نسبت به حرف اول سایر شاخه‌های فرعی مقدم باشد؛ مانند شاخه Ethyl که بر شاخه Methyl مقدم است.

(۳) برای مشخص کردن نام آلکان‌ها، ابتدا نام شاخه جانبی (آلکیل) و شماره اتم کربنی از زنجیره اصلی را که این شاخه به آن متصل شده است، بیان کرده و پس از آن، نام آلکان مربوط به زنجیره اصلی را می‌آوریم. به نام‌گذاری آلکان زیر توجه کنید:



اگر تعداد شاخه‌های فرعی متصل به زنجیره کربنی اصلی بیشتر از یک عدد باشد، باید برای بیان نام این شاخه‌های فرعی از یک اولویت‌بندی استفاده کنیم. برای این منظور، ابتدا نام آن شاخه‌ای را بیان می‌کنیم که حرف اول نام آن در الفبای انگلیسی نسبت به حرف اول سایر شاخه‌های فرعی مقدم باشد. به عنوان مثال، چون حرف اول کلمه Ethyl نسبت به حرف اول کلمه Methyl در الفبای انگلیسی مقدم است، اگر یک آلکان به طور هم‌زمان شامل شاخه‌های اتیل و متیل باشد، ابتدا نام و شماره کربن مربوط به گروه اتیل را بیان کرده و پس از آن، نام و شماره کربن مربوط به گروه متیل را می‌آوریم.



۷۹- اگر طی واکنش ۸ مول هیدروکلریک اسید با MnO_2 مطابق معادله زیر، $\frac{33}{6}$ لیتر گاز کلر در شرایط STP آزاد شود، بازده این واکنش برابر چند درصد است؟



۷۵ (۴)

۶۰ (۳)

۸۰ (۲)

۶۶/۶۷ (۱)

(آسان - محاسباتی - سریع - صفحه ۲۴ - ۱۱۰۱)

پاسخ: گزینه ۴

معادله واکنش انجام شده، به صورت زیر است:



در قدم اول، حجم فرآورده تولید شده را محاسبه می‌کنیم:

$$? L Cl_2 = 8 mol HCl \times \frac{1 mol Cl_2}{4 mol HCl} \times \frac{22.4 L Cl_2}{1 mol Cl_2} = 44.8 L$$

در قدم بعد، بازده درصدی واکنش را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{بازده درصدی واکنش} = \frac{\text{فرآورده عملی}}{\text{فرآورده نظری}} \times 100 \Rightarrow x = \frac{33/6}{44.8} \times 100 = 75\%$$

پس بازده این واکنش برابر ۷۵ درصد است.

بازده واکنش

در واقعیت، واکنش‌های شیمیایی به علت ناخالص بودن واکنش‌دهنده‌ها، انجام گرفتن واکنش‌های ناخواسته و همچنین کامل نشدن واکنش، همیشه مطابق انتظار ما پیش نرفته و میزان فرآورده تولید شده، از مقدار به دست آمده در محاسبات ما کمتر می‌شود. در این شرایط، نیاز به مفهومی که نشان دهد واکنش به چه اندازه انجام شده است، حس می‌شود. از این رو، شیمیدان‌ها با مطرح کردن مفهوم بازده واکنش، به دنبال مشخص کردن مقدار فرآورده تولید شده در واقعیت (فرآورده عملی) با استفاده از مقدار مورد انتظار از طریق محاسبه (فرآورده نظری) هستند.

رابطه بازده درصدی به صورت زیر است:

$$\text{بازده درصدی} = \frac{\text{مقدار فرآورده عملی}}{\text{مقدار فرآورده نظری}} \times 100$$

نکته مهم

تنها شرط مورد نیاز برای محاسبه بازده درصدی، **یکسان بودن واحدهای صورت و مخرج** است و این واحد می‌تواند گرم، کیلوگرم، مول، لیتر گاز و ... باشد.



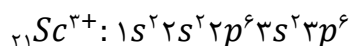
۸۰- کدام یک از مطالب زیر نادرست است؟

- (۱) رسانایی الکتریکی سیلیسیم از گوگرد بیشتر و از آلومینیم کمتر است.
- (۲) طلا رسانایی زیادی داشته که در دماهای بالا و پایین آن را حفظ می‌کند.
- (۳) گالیم همانند عنصر ژرمانیم، سطحی براق داشته و برخلاف آن شکل پذیر است.
- (۴) یون پایدار اسکاندیم همانند یون اغلب فلزهای واسطه به آرایش گاز نجیب می‌رسد.

(متوسط - مفهومی - استاندارد) - صفحه ۱۷ - ۱۱۰۱

پاسخ: گزینه ۴

اغلب فلزهای واسطه به هنگام تشکیل یون، به آرایش گاز نجیب نمی‌رسند؛ اما اسکاندیم یک استثنا است. اسکاندیم تنها یک یون پایدار دارد که با از دست دادن ۳ الکترون از این عنصر به وجود می‌آید. آرایش الکترونی این یون که به صورت زیر است، مشابه آرایش الکترونی گاز نجیب آرگون بوده و یک آرایش هشت تایی است.



بررسی سایر گزینه‌ها:

① شبه فلزها مرزی بین فلزها و نافلزها هستند؛ به طوری که خواص شیمیایی آن‌ها مشابه نافلزها است و بیشتر خواص فیزیکی آن‌ها مشابه فلزها است. در مورد رسانایی گرمایی، فلزها و شبه فلزها رسانای گرما هستند در حالی که نافلزها عایق گرما هستند. همچنین فلزها و کربن (استثنای نافلزها) رسانایی الکتریکی دارند و شبه فلزها رسانای ضعیف هستند، اما نافلزها عایق جریان الکتریکی هستند. پس سیلیسیم شبه فلزی که رسانایی الکتریکی کمی دارد، رساناتر از گوگرد نافلزی بوده و رسانایی آن کمتر از آلومینیم فلزی است. جدول زیر خواص شیمیایی و فیزیکی فلزها، نافلزها و شبه فلزها را مقایسه می‌کند:

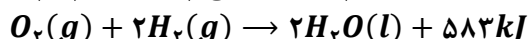
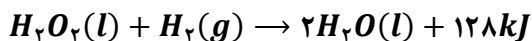
توضیح	فلز	شبه فلز	نافلز
چکش خواری	+	-	-
رسانایی الکتریکی	+	ضعیف	-
رسانایی گرما	+	+	-
توانایی تشکیل یون تک اتمی	+	-	+
توانایی تشکیل پیوند کووالانسی	-	+	+
مطابق کتاب درسی!!!			

② یکی از خواص مهم عنصر طلا رسانایی الکتریکی بالا است. رسانایی الکتریکی طلا در شرایط دمایی گوناگون و در دماهای بالا و پایین حفظ می‌شود. همچنین طلا به اندازه‌ای چکش خوار و نرم است که چند گرم از آن را می‌توان با چکش کاری به صفحه‌ای با مساحت چند متر مربع تبدیل کرد. یکی دیگر از ویژگی‌های خاص عنصر طلا، واکنش ندادن این فلز با گازهای موجود در هواکره و مواد موجود در بدن انسان است که سبب شده کاربردهای این عنصر گسترش یافته و تقاضای جهانی برای آن روز به روز افزایش یابد.

۳ ژرمانیم شبه فلزی از گروه ۱۴ و گالیم فلزی از گروه ۱۳ است. فلزها سطحی براق دارند و چکش خوار (شکل پذیر) هستند. درحالی که نافلزها سطحی کدر دارند و شکننده هستند؛ همچنین شبه فلزها سطحی براق دارند و در اثر ضربه چکش خرد می شوند. از این رو ژرمانیم همانند گالیم، سطحی براق دارد ولی برخلاف آن شکننده است.



۸۱- دو واکنش زیر را در نظر بگیرید، کدام گزینه درست است؟



(۱) اگر در واکنش اول به جای H_2O_2 مایع، H_2O گازی مصرف شود، ممکن است مقدار آنتالپی واکنش ۶۰- شود.

(۲) اگر در واکنش دوم به جای آب مایع، بخار آب تولید شود، ممکن است مقدار آنتالپی واکنش ۶۰۰- شود.

(۳) مواد واکنش دهنده در واکنش اول پایدارتر از واکنش دهنده های واکنش دوم هستند.

(۴) آنتالپی واکنش دوم را می توان به کمک آنتالپی پیوندهای اشتراکی محاسبه کرد.

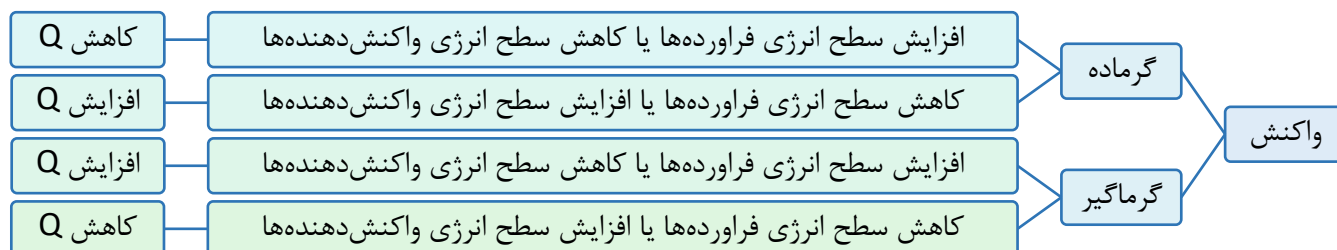
(سخت - مفهومی - استاندارد ۱ - صفحه ۷۶ - ۱۱۰۲)

پاسخ: گزینه ۳ 

در هر دو واکنش سطح انرژی فراورده ها یکسان است. پس سطح انرژی واکنش دهنده ها در واکنش دوم بیشتر بوده که آنتالپی واکنش را منفی تر کرده است. می دانیم هر چه سطح انرژی ماده ای بیشتر باشد، پایداری آن کمتر است. پس واکنش دهنده های واکنش اول پایدارتر از واکنش دهنده های واکنش دوم هستند.

بررسی سایر گزینه ها:

۱) برای بررسی و مقایسه مقدار گرمای مبادله شده (بدون در نظر گرفتن علامت) در یک واکنش شیمیایی، از نمودار زیر نیز می توان استفاده کرد:



در یک واکنش گرماده، افزایش سطح انرژی واکنش دهنده، موجب منفی تر شدن آنتالپی واکنش می شود و با توجه به آنتالپی قبلی ۱۲۸- کیلوژول، مقدار آنتالپی واکنش جدید باید منفی تر از این مقدار باشد.

۲) واکنش دوم نیز گرماده است و افزایش سطح انرژی فراورده ها موجب مثبت تر شدن آنتالپی واکنش می شود و با توجه به آنتالپی قبلی ۵۸۳- کیلوژول، مقدار آنتالپی واکنش جدید باید مثبت تر از این مقدار باشد.

۴) آنتالپی واکنش هایی را می توان به کمک آنتالپی پیوند کووالانسی محاسبه کرد که در آن همه مواد واکنش دهنده و فراورده در حالت گازی باشند. در این حالت آنتالپی به دست آمده از طریق آنتالپی پیوندها، تقریب خوبی از آنتالپی واکنش است.



۸۲- کدام یک از مطالب زیر نادرست است؟

- (۱) در یک دوره با افزایش عدد اتمی، به علت افزایش شمار زیرلایه‌های الکترونی شعاع اتمی کاهش می‌یابد.
- (۲) اگر در یک گروه واکنش‌پذیری نافلز A بیشتر از نافلز B باشد، عدد اتمی نافلز B بیشتر از نافلز A است.
- (۳) در یک دوره یا گروه هر چه شعاع اتمی فلزی بیشتر باشد، واکنش‌پذیری بیشتری خواهد داشت.
- (۴) شرایط نگهداری فلز منیزیم در آزمایشگاه آسان‌تر از شرایط نگهداری فلز پتاسیم است.

پاسخ: گزینه ۱

(متوسط - مفهومی - استاندارد ۱ - صفحه ۲۰ - ۱۱۰۱)

در یک تناوب از جدول دوره‌ای، با حرکت از چپ به راست، شمار پروتون‌ها و بار الکتریکی هسته اتم‌ها افزایش پیدا می‌کند درحالی‌که شمار لایه‌های الکترونی موجود در اطراف هسته ثابت باقی می‌ماند. در چنین شرایطی، الکترون‌های سطحی (ظرفیتی) با قدرت بیشتری توسط هسته جذب شده و به دنبال آن، شعاع اتمی این عناصر نیز کاهش پیدا می‌کند. به‌طور خلاصه، کاهش شعاع اتمی در طول یک دوره به علت افزایش بار هسته با وجود ثابت ماندن شمار لایه‌های الکترونی است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

(۲) در یک گروه از بالا به پایین واکنش‌پذیری نافلزها کاهش می‌یابد. پس اگر واکنش‌پذیری نافلزی در یک گروه بیشتر از هم‌گروهی خود باشد، بالاتر قرار دارد و عدد اتمی کوچک‌تری دارد.

(۳) افزایش شعاع اتمی در فلزها موجب افزایش فاصله الکترون‌های لایه آخر از هسته می‌شود و موجب کاهش نیروی هسته به الکترون‌های ظرفیت شده و این الکترون‌ها راحت‌تر جدا می‌شوند و به همین علت تمایل فلز برای تبدیل شدن به کاتیون یا همان واکنش‌پذیری افزایش می‌یابد.

(۴) هر چه واکنش‌پذیری یک عنصر بیشتر باشد، تمایل آن به واکنش بیشتر شده و تأمین شرایط نگهداری آن یا همان واکنش ندادن آن سخت‌تر است. واکنش‌پذیری فلز منیزیم کمتر از پتاسیم است و به همین علت شرایط نگهداری آن در آزمایشگاه آسان‌تر خواهد بود.



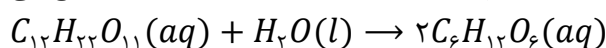
۸۳- کدام یک از مطالب زیر درست است؟

- (۱) نشاسته و سلولز مونومر یکسان دارند و مونومر آن‌ها در واکنش مالتوز با آب حاصل می‌شود.
- (۲) همه واکنش‌های شیمیایی با تبادل گرما میان سامانه و محیط و تغییر دما همراه هستند.
- (۳) به‌کار بردن واژه میانگین آنتالپی پیوند برای پیوند $H - Cl$ بهتر از آنتالپی پیوند است.
- (۴) سیکلوهگزان و ۱-هگزن ایزومر یکدیگر هستند و خواص شیمیایی یکسانی دارند.

پاسخ: گزینه ۱

(متوسط - خط به خط - استاندارد ۱ - صفحه ۱۰۳ - ۱۱۰۳)

نشاسته و سلولز هر دو پلیمری از گلوکز هستند. همچنین واکنش مالتوز با آب به‌صورت زیر رخ می‌دهد:



پس در این واکنش گلوکز تولید می‌شود.

بررسی سایر گزینه‌ها:

(۲) یک ویژگی بنیادی در همه واکنش‌های شیمیایی دادوستد گرما با محیط پیرامون است؛ پس هر واکنشی یا گرماده است و یا گرماگیر و تغییر آنتالپی یک واکنش شیمیایی دقیقاً صفر نمی‌شود. (برخی واکنش‌های شیمیایی وجود دارند که تغییر آنتالپی آن‌ها ناچیز است، اما صفر نیست.) با این وجود در برخی واکنش‌ها با انتقال گرما از سامانه به محیط یا برعکس، دمای محیط ثابت می‌ماند. به‌عنوان مثال تمام واکنش‌هایی که در بدن انسان انجام می‌شوند (مانند اکسایش گلوکز) در دمای $37^\circ C$ انجام می‌شوند.

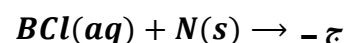
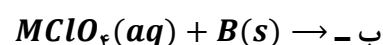
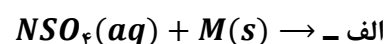
(۳) عبارت میانگین آنتالپی پیوند برای پیوندهایی که تنها در یک مولکول دو اتمی وجود دارند به‌کار نمی‌رود؛ چون تنها فقط یک حالت برای آن پیوند وجود دارد. در کتاب درسی از واژه آنتالپی پیوند برای پیوند موجود در مولکول هالوژن‌ها، هیدروژن هالیدها و گازهای اکسیژن و نیتروژن استفاده شده است.

در ساختار مولکول‌های چند اتمی پیوندهای مشابه آنتالپی پیوند برابری ندارند و برای شکستن هر یک از آن‌ها به انرژی متفاوتی نیاز است. همچنین پیوندهای مشابه موجود در مواد مختلف نیز آنتالپی‌های یکسانی ندارند. به همین منظور از واژه میانگین آنتالپی پیوند برای بیان پیوندهایی که در مواد مختلف یا در یک ماده بیش از یک عدد از آن‌ها وجود دارد، استفاده می‌شود.

سیکلوهگزان و ۱-هگزن ایزومر یکدیگر هستند و فرمول شیمیایی این دو C_6H_{12} است. خواص فیزیکی و شیمیایی ایزومرها متفاوت است. در میان همین دو ماده، سیکلوهگزان ماده‌ای سیرشده بوده و واکنش‌پذیری کمی دارد. در مقابل ۱-هگزن یک هیدروکربن سیرنشده بوده و واکنش‌پذیری بالایی دارد.



۸۴- اگر خصلت فلزی، فلز M بیشتر از فلز B باشد و خصلت فلزی، فلز B بیشتر از فلز N باشد، چند مورد از واکنش‌های زیر به‌طور طبیعی امکان‌پذیر است؟



(۴) سه

(۳) دو

(۲) یک

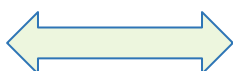
(۱) صفر

(آسان - مفهومی - سریع ۵ - صفحه ۲۱ - ۱۱۰۱)

پاسخ: گزینه ۲

واکنش‌پذیری فلزها یا همان خصلت فلزی این سه ماده به‌صورت $M > B > N$ است. بر این اساس سه واکنش را بررسی می‌کنیم:

واکنش‌پذیری: فلز $B < A$



خارج کردن فلز A از ترکیب آن توسط فلز B

الف) $NSO_4(aq) + M(s) \rightarrow$ واکنش‌پذیری M بیشتر از N بوده و فلز M می‌تواند فلز N را از ترکیبات خارج کند.
ب) $MClO_4(aq) + B(s) \rightarrow$ واکنش‌پذیری B کمتر از M بوده و فلز B نمی‌تواند فلز M را از ترکیبات خارج کند.
ج) $BCl(aq) + N(s) \rightarrow$ واکنش‌پذیری N کمتر از B بوده و فلز N نمی‌تواند فلز B را از ترکیبات خارج کند.
پس واکنش مطرح‌شده در «الف» به‌طور طبیعی امکان‌پذیر است.



۸۵- کدام یک از مطالب زیر در مورد فلز آهن نادرست است؟

- (۱) محلول حاصل از واکنش اکسید قرمز رنگ آن و محلول HCl در واکنش با محلول $NaOH$ ، رسوب قرمز رنگ ایجاد می‌کند.
- (۲) ماده‌ای تجدیدناپذیر است و بازیافت آن، گونه‌های زیستی بیشتری را از بین می‌برد و به توسعه پایدار کشور کمک می‌کند.
- (۳) اکسیدی از آن که در واکنش ترمیت مصرف می‌شود همان ماده‌ای است که برای استخراج آهن در صنعت استفاده می‌شود.
- (۴) در واکنش اصلی استخراج این فلز از سنگ معدن آن، گازی تولید می‌شود که موجب افزایش سرعت گرمایش زمین می‌شود.

(متوسط - مفهومی - استاندارد ۵ - صفحه ۲۸ - ۱۱۰۱)

پاسخ: گزینه ۲

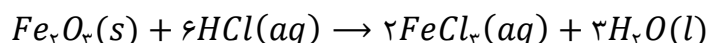
چرخه فلزها در طبیعت به‌صورت زیر است:



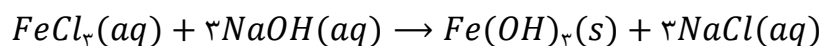
چون آهن یک مصرف و استخراج فلزات نسبت به آهن یک بازگشت فلزات به طبیعت بیشتر است؛ فلزها، منابعی تجدیدناپذیر هستند. بازیافت فلزها خصوصاً آهن منجر به (۱) کاهش ردپای کربن‌دی‌اکسید (۲) کاهش سرعت گرمایش جهانی (۳) کاهش گونه‌های زیستی از بین رفته (۴) کمک به توسعه پایدار کشور می‌شود.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱ اکسید قرمز رنگ آهن، Fe_2O_3 است. معادله واکنش محلول هیدروکلریک اسید با آهن (III) اکسید به صورت زیر است:

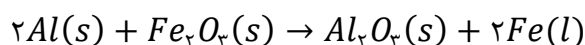


آهن (III) کلرید تولید شده در این واکنش با سدیم هیدروکسید مطابق معادله زیر واکنش می‌دهد:

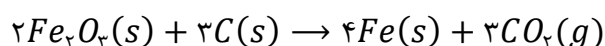


در این واکنش رسوب قرمز رنگ آهن (III) هیدروکسید تولید خواهد شد.

۲ معادله واکنش ترمیت به صورت زیر است:



همچنین واکنش استخراج آهن در صنعت نیز به صورت زیر است:



در این دو واکنش، اکسید آهن مصرف شده Fe_2O_3 است.

۳ در واکنش استخراج این فلز به کمک کربن، گاز کربن دی‌اکسید (از گازهای گلخانه‌ای) تولید می‌شود که موجب افزایش سرعت گرمایش زمین می‌شود.



بانک نهایی دیجی ماز

✓ آرشیو سؤالات امتحان نهایی سال های اخیر

به تفکیک درس به درس

✓ پاسخنامه تشریحی به سبک ماز



✓ بهترین منبع برای

جمع بندی امتحانات نهایی!



اسکن کن!

دانلود

اپلیکیشن دیجی ماز

DIGIMAZE.ORG

کلیک کن!



SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

